



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH GmbH

Institut für Kernphysik

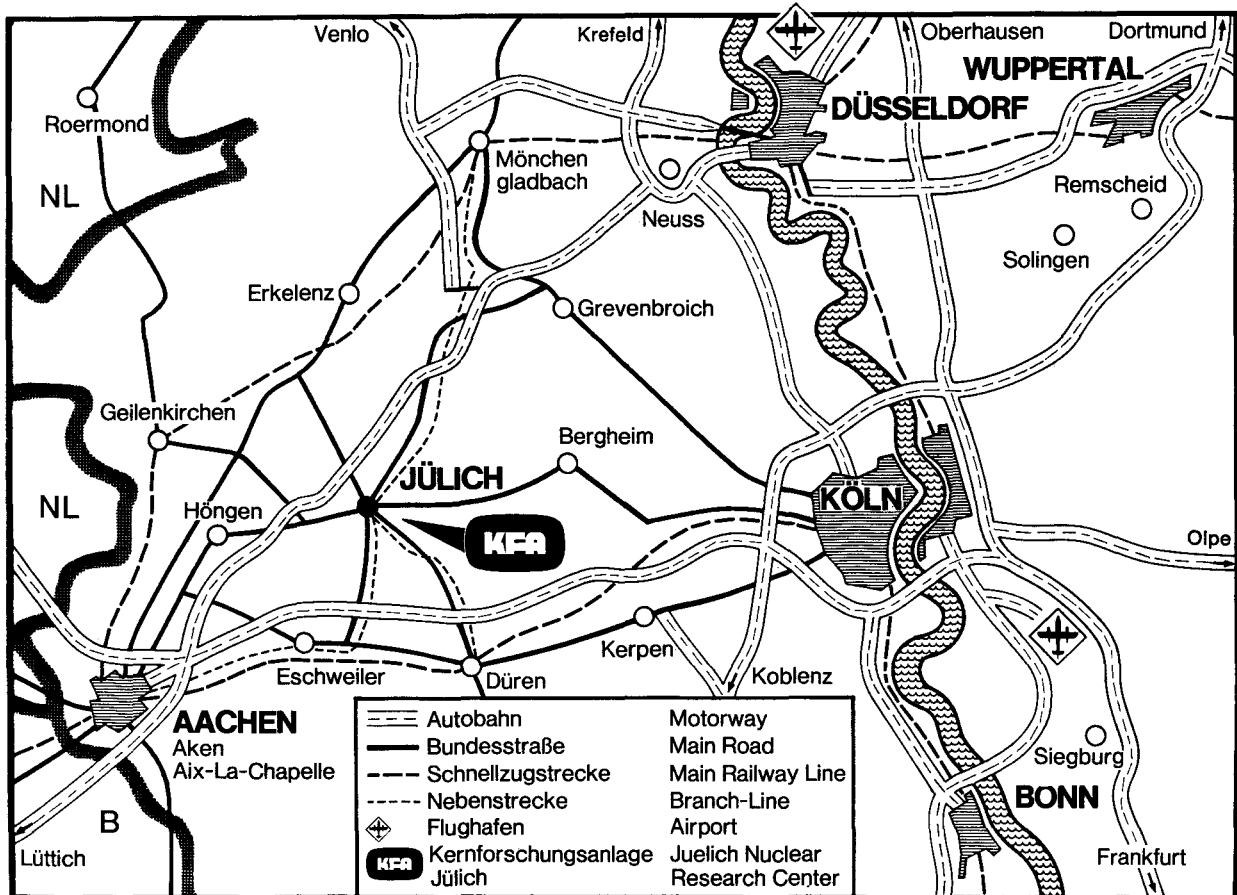
**Ladungs- und Stromdichten
von Kernen in der Blei-Gegend**

von

J. Wambach

**Jül - 1345
Oktober 1976**

Als Manuskript gedruckt



Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 1345

Institut für Kernphysik Jül - 1345

Im Tausch zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH,
Jülich, Bundesrepublik Deutschland

Ladungs- und Stromdichten von Kernen in der Blei-Gegend

von

J. Wambach

Abstract

Magnetic dipole states in ^{208}Pb are calculated in random phase approximation using a configuration space which includes also $2\hbar\omega$ excitations. In addition to the well known magnetic dipole resonances around 8 MeV we find very collective 1^+ -resonances around 19 MeV and 25 MeV. The influence of those high-lying collective states on the low-lying M1 transitions and moments in the neighbouring odd-even nuclei via core polarization is studied.

Zusammenfassung

Magnetische Dipolzustände in ^{208}Pb werden in der 'random phase Approximation' berechnet, wobei ein Konfigurationsraum, der $2\hbar\omega$ -Anregungen berücksichtigt, benutzt wird. Neben den bekannten magnetischen Dipolresonanzen bei etwa 8 MeV finden wir sehr kollektive 1^+ -Resonanzen bei 19 MeV - 25 MeV. Der Einfluß dieser hochliegenden kollektiven Zustände auf die niedrigliegenden M1-Übergänge und Momente in den benachbarten ungerade-gerade Kernen via 'Core Polarisation' wird untersucht.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
I. Theorie der endlichen Fermisysteme (FFS)	3
1. Greensfunktionen und ihre Eigenschaften	3
1.1. Der Hamiltonoperator und seine Eigenzustände	3
1.2. Die Einteilchen- und die Zweiteilchengreensfunktion	5
1.3. Bewegungsgleichungen	6
2. Die Landau-Migdal-Theorie der endlichen Fermisysteme	8
2.1. Das Quasiteilchenbild	8
2.2. Landaurenormierung	11
3. Berechnung von Übergangsdichten in der FFS-Theorie	15
3.1. Übergangsdichten in geraden Kernen	16
3.2. Übergangsdichten in ungeraden Kernen	18
II. Berechnung von Ladungs- und Stromdichten	23
4.1. Notation und Phasenkonvention	23
4.2. Form des effektiven magnetischen Operators	25
4.3. Multipolentwicklung der Verteilungen	25
III. Inelastische Elektronenstreuung	28
5.1. Bestimmung von $d\sigma/d\Omega$ für inelastische Elektronenstreuung in DWBA Näherung	29
IV. Numerische Rechnungen und Diskussion der Ergebnisse	35
6.1. Wahl der Einteilchenwellenfunktionen und der effektiven Wechselwirkung	35

	Seite
6.2. Einfluß der Stromterme auf den differentiellen Wirkungsquerschnitt	37
6.3. M1 Riesenresonanzen in ^{208}Pb	38
6.4. Untersuchung der Dichteverteilungen in ungeraden Kernen	42
6.4.a Magnetische Übergangs- und Momentverteilungen in ungeraden Kernen	42
6.4.b Elektrische Übergangs- und Momentverteilungen in ungeraden Kernen	44
6.5. Zusammenfassung	46
V. Anhang	47
7.1. Berechnung der Übergangsladungsdichte	47
7.2. Berechnung der Übergangskonvektionsstromdichte	48
7.3. Berechnung der Übergangsmagnetisierungsstromdichte	51
7.4. Berechnung der Zusatzstromdichte des M1 Operators	55
7.5. Vertauschungsrelationen für Vektoroperatoren	56
VI. Literaturverzeichnis	57

Tabellenlegende und Tabellen

Figurenlegende und Figuren

Einleitung

Die großen Fortschritte der Kernphysik in den letzten Jahren haben eine Fülle neuer experimenteller Daten geliefert. Neben Anregungsenergien, Übergangswahrscheinlichkeiten, elektrischen und magnetischen Momenten liegen eine große Anzahl von (e,e') Streudaten vor.

Experimente, die die elektromagnetische Wechselwirkung des Kerns mit einem äußeren Feld ausnutzen, sind ein besonders gutes Hilfsmittel für Kernstrukturuntersuchungen, weil diese Wechselwirkung (im Gegensatz zur starken und schwachen Wechselwirkung) bekannt ist. Im äußeren elektromagnetischen Feld wird der Kern durch seine Ladungs- und Stromdichten beschrieben. Neben phänomenologischen Dichteverteilungen (Tassie-Modell, Goldhaber-Teller-Modell etc.), die große Anwendung bei der Auswertung von (e,e') Streudaten finden, sind in den letzten Jahren Dichteverteilungen auf der Basis mikroskopischer Modelle berechnet worden^{1,2,3)}. Sie ermöglichen einen tieferen Einblick in Kernstruktur.

In der vorliegenden Arbeit werden Ladungs- und Stromdichten mit Hilfe der Theorie der endlichen Fermisysteme (FFS), die erfolgreich gemessene Anregungsenergien und Übergangswahrscheinlichkeiten in doppelt magischen Kernen und deren Nachbarkernen reproduziert^{4,5,6)}, berechnet. In Ref. 5,6) wird diskutiert, daß Beschränkungen des Einteilchenkonfigurationsraumes die numerischen Ergebnisse häufig wesentlich ändern. Es stellt sich heraus, daß die beste Übereinstimmung mit dem Experiment erreicht wird, wenn in den numerischen Rechnungen wenigstens zwei Oszillatorschalen oberhalb und unterhalb der Fermikante berücksichtigt werden. Deshalb

wird insbesondere der Einfluß der Wahl des Konfigurationsraumes auf die Dichteverteilungen untersucht.

In Abschnitt I werden die Grundzüge der FFS Theorie dargestellt. Auf der Basis von Einteilchen- und Zweiteilchengreensfunktionen werden aus der Bewegungsgleichung für die Einteilchengreensfunktion für verschiedene Größen (K-Matrix, T-Matrix, Massenoperator, Responsefunktion, Vertexfunktion) Gleichungssysteme abgeleitet. In der "Quasiteilchen-Näherung" für die Einteilchengreensfunktion sind diese numerisch lösbar, wenn man zu renormierten Größen übergeht und diese phänomenologisch parametrisiert. Mit Hilfe dieses Formalismus lassen sich dann Einteilchenübergangsdichten berechnen, die die ganze Modellabhängigkeit enthalten. Abschnitt II behandelt die Berechnung der verschiedenen Multipolkomponenten der Ladungs- und Stromdichteverteilungen. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für inelastische Elektronenstreuung in DWBA Näherung wird in Abschnitt III berechnet. Die numerischen Ergebnisse werden in Abschnitt IV diskutiert.

I. Theorie der endlichen Fermisysteme (FFS)

Die Theorie der endlichen Fermisysteme basiert auf Landaus Theorie der Fermiflüssigkeiten, deren Formulierung für endliche Systeme erstmals von Migdal⁷⁾ angegeben wurde. Im Modell der unabhängigen Teilchen werden die dynamischen Korrelationen zwischen den Teilchen vernachlässigt, während sie in der FFS Theorie mit eingeschlossen sind. Trotzdem bleiben bestimmte Züge des Einteilchenbildes erhalten. So wird z.B. ein tiefliegender Zustand des Kerns ^{209}Pb durch einen Core beschrieben, der die gleiche Struktur hat wie der (exakte) Grundzustand von ^{208}Pb , dem ein "Quasiteilchen" hinzugefügt wird, welches dem zusätzlichen Neutron im Schalenmodell entspricht. Auf Grund seiner Wechselwirkung mit den übrigen Teilchen des Cores führt es jedoch eine "Polarisationswolke" mit sich.

Die FFS Theorie ist eine semiphänomenologische mikroskopische Theorie. Wie in einer mikroskopischen Theorie werden alle fundamentalen Gleichungen aus "first principles" hergeleitet. Der phänomenologische Aspekt besteht darin, daß bestimmte Größen in der Theorie, wie effektive Wechselwirkungen und effektive Operatoren phänomenologisch parametrisiert werden. Im folgenden halten wir uns eng an die Darstellung in Ref. 8).

1. Greensfunktionen und ihre Eigenschaften

1.1. Der Hamiltonoperator und seine Eigenzustände

Das Schalenmodell behandelt die Nukleonen als Teilchen, die sich unabhängig voneinander in einem mittleren Potential bewegen und vernachlässigt die dynamischen Korrelationen. Da viele Eigenschaf-

ten des Kerns mit Hilfe dieses Modells verstanden werden, können wir Einteilchenzustände des Schalenmodells als Basis zur Darstellung des vollständigen Hamiltonoperators benutzen

$$H = \sum_v \epsilon_v^0 a_v^+ a_v + \frac{1}{4} \sum_{v_1 \dots v_4} W_{v_2 v_4, v_1 v_3} a_{v_4}^+ a_{v_2}^+ a_{v_1} a_{v_3} \quad (1.1)$$

ϵ_v^0 sind die Schalenmodell-Einteilchenenergien, a_v^+ und a_v Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Nukleonen in den Einteilchenzuständen φ_v , die den Vertauschungsregeln

$$\begin{aligned} |a_v, a_v^+, |_+ &= a_v a_v^+ + a_v^+ a_v = \delta_{vv}, \\ |a_v, a_v, |_+ &= |a_v^+, a_v^+, |_+ = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

genügen. $W_{v_2 v_4, v_1 v_3}$ ist das antisymmetrisierte Matrixelement der Restwechselwirkung, d.h. des Teils der realistischen Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung, die nicht im Schalenmodell berücksichtigt wurde. Die exakten Eigenzustände des A-Teilchensystems bezeichnen wir mit $|An\rangle$ und die Energieeigenwerte mit E_n^A

$$H |An\rangle = E_n^A |An\rangle \quad (1.3)$$

Der Grundzustand, den wir als nicht entartet annehmen wollen, ist $|A0\rangle$. Die Zustände $|An\rangle$ sind normiert, so daß gilt

$$\langle An | An' \rangle = \delta_{nn'} \quad (1.4)$$

Die Eigenzustände des Schalenmodellanteils im Hamiltonoperator

$$H_0 = \sum_v \epsilon_v^0 a_v^+ a_v \quad (1.5)$$

wird gegeben durch

$$|An\rangle_0 = \prod_v (a_v^+)^{n_v} |0\rangle \quad (1.6)$$

n_v sind die Besetzungszahlen der Zustände im Schalenmodell und $|0\rangle$ das Schalenmodellvakuum.

1.2. Die Einteilchen- und die Zweiteilchengreensfunktion

Die Einteilchengreensfunktion ist definiert

$$g_{v_1 v_2}(t_1; t_2) = -i \langle AO | T \{ a_{v_1}(t_1) a_{v_2}^+(t_2) \} | AO \rangle \quad (1.7)$$

wobei

$$a_v(t) = e^{iHt} a_v e^{-iHt} \quad (1.8)$$

der zeitabhängige Heisenbergoperator ist, der a_v entspricht.

Analog ist die Zweiteilchengreensfunktion definiert

$$g_{v_1 v_3, v_2 v_4}(t_1 t_3; t_2 t_4) = (i)^2 \langle AO | T \{ a_{v_1}(t_1) a_{v_3}(t_3) a_{v_4}^+(t_4) a_{v_2}^+(t_2) \} | AO \rangle \quad (1.9)$$

T ist der Zeitordnungsoperator, der bewirkt, daß die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in zeitgeordneter Form erscheinen, d.h. die späteste Zeit steht links, die früheste rechts. Zusätzlich wird das Produkt mit ± 1 multipliziert, je nachdem ob die zeitgeordnete Form durch eine ungerade oder eine gerade Anzahl von Permutationen erzeugt wird. Deshalb können wir (1.7) explizit schreiben

$$g_{v_1 v_2}(t_1; t_2) = -i \theta(t_1 - t_2) \langle AO | a_{v_1}(t_1) a_{v_2}^+(t_2) | AO \rangle + i \theta(t_2 - t_1) \langle AO | a_{v_2}^+(t_2) a_{v_1}(t_1) | AO \rangle \quad (1.10)$$

$\theta(x)$ ist die Sprungfunktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Wegen der zeitlichen Translationsinvarianz hängt $g_{v_1 v_2}(t_1; t_2)$ nur von $t_1 - t_2$ ab. Deshalb können wir schreiben:

$$g_{v_1 v_2}(t_1; t_2) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega(t_1 - t_2)} g_{v_1 v_2}(\omega) \quad (1.12)$$

Schieben wir in die Fouriertransformierte von (1.12) ein vollständiges System von Zwischenzuständen des $A \pm 1$ Systems ein, so erhalten wir (Spektraldarstellung)

$$g_{v_1 v_2}(\omega) = \sum_m \frac{\langle AO | a_{v_1} | A+1m \rangle \langle A+1m | a_{v_2}^+ | AO \rangle}{\omega + E_O^A - E_m^{A+1} + i\eta} + \sum_n \frac{\langle AO | a_{v_2}^+ | A-1n \rangle \langle A-1n | a_{v_1} | AO \rangle}{\omega + E_O^{A-1} - E_n^A - i\eta} \quad (1.13)$$

1.3. Bewegungsgleichungen

Um die Greensfunktionen zu berechnen gehen wir von der Bewegungsgleichung für die Einteilchengreensfunktion aus. (Diese enthält die Zweiteilchengreensfunktion.) Daraus können wir die Dysongleichung ableiten, die nur noch die Einteilchengreensfunktion enthält.

$$\int d3 \{ S(1,3) + q(1,3) + M(1,3) \} g_q(3,2) = \delta(1,2) \quad (1.14)$$

wobei folgende Abkürzungen gelten

$$S(1,3) = \delta_{v_1 v_2}(t_1 - t_2) \left\{ i \frac{\partial}{\partial t_1} - \epsilon_{v_1}^0 \right\}$$

$$g_q(1,2) = g_{qv_1;v_2}(t_1;t_2) \quad (1.15)$$

$$\delta(1,2) = \delta_{v_1 v_2} \delta(t_1 - t_2)$$

$$\int d1 = \sum_{v_1} \int dt_1$$

q gezeichnet als Hilfsgröße ein äußeres Quellenfeld. $g_q(1,2)$ in (1.14) ist die verallgemeinerte Greensfunktion bezüglich dieses Feldes. $M(1,2)$ bezeichnet den Massenoperator. Im folgenden wird der Index q weggelassen, was nicht zu Mißverständnissen führt, da für $q \rightarrow \infty$ alles richtig bleibt. Fig. 1.1 zeigt die graphische Darstellung der Dysongleichung.

Kennen wir den Massenoperator, so können wir (1.14) lösen und erhalten die Einteilchen- und damit auch die Zweiteilchengreensfunktion. Die Gleichung für den Massenoperator⁸⁾ ist jedoch eine nichtlineare Funktionalgleichung bezüglich q , die in allgemeiner Form nicht lösbar ist. Um leichter zu handhabende Gleichungen zu erhalten, leiten wir aus der Dysongleichung die Teilchen-Loch-Bethe-Salpeter-Gleichung ab.

$$T(13,24) = K(13,24) - i \int d5 \dots d8 K(17,28)g(8,5)g(6,7)T(53,64) \quad (1.16)$$

T ist die verallgemeinerte Streumatrix⁸⁾. Die K -Matrix, die definiert ist durch

$$\frac{\delta M(1,2)}{\delta q(3,4)} = iK(13,24) \quad (1.17)$$

ist der Teilchen-Loch irreduzible Kern dieser Gleichung. Die Dyson-

gleichung und die Bethe-Salpeter-Gleichung bilden zusammen mit der Definition des Massenoperators⁸⁾ und der K-Matrix (1.17) ein geschlossenes Gleichungssystem, daß keine Funktionalableitungen mehr enthält. Fig. 1.2 zeigt die graphische Darstellung der Bethe-Salpeter-Gleichung.

Schließlich können wir mit der Definition der Responsefunktion

$$L(13,24) = \frac{\delta g(1,2)}{\delta q(4,3)} = g(13,24) - g(12)g(34) \quad (1.18)$$

eine Gleichung für den generalisierten Vertexoperator⁸⁾ ableiten

$$\begin{aligned} \tau(13,24) &= \delta(1,4)\delta(3,4) \\ &- i \int d5 \dots d8 K(17,28)g(8,5)g(6,7)\tau(53,64) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Diese Gleichung bildet die Grundlage zur Bestimmung der Einteilchenübergangsdichte.

2. Die Landau-Migdal-Theorie der endlichen Fermisysteme

Zunächst behandeln wir das Konzept der Quasiteilchen, welches die Grundannahme der FFS-Theorie darstellt. Abschnitt 2.2 zeigt, daß die Quasiteilchenannahme eine Renormalisierung der Gleichungen aus Abschnitt 1 erlaubt, so daß die Theorie numerisch behandelt werden kann.

2.1. Das Quasiteilchenbild

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die Einteilchengreensfunktion $g_{\nu\nu}(\omega)$ in vielen Fällen durch

$$g_{\nu\nu'}(\omega) = \frac{\delta_{\nu\nu'} Z_\nu}{\omega - \epsilon_\nu \pm i\eta \operatorname{sign}(\epsilon_\nu - \mu)} + g_{\nu\nu'}^{(R)} \quad (2.1)$$

approximiert werden kann. Nur der erste Term hängt von ω ab und hat die Struktur eines Pols bei der Energie ϵ_ν mit der Polstärke Z_ν . Die Annahme, daß die ω -Abhängigkeit von $g_{\nu\nu'}(\omega)$ durch diesen sog. "Quasi-Teilchen-Polterm" gegeben ist, stellt die Grundannahme der FFS-Theorie dar. Gleichung (2.1) ist in guter Näherung gültig, wenn ein Modell unabhängiger Teilchen, wie das Schalenmodell, eine erste Näherung für die Beschreibung der Kerneigenschaften darstellt. Deshalb ist die FFS in erster Linie auf doppelt magische Kerne anwendbar. Um die Berechtigung des Ansatzes (2.1) zu sehen, betrachten wir die Einteilchengreensfunktion $g_{\nu\nu'}^0(\omega)$ des Schalenmodells. Offensichtlich trägt im Schalenmodell nur ein Zustand zu der Summe von Zwischenzuständen in der Spektraldarstellung (1.13) bei. Dieser Zustand ist für $\epsilon_\nu^0 > \epsilon_F$

$$|A+1m\rangle_0 = |A+1\nu\rangle_0 = a_\nu^+ |AO\rangle_0 \quad (2.2)$$

bei dem zusätzlich zum Schalenmodellgrundzustand ein Teilchen im Zustand φ_ν oberhalb der Fermikante sitzt. Solche Zustände wollen wir als "Einteilchenzustände" bezeichnen. Für $\epsilon_\nu^0 < \epsilon_F$ erhalten wir nur Beiträge vom "Loch-Zustand"

$$|A-1n\rangle_0 = |A-1\nu\rangle_0 = a_\nu |AO\rangle_0 \quad (2.3)$$

Deshalb erhalten wir aus (1.13)

$$g_{\nu\nu'}^0(\omega) = \frac{\delta_{\nu\nu'}}{\omega - \epsilon_\nu^0 \pm i\eta \operatorname{sign}(\epsilon_\nu^0 - \epsilon_F)} \quad (2.4)$$

(2.4) hat die Struktur von (2.1) mit der Resonanzenergie $\epsilon_\nu^0 = \epsilon_\nu$ und der Polstärke $Z_\nu = 1$. Der "backgroundterm" $g_{\nu\nu'}^{(R)}$ verschwindet.

Kehren wir zum realen Kern zurück. Die Größen

$$\begin{aligned} z_{\nu m}^{(+)} &= |\langle AO | a_{\nu} | A+1m \rangle|^2 \\ z_{\nu n}^{(-)} &= |\langle AO | a_{\nu}^+ | A-1n \rangle|^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

sind gerade die Polstärken in der Spektraldarstellung (1.13) des Diagonalelementes $g_{\nu\nu}(\omega)$. Im Kern ist natürlich nicht nur eine Polstärke von Null verschieden, wie im Fall des Schalenmodells, sondern es gibt viele Zustände $|A+1m\rangle$ und $|A-1n\rangle$ mit nichtverschwindender Polstärke $z_{\nu m}^{(+)}$ und $z_{\nu n}^{(-)}$. Liefert aber das Schalenmodell eine gute 1. Näherung der wirklichen Verhältnisse, so wird einer dieser Zustände eine Polstärke besitzen, die wesentlich größer ist als die übrigen (Fig. 2.1).

Diesen ausgezeichneten Zustand wollen wir als "Quasi-Teilchen" $|A+1\nu\rangle$ oder "Quasi-Loch" $|A-1\nu\rangle$ bezeichnen. Den "Quasi-Teilchen"-Zustand $|A+1\nu\rangle$ können wir als einen Zustand ansehen, der aus einem Core besteht, welcher die gleiche Struktur hat wie der (korrelierte) Grundzustand des A-Teilchensystems und einem zusätzlichen "Quasi-Teilchen" in Zustand ν . Dieses Quasi-Teilchen ist jedoch nicht das "nackte Nukleon", sondern es führt auf Grund der Wechselwirkung mit den Teilchen des Cores eine "Polarisationswolke" mit sich. Solch ein Quasi-Teilchen-Zustand hat starken Überlapp mit dem Zustand $a_{\nu}^+ |AO\rangle$ und bewirkt eine beträchtliche Polstärke $z_{\nu\nu}^{(+)}$. Für "Quasi-Loch"-Zustände gelten die gleichen Argumente. Zieht man aus der Summe der Zwischenzustände in (1.13) den Quasiteilchenpolanteil heraus, so erhalten wir

$$g_{\nu\nu}(\omega) = \frac{\delta_{\nu\nu} z_{\nu\nu}}{\omega - \epsilon_{\nu} + i\eta \operatorname{sign}(\epsilon_{\nu} - \mu)} + g_{\nu\nu}^{(R)}(\omega) \quad (2.6)$$

mit
$$z_{vv} = z_{vv}^{(+)}$$

$$\varepsilon_v = E_v^{A+1} - E_O^A \quad \text{für } \varepsilon_v > \mu \quad (2.7)$$

und
$$z_{vv} = z_{vv}^{(-)}$$

$$\varepsilon_v = E_O^A - E_v^{A-1} \quad \text{für } \varepsilon_v < \mu \quad (2.8)$$

μ ist das chemische Potential, welches die Bedingung erfüllt

$$E_O^{A+1} - E_O^A > \mu > E_O^A - E_O^{A-1} \quad (2.9)$$

Die Polstärke z_v ist eine positive Zahl kleiner 1

$$0 < z_v < 1 \quad (2.10)$$

Um den Ansatz (2.1) zu rechtfertigen, bleibt nur noch zu zeigen, daß $g_{vv}^{(R)}(\omega)$ in guter Näherung unabhängig von ω ist. Obwohl dieser Restterm alle Pole der Spektraldarstellung mit Ausnahme des dominanten Quasi-Teilchen-Polterms enthält, und deshalb i.a. weder klein noch unabhängig von ω ist, kann man ihn durch eine langsam variierende Funktion in ω oder sogar durch eine Konstante ersetzen, wenn die Polstärken klein und gleichförmig verteilt sind.

2.2. Landaurenormierung

Mit der Quasi-Teilchen Annahme lassen sich die Bewegungsgleichungen aus Abschnitt 1 wesentlich vereinfachen.

Betrachten wir die Fouriertransformierte der T-Matrix

$$T(13,24) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\omega d\omega' d\Omega e^{-i\omega(t_1-t_2)} e^{-i\omega'(t_3-t_4)} e^{-i\frac{\Omega}{2}(t_1+t_2-t_3-t_4)} T_{v_1 v_3, v_2 v_4}(\omega, \omega'; \Omega) \quad (2.11)$$

Definiert man die Fouriertransformierte der K-Matrix analog, so läßt sich die Bethe-Salpeter-Gleichung (1.16) in der Form schreiben

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha\gamma, \beta\delta}(\omega, \omega'; \Omega) &= K_{\alpha\gamma, \beta\delta}(\omega, \omega'; \Omega) \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{\kappa\lambda\rho\sigma} \int d\omega'' K_{\alpha\rho, \beta\sigma}(\omega, \omega''; \Omega) g_{\sigma\kappa}(\omega'' + \frac{\Omega}{2}) g_{\lambda\sigma}(\omega'' - \frac{\Omega}{2}) \\
 &T_{\kappa\gamma, \lambda\sigma}(\omega'', \omega'; \Omega)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Wegen der Quasi-Teilchen Annahme erhalten wir für das Produkt der beiden Greensfunktionen

$$\begin{aligned}
 g_{\sigma\kappa}(\omega'' + \frac{\Omega}{2}) g_{\lambda\rho}(\omega'' - \frac{\Omega}{2}) &= \frac{Z_{\kappa} Z_{\lambda} \delta_{\sigma\kappa} \delta_{\lambda\rho} n_{\kappa} (1-n_{\lambda})}{(\omega'' + \frac{\Omega}{2} - \epsilon_{\kappa} + i\eta) (\omega'' - \frac{\Omega}{2} - \epsilon_{\lambda} + i\eta)} \\
 &+ \frac{Z_{\kappa} Z_{\lambda} \delta_{\sigma\kappa} \delta_{\lambda\rho} n_{\lambda} (1-n_{\kappa})}{(\omega'' + \frac{\Omega}{2} - \epsilon_{\kappa} + i\eta) (\omega'' - \frac{\Omega}{2} - \epsilon_{\lambda} - i\eta)} \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Die Zahlen n_{ν} sind die Besetzungszahlen im Schalenmodellgrundzustand. Die Terme, die explizit in (2.13) hingeschrieben sind, enthalten Pole, die in verschiedenen Halbebenen der komplexen ω'' -Ebene liegen. Fallen diese Pole zusammen, so erhält man Singularitäten, da man den Integrationsweg nicht in die obere oder untere Halbebene deformieren kann, um die Doppelpolterme loszuwerden (s. Fig. 2.2). Benutzt man

$$\frac{1}{x+i\eta} = \frac{1}{x-i\eta} - 2\pi i \delta(x) \tag{2.14}$$

so erhält man statt (2.13)

$$g_{\sigma\kappa}(\omega'' + \frac{\Omega}{2}) g_{\lambda\rho}(\omega'' - \frac{\Omega}{2})$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi i \delta_{\sigma\kappa} \delta_{\lambda\rho} z_\lambda z_\kappa \frac{n_\kappa(1-n_\lambda)}{\epsilon_\kappa - \epsilon_\lambda - \Omega + i\eta} \delta(\omega'' - \frac{\Omega}{2} - \epsilon_\lambda) \\
 &= \frac{n_\lambda(1-n_\kappa)}{\epsilon_\lambda - \epsilon_\kappa + \Omega - i\eta} \delta(\omega'' + \frac{\Omega}{2} - \epsilon_\kappa) \\
 &+ z_\lambda z_\kappa \delta_{\sigma\kappa} \delta_{\lambda\rho} \frac{n_\kappa(1-n_\lambda) + n_\lambda(1-n_\kappa)}{(\omega'' + \frac{\Omega}{2} - \epsilon_\kappa - i\eta)(\omega'' - \frac{\Omega}{2} - \epsilon_\lambda - i\eta)}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Der zweite Term enthält einen möglichen Doppelpol auf der gleichen Seite der reellen Achse und ist deshalb nicht gefährlich.

Nach Integration über ω'' ist der erste Term singulär für

$$\Omega = \epsilon_\kappa - \epsilon_\lambda$$

Deshalb können wir schreiben

$$g_{\sigma\kappa}(\omega'' + \frac{\Omega}{2}) g_{\lambda\rho}(\omega'' - \frac{\Omega}{2}) = S_{\sigma\lambda, \kappa\rho}(\omega'', \Omega) + R_{\sigma\lambda, \kappa\rho}(\omega'', \Omega) \tag{2.16}$$

Der singuläre Anteil S hat eine einfache analytische Form

$$S_{\sigma\lambda, \kappa\rho}(\omega'', \Omega) = 2\pi i z_\kappa z_\lambda \delta_{\sigma\kappa} \delta_{\lambda\rho} \delta(\omega'' - \frac{\epsilon_\kappa - \epsilon_\lambda}{2}) \frac{n_\kappa - n_\lambda}{\epsilon_\kappa - \epsilon_\lambda - \Omega} \tag{2.17}$$

wohingegen R , der alles übrige enthält, keine große Ω -Abhängigkeit in der T -Matrix liefert.

In Kurzschreibweise können wir die Bethe-Salpeter-Gleichung schreiben

$$T = K + K(S+R) T \tag{2.18}$$

und folgende effektive Wechselwirkung einführen

$$\Gamma = K + \Gamma R K \tag{2.19}$$

Daraus folgt

$$T = \Gamma + \Gamma S T \tag{2.20}$$

oder explizit

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha\gamma, \beta\delta}(\omega, \omega'; \Omega) &= \Gamma_{\alpha\gamma, \beta\delta}(\omega, \omega'; \Omega) \\
 \sum_{\kappa\lambda} \Gamma_{\alpha\lambda, \beta\kappa}(\omega, \frac{\epsilon_{\kappa} + \epsilon_{\lambda}}{2}; \Omega) &\frac{Z_{\kappa} Z_{\lambda} (n_{\kappa} - n_{\lambda})}{\epsilon_{\kappa} - \epsilon_{\lambda} - \Omega} \\
 T_{\kappa\gamma, \lambda\sigma}(\frac{\epsilon_{\kappa} + \epsilon_{\lambda}}{2}, \omega', \Omega) &
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Obwohl die Definitionsgleichung (2.19) für die effektive Wechselwirkung ebenso komplex ist wie die ursprüngliche Bethe-Salpeter-Gleichung enthält sie nur den nichtsingulären Anteil R . Deshalb erwarten wir keine starke Ω -Abhängigkeit für die effektive Wechselwirkung.

Gleichung (2.21) enthält immer noch die Polstärken Z_{κ} und Z_{λ} , die natürlich unbekannt sind. Um sie loszuwerden renormieren wir die T-Matrix und die effektive Wechselwirkung durch

$$\begin{aligned}
 t_{\alpha\gamma, \beta\delta} &= (Z_{\alpha} Z_{\beta} Z_{\gamma} Z_{\delta})^{1/2} T_{\alpha\gamma, \beta\delta} \\
 F_{\alpha\gamma, \beta\delta}^{\text{ph}} &= (Z_{\alpha} Z_{\beta} Z_{\gamma} Z_{\delta})^{1/2} \Gamma_{\alpha\gamma, \beta\delta}
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Damit erhalten wir für die renormierte T-Matrix folgende Gleichung

$$\begin{aligned}
 t_{\alpha\gamma, \beta\delta}(\omega, \omega'; \Omega) &= F_{\alpha\gamma, \beta\delta}^{\text{ph}}(\omega, \omega'; \Omega) \\
 + \sum_{\kappa, \lambda} F_{\alpha\lambda, \beta\delta}^{\text{ph}}(\omega, \frac{\epsilon_{\kappa} + \epsilon_{\lambda}}{2}; \Omega) \\
 \times \frac{n_{\kappa} - n_{\lambda}}{\epsilon_{\kappa} - \epsilon_{\lambda} - \Omega} &t_{\kappa\gamma, \lambda\delta}(\frac{\epsilon_{\kappa} + \epsilon_{\lambda}}{2}, \omega'; \Omega)
 \end{aligned}$$

Den gleichen Renormierungsformalismus können wir auch auf die Gleichung für den verallgemeinerten Vertex anwenden (1.19) und erhalten

$$\tau_{\alpha\gamma, \beta\delta}(\omega; \Omega) = \tau_{\alpha\gamma, \beta\delta}^{\omega}(\omega; \Omega)$$

$$+ \sum_{\kappa\lambda} F_{\alpha\lambda,\beta\kappa}^{\text{ph}}(\omega, \frac{\epsilon_{\kappa} + \epsilon_{\lambda}}{2}; \Omega) \frac{n_{\kappa} - n_{\lambda}}{\epsilon_{\kappa} - \epsilon_{\lambda} - \Omega} \tau_{\alpha\gamma,\lambda\sigma}(\frac{\epsilon_{\kappa} + \epsilon_{\lambda}}{2}, \omega'; \Omega) \quad (2.24)$$

wobei τ und τ^{ω} definiert sind durch

$$\tau_{\alpha\gamma,\beta\delta}(\omega; \Omega) = (Z_{\alpha} Z_{\beta})^{1/2} \frac{1}{2\pi} \int d\omega' \tau_{\alpha\gamma,\rho\delta}(\omega, \omega'; \Omega) \quad (2.25)$$

$$\tau_{\alpha\gamma,\beta\delta}^{\omega}(\omega; \Omega) = (Z_{\alpha} Z_{\beta})^{1/2} \hat{\tau}_{\alpha\gamma,\beta\delta}(\omega; \Omega) \quad (2.26)$$

wobei $\hat{\tau}$ im Prinzip aus

$$\hat{\tau}_{\alpha\gamma,\beta\delta}(\omega; \Omega) = -\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \frac{1}{1\pi i} \sum_{\rho\sigma} \int d\omega'' \Gamma_{\alpha\rho,\beta\sigma}(\omega, \omega'; \Omega) R_{\sigma\gamma,\sigma\rho}(\omega''; \Omega) \quad (2.27)$$

berechnet werden kann.

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß der renormierte Vertexoperator wichtig ist für die Berechnung von observablen Größen. Um Gleichung (2.24) zu lösen, müssen wir F^{ph} und τ^{ω} kennen. Analog zur Landautheorie für unendliche Systeme wird F^{ph} nicht berechnet, sondern parametrisiert. τ^{ω} kann in einigen Fällen mit Ward-Identitäten bestimmt werden. In Fällen, wo dies nicht möglich ist, muß man effektive Operatoren einführen, die phänomenologische Parameter enthalten.

3. Berechnung von Übergangsdichten in der FFS-Theorie

Übergangsdichten zwischen angeregten Zuständen $|A_n\rangle$ und dem Grundzustand $|A_0\rangle$ in geraden Kernen und Zuständen $|A_{\pm 1m}\rangle$ und $|A_{\pm 1n}\rangle$ in ungeraden Kernen erhält man, wenn man die Responsefunktion L (1.18) und den τ -Vertex (1.19), die man aus renormierten Gleichungen erhält, kennt.

3.1. Übergangsdichten in geraden Kernen

Zur Berechnung der Übergangsdichten betrachten wir die Zweiteilchengreensfunktionen, wobei wir die Zeitordnung folgendermaßen wählen

$$t_4 t_3 > t_1 t_2$$

Setzen wir ein vollständiges System von Eigenzuständen des A-Teilchensystems zwischen die Teilchenlochpaare ein so erhalten wir

$$g(13,24) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{\text{on}}(34) g^{\text{no}}(12) \quad (3.1)$$

mit den verallgemeinerten Greensfunktionen

$$\begin{aligned} g^{\text{no}}(3,4) &= i \langle \text{AO} | T \{ a(3) a^+(4) \} | \text{AN} \rangle \\ g^{\text{no}}(1,2) &= i \langle \text{AN} | T \{ a(1) a^+(2) \} | \text{AO} \rangle \end{aligned} \quad (3.2)$$

Benutzt man die Definition der Responsefunktion (1.18) und setzt $t_4 = t_3 + \epsilon$ (wobei ϵ eine positive infinitesimale Größe ist) so erhält man

$$L_{v_1 v_3, v_2 v_4}(t_1 t_3, t_2 t_3 + \epsilon) = -i \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{v_3 v_4}^{\text{on}} g^{\text{no}}(1,2) e^{-\omega_n t_3} \quad (3.3)$$

$$\omega_n = E_n^A - E_0^A \quad \text{und}$$

$$\chi_{v_3 v_4}^{\text{on}} = \langle \text{AO} | a_{v_4}^+ a_{v_3} | \text{AN} \rangle \quad (3.4)$$

Aus (3.3) projiziert man mit Hilfe des Projektionsoperators

$$\begin{aligned} P^m &= \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \Gamma \int_{\bar{t}}^{\infty} dt_3 e^{i(\Omega_m + i\Gamma)t_3} \\ \bar{t} &> t_1, t_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

den angeregten Zustand m des A-Teilchensystems heraus und erhält

$$P^m L_{v_1 v_3, v_2 v_4}(t_1 t_3, t_2 t_3 + \epsilon) = i \chi_{v_3 v_4}^{om} g^{mo}(1, 2) \quad (3.6)$$

Multiplikation der Bethe-Salpeter-Gleichung für die Responsefunktion⁸⁾ mit P^m liefert eine nicht renormierte Gleichung für die verallgemeinerte Greensfunktion

$$g^{mo}(1, 2) = i \int d5 \dots d8 g(1, 5) g(6, 2) K(75, 68) g^{mo}(8, 7) \quad (3.7)$$

Aus der verallgemeinerten Greensfunktion $g^{mo}(t_1; t_2)$ erhält man die Übergangsdichte χ^{mo} durch Integration des fouriertransformierten Ausdrucks bezüglich ω , wobei das Integral in der oberen Halbebene zu schließen ist.

$$\chi_{v_1 v_2}^{mo} = \langle Am | a_{v_2}^+ a_{v_1} | AO \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int d\omega g_{v_1 v_2}^{mo}(\omega - \Omega) \quad (3.8)$$

Mit einer Renormierung analog zu Abschnitt 2.2 erhält man eine Gleichung für die "Quasi-Teilchen-Dichte" $\tilde{\chi}^{mo}$. Führen wir die Quasi-Teilchen-Quasi-Loch-Amplitude durch die Definition

$$\chi_{v_1 v_2}^m = \tilde{\chi}_{v_1 v_2}^{mo} = \tilde{\chi}_{v_2 v_2}^{mo} \quad (3.9)$$

ein, so erhalten wir folgende Gleichung

$$(\epsilon_{v_1} - \epsilon_{v_2} + \Omega_\mu) \chi_{v_1 v_2}^m = (n_{v_1} - n_{v_2}) \sum_{v_3 v_4} F_{v_1 v_4, v_2 v_3}^{ph} \chi_{v_3 v_4}^m \quad (3.10)$$

Die Amplitude und die Übergangsdichte χ^{mo} sind durch folgende Beziehung verknüpft.

$$\chi_{v_1 v_2}^{mo} = \sum_{v_3 v_4} \tau_{v_3 v_4, v_4 v_2}^\omega \chi_{v_3 v_4}^m \quad (3.11)$$

Gleichung (3.10) ist eine abkürzende Schreibweise für die bekannte (renormierte) RPA-Gleichung, wenn man die Energieabhängigkeit von F^{ph} vernachlässigt.

Mit Hilfe der Einteilchenübergangsdichte χ^{mo} errechnet man die Übergangswahrscheinlichkeit eines Einteilchenoperators Q zwischen angeregten Zustand m und dem Grundzustand des A-Teilchensystems

$$\begin{aligned}
 \langle Am | Q | AO \rangle &= \sum_{v_1 v_2} Q_{v_1 v_2} \chi_{v_1 v_2}^{mo} \\
 &= \sum_{v_1 \dots v_4} Q_{v_1 v_2} \tau_{v_3 v_1, v_4 v_2}^{\omega} \chi_{v_3 v_4}^m \\
 &= \sum_{v_1 v_2} Q^{eff} \chi_{v_1 v_2}^m
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Q^{eff} ist der renormierte Einteilchenoperator

$$Q_{v_1 v_2}^{eff} = \sum_{v_3 v_4} \tau_{v_1 v_3, v_2 v_4}^{\omega} Q_{v_4 v_3} \tag{3.13}$$

3.2. Übergangsdichten in ungeraden Kernen

Um die Übergangsdichten in ungeraden Kernen zu berechnen betrachten wir folgende Matrixelemente eines Einkörperoperators Q

$$\langle A \pm 1m | Q | A \pm 1n \rangle \tag{3.14}$$

wobei

$$Q = \sum_{\gamma \delta} Q_{\gamma \delta} a_{\gamma}^{+} a_{\delta} \tag{3.15}$$

Diese Matrixelemente können in sehr einfacher Weise aus dem renormierten Vertexoperator τ^R berechnet werden, wenn die Zustände Quasi-Teilchen-Charakter haben. Für Zustände $|A+1n\rangle$ können wir folgende Identität schreiben

$$|A+1n\rangle = \frac{1}{\langle A+1n | a_{\alpha}^{+} | AO \rangle} \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \Gamma$$

$$\int_{-\infty}^0 dt e^{-i(E_n^{A+1} - E_o^A)t} e^{\Gamma t} a_{\alpha}^{+}(t) |AO\rangle \quad (3.16)$$

und

$$|A+1n\rangle = \frac{1}{\langle A+1n | a_{\alpha}^{+} | AO \rangle} \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \Gamma \int_0^{\infty} dt e^{-i(E_n^{A+1} - E_o^A)t} e^{-\Gamma t} a_{\alpha}^{+}(t) |AO\rangle \quad (3.17)$$

die immer dann gilt, wenn

$$\langle A+1n | a_{\alpha}^{+} | AO \rangle \neq 0$$

Mit (3.16) und (3.17) erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle A+1m | Q | A+1n \rangle &= \sum_{\gamma\delta} Q_{\gamma\delta} c_m^{\alpha*} c_n^{\beta} \\ \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \Gamma^2 \int_{-\infty}^0 dt' \int_0^{\infty} dt'' e^{-i\epsilon_n t'} e^{i\epsilon_m t''} e^{\Gamma(t'-t'')} \\ &\langle AO | a_{\alpha}^{+}(t'') a_{\gamma}^{+} a_{\delta} a_{\beta}(t') | AO \rangle \\ &= \sum_{\gamma\delta} Q_{\gamma\delta} c_m^{\alpha*} c_n^{\beta} \\ \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \Gamma^2 \int_{-\infty}^0 dt' \int_0^{\infty} dt'' e^{\Gamma(t'-t'')} e^{i\epsilon_m t''} e^{-i\epsilon_n t'} g_{\alpha\delta, \beta\gamma}(t''0; t'0+\eta) \end{aligned} \quad (3.18)$$

mit $\epsilon_n = E_n^{A+1} - E_o^A$ (3.19)

und $c_n^{\alpha} = \frac{1}{\langle A+1n | a_{\alpha}^{+} | AO \rangle}$ (3.20)

Damit haben wir eine Beziehung zwischen dem zu berechnenden Matrixelement und der Zweiteilchengreensfunktion gefunden. Nun nehmen wir an, daß $|A+1n\rangle$ und $|A+1m\rangle$ gute Quasiteilchenzustände sind, d.h. es gibt einen Zustand $a_{\nu}^{+} |AO\rangle$, der erheblich größeren Über-

lapp mit $|A+1n\rangle$ hat als die übrigen.

$$|\langle A+1n|a_v^+|AO\rangle| \gg |\langle A+1n|a_\alpha^+|AO\rangle| \quad \alpha \neq v \quad (3.21)$$

Dann gelten folgende Identifizierungen, wenn wir mit der Spektral-
darstellung (1.13) vergleichen

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \varepsilon_n \\ z_v &= |c_n^v|^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Mit (1.18) und (1.19) können wir die Zweiteilchengreensfunktion
durch den Vertexoperator τ und die Einteilchengreensfunktion aus-
drücken, für welche wir die Darstellung (2.6) benutzen. Im Limes
 $\Gamma \rightarrow 0$ überleben nur Beiträge des Quasi-Teilchenpolterms in (2.6).
Man erhält schließlich

$$\begin{aligned} \langle A+1m|Q|A+1n\rangle &= \delta_{mn} \langle AO|Q|AO\rangle \Theta(\varepsilon_n - \varepsilon_f) \\ &- \Theta(\varepsilon_n - \varepsilon_F) \Theta(\varepsilon_m - \varepsilon_F) \tau_{\mu\nu}(\varepsilon_{mn}; Q) \end{aligned} \quad (3.23)$$

mit

$$\varepsilon_{mn} = \varepsilon_m - \varepsilon_n \quad (3.24)$$

Der sog. lokale Vertexoperator $\tau_{\alpha\beta}(\Omega; Q)$ ist definiert durch

$$\tau_{\alpha\beta}(\Omega; Q) = \sum_{\gamma\delta} Q_{\delta\gamma}^{\text{eff}} \tau_{\alpha\gamma, \beta\delta} \left(\frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2}; \Omega \right) \quad (3.25)$$

Für die Erwartungswerte erhält man

$$\langle A+1n|Q|A+1n\rangle - \langle AO|Q|AO\rangle = -\Theta(\varepsilon_n - \varepsilon_F) \tau_{vv}(0; Q) \quad (3.26)$$

Der lokale Vertexoperator, der aus (2.24) berechnet werden kann
bestimmt nur die Differenz des Erwartungswertes des Operators Q
im Zustand $|A+1n\rangle$ des $A+1$ -Teilchensystems und dem Grunzustand-

erwartungswert. Den Grundzustandserwartungswert liefert die FFS-Theorie nicht. In analoger Weise erhält man für das A-1-Teilchensystem:

$$\begin{aligned} \langle A-1n | Q | A-1m \rangle &= \delta_{mn} \langle AO | Q | AO \rangle \Theta(\epsilon_F - \epsilon_n) \\ &- \Theta(\epsilon_F - \epsilon_n) \Theta(\epsilon_F - \epsilon_m) \tau_{\mu\nu}(\epsilon_{nm}; Q) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Aus Gleichung (2.24) erhält man für den lokalen Vertexoperator

$$\tau_{\alpha\beta}(\epsilon_{ab}; Q) = Q_{\alpha\beta}^{\text{eff}} + \sum_{\nu_1 \nu_2} F_{\alpha\nu_2, \beta\nu_2}^{\text{ph}} \frac{n_{\nu_2} - n_{\nu_1}}{\epsilon_{\nu_2} - \epsilon_{\nu_1} - \epsilon_{ab}} \tau_{\nu_2 \nu_1}(\epsilon_{ab}; Q) \quad (3.28)$$

wobei Q^{eff} durch (3.13) definiert ist. Eine Iteration von Gleichung (3.28) zeigt, daß $\tau_{\alpha\beta}$ neben dem Einteilchenmatrixelement $Q_{\alpha\beta}^{\text{eff}}$ (Fig. 3.1a) first-order Graphen (3.1b, 3.1c), second-order Graphen (3.1d, 3.1e) und ähnliche Graphen in beliebiger Ordnung Störungstheorie enthält, d.h. der zweite Teil von (3.28) enthält alle Diagramme von TDA und RPA Typ.

Diese Terme werden explizit mitgenommen, während alle übrigen in Q^{eff} enthalten sind. Gleichung (3.28) ist die (renormierte) RPA Gleichung für ungerade Kerne.

Wir können die RPA-Gleichung für gerade Kerne (3.10) mit (3.28) vergleichen. Die graphische Darstellung erlaubt dann eine einfache physikalische Interpretation. Vernachlässigt man die Energieabhängigkeit von F^{ph} , so kann man den Vertex τ durch die Teilchenloch Amplituden χ^m und die Anregungsenergien Ω_m ausdrücken.

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}(\epsilon_{ab}, Q) &= Q_{\alpha\beta}^{\text{eff}} + \sum_m \sum_{\nu_1 \dots \nu_4} F_{\alpha\nu_1, \beta\nu_2}^{\text{ph}} \frac{\chi_{\nu_2 \nu_1}^m \chi_{\nu_3 \nu_4}^{m*}}{\epsilon_{ab} - \Omega_m} Q_{\nu_4 \nu_3}^{\text{eff}} \\ &- \sum_m \sum_{\nu_1 \dots \nu_4} F_{\beta\nu_1, \alpha\nu_2}^{\text{ph}} \frac{\chi_{\nu_2 \nu_1}^m \chi_{\nu_3 \nu_4}^{m*}}{\epsilon_{ab} - \Omega_m} Q_{\nu_3 \nu_4}^{\text{eff}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Die graphische Darstellung dieser Gleichung ist in Fig. 3.2 gegeben.

In Langwellennäherung kann Q^{eff} im elektrischen Fall mit Hilfe von Ward-Identitäten in guter Näherung durch den Schalenmodelloperator ersetzt werden. Alle Abweichungen von den Werten im Modell unabhängiger Teilchen kommen dann vom 2. und 3. Term in (3.29) her. Physikalisch lassen sich diese Terme so interpretieren, daß der Operator Q Vibrationen des geraden Kerns anregt, die mit dem zusätzlichen Teilchen des ungeraden Kerns wechselwirken. Gibt man die Langwellennäherung auf, so ist die Näherung $Q_{\text{elektr.}}^{\text{eff}}$ = $Q_{\text{elektrisch}}^{\text{Schalenmodell}}$ stärker, und die obigen Argumente sind nicht ohne weiteres übertragbar.

II. Berechnung von Ladungs- und Stromdichten

Unter dem Einfluß eines elektromagnetischen Feldes möge der Kern vom Zustand Ψ_i in den Zustand Ψ_f übergehen (Ψ_i und Ψ_f können identisch sein). Die Übergangsladungs- und stromdichten sind dann im Ortsraum gegeben durch

$$\rho(\vec{r}) = e \sum_k \delta(\vec{r}-\vec{r}_k) g_L^k \{\Psi_f^* \Psi_i\} \quad (4.1)$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \vec{j}^c(\vec{r}) + \vec{j}^m(\vec{r}) + \vec{j}^{ex}(\vec{r}) \quad (4.2)$$

$$\vec{j}^c(\vec{r}) = \frac{eh}{2Mi} \sum_k \delta(\vec{r}-\vec{r}_k) g_L^k \{\Psi_f^* \vec{\nabla}_k \Psi_i - \Psi_i \vec{\nabla}_k \Psi_f^*\} \quad (4.3)$$

$$\vec{j}^m(\vec{r}) = \frac{eh}{2m} \sum_k \delta(\vec{r}-\vec{r}_k) \mu_s^k \vec{\nabla}_k \times \{\Psi_f^* \vec{\sigma}_k \Psi_i\} \quad (4.4)$$

$\vec{\sigma}_k$ sind die Paulimatrizen, g_L^k , μ_s^k g-Faktoren für Proton und Neutron. $\vec{j}^c$ ist der Konvektionsstrom, der durch die Bewegung der einzelnen Nukleonen erzeugt wird. $\vec{j}^m$ entsteht durch die magnetischen Momente der Nukleonen. $\vec{j}^{ex}$ beschreibt i.a. sowohl Austauscheffekte, als auch Effekte, die von der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Wechselwirkungen im Kern herrühren. Obwohl Austauschströme seit langem von großem theoretischen Interesse sind, ist über die Wechselwirkungen im Kern zu wenig bekannt, um sie in allgemeiner Form zu behandeln. In der vorliegenden Arbeit werden Mesonenaustauscheffekte nicht explizit als Austauschstrombeitrag behandelt, sondern in Form effektiver Einteilchenoperatoren berücksichtigt.

4.1. Notation und Phasenkonvention

Die l -s-gekoppelte Einteilchenwellenfunktion ist im Ortsraum gegeben durch

$$\psi_{v_1}(\vec{r}) = \langle \vec{r} | v_1 \rangle = \sum_{m\sigma} \langle \frac{1}{2} \sigma \ell_1 m | j_1 m_1 \rangle u_1(r) Y_{\ell_1}^m(\Omega) \chi_{1/2}^\sigma$$

$$v_1 = (\tau_1, n_1, j_1, \ell_1, m_1 \dots) \quad (4.5)$$

$u_1(r)$: Radialfunktion

$\chi_{1/2}^\sigma$: Spinwellenfunktionen

Sei Q_λ^μ ein sphärischer Tensoroperator vom Rang λ . Nach dem Wigner-Eckert-Theorem⁹⁾ ist das reduzierte Matrixelement

$$\langle f || Q_\lambda || i \rangle = \sqrt{2J_f+1} \sum_{M_i, \mu} \langle J_i M_i \lambda \mu | J_f M_f \rangle \langle J_f M_f | Q_\lambda^\mu | J_i M_i \rangle \quad (4.6)$$

Ein teilweise reduziertes Matrixelement, in dem nur über die Winkelkoordinaten integriert ist, definieren wir durch

$$(f || Q_\lambda(r) || i) = \frac{1}{r^2} \langle f || \sum_k \delta(\vec{r}-\vec{r}_k) Q_\lambda(\vec{r}_k) || i \rangle \quad (4.7)$$

Falls Q_λ ein Einteilchenoperator ist, läßt sich das reduzierte Matrixelement (4.7) durch reduzierte Matrixelemente zwischen Einteilchenzuständen darstellen.

$$(f || Q_\lambda(r) || i) = \sum_{v_1, v_2} \rho_{v_1, v_2}^{if, \lambda} (v_1 || Q_\lambda(r) || v_2) \quad (4.8)$$

mit

$$\rho_{v_1 v_2}^{if, \lambda} = \langle i || [a_{v_1}^+ a_{v_2}]_\lambda || f \rangle \quad (4.9)$$

wobei die Erzeugungs- und Vernichtungs zu λ gekoppelt sind

$$[a_{v_1}^+ a_{v_2}]_\lambda^\mu = \sum_{m_1, m_2} (-)^{j_2-m_2} \langle j_1 m_1 j_2 -m_2 | \lambda \mu \rangle a_{v_1}^+ a_{v_2} \quad (4.10)$$

In geraden Kernen ist $\rho_{v_1 v_2}^{if, \lambda}$ durch $\chi_{v_1 v_2}^{m\lambda}$ (3.12) und in ungeraden Kernen über $\tau_{v_1 v_2}^\lambda(\epsilon_{nm}; Q)$ (3.27) gegeben. Durch die Kopplung zum Gesamtdrehimpuls λ vereinfachen sich die numerischen Berechnungen

von χ^m und τ nach (3.10) und (3.28) ganz erheblich, da die verschiedenen λ -Werte entkoppeln.

4.2. Form des effektiven magnetischen Operators

Während im elektrischen Fall Q^{eff} durch den nackten Schalenmodell-operator ersetzt wird, wollen wir im magnetischen Fall mesonische Anteile (Zweiteilchenanteile) und "higher order corrections" in Q^{eff} explizit berücksichtigen (s. (3.28) und Fig. 3.1). In Ref. 10) wird folgende Form für den effektiven magnetischen Operator Q^{eff} angegeben

$$Q_{\lambda}^{\text{eff}} = \mu_0 \{ \tilde{g} \vec{L} + \tilde{\mu} \vec{\sigma} + \kappa f(r) [Y_2 \vec{\sigma}]_1 \delta_{\lambda 1} \tau_3 \} \quad (4.11)$$

$\tilde{g}$, $\tilde{\mu}$: renormierte g-Faktoren. In den Berechnungen wurde die Radialabhängigkeit $f(r)$ des Tensorterms mit r^2 angenommen⁶⁾.

Damit sind sowohl der elektrische als auch der magnetische Multipoloperator Einteilchenoperatoren, so daß in beiden Fällen die Zerlegung (4.8) gilt.

4.3. Multipolentwicklung der Verteilungen

Da nur bestimmte Multipole zum elektromagnetischen Übergang zwischen Zuständen mit definiertem Drehimpuls beitragen, zerlegen wir die Dichten (4.1)-(4.4) in die verschiedenen Multipolkomponenten

$$\rho(\vec{r}) = e \sum_{\lambda \mu} \langle J_i M_i \lambda \mu | J_f M_f \rangle \sqrt{2J_f+1}^{-1} \rho(r) Y_{\lambda}^{\mu}(\Omega) \quad (4.12)$$

$$\vec{J}^{m,c}(\vec{r}) = \frac{c}{i} \sum_{\lambda \ell \mu} \langle J_i M_i \lambda \mu | J_f M_f \rangle \sqrt{2J_f+1}^{-1} \rho_{\lambda \ell}^{m,c}(r) \vec{Y}_{\lambda \ell 1}^{\mu}(\Omega) \quad (4.13)$$

Dabei sind die Kugelvektorfunktionen in (4.13) nach Ref. 9) gegeben durch

$$\vec{Y}_{\lambda\ell 1}^{\mu}(\Omega) = \sum_{m\nu} \langle \ell m 1 \nu | \lambda \mu \rangle Y_{\ell}^m(\Omega) \vec{e}_{\nu} \quad (4.14)$$

$\vec{e}_{\nu}$ sind die sphärischen Einheitsvektoren.

Wie im Anhang 7.1-7.4 gezeigt wird, ergeben sich für die radialen Dichteverteilungen folgende Ausdrücke

$$\rho(r) = \sum_{\nu_1 \nu_2} \rho_{\nu_1 \nu_2}^{if\lambda} (\nu_1 || Y_{\lambda}(\Omega) || \nu_2) \quad (4.15)$$

$$\rho_{\lambda, \ell}^c(r) = \mu_0 \sum_{\nu_1 \nu_2} \rho_{\nu_1 \nu_2}^{if\lambda} g_L^1 \{ (\nu_1 || \vec{Y}_{\lambda\ell 1} \cdot \vec{\nabla} || \nu_2) + (-)^{j_1+j_2+\lambda+\ell+1} (\nu_2 || \vec{Y}_{\lambda\ell+1} \cdot \vec{\nabla} || \nu_1)^* \} \quad (4.16)$$

$$\rho_{\lambda, \ell}^m(r) = \mu_0 \sum_{\nu_1 \nu_2} \rho_{\nu_1 \nu_2}^{if\lambda} \mu_S^1 \sqrt{6} \{ \sqrt{\ell+1} \begin{Bmatrix} 1 & \ell+1 & \lambda \\ \ell & 1 & 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\ell+2}{r} \right) (\nu_1 || [Y_{\ell+1} \sigma]_{\lambda} || \nu_2) - \sqrt{\ell} \begin{Bmatrix} 1 & \ell-1 & \lambda \\ \ell & 1 & 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\ell-1}{r} \right) (\nu_1 || [Y_{\ell-1} \sigma]_{\lambda} || \nu_2) \} \quad (4.17)$$

Für magnetische Dipolübergänge muß man wegen (4.11) einen zusätzlichen Stromterm berücksichtigen, der von dem Tensorterm $\kappa r^2 [Y_2 \times \sigma]_1 \delta_{\lambda 1}$ herrührt

$$\rho_{11}^c(r) = \mu_0 \sum_{\nu_1 \nu_2} \rho_{\nu_1 \nu_2}^{if\lambda} r^2 \kappa (\nu_1 || [Y_2 \sigma]_1 || \nu_2) \tau_3 \quad (4.18)$$

Wegen Paritätsauswahlregeln tragen zu magnetischen Übergängen nur Stromkomponenten mit $\lambda=\ell$ bei, während im elektrischen Fall nur Komponenten $\ell=\lambda\pm 1$ beitragen.

In der Langwellennäherung sind die Übergangsstärken $B(E\lambda)$ und $B(M\lambda)$ durch folgende Beziehungen mit den Ladungs- und Stromdichten verknüpft^{3,11)}

$$\begin{aligned} B(E\lambda, i \rightarrow f) &= e^2 \frac{2J_f+1}{2J_i+1} \left(\int r^{2+\lambda} \rho_\lambda(r) dr \right)^2 \\ &= e^2 \frac{2J_f+1}{2J_i+1} \frac{(2\lambda+1)\lambda}{k^2} \left(\int r^{\lambda+1} \rho_{\lambda, \lambda-1}(r) dr \right)^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$B(M\lambda, i \rightarrow f) = e^2 \frac{2J_f+1}{2J_i+1} \frac{\lambda}{\lambda+1} \left(\int r^{\lambda+2} \rho_{\lambda\lambda}(r) dr \right)^2 \quad (4.20)$$

k : Energieübertrag

III. Inelastische Elektronenstreuung

Für Kernstrukturrechnungen eignen sich Experimente besonders, die die elektromagnetische Wechselwirkung ausnutzen, da diese bekannt ist. Zwei wichtige experimentelle Hilfsmittel sind die Beobachtung von γ -Emission und Absorption und die elastische und inelastische Elektronenstreuung. Gegenüber der γ -Emission und Absorption, die bei fester Anregungsenergie nur einen definierten Impulsübertrag zuläßt, kann man in der Elektronenstreuung zu fester Anregungsenergie den Impulsübertrag auf den Kern variieren und damit Dichteverteilungen direkt räumlich ausmessen (durch Fouriertransformation der Formfaktoren). Für den relativistischen Viererimpuls gilt nämlich ($\hbar c = 1$)

$$q_{\mu}^2 = \vec{q}^2 - k^2 = 0 \quad \gamma\text{-Emission und Absorption} \quad (5.1)$$

$$q_{\mu}^2 = \vec{q}^2 - k^2 > 0 \quad \text{Elektronenstreuung} \quad (5.2)$$

wobei der Impulsübertrag $\vec{q}$ durch

$$\vec{q} = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \quad (5.3)$$

und der Energieübertrag k durch

$$k = E_2 - E_1 \quad (5.4)$$

gegeben ist.

$\vec{k}_1, \vec{k}_2$ Wellenvektor des einlaufenden und auslaufenden Elektrons, E_1, E_2 seine Energien. Bei elektromagnetischen Wechselwirkungen wird der Kern durch Ladungs- und Stromdichten beschrieben. Ihre

Berechnung wurde in Abschnitt II angegeben. Mit diesen Dichten lässt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt berechnen, der im wesentlichen durch das Matrixelement zwischen Elektronenstrom und Kernladungs- und Stromdichten gegeben ist. In Bornscher Näherung gilt:

$$\sigma(\theta) = \sigma_m(\theta) |F(\vec{q})|^2 \quad (5.5)$$

$\sigma_m(\theta)$ ist der Mottquerschnitt, $F(\vec{q})$ der Formfaktor.

$$F(\vec{q}) = \int e^{i\vec{q}\vec{r}} \rho(\vec{r}) d\vec{r} \quad (5.6)$$

Die Bornsche Näherung versagt, wenn $Z\alpha \sim 1$ (Z : Kernladung, α : Feinstrukturkonstante), d.h. in schweren Kernen ist die Störung der Elektronenwellenfunktionen durch das elastische Coulombpotential des Kerns nicht mehr zu vernachlässigen. Diese Störung kann man in DWBA behandeln. Eine Ableitung des Wirkungsquerschnittes in dieser Näherung wird im nächsten Abschnitt gegeben.

5.1 Bestimmung von $d\sigma/d\Omega$ für inelastische Elektronenstreuung in DWBA Näherung

Der Hamiltonoperator für relativistische Elektronen im statischen Coulombfeld des Kerns ist¹²⁾

$$H_0 = [i\gamma_5 \sigma_r (\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{\beta}{r} k) + V(r) + m\beta] \quad (5.7)$$

$$k = \beta(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1), \quad \sigma_r = \vec{\sigma} \cdot \hat{r}$$

Der Gesamt-Hamiltonoperator ist

$$H = H_0 + H_{int} \quad (5.8)$$

H_{int} beschreibt die Wechselwirkung der Elektronen mit dem nicht-statischen Teil der Kernladungs- und Stromverteilungen. In 1. Ordnung Störungstheorie ist $d\sigma/d\Omega$ gegeben durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle H_{int} \rangle|^2 \frac{\rho_F}{j_e} \quad (5.9)$$

ρ_f ist die Dichte der Endzustände des Kerns und j_e der einlaufende Elektronfluß.

$$\rho_f = \frac{1}{1 + \frac{2E_2}{M_T} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \frac{k_2 E_2}{(2\pi)^3 \hbar c} \quad j_e = c \frac{k_1}{E_1} \quad (5.10)$$

Wir haben also H_{int} zu berechnen. Das Wechselwirkungspotential der Elektronen mit dem Kern wird durch den Viererstrom

$$J_\nu^e = \bar{\Psi}_f \gamma_\nu \Psi_i e \quad (5.11)$$

erzeugt. $\Psi_i \bar{\Psi}_f$: Elektronenwellenfunktionen γ_ν : Diracmatrizen. Mit Hilfe der retardierten Greensfunktion G_{ret} läßt sich daraus das Wechselwirkungspotential $A_\nu(r)$ ableiten

$$A_\nu(r) = -i \int J_\nu^e(r') G_{ret}(r, r') d^4 r' \quad (5.12)$$

$$G_{ret}(r, r') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t - t' - \frac{1}{2} |\vec{r} - \vec{r}'|) \quad (5.13)$$

Beschränken wir die Diskussion auf Felder mit definierter Frequenz, d.h.

$$A_\nu(r) = A_\nu(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (5.14)$$

und integrieren über t , so erhalten wir das stationäre Vektorpotential

$$\delta(E_1 - E_2 - k) A_v(\vec{r}) = e \delta(E_1 - E_2 - k) \int d\vec{r}' \psi_f(\vec{r}') \gamma_v \psi_i(\vec{r}) \frac{e^{ikR}}{R} \quad (5.15)$$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

Damit können wir $\langle H_{int} \rangle$ in 1. Ordnung angeben

$$\langle H_{int} \rangle = \int A_v(\vec{r}) \vec{j}^v(\vec{r}) d\vec{r} \quad (5.16)$$

Mit (5.15), (5.16) und der expliziten Darstellung der Dirac-matrizen erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle H_{int} \rangle &= -e \int \psi_f^\dagger(\vec{r}') (\rho(\vec{r}) - \vec{\alpha} \vec{j}(\vec{r}) / c) \psi_i(\vec{r}) \frac{e^{ikr}}{r} d\vec{r} \\ &= iek4\pi \sum_{\lambda=0, \mu} \int \psi_f^\dagger (\rho - \vec{\alpha} \vec{j} / c) \psi_i j_\lambda(kr_<) h_\lambda^{(1)}(kr_>) \\ &\quad Y_\lambda^\mu(\Omega') Y_\lambda^\mu(\Omega) d\vec{r} \end{aligned} \quad (5.17)$$

wobei die Greensfunktion entwickelt wurde.

$r_<(r_>)$ ist jeweils der kleinere (größere) Wert von r und r' , j_λ die sphärische Besselfunktion und $h_\lambda^{(1)}$ die sphärische Hankelfunktion 1. Art. Benutzt man die Vertauschungsrelationen für zwei Vektoroperatoren (s. Anhang 7.5), so gilt

$$\begin{aligned} \langle H_{int} \rangle &= -4iek \left\{ \int \sum_{\lambda, \mu} h_\lambda(r') h_\lambda(r) (\psi_f^\dagger Y_\lambda^\mu \psi_i) \rho Y_\lambda^\mu \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\lambda \ell \mu} h_\ell(r') h_\ell(r) (\psi_f^\dagger \vec{\alpha} \vec{Y}_{\lambda \ell 1}^\mu \psi_i) \vec{Y}_{\lambda \ell 1}^\mu \vec{j} / c \right\} \quad (5.18) \\ h_\lambda(r') h_\lambda(r) &= j_\lambda(kr_<) h_\lambda^{(1)}(kr_>) \end{aligned}$$

Für die ein- und auslaufende Elektronenwellenfunktion machen wir eine Partialwellenzerlegung

$$\Psi^{f,i}(\vec{k}, \vec{r}) = \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \sum_{\kappa, m, j} e^{\pm i\delta_{\kappa}} \langle \frac{1}{2} \sigma \ell m | j \nu \rangle Y_{\ell}^{m*}(\hat{k}) \Psi_{\kappa}^{\nu}(\vec{r}) \quad (5.19)$$

δ_{κ} : Phasenverschiebung, σ : Spinprojektion

Ψ_{κ}^{ν} ist die zweikomponentige Wellenfunktion (Lösung zu H_0)

$$\Psi_{\kappa}^{\nu}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} g_{\kappa}(r) & \phi_{\kappa}^{\nu}(\Omega) \\ if_{\kappa}(r) & \phi_{-\kappa}^{\nu}(\Omega) \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

$$\phi_{\kappa}^{\nu}(\Omega) = \sum_{m, \sigma} \langle \frac{1}{2} \sigma \ell_{\kappa} m | j_{\kappa} \nu \rangle Y_{\ell_{\kappa}}^m(\Omega) \chi_{1/2}^{\sigma} \quad (5.21)$$

mit $j_{\kappa} = |\kappa| - \frac{1}{2}$ und $\ell_{\kappa} = \kappa$ für $\kappa > 0$ und $\ell_{\kappa} = -\kappa - 1$ für $\kappa < 0$. Die Radialwellenfunktionen g und f sind Lösungen der gekoppelten radialen Diracgleichungen und hängen von der Elektronenenergie und der Grundzustandsladungsverteilung des Kerns ab.

$$\begin{aligned} \frac{dg_{\kappa}}{dr} &= (E - m_e - V) f_{\kappa} - \frac{\kappa + 1}{r} g_{\kappa} \\ \frac{df_{\kappa}}{dr} &= \frac{\kappa - 1}{r} f_{\kappa} - (E - m_e - V) g_{\kappa} \end{aligned} \quad (5.22)$$

wobei $E = E_1$ oder E_2 und V das statische Coulombpotential des Kern ist.

Wie wir aus (5.18) ersehen, sind für $\langle H_{int} \rangle$ Matrixelemente der Form

$$(\Psi_f^{\sigma'} | Q_{\lambda}^{\mu} | \Psi_i^{\sigma}) = 8\pi^2 \sum_{\substack{\kappa \kappa' \\ m m'}} e^{i(\delta_{\kappa} + \delta_{\kappa'})} \langle \frac{1}{2} \sigma \ell m | j \nu \rangle \langle \frac{1}{2} \sigma' \ell' m' | j' \nu' \rangle \quad (5.23)$$

$$Y_{\ell}^{\mu*}(\hat{k}_1) Y_{\ell'}^{\mu'}(\hat{k}_2) (\Psi_{\kappa'}^{\nu'} | Q_{\lambda}^{\mu} | \Psi_{\kappa}^{\nu})$$

zu bestimmen.

Ein Vergleich mit (5.18) zeigt, daß Q_λ^μ die Form hat

$$Q_\lambda^\mu = Y_\lambda^{\mu*} \quad (5.24)$$

$$Q_\lambda^\mu = \vec{\alpha} \cdot \vec{Y}_{\lambda\ell 1}^{\mu*}$$

Mit (5.19), (5.20) und (5.21) erhält man für die Matrixelemente aus (5.23)

$$(\Psi_\kappa^{\nu'} | Y_\lambda^{\mu*} | \Psi_\kappa^\nu) = (-)^{\lambda+\mu} \langle j\nu\lambda-\mu | j'\nu' \rangle \{g_\kappa, g_\kappa \quad (5.25)$$

$$(\phi_\kappa | | Y_\lambda | | \phi_\kappa) + f_{\kappa, \kappa} (\phi_{-\kappa} | | Y_\lambda | | \phi_{-\kappa}) \}$$

$$(\Psi_\kappa^{\nu'} | \vec{\alpha} \cdot \vec{Y}_{\lambda\ell 1}^{\mu*} | \Psi_\kappa^\nu) = (-)^{\lambda+\mu} \langle j\nu\lambda-\mu | j'\nu' \rangle \quad (5.26)$$

$$\{g_\kappa, f_\kappa (\phi_\kappa | | \vec{\sigma} \cdot \vec{Y}_{\lambda\ell 1} | | \phi_{-\kappa}) - f_{\kappa, \kappa} (\phi_{-\kappa} | | \vec{\sigma} \cdot \vec{Y}_{\lambda\ell 1} | | \phi_\kappa) \}$$

Berechnet man diese Matrixelemente³⁾ und setzt sie in (5.18) ein, so erhält man für $\langle H_{\text{int}} \rangle$ in DWBA:

$$\begin{aligned} \langle H_{\text{int}} \rangle_{\text{DWBA}} &= -32\pi^3 e^2 k \sum_{\lambda\mu\kappa} \langle J_i M_i \lambda\mu | J_f M_f \rangle e^{i(\delta_\kappa - \delta_{\kappa'})} \\ &(-)^{j-\frac{1}{2}+\mu+\lambda} \frac{\hat{\lambda}\hat{j}\hat{j}'}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} j' & j & \lambda \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \langle \frac{1}{2} \sigma \ell m | j\nu \rangle \langle \frac{1}{2} \sigma' \ell' m' | j'\nu' \rangle \end{aligned}$$

$$\langle j'\nu\lambda-\mu | j'\nu' \rangle Y_\ell^{m*}(\hat{k}_1) Y_\ell^{m'}(\hat{k}_2) \quad (5.27)$$

$$\int \{ j_\lambda(kr_<) h_\lambda^{(1)}(kr_>) (T_{\kappa, \kappa\lambda}^S - iT_{\kappa, \kappa\lambda}^M)$$

$$- \sum_{\ell=\lambda\pm 1} j_\ell(kr_<) h_\lambda^{(1)}(kr_>) T_{\kappa, \kappa\lambda\ell}^{\text{el}} \} r'^2 r^2 dr' dr$$

$$\hat{\lambda} = \sqrt{2\lambda+1} \text{ etc.}$$

wobei:

$$T_{\kappa', \kappa \lambda}^S = G_{\kappa', \kappa}^+(r') \rho_{\lambda}(r) \quad (5.28)$$

$$T_{\kappa', \kappa, \lambda, \lambda-1}^{el} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\kappa}{\lambda} (\lambda F_{\kappa', \kappa}^-(r') - (\kappa' - \kappa) F_{\kappa', \kappa}^+(r')) \rho_{\lambda, \lambda-1}(r) \quad (5.29)$$

$$T_{\kappa', \kappa \lambda, \lambda+1}^{el} = \frac{1}{\sqrt{\lambda+1}} \frac{\kappa}{\lambda} ((\lambda+1) F_{\kappa', \kappa}^-(r') + (\kappa' - \kappa) F_{\kappa', \kappa}^+(r')) \rho_{\lambda, \lambda+1}(r) \quad (5.30)$$

$$T_{\kappa', \kappa \lambda}^M = \frac{\kappa' + \kappa}{\sqrt{\lambda(\lambda+1)}} F_{\kappa', \kappa}^+(r') \rho_{\lambda \lambda}(r) \quad (5.31)$$

und

$$G_{\kappa', \kappa}^+(r') = g_{\kappa', \kappa}(r') g_{\kappa}(r') + f_{\kappa', \kappa}(r') f_{\kappa}(r') \quad (5.32)$$

$$F_{\kappa', \kappa}^{\pm}(r') = g_{\kappa', \kappa}(r') f_{\kappa}(r') \pm f_{\kappa', \kappa}(r') g_{\kappa}(r') \quad (5.33)$$

IV. Numerische Rechnungen und Diskussion der Ergebnisse

6.1. Wahl der Einteilchenwellenfunktionen und der effektiven Wechselwirkung

Um numerische Ergebnisse für die Gleichungen in Abschnitt 3 und 4 zu erhalten, benötigt man die Einteilchenenergien ϵ_v , die Einteilchenwellenfunktionen $\varphi_v(\vec{r})$ und die effektive Teilchen-Loch-Wechselwirkung F^{ph} . In den vorliegenden Rechnungen wurden Einteilchenwellenfunktionen benutzt, die man aus einem Woods-Saxon Potential erhält. Im Gegensatz zum harmonischen Oszillator sind die Einteilchenenergien in einer Oszillatorschale nicht entartet. Man kann also alle Einteilchenenergien, die experimentell nicht bekannt sind, aus der Theorie erhalten. Für die Energien ϵ_v , die in der FFS Theorie Energiedifferenzen zwischen dem (exakten) Grundzustand des A-Teilchensystems und den zugehörigen Zuständen des A+1 Systems (s. Abschnitt 2) sind, werden, soweit bekannt, experimentelle Einteilchenenergien benutzt. Ansonsten werden sie aus dem Woods-Saxon Potential¹³⁾

$$V(r) = V_0 \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{r - R_0}{\alpha_0}\right)} - \frac{\hbar^2}{2Mc} \lambda (\vec{\ell} \cdot \vec{s}) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} V_0 \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{r - R_{LS}}{\alpha_{LS}}\right)} + V_C \quad (6.1)$$

berechnet. V_C ist das Coulombpotential einer homogenen Ladungsverteilung mit dem Radius R_C . Die benutzten Potentialparameter sind die gleichen wie in Ref. 5). Die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Einteilchenpotentials (6.1) erhält man durch Diagonalisieren des Einteilchenhamiltonoperators in einer beschränkten Oszillatorbasis.

Für die effektive Teilchen-Loch-Wechselwirkung wurde eine dichteabhängige δ -Kraft der Form

$$F_O^{ph}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4) = C \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_4) \quad (6.2)$$

$$(f + f' \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}' + \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' (g + g' \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}'))$$

verwendet⁵⁾.

Der Stärkeparameter C ist

$$C = \frac{d\epsilon_F}{dn} = \frac{16}{9} \pi \epsilon_F r_O^2 \quad (6.3)$$

Nach Ref. 5) sind die verschiedenen Kraftparameter in (6.2) durch folgenden Ansatz gegeben

$$f(r) = f^{ex} + (f^{in} - f^{ex}) \rho(r) \quad (6.4)$$

$$\rho(r) = \frac{1}{1 + \exp((r - R_O)/\alpha)} \quad (6.5)$$

f^{ex} und f^{in} bezeichnen die Parameter innerhalb und außerhalb des Kerns. Für die Kombinationen

$$f^{pp} = f + f', \quad f^{pn} = f - f', \quad g^{pp} = g + g', \quad g^{pn} = g - g' \quad (6.6)$$

wurden in der Berechnung die Werte aus Tabelle 1.a angenommen und für die Interpolationsradien und Abfallbreiten die Werte aus Tabelle 1.b. Für die Renormierung des effektiven magnetischen Operators (4.11) wurde angesetzt

$$\text{Proton: } \tilde{g}_p = 1 - \zeta_{lp} \quad \tilde{\mu}_p = g_{sp}(1 - \zeta_{sp}) + g_{sn} \zeta_{sp} \quad (6.7)$$

$$\text{Neutron: } \tilde{g}_n = \zeta_{ln} \quad \tilde{\mu}_n = g_{sp} \zeta_{sn} + g_{sn}(1 - \zeta_{sn}) \quad (6.8)$$

g_{sp} und g_{sn} sind die magnetischen Momente der Nukleonen

$$g_{sp} = \mu_p = 2.793$$

$$g_{sn} = \mu_n = -1.913$$

Die Zetakonstanten sind in Tabelle 2 gegeben.

6.2. Einfluß der Stromterme auf den differentiellen Wirkungsquerschnitt

Wie wir in Abschnitt 5.1. gesehen haben, gehen in den differentiellen Wirkungsquerschnitt für inelastische Elektronenstreuung sowohl die Übergangsdichte ρ_λ als auch die Stromdichten $\rho_{\lambda\ell}$ ein ((5.28)-(5.31)). Dabei sind jedoch die einzelnen Anteile verschieden gewichtet. Betrachten wir dazu den differentiellen Wirkungsquerschnitt in Bornscher Näherung³⁾

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}^{\text{Born}} = \frac{Z^2 \alpha^2}{q_\mu^4} \frac{k_2}{k_1} \frac{2}{1+2E_2/M \sin^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2(J_1+1)} \quad (6.9)$$

$$\{V_L(\theta) \sum_{\lambda=0} |F_\lambda^C(q^2)|^2 + V_T(\theta) \sum_{\lambda=1} |F_\lambda^m(q^2)|^2 + |F_\lambda^E(q^2)|^2\}$$

wobei

$$F_\lambda^C(q^2) \sim \int \rho_\lambda(r) j_\lambda(qr) r^2 dr \quad (6.10)$$

$$F_\lambda^E(q^2) \sim \int \{\sqrt{\lambda+1} \rho_{\lambda,\lambda-1}(r) j_{\lambda-1}(qr) + \sqrt{\lambda} \rho_{\lambda,\lambda+1}(r) j_{\lambda+1}(qr)\} r^2 dr \quad (6.11)$$

und

$$F_\lambda^m(q^2) \sim \int \rho_{\lambda\lambda}(r) j_\lambda(qr) r^2 dr \quad (6.12)$$

Die Gewichtungsfaktoren $V_L(\theta)$ und $V_T(\theta)$ sind gegeben durch (Elektronenmasse vernachlässigt)

$$V_L(\theta) = \frac{q_\mu^4}{q^4} 2k_1 k_2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (6.13)$$

$$V_T(\theta) = \frac{2k_1 k_2}{q^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \left| (k_1 + k_2)^2 - 2k_1 k_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right| \quad (6.14)$$

Diese Winkelabhängigkeit ist für eine Elektronenenergie von 400 MeV und eine Anregungsenergie von 5 MeV in Fig. 6.1 dargestellt. Wie man sieht, spielen in Vorwärtsrichtung die Strombeiträge keine Rolle. Geht man jedoch zu Rückwärtswinkeln über, so nimmt $V_L(\theta)$ stark ab, so daß der Einfluß der Stromterme sichtbar wird. Fig. 6.2 und 6.3 zeigen die Änderung des Wirkungsquerschnitts unter Rückwärtswinkeln mit und ohne Strombeiträge am Beispiel des 3^- Zustands in ^{208}Pb bei einer Anregungsenergie von 2.68 MeV für verschiedene Einschußenergien. Eine Beachtung in der Gegend von 180° ermöglicht also, die Strombeiträge experimentell zu untersuchen und insbesondere Austauschstromeffekte zu beobachten.

6.3. M1 Riesenresonanzen in ^{208}Pb

In den letzten Jahren sind kollektive Zustände verschiedener Multipolaritäten entdeckt worden. Die bestbekannten Zustände sind zur Zeit die Quadrupolriesenresonanzen (GQR)¹⁴⁾. Andere einigermaßen erforschte Resonanzen sind die magnetischen Dipolriesenresonanzen (MDR). In Ref. 16) wird diskutiert, daß magnetische Dipolzustände, die bis jetzt entdeckt wurden, nicht mit der GQR vergleichbar wären. Es zeigt sich aber, daß es starke kollektive 1^+ Zustände gibt, die der GQR durchaus entsprechen und die experimentell durch inelastische Elektronenstreuung beobachtet werden könnten. Im folgenden wird die Situation im ^{208}Pb untersucht. Die

Argumente sind aber nicht auf diesen Kern beschränkt, sondern gelten ganz allgemein.

Die MDR, die bisher untersucht wurden, sind Übergänge zwischen Spin-Bahn Partnern ($j_<, j_>$, Fig. 6.4), die in schweren Kernen wegen der Absenkung durch die Spin-Bahn Wechselwirkung in verschiedenen Schalen liegen. Die Energie dieser 1^+ Zustände ist größer als die der zugehörigen Spin-Bahn Aufspaltung wegen der abstoßenden Wirkung des spinabhängigen Teils der Teilchen-Loch Wechselwirkung¹⁷⁾. In TDA oder RPA Näherung ist die Struktur der 1^+ Zustände in ^{208}Pb durch die beiden Spin-Bahn Partner $1\pi h_{9/2} - 1\pi h_{11/2}$ und $1\nu i_{11/2} - 1\nu i_{13/2}$ gegeben. Die Einteilchenenergien sind 5.84 MeV und 5.75 MeV, also viel kleiner als die experimentell bekannten MDR bei 7.56 MeV und 7.99 MeV¹⁸⁾. Es zeigt sich, daß die höheren ($\lambda > 1$) magnetischen Momente und Übergangswahrscheinlichkeiten nur dann richtig wiedergegeben werden⁶⁾, wenn man außer den Spin-Bahn Partnern ($1\hbar\omega$) auch $2\hbar\omega$ -Anregungen mitnimmt. Es wurden also solche 1^+ Zustände gesucht, die nicht von den Spin-Bahn Partnern herkommen. Im großen Konfigurationsraum ($2\hbar\omega$) erhält man 57 Teilchen-Loch Konfigurationen statt 2 im kleinen ($1\hbar\omega$). Also erhält man auch 57 1^+ Zustände. Die meisten haben Anregungsenergien zwischen 15 und 25 MeV. Die M1 Übergangsstärke in den Grundzustand ist jedoch auf die beiden tiefsten 1^+ Zustände bei 7.53 und 8.27 MeV beschränkt, die im wesentlichen durch die beiden Spin-Bahn Partner gegeben sind. Dies folgt nicht aus der Kollektivität dieser Zustände, sondern aus den speziellen Auswahlregeln für den M1 Operator, der keine Radialabhängigkeit hat.

Die radiale Abhängigkeit des M1 Operators ist r^0 , so daß die Radialmatrixelemente

$$R_{n_1 n_2}^0 = \int_0^\infty R_{n_1 \ell_1}(r) R_{n_2 \ell_2}(r) r^2 dr \quad n_1 \neq n_2 \quad (6.15)$$

für $2\hbar\omega$ Übergänge im Oszillatorpotential exakt verschwinden bzw. im Woods-Saxon Potential sehr klein sind. Der Korrekturterm $r^2[Y_{20}]_1$ im effektiven M1 Operator bringt zwar eine Radialabhängigkeit, aber die M1 Einteilchenmatrixelemente für $2\hbar\omega$ Konfigurationen bleiben mindestens eine Größenordnung kleiner als die $1\hbar\omega$ Matrixelemente. Deshalb haben die höheren Zustände praktisch vernachlässigbare Stärke. Es wurden mehrere kollektive Zustände bei 19 MeV und ein extrem kollektiver bei 25.16 MeV gefunden (Fig. 6.5). Ihre Energien und M1 Übergangswahrscheinlichkeiten sind in Tabelle 3 wiedergegeben.

Wenn wir die magnetischen Dipolzustände mit den zugehörigen Quadrupolzuständen in Ref. 4) und 19) vergleichen, so finden wir, daß die beiden tiefliegenden MDR den tiefliegenden E2-Niveaus (bei etwa 4.07 MeV) entsprechen. Auf der anderen Seite sind die hochliegenden kollektiven 1^+ Zustände Analoga zu den hochliegenden 2^+ Zuständen (T=1 Quadrupolriesenresonanzen). Der Riesenresonanzcharakter dieser Zustände ist also nur durch die spezielle Form des M1 Operators verdeckt. Jeder Operator, der eine Radialabhängigkeit aufweist, wird die Kollektivität zeigen. In der Elektronenstreuung ist der radiale Formfaktor die sphärische Besselfunktion $j_\lambda(kr)$. Ein Maß für die Kollektivität ist die Übergangsdichte $\rho_{\lambda\lambda}(r)$. Der kollektive magnetische Dipolzustand bei 25.16 MeV ist in Fig. 6.6 dargestellt. Zum

Vergleich werden in dieser Figur auch die Dichten der beiden tiefsten Niveaus dargestellt. Fig. 6.6 zeigt klar die größere Kollektivität der hochliegenden Resonanz im Vergleich zu der niedrigeren. Die Unterschiede werden noch deutlicher, wenn man sich $d\sigma/d\Omega$ für inelastische Elektronenstreuung anschaut. In Fig. 6.7 ist der Wirkungsquerschnitt für die kollektivsten 1^+ Zustände und zum Vergleich die entsprechende Größe für die beiden tiefsten 1^+ Resonanzen gezeigt.

Der Effekt des kollektivsten Zustands ist um eine Größenordnung größer als für die tiefliegenden Zustände. Dieser Zustand ist praktisch ein reiner Protonen-Teilchen-Loch Zustand. Deshalb kann man erwarten, daß die escape-width nicht größer als 1 MeV ist, da die Breite der entsprechenden (theoretischen) Einteilchenresonanz in ^{209}Bi in den meisten Fällen kleiner als 100 keV ist. Eine zusätzliche Verbreiterung ist durch kompliziertere Konfigurationen, wie 2-Teilchen-2-Loch Beiträge zu erwarten, die größer sind als die escape-width. Die meisten Teilchen-Loch Konfigurationen, die zu dem Zustand bei 25 MeV beitragen, haben Einteilchenenergiedifferenzen zwischen 15 und 17 MeV. Deshalb ist dieser Zustand um nahezu 10 MeV verschoben. Dies zeigt eine starke Abhängigkeit der Resonanzenergie von der Teilchen-Loch Wechselwirkung und bringt eine Unsicherheit von einigen MeV. Deshalb erwarten wir, daß im Vergleich zu den tiefliegenden theoretischen und experimentellen Niveaus 25 MeV eine obere Grenze darstellt.

6.4. Untersuchung der Dichteverteilungen in ungeraden Kernen

Es hat sich gezeigt, daß theoretische Werte für Momente und Übergangswahrscheinlichkeiten in ungeraden Kernen im Modell unabhängiger Teilchen starke Abweichungen vom Experiment zeigen. In diesem Modell sind z.B. elektrische Übergänge zwischen Einteilchenzuständen im ^{209}Pb gleich Null, da das zusätzliche Neutron außerhalb der abgeschlossenen Schale keine Ladung besitzt. Experimentell wird jedoch eine Übergangswahrscheinlichkeit beobachtet. Der Grund für diese Abweichung ist, daß der effektive elektromagnetische Operator Q^{eff} Vibrationen des Cores anregt, die mit dem zusätzlichen Teilchen des ungeraden Kerns wechselwirken (s. Gleichung (3.29) und Fig. 3.2).

6.4.a Magnetische Übergangs- und Momentverteilungen in ungeraden Kernen

Durch die Kopplung des zusätzlichen Teilchens an den Core spielen bei M1 Übergängen und Momenten in ungeraden Kernen die hochliegenden kollektiven 1^+ Zustände des geraden Kerns eine Rolle. Ihr Einfluß auf die Dichteverteilungen wird im folgenden für die Nachbarkerne von ^{208}Pb untersucht. Die Übergangswahrscheinlichkeiten und Momente werden von den hochliegenden Zuständen wegen der speziellen Eigenschaften des M1 Operators nicht wesentlich beeinflusst. Fig. 6.8-6.12 zeigen Momentverteilungen der Grundzustände von Nachbarkernen von ^{208}Pb und M1 Übergangsstromverteilungen in die Grundzustände sowohl für $1\hbar\omega$ als auch $2\hbar\omega$ Anregungen des ^{208}Pb Cores. Der spinabhängige Teil der Teilchen-

Loch Wechselwirkung reduziert die Dichteverteilungen, wenn man die Corebeiträge mitberücksichtigt. Die Vergrößerung der Momentverteilung in ^{209}Bi liegt daran, daß der Bahndrehimpuls und der Spin beim $1h_{9/2}$ Zustand antiparallel stehen.

Betrachten wir den Spin-Flip Übergang $\nu^{-1}3p_{3/2} \rightarrow \nu^{-1}3p_{1/2}$ in ^{207}Pb (Fig. 6.11). Obwohl sich die Übergangsstärke für $1\hbar\omega$ und $2\hbar\omega$ Anregungen des Cores nur um etwa 3 % unterscheidet (Tabelle 4), ändern sich die Dichteverteilungen um bis zu 30 %. Jeder Operator mit Radialabhängigkeit kann diese Unterschiede sichtbar machen. Fig. 6.13 zeigt die Effekte, die man aufgrund der Dichteänderung für $1\hbar\omega$ und $2\hbar\omega$ Beiträge im differentiellen Wirkungsquerschnitt für inelastische Elektronenstreuung beobachten kann. Wie man Fig. 6.11 entnimmt, sind die Dichteänderungen bei kleinen Radien besonders groß, so daß die Effekte bei höheren Einschußenergien besonders gut sichtbar werden.

Ein besonders signifikanter Test auf die spinabhängige Restwechselwirkung und die Wahl des effektiven M1 Operators sind magnetische Übergänge, die den Bahndrehimpuls der Einteilchenzustände um 2 Einheiten ändern. Im Modell der unabhängigen Teilchen sind solche Übergänge absolut verboten. Sie erhalten erst dann eine Übergangswahrscheinlichkeit, wenn man zum effektiven M1 Operator übergeht, der, wie wir gesehen haben, mesonische Korrekturen und "higher order corrections" enthält. Der Tensorterm $r^2[Y_2 \times \sigma]_1$ hat für Bahndrehimpulsänderungen $\Delta l=2$ nicht verschwindende Matrixelemente. Da $r^2[Y_2 \times \sigma]_1$ bereits eine Radialabhängigkeit enthält, sollten die Abweichungen in der Übergangsstärke und der Dichteverteilung für $1\hbar\omega$ und $2\hbar\omega$ Beiträge des Cores

in der gleichen Größenordnung liegen. Fig. 6.12 und 6.14 zeigen die Verhältnisse für den ℓ -verbotenen M1 Übergang $\pi 2f_{7/2} \rightarrow \pi 1h_{9/2}$ in ^{209}Bi . Vergleicht man die Abweichungen in der Übergangsstärke mit denen in der Dichteverteilung, so sieht man, daß sie in der gleichen Größenordnung liegen (Tabelle 4). Bei ℓ -verbotenen Übergängen sind also die Einflüsse der hochliegenden 1^+ Zustände nicht verdeckt. Man kann sie direkt aus den Übergangsstärken ablesen (Tabelle 4).

6.4.b Elektrische Übergangs- und Momentverteilungen in ungeraden Kernen

Im elektrischen Fall wollen wir als Näherung Q^{eff} durch den nackten Schalenmodelloperator ersetzen. In Langwellennäherung kann man zeigen, daß dies gerechtfertigt ist. Da bei der Elektronenstreuung jedoch die Langwellennäherung aufgegeben werden muß, ist es nicht ohne weiteres klar, ob diese Näherung noch richtig ist. Dies wäre genauer zu untersuchen. Wenn wir annehmen, daß $Q_{\text{elektr.}}^{\text{eff}} = Q_{\text{elektr.}}^{\text{Schalenmodell}}$ auch dann als gute Näherung richtig ist, wenn die Langwellennäherung nicht mehr gilt, so kommen Abweichungen von den theoretischen Werten im Modell unabhängiger Teilchen im wesentlichen vom 2. und 3. Term in (3.29), d.h. von den Coreanregungen her. Elektrische Übergänge und Momente sind somit ein empfindlicher Test für die Wahl der effektiven Teilchen-Loch Wechselwirkung.

Da experimentell Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Neutronenzuständen in ungeraden Kernen beobachtet werden, können diese nur von der p-n Wechselwirkung des zusätzlichen Neutrons mit dem Core herrühren. Neutronenübergänge geben also Aufschluß über den

p-n abhängigen Teil der effektiven Wechselwirkung. Elektrische Momentverteilungen und Übergangsdichten von Neutronenzuständen (Fig. 6.16-6.18) zeigen keine ausgeprägte Einteilchenstruktur (im Gegensatz zu magnetischen Übergängen), da sie nur Corebeiträge enthalten.

Abweichungen in Übergangswahrscheinlichkeiten von Protonen- und Neutronenzuständen in ungeraden Kernen durch die Wechselwirkung mit dem Core werden oft durch "effektive Ladungen" beschrieben. In Ref. 5) wurde gezeigt, daß die effektive Ladung keine Zahl ist, sondern eine Matrix, die alle Matrixelemente des elektrischen Operators Q_λ enthält und zudem energieabhängig ist. Zusätzlich gilt, daß das Konzept der effektiven Ladung bei der Berechnung von Dichteverteilungen keinen Sinn ergibt, solange die effektive Ladung eine Zahl ist. Fig. 6.19 zeigt die Einteilchendichteverteilung des E2 Neutronenlochübergangs $\nu^{-1}3p_{3/2} \rightarrow \nu^{-1}3p_{1/2}$ in ^{207}Pb multipliziert mit der effektiven Ladung. In der Langwellennäherung ergibt sich dann (4.19) die gleiche Übergangswahrscheinlichkeit, als wenn man in der Dichteverteilung die Corepolarisationsbeiträge mitberücksichtigt. Vergleicht man jedoch die Dichteverteilungen selbst (Fig. 6.19) oder die Wirkungsquerschnitte für inelastische Elektronenstreuung (Fig. 6.20), so wird deutlich, daß man das Bild der effektiven Ladungen nur dann in der Elektronenstreuung übernehmen kann, wenn man diese orts- (bzw. impuls-) abhängig macht.

6.5. Zusammenfassung

Mit Hilfe der Theorie der endlichen Fermisysteme wurden elektromagnetische Übergangsdichten in der Blei-Gegend berechnet. Da, wie in Ref. 5) und 6) diskutiert wird, die Wahl des Konfigurationsraumes die theoretischen Ergebnisse für Übergangswahrscheinlichkeiten und Momente wesentlich beeinflusst, wurden die Effekte verschiedener Konfigurationsräume ($1\hbar\omega$, $2\hbar\omega$) auf die Dichteverteilungen in ^{208}Pb und seiner Nachbarkerne untersucht.

Im ^{208}Pb wurden hochliegende kollektive 1^+ Zustände gefunden, die von $2\hbar\omega$ Teilchen-Loch Übergängen herrühren und deren Kollektivität nur durch die speziellen Eigenschaften des M1 Operators verdeckt sind. Im differentiellen Wirkungsquerschnitt für inelastische Elektronenstreuung wird die starke Kollektivität dieser hochliegenden Zustände deutlich sichtbar. Während die MDR bei 7.56 MeV und 7.99 MeV den tiefliegenden 2^+ Zuständen (4.08 MeV - 6.0 MeV) entsprechen, haben wir Analoga zu den hochliegenden ($T=1$) GQR gefunden. Die Aussagen sind nicht auf die Blei-Gegend beschränkt, sondern gelten allgemein.

Die hochliegenden 1^+ Zustände von ^{208}Pb beeinflussen die Dichteverteilungen von M1 Übergängen in Nachbarkernen wesentlich. Während die Effekte bei Übergangswahrscheinlichkeiten und Momenten verdeckt sind, machen inelastischen (e,e') Streuexperimente die Unterschiede deutlich sichtbar.

V. Anhang

7.1. Berechnung der Übergangsladungsdichte

Die Übergangsdichte $\rho(\vec{r})$ ist gegeben durch

$$\rho(\vec{r}) = e \sum_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) g_L^k \{\psi_f^* \psi_i\} \quad (7.1)$$

g_L ist der Bahn-g-Faktor der Nukleonen ($g_L^p = 1$, $g_L^n = 0$). Die geschwungenen Klammern bedeuten, daß über alle inneren Koordinaten außer $\vec{r}_k$ integriert wird. Um den Radialanteil abzuspalten, betrachten wir die Multipolentwicklung für $\rho(\vec{r})$.

$$\rho(\vec{r}) = e(2J_f+1)^{-1/2} \sum_{\lambda, \mu} \langle J_i M_i \lambda \mu | J_f M_f \rangle \rho_{\lambda}(r) Y_{\lambda}^{\mu}(\Omega) \quad (7.2)$$

Multipliziert man (7.1) und (7.2) mit $Y_{\lambda}^{\mu}(\Omega)$ und integriert, so erhält man

$$\begin{aligned} e(2J_f+1)^{-1/2} \sum_{\lambda, \mu} \langle J_i M_i \lambda \mu | J_f M_f \rangle \int d\vec{r} \rho_{\lambda}(r) Y_{\lambda}^{\mu}(\Omega) Y_{\lambda}^{\mu}(\Omega) \\ = e \langle J_f M_f | \sum_k g_L^k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) Y_{\lambda}^{\mu}(\Omega_k) | J_i M_i \rangle \end{aligned} \quad (7.3)$$

Wegen Orthogonalität der Clebsch-Gordon Koeffizienten und der Kugelflächenfunktionen erhalten wir, wenn wir (7.3) mit $(2J_f+1) \cdot \langle J_i M_i \lambda \mu | J_f M_f \rangle$ multiplizieren, über M_i und μ summieren und das Wigner-Eckart-Theorem ausnutzen:

$$\begin{aligned} \int dr r^2 \rho_{\lambda}(r) &= \langle J_f || \sum_k g_L^k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) Y_{\lambda}(\Omega_k) || J_i \rangle \\ &= \int dr r^2 (J_f || g_L Y_{\lambda}(\Omega) || J_i) \end{aligned} \quad (7.4)$$

oder

$$\rho_{\lambda}(r) = (J_f || g_L Y_{\lambda}(\Omega) || J_i) , \quad (7.5)$$

wobei g_L jetzt als Projektor auf die Protonenzustände aufzufassen ist. Mit Def. (4.8) ergibt sich

$$\rho_{\lambda}(r) = \sum_{v_1, v_2} \rho_{v_1, v_2}^{if, \lambda} g_L(v_1 || Y_{\lambda}(\Omega) || v_2) \quad (7.6)$$

Das reduzierte Matrixelement der Kugelflächenfunktion ist

$$(v_1 || Y_{\lambda}(\Omega) || v_2) = (-)^{j_1 - \frac{1}{2}} \hat{j}_1 \hat{j}_2 \hat{\lambda} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \lambda \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} u_1(r) u_2(r) \quad (7.7)$$

wobei $\hat{j}_1 = (2j_1 + 1)^{1/2}$ etc. und $u_1(r)$, $u_2(r)$ die Radialwellenfunktionen sind.

7.2. Berechnung der Übergangskonvektionsstromdichte

Die Konvektionsstromdichte $j^C(r)$ ist gegeben durch

$$j^C(\vec{r}) = \frac{e\hbar}{2Mi} \sum_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) g_L^k (\psi_f^* \vec{\nabla}_k \psi_i - \psi_i \vec{\nabla}_k \psi_f^*) \quad (7.8)$$

g_L^k sind die Bahn-g-Faktoren der Nukleonen.

Die Multipolentwicklung des Stromes lautet

$$j^C(r) = c/i (2J_f + 1)^{-1/2} \sum_{\lambda, \ell, \mu} \langle J_i M_i \lambda' \mu' | J_f M_f \rangle \rho_{\lambda, \ell}^C(r) \vec{Y}_{\lambda, \ell, 1}^{\mu*}(\Omega) \quad (7.9)$$

Sei $f(r)$ eine beliebige Funktion, für die $\Psi_f^* \Psi_i f(r) r^2$ für $r \rightarrow \infty$ verschwindet. Multiplizieren wir (7.8) und (7.9) mit $f(r) \tilde{Y}_{\lambda\ell 1}^\mu(\Omega)$ und integrieren, so folgt

$$\begin{aligned}
 & (2J_f+1)^{-1/2} \sum_{\lambda'\ell'\mu'} \langle J_i M_i \lambda' \mu' | J_f M_f \rangle \int d\vec{r} \rho_{\lambda'\ell'}^c(r) \tilde{Y}_{\lambda'\ell'1}^{\mu'}(\Omega) \tilde{Y}_{\lambda\ell 1}^\mu(\Omega) f(r) \\
 &= (2J_f+1)^{-1/2} \langle J_i M_i \lambda \mu | J_f M_f \rangle \int dr r^2 f(r) \rho_{\lambda\ell}^c(r) \\
 &= \mu_0 \{ \langle J_f M_f | \sum_k g_L^k \delta(\vec{r}-\vec{r}_k) f(r_k) \tilde{Y}_{\lambda\ell 1}^\mu(\Omega_k) \cdot \vec{\nabla}_k | J_i M_i \rangle \\
 &\quad - \langle J_i M_i | \sum_k g_L^k \delta(\vec{r}-\vec{r}_k) f(r_k) \tilde{Y}_{\lambda\ell 1}^{\mu*}(\Omega_k) \cdot \vec{\nabla}_k | J_f M_f \rangle^* \}
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

Nutzen wir jetzt wieder die Orthogonalität der Clebsch-Gordon Koeffizienten und das Wigner-Eckart Theorem aus, so folgt nach Multiplikation mit $\langle J_i M_i \lambda \mu | J_f M_f \rangle (2J_f+1)^{1/2}$ und Summation über M_i und μ

$$\begin{aligned}
 \int dr r^2 f(r) \rho_{\lambda\ell}^c(r) &= \mu_0 \langle J_f | | \sum_k g_L^k \delta(\vec{r}-\vec{r}_k) \\
 &\quad \{ f(r_k) \tilde{Y}_{\lambda\ell 1}(\Omega_k) \cdot \vec{\nabla}_k + \vec{\nabla}_k f(r_k) \tilde{Y}_{\lambda\ell 1}(\Omega_k) \} | | J_i \rangle \\
 &= \mu_0 \int dr r^2 (J_f | | g_L \{ f(r) \tilde{Y}_{\lambda\ell 1}(\Omega) \cdot \vec{\nabla} + \vec{\nabla} \cdot f(r) \tilde{Y}_{\lambda\ell 1}(\Omega) \} | | J_i) \\
 &= \mu_0 \int dr r^2 \sum_{\nu_1 \nu_2} \rho_{\nu_1 \nu_2}^{if\lambda} g_L(\nu_1 | | f(r) \tilde{Y}_{\lambda\ell 1} \cdot \vec{\nabla} + \vec{\nabla} f(r) \tilde{Y}_{\lambda\ell 1} | | \nu_2)
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

Um das Ergebnis unabhängig von der Funktion f zu schreiben ($\vec{\nabla}$ wirkt auf f !), wird die Relation für den hermitesch konjugierten Einteilchenoperator verwendet

$$(\vec{\nabla} f \tilde{Y}_{\lambda\ell 1}^\mu)^+ = (-)^{\mu+\lambda+\ell} f^* \tilde{Y}_{\lambda\ell 1}^{-\mu} \cdot \vec{\nabla} \tag{7.12}$$

Mit (7.12) gilt für das reduzierte Matrixelement

$$\begin{aligned} \langle v_1 | | \vec{\nabla} f \vec{Y}_{\lambda \ell 1} | | v_2 \rangle &= j_1 + j_2 + 1 + \lambda + \ell \langle v_2 | | f^* \vec{Y}_{\lambda \ell 1} \cdot \vec{\nabla} | | v_1 \rangle^* \\ &= (-)^{j_1 + j_2 + 1 + \ell + \lambda} \int dr r^2 f(r) (v_2 | | \vec{Y}_{\lambda \ell 1}^* \cdot \vec{\nabla} | | v_1)^* \end{aligned} \quad (7.13)$$

Damit ist das Ergebnis unabhängig von f und man erhält:

$$\begin{aligned} \rho_{\lambda \ell}^c(r) &= \mu_0 \sum_{v_1 v_2} \rho_{v_1 v_2}^{if, \lambda} g_L \{ (v_1 | | \vec{Y}_{\lambda \ell 1} \cdot \vec{\nabla} | | v_2) + (-)^{j_1 + j_2 + \lambda + \ell + 1} \\ &\quad (v_2 | | \vec{Y}_{\lambda \ell 1}^* \cdot \vec{\nabla} | | v_1)^* \} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Separiert man die Spinwellenfunktion ab, so gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \ell_1 j_1 | | \vec{Y}_{\lambda \ell 1} \cdot \vec{\nabla} | | \frac{1}{2} \ell_2 j_2 \right) &= (-)^{j_1 + \frac{1}{2} + \ell_2 + \lambda} \hat{j}_1 \hat{j}_2 \begin{Bmatrix} \ell_1 & j_1 & \frac{1}{2} \\ j_2 & \ell_2 & \lambda \end{Bmatrix} \\ &\quad (\ell_1 | | \vec{Y}_{\lambda \ell 1} \cdot \vec{\nabla} | | \ell_2) \end{aligned} \quad (7.15)$$

Also

$$\begin{aligned} \rho_{\lambda \ell}^c &= \mu_0 \sum_{v_1, v_2} g_L \rho_{v_1, v_2}^{if, \lambda} (-)^{j_1 + \frac{1}{2} + \ell_2 + \lambda} \hat{j}_1 \hat{j}_2 \\ &\quad \left[\begin{Bmatrix} \ell_1 & j_1 & \frac{1}{2} \\ j_2 & \ell_2 & \lambda \end{Bmatrix} (\ell_1 | | \vec{Y}_{\lambda \ell 1} \cdot \vec{\nabla} | | \ell_2) + (-)^{\lambda + \ell + \ell_1 + \ell_2} \right. \\ &\quad \left. \begin{Bmatrix} \ell_2 & j_2 & \frac{1}{2} \\ j_1 & \ell_1 & \lambda \end{Bmatrix} (\ell_2 | | \vec{Y}_{\lambda \ell 1}^* \cdot \vec{\nabla} | | \ell_1)^* \right] \\ &= \mu_0 \sum_{v_1, v_2} g_L \rho_{v_1, v_2}^{if, \lambda} \hat{j}_1 \hat{j}_2 (-)^{j_1 + \frac{1}{2} + \ell_2 + \lambda} \begin{Bmatrix} \ell_1 & j_1 & \frac{1}{2} \\ j_2 & \ell_2 & \lambda \end{Bmatrix} \\ &= \left[(\ell_1 | | \vec{Y}_{\lambda \ell 1} \cdot \vec{\nabla} | | \ell_2) + (-)^{\lambda + \ell + \ell_1 + \ell_2} (\ell_2^* | | \vec{Y}_{\lambda \ell 1}^* \cdot \vec{\nabla} | | \ell_1^*) \right] \end{aligned} \quad (7.16)$$

In Tensorschreibweise gilt:

$$\vec{Y}_{\lambda\ell_1} \cdot \vec{\nabla} = [\mathbf{Y}^\ell \times \nabla^{(1)}]_\mu^\lambda \quad (7.17)$$

Nach Ref. 9) können wir dieses Tensorprodukt entkoppeln

$$(\ell_1 || [\mathbf{Y}^\ell \times \nabla^{(1)}]^\lambda || \ell_2) = \hat{\lambda}(-)^{\ell+\ell_1+\ell_2} \sum_{\ell'} \left\{ \begin{matrix} \ell & 1 & \lambda \\ \ell_2 & \ell_1 & \ell' \end{matrix} \right\} \quad (7.18)$$

$$(\ell_1 || \mathbf{Y}^\ell || \ell') (\ell' || \nabla || \ell_2)$$

Die entkoppelten Matrixelemente lauten:

$$(\ell_1 || \mathbf{Y}^\ell || \ell') = (-)^{\ell_1} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \hat{\ell} \hat{\ell}_1 \hat{\ell}' \left\{ \begin{matrix} \ell_1 & \ell & \ell' \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\} \quad (7.19)$$

$$(\ell' || \nabla || \ell_2) = \pm \sqrt{\ell_2 + \frac{1}{2}} (1 \pm 1) u_1^*(r) \quad (7.20)$$

$$\left\{ \frac{d}{dr} \mp \frac{1}{r} [\ell_2 + \frac{1}{2} (1 \mp 1)] \right\} u_2(r)$$

oberes Vorzeichen $\ell' = \ell_2 + 1$

unteres Vorzeichen $\ell' = \ell_2 - 1$

Für die Berechnung von $(\ell_2^* || \vec{Y}_{\lambda\ell_1} \cdot \vec{\nabla} || \ell_1^*)$ vertauschen wir ℓ_1 mit ℓ_2 und $u_1(r)$ mit $u_2(r)$ in (7.19) und (7.20).

7.3. Berechnung der Übergangsmagnetisierungsstromdichte

Die Magnetisierungsstromdichte ist gegeben durch

$$\vec{j}^m(\vec{r}) = \frac{e\hbar}{2M} \sum_{\mathbf{k}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\mathbf{k}}) \mu_s^{\mathbf{k}} \vec{\nabla}_{\mathbf{k}} \times \{ \psi_f \vec{\sigma}_{\mathbf{k}} \psi_i \} \quad (7.21)$$

$\mu_s^{\mathbf{k}}$ ist das magnetische Moment der Nukleonen.

Um wieder den Radialanteil abzuspalten, betrachten wir die Multipolentwicklung:

$$j^m(\vec{r}) = c/i (2J_f+1)^{-1/2} \sum_{\lambda' \ell' \mu'} \langle J_i M_i \lambda' \mu' | J_f M_f \rangle \rho_{\lambda' \ell'}^m(r) \tilde{Y}_{\lambda' \ell' 1}^{\mu' *}(\Omega) \quad (7.22)$$

Jetzt multiplizieren wir (7.21) und (7.22) mit $f(r) \tilde{Y}_{\lambda \ell 1}^\mu(\Omega)$, wobei $f(r)$ die gleiche Bedingung erfüllen möge wie in Abschnitt 7.2., und integrieren

$$\begin{aligned} & (2J_f+1)^{-1/2} \langle J_i M_i \lambda \mu | J_f M_f \rangle \int dr r^2 \rho_{\lambda \ell}^m(r) f(r) \\ &= \mu_0 i \int d\vec{r} \sum_k \delta(\vec{r}-\vec{r}_k) \mu_s^k f(r_k) \tilde{Y}_{\lambda \ell 1}^\mu(\Omega_k) [\vec{\nabla}_k \times (\Psi_f^* \vec{\sigma}_k \Psi_i)] \end{aligned} \quad (7.23)$$

Betrachten wir Integrale der Form:

$$I = \int d\vec{r} f(r) \tilde{Y}_{\lambda \ell 1}^\mu(\Omega) [\vec{\nabla} \times (\Psi_f^* \vec{\sigma} \Psi_i)] = \int d\vec{r} \Psi_f^* \vec{\sigma} \Psi_i \vec{\nabla} \times (f(r) \cdot \tilde{Y}_{\lambda \ell 1}^\mu(\Omega)) \quad (7.24)$$

Für die q-Komponente von $\vec{\nabla} \times f \tilde{Y}_{\lambda \ell 1}^\mu$ gilt

$$(\vec{\nabla} \times f \tilde{Y}_{\lambda \ell 1}^\mu)_q = \frac{\sqrt{2}}{i} \sum_{m\nu k} (-)^k \langle \ell m 1 -k | \lambda \mu \rangle \langle 1 \nu 1 k | 1 q \rangle \nabla_\nu (f Y_\ell^m) \quad (7.25)$$

$\nabla_\nu (f Y_\ell^m)$ können wir nach der Gradientenformel⁸⁾ schreiben

$$\begin{aligned} \nabla_\nu (f Y_\ell^m) &= \left(\frac{\ell+1}{2\ell+3}\right)^{1/2} \langle \ell m 1 \nu | \ell+1 m+\nu \rangle Y_{\ell+1}^{m+\nu} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\ell}{r}\right) f \\ &\quad - \left(\frac{\ell}{2\ell+1}\right)^{1/2} \langle \ell m 1 \nu | \ell-1 m+\nu \rangle Y_{\ell-1}^{m+\nu} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\ell+1}{r}\right) f \end{aligned} \quad (7.26)$$

Nennen wir die linke Seite von (7.25) $D_q(r, \frac{d}{dr})f$, so können wir (7.24) schreiben als

$$I = \sum_q (-)^q \int d\vec{r} (\Psi_f^* \vec{\sigma}_{-q} \Psi_i) D_q(r, \frac{d}{dr}) f \quad (7.27)$$

Partielle Integration von (7.27) liefert

$$I = \sum_q (-)^q \int dr f D_q(r, -\frac{d}{dr}) r^2 \psi_{f\sigma-q}^* \psi_i d\Omega \quad (7.28)$$

Damit folgt für (7.23)

$$\begin{aligned} & (2J_f+1)^{-1/2} \langle J_i M_i \lambda \mu | J_f M_f \rangle \int dr r^2 f(r) \rho_{\lambda\ell}^m(r) \\ &= -\mu_0 \sqrt{2} \sum_q (-)^q \int dr d\Omega \mu_s^j \sum_j \delta(\vec{r}-\vec{r}_j) f(r_j) D_q(r_j, -\frac{d}{dr_j}) r_j^2 (\psi_{f(\sigma_j)-q}^* \psi_i) \\ &= \mu_0 \sum_{m\nu qk} (-)^{q+k+1} \int dr d\Omega \mu_s^j \sum_j \delta(\vec{r}-\vec{r}_j) f(r_j) \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\langle \ell m 1-k | \lambda \mu \rangle \langle 1 \nu 1 k | 1 q \rangle \cdot \left\{ \left(\frac{\ell+1}{2\ell+3} \right)^{1/2} \langle \ell m 1 \nu | \ell+1 m+\nu \rangle \right.$$

$$\left. \left(-\frac{d}{dr_j} - \frac{\ell}{r_j} \right) r_j^2 Y_{\ell+1}^{m+\nu} \psi_{f(\sigma_j)-q}^* \psi_i - \left(\frac{\ell}{2\ell+1} \right)^{1/2} \langle \ell m 1 \nu | \ell-1 m+\nu \rangle \right.$$

$$\left. \left(-\frac{d}{dr_j} + \frac{\ell+1}{r_j} \right) r_j^2 Y_{\ell-1}^{m+\nu} \psi_{f(\sigma_j)-q}^* \psi_i \right\} \quad (7.30)$$

Die Summe über die verschiedenen Clebsch-Gordon Koeffizienten in (7.30) läßt sich ausführen, so daß man für die rechte Seite von (7.30) erhält

$$\begin{aligned} & -\mu_0 \int dr d\Omega r_j^2 \sum_j \delta(\vec{r}-\vec{r}_j) f(r_j) \sqrt{6} \cdot \mu_s^j \quad (7.31) \\ & \left[(\ell+1)^{1/2} \begin{Bmatrix} 1 & \ell+1 & \lambda \\ \ell & 1 & 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr_j} + \frac{\ell+2}{r_j} \right) \sum_{q,m'} \langle 1 q \ell+1 m' | \lambda \mu \rangle \psi_{f\ell+1}^{*m'}(\sigma_j)_{-q} \psi_i \right. \\ & \left. - (\ell)^{1/2} \begin{Bmatrix} 1 & \ell-1 & \lambda \\ \ell & 1 & 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr_j} - \frac{\ell-1}{r_j} \right) \sum_{q,m'} \langle 1 q \ell-1 m' | \lambda \mu \rangle \psi_{f\ell-1}^{*m'}(\sigma_j)_{-q} \psi_i \right] \end{aligned}$$

Benutzt man, daß

$$[Y^\ell \times \sigma]_\mu^\lambda = \sum_{q m'} \langle 1 q \ell m' | \lambda \mu \rangle Y_\ell^{m'} \sigma_{-q} \quad (7.32)$$

ist, so gilt für (7.31)

$$\begin{aligned} & - \mu_0 \int dr r_j^2 \sum_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) f(r_j) \sqrt{6} \mu_s^j \\ & \left[(J_f M_f | [\bar{Y}_{\ell+1} \times \sigma]_\lambda^\mu | J_i M_i) (\ell+1)^{1/2} \begin{Bmatrix} 1 & \ell+1 & \lambda \\ \ell & 1 & 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr_j} + \frac{\ell+2}{r_j} \right) \right. \\ & \left. - (J_f M_f | [Y_{\ell-1} \times \sigma]_\lambda^\mu | J_i M_i) - (\ell)^{1/2} \begin{Bmatrix} 1 & \ell-1 & \lambda \\ \ell & 1 & 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr_j} - \frac{\ell-1}{r_j} \right) \right] \\ & = (2J_f+1)^{-1/2} \langle J_i M_i | J_f M_f \rangle \int dr r^2 f(r) \rho_{\lambda \ell}^m(r) \end{aligned} \quad (7.33)$$

Mit dem Wigner-Eckart Theorem und der Orthogonalität der Clebsch-Gordon Koeffizienten gilt dann:

$$\begin{aligned} \int \rho_{\lambda \ell}^m(r) f(r) r^2 dr &= - \mu_0 \int dr f(r_j) r_j^2 \sqrt{6} \mu_s^j \\ & \left[\left(\frac{d}{dr_j} + \frac{\ell+2}{r_j} \right) \begin{Bmatrix} 1 & \ell+1 & \lambda \\ \ell & 1 & 1 \end{Bmatrix} (\ell+1)^{1/2} (J_f || [\bar{Y}_{\ell+1} \times \sigma]_\lambda || J_i) \right. \\ & \left. - (\ell)^{1/2} \begin{Bmatrix} 1 & \ell-1 & \lambda \\ \ell & 1 & 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr_j} - \frac{\ell-1}{r_j} \right) (J_f || [Y_{\ell-1} \times \sigma]_\lambda || J_i) \right] \end{aligned} \quad (7.34)$$

Mit (4.8) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \rho_{\lambda \ell}^m(r) &= - \mu_0 \sum_{v_1 v_2} \rho_{v_1 v_2}^{if, \lambda} \mu_s \sqrt{6} \\ & \left[(\ell+1)^{1/2} \begin{Bmatrix} 1 & \ell+1 & \lambda \\ \ell & 1 & 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\ell+2}{r} \right) (v_1 || [\bar{Y}_{\ell+1} \times \sigma]_\lambda || v_2) \right. \\ & \left. - \sqrt{\ell} \begin{Bmatrix} 1 & \ell-1 & \lambda \\ \ell & 1 & 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\ell-1}{r} \right) (v_1 || [Y_{\ell-1} \times \sigma]_\lambda || v_2) \right] \end{aligned} \quad (7.35)$$

Die reduzierten Matrixelemente sind

$$\begin{aligned}
 \langle v_1 || [Y_\ell \times \sigma]_\lambda || v_2 \rangle &= (-)^{\ell_1} \hat{\ell} \hat{\lambda} \hat{\ell}_1 \hat{\ell}_2 \hat{j}_1 \hat{j}_2 \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell & \ell_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & \lambda \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix} \right\} u_1(r) u_2(r) \quad (7.36)
 \end{aligned}$$

Da ℓ nur die Werte λ und $\lambda \pm 1$ annehmen kann, lassen sich das 9-j Symbol und die Racahkoeffizienten zusammenfassen, so daß man schließlich erhält

$$\begin{aligned}
 \rho_{\lambda \ell}^m(r) &= \mu_0 \sum_{v_1 v_2} \rho_{v_1 v_2}^{if, \lambda} \mu_s \frac{\hat{j}_1 \hat{j}_2}{\sqrt{4\pi}} (-)^{\lambda + \ell + j_1 + \frac{1}{2} + 1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \lambda \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad F_{\lambda \ell}^{v_1 v_2}(r) u_1^*(r) u_2(r) \quad (7.37)
 \end{aligned}$$

mit

$$F_{\lambda \lambda}^{v_1 v_2}(r) = - \left(\frac{2\ell+1}{\lambda(\lambda+1)} \right)^{1/2} \left[\frac{\lambda(\lambda+1)}{r} + (x_1 + x_2) \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \right] \quad (7.38a)$$

$$F_{\lambda, \lambda \pm 1}^{v_1 v_2}(r) = \frac{1}{\lambda + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}} (x_1 - x_2) D_{\lambda, \lambda \pm 1}(r) \quad (7.38b)$$

$$D_{\lambda, \lambda \pm 1} = \pm \sqrt{\lambda + \frac{1}{2} (1 \pm 1)} u_1^*(r) \left\{ \frac{d}{dr} \mp \frac{1}{r} \left[\ell_2 + \frac{1}{2} (1 \mp 1) \right] \right\} u_2 \quad (7.38c)$$

$$x_1 = (\ell_1 - j_1)(2j_1 + 1) \text{ etc.}$$

7.4. Berechnung der Zusatzstromdichte des M1 Operators

Nach (4.18) ist der zusätzliche Stromanteil gegeben durch

$$\rho_{11}^{C'}(r) = \mu_0 \sum_{v_1 v_2} \rho_{v_1 v_2}^{if \lambda} r^2 \times \langle v_1 || [Y_2 \times \sigma]_1 || v_2 \rangle \tau_3 \delta_{\lambda 1} \quad (7.39)$$

Für das reduzierte Matrixelement erhalten wir

$$\begin{aligned} & (v_1 || [Y_2 \times \sigma]_1 || v_2) \\ &= \sqrt{(2j_1+1)} \cdot \sqrt{2j_2+1} \left\{ (-)^{j_2+\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} + (-)^{j_1} \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (7.40)$$

so daß für $\rho_{11}^{c'}(r)$ gilt

$$\begin{aligned} \rho_{11}^{c'}(r) &= \mu_0 \sum_{v_1 v_2} \rho_{v_1 v_2}^{if\lambda} \propto r^2 \sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)} \\ & \left\{ (-)^{j_2+\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} + (-)^{j_1} \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right\} \tau_3 \delta_{\lambda 1} \end{aligned} \quad (7.41)$$

7.5. Vertauschungsrelationen für Vektoroperatoren

Für beliebige Vektoroperatoren A und B gelten folgende Identitäten³⁾

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=0} \sum_m \vec{A}(\vec{r}) \vec{B}(\vec{r}) Y_{\ell}^{m*}(\Omega') Y_{\ell}^m(\Omega) j_{\ell}(kr_{<}) h_{\ell}^{(1)}(kr_{>}) \\ &= \sum_{\ell=0} \sum_{m,v} (-)^v (\vec{A} \vec{e}_{-v}^{\rightarrow} Y_{\ell}^{m*}) j_{\ell}(kr_{<}) h_{\ell}^{(1)}(kr_{>}) (\vec{B} \vec{e}_v^{\rightarrow} Y_{\ell}^m) \\ &= \sum_{\lambda, \mu} \sum_{\ell=\lambda, \lambda \pm 1} \vec{A} \vec{Y}_{\lambda \ell 1}^{*\mu}(\Omega') j_{\ell}(kr_{<}) h_{\ell}^{(1)}(kr_{>}) \vec{Y}_{\lambda \ell 1}^{\mu}(\Omega) \vec{B} \end{aligned} \quad (7.42)$$

$\vec{e}_v$ sind die sphärischen Einheitsvektoren.

VI. Literaturverzeichnis

- 1) V. Gillet, A.M. Green und E.A. Sanderson, Phys.Letters 11
(1964) 44; Nucl.Phys. 88 (1966) 321
- 2) J. Blomqvist, Phys.Letters 28 (1968) 22
- 3) H.C. Lee, Chalk River Report AECL-4839 (1975)
- 4) P. Ring und J. Speth, Nucl.Phys. A235 (1974) 315
- 5) P. Ring, R. Bauer und J. Speth, Nucl.Phys. A206 (1973) 97
- 6) R. Bauer, J. Speth, V. Klemt, P. Ring, E. Werner und T.
Yamazaki, Nucl.Phys. A209 (1973) 535
- 7) A.B. Migdal, Theory of Finite Fermi Systems (Interscience,
New York, 1967)
- 8) J. Speth, E. Werner und W. Wild, wird veröffentlicht
- 9) A.R. Edmonds, Drehimpulse in der Quantenmechanik (BI
Mannheim, 1964)
- 10) M. Chemtob und M. Rho, Nucl.Phys. A163 (1971) 1
- 11) A.J.F. Siegert, Phys.Rev. 52 (1937) 787
- 12) T.A. Griffy, D.S. Onley, J.T. Reynolds und L.C. Biedenhahn,
Phys.Rev. 12B (1962) 833
- 13) J. Blomqvist und S. Wahlborn, Ark.Phys. 16/46 (1959) 545
- 14) G.R. Satchler, Physics Report 14C (1974) 98

- 15) J. Friederich, Nucl.Phys. A191 (1972) 118
- 16) S.S. Hanna, Proceedings of the International Conference on Nuclear Structure and Spectroscopy, Amsterdam, 1974, ed. H.P. Blok und A.E.L. Dieperink (Scholar's Press, Amsterdam 1974), Vol. 2, p. 249;
L.W. Fagg, Rev. of Mod. Phys. 47 (1975) 683;
S. Yoshida und L. Zamick, Ann.Rev.Nucl.Sci. 22 (1972) 121
- 17) B.R. Mottelson, Proceedings of the International Conference on Nuclear Structure, Kingston, Canada, 1960, ed. D.A. Bromley und E.W. Vogt (University of Toronto Press, Toronto 1960)
- 18) R.J. Holt und H.E. Jackson, Phys.Rev.Lett. 36 (1976) 244
- 19) P. Ring und J. Speth, Phys.Letters 44B (1973) 477

Tabellenlegende

- Tabelle 1.a: Parameter der Teilchen-Loch Wechselwirkung.
- Tabelle 1.b: Interpolationsradien und Abfallbreiten.
- Tabelle 2: Renormierungskonstanten des effektiven magnetischen Operators.
- Tabelle 3: Energien und $B(M1)$ -Werte für die kollektivsten 1^+ Zustände in ^{208}Pb .
- Tabelle 4: Vergleich der Dichteänderungen und der Änderungen der $B(M1)$ -Werte für $1\hbar\omega$ und $2\hbar\omega$ Konfigurationen in den Nachbarkernen von ^{208}Pb .

Tabelle 1.a

f_{in}^{pp}	f_{in}^{pn}	f_{ex}^{pp}	f_{ex}^{pn}	ϵ_F
0.8	-0.538	-1.7	-2.630	60.0
g_{in}^{pp}	g_{in}^{pn}	g_{ex}^{pp}	g_{ex}^{pn}	r_o
0.866	-0.1	0.866	-0.1	1.2

Tabelle 1.b

R^{nn}	R^{ph}	R^{pp}	α^{nn}	α^{pn}	α^{pp}
7.34	7.34	7.34	0.6	0.6	0.6

Tabelle 2

ζ_{Lp}	ζ_{Ln}	ζ_{Sp}	ζ_{Sn}	κ
-0.119	0.031	0.113	0.113	0.0723

Tabelle 3

E [MeV]	B(M1) [(n.m) ²]
7.51	5.08
8.27	11.67
18.14	0.03
18.81	0.20
19.71	0.01
20.36	0.004
21.96	0.12
25.14	0.001

Tabelle 4

Übergang	B(M1) 1 $\hbar\omega$	B(M1) 2 $\hbar\omega$	A	B
²⁰⁷ Pb				
$\nu^{-1}3p_{3/2} \rightarrow \nu^{-1}3p_{1/2}$	0.368	0.376	~3 %	~30 %
²⁰⁹ Bi				
$\pi 2f_{7/2} \rightarrow \pi 1h_{9/2}$	$6.256 \cdot 10^{-3}$	$4.6 \cdot 10^{-3}$	~50 %	~50 %

$$A = B(M1, 1\hbar\omega) / B(M1, 2\hbar\omega)$$

$$B = \rho_{\lambda\lambda}(r, 1\hbar\omega) / \rho_{\lambda\lambda}(r, 2\hbar\omega)$$

Figurenlegende

- Figur 1.1: Graphische Darstellung der Dyson-Gleichung.
- Figur 1.2: Graphische Darstellung der Bethe-Salpeter-Gleichung.
- Figur 2.1: Polstärkenverteilung im Schalenmodell und im wirklichen Kern.
- Figur 2.2: Doppelpolterme in der Bethe-Salpeter-Gleichung in der Quasiteilchen-Näherung.
- Figur 3.1: Graphen in der Gleichung für den lokalen Vertexoperator.
- Figur 3.2: Graphische Darstellung der Gleichung für den renormierten Vertexoperator.
- Figur 6.1: Transversaler und longitudinaler Gewichtungsfaktor im differentiellen Wirkungsquerschnitt für inelastische Elektronenstreuung in Bornscher Näherung (Einschußenergie 400 MeV, Anregungsenergie 5 MeV).
- Figur 6.2-6.3: Einfluß der transversalen Stromanteile auf den differentiellen Wirkungsquerschnitt für inelastische Elektronenstreuung in DWBA.
- Figur 6.4: Schematische Darstellung der verschiedenen Konfigurationen, die zu magnetischen Dipolzuständen beitragen. $j_<$ und $j_>$ bezeichnen die Spin-Bahn Partner.
- Figur 6.5: Dichteverteilung der 1^+ Zustände in ^{208}Pb als Funktion der Anregungsenergie.

Figur 6.6: Magnetische Übergangsdichte des kollektivsten 1^+ Zustands bei 25.164 MeV und die beiden tiefliegenden 1^+ Zustände bei 7.531 MeV und 8.268 MeV.

Figur 6.7: Inelastischer Elektronenstreuquerschnitt in DWBA für verschiedene 1^+ Niveaus in ^{208}Pb als Funktion der Einschußenergie bei einem Streuwinkel von 180° . Die beiden oberen Teile der Figur zeigen die Wirkungsquerschnitte für die kollektivsten hochliegenden 1^+ Zustände. Zum Vergleich sind im unteren Teil die Streuquerschnitte für die beiden tiefliegenden 1^+ Anregungen dargestellt.

Figur 6.8: Verteilung des magnetischen Dipolmoments im Grundzustand von ^{209}Bi . Neben der Verteilung, die man im Modell unabhängiger Teilchen erhält (Schmidt-Wert), ist die Änderung der Verteilung dargestellt, wenn man vom nackten Operator zum effektiven übergeht (punktiert: Änderung des Einteilchenwertes, durchgezogen: Core angekoppelt).

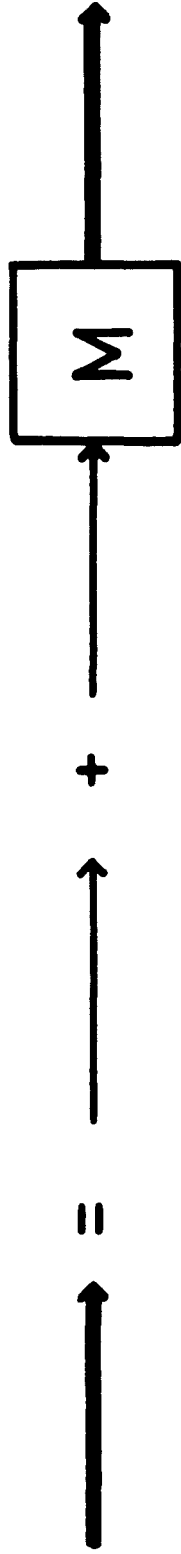
Figur 6.9-
6.10: Verteilung der magnetischen Dipolmomente der Grundzustände von ^{209}Pb und ^{207}Pb für $1\hbar\omega$ und $2\hbar\omega$ Corebeiträge.

Figur 6.11: Änderung der Übergangsdichte für den M1 Spin-Flip Übergang $\nu^{-1}3p_{3/2} \rightarrow \nu^{-1}3p_{1/2}$ in ^{207}Pb für $1\hbar\omega$ und $2\hbar\omega$ Corebeiträge.

- Figur 6.12: Änderung der Übergangsdichte für den ℓ -verbotenen M1 Übergang $\pi 2f_{7/2} \rightarrow \pi 1h_{9/2}$ in ^{209}Bi für $1\hbar\omega$ und $2\hbar\omega$ Corebeiträge.
- Figur 6.13: Inelastischer Elektronenstreuquerschnitt in DWBA für den M1 Spin-Flip Übergang $\nu^{-1}3p_{3/2} \rightarrow \nu^{-1}3p_{1/2}$ in ^{207}Pb bei verschiedenen Einschußenergien (Streuwinkel 180°). Neben dem Wirkungsquerschnitt, in dem $1\hbar\omega$ Coreanregungen berücksichtigt werden (durchgezogen), ist der für $2\hbar\omega$ Anregungen (gestrichelt) dargestellt. Zum Vergleich ist der Streuquerschnitt des zugehörigen E2 Übergangs (strich-punktiert) gezeigt.
- Figur 6.14: Inelastischer Elektronenstreuquerschnitt in DWBA für den ℓ -verbotenen M1 Übergang $\pi 2f_{7/2} \rightarrow \pi 1h_{9/2}$ in ^{209}Bi bei verschiedenen Einschußenergien (Streuwinkel 180°) für $1\hbar\omega$ (gestrichelt) und $2\hbar\omega$ (durchgezogen) Coreanregungen.
- Figur 6.15-6.16: Verteilung der elektrischen Quadrupolmomente der Grundzustände von ^{209}Bi und ^{209}Pb . Die Ladungsdichte (durchgezogen) und die beiden transversalen Stromkomponenten (gestrichelt und strichpunktiert) sind dargestellt.
- Figur 6.17-6.18: E2 Übergangsladungsdichten (durchgezogen) und Übergangsstromdichten (gestrichelt und strichpunktiert) für die Neutronenübergänge $\nu 3d_{5/2} \rightarrow \nu 2g_{9/2}$ und $\nu 1i_{11/2} \rightarrow \nu 2g_{9/2}$ in ^{209}Pb .

Figur 6.19: Vergleich der E2 Übergangsdichten $\nu^{-1}3p_{3/2} \rightarrow \nu^{-1}3p_{1/2}$ in ^{207}Pb , wenn man einerseits den Einteilchenwert (Modell unabhängiger Teilchen) mit der effektiven Ladung multipliziert und andererseits die Corebeiträge berücksichtigt.

Figur 6.20: Inelastischer Elektronenstreuquerschnitt in DWBA für den E2 Übergang $\nu^{-1}3p_{3/2} \rightarrow \nu^{-1}3p_{1/2}$ in ^{207}Pb . Der Querschnitt, der aus einer Dichteverteilung resultiert, die man im Modell unabhängiger Teilchen erhält und mit der effektiven Ladung multipliziert (gestrichelt), wird mit dem verglichen, der durch eine Dichteverteilung bestimmt ist, die die Corebeiträge berücksichtigt (durchgezogen).



Figur 1.1

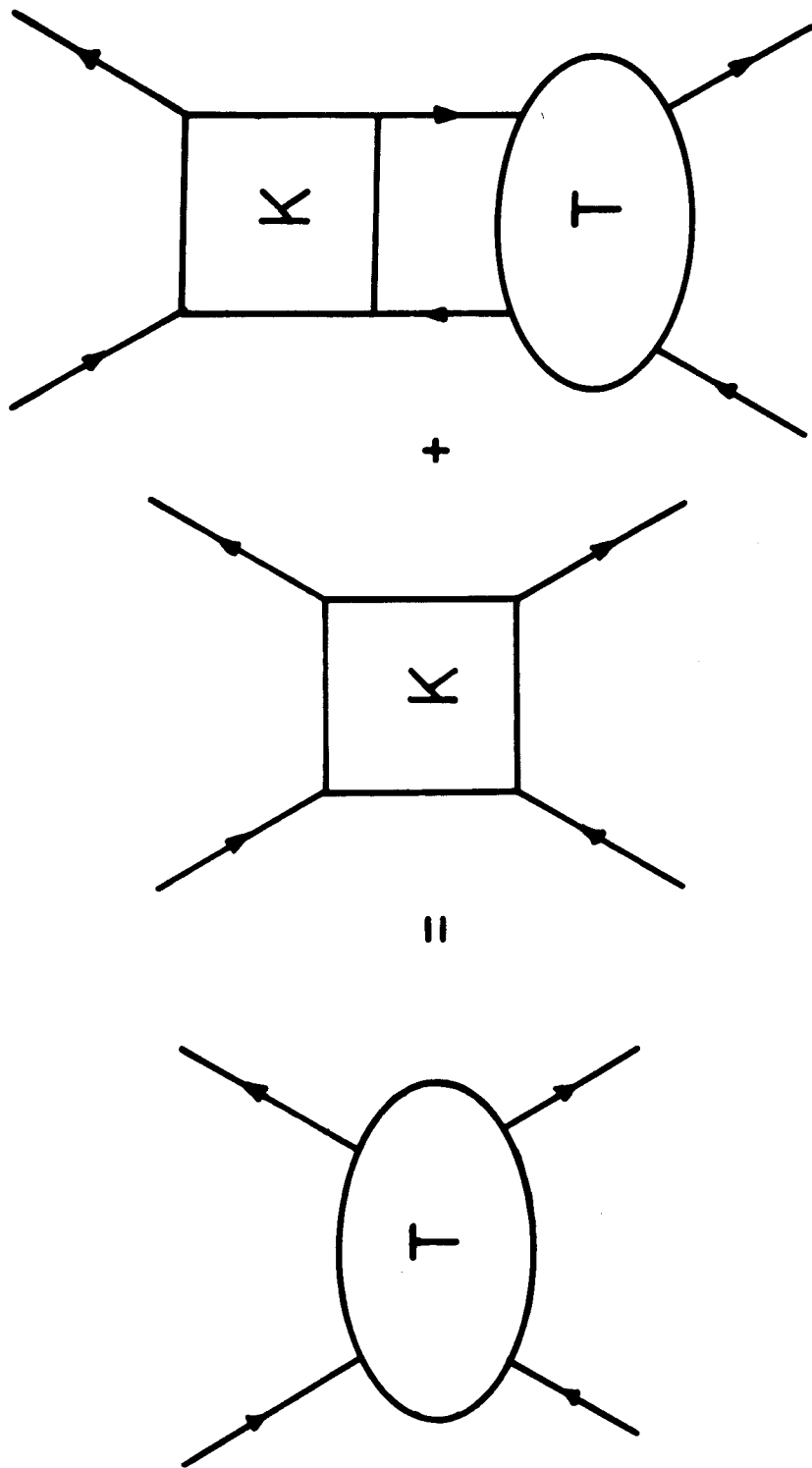
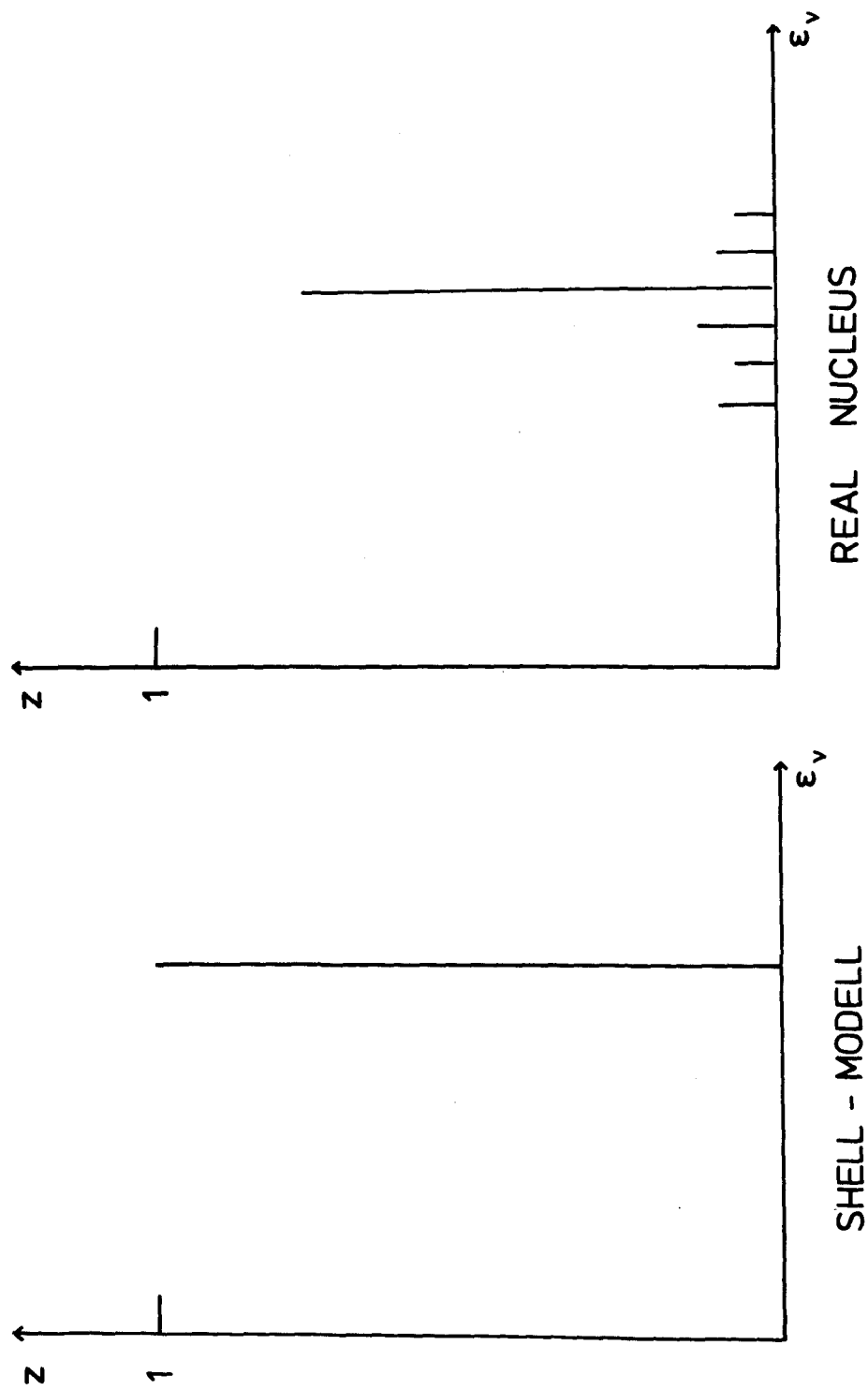
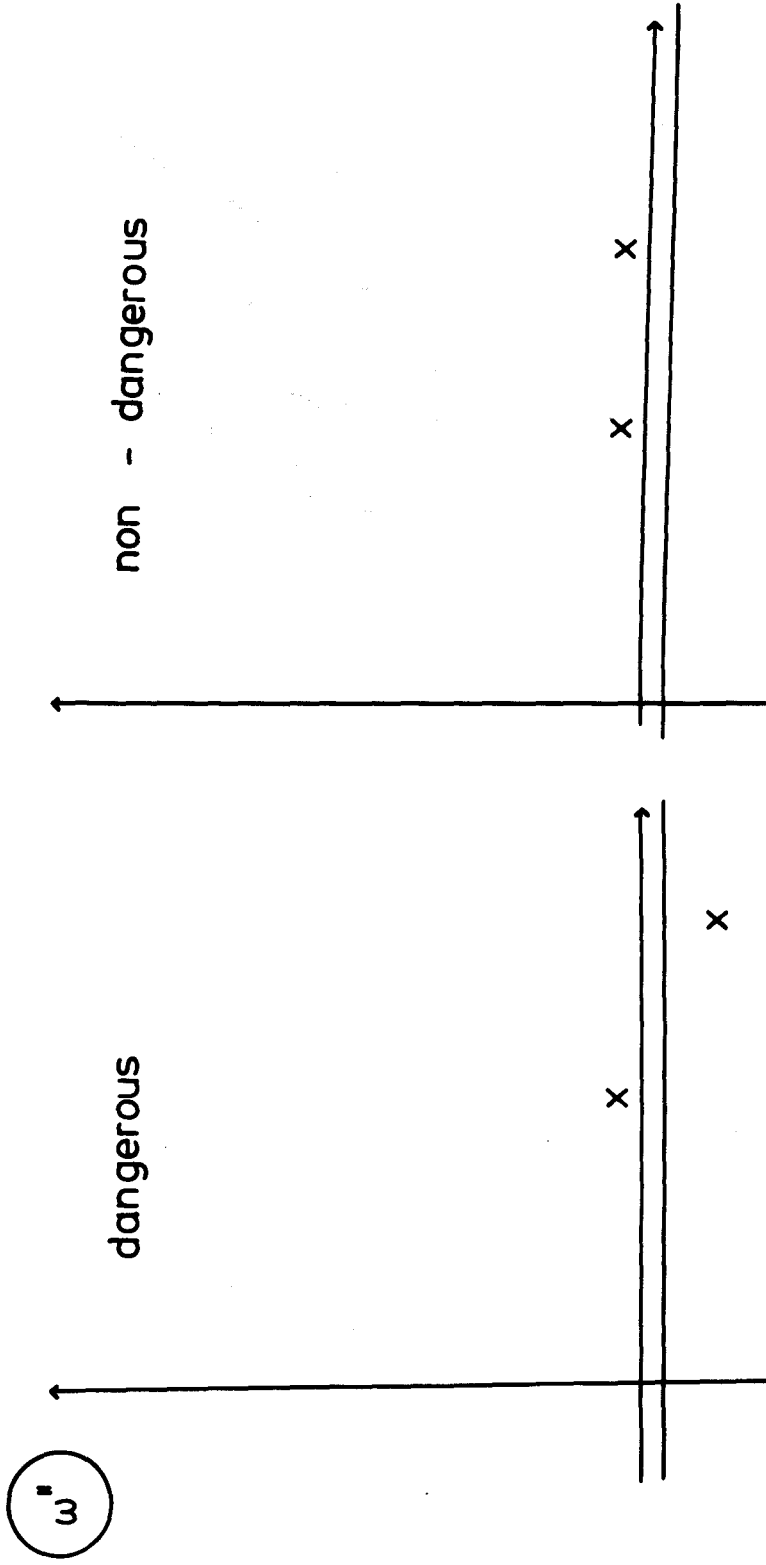


Figure 1.2



Figur 2.1



Figur 2.2

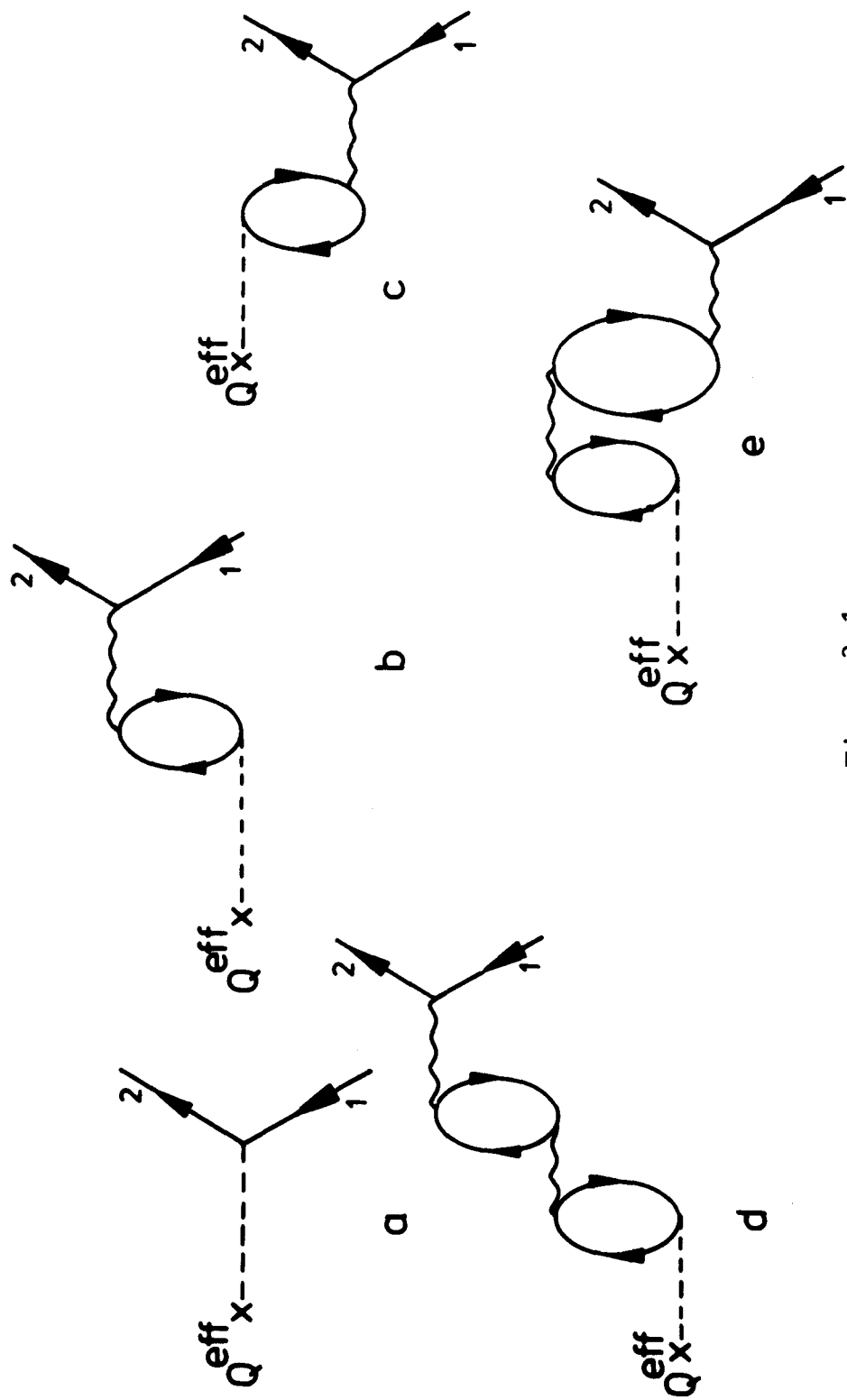
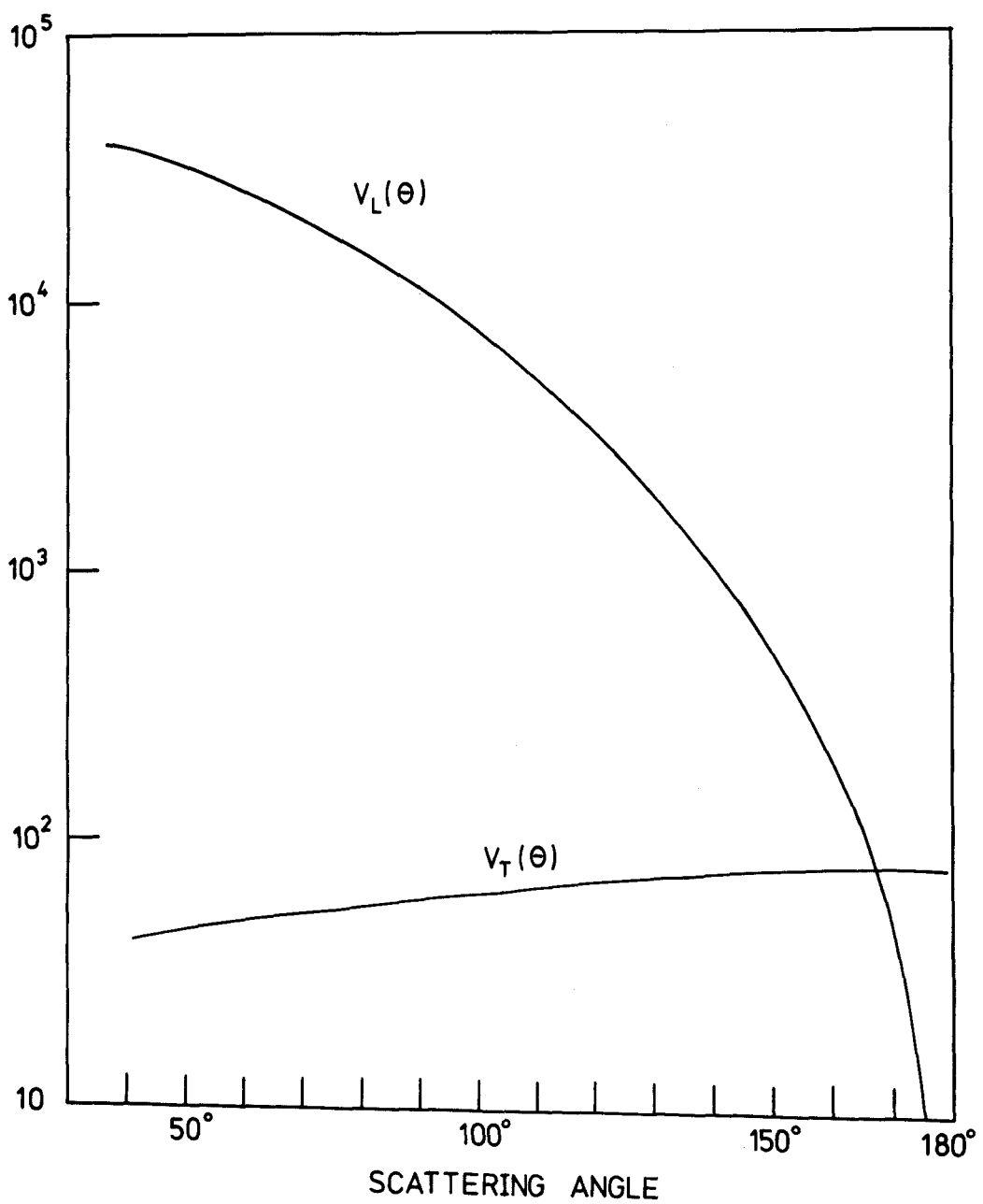


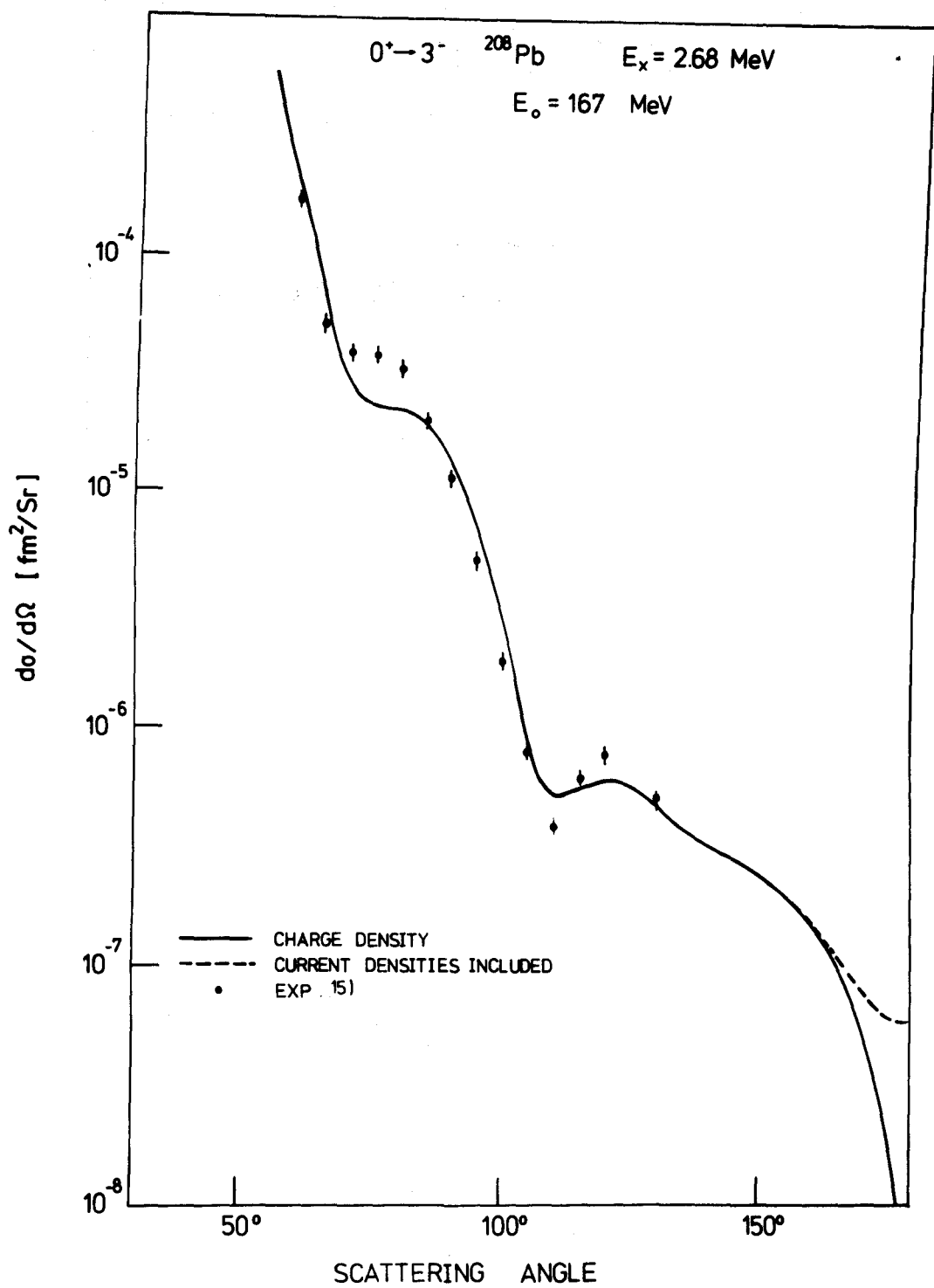
Figure 3.1

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 1: A triangle loop with a dashed line labeled } x \text{ } Q_{\text{eff}} \text{ on the left, and solid lines labeled } \tau \text{ on the top and right. External lines 1 and 2 are attached to the right vertex.} \\
 = \\
 \text{Diagram 2: A vertex with two external lines labeled 1 and 2, connected by a dashed line labeled } x \text{ } Q_{\text{eff}}. \\
 + \\
 \text{Diagram 3: A vertex with two external lines labeled 1 and 2, connected by a wavy line labeled } m \text{ } Q_{\text{eff}}. \\
 + \\
 \text{Diagram 4: A vertex with two external lines labeled 1 and 2, connected by a wavy line labeled } x \text{ } m \text{ } Q_{\text{eff}}.
 \end{array}$$

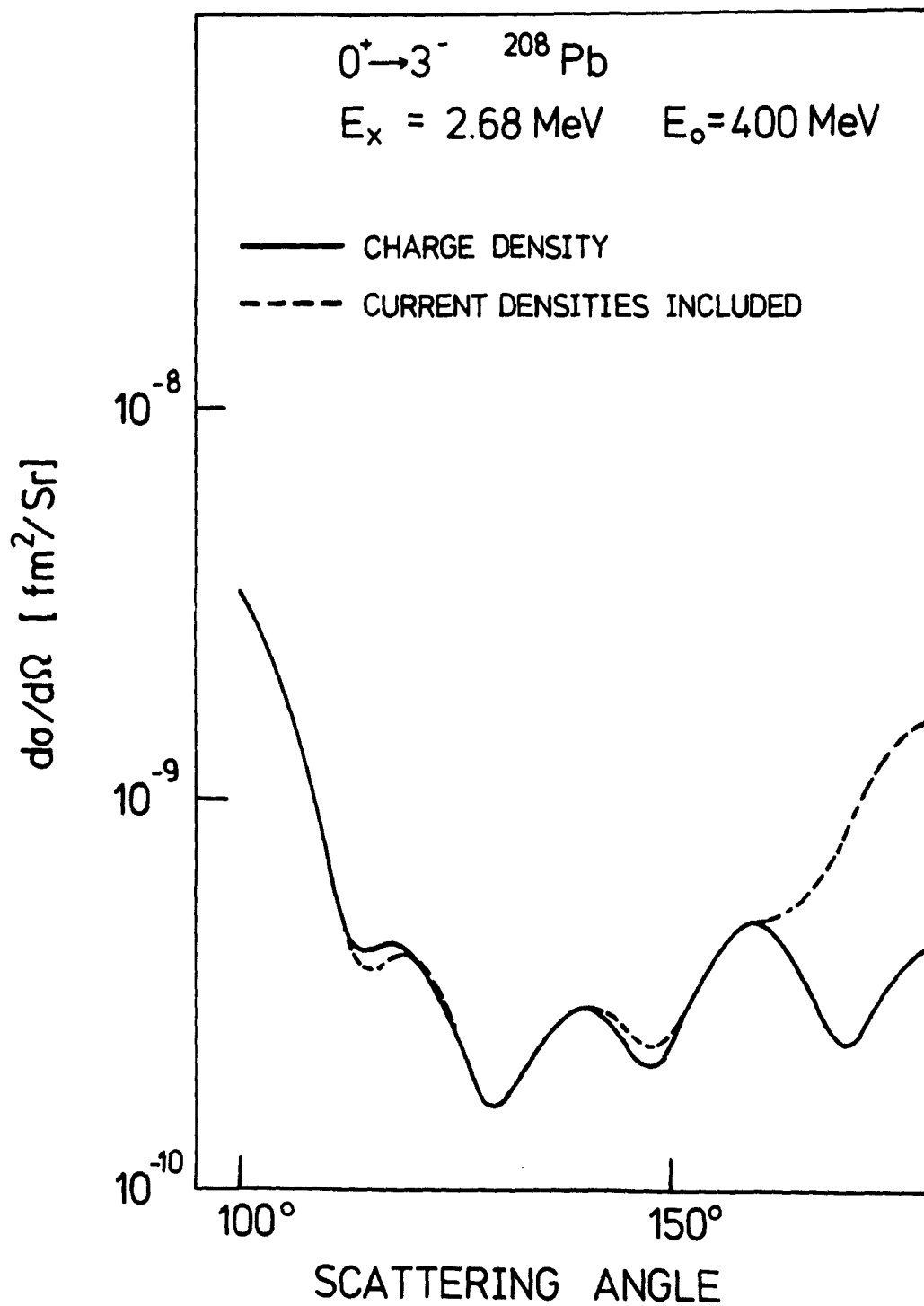
Figure 3.2



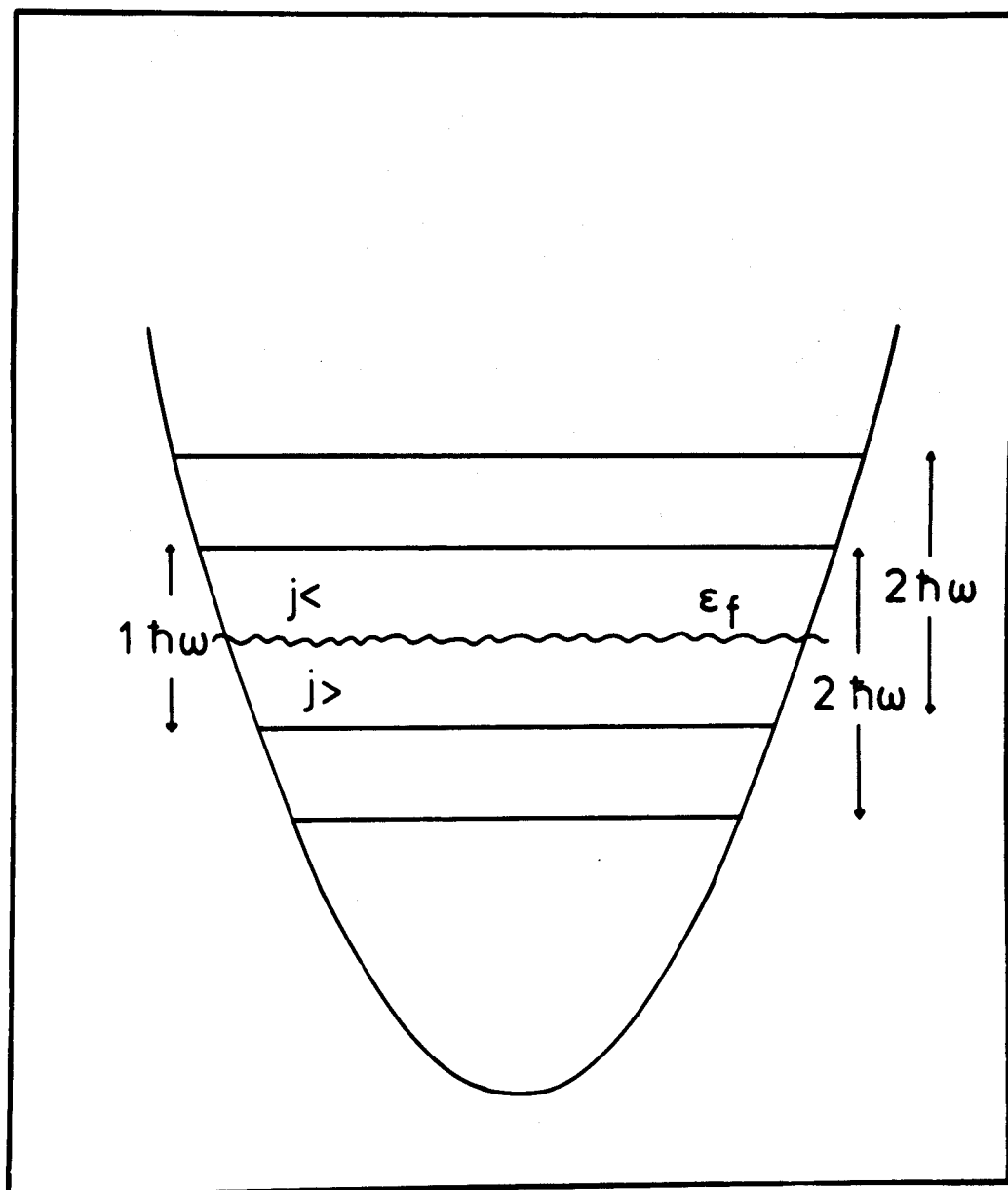
Figur 6.1



Figur 6.2



Figur 6.3



Figur 6.4

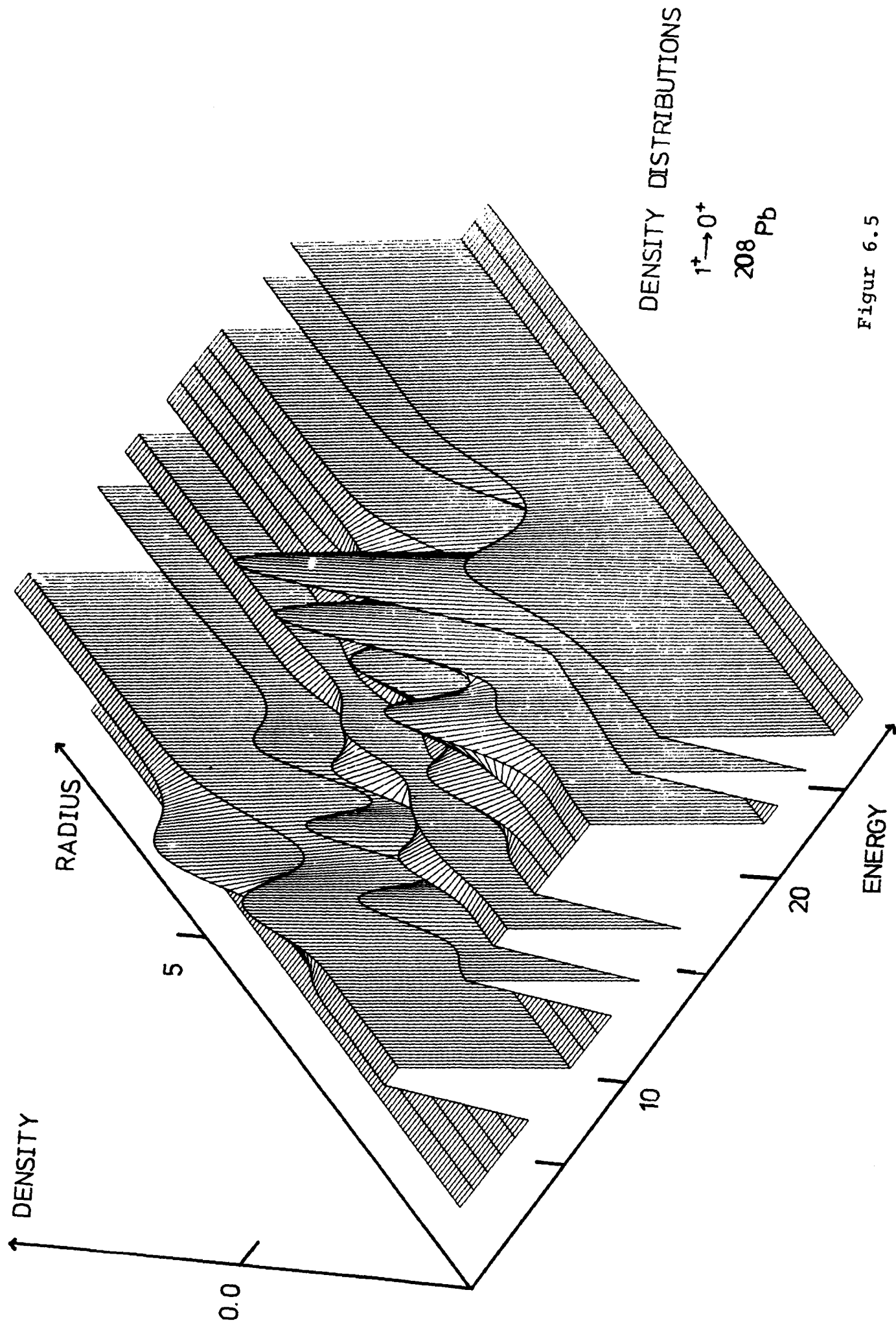
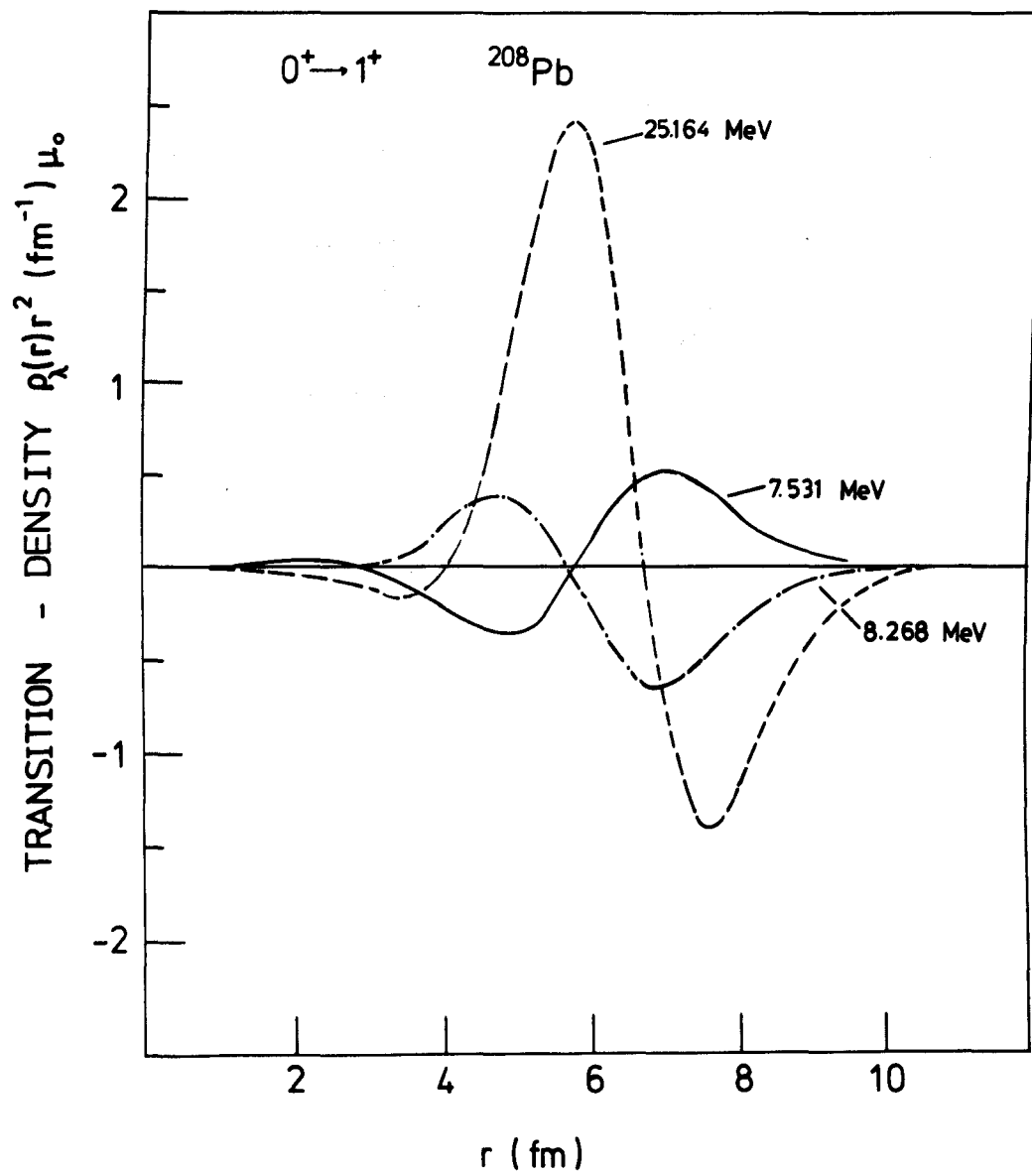
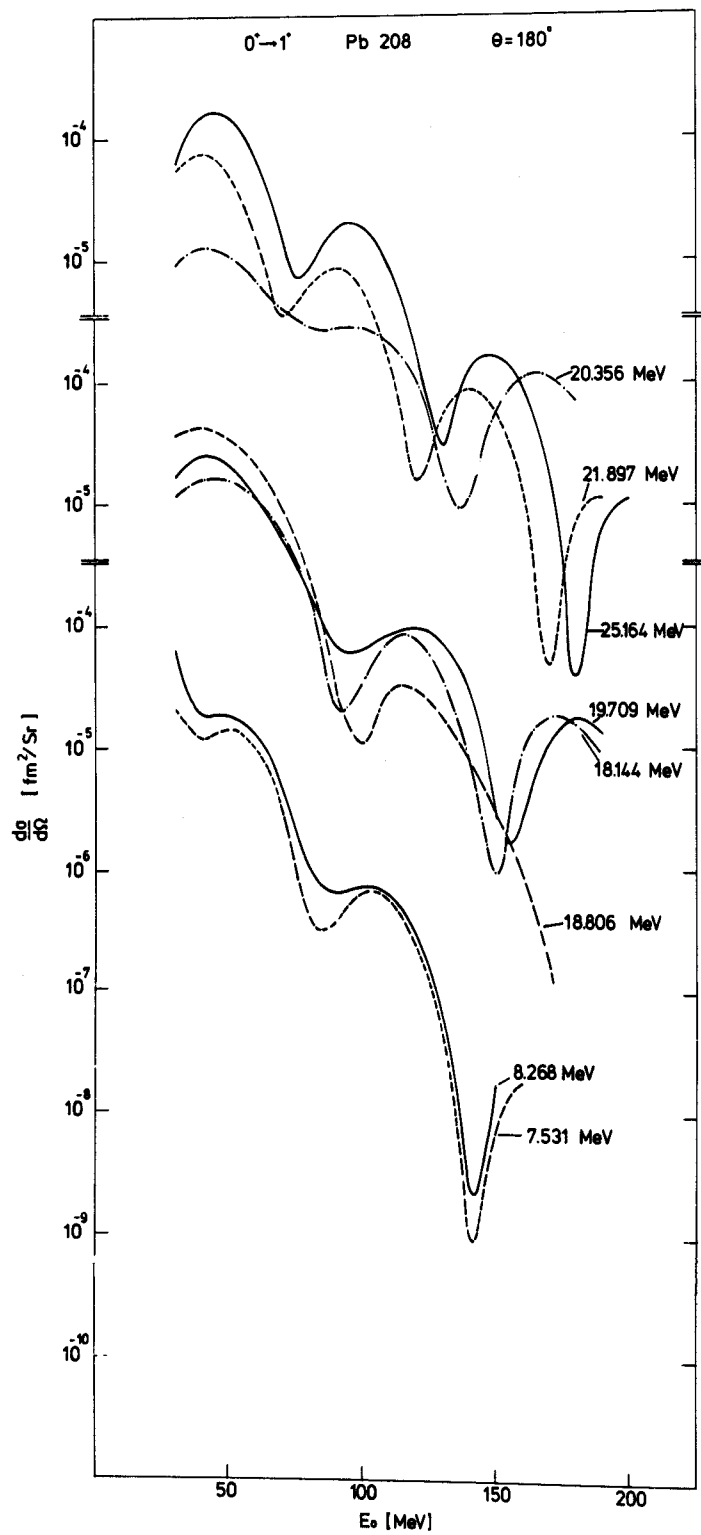


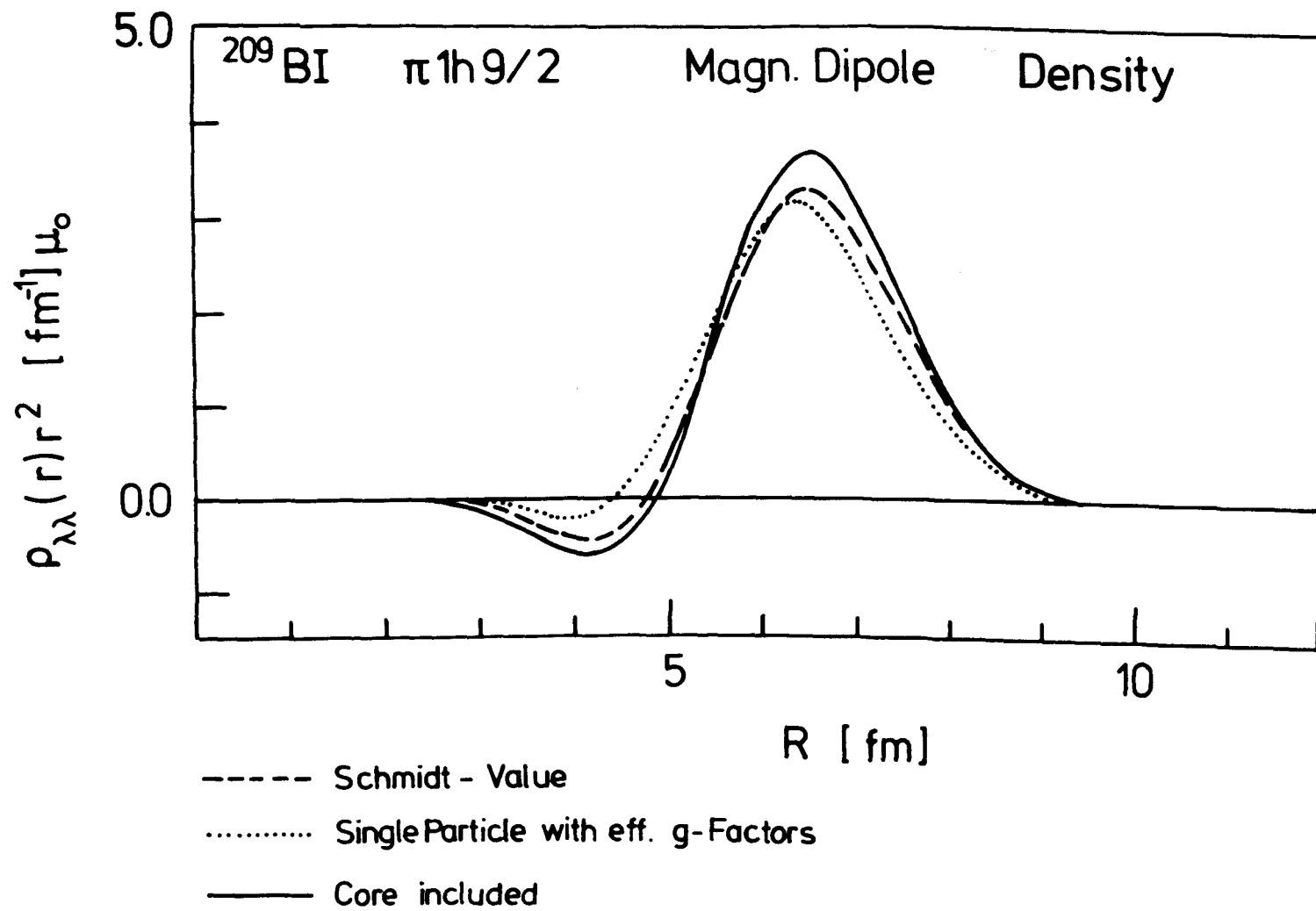
Figure 6.5



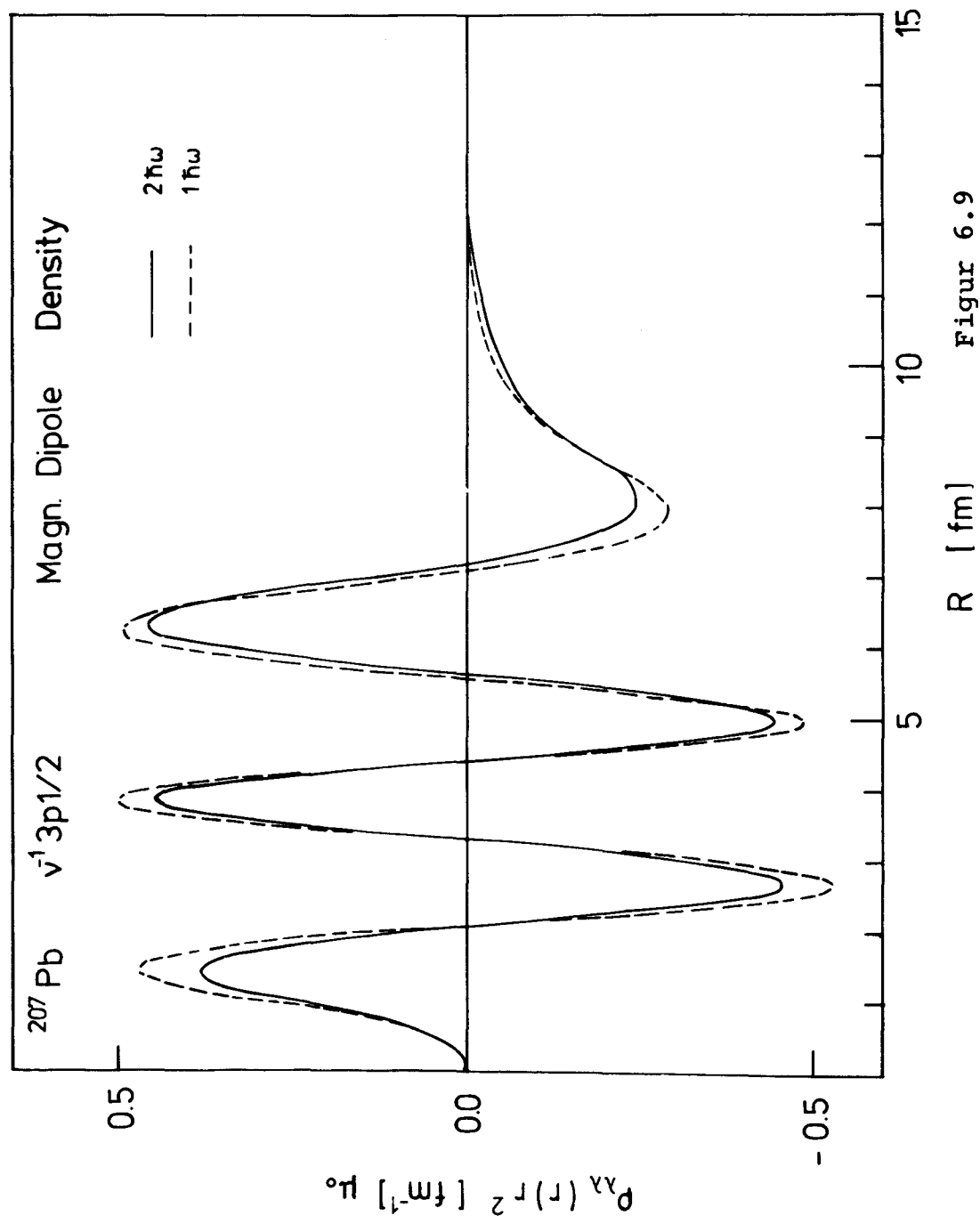
Figur 6.6



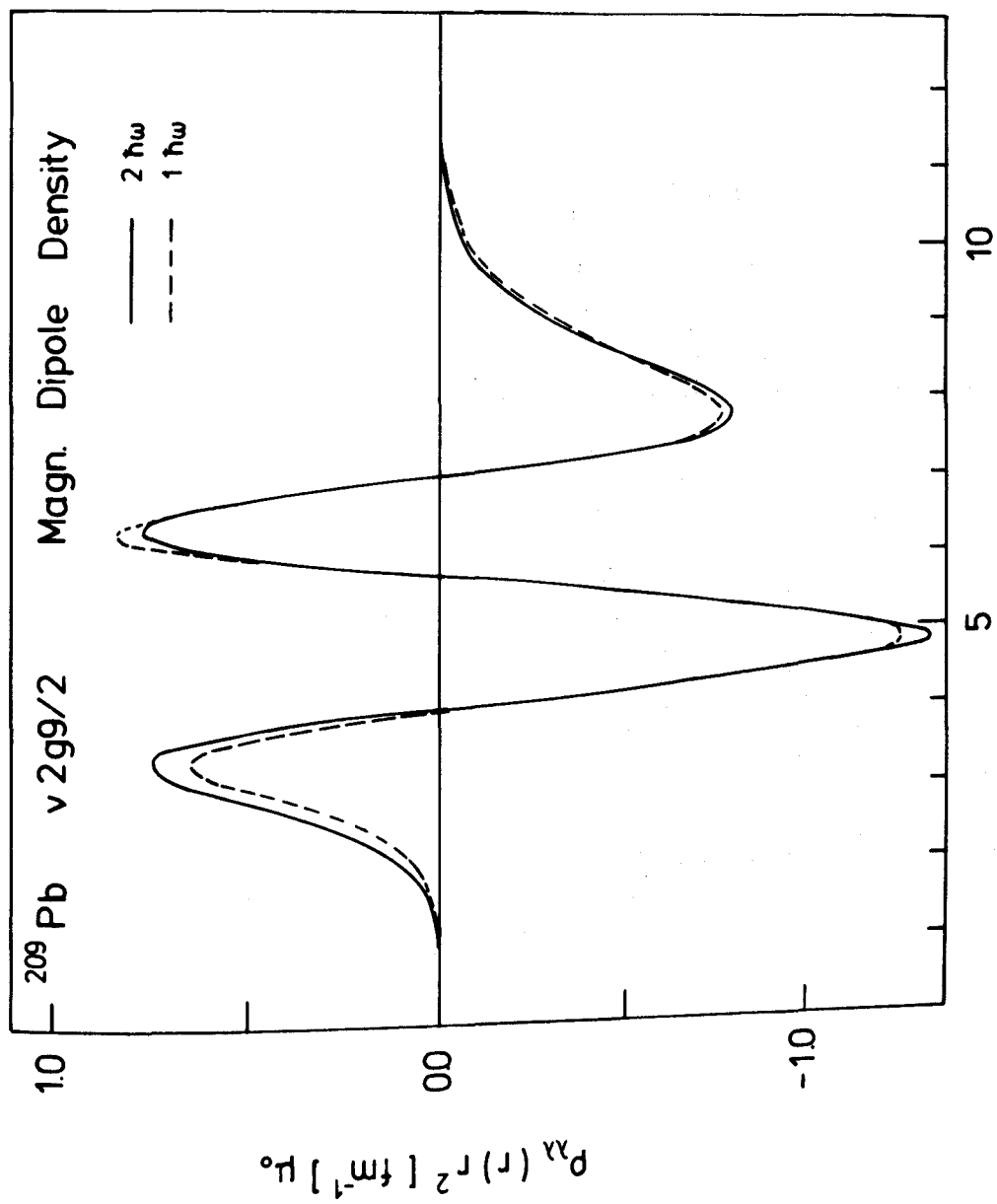
Figur 6.7



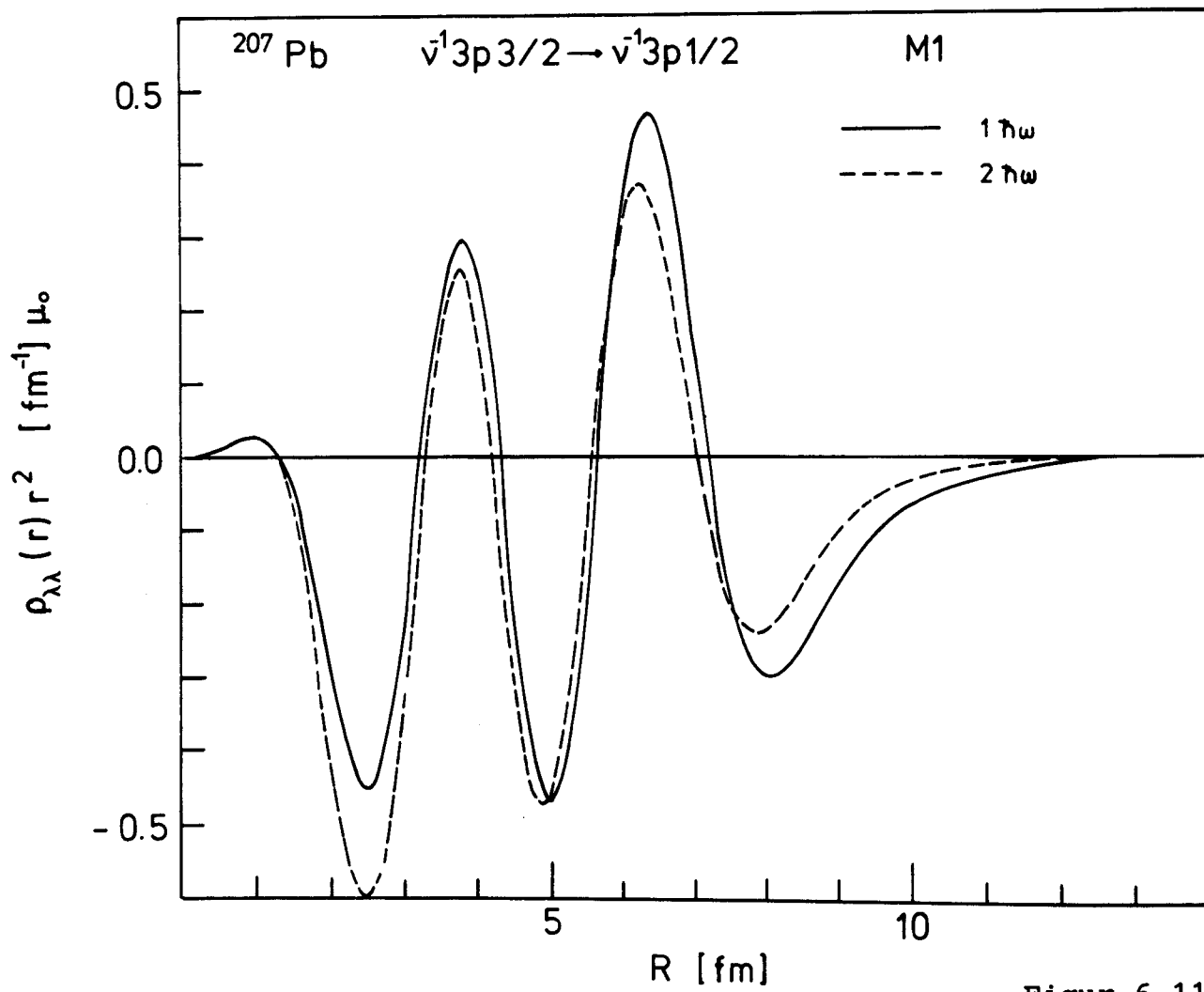
Figur 6.8



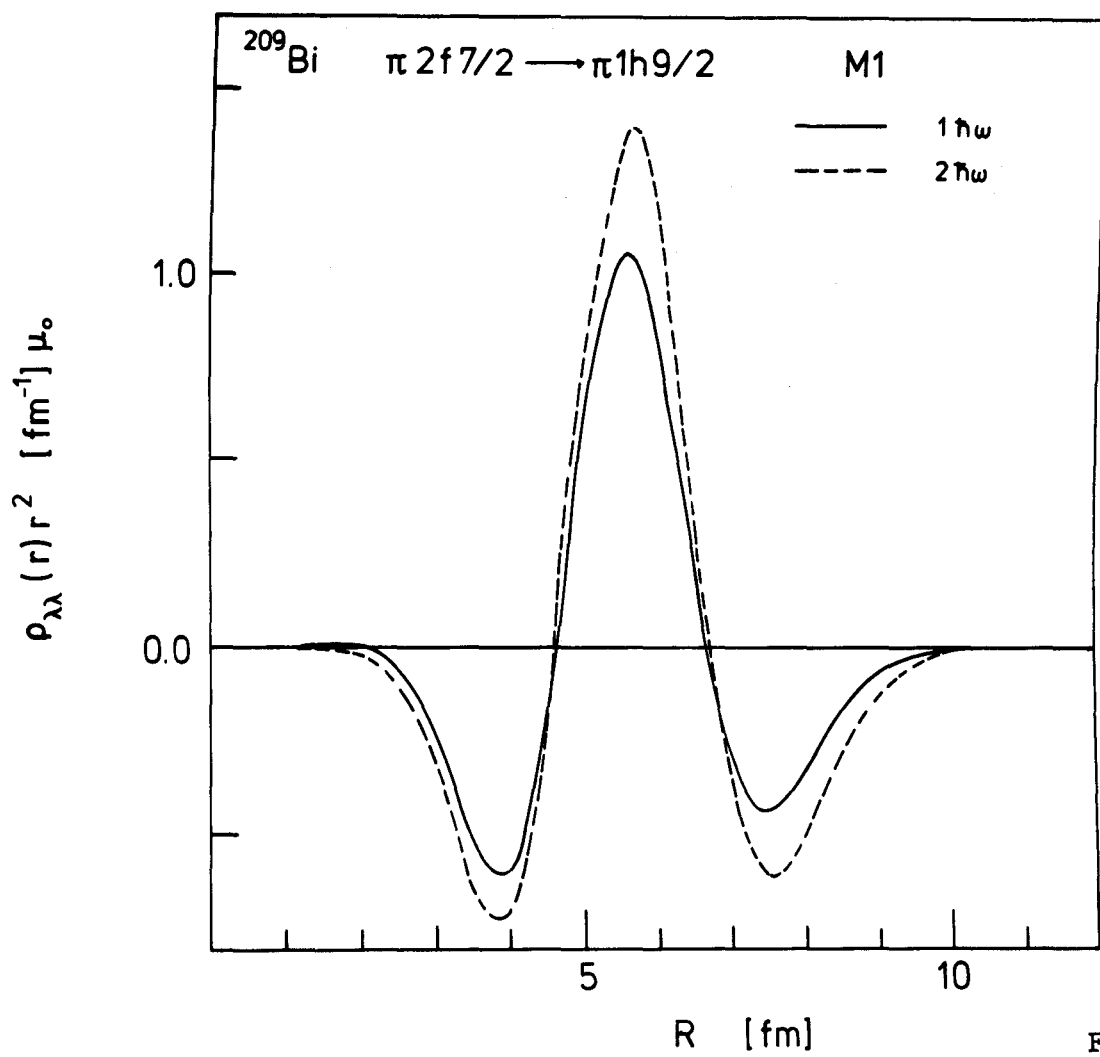
Figur 6.9



Figur 6.10



Figur 6.11



Figur 6.12

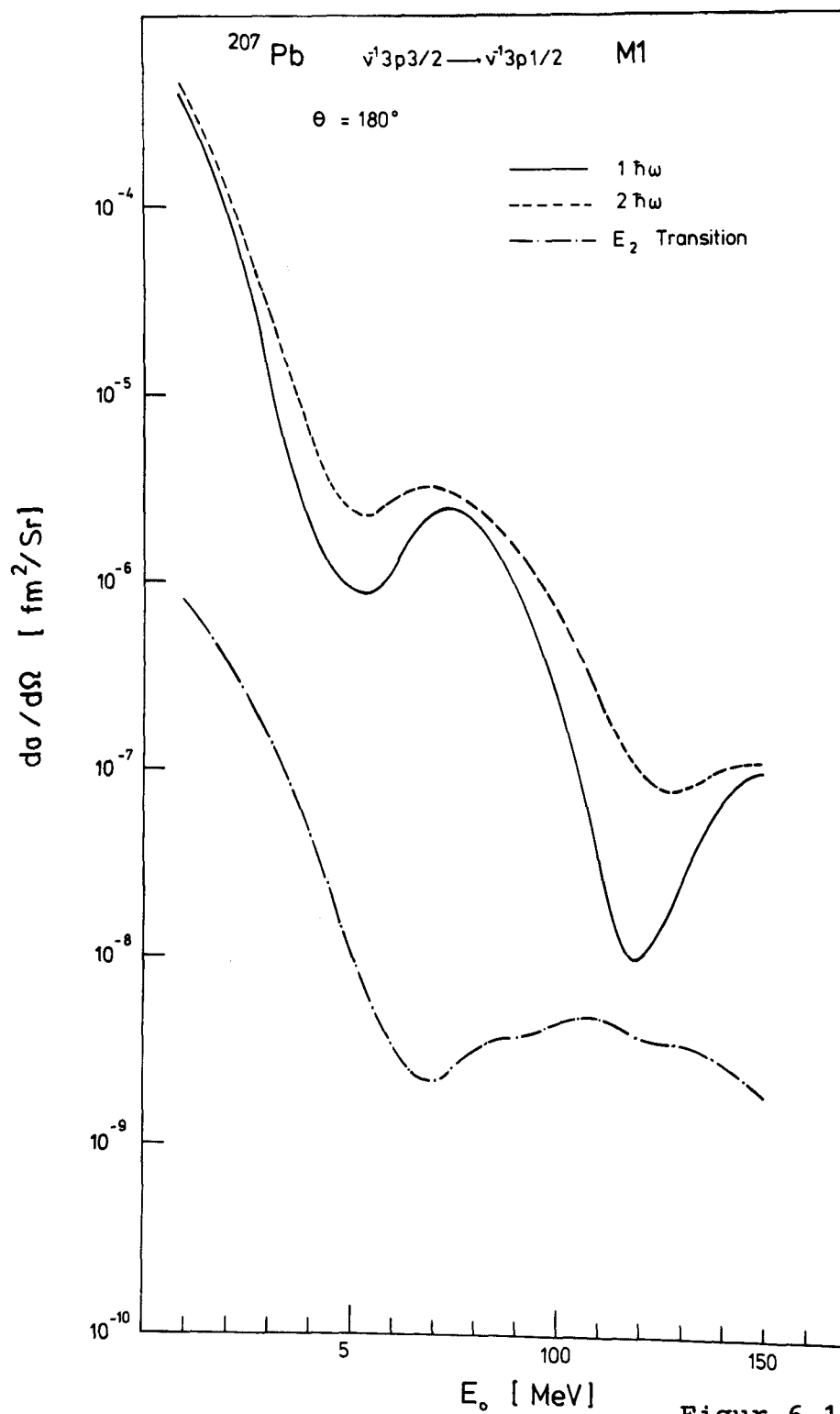
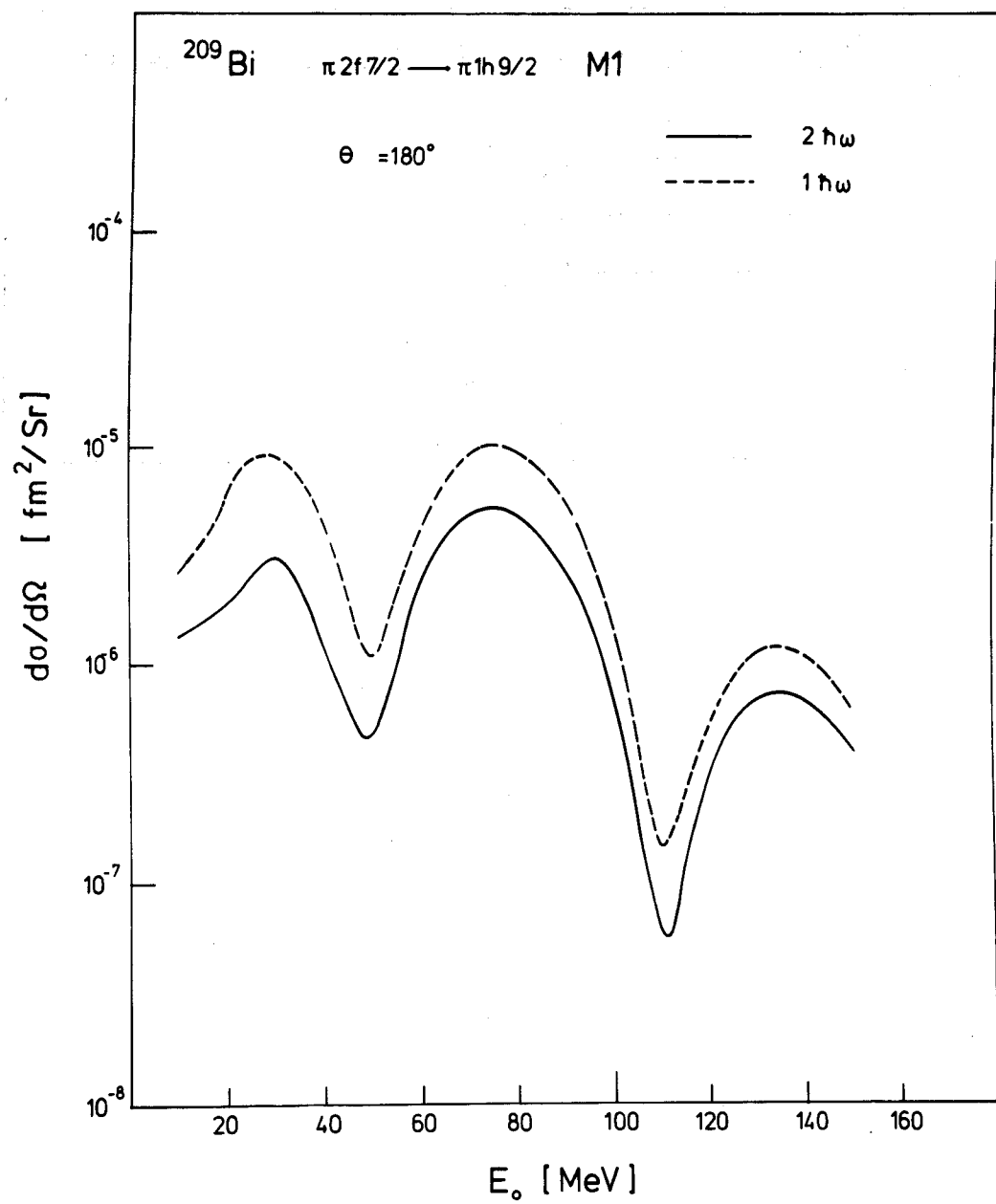
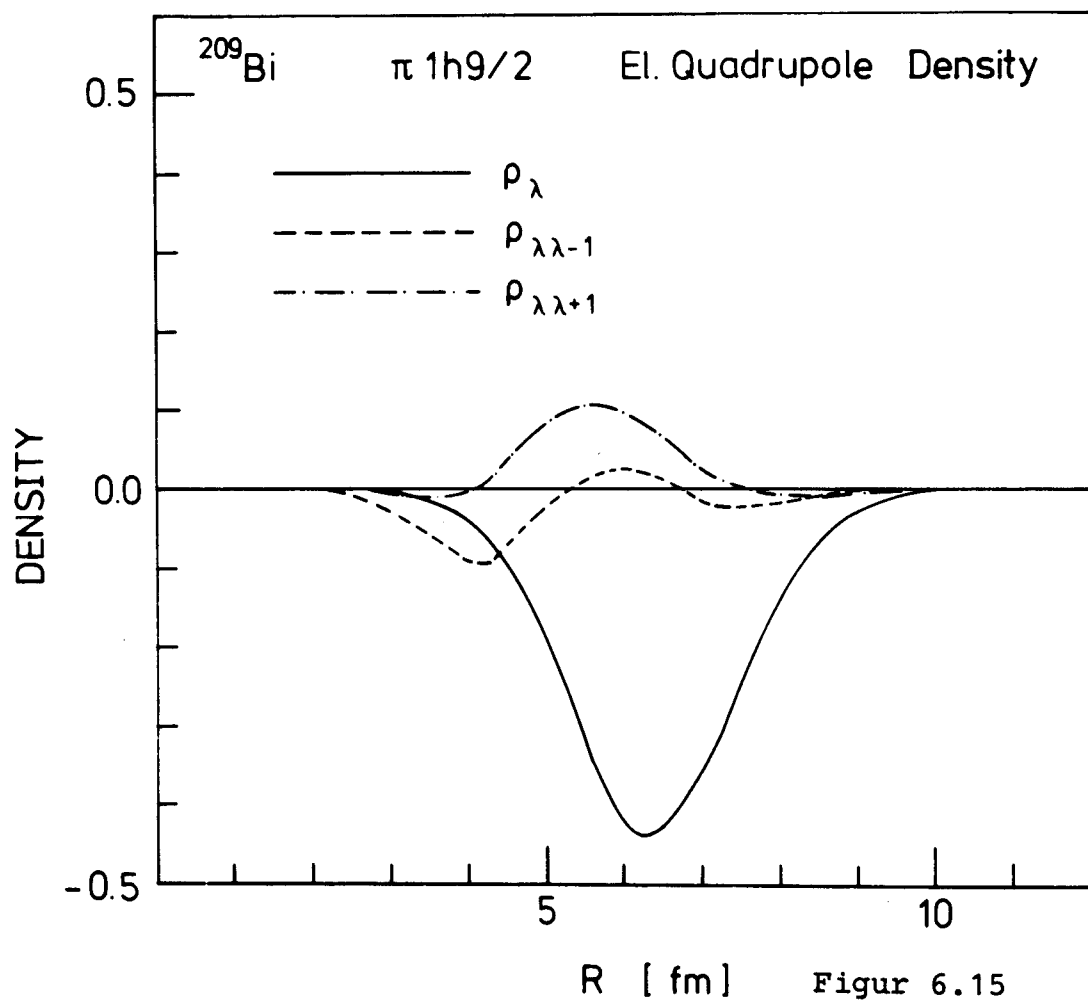
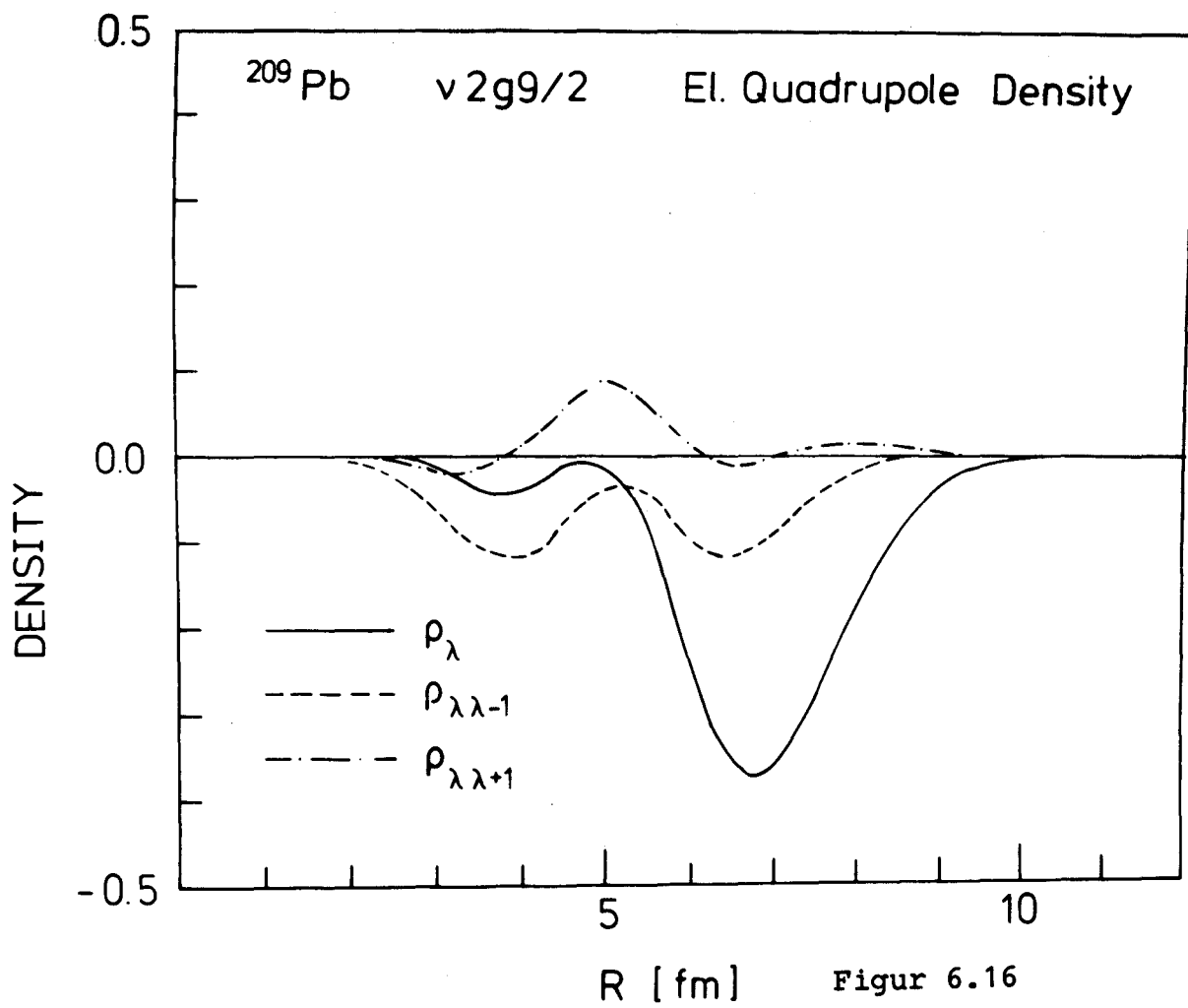


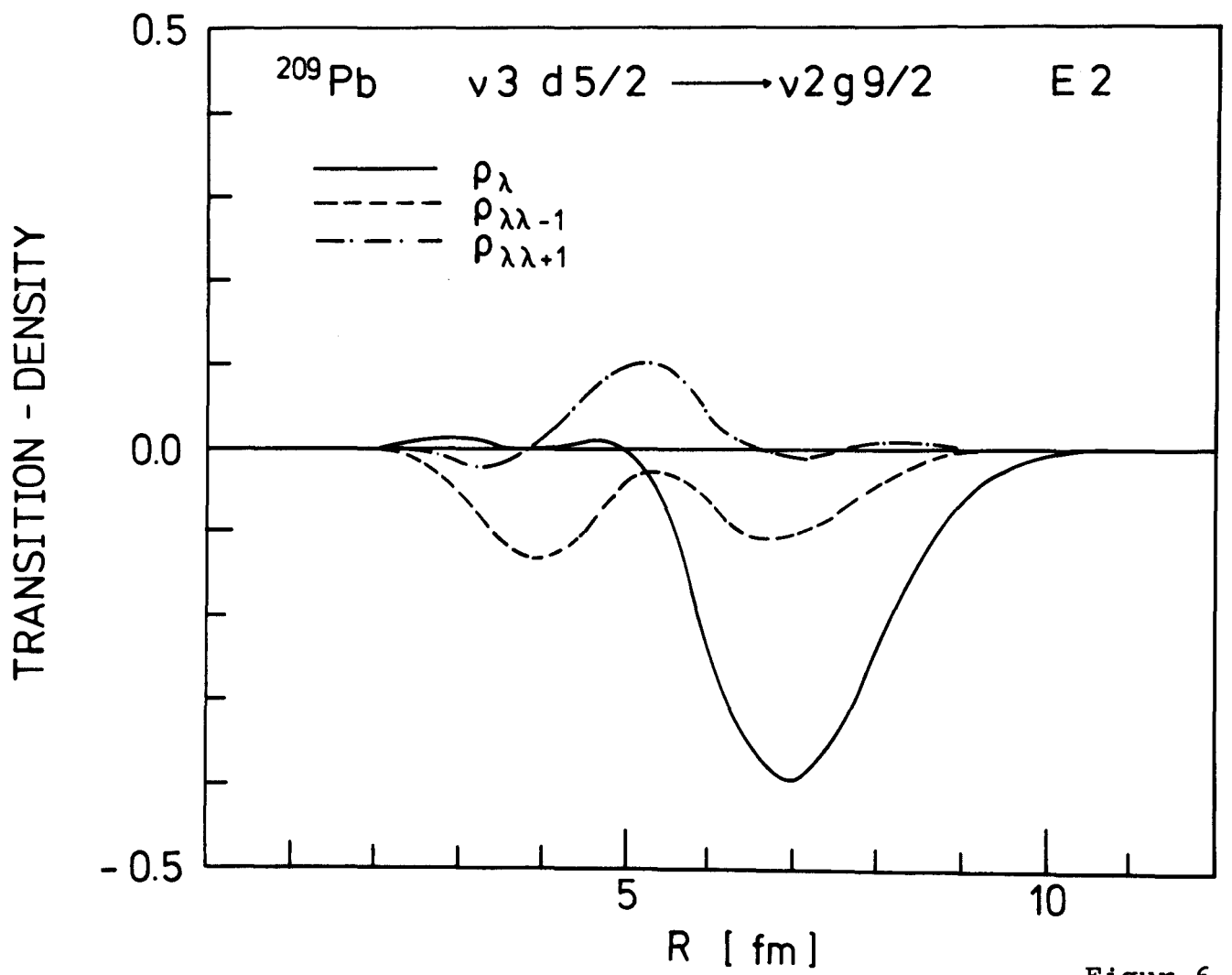
Figure 6.13



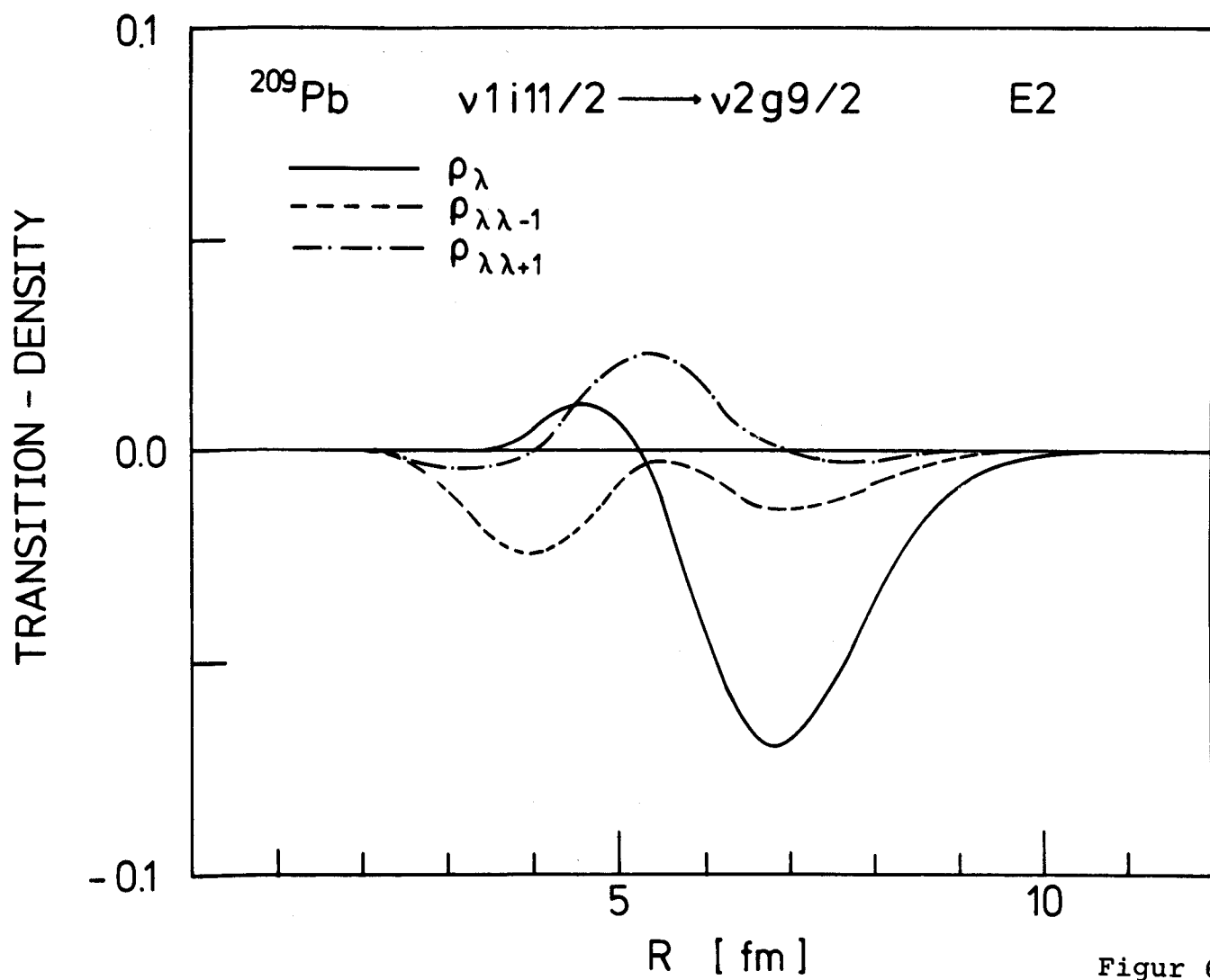
Figur 6.14



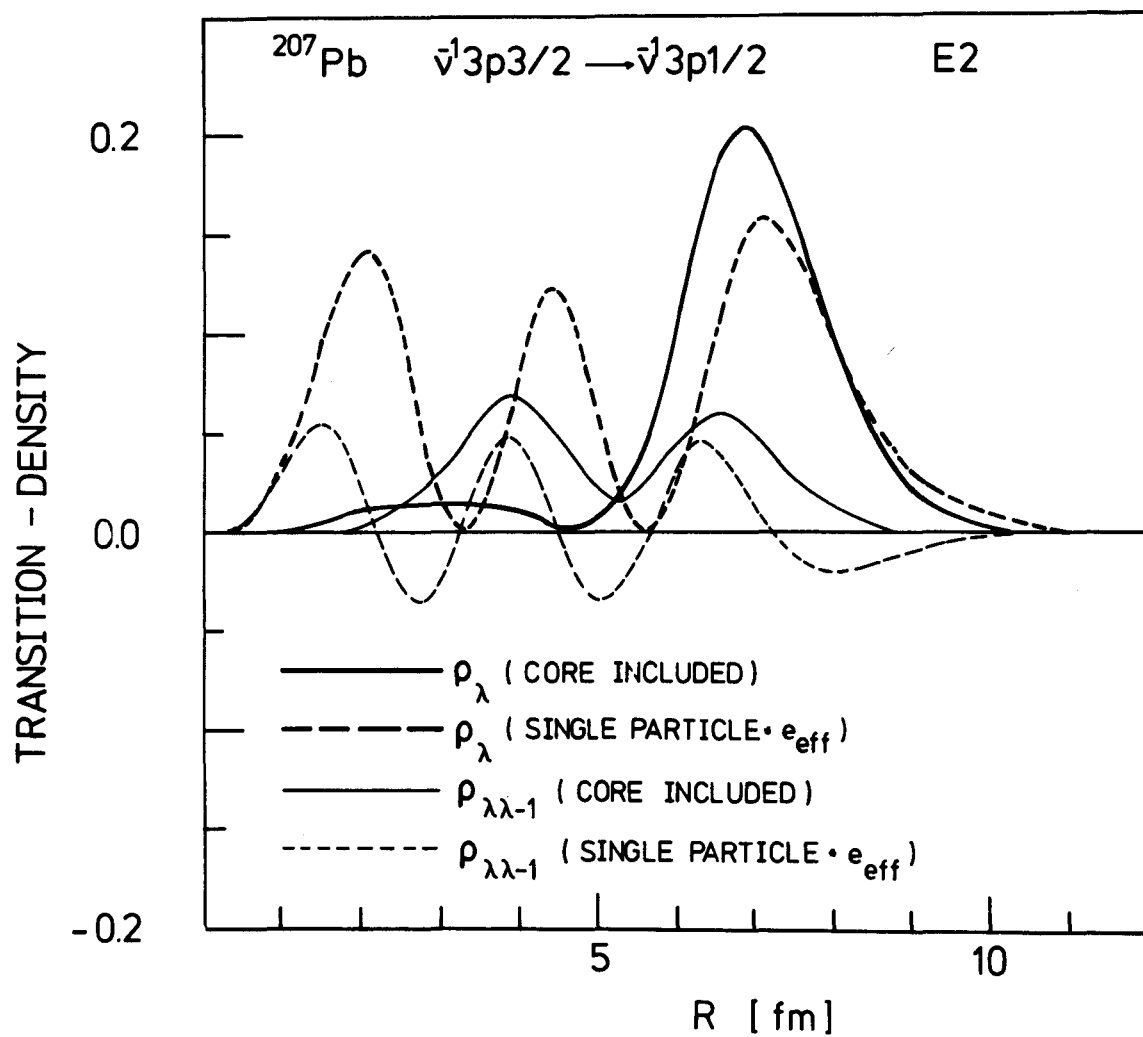




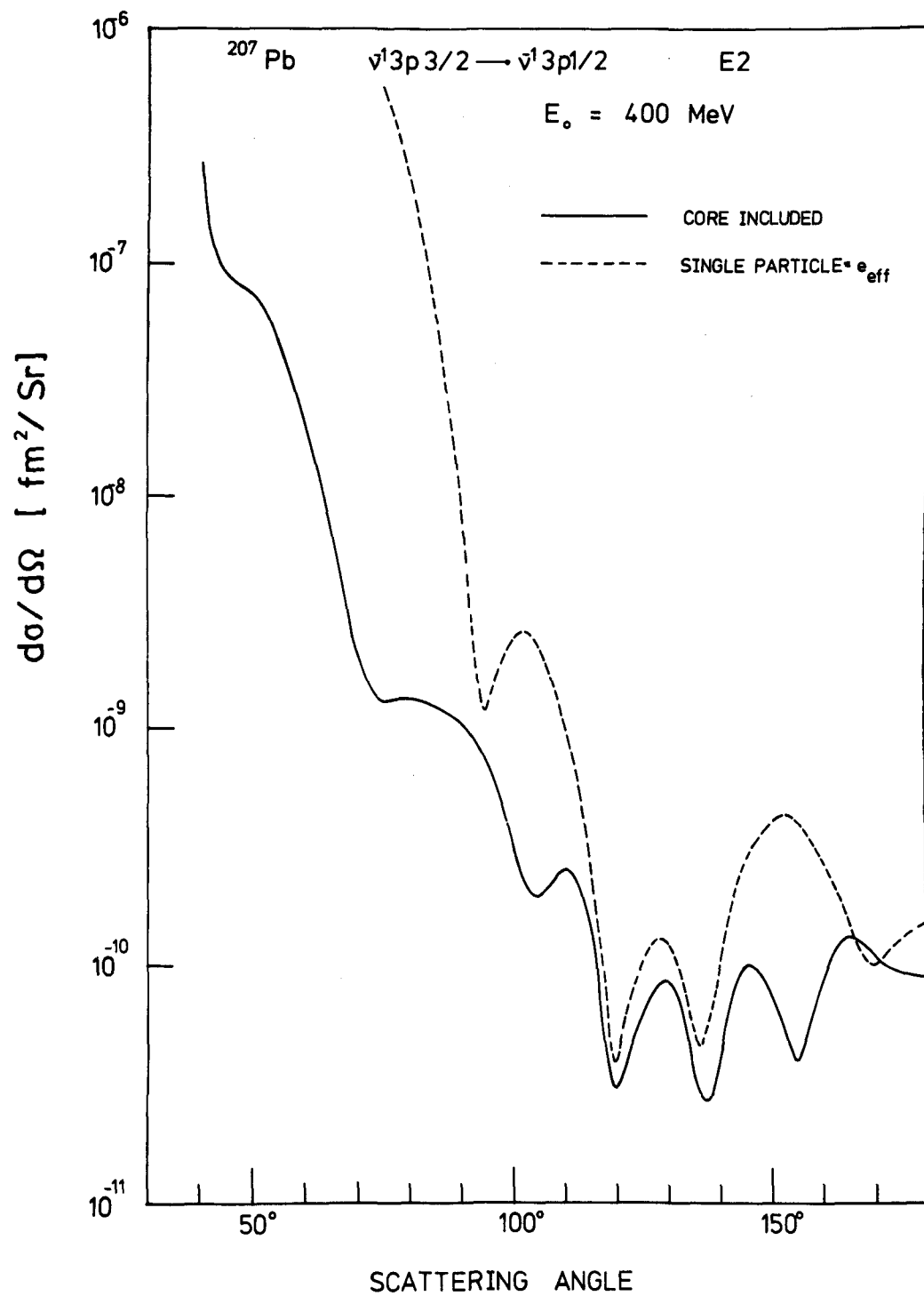
Figur 6.17



Figur 6.18



Figur 6.19



Figur 6.20

Das Thema der vorliegenden Arbeit stammt von Herrn Prof. Dr. J. Speth, dem ich für wertvolle Diskussionen und sein ständiges Interesse an meiner Arbeit danke.

Bei Herrn Dr. V. Klemt und Herrn Dr. S. Krewald möchte ich mich für zahlreiche Hinweise und nützliche Anregungen bedanken.

Die umfangreichen numerischen Rechnungen wurden mir durch die hervorragende Arbeit des Rechenzentrums der Kernforschungsanlage Jülich sowie zahlreiche programmtechnische Hinweise von Herrn E. Brökel ermöglicht.

Nicht zuletzt gilt mein herzlicher Dank Frau M. Heese und Frau Dr. Krüger für ihre Geduld und Sorgfalt bei der Abfassung des Manuskripts.