



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH GmbH

Institut für Reaktorentwicklung

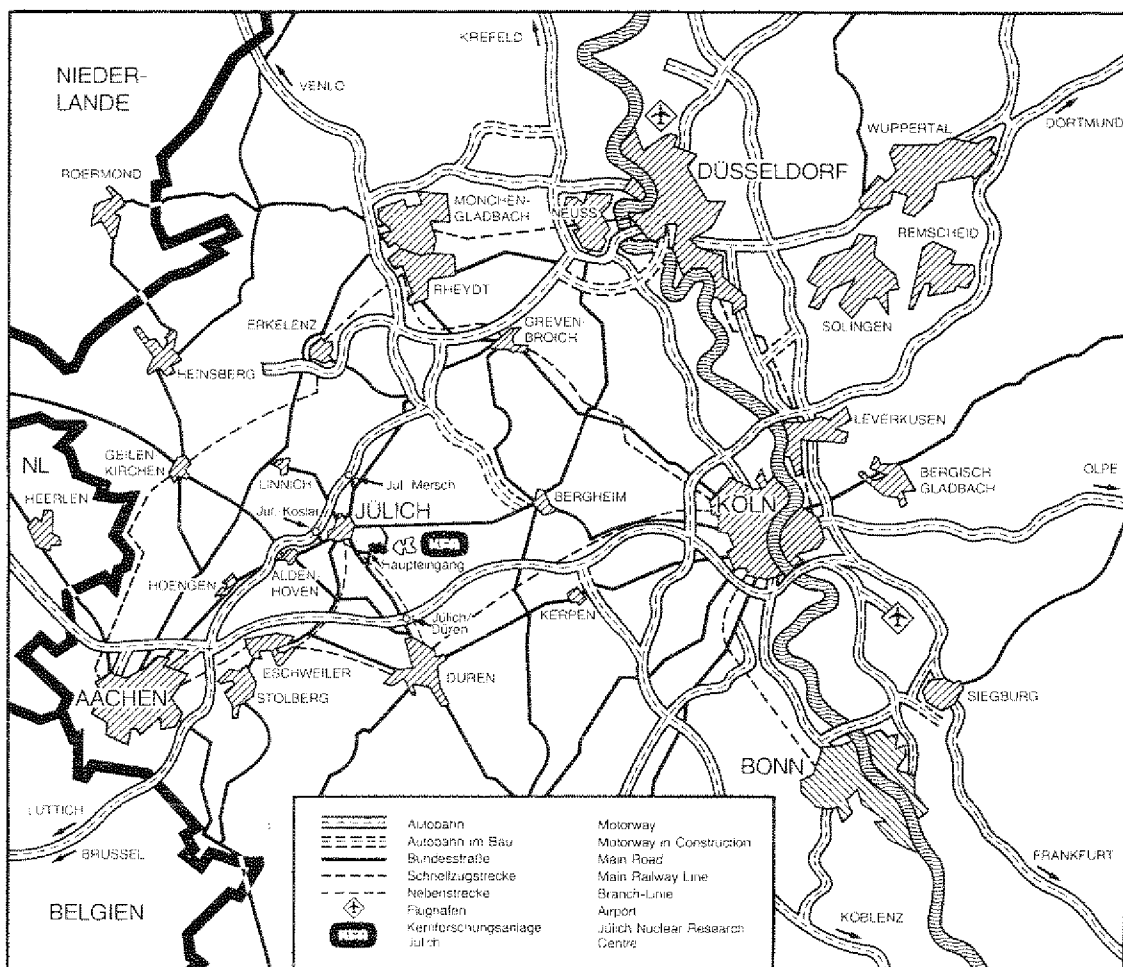
**Spannungsanalyse am kalten
und warmgehenden Schweißlippenprüfstand**

von
D. Buritica

Jül - 1764

Februar 1982

ISSN 0366-0885



Als Manuskript gedruckt

Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 1764

Institut für Reaktorentwicklung Jülich - 1764

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH
Postfach 1913 · D-5170 Jülich (Bundesrepublik Deutschland)
Telefon: 02461/610 · Telex: 833 556 kfa d

Spannungsanalyse am kalten und warmgehenden Schweißlippenprüfstand

von
D. Buritica

D 82 (Diss. T.H. Aachen)

TENSION ANALYSIS FOR THE PRESTRESSED CAST STEEL VESSEL AT ROOM AND HIGH TEMPERATURES

by

Diego Buritica

ABSTRACT

In the present work the elastic and the elastic-plastic behaviour of a new, built-up of cast-steel blocks, radially and axially prestressed pressure vessel is investigated. It was shown that the numerical calculation of the tensions in spite of the considerably simplified model agree in a satisfying way with the tensions measured at the vessel. Bigger deviations at the vessel ends can be explained easily theoretically by the axial-symmetrical tensions of the welded margin not seized by the computer model.

In the second part of this work the elastic-plastic behaviour of the prestressed cast steel vessel at high temperatures and in the elastic loaded way was investigated. The result was, that at a temperature of 400°C between inner and outer vessel wall, $T_{\text{out}} = 50^{\circ}\text{C}$, the material begins to flow, if at the same time an additional heat source by gamma-flux exists. If there is no additional heat source by gamma-flux, the flowing starts at a little higher temperature difference. It results too, that the plastic area extends to the middle under increasing load.

SPANNUNGSANALYSE AM KALTEN UND WARMGEHENDEN
SCHWEISSLIPPENPRÜFSTAND

von

Diego Buritica

KURZFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit wurden das elastische und das elastisch-plastische Verhalten eines neuartigen, aus Stahlgußblöcken aufgebauten, radial und axial vorgespannten Druckbehälters untersucht. Dabei zeigte sich, daß die numerische Berechnung der Spannungen trotz des stark vereinfachten Modells mit den am Behälter gemessenen Spannungen in befriedigender Weise übereinstimmen. Größere Abweichungen an den Behälterenden erklären sich theoretisch zwanglos aus den vom axial-symmetrischen Rechenmodell nicht erfaßten Randbiegespannungen.

Im zweiten Teil der Arbeit wurde das elastisch-plastische Verhalten des warmgehenden und sonst wie im elastischen Fall belasteten Behälters untersucht. Es ergab sich, daß bei einer Temperatur von 400°C zwischen Behälterinnenwand und Behälteraußenwand, $T_{\text{außen}} = 50^{\circ}\text{C}$ gesetzt, das Material zu fließen beginnt, wenn gleichzeitig eine zusätzliche Wärmequelle durch Gamma-Fluß vorhanden ist. Ist keine zusätzliche Wärmequelle durch Gamma-Fluß vorhanden, setzt das Fließen bei etwas höherer Temperaturdifferenz ein. Es ergab sich auch, daß sich die plastische Zone von den Schweißlippen zur Mitte hin bei steigender Belastung ausbreitet.

VORWORT

Die vorliegende Arbeit entstand während meines Aufenthaltes im Institut für Reaktorentwicklung (IRE) der Kernforschungsanlage- Jülich mit der Unterstützung eines Stipendiums vom Deutschen Akademischen Austauschdienst (DAAD).

Herrn Prof. Dr. rer. nat. R. Schulten danke ich für die Stellung des Themas sowie für die Bereitstellung sämtlicher im IRE vorhandenen Hilfsmittel, die ich für meine Arbeit benötigte.

Besonders bedanke ich mich bei Herrn Dr. Hardtke für seine Betreuung, Förderung und für seine wertvollen Orientierungshilfen.

Weiterhin spreche ich Herrn Dr. rer. nat. L. Wolf meinen Dank aus für seinen Persönlichen Einsatz bei allen organisatorischen Problemen.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
EINLEITUNG	1
KAPITEL I	
1. Aufgaben und Grundbegriffe der Elastizitätstheorie und Festigkeitslehre	2
2. Die Methode der finiten Elemente	8
3. Das Rechenmodell	13
4. Die Unterstrukturtechnik	17
KAPITEL II	
1. Spannungszustand am kalten VSGB	19
2. Der reduzierte E-Modul	22
3. Die analytische Lösung für das homogenisierte Ringmodell	28
4. Vergleich mit den Messungen	35
5. Spannungen an Boden- und Deckenplatte	40
KAPITEL III	
1. Grundgleichungen	50
2. Finite Elemente Methode zur Lösung der Poissonschen Gleichung	51
3. Analytische Kontrollrechnung	53
4. Die Wärmequelle infolge Gammastrahlung	55
5. Temperaturverlauf und Wärmespannungen mit FEM	57
6. Elastische Grenze in Abhängigkeit der Temperatur	57
KAPITEL IV	
1. Das plastische Verhalten	63
2. Lösungsverfahren für die numerische Rechnung	66
3. Ausbreiten der plastischen Zone	68
ANHANG I	
ANHANG II	
LITERATURVERZEICHNIS	

EINLEITUNG

In der vorgelegten Arbeit wird ein unkonventionelles Druckbehälterkonzept auf sein Spannungs-Dehnungsverhalten untersucht. Der Druckbehälter ist aus Stahlgußblöcken aufgebaut und wird durch Spannkabel in axialer und radialer Richtung vorgespannt, siehe Anhang I. Die Druckvorspannung des Behälters sorgt dafür, daß die Behälterwand bei Vollast nahezu zugspannungsfrei ist. Infolge des hohen Arbeitsvermögens des Spannkabelstahls und der hohen Redundanz der Vorspannelemente sind Überdrücke ohne schwerwiegendes Versagen des Behälters möglich, weil die hohe Druckvorspannung Rißfortpflanzung verhindert. Da außerdem die Abdichtung des Behälters dadurch von außen erfolgt, daß die Stoßfugen der einzelnen Stahlblöcke verschweißt werden, kann der Behälter auch nicht bersten, sondern bläst über die Schweißfugen ab, falls der Innendruck zu groß werden sollte. Die Schweißfugen wirken also nicht nur als Dichtungen sondern übernehmen auch noch die Funktion von Sicherheitsventilen. Der Behälter bietet auf diese Weise ungewöhnlich gute Überwachungsmöglichkeiten während des Betriebes. Für weitere Einzelheiten zu diesem Behälterkonzept wird auf die Literaturangaben am Schluß der Arbeit verwiesen. Das Modell des vorstehend in groben Zügen beschriebenen Druckbehälters, das dieser Arbeit zugrunde liegt, wird mit Hilfe der Annahmen der linearen Elastizitätstheorie auf sein Spannungs-Dehnungsverhalten untersucht, /1/, /2/, /3/, /4/.

KAPITEL I

1. Aufgaben und Grundbegriffe der Elastizitätstheorie und Festigkeitslehre.

Aufgabe der Elastizitätstheorie ist es, bei vorgegebener Belastung für einen Körper gegebener Gestalt die Deformation zu berechnen. Die Aufgabe ist gelöst, wenn es gelingt, den Verschiebungsvektor $\vec{u}(\vec{r}) = \{u(\vec{r}), v(\vec{r}), w(\vec{r})\}$ als Funktion des Ortes für jeden Punkt des betrachteten Körpers anzugeben. Da keine dynamischen Probleme behandelt werden sollen, wird vorausgesetzt, daß die Last quasistatisch aufgebracht wird, so daß keine ins Gewicht fallenden Unterschiede zwischen äußeren und inneren, durch Aufbringen der Last im Körper entstehenden Kräften aufkommen, die Anlaß zu mehr oder weniger gedämpften Schwingungen geben könnten. Durch die Belastung erfährt jeder einzelne Körperpunkt $\vec{r}_0$ die Transformation $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}(\vec{r})$. In Koordinatenschreibweise:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + u(\vec{r}) \\ y &= y_0 + v(\vec{r}) \\ z &= z_0 + w(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1-1)$$

Die Beschreibung der Deformation eines Körpers kann sowohl nach der Lagrangeschen als auch nach der Eulerschen Methode erfolgen. Die Lagrangesche Betrachtungsweise benutzt als unabhängige Variable die Koordinaten $\vec{\eta}$ von Masseteilchen und setzt $\vec{\eta} = \vec{x}(t_0)$. $\vec{x}(t_0)$ ist dabei der räumliche Koordinatenvektor des betrachteten Masseteilchen zur Zeit $t = t_0$. $\vec{\eta} = \vec{x}(t_0)$ hängt also nicht von der Zeit ab. Die Abfolge der Raumpunkte, die das betrachtete Masseteilchen mit der Zeit durchläuft, wird beschrieben durch den Ortsvektor

$$\vec{x} = (\vec{\eta}, t)$$

Das hat zur Folge, daß für alle mit einem realen Werkstoff

verknüpften Eigenschaften in der Lagrangeschen Betrachtungsweise die substantielle Ableitung gleich der lokalen ist:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$$

In der Eulerschen Betrachtungsweise werden als unabhängige Variable die Koordinaten von Raumpunkten genommen, die mit beginnender Deformation ihre Lage ebenfalls verändern. Man setzt daher in der eulerschen Betrachtungsweise an: $\vec{\eta} = (\vec{x}(t), t)$. Dieser Ansatz hat zur Folge, daß in der eulerschen Betrachtungsweise die substantielle Änderung einer Werkstoffeigenschaft gleich der Summe aus der lokalen und der konvektiven Änderung ist:

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} = \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \vec{x}} \vec{x} + \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial t}$$

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Lagrangesche Methode eine Beschreibung des elastischen Verhaltens des Körpers mit Hilfe der Koordinaten des unverformten Zustandes und daß die Eulersche Methode eine Beschreibung des elastischen Verhaltens des Körpers mit Hilfe des verformten Zustandes ist. Unter den Voraussetzungen der linearen Elastizitätstheorie, kleine Verschiebungen und kleine Verschiebungsgradienten, ist es nicht erforderlich, zwischen den Eulerschen und der Lagrangeschen Beschreibungsweise zu unterscheiden.

Vorzugsweise wird in der Elastizitätstheorie aber nicht mit Verschiebungen sondern mit Dehnungen gerechnet. Die Dehnungen auch Verzerrungen genannt, sind als relativen Längenänderungen dimensionslos und definiert als die partiellen Ableitungen der Verschiebungen nach den Koordinaten:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1-2)$$

Die Dehnungen allein reichen aber noch nicht aus, um den Verzerrungszustand eines Körpers zu beschreiben sondern sind noch durch die Gleitungen zu ergänzen. Während die Verzerrungen

Längenverformungen beschreiben, beschreiben die Gleitungen Winkelverformungen und sind definiert vermöge der Beziehungen

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

(1-3)

Zwischen den möglichen Gleitungen $\gamma_{xy}, \gamma_{yx}, \gamma_{yz}, \gamma_{zy}, \gamma_{xz}, \gamma_{zx}$ besteht die Beziehung

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \quad , \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \quad , \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}$$

(1-4)

Besonders augenfällig wird diese Symetrie, wenn man zur tensoriellen Schreibweise übergeht, die in dieser Arbeit nicht benutzt werden soll. Die Elastizitätstheorie ergänzend ist es Aufgabe der Festigkeitslehre, die inneren Spannungen zu errechnen, die unvermeidlich in einem festen Körper entstehen, der Druck- oder Zugbeanspruchung unterliegt. Erst wenn sowohl die Verzerrungen als auch die Spannungen bekannt sind, ist der Deformationszustand eines Körpers als bekannt anzusehen. Dieser Aussage entsprechend sind Elastizitätstheorie und Festigkeitslehre untrennbar. Grundlegend für alle Spannungsberechnungen ist das Schnittprinzip von Leonhard Euler (1707-1783). Es besagt, daß allen an der Oberfläche eines Körpers angreifenden Kräften durch im Inneren des Körpers auftretende Kräfte das Gleichgewicht erhalten wird. Das bedeutet aber, daß sich die Oberflächenkräfte ins Innere des Körpers fortplanzen. Schneidet man ein Volumenelement aus dem Körper heraus, müssen also alle an dem Volumenelement angreifenden Oberflächenkräfte im Gleichgewicht stehen. Es muß also gelten

$$\int_S \vec{t} \, ds = 0$$

(1-5)

Sind Volumenkräfte vorhanden, gilt nach derselben Überlegung

$$\int_S \vec{t} \, ds + \int_V \vec{k} \, d\tau = 0 \quad (1-6)$$

$$\text{Dim}(\vec{t}) = \text{N-cm}^{-2} \quad \text{Dim}(\vec{k}) = \text{N-cm}^{-3}$$

Zwischen dem Spannungsvektor $\vec{t}$ und der Normale $\vec{n}$ der Oberfläche ds besteht, wie sich beweisen lässt, der Zusammenhang $\vec{t} = \vec{n} \cdot \sigma$ mit σ als dem Spannungstensor. Aus Gleichgewichtsbetrachtungen folgt, daß σ ein symmetrischer Tensor ist. Anstelle der vektoriell gefassten Gleichgewichtsbedingung (1-6) kann man auch infolge des Zusammenhanges $\vec{t} = \vec{n} \cdot \sigma$ schreiben:

$$\int_V \text{div}(\sigma) \, d\tau + \int_V \vec{k} \, d\tau = 0 \quad (1-7)$$

Da diese Bedingung im Gleichgewicht immer erfüllt sein muß folgt:

$$\text{div}(\sigma) + \vec{k} = 0$$

In tensorieller Schreibweise:

$$\sigma_{ji,j} + k_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

In Koordinatenschreibweise:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + k_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + k_y = 0 \quad (1-8)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + k_z = 0$$

Das sind die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen der Elasti-

zitätstheorie am Volumenelement für den statischen Fall. Da sie nur die Spannungen und Volumenkräfte enthalten, sind sie streng genommen nur die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen der Festigkeitslehre. Die Verknüpfung von Elastizitätstheorie und Festigkeitslehre erfolgt durch ein Stoffgesetz, das Spannung mit Dehnung über einen Proportionalitätsfaktor, den Elastizitätstensor, verknüpft. Im einfachsten elastischen Fall, der elastischen Isotropie, ist der Proportionalitätsfaktor ein Tensor nullter Stufe, d.h. ein Skalar. Das Stoffgesetz ist nach dem englischen Physiker Hooke (1635-1703) benannt und lautet in allgemeiner tensorieller Form

$$\sigma_{ik} = C_{ikjl} \epsilon_{jl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3$$

es gilt, über gleichlautende Indices in einem Produkt ist zu summieren. Im einfachsten elastischen Fall geht das Hooksche Stoffgesetz über in

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (1-9)$$

σ = Spannung

E = Elastizitätsmodul

ϵ = Dehnung oder Verzerrung

Mit Hilfe des Hookschen Gesetzes kann man aus den Gleichgewichtsbedingungen in den Spannungen, die der Festigkeitslehre angehören, einen gleichberechtigten Satz von Differentialgleichungen in den Verschiebungen ableiten, der in symbolischer Schreibweise lautet:

$$(1-\nu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \frac{(1+\nu)}{2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + (1+\nu)(1-2\nu) \frac{\vec{k}}{E} = 0 \quad (1-10)$$

$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ = Vektor der Volumenkräfte

$\vec{u} = (u, v, w)$ = Verschiebungsvektor

ν = Poissonsche Querkontraktionszahl.

ν ist ein Maß für die Verkleinerung der Querdimension eines auf

Zug beanspruchten elastischen Körpers, b.z.w. Vergrößerung der Querdimension eines auf Druck beanspruchten elastischen Körpers. Da in der Elastizitätstheorie fast alle Gleichgewichtsbetrachtungen als Gleichgewichte in den Spannungen durchgeführt werden, wird darauf verzichtet, die symbolische Form für das Gleichgewicht in den Verschiebungen in Koordinatenschreibweise auseinanderzulegen.

Mit der Aufstellung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, sei es in den Spannungen, sei es in den Verschiebungen, scheint der Weg für die Lösung beliebiger elastischer Probleme offen zu sein. Leider ist denn nicht so, da die geschlossene Integration der die Elastizitätstheorie beherrschenden Differentialgleichungen in der erdrückende Mehrzahl aller Aufgaben nicht oder nur mit unvertretbarem Aufwand möglich ist. Dieser Problematik kann auf vier verschiedenen Wege begegnet werden. Der erste Weg besteht darin, ein vorliegendes Problem geschickt so zu idealisieren, daß die praktisch wichtige Fragestellung erhalten bleibt, Unwichtiges hingegen beiseite gelassen wird. Die zweite Möglichkeit besteht darin, ein gegebenes praktisches Problem so in Teilprobleme zu zerlegen, daß die praktisch wichtigen Fragestellungen erhalten bleiben und jedes Teilproblem integrabel ist. Die dritte Möglichkeit besteht darin, jeweils ganz bestimmte spezielle Probleme mit Hilfe von Rechenmaschinen numerisch zu lösen. Die vierte Möglichkeit besteht darin die numerische Rechnung und die analytische Behandlung von Teilaufgaben eines gegebenen Problems zu einem aussagekräftigen Ganzen zusammenzufassen. Unberührt davon bleibt die Notwendigkeit die Elastizitätstheorie zu verstehen, weil anderenfalls alle numerischen Rechnungen uninterpretierbar bleiben. Die in der Arbeit durchgeführten numerischen Rechnungen beruhen auf der Methode der finiten Elemente (MFE).

2. Die Methode der finiten Elemente.

Ausgangspunkt für die Anwendung der Methode der finiten Elemente in der Elastizitätstheorie ist die im ersten Abschnitt angegebene Differentialgleichung für die Verschiebungen (1-10). Mit

$$\hat{A} = \frac{E}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left\{ (1-\nu)\nabla^2 - \frac{(1-\nu)}{2} \nabla \times (\nabla \times \dots) \right\} \quad (1-11)$$

geht die Differentialgleichung über in $\hat{A} \cdot \vec{u} = \vec{k}$.

Wie in der Anwendung der Methode der Variationsrechnung auf Aufgaben der mathematischen Physik gezeigt wird, gilt für das quadratische Funktional $(\hat{A}\vec{u}, \vec{u})$ definiert durch

$$(\hat{A}\vec{u}, \vec{u}) = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \hat{A}\vec{u} \, d\Omega \quad (1-12)$$

nach dem Satz vom minimalen Funktional: Wenn es im Definitionsbereich des Operators $\hat{A}$ eine Funktion $\vec{u}$ gibt, so daß das quadratische Funktional

$$F(\vec{u}) = (\hat{A}\vec{u}, \vec{u}) - 2(\vec{u}, \vec{k}) \quad (1-13)$$

ein Minimum wird, dann ist diese Funktion $\vec{u}$, zugleich auch die eindeutige Lösung der Differentialgleichung $\hat{A}\vec{u} = \vec{k}$, ferner gilt nach Bette (z.Bsp. bei Tveftz) /26/

$$F(\vec{u}) = (\hat{A}\vec{u}, \vec{u}) - 2(\vec{k}, \vec{u}) = 2 \int_V W(u) \, d\tau - 2 \int_V \vec{u} \cdot \vec{k} \, d\tau - \int_S \vec{u} \cdot \vec{t}_n \, ds \quad (1-14)$$

Dabei ist $\int_V W(\vec{u}) \, d\tau$ = Formänderungsarbeit.

$$\int_V \vec{u} \cdot \vec{k} \, d\tau = \text{Arbeit der Volumenkräfte.} \quad (1-15)$$

$$\int_S \vec{u} \cdot \vec{t}_n \, ds = \text{Arbeit der Oberflächenkräfte.}$$

Aus der Forderung, daß $F(\vec{u})$ ein Minimum annehmen soll, folgt, daß die Variation $\delta F(\vec{u})$ verschwindet. Dafür kann man mit Benutzung des quadratischen Funktional $(\hat{A}\vec{u}, \vec{u})$ schreiben:

$$\int_V \delta f W(\vec{u}) d\tau - \int_V \delta f \vec{u} \cdot \vec{k} d\tau - \int_S \delta f \vec{u} \cdot \vec{t}_n ds = 0 \quad (1-16)$$

oder auch,

$$\int_V \delta f W(\vec{u}) d\tau = \int_V \delta \vec{u} (f \vec{k} d\tau + \int_S \vec{t}_n ds) \quad (1-17)$$

Dabei wurde das Prinzip der virtuellen Verrückungen benutzt. Durch die vorangegangene Umformung ist das Problem der Integration der Differentialgleichung $\hat{A}\vec{u} = \vec{k}$ mit Hilfe der Funktionalanalysis und Variationsrechnung auf eine Form gebracht worden, die unmittelbar der Methode der finiten Elemente zugänglich ist. In der Methode der finiten Elemente wird der Integrationsbereich mit einem Netz überzogen, das je nachdem, wie der Inte-

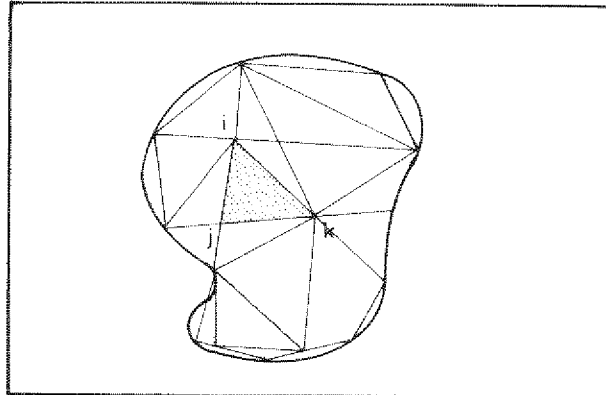


Abb. 1

grationsbereich beschaffen ist, aus ein-zwei- oder auch dreidimensionalen Elementen besteht. (Abb. 1)

Die Elemente sind dabei n-Ecke und Prinzipiell aufgebaut aus

Simplices. Ein Simplex ist das geometrische Gebilde, das entsteht wenn die maximal Zahl linear unabhängiger Punkte in einem Raum durch einen Geschlossenen Linienzug verbunden wird. Beispiele für Simplices sind im 0-dimensionalen der Punkt, im Eindimensionalen die Strecke, im Zweidimensionalen das Dreieck, im Dreidimensionalen das Tetraeder. Das Netz muß dabei so aufgebaut sein, daß Eckpunkte mit Eckpunkten und Kanten mit Kanten zusammenfallen. Die Eckpunkte werden in der MFE als Knotenpunkte und ihre Verschiebungen als Knotenpunktverschiebungen bezeichnet. Für die Verschiebungen $\vec{u}=(u,v,w)$ werden Polynomansätze in x,y,z gemacht. Die Koeffizienten dieser Polynome heißen "generalisierte Koordinaten". Ihre numerischen Werte sind ein Maß für die Knotenpunktverschiebungen. Die Knotenpunktverschiebungen aber sind für ein vorliegendes Problem charakteristisch und bilden in der MFE daher die Basis für die Berechnung der Verschiebungen innerhalb der einzelnen Elemente. Man ersetzt daher mit Hilfe einer nichtsingulären Transformation die generalisierten Koordinaten durch die Knotenpunktverschiebungen und setzt anschließend die Knotenpunktverschiebungen als "neue Koordinaten" in die Polynomansätze ein. Damit hat man die Verschiebungen $\vec{u}$ ausgedrückt durch die Knotenpunktverschiebungen $\vec{\rho}$:

$$\vec{u} = N \cdot \vec{\rho} \quad (1-18)$$

Die Matrix N ist dabei das Produkt der Matrix Φ der Polynomansätze und der Matrix A^{-1} , die die generalisierten Koordinaten in die Knotenpunktverschiebungen transformiert: $N = \Phi \cdot A^{-1}$

Dadurch geht der Polynomansatz für den Verschiebungsvektor $\vec{u} = \Phi \cdot \vec{\alpha}$, mit $\vec{\alpha}$ als der Vektor der generalisierten Koordinaten, über in den Polynomansatz für den Verschiebungsvektor $\vec{u} = \Phi \cdot A^{-1} \cdot \vec{\rho}$

Dabei besteht zwischen dem Vektor $\vec{\alpha}$ der generalisierten Koordinaten und dem Vektor $\vec{\rho}$ der Knotenpunktverschiebungen der Transformationzusammenhang $\vec{\alpha} = A^{-1} \cdot \vec{\rho}$

Für den Verzerrungsvektor $\vec{\epsilon} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}$ wird auf Grund des im Abschnitt 1 angegebenen Zusammenhangs mit dem Verschiebungsvektor in symbolischer Schreibweise gesetzt

$$\partial^{x,y,z} \vec{u} = \vec{\epsilon} \quad (1-19)$$

Setzt man $N \cdot \vec{\rho}$ gemäß obiger Ableitung für $\vec{u}$ ein, dann erkennt man sofort, daß die Differentiation $\partial^{x,y,z}$ sich nur auf N , nicht aber auf $\vec{\rho}$ auswirkt. Bezüglich dieser Differentiation sind die Knotenpunktverschiebungen $\vec{\rho}$ als konstant anzusehen:

$$\vec{\epsilon} = \partial^{x,y,z} N \cdot \vec{\rho} = B \cdot \vec{\rho} \quad (1-20)$$

Wobei die Matrix B durch die angegebene Differentiation aus N hervorgeht. Benutzt man jetzt noch das Hooksche Gesetz in der Form $\sigma = E \cdot \epsilon$, dann lässt sich die Formänderungsarbeit $\int_V W(u) dV$ schreiben:

$$\int_V W(u) dV = \int_V (B\vec{\rho})^t E (B\vec{\rho}) dV = \int_V \vec{\rho}^t B^t E B \vec{\rho} dV \quad (1-21)$$

Dabei wurde die Schreibweise bereits der in der MFE übliche angepaßt. Man findet so

$$\delta \vec{\rho}^t \int_V B^t E B dV \cdot \vec{\rho} = \delta \vec{\rho}^t \int_V N^t \vec{k} dV + \delta \vec{\rho}^t \int_S N^t t_n ds \quad (1-22)$$

Da $\delta \vec{\rho}$ völlig willkürlich ist muß gelten

$$\int_V B^t E B dV \cdot \vec{\rho} = \int_V N^t \vec{k} dV + \int_S N^t t_n ds \quad (1-23)$$

Setzt man $\int_V B^t E B dV = K$ und

$$\int_V N^t \vec{k} dV + \int_S N^t t_n ds = \vec{Q} \quad (1-24)$$

dann erhält man nach ausführung der Integration für die Berechnung von $\vec{\rho}$ das lineare Gleichungssystem

$$K \cdot \vec{\rho} = \vec{Q} \quad (1-25)$$

K heißt in der MFE die Steifigkeitsmatrix.

Die bisherigen Betrachtungen wurden stillschweigend nur an einem Element des Netzes durchgeführt, sie gelten aber in

gleicher Weise für alle Elemente des Netzes. Man braucht daher nur noch alle Elemente in geeigneter Form zu verknüpfen. Das geschieht mit Hilfe von sogenannten Boole'schen Hypermatrizen. Damit ergibt sich für den globalen Strukturverschiebungsvektor $\vec{r}$:

$$\vec{p} = T \vec{r} \quad (1-26)$$

Mit T als Hypermatrix der Struktur.

Es folgt $K T \vec{r} = \vec{Q}$. Multiplikation dieser Gleichung mit der Transponierten T^t ergibt

$$T^t K T \vec{r} = T^t \vec{Q} = \vec{Q}_{\text{Global}} \quad (1-27)$$

$T^t K T$ wird als globale Steifigkeitsmatrix bezeichnet und

$T^t \vec{Q} = \vec{Q}_{\text{Global}}$ als globalen Lastvektor.

Damit ist die Lösung der Differentialgleichung in den Verschiebungen $\hat{A}\vec{u} = \vec{k}$ zurückgeführt auf die Lösung des linearen Gleichungssystems $T^t K T \vec{r} = \vec{Q}_{\text{Global}}$ für die Berechnung der Knotenpunktverschiebungen, die im globalen Strukturverschiebungsvektor $\vec{r}$ zusammengefasst sind.

Damit ist das Problem für die numerische Lösung nach der Methode der finiten Elemente aufbereitet. /5/, /6/, /7/

3. Das Rechenmodell.

Zum Zweck unserer Rechnung haben wir den VSGB in mehrere Teile zerlegt und für jeden Teil ein Netz erstellt. Diese Zerlegung in Teilnetze oder sogenannten Teilstrukturen war wegen Schwierigkeiten mit der Problemgröße im elastoplastischen Bereich notwendig. Andererseits erlaubt diese Unterteilung eine viel bessere Idealisierung des Problems, weil damit die Kopplung der Konstruktionsblöcke im VSGB durch die Kopplung verschiedener Teilstrukturen viel wirklichkeitsnäher simuliert werden kann. (Siehe Abb. 2)

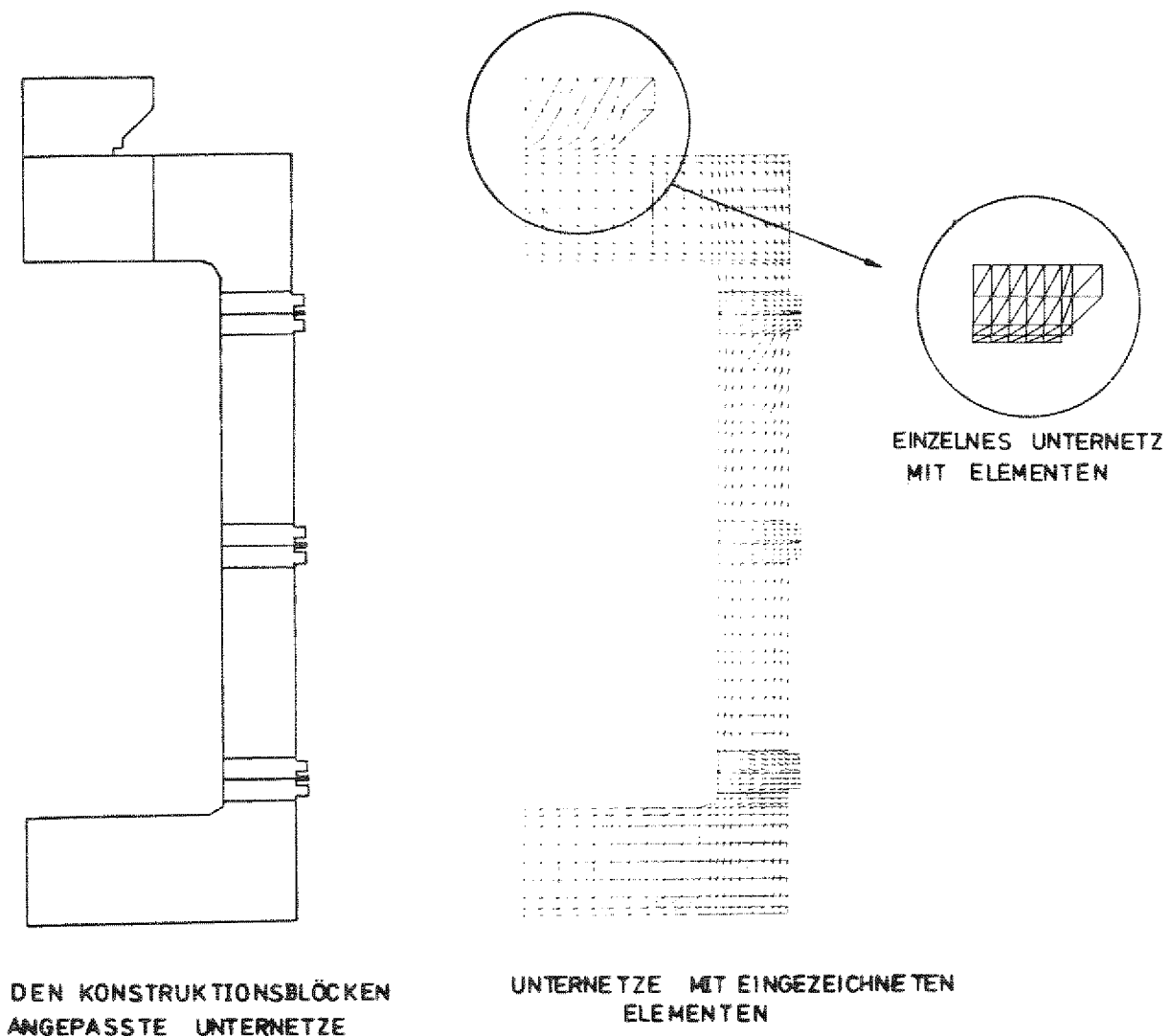


Abb. 2

Als Kompromiß zwischen dem Zeitaufwand beim Erstellen der Netze und der Genauigkeit (bzw. realistischeren Idealisierung) wurden rotationsymmetrische Elemente gewählt. Für die Spannungsrechnung wurden rechteckige Dreieckselemente mit quadratischen Verschiebungsfunktionen benutzt (8). Für die Temperaturrechnung wurden ähnliche Elemente mit gekrümmten Kanten benutzt (21). In der Abb. 2 werden die verschiedenen Teilstrukturen mit den Dreieckselemente gezeigt. Während der Arbeit wurden nach Bedarf auch andere Elemente benutzt, auf die gelegentlich später hingewiesen wird.

Programmpakete ASKA und SMART

Die Rechnungen wurden mit den zur Verfügungstehenden Programmpaketen ASKA und SMART durchgeführt. Für die Spannungsrechnung wurden sowohl im elastischen als auch im elastoplastischen Bereich die Teile I und III von ASKA benutzt. Für die Temperaturrechnung wurde SMART II benutzt. Beide Programme sind ähnlich aufgebaut. Es wird mit Hilfe von sogenannten Prozessoren gerechnet, welche unabhängig voneinander einen Teil des gesamten Rechenvorgangs durchführen, vorausgesetzt es wird auf eine durch das Lösungsverfahren bedingte mathematische Reihenfolge geachtet. In Abb. 3 wird dieses Prinzip erläutert. Für eine nähere Beschreibung aller Prozessoren siehe (8) und (9). Siehe auch Anhang II.

Die Prozessoren werden von einem Steuerprogramm wie gewöhnliche Subroutinen aufgerufen. Es sei hier noch erwähnt, daß in ASKA und SMART eine interne Aufspaltung der Verschiebungen nach Freiheitsgraden erfolgt. Ist ein Knotenpunkt einer Struktur in alle drei Raumrichtungen frei verschiebbar, so werden alle drei Freiheitsgrade als "local" bezeichnet. Sind Verschiebungen in gewisse Raumrichtungen unterdrückt, so werden die ihnen entsprechenden Freiheitsgrade mit "suppressed" bezeichnet und erhalten den Index "S". Sind Verschiebungen in bestimmte Richtungen vorgeschrieben, so werden die ihnen entsprechenden Freiheitsgrade mit "prescribed" bezeichnet und erhalten den Index "P". Verschiebungen schließlich, die mit anderen Netzen gekoppelt sind, heißen "coupled" oder

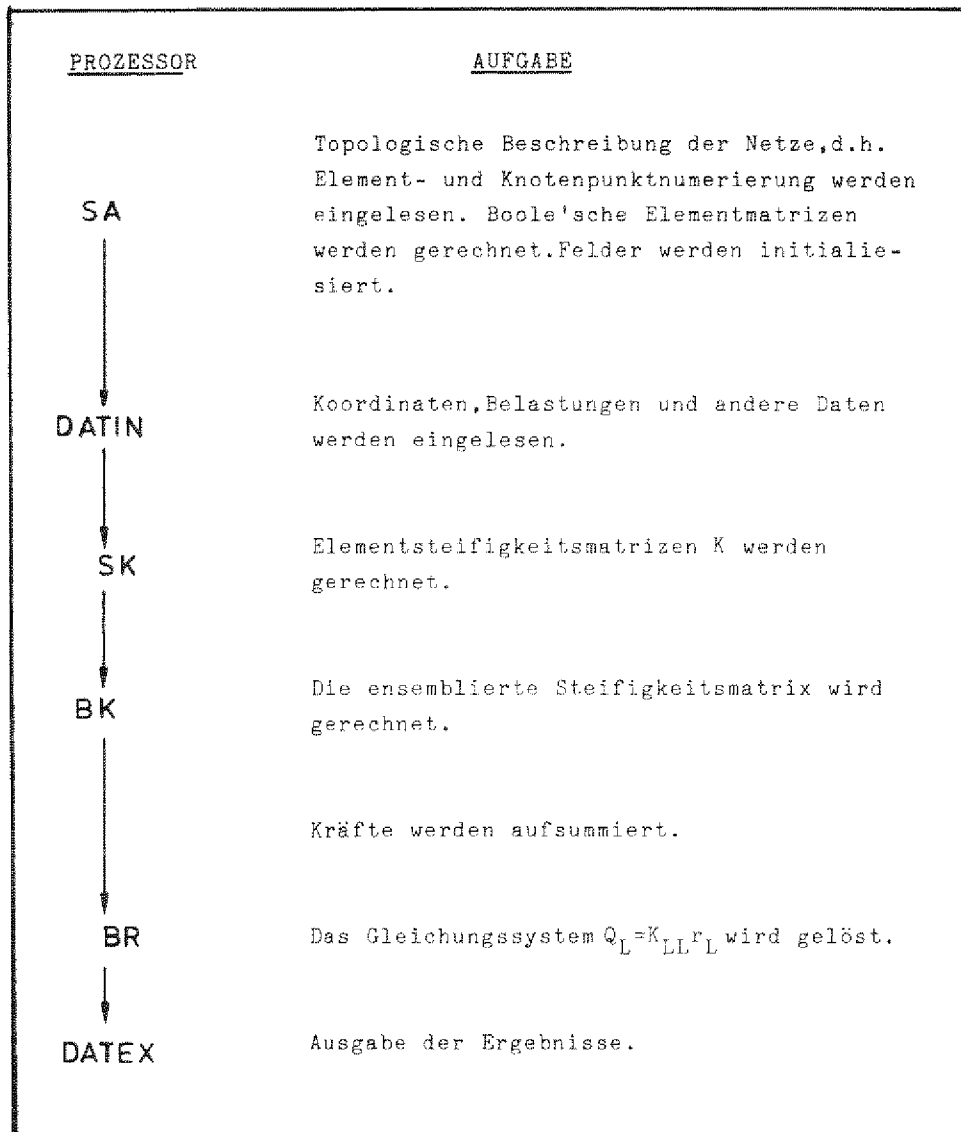


Abb. 3

auch " external " und werden mit dem Index " C " bezeichnet. Auf Grund dieser Differentierung läßt sich den Verschiebungsvektor $\vec{\rho}$ des Elementes folgendermaßen darstellen:

$$\vec{\rho} = T_L r_L + T_C r_C + T_P r_P + T_S r_S$$

$$\begin{aligned}
 \text{Und } Q_{L,Global} &= T_L^t Q \\
 Q_{C,Global} &= T_C^t Q \\
 Q_{P,Global} &= T_P^t Q \\
 Q_{S,Global} &= T_S^t Q
 \end{aligned}
 \quad (1-28)$$

Diese Aufspaltung überträgt sich auf die globale Steifigkeitsmatrix, die wie folgt aussieht:

$$K_{Global} = \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LC} & K_{LP} & K_{LS} \\ & K_{CC} & K_{CP} & K_{CS} \\ & & K_{PP} & K_{PS} \\ \text{Symmetrisch} & & & K_{SS} \end{bmatrix} \quad (1-29)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Wobei : } K_{LL} &= T_L^t K T_L \\
 K_{LS} &= T_L^t K T_S \\
 &\vdots \\
 &\text{usw,}
 \end{aligned}
 \quad \text{Aufsummiert über alle Elemente.}$$

Die Lösung des Problems reduziert sich auf die Lösung der Gleichung:

$$Q_{L,Global} = K_{LL} r_L \quad (1-30)$$

4. Die Unterstrukturtechnik

Zur Ergänzung von 2. soll hier die Unterstrukturtechnik erläutert werden. In Abb. 4. werden drei zusammenhängende Netze gezeigt.

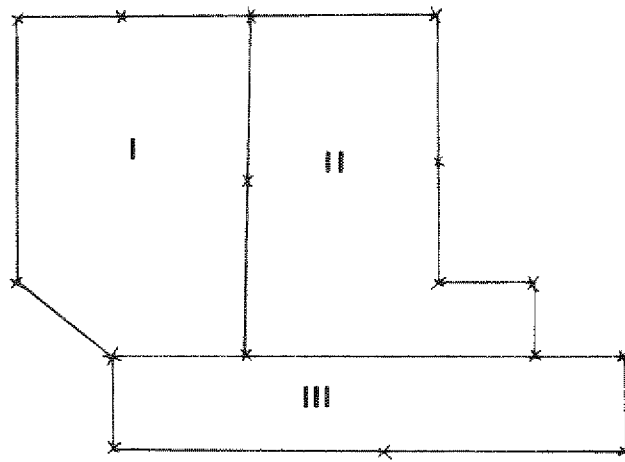


Abb. 4

Für jedes Netz kann man eine Gleichung wie (1-27) schreiben

$$R_{\alpha} = K_{\alpha} r_{\alpha} \quad (1-31)$$

Die in Abb. 4 mit Kreuzen gekennzeichneten Stellen werden als Knotenpunkte einer Hyperstruktur aufgefaßt, deren Verschiebungsvektor r sein soll. Die Unternetze können dann als Elemente dieser Hyperstruktur aufgefaßt werden und Gleichung (1-31) als Elementengleichung interpretiert. Die Unternetzverschiebungen r_{α} können mit Hilfe einer Boole'schen Matrix $\tilde{a}$ mit den Hyperstrukturverschiebungen r in Verbindung gebracht werden:

$$r_{\alpha} = \tilde{a}_{\alpha} r \quad (1-32)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen erhält man wenn die Belastungen aller Unternetze aufsummiert werden:

$$R = \sum \tilde{a}_{\alpha}^t R_{\alpha} = \sum \tilde{a}_{\alpha}^t K_{\alpha} \tilde{a}_{\alpha} \cdot r$$

$$R = K \cdot r \quad (1-32)$$

Mit $K = \sum \tilde{a}_{\alpha}^t K_{\alpha} \tilde{a}_{\alpha}$

Damit wird das Problem von mehreren zusammenhängenden Unternetzen auf das Problem eines einfachen Netzes zurückgeführt.

KAPITEL II

1. Spannungszustand am kaltem VSGB

Um eine möglichst zuverlässige Untersuchung des Spannungszustandes zu gewährleisten, wird das vorgegebene Problem in drei Teilprobleme aufgelöst. In der Reihenfolge ihrer Behandlung sind diese: das Spannungs-Dehnungsverhalten des Behälters ohne Boden- und Deckelplatte, der Deckelplatte, der Bodenplatte. Dabei wurden gemäß den Ausführungen im 1. Kapitel zu den Teilprobleme jeweils analytische Kontrollrechnungen durchgeführt, um einen Überblick über die Zuverlässigkeit der mit dem Rechner durchgeführten numerischen Rechnungen zu bekommen. Die Aufteilung des gestellten Problems in der angegebenen Weise ist nach dem De Saint Venant'schen Prinzip sinnvoll. Das De Saint Venant'sche Prinzip besagt: In hinreichender Entfernung vom Angriffsbereich eines Kräftesystems hängt seine Wirkung nicht mehr von seiner Verteilung sondern nur noch von seiner Resultierenden ab. Da man sich den Behälter am Rand als aus allen Richtungen gleich belastet vorzustellen hat, ist die Resultierende dieser Belastung, wie man sich leicht am Seilpolygon klarmacht, gleich null. Das bedeutet, aber, daß die " Randstörung " in hinreichender Entfernung vom Rand keinen Einfluß auf das Spannungs-Dehnungsverhalten des Behälters ausüben wird. Dann liegt die Berechtigung vor, den Behälter näherungsweise als unendlich langes kreiszylindrisches Rohr zu behandeln. /10/, /11/, /12/, /13/

Aus dem allgemeinen Differentialgleichungssystem für das Spannungsgleichgewicht am Volumenelement, geschrieben in Polarkoordinaten:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} + R = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{z\phi}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\phi}}{r} + T = 0 \quad (2-1)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z = 0$$

gewinnt man das Gleichungssystem für den Rotationsymmetrischen Spannungszustand eines unendlich langen elastischen kreiszylindrischen Rohres ohne Randbelastungen und Volumenkräfte, indem man setzt:

- 1) $R=0$; $T=0$; $Z=0$ für die Volumenkräfte,
- 2) $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ und $\sigma_z = 0$ für den sehr langen Kreiszylin
der
- 3) $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ $\tau_{r\phi} = \tau_{z\phi} = 0$ für den rotationsymmetrischen Spannungszustand

Man erhält als Ergebnis:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r) - \sigma_\phi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) = 0 \quad (2-2)$$

Die zweite Differentialgleichung läßt sich sofort integrieren:

$$r \tau_{rz} = \text{const.} \quad \text{oder auch} \quad \tau_{rz} = \frac{\text{const.}}{r}$$

und setzt man noch voraus, daß die Mantelflächen frei von äußeren Schubspannungen sein sollen, folgt $\text{const.} = 0$ und damit $\tau_{rz} = 0$. Damit bleibt als einzige Differentialgleichung übrig:

$$\frac{d}{dr} (r \sigma_r) - \sigma_t = 0 \quad (2-3)$$

Auf diese Weise wurde das ursprünglich 3-dimensionale Problem zunächst durch die Annahme eines sehr langen Kreiszyklindrisches Rohres auf ein 2-dimensionales Problem reduziert. Eine letzte Vereinfachung brachten dann noch die Annahmen der Rotationssymmetrie und der Schubspannungsfreiheit der inneren und äusseren Mantelfläche, so daß es sich jetzt **nur** noch um ein 1-dimentinales Problem im Rahmen der Membrantheorie der Zylinderschalen handelt. Die Differentialgleichung hat für σ_r und σ_t die Lösung:

$$a) \quad \sigma_r = \frac{a^2 p_i - b^2 p_a}{b^2 - a^2} - \frac{(p_i - p_a) a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)} \quad (2-4)$$

$$b) \quad \sigma_t = \frac{a^2 p_i - b^2 p_a}{b^2 - a^2} + \frac{(p_i - p_a) a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)}$$

Mit $(\sigma_r)_{r=b} = -p_a$ und $(\sigma_r)_{r=a} = -p_i$ (Siehe Abb. 5.)

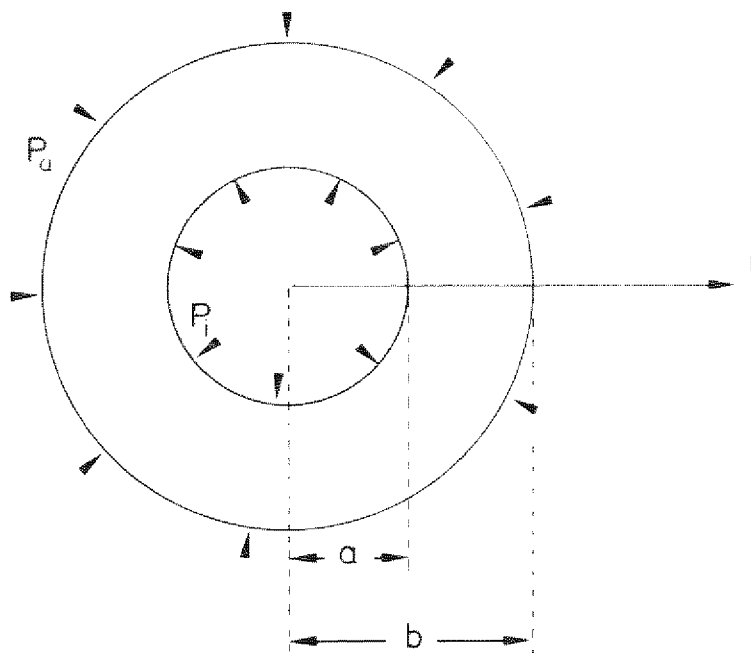


Abb. 5.

Zur Lösung der Differentialgleichung (2-3) muß man auf die Lösung der Differentialgleichung für die Verschiebung $u(r)$ in radialer Richtung zurückgehen

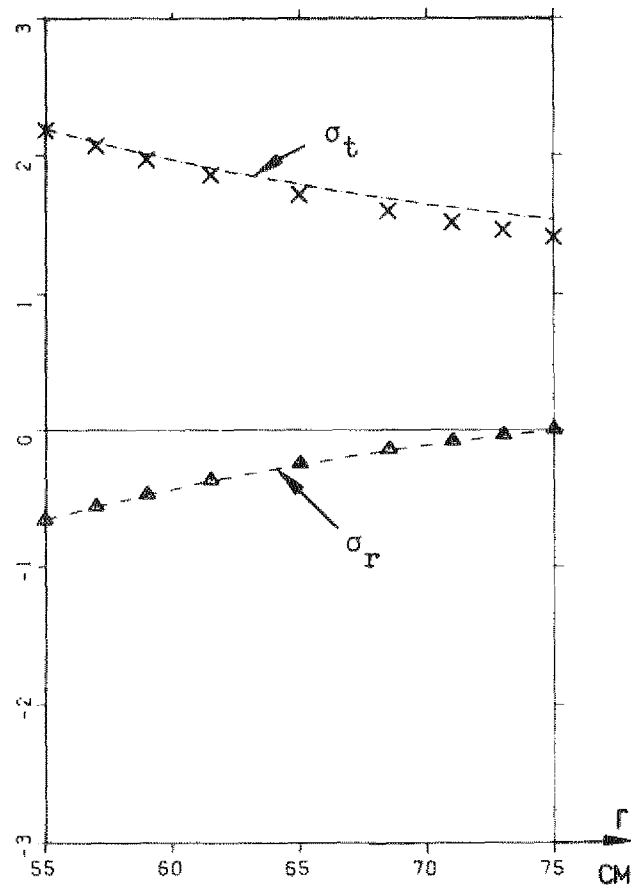
$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (u(r)) \right\} = 0 \quad (2-5)$$

und über die Dehnung in radialer Richtung mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes die Spannungen σ_r und σ_t ($\sigma_z=0$) durch die Verschiebung $u(r)$ und ihre 1. Ableitung ausdrücken. Dieser umständlich erscheinende Weg ist deshalb erforderlich, weil in der Differentialgleichung (2-3) sowohl die Tangential- als auch die Radialspannung vorkommen, beide Spannungen sich aber durch die radiale Verschiebung $u(r)$ und ihre 1. Ableitung ausdrücken lassen. Es liegt nahe, die Lösungen (2-4 a) und (2-4 b) für die Radial- und Tangentialspannung mit dem Ergebnis einer Berechnung derselben Spannungen nach der Methode der finiten Elemente mit Hilfe des Progammpaketes ASKA zu vergleichen. Abbildung 6a zeigt das verwendete finite-Elemente Modell und Abbildung 6b die Ergebnisse. Für die Drücke und Radien wurden sowohl für die analytische als auch für die numerische Berechnung die unter Abbildung 6b angegebenen Maßzahlen eingesetzt. Die Übereinstimmung zwischen numerischer und analytischer Lösung ist sehr gut.

2. Der reduzierte E- Modul.

Wie die Abbildung 2 auf Seite 12 zeigt, ist das Rechenmodell für den VSGB ein homogenes Modell, d.h. es weist keine Hohlräume auf. Es entsteht daher das Problem, die Verschwächung des Behälters durch die senkrecht von oben nach unten verlaufenden Bohrungen für die axiale Vorspannkabel zu simulieren. Das geschieht, indem im Modell der Bereich der Bohrungen mit einem Material ausgefüllt gedacht wird, das einen vom übrigen Behältermaterial verschiedenen Elastizitätsmodul hat. Die Aufgabe ist, einen Weg zu finden, diesen Elastizitätsmodul näherungsweise zu berechnen. Zur Grundlage gelegt wird wieder das Kreis-

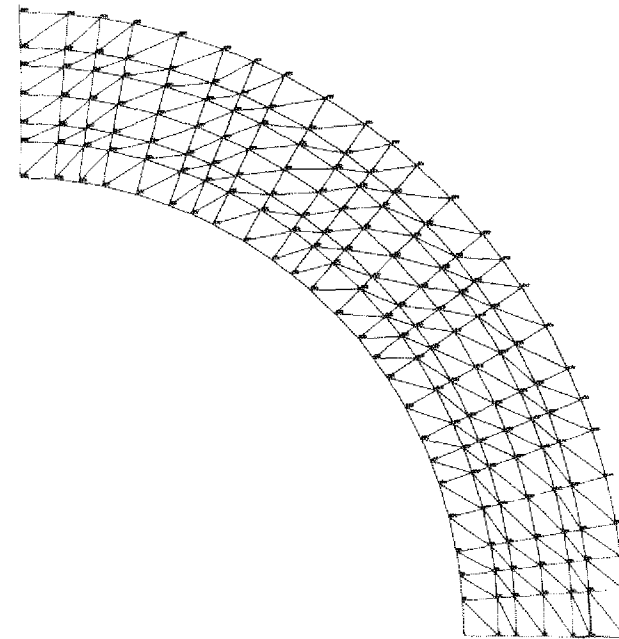
$N/CM^2 \cdot 10^3$



$P_i = 66 \text{ bar}$

$P_a = 0. \text{ bar}$

FEM NETZ



----- Theoretische Tangentialspannung (2-4a)

x x x x Tangentialspannung mit FEM (Netz oben)

----- Theoretische Radialspannung (2-4b)

Δ Δ Δ Radialspannung mit FEM (Netz oben)

Abb. 6

ringmodell der Abbildung 6a jedoch in zwei Modifikationen. In der einen Modifikation wurde das Ringmodell als mehrfach zusammenhängender Bereich (Abb. 8) aufgebaut und in der anderen Modifikation (Abb. 9) als einfach zusammenhängender Bereich aber an der Stelle der Bohrungen befindet sich jetzt ein Bereich mit einem vom übrigen Material verschiedenen Elastizitätsmodul. Das Modell wird gleichzeitig dadurch kontrolliert, daß für die zweite Modifikation des Kreisringes die Radial- und Tangentialspannungen sowie die radiale Verschiebung analytisch und numerisch berechnet wurden. Die radiale Dehnung und die Radial- und Tangentialspannungen des mehrfach zusammenhängenden Kreisringgebietes (Abb. 8) wurden mit $p_i = 151$ bar und $p_a = 440$ bar sowie $E = 2.1 \times 10^7$ N/cm² numerisch berechnet. In Anschluß daran wurde der Elastizitätsmodul E_2 im homogenisierten Ringmodell solange variiert, bis hinreichende Übereinstimmung von Spannung und Dehnung mit den numerischen Ergebnissen für den mehrfach zusammenhängenden Bereich erzielt war. Es wurde eine ganze Reihe von Versuchsrechnungen auch für verschiedene Werte von Innendruck p_i und Außendruck p_a durchgeführt, die für den reduzierten E-Modul E_2 der homogenisierenden Zwischenschicht $E_2 = 0.8 \times 10^7$ N/cm² als besten Wert ergaben. Die durchgezogenen, wellenförmigen Kurven der Abbildungen 10a und 10b zeigen den numerisch berechneten Verlauf der Radialverschiebungen und Tangentialspannungen an der Außenseite des mehrfach zusammenhängenden Kreisringbereiches. Der wellenförmige Verlauf dieser Kurven ist eine Folge der Löcher im Modell, die die axialen Bohrungen des Behälters bedeuten. Dieser Wellenförmiger Verlauf läßt sich im homogenisierten Bereich, so wie die Homogenisierung mit Rücksicht auf das Behältermodell angesetzt werden müsste, natürlich nicht erreichen. Es kam vielmehr darauf an, einen Wert von E_2 zu finden, der sowohl den wichtigen Tangentialspannungen als auch den Verschiebungen an der Ringaußenseite näherungsweise Genüge tut. Zum Vergleich mit den numerischen, wellenförmigen Verläufen sind von allen gerechneten Kurven noch die für $E_2 = 0.6 \times 10^7$ N/cm²; $E_2 = 0.9 \times 10^7$ N/cm²; $E_2 = 0.8 \times 10^7$ N/cm² in die Abbildungen 10a und 10b eingezeichnet worden. Die Entscheidung ist für $E_2 = 0.8 \times 10^7$ N/cm² im homogenisierten Modell gefallen.

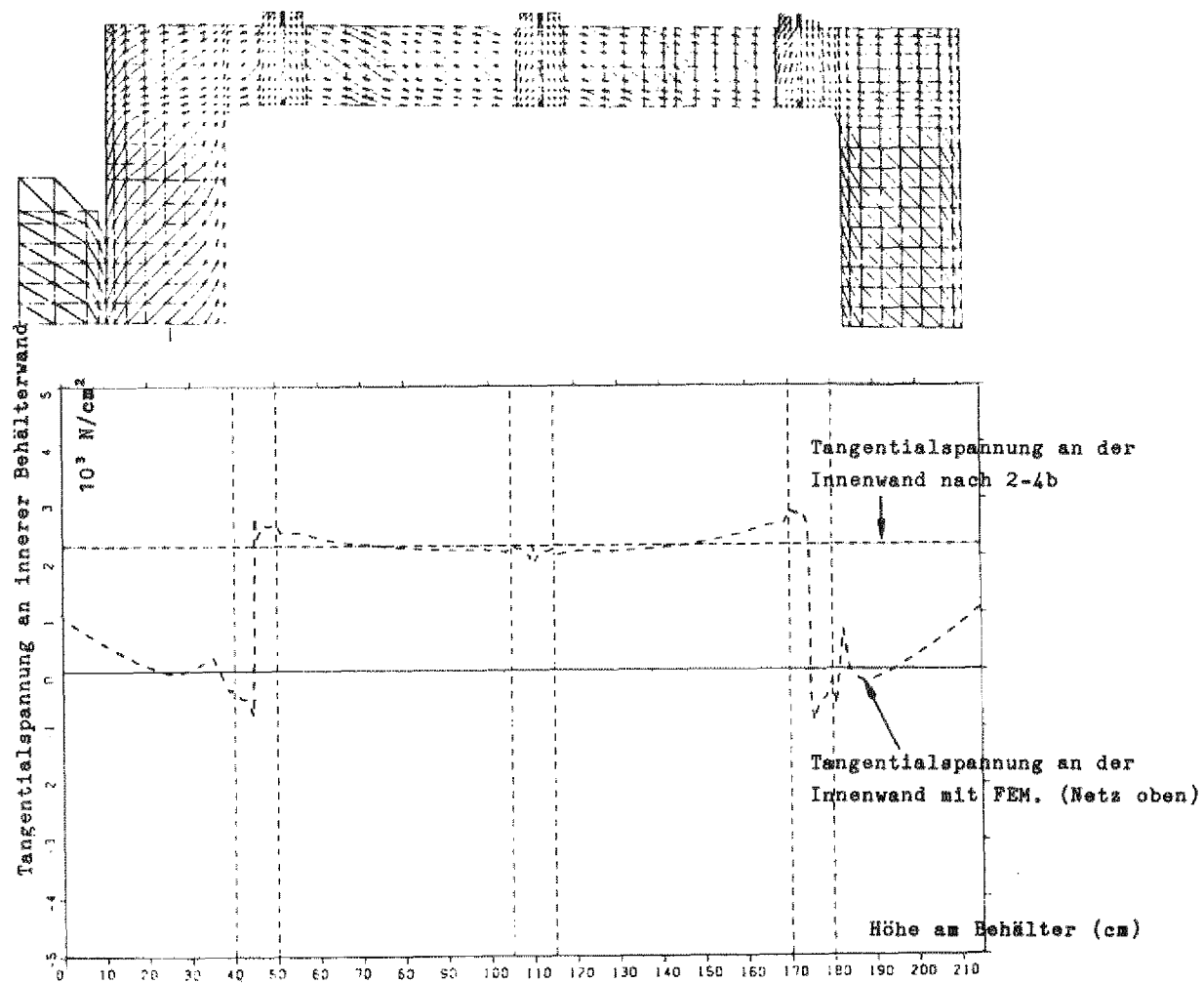


Abb. 7

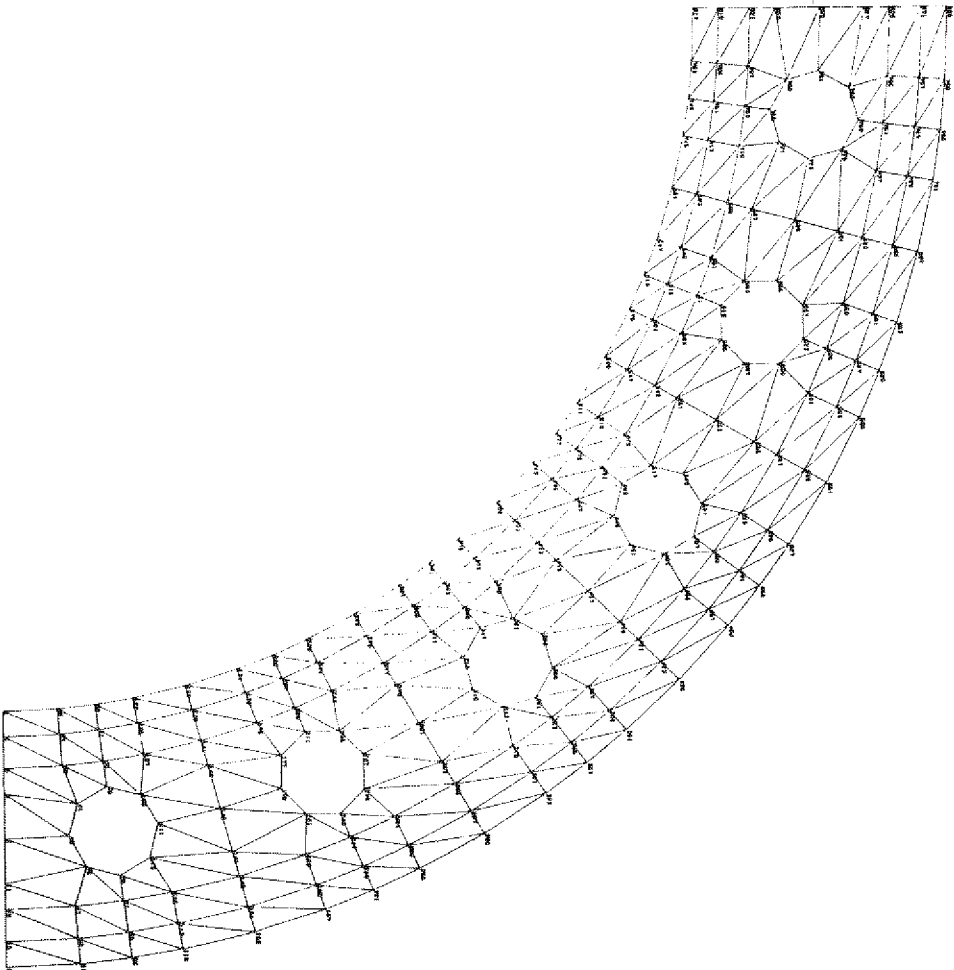


Abb. 8

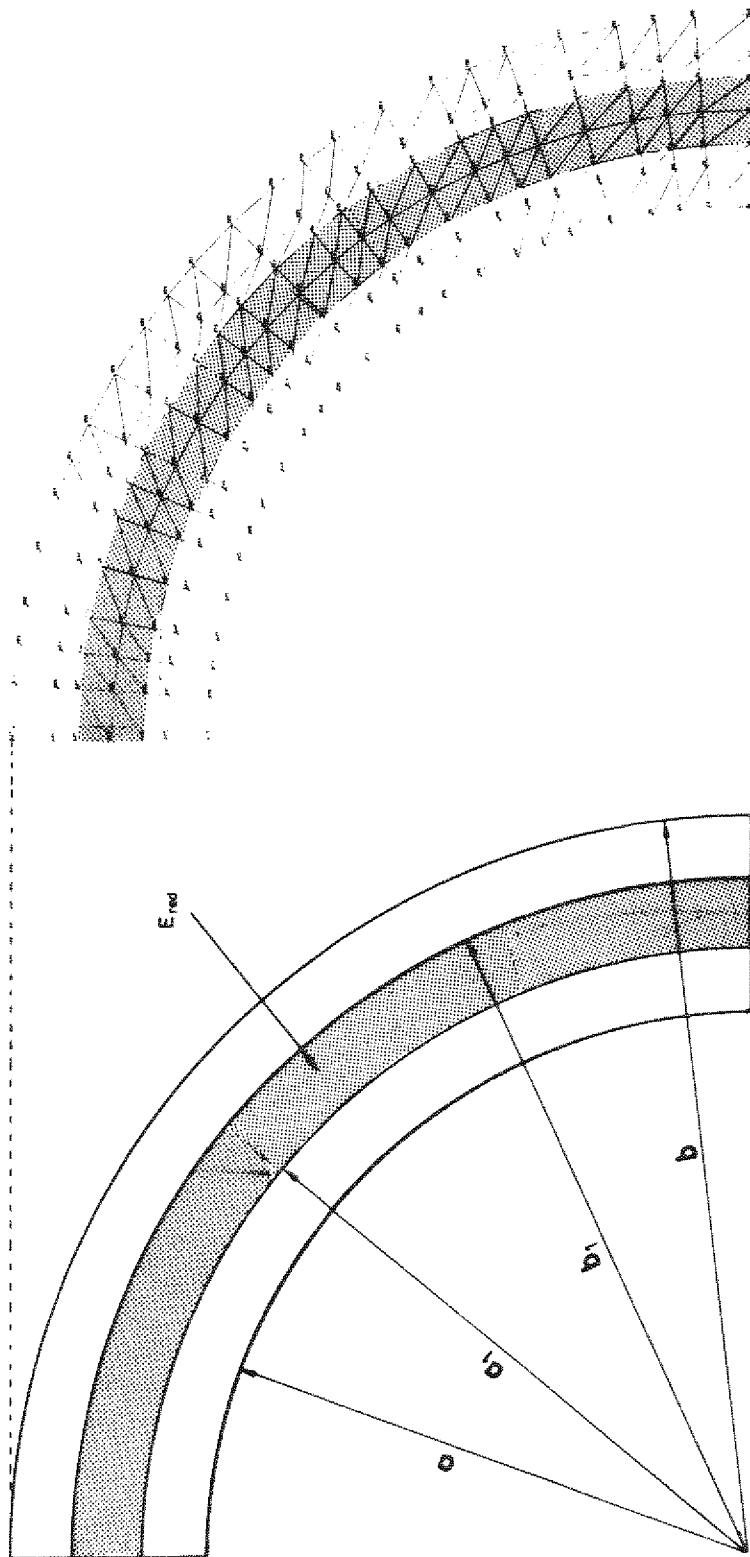


Abb. 9

Die Abbildungen 11a, 11b, und 11c zeigen die Ergebnisse der Kontrollrechnungen für das homogenisierte Modell. Die gestrichelten Kurven wurden mit Hilfe der analytischen Lösung gewonnen. Die mit " * " bezeichneten Punkte sind die Ergebnisse der entsprechenden numerischen Rechnung mit ASKA. Die Abbildungen 11a, 11b, 11c zeigen die Variation der Tangentialspannung bzw. Radialspannung bzw. radialen Verschiebung über der Wandstärke. Die Abbildungen 10 hingegen beziehen sich nur auf den Verlauf von Tangentialspannung und radialer Verschiebung an der Außenseite. Abbildung 7 bezieht sich auf die Tangentialspannung an der inneren Behälterwand-

3. Die analytische Lösung für das homogenisierte Ringmodell.

Das in Abbildung 9 dargestellte homogenisierte Ringmodell ist aus drei Schichten aufgebaut, von denen die innere und äußere Schicht den gleichen Elastizitätsmodul haben und der Elastizitätsmodul der mittleren Schicht aus den bereits beschprochenen numerischen Rechnungen zu $E = 0.8 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$ ermittelt wurde. Die analytische Kontrollrechnung für das homogenisierte Ringmodell beruht wieder auf der Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dr} (r \sigma_r) - \sigma_t = 0$$

Wie man durch Einsetzen bestätigt, wird die Lösung durch

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C \quad \text{und} \quad \sigma_t = -\frac{A}{r^2} + 2C \quad (2-6)$$

gegeben, wobei die Konstanten A und C aus den Randbedingungen zu bestimmen sind. Aus der Forderung, daß an der Stelle $r=a$

$\sigma_r = -p_i$ und an der Stelle $r=a_1$ $\sigma_r = -x$ sein soll, erhält man für den Bereich $a \leq r \leq a_1$ sofort die beiden Gleichungen:

$$\frac{A}{a^2} + 2C = -p_i \quad \text{und} \quad \frac{A}{a_1^2} + 2C = -x \quad (2-7)$$

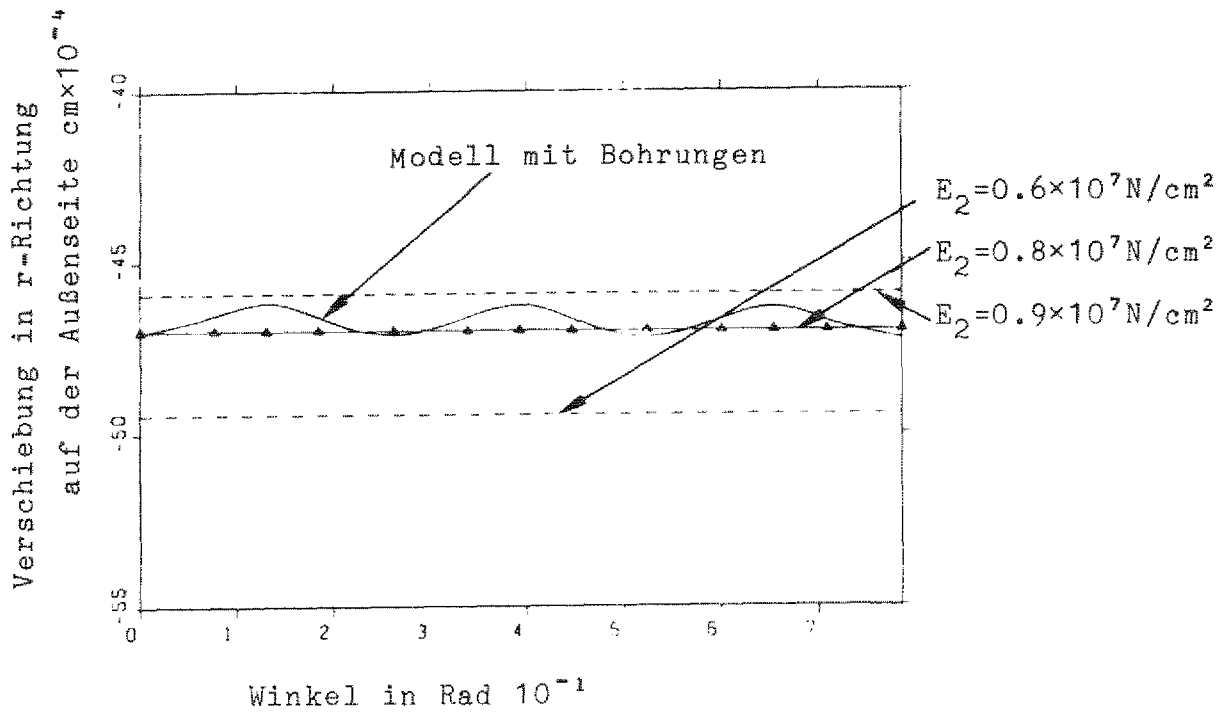


Abb. 10a

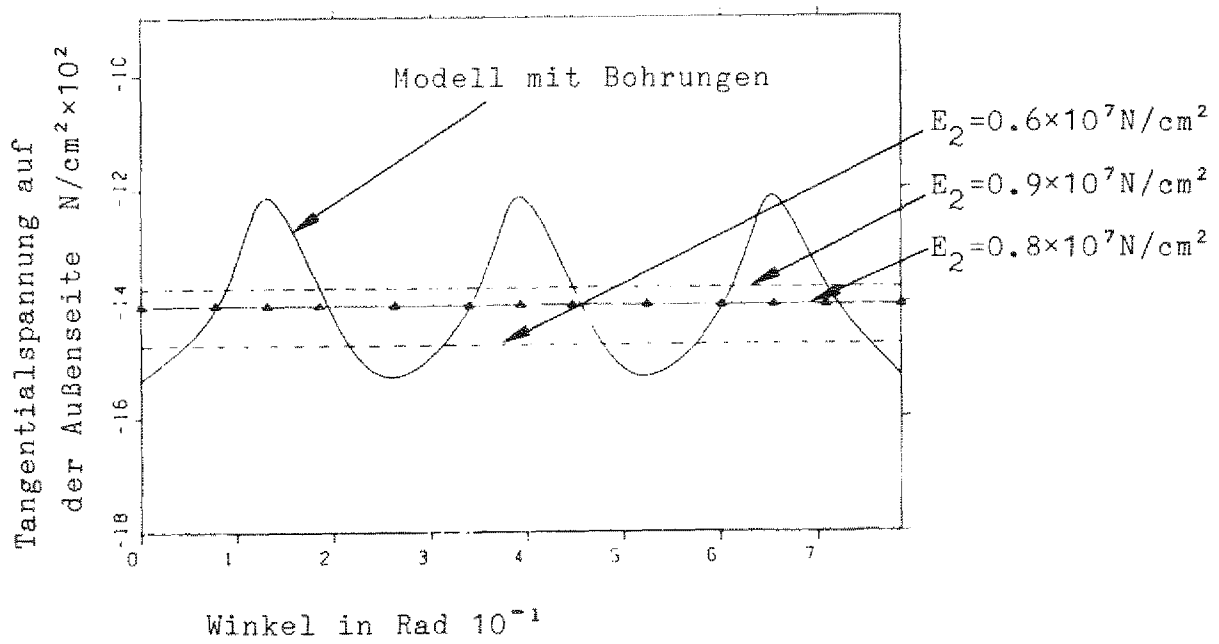
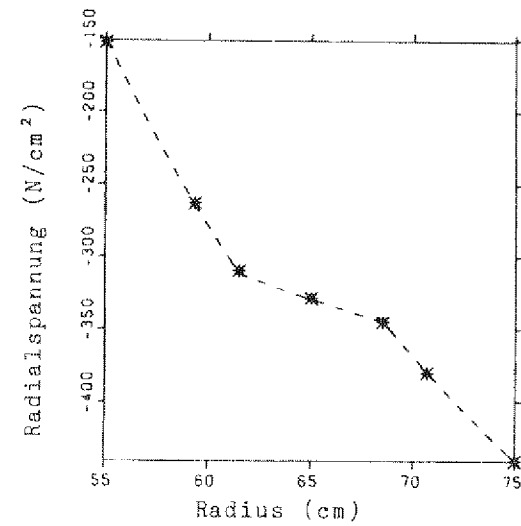
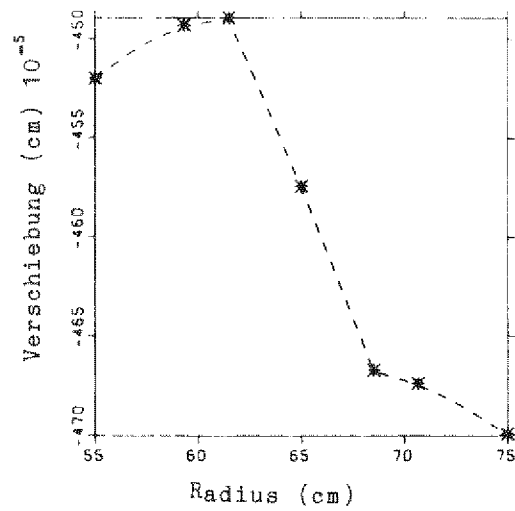
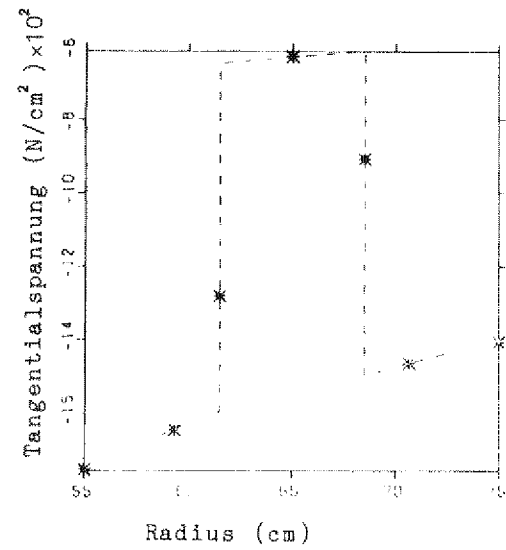


Abb. 10b



----- Analytische Lösung für das
homogenisierte Ringmodell

***** Mit dem FEM Modell gerechnete
Werte (Abb.9)

$$P_i = 151 \text{ N/cm}^2$$

$$P_a = 440 \text{ N/cm}^2$$

Abb. 11

mit den Lösungen

$$A = \frac{(x-p_i) \cdot a \cdot a_1^2}{a_1^2 - a^2} \quad \text{und} \quad C = \frac{1}{2} \frac{x a_1^2 - p_i a^2}{a^2 - a_1^2}$$

Ganz auf dieselbe Weise ergibt sich für den
2. Bereich $a_1 \leq r \leq b_1$

$$\frac{A^1}{a_1^2} + 2C^1 = -x$$

$$\frac{A^1}{b_1^2} + 2C^1 = -y$$

Mit den Lösungen:

$$A^1 = \frac{(y-x)a_1^2 b_1^2}{b_1^2 - a_1^2} \quad \text{und} \quad C^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x a_1^2 - y b_1^2}{b_1^2 - a_1^2}$$

Schließlich findet man ebenso für den Bereich $b_1 \leq r \leq b$

$$A^{(2)} = \frac{(p_a - y)b_1^2 b^2}{b^2 - b_1^2} \quad \text{und} \quad C^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y b_1^2 - p_a b^2}{b^2 - b_1^2}$$

In den aus den Randbedingungen ermittelten Konstanten treten als neue unbekannte x und y auf. Um sie aus den Gegebenheiten des Problems festzulegen, wird an dieser Stelle von der Radialspannung zur Radialverschiebung übergegangen. Aus der Beziehung für die radiale Verzerrung

$$\sigma_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_t)$$

folgt durch Einsetzen von $\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C$ und $\sigma_t = -\frac{A}{r^2} + 2C$

mit nachfolgender Integration nach r :

$$u = \frac{1}{E} \left\{ -(1+\nu) \frac{A}{r} + 2(1-\nu) C r \right\}$$

Je nachdem um welches der drei Gebiete $a \leq r \leq a_1$; $a_1 \leq r \leq b_1$; $b_1 \leq r \leq b$ es sich handelt, sind für A und C die entsprechende Konstantepaare A und C einzusetzen. Aus der Forderung, daß das Ringmaterial an den Stellen $r=a_1$ und $r=b_1$ nicht reißen soll, d.h. daß an diesen Stellen gelten soll $u(a_1, E_1) = u(a_1, E_2)$ und $u(b_1, E_2) = u(b_1, E_1)$ ergeben sich dann zwei Gleichungen, die die Berechnung von x und y gestatten. Ohne auf die elementare aber etwas umfangreiche Rechnung einzugehen, werden im Folgenden die Ausdrücke für σ_r , σ_t , und u mitgeteilt, mit deren Hilfe die Kontrollrechnungen durchgeführt worden sind.

Für $a \leq r \leq a_1$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{a^2 a_1^2 (x - p_i)}{a_1^2 - a^2} + \frac{p_i a^2 - x a_1^2}{a_1^2 - a^2} \\ \sigma_t &= - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{a^2 a_1^2 (x - p_i)}{a_1^2 - a^2} + \frac{p_i a^2 - x a_1^2}{a_1^2 - a^2} \end{aligned} \quad (2-8)$$

$$u = \frac{1}{E_1} \left\{ - \frac{1+\nu}{r} \frac{(x - p_i) a^2 a_1^2}{a_1^2 - a^2} + (1-\nu) r \frac{p_i a^2 - x a_1^2}{a_1^2 - a^2} \right\}$$

$$E_1 = 2.1 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$$

Für $a_1 \leq r \leq b_1$

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{a_1^2 b_1^2 (y - x)}{b_1^2 - a_1^2} + \frac{x a_1^2 - y b_1^2}{b_1^2 - a_1^2}$$

$$\sigma_t = - \frac{1}{r^2} \frac{a_1^2 \cdot b_1^2 (y-x)}{b_1^2 - a_1^2} + \frac{x a_1^2 - y b_1^2}{b_1^2 - a_1^2}$$

$$u = \frac{1}{E_2} \left\{ - \frac{1+\nu}{r} \frac{a_1^2 b_1^2 (y-x)}{b_1^2 - a_1^2} + (1-\nu) r \frac{x a_1^2 - y b_1^2}{b_1^2 - a_1^2} \right\}$$

$$E_2 = 0.8 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$$

Für $b_1 \leq r \leq b$

(2-8)

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{b_1^2 b^2 (p_a - y)}{b^2 - b_1^2} + \frac{y b_1^2 - p_a b^2}{b^2 - b_1^2}$$

$$\sigma_t = - \frac{1}{r^2} \frac{b_1^2 b^2 (p_a - y)}{b^2 - b_1^2} + \frac{y b_1^2 - p_a b^2}{b^2 - b_1^2}$$

$$u = \frac{1}{E_1} \left\{ - \frac{1+\nu}{r} \frac{b_1^2 b^2 (p_a - y)}{b^2 - b_1^2} + (1-\nu) r \frac{y b_1^2 - p_a b^2}{b^2 - b_1^2} \right\}$$

$$E_1 = 2.1 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$$

$$x = \frac{r_1 a_{22} - r_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} ; \quad y = \frac{r_2 a_{11} - r_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Und

$$r_1 a_{22} = p_i \frac{2a^2 a_1^2 \{ b_1 E_1 (b^2 - b_1^2) (a_1^2 + b_1^2 + \nu (a_1^2 - b_1^2)) + b_1 E_2 (b_1^2 - a_1^2) (b^2 + b_1^2 + (b^2 - a_1^2)) \}}{E_1 (a_1^2 - a^2) E_1 E_2 (b_1^2 - a_1^2) (b^2 - b_1^2)}$$

$$r_2 a_{12} = -p_a \frac{4b_1^3 b^2 a_1}{E_1 E_2 (b^2 - b_1^2)(b_1^2 - a_1^2)}$$

$$r_2 a_{11} = p_a \frac{2b^2 b_1^2}{E_1 (b^2 - b_1^2)} \frac{E_2 a_1 (b_1^2 - a_1^2)(a_1^2 + a^2 + v(a^2 - a_1^2)) + E_1 a_1 (a_1^2 - a^2)(b_1^2 + a_1^2 + v(b_1^2 - a_1^2))}{E_1 E_2 (a_1^2 - a^2)(b_1^2 - a_1^2)}$$

"

$$r_1 a_{21} = -p_i \frac{4a_1^3 a^2 b_1}{E_1 E_2 (a_1^2 - a^2)(b_1^2 - a_1^2)}$$

Und

$$a_{11} = -\left\{ \frac{a_1}{E_1 (a_1^2 - a^2)} (a^2 + a_1^2 + v(a^2 - a_1^2)) + \frac{a_1}{E_2 (b_1^2 - a_1^2)} (b_1^2 + a_1^2 + v(b_1^2 - a_1^2)) \right\}$$

$$a_{12} = \frac{2b_1^2 a_1}{E_2 (b_1^2 - a_1^2)}$$

$$a_{21} = \frac{2 a_1^2 b_1}{E_2 (b_1^2 - a_1^2)}$$

$$a_{22} = - \frac{b_1 E_1 (b^2 - b_1^2)(a_1^2 + b_1^2 + v(a_1^2 - b_1^2)) + b_1 E_2 (b_1^2 - a_1^2)(b^2 + b_1^2 + v(b^2 - b_1^2))}{E_1 E_2 (b_1^2 - a_1^2)(b^2 - b_1^2)}$$

Die Größen $r_1 a_{22}, r_2 a_{12}, r_2 a_{11}, r_1 a_{21}, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sind reine Zahlen, die aus den Gegebenheiten des Problems zu berechnen /11/ sind. Die mit Hilfe dieser Beziehungen errechneten Verläufe für σ_r, σ_t , und die radiale Verschiebung u stimmen, wie die Abbil-

ung 11 ausweist, sehr gut mit den vom FEM-Packet ASKA berechneten Werte überein.

4. Vergleich mit den Messungen

Nach der in vorangegangenen beschriebenen Bestimmung eines reduzierten Elastizitätsmoduls für die Homogenisierung des rotationssymmetrischen Rechenmodells für den Schweißlippenprüfstand wurden die numerischen Rechnungen mit folgenden Eingabedaten durchgeführt:

$$E = 0.21 \times 10^8 \text{ N/cm}^2$$

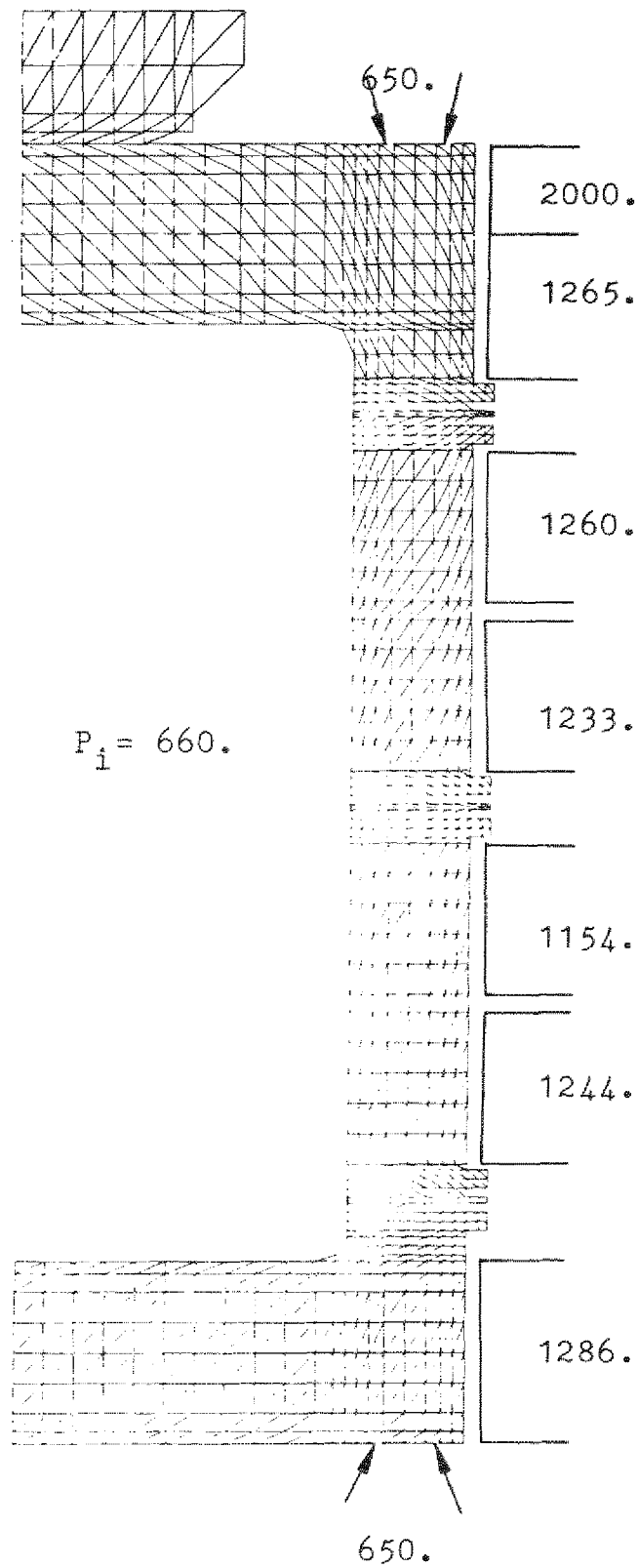
$$E_{\text{red.}} = 0.8 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$$

$$\nu = 0.3 \text{ Poisson'sche Querkontraktionszahl, bzw}$$

$$\nu_{\text{red.}} = 0.33$$

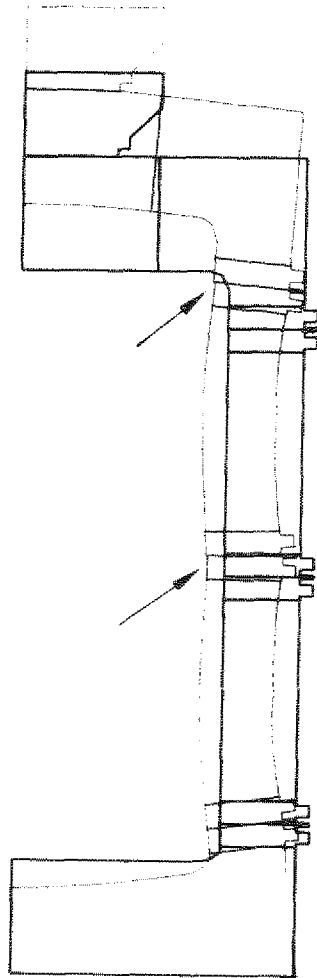
$$p_i = 660 \text{ N/cm}^2 \text{ Innendruck}$$

Die Vorspannungen sind aus der Abbildung (12a) zu entnehmen. Die Vorspannungen und der Innendruck wurden so eingegeben wie sie im Experiment tatsächlich vorkommen. Beim Aufbau des Netzes wurde von der Möglichkeit Gebrauch gemacht, die Unterstrukturen so zu wählen, daß die Blöcke an den Schweißlippen aufeinander rutschen können. Auf diese Weise wird eine bessere Simulation gewährleistet da die Schweißlippen tatsächlich nur zur Dichtung dienen. Dieses Verhalten ist aus Abbildung 12b zu erkennen, in der die Verschiebungen über der Kontur der Unteretze aufgetragen sind. Man erkennt, daß für den Druck von 66 bar keine Klaffung zwischen den Blöcken stattfindet. In den Abbildung 13 und 14 sind die gerechneten Tangential- und Axialspannungen mit den Messergebnissen aufgetragen. Die gestrichelten Kurven stellen in beiden Abbildungen die Ergebnisse der Finiteelementerechnung dar, während die mit Stern markierten Punkten den Messergebnissen entsprechen. Obwohl die Übereinstimmung im Großen und Ganzen zufriedenstellend ist, gibt es an einigen Punkten doch relativ große Abweichungen. Diese Abweichungen sind vorallem auf die vereinfachende Annahme der Rotationssymmetrie zurückzuführen. So ist im rotationssymmetrischen Modell die Umfangspannung über den Umfang gleichmäßig



Belastungen am Gesamtmodell- Alle Zahlen in N/cm²

Abb. 12a



Verschiebungen am Gesamtmodell

Abb.12b

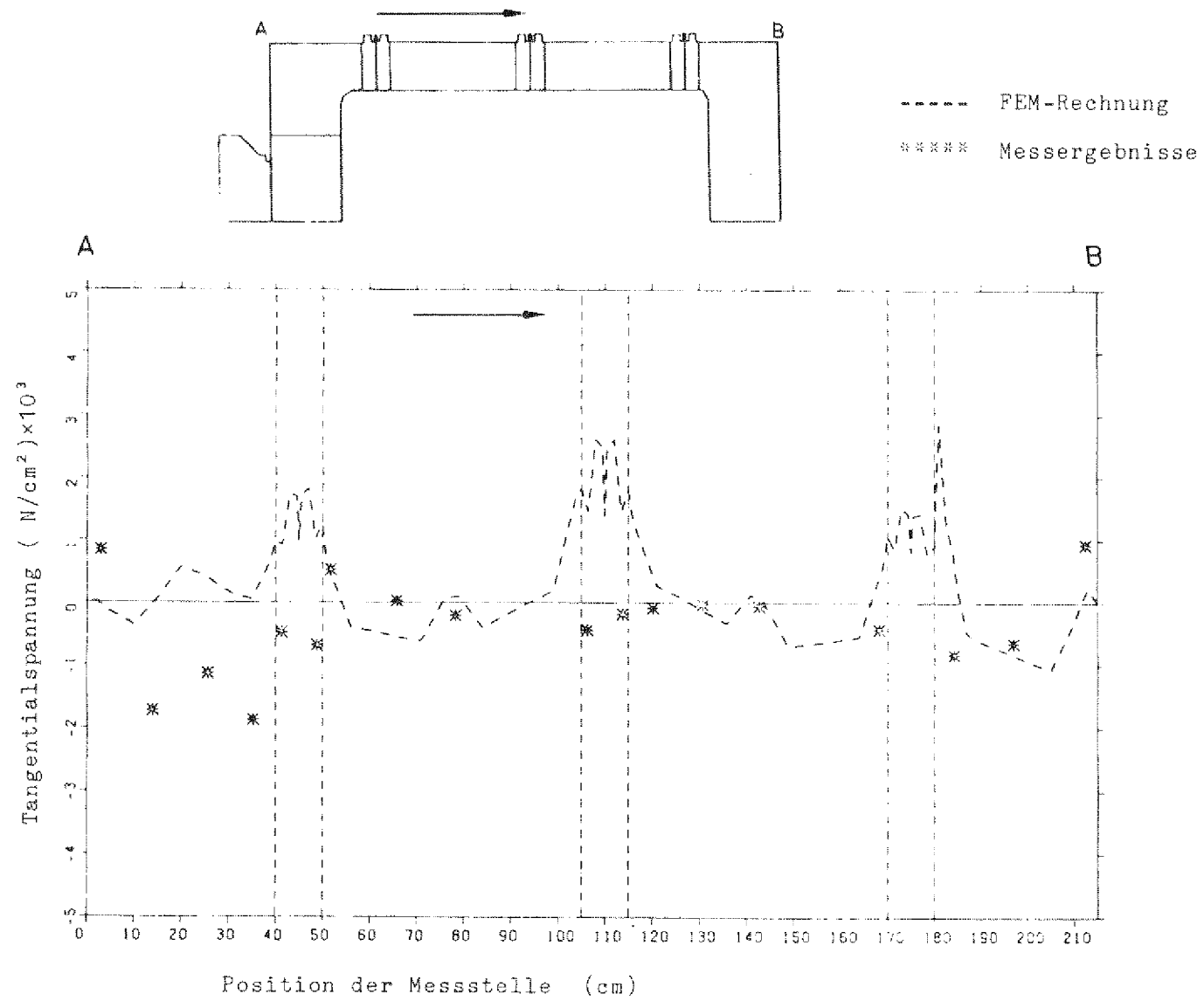
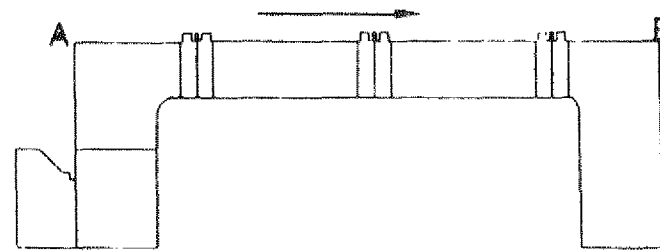


Abb. 13



----- FEM-Rechnung
 ***** Messergebnisse

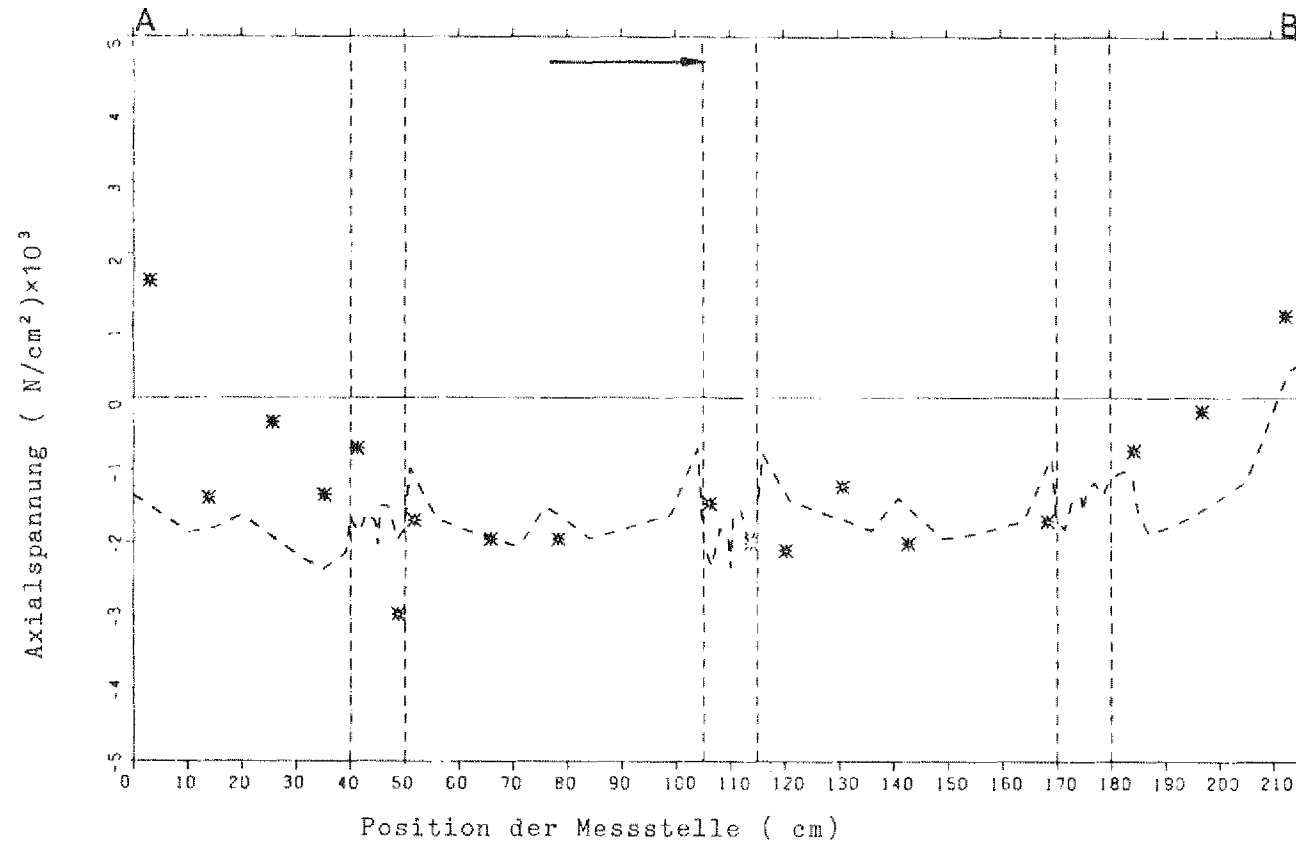


Abb. 14

verteilt, wo hingegen beim Experiment die Messungen zwischen den einzelnen Kabelschuhen vorgenommen werden. Dieser Effekt wird besonders deutlich im Bereich der Boden und Deckelplatte, wo eine große Vorspannung herrscht.

5. Spannungen an Boden- und Deckelplatte.

Der Übergang von den allgemeinen rotationssymmetrischen Gleichungen in den Spannungen zur Plattentheorie der kleinen Durchbiegungen geschieht mit Hilfe der üblichen vereinfachenden Annahmen der Kirchhoffschen Plattentheorie:

- 1) Die Platte wird nicht zusammengepresst.
- 2) Die Normalen der Mittelebene der Platte bleiben auch nach der Deformation Normalen der Mittelebene (die Platte verwölbt sich nicht).
- 3) Die Normalspannung σ_z kann neben den Normalspannungen σ_y und σ_x bzw, σ_r und σ_ϕ vernachlässigt werden.

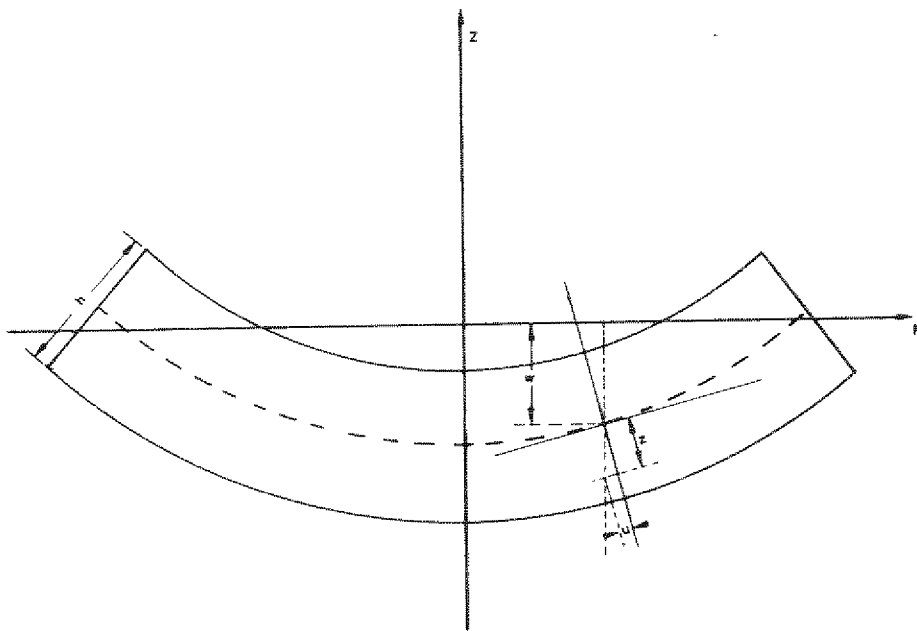


Abb. 15

Mit diesen Voraussetzungen ergibt sich für die Kreisplatte auf Grund des Hookeschen Gesetzes:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\phi) \\
 2) \quad \varepsilon_\phi &= \frac{u}{r} = \frac{1}{E} (\sigma_\phi - \nu \sigma_r) \quad (2-9) \\
 3) \quad \varepsilon_z &= \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_r + \sigma_\phi)
 \end{aligned}$$

Der Abbildung 15 entnimmt man, daß für kleine Durchbiegungen die Gleichung besteht:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial r} \quad (2-10)$$

Diese Gleichung ermöglicht es, alle interessierenden Größen mit Hilfe der axialen Verschiebung w auszudrücken. Aus den beiden Gleichungen für ε_r und ε_ϕ folgt, indem man nach σ_r und σ_ϕ auflöst

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \\
 \sigma_\phi &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)
 \end{aligned} \quad (2-11)$$

kennt man demnach die axiale Auslenkung w in Abhängigkeit vom Plattenradius r , kann man σ_r, σ_ϕ sowie die Momente M_r, M_ϕ und die Querkraft Q_r ausrechnen, weil M_r und M_ϕ den Definitionsgleichungen

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z \, dz \quad \text{und} \quad M_\phi = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\phi z \, dz \quad (2-12)$$

genügen. Für Q_r folgt aus dem Momentengleichgewicht für die vertikalen Kräfte am Plattenelement:

$$Q_r = - N \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right\} \quad (2-13)$$

Aus dem Momentengleichgewicht für die Momente M_r und M_ϕ und dem Moment der vertikalen Kräfte am Plattenelement ergibt sich schließlich die bekannte Plattengleichung:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right) \right\} = \frac{\rho(r)}{N} \quad (2-14)$$

$N = \text{Plattensteifigkeit} = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ mit h als Plattendicke.

Es handelt sich um eine gewöhnliche, lineare inhomogene Differentialgleichung von 4. Ordnung. Ihre Lösung besteht aus einem partikulären Integral und allen Lösungen der homogenen Gleichung

$$w^4(r) + \frac{2}{r} w'''(r) - \frac{1}{r^2} w''(r) + \frac{1}{r^3} w'(r) = 0 \quad (2-15)$$

Zur Gewinnung eines partikulären Integrals der Differentialgleichung (2-14) spaltet man die Gleichung 4. Ordnung unter Benutzung der Momentensumme $M = (M_r + M_\phi)/(1+\nu)$ auf in zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dM}{dr} \right) = -p \quad \text{und} \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{M}{N} \quad (2-16)$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt:

$$r \frac{dM}{dr} = -p(r) r dr, \quad \text{und daraus folgt:}$$

$$M = - \int_0^r \frac{1}{\rho} \left(\int_0^\rho \rho(r) r dr \right) d\rho$$

Wegen der gleichmäßigen Belastung also

$$M = p_o \int_0^r \frac{1}{2} \rho \, d\rho = - \frac{1}{4} p_o r^2$$

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = - \frac{1}{4} p_o r^2 \frac{1}{N}$$

Zweimalige Integration nach r ergibt für das partikuläre Integral der inhomogenen Differentialgleichung für w :

$$w_o = \frac{1}{64} p_o r^4 \frac{1}{N} = \frac{p_o r^4}{64} \frac{12(1-\nu^2)}{E h^3}$$

$$w_o = \frac{3}{16} \frac{p_o r^4 (1-\nu^2)}{E h^3} \quad (2-17)$$

Die Integration der homogenen Gleichung liefert, da die Lösung auch für $r=0$ endlich bleiben muß

$$w_{hom} = c_1 + c_2 r^2$$

Die Lösung lautet also

$$w = \frac{3}{16} \frac{p_o r^4 (1-\nu^2)}{E h^3} + c_1 + c_2 r^2 \quad (2-18)$$

c_1 und c_2 sind aus den Randbedingungen zu bestimmen. Für die vorliegende Untersuchung genügt es, die Randbedingungen für die freigelagerte, die weich eingespannte und die fest eingespannte Kreisplatte zu untersuchen. Es wird sich herausstellen, daß sich diese drei Fälle in einer einzigen Gleichung mit Hilfe eines dimensionslosen Parameters A zusammenfassen lassen.

Die Randbedingungen für die frei gelagerte Kreisplatte:

An der Stelle $r=a$ muß gelten

1) $\sigma_r = 0$ und 2) $w(a) = 0$ daraus folgen die beiden Gleichungen

$$\frac{3}{16} \frac{p_o a^2 (1-\nu^2)}{E h^3} + \frac{3}{16} \frac{4 p_o a^2 (1-\nu^2) \nu}{E h^3} + (1+\nu) 2 c_2 = 0$$

$$\frac{3}{16} \frac{p_o a^4 (1-\nu^2)}{E h^3} + c_1 + c_2 a^2 = 0$$

Aus den beiden Gleichungen folgt:

$$c_1 = \frac{3}{16} \frac{(5+\nu)(1-\nu^2)}{1+\nu} \frac{p_o a^4}{E h^3}$$

$$c_2 = - \frac{3}{8} \frac{(3+\nu)(1-\nu^2)}{1+\nu} \frac{p_o a^2}{E h^3}$$

Für w hat man so im Falle der freigelagerten Kreisfläche

$$w = \frac{3}{16} \frac{p_o r (1-\nu^2)}{E h} + \frac{3}{16} \frac{(5+\nu)(1-\nu^2)}{1+\nu} \frac{p_o a^4}{E h} + \frac{3}{8} \frac{(3+\nu)(1-\nu^2)}{1+\nu} \frac{p_o a^2 r^2}{E h^3}$$

Die Randbedingungen für die festeingespannte Platte lauten:

$$w(a) = 0 \text{ und } \left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=a} = 0$$

Es folgen die beiden Gleichungen:

$$\frac{3}{16} \frac{p_o a^4 (1-\nu^2)}{E h^3} + c_1 + c_2 a^2 = 0$$

$$\frac{3}{4} \frac{p_o a^3 (1-\nu^2)}{E h^3} + 2c_2 a = 0$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$c_1 = \frac{3}{16} \frac{p_o a^4 (1-\nu^2)}{E h^3} \quad \text{und} \quad c_2 = - \frac{3}{8} \frac{p_o a^2 (1-\nu^2)}{E h^3}$$

Für die Auslenkung w in axialer Richtung hat man:

$$w = \frac{3}{16} \frac{p_o r^4 (1-\nu^2)}{E h^3} + \frac{3}{16} \frac{p_o a^4 (1-\nu^2)}{E h^3} - \frac{3}{8} \frac{p_o a^2 r^2 (1-\nu^2)}{E h^3}$$

Aus dem vorangegangenen entnimmt man leicht als Randbedingungen für " weiche" Einspannung

$$1) w(a) = 0$$

$$2) \left. \frac{dw(r)}{dr} \right|_{r=a} = -A \frac{3}{2} \frac{p_o (1-\nu^2) a^3}{E h^3} \frac{1}{1+\nu}$$

Mit $0 < A < 1$. Die Rechnung ergibt:

$$w = \frac{3}{16} \frac{p_o (1-\nu^2)}{E h^3} \left\{ r^4 + \frac{1+\nu+4A}{1+\nu} a^4 - 2 \frac{1+\nu+2A}{1+\nu} a^2 r^2 \right\} \quad (2-19)$$

Mit $0 \leq A \leq 1$ hat man, wie bereits angekündigt, die freie, die feste, und die weiche Einspannung in einer Gleichung zusammengefaßt. Für die Spannungen σ_r und σ_t folgt:

$$\sigma_r = \frac{3}{8} \frac{p}{h^2} \{ a^2 (1+\nu+2A) - r^2 (3+\nu) \} \quad (2-20)$$

$$\sigma_t = \frac{3}{8} \frac{p}{h^2} \{ a^2 (1+\nu+2A) - r^2 (1+3\nu) \} \quad (2-21)$$

Die beiden folgenden Abbildungen zeigen das Verhalten der Bodenplatte des Druckbehälters unterteilt in Radialspannung (Abb. 16) und Tangentialspannung (Abb. 17) . Beide Abbildungen gelten für den Spannungszustand ohne Vorspannung und mit einer Oberflächenbelastung von 66 bar. Die **** Kurve wurde mit dem Programmpaket ASKA berechnet und die gestrichelten Kurven mit Hilfe von (2-20) und (2-21) nach der Kirchhoffschen Plattentheorie mit dem Einspannungsfaktor $A = 0,15$. Man erkennt, daß die lineare Plattentheorie zwischen $r=0$. und $r=55$. cm in guter Übereinstimmung mit der numerischen Rechnung steht. An der Stelle $r=55$. cm beginnt der Einfluß des Behältermantels der von dieser Stelle an bis $r=75$. cm auf der Bodenplatte aufsitzt. Vor der Stelle $r=55$.cm an genügt die einfache Annahme, daß $A = 0,15$ sei, nicht mehr. Man hätte vielmehr mit variablem

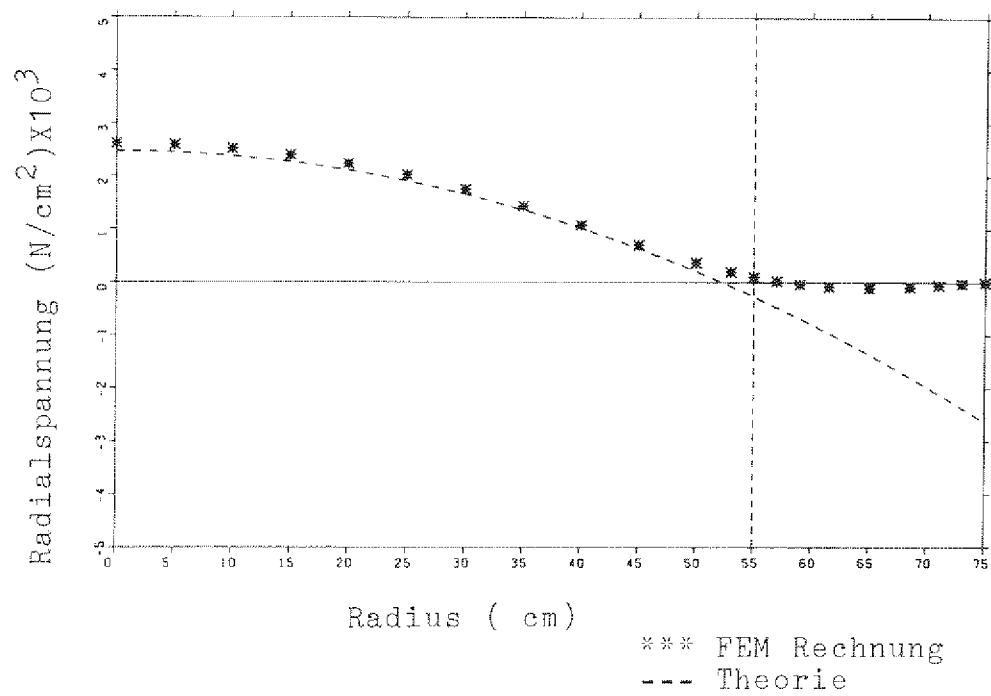


Abb.16

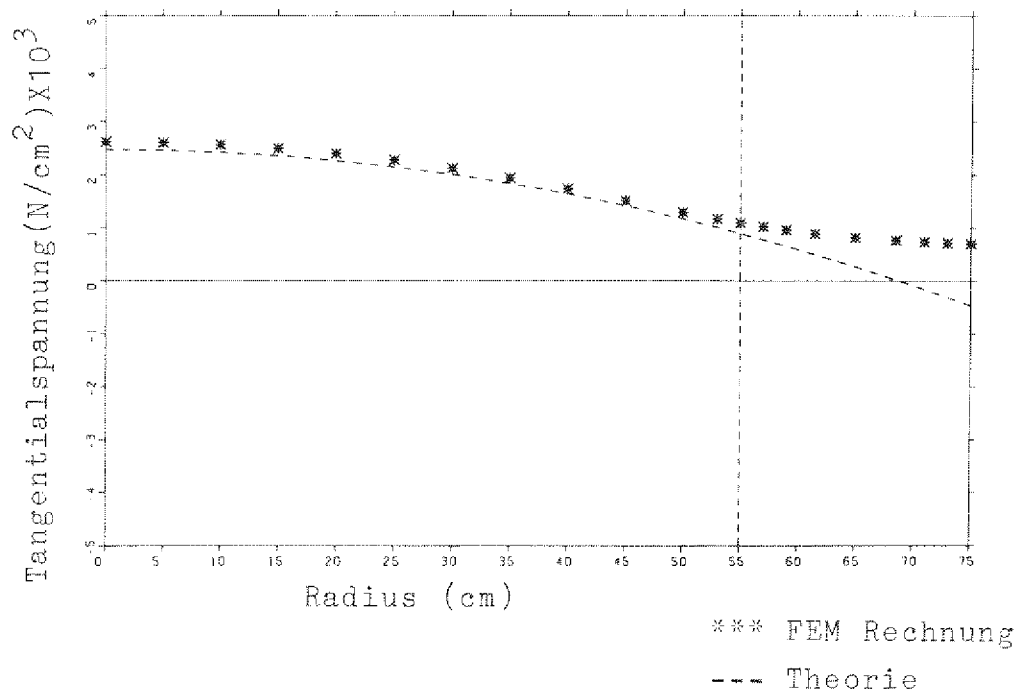
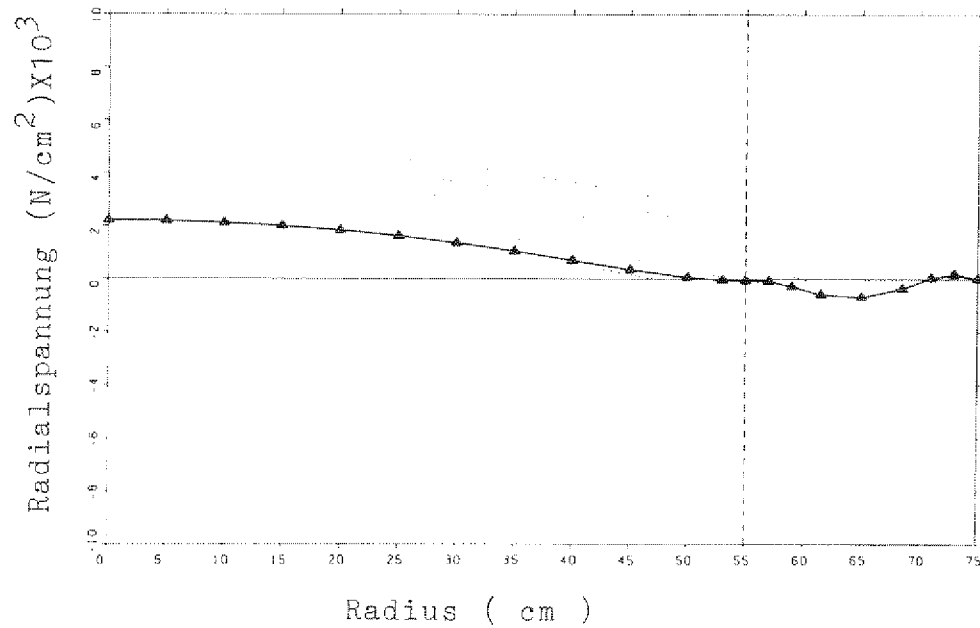


Abb. 17

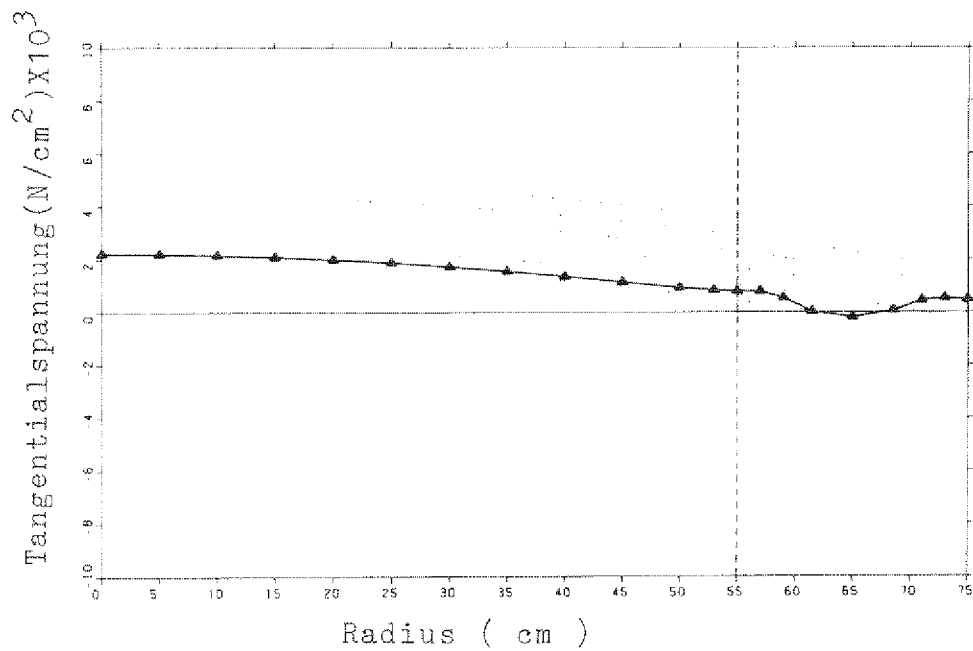
A zu rechnen. Das gilt sowohl für σ_r als auch für σ_t . Den Funktionsverläufe von σ_r und σ_t entnimmt man, daß sich zwischen $r=55$ cm und $r=75$ cm die radiale Spannung der Bodenplatte wie bei einer festeingespannte Platte verhält, d.h. der Einspannfaktor A der linearen Plattentheorie wird eine Funktion von r, die man an Hand der Kurvenläufe näherungsweise berechnen könnte. Für die tangential Spannung σ_t gelten analoge Überlegungen. Bemerkenswert ist, daß von $r=55$ cm ab der Einspannfaktor für σ_r verschieden von dem für σ_t wird, die lineare Plattentheorie die Verhältnisse also nicht mehr exakt beschreibt.

Die Abbildungen 18 und 19 unterscheiden sich von den Abbildungen 16 und 17 dadurch, daß bei der Rechnung mit dem Programmpaket ASKA die Vorspannungen mitberücksichtigt wurden. Dabei zeigt sich im Bereich des reduzierten E-Moduls, durch den die Bohrungen simuliert werden, anfangs der Übergang von Zug- zu Druckspannung und weiter zum Plattenrand zu wieder der Übergang von Druck- zur Zugspannung. Wenn auf eine exakte Wiedergabe der Spannungsverläufe in der Bodenplatte mit Hilfe der Kirchhoffschen Plattentheorie nicht zu erwarten ist, so zeigen die Betrachtungen gleichwohl den Wert der linearen Plattentheorie zur Kontrolle der numerischen Ergebnisse. Dieser Kontrollmöglichkeit zuliebe wurden in den Abbildungen 18 und 19 auch die analytische Spannungsverläufe nach (2-20) und (2-21) mit den Grenzwerten $A=0$ und $A=1$ sowie vier Zwischenwerte eingetragen. Die Abbildungen 20 und 21 zeigen den Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den gemessenen Spannungen. Während die Übereinstimmung im Bereich von $r=55$ cm bis $r=75$ cm befriedigend ist, sind die Abweichungen im Bereich $0 < r < 55$ offenbar größer.



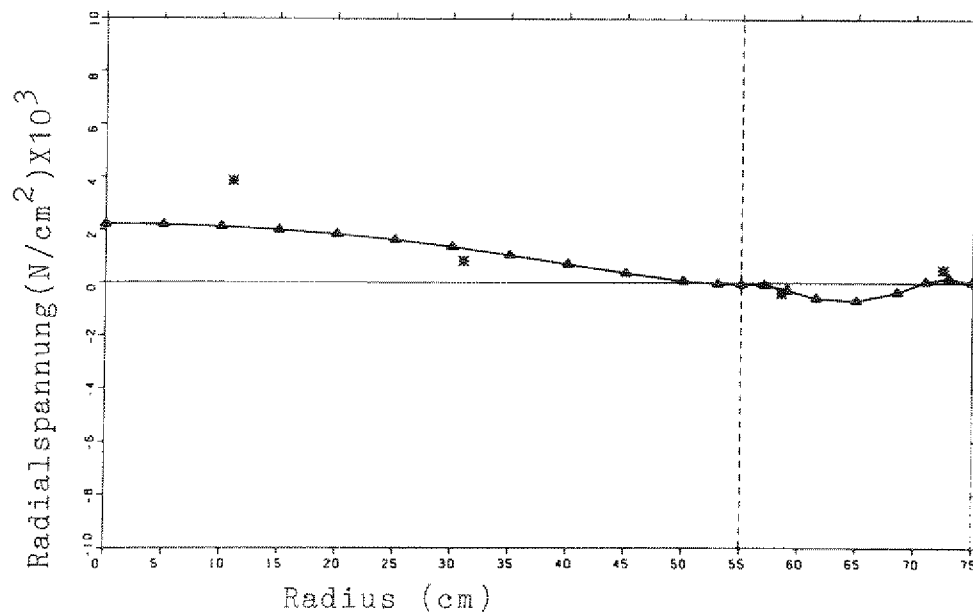
Innendruck: 66 Bar_Mit Vorspannung *** FEM Rechnung
 Theorie

Abb. 18



Innendruck: 66 Bar-Mit Vorspannung *** FEM Rechnung
 ... Theorie

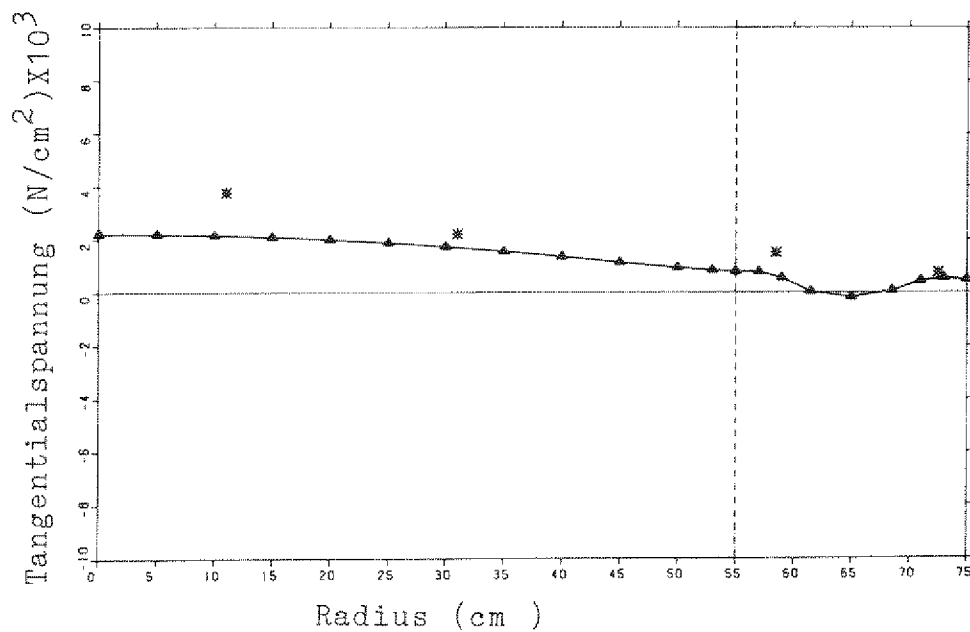
Abb. 19



*** Experiment
 x-x-x FEM Rechnung

Innendruck: 66 Bar- Mit Vorspannung

Abb. 20



*** Experiment
 -x-x FEM Rechnung

Innendruck: 66 Bar - Mit Vorspannung

Abb. 21

KAPITEL III

1. Grundgleichungen

In diesem Kapitel wollen wir die Auswirkungen eines Temperaturgradienten beim VSGB näher untersuchen. Bekanntlich entstehen durch ein Temperaturgradient Wärmespannungen, die zur Gesamtspannung beitragen. Wenn $\Theta(x,y,z)$ die Temperaturänderung gegenüber einem spannungslosen Zustand ist, und α der Wärmeausdehnungskoeffizient, so erfährt ein Element des als homogen vorausgesetzten Körpers in den Achsenrichtungen im isotropen Fall die allseitig gleiche Temperaturdehnung $\alpha\Theta$. Dementsprechend kann man Gleichung (1-9) explizit schreiben:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \} + \alpha\Theta \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} \{ \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \} + \alpha\Theta \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \} + \alpha\Theta\end{aligned}\quad (3-1)$$

Um den Temperaturverlauf zu ermitteln, muß zunächst die Poissonsche Gleichung gelöst werden. Sie lautet für den stationären Fall:

$$\nabla^2 \Theta(x,y,z) + \frac{w(x,y,z)}{\lambda} = 0 \quad (3-2)$$

wobei $\Theta(x,y,z)$ die Temperatur bedeutet, $w(x,y,z)$ die Wärmequelle, bzw. die Wärmesenke und λ die Wärmeleitfähigkeit. Bei der Differentialgleichung (3-2) sind drei Arten von Randbedingungen zu unterscheiden:

- a) Die Temperatur an der Berandung des Körpers ist vorgegeben (Dirichlet).
- b) Die Wärmestromdichte $q_w = -\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial n}$ an der Oberfläche des Körpers ist vorgegeben (Von Neumann). Hier ist n die Normale zur Oberfläche.
- c) Der Wärmeübergang $q_w = \alpha(\Theta_\infty - \Theta_w)$ an der Wand ist vorgegeben. Die Konstante α hat in diesem Fall die Bedeutung des Wärmeübergangskoeffizients, während $\Theta_\infty - \Theta_w$ der Temperaturunterschied zwischen der Wand und einem fluiden Medium darstellt. /14/, /15/, /16/, /17/, /20/

Für den allgemeinsten Fall der gemischten Randbedingungen (c) läßt sich die Gleichung (3-2) aus folgenden Variationsprinzip herleiten:

$$\delta F = \delta \int_V \left\{ \frac{\lambda}{2} (\nabla \Theta)^2 - w \Theta \right\} dV - \delta \int_S \frac{\alpha}{2} (\Theta - \Theta_o)^2 ds = 0 \quad (3-3)$$

Mit dieser Form haben wir bereits den Ausgangspunkt für die Anwendung der Methode der finiten Elemente.

2. Finite Elemente Methode (FEM) zur Lösung der Poissonsche Gleichung.

Die Gleichung (3-2) stellt nur einen spezial Fall von Gleichung (1-11) mit dem Differentialoperator $A = \nabla^2$ dar. Anstelle des Verschiebungsvektor $\vec{u}$ haben wir mit dem Skalar Θ zu tun und anstelle der Vektorfunktion $\vec{k}$ haben wir die skalare Funktion w/λ . Nachdem wir den Raum in finiten Elemente unterteilt haben, machen wir einen ähnlichen Ansatz wie in Gleichung (1-18), d.h. im Element gilt:

$$\Theta(x,y,z) = \{N_i, N_j, N_k\} \cdot \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{bmatrix} = N \cdot T_e \quad (3-4)$$

Wobei jetzt T_e der Vektor der Knotenpunkttemperaturen des Elements e darstellt. Den Gradientenoperator lässt sich ersetzen durch:

$$\nabla \Theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_k}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot T_e = B \cdot T_e \quad (3-5)$$

Analog zur Gleichung (1-26) kann man den Vektor T_e durch den globalen Vektor T für die Temperatur an allen Knotenpunkten des Netzes mit Hilfe von Booleschen Matrizen ausdrücken:

$$T_e = a_e \cdot T \quad ; \quad \text{und} \quad \bar{B} = B \cdot a_e \quad (3-6)$$

Wenn man die Beziehungen (3-4), (3-5) und (3-2) in die Gleichung (3-2) einsetzt, erhält man eine zu (1-27) analoge Gleichung:

$$L \cdot T = Q \quad (3-7)$$

Wobei

$$L = \sum_e L_e \quad ; \quad L_e = \int_{V_e} \bar{B}^t \lambda \bar{B} dV \quad (3-8)$$

L_e wird Konduktivitätsmatrix genannt und spielt eine wie die Steifigkeitsmatrix analoge Rolle. Die auf der rechten Seite der Gleichung (3-7) stehenden Belastungen lassen sich wie folgt zusammenschreiben:

$$Q = Q_V + Q_S$$

$$Q_V = \sum Q_{V_e} = \sum_e \int_{V_e} w \bar{N}^t dV \quad (3-9)$$

$$Q_S = \sum Q_{S_e} = -\sum_e \int_{S_e} \bar{N}^t \bar{N} (T_e - T_o) dS$$

Q_V wird als "Volumenstrom" in der Fachliteratur bezeichnet und entspricht einer Wärmequellendichte.

Q_S hat die Bedeutung von Flächenströmen an der Grenzfläche des Körpers infolge von Wärmeübergängen.

Im Grunde unterscheidet sich der Aufbau eines FEM Programmpakets für die Berechnung von Temperaturen nur sehr wenig von einem für die Berechnung von Spannungen. Bei Temperaturrechnungen wird mit der Konduktivitätsmatrix gearbeitet anstelle der Steifigkeitsmatrix. Die Belastungen werden in Form von "Strömen" eingegeben, ansonsten ist die Mathematik dieselbe. Für die vorliegende Arbeit wurde der Teil II des Programmpakets SMART benutzt. /21/

3. Analytische Kontrollrechnung

Zur Überprüfung der Rechnungen wollen wir, wie im vorigem Kapitel, einen Vergleich mit bekannten Lösungen für ideale Fälle stellen. Für ein unendlich langes Rohr (Abb.22) nimmt

die Gleichung (3-2) die einfache Form an:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{w(r)}{\lambda} = 0 \quad (3-10)$$

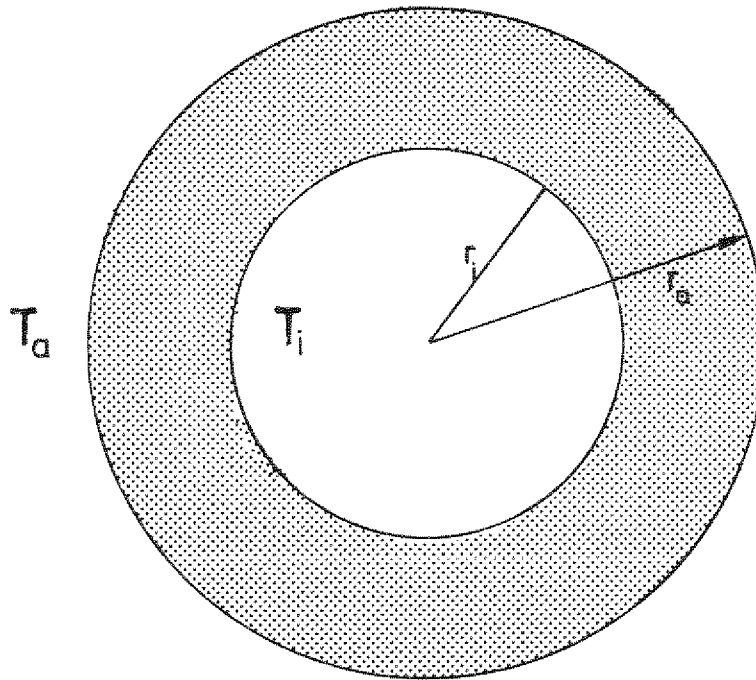


Abb. 22

Mit den Randbedingungen:

$$T(r_i) = T_i \quad \text{und} \quad T(r_a) = T_a \quad (3-11)$$

Die Gleichung (3-10) lässt sich direkt integrieren. Die Lösung lautet:

$$T(r) = T_o(r) + \frac{W_{ab}}{\lambda} \frac{\ln(r/r_i)}{\ln(r_a/r_i)} - \frac{1}{\lambda} \int_{r_i}^r \frac{\tilde{W}(r')}{r'} dr' \quad (3-12)$$

Wobei:

$$T_o(r) = T_i + \frac{(T_a - T_i) \ln(r/r_i)}{\ln(r_a/r_i)} \quad (3-13)$$

$T_o(r)$ ist eine Lösung der homogenen Gleichung $\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0$

mit den gleichen Randbedingungen, und

$$\tilde{W}(r) = \int_{r_i}^r r' W(r') dr' \quad W_{ab} = \int_{r_i}^{r_a} \frac{\tilde{W}(r')}{r'} dr'$$

Im Falle einer konstanten Wärmequelle $W(r) = W_o$, lautet die Lösung:

$$T(r) = T_o(r) - \frac{W_o (r^2 - r_i^2)}{4\lambda} + \frac{W_o}{4\lambda} \frac{(r_a^2 - r_i^2)}{\ln(r_a/r_i)} \ln(r/r_i) \quad (3-14)$$

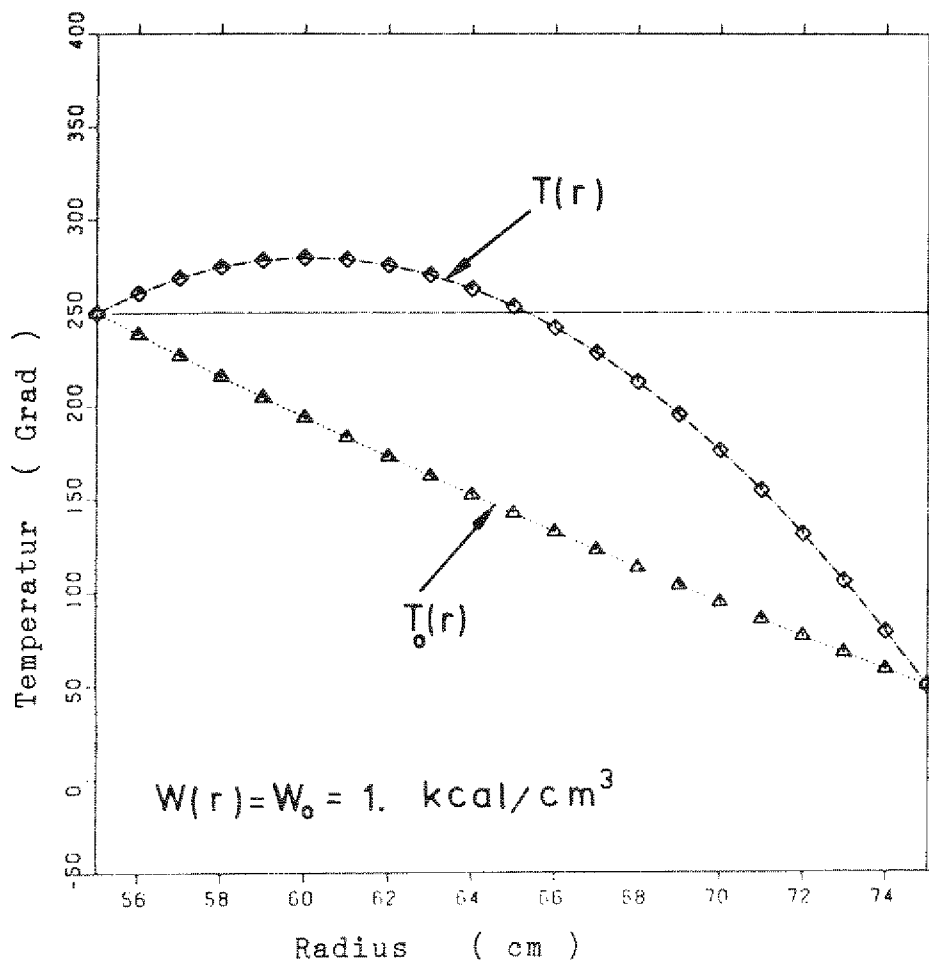
In Abb. 23 sind die Funktionen T_o und $T(r)$ für eine konstante Wärmequelle $W(r) = W_o = 1.0 \text{ Kcal/cm}^3$ dargestellt und mit den Werten verglichen die mit einem FEM Modell gerechnet worden sind.

4. Die Wärmequelle infolge Gammastrahlung.

Der Grund dafür, daß wir eine zusätzliche Wärmequelle $W(r)$ in unseren Überlegungen miteinbezogen haben liegt darin, daß es durch die Absorption von γ -Strahlung Wärme in den Wänden des Behälters erzeugt wird. Die Berechnung der Quellenstärke ist eine rechtkomplizierte Aufgabe, die nicht in den Rahmen dieser Arbeit fällt. In der Innenwand, etwa in der Mitte des Behälters, läßt sich diese Quelle durch die Formel: /15/, /18/, /19/

$$W(r) = W_0 e^{-\mu r}$$

beschreiben. Hier ist μ der lineare Absorptionskoeffizient und $W_0 \cdot \mu$ der Gammafluß an der inneren Behälterwand.



- Analytische Lösung (3-13)
- Analytische Lösung (3-12)
- ◇◇◇ Rechnung mit FEM
- △△△

Abb. 23

Der Einfachheit halber haben wir für unsere Rechnungen eine konstante Wärmequelle im Inneren des Behälters gewählt $W_0 = 1,0 \text{ Kcal/cm}^3 \cdot \text{h}$. Diese Quelle entspricht einem Gammafluß von

$$I_\gamma = W_0 \cdot \mu \approx 10^{12} \text{ Mev/cm}^3 \cdot \text{s}$$

5. Temperaturverlauf und Wärmespannungen mit FEM.

Mit einem Modell wie in Abb.2 werden die Temperaturen an allen Knotenpunkten gerechnet. Die verwendeten Netze sind topologisch identisch aber die Elemente sind sogenannte Diffusions-elemente, d.h. statt einer Steifigkeitsmatrix besitzen diese Elemente eine Konduktivitätsmatrix. Abb.24 zeigt die Isolinien der Temperatur an unserem Modell. Mit den Knotenpunkttemperaturen werden, durch Eingabe des Ausdehnungskoeffizienten α , die zugehörigen Dehnungen gerechnet, und diese werden wiederum mittels eines Prozessors als Anfangsdehnungen in die elastische Rechnung eingegeben.

Da wir es mit einem rein stationären Fall zu tun haben, ist es nicht notwendig die Bohrungen zu berücksichtigen. Wir nehmen schlicht hin an, daß die Bohrungen in keiner Weise die Konduktivität beeinträchtigen.

6. Elastische Grenze in Abhängigkeit der Temperatur.

Im Folgenden werden wir das Verhalten des Behälters bezüglich der elastischen Grenze in Abhängigkeit vom Temperaturgradient untersuchen. Erst ohne Wärmequelle und dann mit einer konstanten Wärmequelle der Stärke 1,0. Dazu bedienen wir uns einer Größe, die als Reservespannungsfaktor bezeichnet wird (YLOAD). Dabei wird für jedes Unternetz die größte Vergleichsspannung und der zu ihr gehörende Knotenpunkt ermittelt. Die Größe YLOAD gibt an, mit welchem Faktor die größte Vergleichsspannung multipliziert werden muß, um die Fließgrenze zu erreichen. Solange wir im linearen Bereich bleiben ist dieser

ISOTHERME FÜR ALLE UNTERNETZE

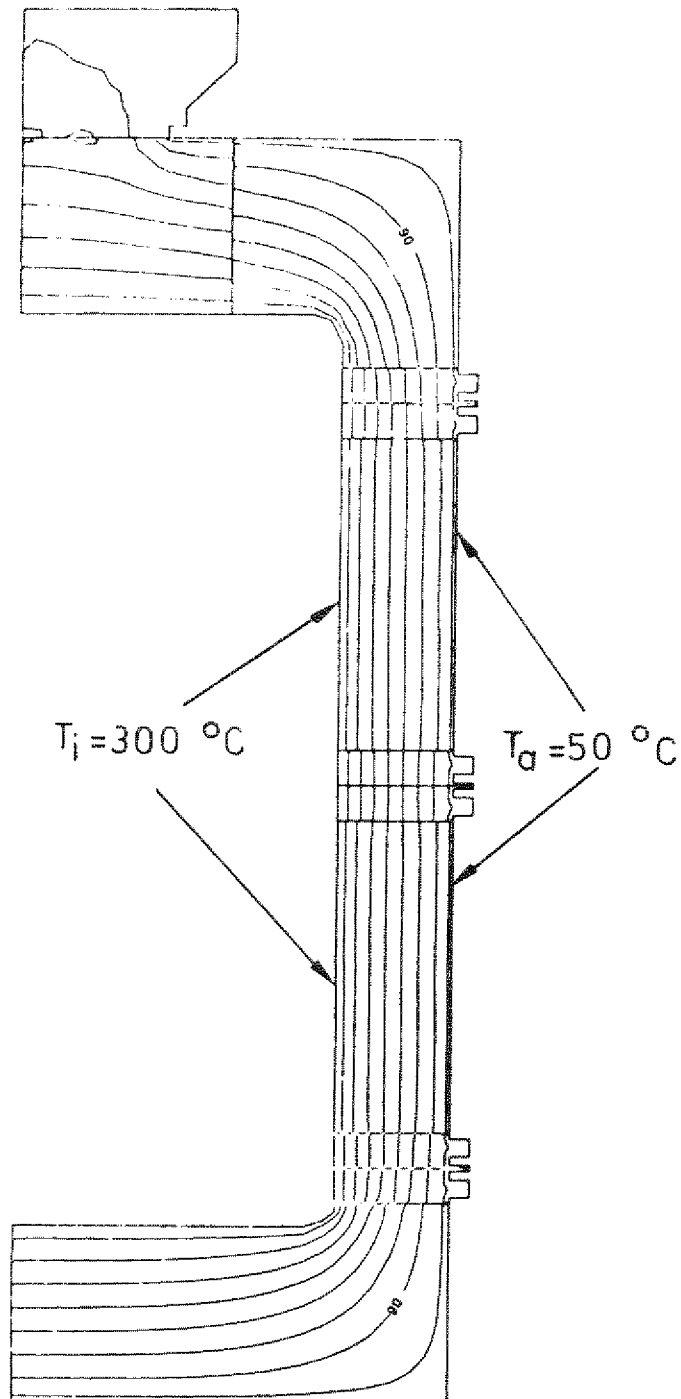


Abb. 24

Faktor zugleich Multiplikationsfaktor für die maximale Belastung bevor die elastische Grenze erreicht wird.

In Abb. 25 sind Knotenpunkte an denen die maximale Spannung erreicht wurde zusammen mit den entsprechenden Werten von YLOAD eingezeichnet. YLOAD ist dabei eine Funktion des Temperaturgefälles ΔT zwischen Behälterinnenwand und Behälteraußenwand. Zu jedem vorgegebenen ΔT gibt es einen YLOAD-faktor. Der für YLOAD in Abb. 25 angegebene Wert entspricht einer Temperaturdifferenz $\Delta T = 50^\circ\text{C}$ zwischen Behälterinnenwand und Behälteraußenwand, wobei $T_{\text{auß.}}$ konstant, auch für die folgenden Rechnungen, auf 50°C festgelegt wurde. Je größer $\text{YLOAD} = \text{YLOAD}(\Delta T)$ ist, um so weiter ist man von der elastischen Grenze entfernt und je kleiner YLOAD ist, um so näher ist man der elastischen Grenze. Das Verhalten von YLOAD an den einzelnen Punkten einer Struktur spiegelt also sehr genau das Verhalten der Struktur in Abhängigkeit von ΔT wieder, soweit es sich um den Übergang vom elastischen zum Fließbereich handelt. Der Verlauf von YLOAD als Funktion von ΔT ist in den Abb. 26 und 27 dargestellt; in Abb. 26 ohne Wärmequelle infolge Gammastrahlung, in Abb. 27 mit Wärmequelle. Wie man sieht, bewirkt die Wärmequelle eine Verringerung des YLOAD-faktors. Man erkennt unmittelbar den im Vergleich zum Punkt B großen Einfluß der Gammastrahlung in den Punkten A und C. Der Einfluß der Gammastrahlung kann also nicht vernachlässigt werden. Bemerkenswert ist ferner, daß er besonders deutlich im Deckel- und Bodenbereich hervortritt. Bei einem $\Delta T = 400^\circ\text{C}$ erreicht der Behälter in den Punkten A und C die Fließgrenze.

Punkte wo die elastische
Grenze am ehesten erreicht
wird und Werte des Reserve-
spannungsfaktor

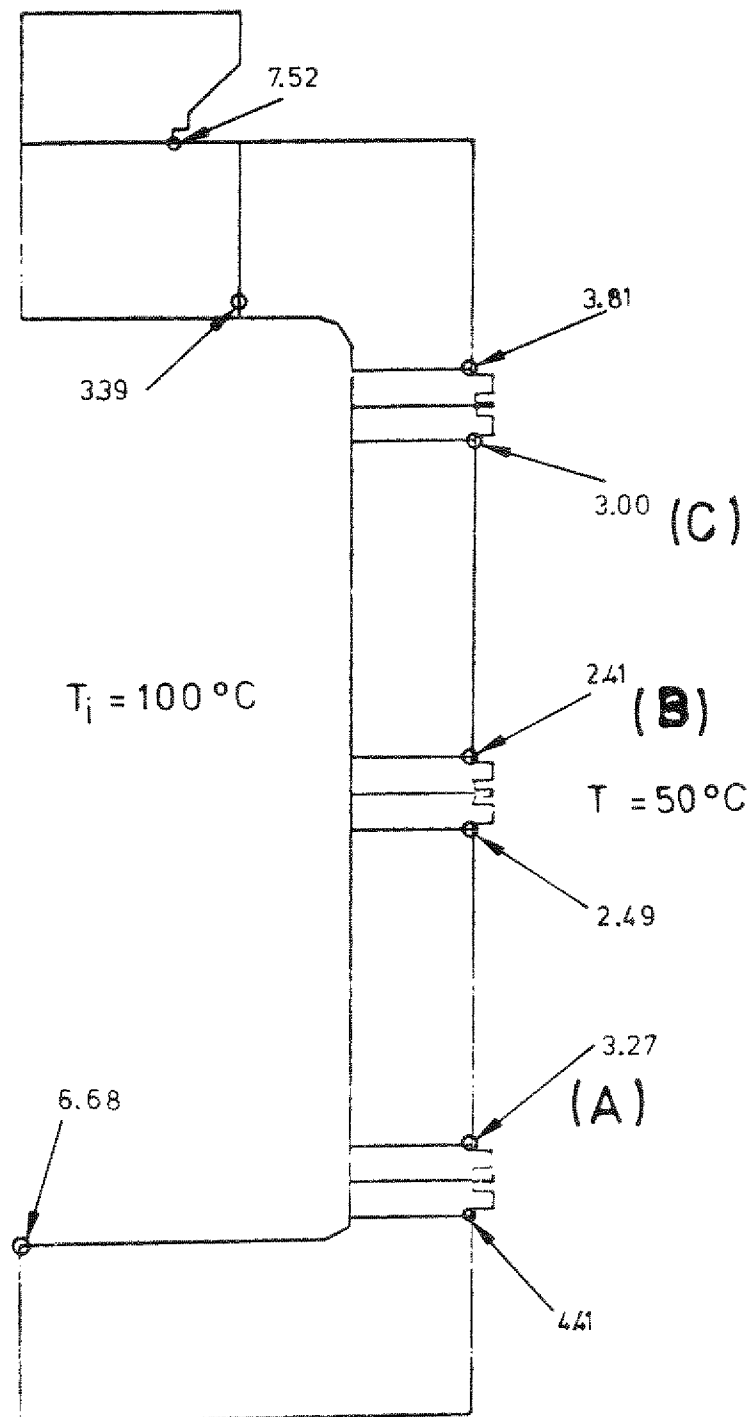


Abb.25

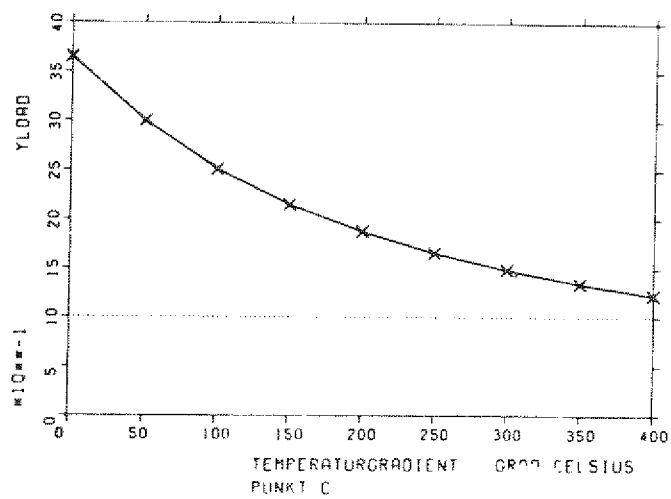
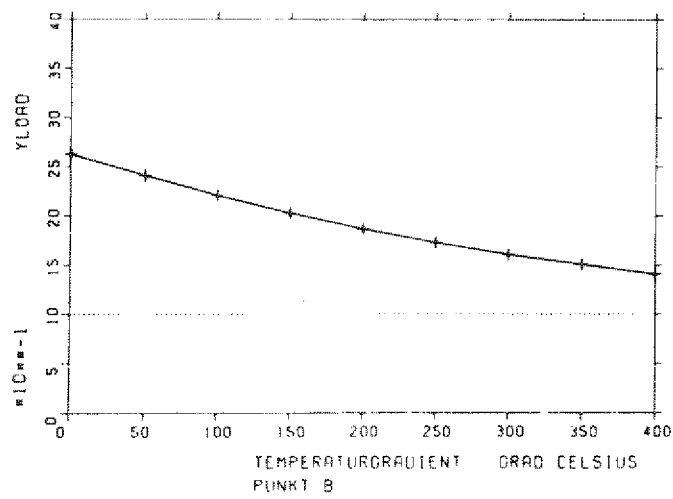
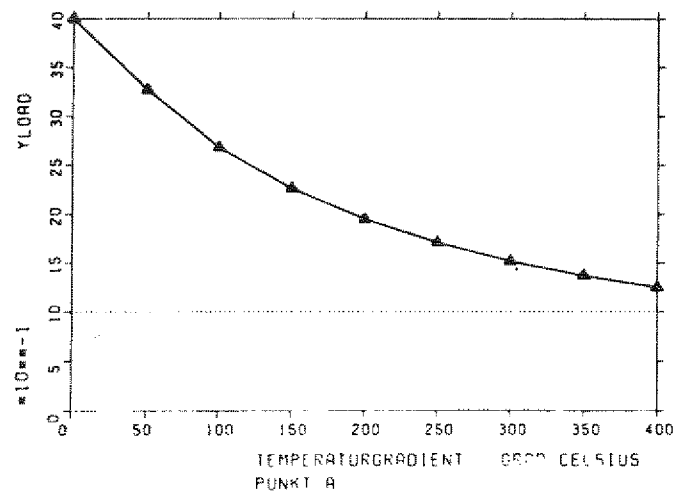


Abb. 26

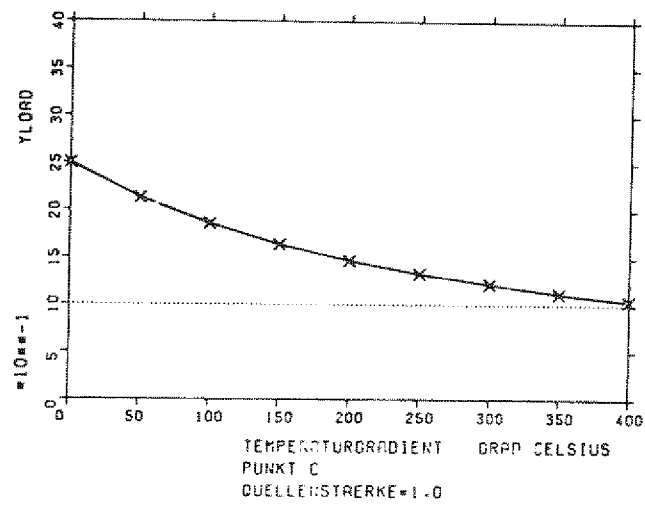
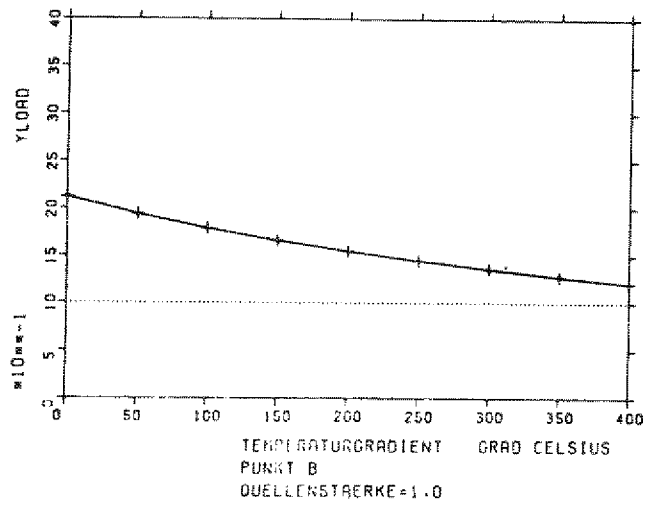
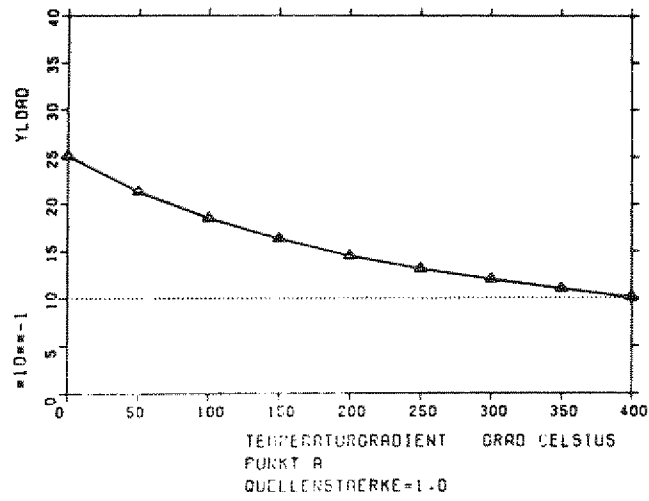


Abb. 27

KAPITEL IV

Im Rahmen dieser Arbeit wird weiterhin die Ausbreitung der plastischen Zone untersucht. Diese Aufgabe, die sich mit der gewöhnlichen Methode, d.h. der exakten Lösung der Differentialgleichung, als praktisch unmöglich erweist, läßt sich mit Hilfe der FEM durch ein Iterationsverfahren bewältigen. Wie aus dem vorigen Kapitel zu entnehmen ist, liegen die kritischen Punkte, d.h. wo die elastische Grenze zuerst erreicht wird, im Bereich des Außenmantels des Behälters und zwar am jenen Punkten in der Nähe des Schweißlippen wo die Vorspannung von Außen ausfällt.

1. Das Plastische Verhalten. /22/,/23/,/24/

Der Vollständigkeit halber sei es in diesem Abschnitt auf die wichtigsten Beziehungen, die der plastischen Rechnung zu Grunde legen, kurz und zusammenfassend eingegangen. Das elastoplastische Materialverhalten wird durch eine Spannungs-Dehnungskurve für den einachsigen Zugversuch charakterisiert. In Abb.28 ist eine solche Kurve dargestellt. Um die Kurve deutlicher zu machen, haben wir die Maßstäbe etwas vergrößert. Mit η_p wollen wir die plastische Dehnung bezeichnen, mit ϵ wie üblich die elastische Dehnung und mit γ die gesamtdehnung. σ_l steht für die Spannung bei der das Fließen beginnt (Initial Yield Stress). Die Steigung ζ , die durch das Differenzquotient $\zeta = \sigma_y \Delta / \bar{\eta}_{p\Delta}$ definiert wird, wird als eine Funktion eingegeben und aus dem Experiment entnommen (Abb.29). Zur Vereinfachung der Rechnung werden folgende Annahmen gemacht:

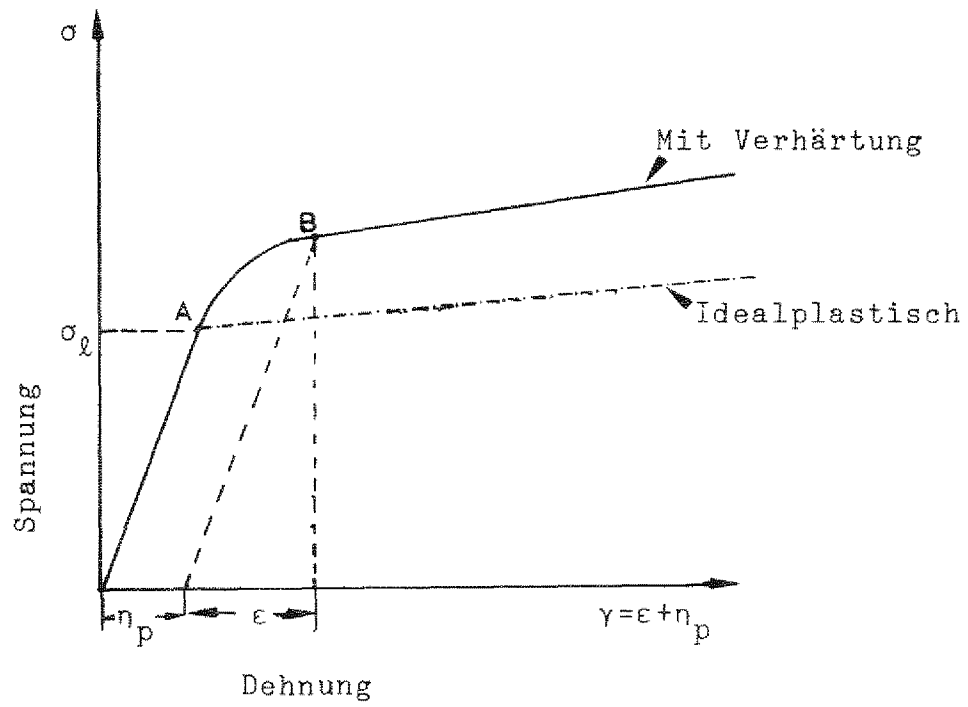


Abb. 28

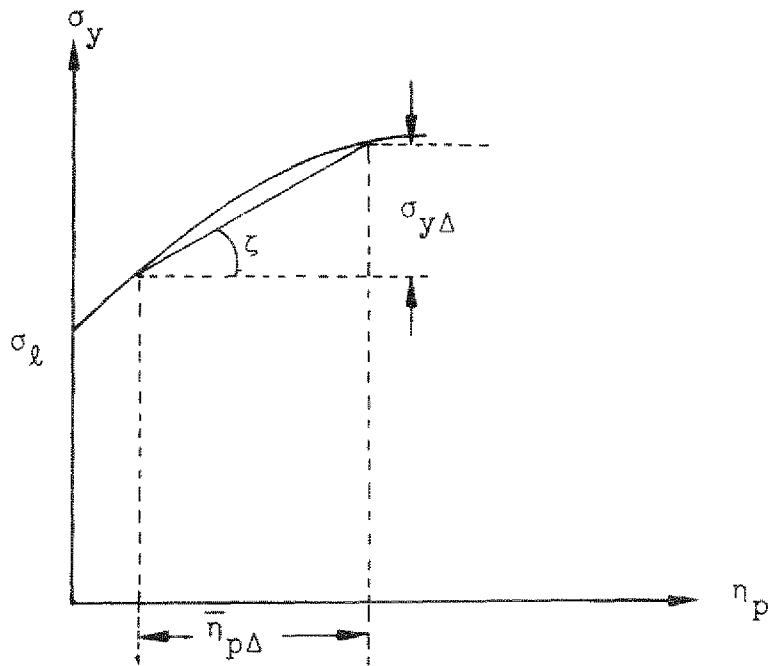


Abb. 29

- a) Isotropes Material.
- b) Proportionalitätsgrenze = Elastizitätsgrenze = Fließgrenze
- c) Zugfließgrenze = Druckfließgrenze (Kein Bauschinger Effekt).
- d) Alle Materialeigenschaften sind Temperaturunabhängig.

Für den Fall der isotropen Verfestigung läßt sich die Fließbedingung in folgender Weise ausdrücken:

$$\bar{\sigma} - \sigma_y \leq 0 \quad (4-1)$$

Wobei $\bar{\sigma}$ die Effektive, bzw. die Vergleichsspannung ist:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}$$

(4-2)

Für den elastischen Bereich gilt $\bar{\sigma} < \sigma_\ell$; für den Fließanfang $\bar{\sigma} = \sigma_\ell$ und für den elastoplastischen Bereich $\bar{\sigma} \leq \sigma_y$.

σ_y bedeutet hier die momentane Fließgrenze.

Man bezeichnet als Fließfläche die Punkte, für die die Beziehung

$$\Phi(\sigma) = \bar{\sigma} - \sigma_y = 0 \quad (4-3)$$

gilt. Zum Fließgesetz legt man die Annahme zu Grunde (Prandtl-Reuss), daß in jedem Moment der Belastung die plastischen Dehnungen, bzw. der Vektor der plastischen Dehnungen, normal zur Fließgrenze stehen:

$$\eta_{p\Delta} = \lambda_\Delta \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_D^t} \quad (4-4)$$

Hier ist $\eta_{p\Delta}$ der plastische Dehnungssinkrement, der die Sta-

bilität beim neuen Spannungs-Dehnungszustand gewährleistet. σ_D ist der deviatorische Spannungstensor, der durch die Beziehung $\sigma = \sigma_H + \sigma_D$ definiert wird. σ_H ist der hydrostatische Spannungstensor:

$$\sigma_H = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

und $\lambda_{\Delta}^2 = \bar{\eta}_{p\Delta}^2$

$\bar{\eta}_{p\Delta}$ wird als effektiver plastischer Dehnungsinkrement definiert:

$$\bar{\eta}_{p\Delta}^2 = \frac{2}{3} \eta_{p\Delta}^t \cdot \eta_{p\Delta}$$

Andererseits ist $\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma^t} = -\frac{3}{2} \frac{\sigma_D}{\bar{\sigma}}$ und damit $\eta_{\Delta} = \frac{3}{2} \frac{\bar{\eta}_{p\Delta} \sigma_D}{\bar{\sigma}}$

2. Lösungsverfahren für die numerische Rechnung./25/

Anstatt mit der linearen Beziehung $\sigma = E \cdot \epsilon$ wie im elastischen Bereich, muß hier mit der nichtlinearen Beziehung $\bar{\sigma} - \sigma_y \leq 0$ gerechnet werden. Um das Problem mit der Methode der finiten Elemente lösen zu können, wird einen Linearisierungsansatz vorgenommen:

$$\sigma = E \cdot \epsilon + \tau \quad (4-5)$$

Wobei τ diejenige Spannung ist (Methode der Anfangslasten), die diese lineare Beziehung zwischen σ und ϵ geltend macht. In inkrementaler Form gilt die Gleichgewichtsbedingung:

$$K \cdot r_{\Delta} + a^t J_{p\Delta} = R_{\Delta} \quad (4-6)$$

Wobei $J_{p\Delta}$ die Anfangslast infolge des plastischen Dehnungsinkrement $\eta_{p\Delta}$ ist. R_{Δ} ist der Lastinkrement und r_{Δ} der Verschiebungsinkrement.

Die Rechnung vollzieht sich durch folgende Iterationsschleife:

- 1) $K \cdot r_0 = R_0$ Anfangszustand
- 2) R_{Δ} Lastinkrement (Wird eingegeben)
- 3) $\bar{\sigma} = \sigma_{\ell}$ Ansatz beim Fließanfang
- 4) $\bar{\eta}_{p\Delta}$ Wird als Null angenommen (Initia-
liesierung)
- 5) $\eta_{p\Delta} = \bar{\eta}_{p\Delta} \cdot s$ $s = \frac{3}{2} \frac{1}{\bar{\sigma}} \sigma_D$
- 6) $J_{\Delta} = J_{p\Delta} = - \int_V a^t \cdot E \cdot \eta_{p\Delta} dV = - h E \eta_{p\Delta}$
- 7) $R_{t\Delta} = R_{\Delta} - a^t J_{\Delta}$ Totaler Lastinkrement
- 8) $r_{\Delta} = K^{-1} R_{t\Delta}$ Verschiebungsinkrement
- 9) $\rho_{\Delta} = a \cdot r_{\Delta}$
- 10) $\sigma_{t\Delta} = B \rho_{\Delta}$

 $\sigma_{\Delta} = \sigma_{t\Delta} - E \eta_{p\Delta}$ Elastischer Spannungsinkrement
- 11) $\sigma = \sigma_0 + \sigma_{\Delta}$ Neue Spannungen. Man rechnet $\bar{\sigma}$. Für
die Punkte die $\sigma_{\ell}(\sigma_y)$ überschreiten
wird σ_D und $s = \frac{3}{2} \frac{\sigma_D}{\bar{\sigma}}$ gerechnet.

$$12) \quad \bar{\eta}_{p\Delta} = \frac{1}{\zeta + s^t E s} (\bar{\sigma}^* - \bar{\sigma}_{\max})$$

Effektive plastische Dehnung. Hier ist $\bar{\sigma}^*$ der Vergleichspannungswert von $\sigma_o + \sigma_{t\Delta}$. Und $\sigma_{\max}$ die maximale Vergleichspannung aller vorherigen Schritte an dem Knotenpunkt.

Mit diesem letzten Wert geht man zu (4) bis:

$$(\bar{\eta}_{p\Delta})_{i+1} \approx (\bar{\eta}_{p\Delta})_i$$

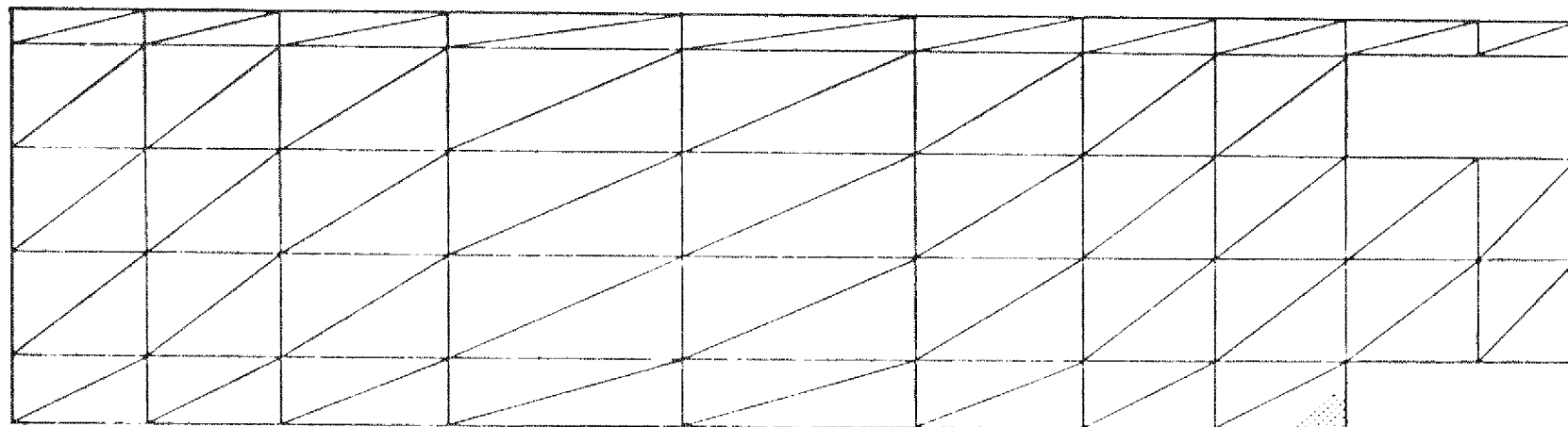
Wenn die Konvergenz erreicht wird, werden die entsprechenden Werte für die Spannungen und Verschiebungen gerechnet. Erst dann kann man mit einem neuen Lastinkrement anfangen.

3. Ausbreiten der Plastischen Zone.

In den Abbildungen 30-1 bis 30-10 wird die plastische Zone für verschiedene Belastungsschritte eingezeichnet. Der Faktor Kappa stellt einen Multiplikationsfaktor für die Belastung bei dem entsprechenden Belastungsschritt dar. Aus den Abbildungen läßt sich auch der Effekt der Bohrung erkennen. Dabei ist anzumerken, daß bei einem dreidimensionalen Modell die plastische Zone den Bohrungsbereich durchdringen würde ehe sie die Innenwand erreicht hätte. In unserem Modell spielt die Bohrung mit dem reduzierten E-Modul die Rolle einer weichen Wand, die viel mehr nachgeben kann als das andere Material. Weiterhin ist zu bemerken, daß bereits bei einer Belastung doppelt so groß wie die beim Fließanfang die plastische Zone den Schweißlippenbereich erreicht. Wenn man berücksichtigt, daß unser Netz ein Randteil der tatsächlichen Konstruktionsblöcke ist und daß in der Mitte das Fließen erst viel später anfängt, dann kann man behaupten, daß die plasti-

sche Zone zunächst sich um die Schweißlippen verbreitet und dann von den Schweißlippen aus zur Mitte der Blöcke.

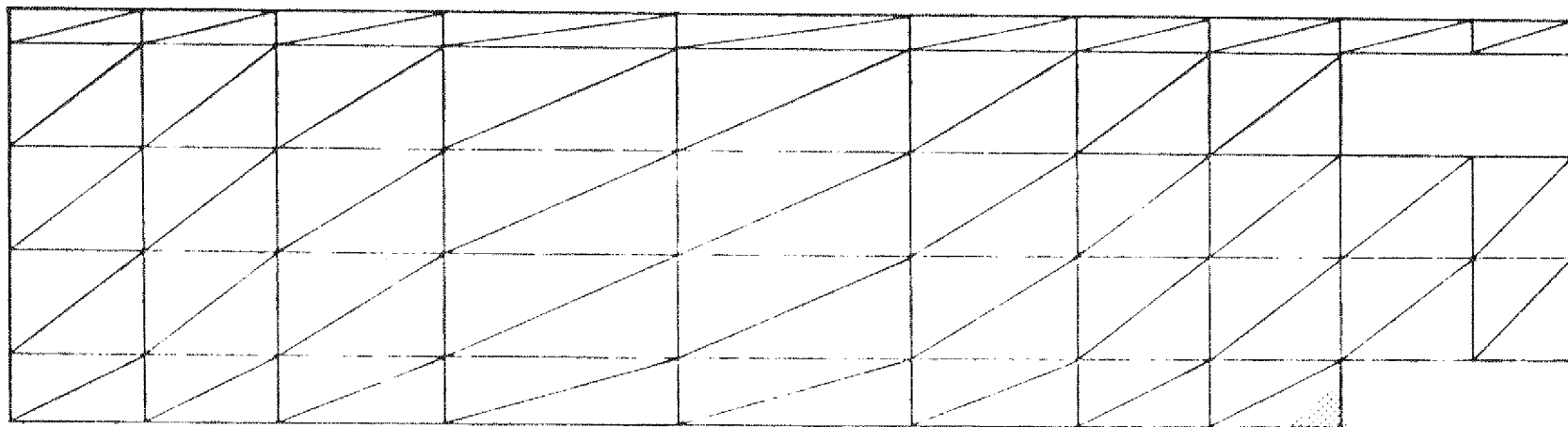
VERBREITUNG DER PLASTISCHEN ZONE
AM SCHWEISSLIPPEN



belastungsfaktor $K = 1.2$

Abb. 30-1

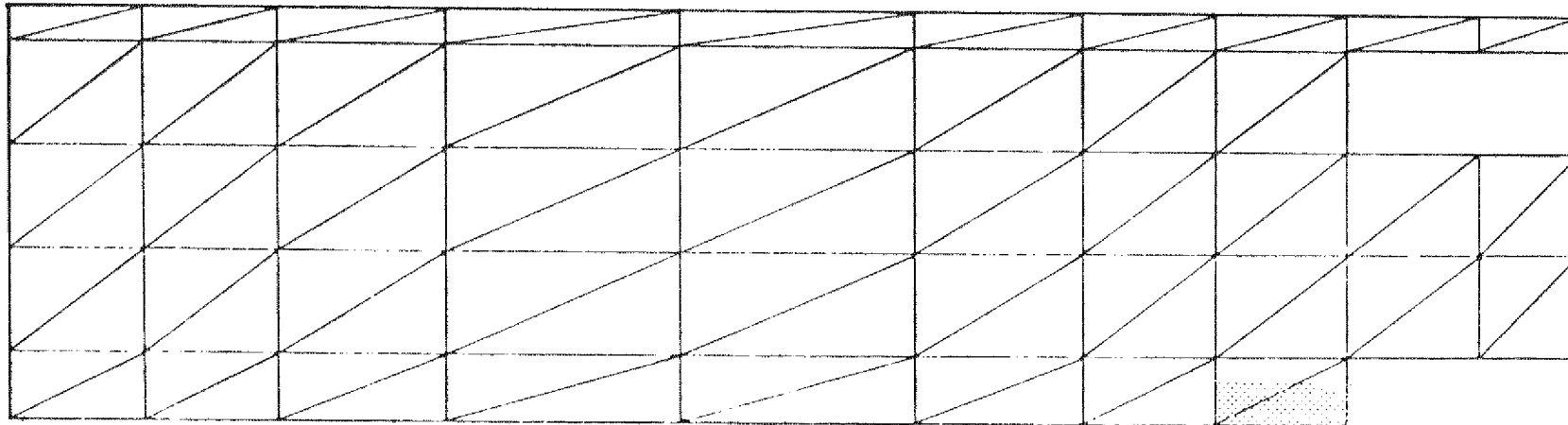
VERBREITUNG DER PLASTISCHEN ZONE
AM SCHWEISSLIPPEN



belastungsfaktor $K = 1,4$

Abb. 30-2

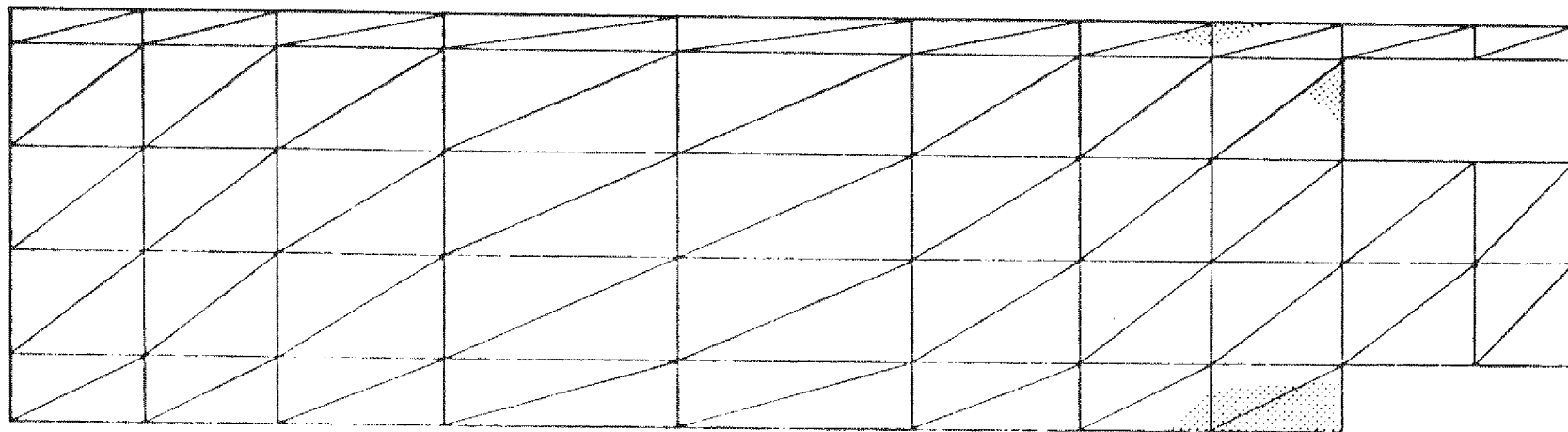
VERBREITUNG DER PLASTISCHEN ZONE
AM SCHWEISSLIPPEN



belastungsfaktor $K = 1.6$

Abb. 30-3

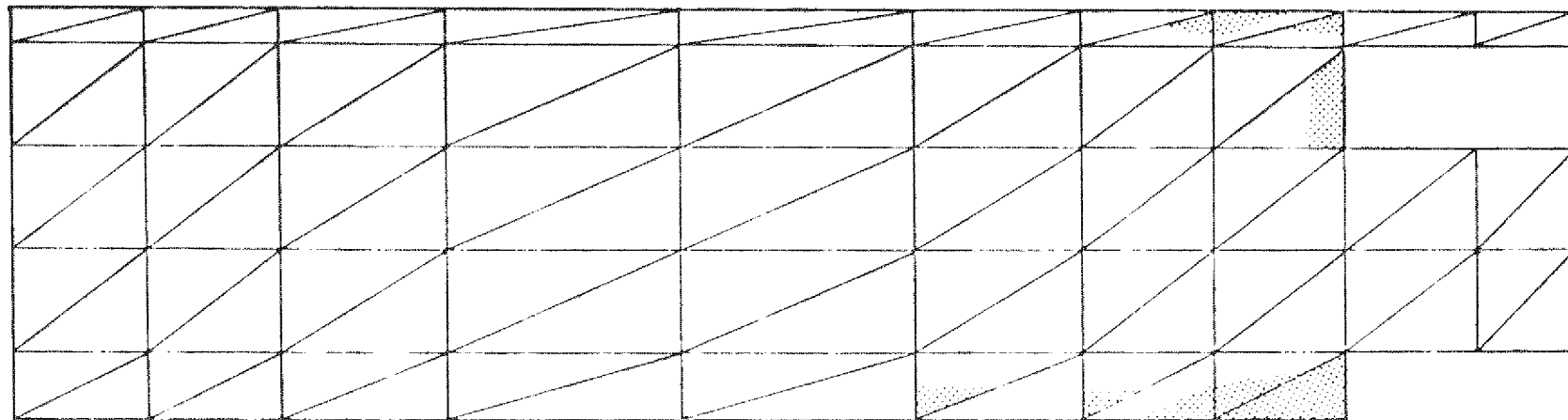
VERBREITUNG DER PLASTISCHEN ZONE
AM SCHWEISSLIPPEN



belastungsfaktor $K = 1.8$

Abb. 30-4

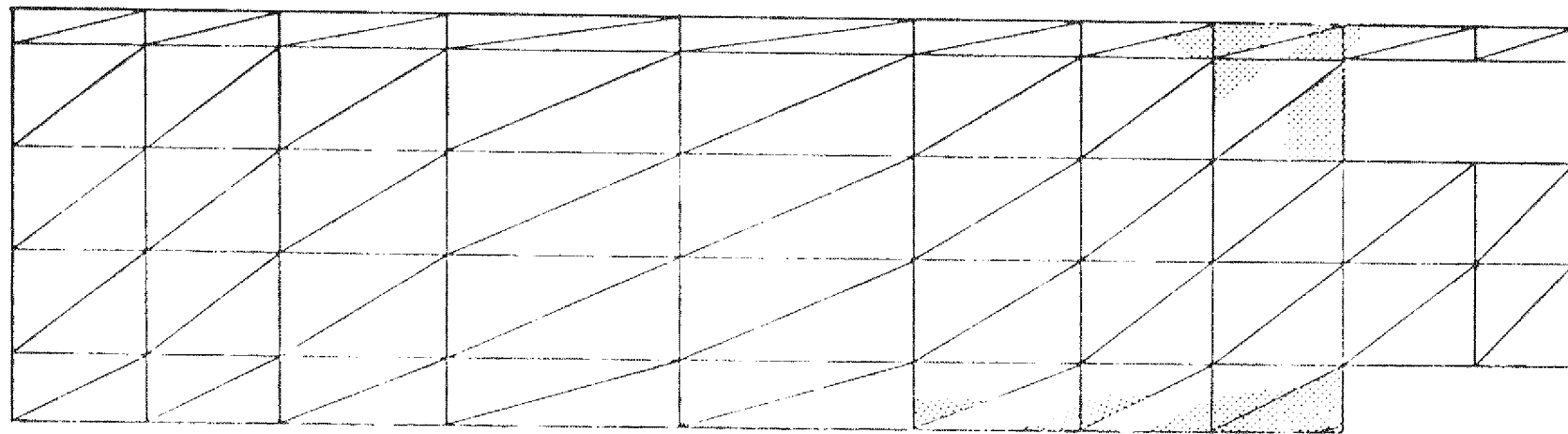
VERBREITUNG DER PLASTISCHEN ZONE
AM SCHWEISSLIPPEN



belastungsfaktor $K = 2.0$

Abb. 30-5

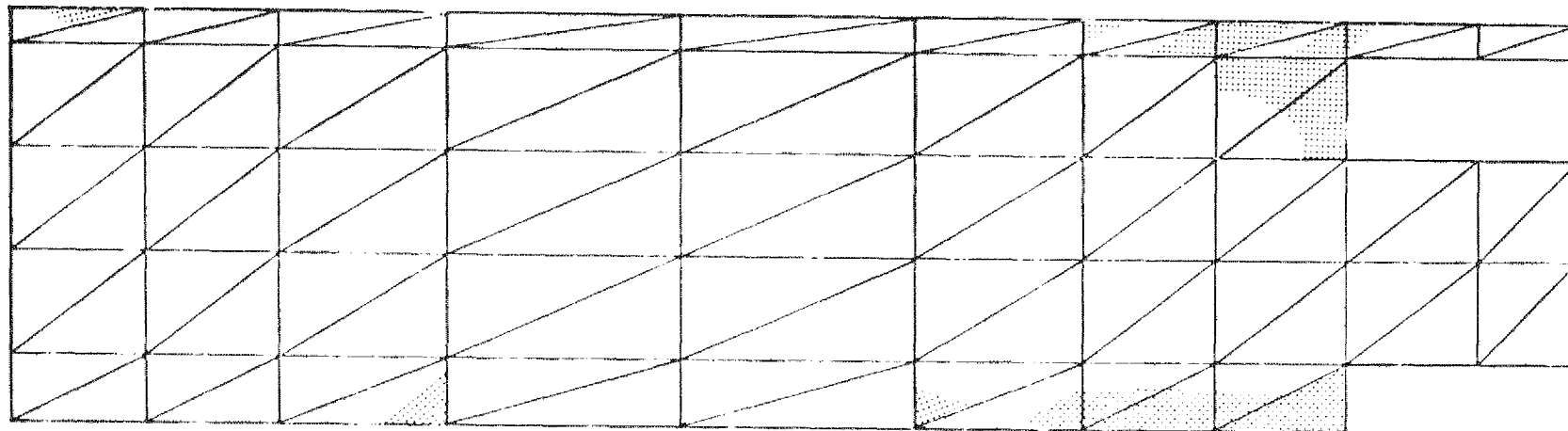
VERBREITUNG DER PLASTISCHEN ZONE
AM SCHWEISSLIPPEN



belastungsfaktor $K = 2.2$

Abb. 30-6

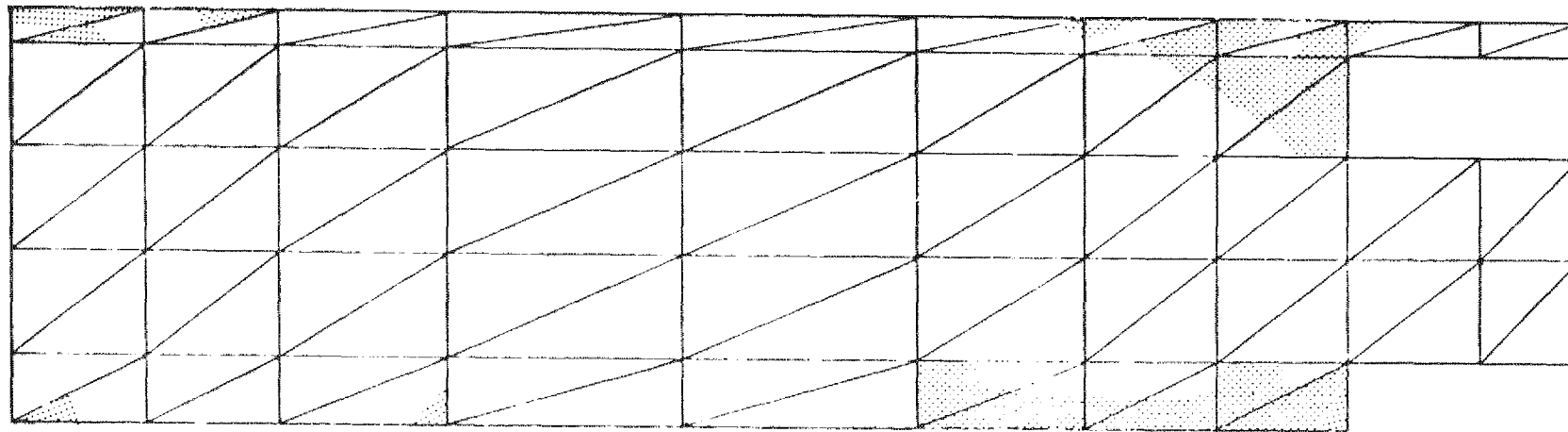
VERBREITUNG DER PLASTISCHEN ZONE
AM SCHWEISSLIPPEN



belastungsfaktor $K = 2.4$

Abb. 30-7

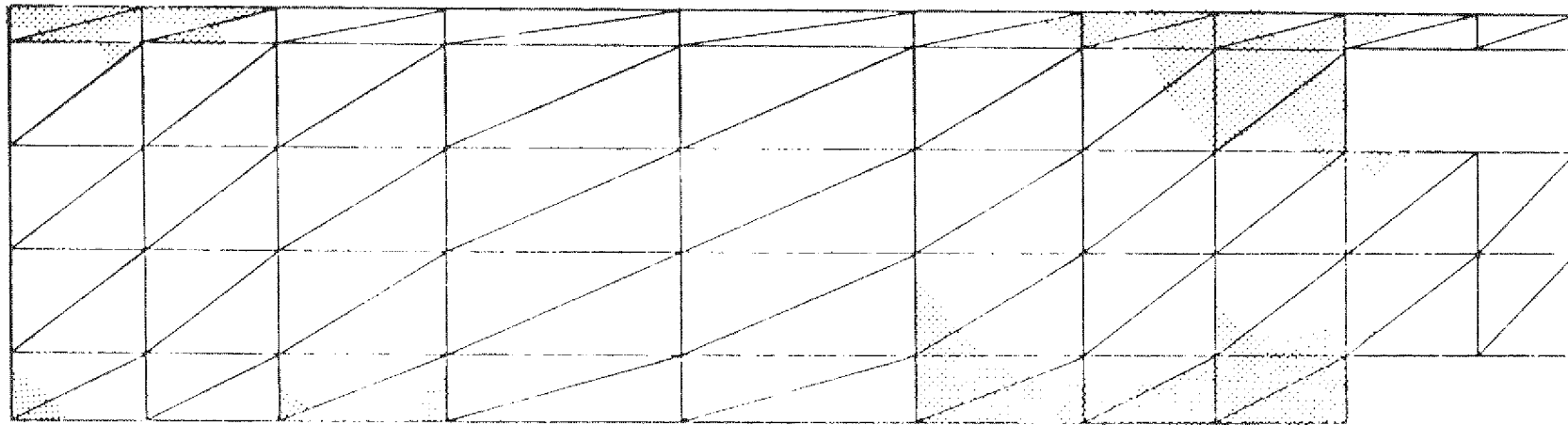
VERBREITUNG DER PLASTISCHEN ZONE
AM SCHWEISSLIPPEN



belastungsfaktor $K = 2.6$

Abb. 30-8

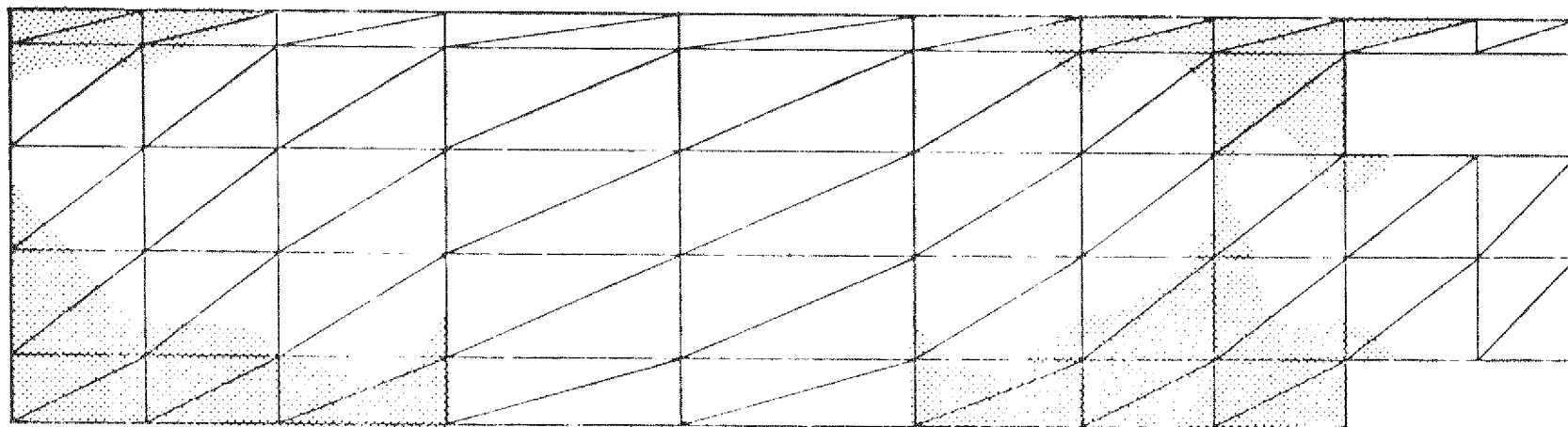
VERBREITUNG DER PLASTISCHEN ZONE
AM SCHWEISSLIPPEN



belastungsfaktor $K = 2.8$

Abb. 30-9

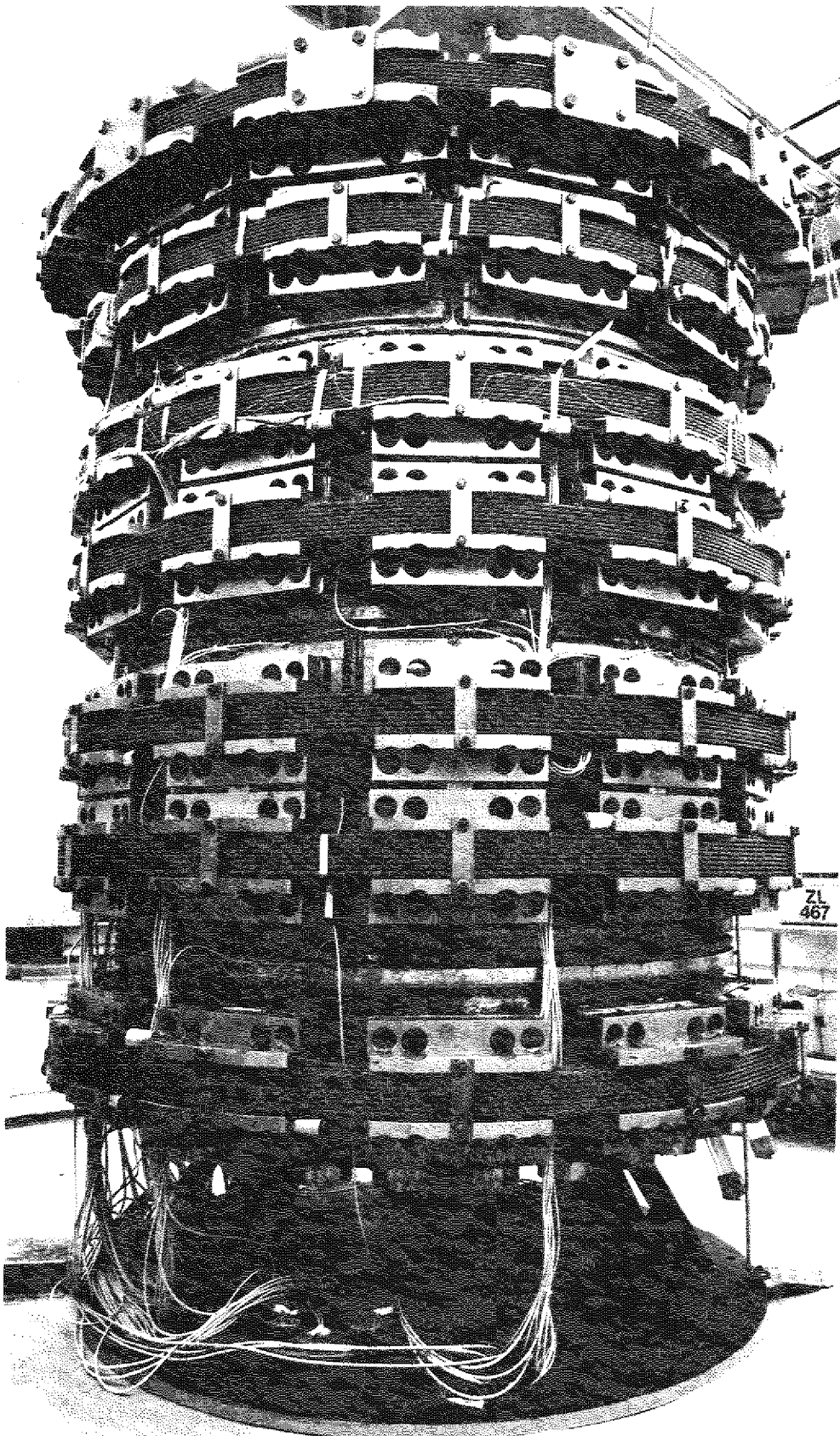
VERBREITUNG DER PLASTISCHEN ZONE
AM SCHWEISSLIPPEN



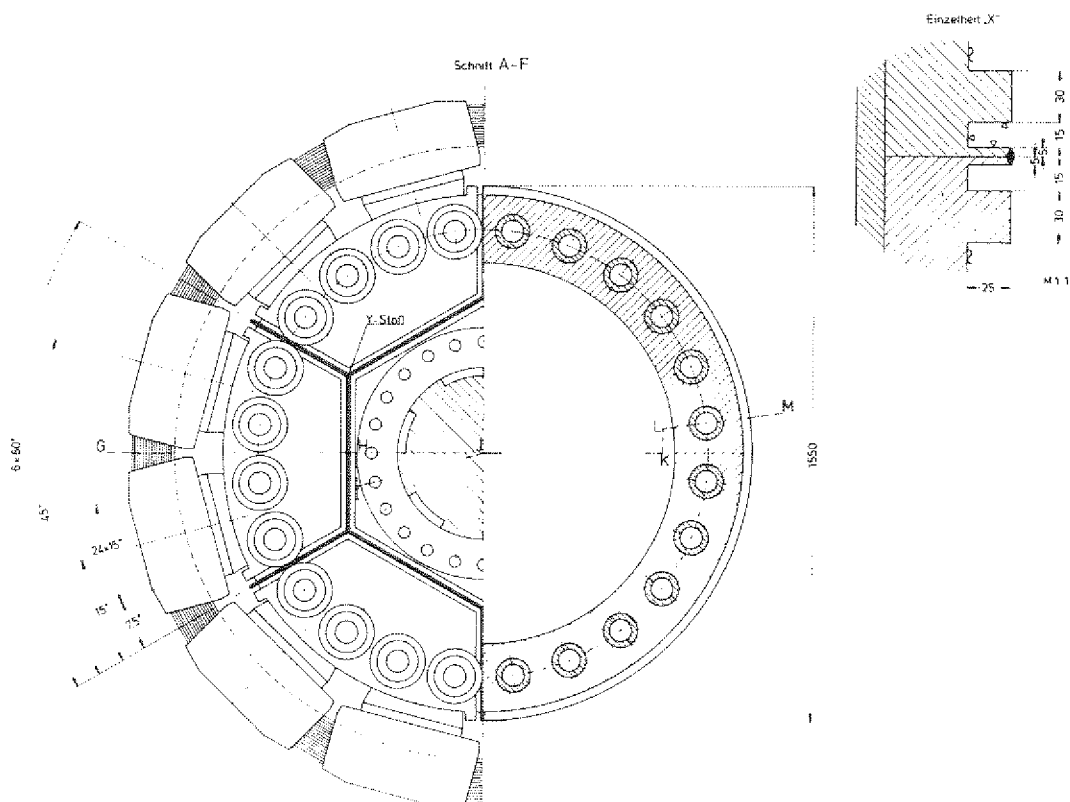
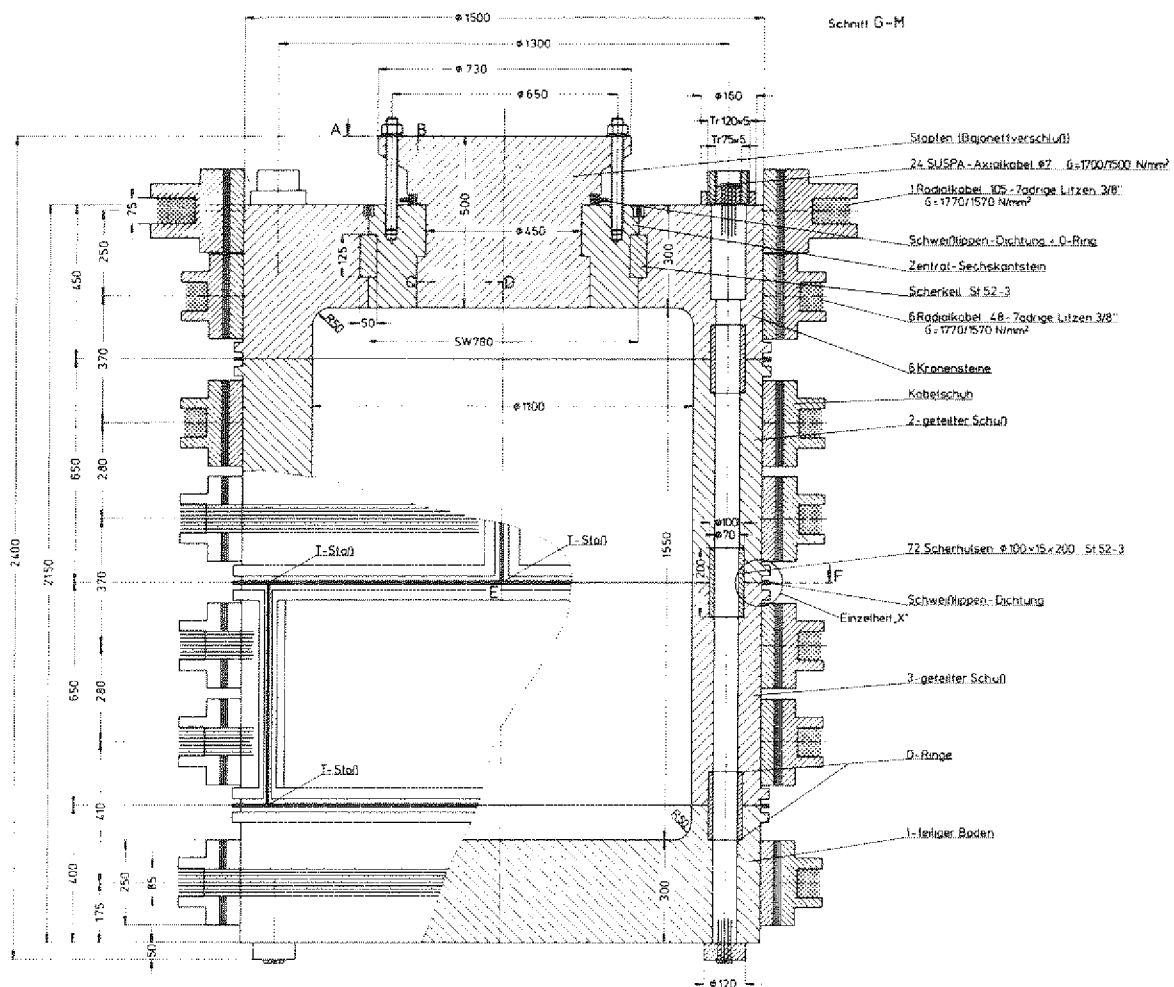
belastungsfaktor $K = 3.0$

Abb. 30-10

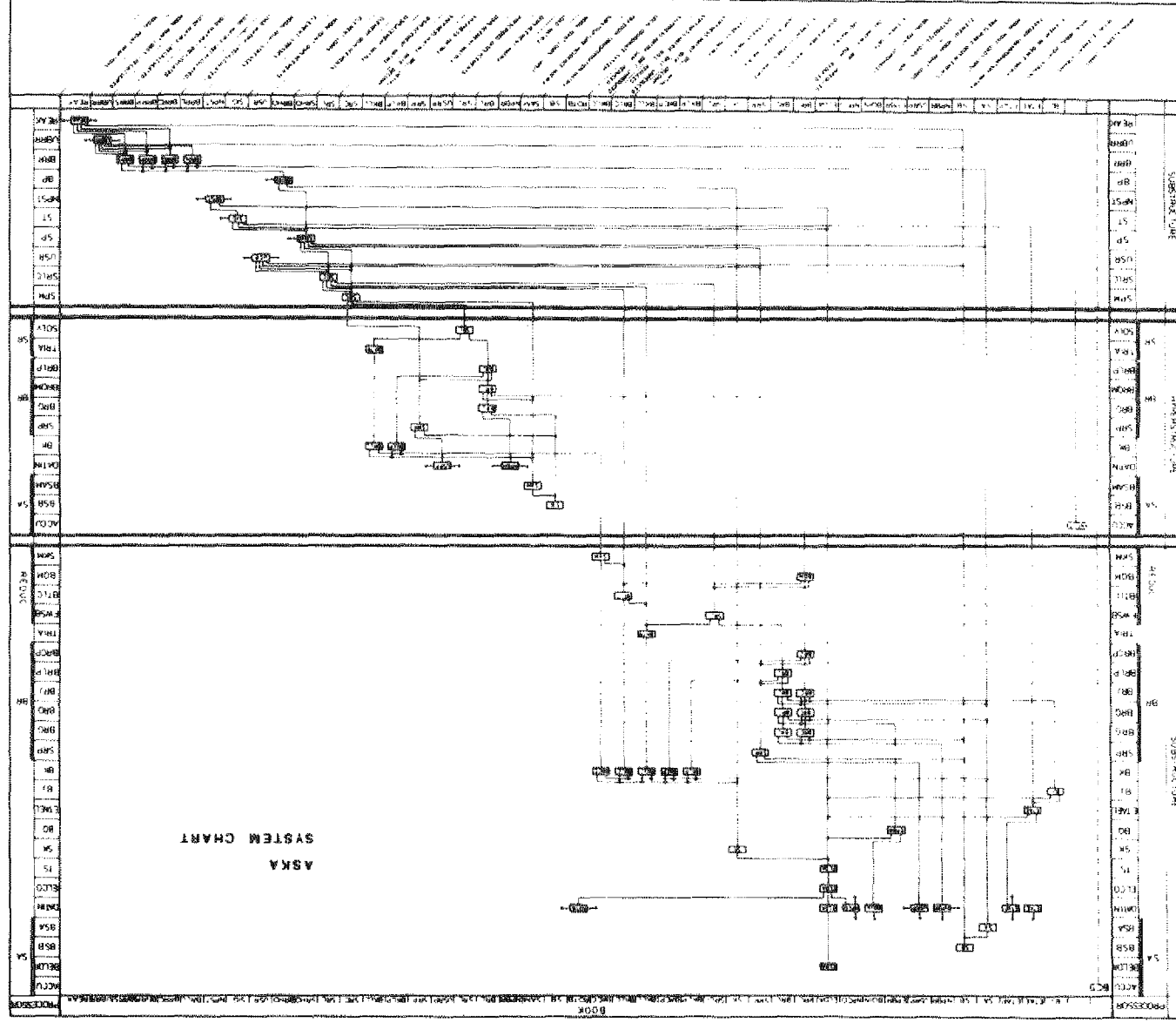
ANHANG I



Ausführung des Schweißlippenbehälters



Konstruktion des Schweißlipppenbehälters



LITERATURVERZEICHNIS

- /1/ R.H. Wentford
Modern very high Pressure Techniques
Butterworth, Washington, D.C. 1962
- /2/ A. Zeitlin
High Pressure Technology
Scientific American, Vol 212, No 5, May 1965
- /3/ Daniel S. Tsiklis
Handbook of Techniques in High Pressure Research
and Engineering.
Translation from Russian. Plenum Press, New York, 1968
- /4/ K.H. Hammelman, M. Kugeler, K. Kugeler, B. Edalat, und
B. Hardtke.
Experimente zum vorgespannten Stahlgussbehälter.
KFA. IRE. Interner Bericht. 1979
- /5/ O. C. Zienkiewicz
The Finite Element Method in Engineering Science
Mc Graw-Hill Co, New York 1971
- /6/ Harold C. Martin and Graham F. Carey
Introduction to Finite Element Analysis
Mc Graw-Hill Co, New York 1973
- /7/ B. Irons and S. Ahmad
Techniques of Finite Elements
Ellis Horwood, 1980
- /8/ ASKA UM202- Part I-
Linear Static Analysis
ISD-Stuttgart 1979
- /9/ SMART - Part I
Lineare Elastostatik
ISD- Stuttgart 1976
- /10/ Istvan Szabo.
Höhere Technische Mechanik
Springer Verlag, Berlin 1977

- /11/ S. Timoshenko and J.N.Goodier
Theory of Elasticity
McGraw-Hill Co, New York,1951
- /12/ S. Timoshenko
Strength of Materials, Part II
D. Van Nostrand Co,Inc, New York 1956
- /13/ John F. Harvey
Theory and Design of Modern Pressure Vessels
Van Nostrand Reinhold Co. 1974
- /14/ Eberhard Klapp
Festigkeit im Apparate- und Anlagenbau
Werner Verlag, Düsseldorf,1970
- /15/ Zenon Zudans,Tsi Chu Yen and William H. Steigelmann
Thermal Stress Techniques in the Nuclear Industry
American Elsevier Publishing Co. New York,1965
- /16/ U. Grigull und H. Sander
Wärmeleitung
Springer Verlag, Berlin,1979
- /17/ Heinz Parkus
Thermoelasticity
Blaisdell Publishing Co. Massachusetts,1968
- /18/ H. Daldrup
Gemperatur- und Spannungsverteilung in Reaktordruck-
gefäßen.
Atomkerntechnik,3.Jhrg,Heft 12, 1958
- /19/ H.E. Hungerford.
Shielding.
In: Amorosi,A. Fast reactor technology;Plant Design,
M.I.T. Press, 1966
- /20/ Bruno A. Boley and Jerome H. Weiner
Theory of Thermal Stresses
John Wiley and Sons, Inc, New York, 1960
- /21/ SMART II
Stationäre Diffusion
ISD- Stuttgart, 1976

- /22/ Alexander Mendelson
Plasticity: Theory and Application
Macmillan, New York, 1968
- /23/ D. R. Bland
Elastoplastic Thick Walled Tubes of Workhardening
Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 4,
pp. 209-229, 1956
- /24/ K.A. Reckling
Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festig-
keitsprobleme.
Springer Verlag, Berlin, 1967
- /25/ ASKA UM208- Part III1
Materials non-linearities
ISD- Report No.132, Stuttgart, 1972.
- /26/ Trefftz, E.
Mathematische Elastizitätstheorie.
Handbuch der Physik, VI, Springer Verlag, Berlin 1928

