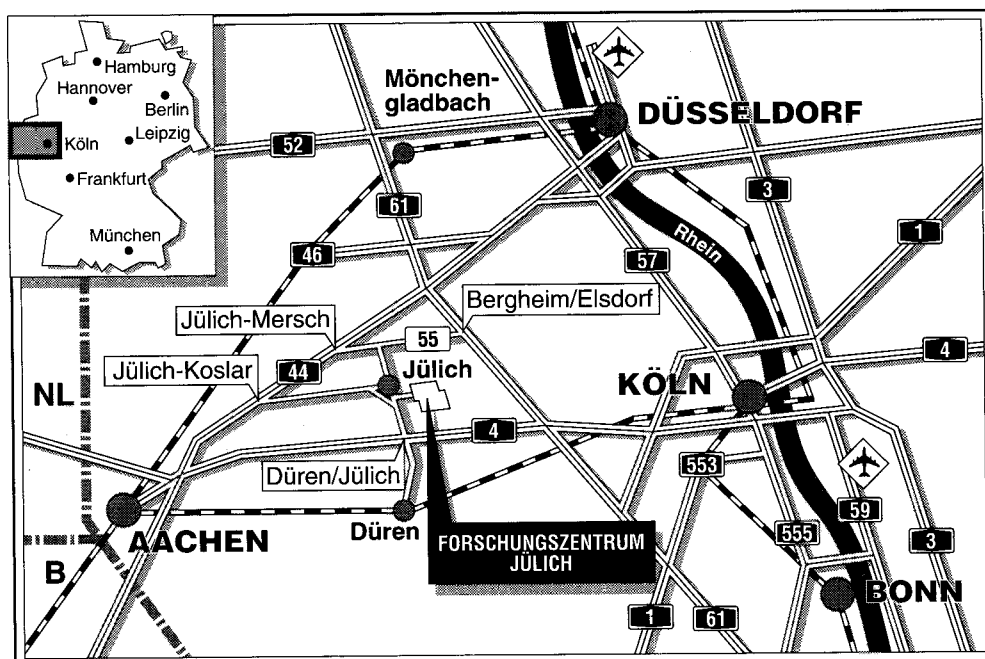


Institut für Energieverfahrenstechnik

**Berechnung des Wärmetransportes durch
einen waagerechten porösen Ringspalt
infolge Leitung, Strahlung und Konvektion
bei variablen Stoffwerten**

Th. Tebroke
E. Achenbach



Berichte des Forschungszentrums Jülich ; 2586

ISSN 0366-0885

Institut für Energieverfahrenstechnik Jül-2586

D 82 (Diss. RWTH Aachen)

Zu beziehen durch: Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek
Postfach 1913 · D-5170 Jülich · Bundesrepublik Deutschland
Telefon: 02461/61-6102 · Telefax: 02461/61-6103 · Telex: 833556-70 kfa d

Berechnung des Wärmetransportes durch einen waagerechten porösen Ringspalt infolge Leitung, Strahlung und Konvektion bei variablen Stoffwerten

Th. Tebroke*
E. Achenbach

Calculation of Heat Transfer Through a Horizontal Porous Annulus by Conduction, Radiation and Convection Using Variable Properties

by

Th. Tebroke

E. Achenbach

Abstract:

The distribution of velocity and temperature in porous media is usually calculated by applying the Darcy law and the Boussinesq approximation. This implies that all properties are set constant except the density in the buoyancy terms. This is approximately true, if temperature differences are small in the area of interest. Nevertheless, in a hot gas duct with internal insulation important temperature differences occur between the inner and the outer wall. The present work therefore investigates the influence of temperature-dependent properties on the calculated results.

In particular, the contribution of radiation to the thermal conductivity was studied for a high-temperature fibrous insulation. Measurements of the thermal conductivity in a vacuum show that the specific extinction coefficient is a practicable property to describe radiation in fibrous media.

Solving the equations of continuity, momentum and energy with variable properties yields heat transfer coefficients which are up to 20% higher than those calculated by using the Boussinesq approximation.

An attempt is sometimes made to improve the results from Boussinesq's approximation by using the temperature-dependent thermal conductivity. It is shown in this paper that this leads to even lower heat transfer coefficients and therefore does not represent an improvement in accuracy.

Berechnung des Wärmetransportes durch einen waagerechten porösen Ringspalt infolge Leitung, Strahlung und Konvektion bei variablen Stoffwerten

von

**Th. Tebroke
E. Achenbach**

Kurzfassung:

Die Strömungs- und Temperaturverhältnisse in porösen Medien werden üblicherweise mit Hilfe des Darcy-Gesetzes und der Boussinesq-Approximation berechnet. Dabei werden mit Ausnahme der Dichte im Auftriebsterm alle Stoffwerte als konstant angesetzt, was bei geringen Temperaturdifferenzen im betrachteten Gebiet nahezu gegeben ist.

Bei einer innenisolierten Heißgasleitung unterscheiden sich jedoch die Temperaturen an der Innen- und Außenwand erheblich voneinander. In der vorliegenden Arbeit wird daher überprüft, wie sich die Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte auf das Ergebnis auswirkt.

Insbesondere wurde der Strahlungsanteil an der Wärmeleitfähigkeit einer Hochtemperatur-Faserisolierung untersucht. Durch eigene Messungen der Wärmeleitfähigkeit im Vakuum konnte die spezifische Extinktion als ein die Strahlung durch Fasermaterialien beschreibender Stoffwert ermittelt werden.

Die Lösung der Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie unter Berücksichtigung von variablen Stoffwerten liefert das Ergebnis, daß bis zu 20 % höhere Wärmeübergangszahlen auftreten können, als sie bei Verwendung der Boussinesq-Approximation ermittelt würden.

Häufig wird versucht, das Ergebnis der Boussinesq-Approximation durch Verwendung einer temperaturabhängigen Wärmeleitfähigkeit zu verbessern. In dieser Arbeit wird gezeigt, daß dieses zu niedrigeren Wärmeübergangszahlen und somit nicht zu einer Verbesserung des Ergebnisses führt.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung und Aufgabenstellung	1
2. Gasströmung durch Faserisolierungen	3
2.1 Strömungsformen in porösen Medien	3
2.2 Das Darcy-Gesetz	4
3. Wärmeübertragung in Faserisolierungen	7
3.1 Feststoffleitung	7
3.2 Gasleitung	9
3.2.1 Wärmeleitfähigkeit eines freien Gases	9
3.2.2 Wärmeleitfähigkeit eines eingeschlossenen Gases	9
3.3 Strahlung	10
3.4 Konvektion	13
3.5 Effektive Wärmeleitfähigkeit einer Faserisolierung	14
4. Messung des Strahlungsanteils der Wärmeleitfähigkeit einer ausgewählten Faserisolierung	17
4.1 Aufbau der Versuchsanordnung	18
4.2 Durchführung der Versuche	22
4.3 Kritische Betrachtung der Meßgrößen	25
4.3.1 Fehler bei der Bestimmung des Wärmestromes	25
4.3.2 Fehler bei der Bestimmung der geometrischen Daten und der Dichte	27
4.3.3 Fehler bei der Bestimmung der Temperatur	29
4.3.4 Genauigkeit bei der Messung von Temperaturdifferenzen	30
4.3.5 Abschätzung des gesamten Meßfehlers	34
4.4 Betrachtung weiterer Fehlerquellen bei der Messung	35
4.5 Vorstellung der Meßergebnisse	36
4.6 Vergleich der Ergebnisse mit Literaturangaben	42
4.7 Zusammenfassung der Versuchsergebnisse	43
5. Gleichungen für den Wärme- und Stofftransport in einer innenisolierten Heißgasleitung	45
5.1 Koordinatensystem	46
5.2 Vereinfachungen für die Berechnung	47
5.3 Erhaltungsgleichungen	47
5.4 Definition dimensionsloser Größen	49
5.5 Randbedingungen	51
6. Auswahl von Bewertungskennzahlen	53
6.1 Reine Wärmeleitung in zylindrischen Geometrien	53
6.2 Darstellung der berechneten Verhältnisse durch dimensionslose Kennzahlen	54
7. Numerischer Lösungsweg	57
7.1 Einführung eines geeigneten Gitters	57
7.2 Differenzenquotienten	58
7.3 Anfangsbedingungen	59
7.4 Ablauf der Berechnung	60

8. Boussinesq - Approximation	65
8.1 Dimensionslose Erhaltungsgleichungen	65
8.2 Ergebnisse der Boussinesq-Rechnung	66
8.3 Vergleich mit Literaturdaten	72
9. Berechnungen mit temperaturabhängigen Stoffwerten	73
9.1 Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit	74
9.2 Variable Stoffwerte in der Impulsgleichung	79
9.2.1 Temperaturabhängigkeit der Viskosität	80
9.2.2 Temperaturabhängigkeit der Dichte in der Impulsgleichung	84
9.2.3 Zusammenfassung für die Impulsgleichung	87
9.3 Variable Stoffwerte in Energie- und Impulsgleichung	90
9.4 Einführung der temperaturabhängigen Dichte in die Kontinuitätsgleichung	93
10. Betrachtung eines realistischen Anwendungsfalls	99
11. Variation von Einflußparametern	103
11.1 Variation der Schichtdicke der Isolierung	103
11.2 Variation der Packungsdichte	105
11.3 Variation des Absolutdrucks	107
11.4 Variation des Faserdurchmessers	108
11.5 Ungünstiger Anwendungsfall	110
12. Zusammenfassung	113
13. Nomenklatur	115
14. Literaturverzeichnis	119

1. Einleitung und Aufgabenstellung

Natürliche Konvektionsströmungen von Flüssigkeiten und Gasen durch poröse Medien sind von wichtiger Bedeutung für verschiedenste Anwendungsgebiete. Dazu gehören geothermische Speicher, im Erdboden verlegte Rohrleitungen, Schüttungen im Bereich der Verfahrenstechnik sowie thermische Isolierungen.

Die äußeren Temperaturdifferenzen führen zu einem Wärmetransport durch das poröse Medium. Aufgrund von temperaturbedingten Dichteunterschieden bildet sich eine Konvektionsströmung aus, die den Wärmestrom zum Teil erheblich vergrößern kann.

Zur Berechnung des Gesamtwärmestromes müssen die Erhaltungsgleichungen für Masse, Energie und Impuls gelöst werden. Eine für viele Anwendungsfälle zuverlässige Abschätzung, und das nicht nur im hier angesprochenen Fall eines porösen Mediums, ist durch die Verwendung der Boussinesq-Approximation möglich. Zur Vereinfachung der Erhaltungsgleichungen wird hier angenommen, daß mit Ausnahme der Dichte im Auftriebsterm alle Stoffwerte als konstant anzunehmen sind. Weiterhin wird bei dieser Berechnungsmethode für die Dichte ein linearer Verlauf mit der Temperatur verwendet.

Die Gültigkeit der Approximation ist jedoch in Frage zu stellen, wenn sich aufgrund extrem hoher Temperaturdifferenzen die Stoffwerte an der kalten und der warmen Seite erheblich unterscheiden. Ein solcher Fall tritt auf bei der innenisolierten Heißgasleitung eines Hochtemperaturreaktors. Die Isolierung sorgt hier für einen Abfall der Temperatur von der Innentemperatur von 950°C auf einen äußeren Wert, der bei etwa 100°C liegen kann. Im Rahmen der Forschungsarbeiten für den deutschen Hochtemperaturreaktor war diese Aufgabenstellung bereits rechnerisch mit Hilfe der Boussinesq-Approximation bearbeitet worden (Achenbach, 1988).

Bei den beschriebenen Verhältnissen liegt allerdings die Temperaturdifferenz in der gleichen Größenordnung wie der Absolutwert der Mitteltemperatur selbst. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll geklärt werden, inwiefern sich eine Lösung der Erhaltungsgleichungen unter Berücksichtigung variabler Stoffwerte von der vereinfachten Berechnung nach der Boussinesq-Approximation unterscheidet. Neben der Wärmeleitfähigkeit wird auch die Viskosität variabel betrachtet und für die Dichte der lineare Zusammenhang der Boussinesq-Approximation durch eine genauere Beziehung ersetzt.

Der Betrachtung des Wärmetransports durch Strahlung ist dabei besondere Aufmerksamkeit zu schenken, da dieser sehr stark von der Temperatur abhängt. Vereinfachend kann er als Anteil der Wärmeleitfähigkeit der Isolierung berücksichtigt werden. Der Anteil der Strahlung hängt jedoch neben der Temperatur wesentlich von den optischen Eigenschaften der verwendeten Isolierung ab und nimmt zu mit abnehmender Packungsdichte des Isoliermaterials.

Aus den Angaben der Hersteller von Faserisolierungen kann in der Regel nicht auf den Strahlungsanteil geschlossen werden. Sie geben üblicherweise nur Daten für die Wärmeleitfähigkeit ihrer Produkte bei Sättigung des Mediums mit atmosphärischer Luft an. Zur Bestimmung der Strahlungscharakteristik sind aber Angaben über die Wärmeleitfähigkeit im Vakuum notwendig.

Um die Strahlung in Hochtemperatur-Faserisolierungen rechnerisch berücksichtigen zu können, sind jedoch genauere Kenntnisse der Strahlungseigenschaften der verwendeten Isolierung notwendig. Weiterer Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind daher Messungen an einem ausgewählten Isoliermaterial in Luft und im Vakuum. Daraus ist dann die Aufstellung einer geeigneten Beziehung für die Wärmeleitfähigkeit unter besonderer Berücksichtigung der Strahlung abzuleiten.

2. Gasströmung durch Faserisolierungen

Die Kenntnis über den Aufbau einer Faserisolierung ist wichtig für das Verständnis der Strömungsform in diesem porösen Medium. Zwischen den Fasern, die entweder ungeordnet oder in parallelen Schichten angeordnet sind, befindet sich Gas. Der Faseranteil macht nur einen kleinen Teil des Gesamtvolumens aus, daher sind die Gasmoleküle in der gesamten Isolierung frei beweglich. Im Gegensatz dazu ist die Konvektionsströmung in einem porösen Medium mit abgeschlossenen Poren auf die Poren selbst beschränkt.

2.1 Strömungsformen in porösen Medien

Strömt das Gas durch eine Faserisolierung oder ein anderes poröses Medium mit offenen Poren, so stellt der Feststoff ein Hindernis dar. Die Strömung wird ständig im mikroskopischen Bereich umgelenkt, und es bilden sich immer wieder neue Grenzschichten an den Faseroberflächen. Die Strömungsform wird bestimmt durch die Größe der lokalen Poren-Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{\rho u \ell}{\eta} \quad (2.1.1)$$

mit ℓ als charakteristischer Abmessung für die innere Struktur des porösen Mediums.¹ Dybbs und Edwards (1984) unterscheiden vier Strömungsbereiche:

1. Solange der Wert der Reynolds-Zahl unterhalb von 1 liegt, spricht man vom Bereich der schleichenden Strömung oder auch vom Darcy-Bereich (siehe „2.2 Das Darcy-Gesetz“). Das Fließen wird dominiert von viskosen Kräften. Die exakte Form der Geschwindigkeitsverteilung ist abhängig von der lokalen Geometrie. Erst ab $Re = 1$ bilden sich Grenzschichten an den festen Grenzen der Poren.
2. Der Bereich zwischen $Re = 1$ und $Re = 10$ wird als „Trägheitsbereich“ bezeichnet. Mit steigender Reynolds-Zahl nimmt der Grenzschichtcharakter der Strömung zu, und es entstehen stationäre Ablösegebiete mit Rezirkulationszonen. Das bewirkt, daß der Zusammenhang zwischen Druckverlust und Durchflußrate nicht mehr linear ist.
3. Bei Reynolds-Zahlen zwischen 150 und 300 wird eine instationäre Strömungsablösung beobachtet. Die Rezirkulationszonen sind nicht mehr ortsfest. Wirbelstrukturen stören das laminare Strömungsfeld.
4. Bei Reynolds-Zahlen oberhalb von 300 stellen die Autoren schließlich statistische Wirbelablösung fest, wie sie bei turbulenten Strömungen auftreten.

¹ Bei einer Faserisolierung ist hier der Faserdurchmesser δ_f einzusetzen.

Die höheren Strömungszustände sind insbesondere für Faserschichten interessant, die als Filter Verwendung finden und daher mit einer hohen Geschwindigkeit durchströmt werden müssen (Hilligardt, 1988). Auch bei Flüssigkeitsströmungen durch Fasern treten wegen der im Vergleich zu Gasen geringeren kinematischen Viskosität größere Reynolds-Zahlen auf (Kyan, 1970).

Für Konvektionsströmungen von Gasen in Faserisolierungen ist jedoch nicht mit großen Strömungsgeschwindigkeiten zu rechnen, der Bereich $Re \geq 1$ wird in der Regel nicht erreicht.

2.2 Das Darcy-Gesetz

Solange die Reynolds-Zahl kleiner als 1 ist, können die Trägheitskräfte vernachlässigt werden, und der Druckverlust ist proportional zur Durchflußmenge und damit zur mittleren Durchflußgeschwindigkeit. Diesen linearen Zusammenhang erkannte als erster der Franzose Darcy (1856), der sich mit der Untersuchung von Wasserströmungen durch Sande beschäftigte. Seine lediglich für Wasser aufgestellte lineare Beziehung zwischen Durchfluß und Druckverlust wurde später durch Berücksichtigung der fluid-spezifischen dynamischen Viskosität η verallgemeinert und ist in der Form

$$\frac{\dot{V}}{A} = u = - \frac{k}{\eta} \frac{\Delta p}{\ell} \quad (2.2.1)$$

als „Darcy - Gesetz“ bekannt. Dabei steht u für die Durchflußgeschwindigkeit, die man als Quotient aus Volumenstrom und durchströmter Fläche erhält. Sie wird auch Filtergeschwindigkeit genannt. Mit der mittleren örtlichen Geschwindigkeit u' ist sie über die Beziehung $u' = u/v_G$ verbunden, wobei v_G den volumetrischen Gasanteil des porösen Mediums bezeichnet. Δp ist der über der Strecke ℓ gemessene Druckverlust. Die durch die Gl. (2.2.1) definierte Permeabilität k ist eine wichtige makroskopische Eigenschaft poröser Medien. Man kann darunter auch die Leitfähigkeit des porösen Mediums bezüglich des Durchströmens einer Newtonschen Flüssigkeit verstehen.

Das Darcy-Gesetz ist also ein lineares Gesetz ähnlich der Fourierschen Wärmeleitungsgleichung oder dem Fickschen Gesetz für die Diffusion (Dullien, 1979). Es gilt für hinreichend langsame, ungerichtete, stationäre Strömung durch poröse Medien. In differentieller, mehrdimensionaler Form unter Berücksichtigung des höhenabhängigen statischen Druckes lautet es für ein isotropes Medium:

$$\vec{u} = - \frac{k}{\eta} (\nabla p - \rho \vec{g}) \quad (2.2.2).$$

Zur Bestimmung der Permeabilität wurde eine größere Anzahl von Modellen aufgestellt. Doch keines ist komplex genug, um reale poröse Medien allgemeingültig darzustellen (Bankvall, 1972a). So sind dann die theoretischen, halbempirischen oder rein experimentell hergeleiteten Formulierungen immer nur für einen speziellen Anwendungsbereich brauchbar. Fast allen Beziehungen gemeinsam ist jedoch der proportionale Zusammenhang

$$k \sim \frac{\delta_f^2}{v_F^2} \quad (2.2.3)$$

mit v_F als volumetrischem Feststoffanteil des porösen Mediums und dem mittleren Faserdurchmesser δ_f . Für Faserpackungen wurde dieser Zusammenhang bereits von Carman (1956) über ein auf der Kozeny-Theorie aufbauendes geometrisches Modell ermittelt. Furber und Davidson (1969) verifizieren ihn anhand von Experimenten mit Fasern verschiedenen Durchmessers. Sie nennen als Ergebnis die Beziehung

$$k = \frac{\delta_f^2}{B} \frac{v_G^3}{v_F^2} \quad (2.2.4)$$

mit einem Stoffwert B , der sowohl vom Material als auch von der Hauptausrichtung der verwendeten Faser abhängt. Nach theoretischen Betrachtungen von Carman (1956) sollte dieser den Wert 32 haben, nach Anpassung an vorliegende experimentelle Daten ermittelt der Autor den Wert 80. Furber und Davidson (1969) erhalten bei Durchströmung ungeordneter keramische Fasern Werte von $B=8,8$ bis $B=73$. Die ermittelten Werte für parallel zur Hauptfaserausrichtung durchströmte Pakete liegen niedriger, bei einer Strömung senkrecht dazu höher.

Auch von anderen Autoren wird bestätigt, daß die Permeabilität parallel zur Hauptfaserausrichtung etwa doppelt so groß ist wie die quer durch das geordnete Faserpaket (Bankvall, 1972a; Fournier und Klarsfeld, 1974).

Für die Berechnung der Strömung im fasergefüllten horizontalen Ringspalt soll in dieser Arbeit mit einer richtungsunabhängigen Permeabilität nach Gleichung (2.2.4) gerechnet werden. Entscheidend ist hier der Wert für eine Strömung parallel zu den Faserschichten, da das Gas jeweils an den Wänden entlang und somit parallel zur Hauptausrichtung der Fasern strömt. Dazu kommt, daß der radiale Strömungsweg kürzer ist als der in Umfangsrichtung und zusätzlich die Strömungsgeschwindigkeiten hier auch kleiner sind. Die verwendete Beziehung hat weiterhin den Vorteil, daß der Einfluß der Parameter δ_f und v_F auf die Strömung in der Isolierung untersucht werden kann.

3. Wärmeübertragung in Faserisolierungen

Thermische Isolierungen haben die Aufgabe, Wärmeverluste eines Systems zu vermindern. Für die Dimensionierung ist die effektive Wärmeleitfähigkeit des verwendeten Materials eine entscheidende Größe. Prinzipiell lassen sich beim Wärmetransport die Mechanismen Feststoffleitung, Gas- bzw. Flüssigkeitsleitung, Wärmestrahlung sowie freie und erzwungene Konvektion unterscheiden. Die Gewichtung der einzelnen Anteile hängt jedoch sehr stark vom Anwendungsfall, vom Temperaturniveau und von der Geometrie ab.

Faserisolierungen besitzen in der Regel nur einen sehr geringen Feststoffanteil in Form von lose übereinanderliegenden oder vernetzt angeordneten zylindrischen Fasern. Der verbleibende Hohlraum ist mit Gas, oft Luft, gefüllt. Bei Sonderanwendungen kann der die Fasern aufnehmende Raum auch evakuiert werden. Der Feststoffanteil einer Faserisolierung unterdrückt weitestgehend die direkte Wärmestrahlung zwischen den Begrenzungsflächen. Die Isolierung muß nun als optisch leitendes Material betrachtet werden, d. h. sie streut, absorbiert und emittiert Strahlung. Auch die freie Konvektion des Gases wird behindert, da die Vielzahl der Fasern einen nicht unerheblichen Strömungswiderstand darstellt. Durch das Verfüllen des Raumes mit einem Feststoff in Form von Fasern wird allerdings der Wärmetransport durch den Feststoff selbst möglich. Die Übergangswiderstände beim Faser-Faser-Kontakt sorgen jedoch dafür, daß der Leitung durch den Feststoff in der Regel keine entscheidende Bedeutung zukommt.

Durch eine Unterdrückung der Konvektion und der Wärmestrahlung können Faserisolierungen Werte der effektiven Wärmeleitfähigkeit erreichen, die im Bereich der Wärmeleitfähigkeit des ruhenden Gases liegen. In diesem Abschnitt sollen die einzelnen Mechanismen näher erläutert und Beziehungen zu ihrer rechnerischen Erfassung angegeben werden.

3.1 Feststoffleitung

In einer vollständig evakuierten Faserisolierung kann Wärme nur noch durch Wärmestrahlung oder über den Feststoff selbst übertragen werden. Bei sinkenden Temperaturen nimmt der Anteil der Strahlung jedoch rasch ab und wird schließlich unbedeutend. Bei extrem niedrigen Temperaturen unter Hochvakuum liegt nur noch Feststoffleitung vor.

Diese erfolgt über Wärmeflußpfade, die sowohl längs als auch quer zu den Faserachsen und über Kontaktstellen von Faser zu Faser verlaufen. Die diesen Effekt berücksichtigende Leitfähigkeit soll mit λ_f bezeichnet werden. Sie ist jedoch im Vergleich zur Wärmeleitfähigkeit durch das Gas oder durch die Wärmestrahlung für übliche Anwendungsfälle sehr gering.

Die Größe λ_F hängt in jedem Fall von der Wärmeleitfähigkeit des reinen homogenen Feststoffs ab, die mit λ_s bezeichnet wird. Für reines SiO_2 liegt λ_s im Temperaturbereich von 0 bis 1000°C zwischen 1 und 3 W/mK und hat einen positiven Temperaturgradienten. Reines Al_2O_3 leitet die Wärme noch besser, hat aber einen negativen Temperaturgradienten (Touloukian, 1967). Für keramische Mischfasern kann ein konstanter Wert von etwa $\lambda_s = 4 \text{ W/mK}$ angenommen werden.

Bei einer Anordnung der Fasern in parallelen gekreuzten Schichten erhöht sich die Anzahl der Kontaktstellen und damit auch die Feststoffleitung etwa mit der dritten Potenz des Feststoffanteils v_F . Für den Fall einer binderlosen Isolierung mit idealem Faserkontakt geben Hager und Steere (1967) die Beziehung

$$\lambda_F = 4 v_F^3 \lambda_s \quad (3.1.1)$$

an. Bei schlechtem Faserkontakt stellt der angegebene Wert eine Obergrenze für die Feststoffleitung dar.

Weitere in der Literatur angegebene Beziehungen berücksichtigen zum Beispiel den Kontaktstellen-Radius für gekreuzte zylindrische Fasern (Kaganer, 1969) oder die Anwesenheit eines Binders (Bankvall, 1972b). Die meisten Beziehungen unterscheiden sich aber nur in der Größe des Vorfaktors. Es liegt daher nahe, für die Feststoffleitung die Gleichung

$$\lambda_F = K_F v_F^3 \lambda_s \quad (3.1.2)$$

mit K_F als dimensionslosem Kontaktstellen-Faktor anzusetzen. Bei einer binderlosen keramischen Hochtemperatur-Faser sind die Kontaktstellenradien jedoch sehr klein und der Anteil der Feststoffleitung üblicherweise zu vernachlässigen. Die später aufgeführten Versuchsergebnisse bestätigen diese Annahme, die auch schon von Verschoor und Greebler (1952) und von Rath u. a. (1990) vertreten wird.

Ein eventuell vorhandener Binder kann einen wichtigen Beitrag zur Feststoffleitung leisten. Der Binder wird eingesetzt, um das Auseinanderfallen des Faserverbundes zu verhindern. Dadurch vergrößern sich jedoch zwangsläufig die Kontaktstellenradien der Fasern. Eine exakte Vorhersage des Beitrages der Feststoffleitung ist in diesem Fall jedoch schwierig, da der Binderanteil produktionsbedingt von Probe zu Probe unterschiedlich ist. Keramische Hochtemperaturfasern werden vielfach im kalten Zustand organisch gebunden. Bei Temperaturen um 250°C geht diese Bindung verloren, und es liegt dann ein loser Faserverbund vor.

3.2 Gasleitung

3.2.1 Wärmeleitfähigkeit eines freien Gases

Ein „freies Gas“ ist dadurch charakterisiert, daß die mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle klein ist im Vergleich zu den Abmessungen des Raumes, der das Gas umgibt. Die Wärmeleitfähigkeit unter diesen Voraussetzungen soll mit λ_g bezeichnet werden. Sie ist nach der kinetischen Gastheorie proportional zur freien Weglänge der Gasmoleküle L_g und zur Dichte ρ_g des Gases (vgl. Verschoor und Greebler, 1952).

Die *mittlere freie Weglänge* eines freien Gases L_g nimmt umgekehrt proportional mit dem Druck ab und läßt sich nach der kinetischen Gastheorie mit

$$L_g = L_{g,0} \frac{T/T_0}{p/p_0} \quad (3.2.1)$$

angeben (nach Bauer, 1988). Dabei ist $L_{g,0}$ die mittlere freie Weglänge der Gasteilchen bei der Temperatur $T_0 = 273,15 \text{ K}$ und dem Druck $p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Sie beträgt zum Beispiel für Helium 126,3 nm und für Luft 64,0 nm.

Da die *Dichte* eines Gases hingegen etwa proportional mit dem Druck ansteigt, ist die Wärmeleitfähigkeit des freien Gases λ_g in der Regel unabhängig vom Druck.

3.2.2 Wärmeleitfähigkeit eines eingeschlossenen Gases

Mit λ_g sei die Wärmeleitfähigkeit der Gasphase innerhalb eines porösen Mediums bezeichnet. Bedingt durch den Smoluchowski-Effekt ist λ_g immer kleiner als λ_g . In einem Gasraum, der von Festkörpern begrenzt ist, wird nämlich die normale Bewegung der Gasmoleküle so behindert, daß sich für den Wärmetransport in diesem System ein zusätzlicher Wärmetransportwiderstand einstellt (Bauer, 1988).

Mit L_F sei der „effektive Porendurchmesser“ des porösen Mediums bezeichnet. Bei einer Faserisolierung handelt es sich hier um die mittlere Entfernung zwischen zwei Fasern oder auch die mittlere freie Weglänge für ein *einzelnes* Gasmolekül innerhalb der Isolierung. Sie läßt sich abschätzen über die Beziehung

$$L_F = \frac{\pi}{4} \frac{\delta_f}{v_F} \quad (3.2.2)$$

(Verschoor und Greebler, 1952), wobei mit δ_f wieder der mittlere Faserdurchmesser bezeichnet wird. Ist L_F sehr groß im Vergleich zur freien Weglänge L_g des Gases, so wird sich das Gas im porösen Medium wie ein freies Gas verhalten. Bei Erniedrigung des Drucks häufen sich jedoch die Zusammenstöße zwischen Gasmolekülen und dem Feststoff, da die freie Weglänge des Gases ansteigt und schließlich beide Längen von der gleichen Größenordnung sind. Damit verkürzt sich die effektive freie Weglänge der Moleküle und die Wärmeleitfähigkeit des Gases wird ebenfalls kleiner.

Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung ergibt sich die mittlere freie Weglänge für alle Moleküle innerhalb eines porösen Stoffes zu

$$L_G = \frac{1}{\frac{1}{L_g} + \frac{1}{L_F}} = \frac{L_g L_F}{L_g + L_F} \quad (3.2.3).$$

Da die Wärmeleitfähigkeit eines Gases proportional zur freien Weglänge seiner Moleküle ist, gilt für ein eingeschlossenes Gas die Beziehung

$$\lambda_G = \lambda_g \frac{L_G}{L_g} = \lambda_g \frac{L_F}{L_g + L_F} \quad (3.2.4).$$

Dieser Gleichung liegt allerdings die Annahme zugrunde, daß die Kollisionen zwischen Gasmolekülen und Fasern die (Maxwellsche) Geschwindigkeitsverteilung der Gasmoleküle nicht beeinflussen (Bankvall, 1972b).

Die vereinfachten Beziehungen (3.2.3) und (3.2.4) lassen qualitativ den Schluß zu, daß die Wärmeleitfähigkeit des eingeschlossenen Gases mit sinkendem Druck immer kleiner wird. Literaturangaben, die Meßwerte der Wärmeleitfähigkeit von Faserisolationen im Vakuum beschreiben, bestätigen, daß bei Drücken unterhalb von 10^{-2} mbar (1 Pa) der Einfluß des Gases keine Rolle mehr spielt (Verschoor und Greebler, 1952; Imakoma u. a., 1989).

Im Gegensatz dazu kann bei atmosphärischem Druck und darüber die Verringerung der Wärmeleitfähigkeit eines Gases durch Einschluß in eine Faserisolation und damit der Smoluchowski-Effekt vernachlässigt werden. Aus einem Feststoffanteil von 10% und bei einem Faserdurchmesser von $3,5 \mu\text{m}$ läßt sich zum Beispiel nach Gl. (3.2.2) ein effektiver Porendurchmesser der Isolation von $27,5 \mu\text{m}$ ermitteln. Für Helium in einer üblichen Heißgasleitung bei einem Druck von mindestens 40 bar und einer Höchsttemperatur von 950°C beträgt nach Gl. (3.2.1) die freie Weglänge der Heliumatome jedoch maximal $0,014 \mu\text{m}$. Zwischen den beiden Werten liegen mehr als drei Größenordnungen. Die Fasern beeinflussen die tatsächliche Wärmeleitfähigkeit eines Gases unter Druck also nicht. Auch bei atmosphärischen Bedingungen liegt das Verhältnis der Längen noch fast bei 50, bei atmosphärischer Luft sogar fast bei 100.

3.3 Strahlung

Bei der Wärmeübertragung durch Strahlung in Fasermaterialien muß streng genommen zwischen Gasstrahlung und der Strahlung der Oberflächen unterschieden werden. Gase können Wärmestrahlung absorbieren und strahlen daher nach dem Kirchhoffschen Gesetz auch Wärme ab. Elementare Gase, Luft und die Edelgase sind jedoch bei Temperaturen bis 3000°C praktisch diatherm, d.h. durchlässig für Wärmestrahlen (Schlünder, 1988). Die Gasstrahlung kann bei der Betrachtung von Faserisolationen, die mit einem der oben genannten Gase gesättigt sind, also vernach-

lässigt werden. Eine Beschränkung auf die Betrachtung der Strahlung zwischen den Feststoff-Oberflächen ist damit zulässig.

Wichtige Grundlage zur Beschreibung der Strahlung von Oberflächen ist das Plancksche Gesetz, das die spektrale Strahldichte des schwarzen Körpers beschreibt (Planck, 1901; Siegel und Howell, 1972). Durch Differentiation dieser Beziehung nach der Temperatur läßt sich das Wiensche Verschiebungsgesetz herleiten, mit dem die Wellenlänge der maximalen Strahlungsintensität in Abhängigkeit von der Temperatur bestimmt werden kann. Im Bereich von 100 bis 1000°C liegen diese Maxima bei Wellenlängen zwischen 8 und 2 µm. Genau dort liegt aber auch der Durchmesser üblicher keramischer Fasern.

Bei einer Faserisolierung handelt es sich also um ein optisch leitendes Medium, das Strahlung emittiert, absorbiert und anisotrop streut. Soll die Strahlung exakt bestimmt werden, so muß die Strahlungstransportgleichung für jede Wellenlänge aufgestellt werden. Zusammen mit der integralen Energiegleichung ergibt sich die Lösung. Für die Betrachtung der Strahlung im Rahmen der Wärmeübertragung ist ein derartiger Rechenaufwand allerdings viel zu hoch. Die Verwendung eines vereinfachenden Modells ist daher anzustreben.

In der Literatur wird eine Vielzahl von Modellen zur Beschreibung des Strahlungstransportes in derartigen Medien diskutiert. Näherungslösungen wie das Plattenmodell (Nußelt, 1913), empirische Ansätze (zum Beispiel Thipgen und Short, 1959) oder Modelle mit einer für die Strahlung charakteristischen freien Weglänge (Hager und Steere, 1967) wurden schon früh für poröse Medien aufgestellt.

Für optisch dichte Medien schlagen Siegel und Howell (1972) das Diffusionsmodell der Strahlung vor. Das Modell berücksichtigt, daß die Strahlung in der Regel innerhalb des Mediums nur einen kurzen Weg zurücklegt, bevor sie absorbiert wird. Das Diffusionsmodell ist anwendbar, wenn die optische Dicke, das Produkt aus Extinktion und Schichtdicke, im betrachteten Wellenlängenbereich größer als 2 ist. Bei einer Faserisolierung mittlerer Packungsdichte hat die Extinktion etwa den Wert 2000 m⁻¹, und die oben genannte Bedingung ist bereits bei einer Schichtdicke von 1,0 mm erfüllt. Solche Materialien werden als optisch dicht bezeichnet. Bei einem festgelegten Temperaturgradienten ist dabei die durch Strahlung übertragene Wärmemenge unabhängig von der Schichtdicke und unabhängig vom Emissionskoeffizienten der umgebenden Wände.

Als Lösung des Diffusionsmodells ergibt sich für kleine Temperaturdifferenzen eine Leitfähigkeit der Wärmestrahlung nach der Gleichung

$$\lambda_{\text{Str}} = \frac{16}{3} \frac{n^2}{\sigma_e} \sigma T^3 \quad (3.3.1)$$

mit der Extinktion σ_e , der Strahlungskonstanten σ und n als Realteil des effektiven Brechungsindex der dispersen Isolationsstruktur, der bei hoher Porosität nahe eins ist (Reiss, 1988). Der Brechungsindex n soll aus diesem Grunde nicht weiter berücksichtigt werden. Vielmehr wird eine totale Extinktion E mit $E = \sigma_e/n^2$ eingeführt,

die im folgenden vereinfachend als *Extinktion* bezeichnet werden soll. Sie enthält den Einfluß des Brechungsindex, der allerdings gering ist.

Die für die Strahlungsleitfähigkeit verwendete Gleichung

$$\lambda_{\text{Str}} = \frac{16}{3} \frac{\sigma}{E} T^3 \quad (3.3.2).$$

soll gleichzeitig Definitionsgleichung für die effektive Extinktion E sein. Für Faserisolierungen steigt E linear mit der Packungsdichte ρ_{iso} der Isolierung und damit auch linear mit dem Feststoffanteil v_F an (Kamiuto u. a., 1982). Mit der spezifischen, auf die Packungsdichte bezogenen Extinktion e läßt sich also formulieren:

$$E = e \rho_{\text{iso}} = e v_F \rho_s \quad (3.3.3).$$

Die für eine Isolierung zu ermittelnde Größe ist somit die spezifische Extinktion e . Sie hängt sowohl von den optischen Eigenschaften des Faserrohmaterials als auch von der Geometrie der Fasern (Mittelwert und Verteilung von Durchmesser und Länge) und von der Temperatur ab.

Betrachtet man eine Isolierung über einer größeren Temperaturdifferenz, so ist die deutliche Veränderung des Stoffwertes λ_{Str} mit der Temperatur zu berücksichtigen. Die örtliche Temperatur T wird durch eine mittlere Strahlungstemperatur T_{Str} ersetzt. Diese bestimmt sich über

$$T_{\text{Str}}^3 = \frac{T_1^4 - T_2^4}{4(T_1 - T_2)} = \frac{(T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)}{4} \quad (3.3.4)$$

aus den Temperaturen T_1 und T_2 der Begrenzungsflächen (Reiss, 1988). Je höher das Temperaturniveau und je kleiner die Temperaturdifferenz, desto weniger weicht der korrigierte Wert von der arithmetischen Mitteltemperatur ab.

Eine proportionale Abhängigkeit der Strahlungsleitfähigkeit vom Ausdruck σT^3 geht bereits aus den oben erwähnten wesentlich früheren Überlegungen von Nußelt (1913) hervor. Bei seinem sehr anschaulichen Plattenmodell wird der effektive Porendurchmesser als gedachter Plattenabstand gewählt.

Eine Verbesserung bringt ein Modell, das berücksichtigt, daß aufgrund von Brechungseffekten die freie Weglänge für die Strahlung in Faserisolierungen größer ist als der effektive Porendurchmesser (Hager und Steere, 1967). Mit der Beziehung

$$\lambda_{\text{Str}} = C \frac{\delta_f}{v_F} \sigma T^3 \quad (3.3.5)$$

wird allerdings immer noch versucht, das Strahlungsproblem über eine Analyse der inneren Geometrie der Faserpackung zu lösen. C stellt einen konstanten Vorfaktor dar, für den aus der theoretischen Betrachtung ein Wert von 4,5 ermittelt wird. Die Autoren stellen jedoch fest, daß der wirkliche Wert von C sehr stark vom verwendeten Material abhängt. Aus experimentell ermittelten Daten der Wärmeleitfähigkeit im Vakuum ergibt sich ein Wert von $C = 9,5$ für Glasfasern bzw. 42 für eine

keramische Mischfaser. Das rein theoretische Modell kann die realen Fasereigenschaften also nicht ausreichend genau beschreiben.

Eine brauchbare Beziehung für die Extinktion erhält man allerdings aus der Kombination der Gleichungen (3.3.2) und (3.3.5). Es ergibt sich mit

$$E = \frac{16}{3C} \frac{V_F}{\delta_f} \quad (3.3.6)$$

eine vom Faserdurchmesser und vom Feststoffanteil abhängige Beziehung. Da jedoch in diese Gleichung immer noch eine Materialkonstante eingeht und auch die Verteilung des Faserdurchmessers nicht berücksichtigt wird, ist sie nicht von allgemeingültigem Charakter. Sie kann allerdings dazu verwendet werden, einen benötigten Extinktionswert mit Hilfe bekannter Daten von ähnlichen Materialien abzuschätzen. Aus dem Wert $C = 42$ und den weiteren angegebenen Stoffdaten läßt sich für die von Hager und Steere (1967) untersuchte keramische Faser eine spezifische Extinktion von $16,5 \text{ m}^2/\text{kg}$ berechnen, ein Wert, der sehr gut mit später ermittelten Daten anderer Autoren übereinstimmt (vgl. Kap. „4.6 Vergleich der Ergebnisse mit Literaturangaben“).

Je größer jedoch der Unterschied zwischen der Faser mit den bekannten Stoffwerten und der unbekannten Faser bezüglich Faserdurchmesser und chemischer Zusammensetzung ist, umso größer wird auch die Unsicherheit bezüglich des abgeschätzten Extinktionswertes sein. Eine experimentelle Überprüfung der Strahlungseleitfähigkeit bleibt schließlich auch hier notwendig.

3.4 Konvektion

Die Wärmeübertragung innerhalb eines porösen Mediums kann durch eine Konvektionsströmung teilweise erheblich erhöht werden. Dabei ist zwischen erzwungener und natürlicher Konvektion zu unterscheiden. Der Betrag der übertragenen Wärme hängt bei der *Zwangskonvektion* hauptsächlich vom Betrag der Reynolds-Zahl und der Prandtl-Zahl sowie von der Geometrie ab. Die wesentliche Kennzahl für die *natürliche Konvektion* ist die Grashof-Zahl:

$$\text{Gr} = \frac{g \beta \Delta T \ell^3}{(\eta/\rho)^2} \quad (3.4.1),$$

in die neben der Erdbeschleunigung g , der Temperaturdifferenz ΔT und der charakteristischen Länge ℓ noch der isobare Ausdehnungskoeffizient β , die Dichte ρ und die kinematische Viskosität η/ρ als Stoffwerte des Fluids eingehen.

Bei der Durchströmung eines porösen Körpers mit niedrigen Geschwindigkeiten kann als Impulserhaltungsgleichung das Darcy-Gesetz verwendet werden (vgl. Kap. „2.2 Das Darcy-Gesetz“). Dadurch ist hier die Darcy-Zahl

$$Da = \frac{k}{\rho^2} \quad (3.4.2)$$

zu berücksichtigen.

Für die in dieser Arbeit betrachteten Faserisolierungen wird nur die natürliche auftriebsinduzierte Konvektionsströmung betrachtet. Eine allgemeingültige Beziehung für ihren Einfluß auf den Wärmetransport kann hier nicht angegeben werden. Zur Ermittlung des Konvektionswärmestromes ist deswegen eine numerische Lösung der Erhaltungsgleichungen notwendig.

3.5 Effektive Wärmeleitfähigkeit einer Faserisolierung

In den vorangegangenen Abschnitten wurde dargelegt, daß der Wärmeübertragung in porösen Medien verschiedene Phänomene zugrundeliegen. Es wird dabei deutlich, daß die effektive Wärmeleitfähigkeit der Isolierung kein echter Stoffwert ist, sondern auch von der Geometrie und den Strömungsverhältnissen abhängt. Befindet sich jedoch das Gas oder die Flüssigkeit im ruhenden Zustand und ist die Schichtdicke der Isolierung so groß, daß die Strahlung innerhalb der Isolierung nicht von den Begrenzungsflächen beeinflusst wird, so hängt der Wärmedurchgang durch die Isolierung nur noch von der Wärmeleitfähigkeit des Fluids und der Temperatur ab. Der zugehörige Stoffwert soll als *Wärmeleitfähigkeit der Isolierung* λ_{iso} ohne den Zusatz „effektiv“ bezeichnet werden.

Im folgenden wird nun eine Beziehung vorgestellt, mit der die Wärmeleitfähigkeit von gasgesättigten Faserisolierungen berechnet werden kann. Ein poröses Medium besteht stets aus zwei Komponenten, dem Feststoff und dem Fluid. Beide besitzen eine jeweils stoffspezifische Wärmeleitfähigkeit. Vernachlässigt man zunächst einmal die Strahlung, so kann mit λ_L die Wärmeübertragung durch Leitung bezeichnet werden. Als Extremfälle sind eine Reihen- bzw. eine Parallelschaltung von Feststoff und Fluid denkbar. Beschränkt man sich auf gasgesättigte Isolierungen, so muß λ_L demnach im Bereich

$$\left(\frac{v_F}{\lambda_s} + \frac{v_G}{\lambda_G} \right)^{-1} \leq \lambda_L \leq v_F \lambda_s + v_G \lambda_G \quad (3.5.1)$$

liegen (Grimvall, 1987). Die linke Grenze beschreibt dabei die Reihenschaltung, die rechte Seite die Parallelschaltung der einzelnen Materialien; der reale Fall liegt dazwischen.

Aufgrund der besonderen geometrischen Verhältnisse können bezüglich des Wärmetransportes in gasgesättigten Faserisolierungen zwei Annahmen getroffen werden (Rath u. a., 1990):

1. Wegen des im Verhältnis zu ihrem Durchmesser sehr großen mittleren Abstandes der Fasern sind die Wärmestromlinien überall parallel.

2. Der thermische Widerstand des Feststoffes kann bezüglich des Leitungswiderstands der Gasphase vernachlässigt werden.

Mit diesen Annahmen läßt sich die Wärmeleitfähigkeit durch Leitung über die Beziehung

$$\lambda_L = K_F v_F^3 \lambda_s + v_G^{-K_G} \lambda_g \quad (3.5.2)$$

ermitteln. Der erste Summand bezeichnet die reine Feststoffleitung im Vakuum, wie sie in Kap. „3.1 Feststoffleitung“ aufgestellt wurde. λ_g ist die Wärmeleitfähigkeit des freien Gases, die für die hier betrachteten Gase innerhalb von Faserisolierungen der Leitfähigkeit λ_g des eingeschlossenen Gases entspricht (vgl. Kap. „3.2.2 Wärmeleitfähigkeit eines eingeschlossenen Gases“). Die vorangestellte Korrekturfunktion $v_G^{-K_G}$ mit K_G als „Gasexponenten“ berücksichtigt, daß in realen Faserisolierungen auch ein beträchtlicher Anteil von Fasern parallel zum Wärmestrom orientiert ist (Rath u. a., 1990). Das führt dazu, daß durch die Anwesenheit eines Gases die Wärmeleitfähigkeit der Isolierung um einen größeren Beitrag als nur um λ_g steigen wird. Der Wert des Vorfaktors ist größer als 1, der Wert K_G dementsprechend positiv definiert und größer als 1.

Die Wärmeübertragung durch Leitung λ_L wird nun noch überdeckt durch die thermische Strahlung. Für diese kann man allerdings davon ausgehen, daß sowohl der thermische Widerstand des Feststoffes als auch die parallel zum Wärmestrom ausgerichteten Fasern von vernachlässigbarer Bedeutung sind. Die charakteristische mittlere Weglänge der Strahlung, auch als freie Weglänge der Photonen bezeichnet, ist auf jeden Fall größer als der effektive Porendurchmesser. Für eine Faserisolierung unter zumindest atmosphärischem Druck liegt sie damit um Größenordnungen über der freien Weglänge der Gasmoleküle (vgl. das Zahlenbeispiel in Kap. „3.2.1 Wärmeleitfähigkeit eines freien Gases“). Für die meisten Anwendungsfälle ist demnach eine einfache Summation des in Gleichung (3.5.2) genannten Anteils für die Leitung und der in Gleichung (3.3.2) angegebenen Strahlungsleitfähigkeit ausreichend genau:

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{Iso}} &= \lambda_L + \lambda_{\text{Str}} \\ &= K_F v_F^3 \lambda_s + v_G^{-K_G} \lambda_g + \frac{16}{3} \frac{\sigma}{E} T_{\text{Str}}^3 \end{aligned} \quad (3.5.3).$$

Der Konvektionsanteil der Wärmeleitfähigkeit ist in dieser Beziehung, wie oben erwähnt, nicht berücksichtigt. Er soll durch die Simulation der Strömung auf dem Rechner ermittelt werden. In die Energiegleichung dürfen daher nur die Anteile von Gas-, Feststoff- und Strahlungsleitung eingesetzt werden.

Im Vakuum ergibt sich die Wärmeleitfähigkeit der Isolierung aus der einfachen Addition von reiner Feststoffleitung und Strahlungsleitung (vgl. Strong u. a., 1960). Durch entsprechende Messungen kann hier der Anteil der Feststoffleitung λ_f und die spezifische Extinktion e ermittelt werden (Büttner u. a., 1983). Aus λ_f ergibt sich der unbekannte Kontaktstellenfaktor K_F . Mit dieser Kenntnis läßt sich schließlich aus Messungen der Wärmeleitfähigkeit unter atmosphärischen Bedingungen der Gasexponent K_G ermitteln.

4. Messung des Strahlungsanteils der Wärmeleitfähigkeit einer ausgewählten Faserisolierung

Im Abschnitt 3 wurde bereits ausgeführt, daß zahllose Theorien zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Faserisolierungen existieren. Durch eigene Versuche soll für eine für den Hochtemperatureinsatz geeignete keramische Faser der Strahlungsanteil an der Wärmeleitfähigkeit ermittelt werden. Dabei ist auch zu überprüfen, ob aus den allgemein üblichen Herstellerangaben für die Wärmeleitfähigkeit in atmosphärischer Luft auf diesen Strahlungsanteil der Wärmeleitfähigkeit geschlossen werden kann.

Bei der verwendeten Isolierung handelt es sich um eine Fasermatte, die durch Zugabe eines organischen Binders auf der Grundlage der CERACHEM-Faser hergestellt wird. Diese keramische Mischfaser, deren charakteristische Stoffdaten in Abb. 1 aufgelistet sind, wird nach dem Blasen zerkleinert und durch einen organischen Binder gebunden. Die Bindung geht oberhalb von 250°C verloren, und es liegt dann ein loser Faserverbund vor. Ein Vorteil dieses Produktes gegenüber den binderlosen Nadelfilzen und gestopfter Mineralwolle besteht in der Verringerung des shot-Anteils von 25 - 50 % auf 10 - 20 %. Unter dem „shot-Anteil“ versteht man den Anteil des Faserrohmaterials, der nicht zu Fasern zerblasen wurde und sich in der Regel in der Form von kleinen Kügelchen zwischen den Fasern befindet.

Bezeichnung:	CERACHEM Fiber
Maximale Anwendungstemperatur in oxidierender Atmosphäre:	1425°C
Farbe ohne Binder:	weiß
mittlerer Faserdurchmesser:	3,5 μm
Rohdichte der Faser:	2650 kg/m ³
Chemische Analyse:	
SiO ₂	49,70 %
Al ₂ O ₃	35,10 %
ZrO ₂	14,70 %
Fe ₂ O ₃	0,10 %
TiO ₂	0,05 %
CaO	0,04 %
MgO	0,01 %
Na ₂ O und K ₂ O	0,20 %

Abb. 1. Charakteristische Daten der verwendeten Faser (Gossler, 1990)

Im Rahmen dieser Arbeit wurden Fasermatten mit zwei verschiedenen Packungsdichten eingesetzt und sowohl unter atmosphärischen Bedingungen mit Luft als auch im Vakuum untersucht. In Abb. 2 sind die charakteristischen Daten der durchge-

führten Versuchsreihen aufgelistet. Bei den ersten drei Reihen wurde eine Maximaltemperatur von 600°C nicht überschritten, um empfindliche Teile des Versuchsaufbaus (Heizungen, Thermoelemente) nicht zu gefährden. Erst die letzte Reihe schließt Temperaturen fast bis 1000°C ein. Beim endgültigen Abbau der Anlage waren die Heizleitungen dann tatsächlich derart versprödet, daß sie teilweise abbrachen. Auch die Thermoelemente konnten aufgrund der thermischen Alterung bei den hohen Temperaturen nicht weiter verwendet werden.

Reihe	Anzahl der Versuche	Packungsdichte	Temperaturbereich	Gasart
1	5	130,5 kg/m ³	114 - 561°C	Luft, 1 bar
2	5	130,5 kg/m ³	127 - 572°C	Vakuum
3	5	266,1 kg/m ³	150 - 544°C	Luft, 1 bar
4	9	266,1 kg/m ³	102 - 959°C	Vakuum

Abb. 2. Übersicht über die durchgeführten Versuchsreihen

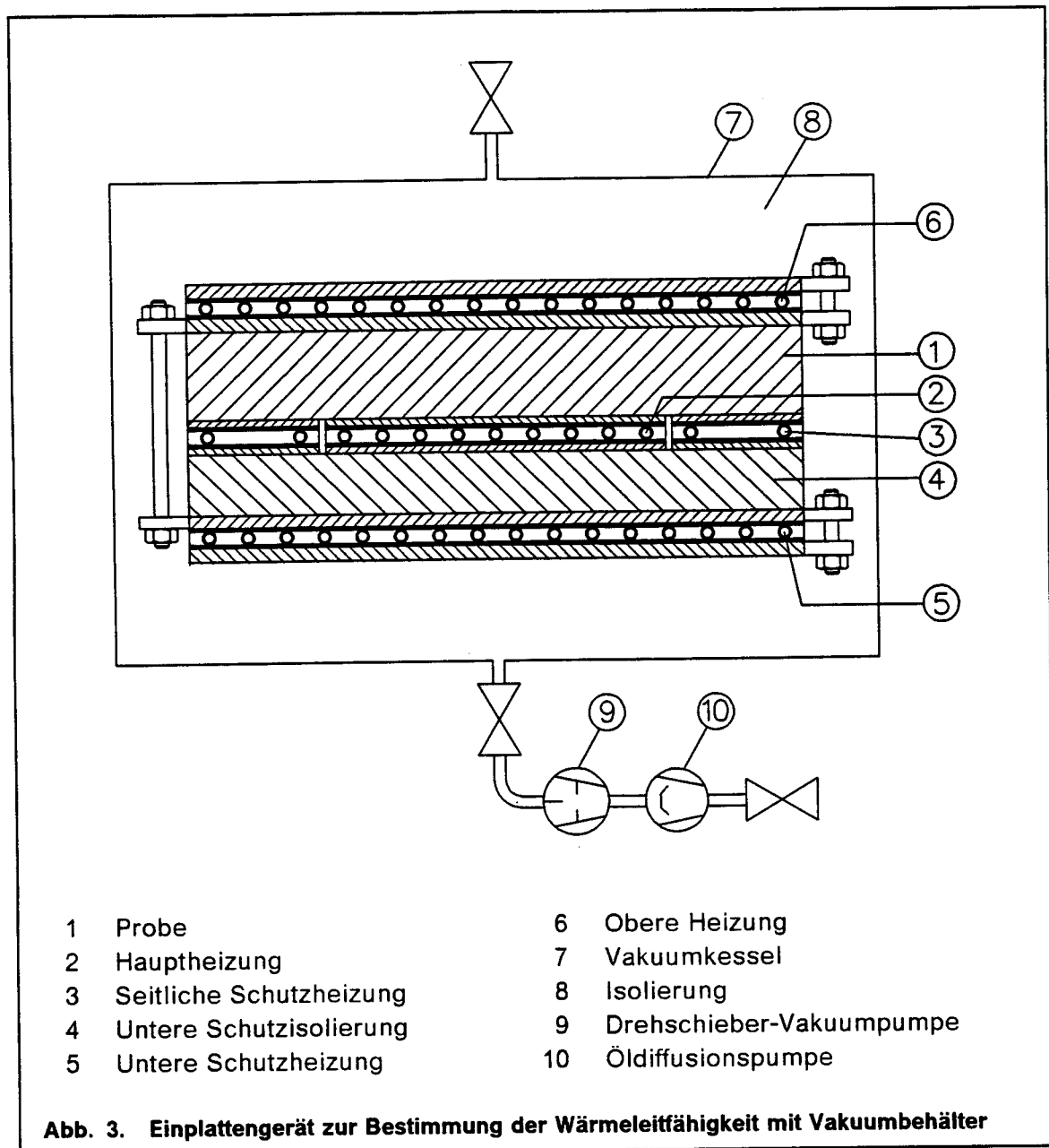
In den folgenden Kapiteln wird zunächst der Aufbau der Meßapparatur beschrieben und bewertet. Daran schließt sich eine Vorstellung und Auswertung der Versuchsergebnisse an.

4.1 Aufbau der Versuchsapparatur

Zur Messung der Wärmeleitfähigkeit von Isolierstoffen wird in der Regel das Plattenverfahren benutzt. Diese Methode ermöglicht zur Zeit die repräsentativsten Messungen bei Wärmeleitfähigkeiten unter 1 W/m K (Klarsfeld, 1984) und ist in vielen Ländern genormt, in Deutschland zum Beispiel als DIN 52612, Teil 1 (1979), unter der Bezeichnung „Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit mit dem Plattengerät“.

Die Norm unterscheidet das Ein- und das Zweiplattenverfahren. Letzteres ist allerdings für eine elastische Faserisolierung nur beschränkt einsetzbar, da hier stets zwei Proben mit annähernd identischen Eigenschaften verwendet werden müssen. Die Einstellung einer definierten Packungsdichte stellt jedoch für die zu testenden binderhaltigen Faserisolierungen ein Problem dar. Die Dichte kann vor der Versuchsreihe nur ungefähr bestimmt werden, da immer der Binder mitgewogen wird. Nach dem Ausheizen ist das Faserpaket jedoch so instabil, daß es beim Wägen zerstört werden könnte. Die exakte Dichtebestimmung erfolgt also im Anschluß an die Versuchsreihen, wenn das Paket nicht mehr benötigt wird. Aus diesem Grunde wurde bei den durchgeführten Versuchen ein leicht abgewandeltes Einplattenverfahren (siehe Abb. 3) verwendet, so daß nicht zwei Isolierschichten gleicher Dichte herzustellen waren.

Bei diesem Prüfverfahren wird die mittlere Wärmeleitfähigkeit einer horizontalen Probe ermittelt. Die Probe besteht im vorliegenden Fall aus einem Faserpaket, in dem die einzelnen Faserschichten ebenfalls horizontal und damit senkrecht zum Wärmestrom ausgerichtet sind. Das Paket erhält seine Form, indem die geschichteten Fasern bei der Herstellung mit einem organischen Binder versetzt und gepreßt werden. Nach dem Aushärten des Binders kann durch das Zuschneiden eine quadratische Form des Paketes erreicht werden.



Unterhalb der Probe ist zwischen zwei Heizplatten die Hauptheizung angeordnet. Sie ist nach unten durch eine weitere Faserschicht, die untere Schutzisolierung, und eine Gegenheizung, die als untere Schutzheizung bezeichnet wird, abgeschirmt. Deren Temperatur ist so zu regeln, daß über die Schutzisolierung keine Wärme übertragen wird.

Der Wärmefluß von innen nach außen wird durch entsprechende Einstellung der seitlichen Schutzheizung, auch Heizring genannt, unterbunden. Die in der Hauptheizung zugeführte und über die Heizplatten abgegebene Leistung kann demnach nur nach oben durch die Probe abgeführt werden. Mit Hilfe der oberen Heizung wird die gewünschte Temperaturdifferenz über der Probe eingestellt.

Der beschriebene Versuchsaufbau ist noch von gestopfter Mineralwolle als Wärmedämmstoff umgeben und in einem vakuumdicht verschließbaren Behälter platziert. So können Untersuchungen unter atmosphärischen Bedingungen und im Vakuum durchgeführt werden.

Die Abmessungen der verwendeten Versuchsausrüstung sind der Aufstellung in Abb. 4 zu entnehmen. Mit den angegebenen Daten sind die in der DIN 52612, Teil 1 (1979), geforderten Bedingungen für den Versuchsaufbau erfüllt.

Seitenlänge der Heizplatte:	$b = 250 \text{ mm}$
Breite des seitlichen Heizrings:	100 mm
Dicke der Probe:	$s_{\text{iso}} = 68 \text{ mm}$
Dicke der unteren Schutzisolierung:	50 mm
Breite des Spaltes zwischen Hauptheizung und Heizring:	$< 1 \text{ mm}$
Innendurchmesser des Kessels:	1000 mm
Höhe des Kessels:	600 mm
Länge des Heizdrahtes der Hauptheizung ² :	$\ell_{\text{HH}} = 7500 \text{ mm}$
Länge des Ansatzes der Hauptheizung ² :	$\ell_{\text{HH,A}} = 290 \text{ mm}$

Abb. 4. Abmessungen des verwendeten Einplattengerätes

Die vier elektrisch betriebenen Heizungen bestehen aus Kanthal[®] - Heizdrähten³ mit einem Durchmesser von 1,5 mm. Diese sind in Bögen mit einem Abstand von etwa 8 mm verlegt und beidseitig zwischen eine Faserschicht mit einer Stärke von etwa 3 mm eingebettet.

Die Heizleiter der oberen Heizung und der unteren Schutzheizung sind zusätzlich beidseitig durch eine 0,5 mm dicke Glimmerplatte gegen die abschließende 10 mm starke Platte aus Edelstahl elektrisch isoliert. An den vier äußeren Ecken befinden sich Ösen, über die die Platten verschraubt sind. Sie können so als komplette Einheit gehandhabt werden.

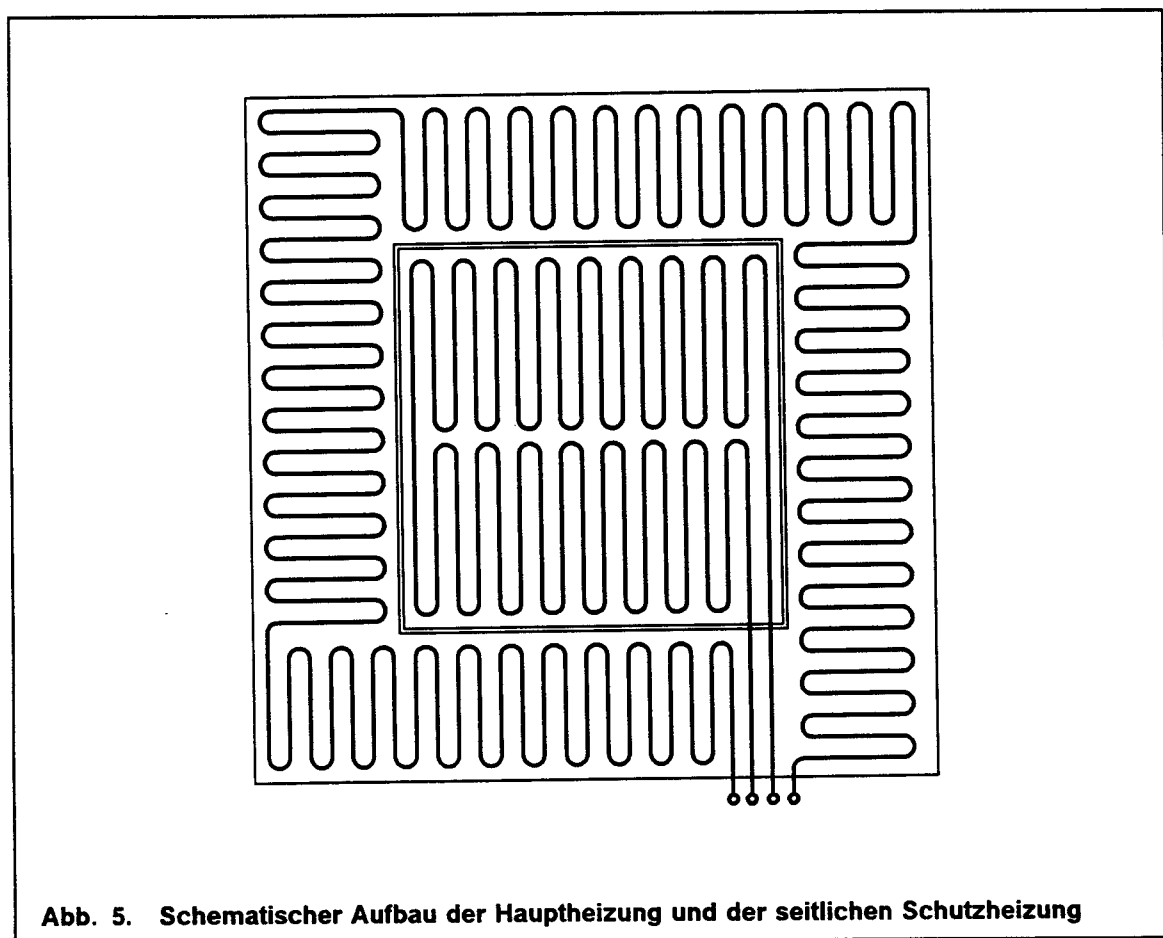
² vgl. Abb. 5

³ KANTHAL A-1 ist eine Hochtemperatur-Legierung aus 72 % Eisen, 22 % Chrom, 5,5 % Aluminium und 0,5 % Kobalt, die bis zu einer Heizleiter-Temperatur von 1400°C eingesetzt werden kann (Kanthal, 1980). Ein großer Vorteil dieses Materials besteht in der sehr geringen Temperaturabhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstandes.

Die zu beheizende Fläche von 450 x 450 mm wird bei diesen beiden Heizungen durch 4 Reihen à 55 Halbbögen abgedeckt. Einschließlich der zugehörigen Viertelkreise entspricht das einer effektiven Länge von 112,5 mm pro Halbbogen und einer Gesamtlänge der Heizung von 24,75 m.

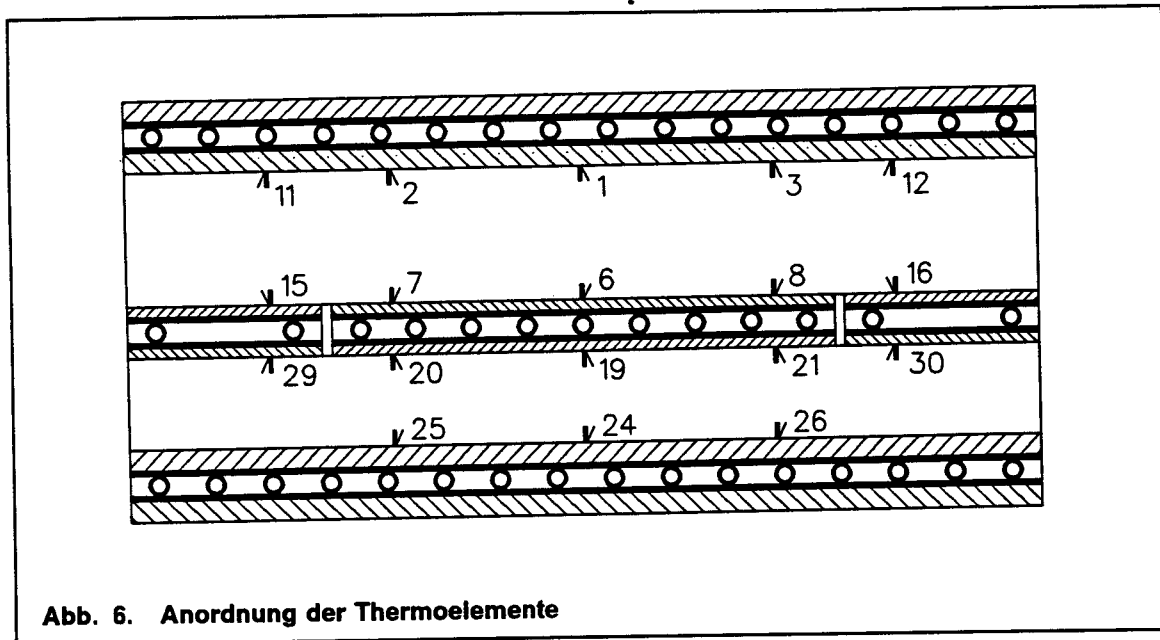
Der Aufbau der Hauptheizung und der seitlichen Schutzheizung ist ähnlich und schematisch in Abb. 5 dargestellt. Die Dicke der Edelstahlplatten beträgt bei diesen Heizungen jedoch lediglich 3 mm, um die seitliche Wärmeabfuhr zu verkleinern. Ebenso wird auf Glimmerplatten verzichtet, da beim Einbau einer neuen Faserisolierung auch die Heizleitungen stets in eine neue Faserschicht gebettet werden und dadurch die elektrische Isolierung sichergestellt ist.

Die Hauptheizung besteht aus zwei Reihen mit jeweils 30 Halbbögen à 125 mm, wobei sich eine Gesamtlänge von 7,5 m ergibt. Die Ansätze, die unten im Bild sichtbar sind, müssen mit zur seitlichen Schutzheizung gerechnet werden, so daß diese aus vier Reihen à 55 Halbbögen mit einer Gesamtlänge von 22,0 m besteht. (In Abb. 5 sind aus Gründen der Übersichtlichkeit weniger Bögen dargestellt.)



Die obere Platte der unteren Schutzheizung und die untere Platte der oberen Heizung sind über weitere vier Ösen am äußeren Rand über eine Gewindestange miteinander verschraubt. An dieser Gewindestange sind auch die Heizplatten der Hauptheizung fixiert, so daß hier die Schichtdicke der untersuchten Isolierung eingestellt werden kann. In Abb. 3 sind aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht alle Ösen dargestellt.

Über die Anordnung der insgesamt 30 Doppel-Thermoelemente gibt Abb. 6 Auskunft.



Die beiden Thermoelemente mit den Bezeichnungen 4 und 5 sind in der gleichen Ebene angeordnet wie die Elemente 2 und 3 und haben den gleichen Abstand von der Mitte wie diese, allerdings nach vorne bzw. nach hinten. Sie sind daher in diesem Schnitt nicht zu sehen. Für die hier ebenfalls nicht darstellbaren Thermoelemente 9, 10, 22, 23, 27 und 28 gilt der gleiche Zusammenhang.

4.2 Durchführung der Versuche

Nach dem Einbau einer neuen Isolierung muß zunächst der organische Binder ausgetrieben werden. Dazu wird der Versuchsaufbau über 24 Stunden bei einer Temperatur von 400°C ausgeheizt. Nach Herstellerangaben (Manville, 1987) verflüchtigt sich der Binder rückstandsfrei bei Temperaturen oberhalb von 200°C, und es liegt dann ein miteinander verfilzter, sonst aber loser Faserverband mit der vollen Flexibilität der keramischen Faser vor. Im Anschluß an das beschriebene Verfahren kann also von einer binderlosen Isolierung ausgegangen werden. Der Binder leistet keinen Beitrag mehr zur Wärmeleitfähigkeit.

Beim Anfahren eines Versuchspunktes wird nun über die Hauptheizung eine definierte und konstante Heizleistung zugeführt. Die obere Heizung ist so geregelt, daß nach oben immer eine sich zeitlich nicht ändernde Temperaturdifferenz $\Delta T_{\text{Versuch}}$ von etwa 50 K besteht. Die seitliche und die untere Schutzheizung sind so geregelt, daß keine Wärme zur Seite oder nach unten abfließt. Das Temperaturniveau wird sich im Verlaufe des Versuches derart einstellen, daß genau die zugeführte Heizleistung nach oben abgegeben wird. Es wird auf jeden Fall ein stabiler Zustand erreicht, da die Wärmeleitfähigkeit mit steigender Temperatur kontinuierlich ansteigt. Dieser

Ausgleichsvorgang kann allerdings einige Tage dauern. Eine Verkürzung der Zeit ist möglich, indem man vorab die Anlage von Hand auf das in etwa erwartete Temperaturniveau einstellt.

Als Ergebnis eines jeden Versuches erhält man die Versuchstemperatur T_{Versuch} , bei der die Wärmeleitfähigkeit gerade so groß ist, daß bei einer Temperaturdifferenz von 50 K die eingestellte Heizleistung durch die Isolierung übertragen werden kann. Zusammen mit den Geometriedaten (vgl. Abb. 4) kann die mittlere Wärmeleitfähigkeit ermittelt werden:

$$\lambda_{\text{Iso}} = \frac{s \dot{Q}_H}{a^2 \Delta T_{\text{Versuch}}} \quad (4.2.1)$$

Bei einer kritischen Betrachtung der Meßgenauigkeit der einzelnen Meßgrößen ist festzustellen, daß mit diesem einfachen Meßverfahren keine hinreichende Genauigkeit zu erzielen ist. In Abschnitt 4.3.4. wird ein verbessertes Verfahren vorgestellt, das zu Ergebnissen innerhalb brauchbarer Fehlergrenzen führt.

Bei der Durchführung eines Versuches werden folgende Größen über einen 30-Kanal-Hybriddrucker mit einem Abtastzyklus von 6 sec festgehalten:

- der Spannungsabfall U_H der Hauptheizung,
- der Heizstrom I_H der Hauptheizung,
- die Temperaturwerte von insgesamt 26 Meßstellen,⁴
- die Umgebungstemperatur T_{Umgeb} und
- der Druck p bei den Vakuumversuchen

Aus den gemessenen Werten können über den Mathematikteil des Druckers (weitere 30 Kanäle) bei jeder Abtastung die folgenden Mitteltemperaturen bzw. gemittelten Temperaturdifferenzen errechnet werden:

- die obere Temperatur der Probe T_{oben} aus den Werten T_1 bis T_5 ,
- die untere Temperatur der Probe T_{unten} aus den Werten T_6 bis T_{10} ,
- die Versuchstemperatur T_{Versuch} als Mittelwert aus T_{oben} und T_{unten} ,
- die Temperaturdifferenz des Versuchspunktes $\Delta T_{\text{Versuch}}$ als Differenz aus T_{unten} und T_{oben} ,
- die obere Temperatur der Schutzisolierung $T_{\text{Siso,oben}}$ aus den Werten T_{19} bis T_{21} , wobei die Randtemperaturen doppelt gewichtet werden,

⁴ Die Elemente 22, 23 und 27, 28 dienen lediglich der Regelung und werden nicht quantitativ ausgewertet.

24

1. Die Thermospannungen der Meßstellen 1 und 6 werden auf zwei Eingangskanäle des Reglers der oberen Heizung gegeben. Dieser wertet die Temperaturen aus und bildet die Differenz, die mit dem Sollwert, einer Temperaturdifferenzangabe in K, verglichen wird.
2. Die erzeugten Thermospannungen der Meßstellen 15 bis 18 werden durch Reihenschaltung addiert und von den ebenfalls in Reihe geschalteten Signalen der Meßstellen 7 bis 10 abgezogen. Die resultierende Spannung ist proportional zur Randtemperaturdifferenz ΔT_{Rand} und damit ein geeignetes Eingangssignal für den Regler der seitlichen Schutzheizung. Der Regler kann dieses Spannungssignal im mV-Bereich allerdings nicht in eine Temperaturdifferenz umrechnen. Der Sollwert muß daher ebenfalls als mV-Angabe eingegeben werden.
3. Die Regelung der unteren Schutzheizung unterscheidet sich von der der seitlichen Schutzheizung nur durch die Position und die Anzahl der Thermoelemente. In zwei Reihen sind die Meßstellen 19 bis 23 in Differenz zu den Meßstellen 24 bis 28 geschaltet. Der hier ebenfalls als Spannungsgröße einzugebende Sollwert wird jedoch stets konstant bei 0,00 mV belassen.

Aus dem Sollwert-Istwert-Vergleich und dem zeitlichen Verlauf der Abweichung bestimmt der kontinuierlich arbeitende Regler das Steuersignal für ein Thyristorstellglied, an welches die entsprechende Heizung angeschlossen ist. Bei der Regelung der oberen Heizung und der unteren Schutzheizung wird ein PI-Regler verwendet, bei der seitlichen Schutzheizung aufgrund der wesentlich kürzeren Ansprechzeiten ein PID-Regler.

4.3 Kritische Betrachtung der Meßgrößen

Wie oben erwähnt, erfolgt die Meßwerterfassung und -auswertung über einen 30-Kanal-Hybriddrucker. Mit dem verwendeten Gerät können Gleichspannungen bis 50 V und bei Einsatz von NiCr-Ni - Thermoelementen Temperaturen bis 1370°C gemessen werden (Yokogawa, 1989). Je nach Meßbereich und Art der Messung ergibt sich ein spezieller Fehlerbereich, der im folgenden abgeschätzt werden soll.

4.3.1 Fehler bei der Bestimmung des Wärmestromes

Der definiert zugeführte Wärmestrom wird berechnet aus dem Produkt von Heizspannung und Heizstrom. Es ist daher zunächst festzustellen, mit welcher Genauigkeit diese beiden Größen bestimmt werden können.

Die **Heizspannung** wird an den Kanthal[®] - Heizdrähten abgegriffen, kurz bevor diese in den Heizring eintreten. Der gemessene Spannungswert setzt sich damit aus dem Spannungsabfall in der Hauptheizung und aus dem Spannungsabfall in den beiden

Ansätzen der Hauptheizung zusammen. Die Ansätze bestehen ebenfalls aus dem Heizleitermaterial Kanthal[®]. Die hier zugeführte Heizleistung ist aber der seitlichen Schutzheizung zuzurechnen und nicht der Hauptheizung. Der gemessene Wert muß also um den Spannungsabfall im Ansatz vermindert werden, was über eine Korrektur anhand der Geometrieverhältnisse möglich ist. Dazu wird der gemessene Wert durch Multiplikation mit einem geometrischen Korrekturfaktor f verkleinert. Mit den in Abb. 4 auf Seite 20 angegebenen Abmessungen der Längen ℓ_{HH} und $\ell_{HH,A}$ ergibt sich f zu:

$$f = \frac{\ell_{HH}}{\ell_{HH} + \ell_{HH,A}} = \frac{7500 \text{ mm}}{7500 \text{ mm} + 290 \text{ mm}} = 0,9628 \quad (4.3.1).$$

Die Länge der Ansätze kann mit einer Toleranz von $\pm 2 \text{ mm}$ bestimmt werden, die Gesamtlänge der Hauptheizung etwa mit $\pm 10 \text{ mm}$, so daß sich für den Korrekturfaktor f und damit für den berechneten Wert der Heizleistung ein Fehler von $\pm 0,05 \%$ ergibt.

Streng genommen steigt der spezifische elektrische Widerstand des Kanthal[®] - Heizdrahtes mit der Temperatur. Er wird also kleiner, wenn dieser aus dem Heizring in die kühlere Umgebung austritt. Beim verwendeten Material beträgt die Veränderung aber weniger als 1% bei einer Temperaturdifferenz von 100 K .

Unter der Annahme, daß sich der spezifische Widerstand des Heizleiters im betrachteten Bereich nicht signifikant verändert und der Spannungsabfall in der Meßleitung ebenfalls vernachlässigt werden kann, ist also die Korrektur zur Ermittlung der echten Heizspannung über die Längenverhältnisse der Hauptheizung erlaubt.

Der verwendete Hybriddrucker arbeitet bei der Spannungsmessung mit einer Genauigkeit von $\pm (0,05\% \text{ des Ausschlages} + 5 \text{ Stellen})$ im Meßbereich von $-20,000$ bis $20,000 \text{ mV}$. In allen anderen Meßbereichen beträgt sie nach Herstellerangaben (Yokogawa, 1989) $\pm (0,05\% \text{ des Ausschlages} + 2 \text{ Stellen})$. Die ungünstigste Messung erfolgt, wenn eine Heizspannung knapp oberhalb von 2 V im Bereich $-6,000$ bis $6,000 \text{ V}$ gemessen werden muß. Hier ergibt sich ein relativer Meßfehler von $\pm 0,15 \%$. In allen anderen Fällen ist der Fehler kleiner. Die gesamte Unsicherheit bei der Spannungsmessung beträgt also etwa $0,20 \%$.

In der Zuleitung der Hauptheizung befindet sich ein $0,01 \text{ - Ohm}$ Meßwiderstand mit einer zulässigen Toleranz von weniger als $\pm 0,05 \%$. Der Spannungsabfall am Meßwiderstand wird bestimmt und der **Heizstrom** daraus über die Ohmsche Gleichung berechnet. Der ungünstigste Fall tritt ein, wenn ein Strom von $0,2 \text{ A}$, d. h. eine Spannung von 2 mV , gemessen werden muß. Der Fehler im kleinsten Meßbereich beträgt jetzt $\pm 0,30 \%$. Bei der Umrechnung durch den Schreiber auf einen Stromwert von $0,200 \text{ A}$ ergibt sich ein Abbruchfehler von weiteren $\pm 0,25 \%$.

Die gesamte Unsicherheit bei der Strommessung beträgt bei kleinen Strömen also etwa $0,60 \%$.

Addiert man die Fehler, die bei der Strom- und Spannungsmessung entstehen, so erhält man für den **Wärmestrom**, das Produkt aus Heizstrom und Heizspannung, einen resultierenden Fehler von $\pm 0,80 \%$.

4.3.2 Fehler bei der Bestimmung der geometrischen Daten und der Dichte

Die Verschraubungen des Versuchsaufbaus sind so einzustellen, daß die **Schichtdicke** der Proben mit einer Genauigkeit von etwa $\pm 0,2$ mm bestimmt werden kann, was bei einer Dicke von 68 mm einem Fehler von $\pm 0,29$ % entspricht.

Bei der Breite der Hauptheizung und damit bei der **Breite der Probe** beträgt die Unsicherheit $\pm 0,5$ mm, und damit der relative Fehler $\pm 0,20$ %.

Da bei der Berechnung der Wärmeleitfähigkeit der Quotient aus Heizleistung und Temperaturdifferenz durch die Fläche, also durch das Quadrat der Probenbreite, dividiert und mit der Schichtdicke multipliziert wird, beträgt der gesamte Geometriefehler etwa $\pm 0,70$ %.

Die **Packungsdichte der Isolierung** wird durch Wägen nach dem Einsatz bestimmt. Eine Wägung vor dem Einsatz erfolgt zwar zur Kontrolle, kann aber nicht zur Bestimmung der Packungsdichte herangezogen werden, da hier noch der organische Binder enthalten ist. Dieser wird jedoch zu Beginn einer jeden Versuchsreihe ausgetrieben und hat somit keinen Einfluß mehr auf die später gemessene Wärmeleitfähigkeit.

Die verwendete Digitalwaage hat eine Ablesbarkeit von 0,1 g und eine Linearität von $\pm 0,1$ g, was bei einem Gewicht von 1800 g zusammen einen Fehler von etwa 0,01 % ergibt. Die entscheidende Fehlerquelle bei der Dichtebestimmung ist jedoch die Genauigkeit der Längenmessung. Wie oben ausgeführt, ergibt sich bei der Bestimmung der Schichtdicke ein Fehler von 0,29 %. In horizontaler Richtung erstrecken sich die quadratischen Faserpakete sowohl über den Bereich der Hauptheizung als auch über die seitliche Schutzheizung. Die Gesamtbreite der Pakete kann mit 450,0 mm $\pm 0,2$ mm oder mit einer relativen Toleranz von 0,05 % bestimmt werden. Die Angabe der Packungsdichte enthält somit insgesamt eine Unsicherheit von $\pm 0,40$ %.

Es ist noch zu klären, wie sich ein Fehler bei der Bestimmung der Packungsdichte auf die Genauigkeit der Angabe der Wärmeleitfähigkeit auswirkt. Formt man dazu die verwendete Beziehung für die Wärmeleitfähigkeit (3.5.3) mit Hilfe der Beziehungen $v_F = \rho_{\text{Iso}}/\rho_s$ und $v_G = 1 - \rho_{\text{Iso}}/\rho_s$ um, so ergibt sich unter Verwendung der spezifischen Extinktion folgende Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit der Isolierung von der Packungsdichte:

$$\lambda_{\text{Iso}} = K_F \left(\frac{\rho_{\text{Iso}}}{\rho_s} \right)^3 \lambda_s + \left(1 - \frac{\rho_{\text{Iso}}}{\rho_s} \right)^{-K_G} \lambda_g + \frac{16}{3} \frac{\sigma}{e \rho_{\text{Iso}}} T_{\text{Str}}^3. \quad (4.3.2).$$

Die Gleichung zeigt, daß die Wärmeleitfähigkeit durch Strahlung mit steigender Packungsdichte sinkt, während die durch das Gas bedingte Leitfähigkeit und die Feststoffleitung dabei ansteigen. Mit der zulässigen Vernachlässigung der Feststoffleitung lautet die Ableitung der Wärmeleitfähigkeit nach der Packungsdichte

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda_{\text{Iso}}}{\partial \rho_{\text{Iso}}} &= + K_G \left(1 - \frac{\rho_{\text{Iso}}}{\rho_s}\right)^{-K_G-1} \frac{1}{\rho_s} \lambda_g - \frac{1}{\rho_{\text{Iso}}} \frac{16}{3} \frac{\sigma}{e} \frac{1}{\rho_{\text{Iso}}} T^3 \\
&= \frac{1}{\rho_{\text{Iso}}} \left[K_G \left(1 - \frac{\rho_{\text{Iso}}}{\rho_s}\right)^{-1} \frac{\rho_{\text{Iso}}}{\rho_s} \left(1 - \frac{\rho_{\text{Iso}}}{\rho_s}\right)^{-K_G} \lambda_g - \lambda_{\text{Str}} \right] \quad (4.3.3). \\
&= \frac{1}{\rho_{\text{Iso}}} \left(K_G \frac{v_F}{v_G} v_G^{-K_G} \lambda_g - \lambda_{\text{Str}} \right)
\end{aligned}$$

Daraus kann der Zusammenhang

$$\frac{\Delta \lambda_{\text{Iso}}}{\lambda_{\text{Iso}}} = \left[K_G \frac{v_F}{v_G} \left(1 - \frac{\lambda_{\text{Str}}}{\lambda_{\text{Iso}}}\right) - \frac{\lambda_{\text{Str}}}{\lambda_{\text{Iso}}} \right] \frac{\Delta \rho_{\text{Iso}}}{\rho_{\text{Iso}}} \quad (4.3.4)$$

für die Fortpflanzung des relativen Dichtefehlers abgeleitet werden. Für $\lambda_{\text{Str}} \rightarrow 0$, also bei sehr niedrigen Temperaturen, entspricht der Dichtefehler dem Fehler in der Wärmeleitfähigkeit multipliziert mit dem positiv definierten Koeffizienten K_G und dem Quotienten aus Feststoff- und Gasanteil der Isolierung.⁵ Der Faktor vor dem relativen Dichtefehler sinkt mit steigendem Strahlungsanteil bis auf Null ab, dann wechselt er das Vorzeichen und wird betragsmäßig wieder größer. Der Nulldurchgang findet bei einem Wert des Strahlungsanteils statt, der umso höher liegt, je höher die Packungsdichte ist. Im Grenzfall $\lambda_{\text{Str}} \rightarrow \lambda_{\text{Iso}}$, also bei sehr hohen Temperaturen oder im Vakuum, entspricht der Fehler in der Wärmeleitfähigkeit dem Fehler für die Packungsdichte, lediglich das Vorzeichen hat sich umgekehrt. Dieser Zusammenhang ist für die Fehlerabschätzung nach oben der entscheidende, da der Faktor $K_G v_F/v_G$ in der Regel deutlich kleiner als 1 ist.

Bei den Messungen im Vakuum führt ein Fehler bei der Bestimmung der Packungsdichte also zu einem betragsmäßig ebenso großen Fehler für die Wärmeleitfähigkeit. Ein kleinerer Fehler ergibt sich bei den Messungen unter atmosphärischen Bedingungen.

Es wird nicht als sinnvoll angesehen, die Veränderungen der Längenverhältnisse aufgrund der thermischen Ausdehnung bei der Betrachtung des Geometrie- und des Dichte-Fehlers zu berücksichtigen. Sowohl die sich ändernde Packungsdichte als auch die Abmessungen werden bei der Isolierung einer ausgeführten Heißgasleitung stets im kalten Zustand dimensioniert und gemessen. Wenn sich im Betriebszustand aufgrund erhöhter Temperaturen die Geometrie verändert, so schlägt sich dieses auch in einer Veränderung der Packungsdichte nieder. Berücksichtigt man also die thermische Ausdehnung als Korrektur bei der Messung, so muß diese sinnvollerweise auch bei der späteren Auslegung berücksichtigt werden. Der Fehler bleibt also klein, wenn in beiden Fällen auf ein derartiges Vorgehen verzichtet wird. Alle ermittelten Stoffdaten werden dementsprechend auf den geometrischen Ausgangszustand der Isolierung bzw. der Versuchsanlage bezogen.

5 Für die betrachtete Hochtemperaturfaser wird aus den Experimenten für K_G ein Wert von 1,700 bestimmt (vgl. Kap. „4.5 Vorstellung der Meßergebnisse“).

4.3.3 Fehler bei der Bestimmung der Temperatur

Der Fehler bei der Temperaturmessung setzt sich zusammen aus:

1. Thermoelement-Fehler,
2. Fehler der Referenzelement-Kompensation,
3. Fehler des Meßgerätes und der
4. Ungenauigkeit durch die begrenzte Auflösung.

Für die Temperaturmessung werden NiCr-Ni - Thermoelemente (Typ K) verwendet. Die Elemente sind alle aus einer Charge gefertigt. Der Hersteller garantiert eine Genauigkeit, die bei einem Drittel des Wertes liegt, den die DIN IEC 584, Teil 2 (1984), für die Toleranzklasse 2 vorgibt. Der Fehler der Referenzelement-Kompensation des Hybriddruckers wird mit 0,5 K angegeben. Die Genauigkeit der Anzeige beträgt $\pm (0,05 \% \text{ des Ausschlags} + 1 \text{ K})$ bei einer Auflösung des Gerätes von 0,1 K (Yokogawa, 1989). Im verwendeten Temperaturbereich ergeben sich die in Abb. 8 angegebenen Werte.

Die Unsicherheit bei der Bestimmung des Temperaturniveaus führt dazu, daß auch die Wärmeleitfähigkeit bei einer bestimmten Temperatur mit einem proportionalen Fehler bestimmt wird. Analog zum Fall des Dichtefehlers im vorangegangenen Kapitel ist auch hier der Verlauf der Wärmeleitfähigkeit über der Temperatur entscheidend. Leitet man die Beziehung (3.5.3) nach der Temperatur ab, so ergibt sich unter der Voraussetzung einer konstanten Extinktion und einem vernachlässigbaren Anteil der Feststoffleitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_{\text{Iso}}}{\partial T} &= v_G^{-K_G} \frac{\partial \lambda_g}{\partial T} + 3 \frac{16}{3} \frac{\sigma}{E} T^2 \\ &= \frac{1}{T} (0,7 \lambda_g + 3 \lambda_{\text{Str}}) \end{aligned} \quad (4.3.5).$$

Dabei wurde für die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit des Gases näherungsweise ein proportionaler Anstieg mit $T^{0,7}$ angenommen. Die relativen Fehler von Temperatur und Wärmeleitfähigkeit hängen nun zusammen über die Beziehung

$$\frac{\Delta \lambda_{\text{Iso}}}{\lambda_{\text{Iso}}} = \left[0,7 \left(1 - \frac{\lambda_{\text{Str}}}{\lambda_{\text{Iso}}} \right) + 3 \frac{\lambda_{\text{Str}}}{\lambda_{\text{Iso}}} \right] \frac{\Delta T}{T} . \quad (4.3.6)$$

Der Vorfaktor in dieser Gleichung steigt mit wachsendem Strahlungsanteil von 0,7 bis zum Wert 3 an. Auch hier tritt dieser ungünstigste Fall dann auf, wenn im Vakuum gemessen wird. Die beschriebenen Zusammenhänge sind in Abb. 8 auf Seite 30 zusammengefaßt und für drei verschiedene Temperaturniveaus quantifiziert worden.

Größe des Fehlers bei einer Temperatur von:			
	100°C	550°C	950°C
Fehlerart:			
Thermoelement:	$\pm 0,83 \text{ K}$	$\pm 1,38 \text{ K}$	$\pm 2,38 \text{ K}$
Kompensation:	$\pm 0,50 \text{ K}$	$\pm 0,50 \text{ K}$	$\pm 0,50 \text{ K}$
Hybriddrucker:	$\pm 1,10 \text{ K}$	$\pm 1,33 \text{ K}$	$\pm 1,53 \text{ K}$
Auflösung:	$\pm 0,05 \text{ K}$	$\pm 0,05 \text{ K}$	$\pm 0,05 \text{ K}$
Summe:	$\pm 2,48 \text{ K}$	$\pm 3,26 \text{ K}$	$\pm 4,46 \text{ K}$
relativer Fehler:	$\pm 0,66\%$	$\pm 0,40\%$	$\pm 0,36\%$
entspricht einem Fehler für λ_{iso} von:	$\pm 2,0 \%$	$\pm 1,2 \%$	$\pm 1,1 \%$

Abb. 8. Fehler bei der Temperaturmessung

4.3.4 Genauigkeit bei der Messung von Temperaturdifferenzen

Wenn sowohl die untere Temperatur als auch die obere Temperatur der Probe mit einem Fehler von $\pm 4 \text{ K}$ gemessen werden, so ergibt dieses bei einer Temperaturdifferenz von 50 K einen relativen Fehler von 16% .

Die Bestimmung der Randtemperaturdifferenz ΔT_{Rand} und der Temperaturdifferenz der Schutzisolierung ΔT_{Siso} mit dieser Unsicherheit haben sogar noch gravierendere Auswirkungen auf die Qualität des Meßergebnisses.

Vorrangiges Ziel bei der Durchführung der Versuche muß daher sein, den Fehler bei der Messung dieser Temperaturdifferenzen möglichst klein zu halten. Für jeden Versuchspunkt wird deshalb ein Programm von drei getrennten Messungen gefahren. Im folgenden soll der Zweck dieses Verfahrens erläutert werden.

Vorab ist der Begriff des „Sollwertes der Randtemperaturdifferenz“ zu klären: Sind die Sollwerte der Regler der oberen Heizung zu 0 K und der unteren Schutzheizung zu $0,00 \text{ mV}$ eingestellt und ist die Hauptheizung außer Betrieb, so stellt sich das Temperaturniveau nur noch abhängig von der Einstellung des Sollwertes des Reglers der seitlichen Schutzheizung ein. Diesem Einstellungsparameter in mV entspricht eine bestimmte Randtemperaturdifferenz ΔT_{Rand} in K . Sie soll als Sollwert der Randtemperaturdifferenz $\Delta T_{\text{Rand,Soll}}$ bei dem entsprechenden Temperaturniveau bezeichnet werden. Diese Temperaturdifferenz wird ermittelt zum Beispiel über das Thermoelementpaar 7 und 15 am Rand der Probe in der Meßebeine direkt über der Hauptheizung (vgl. Abb. 6). Das eine Element ist in einem Abstand von 30 mm von der Begrenzung der Probe nach innen positioniert, das andere in der gleichen Ent-

fernung nach außen. Zum Ausgleich von Asymmetrien des Temperaturfeldes und zur Fehlerminimierung wird aus vier Meßwerten an den vier Seiten der Probe ein arithmetischer Mittelwert gebildet.

Bei absoluter Genauigkeit der Thermoelemente und der Regler und bei exakter Symmetrie und Homogenität des Versuchsaufbaus müßte der Sollwert von ΔT_{Rand} immer bei 0 K liegen. Der im Experiment festgestellte Wert weicht aber davon ab, da diese Genauigkeit nicht erreichbar ist.

Ziel der ersten der drei Messungen ist die Bestimmung eines solchen geeigneten Sollwertes $\Delta T_{\text{Rand, Soll}}$. Von Hand wird das gewünschte Temperaturniveau eingestellt und der Sollwert der seitlichen Schutzheizung solange verändert, bis die zeitliche Änderung der Temperatur vernachlässigbar klein ist. Die Regler der oberen Heizung und der unteren Schutzheizung arbeiten dabei in der Nullstellung, die Hauptheizung ist abgeschaltet. Das Kriterium für die zeitliche Konstanz ist eine Abweichung von weniger als $\pm 0,2$ K über einem Zeitraum von 24 Stunden.

Ist der Sollwert der Randtemperatur ermittelt, so erfolgt mit dieser Kenntnis die Durchführung des zweiten Meßpunktes. Dazu wird zunächst der Sollwert der Versuchstemperaturdifferenz auf 50 K eingestellt und die zugeführte Heizleistung so variiert, daß die untere Versuchstemperatur $T_{\text{Versuch, unten}}$ konstant bleibt. Der Meßpunkt ist beendet, wenn nach der letzten Neueinstellung die untere Versuchstemperatur noch mit der des vorhergehenden Versuchs übereinstimmt und die Veränderung des Temperaturniveaus in den letzten 24 Stunden weniger als $\pm 0,2$ K betrug. Mit Hilfe der ermittelten Heizleistung kann nun aus der Gleichung

$$\dot{Q}_{\text{H,M2}} = \frac{b^2}{s} \lambda_{\text{Iso}} \Delta T_{\text{Versuch,M2}} \quad (4.3.7)$$

mit den Daten des zweiten Meßpunktes die Wärmeleitfähigkeit bei der entsprechenden Temperatur ermittelt werden:

$$\lambda_{\text{Iso}} = \frac{s}{b^2} \frac{\dot{Q}_{\text{H,M2}}}{\Delta T_{\text{Versuch,M2}}} \quad (4.3.8).$$

Bedingt durch die Ungenauigkeit der Regler und der Temperaturmessung kann die Bedingung $\Delta T_{\text{Versuch}} = 0$ K beim ersten Meßpunkt nicht exakt eingehalten werden. Auch ist in den meisten Fällen noch eine geringe Heizleistung notwendig, um zeitliche Stabilität zu erhalten. Einen genaueren Wert für die Wärmeleitfähigkeit erhält man also, wenn man statt der Heizleistung $\dot{Q}_{\text{H,M2}}$ die *zusätzliche* Heizleistung $\dot{Q}_{\text{H,M2}} - \dot{Q}_{\text{H,M1}}$ und statt der Temperaturdifferenz $\Delta T_{\text{Versuch,M2}}$ die *Veränderung* der Temperaturdifferenz zwischen den beiden Versuchen $\Delta T_{\text{Versuch,M2}} - \Delta T_{\text{Versuch,M1}}$ einsetzt:

$$\lambda_{\text{Iso}} = \frac{s}{b^2} \frac{\dot{Q}_{\text{H,M2}} - \dot{Q}_{\text{H,M1}}}{\Delta T_{\text{Versuch,M2}} - \Delta T_{\text{Versuch,M1}}} \quad (4.3.9).$$

Ein dritter Meßpunkt ist noch notwendig, weil auch die Konstanz der Randtemperaturdifferenz von Meßpunkt 1 zu Meßpunkt 2 nicht exakt eingehalten werden kann. Erniedrigt sich zum Beispiel dieser Wert, so wurde auch über den Rand zusätzlich Wärme zugeführt, und der berechnete Wert der Wärmeleitfähigkeit ist zu klein ange-

setzt. Für die dritte Messung wird also der Sollwert für den Regler der seitlichen Schutzheizung heraufgesetzt, wodurch auch der Wert der Randtemperaturdifferenz ansteigt. Entsprechend ist nun eine höhere Heizleistung notwendig, um das Temperaturniveau des zweiten Meßpunktes zu halten. Die Versuchstemperaturdifferenz bleibt weiterhin konstant bei 50 K.

Unter der für kleine Temperaturdifferenzen zulässigen Annahme, daß sich die benötigte Heizleistung linear mit der Randtemperaturdifferenz verändert, (vgl. Fritz und Küster, 1970) kann aus

$$\dot{Q}_{H,M3} - \dot{Q}_{H,M2} = Y (\Delta T_{\text{Rand},M3} - \Delta T_{\text{Rand},M2}) \quad (4.3.10)$$

der positiv definierte Proportionalitätsfaktor Y berechnet werden. Mit Hilfe dieses Wertes läßt sich die Veränderung der Randtemperaturdifferenz von Meßpunkt 1 zu Meßpunkt 2 schließlich berücksichtigen, und man erhält als weiter verbesserte Abschätzung für die Wärmeleitfähigkeit die Beziehung

$$\lambda_{\text{iso}} = \frac{s}{b^2} \frac{\dot{Q}_{H,M2} - \dot{Q}_{H,M1} + Y (\Delta T_{\text{Rand},M2} - \Delta T_{\text{Rand},M1})}{\Delta T_{\text{Versuch},M2} - \Delta T_{\text{Versuch},M1}} \quad (4.3.11).$$

Wenn von 1 nach 2 die Randtemperaturdifferenz zunimmt, so wird mehr Wärme über den Rand abgeführt, daher resultiert das negative Vorzeichen vor der Proportionalitätskonstante Y .

Mit der nun erhaltenen Abschätzung für die Wärmeleitfähigkeit kann eine (nicht vermeidbare) Veränderung der Versuchstemperaturdifferenz $\Delta T_{\text{Versuch}}$ von Meßpunkt 2 zu Meßpunkt 3 über eine Korrektur der zusätzlich zuzuführenden Heizleistung $(\dot{Q}_{H,M3} - \dot{Q}_{H,M2})$ berücksichtigt werden. Das führt zu einer Korrektur der Proportionalitätskonstanten Y und zu einer Neubestimmung von λ_{iso} über Gl. (4.3.11). Auch die möglichst gering zu haltenden Veränderungen des Temperaturniveaus lassen sich berücksichtigen, wenn der Verlauf von λ_{iso} über der Temperatur bekannt ist. Die Berechnung der Ergebnisse der einzelnen Versuche stellt also eine iterative Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit aus den Daten dreier Meßpunkte und schließlich aus dem Verlauf der Wärmeleitfähigkeit über der Temperatur dar. Die Iterationen sind solange durchzuführen, bis die Veränderungen im Ergebnis vernachlässigbar bleiben.

Durch die Anwendung des beschriebenen Verfahrens wird der Fehler, der aufgrund des nicht zu bestimmenden Wärmeverlustes durch die Schutzisolierungen zur Seite und nach unten entsteht, erheblich kleiner. Auch wenn die Wärmeströme $\dot{Q}_{\text{Siso}}$ und $\dot{Q}_{\text{Rand}}$ selbst nicht zu bestimmen sind, so sind sie doch bei allen drei Meßpunkten annähernd gleich, oder ihre Veränderung von Messung zu Messung ist recht genau bestimmbar. Das Verfahren dient also dazu, die Meßfehler bezüglich der Temperaturdifferenzen erheblich zu verkleinern.

Eine mögliche Fehlerquelle ergibt sich aus folgender Einschränkung: Der Sollwert für die Randtemperaturdifferenz wird ermittelt, wenn sich die gesamte Probe und die Schutzisolierung auf einem gemeinsamen Temperaturniveau befinden. Bei der Bestimmung der Heizleistungen $\dot{Q}_{H,M2}$ und $\dot{Q}_{H,M3}$ liegt jedoch die obere Versuchstempe-

ratur um 50 K niedriger. Damit verringert sich auch die seitlich über die Testisolation abgegebene Wärme gegenüber Messung 1. Der Fehler kann aber nicht sehr groß sein, da die Wärmeleitfähigkeit der Heizplatten der Hauptheizung wesentlich größer ist als die horizontale Wärmeleitfähigkeit der Probe. Ein eventuell auftretender Wärmestrom in horizontaler Richtung fließt also hauptsächlich im Bereich der Hauptheizung, und genau hier wird die Randtemperaturdifferenz eingestellt und gemessen.

Bezüglich der Genauigkeit der gemessenen Temperaturdifferenz $\Delta T_{\text{Versuch}}$ ist folgende vereinfachende Betrachtung möglich: Beim Übergang von Meßpunkt M1 zu Meßpunkt M2 wird die obere Temperatur T_{oben} um einen Betrag von 50 K niedriger eingestellt. Die untere Temperatur T_{unten} bleibt konstant. Wenn bei der ersten Messung die Thermoelemente eine bestimmte Temperatur anzeigen, bei der zweiten und dritten dann die gleichen Thermoelemente einen um 50 K niedrigeren Betrag, so kommt hier nicht der volle Fehler der Temperaturmessung zum Tragen. Vielmehr ist lediglich abzuschätzen, mit welcher Unsicherheit die Messung einer Temperaturdifferenz von 50 K mit ein und demselben Thermoelement erfolgt. Entscheidend ist bei der Bestimmung des Fehlers also nicht der konstante, sondern nur der temperaturproportionale Anteil. Das gilt sowohl für die Abweichung der Thermoelemente von der Normkurve als auch für den Fehler des Hybriddruckers, da ein und derselbe Kanal und damit quasi das gleiche Meßgerät zur Messung benutzt wird. Der konstante Fehler entfällt, da er bei beiden Messungen den gleichen Wert haben sollte. Abb. 9 gibt eine Zusammenstellung der einzelnen Fehleranteile bei der Temperaturdifferenz-Messung. Zu berücksichtigen ist allerdings, daß durch die beschriebenen Differenzmessungen die begrenzte Auflösung des Schreibers nicht umgangen werden kann. Das Vorzeichen dieses Fehlers kann von der ersten zur zweiten Messung wechseln und muß daher in beiden Fällen berücksichtigt werden.

Größe des Fehlers bei einer Temperatur von:						
	75°C	125°C	525°C	575°C	925°C	975°C
Fehlerart:						
Thermoelement:	± 0,56 K	± 0,94 K	± 3,94 K	± 4,31 K	± 6,94 K	± 7,31 K
Kompensation:	± 0,00 K	± 0,00 K	± 0,00 K	± 0,00 K	± 0,00 K	± 0,00 K
Hybriddrucker:	± 0,04 K	± 0,06 K	± 0,26 K	± 0,29 K	± 0,46 K	± 0,49 K
Summe:	± 0,60 K	± 1,00 K	± 4,20 K	± 4,60 K	± 7,40 K	± 7,80 K
Auflösung:	± 0,05 K	± 0,05 K	± 0,05 K	± 0,05 K	± 0,05 K	± 0,05 K
Fehler bei der Differenzmessung:	± 0,50 K		± 0,50 K		± 0,50 K	
relativer Fehler bei $\Delta T = 50 \text{ K}$:	± 1,0 %		± 1,0 %		± 1,0 %	

Abb. 9. Fehler bei der Messung einer Temperaturdifferenz von 50 K

4.3.5 Abschätzung des gesamten Meßfehlers

Zusammenfassend werden die einzelnen Fehlerquellen in der folgenden Abbildung aufgelistet:

Größe des Fehlers bei einer Temperatur von:			
	100°C	550°C	950°C
Fehlerquelle:			
Wärmestrom:	$\pm 0,8 \%$	$\pm 0,8 \%$	$\pm 0,8 \%$
Geometrie:	$\pm 0,7 \%$	$\pm 0,7 \%$	$\pm 0,7 \%$
Packungsdichte:	$\pm 0,4 \%$	$\pm 0,4 \%$	$\pm 0,4 \%$
Temperaturniveau:	$\pm 2,0 \%$	$\pm 1,2 \%$	$\pm 1,1 \%$
Temperaturdifferenz:	$\pm 1,0 \%$	$\pm 1,0 \%$	$\pm 1,0 \%$
Summe:	$\pm 4,9 \%$	$\pm 4,1 \%$	$\pm 4,0 \%$

Abb. 10. Zusammenstellung der abgeschätzten Meßfehler

Die aufgeführten Werte sind Maximalwerte für den jeweils ungünstigsten Fall. Berücksichtigt man die im nächsten Abschnitt erläuterten systematischen Fehler und die Tatsache, daß nicht alle Fehler mit dem gleichen Vorzeichen und mit ihrem maximalen Betrag wirksam werden, so kann mit der verwendeten Anlage die Wärmeleitfähigkeit von Faserisolierungen im Vakuum mit einer Genauigkeit von etwa $\pm 5 \%$ bestimmt werden.

Dieser Wert stimmt mit den Angaben von Klarsfeld (1984) überein. Er hält fest, daß trotz allen Fortschritts bei der Messung der Wärmeleitfähigkeit von schlecht leitenden Materialien mit dem Plattenverfahren bei hohen Temperaturen Fehler im Bereich von $\pm 5-10 \%$ in Kauf genommen werden müssen. Bei Raumtemperatur ließen sich mit entsprechenden Versuchsanordnungen auch Genauigkeiten im Bereich von $\pm 2-3 \%$ erreichen.

4.4 Betrachtung weiterer Fehlerquellen bei der Messung

Der **Einfluß der Begrenzungsflächen** muß berücksichtigt werden, wenn das Medium zwischen diesen optisch dünn ist. Bei Packungsdichten der Fasermaterialien von 130 bzw. 270 kg/m³ und einem Abstand der Kühl- von der Heizplatte von 68 mm ergibt sich für das Produkt aus Extinktion und Schichtdicke jedoch ein Wert von 170 bzw. 360. Damit können die getesteten Faserschichten keinesfalls mehr als optisch dünn angesehen werden, und der Einfluß der Begrenzungsflächen ist in jedem Fall vernachlässigbar (vgl. Kap. „3.3 Strahlung“).

Zudem kann die Wärmeleitfähigkeit einer Isolierschicht nur dann durch die Wahl von Begrenzungsflächen entscheidend beeinflusst, d. h. verringert werden, wenn diese hochreflektierend sind. Die VA-Platten mit einer Emissionszahl von etwa 1 sind unter diesem Aspekt eine günstige Wahl.

Wenn sich innerhalb der getesteten Isolierung **Konvektionsströmungen** ausbilden, wird die Wärmeleitfähigkeit zu hoch gemessen. Nach den Untersuchungen von Katto und Masuoka (1967) an Kugelschüttungen ist ein Kriterium für das Einsetzen der Konvektionströmung in einer horizontalen Schicht mit der Schichtdicke s durch die Gleichung

$$Ra \frac{k}{s^2} = Ra \cdot Da = 4 \pi^2 \approx 39,5 \quad (4.4.1)$$

gegeben. Die Rayleigh-Zahl ist hier definiert über

$$Ra = \frac{g \beta \Delta T (\rho c_p)_{\text{Gas}} s^3}{\lambda_{\text{Iso}} (\eta/\rho)_{\text{Gas}}} \quad (4.4.2).$$

Kassoy und Zebib (1975) zeigen, daß die kritische Rayleigh-Zahl bei großen Temperaturdifferenzen etwas niedriger liegt. Nach ihren Berechnungen mit temperaturabhängiger Viskosität setzt die Konvektion aufgrund der höheren Viskosität an der unteren heißen Wand schon unterhalb der Grenze von $4 \pi^2$ ein.

Durch Abschätzung der Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte ergibt sich nach Bröckerhoff und Scholz (1975) folgende Proportionalität für die Rayleigh-Zahl:

$$Ra \sim \frac{\Delta T p^2}{T_m^4} \quad (4.4.3)$$

Zusätzlich sinkt die Permeabilität k mit steigender Faserdichte. Die Gefahr von Konvektion ist also am größten bei hohem Druck, niedrigen Temperaturen und niedriger Isolationsdichte.

Bei einer Packungsdichte von 130 kg/m³ ($v_f = 0,05$), erhält man eine nach oben abgeschätzte Permeabilität von $2 \times 10^{-10} \text{ m}^2$. Mit einer vertikalen Dicke von 68 mm und einer Temperaturdifferenz von 50 K ergibt sich beim Versuch mit atmosphärischer Luft bei einer Temperatur von 100°C ein Kennzahlprodukt $Ra \cdot Da$ von 0,018. Der

kritische Wert von $4 \pi^2$ wird also selbst in diesem ungünstigen Fall bei weitem unterschritten, so daß eine mögliche Erhöhung der Wärmeleitfähigkeit durch Konvektion für alle durchgeführten Versuche ausgeschlossen werden kann.

Durch die **Wärmeleitfähigkeit des Restgases** ist bei den Versuchen im Vakuum eine mögliche Fehlerquelle gegeben. Nach den Messungen von Imakoma u. a. (1989) an Faserisolierungen im Packungsdichtebereich zwischen 50 und 183 kg/m⁻³ kann diese jedoch bei Drücken unterhalb von 0,1 Pa auf jeden Fall als vernachlässigbar angesehen werden. Erst bei Drücken über 1 Pa steigt sie merklich an.

Der über den Schreiber registrierte Druck am Ansaugstutzen lag bei allen durchgeführten Messungen immer unterhalb von 4×10^{-4} mbar. Am Deckel des Kessels ist der Druck jedoch höher, nach den exemplarisch durchgeführten Messungen etwa um den Faktor 3. Nimmt man an, daß er im Bereich der getesteten Isolierung maximal um den Faktor 2,5 über dem gemessenen Wert liegt, so bleibt er dennoch immer unter $1,0 \times 10^{-3}$ mbar bzw. 0,1 Pa. Der Einfluß des Restgases ist also vernachlässigbar.

Bei den Versuchen unter Vakuum wird der Restdruck mit einem Ionisations-Vakuummessgerät bestimmt. Es hat laut Herstellerangaben eine Meßgenauigkeit von $\pm 10 \%$ im verwendeten linearen Bereich (Leybold-Heraeus, 1987). Diese Genauigkeit reicht völlig aus, um zu zeigen, daß der Druck tatsächlich unterhalb des kritischen Wertes von 1 Pa liegt.

4.5 Vorstellung der Meßergebnisse

Die Aufstellung der durchgeführten Versuchsreihen ist Abb. 2 auf Seite 18 zu entnehmen. Der angegebene Temperaturbereich wurde untersucht durch mehrere Meßpunkte, die jeweils im Abstand von etwa 100 bis 120 K lagen. Für die ersten beiden Reihen ergaben sich so jeweils fünf Meßwerte, bei der letzten Reihe waren es neun. Das in Kap. „4.3.4 Genauigkeit bei der Messung von Temperaturdifferenzen“ beschriebene Verfahren zur Verbesserung der Genauigkeit der Ergebnisse wurde erst ab der zweiten Versuchsreihe angewandt. Die Wärmeleitfähigkeitswerte der ersten Reihe sind somit mit einer etwas höheren Unsicherheit behaftet. Sie müssen nach oben korrigiert werden, da bei allen anderen Versuchen der Sollwert der Randtemperaturdifferenz stets einen positiven Wert hatte, und damit die effektive Heizleistung entsprechend immer über der im Nullpunkt von ΔT_{Rand} gemessenen liegt. Unter Berücksichtigung der beschriebenen Korrekturen ergeben sich die in Abb. 11 zusammengestellten Zahlenwerte für die insgesamt 24 Versuchspunkte.

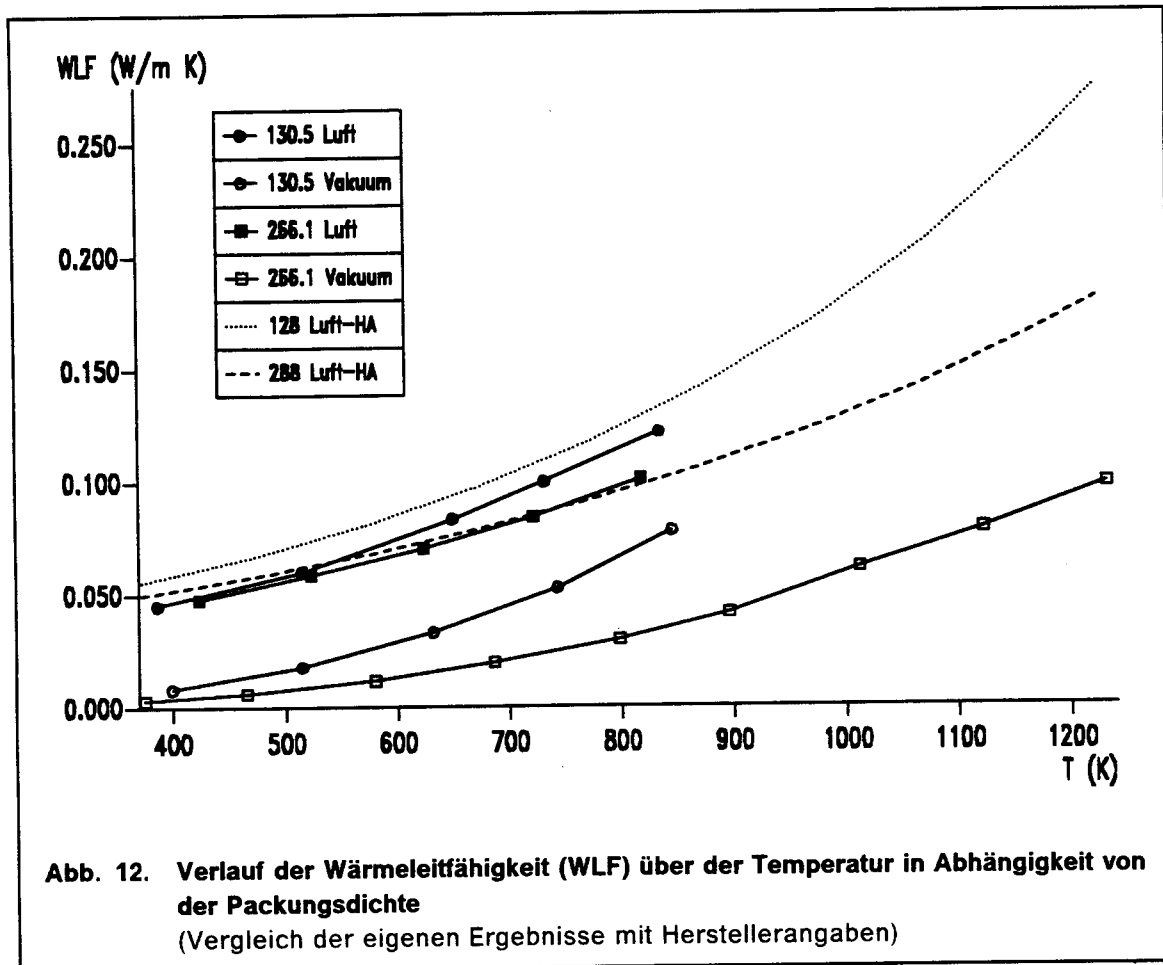
Reihe	Packungs- dichte [kg/m ³]	Gasart	Versuch	T _{Versuch} [°C]	ΔT _{Versuch} [K]	λ _{eff} [W/mK]
1	130,5	Luft ⁶	1	113,5	47,81	0,04507
			2	241,6	50,02	0,05998
			3	376,5	49,90	0,08323
			4	458,4	50,78	0,09971
			5	561,0	50,56	0,12160
2	130,5	Vakuum	1	126,5	49,35	0,00795
			2	241,5	50,01	0,01768
			3	358,7	49,42	0,03296
			4	469,5	49,14	0,05247
			5	571,9	48,72	0,07779
3	266,1	Luft	1	150,3	50,19	0,04766
			2	249,6	50,08	0,05853
			3	350,2	50,76	0,07033
			4	448,6	49,68	0,08412
			5	544,4	49,83	0,10102
4	266,1	Vakuum	1	102,1	48,73	0,00295
			2	192,7	49,88	0,00591
			3	306,4	49,82	0,01144
			4	413,1	49,79	0,01943
			5	524,9	49,87	0,02945
			6	622,8	49,94	0,04126
			7	738,6	50,06	0,06128
			8	849,2	49,85	0,07853
			9	958,7	50,01	0,09850

Abb. 11. Versuchergebnisse

In der graphischen Darstellung (Abb. 12 auf Seite 38) werden die Meßpunkte durch gerade Linien verbunden und mit den Angaben des Herstellers (unterbrochene Kurven) verglichen. Die Zahlen in der Legende stehen für die Packungsdichte in der Einheit [kg/m³]. Der Zusatz "-HA" kennzeichnet die Herstellerangaben. Es wurden den Meßwerten Daten mit vergleichbarer Packungsdichte gegenübergestellt. Sie konnten aus einer Beziehung der Form $\lambda_{iso} = a e^{b \vartheta}$ mit den Koeffizienten a und b und der Temperatur ϑ [°C] errechnet werden. Da ein Hersteller jedoch zur Einhaltung von zugesicherten Eigenschaften, wie etwa der Wärmeleitfähigkeit, verpflichtet ist,

⁶ ohne Korrektur nach Kap. 4.3.4

beinhalten die berechneten Werte in jedem Fall einen Sicherheitszuschlag und sind somit nach oben abgeschätzt. Dieses ist besonders im Bereich niedriger Temperaturen, also auch niedriger Wärmeleitfähigkeiten, bemerkbar. Hier verläuft die Kurve des Herstellers flacher als die der eigenen Meßwerte. Die Angaben sind in diesem Temperaturbereich mit den vorgestellten Meßwerten also nur eingeschränkt vergleichbar.



Die eigenen Meßwerte bei $\rho_{\text{iso}} = 266,1 \text{ kg/m}^3$ unter atmosphärischen Bedingungen zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Daten des Herstellers für 288 kg/m^3 . Wenn man bedenkt, daß die auf die niedrigere Packungsdichte umgerechnete Hersteller-Kurve oberhalb der gezeichneten Kurve verlaufen muß, so liegen die eigenen Werte etwas tiefer als die des Herstellers. Unter Berücksichtigung des oben erwähnten Sicherheitszuschlages ergibt sich also eine recht gute Übereinstimmung.

Bei der geringeren Packungsdichte von $130,5 \text{ kg/m}^3$ ist die Abweichung von der vergleichbaren Kurve mit $\rho_{\text{iso}} = 128 \text{ kg/m}^3$ erkennbar größer. Diese Versuchspunkte wurden allerdings, wie oben erwähnt, nicht über das in Kap. „4.3.4 Genauigkeit bei der Messung von Temperaturdifferenzen“ beschriebene 3-Punkte-Verfahren, sondern lediglich anhand eines einzigen Meßpunktes ermittelt. Unter der zulässigen Annahme, daß die Werte nach oben zu korrigieren sind, ist auch hier die Übereinstimmung mit den Herstellerangaben zufriedenstellend.

Die beiden unteren Kurven beschreiben den Verlauf der Wärmeleitfähigkeit im Vakuum. Vergleichbare Ergebnisse liegen hier nicht vor. Aus dem Verlauf wird deutlich, daß die Kurven gleicher Packungsdichte unter atmosphärischen Bedingungen und im Vakuum fast parallel verlaufen. Der Anstieg mit der Temperatur hängt also ganz wesentlich von der Strahlung ab. Die ebenfalls größer werdende Gasleitfähigkeit hat lediglich den Effekt, daß die Kurven bei höheren Temperaturen ein wenig auseinandergehen.

Nach der Auswertung der Versuche werden die Ergebnisse für die Wärmeleitfähigkeit über ein Rechnerprogramm an die in Kap. „3.5 Effektive Wärmeleitfähigkeit einer Faserisolierung“ hergeleitete Beziehung

$$\lambda_{\text{iso}} = K_F v_F^3 \lambda_s + v_G^{-K_G} \lambda_g + \frac{16}{3} \frac{\sigma}{e \rho_{\text{iso}}} T_{\text{Str}}^3 \quad (3.5.3)$$

angepaßt. Unter der Anpassungsrechnung ist die Lösung eines „Least-Squares-Problems“ zu verstehen. Dabei werden die Koeffizienten K_F und K_G und die spezifische Extinktion e so berechnet, daß die Summe der Quadrate der relativen Abweichung der Meßwerte von den formelmäßig berechneten Werten minimal ist.

Die gesuchten Parameter ergeben sich zu:

Kontaktstellenfaktor:	$K_F = 0,00$
Gasexponent:	$K_G = 1,700$
spezifische Extinktion:	$e = 19,42 \text{ [m}^2/\text{kg]}$

Abb. 13. Ergebnis der Anpassungsrechnung

Abb. 14 zeigt nebeneinander die gemessenen und die über die Formel berechneten Werte.

Die maximale relative Abweichung der im Experiment gemessenen Wärmeleitfähigkeit von dem über die angepaßte Formel berechneten Wert beträgt etwas mehr als 10 %. Sie tritt beim Meßpunkt mit der höchsten Temperatur auf. Allerdings weicht hier die berechnete Wärmeleitfähigkeit nach oben ab, wodurch man sich bei Verwendung dieses Wertes auf der sicheren Seite befindet. Alle anderen Abweichungen liegen unter $\pm 10 \%$, die meisten unter $\pm 5 \%$. Auch die Abweichungen für die Reihe 1 bleiben im Rahmen. Schließt man diese fünf Werte aus der Anpassungsrechnung aus, so ergibt sich mit $K_G = 1,769$ ein etwas größerer Gasexponent. Der Betrag der spezifischen Extinktion weicht mit $19,31 \text{ m}^2/\text{kg}$ um weniger als 1 % vom ursprünglichen Wert ab.

Für die Reihe 2 fällt auf, daß alle Abweichungen ein negatives Vorzeichen haben. Entsprechend liegen die Werte für die spezifische Extinktion etwas niedriger als bei Reihe 4. Dieses Ergebnis läßt den Schluß zu, daß die spezifische Extinktion doch von der Packungsdichte abhängt und damit kein spezifischer Stoffwert ist. Mit lediglich zwei Versuchsreihen im Vakuum ist es jedoch nicht möglich, einen anderen zuverlässigen Ansatz herzuleiten.

Packungs- dichte [kg/m ³]	Gas	T _{Versuch} [°C]	$\lambda_{\text{Iso,Vers}}$ [W/mK]	$\lambda_{\text{Iso,Rechnung}}$ [W/mK]	Abw.	gemessene spez. Extinktion [m ² /kg]
130,5	Luft	113,5	0,04507	0,04221	-6,35%	
		241,6	0,05998	0,06058	1,00%	
		376,5	0,08323	0,08573	3,01%	
		458,4	0,09971	0,10478	5,08%	
		561,0	0,12160	0,13343	9,73%	
130,5	Vak.	126,5	0,00795	0,00765	-3,80%	18,68
		241,5	0,01768	0,01631	-7,77%	17,91
		358,7	0,03296	0,03015	-8,53%	17,76
		469,5	0,05247	0,04892	-6,77%	18,11
		571,9	0,07779	0,07206	-6,35%	17,99
266,1	Luft	150,3	0,04766	0,04615	-3,16%	
		249,6	0,05853	0,05759	-1,60%	
		350,2	0,07033	0,07057	0,34%	
		448,6	0,08412	0,08508	1,15%	
		544,4	0,10102	0,10136	0,34%	
266,1	Vak.	102,1	0,00295	0,00311	5,27%	20,46
		192,7	0,00591	0,00593	0,38%	19,51
		306,4	0,01144	0,01141	-0,26%	19,37
		413,1	0,01943	0,01894	-2,52%	18,93
		524,9	0,02945	0,02977	1,08%	19,63
		622,8	0,04126	0,04212	2,08%	19,83
		738,6	0,06128	0,06065	-1,04%	19,22
		849,2	0,07853	0,08276	5,39%	20,47
		958,7	0,09850	0,10942	11,08%	21,58

Abb. 14. Vergleich der gemessenen und formelmäßig berechneten Wärmeleitfähigkeit

Weiterhin ist eher unwahrscheinlich, daß die Extinktion ein temperaturunabhängiger Stoffwert ist, da die Strahlungseigenschaften üblicherweise von der Wellenlänge und damit von der Temperatur des Strahlers abhängen. Für eine technische Anwendung ist jedoch die erreichte Genauigkeit ausreichend. Auch die Ermittlung des exakten Verlaufes der Extinktion über der Temperatur benötigt wesentlich mehr Meßpunkte und ist daher hier nicht durchführbar. Der Ansatz einer linear von der Temperatur abhängigen Extinktion brachte keine signifikant veränderten Ergebnisse. Die über die Anpassungsrechnung ermittelte Steigung war so klein, daß eine Angabe des Wertes nicht seriös erscheint. Die Veränderung der Extinktion über dem betrachteten Temperaturbereich betrug dabei weniger als 10 %. Aus diesen Gründen erscheint es für eine technische Anwendung ausreichend, einen konstanten Wert der spezifischen Extinktion zu verwenden.

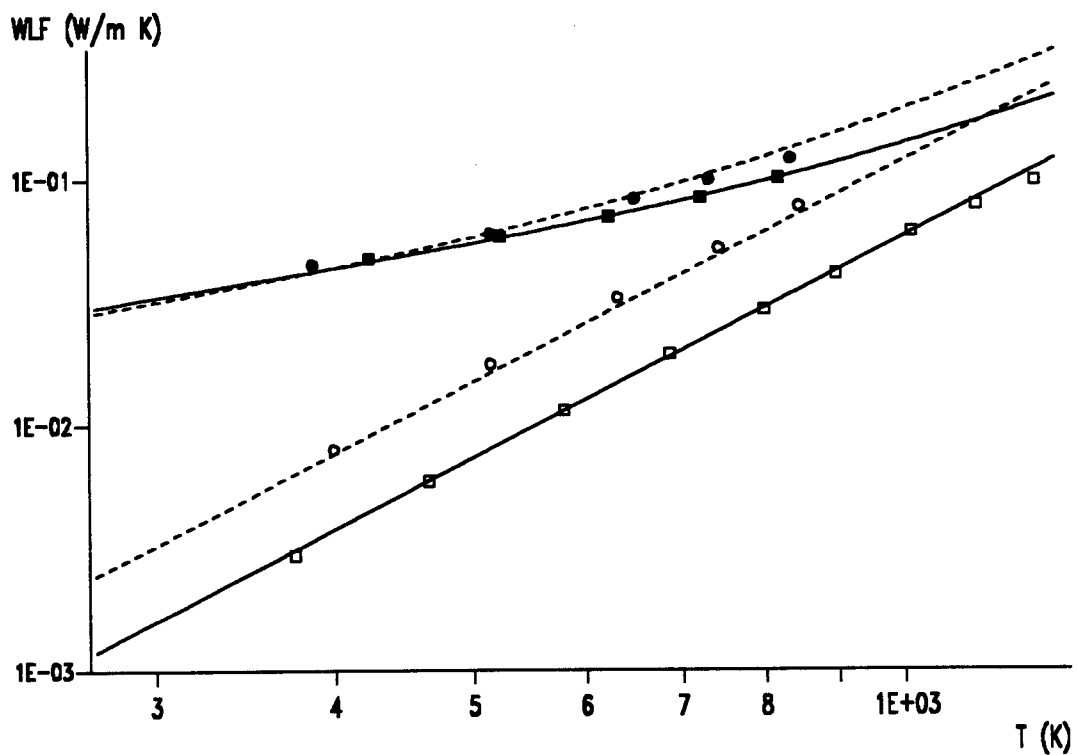
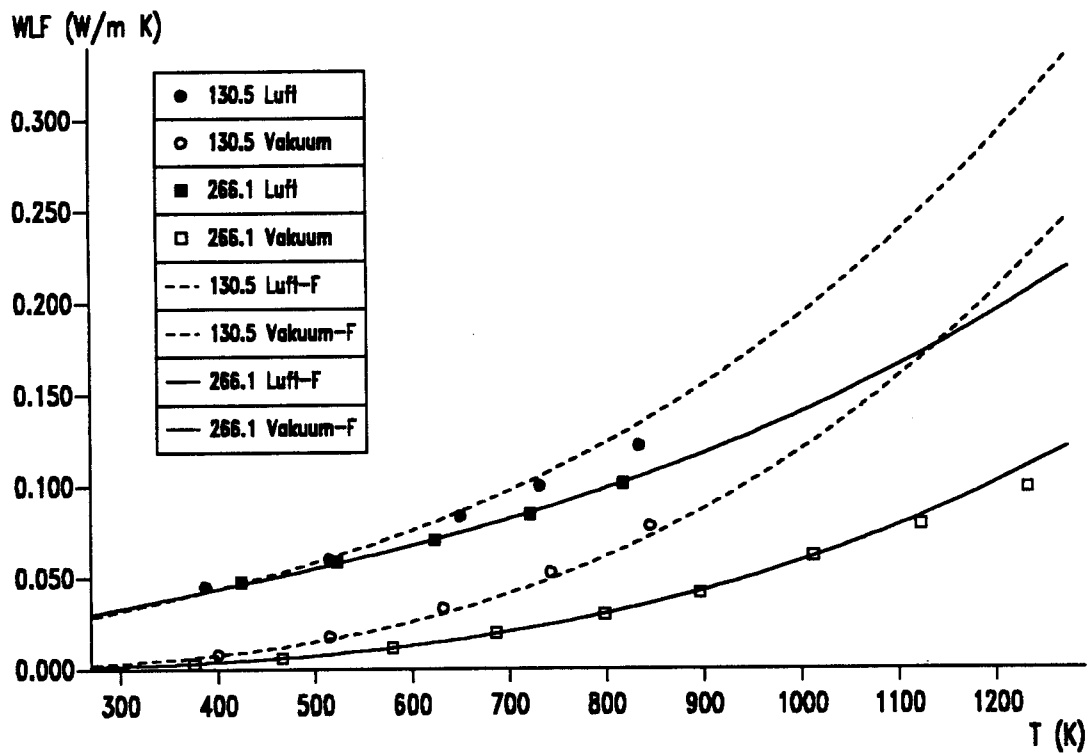


Abb. 15. gemessene Wärmeleitfähigkeiten (WLF) und angepaßte Kurven
(lineare und doppelt logarithmische Darstellung)

In Abb. 15 werden die gemessenen Werten mit dem Verlauf der ermittelten Kurve verglichen. Die Legende gilt für beide Diagramme. Der Zusatz „-F“ steht für die über die Formel berechneten Werte. Im Gegensatz zur Abb. 12 können hier die Versuchsdaten berechneten Daten gleicher Packungsdichte gegenübergestellt werden. Aus der unteren Abbildung, in der die Ergebnisse doppelt logarithmisch aufgetragen sind, wird deutlich, daß die Wärmeleitfähigkeit im Vakuum ziemlich genau proportional mit der dritten Potenz der Strahlungstemperatur zunimmt und damit der Ansatz für die Wärmeleitfähigkeit durch Strahlung bestätigt wird.

4.6 Vergleich der Ergebnisse mit Literaturangaben

Ziel der Messungen war die Bestimmung der spezifischen Extinktion für eine Hochtemperatur-Faserisolierung. Unter der Annahme, daß diese unabhängig von der Packungsdichte und der Temperatur ist, wurde aus den Experimenten über die Anpassungsrechnung ein mittlerer Wert von $19,42 \text{ m}^2/\text{kg}$ bestimmt. Bei der geringeren Packungsdichte liegt der experimentell bestimmte Mittelwert mit $18,0 \text{ m}^2/\text{kg}$ etwas niedriger, bei der größeren Packungsdichte mit $19,9 \text{ m}^2/\text{kg}$ etwas höher. In Abb. 16 sind einige Literaturdaten zur spezifischen Extinktion von keramischen Fasern auf-

mittl. spez. Extinktion [m^2/kg]	Temp.- bereich [K]	Packungs- dichte- bereich [kg/m^3]	Chemische Analyse			Faser- durchm. [μm]	Faser- dichte [kg/m^3]	Quelle
			Si_2O	Al_2O_3	ZrO_2			
16,5	477-811	48-160	50%	50%	-	3	-	Hager u. Steere (1967)
15,7	307-786	64-128	49,3%	50,1%	-	2,8	2560	Kamiuto u.a. (1982)
17,2	373-773	50	47,9%	51,8%	-	2,6-3,0	2730	Sang u.a. (1989)
13,9	373-773	50	5%	95%	-	3,0	3500	Sang u.a. (1989)
17,6	373-773	50	100%	-	-	6-12	2200	Sang u.a. (1989)
19,0	533-1173	165	51,9%	45,1%	-	2,8	2560	Achenbach (1991)
18,0	400- 845	130,5	49,7%	35,1%	14,7%	3,5	2650	eigene Messung
19,9	375-1122	266,1	49,7%	35,1%	14,7%	3,5	2650	eigene Messung

Abb. 16. Vergleich der mittleren spezifischen Extinktion mit Literaturdaten

geführt. Zusätzlich sind jeweils auszugsweise die chemische Zusammensetzung der Fasern und die experimentellen Randbedingungen genannt.

Bei allen Werten wird die Strahlungswärmeleitfähigkeit der Faserisolierungen über die Beziehung

$$\lambda_{\text{Str}} = \frac{16}{3} \frac{\sigma}{e \rho_{\text{Iso}}} T^3 \quad (4.6.1)$$

mit e als spezifischer, auf die Packungsdichte bezogener, Extinktion berechnet. Die im Rahmen dieser Arbeit ermittelten Werte für die Extinktion sind also realistisch, da sie in etwa in dem Bereich liegen, den die Literaturdaten vorgeben. Der Anteil an ZrO_2 scheint sich allerdings durch eine Erhöhung der spezifischen Extinktion auszuwirken. Aus den vorhandenen Daten kann jedoch keineswegs auf die hier gemessenen Werte geschlossen werden. Dies ist ein Beleg dafür, daß die Strahlungseigenschaften einer unbekannten Faser jeweils individuell zu ermitteln sind.

4.7 Zusammenfassung der Versuchsergebnisse

Im Rahmen der beschriebenen Versuche wurde die Wärmeleitfähigkeit von Faserisolierungen senkrecht zur Hauptausrichtung der Fasern gemessen. Veränderte Parameter waren Temperatur, Druck und die Packungsdichte.

Die Auswertung der Ergebnisse ergibt die Beziehung

$$\lambda_{\text{Iso}} = v_G^{-1,7} \lambda_G + \frac{16}{3} \frac{\sigma}{e \rho_{\text{Iso}}} T^3 \quad (4.7.1)$$

für die Wärmeleitfähigkeit der Isolierung mit einer konstant angenommenen spezifischen Extinktion $e = 19,42 \text{ m}^2/\text{kg}$.

Die Gleichung (4.7.1) gilt unter der Voraussetzung, daß die Porengröße der Isolierung wesentlich größer als die freie Weglänge des zwischen den Isolierungen befindlichen Gases ist. Sie wurde aufgestellt speziell zur Beschreibung der Verhältnisse in einer innenisolierten Heißgasleitung, d. h. für Temperaturen zwischen 100 und 1000°C, für Drücke oberhalb des Umgebungsdruckes und für Faserisolierungen mit Packungsdichten oberhalb von 128 kg/m³. Die Wärmeleitfähigkeit enthält keinen Konvektionsanteil. Dieser muß separat über die Auswertung der Erhaltungsgleichungen ermittelt werden.

Die Wärmeleitfähigkeit parallel zur Hauptfaserausrichtung kann in erster Näherung mit der gleichen Beziehung abgeschätzt werden. In der Realität wird der Gasleitungsanteil etwa größer sein, der Strahlungsanteil eher etwas kleiner. Nach Messungen von Hayashi (1984) an keramischen Faserisolierungen mit Packungsdichten zwischen 60 und 400 kg/m³ bei Temperaturen bis 1200°C beträgt dieser Unterschied in der Wärmeleitfähigkeit allerdings weniger als 9 %.

5. Gleichungen für den Wärme- und Stofftransport in einer innenisolierten Heißgasleitung

Das wärmetechnische Problem einer innenisolierten Heißgasleitung setzt sich aus mehreren Teilproblemen zusammen. Die Wärme wird vom strömenden heißen Gas über das Gasführungsrohr, die Faserisolierung und schließlich den Stahlmantel an die Umgebung oder an die umgebende Kaltgasleitung übertragen.

Im Innern des Gasführungsrohres handelt es sich um eine erzwungene turbulente Rohrströmung. Die Reynolds-Zahl liegt etwa im Bereich von 10^6 und damit wesentlich höher als der kritische Wert 2300, bei dem der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung stattfindet. Für diesen Fall kann die konvektive Wärmeübergangszahl α_i bei Helium als Strömungsmedium mit etwa 1000 abgeschätzt werden (Renz, 1987). Auch im metallischen Gasführungsrohr selbst findet wegen des geringen Wärmestromes und der hohen Wärmeleitfähigkeit kein merklicher Temperaturabfall statt, so daß für die Isolierung mit einer zeitlich und örtlich konstanten Innentemperatur T_i gerechnet werden kann, die dieser Heißgastemperatur entspricht.

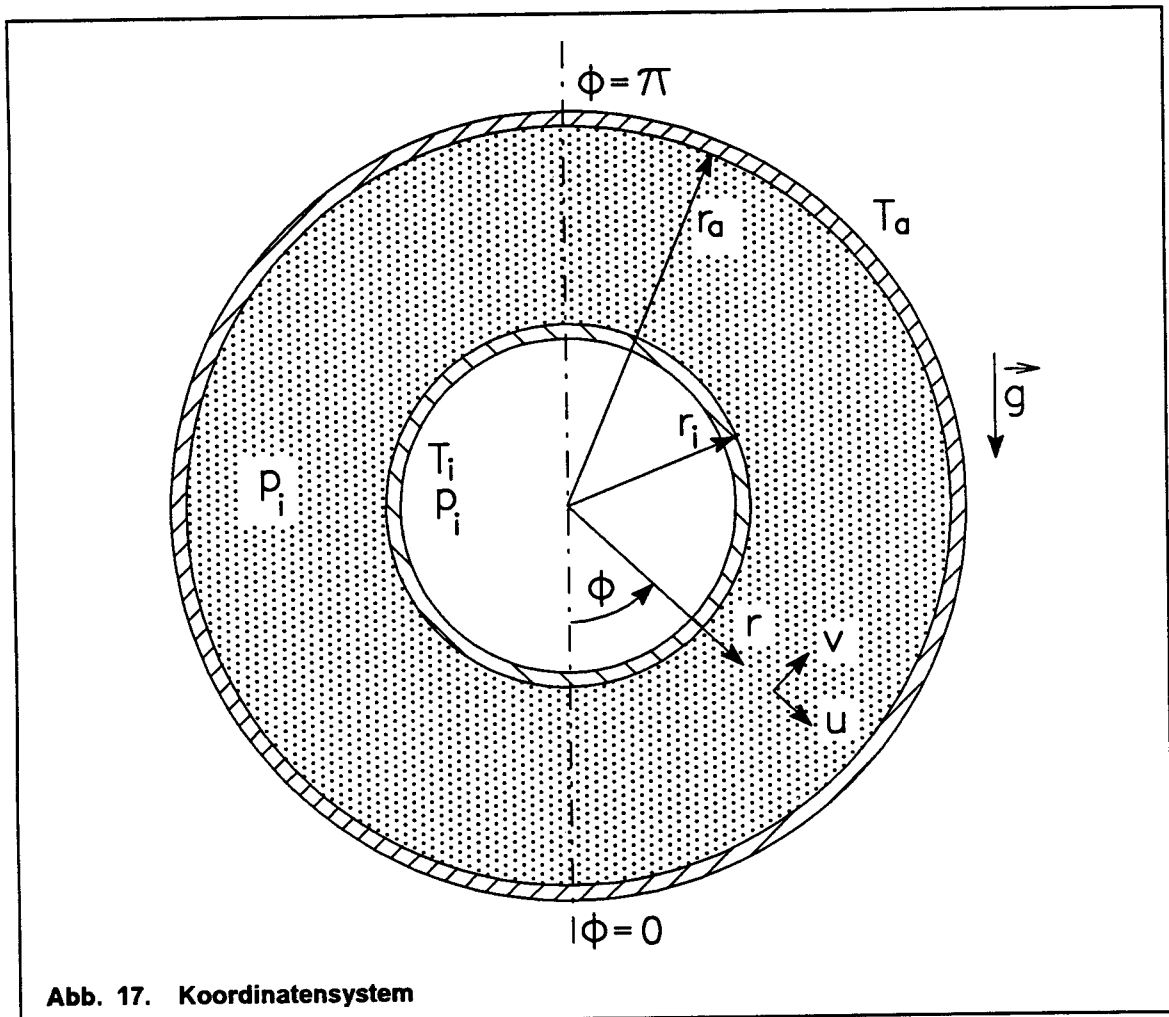
Die Außenwand der Isolierung, das Druckrohr, ist entweder wassergekühlt oder dient als innere Begrenzung der konzentrisch angeordneten Kaltgasleitung des Reaktors. In beiden Fällen darf auch hier aufgrund des guten Wärmeübergangs mit einer konstanten Temperatur T_s der Wand gerechnet werden.

Die ausgeführte Isolierung ist in einzelne Schüsse mit einer Länge von etwa 1,2 m aufgeteilt, die durch V-förmige Bleche voneinander getrennt sind. Die Bleche sind mit dem äußeren Druckrohr fest verbunden. Innen sind sie jeweils an einem kurzen Rohrstück befestigt, das die Stoßfugen der hintereinander liegenden Gasführungsrohre überlappt. Das Gasführungsrohr ist im Bereich jedes Schusses mit Druckentlastungsbohrungen versehen, damit im Falle rascher Druckabsenkungen im Reaktor das Gas schnell aus dem Isolationsraum entweichen kann (Bröckerhoff u. Scholz, 1975). Die Bohrungen sind symmetrisch auf einem Umfang verteilt und nicht hintereinander in Strömungsrichtung angebracht. Dennoch kann durch sie natürlich auch im Normalbetrieb aufgrund kleiner Druckschwankungen ständig ein gewisser Anteil an heißem Gas in die Isolierung einströmen und entsprechend abgekühltes Gas wieder zurück in die Heißgasleitung austreten. Für die rechnerische Behandlung dieses Wärmeübertragungsproblems soll der „Leckgasstrom“ jedoch vernachlässigt werden. Der Systemdruck soll also zeitlich konstant angenommen werden.

Zur weiteren Vereinfachung der Berechnung wird von einem unendlich langen Ringspalt ausgegangen, was eine Beschränkung auf den zweidimensionalen Fall ermöglicht. Diese Vereinfachung ist auch deshalb sinnvoll, weil aufgrund der Haftbedingungen an den Faseroberflächen im mikroskopischen Bereich die Randbedingung der Wandhaftung im makroskopischen Bereich entfällt. Daraus folgt, daß die Lösung für den unendlich ausgedehnten Ringspalt auch dann gültig bleibt, wenn dieser in mehrere Teilstücke aufgeteilt ist, zwischen denen kein Wärmeaustausch stattfindet.

5.1 Koordinatensystem

Für die Berechnung des Strömungs- und Temperaturfeldes werden zweidimensionale Zylinderkoordinaten nach der folgenden Abbildung zugrundegelegt:



r ist die radiale Komponente und läuft vom Innenradius r_i bis zum Außenradius r_a der Isolierung. ϕ ist die Umfangskomponente und läuft gegen den Uhrzeigersinn von 0 bis 2π . Die Geschwindigkeitskomponenten in radialer und in Umfangs-Richtung werden mit u und v bezeichnet.

Die Strömung und das Temperaturprofil sind symmetrisch zur vertikalen Achse. Daher braucht bezüglich der Umfangskomponente nur der Bereich 0 bis π betrachtet zu werden. An der vertikalen Wand kann eine Symmetriebedingung als Randbedingung Verwendung finden.

5.2 Vereinfachungen für die Berechnung

Neben den in der Einleitung dieses Kapitel genannten phänomenologischen Berechnungsvoraussetzungen sind einige weitere Vereinfachungen der Erhaltungsgleichungen möglich, die im folgenden aufgeführt werden:

- Bei der Betrachtung eines Volumenelementes unterscheiden sich die Gas-temperatur und die Temperatur der Fasern nicht.
- Die Strömungsgeschwindigkeit $\bar{u}$ innerhalb der Isolierung ist gemittelt über einem Bereich, der im Vergleich zu den makroskopischen Dimensionen klein ist, jedoch groß im Vergleich zur Porengröße. Damit entfällt eine makroskopische Haftbedingung der Strömung an der Wand (Chan u. a., 1970).
- Bei der Strömung des Gases innerhalb der porösen Isolierung handelt es sich um eine schleichende Strömung eines Newtonschen Fluides. Die lokale Reynolds-Zahl ist stets kleiner als 1. Damit kann als Impulsgleichung die Formulierung nach Darcy verwendet werden.
- Die Änderung der kinetischen Energie wird vernachlässigt, da sie sehr gering ist im Vergleich zu den thermischen Energieströmen.
- Die viskose Dissipation kann aufgrund der niedrigen Strömungsgeschwindigkeiten ebenfalls unberücksichtigt bleiben.
- Der Druckarbeitsterm trägt bei einer schleichenden Strömung und kleinen Druckgradienten nur unwesentlich zur Veränderung der Enthalpie der Strömung bei und wird ebenfalls vernachlässigt.
- Es soll der stationäre Zustand des Temperatur- und Strömungsfeldes ermittelt werden. Dieser ergibt sich als Endzustand einer instationären Berechnung. In der Kontinuitätsgleichung und in den Impulsgleichungen kann auf einen zeitabhängigen Term jedoch verzichtet werden, da sich das Strömungsfeld im Vergleich zum Temperaturfeld wesentlich schneller verändert. Bei der zeitabhängigen Berechnung der Temperatur wird also jeweils von einer stationären Strömung ausgegangen.

5.3 Erhaltungsgleichungen

Unter den genannten Voraussetzungen lautet die *Kontinuitätsgleichung* in zweidimensionalen Zylinderkoordinaten:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r \rho_{\text{Gas}} u) + \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho_{\text{Gas}} v) = 0 \quad (5.3.1)$$

Die *Energiegleichung* wird in der Form

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_{\text{iso}} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda_{\text{iso}} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) \quad (5.3.2)$$

verwendet. Dabei wurde die Temperaturabhängigkeit der Dichte und der Viskosität berücksichtigt. Die Gleichung gilt für den Fall, daß keine Energiequellen oder -senken auftreten. Die Wärmeübertragung durch Strahlung ist durch eine entsprechende Erhöhung der Wärmeleitfähigkeit der Isolierung in λ_{iso} berücksichtigt.

Die *Impulsgleichung* wird in der Formulierung des Darcy-Gesetzes verwendet (vgl. Gl. 2.2.1). Die gewohnten Viskositätsterme der vollständigen Impulsgleichung für ein freies Fluid sind durch einen geschwindigkeitsproportionalen Widerstandsterm ersetzt. In Komponentenschreibweise ergeben sich in Zylinderkoordinaten die Gleichungen

$$0 = \rho g \cos \phi - \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\eta}{k} u \quad (5.3.3)$$

für die radiale Richtung und die Gleichung

$$0 = -\rho g \sin \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} - \frac{\eta}{k} v \quad (5.3.4)$$

für die Umfangsrichtung. Bei Verwendung des Koordinatensystems nach Abb. 17 werden dabei die Komponenten der Schwerkraft in radialer Richtung mit $g_r = g \cos \phi$ und in Umfangsrichtung mit $g_\phi = -g \sin \phi$ angesetzt.

Definiert man eine *Stromfunktion* ψ über

$$\frac{r \rho_{\text{Gas}} u}{\rho_{\text{Gas},m}} = \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad \text{und} \quad \frac{\rho_{\text{Gas}} v}{\rho_{\text{Gas},m}} = - \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (5.3.5)$$

und ersetzt in den Erhaltungsgleichungen die Geschwindigkeitskomponenten u und v durch

$$u = \frac{1}{r} \frac{\rho_{\text{Gas},m}}{\rho_{\text{Gas}}} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad \text{und} \quad v = - \frac{\rho_{\text{Gas},m}}{\rho_{\text{Gas}}} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (5.3.6),$$

so wird dadurch die Kontinuitätsgleichung identisch erfüllt. Es bleiben die Energie- und die beiden Impulsgleichungen zu lösen. Damit ist der zeitliche Verlauf der Unbekannten T , ψ und p eindeutig zu bestimmen.

Die Druckterme können noch eliminiert werden, indem die Impulsgleichung in radialer Richtung nach ϕ abgeleitet und die Impulsgleichung in Umfangsrichtung mit der Variablen r multipliziert und nach r abgeleitet wird. Dabei ist zu beachten, daß im allgemeinen Fall die Stoffwerte von der Temperatur und damit auch vom Ort abhängen. Aus der Addition der beiden neuen Gleichungen ergibt sich

$$0 = \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho_{\text{Gas}} g \cos \phi) + \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_{\text{Gas}} g \sin \phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\eta_{\text{Gas}}}{k} u \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\eta_{\text{Gas}}}{k} r v \right) \quad (5.3.7).$$

Nach Auflösung der Ableitungen erhält man die Beziehung

$$0 = g \left(\frac{\partial \rho_{\text{Gas}}}{\partial \phi} \cos \phi + \frac{\partial \rho_{\text{Gas}}}{\partial r} r \sin \phi \right) + \frac{\eta_{\text{Gas}}}{k} \left(- \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial(r v)}{\partial r} \right) + \frac{1}{k} \left(- u \frac{\partial \eta_{\text{Gas}}}{\partial \phi} + r v \frac{\partial \eta_{\text{Gas}}}{\partial r} \right) \quad (5.3.8),$$

die noch durch Einführung eines Wirbelvektors ω mit

$$\omega = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{\partial(r v)}{\partial r} \right) \quad (5.3.9)$$

etwas übersichtlicher wird. Die Elimination des Druckterms führt also schließlich zu der Gleichung

$$\frac{\eta_{\text{Gas}}}{k} \omega = g \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \rho_{\text{Gas}}}{\partial \phi} \cos \phi + \frac{\partial \rho_{\text{Gas}}}{\partial r} \sin \phi \right) + \frac{1}{k} \left(- \frac{u}{r} \frac{\partial \eta_{\text{Gas}}}{\partial \phi} + v \frac{\partial \eta_{\text{Gas}}}{\partial r} \right) \quad (5.3.10),$$

die auch als *Wirbeltransportgleichung* bezeichnet wird. Der zeitliche Verlauf der Temperatur und der Stromfunktion ist jetzt eindeutig durch die Energie- und die Wirbeltransportgleichung bestimmt, wobei der in Gl. (5.3.9) definierte Wirbelvektor ω als Zwischengröße zu berechnen ist.

5.4 Definition dimensionsloser Größen

Um die Erhaltungsgleichungen in dimensionsloser Form zu lösen, wird die zeitliche Koordinate in der Form

$$\tau = \frac{t}{\Delta t} \quad (5.4.1)$$

mit Δt als Zeitkonstante der Berechnung eingeführt. Der dimensionslose Zeitschritt $\Delta \tau$ erhält damit per Definition den Wert 1. Die örtliche radiale Koordinate wird über

$$R = \frac{r}{r_a} \quad (5.4.2)$$

in die dimensionslose Form überführt. Die Umfangskoordinate ϕ benötigt keine Umformung, da die Angabe im Bogenmaß bereits dimensionslos ist.

Die unbekannten Größen Temperatur, Stromfunktion und Wirbelvektor werden in der Form

$$\Theta = \frac{T - T_a}{T_i - T_a} \quad (5.4.3),$$

$$\Psi = \frac{\psi}{a_{\text{eff},m}} \quad (5.4.4),$$

$$\Omega = \frac{r_a^2 \omega}{a_{\text{eff},m}} \quad (5.4.5)$$

dargestellt. Dabei ist $a_{\text{eff}} = \lambda_{\text{iso}}/(\rho c_p)_{\text{Gas}}$ die effektive Temperaturleitfähigkeit der Isolierung.

Durch die Einführung der dimensionslosen Kenngrößen und entsprechende Umformung der Erhaltungsgleichungen ergeben sich die folgenden Kennzahlen:

$$\text{Fo} = \frac{\lambda_{\text{iso},m} \Delta t}{(\rho c_p)_{\text{Gas},m} r_a^2} \quad (5.4.6),$$

$$\text{Da} = \frac{k}{r_a^2} \quad (5.4.7),$$

$$\text{Pr}_{\text{iso}} = \frac{(\rho c_p)_{\text{iso},m} (\eta/\rho)_{\text{Gas},m}}{\lambda_{\text{iso},m}} = \frac{v_{\text{Gas},m}}{a_{\text{iso},m}} \quad (5.4.8),$$

$$\text{Gr} = \frac{g \rho_{\text{Gas},m}^2 r_a^3}{\eta_{\text{Gas},m}^2} \quad (5.4.9),$$

$$\text{Ga} = \frac{g \beta \Delta T \rho_{\text{Gas},m}^2 r_a^3}{\eta_{\text{Gas},m}^2} \quad (5.4.10)$$

und im Falle der Boussinesq-Approximation die abgeleitete Kennzahl

$$\text{Ra} = \text{Gr} \cdot \text{Pr}_{\text{iso}} = \frac{g \beta (T_i - T_a) (\rho c_p)_{\text{Gas},m} r_a^3}{\lambda_{\text{iso},m} (\eta/\rho)_{\text{Gas},m}} \quad (5.4.11).$$

Die verwendeten Stoffwerte werden bei einer mittleren Stoffbezugs-temperatur gebildet. Diese ist in der Regel gleich der arithmetischen Mitteltemperatur über der gesamten Isolierung. Eine Ausnahme bildet die Wärmeleitfähigkeit durch die Wärmestrahlung, die bei einer mittleren Strahlungstemperatur $T_{\text{str},m}$ nach Gl. (3.3.4) zu berechnen ist.

Die Formulierung der *dimensionslosen Erhaltungsgleichungen* hängt sehr stark davon ab, welche Stoffwerte als konstant und welche als temperaturabhängig anzusehen sind. Die jeweils verwendeten Gleichungen werden daher den betreffenden Kapiteln vorangestellt.

5.5 Randbedingungen

Zu Beginn dieses Kapitels wurde bereits erwähnt, daß die Wandtemperaturen als gegeben und konstant über dem Umfang angenommen werden sollen. Zusätzlich seien die Wände undurchlässig für das Gas. Die radiale Geschwindigkeitskomponente u ist dort somit gleich Null. Entsprechend Gl. (5.3.5) nimmt der Gradient der Stromfunktion in Umfangsrichtung an einer undurchlässigen Begrenzung den Wert Null an, und die Stromfunktion selbst ist im Verlauf der gesamten Wand konstant.

Aufgrund der Symmetriebedingung braucht nur eine Hälfte des Ringspalts berechnet zu werden. Allerdings entsteht dadurch ein vertikaler Rand, für den geeignete Berechnungsvorschriften zu erstellen sind. Die Symmetrie bedingt weiter, daß für die Koordinaten $\phi = 0$ und $\phi = \pi$ der Gradient der Temperatur in Umfangsrichtung und der Betrag der Strömungsgeschwindigkeit in Umfangsrichtung gleich Null sein muß. Entsprechend hat die Stromfunktion auch im Bereich der vertikalen Achse einen konstanten Wert. Damit ist diese Konstante auf allen Rändern gleich und kann willkürlich bestimmt werden. Es bietet sich die Wahl des Wertes Null an.

Da die Konvektionsströmung in der rechten Hälfte im Uhrzeigersinn, in der linken aber dagegen strömt, bewegt sich das Gas im Bereich $\phi = 0$ entgegen der radialen Koordinate, und der Gradient $\partial\Psi/\partial\phi$ ist nach Gleichung (5.3.5) in diesem Bereich negativ. Die Stromfunktion selbst fällt dort also in Umfangsrichtung ab. Mit der Vereinbarung, daß auf dem Rand $\Psi = 0$ gelten soll und es keine weitere Begrenzung zwischen $\phi = 0$ und $\phi = \pi$ gibt, nimmt sie in der gesamten rechten Hälfte negative Werte an. In der linken Hälfte ist die Stromfunktion entsprechend positiv.

Zusammenfassend ergeben sich die folgenden dimensionsbehafteten bzw. dimensionslosen Randbedingungen:

1. Bedingungen am Innen- und am Außenrand:

$r = r_i$	$T = T_i$ $\psi = 0$	bzw.	$R = R_i$	$\Theta = 1$ $\Psi = 0$
$r = r_a$	$T = T_a$ $\psi = 0$	bzw.	$R = 1$	$\Theta = 0$ $\Psi = 0$

2. Bedingungen am vertikalen Rand:

$\phi = 0$	$\psi = 0$ $\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$	bzw.	$\phi = 0$	$\Psi = 0$ $\frac{\partial \Theta}{\partial \phi} = 0$
$\phi = 2\pi$	$\psi = 0$ $\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$	bzw.	$\phi = 2\pi$	$\Psi = 0$ $\frac{\partial \Theta}{\partial \phi} = 0$

Obwohl nur eine Hälfte des Ringspalts berechnet wird, werden zur Berechnung der Gradienten $\partial\Theta/\partial\phi$ oder $\partial\Psi/\partial\phi$ auf der vertikalen Symmetrieachse auch Temperatur- bzw. Stromfunktionswerte aus der anderen Hälfte benötigt. Aufgrund der Symmetrie können dazu die in der rechten Hälfte berechneten Temperaturwerte einfach auf die linke übertragen werden. Bei einer entsprechenden Übertragung der Stromfunktion

muß allerdings das Vorzeichen gewechselt werden. Zusammenfassend ergeben sich die folgenden Symmetriebedingungen:

$$\begin{array}{ll}
 T(-\phi) = T(\phi) & \text{bzw.} \quad \Theta(-\phi) = \Theta(\phi) \\
 \psi(-\phi) = -\psi(\phi) & \Psi(-\phi) = -\Psi(\phi) \\
 \\
 T(\pi + \Delta\phi) = T(\pi - \Delta\phi) & \text{bzw.} \quad \Theta(\pi + \Delta\phi) = \Theta(\pi - \Delta\phi) \\
 \psi(\pi + \Delta\phi) = -\psi(\pi - \Delta\phi) & \Psi(\pi + \Delta\phi) = -\Psi(\pi - \Delta\phi)
 \end{array}$$

Im Gegensatz zur Vorgehensweise bei der Aufstellung von Randbedingungen für eine freie Strömung darf die Umfangsgeschwindigkeit v an der Wand im betrachteten Fall allerdings nicht zu Null gesetzt werden. Es liegt hier ein poröses Medium mit offenen Poren vor, so daß der gesamte Gasraum mit Fasern angefüllt ist. Die im mikroskopischen Bereich gültige Haftbedingung an festen Oberflächen kann daher nicht mehr detailliert berücksichtigt werden. Es ist vielmehr nur noch eine makroskopische Betrachtungsweise unter Verwendung einer mittleren Strömungsgeschwindigkeit möglich. Diese Voraussetzung erfüllt das Darcy-Gesetz, das die Summe aller Reibungskräfte durch einen geschwindigkeitsproportionalen Druckverlustterm berücksichtigt. Ein Abweichen von dieser Betrachtungsweise im Bereich der äußeren Begrenzungen würde eine nicht erlaubte Vermischung von mikroskopischen und makroskopischen Randbedingungen bedeuten.

6. Auswahl von Bewertungskennzahlen

Als Ergebnis der Berechnungen von Temperatur und Strömungsgeschwindigkeiten aus den Erhaltungsgleichungen ergeben sich mehr oder weniger große Abweichungen vom radialsymmetrischen Temperaturprofil. In diesem Abschnitt werden Kennzahlen entwickelt, die eine vergleichende Analyse zwischen den Ergebnissen der Boussinesq-Approximation und den anschließend zu ermittelnden Ergebnissen unter Verwendung variabler Stoffwerte ermöglichen sollen.

6.1 Reine Wärmeleitung in zylindrischen Geometrien

Bewertungsgrundlage sollen die Kennwerte sein, die aus der analytisch berechenbaren Lösung der Differentialgleichung für das radialsymmetrische Temperaturfeld

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_{\text{iso},m} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (6.1.1)$$

hervorgehen. Grundlage des Vergleiches ist ein Ringspalt mit konstanten Wandtemperaturen T_i und T_a sowie mit konstanter mittlerer Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{\text{iso},m}$ ohne Berücksichtigung von Konvektionsströmungen. Für das radiale Temperaturprofil, den Temperaturgradienten in radialer Richtung und die Wärmestromdichte erhält man die folgenden Beziehungen:

$$T(r) = T_a + \ln \left(\frac{r}{r_a} \right) \frac{T_i - T_a}{\ln \left(\frac{r_i}{r_a} \right)} \quad (6.1.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{T_i - T_a}{\ln \left(\frac{r_i}{r_a} \right)} \quad (6.1.3)$$

$$\dot{q}''(r) = \frac{\dot{Q}}{2 \pi r \ell} = - \frac{\lambda_{\text{iso},m} (T_i - T_a)}{r \ln \left(\frac{r_i}{r_a} \right)} \quad (6.1.4)$$

Der hier abgeleitete Temperaturgradient $\partial T / \partial r$ wird im folgenden auch als logarithmischer Temperaturgradient bezeichnet. Er nimmt abhängig vom Ort die Werte

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{\log,a} = \frac{1}{r_a} \frac{T_i - T_a}{\ln \left(\frac{r_i}{r_a} \right)} \quad (6.1.5)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{\log,i} = \frac{1}{r_i} \frac{T_i - T_a}{\ln \left(\frac{r_i}{r_a} \right)} \quad (6.1.6)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{\log,m} = \frac{1}{r_m} \frac{T_i - T_a}{\ln \left(\frac{r_i}{r_a} \right)} \quad (6.1.7)$$

an. Da die Innentemperatur höher als die Außentemperatur liegt, haben alle diese Gradienten ein negatives Vorzeichen. Interessant für die Auswertung der Rechnungen, die die Konvektionsströmungen und die Temperaturabhängigkeiten der Stoffwerte berücksichtigen, sind die Abweichungen von diesen logarithmischen Temperaturgradienten. Der Gradient nach Gl. (6.1.7) wird speziell als Bezugsgröße für den maximalen Temperaturgradienten in Umfangsrichtung benutzt.

6.2 Darstellung der berechneten Verhältnisse durch dimensionslose Kennzahlen

Für allgemeine Betrachtungen werden die folgenden dimensionslosen Kennzahlen abgeleitet:

- Die lokale Nußelt-Zahl ist der Quotient aus dem tatsächlichen lokalen Wärmestrom und dem Wärmestrom nach Gl. (6.1.4) für das logarithmische Temperaturprofil. Sie wird üblicherweise für die Innen- und die Außenwand berechnet und ist somit noch von der Umfangskomponente ϕ abhängig:

$$Nu_i(\phi) = \frac{\lambda_{iso,i}}{\lambda_{iso,m}} \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{i,\phi}}{T_i - T_a} r_i \ln \left(\frac{r_i}{r_a} \right) \quad (6.2.1)$$

und

$$Nu_a(\phi) = \frac{\lambda_{iso,a}}{\lambda_{iso,m}} \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{a,\phi}}{T_i - T_a} r_a \ln \left(\frac{r_i}{r_a} \right) \quad (6.2.2).$$

Interessant sind hier sowohl der Verlauf dieses Kennwertes über dem Umfang als auch die Maximalwerte $Nu_{i,max}$ und $Nu_{a,max}$. Der Verlauf zeigt auf, wie stark das jeweils berechnete Temperaturfeld vom symmetrischen logarithmischen abweicht. Die Maximalwerte der Nußelt-Zahlen sind als charakteristische Größen für die Werkstoffbelastung der begrenzenden Wände anzusehen.

- Über eine Integration des inneren bzw. äußeren Temperaturgradienten über dem gesamten Umfang des Ringspaltes erhält man die Wärmestromdichte q'' . Dementsprechend ergibt sich aus der Integration der lokalen Nußelt-Zahl eine Gesamt-Nußelt-Zahl, die den Quotienten aus dem gesamten Wärmestrom und dem Wärmestrom bei ruhendem Gas darstellt:

$$Nu_{\text{Iso}} = \frac{\lambda_{\text{eff}}}{\lambda_{\text{Iso,m}}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Nu(\phi) d\phi \quad (6.2.3).$$

Dabei darf es keinen Unterschied geben, ob über der inneren oder der äußeren Nußelt-Zahl integriert wird. Aufgrund der für die Isolierung ausgeglichenen Wärmebilanz müssen die Werte gleich groß sein. Durch Berechnung beider Werte ergibt sich folglich eine Möglichkeit, die Rechnung zu kontrollieren.

- Vergleicht man den Gesamt-Wärmestrom des isolierten Ringspaltes mit dem Wärmeverlust eines Ringspaltes gleicher Geometrie, der mit einem ruhenden Gas konstanter Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{\text{Gas,m}}$ gefüllt ist, so erhält man eine Kennzahl

$$Nu_{\text{Gas}} = Nu_{\text{Iso}} \frac{\lambda_{\text{Iso,m}}}{\lambda_{\text{Gas,m}}} \quad (6.2.4).$$

- Als charakteristische Größe für die Asymmetrie des Temperaturfeldes kann das Maximum der Asymmetriekennzahl K_ϕ betrachtet werden. Dieser versteht sich als das Verhältnis aus maximalem Temperaturgradienten in Umfangsrichtung und mittlerem radialen logarithmischen Temperaturgradienten:

$$K_{\phi, \text{max}} = \frac{\frac{1}{r} \left(\frac{\partial T}{\partial \phi} \right)_{\text{max}}}{\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{\text{log,m}}} \quad (6.2.5).$$

- Für das Anfahren des Prozesses ist der Wärmeinhalt der Isolierung pro Längeneinheit eine wichtige Größe. Bezieht man den berechneten Wert auf den Betrag, den man bei Vorliegen eines logarithmischen Temperaturfeldes erhält, so ergibt sich der Aufheizkennwert K_Q mit

$$K_Q = \frac{\frac{1}{\ell} \int_{r_i}^{r_a} (\rho c_p)_{\text{Iso}} (T - T_\infty) dV}{Q'_{\text{log}}} \quad (6.2.6)$$

mit Q'_{log} als dem auf die Länge ℓ bezogenen Wärmeinhalt aus der Berechnung eines Ringspaltes mit logarithmischem Temperaturfeld nach Gleichung (6.1.2). Dieser Wert läßt sich über das Integral im Zähler von Gleichung (6.2.6) bestimmen zu:

$$Q'_{\text{log}} = \pi(\rho c_p)_{\text{Iso,m}} \left[(T_a - T_\infty)(r_a^2 - r_i^2) - (T_i - T_a) \left(\frac{(r_a^2 - r_i^2)}{2 \ln(r_i/r_a)} + r_i^2 \right) \right] \quad (6.2.7).$$

- Der Maximalwert der dimensionslosen Stromfunktion $\Psi_{\max}$ ist ein Maß für die durch die Konvektionsströmung umgewälzte Gasmenge.
- Aus dem Feld der dimensionsbehafteten Stromfunktion ψ können die maximalen Geschwindigkeiten in Umfangsrichtung am Innen- und am Außenrand, $v_{\max,i}$ und $v_{\max,e}$, sowie der maximale Betrag der radialen Geschwindigkeit $|u|_{\max}$ ermittelt werden. Zusätzlich wird der Maximalwert der Absolutgeschwindigkeit $|\vec{u}|_{\max}$ berechnet.

Diese Beträge hängen allerdings vom speziellen Anwendungsfall ab, da neben Betrag und Ableitung der Stromfunktion ψ noch der Außendurchmesser r_a und die effektive Temperaturleitfähigkeit der Isolierung a_{eff} in die Berechnung eingehen. Über die lokale Reynolds-Zahl nach Gl. (2.1.1) kann unter Verwendung des Maximalwertes der Absolutgeschwindigkeit ermittelt werden, ob die Voraussetzung des Darcy-Gesetzes

$$\text{Re}_{\max} = \frac{\rho_{\text{Gas}} |\vec{u}|_{\max} \delta_f}{\eta_{\text{Gas}}} \stackrel{!}{<} 1 \quad (6.2.8)$$

noch erfüllt ist.

7. Numerischer Lösungsweg

Ziel der Berechnungen ist die Betrachtung der Wärmeübertragung für den stationären Fall. Im folgenden soll skizziert werden, wie aus den Erhaltungsgleichungen und den Randbedingungen aus dem Kap. „5. Gleichungen für den Wärme- und Stofftransport in einer innenisolierten Heißgasleitung“ eine solche Lösung ermittelt werden kann.

7.1 Einführung eines geeigneten Gitters

Die speziellen dimensionslosen Gleichungen werden mit Hilfe der Methode der finiten Differenzen diskretisiert. Dabei ersetzt man die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten unter Verwendung der Funktionswerte auf ganz bestimmten Punkten im Feld, den Gitterpunkten. Aus den Ausführungen des Kap. „5.5 Randbedingungen“ geht hervor, daß die zu bestimmenden Werte von T und Ψ auf dem Rand konstant und bekannt sind. Diese Art der Randbedingung wird Dirichletsche Randbedingung genannt. Für einen solchen Fall empfiehlt sich die Einführung eines Eckgitters (Marsal, 1989), wie es im folgenden beschrieben ist. Die zu berechnenden Punkte befinden sich in den Blockecken und damit auch auf den Randpunkten selbst. Zur Erstellung des Gitters wird eine äquidistante Einteilung des zu berechnenden Feldes in Umfangs- und in radialer Richtung benutzt:

$$\phi(i) = \frac{i}{N_\phi} \pi \quad (7.1.1)$$

$$R(j) = \frac{r_i}{r_a} + \frac{(r_a - r_i)}{r_a} \frac{j}{N_R} \quad (7.1.2)$$

mit N_ϕ und N_R als Anzahl der Gitterpunkte in Umfangsrichtung bzw. in radialer Richtung.

Da es sich im vorliegenden Fall nicht um ein Grenzschichtproblem handelt und auch keine Anfangsbedingungen mit extrem steilen Gradienten verwendet werden sollen, ist es nicht notwendig, variable Gitterabstände zu verwenden. Es wurde dennoch versucht, nach dem Vorschlag von Kálnay de Rivas (1972) in radialer Richtung ein zur Mittellinie symmetrisches Gitter mittels der Beziehung

$$R(j) = \frac{r_i}{r_a} + \frac{r_a - r_i}{r_a} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{j}{N_R} \right) \quad (7.1.3)$$

einzuführen. Obwohl nach Aussage des Autors bei dieser Gitterform die zusätzlich zum Diskretisierungsfehler auftretenden Fehler durch die Unregelmäßigkeit des Gitters minimal sind, und obwohl spezielle Differenzenquotienten für nicht äquidistante Gitter verwendet wurden, konnten dadurch bei dem letztlich verwendeten Gitter mit

$\phi \times R = 36 \times 100$ Gitterpunkten keine besseren Ergebnisse erzielt werden. Lediglich bei wesentlich gröberen Gittern, zum Beispiel 12×20 , waren Vorteile erkennbar. Das bestätigt den Schluß, daß sich die Verwendung eines variablen Gitters wirklich nur beim Auftreten von Grenzschichteffekten lohnt.

7.2 Differenzenquotienten

Die vorhandenen Differentialquotienten werden also dort, wo es möglich ist, durch zentrale äquidistante Differenzen-Quotienten zweiter Ordnung ersetzt. Für die erste und die zweite Ableitung der Temperatur in Umfangsrichtung ist zum Beispiel einzusetzen:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \phi} = \frac{\Theta(\phi + \Delta\phi) - \Theta(\phi - \Delta\phi)}{2 \Delta\phi} + o(\Delta\phi^2) \quad (7.2.1)$$

und

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \phi^2} = \frac{\Theta(\phi + \Delta\phi) - 2 \Theta(\phi) + \Theta(\phi - \Delta\phi)}{\Delta\phi^2} + o(\Delta\phi^2) \quad (7.2.2).$$

Alle anderen örtlichen Ableitungen sind analog anzusetzen. Dabei ist $o(\Delta\phi^2)$ ein Term der Ordnung $\Delta\phi^2$, der bei der weiteren Berechnung vernachlässigt wird. Der durch diese Vereinfachung entstehende Fehler wird natürlich mit steigender Anzahl der Gitterpunkte kleiner.

Für die zur Lösung der Energiegleichung (5.3.2) benötigte zeitliche Ableitung der Temperatur findet ein Vorwärtsgradient erster Ordnung Verwendung:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\Theta^{k+1} - \Theta^k}{\Delta\tau} + o(\Delta\tau) \quad (7.2.3)$$

Dabei bezeichnet k den Zeitpunkt der Berechnung. Der dimensionslose Zeitschritt $\Delta\tau$ ist vereinbarungsgemäß gleich 1.

Zur Verbesserung der Konvergenz wird das implizite Verfahren nach Crank und Nicolson verwendet. Dabei werden in den zeitabhängigen Gleichungen, in diesem Falle in der Energiegleichung, die örtlichen Ableitungen als zeitlicher arithmetischer Mittelwert der Zeitpunkte k und $k+1$ dargestellt. Hierdurch erhöht sich zwar der Aufwand bei der Berechnung des nächsten Zeitpunktes, die Zeitschritte können jedoch größer gewählt werden, da das Crank-Nicolson-Verfahren von der Ordnung $O(\Delta\tau^2)$ ist und damit hohen Genauigkeitsansprüchen genügt.

Bei der Verwendung zentraler Differenzen müssen immer die Ränder besonders beachtet werden. Auf dem Innen- und dem Außenrand ergeben sich hier keine Probleme, da diese Felder mit konstanten vorgegebenen Werten besetzt sind und nicht neu berechnet werden müssen. Einzige Ausnahme ist der Wirbelvektor Ω . Sein Randwert hat zwar keinen Einfluß auf das Ergebnis der Rechnung, wird allerdings

nach der Berechnung der eigentlichen Zielgrößen zu Vergleichszwecken ebenfalls festgestellt. Dazu wird eine Taylor-Reihe zweiter Ordnung für Ω verwandt, wobei die benötigten ersten und zweiten Ableitungen über Vorwärts- bzw. Rückwärtsgradienten zweiter Ordnung ermittelt werden.

Am vertikalen Rand können aufgrund der Symmetrie wie im restlichen Feld ebenfalls zentrale Differenzenquotienten verwendet werden. Einzig die erste Ableitung der Stromfunktion in Umfangsrichtung bereitet hier Probleme, da an dieser Stelle aufgrund der Symmetrie bei gleichzeitigem Vorzeichenwechsel ein Wendepunkt von Ψ vorliegt. Ein Differentialquotient zweiter Ordnung würde $\partial\Psi/\partial\phi$ unterschätzen. Daher wird hier stattdessen ein zentraler Differenzenquotient vierter Ordnung verwendet. Wegen der Symmetrie und der Bedingung $\Psi = 0$ am vertikalen Rand kann die Diskretisierungsbeziehung auf eine Zweipunkteformel umgerechnet werden, wodurch der Rechenaufwand also nicht erhöht wird.

Der Temperaturgradient in Umfangsrichtung am vertikalen Rand ist wiederum unkritisch, da dieser hier stets den Wert Null annimmt. Dieses Ergebnis liefert auch der Differenzenquotient zweiter Ordnung.

7.3 Anfangsbedingungen

Der stationäre Fall wird, wie erwähnt, als Grenzwert des zeitlich veränderten Verlaufes ermittelt. Zur Beschleunigung der Berechnungen ist es daher sinnvoll, als Anfangszustand eine möglichst gute Abschätzung des Endzustandes zu wählen. Wenn die Wärmeleitfähigkeit als konstant über der Temperatur angenommen werden kann, ist für den Beginn der Rechnung der Ansatz eines nach außen logarithmisch abnehmenden Verlaufes des Temperaturfeldes nach Gl. (6.1.2) günstig. Das entspricht der Temperaturverteilung in einem Ringspalt ohne Strömung. Auch bei variabler Wärmeleitfähigkeit ist es besser, zunächst das Temperaturfeld für den ruhenden Fall iterativ zu berechnen und dann dieses Ergebnis als Startbedingung für die weitere Rechnung zu benutzen.

Eine geeignete Abschätzung für den Verlauf der Stromfunktion ist erreichbar, wenn der sich bei späterer Berechnung ergebende Maximalwert $\Psi_{\max}$ ungefähr bekannt ist. Setzt man diesen für den Mittelpunkt des Feldes an und läßt den Verlauf der Stromfunktion zum Rand hin sinus-förmig bis auf Null abfallen, so kann bei niedrigen Kennzahlprodukten Ra • Da erheblich Rechenzeit eingespart werden. Bei hohen Kennzahlen führt die Abschätzung eines symmetrischen Strömungsfeldes zu Konvergenzproblemen, da hierbei Temperatur- und Strömungsfeld nicht zueinander passen. Die Bedingung $\Psi = 0$ für das gesamte Feld führt zwar zu längeren Rechenzeiten, war aber in einigen Fällen die einzige Möglichkeit, um die Konvergenz der Rechnung zu erwirken.

Das Endergebnis wird durch die Wahl der Anfangsbedingungen in der Regel nicht beeinflusst. Ausnahmen sind aber möglich, wenn die Abbruchschranke zu groß oder

das Zeitschrittintervall zu klein ist. Durch Variation der Bedingungen kann die Güte des Ergebnisses überprüft werden.

Bei den Rechnungen, die über die Boussinesq-Approximation hinaus gehen, aber noch keine variable Wärmeleitfähigkeit verwenden, wird das Ergebnis der Approximation als Startbedingung verwendet. Bei Rechnungen mit variabler Wärmeleitfähigkeit werden die Ergebnisse vorheriger Rechnungen mit variabler Wärmeleitfähigkeit verwendet. Das Einsetzen von Temperatur- und Strömungsfeldern, die bei niedrigeren Rayleigh-Zahlen ermittelt wurden, stellte sich als weniger günstig heraus.

7.4 Ablauf der Berechnung

Ausgehend vom Startfeld für Temperatur und Strömung wird der stationäre Endwert des Problems entsprechend dem in Abb. 18 auf Seite 61 aufgezeigten Programmablauf berechnet.

Falls die Berechnung über die Boussinesq-Approximation hinausgeht, steht zu Beginn eines jeden Zeitschrittes die Ermittlung der benötigten Stoffwerte an. Diese werden nicht bei jedem Iterationsschritt berechnet, um Rechenzeit einzusparen. Die Änderung von einem Zeitschritt zum anderen ist aber auch nicht so groß, daß ein solcher Aufwand notwendig wäre. Im Fall der Boussinesq-Approximation sind die Stoffwerte konstant, dieser Programmteil kann also übergangen werden.

Mit $\Theta_{i,j}^k$ und $\Psi_{i,j}^k$ soll nun die Temperatur bzw. die Stromfunktion zum Zeitpunkt k am Ort $(\phi(i), R(j))$ oder kürzer (i,j) bezeichnet werden. Aus den vorliegenden Feldern Θ^k und Ψ^k können aus der diskretisierten Energiegleichung die Temperaturen zum Zeitpunkt $k+1$ implizit berechnet werden. Mit Hilfe dieser Werte läßt sich dann aus der Wirbeltransportgleichung das Feld des Wirbelvektors Ω^{k+1} bestimmen. Aus dessen Definitionsgleichung (5.3.9) ergeben sich die neuen Stromfunktionswerte. Die beiden letzten Gleichungen werden, wie in Kap. „5.2 Vereinfachungen für die Berechnung“ erwähnt, als stationär im Vergleich zum Temperaturfeld betrachtet.

Es liegt allerdings in der Natur des impliziten Crank-Nicolson-Verfahrens, daß die Temperaturen und Stromfunktionswerte in der Umgebung von (i,j) zum Zeitpunkt $k+1$ eigentlich schon bekannt sein müssen, um die Werte $\Omega_{i,j}^{k+1}$ und $\Psi_{i,j}^{k+1}$ zu ermitteln. Da sie das aber nicht sind, sondern auch erst berechnet werden müssen, kann die Lösung für den nächsten Zeitschritt nur iterativ erfolgen. Nach der ersten Iteration erhält man eine Schätzung, die bei der zweiten Iteration verwendet werden kann. Wenn n die Anzahl der bereits durchgeführten Iterationen ist, dann wird also aus ${}^n\Theta^{k+1}$, Θ^k , ${}^n\Psi^{k+1}$ und Ψ^k eine weitere Schätzung der Felder ${}^{n+1}\Theta^{k+1}$ und ${}^{n+1}\Psi^{k+1}$ berechnet. Ist die maximale relative Veränderung der beiden Werte kleiner als die Abbruchschranke ε , gilt also

$$\frac{{}^{n+1}\Theta_{i,j}^{k+1} - {}^n\Theta_{i,j}^{k+1}}{{}^{n+1}\Theta_{i,j}^{k+1}} < \varepsilon \quad (7.4.1),$$

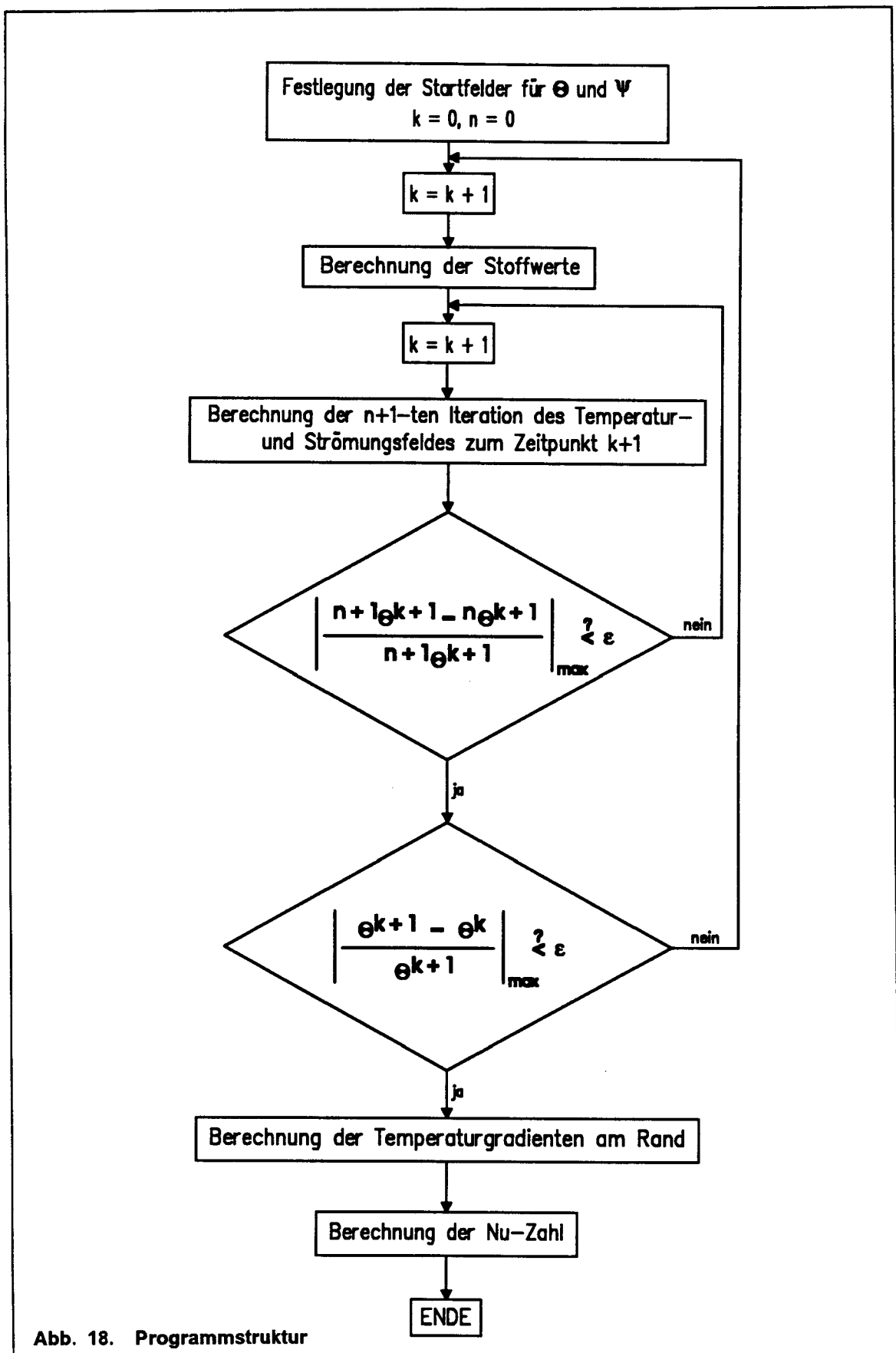


Abb. 18. Programmstruktur

dann kann der nächste Zeitschritt berechnet werden. Dieses Verfahren wird solange wiederholt, bis die maximale relative Änderung zwischen zwei Zeitschritten kleiner als ε ist. Der stationäre Endwert gilt dann als erreicht. Für die Abbruchschranke wurde in der Regel ein Wert von $\varepsilon = 10^{-6}$ verwendet. Ein noch kleinerer Wert brachte keine signifikante Veränderung des Ergebnisses mehr.

Der zeitabhängige Term in der Energiegleichung könnte weggelassen werden, wenn nur der stationäre Zustand von Interesse ist. Es hat aber gewisse Vorteile, das stationäre Problem als Endzustand eines instationären Vorganges zu betrachten, da so besser eine Stabilität der Rechnung zu erreichen ist. Für problematische stationäre Aufgabenstellungen kann es sogar günstig sein, künstlich einen instationären Term einzufügen, um so ein stabiles Verfahren zu erhalten.

Zur Berechnung des Gleichungssystems ist also die Wahl einer geeigneten Zeitkonstante notwendig. Ist sie zu klein, werden zu viele Iterationen notwendig, um überhaupt Änderungen des Temperaturprofils zu ermitteln; ist sie zu groß, so leidet auch hier das Konvergenzverhalten.⁷ Für kleine und mittlere Kennzahlprodukte bis $Ra \cdot Da = 500$ wurde eine Zeitschrittkonstante von 600 sec verwendet. Darüberhinaus waren teilweise kleinere Werte notwendig. Zur Ermittlung der Boussinesq-Approximation reichte im allgemeinen eine Konstante von 900 sec aus.

Die Konvergenz der Rechnung wird beschleunigt durch ein Relaxationsverfahren mit veränderlichem Relaxationsfaktor κ . Als Endergebnis der Berechnung der Temperatur eines neuen Zeitschrittes wird nicht das Ergebnis selbst genommen, sondern ein etwas modifizierter Wert:

$$\Theta_{i,j}^{k+1} = \Theta_{i,j}^k + \kappa (\Theta_{i,j}^{k+1} - \Theta_{i,j}^k) \quad (7.4.2)$$

Bei einem Relaxationsfaktor oberhalb von 1 wird der berechnete Zuwachs von Θ^k nach Θ^{k+1} künstlich vergrößert. Man spricht dabei von einer Überrelaxation. Ist κ kleiner als 1, so bezeichnet man dieses als Unterrelaxation.

Bei der Berechnung wird nun jeweils der Punkt (i,j) mit der größten relativen Temperaturänderung bestimmt. Im folgenden Zeitschritt ist zu ermitteln, ob die Temperaturänderung immer noch in der gleichen Richtung erfolgt (monotones Verhalten), oder ob sich das Vorzeichen umgekehrt hat (oszillierendes Verhalten). Im ersten Fall wird mit einer Überrelaxation, im zweiten Fall mit einer Unterrelaxation gearbeitet. Beim Wechsel von monotonem zu oszillierendem Verhalten muß für einen Zeitschritt ganz auf die Relaxation verzichtet werden. Für κ wurden Werte zwischen 0,7 und 1,3 eingesetzt.

Der Vorteil dieses Verfahrens liegt primär darin, daß es bei oszillierendem Verhalten des Ergebnisses die Konvergenz der Rechnung erheblich verbessert. Die Überrelaxation hat hingegen den Vorteil, daß das Ende der Rechnung schneller erreicht wird. Als Folge der Einführung eines variablen Relaxationsfaktors ist es möglich, auch bei höheren Zeitkonstanten ein stabiles Ergebnis zu erhalten. Es braucht

⁷ Die direkte Berechnung des stationären Problems ohne den Umweg über die zeitabhängigen Veränderungen entspräche im übrigen einer unendlich großen Zeitkonstante.

also nicht für jede Rechnung erneut ein guter Wert für Δt ermittelt zu werden, da der erlaubte Bereich wesentlich vergrößert ist.

Aus Gründen der Stabilität ist im Programm auch bei der Berechnung der Temperatur von Iteration zu Iteration eine Unterrelaxation mit einem Wert $\kappa = 0,95$ für den Fall vorgesehen, daß die Rechnung oszilliert.

Bei der rechnerischen Lösung von Gleichungssystemen ist immer die Frage zu stellen, ob durch numerische Instabilitäten ein falsches Ergebnis möglich ist. Es können mehrere Gründe angeführt werden, warum ein derartiges Verhalten hier nicht zu erwarten ist und auch nicht beobachtet wurde:

1. Durch die Randbedingungen für die Temperatur ist diese nach oben und nach unten begrenzt. Höhere Werte als $\Theta = 1$ oder niedrigere Werte als $\Theta = 0$ dürfen nicht auftreten, da innerhalb der Isolierung keine Wärmequellen auftreten. Wenn doch höhere Werte auftraten, lag dies in der Regel an einer schlechten Zeitkonstanten oder einer ungünstigen Auswirkung der Überrelaxation. Der Fehler im Ergebnis fällt jedoch direkt auf, und der Rechenlauf kann mit günstigeren Parametern neu gestartet werden.
2. Die Lösung für den stationären Fall wird als Endwert eines instationären Vorganges ermittelt. Dabei entspricht zwar aufgrund der zeitlichen Relaxation die Änderung von Zeitschritt zu Zeitschritt nicht dem tatsächlichen zeitlichen Verlauf, die Konvergenz der Rechnung gilt jedoch erst als erreicht, wenn die relative Änderung des dimensionslosen Temperaturwerts Θ aufgrund der numerischen Auswertung der Differentialgleichungen an keiner Stelle des Feldes größer als $\varepsilon = 10^{-6}$ ist. Das bedeutet also, daß es keine Gradienten mehr gibt, die eine Änderung des Temperaturfeldes erwirken könnten.
3. Die meisten Rechenläufe wurden mehrfach mit wechselnden Zeitkonstanten, Relaxationsfaktoren und Abbruchschranken durchgeführt. Die Veränderung des Ergebnisses für den konvektiven Wärmestrom lag dabei stets unterhalb von 1 %, solange die Rechnung nur konvergierte.

8. Boussinesq - Approximation

Unter der „Boussinesq-Approximation“ versteht man eine ganz bestimmte Behandlung der Erhaltungsgleichungen für Masse, Energie und Impuls. Als Voraussetzung für die Berechnung gilt dabei:

- Die Dichte im Auftriebsterm der Impulsgleichung ist temperaturabhängig und nimmt nach der Beziehung

$$\begin{aligned}\rho(T) &= \rho_m - \beta (T - T_m) \rho_m = \rho_m \left(1 - \frac{T - T_m}{T_m} \right) \\ &= \rho_m \left(2 - \frac{T}{T_m} \right)\end{aligned}\tag{8.0.1}$$

linear mit der Temperatur ab. Dabei ist β der isobare Wärmeausdehnungskoeffizient des Gases, der über $\beta = 1/T_m$ abgeschätzt wird.

- Alle anderen Stoffwerte werden als konstant und damit unabhängig von Temperatur und Druck angesehen.

Diese Berechnungsvoraussetzung wurde erstmals von Oberbeck (1879) zur Lösung einer auftriebserzeugten Gasströmung angesetzt. Bekannter wurde sie jedoch erst später unter dem Namen von Boussinesq, der sie 1903 verwandte. Die Approximation ist nicht gebunden an Strömungen in porösen Medien, sie wird auch für freie Konvektionsströmungen benutzt.

In Verbindung mit der Darcy-Gleichung für ein poröses Medium wird allgemein auch von der Darcy-Oberbeck-Boussinesq- oder kürzer DOB-Approximation gesprochen. Im folgenden Kapitel soll auf der Grundlage dieser Approximation eine Näherungslösung für die Konvektionsströmung im fasergefüllten horizontalen Ringspalt erarbeitet werden.

8.1 Dimensionslose Erhaltungsgleichungen

Die *Stromfunktion* ψ hängt im Fall der Boussinesq-Approximation nicht mehr von der lokalen Dichte ab. Die Geschwindigkeitskomponenten u und v können somit entsprechend Gl. (5.4.4) durch

$$u = \frac{1}{r_a a_{\text{eff},m}} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \quad \text{und} \quad v = - \frac{1}{r_a a_{\text{eff},m}} \frac{\partial \Psi}{\partial R}\tag{8.1.1}$$

in der Energie- und in der Wirbeltransportgleichung sowie in der Definitionsgleichung des Wirbelvektors ersetzt werden.

Für die *Energiegleichung* erhält man unter Berücksichtigung der Voraussetzungen aus Kap. „5.2 Vereinfachungen für die Berechnung“ und unter Einführung der oben genannten Stromfunktion die dimensionslose Formulierung

$$\frac{1}{Fo} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \phi^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \Theta}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} \quad (8.1.2)$$

Nach Einsetzen der Stromfunktion Gl. (8.1.1) geht die *Definitionsgleichung des Wirbelvektors* (5.3.9) über in die dimensionslose Form

$$\Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \quad (8.1.3).$$

Wenn man beachtet, daß für den Fall der Boussinesq-Approximation die Dichte nach Gl. (8.0.1) linear mit der Temperatur fällt und damit für ihre Ableitungen also

$$\frac{\partial \rho}{\partial \phi} = -\beta \frac{\partial T}{\partial \phi} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \rho}{\partial r} = -\beta \frac{\partial T}{\partial r} \quad (8.1.4)$$

gilt, dann ergibt sich die dimensionslose *Wirbeltransportgleichung* zu

$$0 = -\frac{1}{Da} \Omega - Ra \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} \cos \phi + \frac{\partial \Theta}{\partial R} \sin \phi \right) \quad (8.1.5)$$

oder umgeformt

$$\Omega = -Ra \cdot Da \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} \cos \phi + \frac{\partial \Theta}{\partial R} \sin \phi \right) \quad (8.1.6),$$

wobei anstelle des Kennzahlprodukts $Gr \cdot Pr_{iso}$ die Rayleigh-Zahl verwendet wurde.

Wie im Kap. „7.4 Ablauf der Berechnung“ beschrieben, kann eine Lösung für das Temperaturfeld aus den Gln. (8.1.2), (8.1.3) und (8.1.6) berechnet werden. Aus der Energiegleichung ergibt sich bei Kenntnis aller anderen Größen das Temperaturfeld, aus der Wirbeltransportgleichung anschließend das Wirbelfeld und aus der Definitionsgleichung des Wirbelvektors schließlich die Werte für die Stromfunktion. Über die Definitionsgleichungen der Stromfunktion, Gl. (8.1.1), können dann die Geschwindigkeitskomponenten u und v berechnet werden.

8.2 Ergebnisse der Boussinesq-Rechnung

Es wurden für verschiedene Radienverhältnisse Rechenläufe durchgeführt, zum einen, um das Programm bezüglich des Konvergenzverhaltens in Abhängigkeit von Abbruchschranke, Zeitkonstante und Feinheit des Gitters zu testen, zum anderen, um die Ergebnisse des erstellten Programms mit Literaturdaten zu vergleichen. Zufriedenstellende Ergebnisse wurden in den meisten Fällen mit einer Zeitkonstante von 900 sec und einer relativen Abbruchschranke von $\varepsilon = 10^{-6}$ erzielt. Abb. 19 zeigt im

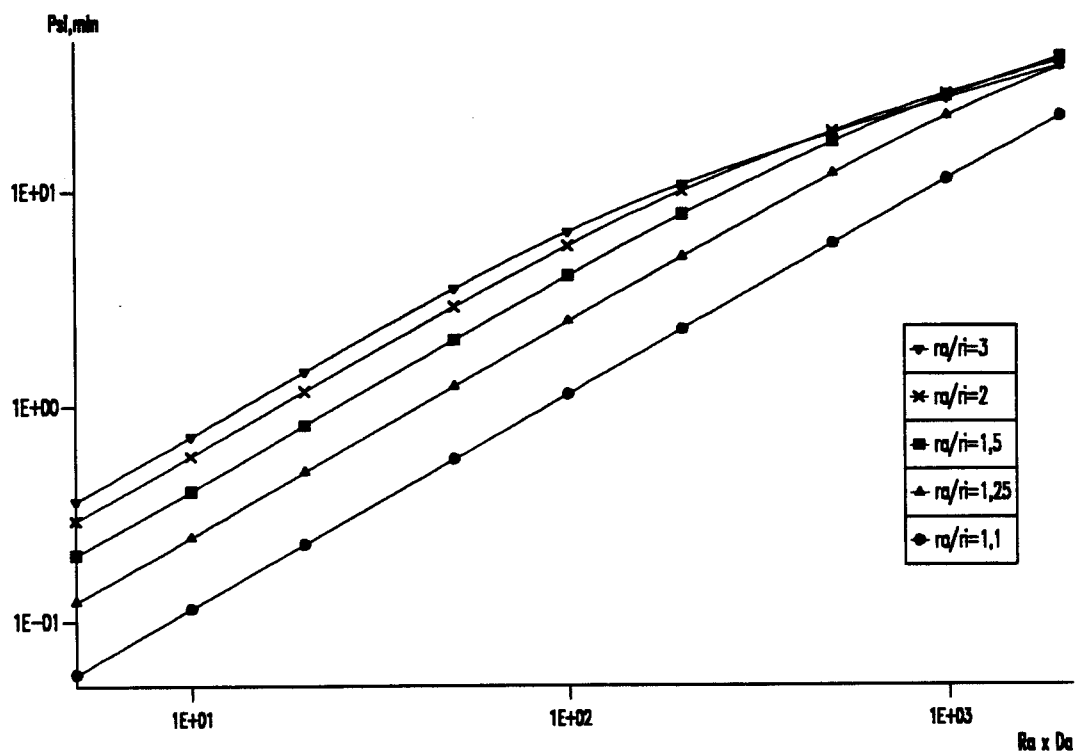
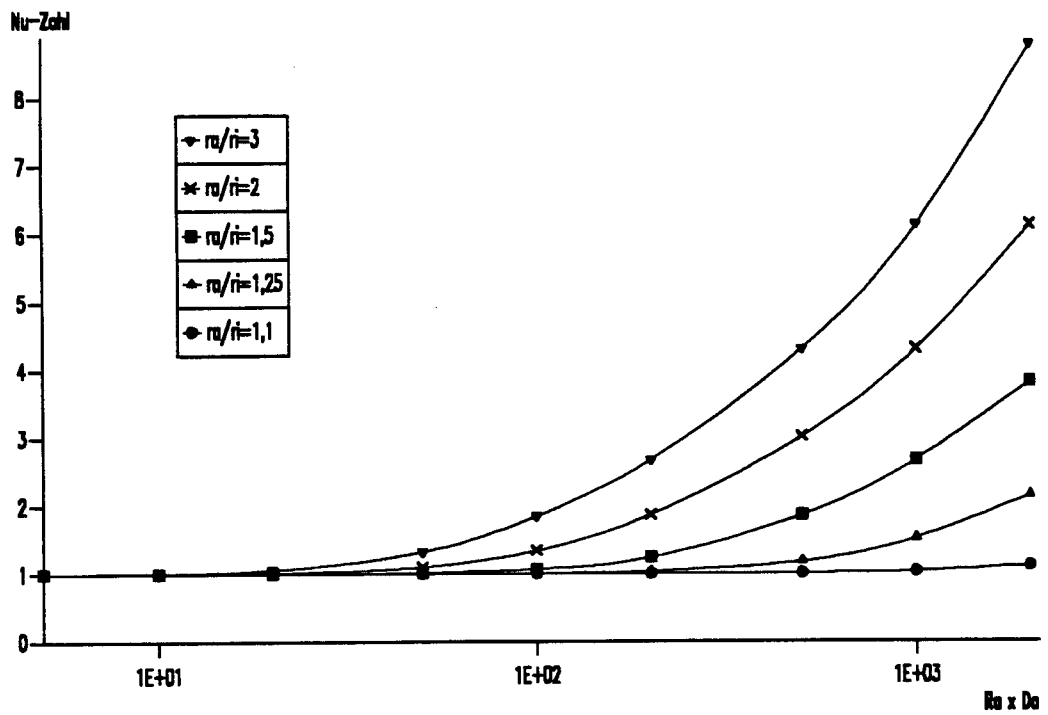


Abb. 19. Ergebnisse der Boussinesq-Approximation

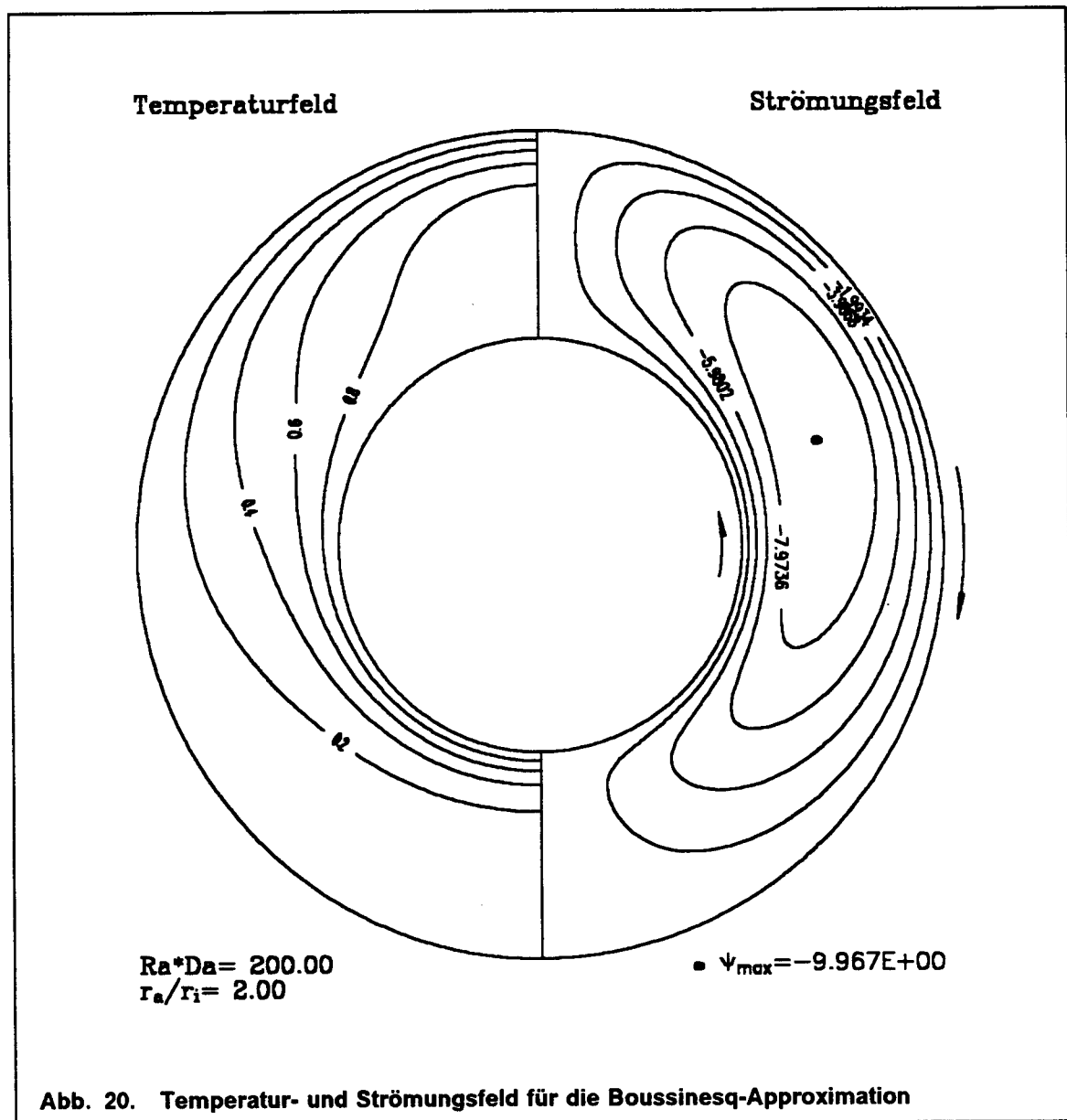
oberen Teil die Abhängigkeit der NuBelt-Zahl vom Radienverhältnis r_a/r_i und vom Kennzahlprodukt $Ra \cdot Da$. Es ist deutlich zu erkennen, daß erst ab einem bestimmten vom Radienverhältnis abhängigen Wert des Kennzahlproduktes $Ra \cdot Da$ die Konvektion des Gases einen merklichen Anteil zur Wärmeübertragung beiträgt. Die Auswirkung der Konvektionsströmung ist umso gravierender, je größer das Radienverhältnis ist.

Die NuBelt-Zahlen sind zu verstehen als relative Werte, die eine Aussage über die konvektionsbedingte Erhöhung der übertragenen Wärme im Vergleich zum ruhenden Fall machen. Die effektive Wärmeleitfähigkeit der konvektionsbeeinflussten Isolierung ergibt sich also aus dem Produkt aus NuBelt-Zahl und mittlerer Wärmeleitfähigkeit der *ruhenden Isolierung*. Der Wert der auf die Wärmeleitfähigkeit des *ruhenden Gases* bezogenen NuBelt-Zahl Nu_{Gas} hängt hingegen davon ab, wie groß im speziellen Fall das Verhältnis von $\lambda_{g,m}$ zu $\lambda_{iso,m}$ ist.

Im unteren Teil der Abb. 19 ist der Betrag des jeweiligen Minimums der Stromfunktion $|\Psi_{min}|$ dargestellt. Aus dieser doppelt logarithmischen Auftragung des Extremwertes der Stromfunktion über dem Kennzahlprodukt $Ra \cdot Da$ geht allerdings hervor, daß die Konvektionsströmung schon eingesetzt hat, bevor sich die NuBelt-Zahl gravierend verändert. Die umgewälzte Gasmenge ist allerdings so klein, daß dadurch kaum Wärme transportiert wird.

Die Abbildung zeigt weiterhin ein zunächst lineares Ansteigen dieses Kennwertes für die Strömung, d. h. $\Psi_{max} \sim Ra \cdot Da$. Im Bereich hoher Kennzahlprodukte flachen die Kurven allerdings ab, was auch den Rechnungen von Achenbach (1991) zu entnehmen ist. Eine Begründung für diesen Verlauf läßt sich aus der Form des Strömungsfeldes ableiten.

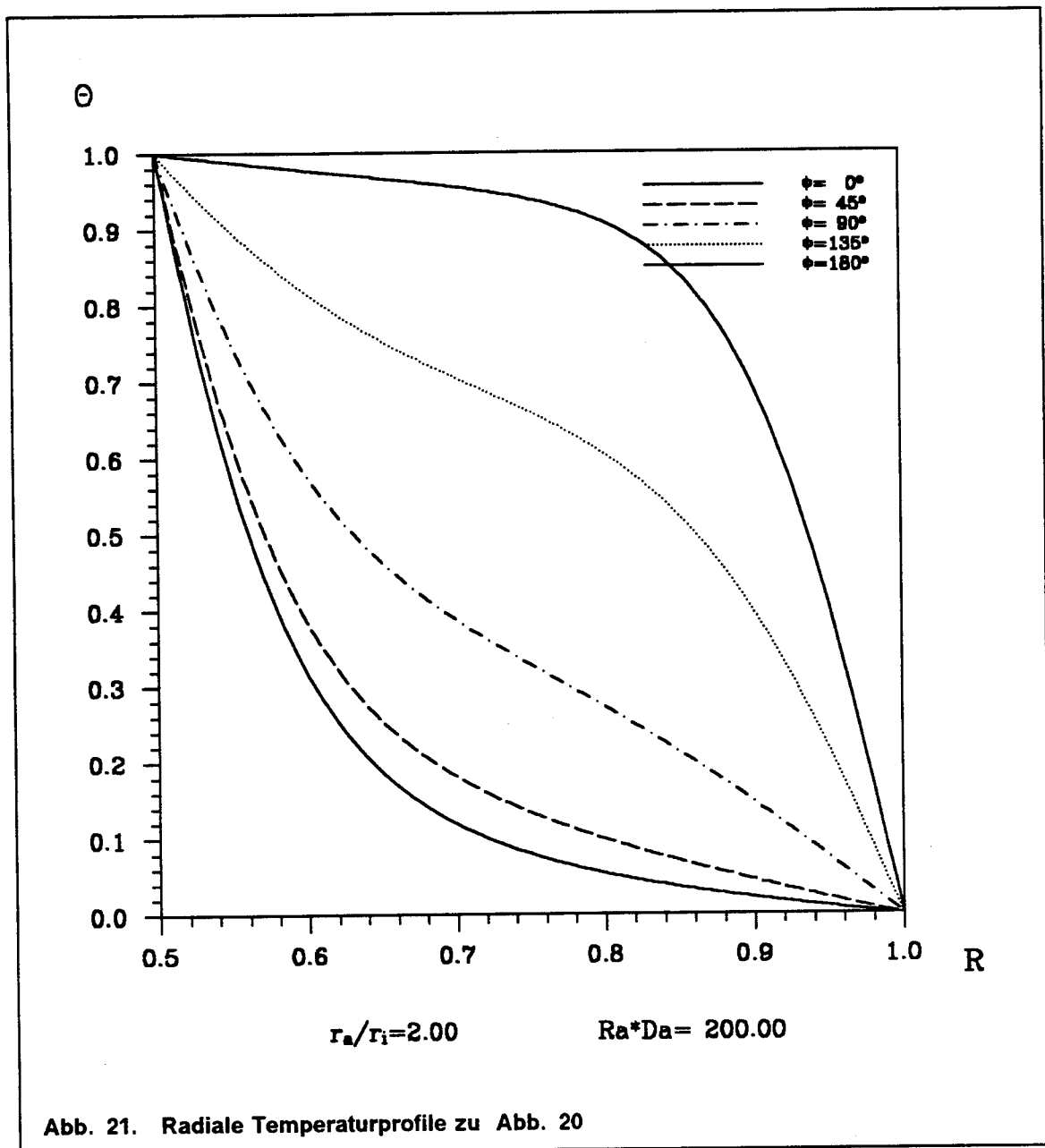
Zur eingehenderen Betrachtung des Strömungs- und Temperaturfelds werden die Rechnungen mit einem Kennzahlprodukt von $Ra \cdot Da = 200$ ausgewählt. Diese Kennzahl ist deshalb gut geeignet, weil hier bei einer NuBelt-Zahl von etwa 2 Konvektion und Transmission der Wärme zu etwa gleichen Teilen nebeneinander existieren. Die Wärmeübertragung wird also bereits deutlich durch die Konvektion beeinflusst, sie erfolgt allerdings nicht ausschließlich konvektiv.



Die Abb. 20 zeigt, daß das Zentrum der sich nierenförmig ausbildenden Strömung sichtbar von der Mitte nach oben verschoben ist. Diese Verschiebung steht in ursächlichem Zusammenhang zur Abflachung des Verlaufes der Stromfunktion. Bei der Interpretation der Darstellung des Stromfunktionsfeldes hat man zu beachten, daß der Geschwindigkeitsvektor senkrecht zur Richtung des maximalen Anstieges der Stromfunktion liegt und sein Betrag proportional zu dieser Steigung ist. Wenn jedoch das Strömungszentrum nicht mehr bei $\phi = \pi/2$ liegt, so wird nur ein kleinerer Extremwert der Stromfunktion benötigt, um die gleiche radiale Geschwindigkeit u im Bereich $\phi = \pi$ zu erhalten. Die radiale Geschwindigkeit in diesem Bereich steigt also weiter etwa linear mit $Ra \cdot Da$ an. Die radiale Geschwindigkeit im Bereich $\phi = 0$ bleibt entsprechend kleiner. Diese Asymmetrie bedingt eine frühere Umlenkung der Konvektionsströmung nach innen in der unteren Hälfte, wodurch sich im unteren Bereich eine Art Ruhezone ausbildet. Der Maximalbetrag der Stromfunktion

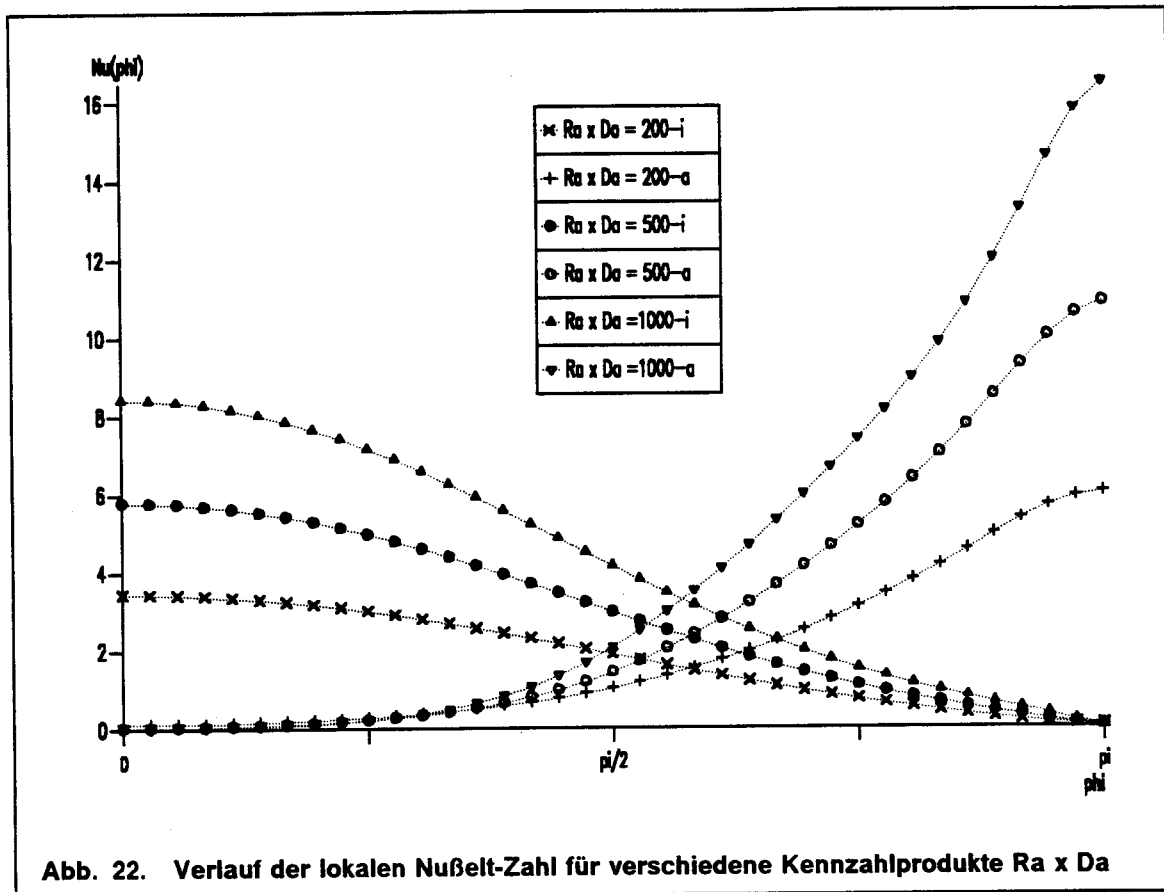
steigt also unterproportional an, weil sich das Strömungszentrum nach oben verschiebt.

Abb. 21 zeigt die radialen Temperaturprofile für fünf verschiedene Winkelkoordinaten.



Die Abbildung macht deutlich, wie sehr die hohen Temperaturen zum oberen Bereich ($\phi = 180^\circ$) des Ringspaltes hin verschoben sind. Sie zeigt weiterhin, daß der äußere Temperaturgradient und damit die Materialbeanspruchung der Außenwand in diesem Bereich wesentlich höher als der mittlere Wert ist. Ein hoher Temperaturgradient entspricht im übrigen auch eng beieinanderliegenden Höhenlinien des Temperaturfeldes in der linken Hälfte der Abb. 20.

In der folgenden Abb. 22 sind die lokalen Nußelt-Zahlen für verschiedene Kennzahlprodukte dargestellt. Die angehängten Buchstaben „-i“ und „-a“ in der Legende stehen für den Innen- bzw. den Außenradius des Isoliertraumes. Die lokale Nußelt-Zahl ist hier im Fall der Boussinesq-Approximation aufgrund der konstant angenommenen Wärmeleitfähigkeit proportional zum Temperaturgradienten an der Innen- bzw. Außenwand. Es ist zu erkennen, daß der Maximalwert stets bei $\phi = \pi$ und $R = 1$ zu finden ist, also ganz oben am Außenrand.



Unten am Innenradius liegt der innere Maximalwert, dessen Betrag jedoch aufgrund der Verschiebung des Strömungszentrums nach oben hin kleiner als der äußere ist. Die lokale Nußelt-Zahl überstreicht dadurch am Innenrand einen nicht ganz so großen Bereich, und der Schnittpunkt der beiden Kurven (innere und äußere Nußelt-Zahl für ein Kennzahlprodukt) ist nach rechts zu größeren Werten der Winkelkoordinate ϕ hin verschoben.

8.3 Vergleich mit Literaturdaten

Die berechneten Ergebnisse stimmen sehr gut mit den Literaturdaten verschiedener Autoren überein. Zum Vergleich seien in Abb. 23 berechnete Werte für das am häufigsten verwendete Radienverhältnis von $r_a/r_i = 2$ angegeben. Die Kennzahlprodukte aus den Literaturangaben sind umgerechnet worden, wenn der Innenradius bzw. die Schichtdicke der Isolierung als Bezugsgröße gewählt wurde.

$Ra \cdot Da$	Nu	Nu_1	Nu_2	Nu_3	Nu_4	Nu_5
10	1,0043	-	-	-	1,0043	1,00431
20	1,0171	1,0172	-	-	1,017	1,01711
50	1,1014	1,0993	-	1,100	1,097	1,10165
100	1,3419	1,3278	1,358	1,335	1,30	1,3421
200	1,8657	1,8286	1,876	1,844	-	1,861
300	2,3087	-	2,30	2,26	-	2,295
400	2,6857	2,6256	2,69	2,63	-	2,657
500	3,0167	-	-	-	-	-
1000	4,3043	4,1983	-	-	-	-

Nu = eigene Berechnungen
 Nu_1 = nach Caltagirone, 1976
 Nu_2 = nach Echigo u. a., 1978
 Nu_3 = nach Takata u. a., 1982
 Nu_4 = nach Bau, 1984
 Nu_5 = nach Rao u. a., 1987

Abb. 23. Vergleich von berechneten Nußelt-Zahlen mit Literaturdaten für $r_a/r_i = 2$

Alle Angaben beziehen sich auf Berechnungen zu einzelligen Strömungen. In der Literatur wird allerdings auch immer wieder erwähnt, daß ab einem vom Radienverhältnis abhängigen kritischen Kennzahlprodukt $Ra \cdot Da$ auch mehrzellige Strömungszustände möglich sind (Caltagirone, 1976; Rao u. a., 1987; Himasekhar u. a., 1988). Als Ergebnis erhält man dabei eine Erhöhung der Nußelt-Zahl. Bei einem Radienverhältnis von 2 und einem Kennzahlprodukt von 400 ergibt dies zum Beispiel einen Anstieg von $Nu = 2,657$ bei einzelliger Strömung auf $Nu = 2,903$ bei zweizelliger und $Nu = 3,106$ bei dreizelliger Strömung (Rao u. a., 1987).

Auf diese möglichen Strömungsformen wird jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht näher eingegangen, da sie mit einem impliziten Differenzen-Verfahren nicht zu erzeugen sind. Die ermittelten Strömungszustände waren im übrigen auch dann einzellig, wenn das verwendete Kennzahlprodukt oberhalb der von Caltagirone (1976) genannten kritischen Werte lag.

9. Berechnungen mit temperaturabhängigen Stoffwerten

Prinzipiell ist jeder Stoffwert von der Temperatur abhängig. Dieses zu berücksichtigen ist jedoch ein sehr hoher rechnerischer Aufwand. Es stellt sich die Frage, ob dieser Aufwand gerechtfertigt ist oder ob der Fehler, der durch die üblicherweise gültige Mittelwertbildung der Stoffwerte entsteht, vernachlässigbar klein ist. Sind die Temperaturdifferenzen zwischen Innen- und Außenwand relativ gering, so wird der Fehler sicherlich unbedeutend sein. Im betrachteten Fall von innenisolierten Rohrleitungen ist diese Temperaturdifferenz jedoch so hoch, daß eine nähere Betrachtung der Stoffwerte sinnvoll erscheint. Ausgehend von der Boussinesq - Approximation soll die Temperaturabhängigkeit verschiedener wichtiger Stoffwerte berücksichtigt werden, und zwar in folgender Reihenfolge:

1. Einführung einer temperaturabhängigen Wärmeleitfähigkeit der Isolierung in die Energiegleichung,
2. Einführung einer temperaturabhängigen Viskosität in die Impulsgleichung,
3. Einführung einer realistischen Funktion $\rho(T)$ in die Impulsgleichung unter Aufgabe der linearen Beziehung $\rho(T) = \rho_m (2 - T/T_m)$,
4. gleichzeitige Berücksichtigung der realistischen Temperaturabhängigkeit von Viskosität und Dichte in der Impulsgleichung,
5. gleichzeitige Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit von Wärmeleitfähigkeit, Viskosität und Dichte in der Energie- und Impulsgleichung,
6. zusätzlich Einführung der temperaturabhängigen Dichte in die Kontinuitätsgleichung und damit Definition einer dichteabhängigen Stromfunktion.

Die Berechnungen werden durchgeführt für die bei Helium-Heißgasleitungen üblicherweise auftretende Innentemperatur von 950°C bei einem Druck von 40 bar. Als Außentemperatur werden 100 bzw. 300°C gewählt. Dazu kommen Rechenläufe mit einem Temperaturabfall von 400 auf 100°C entsprechend den am Heißgaskanal des früheren „Instituts für Reaktorbauelemente“⁸ der KFA Jülich durchgeführten Versuchen (Bröckerhoff und Scholz, 1975; Bröckerhoff, 1986). Weiterhin werden die Rechnungen alternativ zum Helium auch für Luft durchgeführt.

Für Helium sind die Stoffwerte einer tabellarischen Auswertung der sicherheitstechnischen Regel des Kerntechnischen Ausschusses (KTA) nach Banerjea u. a. (1978) entnommen. Die Stoffwerte der Luft sind nach den von Kadoya u. a. (1985) aufgestellten Koeffizienten-Gleichungen berechnet worden.

⁸ heute „Institut für Energieverfahrenstechnik“

Als Isolierung wird eine solche Hochtemperatur-Faserisolierung angenommen, wie sie im Rahmen dieser Arbeit experimentell getestet worden ist. Der volumetrische Faseranteil soll 10 % betragen, die wärmetechnischen Daten sind Abb. 13 zu entnehmen. Die Kennzahlprodukte $Ra \cdot Da$ werden über eine Anpassung der Darcy-Zahl, also über die Wahl einer geeigneten Permeabilität eingestellt. Es ist zwar nicht realistisch, diese Stoffgröße willkürlich zu verändern, es ist aber ein praktikabler Weg, um beliebige Kennzahlprodukte zu erhalten und so Aussagen von allgemeiner Gültigkeit machen zu können.

9.1 Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit

Die Wärmeleitfähigkeit der Isolierung setzt sich zusammen aus einem Anteil der Gasleitfähigkeit und einem Anteil der Strahlung. Für die beiden betrachteten Extremfälle zeigt die Abb. 24 auf, in welchem Rahmen sich die Veränderung dieser Stoffwerte bewegt.

Temperatur	λ_g [W/mK]	λ_{Str} [W/mK]	λ_{iso} [W/mK]	$\lambda_{iso}/\lambda_{iso,m}$ -	$\lambda_{Str}/\lambda_{iso,m}$ -
a) Helium, 40 bar					
$T_i = 1223 \text{ K (950}^\circ\text{C)}$	0,4189	0,1081	0,6092	1,488	0,264
$T_a = 373 \text{ K (100}^\circ\text{C)}$	0,1815	0,0031	0,2202	0,538	0,007
$T_m = 798 \text{ K (525}^\circ\text{C)}$	0,3101	-	-	-	-
$T_{Str} = 867 \text{ K (594}^\circ\text{C)}$	-	0,0386	-	-	0,094
	$\lambda_{iso,m} = 0,4095$				
	$\lambda_{iso,m}/\lambda_{g,m} = 1,32$				
b) Luft, 40 bar					
$T_i = 1223 \text{ K}$	0,0795	0,1081	0,2031	1,893	1,007
$T_a = 373 \text{ K}$	0,0328	0,0031	0,0423	0,394	0,029
$T_m = 798 \text{ K}$	0,0575	-	-	-	-
$T_{Str} = 867 \text{ K}$	-	0,0386	-	-	0,359
	$\lambda_{iso,m} = 0,1073$				
	$\lambda_{iso,m}/\lambda_{g,m} = 1,87$				

Abb. 24. Wärmeleitfähigkeit am Innen- und Außenrand der betrachteten Isolierung und mittlere Werte

Die gravierendste Änderung ist erwartungsgemäß bei der Strahlungsleitfähigkeit zu beobachten. Bei 950°C liegt der betreffende Wert etwa 35 mal so hoch wie bei 100°C. Die Wärmeleitfähigkeit des freien Gases steigt in beiden Fällen etwa um den

Faktor 2,3 bis 2,4 an, liegt beim Helium allerdings auf einem wesentlich höheren Niveau. Daher überstreichen relativ gesehen die Werte für die Wärmeleitfähigkeit einer luftgefüllten Isolierung einen wesentlich größeren Bereich als bei einer heliumgefüllten Isolierung. Die Auswirkung der Berücksichtigung dieses Stoffwertes bei der Berechnung des Temperatur- und Strömungsfeldes wird also bei Luft größer sein.

Betrachtet man zunächst den ruhenden Fall und vergleicht das logarithmische Temperaturfeld, das mit einer konstanten Wärmeleitfähigkeit berechnet wurde, mit dem über eine variable Wärmeleitfähigkeit berechneten, so wird die übertragene Wärmemenge nur dann übereinstimmen, wenn die Mitteltemperatur, bei der der feste Wert der Wärmeleitfähigkeit berechnet wurde, geeignet gewählt ist.

Der Strahlungsanteil der Wärmeleitfähigkeit steigt mit der dritten Potenz der Temperatur an, weshalb hier die *mittlere Strahlungstemperatur* als Bezugstemperatur verwendet wird (vgl. Kap. „3.3 Strahlung“). Für die Wärmeleitfähigkeit des Gases in der Isolierung wird üblicherweise als Näherung die *arithmetische Mitteltemperatur* verwendet.

Die Wahl verschiedener Bezugstemperaturen für die Anteile der Wärmeleitfähigkeit ist durchaus sinnvoll, da die Strahlung keine Wärmeleitfähigkeit im eigentlichen Sinne darstellt, sondern der Strahlungswärmestrom nur aus Gründen der Vereinfachung der Rechnung in dieser Form berücksichtigt wird. Dabei ist zu beachten, daß die einfache Addition nur für die differentielle Art der Formulierung erlaubt ist. Bei größeren Temperaturdifferenzen ist stets ein integraler Mittelwert zu verwenden. Dieser führt bei der Betrachtung des Strahlungswärmestromes genau zu der oben angegebenen Formulierung der Strahlungstemperatur.

Für das Gas kann prinzipiell ebenfalls eine entsprechende Temperatur durch die Integration des Verlaufes der Wärmeleitfähigkeit über der Temperatur ermittelt werden. Die Wahl der arithmetischen Mitteltemperatur führt auf jeden Fall zu einem Fehler, der näher zu untersuchen ist. Dazu soll der ruhende Fall betrachtet werden. Die Wärmeleitfähigkeit von Gasen gehorcht in der Regel etwa der Beziehung $\lambda_G = \lambda_{G,0} \cdot T^{0.7}$. Durch Integration dieser Beziehung kommt man zu einer Bezugstemperatur, die etwas unterhalb der arithmetischen Mitteltemperatur liegt. Die abgeschätzte Wärmeleitfähigkeit ist also zu hoch, was dementsprechend bei der Berechnung des ruhenden Falls mit einer temperaturabhängigen Wärmeleitfähigkeit λ_{iso} der Isolierung zu einer Nußelt-Zahl von kleiner als 1 führen muß. Diese Verringerung beträgt unter der Randbedingung eines Temperaturabfalls über der Isolierung von 950 nach 100°C mit Helium als gasförmigem Medium etwa 1,0 %, mit Luft nur etwa 0,5 %. Der Fehler ist beim Fall mit Luft kleiner, weil hier der Strahlungsanteil von λ_{iso} , für den eine korrekte Bezugstemperatur T_{sr} gewählt werden kann, größer ist und sich damit der Fehler beim Gasanteil nicht so stark auswirkt. Die angegebenen Werte sind zu berücksichtigen, wenn die Ergebnisse der Berechnung des Temperaturfeldes für den durchströmten Fall unter Verwendung einer variablen Wärmeleitfähigkeit interpretiert werden.

Bezeichnet man nun mit $\lambda^{\otimes}$ die dimensionslose Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{\text{iso}}/\lambda_{\text{iso,m}}$, so ergibt sich die dimensionslose Energiegleichung in der Form

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Fo}} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = & \lambda^{\otimes} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \phi^2} \right) \\ & + \frac{\partial \Theta}{\partial R} \frac{\partial \lambda^{\otimes}}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} \frac{\partial \lambda^{\otimes}}{\partial \phi} \\ & - \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \Theta}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (9.1.1).$$

Die Stromfunktion, der Wirbelvektor und die Wirbeltransportgleichung bleiben in der Form (8.1.1), (8.1.3) und (8.1.6) wie bei der Boussinesq-Approximation bestehen.

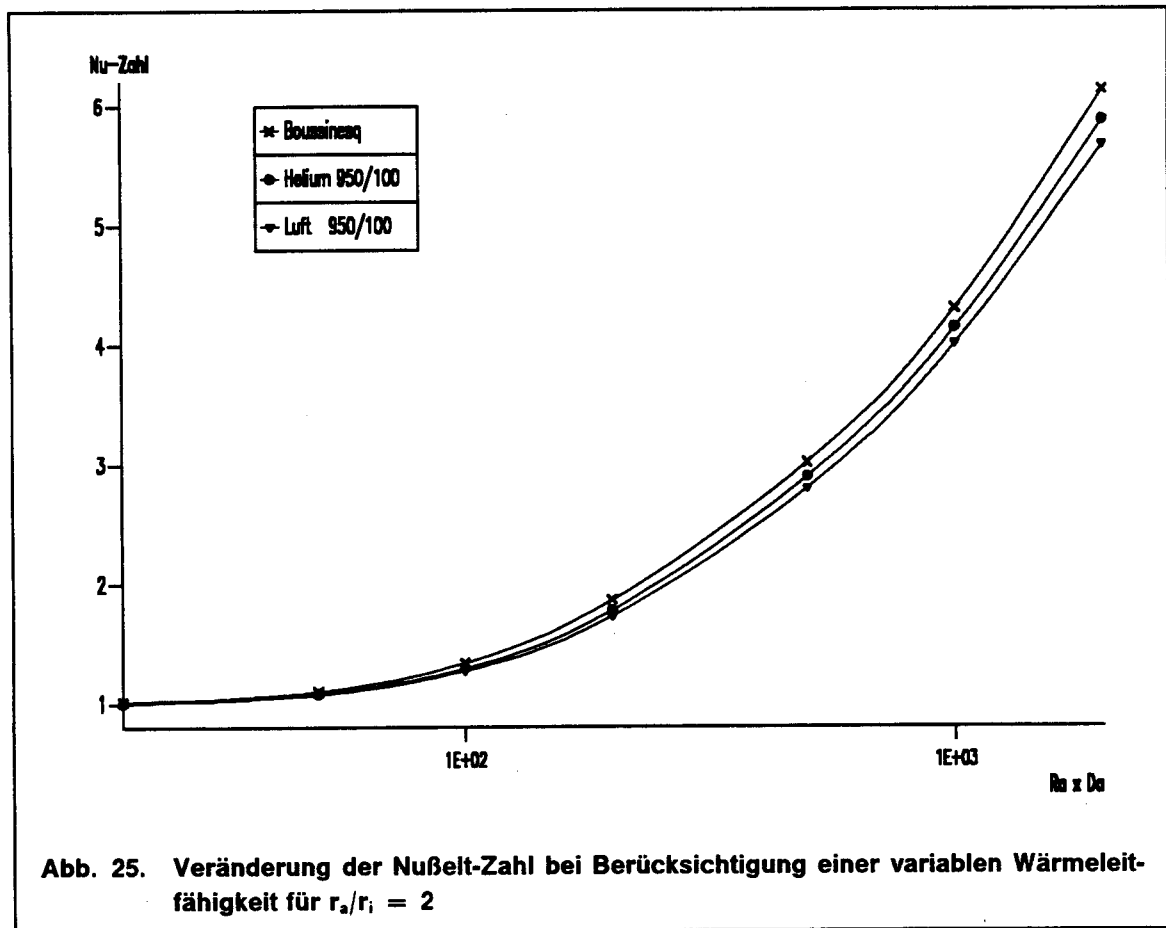
Das Temperaturfeld verändert sich bereits im konvektionslosen Fall⁹ durch die Einführung einer variablen Wärmeleitfähigkeit. Aufgrund der an der heißen Innenseite höheren lokalen Wärmeleitfähigkeit wird hier die Steigung des Temperaturprofils flacher. Umgekehrtes geschieht an der Außenseite, die Steigung wird dort größer. Schon beim ruhenden Fall erhält man also ein Profil, das deutlich vom logarithmischen abweicht. Es kann sogar über einen linearen Verlauf hinausgehen und stattdessen nach oben durchgebogen sein. Die Isolierung befindet sich also insgesamt auf einem höheren Temperaturniveau. Die Auswirkung dieser Veränderung wird deutlich, wenn man den Aufheizkennwert K_0 nach Gl. (6.2.6) betrachtet. Im Fall des ruhenden Temperaturfeldes mit konstanter Wärmeleitfähigkeit nimmt er definitionsgemäß den Wert 1 an. Nach Einführung einer variablen Wärmeleitfähigkeit steigt er für die Randbedingung 950 / 100°C bei Helium um 17 bzw. bei Luft um 27 % an, wobei der größere Wert durch den größeren Strahlungsanteil zu begründen ist.

Unter Berücksichtigung der Konvektionsströmung ergibt sich unter Verwendung einer temperaturabhängigen Wärmeleitfähigkeit nach Abb. 25 ein Rückgang der Nußelt-Zahl im gesamten Kennzahlbereich von $Ra \cdot Da$. Die Zahlen in der Legende bezeichnen die Maximal- bzw. Minimaltemperatur des betrachteten Falls in [°C]. Die Abbildung zeigt, daß die oben angesprochene Verringerung der Nußelt-Zahl, die durch die Wahl der arithmetischen Bezugstemperatur verursacht wird, dabei nur einen unwesentlichen Anteil darstellt. Es ist die Auswirkung der Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit auf die Konvektionsströmung, die zu der errechneten Verbesserung der Isolierwirkung der Faserisolierung führt. Bei einem höheren Strahlungsanteil, also bei Luft, beträgt die Verbesserung etwa bis zu 7 %, beim Helium ist sie geringer und liegt im Bereich von 3 %. Die Kurven für die Randbedingungen 950 / 300°C und 400 / 100°C liegen zwischen den gezeigten, die Abnahme der Nußelt-Zahl ist hier geringer, weil die Temperaturdifferenz und damit die relative Abweichung der Extremwerte der Wärmeleitfähigkeit vom Mittelwert nicht so stark ist.

Aus Abb. 24 auf Seite 74 geht hervor, daß der Quotient $\lambda_{\text{iso,m}}/\lambda_{\text{g,m}}$ im betrachteten Fall für Helium bei etwa 1,32 und für Luft bei etwa 1,87 liegt. Will man den Kennwert

⁹ hier ist Gl. (9.1.1) ohne die letzte Zeile die einzig zu lösende Differentialgleichung

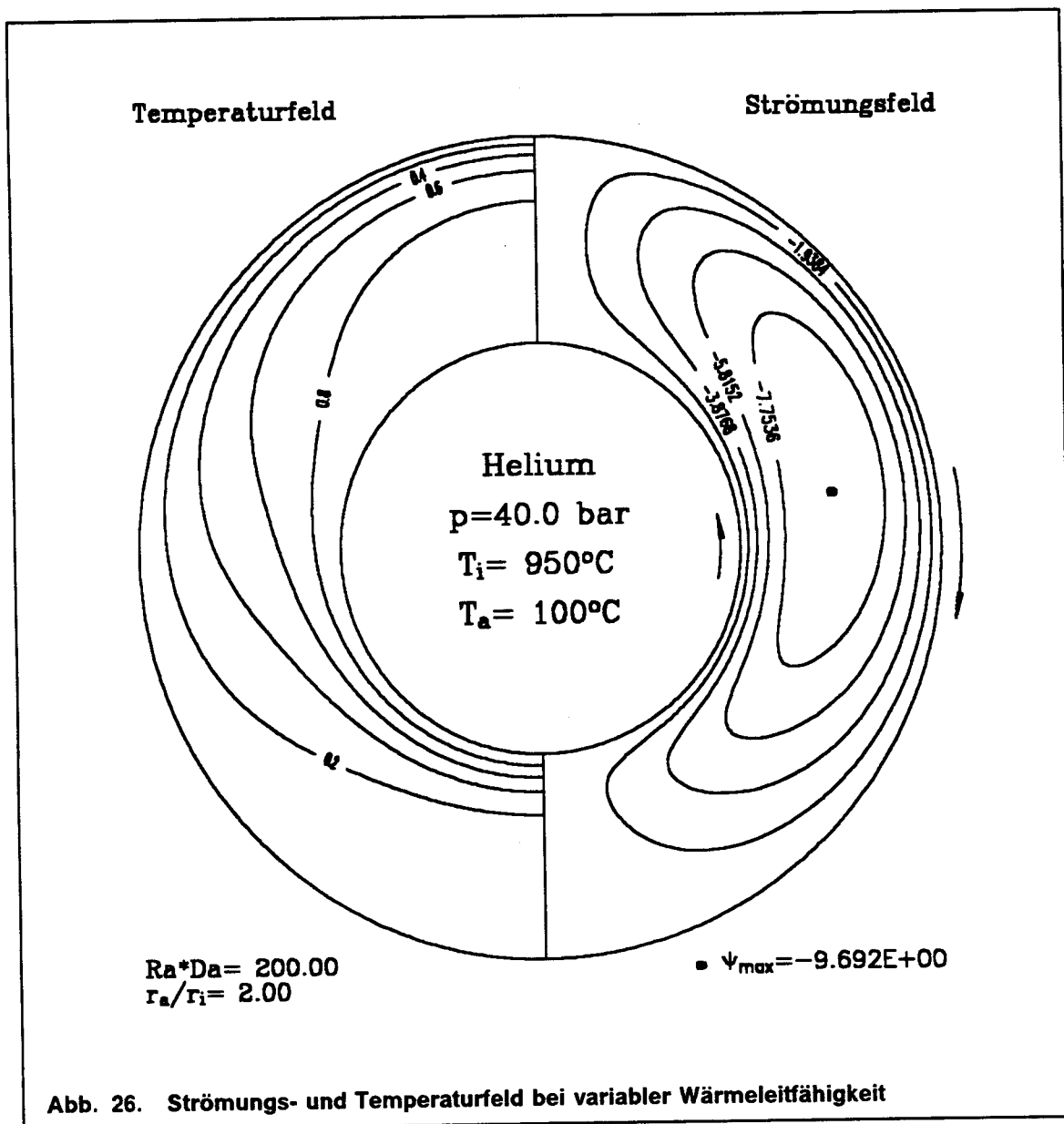
Nu_{Gas} ermitteln, so sind die hier vorgestellten Nu_{Belt} -Zahlen mit diesen Faktoren zu multiplizieren. Sobald jedoch z.B. eine andere Packungsdichte oder eine Faser mit anderem Durchmesser gewählt wird, verändert sich der oben genannte Quotient aufgrund der speziellen Eigenschaften der Faserpackung. Daher wird weiterhin ausschließlich die auf die Wärmeleitfähigkeit der Isolierung bezogene Nu_{Belt} -Zahl verwendet. Der Wert von Nu_{Gas} kann durch Umrechnung erhalten werden.



Das Ergebnis eines verminderten Konvektionswärmestromes entspricht der Aussage von Echigo u. a. (1978), die eine Einschränkung der Konvektion und damit eine Abnahme der Nu_{Belt} -Zahl feststellen, wenn zusätzlich zur Wärmeleitfähigkeit durch Leitung die Strahlung berücksichtigt wird. Da aber die Strahlung teilweise einen bedeutenden Anteil an der hier betrachteten Wärmeleitfähigkeit λ_{iso} und damit auch einen großen Einfluß auf deren Temperaturabhängigkeit hat, stimmen die beiden Ergebnisse in der Tendenz überein. Die alleinige Betrachtung eines variablen Strahlungsanteils macht jedoch wenig Sinn. Anhand des Heliumfalles wird deutlich, daß auch schon bei einem geringen Strahlungsanteil allein aufgrund der Änderung der Wärmeleitfähigkeit des Gases ein Abfall der Nu_{Belt} -Zahl stattfindet.

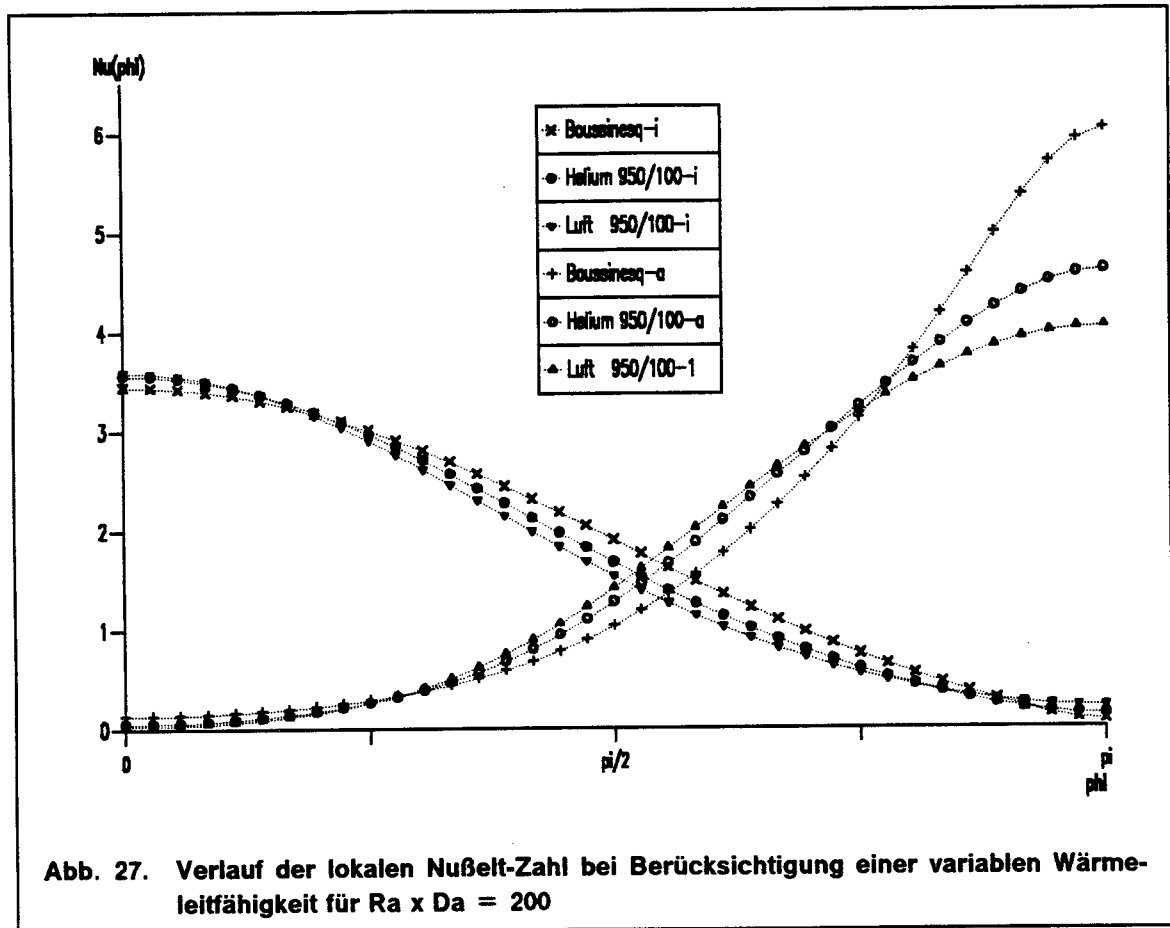
Für das Beispiel $Ra \cdot Da = 200$ kann das in Abb. 26 gezeigte Temperatur- und Strömungsfeld berechnet werden. Der Rückgang der Nu_{Belt} -Zahl läßt sich also primär dadurch begründen, daß im Vergleich zur Boussinesq-Approximation (vgl. Abb. 20) das Extremum Ψ_{min} der Stromfunktion vom Betrag her kleiner geworden ist. Aufgrund

der niedrigeren Strömungsgeschwindigkeiten sinkt entsprechend auch der konvektive Wärmestrom und damit die Nußelt-Zahl, in diesem Beispiel von 1,866 auf 1,780.



Der beschriebene Sachverhalt kann durch den folgenden die Konvektionsströmung bestimmenden Zusammenhang begründet werden: Die Konvektionsströmung selbst nimmt ihren Anfang am Innenradius bei der Winkelkoordinate $\phi = \pi$, da in diesem Bereich Temperaturabfall und Erdbeschleunigung entgegengesetzt gerichtet sind und damit hier die stärksten Auftriebskräfte wirken. An dieser Stelle ist aber nun der Temperaturgradient im Vergleich zur Boussinesq-Approximation flacher geworden. Daher läßt die Konvektionsströmung nach, und zwar umso mehr, je flacher der Gradient ist. Da aber aufgrund des höheren Strahlungsanteils im Fall mit Luft die Abflachung des Temperaturgradienten stärker ist als beim Helium, entspricht das in Abb. 25 dargestellte Ergebnis den Erwartungen.

Die Abb. 27 zeigt exemplarisch für $Ra \cdot Da = 200$ die Veränderung der lokalen Nußelt-Zahl. Auffallend ist die überproportionale Abnahme des Maximums der äußeren Nußelt-Zahl bei $\phi = \pi$. Sie belegt, daß der Grund des insgesamt verminderten Wärmeübergangs in diesem Bereich zu suchen ist.



Als Fazit kann also festgehalten werden: Durch die Berücksichtigung einer variablen Wärmeleitfähigkeit verringert sich die treibende Kraft für die Konvektion im oberen Bereich des Ringspaltes. Dadurch ergeben sich geringere Strömungsgeschwindigkeiten und eine Abnahme der Nußelt-Zahl, die bei den betrachteten Fällen bis zu 7 % betragen kann.

9.2 Variable Stoffwerte in der Impulsgleichung

Nachdem die Auswirkung einer variablen Wärmeleitfähigkeit in der Energiegleichung untersucht wurde, wird nun die Impulsgleichung, die in Form des Darcy-Gesetzes vorliegt, betrachtet. Die daraus hervorgehende Wirbeltransportgleichung (5.3.10) enthält die Stoffwerte Dichte und Viskosität. Für die Dichte wird bereits bei der Boussinesq-Approximation ein linearer Ansatz gewählt, so daß zunächst die Auswirkung einer variablen Viskosität betrachtet wird. Daran schließt sich im nächsten Ka-

pitel die Überprüfung des linearen Ansatzes der Dichte durch Benutzung eines realistischen Ansatzes an. Die Energiegleichung behält die Form der Gl. (8.1.2) wie bei der Boussinesq-Approximation. Es verändert sich die auszuwertende Impulsgleichung und die daraus hervorgehende Wirbeltransportgleichung.

In der folgenden Tabelle sind die Änderungen der Viskosität und der Dichte mit der Temperatur aufgelistet. Die Viskosität wird demnach bei einem konstanten Ansatz um ca. 40 % über- bzw. unterschätzt, der Quotient aus Maximal- und Minimalwert beträgt etwa 2,2. Bei der Dichte liegt der Wert dieses Quotienten ungefähr bei 3,2. Dieses wird durch den linearen Ansatz nach Boussinesq auch berücksichtigt. Entscheidend ist bei der Dichte jedoch der Dichtegradient $\partial\rho/\partial T$. Er ist beim linearen Ansatz konstant, fällt in der Realität hingegen mit steigender Temperatur ab.

Temperatur [K]	Viskosität			Dichte		
	η_{Gas} [Ns/m ²]	$\eta_{\text{Gas}}/\eta_{\text{Gas,m}}$ -	ρ_{Gas} [kg/m ³]	$\rho_{\text{Gas}}/\rho_{\text{Gas,m}}$ -	$\rho_{\text{Gas,BA}}$ [kg/m ³]	$\rho_{\text{Gas,BA}}/\rho_{\text{Gas,m}}$ -
a) Helium 950 / 100°C, 40 bar						
$T_i = 1223$	$53,26 \cdot 10^{-6}$	1,348	1,569	0,654	1,121	0,468
$T_a = 373$	$23,20 \cdot 10^{-6}$	0,587	5,086	2,121	3,676	1,532
$T_m = 798$	$39,50 \cdot 10^{-6}$	-	2,399	-	2,399	-
b) Luft 950 / 100°C, 40 bar						
$T_i = 1223$	$49,63 \cdot 10^{-6}$	1,320	11,253	0,655	8,038	0,468
$T_a = 373$	$22,37 \cdot 10^{-6}$	0,595	37,081	2,157	26,344	1,532
$T_m = 798$	$37,58 \cdot 10^{-6}$	-	17,191	-	17,191	-

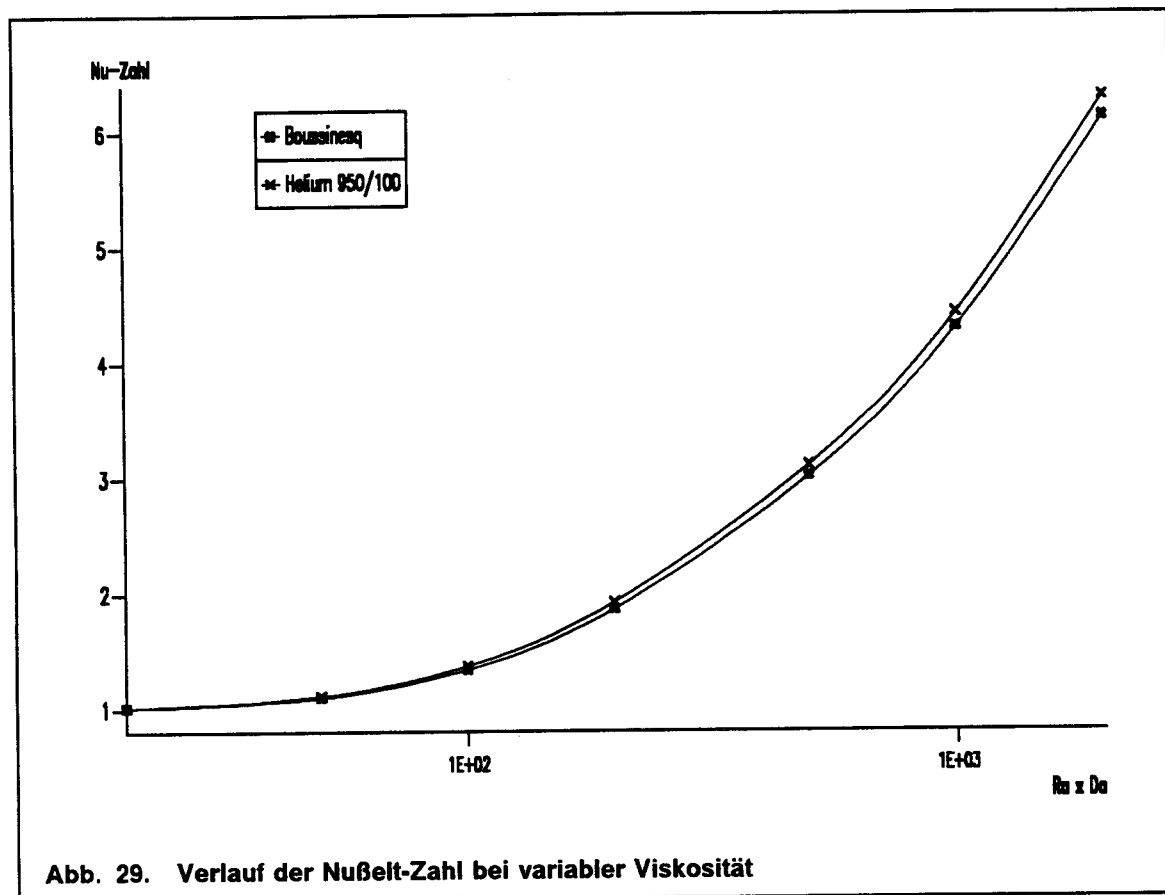
Abb. 28. Viskosität und Dichte am Innen- und Außenrand der betrachteten Isolierung und arithmetische Mittelwerte

9.2.1 Temperaturabhängigkeit der Viskosität

Die dimensionslose Wirbeltransportgleichung erhält mit der dimensionslosen Viskosität $\eta^{\otimes} = \eta_{\text{Gas}}/\eta_{\text{Gas,m}}$ folgendes Aussehen:

$$\Omega = - \frac{1}{\eta^{\otimes}} \text{Ra} \cdot \text{Da} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} \cos \phi + \frac{\partial \Theta}{\partial R} \sin \phi \right) - \frac{1}{\eta^{\otimes}} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \eta^{\otimes}}{\partial \phi} + \frac{\partial \Psi}{\partial R} \frac{\partial \eta^{\otimes}}{\partial R} \right) \quad (9.2.1).$$

Abb. 29 zeigt, daß sich bei Berücksichtigung der variablen Viskosität ein geringer Anstieg der Nußelt-Zahl im gesamten Kennzahlbereich ergibt. Er erreicht beim betrachteten Fall Helium 950 / 100°C maximal etwa 3 %. Die anderen berechneten Kurven liegen wieder zwischen den beiden dargestellten und werden der Übersichtlichkeit halber weggelassen. Die Kurven für Helium und für Luft unterscheiden sich erwartungsgemäß kaum, da der relative Verlauf der Viskosität in beiden Fällen fast identisch ist.



Auch Kassoy und Zebib (1975) hatten bereits ermittelt, daß die Berücksichtigung einer temperaturabhängigen Viskosität sich bei hohen Temperaturdifferenzen konvektionsfördernd auswirkt. Sie zeigen für einen von unten beheizten wassergesättigten porösen Rechteckraum, daß das Einsetzen von Konvektion bereits unterhalb eines Kennzahlprodukts $Ra \cdot Da = 4 \pi^2$ erfolgt und führen dies auf die niedrigere Viskosität des Wassers an der unteren heißen Wand zurück. Die Grenze $4 \pi^2$ war unter Verwendung der Boussinesq-Approximation von Katto und Masuoka (1967) aufgestellt worden (vgl. „4.4 Betrachtung weiterer Fehlerquellen bei der Messung“ auf Seite 35).

Abb. 30 zeigt für den Ringspalt, daß im Vergleich zum Ergebnis der Boussinesq-Approximation das Zentrum der Strömung wieder etwas nach unten absinkt. Zusätzlich wandert es weiter nach außen, was bei einem angestiegenen Maximalwert der Stromfunktion zu höheren Strömungsgeschwindigkeiten am äußeren Rand und zu einem leichten Abfall am Innenrand führt. Bei den Berechnungen mit sehr

hohen Temperaturdifferenzen ist die Erhöhung an der Außenseite so stark, daß die maximale Absolutgeschwindigkeit dort und nicht mehr an der Innenseite auftritt.

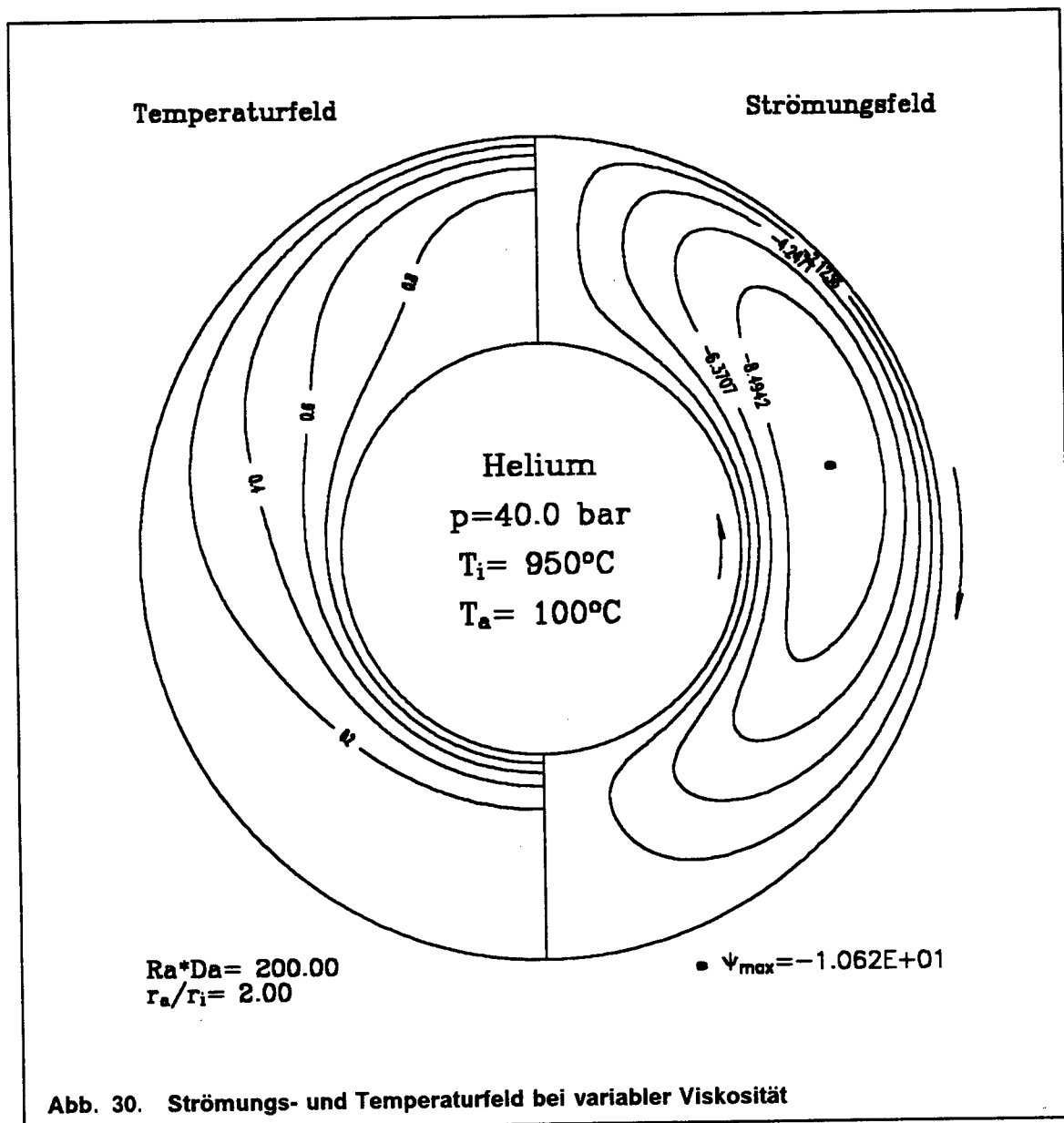
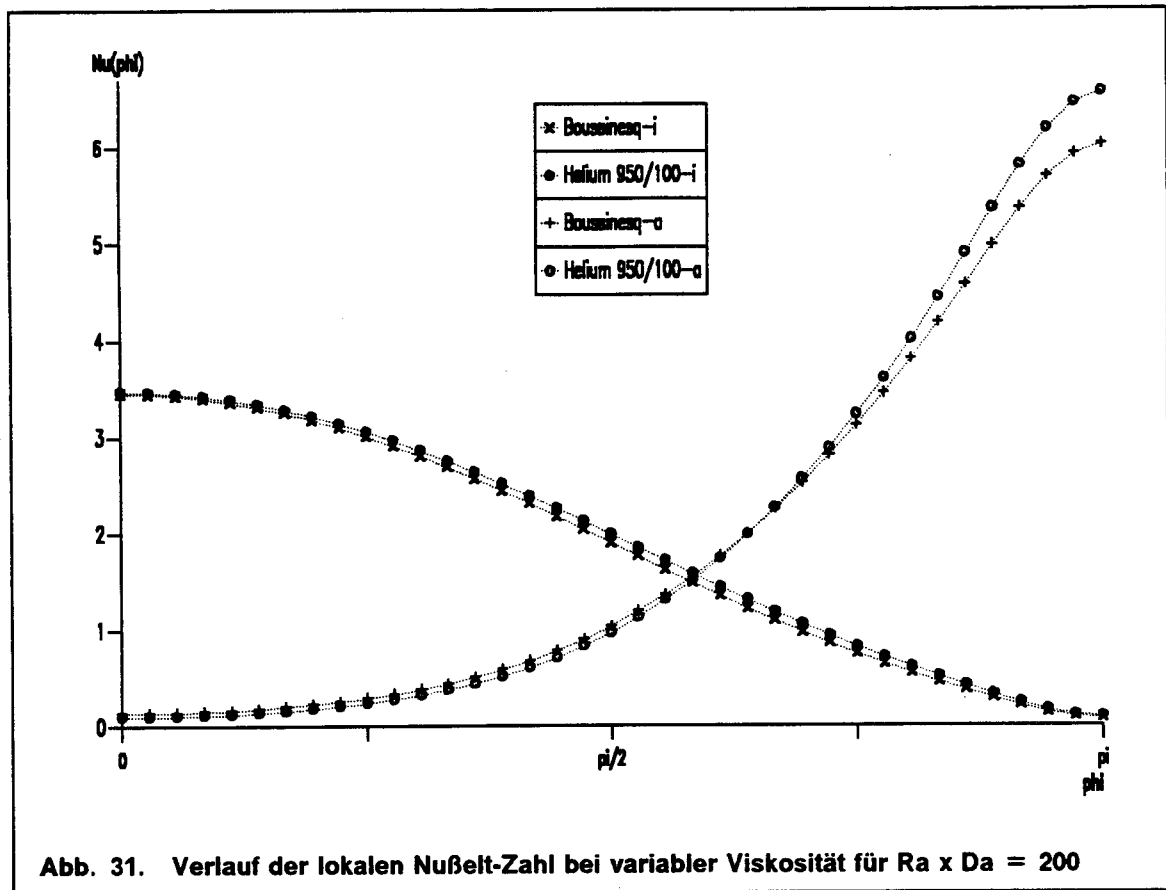


Abb. 31 zeigt, daß der Anstieg der lokalen Nußelt-Zahl im betrachteten Fall am Innenrand (flache Kurven) über dem gesamten Umfang stattfindet, mit Ausnahme des Bereichs der vertikalen Symmetrieachsen (unten und oben). Am äußeren Rand ergibt sich ein anderes Bild: Hier sinkt die lokale Nußelt-Zahl im Bereich $0 \leq \phi \leq \pi/2$ und steigt dafür im oberen Bereich wesentlich stärker an. Insgesamt wird dadurch der Wärmeübergang verbessert und die den Gesamtwärmestrom beschreibende Nußelt-Zahl größer errechnet.

Der Verlauf der lokalen Nußelt-Zahl läßt erkennen, daß die Zustände am Außenrand der maßgebliche Grund für die Erhöhung des Wärmestromes sind. Im unteren Bereich ist zwar der Wärmeübergang etwas schlechter geworden, dafür aber oben erheblich besser. In der Summe resultiert daraus eine Erhöhung der nach außen ab-



gegebenen Wärme. Aus Gleichgewichtsgründen muß dieselbe Wärmemenge innen wieder aufgenommen werden. An der gleichmäßigen Vergrößerung der inneren lokalen Nußelt-Zahl über dem gesamten Umfang, die durch eine leichte fast gleichmäßige Erhöhung des Temperaturgradienten am Rand zustande kommt, ist zu erkennen, daß sich die Verhältnisse am Innenrand nur den Vorgängen am Außenrand anpassen.

Zusammenfassend lassen sich für den Ringspalt folgende Effekte beschreiben: Zum einen erhöht sich die Viskosität und damit der Strömungswiderstand dort, wo die Konvektionsströmung ihren Ursprung nimmt ($\phi = \pi$), zum anderen wird an der gesamten Außenwand der Strömungswiderstand erheblich verringert und damit der konvektive Wärmetransport gefördert. Die Berücksichtigung einer höheren Viskosität an der einen und einer niedrigeren an der anderen Seite wirkt sich offensichtlich in der Summe konvektionsfördernd aus, weil der am Außenrand zurückgelegte Weg sehr lang ist.

Der überproportionale Anstieg der maximalen lokalen Nußelt-Zahl im oberen Bereich des Ringspaltes läßt sich durch die nach außen hin absinkende Viskosität begründen. Aufgrund der stoffwertbedingten Abnahme des Strömungswiderstandes wird das Gas noch kurz vor der Außenwand relativ stark beschleunigt und erzeugt dadurch dort einen entsprechend größeren Temperaturgradienten als eine Strömung mit konstanter Viskosität.

9.2.2 Temperaturabhängigkeit der Dichte in der Impulsgleichung

Die Temperaturabhängigkeit der Dichte im Auftriebsterm innerhalb der Impulsgleichung ist für die Erzeugung der Konvektionsströmung verantwortlich. Existiert diese Temperaturabhängigkeit nicht, so kann auch keine Konvektion entstehen. Die Boussinesq-Approximation verwendet als einfachsten denkbaren Zusammenhang zwischen Dichte und Temperatur einen linearen Ansatz. Ausgangspunkt ist dabei die Dichte bei der mittleren Temperatur T_m . Die Steigung wird durch den isobaren Ausdehnungskoeffizient β bzw. den Reziprokwert der mittleren Temperatur T_m beschrieben.

In der Realität ist die Dichte aber eher proportional zu $1/T$ als linear von der Temperatur abhängig. Somit wird sie durch die oben genannte Annahme im gesamten Temperaturbereich unterschätzt.

Unter Berücksichtigung eines realen örtlichen Dichtegradienten erhält die Impulsgleichung folgendes Aussehen:

$$\Omega = -Ga \cdot Pr_{iso} \cdot Da \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \rho^{\otimes}}{\partial \phi} \cos \phi + \frac{\partial \rho^{\otimes}}{\partial R} \sin \phi \right) \quad (9.2.2).$$

Man beachte, daß die Rayleigh-Zahl durch das Produkt aus Galilei-Zahl nach Gl. (5.4.10) und Pr_{iso} -Zahl nach Gl. (5.4.8) ersetzt wurde. Die Galilei-Zahl geht aus der Grashof-Zahl hervor, wenn diese durch das Produkt $\beta \Delta T$ dividiert wird.

Entscheidender als der Absolutwert der Dichte ist also innerhalb der Wirbeltransportgleichung die örtliche Ableitung der Dichte und damit das Produkt aus der örtlichen Ableitung der Temperatur und dem Differentialquotienten $\partial \rho / \partial T$. Aufgrund der hyperbolischen Abhängigkeit der Dichte von der Temperatur wird dieser Differentialquotient im linearen Ansatz bei höheren Temperaturen überschätzt bzw. bei niedrigeren Temperaturen unterschätzt.

Als Ergebnis der erweiterten Rechnung nimmt die übertragene Wärmemenge im gesamten betrachteten Kennzahlbereich zu (vgl. Abb. 32, oberer Teil). Das gilt für alle berechneten Fälle, wobei die nicht dargestellten Kurven wieder in dem durch die obere und die untere Kurve begrenzten Bereich liegen. Zwischen den beiden Gasen Helium und Luft ist kein großer Unterschied zu beobachten, was auch nicht zu erwarten war, da die relative Dichteänderung bei beiden Gasen etwa gleich ist. Die Nußelt-Zahlen für Luft liegen aber um bis zu etwa einem Prozent über den Helium-Werten, was durch den etwas stärkeren Anstieg der Dichte des Gases bei fallenden Temperaturen zu begründen ist.

Die untere Abb. 32 zeigt im Bereich $\pi/2 \leq \phi \leq 3/4\pi$ eine deutlich erhöhte lokale Nußelt-Zahl am Außenrand. Trotz eines verringerten Maximalwerts resultiert daraus in der Summe immer noch ein Anstieg der Gesamt-Nußelt-Zahl von etwa 10 %.

Wie Abb. 33 zeigt, ist die Zunahme des konvektiven Wärmestromes auf einen erheblich vergrößerten Maximalwert der Stromfunktion zurückzuführen. Dabei hat sich das Zentrum der Strömung gegenüber der Boussinesq-Approximation (vgl. Abb. 20 auf Seite 69) nach unten und gleichzeitig etwas nach außen verschoben.

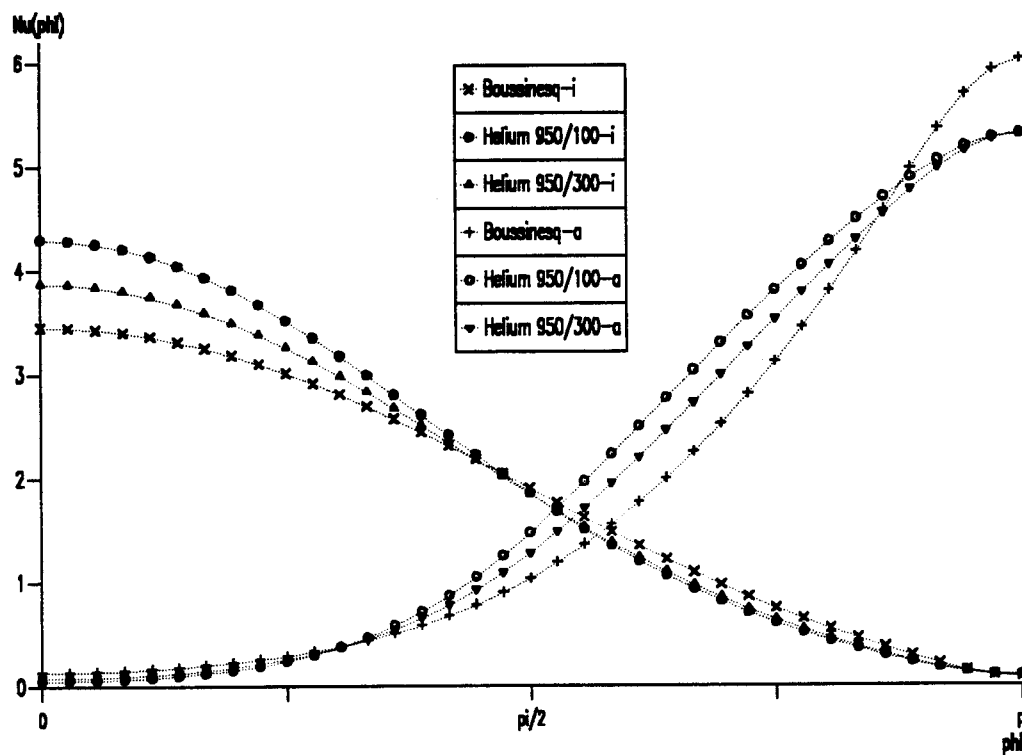
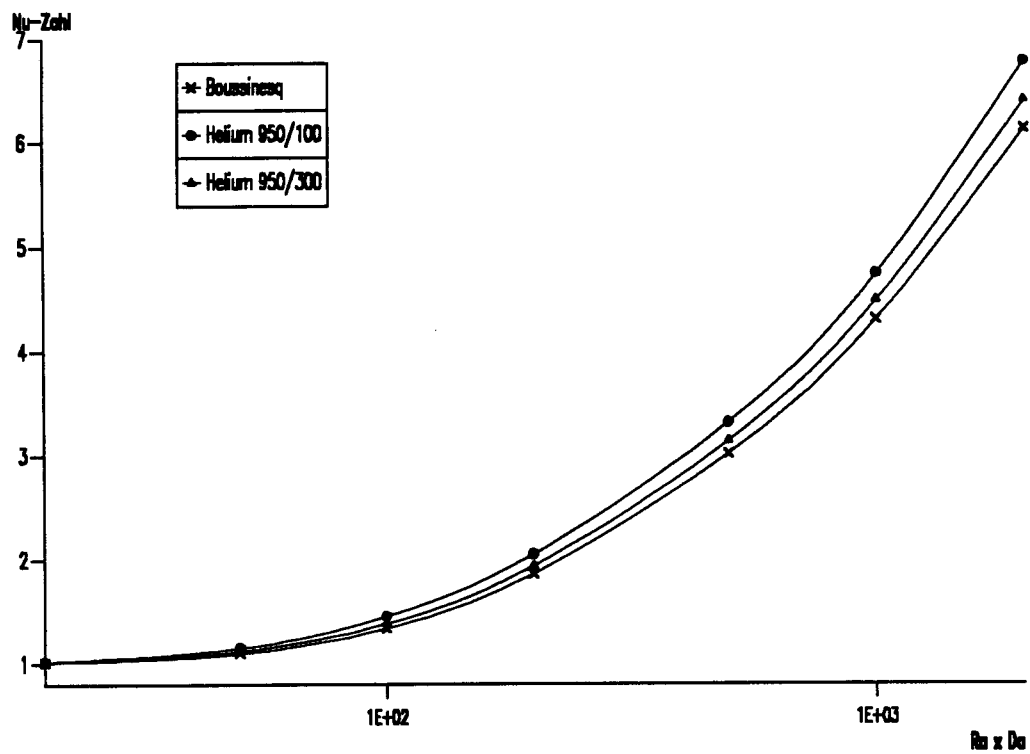
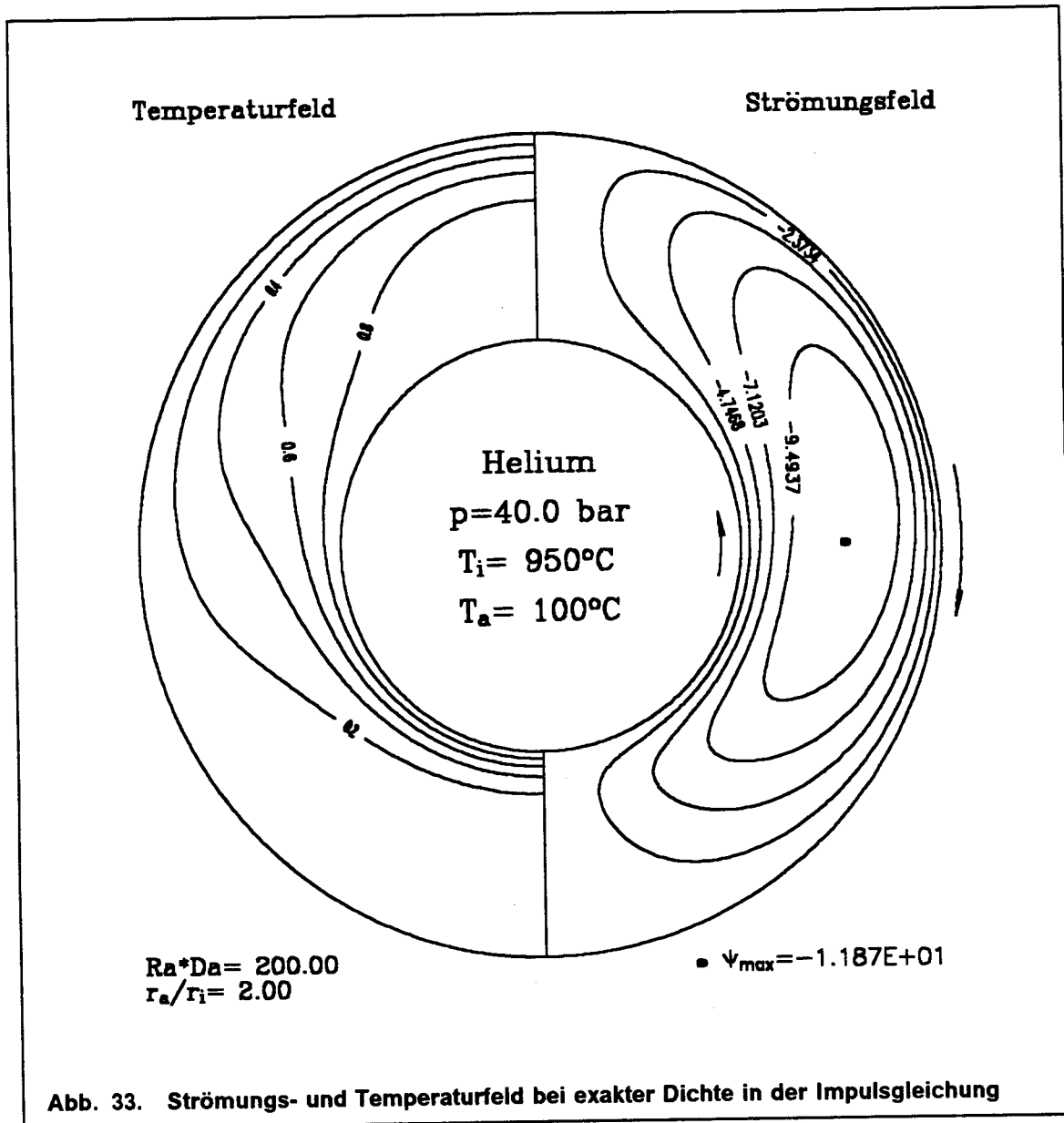


Abb. 32. Verlauf der Gesamt-Nußelt-Zahl über dem Kennzahlprodukt und der lokalen Nußelt-Zahl über der Umfangskoordinate für $Ra \times Da = 200$ bei exakter Dichte in der Impulsgleichung



Eine Erklärung dieses Sachverhalts liefert die Betrachtung der Wärmeübertragungsverhältnisse in der oberen Hälfte des Ringspalts. In diesem Bereich vollzieht sich der Anstieg der Nußelt-Zahl am Außenrand. Der in der Realität wesentlich steilere Abfall der Dichte über der Temperatur im Bereich der niedrigen Temperaturen führt bei der Abkühlung des Gases an der Außenwand zu einem veränderten Verlauf des Dichteanstiegs. Bei den hohen Temperaturen im oberen Bereich ist der Anstieg zunächst weniger stark als bei einem linearen Verlauf der Dichte. Dementsprechend geringer sind hier die abwärts gerichteten Auftriebskräfte, was niedrigere Strömungsgeschwindigkeiten zur Folge hat. Daher wird weniger Wärme konvektiv abgeführt, und aufgrund des in der Folge ansteigenden Temperaturniveaus sinken dort die lokalen Nußelt-Zahlen. Bei den niedrigeren Temperaturen, die das Gas auf dem Weg nach unten annimmt, kehren sich diese Verhältnisse um: Der Dichtegradient wird steiler als im approximierten Fall, die abwärts gerichteten Auftriebskräfte st...

gen an, und das noch nicht so stark abgekühlte Gas gelangt beschleunigt nach unten, wodurch hier die lokalen Nußelt-Zahlen in einem weiten Bereich ansteigen. Als Ergebnis resultieren aus den beschriebenen Verschiebungen höhere Temperaturen im unteren Bereich des Ringspalt und eine angestiegene integrale Nußelt-Zahl.

9.2.3 Zusammenfassung für die Impulsgleichung

Berücksichtigt man gleichzeitig einen realistischen Ansatz für die Viskosität *und* die Dichte in der Impulsgleichung, so ergibt sich folgende dimensionslose Form der Wirbeltransportgleichung:

$$\Omega = - \frac{1}{\eta^{\otimes}} \text{Ga} \cdot \text{Pr}_{\text{iso}} \cdot \text{Da} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \rho^{\otimes}}{\partial \phi} \cos \phi + \frac{\partial \rho^{\otimes}}{\partial R} \sin \phi \right) - \frac{1}{\eta^{\otimes}} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \eta^{\otimes}}{\partial \phi} + \frac{\partial \Psi}{\partial R} \frac{\partial \eta^{\otimes}}{\partial R} \right) \quad (9.2.3).$$

Da sich unter den in den beiden vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Voraussetzungen jeweils eine Erhöhung der Nußelt-Zahl ergeben hatte, ist es nicht verwunderlich, daß die gleichzeitige Berücksichtigung beider Effekte entsprechend

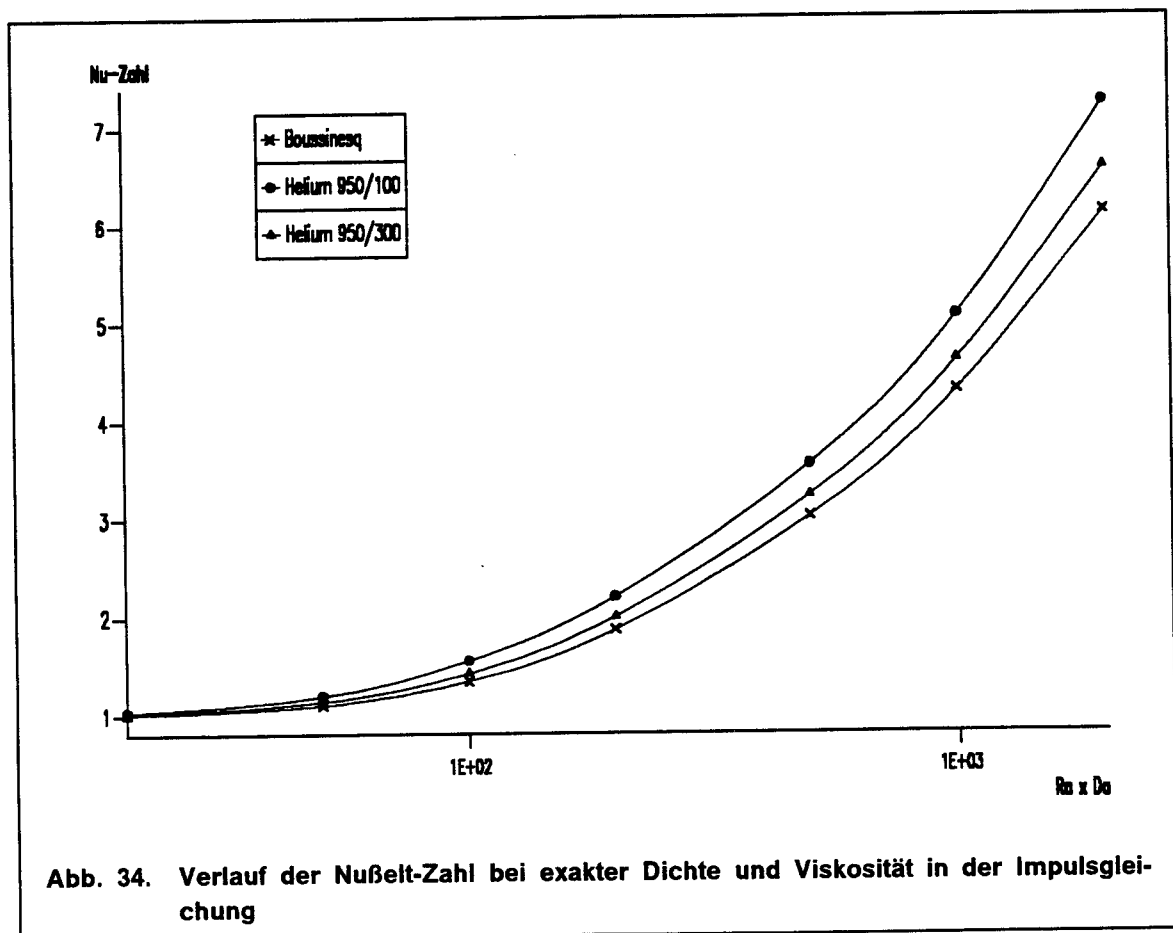
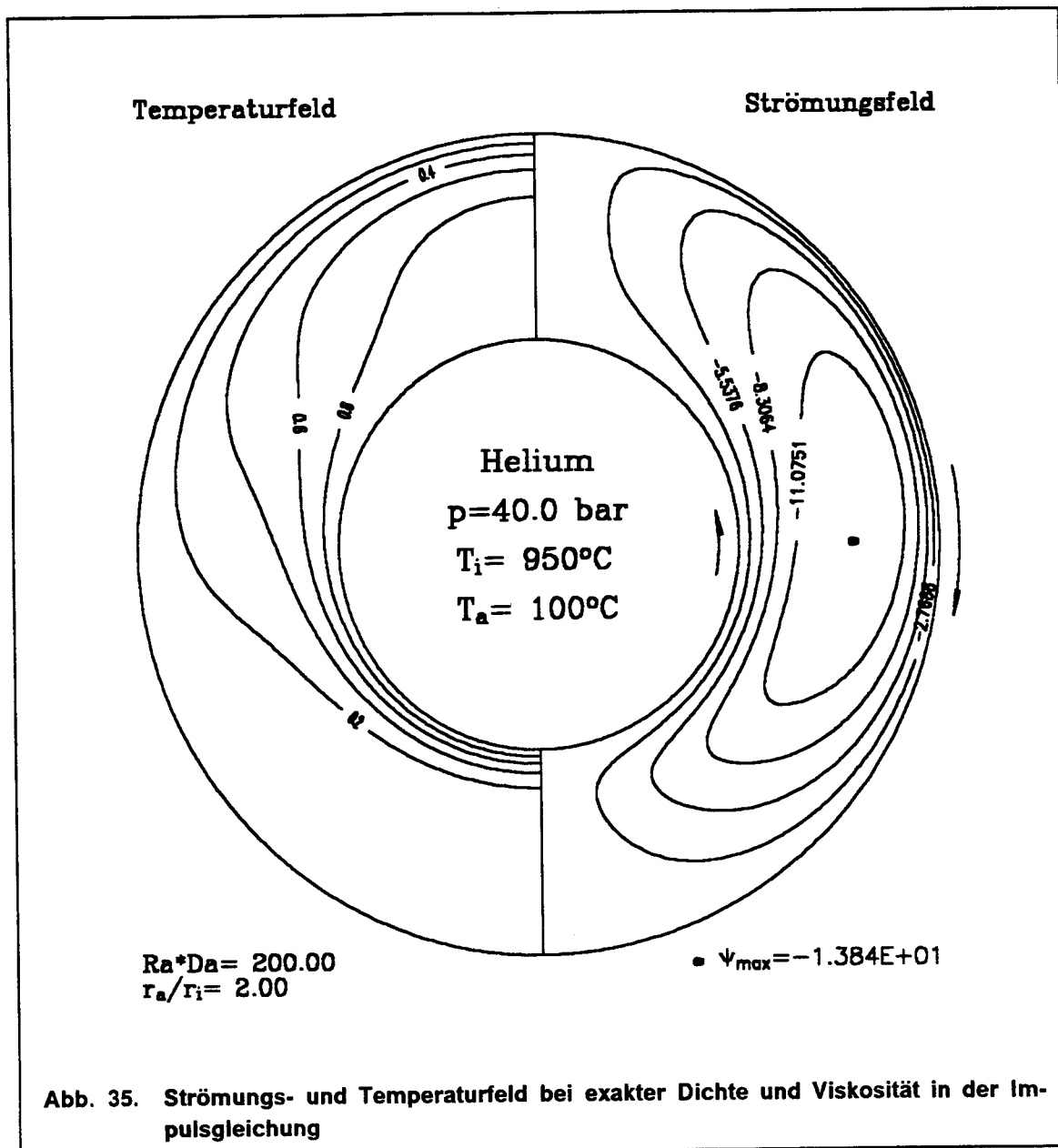


Abb. 34 erneut eine Erhöhung der NuBelt-Zahl zur Folge hat. Diese fällt jedoch mit bis zu 18 % recht deutlich aus und übertrifft damit die Summe der beiden einzelnen Prozentwerte von 3 % für die Viskosität und 10 % für die Dichte.

Die Kurven für Luft als Gas innerhalb der Isolierung decken sich fast mit den hier vorgestellten Kurven für Helium und liegen wie im Kap. „9.2.2 Temperaturabhängigkeit der Dichte in der Impulsgleichung“ erwähnt, um bis zu einen Prozentpunkt höher.

Die Begründung für den zusätzlichen Anstieg der NuBelt-Zahl sei anhand des Strömungs- und Temperaturfelds in Abb. 35 erläutert.



Das Strömungsfeld zeigt im unteren Bereich eine sehr gute Übereinstimmung mit dem allein über eine exakte Dichtebeziehung berechneten. Das Strömungszentrum ist allerdings leicht nach außen verschoben, und sein Wert gegenüber der Boussi-

nesq-Approximation beachtlich angestiegen. Das Zusammenspiel von variabler Viskosität und exakter Dichte führt dazu, daß das Verhältnis von Dichtegradient und viskositätsbedingtem Strömungswiderstand an der „Quelle“ der Konvektionsströmung, also im oberen Bereich des Ringspaltes, abnimmt. Andererseits ist die Abwärtsbewegung des Gases an der Außenseite aufgrund der niedrigeren Viskosität wesentlich weniger gehemmt als bei der Rechnung nach der Boussinesq-Approximation. Wegen des längeren Strömungswegs an der Außenseite wird dadurch der größere Strömungswiderstand an der Innenseite mehr als ausgeglichen. Gegenüber der Boussinesq-Approximation gestalten sich die Bedingungen für eine Konvektionsströmung günstiger. Gute Strömungsvoraussetzungen am Außenrand sind also offensichtlich für die Entstehung einer Konvektionsströmung wichtig.

Da in diesem Fall nicht mit einer temperaturabhängigen Wärmeleitfähigkeit gerechnet wird, entspricht der Verlauf der lokalen Nußelt-Zahl nach Abb. 36 auch dem Verlauf des Temperaturgradienten an der betreffenden Wand.

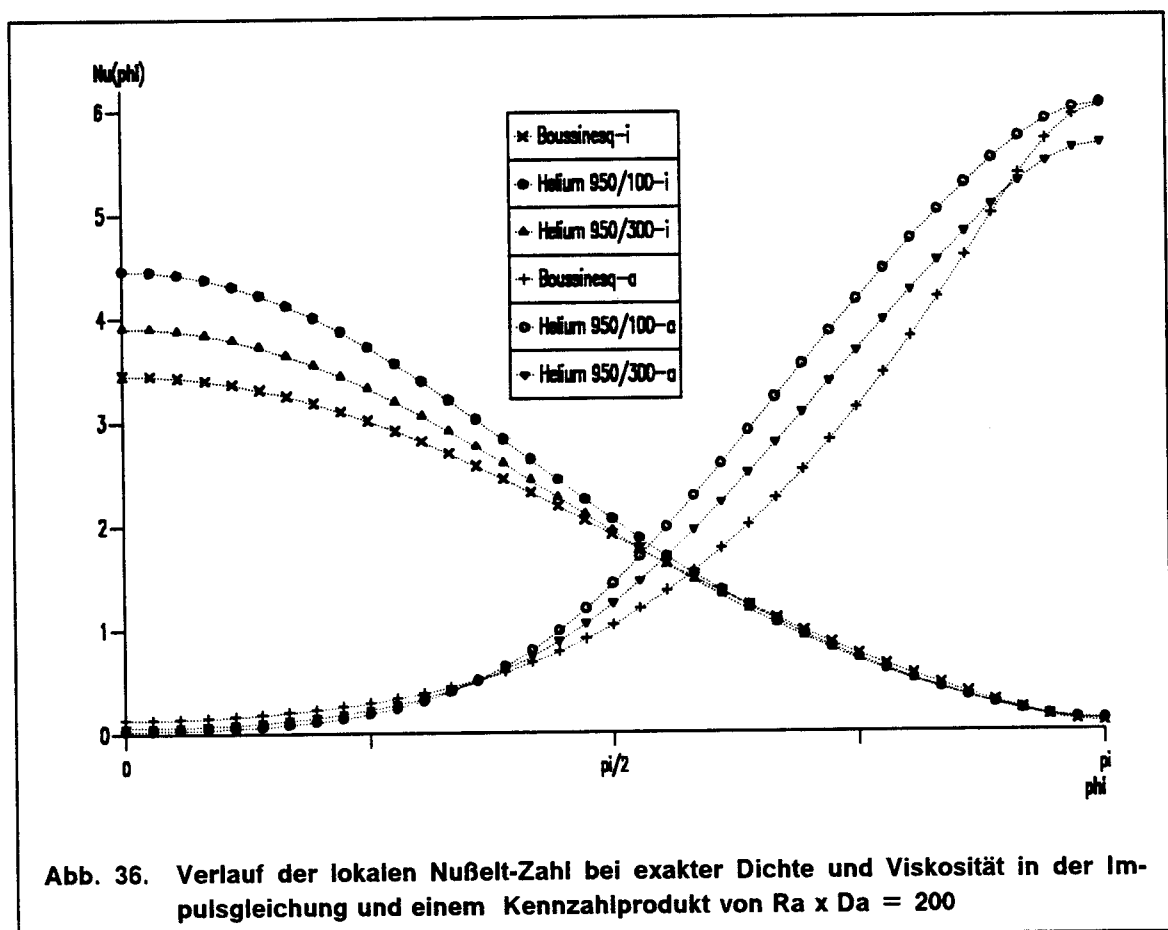


Abb. 36. Verlauf der lokalen Nußelt-Zahl bei exakter Dichte und Viskosität in der Impulsgleichung und einem Kennzahlprodukt von $Ra \times Da = 200$

Die Abbildung zeigt daher, daß der Anstieg des konvektiven Wärmestromes aus einem erhöhten Temperaturgradienten an der Außenwand in der oberen Hälfte des Ringspaltes bzw. an der Innenwand in der unteren Hälfte resultiert. Aufgrund der Abflachung der Kurve für die Außenwand im Bereich $3/4\pi < \phi < \pi$ liegt jedoch der neue maximale Temperaturgradient in der Regel unterhalb des alten durch die Boussinesq-Approximation berechneten Wertes. Lediglich beim berechneten Ex-

tremfall 950 / 100°C wird der alte Maximalwert immer noch erreicht. Am Innenrand ist ein Anstieg des Extremwertes bei $\phi = 0$ festzustellen, der aber nicht über den Maximalwert des Außenrandes hinausgeht. Insgesamt führen die Veränderungen jedoch zu einer Verringerung der Differenz dieser beiden Extremwerte.

9.3 Variable Stoffwerte in Energie- und Impulsgleichung

Berücksichtigt man gleichzeitig die Temperaturabhängigkeit der oben genannten Stoffwerte in Energie- und Impulsgleichung, so nimmt das zu lösende Differentialgleichungssystem folgendes Aussehen an:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Fo} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = & \lambda^{\otimes} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \phi^2} \right) \\ & + \frac{\partial \Theta}{\partial R} \frac{\partial \lambda^{\otimes}}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} \frac{\partial \lambda^{\otimes}}{\partial \phi} \\ & - \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \Theta}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (9.1.1)$$

und

$$\begin{aligned} \Omega = & - \frac{1}{\eta^{\otimes}} Ga \cdot Pr_{iso} \cdot Da \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \rho^{\otimes}}{\partial \phi} \cos \phi + \frac{\partial \rho^{\otimes}}{\partial R} \sin \phi \right) \\ & - \frac{1}{\eta^{\otimes}} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \eta^{\otimes}}{\partial \phi} + \frac{\partial \Psi}{\partial R} \frac{\partial \eta^{\otimes}}{\partial R} \right) \end{aligned} \quad (9.2.3).$$

Da bei der temperaturabhängigen Auswertung der Energiegleichung eine Verringerung der Konvektionsströmung, bei der Auswertung der Impulsgleichung jedoch eine wesentlich größere Zunahme derselben ermittelt wird, ist für den hier betrachteten Fall wieder mit vergrößerten Nußelt-Zahlen zu rechnen. Abb. 37 bestätigt diese Vermutung. Die Zunahme beträgt für Helium im Extremfall bis zu 9 %. Bei den ebenfalls durchgeführten aber nicht dargestellten Rechnungen mit Luft ergibt sich aufgrund des die Konvektionsströmung mindernden höheren Strahlungsanteils nur ein Anstieg von bis zu 4 %.

Der Maximalwert der *lokalen* Nußelt-Zahl am Außenrand verringert sich jedoch mit zunehmender Temperaturdifferenz und zunehmendem Strahlungsanteil (vgl. Abb. 37, unterer Teil). Die beiden gezeigten Kurven fallen bei $\phi = \pi$ fast zusammen, da bei höherer Außentemperatur zwar die Temperaturdifferenz kleiner, der Strahlungsanteil jedoch aufgrund des gestiegenen Temperaturniveaus größer wird.

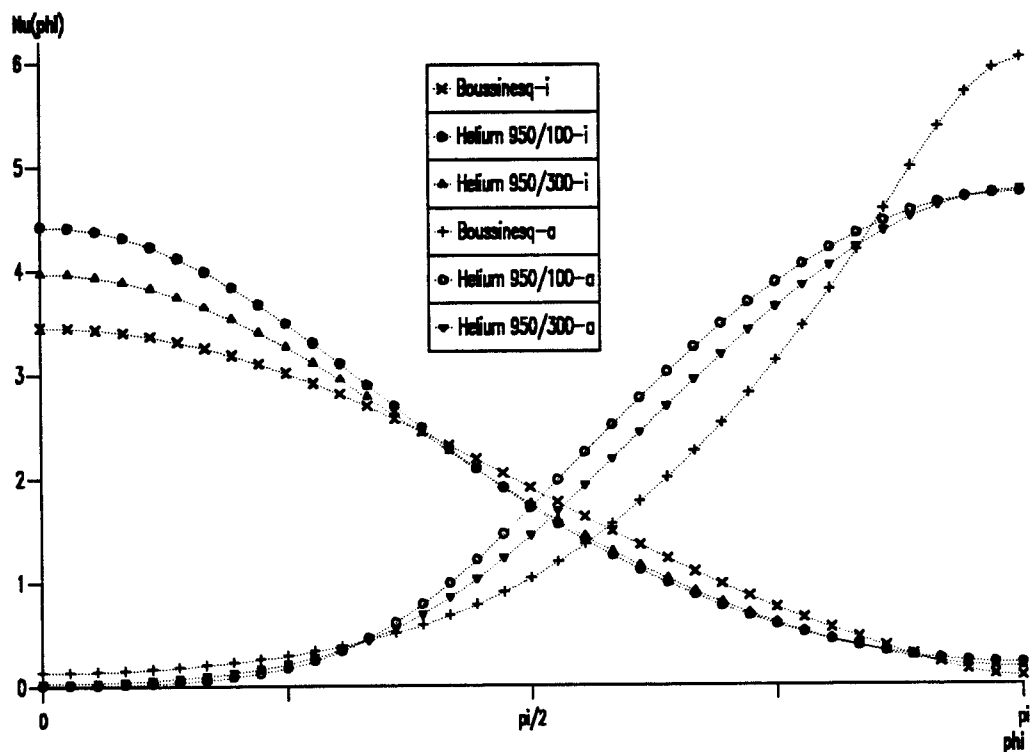
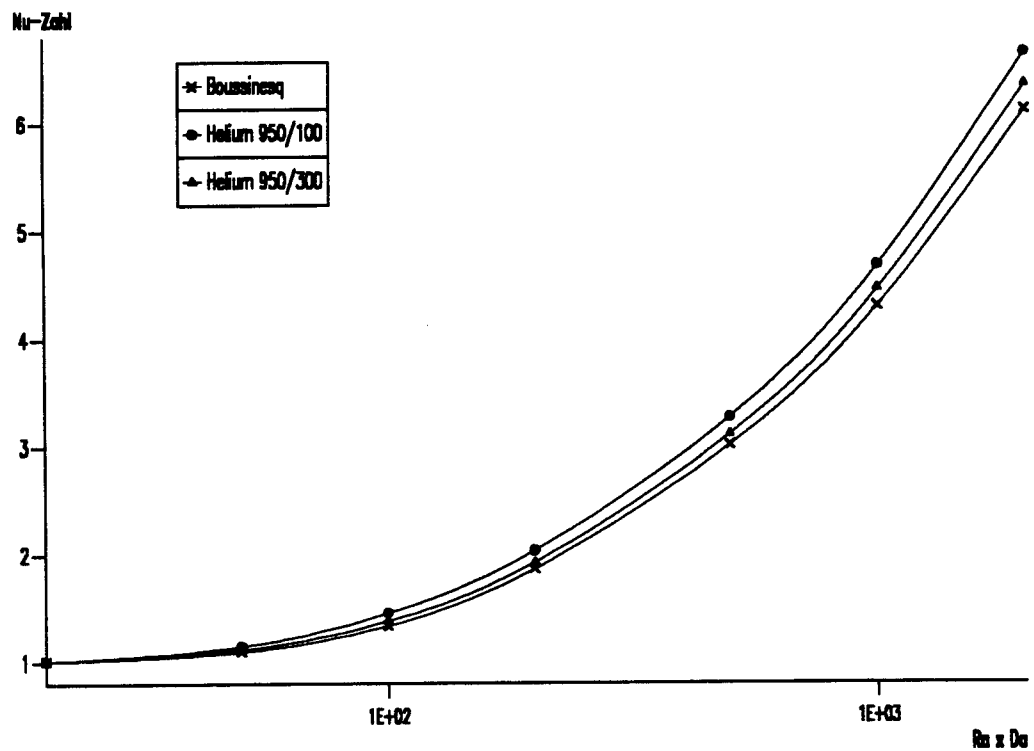
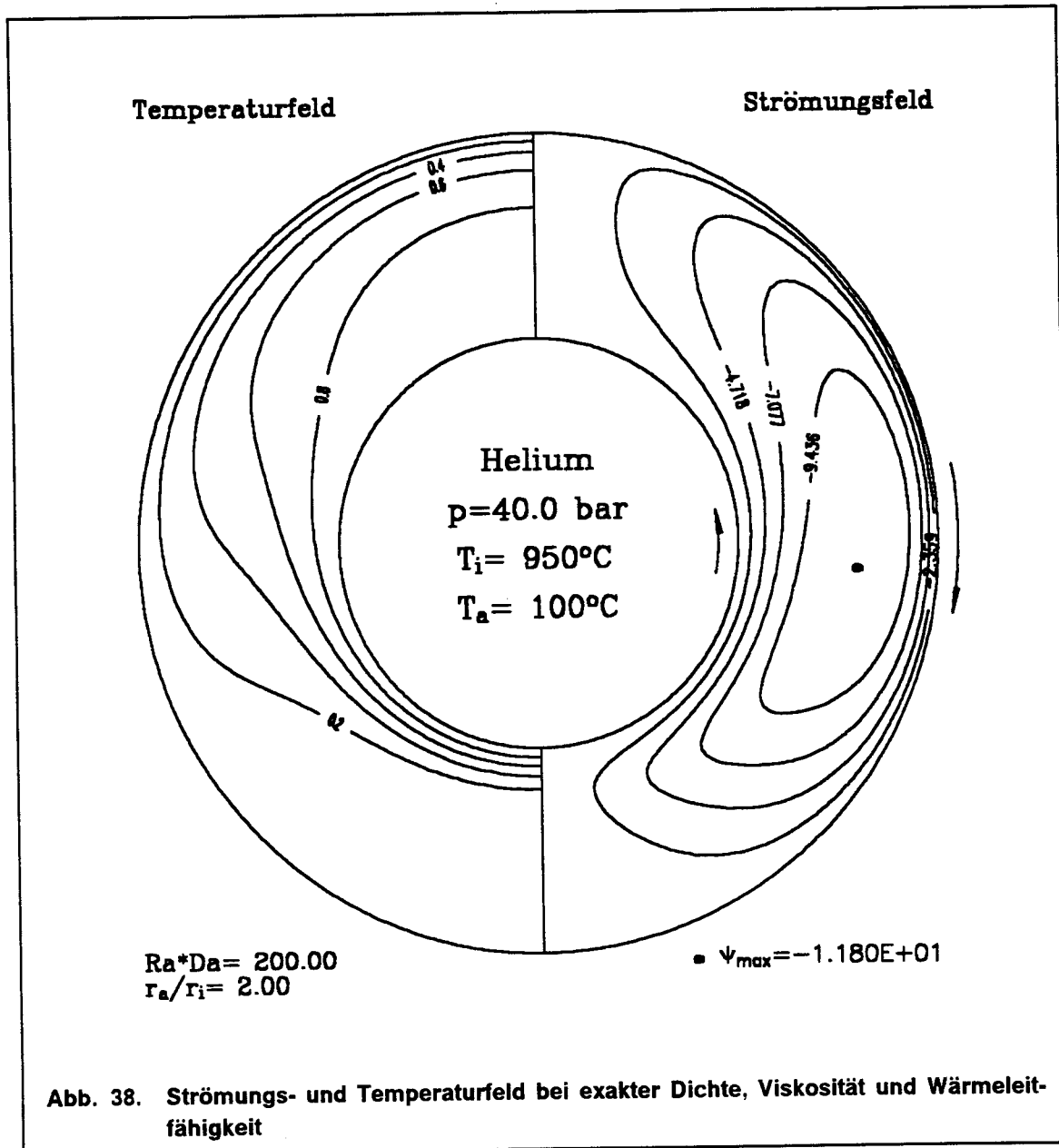


Abb. 37. Verlauf der Gesamt-Nußelt-Zahl über dem Kennzahlprodukt und der lokalen Nußelt-Zahl über der Umfangskoordinate für $Ra \times Da = 200$ bei exakter Wärmeleitfähigkeit, Viskosität und Dichte in Energie- und Impulsgleichung

Das Strömungsfeld nach Abb. 38 zeigt, daß das Zentrum der Strömung im Vergleich zur Boussinesq-Approximation weit nach unten abgesunken ist. Am besten läßt sich die Veränderung beschreiben, wenn man die Darstellung mit den Ergebnissen des vorangegangenen Abschnitts vergleicht (siehe Abb. 35 auf Seite 88). Dort war nur die Wärmeleitfähigkeit nicht temperaturabhängig berücksichtigt worden. Die Stromlinien liegen jetzt am Außenrand etwas dichter, das ganze Feld erscheint etwas gestaucht nach unten rechts hin. Beim Temperaturfeld ist der Abstand zwischen den Isothermen aufgrund der Berücksichtigung der Wärmeleitfähigkeit am Außenrand enger und innen weiter geworden.



Im Kap. „9.1 Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit“ war festgestellt worden, daß die Nußelt-Zahl bei höherem Strahlungsanteil stärker zurückgeht. Wenn dieser Anteil sehr groß ist, sinkt eventuell auch bei zusätzlicher Berücksichtigung der

Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte ρ_g und η_g in der Impulsgleichung die Nußelt-Zahl gegenüber der Boussinesq-Approximation noch ab. Die hier durchgeführten Betrachtungen erheben nicht den Anspruch, alle denkbaren Fälle abzudecken, sondern sind speziell auf den Anwendungsfall einer Helium-Heißgasleitung ausgerichtet. Im Kap. „11. Variation von Einflußparametern“ wird jedoch eine Variation verschiedener Parameter durchgeführt, die auch Aussagen allgemeiner Art zulassen.

9.4 Einführung der temperaturabhängigen Dichte in die Kontinuitätsgleichung

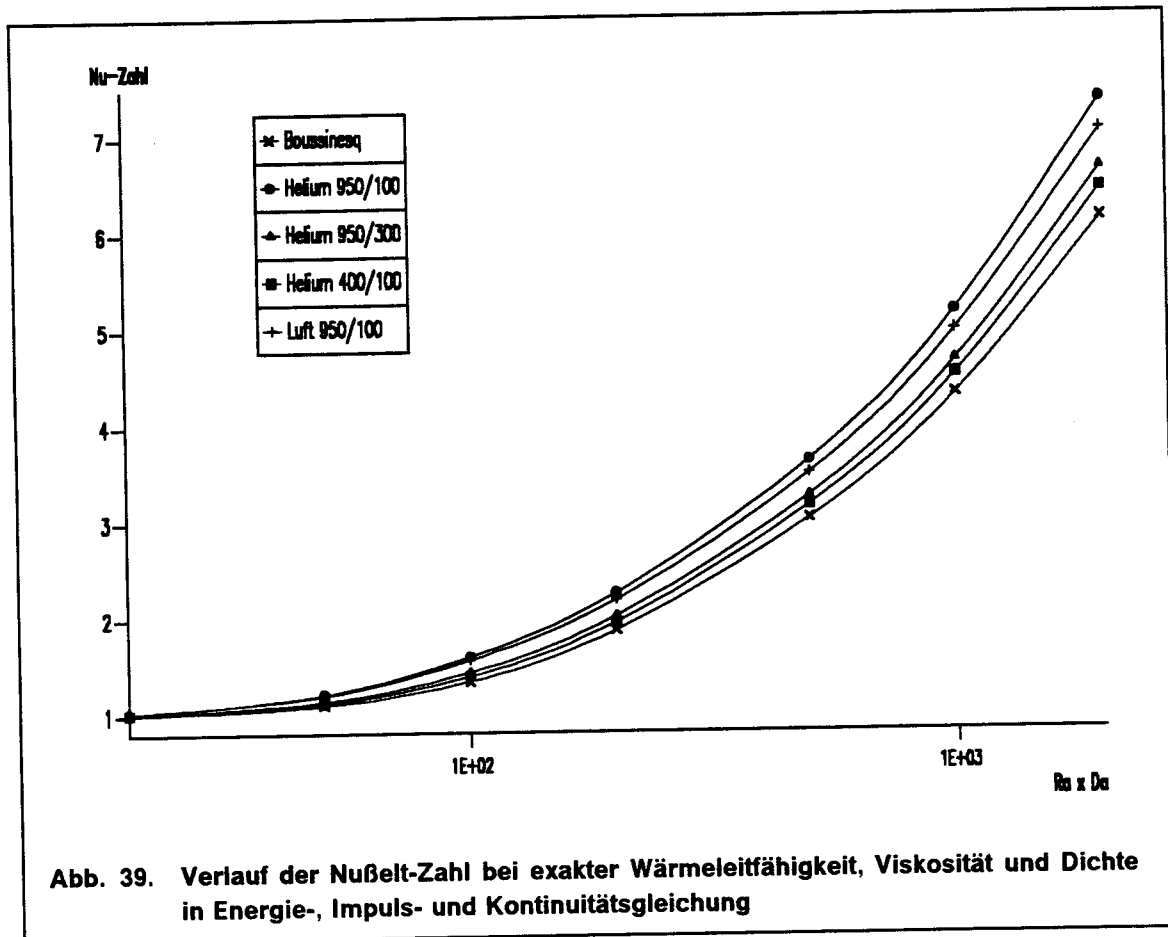
Im letzten Schritt der Erweiterung der Erhaltungsgleichungen soll schließlich zusätzlich auch in der Kontinuitätsgleichung die Dichte temperaturabhängig betrachtet werden. Als direkte Folge ergibt sich daraus eine **dichteabhängige Stromfunktion**, wie sie bereits in Gl. (5.3.5) definiert wurde. Die Energiegleichung verändert sich dabei nicht, da hier stets die Terme $\rho_{\text{Gas}} u$ und $\rho_{\text{Gas}} v$ durch die Ableitungen der Stromfunktion ersetzt worden waren. In den Impulsgleichungen sind jedoch die Geschwindigkeitsterme nicht mit der Dichte verknüpft, so daß nach Einsetzen der Stromfunktion die variable Dichte im Nenner stehenbleibt. Über die weiterhin gültige Formulierung (5.3.10) für die dimensionsbehaftete Wirbeltransportgleichung gelangt man nun zu folgender dimensionsloser Form:

$$\Omega = - \frac{1}{\eta^{\otimes}} \text{Ga} \cdot \text{Pr}_{\text{Iso}} \cdot \text{Da} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \rho^{\otimes}}{\partial \phi} \cos \phi + \frac{\partial \rho^{\otimes}}{\partial R} \sin \phi \right) - \frac{1}{\eta^{\otimes} \rho^{\otimes}} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \eta^{\otimes}}{\partial \phi} + \frac{\partial \Psi}{\partial R} \frac{\partial \eta^{\otimes}}{\partial R} \right) \quad (9.4.1).$$

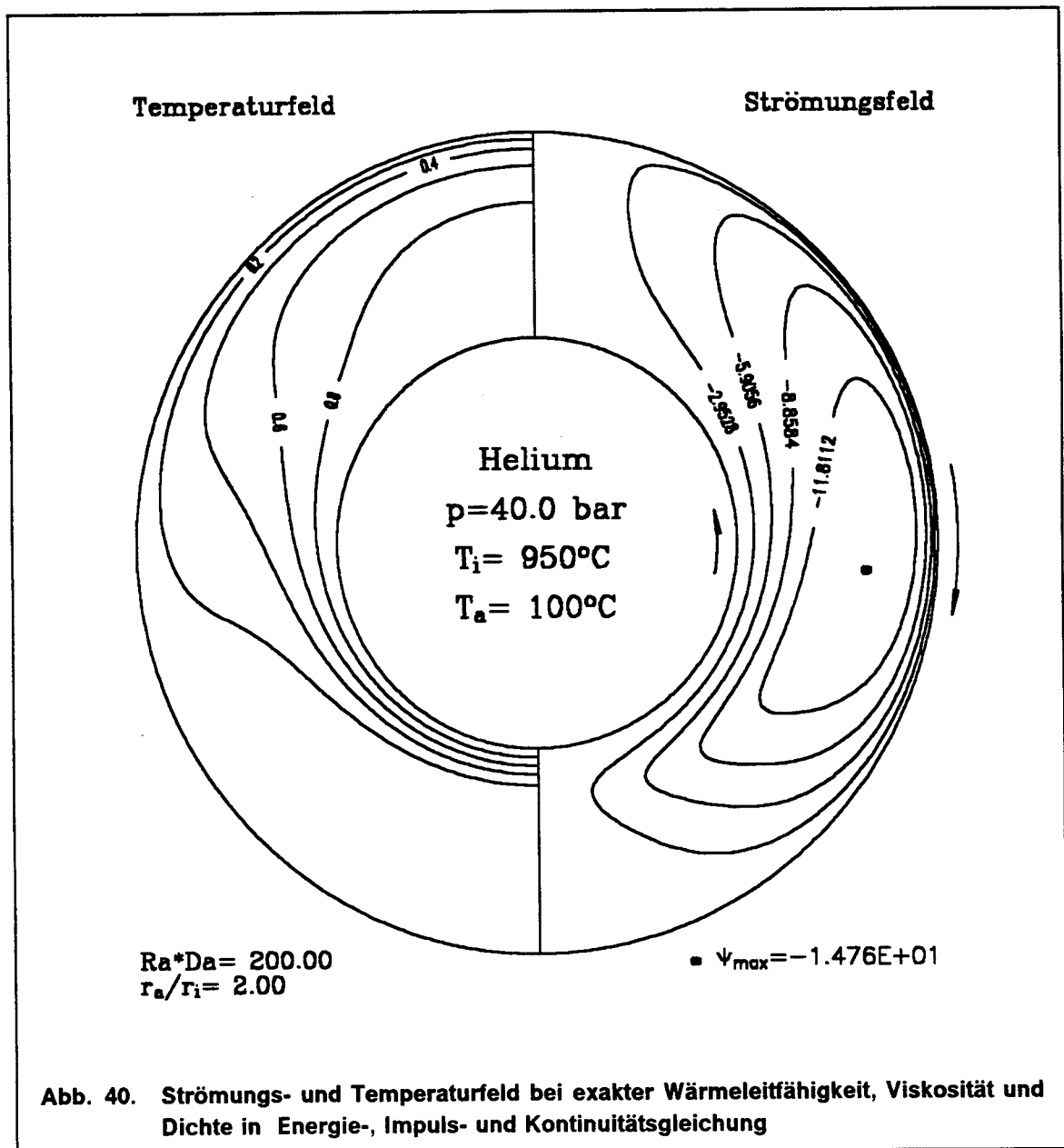
Sie unterscheidet sich von Gl. (9.2.3) durch die Einführung des Faktors $1/\rho^{\otimes}$ vor den zweiten Klammerausdruck. Für alle berechneten Temperaturverhältnisse führt die rechnerische Auswertung zu einer Zunahme der Nußelt-Zahl. Abb. 39 zeigt, daß die Zunahme gegenüber der Boussinesq-Approximation im Extremfall knapp 20% beträgt. Gegenüber den Rechnungen aus dem vorherigen Abschnitt ergibt sich eine Erhöhung um 10 – 12 %.

Eine Erhöhung des Wärmestromes durch die Berücksichtigung einer temperaturabhängigen Dichtebeziehung in der Kontinuitätsgleichung erhalten auch Marpu und Satyamurty (1991), die sich mit der freien Konvektion in einem *vertikalen* porösen Ringspalt unter kryogenen Verhältnissen beschäftigen. Allerdings wird in diesem Fall lediglich auch in die Kontinuitätsgleichung eine lineare Beziehung für die Dichte eingeführt, alle anderen Stoffwerte bleiben weiterhin konstant. Immerhin bestätigt dieses Ergebnis jedoch prinzipiell die Feststellung eines sich erhöhenden Wärmestromes für den Fall einer dichteabhängigen Stromfunktion. Bei einem Temperaturanstieg über der Isolierung von 100 nach 300 K (!) erhalten die Autoren mit einer relativen Dichtedifferenz der Luft $(\rho_i - \rho_a)/\rho_i$ von 0,6734 einen Anstieg der Nußelt-Zahl von etwa 22 % gegenüber der Boussinesq-Approximation. In dem in

dieser Arbeit zugrundegelegten Fall Helium 950 / 100°C beträgt die relative Dichtedifferenz 0,6915 und hat damit fast genau den gleichen Wert. Bei dem hier betrachteten horizontalen Ringspalt ist die Zunahme der Nußelt-Zahl allerdings kleiner. Dieser Unterschied ist offensichtlich in den sich unterscheidenden Beziehungen für die Dichte zu suchen. Marpu und Satyamurty gehen von einer mit dem thermischen Expansionskoeffizienten β linear abfallenden Dichte aus, wobei die (hohe) Dichte am Innenrand als Bezugswert der linearen Dichtebeziehung gewählt wird. Damit sind aber die Dichtewerte am wärmeren Außenrand aufgrund des zu steilen Temperaturgradienten wesentlich zu klein gewählt, weshalb die von den Autoren berechnete Zunahme der Nußelt-Zahl nach unten korrigiert werden muß

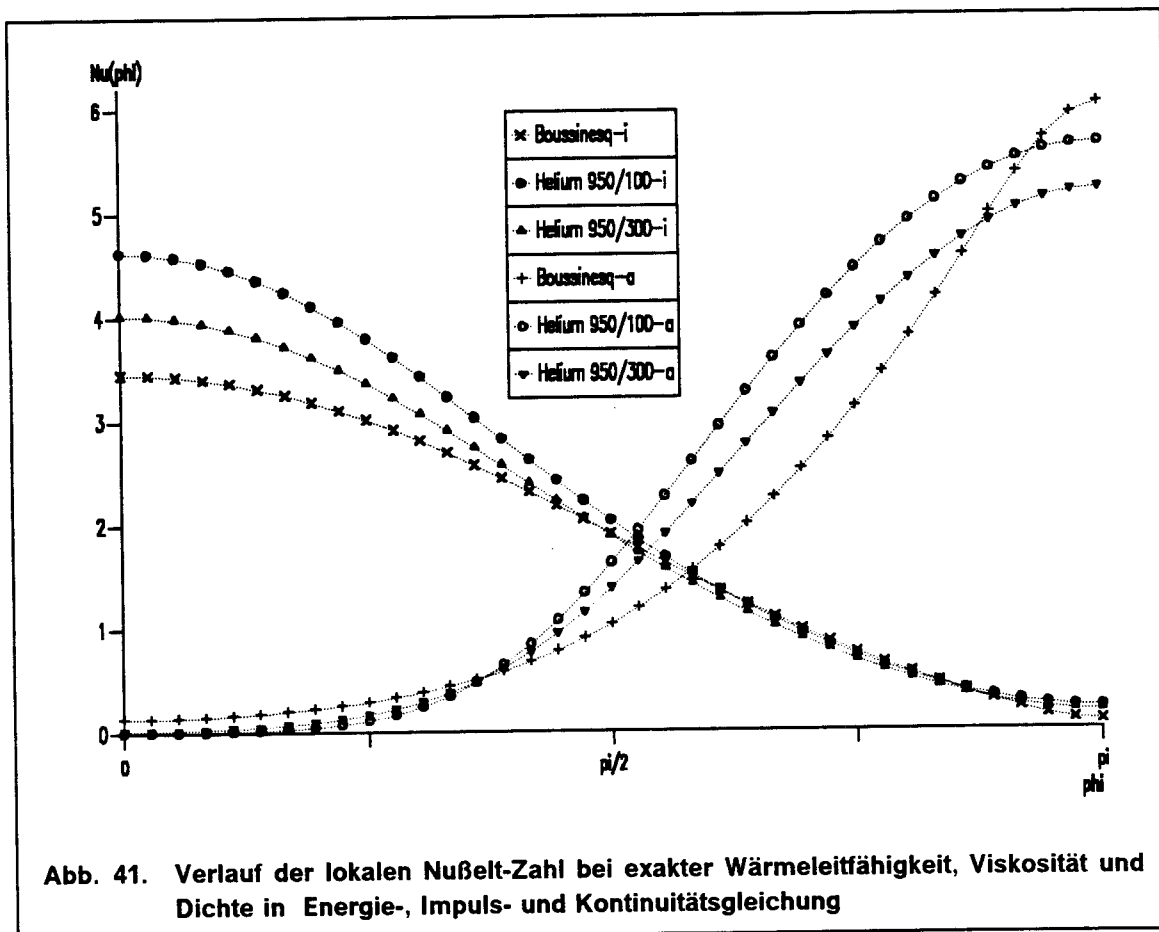


Das Strömungsfeld in Abb. 40 zeichnet sich für diesen exemplarisch aufgeführten Fall durch den bisher höchsten ermittelten Maximalwert der Stromfunktion aus. Das Strömungszentrum ist zum kalten Rand hin verschoben. Die Stromlinien am äußeren Rand liegen daher sehr dicht, allerdings kann jetzt auch nicht mehr direkt von der Steigung der Stromfunktion auf die Geschwindigkeit geschlossen werden. Bei Verwendung einer dichteabhängigen Stromfunktion nach Gl. (5.3.6) ist deren Steigung stets proportional zum Produkt aus Geschwindigkeit und lokaler Dichte. Die Werte der Geschwindigkeit selbst weichen am Außenrand tatsächlich nicht sehr stark von den Ergebnissen der letzten Rechnung (ohne variable Dichte in der Kontinuitätsgleichung) ab.



Der Verlauf der lokalen Nußelt-Zahl in Abb. 41 zeigt jedoch eine starke Erhöhung der übertragenen Wärme nach außen im gesamten oberen Bereich des Ringspaltes, ohne daß dadurch allerdings ein höherer Maximalwert entsteht. Unten am Innenrand aber treten neue Höchstwerte der lokalen Nußelt-Zahl auf, da sich das Strömungszentrum gegenüber der Boussinesq-Approximation auch nach unten verschoben hat und somit wieder mehr abgekühltes Gas in diesen Bereich vordringt.

Auch die Erhöhung des Extremwerts der Stromfunktion und die Verstärkung der Asymmetrie des Strömungsfelds durch Einführung einer variablen Dichte in die Kontinuitätsgleichung deckt sich mit den oben genannten Ergebnissen von Marpu und Satyamurty (1991) und denen von Peirotti u. a. (1987), die einen porösen Rechteckraum unter Berücksichtigung variabler Stoffwerte untersuchen.



Die variable Dichte wirkt sich hauptsächlich in einer Veränderung der Energiegleichung aus, obwohl gerade diese die gleiche Form behalten hat. Es verändert sich aber die Stromfunktion entscheidend und zwar speziell ihr Gradient in radialer Richtung. Der Term $\partial\Psi/\partial R$ in Gl. (9.1.1) erhält im Bereich der Außenwand ein größeres Gewicht, was einem erhöhten Angebot an konvektiv zugeführter Wärme entspricht.

Zusammenfassung:

Es läßt sich festhalten, daß bei Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der entscheidenden Stoffwerte der *Konvektions*-Wärmestrom in allen betrachteten Fällen größer errechnet wird als über die Boussinesq-Approximation. Die Abweichung steigt mit wachsendem Kennzahlprodukt $Ra \cdot Da$ deutlich an. In den Fällen, in denen die Konvektion einen meßbaren Beitrag zur Wärmeübertragung leistet, wird die Erniedrigung der Nußelt-Zahl, die durch die Wahl der arithmetischen Stoffbezugstemperatur bedingt ist, ausgeglichen, und es erhöht sich dadurch auch der errechnete *Gesamt*-Wärmestrom.

Aus dem Vergleich der verschiedenen Anwendungsfälle geht hervor, daß die Abweichung vom Ergebnis der Approximation umso größer ist, je größer die Temperaturdifferenz und je stärker damit die relative Abweichung der Stoffwerte vom Mittelwert ist. Einzig eine überproportionale Aufweitung des Verlaufs der Wärmeleitfähigkeit (zum Beispiel durch einen erhöhten Strahlungsanteil) hat einen gegenläufigen Einfluß und führt bei sehr geringen Konvektionswärmeströmen auch zu insgesamt geringfügig verkleinerten Nußelt-Zahlen.

Die sukzessive Berücksichtigung der einzelnen variablen Stoffwerte zeigt, daß der Fehler der Boussinesq-Approximation nicht in jedem Fall kleiner wird, wenn lediglich nur ausgewählte Stoffwerte als variabel betrachtet werden, wie es zum Beispiel geschieht bei Echigo u. a. (1978), die nur die Strahlung zusätzlich berücksichtigen, oder bei Marpu und Satyamurty (1991), die nur die Dichte variabel einsetzen. In der Regel wird das Ergebnis besser, wenn wie bei Blythe und Simpkins (1981) oder Tong u. a. (1983) nur die Temperaturabhängigkeit der Viskosität berücksichtigt wird. Doch auch hier ist Vorsicht angebracht, denn ein großer Strahlungsanteil der Wärmeleitfähigkeit kann in bestimmten Fällen auch zu einem über diese Methode nicht zu ermittelnden Rückgang der Nußelt-Zahl führen.

Selbst die sehr ausführlichen Rechnungen von Peirotti u. a. (1987) mit variabler Viskosität, Dichte und Wärmeleitfähigkeit zur Berechnung einer Strömung in einem Rechteckraum mit horizontalem Temperaturgefälle schlagen sich nicht immer in einer tatsächlichen Verbesserung der Nußelt-Zahl nieder, weil hier die Wärmestrahlung nicht berücksichtigt wird.

Die für poröse Rechteckräume berechneten Zusammenhänge und Nußelt-Zahlen lassen sich nicht unbedingt auf die spezielle Geometrie des horizontalen Ringspalts übertragen. Hier tritt nämlich die Besonderheit auf, daß sich im oberen Bereich das nach außen abfallende Temperaturprofil konvektionsfördernd, im unteren Bereich aber konvektionshemmend auswirkt. Dadurch ist schon allein durch die Geometrie eine Tendenz zum asymmetrischen Strömungsprofil, d. h. zur Verlagerung des Strömungsmittelpunkts nach oben, gegeben. Im speziellen Fall eines porösen Rechteckraums ergeben sich jedoch bei konstanten Stoffwerten auch bei sehr hohen Kennzahlprodukten immer symmetrische Strömungs- und Temperaturfelder, die erst durch Einführung variabler Stoffwerte zur Asymmetrie neigen.

10. Betrachtung eines realistischen Anwendungsfalls

Es ist zu untersuchen, welche Auswirkung die Annahme variabler Stoffwerte auf den Wärmetransport durch die Innenisolierung einer Heißgasleitung unter Einsatzbedingungen hat. Folgender Auslegungsfall wird bei den weiteren Rechnungen zugrundegelegt:

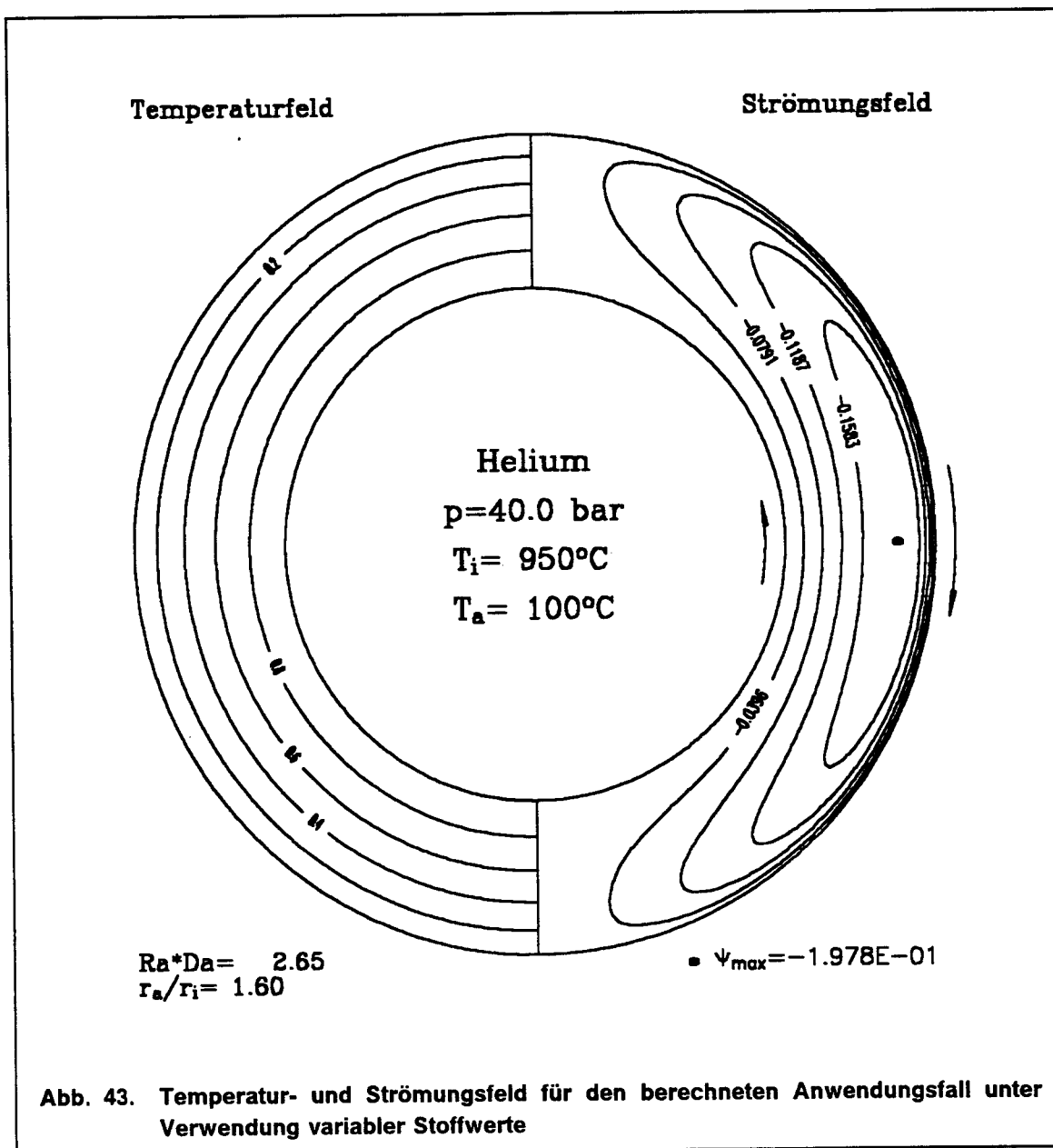
Auslegungsgaten:			
Medium:		Helium	
Heißgastemperatur:		950°C	
Außentemperatur:		100°C	
Druck:		40 bar	
Außendurchmesser Gasführungsrohr:		1000 mm	
Schichtdicke der Isolierung:		300 mm	
Innendurchmesser Druckrohr:		1600 mm	
Isolierung:		keramische Hochtemperaturfaser	
Packungsdichte:		200 kg/m ³ (d. h. $v_f = 0,0755$)	
Faserdurchmesser:		3,5 μm	
spezifische Extinktion:		19,42 m ² /kg	
mittl. Wärmeleitfähigkeit:		0,4052 W/m K	
Permeabilität:		$1,7 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2$ (d. h. $B = 10$)	
Kennzahlprodukt $Ra \cdot Da$:		2,65	
Rechen- ergebnisse	Rechnung mit Boussinesq- Approximation	Rechnung mit variablen Stoffwerten	Anmerkung
Nu	1,0001	0,9911	
$Nu_{i,max}$	1,0180	1,0099	
$Nu_{a,max}$	1,0186	1,0297	
Nu_{Gas}	1,3067	1,2950	
Ψ_{min}	-0,120	-0,198	
$U_{max,oben}$	0,00062 cm/s	0,00083 cm/s	
$V_{max,innen}$	0,00618 cm/s	0,00538 cm/s	
$V_{max,außen}$	0,00452 cm/s	0,01437 cm/s	
K_ϕ	0,0027	0,0036	Asymmetriekennwert

Abb. 42. Auslegungsdaten für den betrachteten Anwendungsfall und Gegenüberstellung der Ergebnisse von Boussinesq-Approximation und Rechnung mit variablen Stoffwerten

Aufgrund des sich ergebenden niedrigen Kennzahlprodukts von 2,65 gibt es keine ausgeprägte Erhöhung der Nußelt-Zahl aufgrund der Konvektionsströmung. Stellt

man die Ergebnisse der Rechnung mit variablen Stoffwerten einer Berechnung nach der Boussinesq-Approximation gegenüber, dann sind nach Abb. 42 nur geringe Unterschiede zwischen den beiden Versionen erkennbar. Die Verwendung der arithmetischen Mitteltemperatur als Stoffbezugstemperatur für die Wärmeleitfähigkeit führt sogar zu einer Nußelt-Zahl unterhalb von 1 im ausführlich berechneten Fall. Damit wird der Wärmestrom um bis zu etwa 1 % zu hoch eingeschätzt, wodurch man in jedem Fall auf der sicheren Seite liegt.

Abb. 43 zeigt das Ergebnis der Rechnung unter Verwendung variabler Stoffwerte. Man erkennt ein fast symmetrisches Strömungsfeld und ein sehr gleichmäßig nach außen abfallendes Temperaturfeld.



Für eine innenisolierte Helium-Heißgasleitung in der vorgestellten Ausführung dürfte daher kaum die Gefahr einer Verschlechterung der Isolierwirkung durch natürliche Konvektion auftreten.

Die mit der Maximalgeschwindigkeit $u_{\text{max,außen}} = 0,01437 \text{ cm/sec}$ gebildete lokale Poren-Reynolds-Zahl hat nach Gl. (6.2.8) einen Wert von $1,1 \cdot 10^{-4}$. Die Gültigkeit des Darcy-Gesetzes, das eine Reynolds-Zahl mit $Re \leq 1$ verlangt, kann also zurecht angenommen werden.

Es fällt aber auf, daß die Strömungsgeschwindigkeiten und der die Asymmetrie des Temperaturfeldes beschreibende Kennwert K_ϕ höher liegen als bei der Approximationsrechnung. Hier deutet sich bereits an, daß für ungünstigere Auslegungsfälle die ausführliche Rechnung höhere Konvektionswärmeströme und höhere Nußelt-Zahlen liefern wird als die Boussinesq-Approximation.

11. Variation von Einflußparametern

In den folgenden Abschnitten soll untersucht werden, welche Veränderungen am Aufbau der Isolierung die Ausbildung von Konvektionsströmungen fördern und in welchem Umfang dieses geschieht. Abschließend wird aufgrund der Ergebnisse eine ungünstig ausgelegte Isolierung modelliert und bewertet.

Im ersten betrachteten Fall wird die Auswirkung einer Veränderung des Außenradius und damit der Schichtdicke der Isolierung untersucht, anschließend eine Veränderung der Packungsdichte, dann des Druckniveaus und schließlich des mittleren Faserdurchmessers.

Es wird weiterhin ein Temperaturabfall von 950 auf 100°C vorausgesetzt. Eine Variation einzelner Parameter führt jedoch nur dann zu einer erkennbaren Veränderung des Wärmestroms, wenn die konvektive Wärmeübertragung überhaupt von Bedeutung ist. Im beschriebenen Fall ist dies nicht der Fall, da die Strömung kaum zum Wärmetransport beiträgt. Zur Verdeutlichung der Ergebnisse ist daher bei den nachfolgenden Berechnungen der für die Bestimmung der Permeabilität wichtige Koeffizient B (siehe Gl. 2.2.4) um den Faktor 10 verkleinert worden, wodurch die Permeabilität entsprechend um den gleichen Faktor größer wird. Die vorgestellten Ergebnisse können daher keine Aussagen direkt zum betrachteten Anwendungsfall machen. Es können aber Tendenzen von allgemeiner Gültigkeit angegeben werden.

Die bloße Kenntnis der Nußelt-Zahlen erlaubt jedoch keinen Vergleich der tatsächlich übertragenen Wärmemengen. Diese müssen in jedem speziellen Fall über

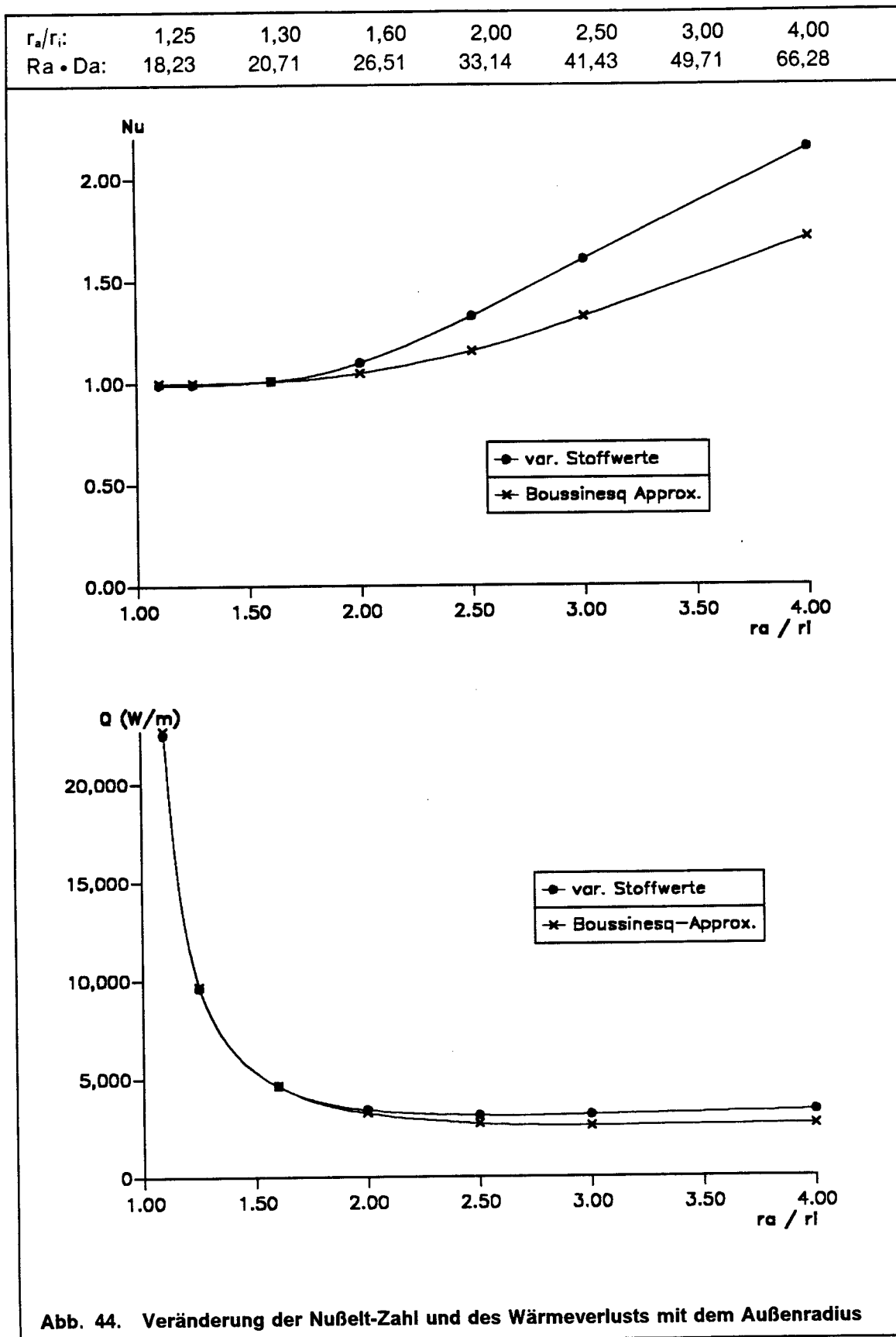
$$\dot{Q}' = Nu_{iso} \dot{Q}'_{log} = Nu_{iso} \frac{\lambda_{iso,m} (T_i - T_a)}{\ln \left(\frac{r_i}{r_a} \right)} \quad (11.0.1)$$

berechnet werden. Wenn sich also bei der Variation eines Parameters auch die mittlere Wärmeleitfähigkeit der Isolierung oder die Geometrie ändert, so verlaufen Nußelt-Zahl und Wärmestrom nicht unbedingt parallel.

11.1 Variation der Schichtdicke der Isolierung

Nach den Ausführungen des Kap. „8. Boussinesq - Approximation“ steigt die Nußelt-Zahl an, wenn man bei konstant gehaltenem Außendurchmesser die Schichtdicke vergrößert. Für die Praxis relevanter ist allerdings der umgekehrte Fall: Die Schichtdicke wird bei konstantem Innendurchmesser variiert, wobei sich neben dem Außenradius sowohl das Radienverhältnis als auch das Kennzahlprodukt $Ra \cdot Da$ vergrößert. Der Anstieg der Nußelt-Zahl ist also noch ausgeprägter als im zuerst beschriebenen Fall.

Mit steigender Schichtdicke wird im ruhenden Fall die übertragene Wärmemenge kontinuierlich absinken. Abb. 44 auf der folgenden Seite zeigt die Veränderung des



Kennzahlprodukts, den Anstieg der Nußelt-Zahl und den Abfall der übertragenen Wärmemenge mit steigendem Außenradius. Es ist zu erkennen, daß sich ab einem Radienverhältnis von 2 im betrachteten Fall die Isolierwirkung der Fasern kaum noch durch die Erhöhung der Schichtdicke verbessert. Die hohe Nußelt-Zahl sorgt ab $r_a/r_i = 3$ sogar für eine leichte Zunahme des Wärmeverlusts. Aufgrund der hier vorgenommenen künstlichen Erhöhung der Permeabilität ist diese Zunahme in der Praxis allerdings nicht relevant.

Es ist weiter zu erkennen, daß sich die Ergebnisse der beiden Berechnungsmethoden im Bereich $r_a/r_i \leq 1,7$ wenig unterscheiden, erst danach tritt der Fehler der Boussinesq-Approximation auf.

Das obere der beiden Diagramme zeigt, wann es sinnvoll ist, den Isolierraum durch den Einbau gasundurchlässiger Folien in mehrere Strömungsräume mit geringer Schichtdicke aufzuteilen. Durch diese Aufteilung bewegt man sich auf den beiden dargestellten Kurven nach links und erreicht sehr schnell Nußelt-Zahlen, die sich kaum noch von 1 unterscheiden. Die durchgeführte Rechnung kann einen Anhaltspunkt geben, bei welchen Radienverhältnissen solche Zwischenlagen auf jeden Fall notwendig sind, wenn Konvektionswärmeströme vermieden werden sollen. Im betrachteten Fall liegt dieser kritische Wert etwa bei $r_a/r_i = 1,4$. In einem realistischen Fall mit niedrigerer Permeabilität liegt das kritische Radienverhältnis höher.

11.2 Variation der Packungsdichte

Die Packungsdichte kann aus prinzipiellen Gründen nicht beliebig variiert werden: Sehr *hohe* Werte sind kaum zu erreichen, da der notwendige Druck zum Zusammenpressen oder Vorspannen nicht aufgebracht werden kann. Die angebotenen Packungsdichten gehen entsprechend auch nicht über 400 kg/m^3 hinaus. Zusätzlich muß dabei beachtet werden, daß mit zunehmender Packungsdichte die Wärmeübertragung durch Leitung zunimmt.

Niedrige Packungsdichten gehen mit einer erhöhten Strahlungsleitfähigkeit einher und weisen ein unbefriedigendes Rückstellverhalten auf. Wenn die Rückstellkräfte des Faserpaketes nachlassen, wird es nicht mehr gegen die umgebenden Wände gedrückt, und es bilden sich Hohlräume aus, die zu unerwünschter Konvektion führen. Henßen u. a. (1988) halten eine Packungsdichte von $\rho_{\text{iso}} \geq 200 \text{ kg/m}^3$ für ausreichend, damit eine Standzeit von 40 Jahren erreicht werden kann. Darüber hinaus läßt mit geringerem Faseranteil auch die konvektionshemmende Wirkung der Fasern nach. So bewirkt ein Weniger an Isoliermaterial ein Mehr an Wärmeverlust.

Für die Berechnungen werden dessen ungeachtet alle Werte der Packungsdichte herangezogen, die von den Herstellerfirmen keramischer Faserisolierungen üblicherweise angeboten werden.

Wie ungünstig eine Erniedrigung der Packungsdichte bezüglich des Einsetzens einer Konvektionsströmung ist, zeigt die Abb. 45 auf der nächsten Seite. Ab $\rho_{\text{iso}} \leq 170 \text{ kg/m}^3$ steigt bei den hier betrachteten Randbedingungen die Nußelt-Zahl extrem steil an. Der Wärmeverlust geht mit absinkender Packungsdichte noch steiler

$\rho_{iso} [kg/m^3]:$	48	64	96	128	164	192	288	384
$Ra \cdot Da:$	420,3	255,9	121,1	68,65	40,94	29,04	11,26	5,35

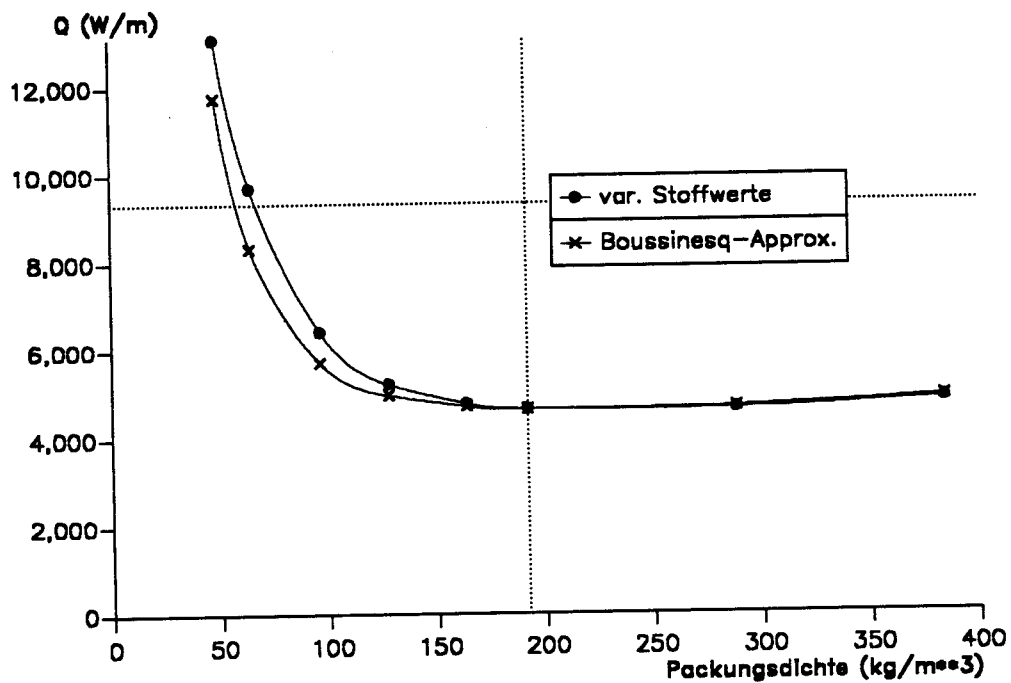
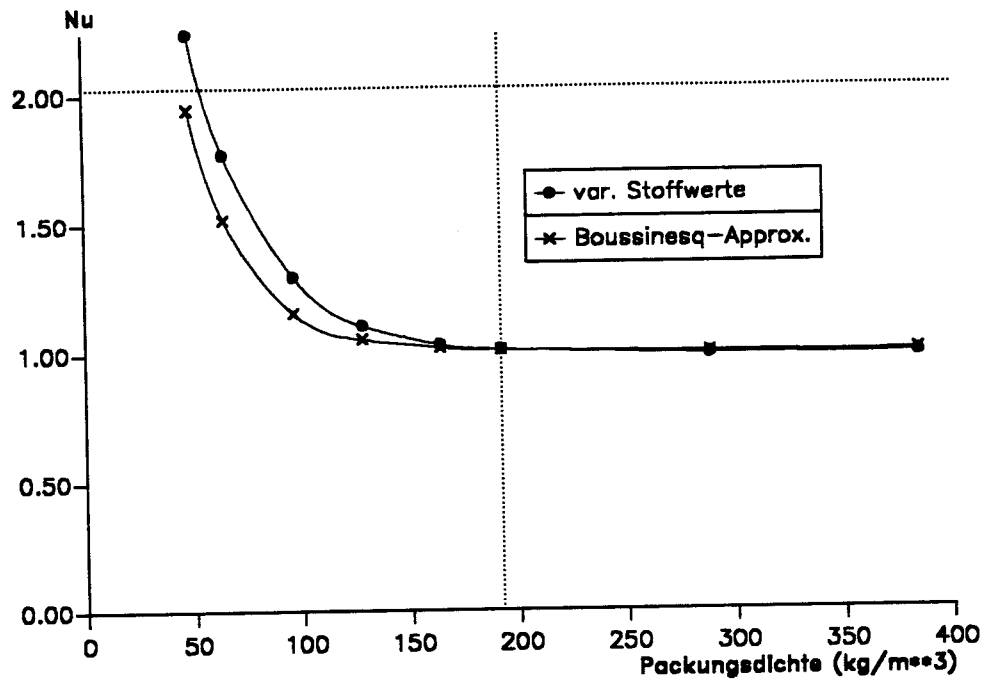


Abb. 45. Veränderung der Nußelt-Zahl und des Wärmeverlusts mit der Packungsdichte

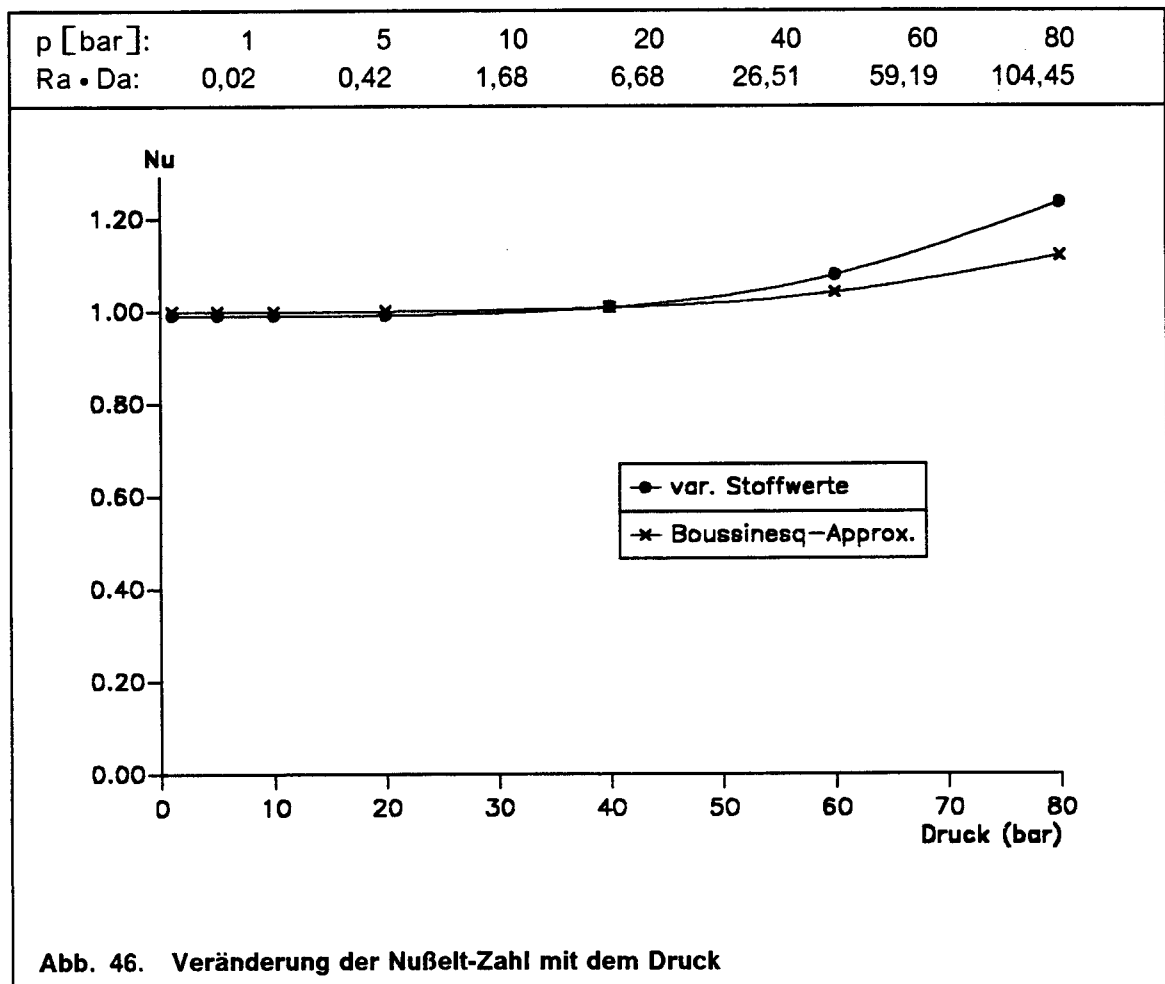
nach oben, da wie erwähnt auch die Wärmeleitfähigkeit aufgrund der Strahlung zunimmt. Die waagerechten Bezugslinien sind, bezogen auf die Werte bei einer Packungsdichte von 192 kg/m^3 , jeweils bei der doppelten Nußelt-Zahl bzw. dem doppelten Wärmestrom eingezeichnet.

Bei sehr hohen Packungsdichten $\rho_{\text{iso}} > 300 \text{ kg/m}^3$ bleibt zwar die Nußelt-Zahl konstant bei 1, der Wärmeverlust steigt allerdings wegen des hohen Feststoffanteils geringfügig an.

11.3 Variation des Absolutdrucks

In Gl. (4.4.3) war bereits festgehalten worden, daß die Rayleigh-Zahl etwa quadratisch mit dem Druck zunimmt. Damit steigt auch die Konvektionsneigung mit dem Druck an.

Da Heliumkreisläufe durchaus auch bei 80 bar betrieben werden können, ist die Druckabhängigkeit der Nußelt-Zahl zu untersuchen. Abb. 46 zeigt, daß im betrachteten Fall etwa bei 40 bar der Punkt zu finden ist, ab dem die Konvektion einen meßbaren Einfluß bekommt.



Da die Wärmeleitfähigkeiten von freien Gasen und von in Faserisolierungen eingeschlossenen Gasen oberhalb des atmosphärischen Drucks fast druckunabhängig sind, gilt dieses auch für die Wärmeleitfähigkeit der Isolierung. Daher haben die beiden Kurven für den Wärmestrom genau den gleichen relativen Verlauf, wie er hier für die Nußelt-Zahl selbst gezeigt ist.

11.4 Variation des Faserdurchmessers

Eine Verkleinerung des Faserdurchmessers hat nach Gl. (2.2.4) eine niedrigere Permeabilität und damit einen größeren Strömungswiderstand und weiterhin nach Gl. (3.3.5) eine geringere Strahlungseigenschaft zur Folge. Niedrige Faserdurchmesser sind daher vom technischen Standpunkt her anzustreben.

Vom medizinischen Standpunkt aus gesehen steigt jedoch mit abnehmendem Faserdurchmesser die Kanzerogenität, nicht nur bei Asbest, sondern auch bei Keramikfasern an. Krebserzeugend sind wahrscheinlich jedoch nur Fasern, welche länger als $8\text{ }\mu\text{m}$ sind, deren Durchmesser wesentlich unter $0,2\text{ }\mu\text{m}$ liegt und deren Verhältnis zwischen Länge und Durchmesser mindestens $10 : 1$ ist (Gruber, 1990). Da im technischen Bereich immer nur der mittlere Durchmesser angegeben wird, sollte zu dem kritischen Wert von $0,2\text{ }\mu\text{m}$ ein genügend großer Sicherheitsabstand eingehalten werden.

Abb. 47 zeigt, daß mit einem Faserdurchmesser von weniger als $3,5\text{ }\mu\text{m}$ auch kaum Verbesserungen der Isolierung zu erzielen sind. Die ungefährlichen größeren Fasern zeichnen sich leider durch schlechtere wärmetechnische Eigenschaften aus. Der Wärmeverlust steigt sogar aufgrund der ungünstiger werdenden Strahlungseigenschaften noch wesentlich stärker als die Nußelt-Zahl an. Die waagerechten Bezugslinien sind auch hier jeweils bezogen auf den Ausgangsdurchmesser von $3,5\text{ }\mu\text{m}$ und bei der doppelten Nußelt-Zahl bzw. dem doppelten Wärmestrom eingezeichnet.

$\delta_t [\mu\text{m}]$:	1,0	2,0	3,0	3,5	5,0	7,0	10,0	15,0	20,0
$Ra \cdot Da$:	2,38	9,15	19,83	26,51	51,35	94,23	175,6	344,9	544,1

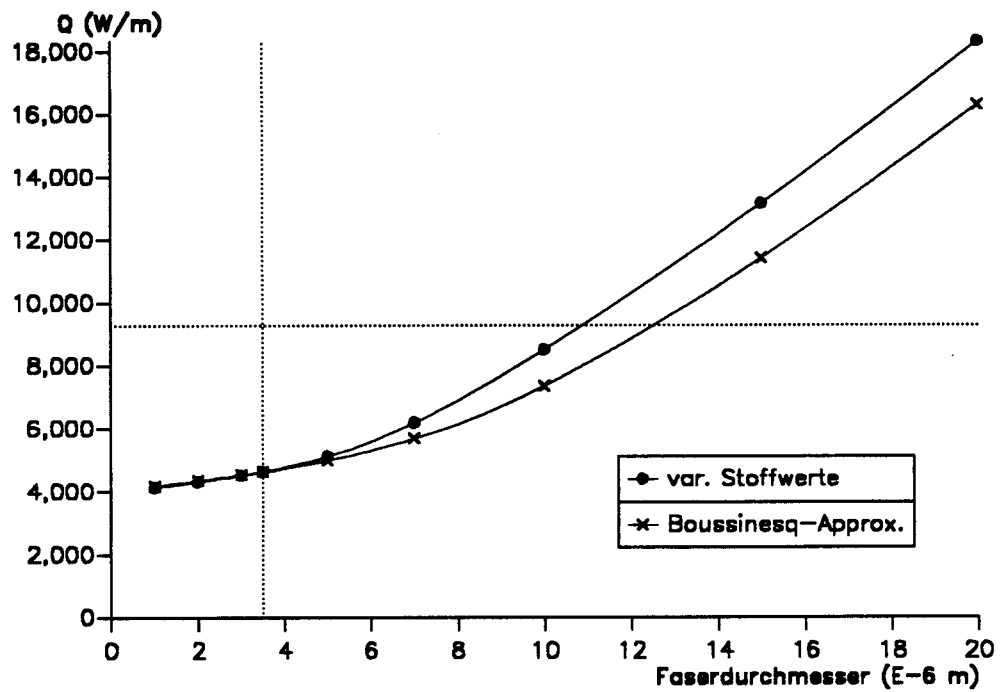
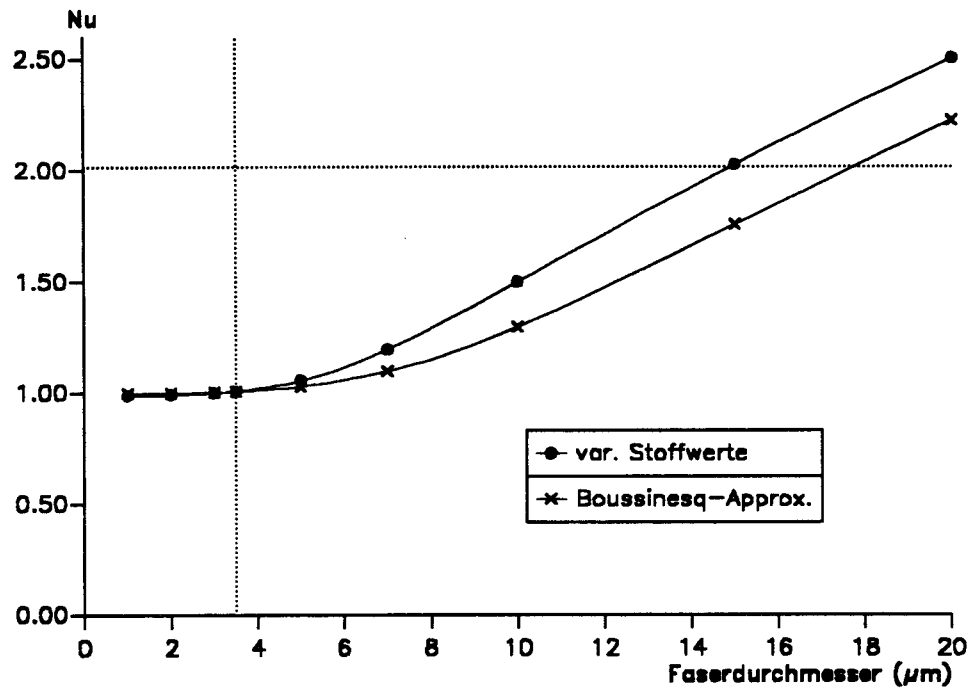


Abb. 47. Veränderung der Nußelt-Zahl und des Wärmeverlusts mit dem Faserdurchmesser

11.5 Ungünstiger Anwendungsfall

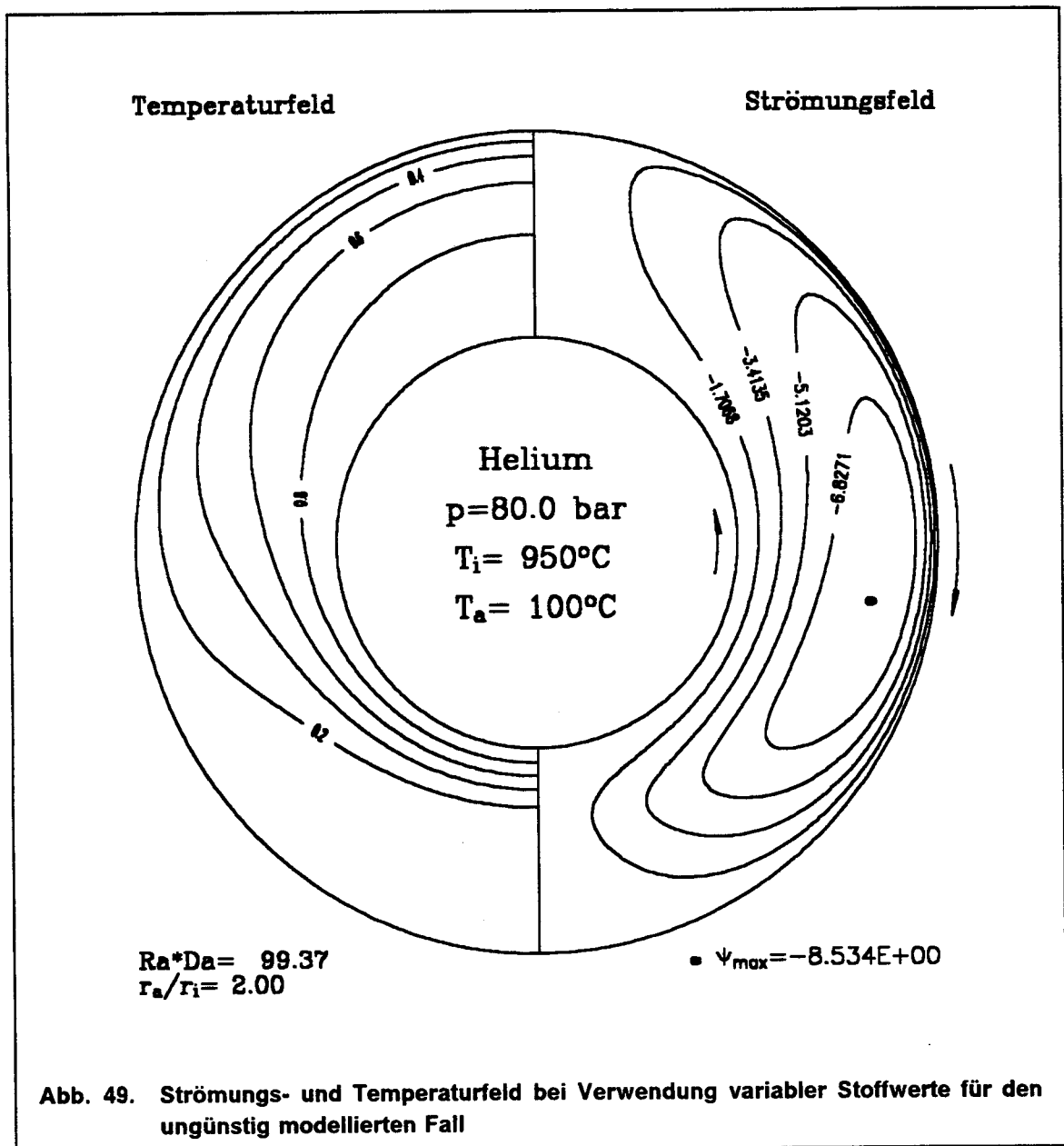
Wenn die in Abb. 48 aufgelisteten Änderungen des Aufbaus der Isolierung vorgenommen werden, dann ergibt sich eine wesentlich stärkere Konvektionsströmung als im zuerst betrachteten Anwendungsfall. (Die Konstante B zur Berechnung der Permeabilität nach Gl. (2.2.4) hat in beiden Fällen den Wert 10.)

<i>Auslegungsdaten:</i>		ursprüngliche Daten	geänderte Daten
Medium:		Helium 950 / 100°C	
Druck:		40 bar	80 bar
Außendurchmesser Gasführungsrohr:		1000 mm	
Schichtdicke der Isolierung:		300 mm	500 mm
Innendurchmesser Druckrohr:		1600 mm	2000 mm
Isolierung:		keramische Hochtemperaturfaser	
Packungsdichte:		200 kg/m ³	128 kg/m ³
Faserdurchmesser:		3,5 µm	6,0 µm
spezifische Extinktion:		19,42 m ² /kg	19,42 m ² /kg
mittl. Wärmeleitfähigkeit:		0,4052 W/m K	0,4182 W/m K
Permeabilität für B = 10:		1,7 · 10 ⁻¹⁰ m ²	13,3 · 10 ⁻¹⁰ m ²
Kennzahlprodukt Ra · Da:		2,65	99,37
<i>Rechen- ergebnisse:</i>	Nu _{Iso}	0,9911	1,5724
	Nu _{Gas}	1,2950	2,1114
	Nu _{i,max}	1,0099	2,3211
	Nu _{a,max}	1,0297	3,4047
	Nu _{Gas}	1,2950	2,1114
	Ψ _{min}	-0,198	-8,535
	U _{max,oben}	0,00083 cm/s	0,01452 cm/s
	V _{max,innen}	0,00538 cm/s	0,09203 cm/s
	V _{max,außen}	0,01437 cm/s	0,24587 cm/s
	K _φ	0,0036	0,3442

Abb. 48. Veränderung der Betriebsparameter und Berechnungsergebnisse bei Verwendung variabler Stoffwerte für den Ausgangsfall und eine ungünstige Variation

Abschließend zeigt Abb. 49 das Strömungs- und Temperaturfeld für diesen Fall. Es wurden bei der Berechnung die ausführlichen Erhaltungsgleichungen verwendet. Deutlich zu erkennen ist das asymmetrische Temperaturfeld, das in ursächlichem Zusammenhang zum erhöhten Wärmestrom steht. Bei Verwendung der Boussinesq-Approximation wird die Nu_{Belt}-Zahl statt mit 1,5724 mit dem um 15 % niedriger liegenden Wert von 1,3386 berechnet. Obwohl also der Konvektionswärmestrom des Anwendungsfalls aus dem letzten Kapitel vernachlässigbar gering war, kann sich

dieses schnell ändern, wenn Variationen in ungünstiger Richtung vorgenommen werden.



12. Zusammenfassung

Die Isolationseigenschaften von gasgesättigten Innenisolierungen können sich durch natürliche Konvektion innerhalb der Isolierung erheblich verschlechtern. Das Temperatur- und Strömungsfeld wird üblicherweise mit Hilfe der Boussinesq-Approximation und des Darcy-Gesetzes ermittelt. Dabei sind alle Stoffwerte mit Ausnahme der Dichte im Auftriebsterm der Impulsgleichung als konstant anzusehen. Für einen waagerechten Ringspalt werden zunächst Berechnungen nach dieser Approximation mit Hilfe finiter Differenzen in Abhängigkeit vom Durchmesser Verhältnis r_a/r_i und vom Kennzahlprodukt $Ra \cdot Da$ durchgeführt und mit Literaturdaten verglichen.

Daran schließt sich als Hauptaufgabe dieser Arbeit die sukzessive Einführung variabler Stoffwerte in die Erhaltungsgleichungen an. Mit den diskretisierten Beziehungen werden jeweils Temperatur- und Strömungsfelder für verschiedene Kennzahlprodukte bis zum Wert $Ra \cdot Da = 2000$ bei einem Radienverhältnis von $r_a/r_i = 2$ für den Anwendungsfall einer Helium-Heißgasleitung berechnet. Zu Vergleichszwecken dienen ebenfalls durchgeführte Rechnungen mit Luft als gasförmigem Medium.

Dabei ergibt die Einführung einer temperaturabhängigen Wärmeleitfähigkeit, die auch den Strahlungswärmestrom einschließt, in allen berechneten Fällen eine Erniedrigung der Nußelt-Zahl gegenüber der Boussinesq-Approximation. Der Abfall fällt umso stärker aus, je größer der Anteil der Strahlung an der Wärmeleitfähigkeit der Isolierung ist. Dieser steigt stark mit der Temperatur an. Hierdurch kommt es zu einer Abflachung der radialen Temperaturprofile am Innenrand, was sich besonders im oberen Bereich des Ringspalts konvektionshemmend auswirkt.

Die Berücksichtigung einer variablen Viskosität in der Impuls- bzw. Wirbeltransportgleichung führt hingegen stets zu einem erhöhten Wärmestrom.

Auch das Ersetzen der linear mit der Temperatur abfallenden Dichtebeziehung durch eine realistischere Stoffwertbeziehung innerhalb der Impulsgleichung ergibt in allen Anwendungsfällen höhere Nußelt-Zahlen.

Die Verknüpfung dieser beiden Fälle hat dementsprechend einen weiteren Anstieg des übertragenen Wärmestromes im Vergleich zur Boussinesq-Approximation zur Folge. Die sinkende Konvektionsneigung des Gases im oberen Bereich des Ringspalts aufgrund der bei realistischer Betrachtung flacheren Abnahme der Dichte am Innenrand wird also durch den sinkenden Strömungswiderstand am Außenrand mehr als ausgeglichen.

Wenn alle drei Stoffwerte in der Energie- und der Impulsgleichung variabel betrachtet werden, so ist bezüglich des Ergebnisses der Rechnung keine einfache Trendaussage mehr zu machen. Bei höheren Kennzahlprodukten $Ra \cdot Da$ ergeben sich in der Regel höhere, bei niedrigen Kennzahlprodukten auch geringfügig kleinere Werte als bei der Boussinesq-Approximation. Entscheidend ist hier der Anteil des Strahlungs-

wärmetransports. Je höher er ausfällt, desto kleiner sind die Abweichungen zwischen den beiden Rechenversionen.

Im letzten Schritt wird schließlich auch in die Kontinuitätsgleichung die temperaturabhängige Dichte eingeführt. Dabei ergibt sich nochmals eine erhebliche Vergrößerung der Nußelt-Zahl, so daß im Extremfall eines Temperaturabfalls von 950 auf 100°C über einer heliumgesättigten Isolierung das exakt berechnete Ergebnis um fast 20 % von dem der Boussinesq-Approximation abweicht.

Das erstellte Programm wird schließlich dazu benutzt, für einen realistischen Anwendungsfall die Ergebnisse der Boussinesq-Approximation und der ausführlichen Rechnung gegenüberzustellen. Das sich ergebende Kennzahlprodukt von 2,65 ist jedoch so klein, daß die Veränderung des Konvektionswärmestromes im Ergebnis nicht zum Tragen kommt.

Anhand einer Variation der Isolierungsparameter Radienverhältnis, Packungsdichte, Druck und Faserdurchmesser läßt sich jedoch ermitteln, daß die Konvektions-sicherheit nicht in allen Anwendungsfällen einer innenisolierten Helium-Heißgasleitung gegeben ist. Mit steigendem Radienverhältnis, Druck oder Faserdurchmesser bzw. mit sinkender Packungsdichte nimmt die Konvektionsneigung zu.

Werden schließlich alle diese Parameter in ungünstiger Richtung verändert, so ergibt sich ein um den Faktor 37 höheres Kennzahlprodukt und eine Erhöhung der Nußelt-Zahl auf den Wert 1,572. Mit der Boussinesq-Approximation wäre dieses Ergebnis um 15 % zu niedrig vorausgesagt worden.

Die Boussinesq-Approximation ist also geeignet, das Vorhandensein von Konvektionsströmungen vorauszusagen und die Größenordnung des Konvektionswärmestromes abzuschätzen. In der Regel werden die Abweichungen zwischen diesen Ergebnissen und denen der ausführlichen Rechnung tolerierbar sein. Bei extremen Randbedingungen in Form hoher Temperaturdifferenzen sind jedoch in einzelnen Fällen Abweichungen der berechneten Nußelt-Zahlen um bis zu 20 % nach unten möglich.

Zur Vorbereitung der Berechnungen waren Messungen der Wärmeleitfähigkeit einer modernen keramischen Hochtemperatur-Faserisolierung im Vakuum und in Luft durchgeführt worden. Aus den Messungen im Vakuum konnte der Wärmetransport durch Strahlung ermittelt werden. Es wurde bestätigt, daß dieser etwa mit der dritten Potenz der Strahlungstemperatur T_{str} ansteigt und über die Einführung einer Strahlungs-Wärmeleitfähigkeit berücksichtigt werden kann. Mittels einer Anpassungsrechnung wurde der Zusammenhang

$$\lambda_{\text{iso}} = K_F v_F^3 \lambda_s + v_G^{-K_G} \lambda_g + \frac{16}{3} \frac{\sigma}{e \rho_{\text{iso}}} T_{\text{str}}^3$$

für die Wärmeleitfähigkeit der Isolierung mit dem Kontaktstellenfaktor $K_F = 0$, dem Gasexponenten $K_G = 1,700$ und der spezifischen Extinktion $e = 19,42 \text{ m}^2/\text{kg}$ ermittelt.

Lateinische Formelzeichen

a	Temperaturleitfähigkeit
A	Fläche
B	Stoffwert nach Gl. (2.2.4)
b	Seitenlänge der Heizplatte
c_p	spezifische Wärmekapazität
C	Strahlungsparameter nach Gl. (3.3.5)
d	Durchmesser
e	dichtespezifische Extinktion
f	Fehler
E	Extinktion nach Gl. (3.3.2)
g	Erdbeschleunigung
k	Permeabilität des porösen Mediums
K_F	Kontaktstellenfaktor
K_G	Gasexponent
K_Q	Aufheizkennwert
K_ϕ	Asymmetriekennwert
N	Anzahl der Gitterpunkte
p	Druck
s	Schichtdicke
t	Zeit
ℓ	Länge
L	freie Weglänge
n	Brechungsindex
Q	Heizleistung / Wärmestrom
Q'	auf die Länge bezogener Wärmehalt der Isolierung
Q'	auf die Länge bezogener Verlustwärmestrom der Isolierung
r	Radius / radiale Komponente
R	dimensionsloser Radius
T	Temperatur in K
u	radiale Geschwindigkeitskomponente
$\vec{u}$	Geschwindigkeitsvektor
v	Geschwindigkeitskomponente in Umfangsrichtung
v_F	volumetrischer Feststoffanteil der Isolierung
v_G	volumetrischer Gasanteil der Isolierung
V	Volumenstrom
Y	Proportionalitätskonstante nach Gl. (4.3.10)

Griechische Formelzeichen

β	isobarer Ausdehnungskoeffizient
γ	Exponent aus Gl. (9.1.2)
δ_f	Faserdurchmesser
Δ	Differenz des nachfolgenden Wertes
ε	Abbruchschranke
η	dynamische Viskosität
ϑ	Temperatur in °C
Θ	dimensionslose Temperatur
κ	Relaxationsfaktor nach Gl. (7.4.2)
λ	Wärmeleitfähigkeit
ρ	Dichte
σ	Strahlungskonstante
σ_e	Extinktion
τ	dimensionslose Zeit
ϕ	Winkelkoordinate
ψ	Stromfunktion
Ψ	dimensionslose Stromfunktion
ω	Wirbelvektor
Ω	dimensionsloser Wirbelvektor

Indices oben

n	Iterationszahl
k	Zeitschrittzahl
$\otimes$	dimensionsloser Stoffwert

Indices unten

a	außen
A	Ansatz der Heizung
BA	Boussinesq-Approximation
eff	effektive Eigenschaft des porösen Mediums
f	rohe, einzelne Faser
F	Gesamtheit der Fasern als Isolierung
g	freies Gas
G	Gas im porösen Medium
H	Heizung
HH	Hauptheizung
i	Gitterpunkt in Umfangsrichtung
	innen
Iso	Isolierung
j	radialer Gitterpunkt

L	Leitung
log	logarithmisch
m	Mittelwert
M1	Meßpunkt 1
M2	Meßpunkt 2
M3	Meßpunkt 3
max	maximal
min	minimal
p	bei konstantem Druck
P	Pore
R	in radialer Richtung
s	solid = Feststoff
SIso	Schutzisolierung
Str	Strahlung
Umg	Umgebung
Vak	Vakuum
0	Bezugspunkt
ϕ	in Umfangsrichtung

Abkürzungen

Abb.	Abbildung
Approx.	Approximation
bzw.	beziehungsweise
Da	Darcy-Zahl nach Gl. (5.4.7)
Durchm.	Durchmesser
Fo	Fourier-Zahl nach Gl. (5.4.6)
Ga	Galilei-Zahl nach Gl. (5.4.10)
Gl.	Gleichung
Gln.	Gleichungen
Gr	Grashof-Zahl nach Gl. (3.4.1)
HA	Herstellerangaben
Kap.	Kapitel
Pr	Prandtl-Zahl nach Gl. (5.4.8)
Re	Reynolds-Zahl nach Gl. (2.1.1)
Ra	Rayleigh-Zahl nach Gl. (5.4.11)
spez.	spezifisch
Temp.	Temperatur
u. a.	und andere
var.	variabel

14. Literaturverzeichnis

E. Achenbach, „Berechnung der effektiven Wärmeleitfähigkeit für die Isolierung einer HTR-Heißgasleitung unter Berücksichtigung von freier Konvektion und Temperaturstrahlung,“ Travemünde: *Jahrestagung Kerntechnik '88*, 1988, S. 89-92. (Tagungsbericht)

E. Achenbach, „Computation of Heat Transfer Through a Horizontally Arranged HTR-Fiber Insulation,“ *Nuclear Engineering and Design*, **126**, 1991, S. 379-386.

A. Banerjee, K. Hammeke, N. Hüpping, H. E. Kipke, A. Stoehr, *Thermodynamische Stoffwerte von Helium im Bereich von 20 bis 1500°C und 1 bis 100 bar*, KFA Jülich, Jül-1562, 1978. 63 S.

C. G. Bankvall, *Natural Convective Heat Transfer in Insulated Structures*, Lund, Schweden: Lund Institute of Technology, Report 38, 1972a. 63 S.

C. G. Bankvall, *Heat Transfer in Fibrous Materials*, Stockholm, Schweden: Nat. Swedish Inst. for Building Research, Document D4: 1972b. 150 S.

Haim H. Bau, „Thermal Convection in a Horizontal, Eccentric Annulus Containing a Saturated Porous Medium - an Extended Perturbation Expansion,“ *Int. J. Heat Mass Transfer*, **27**, No. 12, 1984, S. 2277-2287.

R. Bauer, „Stoffwerte von Schüttungen,“ in *VDI-Wärmeatlas*, 5., erw. Auflage, Düsseldorf: VDI-Verlag, 1988, De 10-19.

P. A. Blythe, P. G. Simpkins, „Convection in a Porous Layer for a Temperature Dependent Viscosity,“ *Int. J. Heat Mass Transfer*, **24**, 1981, S. 497-506.

J. Boussinesq *Theorie Analytique de la Chaleur*, Vol. 2, Paris: Gauthier-Villars, 1903.

P. Bröckerhoff, F. Scholz, *Untersuchungen an zwei gestopften Faserisolierungen in einem horizontalen Druckrohr*, KFA Jülich, Jül-1241, 1975. 102 S.

P. Bröckerhoff, *Untersuchungen an einer Faserisolierung mit keramischen Abstandhaltern*, KFA Jülich, Jül-Spez-350, 1986. 56 S.

D. Büttner, J. Fricke, H. Reiss, „Thermal Conductivity of Evacuated Load-Bearing Powder and Fibre Insulations under Variable External Load,“ *High Temperatures - High Pressures*, **17**, 1985, S. 333-341.

J.-P. Caltagirone, „Thermoconvective Instabilities in a Porous Medium Bounded by two Concentric Horizontal Cylinders,“ *J. Fluid Mech.*, **76**, part 2, 1976, S. 337-362.

- P. C. Carman**, *Flow of Gases Through Porous Media*, London: Butterworths, 1956.
- B. K. C. Chan, C. M. Ivey, J. M. Barry**, „Natural Convection in Enclosed Porous Media with Rectangular Boundaries,“ *ASME, J. Heat Transfer*, **92**, 1970, S. 52-58.
- H. Darcy**, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, Paris: Libraire des corps impériaux des ponts et chaussées et des mines, 1856.
- DIN Deutsches Institut für Normung e. V.**, *DIN 52612 Teil 1*, Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit mit dem Plattengerät, Durchführung und Auswertung, 1979.
- DIN Deutsches Institut für Normung e. V.**, *DIN IEC 584 Teil 2*, Thermopaare, Grenzabweichungen der Thermospannungen, 1984.
- F. A. L. Dullien**, *Porous Media - Fluid Transport and Pore Structure*, New York: Academic Press, 1979. 396 S.
- A. Dybbs, R. V. Edwards**, „A New Look at Porous Media Fluid Mechanics - Darcy to Turbulent,“ in *Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media*, Jacob Bear, M. Yavuz Corapcioglu (eds.), Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1984, S. 199-256.
- R. Echigo, S. Hasegawa, S. Tottori, H. Shimomura, Y. Okamoto**, „An Analysis on the Radiative and Free Convective Heat Transfer in a Horizontal Annulus with Permeable Insulator“, *Heat Transfer 1978*, Toronto: Proceedings of the Sixth International Heat Transfer Conference, Vol. 2, 1978, S. 385-390.
- D. Fournier, S. Klarsfeld**, „Some Recent Experimental Data on Glass Fiber Insulating Materials and Their Use for a Reliable Design of Insulations at Low Temperatures,“ *ASTM STP 544*, 1974, S. 223-242.
- B. N. Furber, J. Davidson**, „The Thermal Performance of Porous Insulants in a High Pressure Gas Environment,“ *The Nuclear Power Group Limited*, Paper No. 28, Brussels: Second Conference on Prestressed Concrete Reactor Vessels and Their Thermal Insulation, 1969, 25 S. 16 Abb.
- Oskar Gossler KG**, „Produktinformation 09.90, Matten,“ Reinbek bei Hamburg, 1990.
- G. Grimvall**, *Thermophysical Properties of Materials*, Amsterdam: North-Holland, 1986, 348 S. (Chapter 13: „Transport, Elastic and Thermal-Expansion Parameters of Composite Materials,“ S. 257-283.)
- U. E. Gruber**, „Welche Fasern kommen für den Asbestersatz in Frage?“ *Zeitschrift für Arbeitswissenschaft*, **44**, Nr. 4, 1990, S. 193-198.
- N. E. Hager, R. C. Steere**, „Radiant Heat Transfer in Fibrous Thermal Insulation,“ *Journal of Applied Physics*, **38**, No. 12, 1967, S. 4663-4668.

- K. Hayashi**, „Thermal Conductivity of Ceramic Fibrous Insulators at High Temperatures,“ *International Journal of Thermophysics*, **5**, No. 2, 1984, S. 229-238.
- J. Henßen, G. Lonzen**, „Langzeitiges Rückstellverhalten von thermischen Isolierungen aus keramischen Faserpackungen,“ Travemünde: *Jahrestagung Kerntechnik '88*, 1988, S. 531-534. (Tagungsbericht)
- T. Hilligardt**, „Heißgasfiltration mit Filterelementen aus Faserkeramik,“ *Fortschrittsberichte der Deutschen Keramischen Gesellschaft*, **Band 4**, Heft 2, 1989, S. 409-421.
- K. Himasekhar, H. H. Bau**, „Two-Dimensional Bifurcation Phenomena in Thermal Convection in Horizontal, Concentric Annuli Containing Saturated Porous Media,“ *J. Fluid Mechanics*, **187**, 1988, S. 267-300.
- H. Imakoma, H. Sang, M. Okazaki**, „Effective Thermal Conductivity for Fibrous Insulation,“ *Kagaku-kogaku-ronbun-shu, Tokyo*, **15**, 1989, S. 44-51.
- K. Kadoya, N. Matsunaga, A. Nagashima**, „Viscosity and Thermal Conductivity of Dry Air in the Gaseous Phase,“ *J. Phys. Chem. Ref. Data*, **14**, No. 4, 1985, S. 947-970.
- M. G. Kaganer**, *Thermal Insulation in Cryogenic Engineering*, übers. aus dem Russ. von Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem: IPST Press, 1969. S. 15-25.
- E. Kálnay de Rivas**, „On the Use of Nonuniform Grids in Finite-Difference Equations,“ *Journal of Computational Physics*, **10**, 1972, S. 202-210.
- K. Kamiuto, I. Kinoshita, Y. Miyoshi, S. Hasegawa**, „Experimental Study of Simultaneous Conductive and Radiative Heat Transfer in Ceramic Fiber Insulation,“ *J. Nucl. Sci. Technol.*, **19**, 6, 1982, S. 460-468.
- Kanthal Handbuch**, *Kanthal, Bereich Elektrowärme-Technik*, Hallstahammar, Schweden. 85 S.
- D. R. Kassoy, A. Zebib**, „Variable Viscosity Effects on the Onset of Convection in Porous Media,“ *The Physics of Fluids*, **18**, 12, 1975, S. 1649-1651.
- Y. Katto, T. Masuoka**, „Criterion for the Onset of Convective Flow in a Fluid in a Porous Medium,“ *Int. J. Heat Mass Transfer*, **10**, 1967, S. 297-309.
- S. Klarsfeld**, „Guarded Hot Plate Method for Thermal Conductivity Measurements,“ in *Compendium of Thermophysical Property Measurement Methods, Volume 1, Survey of Measurement Techniques*, K. D. Maglic, A. Cezairliyan, V. E. Petletsky, New York and London: Plenum Press, 1984, S. 169-230.
- C. P. Kyan, D. T. Wasan, R. C. Kintner**, „Flow of Single-Phase Fluids Through Fibrous Beds,“ *Ind. Eng. Chem. Fundamentals*, **9**, 1970, S. 596-603.

Leybold-Heraeus, „GA 652, Ionivac IM 10, Gebrauchsanweisung,“ Kat.-Nr. 163 41, 2. Auflage, 1987, S. 2.

Manville de France S. A., „Refractory Fibers, Cerafelt[®],“ Produktinformation, 1987.

D. R. Marpu, V. V. Satyamurty, „Investigations on the Validity of Boussinesq Approximation on Free Convection in a Vertical Porous Annulus,“ *Wärme- und Stoffübertragung*, **26**, 1991, S. 141-147.

D. Marsal, *Finite Differenzen und Elemente, Numerische Lösungen von Variationsproblemen und partiellen Differentialgleichungen*, Berlin: Springer Verlag, 1989. 300 S.

W. Nußelt, „Die Übertragung der Wärme bei der Bone-Schnabel-Feuerung,“ *Zeitschrift des Bayerischen Revisions-Vereins*, **17. Jg.**, No. 13, 1913, S. 125-127 und No. 14, S. 137-139.

A. Oberbeck, „Über die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperatur Differenzen,“ *Ann. Phys. Chem., Leipzig*, **7**, 1879, S. 271-292.

M. B. Peirotti, M. D. Giavedoni, J. A. Deiber, „Natural Convective Heat Transfer in a Rectangular Porous Cavity with Variable Fluid Properties - Validity of the Boussinesq Approximation,“ *Int. J. Heat Mass Transfer*, **30**, 1987, S. 2571-2581.

M. Planck, „Distribution of Energy in the Spectrum,“ *Ann. Physik*, **4**, Nr. 3, 1901, S. 553-563.

Y. F. Rao, K. Fukuda, S. Hasegawa, „Steady and Transient Analyses of Natural Convection in a Horizontal Porous Annulus with Galerkin Method,“ *ASME, J. Heat Transfer*, **109**, No. 4, 1987, S. 919-927.

D. Rath, A. Steiff, P.-M. Weinspach, „Zur Berechnung der effektiven Wärmeleitfähigkeit von evakuierten Dämmmaterialien,“ *Chem.-Ing.-Tech. MS 1901/90*, 1990, 34 S. (Synopsis erschienen in *Chem.-Ing.-Tech.* **62**, Nr. 11, 1990, S. 956-957.)

H. Reiss, „Superisolationen,“ in *VDI-Wärmeatlas*, 5., erw. Auflage, Düsseldorf: VDI-Verlag, 1988, Ke 1-17.

U. Renz, *Grundlagen der Wärmeübertragung*, RWTH Aachen: Lehrstuhl für Wärmeübertragung und Klimatechnik, 1987. 170 S.

H. Sang, H. Imakoma, M. Okazaki, T. Kunitomo, „Measurements of Spectral Radiative Properties and Prediction of Extinction Coefficient for Radiative Heat Transfer in Fibrous Insulations,“ *Kagaku-kogaku-ronbun-shu, Tokyo*, **15**, No. 1, 1989, S. 52-59.

E.-U. Schlünder, „Einführung in die Lehre von der Wärmeübertragung.“ in *VDI-Wärmeatlas*, 5., erw. Auflage, Düsseldorf: VDI-Verlag, 1988, A 34.

R. Siegel, J. R. Howell, *Thermal Radiation Heat Transfer*, int. Student ed., Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1972. 814 S.

H. M. Strong, F. P. Bundy, H. P. Bovenkerk, „Flat Vacuum Thermal Insulation,“ *Journal of Applied Physics*, **31**, No. 1, 1968, S. 39-50.

Y. Takata, K. Fukuda, S. Hasegawa, K. Iwahige, H. Shimomura, K. Sanokawa, „Three-Dimensional Natural Convection in a Porous Medium Enclosed with Concentric Inclined Cylinders,“ *Heat Transfer 1982*, München, Fed. Rep. of Germany: Proceedings of The Seventh International Heat Transfer Conference, Vol 2, 1982, S. 351-356.

J. J. Thipgen, B. E. Short, „The Apparent Thermal Conductivity of Fibrous Materials,“ New York: *ASME - Paper A-293*, 1959, S. 1-8.

T. W. Tong, R. C. Birkebak, I. E. Enoch, „Thermal Radiation, Convection and Conduction in Porous Media Contained in Vertical Enclosures,“ *ASME, J. Heat Transfer*, **105**, 1983, S. 414-418.

Y. S. Touloukian, ed., *Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials, Vol. 4: Oxides and Their Solutions and Mixtures*, New York / London: The MacMillan Company / Collier-MacMillan Limited, 1967, S. 3-14, S. 353-362.

J. D. Verschoor, P. Greebler, „Heat Transfer by Gas Conduction and Radiation in Fibrous Insulations,“ *ASME, J. Heat Transfer*, **74**, 1952, S. 961-968.

Yokogawa, „Bedienungsanleitung HR 2300, Hybriddrucker Modell 3760,“ 1. Ausgabe 1989, S. 11/1 - 11/3.

Die vorliegende Arbeit entstand am Institut für Energieverfahrenstechnik des Forschungszentrums Jülich GmbH.

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer und Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. E. Achenbach, sowie dem Institutsleiter, Herrn Prof. Dr. rer. nat. C. B. von der Decken, für die wertvollen Anregungen und die wohlwollende Förderung der Arbeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing. U. Renz danke ich für die Übernahme des Korreferates.

Für die fruchtbaren Diskussionen danke ich meinen Kollegen Herrn Dipl.-Ing. B. Ganser und Herrn Dipl.-Ing. Chr. Rechenauer, sowie Herrn Dr.-Ing. Th. Bauer zusätzlich für die sorgfältige Korrektur des Manuskriptes.

Für die Unterstützung bei der Durchführung des experimentellen Teils der Arbeit bin ich besonders Herrn H. Spanknebel und seinen Mitarbeitern zu Dank verpflichtet. Herrn D. Froning gilt mein Dank für Anregungen und Mithilfe bei der Lösung der rechnerischen Probleme. Darüber hinaus danke ich allen Kollegen am Institut, die durch tatkräftige Hilfe zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Jül-2586
Februar 1992
ISSN 0366-0885