



Institut für Sicherheitsforschung und Reaktortechnik

***Traglast- und Einspielanalyse zur Bewertung der
Sicherheit passiver Komponenten***

Michael Heitzer

Traglast- und Einspielanalyse zur Bewertung der Sicherheit passiver Komponenten

Michael Heitzer

Berichte des Forschungszentrums Jülich ; 3704

ISSN 0944-2952

Institut für Sicherheitsforschung und Reaktortechnik Jül-3704

D 82 (Diss. RWTH Aachen, 1999)

Zu beziehen durch: Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek

D-52425 Jülich · Bundesrepublik Deutschland

☎ 02461/61-61 02 · Telefax: 02461/61-61 03 · e-mail: zb-publikation@fz-juelich.de

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand am Institut für Sicherheitsforschung und Reaktortechnik (ISR) der Forschungszentrum Jülich GmbH. Der hierzu abgefaßte Bericht ist eine von der Fakultät für Maschinenwesen der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen genehmigte Dissertation (Tag der mündlichen Prüfung: 8.6.1999)

Herrn Prof. Dr.-Ing. D. Weichert, Leiter des Instituts für Allgemeine Mechanik der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen danke ich für das große Interesse an dieser Doktorarbeit sowie die wertvollen Hinweise bei der Abfassung der Arbeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing. E. F. Hicken, Direktor am Institut für Sicherheitsforschung und Reaktortechnik (ISR) der Forschungszentrum Jülich GmbH und Inhaber der Professur für Sicherheitsforschung und Reaktortechnik an der Ruhr-Universität Bochum danke ich für die Themenstellung, sein in mich gesetztes Vertrauen sowie die Diskussionsbereitschaft während der Abfassung der Arbeit.

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. M. Staat, Leiter des Labors Biomechanik der Fachhochschule Aachen, Abteilung Jülich, für die fachliche Betreuung sowie die ständige Diskussionsbereitschaft und Unterstützung.

Ich bedanke mich bei allen Mitarbeitern des Instituts für die freundliche Unterstützung sowie die Hilfsbereitschaft bei der gestellten Aufgabe. Insbesondere danke ich Herrn Dr.-Ing. J. Altes für die Unterstützung beim Umgang mit dem FEM-Code PERMAS sowie Herrn D. Koschmieder für die Hilfestellung bei allen computer-spezifischen Fragestellungen.

Meiner Frau Johanna und meiner Familie danke ich für die stetige Unterstützung.

Jülich, Oktober 1999

Michael Heitzer

Traglast- und Einspielanalyse zur Bewertung der Sicherheit passiver Komponenten

von Michael Heitzer

Genaue Kenntnis der Spannungen und Verformungen in passiven Komponenten gewinnt man mit detaillierten inelastischen FEM Analysen. Die lokale Beanspruchung läßt sich aber nicht direkt mit einer Beanspruchbarkeit im strukturmechanischen Sinne vergleichen. Konzentriert man sich auf die Frage nach der Tragfähigkeit, dann vereinfacht sich die Analyse. Im Rahmen der Plastizitätstheorie berechnen Traglast- und Einspielanalyse die tragbaren Lasten direkt und exakt. In dieser Arbeit wird eine Implementierung der Traglast- und Einspielsätze in ein allgemeines FEM Programm vorgestellt, mit der die Tragfähigkeit passiver Komponenten direkt berechnet wird. Die benutzten Konzepte werden in Bezug auf die übliche Strukturanalyse erläutert. Beispiele mit lokal hoher Beanspruchung verdeutlichen die Anwendung der FEM-basierten Traglast- und Einspielanalyse. Die berechneten Interaktionsdiagramme geben einen guten Überblick über die möglichen Betriebsbereiche passiver Komponenten. Die Traglastanalyse bietet auch einen strukturmechanischen Zugang zur Kollapslast rißbehafteter Strukturen.

Bei Auslegung einer Komponente ist zu beachten, daß die Stoffwerte, die Dimension und die Belastung der Komponente in der Regel keine Größen sind, die deterministisch vorgegeben sind. Diese Größen unterliegen einer statistischen Verteilung, welche in der Regel nicht bekannt ist. Die hier vorgestellte Zuverlässigkeitsanalyse verbindet die strukturmechanischen Methoden der Traglast- und Einspielanalyse mit den probabilistischen Methoden der First Order Reliability Method. Damit ist eine Zuverlässigkeitsanalyse des plastischen Strukturverhaltens möglich.

Limit and shakedown analysis for the safety assessment of passive components

by Michael Heitzer

Limit and shakedown theorems are exact theories of classical plasticity for the direct computation of safety factors or of the load carrying capacity under constant and varying loads. The direct calculation of complex structures with Finite Element Methods (FEM) leads to large scale optimization problems. General mathematical optimization methods can not solve these problems in sufficient time. The solution is obtained from a basis-reduction technique and the reduced problem is solved by sequential quadratic programming methods. The approach needs considerably less input data and computer time than incremental plastic analyses and is applied to complex structures.

Design and assessment of engineering structures imply decision making under uncertainty of the actual load carrying capacity of a structure. Uncertainty may originate from random fluctuations of significant physical properties, from limited information and from model idealizations of unknown credibility. Structural reliability analysis deals with all these uncertainties in a rational way. The present contribution uses lower bound theorem of limit and shakedown load to define a limit state function for reliability analysis by the First Order Reliability Method.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Aufgabenstellung	1
2	Grundlagen der Kontinuumsmechanik und Plastizitätstheorie	5
2.1	Allgemeines, Dehnungen, Spannungen	5
2.2	Elastische Eigenschaften	6
2.3	Plastische Eigenschaften	7
2.4	Eigenspannungen	10
3	Einspieltheorie	11
3.1	Einspielen von Systemen aus ideal plastischem Material	16
	Einspielen für thermisch belastete Systeme	19
3.2	Einspielsatz für unbeschränkt linear kinematisch verfestigendes Material	20
3.3	Einspielsatz für beschränkt linear kinematisch verfestigendes Material	20
4	Behandlung diskretisierter Systeme	21
4.1	Strukturdiskretisierung durch finite Elemente	21
4.2	Lastdiskretisierung	23
4.3	Der Eigenspannungsraum $\mathcal{B}$	25
4.3.1	Basisreduktionsverfahren	25
4.3.2	Erzeugung der Eigenspannungsunterräume	26
4.3.3	Entwicklung eines Kriteriums für den Lastanstieg	29
5	Mathematische Optimierung	33
6	Neue analytische Lösungen spezieller Grenzlastprobleme	45
6.1	Zeitlich konstante Lastanteile	45
	Berechnung der Fließlast bei konstanten Lasten	47
6.2	Optimierung bei thermischen und mechanischen Lasten	49
6.3	Behandlung temperaturabhängiger Fließgrenzen	53

6.4	Einspielanalyse für kinematisch verfestigendes Material	58
6.4.1	Traglastanalyse für beschränkt kinematisch verfestigendes Material . . .	58
6.4.2	Einspielanalyse für unbeschränkt linear verfestigendes Material	60
6.4.3	Einspielanalyse für beschränkt linear verfestigendes Material	64
7	Probabilistische Grenzlastanalyse	67
7.1	Einführung in die Probabilistik	68
7.2	Allgemeine Zuverlässigkeitstheorie	70
7.3	Normalverteilte Basisvariablen	72
7.4	Allgemein verteilte Basisvariablen	73
7.5	Ein Suchalgorithmus für den β -Punkt	74
7.6	Sensitivitäten der Grenzzustandsfunktion	75
7.6.1	Fließspannung	75
7.6.2	Lasten	78
7.7	Spezielle probabilistische Grenzlastanalyse	80
7.7.1	Gestalt des Versagensbereichs V	83
7.7.2	Analytische Lösung	84
8	Validierung der implementierten Methode an Beispielen	87
8.1	Quadratische Scheibe mit kreisrundem Loch	87
8.1.1	Einachsige Belastung	87
8.1.2	Zweiachsige Belastung	90
8.2	Quadratische Scheibe mit elliptischem Loch	92
8.3	Flachstab mit Außenkerbe	95
8.4	Dünnes Rohr	98
8.4.1	Variabler Innendruck	100
8.4.2	Konstanter Innendruck	101
8.5	Rohrabzweig	102
8.5.1	Modell und Belastung	102
8.5.2	Kollapsdruck nach Traglastanalyse und AD-Merkblatt	103

8.5.3	Kollapsdruck des Rohres	104
8.5.4	Vergleiche mit experimentellen Untersuchungen	104
8.5.5	Inkrementelle Rechnung	109
8.6	Japanisches Benchmark Problem für Druckbehälter	110
8.7	Ebene Scheibe mit Riß	112
8.7.1	Homogenes Material	112
8.7.2	Inhomogenes Material	113
8.8	Rohr mit innenliegendem Umfangsriß	115
8.9	Probabilistische Analyse einer Lochscheibe	117
8.10	Zusammenfassende Bewertung der Beispielrechnungen	120
9	Zusammenfassung und Ausblick	123
	Literaturverzeichnis	125
A	Anhang	A 1
A.1	Herleitung des Arbeitsprinzip	A 1
A.2	PERMAS–Notation	A 1
A.3	Beweis des Lemmas über den Lastanstieg	A 2
A.4	Positive Definitheit der Aufdatierungsmatrix	A 5
A.5	Verteilungen und deren Dichten	A 6
A.6	Grenzlastanalyse für Strukturen mit Schädigung	A 8
A.7	Das Overlaymodell in der Schadensmechanik	A 11
A.8	Eingabedatensatz der Einspielanalyse des dünnen Rohrs	A 16
A.9	Spannungsverteilungen des Abzweiges (Innendruck)	A 17
A.10	Rechenzeitvergleich für den Rohrabzweig	A 18
A.11	Konvergenzvergleich der Optimierungstrategien	A 18
A.12	Vergleichsergebnisse des Japanischen Benchmark Problems	A 19
A.13	Spannungsbilder zum Brite–EuRam Benchmark	A 20
A.14	Ergebnisse der Zuverlässigkeitsanalyse	A 22

Bildverzeichnis

3.1	Bree-Interaktionsdiagramm für dünnwandige Rohre [SH97a]	11
3.2	Betriebsfestigkeit des Zugstabes für Schwellbeanspruchung nach [Sci95] . . .	12
4.1	Veranschaulichung der Optimierung in Unterräumen	26
4.2	Flußdiagramm der Grenzlastanalyse	32
6.1	Funktionsgraphen von $f(g(T))$ und $g^2(T)\sigma_0^2$	56
7.1	Versagenswahrscheinlichkeit für zwei Basisvariablen	71
7.2	Versagenswahrscheinlichkeit für allgemein verteilte Variablen	71
7.3	Transformation der allgemeinen in normalverteilte Zufallsvariablen	74
7.4	Flußdiagramm der probabilistischen Grenzlastanalyse	76
8.1	Vermaßung, Testmatrix und Ergebnisse der Traglast- und Einspielberechnung für die Scheibe unter einachsiger Zugbelastung	88
8.2	Ergebnisse der Grenzlastuntersuchungen für die einachsig belastete Scheibe . .	89
8.3	Rechenzeitvergleich für die Lochscheibe mit $D/L = 0.2$	89
8.4	Interaktionsdiagramm der quadratischen Scheibe für $D/L = 0.2$	91
8.5	FE-Netz und uniaxiale Traglast für die Scheibe mit elliptischem Loch	93
8.6	FE-Modelle der Scheibe für die Radienverhältnisse $x/y = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$. .	93
8.7	Interaktionsdiagramme für Lochverhältnisse $x/y = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$	94
8.8	FE-Netze des gekerbten Flachstabes für $D/L = 0.5$ mit Belastungen	96
8.9	Elastische, Einspiel- und Traglast des gekerbten Flachstabes unter Zugbelastung	96
8.10	Interaktionsdiagramme für den gekerbten und ungekerbten Flachstab	97
8.11	Dünnes Rohr unter Innendruck und Temperaturbelastung mit FE-Netz	98
8.12	Interaktionsdiagramm des endlich dünnen Rohres für Lastfall 1 und 2	100
8.13	Interaktionsdiagramm des dünnen Rohres für Lastfall 3	101
8.14	FE-Netz und Dimensionierung des Abzweigs	103
8.15	FE-Netz Rohres mit Ausschnitt	105

8.16	Interaktionsdiagramm des Rohrabzweigs	108
8.17	Bauteilfließkurve berechnet für Punkt A des Abzweigs	109
8.18	Abmessungen und VON MISES-Vergleichsspannungen des FE-Modells	111
8.19	Scheibe mit Riß für homogenes Material	112
8.20	Scheibe mit Riß für inhomogenes Material	114
8.21	FE-Netz mit Vermaßung und Dimensionierung des Rohres mit Innenriß	115
8.22	Traglastdiagramm des Rohres mit Innenriß	117
8.23	Graphische Darstellung der Ergebnisse für $\sigma_x = 0.1\mu_x$, $\sigma_y = 0.1\mu_y$	119
A.1	Spannungsverteilung während der inkrementellen Belastung	A 17
A.2	Rechenzeitvergleich für einen Rohrabzweig	A 18
A.3	Vergleich der Konvergenz verschiedener Optimierungsstrategien der Traglast- rechnung für einen Rohrabzweig	A 18
A.4	Isolinien für die Scheibe mit Schweißnaht für $\sigma_0^W / \sigma_0^B = 1.5$	A 20
A.5	Isolinien für die Scheibe mit Schweißnaht für $\sigma_0^W / \sigma_0^B = 0.75$	A 21

Tabellenverzeichnis

8.1	Abmessungen und Materialdaten des Druckbehälters	110
8.2	Tabellarische Darstellung der Ergebnisse für $\sigma_x = 0.1\mu_x, \sigma_y = 0.1\mu_y$	119
A.1	PERMAS–Notation und Buch–Verzeichnis (entwickelt aus [PER88])	A 1
A.2	Liste der angewandten Programme, FE–Modelle und Traglastergebnisse	A 19
A.3	$\sigma_x = 0.1\mu_x, \sigma_y = 0.2\mu_y$	A 22
A.4	$\sigma_x = 0.2\mu_x, \sigma_y = 0.2\mu_y$	A 22

1 Einleitung und Aufgabenstellung

Die Auslegung einer technischen Komponente dient der Gewährleistung ihres sicheren und zuverlässigen Betriebes unter allen vorhersehbaren oder nach Regelwerk (z.B. ASME, KTA) zu postulierenden Belastungen. Die Beanspruchbarkeit einer innerlich statisch unbestimmten Komponente folgt im Gegensatz zur innerlich statisch bestimmten Komponente nicht direkt aus der Versagensgrenze des Komponentenwerkstoffs. Deshalb stellt das Regelwerk Auslegungsregeln auf, mit denen ein Zusammenhang zwischen Belastung und Belastbarkeit der Komponente hergestellt wird. Die oft ungenaue Kenntnis von Belastung, Werkstoffdaten und anderen Eingangsgrößen, wird durch die Einführung von Sicherheitsfaktoren kompensiert, welche die zulässige Belastung hinreichend abmindern. Diese Auslegungsregeln können für komplexe Komponenten zu konservativ sein, so daß die tatsächlich vorhandene Sicherheit wesentlich größer ist. Es ist das Ziel verfeinerter Festigkeitsanalysen, ein noch vorhandenes Belastungspotential zu nutzen. Dadurch können Komponenten wirtschaftlicher oder die für einen Betrieb notwendigen Sicherheiten erst nachgewiesen werden.

Die inkrementelle Berechnung einer Komponente ist ein verfeinertes Verfahren der Festigkeitsbestimmung. Sie nutzt die genaue Kenntnis der Geometrie, der Lastgeschichte (mechanische Last, Temperaturgradient, Reihenfolge) und des komplexen Materialverhaltens. Die Berechnung der Sicherheit der Komponente gegen Verlust der Funktionsfähigkeit (Versagen) ist erheblich aufwendiger als die Auslegung nach Regelwerk. Im allgemeinen sind die Parameter der Lastgeschichte und des Materialgesetzes nur unvollständig bekannt, so daß zur Berechnung der Sicherheit sämtliche Parameter mit ihren Streubändern in Betracht gezogen werden müssen.

Die Festigkeitsberechnung mittels Traglast- bzw. Einspielanalyse ermittelt dagegen direkt die maximale Beanspruchbarkeit einer Komponente unter monotoner und zyklischer Belastung unter Benutzung asymptotischer Materialgesetze. Diese Methode ist eine verfeinerte Festigkeitsberechnung, da die Sicherheit komplexer Komponenten direkt aus der Kenntnis der Versagensgrenzen berechnet wird. Der Aufwand dieser Berechnungsmethode gegenüber der inkrementellen Berechnung ist wesentlich geringer, da direkt nur die maximal tragbaren Belastungen berechnet werden. Dadurch sind nur eingeschränkte Informationen über Dehnungs- und Spannungsverläufe während der Belastung vorhanden.

Zusammenfassend haben die drei Ansätze folgende Vor- und Nachteile:

Regelwerk

- + einfache und schnelle Auslegung einer Komponente möglich,
- eventuell zu konservative Auslegung für komplexe Komponenten,

Inkrementelle Berechnung

- + genaue Modellbildung und damit bessere Ausnutzung der Sicherheit,
- hoher Aufwand durch Materialmodellierung und Nachrechnung der gesamten Lastgeschichte,

Traglast- und Einspielanalyse

- + genaue Modellbildung und damit bessere Ausnutzung der Sicherheit,
- + geringer Aufwand durch direkte Sicherheitsberechnung mit asymptotischen Stoffwerten,
- keine Angabe über genaue Spannungs- und Dehnungsverläufe.

In dieser Arbeit soll der dritte Ansatz zur Festigkeitsberechnung erweitert werden, da ein Genauigkeitsgewinn gegenüber der Regelwerkauslegung und eine Aufwandsverminderung gegenüber der inkrementellen Berechnung erwartet wird.

Jedem hinreichend zähen Werkstoff können experimentell eine Streck- und Bruchgrenze zugeordnet werden. Belastungen unterhalb der Streckgrenze induzieren rein elastische Verformungen. Fallen Streck- und Bruchgrenze zusammen (ideal plastischer Werkstoff), so können innerlich statisch bestimmte Komponenten (z.B. Zugstab) oberhalb der Streckgrenze keine Belastungen ertragen. Für innerlich statisch unbestimmte Komponenten (z.B. Rohrabzweig) gilt dies nicht mehr. Wird die statisch unbestimmte Komponente plastisch (überelastisch) beansprucht, so resultieren daraus bleibende Verformungen. Bleiben diese Verformungen örtlich und zeitlich beschränkt, so versagt die Komponente infolge zu großer Verformungen nicht.

Eine begrenzte lokale plastische Verformung kann gezielt bei der Auslegung einer Komponente vorgesehen werden, um ihre Wirtschaftlichkeit zu steigern. Mechanisch und thermisch hochbeanspruchte Komponenten lassen sich im Anlagenbau oft erst bei Ausnutzung des plastischen Bereiches wirtschaftlich betreiben. Das klassische Beispiel des dünnen Rohres (nach BREE) zeigt, daß die plastische gegenüber der elastischen Auslegung eine bis zu vierfach höhere zyklische Belastung zuläßt.

Für innerlich statisch unbestimmte Komponenten sind bei zyklischer Belastung verschiedene Fälle möglich. Nicht zu hohe zyklische Belastungen können nach eventuell anfänglicher plastischer Verformung reversibel von der Komponente abgetragen werden. Dieses Komponentenverhalten heißt *elastisches Einspielen*. Sind die zyklischen Belastungen dagegen zu groß, zeigt die Komponente ein anderes Verhalten. Die irreversiblen plastischen Verformungen dieser Belastungen alternieren (*Alternierende Plastifizierung* oder *Low Cycle Fatigue, LCF*) oder wachsen monoton und stufenförmig im Laufe der Belastung an (*Inkrementelle Plastifizierung* oder *Ratchetting*). Wenn genaue Materialdaten und die Art der zyklischen Belastung unbekannt sind, muß die Komponente so konservativ ausgelegt sein, daß LCF und Ratchetting ausgeschlossen sind, da anderenfalls eine Bestimmung der noch zulässigen Belastungszyklen schwierig ist.

Eine analytische Spannungsbewertung ist nur für Komponenten mit einfacher geometrischer Form möglich. Die Finite Elemente Methode (FEM) ist in der Lage, Komponenten mit komplexer Form auf eine Anordnung von Elementen mit endlich vielen Freiheitsgraden abzubilden. Dadurch ist es möglich, beliebige Komponenten zu diskretisieren und eine Spannungsbewertung durchzuführen. Traglast- und Einspielanalysen konnten bisher erfolgreich auf vereinfachte Geometrien angewandt werden, so daß eine Erweiterung der Methode mit Hilfe eines allgemeinen Finite Element Programms für dreidimensionale Probleme sinnvoll ist. Die Validierung der implementierten Traglast- und Einspielanalyse muß mit experimentellen oder analytischen Vergleichslösungen erfolgen. Für zyklische Belastungen existieren nur vereinzelt experimentelle Ergebnisse, so daß analytische Vergleichslösungen hergeleitet werden müssen, sofern sie nicht aus der Literatur bekannt sind.

Die Untersuchung der Sicherheit und Zuverlässigkeit passiver Komponenten ist ein Arbeitsschwerpunkt des Instituts für Sicherheitsforschung und Reaktortechnik (ISR) der Forschungs-

zentrum Jülich GmbH. Die Wirkung passiver Komponenten (z.B. Rohr, Notkondensator) beruht direkt auf physikalischen Gesetzmäßigkeiten (z.B. Gravitation, Naturkonvektion, Verdampfung). Sie dienen zur Ersetzung aktiver Sicherheitseinrichtungen (z.B. Pumpen), um die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Sicherheitssystems zu senken.

Bei Auslegung einer Komponente ist zu beachten, daß die Stoffwerte, die Dimension und die Belastung der Komponente in der Regel keine Größen sind, die deterministisch vorgegebenen sind. Diese Größen unterliegen einer statistischen Verteilung, welche in der Regel nicht bekannt ist. Daher wäre es von Vorteil, die Traglast- und Einspielanalyse probabilistisch zu erweitern.

Die im ISR benutzte First / Second Order Reliability Method (FORM/SORM) bietet eine Möglichkeit das elastische Verhalten einer Komponente zu untersuchen. Für das plastische Verhalten einer Komponente ist diese Methode bisher nicht anwendbar, so daß auf aufwendige Monte-Carlo-Simulationen zurückgegriffen werden mußte. Im Unterschied zu dem im kommerziellen Finite-Element-Programm PERMAS der Firma INTES bereits realisierten probabilistischen Verfahren werden das nichtlineare Stoffgesetz und die zeitabhängigen Belastungen durch asymptotische Lösungen ersetzt.

Aufgabe dieser Arbeit ist es, mit Hilfe der FEM und den Traglast- und Einspielsätzen der Plastizitätstheorie die Komponentensicherheit und -zuverlässigkeit gegen Kollaps, LCF oder Ratchetting zu analysieren. Im einzelnen sollen folgende Ziele erreicht werden:

- Erweiterung der direkten Grenzlastanalyse auf komplexe 3D-Komponenten mittels FEM,
- Implementation des entwickelten Verfahrens in das umfassende FEM-Programm PERMAS,
- Herleitung analytischer Lösungen der Grenzlastanalyse zur Validierung der Implementation,
- Validierung des implementierten Verfahrens mittels bekannter und hergeleiteter Lösungen,
- Probabilistische Erweiterung der allgemeinen Grenzlastanalyse mittels FORM
- Entwicklung von Konzepten zur Berechnung der Sensitivitäten zur Verwendung in FORM,
- Beurteilung der Zuverlässigkeit einer Komponente mit Hilfe der implementierten Trag- und Einspielanalyse und FORM für unsichere Lasten und Werkstoffgrößen.

Werden diese Ziele erreicht, so könnte die direkte Traglast- und Einspielanalyse auf komplexe Komponenten angewandt werden. Dies bedeutete gegenüber der inkrementellen Berechnung einen erheblichen Vorteil, da die Rechenzeiten deutlich niedriger wären. Zusätzlich könnte die Sicherheit einer komplexen Komponente unter zyklischer Belastung beurteilt werden, was mit einer inkrementellen Rechnung nur bei genauer Kenntnis der Lastgeschichte möglich ist. Durch die Ersetzung der inkrementeller Berechnung durch die Traglast- und Einspielanalyse könnte die Zuverlässigkeitsanalyse mittels FORM durchgeführt werden. Dabei könnte erstmals ein direkter Zusammenhang zwischen der Grenzlast und den sensitiven Größen (z.B. Fließspannung) hergestellt werden. Dies bedeutete einen erheblichen Rechenzeitgewinn gegenüber einer herkömmlichen Monte-Carlo-Simulationen mittels indirekter inkrementeller plastischer Berechnung.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

In Kapitel 2 werden die Grundlagen der Kontinuumsmechanik und Plastizitätstheorie darge-

legt. Die Spannungsaufteilung in Primär- und Sekundärspannungen wird vorgestellt, so daß die Traglast- und Einspielsätze formuliert werden können.

In Kapitel 3 wird ein Überblick über die bisherigen Arbeiten in der Literatur zum Einspielen gegeben. Ferner werden die Grundlagen der Einspieltheorie und die Einspielsätze für ideal plastisches und kinematisch verfestigendes Material angegeben.

In Kapitel 4 werden die Einspielsätze in diskretisierter Form dargestellt. Dazu werden die nötigen Bedingungen für die Berechnung der Trag- und Einspiellast mittels der Finite Element Methode vorgestellt. Durch die Struktur-, Last- und Eigenspannungsraumdiskretisierung können effektive Algorithmen zur Berechnung der Trag- und Einspiellast entwickelt werden und in das Finite Element PERMAS implementiert werden. Weiter wird eine Einführung in den Berechnungsteil der plastischen Verformungen des Programmsystems PERMAS gegeben. Darauf aufbauend wird dargelegt, wie ein Teilraum des Eigenspannungsraums mittels PERMAS erzeugt werden kann. Es wird ein Konvergenzkriterium der dargestellten Methode auf beliebige Strukturen erweitert.

In Kapitel 5 wird die Entwicklung und Implementation der allgemeinen Grenzlastanalyse vorgestellt. Mit Hilfe der Sequentiellen Quadratischen Programmierung (SQP) wird ein spezieller Algorithmus für die Grenzlastanalyse entwickelt. Dazu werden die mathematischen Grundlagen der Lösung der Traglast- und Einspieluntersuchung mit Hilfe der mathematischen Optimierung vorgestellt.

Neue analytische Lösungen spezieller Traglast- und Einspielanalysen werden in Kapitel 6 vorgestellt. Für spezielle Belastungsformen und Materialgesetze können damit erstmals analytische Lösungen dreidimensionaler Probleme allgemein angegeben werden. Aus einigen analytischen Ergebnissen können Auslegungsregeln abgeleitet werden.

In Kapitel 7 wird eine neue Methode der Zuverlässigkeitsanalyse mittels der First Order Reliability Method (FORM) und plastischer Grenzlastanalysen vorgestellt. Dazu werden die Grundlagen der probabilistischen Zuverlässigkeitsanalyse und der First Order Reliability Method (FORM) dargelegt. Es wird die Einbeziehung plastischer Grenzlastanalysen vorgestellt, mit deren Hilfe ein funktionaler Zusammenhang zwischen der Trag- bzw. Einspiellast und den Einflußgrößen (z.B. Fließspannung und Belastung) hergestellt wird. Damit können die für FORM benötigten Sensitivitäten der plastischen Grenzlastanalyse erstmals bestimmt werden. Weiter wird für eine Lochscheibe eine analytische Lösung der Zuverlässigkeit berechnet.

In Kapitel 8 werden Beispielrechnung der Traglast- und Einspielanalyse zur Validierung der neu implementierten Methode vorgestellt. Bei Kenntnis der analytischen Grenzbelastungen dienen sie zur Verifizierung der implementierten Methode. Es werden zwei- und dreidimensionale Probleme mit und ohne Defekte behandelt. Die Ergebnisse der numerischen Berechnung stimmen gut mit den bekannten analytischen Lösungen überein.

Das 9. Kapitel beinhaltet eine Zusammenfassung der Arbeit und einen Ausblick.

2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik und Plastizitätstheorie

2.1 Allgemeines, Dehnungen, Spannungen

Eine Struktur Ω besteht aus Materialpunkten, die durch ihre Ortsvektoren $\mathbf{x} \in \Omega$ repräsentiert werden können. Ein Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$ läßt sich mittels eines Koordinatensystems $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ und den Komponenten x_1, x_2 und x_3 darstellen als $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$. Die Bewegung eines materiellen Punktes $\mathbf{x}$ in der Zeit t wird durch die Verschiebung $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ beschrieben. In der hier vorausgesetzten geometrisch linearen Theorie besteht eine lineare Beziehung zwischen den Verschiebungen $\mathbf{u}$ und den Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ in jedem Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$. Es gilt in jedem Punkt:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\text{gradu} + (\text{gradu})^T), \text{ bzw. } \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (2.1)$$

Aufgrund der partiellen Differenzierbarkeit der Verschiebungsfunktionen und des Satzes von SCHWARZ gilt für die Dehnungsraten $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\text{grad}\dot{\mathbf{u}} + (\text{grad}\dot{\mathbf{u}})^T), \text{ bzw. } \dot{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \right). \quad (2.2)$$

Die Spannungen erfüllen die statischen Gleichgewichtsbedingungen des Systems Ω

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{b} \quad \text{in } \Omega \quad (2.3)$$

mit den äußeren Volumenlasten $\mathbf{b}$. Weiter sind die statischen Randbedingungen

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{p} \quad \text{auf } \partial\Omega_\sigma \quad (2.4)$$

erfüllt, wobei $\mathbf{p}$ die auf dem Lastrand $\partial\Omega_\sigma$ wirkende Oberflächenlast bezeichnet und $\mathbf{n}$ der nach außen gerichtete Normalenvektor auf $\partial\Omega$ ist. Es gelten mit dem Verschiebungsrand $\partial\Omega_u$ die Gleichungen $\partial\Omega = \partial\Omega_\sigma \cup \partial\Omega_u$ und $\partial\Omega_\sigma \cap \partial\Omega_u = \emptyset$.

Erfüllt ein Spannungsfeld $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ die statischen Rand- und Gleichgewichtsbedingungen zu den Lasten $\bar{\mathbf{b}}$ und $\bar{\mathbf{p}}$, so bilden $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ und $\bar{\mathbf{p}}$ eine Gleichgewichtsgruppe (statische Gruppe). Wählt man kompatible Dehnungs- bzw. Verschiebungsfelder $\boldsymbol{\varepsilon}$ und $\mathbf{u}$, so bilden sie eine Kompatibilitätsgruppe (kinematische Gruppe). Zwischen beiden Gruppen muß kein kausaler Zusammenhang bestehen, so daß die Gruppen unabhängig voneinander gewählt werden können. Mit : als Abkürzung der doppelten Überschiebung von Tensoren gilt (siehe z.B. [Kaz84]):

$$\int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u} \, ds + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega. \quad (2.5)$$

Diese Beziehung heißt *Arbeitsprinzip*. Ist ein System unter einer Belastung im Gleichgewicht, so besagt das Prinzip, daß die Arbeit aller äußeren Kräfte während einer Verschiebung gleich der inneren Arbeit ist, die die Spannungen auf die Dehnungen ausüben.

Das Prinzip folgt also direkt aus den statischen Gleichgewichts- und Randbedingungen (2.3) und (2.4) sowie der Gleichung (2.1). Umgekehrt folgen aus dem Arbeitsprinzip und der kinematischen Beziehung die statische Gleichgewichts- und Randbedingung, so daß das Arbeitsprinzip auch als Axiom aufgefaßt werden kann (siehe [Hah85]). Das Prinzip gilt auch für unstetige und damit auch nicht stetig differenzierbare Spannungsfelder¹. Für unstetige Verschiebungsfelder gilt das Arbeitsprinzip dagegen nicht mehr (siehe z.B. [GC80] und [Kö87]).

Mit (2.2) läßt sich das Arbeitsprinzip auch auf die Dehnungsraten $\dot{\epsilon}$ anwenden, wobei die Gruppen $(\bar{\sigma}, \bar{b}, \bar{p})$ und $(\dot{\epsilon}, \dot{u})$ unabhängig voneinander gewählt werden können:

$$\int_{\Omega} \bar{\sigma} : \dot{\epsilon} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \bar{p} \, \dot{u} \, ds + \int_{\Omega} \bar{b} \, \dot{u} \, d\Omega. \quad (2.6)$$

2.2 Elastische Eigenschaften

Da bei der Komponentenauslegung üblicherweise nur geringe örtliche Dehnungen (kleiner 1 %) zugelassen sind (siehe [IRH95]), wird hier auf die Behandlung großer Dehnungen verzichtet. Es wird deshalb im weiteren angenommen, daß sich die Dehnungen ϵ additiv in elastische ϵ^E , plastische ϵ^P und thermische Dehnungen ϵ^T zerlegen lassen (geometrisch lineare Theorie):

$$\epsilon = \epsilon^E + \epsilon^P + \epsilon^T. \quad (2.7)$$

Das elastische Materialverhalten wird dadurch charakterisiert, daß die elastischen Dehnungen ϵ^E durch den vierstufigen, positiv-definiten Elastizitätstensor $\mathbf{E}$ nach dem HOOKEschen Gesetz linear von den Spannungen σ abhängen:

$$\sigma = \mathbf{E} : \epsilon^E. \quad (2.8)$$

Für isotrope Materialien ist der Elastizitätstensor $\mathbf{E}$ durch die Symmetrien des Materials und der Spannungen bzw. Dehnungen nur von zwei Variablen abhängig. Die LAMÉschen Konstanten λ und μ sind mit dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktion ν definiert durch:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.9)$$

Durch die Isotropie und die Symmetrieeigenschaften lassen sich die Komponenten von $\mathbf{E}$ mit Hilfe des KRONECKERSymbols δ_{ij} darstellen durch:

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = \frac{E}{1 + \nu} \left[\frac{\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right]. \quad (2.10)$$

¹Dies ist bei der Konstruktion zeitunabhängiger Eigenspannungsfelder in der Traglastanalyse wichtig, da dort zum Teil nicht stetig differenzierbare Spannungsfelder konstruiert werden (siehe [GM54a] und [GM54b]).

Stellt man die Spannungen und Dehnungen als Vektoren $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})^T$ bzw. $\varepsilon = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz})^T$ dar, so läßt sich der Elastizitätstensor und damit das HOOKESche Gesetz in Matrixform schreiben:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^E \\ \varepsilon_y^E \\ \varepsilon_z^E \\ \varepsilon_{xy}^E \\ \varepsilon_{xz}^E \\ \varepsilon_{yz}^E \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Für Strukturen im ebenen Spannungszustand reduziert sich die Matrixform um alle Komponenten normal zur Ebene. Im weiteren wird für ebenen Probleme nur der ebenen Spannungszustand untersucht.

2.3 Plastische Eigenschaften

Treten für eine Struktur aus elastisch, ideal plastischem Material unter Belastung neben den elastischen Dehnungen auch plastische Dehnungen ε^P auf, so erreicht der Wert einer Fließfunktion $\Phi(\sigma)$ zu den Spannungen σ eine materialabhängige Fließspannung σ_0^2 , d.h. $\Phi(\sigma) = \sigma_0^2$. Durch die Bedingung $\Phi(\sigma) < \sigma_0^2$ sind Spannungen resultierend aus rein elastischen Dehnungen gekennzeichnet. Dabei darf der Wert der Fließfunktion nicht von unterschiedlichen Koordinatendarstellungen des Spannungstensors σ abhängen. Dies gilt nur dann, wenn Φ eine Invariante von σ ist. Da der hydrostatische Druck keinen Einfluß auf die Fließfunktion haben Φ soll und das untersuchte Material gleiches Verhalten im Zug und Druckbereich hat, ist der einfachste Ansatz für Φ die VON MISES Fließfunktion:

$$\Phi(\sigma) = 3J_2 = \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6\sigma_{xy}^2 + 6\sigma_{xz}^2 + 6\sigma_{yz}^2]. \quad (2.12)$$

Die Funktion Φ ist eine quadratische Form und läßt sich ähnlich dem Elastizitätstensor $\mathbf{E}$ in Matrixschreibweise darstellen. Es gilt $\Phi(\sigma) = \sigma^T \mathbf{Q} \sigma$. Dabei ist für dreidimensionale Probleme die Matrix $\mathbf{Q}_3$ gegeben durch

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Die Matrix $\mathbf{Q}_2$ im ebenen Spannungszustand erhält man durch sukzessives Streichen der z , xz und yz betreffenden Zeilen. Die Matrix $\mathbf{Q}_2$ ist positiv definit, d.h. $\sigma^T \mathbf{Q}_2 \sigma > 0$ für $\sigma \neq 0$,

wogegen $\mathbf{Q}_3$ nur positiv semi-definit ist, d.h. $\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Q}_3 \boldsymbol{\sigma} \geq 0$ für alle Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$. Die Matrix $\mathbf{Q}_3$ läßt sich nach dem Spektralsatz der linearen Algebra mit Hilfe der orthonormierten Eigenvektoren zu den Eigenwerten 0 und 3/2 aufspalten in $\mathbf{Q}_3 = \tilde{\mathbf{Q}}^T \tilde{\mathbf{Q}}$ mit

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Die Funktion Φ läßt sich also alternativ durch die Matrix $\tilde{\mathbf{Q}}$ darstellen durch

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Q}_3 \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \tilde{\mathbf{Q}}^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\sigma} = (\tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\sigma})^T (\tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\sigma}) = \|\tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\sigma}\|^2, \quad (2.15)$$

mit der euklidischen Vektornorm $\|\cdot\|$. Im dreidimensionalen Fall geht die positive Definitheit von $\mathbf{Q}_3$ durch den Kern der Abbildung $\phi: \boldsymbol{\sigma} \mapsto \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\sigma}$ verloren. Der Kern ϕ ist definiert durch

$$\text{Kern}\phi = \{\boldsymbol{\sigma} \mid \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}\} = \{\boldsymbol{\sigma} \mid \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \text{ und } \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0\}, \quad (2.16)$$

so daß die Spannungen aus $\text{Kern}\phi$ den hydrostatischen Spannungen entsprechen. Dies entspricht dem gewählten Ansatz für Φ . Damit beeinflußt die lineare Abbildung ϕ die Normeigenschaften von $\|\cdot\|$, so daß durch $\sqrt{\Phi(\cdot)}$ eine durch $\|\cdot\|$ indizierte Halbnorm definiert ist. Daraus folgt, daß die VON MISES-Fließfunktion Φ mit $\Sigma^0 = \Sigma \setminus (\text{Kern}\phi)$ positiv definit auf $\Sigma^0 \cup \{\mathbf{0}\}$ ist und daß durch $\sqrt{\Phi(\cdot)}$ eine Norm auf $\Sigma^0 \cup \{\mathbf{0}\}$ definiert ist. Dies gilt für $\mathbf{Q}_2$ und $\mathbf{Q}_3$, so daß nicht mehr zwischen $\mathbf{Q}_3$ und $\mathbf{Q}_2$ unterschieden wird. Damit folgen per Definition der Norm $\sqrt{\Phi(\cdot)}$ für Spannungen, die nicht dem hydrostatischen Spannungszustand entsprechen:

1. $\Phi(\boldsymbol{\sigma}) \geq 0, \forall \boldsymbol{\sigma}$
2. $\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$
3. $\Phi(\alpha \boldsymbol{\sigma}) = \alpha^2 \Phi(\boldsymbol{\sigma}), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{\sigma}$
4. $\sqrt{\Phi(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)} \leq \sqrt{\Phi(\boldsymbol{\sigma}_1)} + \sqrt{\Phi(\boldsymbol{\sigma}_2)} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2.$

Aus der Dreiecksungleichung folgt sofort $\left| \sqrt{\Phi(\boldsymbol{\sigma}_1)} - \sqrt{\Phi(\boldsymbol{\sigma}_2)} \right| \leq \sqrt{\Phi(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2)}.$

Für die weiteren Untersuchungen in den folgenden Abschnitten ist es nützlich, zusätzlich folgende Funktion $\bar{\Phi}$ zu definieren:

$$\bar{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) = \boldsymbol{\sigma}_1^T \mathbf{Q}_3 \boldsymbol{\sigma}_2. \quad (2.17)$$

Die so definierte Funktion ist bilinear, symmetrisch und es gilt $\bar{\Phi}(\sigma_1, \sigma_1) = \Phi(\sigma_1)$. Weiter gilt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = 2Q\sigma \quad \text{und somit} \quad \sigma_1^T \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \bigg|_{\sigma_2} = 2\sigma_1^T Q\sigma_2 = 2\bar{\Phi}(\sigma_1, \sigma_2). \quad (2.18)$$

Spannungen σ , die die Ungleichung $\Phi(\sigma) < \sigma_0^2$ erfüllen, bewirken keine plastischen Dehnungen und werden deshalb *sicher* genannt. Bei Gleichheit ist die Fließbedingung erfüllt und die Spannungen werden als *zulässig* bezeichnet.

Aufgrund der Definition von Φ begrenzt die Menge der zulässigen Spannungen eine konvexe Teilmenge des Spannungsraums, d.h. für alle sicheren und zulässigen Spannungen σ_1 und σ_2 mit $\Phi(\sigma_1), \Phi(\sigma_2) \leq \sigma_0^2$ ist auch die Konvexkombination $\Phi(\zeta\sigma_1 + (1 - \zeta)\sigma_2) \leq \sigma_0^2$ mit $0 \leq \zeta \leq 1$ sicher oder zulässig. Die sicheren Spannungen bilden die offene Teilmenge $\mathcal{E}$ der elastischen Spannungen des Spannungsraums. Deren Rand wird *Fließfläche* $\mathcal{F}$ genannt und durch die zulässigen Spannungen gebildet.

Weiterhin wird Materialstabilität im Sinne des DRUCKERSchen Postulats gefordert, d.h. für alle zulässigen Spannungen σ^z gilt:

$$(\sigma - \sigma^z) : \dot{\epsilon}^p \geq 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E} \cup \mathcal{F} \quad (2.19)$$

Diese Eigenschaft bedeutet, daß die Arbeit einer angreifenden Kraft an den Dehnungsänderungen nicht negativ sein kann (siehe [Dru51], [Dru59]) und wird auch *Prinzip der maximalen spezifischen Dissipationsarbeit* genannt. Daraus folgt, daß anders als bei der elastischen Deformation die in die plastische Deformation gesteckte Energie nicht wieder aus dem System zurückgewonnen werden kann. Weiter folgt, daß $\mathcal{E}$ eine konvexe Menge ist.

Aus der Konvexität von Φ folgt für alle sicheren und zulässigen Spannungen $\bar{\sigma}$, daß die Tangentialebene an $\mathcal{F}$ in einem Punkt $\sigma^z \in \mathcal{F}$ mit $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ höchstens einen Punkt gemeinsam hat:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \bigg|_{\sigma^z} : (\bar{\sigma} - \sigma^z) \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad \bar{\Phi}(\sigma^z, \bar{\sigma} - \sigma^z) \geq 0. \quad (2.20)$$

Da dies für alle sicheren und zulässigen Spannungen gilt, folgt mit der Ungleichung (2.19):

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad \text{mit} \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad (2.21)$$

so daß die plastischen Dehnungsraten senkrecht auf der Fließfläche stehen, wobei $\dot{\lambda}$ der unbestimmte plastische Multiplikator ist (siehe z.B. [Kaz84]). Die Beziehung (2.21) wird *assoziierte Fließregel* genannt. Der plastische Multiplikator $\dot{\lambda}$ ist durch den aktuellen Spannungszustand bestimmt. Liegt ein elastischer Zustand vor oder eine Entlastung, so verschwindet $\dot{\lambda}$ und damit nach der assoziierten Fließregel auch das plastische Dehnungssinkrement $\dot{\epsilon}^p$:

$$\dot{\lambda} = 0, \quad \text{wenn} \quad \underbrace{\Phi(\sigma) < \sigma_0^2}_{\text{elastisch}} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\Phi(\sigma) = \sigma_0^2 \text{ und } \dot{\Phi}(\sigma) < 0}_{\text{Entlastung}} \quad \text{gilt.} \quad (2.22)$$

Die Struktur fließt weiter, wenn gilt:

$$\dot{\lambda} \geq 0, \text{ wenn } \Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_0^2 \text{ und } \dot{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}) = 0. \quad (2.23)$$

Die Bedingungen (2.22) und (2.23) werden *Konsistenzbedingungen* genannt. Die bisher aufgestellten Regeln gelten in der Form nur für ideal plastisches Material. Dementsprechende Formulierungen können auch für kinematisch verfestigendes Material aufgestellt werden ([Dru51]).

2.4 Eigenspannungen

Die während der Belastung in der Struktur Ω auftretenden Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ lassen sich in einen elastischen und einen plastischen Teil additiv zerlegen:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^E + \boldsymbol{\rho}. \quad (2.24)$$

$\boldsymbol{\sigma}^E = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}$ sind fiktive Spannungen, die in einem unendlich elastischen Material auftraten. Da die Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ und $\boldsymbol{\sigma}^E$ mit den gleichen Lasten $\mathbf{b}$ und $\mathbf{p}$ im Gleichgewicht stehen, gelten die statischen Gleichgewichts- und Randbedingungen:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^E = -\mathbf{b} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad (2.25)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^E \mathbf{n} = \mathbf{p} \quad \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (2.26)$$

Daraus folgt, daß das Spannungsfeld $\boldsymbol{\rho}$ mit der Nulllast im Gleichgewicht steht, es wird daher *Eigenspannungsfeld* genannt. Die einzelnen Spannungen $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})$ werden *Eigenspannungen* genannt, sie resultieren aus der plastischen Deformation und hängen vom gesamten plastischen Dehnungsfeld $\boldsymbol{\varepsilon}^P$ ab. Aus der Definition der Eigenspannungen folgt sofort, daß die Menge aller Eigenspannungsvektoren einer Struktur mit der skalaren Multiplikation und der üblichen Vektoraddition einen linearen Vektorraum bilden.

Durch Einsetzen von Gleichung (2.8) und (2.24) in Gleichung (2.7) werden die zwei kompatiblen Dehnungen erzeugt (siehe [SZM93]):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{E}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}^E + \boldsymbol{\varepsilon}^T \quad (2.27)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \mathbf{E}^{-1} : \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\varepsilon}^P. \quad (2.28)$$

Die Eigenspannungen $\boldsymbol{\rho}$ leisten nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit keine elastische Arbeit an den Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ – eine Eigenschaft, die in den Beweisen des Einspielsatzes zum Tragen kommt, es gilt:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} : (\mathbf{E}^{-1} : \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\varepsilon}^P) \, d\Omega = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} : (\mathbf{E}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P) \, d\Omega = 0. \quad (2.29)$$

3 Einspieltheorie

Die plastische Spannungsbewertung beruht heute implizit auf der Traglast- und Einspielanalyse einfacher Modellprobleme für idealplastisches Material [Cip80], [SH97b]. Diese geht - in ihrer klassischen Formulierung im Rahmen der geometrisch linearen Theorie² - von dem Konzept kritischer Strukturzustände (in Bild 3.1 dargestellt) aus:

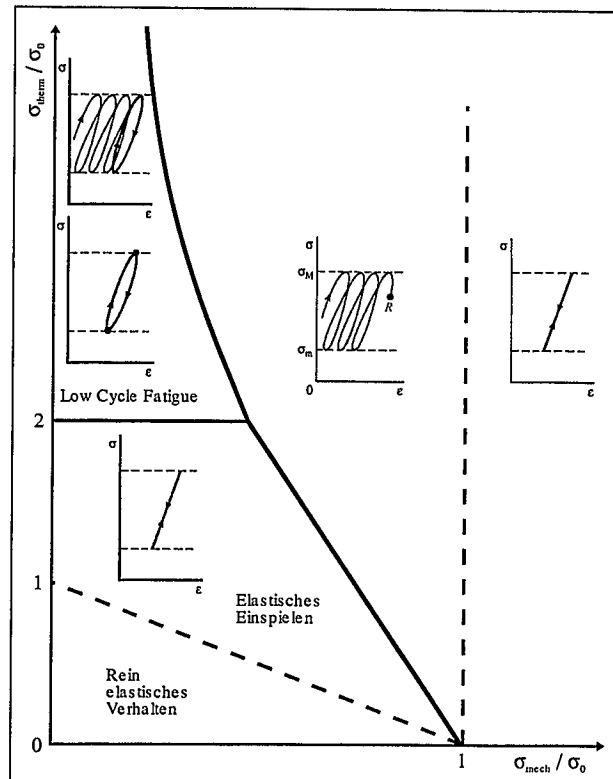


Bild 3.1: Bree-Interaktionsdiagramm für dünnwandige Rohre [SH97a]

- Unbeschränktes Fließen ist kritisch, weil es sofort zum plastischen Kollaps führt. Lasten unterhalb der Traglast (limit load) sind in diesem Sinne unkritisch.
- Inkrementeller Kollaps durch Akkumulation plastischer Dehnungen über aufeinanderfolgende Lastzyklen (Ratchetting) und plastische Ermüdung (Low Cycle Fatigue, LCF) durch alternierende Plastifizierung sind kritisch, weil sie zum Strukturversagen führen, wenn dieser Betriebszustand nicht verlassen wird. Lasten die unterhalb der Einspiellast (shakedown load) liegen, sind in diesem Sinne unkritisch.

Diesen Versagensarten lassen sich zeitabhängige Festigkeiten zuordnen, wie es in Bild 3.2 für einen Zugstab unter reiner Schwellbeanspruchung dargestellt ist. Der Beanspruchungsbereich

²Geometrisch nichtlineare Theorien werden zum Beispiel in [BH95], [CZ75], [SaS90] und [TW93] untersucht.

läßt sich in drei Bereiche aufteilen. Einige Autoren schlagen dafür die Bezeichnungen Sofortausfall, Kurzlebigkeit und Langlebigkeit vor. Der Festigkeitsbereich läßt sich somit in die Bereiche Kurzzeit-, Zeitfestigkeits- und Dauerfestigkeitsbereich aufteilen. Bei Belastung durch die Zugspannung σ_u erfolgt der Kollaps. Aber auch bei zyklischer überelastischer Last erfolgt ein Sofortausfall innerhalb weniger Zyklen durch plastische Ermüdung (LCF). Nur bei elastischer Beanspruchung kann eine technisch nutzbare Lebensdauer ermittelt werden. Unterhalb der Dauerfestigkeit S_D muß praktisch mit keinem Ermüdungsversagen gerechnet werden.

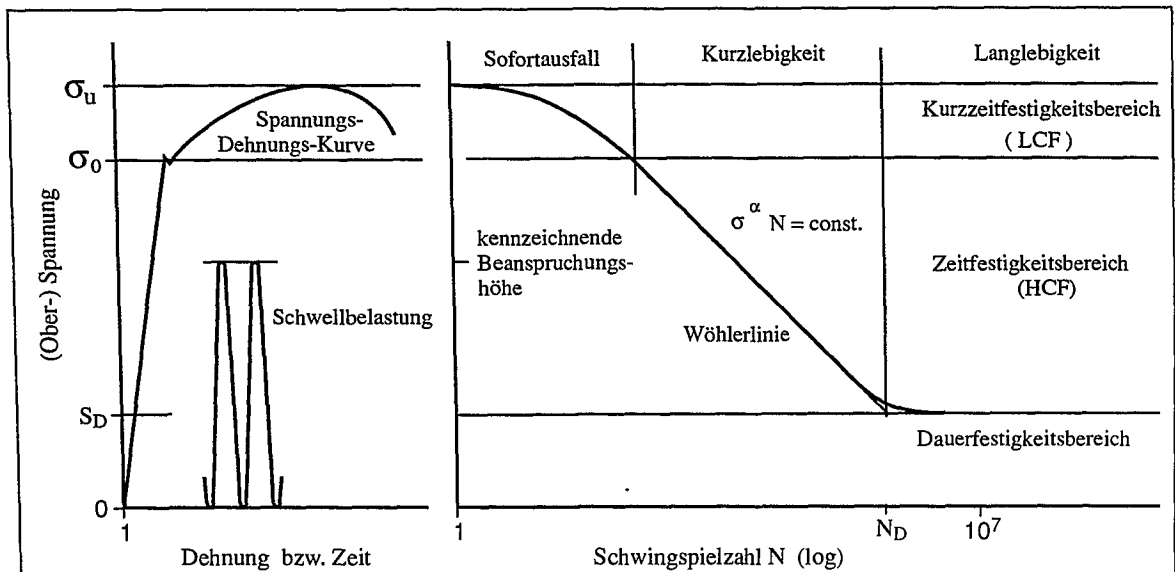


Bild 3.2: Betriebsfestigkeit des Zugstabes für Schwellbeanspruchung nach [Sc195]

Für ein Bauteil ist der Betriebs- oder Zeitfestigkeitsbereich auf den Bereich beschränkt, in dem die Komponente elastisch einspielt. Auch bei lokaler überelastischer Beanspruchung kann die Lebensdauer anhand einer (experimentell aufgenommenen) Lebensdauerlinie (Wöhlerlinie) ermittelt werden, wenn man zeigt, daß weder LCF noch Ratchetting auftreten [Lan71]. Die Fließspannung ist die Einspiellast des Zugstabs. Die Einspielgrenze einer zyklisch beanspruchten Struktur entspricht dem Materialkennwert σ_0 . Anders als bei innerlich statisch unbestimmten Bauteilen fallen bei dem Zugstab elastische Grenze und Einspielgrenze zusammen. Die Einspielgrenze ist nur so scharf, wie es das Konzept einer Fließgrenze erlaubt, die das elastische vom plastischen Werkstoffverhalten trennt. Bei der Verwendung von Werkstoffen, die zyklisch stark ver- oder entfestigen, sind zyklisch stabilisierte Stoffwerte experimentell zu bestimmen. Die Einspielanalyse muß dann mit diesen von der Lastgeschichte abhängigen Stoffwerten durchgeführt werden.

Die nach der Be- und Entlastung einer Struktur entstehenden Eigenspannungen resultieren aus den verbleibenden plastischen Dehnungen. Eigenspannungen, auch herstellungsbedingte, haben bei hinreichender Duktilität keinen Einfluß auf die Traglast, sind also Sekundärspannungen ([Kaz84], siehe dazu auch die Experimente von MAIER-LEIBNITZ [ML28] und die inkremen-

telle Berechnung in Abschnitt 8.5). Die Traglastanalyse liefert im Gegensatz zur inkrementellen Berechnung nicht die Dehnungen beim Kollaps. Dehnungen und Verschiebungen hängen bei der zyklischen Belastung von der Lastgeschichte und von Eigenspannungen ab (siehe Bild 8.17). Selbst wenn alle Bedingungen genau bekannt sind, sind diese Größen mit zunehmend flacher verlaufender Belastungskurve ungenauer bestimmbar. Die statischen Größen sind die technisch meist wichtigeren Kennwerte. Das gilt für die Werkstoffwerte σ_0 und σ_u (siehe Bild 3.2), ebenso wie für den Bauteilkennwert α_{limit} (Traglastfaktor). Bei starker Annäherung an diese Grenzen ist ausreichende Duktilität des Werkstoffs nachzuweisen oder es muß von abgeminderten Festigkeitskennwerten ausgegangen werden. Nur bei sehr geringer Zähigkeit können σ_u bzw. Traglast durch Eigenspannungen vermindert sein, wenn keine ausreichende Verformbarkeit des Werkstoffs vorliegt (siehe [IRH95]).

Die Spannungsbewertung überträgt die für vereinfachte Modelle bekannten Trag- und Einspiellasten auf kompliziertere technische Problemstellungen. Die nichtlineare Spannungsinteraktion von Primär- und Sekundärspannungen wird in Bild 3.1 in der Ebene der mechanischen und thermischen Umfangsspannungen im idealplastischen dünnen Rohr unter konstantem Innendruck und unter Thermozyklen dargestellt (Längsspannungen wurden von Bree konservativ vernachlässigt [Bre67]). Das Interaktionsdiagramm ist ein regelgerechter Weg zur Bewertung der Spannungen in einer speziellen Komponente im Hinblick auf die genannten Versagensarten.

Die Grenze zum plastischen Kollaps in Bild 3.1 zeigt die allgemeingültige Aussage, daß Wärmespannungen Sekundärspannungen sind, weil die Traglast von ihnen unbeeinflusst ist. Insbesondere die Traglastgrenzen sind für typische Strukturelemente des Apparatebaus formelmäßig aufbereitet worden [Sav97]. Trotzdem bleibt die Spannungsbewertung wichtiger Elemente im Apparatebau wie Behälterabschlüsse, Rohrverzweigungen und -krümmer in der Diskussion (z.B. [Hol93],[WRL95] und [WJ96]).

Durch die Konzentration auf das Berechnungsziel Trag- bzw. Einspiellast werden der rechnerische Aufwand und die benötigte Datenmenge erheblich reduziert. Werden zusätzliche Informationen über den Belastungsverlauf benötigt, kann nach Berechnung der Trag- und Einspiellast eine inkrementelle Berechnung erfolgen, welche bei Kenntnis der Trag- und Einspiellast einfacher ist.

Die statischen Sätze der Einspielanalyse nach MELAN [Mel38] sind in den Spannungen formuliert und ergeben ein mathematisches Maximierungsproblem für sichere Lasten. Die maximale sichere Last ist bei Ausschluß von Strukturkollaps die Traglast und bei Vermeidung von Ratchetting und LCF die (elastische) Einspiellast. Demgegenüber sind die kinematischen Sätze nach KOITER [Koi60] in kinematischen Größen formuliert. Sie definieren ein mathematisches Minimierungsproblem für unsichere Zustände und führen zu einer dualen Formulierung für die obere Schranke der Trag- und Einspiellast (siehe [SHH98], [SH99]). Jede zulässige Belastung, die den statischen Satzes erfüllt, ist eine untere, jede Belastung, die dem kinematischen Satz

genügt, ist eine obere Schranke für die sichere monotone bzw. variable Last (siehe [Koi60]). Nach dem Dualitätssatz (siehe z. B. [Kö87], [TS80], [Chr96] und [Chr80]) ist die größte untere Schranke gleich der kleinsten oberen Schranke, so daß die exakte Lösung beliebig genau erreicht werden kann. Um konservative Lösungen zu erhalten, werden hier nur die statischen Sätze angewandt. Zur Betrachtung der kinematischen Einspielsätze siehe zum Beispiel [Atk96], [KW92], [KM94a], [KM94b], [PM92] und [Zha95].

Untersucht wird eine Struktur Ω , die durch eine zeitlich veränderliche Belastung $P(t)$ aus einem Lastraum $\mathcal{L}$ belastet wird. Zum Zeitpunkt t ist $P(t) = (b(t), p(t), T(t))$ die verallgemeinerte Belastung mit der Volumenlast $b(t)$, der Oberflächenlast $p(t)$ und der Temperaturlast $T(t)$. Durch diese symbolische Schreibweise von $\mathcal{L}$ lassen sich monotone und zyklische Lasten zusammenfassen. Für den Lastraum $\mathcal{L}$ sind folgende Strukturstände möglich:

1. Rein elastisches Verhalten:

Das System Ω bleibt für alle Belastung $P(t) \in \mathcal{L}$ rein elastisch.

2. Elastisches Einspielen:

Nach anfänglicher plastischer Verformung klingen die plastischen Dehnungszuwächse ab und das System geht in einen elastischen Zustand über.

3. Plastisches Einspielen (Low Cycle Fatigue):

Die plastischen Dehnungen bleiben beschränkt, während die plastischen Dehnungsinkremente im Laufe der Belastung ständig ihr Vorzeichen wechseln. Das Fließen der Struktur hört nicht auf und die Struktur wird aufgrund alternierender Plastifizierung versagen.

4. Ratchetting:

Die plastischen Dehnungen akkumulieren im Laufe der Belastung, so daß die Struktur durch große Verformungen oder Bruch versagen wird.

5. Kollaps:

Im Lastbereich existiert eine Belastung, die die Traglast der Struktur erreicht, so daß die Struktur kollabiert. Die Verschiebungen können somit über alle Grenzen anwachsen.

Die Zustände 3., 4. und 5. der Auflistung werden als *kritische* Strukturzustände bezeichnet. Die Zustände 3. und 4. sind dadurch charakterisiert, daß in der Struktur Ω mindestens ein Punkt x existiert, in dem die plastischen Dehnungsinkremente $\dot{\epsilon}^p(x, t)$ im Laufe der Belastung nicht verschwinden, so daß $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\epsilon}^p(x, t) \neq 0$ gilt. Da die plastischen Dehnungen im Zustand 3. der Auflistung beschränkt bleiben und nur die Dehnungsinkremente ihr Vorzeichen ändern, spricht man vom plastischen Einspielen. Dieser Strukturzustand wird zum Beispiel in [Pol93b] und [Pol93a] genauer untersucht. In dieser Arbeit soll jedoch das plastische Einspielen nicht untersucht werden. Es wird aber durch das elastische Einspielen ausgeschlossen. Für Zustand 5. der Auflistung erfolgt das Versagen direkt im ersten Belastungszyklus.

Die Strukturzustände 1. und 2. der Auflistung sind nach dem Abklingen der plastischen Dehnungen nicht mehr zu unterscheiden. Da im Allgemeinen bei einer Struktur nicht die vollständige Lastgeschichte (z.B. durch den Herstellungsprozeß) bekannt ist, sind die beiden Zustände qualitativ identisch. Für sie verschwinden die plastischen Dehnungen im Laufe der Zeit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.1)$$

so daß das System in einen elastischen Zustand übergeht. Der Fall des lokalen Materialversagens vor Erreichen des elastischen Einspielens kann durch diese Bedingung nicht ausgeschlossen werden. Zusätzlich zu der Forderung (3.1) muß deshalb für das elastische Einspielen noch die Beschränktheit der plastischen Dissipationsenergie im Laufe der Belastung gelten:

$$W_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} w_p(\mathbf{x}, t) d\Omega = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left[\int_0^t \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \tau) : \dot{\epsilon}^p(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right] d\Omega < c. \quad (3.2)$$

Dabei ist mit w_p die Dichte der plastischen Dissipationsenergie bezeichnet. Diese Forderungen machen nur für die Untersuchung der Einspiellast Sinn, da bei Erreichen der Traglast die Dissipationsenergie beschränkt bleibt. Im weiteren wird davon ausgegangen, daß der Lastbereich $\mathcal{L}$ so gewählt ist, daß aus allen Lasten $P(t) \in \mathcal{L}$ nur rein elastische Dehnungen resultieren. Im Fall der Traglastberechnung schrumpft der Lastbereich $\mathcal{L}$ zu einem Vektor zusammen. Die Vergrößerung des Lastbereichs bedeutet in diesem Fall eine Streckung des Vektors.

Bei der Einspielanalyse wird der größtmögliche Faktor α gesucht, mit dem der Lastbereich $\mathcal{L}$ proportional vergrößert werden kann, so daß die Struktur unter dem vergrößerten Lastbereich noch einspielt. Die aktuellen Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ während der Belastung $P(t)$ müssen dann die statischen Gleichgewichts- und Randbedingungen in jedem Punkt erfüllen:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}(t)) \leq \sigma_0^2 \quad \text{in } \Omega \quad (3.3)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(t) = -\alpha \mathbf{b}(t) \quad \text{in } \Omega \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \mathbf{n} = \alpha \mathbf{p}(t) \quad \text{auf } \partial\Omega_{\sigma}. \quad (3.5)$$

Der größtmögliche Faktor, der diese Bedingung erfüllt, wird *Einspielfaktor* genannt. Dies führt zu einem mathematischen Optimierungsproblem in der statischen Größe σ :

$$\max \quad \alpha \quad (3.6)$$

$$\text{unter} \quad \text{Erfüllung von Bedingung (3.3) – (3.5).} \quad (3.7)$$

Diese Einspielbedingungen sind noch unabhängig von dem gewählten Materialgesetz. Sie gelten für ideal plastisches wie auch für verfestigendes Material. BLEICH hat schon in [Ble32] eine vereinfachte Version dieses Einspielsatzes für einfach statische unbestimmte Strukturen bewiesen. In dieser zeitabhängigen Form lassen sich die Einspielbedingungen jedoch nur durch inkrementelles Nachrechnen der Lastgeschichte nachprüfen. Durch die Aufteilung der aktuellen Spannungen in elastische, plastische bzw. aus der Verfestigung resultierende innere Variablen können die Einspielbedingungen wesentlich vereinfacht werden.

3.1 Einspielen von Systemen aus ideal plastischem Material

Für ideal plastisches Material werden die aktuellen Spannungen $\sigma(\mathbf{x}, t)$ in fiktive elastische Spannungen $\sigma^E(\mathbf{x}, t)$ und Eigenspannungen $\rho(\mathbf{x}, t)$ aufgeteilt: $\sigma(\mathbf{x}, t) = \sigma^E(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t)$. Im Falle des elastischen Einspielens verhält sich das System nach dem Zeitpunkt des Einspielens rein elastisch, so daß sich die zeitliche Änderung der Spannungen nur in den Spannungen $\sigma^E(\mathbf{x}, t)$ und nicht mehr in den Eigenspannungen ρ widerspiegelt. Es bildet sich nach dem Einspielen ein zeitunabhängiges Eigenspannungsfeld $\bar{\rho}$, so daß die Überlagerung dieses Eigenspannungsfelds mit den fiktiven elastischen Spannungen σ^E ein zulässiges Spannungsfeld ergibt. Die aktuellen Spannungen sind nach dem Einspielen zulässig, so daß sich für das Einspielen von Ω folgende notwendige Bedingung zu jeder Zeit t aufstellen läßt:

$$\Phi(\sigma^E(\mathbf{x}, t) + \bar{\rho}(\mathbf{x})) \leq \sigma_0^2(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.8)$$

Da aus den im Laufe der Belastung auftretenden plastischen Dehnungen ϵ^P die Eigenspannungen ρ resultieren, muß im Fall des Einspielens nach obigem gelten:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\rho}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.9)$$

Für jede Versagensart existiert ein Punkt, für den (3.9) nicht erfüllt ist. Die notwendige Bedingung (3.8) wird in dem von MELAN [Mel36] hergeleiteten Einspielsatz erweitert:

Satz (Melan):

Existiert ein Faktor $\alpha > 1$ und existieren zeitunabhängige Eigenspannungen $\bar{\rho}(\mathbf{x})$ mit $\int_{\Omega} \bar{\rho} : \mathbf{E}^{-1} : \bar{\rho} \, d\Omega < \infty$, so daß für alle Lasten $\mathbf{P}(t) \in \mathcal{L}$ die Ungleichung

$$\Phi[\alpha(\sigma^E(\mathbf{x}, t) + \bar{\rho}(\mathbf{x}))] \leq \sigma_0^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.10)$$

erfüllt ist, so wird die Struktur unter dem Lastbereich $\mathcal{L}$ elastisch einspielen.

Beweis:

Exemplarisch für ideal plastisches Material wird der Einspielsatz von MELAN bewiesen (siehe [Mel36]). Die Beweise der Einspielsätze für kinematisch verfestigendes Material folgen einem ähnlichen Schema und sind z.B. in [Mel38], [Kö87], [WGW88] und [Zha91] dargestellt. Zum Beweis wird das mit ρ zeitabhängige Funktional J betrachtet:

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\rho - \bar{\rho}] : \mathbf{E}^{-1} : [\rho - \bar{\rho}] \, d\Omega. \quad (3.11)$$

Es kann angenommen werden, daß $\rho(\mathbf{x}, t = 0) = 0$ gilt. Da $\mathbf{E}^{-1}$ positiv definit ist, ist J nicht negativ. Für die zeitliche Ableitung von J ergibt sich mit der Symmetrie von $\mathbf{E}^{-1}$:

$$\dot{J} = \int_{\Omega} [\rho - \bar{\rho}] : \mathbf{E}^{-1} : \dot{\rho} \, d\Omega. \quad (3.12)$$

Wendet man Gleichung (2.29) auf das Eigenspannungsfeld $\rho - \bar{\rho}$ an, so gilt:

$$\int_{\Omega} [\rho - \bar{\rho}] : [\mathbf{E}^{-1} : \dot{\rho} + \dot{\epsilon}^p] d\Omega = 0. \quad (3.13)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (3.13) in Gleichung (3.12) erhält man:

$$\begin{aligned} \dot{J} &= - \int_{\Omega} [\rho - \bar{\rho}] : \dot{\epsilon}^p d\Omega = - \int_{\Omega} [\underbrace{(\sigma^E + \rho)}_{\sigma} - (\sigma^E + \bar{\rho})] : \dot{\epsilon}^p d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} [\sigma - (\sigma^E + \bar{\rho})] : \dot{\epsilon}^p d\Omega \leq 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die Nichtpositivität der Ableitung folgt aus der Zulässigkeit der Spannung $\sigma^E + \bar{\rho}$ und dem DRUCKERSchen Postulat. Das Funktional J ist somit nach unten beschränkt und monoton fallend, so daß es gegen eine Konstante konvergieren muß. Damit müssen auch die Eigenspannung ρ gegen ein konstantes Eigenspannungsfeld konvergieren, d. h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(x, t) = \bar{\rho}(x) \quad \text{und damit} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\epsilon}^p(x, t) = 0. \quad (3.15)$$

Diese Eigenschaften folgen aus der notwendigen Bedingung für das Einspielen (3.8). Für den Beweis des Satzes muß noch überprüft werden, ob die plastische Dissipationsenergie endlich bleibt. Aus $\Phi(\alpha(\sigma^E + \bar{\rho})) \leq \sigma_0^2$ und der Ungleichung (2.19) folgt (siehe [Kö87]):

$$[\sigma - \alpha(\sigma^E + \bar{\rho})] : \dot{\epsilon}^p \geq 0, \quad \text{bzw.} \quad \sigma : \dot{\epsilon}^p \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} (\rho - \bar{\rho}) : \dot{\epsilon}^p. \quad (3.16)$$

Damit folgt für die plastische Dissipationsenergie:

$$\begin{aligned} W_p &= \int_0^\infty \int_{\Omega} \sigma : \dot{\epsilon}^p d\Omega d\tau \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_0^\infty \int_{\Omega} [\rho - \bar{\rho}] : \dot{\epsilon}^p d\Omega d\tau = -\frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_0^\infty \dot{J}(\tau) d\tau \\ &\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} J(0) = \frac{\alpha}{2\alpha - 2} \int_{\Omega} \bar{\rho} : \mathbf{E}^{-1} : \bar{\rho} d\Omega < \infty \end{aligned} \quad (3.17)$$

Daraus folgt, daß die plastische Dissipationsarbeit unter den getroffenen Voraussetzungen beschränkt bleibt und das System Ω unter dem Lastraum $\mathcal{L}$ elastisch einspielt. $\square$

Folgerung:

Nach den Voraussetzungen des Einspielsatzes für ideal plastisches Material können Strukturen mit Singularitäten in den fiktiven elastischen Spannungen nicht einspielen. In diesen Fällen existiert kein zeitunabhängiges Eigenspannungsfeld $\bar{\rho}$, welches die Voraussetzungen des Einspielsatzes erfüllt, da es auch ein singuläres Spannungsfeld sein müßte, im Widerspruch zur Bedingung $\int_{\Omega} \bar{\rho} : \mathbf{E}^{-1} : \bar{\rho} d\Omega < \infty$. Da Strukturen mit Rissen unter bestimmten Belastungen Spannungssingularitäten ausbilden, können sie unter diesen

Belastungen nicht einspielen. Andererseits existiert zu bestimmten Strukturen mit Riß eine wohldefinierte statische Traglast. Beim statischen Traglastsatz (siehe z.B. [Pra76] und [PH54]) wird nur die Existenz eines Eigenspannungsfelds ρ benötigt, welches durch die Überlagerung mit den fiktiven elastischen Spannungen σ^E einen zulässigen Spannungszustand σ ergibt. Die Forderung der Endlichkeit von $\int_{\Omega} \bar{\rho} : E^{-1} : \bar{\rho} d\Omega$ wird im statischen Traglastsatz nicht benötigt, so daß auch singuläre Spannungsfelder behandelt werden können (siehe auch die Beispiele defekter Strukturen in Abschnitt 8). Insofern ist der statische Traglastsatz formal eine Erweiterung des statischen Einspielsatzes, da der Einspielsatz durch Hinzunahme von weiteren Voraussetzungen aus dem Traglastsatz entsteht.

Der größte Wert α_{shake} , der die Bedingungen des Satzes von MELAN erfüllt heißt (elastischer) *Einspielfaktor* (shakedown-factor). Besteht der Lastraum $\mathcal{L}$ nur aus einem Punkt, so wird der maximale Faktor α_{limit} *Traglastfaktor* genannt. Im weiteren werden die beiden Faktoren α_{shake} und α_{limit} auch zusammenfassend als Grenzlasterfaktoren α bezeichnet, wenn ersichtlich ist, um welche Art der Belastung es sich handelt. Jeder Faktor α , für den ein zeitunabhängiges Eigenspannungsfeld $\bar{\rho}$ existiert, so daß die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind, ist eine untere Schranke für den exakten Einspiel- bzw. Traglastfaktor.

In der allgemeinen *Traglast-* bzw. *Einspielanalyse* ist die Berechnung von α_{limit} bzw. α_{shake} das Ziel. Die Lösung dieser Fragestellung führt auf das mathematische Optimierungsproblem

$$\max \quad \alpha \quad (3.18)$$

$$\text{unter} \quad \Phi[\alpha \sigma^E(x, t) + \bar{\rho}(x)] \leq \sigma_0^2(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (3.19)$$

$$\text{div } \bar{\rho}(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (3.20)$$

$$\bar{\rho}(x) n = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega_{\sigma}. \quad (3.21)$$

Dabei kann der Faktor α vor der zeitunabhängigen Eigenspannung $\bar{\rho}$ wegfallen, da die Eigenspannungen den Kern von Φ bilden. Dieses Optimierungsproblem faßt die statische Zulässigkeit der Spannungen σ^E und den Satz von MELAN zusammen. Da das DRUCKERSche Postulat vorausgesetzt wurde, ist dies ein konvexes Maximierungsproblem, so daß ein lokales Maximum des Problems auch das globale Maximum ist (siehe z.B. [Lue84]). Daher führt der Satz zu einem eindeutig berechenbaren Grenzlasterfaktor. Das Problem hat mit den Materialpunkten unendlich viele Nebenbedingungen, welche durch eine Finite-Elemente Diskretisierung reduziert werden können. Da hier die VON MISES-Fließfunktion benutzt wird, handelt sich um ein nichtlineares Optimierungsproblem. Diese Nichtlinearität steigert den Lösungsaufwand erheblich, so daß es Bestrebungen gab, dies durch die Verwendung der TRESKA-Fließfunktion zu umgehen (siehe z.B. [AK72], [CZ74], [DG57], [Gen88], [KL65], [Mai69] und [She86]). Hier wird jedoch darauf verzichtet.

Dabei muß beachtet werden, daß die Voraussetzungen in jedem Punkt $x \in \Omega$ überprüft werden

müssen, um sichergehen zu können, daß eine echte untere Schranke von α_{shake} bzw. α_{limit} erhalten wird. Im Allgemeinen können die Voraussetzungen des Satzes von MELAN jedoch nicht in jedem Punkt der Struktur überprüft werden. Ausnahmen bilden Strukturen, die in jedem Punkt die gleichen Spannungsformen haben, z.B. ein unendlich dünnes Rohr unter Innendruck (siehe die Untersuchung von BREE in [Bre67]). Diese Strukturen bilden jedoch die Ausnahme und existieren nur näherungsweise, so daß davon ausgegangen werden kann, daß die Voraussetzungen des Einspielsatzes nicht in jedem Punkt überprüft werden können und damit die erhaltenen Grenzlasterfaktoren nicht mit Sicherheit Schrankencharakter für die wahren Werte von α_{limit} bzw. α_{shake} haben. Weiterhin werden die Spannungen in den Punkten $\mathbf{x}$ in der Regel mit Hilfe der Finiten-Element-Methode berechnet und sind somit nur Näherungen.

Durch die Einspielanalyse erhält man einen begrenzenden sicheren Lastbereich, in dem die Lasten mit beliebiger Lastgeschichte variieren können. In der Formulierung der Einspielanalyse wurde davon ausgegangen, daß sich die Werte der Fließspannungen im Laufe der Belastung nicht ändern. Bei thermischen Belastungen ändert sich jedoch die Fließspannung mit der Temperatur T , d.h. $\sigma_0 = \sigma_0(T)$. Im folgenden Abschnitt wird kurz darauf eingegangen.

Einspielen von thermisch belasteten Systemen

Bei hoher Temperaturbelastung können Effekte auftreten, die bei Raumtemperatur kaum eine Rolle spielen (z.B. Kriechen und temperaturabhängige Fließspannung). Hier wird nur eine Erweiterung der statischen Sätze für temperaturabhängige Fließspannung angegeben, wobei angenommen wird, daß die Gestalt der Fließfläche nicht von der Temperatur abhängt (siehe [Chi93], [Smi74]). Die Fließspannung sei eine monoton fallende Funktion der Temperatur T , d.h.

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) \leq \sigma_0^2(T) \quad \text{und} \quad \sigma_0(T_1) \leq \sigma_0(T_2) \quad \forall T_1 \geq T_2. \quad (3.22)$$

Kann die Temperaturabhängigkeit des E-Moduls vernachlässigt werden, so läßt sich der statische Einspielsatz erweitern (siehe [GC80], [Kö87]):

Satz 3.1

Existiert ein Faktor $\alpha > 1$ und zeitunabhängige Eigenspannungen $\bar{\rho}(\mathbf{x})$ mit $\int_{\Omega} \bar{\rho} : \mathbf{E}^{-1} : \bar{\rho} \, d\Omega < \infty$, so daß für alle Lasten $\mathbf{P}(t) \in \mathcal{L}$

$$\Phi[\alpha \boldsymbol{\sigma}^E(\mathbf{x}, T, t) + \bar{\rho}(\mathbf{x})] \leq \sigma_0^2(\mathbf{x}, T) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.23)$$

erfüllt ist, so spielt die Struktur unter dem Lastbereich $\mathcal{L}$ elastisch ein.

Das diesem Satz entsprechende Optimierungsproblem wird dann mit den temperaturabhängigen Fließspannung $\sigma_0(T)$ aufgestellt (siehe auch Abschnitt 6).

3.2 Einspielsatz für unbeschränkt linear kinematisch verfestigendes Material

MELAN hat schon in [Mel38] einen Einspielsatz für linear kinematisch verfestigendes Material angegeben. Da in Abschnitt 6 einige spezielle Einspielanalysen analytisch gelöst werden, werden hier kurz die nötigen Einspielsätze dargelegt. MELAN geht davon aus, daß sich die aktuellen Spannungen σ darstellen lassen durch $\sigma = \nu + \alpha$. Die Spannungen α beschreiben die Verschiebung der Anfangsfließfläche im Spannungsraum und werden *backstresses* genannt. Um das Fließen der Struktur festzustellen, wird der Anteil ν in die Fließfunktion eingesetzt: $\Phi(\nu) = \Phi(\sigma - \alpha) \leq \sigma_0^2$. Dieses Modell beschreibt eine unbeschränkte lineare kinematische Verfestigung und kann den BAUSCHINGEREffekt eines Materials darstellen (siehe [Mel38]). Der Einspielsatz nach MELAN ([Mel38]) für unbeschränkt linear kinematisch verfestigendes Material lautet:

Satz 3.2

Existiert ein Faktor $\alpha > 1$, ein zeitunabhängiges Eigenspannungsfeld $\bar{\rho}$ und ein zeitunabhängiges Backstressfeld $\bar{\alpha}$ mit $\int_{\Omega} \bar{\rho}^T : E^{-1} : \bar{\rho} d\Omega < \infty$, so daß

$$\Phi[\alpha(\sigma^E(\mathbf{x}, t) + \bar{\rho}(\mathbf{x}) - \bar{\alpha}(\mathbf{x}))] \leq \sigma_0^2(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \forall \mathbf{P}(t) \in \mathcal{L} \quad (3.24)$$

erfüllt ist, so wird die Struktur unter dem Lastbereich $\mathcal{L}$ elastisch einspielen.

3.3 Einspielsatz für beschränkt linear kinematisch verfestigendes Material

Die notwendigen Einspielbedingung für Strukturen aus beschränkt kinematisch verfestigendem Material lauten nach ZHANG [Zha91] mit der Fließspannung σ_0 und der Bruchspannung σ_Y (siehe dazu auch [Mas24], [Mro67], [WGW88]):

Satz 3.3

Existiert ein Faktor $\alpha > 1$, ein zeitunabhängiges Eigenspannungsfeld $\bar{\rho}$ und ein zeitunabhängiges Backstressfeld $\bar{\alpha}$ mit $\int_{\Omega} \bar{\rho}^T : E^{-1} : \bar{\rho} d\Omega < \infty$ und

$$\Phi[\alpha\bar{\alpha}(\mathbf{x})] \leq [\sigma_Y(\mathbf{x}) - \sigma_0(\mathbf{x})]^2, \quad (3.25)$$

so daß für alle Lasten $\mathbf{P}(t) \in \mathcal{L}$

$$\Phi[\alpha(\sigma^E(\mathbf{x}, t) + \bar{\rho}(\mathbf{x}) - \bar{\alpha}(\mathbf{x}))] \leq \sigma_0^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.26)$$

erfüllt ist, so wird die Struktur unter dem Lastbereich $\mathcal{L}$ elastisch einspielen.

4 Behandlung diskretisierter Systeme

4.1 Strukturdiskretisierung durch finite Elemente

Um die Traglast- bzw. Einspielanalyse auf beliebige Systeme anwenden zu können, ist es notwendig, die Möglichkeiten der Finiten-Element-Methode (FEM) zu nutzen. Nach den Bemerkungen in Abschnitt 3.1 geht der Schrankencharakter der erhaltenen Grenzlastfaktoren durch die approximative Berechnung der auftretenden Spannungen eventuell verloren. Um ein großes Spektrum von Strukturen abzudecken, wurde zur Implementierung der Grenzlastanalyse das kommerzielle Finite-Element-Programm PERMAS der Firma INTES benutzt (siehe [PER88]). PERMAS ist in der Version IV hinreichend offen, um die Grenzlastanalyse ohne direkte Hilfe des Herstellers als Subroutine zu implementieren.

Das benutzte FE-Programm wird dazu benutzt, für ideal plastisches Material die fiktiven elastischen Spannungen σ^E sowie Eigenspannungen ρ zu berechnen. Die Berechnung des größten Lastfaktors wird dann unabhängig vom FE-Programm durchgeführt.

Nach den theoretischen Ansätzen der Grenzlastanalyse wäre eine Implementierung mit Spannungsansätzen sinnvoll, da der Satz von MELAN in statischen Größen (Spannungen) formuliert ist. Mit Hilfe der AIRYSchen Ansatzfunktionen hat es solche Ansätze für ebene Probleme gegeben (siehe [Bel72], [WGW88]). Aufgrund der Nachteile bei der Definition geeigneter finiter Elemente wurde diese Methode hier jedoch nicht verfolgt. Bei der Implementation der Grenzlastanalyse wurde daher die in PERMAS (und in allen bedeutsamen kommerziellen FEM-Programmen) benutzte Verschiebungsmethode verwendet.

Bei der Finite-Element-Methode wird die Struktur Ω in N_e finite Elemente aufgeteilt mit den GAUSSpunkten $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \dots, N_G$. Da die Voraussetzungen des Einspielsatzes von MELAN nicht in jedem Punkt der Struktur überprüft werden können, werden die Bedingungen nur in den GAUSSpunkten der Struktur überprüft. Um die Korrektheit der berechneten Spannungen zu garantieren, ist der durch die Diskretisierung der Struktur entstandenen Fehler abzuschätzen (siehe [PER88]). Zur Reduzierung des Fehlers können wie bei jeder herkömmlichen Finite-Element-Berechnung gegebenenfalls adaptive Netzverfeinerungen durchgeführt werden.

Die Struktur Ω wird durch die Last $P(t)$ belastet und die diskretisierten fiktiven elastischen Spannungen $\sigma_i^E(t) = \sigma^E(\mathbf{x}_i, t)$ werden mit Hilfe der Verschiebungsmethode berechnet. Mit den diskretisierten Eigenspannungen $\rho_i = \rho(\mathbf{x}_i)$ lautet die diskretisierte Fassung der notwendigen Bedingung (3.8) mit der Fließspannung $\sigma_{0,i}$ in jedem GAUSSpunkt i :

$$\Phi(\sigma_i^E(t) + \rho_i) \leq \sigma_{0,i}^2.$$

Zur weiteren Untersuchung werden folgende Abkürzungen eingeführt.¹

N_G Anzahl der GAUSSpunkte der Struktur

N_{SK} Anzahl der Spannungskomponenten je GAUSSpunkt

N_F Anzahl der Freiheitsgrade der Struktur

Das FE-Programm PERMAS berechnet die lastabhängigen elastischen Spannungen $\sigma_i^E(t)$ nach der Verschiebungsmethode (siehe [PER88]). Über einen Verschiebungsansatz und das Prinzip der virtuellen Verschiebungen werden mit Hilfe der Elementmatrizen, der Elementinzenzmatrix und der Globalmatrix die diskretisierten homogenen Gleichgewichtsbedingungen der Eigenspannungen ρ_i formal aufgestellt (siehe Abschnitt 4.3, [AM87], [PER88], [SH97d], [Zha91]):

$$\sum_{i=1}^{N_G} C_i \rho_i = 0. \quad (4.1)$$

Die Elementmatrizen C_i berechnen sich aus den virtuellen Knotenverschiebungen und den geometrischen Randbedingungen der Struktur; es gilt $C_i \in \mathbb{R}^{N_F \times N_{SK}}$ und $\rho_i \in \mathbb{R}^{N_{SK}}$. Die Gleichung (4.1) stellt somit die diskrete Formulierung der Gleichungen (3.20) und (3.21) im GAUSSpunkt i dar. Faßt man die Matrizen C_i und die Vektoren ρ_i zusammen durch $C = (C_1, \dots, C_{N_G})$ bzw. $\varrho^T = (\rho_1^T, \dots, \rho_{N_G}^T)$, so geht Gleichung (4.1) über in

$$C \varrho = 0. \quad (4.2)$$

Die Matrix C ist durch die gewählte Diskretisierung und die Randbedingungen eindeutig festgelegt; es gilt $C \in \mathbb{R}^{N_F \times (N_{SK} \cdot N_G)}$ und $\varrho \in \mathbb{R}^{N_{SK} \cdot N_G}$. Da nur Strukturen untersucht werden, die keine Starrkörperverschiebung zulassen, besitzt die Matrix C maximalen Rang, der durch die Anzahl der Freiheitsgrade N_F von Ω gegeben ist.

Die Menge aller Vektoren ϱ , die die Gleichung (4.2) erfüllen, bilden den Kern der durch die Matrix C definierten Abbildung. Damit ist die Menge dieser Vektoren ϱ mit der Vektoraddition und der skalaren Multiplikation ein Vektorraum $\mathcal{B}$, der *Eigenspannungsraum* genannt wird. Die Dimension des Eigenspannungsraums $\mathcal{B}$ ist gegeben durch den Defekt der durch die Matrix C gegebenen Abbildung $\dim(\mathcal{B}) = N_{SK} \cdot N_G - N_F$. Im allgemeinen ist die Anzahl der GAUSSpunkte wesentlich größer als die der Verschiebungsfreiheitsgrade $N_G \gg N_F$, so daß die Dimension des Eigenspannungsraums $\mathcal{B}$ im wesentlichen durch die Anzahl der GAUSSpunkte N_G und durch N_{SK} gegeben ist. Somit wird in der Grenzlasteranalyse folgendes Optimierungsproblem gelöst mit $\varrho^T = (\rho_1^T, \dots, \rho_{N_G}^T)$:

$$\max \quad \alpha \quad (4.3)$$

$$\text{unter} \quad \Phi[\alpha \sigma_i^E(t) + \bar{\rho}_i] \leq \sigma_{0,i}^2 \quad i = 1, \dots, N_G, \quad P(t) \in \mathcal{L}, \quad \varrho \in \mathcal{B}. \quad (4.4)$$

¹Zur Vereinfachung der Darstellung wird o.B.d.A. angenommen, daß N_{SK} für alle GAUSSpunkte gleich ist.

Dieses Optimierungsproblem hat die Unbekannten $\bar{p}_i$ und α , d.h. insgesamt $N_{SK} \cdot N_G + 1$ und durch die Zeitabhängigkeit von σ_i^E unendlich viele Nebenbedingungen. Zwar ist die Anzahl der Unbekannten reduziert worden, die Anzahl der Nebenbedingungen ist jedoch weiterhin unendlich, was die Lösung erheblich erschwert. Im nächsten Abschnitt wird die Möglichkeit einer Diskretisierung des Belastungsraums $\mathcal{L}$ beschrieben, so daß die Anzahl der Nebenbedingungen endlich wird und die Grenzlastanalyse erheblich vereinfacht wird.

4.2 Lastdiskretisierung

Im Lastbereich $\mathcal{L}$ sind beliebige Lasten zusammengefaßt, die auf die Struktur Ω einwirken. Durch die Variable t ist jede Last in $\mathcal{L}$ durch $P(t)$ charakterisiert. Soll durch den Lastbereich eine zyklische Belastung abgebildet werden, so liegen unendlich viele Belastungen $P(t)$ in $\mathcal{L}$. Sie alle müssen die hinreichenden Bedingungen im Falle des elastischen Einspiels erfüllen.

Meist ist die zyklische Belastung jedoch durch endlich viele N_L unabhängige Lastfälle $P(k)$, $k = 1, \dots, N_L$ bestimmt. Diese Lastfälle bewegen sich während der gesamten Belastung zwischen gegebenen Grenzen $P^-(k)$ und $P^+(k)$. Als Beispiele dienen Strukturen belastet durch zyklische Druck- bzw. Zugbelastungen, die zwischen der jeweiligen Maximallast und der Minimallast variieren (siehe dazu [KK78]). Der Ort der Lastaufbringung bleibt konstant, d.h. der Lastrand ändert sich nicht. Da ein wesentlicher Teil der praktischen Problem Belastungen dieses Typs beinhaltet, werden ab jetzt nur noch Belastung dieser Art untersucht (siehe [Kö87]).

Auch für erweiterte Formen der zyklischen Belastung ist es möglich, Einspiellasten mit Hilfe der Einspielanalyse durchzuführen. SHEN untersucht zum Beispiel in [She86] bewegte Lasten auf Scheiben, KAPOOR und JOHNSON betrachten in [KJ94] Kontaktstrukturen und deren Einspielen und STUMPF bestimmt in [Stu93] Einspiellasten für nichtproportionale Belastungen, um einige Beispiele zu nennen.

Die so bestimmten zyklischen Belastungen lassen sich durch die Lastfälle $P(1), \dots, P(N_L)$ darstellen mit

$$P(t) = \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j P(j). \quad (4.5)$$

Somit wird jede Belastung $P(t) \in \mathcal{L}$ durch die Basislasten $P(1), \dots, P(N_L)$ erzeugt. Wird zusätzlich angenommen, daß die Basislasten durch die jeweiligen Maximallasten gegeben sind, so läßt sich die Last $P(t)$ eindeutig als Konvexkombination der Basislasten $P(j)$ darstellen, d.h. es gilt zusätzlich

$$\sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j = 1, \quad \text{und} \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N_L. \quad (4.6)$$

Daraus folgt, daß der Lastbereich $\mathcal{L}$ ein durch die Basislasten $P(1), \dots, P(N_L)$ erzeugtes konvexes Polyeder ist, wobei die Basislasten die Ecken des Polyeders bilden und daraus folgend auch *Lastecken* genannt werden. Dadurch lassen sich die hinreichenden Bedingungen für das Einspielen vereinfacht formulieren. Dazu betrachtet man die fiktiven elastischen Spannungen $\sigma_i^E(t)$, die in den hinreichenden Bedingungen als einzige von t abhängige Größe vorkommen. Dazu sei $\sigma_i^E(j)$ diejenige elastische Spannung im GAUSSpunkt $\mathbf{x}_i$, die zur Basislast $P(j)$ gehört, sie wird Basisspannung genannt. Aus dem Superpositionsprinzip für elastische Lasten folgt, daß sich die Spannung $\sigma_i^E(t)$ konvex aus den Basisspannungen $\sigma_i^E(j)$ zusammensetzt:

$$\sigma_i^E(t) = \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j \sigma_i^E(j). \quad (4.7)$$

Für die Gültigkeit von Ungleichung (4.4) im GAUSSpunkt $\mathbf{x}_i$ reicht schon die abgeschwächte Forderung für die Basisspannungen $\sigma_i^E(j)$

$$\Phi(\alpha \sigma_i^E(j) + \bar{\rho}_i) \leq \sigma_{0,i}^2, \quad (4.8)$$

denn nimmt man (4.8) für alle j an, so folgt aus der Konvexität von Φ in allen Punkten $\mathbf{x}_i$:

$$\begin{aligned} \Phi[\alpha \sigma_i^E(t) + \bar{\rho}_i] &= \Phi[\alpha \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j \sigma_i^E(j) + \bar{\rho}_i] = \Phi[\sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j (\alpha \sigma_i^E(j) + \bar{\rho}_i)] \\ &\leq \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j \Phi[\alpha \sigma_i^E(j) + \bar{\rho}_i] \leq \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j \sigma_{0,i}^2 = \sigma_{0,i}^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Damit folgt die Zulässigkeit der aktuellen Spannung $\alpha \sigma_i^E(t) + \bar{\rho}_i$ im GAUSSpunkt $\mathbf{x}_i$ direkt aus der Zulässigkeit der N_L Spannungen $\alpha \sigma_i^E(j) + \bar{\rho}_i$ im Punkt $\mathbf{x}_i$ und der Konvexität des Lastbereiches $\mathcal{L}$. Die hinreichenden Bedingungen (4.4) müssen nur noch für die Basislasten überprüft werden, was eine wesentliche Vereinfachung der Grenzlastanalyse bedeutet. Für die Traglastanalyse wird dementsprechend nur eine Lastecke betrachtet. Bei der Grenzlastanalyse für ideal plastisches Material nach der Lastdiskretisierung wird dann folgendes Problem gelöst:

$$\max \quad \alpha \quad (4.10)$$

$$\text{unter} \quad \Phi[\alpha \sigma_i^E(j) + \bar{\rho}_i] \leq \sigma_{0,i}^2 \quad i = 1, \dots, N_G, \quad j = 1, \dots, N_L, \quad \varrho \in \mathcal{B}. \quad (4.11)$$

Die Unbekannten dieses Problems sind weiterhin die zeitunabhängigen Eigenspannungen $\bar{\rho}_i$ und der Lastfaktor α , d.h. man hat insgesamt $N_{SK} \cdot N_G + 1$ Unbekannte. Die Anzahl der Nebenbedingungen hat sich auf endlich viele reduziert. Insgesamt folgt aus der Lastdiskretisierung, daß $N_L \cdot N_G$ Ungleichungsnebenbedingungen resultierend aus der Fließbedingung und N_F Gleichungsnebenbedingungen resultierend aus der Dimension von $\mathbf{C}$ zu erfüllen sind.

Zwar ist die Anzahl der Nebenbedingungen jetzt endlich, für realistische Finite-Element-Modelle mit N_G GAUSSpunkten muß man jedoch weiterhin $O(N_G)$ Unbekannte und $O(N_G)$ Nebenbedingungen betrachten. Durch *Active-Set*-Strategien (siehe Kapitel 5) ist zwar die Menge der Nebenbedingungen während der Optimierung reduzierbar, die Menge der Unbekannten macht jedoch für realistische Strukturen die Lösung mit herkömmlichen Mitteln nahezu unmöglich.

4.3 Der Eigenspannungsraum $\mathcal{B}$

Die Menge aller Eigenspannungsverteilungen einer Struktur Ω bildet nach der Definition in Abschnitt 2 zusammen mit der skalaren Multiplikation und der Vektoraddition einen linearen, unendlich dimensionalen Vektorraum. Durch die in Abschnitt 4 vorgestellte Diskretisierung der Struktur ist durch die Menge der diskreten Eigenspannungsverteilungen ein linearer, endlich dimensionaler Vektorraum gegeben. Die Dimension dieses Vektorraums $\mathcal{B}$ ist bestimmt durch die Diskretisierung und nach Gleichung (4.2) gilt $\dim \mathcal{B} = N_G \cdot N_{SK} - N_F$. Die Dimension von $\mathcal{B}$ steigt somit mit der Anzahl der GAUSSpunkte, so daß die Anzahl der Unbekannten für realistische FE-Modelle die Lösung mit herkömmlichen Optimierungsmethoden nahezu unmöglich macht.

4.3.1 Basisreduktionsverfahren

Zur Lösung dieser Problematik wird der folgende Ansatz der Basisreduktion gewählt (siehe [She86], [Zha91]). Statt im gesamten Eigenspannungsraum $\mathcal{B}$ die Lösung des Optimierungsproblems (4.10) und (4.11) zu suchen, beschränkt man sich auf einen Teilraum $\mathcal{B}_d$ von $\mathcal{B}$ der Dimension d . Durch die iterative Wahl verschiedener Unterräume $\mathcal{B}_d^k$ in einer Iterationsstufe k werden die in den Unterräumen erhaltenen Lösung α_k verbessert. Die Dimension der gewählten Unterräume ist im Vergleich zur Dimension des Raums $\mathcal{B}$ sehr gering, im allgemeinen wird $\dim \mathcal{B}_d^k \leq 6$ gewählt. Da alle $\mathcal{B}_d^k$ Teilräume von $\mathcal{B}$ sind, lassen sich alle Vektoren $\rho^k \in \mathcal{B}_d^k$ durch d linear unabhängige Vektoren b_i^k (Basisvektoren) darstellen. Es gibt demnach reelle Zahlen $\mu_1, \dots, \mu_d$, so daß für alle $\rho^k \in \mathcal{B}_d^k$ gilt:

$$\rho^k = \mu_1 b_1^k + \mu_2 b_2^k + \dots + \mu_d b_d^k. \quad (4.12)$$

Die Koeffizienten $\mu_1, \dots, \mu_d$ lassen sich zu einem d -dimensionalen Vektor μ zusammenfassen. Dadurch läßt sich das diskretisierte Optimierungsproblem (4.10) und (4.11) nur noch in den Basisvektoren formulieren. Die Unbekannten des Problems sind dann α und der die Koeffizientenvektor μ . Faßt man die Basisvektoren b_i^k , $i = 1, \dots, d$ des Unterraums $\mathcal{B}_d^k$ von $\mathcal{B}$ zu einer Spaltenmatrix $B^{d,k}$ zusammen

$$B^{d,k} = (b_1^k, \dots, b_d^k),$$

so existiert für jeden Vektor $\rho^k \in \mathcal{B}_d^k$ ein Vektor $\mu^k \in \mathbb{R}_d$ mit

$$\rho^k = \mu_1 b_1^k + \dots + \mu_d b_d^k = B^{d,k} \mu^k.$$

Hat man zu Problem (4.10) und (4.11) in der Iterationsstufe $k - 1$ einen optimalen Lastfaktor α^{k-1} und eine optimale Eigenspannungsverteilung ρ^{k-1} gefunden mit $\rho^0 = 0$, so lautet das zu

lösende Optimierungsproblem in der k -ten Iterationsstufe im k -ten Unterraum $\mathcal{B}_d^k$:

$$\begin{aligned} & \max \quad \alpha^k \\ \text{unter} \quad & \Phi[\alpha^k \boldsymbol{\sigma}_i^E(j) + \boldsymbol{\rho}_i^{k-1} + \mathbf{B}_i^{d,k} \boldsymbol{\mu}^k] \leq \sigma_{0,i}^2 \quad i = 1, \dots, N_G, j = 1, \dots, N_L, \boldsymbol{\mu}^k \in \mathbb{R}^d. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dieses Problem hat demnach nur $d + 1$ (α^k und $\boldsymbol{\mu}^k$) Unbekannte und N_G Nebenbedingungen.

Dieses Verfahren der Basisreduktion entspricht einem in der mathematischen Optimierung üblichen Vorgehen. Statt in der gesamten Restriktionsmenge zu suchen, wird eine niederdimensionale Suchrichtung definiert, in der dann die Optimierung durchzuführen ist (siehe z.B. [Fle87]). Bild 4.1 zeigt eine Veranschaulichung dieses Verfahrens für eine zweidimensionale konvexe Restriktionsmenge mit konvexer Zielfunktion. Die Unterräume entsprechen eindimensionalen Suchrichtungen, so daß jeder Teilschritt einer Iterationsstufe k entspricht.

Zu klären ist nun noch, wie die Eigenspannungsunterräume $\mathcal{B}_d^k$ zu wählen sind, so daß durch das iterative Verfahren zur Optimierung stets das Optimum im gesamten Eigenspannungsraum $\mathcal{B}$ erreicht wird. Diese Wahl ist bestimmt durch die Wahl geeigneter Basisvektoren der Teilräume $\mathcal{B}_d^k$. Dazu ist zu bestimmen, wie man ein Eigenspannungsfeld berechnet und wenn dies berechnet ist, ob in jeder Iterationsstufe ein verbesserter Lastfaktor erhalten werden kann.

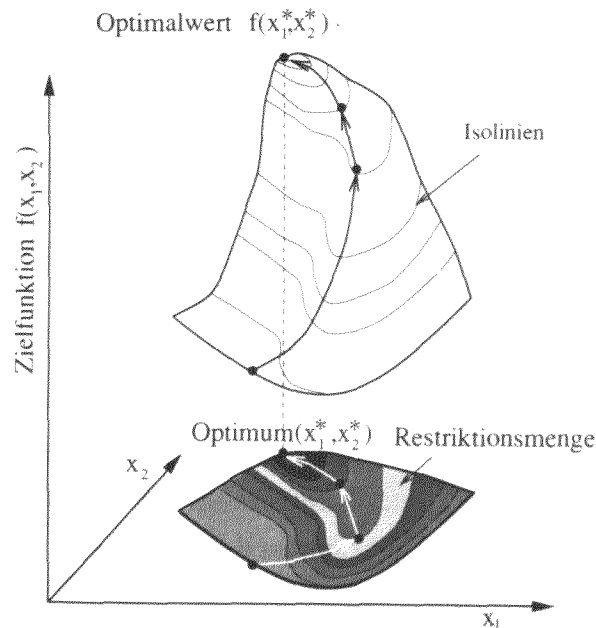


Bild 4.1: Veranschaulichung der Optimierung in Unterräumen

4.3.2 Erzeugung der Eigenspannungsunterräume

SHEN gibt in [She86] ein Verfahren zur Berechnung von Eigenspannungsfeldern mit Hilfe der FEM an. Darin werden die notwendigen Basiseigenspannungen durch eine plastische Gleich-

gewichtsiteration erzeugt. GROSS–WEEGE und WEICHERT geben in [GW96] eine abgewandelte Methode zur Erzeugung der Basisvektoren an. BUCKTHORPE und WHITE generieren in [BW93b] und [BW93a] einen Eigenspannungsteilraum durch eine thermische Belastung. SIEBLER führt in [Sie88] *Eigenspannungsansatzfunktionen* ein, um die nötigen Eigenspannungsbasen zu erhalten. Dies ist jedoch nur sinnvoll, wenn die Belastungsart auch dementsprechend ist. Auch bei rein mechanischer Belastung kann auf diesem Weg zwar ein Eigenspannungsteilraum erzeugt werden, aber dieser steht mit dem zu untersuchenden zeitunabhängigen Eigenspannungsfeld $\bar{\rho}$ in keinen direkten Zusammenhang. Beim Ansatz nach SHEN entsteht der generierte Eigenspannungsteilraum mit Hilfe der jeweiligen Belastung, deshalb wird dieser Ansatz weiter verfolgt.

Zur Einspielloptimierung nach der Unterraumtechnik müssen in der Iteration verschiedene Unterräume $\mathcal{B}_d$ der Dimension d des Eigenspannungsraums $\mathcal{B}$ erzeugt werden. Hier wird der Eigenspannungsraum $\mathcal{B}_d$ in einer Gleichgewichtsiteration mit Hilfe des FE-Programms PERMAS erzeugt (siehe [PER88]). Durch die Nutzung eines allgemeinen FE-Programms ist es möglich, alle Belastungsarten (Knoten-, Linien-, Flächen- und Volumenlasten, . . .), Elementtypen (ein-, zwei- und dreidimensionale Elemente) und Strukturtypen (ein-, zwei- bzw. dreidimensional, rotationssymmetrisch) zu behandeln. Das Reduktionsverfahren kann auch in andere FE-Programme implementiert werden, die das Verfahren hinreichend unterstützen.

In der plastischen Finite-Element Berechnung in PERMAS werden ausgehend von einer elastischen Berechnung iterativ weitere Lastinkremente aufgebracht. In PERMAS IV ist das folgende Verfahren implementiert. Die dargestellte Nomenklatur entspricht der aus [AM87] und [PER88] (siehe auch Anhang A.2), wobei die Dehnungen η_p den Dehnungen ϵ^p entsprechen.

Ausgehend von einem Spannungszustand σ_0 , resultierend aus einem vorherigen Iterationsschritt, und den plastischen Dehnungen η_0 wird zu Beginn der Iteration folgendes berechnet:

1. Das plastische Dehnungsinkrement $\eta_{p\Delta}$ wird aus dem äquivalenten plastischen Dehnungsinkrement $\bar{\eta}_{p\Delta}$ und einer dem Deviator von σ proportionaler Spannung s berechnet:

$$\eta_{p\Delta} = \bar{\eta}_{p\Delta} s.$$

2. Über die elastische Materialsteifigkeit ξ wird das Elementanfangslastinkrement $\mathbf{J}_{p\Delta}$ berechnet

$$\mathbf{J}_{p\Delta} = -h \xi \eta_{p\Delta}.$$

3. Das Gesamtlastinkrement der Gesamtstruktur $\mathbf{R}_{T\Delta}$ setzt sich aus dem Anfangslastinkrement $\mathbf{R}_{\Delta 1}$ und $\mathbf{J}_{p\Delta}$ mit der Elementinzidenzmatrix $\mathbf{a}$ zusammen

$$\mathbf{R}_{t\Delta} = \mathbf{R}_{\Delta 1} - \mathbf{a}^T \mathbf{J}_{p\Delta}.$$

4. Das Verschiebungsinkrement $\mathbf{r}_\Delta$ ist mit der Struktursteifigkeit $\mathbf{K}$ gegeben durch

$$\mathbf{r}_\Delta = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}_{t\Delta}.$$

5. Daraus berechnet man die Elementverschiebungsinkremente $\boldsymbol{\rho}_\Delta$

$$\boldsymbol{\rho}_\Delta = \mathbf{a} \mathbf{r}_\Delta.$$

6. Über die Dehnungsverschiebungsmatrix $\mathcal{A}$ und die elastische Materialsteifigkeit ξ werden die fiktiven Spannungsinkremente $\boldsymbol{\sigma}_{t\Delta}$ berechnet

$$\boldsymbol{\sigma}_{t\Delta} = \xi \mathcal{A} \boldsymbol{\rho}_\Delta.$$

7. Das aktuelle Spannungsinkrement $\boldsymbol{\sigma}_\Delta$ ergibt sich nun aus der Differenz des fiktiven Spannungsinkrements $\boldsymbol{\sigma}_{t\Delta}$ und dem plastische Dehnungsinkrement $\boldsymbol{\eta}_{p\Delta}$

$$\boldsymbol{\sigma}_\Delta = \boldsymbol{\sigma}_{t\Delta} - \xi \boldsymbol{\eta}_{p\Delta}.$$

8. Das tatsächliche Spannungsfeld $\boldsymbol{\sigma}$ berechnet sich aus der Summe der Anfangsspannung $\boldsymbol{\sigma}_0$ und des Spannungsinkrements $\boldsymbol{\sigma}_\Delta$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\sigma}_\Delta.$$

9. Aus diesen Spannungen wird dann das äquivalente plastische Dehnungsinkrement $\bar{\eta}_{p\Delta}$ berechnet und eine Konvergenzuntersuchung durchgeführt.

Ist das Konvergenzkriterium erfüllt, so wird $\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\sigma}$ gesetzt und mit einem neuen Lastinkrement $\mathbf{R}_{\Delta 1}$ begonnen. Andernfalls wird die inkrementelle Rechnung mit dem neuen äquivalenten plastischen Dehnungsinkrement $\bar{\eta}_{p\Delta}$ zu dem alten Lastinkrement $\mathbf{R}_{\Delta 1}$ durchgeführt. In der herkömmlichen plastischen Analyse wird diese Analyse bis zur Konvergenz durchgeführt. Danach wird eventuell eine neues Lastinkrement aufgebracht. Dabei wird die Steifigkeitsmatrix jedoch nicht aufdatiert. ZHANG wählt in [Zha91] die konsistente Elasto-Plastizitätsmatrix nach [ST85] und [GS88] zur Aufdatierung der Elastizitätsmatrix. Für große Systeme ist dies jedoch sehr aufwendig, so daß aus diesem Grund hier darauf verzichtet wurde. Eine tabellarische Erläuterung der PERMAS-Notation ist in Tabelle A.1 im Anhang A.2 gegeben. Alle gespeicherten Matrizen bzw. Vektoren werden PERMAS-intern als *Buch* bezeichnet.

Für die Reduktionstechnik wird jedoch nach einem Vorschlag von SHEN [She86] die Differenz $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma}_m - \boldsymbol{\sigma}_n$, zweier Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_m$, $\boldsymbol{\sigma}_n$, die in einer Iteration zu dem gleichen Lastinkrement $\mathbf{R}_{\Delta 1}$ berechnet wurden, gebildet. Die so entstandene Spannung $\boldsymbol{\sigma}_m - \boldsymbol{\sigma}_n$ ist eine Eigenspannung. Die statische Gleichgewichtsbedingung für die diskretisierte Struktur lautet mit dem Anfangslastinkrement $\mathbf{R}$ und der Struktursteifigkeit $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \mathbf{r} + \mathbf{a}^T \mathbf{J}_{p\Delta}.$$

Für das Spannungsfeld $\rho = \sigma_m - \sigma_n$ gilt die Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_m - \mathbf{R}_n = \mathbf{K}(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n) + \mathbf{a}^T(\mathbf{J}_{p\Delta m} - \mathbf{J}_{p\Delta n}) \\ &= [\mathbf{R}_{\Delta 1} - \mathbf{a}^T \mathbf{J}_{p\Delta m} - \mathbf{R}_{\Delta 1} + \mathbf{a}^T \mathbf{J}_{p\Delta n}] + \mathbf{a}^T(\mathbf{J}_{p\Delta m} - \mathbf{J}_{p\Delta n}) = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Die Spannungsdifferenz ρ befindet sich mit der Nulllast im Gleichgewicht und ist somit eine Eigenspannung. Um einen d -dimensionalen Eigenspannungsraum $\mathcal{B}_d$ zu erzeugen, muß diese Iteration also $d+1$ -mal durchgeführt werden, um die Spannungen $\sigma^1, \dots, \sigma^{d+1}$ und damit die Spannungsdifferenzen $\rho_1 = \sigma^2 - \sigma^1, \dots, \rho_d = \sigma^{d+1} - \sigma^1$ zu erhalten. Die Spannungen $\rho_1, \dots, \rho_d$ sind Eigenspannungen unabhängig davon, ob die Iteration konvergiert oder nicht.

Bei der Optimierung in der Einspielberechnung müssen im k -ten Iterationsschritt N_L Lastecken untersucht werden. Es wird jedoch nur in den aktiven Lastecken der vorherigen Iterationsstufe $k-1$ ein Lastinkrement $\mathbf{R}_j$ aufgebracht, mit dem dann die Basisvektoren berechnet werden. Insgesamt werden in jeder Iterationsstufe 3–6 Basisvektoren erzeugt, so daß eventuell nicht zu jeder aktiven Lastecke gleich viele Basisvektoren berechnet werden. Trotzdem ist gesichert, daß bei der Erzeugung der Basisvektoren Rücksicht auf die jeweilige Belastungsart genommen wird. In einer Iterationsstufe werden also d Basisvektoren erzeugt und in dem dadurch erzeugten d -dimensionalen Unterraum wird die Optimierung durchgeführt. Mit den dazugehörigen optimalen Werten α_k und ρ_k werden dann in der $k+1$ -ten Stufe d neue Basisvektoren und dadurch ein weiterer d -dimensionaler Unterraum erzeugt. Durch dieses Verfahren werden iterativ verschiedene d -dimensionale Unterräume berechnet.

ZHANG zeigt in [Zha91], daß für zwei-dimensionale Strukturen dieses iterative Vorgehen stets eine Verbesserung des Optimalwerts α^k im k -ten Unterraum erreicht werden kann. Dieses Lemma kann auch für dreidimensionale Strukturen bewiesen werden und bedeutet somit eine Erweiterung der Ergebnisse von ZHANG in [Zha91].

4.3.3 Entwicklung eines Kriteriums für den Lastanstieg

Ziel ist es, eine Bedingung zu erhalten, die garantiert, daß im jeweiligen erzeugten Unterraum ein Lastanstieg $\Delta\alpha^k > 0$ möglich ist. Der ebene Traglastfall wird in [Zha91] untersucht. Das dortige Kriterium wird auf dreidimensionale Probleme verallgemeinert. Sei dazu $\mathbf{b}_i^{1,k}$ ein Basisvektor eines eindimensionalen Unterraums $\mathcal{B}^{1,k}$ von $\mathcal{B}^d$. Im Zustand $k-1$ sind der Lastfaktor α^{k-1} und der Eigenspannungsvektor ρ^{k-1} bekannt. Es gilt

$$\sigma_i^{k-1} = \alpha^{k-1} \sigma_i^E + \rho^{k-1}. \quad (4.15)$$

Wie muß nun der Basisvektor $\mathbf{b}^{1,k}$ aussehen, damit ein positiver Zuwachs $\Delta\alpha = \alpha^k - \alpha^{k-1}$ möglichst groß ist? Das heißt, es wird eine Lösung $(\Delta\alpha^k, u^k)$ von

$$\begin{aligned} &\max && \Delta\alpha^k \\ &\text{unter} && \Phi(\alpha^k \sigma_i^E + \rho_i^{k-1} + \mathbf{b}_i^{1,k} u^k) = \Phi(\sigma_i^{k-1} + \Delta\alpha^k \sigma_i^E + \mathbf{b}_i^{1,k} u^k) \leq \sigma_0^2 \quad \forall i \in \mathcal{I}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

mit $\Delta\alpha > 0$ gesucht. Im Zustand $k-1$ fließt die Struktur nicht unbedingt in allen GAUSSpunkten, so daß die Menge der Indizes I in die Menge der aktiven Indizes $\mathcal{A}^{k-1}$ und die Menge der inaktiven Indizes $\mathcal{C}^{k-1}$ zerlegt werden kann, d. h. $I = \mathcal{A}^{k-1} \cup \mathcal{C}^{k-1}$ und $\mathcal{A}^{k-1} \cap \mathcal{C}^{k-1} = \emptyset$. Es gilt:

$$\Phi(\sigma_i^{k-1}) = \sigma_0^2 \quad \forall i \in \mathcal{A}^{k-1}. \quad (4.17)$$

Inaktive Indizes bzw. inaktive GAUSSpunkte $i \in I \setminus \mathcal{A}^{k-1}$ lassen einen kleinen Lastzuwachs zu und werden deshalb nicht weiter betrachtet. Es werden nur solche Punkte $i \in \tilde{\mathcal{A}}^{k-1} \subseteq \mathcal{A}^{k-1}$ untersucht, die bei einer Erhöhung des Lastfaktors weiterfließen, da die anderen Punkte $i \in \mathcal{A}^{k-1} \setminus \tilde{\mathcal{A}}^{k-1}$ entlastet werden und dadurch keine Information über den maximalen Lastfaktor beinhalten. Deshalb genügt es im weiteren, das Problem

$$\begin{aligned} & \max \quad \Delta\alpha \\ & \text{unter} \quad \Phi(\sigma_i^{k-1} + \Delta\alpha \sigma_i^E + u^k \mathbf{b}_i^{1,k}) \leq \sigma_0^2 \quad \forall i \in \tilde{\mathcal{A}}^{k-1} \end{aligned} \quad (4.18)$$

zu studieren. Das folgende Lemma ist eine dreidimensionale Erweiterung des entsprechenden zweidimensionalen Formulierung in [Zha91]. Der Beweis dazu wird im Anhang A.3 gegeben.

Lemma 4.1

Das Problem 4.18 besitzt genau dann eine Lösung $(\Delta\alpha^k, u^k)$ mit $\Delta\alpha^k > 0$, wenn entweder

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right|_{\sigma_i^{k-1}} \cdot \mathbf{b}_i^{1,k} < 0 \quad \forall i \in \tilde{\mathcal{A}}^{k-1}$$

oder

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right|_{\sigma_i^{k-1}} \cdot \mathbf{b}_i^{1,k} > 0 \quad \forall i \in \tilde{\mathcal{A}}^{k-1} \text{ erfüllt ist.}$$

Berechnet man die Eigenspannungsvektoren auf die oben angegebene Weise mit Hilfe einer Gleichgewichtsiteration über PERMAS, so erfüllt mindestens eine der berechneten Spannungen die Voraussetzungen der Folgerung, wenn die Iteration konvergiert (siehe [Zha91]). Denn dann konvergieren die plastischen Dehnungsinkremente $\dot{\epsilon}^p$ gegen Null und aus der Konvexität der Fließfläche schließt man die Eigenschaft (siehe den Beweis von ZHANG in [Zha91]). Das heißt, daß garantiert werden muß, daß in der iterativen plastischen Berechnung von PERMAS das aufzubringende Lastinkrement stets kleiner als die gesamte Traglast (bzw. Einspiellast) ist. Da im allgemeinen die Grenzlast der untersuchten Struktur nicht bekannt ist, ist eine geeignete Strategie zur Verminderung der Lastinkremente zu wählen. Weiter muß gesichert sein, daß die erzeugten Basisvektoren linear unabhängig sind, damit die *constraint qualifications* des Optimierungsproblems (siehe Abschnitt 5) erfüllt sind. Ansonsten verringert sich die Dimension

des untersuchten Eigenspannungsraums und die beim SQP–Verfahren (Sequentielle Quadratische Programmierung siehe Abschnitt 5) erzeugten Matrizen werden singulär, so daß das Optimierungsverfahren abbricht. In allen untersuchten Beispielen konnte durch die Halbierung des Lastinkrements nach zwei bis drei Lastschritten eine gute Konvergenz erzielt werden. In allen Fällen in denen eine analytische Lösung der Grenzlast bekannt ist, konnte sie innerhalb 10 Iterationsschritten mit einem Fehler von maximal 5% erreicht werden. Nach maximal 20 Iterationsschritten war der Fehler geringer als 1 %. Daher wurden bei Strukturen mit unbekannter Grenzlast die Anzahl der Iterationen auf 20 beschränkt.

Ist trotzdem während der Iteration ein Lastinkrement so gewählt, daß die Unterschreitung der Grenzlast nicht mehr gewährleistet ist, so muß in dem dann erzeugten Vektorraum nicht zwingend ein verbesserter zeitunabhängiger Eigenspannungsvektor liegen. Trotzdem sind die erhaltenen Spannungen Eigenspannungen und der bisher erhaltene Lastfaktor ist weiterhin gültig und kann bei der nächsten Halbierung des Lastinkrements verbessert werden, wenn die Grenzlast noch nicht erreicht ist. Der Algorithmus der Grenzlastanalyse kann in dem in Bild 4.2 dargestellten Flußdiagramm zusammengefaßt werden.

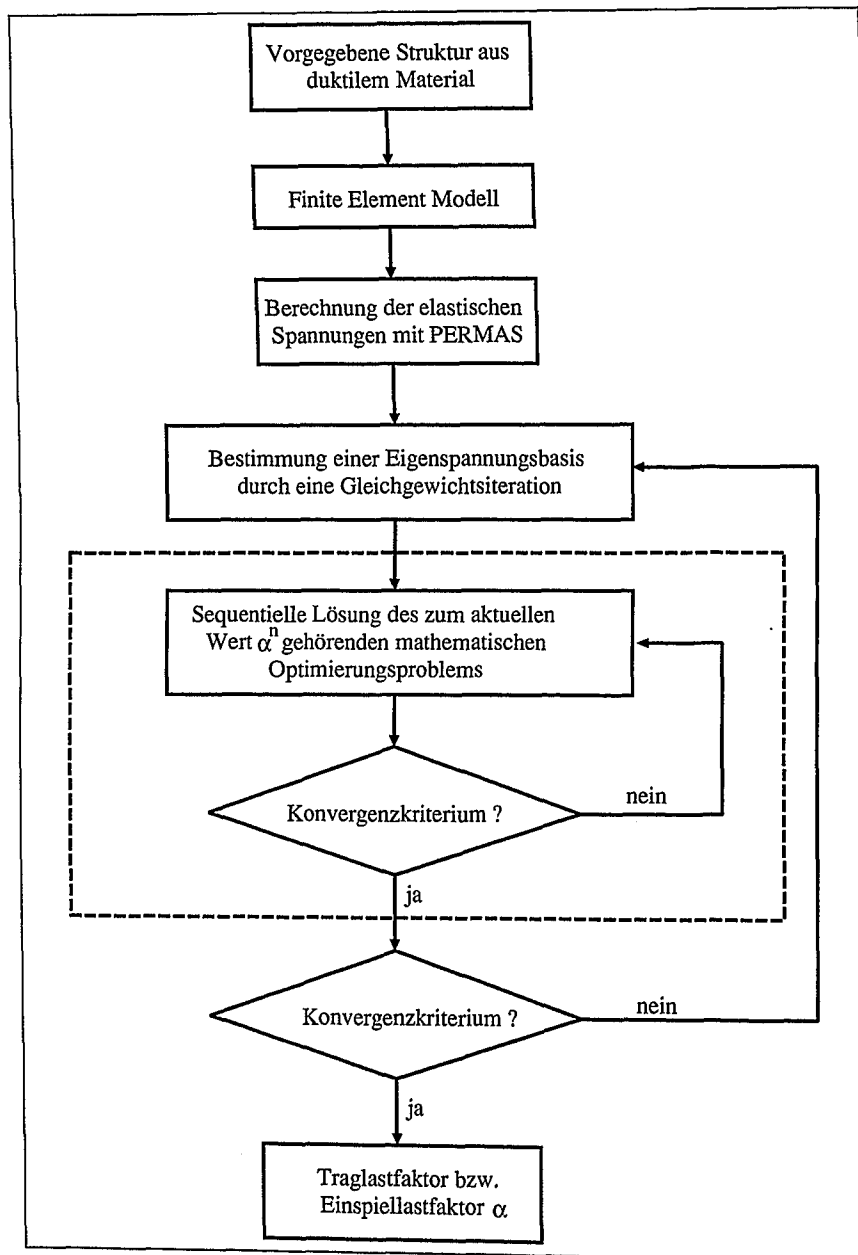


Bild 4.2: Flußdiagramm der Grenzlastanalyse

5 Mathematische Optimierung

In diesem Abschnitt werden die mathematischen Grundlagen zur Lösung der Grenzlastanalyse gegeben (siehe dazu [Pow76], [Pow78], [Sci81], [Sci86], [Sci92] und [SZZ94]). Das zu lösende Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen wird analysiert und eine passende Lösungsstrategie basierend auf dem SQP-Algorithmus entwickelt. Aufgrund der engen Verknüpfung mit dem Finite-Element Programm PERMAS und der speziellen Form des Optimierungsproblems wurde kein kommerzielles Optimierungsverfahren benutzt, sondern ein SQP-Algorithmus programmiert und auf dieses Problem zugeschnitten in PERMAS implementiert. Damit kann erstmals die nichtlineare Trag- bzw. Einspielanalyse für Strukturen aus ideal plastischem Material durchgeführt werden.

Das Optimierungsproblem zur Einspielanalyse lautet im k -ten Iterationsschritt

$$(OP') \quad \begin{array}{ll} \text{Maximiere} & \alpha^k \\ \text{unter} & \Phi(\alpha^k \sigma_i^E(j) + \rho_i^{k-1} + \mathbf{B}_i^{d,k} \mathbf{x}) \leq \sigma_0^2 \quad \forall i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J} \end{array}$$

wobei $\sigma_i^E(j)$ die fiktiven elastischen Spannungen im Punkt i zur Last j sind. In diesem Kapitel sind alle auftretenden Spannungen als Vektoren zu verstehen. $\mathbf{B}_i^{d,k}$ bezeichnet die durch die Basisvektoren des Unterraums $\mathcal{B}^d$ ($d = \dim \mathcal{B}^d$) im Punkt i im k -ten Schritt erzeugte Matrix und $\mathbf{x}$ den Koeffizientenvektor zu den Basisvektoren. Zur Abkürzung werden bei α^k und $\mathbf{B}_i^{d,k}$ ab jetzt in diesem Kapitel der Index k bzw. d und k weggelassen. ρ_i^{k-1} ist das optimale Eigenspannungsfeld aus der vorherigen Iterationsstufe im Punkt i zur Last j (mit $\rho^0 = 0$). Weiter sei $|\mathcal{I}| = N_G$ und $|\mathcal{J}|$ die Anzahl der GAUSSpunkte, bzw. die Anzahl der verschiedenen Lasten. Für die Restriktionen gilt mit $\Phi(\sigma) = \sigma^T \mathbf{Q} \sigma$:

$$\Phi(\alpha \sigma_i^E(j) + \rho_i^{k-1} + \mathbf{B}_i \mathbf{x}) \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha^2 \Phi(\sigma_i^E(j)) + 2\alpha(\sigma_i^E(j))^T \mathbf{Q}(\mathbf{B}_i \mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{B}_i \mathbf{x}) \\ &+ 2\alpha(\sigma_i^E(j))^T \mathbf{Q} \rho_i^{k-1} + 2(\rho_i^{k-1})^T \mathbf{Q}(\mathbf{B}_i \mathbf{x}) + \Phi(\rho_i^{k-1}) \\ &= \alpha^2 a_i(j) + 2\alpha \mathbf{b}_i^T(j) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{C}_i(j) \mathbf{x} + 2\alpha d_i(j) + 2\mathbf{e}_i^T(j) \mathbf{x} + f_i \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{array}{ll} \text{mit} & a_i(j) = \Phi(\sigma_i^E(j)) \in \mathbb{R} & d_i(j) = (\sigma_i^E(j))^T \mathbf{Q} \rho_i^{k-1} \in \mathbb{R} \\ & \mathbf{b}_i(j) = \mathbf{B}_i^T(j) \mathbf{Q} \sigma_i^E(j) \in \mathbb{R}^r & \mathbf{e}_i(j) = \mathbf{B}_i^T(j) \mathbf{Q} \rho_i^{k-1} \in \mathbb{R}^r \\ & \mathbf{C}_i(j) = \mathbf{B}_i^T(j) \mathbf{Q} \mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{r \times r} & f_i = \Phi(\rho_i^{k-1}) \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{5.3}$$

Im Punkt i zur Lastecke j (zur Abkürzung $\cdot|_{i,j}$) gilt mit $\mathbf{B}_i = (b_{kl})_{k,l}|_{i,j}$ und $\mathbf{Q} = (q_{kl})_{k,l}$:

$$\mathbf{C}_i(j) = \left(\begin{array}{ccc} b_{11} & \dots & b_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1r} & \dots & b_{mr} \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} q_{11} & \dots & q_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & \dots & q_{mm} \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mr} \end{array} \right) \Big|_{i,j} \tag{5.4}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{k1} q_{kl} b_{l1} & \dots & \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{k1} q_{kl} b_{lr} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{kr} q_{kl} b_{l1} & \dots & \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{kr} q_{kl} b_{lr} \end{array} \right) \Big|_{i,j} \quad (5.5)$$

$C_i(j)$ ist per Definition symmetrisch und damit auch

$$D_i(j) = \left(\begin{array}{c|c} a_i(j) & \mathbf{b}_i^T(j) \\ \hline \mathbf{b}_i(j) & C_i(j) \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(r+1) \times (r+1)}.$$

Durch die Setzungen $\mathbf{y} = (\alpha, \mathbf{x})^T \in \mathbb{R}^{r+1}$ und $\mathbf{F}_i(j) = (d_i(j), \mathbf{e}_i(j))$ gilt für die Restriktionen aus Problem (OP') nach (5.1)

$$\Phi(\alpha \boldsymbol{\sigma}_i^E(j) + \boldsymbol{\rho}_i^{k-1}(j) + \mathbf{B}_i \mathbf{x}) = \mathbf{y}^T D_i(j) \mathbf{y} + 2 \mathbf{F}_i(j) \mathbf{y} + f_i \quad \forall i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}.$$

Mit $\mathbf{Q}$ ist auch $D_i(j)$ für Spannungen ungleich des hydrostatischen Drucks positiv definit (siehe Abschnitt 2). Insgesamt betrachten wir ab jetzt das Optimierungsproblem mit linearer Zielfunktion und quadratischen Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ll} \text{(OP)} & \text{Minimiere} \quad -y_1 \\ & \text{unter} \quad -\mathbf{y}^T D_i(j) \mathbf{y} - 2 \mathbf{F}_i(j) \mathbf{y} - f_i + \sigma_0^2 \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}. \end{array}$$

Bemerkung

Skaliert man die Restriktionen von (OP) mit einem konstanten Faktor t^2 , d. h. betrachtet man die Restriktionen

$$-t^2 \mathbf{y}^T D_i(j) \mathbf{y} - 2t^2 \mathbf{F}_i(j) \mathbf{y} - t^2 f_i + t^2 \sigma_0^2 \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J},$$

so verändert sich die Lösung des Optimierungsproblems nicht. In der Form der Restriktionen von (OP') lauten die modifizierten Nebenbedingungen

$$\Phi(\alpha t \boldsymbol{\sigma}_i^E(j) + t \boldsymbol{\rho}_i^{k-1} + t \mathbf{B}_i \mathbf{x}) \leq (t \sigma_0)^2 \quad \forall i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}.$$

Betrachtet man also statt der Spannungsfelder $\boldsymbol{\sigma}^E$, $\boldsymbol{\rho}^{k-1}$ und der Matrix $\mathbf{B}$, die Spannungsfelder $t \boldsymbol{\sigma}^E$, $t \boldsymbol{\rho}^{k-1}$ und die Matrix $t \mathbf{B}$ im Punkt i zur Lastecke j , so verändert sich der Optimalwert des Optimierungsproblems nicht. Um eventuell auftretende numerische Schwierigkeiten zu umgehen, kann man deshalb statt den ursprünglichen Spannungsfeldern skalierte Spannungsfelder betrachten.

Die Idee des SQP-Verfahrens ist es, ein allgemein nichtlineares Problem durch quadratische Subprobleme zu ersetzen, die iterativ gelöst werden und deren Lösungen eine Näherung des ursprünglichen Problems ergeben. Untersuchen wir dazu ein allgemeines nichtlineares Problem

$$\begin{array}{lll} \text{(ANP)} & \text{Minimiere} & f(\mathbf{x}) \\ & \text{unter} & g_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}, \end{array}$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $f, g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \forall i \in \mathcal{I}$. Sei $\mathcal{R}$ (*Restriktionsmenge*) die Menge der *zulässigen* Punkte von (ANP), d. h. $\mathcal{R} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | g_i(\mathbf{x}) \geq 0, i \in \mathcal{I}\}$. Da in einem Punkt $\mathbf{x}$ der Restriktionsmenge in der Regel nicht alle $g_i(\mathbf{x}) = 0$ (d.h. nicht alle *aktiv*) sind, definieren wir die Aktivitätsabbildung

$$\mathcal{I}_0(\mathbf{x}) = \{i \in \mathcal{I} | g_i(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Zusätzlich betrachten wir den Tangentialraum $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}(\mathcal{R})$ von $\mathcal{R}$ im Punkt $\mathbf{x}$ mit

$$\mathcal{T}_{\mathbf{x}}(\mathcal{R}) = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n | \boldsymbol{\xi}^T \nabla g_i(\mathbf{x}) = 0, i \in \mathcal{I}\}.$$

Ein entscheidendes Hilfsmittel zur Untersuchung von Optimierungsproblemen (ANP) mit Nebenbedingungen ist die LAGRANGE-Funktion L , die definiert ist durch

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i \in \mathcal{I}} \mu_i g_i(\mathbf{x}).$$

Ist $\mathbf{x}^* \in \mathcal{R}$ ein lokales Minimum des Problems (ANP) und sind die *Regularitätsbedingungen* (*constraint qualifications*) in $\mathbf{x}^*$ erfüllt (wenn z. B. die Vektoren $\nabla g_i(\mathbf{x}^*)$ linear unabhängig für $i \in \mathcal{I}_0(\mathbf{x}^*)$ sind), so existieren LAGRANGE-Multiplikatoren μ_i^* mit

$$\begin{array}{ll} 1) & \begin{array}{l} \mu_i^* \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I} \\ \mu_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I} \\ \nabla L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = \mathbf{0}, \end{array} \\ 2) & \boldsymbol{\xi}^T \nabla^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \boldsymbol{\xi} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}^*}(\mathcal{R}), \end{array}$$

wobei $\nabla(\cdot) = \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_n} \right)^T$ gilt. Die erste notwendige Bedingung heißt KARUSH-KUHN-TUCKER-Bedingung und sie besagt, daß sich in einem lokalen Minimum der Gradient der Zielfunktion als positive Linearkombination der Gradienten der Restriktionen darstellen läßt. Die zweite notwendige Bedingung besagt, daß $\nabla^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ positiv semidefinit auf dem Tangentialraum $\mathcal{T}_{\mathbf{x}^*}(\mathcal{R})$ ist. Die Bedingung $\mu_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \forall i \in \mathcal{I}$ heißt *Komplementaritätsbedingung*, denn es ist $\mu_i = 0$ für $i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0(\mathbf{x}^*)$, so daß zu den inaktiven Nebenbedingungen die entsprechenden LAGRANGE-Multiplikatoren verschwinden. Mittels der Komplementaritätsbedingung läßt sich die erste notwendige Bedingung für ein Minimum $\mathbf{x}^*$ mit LAGRANGE-Multiplikatoren μ_i^* auch nur in den aktiven Indizes formulieren:

$$\begin{array}{ll} 1') & \begin{array}{l} \mu_i^* \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_0(\mathbf{x}^*) \\ \sum_{i \in \mathcal{I}_0(\mathbf{x}^*)} \mu_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \nabla f(\mathbf{x}^*). \end{array} \end{array}$$

Erfüllt ein Punkt $\mathbf{x}^* \in \mathcal{R}$ mit den LAGRANGE-Multiplikatoren μ_i^* zusätzlich zu den KARUSH-KUHN-TUCKER-Bedingungen noch a) $\mu_i^* > 0 \forall i \in \mathcal{I}_0(\mathbf{x}^*)$ und b) $\nabla^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ ist positiv definit auf $\mathcal{T}_{\mathbf{x}^*}(\mathcal{R})$, so ist $\mathbf{x}^*$ ein lokales Minimum des Optimierungsproblems.

Statt das Problem (ANP) zu lösen, untersucht man beim SQP-Verfahren linearisierte Restriktionen und eine quadratische Approximation der Zielfunktion. Entwickelt man in der k -ten Stufe die Funktionen f, g in eine TAYLOR-Reihe um eine Näherungslösung $\mathbf{x}_k$ von (ANP), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^T \nabla^2 f(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \dots \\ g(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}_k) + \nabla g(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \dots \end{aligned} \quad (5.6)$$

Wird stattdessen die TAYLOREntwicklung erster Ordnung betrachtet, so erhält man auf analogem Weg den Algorithmus der Sequentiellen Linearen Programmierung (SLP) (siehe z.B. [McC83]). Das SQP-Verfahren bietet jedoch in der Regel eine höhere Genauigkeit in der Approximation, da die Struktur des Problem genauer wiedergegeben wird.

Setzt man in (5.6) $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k$, so folgt für (ANP)

$$\begin{aligned} &\text{Minimiere} && \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + \nabla f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + f(\mathbf{x}_k) \\ &\text{unter} && \nabla g_i^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + g_i(\mathbf{x}_k) \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Beachtet man, daß der Optimalwert eines Optimierungsproblems mit dem Optimalwert eines Problems mit identischen Restriktionen und einer um eine Konstante verschobenen Zielfunktion übereinstimmt und ersetzt $\nabla^2 f(\mathbf{x}_k)$ durch $\mathbf{A}_k$, so ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \text{(QP)} \quad &\text{Minimiere} && \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{A}_k \mathbf{d} + \nabla f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} \\ &\text{unter} && \nabla g_i^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + g_i(\mathbf{x}_k) \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Dies ist ein Problem in der Variablen $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, dessen Restriktionsmenge

$$\mathcal{R}' = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_j^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + g_j(\mathbf{x}_k) \geq 0, j \in \mathcal{I}\}$$

ist. Für die zugehörige LAGRANGE-Funktion gilt

$$\begin{aligned} L(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}) &= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{A}_k \mathbf{d} + \nabla f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} - \sum_{i \in \mathcal{I}} \mu_i (\nabla g_i^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + g_i(\mathbf{x}_k)), \\ \nabla L(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}) &= \mathbf{A}_k \mathbf{d} + \nabla f(\mathbf{x}_k) - \sum_{i \in \mathcal{I}} \mu_i \nabla g_i^T(\mathbf{x}_k) \quad \text{und} \\ \nabla^2 L(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}) &= \mathbf{A}_k. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Die Matrix $\mathbf{A}_k$ ist positiv definit und approximiert die HESSE-Matrix der LAGRANGE-Funktion von f im Minimum (i. a. wird $\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}$ gewählt). Dadurch ist die zweite hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum erfüllt, denn ist $\mathbf{A}_k$ positiv definit, so ist $\nabla^2 L(\mathbf{d}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ auf $\mathcal{T}_{\mathbf{d}^*}(\mathcal{R}')$ positiv definit.

Betrachtet man nur die aktiven Restriktionen, so ist folgendes Gleichungssystem zu lösen

$$\begin{aligned} \nabla L(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}) &= 0 \\ \nabla g_i^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + g_i(\mathbf{x}_k) &= 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}_0(\mathbf{d}). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Gilt für eine Lösung $(\mathbf{d}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ dieses Systems $\mu_i^* > 0 \forall i \in \mathcal{I}_0(\mathbf{d}^*)$, so ist $\mathbf{d}^*$ ein lokales Minimum von (QP), da $\nabla^2 L(\mathbf{d}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = \mathbf{A}_k$ positiv definit ist. Wir schreiben dieses lineare Gleichungssystem in der Form $\mathbf{H}\mathbf{z} = \mathbf{h}$ mit $m = |\mathcal{I}_0(\mathbf{d}^*)|$ und

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A}_k & -\nabla g_1(\mathbf{x}_k) & \dots & -\nabla g_m(\mathbf{x}_k) \\ -\nabla g_1^T(\mathbf{x}_k) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\nabla g_m^T(\mathbf{x}_k) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\nabla f(\mathbf{y}_k) \\ g_1(\mathbf{x}_k) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}_k) \end{pmatrix}}_{\mathbf{h}}.$$

$\mathbf{H}$ ist symmetrisch jedoch nicht positiv definit, denn mit $\mathbf{S} = (\nabla g_1(\mathbf{x}_k), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x}_k)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ läßt sich $\mathbf{H}$ darstellen als

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_k & -\mathbf{S} \\ -\mathbf{S}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Nach einem GAUSS'schen Eliminationsschritt ergeben sich zwei quadratische Blöcke und man erhält $\det(\mathbf{H}) = \det(\mathbf{A}_k) \det(-\mathbf{S}^T \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{S})$. Da in $\mathbf{x}_k$ die Regularitätsbedingungen erfüllt sind (d. h. $\mathbf{S}$ hat maximalen Rang) und da $\mathbf{A}_k$ (und damit auch $\mathbf{A}_k^{-1}$) positiv definit ist, gilt $\det(\mathbf{H}) < 0$. Für das Problem (OP) lautet das sequentielle Subproblem (SOP) in der k -ten Iterationsstufe (der Index j ist als Abkürzung weggelassen) mit $\mathbf{d}_1 = \nabla f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} = (-1, 0, \dots, 0) \mathbf{d}$:

$$\begin{aligned} \text{(SOP)} \quad & \text{Minimiere} \quad \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{A}_k \mathbf{d} - \mathbf{d}_1 \\ & \text{unter} \quad -2(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + \mathbf{F}_i) \mathbf{d} - (\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + 2\mathbf{F}_i) \mathbf{y}_k - f_i + \sigma_0^2 \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}, \end{aligned}$$

Die zugehörige LAGRANGE-Funktion L und $\nabla_d L$ lauten

$$\begin{aligned} L(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}) &= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{A}_k \mathbf{d} - \mathbf{d}_1 + \sum_{i \in \mathcal{I}} \mu_i (2(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + \mathbf{F}_i) \mathbf{d} + (\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + 2\mathbf{F}_i) \mathbf{y}_k + f_i - \sigma_0^2) \\ \nabla_d L(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}) &= \mathbf{A}_k \mathbf{d} + \mathbf{d}_1 + 2 \sum_{i \in \mathcal{I}} \mu_i (\mathbf{D}_i \mathbf{y}_k + \mathbf{F}_i), \end{aligned} \quad (5.9)$$

mit $\mathbf{d}_1 = (-1, 0, \dots, 0)^T$. Betrachtet man nur die aktiven Nebenbedingungen, lauten die notwendigen Gleichungen zum Problem (SOP) für jeden Lastfall (nach (5.8) und (5.9))

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k \mathbf{d} + \mathbf{d}_1 + 2 \sum_{i \in \mathcal{I}} \mu_i (\mathbf{D}_i \mathbf{y}_k + \mathbf{F}_i) &= \mathbf{0} \\ -2(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + \mathbf{F}_i) \mathbf{d} - (\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + 2\mathbf{F}_i) \mathbf{y}_k - f_i + \sigma_0^2 &= 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}_0(\mathbf{d}). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Insgesamt löst man für jede Lastecke das lineare Gleichungssystem $\mathbf{H}\mathbf{z} = \mathbf{h}$ mit $m = |\mathcal{I}_0(\mathbf{d}^*)|$,

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_k & 2(\mathbf{D}_1 \mathbf{y}_k + \mathbf{F}_1) & \dots & 2(\mathbf{D}_m \mathbf{y}_k + \mathbf{F}_m) \\ 2(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_1 + \mathbf{F}_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_m + \mathbf{F}_m) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{h} &= (1, \dots, 0, \sigma_0^2 - (\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_1 + 2\mathbf{F}_1) \mathbf{y}_k - f_1, \dots, \sigma_0^2 - (\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_m + 2\mathbf{F}_m) \mathbf{y}_k - f_m)^T \\ \mathbf{z} &= (d_1, \dots, d_{r+1}, \mu_1, \dots, \mu_m)^T, \end{aligned} \quad (5.11)$$

mit $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{(r+1+m) \times (r+1+m)}$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{r+1+m}$ und $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{r+1+m}$.

Zur Lösung dieses Problems verwenden wir eine *Active-Set-Strategie* (siehe z. B. [Fle87], [Lue84]). Die Lösung von (SOP) wird auf das Lösen endlich vieler linearer Gleichungssysteme zurückgeführt. Sei $\mathbf{d}_k$ eine zulässige Näherungslösung von (SOP) und $\mathcal{I}_0(\mathbf{d}_k)$ die Menge der aktiven Indizes in $\mathbf{d}_k$. Führen wir die Schlupfvariablen δ ein mit $\mathbf{d} = \mathbf{d}_k + \delta$, so ist (SOP) für aktive Indizes äquivalent zu

$$\begin{aligned} (\text{ASOP}) \quad & \text{Minimiere} \quad \frac{1}{2} \delta^T \mathbf{A}_k \delta + (\mathbf{d}_1^T + \mathbf{d}_k^T \mathbf{A}_k) \delta \\ & \text{unter} \quad (-2\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i - 2\mathbf{F}_i) \delta = 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}_0(\mathbf{d}_k). \end{aligned}$$

Dies entspricht für jede Lastecke dem linearen Gleichungssystem $\bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{h}}$ mit

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_k & 2(\mathbf{D}_i \mathbf{y}_k + \mathbf{F}_i), i \in \mathcal{I}_0(\mathbf{d}_k) \\ \hline 2(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + \mathbf{F}_i), i \in \mathcal{I}_0(\mathbf{d}_k) & 0 \end{array} \right)}_{\bar{\mathbf{H}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \delta \\ \nu \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{z}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\mathbf{d}_1 - \mathbf{A}_k \mathbf{d}_k \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{h}}}.$$

Sei nun δ^* eine Lösung von $\bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{h}}$. Gilt $\delta^* \neq 0$, so hat man die Restriktionsmenge von (SOP) eventuell verlassen. Falls nicht, so definieren wir als neue Näherungslösung $\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{d}_k + \delta^*$. Anderenfalls sucht man auf einem Halbstrahl (in Richtung von δ^*) von $\mathbf{d}_k$ ausgehend, die erste Stelle $\mathbf{d}_{k+1}$, die eine Ungleichungsrestriktion von (SOP) verletzt. Das heißt man sucht entlang einer Suchrichtung $\mathbf{s}^* (\equiv \delta^*)$ von $\mathbf{d}_k$ ausgehend, ein maximales α_k , so daß die neue Näherungslösung $\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{d}_k + \alpha_k \mathbf{s}^*$ zulässig bleibt. α_k berechnet sich als das Minimum über alle $i \notin \mathcal{I}_0(\mathbf{d}_k)$ mit $-2(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + \mathbf{F}_i) \mathbf{s}^* < 0$ durch

$$\alpha_k = \min \left\{ 1, \frac{2(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + \mathbf{F}_i) \mathbf{d}_k + (\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + 2\mathbf{F}_i) \mathbf{y}_k + f_i - \sigma_0^2}{-2(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + \mathbf{F}_i) \mathbf{s}^*} \right\}.$$

Ist $\alpha_k = 1$, d. h. $\forall i \notin \mathcal{I}_0(\mathbf{d}_k)$ gilt

$$\begin{aligned} & \frac{2(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + \mathbf{F}_i) \mathbf{d}_k + (\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + 2\mathbf{F}_i) \mathbf{y}_k + f_i - \sigma_0^2}{-2(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + \mathbf{F}_i) \mathbf{s}^*} \geq 1 \\ \iff & 2(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + \mathbf{F}_i) \mathbf{d}_k + (\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + 2\mathbf{F}_i) \mathbf{y}_k + f_i - \sigma_0^2 \leq -2(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + \mathbf{F}_i) \mathbf{s}^* \\ \iff & 2(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + \mathbf{F}_i) \mathbf{d}_k + (\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + 2\mathbf{F}_i) \mathbf{y}_k + f_i - \sigma_0^2 \leq -2(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + \mathbf{F}_i) (\mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_k) \\ \iff & -2(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + \mathbf{F}_i) \mathbf{d}_{k+1} - (\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + 2\mathbf{F}_i) \mathbf{y}_k - f_i + \sigma_0^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (5.12)$$

so ist $\mathbf{d}_{k+1}$ zulässig für (SOP) und wir ersetzen $\mathbf{d}_k$ durch $\mathbf{d}_{k+1}$. Ist hingegen $\alpha_k < 1$, so setzen wir $\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{d}_k + \alpha_k \mathbf{s}^*$ und $\mathcal{I}_0(\mathbf{d}_{k+1}) = \mathcal{I}_0(\mathbf{d}_k) \cup \{i^*\}$, wobei i^* der Index ist, für den α_k minimal wird. Die Restriktionsmenge hat sich also vergrößert und wir lösen (ASOP) mit diesen neuen Eingangsdaten. Dieser Vorgang kann nur endlich oft wiederholt werden, so daß wir o. b. d. A. nach k Schritten $\delta^* = 0$ erzielen, d. h. $\mathbf{d}_k$ ist optimal für (ASOP). Sind die LAGRANGE-Multiplikatoren ν_i zu $\mathbf{d}_k$ alle nicht-negativ, so ist $\mathbf{d}_k$ optimal für (SOP). Ist jedoch mindestens ein Multiplikator negativ, so definieren wir i^{**} als den Index zum kleinsten LAGRANGE-Multiplikator $\nu_{i^{**}}$. Diese Restriktion wird entfernt, d. h. wir ersetzen die Restriktionsmenge von (ASOP) durch $\mathcal{I}_0(\mathbf{d}_k) \setminus \{i^{**}\}$ und lösen (ASOP) erneut.

Benutzt man keine Active-Set-Strategie, sondern operiert man mit allen Ungleichungen, so erhält man mit der Komplementaritätsbedingung das nichtlineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}\nabla L(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}) &= 0 \\ \mu_i(\nabla g_i^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{d} + g_i(\mathbf{x}_k)) &= 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}.\end{aligned}\quad (5.13)$$

Für das Problem (SOP) lauten diese Gleichungen $\forall j \in \mathcal{J}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_k \mathbf{d} + \mathbf{d}_1 + 2 \sum_{i \in \mathcal{I}} \mu_i (\mathbf{D}_i + \mathbf{F}_i) \mathbf{y}_k &= 0 \\ -2\mu_i (\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + 2\mathbf{F}_i) \mathbf{d} - \mu_i [(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + 2\mathbf{F}_i) \mathbf{y}_k + f_i - \sigma_0^2] &= 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}.\end{aligned}\quad (5.14)$$

Man muß für jede Lastecke das Gleichungssystem $\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{h}}$ lösen, mit $\hat{m} = |\mathcal{I}|$,

$$\hat{\mathbf{H}} = \left(\begin{array}{c|cccc} \mathbf{A}_k & 2(\mathbf{D}_1 \mathbf{y}_k + \mathbf{F}_1) & \dots & 2(\mathbf{D}_{\hat{m}} \mathbf{y}_k + \mathbf{F}_{\hat{m}}) \\ \hline 2\mu_1 (\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_1 + \mathbf{F}_1) & (\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_1 + 2\mathbf{F}_1) \mathbf{y}_k + f_1 - \sigma_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ 2\mu_{\hat{m}} (\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_{\hat{m}} + \mathbf{F}_{\hat{m}}) & 0 & \dots & 0 & (\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_{\hat{m}} + 2\mathbf{F}_{\hat{m}}) \mathbf{y}_k + f_{\hat{m}} - \sigma_0^2 \end{array} \right)$$

sowie $\hat{\mathbf{z}} = (d_1, d_2, \dots, d_{r+1}, \mu_1, \dots, \mu_{\hat{m}})^T$ und $\hat{\mathbf{h}} = (1, 0, \dots, 0)^T$. Hat man eine Lösung $\mathbf{d}^*$ dieser Probleme berechnet deren LAGRANGE-Multiplikatoren der aktiven Nebenbedingungen positiv sind, so ist $\mathbf{d}^*$ ein lokales Minimum von (SOP). Wir suchen jedoch ein globales Minimum der Zielfunktion. Die Theorie der konvexen Mengen und Funktionen hilft hier weiter. Eine Menge $M \in \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls mit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ auch $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in M$ gilt, $\forall \lambda \in (0, 1)$. Das heißt mit $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ gehört auch das verbindende Liniensegment zu M . Seien $\mathbf{d}_1$ und $\mathbf{d}_2$ Punkte der Restriktionsmenge von (SOP). Dann gilt für $\lambda \mathbf{d}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{d}_2$:

$$\begin{aligned}& -2(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + \mathbf{F}_i)(\lambda \mathbf{d}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{d}_2) - (\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + 2\mathbf{F}_i) \mathbf{y}_k - f_i + \sigma_0^2 \\ &= \lambda \underbrace{(-2(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + \mathbf{F}_i) \mathbf{d}_1 - (\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + 2\mathbf{F}_i) \mathbf{y}_k - f_i + \sigma_0^2)}_{\geq 0} \\ &+ (1 - \lambda) \underbrace{(-2(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + \mathbf{F}_i) \mathbf{d}_2 - (\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + 2\mathbf{F}_i) \mathbf{y}_k - f_i + \sigma_0^2)}_{\geq 0} \\ &\geq 0 \quad \forall \lambda \in (0, 1).\end{aligned}\quad (5.15)$$

Damit ist die Restriktionsmenge von (SOP) konvex. Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ (M konvex) heißt *konvex*, falls $f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y})$ gilt $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M, \forall \lambda \in (0, 1)$ (f heißt *konkav*, falls $-f$ konvex ist). Gilt die strikte Ungleichung, so heißt f *strikt konvex*. Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so sind die drei Aussagen äquivalent ([Lue84]):

1. f ist konvex
2. $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \geq \nabla^T f(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$
2. $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ ist positiv semidefinit $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Da A_k positiv definit ist, ist die Zielfunktion $\frac{1}{2}d^T A_k d - d_1$ von (SOP) eine konvexe Funktion. Ferner gilt eine wichtige Äquivalenz für konvexe Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und konvexe Restriktionsmengen $\mathcal{R}$:

1. x^* ist lokales Minimum für f bzgl. $\mathcal{R}$
2. x^* ist globales Minimum für f bzgl. $\mathcal{R}$
3. x^* ist kritischer Punkt von f , d. h. $\nabla f(x^*) = 0$.

Ist ein lokales Minimum von (SOP) gefunden, so ist dies auch ein globales Minimum von (SOP) (siehe z. B. [JT88]). Weiter gilt ein interessanter Zusammenhang zwischen den Restriktionsmengen $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}'$ der Probleme (ANP) und (QP) (siehe [GPM76]). Sei dazu x_k eine Näherung der Lösung von (ANP) und $d_k = x - x_k$ (Suchrichtung ohne Schrittweitenwahl).

$$\mathcal{R}_k = \{x \mid g_i(x_k) + \nabla g_i(x_k)(x - x_k) \geq 0, \forall i \in \mathcal{I}\}$$

ist die um $-x_k$ verschobene Restriktionsmenge von (QP). Ist $\mathcal{R}$ nicht leer und sind alle g_i konkav, so gilt $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_k$. Nehmen wir dazu an, alle g_i seien konkav (bzw. $-g_i$ konvex). Für $x \in \mathcal{R}$ und die Näherungslösung x_k gilt nach der obigen Charakterisierung

$$-g_i(x) + g_i(x_k) \geq -\nabla g_i(x_k)(x - x_k), \text{ bzw. } g_i(x) \leq g_i(x_k) + \nabla g_i(x_k)(x - x_k).$$

Damit folgt für $x \in \mathcal{R}$

$$0 \leq g_i(x) \leq g_i(x_k) + \nabla g_i(x_k)(x - x_k) \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

d. h. $x \in \mathcal{R}_k$ und damit $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_k$. Aufgrund der Konvexität der VON MISES-Funktion gilt diese Aussage auch für die Restriktionsmengen der Probleme (OP) und (SOP).

Es werden jetzt die Näherung y_k des Minimums und die angenäherten LAGRANGE-Multiplikatoren λ_k von (OP) im k -ten Schritt betrachtet. Löst man (SOP) im k -ten Schritt, so erhält man eine Lösung d_k mit LAGRANGE-Multiplikatoren μ_k . Eine neue Näherung der Lösung des Problems (OP) erhält man mit $\alpha_k \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{pmatrix} y_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_k \\ \lambda_k \end{pmatrix} + \alpha_k \begin{pmatrix} d_k \\ \mu_k - \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Die Lösung d_k ist in diesem Sinne eine Suchrichtung für das Problem (OP). Für diese neue Lösung müssen jetzt die KARUSH-KUHN-TUCKER-Bedingungen von (OP) sowie die hinreichenden Bedingungen kontrolliert werden, um festzustellen, ob man das Minimum von (OP) gefunden hat. Für zweidimensionale Probleme ist $D_i(j)$ positiv definit, so daß die zweite notwendige Bedingung immer erfüllt ist. Das Verhältnis der Lösungen von (OP) und (SOP) klärt der folgende Satz (siehe [Fle87]).

Satz 5.1

Sei $\mathbf{d}_k^*$ die Lösung des quadratischen Teilproblems (SOP) in der k -ten Iterationsstufe und $\boldsymbol{\mu}^*$ die zugehörigen LAGRANGE-Multiplikatoren, sowie $\mathbf{y}_k$ eine Näherung des Minimums von (OP). Gilt $\mathbf{d}_k^* = \mathbf{0}$, so erfüllen $\mathbf{y}_k$ und $\boldsymbol{\mu}^*$ die notwendigen Bedingungen für ein lokales Minimum von (OP).

Beweis:

Da $\mathbf{d}_k$ eine Lösung von (SOP) ist, ist die erste notwendige Bedingung zu (SOP) erfüllt. Sie lautet für jede Lastecke:

$$\begin{aligned} \mu_i^* &\geq 0, \forall i \in \mathcal{I} \\ \mu_i^* [-2(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + \mathbf{F}_i) \mathbf{d}_k^* - (\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + 2\mathbf{F}_i) \mathbf{y}_k - f_i + \sigma_0^2] &= 0, \forall i \in \mathcal{I}, \\ \mathbf{A}_k \mathbf{d}_k^* + \mathbf{d}_1 + 2 \sum_{i \in \mathcal{I}} \mu_i^* (\mathbf{D}_i \mathbf{y}_k + \mathbf{F}_i) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Mit $\mathbf{d}_k^* = \mathbf{0}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mu_i^* &\geq 0, \forall i \in \mathcal{I} \\ \mu_i^* [-(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_i + 2\mathbf{F}_i) \mathbf{y}_k - f_i + \sigma_0^2] &= 0, \forall i \in \mathcal{I}, \\ \mathbf{d}_1 + 2 \sum_{i \in \mathcal{I}} \mu_i^* (\mathbf{D}_i \mathbf{y}_k + \mathbf{F}_i) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Dies ist die erste notwendige Bedingung für ein lokales Minimum von (OP). Da die Probleme (SOP) und (OP) eine identische HESSE-Matrix der LAGRANGE-Funktion haben, ist die zweite notwendige Bedingung auch erfüllt. $\square$

Da (SOP) ein konvexes Optimierungsproblem ist, ist eine lokale Lösung von (SOP) auch eine globale. Es bleibt noch zu zeigen, daß auch (OP) ein konvexes Optimierungsproblem ist. Die Zielfunktion $-\mathbf{y}_1$ ist als lineare Funktion konvex. Betrachten wir zu jeder Lastecke die Restriktionsmenge $\mathcal{S} = \{\mathbf{y} \mid -(\mathbf{y}^T \mathbf{D}_i + 2\mathbf{F}_i) \mathbf{y} - f_i + \sigma_0^2 \geq 0\}$ von (OP). Wählen wir zwei Punkte $\mathbf{y}_1 = (\alpha_1, \mathbf{x}_1)^T$ und $\mathbf{y}_2 = (\alpha_2, \mathbf{x}_2)^T \in \mathcal{S}$, mit $\boldsymbol{\sigma}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{\sigma}_i^E + \boldsymbol{\rho}_i^{k-1} + \mathbf{B}_i \mathbf{x}_1$ und $\boldsymbol{\sigma}_2 = \alpha_2 \boldsymbol{\sigma}_i^E + \boldsymbol{\rho}_i^{k-1} + \mathbf{B}_i \mathbf{x}_2$, so gilt $\forall \lambda \in (0, 1)$ und $\lambda \mathbf{y}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{y}_2$:

$$\begin{aligned} & -[(\lambda \mathbf{y}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{y}_2)^T \mathbf{D}_i + 2\mathbf{F}_i][\lambda \mathbf{y}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{y}_2] - f_i + \sigma_0^2 \\ &= -\Phi[(\lambda \alpha_1 + (1 - \lambda) \alpha_2) \boldsymbol{\sigma}_i^E + \boldsymbol{\rho}_i^{k-1} + \mathbf{B}_i (\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2)] + \sigma_0^2 \\ &= -\Phi[\lambda (\alpha_1 \boldsymbol{\sigma}_i^E + \boldsymbol{\rho}_i^{k-1} + \mathbf{B}_i \mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) (\alpha_2 \boldsymbol{\sigma}_i^E + \boldsymbol{\rho}_i^{k-1} + \mathbf{B}_i \mathbf{x}_2)] + \sigma_0^2 \\ &= -\Phi(\lambda \boldsymbol{\sigma}_1 + (1 - \lambda) \boldsymbol{\sigma}_2) + \sigma_0^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

da $\Phi(\boldsymbol{\sigma})$ eine konvexe Funktion ist. Die Konvexität der VON MISES-Funktion Φ in der Variablen $\boldsymbol{\sigma}$ überträgt sich also auf die Funktion Φ in der Variablen $\mathbf{y}$, so daß ein lokales Minimum von (OP) auch ein globales Minimum ist. Für konvexe Probleme (d. h. f konvex und g_i konkav $\forall i \in \mathcal{I}$ in der Normalform (ANP)) hat das SQP-Verfahren eine interessante Eigenschaft.

Lemma 5.1

Sei $\mathbf{x}_k$ ein zulässiger Punkt von (ANP), $\mathbf{d}_k$ eine Lösung des Subproblems in der k -ten Stufe mit den LAGRANGE-Multiplikatoren μ_k , $\mu_{ki} \geq 0 \ \forall i \in \mathcal{I}$ und $\alpha \in [0, 1]$ eine Schrittweite, so gilt

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k) &\leq g_i(\mathbf{x}_k) \quad \text{und} \\ \nabla^T g_i(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k) \mathbf{d}_k &\leq \nabla^T g_i(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k \leq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Beweis:

Da $\mathbf{d}_k$ Lösung des Subproblems ist, erfüllt die Suchrichtung die Komplementaritätsbedingung des Subproblems, d. h.

$$\mu_{ki}(g_i(\mathbf{x}_k) + \nabla^T g_i(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k) = 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

Aus der Zulässigkeit von $\mathbf{x}_k$ folgt, daß $\nabla^T g_i(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k$ negativ ist. Da alle g_i konkav sind, gilt

$$g_i(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k) - g_i(\mathbf{x}_k) \leq \alpha \nabla^T g_i(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k \leq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

und folglich der erste Teil des Lemmas.

Aus der Konkavität der g_i folgt einerseits

$$g_i(\mathbf{x}_k) - g_i(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k) \leq -\alpha \nabla^T g_i(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k) \mathbf{d}_k \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

und andererseits

$$g_i(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k) - g_i(\mathbf{x}_k) \leq \alpha \nabla^T g_i(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

Addiert man beide Ungleichungen, so folgt

$$0 \leq \alpha [\nabla^T g_i(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k - \nabla^T g_i(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k) \mathbf{d}_k] \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

Mit $\alpha \in [0, 1]$, der Zulässigkeit von $\mathbf{x}_k$ und der Komplementaritätsbedingung des Subproblems folgt die zweite Behauptung des Lemmas. $\square$

Der zweite Teil des Lemmas ist unabhängig davon, daß $\mathbf{d}_k$ eine Lösung des Subproblems ist. Sie folgt direkt aus der Konkavität der g_i , so daß für zwei Schrittweiten α_1 und α_2 mit $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ die Aussage

$$\nabla^T g_i(\mathbf{x}_k + \alpha_2 \mathbf{d}_k) \mathbf{d}_k \leq \nabla^T g_i(\mathbf{x}_k + \alpha_1 \mathbf{d}_k) \mathbf{d}_k \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

gilt. Auch die erste Aussage läßt sich auf α_1 und α_2 mit $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ verallgemeinern. Es gilt für alle $i \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}_k + \alpha_2 \mathbf{d}_k) - g_i(\mathbf{x}_k + \alpha_1 \mathbf{d}_k) &\leq (\alpha_2 - \alpha_1) \nabla^T g_i(\mathbf{x}_k + \alpha_1 \mathbf{d}_k) \mathbf{d}_k \\ &\leq (\alpha_2 - \alpha_1) \nabla^T g_i(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k \leq 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Damit sind alle Funktionen $\bar{g}_i(\alpha) = g_i(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k)$ monoton fallende Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$. Für konvexe Probleme nähert man sich also während der Iteration immer mehr dem Rand der Restriktionsmenge.

Es ist noch unklar wie die Schrittweite α_k gewählt werden muß, damit garantiert werden kann, daß durch die neue Definition von $\mathbf{y}_{k+1}$ die Restriktionsmenge von (OP) nicht verlassen wird. Man definiert im k -ten Schritt eine eindimensionale Bewertungsfunktion

$$\Gamma(\alpha_k) = \Psi_r(\mathbf{z}_k - \alpha_k \mathbf{p}_k) \text{ mit } \mathbf{z}_k := \begin{pmatrix} \mathbf{y}_k \\ \boldsymbol{\lambda}_k \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{p}_k := - \begin{pmatrix} \mathbf{d}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k - \boldsymbol{\lambda}_k \end{pmatrix}.$$

Die Funktion Ψ_r kann auf verschiedene Arten definiert werden (siehe [Lue84],[Mah91] und [Sci81]), wobei r ein geeigneter *Penalty*-Parameter ist. Wir betrachten die differenzierbare *erweiterte* (engl. augmented) LAGRANGE-Funktion (siehe [Sci81]) mit $\mathbf{z} := (\mathbf{y}^T, \boldsymbol{\lambda}^T)^T$

$$\Psi_r(\mathbf{z}) = f(\mathbf{y}) - \sum_{i \in \mathcal{I}} \begin{cases} \lambda_i g_i(\mathbf{y}) - \frac{1}{2} r g_i(\mathbf{y})^2 & , \text{ falls } g_i(\mathbf{y}) \leq \frac{\lambda_i}{r} \\ \frac{1}{2} \frac{\lambda_i^2}{r} & , \text{ sonst} \end{cases}$$

und ihre Ableitung

$$\nabla^* \Psi_r(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{y}} f(\mathbf{y}) & - \sum_{i \in \mathcal{I}} \begin{cases} \nabla_{\mathbf{y}} g_i(\mathbf{y})(\lambda_i - r g_i(\mathbf{y})) & , \text{ falls } g_i(\mathbf{y}) \leq \frac{\lambda_i}{r} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \\ -\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \nabla^*(\cdot) &= \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial(\cdot)}{\partial y_{r+1}}, \frac{\partial(\cdot)}{\partial \lambda_1}, \dots, \frac{\partial(\cdot)}{\partial \lambda_{|\mathcal{I}|}} \right)^T, \\ \bar{\mathbf{g}}^T &= (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{|\mathcal{I}|})^T \\ \bar{g}_i(\mathbf{y}) &= \begin{cases} g_i(\mathbf{y}) & , \text{ falls } g_i(\mathbf{y}) \leq \frac{\lambda_i}{r} \\ \frac{\lambda_i}{r} & , \text{ sonst} \end{cases}, \forall i \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Die erweiterte LAGRANGE-Funktion bewirkt, daß die LAGRANGE-Funktion L gestört (bestraft) wird, sobald die Restriktionsmenge $\mathcal{R}$ verlassen wird. Nun ist noch zu klären wie man den Penalty-Parameter wählt. Beim SQP-Verfahren nach SCHITTKOWSKI wählt man ausgehend von der Lösung $\mathbf{d}_k$ von (SOP) positive Konstanten $\bar{r} > 1, \bar{\varepsilon} < 1$ und bestimmt die Größen δ_k, ε_k , mit $\delta_{-1} := 1$ durch:

$$\delta_k = \min \left\{ \frac{\mathbf{d}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{d}_k}{\|\mathbf{d}_k\|^2}, \delta_{k-1} \right\} \text{ und } \varepsilon_k = \begin{cases} \frac{\|\mathbf{d}_k\|^2}{\|\boldsymbol{\mu}_k - \boldsymbol{\lambda}_k\|^2} & , \text{ falls } \boldsymbol{\mu}_k \neq \boldsymbol{\lambda}_k \\ \bar{\varepsilon} & , \text{ sonst.} \end{cases} \quad (5.20)$$

Hat man diese Werte bestimmt, so berechnet man die kleinste positive Zahl j_k für die

$$\frac{1}{\bar{r}^j} < \frac{1}{4} \varepsilon_k \delta_k \left(1 - \frac{1}{4} \delta_k \right) \text{ gilt, d.h. } j_k = \min \left\{ j \in \mathbb{N}, j > \frac{\ln \frac{16}{\varepsilon_k \delta_k (4 - \delta_k)}}{\ln \bar{r}} \right\}.$$

Der Penalty-Parameter r_k ergibt sich mit $r_{-1} := \bar{r}$ aus: $r_k = \max \{r_{k-1}, \bar{r}^{j_k}\}$. Wählt man Startwerte $\alpha < 1$ und $\gamma < \frac{1}{2}$ und berechnet die kleinste nicht-negative Zahl i_k mit

$$i_k = \min \{i \in \mathbb{N}, \Psi_{r_k}(\mathbf{z}_k - \alpha^i \mathbf{p}_k) \leq \Psi_{r_k}(\mathbf{z}_k) - \gamma \alpha^i \nabla^* \Psi_{r_k}^T(\mathbf{z}_k) \mathbf{p}_k\},$$

so ergibt sich die Schrittweite α_k durch $\alpha_k = \alpha^{i_k}$. Dabei ist

$$\begin{aligned} \nabla^* \Psi_{r_k}^T(\mathbf{z}_k) \mathbf{p}_k &= -\nabla_{\mathbf{y}}^T f(\mathbf{y}_k) \mathbf{d}_k \\ &+ \sum_{i \in \mathcal{I}} \begin{cases} (\lambda_{ki} - r g_i(\mathbf{y}_k)) \nabla_{\mathbf{y}}^T g_i(\mathbf{y}_k) \mathbf{d}_k \\ + g_i(\mathbf{y}_k) (\mu_{ki} - \lambda_{ki}) \\ \frac{\lambda_{ki}}{r} (\mu_{ki} - \lambda_{ki}) \end{cases} \begin{cases} , \text{ falls } g_i(\mathbf{y}_k) \leq \frac{\lambda_{ki}}{r} \\ , \text{ sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Dieses Vorgehen garantiert, daß die Schrittweite einerseits klein genug ist, um in der Restriktionsmenge zu bleiben, andererseits groß genug, um eine Verbesserung der Werte zu erlangen. Dieses Verfahren ist eine Rückverfolgungsstrategie, die mit einer positiven Schrittweite beginnt und dann sukzessiv diesen Wert verkleinert (ARMIJO-Regel). Der neue Iterationspunkt ergibt sich wie oben beschrieben. Die Aufdatierung der Matrix $\mathbf{A}_k$ erfolgt mit Hilfe der von POWELL modifizierten inversen BFGS-Formel (siehe z. B. [Sci81]). Startet man mit einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $\mathbf{A}_0$, so berechnet man die Matrix $\mathbf{A}_{k+1}$ mit Hilfe von $\mathbf{A}_k$ durch

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k - \frac{\mathbf{A}_k \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k} + \frac{\mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T}{\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k}. \quad (5.22)$$

Wobei $\mathbf{s}_k = \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k$ das Inkrement der Iterationslösungen ist. Für $\mathbf{q}_k$ gilt

$$\mathbf{q}_k = \theta_k \mathbf{t}_k + (1 - \theta_k) \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k \quad \text{mit} \quad \mathbf{t}_k = \nabla L(\mathbf{y}_{k+1}, \boldsymbol{\mu}^*) - \nabla L(\mathbf{y}_k, \boldsymbol{\mu}^*).$$

$\boldsymbol{\mu}^* := \boldsymbol{\lambda}_{k+1}$ sind die LAGRANGE-Multiplikatoren zum Wert $\mathbf{y}_{k+1}$. θ_k ist definiert durch

$$\theta_k = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \mathbf{s}_k^T \mathbf{t}_k \geq 0.2 \mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k \\ \frac{0.8 \mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k - \mathbf{s}_k^T \mathbf{t}_k} & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Da $\mathbf{y}_{k+1}$ mittels der erweiterten LAGRANGE-Funktion berechnet wurde, ergibt sich $\mathbf{s}_k = \alpha_k \mathbf{d}_k$, wobei α_k die mit Hilfe der ARMIJO-Regel bestimmte Schrittweite ist. Wir erhalten mit Gleichung (5.9) für $\mathbf{t}_k$ zu jeder Lastecke

$$\mathbf{t}_k = \sum_{i \in \mathcal{I}} 2\mu_i^* \mathbf{D}_i(\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k) = \sum_{i \in \mathcal{I}} 2\mu_i^* \mathbf{D}_i \mathbf{s}_k. \quad (5.23)$$

Gilt $\mathbf{s}_k^T \mathbf{t}_k \geq 0.2 \mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k$, so ist $\theta = 1$ und $\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k = \mathbf{s}_k^T \mathbf{t}_k$. Ist $\mathbf{s}_k^T \mathbf{t}_k < 0.2 \mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k$ erfüllt, so gilt

$$\mathbf{q}_k = \frac{0.8 \mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k - \mathbf{s}_k^T \mathbf{t}_k} \mathbf{t}_k + \left(\frac{0.2 \mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k - \mathbf{s}_k^T \mathbf{t}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k - \mathbf{s}_k^T \mathbf{t}_k} \right) \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k.$$

Damit ist

$$\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k = \frac{0.8(\mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k) \mathbf{s}_k^T \mathbf{t}_k + 0.2(\mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k)^2 - (\mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k) \mathbf{s}_k^T \mathbf{t}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k - \mathbf{s}_k^T \mathbf{t}_k} = 0.2 \mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k. \quad (5.24)$$

Zusammenfassend gilt also $\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k = \max \{\mathbf{s}_k^T \mathbf{t}_k, 0.2 \mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k\} > 0$, da $\mathbf{s}_k \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{A}_k$ positiv definit ist. Mit Hilfe dieser Definitionen ist gewährleistet, daß mit $\mathbf{A}_k$ auch $\mathbf{A}_{k+1}$ positiv definit ist. Der Beweis dazu befindet sich im Anhang A.4.

6 Neue analytische Lösungen spezieller Grenzlastprobleme

6.1 Zeitlich konstante Lastanteile

Hier sollen Probleme untersucht werden, deren zugrundeliegende Belastung einer Struktur Ω aus einer zeitlich konstanten Last (wie etwa Erdschwere o.ä.) und einer monotonen oder zyklischen Last besteht. Dazu leitet POLIZZOTTO in [Pol93a] statische und kinematische Einspielsätze her. Sei $\mathbf{P}_0 = (\mathbf{b}_0, \mathbf{p}_0)$ die konstante Belastung und $\mathcal{L}$ ein konvexer Lastraum mit n Lastecken $\mathbf{P}_i = (\mathbf{b}_i, \mathbf{p}_i)$, wobei $\mathbf{b}_i$ Volumenlasten und $\mathbf{p}_i$ Oberflächenlasten sind. Jede mögliche Belastung $\mathbf{P}(t) \in \mathcal{L}$ läßt sich als konvexe Linearkombination der Lastecken $\mathbf{P}_i$ schreiben. Es gilt (siehe [Pol93a]) mit $\mathbf{P}_0 + \mathcal{L} = \{\hat{\mathbf{P}} \mid \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P} + \mathbf{P}_0, \mathbf{P} \in \mathcal{L}\}$:

Satz 6.1

Existiert ein $\alpha > 1$ und ein zeitunabhängiges Spannungsfeld $\tilde{\sigma}$ mit $\int_{\Omega} \tilde{\sigma}^T \mathbf{E}^{-1} \tilde{\sigma} d\Omega < \infty$, welches im Gleichgewicht mit der konstanten Belastung $\mathbf{P}_0$ steht und gilt zu jeder Zeit t der Belastung

$$\Phi[\alpha(\sigma^E(\mathbf{x}, t) + \tilde{\sigma}(\mathbf{x}))] \leq \sigma_0^2(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

so spielt die Struktur Ω unter der Belastung $\mathbf{P}_0 + \mathcal{L}$ elastisch ein.

Beweis:

Analog zum Beweis des Einspielsatz von MELAN wird gezeigt, daß die plastischen Dehnungsinkremente im Laufe der Zeit verschwinden und daß die dissipierte plastische Energie beschränkt bleibt. Die dabei ausgelassenen Details des Beweises sind analog zum ursprünglichen Beweis zu vervollständigen. Das aktuelle Spannungsfeld σ und das Spannungsfeld $\tilde{\sigma}$ lassen sich aufspalten in

$$\sigma = \sigma^E + \sigma_0^E + \rho \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\sigma} = \sigma_0^E + \rho_0,$$

wobei σ^E bzw. σ_0^E fiktive elastische Spannungen zu den Lasten $\mathbf{P}$ bzw. $\mathbf{P}_0$ sind. ρ ist das aktuelle und ρ_0 ein zeitunabhängiges Eigenspannungsfeld. Nach der Voraussetzung ist $\sigma^E + \tilde{\sigma}$ ein zulässiger Zustand, so daß nach dem DRUCKERSchen Postulat für das aktuelle Spannungsfeld σ gilt:

$$[\sigma - (\sigma^E + \tilde{\sigma})] : \dot{\epsilon}^p = [\rho - \rho_0] : \dot{\epsilon}^p \geq 0.$$

Definiert man das positive Funktional $J(t)$ durch

$$J(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0) : \mathbf{E}^{-1} : (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0) d\Omega,$$

so folgt mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit und dem DRUCKERSchen Postulat angewandt auf das Eigenspannungsfeld $\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0$

$$\dot{J}(t) = - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p d\Omega \leq 0.$$

Damit ist $J(t)$ monoton fallend und beschränkt, so daß daraus folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\boldsymbol{\rho}}(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(t) = 0.$$

Weiter gilt unter der Einspielbedingung und dem DRUCKERSchen Postulat

$$[\boldsymbol{\sigma} - \alpha(\boldsymbol{\sigma}^E + \boldsymbol{\sigma}_0^E + \boldsymbol{\rho}_0)] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \geq 0,$$

bzw.

$$(\alpha - 1)\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \leq \alpha(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p.$$

Die dissipierte plastische Energie ist beschränkt, denn es gilt:

$$\begin{aligned} W_p &= \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt d\Omega \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt d\Omega \\ &= -\frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_0^{\infty} \dot{J}(t) dt \leq \frac{\alpha}{2\alpha - 2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho}_0 : \mathbf{E}^{-1} : \boldsymbol{\rho}_0 < \infty. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Damit klingen die plastischen Dehnungszinkremente $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ im Laufe der Zeit ab und die dissipierte plastische Energie bleibt beschränkt, so daß die Struktur unter den genannten Voraussetzungen elastisch einspielt. $\square$

Dies ist insofern eine Erweiterung des in Abschnitt 3.1 gezeigten Einspielsatzes, als daß man bei Einsetzen von $\mathbf{P}_0 \equiv \mathbf{0}$ genau die Bedingung des Eigenspannungsfelds $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ erhält. In der Einspielanalyse ist die größtmögliche lineare Vergrößerung von $\mathcal{L}$ gesucht, so daß alle Belastungen aus $\alpha\mathcal{L} = \{P'(t) \mid P'(t) = \alpha P(t), P(t) \in \mathcal{L}\}$ zu elastischem Einspielen der Struktur führen. Man erhält als Optimierungsproblem der Einspielanalyse

$$\max \quad \alpha \quad (6.2a)$$

$$\text{unter} \quad \Phi[\alpha\boldsymbol{\sigma}^E(\mathbf{x}, t) + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})] \leq \sigma_0^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (6.2b)$$

$$\operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{b}_0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (6.2c)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \mathbf{n} = \mathbf{p}_0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{\sigma}. \quad (6.2d)$$

Jetzt werden die Spannungen $\tilde{\sigma}$ aufgespalten in $\tilde{\sigma} = \sigma_0^E + \bar{\rho}$, wobei σ_0^E die fiktiven elastischen Spannungen zu $\mathbf{P}_0$ und $\bar{\rho}$ Eigenspannungen sind mit

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma_0^E(\mathbf{x}) &= -\mathbf{b}_0 & \text{und} & & \operatorname{div} \bar{\rho} &= \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \sigma_0^E(\mathbf{x}) \mathbf{n} &= \mathbf{p}_0 & & & \bar{\rho}(\mathbf{x}) \mathbf{n} &= \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_\sigma. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Damit erhält man das Problem:

$$\max \quad \alpha \quad (6.4a)$$

$$\text{unter} \quad \Phi[\alpha \sigma^E(\mathbf{x}, t) + \sigma_0^E(\mathbf{x}) + \bar{\rho}(\mathbf{x})] \leq \sigma_0^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (6.4b)$$

$$\operatorname{div} \bar{\rho}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (6.4c)$$

$$\bar{\rho}(\mathbf{x}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_\sigma. \quad (6.4d)$$

Benutzt man die Basisreduktion des ursprünglichen Verfahrens, so muß man in jeder Iterationsstufe k das folgende Optimierungsproblem lösen:

$$\max \quad \alpha^k \quad (6.5a)$$

$$\text{unter} \quad \Phi[\alpha^k \sigma_i^E(j) + \sigma_{0,i}^E + \rho_i^{k-1} + \mathbf{B}_i^{d,k} \mathbf{x}] \leq \sigma_0^2 \quad \forall i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}. \quad (6.5b)$$

Dabei ist $\mathcal{I}$ die Menge aller GAUSSpunkte und $\mathcal{J}$ die Menge aller Lastecken. $\mathbf{B}_i^{d,k}$ ist die Matrix der Basiselemente in Punkt i des reduzierten Eigenspannungsunterraums $\mathcal{B}_d$ und ρ^{k-1} ist der resultierende Eigenspannungstensor der vorherigen Iterationsstufe mit $\rho^0 \equiv \mathbf{0}$. Setzt man nun stattdessen $\rho^0 := \sigma_0^E$ und nach Lösung des Optimierungsproblems mit den optimalen Parametern $\mathbf{x}^*$

$$\rho^k := \rho^{k-1} + \mathbf{B}^{d,k} \mathbf{x}^*,$$

so erfüllt ρ^k in jeder Iterationsstufe die Gleichgewichtsbedingungen zur Last $\mathbf{P}_0$, da ρ^0 sie erfüllt und $\mathbf{B}^{d,k} \mathbf{x}$ ein Eigenspannungsfeld für alle Parameter $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ist. Mit diesen Modifikationen erhält man also in jeder Iterationsstufe k das Problem

$$\max \quad \alpha^k \quad (6.6a)$$

$$\text{unter} \quad \Phi[\alpha^k \sigma_i^E(j) + \rho_i^{k-1} + \mathbf{B}_i^{d,k} \mathbf{x}] \leq \sigma_0^2 \quad \forall i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}, \quad (6.6b)$$

welches analog zur ursprünglichen Einspielanalyse gelöst werden kann. Die konstante Belastung $\mathbf{P}_0$ beeinflusst bei der Lösung der Einspielanalyse lediglich die Initialisierung des Felds ρ^0 , so daß die zusätzliche konstante Belastung $\mathbf{P}_0$ sehr einfach in das vorhandene Programm der Einspielanalyse zu implementieren ist.

Berechnung der Fließlast bei konstanten Lasten

Die Struktur sei durch eine konstante Last $\mathbf{P}_0$ und eine monotone bzw. zyklische Last $\mathbf{P}$ belastet. Im allgemeinen spielt die konstante Last (z.B. Eigengewicht) bei den hier untersuchten Strukturen eine untergeordnete Rolle, so daß angenommen werden kann, daß die Traglast

bzw. Einspiellast im wesentlichen durch die variable Last dominiert wird. Bei den bisherigen Traglast- und Einspielanalysen wurde jeweils von der fiktiven elastischen Spannung σ^E zur Last $\mathbf{P}$ zu Fließbeginn ausgegangen. Treten konstante Lasten $\mathbf{P}_0$ (mit den dazugehörigen elastischen Spannungen σ_0^E) auf, so lassen sich die elastischen Spannungen σ^E nicht mehr über die Fließspannung skalieren. Bei den weiteren Betrachtungen wird vorausgesetzt, daß die Struktur unter der konstanten Last $\mathbf{P}_0$ nicht fließt (d.h. $\Phi(\sigma_0^E) < \sigma_0^2$).

Zu den Spannungen σ^E und σ_0^E und der Fließspannung σ_0 wird nun der größte Faktor $y^* > 0$ gesucht, so daß die Ungleichung

$$\Phi(y^* \sigma^E + \sigma_0^E) \leq \sigma_0^2 \quad (6.7)$$

in jedem Punkt der Struktur erfüllt ist. Zu den Spannungen σ^E und σ_0^E wird in jedem Punkt $\mathbf{x}$ der Wert $y(\mathbf{x})$ berechnet, so daß die Struktur unter der Last $\mathbf{P}_0 + y(x^*)\mathbf{P}$ zu fließen beginnt, d.h. $\Phi(y(\mathbf{x})\sigma^E(\mathbf{x}) + \sigma_0^E(\mathbf{x})) = \sigma_0^2$ gilt. Mit der Matrix $\mathbf{Q}$ gilt $\Phi(\sigma) = \sigma^T \mathbf{Q} \sigma$ (siehe Abschnitt 2), so daß die Gleichheit in (6.7) äquivalent ist zu der Gleichung

$$y^2(\mathbf{x})\Phi(\sigma^E(\mathbf{x})) + 2y(\mathbf{x})(\sigma^E(\mathbf{x}))^T \mathbf{Q} \sigma_0^E(\mathbf{x}) + \Phi(\sigma_0^E(\mathbf{x})) = \sigma_0^2. \quad (6.8)$$

Die Lösungen von Gleichung (6.8) sind:

$$y_{1,2}(\mathbf{x}) = -\frac{(\sigma^E(\mathbf{x}))^T \mathbf{Q} \sigma_0^E(\mathbf{x})}{\Phi(\sigma^E(\mathbf{x}))} \pm \sqrt{\left(\frac{(\sigma^E(\mathbf{x}))^T \mathbf{Q} \sigma_0^E(\mathbf{x})}{\Phi(\sigma^E(\mathbf{x}))}\right)^2 - \frac{\Phi(\sigma_0^E(\mathbf{x})) - \sigma_0^2}{\Phi(\sigma^E(\mathbf{x}))}}. \quad (6.9)$$

Für die Lösungen y_1 und y_2 kann O.B.d.A. $y_1 \neq y_2$ angenommen werden. Ansonsten muß der Wurzel Ausdruck in Gleichung (6.9) verschwinden, so daß im Widerspruch zur Annahme $\Phi(\sigma_0^E(\mathbf{x})) \geq \sigma_0^2$ folgte. Zuerst wird folgendes Lemma bewiesen:

Lemma 6.1

Für die elastischen Spannungen σ^E und σ_0^E gilt für $h, y^* > 0$ mit $\Phi(y^* \sigma^E + \sigma_0^E) = \sigma_0^2$:

$$\Phi(y^* \sigma^E + \sigma_0^E) < \Phi((y^* + h) \sigma^E + \sigma_0^E). \quad (6.10)$$

Beweis:

Aus $\Phi(\sigma_0^E) < \sigma_0^2$ und der Konvexität von Φ folgt:

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 - \Phi(\sigma_0^E) &= \Phi(y^* \sigma^E + \sigma_0^E) - \Phi(\sigma_0^E) \\ &\geq \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma_0^E} (y^* \sigma^E + \sigma_0^E - \sigma_0^E) = 2y^* (\sigma^E)^T \mathbf{Q} \sigma_0^E. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Nimmt man im Widerspruch die Umkehrung von Ungleichung (6.10) an, so folgt aus der Konvexität von Φ und Ungleichung (6.11) mit dem Korrekturfaktor $y^*/2h > 0$:

$$\begin{aligned} 0 &\geq y^*/2h [\Phi((y^* + h) \sigma^E + \sigma_0^E) - \Phi(y^* \sigma^E + \sigma_0^E)] \\ &\geq (y^* \sigma^E + \sigma_0^E)^T \mathbf{Q} y^* \sigma^E = \Phi(y^* \sigma^E + \sigma_0^E) - (y^* \sigma^E + \sigma_0^E)^T \mathbf{Q} \sigma_0^E \\ &= [\sigma_0^2 - \Phi(\sigma_0^E)] - y^* (\sigma^E)^T \mathbf{Q} \sigma_0^E \geq y^* (\sigma^E)^T \mathbf{Q} \sigma_0^E. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Daraus folgt mit $0 \geq y^*(\sigma^E)^T Q \sigma_0^E$ und Ungleichung (6.12)

$$0 \geq \underbrace{[\sigma_0^2 - \Phi(\sigma_0^E)]}_{>0} - \underbrace{y^*(\sigma^E)^T Q \sigma_0^E}_{\leq 0} > 0. \quad (6.13)$$

Ein offensichtlicher Widerspruch, so daß die Behauptung folgt. $\square$

Aus der Definition (6.9) von y_1 und y_2 und $y_1 \neq y_2$ folgt direkt $y_1 > y_2$. Nimmt man an, daß beide Werte positiv sind, so folgt mit dem Lemma angewandt auf $y^* = y_2 > 0$ und $y_1 = y_2 + h = y^* + h > 0$ ein Widerspruch zur Definition von y_1 und y_2 . Man schließt daraus $y_1 \geq 0 \geq y_2$. Da nur positive Lösungen des lokalen Problems (6.8) untersucht werden, ist die Lösung $y(x)$ gegeben durch $y(x) = y_1$. Bildet man nun das Minimum von $y(x)$ über alle Punkte mit

$$y^* = \min_{x \in \Omega} y(x), \quad (6.14)$$

so ist Bedingung (6.7) aufgrund von Ungleichung (6.10) in jedem Punkt der Struktur erfüllt. Dies führt zu folgendem Ergebnis:

Satz 6.2

Fließt die Struktur unter rein statischer Belastung P_0 nicht, so berechnet sich der elastische Faktor α_{elast} zur variablen Last P durch

$$\alpha_{elast} = \min_{x \in \Omega} \left[-\frac{(\sigma^E(x))^T Q \sigma_0^E(x)}{\Phi(\sigma^E(x))} + \sqrt{\left(\frac{(\sigma^E(x))^T Q \sigma_0^E(x)}{\Phi(\sigma^E(x))} \right)^2 - \frac{\Phi(\sigma_0^E(x)) - \sigma_0^2}{\Phi(\sigma^E(x))}} \right]$$

6.2 Optimierung bei thermischen und mechanischen Lasten

In diesem Abschnitt werden Strukturen untersucht, die mechanisch und thermisch beansprucht sind. Die Materialwerte σ_0, E seien temperaturunabhängig. Es werden nur solche Probleme untersucht, bei denen angenommen werden kann, daß das Strukturverhalten durch das Verhalten eines Punktes charakterisiert werden kann (z.B. dünnes Rohr unter Innendruck). Es ist dann ausreichend, ein einziges rotationssymmetrisches Element zu untersuchen. Der untersuchte Lastraum habe die Gestalt:

$$\begin{aligned} 0 \leq P \leq \alpha P_0 \gamma_1, & \quad 0 \leq \gamma_1 \leq 1 \\ 0 \leq T \leq \alpha T_0 \gamma_2, & \quad 0 \leq \gamma_2 \leq 1. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Es handelt sich dabei um einen rechteckigen Lastbereich. In den vier Lastecken ist folgendes Einspielproblem zu lösen:

$$\max \quad \alpha \quad (6.16)$$

$$\Phi(\alpha \sigma_j^E(x) + \bar{\rho}(x)) - \sigma_0^2 \leq 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad \forall x. \quad (6.17)$$

Bei einer einfachen Struktur wie dem unendlichen dünnen Rohr unter Innendruck und einem stationären rotationssymmetrischen Temperaturfeld (siehe [Bre67]) müssen nicht alle Punkte des Rohres untersucht werden. Da die Belastung rotationssymmetrisch ist und die Belastung über die Länge des Rohres gleichbleibend ist, werden nur die Punkte auf einem repräsentativen Radius benötigt. Bei einem dünnen Rohr ist die Temperaturverteilung über den Querschnitt näherungsweise konstant, so daß die maximale Belastung auf dem äußeren Radius des Rohres auftritt. Aus diesen Überlegungen folgt, daß für die Einspielfanalyse nur ein repräsentativer Punkt $\mathbf{x}^*$ auf dem Außenrand benötigt wird. Das reduzierte Einspielproblem lautet:

$$\max \quad \alpha \quad (6.18)$$

$$\Phi(\alpha \boldsymbol{\sigma}_j^E(\mathbf{x}^*) + \bar{\rho}(\mathbf{x}^*)) - \sigma_0^2 \leq 0 \quad j = 1, \dots, 4. \quad (6.19)$$

Die aus der rein thermischen Belastung resultierenden elastischen Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_T^E$ sind Eigenspannungen. Bei zyklischer rein thermischer Belastung ergibt sich dann sofort durch die Wahl von $\bar{\rho}(\mathbf{x}^*) = -\boldsymbol{\sigma}_T^E(\mathbf{x}^*)$ der optimale Einspielfaktor 2.

Eine Abschätzung für den Einspielfaktor bei mechanischer und thermischer Belastung ergibt sich durch folgende Überlegung. Nimmt man an, daß sich der während der zyklischen Belastung einstellende Eigenspannungszustand näherungsweise proportional zu $\boldsymbol{\sigma}_T^E$ ist, so ist das Problem

$$\max \quad \alpha \quad (6.20)$$

$$\Phi(\alpha \boldsymbol{\sigma}_j^E + \mu \boldsymbol{\sigma}_T^E) - \sigma_0^2 \leq 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad (6.21)$$

zu lösen. Das Optimierungsproblem hat zwei Unbekannte α, μ und vier Restriktionen. Die fiktiven elastischen Spannungen zu den verschiedenen Lastecken werden auf die Fließgrenze normiert, so daß $\Phi(\boldsymbol{\sigma}_j^E) = \sigma_0^2$ gilt, für $j = 1 \dots 4$. Der Einspielfaktor muß dann später auf den untersuchten Lastraum skaliert werden. Es sei $\boldsymbol{\sigma}_1^E = 0$ die fiktive elastische Spannung zur unbelasteten Struktur und $\boldsymbol{\sigma}_4^E = \boldsymbol{\sigma}_T^E$ die zur rein thermisch beanspruchten. Die zugehörige LAGRANGEFunktion lautet

$$L(\alpha, \mu) = \alpha - \sum_{j=1}^4 \lambda_j [\Phi(\alpha \boldsymbol{\sigma}_j^E + \mu \boldsymbol{\sigma}_4^E) - \sigma_0^2]. \quad (6.22)$$

Aus der KARUSH-KUHN-TUCKER-Bedingung $\nabla L = 0$ im lokalen Maximum folgt mit den Abkürzungen $\boldsymbol{\sigma}_j = \boldsymbol{\sigma}_j^E$, $\alpha := \alpha^*$ und $\mu := \mu^*$:

$$\nabla L(\alpha, \mu) = \begin{pmatrix} -1 + \sum_{j=1}^4 \lambda_j [2\alpha \sigma_0^2 + 2\mu \boldsymbol{\sigma}_j^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}_4] \\ \sum_{j=1}^4 \lambda_j [2\mu \sigma_0^2 + 2\alpha \boldsymbol{\sigma}_j^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}_4] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Komplementaritätsbedingung im lokalen Minimum lautet für $j = 1 \dots 4$

$$\lambda_j [\sigma_0^2 - (\alpha \boldsymbol{\sigma}_j + \mu \boldsymbol{\sigma}_4)^T \mathbf{Q} (\alpha \boldsymbol{\sigma}_j + \mu \boldsymbol{\sigma}_4)] = 0. \quad (6.23)$$

Werden alle Komplementaritätsbedingungen summiert, folgt mit $\nabla L = 0$

$$\begin{aligned}\sigma_0^2 \sum_{j=1}^4 \lambda_j &= \sum_{j=1}^4 \lambda_j [\alpha^2 \sigma_0^2 + \mu^2 \sigma_0^2 + 2\alpha\mu \sigma_j^T \mathbf{Q} \sigma_4] \\ &= \sum_{j=1}^4 \lambda_j [\alpha^2 \sigma_0^2 + \mu^2 \sigma_0^2 - 2\mu^2 \sigma_0^2] = \sigma_0^2 \sum_{j=1}^4 \lambda_j [\alpha^2 - \mu^2].\end{aligned}\quad (6.24)$$

Daraus schließt man

$$\alpha^2 - \mu^2 = 1. \quad (6.25)$$

Aus $\nabla L = 0$ folgt mit $\alpha^2 - \mu^2 = 1$

$$\mu \frac{\partial L}{\partial \mu} - \alpha \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \alpha + 2(\mu^2 - \alpha^2) \sigma_0^2 \sum_{j=1}^4 \lambda_j = \alpha - 2\sigma_0^2 \sum_{j=1}^4 \lambda_j = 0$$

und damit

$$\alpha = 2\sigma_0^2 \sum_{j=1}^4 \lambda_j \quad (6.26)$$

Die vierte Komplementaritätsbedingung lautet:

$$\lambda_4 [\sigma_0^2 - \alpha^2 \sigma_0^2 - \mu^2 \sigma_0^2 - 2\alpha\mu \sigma_0^2] = 0$$

Mit $\alpha^2 - \mu^2 = 1$ und $\mu \neq 0$ folgt:

$$\lambda_4 [\mu + \alpha] = 0,$$

woraus sofort $\lambda_4 = 0$ folgt. Ansonsten ist $\alpha = -\mu$ und damit $\alpha^2 - \mu^2 = 0 \neq 1$, was einen Widerspruch bedeutet. Für die Summe aus der zweiten und dritten Komplementaritätsbedingung gilt mit $\alpha^2 + \mu^2 = 1 + 2\mu^2$

$$\begin{aligned}(\lambda_2 + \lambda_3) \sigma_0^2 &= \lambda_2 [\alpha^2 \sigma_0^2 + \mu^2 \sigma_0^2 + 2\alpha\mu \sigma_2^T \mathbf{Q} \sigma_4] + \lambda_3 [\alpha^2 \sigma_0^2 + \mu^2 \sigma_0^2 + 2\alpha\mu \sigma_3^T \mathbf{Q} \sigma_4] \\ &= \lambda_2 [\sigma_0^2 + 2\mu^2 \sigma_0^2 + 2\alpha\mu \sigma_2^T \mathbf{Q} \sigma_4] + \lambda_3 [\sigma_0^2 + 2\mu^2 \sigma_0^2 + 2\alpha\mu \sigma_3^T \mathbf{Q} \sigma_4].\end{aligned}\quad (6.27)$$

Aus $\nabla L = 0$ folgt mit $\sigma_1 = 0$ und $\lambda_4 = 0$

$$2\lambda_1 \mu^2 \sigma_0^2 + \lambda_2 [2\mu^2 \sigma_0^2 + 2\alpha\mu \sigma_2^T \mathbf{Q} \sigma_4] + \lambda_3 [2\mu^2 \sigma_0^2 + 2\alpha\mu \sigma_3^T \mathbf{Q} \sigma_4] = 0.$$

Setzt man dies in Gleichung 6.27 ein, so gilt:

$$(\lambda_2 + \lambda_3) \sigma_0^2 = (\lambda_2 + \lambda_3) \sigma_0^2 - 2\lambda_1 \mu^2 \sigma_0^2,$$

so daß $\lambda_1 = 0$ gilt und damit auch die erste Restriktion im Optimum nicht aktiv sein kann.

Nimmt man nun an, es gelte noch $\lambda_2 = 0$, so folgt aus $\nabla L = 0$:

$$\lambda_3 [2\mu^2 \sigma_0^2 + 2\alpha\mu \sigma_3^T \mathbf{Q} \sigma_4] = 0.$$

Die dritte Komplementaritätsbedingung lautet:

$$\lambda_3[\sigma_0^2 - \alpha^2 \sigma_0^2 - \mu^2 \sigma_0^2 - 2\alpha\mu \sigma_3^T \mathbf{Q} \sigma_4] = 0.$$

Addiert man beide Gleichung, so gilt mit $\alpha^2 - \mu^2 = 1$

$$\lambda_3[\sigma_0^2 - \alpha^2 \sigma_0^2 + \mu^2 \sigma_0^2] = \lambda_3 \sigma_0^2 = 0,$$

so daß $\lambda_3 = 0$ folgt. Dies bedeutet, daß alle Restriktionen inaktiv sind und damit einen Widerspruch. Man schließt $\lambda_2 \neq 0$ und analog dazu $\lambda_3 \neq 0$. Im Minimum sind also die zweite und dritte Restriktionen aktiv, d.h. die Komplementaritätsbedingungen lassen sich durch λ_2 bzw. λ_3 dividieren und es gilt

$$\sigma_2^T \mathbf{Q} \sigma_4 = \sigma_3^T \mathbf{Q} \sigma_4.$$

Die zweite und dritte Restriktion sind also für alle α, μ identisch, so daß eine Restriktion wegfällt (O.B.d.A sei dies die dritte Restriktion). Daher folgt aus Gleichung (6.26)

$$\alpha = 2\sigma_0^2 \lambda_2.$$

Weiter schließt man aus $\nabla L = 0$

$$0 = \lambda_2[2\mu\sigma_0^2 + 2\alpha\sigma_2^T \mathbf{Q} \sigma_4]$$

und wegen $\lambda_2 \neq 0$ durch Einsetzen von λ_2 folgt für μ

$$\mu = -\alpha \frac{\sigma_2^T \mathbf{Q} \sigma_4}{\sigma_0^2}.$$

Wiederum mit $\nabla L = 0$ gilt:

$$0 = -1 + \lambda_2[2\alpha\sigma_0^2 + 2\mu\sigma_2^T \mathbf{Q} \sigma_4].$$

Durch Einsetzen von λ_2 und μ erhält man schließlich

$$\alpha^2 = \frac{\sigma_0^4}{\sigma_0^4 - (\sigma_2^T \mathbf{Q} \sigma_4)^2} \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{\sigma_0^4 - (\sigma_2^T \mathbf{Q} \sigma_4)^2}}.$$

Bemerkung

Als Beispiel betrachten wir eine achsensymmetrische dünne Schale, die ein dünnes Rohr repräsentiert. Das Rohr ist durch Innendruck und ein achsensymmetrisches Temperaturfeld belastet. Bei Fließbeginn sind die elastischen Spannungen in Hauptspannungsform zur rein mechanischen Last am Innenrand mit Innendurchmesser d nach der Kesselformel (siehe [Sza60]) in Zylinderkoordinaten gegeben durch:

$$\sigma_2^E = \sigma_m^E = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(\frac{d^2 + 1}{d^2}, 1, 1 - d^2 \right)^T.$$

Die fiktiven thermischen Spannungen zu Fließbeginn sind:

$$\boldsymbol{\sigma}_4^E = \boldsymbol{\sigma}_T^E = (\sigma_0, 0, 0)^T \quad \text{und damit gilt} \quad \boldsymbol{\sigma}_2^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_0^2.$$

Schließlich berechnet sich die Abschätzung des Einspielfaktors durch

$$\alpha = \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{\sigma_0^4 - (\boldsymbol{\sigma}_2^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}_4)^2}} = 2.$$

Hier ist zu beachten, daß sich der Einspielfaktor auf das modifizierte Einspielproblem bezieht, in dem alle fiktiven elastischen Spannungen auf die Fließgrenze normiert sind. Im Standard-Optimierungsverfahren sind die fiktiven elastischen Spannungen jedoch in der Regel nur in einer Lastecke auf die Fließgrenze normiert.

6.3 Behandlung temperaturabhängiger Fließgrenzen

Ist eine Struktur durch ein Temperaturfeld T belastet, so sollte i.a. die Fließspannung als temperaturabhängig angenommen werden. Der Beweis des Einspielsatzes (siehe Abschnitt 3) benutzt die Zeitunabhängigkeit des Elastizitätstensors, so daß eine Temperaturabhängigkeit des E-Moduls hier nicht weiter untersucht wird. Im folgenden stehe die Struktur unter einer variablen thermischen Belastung und gegebenenfalls unter mechanischer Belastung, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq T \leq \alpha T_0 \gamma_1, & \quad 0 \leq \gamma_1 \leq 1 \\ 0 \leq P \leq \alpha P_0 \gamma_2, & \quad 0 \leq \gamma_2 \leq 1. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Geht man von einer in σ_0 linearen Temperaturabhängigkeit aus, wobei $\sigma_0 = \sigma_0(T_0)$ die Fließgrenze zu Beginn der thermischen Belastung ist, so hat die Fließspannung die Form:

$$\sigma_0(T) = g(T) \sigma_0.$$

Dabei ist $g(T)$ eine monoton fallende materialabhängige Funktion. Die fiktiven elastischen Spannungen im Einspielsatz sind temperaturabhängig, so daß die Schreibweise $\boldsymbol{\sigma}^E(\mathbf{x}, T)$ (bzw. abkürzend $\boldsymbol{\sigma}^E(T)$) gerechtfertigt ist. Mit $\boldsymbol{\sigma}^E$ wird die fiktive elastische Spannung zu Beginn der Belastung T_0 benannt. Mit der VON MISES Fließfunktion Φ bezieht man $\boldsymbol{\sigma}^E$ immer auf die Fließgrenze $\sigma_0(T)$, d.h. $\Phi(\boldsymbol{\sigma}^E) = \sigma_0^2(T)$. Für $\boldsymbol{\sigma}^E(T)$ gilt nun:

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\sigma}^E(T)) &= \sigma_0^2(T) = g(T)^2 \sigma_0^2 \\ &= g(T)^2 \Phi(\boldsymbol{\sigma}^E) = \Phi(g(T) \boldsymbol{\sigma}^E). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Damit folgt $\boldsymbol{\sigma}^E(T) = g(T) \boldsymbol{\sigma}^E$, so daß sich der funktionale Zusammenhang von $\sigma_0(T)$ auf die elastischen Spannungen $\boldsymbol{\sigma}^E(T)$ überträgt. KÖNIG stellt in [Kö87] ein Einspieltheorem für Temperaturlasten auf.

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiere} & \alpha \\ \text{unter} & \Phi(\alpha \sigma_i^E(T) + \rho_i) \leq \sigma_0^2(T) \quad \forall i, \forall T. \end{array}$$

Nach (6.29) kann die Restriktion im i -ten GAUSSpunkt umgeformt werden in

$$\Phi(\alpha g(T) \sigma_i^E + \rho_i) \leq g^2(T) \sigma_0^2.$$

Dabei sei $g(T)$ eine monoton fallende Funktion mit $0 \leq g(T) \leq 1$ und die fiktiven elastischen Spannungen so gewählt, daß $\Phi(\sigma_i^E) = \sigma_0^2$ gilt. Sei α ein zulässiger Einspielfaktor und ρ ein zulässiges Eigenspannungsfeld, so daß ein aktiver GAUSS-Punkt i existiert mit

$$\Phi(\alpha \sigma_i^E + \rho_i) = \sigma_0^2.$$

Zu diesen Daten ist jetzt eine Temperatur T^* gesucht, so daß

$$\Phi(\alpha g(T) \sigma_i^E + \rho_i) \leq g^2(T) \sigma_0^2$$

für alle $T \leq T^*$ gilt. Mit den Abkürzungen $\sigma^E := \sigma_i^E$, $\rho := \rho_i$ und $Q = \tilde{Q}^T \tilde{Q}$ folgt:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha g(T) \sigma^E + \rho) &= (\alpha g(T) \sigma^E + \rho)^T Q (\alpha g(T) \sigma^E + \rho) \\ &= \alpha^2 g^2(T) \sigma^E Q \sigma^E + 2\alpha g(T) \rho^T Q \sigma^E + \rho^T Q \rho \\ &= \alpha^2 g^2(T) (\tilde{Q} \sigma^E)^T \underbrace{(\tilde{Q} \sigma^E)}_a + 2\alpha g(T) (\tilde{Q} \rho)^T (\tilde{Q} \sigma^E) + (\tilde{Q} \rho)^T \underbrace{(\tilde{Q} \rho)}_b \\ &= \alpha^2 g^2(T) |a|^2 + 2g(T) \alpha a^T b + |b|^2 = |\alpha g(T) a + b|^2 \\ &=: f(g(T)). \end{aligned} \tag{6.30}$$

Die Funktion $f(g(T))$ ist eine Parabel mit

$$\begin{aligned} f(0) &= |b|^2 \\ f(1) &= \alpha^2 |a|^2 + 2\alpha a^T b + |b|^2 \\ &= |\alpha a + b|^2 = \Phi(\alpha \sigma^E + \rho) = |a|^2. \end{aligned} \tag{6.31}$$

Aus $f(1) = |a|^2$ folgt $0 \leq (\alpha^2 - 1)|a|^2 + |b|^2 = -2\alpha a^T b$. Durch Differenzieren von f nach $g(T)$ erhält man den Scheitelpunkt $g(T_S)$ der Parabel durch

$$\begin{aligned} g(T_S) &= \frac{-a^T b}{\alpha |a|^2} \text{ mit} \\ f(g(T_S)) &= \frac{|a|^2 |b|^2 - (a^T b)^2}{|a|^2}. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Da $a^T b \leq 0$ gilt, ist $g(T_S) \geq 0$ und wegen $|b|^2 \leq |a|^2$ folgt $0 \leq g(T_S) \leq 1$. Aus der SCHWARZschen Ungleichung folgt $f(g(T_S)) \geq 0$. Da $g(T)$ – damit auch $\sigma_0(T)$ – eine monoton fallende Funktion in T ist, und $f(g(T))$ eine Parabel in $g(T)$ ist, können Schnittpunkte von

$f(g(T))$ und $\sigma_0(T)$ existieren. Zur Abkürzung schreiben wir $t := g(T)$, so daß die Nullstellen von $f(t) - t^2\sigma_0 = f(t) - t^2|\mathbf{a}|^2$ gesucht sind. Aufgrund der Gestalt von f und g existieren höchstens zwei Nullstellen. Es ist

$$\begin{aligned} f(t) - t^2|\mathbf{a}|^2 &= \alpha^2|\mathbf{a}|^2t^2 + 2\alpha\mathbf{a}^T\mathbf{b}t + |\mathbf{b}|^2 - t^2|\mathbf{a}|^2 \\ &= (\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2t^2 + 2\alpha\mathbf{a}^T\mathbf{b}t + |\mathbf{b}|^2. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Da $f(0) = |\mathbf{b}|^2 \geq 0$ gilt, sind die Werte der Funktion $f(g(T))$ bis zum kleinsten Schnittpunkt der Funktionen größer als die Werte der Funktion $\sigma_0^2(T)$. Zwischen dem kleinsten und dem größten Schnittpunkt der Funktionen gilt $f(g(T)) \leq \sigma_0^2(T)$. Eine Nullstelle ist laut Voraussetzung $t = 1$, so daß sich die zweite Nullstelle durch Polynomdivision berechnen läßt:

$$\begin{aligned} &[(\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2t^2 + 2\alpha\mathbf{a}^T\mathbf{b}t + |\mathbf{b}|^2] : (t - 1) = (\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2t + 2\alpha\mathbf{a}^T\mathbf{b} + (\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2 \\ &- \frac{(\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2t^2 + (\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2t}{(2\alpha\mathbf{a}^T\mathbf{b} + (\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2)t + |\mathbf{b}|^2} \\ &- \frac{(2\alpha\mathbf{a}^T\mathbf{b} + (\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2)t + 2\alpha\mathbf{a}^T\mathbf{b} + (\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2}{2\alpha\mathbf{a}^T\mathbf{b} + (\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} 2\alpha\mathbf{a}^T\mathbf{b} + (\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 &= \alpha^2|\mathbf{a}|^2 + 2\alpha\mathbf{a}^T\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 \\ &= f(1) - |\mathbf{a}|^2 = 0. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} f(t) - t^2|\mathbf{a}|^2 &= (t - 1)(t(\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2 + 2\alpha\mathbf{a}^T\mathbf{b} + (\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2) \\ &= (\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2(t - 1) \left[t - \frac{-2\alpha\mathbf{a}^T\mathbf{b} - (\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2}{(\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2} \right] \\ &= (\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2(t - 1) \left[t - \frac{(\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - (\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2}{(\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2} \right] \\ &= (\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2(t - 1) \left[t - \frac{|\mathbf{b}|^2}{(\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2} \right], \end{aligned} \quad (6.35)$$

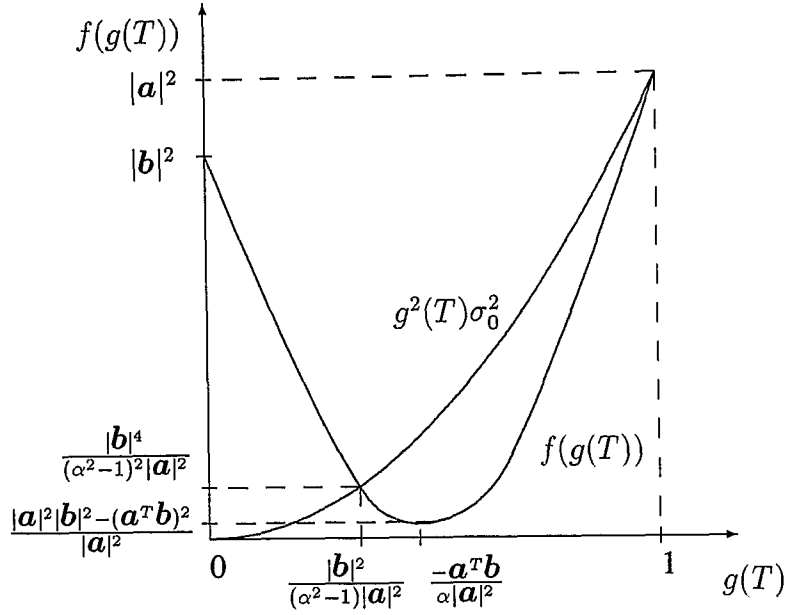
so daß die Nullstellen von $f(t) - t^2|\mathbf{a}|^2$

$$t_1 = 1 \quad \text{und} \quad t_2 = \frac{|\mathbf{b}|^2}{(\alpha^2 - 1)|\mathbf{a}|^2} \quad \text{sind.} \quad (6.36)$$

Für die Funktionswerte gilt:

$$f(t_1) = t_1^2\sigma_0^2 = |\mathbf{a}|^2 \quad \text{und} \quad f(t_2) = t_2^2\sigma_0^2 = \frac{|\mathbf{b}|^4}{(\alpha^2 - 1)^2|\mathbf{a}|^2}. \quad (6.37)$$

Es kann angenommen werden, daß $t_2 \leq 1$ gilt, denn ansonsten gilt $f(g(T)) \geq \sigma_0(T)$ für alle $T > 0$. Dies bedeutet, daß keine Temperaturlast zulässig wäre, was physikalisch sicherlich nicht

Bild 6.1: Funktionsgraphen von $f(g(T))$ und $g^2(T)\sigma_0^2$

plausibel ist. Die Funktionsgraphen der Funktionen $f(g(T))$ und $g^2(T)\sigma_0^2$ haben also qualitativ die Gestalt (siehe Bild 6.1).

Mit $g(T^*) = t_2$ folgt:

$$\begin{aligned} f(g(T)) &\geq g^2(T)\sigma_0^2, & \forall 0 \leq g(T) \leq g(T^*) \text{ und} \\ f(g(T)) &\leq g^2(T)\sigma_0^2, & \forall g(T^*) \leq g(T) \leq 1. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Durch Ausschreiben von Gleichung (6.36) erhält man

$$g(T^*) = \frac{\rho^T \mathbf{Q} \rho}{(\alpha^2 - 1)\sigma_0^2}.$$

Da $g(T)$ monoton fallend in T ist, läßt sich die Temperatur T^* eindeutig zum aktiven GAUSSpunkt i berechnen durch

$$T_i^* = g^{-1} \left(\frac{\rho^T \mathbf{Q} \rho}{(\alpha^2 - 1)\sigma_0^2} \right).$$

Mit der Monotonie der Funktion g folgt dann schließlich für einen aktiven GAUSSpunkt i :

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha \sigma_i^E(T) + \rho_i) &\leq \sigma_0^2(T), & \forall 0 \leq T \leq T^* \text{ und} \\ \Phi(\alpha \sigma_i^E(T) + \rho_i) &\geq \sigma_0^2(T), & \forall T \geq T^*. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Für GAUSSpunkte i , die zulässig aber nicht aktiv sind, läßt sich der Schnittpunkt der beiden Parabeln nicht in solch einfacher Form angeben. Die Funktion

$$\begin{aligned} F(g(T)) &:= g^2(T)\sigma_0^2 - f(g(T)) \\ &= g^2(T)(\sigma_0^2 - \alpha^2|a|^2) - 2\alpha a^T b g(T) - |b|^2 \end{aligned} \quad (6.40)$$

kann als quadratische Funktion höchstens zwei Nullstellen besitzen. Es gilt

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 - f(0) = -|b|^2 < 0 \\ F(1) &= \sigma_0^2 - (\alpha^2|a|^2 + 2\alpha a^T b + |b|^2) > 0, \end{aligned} \quad (6.41)$$

so daß genau eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ liegen muß. Die Nullstellen g_1 und g_2 der Funktion $F(g(T))$ sind

$$g_{1,2} = \frac{\alpha a^T b \pm \sqrt{\alpha^2 (a^T b)^2 + |b|^2 (\sigma_0^2 - \alpha^2 |a|^2)}}{\sigma_0^2 - \alpha^2 |a|^2}.$$

Bemerkung

1. Setzt man zur Kontrolle für die aktiven GAUSSpunkte $|a|^2 = \sigma_0^2$ ein, so folgt

$$\begin{aligned} g_{1,2} &= \frac{\alpha a^T b \pm \sqrt{0.25(|b|^2 + (\alpha^2 - 1)|a|^2)^2 + |b|^2(1 - \alpha^2)|a|^2}}{(1 - \alpha^2)|a|^2} \\ &= \frac{\alpha a^T b \pm 0.5(|b|^2 - (\alpha^2 - 1)|a|^2)}{(1 - \alpha^2)|a|^2} \quad \text{mit} \\ g_1 &= \frac{2\alpha a^T b + |b|^2 - (\alpha^2 - 1)|a|^2}{2(1 - \alpha^2)|a|^2} = 1 \quad \text{und} \cdot \\ g_2 &= \frac{2\alpha a^T b - |b|^2 + (\alpha^2 - 1)|a|^2}{2(1 - \alpha^2)|a|^2} = \frac{|b|^2}{(\alpha^2 - 1)|a|^2}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

2. Eine obere Schranke für die gesuchte Nullstelle ist:

$$g_3 = \frac{|b|^2}{\alpha^2 |a|^2 - \sigma_0^2},$$

denn es gilt:

$$\begin{aligned} F(g_3) &= \frac{|b|^4}{(\alpha^2 |a|^2 - \sigma_0^2)^2} (\sigma_0^2 - \alpha^2 |a|^2) - 2\alpha a^T b \frac{|b|^2}{\alpha^2 |a|^2 - \sigma_0^2} - |b|^2 \\ &= |b|^2 \frac{|b|^2 + 2\alpha a^T b + \alpha^2 |a|^2 - \sigma_0^2}{\sigma_0^2 - \alpha^2 |a|^2} \geq 0. \end{aligned} \quad (6.43)$$

In den aktiven GAUSSpunkten stimmen die Werte g_2 und g_3 überein.

Bei den Werten g_1 und g_2 kann man nicht im voraus sagen, welcher der beiden Werte im Intervall $[0, 1]$ liegt, so daß man beide Werte berechnet und dann den Wert $g(T_i^*)$ mit $0 \leq g(T_i^*) \leq 1$ auswählt. Auch für inaktive GAUSSpunkte i gilt

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha \sigma_i^E(T) + \rho_i) &\leq \sigma_0^2(T), \quad \forall 0 \leq T \leq T_i^* \text{ und} \\ \Phi(\alpha \sigma_i^E(T) + \rho_i) &\geq \sigma_0^2(T), \quad \forall T \geq T_i^*, \end{aligned} \quad (6.44)$$

so daß man bei Bildung des Wertes:

$$T^* = \min_i T_i^*,$$

für alle GAUSSpunkte i erhält

$$\Phi(\alpha \sigma_i^E(T) + \rho_i) \leq \sigma_0^2(T), \quad \forall 0 \leq T \leq T^*.$$

Die Temperatur $T^* = T^*(\alpha, \sigma^E, \rho)$ ist optimal, da bei einer Erhöhung der Temperatur ein GAUSSpunkt existiert, in dem die zugehörige Restriktion verletzt wäre. Da der Einspielfaktor α und das Eigenspannungsfeld ρ optimal für das temperaturunabhängige Problem sind, existiert keine zulässige Vergrößerung des Einspielfaktors.

Zum Ausgangslastbereich (siehe (6.28)), dem entsprechenden Einspielfaktor α , der temperaturabhängigen Fließfunktion $\sigma_0(T)$ und der maximal zulässigen Temperatur T^* ist der Einspielbereich mit $\alpha^* = T^*/T_0$ gegeben durch

$$\begin{aligned} 0 \leq T \leq \alpha^* T_0 \gamma_1, \quad 0 \leq \gamma_1 \leq 1 \\ 0 \leq P \leq \alpha^* P_0 \gamma_2, \quad 0 \leq \gamma_2 \leq 1. \end{aligned} \quad (6.45)$$

6.4 Einspielfanalyse für kinematisch verfestigendes Material

Aus den notwendigen Einspielbedingung für beschränkt kinematisch verfestigendes Material (siehe Abschnitt 3) erhält man für die Einspielfanalyse mit der Fließspannung σ_0 und der Bruchspannung σ_Y das Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} &\text{Maximiere} && \alpha \\ &\text{unter} && \Phi(\alpha \sigma_i^E(j) + \rho_i - \alpha_i) \leq \sigma_0^2 \\ &\text{und} && \Phi(\alpha_i) \leq [\sigma_Y - \sigma_0]^2 \quad \forall i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}, \end{aligned}$$

dabei sind der Lastfaktor α , das Eigenspannungsfeld ρ_i und das Backstressfeld α_i die Unbekannten des Problems.

6.4.1 Traglastanalyse für beschränkt kinematisch verfestigendes Material

Aus dem Traglastproblem mit $|\mathcal{J}| = 1$ für beschränkt kinematisch verfestigendes Material kann der Traglastfaktor direkt aus der Lösung des ideal-plastischen Problem berechnet werden. Nach der KARUSH-KUHN-TUCKER-Theorie wird das Optimum auf dem Rand der Restriktionsmenge angenommen. Im Optimum $(\alpha^*, \rho^*, \alpha^*)$ sind in den aktiven GAUSS-Punkten $i \in \mathcal{I}_0$ jeweils beide Ungleichungsbedingungen aktiv, d.h. für alle $i \in \mathcal{I}_0$ gilt simultan:

$$\Phi(\alpha^* \sigma_i^E + \rho_i^* - \alpha_i^*) = \sigma_0^2 \quad (6.46)$$

$$\Phi(\alpha_i^*) = [\sigma_Y - \sigma_0]^2 \quad (6.47)$$

Beweis:

Nimmt man O.B.d.A. im Gegensatz an (ansonsten ist immer ein Lastanstieg möglich), es existiere im Optimum $(\alpha^*, \rho^*, \alpha^*)$ ein $i \in \mathcal{I}_0$ mit

$$\Phi(\alpha^* \sigma_i^E + \rho_i^* - \alpha_i^*) = \sigma_0^2 \quad \text{und} \quad \Phi(\alpha_i^*) < [\sigma_Y - \sigma_0]^2, \quad (6.48)$$

dann wählt man die Werte:

$$\hat{\alpha}_i = c\alpha^* \sigma_i^E + x\rho_i^* + \alpha_i^* \quad (6.49)$$

$$\hat{\rho}_i = (1+c)\rho_i^* \quad (6.50)$$

$$\hat{\alpha} = (1+c)\alpha^* > \alpha^* \quad \text{mit} \quad (6.51)$$

$$c = \frac{(\sigma_Y - \sigma_0) - \sqrt{\Phi(\alpha_i^*)}}{\sigma_0 + \sqrt{\Phi(\alpha_i^*)}} > 0. \quad (6.52)$$

$\hat{\alpha}$ und $\hat{\rho}$ sind zeitunabhängig, da sich im Traglastfall die fiktive elastische Spannung σ^E im Laufe der Belastung nicht ändert. Es folgt:

$$\Phi(\hat{\alpha} \sigma_i^E + \hat{\rho}_i - \hat{\alpha}_i) = \Phi(\alpha^* \sigma_i^E(j) + \rho_i^* - \alpha_i^*) = \sigma_0^2.$$

Weiter gilt die Abschätzung:

$$\sqrt{\Phi(\hat{\alpha}_i)} = \sqrt{\Phi(c\alpha^* \sigma_i^E + c\rho_i^* + \alpha_i^*)} \quad (6.53)$$

$$= \sqrt{\Phi(c(\alpha^* \sigma_i^E + \rho_i^* - \alpha_i^*) + (1+c)\alpha_i^*)} \quad (6.54)$$

$$\leq c\sigma_0 + (1+c)\sqrt{\Phi(\alpha_i^*)} \quad (6.55)$$

$$= \frac{(\sigma_Y - \sigma_0)\sigma_0 + (\sigma_Y - \sigma_0)\sqrt{\Phi(\alpha_i^*)}}{\sigma_0 + \sqrt{\Phi(\alpha_i^*)}} = \sigma_Y - \sigma_0. \quad (6.56)$$

Damit ist $(\hat{\alpha}, \hat{\rho}_i, \hat{\alpha}_i)$ mit $(1+c)\alpha^* > \alpha^*$ eine zulässige Lösung des Optimierungsproblems im Widerspruch zur Annahme. Dies heißt, daß in jedem aktiven GAUSSpunkt $i \in \mathcal{I}_0$ beide Nebenbedingungen erfüllt sind. $\square$

Weiter gilt mit den Werten $\hat{\alpha}, \hat{\rho}_i, \hat{\alpha}_i$ folgendes:

$$\sqrt{\Phi(\hat{\alpha} \sigma_i^E + \hat{\rho}_i)} = (1+c)\sqrt{\Phi(\alpha^* \sigma_i^E + \rho_i^*)} \quad (6.57)$$

$$= \frac{\sigma_Y}{\sigma_0 + \sqrt{\Phi(\alpha_i^*)}} \sqrt{\Phi(\alpha^* \sigma_i^E + \rho_i^*)} \quad (6.58)$$

$$\leq \sigma_Y \frac{\sqrt{\Phi(\alpha^* \sigma_i^E + \rho_i^* - \alpha_i^*)} + \sqrt{\Phi(\alpha_i^*)}}{\sigma_0 + \sqrt{\Phi(\alpha_i^*)}} = \sigma_Y. \quad (6.59)$$

Damit folgt mit $\sigma_i = (1+c)[\alpha^* \sigma_i^E + \rho_i^*]$ die Abschätzung $\Phi(\sigma_i) \leq \sigma_Y^2$. Das Traglastoptimierungsproblem des verfestigenden Materials kann damit alternativ formuliert werden zu:

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximiere} & \alpha \\
\text{unter} & \Phi(\alpha \sigma_i^E + \rho_i - \alpha_i) \leq \sigma_0^2 \\
& \Phi(\alpha \sigma_i^E + \rho_i) \leq \sigma_Y^2 \\
& \Phi(\alpha_i) \leq [\sigma_Y - \sigma_0]^2 \quad \forall i \in \mathcal{I}.
\end{array}$$

Dieses Optimierungsproblem entsteht aus der ideal plastischen Formulierung mit Fließgrenze σ_Y durch die Hinzunahme von zusätzlichen Nebenbedingungen. Daraus folgt, daß der Traglastfaktor α_α einer Struktur aus verfestigendem Material nicht größer als der Traglastfaktor α_Y einer Struktur aus ideal plastischen Material mit Fließspannung σ_Y sein kann.

Wählt man schließlich das zeitunabhängige Backstressfeld

$$\alpha^* = \frac{\sigma_Y - \sigma_0}{\sigma_Y} (\alpha^* \sigma^E + \rho^*)$$

mit den optimalen Werten α^* und ρ^* des ideal plastischen Problems zur Fließspannung σ_Y , so folgt für alle $i \in \mathcal{I}$:

$$\Phi(\alpha_i^*) = (\sigma_Y - \sigma_0)^2 \underbrace{\frac{\Phi(\alpha^* \sigma_i^E + \rho_i^*)}{\sigma_Y^2}}_{\leq 1} \leq (\sigma_Y - \sigma_0)^2$$

und weiterhin in allen GAUSSpunkten:

$$\Phi(\alpha^* \sigma_i^E + \rho_i^* - \alpha_i^*) \leq \sigma_0^2.$$

Dies bedeutet, daß α^* , ρ^* und α^* die Nebenbedingungen des verfestigenden Materials erfüllen und damit der Traglastfaktor α_α des verfestigenden Materials gleich dem Traglastfaktor α_Y des ideal plastischen Materials ist.

Satz 6.3

Eine Struktur aus beschränkt kinematisch verfestigendem Material mit der Fließspannung σ_0 und der Bruchspannung σ_Y besitzt die gleiche Traglast, wie die gleiche Struktur aus ideal plastischem Material mit der Fließspannung σ_Y .

Anstatt der Traglastberechnung für kinematisch verfestigendes Material wird die Optimierung für ideal plastisches Material mit σ_Y durchgeführt.

6.4.2 Einspiellanalyse für unbeschränkt linear verfestigendes Material

Für Strukturen aus unbeschränkt linear verfestigendem Material, die lokal versagen, ist das Einspiellverhalten durch einige Punkte dominiert, in denen die maximale Vergrößerung am kleinsten ist (siehe [SH97b]).

$$\alpha_{shake} = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} (\max_{\rho} \alpha). \quad (6.60)$$

Dominiert nur ein einzelner Punkt dieses Verhalten, so kann eine analytische Lösung des Optimierungsproblems entwickelt werden. In diesem Fall stimmen die Lösungen für ideal plastisches und kinematisch verfestigendes Material überein (siehe [Zha91]). ZHANG löst dieses Problem in [Zha91] für zwei-dimensionale Strukturen. STEIN und HUANG lösen das Problem im Hauptspannungsraum (siehe [SH93]) mit Hilfe des Programms MACSYMA.

Hier wird für eine lokal versagende Struktur aus unbeschränkt linear verfestigendem Material unter einparametrischer Belastung, eine analytische Lösung hergeleitet. Die backstresses α müssen keine Nebenbedingungen erfüllen, so daß $y = \rho - \alpha$ freie Größen sind (siehe [Mel38]). Versagt die Struktur lokal in einem Punkt x , so ist folgendes Problem zu lösen:

$$\min \quad -\alpha \quad (6.61)$$

$$\sigma_0^2 - \Phi(\alpha \sigma_j^E(x) + y(x)) \geq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (6.62)$$

Die zugehörige LAGRANGEfunktion lautet

$$L(\alpha, y) = -\alpha - \sum_{j=1}^m \lambda_j [\sigma_0^2 - \Phi(\alpha \sigma_j^E(x) + y(x))]. \quad (6.63)$$

Mit den Abkürzungen $\sigma_j := \sigma_j^E(x)$ und $y := y(x)$ und der Matrix Q aus Abschnitt 2 gilt:

$$\Phi(\alpha \sigma_j + y) = \alpha^2 \sigma_j^T Q \sigma_j + 2\alpha \sigma_j^T Q y + y^T Q y \quad (6.64)$$

$$= (\alpha, y) \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_j^T Q \sigma_j & \sigma_j^T Q \\ Q \sigma_j & Q \end{pmatrix}}_{=: A_j} \begin{pmatrix} \alpha \\ y \end{pmatrix}. \quad (6.65)$$

Mit $z := (\alpha, y)^T$ lautet also Gleichung (6.63) in Matrixschreibweise

$$L(z) = (-1, 0, \dots, 0)z - \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j [\sigma_0^2 - z^T A_j z] \quad \text{und} \quad (6.66)$$

$$\nabla_z L(z) = (-1, 0, \dots, 0)^T + 2 \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j A_j z. \quad (6.67)$$

mit dem Differentialoperator $\nabla_z L(\cdot) = \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha}, \frac{\partial(\cdot)}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial(\cdot)}{\partial y_6} \right)$. Für ein lokales Minimum $z^* = (\alpha^*, y^*)$, folgt aus der KARUSH-KUHN-TUCKER-Bedingung $\nabla_z L(z^*) = 0$ mit den optimalen LAGRANGEmultiplikatoren λ_j^* (siehe [Fle87])

$$(1, \dots, 0)^T = 2 \left(\sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* A_j \right) z^* = 2 \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \begin{pmatrix} \sigma_j^T Q \sigma_j & \sigma_j^T Q \\ Q \sigma_j & Q \end{pmatrix} z^* \quad (6.68)$$

$$= 2 \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \sigma_j^T Q \sigma_j & \left(\sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \sigma_j \right)^T Q \\ Q \left(\sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \sigma_j \right) & Q \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \end{pmatrix} z^*. \quad (6.69)$$

Im lokalen Minimum $\mathbf{z}^*$ lauten die Komplementaritätsbedingungen für jede Lastecke:

$$\lambda_j^*(\sigma_0^2 - \mathbf{z}^{*T} \mathbf{A}_j \mathbf{z}^*) = 0 \quad j = 1, \dots, N_L. \quad (6.70)$$

Nach der Summation der Gleichungen (6.70) erhält man mit (6.68):

$$\sigma_0^2 \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* = \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \mathbf{z}^{*T} \mathbf{A}_j \mathbf{z}^* = \mathbf{z}^{*T} \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \mathbf{A}_j \mathbf{z}^* \quad (6.71)$$

$$= \frac{1}{2}(1, 0, \dots, 0) \mathbf{z}^* = \frac{1}{2} \alpha^*. \quad (6.72)$$

Der Einspielfaktor α^* läßt sich durch die LAGRANGEMultiplikatoren λ_j^* berechnen:

$$\alpha^* = 2\sigma_0^2 \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^*. \quad (6.73)$$

Mit (6.73) folgt aus (6.69)

$$0 = \left(\mathbf{Q} \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \boldsymbol{\sigma}_j, \mathbf{Q} \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \right) \mathbf{z}^* = \alpha^* \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}_j + \left(\sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \right) \mathbf{Q} \mathbf{y}^* \quad (6.74)$$

$$= \alpha^* \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}_j + \frac{\alpha^*}{2\sigma_0^2} \mathbf{Q} \mathbf{y}^*, \quad (6.75)$$

und mit $\alpha^* > 0$

$$\mathbf{Q} \mathbf{y}^* = -2\sigma_0^2 \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}_j. \quad (6.76)$$

Nun folgt mit (6.68)

$$\frac{1}{2} = \left(\sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \boldsymbol{\sigma}_j^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}_j, \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \boldsymbol{\sigma}_j^T \mathbf{Q} \right) \mathbf{z}^* = \alpha^* \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \boldsymbol{\sigma}_j^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}_j + \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \boldsymbol{\sigma}_j^T \mathbf{Q} \mathbf{y}^* \quad (6.77)$$

und mit (6.76)

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha^* \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \boldsymbol{\sigma}_j^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}_j - 1}{4\sigma_0^2} &= \left(\sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \boldsymbol{\sigma}_j \right)^T \left(\sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}_j \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \boldsymbol{\sigma}_j \right)^T \mathbf{Q} \left(\sum_{j=1}^{N_L} \lambda_j^* \boldsymbol{\sigma}_j \right). \end{aligned} \quad (6.78)$$

Für ein-parametrische Belastung hat der Lastbereich für die Einspielanalyse zwei Lastecken. Die zugehörigen fiktiven elastischen Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_1$ und $\boldsymbol{\sigma}_2$ mit $\Phi(\boldsymbol{\sigma}_1) = 0$ und $\Phi(\boldsymbol{\sigma}_2) = \sigma_0^2$ für die beiden Lastecken $\mathbf{P}_1 = 0$ und $\mathbf{P}_2$ lauten

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) \quad (6.79)$$

Aus (6.73) folgt

$$\alpha^* = 2\sigma_0^2(\lambda_1^* + \lambda_2^*). \quad (6.80)$$

Es gilt

$$\left(\sum_{j=1}^2 \lambda_j^* \sigma_j \right)^T Q \left(\sum_{j=1}^2 \lambda_j^* \sigma_j \right) = (\lambda_2^* \sigma_2)^T Q (\lambda_2^* \sigma_2) = (\lambda_2^*)^2 \sigma_0^2. \quad (6.81)$$

Mit (6.73) und (6.78) schließt man aus (6.81)

$$(\lambda_1^* + \lambda_2^*) \lambda_2^* \sigma_0^2 - \frac{1}{4\sigma_0^2} = (\lambda_2^*)^2 \sigma_0^2 \quad \text{bzw.} \quad \lambda_1^* \lambda_2^* = \frac{1}{4\sigma_0^4}. \quad (6.82)$$

Daraus folgt sofort, daß beide Lastecken im lokalen Minimum aktiv sein müssen. Aus den KARUSH–KUHN–TUCKER-Bedingungen und den Gleichungen (6.73) und (6.82) folgt dann

$$\lambda_1^* = \lambda_2^* = \frac{1}{2\sigma_0^2} \quad \text{und damit} \quad \alpha^* = 2. \quad (6.83)$$

Man erhält somit das Ergebnis, daß für ein-parametrische Lastbereiche bei lokalem Versagen unabhängig von der kinematischen Verfestigung der Einspielfbereich doppelt so groß ist wie der elastische Bereich.

Folgerung:

Aus physikalischen Gründen gilt stets, daß der Einspielfaktor α_{ideal} für eine Struktur aus ideal plastischem Material nicht größer sein kann, als der für beschränkt linear verfestigendes Material $\alpha_{endlich}$. Weiter gilt die Abschätzung für unbeschränkt linear kinematisch verfestigendes Material mit $\alpha_{endlich} \leq \alpha_{unendlich}$. Da das lokale Versagen einer Struktur aus unbeschränkt kinematisch verfestigendem Material dem schwächsten Versagensmodus genügt (siehe [Zha91]), gilt:

$$\alpha_{ideal} \leq \alpha_{endlich} \leq \alpha_{unendlich} \leq \alpha_{lokal}.$$

Stimmen die Werte α_{ideal} und α_{lokal} überein, so erhält man auch trivial die Werte $\alpha_{endlich}$ und $\alpha_{unendlich}$, ohne die genaue Art der Verfestigung zu kennen. Rein thermisch belastete Strukturen, die lokal versagen, entsprechen dieser Eigenschaft. Nach Abschnitt 6.4.2 gilt für diese Strukturen $\alpha_{lokal} = 2$. Aufgrund der thermischen Belastung sind die auftretenden Spannungen selbst Eigenspannungen, so daß mit dem zeitunabhängigen Eigenspannungsfeld $\bar{\rho} = -\sigma^E$ gilt: $\alpha_{ideal} \geq 2$ und damit $\alpha_{ideal} = \alpha_{lokal} = 2$. Für diese Strukturen wird also nur eine genaue Berechnung der Last P_{elast} zu Fließbeginn benötigt, die Einspiellast P_{shake} ergibt sich dann durch $P_{shake} = 2P_{elast}$, unabhängig von der Art der Verfestigung des Materials.

6.4.3 Einspiellanalyse für beschränkt linear verfestigendes Material

ZHANG gibt in [Zha91] notwendige Einspielbedingungen für das Einspielen von Strukturen aus beschränkt linear kinematisch verfestigendem Material an, die von der Formulierung von WEICHERT & GROSS–WEEGE in [WGW88] abweichen (siehe dazu die Bemerkung von ZHANG in [Zha91] S. 45). Anstelle der Bedingung (3.25) für alle $i \in \mathcal{I}$ wird in [WGW88] die Bedingung

$$\Phi[\alpha\sigma_i^E(j) + \bar{\rho}_i] \leq \sigma_Y^2 \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

benutzt. Diese Bedingung garantiert, daß die Spannungen $\sigma = \alpha\sigma^E(j) + \bar{\rho}$ sowohl in der verschobenen Anfangsfließfläche als auch in der Verfestigungsfläche liegen, d.h. jeweils

$$\Phi[\sigma - \alpha] \leq \sigma_0^2 \quad (6.84)$$

$$\Phi[\sigma] \leq \sigma_Y^2. \quad (6.85)$$

Es kann jedoch nicht ausgeschlossen werden, daß die verschobene Anfangsfließfläche Spannungen enthält, die außerhalb der Verfestigungsfläche liegen. ZHANG stellt deshalb die Frage nach der Richtigkeit der von WEICHERT & GROSS–WEEGE angegebenen Methode zur Berechnung des Einspielfaktors.

Zur Beantwortung dieser Frage werden die beiden Optimierungsprobleme nach [Zha91] und [WGW88] nach der Lastdiskretisierung untersucht:

- | | | | |
|----|---------------------------|---|---|
| 1. | Maximiere
unter
und | α
$\Phi(\alpha\sigma_i^E(j) + \rho_i - \alpha_i) \leq \sigma_0^2$
$\Phi(\alpha_i) \leq [\sigma_Y - \sigma_0]^2$ | $\forall i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J},$ |
| 2. | Maximiere
unter
und | α
$\Phi(\alpha\sigma_i^E(j) + \rho_i - \alpha_i) \leq \sigma_0^2$
$\Phi(\alpha\sigma_i^E(j) + \rho_i) \leq \sigma_Y^2$ | $\forall i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}.$ |

Dazu werden die Teilmengen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^6$ (für 3D) bzw. $\mathbb{R}^3$ (für 2D) definiert:

$$\mathcal{A} = \{\tau \mid \Phi(\tau) \leq \sigma_0^2\} \quad (6.86)$$

$$\mathcal{B} = \{\tau \mid \Phi(\tau) \leq \sigma_Y^2\} \quad (6.87)$$

$$\mathcal{C} = \{\tau \mid \Phi(\tau) \leq (\sigma_Y - \sigma_0)^2\}, \quad (6.88)$$

so daß die Restriktionsmengen der beiden Optimierungsprobleme jeweils durch $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ und $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ gegeben sind. Weiter ist leicht zu zeigen, daß die Funktion $\|\tau\| = \sqrt{\Phi(\tau)}$ für Spannungen die nicht dem hydrostatischen Druck entsprechen, eine Norm definiert. Speziell gilt dann die Dreiecksungleichung für die Spannungen τ_1 und τ_2 in der Form:

$$||\tau_1| - |\tau_2|| \leq |\tau_1 + \tau_2| \leq |\tau_1| + |\tau_2|.$$

Wählt man Werte auf den Rändern von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, d.h.

$$\tau_1 \quad \text{mit} \quad \|\tau_1\| = \sigma_0, \quad (6.89)$$

$$\tau_2 \quad \text{mit} \quad \|\tau_2\| = \sigma_Y, \quad (6.90)$$

so folgt mit $\sigma_0 \leq \sigma_Y$ die Ungleichung $\sigma_Y - \sigma_0 \leq \|\tau_1 + \tau_2\|$, d.h. $\tau_1 + \tau_2$ ist eine Spannung aus dem Abschluß des Komplements $\overline{\mathcal{C}^c}$ von $\mathcal{C}$.

Seien nun $\alpha_{\mathcal{A} \cap \mathcal{C}}$ und $\alpha_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}$ jeweils die optimalen Einspielfaktoren der Einspielfprobleme 1) und 2). Die weiter auftretenden Einspielfaktoren sind die Lösungen, der durch Hinzu- bzw. Hinwegnahme der jeweiligen Restriktionen erhaltenen modifizierten Einspielfprobleme. Es gilt

$$\alpha_{\mathcal{A} \cap \mathcal{C}} = \alpha_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}},$$

da nach der Dreiecksungleichung aus $\tau \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ zusätzlich $\tau \in \mathcal{B}$ folgt. Weiter kann durch Hinwegnahme einer Nebenbedingung der Optimalwert nicht kleiner werden, so daß folgt:

$$\alpha_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}} \leq \alpha_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}.$$

Mit Hilfe der KARUSH-KUHN-TUCKER-Bedingungen zeigt man, daß im Optimum $(\alpha^*, \rho^*, \alpha^*)$ des Optimierungsproblems 2) mindestens ein Punkt $i^* \in \mathcal{I}$, $j^* \in \mathcal{J}$ existiert, für den beide Nebenbedingungen aktiv sind, d.h.

$$\Phi(\alpha^* \sigma_{i^*}^E(j^*) + \rho_{i^*} - \alpha_{i^*}) = \sigma_0^2 \quad (6.91)$$

$$\Phi(\alpha^* \sigma_{i^*}^E(j^*) + \rho_{i^*}) = \sigma_Y^2. \quad (6.92)$$

Wählt man in diesem Punkt die Spannungen $\tau_1 \in \mathcal{A}$ und $\tau_2 \in \mathcal{B}$ mit

$$\tau_1 = \alpha^* \sigma_{i^*}^E(j^*) + \rho_{i^*} - \alpha_{i^*} \quad (6.93)$$

$$\tau_2 = -(\alpha^* \sigma_{i^*}^E(j^*) + \rho_{i^*}), \quad (6.94)$$

so folgt aus der Dreiecksungleichung $\sigma_Y - \sigma_0 \leq \|\tau_1 - \tau_2\|$ und damit $\tau_1 - \tau_2 \in \overline{\mathcal{C}^c}$. Damit folgt dann sofort:

$$\alpha_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} = \alpha_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{C}^c}}.$$

Damit schließt man insgesamt:

$$\alpha_{\mathcal{A} \cap \mathcal{C}} = \alpha_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}} \leq \alpha_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} = \alpha_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{C}^c}} \leq \alpha_{\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{C}^c}}. \quad (6.95)$$

Da $\alpha_{\mathcal{A} \cap \mathcal{C}}$ und $\alpha_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}$ jeweils zu konvexen Optimierungsproblemen gehören, wird das Optimum in $\partial(\mathcal{A} \cap \mathcal{C})$ bzw. $\partial(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ angenommen. Auf Grund von $\alpha_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} = \alpha_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{C}^c}}$ wird auch $\alpha_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{C}^c}}$ in $\partial(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{C}^c})$ angenommen. Ist $\tau_{\mathcal{A} \cap \mathcal{C}}$ die Lösung in $\partial(\mathcal{A} \cap \mathcal{C})$, so folgt: $\tau_{\mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \in \partial \mathcal{A} \cap \partial \mathcal{C}$.

Ansonsten kann τ_1 so gewählt werden, daß bei gleichem Optimalwert im Widerspruch zur globalen Optimalität $\tau_1 \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ gilt. Daraus folgt sofort:

$$\tau_{\mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \in \partial \mathcal{A} \cap \partial \mathcal{C} = \partial \mathcal{A} \cap \partial \overline{\mathcal{C}^c}.$$

Da das zu $\alpha_{\mathcal{A}}$ gehörige Optimierungsproblem ebenfalls konvex ist, gilt $\tau_{\mathcal{A}} \in \partial \mathcal{A}$ und damit auch $\tau_{\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{C}^c}} \in \partial(\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{C}^c})$. Mit dem gleichen Argument wie oben, kann auch hier gezeigt werden, daß sogar $\tau_{\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{C}^c}} \in \partial \mathcal{A} \cap \partial \overline{\mathcal{C}^c} = \partial \mathcal{A} \cap \partial \mathcal{C}$ gilt.

Da in $\partial \mathcal{A} \cap \partial \mathcal{C}$ aufgrund der Konvexität jedoch nur ein Optimalwert existieren kann, stimmen die Werte $\alpha_{\mathcal{A} \cap \mathcal{C}}$ und $\alpha_{\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{C}^c}}$ und damit mit Ungleichung (6.95) auch $\alpha_{\mathcal{A} \cap \mathcal{C}}$ und $\alpha_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}$ überein. Damit haben die Optimierungsprobleme 1) und 2) den gleichen Optimalwert, obwohl die Restriktionsmengen der Probleme nicht notwendig gleich sind. Dies beantwortet die Frage nach dem Zusammenhang zwischen den Formulierungen von ZHANG und WEICHERT & GROSS-WEERGE.

7 Probabilistische Grenzlastanalyse

Sicherheit und Zuverlässigkeit gehören zu den wichtigsten Eigenschaften von baulichen Anlagen und technischen Strukturen. Im allgemeinen wird die Zuverlässigkeit durch Unsicherheiten der Beanspruchungs- und Materialdaten beeinflusst. Unter der Zuverlässigkeit einer Struktur wird deren Eigenschaft verstanden, die vorgesehene Funktion für die beabsichtigte Lebensdauer mit ausreichender Wahrscheinlichkeit zu erfüllen. FREUDENTHAL [Fre56] erkannte, daß die Einwirkungen und Widerstände einer Struktur nicht als deterministisch vorgegebene Maximalwerte angesehen werden können. Die charakteristischen Größen der zu untersuchenden Struktur müssen als stochastische Werte betrachtet werden, so daß die Zuverlässigkeitstheorie nur auf Grundlage der Wahrscheinlichkeitstheorie sinnvoll ist (siehe dazu z.B. [Bje84], [Bou88], [Fre56], [HGK⁺87], [Kal98], [MKL86], [Rac97], [Sar90], [GS83] und [Scu81]).

Dabei ist zu beachten, daß die Zuverlässigkeitsanalyse bezüglich plastischem Strukturverhalten durchgeführt werden sollte, da thermisch hochbeanspruchte Strukturen oft erst im plastischen Bereich wirtschaftlich betrieben werden können (siehe Abschnitt 1). Bisher beschränkten sich die in diesem Abschnitt vorgestellte rechenzeitgünstige First Order Reliability Method (FORM) auf die Analyse elastischen Materialverhaltens, da die Sensitivitäten der Grenzzustandsfunktion bei plastischen Analysen nur durch zusätzliche Finite Element Berechnungen der Grenzlast erzeugt werden konnten. Im plastischen Fall müssen dann z.B. in jedem Iterationsschritt von FORM für jede Basisvariable durch Simulation der inkrementellen Grenzlastberechnung die Sensitivitäten berechnet werden.

AUGUSTI, BARATTA und CASCIATI zeigen in [ABC84], die Möglichkeit der approximativen Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit unter Einbeziehung verschiedener Versagensmodi auf. VÁSÁRHELYI verbindet in [Vas87] die Zuverlässigkeitsanalyse mit der Berechnung eines optimalen Designs einer Struktur. Für Stabwerke zeigen KIUREGHIAN und KE in [KK85] und KLINGMÜLLER in [Kli79] die Möglichkeit auf, Finite Elemente zur Zuverlässigkeitsanalyse zu nutzen. ZIMMERMANN verwendet in [Zim91] den kinematischen Satz, um die verschiedenen Versagensmodi zu bestimmen und daraus die Versagenswahrscheinlichkeit zu berechnen. BJERAGER nutzt in [Bje89] die lineare Programmierung und FORM zur Berechnung der plastischen Zuverlässigkeit für verschiedenen Versagensmodi. Auf dieser Basis stellt LOCCI in [Loc95] eine Implementation der probabilistischen Traglastberechnung in ein Finite-Element-Programm vor, falls die Traglast einfach bestimmbar ist.

Bisher mußte bei der plastischen Zuverlässigkeitsanalyse jede Grenzlast mittels eines inkrementellen Verfahrens berechnet werden. Für Einspielrechnungen ist dies aus den in Abschnitt 1 dargelegten Gründen kaum möglich. Erst durch die Grenzlastanalyse mit Hilfe des Basisreduktionsverfahrens kann die Berechnung der Sensitivitäten mit vertretbarem Rechenaufwand erfolgen.

Wie z.B. in PERMAS-RA konnte die probabilistische Untersuchung plastischen Strukturverhaltens nur mit Hilfe von zum Teil sehr aufwendigen Monte-Carlo-Simulationen durchgeführt werden [ARS98]. Durch die Berechnung der Sensitivitäten aus der deterministischen Traglast- und Einspielanalyse können die Monte-Carlo-Simulationen mit indirekter inkrementeller plastischer Berechnung durch FORM-Berechnungen mittels direkter Traglastberechnung ersetzt werden.

Zu Beginn dieses Abschnittes wird eine kurze Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie gegeben (siehe dazu zum Beispiel [Kre88]).

7.1 Einführung in die Probabilistik

Eine Funktion $X : \Omega \rightarrow \Sigma$ von einem Grundraum Ω in den Zielraum Σ heißt *Variable*. Eine reelle Variable, die je nach dem Ausgang eines Versuchs verschiedene Werte annimmt, heißt *Zufallsvariable*. Unter einem Versuch ist hier allgemein ein Vorgang zu verstehen, bei dem verschiedene Ausgänge möglich sind, zum Beispiel die Herstellung eines Materials (Stahl) oder eines Bauteils (Rohr). Als Zufallsvariable könnte dann die Streckgrenze des Stahls oder der Durchmesser des Rohres gewählt werden, da beide Werte als zufällig angesehen werden können. Im weiteren sind alle Zufallsvariablen reell.

Eine Familie $\{X_i\}_i$ von Zufallsvariablen mit $X_i : \Omega \rightarrow \Sigma$ heißt *unabhängig*, wenn für jede Wahl einer Teilmenge $A_i \subset \Sigma$ die Ereignisse $\{X_i \in A_i\}_i$ unabhängig voneinander sind.

Ist X eine Zufallsvariable, so bezeichnet $F(X)$ die *Verteilungsfunktion* der Zufallsvariablen. Für die Verteilungsfunktion gilt $F(x) = P(X < x)$. Das heißt, der Wert der Verteilungsfunktion an der Stelle x ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zufallsvariable X einen Wert kleiner als x annimmt. Eine Zufallsvariable ist durch ihre Verteilungsfunktion vollständig charakterisiert. Die wichtigsten Eigenschaften einer Verteilungsfunktion sind nachfolgend aufgezählt:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0,$
2. $F(x)$ ist monoton steigend und linksseitig stetig,
3. $P(a \leq X < b) = F(a) - F(b).$

Bisher wurde noch nicht die Stetigkeit der Zufallsvariable gefordert, so daß diese Eigenschaften für diskrete und stetige X gilt. Eine Zufallsgröße X heißt *stetig*, wenn sich ihre Verteilungsfunktion F darstellen läßt durch

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Dabei heißt die Funktion f *Dichte* der Verteilung. Aus den Eigenschaften der Verteilungsfunktion F folgt für die Dichte f

$$\begin{aligned} 1. \quad P(a \leq X < b) &= \int_a^b f(t) dt & 3. \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt &= 1 \\ 2. \quad P(X = a) &= 0. \end{aligned}$$

Im Anhang A.5 sind die in diesem Zusammenhang wichtigsten Verteilungen mit ihren Dichten und weiteren Eigenschaften angegeben. Für das weitere Vorgehen spielen die beiden folgenden Verteilungen eine gesonderte Rolle:

Normalverteilung und **Standardnormalverteilung** ($\sigma = 1, \mu = 0$)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad \text{bzw.} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5x^2}.$$

Der Wert einer Zufallsvariable hängt vom Zufall ab, es stellt sich jedoch die Frage nach ihrem „mittleren“ oder „durchschnittlichen“ Wert. Interpretiert man die Dichte f als „Massendichte“ zur Zufallsvariable X , so ist der Erwartungswert $E(X)$ der Schwerpunkt dieser Massenverteilung. Daraus folgt, daß der Erwartungswert von der Wahrscheinlichkeitsverteilung P abhängt und es gilt die Definition:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß das Integral absolut konvergiert. Anderenfalls hat die Verteilung keinen Mittelwert. Interpretiert man die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x)$ als Massen, so entspricht der Erwartungswert dem Schwerpunkt dieses Systems auf der reellen Achse. Für den Erwartungswert gelten folgende einfache Regeln. Sie folgen direkt aus der Definition des Erwartungswertes, falls die jeweiligen Erwartungswerte existieren.

1. $E(a) = a, a \in \mathbb{R}.$
2. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
3. $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$, falls X und Y unabhängig.
4. $E(\lambda X) = \lambda E(X), \lambda \in \mathbb{R}.$

Für die Transformation von Zufallsvariablen ist folgende Eigenschaft wichtig. Ist X eine Zufallsvariable mit stetiger Dichte f und ist g eine stetige Funktion, so existiert der Erwartungswert $E(g(X))$ genau dann, wenn $\int |g(x)|f(x)dx < \infty$ gilt und es gilt dann:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.$$

Eine weitere wichtige Charakteristik der Zufallsvariablen X und ihrer Verteilung ist die *Varianz* von X . Während der Erwartungswert ein Maß für den Mittelwert einer Verteilung ist, ist die Varianz ein Maß für die Streuung um diesen Mittelwert. Als Maß für die Abweichung einer Realisation x von X vom Mittelwert $E(X)$ verwendet man $(x - E(X))^2$. Der Erwartungswert hiervon reflektiert dann die Schwankungen der Realisationen um den Mittelwert. Man definiert die Varianz durch:

$$\text{Var}(X) = E((X - E(X))^2).$$

Mit $\sqrt{\text{Var}(X)}$ bezeichnet man die *Streuung* oder *Standardabweichung* von X . Zum Begriff der stochastischen Unabhängigkeit führt man noch die *Korrelation* bzw. *Kovarianz* zweier Zufallsvariablen X und Y ein. Die Kovarianz ist definiert durch:

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Zwei Zufallsvariablen X und Y heißen *unkorreliert*, wenn $\text{Cov}(X, Y) = 0$ gilt. Damit sind unabhängige Zufallsvariablen immer unkorreliert, die Umkehrung gilt i.a. jedoch nicht. Im Anhang A.5 sind der Erwartungswert und die Varianz der definierten Verteilungen angegeben. Weiter sind die wichtigsten Eigenschaften zusammengesetzter Zufallsvariablen angegeben.

Ein wichtiger Aspekt zusammengesetzter Zufallsvariablen ist im *Zentralen Grenzwertsatz* gegeben. Ist $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von Zufallsvariablen die alle unabhängig identisch verteilt sind, das heißt mit gleicher Verteilungsfunktion (und damit auch gleichem Erwartungswert μ und Varianz σ^2), so ist die Zufallsvariable $Y_n = X_1 + \dots + X_n$ asymptotisch normalverteilt mit $E(Y_n) \rightarrow n\mu$ und $\text{Var}(Y_n) \rightarrow n^2\sigma^2$ (siehe zum Beispiel [Kre88], [KZ95]).

7.2 Allgemeine Zuverlässigkeitstheorie

Der Zustand einer Struktur hängt von unsicheren Größen (zum Beispiel Größe der Belastung, Art der Belastung, Fertigungsfehler, Materialdaten, ...) ab, die zu einem Zufallsvektor $\mathbf{X}$ von Zufallsvariablen X_i zusammengefaßt werden: $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$. Dazu gehört die n -dimensionale Verteilungsfunktion mit der gemeinsamen Dichte $f(x_1, \dots, x_n)$

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n.$$

Diese Zufallsvariablen werden *Basisvariablen* genannt. Die Realisationen der Zufallsvariablen X_i werden mit kleinen Buchstaben x_i bezeichnet und zu einem Vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ zusammengefaßt. Wir betrachten hier nur die beiden wesentlichen Zustände einer Struktur, den uneingeschränkt verfügbaren Zustand und den Versagenszustand. Die Struktur geht in den Versagenszustand über, wenn die aufgebrachte Last P , die maximal tragbare Last P_{limit} (Traglast bzw. Einspiellast) der Struktur übersteigt. Somit wird der Struktur Ω eine Beanspruchbarkeit

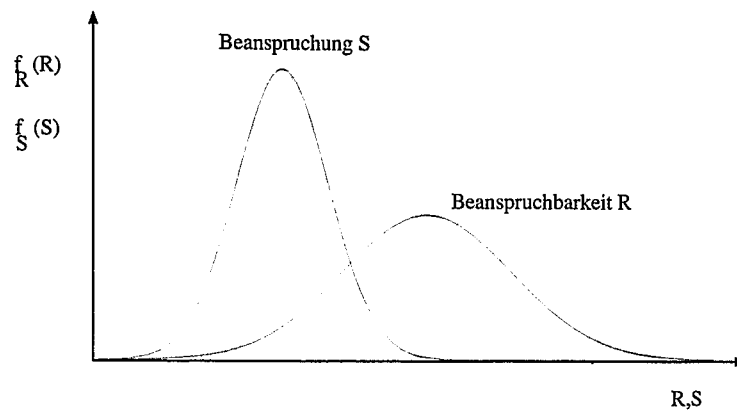


Bild 7.1: Versagenswahrscheinlichkeit für zwei Basisvariablen

$R = |P_{limit}|$ und eine Beanspruchung $S = |P|$ zugeordnet. In der elastischen Zuverlässigkeitstheorie entspricht der Wert R (resistance) der Fließspannung σ_0 und die Beanspruchung S der höchsten elastischen Vergleichsspannungen σ_{vM} . Dieses Kriterium kann durch die *Grenzzustandsfunktion* g beschrieben werden, das heißt die Struktur versagt, wenn gilt:

$$g(\mathbf{x}) = |P_{limit}| - |P| = R - S \leq 0.$$

Dabei sind P und P_{limit} im allgemeinen von den Basisvariablen X_i abhängig. Die Realisa-

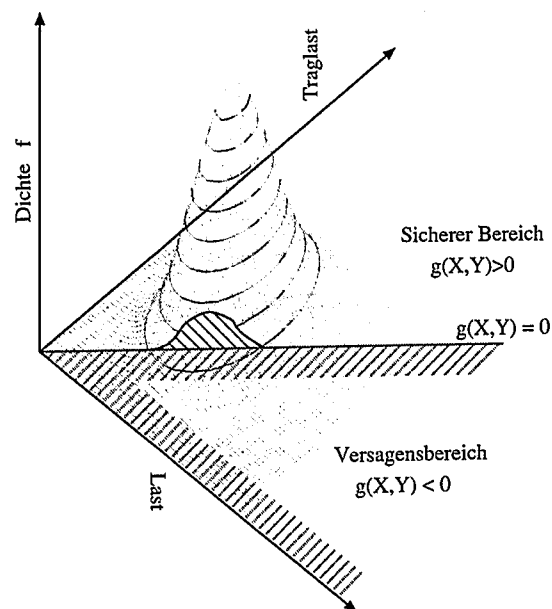


Bild 7.2: Versagenswahrscheinlichkeit für allgemein verteilte Variablen

tionen $\mathbf{x}$ von $\mathbf{X}$, für die $g(\mathbf{x})$ nicht positiv ist, werden *Versagenszustände* genannt und bilden gemeinsam den *Versagensbereich* $V = \{\mathbf{x} | g(\mathbf{x}) \leq 0\}$. Ein Ereignis F , welches definiert ist durch $F = \{\mathbf{x} \in V\}$, heißt *Versagensereignis*. Die Aufgabe der Zuverlässigkeitstheorie ist die

Berechnung der Wahrscheinlichkeit P dieses Ereignisses F , unter der Voraussetzung, daß die Basisvariablen X_i nach F_i verteilt sind. Im weiteren wird angenommen, daß die Zufallsvariablen X_i neben den Verteilungen F_i auch Dichten f_i besitzen, so daß zu $\mathbf{X}$ eine gemeinsame Dichte f_X existiert. Damit läßt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit darstellen durch:

$$P_{f_X} = P(F) = \int_V f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

P_f heißt *Versagenswahrscheinlichkeit (probability of failure)*. Die komplementäre Wahrscheinlichkeit $P_r = 1 - P_f$ heißt *Zuverlässigkeit (reliability)*. Im allgemeinen entspricht die Berechnung von P_f der Berechnung eines mehrdimensionalen Volumenintegrals über das Gebiet V , welche nur selten analytisch möglich ist. Die *First Order Reliability Method (FORM)* bietet eine Technik an, mit der diese komplizierte Berechnung umgangen werden kann (siehe [Bje89], [Rac97], [ScS87], [Sta95]). Zunächst werden unabhängige normalverteilte Basisvariablen untersucht, da allgemeinverteilte Variablen immer in diese transformiert werden können. In Bild 7.2 sind die Wahrscheinlichkeit über den Zufallsvariablen aufgezeichnet. Der schraffierte Bereich zeigt den durch die Grenzzustandsfunktion bestimmten Versagensbereich V .

7.3 Normalverteilte Basisvariablen

Wir nehmen an, daß der Vektor $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$ ein Zufallsvektor aus unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen U_i ist, d.h. $U_1 \sim N(0, 1), \dots, U_n \sim N(0, 1)$. Die Versagensereignisse F werden dann zu der Menge V_F zusammengefaßt, so daß sich jedes Versagensereignis schreiben läßt als $F = \{\mathbf{u} \in V_F\}$, bzw. mit der Grenzzustandsfunktion G : $F = \{\mathbf{u} | G(\mathbf{u}) \leq 0\}$. In der First Order Reliability Method (FORM) wird eine lineare Approximation V von V_F in einem Punkt $\mathbf{u}_0$ untersucht. Diese lineare Approximation läßt sich mit der Normalen $\mathbf{a} = \nabla G(\mathbf{u}_0)$ von V im Punkt $\mathbf{u}_0$ darstellen durch:

$$V = \{\mathbf{u} | \mathbf{a}^T \mathbf{u} + a_0 \leq 0\} = \{\mathbf{u} | \nabla^T G(\mathbf{u}_0) \mathbf{u} + a_0 \leq 0\} \quad (7.1)$$

Der Rand dieses Bereiches wird als Grenzzustandsfläche ∂V definiert und hat die Normalform:

$$\partial V = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{a}^T \mathbf{u} + a_0 = 0\} = \left\{ \mathbf{u} \mid \frac{\mathbf{a}^T}{|\mathbf{a}|} \mathbf{u} + \frac{a_0}{|\mathbf{a}|} = 0 \right\} = \{\mathbf{u} \mid \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{u} + \beta = 0\},$$

mit

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{a_0}{|\mathbf{a}|}.$$

Aus der Normierung folgt sofort, $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$. Der Vektor $\boldsymbol{\alpha}$ ist proportional zu den Sensitivitäten ∇G im Punkt $\mathbf{u}_0$. Aus der Faltungsformel (A.11) für unabhängige Zufallsvariablen folgt, daß die Zufallsvariable $\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{U}$ ebenfalls normalverteilt ist, mit dem Mittelwert $E(\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{U}) =$

$\alpha^T E(\mathbf{U}) = 0$ und der Varianz $\text{Var}(\alpha^T \mathbf{U}) = \alpha^T \alpha \text{Var}(\mathbf{U}) = 1$, das heißt $\alpha^T \mathbf{U} \sim N(0, 1)$. Das Versagensereignis $F = \{\mathbf{u} \in V\}$ ist also äquivalent mit dem Ereignis $\{\alpha^T \mathbf{u} + \beta \leq 0\}$ bzw. mit $\{\alpha^T \mathbf{u} \leq -\beta\}$. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist $P_f = P(\alpha^T \mathbf{U} \leq -\beta)$. Da $\alpha^T \mathbf{U}$ standardnormalverteilt ist, entspricht diese Wahrscheinlichkeit dem Wert

$$P_f = P(\alpha^T \mathbf{U} \leq -\beta) = \Phi(-\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\beta} e^{-0.5z^2} dz.$$

Dabei ist Φ die Verteilungsfunktion der GAUSSschen Standardnormalverteilung. Da die Wahrscheinlichkeit P_f nur vom Wert β abhängt, ist es sinnvoll β als *Sicherheitsindex* zu bezeichnen. Ist es möglich β analytisch zu berechnen, so kann die Versagenswahrscheinlichkeit direkt angegeben werden. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht möglich. Bild 7.3(a) und 7.3(b) zeigen schematisch für einfache Zufallsvariablen die Transformation der allgemeinverteilten Variablen in die normalverteilten. Dabei sind Linien konstanter Wahrscheinlichkeit eingezeichnet.

7.4 Allgemein verteilte Basisvariablen

Für beliebig verteilte Basisvariablen existiert im allgemeinen keine analytische Lösung von P_f . Zusätzlich kann die Versagenswahrscheinlichkeit von der Wahl des stochastischen Modells abhängen (siehe dazu [Rac97]). Deshalb werden die Basisvariablen X_i in standardnormalverteilte Variablen U_i durch die allgemeine vektorielle Abbildung Ψ transformiert. Damit geht der Versagensbereich $V_X = \{\mathbf{x} | g(\mathbf{x}) \leq 0\}$ in den Bereich $V_U = \{\mathbf{u} | G(\mathbf{u}) \leq 0\}$ über. Für zwei Basisvariablen X und Y ist die Transformation Ψ in die standardnormalverteilten Zufallsvariablen U und V in den Bildern 7.3(a) und 7.3(b) veranschaulicht. Für unabhängige Zufallsvariablen sind die einzelnen Komponenten der Transformation Ψ unabhängig, für abhängige gilt dies nicht mehr. Die allgemeine Transformation ist dann meist kompliziert (siehe [Rac97]).

Es ergeben sich abhängig von der mechanischen Formulierung unterschiedliche Sicherheitsindizes. HASOFER und LIND schlagen eine Modifizierung vor, so daß die Versagenswahrscheinlichkeit nicht mehr von dem stochastischen Modell abhängt (siehe [Rac97]). Die Zufallsvariablen werden um ihre Mittelwerte zentriert. Durch die Standardisierung werden die neuen Variablen unkorreliert mit Mittelwert 0 und Varianz 1. Der Sicherheitsindex nach HASOFER und LIND berechnet sich dann zu:

$$\beta_{HL} = \min \mathbf{u}^T \mathbf{u} \text{ mit } \{\mathbf{u} | G(\mathbf{u}) \leq 0\}. \quad (7.2)$$

Der Punkt $\mathbf{u}^*$, der das Optimum von β_{HL} definiert, heißt β -Punkt oder auch *Designpunkt*. Anschaulich ist dies der Punkt auf dem Rand der Grenzzustandsfläche $\partial V = \{\mathbf{u} | G(\mathbf{u}) = 0\}$ mit dem geringsten Abstand zum Ursprung.

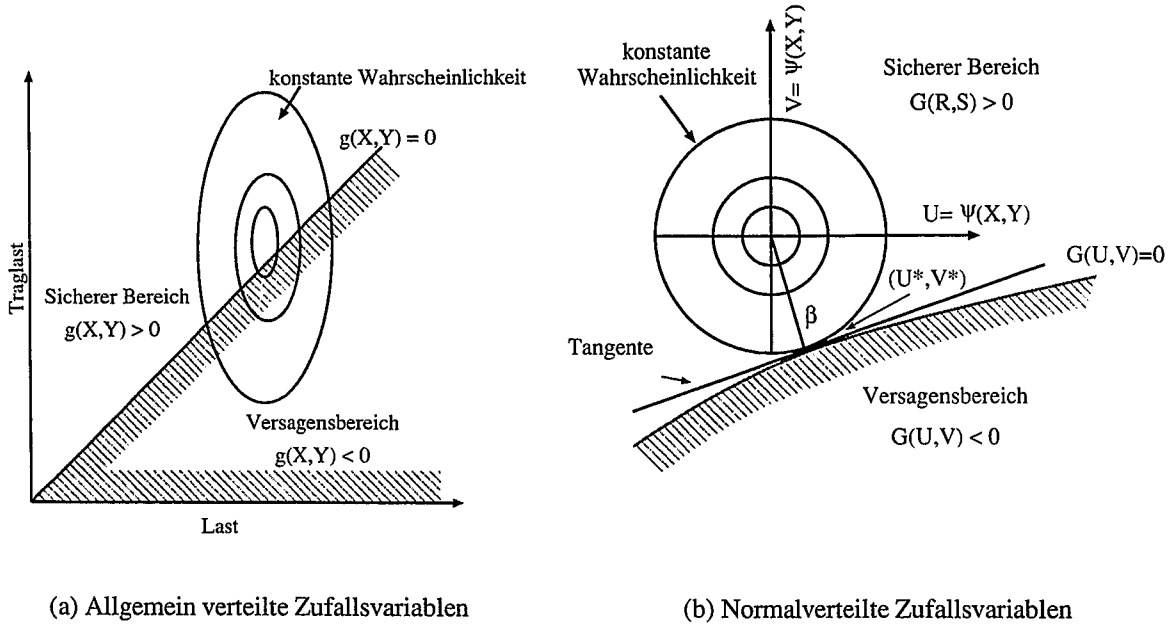


Bild 7.3: Transformation der allgemeinen in normalverteilte Zufallsvariablen

Sei jetzt $\mathbf{U}$ ein unabhängiger standardnormalverteilter Zufallsvektor und $\tilde{V}$ das Versagensgebiet. Eine lineare Approximation V ist gegeben durch

$$V = \{\mathbf{u} \mid \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{u} + \beta \leq 0\}$$

mit $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$. Dann ist $P_f = \Phi(-\beta)$ die Versagenswahrscheinlichkeit. Der β -Punkt ist $\mathbf{u}^* = -\beta \boldsymbol{\alpha}^T$. Dabei ist $\boldsymbol{\alpha}$ der Richtungsvektor und $\beta = |\mathbf{u}^*|$ der Abstand zum Ursprung.

7.5 Ein Suchalgorithmus für den β -Punkt

Beschränken wir uns nun auf den Fall einer stetig differenzierbaren Grenzzustandsfunktion $G(\mathbf{u})$. Der Designpunkt $\mathbf{u}^*$ ist die Lösung des Optimierungsproblems (7.2). Dies ist im allgemeinen ein nichtlineares Optimierungsproblem mit der Nebenbedingung $G(\mathbf{u}) \leq 0$. Transformiert man das Problem (7.2) durch die Zielfunktion $f(\mathbf{u}) = 0.5 \mathbf{u}^T \mathbf{u}$ unter die Nebenbedingung $G(\mathbf{u}) \leq 0$, so läßt sich nach den KARUSH-KUHN-TUCKER-Optimalitätsbedingungen die Ableitung der Zielfunktion im Optimum $\mathbf{u}^*$ durch die Ableitung der Nebenbedingung darstellen. Da $\mathbf{u}^*$ ein Minimum ist, folgt

$$\nabla_{\mathbf{u}} f(\mathbf{u}^*) = \mathbf{u}^* = -\lambda^* \nabla_{\mathbf{u}} G(\mathbf{u}^*) = -\beta \boldsymbol{\alpha}.$$

Entwickelt man $G(\mathbf{u})$ in eine lineare TAYLORreihe um $\mathbf{u}_0$ auf $\partial V = \{\mathbf{u} \mid G(\mathbf{u}) = 0\}$, so folgt:

$$G(\mathbf{u}) = G(\mathbf{u}_0) + \nabla_{\mathbf{u}} G(\mathbf{u}_0)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0).$$

Setzt man voraus, daß jede Umgebung von $\mathbf{u}_0$ einen nichtleeren Schnitt mit der Grenzzustandsfläche ∂V hat, so folgt für Punkte diese Schnittes $G(\mathbf{u}) = 0$. Ist $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_0$ eine Näherung des Designpunktes $\mathbf{u}^*$, so läßt sich damit ein neuer Näherungswert $\mathbf{u}_{k+1}$ berechnen durch die Rekursionsformel (für $\nabla_u G(\mathbf{u}_k) \neq 0$):

$$\mathbf{u}_{k+1} = \frac{\nabla_u G(\mathbf{u}_k)}{|\nabla_u G(\mathbf{u}_k)|^2} [\mathbf{u}_k^T \nabla_u G(\mathbf{u}_k) - G(\mathbf{u}_k)] . \quad (7.3)$$

Die Bestimmung der partiellen Ableitungen von g ist der aufwendigste Teil dieses Iterationsverfahrens. Die Ableitungen der Funktion G werden über die Kettenregel aus den Ableitungen $\nabla_x g$ und $\nabla_u \mathbf{x}$ berechnet:

$$\nabla_u G(\mathbf{u}) = \nabla_u g(\mathbf{x}) = \nabla_x g(\mathbf{x}) \nabla_u \mathbf{x}.$$

Diese Ableitungen werden auch *Sensitivitäten* nach den Basisvariablen genannt. Die Ableitungen $\nabla_u \mathbf{x}$ hängen in der Regel nur von der gewählten Transformation Ψ ab und können demnach unabhängig von der Wahl der Grenzzustandsfunktion berechnet werden. Im allgemeinen können die Sensitivitäten nur analytisch durch Bildung von Differenzenquotienten bestimmt werden. Da dies in der Regel durch Finite Element Analysen geschieht, ist der Aufwand für die Sensitivitätsanalyse groß.

In elastischen Analysen, bei denen Versagen schon bei Erreichen der Fließgrenze angenommen wird, können die Ableitungen in der FE-Analyse berechnet werden. Dazu wird in PERMAS-RA eine Sensitivitätsanalyse genutzt, die für die Strukturoptimierung bereits implementiert war. Dabei wird benutzt, daß ein linearer Zusammenhang zwischen den Spannungen σ und den Dehnungen ϵ besteht, der während der Berechnung konstant bleibt. Die Sensitivitäten der Maximalbelastung nach den Einflußgrößen werden dann über die Kettenregel berechnet (siehe dazu [PER88], [Sar90]). Bisher konnte dieses Verfahren nicht auf plastische FE-Analysen erweitert werden, da der lineare Zusammenhang zwischen σ und ϵ nicht mehr gegeben ist. Für probabilistische Fließspannungen und Lasten werden die Sensitivitäten in dieser Arbeit erstmals im Rahmen der Traglast- und Einspielanalyse analytisch berechnet (siehe [HS98]). Der Ablauf der gesamten probabilistischen Grenzlastanalyse ist in Bild 7.4 dargestellt.

7.6 Sensitivitäten der Grenzzustandsfunktion

7.6.1 Fließspannung

Beim Suchalgorithmus nach Abschnitt 7.5 müssen die partiellen Ableitungen der Grenzzustandsfunktion g nach den Basisvariablen berechnet werden. Die Sicherheit einer Komponente ist stark vom Wert der Fließspannung abhängig, so daß die Fließspannung als probabilistisch angesehen werden muß. In der deterministischen Traglastanalyse tritt die Fließspannung σ_0 in

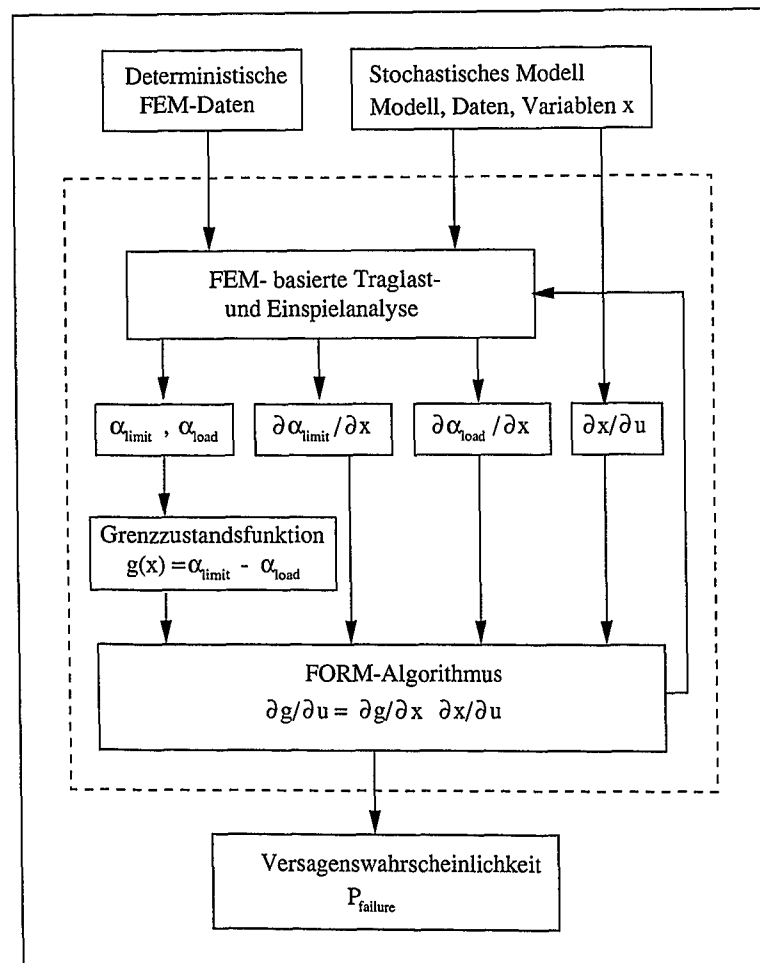


Bild 7.4: Flußdiagramm der probabilistischen Grenzlastanalyse

den Nebenbedingungen auf. Die Grenzzustandsfunktion g wird jetzt mit der elastischen Fließlast $\mathbf{P}_{el}$ normiert, so daß der Grenzlasterfaktor α_{limit} auf die Fließlast bezogen wird. Mit α_{el} und $\mathbf{P} = \alpha_{el}\mathbf{P}_{el}$ folgt für g :

$$g = \alpha_{limit} - \alpha_{el}.$$

Mit den elastischen Spannungen $\sigma_i^E(j)$ im i -ten GAUSSpunkt zur Lastdecke $j \in \mathcal{J}$ hat die Grenzlasteranalyse die Form (siehe (4.10) und (4.11))

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiere} & \alpha \\ \text{unter} & \Phi(\alpha\sigma_i^E(j) + \rho_i) \leq \sigma_{0,i}^2 \quad \forall i \in \mathcal{I}. \end{array}$$

In vereinfachter Form ist die Traglastanalyse ein Optimierungsproblem der Form

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiere} & \chi(\xi) \\ \text{unter} & \Psi(\xi) \leq \delta. \end{array}$$

Dabei ist $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ der Vektor der Ungleichungen des Optimierungsproblems. In der Grenzzustandsfunktion g tritt das Optimum α_{limit} dieses Optimierungsproblems auf. Zuerst werden die partielle Ableitung von α_{limit} nach den Basisvariablen Σ_0 berechnet. Der Wert σ_0 einer Realisation von Σ_0 kann in jedem Punkt der Struktur unterschiedlich sein, so daß dann in jedem Punkt eine Basisvariable der Fließspannung einzuführen ist. Hier wird zuerst eine Struktur mit einer in jedem Punkt konstanten Fließspannung untersucht.

Überträgt man die Berechnung der partiellen Ableitung von α_{limit} nach σ_0 in die obige vereinfachte Form, stellt sich die Frage nach der Änderung der Zielfunktion $\chi(\xi)$ bezüglich einer Änderung der Parameter $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ im Optimalpunkt ξ^* . Zur Lösung dieses Problems ist folgender Satz hilfreich (siehe [Jit84] und [Lue84]):

Satz 7.1

Ist ξ^* mit den LAGRANGEmultiplikatoren $\lambda^* = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ für $\delta = \delta_0$ eine Lösung des Optimierungsproblems

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiere} & \chi(\xi) \\ \text{unter} & \Psi(\xi) \leq \delta, \end{array}$$

so existiert in einer Umgebung von δ_0 eine stetige Optimallösung $\xi^*(\delta)$ und es gilt:

$$\nabla_{\delta} \chi(\xi^*(\delta))|_{\delta=\delta_0} = -\lambda^*.$$

Dies verdeutlicht die Rolle der LAGRANGEmultiplikatoren in der Optimierung mit Nebenbedingungen, sie werden auch als *Schattenpreise* bezeichnet. Ist der LAGRANGEmultiplikator einer

Nebenbedingung (zum Beispiel die Investitionen einer Firma) groß, so ändert sich der Wert der Zielfunktion (zum Beispiel der Gewinn der Firma) bei einer geringen Änderung (zum Beispiel zusätzliche Investition) erheblich. Hier bedeutet ein großer LAGRANGEmultiplikator, daß bei einer geringen Änderung der Fließspannung (modifiziertes Material) eine starke Änderung der Zielfunktion (Traglast) eintritt. Die Zielfunktion reagiert dann *sensitiv* auf eine Änderung der Nebenbedingung. Im Gegensatz dazu hat eine Nebenbedingung mit kleinem LAGRANGEmultiplikator nur geringen Einfluß auf die Zielfunktion.

In der deterministischen Traglastanalyse mittels sequentieller Optimierung in den reduzierten Eigenspannungsunterräumen (siehe Abschnitt 5) können die LAGRANGEmultiplikatoren nur näherungsweise berechnet werden (siehe Satz 6.1). Ist die Schrittweite $|d_k^*|$ des optimalen Schrittes im k -ten Iterationsschritt klein, so ist auch die Abweichung der LAGRANGEmultiplikatoren λ_k^* von dem optimalen LAGRANGEmultiplikator λ^* und damit die Abweichung von den tatsächlichen Sensitivitäten klein. Damit berechnet sich die partielle Ableitung von α_{limit} nach σ_0 näherungsweise über die optimalen LAGRANGEmultiplikatoren λ_k^* der k -ten Iterationsstufe. Als Abbruchbedingung im SQP-Verfahren dient dann die Schrittweite $|d_k^*|$.

7.6.2 Lasten

Eine zweite wesentliche Unbekannte bei der Grenzlastanalyse ist die Last. Meist ist die genaue Verteilung der Last bezüglich der Struktur nicht bekannt, außer zum Beispiel bei Innendruckbelastungen von Behältern oder Rohrleitungen. Umgebungsbedingte zeitabhängige Lasten wie z.B. Seegang oder Windlasten erfordern in der Regel probabilistische Modelle. Bei der direkten Einspielanalyse wird die Zeitabhängigkeit der Lasten nach dem üblichen Verfahren (siehe Abschnitt 4) durch eine zeitunabhängige Untersuchung ersetzt.

Zur Sensitivitätsanalyse der Grenzzustandsfunktion wird die Referenzlast P^0 in n Teillasten $P_1^0, \dots, P_n^0$ aufgespalten mit $P^0 = P_1^0 + \dots + P_n^0$ und $P = y_1 P_1^0 + \dots + y_n P_n^0$. Den Teillasten entsprechen die elastischen Spannungen $\sigma_1^0, \dots, \sigma_n^0$. Die Lastbasisvariablen sind dann die Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_n$ mit den Realisationen $y_1, \dots, y_n$. Die elastische Fließlast P_{el} ist gegeben durch $P_{el} = x_{el} P$ mit den elastischen Spannungsfeldern

$$\sigma^E = x_{el} \overbrace{[y_1 \sigma_1^0 + \dots + y_n \sigma_n^0]}^{\sigma^0} \text{ und} \quad (7.4)$$

$$\sigma_l^E = x_{el} \sigma_l^0, \quad l = 1, \dots, n, \quad (7.5)$$

dabei ist x_{el} gegeben durch:

$$x_{el} = \min_{i \in \mathcal{I}_0} \frac{\sigma_{0,i}}{\sqrt{\Phi_i(\sigma^0)}},$$

so daß $\Phi_i(x_{el} \sigma^0) \leq \sigma_{0,i}^2$ für alle GAUSSpunkte i gilt. Zum Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & -\alpha_{lim} \\ \text{unter} & \Phi(\alpha_{lim}\boldsymbol{\sigma}^E + \boldsymbol{\rho}) \leq \sigma_0^2 \end{array}$$

wird die LAGRANGEfunktion L betrachtet mit

$$L = -\alpha_{lim} - \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i [\sigma_0^2 - \Phi(\alpha_{lim}\boldsymbol{\sigma}^E + \boldsymbol{\rho})].$$

Da im Optimum die Ableitungen der LAGRANGEfunktion verschwinden, lassen sich die Sensitivitäten von α_{lim} nach den Belastungen $\mathbf{P}_i$ durch die Restriktionen des Optimierungsproblems berechnen. Mit der Kettenregel gilt z.B. für die y_j im Optimum α_{lim}^*

$$\left. \frac{\partial L}{\partial y_j} \right|_{\alpha_{lim}^*} = \underbrace{\left. \frac{\partial L}{\partial \alpha_{lim}} \right|_{\alpha_{lim}^*}}_{=0} \cdot \left. \frac{\partial \alpha_{lim}}{\partial y_j} \right|_{\alpha_{lim}^*} = 0.$$

Ist $(\alpha_{lim}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\rho}^*)$ eine Lösung dieses Optimierungsproblems, so gilt für die Menge $\mathcal{I}_0$ der aktiven GAUSSpunkte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{lim}^*}{\partial y_j} &= - \sum_{i \in \mathcal{I}_0} \lambda_i \frac{\partial}{\partial y_j} [\sigma_0^2 - \Phi_i(\alpha_{lim}(y_1\boldsymbol{\sigma}_1^E + \dots + y_n\boldsymbol{\sigma}_n^E) + \boldsymbol{\rho})] \Big|_{(\alpha_{lim}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\rho}^*)} \\ &= - \sum_{i \in \mathcal{I}_0} \lambda_i \frac{\partial}{\partial y_j} [\sigma_0^2 - \Phi_i(\alpha_{lim}x_{el}\boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\rho})] \Big|_{(\alpha_{lim}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\rho}^*)} \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}_0} \lambda_i 2[\alpha_{lim}\boldsymbol{\sigma}^E + \boldsymbol{\rho}]_i^T \mathbf{Q} \frac{\partial}{\partial y_j} (\alpha_{lim}x_{el}\boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\rho}) \Big|_{(\alpha_{lim}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\rho}^*)} \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}_0} \lambda_i 2[\alpha_{lim}\boldsymbol{\sigma}^E + \boldsymbol{\rho}]_i^T \mathbf{Q} \left(\alpha_{lim} \frac{\partial x_{el}}{\partial y_j} \boldsymbol{\sigma}^0 + \alpha_{lim} x_{el} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial y_j} \right) \Big|_{(\alpha_{lim}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\rho}^*)} \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}_0} \lambda_i^* 2[\alpha_{lim}^*\boldsymbol{\sigma}^E + \boldsymbol{\rho}^*]_i^T \mathbf{Q} \left(\alpha_{lim}^* \frac{\partial x_{el}}{\partial y_j} \boldsymbol{\sigma}^0 + \alpha_{lim}^* \boldsymbol{\sigma}_j^E \right) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Diese partiellen Ableitungen lassen sich mit Hilfe der Ableitung von x_{el} nach $\mathbf{Y}_j$ berechnen. Es gilt mit $\boldsymbol{\sigma}^0 = y_1\boldsymbol{\sigma}_1^0 + \dots + y_n\boldsymbol{\sigma}_n^0$:

$$\frac{\partial x_{el}}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\min_{i \in \mathcal{I}_0} \frac{\sigma_{0,i}}{\sqrt{\Phi_i(\boldsymbol{\sigma}^0)}} \right).$$

Das Minimum werde im Fließpunkt i^* angenommen. Falls mehrere Punkte gleichzeitig die Fließspannung erreichen, wird i^* durch die Menge $\{i^*\}$ ersetzt, das heißt es folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_{el}}{\partial y_j} &= \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\sigma_{0,i^*}}{\sqrt{\Phi_{i^*}(\boldsymbol{\sigma}^0)}} \right) = \frac{-\sigma_{0,i^*} 2(\boldsymbol{\sigma}^0)^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}_j^0}{2\sqrt{\Phi_{i^*}^3(\boldsymbol{\sigma}^0)}} \\ &= -x_{el} \frac{(\boldsymbol{\sigma}^0)^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}_j^0}{\Phi_{i^*}(\boldsymbol{\sigma}^0)}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Damit folgt für die Lastsensitivitäten mit $\sigma^E = x_{el} \sigma^0$ und $\sigma_j^E = x_{el} \sigma_j^0$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \alpha}{\partial y_j} \right|_{\alpha_{lim}^*} &= \sum_{i \in \mathcal{I}_0} \lambda_i^* 2 [\alpha_{lim}^* x_{el} \sigma^0 + \rho^*]^T_i \mathbf{Q} \left[\alpha_{lim}^* x_{el} \sigma_j^0 - \alpha_{lim}^* x_{el} \frac{(\sigma^0)^T \mathbf{Q} \sigma_j^0}{\Phi_{i^*}(\sigma^0)} \sigma^0 \right]_i \\ &= 2 \sum_{i \in \mathcal{I}_0} \lambda_i^* [\alpha_{lim}^* \sigma^E + \rho^*]^T_i \mathbf{Q} \alpha_{lim}^* \left[\sigma_j^E - \sigma^E \frac{(\sigma^E)^T \mathbf{Q} \sigma_j^E}{\sigma_0^2} \right]_i. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Die Summe wird über die aktiven GAUSSpunkt gebildet. Für aktive GAUSSpunkte i , die nicht elastische Fließpunkte sind ($i \in \mathcal{I}_0 \setminus \{i^*\}$), ist x_{el} nicht von $\mathbf{Y}_j$ abhängig, so daß die entsprechenden Ableitungen nach der Produktregel wegfallen. Es folgt

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \alpha}{\partial y_j} \right|_{\alpha^*} &= 2 \sum_{i \in \{i^*\}} \lambda_i^* [\alpha^* \sigma^E + \rho^*]^T_i \mathbf{Q} \alpha^* \left[\sigma_j^E - \sigma^E \frac{(\sigma^E)^T \mathbf{Q} \sigma_j^E}{\sigma_0^2} \right]_i \\ &+ 2 \sum_{i \in \mathcal{I}_0 \setminus \{i^*\}} \lambda_i^* [\alpha^* \sigma^E + \rho^*]^T_i \mathbf{Q} \alpha^* \sigma_j^E. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Wie im Fall der probabilistischen Fließspannung werden die Optimalwerte am Ende der sequentiellen Optimierung in das allgemeine Optimierungsproblem eingesetzt, so daß die Sensitivitäten des Grenzlastfaktors α_{lim} bezüglich der Lastvariablen $\mathbf{Y}_j$ einfach zu berechnen sind.

Für die Grenzzustandsfunktion $g = \alpha_{lim} - \alpha_{el}$ sind noch die Sensitivitäten von α_{el} nach den $\mathbf{Y}_j$ zu bestimmen. Nur in den elastischen Fließpunkten $\{i^*\}$ ändert sich α_{el} bei Änderung der unterschiedlichen Lastvariablen. Mit $\mathbf{P} = \alpha_{el} \mathbf{P}_{el}$ und $\mathbf{P}_{el} = x_{el} \mathbf{P}$ folgt $\alpha_{el} = 1/x_{el}$, so daß sich die Sensitivitäten berechnen lassen durch:

$$\frac{\partial \alpha_{el}}{\partial y_j} = - \left(\frac{1}{x_{el}^2} \right) \frac{\partial x_{el}}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{1}{x_{el}} \right) = \frac{(\sigma^0)^T \mathbf{Q} \sigma_j^0}{x_{el} \Phi_{i^*}(\sigma^0)} = \left. \frac{(\sigma^E)^T \mathbf{Q} \sigma_j^E}{x_{el} \sigma_0^2} \right|_{i^*}.$$

7.7 Spezielle probabilistische Grenzlastanalyse

Als Spezialfall der probabilistischen Grenzlastanalyse wird hier davon ausgegangen, daß die zu untersuchende Struktur Ω deterministisch vorgegeben sind, so daß keine Geometrieänderungen untersucht werden. Da der Einfluß einer Geometrieänderung auf die Gleichgewichtsbedingungen gering ist (siehe [Kli77]) und herstellungsbedingte Eigenspannungen keinen Einfluß auf das Tragverhalten haben (siehe Abschnitt 3), werden bei der probabilistischen Erweiterung der Grenzanalyse nur die stochastischen Eigenschaften der Lasten und der Fließgrenze untersucht.

Die Fließgrenze σ_0 des Materials sei nach einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsdichte verteilt, d.h. $\sigma_{0,Y} = Y \sigma_0$ ist eine Funktion der Zufallsvariable Y mit einer Referenzfließspannung σ_0 . Dabei ist $\sigma_{0,y}$ die Fließspannung zu der Realisation y für die gesamte Struktur. Weiterhin sei $\mathbf{P}$ eine stochastisch einparametrische Belastung, d.h. mit einer Referenzlastverteilung $\mathbf{P}_0$ und einer Zufallsvariable X läßt sich eine Realisation der Belastung ausdrücken durch $\mathbf{P} = x \mathbf{P}_0$.

Alle hier untersuchten Lasten $\mathbf{P}$ bestehen aus Volumenlasten und Oberflächenlasten. Die Gesamtlast $\mathbf{P}$ wird durch eine Normalverteilung beschrieben.

Zur Belastung $\mathbf{P}_0$ errechnen sich die fiktiv elastischen Spannungen σ_0^E aus den statischen Gleichgewichtsbedingungen. Als Fließlast $\mathbf{P}^*$ zur Fließspannung $\sigma_{0,y}$ wird die Last $x^*\mathbf{P}_0$ eingeführt, für die die Struktur Ω in mindestens einem Punkt $\mathbf{x}$ fließt,

$$\mathbf{P}^* = x^*\mathbf{P}_0, \text{ so daß } \max_{i \in \mathcal{I}} \Phi(x^*\sigma_{0,i}^E) = \sigma_{0,y}^2 \text{ gilt.} \quad (7.10)$$

Die zur Belastung $\mathbf{P}^*$ gehörenden fiktiven elastischen Spannungen werden mit σ^* bezeichnet. Der von der Fließgrenze $\sigma_{0,y}$ abhängige Faktor x^* läßt sich für die Realisation y von Y berechnen durch

$$x^* = x^*(y) = \min_{i \in \mathcal{I}} \sqrt{\frac{\sigma_{0,y}^2}{\Phi(\sigma_{0,i}^E)}} = \frac{\sigma_{0,y}}{\max_{i \in \mathcal{I}} \sqrt{\Phi(\sigma_{0,i}^E)}} = \frac{y\sigma_0}{\max_{i \in \mathcal{I}} \sqrt{\Phi(\sigma_{0,i}^E)}}. \quad (7.11)$$

Damit ist die Last $\mathbf{P}$ von X und die Last $\mathbf{P}^*$ von Y abhängig. Weiterhin wird der elastische Lastfaktor α^{el} für eine Realisation x der Zufallsvariablen X folgendermaßen definiert:

$\alpha^{el} \in \mathbb{R}$ sei der Faktor, mit dem die Fließlast $\mathbf{P}^*$ multipliziert werden muß, um die Belastung $\mathbf{P}$ zu erhalten, d.h.

$$\mathbf{P} = x\mathbf{P}_0 = \alpha^{el}\mathbf{P}^* = \alpha^{el}x^*\mathbf{P}_0.$$

Daraus folgt sofort für die Realisationen x und y :

$$\alpha^{el} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{P}^*} = \frac{x}{x^*} = \frac{x}{y} \underbrace{\frac{\max_{i \in \mathcal{I}} \sqrt{\Phi(\sigma_{0,i}^E)}}{\sigma_0}}_{const}. \quad (7.12)$$

Der elastische Lastfaktor $\alpha^{el} = \alpha^{el}(X, Y)$ ist damit über $\mathbf{P}$ und $\mathbf{P}^*$ von den Zufallsvariablen X und Y abhängig, bzw. linear abhängig von der Zufallsvariablen $Z := X/Y$. Die partiellen Ableitungen von α^{el} nach den Zufallsvariablen X und Y ergeben sich zu:

$$\frac{\partial \alpha^{el}}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{X}{x^*} \right) = \frac{1}{x^*} = \frac{\alpha^{el}}{X} \quad (7.13)$$

$$\frac{\partial \alpha^{el}}{\partial Y} = \left(\frac{\partial \alpha^{el}}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial x^*}{\partial Y} \right) = \left(\frac{-X}{x^{*2}} \right) \left(\frac{x^*}{Y} \right) = \frac{-X}{x^*Y} = \frac{-\alpha^{el}}{Y}. \quad (7.14)$$

Damit gilt für den Operator $\nabla = (\partial(\cdot)/\partial x, \partial(\cdot)/\partial y)$ der partiellen Ableitungen:

$$\nabla \alpha^{el}(X, Y) = \alpha^{el}(X, Y) \begin{pmatrix} 1/X \\ -1/Y \end{pmatrix}. \quad (7.15)$$

Die deterministische Grenzlastanalyse zur Belastung $x\mathbf{P}_0$ und zur Fließfunktion $\sigma_{0,y}$ lautet:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiere} & \alpha \\ \text{unter} & \Phi(\alpha x \sigma_{0,i}^E + \rho_i) \leq \sigma_{0,y}^2 \quad \forall i \in \mathcal{I}. \end{array}$$

Die aus der Lösung α^{lim} des Problems resultierende Grenzlast $\mathbf{P}^{lim}$ ist definiert durch:

$$\mathbf{P}^{lim} = \alpha^{lim} x \mathbf{P}_0. \quad (7.16)$$

Normiert man die fiktiven elastischen Spannungen $x \sigma_0^E$ auf Fließbeginn zur Fließspannung $\sigma_{0,y}$, d.h. setzt man das fiktiv elastische Spannungsfeld σ^* zur Fließlast $\mathbf{P}^*$ ein, so lautet die modifizierte Grenzlastformulierung:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiere} & \alpha \\ \text{unter} & \Phi(\alpha \sigma_i^* + \rho_i) \leq \sigma_{0,y}^2 \quad \forall i \in \mathcal{I}. \end{array}$$

Die aus der Lösung α^{lim} resultierende Grenzlast $\mathbf{P}^{lim}$ ist in diesem Fall definiert durch:

$$\mathbf{P}^{lim} = \alpha^{lim} \mathbf{P}^*. \quad (7.17)$$

Da die fiktiv elastischen Spannungen σ^* zu Fließbeginn nicht von der Zufallsvariablen X abhängen, ist die Lösung α^{lim} des Optimierungsproblems und damit auch $\mathbf{P}^{lim}$ nicht von X abhängig. Ist α^{lim} eine Lösung des deterministischen Optimierungsproblems zu den Realisationen x und y_1 der Zufallsvariablen X und Y , so erfüllt sie die Optimalitätskriterien des Problems mit dem optimalen Eigenspannungsfeld ρ_1 . Ist y_2 eine weitere Realisation von Y , so muß die Fließspannung $\sigma_{0,2} = y_2 \sigma_0$ in das Optimierungsproblem eingesetzt werden. Die Fließspannungen zu den verschiedenen Realisationen y_1 und y_2 lassen sich wie folgt transformieren:

$$\sigma_{0,2} = y_2 \sigma_0 = \frac{y_2}{y_1} \sigma_{0,1}. \quad (7.18)$$

Dadurch berechnet sich die fiktive elastische Spannung σ_2^* zu Fließbeginn für die Fließspannung $\sigma_{0,2}$ durch:

$$\sigma_2^* = x_2^* \sigma_0^E = \frac{\sigma_{0,2}}{\max_{i \in \mathcal{I}} \sqrt{\Phi(\sigma_{0,i}^E)}} = \frac{y_2}{y_1} \sigma_1^* \quad (7.19)$$

Das Eigenspannungsfeld

$$\rho_2 = \frac{y_2}{y_1} \rho_1 \quad (7.20)$$

erfüllt mit dem Faktor α^{lim} die KARUSH–KUHN–TUCKER–Bedingungen zu dem Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiere} & \alpha \\ \text{unter} & \Phi(\alpha \sigma_{2,i}^* + \rho_i) \leq \sigma_{0,2}^2 \quad \forall i \in \mathcal{I}. \end{array}$$

Damit ist α^{lim} auch die Lösung für die Realisation y_2 von Y , so daß der Grenzfaktor α^{lim} auch unabhängig von der Zufallsvariablen Y ist. Zusammenfassend folgt damit:

Der Grenzfaktor α^{lim} bezogen auf die Fließlast P^* ist unabhängig von den Zufallsvariablen X und Y .

Die Grenzzustandsfunktion g der probabilistischen Grenzlastanalyse läßt sich damit wie folgt definieren:

$$g(X, Y) = \alpha^{lim} - \alpha^{el}(X, Y). \quad (7.21)$$

Die Struktur Ω versagt, für alle Realisationen x und y von X und Y mit $g(x, y) < 0$. Interpretiert man α^{el} als verallgemeinerte Beanspruchung S (*stress*) und α^{lim} als verallgemeinerte Beanspruchbarkeit R (*resistance*), so hat die Grenzzustandsfunktion die übliche Form $g = R - S$. Die Abhängigkeit der Grenzzustandsfunktion g von den Zufallsvariablen X und Y ist nach obigem nur im elastischen Faktor α^{el} gegeben, so daß gilt:

$$\nabla^T g(X, Y) = -\nabla^T \alpha^{el}(X, Y) = \alpha^{el}(X, Y) \begin{pmatrix} -1/X \\ 1/Y \end{pmatrix}. \quad (7.22)$$

7.7.1 Gestalt des Versagensbereichs V

Sind die Unsicherheit der Last und der Fließspannung durch jeweils eine Zufallsvariable X und Y beschreibbar, so kann der Versagensbereich genauer beschrieben werden. Dazu untersucht man die durch P^* skalierte Grenzzustandsfunktion

$$g(X, Y) = P_{lim}(Y) - P(X) = P^*(Y) [\alpha^{lim} - \alpha^{el}(X, Y)],$$

mit der Grenzlasterlast P_{lim} und der aktuellen Last P . Mit den vorherigen Bezeichnungen gilt

$$P_{lim} = \alpha^{lim} P^* \text{ und } P = \alpha^{el} P^*.$$

Die Grenzlasterlast P_{lim} ist von der Lastvariablen X und die Last P von der Fließspannungsvariablen Y unabhängig. Für die Abhängigkeit von P_{lim} von Y gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{lim}}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial Y} (\alpha^{lim} P^*) = \alpha^{lim} \frac{\partial P^*}{\partial Y} = \alpha^{lim} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{P}{\alpha^{el}} \right) \\ &= P \alpha^{lim} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{\alpha^{el}} \right) = \frac{P \alpha^{lim}}{Y \alpha^{el}} = \frac{P_{lim}}{Y}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Damit löst P_{lim} die Differentialgleichung $f'(y) = f(y)/y$ und ist eine lineare Funktion von Y . Da P eine lineare Funktion von X ist, läßt sich die Grenzzustandsfunktion g mit reellen Konstanten a und b darstellen durch

$$g(X, Y) = P_{lim}(Y) - P(X) = aY - bX.$$

g ist eine lineare Funktion in der Zufallsvariablen $Z = (X, Y)$ und damit konvex. Der Versagensbereich $V = \{(x, y) \mid P_{lim}(y) - P(x) \leq 0\} = \{(x, y) \mid ay - bx \leq 0\}$ ist dann ebenfalls konvex. Jede lokale Lösung eines Optimierungsproblems mit konvexer Zielfunktion und V als Restriktionsmenge ist somit auch eine globale (siehe dazu Kapitel 4.3). Der Suchalgorithmus für den β -Punkt aus Kapitel 7.5 konvergiert damit in diesem Fall mit den Zufallsvariablen X und Y immer gegen eine eindeutige Lösung β^* .

7.7.2 Analytische Lösung

Für einfache Geometrien, für die eine analytische Traglastlösung vorliegt (siehe zum Beispiel 8.1.1) und deren Basisvariablen gemeinsam normal oder lognormal verteilt sind, kann analytisch die Versagenwahrscheinlichkeit berechnet werden. Betrachtet man zum Beispiel die Lochscheibe (siehe Abschnitt 8.1.1), so ist für bestimmte Lochverhältnisse D/L die Traglast analytisch berechenbar (siehe auch [GM54b] und [SH97d]). Dazu betrachten wir eine quadratische Scheibe der Kantenlänge L mit einem kreisrunden Loch des Durchmessers D mit dem Verhältnis $D/L = 0.2$. Die deterministische Traglast P_{lim} zur Fließspannung σ_0 beträgt $P_{lim} = (1 - D/L)\sigma_0 = 0.8\sigma_0$. Die aktuelle Last sei mit P bezeichnet und es wird angenommen, P sei nur von einem Parameter x abhängig, so daß die Last P direkt als Zufallsvariable $X = P$ gesetzt werden kann. Die Fließspannung σ_0 sei nur von einem Parameter y abhängig, so daß auch hier gesetzt werden kann: $Y = \sigma_0(y)$. Damit berechnet sich die Traglast $P_{lim}(y)$ für jede Realisation y von Y durch:

$$P_{lim}(y) = (1 - D/L) y.$$

Die Grenzzustandsfunktion g wird gesetzt zu

$$g(x, y) = P_{lim} - P = (1 - D/L) y - x = (-1, 1 - D/L) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (7.24)$$

Seien X und Y normalverteilt nach $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ bzw. $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$. Die Realisationen x und y lassen sich nun über die Varianzen σ_x^2, σ_y^2 und die Mittelwerte μ_x, μ_y standardnormal darstellen durch:

$$x = \sigma_x u_x + \mu_x \quad \text{und} \quad y = \sigma_y u_y + \mu_y. \quad (7.25)$$

Die Grenzzustandsfunktion g läßt sich dann darstellen durch:

$$g(x, y) = (1 - D/L) y - x \quad (7.26)$$

$$= ((1 - D/L)\mu_y - \mu_x) + (1 - D/L)\sigma_y u_y - \sigma_x u_x \quad (7.27)$$

$$= (-\sigma_x, (1 - D/L)\sigma_y) \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} + ((1 - D/L)\mu_y - \mu_x). \quad (7.28)$$

Mit der zweidimensionalen standardnormalverteilten Zufallsvariablen U mit der Realisation $u = (u_x, u_y)^T$ und einer Normierung läßt sich die Grenzzustandsfunktion g transformieren in:

$$g(u) = \underbrace{\frac{(-\sigma_x, (1 - D/L)\sigma_y)}{\sqrt{\sigma_x^2 + (1 - D/L)^2\sigma_y^2}}}_{\alpha^T} u + \underbrace{\frac{(1 - D/L)\mu_y - \mu_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + (1 - D/L)^2\sigma_y^2}}}_{\beta}.$$

Mit $||\alpha|| = 1$ ergibt sich der Sicherheitsindex β für die Zufallsvariable U durch:

$$\beta = \frac{(1 - D/L)\mu_y - \mu_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + (1 - D/L)^2\sigma_y^2}} = \frac{0.8\mu_y - \mu_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + 0.64\sigma_y^2}} \quad (\text{für das Beispiel } D/L = 0.2). \quad (7.29)$$

Für die Versagenswahrscheinlichkeit P_f gilt dann $P_f = \Phi(-\beta)$.

Bemerkung

Es läßt sich auch direkt die Verteilung der durch die Grenzzustandsfunktion definierten Variablen Z zu den Zufallsvariablen X und Y angeben. Mit

$$Z = (1 - D/L)Y - X = 0.8Y - X$$

folgt $Z \sim N(0.8\mu_y - \mu_x, 0.64\sigma_y^2 + \sigma_x^2)$ und die Dichte ist:

$$f_z = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + 0.64\sigma_y^2)}} e^{-\frac{(z - (0.8\mu_y - \mu_x))^2}{2(\sigma_x^2 + 0.64\sigma_y^2)}}.$$

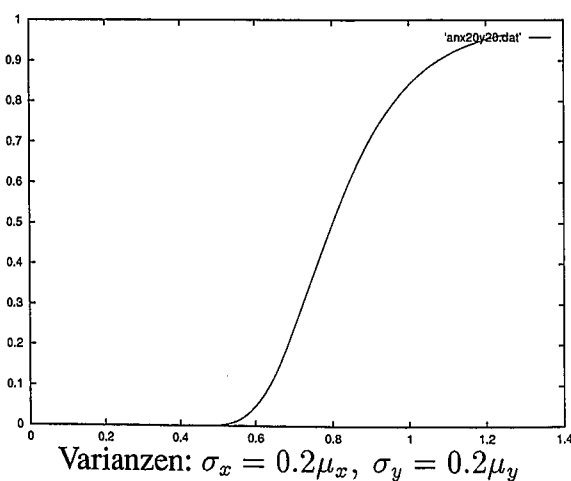
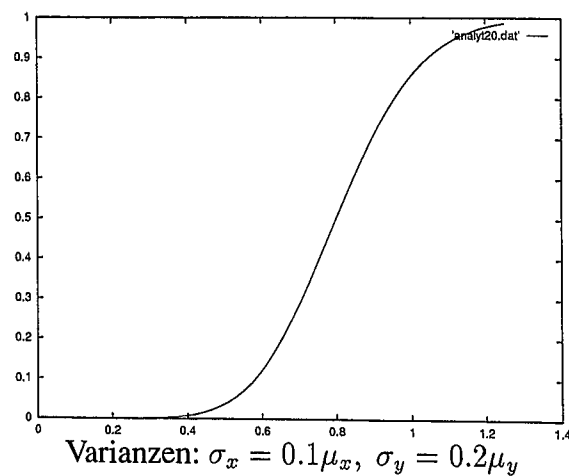
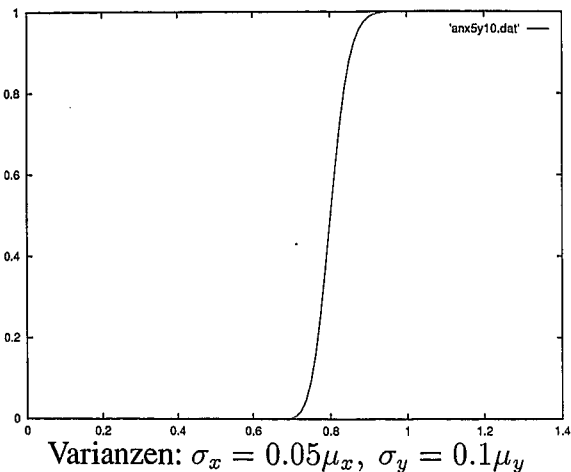
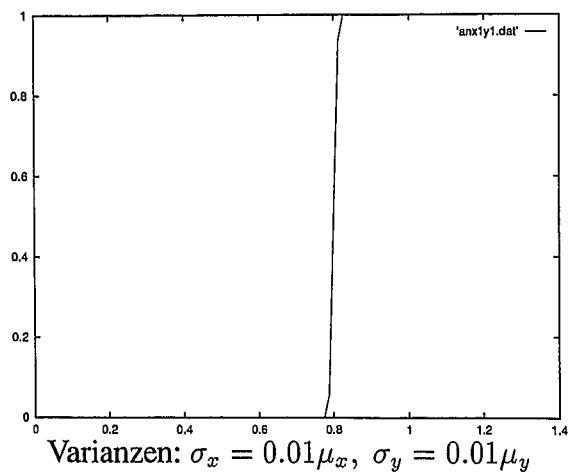
Für die Versagenswahrscheinlichkeit folgt dann

$$\begin{aligned} P(g \leq 0) &= \int_{-\infty}^0 f_z(z) dz = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + 0.64\sigma_y^2)}} e^{-\frac{(z - (0.8\mu_y - \mu_x))^2}{2(\sigma_x^2 + 0.64\sigma_y^2)}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\beta} e^{-0.5z^2} dz = \Phi(-\beta). \end{aligned} \quad (7.30)$$

Setzt man zum Beispiel die aufgebrachte mittlere Last gleich der analytischen Traglast, das heißt $\mu_x = (1 - D/L)\mu_y$, so ist die Grenzzustandsfunktion verteilt nach $N(0, (1 - D/L)^2\sigma_y^2 + \sigma_x^2)$. Daraus folgt das naheliegende Ergebnis, daß die Versagenswahrscheinlichkeit $P_f = P(g \leq 0)$ gleich 0.5 ist, unabhängig von den Varianzen σ_x^2 und σ_y^2 , da die Verteilung von g den Mittelwert 0 besitzt.

Nachfolgend sind verschiedene analytische Lösungen für unterschiedliche Varianzen bei gleichen Mittelwerten der Fließspannung aufgetragen. Es ist jeweils die Versagenswahrscheinlichkeit über der Belastung P aufgetragen, wobei die Belastung jeweils auf den Mittelwert der

Fließspannung σ_x normiert ist. Die Varianzen σ_x und σ_y betragen jeweils 1, 5, 10 und 20 % der Mittelwerte μ_x und μ_y .



8 Validierung der implementierten Methode an Beispielen

Das in den vorherigen Abschnitten entwickelten Verfahren zur Berechnung der Grenzlasten von Strukturen wird in diesem Kapitel auf unterschiedliche zwei- und dreidimensionale Strukturen angewendet. Die Strukturen sind zum Teil durch mechanische und thermische, zeitlich variable sowie durch konstante Lasten beansprucht. Die numerischen Ergebnisse werden mit den zum Teil analytisch oder aus Experimenten gewonnenen Ergebnissen verglichen. Weitere Vergleichsergebnisse wurden in dieser Arbeit erstmals hergeleitet. Die Eigenschaften der benutzten Finiten Elemente finden sich in [AM87]. Alle Strukturen werden für ideal plastisches Material untersucht. Eine Erweiterung für verfestigendes Material ist mit den in Abschnitt 3 vorgestellten Einspielsätzen möglich. Die Strukturen sind in dieser Arbeit mit der in das Finite Element Programms PERMAS [PER88] implementierten Grenzlastanalyse PERMAS-LISA [SH99], [LWH⁺99] untersucht worden.

8.1 Quadratische Scheibe mit kreisrundem Loch

8.1.1 Einachsige Belastung

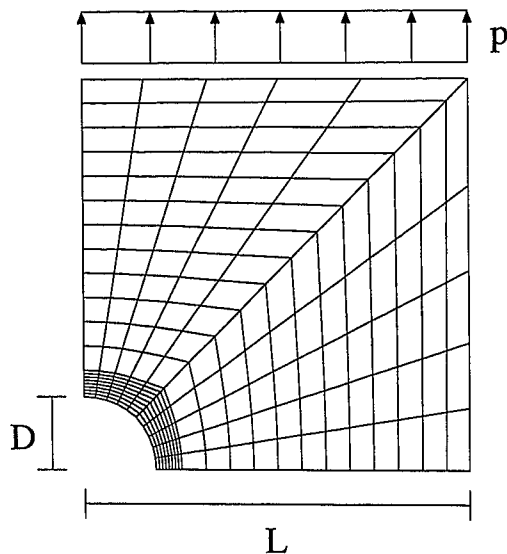
Zuerst wird eine quadratische Scheibe mit kreisrundem Loch unter einachsiger Zug-Belastung p im ebenen Spannungszustand auf Traglast und Einspielen untersucht. Die Scheibe hat die Länge L und konstante Dicke, das Loch hat den Durchmesser D . Für unterschiedliche Verhältnisse D/L wurden Traglast- und Einspielanalysen durchgeführt ($0.1 \leq D/L \leq 0.9$). Da die Ergebnisse für die Einspiellast und die Traglast stets auf σ_0 normiert werden, wird der Wert von σ_0 nicht weiter in der Rechnung benötigt.

Aus Symmetriegründen wird nur ein Viertel der jeweiligen Scheibe untersucht. Die Scheiben werden mit 200 ebenen 9-knotigen Membranelementen (QUAM9) diskretisiert (siehe für $D/L = 0.2$ das Bild 8.1(a)). Die benötigten FE-Datensätze wurden mit dem am ISR entwickelten Programmsystem SAPS erstellt (siehe [Car95]). Die Elementspannungen werden in den 4 Ecken der Elemente durch das FE Programm PERMAS berechnet, so daß man für die diskretisierten Traglast- und Einspielanalysen 800 Knotenpunktspannungen zur Verfügung hat. Bei der Traglastanalyse wächst die Zugbelastung p monoton an. Für die Einspiellanalyse wird folgender Lastbereich $\mathcal{L}$ untersucht: Die Zugbelastung p kann zwischen 0 und einem Maximalwert p^0 zyklisch variieren.

$$0 \leq p \leq \alpha \mu p^0, \quad 0 \leq \mu \leq 1. \quad (8.1)$$

Der Lastbereich $\mathcal{L}$ ist durch das Intervall $\mathcal{L} = [0, p^0]$ gegeben. Gesucht ist der maximale Faktor α_{shake} , für den der vergrößerte Lastbereich $[0, \alpha_{shake} p^0]$ nur zulässige Lastzyklen enthält.

Die Ergebnisse für die elastische Last (d.h. die Last bei Fließbeginn), die Einspiellast und die Traglast für einachsige Zugbelastung (variabel bzw. monoton) sind Tabelle 8.1(b) bzw. Bild 8.2(b) zu entnehmen. In Bild 8.2(b) sind die auf die Fließspannung σ_0 normierten Lasten über den unterschiedlichen Lochverhältnissen aufgetragen.



(a) FEM-Netz und Belastung

D/L	elastische Last	Einspiellast	Traglast
0.1	$0.3364\sigma_0$	$0.6710\sigma_0$	$0.8951\sigma_0$
0.2	$0.3094\sigma_0$	$0.6157\sigma_0$	$0.7879\sigma_0$
0.3	$0.2651\sigma_0$	$0.5212\sigma_0$	$0.6910\sigma_0$
0.4	$0.2181\sigma_0$	$0.4361\sigma_0$	$0.5720\sigma_0$
0.5	$0.1660\sigma_0$	$0.3302\sigma_0$	$0.4409\sigma_0$
0.6	$0.1140\sigma_0$	$0.2104\sigma_0$	$0.2556\sigma_0$
0.7	$0.0674\sigma_0$	$0.1327\sigma_0$	$0.1376\sigma_0$
0.8	$0.0310\sigma_0$	$0.0557\sigma_0$	$0.0565\sigma_0$
0.9	$0.0155\sigma_0$	$0.0191\sigma_0$	$0.0193\sigma_0$

(b) Ergebnisse der Grenzlastanalyse

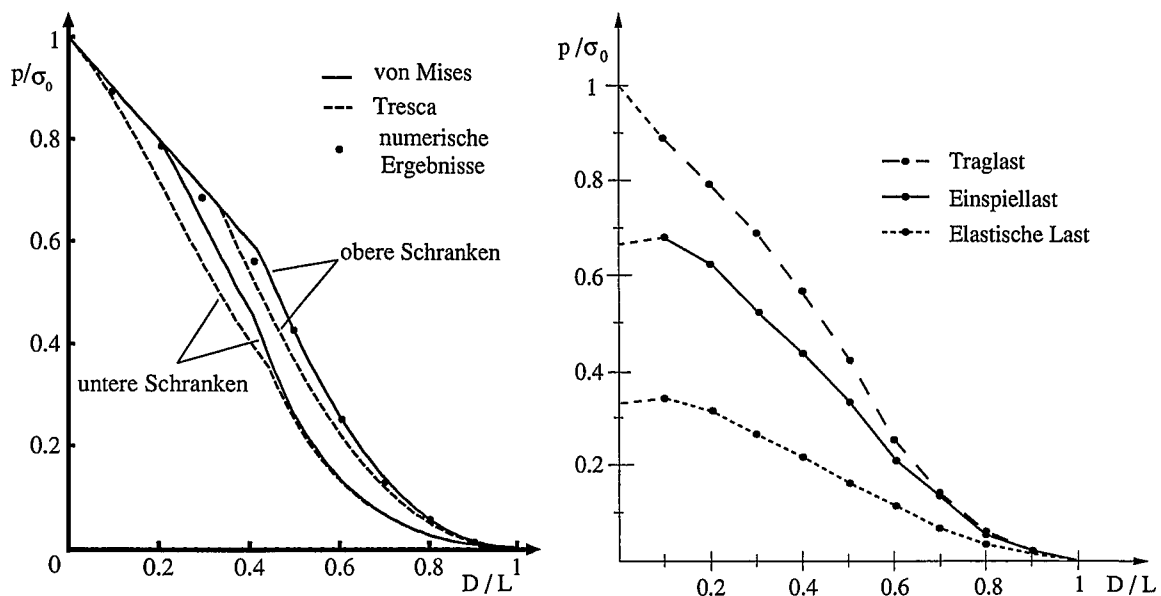
Bild 8.1: Vermaßung, Testmatrix und Ergebnisse der Traglast- und Einspielberechnung für die Scheibe unter einachsiger Zugbelastung

Für $D/L \rightarrow 0$ und $D/L \rightarrow 1$ wurden die Kurven auf die analytischen Werte für die unendliche gelochte Scheibe und die Scheibe ohne Restligament extrapoliert. Die elastische Last der unendlichen Scheibe bei Fließbeginn ist $p/\sigma_0 = 1/3$ (siehe z.B. [Wan53] und [Hah85]). Die Einspiellast ist in diesem Fall gleich der doppelten elastischen Last (siehe dazu auch [Zha91]).

Die Traglasten für die unterschiedlichen Geometrien stimmen gut mit den bekannten analytischen Schranken überein (siehe [GM54b], [SH97d] und [SH97c]). Dazu sind zum Vergleich in Bild 8.2(a) die besten bekannten analytischen Grenzen für die TRESKA und die VON MISES Fließfunktionen eingetragen (siehe dazu jeweils [GM54a] und [GM54b]).

Für $D/L \leq 0.2$ fallen untere und obere Schranke für die VON MISES Fließfunktion zusammen, so daß man die exakte analytische Lösung $p_{limit} = (1 - D/L)\sigma_0$ erhält (siehe [GM54b]). Für $D/L = 0.2$ ist dann die analytische Traglast gegeben durch $p_{limit} = 0.8\sigma_0$. Dem entsprechen auch die numerischen Ergebnisse in [BM95], [CC82], [GW96] und [Zha91].

Bei der Traglastberechnung werden 20 Iterationsschritte durchgeführt, nach 10 Iterationsschrit-



(a) Vergleich der numerischen Resultate der Traglastanalyse mit den analytischen Schranken aus [GM54a] und [GM54b]

(b) Elastische, Einspiel- und Traglast der Scheibe unter einachsiger Zugbelastung

Bild 8.2: Ergebnisse der Grenzlastuntersuchungen für die einachsiger belastete Scheibe

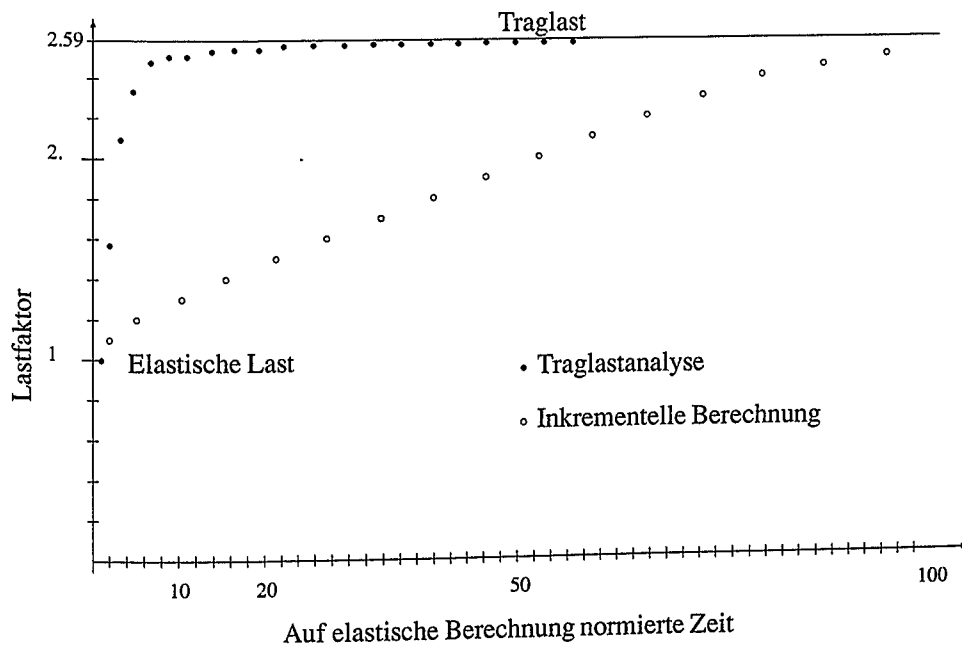


Bild 8.3: Rechenzeitvergleich für die Lochscheibe mit $D/L = 0.2$

ten ist der Fehler gegenüber der analytischen Lösung nur noch ca. 1 %. Die Lastinkremente in der plastischen Rechnung werden sukzessive verkleinert, so daß während der Berechnung gewährleistet ist, daß die aufgebrachte Last unterhalb der Traglast liegt. Die Beispielrechnungen zeigten jedoch, daß auch bei geringfügiger Überschreitung der (in diesem Fall vorher bekannten) Traglast zulässige Eigenspannungen berechnet wurden. Diese Eigenschaft erleichtert die Inkrementierung während der Berechnung einer Struktur, so daß mit einer konstant verringernden Inkrementierung gerechnet werden kann. Da zu Beginn der Analyse relativ zum Traglastfaktor hohe Verbesserungen des Lastfaktors erzielt werden, wird in den hier untersuchten Beispielen nach jeder dritten Iteration das Lastinkrement halbiert.

Die CPU-Zeit für eine Traglastanalyse ist etwa 5 bis 10mal kürzer als für eine plastische inkrementelle Rechnung, je nachdem für welchen relativen Fehler man den Vergleich aufstellt (siehe Bild 8.3). Diese Werte der Rechenzeitverkürzung haben sich als charakteristisch für alle hier untersuchten Probleme herausgestellt. Dabei wird in jedem Iterationsschritt etwa 90 % der benötigten CPU-Zeit in der Erzeugung der Eigenspannungsbasen verbraucht, während die restlichen 10 % auf die Unterraum-Optimierung entfallen. Es wurden unterschiedliche Aufdaierungsstrategien im Optimierungsalgorithmus verfolgt, die jedoch nur einen geringen Einfluß auf die erzielten CPU-Zeiten hatten.

Ein Rechenzeitvergleich der Einspielanalyse mit inkrementellen Rechnungen ist nicht möglich (siehe [SSB91]), weil die inkrementellen Rechnungen keine Berechnung des Einspielfaktors α_{shake} erlauben. Inkrementell läßt sich nur entscheiden, ob die Struktur unter einer gegebenen Lastgeschichte einspielt oder nicht. Dazu müssen in der Regel sehr viele Lastzyklen (10 bis 100) für jede Lastgeschichte gerechnet werden; ein oft unvertretbar hoher Aufwand.

8.1.2 Zweiachsige Belastung

Bei der Untersuchung zweiachsiger Belastungen der Scheibe mit Loch für $D/L = 0.2$ wurden folgende Lastbereiche für die Einspielanalyse untersucht.

1. Beim zweiachsigen Zug können $p_1, p_2 \geq 0$ unabhängig voneinander variieren (LC 1):

$$\begin{aligned} 0 \leq p_1 \leq \alpha\mu_1 p_1^0, & \quad 0 \leq \mu_1 \leq 1 \\ 0 \leq p_2 \leq \alpha\mu_2 p_2^0, & \quad 0 \leq \mu_2 \leq 1. \end{aligned}$$

2. Bei Zug- und Druckbelastungen können $p_1 \geq 0$ und $p_2 \leq 0$ unabhängig voneinander variieren, d.h. mit den Referenzlasten p_1^0 und p_2^0 (LC 2):

$$\begin{aligned} 0 \leq p_1 \leq \alpha\mu_1 p_1^0, & \quad 0 \leq \mu_1 \leq 1 \\ 0 \geq p_2 \geq \alpha\mu_2 p_2^0, & \quad 0 \leq \mu_2 \leq 1. \end{aligned}$$

3. Die Lasten p_1 und p_2 variieren proportional (LC 3)

$$0 \leq p_1 \leq \alpha \mu p_1^0, \quad 0 \leq \mu \leq 1$$

$$0 \leq p_2 \leq \alpha \mu p_2^0, \quad \text{bzw. } 0 \geq p_2 \geq \alpha \mu p_2^0.$$

Zusätzlich wurde für die einparametrischen zweiachsigen Belastungen die Traglast berechnet, sie ist zusätzlich zu den Einspielergebnissen in Bild 8.4 eingetragen. Die elastische Grenze ist durch den Punkt bestimmt, in dem die Scheibe zuerst fließt. Dieser Punkt verändert sich bei unterschiedlichen Werten von μ_1/μ_2 . Die unterschiedlichen Teile der elastischen Grenzkurve sind im Interaktionsdiagramm (Bild 8.4) durch die anfänglichen Fließpunkte A, B und C gekennzeichnet. Bild 8.4 stimmt gut mit den Ergebnissen in [GW96] überein. Dort wurde jedoch das zum Fließpunkt A gehörende Segment in der elastischen Grenze nicht angegeben, was dazu führte, daß die elastische Grenze teilweise außerhalb der Grenze LC 1, 2 lag, was physikalisch nicht sinnvoll ist.

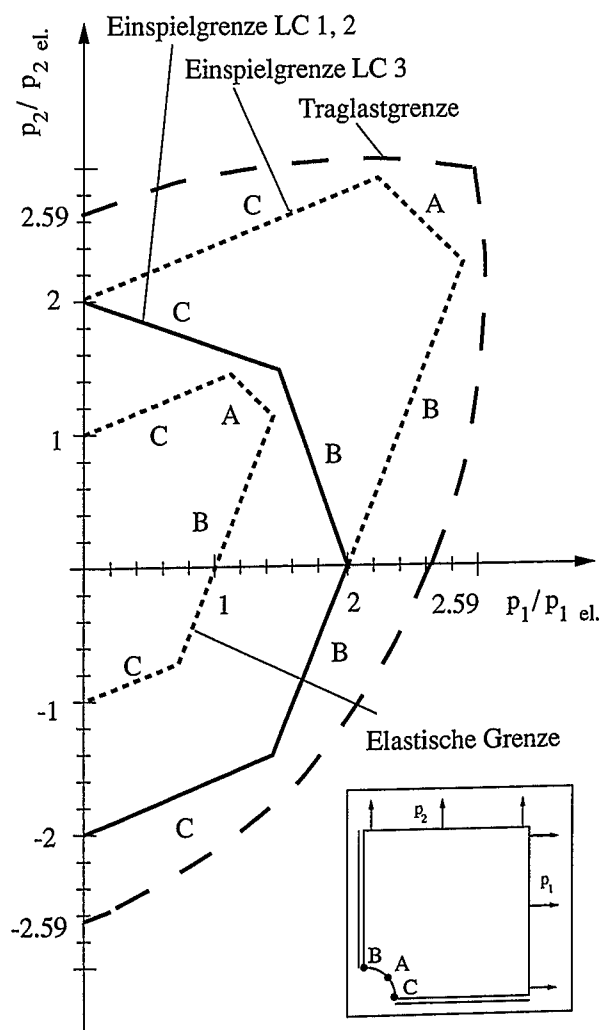


Bild 8.4: Interaktionsdiagramm der quadratischen Scheibe für $D/L = 0.2$

Bei variabler Belastung versagt die Scheibe lokal in den Punkten B oder C, da die Einspiellast für ideal plastisches Material genau so groß ist wie für unendlich verfestigendes Material und dies nur für lokales Versagen möglich ist (siehe Abschnitt 6). Die Abschnitte der Einspielgrenze sind durch den bestimmenden Versagenspunkt markiert. Bei der Zug/Druckbelastung stimmen anfänglicher Fließpunkt und Versagenspunkt überein und der Einspielfaktor bezogen auf die elastische Lösung ist näherungsweise gleich 2. Dies stimmt mit der analytischen Lösung aus Abschnitt 6 überein. Ältere Einspielrechnungen für die Lochscheibe sind in [SSB91] zusammengestellt. Sie weichen alle mehr oder minder stark von den hier neu berechneten Werten ab. Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Struktur zwischen α_{SD} und α_{limit} in allen untersuchten Belastungen lokal durch alternierende Plastifizierung (LCF) versagt.

8.2 Quadratische Scheibe mit elliptischem Loch

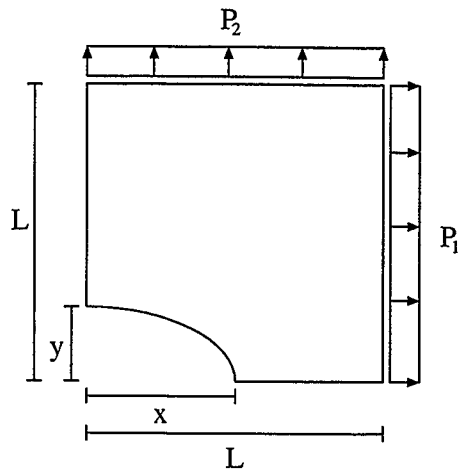
Zusätzlich zu den Parameterstudien zur quadratischen Scheibe mit kreisrundem Loch wurden auch Scheiben mit deformiertem Loch untersucht. Mit Hilfe des am ISR entwickelten Lochscheibengenerators SAPS [Car95] konnte eine Parameterstudie zum Traglastverhalten von einachsigen belasteten quadratischen Scheiben mit elliptischem Loch durchgeführt werden. In der Schadensmechanik sind deformierte Löcher beim Hohlraumwachstum und Zusammenschluß von Löchern von Interesse (siehe [Sei92]). Im Anhang A.6 ist eine Formulierung der Einspielsätze (siehe [FY95]) für geschädigtes Material erweitert worden. Damit lassen sich die Konzepte der Traglast- und Einspielanalyse mit denen der Schädigung verbinden.

Um die Grenzlastberechnung für unterschiedliche Lochgeometrien durchzuführen, sind unterschiedliche Verhältnisse der Lochradien x und y untersucht worden. Das Verhältnis vom Lochradius x zur Scheibenlänge L ist in allen Fällen konstant $x/L = 0.2$ (siehe Bild 8.5(a)). Durch Verzerrung des FE-Netzes für eine quadratische Scheibe mit kreisrundem Loch kann direkt eine Vernetzung der quadratischen Scheibe mit elliptischem Loch erzeugt werden. Für $x = y$ ist das Modell das der quadratischen Scheibe mit kreisrundem Loch. Die einzelnen Modelle sind durch die monotonen bzw. variablen Lasten P_1 und P_2 (siehe Bild 8.5(a)) belastet. In Bild 8.6 sind exemplarisch 4 FE-Modelle für die Radienverhältnisse $x/y = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ dargestellt. Proportionale Belastungen in folgenden Lastbereichen wurden bei der Traglast- und Einspielanalyse untersucht.

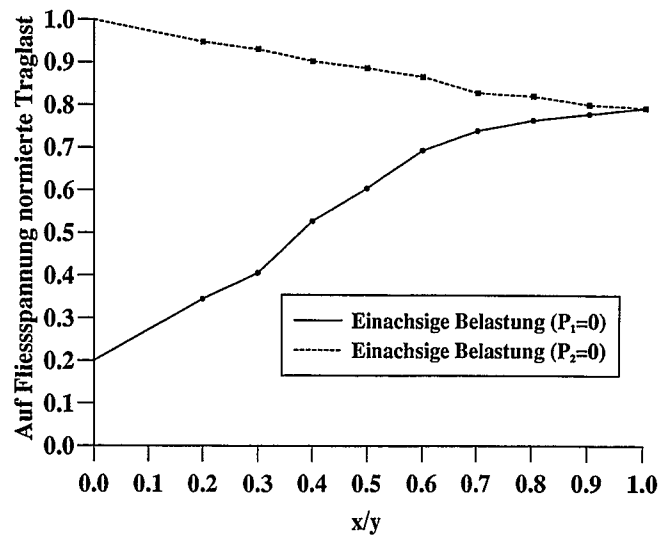
1. Beim zweiachsigen Zug variieren $P_1, P_2 \geq 0$ voneinander abhängig:

$$\begin{aligned} 0 &\leq P_1 \leq \alpha \mu P_1^0, \\ 0 &\leq P_2 \leq \alpha \mu P_2^0 \quad 0 \leq \mu \leq 1. \end{aligned}$$

2. Bei Zug- und Druckbelastungen können $P_1 \geq 0$ (bzw. $P_1 \leq 0$) und $P_2 \geq 0$ variieren,

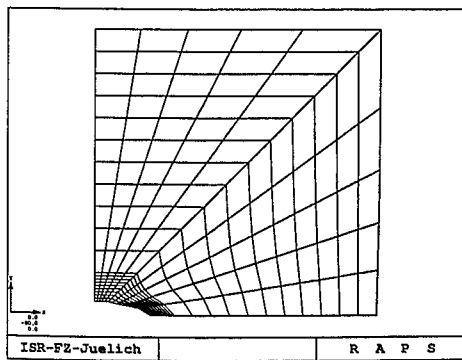


(a) Vermaßung und Belastung der quadratischen Scheibe mit elliptischem Loch

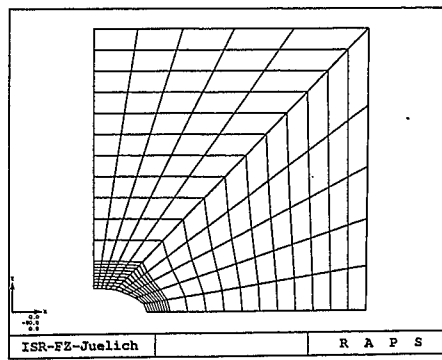


(b) Uniaxiale Traglast für die Radienverhältnisse x/y

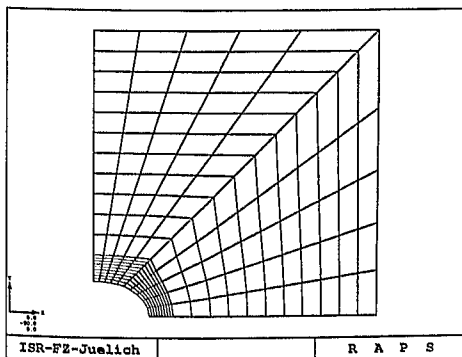
Bild 8.5: FE-Netz und uniaxiale Traglast für die Scheibe mit elliptischem Loch



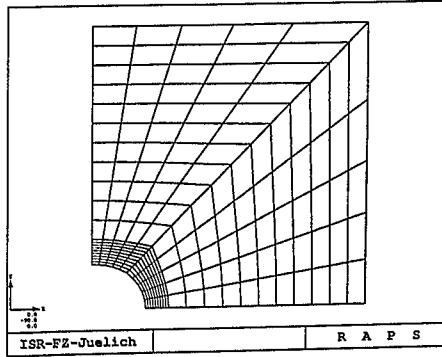
(a) $x/y = 0.2$



(b) $x/y = 0.4$



(c) $x/y = 0.6$



(d) $x/y = 0.8$

Bild 8.6: FE-Modelle der Scheibe für die Radienverhältnisse $x/y = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$

d.h. mit den Referenzbelastungen P_1^0 und P_2^0 :

$$\begin{aligned} 0 \leq P_1 \leq \alpha \mu P_1^0 \text{ bzw. } 0 \geq P_1 \geq \alpha \mu P_1^0, \\ 0 \leq P_2 \leq \alpha \mu P_2^0, \quad 0 \leq \mu \leq 1. \end{aligned}$$

Zusätzlich zu den Einspielanalysen wurden ein- und zweiachsige Traglastberechnungen für die Radienverhältnisse $x/y = 0.1, \dots, 0.9$ durchgeführt. Durch die Vertauschung der belasteten Seiten erhält man mit den jeweiligen Modellen Scheiben mit den Radienverhältnissen $y/x = 0.1, \dots, 0.9$ unter einachsiger Belastung. Die Interaktionsdiagramme für die Scheiben

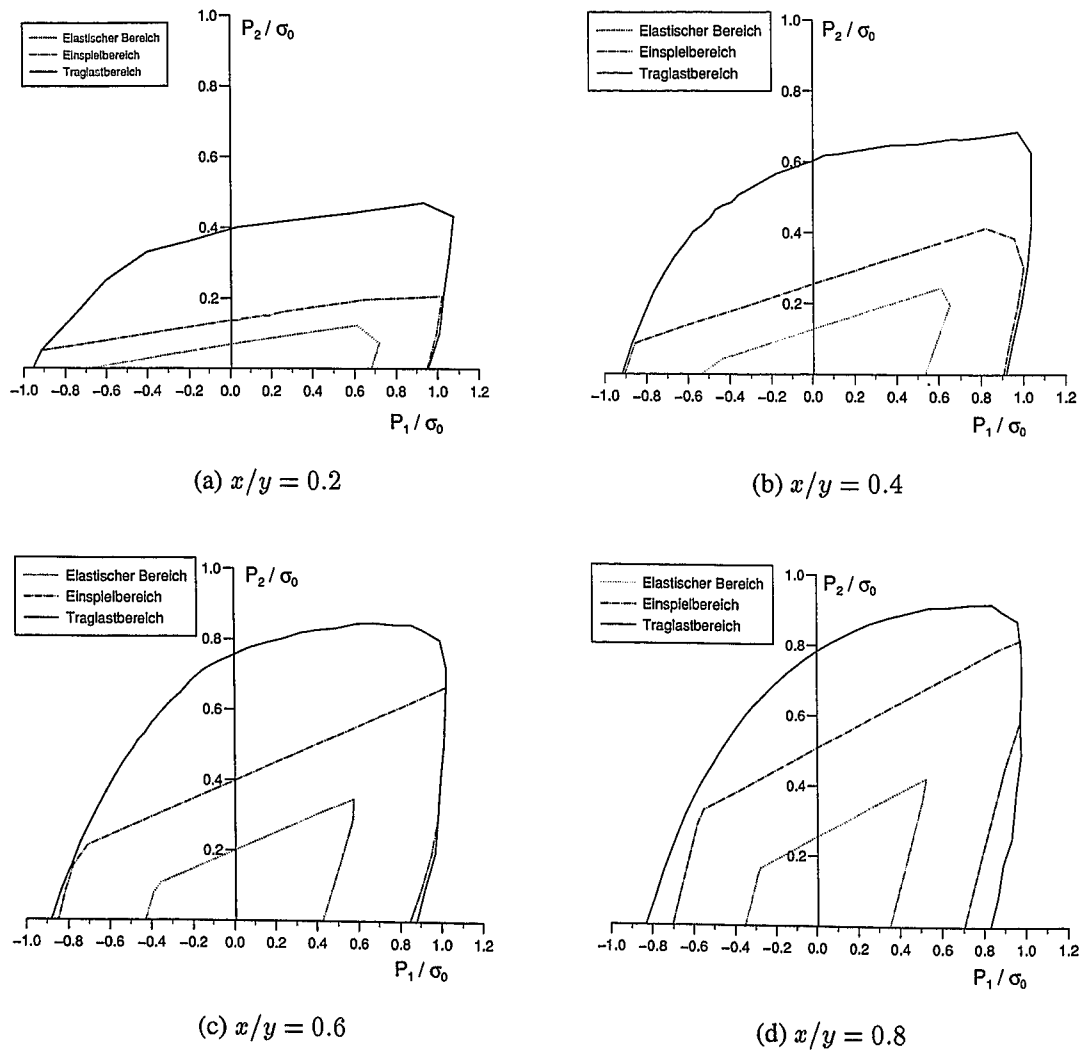


Bild 8.7: Interaktionsdiagramme für Lochverhältnisse $x/y = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$

mit den Radienverhältnissen $x/y = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ sind in Bild 8.7 dargestellt. Dabei sind jeweils die auf die Fließspannung σ_0 normierten Lasten P_2/σ_0 über den Lasten P_1/σ_0 aufgetragen. Der Einspielfaktor α_{shake} bezogen auf die elastische Grenze ist dabei in allen Fällen entweder nahezu 2 oder gleich dem Traglastfaktor α_{limit} , d.h. $\alpha_{shake} = \min\{2, \alpha_{limit}\}$. Dies

entspricht dem lokalen Verhalten der Lochscheibe mit kreisrundem Loch (siehe Abschnitt 8.1). Der Einspielfaktor¹ ist solange nahezu gleich 2, bis der Einspielfaktor den Traglastfaktor erreicht (siehe auch [SH97b] und [SH97a]).

In Bild 8.5(b) sind für die untersuchten Radienverhältnisse x/y die jeweiligen normierten Traglasten P_1/σ_0 bzw. P_2/σ_0 aufgetragen. Für das Verhältnis $x/y = 1$, d.h. für das kreisrunde Loch konvergiert die jeweilige Traglast gegen $P_{limit} = 0.8\sigma_0 = x/L\sigma_0$. Für $x/y \rightarrow 0$ konvergiert die Traglast P_{limit}^1 für die einachsige Belastung P_1 gegen σ_0 , da sich die Geometrie der Scheibe mit elliptischem Loch an die Geometrie der unendlichen punktierten Scheibe für $x/y \rightarrow 0$ annähert. Die Traglast P_{limit}^1 konvergiert damit gegen die Fließspannung des Materials. Die Traglast P_{limit}^2 konvergiert für $x/y \rightarrow 0$ gegen die Traglastlösung für die Scheibe mit Schlitz, d.h. gegen $0.2\sigma_0$ (siehe dazu den vorherigen Abschnitt).

Die untersuchte Scheibe mit elliptischem Loch versagt lokal unter einachsigen Belastung, so daß die Einspielast für ideal plastisches und unendlich linear kinematisch verfestigendes Material gleich ist (siehe Abschnitt 6.4.2 und [Zha91])

8.3 Flachstab mit Außenkerbe

Als weiteres Beispiel wird ein Flachstab mit einer Außenkerbe unter Zug- und Momentenbelastung N und M untersucht. Für unterschiedliche Verhältnisse D/L wurde die Traglast- und Einspielanalyse für reinen Zug ($M = 0$) durchgeführt. Im untersuchten Beispiel gilt $h = 1.5L$. Für diese Rechnungen wurde aus Symmetriegründen je nach Lastfall nur ein Viertel oder die Hälfte des Stabes (siehe Bild 8.8) untersucht. Die benötigten FE-Datensätze wurden wie auch schon für die Lochscheibe mit dem am ISR entwickelten Programmsystem SAPS [Car95] erstellt. Die untersuchten Modelle haben 200 ebene 9-knotige Membranelemente (QUAM9). Die Elementspannungen werden in den 4 Ecken der Elemente untersucht, so daß 800 Knotenspannungen zur Verfügung stehen für den ebenen Spannungszustand.

Die Ergebnisse für die Zugbelastung sind in Bild 8.9 festgehalten. Dabei sind die elastische, Einspiel- und Traglast über den Quotienten D/L aufgetragen. Die Traglastergebnisse stimmen für die entsprechenden Geometriedaten gut mit den Ergebnisse in [CC82] überein. Für das Verhältnis $D/L = 0.5$ ergibt sich nach [WD69] die Formzahl α_k ,

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nL}} = 1.498$$

bezogen auf die Nennspannung σ_{nL} (gemittelte Normalspannung) im engsten Querschnitt L (Ligament). σ_{max} ist die maximal auftretende Vergleichsspannung im Kerbgrund. Aufgrund

¹Die elastische Last ist nach INGLIS [Ing13] für die unendliche Scheibe mit elliptischem Loch unter einachsiger Zugbelastung gegeben durch $p/\sigma_0 = 1/(1 + 2x/y)$.

des Verhältnisses $D/L = 0.5$ lautet die Formzahl bezogen auf den ungeschwächten Querschnitt $\tilde{\alpha}_k = 2.996 = \alpha_k L/D$. Die elastische Grenzspannung für $D/L \rightarrow 0$ bei reinem Zug ergibt sich zu $\sigma_{elast} = 0.33\sigma_0$. Dies folgt aus dem Problem von KIRSCH (siehe [Hah85]); im Kerbgrund ist eine ca. 3-fache Spannungserhöhung vorhanden. Die mit der FEM berechnete elastische Grenzlast lautet $\sigma_{elast} = 0.31\sigma_0$.

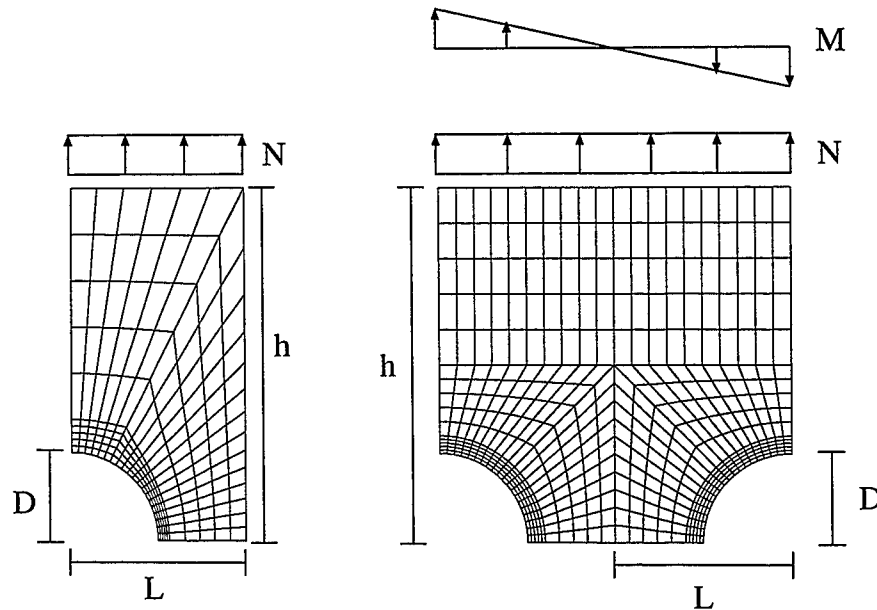


Bild 8.8: FE-Netze des gekerbten Flachstabes für $D/L = 0.5$ mit Belastungen

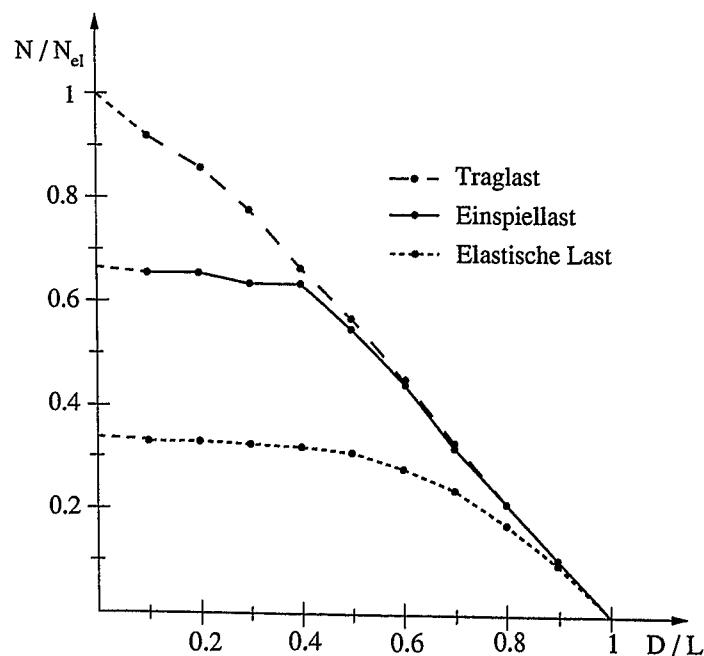


Bild 8.9: Elastische, Einspiel- und Traglast des gekerbten Flachstabes unter Zugbelastung

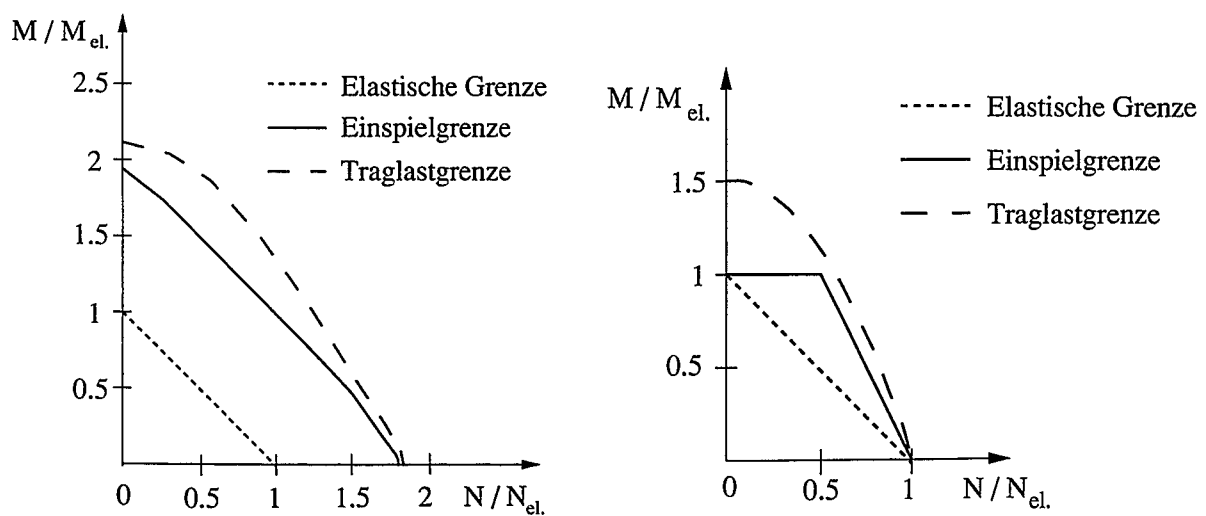
Bis zu einem Verhältnis $D/L = 0.4$ ist der Einspielfaktor bezogen auf die elastische Grenze bei reiner Zugbelastung näherungsweise gleich 2, der Stab versagt durch LCF. Für größere

Verhältnisse fallen Einspielfaktor und Traglastfaktor zusammen, so daß keine Erhöhung über die Einspiellast hinaus möglich ist.

Für das Interaktionsdiagramm in Bild 8.10(a) wurde ein Flachstab mit dem Verhältnis $D/L = 0.5$ untersucht. Im Lastbereich der Einspielanalyse können das Moment M und die Zugbelastung N unabhängig voneinander variieren

$$\begin{aligned} 0 \leq M &\leq \alpha\mu_1 M_0, & 0 \leq \mu_1 &\leq 1 \\ 0 \leq N &\leq \alpha\mu_2 N_0, & 0 \leq \mu_2 &\leq 1. \end{aligned}$$

Die elastische Grenze ist in beiden Lastfällen linear von den Proportionalitätsfaktoren zwischen M_0 und N_0 abhängig.



(a) Interaktionsdiagramm des gekerbten Flachstabes mit $D/L = 0.5$

(b) Interaktionsdiagramm des Rechteckbalkens als Modell für den ungekerbten Flachstab

Bild 8.10: Interaktionsdiagramme für den gekerbten und ungekerbten Flachstab

Zum Vergleich zeigt Bild 8.10(b) das Interaktionsdiagramm für den ungekerbten Stab. Für die elastische Grenze, Einspiel- und Traglastgrenze eines ideal plastischen Balkens mit rechteckigem Querschnitt läßt sich nach [Kö87] herleiten:

$$\text{Elastische Grenze: } \frac{M}{M_{el}} = 1 - \frac{N}{N_{el}} \quad (8.2)$$

$$\text{Einspielgrenze: } \frac{M}{M_{el}} = \min \left\{ 1, 2 \left(1 - \frac{N}{N_{el}} \right) \right\} \quad (8.3)$$

$$\text{Traglastgrenze: } \frac{M}{M_{el}} = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{N}{N_{el}} \right)^2 \right] \quad (8.4)$$

Bei reiner Biegung wie auch bei reinem Zug kann der ungekerbte Stab keine überelastischen zyklischen Lasten ertragen. Ein statisches reines Biegemoment kann dagegen bis zum 1.5-fachen der elastischen Beanspruchung getragen werden.

8.4 Dünnes Rohr

Ein weiteres in der Literatur gut bekanntes Beispiel ist das Modell eines unendlich langen dünnen Rohres. Ist das unendlich lange Rohr durch konstanten Druck und eine variable Temperaturlast belastet, so entspricht dieses Beispiel dem klassischen BREE-Beispiel (siehe [Bre67]). Da das unendlich dünne Rohr nicht mit Hilfe der Finiten Element Methode untersucht werden kann, wird ein Rohrmodell mit dem Radius r und der Wandstärke s mit $s/r = 0.1$ stattdessen betrachtet. Das Rohr ist an beiden Enden abgeschlossen (siehe Bild 8.11).

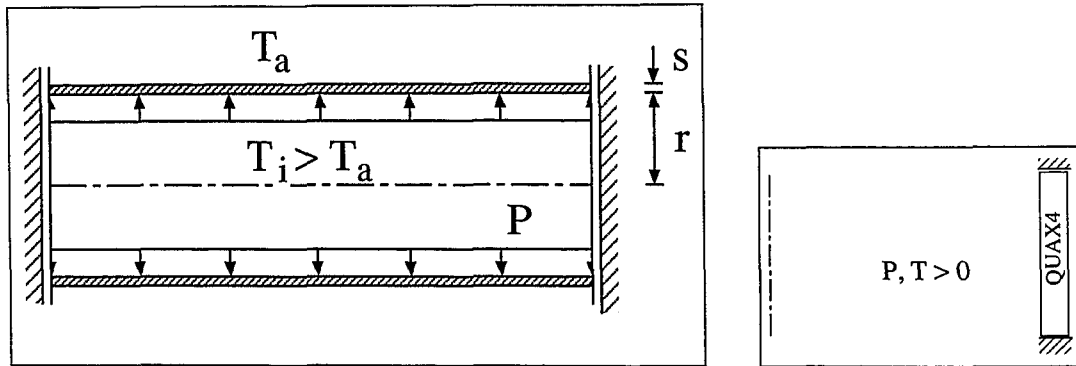


Bild 8.11: Dünnes Rohr unter Innendruck und Temperaturbelastung mit FE-Netz

Das Rohr wurde durch ein rotationssymmetrisches 4-knotiges Element (QUAX4) diskretisiert. Es ist durch Innendruck P und durch ein achsensymmetrisches quasi-statisches Temperaturfeld T belastet. Dabei ist $T = T_i - T_a$ gesetzt, mit linearem Temperaturverlauf zwischen der Innentemperatur T_i und der Außentemperatur T_a . Es wird angenommen das $T_a = 0$ gilt, so daß die Belastung durch $T = T_i$ gekennzeichnet ist. Für $T = 0$ und $P = 0$ sei das Rohr spannungsfrei. Es wird sich auf temperaturunabhängige Materialdaten (Fließspannung) beschränkt. Das FE-Modell hat dann die in Bild 8.11 dargestellte Form.

Es ist zu beachten, daß bei der Diskretisierung durch nur ein Element, welches an beiden Seiten gefesselt ist, in den GAUSSpunkten jeweils an der Innen- und Außenseite des Rohres identische Spannungen berechnet werden. Dadurch sind die Spannungen linear abhängig und die constraint qualifications des Optimierungsproblems sind nicht erfüllt (siehe Abschnitt 5). Da alle Spannungen über die Höhe des Elements identisch sind, ist es ausreichend jeweils nur einen GAUSSpunkt zu den verschiedenen Radien zu untersuchen. Diese Spannungen erfüllen dann die lineare Unabhängigkeitsbedingungen des Optimierungsproblems. Dieses Verfahren ist auch schon implizit bei der rotationssymmetrischen Vereinfachung geschehen, da auch dort alle auftretenden Spannungen durch ein rotationssymmetrisches Element repräsentiert werden.

Ist das Rohr nur durch Innendruck belastet, so berechnet sich der Druck $\hat{P}_{elastic}$ zu Fließbeginn durch (siehe [Sza60]):

$$\hat{P}_{elastic} = \frac{(1 + s/r)^2 - 1}{\sqrt{3}(1 + s/r)^2} \sigma_0 \approx 0.1 \sigma_0. \quad (8.5)$$

Der Traglastfaktor $\hat{\alpha}_{limit}$ bezogen auf die elastische Lösung (siehe [Sza60] und [WD69]) ist

$$\hat{\alpha}_{limit} = \frac{2 \ln(1 + s/r)}{1 - \left(\frac{r}{r+s}\right)^2} \approx 1.098, \quad (8.6)$$

so daß der Kollapsdruck $\hat{P}_{limit}$ gegeben ist durch

$$\hat{P}_{limit} = \hat{\alpha}_{limit} \hat{P}_{elastic} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \ln(1 + s/r) \approx 0.11 \sigma_0. \quad (8.7)$$

In der Einspielanalyse werden folgende Lastbereiche untersucht:

1. Der Druck P und die Temperatur T variieren simultan mit einem Proportionalitätsfaktor (ein-parametrische Belastung):

$$\begin{aligned} 0 \leq P \leq \alpha \mu P_0, & \quad 0 \leq \mu \leq 1 \\ 0 \leq T \leq \alpha \mu T_0, & \quad 0 \leq \mu \leq 1. \end{aligned}$$

P_0 und T_0 sind jeweils ein Referenzdruck und eine Referenztemperatur.

2. Der Druck P und die Temperatur T variieren unabhängig voneinander (zwei-parametrische Belastung)

$$\begin{aligned} 0 \leq P \leq \alpha \mu_1 P_0, & \quad 0 \leq \mu_1 \leq 1 \\ 0 \leq T \leq \alpha \mu_2 T_0, & \quad 0 \leq \mu_2 \leq 1. \end{aligned}$$

3. Der Druck P bleibt konstant und die Temperatur T variiert mit dem Faktor μ

$$0 \leq T \leq \alpha \mu T_0, \quad 0 \leq \mu \leq 1.$$

Die ersten beiden Lastfälle wurden in [SH97a] behandelt (siehe dazu auch [GW96]). Der dritte Lastfall entspricht dem Beispiel von BREE. In [Bre67] ist ein analytisches Einspieldiagramm für das unendliche Rohr angegeben (siehe Bild 3.1). Numerische Berechnungen der Einspielgrenze mit Hilfe des statischen Satzes sind in [GW96] zu finden. YAN und NGUYEN geben in [YH96] mit Hilfe der kinematischen Sätze und speziellen Elementen obere Schranken für die Einspiellasten an. In der dort angegebenen Formulierung kann der Versagensbereich noch weiter in einen Ratchetting und einen LCF-Bereich unterteilt werden. Für die statischen Einspielsätze ist dies nur im Einzelfall möglich, da die untere Schranke der Einpiellast keine Information über die Versagensart im Falle deren Überschreitens gibt.

8.4.1 Variabler Innendruck

Im Interaktionsdiagramm (Bild 8.12) sind die Einspielgrenzen für die ersten beiden Belastungsfälle aufgetragen. Bei proportionaler Belastung ist der Einspielfaktor gleich 2, bis der Innendruck den Kollapsdruck erreicht hat. Bis dahin versagt das Rohr an der Innenseite durch LCF. Übersteigt der doppelte elastische Innendruck jedoch den Kollapsdruck, ist keine weitere Drucksteigerung über den Kollapsdruck möglich.

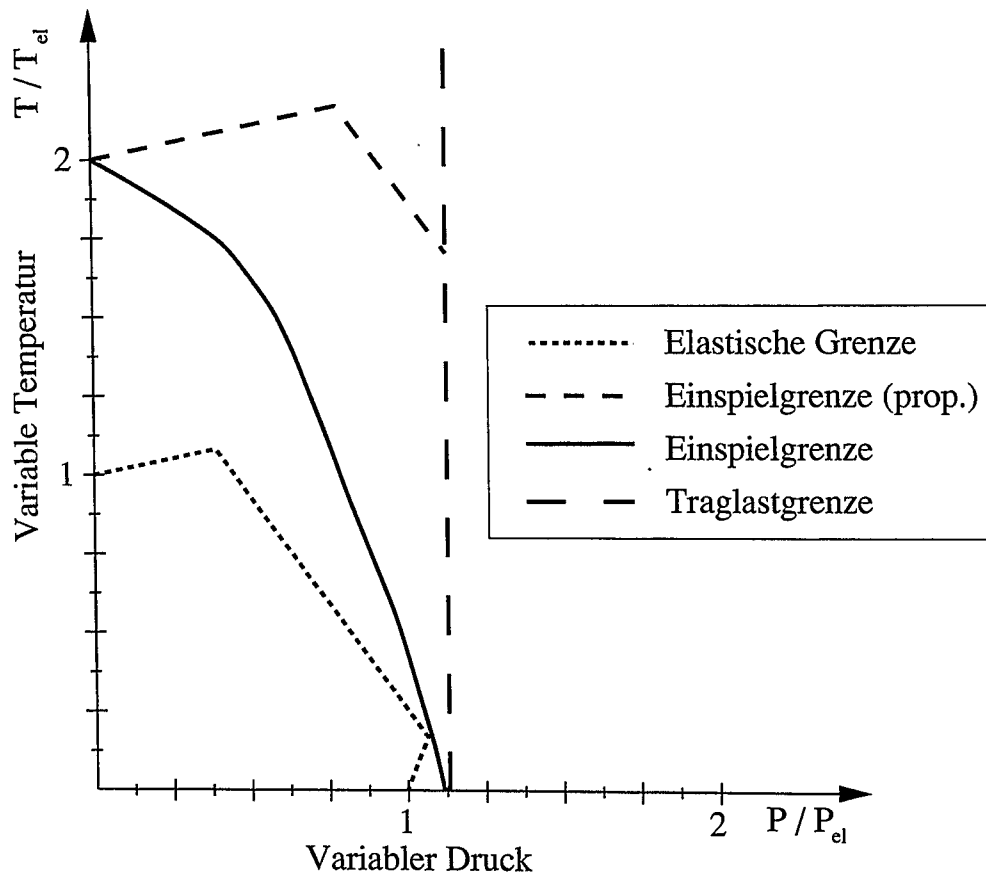


Bild 8.12: Interaktionsdiagramm des endlich dünnen Rohres für Lastfall 1 und 2

Da die thermischen Spannung Eigenspannungen sind, haben sie keinen Einfluß auf den Kollapsdruck. Der analytische elastische Druck ist $P_{elast} = \sigma_0/9.98$ (siehe Abschnitt 8.4) und der analytische Traglastfaktor für den Innendruck ist $\alpha_{limit} = 1.0983$, so daß der Kollapsdruck $P_{limit} = \alpha_{limit} \cdot P_{elast} = 0.11\sigma_0$ ohne Temperaturbelastung etwa 10 % über dem elastischen Druck liegt (siehe dazu z. B. [Scw83] und [Sza63]). Das Rohr kann bei mechanischer Kollapslast keine zusätzliche geringe thermische Last tragen.

Der elastische Fließdruck P_{elast} ist geringer als mit kleiner thermischer Zusatzlast bei proportionaler Belastung. Allerdings liegt die Traglast dann nur noch etwa 3 % über der elastischen Lösung.

Im zweiten Lastfall fallen die elastische Grenze und die Einspielgrenze sogar teilweise mit weniger als 1% Differenz zusammen. GROSS–WEEGE erhält in [GW96] vergleichbare Ergebnisse.

8.4.2 Konstanter Innendruck

Im dritten Lastfall wird das Rohr durch konstanten Innendruck und zyklische radiale Temperaturlast belastet. Die analytische Einspiellösung des unendlich dünnen Rohres von BREE in [Bre67] beruht auf folgenden Vereinbarungen. Die Spannungen werden im Gegensatz zu den numerischen Einspieluntersuchungen mit Hilfe der Fließfunktion von TRESCA beurteilt. In den analytischen Abschätzungen der Einspielgrenze von BREE für das unendlich dünne Rohr können die Radialspannungen im Bezug auf die Axialspannungen vernachlässigt werden.

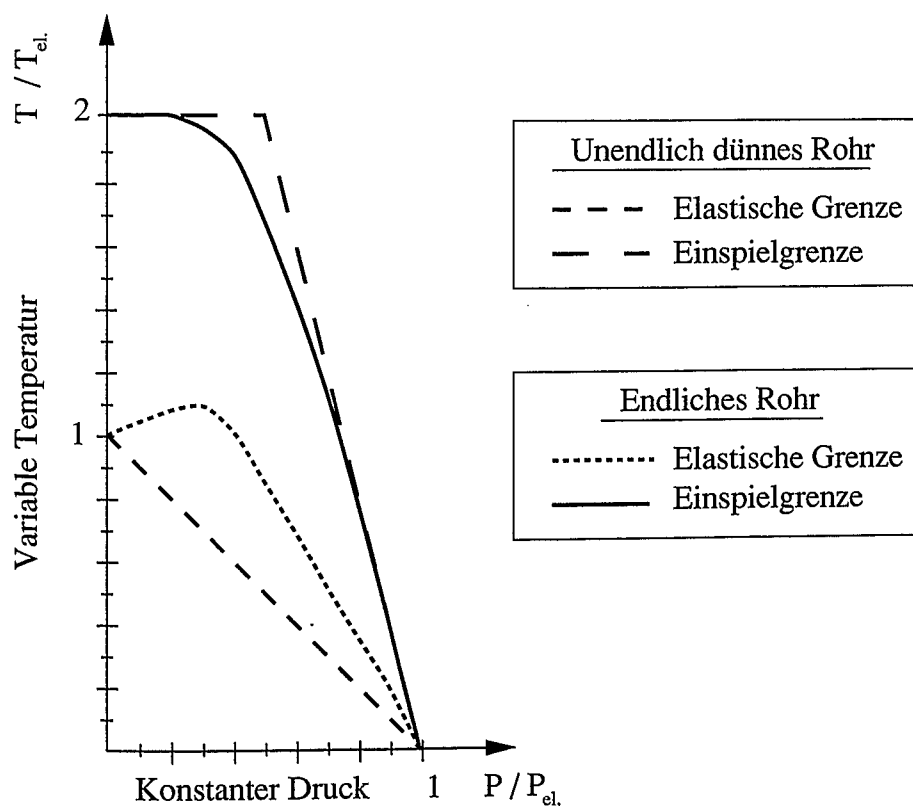


Bild 8.13: Interaktionsdiagramm des dünnen Rohres für Lastfall 3

Dadurch stellt sich im Interaktionsdiagramm für das unendlich dünne Rohr die elastische Grenze als Gerade dar zwischen der auf Fließbeginn normierten elastischen Temperatur und dem konstanten Fließdruck. Die Einspielgrenze ist durch das Abknicken der variablen Einspieltemperatur $2 * T_{el}$ für den konstanten Innendruck $1/2 P_{el}$ gegeben. Dort spielt das Rohr bei vierfach überhöhter elastischer Temperatur noch ein, d. h. der maximale Einspielfaktor α_{shake} bezogen auf die elastische Temperatur T_{el} ist bei $1/2 P_{el}$ gegeben durch $\alpha_{shake} = 4$. Für das unendlich dünne Rohr stimmen die elastische, die Einspiel- sowie die Traglastgrenze der variablen

Temperatur für den konstanten Fließdruck überein. In diesem Fall ist keine zusätzlich variable Temperatur zulässig, da im Rohr schon vollständiges Fließen vorliegt.

In der numerischen Einspielanalyse haben auf Grund der Endlichkeit des untersuchten Rohres die elastische sowie die Einspielgrenze eine abweichende Gestalt. Die elastische Grenze zeigt bei konstantem Druck $1/3 P_{el}$ ein ähnliches Verhalten wie die elastische Grenze bei variablem Druck. Sie ändert sich jedoch bis zum konstanten Druck P_{el} .

Das Interaktionsdiagramm in Bild 8.12 für die Lastfälle 1 und 2 unterscheidet sich von dem Interaktionsdiagramm in Bild 8.13 für den Lastfall 3 (siehe auch das Bree-Diagramm in [Bre67]). Für Lastfall 3 konnte in PERMAS-LISA keine konstante Zuglast über der Fließlast aufgebracht werden, so daß alle Kurven in Bild 8.13 in der elastischen Fließlast zusammenlaufen.

8.5 Rohrabzweig

8.5.1 Modell und Belastung

In einem weiteren Beispiel wird ein Rohrabzweig belastet durch Innendruck P und achsensymmetrische quasi-stationäre Temperaturbelastung T_i im Inneren des Abzweigs untersucht. Die Außentemperatur T_a entspricht der Umgebungstemperatur, die gleich Null gesetzt wird, so daß die Temperaturdifferenz $T_i - T_a = T_i$ ist. Wir beschränken uns auf temperaturunabhängige Materialdaten — E-Modul, Querkontraktionszahl und Fließspannung.

Der Abzweig ist durch 125 dreidimensionale 27-knotige Elemente (HEXEC27) diskretisiert. Die Elementspannungen werden in den 8 Ecken der Elemente abgelesen, so daß 1000 Knotenspannungen zur Verfügung stehen. Das FE-Netz ist Bild 8.14 zu entnehmen. Es ist:

Innendurchmesser Rohr	$D = 39 \text{ mm}$
Innendurchmesser Abzweig	$d = 15 \text{ mm}$
Wandstärke Rohr und Abzweig	$s = 3.44 \text{ mm.}$

Folgende Lastbereiche werden untersucht:

1. Der Druck P und die Temperatur T_i variieren simultan mit einem Proportionalitätsfaktor (ein-parametrische Belastung):

$$\begin{aligned} 0 \leq P \leq \alpha \mu P_0, & \quad 0 \leq \mu \leq 1 \\ 0 \leq T_i \leq \alpha \mu T_0, & \quad 0 \leq \mu \leq 1. \end{aligned}$$

P_0 und T_0 sind jeweils ein Referenzdruck und eine Referenztemperatur.

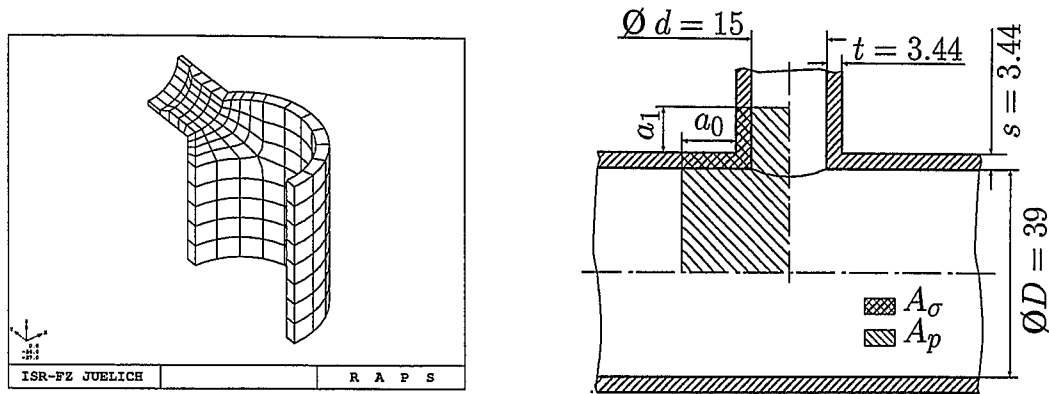


Bild 8.14: FE-Netz und Dimensionierung des Abzweigs

2. Der Druck P und die Temperatur T_i variieren unabhängig voneinander (zwei-parametrische Belastung)

$$\begin{aligned} 0 \leq P &\leq \alpha \mu_1 P_0, & 0 \leq \mu_1 &\leq 1 \\ 0 \leq T_i &\leq \alpha \mu_2 T_0, & 0 \leq \mu_2 &\leq 1. \end{aligned}$$

Beide Belastung werden für $T_0 \leq 0$ und $T_0 \geq 0$ untersucht. Dies entspricht jeweils einer erhöhten Außen- und Innentemperatur. Den Kollapsdruck erhält man als Spezialfall durch $T_0 = 0$. Der Druck bei Fließbeginn ist $P_{elastic} \approx 0.0476 \sigma_0$.

8.5.2 Kollapsdruck nach Traglastanalyse und AD-Merkblatt

Zum Vergleich wurde der Kollapsdruck ($T_0 = 0$) nach dem AD-Merkblatt B9 berechnet (siehe [SH97d],[Wag91]). Die tragenden Längen im Grundrohr und im Stutzenrohr a_0 und a_1

$$a_0 = \sqrt{(D + s)s} \approx 12.083, \quad (8.8)$$

$$a_1 = 1.25\sqrt{(d + t)t} \approx 9.956. \quad (8.9)$$

definieren die beiden Gebiete

$$A_\sigma = a_0 s + a_1 t + s t \approx 87.648 \quad (8.10)$$

$$A_p = 0.5D(a_0 + t + 0.5d) + 0.5d(a_1 + s) \approx 549.419. \quad (8.11)$$

Dabei ist A_σ die druckbeaufschlagte Fläche und A_p die tragende Rohrfläche. Der Verschwächungsfaktor ν_A ergibt sich dann durch

$$\nu_A = \frac{D A_\sigma}{2s A_p} = \frac{a_0 + a_1 t/s + t}{a_0 + t + 0.5d + \frac{d}{D}(a_1 + s)} \approx 0.904. \quad (8.12)$$

Der Kollapsdruck P_{limit} berechnet sich dann mit

$$(D + 2s)/D \approx 1.176 \quad (8.13)$$

nach DIN 2413 (siehe [Wag91]) zu

$$P_{limit} = \frac{2\sigma_0 s \nu_A}{D + 2s} \approx 0.136\sigma_0 \approx 2.85P_{elastic}. \quad (8.14)$$

Über den Sicherheitsfaktor 1.5 erhält man den Auslegungsdruck durch $P_{design} = 1.9P_{elastic} = 0.0904\sigma_0$. Die Traglastanalyse mittels PERMAS-LISA ergibt den Traglastfaktor

$$\alpha_{limit} = 2.82. \quad (8.15)$$

Der durch die Traglastanalyse berechnete Kollapsdruck ist also

$$P_{limit} = \alpha_{limit}P_{elast} = 0.134\sigma_0. \quad (8.16)$$

Die Absicherung gegen Kollaps ist mit der Traglastanalyse etwa 10 mal schneller als mit der herkömmlichen inkrementellen Rechnung. Die Rechenzeiten im Verhältnis zu der inkrementellen Berechnung sind im Anhang A.10 in Bild A.2 dargestellt.

8.5.3 Kollapsdruck des Rohres

Zum weiteren Vergleich wird aus der Schalentheorie der elastische Druck für das ungestörte Rohr berechnet (siehe Abschnitt 8.4). Der elastische Druck $\hat{P}_{elastic}$ des äquivalenten ungestörten Rohres mit Innendurchmesser $D = 39mm$ und Wandstärke $s = 3.44mm$ berechnet sich zu $\hat{P}_{elastic} \approx 0.160\sigma_0$. Der Traglastfaktor $\hat{\alpha}_{limit}$ bezogen auf die elastische Lösung ist $\hat{\alpha}_{limit} = 1.171$, so daß der Kollapsdruck $\hat{P}_{limit}$ gegeben ist durch $\hat{P}_{limit} \approx 0.188\sigma_0$, anstelle von $0.136\sigma_0$ für den Abzweig. Der Abzweig bedeutet eine Verschwächung um 28%. Bezogen auf den Fließbeginn im Abzweig bei $0.0476\sigma_0$ erhält man für den Kollapsdruck eine um 181% höhere Last.

8.5.4 Vergleiche mit experimentellen Untersuchungen

Beispiel von CALLADINE und GOODALL

CALLADINE und GOODALL dokumentieren in [CG69] eine umfangreiche experimentelle und analytische Testserie zur Kollapslastberechnung von Rohren mit Ausschnitten unter Innendruckbelastung. Bei jeder Probe wird der Rohrrinnenradius mit R , die Wandstärke des Rohres mit T und der Radius des Ausschnittes mit r bezeichnet. In Abhängigkeit des Verhältnisses

$$\rho = \frac{r}{\sqrt{R \cdot T}}$$

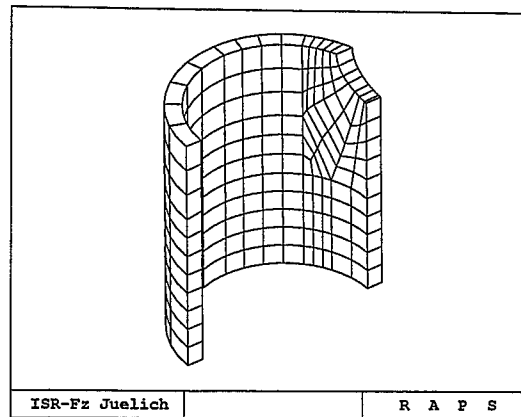


Bild 8.15: FE-Netz Rohres mit Ausschnitt

wird die Kollapslast P_{limit} für unterschiedliche Rohre mit den Verhältnissen $R/T \approx 25$ und $R/T \approx 50$ angegeben (siehe [CG69] für $R/T \approx 25$). Darin wird die Kollapslast P_{limit} auf die Kollapslast P_{limit}^o des jeweiligen ungestörten Rohres mit dem gleichen Verhältnis R/T bezogen.

Für Vergleichsrechnungen wird ein Rohr mit Ausschnitt untersucht, welches die gleichen Dimensionen wie der in den vorherigen Kapiteln untersuchte Abzweig hat, d.h. $R/T = 5.669$ und $R/r = 2.6$. Der Kollapsdruck P_{limit}^o des äquivalenten ungestörten Rohres beträgt $0.188\sigma_0$. Aus einer Extrapolation der Ergebnisse aus [CG69] erhält man für den Kollapsdruck des Rohres mit Ausschnitt den Schätzwert $P_{limit} \approx 0.12\sigma_0$.

Das Modell des Rohres mit Ausschnitt, welches für die Traglastanalyse benutzt wurde, ist in Bild 8.15 dargestellt. Es wurden für die Diskretisierung 164 27-knotigen Elemente (HEXEC27) verwendet. Der berechnete Fließdruck ist gegeben durch $P_{elast} = 0.036\sigma_0$. Mit dem Traglastfaktor $\alpha_{limit} = 3.27$ ergibt sich ein Kollapsdruck $P_{limit} = 0.117\sigma_0$, welcher gut mit dem geschätzten Kollapsdruck von CALLADINE und GOODALL übereinstimmt, jedoch von der Näherungsformel von KITCHING, DAVIS und GILL abweicht.

Gegenüber dem ungestörten Rohr bedeutet dies eine Verschwächung von 38 %. Der berechnete Kollapsdruck liegt mit 13 % Abweichung unter der Kollapslast des Abzweigs, so daß eine Abschätzung der Kollapslast des Abzweigs durch die Kollapslast des Rohres mit Ausschnitt sinnvoll erscheint.

Beispiel von KITCHING, DAVIS und GILL

KITCHING, DAVIS und GILL untersuchen in [KDG70] Rohre mit rechteckigen, quadratischen kreisrunden und elliptischen Öffnungen. Abhängig von der dimensionslosen Größe $\rho = c/\sqrt{RT}$ wird die Traglast berechnet. Dabei ist c eine Einheitsgröße, welche für Kreisöffnungen dem Radius, für quadratische und rechteckige Öffnungen der halben Kantenlänge und für elliptische

Öffnungen der halben Hauptachsenlänge entspricht. Diese Vereinheitlichung der verschiedenen Öffnungsgeometrien wird durch die experimentellen Ergebnisse gestützt, die auch für unterschiedliche Geometrien nur eine Abhängigkeit von der Größe c nahelegt. Eine untere Schranke der Traglast P_{limit} berechnet sich mit Hilfe von P_{limit}^o nach [KDG70] durch:

$$P_{limit} = \frac{1}{1 + \rho^2} P_{limit}^o \text{ für } \rho \geq 1, \text{ und } P_{limit} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\rho^2}}{4\rho^2} P_{limit}^o \text{ für } \rho \leq 1$$

Im hier untersuchten Beispiel gilt $\rho = 0.9157$ und damit $P_{limit} = 0.0996\sigma_0$. Die experimentellen Resultate weichen jedoch für kreisrunde Öffnungen von den mittels obiger Formel angegebenen unteren Schranke zum Teil erheblich ab (siehe z.B. Experiment 21 aus [KDG70]).

Beispiel von CLOUD und RODABAUGH

CLOUD und RODABAUGH geben in [CR68] eine obere Schranke für den Kollapsdruck P_{limit} eines Rohrabzweigs mit

Innenradius des Rohres	$D = 43.815 \text{ mm}$
Innenradius des Abzweigs	$d = 27.6 \text{ mm}$
Wandstärke Rohr	$s_p = 2.54 \text{ mm}$
Wandstärke Abzweig	$s_j = 1.78 \text{ mm}$

an (siehe auch [PBW⁺97]). Die Lösung gilt für Abzweige mit $d/D \leq 0.5$. Diese wird durch ein gewähltes Geschwindigkeitsfeld über den kinematischen Satz erzeugt. Zu vier unterschiedlichen Kollapsmechanismen wird jeweils eine obere Schranke für die Traglast angegeben. Eine obere Schranke für den Kollapsdruck ergibt sich mit

$$h = \frac{d}{D} \text{ and } g = \frac{2D}{s_p} \quad (8.17)$$

durch die Näherungsformel

$$P_{limit} = \frac{1.5 \frac{s^2}{d^2} + \frac{s^2}{2d^2} \left(1 + \frac{2}{h\sqrt{g}}\right) + \frac{38s}{9gd} + \frac{s}{d} \left(\frac{26}{9hg} + \frac{47}{54h^2g\sqrt{g}}\right)}{\frac{38}{9g} + \frac{38}{9h^2g} + \frac{76}{27h^3g\sqrt{g}} + \frac{2}{h\sqrt{g}}} \sigma_0 \quad (8.18)$$

$$\approx 0.033\sigma_0. \quad (8.19)$$

Der elastische Druck $\hat{P}_{elastic}$ des ungestörten Rohres beträgt nach Gleichung (8.5)

$$\hat{P}_{elastic} \approx 0.062\sigma_0. \quad (8.20)$$

Der Traglastfaktor ist $\hat{\alpha}_{limit} = 1.057$, so daß man den Kollapsdruck $\hat{P}_{limit}$ erhält durch

$$\hat{P}_{limit} \approx 0.066\sigma_0. \quad (8.21)$$

Der Abzweig bedeutet eine Verschwächung des ungestörten Rohres um 50 %. Das Ergebnis der einfachen Gleichung (8.18) ($P_{limit} = 0.033\sigma_0$) zeigt gute Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen von SCHROEDER in [SR69] ($P_{limit} = 0.034\sigma_0$).

Für den Rohrabzweig von Abschnitt (8.5.2) ist das Ergebnis von Gleichung (8.18) jedoch nicht sinnvoll. Die obere Schranke aus Gleichung (8.18) ergibt $P_{limit} = 0.197\sigma_0$, der Kollapsdruck des ungestörten Rohres ist nach Gleichung (8.7) jedoch nur $\hat{P}_{limit} = 0.160\sigma_0$. Der Kollapsdruck des Abzweigs kann aber nicht über dem des ungestörten Rohres liegen, so daß die obere Schranke zu konservativ ist. Die von CLOUD und RODABAUGH angesetzten Kollapsmechanismen spiegeln den wahren Versagensmechanismus nicht wieder. Vermutlich ist das größere Verhältnis $2s/D = 0.176$ im Beispiel aus (8.5.2) gegenüber $2s/D = 0.058$ in SCHROEDERS Beispiel ein Grund für die auffällige Diskrepanz.

Die zusätzlich für die Einspielanalyse bei zyklischem Innendruck benötigte CPU-Zeit beträgt ca. das Doppelte der elastischen Rechnung. In diesem Fall konvergiert die Einspielanalyse schneller als die Traglastanalyse und liegt im Bereich einer elastischen Rechnung.

Die Ergebnisse der Einspielanalyse sind in Bild 8.16 dargestellt. Die kurz-gestrichelte Linie in Bild 8.16 begrenzt den elastischen Lastbereich. Das Abknicken im ersten Quadranten bedeutet, daß eine geringe Temperaturbelastung eine Erhöhung des möglichen elastischen Drucks ermöglicht. Bei zwei-parametrischer Belastung stößt der Lastbereich für die Werte 1 auf der Abszisse und -1 auf der Ordinate an die elastische Grenze, so daß hier der elastische Lastbereich „abgeschnitten“ wird. Die mögliche elastische Vergrößerung des Lastbereiches ist dann durch den rein elastischen Druck und die rein elastische Temperatur begrenzt.

Die Traglastanalyse für den Innendruck führt zum Kollapsdruck $2.82P_{elastic}$ (siehe [SH97c]). Die zur thermischen Belastung gehörenden Spannungen sind Eigenspannungen, da sie mit keiner Volumen- bzw. Oberflächenlast im Gleichgewicht stehen. Daraus folgt, daß die thermische Belastung keinen Einfluß auf die Traglast des Abzweigs hat. Die Traglastgrenze stellt im Interaktionsdiagramm (siehe Bild 8.16) eine Gerade parallel zu der Ordinate dar. Abszisse und Ordinate sind auf den elastischen Druck P_{el} und auf die elastische Vergleichsspannung σ_0^T resultierend aus der mechanischen bzw. thermischen Belastung zu Fließbeginn normiert.

Die strich-punktierte Linie begrenzt den Einspielbereich für ein-parametrische Belastung. Der Einspielfaktor α_{shake} bezogen auf die elastische Lösung ist im gesamten Bereich näherungsweise 2 ($1.98 \leq \alpha_{shake} \leq 2$). Für proportionale Belastung verdoppelt sich der Lastbereich bei elastischem Einspielen gegenüber dem rein elastischen Betriebsbereich. Dies begründet sich im lokalen Versagen des Abzweigs in den Stutzenkanten durch LCF. Der Punkt des erstmaligen Fließens und der für das Versagen verantwortliche Punkt stimmen überein. Dies stimmt auch mit der in Abschnitt 6.2 hergeleiteten analytischen Lösung überein. In diesem Fall des lokalen Versagens erhöhen sich die Einspiellasten für linear und nichtlinear kinematisch verfestigendes Material nicht. Allgemein kann die Einspiellast durch kinematische Verfestigung (linear oder

nichtlinear) nur dann gesteigert werden, wenn inkrementelles Versagen (Ratchetting) oder nicht lokal beschränktes LCF vorliegt (siehe dazu auch [GW96] und [Zha91]).

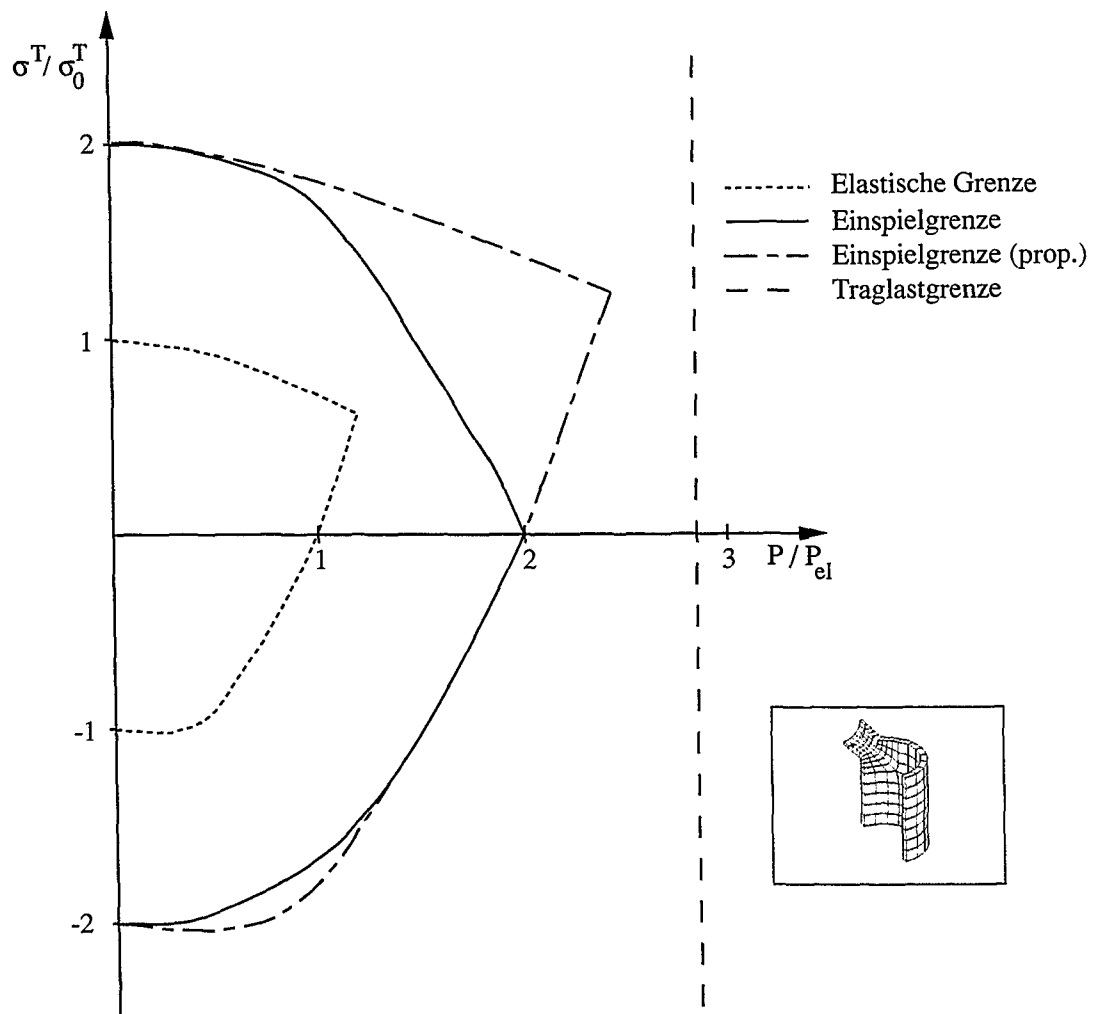


Bild 8.16: Interaktionsdiagramm des Rohrabzweigs

Die durchgezogene Linie begrenzt den Einspielbereich für zwei-parametrische Belastung. Der Einspielfaktor liegt bezogen auf die elastische Lösung zwischen 1.46 und 2. Die Dimension des reduzierten Eigenspannungsraums variiert während der Iteration zwischen 3 und 6. Das betrachtete Optimierungsproblem hat 4 bis 7 Unbekannte und 2000 für ein-parametrische und 4000 Knotenspannungen für zwei-parametrische Belastung.

8.5.5 Inkrementelle Rechnung

Aus einer inkrementellen Berechnung des Abzweigs unter Innendruck erhält man eine Druck-Dehnungskurve (siehe Bild 8.17). Es ist der aufgebrachte Druck P über der maximalen Vergleichsdehnung ε^A im Stutzenpunkt A aufgetragen. Die x- und y-Achse sind jeweils auf die elastische Vergleichsdehnung ε_{el}^A im Punkt A und auf den elastischen Druck P_{el} normiert. Die Bauteilfließkurve (Bild 8.17) kann analog zur Werkstoffkurve (σ , ε -Diagramm) interpretiert werden, wenn man die elastische Grenze mit der Anfangsfließspannung σ_0 und die Traglast mit der Bruchspannung σ_u identifiziert. Nach Belastung bis Fließbeginn wird der Innendruck

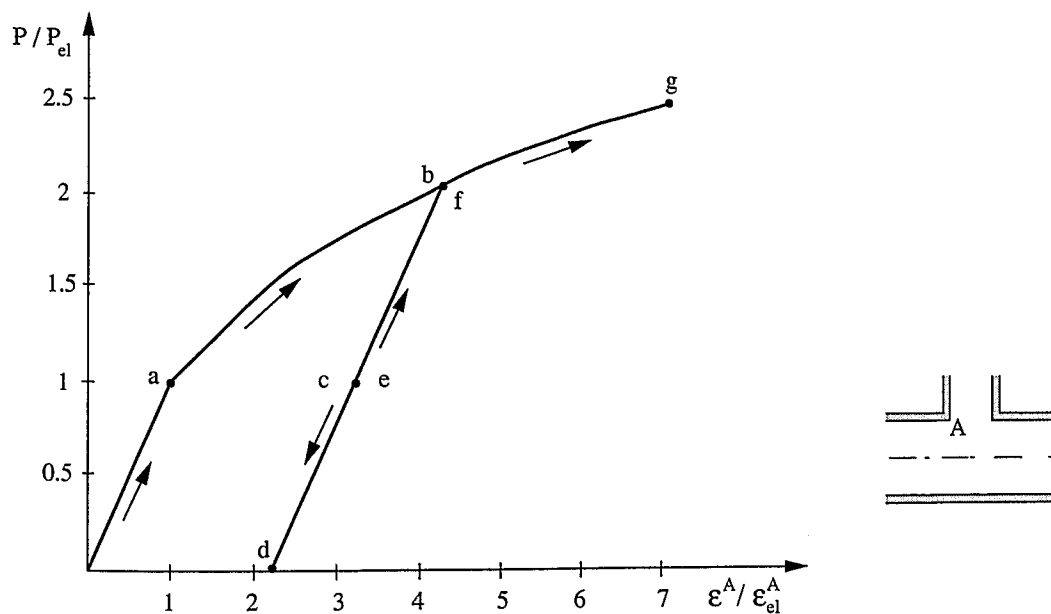


Bild 8.17: Bauteilfließkurve berechnet für Punkt A des Abzweigs

bis auf den doppelten elastischen Innendruck gesteigert. Danach wird der Abzweig vollständig ent- und wiederbelastet. Dieser Ent- und Belastungsteil verläuft parallel zur ursprünglichen elastischen Gerade. Daraufhin wird die Struktur weiterbelastet. Die Ent- und Wiederbelastung hat darauf keinen Einfluß, so daß der Kollapsdruck unabhängig von der Lastgeschichte ist. Die nach der Entlastung verbleibenden plastischen Dehnungen korrespondieren mit den verbleibenden Eigenspannungen. Eigenspannungen, auch herstellungsbedingte, haben keinen Einfluß auf die Traglast (siehe dazu auch die Experimente von MAIER-LEIBNITZ [ML28]). Ganz entsprechend ist auch der Werkstoffwert σ_u eindeutig bestimmt und unabhängig von der Lastgeschichte. Die Kraft beim Bruch einer Zugprobe ist ihre Traglast. Die Traglastanalyse liefert nicht die Dehnungen bei Kollaps. Dehnungen und Verschiebungen hängen wie in Bild 8.17 offensichtlich von der Lastgeschichte und von den Eigenspannungen ab. Selbst wenn alle Bedingungen genau bekannt sind, sind diese kinematischen Größen mit zunehmend flacher verlaufender Belastungskurve ungenauer bestimmbar. Auch diese Eigenschaften der Bruchdehnungen sind beim Zugversuch analog. Die statischen Größen sind die technisch wichtigeren Kennwerte. Das gilt

für den Werkstoffwert σ_u ebenso wie für den Bauteilkennwert α_{limit} .

Die Spannungsverteilungen während dieser inkrementellen Berechnung sind exemplarisch im Anhang A.9 in Bild A.1 aufgezeigt. Die Indizes der Belastungen in Bild A.1 gehören zu den jeweiligen Abschnitten in Bild 8.17.

8.6 Japanisches Benchmark Problem für Druckbehälter

In Japan haben 16 Teams ein Benchmark Programm bezüglich Traglast mit unterschiedlichen FEM-Programmen und Diskretisierungen durchgeführt (siehe [YAO97] und Tabelle A.2). Das untersuchte Modell ist aus einem Zylinder und einem gewölbten Boden mit kegeligem Zwischenstück zusammengesetzt (für die Dimensionierung siehe Bild 8.18). Alle Teams untersuchten den Druckbehälter unter Innendruckbelastung bezüglich des Kollapsdrucks. In allen Traglastuntersuchungen wurde elastisch ideal plastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Im Beispiel ist der Baustahl SFVQ1A des Japanischen Industrie Standards (JIS) gewählt (entspricht dem warmfesten Stahl 20MnMoNi45 nach DIN). Die Materialdaten sind nach dem MITI Code für eine Temperatur von 300° C berechnet. Die Abmessungen und Materialdaten des Benchmark Beispiels sind in Tabelle 8.1 zusammengefaßt. Statt der Fließspannung σ_0 wird der durch den Faktor 2 abgeminderte Werkstoffwert $S_m \approx 0.5\sigma_0$ verwendet.

Zwischenstücklänge	l	$= 658.2 \text{ mm}$
Zylinderlänge	L	$= 3000 \text{ mm}$
Bodeninnenradius	R_b	$= 4500 \text{ mm}$
Krempeninnenradius	R_k	$= 360 \text{ mm}$
Zylinderinnenradius	R_z	$= 3000 \text{ mm}$
Wandstärke	s	$= 225 \text{ mm}$
E-Modul	E	$= 1.75 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$
Querkontraktion	ν	$= 0.3$
Fließspannung	σ_0	$= 370 \text{ N/mm}^2$

Tabelle 8.1: Abmessungen und Materialdaten des Druckbehälters

Die elastische Analyse der japanischen Teams ergibt bei Fließbeginn den Druck von 8.6 N/mm^2 für $1.5 \cdot S_m = 276 \text{ N/mm}^2$. Die Traglastberechnungen der japanischen Teams wurden für $1.5 \cdot S_m$ mit Hilfe der *Double Elastic Slope Method (DESM)* für ideal plastisches Materialverhalten durchgeführt (siehe dazu ASME Code, Sect. III, NB-3213.25). Eine Liste der benutzen FE-Programme und der wichtigsten Eigenschaften der FE-Modelle sind in Tabelle A.2 aufgezeigt. Es wurden 7 FE-Programme mit unterschiedlichen Modellen getestet. Dabei wurden Modelle mit bis zu 2435 Knoten untersucht.

Für die Traglastanalyse mit PERMAS–LISA wurde das Modell durch 208 rotationssymmetrische 9–knotige Elemente (QUAX9) diskretisiert. Die elastische Analyse ergibt für die in Bild 8.18 dargestellte Diskretisierung einen Fließdruck von 8.5 N/mm^2 und stimmt damit gut mit den Ergebnissen der japanischen Teams überein (siehe dazu auch das Bild der Spannungsschattierungen in Bild 8.18). Der Fließdruck P_{elast}^z bei $1.5 \cdot S_m$ für den geschlossenen Zylinder berechnet sich nach [Sza63] durch:

$$P_{elast}^z = \frac{1.5 \cdot S_m}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{R_z^2}{(R_z + s)^2} \right) = 21.46 \text{ N/mm}^2.$$

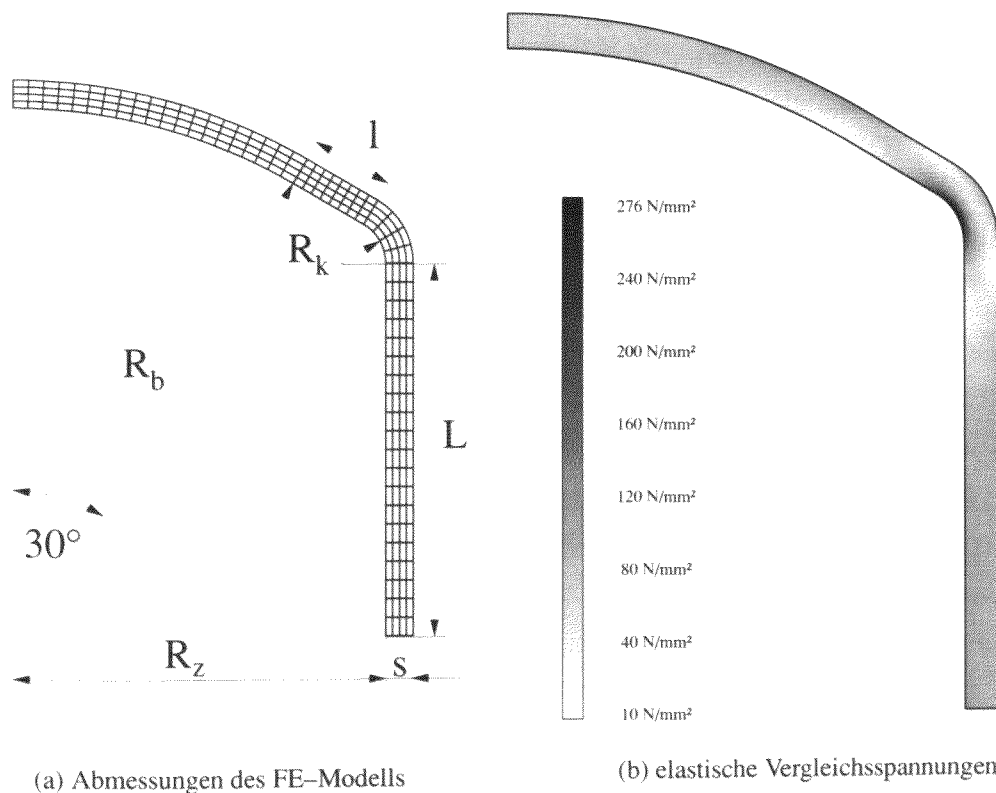


Bild 8.18: Abmessungen und von Mises-Vergleichsspannungen des FE-Modells

Der Traglastfaktor α_{limit} für den Zylinder berechnet sich nach [Sza60] durch $\alpha_{limit} = 1.074$, so daß die analytische Traglast des Zylinders durch $P_{limit}^z = 23.05 \text{ N/mm}^2$ gegeben ist. Mit Hilfe der Traglastanalyse wurde eine Traglast von 23.00 N/mm^2 berechnet. Dies bedeutet eine Abweichung von 0.2 % von der Traglast des Zylinders, so daß die Krempe und der Behälterboden keinen nennenswerten Einfluß auf die Traglast haben.

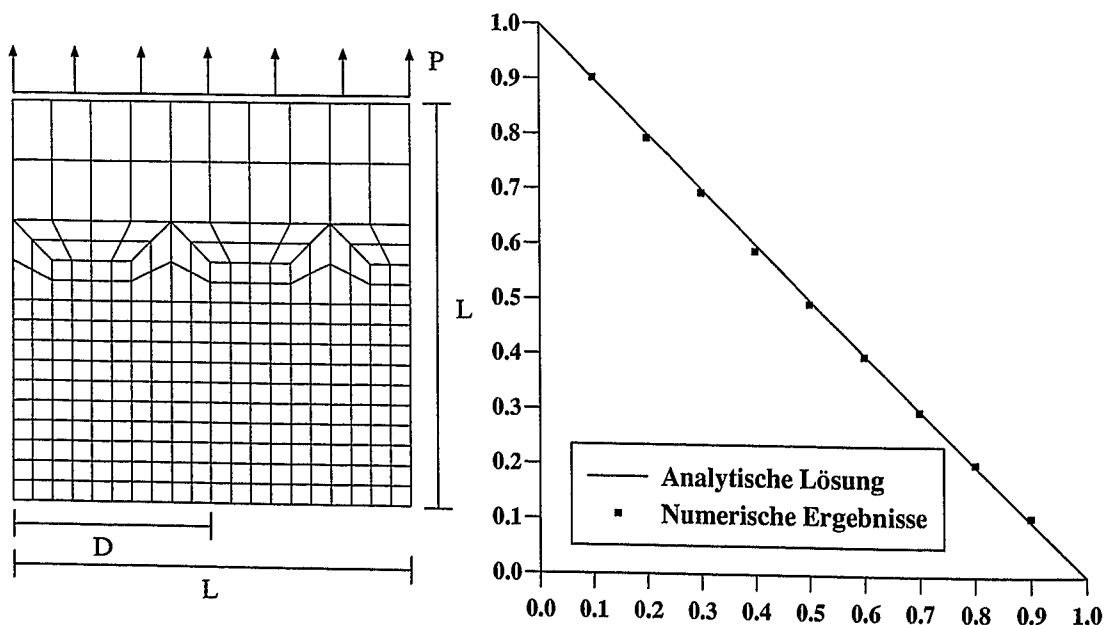
Ein Vergleich der durch die japanischen Teams erhaltenen Traglasten des Behälters und der Traglast nach Traglastanalyse ist in Anhang A.12 in Tabelle A.2 dargestellt. Die japanischen Teams erhielten geringere Traglasten, da in der verwendeten Double Elastic Slope Method (DESM) die Deformationen beschränkt werden.

8.7 Ebene Scheibe mit Riß

8.7.1 Homogenes Material

Nach der Analyse der Scheibe mit kreisrundem Loch und den Erweiterungen der Untersuchungen für Scheiben mit elliptischen Löchern wird abschließend für diesen Themenbereich die Scheibe mit Riß als Grenzwert für elliptische Löcher untersucht. Aus Gründen der Symmetrie genügt es, ein Viertel der Scheibe zu untersuchen. Die Viertel-Scheibe hat die aus den vorangegangenen Beispielen übliche Länge L , der Riß hat die Breite D . Es werden Scheiben mit den Verhältnissen $D/L = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ untersucht. Im homogenen Fall wird in jedem Punkt der Struktur die gleiche Fließspannung vorausgesetzt. Die Modelle für die unterschiedlichen Verhältnisse D/L haben den gleichen Aufbau (siehe Bild 8.19(a)). Die Scheibe ist durch 270 8-knotigen Elemente (QUAM8) diskretisiert. Die verschiedenen Verhältnisse werden mit den vorgegebenen Werten von D/L durch die jeweilig passenden Fesselungen in y -Richtung realisiert. Die Scheibe wird durch einachsigen Zug beansprucht (siehe Bild 8.19(a)).

Da bei dieser Belastung im Rißgrund in der elastischen Lösung eine Spannungssingularität auftritt, ist nur eine Traglastuntersuchung sinnvoll, da in der Einspieluntersuchung keine Lösung existiert (siehe Bemerkung in [Zha91] und das Beispiel einer Scheibe mit quadratischem Loch und der fragwürdigen Einspieluntersuchung in [WGW88]).



(a) FE-Netz der Scheibe für $D/L = 0.5$

(b) Vergleich der numerischen Traglast mit der analytischen für unterschiedliche D/L

Bild 8.19: Scheibe mit Riß für homogenes Material

Die Ergebnisse für die Zugbelastung sind in Bild 8.19(b) festgehalten. Dabei sind die numerisch berechneten Traglasten über den Quotienten D/L aufgetragen. Zum Vergleich ist die normierte analytische Traglast $P_{limit}/\sigma_0 = 1 - D/L = (L - D)/L$ für den ebenen Spannungsfall nach [Hod59] aufgetragen.

Die numerischen Ergebnissen stimmen gut mit den analytischen überein. Die Spannungssingularität im Rißgrund wird durch die Finiten Elemente nicht exakt abgebildet, im Laufe der Rechnung wird sie jedoch durch das überlagerte Eigenspannungsfeld abgebaut.

Das Verhältnis $P_{limit}/\sigma_0 = (L - D)/L$ kann folgendermaßen interpretiert werden. P_{limit} und σ_0 entsprechen jeweils der Traglast der gestörten und der ungestörten Scheibe. Beim Kollaps der Scheiben unter einachsigen Zug fließt der gesamte kleinste Querschnitt (Ligament). Dieser ist jeweils $L - D$ und L für die defekte und die perfekte Scheibe. Dies führt zu folgendem Verhältnis der beiden Traglasten:

$$\frac{\text{Traglast defekte Scheibe}}{\text{Traglast perfekte Scheibe}} = \frac{P_{limit}}{\sigma_0} = \frac{L - D}{L} = \frac{\text{Ligament defekte Scheibe}}{\text{Ligament perfekte Scheibe}}.$$

Die Kollapslast der defekten Scheibe im ebenen Spannungszustand berechnet sich also aus dem Verhältnis des Ligaments zum gesamten Querschnitt. Im ebenen Dehnungszustand verändert sich das Verhältnis durch den konstanten Faktor $2/\sqrt{3} \approx 1.1547$ zu $P_{limit}/\sigma_0 = 2/\sqrt{3}(L - D)/L$, da dort die z -Komponenten des Spannungstensors nicht verschwinden (siehe [Hod59]).

Die Testrechnungen zeigen, daß mit Hilfe eines relativ groben FE-Netzes, die Traglast schon sehr genau berechnet werden kann. Da die Scheibe mit Riß im gesamten Ligament kollabiert und nicht lokal um die Rißspitze, ist es nicht nötig zur Traglastberechnung die diskretisierte Struktur lokal zu verfeinern. Allgemein haben die Testrechnungen gezeigt, daß bei nicht lokal versagenden Strukturen auch die Traglastanalyse mit groben Netzen gute Näherungen der analytischen Traglast liefern.

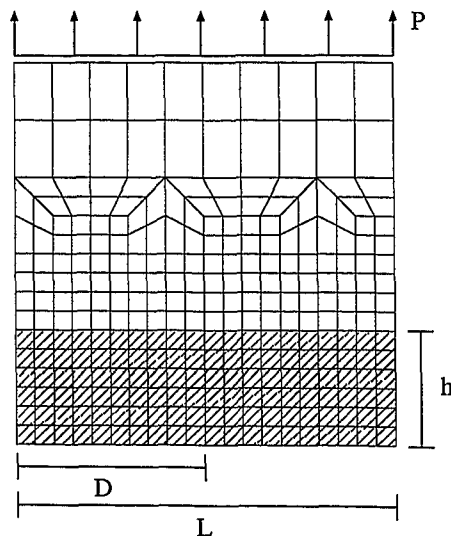
8.7.2 Inhomogenes Material

JOCH, AINSWORTH und HYDE bestimmen in [JAH93] Traglastlösungen für Scheiben mit Riß in einer Schweißnaht mit Hilfe der J -Integralmethode. Die Scheibe wird durch einachsigen Zug beansprucht. Die Schweißnaht wird vereinfachend durch eine vom Basismaterial abweichende Fließspannung realisiert. σ_0^B und σ_0^W sind jeweils die Fließspannung des Basismaterials und des Schweißguts. Stimmen beide Werte überein, entsprechen die Ergebnisse der Traglastanalyse des homogenen Materials.

Im Modell des inhomogenen Materials wird eine Schweißnaht der Breite h bei Scheibenlänge L mit $h/L = 0.3$ durch eine veränderte Fließspannung simuliert (siehe [JAH93]). Das Beispiel ist als Benchmark im Brite-EuRam Projekt BE97-4547 *FEM based Limit and Shakedown Ana-*

lysis for Design and Integrity Assessment in European Industry, LISA aufgenommen. Das Netz wurde von Electricité de France (EDF) in Paris erzeugt.

In [JAH93] wurde mit vorgegebenen Verschiebungen gerechnet und damit ein ebener Dehnungszustand simuliert. Der Kollapsmechanismus ist als gerade Gleitlinie durch das Schweißgut und das Basismaterial in der analytischen Traglast idealisiert. Als Vergleichswert werden alle Traglasten auf die Traglast der Scheibe aus dem Basismaterial mit $P_{limit}^B/\sigma_0^B = 2/\sqrt{3}(1 - D/L)$ normiert. In Bild 8.20(b) werden die jeweils auf die Traglast des Basismaterials normierten Traglasten P_{limit} für den ebenen Dehnungszustand (EDZ) ($2/\sqrt{3}(1 - D/L)\sigma_0^B$ nach [JAH93]) und den ebenen Spannungszustand (ESZ) ($(1 - D/L)\sigma_0^B$ nach Traglastanalyse) gegenübergestellt. Der ebene Dehnungszustand wurde für die Traglastanalyse mit Hilfe von dreidimensionalen Elementen diskretisiert. Unter- und Oberseite der Struktur wurden gefesselt, um die Dehnungen in z -Richtung zu verhindern.



(a) FE-Netz der Scheibe mit Schweißnaht für $D/L = 0.5$

σ_0^W/σ_0^B	P_{limit} (EDZ) [JAH93]	P_{limit} (EDZ)	P_{limit} (ESZ)
0.5	0.615	0.668	0.496
0.75	0.848	0.897	0.741
1.0	1.0	1.039	0.986
1.25	1.14	1.155	1.187
1.5	1.24	1.263	1.324

(b) Vergleich der Traglasten für EDZ und ESZ für verschiedene Schweißmaterialien

Bild 8.20: Scheibe mit Riß für inhomogenes Material

Für Werte $\sigma_0^W/\sigma_0^B \leq 1$ stimmt im ebenen Spannungszustand der Wert $P_{limit}/\tilde{P}_{limit}^B$ gut mit σ_0^W/σ_0^B überein. Im ebenen Spannungszustand versagt die Scheibe durch vollständige Plastifizierung des Ligaments, so daß dann die Fließspannung des Ligaments die Kollapslast dominiert. Für größere Werte σ_0^W/σ_0^B tritt eine Abweichung von diesem Schema auf. Da beim Kollapsmechanismus auch Punkte des Basismaterials anfangen zu fließen, ist es möglich, daß bei Vergrößerung des Wertes σ_0^W das Versagen nicht in der Schweißnaht geschieht, sondern im Basismaterial. Dadurch wird die Kollapslast nicht nur durch den Wert σ_0^W bestimmt. Im ebenen Dehnungszustand liegt die Gleitlinie sowohl in der Schweißnaht als auch im Basismaterial, so

daß beide Werte σ_0^W und σ_0^B Einfluß auf die Kollapslast haben (siehe [JAH93]).

In den Bildern A.4(a) bis A.4(d) im Anhang A.13 ist für das Verhältnis $\sigma_0^W/\sigma_0^B = 1.5$ für verschiedene Belastungen die Fließgrenze durch Isolinien resultierend aus einer inkrementellen Rechnung dargestellt. Die Ergebnisse für die Traglast der inkrementellen Rechnung stimmen gut mit denen der Traglastanalyse überein. Man erkennt in Bild A.4(c) und A.4(d), daß die Scheibe nicht im Ligament versagt, sondern daß eine plastische Zone existiert, die das Schweißgut und das Basismaterial miteinander verbindet.

Im Gegensatz dazu sind in den Bildern A.5(a) bis A.5(d) die Fließgrenzen für verschiedene Belastungen für das Verhältnis $\sigma_0^W/\sigma_0^B = 0.75$ dargestellt. Die Scheibe versagt in diesem Fall in der Schweißnaht, so daß dann nur σ_0^W die Traglast beeinflusst. Dies bedeutet, daß sich die analytische Traglast für dieses Verhältnis durch die Traglast für die homogene Scheibe mit $P_{limit} = (L - D)/L\sigma_0^W$ approximieren läßt.

8.8 Rohr mit innenliegendem Umfangsriß

Untersucht man die im vorherigen Kapitel untersuchte Scheibe mit Riß statt mit ebenen FE-Modellen mit rotationssymmetrischen Elementen, so erhält man durch die gleiche Diskretisierung ein Modell eines Rohres mit der Wandstärke L und einem innen- bzw. außenliegenden Umfangsriß der Tiefe D . Der Innenradius R des Rohres ist dann noch variabel. Für einen Innenriß ist die Rißfläche $\pi((R + D)^2 - R^2)$ und die Ligamentfläche $\pi((R + L)^2 - (R + D)^2)$. Untersucht man dieses Rohr unter Zugbelastung, so entspricht dies im ebenen Fall der einachsigen Zugbelastung. Für homogenes Material mit der Fließspannung σ_0 berechnet sich die Traglast der ebene Scheibe mit Riß im ebenen Spannungszustand durch $P_{limit} = (L - D)/L\sigma_0$.

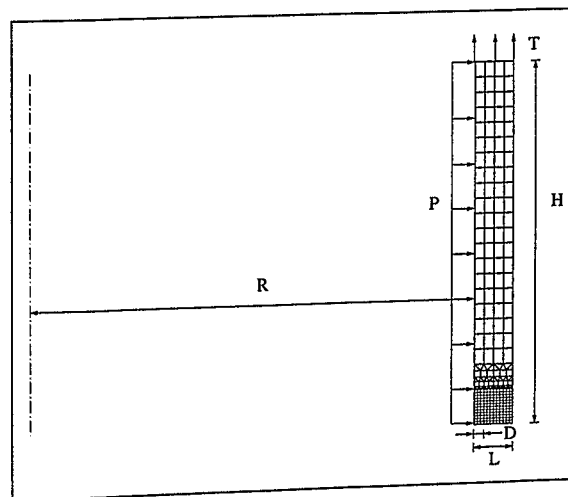


Bild 8.21: FE-Netz mit Vermaßung und Dimensionierung des Rohres mit Innenriß

Die analytische Traglast P_{limit}^R des Rohres mit Innenriß unter Zugbelastung berechnet sich analog über die Verhältnisse der Rißfläche zur Gesamtfläche und die Traglast des perfekten Rohres P_{limit} . Es gilt:

$$\frac{\text{Traglast defektes Rohr}}{\text{Traglast perfektes Rohr}} = \frac{P_{limit}^R}{P_{limit}} = \frac{(R+L)^2 - (R+D)^2}{(R+L)^2 - R^2} = \frac{\text{Ligamentfläche}}{\text{Rohrfläche}}.$$

Die Traglast des ungerissenen Rohres P_{limit} unter Zugbelastung ist gleich der Fließspannung $P_{limit} = \sigma_0$ aus dem einachsigen Zugversuch. Durch den Riß auf der Innenfläche weicht das Spannungsverhalten jedoch vom dem des einachsigen Zugversuchs ab. Bei dem einfachen Flächenvergleich ist noch nicht benutzt worden, daß die Flächen Querschnitte eines Rohres sind. Es treten sowohl Umfangsspannungen σ_t als auch Radialspannungen σ_r auf. Daher muß analog zum ebenen Dehnungszustand die Traglast des ungestörten Rohrs durch den Faktor $\sqrt{3}/2$ abgeschwächt werden [Hil50], [Mil88]. Man erhält mit den vorherigen Gleichungen:

$$P_{limit}^R = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(R+L)^2 - (R+D)^2}{(R+L)^2 - R^2} \sigma_0.$$

Diese Formel kann direkt aus den Ergebnisse des vorherigen Abschnitts gefolgert werden. Die Traglast einer Scheibe mit Riß ist mit den entsprechenden Bezeichnungen nach dem vorherigen Abschnitt $2/\sqrt{3}(L-D)/L\sigma_0$. Multipliziert man dies mit dem Verhältnis der Mittelumfänge des ungestörten Rohrs $2\pi(R+L/2)$ und des Ligaments $2\pi(R+(L+D)/2)$, so erhält man:

$$P_{limit}^R = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{L-D}{L} \cdot \frac{R+(L+D)/2}{R+L/2} \sigma_0.$$

Untersucht man ein dünnes langes Rohr mit dem Verhältnis $L/R = 0.1$ unter Zugbelastung, so erhält man eine untere Schranke für die Kollapslast des gerissenen Rohres P_{limit}^R mit $D/L = 0.25$ (siehe Bild 8.21) durch $P_{limit}^R \approx 0.8763\sigma_0$. Die Traglastanalyse mittels eines FE-Modells aus 282 Elementen (QUAX4) (siehe dazu Bild 8.21) liefert für den Kollapszug den Wert $0.8815\sigma_0$.

Zusätzlich wurden für dieses Modell noch weitere Lastfälle untersucht. Das Rohr wird durch Innendruck belastet und durch unterschiedliche Randbedingungen, d.h. durch Aufbringung von Schnittkräften auf den Stirnflächen des Rohres, wurden die Fälle des unendlichen offenen und geschlossenen Rohrs idealisiert. Bei Innendruck werden innenliegende Rißflächen durch Druck belastet im Unterschied zur Zugbelastung. Zusätzlich wurden die Belastungsarten Innendruck und Zugbelastung mit verschiedenen Proportionalitätsfaktoren superponiert. Durch die einparametrische Belastung erhält man dann eine Traglastgrenze. In Bild 8.22 ist diese Grenze für die jeweils auf die Fließspannung normierte Belastung aufgetragen. Die unterschiedlichen Idealisierungen unterscheiden sich kaum. Unter reiner Zugbelastung resultiert aus dem Umfangsriß eine ca. 12 %-ige Verringerung der Traglast gegenüber dem ungerissenen Rohr.

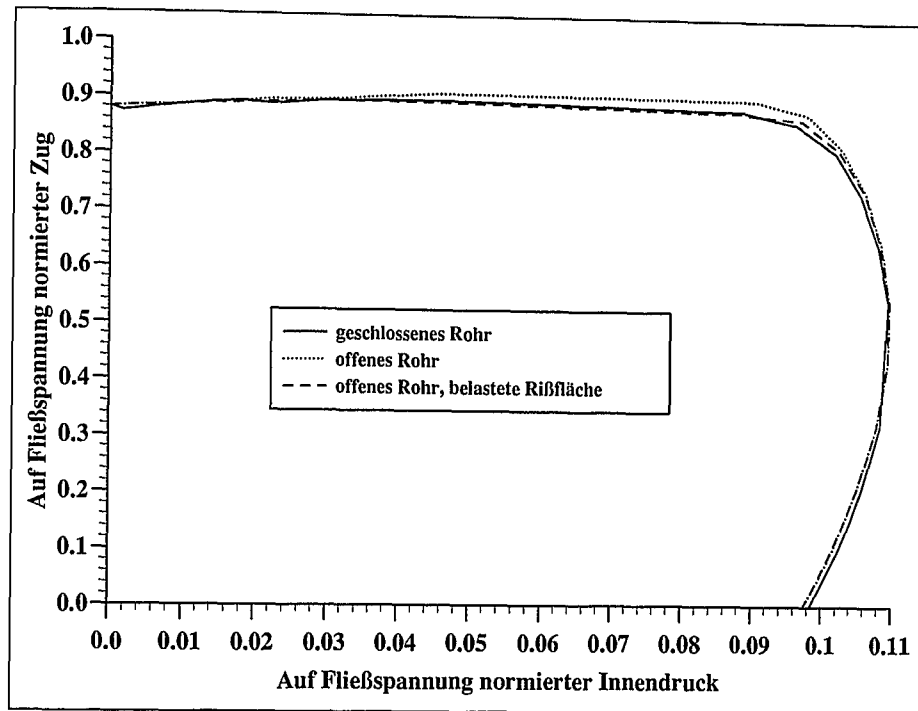


Bild 8.22: Traglastdiagramm des Rohres mit Innenriß

8.9 Probabilistische Analyse einer Lochscheibe

Die Zuverlässigkeit für plastisches Strukturverhalten kann analytisch berechnet werden, wenn die Traglast bekannt ist und die Basisvariablen normalverteilt sind (siehe Abschnitt 7). Die Traglast P_{limit} der Lochscheibe mit $D/L = 0.2$ (siehe Bild 8.1(a)) unter einachsiger Belastung ist bekannt und es gilt $P_{limit} = (1 - D/L)\sigma_0 = 0.8\sigma_0$. Bei den Testrechnungen zum in Abschnitt 7 (siehe auch [HS98]) vorgestellten Algorithmus zur Berechnung der Zuverlässigkeit mittels der in PERMAS implementierten Traglastanalyse wurde davon ausgegangen, daß die Fließspannung durch die Basisvariable X abgebildet werden kann. Daraus folgt, daß die Traglast P_{limit} der Lochscheibe linear von der Realisation σ_0 der Fließspannung abhängig ist. Die Fließspannung sei normalverteilt mit dem Mittelwert μ_x und der Varianz σ_x .

Die zweite Basisvariable Y ist die Größe der einachsiger aufgebrachten Linienlast P . Dabei wird davon ausgegangen, daß die Richtung der Belastung konstant bleibt, so daß die Belastung durch eine eindimensionale Basisvariable abgebildet wird. Diese sei ebenfalls normalverteilt mit dem Mittelwert μ_y und der Varianz σ_y .

Die analytische Zuverlässigkeit berechnet sich nach Gleichung (7.29) durch $\Phi(-\beta)$ mit

$$\beta = \frac{(1 - D/L)\mu_y - \mu_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + (1 - D/L)^2\sigma_y^2}} = \frac{0.8\mu_y - \mu_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + 0.64\sigma_y^2}} \quad (\text{für das Beispiel } D/L = 0.2). \quad (8.22)$$

In PERMAS wurde die in Abschnitt 7.7 vorgestellte spezielle Traglastanalyse implementiert.

Die Implementation nutzt die analytische Berechnung der Sensitivitäten über die LAGRANGE-Multiplikatoren der deterministischen Traglastanalyse. Dadurch kann mittels FORM der Designpunkt und damit die Zuverlässigkeit der Lochscheibe gegenüber Kollaps berechnet werden. Zur Berechnung mit Hilfe von FORM wurden Teile des FORM-Codes aus [Sta95] bzw. [Sta94] benutzt.

In Bild 8.23 und Tabelle 8.2 sind die Ergebnisse der implementierten Zuverlässigkeitsanalyse verglichen mit der analytischen Lösung nach Gleichung (7.29) aufgetragen. Die Ergebnisse in Bild 8.23 sind normiert auf den Mittelwerte μ_x . Es ist jeweils eine 10%-prozentige Standardabweichung gewählt, d.h. $\sigma_x = 0.1\mu_x$ und $\sigma_y = 0.1\mu_y$. Die Ergebnisse für weitere Werte der Streuung sind in Anhang A.14 dargestellt.

Die numerischen Ergebnisse korrespondieren sehr gut mit den analytischen Ergebnissen. Die größten Abweichungen von den exakten Werten liegen im Bereich großer Versagenswahrscheinlichkeiten. Für $\mu_y = 0.8\mu_x$ liegen die numerisch berechnete Versagenswahrscheinlichkeit 10 % über der analytischen. Die entspricht jedoch dem Fall, in dem der Mittelwert der Belastung genau der deterministischen Traglast entspricht, so daß $P_f = 0.5$ gilt. Für die Auslegung sind wesentlich geringere Versagenswahrscheinlichkeiten interessant. So entnimmt man Tabelle 8.2, daß die Abweichung für Versagenswahrscheinlichkeiten $P_f < 10^{-5}$ geringer als eine Größenordnung ist. Eine größere Genauigkeit kann nach [Sta94] aus verschiedenen Gründen nicht erwartet werden.

Bei der Einspiellanalyse wird folgender Lastbereich untersucht [HS99]:

$$0 \leq p \leq \alpha \lambda p_0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (8.23)$$

Der maximale Wert p_0 ist die Zufallsvariable. Die Ergebnisse der FORM-Analyse werden mit den analytischen Abschätzungen für die elastischen Spannungen in Tabelle 8.2 verglichen.

Aufgrund des lokalen Versagens der Scheibe, ist der Einspielfaktor gleich 2. Deshalb läßt sich die Einspiellast aus der Fließlast $p_i = 0.2949\sigma_y$ berechnen zu $0.5897\sigma_y$. Die implementierte probabilistische Einspiellanalyse liefert sehr gute Ergebnisse, da der Einspielfaktor in 3 bis 5 Schritten exakt erreicht wird.

Es ist zu beachten, daß die mittels der in PERMAS implementierten Traglastanalyse berechnete Traglast ca. 1 bis 2 % unterhalb der analytischen Traglast liegt, so daß in den Vergleichen in Bild 8.23 und Tabelle 8.2 die Abweichungen aus der numerischen Traglastanalyse und der FORM-Rechnung beinhaltet sind. In Tabelle 8.2 sind die numerisch und analytisch berechneten Versagenswahrscheinlichkeiten aufgetragen. Zusätzlich wurde nach Formel (7.29) analytisch der β -Wert berechnet, mit einer um 2 % abgeminderten Traglast. Die daraus analytisch berechneten Werte P_f (analytisch-2%) liegen sehr nahe an den numerisch berechneten Werten (siehe Tabelle 8.2). Daraus ersieht man, daß der größte Anteil des numerischen Fehlers gegenüber der analytischen Lösung in der deterministischen Traglastberechnung gemacht wird. Der aus

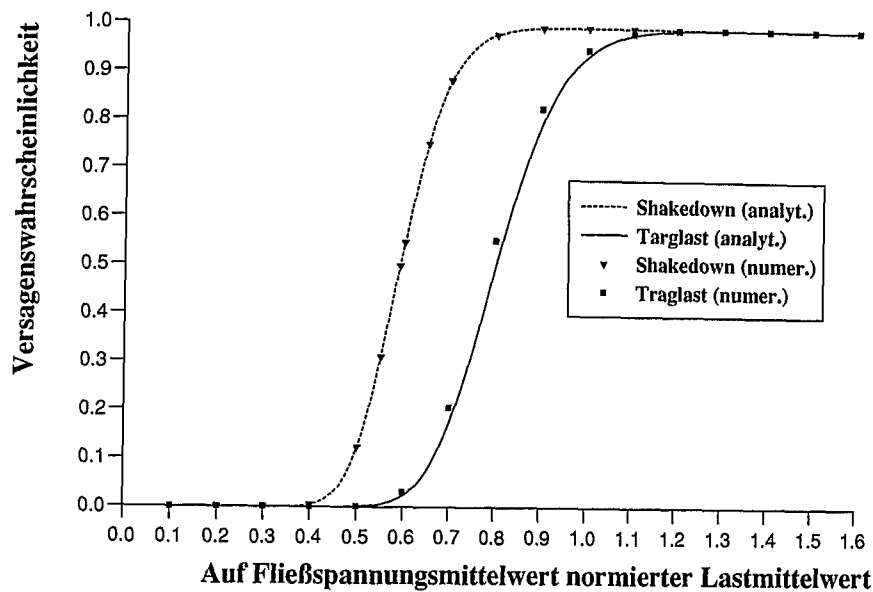


Bild 8.23: Graphische Darstellung der Ergebnisse für $\sigma_x = 0.1\mu_x$, $\sigma_y = 0.1\mu_y$

Traglast				Einspiel-Analyse		
μ_r/μ_s	P_f (num.)	P_f (anal.)	P_f (anal.-2%)	μ_r/μ_s	P_f (num.)	P_f (anal.)
0.2	2.643E-13	1.718E-13	2.640E-13	0.2	1.943E-10	1.943E-10
0.3	3.843E-09	2.426E-09	4.063E-09	0.3	5.964E-06	5.963E-06
0.4	6.112E-06	3.872E-06	6.416E-06	0.4	3.877E-03	3.877E-03
0.5	1.093E-03	7.364E-04	1.128E-03	0.5	1.227E-01	1.229E-01
0.6	3.049E-02	2.275E-02	3.118E-02	0.55	3.108E-01	3.111E-01
0.7	2.067E-01	1.734E-01	2.112E-01	0.59	5.000E-01	5.000E-01
0.8	5.550E-01	5.000E-01	5.567E-01	0.6	5.485E-01	5.485E-01
0.9	8.305E-01	7.969E-01	8.344E-01	0.65	7.538E-01	7.538E-01
1.0	9.544E-01	9.408E-01	9.554E-01	0.7	8.858E-01	8.858E-01
1.1	9.900E-01	9.863E-01	9.903E-01	0.8	9.828E-01	9.828E-01
1.2	9.981E-01	9.972E-01	9.981E-01	0.9	9.980E-01	9.980E-01
1.3	9.996E-01	9.995E-01	9.996E-01	1.0	9.997E-01	9.997E-01
1.4	9.999E-01	9.999E-01	9.999E-01	1.1	9.999E-01	9.999E-01

Tabelle 8.2: Tabellarische Darstellung der Ergebnisse für $\sigma_x = 0.1\mu_x$, $\sigma_y = 0.1\mu_y$

der FORM-Rechnung gegenüber der analytischen Rechnung resultierende Fehler ist dagegen vernachlässigbar.

Bei den Berechnungen wurde der Startwert der FORM-Rechnung jeweils 10 % unter den Mittelwerten gewählt, eine Strategie die nicht für alle Werte σ_x, μ_x und σ_y, μ_y optimal ist. Trotzdem wurde diese einfache Strategie der Startwertwahl beibehalten, um ein allgemeines Verfahren zu erhalten.

Vergleiche des implementierten Verfahrens mit der in PERMAS-RA implementierten Zuverlässigkeitsanalyse wurden nicht durchgeführt. In PERMAS-RA ist eine Zuverlässigkeitsanalyse der plastischen Struktursicherheit nur mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation mit eventuellem Importance Sampling möglich. Jedoch ist es nicht möglich, eine vergleichbare Grenzzustandsfunktion mit Hilfe der indirekten Einspielanalyse aufzustellen, da mit PERMAS nur festgestellt werden kann, ob die Struktur unter einer vorgegeben Lastgeschichte einspielt oder nicht. Weiter ist keine direkte Traglastdefinition vorhanden. Auch bei einer vorgegebenen Lastgeschichte muß nach endlich vielen Lastzyklen abgebrochen werden. Für den Abbruch sind jedoch nur heuristische Kriterien (z.B. Abbruch nach 10 – 100 Zyklen) möglich. Diese Verfahren entsprechen jedoch nicht der direkten Berechnung der Einspielgrenze mit der Einspielanalyse, so daß keine sinnvolle Vergleichsrechnung möglich scheint.

8.10 Zusammenfassende Bewertung der Beispielrechnungen

Anhand der durchgeführten Rechnungen zeigt sich, daß die in PERMAS IV implementierte Traglast- und Einspielanalyse in der Lage ist, für zwei- und dreidimensionale Strukturen die Trag- und Einspiellasten zu berechnen.

Für alle Beispiele beträgt der Rechenzeitaufwand für die Erzeugung der Basisvektoren und damit der Eigenspannungsunterräume ca. 90% der gesamten Rechenzeit. Nur 10 % der Rechenzeit wird während der Optimierung in den Unterräumen verbraucht. Für die Verkürzung der Rechenzeit der Optimierung wurde deshalb nur geringer Aufwand betrieben. Verschiedene Aufdatierungsverfahren des SQP-Algorithmus' wurden untersucht, es konnten jedoch nur geringe Unterschiede im Konvergenzverhalten festgestellt werden, so daß ein üblicher BFGS-Update benutzt wird (siehe Bild A.3).

Der implementierte SQP-Algorithmus konvergiert stabil gegen das Optimum. Die Konvergenz des SQP-Algorithmus konnte durch eine Skalierung der Eigenspannungsbasen verbessert werden (siehe Bemerkung in Abschnitt 5). Durch die Skalierung kann erreicht werden, daß die im SQP-Algorithmus auftretenden Matrizen besser konditioniert sind und damit die Lösung der Gleichungssysteme schneller und stabiler wird.

Ein weiterer Vorteil der Skalierung ist, daß dadurch die constraint qualifications im Rahmen

der Rechengenauigkeit besser erfüllt sind. Andernfalls ist in einzelnen Beispielen das Optimierungsverfahren abgebrochen, da singuläre Matrizen resultierend aus linear abhängigen Nebenbedingungen aufgetreten sind. Diese linear abhängigen Nebenbedingungen können aus unterschiedlichen Gründen auftreten.

Eine Möglichkeit ist, daß linear abhängige Basisvektoren während der Gleichgewichtsiteration erzeugt wurden. Dies ist meist durch eine veränderte Wahl der Lastinkremente zu vermeiden. Speziell bei zu großen Lastinkrementen kann dieses Verhalten vereinzelt auftreten, da eventuell die Trag- bzw. Einspiellast überschritten wird.

Weiter kann die Verletzung der constraint qualifications aus linear abhängigen Spannungen in den GAUSSpunkten resultieren. Dieser Fall ist nur bei rotationssymmetrischen Elementen aufgetreten, da dort, z.B. beim Modell des unendlichen Rohres, in den GAUSSpunkten mit der gleichen Radialkomponente identische Spannungen vorliegen. Da diese Punkte im Sinne der Optimierungstheorie identisch sind, kann dieses Verhalten durch die Wahl eines repräsentativen Punktes und dessen Spannungen behoben werden. Ansonsten sind in den Beispielen die constraint qualifications erfüllt.

Aufgrund des hohen Anteils der Basiserzeugung bei der Rechenzeit wurden Studien über den Einfluß der wichtigsten Parameter der Basiserzeugung durchgeführt. Dies sind die Dimension des Unterraums und die Größe des Lastinkrements. Am Beispiel der Lochscheibe wurde eine einfache Strategie entwickelt, welche die Dimension der Eigenspannungsunterräume erhöht, während die Größe des Lastinkrements verringert wird. Bei der iterativen Bestimmung der Eigenspannungsunterräume wurde bei 3 Basisvektoren begonnen und dann die Anzahl der Basisvektoren in weiteren Schritten auf bis zu 6 erhöht. Die Wahl einer höheren Anzahl von Basisvektoren zu Beginn hat sich nicht als günstig erwiesen. Dadurch konnte im Beispiel der Lochscheibe ein dafür optimales Verfahren gewählt werden, welches nach drei Schritten der Basisreduktion die Traglast auf 5 % genau bestimmt hat. Nach 10 Schritten liegt der relative Fehler unterhalb 2%.

Diese Strategie wurde für alle Beispiel gewählt, um eine einheitliche Verfeinerungsstrategie zu verfolgen, statt für jedes Beispiel eine spezielle Strategie zu entwickeln. Dadurch ist es möglich, daß für einzelne Beispiele die Rechenzeiten ungünstiger ausfallen, als bei einer speziell an das Beispiel angepaßten Strategie. Trotzdem beträgt die Rechenzeit der implementierten Traglastanalyse in allen Fällen im Vergleich ca. 10 bis 20% der inkrementellen Vergleichsrechnung. Bei allen Beispielen konnte die Traglast in höchstens 10 Schritten der Basisreduktion mit einem relativen Fehler von unter 5 % erreicht werden.

Die Einspiellast für einparametrische Belastung mittels der implementierten Einspielanalyse konnte in allen Beispiele schneller als die entsprechende Traglast berechnet werden. Ein Rechenzeit- bzw. Genauigkeitsvergleich mit inkrementellen Berechnungen ist nicht möglich, da die Grenzlast mit der indirekten Methode nicht bestimmt werden kann. Es ist nur möglich,

für eine bestimmte Lastgeschichte zu entscheiden, ob die Struktur einspielt oder nicht.

Bei der direkten Traglast- sowie bei der Einspielanalyse erhält man nur geringe Informationen über den genauen Kollapsmechanismus. Während der Optimierung ist es möglich, die aktiven Restriktionen (diese entsprechen den fließenden GAUSSpunkten) zu verfolgen, um damit Information über die plastischen Zonen zu erhalten. Das sich einstellende Eigenspannungsfeld ist jedoch aufgrund des Verfahrens nicht bestimmbar.

Um Spannungsverteilungen zu erhalten, und um die Ergebnisse der Traglastanalyse zu überprüfen, wurden inkrementelle Vergleichsrechnungen mittels der plastischen Version von PERMAS durchgeführt. In allen Beispielen konnte eine gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Traglastanalyse und denen des inkrementellen Verfahrens erzielt werden. Der mittels der inkrementellen Berechnung erhaltene Versagensmechanismus stimmte in allen Beispielen mit den Ergebnissen der Traglastanalyse überein. Die Rechenzeiten der direkten Traglastanalyse lagen jedoch um den Faktor 5–10 unter denen der inkrementellen Analyse. Der Rechenzeitgewinn ist bei der Einspielanalyse noch deutlich höher, da bei einer inkrementellen Berechnung jede Lastgeschichte untersucht werden muß. Bei ein-parametrischer Belastung liegt die Rechenzeit einer direkten Einspielanalyse in der Größenordnung einer elastischen Berechnung.

Durch die, gegenüber der inkrementellen Berechnung, stark verkürzte Rechenzeit ist es möglich die direkte Grenzlastanalyse als eigenständiges Berechnungspaket zu nutzen. Dadurch konnte die Zuverlässigkeitsanalyse auf plastisches Strukturverhalten erweitert und implementiert werden. Erst mit diesem Verfahren ist es möglich die so erweiterte Zuverlässigkeitsanalyse mit vertretbarem Aufwand durchzuführen. Vergleichsrechnungen des direkten Verfahrens mit indirekten Verfahren mittels Monte-Carlo-Simulation wurden nicht durchgeführt, da aus den in Abschnitt 3 dargelegten Gründen keine vergleichbare Grenzzustandsfunktion für die inkrementelle Einspielanalyse definierbar ist. Eine weitere Möglichkeit zur Nutzung der rechenzeitgünstigen direkten Grenzlastanalyse liegt in der Strukturoptimierung unter Einbeziehung des plastischen Strukturverhaltens. Auch diese Erweiterung ist nur mit direkten Verfahren mit vertretbarem Aufwand möglich.

Zusätzlich wurden für die ebenen und rotationssymmetrischen Beispiele unterschiedliche FE-Netze untersucht. Bei der Einspielanalyse von lokal versagenden Strukturen (z.B. Lochscheibe) konnte festgestellt werden, daß der Einspielfaktor bei allen FE-Netzen exakt berechnet werden konnte. Die Berechnung der elastischen Spannungen zu Fließbeginn, hängt jedoch stark von der Verfeinerung ab, so daß es sich als günstig erwies, das Netz an Punkten mit Spannungsüberhöhungen lokal zu verfeinern. Für die Beispiele mit Defekten (z.B. Scheibe mit Riß) kann die Traglast auch mit groben Netzen genau berechnet werden, da hier die Struktur nicht lokal sondern im gesamten Ligament versagt. Aus diesen Beobachtungen schließt man, daß eine FE-Verfeinerung nur dann die Genauigkeit der Einspielanalyse deutlich erhöht, wenn mit lokalem Versagen gerechnet werden muß.

9 Zusammenfassung und Ausblick

Die theoretische und numerische Untersuchung der Sicherheit und Zuverlässigkeit allgemeiner Strukturen mit Hilfe der Traglast- und Einspiellanalyse bildet den Schwerpunkt dieser Arbeit. Bei der allgemein üblichen Auslegung einer Komponente nach Regelwerk (z.B. ASME, KTA) ist es möglich, daß die Auslegung zu konservativ ist. Da komplexe Komponenten in der Regel mit Hilfe vereinfachter Näherungen beurteilt werden, ist der Rechenaufwand zur Sicherheitsbestimmung gering. Um eine möglicherweise höhere Nennbelastung zu erreichen, muß eine genauere Festigkeitsuntersuchung durchgeführt werden.

Die inkrementelle Berechnung ist ein verfeinertes Verfahren der Festigkeitsbestimmung für allgemeine Strukturen. Sie bedeutet aber gegenüber der Auslegung nach Regelwerk eine erhebliche Steigerung des Aufwands. Trotzdem kann die Sicherheit gegen zyklisches Versagen nicht direkt bestimmt werden. Die bisher hohen Rechenzeiten der inkrementellen Festigkeitsrechnungen werden durch die Berechnung der Festigkeit nach den Konzepten der Traglast- und Einspiellanalyse erheblich reduziert.

Die direkte Traglast- und Einspiellanalyse ist eine anerkannte Methode, die Sicherheit einer Struktur zu bewerten. Bisher konnten nur vereinfachte Strukturen mit Hilfe der direkten Grenzlastanalyse und der FEM untersucht werden. Deshalb wurde in dieser Arbeit die Entwicklung und erstmals eine Implementation der nichtlinearen Traglast- und Einspiellanalyse in ein allgemeines FEM-Programm (PERMAS) für drei-dimensionale Strukturen durchgeführt. Damit kann eine genauere Festigkeitsberechnung gegenüber der Auslegung nach Regelwerk erfolgen. Ferner ist die neu implementierte Traglastanalyse um den Faktor 5– 10 und die Einspiellanalyse um mehrere Größenordnungen schneller als die bisher verwendet inkrementelle Berechnung der Sicherheit.

Da für Strukturen unter zyklischer Belastung nur vereinzelt analytische und experimentelle Lösungen bekannt sind, wurden analytische Lösungen für spezielle Probleme aus ideal plastischem und verfestigendem Material neu hergeleitet. Diese analytischen Lösungen sind von Nutzen bei der Beurteilung der Sicherheit spezieller Komponenten unter zyklischer mechanischer und thermischer Belastung. Beispielsweise ist die Einspiellast einer lokal versagenden Komponente unter einparametrischer Belastung (z.B. Rohrabzweig unter zyklischem Innendruck) doppelt so groß wie die Belastung zu Fließbeginn, unabhängig von der genauen Wahl des Stoffgesetzes.

Die neue Implementation der allgemeinen Traglast- und Einspiellanalyse in PERMAS wurde mit Hilfe neu entwickelter, aus dem Regelwerk und aus der Literatur bekannter Lösungen verglichen. Dazu wurden zahlreiche FEM-Modelle erstellt. Die mit der direkten Grenzlastanalyse berechneten Ergebnisse stimmen gut bis sehr gut (relativer Fehler unter 1 %) mit den bekannten Lösungen überein.

Der Rechenzeitvergleich zwischen der inkrementellen Festigkeitsanalyse und der Festigkeitsanalyse mittels Traglastanalyse ergab eine Rechenzeitreduzierung um bis zu 90 %, so daß die

plastische Analyse nur um den Faktor 5 bis 10 höher liegt als die elastische Berechnung. Ein Rechenzeitvergleich zwischen einer inkrementellen zyklischen Festigkeitsrechnung und einer Festigkeitsrechnung mittels der implementierten Einspielanalyse ist nicht möglich, da eine inkrementelle Berechnung nicht in der Lage ist, die Einspielgrenze zu bestimmen. Es kann bei dem inkrementellen Verfahren nur entschieden werden, ob eine Lastgeschichte zum Einspielen der Struktur führt oder nicht. Das Beispiel eines Rohrabzweigs zeigt, daß die Rechenzeit zur Bestimmung der Einspielgrenze geringer sein kann, als bei der Bestimmung der Traglastgrenze.

Der neu implementierte Algorithmus zur Berechnung der Zuverlässigkeit einer Komponente nutzt die rechenzeitgünstigen Ansätze der Grenzlastanalyse und der First Order Reliability Method (FORM). Zur Entwicklung des Algorithmus' konnten neue Konzepte zur Integration der Grenzlastanalyse in FORM hergeleitet werden. Insbesondere wurde die Lücke in der Berechnung der für FORM notwendigen Sensitivitäten geschlossen. Die Beurteilung der Zuverlässigkeit einer Lochscheibe mit probabilistischen Werkstoffwerten und Belastungen zeigte gute Übereinstimmung mit der analytisch hergeleiteten Versagenswahrscheinlichkeit.

Teile dieser Arbeit sind in das von der Europäischen Kommission geförderte Brite–EuRam Projekt BE97–4547 „LISA– FEM based Limit and Shakedown Analysis for Design and Integrity Assessment in European Industry “ eingebunden. Ziel dieses Projekts ist die Entwicklung, Erprobung und Anwendung von FEM basierten Verfahren zur Berechnung unterer und oberer Schranken für sichere Belastungen und deren Zuverlässigkeit komplexer Strukturen.

Ausgehend von den Erfahrungen, die in dieser Arbeit bezüglich der genaueren und schnelleren Festigkeitsberechnung mittels Traglast– und Einspielanalysen erarbeitet wurden, ist der Einsatz der allgemeine Grenzlastanalyse mit Hilfe von PERMAS positiv zu bewerten.

Die in dieser Arbeit entwickelten Konzepte der Zuverlässigkeitsanalyse unter Berücksichtigung des plastischen Strukturverhaltens sind eine vielversprechende Weiterentwicklung der bisherigen elastischen Konzepte der Zuverlässigkeitsanalyse.

Zunächst sollten folgende Erweiterungen der Arbeit durchgeführt werden:

- Erweiterung auf korrelierte und stochastisch abhängige Basisvariablen
- Durchführung einer Monte Carlo Simulation mit Importance Sampling zur Validierung der Versagenswahrscheinlichkeiten
- Weitere Parameterstudien beim Basisreduktionsverfahren

Allgemein empfehlen sich folgende Erweiterungen

- Durchführung geeigneter Experimente zur Bestimmung der Einspielgrenze
- Weiterentwicklung der Grenzlastanalyse für komplexe Stoffgesetze
- Einbeziehung komplexer Belastungen, z.B. dynamische (z.B. Temperaturfront), kurzzeitige (z.B. Stöße), plötzliche (z.B. Thermoschocks) Belastungen
- Untersuchung für geometrisch nichtlineare Verformungen
- Weiterentwicklung der Grenzlastanalyse für Material mit Schädigung
- Einbeziehung bruchmechanischer Konzepte

Literaturverzeichnis

- [ABC84] G. AUGUSTI, A. BARATTA UND F. CASCIATI: *Probabilistic Methods in Structural Engineering*. Chapman and Hall London 1984.
- [AK72] E. ANDERHEGGEN UND H. KNÖPFEL: Finite element limit analysis using linear programming. *International Journal of Solids and Structures* **8** (1972) 1413–1431.
- [AM87] J. ARGYRIS UND H.-P. MLEJNIK: *Die Methode der Finiten Elemente: Band I – II*. Vieweg, Braunschweig 1986–1987.
- [ARS98] J. ALTES, R. RACKWITZ UND U. SCHULZ: Time variant reliability for structures with nonlinear behaviour. *Journal of Structural Engineering* **25** (1998) 43–48.
- [Atk96] J. ATKŲCIŲNAS: Quadratic programming for degenerate shakedown problems of bar structures. *Mechanics Research Communications* **23** (1996) 195–203.
- [Bel72] T. BELYTSCHKO: Plane stress shakedown analysis by finite elements. *International Journal of Mechanical Science* **14** (1972) 619–625.
- [BFP96] G. BORINO, P. FUSCHI UND C. POLIZZOTTO: Elastic–plastic–damage constitutive models with coupling internal variables. *Mechanics Research Communications* **23** (1996) 19–28.
- [BH95] R. BONN UND P. HAUPT: Exact solutions for large elastoplastic deformations of a thick-walled tube under internal pressure. *International Journal of Plasticity* **11** (1995) 99–118.
- [Bje84] P. BJERAGER: *Reliability analysis of structural systems*. Dissertation, Department of Structural Engineering, Technical University of Denmark 1984.
- [Bje89] P. BJERAGER: Plastic systems reliability by LP and FORM. *Computers & Structures* **31** (1989) 187–196.
- [BK81] E. BRIESKORN UND H. KNÖRRER: *Ebene algebraische Kurven*. Birkhäuser Basel, Boston, Stuttgart 1981.
- [Ble32] H. BLEICH: Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch–plastischen Verhaltens des Baustoffes. *Bauingenieur* **13** (1932) 261–267.
- [BM95] P. BUHAN UND S. MAGHOUS: A straightforward numerical method for evaluating the ultimate loads of structures. *European Journal of Mechanics / A Solids* **14** (1995) 309–328.
- [Bou88] U. BOURGUND: *Nichtlineare zuverlässigkeitsorientierte Optimierung von Tragwerken unter stochastischer Beanspruchung*. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Innsbruck 1988.

- [Bre67] J. BREE: Elastic-plastic behaviour of thin tubes subjected to internal pressure and intermittent high-heat fluxes with applications to fast-nuclear-reactor fuel elements. *Journal of Strain Analysis* **2** (1967) 226–238.
- [BW93a] D. E. BUCKTHORPE UND P. S. WHITE: Incorporation of alternating plasticity in the shakedown method. *Transactions of SMiRT* **12** (1993) E 119–124.
- [BW93b] D. E. BUCKTHORPE UND P. S. WHITE: Shakedown: a design tool for high temperature. *The GEC Journal of Research: Incorporation of the Marconi Review and the Plessey Research Review* **11** (1993) 24–38.
- [Car95] M. A. CARADONNA: Development of a finite element preprocessor for the determination of limit loads in plates with elliptical holes and cracks. Interner Bericht, Institut für Sicherheitsforschung und Reaktortechnik, Forschungszentrum Jülich 1995.
- [CC82] R. CASCIARO UND L. CASCINI: A mixed formulation and mixed finite elements for limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **18** (1982) 211–243.
- [CG69] C. R. CALLADINE UND I. W. GOODALL: Plastic behaviour of thin cylindrical pressure vessels with circular cutouts and radial branches. *Journal Mechanical Engineering Science* **11** (1969) 351–363.
- [Chi93] PHAM DUC CHINH: Shakedown of bars subjected to cycles of loads and temperature. *International Journal of Solids and structures* **30** (1993) 1173–1179.
- [Chr80] E. CHRISTIANSEN: Limit analysis in plasticity as a mathematical programming problem. *Calcolo* **17** (1980) 41–65.
- [Chr96] E. CHRISTIANSEN: Limit analysis of collapse states. In P. G. CIARLET UND J. L. LIONS (eds.), *Handbook of Numerical Analysis Vol. IV*. 193–312. Elsevier, Amsterdam 1996.
- [Cip80] J. CIPRIAN: Ausgewählte Kapitel aus nationalen und internationalen Regelwerken zur Frage der Auslegung von Druckbehältern. *vt verfahrenstechnik* **14** (1980) 49–55.
- [CL92] C. L. CHOW UND T. J. LU: A damage mechanics approach to ductile failure analysis in notched plates. In J. W. JU (ed.), *Recent Advances in Damage Mechanics and Plasticity*. 21–35. ASME, New York 1992.
- [CR68] R. L. CLOUD UND E. C. RODABAUGH: Approximate analysis of the plastic limit pressures of nozzles in cylindrical shells. *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Power* **4** (1968) 171–176.

- [CZ74] L. CORRADI UND A. ZAVELANI: A linear programming approach to shakedown analysis of structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **3** (1974) 37–53.
- [CZ75] L. CORRADI UND A. ZAVELANI: Dynamic shakedown theory allowing for second order geometric effects. *Meccanica* **10** (1975) 93–98.
- [DG57] W. S. DORN UND H. J. GREENBERG: Linear programming and plastic limit analysis of structures. *Quarterly of Applied Mathematics* **15** (1957) 155–167.
- [Dru51] D. C. DRUCKER: A more fundamental approach to plastic stress–strain relations. *Proceedings of the first U. S. National Congress of applied mechanics ASME* (1951) 487–491.
- [Dru59] D. C. DRUCKER: A definition of stable inelastic material. *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics Series E* **18** (1959) 101–106.
- [Fle87] R. FLETCHER: *Practical Methods of Optimization*. John Wiley & Sons New York 1987.
- [Fre56] A. M. FREUDENTHAL: Safety and the probability of structural failure. *American Society of Civil Engineers* **121** (1956) 1337–1397.
- [FY94] X.-Q. FENG UND S.-W. YU: An upper bound on damage of elastic–plastic structures at shakedown. *International Journal of Damage Mechanics* **3** (1994) 277–289.
- [FY95] X.-Q. FENG UND S.-W. YU: Damage and shakedown analysis of structures with strain–hardening. *International Journal of Plasticity* **11** (1995) 237–249.
- [GC80] D. A. GOKHFELD UND O. F. CHERNIAVSKY: *Limit Analysis of Structures at Thermal Cycling*. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn 1980.
- [Gen88] F. GENNA: A nonlinear inequality, finite element approach to the direct computation of shakedown load safety factors. *International Journal of Mechanical Science* **30** (1988) 769–789.
- [GM54a] F. A. GAYDON UND A. W. MCCRUM: On the yield–point loading of a square plate with concentric circular hole. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **2** (1954) 170–176.
- [GM54b] F. A. GAYDON UND A. W. MCCRUM: A theoretical investigation of the yield–point loading of a square plate with a central circular hole. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **2** (1954) 156–169.
- [GPM76] U. M. GARCIA PALOMARES UND O. L. MANGASARIAN: Superlinearly convergent quasi–newton algorithms for nonlinearly constrained optimization problems. *Mathematical Programming* **11** (1976) 1–13.

- [GS88] F. GRUTTMANN UND E. STEIN: Tangentiale Steifigkeitsmatrizen bei Anwendung von Projektionsverfahren in der Elastoplastizitätstheorie. *Ingenieur-Archiv* **58** (1988) 15–24.
- [GS83] M. J. GRIMMELT UND G. I. SCHUËLLER: Benchmark study on methods to determine collapse failure probabilities of redundant structures. *Structural Safety* **1** (1982/83) 93–106.
- [GW96] J. GROSS-WEEGE: On the numerical assessment of the safety factor of elastic–plastic structures under variable loading. *International Journal of Mechanical Sciences* **39** (1996) 417–433.
- [Hah85] H. G. HAHN: *Elastizitätstheorie*. B. G. Teubner, Stuttgart 1985.
- [HGK⁺87] M. HOHENBICHLER, S. GOLLWITZER, W. KRUSE UND R. RACKWITZ: New light on first– and second–order reliability methods. *Structural Safety* **4** (1987) 267–284.
- [Hil50] R. HILL: *The Mathematical Theory of Plasticity*. University Press Oxford 1950.
- [Hod59] P. G. HODGE: *Plastic Analysis of Structures*. McGraw–Hill, New York 1959.
- [Hol93] G. L. HOLLINGER: Three dimensional stress criteria. In *Post SMiRT-12 Conference on Construction Codes and Associated Engineering Mechanics, paper 15*. Jülich 1993.
- [HS98] M. HEITZER UND M. STAAT: Reliability analysis of elasto–plastic structures under variable loads. *EUROMECH 385, Inelastic Analysis of Structures under Variable Loads: Theory and Engineering Applications, Aachen* (1998) 135–137.
- [HS99] M. HEITZER UND M. STAAT: Structural reliability analysis of elasto–plastic structures. In G.I. SCHUELLER UND P. KAFKA (eds.): *Safety and Reliability* 513–518. A.A.Balkema, Rotterdam, Brookfield 1999.
- [HW92] A. HACHEMI UND D. WEICHERT: An extension of the static shakedown theorem to a certain class of inelastic materials with damage. *Archives of Mechanics* **44** (1992) 491–498.
- [Ing13] C.E. INGLIS: Stresses in a plate due to the prescence of cracks and sharp notches. *Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers* **55** (1913) 219–230.
- [IRH95] L. ISSLER, H. RUOSSUND P. HÄFELE: *Festigkeitslehre – Grundlagen*. Springer Berlin, Heidelberg 1995.
- [JAH93] J. JOCH, R. A. AINSWORTH UND T. H. HYDE: Limit load and J–estimates for idealised problems of deeply cracked welded joints in plane–strain bending and tension. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* **16** (1993) 1061–1079.

- [Jit84] K. JITTORNTRUM: Solution point differentiability without strict complementarity in nonlinear programming. *Mathematical Programming* **21** (1984) 127–138.
- [JT88] H. T. JONGEN UND E. TRIESCH: *Optimierung A*. Augustinus-Buchhandlung, Aachen 1988.
- [Ju89] J. W. JU: On energy-based elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects. *International Journal of Solids and Structures* **25** (1989) 803–833.
- [Kac71] L. M. KACHANOV: *Foundations of the Theory of Plasticity*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London 1971.
- [Kaz84] S. KALISZKY: *Plastizitätslehre*. VDI-Verlag, Düsseldorf 1984.
- [Kal98] S. KALAGA: Reliability-based analysis of structures: state-of-the-art. *Journal of Structural Engineering* **25** (1998) 75–84.
- [KDG70] R. KITCHING, J. K. DAVIS UND S. S. GILL: Limit pressures for cylindrical shells with unreinforced openings of various shapes. *Journal Mechanical Engineering Science* **12** (1970) 313–330.
- [KJ94] A. KAPOOR UND K. L. JOHNSON: Plastic ratchetting as a mechanism of metallic wear. *Proceedings of the Royal Society of London Series A* **445** (1994) 367–381.
- [KK78] J. A. KÖNIG UND M. KLEIBER: On a new method of shakedown analysis. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Serie des sciences techniques* **26** (1978) 165–171.
- [KK85] A. D. KIUREGHIAN UND J.-B. KE: Finite-element based reliability analysis of frame structures. In *4th International Conference on Structural Safety and Reliability* I-395–I-404. ICOSSAR 1985.
- [KL65] D. C. A. KOOPMAN UND R. H. LANCE: On linear programming and plastic limit analysis. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **13** (1965) 77–87.
- [Kli77] O. KLINGMÜLLER: *Erweiterung der starrplastischen Traglastberechnung und -bemessung auf stochastische Variablen*. Dissertation, Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen 2, Universität Essen Gesamthochschule 1977.
- [Kli79] O. KLINGMÜLLER: *Anwendung der Traglastberechnung für die Beurteilung der Sicherheit von Konstruktionen*. Dissertation, Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen 9, Universität Essen Gesamthochschule 1979.
- [KM94a] J. KAMENJARZH UND A. MERZLJAKOV: On kinematic method in shakedown theory: I. duality of extremum problems. *International Journal of Plasticity* **10** (1994) 363–380.

- [KM94b] J. KAMENJARZH UND A. MERZLJAKOV: On kinematic method in shakedown theory: II. modified kinematic method. *International Journal of Plasticity* **10** (1994) 381–392.
- [Kö87] J. A. KÖNIG: *Shakedown of Elastic–Plastic Structures*. Elsevier und PWN, Amsterdam and Warschau 1987.
- [Koi60] W. T. KOITER: General theorems for elastic–plastic solids. In *Progress in Solid Mechanics* Vol. 1. North–Holland Publishing Company, Amsterdam 1960.
- [Kre88] U. KRENGEL: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig 1988.
- [KW92] J. KAMENJARZH UND D. WEICHERT: On kinematic upper bounds for the safety factor in shakedown theory. *International Journal of Plasticity* **8** (1992) 827–837.
- [KZ95] K. KRICKEBERG UND H. ZIEZOLD: *Stochastische Methoden*. Springer–Verlag Berlin, Heidelberg 1995.
- [Lan71] B.F. LANGER: Design of vessels involving fatigue. In R.W. NICHOLS (ed.):, *Pressure Vessel Engineering Technology* 59–100. Applied Science Pub. London 1971.
- [LC90] J. LEMAITRE UND J.-L. CHABOCHE: *Mechanics of Solid Materials*. University Press, Cambridge 1990.
- [Lem92] J. LEMAITRE: *A Course on Damage Mechanics*. Springer, Berlin, New York 1992.
- [Loc95] J. M. LOCCI: Automatization of limit analysis calculations, application to structural reliability problems. In M. LEMAIRE, J.-L. FAVRE UND A. MÉBARKI (eds.):, *Proceedings of the ICASP7 Conference, Paris, 10–13.7.1995, Vol. 2: Applications of Statistics and Probability*. 1095–1110. A. A. Balkema Rotterdam, Brookfield 1995.
- [Lue84] D. G. LUENBERGER: *Linear and Nonlinear Programming*. Addison–Wesley Publishing Company, Reading 1984.
- [LWH⁺99] H. LANG, K. WIRTZ, M. HEITZER, M. STAAT UND R. OETTEL: Zyklische Einspielversuche zur Verifikation von Shakedown-Analysen mittels FEM. 25. MPA-Seminar, Stuttgart (1999) 44.1–10.18.
- [Mah91] R. MAHNKEN: *Duale Methoden zur nichtlinearen Optimierung in der Strukturmechanik*. Dissertation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover 1991.
- [Mai69] G. MAIER: Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and non-associated flow–laws: a finite element, linear programming approach. *Meccanica* **4** (1969) 250–260.

- [Mas24] G. MASING: Zur Heyn'schen Theorie der Verfestigung der Metalle durch verborgene elastische Spannungen. *Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern* **3** (1924) 231–239.
- [McC83] G. P. MCCORMICK: *Nonlinear Programming*. John Wiley & Sons, New York 1983.
- [Mel36] E. MELAN: Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal-plastischem Baustoff. *Sitzungsbericht der Österreichischen Akademie der Wissenschaften der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse IIa* **145** (1936) 195–218.
- [Mel38] E. MELAN: Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums. *Ingenieur-Archiv* **8** (1938) 116–126.
- [Mil88] A. G. MILLER: Review of limit loads of structures containing defects. *International Journal of Pressure Vessel & Piping* **32** (1988) 197–327.
- [MKL86] H.O. MADSEN, S. KRENK UND N.C. LIND: *Methods of Structural Safety*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1986.
- [ML28] MAIER-LEIBNITZ: Beiträge zur Frage der Tragfähigkeit einfacher und durchlaufender Balkenträger aus Baustahl St 37 und aus Holz. *Die Bautechnik* **6** (1928) 11–14 und 27–31.
- [Mor68] D. MORGENSTERN: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1968.
- [Mro67] Z. MRÓZ: On the description of anisotropic workhardening. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **15** (1967) 163–175.
- [PBF96] C. POLIZZOTTO, G. BORINO UND P. FUSCHI: An extended shakedown theory for elastic-plastic-damage material model. *European Journal of Mechanics A* **15** (1996) 825–858.
- [PBW⁺97] D. PLANCQ, M. N. BERTON, C. WIELGOSZ UND P. GENETTE: Limit analysis based on elastic compensation method of branch pipe tee connection under internal pressure and out-of-plane moment loading. *Transactions of SMiRT* **14** (1997) B02/3.
- [PER88] PERMAS: *User's Reference Manuals*. INTES Publications No. 202, 207, 208, 302, UM 404, UM 405 Stuttgart 1988.
- [PH54] W. PRAGER UND P. G. HODGE: *Theorie ideal plastischer Körper*. Springer, Wien 1954.
- [PM92] S. PYCKO UND Z. MRÓZ: Alternative approach to shakedown as a solution of a min-max problem. *Acta Mechanica* **93** (1992) 205–222.

- [Pol93a] C. POLIZZOTTO: On the conditions to prevent plastic shakedown of structures: part I & II. *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics* **60** (1993) 15–19, 20–25.
- [Pol93b] C. POLIZZOTTO: A study on plastic shakedown of structures: Part I & II. *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics* **60** (1993) 318–323, 324–330.
- [Pow76] M. J. D. POWELL: Some convergence properties of the conjugate gradient method. *Mathematical Programming* **11** (1976) 42–49.
- [Pow78] M. J. D. POWELL: A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations. *Lecture Notes in Mathematics* **630** (1978) 144–157.
- [Pra76] W. PRAGER: Einführung in die Mechanik ideal plastischer Stoffe. Technischer bericht Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen Universität Stuttgart 1976.
- [Rac97] R. RACKWITZ: Grundlagen der Theorie der Tragwerkszuverlässigkeit. Unterlagen zur Fachveranstaltung „Haus der Technik“, Jülich, 22.4. 1997.
- [Sar90] TEODORO ABDO SARRAS: *Zur Zuverlässigkeitsberechnung von statisch beanspruchten Tragwerken mit unsicheren Systemeigenschaften*. Dissertation, LKI, Technische Universität München 1990.
- [Sav97] M. SAVE: *Atlas of limit loads of Metal Plates, Shells and Disks*. Elsevier Amsterdam 1997.
- [SBH⁺93] E. STEIN, D. BISCHOFF, Y. HUANG UND G. ZHANG: Einspielen für verallgemeinerte Werkstoffe. Arbeits- und Ergebnisbericht des Teilprojektes B6, SFB 319 TU Braunschweig 1991–1993.
- [SBZ⁺90] E. STEIN, D. BISCHOFF, G. ZHANG UND R. MAHNKEN: Einspielen (shakedown), und seine numerische Behandlung für Flächentragwerke. Arbeits- und Ergebnisbericht des Teilprojektes B6, SFB 319 TU Braunschweig 1988–1990.
- [Sci81] K. SCHITTKOWSKI: The nonlinear programming method of Wilson, Han and Powell with augmented Lagrangian type line search function. *Numerische Mathematik* **38** (1981) 83–114.
- [Sci86] K. SCHITTKOWSKI: NLPQL: a fortran subroutine solving constrained nonlinear programming problems. *Annals of Operation Research* **5** (1985/86) 485–500.
- [Sci92] K. SCHITTKOWSKI: Solving nonlinear programming problems with very many constraints. *Optimization* **25** (1992) 179–196.
- [Sci95] D. SCHLOTTMANN: *Auslegung von Konstruktionselementen: Sicherheit, Lebensdauer und Zuverlässigkeit im Maschinenbau*. Springer Berlin 1995.

- [Scu81] G. I. SCHUËLLER: *Einführung in die Sicherheit und Zuverlässigkeit von Tragwerken*. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn Berlin, München 1981.
- [Scw83] S. SCHWAIGERER: *Festigkeitsberechnung im Dampfkessel-, Behälter- und Rohrleitungsbau*. Springer, Berlin, Heidelberg 1983.
- [SSB91] M. SAVE, G. DE SAXCE UND A. BORKOWSKI: *Computation of shakedown loads feasibility study*. CEC Report EUR 13618 EN, Brussels 1991.
- [Sei92] M. SEIDENFUSS: *Untersuchungen zur Beschreibung des Versagensverhaltens mit Hilfe von Schädigungsmodellen am Beispiel des Werkstoffes 20 MnMoNi 55*. Dissertation, Techn.-wiss. Ber. MPA Heft 92-05, Universität Stuttgart 1992.
- [SH93] E. STEIN UND Y. HUANG: Shakedown investigations of systems with ductile materials. In *Beiträge zur Mechanik* 325–340. TU Berlin 1993. Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Rudolf Trostel.
- [SH97a] M. STAAT UND M. HEITZER: Direkte FEM-Berechnung der Tragfähigkeit hochbeanspruchter passiver Komponenten. 23. MPA-Seminar, Stuttgart (1997) 29.1–29.19.
- [SH97b] M. STAAT UND M. HEITZER: Limit and shakedown analysis for design. *Proceedings of 7th German-Japanese Joint Seminar on Research in Structural Strength and NDE-Problems in Nuclear Engineering, Stuttgart* (1997) 4.3.1–4.3.19.
- [SH97c] M. STAAT UND M. HEITZER: Limit and shakedown analysis for plastic safety of complex structures. *Transactions of SMiRT* 14 (1997) B02/2.
- [SH97d] M. STAAT UND M. HEITZER: Limit and shakedown analysis using a general purpose finite element code. In *Proceedings of the NAFEMS World Congress '97*. 522–533. NAFEM Stuttgart 1997.
- [SH99] M. STAAT UND M. HEITZER: LISA, ein europäisches Projekt zur FEM-basierten Traglast- und Einspielanalyse. 25. MPA-Seminar, Stuttgart (1999) 10.1–10.20.
- [She86] W. SHEN: *Traglast- und Anpassungsanalyse von Konstruktionen aus elastisch, ideal plastischem Material*. Dissertation, Universität Stuttgart 1986.
- [SHH98] M. STAAT, M. HEITZER UND E.F. HICKEN: LISA, ein europäisches Projekt für FEM-basierte Traglast- und Einspielanalysen. PERMAS-Benutzertagung, 8.–9.10.1998, Stuttgart 1998.
- [Sie88] T. SIEBLER: *Shakedown-Analyse diskreter, elastisch ideal-plastischer Strukturen bei zyklisch thermischer Belastung mit direkt gewählter Eigenspannungsverteilungen*. Dissertation, Institut für Zuverlässigkeit und Schadenskunde im Maschinenbau, Universität Karlsruhe 1988.

- [Sie93] A. SIEMASZKO: Inadaptation analysis with hardening and damage. *European Journal of Mechanics A / Solids* **12** (1993) 237–248.
- [Smi74] G. V. SMITH: The temperature dependence of yield strength and tensile strength of several austenitic stainless steels. In A. O. SCHAEFER (ed.): *Elevated Temperature Properties of Austenitic Steels* 79–95. ASME, New York 1974.
- [SR69] J. SCHROEDER UND P. RANGARAJAN: Upper bounds to limit pressures of branch–pipe tee connections. *First International Conference on Pressure Vessel Technology, Part 1* (1969) 277–291.
- [ScS87] G. I. SCHUËLLER UND R. STIX: A critical appraisal of methods to determine failure probabilities. *Structural Safety* **4** (1987) 293–309.
- [SaS90] J. SACZUK UND H. STUMPF: On statical shakedown theorems for non–linear problems. *Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik* **74** (1990).
- [ST85] J. C. SIMO UND R. L. TAYLOR: Consistent tangent operators for rate–independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **48** (1985) 101–118.
- [Sta94] M. STAAT: Problems and Chances for Probabilistic Fracture Mechanics in the Analysis of Steel Pressure Boundary Reliability. In *Technical feasibility and reliability of passive safety systems for nuclear power plants. Proceedings of an Advisory Group Meeting, IAEA-TECDOC-920* 43–55 Jülich 1994.
- [Sta95] M. STAAT: Reliability of an HTR-Module Primary Circuit Pressure Boundary: Influences, Sensitivity, and Comparison with a PWR. *Nuclear Engineering and Design* **158** (1995) 333–340.
- [Stu93] H. STUMPF: Theoretical and computational aspects in the shakedown analysis of finite elastoplasticity. *International Journal of Plasticity* **9** (1993) 583–602.
- [SZ92] E. STEIN UND G. ZHANG: Theoretical and numerical shakedown analysis for kinematic hardening materials. In *Proceedings of the 3rd Conference on Computational Plasticity*. 1–25 Barcelona 1992.
- [Sza60] I. SZABO: *Höhere Technische Mechanik*. Springer–Verlag, Berlin 1960.
- [Sza63] I. SZABO: *Einführung in die Technische Mechanik*. Springer–Verlag, Berlin 1963.
- [SZK91] E. STEIN, G. ZHANG UND J. A. KÖNIG: Micromechanical modelling and computation of shakedown with nonlinear kinematic hardening—including examples for 2d problems. In D. R. AXELRAD UND W. MUSCHIK (eds.): *Recent developments in micromechanics* 99–114. Springer, 1991.
- [SZM93] E. STEIN, G. ZHANG UND R. MAHNKEN: Shakedown analysis for perfectly plastic and kinematic hardening materials. In E. STEIN (ed.): *Progress in computational analysis of inelastic structures*. 175–244. Springer, Wien 1993.

- [SZZ94] K. SCHITTKOWSKI, C. ZILLOBER UND R. ZOTEMANTEL: Numerical comparison of nonlinear programming algorithms for structural optimization. *Structural Optimization* **7** (1994) 1–19.
- [TS80] R. TEMAM UND G. STRANG: Duality and relaxation in the variational problems of plasticity. *Journal de Mécanique* **19** (1980) 493–527.
- [TW93] J. B. TRITSCH UND D. WEICHERT: Shakedown of elastic–plastic structures at finite deformations – a comparative study of static shakedown theorems. *ZAMM Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **73** (1993) T309–T312.
- [Vas87] A. VÁSÁRHELYI: Limit analysis and optimal plastic design by stochastic programming with uncertainties of material’s quality. *Mechanical Structures & Machines* **15** (2) (1987) 153–165.
- [Wag91] W. WAGNER: *Festigkeitsberechnungen im Apparate- und Rohrleitungsbau*. Vogel Buchverlag, Würzburg 1991.
- [Wan53] C.-T. WANG: *Applied Elasticity*. McGraw–Hill London 1953.
- [WB93] P.S. WHITE UND D. E. BUCKTHORPE: Shakedown method with strain based damage estimates. *Transactions of SMiRT* **12** (1993) E 125–130.
- [WD69] K. WELLINGER UND H. DIETMANN: *Festigkeitsberechnung*. Alfred Kröner Verlag Stuttgart 1969.
- [WGW88] D. WEICHERT UND J. GROSS-WEEGE: The numerical assessment of elastic–plastic sheets under variable mechanical and thermal loads using a simplified two-surface yield condition. *International Journal of Mechanical Science* **30** (1988) 757–767.
- [WJ96] E. WEISS UND H. JOOST: Zum Tragfähigkeitsnachweis von Rohrstutzenanschlüssen in Behälterwandungen. *Chemie Ingenieur Technik* **68** (1&2) (1996) 119–123.
- [WRL95] E. WEISS, J. RUDOLPH UND A. LIETZMANN: Optimierung von Behälterböden. *Chemie Technik* **24** (11) (1995) 50–54.
- [YAO97] S. YAMAMOTO, S. ASADA UND A. OKAMOTO: Round robin calculations of collapse loads – a torispherical pressure vessel head with a conical transition. *Transactions of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology* **119** (1997) 503–509.
- [YH96] A.-M. YAN UND NGUYEN DANG HUNG: A non-linear programming upper bound study of shakedown limit to structure under variable thermal loading. *Internal Report N° R96-4-1, LTAS, Université de Liège* (1996).
- [Zha91] G. ZHANG: *Einspielen und dessen numerische Behandlung von Flächentragwerken aus ideal plastischem bzw. kinematisch verfestigendem Material*. Dissertation, Universität Hannover 1991.

- [Zha95] Y.-G. ZHANG: An iteration algorithm for kinematic shakedown analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **127** (1995) 217–226.
- [Zim91] J. J. ZIMMERMANN: *Analysis of structural system reliability with stochastic programming*. Dissertation, John Hopkins University, Baltimore, Maryland 1991.

A Anhang

A.1 Herleitung des Arbeitsprinzip

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \, d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \, d\Omega \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_j) \, d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \, d\Omega \\
 &\stackrel{\boldsymbol{\sigma} \text{ symm.}}{=} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_j) \, d\Omega - \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \, d\Omega \\
 &\stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} u_i n_j \, ds - \int_{\Omega} \mathbf{u} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \\
 &\stackrel{\text{GG \& Rand}}{=} \int_{\partial\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \, ds + \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

A.2 PERMAS–Notation

Symbol	Bezeichnung	PERMAS–Buch
$\boldsymbol{\alpha}$	Dehnungsverschiebungsmatrix	ELDA
$\mathbf{a}$	Elementinzidenzmatrix	SA
$\boldsymbol{\ell}$	elastische Materialsteifigkeitsmatrix	ELDA
$\mathbf{K}$	Struktursteifigkeitsmatrix	BKTR
$\boldsymbol{\eta}_{p\Delta}$	plastisches Dehnungsinkrement	ETPD
$\mathbf{J}_{p\Delta}$	Elementanfangslastinkrement	BJD
$\mathbf{R}_{\Delta 1}$	Anfangslastinkrement	BRLD
$\mathbf{R}_{t\Delta}$	Gesamtlastinkrement	BLTD
$\mathbf{r}_{\Delta}$	Verschiebungsinkrement	SRLD
$\boldsymbol{\rho}_{\Delta}$	Elementverschiebungsinkrement	SRHO
$\boldsymbol{\sigma}_{t\Delta}$	fiktives Spannungsinkrement	SGTD
$\boldsymbol{\sigma}_{\Delta}$	aktuelles Spannungsinkrement	SGTD
$\boldsymbol{\sigma}$	tatsächliche Spannung	SG
$\boldsymbol{\sigma}_0$	Anfangsspannung	SIG

Tabelle A.1: PERMAS–Notation und Buch–Verzeichnis (entwickelt aus [PER88])

A.3 Beweis des Lemmas über den Lastanstieg

Zum Beweis sei das zu beweisende Lemma nochmals notiert (siehe Abschnitt 4.3):

Lemma 1.1

Das Problem 4.18 besitzt genau dann eine Lösung $(\Delta\eta^k, u^k)$ mit $\Delta\eta^k > 0$, wenn entweder

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right|_{\sigma_i^{k-1}} \cdot \mathbf{b}_i^{1,k} < 0 \quad \forall i \in \tilde{\mathcal{A}}^{k-1}$$

oder

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right|_{\sigma_i^{k-1}} \cdot \mathbf{b}_i^{1,k} > 0 \quad \forall i \in \tilde{\mathcal{A}}^{k-1} \text{ erfüllt ist.}$$

Beweis:

Es wird eine Funktion Ψ_i definiert durch

$$\begin{aligned} \Psi_i(\Delta\eta, u) &= \Phi(\Delta\eta \sigma_i^E + \sigma_i^{k-1} + u \mathbf{b}_i^{1,k}) - \sigma_0^2 \\ &= (\Delta\eta \sigma_i^E + \sigma_i^{k-1} + u \mathbf{b}_i^{1,k}) \mathbf{Q} (\Delta\eta \sigma_i^E + \sigma_i^{k-1} + u \mathbf{b}_i^{1,k}) - \sigma_0^2. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Die Fließbedingung im i -ten GAUSSpunkt ist dann $\Psi_i(\Delta\eta, u) \leq 0$, wobei Φ die v. MISES Fließfunktion ist. Die Matrix $\mathbf{Q}$ ist für dreidimensionale Probleme positiv semidefinit (siehe Abschnitt 2.3), so daß die Menge $\mathcal{G}_i = \{(\Delta\eta, u) | \Psi_i(\Delta\eta, u) \leq 0\}$ in der $\Delta\eta$ - u -Ebene konvex ist. Untersucht man die Menge $\mathcal{B}_h$ der Spannungen ungleich des hydrostatischen Drucks mit

$$\mathcal{B}_h = \mathcal{B}^d \setminus \{\sigma \in \mathcal{B}^d \mid \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \text{ und } \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0\},$$

so ist die quadratische Form Φ auf $\mathcal{B}_h$ positiv definit.

Ziel ist es, die Menge $\mathcal{Z}_i = \mathcal{G}_i \cap \{(\Delta\eta, u) | \Delta\eta > 0\}$ zu untersuchen, da ein Punkt $(\Delta\eta, u) \in \mathcal{Z}_i$ ein zulässiger Punkt des Problems (4.18) ist. In denjenigen Randpunkten von $\mathcal{G}_i$, in denen das Material fließt, gilt mit der Definition $\bar{\Phi}(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1^T \mathbf{Q} \sigma_2$ (siehe [Zha91]) die Gleichung

$$\begin{aligned} \Psi_i(\Delta\eta, u) &= (\Delta\eta \sigma_i^E + \sigma_i^{k-1} + u \mathbf{b}_i^{1,k}) \mathbf{Q} (\Delta\eta \sigma_i^E + \sigma_i^{k-1} + u \mathbf{b}_i^{1,k}) - \sigma_0^2 \\ &= \Delta\eta^2 \bar{\Phi}(\sigma_i^E, \sigma_i^E) + u^2 \bar{\Phi}(\mathbf{b}_i^{1,k}, \mathbf{b}_i^{1,k}) + 2\Delta\eta \bar{\Phi}(\sigma_i^E, \sigma_i^{k-1}) + \\ &\quad + 2u \Delta\eta \bar{\Phi}(\sigma_i^E, \mathbf{b}_i^{1,k}) + 2u \bar{\Phi}(\sigma_i^{k-1}, \mathbf{b}_i^{1,k}) \\ &= a\Delta\eta^2 + bu^2 + 2cu\Delta\eta + d\Delta\eta + eu = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

mit den Vereinfachungen und Gleichung (2.18)

$$\begin{aligned}
 a &= \Phi(\sigma_i^E) & b &= \Phi(b_i^{1,k}) \\
 c &= \bar{\Phi}(\sigma_i^E, b_i^{1,k}) = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma_i^E} \cdot b_i^{1,k} & d &= 2\bar{\Phi}(\sigma_i^E, \sigma_i^{k-1}) = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma_i^{k-1}} \cdot \sigma_i^E \\
 e &= 2\bar{\Phi}(\sigma_i^{k-1}, b_i^{1,k}) = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma_i^{k-1}} \cdot b_i^{1,k}.
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Da $\mathbf{Q}$ positiv semidefinit ist, folgt $a \geq 0$ und $b \geq 0$. Es werden nur GAUSSpunkte betrachtet, die bei einer weiteren Belastung weiterfließen, so daß aus der Konsistenzbedingung aus Abschnitt 3 $d \geq 0$ folgt. Die Fließbedingung ist eine Gleichung zweiten Grades, so daß aus der Theorie der Kegelschnitte (siehe [BK81]) die Charakterisierung für die Kurve $\Psi_i(\Delta\eta, u) = 0$ folgt:

$$c^2 - ab \begin{cases} < 0 & : \text{Ellipse} \\ = 0 & : \text{Parabel} \\ > 0 & : \text{Hyperbel} \end{cases}$$

Es ist zu beachten, daß für $u = 0$ bzw. $b_i^{1,k} = 0$ immer $\Delta\eta = 0$ gilt, da dann das Maximum des vorherigen Schritts erreicht ist. Da nur Spannungsfelder ungleich dem hydrostatischen Druck untersucht werden, kann mit den Normeigenschaften von $\sqrt{\Phi(\sigma)}$ und $b_i^{1,k} \neq 0$ angenommen werden, daß $a, b > 0$ gilt (siehe Abschnitt 2.3).

Da $\mathbf{Q}$ symmetrisch ist, gilt $\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}}^T \tilde{\mathbf{Q}}$ (siehe Abschnitt 2), so daß gilt

$$\begin{aligned}
 (\bar{\Phi}(\sigma_1, \sigma_2))^2 &= (\sigma_1^T \mathbf{Q} \sigma_2)^2 = (\sigma_1^T \tilde{\mathbf{Q}}^T \tilde{\mathbf{Q}} \sigma_2)^2 = ((\tilde{\mathbf{Q}} \sigma_1)^T (\tilde{\mathbf{Q}} \sigma_2))^2 \\
 &\leq ||\tilde{\mathbf{Q}} \sigma_1||^2 ||\tilde{\mathbf{Q}} \sigma_2||^2 = (\tilde{\mathbf{Q}} \sigma_1)^T (\tilde{\mathbf{Q}} \sigma_1) (\tilde{\mathbf{Q}} \sigma_2)^T (\tilde{\mathbf{Q}} \sigma_2) \\
 &= \sigma_1^T \tilde{\mathbf{Q}}^T \tilde{\mathbf{Q}} \sigma_1 \sigma_2^T \tilde{\mathbf{Q}}^T \tilde{\mathbf{Q}} \sigma_2 = \sigma_1^T \mathbf{Q} \sigma_1 \sigma_2^T \mathbf{Q} \sigma_2 = \Phi(\sigma_1) \Phi(\sigma_2), \tag{A.5}
 \end{aligned}$$

wobei $|| \cdot ||$ die euklidische Norm ist und die SCHWARZsche Ungleichung eingesetzt ist. Das Gleichheitszeichen tritt nur auf, falls $\tilde{\mathbf{Q}} \sigma_1$ und $\tilde{\mathbf{Q}} \sigma_2$ linear abhängig sind. Andernfalls folgt mit $\sigma_1 = \sigma_i^E$ und $\sigma_2 = b_i^{1,k}$ die Ungleichung $c^2 - ab < 0$ und die Randpunkte von $\mathcal{G}_i$ bilden nach der Charakterisierung in der $\Delta\eta$ - u -Ebene eine Ellipse. Daraus folgt, daß die Randpunkte von $\mathcal{G}_i$ immer entweder eine Parabel oder eine Ellipse bilden, so daß keine Hyperbel auftreten kann.

Aus $c^2 - ab \leq 0$ schließt man, daß die Schnittpunkte der Ellipse (bzw. der Parabel) mit der u -Achse durch die Lösungen der Gleichung $bu^2 + eu = 0$ gegeben sind. Die Lösungen von $\Delta\eta(a\Delta\eta + d) = 0$ sind die Schnittpunkte der Ellipse (bzw. Parabel) mit der $\Delta\eta$ -Achse. Die Schnittpunkte der Kurve mit der u -Achse fallen zusammen, falls $e = 0$ gilt. Da a und d nichtnegativ sind, liegt die gesamte Ellipse (bzw. Parabel) im dritten und vierten Quadranten, d. h. $\mathcal{Z}_i = \emptyset$. Gilt $e \neq 0$, d.h. es existieren genau zwei Schnittpunkte mit der u -Achse, so gibt es immer Punkte u mit $\Delta\eta > 0$, d. h. $\mathcal{Z}_i \neq \emptyset$. Zusammenfassend gilt:

$$e \neq 0 \implies \mathcal{Z}_i \neq \emptyset \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma_i^{k-1}} b_i^{1,k} \neq 0 \implies \mathcal{Z}_i \neq \emptyset \tag{A.6}$$

Mit der Annahme $\mathcal{Z}_i \neq \emptyset$ und $a, b > 0$ können diejenigen u , für die ein Lastzuwachs $\Delta\eta > 0$ möglich ist, folgendermaßen zusammengefaßt werden:

$e = 0$	$e = 0$	$e = 0$	$e < 0$	$e < 0$	$e < 0$	$e > 0$	$e > 0$	$e > 0$
$c = 0$	$c < 0$	$c > 0$	$c = 0$	$c < 0$	$c > 0$	$c = 0$	$c < 0$	$c > 0$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{u > 0\}$	$\{u > 0\}$	$\{u > 0\}$	$\{u < 0\}$	$\{u < 0\}$	$\{u < 0\}$

In jedem Punkt $i \in \tilde{\mathcal{A}}^{k-1}$ gelten diese Zusammenhänge zwischen dem erzeugten Basisvektor $\mathbf{b}_i^{1,k}$ und $\mathcal{Z}_i$. Problem 4.18 hat genau dann einen zulässigen Punkt $(\Delta\eta, u)$ mit $\Delta\eta > 0$, falls

$$\bigcap_{i \in \tilde{\mathcal{A}}^{k-1}} \mathcal{Z}_i \neq \emptyset \text{ gilt.}$$

Für zwei nichtleere Mengen $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ muß gelten:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\boldsymbol{\sigma}_1^{k-1}} \cdot \mathbf{b}_1^{1,k} \neq 0 \text{ und } \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\boldsymbol{\sigma}_2^{k-1}} \cdot \mathbf{b}_2^{1,k} \neq 0 \quad (\text{A.7})$$

Gilt jetzt zum Beispiel

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\boldsymbol{\sigma}_1^{k-1}} \cdot \mathbf{b}_1^{1,k} > 0 \text{ und } \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\boldsymbol{\sigma}_2^{k-1}} \cdot \mathbf{b}_2^{1,k} > 0,$$

so haben $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ einen nichtleeren Schnitt. Analog verhält es sich, falls beide Werte negativ sind. Somit gilt die dreidimensionale Erweiterung des entsprechenden Lemmas von ZHANG in [Zha91] für Spannungen ungleich des hydrostatischen Drucks. Falls gilt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\boldsymbol{\sigma}_i^{k-1}} \cdot \mathbf{b}_i^{1,k} &< 0 \quad \forall i \in \tilde{\mathcal{A}}^{k-1} \\ \text{oder} \\ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\boldsymbol{\sigma}_i^{k-1}} \cdot \mathbf{b}_i^{1,k} &> 0 \quad \forall i \in \tilde{\mathcal{A}}^{k-1} \text{ erfüllt ist, so folgt } \bigcap_{i \in \tilde{\mathcal{A}}^{k-1}} \mathcal{Z}_i \neq \emptyset \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung des Lemmas. $\square$

A.4 Positive Definitheit der Aufdatierungsmatrix

Der inverse BFGS-Update ist definiert durch (siehe Abschnitt 5, Gleichung 5.22):

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k - \frac{\mathbf{A}_k \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k} + \frac{\mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T}{\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k}.$$

Nimmt man an, daß $\mathbf{A}_k$ positiv definit ist, so existiert $\mathbf{A}_k^{-\frac{1}{2}}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{A}_k^{-\frac{1}{2}} &= \mathbf{A}_k^{-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{A}_k - \frac{\mathbf{A}_k \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k} + \frac{\mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T}{\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k} \right) \mathbf{A}_k^{-\frac{1}{2}} \\ &= \mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}_k^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{A}_k \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k) \mathbf{A}_k^{-\frac{1}{2}}}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k} + \frac{\mathbf{A}_k^{-\frac{1}{2}} \mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T \mathbf{A}_k^{-\frac{1}{2}}}{\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k} \\ &= \mathbf{I} - \frac{\hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{s}}^T}{\hat{\mathbf{s}}^T \hat{\mathbf{s}}} + \frac{\hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}}^T}{\hat{\mathbf{q}}^T \hat{\mathbf{s}}} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

mit $\hat{\mathbf{s}} := \mathbf{A}_k^{\frac{1}{2}} \mathbf{s}_k$ und $\hat{\mathbf{q}} := \mathbf{A}_k^{-\frac{1}{2}} \mathbf{q}_k$. Um die positive Definitheit von $\mathbf{A}_{k+1}$ zu zeigen, betrachtet man ein $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{w}^T \mathbf{w} = 1$, $\mathbf{w} = \lambda \hat{\mathbf{s}} + \mathbf{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{s}} = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T (\mathbf{A}_k^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{A}_k^{\frac{1}{2}}) \mathbf{w} &= (\lambda \hat{\mathbf{s}}^T + \mathbf{u}^T) \left(\mathbf{I} - \frac{\hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{s}}^T}{\hat{\mathbf{s}}^T \hat{\mathbf{s}}} + \frac{\hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}}^T}{\hat{\mathbf{q}}^T \hat{\mathbf{s}}} \right) (\lambda \hat{\mathbf{s}} + \mathbf{u}) \\ &= \lambda^2 \hat{\mathbf{s}}^T \hat{\mathbf{s}} - \lambda^2 \frac{\hat{\mathbf{s}}^T (\hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{s}}^T) \hat{\mathbf{s}}}{\hat{\mathbf{s}}^T \hat{\mathbf{s}}} + \lambda^2 \frac{\hat{\mathbf{s}}^T (\hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}}^T) \hat{\mathbf{s}}}{\hat{\mathbf{q}}^T \hat{\mathbf{s}}} \\ &\quad + 2\lambda \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{s}} - 2\lambda \frac{\mathbf{u}^T (\hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{s}}^T) \hat{\mathbf{s}}}{\hat{\mathbf{s}}^T \hat{\mathbf{s}}} + 2\lambda \frac{\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}}^T \hat{\mathbf{s}}}{\hat{\mathbf{q}}^T \hat{\mathbf{s}}} \\ &\quad + \mathbf{u}^T \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}^T (\hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{s}}^T) \mathbf{u}}{\hat{\mathbf{s}}^T \hat{\mathbf{s}}} + \frac{\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}}^T \mathbf{u}}{\hat{\mathbf{q}}^T \hat{\mathbf{s}}} \\ &= \lambda^2 \hat{\mathbf{q}}^T \hat{\mathbf{s}} + \mathbf{u}^T \mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}^T (\hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}}^T) \mathbf{u}}{\hat{\mathbf{q}}^T \hat{\mathbf{s}}} + 2\lambda \frac{\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}}^T \hat{\mathbf{s}}}{\hat{\mathbf{q}}^T \hat{\mathbf{s}}} \\ &= \mathbf{u}^T \mathbf{u} + \frac{(\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{q}} + \lambda \hat{\mathbf{q}}^T \mathbf{s})^2}{\hat{\mathbf{q}}^T \hat{\mathbf{s}}} \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Der Wert 0 wird nur angenommen, falls $\mathbf{u} = 0$ und $\lambda = 0$, d. h. $\mathbf{A}_k^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{A}_k^{-\frac{1}{2}}$ ist positiv definit auf $\mathcal{D}_n = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{w}^T \mathbf{w} = 1\}$ und damit auch auf $\mathbb{R}^n$. Ist $\mathbf{A}_k^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{A}_k^{-\frac{1}{2}}$ positiv definit auf $\mathbb{R}^n$, so ist auch $\mathbf{A}_{k+1}$ positiv definit auf $\mathbb{R}^n$. $\square$

A.5 Verteilungen und deren Dichten

Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2},$$

$$E(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2$$

Standardnormalverteilung ($\sigma = 1, \mu = 0$)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5x^2},$$

$$E(X) = 0, \quad \text{Var}(X) = 1$$

Exponentialverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}, \text{ mit } \lambda > 0,$$

$$E(X) = 1/\lambda, \quad \text{Var}(X) = 1/\lambda^2$$

Weibullverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{p x^{p-1}}{b^p} e^{-(x/b)^p} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}, \text{ mit } b, p > 0,$$

$$E(X) = b \Gamma\left(\frac{p+1}{p}\right), \quad \text{Var}(X) = b^2 \left[\Gamma\left(\frac{p+2}{p}\right) - \Gamma^2\left(\frac{p+1}{p}\right) \right]$$

Lognormalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^2 \sigma^2}} e^{-[\log(x/\mu)]^2/2\sigma^2}, \text{ mit } \mu > 0, x \geq 0.$$

$$E(X) = \mu e^{1/2 \sigma^2}, \quad \text{Var}(X) = \mu^2 e^{\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

Weiter werden einige Eigenschaften zusammengesetzter Zufallsvariablen angegeben.

1. Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit den Dichten $f_1(x)$ und $f_2(y)$, so ist die Dichte $f_3(z)$ der Zufallsvariablen $Z = X + Y$ durch das Faltungsintegral gegeben:

$$f_3(z) = \int_0^z f_1(z-u) f_2(u) du. \quad (\text{A.11})$$

Sind X und Y unabhängig und sind X und Y normalverteilt, d.h. kurz $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, so ist $Z = X \pm Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ verteilt mit $\mu = \mu_1 \pm \mu_2$ und $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Daraus folgt $E(Z) = \mu_1 \pm \mu_2$ und $\text{Var}(Z) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

2. Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $Y > 0$ und den Dichten $f_1(x)$ und $f_2(y)$, so ist die Dichte $f_3(z)$ der Zufallsvariablen $Z = X/Y$ gegeben durch:

$$f_3(z) = \int_0^{\infty} y f_2(y) f_1(yz) dz. \quad (\text{A.12})$$

Der Erwartungswert $E(Z)$ der Zufallsvariablen Z ist für unabhängige X und Y gegeben durch (siehe dazu z.B. [Mor68]):

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{y} f_1(x) f_2(y) dx dy. \quad (\text{A.13})$$

A.6 Grenzlastanalyse für Strukturen mit Schädigung

Die Schädigung einer Struktur kann mit dem von LEMAITRE/CHABOCHE erweiterten Modell nach KACHANOV [Kac71] durch einen skalaren *Schadensfaktor* D beschrieben werden¹. LEMAITRE/CHABOCHE geben in [LC90] ein Schadensmodell an, in dem die Änderung des Schadens proportional zur Änderung der plastischen Dehnungen $\dot{\epsilon}^p$ ist. FENG/YU erweitern diesen Ansatz in [FY94], [FY95] zu der Form $\dot{D} = C : \dot{\epsilon}^p$. Dabei ist C ein Tensor zweiter Stufe, dessen Komponenten Materialkonstanten (oder Funktion von ϵ^p) sind. Hier wird die Schädigung D durch $D(t) = \max\left(0, \int_0^t \dot{D}(\tau) d\tau - D_0\right)$ definiert, wobei D_0 eine Materialkonstante ist (siehe [FY94] und [FY95]). Dabei nimmt man an, daß die Schädigung keinen Einfluß auf den Elastizitätsmodul hat, und daß das Material unbeschränkt verfestigend ist. Spielt die Struktur Ω unter einem vorgegebenen Lastraum $\mathcal{L}$ ein, so existiert nach dem Einspielsatz von MELAN ein zeitunabhängiges Eigenspannungsfeld $\bar{\rho}(\mathbf{x})$, ein zeitunabhängiges Backstressfeld $\bar{\alpha}(\mathbf{x})$ und eine Konstante m , so daß $\Phi[m(\boldsymbol{\sigma}^E(\mathbf{x}, t) + \bar{\rho}(\mathbf{x}) - \bar{\alpha}(\mathbf{x}))] \leq \sigma_0^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t, \forall P \in \mathcal{L}$ gilt. Um eine obere Grenze für den Schaden zu erhalten, betrachtet man zu einem Punkt $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ ein Volumenelement $\Omega_0 \subset \Omega$ mit Volumeninhalt V_0 und den dadurch definierten lokalen Schaden

$$\bar{D}(\mathbf{x}_0, t) = \frac{1}{V_0} \int_{\Omega_0} D(\mathbf{x}, t) d\Omega, \text{ mit } D_1 = \frac{1}{V_0} \int_0^t \int_{\Omega_0} C : \dot{\epsilon}^p(\mathbf{x}, \tau) d\Omega d\tau, \text{ so daß}$$

man durch Einsetzen $\bar{D} = \max(0, D_1 - D_0)$ erhält. Nun wählt man ein vergleichendes fiktives Spannungsfeld (siehe [FY95]) $\tilde{\sigma}$ mit

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \sigma_0 \frac{C}{\|C\|}, & \mathbf{x} \in V_0 \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega \setminus V_0 \end{cases},$$

ein zeitunabhängiges Eigenspannungsfeld $\bar{\pi}(\mathbf{x})$ und ein zeitunabhängiges Backstressfeld $\bar{\eta}(\mathbf{x})$, so daß die Überlagerung mit $\tilde{\sigma}$ einen sicheren Zustand ergibt, d. h.

$$\Phi(\tilde{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \bar{\pi}(\mathbf{x}) - \bar{\eta}(\mathbf{x})) \leq \sigma_0^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t, \forall P \in \mathcal{L}.$$

Wendet man das DRUCKERSche Postulat auf den aktuellen Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ an, so gilt

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) - m(\boldsymbol{\sigma}^E(\mathbf{x}, t) + \bar{\rho}(\mathbf{x}) - \bar{\alpha}(\mathbf{x}))] : \dot{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t) &\geq 0 \\ [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) - (\tilde{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \bar{\pi}(\mathbf{x}) - \bar{\eta}(\mathbf{x}))] : \dot{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t) &\geq 0 \quad \text{und} \\ [\boldsymbol{\sigma}^E(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, t) - \bar{\pi}(\mathbf{x}) - (\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) - \bar{\eta}(\mathbf{x}))] : \dot{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t) &\geq \tilde{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \dot{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

¹Für die weitere Behandlung von Einspielsätzen für Material mit Schädigung sei auf die Arbeiten [Ju89], [Lem92], [CL92], [HW92], [Sie93], [WB93], [BFP96] und [PBF96] verwiesen.

Es ergibt sich für die Schädigung $D_1 = \frac{\|C\|}{\sigma_0 V_0} (W_1 + W_2 + W_3)$ mit

$$W_1 = \int_0^t \int_{\Omega_0} (\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \tau) - \bar{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{x})) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x}, \tau) d\Omega d\tau \quad (\text{A.15})$$

$$W_2 = \int_0^t \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma}^E(\mathbf{x}, \tau) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x}, \tau) d\Omega d\tau \quad (\text{A.16})$$

$$W_3 = - \int_0^t \int_{\Omega_0} (\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \tau) - \bar{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x})) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x}, \tau) d\Omega d\tau. \quad (\text{A.17})$$

Bei der weiteren Berechnung von W_1 , W_2 und W_3 werden die Variablen $\mathbf{x}$, t bzw. τ zur Abkürzung weggelassen. Es ist zu beachten, daß $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ und $\bar{\boldsymbol{\eta}}$ zeitunabhängige Größen sind und daß $\mathbf{E}^{-1}$ ein positiv definiter Tensor ist, so daß $\boldsymbol{\psi} : \mathbf{E}^{-1} : \boldsymbol{\psi} \geq 0$ gilt, für alle Tensoren $\boldsymbol{\psi}$ zweiter Stufe (insbesondere Spannungs- und Dehnungstensoren). Durch die Aufspaltung der Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ in ein residuales und ein elastisches Dehnungsfeld entstehen kompatible Dehnungsfelder, so daß die Arbeitsprinzipie $\int_{\Omega_0} \boldsymbol{\rho} : (\mathbf{E}^{-1} : \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\varepsilon}^p) d\Omega = 0$ und $\int_{\Omega_0} \boldsymbol{\rho} : (\mathbf{E}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) d\Omega = 0$ gelten.

Diese Arbeitsprinzipie gelten für beliebige Eigenspannungsfelder (z. B. auch für $\boldsymbol{\rho} - \bar{\boldsymbol{\pi}}$), so daß W_1 , W_2 und W_3 entscheidend vereinfacht werden können. Weiter kann o. B. d. A. angenommen werden, daß $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, 0) = 0$ gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^t \int_{\Omega_0} (\boldsymbol{\rho} - \bar{\boldsymbol{\pi}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p d\Omega d\tau = - \int_0^t \int_{\Omega_0} (\boldsymbol{\rho} - \bar{\boldsymbol{\pi}}) : \mathbf{E}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\rho}} d\Omega d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} [(\boldsymbol{\rho} - \bar{\boldsymbol{\pi}}) : \mathbf{E}^{-1} : (\boldsymbol{\rho} - \bar{\boldsymbol{\pi}})]_t^0 d\Omega d\tau \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \bar{\boldsymbol{\pi}} : \mathbf{E}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\pi}} d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Da $m(\boldsymbol{\sigma}^E + \bar{\boldsymbol{\rho}} - \bar{\boldsymbol{\alpha}})$ einen sicheren Zustand definiert, folgt aus dem DRUCKERSchen Postulat

$$\boldsymbol{\sigma}^E : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \leq \frac{1}{m-1} (\boldsymbol{\rho} - m\bar{\boldsymbol{\rho}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{1}{m-1} (\boldsymbol{\alpha} - m\bar{\boldsymbol{\alpha}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p.$$

Man erhält für W_2

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_0^t \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma}^E : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p d\Omega d\tau \leq \frac{1}{m-1} \int_0^t \int_{\Omega_0} (\boldsymbol{\rho} - m\bar{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{\alpha} + m\bar{\boldsymbol{\alpha}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p d\Omega d\tau \\ &= -\frac{1}{m-1} \int_0^t \int_{\Omega_0} (\boldsymbol{\rho} - m\bar{\boldsymbol{\rho}}) : \mathbf{E}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\rho}} + (\boldsymbol{\alpha} - m\bar{\boldsymbol{\alpha}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p d\Omega d\tau \\ &= \frac{1}{2(m-1)} \int_{\Omega_0} [(\boldsymbol{\rho} - m\bar{\boldsymbol{\rho}}) : \mathbf{E}^{-1} : (\boldsymbol{\rho} - m\bar{\boldsymbol{\rho}})]_t^0 d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{4H'(m-1)} \int_{\Omega_0} [(\boldsymbol{\alpha} - m\bar{\boldsymbol{\alpha}}) : (\boldsymbol{\alpha} - m\bar{\boldsymbol{\alpha}})]_t^0 d\Omega \\
& \leq \frac{m^2}{2(m-1)} \int_{\Omega_0} \bar{\boldsymbol{\rho}} : \mathbf{E}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\rho}} d\Omega + \frac{3m^2}{4H'(m-1)} \int_{\Omega_0} \bar{\boldsymbol{\alpha}} : \bar{\boldsymbol{\alpha}} d\Omega.
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Dabei ist für $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ die von MELAN vorgeschlagene Verschiebungsregel

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{2}{3} H' \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$$

eingesetzt worden. H' stellt den konstanten Verfestigungsmodul der eindimensionalen $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varepsilon}$ -Kurve dar (siehe [Mel38] und [Zha91]). Für W_3 erhält man

$$\begin{aligned}
W_3 &= - \int_0^t \int_{\Omega_0} (\boldsymbol{\alpha} - \bar{\boldsymbol{\eta}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p d\Omega d\tau = - \frac{3}{2H'} \int_0^t \int_{\Omega_0} (\boldsymbol{\alpha} - \bar{\boldsymbol{\eta}}) : \dot{\boldsymbol{\alpha}} d\Omega d\tau \\
&= - \frac{3}{4H'} \int_0^t \int_{\Omega_0} \frac{d}{d\tau} (\boldsymbol{\alpha} - \bar{\boldsymbol{\eta}}) : (\boldsymbol{\alpha} - \bar{\boldsymbol{\eta}}) d\Omega d\tau \\
&= \frac{3}{4H'} \int_{\Omega_0} [(\boldsymbol{\alpha} - \bar{\boldsymbol{\eta}}) : (\boldsymbol{\alpha} - \bar{\boldsymbol{\eta}})]_t^0 d\Omega \leq \frac{3}{4H'} \int_{\Omega_0} \bar{\boldsymbol{\eta}} : \bar{\boldsymbol{\eta}} d\Omega.
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Insgesamt ergibt sich also folgende Abschätzung für den lokalen Schaden an der Stelle $\mathbf{x}_0$

$$D_1 = \frac{\|C\|}{\sigma_0 V_0} (W_1 + W_2 + W_3) \leq D^*(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\boldsymbol{\eta}}, \bar{\boldsymbol{\pi}}, \bar{\boldsymbol{\rho}}, m, \mathbf{x}_0),$$

mit

$$\begin{aligned}
D^*(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\boldsymbol{\eta}}, \bar{\boldsymbol{\pi}}, \bar{\boldsymbol{\rho}}, m, \mathbf{x}_0) &= \frac{\|C\|}{\sigma_0 V_0} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \bar{\boldsymbol{\pi}} : \mathbf{E}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\pi}} d\Omega + \frac{3}{4H'} \int_{\Omega_0} \bar{\boldsymbol{\eta}} : \bar{\boldsymbol{\eta}} d\Omega \right. \\
&\quad \left. + \frac{m^2}{2(m-1)} \int_{\Omega_0} \bar{\boldsymbol{\rho}} : \mathbf{E}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\rho}} d\Omega + \frac{3m^2}{4H'(m-1)} \int_{\Omega_0} \bar{\boldsymbol{\alpha}} : \bar{\boldsymbol{\alpha}} d\Omega \right].
\end{aligned} \tag{A.22}$$

In dieser Abschätzung treten nur zeitunabhängige Größen auf, so daß der wahre Spannungsverlauf der Belastung nicht bestimmt werden muß. Zur Überprüfung ob eine Struktur sicher gegen Schädigung ist, wird jetzt das folgende Optimierungsproblem gelöst:

$$\begin{aligned}
& \max_{\mathbf{x}} \min_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\boldsymbol{\eta}}, \bar{\boldsymbol{\pi}}, \bar{\boldsymbol{\rho}}, m} D^*(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\boldsymbol{\eta}}, \bar{\boldsymbol{\pi}}, \bar{\boldsymbol{\rho}}, m, \mathbf{x}) \\
& \text{unter} \quad \Phi[m(\boldsymbol{\sigma}^E + \bar{\boldsymbol{\rho}} - \bar{\boldsymbol{\alpha}})] \leq \sigma_0^2 \\
& \quad \Phi(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{\boldsymbol{\pi}} - \bar{\boldsymbol{\eta}}) \leq \sigma_0^2 \\
& \quad m > 1.
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Dabei sind $\bar{\rho}$, $\bar{\pi}$ und $\bar{\alpha}$, $\bar{\eta}$ zeitunabhängige Eigenspannungs- bzw. Backstressfelder, deren quadratischen Integrale über Ω endlich sind. Die Bedingung für Sicherheit der Struktur gegen Schädigung beim Einspielen lautet nun

$$\max_{\mathbf{x}} \min_{\bar{\alpha}, \bar{\eta}, \bar{\pi}, \bar{\rho}, m} D^*(\bar{\alpha}, \bar{\eta}, \bar{\pi}, \bar{\rho}, m, \mathbf{x}) < D_s.$$

Dabei ist D_s der kritische Schädigungsfaktor. Unterhalb dieses Faktors verhält sich das Material unbeschränkt verfestigend. Bei Erreichen von D_s versagt die Struktur sofort ($0.2 < D_s < 0.8$ für Metalle siehe [LC90]).

Bemerkung

Bei der Abschätzung der dissipierten Arbeit im Einspielsatz für unbeschränkt verfestigendes Material in [Zha91] kann analog eine Abschätzung mit nur zeitunabhängigen Größen erzielt werden. Denn es gilt

$$\begin{aligned} W_p &= \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} d\tau d\Omega = \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \boldsymbol{\sigma}^E : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} d\tau d\Omega + \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \boldsymbol{\rho} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} d\tau d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \boldsymbol{\sigma}^E : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} d\tau d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\boldsymbol{\rho} : \mathbf{E}^{-1} : \boldsymbol{\rho}]_{\infty}^0 d\tau d\Omega \\ &\leq \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \boldsymbol{\sigma}^E : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} d\tau d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Mit der obigen Abschätzung für W_2 folgt

$$\begin{aligned} W_p &= \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} d\tau d\Omega \leq \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \boldsymbol{\sigma}^E : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} d\tau d\Omega \\ &\leq \frac{m^2}{2(m-1)} \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\rho}} : \mathbf{E}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\rho}} d\Omega + \frac{3m^2}{4H'(m-1)} \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\alpha}} : \bar{\boldsymbol{\alpha}} d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Ähnliche Abschätzung lassen sich auch für das Overlaymodell herleiten. Die Eigenschaften der Abschätzung übertragen sich aus den Beweisen für das ideal plastische und kinematisch verfestigende Material.

A.7 Das Overlaymodell in der Schadensmechanik

Zu Beginn seien die wichtigsten Eigenschaften der Mikroelemente (siehe [Zha91]) wiederholt. Man geht davon aus, daß jeder Materialpunkt (Makroelement) aus einem Spektrum von Mikroelementen besteht, die mit Hilfe eines Parameters $\xi \in [0, 1]$ eindeutig definiert sind. Den

Spannungen $\sigma(\mathbf{x})$ in einem Punkt $\mathbf{x}$ entsprechen die Mikrospannungen $\psi(\mathbf{x}, \xi)$ im Mikroelement. Die Dehnungen im Mikroelement zum Punkt $\mathbf{x}$ werden mit $\eta(\mathbf{x}, \xi)$ bezeichnet. Es gelten folgende Eigenschaften:

1. Alle Mikroelemente in einem Punkt haben die gleiche Kinematik, d. h.
 $\varepsilon(\mathbf{x}) = \eta(\mathbf{x}, \xi) \quad \forall \xi \in [0, 1]$.
2. Die Makrospannungen $\sigma(\mathbf{x})$ in einem Punkt $\mathbf{x}$ sind die Mittelwerte der zugehörigen Mikrospannungen, d. h. $\sigma(\mathbf{x}) = \int_0^1 \psi(\mathbf{x}, \xi) d\xi$.
3. Die Mikroelemente verhalten sich alle linear elastisch, ideal plastisch. Das Elastizitätsmodul ist für alle Mikroelemente gleich.

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
 \eta(\mathbf{x}, \xi) &= \eta^E(\mathbf{x}, \xi) + \eta^p(\mathbf{x}, \xi) \\
 \eta^E(\mathbf{x}, \xi) &= \mathbf{E}^{-1} : \psi(\mathbf{x}, \xi) \\
 \dot{\eta}^p(\mathbf{x}, \xi) &= \dot{\lambda}(\mathbf{x}, \xi) \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \\
 \Phi(\psi(\mathbf{x}, \xi)) &\leq k^2(\mathbf{x}, \xi) \\
 0 &= \dot{\lambda}(\mathbf{x}, \xi) [\Phi(\psi(\mathbf{x}, \xi)) - k^2(\mathbf{x}, \xi)] \\
 \psi(\mathbf{x}, \xi) &= \mathbf{E} : [\varepsilon(\mathbf{x}) - \eta^p(\mathbf{x}, \xi)] \\
 \psi(\mathbf{x}, \xi) &= \sigma^E(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}) + \pi(\mathbf{x}, \xi) \\
 \pi(\mathbf{x}, \xi) &= \mathbf{E} : [\varepsilon^p(\mathbf{x}) - \eta^p(\mathbf{x}, \xi)] \\
 0 &= \int_0^1 \pi(\mathbf{x}, \xi) dt.
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

Dabei ist ρ ein Eigenspannungsfeld für das Makroelement (auch als Makroeigenspannungsfeld bezeichnet) und π ein Eigenspannungsfeld für das jeweilige Mikroelement (analog Mikrospannungsfeld genannt). Wendet man das Arbeitsprinzip auf die Mikroelemente an, so gelten die Beziehungen (siehe [SZK91], [SBZ⁺90], [SBH⁺93], [SZ92]):

$$\int_{\Omega} \int_0^1 [\rho(\mathbf{x}) + \pi(\mathbf{x}, \xi)] : [\mathbf{E}^{-1} : (\rho(\mathbf{x}) + \pi(\mathbf{x}, \xi)) + \eta^p(\mathbf{x}, \xi)] d\xi d\Omega = 0 \tag{A.27}$$

$$\int_{\Omega} \int_0^1 [\rho(\mathbf{x}) + \pi(\mathbf{x}, \xi)] : [\mathbf{E}^{-1} : (\dot{\rho}(\mathbf{x}) + \dot{\pi}(\mathbf{x}, \xi)) + \dot{\eta}^p(\mathbf{x}, \xi)] d\xi d\Omega = 0. \tag{A.28}$$

Spielt die Struktur Ω unter einem vorgegebenen Lastraum $\mathcal{L}$ ein, so existiert nach dem Einspielsatz für das Mikroelementmodell ([Zha91]) ein zeitunabhängiges Makroeigenspannungsfeld $\rho^*(\mathbf{x})$, ein zeitunabhängiges Mikrospannungsfeld $\pi^*(\mathbf{x}, \xi)$ und eine Konstante m , so daß

$$\Phi[m(\sigma^E(\mathbf{x}, t) + \rho^*(\mathbf{x}) + \pi^*(\mathbf{x}, \xi))] \leq k^2(\mathbf{x}, \xi) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, t \geq 0, \xi \in [0, 1], P \in \mathcal{L}$$

gilt. Nimmt man an, daß der Schaden eines Mikroelements durch einen skalaren *Schadensfaktor* $D(\xi)$ beschrieben werden kann. LEMAITRE/CHABOCHE geben in [LC90] ein Schadensmodell an, in dem die Änderung des Schadens proportional zur Änderung der effektiven plastischen Dehnungen ist, d.h.

$$\dot{D}(\xi) = C(\xi)\dot{\eta}(\xi).$$

Der Schaden im Mikroelement ist dann durch

$$D(t, \xi) = \max \left(0, \int_0^t \dot{D}(\tau, \xi) d\tau - D_0 \right),$$

definiert, wobei D_0 eine Materialkonstante ist.

Um eine obere Grenze für den Schaden zu erhalten, betrachtet man zu einem Punkt $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ im Mikroelement ein Volumenelement $\Omega_0 \subset \Omega$ mit Volumeninhalt V_0 und den dadurch definierten lokalen Schaden

$$\bar{D}(\mathbf{x}_0, t, \xi) = \frac{1}{V_0} \int_{\Omega_0} D(\mathbf{x}, t, \xi) d\Omega.$$

Man erhält durch Einsetzen $\bar{D} = \max(0, D_1 - D_0)$, mit

$$D_1 = \frac{1}{V_0} \int_0^t \int_{\Omega_0} \int_0^1 C(\xi) : \dot{\eta}(\mathbf{x}, \tau, \xi) d\xi d\Omega d\tau.$$

Wählt man ein vergleichendes fiktives Mikrospannungsfeld $\tilde{\psi}$ mit

$$\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t, \xi) = \begin{cases} \frac{\sigma_0 C(\xi)}{\|C(\xi)\|}, & \mathbf{x} \in V_0 \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega \setminus V_0 \end{cases},$$

ein zeitunabhängiges Makroeigen Spannungsfeld $\bar{\rho}(\mathbf{x})$ und ein zeitunabhängiges Mikro eigen spannungsfeld $\bar{\pi}(\mathbf{x}, \xi)$, so daß die Überlagerung mit $\tilde{\sigma}$ einen sicheren Zustand ergibt, d. h.

$$\Phi(\tilde{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \bar{\rho}(\mathbf{x}) + \bar{\pi}(\mathbf{x}, \xi)) \leq k^2(\mathbf{x}, \xi) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, t \geq 0, \xi \in [0, 1], P \in \mathcal{L}.$$

Wendet man das DRUCKERSche Postulat auf das aktuelle Mikrospannungsfeld $\psi(\mathbf{x}, t, \xi)$ an, so gilt

$$\begin{aligned} \dot{\eta}^p(\mathbf{x}, t, \xi) : [\psi(\mathbf{x}, t, \xi) - m(\sigma^E(\mathbf{x}, t) + \rho^*(\mathbf{x}) + \pi^*(\mathbf{x}, \xi))] &\geq 0 \\ \dot{\eta}^p(\mathbf{x}, t, \xi) : [\psi(\mathbf{x}, t, \xi) - (\tilde{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \bar{\rho}(\mathbf{x}) + \bar{\pi}(\mathbf{x}, \xi))] &\geq 0. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Daraus folgt die Abschätzung

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \dot{\eta}^p(\mathbf{x}, t, \xi) \leq [\psi(\mathbf{x}, t, \xi) - \bar{\rho}(\mathbf{x}) - \bar{\pi}(\mathbf{x}, \xi)] : \dot{\eta}^p(\mathbf{x}, t, \xi).$$

Es ergibt sich nach Einsetzen von $\psi(\mathbf{x}, t, \xi) = \boldsymbol{\sigma}^E(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, t, \xi)$ zu jeder Zeit t für den lokalen Schaden $D_1 = \frac{\|C\|}{\sigma_0 V_0}(W_1 + W_2)$ mit

$$\begin{aligned} W_1 &= - \int_0^t \int_{\Omega_0} \int_0^1 (\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \tau) - \bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}, \tau) + (\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, t, \xi) - \bar{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{x}, \xi))) : \dot{\boldsymbol{\eta}}^p(\mathbf{x}, \tau, \xi) d\xi d\Omega d\tau \\ W_2 &= \int_0^t \int_{\Omega_0} \int_0^1 \boldsymbol{\sigma}^E(\mathbf{x}, \tau) : \dot{\boldsymbol{\eta}}^p(\mathbf{x}, \tau, \xi) d\xi d\Omega d\tau. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Wendet man das Arbeitsprinzip für $\dot{\boldsymbol{\eta}}^p(\mathbf{x}, \tau, \xi)$ auf W_1 an, integriert nach der Zeit aus (zur Verkürzung ist nur noch die Abhängigkeit von ξ notiert), so folgt

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^t \int_{\Omega_0} \int_0^1 [\boldsymbol{\rho} - \bar{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\pi}(\xi) - \bar{\boldsymbol{\pi}}(\xi)] : \mathbf{E}^{-1} : [\dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\boldsymbol{\pi}}(\xi)] d\xi d\Omega d\tau \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \int_0^1 [\bar{\boldsymbol{\rho}} + \bar{\boldsymbol{\pi}}(\xi)] : \mathbf{E}^{-1} : [\bar{\boldsymbol{\rho}} + \bar{\boldsymbol{\pi}}(\xi)] d\xi d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega_0} \bar{\boldsymbol{\rho}} : \mathbf{E}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\rho}} d\Omega + \int_{\Omega_0} \int_0^1 \bar{\boldsymbol{\pi}}(\xi) : \mathbf{E}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\pi}}(\xi) d\xi d\Omega \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Aus dem DRUCKERSchen Postulat folgt für die fiktiven elastischen Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma}^E : \dot{\boldsymbol{\eta}}^p \leq \frac{1}{m-1} (\boldsymbol{\rho} - m\boldsymbol{\rho}^* + \boldsymbol{\pi}(\xi) - m\boldsymbol{\pi}^*(\xi)) : \dot{\boldsymbol{\eta}}^p$$

und es folgt für W_2

$$\begin{aligned} W_2 &\leq \frac{1}{m-1} \int_0^t \int_{\Omega_0} \int_0^1 [\boldsymbol{\rho} - m\boldsymbol{\rho}^* + \boldsymbol{\pi}(\xi) - m\boldsymbol{\pi}^*(\xi)] : \dot{\boldsymbol{\eta}}^p d\xi d\Omega d\tau \\ &= -\frac{1}{m-1} \int_0^t \int_{\Omega_0} \int_0^1 [\boldsymbol{\rho} - m\boldsymbol{\rho}^* + \boldsymbol{\pi}(\xi) - m\boldsymbol{\pi}^*(\xi)] : \mathbf{E}^{-1} : [\dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\boldsymbol{\pi}}(\xi)] d\xi d\Omega d\tau \\ &\leq \frac{m^2}{2(m-1)} \int_0^t \int_{\Omega_0} [\boldsymbol{\rho}^* + \boldsymbol{\pi}^*(\xi)] : \mathbf{E}^{-1} : [\boldsymbol{\rho}^* + \boldsymbol{\pi}^*(\xi)] d\Omega d\tau \\ &= \frac{m^2}{2(m-1)} \left[\int_{\Omega_0} \boldsymbol{\rho}^* : \mathbf{E}^{-1} : \boldsymbol{\rho}^* d\Omega + \int_{\Omega_0} \int_0^1 \boldsymbol{\pi}^*(\xi) : \mathbf{E}^{-1} : \boldsymbol{\pi}^*(\xi) d\xi d\Omega \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Insgesamt gilt also:

$$D_1 = \frac{\|C\|}{\sigma_0 V_0}(W_1 + W_2) \leq D^*(\boldsymbol{\rho}^*, \bar{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{\pi}^*, \bar{\boldsymbol{\pi}}, m, \mathbf{x}_0),$$

mit

$$\begin{aligned}
 D^*(\boldsymbol{\rho}^*, \bar{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{\pi}^*, \bar{\boldsymbol{\pi}}, m, \mathbf{x}_0) = & \left[\int_{\Omega_0} \int_0^1 \bar{\boldsymbol{\pi}}(\xi) : \mathbf{E}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\pi}}(\xi) + \frac{m^2}{m-1} \boldsymbol{\pi}^*(\xi) : \mathbf{E}^{-1} : \boldsymbol{\pi}^*(\xi) d\xi d\Omega \right. \\
 & \left. + \int_{\Omega_0} \bar{\boldsymbol{\rho}} : \mathbf{E}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\rho}} + \frac{m^2}{m-1} \boldsymbol{\rho}^* : \mathbf{E}^{-1} : \boldsymbol{\rho}^* d\Omega \right] \frac{\|C\|}{2\sigma_0 V_0} \quad (\text{A.33})
 \end{aligned}$$

In dieser Abschätzung treten nur zeitunabhängige Größen auf, so daß der wahre Spannungsverlauf der Belastung nicht bestimmt werden muß. Zur Überprüfung ob eine Struktur sicher gegen Schädigung ist, muß jetzt das folgende Optimierungsproblem gelöst werden:

$$\begin{aligned}
 \max_{\mathbf{x}} \min_{\boldsymbol{\rho}^*, \bar{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{\pi}^*, \bar{\boldsymbol{\pi}}, m} \quad & D^*(\boldsymbol{\rho}^*, \bar{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{\pi}^*, \bar{\boldsymbol{\pi}}, m, \mathbf{x}) \\
 \text{unter} \quad & \Phi[m(\boldsymbol{\sigma}^E + \boldsymbol{\rho}^* + \boldsymbol{\pi}^*(\xi))] \leq k^2(\xi) \\
 & \Phi(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{\boldsymbol{\rho}} + \bar{\boldsymbol{\pi}}(\xi)) \leq k^2(\xi) \\
 & m > 1. \quad (\text{A.34})
 \end{aligned}$$

Dabei sind $\boldsymbol{\rho}^*$, $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ und $\boldsymbol{\pi}^*$, $\bar{\boldsymbol{\pi}}$ zeitunabhängige Makro- bzw. Mikroeigenspannungsfelder, deren quadratischen Integrale über Ω endlich sind. Die Bedingung für Sicherheit der Struktur gegen Schädigung beim Einspielen lautet nun

$$\max_{\mathbf{x}} \min_{\boldsymbol{\rho}^*, \bar{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{\pi}^*, \bar{\boldsymbol{\pi}}, m} D^*(\boldsymbol{\rho}^*, \bar{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{\pi}^*, \bar{\boldsymbol{\pi}}, m, \mathbf{x}) < D_s.$$

Dabei ist D_s der kritische Schädigungsfaktor. Unterhalb dieses Faktors verhält sich das Material nach dem Mikroelementmodell, bei Erreichen von D_s versagt die Struktur sofort ($0.2 < D_s < 0.8$ für Metalle siehe [LC90]).

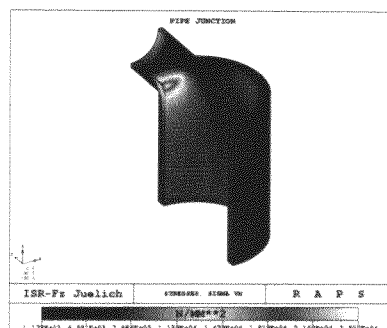
A.8 Eingabedatensatz der Einspielanalyse des dünnen Rohrs

```

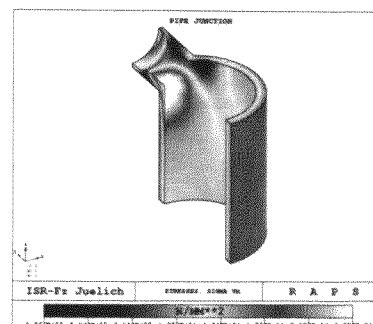
TREE
NET 1 TYPE 150
END
TOPOLOGICAL DESCRIPTION
NET (1) (9) ( ROHR achsensymmetrisch)
QUAX9 (1) (1) (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) * Elementdefinition
SUPPRESS (2) (3) (1,1) * Lagerung
SUPPRESS (2) (3) (7,1)
END
END TOPOLOGICAL DESCRIPTION
$DATA
$NPCO C=2 * Koordinaten
      1 10. 0. * (Radius, Dicke)
      2 10.05 0.
      3 10.1 0.
      .
      .
$EMOD C=2 S=1 G=A E=A * E-Modul
      1 2.1E+05 0.3 * Querkontraktion
$COTE C=1 G=A E=A * Wärmeübergang
      1 2.E-06
$FIN
$PLDA C=1 G=A E=A * Fließspannung
      1 24.
$FIN
$BQIN C=2 L=1 G=1 S=7 * Innendruck
      1 1. 1. * 1. Lastecke
$NPTP C=1 L=1 * Temperatur
      1 10.
      4 10.
      7 10.
$FIN
$BQIN C=2 L=1 G=1 S=7 * Nullast Innendruck
      1 0.001 0.001 * 2. Lastecke
$NPTP C=1 L=1 * Nullast Temperatur
      1 0.001
      4 0.001
      7 0.001
$FIN

```

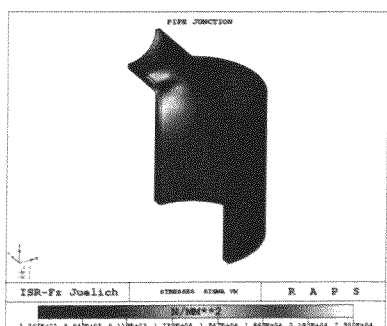

A.9 Spannungsverteilungen des Abzweiges (Innendruck)



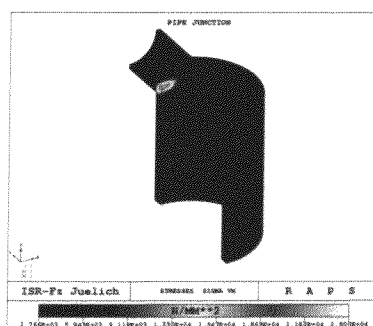
$$P_a = P_{el.}$$



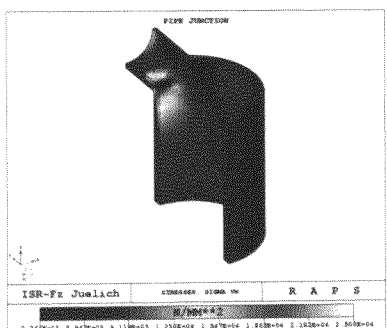
$$P_b = 2P_{el.}$$



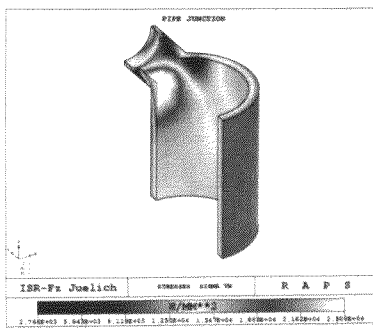
$$P_c = P_{el.}$$



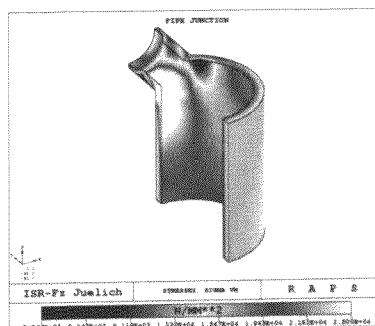
$$P_d = 0$$



$$P_e = P_{el.}$$



$$P_f = 2P_{el.}$$



$$P_g = 2.5P_{el.}$$

Bild A.1: Spannungsverteilung während der inkrementellen Belastung

A.10 Rechenzeitvergleich für den Rohrabzweig

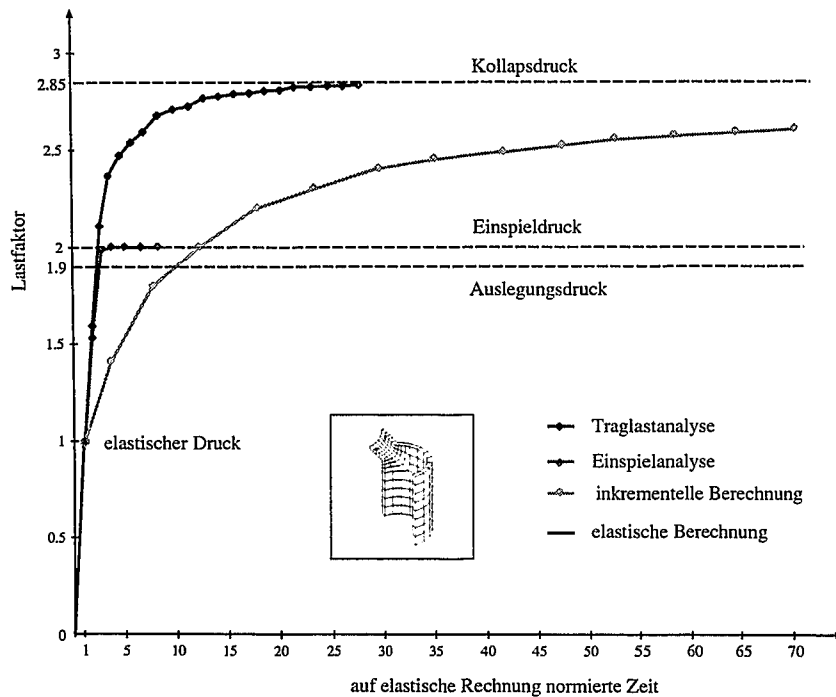


Bild A.2: Rechenzeitvergleich für einen Rohrabzweig

A.11 Konvergenzvergleich der Optimierungstrategien

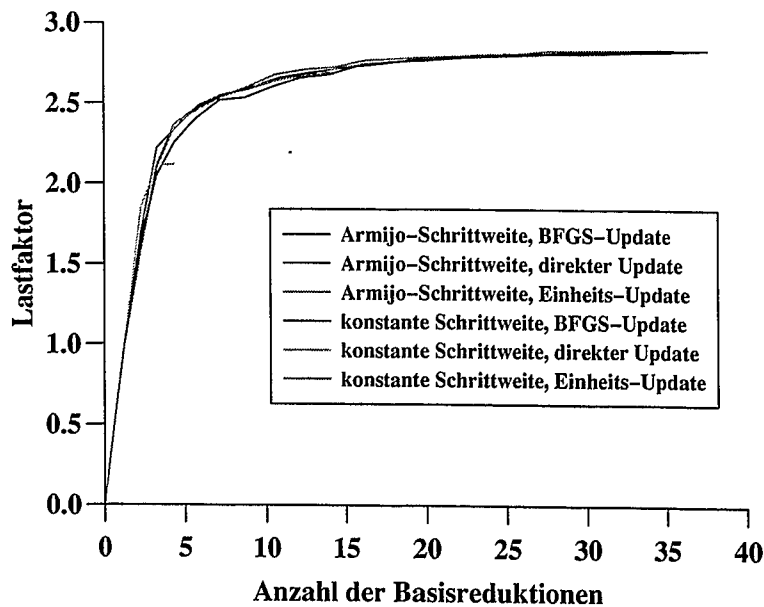


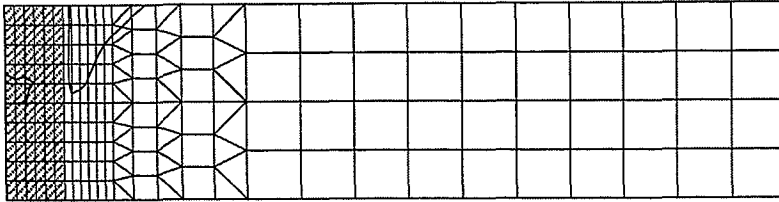
Bild A.3: Vergleich der Konvergenz verschiedener Optimierungstrategien der Traglastrechnung für einen Rohrabzweig

A.12 Vergleichsergebnisse des Japanischen Benchmark Problems

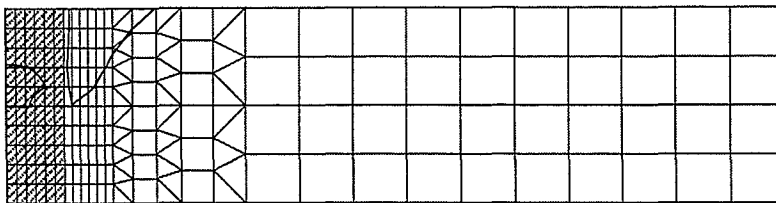
Program	Elementtyp	Anzahl Knoten	Anzahl Elemente	Anzahl Elemente/Dicke	Kollapsdruck (N/mm^2)
MARC	8-knotig Quad.	569	160	4	20.8
MARC	8-knotig Quad.	725	210	5	21.0
ABAQUS	4-knotig Quad.	628	405	5	21.4
FINAS	8-knotig Quad.	579	156	3	21.0
FINAS	8-knotig Quad.	579	156	3	22.0
ADINA	8-knotig Quad.	1388	405	5	20.6
STAX	4-knotig Quad.	343	288	6	21.9
PC-FEAP	4-knotig Quad.	315	248	4	21.0
MARC	8-knotig Quad.	681	192	4	21.0
ABAQUS	8-knotig Quad.	849	240	4	22.0
ABAQUS	4-knotig Quad.	492	405	5	21.0
FINAS	8-knotig Quad.	350	96	4	21.0
ABAQUS	8-knotig Quad.	2435	744	8	21.5
ANSYS	4-knotig Quad.	492	405	5	21.8
FINAS	4-knotig Quad.	310	244	4	22.9
PERMAS-LISA	9-knotig Quad.	832	208	4	23.0

Tabelle A.2: Liste der angewandten Programme, FE-Modelle und Traglastergebnisse

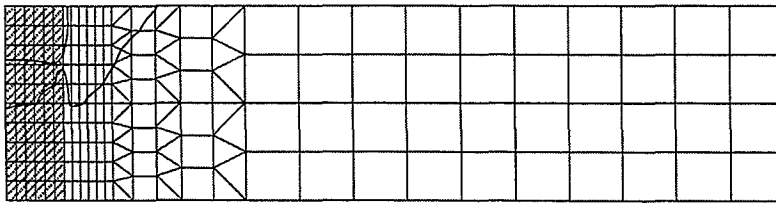
A.13 Spannungsbilder zum Brite–EuRam Benchmark



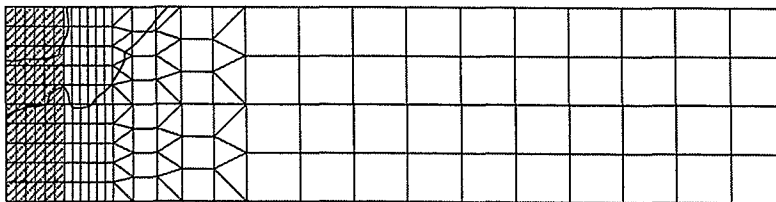
(a) Verlauf der Fließgrenze für die normierte Last $P = 1.23$



(b) Verlauf der Fließgrenze für die normierte Last $P = 1.27$

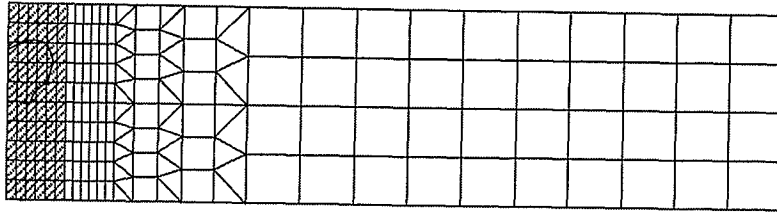


(c) Verlauf der Fließgrenze für die normierte Last $P = 1.32$

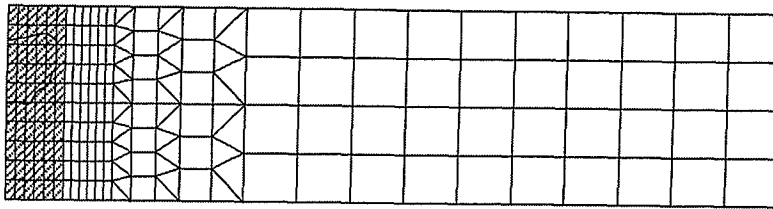


(d) Verlauf der Fließgrenze für die normierte Last $P = 1.36$

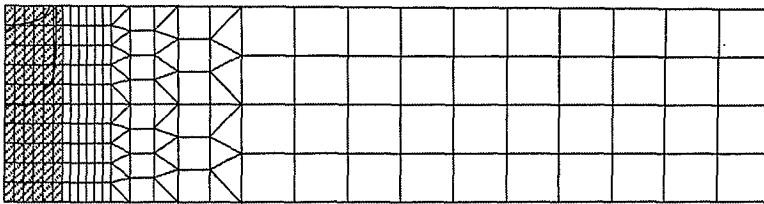
Bild A.4: Isolinien für die Scheibe mit Schweißnaht für $\sigma_0^W / \sigma_0^B = 1.5$



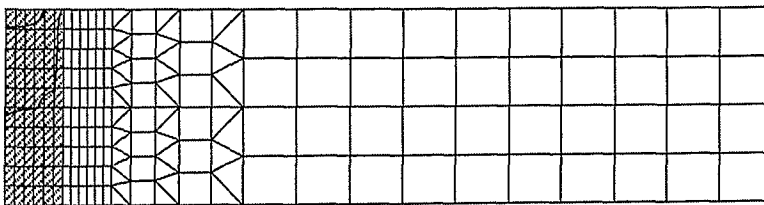
(a) Verlauf der Fließgrenze für die normierte Last $P = 0.70$



(b) Verlauf der Fließgrenze für die normierte Last $P = 0.73$



(c) Verlauf der Fließgrenze für die normierte Last $P = 0.75$



(d) Verlauf der Fließgrenze für die normierte Last $P = 0.77$

Bild A.5: Isolinien für die Scheibe mit Schweißnaht für $\sigma_0^W / \sigma_0^B = 0.75$

A.14 Ergebnisse der Zuverlässigkeitsanalyse

P/σ_y	P_f (numerisch)	P_f (analytisch)	abs. Fehler	rel. Fehler
0.1	6.455E-06	6.313E-06	1.867E-07	1.910E-07
0.2	1.085E-04	9.919E-05	9.299E-06	1.017E-05
0.3	1.205E-03	1.065E-03	1.403E-04	1.587E-04
0.4	8.763E-03	7.646E-03	1.117E-03	1.280E-03
0.5	4.163E-02	3.675E-02	4.873E-03	5.519E-03
0.6	1.361E-01	1.209E-01	1.519E-02	1.709E-02
0.7	3.103E-01	2.835E-01	2.683E-02	2.936E-02
0.8	5.319E-01	5.000E-01	3.189E-02	3.392E-02
0.9	7.397E-01	7.070E-01	3.271E-02	3.422E-02
1.0	8.765E-01	8.554E-01	2.105E-02	2.156E-02
1.1	9.499E-01	9.388E-01	1.105E-02	1.118E-02
1.2	9.821E-01	9.772E-01	4.873E-03	4.897E-03
1.3	9.943E-01	9.925E-01	1.961E-03	1.964E-03
1.4	9.983E-01	9.976E-01	6.443E-04	6.447E-04
1.5	9.995E-01	9.993E-01	2.090E-04	2.090E-04
1.6	9.999E-01	9.998E-01	6.920E-05	6.920E-05

Tabelle A.3: $\sigma_x = 0.1\mu_x$, $\sigma_y = 0.2\mu_y$

P/σ_y	P_f (numerisch)	P_f (analytisch)	abs. Fehler	rel. Fehler
0.1	7.271E-06	7.085E-06	2.152E-07	2.208E-07
0.2	1.514E-04	1.374E-04	1.404E-05	1.547E-05
0.3	1.948E-03	1.717E-03	2.311E-04	2.621E-04
0.4	1.437E-02	1.267E-02	1.698E-03	1.925E-03
0.5	6.271E-02	5.590E-02	6.788E-03	7.614E-03
0.6	1.742E-01	1.587E-01	1.557E-02	1.709E-02
0.7	3.427E-01	3.190E-01	2.366E-02	2.541E-02
0.8	5.256E-01	5.000E-01	2.558E-02	2.688E-02
0.9	6.843E-01	6.610E-01	2.332E-02	2.414E-02
1.0	8.021E-01	7.826E-01	1.957E-02	2.005E-02
1.1	8.775E-01	8.649E-01	1.254E-02	1.272E-02
1.2	9.258E-01	9.172E-01	8.537E-03	8.617E-03
1.3	9.550E-01	9.493E-01	5.700E-03	5.734E-03
1.4	9.729E-01	9.686E-01	4.259E-03	4.278E-03
1.5	9.823E-01	9.802E-01	2.079E-03	2.083E-03
1.6	9.882E-01	9.873E-01	8.666E-04	8.673E-04

Tabelle A.4: $\sigma_x = 0.2\mu_x$, $\sigma_y = 0.2\mu_y$

Forschungszentrum Jülich



Jül-3704
Oktober 1999
ISSN 0944-2952