



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH GmbH

Abteilung Sicherheit und Strahlenschutz

**Zweiggruppen-Kritikalitätsmodelle
für Sicherheitsbetrachtungen**

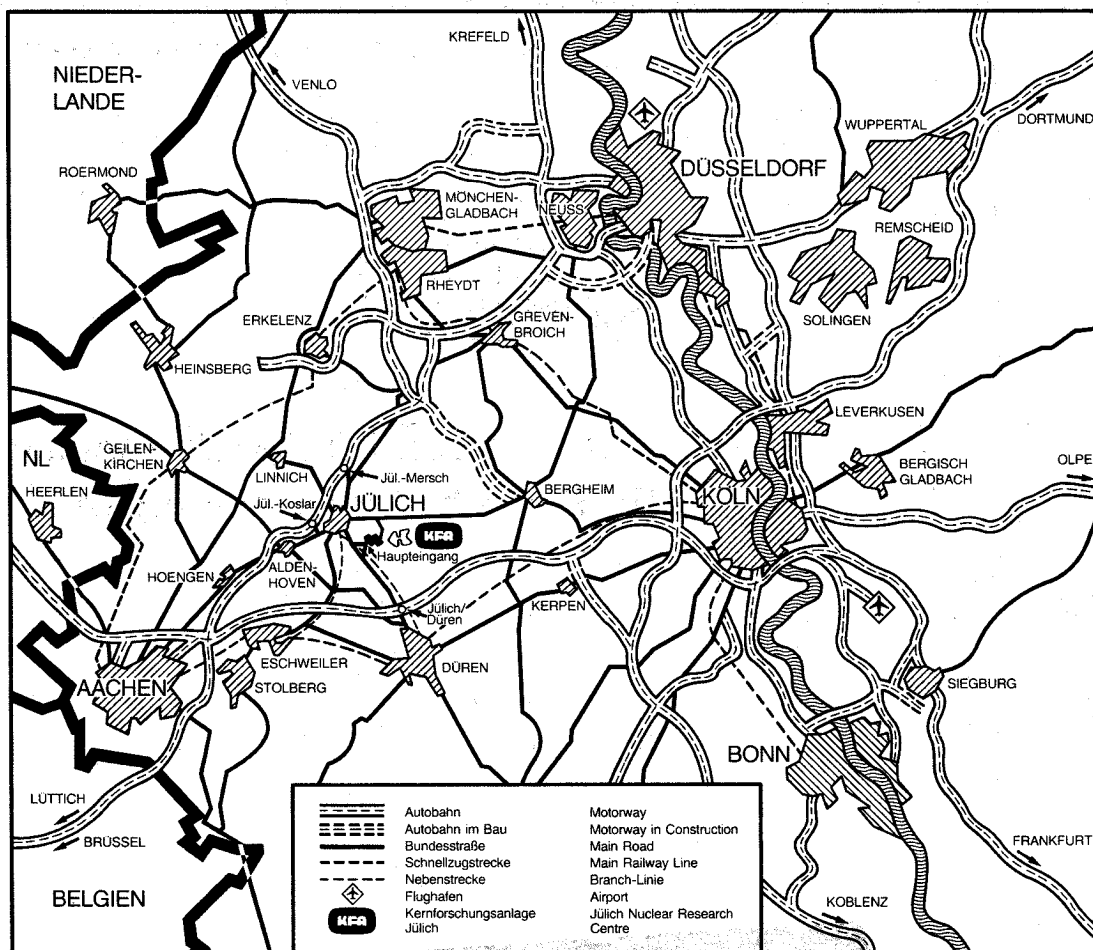
von

O. Schaffer

Jül - 1856

Juni 1983

ISSN 0366-0885



Als Manuskript gedruckt

Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 1856
 Abteilung Sicherheit und Strahlenschutz Jül - 1856

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH
 Postfach 1913 · D-5170 Jülich (Bundesrepublik Deutschland)
 Telefon: 02461/610 · Telex: 833556 kfd

Zweiggruppen-Kritikalitätsmodelle für Sicherheitsbetrachtungen

von

O. Schaffer

Haftungsausschluß

Die in diesem Bericht angegebenen Methoden und Daten wurden anhand der zugänglichen Literatur mit größter Sorgfalt entwickelt und ausgewählt. In Anbetracht der Tatsache, daß "Kritikalität" ein überaus vielschichtiges und komplexes Gebiet ist und Fehleinschätzungen leicht gravierende Folgen nach sich ziehen können, muß jedoch vor Verallgemeinerung und unbedachter Verwendung der in diesem Bericht enthaltenen Informationen und Methoden gewarnt werden. Eine Haftung für Schäden, die hierdurch entstehen könnten, wird nicht übernommen.

Two-Group Criticality Models for Safety Analysis Considerations

by

O. Schaffer

Abstract

Mathematical models based on the P_1 -approximation of the Boltzmann neutron transport equation (diffusion approximation) in two energy groups will be presented in closed form in order to solve many criticality safety problems in handling fissionable material accurately. With regard to the complex subject of criticality a high degree of flexibility is emphasized in dealing with fuel moderator mixing ratios, reflector conditions, fuel interactions, geometry effects and component arrangements.

Beginning with the treatment of one dimensional two-group models in multy-zone slab-, cylindrical and spherical geometry for isolated and coupled fuel reflector arrangements a special solution is developed for the so called "shell-gap" models in the cylindrical and spherical case that can be achieved by the degeneration of a reflector-zone into an air-gap accompanied by the new formulation of the gap boundary conditions.

A simple extension of models is accomplished for two-dimensional finite cylinders in r, z -geometry and three-dimensional rectangular parallelepipeds in x, y, z -geometry with close fitted reflectors on all sides, a reflector saving concept that can be described as a step by step reduction to the one-dimensional problem and in which the unknown critical dimension is determined from given dimensions by the method of "buckling-iterations".

Selected applications are directed in the investigation of the reflector effectiveness on critical and safe masses of highly enriched uranium mixed with graphite and hydrogenous moderators, considering different reflector materials, their positions and effects produced by material shifting and fuel condensation as well as the safe under water storage of special MTR-fuel elements and the safe storage of fuel-graphite specimen in a strongly concrete-shielded rectangular parallelepiped under water-flooding accident conditions.

The suitability of calculational methods for reactor core calculations has been validated during reactor start-up experiments many years ago and is now completed by the good agreement of calculated and measured critical U-235-masses of nearly cubic cores consisting of uranium- and polyethylene-foils surrounded by a thick beryllium-reflector.

Recommended nuclear data of selected material to be used in two-group calculations are given in the appendix.

Zweiggruppen-Kritikalitätsmodelle für Sicherheitsbetrachtungen
von
O. Schaffer

Kurzfassung

Auf der Grundlage einer P_1 -Näherung der Boltzmann-Transportgleichung (Diffusionsnäherung) in zwei Energiegruppen werden mathematische Modelle entwickelt, mit denen zahlreiche Probleme der Kritikalitätssicherheit beim Umgang mit spaltbarem Material zuverlässig gelöst werden können. Im Hinblick auf den komplexen Sachverhalt wird insbesondere Flexibilität der Modelle zur Erfassung von Spaltstoff-Moderator-Mischungsverhältnissen, Reflexionsbedingungen, Wechselwirkungen, geometrischer Form und Komponentenanordnung angestrebt.

An die Behandlung eindimensionaler Zweigruppen-Mehrzonen-Modelle für isolierte und gekoppelte Spaltstoff-Moderator-Anordnungen mit Reflektoren in Platten-, Zylinder- und Kugelgeometrie schließt sich die Entwicklung der sogenannten "Schalenspalt"-Modelle für Zylinder- und Kugelgeometrie an, bei denen die Innenzone eines Zweizonen-Reflektors zu einem Luftspalt entartet; ein Vorgang, der eine Neufassung der Randbedingungen für den Spalt erforderlich macht.

In erweiterten Modellen erfolgt die Behandlung zweidimensionaler Zylinder in r,z -Geometrie und dreidimensionaler Quader mit allseitigem, unmittelbar angrenzendem Reflektor durch schrittweise Rückführung auf das eindimensionale Problem, indem bei Vorgabe der Reflektorabmessungen und einer bzw. zweier Dimensionen der Spaltstoff-Moderator-Zone die unbekannte kritische Abmessung über "Buckling-Iterationen" der achsialen Flußwölbungen ermittelt wird.

Ausgewählte Anwendungsbeispiele beziehen sich auf die Untersuchung der Wirkung unterschiedlicher Reflektoren auf Uran hoher U-235-Anreicherung in Verbindung mit Graphit und wasserstoffhaltigen Materialien unter Berücksichtigung von Material-Umschichtungen, -Entmischungen, Spaltstoff-Verdichtungen und dergleichen im Hinblick auf die Festlegung sicherer Spaltstoff-Umgangsmengen, ferner den Nachweis der Kritikalitätssicherheit für einen speziellen

Fall der Zwischenlagerung von MTR-Brennstoffelementen in einem Wasserbecken und das Vorgehen bezüglich der sicheren Beladung einer stark abgeschirmten quaderförmigen Anordnung mit graphithaltigen Brennstoffproben im Hinblick auf einen störfallbedingten Wassereinbruch.

Die Angemessenheit der Berechnungsmethoden für Reaktorcore-Auslegungsrechnungen wurde bereits vor Jahren im Rahmen nuklearer Anfahrversuche bestätigt. In Ergänzung hierzu wird nunmehr auf die gute Übereinstimmung berechneter und gemessener kritischer U-235-Massen bei nahezu würfelförmigen Uran-Polyäthylen-Anordnungen (Folienschichtung) mit dickem Beryllium-Reflektor hingewiesen.

In einem Anhang sind die für Zweigruppen-Rechnungen empfohlenen Nukleardaten ausgewählter Materialien zusammengestellt.

Inhalt

	Seite
1. Einleitung	1
2. Allgemeine Formulierung des Eigenwertproblems	4
3. Randbedingungen für isolierte und gekoppelte Mehrzonen-Anordnungen in Matrizenschreibweise	10
4. Entartung der Reflektor-Innenzone zu einem Spalt	18
5. Zweidimensionales Zylinderproblem in r,z -Geometrie - zylindrischer Kern mit Endreflektoren, Radialreflektor, unmittelbar und allseitig angrenzendem Reflektor -	25
6. Dreidimensionales Problem - quaderförmiger Kern mit unmittelbar und allseitig angrenzendem Reflektor -	28
7. Anwendungen	31
7.1 Eindimensionales Zweigruppen-Modell in Kugelgeometrie	31
7.2 Gekoppelte Anordnung in Zylindergeometrie	40
7.3 Isolierte kritische Anordnung in Quadergeometrie	44
8. Anhang - Nukleare Daten	50
Literatur	60

1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit versucht in gestraffter Form eine nach Möglichkeit geschlossene Darstellung mathematischer Modelle zu vermitteln, mit denen zahlreiche Probleme der Kritikalitätssicherheit beim Umgang mit spaltbarem Material schnell und zuverlässig gelöst werden können. Im Hinblick auf eine vielschichtige Problematik wird insbesondere Flexibilität der Modelle zur Erfassung von Spaltstoff-Moderator-Mischungsverhältnissen, Reflexionsbedingungen, Wechselwirkungen, geometrischer Form, Komponentenanzahl und dergleichen angestrebt, um den in Machbarkeitsstudien notwendigen Zeitaufwand bei der Durchführung erforderlicher Störfallanalysen und Parameterstudien in erträglichen Grenzen zu halten; ein Gesichtspunkt, der bei der sicherheitstechnischen Behandlung von Arbeitsvorgängen und Prozeßabläufen mit nicht genau festzulegender Geometrie und stofflicher Zusammensetzung besondere Beachtung verdient.

Die mathematischen Modelle basieren sämtlich auf einer P_1 -Näherung der Boltzmann-Transportgleichung (Diffusionsnäherung) in zwei Energiegruppen, mit denen bei passend gewählten Nukleardaten für thermische Anordnungen auch noch bei kleinen Core-Dimensionen beachtlich gute Ergebnisse bezüglich kritischer Abmessungen und Massen erzielt werden.

Die Angemessenheit der Zweigruppen-Methode für nukleare Core-Auslegungsrechnungen bei Forschungsreaktoren wurde bereits vor Jahren im Rahmen nuklearer Anfahrversuche nachgewiesen (14), 34; der Nachweis wird nunmehr als Abschluß der Anwendungen ergänzt am Beispiel eines meßtechnisch verifizierten Extremfalles im Zusammenhang mit der Bestimmung der kritischen U-235-Masse einer nahezu würfelförmigen Uran-Polyäthylen-Anordnung mit allseitigem dicken Beryllium-Reflektor. Der Gültigkeitsbereich der Rechnungen ist, wie bereits für homogene Gemische aus hochangereichertem Uran mit 93,2% U-235-Anreicherung, Wasser und Graphit in (15), 7 dargelegt, beschränkt auf Moderationsgrade $H/U \geq 7,4$ für reine Wassermoderation und $C/U \geq 300$ für reine Graphitmoderation.

Behandelt werden im folgenden die drei wichtigsten Geometrien, nämlich Platten-, Zylinder- und Kugelgeometrie, wobei der letzteren insofern große Bedeutung beizumessen ist, als kugelförmige Anordnungen unter allen Anordnungen gleichen Volumens durch kleinste Oberfläche und damit größte Reaktivität ausgezeichnet sind und demzufolge bei der Festlegung von Massenlimits im Rahmen dieser Geometrie Formbeschränkungen entfallen.

Das Zweigruppen-Modell wird zunächst für eindimensionale isolierte und gekoppelte Spaltstoff-Moderator-Anordnungen mit Reflektorzonen in den genannten Geometrien unter Verwendung der Matrizen-Methode entwickelt. Dabei finden die Unterschiede zwischen isolierten und gekoppelten, aus gleichartigen Zellen aufgebauten, Anordnungen ihren mathematischen Ausdruck in unterschiedlichen Randbedingungen für die Außenfläche des Außenreflektors.

Durch geeignete Positionierung eines Reflektors unter Einhaltung vorgegebener Abstände von der Spaltstoff-Moderator-Zone, sind gegebenenfalls Erleichterungen in bezug auf kritisch sichere Abmessungen und Spaltstoffmengen bei Zylinder- und Kugelgeometrie tolerierbar. Die mathematische Behandlung dieses Falles erfolgt im Rahmen eines Schalenspalt-Modells, bei dem die Innenzone eines Zweizonen-Reflektors zu einem Luftspalt entartet.

Die Entartung der Reflektor-Innenzone zu einem Luftspalt erfordert eine strengere Fassung der Randbedingungen an der Spalt-Außen- und -Innenfläche bei Einbeziehung der gegenseitigen richtungsabhängigen Zustrahlungen der Reflektor-Innenfläche unter Berücksichtigung der durch die Spaltstoff-Moderator-Zone hervorgerufenen Schattenwirkung. Mathematisch drückt sich der Sachverhalt gegenüber der unter sonst üblichen Annahmen - Stetigkeit der Fluß- und Netto-Stromdichten an den Medien-Grenzflächen - sich ergebenden entarteten 4×4 -Spaltzonen-Matrix in dem Auftreten zusätzlicher geometrieabhängiger Flußdichte-Korrekturglieder aus. Das gewählte mathematische Modell erlaubt auch durch Übergang zum Nullspalt (Entartung der Spaltzonen-Matrix zur Einheitsmatrix) die Behandlung des unmittelbar an die Spaltstoff-Moderator-Zone angrenzenden Reflektors.

In erweiterten Modellen erfolgt schließlich die Behandlung des zweidimensionalen Zylinder-Problems in r, z -Geometrie und des dreidimensionalen Quaders mit allseitigem, unmittelbar angrenzendem Reflektor durch schrittweise Rückführung auf das eindimensionale Problem, indem bei Vorgabe der Reflektorabmessungen und einer bzw. zweier Dimensionen der Spaltstoff-Moderator-Zone die unbekannte Abmessung über sogenannte "Buckling-Iterationen" der achsialen Flußwölbungsanteile ermittelt wird. Auf diese Weise wird z.B. eine optimale Nutzung vorhandener Lagerkapazitäten bei Ausnutzung der durch die geometrische Form bedingten Vorteile ermöglicht.

Ausgewählte Anwendungsbeispiele beziehen sich auf die Untersuchung der Wirkung unterschiedlicher Reflektoren auf Uran hoher U-235-Anreicherung in Verbindung mit Moderatoren unter Berücksichtigung von Material-Umschichtungen, -Entmischungen, Spaltstoff-Verdichtungen und dergleichen im Hinblick auf die Festlegung sicherer Spaltstoff-Umgangsmengen, ferner den Nachweis der Kritikalitätssicherheit für einen speziellen Fall der Zwischenlagerung von MTR-Brennstoffelementen in einem Wasserbecken und schließlich das Vorgehen bezüglich der sicheren Beladung einer stark abgeschirmten quaderförmigen Anordnung mit graphithaltigen Brennstoffproben im Hinblick auf einen störfallbedingten Wassereinbruch.

In einem Anhang sind die für Zweigruppen-Rechnungen empfohlenen Nuklear-daten ausgewählter Kern- und Reflektor-Materialien zusammengestellt.

2. Allgemeine Formulierung des Eigenwertproblems

Die Zweigruppen-Diffusionsgleichungen für die Spaltstoff-Moderator-Zone lauten in Anlehnung an (1), 501-502; (2), 457; (3), 6-54; (4), 203; (5), 112 und (6), 459 für den stationären Fall (effektiver Multiplikationsfaktor $k_{\text{eff}} = 1$)

$$(2.1) \quad D_{sK} \Delta \phi_{sK} - \Sigma_{sK} \phi_{sK} + \frac{k_{\infty}}{p} \Sigma_{tK} \phi_{tK} = 0,$$

$$(2.2) \quad D_{tK} \Delta \phi_{tK} - \Sigma_{tK} \phi_{tK} + p \Sigma_{sK} \phi_{sK} = 0.$$

Hierin bedeuten Δ den Laplace-Operator, ϕ die Flußdichten, D die Diffusionskonstanten, Σ den makroskopischen Brems- bzw. Absorptionsquerschnitt, k_{∞} den infiniten Multiplikations- und p den Resonanzdurchlaßfaktor. Der erste Index von ϕ , D und Σ kennzeichnet die Energiegruppe (s = schnell, t = thermisch), der zweite Index die Zone (K = Kern- oder Spaltstoff-Moderator-Zone).

Ähnliche Gleichungen gelten für einen Reflektor ohne Spaltstoff ($k_{\infty} = 0$), wobei der zweite Index R ganz allgemein den Reflektor charakterisiert:

$$(2.3) \quad D_{sR} \Delta \phi_{sR} - \Sigma_{sR} \phi_{sR} = 0,$$

$$(2.4) \quad D_{tR} \Delta \phi_{tR} - \Sigma_{tR} \phi_{tR} + \Sigma_{sR} \phi_{sR} = 0.$$

Partikulärlösungen der Gleichungen (2.1) und (2.2) sowie (2.3) und (2.4) gewinnt man über den Lösungsansatz

$$(2.5) \quad \Delta \phi + B^2 \phi = 0,$$

mit gleichem B^2 für ϕ_s und ϕ_t in einer Zone, aus denen sich die vollständige Lösung durch Linearkombination aufbaut.

Einsetzen von (2.5) in (2.1) und (2.2) liefert

$$(2.6) \quad -(D_{sK} B^2 + \Sigma_{sK}) \phi_{sK} + \frac{k_{\infty}}{p} \Sigma_{tK} \phi_{tK} = 0,$$

$$(2.7) \quad p \Sigma_{sK} \phi_{sK} - (D_{tK} B^2 + \Sigma_{tK}) \phi_{tK} = 0.$$

Die Lösbarkeit des Gleichungssystems (2.6), (2.7) durch nichttriviale Lösungen ϕ_{sK} , ϕ_{tK} verlangt das Verschwinden der Determinante der Koeffizientenmatrix, woraus sich mit den reziproken Brems- und Diffusionsflächen

$$(2.8) \quad \kappa_{sK}^2 = \frac{1}{L_{sK}^2} = \frac{\Sigma_{sK}}{D_{sK}},$$

$$(2.9) \quad \kappa_{tK}^2 = \frac{1}{L_{tK}^2} = \frac{\Sigma_{tK}}{D_{tK}}$$

vermöge der Beziehung

$$(2.10) \quad (B^2 + \kappa_{sK}^2)(B^2 + \kappa_{tK}^2) - \kappa_{sK}^2 \kappa_{tK}^2 \bar{K}_{\infty} = 0$$

die beiden Flußwölbungseigenwerte zu

$$(2.11) \quad B_1^2 = \mu_K^2 = \frac{1}{2} \left[-(\kappa_{sK}^2 + \kappa_{tK}^2) + \sqrt{(\kappa_{sK}^2 + \kappa_{tK}^2)^2 + 4 \kappa_{sK}^2 \kappa_{tK}^2 (\bar{K}_{\infty} - 1)} \right],$$

$$(2.12) \quad B_2^2 = -\nu_K^2 = -\frac{1}{2} \left[(\kappa_{sK}^2 + \kappa_{tK}^2) + \sqrt{(\kappa_{sK}^2 + \kappa_{tK}^2)^2 + 4 \kappa_{sK}^2 \kappa_{tK}^2 (\bar{K}_{\infty} - 1)} \right]$$

ergeben.

Nach (1), 379 ist für den Fall, daß k_{eff} von 1 verschieden ist, in den obigen Beziehungen (2.1), (2.6), (2.10), (2.11) und (2.12) zur Bestimmung der Flußwölbungseigenwerte der infinite Multiplikationsfaktor durch den fiktiven Wert

$$\bar{K}_{\infty}' = \frac{\bar{K}_{\infty}}{k_{\text{eff}}}$$

zu ersetzen.

Durch Addition von (2.11) und (2.12) folgt weiter

$$(2.13) \quad B_1^2 + B_2^2 = \mu_K^2 - \nu_K^2 = -\kappa_{sK}^2 - \kappa_{tK}^2.$$

Die Partikulärlösungen für die schnelle und die thermische Flußdichte sind miteinander gekoppelt; der Kopplungskoeffizient errechnet sich z.B. aus Gleichung (2.7) zu

$$(2.14) \quad S_K = \frac{\phi_{tK}}{\phi_{sK}} = \frac{p \Sigma_{sK}}{D_{tK} B^2 + \Sigma_{tK}}.$$

Einsetzen der Flußwölbungseigenwerte (2.11), (2.12) in die Beziehung (2.14) liefert für die Kopplungskoeffizienten der Partikulärlösungen unter Berücksichtigung von (2.13)

$$(2.15) \quad S_{sK} = p \frac{D_{sK}}{D_{tK}} \frac{\kappa_{sK}^2}{\mu_K^2 + \kappa_{tK}^2},$$

$$(2.16) \quad S_{tK} = -p \frac{D_{sK}}{D_{tK}} \frac{\kappa_{sK}^2}{\mu_K^2 + \kappa_{sK}^2}.$$

Bezeichnet man die Partikulärlösung von (2.5) für $B^2 = \mu_K^2$ mit X_K und für $B^2 = -\nu_K^2$ mit Y_K , so lautet die vollständige Lösung von (2.1) und (2.2) mit zwei willkürlichen Konstanten A_{1K} und A_{2K}

$$(2.17) \quad \phi_{sK} = A_{1K} X_K + A_{2K} Y_K ,$$

$$(2.18) \quad \phi_{tK} = A_{1K} S_{1K} X_K + A_{2K} S_{2K} Y_K .$$

In gleicher Weise wie für die Spaltstoff-Moderator-Zone findet man für den Reflektor durch Einsetzen von (2.5) in die Gleichungen (2.3) und (2.4)

$$(2.19) \quad -(\mathcal{D}_{sR} B^2 + \Sigma_{sR}) \phi_{sR} = 0 ,$$

$$(2.20) \quad \Sigma_{sR} \phi_{sR} - (\mathcal{D}_{tR} B^2 + \Sigma_{tR}) \phi_{tR} = 0$$

und mit

$$(2.21) \quad K_{sR}^2 = \frac{1}{L_{sR}^2} = \frac{\Sigma_{sR}}{\mathcal{D}_{sR}} , \quad (2.22) \quad K_{tR}^2 = \frac{1}{L_{tR}^2} = \frac{\Sigma_{tR}}{\mathcal{D}_{tR}}$$

aus der charakteristischen Gleichung

$$(2.23) \quad (B^2 + K_{sR}^2)(B^2 + K_{tR}^2) = 0$$

die Flußwölbungseigenwerte

$$(2.24) \quad B_1^2 = -\mu_R^2 = -K_{sR}^2 ,$$

$$(2.25) \quad B_2^2 = -\nu_R^2 = -K_{tR}^2 .$$

Den einzigen Kopplungskoeffizienten erhält man aus (2.20) in Verbindung mit (2.24) zu

$$(2.26) \quad S_R = \frac{\phi_{tR}}{\phi_{sR}} = \frac{\Sigma_{sR}}{\mathcal{D}_{tR} B^2 + \Sigma_{tR}} = - \frac{\mathcal{D}_{sR}}{\mathcal{D}_{tR}} \frac{K_{sR}^2}{K_{sR}^2 - K_{tR}^2} .$$

Einen zweiten Kopplungskoeffizienten wie im Falle der Spaltstoff-Moderator-Zone gibt es für den Reflektor nicht, da eine den Flußwölbungseigenwert $B_2^2 = -K_{tR}^2$ enthaltende Partikulärlösung für die schnelle Flußdichte nicht existiert, wie man durch Einsetzen von (2.25) in die Gleichungen (2.19) und (2.20) und unter Beachtung von (2.21) und (2.22) unmittelbar erkennt.

Die vollständige Lösung für den Reflektor lautet demnach, wenn man die Partikulärlösung von (2.5) für $B^2 = -\mu_R^2$ mit X_R und für $B^2 = -\nu_R^2$ mit Y_R bezeichnet, mit den willkürlichen Konstanten A_{1R} und A_{2R}

$$(2.27) \quad \phi_{1R} = A_{1R} X_R,$$

$$(2.28) \quad \phi_{2R} = A_{1R} S_R X_R + A_{2R} Y_R.$$

Die drei wichtigen eindimensionalen Symmetrieprobleme, nämlich unendlich ausgedehnte Platte mit Symmetrieebene, unendlicher Kreiszylinder und Kugel mit beidseitig symmetrisch bzw. koaxial und konzentrisch angeordneten Reflektoren (Abb. 1 u. 2) lassen sich in bezug auf die Lösungsschemata weitgehend gemeinsam behandeln.

Bei Verwendung der dem jeweiligen Problem angemessenen Koordinaten, also rechtwinkligen kartesischen, Zylinder- und räumlichen Polarkoordinaten und Beschränkung auf die eine Laufvariable r im eindimensionalen Fall, reduziert sich der Laplace-Operator Δ wegen der Unabhängigkeit von Azimut und Polarwinkel auf einen Ausdruck der Form

$$(2.29) \quad \Delta = \frac{1}{r^n} \frac{d}{dr} \left(r^n \frac{d}{dr} \right) = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{n}{r} \frac{d}{dr},$$

mit

$$(2.30) \quad \begin{array}{l} n = 0 \text{ für die unendlich ausgedehnte Platte,} \\ n = 1 \text{ für den unendlichen Kreiszylinder,} \\ n = 2 \text{ für die Kugel.} \end{array}$$

Die Flußwölbungseigenwerte der Spaltstoff-Moderator-Zone haben unterschiedliche Vorzeichen (siehe (2.11) und (2.12)), die der Reflektoren sind wegen (2.24) und (2.25) beide negativ. In allen Fällen aber ergeben sich sowohl für den Kern als auch jeden Reflektor als Lösungen von Differentialgleichungen 2. Ordnung jeweils zwei unabhängige Lösungsfunktionen für die X_K , Y_K , X_R und Y_R , wobei aufgrund der Symmetriebedingungen jeweils eine Lösung für die Kernzone ausscheidet. In Tab. 2.1 ist die Lösungsmannigfaltigkeit für Kern und Reflektor bei den unterschiedlichen Geometrien zusammengestellt. Darin bedeuten J_0 , Y_0 die Besselfunktionen u. I_0 , K_0 die modifizierten Besselfunktionen erster und zweiter Art der Ordnung Null.

Im folgenden wird ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit davon ausgegangen, daß die Spaltstoff-Moderator-Zone von zwei unterschiedlichen Reflektoren umgeben ist. Zur Lösung des Problems, d.h. zur Bestimmung der kritischen Abmessungen bedarf es der eindeutigen Festlegung der Randbedingungen.

Diese beinhalten einmal das Verschwinden der Nettostromdichten oder der Flußdichte-Gradienten für $r = 0$, d.h. auf Symmetrieebene, Symmetrieachse und im Kugelmittelpunkt, zum anderen die Stetigkeit der Fluß- und Nettostromdichten an den Grenzflächen Kern/Reflektor und Reflektor/Reflektor und letztlich das Verschwinden der Flußdichten an der extrapolierten Außenfläche des Außenreflektors im Falle einer isolierten Anordnung, bzw. das Verschwinden der Nettostromdichten und damit der Flußdichte-Gradienten an der Außenfläche des Außenreflektors (Zellengrenzfläche) bei einer gekoppelten, beliebig ausgedehnten Zellenanordnung.

Der Unterschied zwischen einer isolierten und einer gekoppelten Zellenanordnung drückt sich demnach nur in den Randbedingungen für die Außenfläche der äußersten Reflektorzone aus. Die isolierte Anordnung verlangt das Erfülltsein der Vakuum-Randbedingung an der Reflektor-Außenfläche (Neutronen strömen nur aus dem Reflektor nach außen in das Vakuum und nicht umgekehrt), die formal durch die gleichwertige Forderung des Verschwindens der Flußdichten an der extrapolierten Reflektor-Außenfläche ersetzt wird; die gekoppelte Anordnung hingegen verlangt das Verschwinden der Nettostromdichten oder Flußdichte-Gradienten an der Zellengrenzfläche (im zeitlichen Mittel strömen durch die Grenzfläche genau so viele Neutronen in die Zelle, wie aus ihr wieder ausströmen). Der Unterschied zwischen der isolierten und der gekoppelten Version wird jedoch mit zunehmender Reflektordicke immer geringer.

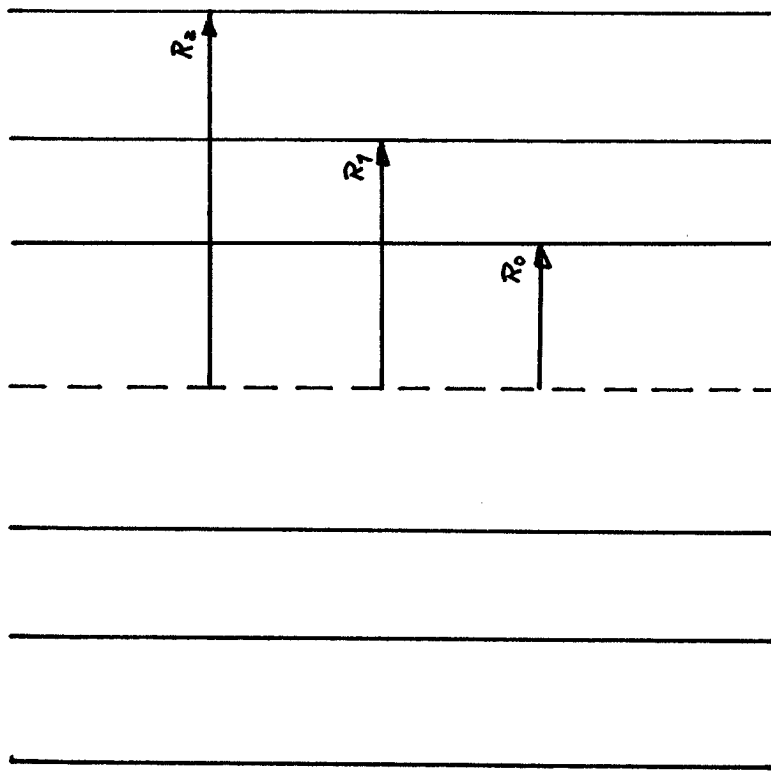


Abb. 1: Zonenanordnung in Platten-Geometrie

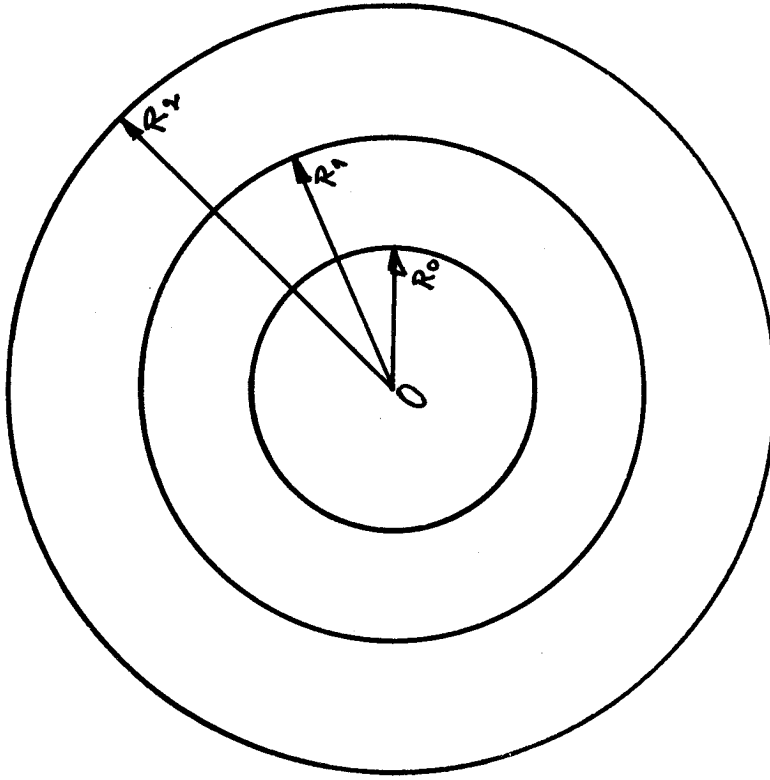


Abb. 2: Zonenanordnung in Zylinder-
bzw. Kugel-Geometrie

Tab. 2.1: Lösungsfunktionen für die Kern- und Reflektorzone bei Platten-, Zylinder- und Kugelgeometrie

Geometrie	Kernzone				Reflektorzone			
	$X_{1K}(\mu_K r)$	$X_{2K}(\mu_K r)^{*)}$	$Y_{1K}(\nu_K r)$	$Y_{2K}(\nu_K r)^{*)}$	$X_{1R}(\mu_R r)$	$X_{2R}(\mu_R r)$	$Y_{1R}(\nu_R r)$	$Y_{2R}(\nu_R r)$
Platte	$\cos \mu_K r$	$\sin \mu_K r$	$\cosh \nu_K r$	$\sinh \nu_K r$	$\cosh \mu_R r$	$\sinh \mu_R r$	$\cosh \nu_R r$	$\sinh \nu_R r$
Zylinder	$J_0(\mu_K r)$	$Y_0(\mu_K r)$	$I_0(\nu_K r)$	$K_0(\nu_K r)$	$I_0(\mu_R r)$	$K_0(\mu_R r)$	$I_0(\nu_R r)$	$K_0(\nu_R r)$
Kugel	$\frac{\sin \mu_K r}{r}$	$\frac{\cos \mu_K r}{r}$	$\frac{\sinh \nu_K r}{r}$	$\frac{\cosh \nu_K r}{r}$	$\frac{\cosh \mu_R r}{r}$	$\frac{\sinh \mu_R r}{r}$	$\frac{\cosh \nu_R r}{r}$	$\frac{\sinh \nu_R r}{r}$

+) Diese Lösungsfunktionen scheiden aufgrund der Symmetriebedingungen aus.

3. Randbedingungen für isolierte und gekoppelte Mehrzonen-Anordnungen in Matrizenschreibweise

Zur mathematischen Formulierung der Randbedingungen empfiehlt sich die Matrizendarstellung der Lösungen für die Spaltstoff-Moderator-Zone und jede Reflektorzone unter Einbeziehung der Nettostromdichten

$$(3.1) \quad \vec{J} = -D \operatorname{grad} \phi = -D \frac{d\phi}{dr} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Der Tab. 2.1 ist zu entnehmen, daß der Symmetriebedingung (Verschwinden der Flußdichte-Gradienten für $r = 0$) nur entsprochen werden kann, wenn die Lösungsfunktionen $X_{2K}(\mu_K r)$ und $Y_{2K}(\nu_K r)$ der Kernzone, die beim Zylinder- und Kugelproblem obendrein für $r \rightarrow 0$ auch noch über alle Grenzen wachsen, ausgeschlossen werden. Mithin gilt für die Kernzone wegen (2.17), (2.18) und (3.1)

$$(3.2) \quad \psi_K(r) = M_K(r) \cdot C_K,$$

mit

$$(3.3) \quad \psi_K(r) = \begin{pmatrix} \phi_{sK} \\ \phi_{tK} \\ -J_{sK} \\ -J_{tK} \end{pmatrix},$$

$$(3.4) \quad M_K(r) = \begin{pmatrix} X_{1K} & Y_{1K} \\ S_{1K} X_{1K} & S_{2K} Y_{1K} \\ D_{sK} X'_{1K} & D_{sK} Y'_{1K} \\ D_{tK} S_{1K} X'_{1K} & D_{tK} S_{2K} Y'_{1K} \end{pmatrix}$$

und

$$(3.5) \quad C_K = \begin{pmatrix} C_{1K} \\ C_{3K} \end{pmatrix}.$$

Für einen Reflektor hat man wegen (2.27), (2.28) und (3.1)

$$(3.6) \quad \psi_{R(r)} = M_{R(r)} \cdot C_R,$$

mit

$$(3.7) \quad \psi_{R(r)} = \begin{pmatrix} \phi_{sR} \\ \phi_{tR} \\ -J_{sR} \\ -J_{tR} \end{pmatrix},$$

$$(3.8) \quad M_{R(r)} = \begin{pmatrix} X_{1R} & X_{2R} & 0 & 0 \\ S_R X_{1R} & S_R X_{2R} & Y_{1R} & Y_{2R} \\ D_{sR} X'_{1R} & D_{sR} X'_{2R} & 0 & 0 \\ D_{tR} S_R X'_{1R} & D_{tR} S_R X'_{2R} & D_{tR} Y'_{1R} & D_{tR} Y'_{2R} \end{pmatrix}$$

und

$$(3.9) \quad C_R = \begin{pmatrix} C_{1R} \\ C_{2R} \\ C_{3R} \\ C_{4R} \end{pmatrix}.$$

Bei der zu betrachtenden Anordnung, bestehend aus einer Spaltstoff-Moderator-Zone mit zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Reflektoren, soll die Reflektor-Innenzone zum Unterschied von der Außenzone durch den Index M gekennzeichnet werden; ansonsten ändert sich an den obigen Matrizen (3.6) bis (3.9) nichts.

Die Zonen-Grenzflächen seien durch R_0 , R_1 und R_2 gegeben, d.h. es gilt

$$(3.10) \quad 0 \leq r \leq R_0$$

für die Spaltstoff-Moderator-Zone,

$$(3.11) \quad R_0 \leq r \leq R_1$$

für die Reflektor-Innenzone und

$$(3.12) \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

für den äußeren Reflektor, wobei R_2 im Falle der isolierten Anordnung die Extrapolationslänge mit einschließt, bei einer beliebig ausgedehnten Zellenanordnung hingegen durch die Abmessungen der Wigner-Seitz-Zelle (vgl. (2), 628 und (6), 466) bestimmt wird. Die Extrapolationslänge d kann mit einer für den vorliegenden Zweck ausreichenden Genauigkeit für beide Neutronengruppen nach der Spinrad-Formel

$$(3.13) \quad d = 2,13 \frac{\kappa_{tR}^2 D_{sR} + \kappa_{sR}^2 D_{tR}}{\kappa_{tR}^2 + \kappa_{sR}^2}$$

(vgl. (1), 508) abgeschätzt werden.

Die Stetigkeit der Fluß- und Nettostromdichten an den Grenzflächen Kern/Reflektor und Reflektor/Reflektor verlangt das Bestehen der Gleichungen

$$(3.14) \quad \psi_K(R_0) = M_K(R_0)C_K = \psi_M(R_0) = M_M(R_0)C_M,$$

$$(3.15) \quad \psi_M(R_1) = M_M(R_1)C_M = \psi_R(R_1) = M_R(R_1)C_R.$$

Bedeutet $\psi_R^{(1)}(r)$ und $M_R^{(1)}(r)$ die oberen und $\psi_R^{(2)}(r)$ und $M_R^{(2)}(r)$ die unteren Hälften von (3.7) und (3.8), so lautet die Bedingung für das Verschwinden der Flußdichten an der extrapolierten Reflektor-Außenfläche im Falle der isolierten Anordnung

$$(3.16) \quad \psi_R^{(1)}(R_2) = M_R^{(1)}(R_2) \cdot C_R = 0$$

und die Bedingung für das Verschwinden der Nettostromdichten an der Zellengrenzfläche im Falle der beliebig ausgedehnten Zellenanordnung

$$(3.17) \quad \psi_R^{(2)}(R_2) = M_R^{(2)}(R_2) \cdot C_R = 0.$$

Je nach dem, ob es sich um eine isolierte ($i=1$) oder um eine Zellenanordnung ($i=2$) handelt, folgt also aus (3.16) oder (3.17) in Verbindung mit (3.14) und (3.15)

$$(3.18) \quad M_R^{(i)}(R_2)M_R^{-1}(R_1)M_M(R_1)M_M^{-1}(R_0)M_K(R_0)C_K = 0,$$

wobei unter $M_R^{-1}(R_1)$ und $M_M^{-1}(R_0)$ die reziproken oder inversen Matrizen zu $M_R(R_1)$ und $M_M(R_0)$ zu verstehen sind.

Damit das System (3.18) eine von Null verschiedene Lösung für C_K hat, muß die Determinante der viergliedrigen Koeffizientenmatrix verschwinden, mithin

$$(3.19) \quad |M_R^{(i)}(R_2) M_R^{-1}(R_1) M_M(R_1) M_M^{-1}(R_0) M_K(R_0)| = 0$$

sein.

Wegen (3.8) ist (vgl. (3), 6-71), wenn man der Einfachheit halber die R_1 - und R_2 -Abhängigkeit der Glieder in der Matrix wegläßt,

$$(3.20) \quad M_R(R_2) M_R^{-1}(R_1) =$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{W}_1(\mu_R) & 0 & \frac{1}{\partial_{AR}} \mathcal{W}_2(\mu_R) & 0 \\ \mathcal{W}_1(\mu_R, \nu_R) & \mathcal{W}_1(\nu_R) & \mathcal{W}_2(\mu_R, \nu_R) & \frac{1}{\partial_{AR}} \mathcal{W}_2(\nu_R) \\ \partial_{AR} \mathcal{W}_3(\mu_R) & 0 & \mathcal{W}_4(\mu_R) & 0 \\ \mathcal{W}_3(\mu_R, \nu_R) & \partial_{AR} \mathcal{W}_3(\nu_R) & \mathcal{W}_4(\mu_R, \nu_R) & \mathcal{W}_4(\nu_R) \end{pmatrix},$$

mit

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= X_{1R}(\lambda R_1) X'_{2R}(\lambda R_1) - X'_{1R}(\lambda R_1) X_{2R}(\lambda R_1), \\ \mathcal{W}_1(\lambda) &= \frac{1}{T(\lambda)} [X_{1R}(\lambda R_2) X'_{2R}(\lambda R_1) - X'_{2R}(\lambda R_2) X_{1R}(\lambda R_1)], \\ (3.21) \quad \mathcal{W}_2(\lambda) &= \frac{1}{T(\lambda)} [X_{2R}(\lambda R_2) X_{1R}(\lambda R_1) - X_{1R}(\lambda R_2) X_{2R}(\lambda R_1)], \\ \mathcal{W}_3(\lambda) &= \frac{1}{T(\lambda)} [X'_{1R}(\lambda R_2) X'_{2R}(\lambda R_1) - X'_{2R}(\lambda R_2) X'_{1R}(\lambda R_1)], \\ \mathcal{W}_4(\lambda) &= \frac{1}{T(\lambda)} [X'_{2R}(\lambda R_2) X_{1R}(\lambda R_1) - X'_{1R}(\lambda R_2) X_{2R}(\lambda R_1)], \end{aligned}$$

$$\mathcal{W}_1(\mu_R, \nu_R) = S_R [\mathcal{W}_1(\mu_R) - \mathcal{W}_1(\nu_R)],$$

$$\mathcal{W}_2(\mu_R, \nu_R) = \frac{S_R}{\partial_{AR}} [\mathcal{W}_2(\mu_R) - \mathcal{W}_2(\nu_R)],$$

$$\mathcal{W}_3(\mu_R, \nu_R) = \partial_{AR} S_R [\mathcal{W}_3(\mu_R) - \mathcal{W}_3(\nu_R)],$$

$$\mathcal{W}_4(\mu_R, \nu_R) = \frac{\partial_{AR} S_R}{\partial_{AR}} [\mathcal{W}_4(\mu_R) - \mathcal{W}_4(\nu_R)].$$

Den obigen Erklärungen zufolge wird $M_R^{(1)}(R_2)M_R^{-1}(R_1)$ durch die obere Hälfte und $M_R^{(2)}(R_2)M_R^{-1}(R_1)$ durch die untere Hälfte von (3.20) dargestellt. Durch vordere Abspaltung je einer Matrix, die sich wiederum als das Produkt aus einer Multiplikations- und einer Additionsmatrix ergibt, lassen sich in bezug auf die weitere Verarbeitung von (3.19) erhebliche Vereinfachungen erzielen; man hat, wie aus (3.20) hergeleitet werden kann, für $i = 1, 2$

$$(3.22) \quad M_R^{(i)}(R_2) M_R^{-1}(R_1) = M_{\nu}^{(2)} M_R^{*(i)},$$

mit

$$(3.23) \quad M_R^{*(i)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\partial_{\partial R} \xi_R^{(i)}} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{S_R}{\partial_{\partial R}} \left(\frac{1}{\xi_R^{(i)}} - \frac{1}{\eta_R^{(i)}} \right) & -\frac{1}{\partial_{\partial R} \eta_R^{(i)}} \end{pmatrix},$$

$$(3.24) \quad M_{\nu}^{(1)} = \begin{pmatrix} \eta_1(\mu_R) & 0 \\ W_1(\mu_R, \nu_R) & \eta_1(\nu_R) \end{pmatrix},$$

$$(3.25) \quad \xi_R^{(1)} = -\frac{\eta_1(\mu_R)}{\eta_2(\mu_R)}, \quad (3.26) \quad \eta_R^{(1)} = -\frac{\eta_1(\nu_R)}{\eta_2(\nu_R)}$$

und

$$(3.27) \quad M_{\nu}^{(2)} = \begin{pmatrix} \partial_{\partial R} \eta_3(\mu_R) & 0 \\ W_3(\mu_R, \nu_R) & \partial_{\partial R} \eta_3(\nu_R) \end{pmatrix},$$

$$(3.28) \quad \xi_R^{(2)} = -\frac{\eta_3(\mu_R)}{\eta_4(\mu_R)}, \quad (3.29) \quad \eta_R^{(2)} = -\frac{\eta_3(\nu_R)}{\eta_4(\nu_R)}.$$

Durch hintere Abspaltung der Multiplikationsmatrix

$$(3.30) \quad M_h = \begin{pmatrix} X_{1K}(\mu_K R_0) & 0 \\ 0 & Y_{1K}(\nu_K R_0) \end{pmatrix}$$

aus (3.4) findet man

$$(3.31) \quad M_K(R_0) = M_K^*(R_0) \cdot M_h,$$

Damit das System (3.18) eine von Null verschiedene Lösung für C_K hat, muß die Determinante der viergliedrigen Koeffizientenmatrix verschwinden, mithin

$$(3.19) \quad |M_R^{(i)}(R_2) M_R^{-1}(R_1) M_M(R_1) M_M^{-1}(R_0) M_K(R_0)| = 0$$

sein.

Wegen (3.8) ist (vgl. (3), 6-71), wenn man der Einfachheit halber die R_1 - und R_2 -Abhängigkeit der Glieder in der Matrix wegläßt,

$$(3.20) \quad M_R(R_2) M_R^{-1}(R_1) =$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_1(\mu_R) & 0 & \frac{1}{\partial_{\lambda R}} \mathcal{U}_2(\mu_R) & 0 \\ W_1(\mu_R, \nu_R) & \mathcal{U}_1(\nu_R) & W_2(\mu_R, \nu_R) & \frac{1}{\partial_{\lambda R}} \mathcal{U}_2(\nu_R) \\ \partial_{\lambda R} \mathcal{U}_3(\mu_R) & 0 & \mathcal{U}_4(\mu_R) & 0 \\ W_3(\mu_R, \nu_R) & \partial_{\lambda R} \mathcal{U}_3(\nu_R) & W_4(\mu_R, \nu_R) & \mathcal{U}_4(\nu_R) \end{pmatrix},$$

mit

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= X_{1R}(\lambda R_1) X'_{2R}(\lambda R_1) - X'_{1R}(\lambda R_1) X_{2R}(\lambda R_1), \\ \mathcal{U}_1(\lambda) &= \frac{1}{T(\lambda)} [X_{1R}(\lambda R_2) X'_{2R}(\lambda R_1) - X_{2R}(\lambda R_2) X'_{1R}(\lambda R_1)], \\ (3.21) \quad \mathcal{U}_2(\lambda) &= \frac{1}{T(\lambda)} [X_{2R}(\lambda R_2) X_{1R}(\lambda R_1) - X_{1R}(\lambda R_2) X_{2R}(\lambda R_1)], \\ \mathcal{U}_3(\lambda) &= \frac{1}{T(\lambda)} [X'_{1R}(\lambda R_2) X'_{2R}(\lambda R_1) - X'_{2R}(\lambda R_2) X'_{1R}(\lambda R_1)], \\ \mathcal{U}_4(\lambda) &= \frac{1}{T(\lambda)} [X'_{2R}(\lambda R_2) X_{1R}(\lambda R_1) - X'_{1R}(\lambda R_2) X_{2R}(\lambda R_1)], \end{aligned}$$

$$W_1(\mu_R, \nu_R) = S_R [\mathcal{U}_1(\mu_R) - \mathcal{U}_1(\nu_R)],$$

$$W_2(\mu_R, \nu_R) = \frac{S_R}{\partial_{\lambda R}} [\mathcal{U}_2(\mu_R) - \mathcal{U}_2(\nu_R)],$$

$$W_3(\mu_R, \nu_R) = \partial_{\lambda R} S_R [\mathcal{U}_3(\mu_R) - \mathcal{U}_3(\nu_R)],$$

$$W_4(\mu_R, \nu_R) = \frac{\partial_{\lambda R} S_R}{\partial_{\lambda R}} [\mathcal{U}_4(\mu_R) - \mathcal{U}_4(\nu_R)].$$

Den obigen Erklärungen zufolge wird $M_R^{(1)}(R_2)M_R^{-1}(R_1)$ durch die obere Hälfte und $M_R^{(2)}(R_2)M_R^{-1}(R_1)$ durch die untere Hälfte von (3.20) dargestellt. Durch vordere Abspaltung je einer Matrix, die sich wiederum als das Produkt aus einer Multiplikations- und einer Additionsmatrix ergibt, lassen sich in bezug auf die weitere Verarbeitung von (3.19) erhebliche Vereinfachungen erzielen; man hat, wie aus (3.20) hergeleitet werden kann, für $i = 1, 2$

$$(3.22) \quad M_R^{(i)}(R_2) M_R^{-1}(R_1) = M_v^{(2)} M_R^{*(i)},$$

mit

$$(3.23) \quad M_R^{*(i)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{D_{3R} \xi_R^{(i)}} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{S_R}{D_{4R}} \left(\frac{1}{\xi_R^{(i)}} - \frac{1}{\gamma_R^{(i)}} \right) & -\frac{1}{D_{4R} \gamma_R^{(i)}} \end{pmatrix},$$

$$(3.24) \quad M_v^{(1)} = \begin{pmatrix} \pi_1(\mu_R) & 0 \\ W_1(\mu_R, \nu_R) & \pi_1(\nu_R) \end{pmatrix},$$

$$(3.25) \quad \xi_R^{(1)} = -\frac{\pi_1(\mu_R)}{\pi_2(\mu_R)}, \quad (3.26) \quad \gamma_R^{(1)} = -\frac{\pi_1(\nu_R)}{\pi_2(\nu_R)}$$

und

$$(3.27) \quad M_v^{(2)} = \begin{pmatrix} D_{3R} \pi_3(\mu_R) & 0 \\ W_3(\mu_R, \nu_R) & D_{4R} \pi_3(\nu_R) \end{pmatrix},$$

$$(3.28) \quad \xi_R^{(2)} = -\frac{\pi_3(\mu_R)}{\pi_4(\mu_R)}, \quad (3.29) \quad \gamma_R^{(2)} = -\frac{\pi_3(\nu_R)}{\pi_4(\nu_R)}.$$

Durch hintere Abspaltung der Multiplikationsmatrix

$$(3.30) \quad M_h = \begin{pmatrix} X_{1K}(\mu_K R_0) & 0 \\ 0 & Y_{1K}(\nu_K R_0) \end{pmatrix}$$

aus (3.4) findet man

$$(3.31) \quad M_K(R_0) = M_K^*(R_0) \cdot M_h,$$

mit

$$(3.32) \quad M_K^*(R_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ S_{1K} & S_{2K} \\ D_{1K} \xi_K & D_{2K} \gamma_K \\ S_{1K} D_{1K} \xi_K & S_{2K} D_{2K} \gamma_K \end{pmatrix},$$

$$(3.33) \quad \xi_K = \frac{X'_{1K}(\mu_K R_0)}{X_{1K}(\mu_K R_0)} \quad \text{und} \quad (3.34) \quad \gamma_K = \frac{Y'_{1K}(\nu_K R_0)}{Y_{1K}(\nu_K R_0)}.$$

Da die Determinanten der $M_v^{(i)}$ und M_w von Null verschieden sind, muß mit (3.19) notwendig auch

$$(3.35) \quad |M_R^{*(i)} M_M(R_1) M_M^{-1}(R_0) M_K^*(R_0)| = 0$$

erfüllt sein.

Ersetzt man in (3.20) und (3.21) R_2 durch R_1 , R_1 durch R_0 und den Index R durch M , so ist dadurch auch das Matrizenprodukt $M_M(R_1) M_M^{-1}(R_0)$ gegeben. Die wesentlichen Funktions-Elemente der obigen kritischen Gleichung (3.35) sind in Tab. 3.1 für Platten-, Zylinder- und Kugelgeometrie zusammengestellt. Diese Tabelle enthält auch die im nächsten Abschnitt erklärten Elemente $g(\rho)$ und $h(\rho)$ des Matrizenproduktes $M_M(R_1) M_M^{-1}(R_0)$ für den zu einem Spalt entarteten Innenreflektor.

Tab. 3.1: Zusammenstellung wesentlicher Funktions-Elemente der kritischen Gleichung (3.35) für Platten-, Zylinder- und Kugelgeometrie

	Platte	Zylinder	Kugel
Außenreflektor $\lambda \rightarrow \mu_R; \nu_R$			
$\xi_R^{(1)}(\lambda) = \gamma_R^{(1)}(\lambda)$ $= -\frac{\eta_2(\lambda)}{\eta_4(\lambda)}$	$-\lambda \operatorname{cyl} \lambda (R_2 - R_1)$	$-\lambda \frac{K_1(\lambda R_1) + \frac{K_0(\lambda R_2)}{I_0(\lambda R_2)} \bar{I}_1(\lambda R_1)}{K_0(\lambda R_1) - \frac{K_0(\lambda R_2)}{\bar{I}_0(\lambda R_2)} \bar{I}_0(\lambda R_1)}$	$-\lambda \operatorname{cyl} \lambda (R_2 - R_1) - \frac{1}{R_1}$
$\xi_R^{(2)}(\lambda) = \gamma_R^{(2)}(\lambda)$ $= -\frac{\eta_3(\lambda)}{\eta_4(\lambda)}$	$-\lambda \operatorname{tgh} \lambda (R_2 - R_1)$	$-\lambda \frac{K_1(\lambda R_1) - \frac{K_2(\lambda R_2)}{\bar{I}_1(\lambda R_2)} \bar{I}_1(\lambda R_1)}{K_0(\lambda R_1) + \frac{K_2(\lambda R_2)}{\bar{I}_1(\lambda R_2)} \bar{I}_0(\lambda R_1)}$	$-\lambda \frac{\lambda R_2 \operatorname{tgh} \lambda (R_2 - R_1) - 1}{\lambda R_2 - \operatorname{tgh} \lambda (R_2 - R_1)} - \frac{1}{R_1}$
Innenreflektor $\lambda \rightarrow \mu_M; \nu_M$			
$\eta_1(\lambda)$	$\operatorname{cyl} \lambda (R_1 - R_0)$	$\lambda R_0 [I_0(\lambda R_1) K_1(\lambda R_0) + K_0(\lambda R_1) \bar{I}_1(\lambda R_0)]$	$\frac{R_0}{R_1} [\operatorname{cyl} \lambda (R_1 - R_0) + \frac{\sinh \lambda (R_1 - R_0)}{\lambda R_0}]$
$\eta_2(\lambda)$	$\frac{\sinh \lambda (R_1 - R_0)}{\lambda}$	$R_0 [\bar{I}_0(\lambda R_1) K_0(\lambda R_0) - K_0(\lambda R_1) \bar{I}_0(\lambda R_0)]$	$\frac{R_0}{R_1} \frac{\sinh \lambda (R_1 - R_0)}{\lambda}$
$\eta_3(\lambda)$	$\lambda \sinh \lambda (R_1 - R_0)$	$\lambda^2 R_0 [\bar{I}_1(\lambda R_1) K_1(\lambda R_0) - K_1(\lambda R_1) \bar{I}_1(\lambda R_0)]$	$\frac{R_0}{R_1} \frac{1}{\lambda R_0 R_1} [(\lambda^2 R_0 R_1 - 1) \sinh \lambda (R_1 - R_0) + \lambda (R_1 - R_0) \cosh \lambda (R_1 - R_0)]$
$\eta_4(\lambda)$	$\operatorname{cyl} \lambda (R_1 - R_0)$	$\lambda R_0 [\bar{I}_1(\lambda R_1) K_0(\lambda R_0) + K_1(\lambda R_1) \bar{I}_0(\lambda R_0)]$	$\frac{R_0}{R_1} [\operatorname{cyl} \lambda (R_1 - R_0) - \frac{\sinh \lambda (R_1 - R_0)}{\lambda R_1}]$

Tab. 3.1.1: Fortsetzung

	Platte	Zylinder	Kugel
Innenreflektor entartet zu einem Spalt; $\rho = R_0/R_1$			
$g(\rho)$	0	$2\left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \rho - \frac{2}{\pi} \rho \sqrt{1-\rho^2}\right)$	$2\sqrt{1-\rho^2}$
$h(\rho)$	1	ρ	ρ^2
Spaltstoff-Moderator-Zone			
ξ_K	$-\mu_K \operatorname{tg} \mu_K R_0$	$-\mu_K \frac{J_1(\mu_K R_0)}{J_0(\mu_K R_0)}$	$\mu_K c_f \mu_K R_0 - \frac{1}{R_0}$
η_K	$\nu_K \operatorname{tg} \nu_K R_0$	$\nu_K \frac{I_1(\nu_K R_0)}{I_0(\nu_K R_0)}$	$\nu_K c_f h \nu_K R_0 - \frac{1}{R_0}$

4. Entartung der Reflektor-Innenzone zu einem Spalt

Vollzieht man in dem Matrizenprodukt $M_M(R_1)M_M^{-1}(R_0)$ den Grenzübergang für verschwindende Reflektordichte und beachtet dabei, daß die reziproken Brems- und Diffusionsflächen μ_M^2 und ν_M^2 dem Quadrat der Dichte direkt proportional, die Diffusionskonstanten D_{SM} und D_{tM} hingegen der Dichte umgekehrt proportional sind, so findet man aus (3.20) und (3.21) mit den Angaben aus Tab. 3.1 für das obengenannte Matrizenprodukt

$$(4.1) \quad M(R_0, R_1) = M_M(R_1) \cdot M_M^{-1}(R_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h(\rho) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h(\rho) \end{pmatrix}.$$

Die Bedeutung der Matrix (4.1) liegt auf der Hand. Wegen (3.14) und (3.15) hat man

$$(4.2) \quad \psi_R(R_1) = \psi_M(R_1) = M_M(R_1)M_M^{-1}(R_0)\psi_K(R_0) = M(R_0, R_1)\psi_M(R_0),$$

d.h. die Matrix $M(R_0, R_1)$ vermittelt den Übergang von der Spalt-Innen- zur Spalt-Außenfläche in bezug auf die Fluß- und Nettostromdichten. Mit Ausnahme der unendlich ausgedehnten Platte, für die (4.1) wegen $h(\rho) = 1$ (vgl. Tab. 3.1) zur Einheitsmatrix entartet und ein Spalt zwischen Kern und Reflektor somit keinerlei Änderungen der kritischen Kernabmessungen bewirkt, werden sowohl beim Zylinder- als auch Kugelproblem nur die Nettostromdichten im umgekehrten Verhältnis der Spaltradien bzw. Spaltradien-Quadrate, nicht jedoch die Flußdichten geändert.

Der durch (4.1) und (4.2) vermittelte Sachverhalt ist zwar mathematisch einwandfrei, nicht aber physikalisch korrekt, weil im Spalt praktisch überhaupt keine Streuprozesse stattfinden und wegen der im Vergleich zu den Spaltabmessungen über alle Grenzen wachsenden mittleren freien Neutronen-Weglänge die Diffusionsnäherung eigentlich gar nicht angewandt werden darf (vgl. (6), 473).

Die Anwendbarkeit der Methode sollte daher nur auf sehr enge Spalte beschränkt bleiben, doch ergeben sich daraus keine wesentlichen Vorteile gegenüber Anordnungen mit unmittelbar an die Spaltstoff-Moderator-Zone angrenzendem Reflektor, da im Grenzfall $\rho = R_0/R_1 = 1$ die Matrix (4.1) in die Einheitsmatrix übergeht.

Es liegt deshalb nahe, beim Zylinder- und Kugelproblem in Anlehnung an (7) über eine Erweiterung der Randbedingungen an den Spaltbegrenzungen die Matrix (4.1) durch Korrekturglieder so abzuändern, daß den gegenseitigen richtungsabhängigen Zustrahlungen der Reflektor-Innenfläche unter Beachtung der durch die Spaltstoff-Moderator-Zone hervorgerufenen Schattenwirkung Rechnung getragen wird. Die hierfür erforderlichen Überlegungen bewegen sich für das Zylinder- und Kugelproblem weitgehend parallel, sollen hier aber nur am Beispiel Kugelgeometrie entwickelt werden. Auf die Übertragung des Ergebnisses mit den anzubringenden Modifikationen im Falle des eindimensionalen Kreiszyllinders mit koaxialem Spalt und Reflektor wird abschließend hingewiesen.

Beschränkt man sich bei der Kugelfunktionsdarstellung (vgl. (1), 224) der richtungsabhängigen Flußdichte

$$(4.3) \quad F(\vec{r}, \vec{Q}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l F_{lm}(\vec{r}) P_{lm}(\vec{Q})$$

mit dem durch das Azimut φ und den Polarwinkel ϑ charakterisierten Einheitsvektor $\vec{Q}$ in Bewegungsrichtung und

$$(4.4) \quad \begin{aligned} P_{lm}(\vec{Q}) &= e^{im\varphi} \frac{(-\sin\vartheta)^m}{l! 2^l} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \frac{d^{l+m}(\cos^2\vartheta - 1)^l}{(d\cos\vartheta)^{l+m}} \\ &= e^{im\varphi} \frac{(\sin\vartheta)^{-m}}{l! 2^l} \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \frac{d^{l-m}(\cos^2\vartheta - 1)^l}{(d\cos\vartheta)^{l-m}} \end{aligned}$$

auf die Glieder mit $l = 0$ und $l = 1$, so erhält man mit der Gesamtflußdichte $\phi(\vec{r})$ und der Nettostromdichte $\vec{J}(\vec{r})$ (vgl. (1), 226)

$$(4.5) \quad F(\vec{r}, \vec{Q}) = \frac{\phi(\vec{r})}{4\pi} + \frac{3}{4\pi} \vec{Q} \cdot \vec{J}(\vec{r}) + \dots$$

Für das Folgende ist es belanglos, ob es sich um die schnelle oder thermische Fluß- und Stromdichte handelt; demzufolge werden, solange Mißverständnisse ausgeschlossen sind, die die Neutronengruppe kennzeichnenden Indizes weggelassen.

Zur Präzisierung der Randbedingungen für den Kugelschalenspalt ist es notwendig, die Nettostromdichten $\vec{J}_K$, $\vec{J}_R$ in ihre nach außen und innen gerichteten Komponenten J_K^+ , J_K^- und J_R^+ , J_R^- zu zerlegen. Bezeichnet man ferner mit χ den Bruchteil derjenigen Neutronen, die den Schalenspalt nach innen durchqueren und die Kernzone verfehlen, dann hat man in Anlehnung an (7) für den Kugelschalenspalt

$$(4.6) \quad R_1^2 J_R^+(R_1) = R_0^2 J_K^+(R_0) + \chi R_1^2 J_R^-(R_1),$$

$$(4.7) \quad R_0^2 J_K^-(R_0) = (1-\chi) R_1^2 J_R^-(R_1).$$

Die nach außen gerichtete Komponente der Stromdichte in einem Punkt P_1 der Innenfläche des Reflektors bzw. der Außenfläche des Schalenspalts ergibt sich wegen (4.5) zu

$$(4.8) \quad J_R^+(R_1) = - \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} F_R(R_1, \vec{Q}) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{\phi_R(R_1)}{4} + \frac{J_R(R_1)}{2},$$

wobei ϑ den Winkel bedeutet, den der Einheitsvektor $\vec{Q}$ in P_1 mit der nach dem Kugelmittelpunkt zielenden Flächennormalen der Grenzfläche Schalenspalt/Reflektor bildet (Abb. 3).

Für die nach innen gerichtete Stromdichte findet man in gleicher Weise

$$(4.9) \quad J_R^-(R_1) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} F_R(R_1, \vec{Q}) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{\phi_R(R_1)}{4} - \frac{J_R(R_1)}{2}.$$

Addition von (4.8) und (4.9) liefert

$$(4.10) \quad \frac{\phi_R(R_1)}{2} = J_R^+(R_1) + J_R^-(R_1).$$

Analog zu (4.8) und (4.9) ergibt sich für einen Punkt P_0 auf der Oberfläche der Kernzone bzw. Innenfläche des Schalenspalts

$$(4.11) \quad J_K^+(R_0) = \frac{\phi_K(R_0)}{4} + \frac{J_K(R_0)}{2}$$

und

$$(4.12) \quad J_K^-(R_0) = \frac{\phi_K(R_0)}{4} - \frac{J_K(R_0)}{2}.$$

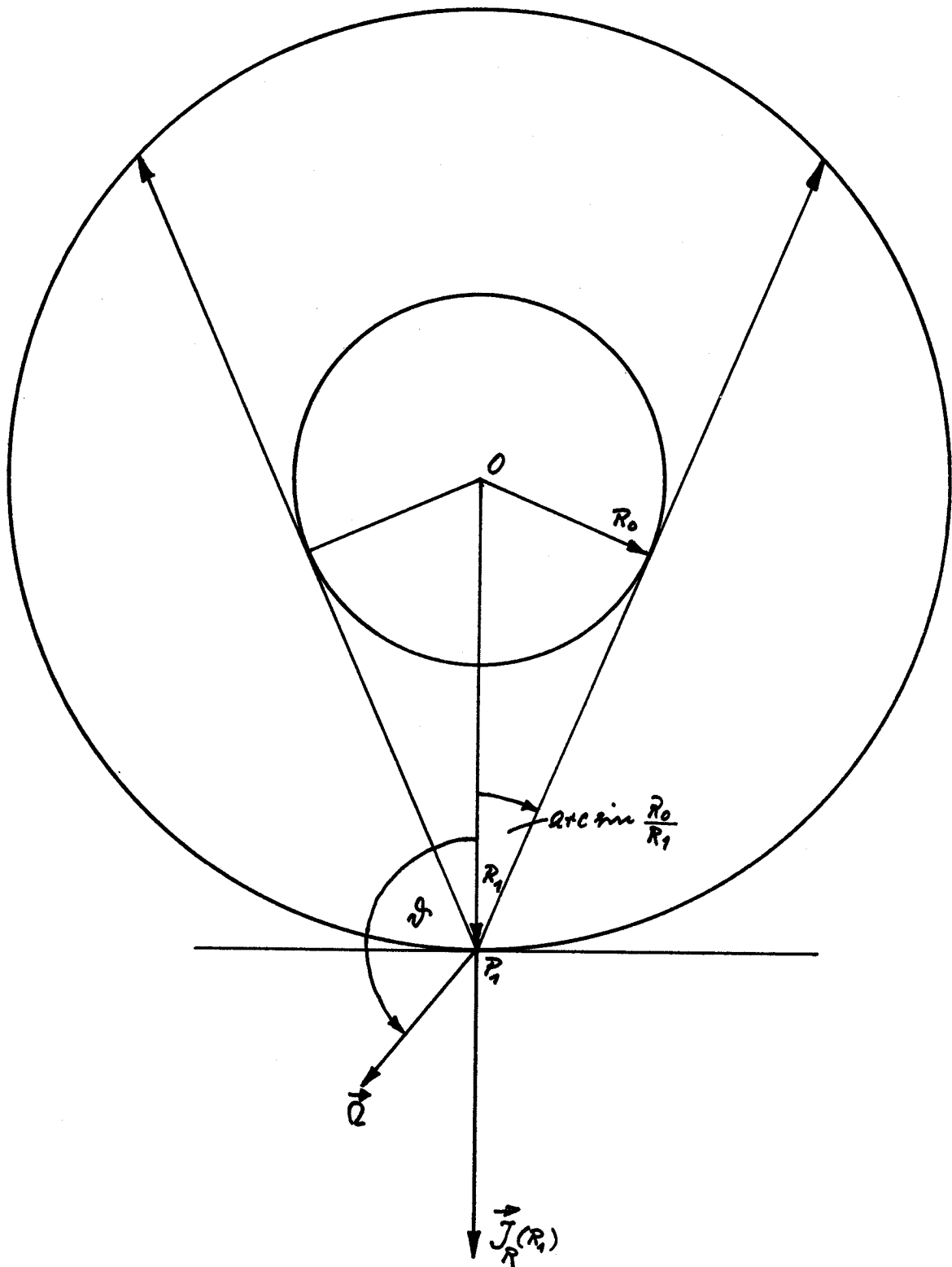


Abb. 3: Zur Präzisierung der Randbedingungen für den Kugelschalenspalt

Aus (4.6) und (4.7) folgt zunächst in Verbindung mit (4.8), (4.9) und (4.11), (4.12) der durch die Matrix (4.1) in bezug auf das Verhalten der Nettostromdichten im Schalenspalt ausgewiesene Sachverhalt

$$(4.13) \quad J_R(R_1) = h(\rho) J_K(R_0) = \frac{R_0^2}{R_1^2} J_K(R_0),$$

demzufolge sich die Nettostromdichten umgekehrt proportional zu den Radien-Quadraten verhalten.

Nach Einsetzen von (4.11) in (4.6) und (4.12) in (4.7) und einfachen algebraischen Umformungen lassen sich die Stromdichten $J_R^+(R_1)$ und $J_R^-(R_1)$ an der Reflektor-Innenfläche durch die Flußdichte $\phi_K(R_0)$ und die Nettostromdichte $J_K(R_0)$ an der Kernoberfläche ausdrücken; man findet

$$(4.14) \quad J_R^+(R_1) = \frac{R_0^2}{2R_1^2} \frac{1}{1-\chi} \left[\frac{\phi_K(R_0)}{2} + (1-2\chi) J_K(R_0) \right],$$

$$(4.15) \quad J_R^-(R_1) = \frac{R_0^2}{2R_1^2} \frac{1}{1-\chi} \left[\frac{\phi_K(R_0)}{2} - J_K(R_0) \right]$$

und damit wegen (4.10)

$$(4.16) \quad \phi_R(R_1) = \frac{R_0^2}{R_1^2} \frac{1}{1-\chi} \left[\phi_K(R_0) - 2\chi J_K(R_0) \right].$$

In bezug auf die Berechnung von χ ist zu beachten, daß alle in den Winkelbereich

$$(4.17) \quad \arcsin \frac{R_0}{R_1} < \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$

gestreuten Neutronen die Kernzone verfehlen; mithin wird aufgrund der Definition von χ und unter Beachtung von (4.5) und (4.9)

$$(4.18) \quad \chi = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{\arcsin R_0/R_1}^{\pi/2} F_R(R_1, \vec{Q}) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} F_R(R_1, \vec{Q}) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi} = \frac{1 - \rho^2 - \frac{2J_R(R_1)}{\phi_R(R_1)} f(\rho)}{1 - \frac{2J_R(R_1)}{\phi_R(R_1)}},$$

mit

$$(4.19) \quad \rho = \frac{R_0}{R_1} \quad \text{und} \quad (4.20) \quad f(\rho) = \sqrt{(1-\rho^2)^3}.$$

Mit den Abkürzungen

$$(4.21) \quad \gamma_K = \frac{2J_K(R_0)}{\phi_K(R_0)} \quad \text{und} \quad (4.22) \quad \gamma_R = \frac{2J_R(R_1)}{\phi_R(R_1)}$$

folgt weiter aus (4.16) mit (4.13) und (4.18) bis (4.20)

$$(4.23) \quad \gamma_R = \frac{(1-\chi)\gamma_K}{1-\chi\gamma_K},$$

$$(4.24) \quad \chi = \frac{1-\rho^2-\gamma_R f(\rho)}{1-\gamma_R} = \frac{1-\rho^2-\gamma_K f(\rho)}{1-\gamma_K[\rho^2+f(\rho)]}$$

und damit letztlich

$$(4.25) \quad \frac{\phi_R(R_1)}{\phi_K(R_0)} = \frac{\rho^2(1-\chi\gamma_K)}{1-\chi} = 1-\gamma_K f(\rho).$$

Diese Beziehung (4.25) gilt, da bei ihrer Herleitung keinerlei Einschränkungen bezüglich der Neutronengruppe gemacht wurden, sowohl für die schnelle als auch die thermische Gruppe; somit folgt aus (4.25) mit (4.21) und

$$(4.26) \quad g(\rho) = 2f(\rho)$$

durch Übergang zu den doppelt-indizierten Größen

$$(4.27) \quad \phi_{sR}(R_1) = \phi_{sK}(R_0) - g(\rho) J_{sK}(R_0),$$

$$(4.28) \quad \phi_{tR}(R_1) = \phi_{tK}(R_0) - g(\rho) J_{tK}(R_0).$$

Durch diese beiden Gleichungen (4.27) und (4.28) sind auch die an der Matrix (4.1) (erste Zeile, dritte Spalte und zweite Zeile, vierte Spalte) anzubringenden Korrekturglieder bestimmt, die sich beide in einfacher Weise zu $g(\rho)$ nach (4.26) ergeben. Man hat also statt (4.1) und (4.2)

$$(4.29) \quad \psi_R(R_1) = \psi_M(R_1) = M^*(R_0, R_1) \psi_K(R_0),$$

mit

$$(4.30) \quad M^*(R_0, R_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & g(p) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & g(p) \\ 0 & 0 & h(p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h(p) \end{pmatrix}.$$

Die verhältnismäßig einfach gebauten Matrizen (3.23), (3.32) und (4.30) erlauben auch eine übersichtliche Darstellung des Matrizenproduktes und der zugehörigen kritischen Gleichung (3.35)

$$(4.31) \quad |M_R^{*(i)} M^*(R_0, R_1) M_K^*(R_0)| = 0.$$

Die Ausrechnung von (4.31) ergibt

$$(4.32) \quad \xi_K = \frac{\sigma_2 \zeta_R^{*(i)} \omega_1 + \sigma_1 \xi_R^{*(i)} \omega_2 + \zeta_K \omega_3 + S_1}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + S_2},$$

mit den Korrekturgliedern

$$(4.33) \quad S_1 = g(p) (S_{1K} \partial_{AR} \sigma_2 - S_{2K} \partial_{AR} \sigma_1) \zeta_K \xi_R^{*(i)} \zeta_R^{*(i)},$$

$$(4.34) \quad S_2 = -g(p) [\partial_{AR} \xi_R^{*(i)} (\omega_2 - S_{1K} \zeta_K) + \partial_{AR} \zeta_R^{*(i)} (\omega_1 + S_{2K} \zeta_K) + g(p) \partial_{AR} \partial_{AR} \zeta_K \xi_R^{*(i)} \zeta_R^{*(i)} (S_{1K} - S_{2K})]$$

und

$$(4.35) \quad \xi_R^{*(i)} = \frac{\xi_R^{(i)}}{h(p)}, \quad (4.36) \quad \zeta_R^{*(i)} = \frac{\zeta_R^{(i)}}{h(p)},$$

$$(4.37) \quad \sigma_1 = \frac{\partial_{AR}}{\partial_{AK}}, \quad (4.38) \quad \sigma_2 = \frac{\partial_{AR}}{\partial_{AK}},$$

$$(4.39) \quad \omega_1 = S_{1K} (\sigma_1 \xi_R^{*(i)} - \zeta_K),$$

$$(4.40) \quad \omega_2 = S_{2K} (\zeta_K - \sigma_2 \zeta_R^{*(i)}),$$

$$(4.41) \quad \omega_3 = S_R \sigma_2 (\zeta_R^{*(i)} - \xi_R^{*(i)}).$$

Der Einfluß der Korrekturglieder ξ_1 und ξ_2 ist im allgemeinen nicht zu vernachlässigen. Nur für sehr kleine Spaltweiten strebt $h(\rho)$ mit ρ nach 1 und $g(\rho)$ nach Null; damit gehen auch die Korrekturglieder ξ_1 und ξ_2 nach Null und es wird $\xi_R^{*(i)} \rightarrow \xi_R^{(i)}$ und $\zeta_R^{*(i)} \rightarrow \zeta_R^{(i)}$. Im Grenzfall $\rho = 1$ ist die Spaltweite gleich Null und der Reflektor grenzt unmittelbar an die Spaltstoff-Moderator-Zone an. Dieser Fall ist in (5), 118-120 abgehandelt; die dort angegebenen Gleichungen (5.43) und (5.44) sind mit obigen Gleichungen (4.32) bis (4.41) für diesen Grenzfall identisch.

Die obigen, am Beispiel Kugelgeometrie entwickelten Gleichungen (4.29) bis (4.41) gelten im übrigen uneingeschränkt auch für den unendlichen Kreiszylinder mit koaxialem Spalt und Reflektor, wenn die in Tab. 3.1 für das Zylinderproblem angegebenen Funktionen eingesetzt werden.

5. Zweidimensionales Zylinderproblem in r,z-Geometrie
 - zylindrischer Kern mit Endreflektoren, Radialreflektor,
unmittelbar und allseitig angrenzendem Reflektor -

Eine exakte Lösung des zweidimensionalen Zylinderproblems im Rahmen des Zweigruppen-Modells ist durch Produktansatz zur Variablen-Trennung für folgende Spezialfälle möglich:

- a) Die zylindrische Spaltstoff-Moderator-Zone endlicher Höhe wird nur an den beiden ebenen Stirnflächen reflektiert; ein radialer Reflektor ist nicht vorhanden (Endreflektor).
- b) Die zylindrische Spaltstoff-Moderator-Zone endlicher Höhe wird nur von einem oder mehreren radialen Reflektoren umgeben; die beiden ebenen Stirnflächen bleiben frei (Radialreflektor).

Die Lösung dieser beiden Spezialfälle eröffnet zugleich einen gangbaren Weg zur Behandlung des allseitig reflektierten zylindrischen Kerns (8).

Mit den Flußwölbungseigenwerten μ_K^2 , ν_K^2 für den Kern und μ_R^2 , ν_R^2 für einen angrenzenden Reflektor ergeben sich über einen Produktansatz für die Lösungsfunktionen X_K , Y_K , X_R , Y_R zur Trennung in einen radialen und einen achsialen Funktionsanteil aus Gleichung (2.5) mit dem Laplace-Operator

$$(5.1) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

in r,z-Geometrie die folgenden Beziehungen für die radialen und achsialen Flußwölbungsanteile

$$(5.2) \quad -\mu_{rk}^2 - \mu_{zk}^2 + \mu_k^2 = 0,$$

$$(5.3) \quad \pm \nu_{rk}^2 \mp \nu_{zk}^2 - \nu_k^2 = 0,$$

$$(5.4) \quad \pm \mu_{rR}^2 \mp \mu_{zR}^2 - \mu_R^2 = 0,$$

$$(5.5) \quad \pm \nu_{rR}^2 \mp \nu_{zR}^2 - \nu_R^2 = 0.$$

In den obigen Gleichungen (5.3) bis (5.5) charakterisieren negative Radialanteile und positive Achsialanteile das endreflektierte Problem ohne Radialreflektor, positive Radialanteile und negative Achsialanteile hingegen den ausschließlich radialreflektierten Fall.

Zur Lösung des allseitig reflektierten Zylinders kann so vorgegangen werden, daß bei vorgegebenen Reflektorabmessungen und vorgegebener Kernzylinder-Höhe Z zunächst aus der kritischen Gleichung (4.32) für den Endreflektor mit den Korrekturgliedern $\xi_1 = \xi_2 = 0$ und den in Tab. 3.1 für das Platten-Problem angegebenen Funktionen iterativ die achsiale Flußwölbung μ_{zK}^2 bestimmt wird. Hierbei werden die $\mu_K, \nu_K, \mu_R, \nu_R$ dieser Funktionen in Tab. 3.1 durch die achsialen Anteile $\mu_{zK}, \nu_{zK}, \mu_{zR}, \nu_{zR}$ ersetzt. Aufgrund der obigen Erklärung hat man für den Endreflektor mit dem noch unbekannten extrapolierten Kernzylinder-Radius R^*

$$(5.6) \quad \mu_{rK} = \nu_{rK} = \mu_{rR} = \nu_{rR} = \frac{2,4048}{R^*}$$

und damit wegen (5.2) bis (5.5)

$$(5.7) \quad \mu_{rK}^2 = \mu_K^2 - \mu_{zK}^2,$$

$$(5.8) \quad \nu_{zK}^2 = \nu_K^2 + \mu_{rK}^2,$$

$$(5.9) \quad \mu_{zR}^2 = \mu_R^2 + \mu_{rK}^2,$$

$$(5.10) \quad \nu_{zR}^2 = \nu_R^2 + \mu_{rK}^2.$$

Die nach μ_{zK} aufgelöste kritische Gleichung (4.32)

$$(5.11) \quad \lg \left[\mu_{zK}^{(i+1)} \frac{Z}{2} \right] = - \frac{\sigma_2 \zeta_R \omega_1 + \sigma_1 \xi_R \omega_2 + \zeta_K \omega_3}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \mu_{zK}^{(i)}} = G_P(\mu_{zK}^{(i)} Z)$$

sei im Intervall $0 \leq \mu_{zK} \leq \frac{\pi}{Z}$ erfüllt durch

$$(5.12) \quad \mu_{zK}^{(i)} = \mu_{zK}^{(i+1)} = \mu_{zK}^* = \frac{\pi}{Z^*},$$

wobei die durch (5.12) definierte extrapolierte Kernzylinderhöhe Z^* die den beiden Endreflektoren entsprechende Reflektorerparnis mit einschließt. Mit diesem Z^* und dem zugehörigen μ_{zK}^* ist über (5.6) mit (5.7) auch der extrapolierte Kernzylinder-Radius R^* gegeben. Von Interesse ist aber nicht dieser extrapolierte Radius R^* , sondern vielmehr der den vorgegebenen radialen Reflektorabmessungen entsprechende kritische Kernzylinder-Radius R_0 .

In einem zweiten Rechengang wird daher mit dem bereits ermittelten μ_{zK}^* die kritische Gleichung (4.32) für den Radialreflektor, wiederum mit den Korrekturgliedern $\xi_1 = \xi_2 = 0$, jedoch den in Tab. 3.1 für das Zylinder-Problem angegebenen Funktionen nach R_0 iterativ gelöst. Dabei sind die μ_K , ν_K , μ_R , ν_R in Tab. 3.1 durch die radialen Anteile μ_{rK} , ν_{rK} , μ_{rR} , ν_{rR} zu ersetzen. Mit

$$(5.13) \quad \mu_{zK} = \nu_{zK} = \mu_{zR} = \nu_{zR} = \mu_{zK}^* = \frac{\pi}{Z^*}$$

folgt dann aus (5.2) bis (5.5) für den Radialreflektor

$$(5.14) \quad \mu_{rK}^2 = \mu_K^2 - \mu_{zK}^{*2},$$

$$(5.15) \quad \nu_{rK}^2 = \nu_K^2 + \mu_{zK}^{*2},$$

$$(5.16) \quad \mu_{rR}^2 = \mu_R^2 + \mu_{zK}^{*2},$$

$$(5.17) \quad \nu_{rR}^2 = \nu_R^2 + \mu_{zK}^{*2}$$

und damit aus der kritischen Gleichung (4.32)

$$(5.18) \quad \frac{J_1(\mu_{rK} R_0(i+1))}{J_0(\mu_{rK} R_0(i+1))} = - \frac{\sigma_2 \epsilon_R \omega_1 + \sigma_1 \epsilon_R \omega_2 + \epsilon_K \omega_3}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \mu_{rK}} = G_Z(\mu_{rK} R_0(i))$$

im Intervall $0 \leq R_0 \leq \frac{2,4048}{\mu_{rK}}$

der kritische Radius

$$(5.19) \quad R_0(i) = R_0(i+1) = R_0$$

für den allseitig reflektierten Zylinderkern der Höhe Z .

6. Dreidimensionales Problem

- quaderförmiger Kern mit unmittelbar und allseitig angrenzendem Reflektor -

Analog dem zweidimensionalen Zylinderproblem läßt sich auch der Quader durch Rückführung auf das eindimensionale Problem behandeln. Vorgegeben sind wieder die Reflektorabmessungen allseitig und die Kernabmessungen H_x, H_y in zwei Dimensionen; gesucht ist die kritische Abmessung H_z für unmittelbar angrenzenden Reflektor (Abb. 4).

Mit einem Produktansatz für die Lösungsfunktionen X_K, Y_K, X_R, Y_R zur Trennung in jeweils drei achsiale Funktionsanteile erhält man mit dem Laplace-Operator

$$(6.1) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten und den Flußwölbungseigenwerten $\mu_K^2, -\nu_K^2, -\mu_R^2, -\nu_R^2$ die den Gleichungen (5.2) bis (5.5) entsprechenden Beziehungen

$$(6.2) \quad -\mu_{xK}^2 - \mu_{yK}^2 - \mu_{zK}^2 + \mu_K^2 = 0,$$

$$(6.3) \quad \pm \nu_{xK}^2 \mp \nu_{yK}^2 \mp \nu_{zK}^2 - \nu_K^2 = 0,$$

$$(6.4) \quad \pm \mu_{xR}^2 \mp \mu_{yR}^2 \mp \mu_{zR}^2 - \mu_R^2 = 0,$$

$$(6.5) \quad \pm \nu_{xR}^2 \mp \nu_{yR}^2 \mp \nu_{zR}^2 - \nu_R^2 = 0.$$

In den Gleichungen (6.3) bis (6.5) kennzeichnen positive Vorzeichen der Flußwölbungsanteile reflektierte und negative Vorzeichen reflektorlose Richtungen.

Den ersten Schritt vollzieht man wie beim Zylinderrproblem, indem man bei vorgegebenem H_x das zugehörige μ_{xK} aus Gleichung (4.32) berechnet und sich den fehlenden Reflektor in y- und z-Richtung durch die Reflektorersparnis ersetzt denkt. Mit den extrapolierten Kernabmessungen H_y^*, H_z^* und

$$(6.6) \quad \mu_{yK} = \nu_{yK} = \mu_{yR} = \nu_{yR} = \frac{\pi}{H_y^*},$$

$$(6.7) \quad \mu_{zK} = \nu_{zK} = \mu_{zR} = \nu_{zR} = \frac{\pi}{H_z^*}$$

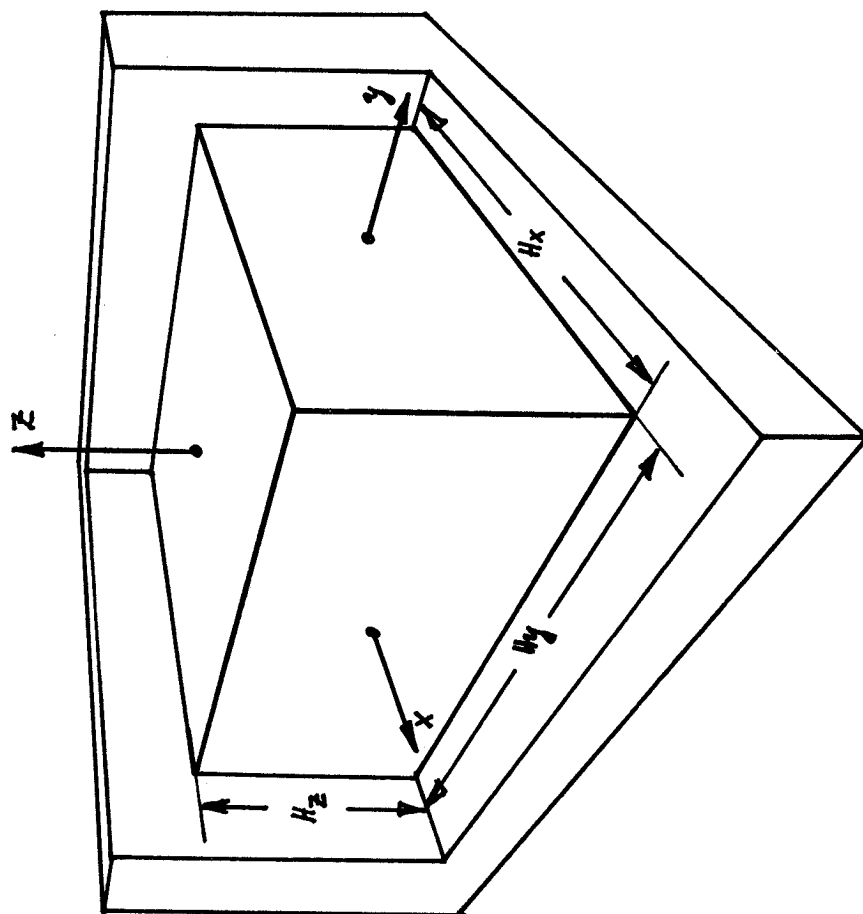


Abb. 4: Zur Behandlung des allseitig reflektierten Quaders

folgt dann aus (6.2) bis (6.5) für diesen Fall

$$(6.8) \quad \mu_{yK}^2 + \mu_{zK}^2 = \mu_K^2 - \mu_{xK}^2,$$

$$(6.9) \quad \nu_{xK}^2 = \nu_K^2 + \mu_K^2 - \mu_{xK}^2,$$

$$(6.10) \quad \mu_{xR}^2 = \mu_R^2 + \mu_K^2 - \mu_{xK}^2,$$

$$(6.11) \quad \nu_{xR}^2 = \nu_R^2 + \mu_K^2 - \mu_{xK}^2.$$

Die nach μ_{xK} aufgelöste kritische Gleichung (4.32)

$$(6.12) \quad \lg \left[\mu_{xK}^{(i+1)} \frac{H_x}{2} \right] = - \frac{\sigma_2 \zeta_R \omega_1 + \sigma_1 \xi_R \omega_2 + \zeta_K \omega_3}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \mu_{xK}^{(i)}} = G_P [\mu_{xK}^{(i)} H_x]$$

liefert durch Iteration die gesuchte Lösung

$$(6.13) \quad \mu_{xK}^{(i)} = \mu_{xK}^{(i+1)} = \mu_{xK}^* = \frac{\tilde{\pi}}{H_x^*}$$

im Intervall $0 \leq \mu_{xK} \leq \frac{\tilde{\pi}}{H_x}$.

Im zweiten Schritt ermittelt man über die vorgegebene Abmessung H_y das zugehörige μ_{yK} aus Gleichung (4.32), wobei man sich den fehlenden Reflektor in x- und z-Richtung durch die Reflektorerparnis ersetzt denkt. Man findet in gleicher Weise wie oben mit

$$(6.14) \quad \mu_{xK}^* = \nu_{xK} = \mu_{xR} = \nu_{xR} = \frac{\tilde{\pi}}{H_x^*},$$

$$(6.15) \quad \mu_{zK} = \nu_{zK} = \mu_{zR} = \nu_{zR} = \frac{\pi}{H_z^*}$$

aus (6.2) bis (6.5)

$$(6.16) \quad \mu_{xK}^{*2} + \mu_{zK}^2 = \mu_K^2 - \mu_{yK}^2,$$

$$(6.17) \quad \nu_{yK}^2 = \nu_K^2 + \mu_K^2 - \mu_{yK}^2,$$

$$(6.18) \quad \mu_{yR}^2 = \mu_R^2 + \mu_K^2 - \mu_{yK}^2,$$

$$(6.19) \quad \nu_{yR}^2 = \nu_R^2 + \mu_K^2 - \mu_{yK}^2$$

und durch einen Iterationsprozeß aus der kritischen Gleichung (4.32)

$$(6.20) \quad \lg[\mu_{yK}^{(i+1)} \frac{H_y}{2}] = - \frac{\sigma_2 \gamma_R \omega_1 + \sigma_1 \xi_R \omega_2 + \gamma_K \omega_3}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \mu_{yK}^{(i)}} = G_P[\mu_{yK}^{(i)} H_y]$$

die gewünschte Lösung

$$(6.21) \quad \mu_{yK}^{(i)} = \mu_{yK}^{(i+1)} = \mu_{yK}^* = \frac{\pi}{H_y^*}$$

im Intervall $0 \leq \mu_{yK} \leq \frac{\pi}{H_y}$.

Im dritten und letzten Schritt wird über die im ersten und zweiten Schritt ermittelten μ_{xK}^* und μ_{yK}^* die kritische Abmessung H_z der allseitig reflektierten Anordnung bestimmt. Mit den aus (6.13) und (6.21) bereits bekannten H_x^* und H_y^* und

$$(6.22) \quad \mu_{xK}^* = \nu_{xK} = \mu_{xR} = \nu_{xR} = \frac{\pi}{H_x^*},$$

$$(6.23) \quad \mu_{yK}^* = \nu_{yK} = \mu_{yR} = \nu_{yR} = \frac{\pi}{H_y^*}$$

folgt aus (6.2) bis (6.5)

$$(6.24) \quad \mu_{xK}^{*2} + \mu_{yK}^{*2} = \mu_K^2 - \mu_{zK}^{*2},$$

$$(6.25) \quad \nu_{zK}^{*2} = \nu_K^2 + \mu_K^2 - \mu_{zK}^{*2},$$

$$(6.26) \quad \mu_{zR}^{*2} = \mu_R^2 + \mu_K^2 - \mu_{zK}^{*2},$$

$$(6.27) \quad \nu_{zR}^{*2} = \nu_R^2 + \mu_K^2 - \mu_{zK}^{*2}.$$

Schließlich kann mit den nunmehr bekannten μ_{zK}^* , ν_{zK}^* , μ_{zR}^* und ν_{zR}^* die kritische Kernabmessung H_z durch einen Iterationsprozeß aus der kritischen Gleichung (4.32)

$$(6.28) \quad \lg[\mu_{zK}^* \frac{H_z^{(i+1)}}{2}] = - \frac{\sigma_2 \gamma_R \omega_1 + \sigma_1 \xi_R \omega_2 + \gamma_K \omega_3}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \mu_{zK}^*} = G_P[\mu_{zK}^* H_z^{(i)}]$$

im Intervall $0 \leq H_z \leq \frac{\pi}{\mu_{zK}^*}$ ermittelt werden, womit auch dieses Problem vollständig gelöst ist.

7. Anwendungen

7.1 Eindimensionales Zweigruppen-Modell in Kugelgeometrie

Im folgenden werden die Wirkungen von Reflektormaterialien, wie z.B. Beton, Polyäthylen, Beryllium oder Graphit auf die Spaltstoff-Umgangsmengen (Uran mit 93,2 % U-235-Anreicherung) in Verbindung mit Graphit und/oder Wasser als Moderator näher untersucht. Die Kritikalitätsbetrachtungen basieren auf den in den Abschnitten 2 bis 4 dargelegten Zweigruppen-Modellen für isolierte und gekoppelte 3-Zonen-Anordnungen in Kugelgeometrie mit zu einem Kugelschalenspalt entarteter Reflektor-Innenzone. Dieses Rechenmodell erlaubt auch durch Übergang zum Nullspalt die Behandlung des unmittelbar an die Spaltstoff-Moderator-Zone angrenzenden Reflektors.

Die gewählten Beispiele sollen verdeutlichen, daß bei der Verwendung hochanreicherten Urans in Verbindung mit Graphit und/oder Wasser oder wasserstoffhaltigen Moderatorsubstanzen, deren Wasserstoffkonzentration die des Wassers nicht übersteigt, in Normalbeton-Zellen von 50 cm Wandstärke Umgangsmengen von 200 g U-235 je Zelle toleriert werden können. Falls die Spaltstoff-Moderator-Zone außer U-235 auch noch die spaltbaren Isotope U-233 und Pu-239 enthält, ist eine Umrechnung der betreffenden Mengen in ein U-235-Äquivalent über einen U-235/U-233- und U-235/Pu-239-Äquivalenzfaktor 2 möglich.

Beschränkungen bezüglich der Anzahl der Zellen oder einzuhaltender Mindestabstände der Umgangsmengen von den Betonwänden sind hierbei nicht erforderlich. Normalbeton-Trennwände von 50 cm Stärke sind in der Regel zur Entkopplung beliebig vieler Einheiten ausreichend.

Mit der genannten Umgangsmenge sind außerdem sowohl Inhomogenitäten im Spaltstoff-Moderator-Bereich als auch Entmischungen des Spaltstoffs vom Graphit noch zu vertreten. Auch die Hinzunahme von Polyäthylen in beliebiger Menge als Reflektor ist unproblematisch. Jedenfalls ist unter den genannten Bedingungen nicht damit zu rechnen, daß der Multiplikationsfaktor einer beliebig ausgedehnten Zellenanordnung den Wert $k = 0,8$ wesentlich übersteigt.

Eine Limitierung des Multiplikationsfaktors auf Werte um 0,8 ist zwar nicht zwingend erforderlich - auch ein Wert von $k = 0,9$ wäre z.B. bei einer definierten Lageranordnung unter optimalen Moderations- und Reflexionsbedingungen zu vertreten (9) - erweist sich aber im Hinblick auf mögliche Fehlerquellen

beim Umgang mit Spaltstoff unter flexiblen Arbeitsbedingungen als zweckmäßig und sollte demzufolge als Richtschnur dienen. So kann z.B. Die Hinzunahme eines Beryllium-Reflektors schon bei einer Umgangsmenge von 200 g U-235 zu einer beachtlichen Reaktivitätszunahme führen, es sei denn, daß angemessene Reflektor-Ausschlußzonen und/oder Reflektor-Mengenbeschränkungen eingehalten werden.

In Tab. 7.1.1 sind für den Multiplikationsfaktor $k = 0,8$ die U-235-Mengen homogener U(93,2)-Wasser-Gemische mit unmittelbar angrenzendem Normalbeton-Reflektor, isoliert und in Zellenanordnung, in Abhängigkeit von der U(93,2)-Konzentration bzw. vom Moderator-Spaltstoff-Verhältnis H/U-235 (Moderationsgrad) und von der Reflektorwandstärke angegeben. Es handelt sich hier einmal um den Normalbeton ol-a der Dichte $2,33 \text{ g/cm}^3$ mit sehr geringem Wassergehalt und dementsprechend schlechter Abschirmwirkung, zum anderen um den besser abschirmenden aber auch stärker reflektierenden Normalbeton o2-a der Dichte $2,30 \text{ g/cm}^3$. Zusammensetzung und nukleare Gruppendaten dieser Betonsorten sind aus (10), 660 und 662, Tab. 8-16 und 8-17 zu entnehmen, letztere auch dem Anhang, Tab. 8.3, der im übrigen auch die nuklearen Daten aller anderen in die Untersuchung einbezogenen Materialien der Spaltstoff-Moderator- und der Reflektor-Zone enthält.

Tab. 7.1.2 vermittelt für den Richtwert $k = 0,8$ die U-235-Mengen homogener U(93,2)-Wasser-Gemische mit Normalbeton-Reflektor unter Einhaltung einer Reflektor-Ausschlußzone von 55 cm Durchmesser. Die Spaltstoffmengen fallen, wie zu erwarten, wesentlich größer aus als die für den Fall des unmittelbar angrenzenden Reflektors; aber auch die ursprünglichen Unterschiede zwischen isolierter Masse und Zellenmasse für den Beton ol-a wie auch die unterschiedlichen Wirkungen der Betonsorten auf die entsprechenden Massen sind merklich ausgeglichen.

In Tab. 7.1.3 sind für den Multiplikationsfaktor $k = 0,8$ die U-235-Mengen homogener U(93,2)-Wasser-Gemische mit unmittelbar angrenzendem Polyäthylen- bzw. Beryllium-Reflektor in Abhängigkeit vom Moderationsgrad H/U-235 und von der Reflektordicke angegeben.

Wie man dieser Tab. 7.1.3 entnimmt, hat ein Polyäthylen-Reflektor von 10 cm Dicke fast die gleiche Wirkung auf die Spaltstoffmenge, wie ein unendlich dicker Reflektor gleichen Materials. Man erkennt ferner, daß die Spaltstoffmenge mit Polyäthylen-Reflektor im Minimum mit der minimalen Zellenmasse für eine Normalbeton-Zelle von 50 cm Wandstärke (ol-a) (vgl. Tab. 7.1.1) praktisch identisch ist.

Die Reflektorwirkung von Beryllium hingegen erreicht erst bei etwa 50 cm Reflektordicke Sättigung, reduziert aber die U-235-Menge in starkem Maße auf etwa 110 g.

Ähnlich wie mit Beton lassen sich auch mit Polyäthylen bzw. Beryllium als Reflektor bei passend gewählter Reflektor-Ausschlußzone beachtliche Erhöhungen der Spaltstoff-Umgangsmenge erzielen. Die Verhältnisse sind für die genannten Reflektoren mit Ausschlußzonen von 55 cm Durchmesser aus Tab. 7.1.4 ersichtlich. Bemerkenswert ist auch hier die Tatsache, daß selbst mit beliebig viel Reflektor-Beryllium bei Einhaltung dieses Ausschlußzonen-Durchmessers die U-235-Umgangsmenge auf mehr als 300 g angehoben werden kann.

Für den Fall, daß der Spaltstoff homogen an trockenen Moderator-Graphit gebunden ist, bedarf es keiner zusätzlichen Maßnahmen zur Reduzierung der Reflektorwirkung; die U-235-Mengen für $k = 0,8$ liegen sowohl für Normalbeton- als auch Polyäthylen-Reflektoren oberhalb 1300 g und für Beryllium-Reflektoren beliebiger Menge bei rund 350 g (vgl. Tab. 7.1.5).

Aus Sicherheitsgründen muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß die soeben für homogene Spaltstoff-Graphit-Systeme dargelegten Verhältnisse nicht notwendig auch für Systeme mit starken Spaltstoff-Inhomogenitäten oder bei Entmischungen des Spaltstoffs vom Moderator-Graphit zutreffen müssen, weil dann möglicherweise der Graphit als Reflektor wirkt und insbesondere bei an Wasser oder wasserstoffhaltige Substanzen gebundenem Spaltstoff einen beträchtlichen Reaktivitätszuwachs bewirken kann, wodurch die Effektivität einer Ausschlußzone für Beryllium womöglich in Frage gestellt wird.

Der Tab. 7.1.6 ist zu entnehmen, wie sich die U-235-Menge einer homogenen U(93,2)-Wasser-Mischung mit unmittelbar angrenzendem Graphit-Reflektor in Abhängigkeit von der Uran-Konzentration bzw. vom Moderationsgrad und von der Graphit-Reflektordicke für k im Bereich von 0,8 bis 0,83 ändert. Diese Tabelle zeigt deutlich, daß schon mit 200 g U-235 der Multiplikationsfaktor k , wenn auch geringfügig, auf Werte von 0,82 bis 0,83 angehoben wird und daß demzufolge wegen der stärkeren Reflektorwirkung von Beryllium der Wert von k noch weiter ansteigen muß, wenn der Teil des Graphit-Reflektors außerhalb der Zone mit 55 cm Durchmesser durch Beryllium ersetzt wird. Andererseits wird hierdurch aber auch deutlich, daß die Ausschlußzone für Beryllium an Wirksamkeit verliert, wenn Teile derselben von Graphit eingenommen werden.

In Tab. 7.1.7 sind die Verhältnisse auch noch für eine U(93,2)-Wasser-Mischung mit unmittelbar angrenzendem Beryllium-Reflektor dargestellt. Man ersieht hieraus, daß ohne Reflektor-Ausschlußzone mit 200 g U-235 bereits ein Multiplikationsfaktor von etwa 0,95 zu erwarten ist.

Um sicherzustellen, daß bei der vorgegebenen Dimensionierung der Ausschlußzone auch mit Beryllium und Graphit der aus Tab. 7.1.6 ersichtliche Erwartungswert für k von 0,82 bis 0,83 für den Graphit-Vollreflektor bei 200 g U-235-Ungangsmenge nicht überschritten wird, ist es naheliegend, anhand eines sorgfältig durchzuführenden Äquivalenzvergleichs für die Reflektoren Graphit und Beryllium sowie Betonzelle und Beryllium eine Beschränkung der Berylliummenge zu erwägen. Dieser Äquivalenzvergleich kann mittels der Tabellen 7.1.8 und 7.1.9 leicht durchgeführt werden und führt unter pessimistischen Annahmen auf eine Mengengrenzung von rund 270 kg für Beryllium.

Zusammenfassend kann somit folgendes festgestellt werden:

In Normalbeton-Zellen von 50 cm Wandstärke ist ein sicherer Umgang mit 200 g U-235-Äquivalent je Zelle wie folgt möglich:

1. Der Spaltstoff darf an Wasser oder wasserstoffhaltige Substanzen, mit einer Wasserstoffkonzentration nicht größer als die von Wasser, und/oder Graphit gebunden sein.
2. Der Anteil an Wasser oder wasserstoffhaltigen Substanzen oder an Graphit in der Spaltstoff-Moderator-Zone unterliegt keinen Beschränkungen.
3. Polyäthylen und Graphit sind in beliebiger Menge als Reflektoren zugelassen.
4. Beryllium ist in der Spaltstoff-Moderator-Zone nicht, als Reflektor jedoch unter Einhaltung einer Ausschlußzone von 55 cm Durchmesser zugelassen, und zwar
 - in beliebiger Menge, wenn Spaltstoff und Graphit in homogener Mischung vorliegen,
 - in Mengen bis zu 270 kg, wenn Spaltstoff-Inhomogenitäten oder Entmischungen des Spaltstoffs vom Moderator-Graphit nicht auszuschließen sind.

Die zunächst willkürlich erscheinende Festlegung des Ausschlußzonen-Durchmessers auf 55 cm erfolgt speziell im Hinblick auf die Handhabung kernbrennstoffhaltiger Abfälle in hierfür vorgesehenen 200 l-Fässern. Der genannte Durchmesser entspricht etwa dem Innendurchmesser dieser Fässer.

Tab. 7.1.1: U-235-Mengen ($k=0,8$) homogener U(93,2)-Wasser-Gemische mit unmittelbar angrenzendem Normalbeton-Reflektor, isoliert und in Zellenanordnung, in Abhängigkeit von der U(93,2)-Konzentration bzw. dem Moderator-Spaltstoff-Verhältnis H/U-235 und von der Reflektor- bzw. Zellen-Wandstärke

ρ_U (gU(93,2) /cm ³)	H/U-235	$m_{0,8}(25)$ (g)					
		o1-a (2,33 g/cm ³)			o2-a (2,30 g/cm ³)		
		Ref1. ∞	Ref1. 50 cm	Zelle 50 cm	Ref1. ∞	Ref1. 50 cm	Zelle 50 cm
0,03	932	349	350				
0,04	698	327	328	267	299	299	291
0,05	558	327	329	264	295	295	286
0,06	465	336		268	298	298	290

Tab. 7.1.2: U-235-Mengen ($k=0,8$) homogener U(93,2)-Wasser-Gemische mit Normalbeton-Reflektor unter Berücksichtigung einer Reflektor-Ausschlußzone von 55 cm Durchmesser, isoliert und in Zellenanordnung, in Abhängigkeit von der U(93,2)-Konzentration bzw. vom Moderator-Spaltstoff-Verhältnis H/U-235 und von der Reflektor- bzw. Zellen-Wandstärke

ρ_U (gU(93,2) /cm ³)	H/U-235	$m_{0,8}(25)$ (g)					
		o1-a (55cm Innendurchm.)			o2-a (55 cm Innendurchm.)		
		Ref1. ∞	Ref1. 50 cm	Zelle 50 cm	Ref1. ∞	Ref1. 50 cm	Zelle 50 cm
0,03	932	494	495	453	499	499	495
0,04	698	486	487	446	490	490	486
0,05	558	501	502	459	504	504	499
0,06	465	525		481			

Tab. 7.1.3: U-235-Mengen ($k=0,8$) homogener U(93,2)-Wasser-Gemische mit unmittelbar angrenzendem Polyäthylen- bzw. Beryllium-Reflektor, isoliert, in Abhängigkeit von der U(93,2)-Konzentration bzw. vom Moderator-Spaltstoff-Verhältnis H/U-235 und von der Reflektor-Wandstärke

ρ_U (gU(93,2) /cm ³)	H/U-235	$m_{0,8}^{(25)}$ (g)			
		Polyäthylen		Beryllium	
		Ref1. ∞	Ref1. 10cm	Ref1. ∞	Ref1. 50cm
0,04	698	274	277	115	116
0,05	558	262	266	110	111
0,06	465	261	265	110	111
0,07	398	264	268	111	112

Tab. 7.1.4: U-235-Mengen ($k=0,8$) homogener U(93,2)-Wasser-Gemische mit Polyäthylen- bzw. Beryllium-Reflektor unter Berücksichtigung einer Reflektor-Ausschlußzone von 55 cm Durchmesser, isoliert, in Abhängigkeit von der U(93,2)-Konzentration bzw. vom Moderator-Spaltstoff-Verhältnis H/U-235 und von der Reflektor-Wandstärke

ρ_U (gU(93,2) /cm ³)	H/U-235	$m_{0,8}^{(25)}$ (g)			
		Polyäthylen 55 cm ID		Beryllium 55 cm ID	
		Ref1. ∞	Ref1. 10 cm	Ref1. ∞	Ref1. 50 cm
0,03	932	509	511	322	324
0,04	698	498	499	318	321
0,05	558	510	512	328	330

Tab. 7.1.5: U-235-Mengen ($k=0,8$) homogener U(93,2)-Graphit-Gemische mit unmittelbar angrenzendem Normalbeton (ol-a)- bzw. Polyäthylen- bzw. Beryllium-Reflektor in Abhängigkeit von der U(93,2)-Konzentration bzw. vom Moderator-Spaltstoff-Verhältnis C/U-235 und von der Reflektor- bzw. Zellen-Wandstärke

ρ_U (gU(93,2) /cm ³)	C/U-235	$m_{0,8}^{(25)} \text{ (g)}$					
		ol-a		Polyäthylen		Beryllium	
		Refl. ∞	Zelle 50 cm	Refl. ∞	Refl. 10 cm	Refl. ∞	Refl. 50 cm
0,002	18160	1682	1456	1534	1545		
0,003	12100	1658	1371	1505	1519		
0,004	9078	1693	1348	1530	1549		
0,005	7262	1749	1349				
0,006	6051	1815	1361			363	374
0,007	5186					358	369
0,008	4538					355	367
0,009	4033					355	366
0,010	3630					355	367
0,011	3300					356	368

Tab. 7.1.6: U-235-Mengen homogener U(93,2)-Wasser-Gemische mit Graphit-Reflektor in Abhängigkeit von der U(93,2)-Konzentration bzw. vom Moderator-Spaltstoff-Verhältnis H/U-235, der Graphit-Reflektordicke und vom Multiplikationsfaktor k

ρ_U (gU(93,2) /cm ³)	H/U-235	$m_{o,80}^{(25)} \text{ (g)}$		$m_{o,82}^{(25)} \text{ (g)}$		$m_{o,83}^{(25)} \text{ (g)}$	
		Graphit-Reflektor-Dicke (cm)					
		∞	100	∞	100	∞	100
0,04	698	186	187	201	203	209	211
0,05	558	184	185	198	200	206	207
0,06	465	187	188	201	202	208	210

Tab. 7.1.7: U-235-Mengen homogener U(93,2)-Wasser-Gemische mit Beryllium-Reflektor in Abhängigkeit von der U(93,2)-Konzentration bzw. vom Moderator-Spaltstoff-Verhältnis H/U-235, der Beryllium-Reflektordicke und vom Multiplikationsfaktor k

ρ_U (gU(93,2) /cm ³)	H/U-235	$m_{0,9}^{(25)} \text{ (g)}$		$m_{0,95}^{(25)} \text{ (g)}$		$m_{1,0}^{(25)} \text{ (g)}$	
		Beryllium-Reflektor-Dicke (cm)					
		∞	50	∞	50	∞	50
0,05	558	165	167	204	206	253	256
0,06	465	162	164	198	200	243	246
0,07	398	163	164	198	200	241	243
0,08	348	165	167	200	202	242	245

Tab. 7.1.8: U-235-Mengen homogener U(93,2)-Wasser-Gemische mit Graphit- bzw. Beryllium-Reflektor unter Berücksichtigung einer Reflektor-Ausschlußzone von 55 cm Durchmesser in Abhängigkeit von der U(93,2)-Konzentration bzw. vom Moderator-Spaltstoff-Verhältnis H/U-235 und von der Reflektor-Wandstärke für den Multiplikationsfaktor $k = 0,8$

ρ_U (gU(93,2) /cm ³)	H/U-235	$m_{0,8}^{(25)} \quad (g)$					
		Graphit-Ref1.55cm ID		Beryllium-Ref1. 55 cm ID			
		∞	100cm	19,58cm	19,33cm	19,02cm	18,79cm
0,03	932	363	365	361	362	363	364
0,04	698	358	361	357	358	360	361
0,05	558	369	371	369	370	371	372
0,06	465	385	388	386	387	389	390

Tab. 7.1.9: U-235-Mengen homogener U(93,2)-Wasser-Gemische mit Normalbeton-Reflektor in Zellenanordnung und mit Beryllium-Reflektor isoliert unter Berücksichtigung einer Reflektor-Ausschlußzone von 55 cm Durchmesser in Abhängigkeit von der U(93,2)-Konzentration bzw. vom Moderator-Spaltstoff-Verhältnis H/U-235 und von der Zellen- bzw. Reflektor-Wandstärke für den Multiplikationsfaktor $k = 0,8$

ρ_U (gU(93,2) /cm ³)	H/U-235	$m_{0,8}^{(25)} \quad (g)$					
		ol-a-Ref1. 55 cm ID		Beryllium-Ref1. 55 cm ID			
		Ref1. ∞	Zelle 50 cm	Ref1. ∞	Ref1. 50 cm	Ref1. 8,192cm	Ref1. 8,065cm
0,03	932	494	453	322	324	448	450
0,04	698	486	446	318	321	444	446
0,05	558	501	459	328	330	459	461
0,06	465	525	481	342	344	482	484

7.2 Gekoppelte Anordnung in Zylindergeometrie

Die folgenden Betrachtungen dienen dem Nachweis der Kritikalitätssicherheit im Zusammenhang mit der Zwischenlagerung eines bestimmten Typs abgebrannter MTR-Brennstoffelemente in einem Wasserbecken. Dieser Nachweis wird unter den folgenden Voraussetzungen geführt:

1. Die MTR-Elemente bilden eine beliebig ausgedehnte quadratische Anordnung, wobei ein Mittelpunktsabstand benachbarter Brennstoffelemente von 16,6 cm eingehalten wird.
2. Die Brennstoffelemente befinden sich vollständig unter Wasser; demzufolge wird in den nuklearen Rechnungen zwischen den Brennstoffplatten innerhalb eines jeden Elements und zwischen den Elementen Wasser angenommen. Wasser wirkt zwischen den Brennstoffplatten hauptsächlich als Moderator und zwischen benachbarten Brennstoffelementen als Moderator, Reflektor und zugleich auch als Neutronenabschirmschild.
3. Starke Neutronenabsorber in Form von Cd-Hülsen um die Brennstoffelemente oder äußeren Bor-Vergiftungsrohren werden für den Sicherheitsnachweis nicht herangezogen.
4. Der Abbrand der Brennstoffelemente wird in den nuklearen Sicherheitsrechnungen gleichfalls nicht berücksichtigt; die Rechnungen beziehen sich auf frische, nicht abgebrannte Brennstoffelemente mit dem höchsten Spaltstoffeinsatz entsprechend einer pessimistisch angesetzten Anreicherung von 93,2 % an U-235.
5. In bezug auf Geometrie wird größtmögliche Flexibilität angestrebt; die Brennstoffelemente werden daher in den Rechnungen durch unendlich ausgedehnte Zylinder von gleicher Querschnittsfläche wie die Originalelemente ersetzt. Für die Durchführung der eindimensionalen Wigner-Seitz-Zellrechnung im Rahmen des gewählten Zweigruppen-Modells werden auch die quadratischen Gitterzellen durch zylindrische Zellen gleicher Querschnittsfläche ersetzt.
6. Bei der Bestimmung des Moderationsgrades H/U-235 wird der Aluminiumanteil der Brennstoffelemente berücksichtigt.

7. Ein Multiplikationsfaktor von $k \leq 0,9$ für die allseitig beliebig ausgedehnte Brennstoffelement-Anordnung wird unter den obengenannten Voraussetzungen sicherheitstechnisch für vertretbar gehalten; tatsächlich wird der Wert durch die Verwendung üblicher Absorber-Hülsen um jedes Brennstoffelement bei weitem unterschritten.

Die Brennstoffelemente der zu untersuchenden Anordnung enthalten 22 UAl-Brennstoffplatten von 1,27 mm Dicke mit einem Brennstoffgehalt von 12 g U-235 je Platte. Diesen Angaben zufolge beträgt der Gehalt an U-235 je Brennstoffelement 264 g. Mit den Außenabmessungen 75,7 x 75,6 mm für das Brennstoffelement, 19 Wasserspalten von 2,15 mm, 2 Wasserspalten von 2,4 mm und 2 Wasserschichten von 1,055 mm Dicke und 66,6 mm Länge ergeben sich bei einer aktiven Plattenhöhe von 600 mm der Durchmesser D des äquivalenten Brennstoff-Moderator-Zylinders, die U(93,2)-Konzentration ρ_U und der Moderationsgrad H/U-235 zu

$$\begin{aligned} D &= 85,36 \text{ mm}, \\ \rho_U &= 0,083 \text{ g U(93,2)/cm}^3, \\ H/U-235 &= 188,6. \end{aligned}$$

Die kritische Gleichung (4.32) für die Spaltweite Null mit den aus Tab. 3.1 für die gekoppelte Zylinder-Anordnung zu entnehmenden Funktionen erlaubt die Berechnung des Durchmessers D_0 der Brennstoff-Moderator-Zone bei Vorgabe der Reflektordicke L (= halbe Zellenwandstärke), der Urankonzentration ρ_U , des Wasser-Volumenanteils bzw. des Moderationsgrades H/U-235 und des Multiplikationsfaktors k der beliebig ausgedehnten Zellenanordnung. Aus dem Zellendurchmesser $2L+D_0$ der zylindrischen Wigner-Seitz-Zelle ergibt sich dann durch einfache Umrechnung der Mittelpunktsabstand a benachbarter Elemente bei quadratischer Anordnung zu

$$a = \frac{(2L+D_0)\sqrt{\pi}}{2}.$$

Mit den im Anhang für Uran und Wasser angegebenen nuklearen Daten enthält Tab. 7.2.1 die nach obigem Verfahren ermittelten Werte für D_0 , $2L+D_0$, a sowie den U-235-Gehalt einer Brennstoff-Moderator-Zone von 600 mm Höhe in Abhängigkeit vom Moderationsgrad H/U-235 und von der Reflektordicke L für einen Multiplikationsfaktor von $k = 0,9$ der beliebig ausgedehnten Zellenanordnung bei obengenannter Urankonzentration ρ_U .

Aus der Zusammenstellung in Tab. 7.2.1 ist in bezug auf Brennstoffelemente der obigen Spezifikation folgender Sachverhalt ersichtlich:

1. Die Brennstoffelemente mit 264 g U-235 je Element bilden bei Lagerung unter Wasser in quadratischer Anordnung mit einem Mittelpunktsabstand benachbarter Elemente von 166 mm auch bei allseitig beliebiger Ausdehnung des Gitters eine unterkritische Anordnung mit $k < 0,9$.
2. Ein Multiplikationsfaktor von $k = 0,9$ für die allseitig beliebig ausge dehnte Zellenanordnung unter Wasser wird bei Elementen mit 264 g U-235 je Element bei ca. 148 mm Mittelpunktsabstand benachbarter Elemente in quadratischer Anordnung erreicht.
3. Bei dem durch die Abstellplatten vorgegebenen Mittelpunktsabstand $a = 166$ mm benachbarter Gitterplätze könnte bei gleichbleibendem Moderationsgrad und gleichbleibender Urankonzentration ohne Überschreitung eines Wertes von $k = 0,9$ für den Multiplikationsfaktor der beliebig ausgedehnten Anordnung durch Vergrößerung des Brennstoffelement-Querschnitts bzw. -Durchmessers bei gleichbleibender aktiver Höhe von 600 mm der Brennstoffeinsatz je Element bis auf etwa 352 g U-235 erhöht werden.

Tab. 7.2.1: Durchmesser D_0 der Brennstoff-Moderator-Zone (BM-Zone), Durchmesser $2L+D_0$ der zylindrischen Wigner-Seitz-Zelle, Mittelpunktsabstand a benachbarter BM-Zonen bei quadratischer Anordnung und U-235-Gehalt m_{25} der BM-Zone von 600 mm aktiver Höhe in Abhängigkeit vom Moderationsgrad H/U-235 der BM-Zone und von der Reflektorwandstärke L für eine Urankonzentration $\rho_U = 0,083 \text{ g U}(93,2)/\text{cm}^3$ und einen Multiplikationsfaktor $k = 0,9$ der beliebig ausgedehnten Zellenanordnung

H/U-235	$L(\text{cm})$	$D_0(\text{cm})$	$2L+D_0(\text{cm})$	$a(\text{cm})$	$m_{25}(\text{g})$
191,4	4,08	8,569	16,729	14,826	267,6
191,4	4,42	9,836	18,676	16,551	352,6
167,9	4,06	8,543	16,663	14,767	266,0
167,9	4,40	9,902	18,702	16,574	357,4

7.3 Isolierte kritische Anordnung in Quadergeometrie

Im Zusammenhang mit der Lagerung graphithaltiger Brennstoffproben in einem durch Barytbeton stark abgeschirmten Lagerblock interessiert insbesondere die Frage der kritischen Belegung unter Störfallbedingungen (Wassereinbruch). Diese Frage ist nicht ganz einfach und auch nicht eindeutig zu beantworten, wenn über Art und Zusammensetzung der Proben sowie der Positionsbelegung im Lagerblock keine definitiven Angaben gemacht werden können. Selbst wenn man das Problem in zulässiger Weise durch gleichmäßige Positionsbelegung mit gleichartigem Brennstoff (z.B. Uran hoher Anreicherung) in homogener Verbindung mit Graphit und Wasser sehr stark vereinfacht, ergibt sich bereits durch die notwendige Variation der Parameter Konzentration, Graphit- und Wasseranteil bei unterschiedlicher Positionsausnutzung eine verwirrende Vielfalt zu beachtender Mengenbegrenzungen. Die Möglichkeit des Vorgehens soll daher nur an zwei einfachen repräsentativen Beispielen aufgezeigt werden.

Der Lagerblock mit den Kantenlängen 256 cm und 192 cm habe eine nutzbare Höhe von 96 cm, enthalte insgesamt $16 \times 12 = 192$ Lagerpositionen von 16 cm Kantenlänge und sei allseitig von einem Barytbeton-Reflektor von 110 cm Wandstärke umgeben. Die innere Struktur des Lagerblocks und die Form der Lagerpositionen selbst bleiben unberücksichtigt; es wird vielmehr angenommen, daß die kritische Belegung des Gesamtblocks durch eine formgebundene homogene Uran-Graphit-Wasser-Mischung erzielt wird, bei der zwei Dimensionen entsprechend den vorgegebenen Linearabmessungen 256 cm und 192 cm konstant bleiben und die dritte kritische Abmessung und damit auch die kritische Belegung des gesamten Blocks durch die Mischungsverhältnisse der Komponenten bestimmt wird. Die systematische Ermittlung der kritischen Abmessungen und Spaltstoffbeladungen in Abhängigkeit von den Komponenten-Mischungsverhältnissen führt in der gleichen Weise wie beim Kugelproblem zwangsläufig zu einer minimalen kritischen Spaltstoff-Gesamtbeladung, an der sich die maximal zulässige Beladung über einen angemessenen Sicherheitsfaktor - der auch Sicherheit bei Doppelbeladung mit einschließt - orientieren muß. Die maximal zulässige Spaltstoffbeladung jeder einzelnen Lagerposition ist damit gleichfalls festgelegt.

Zur Verdeutlichung des Sachverhalts sind in Tab. 7.3.1 die kritischen U-235-Massen des gesamten Lagerblocks mit den obengenannten Linearabmessungen in Abhängigkeit von der Uran-Konzentration, vom Wasser-Volumenanteil α und vom Graphit-Volumenanteil β angegeben. Aus dieser Zusammenstellung ist er-

sichtlich, daß die kleinste Masse mit einer trockenen Uran-Graphit-Mischung erzielt wird; ein Ergebnis, das zunächst überrascht, weil man in der Regel bei Wasserzugabe einen verbesserten Moderationseffekt erwartet. Den Grund hierfür bildet die Geometrie, die bei Wasserzugabe eine Übermoderation des Systems bewerkstelligt. Betrachtet man hingegen eine Anordnung mit verminderten Linearabmessungen, z.B. 80 cm x 80 cm bei gleichem Reflektor, so ist, wie aus Tab. 7.3.2 zu entnehmen, durch Wasserzugabe in bestimmten Grenzen eine deutliche Moderationsverbesserung zu erreichen, die sich in einer Verringerung der kritischen Masse ausdrückt.

Mit der kritischen Mindestmasse von 6,14 kg U-235 aus Tab. 7.3.1 für ein homogenes trockenes U(93,2)-Graphit-Gemisch errechnet sich bei Anwendung eines Sicherheitsfaktors von 2,3 nach (11), 13, der in pessimistischer Weise auch eine Doppelbeladung sämtlicher 192 Lagerpositionen abdeckt, die kritisch sichere Masse jeder Einzelposition zu rund 13,9 g U-235. Die Kritikalitätssicherheit der Anordnung ist gewährleistet, auch wenn Wassereinbruch stattfindet oder der Spaltstoff an wasserstoffhaltige Substanzen gebunden ist, oder einzelne Lagerpositionen leer bleiben oder nur mit Graphit und/oder Wasser gefüllt sind, solange nur das obige Massenlimit von 13,9 g U-235 für die Einzelposition nicht überschritten wird.

In dem zweiten genannten Beispiel, das sich auf eine Lageranordnung mit reduzierten Linearabmessungen (80 cm x 80 cm) und dementsprechend nur $5 \times 5 = 25$ Lagerpositionen bezieht, liegt der Sachverhalt etwas anders. Das Minimum der kritischen Masse wird, wie aus Tab. 7.3.2 ersichtlich ist, nicht mit einer trockenen U(93,2)-Graphit-Mischung, sondern mit einem homogenen Uran-Graphit-Wasser-Gemisch mit etwa 30 Vol-% Wasser und 70 Vol-% Graphit erzielt und ergibt sich zu rund 2,62 kg U-235. Bezogen auf diesen Zustand optimaler Moderation errechnet sich jetzt die kritisch sichere Masse jeder einzelnen Lagerposition zu etwa 45,5 g U-235, unabhängig vom Mischungsverhältnis der Komponenten und vom Füllzustand der Positionen.

Es muß jedoch ausdrücklich vor einer Vermischung der in den obigen Beispielen behandelten Alternativlösungen gewarnt werden, etwa dergestalt, daß unter Wahrung der zulässigen Gesamtmenge von $192 \times 13,9$ g U-235 aus dem 1. Beispiel die Spaltstoffbeladung einzelner Positionen bis auf 45,5 g U-235 erhöht wird oder aber 25 Positionen, wie im 2. Beispiel angegeben, mit 45,5 g U-235, die übrigen 167 Positionen aber mit Graphit beladen werden. In beiden Fällen müßte man wegen Verletzung der Ausgangsposition mit Reak-

tivitätserhöhungen rechnen, und zwar in dem zuerstgenannten Fall wegen der effektiven Spaltstoffverdichtung in einem Teilbereich bei gleichbleibender Spaltstoffmenge im System, im letztgenannten Fall wegen der Verletzung des Reflektorkonzepts (Graphit reflektiert wesentlich besser als Barytbeton).

Abschließend soll nunmehr noch die Angemessenheit des benutzten dreidimensionalen Zweigruppen-Modells am Beispiel eines meßtechnisch verifizierten Extremfalles - nämlich der Bestimmung der kritischen U-235-Masse einer nahezu würfelförmigen Uran-Polyäthylen-Anordnung mit dickem allseitigen Beryllium-Reflektor - demonstriert werden.

Den Angaben in (12) und (13) zufolge handelt es sich hierbei um verschiedene Kernkonfigurationen mit Schichtungen von 0,0012 in. dicken U(93,15)- und 1/8 in. dicken Polyäthylen-Folien, in denen zur Realisierung verschiedener Atomzahlverhältnisse H/U-235 die Uran-Platten durch ein, zwei oder mehrere Plastikplatten getrennt waren. Mit Brennstoffzellen-Querschnitten von 6,0 x 6,125 in. und Beryllium-Reflektordicken von 12,5 in. wurden in dem U-235-Dichte-Intervall von etwa 0,085 bis 0,13 g/cm³ kritische U-235-Massen um 300 bis 350 g gemessen.

Die Ergebnisse der eigenen Rechnung für homogene U(93,2)-Polyäthylen-Gemische mit den gleichen Zellen- und Reflektor-Abmessungen sind in Tab. 7.3.3 zusammengestellt. Die Übereinstimmung der errechneten Werte mit den Meßergebnissen ist in Anbetracht des einfachen Rechenmodells beachtlich gut.

Tab. 7.3.1: Kritische Masse (kg U-235) und Höhe H(cm) einer homogenen quaderförmigen U(93,2)-Graphit-Wasser-Anordnung (256 cm x 192 cm) mit allseitigem Baryteton-Reflektor (BA-b) von 110 cm Wandstärke in Abhängigkeit von der U(93,2)-Konzentration, vom Wasser-Volumenanteil α und vom Graphit-Volumenanteil β

[illegible]

Tab. 7.3.3: Kritische U-235-Masse und Höhe H einer quaderförmigen homogenen U(93,2)-Polyäthylen-Anordnung mit den Abmessungen 15,24 cm x 15,56 cm und allseitigem Beryllium-Reflektor von 31,75cm Dicke

$\rho^{(25)}$ (g/cm ³)	ρ_U (gU(93,2)/cm ³)	H/U-235	H(cm)	$m_{krit}^{(25)}$ (g)
0,053	0,05687	579	26,5	334
0,055	0,05901	558	25,1	327
0,072	0,07725	426	18,0	308
0,080	0,08584	383	16,3	309
0,085	0,09120	360	15,5	312
0,090	0,09657	340	14,8	315
0,100	0,1073	306	13,6	324
0,125	0,1341	244	11,8	351
0,130	0,1395	235	11,5	357

8. Anhang - Nukleare Daten

Datenauswahl und Berechnungsmethoden erfolgten anhand der zugänglichen Literatur so, daß bezüglich kritischer Abmessungen und Massen konservative Ergebnisse erzielt werden. Im folgenden werden nach kurzer Erläuterung der Modalitäten für die rechnerische Weiterverarbeitung die Daten für U-235 als Spaltstoff, U-238, Th-232 und eine Reihe wichtiger Moderator- und Reflektormaterialien unter Angabe der jeweiligen Literaturstelle im Hinblick auf Zweigruppen-Kritikalitätsrechnungen in tabellarischer Form zusammengestellt.

Sämtliche Wirkungsquerschnitte sind auf Raumtemperatur 293 K bezogen. Die Umrechnung der mikroskop. 2200 m/s-Spalt- und Absorptionsquerschnitte in die makroskop. thermischen Querschnitte erfolgt nach (3), 1-31 und gelber Nachtrag, 3 über die Beziehung

$$(8.1) \quad \Sigma_{th} = \frac{N_L \rho}{A} \frac{\sqrt{\pi}}{2} g \sigma(2200),$$

wobei der Faktor $\sqrt{\pi}/2$ einer Maxwell-Verteilung des Neutronenspektrums entspricht und g die Abweichung des Wirkungsquerschnitts vom $1/v$ -Gesetz berücksichtigt. In (8.1) bedeuten ferner N_L die Loschmidtsche Zahl ($0,6023 \times 10^{24} \text{ mol}^{-1}$), ρ die Materialdichte und A das Atomgewicht.

Für eine homogene Mischung verschiedener Materialien gilt dann wegen (8.1) mit dem Volumenanteil v_i der i-ten Komponente in der Mischung

$$(8.2) \quad \Sigma_{th} = \sum_i \Sigma_{th}^{(i)} v_i = N_L \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_i \frac{\rho_i}{A_i} g_i \sigma_i(2200) v_i.$$

Die Berechnung der makroskop. Streu- und Transport-Querschnitte aus den entsprechenden mikroskop. Werten erfolgt über die Beziehungen

$$(8.3) \quad \Sigma_s = \frac{N_L \cdot \rho}{A} \sigma_s \quad \text{und} \quad (8.4) \quad \Sigma_{tr} = \frac{N_L \cdot \rho}{A} \sigma_{tr}.$$

Analog zu (8.2) folgt für die homogene Mischung

$$(8.5) \quad \Sigma_s = \sum_i \Sigma_s^{(i)} v_i = N_L \sum_i \frac{\rho_i}{A_i} \sigma_s^{(i)} v_i$$

und

$$(8.6) \quad \Sigma_{tr} = \sum_i \Sigma_{tr}^{(i)} v_i = N_L \sum_i \frac{\rho_i}{A_i} \sigma_{tr}^{(i)} v_i.$$

Mit den Transportquerschnitten Σ_{tr} bzw. Transportweglängen λ_{tr} ergeben sich die Diffusionskonstanten zu

$$(8.7) \quad D = \frac{1}{3 \Sigma_{tr}} = \frac{\lambda_{tr}}{3}.$$

Für sehr schwache Absorption $\Sigma_a \ll \Sigma_s$, d.h. wenn der Absorptionsquerschnitt Σ_a gegenüber dem Streuquerschnitt Σ_s vernachlässigt werden darf, gilt näherungsweise (vgl. (3), 1-34 und 6-35)

$$(8.8) \quad \Sigma_{tr} = \Sigma_s (1 - \bar{\mu}_0),$$

mit $\bar{\mu}_0$ als dem mittleren Cosinus des Streuwinkels im Laborsystem. Handelt es sich hingegen um einen starken Absorber, wie z.B. U-235 mit sehr hohem Absorptionsquerschnitt für thermische Neutronen, so ist, wenn wegen der hohen Massenzahl näherungsweise auch noch isotrope Streuung ($\bar{\mu}_0 \approx 0$) angesetzt werden darf, die reziproke Diffusionslänge K mit dem totalen Wirkungsquerschnitt $\Sigma_T = \Sigma_a + \Sigma_s$ aus der transzendenten Gleichung (vgl. (1), 238)

$$(8.9) \quad \frac{\Sigma_s}{K} \operatorname{arctg} \frac{K}{\Sigma_T} = 1$$

zu ermitteln, mit der dann die Diffusionskonstante D vermöge der Beziehung

$$(8.10) \quad D = \frac{\Sigma_a}{K^2}$$

bestimmt werden kann.

In Fällen, wo Diffusionskonstanten für die schnelle Neutronengruppe und Bremsflächen nicht direkt verfügbar sind, oder eine Kondensation aus Mehrgruppensdaten oder auch Datenkorrekturen und Anpassungen unumgänglich sind, geschieht dies über die Beziehungen

$$(8.11) \quad D = \frac{\int_{E_1}^{E_2} D(E) \frac{dE}{E}}{\ln E_2/E_1}$$

für die Diffusionskonstante bei vorausgesetzter $1/E$ -Verteilung des Neutronenflusses (vgl. (3), 6-87) und

$$(8.12) \quad \xi(E) = \int_E^{E_0} \frac{D(E)}{\xi \Sigma_s(E)} \frac{dE}{E}$$

für die Bremsfläche (Fermialter) nach (3), 6-45, wobei ξ den mittleren logarithmischen Energieverlust je Zusammenstoß bedeutet.

Zur Berechnung der Bremsfläche für ein homogenes Spaltstoff-Moderator-Gemisch dient die Formel von Galanin (vgl. (10), 143-147)

$$(8.13) \quad K_0^2 = \frac{1}{\epsilon} = \sum_j \sum_{i \geq j} A_{ij} \cdot v_i \cdot v_j$$

mit den Volumenanteilen v_i , v_j der in der Mischung vorhandenen Materialien.

Bei Verwendung von Uran hoher U-235-Anreicherung kann das Produkt aus Schnellsplutfaktor ϵ und Resonanzdurchlaßfaktor p mit guter Näherung gleich 1 gesetzt werden, so daß sich der infinite Multiplikationsfaktor im wesentlichen auf das Produkt

$$(8.14) \quad k_{\infty} = \gamma \cdot f$$

aus Neutronenausbeute γ und thermischer Nutzung f reduziert.

Mit den mikroskopischen Spalt- und Absorptionsquerschnitten $\sigma_{sp}(25)$ und $\sigma_a(25)$ für U-235 und der mittleren Anzahl ν der schnellen Spaltneutronen je Spaltung folgt für die Neutronenausbeute γ (mittlere Anzahl der schnellen Spaltneutronen je Absorption im U-235)

$$(8.15) \quad \gamma = \nu \frac{\sigma_{sp}(25)}{\sigma_a(25)}$$

Für die thermische Nutzung f hat man

$$(8.16) \quad f = \frac{\Sigma_a(25) v(25)}{\Sigma_a(25) v(25) + \sum_i \Sigma_a^{(i)} v_i}$$

Hierin bedeuten $\Sigma_a(25)$ den makroskopischen thermischen Absorptionsquerschnitt und $v(25)$ den Volumenanteil von U-235, die $\Sigma_a^{(i)}$ und v_i hingegen die makroskopischen thermischen Absorptionsquerschnitte und Volumenanteile der übrigen in der Spaltstoff-Moderator-Mischung vorhandenen Materialien.

Die in den Kritikalitätsrechnungen benutzten nuklearen Daten der Spaltstoff-, Moderator- und Reflektor-Materialien sind den nachfolgenden Tabellen zu entnehmen.

Tab. 8.1: Koeffizienten A_{ij} (cm^{-2}) zur Berechnung der reziproken Bremsfläche K_s^2 nach Gleichung (8.13) für ein homogenes Wasser-Graphit-Uran-Gemisch^{*)}

Dichte (g/cm^3)	i \ j	1 H ₂ O	2 C	3 U
1,0	1 H ₂ O	0,03906	-----	-----
1,73	2 C	0,05013	0,003434	-----
18,7	3 U	0,05499	0,004351	0,00024

*) Die A_{ij} sind unter Verwendung der Daten in (10), 147, Tab. 3-38 so gewählt, daß sich die Bremsflächen für reines Wasser und reinen Graphit der Dichte 1,73 g/cm^3 zu $\tau_{H_2O} = 25,6 \text{ cm}^2$ (vgl. Tab. 8.7) und $\tau_C = 291,2 \text{ cm}^2$ (vgl. Tab. 8.10) ergeben.

Tab. 8.2: Koeffizienten A_{ij} (cm^{-2}) zur Berechnung der reziproken Bremsfläche K_s^2 nach Gleichung (8.13) für ein homogenes Polyäthylen-Graphit-Uran-Gemisch^{**)}

Dichte (g/cm^3)	i \ j	1 Polyäthylen	2 C	3 U
0,918	1 Poly- äthylen	0,05734	-----	-----
1,73	2 C	0,06073	0,003434	-----
18,7	3 U	0,06662	0,004351	0,00024

**) Die A_{ij} sind unter Verwendung der Daten in (10), 147, Tab. 3-38 so gewählt, daß sich die Bremsflächen für reines Polyäthylen der Dichte 0,918 g/cm^3 und reinen Graphit der Dichte 1,73 g/cm^3 zu $\tau_P = 17,44 \text{ cm}^2$ (vgl. Tab. 8.8) und $\tau_C = 291,2 \text{ cm}^2$ (vgl. Tab. 8.10) ergeben.

Tab. 8.3: Nukleare Daten Beton^{*)}

Beton	Dichte (g/cm ³)	K_{th}^2 (cm ²)	D_{th} (cm)	Σ (cm ²)	$K_s^2 = \frac{1}{\Sigma}$ (cm ⁻²)	D_s (cm)
o1-a	2,33	$6,053 \times 10^{-3}$	0,968	349	$2,865 \times 10^{-3}$	1,40
o2-a	2,30	$1,932 \times 10^{-2}$	0,484	101	$9,901 \times 10^{-3}$	1,14
o2-b	2,20	$9,860 \times 10^{-3}$	0,749	205	$4,878 \times 10^{-3}$	1,51
o3-a	2,39	$1,877 \times 10^{-2}$	0,512	119	$8,403 \times 10^{-3}$	1,23
o4-a	2,35	$1,254 \times 10^{-2}$	0,688	179	$5,587 \times 10^{-3}$	1,31
BA-a	3,50	$4,494 \times 10^{-2}$	0,440	179	$5,587 \times 10^{-3}$	1,29
BA-b	3,39	$2,624 \times 10^{-2}$	0,667	1650	$6,061 \times 10^{-4}$	1,62
FP-HW	4,82	$2,520 \times 10^{-1}$	0,358	86,9	$1,151 \times 10^{-2}$	1,10
MS2-b	4,60	$2,098 \times 10^{-1}$	0,445	113	$8,850 \times 10^{-3}$	0,932

*) Sämtliche Daten sind aus (10), 662, Tab. 8-17 entnommen und entsprechen der dort in Tab. 8-16 angegebenen Beton-Zusammensetzung; Wasser-Rückhaltung: a = 100%; b = 50%

Tab. 8.4: Nukleare Daten U-235

Materialdichte (g/cm^3)	18,76	
ν	2,47	(3), 1-26 u. gelber Nachtrag Tab. 28
$\sigma_a(2200)$ (10^{-24}cm^2) g	693,52 0,975	(3), gelber Nachtrag 3
$\sigma_{sp}(2200)$ (10^{-24}cm^2) g	582,78 0,975	" " " "
ξ	2,076	(8.15)
$\sigma_s \text{ therm.}$ (10^{-24}cm^2)	10	(3), 2-5, Tab. 6
$\sigma_{tr} \text{ schnell}$ (10^{-24}cm^2)	6,8	(10), 581, Tab. 7-5
Σ_a (cm^{-1})	28,82	(8.1)
$\Sigma_s \text{ therm.}$ (cm^{-1})	0,4808	(8.3)
Σ_T (cm^{-1})	29,30	
$\Sigma_{tr} \text{ therm.}$ (cm^{-1})	9,929	(8.7), (8.9), (8.10)
$\Sigma_{tr} \text{ schnell}$ (cm^{-1})	0,3270	(8.4)

Tab. 8.5: Nukleare Daten U-238

Materialdichte (g/cm^3)	18,76	
σ_a (2200) (10^{-24}cm^2) g	2,71 1,002	(3), gelber Nachtrag 3
$1 - \bar{\mu}_0$	0,9972	(3), 2-14, Tab. 18
σ_s therm. (10^{-24}cm^2)	8,3	(3), 2-5, Tab. 6
σ_{tr} schnell (10^{-24}cm^2)	6,9	(10), 581, Tab. 7-5
Σ_a (cm^{-1})	0,1143	(8.1)
Σ_{tr} therm. (cm^{-1})	0,3929	(8.3), (8.8)
Σ_{tr} schnell (cm^{-1})	0,3276	(8.4)

Tab. 8.6: Nukleare Daten Th-232

Materialdichte (g/cm^3)	11,5	(3), 1-24, Tab. 27
Σ_a (cm^{-1})	0,222	" 1-25 "
Σ_{tr} therm. (cm^{-1})	0,372	" " "
Σ_{tr} schnell (cm^{-1})	0,372	" " "

Tab. 8.7: Nukleare Daten Wasser

Materialdichte (g/cm^3)	1,0	(3), 1-20, Tab. 24
Σ_a (cm^{-1})	0,0195	" " "
$\Sigma_{\text{trth}} = \frac{1}{\lambda_{\text{trth}}} \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	2,083	" " "
$\Sigma_{\text{trs}} = \frac{1}{\lambda_{\text{trs}}} \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	0,3891	" " "
D_{th} (cm)	0,159	" " "
D_s (cm)	1,13	" " "
$K_{\text{th}}^2 = \frac{1}{L^2} \text{ (cm}^{-2}\text{)}$	0,1232	" " "
$\tau(1,44\text{eV}) = \frac{1}{K_{\text{th}}^2} \text{ (cm}^2\text{)}$	25,6	(2), 760
$K_s^2 \text{ (cm}^{-2}\text{)}$	$3,906 \times 10^{-2}$	

Tab. 8.8: Nukleare Daten Polyäthylen

Materialdichte (g/cm^3)	0,918	(10), 115, Tab. 3-17
$\lambda_{tth} = \frac{1}{\Sigma_{tth}} \text{ (cm)}$	0,320	" " "
$L = \frac{1}{K_{th}} \text{ (cm)}$	2,12	" " "
$\sigma_{trs} (180 \text{ KeV} - 10 \text{ MeV})$ (10^{-24} cm^2)	5,41	(10), 148
$\sigma_{t+epi} (1,4 \text{ eV} - 180 \text{ KeV})$ (10^{-24} cm^2)	17,17	" "
$\Sigma_a \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	$2,373 \times 10^{-2}$	(8.7), (8.10)
$\Sigma_{tth} \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	3,125	(8.7)
$\Sigma_{trs} \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	0,4357	(8.4), (8.7), (8.11)
$D_{th} \text{ (cm)}$	0,1067	(8.7)
$D_0 (1,4 \text{ eV} - 10 \text{ MeV})$ (cm)	0,7651	(8.4), (8.7), (8.11)
$K_{th}^2 \text{ (cm}^{-2}\text{)}$	0,2225	
$\tau \text{ (cm}^2\text{)}$	17,44	(10), 129 unter Anpassung an obige Dichte
$K_0^2 = \frac{1}{\tau} \text{ (cm}^{-2}\text{)}$	0,05734	

Tab. 8.9: Nukleare Daten Beryllium

Materialdichte (g/cm^3)	1,84	(3), 1-20, Tab. 24
Σ_a (cm^{-1})	0,00109	" " "
$\Sigma_{t+th} = \frac{1}{\lambda_{t+th}}$ (cm^{-1})	0,6993	" " "
$\Sigma_{t+s} = \frac{1}{\lambda_{t+s}}$ (cm^{-1})	0,6803	" " "
D_{th} (cm)	0,481	" " "
D_s (cm)	0,562	" " "
$k_{th}^2 = \frac{1}{L^2}$ (cm^{-2})	$2,268 \times 10^{-3}$	" " "
τ (cm^2)	97	" " "
$k_s^2 = \frac{1}{\tau}$ (cm^{-2})	$1,031 \times 10^{-2}$	" " "

Tab. 8.10: Nukleare Daten Graphit

Materialdichte (g/cm^3)	1,73	
Σ_a (cm^{-1})	$3,698 \times 10^{-4}$	(3), 1-20, Tab. 24 Dichte-Anpassung
$\Sigma_{t+th} = \frac{1}{\lambda_{t+th}}$ (cm^{-1})	0,3936	" 1-25, Tab. 27 "
$\Sigma_{t+s} = \frac{1}{\lambda_{t+s}}$ (cm^{-1})	0,3936	" " " "
D_{th} (cm)	0,8481	" 1-20, Tab. 24 "
D_s (cm)	0,9397	" " " "
$k_{th}^2 = \frac{1}{L^2}$ (cm^{-2})	$4,362 \times 10^{-4}$	" " " "
τ (cm^2)	291,2	(10), 143, 147 "
$k_s^2 = \frac{1}{\tau}$ (cm^{-2})	$3,434 \times 10^{-3}$	

Literatur

- (1) Weinberg, A.M. and Wigner, E.P.
The Physical Theory of Neutron Chain Reactors,
The University of Chicago Press, Chicago 1958
- (2) Meghreblian, R.V., Holmes, D.K.
Reactor Analysis, McGraw-Hill 1960
- (3) Etherington, H.
Nuclear Engineering Handbook, McGraw-Hill 1958
- (4) Glastone, S. and Edlund, M.C.
Kernreaktortheorie, Wien, Springer 1961
- (5) Murray, R.L.
Nuclear Reactor Physics, McMillan & Co Ltd., London 1959
- (6) Riezler, W. und Walcher, W.
Kerntechnik, Teubner, Stuttgart 1958
- (7) Newmarch, D.A.
Jour.Nucl. Energy 2 (1955), 52
- (8) Craig, D.S., Pearce, R.M.
Prediction of the Physical Properties of PTR,
CRRP - 672 (1957)
- (9) Jefferson-Loveday, D.W.
The Control of Criticality Hazards at Harwell, SM-70/5,
Criticality Control of Fissile Materials, Proceedings of
a Symposium, Stockholm, 1-5 November 1965, IAEA 1966
- (10) ANL-5800, Reactor Physics Constants, Second Edition, July 1963
- (11) Nuclear Safety Guide, TID-7016, Rev. I (1961)
- (12) Jarvis, G.A. and Mills, C.B.
Critical Mass Reduction, LA-3651 (1966)
- (13) Mills, C.B.
Low Critical Mass, Nuclear Applications, Vol. 4 (1968)
- (14) Fassbender, J., Krämer, H., Meister, G.
Ergebnisse der Anfahrexperimente am FRJ-2,
Jül-236-RE (1965)
- (15) Schaffer, O.
Spaltstoff-Mengenbegrenzungen in bezug auf Lagerung und
Verarbeitung von Uran-Thorium-Graphit-Teilchenschüttungen
hoher U-235-Anreicherung, Jül-922-SB (1973)