



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH GmbH

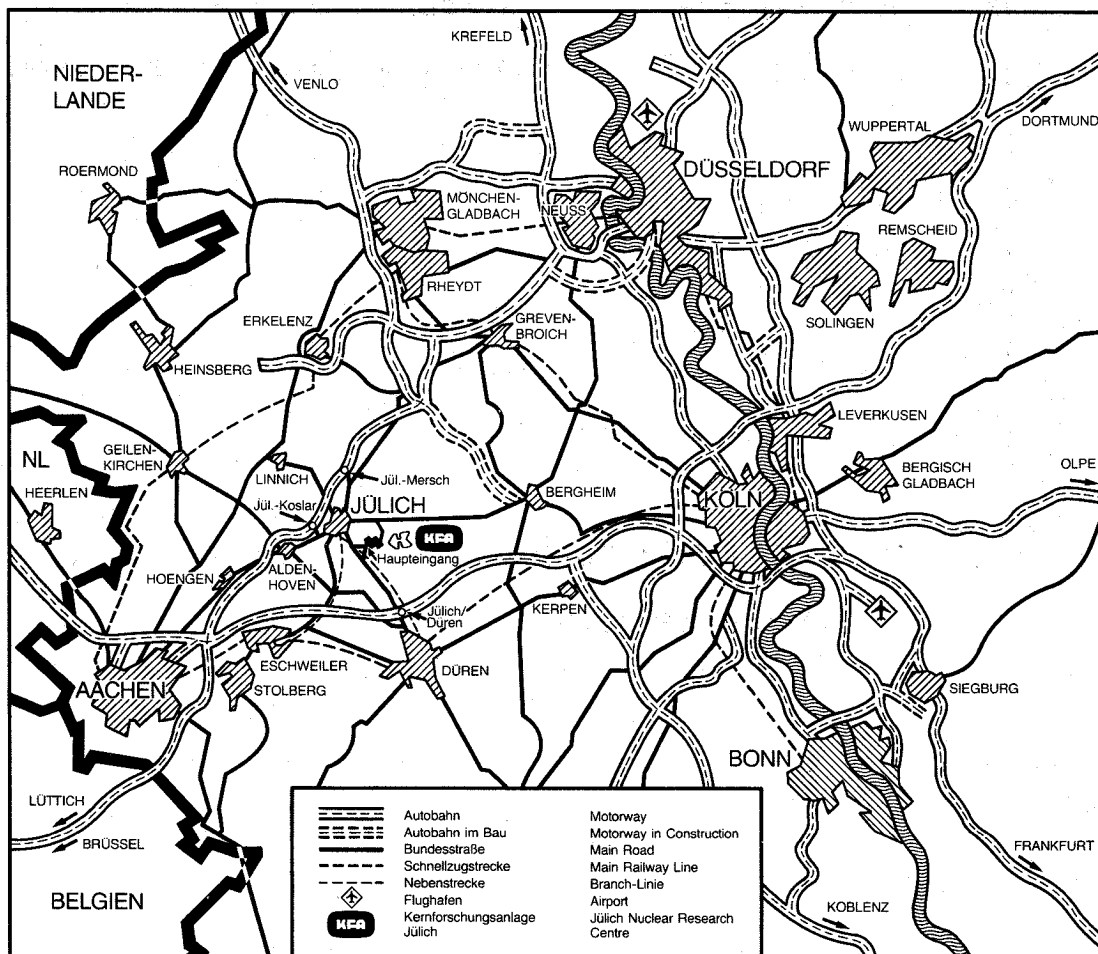
Zentralinstitut für Angewandte Mathematik

**Die mathematische Theorie der
Dilutionstechnik**

von

M. Profant

**Jül-1844
Mai 1983
ISSN 0366-0885**



Als Manuskript gedruckt

Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 1844

Zentralinstitut für Angewandte Mathematik Jül – 1844

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH

Postfach 1913 · D-5170 Jülich (Bundesrepublik Deutschland)

Telefon: 024 61/610 · Telex: 833 556 kfa d

Die mathematische Theorie der Dilutionstechnik

von

Miroslav Profant*

* jetzt:

Universität Duisburg GH, Fachbereich Mathematik

V O R W O R T

Diese Arbeit entstand auf Anregung von Herrn Prof.
Dr. K. Vyska. Besonders dankbar bin ich den Herren
Prof. Dr. U. Eckhardt und Prof. Dr. K. Vyska für
zahlreiche Diskussionen und Verbesserungen.

Zusammenfassung

Die Stewart-Hamiltonschen Gleichungen sind allgemein anerkannt als theoretische Basis für die Indikator-dilutionsmethode. Im ersten Teil der Arbeit wird versucht, ihre Gültigkeitsbedingungen für ein gewisses Modell zu finden. Um das zu erreichen, werden zuerst die Beziehungen zwischen der Anfangsverteilung des eingebrachten Indikators und der zeitlichen Entwicklung seiner von den Meßmethoden abhängigen Mittelwerte gefunden. Es wird gezeigt, daß in gewissen praktischen Experimenten für ein gegebenes Modell die Stewart-Hamiltonschen Gleichungen als gültig betrachtet werden können. Man kann die S-H Gleichungen interpretieren als die Beziehungen für das nullte und erste Moment der Dilutionskurve. Es ist zu erwarten, daß die Kenntnis aller Momente zu einer umfassenden Theorie führt. Die wichtigste Frage ist, ob man dadurch das Geschwindigkeitsprofil finden kann. Im zweiten Teil wird durch Modifizierung der Methoden der klassischen Momententheorie gezeigt, daß die eindeutige Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils für die von Null verschiedene Randgeschwindigkeit möglich ist. Diese Voraussetzung erscheint aufgrund der Randturbulenzen in Blutgefäßen nicht ganz unrealistisch.

Summary

The Stewart-Hamilton equations are widely accepted as a theoretical basis of the indicator dilution method. The objective of the first part of this report is to find the conditions for their validity in a certain model situation. This goal is achieved by establishing relations connecting the initial distribution and the time variation of the injected indicator with some average of its density depending on the measuring process. It is demonstrated that there are indeed practical experimental designs where the Stewart-Hamilton equations are fulfilled in the given model. Since the S-H equations can be interpreted as the zero and first moment relations, one should expect that the investigation of all moments of the functions involved would yield a more general theory. The question arises whether it is possible to recover from the moments of the dilution curve the velocity profile. In the second part it is shown by arguments adopted from classical moment theory that this is uniquely possible for non-zero-boundary velocity. This assumption seems to be not unrealistic because of boundary turbulences in the blood vessels.

INHALTSVERZEICHNIS

	SEITE
1. Einleitung	4
2. Die Indukator-dilutionsmethode	9
3. Das physikalische Modell	13
4. System-theoretische Beschreibung	24
5. Die Flussmessung	38
6. Das Momentenproblem für einen Zylinder	45
7. Die Bestimmung der Geschwindigkeit	54
8. Numerische Ergebnisse	69
9. Schlussbemerkungen	74
10. Abbildungen	78
11. Literatur	82

1. Einleitung

Es gibt zahlreiche Vorgänge in Natur und Technik, die sich durch das folgende einfache Modell beschreiben lassen:

In einem "hydrodynamischen System" fliesse eine Flüssigkeit. Dieser Flüssigkeit sei irgendein Stoff beigemischt, der mit der Strömung mittransportiert wird. Man kann die Zugabe des Stoffes beeinflussen bzw. messen und man kann an irgendeiner stromabwärts gelegenen Stelle des Systems die Ankunftsverteilung des Stoffes oder wenigstens irgendwelche damit korrelierten Parameter messen. Zwischen Einleitungsort und Messtelle erfolgt der Transport auf eine nur in groben Umrissen bekannte, auf jeden Fall aber sehr komplexe Weise, so dass eine detailtreue mathematische Modellierung entweder aussichtslos erscheint oder doch zu einem unverträglich hohen Rechenaufwand führt. Zudem haben detaillierte - und damit in der Regel auch komplizierte - Modelle den Nachteil, dass sich aus ihnen kaum allgemeingültige Aussagen herleiten lassen.

An einigen Beispielen soll nun gezeigt werden, welche praktischen Situationen sich diesem allgemeinen Modell unterordnen.

Bei komplizierten Rohr- und Reaktorsystemen in der chemischen Verfahrenstechnik hat man zwei verschiedene Probleme zu lösen. Beim Problem der Auslegung möchte man aus dem im Labor ermittelten Verhalten der beteiligten strömenden und miteinander reagierenden Medien auf das Verhalten im realen "grossen" System zu schliessen. Aus diesem Grunde versucht man, das

Übertragungsverhalten des Systems durch einige wenige "typische" Parameter zu beschreiben, die entweder nicht oder aber auf bekannte Weise von der Grösse des Systems abhängen, und die im Labor leicht messbar sind. Sind diese Parameter "geeignet" gewählt, dann lassen sie Rückschlüsse auf das zu erwartende Verhalten der projektierten Anlage zu. Die Messungen im Labor können erfolgen, indem man der strömenden Flüssigkeit einen Indikator (Farbstoff, radioaktives Isotop etc.) beimischt, dessen Ankunftsverhalten auf einfache Weise gemessen werden kann. Häufig enthält die Flüssigkeit schon von vornherein Substanzen, die mittransportiert werden, und die sich dann als Indikatoren anbieten. Dies ist insbesondere dann von Interesse, wenn man etwa das Verweilverhalten von Teilchen in Abhängigkeit von deren Grösse studieren möchte.

Beim Diagnoseproblem in der Verfahrenstechnik möchte man den Zustand eines vorgegebenen Systems diagnostizieren, ohne den Betriebsablauf wesentlich zu beeinflussen. Dazu bringt man wieder an "geeigneten" Stellen Indikatoren ein und misst deren Ankunftsverhalten an anderen "geeigneten" Stellen. Abweichungen im Ankunftsverhalten deuten auf Störungen im System hin, mit Hilfe eines mathematischen Modells ist es dann möglich, Rückschlüsse auf die Ursachen der Störungen zu ziehen.

Beide beschriebenen Vorgänge fasst man in der Verfahrenstechnik als "Verweilzeitspektroskopie" zusammen [11]. Um zu gewährleisten, dass die Systemparameter möglichst signifikant und leicht interpretierbar gewählt werden, beschreibt man das

System durch ein sehr einfaches mathematisches Modell (Rührkesselkaskade), das sich durch drei Parameter charakterisieren lässt. Durch den Vergleich der gemessenen Verweilzeitspektren mit den aus dem Modell hergeleiteten ist man dann unter Umständen in der Lage, Rückschlüsse auf die für das Übertragungsverhalten des Systems charakteristischen Grössen zu ziehen.

In der Biologie und der Medizin steht man vor ähnlichen Problemen wie in der Verfahrenstechnik. Man hat ausserordentlich komplizierte Systeme, bei denen sich invasive diagnostische Eingriffe häufig verbieten. Auch hier kann man versuchen, das Übertragungsverhalten durch ein Ersatzmodell zu beschreiben, das dann auf Grund seiner einfachen Struktur allgemeine Aussagen zulässt. Anwendungsbeispiele hierfür sind etwa die Kompartimentmodell der Pharmakokinetik [12], die Indikator-dilutionstechniken zur Herzdiagnostik oder Modelle zur Beschreibung der komplizierten Transport- und Diffusionsphänomene beim Stoffwechsel [13], [14]. Da die biologischen Systeme eine weitaus grössere Komplexität aufweisen als die der Verfahrenstechnik, erweist es sich hierbei häufig als notwendig, auch die mathematischen Modelle mehr zu detaillieren. Andererseits dürfen die Modelle nicht zu detailreich sein, damit man noch allgemeine Aussagen bzw. allgemein übertragbare numerische Ergebnisse erzielen kann. Beim Blutkreislauf etwa hat man eine pulsierende Flüssigkeit, die verschiedene Teilchen mit sich führt. Die Flüssigkeit fliesst in elastischen Gefässen, man hat Verzweigungen im Gefässsystem und ein aktives Element, das Herz, das in Wechselwirkung mit dem Verhalten der Trägerflüssigkeit den Transport bewirkt. Zudem ist das System im Gegensatz zu technischen

Systemen nicht isolierbar, es hängt in vielfältiger Weise vom Zustand des gesamten Organismus ab. Bislang war es nur möglich, Teilaspekte dieses Systems in befriedigender Detailgetreue zu modellieren [14]. Für diagnostische Zwecke benötigt man aber ein einfaches Gesamtmodell, das geeignet ist, die Beobachtungen zu interpretieren. Zudem soll das Modell in der Lage sein, Aussagen über die Anwendbarkeit verschiedener möglicher Diagnoseverfahren durch allgemeine mathematische Untersuchungen oder durch numerische Simulation zuzulassen. Derartige Aussagen würden dazu beitragen, aufwendige und zum Teil auch gefährliche Versuche an Tieren und Menschen einzuschränken.

Eine ähnliche Situation findet man vor, wenn man das Ausbreitungsverhalten von Schadstoffen in Flüssen untersucht. Je nach der speziellen Fragestellung, die man behandelt, bieten sich hier zahlreiche verschiedene Modelle an. Wenn man etwa ein computergesteuertes Frühwarnsystem projiziert, mit dem man anhand der an verschiedenen Stellen gemessenen Schadstoffkonzentrationen in Realzeit über mögliche Gegenmassnahmen entscheiden soll, dann darf dieses System nicht zu rechenzeitaufwendig sein. Zahlreiche Detailfragen der Gewässerkontrolle, beispielsweise die Auswirkungen verschiedener Einleitungsverfahren von Abwässern, die Signifikanz von Messsystemen oder die Wirksamkeit von Gegenmassnahmen lassen sich auch an einfachen Modellen studieren. Derartige Modelle sind kostengünstiger und weniger zeitaufwendig als detaillierte Modelle. Zudem sind bei ihnen die Kausalzusammenhänge leichter

zu überschauen, sodass die hergeleiteten Aussagen und die errechneten Ergebnisse allgemeingültiger sind als bei komplexen Modellen.

2. Die Indikator dilutionsmethode

Die Indikator dilutionstechnik ist eine in der klinischen Diagnostik häufig benutzte Methode, um gewisse Charakteristika eines Kreislaufabschnittes zu messen. Dabei wird an einer Stelle eine Indikatormenge q eingeführt, die das Blut markiert, und stromabwärts wird die Indikator dichte $c(t)$ gemessen. Der Fluss F ($\vec{v}$ ist das Geschwindigkeitsprofil)

$$F = \int_S \vec{v} d\vec{S}$$

und das Volumen V des durchfliessenden Gefässes berechnet man aus den folgenden Gleichungen:

1. Stewart-Hamiltonsche Gleichung

$$F = \frac{q}{\int_0^{\infty} c(t) dt}$$

2. Stewart-Hamiltonsche Gleichung

$$\frac{V}{F} = \frac{\int_0^{\infty} t c(t) dt}{\int_0^{\infty} c(t) dt}$$

Als Rechtfertigung dieser Beziehungen ist aus der zahlreichen Literatur meistens die Arbeit [10] von Meier und Zierler zitiert. Bei genauerer Betrachtung dieser Arbeit stellt man aber fest, dass die benutzten Relationen nur unter sehr einschränkenden Voraussetzungen, die in der Arbeit nicht klar definiert sind, gelten und so kann diese Herleitung auf keinen Fall als ein Beweis der S-H Gleichungen in der gewünschten Allgemeinheit

dienen. Nun bedeutet ein unkorrekter Beweis keineswegs die Ungültigkeit der zu beweisenden Aussage. Es wurde aber in mehreren Arbeiten, z.B. [2], [8] und [7] an sehr einfachen Beispielen gezeigt, dass die Gültigkeit der S-H Gleichungen sehr fraglich ist. In [7] haben wir ein einfaches Modell der Strömung in einem kreisförmigen Zylinder untersucht und dabei festgestellt, dass die 1. S-H Gleichung eine Bedingung - in Form einer Integralgleichung - für die Input - Output Parameter bedeutet. Das heisst, nur bei gewissen sehr speziellen Realisierungen des Experiments ist die 1. S-H Gleichung anwendbar. Der erste Teil der vorliegenden Arbeit ist durch die Arbeit [7] motiviert, beschäftigt sich aber mit der Strömung in einem "allgemeinen" Rohr, das als ein Diffeomorphismus (= differenzierbarer Homöomorphismus) eines kreisförmigen Zylinders definiert ist, wobei die Trajektorien der Teilchen die homöomorphen Bilder der Geraden des Zylinders sind. Die Strömung sollte laminar und stationär sein.

Die Strömungseigenschaften des Blutes zeichnen sich durch gewisse Besonderheiten aus. Zunächst bleibt die laminare Strömung, die in der Regel bei der Reynolds'schen Zahl 1000 in eine turbulente übergeht, überraschend auch bei höheren Reynolds'schen Zahlen (bis 2500) überwiegend erhalten. Weiterhin machen die durch Turbulenz betroffenen wandnahen Grenzschichten weniger als 15% des Gefässquerschnittes aus. Einen Überblick über die zahlreichen Experimente, die zu diesen Aussagen führen, findet man in [9].

In unserem Modell wird deswegen eine laminare Strömung vorausgesetzt, wobei die Randturbulenz durch eine nicht-verschwindende Randgeschwindigkeit approximiert wird. Die letzte Annahme bedeutet, dass wir die in der Hydrodynamik natürliche Randbedingung $\vec{v} / \frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} = 0$ nicht ohne weiteres beibehalten können.

Im Abschnitt 3 wird das Modell erklärt und im Abschnitt 4 der Input - Output-Zusammenhang berechnet. Damit können wir dann im Abschnitt 5 die Gültigkeit der 1. S-H Gleichung untersuchen; bzw. Bedingungen finden, die ein Experimentator bei den Messungen beachten muss, wenn er die 1. S-H Gleichung benutzen möchte.

Die Existenz des nullten und ersten Moments der Funktion $c(t)$ in den S-H Gleichungen ist nicht evident. Es hängt vom Geschwindigkeitsprofil ab, ob die Integrale konvergieren. Für ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil (Poiseuillesche Strömung) divergiert sogar das nullte Moment, wie man dem Beispiel im Abschnitt 4 entnehmen kann. Glücklicherweise existieren für den Fall mit einer nichtverschwindenden Randgeschwindigkeit alle Momente der Funktion $c(t)$.

Man kann die S-H Gleichungen interpretieren als den Versuch, aus den ersten zwei Momenten der "Dilutionskurve" $c(t)$ gewisse Informationen - hier sind das der Fluss F und das Volumen V - über das System zu bekommen. Es erhebt sich die Frage, ob wir aus der Kenntnis aller Momente mehr Informationen über das System erhalten können. Die Abschnitte 6 und 7 beschäftigen sich mit diesem Problem in einem kreisförmigen Zylinder mit dem Ergebnis, dass unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen

die Momente das Geschwindigkeitsprofil bestimmen.

Zur Methode: ausser den kinematischen Überlegungen benutzen wir zusätzlich nur die Kontinuitätsgleichung der Strömungsmechanik, die an sich nicht zur Kinematik gehört (obwohl sehr oft dazu gezählt), weil sie auf dem Massenerhaltungs-Prinzip beruht.

3. Das physikalische Modell

Zuerst wird das geometrische Gebilde definiert, in dem wir die Strömung untersuchen werden.

Definition Sei Ω ein offenes Intervall in $\mathbb{R}^3$, d.h.

$$\Omega := \{(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3) \mid 0 < \lambda^1 < R, 0 < \lambda^2 < 2\pi, 0 < \lambda^3 < \sigma_1\}.$$

Sei 1) φ eine stetige Abbildung von $\bar{\Omega}$ in $\mathbb{R}^3$,

$$\varphi: \bar{\Omega} \rightarrow \varphi(\bar{\Omega}) \in \mathbb{R}^3$$

2) φ sei eine eindeutige Abbildung von Ω auf $\varphi(\Omega)$,

3) $\varphi \in C^1(\Omega)$ mit der Jacobideterminante

$$\frac{\partial(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)}{\partial(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)} \neq 0 \quad \text{in } \Omega$$

4) (Periodizität von φ)

$$\lim_{\lambda^2 \rightarrow 0_+} \varphi^{(k)}(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3) = \lim_{\lambda^2 \rightarrow 2\pi_-} \varphi^{(k)}(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3), \quad k = 0, 1$$

5) Die Ableitungen $\frac{\partial \varphi^i}{\partial \lambda^j}$ für $i = 1, 2, 3$ u. $j = 1, 2$ existieren und der Rang der Matrix $\left\| \frac{\partial \varphi^i}{\partial \lambda^j} \right\|$ ($j = 1, 2$) ist zwei für alle $\lambda^3 \in [0, \sigma_1]$ und alle $(\lambda^1, \lambda^2) \in (0, R) \times (0, 2\pi)$.

6) Die Ableitungen $\frac{\partial \varphi^i}{\partial \lambda^3}$ für $i = 1, 2, 3$ existieren und der Vektor $\left(\frac{\partial \varphi^1}{\partial \lambda^3}, \frac{\partial \varphi^2}{\partial \lambda^3}, \frac{\partial \varphi^3}{\partial \lambda^3} \right)$ ist von Null verschieden für alle $(\lambda^1, \lambda^2) \in [0, R] \times [0, 2\pi]$ und für alle $\lambda^3 \in [0, \sigma_1]$.

Eine solche Abbildung definiert auf der Menge $\varphi(\bar{\Omega})$ eine Rohrstruktur.

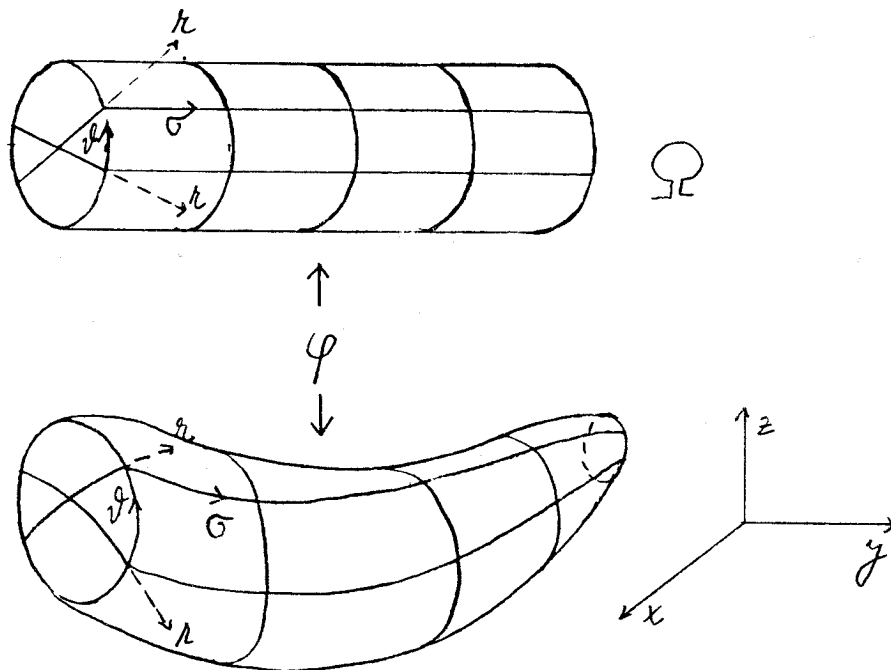


Abb. 1

Im weiteren werden wir oft auch die Bezeichnung

$$x = x^1, y = x^2, z = x^3; \quad \kappa = \kappa^1, \sigma = \kappa^2, \gamma = \kappa^3$$

benutzen.

Jetzt einige Bemerkungen zur Definition.

Da die Menge $\bar{\Omega}$ kompakt ist, garantiert uns die Voraussetzung

1) die Beschränktheit und Abgeschlossenheit der $\varphi(\bar{\Omega})$.

Die Eigenschaften 2) und 3) versichern uns, dass φ eine reguläre Abbildung ist (d.h. eine C^1 Abbildung einer offenen Menge aus $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ mit der von Null verschiedenen Jacobideterminante). Wie das Beispiel $x^1 = (\kappa^1)^3$ zeigt, ist die Nichtsingularität der Jacobideterminante (Eigenschaft 3) wirklich eine unabhängige Bedingung. Aus der Regularität der φ folgt auch die Regularität der inversen Abbildung φ^{-1} .

Die Voraussetzung 5 ist für $\sigma \in (0, \bar{\sigma})$ trivialerweise erfüllt, aber für $\sigma = 0$ und $\sigma = \bar{\sigma}$ verhindert sie das Zusammenschrumpfen der Anfangs- und Endfläche. Zum Beispiel ist für die Abbildung

$$x = r \cos \vartheta \cos(\sigma - \frac{\pi}{2}), \quad y = r \sin \vartheta \cos(\sigma - \frac{\pi}{2}), \quad z = r \sin(\sigma - \frac{\pi}{2})$$

$$0 < \sigma < \pi$$

für $\sigma = 0, \pi$ die zweite Zeile der Matrix $\left\| \frac{\partial \varphi^i}{\partial r^j} \right\|$

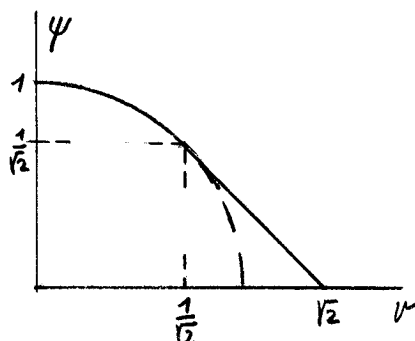
$$\left\| \frac{\partial \varphi^i}{\partial r^j} \right\| = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos(\sigma - \frac{\pi}{2}), \sin \vartheta \cos(\sigma - \frac{\pi}{2}), \sin(\sigma - \frac{\pi}{2}) \\ -r \sin \vartheta \cos(\sigma - \frac{\pi}{2}), r \cos \vartheta \cos(\sigma - \frac{\pi}{2}), 0 \end{pmatrix}$$

gleich Null. Also ist die Voraussetzung 5) nicht erfüllt und tatsächlich ist die "Stirnfläche des Rohres" für $\sigma = 0$ das Segment

$$x = 0, y = 0, z = r \quad (0 \leq r \leq R).$$

Im nächsten Beispiel wird die gleiche Kugel so parametrisiert, dass sie eine Rohrstruktur hat; es ist also die Abbildung φ (und nicht etwa die Menge $\varphi(\Omega)$), die die gewünschte Struktur charakterisiert und deswegen wird in der Definition die Abbildung φ (und nicht etwa die Menge $\varphi(\Omega)$) mit dem Begriff Rohr identifiziert.

Beispiel:



$$\psi(r) = \begin{cases} \sqrt{1-r^2}, & 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} - r, & \frac{1}{\sqrt{2}} \leq r \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

Abb. 2

Mit Hilfe dieser Funktion φ können wir implizit zwei Funktionen

$z = z(\lambda, \sigma)$ und $\rho = \rho(\lambda, \sigma)$ aus den Relationen

$$\rho = \lambda \varphi(z), \quad z = \sigma \varphi(\rho), \quad 0 \leq \lambda, \sigma \leq 1$$

definieren (Abb. 3).

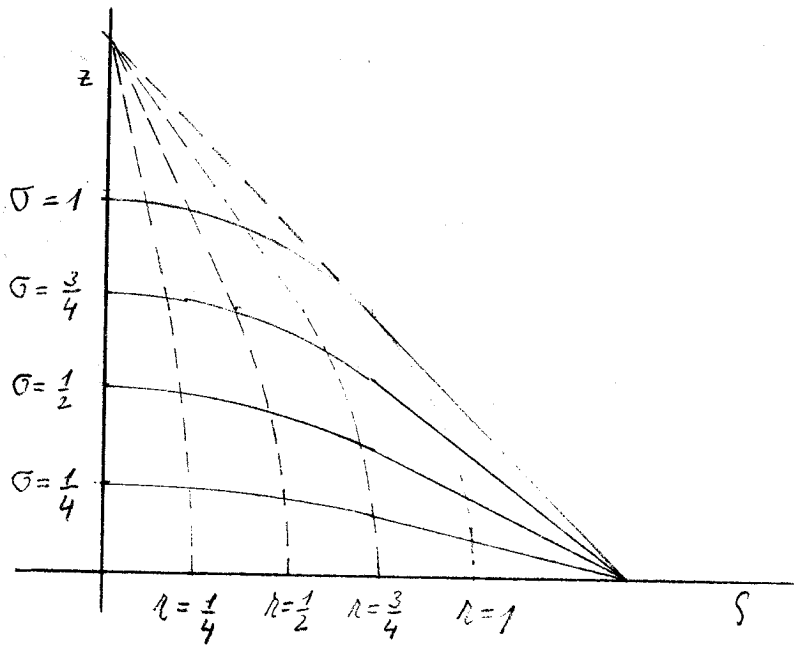


Abb. 3

Die Abbildung φ ist dann

$$x = \rho(\lambda, \sigma) \cos \varphi, \quad y = \rho(\lambda, \sigma) \sin \varphi, \quad z = z(\lambda, \sigma).$$

Die Jacobideterminante ist

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\lambda, \sigma, \varphi)} = \rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \frac{\partial z}{\partial \sigma} - \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right) = \lambda \varphi(z) \left(\frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \frac{\partial z}{\partial \sigma} - \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right),$$

also hat die Abbildung für $\lambda = 0$ eine kritische Stelle.

Dagegen ist die Länge des Vektors $\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}, \frac{\partial y}{\partial \sigma}, \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right)$ für $\lambda = 0$ gleich eins.

Es ist nämlich

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \cos \vartheta \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} = r \psi'(z) \frac{\partial z}{\partial \sigma} \cos \vartheta \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \sigma} = r \psi'(z) \frac{\partial z}{\partial \sigma} \sin \vartheta \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0,$$

aber

$$\frac{\partial z}{\partial \sigma} = \psi(\rho) + \sigma \psi'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \psi(0) = 1.$$

Später werden die Kurven σ d.h. $r = \text{const}, \vartheta = \text{const}$ mit den Trajektorien der Flüssigkeitsteilchen identifiziert und die Bedingung 6) bedeutet, dass diese Kurven eine positive Länge haben.

Von dem Standpunkt der Differentialgeometrie sind die Zahlen (r, ϑ, σ) Koordinaten der Punkte auf der Mannigfaltigkeit $\psi(\Omega)$. Um mit diesem Koordinatensystem zu arbeiten, benutzen wir gewisse Elemente aus der Tensorrechnung, die jetzt kurz zusammengefasst werden.

Zunächst sind mit dem so eingeführten Koordinatensystem zwei lokale Vektorbasen $\{\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial r^i}\}$ und $\{\vec{e}^i = \nabla r^i\}$ verknüpft (Abb.4).

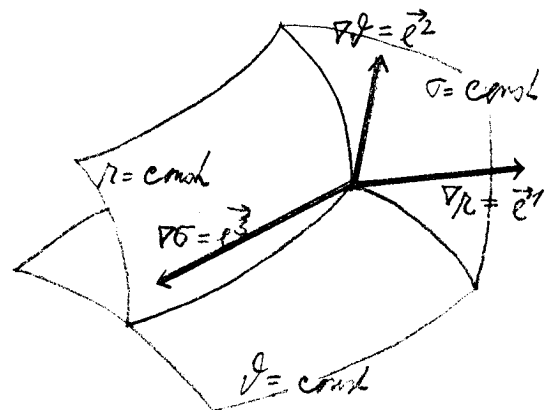
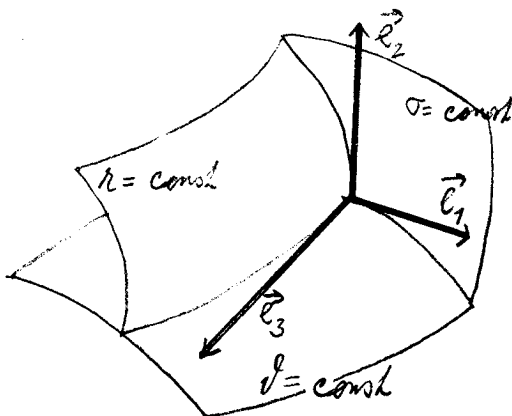


Abb. 4

Die skalaren Produkte definieren den metrischen Tensor

$$g^{ik} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^k, \quad g_{ik} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k \quad (3,1)$$

und für die Determinante $\text{Det}(g_{ik}) = g$ dieses Tensors gilt

$$\sqrt{g} = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \vartheta, \varphi)} = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) \quad (3,2)$$

Weiterhin erhalten wir für die Vektoren verschiedener Basen

$$\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

$$\vec{e}_1 = \sqrt{g} (\vec{e}^2 \times \vec{e}^3) = \sqrt{g} (\nabla \vartheta \times \nabla \varphi), \quad (3,3)$$

$$\vec{e}^1 = \nabla r = \frac{1}{\sqrt{g}} (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3);$$

die übrigen Relationen entstehen durch zyklische Permutation der Indizes.

Einen Vektor $\vec{v}$ können wir in beiden Basen komponentenweise darstellen

$$\vec{v} = v^1 \vec{e}_1 + v^2 \vec{e}_2 + v^3 \vec{e}_3 = v^i \vec{e}_i = v_i \vec{e}^i, \quad (3,4)$$

dabei heißen die v^i resp. v_i die kontravarianten resp. kovarianten Komponenten des Vektors $\vec{v}$.

Aus (3,1) und (3,4) folgt

$$v^i = \vec{v} \cdot \vec{e}^i = (v_j \vec{e}^j) \cdot \vec{e}^i = v_j g^{ji}, \quad (3,5)$$

also ist der Zusammenhang der kontra- und kovarianten Komponenten durch den metrischen Tensor bestimmt.

Im nächsten werden wir noch den Operator div benutzen. Seine Darstellung in unserem Koordinatensystem ist

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} v^i) . \quad (3,6)$$

Jetzt sind wir in der Lage unser Modell zu beschreiben.

Zuerst nehmen wir an, dass sich die "Punkte" der Flüssigkeit auf den Kurven $\lambda = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$ bewegen (laminare Strömung) mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$, die zeitlich unabhängig ist (stationäre Strömung). Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ ist dann kollinear mit der Tangente der σ -Kurve, d.h. es gilt

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = v^3(\lambda, \vartheta, \sigma) \vec{e}_3 . \quad (3,7)$$

Die Funktion v^3 setzen wir als stetig auf $\bar{\Omega}$ und positiv auf $\bar{\Omega} - \{\lambda = R\}$ voraus. Am Rande $\lambda = R$ lassen wir zunächst auch eine verschwindende Geschwindigkeit zu.

Ist der Parameter σ die Bogenlänge der σ -Kurve, dann ist die Länge des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}$

$$|\vec{v}| = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma} \right| v^3 = v^3 \quad (3,8)$$

gleich der dritten kontravarianten Komponente von $\vec{v}$.

Die strömende Flüssigkeit wird nun mit einem Indikator markiert; in der Regel dient als Indikator eine radioaktive

Substanz, die durch eine Indikatordichte $c(r, \vartheta, \sigma, t)$ $[g\,cm^{-3}]$ charakterisiert ist. Den für weitere Betrachtungen wichtigen Indikatoreinführungsvorgang stellen wir uns so vor (Abb. 5):

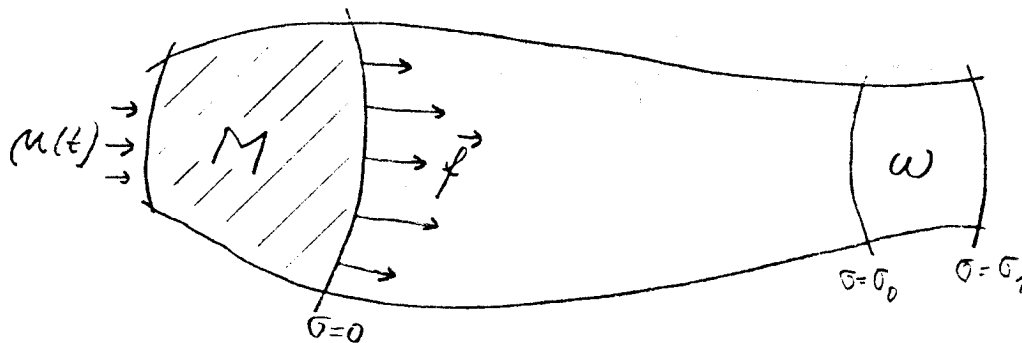


Abb. 5

Es wird eine Menge des Indikators in den Teil M eingebracht, was durch eine Funktion $\mu(t)$ $[g\,s^{-1}]$ beschrieben ist.

Diese Menge verteilt sich in M über den ganzen Querschnitt; dabei machen wir keine Voraussetzungen über die Strömung oder die Art, wie sich der Indikator in M verhält. Es wird jedoch verlangt, dass dieser Verteilungsvorgang nur in M stattfindet und an der Fläche $\sigma=0$ beendet ist, so dass im weiteren Teil ($\sigma>0$) wieder eine laminare Strömung herrscht. Die Verteilung des Indikators in $\sigma=0$ soll durch eine Verteilungsfunktion $\vec{f}(r, \vartheta, t)$ $[cm^{-2}]$ beschrieben werden.

Damit ist folgendes gemeint:

a) die Flussdichte des Indikators $\vec{i}$ $[g\,cm^{-2}\,s^{-1}]$ ist

$$\vec{i}(r, \vartheta, \sigma=0, t) = \mu(t) \vec{f}(r, \vartheta, t) \quad (3,9)$$

b) $\vec{f}$ ist normiert

$$\int_{\sigma=0} \vec{f} d\vec{S} = 1. \quad (3,10)$$

Der Normierungsbedingung können wir eine andere Form geben.

Es ist (3,3)

$$\begin{aligned}
 \int_{\sigma=0} \vec{f} d\vec{S} &= \int_{\sigma=0} \vec{f} \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vartheta} \right) dr d\vartheta = \int_{\sigma=0} \vec{f} \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) dr d\vartheta \\
 &= \int_{\sigma=0} \vec{f} \cdot \vec{e}^3 \sqrt{g} dr d\vartheta = \int_{\sigma=0} f^3 \sqrt{g} dr d\vartheta = \int_{\sigma=0} f^3 \sqrt{g_{33}(\sigma=0)} \sqrt{\frac{g(\sigma=0)}{g_{33}(\sigma=0)}} dr d\vartheta \\
 &= \int_{\sigma=0} f^3 \left[\sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right]_{\sigma=0} dr d\vartheta = 1.
 \end{aligned} \tag{3,11}$$

Hier haben wir $f^3 \sqrt{g_{33}}$ mit f_σ bezeichnet; $f^3 \sqrt{g_{33}}$ ist die Komponente des Vektors $\vec{f}$ in der Einheitsbasis

$$\vec{f} = f_\sigma \frac{\vec{e}_3}{|\vec{e}_3|},$$

also die physikalische Komponente des $\vec{f}$.

Beispiel: Flussmarkierung und Querschnittsmarkierung.

Findet eine vollständige Mischung in M statt, so wird die Verteilungsfunktion $\vec{f}$ nur durch das Geschwindigkeitsprofil bestimmt

$$\vec{f} = \frac{\vec{v}(r, \vartheta, \sigma=0)}{F}, \quad F = \int_{\sigma=0} \vec{v} d\vec{S}.$$

In diesem Fall spricht man von einer Flussmarkierung.

Die Querschnittsmarkierung ist dagegen durch eine homogene Verteilung des Indikators definiert. Das heisst

$$\rho_0 = \frac{1}{\int_{\sigma=0} \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} dr d\vartheta},$$

oder

$$\vec{\rho} = \frac{1}{\int_{\sigma=0} \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} dr d\vartheta} \cdot \frac{\vec{e}_3}{|\vec{e}_3|}.$$

Daraus folgt

$$|\vec{i}| = \frac{\mu(t)}{\int_{\sigma=0} \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} dr d\vartheta}$$

also ist $|\vec{i}|$ ortsunabhängig (für $\sigma=0$).

Der eingebrachte Indikator wird dann am Systemausgang gemessen. Unglücklicherweise ist es nicht möglich, den Indikator lokal zu registrieren; die heutigen Messmethoden stellen uns nur gewisse globale Charakteristika zur Verfügung. Wenn wir in einem Segment zwischen σ_0 und σ_1 (Abb.5) messen, hat das Ergebnis die Form

$$\bar{c}_{\sigma_0, \sigma_1}(t) = \int_{V_{\sigma_0, \sigma_1}} \omega(\vec{x}) c(\vec{x}, t) dV, \quad (3,12)$$

wobei die Gewichtsfunktion ω die Art der Messung charakterisiert. Zum Beispiel bei der Transillumination oder bei der Zählung der ausgestrahlten Quanten (bei Markierung durch einen radioaktiven Indikator) wird

$$\omega = \frac{1}{V_{\sigma_0, \sigma_1}}.$$

Ausser den kinematischen Betrachtungen benutzen wir noch die Kontinuitätsgleichung. Die Kontinuitätsgleichung gehört im eigentlichen Sinne nicht zu der Kinematik (= Beschreibung der Bewegung), weil sie auf dem Massenerhaltungsprinzip beruht.

Wenn wir die zeitliche Änderung einer Substanz - etwa die Masse der tragenden Flüssigkeit oder die Menge des Indikators - in einem Teil mit einem positiven Volumen betrachten, dann ist diese Änderung der Differenz der ein- und ausfliessenden Menge der Substanz gleich, vorausgesetzt die Substanz kann in dem Teil weder entstehen noch verschwinden. Dies ist eine globale (integrale) Eigenschaft und ihre lokale (differenziale) Formulierung ist [3]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 , \quad (3,13)$$

dabei ρ die Dichte der Substanz bezeichnet.

Nun können wir dieses Prinzip zweimal anwenden. Erstens auf die tragende Flüssigkeit, deren Dichte als zeitlich und örtlich konstant vorausgesetzt wird, d.h.

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 . \quad (3,14)$$

Zweitens auf den Indikator, dessen Dichte sich im allgemeinen ändert:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(c \vec{v}) = 0 . \quad (3,15)$$

4. System-theoretische Beschreibung

Von dem Standpunkt der Systemtheorie hat unser Modell folgendes Schema:

1. die Inputinformation ist durch die Funktion $\mu(t) [g s^{-1}]$ gegeben,
2. sie wird weiter im System verarbeitet, wobei der Übertragungsoperator $\hat{K}$ nur von den Systemparametern - dem Gefäß, der Verteilungsfunktion φ , dem Geschwindigkeitsprofil $\vec{v}$ und der die Registriermethode charakterisierenden Funktion ω - abhängig ist.
3. Am Systemausgang ist die Outputinformation die gemessene mittlere Indikator-dichte $\bar{c}_{\sigma_0 \sigma_1}(t)$, so dass

$$\bar{c}_{\sigma_0 \sigma_1}(t) = (\hat{K} \mu)(t) . \quad (4,1)$$

In diesem Abschnitt möchten wir eine Darstellung des Operators $\hat{K}$ konstruieren. Die Eigenschaften des Operators $\hat{K}$ und die entsprechenden Voraussetzungen werden im Satz I zusammengefasst.

Um die späteren Formulierungen nicht unnötig zu erschweren, machen wir folgende Vereinbarungen:

Alle in Betracht kommenden Funktionen sind in $\mathbb{R}$ periodisch, mit der Periode 2π .

Weiter möchten wir unser Modell in $t = 0$ "starten", d.h. die zeitabhängigen Funktionen sind für $t < 0$ gleich Null zu setzen.

Bevor wir den Satz I formulieren, schicken wir zunächst die folgende Bemerkung voraus:

Für die v^3 -Komponente der Geschwindigkeit folgt aus (3,7)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = v^3(\lambda, \vartheta, \sigma), \quad (4,2)$$

wobei die Funktion $v^3(\lambda, \vartheta, \sigma)$ für $\lambda \neq R$ als positiv vorausgesetzt wurde. Damit ist σ eine streng monotone Funktion von t für alle $\lambda \neq R$ und für die Umkehrfunktion gilt

$$t = T(\lambda, \vartheta, \sigma) = \int_0^\sigma \frac{ds}{v^3(\lambda, \vartheta, s)}. \quad (4,3)$$

Die Beziehung (4,3) mit $\lambda = \lambda$ und $\vartheta = \vartheta$ definiert eine Abbildung einer Teilmenge aus Ω auf die entsprechende Bildmenge. Genauer gesagt:

Definition 3,1. Sei $G \equiv [0, R) \times [0, 2\pi] \times [\sigma_0, \sigma_1]$. Sei $\hat{T}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda \\ \vartheta &= \vartheta \\ t &= T(\lambda, \vartheta, \sigma) \end{aligned} \quad (4,4)$$

die auf G definiert ist. Dann bezeichnen wir mit

$\Gamma(v^3; \sigma_0, \sigma_1)$ die Bildmenge der G , d.h.

$$\Gamma(v^3; \sigma_0, \sigma_1) = \hat{T}(G)$$

und mit

$$\Gamma_{\tau}(v^3; \sigma_0, \sigma_1) \quad \text{die Schnittmenge, d.h. (Abb.6)}$$

$$\Gamma_{\tau}(v^3; \sigma_0, \sigma_1) \equiv \{(\lambda, \vartheta) \in [0, R) \times [0, 2\pi] \mid (\lambda, \vartheta, \tau) \in \Gamma(v^3; \sigma_0, \sigma_1)\} \quad (4,5)$$

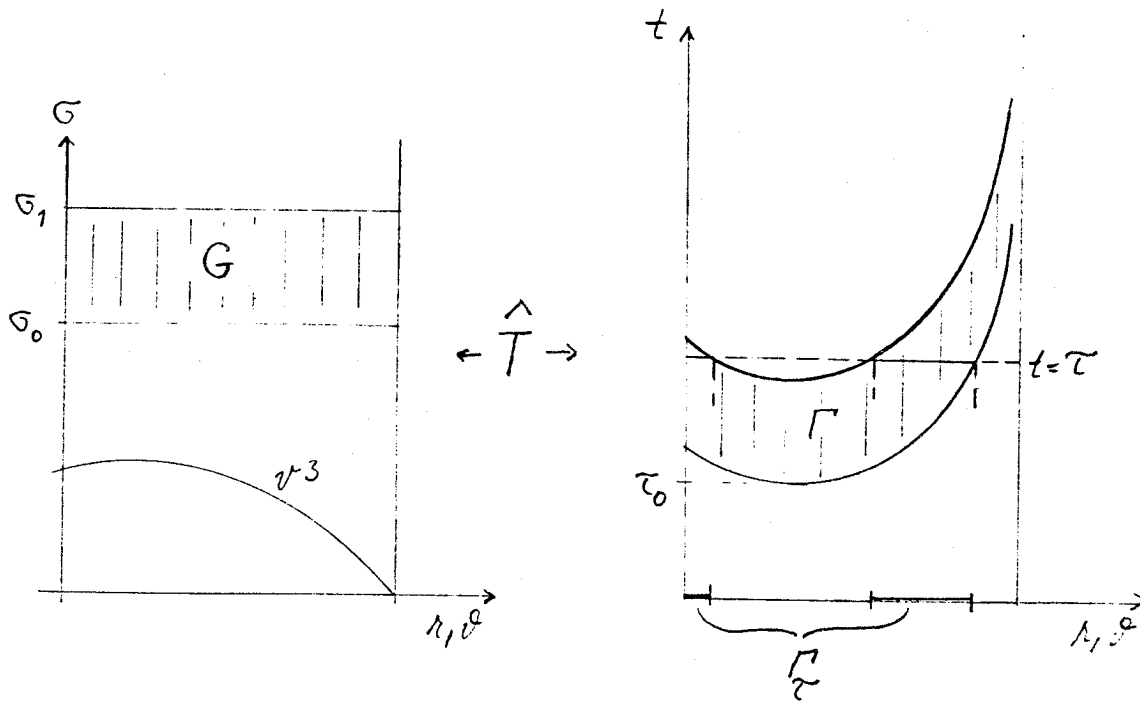


Abb. 6

Weiter sei

$$\tau_0 = \min_{(r, \vartheta)} T(r, \vartheta, \sigma_0) = \min_{(r, \vartheta)} \int_0^{\sigma_0} \frac{ds}{v^3(r, \vartheta, s)} \quad (4,5a)$$

und

$$\tilde{\tau}_1 = \max_{(r, \vartheta)} T(r, \vartheta, \sigma_1) = \max_{(r, \vartheta)} \int_0^{\sigma_1} \frac{ds}{v^3(r, \vartheta, s)} \quad ; \quad (4,5b)$$

$\tilde{\tau}_1$ braucht nicht endlich zu sein.

Jetzt sind wir in der Lage den Satz I zu formulieren.

Satz I.

Die Voraussetzungen:

(A1) Sei $f_0(r, \vartheta, t)$ eine nichtnegative und in t stetige Funktion für fast alle

$$(r, \vartheta) \in [0, R] \times [0, 2\pi]$$

(A2) Sei

$$f_{\sigma}(r, \vartheta, t) \left[\sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right]_{\sigma=0} \in L^1 \{ [0, R] \times [0, 2\pi] \}$$

und weiter

$$\int_{\sigma=0} f_{\sigma} \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} dr d\vartheta = 1 \quad \text{für alle } t.$$

(A3) Es gibt eine Funktion $h(r, \vartheta)$, sodass

$$f_{\sigma}(r, \vartheta, t) \leq h \quad \text{für alle } t \text{ und}$$

$$h \left[\sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right]_{\sigma=0} \in L^1 \{ [0, R] \times [0, 2\pi] \}.$$

(A4) Sei ω eine nichtnegative Funktion aus

$$C \{ [0, R] \times [0, 2\pi] \times [\sigma_0, \sigma_1] \}, \quad 0 < \sigma_0 < \sigma_1.$$

(A5)

$$u(t) \in L^1(0, \infty)$$

(A6) Sei

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\omega(r, \vartheta, \sigma) h(r, \vartheta)}{|\vec{v}(r, \vartheta, \sigma=0)|} \sqrt{g} d\vartheta dr d\sigma < \infty$$

(A7) Sei $\Gamma_t \cap \partial \Gamma$ in $[0, R] \times [0, 2\pi]$ eine Menge vom Mass Null für alle t .

Weiter definieren wir folgende Funktion K

$$K(t, \tau) = \int_{\Gamma_{t-\tau}} \omega(r, \vartheta, T^{-1}(r, \vartheta, t-\tau)) f_{\sigma}(r, \vartheta, \tau) \left[\sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right]_{\sigma=0} dr d\vartheta,$$

$$t \geq \tau_0, \max(0, t-\tau_1) < \tau < t-\tau_0,$$

$$0, \quad \text{für alle andere } t \text{ und } \tau,$$

T ist in (4,3) definiert.

Wenn die Voraussetzungen (A1) - (A5) erfüllt sind, dann gilt

$$a) \quad \bar{C}_{\sigma_0 \sigma_1}(t) = \int_0^{\infty} k(t, \tau) \mu(\tau) d\tau \quad \text{für alle } t \geq 0$$

$$b) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} k(t, \tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} k(t, \tau) = 0, \quad \int_0^{\infty} k(t, \tau) d\tau < \infty.$$

Wenn zusätzlich auch (A6) gilt, dann ist

$$c) \quad \int_0^{\infty} k(t, \tau) dt \leq \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \int_0^R \int_0^{\infty} \frac{\omega(r, \vartheta, \sigma) h(r, \vartheta)}{|\vec{r}(r, \vartheta, \sigma=0)|} \sqrt{g} d\vartheta dr d\sigma$$

$$d) \quad \bar{C}_{\sigma_0 \sigma_1}(t) \in L^1[0, \infty).$$

Wenn zusätzlich auch (A7) gilt, dann ist

$$e) \quad k(t, \tau) \text{ eine stetige Funktion.}$$

Um den Beweis übersichtlicher zu machen, schicken wir zwei Lemmas voraus, danach werden wir den Satz I beweisen.

Lemma 1. Wenn die Kontinuitätsgleichung (3,13) für die tragende Flüssigkeit und für den Indikator gültig ist, dann ist für $0 < \sigma \leq \sigma_1$

$$C(r, \vartheta, \sigma, t) = C(r, \vartheta, \sigma=0, t - T(r, \vartheta, \sigma)),$$

wobei

$$T(r, \vartheta, \sigma) = \int_0^{\sigma} \frac{ds}{v^3(r, \vartheta, s)}.$$

Bemerkung: Die in (4,3) eingeführte Funktion T hat eine sehr anschauliche physikalische Bedeutung. T ist die Zeit, die ein Flüssigkeitsteilchen braucht, um auf der Linie $h = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$ die "Strecke" $[0, \sigma]$ zurückzulegen.

Beweis des Lemma 1:

Aus (3,14) und (3,6) folgt

$$0 = \operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \sigma} (r^3 v^3),$$

also

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} (r^3 v^3) = 0. \quad (4,6)$$

Für die Indikatordichte erhalten wir aus (3,15) und (3,6)

$$0 = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \sigma} (r^3 c v^3) = \frac{\partial c}{\partial t} + v^3 \frac{\partial c}{\partial \sigma}. \quad (4,7)$$

Die Gleichung (4,7) ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung und wir suchen die Lösung für die Randbedingung

$$c = c(h, \vartheta, \sigma=0, t). \quad (4,8)$$

Dazu müssen wir die charakteristischen Gleichungen

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{d\sigma}{dt} = v^3(h, \vartheta, \sigma), \quad \frac{dc}{ds} = 0$$

der Gleichung (4,7) für die Anfangskurve

$$t = \tau, \quad \sigma = 0, \quad c = c(h, \vartheta, \sigma=0, \tau)$$

lösen. Die Gleichung

$$\frac{d\sigma}{dt} = v^3(h, \vartheta, \sigma)$$

wurde in (4,2) und (4,3) untersucht und es ist

$$t = \rho + \tau, \quad \rho = \int_0^\sigma \frac{d\sigma'}{r^3(\kappa, \vartheta, \sigma')} ;$$

daraus folgt

$$C(\kappa, \vartheta, \sigma, t) = C(\kappa, \vartheta, \sigma=0, \tau) = C(\kappa, \vartheta, \sigma=0, t - \int_0^\sigma \frac{d\sigma'}{r^3(\kappa, \vartheta, \sigma')}) \quad (4,9)$$

und das ist die gewünschte Relation.

Die Gleichung (4,9) hat eine sehr einfache physikalische Bedeutung. Bewegt sich ein Beobachter mit einem Flüssigkeitsteilchen, dann beobachtet er keine Änderung der Indikator-dichte. Diese Tatsache ist eine Konsequenz der Kontinuitätsgleichung, also des Massenerhaltungsgesetzes für jeden Teil des Gefäßes. Bei Verlusten des Indikators etwa durch eine radiale Diffusion oder eine nicht vernachlässigbare Ausstrahlung wird die Gleichung (4,7) nicht mehr homogen und die Lösung kann wesentlich verschieden von (4,9) sein.

Bemerkenswert ist auch die Gleichung (4,6), die wir später benötigen werden. Sie besagt, dass das Produkt $r^3 \sqrt{g}$ nur von κ und ϑ abhängig ist; beispielsweise ist damit

$$\int_0^\sigma \frac{ds}{r^3(\kappa, \vartheta, s)} = \frac{1}{r^3 \sqrt{g}} \int_0^\sigma \sqrt{g} ds \quad (4,10)$$

Diese Beziehung kann manchmal helfen, die Schnittmengen aus Satz I analytisch zu konstruieren.

Die Voraussetzung in Lemma 1, dass der Indikator der Kontinuitätsgleichung gehorcht, ist eigentlich ein Teil unserer Modellvorstellung und deswegen immer erfüllt (s. Abschnitt 3). Im Lemma 1 wurde sie nur wiederholt, um die Implikation:

$$\text{Massenerhaltung} \implies \begin{array}{l} \text{konstante Indikatordichte} \\ \text{auf den Charakteristiken} \end{array}$$

zu betonen.

Lemma 2. Unter den Voraussetzungen (A1) - (A5) des Satzes I gilt

$$C(r, \vartheta, \sigma=0, t) = \frac{u(t) f_0(r, \vartheta, t)}{|\vec{v}(r, \vartheta, \sigma=0)|} \quad (4,11)$$

Beweis:

Die Indikatormenge m , die im Zeitintervall $(0, \tilde{t})$ durch ein Teil $\tilde{S}$ der Fläche $\sigma=0$ (Abb.5) fließt, ist

$$m = \int_0^{\tilde{t}} \int_{\tilde{S}} \vec{i}(r, \vartheta, \sigma=0) d\vec{S} dt,$$

wobei die Indikatorflussdichte $\vec{i}$ in (3,9) gegeben ist.

Ähnlich wie in (3,11) erhalten wir

$$\int_{\tilde{S}} u(t) \vec{f}(r, \vartheta, t) d\vec{S} = \int_{\tilde{S}} u f_0 \left[\sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right]_{\sigma=0} dr d\vartheta.$$

Für g_{33} können wir aus (3,7) folgende Darstellung gewinnen:

$$\vec{v} = v^3 \vec{e}_3, \quad |\vec{v}| = v^3 \sqrt{g_{33}}$$

und daraus endlich

$$m = \int_0^{\tilde{t}} \int_{\tilde{S}} \frac{u(t) f_0(r, \vartheta, t)}{|\vec{v}(r, \vartheta, \sigma=0)|} v^3 \sqrt{g} dr d\vartheta dt \quad (4,12)$$

Diese Indikatormenge füllt dann ein Segment zwischen $\sigma = 0$ und $\sigma = T^{-1}(r, \vartheta, \tilde{r})$ aus, wobei T^{-1} die Umkehrfunktion der in (4,3) definierten Funktion T bezeichnet. So erhalten wir für m

$$m = \int_V c dV = \int_{\tilde{r}} \int_0^{T^{-1}(r, \vartheta, \tilde{r})} \int_0^{\tilde{r}} c(r, \vartheta, s, \tilde{r}) \sqrt{g} ds dr d\vartheta$$

Jetzt benutzen wir Lemma 1

$$m = \int_{\tilde{r}} \int_0^{T^{-1}(r, \vartheta, \tilde{r})} \int_0^s c(r, \vartheta, 0, T - \int_0^s \frac{ds'}{v^3(r, \vartheta, r')}) \sqrt{g} ds dr d\vartheta$$

und mit einer Substitution für s

$$t = \tilde{r} - \int_0^s \frac{ds'}{v^3(r, \vartheta, r')} , \quad ds = -v^3 dt$$

erhalten wir

$$m = \int_{\tilde{r}} \int_0^{\tilde{r}} c(r, \vartheta, 0, t) v^3 \sqrt{g} dt dr d\vartheta \quad (4,13)$$

Der Integrand in (4,13) (und auch in (4,12)) ist nicht negativ und die Gleichheit zwischen (4,12) und (4,13) soll für alle $\tilde{r}$ und $\tilde{r}$ gelten. Dies impliziert nach bekannten Sätzen aus der Integralrechnung die Beziehung (4,11).

Bemerkung: Setzen wir (4,9) und (4,11) zusammen, so ergibt sich

$$c(r, \vartheta, \sigma, t) = \frac{1}{|\vec{v}(r, \vartheta, \sigma=0)|} \left(u\left(t - \int_0^\sigma \frac{ds}{v^3}\right) f_\sigma\left(r, \vartheta, t - \int_0^\sigma \frac{ds}{v^3}\right), \quad (4,14)$$

also eine lokale Version des Satzes I. Es gibt aber keine Möglichkeit die Indikator-dichte lokal zu messen und folglich hat die Beziehung (4,14) keine praktische Bedeutung, allerdings wird sie wichtig für den nächsten Beweis.

Beweis des Satzes I.

Aus (3,12) folgt nach Lemma 1,

$$\begin{aligned}\bar{C}_{\sigma_0 \sigma_1}(t) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \omega(r, \vartheta, \sigma) C(r, \vartheta, \sigma, t) \sqrt{g} d\sigma d\vartheta dr = \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \omega(r, \vartheta, \sigma) C(r, \vartheta, \sigma=0, t - \int_0^{\sigma} \frac{ds}{v^3(r, \vartheta, s)}) \sqrt{g} d\sigma d\vartheta dr.\end{aligned}$$

Die letzte Identität betrachten wir nur für (s. 4,5a)

$$t \geq \tau_0 = \min_{(r, \vartheta)} \int_0^{\sigma_0} \frac{ds}{v^3(r, \vartheta, s)} ; \quad (4,15)$$

für $t < \tau_0$ ist $\bar{C}_{\sigma_0 \sigma_1} = 0$. Nach den Überlegungen in (4,2) und (4,3) dürfen wir für σ eine neue Integrationsveränderliche

$$\tau = T(r, \vartheta, \sigma)$$

einführen und so erhalten wir

$$\bar{C}_{\sigma_0 \sigma_1}(t) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{T(r, \vartheta, \sigma_0)}^{\min[t, T(r, \vartheta, \sigma_1)]} \omega(r, \vartheta, T^{-1}(r, \vartheta, \tau)) C(r, \vartheta, 0, t - \tau) v^3 \sqrt{g} d\tau d\vartheta dr$$

Jetzt vertauschen wir noch die Reihe der Integrationen und benutzen Lemma 2. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\bar{c}_{\sigma_0 \sigma_1}(t) &= \int_{\tilde{\tau}_0}^{\min[t, \tilde{\tau}_1]} d\tilde{\tau} \, \mu(t-\tilde{\tau}) \int_{\Gamma_{\tilde{\tau}}} \frac{\omega(r, \vartheta, \tilde{\tau}'(r, \vartheta, \tilde{\tau})) f_0(r, \vartheta, t-\tilde{\tau})}{|\vec{v}(r, \vartheta, \sigma=0)|} r^3 \sqrt{g} \, dr d\vartheta \\ &= \int_{\max[0, t-\tilde{\tau}_1]}^{t-\tilde{\tau}_0} d\tilde{\tau} \, \mu(\tilde{\tau}) \int_{\Gamma_{(t-\tilde{\tau})}} \frac{\omega(r, \vartheta, \tilde{\tau}'(r, \vartheta, t-\tilde{\tau})) f_0(r, \vartheta, \tilde{\tau})}{|\vec{v}(r, \vartheta, \sigma=0)|} r^3 \sqrt{g} \, dr d\vartheta\end{aligned}$$

Es sei noch bemerkt, dass $r^3 \sqrt{g}$ eine σ -unabhängige Funktion ist (s. 4, 6) und daher

$$\frac{r^3(\sigma) \sqrt{g(\sigma)}}{|\vec{v}(\sigma=0)|} = \frac{r^3(\sigma=0) \sqrt{g(\sigma=0)}}{r^3(\sigma=0) \sqrt{g_{33}(\sigma=0)}} = \left[\sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right]_{\sigma=0}.$$

Daraus folgt die Aussage a).

Für $\tilde{\tau} \rightarrow \infty$ bei festem t wird (für $\tilde{\tau} > t - \tilde{\tau}_0$) $K(t, \tilde{\tau}) = 0$ und deswegen ist trivialerweise

$$\lim_{\tilde{\tau} \rightarrow \infty} K(t, \tilde{\tau}) = 0, \quad \int_0^\infty K(t, \tilde{\tau}) d\tilde{\tau} < \infty.$$

Ist $\tilde{\tau}_1$ endlich, dann ist auch $\lim_{t \rightarrow \infty} K(t, \tilde{\tau}) = 0$ evident.

Bei $\tilde{\tau}_1 = \infty$ geht das Mass der Menge $\Gamma_{(t-\tilde{\tau})}$ gegen Null, aber der Integrand bleibt beschränkt. Damit ist auch b) bewiesen.

Um c) zu beweisen, vertauschen wir zunächst die Reihe der Integrationen und substituieren

$$t = \tau + \int_0^{\sigma} \frac{ds}{r^3(r, \vartheta, s)} \quad . \quad \text{Dann ist}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} k(t, \tau) dt &= \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\vartheta f_0(r, \vartheta, \tau) \left[\sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right]_{\sigma=0}^{\tau+T(r, \vartheta, \sigma_1)} \int_{\tau+T(r, \vartheta, \sigma_0)}^{\tau+T(r, \vartheta, \sigma_1)} \omega(r, \vartheta, T(r, \vartheta, t-\tau)) dt \\ &= \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\vartheta f_0(r, \vartheta, \tau) \left[\sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right]_{\sigma=0}^{\sigma_1} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{\omega(r, \vartheta, \sigma) d\sigma}{r^3(r, \vartheta, \sigma)} \end{aligned} \quad (4,16a)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \dots \frac{\sqrt{g(\sigma=0)}}{\sqrt{g_{33}(\sigma=0)}} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \omega \frac{\sqrt{g(\sigma)} d\sigma}{\sqrt{g(\sigma)} r^3(\sigma)} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \dots \frac{\sqrt{g(\sigma=0)}}{\sqrt{g_{33}(\sigma=0)}} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \omega \frac{\sqrt{g(\sigma)} d\sigma}{\sqrt{g(\sigma=0)} r^3(\sigma=0)} \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{f_0(r, \vartheta, \tau) d\vartheta dr}{|\vec{r}(r, \vartheta, \sigma=0)|} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \omega(r, \vartheta, \sigma) \sqrt{g} d\sigma \end{aligned} \quad (4,16b)$$

Die Abschätzung (A6) garantiert die Existenz des letzten Integrals.

Aus der Eigenschaft a) folgt:

$$\int_0^{\infty} \bar{c}_{\sigma_0, \sigma_1}(t) dt = \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} \mu(\tilde{\tau}) K(t, \tilde{\tau}) d\tilde{\tau} = \int_0^{\infty} \mu(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \int_0^{\infty} k(t, \tilde{\tau}) dt$$

und der letzte Ausdruck ist wegen (A6) endlich.

Um die Stetigkeit von K zu zeigen, schreiben wir

$$K(t, \tau) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \mathcal{X}(\Gamma_{t-\tau}) \omega(r, \vartheta, \tau(r, \vartheta, t-\tau)) f_{\sigma}(r, \vartheta, \tau) \left[\sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right]_{\sigma=0}$$

wobei $\mathcal{X}(\Gamma_{t-\tau})$ die charakteristische Funktion der Menge $\Gamma_{t-\tau}$ ist. Ist nun für einen gewissen festen Punkt (r, ϑ)

$$\int_0^{\sigma_0} \frac{ds}{r^3(r, \vartheta, s)} < t - \tau < \int_0^{\sigma_1} \frac{ds}{r^3(r, \vartheta, s)},$$

dann ist der Integrand in (t, τ) stetig. Liegt aber der Punkt $(r, \vartheta, t - \tau)$ auf $\partial\Gamma$, dann könnte der Integrand unstetig sein; Solche Punkte (r, ϑ) aber bilden wegen (A7) nur eine Nullmenge. Aufgrund (A3) und (A7) existiert eine integrierbare Majorante also ist K stetig.

Aus dem Beweis ist leicht zu sehen, dass bei einer zeitunabhängigen Verteilungsfunktion $f_{\sigma} = f_{\sigma}(r, \vartheta)$ der Kern der Integraltransformation nur eine Funktion der Differenz $t - \tau$ ist. Daraus folgt der

Satz II.

Sei

$$f_{\sigma}(r, \vartheta, t) = f_{\sigma}(r, \vartheta)$$

und seien die Voraussetzungen (A2), (A4), (A5) gültig. Dann ist

$$K(t, \tau) = k(t - \tau).$$

Wenn zusätzlich für $k = f_{\sigma}$ auch die Voraussetzung (A6) gilt, dann ist die Faltungstransformation

$$\bar{C}_{\sigma_0 \sigma_1}(t) = k(t) * \mu(t)$$

stabil, d.h.

$$\int_0^{\infty} k(t) dt < \infty$$

Das nächste Beispiel zeigt, dass für die Stabilität der Faltungstransformation die Voraussetzung (A6) notwendig ist.

Beispiel:

Betrachten wir einen kreisförmigen Zylinder mit $\omega = 1/\sqrt{\sigma_0 \sigma_1}$ (einfacher Mittelwert), $\rho_0 = 1/S$ (Querschnittsmarkierung) und (Poiseuille'sche Strömung)

$$v(r) = v_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right).$$

Dann bekommen wir

$$k(t-\tilde{t}) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0 \sigma_1}} \left(1 - \frac{\sigma_0}{v_0(t-\tilde{t})}\right), \quad \frac{\sigma_0}{v_0} \leq t-\tilde{t} \leq \frac{\sigma_1}{v_0}$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{v_0 \sqrt{\sigma_0 \sigma_1}} \cdot \frac{1}{t-\tilde{t}}, \quad \frac{\sigma_1}{v_0} \leq t-\tilde{t}$$

Allerdings ist

$$\int_0^{\infty} k(t) dt = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0 \sigma_1}} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{v_0} - \sigma_0 \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right) + \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{v_0 \sqrt{\sigma_0 \sigma_1}} \int_{\frac{\sigma_1}{v_0}}^{\infty} \frac{1}{t} dt = \infty$$

In diesem Falle ist aber die Voraussetzung (A6) nicht erfüllt.

5. Die Flussmessung

In diesem Abschnitt möchten wir die Gültigkeit der ersten S-H Gleichung untersuchen. In unserem Modell hat die Gleichung folgende Form

$$\frac{Q}{F} = \int_0^{\infty} \bar{c}_{\sigma_0 \sigma_1}(t) dt \quad (5,1)$$

Wir nehmen an, dass die Voraussetzungen (A1) - (A6) erfüllt sind, um überhaupt über das Integral (5,1) sprechen zu dürfen. Es ist dabei

$$Q = \int_0^{\infty} \mu(t) dt, \quad F = \int_S \vec{v} dS$$

und mit (3,16) stellt (4,1) eine Bedingung für die Funktionen $\omega, \phi, \vec{v}$ und μ dar (natürlich nur in einer bekannten Rohrstruktur). Es liegt der Gedanke nahe aus der Kenntnis gewisser Parameter, d.h. aus gewissen der genannten Funktionen, Aussagen über die restlichen zu erhalten. Um solche Fragen sinnvoll zu gestalten, müssen wir uns klarmachen inwieweit diese Parameter vom Experiment her bestimmt sind und umgekehrt, wie weit gewisse "wünschenswerte" Parameter für das Experiment realistisch sind.

Im einzelnen haben wir folgende Situation:

$\vec{v}$ ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeit, die nur sehr schwer zu bestimmen ist und der Experimentator hat praktisch keine Möglichkeit sie zu ändern.

ϕ ist, bis auf gewisse Ausnahmen, die später diskutiert werden, eine unbekannte Funktion, die sich sogar von Experiment zu Experiment ändern kann.

ω ist eine gut bekannte Funktion, und es besteht innerhalb gewisser Grenzen die Möglichkeit, für eine "vorgegebene" Funktion ω die entsprechende Messapparatur zu konstruieren.

μ ist näherungsweise bekannt und der Experimentator kann in gewissen Grenzen die Gestalt von $\mu(u)$ beeinflussen.

Die Frage der Gültigkeit der Gleichung (5,1) müssen wir jetzt mit Rücksicht auf die oben erwähnten Unsicherheiten betrachten, also es wäre relevant, etwa zu fragen, ob es ein ω gibt, so dass (5,1) für alle μ aus einer gewissen Klasse von Funktionen gilt, oder unter welchen Bedingungen die Gültigkeit von (5,1) von μ unabhängig ist usw. Für die Untersuchung solcher globalen Fragen ist das nächste bekannte Lemma nützlich.

Lemma 3. Sei $\alpha(x) \in L^\infty(\Omega)$, also eine wesentlich beschränkte Funktion auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und sei

$$\int_{\Omega} \alpha(x) \beta(x) dx = 0$$

für alle $\beta \in L^1(\Omega)$. Dann ist $\alpha = 0$ fast überall.

Beweis. S. [1]

Wir beginnen mit der Frage, ob es ein ω gibt mit dem man die Gleichung (5,1) für alle μ befriedigen kann.

Satz 3. Es seien die Voraussetzungen (A1) - (A6) erfüllt. Die Gleichung (5,1) ist gültig für alle $\mu \in L^1[0, \infty)$ dann und nur dann, wenn es gilt

$$\omega(\lambda, \vartheta, \sigma) = v^3(\lambda, \vartheta, \sigma) \left(\frac{1}{F(\sigma_1 - \sigma_0)} + \psi(\lambda, \vartheta, \sigma) \right), \quad (5,2)$$

wobei ψ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften ist:

$$1) \quad r^3 \psi \in C\{[0, R] \times [0, 2\pi] \times [\sigma_0, \sigma_1]\} ,$$

$$2) \quad \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} f_0(r, \vartheta, t) \psi(r, \vartheta, \sigma) \left[\sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right]_{\sigma=0} d\sigma d\vartheta dr = 0 ,$$

$$3) \quad \psi \geq \frac{1}{F(\sigma_1 - \sigma_0)} .$$

Beweis: Aus (5,1) folgt

$$\int_0^\infty \mu(\tau) d\tau = F \int_0^\infty d\tau \mu(\tau) \int_0^\infty k(t, \tau) dt$$

und daher

$$0 = \int_0^\infty \mu(\tau) \left\{ 1 - F \int_0^\infty k(t, \tau) dt \right\} d\tau .$$

Damit diese Identität unabhängig von μ erfüllt ist, muss nach dem Lemma gelten

$$1 - F \int_0^\infty k(t, \tau) dt = 0 \quad (5,3)$$

für fast alle τ aus $[0, \infty)$.

Das Integral berechnen wir mit der Formel (4,16a) und erhalten

$$1 - F \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{f_0(r, \vartheta, \tau) \omega(r, \vartheta, \sigma)}{r^3(r, \vartheta, \sigma)} \left[\sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right]_{\sigma=0} d\sigma d\vartheta dr = 0 . \quad (5,4)$$

Die Gleichung (5,4) ist eine lineare Integralgleichung für ω also brauchen wir nur eine partikuläre Lösung ω_0 des inhomogenen Problems und die allgemeine Lösung ω_h des homogenen Problems zu finden. Das gesuchte ω ist dann als $\omega = \omega_0 + \omega_h$ darstellbar.

Es ist leicht zu sehen, dass

$$\omega_0 = \frac{v^3(r, \vartheta, \sigma)}{F(\sigma_1 - \sigma_0)} \quad (5,5)$$

eine partikuläre Lösung ist. Setzen wir (5,5) in (5,4) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 - \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{f_0(r, \vartheta, \tau)}{\sigma_1 - \sigma_0} \left[\sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right]_{\sigma=0} d\sigma d\vartheta dr = \\ = 1 - \int_0^R \int_0^{2\pi} f_0(r, \vartheta, \tau) \left[\sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right]_{\sigma=0} d\vartheta dr = 0 \end{aligned}$$

und das ist die Normierungsbedingung (3,11).

Für die Lösung des homogenen Problems machen wir den Ansatz

$$\omega_h(r, \vartheta, \sigma) = v^3(r, \vartheta, \sigma) \psi(r, \vartheta, \sigma)$$

und das impliziert die Eigenschaften 1) - 3) für ψ .

Umgekehrt, wenn ω durch (5,2) gegeben ist, genügt es ω in (5,4) zu substituieren, um zu sehen, dass (5,4) und dadurch auch (5,1) gilt.

Eine gewisse Vereinfachung ergibt sich im Falle der Faltungs-
transformation, die im Satz 2 charakterisiert ist.

Satz 4. Es seien die Voraussetzungen (A2), (A4), (A6) erfüllt
und es sei zusätzlich $f_0(r, \vartheta, t) = f_0(r, \vartheta)$ zeitunabhängig.

Dann ist (5,2) eine notwendige und hinreichende Bedingung
für die Gültigkeit der Gleichung (5,1).

Beweis: Unsere Voraussetzungen erlauben uns, Satz 2 an-
zuwenden und somit ist

$$\begin{aligned} \frac{q}{F} &= \frac{1}{F} \int_0^{\infty} \mu(t) dt = \int_0^{\infty} \bar{c}_{\theta_0 \theta_1}(t) dt = \int_0^{\infty} k(t) * \mu(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} k(t) dt \int_0^{\infty} \mu(t) dt . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{F} = \int_0^{\infty} k(t) dt .$$

Jetzt können wir wieder die Formel (4,16a) benutzen und es
ergibt sich die Gleichung (5,4). Weiter verfahren wir wie
im früheren Beweis.

In den vorherigen Sätzen wurde ω von f_0 abhängig und zwar
durch die Funktion ψ . Sehr oft ist aber über f_0 nichts
bekannt und dadurch erhebt sich die Frage nach ω , das die
Gleichung (5,1) für "alle f_0 " befriedigt.

Eine Antwort darauf gibt der nächste Satz

Satz 5: Unter den Voraussetzungen des Satzes 4 sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

a) Die Gleichung (5,1) ist für alle f_0 erfüllt, für die gilt

$$f_0(r, v^l) \left[\sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right]_{\sigma=0} \in L^1 \{ [0, R] \times [0, 2\pi] \}$$

b) Es gilt

$$\omega = \frac{r^3(r, v^l, \sigma)}{F(\sigma_1 - \sigma_0)}$$

Beweis: Wegen Satz 3 ist ω durch (5,2) gegeben und für ψ fordern wir nun, dass die Bedingung 2) im Satz 3 für "alle" f_0 erfüllt ist. Nach dem Lemma muss dann $\psi = 0$ fast überall sein.

Bemerkung: Im Abschnitt 3 haben wir die Flussmarkierung eingeführt. Diese Markierung entsteht bei einer vollständigen Mischung des Indikators mit der tragenden Flüssigkeit und ist durch die Verteilungsfunktion

$$\vec{p} = \frac{\vec{r}(r, v^l, \sigma=0)}{F} \quad (5,6)$$

charakterisiert. In diesem Falle ist

$$f_\sigma = f^3 \sqrt{g_{33}^{(\sigma=0)}} = \frac{r^3(r, v^l, \sigma=0)}{F} \sqrt{g_{33}^{(\sigma=0)}} \quad (5,7)$$

Andererseits ist das Erfülltsein der Gleichung (5,1) für "alle" μ mit der Gleichung (5,4) gleichwertig. Wenn wir jetzt für ρ in (5,4) substituieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 1 - F \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{r^3(r, \vartheta, \sigma=0) \omega(r, \vartheta, \sigma)}{F r^3(r, \vartheta, \sigma)} \sqrt{g(\sigma=0)} d\sigma d\vartheta dr &= \\
 = \dots \frac{r^3(\sigma=0)}{r^3(\sigma)} \sqrt{g(\sigma=0)} \dots = \dots \frac{r^3(\sigma) \sqrt{g(\sigma)}}{r^3(\sigma)} \dots = \\
 = 1 - \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \omega(r, \vartheta, \sigma) \sqrt{g} d\sigma d\vartheta dr = 0.
 \end{aligned}$$

Letzteres kann aber durch eine geeignete Normierung von ω immer erreicht werden.

6. Das Momentenproblem für einen Zylinder

In diesem und nächsten Abschnitt beschränken wir uns auf einen kreisförmigen Zylinder, das heisst, die Abbildung aus der Definition einer Rohrstruktur im Abschnitt 2 ist

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta, \quad z = \sigma \quad (6,1)$$

In diesem Fall ist $\sqrt{g} = r$ und $g_{33} = 1$ und daher sind die Trajektorien der Teilchen $r = \text{const}, \vartheta = \text{const}$ mit der Bogenlänge parametrisiert. Daraus ergibt sich nach (3,5) und (3,8)

$$v = |\vec{v}| = v^3 = v_3 = v_6$$

also sind alle "dritten" Komponenten - die kontravariante, die kovariante und die physikalische - gleich und werden weiter mit v bezeichnet. Dasselbe gilt für die Verteilungsfunktion $\vec{f}$, im Folgenden ist $f = f_3$.

Für die Parameter des Systems machen wir folgende Annahmen (Abb. 7):

- 1) Alle in Betracht kommenden Funktionen sind von ϑ unabhängig (Axialsymmetrie).
- 2) Im Teil M (Abb. 7) findet eine vollständige Mischung statt, d.h. die Indikator-dichte $\rho(t)$ in M hängt nur von t ab und es ist

$$C(r, z=0, t) = \rho(t) \quad (6,2)$$

für alle t .

3) Das Geschwindigkeitsprofil v hängt nur von r ab,

$v = v(r) \geq 0$ und ist eine nichtwachsende Funktion in $[0, R]$.

4) Die Gewichtsfunktion ω sei konstant;

$$\omega = \frac{1}{V_{ab}} = \frac{1}{\pi R^2 (b-a)}$$

hier ist $\sigma_0 = a$, $\sigma_1 = b$.

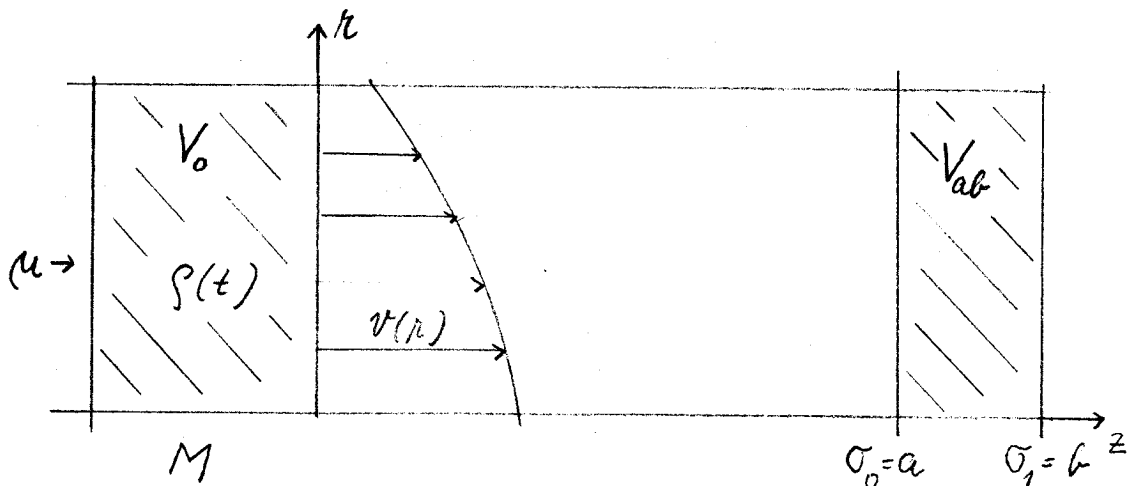


Abb. 7

Bemerkung: In der Terminologie unseres Modells ist gemäss (3,11) die Verteilungsfunktion f als

$$f = \frac{v(r)}{F}$$

zu schreiben und die Indikator-dichte ρ gleich μ zu setzen.

Bei vollständiger Mischung des Indikators ist die

Menge des Indikators in M gleich $f(t) V_0$ und zwischen

$t = t_0$ und $t = t_1$ ändert sich diese Menge von $f(t_0) V_0$

zu $f(t) V_1$. In der gleichen Zeit fliesst die

Indikatormenge

$$\int_{t_0}^{t_1} \mu(t) dt$$

in den Teil M hinein und

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \rho(t) \int_S r(x) dS$$

aus dem Teil M heraus. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \rho(t_1) V_0 - \rho(t_0) V_0 &= V_0 \int_{t_0}^{t_1} \rho'(t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \mu(t) dt - F \int_{t_0}^{t_1} \rho(t) dt \end{aligned}$$

Da dies für alle t_0, t_1 gilt, ist

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{F}{V_0} \rho = \frac{\mu(t)}{V_0} \quad (6,3)$$

Die Lösung der Differentialgleichung (6,3) kann man als ein Faltungsintegral schreiben.

$$\rho(t) = \frac{1}{V_0} \int_0^\infty \mu(t-\tau) e^{-\frac{F}{V_0} \tau} d\tau = \mu * \frac{1}{V_0} e^{-\frac{F}{V_0} t} \quad (6,4)$$

und daraus auch alle Momente der Funktion ρ , falls sie existieren, berechnen. Hat zum Beispiel die Funktion $\mu(t)$

einen kompakten Träger, dann existieren alle Momente von μ und $\int$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty t^n f(t) dt &= \int_0^\infty dt t^n \frac{1}{V_0} \int_0^\infty \mu(t-\tau) e^{-\frac{F}{V_0} \tau} d\tau \\
 &= \int_0^\infty dt \int_0^\infty \frac{1}{V_0} (t-\tau+\tau)^n \mu(t-\tau) e^{-\frac{F}{V_0} \tau} d\tau \\
 &= \frac{1}{V_0} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^\infty t^{n-k} \mu(t) dt \cdot \int_0^\infty t^k e^{-\frac{F}{V_0} t} dt \\
 &= \frac{1}{V_0} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! \left(\frac{V_0}{F}\right)^{k+1} \mu_{n-k}
 \end{aligned} \tag{6,5}$$

wobei μ_n das n -te Moment von μ ,

$$\mu_n = \int_0^\infty t^n \mu(t) dt$$

bezeichnet.

Der Unterschied zu den früheren Überlegungen besteht nur darin, dass wir statt (4,11) direkt die Formel (6,2) mit (6,4) benutzen.

Auch die Annahme 3) stellt eine Änderung zum früheren dar. In (3,7) wurde das Geschwindigkeitsprofil als stetig vorausgesetzt, hier fordern wir nur die Monotonie.

Das ist ohne weiteres möglich, weil die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r v(r)) = 0$$

in unserem Falle auch für ein unstetiges $v(r)$ erfüllt ist und dadurch dürfen wir das Lemma 1 benutzen, was dann eine besonders einfache Formel

$$C(r, z, t) = C(r, z=0, t - \frac{z}{v(r)}) \quad (6,6)$$

ergibt.

Mit den oben gemachten Annahmen erhalten wir jetzt für $\bar{C}_{ab}(t)$ folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ab}(t) &= \int_a^b \int_S C(r, z, t) \omega(r) dS dz \\ &= 2\pi \int_a^b \int_0^R C(r, z=0, t - \frac{z}{v(r)}) \omega(r) r dr dz \\ &= 2\pi \int_0^R r \omega(r) v(r) \int_{\frac{a}{v(r)}}^{\frac{t}{v(r)}} \rho(t-\tau) d\tau dr. \end{aligned} \quad (6,7)$$

Für die Funktion ρ verlangen wir die Existenz aller Momente und im weiteren nehmen wir an, dass die Momente gegeben sind. Dies ist z.B. für eine Funktion μ mit kompaktem Träger fast selbstverständlich, denn die Existenz der Momente von μ und ρ ist nach (6,5) äquivalent und μ ist bei der praktischen Anwendung gut bekannt.

Jetzt sind wir in der Lage, unser Ziel zu formulieren:

Aus den Momenten der Dilutionskurve C_m ,

$$C_m = \int_0^{\infty} \bar{C}_{af}(t) t^m dt, \quad m=0,1,\dots \quad (6,8)$$

möchten wir das Geschwindigkeitsprofil $v(r)$ bestimmen.

Im Folgenden werden wir untersuchen, ob und wann das möglich ist. Zuerst dazu der

Satz 6. Alle Momente C_m existieren dann und nur dann, wenn die Integrale

$$\int_0^R \frac{r dr}{v(r)^m}$$

existieren, und wir können sie mittels folgender Identität berechnen

$$C_m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \int_{a+b}^{a+b} \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)} \frac{2}{R^2} \int_0^R \frac{r dr}{v(r)^k} \quad (6,9)$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} C_m &= \int_0^{\infty} t^m \bar{C}_{af}(t) dt = 2\pi \int_0^{\infty} dt t^m \int_0^R dr \omega(r) v(r) r \int_{\frac{a}{v(r)}}^{\frac{b}{v(r)}} \delta(t-\tau) d\tau \\ &= 2\pi \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \int_0^R dr \omega(r) v(r) r \int_{\frac{a}{v(r)}}^{\frac{b}{v(r)}} d\tau \tau^k \int_0^{\infty} (t-\tau)^{m-k} \delta(t-\tau) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\tilde{v} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{n-k} \int_0^R \omega(r) v(r) r \frac{1}{k+1} \left[\left(\frac{b}{v(r)} \right)^{k+1} - \left(\frac{a}{v(r)} \right)^{k+1} \right] dr \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{n-k} \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)} \frac{2}{R^2} \int_0^R \frac{r dr}{v(r)^k}
 \end{aligned}$$

Bemerkung: Für $b \rightarrow a$ ergibt sich

$$\lim_{b \rightarrow a} C_m = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{n-k} a^k \frac{2}{R^2} \int_0^R \frac{r dr}{v(r)^k}$$

Auf den ersten Blick können wir für $b-a \ll a$ die Formel (5,9) "vereinfachen", allerdings ist die Annahme $b-a \ll a$ nicht realistisch, im Gegenteil im Experiment bemüht man sich die Messtelle so breit wie möglich zu halten, um eine bessere Genauigkeit der Messung zu erreichen.

Im nächsten Beispiel werden wir sehen, dass es allgemein nicht möglich ist, die Geschwindigkeit $v(r)$ aus der Integralen $\int_0^R \frac{r dr}{v(r)^n}$ eindeutig zu bestimmen.

Beispiel: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit untersuchen wir in diesem Beispiel die Integrale

$$\int_0^R \left[\frac{1}{v(r)} - \frac{1}{v(0)} \right] r^n dr \quad (6,10)$$

Zuerst definieren wir zwei Hilfsfunktionen g_1 und g_2 :

$$g_1(\rho) = \frac{R}{2} \sqrt{1 + \operatorname{erf}(\rho)},$$

$$g_2(\rho) = \frac{R}{2} \sqrt{1 + \operatorname{erf}(\rho) + e^{-\pi^2} \operatorname{Im}\{\operatorname{erf}(\rho - i\pi)\}},$$

hier ist $\operatorname{erf}(\rho) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\rho e^{-t^2} dt$ das bekannte Fehlerintegral.

Offensichtlich ist

$$g_1(-\infty) = g_2(-\infty) = 0, \quad g_1(\infty) = g_2(\infty) = R$$

und beide Funktionen sind monoton zunehmend (die Ableitungen sind positiv).

Jetzt definieren wir parametrisch zwei Geschwindigkeitsprofile

$$r_i = g_i(\rho), \quad v_i(\rho) = \frac{v_0}{v_0 e^{\rho + \frac{1}{2}} + 1}, \quad i = 1, 2.$$

Hier ist v_0 eine positive Zahl und $-\infty < \rho < \infty$.

Die Integrale

$$\frac{2}{R^2} \int_0^R \left[\frac{1}{v_i(r)} - \frac{1}{v_i(0)} \right] r dr = \frac{2}{R^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\rho + \frac{1}{2})m} d g_i^2(\rho)$$

existieren für alle n und es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{2}{R^2} \int_0^R \left[\frac{1}{v_1(r)} - \frac{1}{v_1(0)} \right]^n r dr - \frac{2}{R^2} \int_0^R \left[\frac{1}{v_2(r)} - \frac{1}{v_2(0)} \right]^n r dr = \\ & = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{(n+\frac{1}{2})\rho} e^{-\rho^2} \sin 2\tilde{u}\rho d\rho = \\ & = -(-1)^n e^{\frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin 2\tilde{u}x dx = 0 \end{aligned}$$

weil der Integrand im letzten Integral eine ungerade Funktion ist. Somit sind für die beiden verschiedenen Funktionen die Integrale (6,10) gleich.

In dem Beispiel verschwindet die Geschwindigkeit am Rande, d.h. $v_i(R) = 0$, $i = 1, 2$ und das ist für die Eindeutigkeit der Aufgabe sehr wichtig.

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass $v(R) \neq 0$ für die Eindeutigkeit eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung ist.

Die Bestimmung der Geschwindigkeit

Im letzten Abschnitt haben wir $v(r)$ als monoton vorausgesetzt. Bekanntlich hat eine monotone Funktion auf dem Intervalle $[0, R]$ höchstens abzählbar viele Unstetigkeiten und die Grenzwerte

$$\lim_{r \rightarrow 0+} v(r), \quad \lim_{r \rightarrow R-} v(r)$$

existieren. Wenn wir jetzt aus den Integralen

$$v_n = \int_0^R \frac{r \, dr}{v(r)^n} \quad (7,1)$$

die Funktion v bestimmen möchten, dann ist das eine trivialerweise nicht eindeutige Aufgabe, weil eine beliebige Änderung des Integranden auf den Unstetigkeitsstellen die Integrale (6,1) nicht ändert. Um das zu vermeiden, verlangen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit, dass die monotonen Funktionen, die wir hier betrachten werden, folgende Eigenschaften haben;

- 1) $f(r) = \frac{1}{2} [f(r-0) + f(r+0)]$ für alle $r \in (0, R)$ (7,2)
- 2) f ist in 0 und R einseitig stetig.

Der einzige Funktionswert der Funktion $v(r)$, den wir direkt messen können ist $v(0)$, also die maximale Geschwindigkeit. Dazu brauchen wir nur die Zeit, die das schnellste Teilchen

braucht um die Messtelle zu erreichen. Die kleinste Geschwindigkeit $v(R)$ können wir aus den v_n berechnen. Es gilt nämlich

Satz 7.

$$v(R) = \limsup \sqrt[n]{v_n} \quad (7,3)$$

Beweis: Wir betrachten die unendliche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^R \left(\frac{z}{v(r)} \right)^n r dr$$

Ist nun $\frac{z}{v(r)} > 1$ auf einer Menge mit positivem Mass, dann divergiert die Reihe. Dagegen handelt es sich für $\frac{z}{v(r)} < 1$ (fast überall) um eine konvergente Reihe.

Somit ist

$$\exp \min v(r) = \min v(r) = v(R)$$

der Konvergenzradius der Reihe. (7,3) ist eine bekannte Darstellung für den Konvergenzradius einer unendlichen Reihe.

Aus dem vorher Gesagten dürfen wir - mindestens theoretisch - annehmen, dass $v(0)$ und $v(R)$ bekannt sind. Weiterhin schliessen wir noch den trivialen Fall konstanter Geschwindigkeit aus.

Um die nächsten Überlegungen und Beschreibungen nicht unnötig zu erschweren, führen wir noch die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{v(Rx)} - \frac{1}{v(0)} \right), \quad (7,4)$$

mit

$$L = \frac{1}{r(R)} - \frac{1}{r(0)}$$

ein. Dann ist f eine monoton nichtfallende Funktion,

$$\text{mit } f(0) = 0, \quad f(1) = 1$$

und alle Aussagen über f sind leicht übertragbar auf v .

Für die Eindeutigkeit brauchen wir folgendes Lemma von Hausdorff (1923).

Lemma. Zu den gegebenen Zahlen $u_n, n = 0, 1, 2, \dots$ existiert höchstens eine Funktion $u(x)$ mit beschränkter Variation, die im Sinne (7,2) normiert dargestellt ist mit $u(0) = 0$ so dass gilt

$$\int_0^x x^n du(x) = u_n$$

Beweis: S. [4] oder [6]

Satz 8. Seien $v_1(r)$ und $v_2(r)$ zwei monoton nicht wachsende Funktionen auf $[0, R]$ mit $v_i(R) \neq 0$ für $i = 1, 2$.

$$\text{Sei } \int_0^R \frac{r dr}{v_1(r)^n} = \int_0^R \frac{r dr}{v_2(r)^n} \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots,$$

dann ist $v_1(r) = v_2(r)$ für alle $r \in [0, R]$.

Beweis: Nehmen wir an, dass es zwei verschiedene Funktionen

$v_1 \neq v_2$ gäbe, für die aber gilt

$$\int_0^R \frac{r dr}{v_1(r)^n} = \int_0^R \frac{r dr}{v_2(r)^n}$$

für alle n . Zuerst konstruieren wir die nach (7,4) entsprechenden Funktionen f_i . Dann definieren wir ein Mass auf dem Intervalle $0,1$ mit Hilfe der monoton wachsenden Funktion $\sigma(t) = t^2$.

Sei jetzt für $i = 1, 2$

$$u_i(y) = \frac{1}{R^2} \sigma \left\{ t \in [0, 1] \mid f_i(t) \leq y \right\}.$$

Offensichtlich ist $u_i(0) = 0$ und u_i sind Funktionen mit beschränkter Variation. Weiterhin ist

$$\int_0^1 [f_i(x)]^n dx = \int_0^1 y^n du_i(y)$$

also gilt für alle n

$$\int_0^1 y^n du_1(y) = \int_0^1 y^n du_2(y)$$

Nach dem Hausdorff'schen Lemma sind dann u_1 und u_2 gleich und damit auch f_1 und f_2 . Letzteres widerspricht aber der Annahme $v_1 \neq v_2$.

Sei nun

$$\mathcal{H}_n = \int_0^1 [f(x)]^n dx^2; \quad (7,5)$$

der Zusammenhang mit den in (7,1) eingeführten v_n ist durch (7,4) gegeben. Die Funktion $f(x)$ wurde als monoton voraus-

gesetzt und im nächsten Satz wird gezeigt, wie sich diese Eigenschaft in den $\mathcal{H}_n$ widerspiegelt. Zuerst führen wir die folgende Bezeichnung ein. Es sei irgendeine Folge reeller Zahlen gegeben

$$\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots$$

Wir setzen

$$\Delta^0 \mathcal{H}_k = \mathcal{H}_k, \quad \Delta^{n+1} \mathcal{H}_k = \Delta^n \mathcal{H}_k - \Delta^n \mathcal{H}_{k+1}.$$

Offensichtlich ist

$$\Delta^1 \mathcal{H}_k = \mathcal{H}_k - \mathcal{H}_{k+1}$$

$$\Delta^2 \mathcal{H}_k = \mathcal{H}_k - 2\mathcal{H}_{k+1} + \mathcal{H}_{k+2}$$

und allgemein

$$\Delta^n \mathcal{H}_k = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i \mathcal{H}_{k+i} = \int_0^1 f(x)^k [1-f(x)]^n dx^2 \quad (7,6)$$

Satz 9. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Zahlen $\mathcal{H}_n$ aus (7,5) einer monoton nichtfallenden Funktion $f(x)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ entsprechen, ist

$$\Delta^n \mathcal{H}_k \geq 0 \quad \text{für } n = 0, 1, \dots; k = 0, 1, \dots \quad (7,7)$$

Um den Beweis übersichtlicher zu gestalten, schicken wir folgendes Lemma voraus.

Lemma. Es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^m \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mathcal{H}_k = \mathcal{H}_m.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^m \binom{n}{k} \Delta^m \mathcal{H}_k = \\
 &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^m \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (-1)^i \mathcal{H}_{k+i} = \\
 &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^m \binom{n}{k} \sum_{j=k}^n \binom{n-k}{j-k} (-1)^{j-k} \mathcal{H}_j = \\
 &= \frac{1}{n^m} \sum_{k=0}^n k^m \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} \mathcal{H}_j = \\
 &= \frac{1}{n^m} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \mathcal{H}_j \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} k^m = \\
 &= \frac{1}{n^m} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \mathcal{H}_j a_{jm},
 \end{aligned}$$

dabei ist

$$a_{jm} = \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} k^m = j \sum_{k=1}^j (-1)^k \binom{j-1}{k-1} k^{m-1} =$$

$$= -j \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \binom{j-1}{k} k^{m-1} = -j a_{j-1, m-1}$$

für $j \geq 1$. Damit haben wir eine Rekursionsformel für $a_{j,m}$ gefunden. Es ist leicht zu sehen, dass $a_{j,0} = 0$ für $j = 1, 2, \dots$ und $a_{1,1} = 1$. Daraus folgt

$$a_{j,m} = \begin{cases} 0 & \text{für } j > m \\ (-1)^m m! & \text{für } j = m \end{cases}$$

und wir erhalten

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^m \binom{n}{k} \Delta^m \mathcal{H}_k = \frac{1}{n^m} \sum_{j=0}^{\min(m,n)} (-1)^j \binom{n}{j} \mathcal{H}_j a_{j,m}$$

Im Weiteren werden wir noch folgende Grenzwertbeziehung benötigen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-j+1)}{n^m} = \delta_{j,m} \quad \text{für } j \leq m$$

Es ist somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^m \binom{n}{k} \Delta^m \mathcal{H}_k = \sum_{j=0}^m (-1)^j \mathcal{H}_j \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{j} \frac{a_{j,m}}{n^m} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=0}^m (-1)^j x_j \frac{a_{jm}}{j!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-j+1)}{n^m} = \\
 &= \sum_{j=0}^m (-1)^j x_j \frac{a_{jm}}{j!} \delta_{jm} = x_m .
 \end{aligned}$$

Beweis des Satzes 9:

Ist die Funktion f monoton nichtfallend mit $f(0)=0$ und $f(1)=1$, dann ist der Integrand in (7,6) nichtnegativ und die Bedingung (7,7) ist wegen (7,6) erfüllt.

Um die andere Richtung zu beweisen, werden wir die gesuchte Funktion $f(x)$ durch eine Folge geeigneter Stufenfunktionen approximieren, deren Grenzwert die Funktion $f(x)$ ist.

Dazu definieren wir zuerst

$$\alpha_k = \sqrt[k]{\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \Delta^{n-i} x_i}$$

und wegen (7,7) gilt

$$0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m = 1 .$$

Weiterhin sei

$$f_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < \alpha_0 \\ \frac{k}{n} & \text{für } \alpha_{k-1} < x < \alpha_k \\ 1 & \text{für } \alpha_{m-1} < x < 1 ; \end{cases}$$

in den Knotenpunkten α_k sei die Funktion $f_m(x)$ so beschaffen, dass die Normierungsbedingung (7,2) befriedigt ist. Somit ist $f_m(x)$ eine monoton nichtfallende Funktion auf $[0,1]$. Für die "Momente" erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_m^{(n)} &= \int_0^1 [f_m(x)]^m dx^2 = \sum_{k=1}^n \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} \left(\frac{k}{n}\right)^m dx^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^m \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mathcal{H}_k \end{aligned}$$

Aus dem Lemma folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_m^{(n)} = \mathcal{H}_m.$$

Die Folge f_m ist gleichmässig beschränkt, damit kann man das Helly'sche Auswahlprinzip benutzen. Demgemäss existiert eine Indexfolge k_m , so dass die Folge f_{k_m} punktweise gegen eine monoton nichtfallenden Funktion konvergiert.

Bemerkung: Im Beweis ist die Folge f_m konstruktiv gegeben, und wir können diese Konstruktion als ein numerisches Verfahren für $f(x)$ betrachten. Es zeigt sich aber, dass für kleine $v(R)$ die Konvergenz sehr langsam ist.

Aus dem letzten Satz ist klar, dass die $\mathcal{H}_m$ die Funktion $f(x)$ und dadurch auch $v(x)$ bestimmen. Der Satz sagt aber nichts über den Charakter der Funktion $f(x)$, aus z.B. über die Stetigkeit oder das Wachstum der Funktion. Um diese Fragen zu erörtern, definieren wir:

Definition 7,1.

Die im Sinne (7,2) normiert dargestellte Funktion $f(x)$ auf $[0,1]$ gehört zu der Klasse $L(m)$, $m = 1, 2, \dots$ dann und nur dann, wenn eine von den folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

1) $[f(\sqrt{x})]^m$ ist Lipschitz-stetig.

2) Es gibt ein K , sodass

$$[f(x)]^m - [f(y)]^m \leq K(x^2 - y^2) \quad (7,8)$$

für alle

$$0 \leq y \leq x \leq 1.$$

Die Zugehörigkeit zur Klasse $L(m)$ ist dann durch den nächsten Satz charakterisiert.

Satz 10. $f \in L(m)$ dann und nur dann, wenn es ein $\alpha > 0$ gibt, so dass

$$\binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mathcal{H}_k \geq \alpha \frac{(m+k-1)(m+k-2) \dots (k+1)}{(m+n)(m+n-1) \dots (n+1)} \quad (7,9)$$

für alle n und k , $n \geq k$.

Offensichtlich ist

$$f \in L(m) \iff v \in L(m)$$

Beweis:

1. Sei $f \in L(m)$ Dann gilt wegen (7,8) und (7,6)

$$\begin{aligned} \Delta^{n-k} \mathcal{H}_k &= \int_0^1 f(x)^k (1-f(x))^{n-k} dx^2 \geq \frac{1}{K} \int_0^1 f(x)^k (1-f(x))^{n-k} df(x)^m \\ &= \int_0^1 y^k (1-y)^{n-k} dy^m = m \int_0^1 y^{m+k-1} (1-y)^{n-k} dy \\ &= \frac{m (m+k-1)(m+k-2) \dots (k+1)}{\binom{n}{k} (m+n)(m+n-1) \dots (m+1)} . \end{aligned}$$

2. Um jetzt die Zugehörigkeit von f zu $L(m)$ (unter der Bedingung (7,9)) nachzuprüfen, benutzen wir die Näherungen $f_m(x)$ aus dem Beweis des Satzes 9.

Sei p die Anzahl der Unstetigkeitsstellen der Funktion $f_m(x)$ zwischen y und x ; $0 \leq y \leq x \leq 1$.

Für $p=0$ haben wir

$$\frac{[f_m(x)]^m - [f_m(y)]^m}{x^2 - y^2} = 0$$

und für $p=1$ ist

$$\frac{[f_m(x)]^m - [f_m(y)]^m}{x^2 - y^2} = \frac{(k+1)^m - k^m}{n^m} \cdot \frac{1}{x^2 - y^2}$$

hier ist $f_m(y) = \frac{k}{n}$. Der letzte Ausdruck wird für feste y und x klein, wenn n gross genug ist, und das gleiche können wir für $p=2$ sagen.

Sei nun $p \geq 3$ und sei α_k die nächste Nichtstetigkeitsstelle nach x , also das kleinste α_k , das grösser als x ist.

Damit wird

$$\begin{aligned} \frac{[f_m(x)]^m - [f_m(y)]^m}{x^2 - y^2} &= \frac{(k+p)^m - k^m}{n^m} \cdot \frac{1}{x^2 - y^2} \leq \\ &\leq \frac{(k+p)^m - k^m}{n^m} \cdot \frac{1}{\alpha_{k+p-1}^2 - \alpha_k^2}. \end{aligned} \quad (7,10)$$

Aus der Definition α_k und (7,9) ergibt sich

$$\alpha_{k+p-1}^2 - \alpha_k^2 = \sum_{i=k+1}^{k+p-1} \binom{n}{i} \Delta^m \mathcal{H}_i \geq$$

$$\geq \alpha \sum_{i=k+1}^{k+p-1} \frac{(m+i-1)(m+i-2) \dots (i+1)}{(m+n)(m+n-1) \dots (n+1)} \geq$$

$$\geq \alpha \frac{1}{(m+n)^m} \sum_{i=k+1}^{k+p-1} (m+i-1)(m+i-2) \dots (i+1) \geq$$

$$\geq \alpha \frac{1}{(m+n)^m} \left\{ \sum_{i=k+2}^{k+p-2} (m+i-1)(m+i-2) \dots (i+1) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(m+k) \dots (k+2) + \frac{1}{2}(m+k+p-2) \dots (k+p) \right\} \geq$$

$$\geq \alpha \frac{1}{(m+n)^m} \int_{k+1}^{k+p-1} (t+1)(t+2) \dots (t+m-1) dt \geq$$

$$\geq \alpha \frac{1}{(m+n)^m} \int_{k+1}^{k+p-1} t^{m-1} dt = \alpha \frac{1}{(m+n)^m} \cdot \frac{1}{m} \left\{ (k+p-1)^m - (k+1)^m \right\}.$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass die Trapez-Regel für Integrale mit konvexen Integranden immer eine Abschätzung von oben liefert.

Mit der letzten Abschätzung erhalten wir für (7,10)

$$\frac{[f_m(x)]^m - [f_m(y)]^m}{x^2 - y^2} \leq \frac{(k+p)^m - k^m}{(k+p-1)^m - (k+1)^m} \cdot \frac{m}{\alpha} \left(\frac{m+n}{n} \right)^m.$$

Halten wir jetzt m fest, dann bleibt $\left(\frac{m+n}{n} \right)^m$ beschränkt.

Für $p \geq 3$ ist auch der Ausdruck

$$\frac{(k+p)^m - k^m}{(k+p-1)^m - (k+1)^m}$$

beschränkt, dabei hängt die Schranke nur von m ab. Also existiert in allen Fällen zu einem vorgegebenen m eine von n unabhängige Schranke für den Ausdruck in (7,10).

Schliesslich schreiben wir noch

$$\begin{aligned} \frac{[f(x)]^m - [f(y)]^m}{x^2 - y^2} &= \frac{[f(x)]^m - [f_m(x)]^m}{x^2 - y^2} + \\ &+ \frac{[f_m(x)]^m - [f_m(y)]^m}{x^2 - y^2} + \frac{[f_m(y)]^m - [f(y)]^m}{x^2 - y^2} \end{aligned}$$

Das erste und das letzte Glied auf der rechten Seite werden für hinreichend grosses n beliebig klein und das mittlere Glied bleibt beschränkt.

Damit ist der Satz 10 bewiesen.

8. Numerische Ergebnisse

Die hier vorgestellte Theorie besitzt den Vorteil der Einfachheit, so dass numerische Experimente sehr leicht und in grosser Anzahl durchführbar sind. Solche Experimente geben Aufschluss über das Verhalten des Modellsystems unter verschiedenen Bedingungen, und sie können benutzt werden, um experimentell die Signifikanz gewisser Messanordnungen zu überprüfen. Weiterhin kann man das mathematische Modell dazu benutzen, die Ergebnisse klinischer Messungen zu interpretieren. Tatsächlich wurden im Institut für Medizin der Kernforschungsanlage Jülich zahlreiche numerische Rechnungen mit dem beschriebenen Modell durchgeführt. Sie dienten zur Auslegung von Messanordnungen und für den Entwurf von Messmethoden sowie der Interpretation der gemessenen Resultate. Zudem wurde versucht, durch solche Experimente mit dem Modell die Grenzen der Indikator-dilutionsmethode herauszufinden.

In Abb.8 ist ein Beispiel einer praktisch gemessenen Indikator-dilutionskurve, d.h. der Kurve $c_{ab}(t)$, gegeben. Zu beachten ist die sehr starke Streuung der Messwerte, die deutlich zeigt, dass es problematisch ist, aus den Messungen allzu detaillierte Aussagen herauslesen zu wollen. Diese Situation ist typisch für zahlreiche Messanordnungen in der Medizin, man muss aus dem vorgelegten fehlerbehafteten Datenmaterial soviel an Information extrahieren, wie nur möglich ist, aber natürlich keinesfalls mehr!

In den Abb.9 bis 11 sind die Ergebnisse numerischer Rechnungen dargestellt. Es wurde dazu die in Abb.7 angegebene Konfiguration vorausgesetzt mit $a = 30$ cm, $b = 32$ cm und $\omega(r) = \text{const.}$

Das Geschwindigkeitsprofil wurde als parabolisch angenommen mit einer Maximalgeschwindigkeit von $v_0 = 1 \text{ cm/s}$. Die Injektionsfunktion bei diesen Experimenten hatte die Form

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & \text{für } t > t_0 \end{cases}$$

Die angegebenen Zahlenwerte entsprechen etwa denen im menschlichen Körper. Auf jeder der Abbildungen sind die Dilutionskurven $c_{ab}(t)$ für die Randgeschwindigkeiten $v_R = 0.1$ (0.2) 0.9 cm/s aufgezeichnet. Man sieht deutlich, dass bei kurzer "stossartiger" Injektion ($t_0 = 1 \text{ s}$) die Randgeschwindigkeit einen erheblichen Einfluss auf die Form der Dilutionskurve hat. Bei langzeitiger Injektion ($t_0 = 100 \text{ s}$) haben die Kurven kein ausgeprägtes Maximum mehr. Generell beobachtet man hier eine grössere Formenvielfalt der Dilutionskurven, als dies nach der klassischen Theorie, die etwa durch die Lösungen von (6,3) beschrieben werden kann, zu erwarten ist.

Bemerkenswert ist der ausserordentlich geringe Rechenaufwand zur Berechnung der Dilutionskurven nach der hier vorgeschlagenen Theorie. Man muss den Kern $K(t, \tau)$ ausrechnen (vgl. Abschnitt 4) und dann in die Gleichung (4,1) einsetzen. Hierdurch wird es möglich, selbst sehr umfangreiche numerische Untersuchungen auf billige Weise durchzuführen.

Ein weitaus schwierigeres Problem ist das der numerischen Identifikation der Systemparameter. Bekanntlich sind solche Probleme inkorrekt gestellt und daher numerisch nur sehr schwer durchführbar. Wie sich gezeigt hat, besteht durchaus ein

Unterschied zwischen leicht und sicher zu bestimmenden Parametern wie Fluss und Volumen und solchen schwer zugänglichen Grössen wie etwa der Randgeschwindigkeit. In den Sätzen 3 bis 5 (Abschnitt 5) wurden Bedingungen dafür aufgestellt, dass die erste Stewart-Hamilton-Gleichung unabhängig von gewissen nicht zugänglichen Systemparametern gilt. Diese Aussage bedeutet, dass die durch die erste Stewart-Hamilton-Gleichung (5,1) festgelegte Grösse F ausserordentlich "robust" zu ermitteln ist; selbst einschneidende Modifikationen - sofern sie die Voraussetzungen der Sätze nicht berühren - ändern nichts an der Gültigkeit von (5,1). Eine allgemeine Definition und Charakterisierung solcher robuster Grössen bei Systemen geht über den Rahmen dieser Arbeit hinaus.

Anders steht es mit der Randgeschwindigkeit v_R . Die Beobachtung, dass in Abb.9 die Randgeschwindigkeit die Form der Dilutionskurven stark beeinflusst, zeigt einerseits an, dass dieser Parameter wichtig ist für die Interpretation der Kurven, andererseits kann man zunächst hoffen, dass man aus der Form der Dilutionskurven möglicherweise auf v_R schliessen kann. Dieser Schluss wäre bei der praktischen Anwendung sehr erwünscht, weil sich damit eine einfache Methode anböte, auf ein sehr subtiles Detail der Blutströmung anhand nichtinvasiver Messungen schliessen zu können.

Eine direkte Möglichkeit zur Rekonstruktion von v_R wäre es, aus den Zahlen v_n die Funktion $v(r)$ zu rekonstruieren. Zunächst einmal ist es recht interessant, auszuprobieren, inwieweit

sich der Hausdorff'sche Konstruktionsprozess (Abschnitt 6) als numerische Methode überhaupt verwenden lässt. Hierzu wurden für ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil mit $v_0 = 1$ die v_n errechnet und auf diese dann das Hausdorff'sche Verfahren angewendet. Für $v_R = 0.9$, d.h. für ein nahezu konstantes Geschwindigkeitsprofil, erhält man die in Abb.12 dargestellte recht gute Approximation des Profils durch eine Treppenfunktion mit 20 Stufen. Für $v_R = 0.01$ hingegen erweist sich die Hausdorff'sche Darstellung als unbrauchbar (Abb.13).

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung von v_R bietet Satz 7. Dazu berechnet man aus den gemessenen Momenten c_n (vgl. 6,8) gemäss (6,9) die Zahlen v_n , wobei für die ρ_n die aus (6,5) bekannten Zahlen eingesetzt werden. Das lineare Gleichungssystem (6,9) hat den Vorteil, dass es Dreiecksgestalt hat, so dass die numerische Berechnung der v_n sehr einfach ist.

Versuche, v_R aus den v_n zu berechnen, führten zu keinen befriedigenden Ergebnissen. Insbesondere sind bei praktischen Messungen die Daten sehr stark gestört (Abb.8), so dass eine zuverlässige Ermittlung der c_n nicht möglich ist. Einen Hinweis auf die zu erwartenden Schwierigkeiten bei der Bestimmung von v_R liefert Abb.11: Trotz der unterschiedlichen Randgeschwindigkeiten unterscheiden sich hier die Dilutionskurven nur sehr wenig.

Die Grösse v_R ist sicher nicht robust bestimmbar, es stellt sich hier also die Frage, wie ein Experiment beschaffen sein muss,

mit dessen Hilfe man die Randgeschwindigkeit aus den Messdaten zuverlässig ermitteln kann. Auch diese Frage der sogenannten optimalen Auslegung eines Experiments (optimal Design) geht über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinaus.

9. Schlussbemerkungen

In der vorliegenden Arbeit wurde gezeigt, dass die Stewart-Hamilton-Gleichungen, die häufig für die Berechnung des Flusses und des Volumens durchströmter Systeme herangezogen wurden, nicht in allen Fällen gültig sind. Das hier vorgestellte Modell wird durch die Systemparameter $\vec{v}$, f_G , μ und ω beschrieben, und die erste Stewart-Hamilton-Gleichung (5,3) stellt eine Integralgleichung dar, die diese vier Funktionen miteinander verknüpft. Eine experimentelle Verifikation der Gleichung (5,3) ist aber zunächst nicht möglich, da zumindest die Parameterfunktionen $\vec{v}$ und f_G nicht bekannt sind. Es liegt daher nahe zu fragen, ob es praktische Versuchsanordnungen gibt, die das Erfülltsein der Stewart-Hamilton-Gleichungen unter nachprüfbaren, das heisst nicht auf die "verborgenen" Parameterfunktionen bezogenen - Bedingungen garantieren. Genau diese Frage wird durch die Sätze 3, 4 und 5 beantwortet. Diese Sätze liefern eine Lösung für das praktisch wichtige Problem, eine Messapparatur - charakterisiert durch die Funktion ω - zu finden, die so beschaffen ist, dass die Stewart-Hamilton-Gleichungen für alle μ und alle f_G gelten.

Ein wichtiges Anwendungsbeispiel für diese Sätze ist die in Kapitel 3 eingeführte Flussmarkierung. Man realisiert sie in der klinischen Praxis, indem man den Indikator unter hohen Druck in die Armvene einspritzt. Dadurch entsteht an der Injektionsstelle lokal Turbulenz, die eine homogene Durchmischung des Indikators mit der transportierenden Flüssigkeit bewirkt. Die Verteilungsfunktion f_G ist dann dem Geschwindig-

keitsprofil proportional und die Integralgleichung (5,4) stellt lediglich eine Normierungsbedingung für die Apparatfunktion ω dar.

Ein anderer praktisch relevanter Spezialfall, in dem die Stewart-Hamilton-Gleichungen erfüllt sind, liegt bei der Messung mit einem Katheter vor. In diesem Falle ist ω proportional zur Geschwindigkeit

$$\omega = v/F,$$

und Gleichung (5,4) reduziert sich auf die Normierungsbedingung (3,11).

Die physikalische Grundlage für unsere Untersuchungen war die kinematische Beschreibung einer laminaren Strömung und das Massenerhaltungsgesetz für die transportierende Flüssigkeit und den Indikator. Üblicherweise ist die Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes ein sehr schwieriges Problem der Hydrodynamik (Navier-Stokes-Gleichung). Die Frage, ob man durch geeignete Messungen des Input-Output-Verhaltens des Systems auf das Geschwindigkeitsprofil schliessen kann, ist demnach von besonderer Wichtigkeit. Man kann die Stewart-Hamilton-Gleichungen als Beziehungen für das nullte und das erste Moment der Dilutionskurve ansehen. Die erste Stewart-Hamilton-Gleichung liefert dann - sofern sie überhaupt gilt - den Fluss, das heisst das Integral des Geschwindigkeitsprofils. Es drängt sich dann die Frage auf, ob man aus der Kenntnis aller Momente das Geschwindigkeitsprofil rekonstruieren kann. Der Untersuchung dieser Frage sind die Abschnitte 6 und 7 gewidmet.

Im Abschnitt 6 wurde ein Beispiel konstruiert, das zeigt, dass man nicht in jedem Falle aus den Momenten das Geschwindigkeitsprofil eindeutig rekonstruieren kann. Entscheidend war dabei, dass für die betrachteten Geschwindigkeitsprofile die Randgeschwindigkeit Null war. Im Abschnitt 7 konnte dann tatsächlich gezeigt werden, dass für ein zylindrisches Rohr mit $v(R) \neq 0$ das Geschwindigkeitsprofil eindeutig aus den Momenten rekonstruiert werden kann. Die Voraussetzung $v(R) \neq 0$ kann interpretiert werden als eine Simulation der Randturbulenzen, die man in zahlreichen Experimenten beobachtet hat (vgl. Abschnitt 2). In diesem Zusammenhang gewinnen die Beziehungen (6,9) und (7,3) an Interesse. Gleichung (6,9) gibt an, wie man aus den Momenten der Dilutionskurve c_n die Integrale

$$q_m^* = \int_0^R \frac{r dr}{(v(r))^m}$$

bestimmen kann, und vermittels der Beziehung (7,3)

$$v(R) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \sqrt[m]{q_m^*}$$

hat man eine direkte Formel für die Randgeschwindigkeit.

Obwohl die Beweise in den Abschnitten 6 und 7 konstruktiv sind, so dass man sie direkt numerisch ausnutzen könnte, erweisen sich die daraus hergeleiteten Methoden als nicht effizient, insbesondere bei kleinen Randgeschwindigkeiten. Wie sich an den numerischen Ergebnissen (Abschnitt 8) zeigte, bedarf es sicherlich noch weiterer Anstrengungen, ehe man die charakteristischen Parameter des Geschwindigkeitsprofils durch Messungen "von aussen" zufriedenstellend bestimmen kann.

Sicherlich ist mit dieser Arbeit die Problematik der Dilutions-technik noch keineswegs erschöpft. Sehr wichtig wäre es beispielsweise, eine Modellvorstellung und eine Theorie für ein Rohr mit einer pulsierenden Strömung zu entwickeln. Man wird dann aber sicherlich nicht mehr mit der Kinematik der Bewegung allein auskommen, es wird notwendig werden, auch die hydrodynamischen Ursachen der Strömung mit einzubeziehen. Damit verlöre das Modell sicherlich an Einfachheit, die als besonderer Vorzug der hier vorgestellten Theorie hervorzuheben ist. Ähnliches gilt für noch realistischere Modelle, die Strömungsverzweigungen berücksichtigen oder die elastischen Eigenschaften der Blutgefäße beziehungsweise die komplexe Struktur des Blutes selbst.

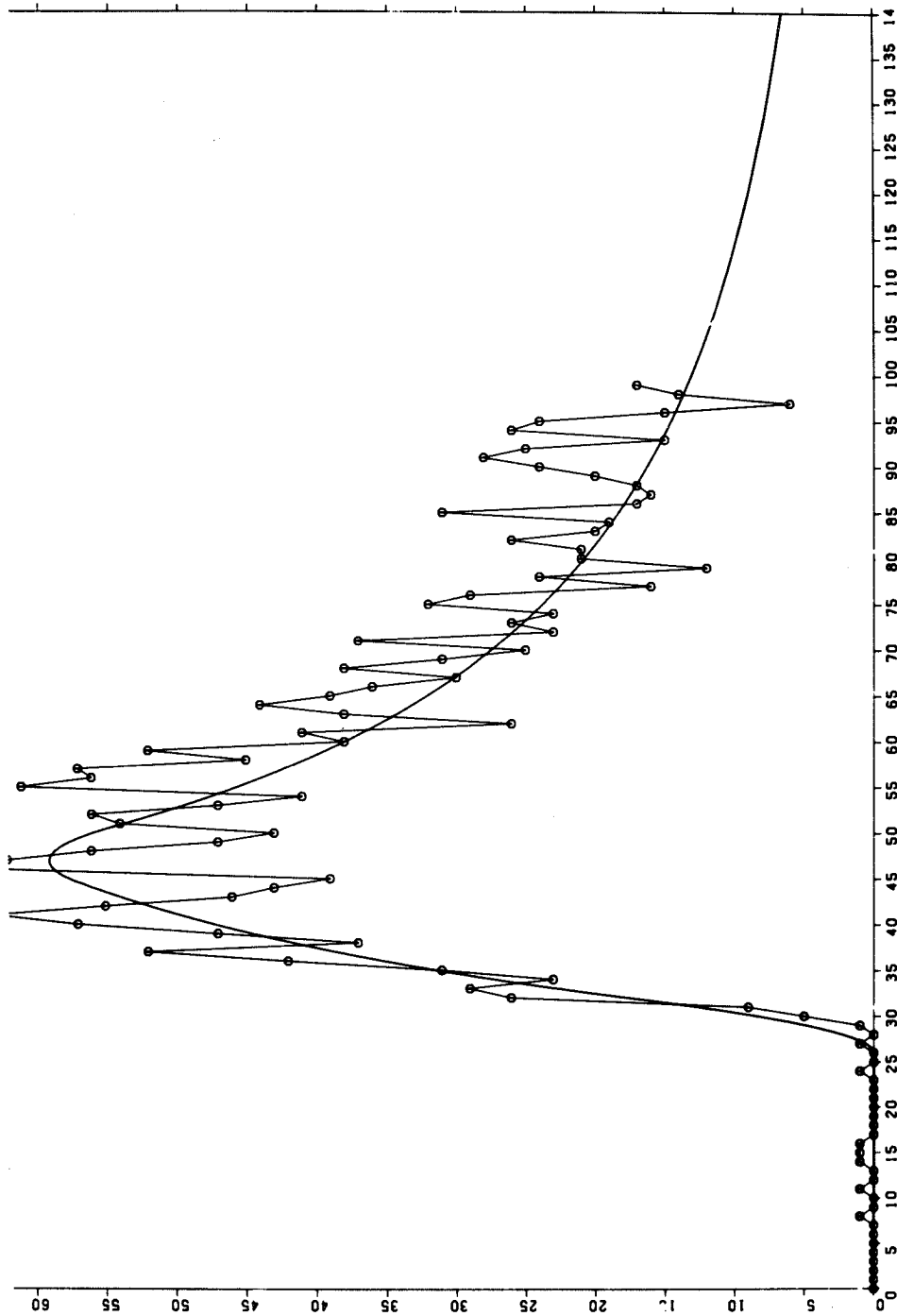


Abb.8 - Beispiel einer gemessenen Dilutionskurve

Abbildungen 9 bis 11:

Berechnete Dilutionskurven für $a = 30$ und $b = 32$ (vgl. Abb.7),
Gewichtsfunktion $w(r) = \text{const.}$, parabolisches Geschwindigkeits-
profil mit einer Maximalgeschwindigkeit $v_0 = 1$ und der Injektions-
funktion

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & \text{für } t > t_0 \end{cases}$$

Auf jedem Bild sind die Kurven für die Randgeschwindigkeiten
 $v_R = 0.9, 0.7, 0.5, 0.3$ und 0.1 dargestellt.

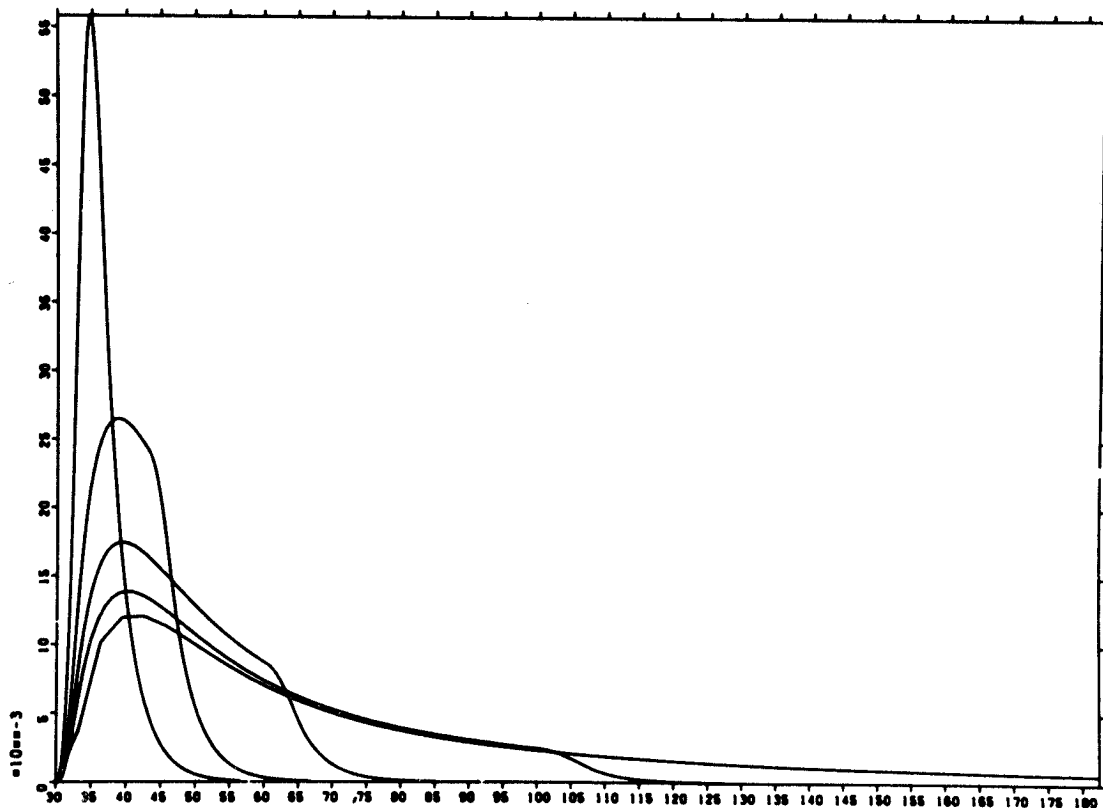


Abb. 9 $t_0 = 1$

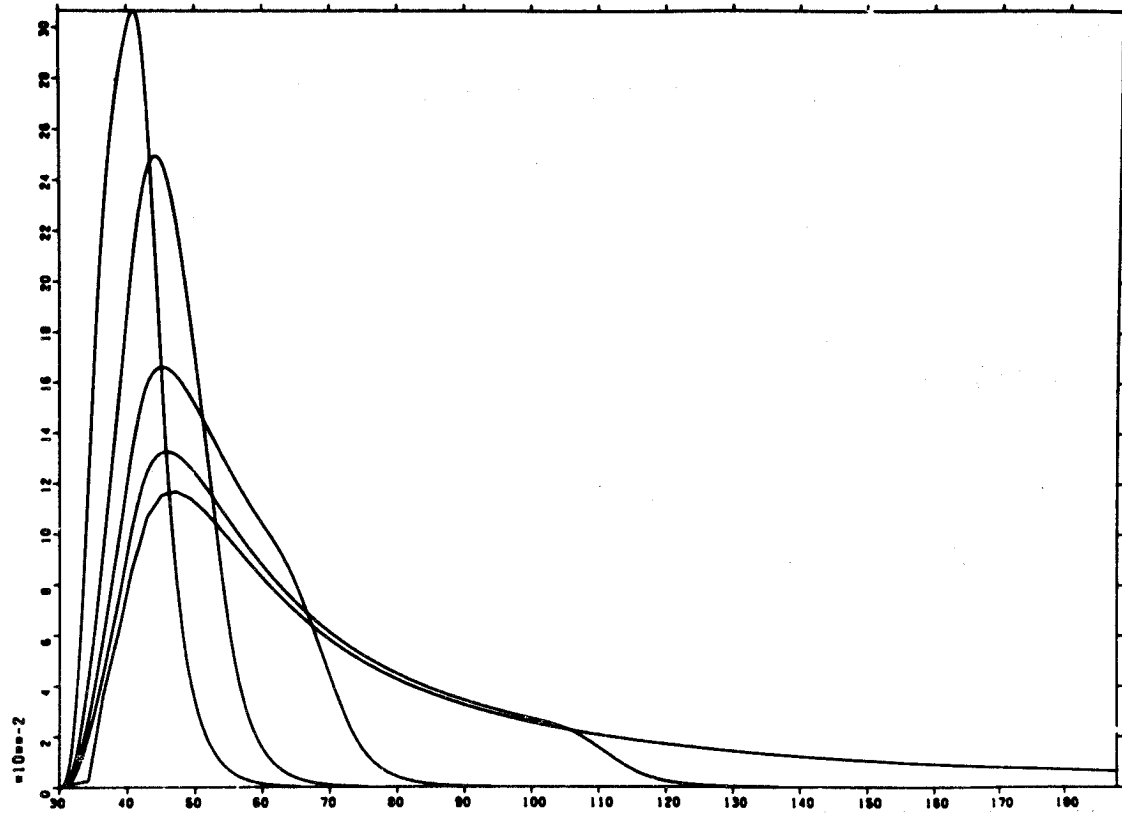


Abb. 10 $t_0 = 10$

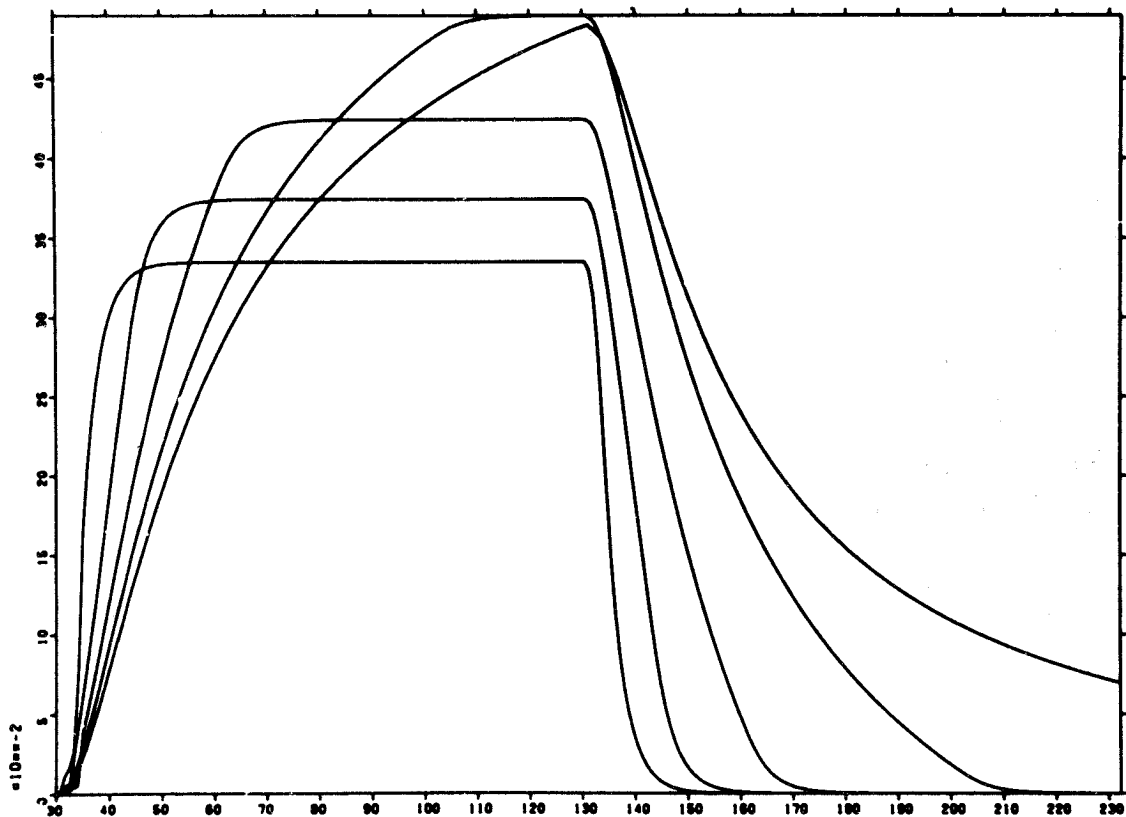
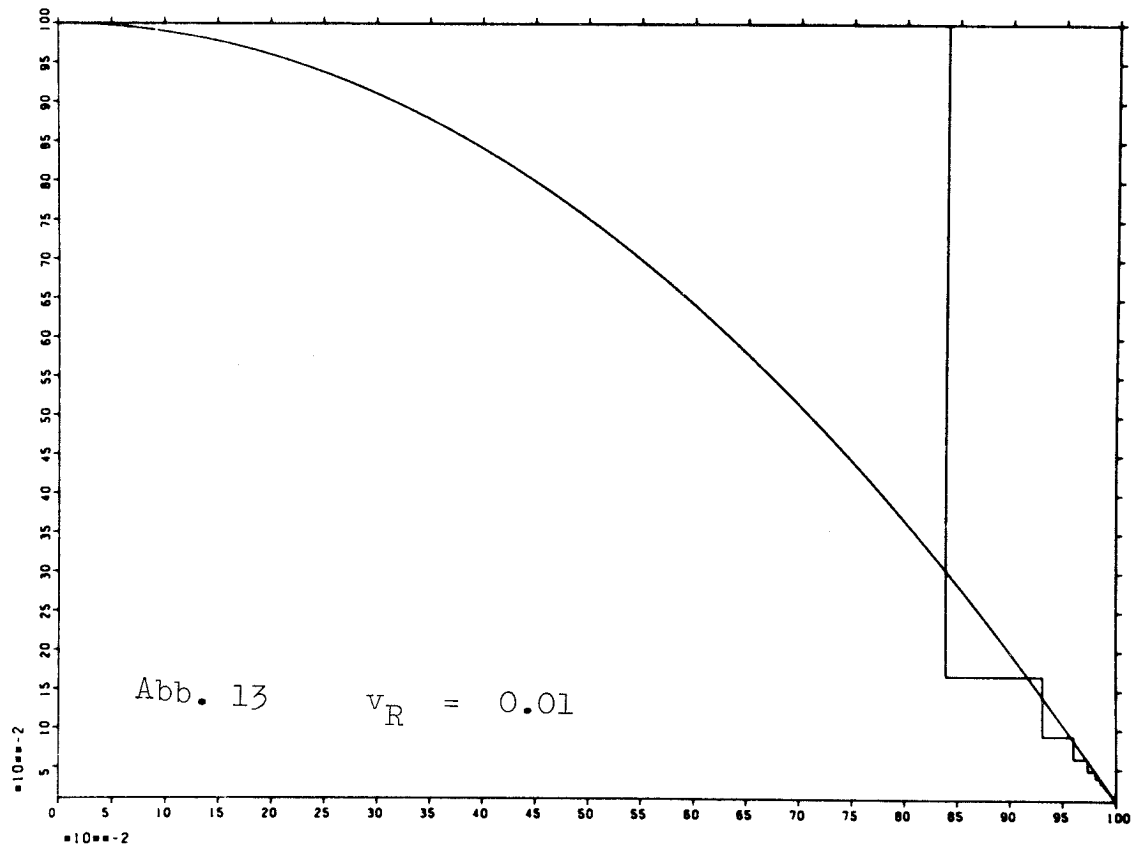
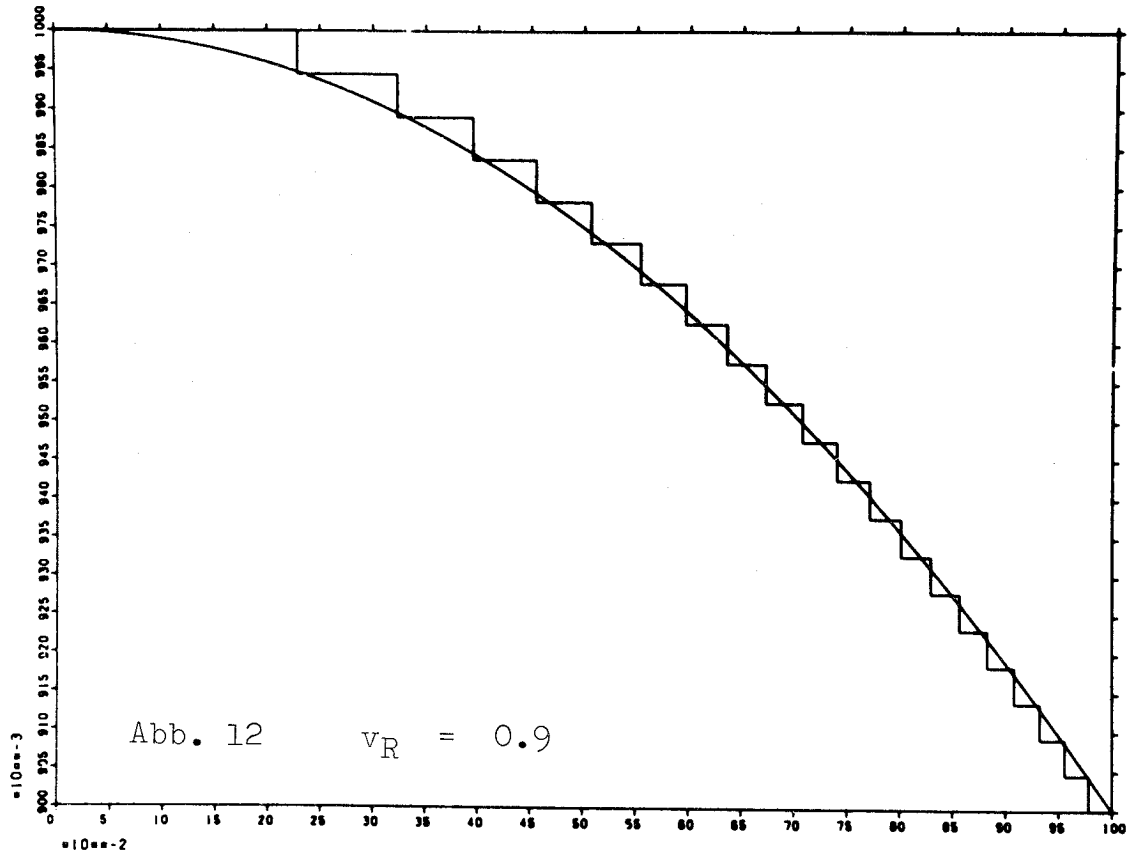


Abb. 11 $t_0 = 100$

Abb.12 & 13: Hausdorff-Approximation eines parabolischen Geschwindigkeitsprofils mit $v_0 = 1$ durch eine Treppenfunktion mit 20 Stufen bei gegebenen Momenten v_n .



1. Literatur

1. ADAMS, R.A.: Sobolev Spaces, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.
2. GONZALES-FERNANDEZ, M.: Theory of the measurement of the dispersion of an indicator in indicator-dilution studies, Circulation Research, 10 (1962), pp. 409-427.
3. HANSEN, Arthur G.: Fluid Mechanics, John Wiley & Sons Inc., New York, London, Sydney, 1967.
4. HAUSDORFF, F.: Momentprobleme für ein endliches Intervall. Math. Z. 16, 220-248 (1923).
5. HILDEBRANDT, T. H.: Introduction to the Theory of Integration. New York, London: Academic Press, 1963.
6. NATANSON, I.P.: Constructive Function Theory, 3 Vol. New York: Unger 1964-65.
7. PROFANT, M., VYSKA, K., ECKHARDT, U.: The Stewart-Hamilton equations and the indicator dilution method. SIAM J. Appl. Math. 34, 666-675 (1978).
8. ROSSI, H.H., POWERS, S.H. and DWORK, B.: Measurement of flow in straight tubes by means of the dilution technique, Amer. J. Physiol., 173 (1953), p. 103-108.
9. VYSKA, K.: Theoretische Grundlagen zur Anwendung der Indikatordilutions-Kurven in der Radio-kardiographie mit besonderer Berücksichtigung der Anwendung minimaler kardialer Transitzeiten in der klinischen Diagnostik, Habilitationsschrift, Jülich, Oktober 1975.
10. ZIERLER, L.K.: Theoretical Basis of Indicator Dilution Methods for Measurement of Flow and Volume. Circulation Res. 10, 393 (1962).
11. LEVENSPIEL, O.: Chemical Reaction Engineering, 2nd Edition. New York, London, Sydney: John Wiley & Sons, 1962.

12. RUBINOW, S.I.: Introduction to Mathematical Biology.
New York, London, Sydney, Toronto:
John Wiley & Sons, 1975.
13. FUNG, Y.C.: Biomechanics. Mechanical Properties of Living
Tissues. New York, Heidelberg, Berlin:
Springer-Verlag, 1981.
14. LIGHTHILL, Sir James: Mathematical Biofluidynamics.
Philadelphia, Pennsylvania: SIAM, 1975.
15. PROFANT, M., VYSKA, K., ECKHARDT, U.: On an Identification
Problem in Heart Diagnosis.
Methods of Operations Research, 35, 1978.

