



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH GmbH

Institut für Kernphysik

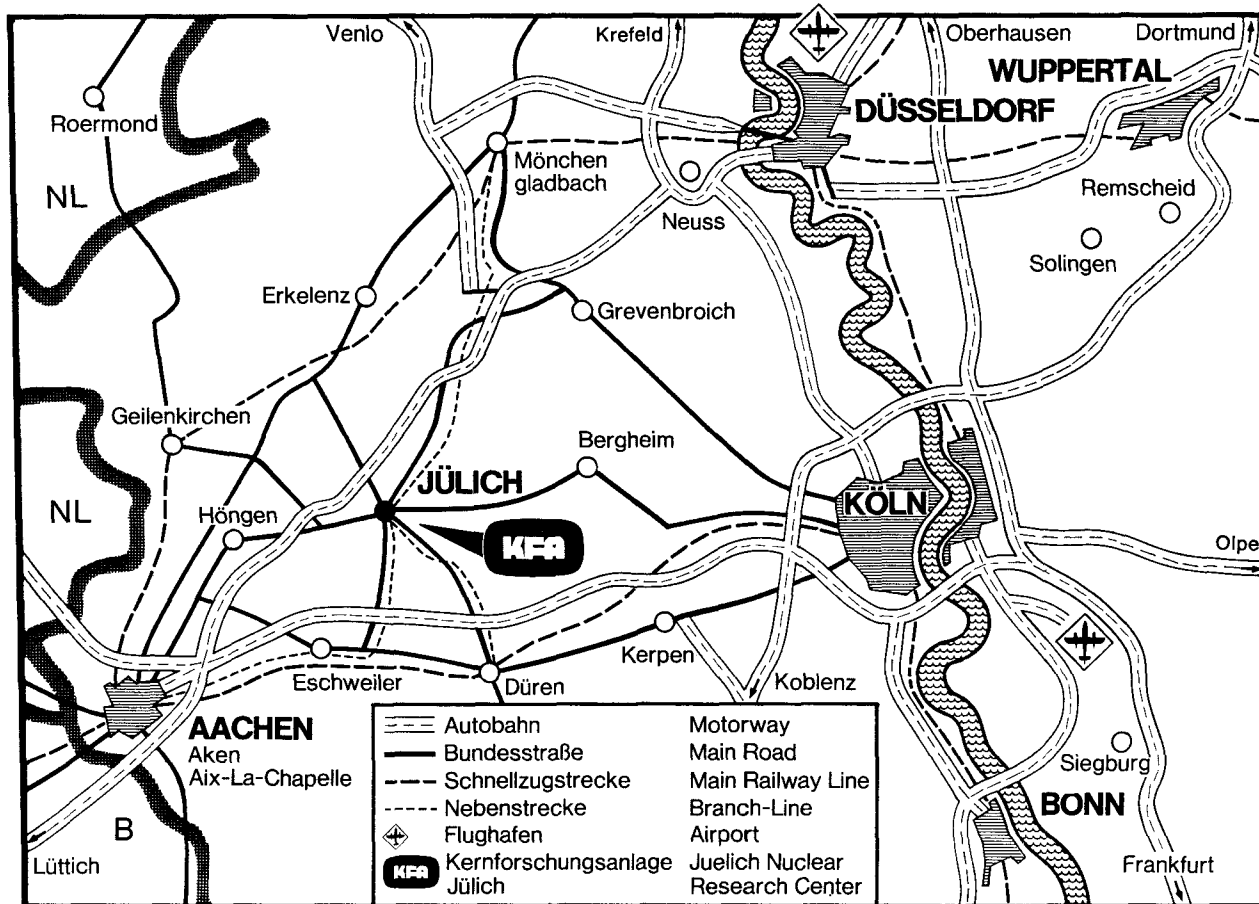
**Linienformen bei inelastischer Streuung
zu Resonanzzuständen**

von

H. Lenske

**Jül - 1346
Oktober 1976**

Als Manuskript gedruckt



Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 1346

Institut für Kernphysik Jül - 1346

Im Tausch zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH,
Jülich, Bundesrepublik Deutschland

Linienformen bei inelastischer Streuung zu Resonanzzuständen

von

H. Lenske

Abstract

A method for the parametrization of intermediate resonances in inelastic scattering of nucleons at light nuclei is deduced, similar to that which Fano has given for atomic physics. It is shown that the line shape parameter is in general a complex number. Model calculations are performed for the reactions $^{25}\text{Mg}(p,p')^{25}\text{Mg}^*(E_x = 8.838 \text{ MeV})$ and $^{16}\text{N}(p,p')^{16}\text{N}^*(E_x = 3.226 \text{ MeV})$.

Zusammenfassung

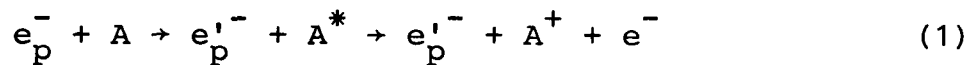
Ausgehend von den Methoden, die Fano zur Parametrisierung von Resonanzlinien in der Atomphysik angegeben hat, wird eine entsprechende Parametrisierung für intermediäre Resonanzen bei der inelastischen Streuung von Nukleonen an leichten Kernen dargestellt. Es zeigt sich, daß der Linienformparameter i. a. komplex ist. Es werden Modellrechnungen für die Reaktionen $^{25}\text{Mg}(p,p')^{25}\text{Mg}^*(E_x = 8.838 \text{ MeV})$ und $^{16}\text{N}(p,p')^{16}\text{N}^*(E_x = 3.226 \text{ MeV})$ vorgenommen.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. Einleitung	1
II. Beschreibung der Reaktion und des angeregten Systems	
2.0 Das Distorted-Wave-Modell für inelastische Streuung zu ungebundenen Zuständen	6
2.1 Das Modell zur Beschreibung des Resonanz- zustandes	11
2.2 Das Resonanzmodell in der Ortsdarstellung	16
2.3 Die Innenlösungen der Radialgleichungen im Oberflächen-Kopplungs (SC)-Modell	23
2.4 Die Innenlösungen der Radialgleichungen im Volumen-Kopplungs (VC)-Modell	25
III. Formfaktor, T-Matrix und Wirkungsquerschnitt bei in- elastischer Streuung zu einem resonanten Endzustand.	
Der komplexe Fano-Parameter	31
3.0 Formfaktor und T-Matrix	31
3.1 Formfaktor, T-Matrix und Wirkungsquerschnitt im Oberflächen-Kopplungs (SC)-Modell	34
3.2 Der Wirkungsquerschnitt bei reellem und kom- plexem Fano-Parameter	38
3.3 Formfaktor, T-Matrix und Wirkungsquerschnitt im Volumen-Kopplungs (VC)-Modell	42
IV. Anwendungen	44
4.0 Numerische Berechnung des Resonanzzustandes und des Formfaktors. Das optische Potential	44
4.1 Die $J^\pi = 1/2^+$ -Resonanz in ^{25}Mg bei $E_R = 1.509$ MeV	47
4.2 Die $J^\pi = 1^+$ -Resonanz in ^{16}N bei $E_R = 3.226$ MeV	50
V. Schlußfolgerungen und Ausblick	53
Anhang 1	56
Der doppelt-differentiale Wirkungsquerschnitt für in- elastische Reaktionen zu einem ungebundenen Endzustand	56
Referenzen	61
Tabellenbeschreibung	62
Tabellen	64
Figurenlegende	68
Figuren	71

I. Einleitung

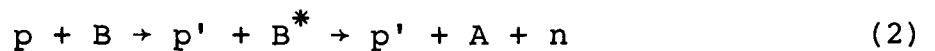
Bei der inelastischen Streuung von Elektronen an Atomen (z.B. He) beobachtet man bei bestimmten Anregungsenergien der Elektronenhülle in den Spektren der gestreuten Elektronen isolierte unsymmetrische Resonanzen, die unter Emission eines oder mehrerer Hüllenelektronen ins Kontinuum zerfallen. Durch die Reaktion



wird die Elektronenhülle des Atoms A in einen stationären gebundenen Zustand positiver Gesamtenergie angeregt. Die diesem Zustand entsprechende Konfiguration ist energetisch entartet mit einer Konfiguration, die z.B. aus dem ionisierten Rumpf A^+ und einem Elektron besteht, das einen Streuzustand im Feld von A^+ besetzt. Durch die Konfigurationswechselwirkung aus dem Bereich der Restwechselwirkungen werden diese beiden Konfigurationen gekoppelt und tragen beide zum Zustand A^* bei. Über die Kopplung findet ein Übergang zwischen den beiden Konfigurationen statt, so daß je nach Anregungsenergie eine Anzahl von Hüllenelektronen emittiert wird. Die Zustände A^* heißen autoionisierte Zustände. Fano¹⁾ hat die bei ihrer Anregung auftretenden charakteristischen asymmetrischen Resonanzlinien als Folge einer Interferenz zwischen dem diskreten und dem kontinuierlichen Teil des Spektrums des Restatoms A^+ erklärt. Es ergibt sich, daß die Asymmetrie der Resonanzlinie durch einen reellen Parameter q , den Fano-Parameter, beschrieben wird. q ist das Verhältnis zweier Übergangsmatrixelemente und bestimmt das Verschwinden der Gesamtübergangswahrscheinlichkeit aus dem Grundzustand A in den autoionisierten Zustand A^* des Targets bei einer Energie E_0 . Die Resonanzlinie kann

durch q parametrisiert werden. Die Fano-Methode zur Beschreibung der autoionisierten Zustände wird in Abschnitt 2.1 der vorliegenden Arbeit erläutert.

Bei der inelastischen Streuung von Nukleonen oder leichten Kernen an leichten Kernen (z.B. ^{12}C , ^{16}O , ^{25}Mg) erwartet man entsprechende Resonanzen bei Anregungsenergien des Targets, die nur wenige MeV über der Schwellenenergie für Teilchenemission liegen. Diese Resonanzen sind bereits bei Stripping-Reaktionen und bei elastischer Neutronen-Streuung bei einer Reihe von Kernen beobachtet worden (z.B. Ref.^{11,15,19}). Wir nehmen nun an, daß die Kernreaktion



analog zur Reaktion (1.1) abläuft. Durch die Wechselwirkung mit dem Projektil p wird das Target B in einen BSEC (Bound State Embedded in the Continuum) angeregt. Wir wollen uns auf den einfachsten Fall beschränken, daß der BSEC nur aus einem $1p-1h$ -Zustand besteht. Diese Konfiguration ist über die Restwechselwirkung an die energiegeliche $1p-1h$ -Konfiguration gekoppelt, in der der Restkern A im Grundzustand vorliegt und ein Nukleon einen Streuzustand im Feld von A besetzt. Beide Zustände tragen wie oben erwähnt zum Zustand B^* bei und können über die Restwechselwirkung ineinander übergehen. Das Resonanzmodell wird in Teil II der Arbeit diskutiert. Wie eine Reihe von Autoren bereits gezeigt hat^{8,10}), kann das Fano-Modell ohne wesentliche Änderungen zur Beschreibung des Zustandes B^* bei Kernreaktionen übernommen werden. Bisher wurde die im Fano-Modell mögliche Parametrisierung des Wirkungsquerschnitts weitgehend vernachlässigt. Das Ziel der

vorliegenden Arbeit ist es, diese Parametrisierung für Kernreaktionen der Art (2) zu erreichen. Wir nehmen an, daß die Anregung des Zustandes B^* durch eine direkte Reaktion zwischen Projektil p und Target B erfolgt. Das Projektil p soll sich nur kurze Zeit im Bereich der Kernkräfte des Targets befinden und kann daher nur wenige Freiheitsgrade des Targetsystems anregen. B^* kann durch relativ einfache Einteilchenanregungen beschrieben werden, so daß das $1p-1h$ -Modell von B^* gerechtfertigt erscheint. Der Zerfall der Resonanz B^* in den Restkern A und das emittierte Nukleon n soll vom Projektil p nicht beeinflußt werden. Aus dieser Bedingung können wir zu einer groben Abschätzung für die zulässigen Resonanzbreiten gelangen. Ist das anregende Teilchen ein Nukleon mit einer Einschußenergie von rd. 20 MeV, so legt es eine Entfernung von 4 fm, die etwa der mittleren Reichweite der Kernkräfte entspricht, in rd. 10^{-22} sec zurück. Wenn der Zerfall der Resonanz von p nicht beeinflußt werden soll, muß die Lebensdauer τ der Resonanz mindestens ebenso groß sein. Lebensdauer τ und Resonanzbreite Γ sind bekanntlich über die Relation

$$\tau \lesssim h/\Gamma$$

verknüpft. Hieraus erhalten wir als grobe Abschätzung für eine obere Grenze der zulässigen Breiten

$$\Gamma \approx 100 \text{ keV}$$

Ist (2) eine direkte Reaktion, so können die Wellenfunktionen des Projektils im Eingangs- und Ausgangskanal im optischen Modell berechnet werden²⁾. Aus dem Wirkungsquerschnitt in DWBA ergibt sich (Abschnitt III), daß die Linienform durch einen i.a. kom-

plexen Parameter beschrieben werden muß.

Die Wellenfunktion des angeregten Zustandes B^* wird im Buck- und Hill-Modell (BHM²⁰) betrachtet. Wir nehmen an, daß zu B^* nur ein gebundener und ein ungebundener 1p-1h-Zustand des Targets beitragen. Wie in Abschnitt 2.2 gezeigt wird, gelangt man dann zu gekoppelten Gleichungen zwischen den Einteilchenfunktionen des angeregten gebundenen Nukleons und des ungebundenen Nukleons. Die exakte mikroskopische Berechnung des BSEC wird durch eine Parametrisierung umgangen.

Die gekoppelten Gleichungen werden in zwei Modellen für das Kopplungspotential V_{12} gelöst.

Im ersten Modell nehmen wir an, daß die Radialabhängigkeit von V_{12} durch eine δ -Funktion bei $r = R_0$, R_0 der Modell-Kernradius, gegeben ist (Surface-Coupling-Model oder SC-Modell). Im zweiten Modell, dem Volume-Coupling-Model oder VC-Modell, wählen wir für die Radialabhängigkeit des Kopplungspotentials ein sphärisches Kastenpotential.

Die Ergebnisse zeigen, daß sich die Wellenfunktionen für $r < R_0$ in den beiden Modellen stark unterscheiden, aber übereinstimmende Streuphasen ergeben.

In Abschnitt III wird die T-Matrix zur Reaktion (2) diskutiert und die Parametrisierung des Wirkungsquerschnitts mit einem komplexen Fano-Parameter q bestimmt. q ist eine Funktion des Streuwinkels des Projektils. Wir können damit die Änderung der Linienform mit Streuwinkel, unter dem sie betrachtet wird, voraussagen.

In Abschnitt IV schließlich wenden wir die beiden Modelle auf zwei realistische Beispiele an. Wir betrachten die Resonanzen $^{25}\text{Mg}(p,p')^{25}\text{Mg}^*$ ($E_R = 1.509 \text{ MeV}$, $\Gamma = 50 \text{ keV}$, $J^\pi = 1^+$) und $^{16}\text{N}(p,p')^{16}\text{N}^*$ ($E_R = 3.226 \text{ MeV}$, $\Gamma = 24 \text{ keV}$, $J^\pi = 1/2^-$) und vergleichen die Ergebnisse der Modellrechnungen mit den experimentellen Daten der Reaktionen $^{15}\text{N}(d,p)^{16}\text{N}^*$, $^{15}\text{N}(n,n)^{15}\text{N}$ und $^{24}\text{Mg}(d,p)^{25}\text{Mg}^*$, $^{24}\text{Mg}(n,n)^{24}\text{Mg}$. Durch diese Reaktionen werden die gleichen Resonanzzustände besetzt.

Die in dieser Arbeit diskutierten Methoden können auch auf die inelastische Anregung von Riesenresonanzen sowie Knock-out-Reaktionen angewendet werden.

Schließlich ist noch erwähnenswert, daß durch die Entwicklung neuer hochauflösender Spektrometer vom Q3D-Typ (z.B. BIG KARL, Institut für Kernphysik der KFA Jülich) die Messung dieser sehr schmalen Resonanzen möglich sein wird. BIG KARL hat ein Energieauflösungsvermögen von

$$\frac{\Delta E}{E} = 10^{-4}$$

Bei einer Einschußenergie von 50 MeV kann also ein Energieintervall der Breite

$$\Delta E = 5 \text{ keV}$$

aufgelöst werden.

II. Beschreibung der Reaktion und des angeregten Systems

2.0 Das Distorted-Wave-Modell für die inelastische Streuung zu ungebundenen Zuständen

Die Reaktion (2) führt zum Endzustand $A + n$ des Targets B , bestehend aus dem Restkern A und dem emittierten Nukleon n . Wir wollen in diesem Abschnitt das Übergangsmatrixelement für die direkte Reaktion

$$p + B \rightarrow p' + A + n \quad (3)$$

in der DWBA bestimmen. Reaktion (2) wird im Schwerpunktsystem betrachtet (CM-System).

In Fig. 2 werden die CM-Koordinaten definiert. Im CM-System ist der Vielteilchen-Hamilton-Operator H durch

$$H = H_B + H_p + T_{pB} + V_{pB} \quad (4)$$

gegeben.

Der Operator H_B beschreibt die inneren Zustände des Targets B . Entsprechend beschreibt H_p die inneren Zustände des Projektils p . Ist p ein Nukleon, so sind die Eigenfunktionen zu H_p durch die Spinfunktion $\chi_{1/2} \psi_p$ gegeben. Der Operator T_{pB} der kinetischen Energie der Relativbewegung von p gegen B ist durch

$$T_{pB} = - \frac{\hbar^2}{2m_p^*} \nabla_{\vec{r}_p}^2 \quad (5)$$

definiert. m_p^* ist die reduzierte Masse des Projektils p

$$m_p^* = \frac{m_p M_B}{m_p + M_B}$$

Wir zerlegen die Wechselwirkung V_{pB} zwischen Projektil und Target

$$V_{pB} = V_{pn} + V_{pA}$$

in die Zweikörperwechselwirkung $V_{pn} = V_{pn}(\vec{r}_p, \vec{r}_o)$ zwischen Projektil und einem Target-Nukleon n mit den Ortskoordinaten $\vec{r}_o$ und die Wechselwirkung V_{pA} des Projektils mit dem Restkern A . V_{pA} beschreibt Prozesse höherer Ordnung und wird im weiteren vernachlässigt⁵⁾.

Die Wellenfunktion $\Psi_{\vec{k}_i v_p M_B^i}^{(+)}$ beschreibt den Zustand des Gesamtsystems $p + B$. Vor der Reaktion befindet sich das Target B im Grundzustand $I_B^i M_B^i$, das Projektil p ist im Zustand $e^{i\vec{k}_i \vec{r}_p} \chi_{1/2} v_p$ mit dem Wellenvektor $\vec{k}_i$. $\Psi_{\vec{k}_i M_B^i}^{(+)}$ enthält asymptotisch ($r_p \rightarrow \infty$) auslaufende Kugelwellen.

Die Wellenfunktion $\Omega^E = \Omega_q^E(\vec{r}_o, j\mu, I_A^* M_A^*; I_B M_B)$ des angeregten Zustandes B^* mit Resonanzspin $I_B M_B$ enthält in unserem Modell zwei (1p-1h)-Konfigurationen, den BSEC mit dem angeregten Core im Zustand $I_A^* M_A^*$ und einem über die Fermikante ϵ_F von B angeregten Nukleon im Zustand $j\mu$ und die energiegleiche Konfiguration, in der der Core A im Grundzustand $I_A M_A$ ist und ein Nukleon einen Streuzustand $j\mu$ im Feld von A einnimmt. Ω^E ist im allgemeinen Fall Eigenfunktion zu H_B (Fig. 3)

$$(E - H_B) \Omega^E = 0 \quad (7)$$

Wir führen das optische Potential $U_B^{p'}$, daß die ebenen Wellen des Projektils im Ausgangskanal verzerrt. $U_B^{p'}$ ist ein Einteilchenpotential und hängt nur von den Koordinaten des Projektils ab²⁾.

Es generiert die Distorted-Waves $\chi_f^{(-)}(\vec{k}_f, \vec{r}_p)$ im Ausgangskanal:

$$(T_{pB} + U_B^{p'} - E_B^{p'}) \chi_f^{(\pm)}(\vec{k}_f, \vec{r}_p) = 0 \quad (8)$$

$E_B^{p'}$ ist die kinetische Energie der Relativbewegung von p' gegen B , $\vec{k}_f$ ist der Wellenvektor des Projektils im Endzustand.

Die DW's $\chi^{(\pm)}(\vec{k}, \vec{r})$ erfüllen die üblichen Randbedingungen²⁾

$$\begin{aligned} \chi^{(+)}(\vec{k}, \vec{r}) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \text{auslaufende Kugelwellen} \\ \chi^{(-)*}(\vec{k}, \vec{r}) &= \chi^{(+)}(-\vec{k}, \vec{r}) \end{aligned}$$

$\chi^{(-)}$ geht durch Zeitumkehr aus $\chi^{(+)}$ hervor. Das optische Potential $U_B^{p'}$ wird so gewählt, daß es die elastische Streuung im Ausgangskanal bei der Energie $E_B^{p'}$ wiedergibt²⁾.

Mit dem Gell-Mann, Goldberger-Theorem²⁾ erhalten wir für das Übergangsmatrixelement der Reaktion (3)*

$$T_{\vec{k}_i \nu_p M_B^i \rightarrow \vec{k}_f \nu_p' \vec{q}_n \nu_n M_A} = \langle \chi_f^{(-)}(\vec{k}_f, \vec{r}_p) \chi_{1/2 \nu_p'} | \Omega^E | V_{pn} - U_B^{p'} | \psi_{\vec{k}_i \nu_p M_B^i}^{(+)} \rangle \quad (9)$$

wobei $\vec{q}_n$ der Wellenvektor und ν_n die Spinprojektion des emittierten Nukleons ist. In üblicher Weise gelangen wir zur T-Matrix in der DWBA mit der Näherung

$$\psi_{\vec{k}_i \nu_p M_B^i}^{(+)} \cong \phi_B^{i M_B^i} \chi_i^{(+)}(\vec{k}_i, \vec{r}_p) \chi_{1/2 \nu_p} \quad (10)$$

für die Wellenfunktion im Eingangskanal²⁾. Die DW's $\chi_i^{(+)}(\vec{k}_i, \vec{r}_p)$ werden in einem optischen Potential $U_B^p(\vec{r}_p)$ berechnet, daß die elastische Streuung im Eingangskanal reproduziert.

Durch die optischen Potentiale im Eingangs- und Ausgangskanal wird der Teil der Projektil-Target-Wechselwirkung, der in V_{pn} nicht enthalten ist, in einer gemittelten Weise berücksichtigt²⁾.

*Da die Targetzustände orthogonal sind und $U_B^{p'}$ nur von den Koordinaten des Projektils abhängt, ist (9) unabhängig von der Wahl von $U_B^{p'}$.²⁾

Mit der T-Matrix

$$T_{\vec{k}_i \nu_p M_B^i \rightarrow \vec{k}_f \nu_{p'} \vec{q} \nu_n M_A}^{DW} =$$

$$\langle \chi_f^{(-)}(\vec{k}_f, \vec{r}_p) \chi_{1/2 \nu_{p'}} \Omega^E | V_{pn} | \phi_B^{I_B M_B} \chi_i^{(+)}(\vec{k}_i, \vec{r}_p) \chi_{1/2 \nu_p} \rangle$$
(11)

in DWBA, wobei wir die Orthogonalität der Targetzustände berücksichtigt haben, gelangen wir zum unpolarisierten Wirkungsquerschnitt in der DWBA

$$\frac{d^3 \sigma_{DW}}{d\Omega_n d\Omega_p dE_p} = \frac{(m_p^*)^2 m_n^* q}{(2\pi)^5 \hbar^6} \frac{k_f}{k_i} \frac{1}{(2I_B^i + 1) \cdot 2} *$$

$$* \sum_{\substack{M_B^i M_A \nu_n \\ \nu_p \nu_{p'}}} \left| T_{\vec{k}_i \nu_p M_B^i \rightarrow \vec{k}_f \nu_{p'} \vec{q} \nu_n M_A}^{DW} \right|^2$$
(12)

Da Teilchen n nicht beobachtet werden soll, muß über die Richtungen $\hat{q} = \vec{q}/|\vec{q}|$ integriert werden und wir erhalten den inklusiven unpolarisierten doppel-differentiellen Wirkungsquerschnitt in DWBA (siehe Anhang 1):

$$\frac{d^2 \sigma_{DW}}{d\Omega_p dE_p} = \frac{(m_p^*)^2 m_n^* q}{(2\pi)^5 \hbar^6} \frac{k_f}{k_i} \frac{1}{(2I_B^i + 1) 2} *$$

$$* \sum_{\substack{M_A \nu_n \\ \nu_p M_B^i \nu_{p'}}} \int d\hat{q} \left| T_{\vec{k}_i \nu_p M_B^i \rightarrow \vec{k}_f \nu_{p'} \vec{q} \nu_n M_A}^{DW} \right|^2$$
(13)

Die Integrationen in der T-Matrix laufen über alle Target-Koordinaten und die Projektil-Koordinaten.

Wir werden später die BSEC-Konfigurationen in Ω^E vernachlässigen und für unser Modell annehmen, daß B im Grundzustand aus dem Core A und einem weiteren Nukleon n besteht. Dann läßt sich die Inte-

gration über die inneren Koordinaten von A in der T-Matrix leicht ausführen.

Die T-Matrix enthält nur noch die Kontinuums-Konfiguration von Ω^E und beschreibt den direkten Übergang (3) aus dem Grundzustand in den ungebundenen Zustand A+n über die Zweiteilchenwechselwirkung V_{pn} . Der Wirkungsquerschnitt ist von ähnlicher Struktur wie bei inelastischer Streuung zu gebundenen Zuständen (Anhang 1). Mit $\Omega_2^E = \Omega_2^E(\vec{r}_O, \vec{q}, v_n, I_A M_A : I_B M_B)$, der Kontinuumskomponente der vollen Wellenfunktion Ω^E , erhalten wir

$$\frac{d^2 \sigma}{d\Omega_p dE_p} = \frac{(m_p^*)^2 m_n^* q}{(2\pi)^5 \hbar^6} \frac{k_f}{k_i} \frac{1}{2(2I_B^i + 1)} * \sum_{\substack{M_B^i M_A^i v_n \\ v_p v_{p'}}} \int d\hat{q} \left| \int d\vec{r}_p d\vec{r}_O dA \chi_f^{(-)*}(\vec{k}_f, \vec{r}_p) \Omega_2^E(\vec{r}_O, \vec{q}, v_n, I_A M_A : I_B M_B) \right. \\ \left. * V_{pn}(\vec{r}_p, \vec{r}_O) \phi_B^{I_B M_B^i}(\vec{r}_O, A) \chi_i^{(+)}(\vec{k}_i, \vec{r}_p) \chi_{1/2 v_p} \chi_{1/2 v_p}^* \right|^2 \quad (14)$$

Die Näherung (14) für den doppelt-differentiellen Wirkungsquerschnitt bedeutet physikalisch, daß wir die ad-hoc-Annahme gemacht haben, daß die Reaktion bevorzugt über den offenen Kanal abläuft, so daß der Beitrag der BSEC-Komponente zum Wirkungsquerschnitt vernachlässigt werden kann.

2.1 Das Modell zur Beschreibung des Resonanzzustandes

H_B sei der gesamte Hamilton-Operator des Systems B mit den Eigenfunktionen Ω^E zur Energie E

$$(E - H_B) \Omega^E = 0 \quad (15)$$

Wir zerlegen den Vielkörperoperator H_B in einen Schalenmodelloperator H_O und die Restwechselwirkung $\hat{V}_{12}$

$$\begin{aligned} H_B &= H_O + (H_B - H_O) = H_O + \hat{V}_{12} \\ H_O &= \sum_i (T_i + V_i) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\hat{V}_{12} \equiv H_B - H_O \quad (17)$$

H_O besteht aus einer Summe von Einkörper-Operatoren. Das Spektrum von H_O sei bekannt. Im diskreten Teil enthalte es gebundene Zustände des Systems B mit negativer und positiver Gesamtenergie (Grundzustand von B und gebundene angeregte Zustände von B). Der kontinuierliche Teil des Spektrums wird durch Eigenfunktionen zu H_O beschrieben, in denen ein oder mehrere Nukleonen ins Kontinuum angeregt sind.

Im Grundzustand lasse sich B in einen Core A mit N_A Nukleonen und ein letztes Nukleon n zerlegen

$$B = (A+n) \begin{smallmatrix} i \\ I_B^i M_B^i \end{smallmatrix}$$

Die N_A Nukleonen besetzen im Schalenmodell die ersten N_A Zustände und koppeln zum Core-Drehimpuls $I_A^M A$. Das Nukleon n nimmt den nächsten freien Schalenmodellzustand bezüglich A mit Drehimpuls $j_i \mu_i$ ein. Core-Spin und der Drehimpuls des letzten Nukleons kop-

peln zum Grundzustandsspin $I_B^i M_B^i$ von B. Die Grundzustandswellenfunktion ist das (antisymmetrierte) Produkt der Einteilchenfunktion des letzten Nukleons und der Core-Wellenfunktion. Zur Beschreibung des angeregten Zustandes B^* wählen wir aus dem Modellraum zu H_0 einen Unterraum aus, der eine gebundene 1p-1h-Konfiguration ϕ mit positiver Gesamtenergie ϵ (BSEC) und eine 1p-1h-Kontinuumskonfiguration ψ_E , enthält. Zu B^* sollen also nur zwei 1p-1h-Zustände des Targets beitragen²⁰⁾ (Buck und Hill-Modell-BHM).

Im BSEC ϕ ist ein Core-Nukleon über die Fermikante ϵ_F von B angeregt. Sein Drehimpuls $j\mu$ koppelt mit dem Drehimpuls des Restkerns zum Resonanzdrehimpuls $I_B M_B$. In ψ_E ist der Core A im Grundzustand $I_A M_A$ und das Nukleon n besetzt einen Streuzustand im Feld von A mit Drehimpuls $j\mu$. Wir nehmen an, daß die Drehimpulse des angeregten gebundenen Teilchens und des Kontinuumssteilchens übereinstimmen.

Wir nehmen an, daß die Eigenfunktionen zu H_0 , die unseren Modellraum bilden, bekannt sind und die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \langle \phi | H_0 | \phi \rangle &= \epsilon \\ \langle \phi | \phi \rangle &= 1 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \psi &= \mathcal{A}(\phi_n^* \phi_A^*) \\ \langle \psi_{E''} | H_0 | \psi_{E'} \rangle &= \delta(E'' - E') E' \\ \langle \psi_{E''} | \psi_{E'} \rangle &= \delta(E'' - E') \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \psi_{E'} &= \mathcal{A}(\psi_n \cdot \phi_A) \\ \langle \phi | \psi_{E'} \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

haben. φ_n (Ψ_n) ist die Einteilchenfunktion des gebundenen (ungebundenen) angeregten Nukleons, ϕ_A^* die Slater-Determinante des angeregten Cores, ϕ_A die Slater-Determinante von A im Grundzustand. Bei $E' = \varepsilon$ liegt eine energetische Entartung von φ mit $\Psi_{E'}$ vor.

Der Operator $\mathcal{A}$ antisymmetrisiert die Produktfunktionen. Durch

$$\begin{aligned} Q &= |\varphi\rangle \langle \varphi| \\ P &= \int |\Psi_{E'}\rangle dE' \langle \Psi_{E'}| \end{aligned} \quad (21)$$

werden Projektionsoperatoren auf den Modellraum definiert, mit

$$\begin{aligned} P^2 &= P & Q^2 &= Q \\ P \cdot Q &= Q \cdot P = 0 \\ P + Q &= 1 \end{aligned} \quad (22)$$

1 ist der Einheitsoperator im Raum $\{\varphi, \Psi_{E'}\}$. Die exakte Gleichung (15) wird mit P und Q auf den Modellraum projiziert. Dazu nehmen wir an, daß gilt^{1,10)}

$$\begin{aligned} Q \hat{V}_{12} Q &= P \hat{V}_{12} P = 0 \\ \langle \varphi | H_B | \varphi \rangle &= \varepsilon \\ \langle \Psi_{E'} | H_B | \varphi \rangle &= V_{E'} \\ \langle \Psi_{E''} | H_B | \Psi_{E'} \rangle &= E' \delta(E'' - E') \\ Q \hat{V}_{12} P &= P \hat{V}_{12} Q = V_{12} \end{aligned} \quad (23)$$

V_{12} ist die Modell-Restwechselwirkung. Sie wirkt nur zwischen dem P- und dem Q-Raum. In unserem Modellraum geht Gl. (15) in die gekoppelten Gleichungen

$$(E-PH_B P) P\Omega^E = V_{12} Q\Omega^E \quad (24)$$

$$(E-QH_B Q) Q\Omega^E = V_{12} P\Omega^E \quad (25)$$

über. Die Projektion von Ω^E in den Modellraum entspricht einer Entwicklung nach der Basis $\{\varphi, \psi_{E'}\}_{E'}$.

$$\begin{aligned} \Omega^E &= Q\Omega^E + P\Omega^E \\ &= \Omega_1^E + \Omega_2^E \end{aligned} \quad (26)$$

$$\Omega^E = a\varphi + \int dE' b_{E'} \psi_{E'} \quad (27)$$

mit den Entwicklungskoeffizienten $a(E)$ und $b_{E'}(E)$, wie sie Fano angibt¹⁾ (Fig. 3). $\Omega_1^E = a\varphi$ ist die BSEC-Komponente von B^* , $\Omega_2^E = \int dE' b_{E'} \psi_{E'}$, die Kontinuumskomponente von B^* .

Mit der Methode der Greensfunktionen erhalten wir aus (24) und (25) für^{7,8,10)}

$$a(E) = \frac{\sin \delta^r}{\pi V_E} e^{i\delta^r} \quad (28)$$

$$b_{E'}(E) = \frac{\sin \delta^r}{\pi V_E} V_{E'} \left\{ \frac{P}{E-E'} - \pi \cotg \delta^r \delta(E-E') \right\} e^{i\delta^r} \quad (29)$$

mit

$$\begin{aligned} \delta^r &= \arctg \frac{\Gamma}{2(E_R - E)} \quad (\text{Breit-Wigner-Form}) \\ \Gamma &= 2\pi V_E^2 \end{aligned} \quad (30)$$

E_R ist die Resonanzenergie, Γ die Breite der Resonanz. E_R und Γ werden durch V_{12} beeinflusst.

$\frac{Pf(x)}{x_0 - x}$ ist der Hauptwert von $f(x)$ bei $x=x_0$. Mit der Definition des durch Beimischungen aus dem Kontinuum modifizierten BSEC

$$\phi = \varphi + P \int dE' \frac{V_{E'} \psi_{E'}}{E-E'} \quad (31)$$

erhalten wir aus (27) die Lösung

$$\Omega^E = \left\{ \frac{\sin \delta^r}{\pi V_E} \phi - \cos \delta^r \psi_E \right\} e^{i\delta^r} \quad (32)$$

in unserem Modellraum zur Beschreibung des Resonanzzustandes $B^* 1,7,8,10$).

Für große Werte von r_0 , der Radialkoordinate des Kontinuumnukleons, verhält sich ψ_E , im Ortsraum wie

$$\psi_E \xrightarrow{r_0 \rightarrow \infty} \phi_A^{I_A M_A} \frac{1}{r_0} \sin(qr_0 - \ell\pi/2 + \delta_\ell^0) \quad (33)$$

in der ℓ -ten Partialwelle. $q = \left[\frac{2m_n^*}{\hbar^2} E_n \right]^{1/2}$ ist die Wellenzahl des emittierten Nukleons bei der Einteilchenenergie E_n , δ_ℓ^0 die nicht-resonante Potentialstreuphase. $\phi_A^{I_A M_A}$ ist die Wellenfunktion des Restkerns A im Grundzustand.

Aus (32) erhalten wir das asymptotische Verhalten ($r_0 \rightarrow \infty$) der Gesamtlösung Ω^E im Ortsraum:

$$\Omega^E \xrightarrow{r_0 \rightarrow \infty} \phi_A^{I_A M_A} \frac{1}{r_0} \sin(qr_0 - \ell\pi/2 + \delta_\ell^0 + \delta_\ell^r) \quad (34)$$

Die Kopplung des BSEC an das Kontinuum bewirkt eine zusätzliche Streuphase δ_ℓ^r , die Resonanzcharakter besitzt. Die Gesamtstreu-
phase ist

$$\delta_\ell = \delta_\ell^0 + \delta_\ell^r .$$

2.2 Das Resonanzmodell in der Ortsdarstellung

Da wir zur Berechnung des Formfaktors die Wellenfunktion Ω_2^E im Ortsraum benötigen, übertragen wir das im letzten Abschnitt definierte Modell für den Resonanzzustand in den Ortsraum. Zwischen den Nukleonen des Targets soll eine reine Zentralkraft wirken. Dann können die Schrödinger-Gleichungen für die Einteilchen-Schalenmodellfunktionen zu H_0 nach Radial- und Winkelanteil separiert werden und es bleiben die gekoppelten Radialgleichung zu lösen, die aus (24) und (25) im Ortsraum folgen.

Nach Buck und Hill²⁰⁾ gehen wir von dem (selbstkonsistenten) Hamilton-Operator H_0 aus. Zu H_0 gibt es ein vollständiges normiertes System von Einteilchenfunktionen ϕ_γ

$$(T_i + V_i) \phi_\gamma(\vec{r}_i) = \epsilon_\gamma \phi_\gamma(\vec{r}_i) \quad (35)$$

die sowohl Einteilchenzustände unterhalb der Fermikante ϵ_F als auch angeregte Einteilchenzustände über der Fermikante beschreiben. Im Index γ sind alle relevanten Quantenzahlen zusammengefaßt:

$$\gamma = (\epsilon_\gamma \ell j \mu \tau)$$

ℓ ist der Bahndrehimpuls, j der Gesamtdrehimpuls mit der Projektion μ und τ die Isospinprojektion. Wir vernachlässigen im weiteren die Spins und den Isospin. Die Einteilchenfunktionen ϕ_γ haben die explizite Form

$$\phi_\gamma(r) = \frac{g_\ell^\gamma(r)}{r} y_{\ell\lambda}(\hat{r}) \quad (36)$$

mit $\gamma = (\epsilon_\gamma, \ell 0 \lambda 0)$. λ ist die Projektion des Bahndrehimpulses ℓ ($\lambda = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell$). Der Grundzustand von B wird nach Slater-Determinanten entwickelt, die Einteilchenfunktionen mit $\epsilon_\alpha \leq \epsilon_F$

enthalten. Der Einfachheit halber soll der Grundzustand von B durch eine Slater-Determinante gegeben sein ($J^\pi = 0^+$), um die Entwicklungskoeffizienten nach den Slater-Determinanten zu unterdrücken.

Im Buck- und Hill-Modell (BHM)²⁰⁾ wird ein angeregter Zustand nach 1p-1h-Slaterdeterminanten entwickelt, die N_A -Teilchen im Grundzustand enthalten und ein Teilchen in einem angeregten Zustand über der Fermikante. Unser Modell für die Wellenfunktion Ω^E von B^* hat nach Gln. (26) und (27) die gleiche Struktur. Aus den Gln. (24) und (25) folgen gekoppelte Gleichungen für die Entwicklungskoeffizienten $a(E)$ und $b_{E'}(E)$ nach den Slaterdeterminanten φ und $\psi_{E'}$:

$$(E - \epsilon) a - \int dE' b_{E'} V_{E'} = 0 \quad (37)$$

$$(E - E') b_{E'} - V_{E'} a = 0 \quad (38)$$

$$V_{E'} = \langle \varphi_\beta(\vec{r}_1) \varphi_{\bar{\alpha}}(\vec{r}_2) | V_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) | \psi_\beta(\vec{r}_1) \varphi_{\bar{\alpha}}(\vec{r}_2) \rangle_{\mathcal{A}} \quad (39)$$

Der Index $\bar{\alpha}$ weist auf ein Loch unter der Fermikante hin. β kennzeichnet Zustände über der Fermikante. Gebundene Einteilchenzustände werden mit $\varphi_\gamma(\vec{r})$ bezeichnet, eingebundene Einteilchenzustände mit $\psi_\beta(\vec{r})$. Der untere Index $\mathcal{A}$ gibt an, daß der betreffende Zustand antisymmetrisiert ist.

In unserem Modellraum, Abschnitt 2.1, Gl. (21), gilt die Vollständigkeitsrelation

$$\begin{aligned} \sum_{\epsilon_i} | \varphi_\alpha(\vec{r}_0) \rangle \langle \varphi_\alpha(\vec{r}_1) | + | \varphi_\beta(\vec{r}_0) \rangle \langle \varphi_\beta(\vec{r}_1) | \\ + \int d\epsilon_\beta | \psi_\beta(\vec{r}_0) \rangle \langle \psi_\beta(\vec{r}_1) | = \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \end{aligned} \quad (40)$$

Die Summation ε_i läuft über alle Zustände unter der Fermikante ε_F , gekennzeichnet durch den Index α ; $\beta = (\varepsilon_\beta, l o l o)$ sind die Quantenzahlen des angeregten gebundenen Core-Nukleons. Die Integration ε_β wird über die Einteilchen-Kontinuumszustände im P-Raum ausgeführt.

$$\text{Mit } \varepsilon = E_0 + \varepsilon_h + \varepsilon_\beta; \quad (T_0 + V_0) \varphi_\beta(\vec{r}_0) = \varepsilon_\beta \varphi_\beta(\vec{r}_0) \quad (41)$$

$$E' = E_0 + \varepsilon_h + \varepsilon_\beta; \quad (T_0 + V_0) \psi_\beta(\vec{r}_0) = \varepsilon_\beta \psi_\beta(\vec{r}_0) \quad (42)$$

können die Energien ε und E' auf die Energie E_0 des Grundzustandes von B bezogen werden. $\varepsilon_h(\varepsilon_h)$ und $\varepsilon_\beta(\varepsilon_\beta)$ sind die Energien des Loch- bzw. Teilchenzustandes in den beiden Kanälen des angeregten Systems B^* . Mit (37) bis (42) gelangen wir zu gekoppelten Integro-Differentialgleichungen im Ortsraum zwischen der Einteilchenfunktion des angeregten gebundenen Core-Nukleons im geschlossenen Kanal 1 und der Einteilchenfunktion des Nukleons im Streuzustand im Feld des Cores A im offenen Kanal 2^{7,20}). In den Gleichungen sind die Koeffizienten a und b_E enthalten. Wir definieren daher die Einteilchenfunktionen^{7,20}

$$\omega_{\ell\lambda}^1(\vec{r}_0) = a \cdot \varphi_\beta(\vec{r}_0) = \frac{f_\ell^1(r_0)}{r_0} Y_{\ell\lambda}(\hat{r}_0) \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\ell\lambda, \vec{q}}^2(\vec{r}_0) &= \int dE' b_{E'} \psi_\beta(\vec{r}_0) \\ &= \int d\varepsilon_\beta b_{\varepsilon_\beta} \psi_\beta(\vec{r}_0) = \frac{f_\ell^2(r_0)}{r_0} Y_{\ell\lambda}(\hat{r}_0) \end{aligned} \quad (44)$$

$$f_\ell^1(r_0) = a \cdot g_\ell^\beta(r_0) \quad (45)$$

$$f_\ell^2(r_0) = \int d\varepsilon_\beta b_{\varepsilon_\beta} g_\ell^{\beta'}(r_0) \quad (46)$$

Wir nehmen an, daß der BSEC und der Kontinuumszustand den gleichen Drehimpuls haben. Aus (43) und (44) folgt, daß in unseren Lösungen die Fano-Koeffizienten a und b_E , implizit enthalten sind. Im BHM wird die Ortsabhängigkeit der Wechselwirkung $V_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ durch eine δ -Funktion approximiert²⁰⁾

$$V_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V_{12}^0 \cdot \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Wie man aus Ref.^{7,20)} entnimmt, enthalten die gekoppelten Gleichungen trotzdem auch weiterhin Integraloperatoren. Das BHM vernachlässigt diese Operatoren^{7,20)}. Mit (40) bis (46) erhalten wir im BHM die gekoppelten Differentialgleichungen für die Radialfunktionen $f_\ell^1(r_0)$ und $f_\ell^2(r_0)$

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2m} d_\ell(r_0) - V_i(r_0) + E - E_0 - \epsilon_h^i \right\} f_\ell^i(r_0) = V_{12}(r_0) f_\ell^k(r_0) \quad (47)$$

$$d_\ell(r_0) = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r_0^2} \quad (48)$$

mit $i \neq k$, $k = 1, 2$ ²⁰⁾. Das Kopplungspotential $V_{12}(r_0)$ wird durch das Produkt der Radialfunktionen der Lochzustände $\bar{\alpha}$ und $\bar{\alpha}'$ in den beiden Kanälen bestimmt²⁰⁾:

$$V_{12}(r_0) = \frac{V_{12}^0}{4\pi} \frac{g_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}}(r_0)}{r_0} \frac{g_{\bar{\alpha}'}^{\bar{\alpha}'}(r_0)}{r_0}$$

Aus (42) folgt für $E' = \epsilon$ (Entartung des ungestörten BSEC φ mit dem Kontinuumszustand ψ_E .)

$$\epsilon_{h'} - \epsilon_h = \epsilon_\beta - \epsilon_\beta^0$$

$E_n^0 = \epsilon_\beta^0$, ist die Energie des Kontinuumteilchens bei $E' = \epsilon$ ($\epsilon_\beta^0 > 0$), ϵ_β die Bindungsenergie des angeregten Core-Nukleons. Wir fassen die beiden Gln. (47) in Matrixform zusammen und er-

halten mit der letzten Gleichung

$$d_{\ell}(r_0) \begin{pmatrix} f_{\ell}^1 \\ f_{\ell}^2 \end{pmatrix} = \frac{2m^*}{\hbar^2} \begin{pmatrix} V_1 - \varepsilon_{\beta} + E_n^O - E_n & V_{12} \\ V_{12} & V_2 - E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{\ell}^1 \\ f_{\ell}^2 \end{pmatrix} \quad (48)$$

$E_n = E - E_O - \varepsilon_h$, ist die Kanalenergie im offenen Kanal 2_- für das emittierte Nukleon n im Zustand $\omega_{\ell\lambda, \vec{q}}^2(\vec{r}_O)$. Für $E_n = E_n^O$ geht bei abgeschalteter Kopplung die erste Gleichung gerade in die Eigenwert-Gleichung für den ungestörten BSEC über. Mit Kopplung wird die Eigenwertbedingung bei einer Energie $E_n^C \neq E_n^O$ erfüllt. Hieraus läßt sich der Energieshift berechnen.

Die i.a. nicht-lokalen Potentiale V_1 und V_2 werden im BHM durch lokale Potential ersetzt²⁰⁾. Das Gleichungssystem (49) gestattet uns durch eine Parametrisierung die mikroskopische Berechnung des BSEC ϕ zu umgehen (siehe auch Ref.⁹⁾). In einem beliebigen lokalen Potential V_1 wird der tiefste gebundene Zustand zum Drehimpuls ℓ bestimmt. Der unbekannte wahre angeregte Einteilchenzustand ϕ_{β} wird durch diesen Zustand ersetzt. Die Resonanz ist jetzt aber um die Differenz der Bindungsenergien des wahren Zustandes und des Modellzustandes verschoben. Die Position der Resonanz wird durch Variation der Energie ε_{β}^O , korrigiert, bis die Resonanzenergie E_R mit dem experimentell bestimmten Wert übereinstimmt. Wir haben damit ε_{β}^O , auf die Bindungsenergie des Modellzustandes bezogen. Es können jetzt natürlich keine Aussagen mehr über die mikroskopische Struktur des Zustandes B^* gemacht werden.

Für unsere Rechnungen wählen wir für V_1 und V_2 sphärische Kastenpotentiale der Tiefe $V_i \geq 0$; $i = 1, 2$.

$$V_i(r_0) = \begin{cases} -V_i & r_0 \leq R_O \\ 0 & r_0 > R_O \end{cases} \quad (50)$$

R_0 ist der Modellkernradius. Das Gleichungssystem (49) wird für zwei Modelle des Kopplungspotentials $V_{12}(r_0)$ gelöst. Im ersten Modell, dem Surface-Coupling-Modell (SC-Modell) nehmen wir für $V_{12}(r_0)$ eine δ -Funktion bei $r_0 = R_0$ an:

$$V_{12}^{SC}(r_0) = V_{12}^O \delta(r_0 - R_0)$$

Im Volume-Coupling-Modell (VC-Modell) nehmen wir für das Kopplungspotential ein sphärisches Kastenpotential an

$$V_{12}^{VC}(r_0) = \begin{cases} V_{12}^O & r_0 \leq R_0 \\ 0 & r_0 > R_0 \end{cases}$$

In beiden Modellen sind die Gleichungen im Außenraum $r_0 > R_0$ entkoppelt und ihre Lösungen sind für ungeladene Teilchen

$$\begin{aligned} f_{\ell}^1(r_0) &= A_{\ell} r_0 h_{\ell}^{(+)}(i\kappa r_0) \quad r_0 > R_0 \\ \kappa^2 &= \frac{2m^*}{\hbar^2} (\epsilon_{\beta} - E_n^O + E_n) \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} f_{\ell}^2(r_0) &= B_{\ell} \{ r_0 j_{\ell}(qr_0) + \frac{1}{2} (S_{\ell} - 1) r_0 h_{\ell}^{(+)}(qr_0) \} \quad r_0 > R_0 \\ q^2 &= \frac{2m^*}{\hbar^2} E_n \end{aligned} \quad (52)$$

$j_{\ell}(x)$ ist die sphärische Besselfunktion zum Drehimpuls ℓ , $h_{\ell}^{(+)}(x)$ entsprechend die sphärische Hankelfunktion. Die Streumatrix $S_{\ell} = e^{2i\delta_{\ell}}$, mit $\delta_{\ell} = \delta_{\ell}^O + \delta_{\ell}^r$, wird durch die Anschlußbedingungen für f_{ℓ}^2 am Kernrand bestimmt. Die Normierungskonstante A_{ℓ} wird durch die Normierungsbedingung (18)

$$\langle \varphi | \varphi \rangle = \langle \varphi_{\beta} | \varphi_{\beta} \rangle = 1$$

bestimmt. Die Normierungskonstante B_{ℓ} für f_{ℓ}^2 folgt aus der Normierung für ψ_{β} , (Gl.(19))

$$\langle \psi_{E''} | \psi_{E'} \rangle = \langle \psi_{\beta''} | \psi_{\beta'} \rangle = \delta(E'' - E') \quad (53)$$

$$\bar{B}_\ell = \left[\frac{2m^*}{\hbar^2} \cdot \frac{q}{\pi} \right]^{1/2} \cdot 4\pi Y_{\ell\lambda}(\hat{q}); \quad B_\ell = \left[\frac{2m^*}{\hbar^2} \frac{q}{\pi} \right]^{1/2}$$

Bei der Normierung von $\psi_{E'}$, bzw. $\psi_{\beta'}$, wird berücksichtigt, daß sich $\psi_{E'}$, für große Werte von r_0 wie

$$\psi_{E'} \underset{r_0 \rightarrow \infty}{\sim} \phi_A^f \left\{ e^{i\vec{q}\vec{r}_0 + f_{\vec{q}}(\hat{r}_0)} \frac{e^{iqr_0}}{r_0} \right\}$$

verhalten soll. ϕ_A^f ist die Core-Wellenfunktion im Endzustand.

Mit dem Penetrationfaktor P_ℓ und der Hard-Sphere-Streuphase τ_ℓ , die elastische Streuung an einer harten Kugel beschreibt, definiert durch³⁾

$$P_\ell = \frac{1}{|R_0 h_\ell^{(+)}(qR_0)|^2} \quad (54)$$

$$\tau_\ell = \text{arctg} \frac{\text{Re}[h_\ell^{(+)}(qR_0)]}{\text{Im}[h_\ell^{(+)}(qR_0)]} = \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \frac{\text{Im}[h_\ell^{(+)}(qR_0)]}{\text{Re}[h_\ell^{(+)}(qR_0)]} \quad (55)$$

gelangen wir zu

$$R_0 h_\ell^{(\pm)}(qR_0) = \frac{1}{\sqrt{P_\ell}} e^{\mp i(\tau_\ell + \pi/2)} \quad (56)$$

Mit der Annahme $\tau_\ell \approx \delta_\ell^0$, d.h. $E_n \ll V_2$ und δ_ℓ^0 nicht-resonant, erhalten wir schließlich, daß sich $f_\ell^2(R_0)$ wie

$$f_\ell^2(R_0) = B_\ell \frac{1}{\sqrt{P_\ell}} \sin \delta_\ell^r e^{i\delta_\ell} \quad (57)$$

am Kernrand verhält³⁾. Mit (57) werden die Normierungen der Innenlösungen von $f_\ell^2(r_0 \leq R_0)$ im SC- und VC-Modell bestimmt.

2.3 Die Innenlösungen der Radialgleichungen im SC-Modell

Nach der Definition des SC-Modells sind die Gln. (49) für $r_0 < R_0$ bereits entkoppelt. $f_\ell^1(r_0)$ und $f_\ell^2(r_0)$ können durch sphärische Besselfunktionen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} f_\ell^1(r_0) &= a_\ell r_0 j_\ell(K_1 r_0) \quad r_0 \leq R_0 \\ K_1^2 &= \frac{2m^*}{\hbar^2} (E_n - E_n^0 + \epsilon_\beta + V_1) \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} f_\ell^2(r_0) &= b_\ell r_0 j_\ell(K_2 r_0) \quad r_0 \leq R_0 \\ K_2^2 &= \frac{2m^*}{\hbar^2} (E_n + V_2) \end{aligned} \quad (59)$$

Die Funktionen f_ℓ^1 und f_ℓ^2 sind bei $r_0 = R_0$ stetig. Die δ -Funktion in der Wechselwirkung V_{12} verursacht eine Unstetigkeit in den ersten Ableitungen bei $r_0 = R_0$. Sie wird durch Integration der Radialgleichungen von $R_0 - \eta$ bis $R_0 + \eta$, $\eta \rightarrow +0$, bestimmt⁹⁾:

$$f_\ell'^1(R_0^+) - f_\ell'^1(R_0^-) = \frac{2m^*}{\hbar^2} V_{12}^0 f_\ell^2(R_0) \quad (60)$$

$$f_\ell'^2(R_0^+) - f_\ell'^2(R_0^-) = \frac{2m^*}{\hbar^2} V_{12}^0 f_\ell^1(R_0) \quad (61)$$

mit

$$\begin{aligned} R_0^\pm &= \lim_{\eta \rightarrow +0} (R_0 \pm \eta) \\ g'(r) &= \frac{d}{dr} g(r) \end{aligned}$$

Aus (60) wird die Größe

$$x = \frac{f_\ell^2(R_0)}{f_\ell^1(R_0)} = \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{1}{V_{12}^0} \left\{ \frac{(r_0 h_\ell^{(+)}(i\kappa r_0))'}{r_0 h_\ell^{(+)}(i\kappa r_0)} - \frac{(r_0 j_\ell(K_1 r_0))'}{r_0 j_\ell(K_1 r_0)} \right\} \bigg|_{r_0=R_0} \quad (62)$$

bestimmt. Aus (61) ergibt sich die logarithmische Anschlußbedingung

für Innen- und Außenlösung von f_ℓ^2 bei $r_0 = R_0$:

$$L_a = \frac{f_\ell'^2(R_0^+)}{f_\ell^2(R_0)} = \frac{f_\ell'^2(R_0^-)}{f_\ell^2(R_0)} + \frac{v_{12}^0}{x} \frac{2m^*}{h^2} = L_i \quad (63)$$

$$L_a = \frac{\{r_0 j_\ell(qr_0)\}' + \alpha_\ell \{r_0 h_\ell^{(+)}(qr_0)\}'}{r_0 j_\ell(qr_0) + \alpha_\ell r_0 h_\ell^{(+)}(qr_0)} \quad |_{r_0=R_0} \quad (64)$$

$$\alpha_\ell = \frac{1}{2}(S_\ell - 1) = \frac{r_0 j_\ell(qr_0) \cdot L_i - \{r_0 j_\ell(qr_0)\}'}{\{r_0 h_\ell^{(+)}(qr_0)\}' - r_0 h_\ell^{(+)}(qr_0) L_i} \quad |_{r_0=R_0} \quad (65)$$

Aus (64) wird die Größe α_ℓ und damit nach (65) die Streumatrix S_ℓ bestimmt.

Die Normierungskonstanten a_ℓ und b_ℓ ergeben sich aus den Anschlußbedingungen für f_ℓ^1 und f_ℓ^2 bei $r_0 = R_0$. Die Innenlösungen sind ($r_0 \leq R_0$):

$$f_\ell^1(r_0) = A_\ell \frac{h_\ell^{(+)}(i\kappa R_0)}{j_\ell(K_1 R_0)} \cdot r_0 j_\ell(K_1 r_0) \quad (66)$$

$$f_\ell^2(r_0) = B_\ell \frac{\sin \delta_\ell^r e^{i\delta_\ell}}{R_0 \sqrt{P_\ell} j_\ell(K_2 R_0)} r_0 j_\ell(K_2 r_0) \quad (67)$$

Als weitere Näherung vernachlässigen wir um die Resonanz die geringe Energieabhängigkeit von B_ℓ , P_ℓ und der Besselfunktionen relativ zur Streuphase und nehmen ihre Werte bei E_R .

2.4 Die Innenlösungen der Radialgleichungen im VC-Modell

Für das VC-Modell muß die Matrix (49) diagonalisiert werden⁹⁾.

Wir schreiben (49) in der Form ($r_0 \leq R_0$)

$$\begin{aligned} d_\ell(r_0) \begin{pmatrix} f_\ell^1(r_0) \\ f_\ell^2(r_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_{11}-e & v_{12} \\ v_{12} & v_{22}-e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\ell^1(r_0) \\ f_\ell^2(r_0) \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\ell^1(r_0) \\ f_\ell^2(r_0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} e &= \frac{2m^*}{\hbar^2} E_n \\ v_{11} &= \frac{2m^*}{\hbar^2} (E_n^0 - \epsilon_\beta - V_1) \end{aligned} \quad (69)$$

$$v_{12} = \frac{2m^*}{\hbar^2} V_{12}^0$$

$$v_{22} = - \frac{2m^*}{\hbar^2} V_2$$

$$V = \begin{pmatrix} v_{11}-e & v_{12} \\ v_{12} & v_{22}-e \end{pmatrix} \quad (70)$$

Die Matrix V ist eine reelle symmetrische Matrix. Dann gibt es eine orthogonale Transformation U , die V in die diagonale Matrix V_D transformiert:

$$UU^T = \text{Id} \quad U^T = U^{-1} \quad \det U = 1 \quad (71)$$

$$V_D = U V U^T$$

$$d_\ell(r_0) U \begin{pmatrix} f_\ell^1 \\ f_\ell^2 \end{pmatrix} = V_D U \begin{pmatrix} f_\ell^1 \\ f_\ell^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\ell^1 \\ f_\ell^2 \end{pmatrix} \quad (72)$$

Die Eigenwerte λ_1^2 und λ_2^2 sind

$$\lambda_1^2 = e - \frac{1}{2}(v_{11}+v_{22}) - \left[\frac{1}{4}(v_{11}-v_{22})^2 + v_{12}^2\right]^{1/2} \quad (73)$$

$$\lambda_2^2 = e - \frac{1}{2}(v_{11}+v_{22}) + \left[\frac{1}{4}(v_{11}-v_{22})^2 + v_{12}^2\right]^{1/2} \quad (74)$$

mit den Eigenschaften

$$\lim_{v_{12} \rightarrow 0} \lambda_1^2 = K_1^2 = e - v_{11} \quad (75)$$

$$\lim_{v_{12} \rightarrow 0} \lambda_2^2 = K_2^2 = e - v_{22} \quad (76)$$

Die Matrix der orthogonalen Transformation U kann in üblicher Weise durch

$$U = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \quad (77)$$

ersetzt werden. Der Transformationswinkel β ist durch

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_{22} - e + \lambda_2^2}{v_{12}} \quad (78)$$

$$\lim_{v_{12} \rightarrow 0} \operatorname{tg}\beta = 0$$

festgelegt. Da V_{12} zur Restwechselwirkung gehört, wird erwartet, daß β klein ist.

Bezeichnen wir mit

$$\begin{pmatrix} F_\ell^1 \\ F_\ell^2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} f_\ell^1 \\ f_\ell^2 \end{pmatrix}$$

die transformierte Basis, so haben wir die entkoppelten Gleichungen für $r_0 \leq R_0$

$$d_{\ell}(r_0)F_{\ell}^1(r_0) + \lambda_1^2 F_{\ell}^1(r_0) = 0 \quad (79)$$

$$d_{\ell}(r_0)F_{\ell}^2(r_0) + \lambda_2^2 F_{\ell}^2(r_0) = 0 \quad (80)$$

zu lösen. Die Lösungen sind sphärische Besselfunktionen

$$F_{\ell}^1(r_0) = a_{\ell}^1(E_n)r_0 j_{\ell}(\lambda_1 r_0) = u_{11} f_{\ell}^1(r_0) + u_{12} f_{\ell}^2(r_0) \quad (81)$$

$$F_{\ell}^2(r_0) = a_{\ell}^2(E_n)r_0 j_{\ell}(\lambda_2 r_0) = u_{21} f_{\ell}^1(r_0) + u_{22} f_{\ell}^2(r_0) \quad (82)$$

mit den noch zu bestimmenden, energieabhängigen Normierungen

$$a_{\ell}^i(E_n), \quad i = 1, 2.$$

Betrachten wir die Eigenwerte λ_1^2 und λ_2^2 , Gl. (73), (74), näher, sehen wir, daß zu λ_1^2 hauptsächlich der Eigenwert K_1^2 des ungestörten gebundenen Zustands beiträgt mit einer Beimischung des Eigenwerts K_2^2 des ungestörten Streuzustandes, während bei λ_2^2 die Situation gerade umgekehrt ist. Über die Betrachtung der Eigenwerte können wir also sagen, daß F_{ℓ}^1 einen gebundenen Zustand mit einer Beimischung von ungebundenen Zuständen beschreibt und F_{ℓ}^2 einen ungebundenen Zustand mit Beimischung eines gebundenen Zustands enthält (bezogen auf das ungestörte Problem). Die Beimischungen werden durch die Stärke V_{12}^0 des Kopplungspotentials bestimmt.

Durch Rücktransformation erhalten wir die gesuchten Lösungen für f_{ℓ}^1 und f_{ℓ}^2 für $r_0 \leq R_0$

$$\begin{pmatrix} f_{\ell}^1 \\ f_{\ell}^2 \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} F_{\ell}^1 \\ F_{\ell}^2 \end{pmatrix} \quad (83)$$

$$f_{\ell}^1(r_0) = a_{\ell}^1(E_n) \cos \beta r_0 \{ j_{\ell}(\lambda_1 r_0) - x \operatorname{tg} \beta j_{\ell}(\lambda_2 r_0) \} \quad (84)$$

$$f_{\ell}^2(r_0) = a_{\ell}^1(E_n) \sin \beta r_0 \left\{ j_{\ell}(\lambda_1 r_0) + \frac{x}{\tan \beta} j_{\ell}(\lambda_2 r_0) \right\} \quad (85)$$

$$x = x(E_n) = \frac{a_{\ell}^2(E_n)}{a_{\ell}^1(E_n)} \quad (86)$$

Die Größe $y(E_n) = -x(E_n) \tan \beta$ wird aus der logarithmischen Anschlußbedingung für f_{ℓ}^1 am Kernrand bestimmt

$$y(E_n) = \frac{r_0 h_{\ell}^{(+)}(i\kappa r_0) \{r_0 j_{\ell}(\lambda_1 r_0)\}' - \{r_0 h_{\ell}^{(+)}(i\kappa r_0)\}' r_0 j_{\ell}(\lambda_1 r_0)}{\{r_0 h_{\ell}^{(+)}(i\kappa r_0)\}' r_0 j_{\ell}(\lambda_2 r_0) - r_0 h_{\ell}^{(+)}(i\kappa r_0) \{r_0 j_{\ell}(\lambda_2 r_0)\}'} \Big|_{r_0=R_0} \quad (87)$$

Für $V_{12} = 0$ steht im Zähler gerade die logarithmische Anschlußbedingung für die Radialfunktion des ungestörten angeregten Nukleons. Sie ist bei $E_n = E_n^0$ erfüllt. Für $V_{12} \neq 0$ wird die Nullstelle durch Beimischungen aus dem Kontinuum verschoben. Eine physikalische Interpretation ist jetzt nicht ohne weiteres möglich, da die Funktionen F_{ℓ}^1 und F_{ℓ}^2 nur für $r_0 \leq R_0$ definiert sind.

Der Nenner von (87) wird i.a. nicht verschwinden. $y(E_n)$ ändert sich mit der Energie über die Resonanz nur schwach. Wir linearisieren y um $E_n = E_R$ bezüglich der Energie

$$y(E_n) = y_1 \epsilon + y_2 \quad (88)$$

$$\epsilon = \frac{2(E_R - E_n)}{\Gamma} = \cotg \delta_{\ell}^r \quad (89)$$

und ebenso

$$\frac{x}{\tan \beta} = - \frac{y}{\tan^2 \beta} = -(c_1 \epsilon + c_2) \quad (90)$$

Die Normierungsgröße $a_{\ell}^1(E_c)$ wird aus der Anschlußbedingung für f_{ℓ}^2 bei $r_0 = R_0$ bestimmt:

$$a_{\ell}^1(E_n) = B_{\ell} \frac{\sin \delta_{\ell}^r e^{i\delta_{\ell}}}{(x_1 \operatorname{ctg} \delta_{\ell}^r + x_2) \sin \beta} \quad (91)$$

$$x_1 = -c_1 R_0 \sqrt{P_{\ell}} j_{\ell}(\lambda_2 R_0) |_{E_n=E_R} \quad (92)$$

$$x_2 = R_0 \sqrt{P_{\ell}} \{j_{\ell}(\lambda_1 R_0) - c_2 j_{\ell}(\lambda_2 R_0)\} |_{E_n=E_R} \quad (93)$$

Die gegen δ_{ℓ}^r nur geringe Variation der Besselfunktionen mit der Energie über die Resonanz wird im weiteren vernachlässigt.

Die Radialfunktionen für $r_0 \leq R_0$ im VC-Modell sind damit

$$f_{\ell}^1(r_0) = B_{\ell} e^{i\delta_{\ell}} r_0 \frac{\sin \delta_{\ell}^r \{j_{\ell}(\lambda_1 r_0) + y_2 j_{\ell}(\lambda_2 r_0)\} + y_1 \cos \delta_{\ell}^r j_{\ell}(\lambda_2 r_0)}{x_1 \operatorname{ctg} \delta_{\ell}^r + x_2} \operatorname{ctg} \beta \quad (94)$$

$$f_{\ell}^2(r_0) = B_{\ell} e^{i\delta_{\ell}} r_0 \frac{\sin \delta_{\ell}^r \{j_{\ell}(\lambda_1 r_0) - c_2 j_{\ell}(\lambda_2 r_0)\} - c_1 \cos \delta_{\ell}^r j_{\ell}(\lambda_2 r_0)}{x_1 \operatorname{ctg} \delta_{\ell}^r + x_2} \quad (95)$$

Für die Besselfunktionen werden wieder ihre Werte bei $E_n = E_R$ genommen*.

Die S-Matrix wird wie im SC-Modell aus der logarithmischen Anschlußbedingung $L_a = L_i$ für f_{ℓ}^2 bei $r_0 = R_0$ bestimmt. Für

*Der Nenner $x_1 \operatorname{ctg} \delta_{\ell}^r + x_2$ divergiert bei $\operatorname{ctg} \delta_{\ell}^r = -\frac{x_2}{x_1}$. Wie explizite Rechnungen zeigen, liegt der Pol weitab der Resonanz (rd. 10 Breiten). Hier gilt aber die lineare Näherung für $y(E_n)$ nicht mehr. Um die Resonanz ist die Wellenfunktion endlich.

$$L_i = \frac{\{r_o j_\ell(\lambda_1 r_o)\}' - \frac{Y}{\operatorname{tg}^2 \beta} \{r_o j_\ell(\lambda_2 r_o)\}'}{r_o j_\ell(\lambda_2 r_o) - \frac{Y}{\operatorname{tg}^2 \beta} r_o j_\ell(\lambda_2 r_o) \mid r_o=R_o} \quad (96)$$

wird die volle Energieabhängigkeit auch der Besselfunktionen berücksichtigt. L_a ist wie im SC-Modell durch (64) gegeben.

Damit sind die Wellenfunktionen in beiden Modellen bestimmt und wir können die Formfaktoren, T-Matrizen sowie die Wirkungsquerschnitte bestimmen.

III. Formfaktor, T-Matrix und Wirkungsquerschnitt bei inelastischer Streuung zu einem resonanten Endzustand.

Der komplexe Fano-Parameter

3.0 Formfaktor und T-Matrix

In unserem Modell für die Anregung des Resonanzzustandes B^* durch inelastische Streuung mit einem Projektil p ist der Formfaktor oder das Kernmatrizelement durch

$$\begin{aligned} F_{\vec{q}}^{\ell_i \ell}(\vec{r}_p) \\ = \sum_{\lambda_i, \lambda} \int d\vec{r}_o \omega_{\ell \lambda, \vec{q}}^{2*}(\vec{r}_o) V_{pn}(\vec{r}_p, \vec{r}_o) \varphi^{\ell_i \lambda_i}(\vec{r}_o) \end{aligned} \quad (97)$$

gegeben. $\omega_{\ell \lambda, \vec{q}}^2$ ist die in Abschnitt 2.2, Gl. (44), definierte Wellenfunktion des emittierten Nukleons. $\varphi^{\ell_i \lambda_i}$ ist die auf 1 normierte Wellenfunktion des letzten Nukleons im Grundzustand von B und ist gemäß Abschnitt 2.2, Gl. (36) definiert. Für die Projektil-Target-Wechselwirkung V_{pn} wählen wir als 1. Näherung für eine effektive NN-Wechselwirkung eine Yukawa-Wechselwirkung

$$V_{pn}(\vec{r}_p, \vec{r}_o) = V_{pn}(|\vec{r}_p - \vec{r}_o|) = V_{pn}^o \frac{e^{-\mu |\vec{r}_p - \vec{r}_o|}}{\mu |\vec{r}_p - \vec{r}_o|} \quad (98)$$

mit der Stärke V_{pn}^o und der Reichweite μ^{-1} .

V_{pn} wird nach Multipolen entwickelt⁵⁾

$$V_{pn}(|\vec{r}_p - \vec{r}_o|) = -4\pi V_{pn}^o \sum_{LM} j_L(i\mu r_<) h_L^{(+)}(i\mu r_>) \quad (99)$$

$$* Y_{LM}^*(\hat{r}_o) Y_{LM}(\hat{r}_p)$$

$$r_{<} = \min(r_o, r_p) \quad (100)$$

$$r_{>} = \max(r_o, r_p)$$

Der Wertebereich des Drehimpulsübertrages L mit der Projektion M ist durch die Dreiecks- und Paritätsregel eingeschränkt:

$$|\ell_i - \ell| \leq L \leq \ell_i + \ell \quad \ell_i + \ell + L = \text{gerade} \quad (101)$$

$$M = \lambda - \lambda_i$$

Nach Anhang 1, Gl. (A1.11) können wir dann einen reduzierten Formfaktor

$$F_{LM}(\vec{r}_p) = I_{\ell_i L \ell}(r_p) \cdot Y_{LM}(\hat{r}_p) \quad (102)$$

definieren. Das Radialintegral $I_{\ell_i L \ell}$ ist durch

$$\begin{aligned} & I_{\ell_i L \ell}(r_p) \\ &= h_L^{(+)}(i\mu r_p) \int_0^{r_p} dr_o f_{\ell}^2(r_o) j_L(i\mu r_o) f_{\ell_i}(r_o) \\ &+ j_L(i\mu r_p) \int_{r_p}^{\infty} dr_o f_{\ell}^2(r_o) h_L^{(+)}(i\mu r_o) f_{\ell_i}(r_o) \end{aligned} \quad (103)$$

definiert.

Da wir für die Potentiale $V_1(r_o)$ und $V_2(r_o)$ ebenso wie für das Grundzustandspotential $V_o(r_o)$ sphärische Kastenpotentiale nehmen, ist der Kernradius R_o eindeutig definiert. Die Wellenfunktionen $f_{\ell}^2(r_o)$ unterscheiden sich im SC- und VC-Modell nur für $r_o < R_o$. Wir nehmen daher eine Aufspaltung der Integrale in (103) gemäß den Definitionsintervallen der Radialfunktionen in Abhängigkeit vom Wert von r_p vor. Dann zerfällt der Formfaktor (102) in einen

Anteil $F_{LM}^{<}(\vec{r}_p)$, der nur Anteile aus der Integration über $r_o \leq R_o$ enthält, und einen Anteil $F_{LM}^{>}(\vec{r}_p)$, der nur Anteile aus der Integration über $r_o > R_o$ enthält. Entsprechend spaltet die zu F_{LM} gehörige reduzierte T-Matrix auf.

$$T_{LM} = \int d\vec{r}_p \chi_f^{(-)*}(\vec{k}_f, \vec{r}_p) F_{LM}(\vec{r}_p) \chi_i^{(+)}(\vec{k}_i, \vec{r}_p) \quad (104)$$

$$T_{LM} = T_{LM}^{<} + T_{LM}^{>} \quad (105)$$

Eine kurze Rechnung für die Außenlösung von f_ℓ^2 in $F_{LM}^{>}$ führt dann für die T-Matrix $T_{LM}^{>}$, die in den beiden Modellen übereinstimmt, zu

$$F_{LM}^{>} = \{ \cos \delta_\ell^r F_{LM}^1 - \sin \delta_\ell^r F_{LM}^2 \} e^{i\delta_\ell} \quad (106)$$

$$T_{LM}^{>} = \{ \cos \delta_\ell^r T_{LM}^1 - \sin \delta_\ell^r T_{LM}^2 \} e^{i\delta_\ell} \quad (107)$$

F_{LM}^1 und F_{LM}^2 und damit T_{LM}^1 und T_{LM}^2 enthalten keine weiteren mit der Energie stark variierenden Größen.

Um die Unterschiede des doppelt differentiellen Wirkungsquerschnitts in den beiden Modellen zu untersuchen, genügt es, die Unterschiede in $F_{LM}^{<}$ bzw. in der zugehörigen T-Matrix $T_{LM}^{<}$ zu betrachten: Da nach Anhang 1 die verschiedenen Drehimpulsüberträge L inkohärent zum Wirkungsquerschnitt beitragen, genügt es außerdem, einen L-Transfer zu studieren.

Nach Anhang 1 ergibt sich für den doppelt differentiellen Wirkungsquerschnitt in DWBA

$$\frac{d^2 \sigma}{d\Omega_p dE_p} = \sum_L A_L \sum_M |T_{LM}|^2 = \sum_L \frac{d^2 \sigma_L}{d\Omega_p dE_p} \quad (108)$$

Die für die Diskussion nicht relevanten Faktoren sind in der Konstanten A_L zusammengefaßt (siehe Anhang 1, Gl. (A1.13)).

3.1 Formfaktor, T-Matrix und Wirkungsquerschnitt im SC-Modell

Mit der Innenlösung ($r_0 \leq R_0$) für $f_\ell^2(r_0)$ im SC-Modell aus Abschnitt 2.3, Gl. (67), ergibt sich

$$F_{LM}^< = \sin \delta_\ell^r F_{LM}^3 e^{i\delta_\ell} \quad (109)$$

$$T_{LM}^< = \sin \delta_\ell^r T_{LM}^3 e^{i\delta_\ell} \quad (110)$$

Formfaktor und T-Matrix im SC-Modell sind damit

$$F_{LM} = \{ \sin \delta_\ell^r [F_{LM}^3 - F_{LM}^2] + \cos \delta_\ell^r F_{LM}^1 \} e^{i\delta_\ell} \quad (111)$$

$$T_{LM}^{SC} = \{ \sin \delta_\ell^r T_{LM}^{23} + \cos \delta_\ell^r T_{LM}^1 \} e^{i\delta_\ell} \quad (112)$$

$$T_{LM}^{23} = T_{LM}^3 - T_{LM}^2 \quad (113)$$

Der Wirkungsquerschnitt zum Drehimpulsübertrag L ist damit im SC-Modell

$$\frac{d^2 \sigma^L}{d\Omega_p dE_p} = \sum_M \left| \sin \delta_\ell^r T_{LM}^{23} + \cos \delta_\ell^r T_{LM}^1 \right|^2 \quad (114)$$

Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts wird durch die Interferenz von 2 Übergangsmatrixelementen bestimmt.

Fano¹⁾ geht bei der Definition des Linienformparameters q implizit davon aus, daß der Übergang von einem Anfangszustand mit festem Drehimpuls zu einem Endzustand mit genau definiertem Drehimpuls erfolgt. Durch Anwenden des Wigner-Eckart-Theorems¹⁴⁾ kann dann z. B. für einen Übergangsoperator der Form $V_{LM}(\vec{r})$ ein q_L definiert werden, das unabhängig von der Quantenzahl M ist und für alle Komponenten M des Übergangsoperators gleich ist. Mit den zugehörigen Übergangsmatrixelementen T_{LM}^1 und T_{LM}^2 , die sich aus der Aufspaltung der Wellenfunktion nach Abschnitt 2.1 ergeben, gilt dann für alle $M = -L, -L+1, \dots, L$

$$q_L = q_{LM} = - \frac{T_{LM}^2}{T_{LM}^1} ; \quad q_L \text{ komplex oder reell}$$

und

$$\frac{d^2 \sigma_L}{d\Omega dE} \approx |\epsilon - q_2|^2 \frac{\sum_M |T_{LM}^1|^2}{1 + \epsilon^2}$$

$$\epsilon = \text{ctg} \delta_\ell^r = \frac{2(E_R - E_n)}{\Gamma}$$

In unserem Fall, Gl. (114), ist der Sachverhalt komplizierter.

Wir können zwar die i. a. komplexen Größen

$$q_{LM} = - \frac{T_{LM}^{23}}{T_{LM}^1} ; \quad q_{LM} = |q_{LM}| e^{i\varphi_{LM}} \quad (115)$$

definieren und den Wirkungsquerschnitt durch

$$\frac{d^2 \sigma_L}{d\Omega_p dE_p} = A_L \sum_M |T_{LM}^1|^2 |\epsilon - q_{LM}|^2 \frac{1}{1 + \epsilon^2} \quad (116)$$

darstellen. Da aber Anfangs- und Endzustand alle Partialwellen der Projektilwellenfunktionen enthalten, können wir das Wigner-Eckart-Theorem nicht benutzen, um nach Fano einen für alle M gemeinsamen Parameter q_L als Verhältnis zweier Übergangsmatrixelemente zu definieren

$$q_{LM} = - \frac{\sum_{\ell\ell'} a_{\ell}^* a_{\ell'} \langle \chi_{\ell'}^{(-)}(\vec{k}_f, \vec{r}_p) | F_{LM}^{23}(\vec{r}_p) | \chi_{\ell}^{(+)}(\vec{k}_i, \vec{r}_p) \rangle}{\sum_{\ell\ell'} a_{\ell}^* a_{\ell'} \langle \chi_{\ell'}^{(-)}(\vec{k}_f, \vec{r}_p) | F_{LM}^1(\vec{r}_p) | \chi_{\ell}^{(+)}(\vec{k}_i, \vec{r}_p) \rangle} \quad (117)$$

wobei die DW's $\chi_i^{(-)}$ und $\chi_f^{(+)}$, Abschnitt 2.0, nach Partialwellen entwickelt sind

$$\chi^{(+)}(\vec{k}, \vec{r}) = \sum_{\ell m} a_{\ell} \chi_{\ell m}^{(+)}(\vec{k}, \vec{r}) \quad (118)$$

Aus (116) folgt, daß die Größen q_{LM} i. a. nicht das Verhalten des Wirkungsquerschnitts als Funktion der Energie beschreiben werden. Zwischen verschiedenen q_{LM} , $q_{LM'}$, $M' \neq M$, bestehen i. a. keine festen Phasenbeziehungen. Die verschiedenen Terme im Wirkungsquerschnitt (116) werden i.a. bei unterschiedlichen Energien $\epsilon = \epsilon_0^{LM}$ verschwinden bzw. minimal werden. Nach (116) ergibt sich die Resonanzlinie als inkohärente Summe der zu jedem $M = -L, -L+1, \dots, L$ gehörigen Teillinien $|T_{LM}^1|^2 |\epsilon - q_{LM}|^2 / (1 + \epsilon^2)$.

Um eine Parametrisierung der Gesamtlinie zu einem L-Wert durch einen (komplexen) Parameter q_L zu erhalten, der nicht von den Quantenzahlen M abhängt, bestimmen wir analog zu Fano¹⁾ die Energie ϵ_0^L , bei der der Zähler von (116)

$$\sum_M |T_{LM}^1|^2 |\epsilon - q_{LM}|^2 = \sum_M |T_{LM}^1|^2 \epsilon^{2-2\epsilon} \text{Re} \sum_M q_{LM} |T_{LM}^1|^2 + \sum_M |q_{LM}|^2 |T_{LM}^1|^2 \quad (119)$$

minimal wird. Wir erhalten

$$\epsilon_O^L = \text{Re}(q_L) = |q_L| \cos \varphi_L = \frac{\text{Re} \sum_M q_{LM} |T_{LM}^1|^2}{\sum_M |T_{LM}^1|^2} \quad (120)$$

und

$$|q_L|^2 = \frac{\sum_M |q_{LM}|^2 |T_{LM}^1|^2}{\sum_M |T_{LM}^1|^2}, \quad q_L = |q_L| e^{i\varphi_L} \quad (121)$$

durch Vergleich mit

$$|\epsilon - q_L|^2 = \epsilon^2 - 2\epsilon \text{Re}(q_L) + |q_L|^2 \quad (122)$$

Der Realteil von q_L wird nach Definition der Größen q_{LM} gerade durch die Interferenzterme der beiden T-Matrizen gegeben, während $|q_L|$ durch das Verhältnis der aus T_{LM}^1 und T_{LM}^2 resultierenden Wirkungsquerschnitte bestimmt ist.

Damit haben wir die gewünschte Parametrisierung des Wirkungsquerschnitts im SC-Modell erreicht.

$$\frac{d^2 \sigma^L}{d\Omega_p dE_p} = A_L \sum_M |T_{LM}^1|^2 \frac{|\epsilon - q_L|^2}{1 + \epsilon^2} \quad (123)$$

In (123) wird der Wirkungsquerschnitt zu jedem Drehimpulsübertrag parametrisiert. Man kann damit den Beitrag der verschiedenen Drehimpulsüberträge zur gesamten Resonanzlinie studieren. Ist man nur an dem resultierenden Gesamtwirkungsquerschnitt interessiert, läßt sich nach der selben Methode ein totales q definieren:

$$\epsilon_O = \text{Re}(q) = \frac{\sum_{LM} A_L \text{Re}(q_L) |T_{LM}^1|^2}{\sum_{LM} A_L |T_{LM}^1|^2}; \quad |q|^2 = \frac{\sum_{LM} A_L |q_L|^2 |T_{LM}^1|^2}{\sum_{LM} A_L |T_{LM}^1|^2} \quad (124)$$

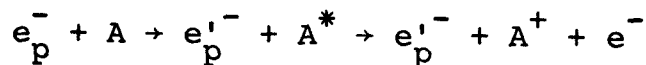
also für das SC-Modell

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega_p dE_p} = \sum_{LM} A_L |T_{LM}^1|^2 \frac{|\varepsilon - q|^2}{1 + \varepsilon^2} ; \quad q = |q| e^{i\varphi} \quad (125)$$

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Fano-Parameter q_L bzw. q sich als gemittelte Größen nach (120), (121), bzw. (124) aus den zueinander nicht korrelierten Größen q_{LM} bzw. q_L ergeben. Im nächsten Abschnitt soll das Verhalten des Wirkungsquerschnitts bei reellem und komplexem Fano-Parameter am Beispiel des Wirkungsquerschnitts im SC-Modell betrachtet werden.

3.2 Der Wirkungsquerschnitt bei reellem und komplexem Fano-Parameter

Ausgehend von Abschnitt 2.1, Gl. (32), betrachtet Fano¹⁾ die Reaktion



in der PWBA. Der Übergang aus dem Grundzustand ϕ_A^1 in den angeregten Zustand Ω^E werde durch den Operator V_{if} (Coulomb-Wechselwirkung) bewirkt. Mit den Formfaktoren

$$\begin{aligned} \Omega^E(\vec{r}_O, A-1) &= \left\{ \frac{\sin \delta^r}{\pi V_E} \phi(\vec{r}_O, A-1) - \cos \delta^r \psi_E(\vec{r}_O, A-1) \right\} e^{i\delta^r} \\ F_1(\vec{r}_p) &= \int d\vec{r}_O d\tau_{A-1} \phi^*(\vec{r}_O, A-1) V_{if}(\vec{r}_p, \vec{r}_O) \phi_A^1(\vec{r}_O, A-1) \end{aligned} \quad (126)$$

$$F_2(\vec{r}_p) = \int d\vec{r}_0 d\tau_{A-1} \Psi_E^*(\vec{r}_0, A-1) V_{if}(\vec{r}_p, \vec{r}_0) \phi_A^i(\vec{r}_0, A-1) \quad (127)$$

ergeben sich die T-Matrizen

$$T_1 = \int d\vec{r}_p e^{i\vec{\kappa}\vec{r}_p} F_1(\vec{r}_p) \quad (128)$$

$$T_2 = \int d\vec{r}_p e^{i\vec{\kappa}\vec{r}_p} F_2(\vec{r}_p) \quad (129)$$

wobei $\vec{\kappa} = \vec{k}_f - \vec{k}_i$ der Impulsübertrag ist. Die gesamte T-Matrix ist

$$T = \{\sin\delta^r T_1 - \cos\delta^r T_2\} e^{i\delta^r} \quad (130)$$

Bei einer Energie E_0 können die beiden Summanden destruktiv interferieren und T verschwindet. Dadurch wird der Linienformparameter q , der Fano-Parameter, festgelegt:

$$q = \text{ctg}\delta^r(E_0) = -\frac{T_1}{T_2} \quad (131)$$

Nehmen wir nach Fano an, daß nur ein Drehimpulsübertrag LM zum Übergang beiträgt und entwickeln die Produkte der ebenen Wellen nach Partialwellen mit der Richtung des Impulsübertrags $\vec{\kappa}$ als Bezugsrichtung, erhalten wir für q den reellen Ausdruck

$$q = -\frac{\int dr_p r_p^2 j_L(\kappa r_p) f_1^L(r_p)}{\int dr_p r_p^2 j_L(\kappa r_p) f_2^L(r_p)} \quad (132)$$

$$F_i(\vec{r}_p) = F_i^{LM}(\vec{r}_p) = f_i^L(r_p) Y_{LM}(\hat{r}_p); \quad i = 1, 2 \quad (133)$$

Der Wirkungsquerschnitt ist dann durch

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega_p dE_p} \approx \sum_M |T_{LM}^1|^2 \frac{(\epsilon - q)^2}{1 + \epsilon^2} \quad (134)$$

gegeben. Die Linienform wird durch den Wert von q bestimmt. Für $q = 0$ und $|q| \rightarrow \infty$ ergeben sich symmetrische Linien um $\epsilon = 0$ ($E = E_R$),

für Zwischenwerte von q nimmt die Linie die verschiedensten unsymmetrischen Formen an (Fig. 4). Sie verschwindet allgemein bei $E_0 = E_R - \frac{\Gamma}{2} q$. Ein Vorzeichenwechsel von q bedeutet eine Spiegelung der Linie an einer Achse durch $\varepsilon = 0$. Bei fester Energie wird die Winkelverteilung durch T_{LM}^1 bestimmt. q ist ein Maß für das Verhältnis des Übergangsmatrixelements in den quasi-gebundenen Zustand ϕ und des Übergangsmatrixelements direkt in den Kontinuumszustand ψ_E .

Da wir die Projektilwellenfunktionen im optischen Modell berechnen und sie in der DWBA darstellen, können wir keine so einfache Darstellung der Übergangsmatrixelemente T_{LM}^1 und T_{LM}^{23} in (116) angeben. Die Übergangsmatrixelemente T_{LM}^1 , T_{LM}^{23} und damit die Fano-Parameter q_{LM} und q_L sind i. a. komplexe Größen. Wir betrachten den Wirkungsquerschnitt im SC-Modell (123) zum Drehimpulsübertrag L . q_L wird in Real- und Imaginärteil zerlegt:

$$\frac{d^2\sigma^L}{d\Omega_p dE_p} = A_L \left\{ \sum_M |T_{LM}^1|^2 \frac{(\varepsilon - \text{Re}(q_L))^2}{1 + \varepsilon^2} + \sum_M |T_{LM}^1|^2 \frac{(\text{Im}(q_L))^2}{1 + \varepsilon^2} \right\} \quad (135)$$

$$\sigma_1^L = \sum_M |T_{LM}^1|^2 \frac{(\varepsilon - \text{Re}(q_L))^2}{1 + \varepsilon^2} \quad (136)$$

$$\sigma_2^L = \sum_M |T_{LM}^1|^2 \frac{(\text{Im}(q_L))^2}{1 + \varepsilon^2} \quad (137)$$

Der Teilwirkungsquerschnitt σ_1^L verhält sich als Funktion der Energie wie (134). q ist durch $\text{Re}(q_L)$ ersetzt. Aus der Definition (120) bis (121) von q_L folgt, daß q_L i. a. eine Funktion des Streuwinkels ist. Bei fester Energie ist die Winkelverteilung durch $\sum_M |T_{LM}^1|^2$ und q_L gegeben. Fig. 4 gilt entsprechend für σ_1^L . Zum "Fano-Wirkungsquerschnitt" σ_1^L wird σ_2^L addiert. σ_2^L verhält

sich als Funktion der Energie wie $\sin^2 \delta_\ell^r$ und ist damit symmetrisch um $\epsilon=0$ ($E=E_R$).

Für $\text{Im}(q_L) \neq 0$, also $\varphi_L \neq n\pi$, $n=0,1,2, \dots$, hat der Gesamtwirkungsquerschnitt bei $\epsilon_O^L = \text{Re}(q_L)$ den Wert $A_L \sigma_2^L > 0$ (Fig. 5). Der Wirkungsquerschnitt wird also bei komplexem q_L i. a. nicht verschwinden. Dies ist die auffallendste Änderung gegenüber dem reellen Fall.

Da ϵ nach Definition nur reelle Werte annimmt, war ein vollständiges Verschwinden des Wirkungsquerschnitts bei einer bestimmten Energie E_O^L auch nicht zu erwarten. (135) wird aber ein Minimum in Nähe von $\epsilon = \epsilon_O^L$ ($E_O^L = E_R - \frac{\Gamma}{2} \text{Re} q_L$) haben. Durch σ_2^L ist das Minimum aber nach ϵ_m verschoben. Notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremalwertes von (135) ist das Verschwinden der ersten Abteilung bezüglich der Energievariablen ϵ . Daraus folgt für $\text{Re}(q_L) \neq 0$:

$$\epsilon_m^{1,2} = \frac{|q_L|^{2-1}}{2\text{Re}(q_L)} \pm \left[1 + \frac{(|q_L|^{2-1})^2}{4(\text{Re}(q_L))^2} \right]^{1/2} \quad (138)$$

Bezogen auf die Nullstelle der Linie σ_1^L tritt ein Minimum bei

$$\epsilon_m^1 = \frac{|q_L|^{2-1}}{2\text{Re}(q_L)} + \left[1 + \frac{(|q_L|^{2-1})^2}{4(\text{Re}(q_L))^2} \right]^{1/2} \quad (139)$$

und das Maximum bei

$$\epsilon_m^2 = \frac{|q_L|^{2-1}}{2\text{Re}(q_L)} - \left[1 + \frac{(|q_L|^{2-1})^2}{4(\text{Re}(q_L))^2} \right]^{1/2} \quad (140)$$

auf, wie sich aus Fig. 5 ergibt.

Abschließend läßt sich zusammenfassen, daß bei komplexem Fano-Parameter q_L die Linienform gegenüber dem reellen Fall durch den Imaginärteil von q_L verzerrt wird. Die Asymmetrie wird jetzt im wesentlichen durch den Wert der Phase φ_L von q_L bestimmt. Eine Änderung der Phase um π bedeutet eine Spiegelung an einer Achse durch $\varepsilon = 0$. $|q_L|$ und φ_L sind Funktionen des Streuwinkels ϑ_p :

$$q_L = q_L(\vartheta_p)$$

3.3 Formfaktor, T-Matrix und Wirkungsquerschnitt im VC-Modell

Mit der in Abschnitt 2.4, Gl. (95), definierten Lösung $f_\ell^2(r_0)$ der Radialgleichung für $r_0 \leq R_0$ ergibt sich im VC-Modell für den Formfaktor $F_{LM}^<(\vec{r}_p)$ mit $\varepsilon = \text{ctg} \delta_\ell^r$

$$F_{LM}^<(\vec{r}_p) = \frac{e^{i\delta_\ell}}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \frac{F_{LM}^3(\vec{r}_p) - F_{LM}^4(\vec{r}_p)}{x_1 \varepsilon + x_2} \quad (141)$$

und für $T_{LM}^<$

$$T_{LM}^< = \frac{e^{i\delta_\ell}}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \frac{T_{LM}^3 - \varepsilon T_{LM}^4}{x_1 \varepsilon + x_2} \quad (142)$$

Wie sich aus dem doppelt-differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \sigma^L}{d\Omega_p dE_p} &= A_L \sum_M |T_{LM}^2 + T_{LM}^>| \\
 &= A_L \frac{1}{1+\epsilon} \sum_M \left| \frac{T_{LM}^3}{x_1 \epsilon + x_2} - T_{LM}^{2+\epsilon} \left\{ T_{LM}^1 - \frac{T_{LM}^4}{x_1 \epsilon + x_2} \right\} \right|^2
 \end{aligned} \tag{143}$$

ergibt, ist es im VC-Modell nicht möglich, einen energieunabhängigen Parameter q_L zu definieren, der die Linienform insgesamt beschreibt. Aus (141) und (142) ergibt sich, daß sich diese Schwierigkeiten aus der Berechnung von f_ℓ^2 im Kerninneren ergeben.

IV. Anwendungen

4.0 Numerische Berechnung des Resonanzzustandes und der T-Matrix.

Das optische Potential

Bevor wir die Ergebnisse der von uns betrachteten Beispiele diskutieren, soll kurz der Gang der numerischen Berechnung des Resonanzzustandes und des Wirkungsquerschnitts skizziert werden.

Die Werte der Potentialstreuphase δ_ℓ^0 (Backgroundstreuung), der Breite Γ , der Resonanzenergie E_R , des Resonanzdrehimpulses ℓ , sowie der Kernradius R_0 , die Bindungsenergie ϵ_i und der Drehimpuls ℓ_i des letzten Nukleons n des Targets B im Grundzustand werden der Literatur entnommen (siehe Abschnitt 4.1 und 4.2).

Die Einteilchenwellenfunktion des letzten Nukleons n im Grundzustand wird in einem sphärischen Kastenpotential $V_i(r_0)$ bestimmt. In einem sphärischen Kastenpotential beliebiger Tiefe wird der tiefste gebundene Zustand zum Drehimpuls ℓ_i bestimmt. Dann wird die Tiefe so lange variiert, bis die Bindungsenergie dieses Modellzustandes mit ϵ_i übereinstimmt. Der Zustand wird auf 1 normiert.

Die Parametrisierung des ungestörten BSEC mit dem sphärischen Kastenpotential $V_1(r_0)$ wurde bereits in Abschnitt 2.1 diskutiert.

Im nächsten Schritt wird bei abgeschalteter Kopplung V_{12} die Tiefe des sphärischen Kastenpotentials $V_2(r_0)$ so lange variiert, bis die geforderte nichtresonante Potentialstreuphase δ_ℓ^0 erreicht ist. Damit kann der ungestörte Einteilchen-Kontinuumszustand zum Drehimpuls ℓ im Potential V_2 berechnet werden. Da V_2 relativ zur CM-

Energie E_n des Nukleons n sehr tief ist, stimmen δ_ℓ^0 und die Hard-Sphere-Streuphase τ_ℓ gut überein, wie wir es in Teil II gefordert haben.

Nun wird die Kopplung V_{12} eingeschaltet. Nach Abschnitt 2.3, Gl. (65), wird in beiden Modellen die Größe α_ℓ und damit die Streumatrix S_ℓ berechnet. Durch Variation des noch freien Parameters ε_β (Abschnitt 2.2, Gl. (49)) wird die Resonanz in die gewünschte Position bei $E_n = E_R$ gebracht. Die Resonanzenergie E_R ist durch

$$\begin{aligned} \delta_\ell^r &= \pi/2 \\ &\Big|_{E_n = E_R} \\ \delta_\ell &= \delta_\ell^0 + \pi/2 \end{aligned} \quad (144)$$

festgelegt. Die Stärke der Kopplung V_{12} wird nun so lange geändert, bis die Breite Γ erreicht ist. Die Breite Γ wird aus dem Verlauf der Resonanzstreuphase δ_ℓ^r als Funktion der Energie E_n bestimmt:

$$\begin{aligned} \delta_\ell^r &= \frac{\pi}{4} \quad \text{bei} \quad E_n = E_R - \frac{\Gamma}{2} \\ \delta_\ell^r &= \frac{\pi}{2} \quad \text{bei} \quad E_n = E_R \end{aligned} \quad (145)$$

Der totale elastische Neutronenquerschnitt für die ℓ -te Partialwelle ist durch

$$\sigma_\ell = \frac{4\pi}{q^2} (2\ell+1) \sin^2 \delta_\ell \quad (146)$$

gegeben.

Mit den Lösungen für f_ℓ^2 kann nun die Radialfunktion $I_i^{\ell, L\ell}(r_p)$ des Formfaktors nach Abschnitt 3.0, Gl. (103) berechnet werden. Die Integrationen werden nach der Methode von Raynal¹³⁾ unter Ausnutzung

der Wronski-Relation für Bessel- und Hankelfunktionen ausgeführt.

Nach Ref.²¹⁾ wählen wir für die Tiefe V_{pn}^0 des Yukawa-Potentials

$$V_{pn}^0 = -200 \text{ MeV} \quad (147)$$

für beide Reaktionen. In Ref.²¹⁾ wird für den Reichweite-Parameter μ der Wert $\mu = 1.0 \text{ fm}^{-1}$ benutzt. Wir nehmen eine kleinere Reichweite der NN-Wechselwirkung von $\mu = 1.5 \text{ fm}^{-1}$ an.

Die Radialfunktionen der Formfaktoren werden in das DWBA-Programm DWUCK eingelesen, mit dem die Wirkungsquerschnitte berechnet werden. Für beide Reaktionen nehmen wir als Projektile Protonen mit einer Einschußenergie im Labor-System von $E_p = 40 \text{ MeV}$.

Die Distorted-Waves der Protonen werden im zentralen optischen Potential

$$V_{\text{opt}} = V_c + V + iW \quad (148)$$

berechnet. V_c ist das Coulomb-Potential

$$V_c = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{Z_B e^2}{R_c} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{r_p^2}{R_c^2}\right) & r_p \leq R_c \\ + \frac{Z_B \cdot e^2}{r_p} & r_p > R_c \end{cases} \quad (149)$$

mit dem Coulomb-Radius R_c . Z_B ist die Ladungszahl des Targets B, e die Elementarladung. Für $r_p \leq R_c$ ist V_c durch das Potential einer homogen geladenen Kugel mit der Ladung $Z_B e$ angenähert. Die Kernwechselwirkung wird durch die kurzreichweitigen Potentiale V und W berücksichtigt²⁾. Der (reelle) Volume-Term V hat Wood-Saxon-Form

$$V(r_p) = V_0 \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (150)$$

$$x = (r_p - R_{\text{or}}) / a_r$$

mit der Tiefe V_0 , dem Potentialradius R_{or} und der Randunschärfe a_r . Für den Imaginärteil W wird in üblicher Weise²⁾ ein First-Derivative-Wood-Saxon-Potential genommen (Surface-Term)

$$W = 4W_D \frac{1}{a_i} \frac{e^{-x'}}{(1+e^{-x'})^2} \quad (151)$$

$$x' = (r_p - R_{oi})/a_i$$

Die Parameter der optischen Potentiale für die beiden Beispiele für Eingangs- und Ausgangskanal wurden der Literatur entnommen (siehe 4.1 und 4.2). Da die optischen Potentiale eine glatte Funktion der Energie, Masse und Landung sind²⁾, können die Literaturwerte mit einer Interpolationsformel¹³⁾ auf unsere Beispiele erweitert werden.

Die Berechnung der Fano-Parameter für SC- und VC-Modell aus dem DWUCK-Output geschieht in zwei weiteren Programmen.

4.1 Die $J^\pi = \frac{1}{2}^+$ -Resonanz in ^{25}Mg bei $E_R = 1.509 \text{ MeV}$

In Fig. 6 ist eine schematische Schalenmodellkonfiguration für den Grundzustand von ^{25}Mg gezeigt. Ein $1d_{5/2}$ -Neutron koppelt an den $J^\pi = 0^+$ -Grundzustand des ^{24}Mg -Cores und ergibt den Grundzustandsspin $J_i^\pi = \frac{5}{2}^+$ von ^{25}Mg . Die Bindungsenergie ϵ_i des letzten

Nukleons ist nach Ref.¹¹⁾ $\epsilon_1 = -7.329$ MeV.

Der Wert des Modell-Kernradius $R_0 = 5.0$ fm für den ^{24}Mg -Core ist Ref.¹²⁾ entnommen.

Aus dem experimentell bestimmten totalen Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $^{24}\text{Mg}(n,n)^{24}\text{Mg}$ in Ref.¹¹⁾ ergibt sich, daß die Resonanz bei $E = 1.509$ MeV den Drehimpuls $J^\pi = \frac{1}{2}^+$ ($\ell=0$) und die Breite $\Gamma = 50$ keV hat und durch eine Interferenz zwischen BSEC und einem S-Wellen-Kontinuum mit $\delta_0^0 = -75^\circ$ beschrieben wird. In Tab. 1 sind die Resonanz-Parameter zusammengefaßt.

Nach Abschnitt 2.3 und Abschnitt 2.4 ist für $r_0 < R_0$ für die Radialfunktionen $f_\ell^2(r_0)$ des Einteilchen-Kontinuumszustandes im SC-Modell ein völlig anderes Verhalten als im VC-Modell zu erwarten. Die kompliziertere Struktur von $f_\ell^2(r_0)$ für $r_0 < R_0$ im VC-Modell ergibt sich sofort aus Fig. 7. Es ist bemerkenswert, daß trotz dieser Unterschiede in beiden Modellen die Streuphasen übereinstimmen (also die totalen Wirkungsquerschnitte Fig. 12).

Aus den Unterschieden der Wellenfunktionen $f_\ell^2(r_0)$ für $r_0 < R_0$ ergeben sich völlig unterschiedliche Radialabhängigkeiten für den Formfaktor im SC- und VC-Modell, wie aus Fig. 8 zu ersehen ist.

Aus den Drehimpulsverhältnissen der Reaktion ($J_1^\pi = \frac{5}{2}^+ \rightarrow J^\pi = \frac{1}{2}^+$) ergibt sich, daß zum Wirkungsquerschnitt nur der Drehimpulsübertrag $L=2$ beitragen kann. Aus Fig. 8 sieht man, daß in beiden Modellen die Radialfunktion des Formfaktors für $r_p > R_0$ experimentell gedämpft um die r_p -Achse oszilliert. Bei $r_p = 15.0$ fm sind die Amplituden der Schwingungen bereits auf rd. 10^{-4} des Maximalwertes des Formfaktors abgeklungen.

In Tab. 2 sind die Parameter für die optischen Potentiale zusammengefaßt, in denen die DW's für die Projektilwellenfunktionen im Eingangs- und Ausgangskanal berechnet werden.

Der Q-Wert der Reaktion $^{25}\text{Mg}(p,p')^{25}\text{Mg}^*, J^\pi = \frac{1}{2}^+$ und $E_R = 1.509$ MeV, ist $Q = -8.838$ MeV. In Fig. 10, 11 sind die Resultate für den doppelt differentiellen Wirkungsquerschnitt, betrachtet unter verschiedenen Streuwinkeln ϑ_p des Projektils, dargestellt. Wir sehen, daß sich die Linienform mit dem Streuwinkel unter dem sie betrachtet wird, ändert. Die Winkelabhängigkeit können wir im SC-Modell durch den Fano-Parameter q_L , Fig. 9, beschreiben. Aus Fig. 9 ergibt sich, daß $|q_L|$ und die Phase φ_L im SC-Modell Funktionen des Streuwinkels sind und über den Winkelbereich stark variieren. Da durch q_L die Linienform bestimmt wird, muß sie eine entsprechende Variation mit dem Streuwinkel zeigen. In Fig. 10 sieht man, wie die Linie zunehmend symmetrisch wird, wenn φ_L gegen $\pi/2$ strebt.

Der Vergleich der Linien im SC- und VC-Modell zeigt die Modellabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts vom Resonanzmodell. Die unterschiedlichen Beiträge aus dem Kerninnern in den beiden Modellen wirken sich auf die absolute Größe als auch auf die Form der Wirkungsquerschnitte aus (Fig. 11).

Im SC-Modell ist der Wirkungsquerschnitt durchweg kleiner als im VC-Modell. Das VC-Modell ergibt bei kleinen Streuwinkeln symmetrische Linien (Fig. 11b), bei großen Streuwinkeln liegen nach Fig. 11a geringe Asymmetrien vor, während sich im SC-Modell gerade bei kleinen Streuwinkeln Asymmetrien zeigen, die bei großen Winkeln verschwinden, wenn das Kerninnere zunehmend zur Streuung beiträgt.

In Fig. 12a sind der gemessene doppelt-differentielle Wirkungsquerschnitt für $^{24}\text{Mg}(d,p)$ und der totale elastische Neutronenquerschnitt um die von uns betrachtete Resonanz bei $E_R = 1.509$ MeV abgebildet¹¹⁾. Die $J^\pi = \frac{1}{2}^+$ Resonanz wird im (d,p) -Wirkungsquerschnitt fast vollständig von der benachbarten $J^\pi = \frac{1}{2}^-$ -Resonanz überdeckt und ist nur als kleine Stufe zu sehen. Fig. 12b zeigt unsere rechnerischen Ergebnisse für $^{25}\text{Mg}(p,p')^{25}\text{Mg}^*$.

4.2 Die $J^\pi = 1^+$ -Resonanz in ^{16}N bei $E_R = 3.226$ MeV

Als weiteres Beispiel betrachten wir die $J^\pi = 1^+$ -Resonanz ($\ell=1$) in der Reaktion $^{16}\text{N}(p,p')^{16}\text{N}^*$ bei $E_R = 3.226$ MeV CM-Energie des emittierten Neutrons. Aus der elastischen Streuung von Neutronen an ^{15}N ist die Backgroundphase $\delta_\ell^0 = -45^\circ$ die Breite $\Gamma = 24$ keV bekannt¹⁹⁾.

In Fig. 13 ist eine Schalenmodellkonfiguration für den Grundzustand von ^{16}N zu sehen. Wir nehmen an, daß ein $1d_{5/2}$ -Neutron an den $J_i^\pi = \frac{1}{2}^-$ -Grundzustand des ^{15}N -Cores gekoppelt wird und den $J_i^\pi = 2^-$ -Grundzustand des ^{16}N ergibt. ^{16}N ist ein Beta-Strahler mit der Halbwertszeit $\tau = 7.2$ sec und eignet sich damit nicht als Target für experimentelle Untersuchungen.

In Tab. 3 sind die Resonanzparameter für beide Modelle zusammengestellt. Der Q-Wert ist $Q = -5.73\text{MeV}$.

Fig. 19 zeigt den totalen elastischen Neutronenquerschnitt für $^{15}\text{N}(n,n)^{15}\text{N}$ um die betrachtete Resonanz. Sie ist Ref.¹⁹⁾ entnommen. Unsere Ergebnisse für den totalen Wirkungsquerschnitt bei elastischer Neutronenstreuung von ^{15}N für die Bildung der $J^\pi=1^+$ -Resonanz ist für SC- und VC-Modell in Fig. 19a gezeigt.

Aus der Drehimpulsstruktur der Reaktion $^{16}\text{N}(p,p')^{16}\text{N}^*$ ergibt sich, daß die beiden Drehimpulsüberträge $L=1$ und $L=3$ zum Wirkungsquerschnitt beitragen. In Fig. 15 sind die Radialfunktionen der zugehörigen Formfaktoren im SC-Modell (Fig. 15a) und VC-Modell (Fig. 15b) für die Resonanzenergie $E_R = 3.226\text{ MeV}$ abgebildet. Wie im vorhergehenden Abschnitt ist die starke Modellabhängigkeit der Formfaktoren zu erkennen.

In Fig. 16 ist der Fano-Parameter im SC-Modell zu sehen. Beträge (Fig. 16a) und Phasen (Fig. 16b) ändern sich für beide Drehimpulsüberträge mit dem Streuwinkel ϑ_p des Projektils stark. Der Gesamtwirkungsquerschnitt im SC-Modell ist in Fig. 17 für mehrere Winkel abgebildet. Für $45^\circ \leq \vartheta_p \leq 50^\circ$ dominiert der Beitrag aus dem $L=3$ -Teilwirkungsquerschnitt, während für den übrigen Winkelbereich der $L=1$ -Teilwirkungsquerschnitt den Hauptbeitrag liefert. In Fig. 18 ist der Gesamtwirkungsquerschnitt im VC-Modell für die entsprechenden Winkel zu sehen. Hier gibt über den gesamten Winkelbereich der $L=1$ -Teilwirkungsquerschnitt den hauptsächlichen Beitrag zum Gesamtwirkungsquerschnitt.

In beiden Modellen ergeben sich für kleine Streuwinkel asymmetrische Linien, ähnlich dem totalen Wirkungsquerschnitt in $^{15}\text{N}(n,n)$

^{15}N . Im SC-Modell wird der Wirkungsquerschnitt auf der niederenergetischen Seite ($E_n < E_R$) minimal, im VC-Modell dagegen auf der höherenergetischen Seite ($E_n > E_R$). Wie im vorher betrachteten Beispiel zeigt sich die starke Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts vom Modell der Wellenfunktion.

Da für ^{16}N naturgemäß keine Parameter für optische Potentiale bekannt sind, wurden die Parameter aus Ref.¹⁷⁾ für die Streuung von Protonen an ^{16}O genommen (Tab. 4).

V. Schlußfolgerungen und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde ein DWBA-Modell für die Anregung von Resonanzzuständen über eine direkte Reaktion durch inelastische Streuung von Nukleonen an leichten Kernen betrachtet. Ausgehend vom vollen Hamilton-Operator der Reaktion haben wir einen Modellraum definiert, in dem der angeregte Zustand durch zwei 1p-1h-Konfigurationen beschrieben wird. Die Modell-Restwechselwirkung koppelt die 1p-1h-BSEC-Komponente an die 1p-1h-Kontinuumskomponente. Mit dem Buck- und Hill-Modell konnte das Vielkörperproblem auf gekoppelte Differentialgleichungen im Ortsraum für die Einteilchenfunktionen des angeregten gebundenen (BSEC-) Nukleons und des Kontinuumsnukleons (ungebunden) reduziert werden. Die explizite mikroskopische Berechnung des BSEC wurde durch eine Parametrisierung umgangen. Mit geeigneten Wellenfunktionen für das Target sollte eine genaue Bestimmung und Vorhersage des BSEC und der Resonanzparameter möglich sein. In unserem Modell ist der BSEC willkürlich gewählt bis auf den Resonanzdrehimpuls ℓ .

Der angeregte, gebundene Einteilchenzustand und der Einteilchenstreu Zustand im Feld des Restkerns A wurde wegen der einfachen analytischen Eigenschaften der Lösungen in einem sphärischen Kastenpotential bestimmt. Die gekoppelten Gleichungen wurden für zwei sehr gegensätzliche Modelle des Kopplungspotentials gelöst (Oberflächen-Kopplung-(SC)-Modell und Volumen-Kopplung-(VC)-Modell). Es ergab sich, daß die Innenlösungen der Radialgleichungen stark modellabhängig sind, obwohl sie definitionsgemäß für $r \geq R_0$ identisch sind. Da in eine Phasenanalyse gerade die über-

einstimmenden Werte der Radialfunktionen des offenen Kanals bei $r_0 = R_0$ eingehen, stimmen die Streuphasen in beiden Modellen überein. Hierin drückt sich die bekannte Tatsache aus, daß die Wellenfunktion des Resonanzzustandes für $r < R_0$ durch Energie, Breite und Backgroundphase nicht festgelegt wird. Über die allgemeine radiale Form des Kopplungspotentials ist wenig bekannt, allerdings sollte ein Kopplungspotential vom Wood-Saxon-Typ, das zwischen den von uns betrachteten Extremfällen liegt, ein realistischerer Ansatz sein.

Aus den Unterschieden der Wellenfunktionen des offenen Kanals in den beiden Modellen ergeben sich ebenfalls stark modellabhängige Formfaktoren und Übergangsmatrixelemente.

In den Übergangsmatrixelementen werden die Beiträge der BSEC-Komponente der Target-Wellenfunktion nicht berücksichtigt. Ihre Berechnung bereitet natürlich keine prinzipiellen Schwierigkeiten und stellt daher keine grundsätzliche Beschränkung unseres Modells dar. Eine realistische Rechnung muß sie i. a. miteinbeziehen, da unsere ad-hoc-Annahme, daß die Reaktion bevorzugt über den offenen Targetkanal abläuft i. a. zu grob sein wird. Die Güte unserer Approximation läßt sich von Fall zu Fall durch den Vergleich unserer Modellergebnisse mit experimentellen Daten für den doppelt-differentiellen Wirkungsquerschnitt bestimmen. Da für die von uns betrachteten Reaktionen noch keine experimentellen Daten vorliegen, können wir keine Aussagen über die Berechtigung unserer Näherung für diese beiden Beispiele machen. Die geringe Größe der berechneten doppelt-differentiellen Wirkungsquerschnitte von unter 1 mb/MeV.sterad in beiden Beispielen könnte ein Hinweis

darauf sein, daß die BSEC-Komponente wesentlich zum Wirkungsquerschnitt beiträgt. Wie weiter gezeigt wurde, kann der Wirkungsquerschnitt im SC-Modell durch einen i. a. komplexen Parameter q als Funktion der Energie des emittierten Nukleons (= Energieverlust des Projektils) parametrisiert werden. $|q|$ und $\text{Re}(q)$ können nach Abschnitt 3.2 aus dem Minimum und Maximum der Resonanzlinien für jeden Streuwinkel bestimmt werden. Wird die BSEC-Komponente in der T-Matrix mit berücksichtigt¹⁾, mißt q das Verhältnis der Übergangsmatrixelemente des Übergangs aus dem Grundzustand in den durch Kontinuumsbeimischungen modifizierten BSEC (Abschnitt 2.1) zum Übergang direkt in den ungestörten Kontinuumszustand. Da in unserem Modell die BSEC-Komponente in der T-Matrix fehlt, ist q nicht vollständig bestimmt.

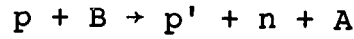
Im VC-Modell konnte keine dem SC-Modell entsprechende Parametrisierung des Wirkungsquerschnitts durch einen Parameter abgeleitet werden. Wir nehmen an, daß dies in der Definition von f_ℓ^2 begründet ist. Nach Abschnitt 2.2, Gl. (2.10) enthält f_ℓ^2 implizit die Fano-Koeffizienten b_E . Während im SC-Modell f_ℓ^2 für $r_0 \leq R_0$ in die ungestörte Lösung und einen energieabhängigen Faktor faktorisiert werden kann, ist die Bedeutung der einzelnen Beiträge zu f_ℓ^2 im VC-Modell für $r_0 \leq R_0$ nicht klar und f_ℓ^2 kann nicht in entsprechender Weise zerlegt werden.

Schließlich bleibt darauf hinzuweisen, daß mit der gleichen Methode auch Knock-out-Reaktionen und inelastische Streuung zu Riesenresonanzen unter Berücksichtigung des Kontinuums beschrieben werden können.

Anhang 1

Der doppelt-differentielle Wirkungsquerschnitt für inelastische Reaktionen zu einem ungebundenen Endzustand in der DWBA

Wir betrachten in diesem Anhang den Wirkungsquerschnitt der inelastischen Reaktion



die zu einem ungebundenen Endzustand $B^* = A + n$ führt. Der Einfachheit halber sollen die Projektile p keinen Spin tragen.

Der Grundzustand B sei durch die Kopplung eines zusätzlichen Nukleons n an den Grundzustand des Cores A gegeben:

$$\begin{aligned} \phi_B^{I_B^i M_B^i} = \sum_{M_A^i, \ell_i, \lambda_i, \nu_i} \phi_A^{I_A^i M_A^i} \chi_{1/2 \nu_i} Y_{\ell_i \lambda_i}(\hat{r}_n) f_{\ell_i j_i}(r_n) \cdot r_n^{-1} \quad (A1.1) \\ * (I_A^i M_A^i j_i \mu_i | I_B^i M_B^i) (\ell_i \lambda_i \ 1/2 \ \nu_i | j_i \mu_i) \end{aligned}$$

$\phi_A^{I_A^i M_A^i}$ ist die Wellenfunktion des Cores A im Grundzustand $I_A^i M_A^i$.

Das Nukleon n , dessen Relativ-Bahndrehimpuls $\ell_i \lambda_i$ zu A und Spin $1/2 \ \nu_i$ zum Drehimpuls $j_i \mu_i$ koppeln, bildet durch Kopplung an A den Grundzustand $I_B^i M_B^i$ des Targets B .

Spins werden durch die Spineigenfunktionen $\chi_{j\mu}$ beschrieben. $Y_{\ell_i \lambda_i}$ ist die übliche Kugelflächenfunktion³⁾. Die Radialfunktion $f_{\ell_i j_i}(r_n)$ des Nukleons n hängt vom Bahndrehimpuls ℓ_i , dem Gesamtdrehimpuls j_i und von der Radialkoordinate r_n des letzten Nukleons ab.

Die Kopplung der Drehimpulse wird durch die Clebsch-Gordon-Koeffizienten $(j_1 \mu_1 j_2 \mu_2 | j_3 \mu_3)$ beschrieben¹⁴⁾. Die Wellenfunktion

$\Omega_2(\vec{r}_n, \vec{q}_n, I_B, M_A v_f)$, in dem sich der Core A im Zustand $I_A M_A$ befindet und n in einem Kontinuumszustand mit $1/2 v_f$, ist mit den üblichen asymptotischen Randbedingungen (siehe Abschnitt 2.1) durch

$$\Omega_2(\vec{r}_n, \vec{q}_n, I_B, M_A v_f) = \quad (A1.2)$$

$$4\pi \sum_{\substack{\bar{M}_A j j' \\ \mu \mu' \lambda \lambda' \\ M_B v}} \phi_A^{I_A M_A} \chi_{1/2v} Y_{\ell\lambda}(\hat{r}_n) Y_{\ell'\lambda'}(\hat{q}_n) f_{\ell\ell'jj'}(r_n) r_n^{-1} \\ * (I_A M_A j' \mu' | I_B M_B) (I_A \bar{M}_A j \mu | I_B M_B) (\ell \lambda 1/2v | j \mu) (\ell' \lambda' 1/2v_f | j' \mu')$$

gegeben, mit dem Gesamtdrehimpuls $I_B M_B$. $\vec{q}_n$ ist der Wellenvektor von Teilchen n. (A1.2) ist im wesentlichen eine Partialwellenentwicklung der Kontinuumsfunktion des Teilchens n im Feld des Cores A.

Die Projektil-Traget-Wechselwirkung sei durch eine 2-Körper-Wechselwirkung $V_{pn}(\vec{r}_p, \vec{r}_n)$ gegeben. Dann erhalten wir mit den DW's $\chi_i^{(+)}(\vec{k}_i, \vec{r}_p)$ und $\chi_f^{(-)}(\vec{k}_f, \vec{r}_p)$ für die Projektilwellenfunktionen im Eingangs- und Ausgangskanal die T-Matrix für die Reaktion

$$T_{M_B \vec{k}_i \rightarrow \vec{k}_f M_A v_f (I_B) \vec{q}_n} = \\ \int d\vec{r}_p \chi_f^{(-)*}(\vec{k}_f, \vec{r}_p) F_{M_B M_A v_f \vec{q}_n}^{I_B}(\vec{r}_p) \chi_i^{(+)}(\vec{k}_i, \vec{r}_p)$$

wobei über die Radialkoordinaten $\vec{r}_p$ des Projektils integriert wird (Relativkoordinate zu B). Wir entwickeln das Wechselwirkungspotential V_{pn} nach Multipolen (V_{pn} sei zentral)

$$V_{pn}(|\vec{r}_p - \vec{r}_n|) = 4\pi V_{pn}^0 \sum_{LM} g_L(r_p, r_n) Y_{LM}^*(\hat{r}_p) Y_{LM}(\hat{r}_n) \quad (A1.4)$$

V_{pn}^0 ist die Stärke der Projektil-Target-Wechselwirkung. Für bestimmte Potentiale wie Yukawa-Potential oder Gauß-Potential sind einfache analytische Ausdrücke für die Radialfunktionen $g_L(r_p, r_n)$ anzugeben (siehe Abschnitt 3.0 für Yukawa-Potential).

Berücksichtigen wir noch die Orthogonalität der Spinzustände

$$\langle 1/2 \nu | 1/2 \nu_i \rangle = \delta_{\nu \nu_i} \quad \langle I_A M_A^i | I_A \bar{M}_A \rangle = \delta_{\bar{M}_A M_A^i}$$

erhalten wir für den Formfaktor $F_{M_B A \nu_f \hat{q}_n}^{I_B}(\vec{r}_p)$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} F_{M_B A \nu_f \hat{q}_n}^{I_B}(\vec{r}_p) = & (4\pi)^2 V_{pn}^0 \sum_{\substack{M_A^i \mu_i \lambda_i \nu_i \\ \ell \ell' \lambda \lambda' j j' \mu \mu' \\ M_B L M}} \int d\vec{r} g_L(r_p r_n) * \\ & * Y_{LM}(\hat{r}_n) Y_{\ell_i \lambda_i}(\hat{r}_n) Y_{\ell \lambda}^*(\hat{r}_n) f_{\ell \ell' j j'}(r_n) f_{\ell_i j_i}(r_n) \cdot r_n^{-2} * \\ & * (I_A M_A^i j_i \mu_i | I_B M_B^i) (\ell_i \lambda_i 1/2 \nu_i | j_i \mu_i) (I_A M_A^i j \mu | I_B M_B) * \\ & * (\ell \lambda 1/2 \nu_i | j \mu) (\ell' \lambda' 1/2 \nu_f | j' \mu') (I_A M_A j' \mu' | I_B M_B) * \\ & * Y_{LM}^*(\hat{r}_p) Y_{\ell' \lambda'}(\hat{q}_n) \end{aligned}$$

(A1.5) hängt noch von den Richtungen $\hat{q}_n$ des emittierten Teilchens ab.

Die Integration über die Winkel kann sofort ausgeführt werden¹⁴⁾.

Damit können wir den inklusiven unpolarisierten doppel-differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Reaktion berechnen.

$$\frac{d^2 \sigma}{d\Omega_p dE_p} = \frac{(m_p^*)^2 m_n^* q_n}{(2\pi)^5 \hbar^6} \frac{k_f}{k_i} \frac{1}{2I_B^i + 1} *$$

(A1.6)

$$* \int d\hat{q}_n \sum_{\substack{M_B^i \\ M_A^i v_f}} \left| T_{M_B^i \vec{k}_i \rightarrow \vec{k}_f M_A^i v_f (I_B) \vec{q}_n} \right|^2$$

Denken wir uns die Summe als Doppelsumme ausgeschrieben und berücksichtigen die Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen und der Clebsch-Gordon-Koeffizienten¹⁴⁾, erhalten wir aus (A1.6) den wesentlich einfacheren Ausdruck

$$\frac{d^2 \sigma}{d\Omega_p dE_p} = \frac{(m_p^*)^2 m_n^* q_n}{(2\pi)^5 \hbar^6} \frac{k_f}{k_i} \frac{1}{2I_B^i + 1} * \quad (A1.7)$$

$$* \sum_{M_B^i M_B^i} \left| T_{M_B^i \vec{k}_i \rightarrow \vec{k}_f M_B^i} \right|^2$$

Aus (A1.7) ergibt sich insbesondere, daß Resonanzen mit verschiedenem Spin inkohärent zum Gesamtwirkungsquerschnitt beitragen.

Die reduzierte T-Matrix $T_{M_B^i \vec{k}_i \rightarrow \vec{k}_f M_B^i}$ enthält den reduzierten Formfaktor

$$F_{M_B^i M_B^i}^{I_B}(\vec{r}_p) = (4\pi)^2 V_{pn}^0 \sum_{\substack{L M M_A^i \lambda_i v_i \\ \mu_i \lambda \mu}} I_i^{L \ell}(\vec{r}_p) \cdot Y_{LM}^*(\hat{r}_p) *$$

$$* (I_A M_A^i j_i \mu_i | I_B M_B^i) (\ell_i \lambda_i 1/2 v_i | j_i \mu_i) (I_A M_A^i j_i \mu | I_B M_B^i) *$$

$$* (\ell \lambda 1/2 v_i | j \mu) *$$

$$* \frac{\hat{\ell}_i \hat{L} \hat{\ell}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell & L & \ell_i \\ -\lambda & M & \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & L & \ell_i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-)^{-\lambda_i}$$

$$\hat{\ell} = \sqrt{2\ell+1}$$

Mit dem Radialanteil

$$I^{\ell_i L \ell} (r_p) = \int_0^\infty dr_n f_{\ell \ell, j j}^* (r_n) g_L (r_p, r_n) f_{\ell_i j_i} (r_n) \quad (A1.9)$$

Eine längere Rechnung, die die Eigenschaften der Clebsch-Gordon-Koeffizienten und der 3j-Symbole ausnutzt, führt schließlich zum Endergebnis für den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d^2 \sigma}{d\Omega_p dE_p} = \frac{(m_p^*)^2 m_n^* q_n}{(2\pi)^5 \hbar^6} \frac{k_f}{k_i} (2j_i+1) (2I_B+1) \times (4\pi)^3 |V_{pn}^o|^2 \quad (A1.10)$$

$$\times \left| \int d\vec{r}_p \chi_f^{(-)*} (\vec{k}_f, \vec{r}_p) F_{LM}(\vec{r}_p) \chi_i^{(+)} (\vec{k}_i, \vec{r}_p) \cdot \begin{pmatrix} j & j_i & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_B^i & I_B & L \\ j & j_i & I_A \end{pmatrix} \right|^2$$

und

$$F_{LM}(\vec{r}_p) = I^{\ell_i L \ell} (r_p) Y_{LM}^* (\hat{r}_p) \quad (A1.11)$$

Für $I_A = S_n = 0$, also $I_B^{i M_B} = \ell_i \lambda_i$ und $I_B^{M_B} = \ell \lambda$ reduziert sich (A1.10) auf

$$\frac{d^2 \sigma}{d\Omega_p dE_p} = \frac{(m_p^*)^2 m_n^* q_n}{(2\pi)^5 \hbar^6} \frac{k_f}{k_i} (2\ell+1) (4\pi)^3 |V_{pn}^o|^2 * \quad (A1.12)$$

$$* \sum_{LM} \left| \begin{pmatrix} \ell_i & L & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right|^2 \left| \int d\vec{r}_p \chi_f^{(-)*} (\vec{k}_f, \vec{r}_p) F_{LM}(\vec{r}_p) \chi_i^{(+)} (\vec{k}_i, \vec{r}_p) \right|^2$$

Die in Teil III benutzte Normierungskonstante A_L ist dann

$$A_L = \frac{(m_p^*)^2 m_n^* q_n}{(2\pi)^5 \hbar^6} \frac{k_f}{k_i} (2\ell+1) (4\pi)^3 |V_{pn}^o|^2 \left| \begin{pmatrix} \ell_i & L & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right|^2 \quad (A1.13)$$

Referenzen:

- 1) U. Fano; Phys. Rev. 124 (1961) 1866
- 2) N. Austern; Direct Reaction Theories, New York 1970
- 3) A. Messiah; Quantum Mechanics, Vol. I, II; Amsterdam 1972
- 4) J.M. Blatt, U.F. Weisskopf; Theoretische Kernphysik; Leipzig 1959
- 5) W. Tobocman; Theory of Direct Nuclear Reactions; Oxford 1961
- 6) A. Bohr, B. Mottelson; Nuclear Structure, Vol. I; New York/Amsterdam 1969
- 7) C. Mahaux, H.A. Weidenmüller; Shell Model Approach to Nuclear Reactions; Amsterdam 1969
- 8) F.S. Levin; Ann. Phys. 46 (1968) 41
- 9) G. Baur, F. Rösler, D. Trautmann; Nucl. Phys. A252 (1975) 77
- 10) H.A. Weidenmüller; Nucl. Phys. 75 (1966) 189
- 11) J. Bommer, M. Epko, H. Fuchs, K. Grabisch, H. Kluge, H. Öschler; Nucl. Phys. A263 (1976) 93
- 12) U.N. Singh, H.I. Liou, J. Rainwater, G. Hacken; Phys. Rev. C10, No. 6 (1974) 2150
- 13) J. Raynal; IAEA-SMR-9/8
- 14) A.R. Edmonds; Drehimpulse in der Quantenmechanik; Mannheim 1961
- 15) P.M. Endt, C. van der Leun; Nucl. Phys. A214 (1973) 1
- 16) F.S. Levin, H. Feshbach; Reaction Dynamics; New York 1973
- 17) H.V. Geramb, R. Sprickmann, G.L. Strobel; Nucl. Phys. A199 (1973) 545
- 18) M. Rotenberg; The 3j- and 6j-Symbols, Cambridge 1959
- 19) B. Zeitnitz, H. Dubenkropp, R. Putzki, G.J. Kironac, S. Cierjaks, J. Nebe, Carl B. Dover; Nucl. Phys. A166 (1971) 443
- 20) B. Buck, A.D. Hill; Nucl. Phys. A95 (1967) 271
- 21) G.R. Satchler; Nucl. Phys. A95 (1967) 1.

Tabellenbeschreibung:

Tabelle 1: Die Resonanzparameter für $^{24}\text{Mg}(n,n)^{24}\text{Mg}^*$, $E_R = 1.509$ MeV, SC- und VC-Modell

- a) V_i^0 , V_1^0 , V_2^0 sind die Tiefen der sphärischen Kastenpotentiale für den Grundzustand, den Zustand des angeregten Core-Nukleons und den Zustand des Kontinuums-Nukleons. ϵ_{BSEC} ist die Modell-Bindungsenergie des angeregten Core-Nukleons, E_n^0 die entsprechende Energie des Kontinuums-Nukleons aus dem Fit für die Resonanzenergie: τ_ℓ ist die Hard-Sphere-Streuphase bei $E_n = E_R$.
- b) Die Literaturwerte für den Drehimpuls ℓ_i des Grundzustandes, den Resonanzdrehimpuls ℓ , die Bindungsenergie ϵ_i des letzten Nukleons im Grundzustand, Resonanzbreite Γ , Resonanzenergie E_R , Backgroundstreuphase δ_ℓ^0 (alle aus Ref.¹¹⁾) und Kernradius R_0 (Ref.¹²⁾).

Tabelle 2: Die Parameter der optischen Potentiale im Eingangs- und Ausgangskanal für $^{25}\text{Mg}(p,p')^{25}\text{Mg}^*$, $E_R = 1.509$ MeV. V_{OR} , R_{OR} , a_R sind die Potentialtiefe, Radius und Diffuseness des Realteils, $4W_D$, R_{oi} und a_i entsprechend für den Imaginärteil. R_C ist der Coulomb-Radius, Z_B die Ladungszahl des Targets $^{25}\text{Mg}(p,p')^{25}\text{Mg}^*$, $E_R = 1.509$ MeV

Tabelle 3: Die Resonanzparameter für $^{15}\text{N}(n,n)^{15}\text{N}^*$, $E_R = 3.226$ MeV, SC- und VC-Modell

- a) V_i^0 , V_1^0 , V_2^0 sind die Tiefen der sphärischen Kastenpotentiale für den Grundzustand, den Zustand des angeregten Core-Nukleons und den Zustand des Kontinuums-

Nukleons. ϵ_{BSEC} ist die Modell-Bindungsenergie des angeregten Core-Nukleons, E_n^0 die entsprechende Energie des Kontinuum-Nukleons aus dem Fit für die Resonanzenergie. τ_ℓ ist die Hard-Sphere-Streuphase bei $E_n = E_R$.

b) Die Literaturwerte für den Drehimpuls ℓ_i des Grundzustandes, den Resonanzdrehimpuls ℓ , die Bindungsenergie ϵ_i des letzten Nukleons im Grundzustand, Resonanzbreite Γ , Resonanzenergie E_R , Backgroundstreuphase δ_ℓ^0 (alle aus Ref.¹⁹⁾) und Kernradius R_0 (Ref.⁹⁾).

Tabelle 4: Die Parameter der optischen Potentiale im Eingangs- und Ausgangskanal für $^{16}\text{N}(p,p')^{16}\text{N}^*$, $E_R = 3.226$ MeV. V_{OR} , R_{OR} , a_R sind die Potentialtiefe, Radius und Diffuseness des Realteils, $4W_D$, R_{Oi} und a_i entsprechend für den Imaginärteil. R_C ist der Coulomb-Radius, Z_B die Ladungszahl des Targets $^{16}\text{N}(p,p')^{16}\text{N}^*$, $E_R = 3.226$ MeV.

Tabelle 1a:

	V_i^0 [MeV]	V_1^0 [MeV]	V_2^0 [MeV]	V_{12}^0	ϵ_{BSEC} [MeV]	E_n^0 [MeV]	τ_ℓ
SC	27.10	40.0	37.02	11.47 [MeV fm]	-33.84	1.64	-75.75°
VC	27.10	40.0	37.02	4.65 [MeV]	-33.84	0.81	-75.75°

Tabelle 1b:

ℓ_i	ℓ	ϵ_i [MeV]	Γ [MeV]	E_R [MeV]	δ_ℓ^0	R_O [fm]
2	0	-7.329	50.0	1.509	-75.0°	5.0

Tabelle 2:

E_P^{LAB} [MeV]	V_{OR} [MeV]	R_{OR} [fm]	a_R [fm]	$4W_D$ [MeV]	R_{OI} [fm]	a_i [fm]	R_C [fm]	Z_B
40.0	-48.06	1.20	0.64	28.4	1.02	0.70	1.25	12
31.6	-43.73	1.16	0.75	14.8	1.37	0.48	1.25	12

Tabelle 3a:

	V_i^O [MeV]	V_1^O [MeV]	V_2^O [MeV]	V_{12}^O	ϵ_{BSEC} [MeV]	E_n^O [MeV]	τ_ℓ
SC	23.01	30.0	58.0	14.38 [MeV fm]	-16.41	3.46	-43.68°
VC	23.01	30.0	58.0	4.75 [MeV]	-16.41	2.77	-43.68°

Tabelle 3b:

ℓ_i	ℓ	ϵ_i [MeV]	Γ [keV]	E_R [MeV]	δ_ℓ^O	R_O [fm]
2	1	-2.49	24.0	3.226	-45.0°	4.8

Tabelle 4:

E_p^{LAB}	V_{OR} [MeV]	R_{OR} [fm]	a_R [fm]	$4W_D$ [MeV]	R_{OI} [fm]	a_i [fm]	R_C [fm]	Z_B
40.0	-43.8	1.12	0.69	21.8	1.375	0.425	1.25	7
34.3	-47.02	1.142	0.69	26.08	1.268	0.463	1.25	7

Figurenlegende

- Figur 1: Der Resonanzzustand B^* kann durch verschiedene Reaktionen angeregt werden, wie z. B. durch elastische Streuung am Core A (Fig. 1a), durch eine Transfer-Reaktion (Fig. 1b) oder durch inelastische Streuung am Target B (Fig. 1c).
- Figur 2: Definition der Relativkoordinaten des Projektils $\vec{r}_p$, des emittierten Nukleons $\vec{r}_o$ und des Relativabstandes $\vec{r}_{po}$ vom Projektil und emittierten Nukleon (C.M.-System).
- Figur 3: Die Anregung des Zustandes B^* . In Fig. 2a ist der Grundzustand des Targets $B=(A+n)$ schematisch dargestellt mit dem einlaufenden Projektil p. ϵ_F symbolisiert die Fermikante von B. Fig. 2b zeigt die Anregung des BSEC, der in unserem Modell aus einer 1p-1h-Konfiguration des Targets besteht, und das auslaufende Projektil p'. Der BSEC ist mit dem 1p-1h-Kontinuumszustand gleicher Energie in Fig. 2c entartet. Die beiden Konfigurationen werden durch die Restwechselwirkung gekoppelt.
- Figur 4: Linienformen für verschiedene reelle Werte des Fano-Parameters q. Der Wert von q bestimmt die Nullstelle der Linie. Ein Vorzeichenwechsel von q entspricht einer Spiegelung an einer Achse durch $\epsilon=0$ (Vorzeichenwechsel von ϵ).
- Figur 5: Linienformen für komplexes q mit $|q| = 1$ und für verschiedene Phasen. Für $\text{Im}q \neq 0$ verschwindet die Linie im Gegensatz zum reellen Fall nicht. Minima und Maxima sind gegenüber dem reellen Fall $q = 1$ verschoben.

Figur 6: Schalenmodellkonfiguration für den Grundzustand von $^{25}\text{Mg} = (^{24}\text{Mg} + \nu 1d_{5/2})$, $J^\pi = \frac{5}{2}^+$

Figur 7: Die Radialfunktion $f_\ell^2(r_o)/(r_o)$ der Wellenfunktion des emittierten Nukleons für drei Energien um die Resonanz $^{24}\text{Mg}(n,n)$, $E_R = 1.509$ MeV im SC-Modell (Fig. 7a) und VC-Modell (Fig. 7b). Fig. 7a zeigt deutlich die Unstetigkeitsstelle der 1. Ableitung der Radialfunktion am Kernrand im SC-Modell.

Figur 8: $^{25}\text{Mg}(p,p')^{25}\text{Mg}^*$, $E_R = 1.509$ MeV. Die Radialfunktion $I_{iL\ell}^{iL\ell}(r_p)$ des Formfaktors im SC-Modell (Fig. 8a) und VC-Modell (Fig. 8b) für drei Energien um die Resonanz ($E_R, E_R \pm \Gamma/2$).

Figur 9: Betrag (Fig. 9a) und Phase (Fig. 9b) des Fano-Parameters im SC-Modell für $^{25}\text{Mg}(p,p')^{25}\text{Mg}^*$, $E_R = 1.509$ MeV.

Figur 10: Die rechnerischen Ergebnisse für $^{25}\text{Mg}(p,p')^{25}\text{Mg}^*$, $E_R = 1.509$ MeV, im SC-Modell bei verschiedenen Streuwinkeln.

Figur 11: Die rechnerischen Ergebnisse für $^{25}\text{Mg}(p,p')^{25}\text{Mg}^*$, $E_R = 1.509$ MeV, im VC-Modell bei verschiedenen Streuwinkeln.

Figur 12: Vergleich der experimentellen Ergebnisse für $^{24}\text{Mg}(d,p)$ und $^{24}\text{Mg}(n,n)$ (aus Ref.¹¹) um die betrachtete Resonanz bei $E_R = 1.509$ MeV mit unseren Ergebnissen für $^{25}\text{Mg}(p,p')^{25}\text{Mg}^*$, $E_R = 1.509$ MeV.

Figur 13: Schalenmodellkonfiguration für den Grundzustand von $^{16}\text{N} = (^{15}\text{N} + \nu 1d_{5/2})$, $J^\pi = 2^-$.

Figur 14: Die Radialfunktion $\frac{f_{\ell}^2(r_0)}{r_0^2}$ der Wellenfunktion des emittierten Nukleons für $^{15}\text{N}(n,n)^{15}\text{N}^*$, $E_R = 3.226$ MeV, bei drei Energien um die Resonanz. Fig. 14a - SC-Modell, Fig. 14b - VC-Modell.

Figur 15: Vergleich der Radialfunktionen $I_{iL\ell}^{L\ell}(r_p)$ der Formfaktoren zu den Drehimpulsüberträgen $L=1$ und $L=3$ bei der Resonanzenergie für $^{16}\text{N}(p,p')^{16}\text{N}^*$, $E_R = 3.226$ MeV, im SC-Modell (Fig. 15a) und VC-Modell (Fig. 15b).

Figur 16: Betrag (Fig. 16a) und Phase (Fig. 16b) des Fano-Parameters im SC-Modell für $^{16}\text{N}(p,p')^{16}\text{N}$, $E_R = 3.226$ MeV.

Figur 17: Die Resonanzlinie im SC-Modell unter verschiedenen Streuwinkeln betrachtet für $^{16}\text{N}(p,p')^{16}\text{N}^*$, $E_R = 1.509$ MeV.

Figur 18: Die Resonanzlinie im VC-Modell bei verschiedenen Streuwinkeln für $^{16}\text{N}(p,p')^{16}\text{N}^*$, $E_R = 1.509$ MeV.

Figur 19: Vergleich der experimentellen Ergebnisse für $^{15}\text{N}(d,p)$ und $^{15}\text{N}(n,n)$ um die betrachtete Resonanz mit unseren Ergebnissen für die Reaktion $^{16}\text{N}(p,p')^{16}\text{N}^*$, $E_R = 1.509$ MeV.

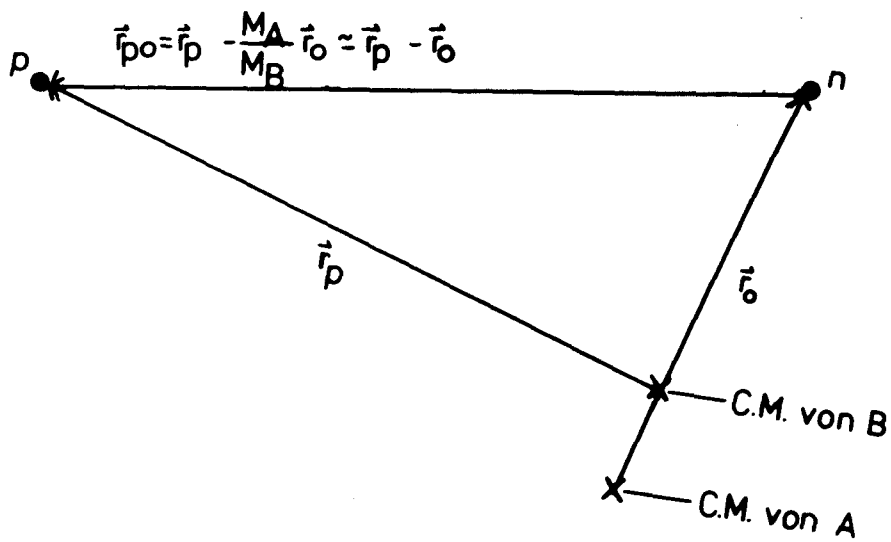
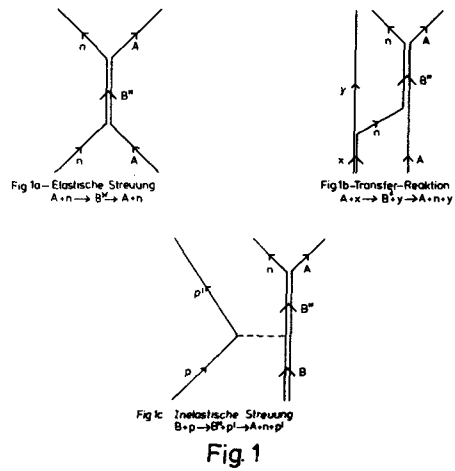
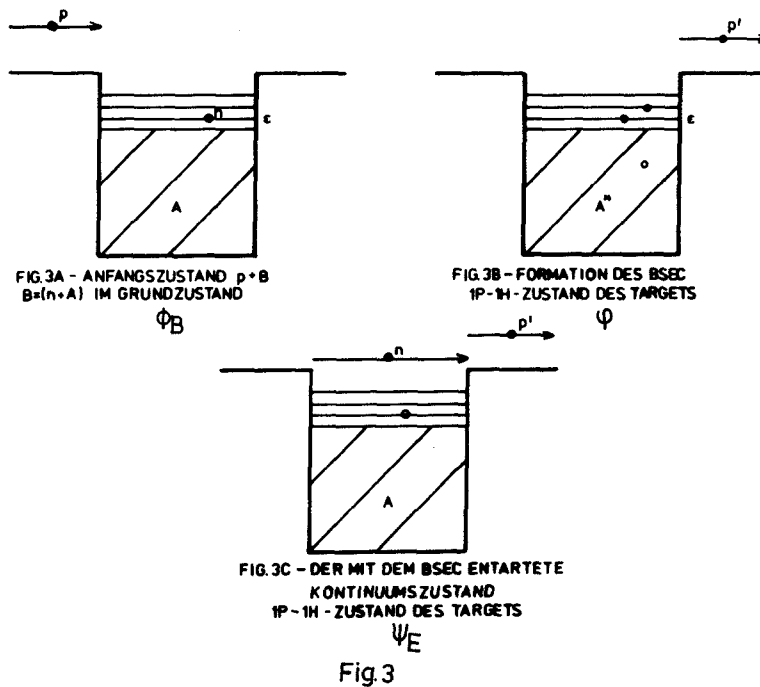


Fig. 2



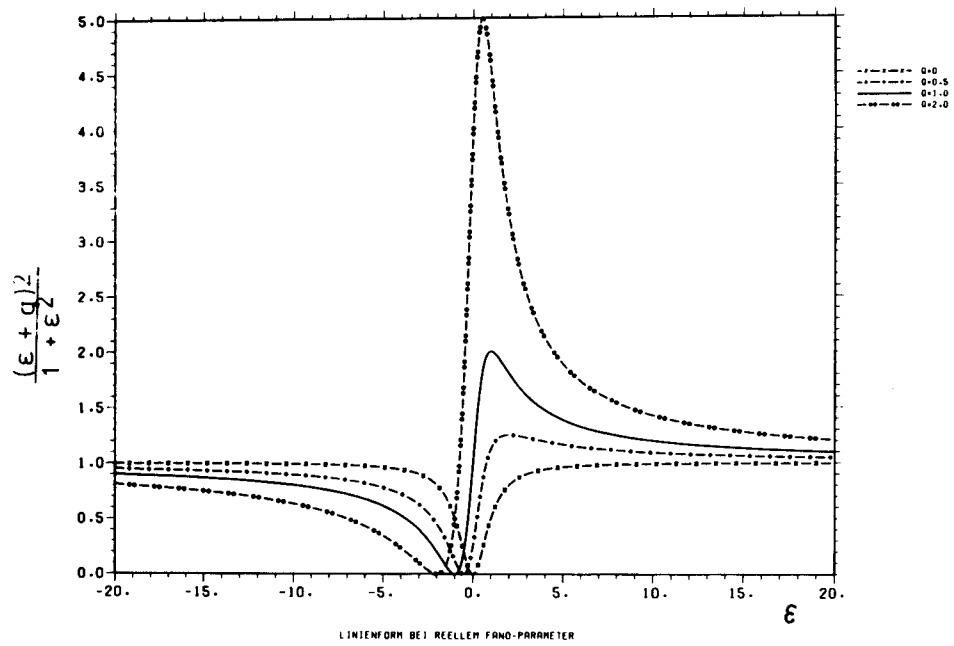


Fig. 4

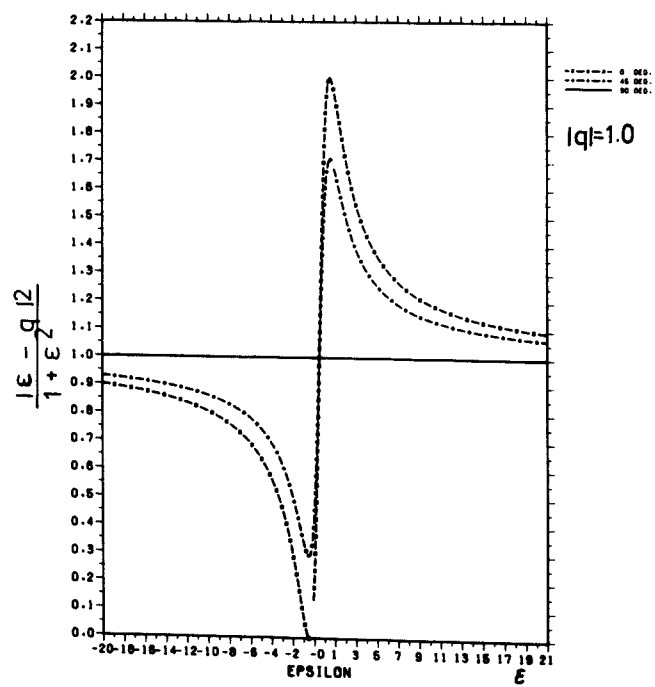


Fig. 5

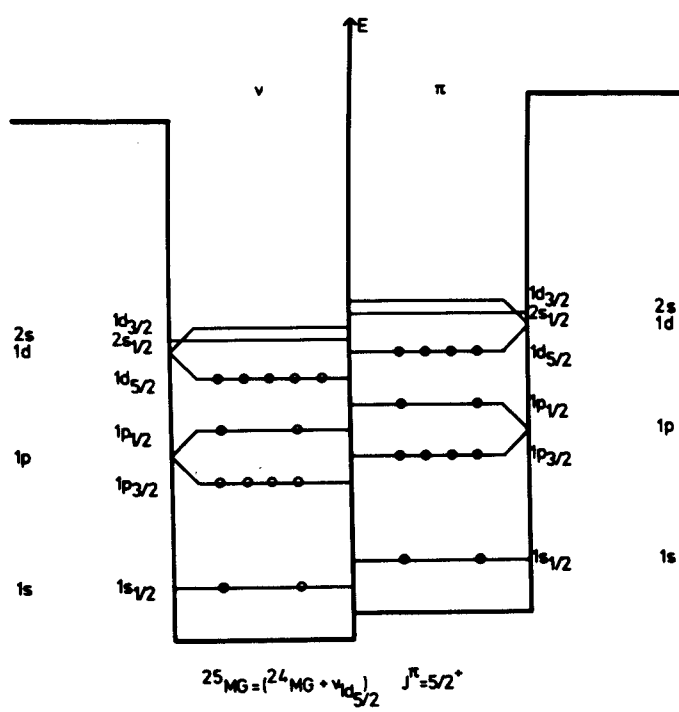


Fig. 6

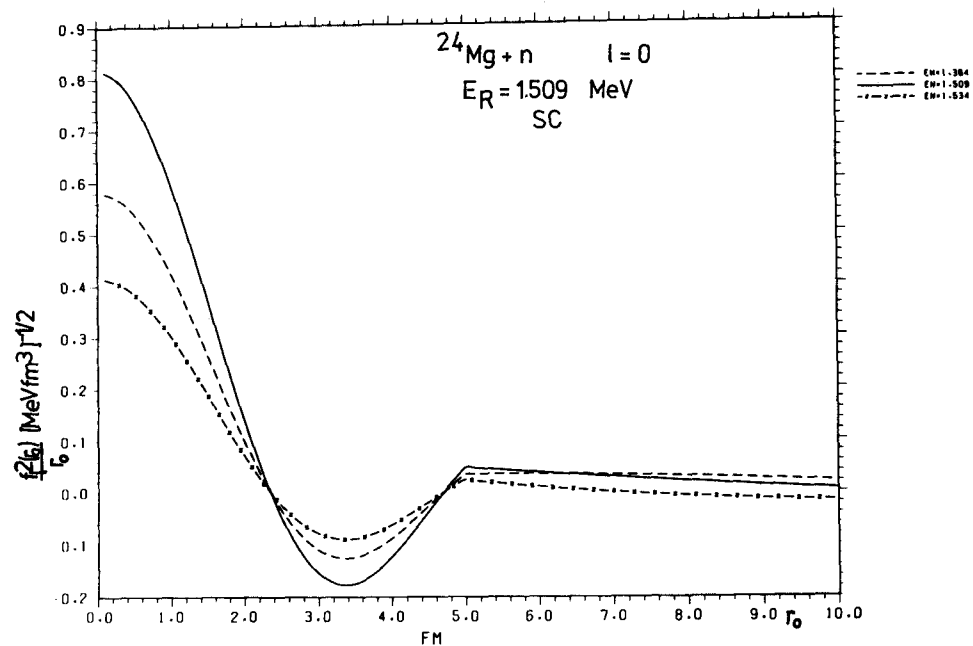


Fig. 7 a

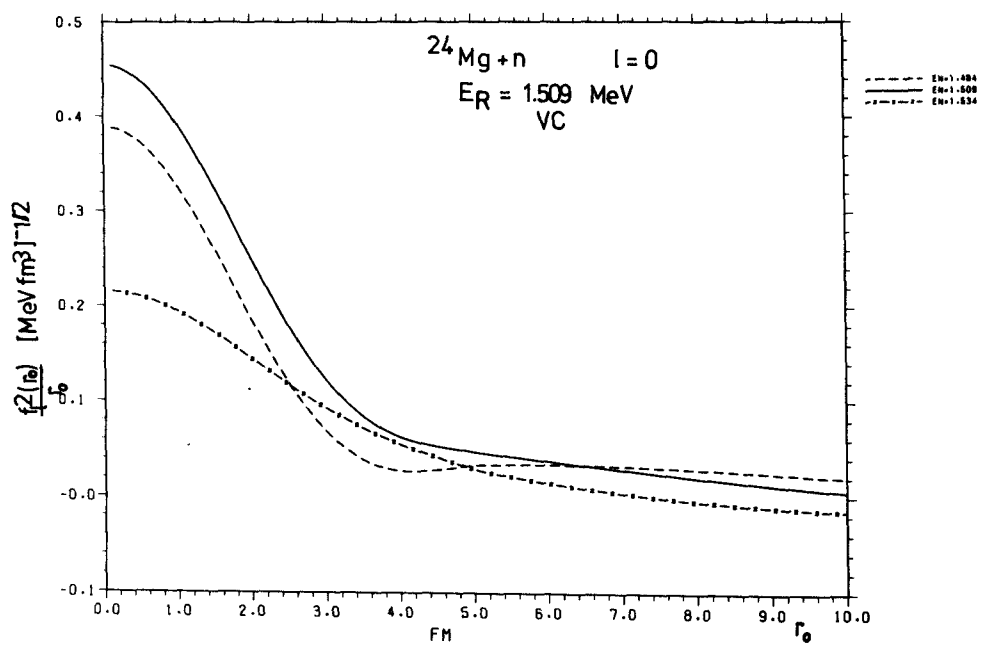


Fig. 7 b

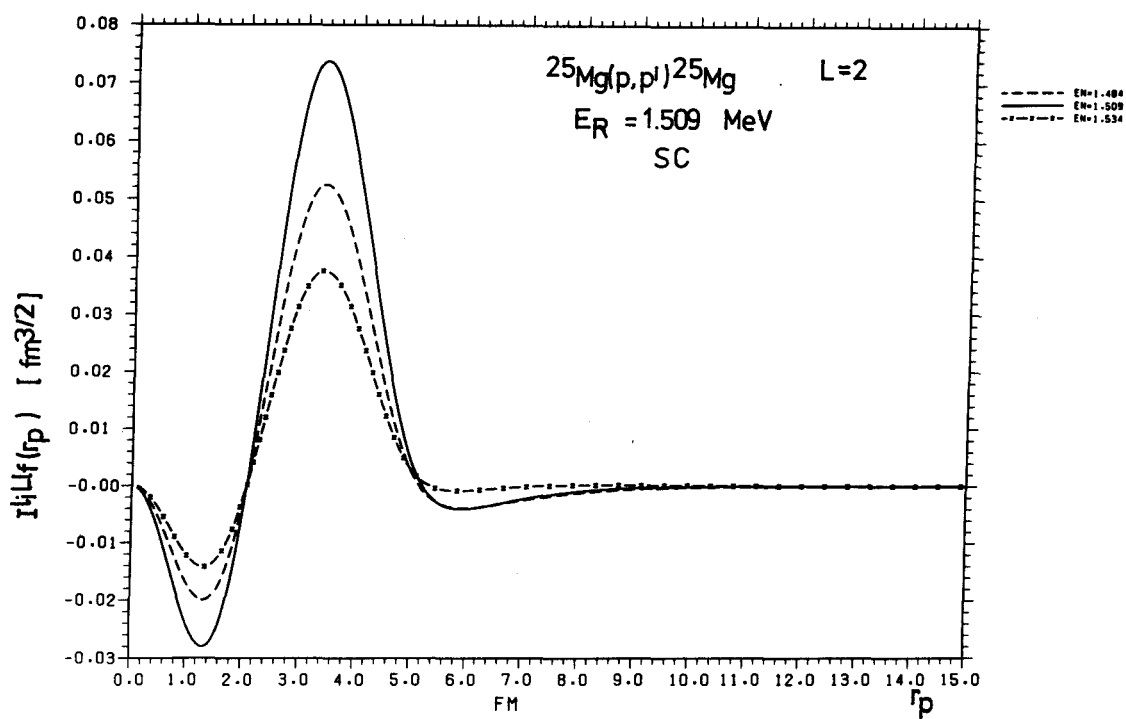


Fig. 8a

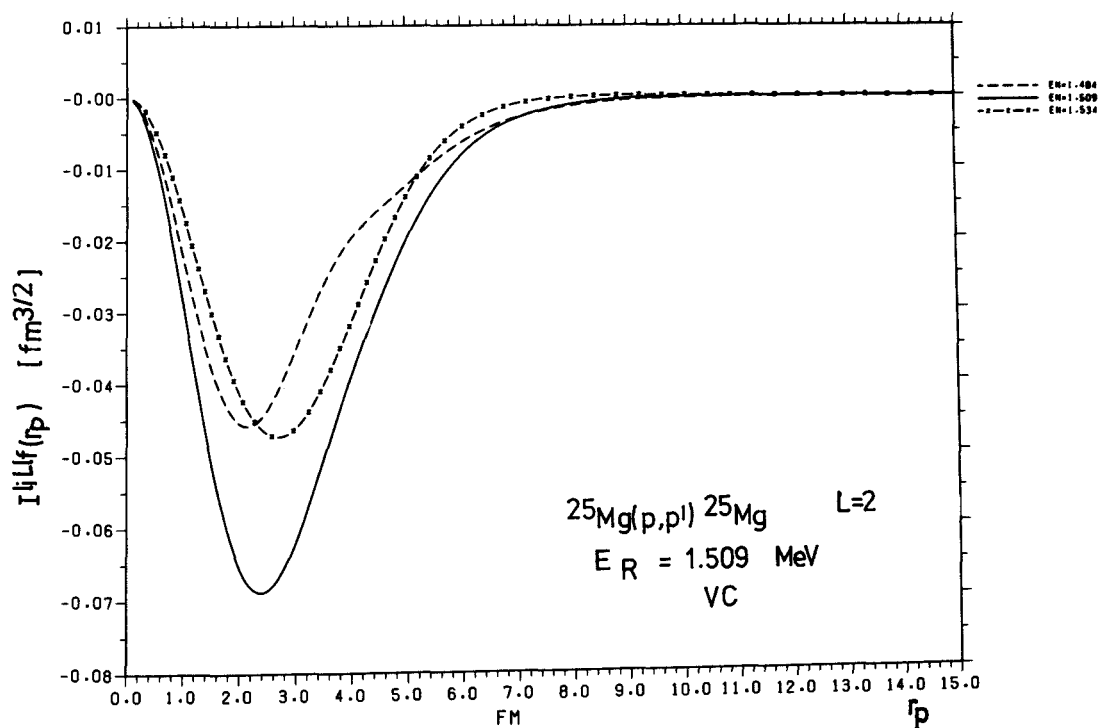


Fig. 8b

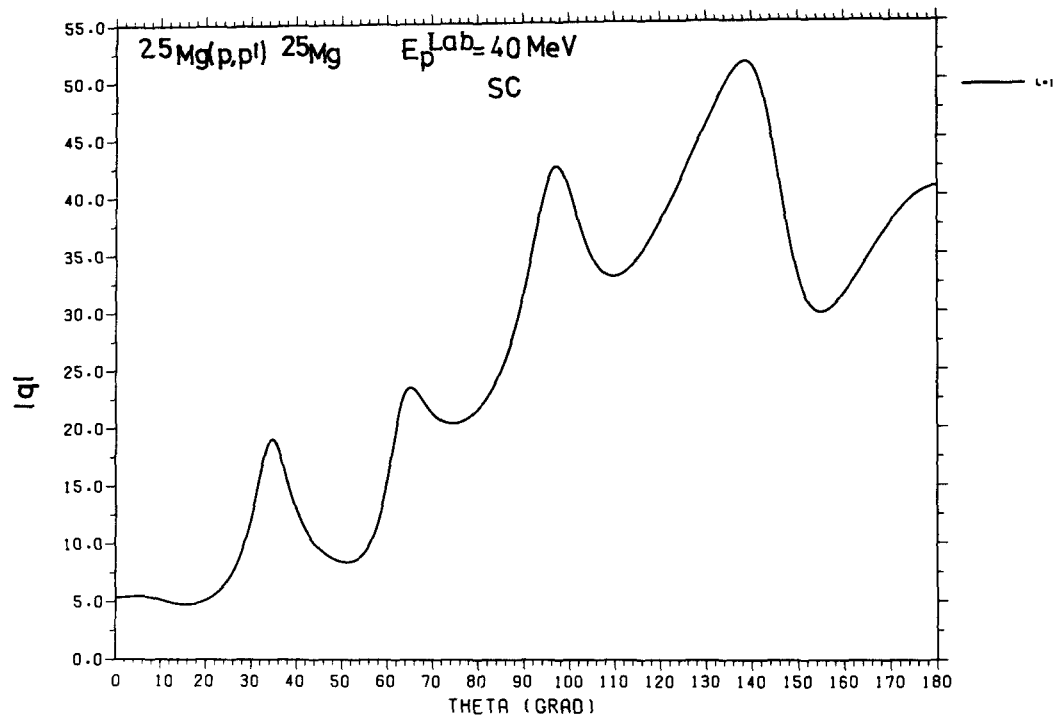


Fig. 9a

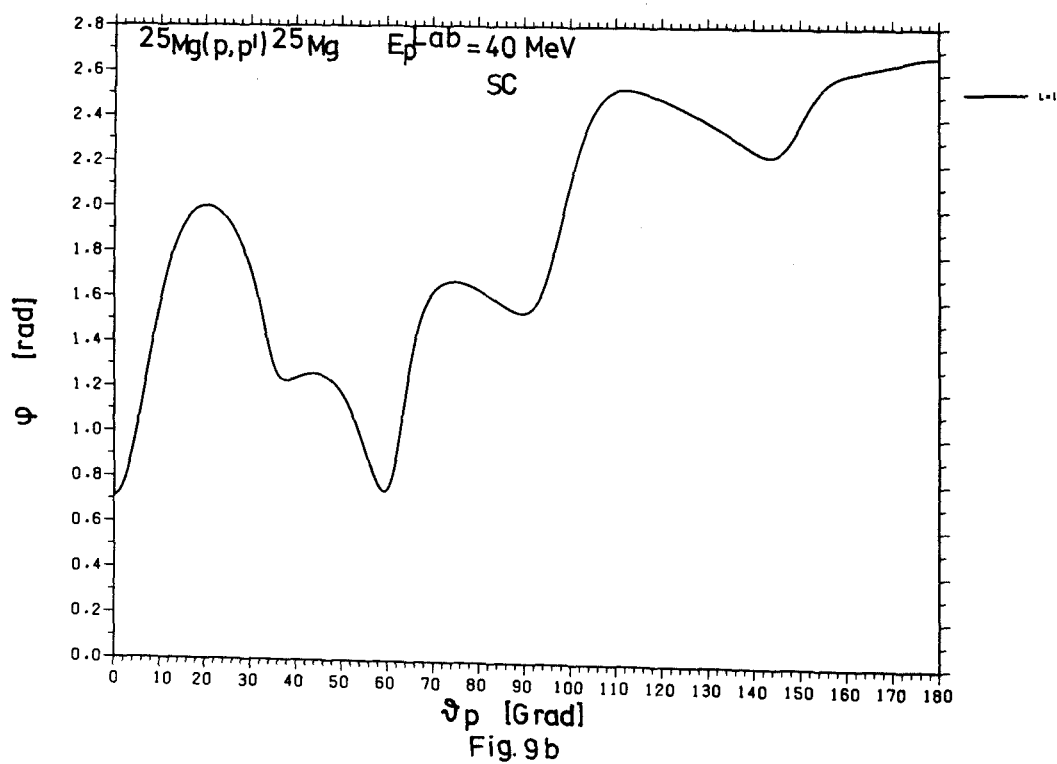


Fig. 9b

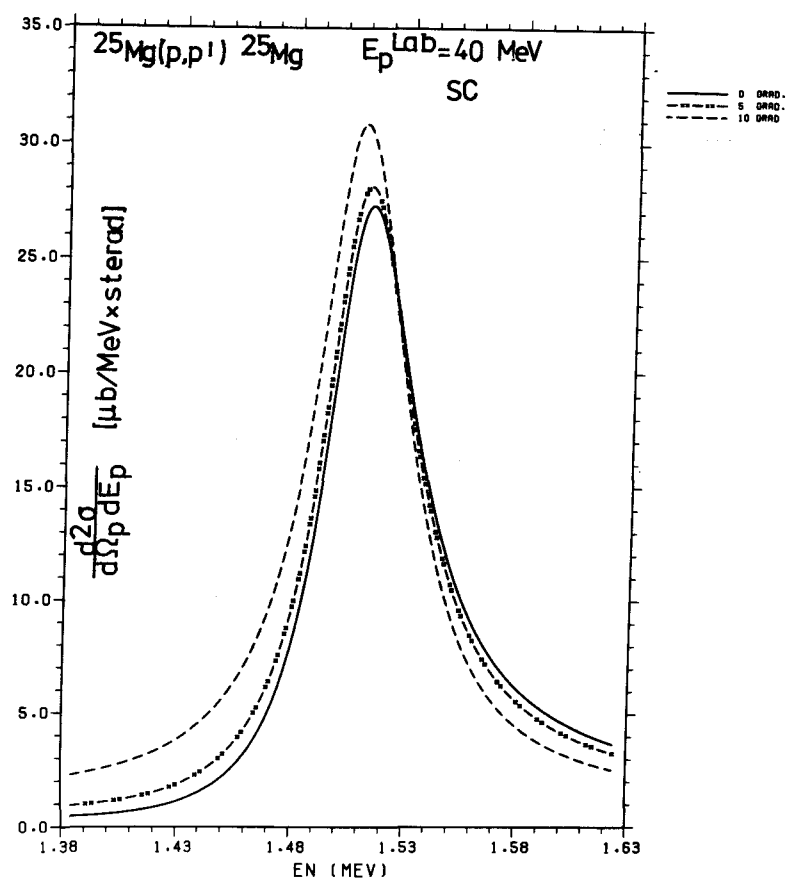


Fig.10 a

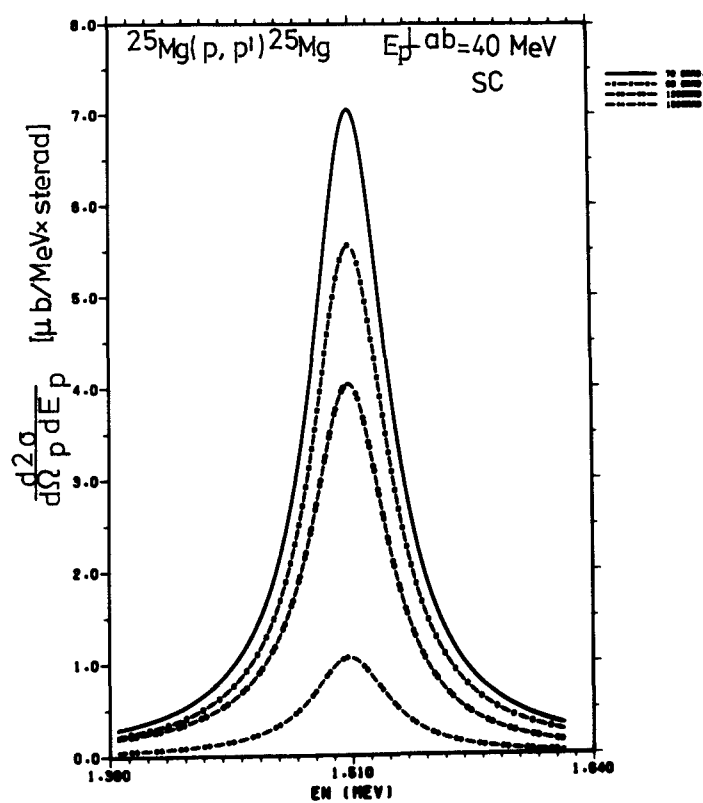


Fig.10 b

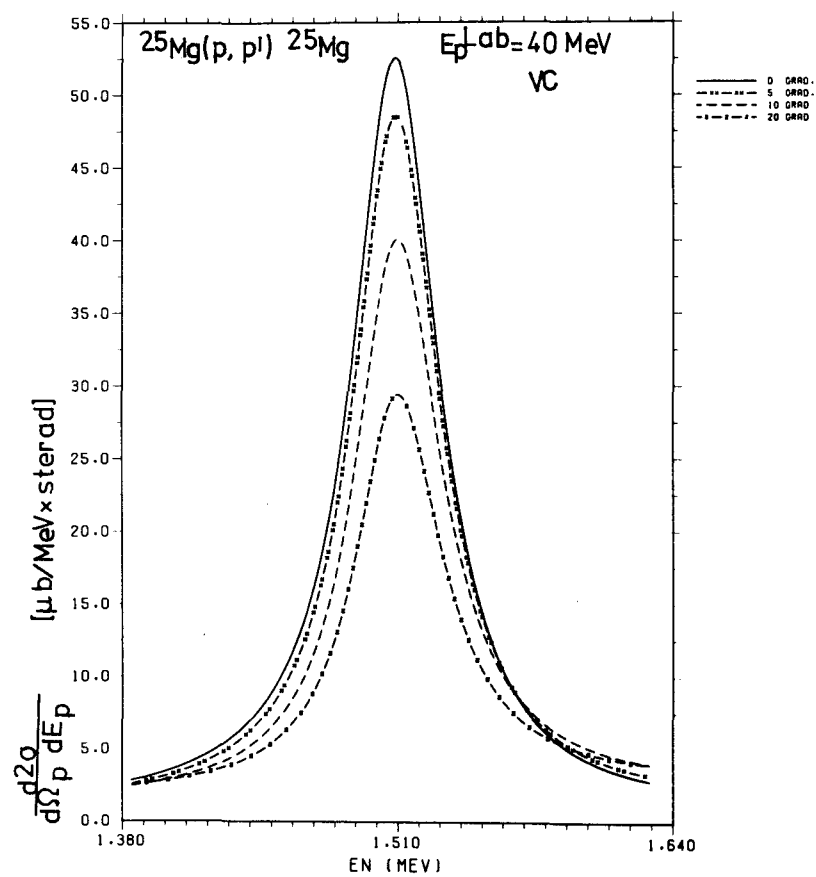


Fig.11a

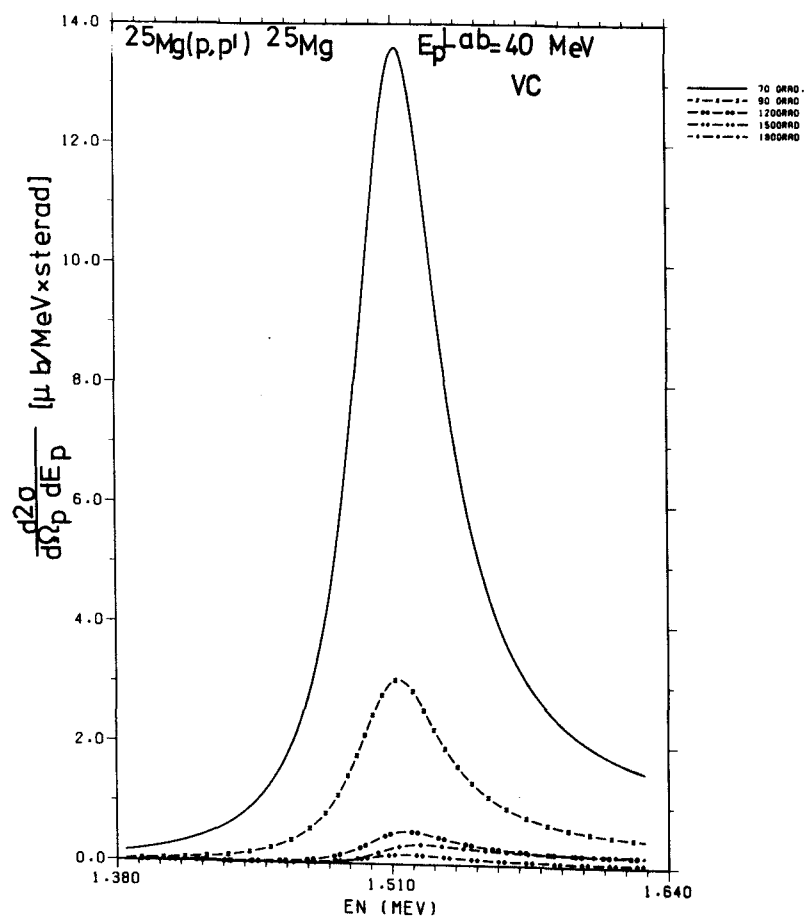


Fig.11b

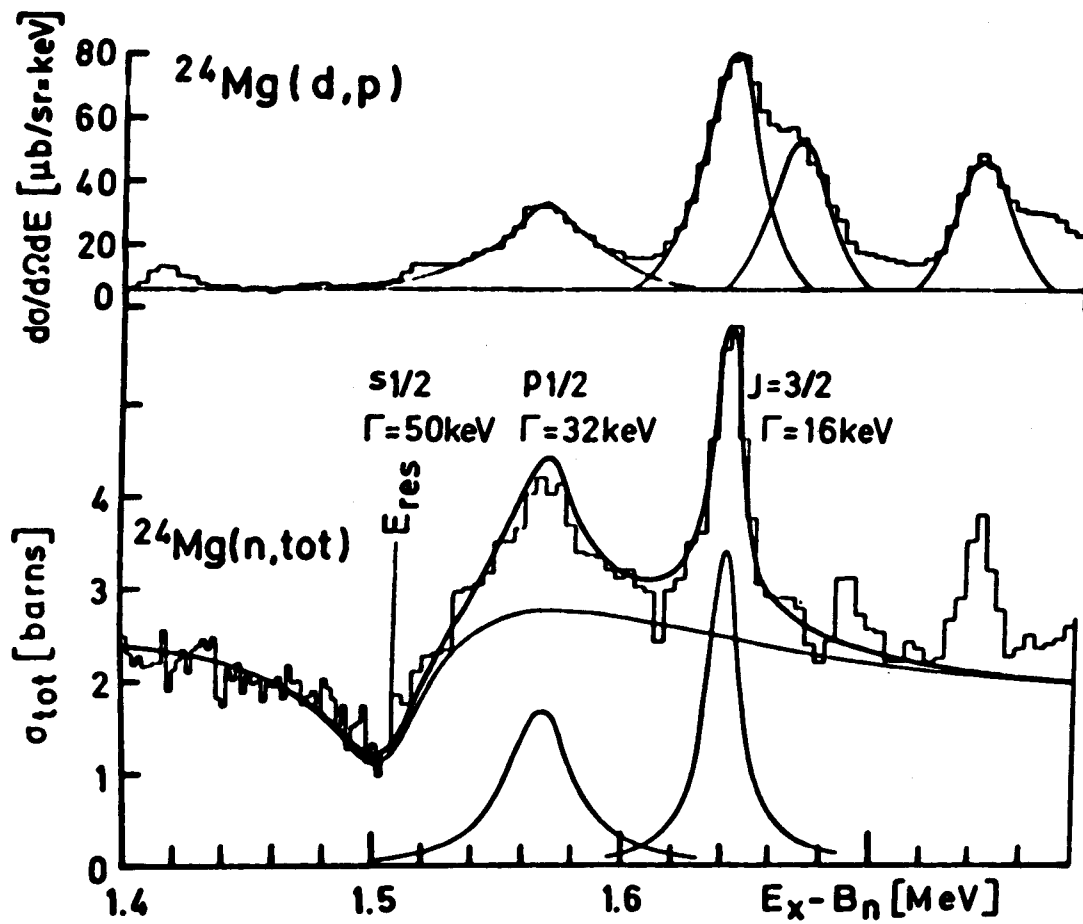


Fig.12a

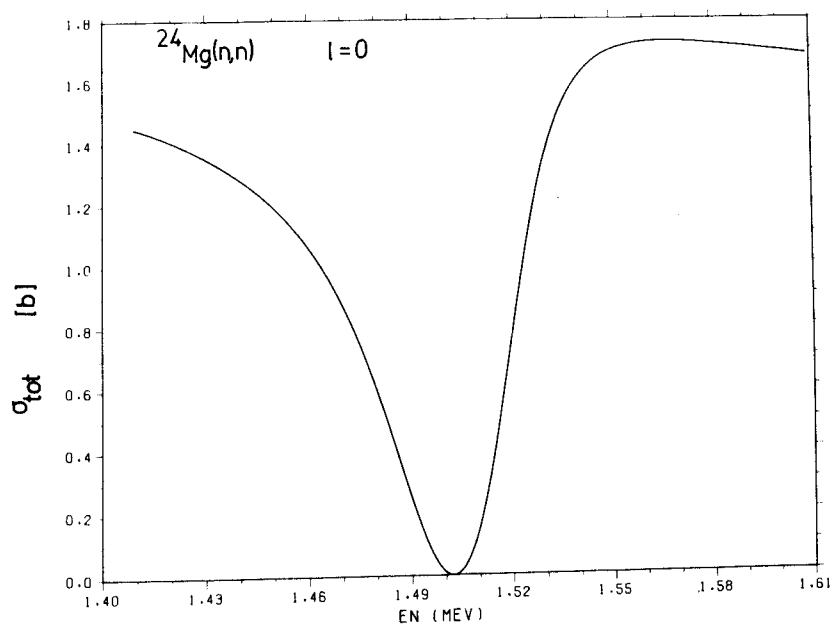


Fig.12 b

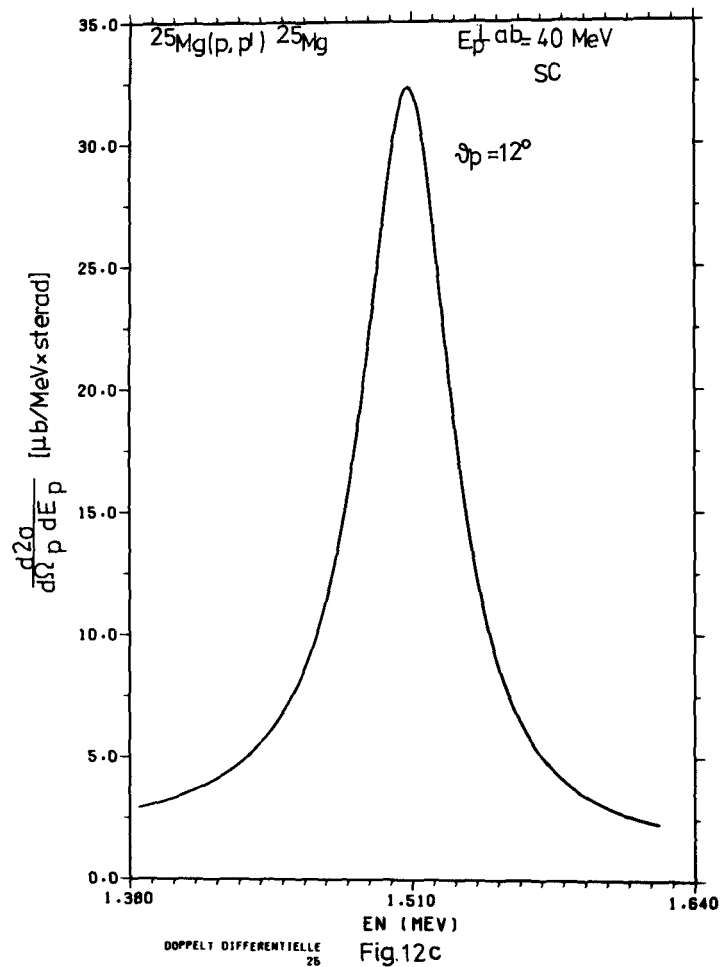


Fig.12c

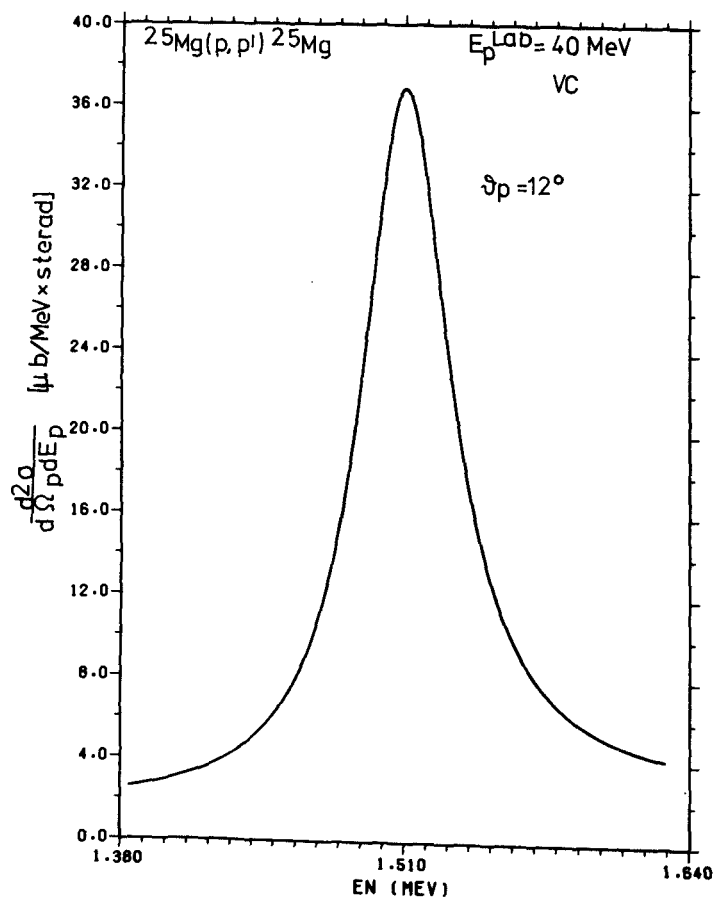


Fig.12d

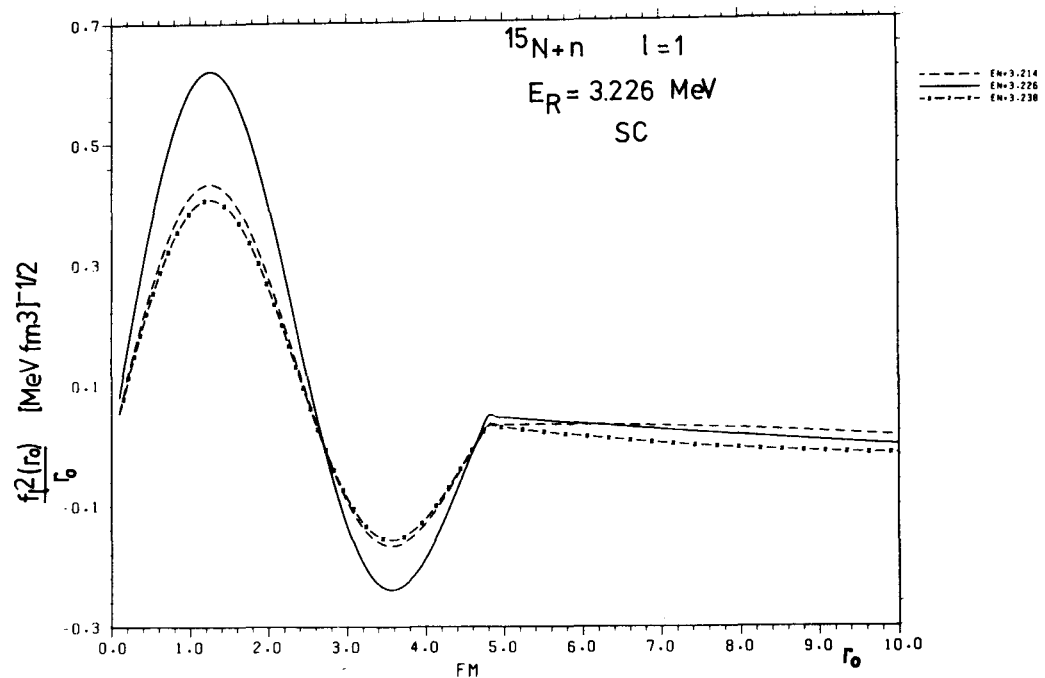


Fig.14 a

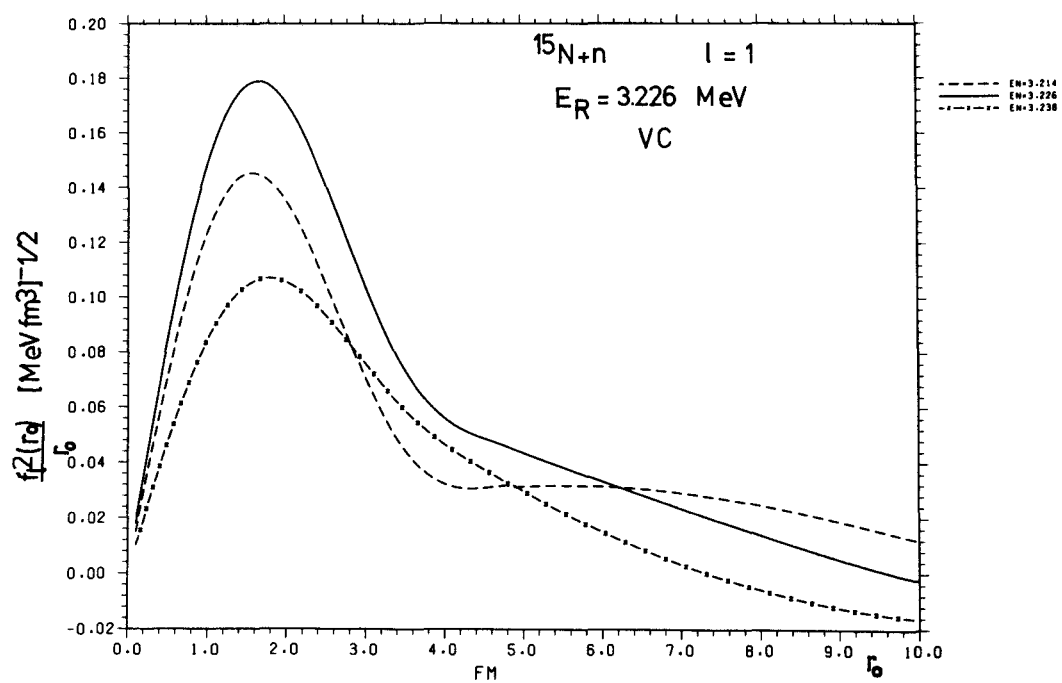
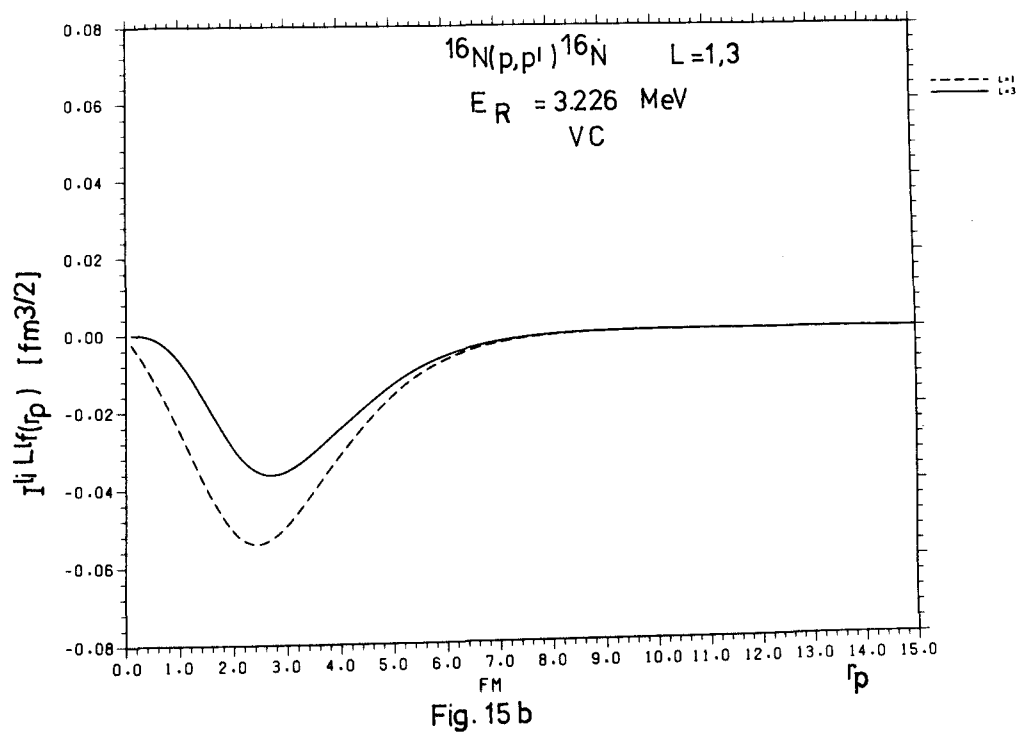
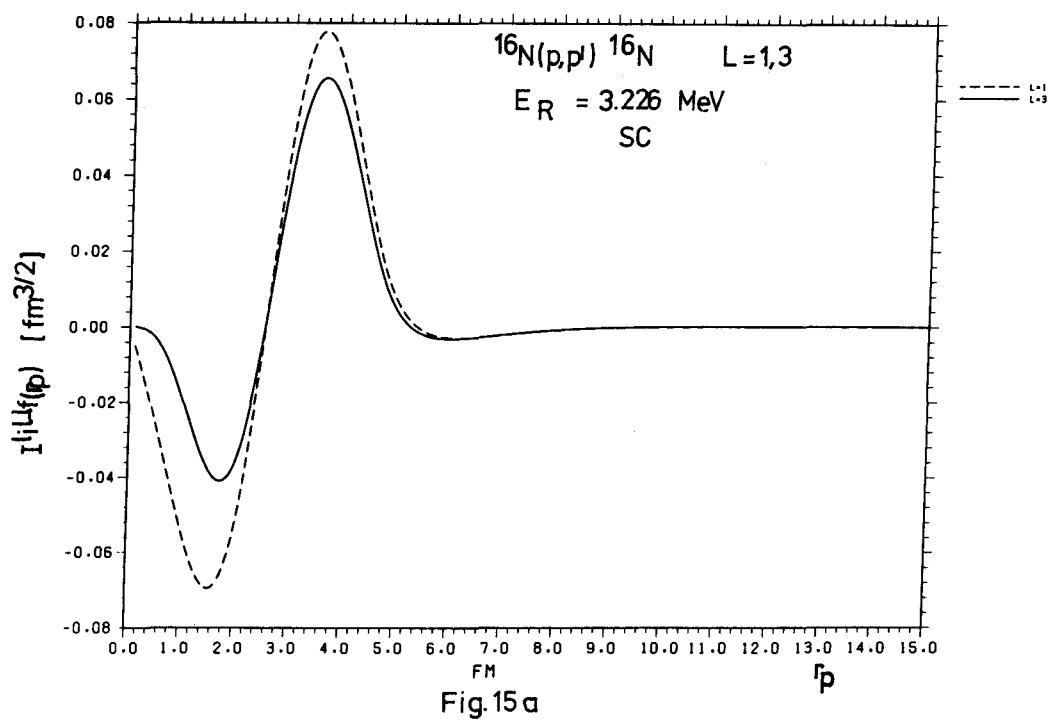


Fig.14 b



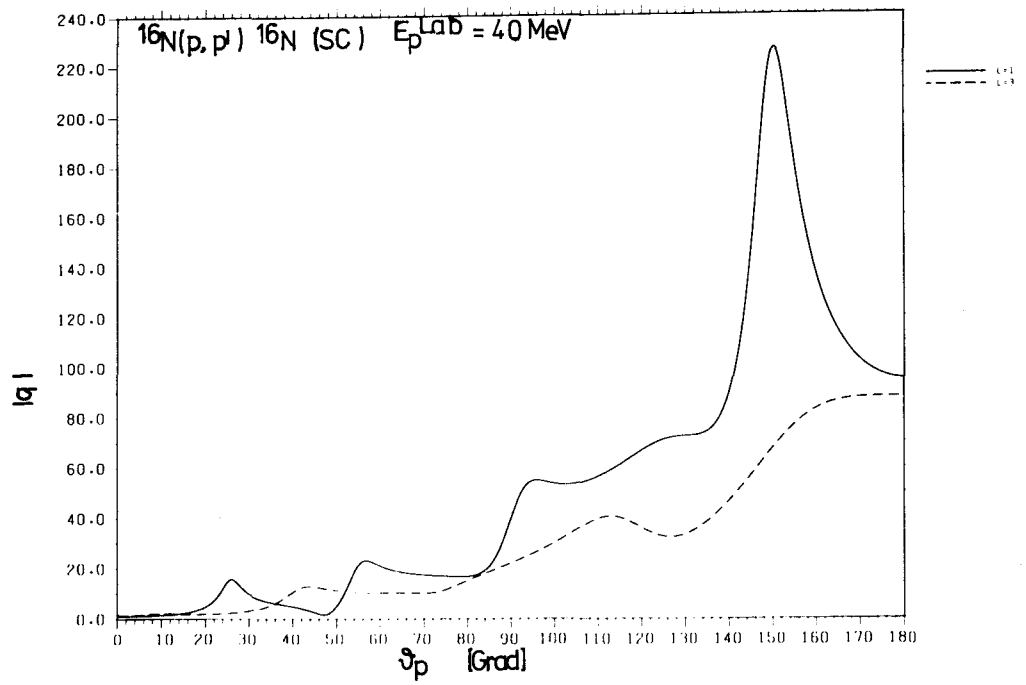


Fig. 16 a

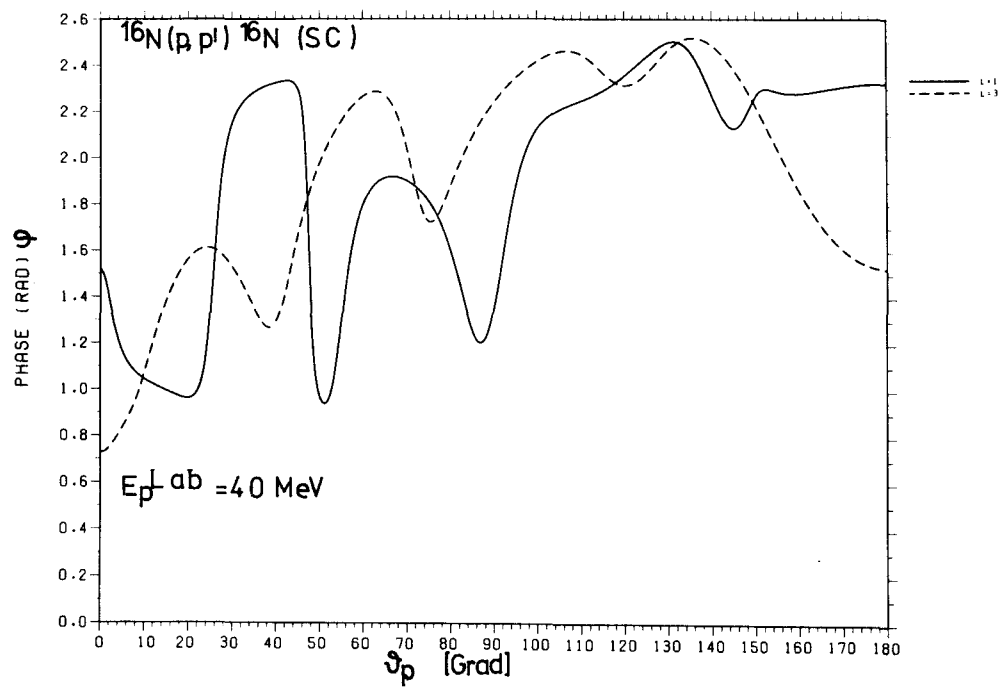


Fig. 16 b

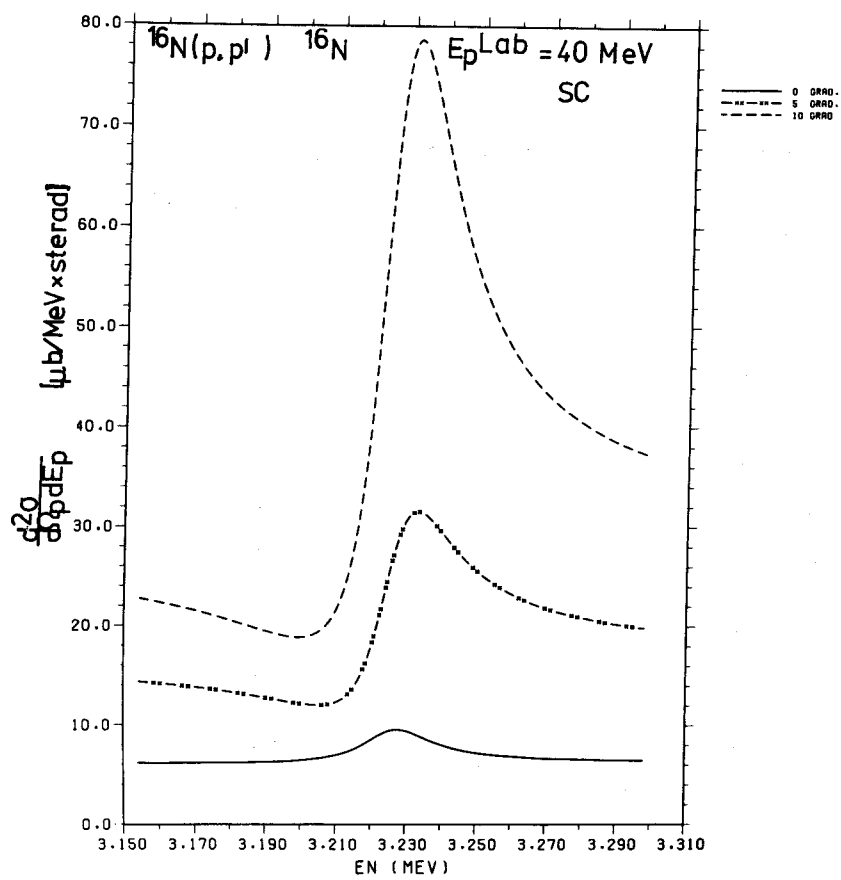


Fig. 17 a

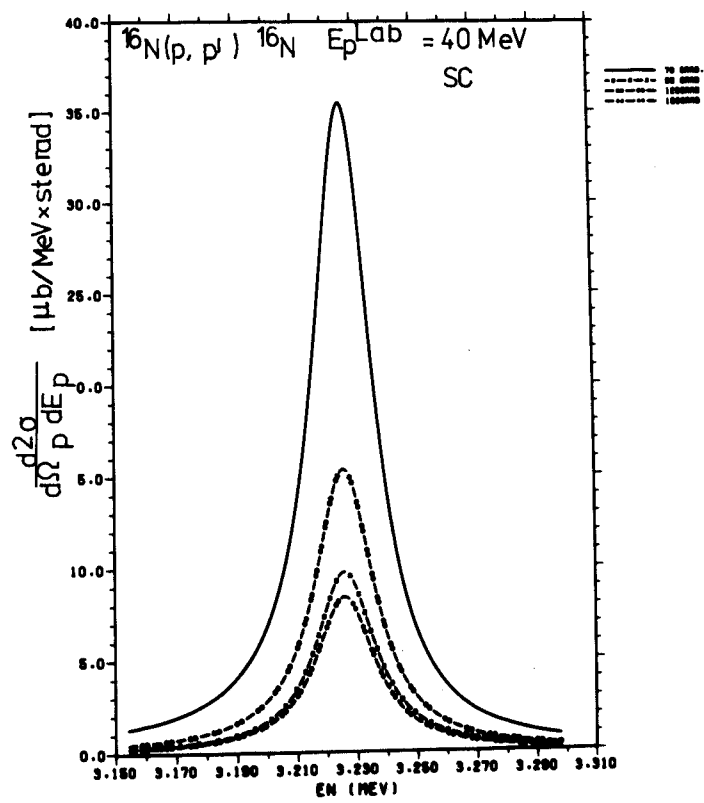


Fig. 17 b

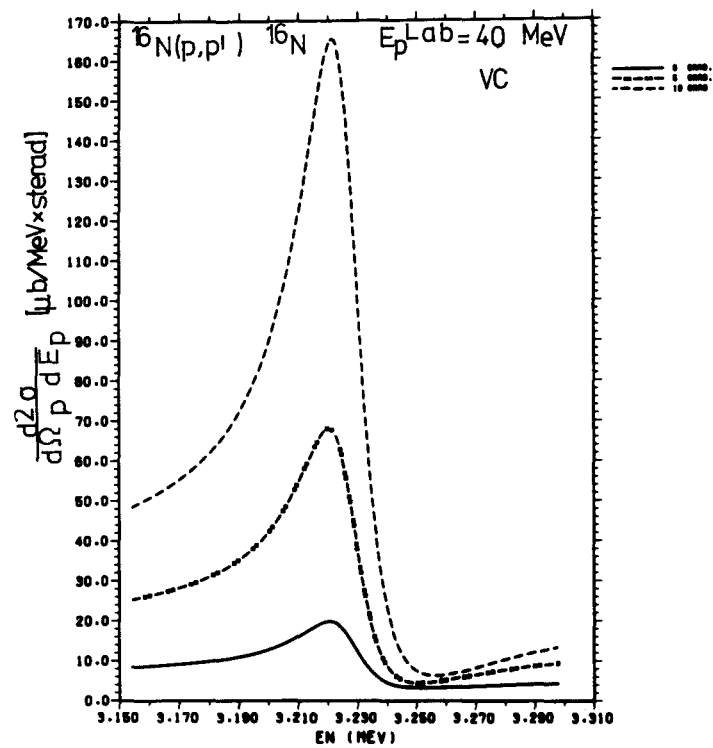


Fig. 18 a

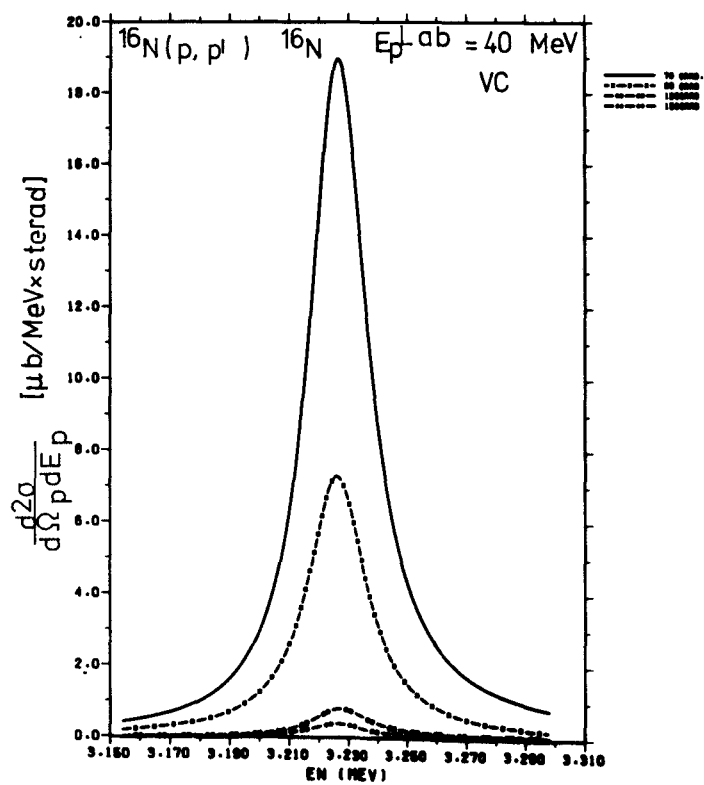


Fig. 18 b

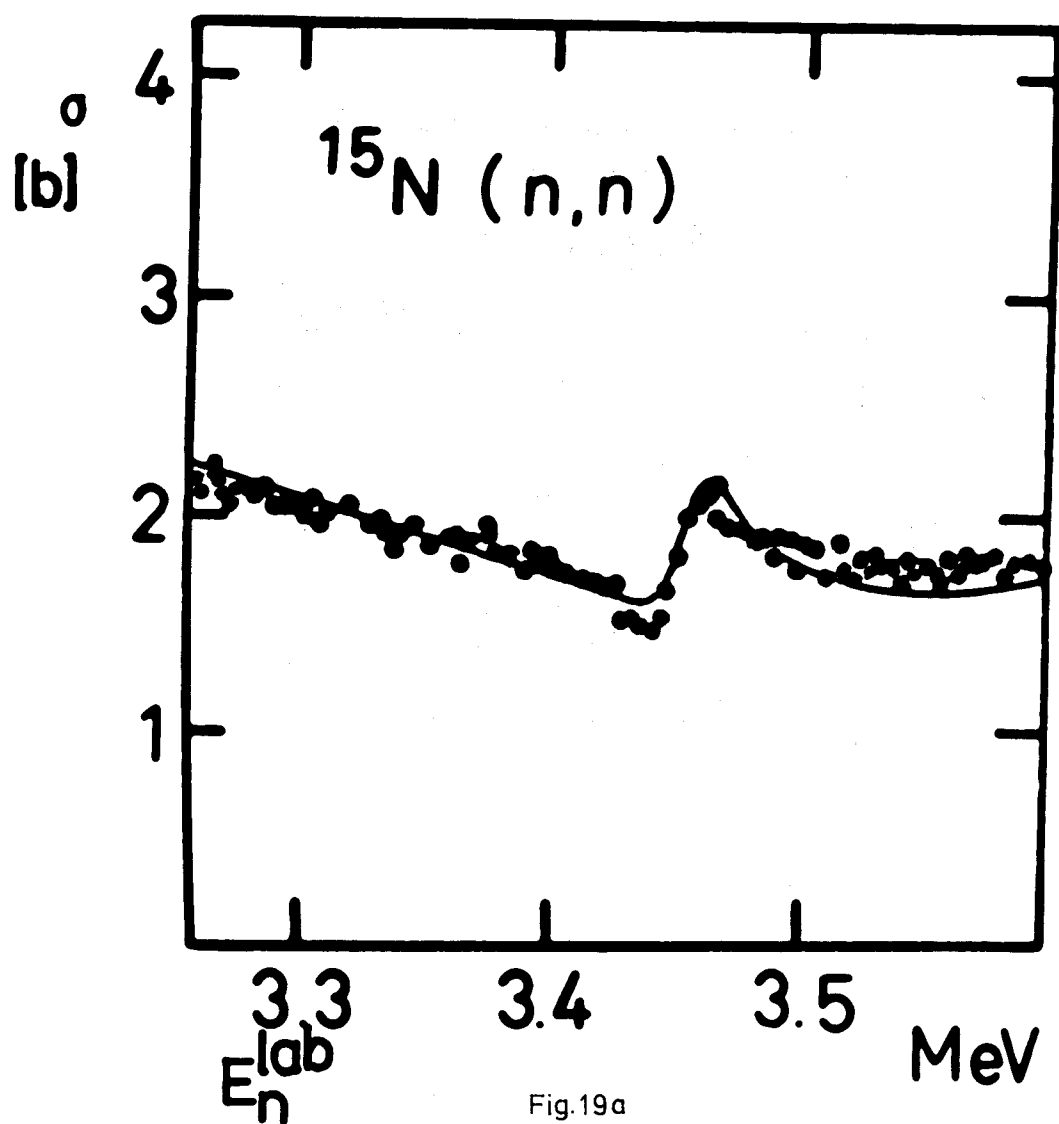


Fig.19a

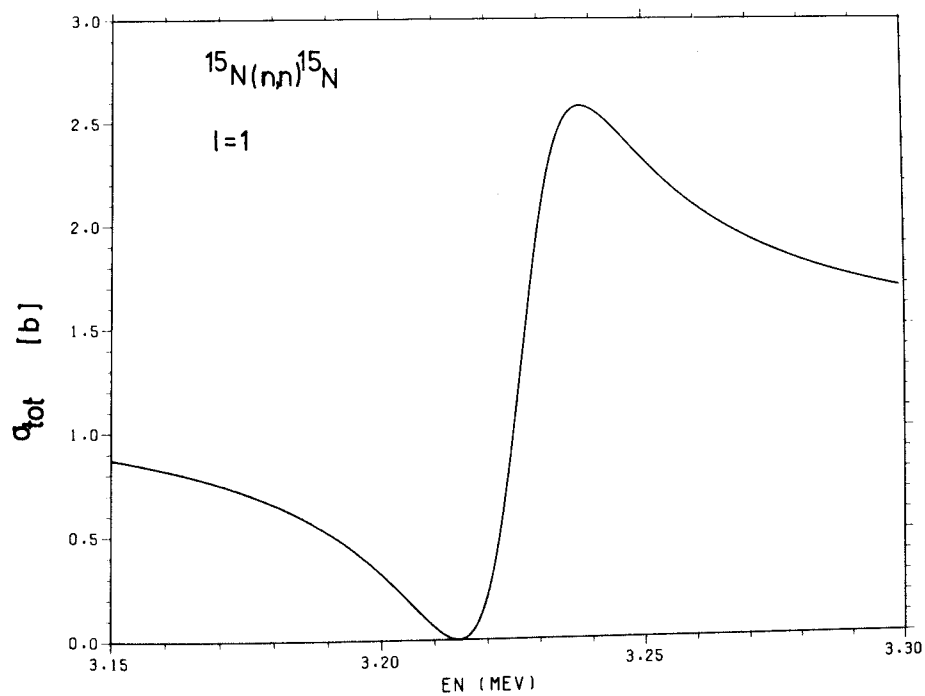


Fig. 19b

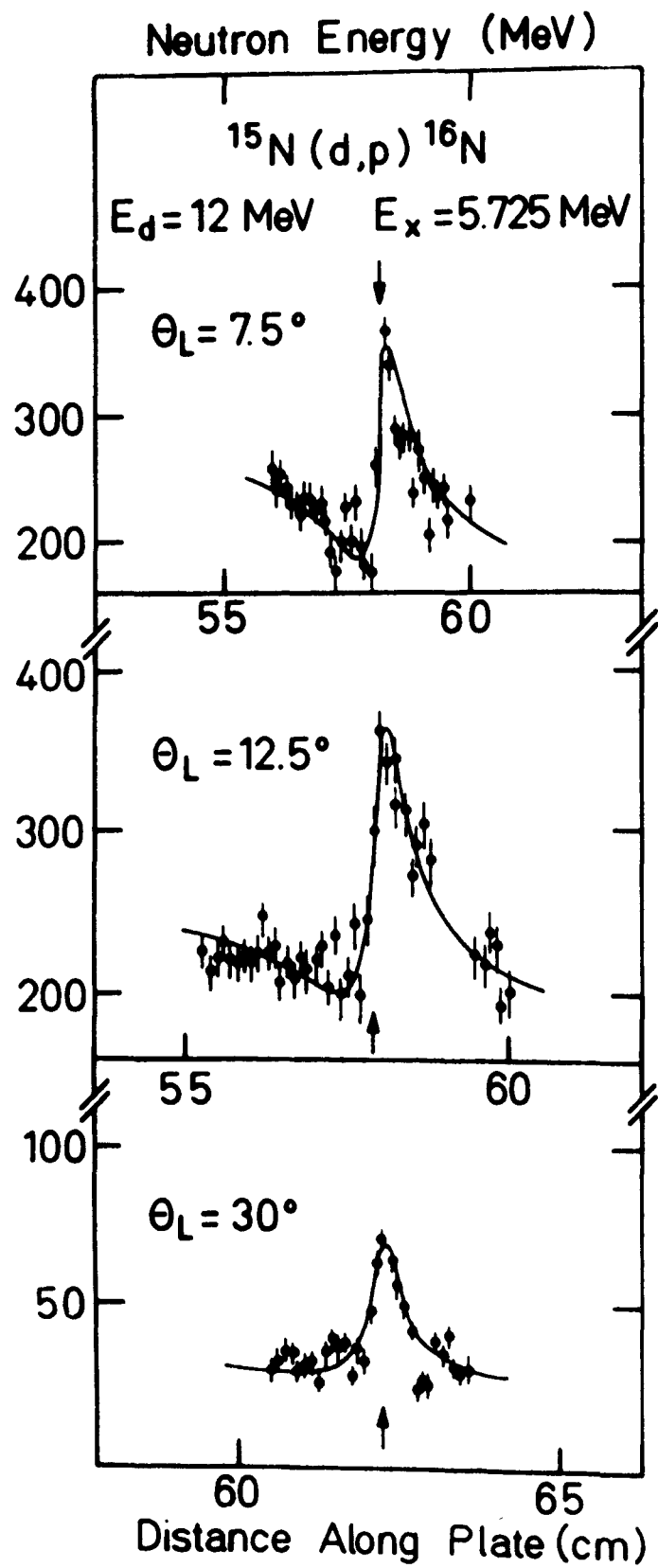


Fig. 19c

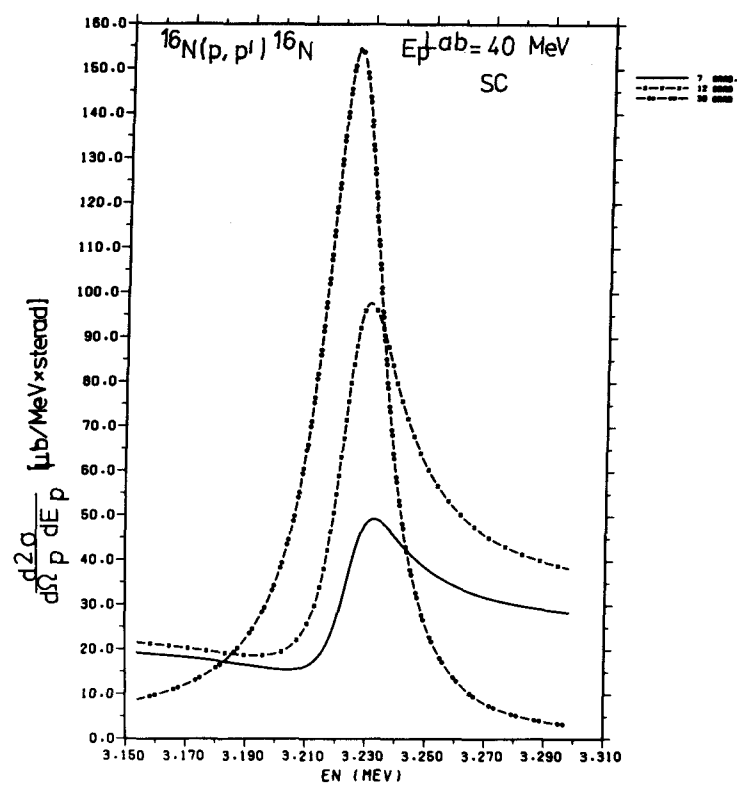


Fig.19d

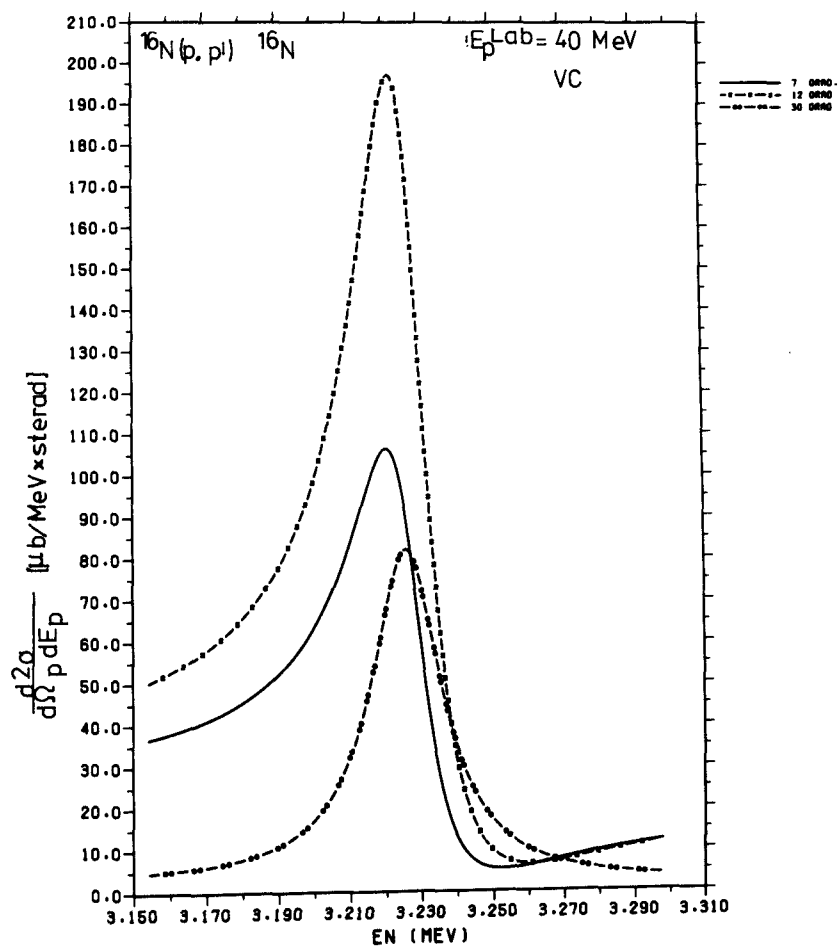


Fig.19e

Die vorliegende Arbeit ist durch Anregung und Förderung von Herrn Prof. Dr. A. Fäßler zustandegekommen. Besonders möchte ich ihm für die hervorragenden Arbeitsmöglichkeiten am Institut für Kernphysik der Kernforschungsanlage Jülich danken.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. G. Baur, mit dem ich viele nützliche Diskussionen geführt habe, die mir die Ausführung der Arbeit wesentlich erleichterten. Die umfangreichen numerischen Rechnungen wurden mir durch die hervorragende Arbeit des Rechenzentrums der Kernforschungsanlage Jülich und durch zahlreiche nützliche Hinweise von Herrn E. Brökel ermöglicht.

Nicht zuletzt gilt mein herzlicher Dank Frau M. Heese und Frau D. Krüger für ihre Geduld und Sorgfalt bei der Reinschrift des Manuskripts.