



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH GmbH

Institut für Festkörperforschung

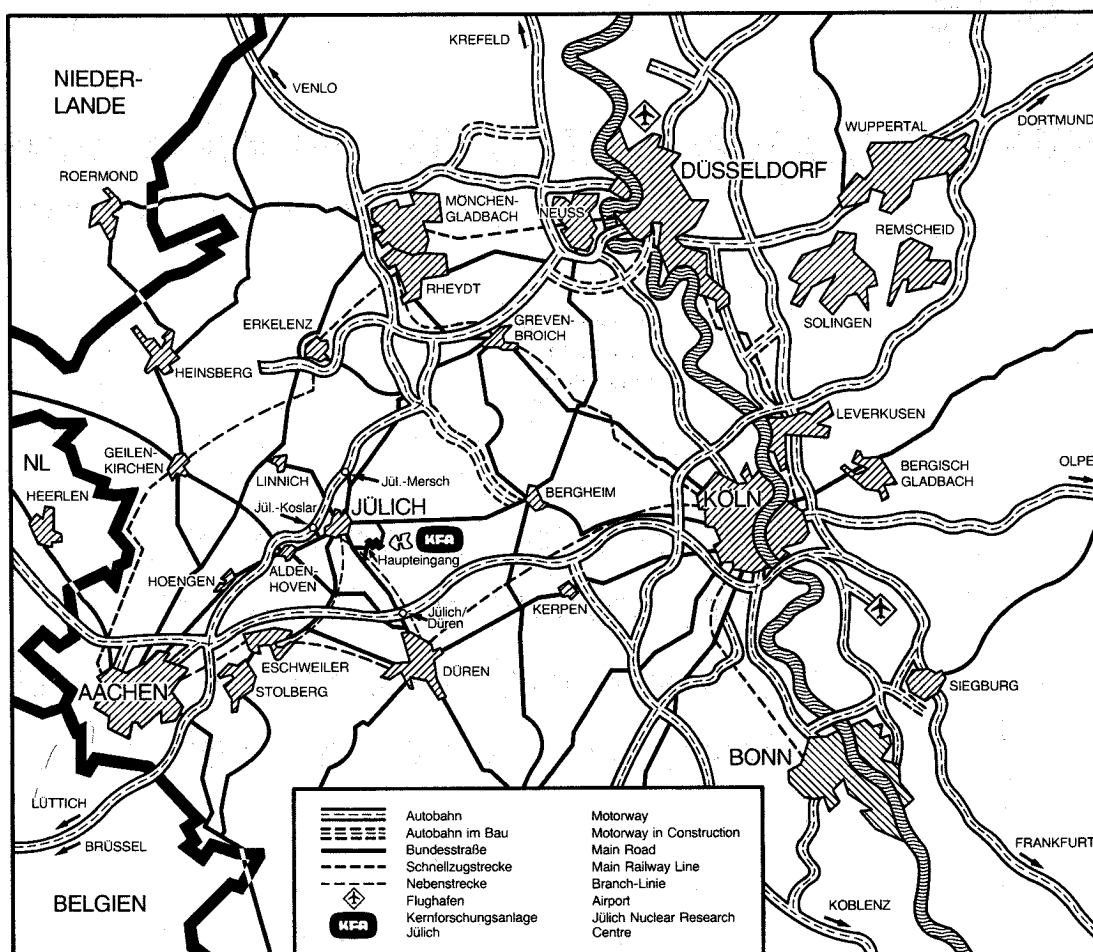
**Superfluide Hydrodynamik
von inhomogenen Zuständen
Systeme mit gebrochener relativer
Eich-Translations-Symmetrie**

von
M.R. Stern

Jül - 1858

Juli 1983

ISSN 0366-0885



Als Manuskript gedruckt

Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 1858

Institut für Festkörperforschung Jülich - 1858

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH

Postfach 1913 · D-5170 Jülich (Bundesrepublik Deutschland)

Telefon: 02461/610 · Telex: 833556-0 kf d

**Superfluide Hydrodynamik
von inhomogenen Zuständen
Systeme mit gebrochener relativer
Eich-Translations-Symmetrie**

von
M.R. Stern

D 465 (Diss. Uni. Essen, GHS)

INHALTSVERZEICHNIS.

Einleitung	1
I. Die hydrodynamische Theorie	9
Die hydrodynamischen Variablen	12
1.1. Die Erhaltungsgrößen	12
1.2. Die Symmetrievariablen	14
II. Statik von Systemen mit gebrochener relativer Eich-Translations-Symmetrie	21
2.1. Gebrochene Eichinvarianz	25
2.2. Gebrochene Translationssymmetrie	28
2.3. Spontan gebrochene relative Eich-Translations- Symmetrie: der Fulde-Ferrell-Zustand	31
2.4. Der stromtragende Zustand in $^4\text{He-II}$	42
III. Dynamik des Fulde-Ferrell-Zustandes	46
3.1. Die Bewegungsgleichungen	46
3.2. Die Moden	50
3.3. Zusammenfassung	55
IV. Dynamik des stromtragenden Zustandes in $^4\text{He-II}$	58
4.1. Die Bewegungsgleichungen	59
4.2. Die Moden	61
4.3. Zusammenfassung der Resultate und Vergleich mit dem Fulde-Ferrell-Zustand	71
Anhänge	73
Referenzen	106

EINLEITUNG

Das Ziel einer hydrodynamischen Theorie ist es, die langwellige und niederfrequente Dynamik eines makroskopischen Systems zu beschreiben. Während die uneingeschränkte Dynamik eines Systems die Berücksichtigung der etwa 10^{23} mikroskopischen Freiheitsgrade und deren Bewegungsgleichungen voraussetzt, wird der hydrodynamische Bereich lediglich durch ein paar Variable und deren Bewegungsgleichungen bestimmt. Für deren Bestimmung liefert die hydrodynamische Theorie ein klares Konzept.

Wenn in einem Vielteilchensystem kleine Auslenkungen aus dem Gleichgewicht vorgenommen werden, so relaxieren die ausgelenkten Freiheitsgrade mit einer charakteristischen Zeitkonstanten in ihre Gleichgewichtswerte wieder zurück. Für ein paar dieser Freiheitsgrade, die man als die hydrodynamischen Variablen bezeichnet, divergiert diese Zeitkonstante im Grenzfall langwelliger Auslenkungen. Dieses Verhalten zeigen zum Beispiel solche Freiheitsgrade, die lokalen Erhaltungsgrößen entsprechen, wie zum Beispiel Energie oder Massendichte, die sich homogen nicht verändern können. Wenn hingegen eine inhomogene Auslenkung der Wellenlänge λ vorliegt, so kann man die Wiederherstellung des Gleichgewichts als ein Transportproblem ansehen: zum Beispiel bei Fluktuationen der Massendichte muß Masse über Distanzen der Wellenlänge λ von den Maxima zu den Minima der Fluktuationen transportiert werden. Die Dauer dieses Prozesses wächst mit der Distanz λ , so daß im Limes einer homogenen Veränderung ($\lambda \rightarrow \infty$), wie bereits erwähnt, diese charakteristische Zeit divergiert.

Dasselbe Verhalten wie die Erhaltungsgrößen zeigen, in

einer geordneten Phase, die hydrodynamischen Komponenten des Ordnungsparameters. Beispiele für diese Freiheitsgrade, die man als Symmetrie- oder Transformationsvariablen bezeichnet, sind die Phase in einer Superflüssigkeit oder der Verschiebungsvektor in einem Kristall. Die charakteristische Zeitkonstante, mit der, zum Beispiel, die Atome eines Kristalls bei einer inhomogenen Auslenkung in ihre Gleichgewichtslagen zurückrelaxieren, wächst stetig mit zunehmender Wellenlänge der Deformation. Das bedeutet, daß in einer geordneten Phase kontinuierliche Symmetrien spontan gebrochen sind; im Beispiel des Kristalls ist einerseits der Zustand nicht mehr translationsinvariant und andererseits erzeugt eine homogene Translation keine rückstellenden Kräfte. Die Analogie zum Transport der Erhaltungsgrößen besteht hier in der Übermittlung der Information über die Gleichgewichtslage der Atome.

Diese zwei Typen von Freiheitsgraden, nämlich die Erhaltungsgrößen und die Symmetrievariablen, sind die hydrodynamischen Variablen, mit denen allein die langwellige, niederfrequente Dynamik eines Systems beschrieben werden kann. Die zahlreichen restlichen Freiheitsgrade, die man als die mikroskopischen Variablen bezeichnet, stellen sich praktisch "instantan" auf die von den lokalen hydrodynamischen Variablen bestimmten Gleichgewichtswerte ein. Somit läßt sich die Vielzahl der kondensierten Systeme in einige wenige Grundklassen unterteilen, so daß alle Systeme einer bestimmten Grundklasse analoge hydrodynamische Variable und daher dasselbe hydrodynamische Verhalten haben. Das heißt auch, daß jede Grundklasse all die Systeme umfasst, in denen dieselben kontinuierlichen Symmetrien spontan gebrochen sind. So haben, unabhängig von ihren mikroskopischen

Unterschieden zum Beispiel sämtliche normale Flüssigkeiten, oder sämtliche Kristalle jeweils ein und dieselbe Hydrodynamik. So gehören die normalen Flüssigkeiten zu der Grundklasse von Systemen, in denen keine Symmetriebrechung vorliegt, während die Hydrodynamik von Kristallen durch die spontane Brechung der Translationssymmetrie gekennzeichnet ist.

Die Entdeckung der drei superflüssigen Phasen von ^3He erlaubte es, das Konzept der spontan gebrochenen Symmetrie und der dazugehörige Formalismus der Hydrodynamik zu erproben und weiterzuentwickeln. Trotz der Einfachheit der mikroskopischen Wechselwirkung zwischen den ^3He -Atomen, bricht jede dieser Phasen jeweils andere charakteristische Symmetrien. Dadurch repräsentiert jede Phase, und zwar als einmalig in der Natur realisiertes Beispiel, eine andere Grundklasse von hydrodynamischem Verhalten. Die Vielfalt von Phänomenen, die die Hydrodynamik von ^3He charakterisieren, ergibt sich als Konsequenz der Tatsache, daß in jeder Phase mehrere Symmetrien spontan gebrochen sind, und daher mehrere SymmetrievARIABLE und deren Bewegungsgleichungen betrachtet werden müssen.

Die hydrodynamische Theorie der superflüssigen Phasen von ^3He zeichnet sich jedoch durch ein weiteres Merkmal aus: die Brechung von mehr als einer Symmetrie vollzieht sich in diesen Systemen nämlich auf einer etwas subtilen Art. Wie ich im Kapitel I ausführlicher erläutern werde, ergeben gewisse Linearkombinationen einiger SymmetrievARIABLE eine invariante Transformation für das System und sind daher keine hydrodynamischen Variablen (das heißt, diese kombinierten Symmetrien werden nicht gebrochen). Andere Linearkombinationen dieser SymmetrievARIABLEN stellen keine invariante Transformation dar, ergeben also

relevante SymmetrievARIABLE und sind daher als hydrodynamische Variablen zu betrachten. Das System bricht also nur die Symmetrien, die von den letzteren Linearkombinationen charakterisiert werden. Dieses stellt ein erweitertes Konzept der spontanen Symmetriebrechung dar, nämlich der Brechung einer relativen Symmetrie⁽¹⁾. Jede der drei bisher experimentell nachgewiesenen Phasen von ^3He bricht eine jeweils andere relative Symmetrie. Daher wurden von Liu und Cross^(2,3) und von Liu⁽⁴⁾ für jedes dieser Systeme unerwartete, charakteristische dynamische Eigenschaften vorhergesagt. In der A_1 -Phase wurden diese in jüngster Zeit in einem Experiment von Corruccini und Osheroff⁽⁵⁾ in quantitativer Weise bestätigt.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Hydrodynamik der von Carton und von Bashkin und Meyerovich⁽⁶⁾ vorhergesagten Fulde-Ferrell-Phase⁽⁷⁾ in der Mischung ^3He - ^4He . Fulde und Ferrell betrachteten den Einfluß von hohen Magnetfeldern auf die Cooper-Paarung der Elektronen in Typ-II Supraleitern. Statt des Übergangs vom BCS-Zustand in den normalleitenden Zustand, erhielten Fulde und Ferrell bei tiefen Temperaturen einen Übergang erster Ordnung in einen supraleitenden Zustand mit einem anisotropen Ordnungsparameter der Form $\Delta_q(\vec{r}) = \Delta_0 e^{i\varphi} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}$. In diesem, dem Fulde-Ferrell-Zustand (FF-Zustand), haben die Cooper-Paare einen endlichen Impuls $\hbar q$. Bis heute wurde dieser Zustand experimentell nicht beobachtet. Da Effekte wie elektronischer Diamagnetismus, Spin-Bahn-Wechselwirkung und Streuung an Verunreinigungen den FF-Zustand destabilisieren⁽⁷⁾, erscheint seine Realisierung in Supraleitern eher unwahrscheinlich. Hingegen treten bei der Paarung von ladungsneutralen ^3He Kernspins diese verhindernden Effekte nicht auf⁽⁶⁾, so daß die Realisierung des FF-Zustandes

in der verdünnten Mischung von ^3He in $^4\text{He-II}$ plausibel erscheint. Im Gegensatz zu reinem ^3He (p-Wellen Paarung), kann nämlich in diesem System das verdünnte Gas von ^3He -Teilchen mit einer s-Wellen Paarung in einen superflüssigen BCS-Zustand kondensieren. Nach Fulde und Ferrell soll dann bei höheren Magnetfeldern dieser Zustand in den räumlich inhomogenen FF-Zustand übergehen.

Wie ich in der vorliegenden Arbeit anhand der Form des Ordnungsparameters zeige, bricht der FF-Zustand eine relative Eich-Translation-Symmetrie (RETS). Das bedeutet, daß nur eine Linearkombination zwischen Phase und Verschiebungsvektor eine relevante SymmetrievARIABLE des Systems darstellt und als hydrodynamische Variable betrachtet wird. Diese Symmetriebrechung kennzeichnet eine weitere, noch unbekannte Grundklasse von hydrodynamischem Verhalten, die ich in dieser Arbeit im Rahmen einer linearisierten Theorie in niedrigster Ordnung in der Wellenzahl untersuchen werde. Aufgrund der RETS-Brechung kann das System unter Phasentransformationen und Translationen nicht unterscheiden (siehe 2.3.). Daraus ergibt sich z.B., daß ein inhomogenes Geschwindigkeitsfeld in der Flüssigkeit einen Superstrom erzeugen kann, ein ähnlicher Effekt, wie der "gauge-wheel" in $^3\text{He-A}^{(3)}$, wo eine relative Phasen-Ortsraumrotations-Symmetrie gebrochen ist, so daß ein inhomogenes Rotationsfeld einen Superstrom erzeugt. Ferner ergibt die spontane RETS-Brechung weitere interessante physikalische Eigenschaften. Die beiden Komponenten des superfluiden Stromes senkrecht zur lokalen Vorzugsrichtung sind nicht proportional zur superfluiden Geschwindig-

keit, sondern nur zu deren zweiten räumlichen Ableitung. Daher, in niedrigster Ordnung in der Wellenzahl, die wir betrachten, verschwindet der transversale Superstrom! Diese Eigenschaft ergibt sich aus: i) der Rotationsinvarianz der Energie und ii) der RETS-Brechung. Ebenfalls als eine Folge der RETS-Brechung erhält der superfluide Strom Terme proportional zu uniformen Variationen in der Temperatur oder Dichte. Indem man also die Temperatur oder den Druck uniform verändert, kann man im stromlosen Gleichgewichtszustand einen endlichen Strom erzeugen. Falls dieser Strom in einem freihängenden Torus erzeugt wird, wird der Behälter in entgegengesetzter Richtung rotieren, um den Drehimpuls zu erhalten.

Als hydrodynamische kollektive Anregungen des FF-Zustandes ergeben sich eine Schermode, eine Temperatur-Spin-Mode, und eine Temperatur-Spin-Schermode, deren Frequenzen verschwinden (Diffusionen), und drei propagierende Moden: zwei der letzteren sind geringfügig modifizierte Dichtekompressionswellen (Gesamtdichte- und ^3He -Konzentrationsfluktuationen), während die dritte die Goldstone-Mode der gebrochenen RETS darstellt. Aufgrund dieser Symmetriebrechung hat diese anisotrop propagierende Mode gemeinsame Eigenschaften mit den jeweiligen Goldstone-Moden der einzelnen an der RETS teilhabenden Symmetrievariablen: Ähnlich wie in magnetischen Superflüssigkeiten hat sie den Charakter einer gekoppelten Entropie-Magnetisierungspropagation, und zur gleichen Zeit propagieren, wie in smektischen Flüssigkristallen, Scherungen in der Flüssigkeit. Es ergibt sich also für das Experiment die eigenartige Möglichkeit der Anregung einer dem "zweiten Schall" ähnlichen Mode durch Oszillationen von Platten oder Wänden in der Flüssigkeit. Die Vorhersage der hydrodynamischen

kollektiven Anregungen dieser neuen superflüssigen Phase in der ^3He - ^4He Mischung kann folglich auch als eine Richtlinie für deren experimentellen Nachweis dienen.

In einer vor kurzem erschienenen Arbeit⁽⁸⁾ stellt Meyerovich die Hydrodynamik superflüssiger inhomogener Phasen in der ^3He - ^4He Mischung, mit Ordnungsparametern der Form $\Delta(\vec{r}) = e^{i\varphi} \sum_m \Delta_m e^{i\vec{q}_m \cdot \vec{r}}$ auf. Indem er die Phase und den Verschiebungsvektor als zwei unabhängige hydrodynamische Variablen betrachtet, erhält er - ohne Unterscheidung dieser Systeme - zwei Goldstone-Moden: eine Temperatur- und eine Scherpropagation. Doch, wie ich oben erwähnt habe, ist in der FF-Phase nur eine bestimmte Linearkombination dieser Symmetrievariablen eine relevante SymmetrievARIABLE (RETS-Brechung), während jede weitere, unabhängige Linearkombination keine hydrodynamische Größe darstellt. Meyerovich ordnet also die FF-Phase und eine weitere, mögliche, inhomogene Phase (z.B. mit dem Ordnungsparameter $\Delta_q(\vec{r}) = \Delta_0 e^{i\varphi} \cos \vec{q} \cdot \vec{r}$), für die beide Symmetrien unabhängig voneinander gebrochen sind, in dieselbe Grundklasse von hydrodynamischem Verhalten ein.

Im Kontext der RETS-Brechung wird in dieser Arbeit ein weiteres Problem untersucht, das vor kurzem von Ho und Mermin⁽⁹⁾ aufgeworfen wurde. Ho und Mermin behaupten, eine skalare Superflüssigkeit wie ^4He kann im stromtragenden Gleichgewichtszustand ähnliche Effekte wie ^3He -A, insbesondere den gaugewheel Effekt aufweisen. Dieses würde bedeuten, daß ein Superstrom durch ein inhomogenes Rotationsfeld angeregt werden kann. Hingegen werde ich zeigen, daß der stromtragende Zustand von ^4He eine RETS bricht, und daher ist (wie im FF-Zustand) eine Inhomogenität im Geschwindigkeitsfeld diejenige, die einen Superstrom zur Folge

hat. Es wird also in dieser Arbeit auch die Hydrodynamik des stromtragenden Zustandes von $^4\text{He-II}$ untersucht und mit der des FF-Zustandes von ^3He verglichen. Der Unterschied des hydrodynamischen Verhaltens dieser beiden Systeme ergibt sich aus deren unterschiedlichen Gleichgewichtsbedingungen: i) während im FF-Zustand bei verschwindendem Gesamtstrom die RETS spontan gebrochen ist, so wird im stromtragenden Zustand von ^4He diese Symmetriebrechung erst durch die Existenz eines Gleichgewichtsstroms bewirkt. Folglich werden auch die Bewegungsgleichungen beider Systeme um jeweils unterschiedliche Gleichgewichtswerte der hydrodynamischen Variablen in den kleinen Auslenkungen entwickelt. ii) In Anwesenheit des aufgeprägten Gleichgewichtsstromes in $^4\text{He-II}$, ist die Rotationsinvarianz der Energie des Systems gebrochen. Demzufolge ist die für den FF-Zustand erwähnte Folgerung des Verschwinden des transversalen Superstroms im stromtragenden Zustand von $^4\text{He-II}$ nicht zutreffend.

Die Arbeit gliedert sich in folgender Weise. Im Kapitel I wird ein kurzer Überblick über die hydrodynamische Theorie und die ihr zugrundeliegenden Konzepte gegeben. Die folgenden drei Kapitel beschaeftigen sich mit der Hydrodynamik von Systemen mit spontan gebrochener RETS, wobei Kapitel II die Statik und Kapitel III und IV die Dynamik betrachten. Das heißt, im Kapitel II wird die Elastizität dieser Systeme untersucht. Kapitel III befaßt sich mit dem FF-Zustand in ^3He - ^4He : der Aufstellung der hydrodynamischen Gleichungen, deren Lösung durch Linearisierung und anschließend eine Zusammenfassung des hydrodynamischen Verhaltens des FF-Zustandes. Kapitel IV untersucht den stromtragenden Zustand von ^4He ; die Lösung der hydrodynamischen Gleichungen erlaubt am Ende einen Vergleich mit dem FF-Zustand.

I. DIE HYDRODYNAMISCHE THEORIE

Wie schon in der Einleitung erläutert wurde, kann das langwellige und niederfrequente dynamische Verhalten eines kondensierten Systems mittels einiger weniger Variabler beschrieben werden. Zu diesen Freiheitsgraden H_i , die man als hydrodynamisch bezeichnet, gehören solche Größen, die bei einer hinreichend langwelligen Auslenkung aus dem Gleichgewicht mit einer divergierenden Zeitkonstante τ_i^H in dieses wieder zurueckrelaxieren. Wie schon erwähnt, zeigen solch ein Verhalten: a) die lokalen, additiven Erhaltungsgrößen, und b) in Systemen mit spontan gebrochenen kontinuierlichen Symmetrien, die entsprechenden Transformations- oder Symmetrievervariablen.

Während die hydrodynamischen Variablen sich langsam in Raum und Zeit verändern, definiert man als mikroskopische Variablen F_i die Freiheitsgrade, die praktisch "instantan" auf die von den lokalen hydrodynamischen Variablen bestimmten Gleichgewichtswerte relaxieren. (Durch diese Relaxationsprozesse gelangt das System ins lokale Gleichgewicht.) Da die charakteristischen Relaxationszeiten τ_i^F der mikroskopischen Variablen unabhängig von der Wellenzahl k sind, ergibt sich für beliebig langwellige Auslenkungen $\tau_i^F \ll \tau_i^H(k)$. Mit dieser Forderung ist der hydrodynamische Frequenzbereich durch

$$\omega \tau_i^F \ll 1 \quad (1.1)$$

definiert. Da in diesem Frequenzbereich die Relaxationsrate der mikroskopischen Variablen wesentlich größer ist als die Frequenz, mit der die hydrodynamischen Größen sich ändern, wird die Dynamik des Systems von den hydrodynamischen Größen allein beschrieben. Ferner beschränkt sich die Gültigkeit dieser Beschreibung auf Störungen des globalen Gleichgewichts, deren Wellenlänge wesentlich größer als sämtliche mikroskopischen Korrelationslängen ξ_i sind, d.h.

$$k \xi_i \ll 1 \quad (1.2)$$

Das lokale Gleichgewicht an jedem Raumzeitpunkt rechtfertigt einerseits die Verwendung der Thermodynamik und andererseits, bei der Beschreibung der Dynamik, die Beschränkung auf die Bewegungsgleichungen der hydrodynamischen Variablen allein. Diese haben die Form ^(10,11,12) :

$$\dot{H}_i + \nabla_k f_{ki} = 0 \quad (1.3)$$

wo mit H_i die Erhaltungsgrößen und die Gradienten der Symmetrieveriablen gemeint sind.

Wie jede Variable des Systems ist auch $\dot{H}_i$ eine Funktion der hydrodynamischen Variablen. Setzt man voraus, daß diese Funktion nach den Gradienten der Variablen entwickelt werden kann, ergibt sich:

$$\dot{H}_i = A_{ij}^{(0)} \delta H_j + A_{ijk}^{(1)} \nabla_k \delta H_j + A_{ij\ell k}^{(2)} \nabla_k \nabla_\ell \delta H_j + \dots \quad (1.4)$$

Mit der Bedingung, daß $\gamma_i^H \rightarrow \infty$, wenn $k \rightarrow 0$, muß $A_{ij}^{(0)}$ verschwinden. So folgt für die Ströme j_{ki} in Gl.(1.3):

$$j_{ki} = - \left(A_{ijk}^{(1)} + A_{ijk\ell}^{(2)} \nabla_\ell + \dots \right) \delta H_j. \quad (1.5)$$

Da in einer hydrodynamischen Theorie der Wellenvektor k eine kleine Größe ist (Gl. (1.2)), kann man diese Reihe, für hinreichend kleine k , nach dem ersten Term abbrechen. Ferner kann die Struktur des Tensors $A_{ijk}^{(1)}$ durch Betrachtungen über die Symmetrieeigenschaften der hydrodynamischen Variablen wesentlich vereinfacht werden, wie im Verlaufe dieser Arbeit noch gezeigt wird.

Obwohl die vorliegende Arbeit auf die bereits erwähnten Konzepte der Hydrodynamik ⁽¹³⁾ aufbaut, sei hier noch hinzugefügt, daß sich in gewissen Bereichen bei der Anwendung einer hydrodynamischen Theorie Probleme ergeben. Zum Beispiel in der unmittelbaren Nähe eines Phasenübergangs ist die Trennung der gesamten Freiheitsgrade des Systems in hydrodynamische und mikroskopische Variable nicht möglich. Hier divergieren nämlich die Relaxationszeiten der nichthydrodynamischen Komponenten des Ordnungsparameters, so daß in diesem Bereich Bedingung (1.1) nicht mehr erfüllt ist. Man kann dann die hydrodynamische Theorie verallgemeinern, indem diese langlebigen mikroskopischen Variablen als zusätzliche, unabhängige, dynamische Variable berücksichtigt werden, wobei deren Bewegungsgleichungen einen Relaxationsterm enthalten ^(13,14).

Im Rahmen dieser sogenannten quasihydrodynamischen Theorie kann man auch die Dynamik solcher Systeme beschreiben, in denen einer Erhaltungsgröße zusätzliche Relaxationskanäle offen stehen, die sogar im Limes $k \rightarrow 0$ weiterhin effektiv bleiben, so

daß für diese Größe $\chi(k \rightarrow 0)$ endlich bleibt. Dieses ist der Fall zum Beispiel in ^3He in der Nähe von Oberflächen, die eine schnelle Relaxation der Magnetisierung bewirken können⁽¹⁵⁾. Daher ist für bestimmte Frequenzbereiche diese Größe nicht mehr erhalten. Die Dynamik des Systems kann beschrieben werden, indem man die Bewegungsgleichung dieser nunmehr "quasihydrodynamischen" Variablen durch einen Relaxationsterm ergänzt⁽¹⁶⁾.

Die hydrodynamischen Variablen.

1.1. Die Erhaltungsgrößen.

Folgende Variable stellen die Gesamtheit der lokalen additiven Erhaltungsgrößen dar, die ein ladungsneutrales System haben kann: Masse(1), Energie(1), Linearimpuls(3), Drehimpuls(3) und - falls das System auch magnetische Freiheitsgrade besitzt - Spin(3). Während sich die Masse aus der Eichinvarianz der mikroskopischen Wechselwirkung ergibt⁽¹⁷⁾, lassen sich die restlichen Erhaltungsgrößen aus der Homogenität in der Zeit und im Ortsraum und der Isotropie des Orts- und Spinraums herleiten⁽¹⁸⁾. Aus der Homogenität in der Zeit folgt, daß der Hamiltonian eines geschlossenen Systems nicht von der Zeit abhängen kann, und somit die Energie erhalten ist. Die Homogenität des Raumes bewirkt,

daß Verschiebungen des Systems als Ganzes das System invariant lassen, und somit ist der Linearimpuls eine erhaltene Größe. Die Isotropie des Ortsraumes erlaubt es, das System ohne Veränderung seiner Eigenschaften als Ganzes zu rotieren, so daß die Erhaltung des Drehimpulses folgt. Analog hierzu ist der Spin aufgrund der Isotropie des Spinraumes erhalten.

Wenn der Gleichgewichtszustand eines Systems ebenfalls invariant unter diesen, die mikroskopischen Wechselwirkungen invariant lassenden Transformationen ist (das heißt, wenn der Gleichgewichtszustand keine Symmetrie spontan bricht), dann wird die Dynamik im hydrodynamischen Bereich von diesen elf aufgezählten Erhaltungsgrößen bestimmt. Das hydrodynamische Verhalten aller Systeme ohne spontan gebrochene Symmetrien - unabhängig von deren mikroskopischen Unterschieden -, wird durch die Bewegungsgleichungen dieser Erhaltungsgrößen beschrieben, die die Form von Gleichung (1.3) haben, wobei j_{ki} der Strom der i -ten Erhaltungsgröße ist. Wenn der Drehimpuls nur aus einem Orbitalanteil besteht (d.h. keinen Beitrag von internem Drehimpuls der Moleküle hat)*, so sind die drei Bewegungsgleichungen für die Komponenten des Drehimpulses mit einer geeigneten Wahl des Linearimpulsstromes keine unabhängigen Gleichungen⁽¹²⁾: sie werden bereits mit den Gleichungen für die Erhaltung des Linearimpulses berücksichtigt. Man erhält aus den acht restlichen Differentialgleichungen (Masse(1), Energie(1), Impuls(3), Spin(3)) die maximale Anzahl von kollektiven Moden in einer Euler-Flüssigkeit mit magnetischen Freiheitsgraden: sechs sind diffusiv und zwei ergeben eine propagierende Schallmode mit $\omega = \pm ck$ ^(13,14).

* Dieser kontroverse Standpunkt (siehe Jähnig und Schmidt⁽¹¹⁾) wird in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht tangiert.

1.2. Die Symmetrieveriablen.

Wenn eine Flüssigkeit in eine geordnete Phase übergeht, bricht dieser Zustand eine, oder auch mehrere der oben erwähnten kontinuierlichen Symmetrien. Diese Symmetriebrechung modifiziert die Hydrodynamik in zwei Aspekten.

i) Wie in der Einleitung bereits erwähnt, müssen die Symmetrieveriablen, die nicht mehr invariante Transformationen des Grundzustandes beschreiben, in den Satz der hydrodynamischen Variablen aufgenommen werden. So müssen die Bewegungsgleichungen für diese Symmetrieveriablen aufgestellt und dem Satz der Bewegungsgleichungen der Erhaltungsgrößen zugefügt werden. Zum Beispiel, in einer Superflüssigkeit, in der die Eichinvarianz spontan gebrochen ist, ist die Phase φ die zusätzliche hydrodynamische Variable, deren Bewegungsgleichung durch die Josephson-Gleichung⁽¹³⁾ gegeben ist (μ ist das chemische Potential, m die Masse z.B. eines ^4He Atoms):

$$\frac{\hbar}{m} \dot{\varphi} + \mu = 0 \quad . \quad (1.6)$$

ii) Die Symmetriebrechung bewirkt, daß die Bewegungsgleichungen der Erhaltungsgrößen durch Kopplungen an die Symmetrieveriablen modifiziert werden. Diese Kopplungen lassen sich bei einer systematischen Herleitung der hydrodynamischen Gleichungen bestimmen, wie in den Kapiteln III und IV gezeigt wird. Im Beispiel einer Superflüssigkeit tritt in der Kontinuitätsgleichung für die Massendichte ρ ein zusätzlicher reaktiver Strom j^s auf:

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} + \vec{j}^s) = 0 \quad . \quad (1.7)$$

wo

$$\vec{j}^s = \rho^s \left(\frac{1}{m} \vec{\nabla} \varphi - \vec{v}^n \right) = \rho^s (\vec{v}^s - \vec{v}^n) .$$

ρ^s ist die superfluide Dichte, v^s und v^n jeweils die superfluide und normale Geschwindigkeit.

Durch Hinzunahme der Bewegungsgleichung jeder Symmetrievervariablen erhält man jeweils eine zusätzliche hydrodynamische Anregung, mit $\lim_{k \rightarrow 0} \omega(k) = 0$ ⁽²⁰⁾. Man bezeichnet sie als Goldstone-Mode. (Nach dem Goldstone-Theorem in der relativistischen Teilchenphysik bewirkt die Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie eine zusätzliche Anregung in Form eines masselosen Teilchens). Im Falle, daß langreichweitige Kräfte vorhanden sind (Coulomb-Kräfte), verschiebt sich die Frequenz zu endlichen Werten, $\lim_{k \rightarrow 0} \omega(k) \neq 0$ (in der Teilchenphysik ist die entsprechende Anregung ein Teilchen endlicher Ruhemasse).

Ferner stellt der erwähnte zusätzliche nichtdissipative Strom einen gegenüber der ungeordneten Phase zusätzlichen Transportmechanismus dar, der häufig das diffusive Verhalten der respektiven Erhaltungsgröße in ein propagierendes umändert. Im erwähnten Beispiel einer Superflüssigkeit ergeben also Gln. (1.6, 7) zusammen mit den Erhaltungssätzen der Impuls- und Energiedichte, daß die Temperaturdiffusion einer normalen Flüssigkeit in eine Temperaturpropagation der superflüssigen Phase übergeht: es ist nämlich möglich, die vier hydrodynamischen Gleichungen in folgender, übersichtlicher Weise zu schreiben ⁽²¹⁾ (der thermische Ausdehnungskoeffizient wurde vernachlässigt):

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad , \quad \frac{\dot{v}}{v} + c_1^2 \frac{\vec{\nabla} p}{p} = 0 \quad ; \quad (1.8)$$

$$\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \vec{\nabla} \cdot \vec{w} = 0 \quad , \quad \frac{\dot{w}}{w} + c_2^2 \frac{\vec{\nabla} \sigma}{\sigma} = 0 \quad ,$$

wo $\vec{v} = (\rho^1/\rho)\vec{v}^1 + (\rho^2/\rho)\vec{v}^2$, $\vec{w} = (\rho^2/\rho)(\vec{v}^1 - \vec{v}^2)$, c_1 und c_2 die Geschwindigkeiten des ersten und zweiten Schalls sind und σ die Entropie per Masse ist. Aus den Bewegungsgleichungen (1.9) für σ ist das propagierende Verhalten der Entropie, (bzw. der Temperatur $\delta T = (\partial T / \partial \sigma) \delta \sigma$) klar. Diese Mode mit $\omega = \pm c_2 k$ stellt die Goldstone-Mode gebrochener Eichinvarianz dar. Die nichttriviale Tatsache, daß es ein Massenstrom (j^s) ist, der den Transportmechanismus einer Temperaturpropagation liefert, ergibt sich daher, dass der Massenstrom im $(\vec{v}^1 = 0)$ -Bezugssystem als ein Entropiestrom im $(\vec{v} = 0)$ -Bezugssystem angesehen werden kann⁽²²⁾.

Es folgt also die Feststellung, daß die niederfrequenten und langwelligen Eingeschafte makroskopischer Systeme lediglich durch Symmetrieerwägungen bestimmt werden. Wenn nämlich die mikroskopischen Wechselwirkungen verschiedener Systeme dieselben Symmetrien besitzen, und wenn die Grundzustände der jeweiligen Systeme die gleiche Untergruppe dieser Symmetrien brechen, dann haben diese Systeme analoge hydrodynamische Gleichungen. Zum Beispiel, werden sämtliche Kristalle, unabhängig von ihren mikroskopischen Unterschieden, von ein und derselben hydrodynamischen Theorie beschrieben, die sich aus der spontanen Brechung der Translationssymmetrie ergibt. Die Komponenten des Verschiebungsvektors stellen die zusätzlichen hydrodynamischen Variablen dar. Deren Gradienten bilden den Spannungstensor, der einen zusätzlichen dissipationsfreien Impulsstrom darstellt. Schließlich erhält man als Goldstone-Moden der gebrochenen Translationssymmetrie zwei propagierende Scherwellen und eine Diffusion von Fehlstellen. Es sei hier noch bemerkt, dass während die

Brechung der kontinuierlichen Symmetrien die Grundklasse von Hydrodynamik bestimmt, so spielen die diskreten Symmetrien des kristallinen Zustandes eine ganz andere Rolle für das dynamische Verhalten. Da sie die Zahl der unabhängigen elastischen und Transportkoeffizienten bestimmen, verändern sich für verschiedene kristalline Symmetrien die Kopplungen der Bewegungsgleichungen und daher die Kopplungen der kollektiven Moden untereinander. Diese bestehen jedoch für alle Kristalle aus drei elastischen Wellen (mit jeweils $\omega = \pm c_i k$, $i=1,2,3$), einer Wärme- und einer Fehlstellendiffusion.⁽²²⁾

Die Entdeckung der drei superflüssigen Phasen von ^3He gestattete das Konzept der spontan gebrochenen Symmetrie und den dazugehörigen Formalismus der Hydrodynamik zu erproben und weiterzuentwickeln. Insbesondere hat das Bestreben, das niederfrequente, langwellige Verhalten mit Hilfe der hydrodynamischen Theorie zu beschreiben, zu einer Erweiterung der Konzepte dieser Theorie geführt, nämlich zur Einführung des Begriffes einer relativen Symmetrie.

Es soll hier der Begriff einer relativ gebrochenen Symmetrie am Beispiel der $^3\text{He-A}$ Phase erläutert werden.⁽³⁾ In der A-Phase erfolgt die Cooper-Paarung in einem Zustand mit Drehimpuls $\ell=1$ und $m_\ell=1$ bezüglich der Vorzugsrichtung $\hat{\ell} = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$, wobei $\hat{e}_1$ und $\hat{e}_2$ zwei orthogonale Einheitsvektoren sind. Der Ordnungsparameter ist im Ortsraum gegeben durch:

$$\vec{\Delta} \propto e^{i\varphi} (\hat{e}_1 + i \hat{e}_2) \quad (1.10)$$

Hieraus folgt, daß eine Rotation der Vektoren $\hat{e}_1$ und $\hat{e}_2$ um einen Winkel θ um die Vorzugsrichtung $\hat{\ell}$ einen Phasenfaktor $e^{-i\theta}$

ergibt. Daher kann eine Phasentransformation $\delta\varphi$ durch eine Ortsraumrotation $\delta\theta$ um $\hat{\ell}$ kompensiert werden. Folglich stellt die Phase und der Rotationswinkel nur in einer gewissen Linear-kombination, z.B. $\varphi - \theta$, eine relevante SymmetrievARIABLE des Systems dar (das heißt, eine Transformation $\delta\varphi - \delta\theta \neq 0$ verändert den Zustand des Systems). Jede andere, unabhängige Kombination, z.B. $\varphi + \theta$, bleibt hingegen eine irrelevante Größe. Zur Veranschaulichung kann man sich die A-Phase wie ein System vorstellen, für das $\delta\varphi$ und $\delta\theta$ relevante Transformationen sind, dem jedoch die Fähigkeit fehlt, zwischen Phasentransformationen und Ortsraumrotationen zu unterscheiden. Eine Transformation ($\delta\varphi \neq 0, \delta\theta = 0$), ebenso wie eine Transformation ($\delta\varphi = 0, \delta\theta \neq 0$) verändern den Zustand des Systems (da in jedem dieser beiden Fällen die relevante Transformationsvariable $\delta\varphi - \delta\theta \neq 0$ ist), doch können diese beiden Transformationen den Zustand auf die gleiche Weise transformieren. Die Transformation ($\delta\varphi = c \neq 0, \delta\theta = 0$) verändert nämlich den Zustand auf die gleiche Weise wie die Transformation ($\delta\varphi = 0, \delta\theta = -c$), da die beiden veränderten Zustände durch die irrelevante Transformation ($\delta\varphi + \delta\theta = -2c, \delta\varphi - \delta\theta = 0$)⁽²³⁾ verknüpft sind.

In Bezug auf die Dynamik dieses Systems ist folgendes zu bemerken. In den Bewegungsgleichungen ergeben sich zusätzliche reaktive Ströme: wie schon erwähnt, tritt in der Kontinuitätsgleichung für ρ ein weiterer Strom auf, der von Inhomogenitäten in der Phase herrührt (Gl. (1.7)). Die Inhomogenitäten in θ ergeben einen zusätzlichen Impulsstrom⁽³⁾. Ferner, da nur eine Symmetrie gebrochen ist, aus einer Linearkombination von φ und θ bestehend, ist nur die eine Bewegungsgleichung für diese Linear-

kombination zu berücksichtigen (wie erwähnt, ist jede andere, unabhängige Linearkombination von φ und θ für das System eine irrelevante Größe). Diese Bewegungsgleichung ergibt sich aus der geeigneten Kombination der jeweiligen Bewegungsgleichungen von φ und θ . So können Variationen von θ durch Inhomogenitäten des chemischen Potentials, und wiederum, Variationen von φ durch Inhomogenitäten in $\hat{\ell} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})$ herrühren⁽³⁾. Die physikalische Konsequenz dieser besonderen Symmetriebrechung ist, daß sogenannte "Gauge-wheel" Effekte auftauchen: zum Beispiel können Oszillationen des $^3\text{He-A}$ Behälters Superströme in die $\hat{\ell}$ -Richtung hervorrufen⁽³⁾.

Die Brechung einer relativen Symmetrie, ebenso wie die Brechung einer "gewöhnlichen" Symmetrie, bewirkt das Auftauchen einer Goldstone-Mode. Sie besteht jedoch aus einer Kombination der Goldstone-Moden der einzelnen Symmetrien, aus denen die relative Symmetrie besteht. Dadurch hat ein System mit gebrochener relativer Symmetrie: a) gemeinsame Eigenschaften mit denjenigen Systemen, die die einzelnen Symmetrien unabhängig brechen; b) die charakteristische Eigenschaft, daß die relative SymmetrievARIABLE von jedem der Felder angetrieben werden kann, die für das Antreiben der einzelnen SymmetrievARIABLEN verantwortlich sind, ohne daß das System unterscheidet, welches das antreibende Feld ist. Wie sich diese zwei Eigenschaften in Systemen mit relativ gebrochener Eich-Translations-Symmetrie ergeben, wird in der vorliegenden Arbeit aus dem Formalismus der Hydrodynamik klar ersichtlich. Es sei noch hinzugefügt, daß diese charakteristische Dynamik einer relativen SymmetrievARIABLEN erst vor kurzem experimentell nachgewiesen wurde. Corruccini und Osheroff⁽⁵⁾ haben in $^3\text{He-A}_1$, welches die relative Symmetrie zwi-

schen Phasentransformationen und Spinraumrotationen bricht, Eigenschaften a) und b) in der Tat beobachtet: a) die Goldstone-Mode in $^3\text{He-A}_1$ ist sowohl eine Temperaturpropagation als auch eine Spinwelle, so daß das dynamische Verhalten dem einer Superflüssigkeit und dem eines Antiferromagneten ähnlich ist; b) die Spinwelle kann charakteristischerweise durch den Superstrom, das heißt durch Gradienten in der Phase, angeregt werden.

II. STATIK VON SYSTEMEN MIT GEBROCHENER RELATIVER EICH- TRANSLATIONS-SYMMETRIE.

In diesem Kapitel soll die Elastizität von Systemen mit gebrochener relativer Eich-Translations-Symmetrie (RETS) untersucht werden.

Hierzu ist es nötig, die verschiedenen Kräfte zu bestimmen, die einen deformierten Zustand dieser Systeme wieder ins Gleichgewicht treiben. Wir verstehen unter einem nicht deformierten Zustand den, in dem sich das System im totalen thermischen und mechanischen Gleichgewicht befindet. Durch eine Deformation ändern sich jedoch gewisse Freiheitsgrade des Körpers, zum Beispiel die Anordnung der Atome in einem Kristall, oder die Massendichte in einer Flüssigkeit, wodurch Kräfte auftreten, die das Gleichgewicht wieder herzustellen versuchen. Diese Kräfte werden durch die Wechselwirkung der Moleküle des Körpers untereinander hervorgerufen. In der Elastizitätstheorie als einer makroskopischen Theorie betrachten wir nur solche Abstände, die gegenüber den intermolekularen Abständen groß sind. Diese Überlegung setzt eine untere Grenze für das, was in diesem Rahmen als ein makroskopisch sinnvoller Bereich definiert werden kann.

Ich betrachte jetzt ganz allgemein ein System mit spontan gebrochenen Symmetrien. Die Existenz von lokalem Gleichgewicht rechtfertigt die Anwendung der Thermodynamik. Die Entropie S eines solchen Systems ist eine lokale Funktion der Erhaltungsgrößen (Energie (E), Masse (M), Impuls ($\vec{G}$), Spin ($\vec{S}$) und der

Gradienten der spontan gebrochenen Symmetrien $(\vec{\nabla}x^\alpha)^{(11,12)}$:

$$TdS = dE - p dV - \mu dM - \vec{v}^n \cdot d\vec{G} - \vec{\omega} \cdot d\vec{S} - V \vec{\phi}^\alpha \cdot d\vec{\nabla}x^\alpha \quad (2.2)$$

wo T , p , μ , $\vec{v}^n$ und $\vec{\omega}$ jeweils die Temperatur, der Druck, das chemische Potential, die Geschwindigkeit und die Rotationsgeschwindigkeit im Spinraum sind. V ist das Volumen und $\vec{\phi}^\alpha$ sind als die konjugierten Variablen zu $\vec{\nabla}x^\alpha$ definiert. In (2.2) wurde die Summe über alle möglichen Symmetrievariablen durch die Wiederholung des Indizes α impliziert. Diese Konvention wird im Laufe dieser Arbeit beibehalten werden. Da hier nur die Hydrodynamik homogener Systeme innerhalb eines makroskopischen Volumens betrachtet wird, ohne die Oberflächeneffekte zu berücksichtigen, können alle hydrodynamischen Variablen auf die Volumeneinheit bezogen werden. Somit erhält man aus (2.2) die Beziehung zwischen der Energiedichte (ϵ) und der Entropie- (s), Massen- (ρ), Impuls- ($\vec{g}$) und Spindichte ($\vec{s}$) und $\vec{\nabla}x^\alpha$:

$$d\epsilon = Tds + \mu d\rho + \vec{v}^n \cdot d\vec{g} + \vec{\omega} \cdot d\vec{s} + \vec{\phi}^\alpha \cdot d\vec{\nabla}x^\alpha \quad (2.3)$$

mit der Duhem-Gibbs-Relation für den Druck:

$$p = -\epsilon + Ts + \mu\rho + \vec{v}^n \cdot \vec{g} + \vec{\omega} \cdot \vec{s} \quad (2.4)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen an die thermodynamisch konjugierten Variablen in (2.3) $T, \mu, \vec{v}^n, \vec{\omega}$ und $\vec{\phi}^\alpha$ erhält man aus der Forderung, daß im Gleichgewicht die Entropie des Systems maximal ist:

$$\int s(\varepsilon, \rho, \vec{q}, \vec{\lambda}, \vec{\nabla} \times \alpha) dV = \text{Maximum} \quad (2.5)$$

mit den Bedingungen, daß für ein geschlossenes Systems die Energie, die Masse, der Impuls und der Spin konstant sind:

$$\int \varepsilon dV = \text{konstant} \quad (2.6)$$

$$\int \rho dV = \text{konstant} \quad (2.7)$$

$$\int \vec{q} dV = \text{konstant} \quad (2.8)$$

$$\int \vec{\lambda} dV = \text{konstant} \quad (2.9)$$

Ferner halte ich x^α auf den Rändern des Systems konstant. Mit den Lagrange-Parametern $c_1, c_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4$ ergibt (2.5) mit den obigen Bedingungen:

$$\int [\delta s + c_1 \delta \varepsilon + c_2 \delta \rho + \vec{c}_3 \cdot \delta \vec{q} + \vec{c}_4 \cdot \delta \vec{\lambda}] dV = 0 \quad (2.10)$$

Mit dem Ausdruck (2.3) fuer δs folgt:

$$\int \left[\left(\frac{1}{T} + c_1 \right) \delta \varepsilon + \left(-\frac{\mu}{T} + c_2 \right) \delta p + \left(-\frac{\vec{v}^n}{T} + \vec{c}_3 \right) \cdot \delta \vec{g} + \left(-\frac{\vec{\omega}}{T} + \vec{c}_4 \right) \cdot \delta \vec{\lambda} - \vec{\phi}^\alpha \cdot \delta \vec{\nabla} x^\alpha \right] dV = 0 \quad (2.11)$$

Der letzte Term in (2.11) ergibt:

$$\int \vec{\phi}^\alpha \cdot \delta \vec{\nabla} x^\alpha dV = \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{\phi}^\alpha) \delta x^\alpha dV - \oint \delta x^\alpha \vec{\phi}^\alpha \cdot d\vec{S} = \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{\phi}^\alpha) \delta x^\alpha dV \quad (2.12)$$

Da x^α auf der Oberfläche konstant gehalten wird, verschwindet das Oberflächenintegral in (2.12). Mit Gl. (2.12) ergibt (2.11):

$$\int \left[\left(\frac{1}{T} + c_1 \right) \delta \varepsilon + \left(-\frac{\mu}{T} + c_2 \right) \delta p + \left(-\frac{\vec{v}^n}{T} + \vec{c}_3 \right) \cdot \delta \vec{g} + \left(-\frac{\vec{\omega}}{T} + \vec{c}_4 \right) \cdot \delta \vec{\lambda} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\phi}^\alpha) \delta x^\alpha \right] dV = 0 \quad (2.13)$$

Aus der Unabhängigkeit der Variationen $\delta \varepsilon$, δp , $\delta \vec{g}$, $\delta \vec{\lambda}$ und δx^α in (2.13) folgt:

$$c_1 = -\frac{1}{T} \quad (2.14)$$

$$c_2 = \frac{\mu}{T} \quad (2.15)$$

$$\vec{c}_3 = \frac{\vec{v}^n}{T} \quad (2.16)$$

$$\vec{c}_4 = \frac{\vec{\omega}}{T} \quad (2.17)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\phi}^\alpha = 0 \quad , \quad (2.18)$$

so daß im Gleichgewicht T , μ , $\vec{v}^n$ und $\vec{\omega}$ konstant sind.

2.1. Gebrochene Eichinvarianz.

Der Ordnungsparameter eines Systems mit gebrochener Eichinvarianz ist durch die makroskopische Wellenfunktion des Systems, $\psi(\vec{r}) = \psi_0 e^{i\varphi(\vec{r})}$, gegeben⁽¹³⁾. $\varphi(\vec{r})$ ist die ortsabhängige Phase, und ψ_0 eine konstante Amplitude. Während eine räumlich homogene Veränderung der Phase die Energie des Systems nicht erhöht (Gl. (2.3)), bewirkt eine inhomogene Veränderung der Phase eine rückstellende Kraft in den Zustand konstanter Phase zurück. Bei konstant gehaltener Massen-, Entropie- und Impulsdichte muß diese Kraft im Limes beliebig langwelliger Deformationen verschwinden. Diesen Forderungen entsprechend ist nach Gl. (2.3) die Energie in einer Superflüssigkeit (ohne Spinfreiheitsgrade) durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$d\varepsilon = Tds + \mu d\varphi + \vec{v}^n \cdot d\vec{q} + \vec{j}^s \cdot d\vec{v}^s, \quad (2.20)$$

wo

$$\vec{v}^s = \frac{\hbar}{(2)m} \vec{\nabla} \varphi \quad (2.21)$$

die superfluide Geschwindigkeit ist, und m (bzw. $2m$) die Masse eines ^4He Atoms (bzw. zweier ^3He Atome) ist.

Die Gleichgewichtsbedingung für das Kräftefeld $\vec{j}^s$ unter der Randbedingung, daß die Phase an den Rändern des Integrations-

volumens festgehalten wird, ist durch (2.18) gegeben:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}^s = 0 \quad (2.22)$$

Ich schreibe die zu (2.20) äquivalente Gibbs-Relation für die Energie pro Masseneinheit $e = \mathcal{E}/\rho$:

$$de = T d\sigma + \frac{p}{\rho^2} d\rho + \vec{v}^n \cdot d\vec{v} + \frac{\vec{v}^s}{\rho} \cdot d\vec{v}^s \quad (2.23)$$

und bestimme nun von welchen thermodynamischen Variablen $(\rho, \sigma = s/\rho, \vec{v}^n, \vec{v}^s)$ jeweils die konjugierten Variablen einer Superflüssigkeit abhängen können. Die Abweichungen aus dem Gleichgewicht des Druckes δp und der Temperatur δT können durch Variationen der thermodynamischen Variablen $\delta\rho$ und $\delta\sigma$ gegeben sein, jedoch nicht von $\delta\vec{v}^n$ und $\delta\vec{v}^s$, da letztere umgekehrtes Zeitumkehrverhalten wie δp und δT haben. Die Abhängigkeit von quadratischen Termen in den Geschwindigkeiten, wie $\delta\vec{v}^n \cdot \delta\vec{v}^s$ und $(\delta\vec{v}^n)^2$ (oder $(\delta\vec{v}^s)^2$), werden in einer linearisierten Theorie in den kleinen Abweichungen δ vernachlässigt. So folgt:

$$\begin{aligned} \delta p &= \delta p(\delta\rho, \delta\sigma) \\ \delta T &= \delta T(\delta\rho, \delta\sigma) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ein analoges Argument führt zur Bestimmung der Funktionalabhängigkeit von $\delta\vec{g}$ und $\delta\vec{j}^s$, und zwar ist in linearer Näherung:

$$\delta g_i = \frac{\partial g_i}{\partial v_j^n} \delta v_j^n + \frac{\partial g_i}{\partial v_j^s} \delta v_j^s \quad (2.25)$$

$$\delta f_i^s = \frac{\partial f_i^s}{\partial v_j^n} \delta v_j^n + \frac{\partial f_i^s}{\partial v_j^s} \delta v_j^s$$

Durch eine Galilei-Transformation erhält man aus Gl.

(2.20) (siehe Anhang A), daß $\vec{g}$ und $\vec{j}^s$ nicht unabhängige Ströme sind, sondern⁽¹³⁾

$$\vec{g} = \rho \vec{v}^n + \vec{j}^s \quad (2.26)$$

Ferner sind die gekreuzten Terme in (2.25) durch die Maxwell-Relation $\partial g_i / \partial v_j^s = - \partial f_i^s / \partial v_j^n$ verknüpft. Somit reduzieren sich die vier elastischen Tensoren in (2.25) auf zwei unabhängige, die zum Beispiel als die Massendichte und der Tensor der superfluiden Dichte ρ_{ij}^s gegeben werden können:

$$\delta f_i^s = \rho_{ij}^s (\delta v_j^s - \delta v_j^n). \quad (2.27)$$

In der Beziehung (2.27) wurde die weitere Maxwell-Relation $\partial f_i^s / \partial v_j^s = \partial f_j^s / \partial v_i^s$ verwendet, so daß der Tensor ρ_{ij}^s symmetrisch ist. Im allgemeinsten Falle, daß eine Vorzugsrichtung vorhanden ist, können die Eigenwerte des superfluiden Dichtetensors voneinander verschieden sein, für eine isotrope Superflüssigkeit hingegen ist dieser Tensor durch einen Skalar ρ^s gegeben.

2.2. Gebrochene Translationssymmetrie.

In diesem Abschnitt werde ich Systeme mit gebrochener Translationssymmetrie in eine bestimmte Richtung betrachten⁽¹⁴⁾, wie es zum Beispiel in smektisch-A Flüssigkristallen der Fall ist. Deren Moleküle sind in einer Vorzugsrichtung periodisch angeordnet, während in den Ebenen senkrecht zu dieser Richtung der Körper die Elastizität einer Flüssigkeit hat.

Da jede Symmetriebrechung durch das Auftreten eines Ordnungsparameters gekennzeichnet ist, ergibt hier die periodisch variierende Massendichte^(24,25)

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 \left[1 + \rho_1 \cos \vec{q} \cdot \vec{r} \right] \quad (2.28)$$

den entsprechenden Ordnungsparameter

$$\psi(\vec{r}) \propto e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} + e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}}, \quad (2.29)$$

wo $\vec{q}$ die Vorzugsrichtung ist, in der die Translationssymmetrie gebrochen ist, $\vec{r}$ die Position.

Die SymmetrievARIABLE, die zu dem Satz der hydrodynamischen Größen hinzugefügt werden muß, ist die Komponente des Verschiebungsvektors $\vec{u}$ in die gegebene Vorzugsrichtung, $u = \vec{u} \cdot \vec{q} / |\vec{q}|$. Die beiden anderen Komponenten stellen nicht hydrodynamische Größen dar. Eine homogene Veränderung von $\vec{r}$, das heißt, ein uniformer Verschiebungsvektor, bedeutet lediglich eine Verschiebung des Systems als Ganzes und modifiziert daher den Zustand nicht. Bei inhomogenen Verschiebungen taucht jedoch eine rückstellende Kraft auf. Die Energie ist somit durch einen for-

mal ähnlichen Ausdruck gegeben wie Gl. (2.20) für eine Superflüssigkeit:

$$d\varepsilon = T ds + \mu d\rho + \vec{v}^n \cdot d\vec{q} + \vec{\lambda} \cdot d\vec{\nabla} u \quad (2.30)$$

In (2.30) ist u die Verschiebung in die einzige Richtung, in der die Translationssymmetrie gebrochen ist. Der Verzerrungstensor

$$u_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \quad (2.31)$$

und der Spannungstensor λ_{ij} eines dreidimensionalen Festkörpers "schrumpfen" in einem smektischen Kristall zu den Vektoren $\vec{\nabla} u$ und $\vec{\lambda}$ der Gl. (2.30) zusammen.

Die Gleichgewichtsbedingung für $\vec{\lambda}$ ist nach (2.18) bei festgehaltenem u an den Rändern des Integrationsvolumens:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\lambda} = 0 \quad (2.32)$$

analog wie für den Superstrom $\vec{j}^s$ einer Superflüssigkeit (vgl. (2.22)). Da die Divergenz der Spannung $\vec{\lambda}$ die Kraft darstellt, die auf die Volumeneinheit des Körpers wirkt, bedeutet (2.32) lediglich, daß im Gleichgewicht keine Kräfte wirken können.

(12)
Ich werde nun zeigen, daß in einem smektischen Kristall die beiden Komponenten der Spannung $\vec{\lambda}$ senkrecht zur Richtung, in der die Translationssymmetrie gebrochen ist, nicht proportional zum Verzerrungstensor $\vec{\nabla} u$ sind, sondern zu dessen zweiten Ableitung (das heißt, $\lambda_1 \sim k^3$). Ganz allgemein, ist die elastische Energie in Systemen mit gebrochener Translationssymmetrie

gegeben durch:

$$d\mathcal{E} = K_{ji} d\nabla_i u_j \quad (2.33)$$

Da uniforme Rotationen durch den antisymmetrischen Tensor

$(\nabla_i u_j - \nabla_j u_i) / 2$ beschrieben werden, ergibt die Invarianz des Systems unter uniformen Rotationen, daß $d\mathcal{E}$ in (2.33) nur durch Variationen im symmetrischen Tensor u_{ij} (Gl. (3.31)) gegeben ist:

$$d\mathcal{E} = \lambda_{ji} du_{ij} \quad (2.34)$$

mit $\lambda_{ji} = K_{ji} + K_{ij}$. Da ein smektischer Kristall zusätzlich invariant unter Scherungen der Ebenen übereinander ist, können uniforme Deformationen $\nabla_{\parallel} u_{\perp}$ die Energie nicht verändern ($\parallel$ und $\perp$ bezeichnen jeweils Richtungen parallel und senkrecht zu der, in der die Translationssymmetrie gebrochen ist). Folglich muß der Koeffizient dieser Deformation in (2.34), nämlich $\lambda_{\parallel\perp} = \lambda_{\perp\parallel}$, in niedrigster Ordnung im Wellenvektor k gleich Null sein, und, entsprechenderweise, verschwindet $\lambda_{\perp}$ in Gl. (2.30) in niedrigster Ordnung. Bei Berücksichtigung inhomogener Deformationen in $\nabla_{\perp} u_{\parallel}$ erhält $\lambda_{\perp}$ nichtverschwindende Terme höherer Ordnung in k . Der Term in k^2 ist jedoch aus folgender Überlegung auszuschließen. Eine räumliche Spiegelung, $\vec{q} \rightarrow -\vec{q}$, läßt den Ordnungsparameter (2.29) unverändert, so daß bei dieser Operation die Energie (2.20) ebenfalls unverändert bleibt. Da aber dabei $\vec{\nabla} u \rightarrow -\vec{\nabla} u$, darf $\vec{\lambda}$ in Gl (2.20) nur Terme mit ungeraden Potenzen in $(\vec{\nabla} u)$ haben. Daher ist

$$\lambda_{\perp} = \sigma(k^3) \quad (2.35)$$

In der Energie (2.30) können diese Terme im Limes $k \rightarrow 0$ vernachlässigt werden (wenn $\vec{k}$ nicht unmittelbar senkrecht zur Vorzugsrichtung gerichtet ist), und die Energie eines smektischen

Kristalls lautet also ⁽¹²⁾ :

$$d\varepsilon = T ds + \mu d\rho + \vec{v} \cdot d\vec{g} + \lambda_{||} d\nabla_{||} u \quad . \quad (2.36)$$

Die thermodynamisch konjugierten Variablen p , T , $\lambda_{||}$ hängen von den hydrodynamischen Variablen $(\rho, \sigma, \nabla_{||} u)$ ab, da letztere dasselbe Zeitumkehrverhalten haben, d.h.

$$\delta p = \delta p(\rho, \sigma, \nabla_{||} u) \quad (2.37)$$

$$\delta T = \delta T(\rho, \sigma, \nabla_{||} u)$$

$$\delta \lambda_{||} = \delta \lambda_{||}(\rho, \sigma, \nabla_{||} u) \quad .$$

2.3. Spontan gebrochene relative Eich-Translations-Symmetrie: der Fulde-Ferrell-Zustand.

In diesem Abschnitt untersuche ich die statischen Eigenschaften des FF-Zustandes in einer ^3He - $^4\text{HeII}$ Mischung. Wie in der Einleitung erwähnt, ist der FF-Zustand durch den Ordnungsparameter

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0 e^{i(\phi - \vec{q} \cdot \vec{r})} \quad (2.38)$$

gegeben, wo die Amplitude ψ_0 , die Phase ϕ und der Vektor $\vec{q}$ von der Position $\vec{r}$ unabhängig sind. Der Betrag ψ_0 gibt die Stärke der ^3He -Kondensation an; $|\vec{q}|$ ist der "pitch" der Inhomogenität.

Wie ich nun zeigen werde, bricht dieses System die relative Eich-Translations-Symmetrie (RETS). Die Argumente sind analog zu denen, die ich in der Erläuterung der relativen Eich-Ortsraumrotations-Symmetrie-Brechung der $^3\text{He-A}$ Phase in 1.2. gebraucht habe. Der Effekt einer Translation (in $\vec{q}$ -Richtung) auf den Ordnungsparameter (2.38) ist nämlich analog zu dem Effekt einer Rotation (um die $\hat{l}$ -Richtung) auf den Ordnungsparameter (1.10) von $^3\text{He-A}$. Das heißt, die Phase ϕ des Ordnungsparameters (2.38) kann sowohl durch eine Translation $\vec{q} \cdot \vec{r} \rightarrow \vec{q} \cdot \vec{r} + \vec{q} \cdot \delta \vec{u}$ wie durch eine Phasentransformation $\phi_3 \rightarrow \phi_3 + \delta \phi_3$ des ^3He -Kondensats verändert werden. Beide Symmetrioperationen, $\delta \phi_3$ und $\vec{q} \cdot \delta \vec{u}$, die für das System ununterscheidbar sind, stellen nur in einer Linearkombination,

$$\delta \phi = \delta \phi_3 - \vec{q} \cdot \delta \vec{u} \quad , \quad (2.39)$$

eine relevante Symmetrioperation dar. Eine Transformation $\delta \phi_3 \neq 0$ und $\vec{q} \cdot \delta \vec{u} \neq 0$, bei der jedoch $\delta \phi$ Null bleibt, stellt keine relevante Transformation des Systems dar (das heißt, jede andere, von (2.39) unabhängige Linearkombination der beiden Symmetrivariablen ϕ_3 und $\vec{q} \cdot \vec{u}$ ergibt eine irrelevante Größe). Das System bricht also eine relative Phasen-Translations-Symmetrie (RETS).

Im lokalen Gleichgewicht variiert der Ordnungsparameter, Gl. (2.38), in Raum und Zeit um $d\phi(\vec{r}, t)$. Die Energie des Systems wird durch inhomogene Variationen der Symmetrivariable, $d\vec{\nabla}\phi$,
um

$$d\epsilon = \vec{f}_3^s \cdot d\vec{v}_3^s \quad (2.40)$$

erhöht, wo

$$d\vec{v}_3^s = \frac{\hbar}{2m_3} d\vec{\nabla}\phi = \frac{\hbar}{2m_3} d(\vec{\nabla}\varphi_3 - q_i \vec{\nabla}u_i) \quad (2.41)$$

Unter Berücksichtigung der restlichen hydrodynamischen Variablen, ist die Energie des Systems gegeben durch ⁽²⁴⁾:

$$d\epsilon = Tds + \mu_3 d\rho_3 + \mu_4 d\rho_4 + \vec{v}^n \cdot d\vec{q} + \vec{\omega} \cdot d\vec{\lambda} + \vec{f}_3^s \cdot d\vec{v}_3^s + \vec{f}_4^s \cdot d\vec{v}_4^s, \quad (2.43)$$

wo

$$d\vec{v}_4^s = \frac{\hbar}{m_4} d\vec{\nabla}\varphi_4 \quad (2.45)$$

m_ν , ρ_ν , φ_ν und μ_ν ($\nu=3,4$) sind jeweils die atomaren Massen, Massendichten, Phasenvariablen und chemischen Potentiale von ^3He und ^4He .

In der vorliegenden Arbeit betrachte ich kleine statische und dynamische Variationen $d\phi(\vec{r},t)$, d.h. ich beschränke mich auf lineare Variationen des "pitches" ($\nabla_{\parallel}\phi$) und der Richtung ($\nabla_{\perp}\phi$) des konstanten $\vec{q}$ -Feldes (die Bezeichnungen $\parallel$ und $\perp$ definiere ich bezüglich $\vec{q}$). Somit werden Texturprobleme ausgeschlossen. [Im generellsten Falle, genau wie für smektische Kristalle (siehe 2.2.), erfordert die hydrodynamische Theorie nicht, daß $\nabla_{\perp}\phi$ (d.h. die Änderung der Vorzugsrichtung) klein sein muß, sondern daß diese Variation langsam zu erfolgen hat, d.h. $\nabla_{\perp}^2\phi$ muß klein sein. Wie nach Gl. (2.58) erläutert, ist der Grund hierfür, daß

eine Variation $\nabla_{\perp}\phi = \text{konstant}$ zur Energie nicht beiträgt, so daß der Term $\nabla_{\perp}^2\phi$ den niedrigsten nichtverschwindenden Beitrag liefert. Im generellsten Falle eines schnell variierenden ϕ -Feldes muß in Gl. (2.41) der konstante $\vec{q}$ -Vektor durch den lokalen "pitch" Vektor $\vec{q}(\vec{r}) = \vec{q} + d\vec{q}(\vec{r})$ ersetzt werden, $d\vec{q}(\vec{r}) = d\vec{\nabla}\phi$.]

Durch eine Galilei-Transformation (siehe Anhang A) erhält man aus Gl. (2.43):

$$\vec{g} = \rho \vec{v}^n + \vec{j}_3^s + \vec{j}_4^s \quad , \quad (2.46)$$

wo $\rho = \rho_3 + \rho_4$.

Ich betrachte nun die Abhängigkeit der thermodynamisch konjugierten Variablen von den hydrodynamischen Variablen. Die superfluiden Ströme $\vec{j}_3^s$ und $\vec{j}_4^s$ lassen sich entwickeln wie:

$$\delta j_{3i}^s = \frac{\partial j_{3i}^s}{\partial v_j^n} \delta v_j^n + \frac{\partial j_{3i}^s}{\partial v_{3j}^s} \delta v_{3j}^s + \frac{\partial j_{3i}^s}{\partial v_{4j}^s} \delta v_{4j}^s + \delta j_{3i}^q \quad (2.47)$$

$$\delta j_{4i}^s = \frac{\partial j_{4i}^s}{\partial v_j^n} \delta v_j^n + \frac{\partial j_{4i}^s}{\partial v_{3j}^s} \delta v_{3j}^s + \frac{\partial j_{4i}^s}{\partial v_{4j}^s} \delta v_{4j}^s + \delta j_{4i}^q \quad ,$$

wo die Ströme δj_{3i}^q und δj_{4i}^q (siehe unten, Gl. (2.52) definiert und diskutiert werden. Die sechs elastischen Tensoren aus Gln. (2.47) lassen sich auf drei unabhängige reduzieren mittels folgender Relationen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial j_{3i}^s}{\partial v_j^n} &= - \frac{\partial g_i}{\partial v_{3j}^s} = - \frac{\partial j_{3j}^s}{\partial v_{3i}^s} - \frac{\partial j_{4j}^s}{\partial v_{3i}^s} \\ \frac{\partial j_{4i}^s}{\partial v_j^n} &= - \frac{\partial g_i}{\partial v_{4j}^s} = - \frac{\partial j_{3j}^s}{\partial v_{4i}^s} - \frac{\partial j_{4j}^s}{\partial v_{4i}^s} \\ \frac{\partial j_{3i}^s}{\partial v_{4j}^s} &= \frac{\partial j_{4j}^s}{\partial v_{3i}^s} \quad , \end{aligned} \quad (2.48)$$

wo in Gln. (2.48) die erste Gleichheit eine Maxwell-Relation ist und fuer die zweite Gleichheit Gl. (2.46) verwendet wurde. So haben Gln. (2.47) die Gestalt:

$$\vec{\delta f}_3^s = \vec{\rho}_3^s \delta(\vec{v}_3^s - \vec{v}^n) + \vec{\rho}_x^s \delta(\vec{v}_4^s - \vec{v}^n) + \vec{\delta f}_3^q \quad (2.49)$$

$$\vec{\delta f}_4^s = \vec{\rho}_x^s \delta(\vec{v}_3^s - \vec{v}^n) + \vec{\rho}_4^s \delta(\vec{v}_4^s - \vec{v}^n) + \vec{\delta f}_4^q, \quad (2.50)$$

mit den Tensoren der superfluiden Dichten

$$\vec{\rho}_\alpha^s = (\rho_\alpha^s)_\parallel q_i q_j / |\vec{q}|^2 + (\rho_\alpha^s)_\perp (\delta_{ij} - q_i q_j / |\vec{q}|^2) \quad \alpha=3,4,x \quad (2.51)$$

Die Ströme $\vec{\delta f}_v^q$ ($v = 3,4$) in Gln. (2.49,50) beinhalten die Kopplungen an die skalaren Größen σ , ρ und $c = \rho_3/\rho$ (^3He -Konzentration):

$$\vec{\delta f}_v^q = \left(\vec{\rho}_v^s \frac{\delta \sigma}{\sigma} + \rho_v^p \frac{\delta \rho}{\rho} + \rho_v^c \delta c \right) \vec{v}^q, \quad (2.52).$$

wo $\vec{v}^q = (\hbar/2m_3)\vec{q}$. Diese Kopplungen ergeben sich im FF-Zustand aus dem Vorhandensein der Vorzugsrichtung $\vec{q}$ (bzw. $\vec{v}^q$), die ungerades Zeitumkehrverhalten besitzt, d.h. $\vec{q}(-t) = -\vec{q}(t)$. Dieses zeige ich nun, indem ich das Gegenteil annehme, d.h. $\vec{q}(-t) = \vec{q}(t)$. Sei das System im Gleichgewichtszustand, dessen Energie bei Zeitumkehr unverändert bleibt. Aufgrund der RETS-Brechung, wie in 2.3. erläutert, bleibt sie auch unverändert bei einer inhomogenen Variation der irrelevanten Größe $\varphi_3 + \vec{q} \cdot \vec{u}$. Jedoch, ist φ_3 eine Phase, so daß $\varphi_3(-t) = -\varphi_3(t)$, und die früher irrelevante Transformation ist nach der Zeitumkehr $\delta(-\nabla \varphi_3 + \vec{q} \cdot \nabla \vec{u})$, eine Transforma-

tion, die die Energie erhöht (Gl. (2.40)), wider der Aussage, daß die Energie bei Zeitumkehr unverändert bleibt. So folgt, daß $\vec{q}(-t) = -\vec{q}(t)$.

Da $\vec{j}_3^s$ die konjugierte Variable von $(\hbar/2m_3)\vec{\nabla}\varphi_3$ und von $(\hbar/2m_3)q_i\vec{\nabla}u_i$ ist, ist $\vec{j}_3^s$ sowohl ein Superstrom als auch eine Spannung. Die Dichten ρ_v^T , ρ_v^p und ρ_v^c aus Gl. (2.52) können als zum Teil bekannte thermodynamische Kreuzableitungen angesehen werden. Zum Beispiel, folgt aus Gl. (2.49):

$$\rho_3^T = - \left(\rho_3^s \right)_{\parallel} \frac{\sigma}{v^2} \frac{\partial (v_3^s)}{\partial \sigma} \Bigg|_{j_3^s, v_4^c = v^n, \rho, c}, \quad (2.53)$$

so daß ρ_3^T die thermische Veränderung des "pitches", dv_3^s , bei konstanter Spannung, $dj_3^s = 0$, angibt. So ist ρ_3^T mit dem thermischen Ausdehnungskoeffizienten eines Kristalls zu vergleichen.

Die Stärke, mit der Variationen in σ , ρ und c superfluide Gleichgewichtsströme erzeugen, sind durch die phänomenologischen Konstanten ρ_v^T , ρ_v^p , ρ_v^c gegeben. Im Rahmen der streng gültigen hydrodynamischen Theorie sind keine weiteren Aussagen möglich. Trotzdem können wir diese Kopplungen physikalisch interpretieren, indem wir Gl. (2.49) als die Variation des Stroms

$$\vec{j}_3^s = \vec{\rho}_3^s (\Delta \vec{v}^s - \vec{v}^n) + \vec{\rho}_x^s (\vec{v}_4^s - \vec{v}^n) \quad (2.54)$$

auffassen, wo $\Delta \vec{v}^s = \vec{v}_3^s - \vec{v}_0^s$. Mit $\vec{v}_3^s$ gegeben durch $(\hbar/2m_3)\vec{\nabla}(\phi - \vec{q} \cdot \vec{r})$, ist $\vec{v}_3^s$ die vorhandene totale Textur, während $\vec{v}_0^s$ die stromlose, spannungsfreie, stabile Gleichgewichtstextur ist, für die $\vec{j}_3^s = 0$ (wenn $\vec{v}^n = \vec{v}_4^s = 0$). Bei konstantem $\vec{v}^n$ und $\vec{v}_4^s$ resultiert eine Variation $\delta \vec{j}_3^s$ des Superstroms $\vec{j}_3^s$, Gl. (2.54), aus einer Variation von

$\vec{v}_3^s$, gegeben durch $(\hbar/2m_3)\vec{\nabla}\phi$, Gl. (2.41), oder von $\vec{v}_0^s$ über dessen funktionale Abhängigkeit von σ , ρ und c . Ein Vergleich mit Gl. (2.49) läßt erkennen, daß

$$\begin{aligned}\rho_3^T &= -(\rho_3^s)_{||} \frac{\sigma}{v_3^s} \frac{\partial v_0^s}{\partial \sigma} \Big|_{\rho, c} \\ \rho_3^\rho &= -(\rho_3^s)_{||} \frac{\rho}{v_3^s} \frac{\partial v_0^s}{\partial \rho} \Big|_{\sigma, c} \\ \rho_3^c &= -(\rho_3^s)_{||} \frac{1}{v_3^s} \frac{\partial v_0^s}{\partial c} \Big|_{\rho, \sigma}\end{aligned}\tag{2.55}$$

jeweils die Variationen des "Gleichgewichtspitches" bei Veränderungen von σ , ρ oder c angibt.

Als interessantes Ergebnis des FF-Zustandes halten wir fest, daß auf zwei verschiedene Weisen hier ein longitudinaler Superstrom erzeugt werden kann: a) wie üblich in Superflüssigkeiten, indem man die Phase ϕ aufwickelt und so v_3^s verändert; b) speziell im FF-Zustand, indem man die Gleichgewichtstextur v_0^s modifiziert durch Änderung der Temperatur, Dichte oder Konzentration, oder, wie mikroskopische Rechnungen zeigen⁽⁷⁾, durch Änderung der Magnetfeldstärke. In einem torusförmigen Behälter (der Querschnitt soll groß genug sein, um ein lokal uniformes tangentiales q -Feld zu haben) wird v_3^s durch topologische Bedingungen festgelegt. Eine Veränderung in v_0^s bedeutet dann, daß die unveränderte vorhandene Textur v_3^s einer gespannten Konfiguration entspricht. Es entsteht daher ein tangentialer superfluider Massenstrom, der zur Drehimpulserhaltung den Behälter in entgegengesetzte Richtung rotieren läßt.

Die analogen Terme in $\vec{j}_4^s$ (Gl. (2.50)), die ebenfalls durch die Symmetrie gestattet sind und ähnliche Struktur wie die bereits diskutierten Terme in $\vec{j}_3^s$ besitzen, können nicht mit derselben thermodynamischen Eindeutigkeit interpretiert werden. Es ist jedoch plausibel anzunehmen, daß das φ_4 -Feld nicht ebenfalls eine Gleichgewichtsinhomogenität entwickelt (mit einem $\vec{q}_4 \parallel \vec{q}$, unterschiedlicher Stärke). Mit dieser Annahme ist dann

$$\vec{j}_4^s = \vec{\rho}_x^s (\vec{v}_3^s - \vec{v}^n) + \vec{\rho}_4^s (\vec{v}_4^s - \vec{v}^n) \quad , \quad (2.56)$$

so daß

$$\delta j_4^q = \frac{(\rho_x^s)_\parallel}{(\rho_3^s)_\parallel} \delta j_3^q \quad , \quad (2.57)$$

wodurch die Zahl der unabhängigen elastischen Koeffizienten aus Gl. (2.52) durch drei reduziert wird. In anderen Worten, nehme ich an, daß der longitudinale Teil der superfluiden kinetischen Energie die Terme $(\Delta v_\parallel^s)^2$, $(v_4^s)_\parallel^2$ und $\Delta v_\parallel^s (v_4^s)_\parallel$ enthält. Im allgemeinen, jedoch nicht all zu wahrscheinlichen Fall muß $(v_4^s)_\parallel$ durch $(\Delta v^s)_4 = (v_4^s)_\parallel - (v_0^s)_\parallel$ ersetzt werden.

Eine weitere interessante Eigenschaft weist der FF-Zustand in Bezug auf die transversale Komponente des Superstroms $\vec{j}_3^s$ auf. Betrachten wir eine infinitesimale homogene Rotation um eine zu $\vec{q}$ senkrechte Richtung, so daß $\delta(\nabla_\perp u_\parallel - \nabla_\parallel u_\perp) \neq 0$. Gl. (2.43), oder expliziter Gl. (2.40), ergibt eine Energieänderung

$$d\epsilon = - \frac{\hbar}{2m_3} (j_3^s)_\perp d(\vec{q} \nabla_\perp \vec{u}) = \left(\frac{\hbar}{2m_3} \right)^2 \frac{(\rho_3^s)_\perp}{2} d(\vec{q} \nabla_\perp \vec{u})^2 \quad . \quad (2.58)$$

Unter Vernachlässigung der Einflüsse der Wände auf die Bestimmung der $\vec{q}$ -Richtung⁽⁸⁾ ("bulk"-System) muß diese Energieänderung jedoch Null sein. Daher muß $(\rho_x^s)_\perp = 0$ sein, und um die thermodynamische Stabilität zu sichern, die $(\rho_x^s)_\perp^2 < (\rho_z^s)_\perp (\rho_4^s)_\perp$ ⁽¹²⁾ fordert, ist $(\rho_x^s)_\perp = 0$. Es folgt also, daß der transversale ^3He Superstrom verschwindet. Wie schon im Falle eines smektischen Kristalls in 2.2. diskutiert, enthält die Energie im Prinzip auch Beiträge vierter Ordnung in $\vec{V}$, die die Deformation unter nichtuniformen Rotationen beschreiben. Anders als in smektischen Kristallen, sind hier Terme dritter Ordnung in der Energie nicht wegen der Invarianz unter räumlichen Spiegelreflektionen, sondern der unter Zeitumkehr verboten. In der Tat, während in smektischen Kristallen die Richtungen $\vec{q}$ und $-\vec{q}$ äquivalent sind, ist dieses bei dem Ordnungsparameter (2.38) nicht der Fall. Hingegen bleibt der Ordnungsparameter bei einer Zeitumkehr unverändert (oben zeigte ich, daß $\vec{v}_4(-t) = -\vec{v}_4(t)$, und $\varphi_3(-t) = -\varphi_3(t)$). Demzufolge ist $\vec{v}_3^s(-t) = -\vec{v}_3^s(t)$, und da die Energie (2.43) unverändert bleibt, darf $\vec{j}_3^s$ nur Terme mit ungeraden Potenzen in $\vec{v}_3^s$ haben. Aus der obigen Feststellung, daß $(\rho_z^s)_\perp = (\rho_x^s)_\perp = 0$, ist dann der transversale Superstrom von dritter Ordnung in $\vec{V}$, verschwindet also in niedrigster Ordnung.

Ich bestimme nun die Abhängigkeit der restlichen konjugierten Variablen (β, z, T, ω , wie unten definiert) von den hydrodynamischen Variablen. Hierzu führe ich neue Variable ein,

$$\zeta = \mu_3 - \mu_4$$

$$\mu = c\mu_3 + (1-c)\mu_4$$

Gl. (2.43) hat dann die Form:

$$d\varepsilon = T ds + \mu' d\rho + p_z dc + \vec{v}^n \cdot d\vec{g} + \vec{\omega} \cdot d\vec{\lambda} + \vec{f}_3^s \cdot d\vec{v}_3^s + \vec{f}_4^s \cdot d\vec{v}_4^s . \quad (2.59)$$

Die Energie pro Masseneinheit $e = \varepsilon/\rho$ ist

$$de = \frac{p_z}{\rho^2} d\rho + \frac{1}{2} dc + T d\sigma + \frac{\hbar}{2m_3} \omega d\xi + \vec{v}^n \cdot d\left(\frac{\vec{g}}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} \vec{f}_3^s \cdot d\vec{v}_3^s + \frac{1}{\rho} \vec{f}_4^s \cdot d\vec{v}_4^s , \quad (2.60)$$

wo die Duhem-Gibbs-Relation

$$p = -\varepsilon + Ts + \mu\rho + \vec{v}^n \cdot \vec{g} + \omega\Lambda \quad (2.61)$$

verwendet wurde, $\sigma = s/\rho$, und wo $\xi = \Lambda/(\rho\hbar/2m_3)$ den Quotienten der longitudinalen Magnetisierung (parallel zum Magnetfeld) und der Saturationsmagnetisierung darstellt.

Die konjugierten Variablen K_i (p, z, T, ω) hängen im Prinzip von allen hydrodynamischen Variablen V_i (ρ, c, σ, ξ) ab:

$$\delta K_i = \frac{\partial K_i}{\partial V_j} \delta V_j , \quad i, j = 1, \dots, 4 . \quad (2.62)$$

Die hiermit definierte Matrix thermodynamischer Ableitungen ist wegen Maxwell-Relationen, $\partial K_i / \partial V_j = \partial K_j / \partial V_i$, aus Gl. (2.60), symmetrisch. Die Außerdiagonalelemente sind in verdünnten ^3He - ^4He Mischungen kleine Größen und werden vernachlässigt: a) die

Ableitungen $(\partial T / \partial \rho)_{c, \sigma, \xi}$, $(\partial T / \partial c)_{\rho, \sigma, \xi}$ (proportional zu kleinen thermischen Ausdehnungskoeffizienten) und $(\partial p / \partial c)_{\rho, \sigma, \xi}$ ergeben in Refn. (13, 26) für $c \ll 1$ unbedeutende Korrekturen; b) die gemessene magnetische Suszeptibilität unterscheidet sich unwesentlich von der eines idealen Fermigas⁽²⁷⁾, so daß $\delta \omega$ vorwiegend von $\delta \xi$ gegeben ist, und die Ableitungen $(\partial \omega / \partial \rho)_{c, \sigma, \xi}$, $(\partial \omega / \partial c)_{\rho, \sigma, \xi}$ und $(\partial \omega / \partial \sigma)_{\rho, c, \xi}$, bei denen ξ konstant gehalten wird, vernachlässigt werden können.

Ferner ergeben Maxwell-Relationen folgende Beziehungen:

$$\left. \frac{\partial b}{\partial (\vec{v}_3^s - \vec{v}^n)} \right|_{\rho, c, \sigma, \xi, \vec{v}_4^s - \vec{v}^n} = \rho \left. \frac{\partial f_3^s}{\partial \rho} \right|_{c, \sigma, \xi, \vec{v}_3^s - \vec{v}^n, \vec{v}_4^s - \vec{v}^n} = \rho_3^p \vec{v}_3^q \quad (2.63)$$

$$\left. \frac{\partial b}{\partial (\vec{v}_4^s - \vec{v}^n)} \right|_{\dots} = \rho \left. \frac{\partial f_4^s}{\partial \rho} \right|_{\dots} = \rho_4^p \vec{v}_4^q \quad (2.64)$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial (\vec{v}_3^s - \vec{v}^n)} \right|_{\dots} = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial f_3^s}{\partial c} \right|_{\dots} = \frac{\rho_3^c}{\rho} \vec{v}_3^q \quad (2.65)$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial (\vec{v}_4^s - \vec{v}^n)} \right|_{\dots} = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial f_4^s}{\partial c} \right|_{\dots} = \frac{\rho_4^c}{\rho} \vec{v}_4^q \quad (2.66)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial (\vec{v}_3^s - \vec{v}^n)} \right|_{\dots} = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial f_3^s}{\partial \sigma} \right|_{\dots} = \frac{1}{\rho \sigma} \rho_3^T \vec{v}_3^q \quad (2.67)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial (\vec{v}_4^s - \vec{v}^n)} \right|_{\dots} = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial f_4^s}{\partial \sigma} \right|_{\dots} = \frac{1}{\rho \sigma} \rho_4^T \vec{v}_4^q \quad (2.68)$$

So folgt schließlich:

$$\delta p = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{c, \sigma, \xi, \dots} \delta \rho + \rho_3^p \vec{v}_3^q \cdot (\vec{v}_3^s - \vec{v}^n) + \rho_4^p \vec{v}_4^q \cdot (\vec{v}_4^s - \vec{v}^n) \quad (2.69)$$

$$\delta z = \left. \frac{\partial z}{\partial c} \right|_{\rho, \sigma, \xi, \dots} \delta c + \frac{\rho_3^c}{\rho} \vec{v}_3^q \cdot (\vec{v}_3^s - \vec{v}^n) + \frac{\rho_4^c}{\rho} \vec{v}_4^q \cdot (\vec{v}_4^s - \vec{v}^n) \quad (2.70)$$

$$\delta T = \left. \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right|_{\rho, c, \xi, \dots} \delta \sigma + \frac{\rho_3}{\rho \sigma} \vec{v}_3 \cdot (\vec{v}_3^s - \vec{v}^n) + \frac{\rho_4}{\rho \sigma} \vec{v}_4 \cdot (\vec{v}_4^s - \vec{v}^n) \quad (2.71)$$

$$\delta \omega = \left. \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right|_{\rho, c, \sigma, \dots} \delta \xi \quad (2.72)$$

Die chemischen Potentiale $\delta \mu_3$ und $\delta \mu_4$ kann man ausdrücken mittels Gln. (2.69-72) und der aus Gln. (2.59, 61) erhaltenen Duhem-Gibbs-Relation

$$\delta p = \rho_3 \delta \mu_3 + \rho_4 \delta \mu_4 + s \delta T + \lambda \delta \omega \quad (2.73)$$

2.4. Der stromtragende Zustand in $^4\text{He-II}$.

In 2.1. wurde bereits die Statik einer Superflüssigkeit erläutert. In der vorliegenden Arbeit beschäftige ich mich mit dem stromtragenden Zustand von ^4He , den ich als CC-Zustand ("current-carrying") bezeichne. Er ist durch das Auftreten eines im Gleichgewicht nicht verschwindenden Gegenstroms von v^n und v^s definiert:

$$w_0 = v_0^n - v_0^s \neq 0 \quad (2.74)$$

oder $v_0^s \neq 0$, so daß $\vec{v}_0^s = -(\rho^s/\rho) w_0 \neq 0$.

Die Energie in ^4He in einem mit der superfluiden Ge-

schwindigkeit sich bewegenden Inertialsystem⁽¹²⁾ (s. Anhang A)
ist:

$$d\epsilon_s = T ds + \mu_s d\rho + (\vec{v}^n - \vec{v}^s) \cdot d(\vec{g} - \rho \vec{v}^s) \quad (2.75)$$

$$= T ds + \mu_s d\rho + \vec{w} \cdot d(\rho^n \vec{w}) \quad (2.76)$$

wo ϵ_s und μ_s die Energiedichte und das chemische Potential im lokalen System $\vec{v}^s=0$ sind. Für einen CC-Zustand, der nur eine kleine Abweichung des isotropen $v_o^s=0$ Zustandes darstellt, ist in Gl. (2.76) die Betrachtung einer skalaren Dichte ρ^n statt des Tensors $\vec{\rho}^n$ berechtigt. Mit der Gibbs-Duhem-Relation

$$p = -\epsilon_s + Ts + \mu_s \rho + \rho^n w^2 \quad (2.77)$$

erhält man aus (2.76) für das chemische Potential

$$\delta\mu_s = \frac{1}{\rho} \delta p - s \delta T - \frac{\rho^n}{2\rho} \delta(w^2) \quad (2.78)$$

Gl. (2.78) zeigt, daß $\mu_s = \mu_s(p, T, w^2)$, nur eine Funktion von p , T , und w^2 ist. In einem anderen Inertialsystem kann das chemische Potential, eine nichtgalileische Größe, auch von $\vec{w} \cdot \vec{v}$ abhängen. So ist zum Beispiel μ , das chemische Potential im Laborsystem, gegeben durch (s. Anhang A):

$$\mu = \mu_s - \vec{v}^n \cdot \vec{v}^s + \frac{(v^s)^2}{2} \quad (2.79)$$

Ich werde als hydrodynamische unabhängige Variable p , T

und wählen. In einer linearen Theorie für $w_c = 0$ hängen die Variablen ρ und σ nur von p und T ab. Hingegen, wenn $w_c \neq 0$, können ρ und σ von einem aus $\vec{w}$ gebildeten Skalaren, wie $(\vec{w})^2$ oder $\vec{w} \cdot \vec{v}$ abhängen. Da ρ und σ unter Galilei-Transformationen invariant bleiben, ist ihre Abhängigkeit von $\vec{w} \cdot \vec{v}$ jedoch auszuschließen. Somit ist

$$\delta\rho = \delta\rho(p, T) + \left. \frac{\partial\rho}{\partial w^2} \right|_{p, T} \delta(w^2) \quad (2.80)$$

$$\delta\sigma = \delta\sigma(p, T) + \left. \frac{\partial\sigma}{\partial w^2} \right|_{p, T} \delta(w^2) \quad (2.81)$$

Aus Gl. (2.78) ergeben sich die Maxwell-Relationen:

$$\left. \frac{\partial\rho}{\partial w^2} \right|_{p, T} = \frac{\rho^2}{2} \left. \frac{\partial F'/\rho}{\partial p} \right|_{T, w^2} \quad (2.82)$$

$$\left. \frac{\partial\sigma}{\partial w^2} \right|_{p, T} = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial F'/\rho}{\partial T} \right|_{p, w^2}$$

so daß folgende Beziehungen zwischen den Variablen gelten:

$$\begin{bmatrix} \delta(-1/\rho) \\ \delta\sigma \\ \frac{1}{2} \delta(F'/\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial\rho}{\partial p} & \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial\rho}{\partial T} & \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial\rho}{\partial w^2} \\ \frac{\partial\sigma}{\partial p} & \frac{\partial\sigma}{\partial T} & \frac{\partial\sigma}{\partial w^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F'/\rho}{\partial p} & \frac{1}{2} \frac{\partial F'/\rho}{\partial T} & \frac{1}{2} \frac{\partial F'/\rho}{\partial w^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p \\ \delta T \\ \delta(w^2) \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Diese Matrix thermodynamischer Ableitungen ist aufgrund von Maxwell-Relationen symmetrisch. Die Ableitungen $\left. \frac{\partial\rho}{\partial T} \right|_{p, w^2}$ und $\left. \frac{\partial\sigma}{\partial p} \right|_{T, w^2}$, die proportional zu dem kleinen thermischen Ausdeh-

nungskoeffizient sind ⁽¹⁾, werde ich vernachlässigen.

Zum späteren Vergleich mit dem FF-Zustand sei hier noch erwähnt, daß die soeben bestimmten Kopplungen der konjugierten Variablen an die unabhängigen Variablen im CC-Zustand analog zu denen im FF-Zustand sind. Im Anhang H wird gezeigt, daß die Koeffizienten ρ^T und ρ^p jeweils $\partial \langle p^* | p \rangle / \partial T$ und $\partial \langle p^* | p \rangle / \partial p$ entsprechen.

III. DYNAMIK DES FULDE-FERRELL-ZUSTANDES.

Ich werde in diesem Kapitel die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen des FF-Zustandes aufstellen und lösen. In den Bewegungsgleichungen behalte ich nur Terme in niedrigster Ordnung im Wellenvektor bei. Das heißt, ich betrachte hinreichend langwellige Auslenkungen aus dem Gleichgewicht, so daß dissipative Effekte, die eine Ordnung höher in der k -Entwicklung sind^(12,13), beliebig klein sind. Ferner betrachte ich nur kleine Fluktuationen um den Gleichgewichtszustand, so daß die Bewegungsgleichungen in den Auslenkungen aus dem Gleichgewicht linearisiert werden.

4.1. Die Bewegungsgleichungen.

Zur Aufstellung der hydrodynamischen Gleichungen bediene ich mich der sogenannten Standard-prozedur der Hydrodynamik, die von Khalatnikov⁽¹³⁾ und Puttermann⁽²⁸⁾ erörtert und in verschiedenen hydrodynamischen Theorien für $^4\text{HeII}$ ⁽¹³⁾, ^3He ⁽²⁹⁾, smektische⁽¹²⁾, nematische^(11,12), superfluide⁽²²⁾ und normale⁽¹²⁾ Kristalle verwendet wurde.

Die fünf Erhaltungsgrößen einer zweikomponentigen normalen magnetischen Euler-Flüssigkeit, nämlich die Energie-, zwei Massen-, Impuls- und Spindichte (die beiden letzteren sind vektorielle Größen) ergeben neun Erhaltungssätze, die für die Dynamik des FF-Zustandes in der ^3He - ^4He Mischung berücksichtigt werden

müssen. Die Bewegungsgleichungen der Erhaltungsgrößen und die zusätzliche Gleichung für die Entropiedichte lauten:

$$\dot{\epsilon} + \vec{\nabla} \cdot \vec{Q} = 0 \quad (3.1)$$

$$\dot{\rho}_3 + \vec{\nabla} \cdot \vec{f}_3 = 0 \quad (3.2)$$

$$\dot{\rho}_4 + \vec{\nabla} \cdot \vec{f}_4 = 0 \quad (3.3)$$

$$\dot{g}_i + \nabla_i p + \nabla_j \pi_{ij} = 0 \quad (3.4)$$

$$\dot{\lambda}_i + \nabla_j h_{ij} = 0 \quad (3.5)$$

$$\dot{s} + \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0 \quad (3.6)$$

wo die jeweiligen Ströme $\vec{Q}, \vec{f}_3, \vec{f}_4, \pi_{ij}, h_{ij}$ und $\vec{f}$ durch die Standardprozedur der Hydrodynamik^(13,22) bestimmt werden müssen. Da hier kein interner Drehimpuls vorhanden ist und ferner $\pi_{ij} = \pi_{ji}$ (s. Gl. (3.19)), ist nach Ref. (11) mit Gl. (3.4) die Erhaltung des Drehimpulses

$$(\Gamma_i \dot{g}_j - \Gamma_j \dot{g}_i) + \nabla_k (\Gamma_i \pi_{jk} - \Gamma_j \pi_{ik}) = 0$$

bereits garantiert.

Die Gesamtmasse $M = \int \rho \, dV$, wo $\rho = \rho_3 + \rho_4$ und der Gesamtimpuls $\vec{G} = \int \vec{g} \, dV$ des Systems sind durch die Beziehung

$$\vec{G} = M \vec{R} \quad (3.7)$$

verknüpft, wo $\vec{R} = M^{-1} \int \rho \vec{r} \, dV$ die Koordinate des Massenschwer-

punktes ist. Aus (3.7) folgt:

$$\int \vec{g} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \vec{r} dV \quad . \quad (3.8)$$

Mit $\dot{\rho} = \dot{\rho}_3 + \dot{\rho}_4$ und Gln. (3.2,3) ist die Impulsdichte $\vec{g}$ die Summe der Massenströme $\vec{j}_3$ und $\vec{j}_4$:

$$\vec{g} = \vec{j}_3 + \vec{j}_4 \quad . \quad (3.9)$$

Wie in 2.3. erläutert, stellt die Phasentransformation $\delta\varphi_3$ und die Verschiebung $\vec{q} \cdot \delta\vec{u}$ nicht unabhängig von einander relevante Symmetrieoperationen dar. Nur eine Linearkombination, $\varphi_3 - \vec{q} \cdot \vec{u}$, ist die einzige zu betrachtende SymmetrievARIABLE. Deren Bewegungsgleichung erhalte ich aus der Kombination der einzelnen Gleichungen für φ_3 und $\vec{u}$ in Systemen mit jeweils gebrochener ⁽¹³⁾ Phasen- und ⁽²²⁾ Translationssymmetrie :

$$\frac{\hbar}{2m_3} \dot{\varphi}_3 + \mu_3 = 0 \quad (3.10)$$

$$\dot{\vec{u}} - \vec{v}^n = 0 \quad . \quad (3.11)$$

Hieraus ergibt sich für $\phi = \varphi_3 - \vec{q} \cdot \vec{u}$ die Bewegungsgleichung:

$$\frac{\hbar}{2m_3} \dot{\phi} + \mu_3 + \vec{v}^q \cdot \vec{v}^n = 0 \quad , \quad (3.12)$$

oder für $\vec{v}_3^s = \frac{\hbar}{2m_3} \vec{\nabla} \phi$:

$$\dot{v}_{3,i}^s + \nabla_i \mu_3 + \vec{v}^q \cdot \nabla_i \vec{v}^n = 0 \quad . \quad (3.13)$$

Diese Gleichung kann als Kennzeichen eines Zustandes mit gebrochener RETS angesehen werden. Sie besagt nämlich, daß ein Superstrom nicht nur durch ein inhomogenes chemisches Potential in Gang gesetzt wird, sondern ebenfalls durch ein inhomogenes Geschwindigkeitsfeld.

Für die zweite SymmetrievARIABLE des Systems, nämlich φ_4 , ist die Bewegungsgleichung⁽¹³⁾:

$$\frac{\hbar}{m_4} \dot{\varphi}_4 + \mu_4 = 0 \quad , \quad (3.14)$$

oder für $\vec{v}_4^s = \frac{\hbar}{m_4} \vec{\nabla} \varphi_4$:

$$\dot{v}_{4i}^s + \nabla_i \mu_4 = 0 \quad . \quad (3.15)$$

Gleichungen (3.2-6,13,15) stellen den vollen Satz hydrodynamischer Gleichungen des FF-Zustandes dar. Mit der Standardprozedur der Hydrodynamik bestimme ich im Anhang B die reaktiven Flüsse und erhalte:

$$Q_j = T f_j + w_i h_{ij} + \mu_3 f_{3j} + \mu_4 f_{4j} + v_i^n \pi_{ij} \quad (3.16)$$

$$\vec{f}_3 = \rho_3 \vec{v}^n + \vec{f}_3^s \quad (3.17)$$

$$\vec{f}_4 = \rho_4 \vec{v}^n + \vec{f}_4^s \quad (3.18)$$

$$\pi_{ij} = v_j^n g_i + f_{3j}^s v_i^n \quad (3.19)$$

$$h_{ij} = s_i v_j^n \quad (3.20)$$

$$\vec{f} = s \vec{v}^n \quad . \quad (3.21)$$

3.2. Die Moden.

Ich wende mich nun der Lösung der hydrodynamischen Gln. (3.2-6,13,15) zu. Es seien die Fluktuationen jeder Variablen V als ebene Wellen angesetzt,

$$V(\vec{r}, t) = V_0 + \delta V e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad , \quad (3.22)$$

so daß das Differentialgleichungssystem (3.2-6,13,15) mit Gln. (3.16-21) in das folgende linearisierte algebraische Gleichungssystem umgewandelt wird:

$$-u \delta \rho_3 + (\rho_3 \vec{v}^n + \delta \vec{f}_3^s) \cdot \hat{k} = 0 \quad (3.23)$$

$$-u \delta \rho_4 + (\rho_4 \vec{v}^n + \delta \vec{f}_4^s) \cdot \hat{k} = 0 \quad (3.24)$$

$$-u (\rho \vec{v}^n + \delta \vec{f}_3^s + \delta \vec{f}_4^s) + \delta p \hat{k} + (\hat{k} \cdot \delta \vec{f}_3^s) \vec{v}^q = 0 \quad (3.25)$$

$$-u \left(\frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta \xi}{\xi} \right) + \vec{v}^n \cdot \hat{k} = 0 \quad (3.26)$$

$$-u \left(\frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta \sigma}{\sigma} \right) + \vec{v}^n \cdot \hat{k} = 0 \quad (3.27)$$

$$-u \vec{v}_3^s + (\delta \mu_3 + \vec{v}^q \cdot \vec{v}^n) \hat{k} = 0 \quad (3.28)$$

$$-u \vec{v}_4^s + \delta \mu_4 \hat{k} = 0 \quad (3.29)$$

Hier ist $u = \omega/|\vec{k}|$ die Geschwindigkeit, $\vec{\delta f}_3^s$ und $\vec{\delta f}_4^s$ sind jeweils durch Gln. (2.49,50) gegeben. Die Abweichungen $\delta\mu_3$ und $\delta\mu_4$ der chemischen Potentiale vom absoluten Gleichgewichtszustand lassen sich ausdrücken mittels der aus Gln. (2.59,61) erhaltenen Duhem-Gibbs-Relation

$$\delta p = \rho_3 \delta\mu_3 + \rho_4 \delta\mu_4 + s \delta T + \lambda \delta\omega \quad (3.30)$$

und der Gln. (2.69-72):

$$\begin{aligned} \delta\mu_3 &= \frac{1}{\rho} \delta p + (1-c) \delta\epsilon - \sigma \delta T - \left(\frac{\hbar}{2m_3}\right) \xi \delta\omega \\ &= c^2 \frac{\delta p}{\rho} + (1-c) \frac{\partial \epsilon}{\partial c} \delta c - \sigma^2 \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\delta \sigma}{\sigma} - \frac{\hbar}{2m_3} \xi^2 \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\delta \xi}{\xi} \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left[\rho_3^p + (1-c) \rho_3^c - \rho_3^T \right] \vec{v}^q \cdot (\vec{v}_3^s - \vec{v}^n) + \frac{1}{\rho} \left[\rho_4^p + (1-c) \rho_4^c - \rho_4^T \right] \vec{v}^q \cdot (\vec{v}_4^s - \vec{v}^n) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \delta\mu_4 &= \frac{1}{\rho} \delta p - c \delta\epsilon - \sigma \delta T - \frac{\hbar}{2m_3} \xi \delta\omega \\ &= c^2 \frac{\delta p}{\rho} - c \frac{\partial \epsilon}{\partial c} \delta c - \sigma^2 \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\delta \sigma}{\sigma} - \frac{\hbar}{2m_3} \xi^2 \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\delta \xi}{\xi} \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left[\rho_3^p - c \rho_3^c - \rho_3^T \right] \vec{v}^q \cdot (\vec{v}_3^s - \vec{v}^n) + \frac{1}{\rho} \left[\rho_4^p - c \rho_4^c - \rho_4^T \right] \vec{v}^q \cdot (\vec{v}_4^s - \vec{v}^n), \end{aligned} \quad (3.32)$$

oder

$$\delta\mu_4 = \delta\mu_3 - \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial c} \delta c + \frac{\rho_3^c}{\rho} \vec{v}^q \cdot (\vec{v}_3^s - \vec{v}^n) + \frac{\rho_4^c}{\rho} \vec{v}^q \cdot (\vec{v}_4^s - \vec{v}^n) \right] \quad (3.33)$$

Die Bestimmung der neun Eigenwerte für die Geschwindig-

keit u der neun hydrodynamischen Moden aus Gln. (3.23-29) führe ich ausführlich im Anhang C durch. Hier präsentiere ich die Resultate.

Aus Gln. (3.25,26,27) ergibt sich sofort, daß die Fluktuationen in $(\delta\xi/\xi - \delta\sigma/\sigma)$ und in δq_π (q_π ist die Komponente von $\vec{q}$ senkrecht zur $(\vec{k}, \vec{q})$ -Ebene) den Eigenwert

$$\mu = 0 \quad (3.34)$$

haben (unter Berücksichtigung von dissipativen Termen in den Bewegungsgleichungen entsprechen sie Diffusionen).

Die restlichen sieben Moden ergeben sich aus der Lösung der entsprechenden 7x7 Matrix (s. Anhang C). Es ist also sinnvoll, die langen Ausdrücke, die sich hieraus ergeben, zu reduzieren, indem man die Gleichungen nach den folgenden kleinen Parametern des Systems entwickelt:

$$c, \frac{c_c^2}{c_p^2}, \frac{c_T^2}{c_p^2}, \frac{c_m^2}{c_p^2}, \frac{(vq)^2}{c_p^2}, \frac{c_T^2}{c_c^2}, \frac{c_m^2}{c_c^2}, \frac{(vq)^2}{c_c^2}, \quad (3.35)$$

wo ich definiert habe:

$$c_p^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{c, \sigma, \xi} \quad (3.36)$$

$$c_c^2 = \left. \frac{\partial \xi}{\partial c} \right|_{\rho, \sigma, \xi} \quad (3.37)$$

$$c_T^2 = \sigma^2 \left. \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right|_{\rho, c, \xi} \quad (3.38)$$

$$c_m^2 = \frac{\hbar}{2m_3} \xi^2 \left. \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right|_{\rho, c, \sigma} \quad (3.39)$$

Mit den zur Zeit vorhandenen experimentellen Daten ⁽²⁷⁾ in $^3\text{He}-^4\text{He}$ Mischungen können alle Größen aus Gl. (3.35) auf eine Größenordnung $\lesssim 10^{-2}$ geschätzt werden. So ist $c < 6\%$, $c_p \simeq 10^4 \text{ cm/sec}$, $c_c \simeq 10^3 \text{ cm/sec}$, $c_r \simeq 1 \text{ cm/sec}$ (letzterer Wert für die bekannten Phasen von ^3He bei $T \sim 2 \text{ mK}$), $c_m \simeq \xi \cdot 10^3 \text{ cm/sec}$ (wo die relative Magnetisierung ξ in magnetischen Feldern von $\sim 10^4 \text{ G}$ je nach Konzentration wesentlich kleiner als 10^{-1} sein sollte ⁽²⁷⁾), $v^4 \sim \mu H / m_3 v_F \simeq 10 \text{ cm/sec}$ ⁽²⁷⁾ (μH ist die magnetische Energie, v_F die Fermi Geschwindigkeit). Im nun folgenden werden also Terme der Größe $\mathcal{O}(p_i)$ vernachlässigt, wo p_i die kleinen Parameter aus Gl. (3.35) sind.

Ich betrachte zuerst das (isotrope) Modenspektrum oberhalb von T_c so daß $\rho_3^s = 0$, $\rho_3^n = \rho_3$, $\rho_4^s = \rho^s$, $\rho^n = \rho_4^n + \rho_3$. Gln. (C.13-17) ergeben das wesentlich einfachere System:

$$\begin{pmatrix} -u^2 c + \frac{\rho_3}{\rho} c_p^2 & -u^2 \rho + \frac{(\rho_3)^2}{\rho^n} c_c^2 \\ (-1+c)u^2 + \frac{\rho_4^s}{\rho} c_p^2 + \frac{\rho_4^n}{\rho} c_p^2 & u^2 \rho + \frac{\rho_4^n \rho_3}{\rho^n} c_c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \delta c \end{pmatrix} = 0, \quad (3.40)$$

während die Scherungen v_j^n , mit $u = 0$, entkoppeln. Aus Gln.

(3.40) ergeben sich die zwei Geschwindigkeiten

$$u_1^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_{c, \sigma, \xi} \quad (3.41)$$

$$u_2^2 = \frac{\rho^s}{\rho^n} c^2 \frac{\partial \xi}{\partial c} \Big|_{\rho, \sigma, \xi} \quad (3.42)$$

Sie entsprechen jeweils Dichte- und Konzentrationswellen, wie aus (3.40) resultiert (erster und zweiter Schall). Unterhalb des Übergangs T_c in den FF-Zustand erhalten u_1^2 und u_2^2 jeweils

kleine Korrekturen der Größe $(v^q/c_p)^2$, $(c_T/c_p)^2$ und $(v^q/c_c)^2$, $(c_T/c_c)^2$, die $< 10^{-4}$ sind.

Ich wende mich nun der Goldstone-Mode des FF-Zustands in der unmittelbaren Nähe von T_c zu (Ginzburg-Landau-Bereich). Die im Kapitel II eingeführten Dichten $\rho_v^{\leftrightarrow}, \rho_x^{\leftrightarrow}, \rho_v^T, \rho_v^p, \rho_v^c$ ($v=3,4$), verschwinden oberhalb von T_c , so daß ich die Geschwindigkeit u_{GH} der Goldstone-Mode wenig unterhalb von T_c in erster Ordnung in den kleinen Quotienten dieser Dichten und ρ_3 ausdrücken werde. Nach einigen längeren Umformungen (s. Anhang C) gelangt man zum Ausdruck:

$$\left(\frac{u}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{u}{\gamma}\right)^2 \frac{\rho_3^T}{\rho_3} v^q + \left[-\frac{\rho_3^s}{\rho_3^2} (c_T^2 + c_m^2) - \frac{\rho_3^s}{(\rho^\eta)_1} (1-\gamma^2)(v^q)^2 + \left(\frac{\rho_3^T}{\rho_3} v^q\right)^2 \right] = 0, \quad (3.43)$$

mit $\gamma = \vec{v}^q \cdot \hat{k} / v^q$, und es folgt:

$$u_{GH} = \gamma \left[-\frac{\rho_3^T}{\rho_3} v^q \pm \sqrt{\frac{\rho_3^s}{\rho_3^2} (c_T^2 + c_m^2) + \frac{\rho_3^s}{(\rho^\eta)_1} (1-\gamma^2)(v^q)^2} \right]. \quad (3.47)$$

Für den Fall, daß die Koeffizienten ρ_3^T und ρ_3^s von derselben Größenordnung sind, ist die Geschwindigkeit der Goldstone-Mode (3.47) in niedrigster Ordnung dann:

$$u_{GH}^2 = \gamma^2 \frac{\rho_3^s}{\rho_3} \left[\frac{1}{c} (c_T^2 + c_m^2) + \frac{\rho_3}{(\rho^\eta)_1} (1-\gamma^2)(v^q)^2 \right]. \quad (3.48)$$

Diese Mode besteht aus Fluktuationen in Entropie und Spin und Scherungen:

$$\frac{\delta \sigma}{\sigma} = \frac{\delta \xi}{\xi} \quad (3.49)$$

$$v_{\perp}^{\eta} = - \frac{\rho_3}{(\rho^\eta)_1} (1-\gamma^2)^{1/2} v^q \frac{\delta \sigma}{\sigma}, \quad (3.50)$$

wo v_t^n die (zu $\vec{k}$) transversale Komponente der Geschwindigkeit $\vec{v}^n$ ist. Die Kopplung (3.50) von Scherungen an Entropiefluktuationen ist eine direkte Konsequenz der RETS-Brechung. Das räumlich inhomogene v_t^n -Geschwindigkeitsfeld bedeutet inhomogene Translationen, deren Komponente in $\vec{q}$ -Richtung die Phase in $\vec{k}$ -Richtung aufwickelt. Daher, je mehr $\vec{k}$ von der $\vec{q}$ -Richtung abweicht, wird diese Aufwicklung um so größer, was zu größeren Fluktuationen im Superstrom und folglich auch in $\delta\sigma$ führt, und qualitativ die $(1-\gamma^2)^{1/2}$ -Abhängigkeit in (3.50) erklärt.

3.3. Zusammenfassung.

In diesem Kapitel wurden die hydrodynamischen Gleichungen des FF-Zustandes in ^3He - ^4He aufgestellt und gelöst. Für die elf hydrodynamischen Variablen des FF-Zustandes erhalte ich die elf folgenden Moden: zwei diffusive Moden für die (zu $\vec{k}$) transversalen Schwingungen der Geschwindigkeit, eine diffusive Temperatur-Spinwelle (longitudinale Magnetisierung), zwei diffusive transversale Spinwellen und drei propagierende Moden, bestehend aus einer Dichte-, einer Konzentration- und einer Temperatur-Spin-Scherwelle (Goldstone-Mode der RETS). Charakteristischerweise ist die Geschwindigkeit letzterer, $u_{\text{SH}}^2 = (\rho_2^s/\rho) \gamma^2 [(c_T^2 + c_m^2)/c + (\rho_2/\rho_1)(1-\gamma^2)(v_2^2)^2]$ (nach Gl. (3.48)), nicht nur von den Suszeptibilitäten $\partial T/\partial\sigma$ und $\partial\omega/\partial\xi$ wie in einer isotropen, magnetischen Superflüssigkeit bestimmt, sondern auch von der Stärke $(1-\gamma^2)^{1/2} v_2^q$,

mit der Gradienten des transversalen Geschwindigkeitsfeldes die Gradienten des chemischen Potentials beeinflussen (s. Gl. (3.13)). So ist dieser Ausdruck für u_{SM} analog zu dem der Goldstone-Mode spontan gebrochener relativer Phasen-Spinrotations-Symmetrie, wie sie in der A_1 -Phase auftritt⁽⁴⁾, nämlich $u_2^2 = c_1^2 + c_s^2$, wo c_s , die Spingeschwindigkeit, die analoge Rolle von $(1-\gamma^2)^{1/2} v_f^2$ einnimmt. Letzteres Resultat wurde kürzlich experimentell nachgewiesen⁽⁵⁾.

In 2.3.1. habe ich erläutert, daß die zu $\vec{q}$ transversale Komponente des Superstroms verschwindet. Als direkte Konsequenz weist u_{SM} eine charakteristische Anisotropie auf, $u_{\text{SM}}^2 \sim \gamma^2$, so daß für $\vec{k} \perp \vec{q}$ die Geschwindigkeit verschwindet. In ihrem Charakter einer Scherpropagation kann diese Mode mit dem zweiten Schall in smektisch-A Kristallen verglichen werden. Für letztere wurde dieselbe Anisotropie $u^2 \sim \gamma^2 (1-\gamma^2)$, die ich für den zu $(v_f^2)^2$ proportionalen Term in u_{SM} erhalten habe, vorhergesagt^(12,24) und vor kurzem experimentell verifiziert⁽³⁰⁾. Für $\vec{k}$ nahezu senkrecht oder parallel zu $\vec{q}$ geht die Propagationsgeschwindigkeit der Scherungen zurück, bis in den Grenzfällen $\vec{k} \perp \vec{q}$ und $\vec{k} \parallel \vec{q}$ die Scherungen diffundieren wie in einer isotropen Flüssigkeit⁽¹²⁾. Dieser Sachverhalt erklärt sich jeweils durch i) die Abwesenheit einer rückstellenden Kraft bei elastischen Deformationen mit $\vec{k} \perp \vec{q}$ (Faktor γ^2) und ii) der Abnahme der Effektivität, mit der Scherungen an Entropieschwankungen koppeln (s. Gl. (3.50)), wenn $\vec{k} \parallel \vec{q}$ (Faktor $(1-\gamma^2)$). Aufgrund dieser Kopplung von Scherungen an Entropiefluktuationen ergibt sich im FF-Zustand die eigenartige Möglichkeit, Temperaturwellen (sogenannter "zweiter Schall" in einkomponentigen Superflüssigkeiten) durch Oszillationen von Platten oder von Wänden des Behälters anzuregen. Eine künftige Untersu-

chung der Effektivität der Anregung dieses "zweiten Schalls" durch die übliche Methode der oszillierenden porösen Membran, wie sie in Ref. (21) für ^4He und ^3He gemacht wurde, wird für den experimentellen Nachweis der FF-Phase möglicherweise noch zusätzliche Richtlinien liefern.

IV. DYNAMIK DES STROMTRAGENDEN ZUSTANDES IN $^4\text{He-II}$.

In diesem Kapitel werden die hydrodynamischen Moden eines CC-Zustandes in ^4He bestimmt und mit denen in der FF-Phase von superflüssigem ^3He verglichen. Zum ersten Mal ist die Hydrodynamik eines CC-Zustandes von Khalatnikov untersucht worden⁽³¹⁾. Er betrachtete nur lineare Effekte in dem kleinen Gegenstrom $w_0 = v_0^n - v_0^s$. Wie nach Gl. (4.7) erläutert wird, ist v_0^s im CC-Zustand analog zu v_0^f im FF-Zustand. Da in letzterem System die Modengeschwindigkeiten Korrekturen in $(v_0^f)^2$ haben, werde ich in den Bewegungsgleichungen des CC-Zustandes auch quadratische Terme in v_0^s , bzw. in w_0 , berücksichtigen. Diese höhere Entwicklung nach w_0 soll nur der formalen Vergleichsmöglichkeit mit dem FF-Zustand dienen, denn in der Praxis ist w_0/u_{i0} ⁽³¹⁾ wesentlich kleiner als v_0^f/u_{i0} (u_{i0} ist die Schallgeschwindigkeit des i-ten Schalls der isotropen Superflüssigkeit).

Der Effekt auf die hydrodynamischen Moden der baryzentrischen Geschwindigkeit $\vec{v}_0$, mit der sich die Flüssigkeit bewegt, kann hier schon vorausgesagt werden, wenn man $\vec{v}_0$ als eine Galilei-Transformation des Beobachters betrachtet. Wenn K ein ruhendes Koordinatensystem ist und K' das mit $\vec{v}_0$ sich bewegende System ist, so hat eine monochromatische Welle in K' die Form⁽³²⁾:

$$\delta\psi = \psi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}' - \omega' t)}$$

während im System K

$$\delta\psi = \psi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$\vec{r}'$ und $\vec{r}$ sind durch die Beziehung $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0 t$ gegeben; ω' ist die Modenfrequenz im System K' , in dem die Flüssigkeit ruht. So ergibt sich:

$$\omega = \omega' + \vec{v}_0 \cdot \vec{k} \quad (4.1a)$$

Im Falle einer propagierenden Mode zum Beispiel, $\omega' = ck$, folgt dann

$$\omega = ck + \vec{v}_0 \cdot \vec{k} \quad (4.1b)$$

Gln. (4.1a) oder (4.1b) stellen folglich eine Doppler-Ver-schiebung der Frequenzen dar. Die Lösung der hydrodynamischen Gleichungen für ${}^4\text{HeII}$ mit $q_0 = \rho v_0 \neq 0$ und $v_0^* = v_0^s$ ergibt dieses Resultat (s. 4.2.).

4.1. Die Bewegungsgleichungen.

Die Bewegungsgleichungen in ${}^4\text{HeII}$ sind ⁽¹³⁾:

$$\dot{\epsilon} + \nabla_j Q_j = 0 \quad (4.2)$$

$$\dot{p} + \nabla_j q_j = 0 \quad (4.3)$$

$$\dot{g}_i + \nabla_i p + \vec{\nabla}_j \Pi_{ij} = 0 \quad (4.4)$$

$$\dot{s} + \nabla_j f_j = 0 \quad (4.5)$$

$$\dot{v}_i^s + \nabla_i (\mu + \vec{v}_s^s \cdot \vec{v}^n) = 0 \quad (4.6)$$

In einer isotropen Superflüssigkeit ist der Term $\nabla(\vec{v}_s^s \cdot \vec{v}^n)$ in der Bewegungsgleichung für v^s von zweiter Ordnung in den kleinen Auslenkungen und daher in einer linearen Theorie zu vernachlässigen. Im CC-Zustand ist jedoch $v_0^s \neq 0$, und so ergibt sich eine Kopplung erster Ordnung der inhomogenen Verschiebungen an die Phase:

$$\dot{v}_i^s + \nabla_i \mu + \vec{v}_0^s \cdot \nabla_i \vec{v}^n = 0 \quad (4.7)$$

Hier ist zu bemerken, daß Gl. (4.7) identisch mit der (die RETS-kennzeichnende) Gl. (3.13) des FF-Zustandes ist. Anstelle von $\vec{v}^q$ tritt hier $\vec{v}_0^s$. Aus Gl. (4.7) ist zu erkennen, daß nicht die Phase allein die relevante SymmetrievARIABLE ist, sondern eine Kombination der Phase und dem Verschiebungsvektor in $\vec{v}_0^s$ -Richtung. In der Tat, daß im Gleichgewicht die superfluide Geschwindigkeit nicht verschwindet, bedeutet, daß sogar im stationären Zustand ein Gradient der Phase in einer gewissen Richtung besteht. Diese stationäre Konfiguration der Phase kann man so ansehen, daß die erwähnte Richtung eine Anordnung von Ebenen gleicher Phase definiert, wobei die Größe von v_0^s den "Gleichgewichtsabstand" dieser Ebenen bestimmt. Eine inhomogene Translation $\vec{v}_0^s \cdot \delta \vec{v}_i \vec{u}$ in der Flüssigkeit, das heißt eine inhomogene Verän-

derung dieses Gleichgewichtsabstandes der Ebenen, hat daher eine homogene Variation $\vec{v}_i^s$ zur Folge. Genau dieses wird in Gl. (4.7) widergespiegelt (nachdem $\vec{u} = \vec{v}^n$).

Nach Bestimmung der Flüsse $\vec{Q}, \vec{g}, \vec{\pi}_{ij}, \vec{f}$ (analog zu Anhang B, mit $\vec{v}_0^s \hat{=} \vec{v}_1^q$) bestimmen folgende Gleichungen das hydrodynamische Verhalten eines CC-Zustandes:

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = 0 \quad (4.8)$$

$$\dot{g}_i + \nabla_i p + \nabla_j (v_j^n g_i + f_j^s v_i^s) = 0 \quad (4.9)$$

$$\dot{s} + \vec{\nabla} \cdot (s \vec{v}^n) = 0 \quad (4.10)$$

$$\dot{v}_i^s + \nabla_i \mu + \vec{v}_c^s \cdot \nabla_i \vec{v}^n = 0 \quad (4.11)$$

4.2. Die Moden.

Die Lösung der hydrodynamischen Gleichungen werde ich in zwei Schritten vornehmen. Im ersten betrachte ich nur lineare Terme in w_0 , wobei ich, trotz Unstimmigkeiten mit einigen von Khalatnikovs Formeln⁽³¹⁾ (einige wegen offensichtlicher Satzfehler) zu denselben Resultaten gelange. Hierbei berücksichtige ich alle thermodynamische Ableitungen aus (2.83) ausser $\bar{p}^2 \partial \rho / \partial T|_{p, w} = \partial \sigma / \partial T|_{T, w^2}$, die, wie üblich⁽³⁾, vernachlässigt werden können. Im zweiten Schritt betrachte ich zusätzlich Terme in w_0^2 , um einen Vergleich mit dem FF-Zustand zu ermöglichen. Wie wir sehen

werden, ergeben die Terme erster Ordnung in w_0 nur eine kleine Korrektur zur Geschwindigkeit des zweiten Schalls der Größe eines Prozents. Ich werde daher in Termen zweiter Ordnung in w_0 die Ableitungen $\partial(\rho'/\rho)/\partial t$, $\partial(\rho'/\rho)/\partial w^2$ nicht berücksichtigen ($\partial(\rho'/\rho)/\partial t \sim 10^{-2} \text{ bar}^{-1}$ ⁽³³⁾ und $(\rho/\rho^s) \partial(\rho'/\rho)/\partial w^2 \sim 10^6 \left(\frac{c_{\text{sw}}}{c_s}\right)^2$ ⁽³⁴⁾ sind in der Tat vernachlässigbare Größen). Ich werde ferner Terme $\sigma(c_1/c)^2$ und $\sim w_0^3$ vernachlässigen.

Erste Ordnung in w_0 .

Die hydrodynamischen Gleichungen (4.2-5,7) um die Gleichgewichtswerte $w \neq 0$, $v \neq 0$ linearisiert, haben die Form (s.

Anhang E):

$$\dot{\rho} + v_j \nabla_j \rho + \rho \nabla_j v_j = 0 \quad (4.12)$$

$$\rho \dot{v}_i + \rho v_j \nabla_j v_i + \nabla_i p + \frac{\rho^s \rho^s}{\rho} w_j \nabla_j w_i + \frac{\rho^s \rho^s}{\rho} w_j \nabla_j w_i = 0 \quad (4.13)$$

$$\rho \dot{\sigma} + \sigma \dot{\rho} + \sigma \rho \nabla_j v_j + \sigma v_j \nabla_j \rho + \rho v_j \nabla_j \sigma + \sigma \rho^s \nabla_j w_j + \rho^s w_j \nabla_j \sigma + \sigma w_j \nabla_j \rho^s = 0 \quad (4.14)$$

$$\dot{v}_l - w_l \left(\frac{\rho^s}{\rho}\right) - \frac{\rho^s}{\rho} \dot{w}_l + \nabla \mu_s + \left(v_l - \frac{\rho^s}{\rho} w_l\right) \nabla \left(v_l - \frac{\rho^s}{\rho} w_l\right) = 0, \quad (4.15)$$

wo $\delta\rho$ und $\delta\sigma$ durch Gl. (2.83) und $\delta\mu_s$ durch Gl. (2.78) gegeben sind. w und v bezeichnen die Gleichgewichtswerte, δw und δv sind die Fluktuationen. Diese Fluktuationen und die der anderen Variablen werden als ebene Wellen (Gl. (3.22)) mit Wellenvektor $\vec{k}$ angesetzt. Die Indizes l , t und tt sind ab Gl. (4.15) keine Summationsindizes: ich bezeichne mit v_l die Komponente eines Vektors $\vec{v}$ in die Richtung parallel zu $\vec{k}$, mit v_t die

Komponente senkrecht zu $\vec{k}$ in der $(\vec{k}, \vec{w})$ -Ebene und mit V_{tt} die Komponente senkrecht zu dieser Ebene.

Wie im Anhang E gezeigt wird, entkoppeln die Bewegungsgleichungen für die Richtung senkrecht zur $(\vec{k}, \vec{w})$ -Ebene von den restlichen Gleichungen. Man erhält für δw_{tt} :

$$\left(-U + \frac{\rho^s}{\rho} w_\ell\right) \delta w_{tt} = 0 \quad , \quad (4.16)$$

wo

$$U = u - v_\ell \quad (4.17)$$

und $u = \omega/k$ die Gruppengeschwindigkeit der Mode ist. Es folgt:

$$u = v_\ell + \frac{\rho^s}{\rho} w_\ell = v_\ell^n \quad , \quad (4.18)$$

so daß die Oszillationen $\delta v_{tt} = (\rho^s/\rho) \delta w_{tt}$ einer Diffusion entsprechen (in einem System, in dem $v^n = 0$ im Gleichgewicht, verschwindet die Frequenz dieser Mode).

Für die restlichen Variablen erhält man (Anhang E) folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix}
 -U \frac{\partial \rho}{\partial p} & 0 & -U \rho^2 \frac{\partial \rho^*/\rho}{\partial p} w_L & \rho & -U \rho^2 \frac{\partial \rho^*/\rho}{\partial p} w_L & \delta p \\
 1 & 0 & 2 \frac{\rho^* \rho^s}{\rho} w_L & -\rho U & 0 & \delta T \\
 \left(\frac{\rho^* \partial \rho}{\rho \partial p} - \rho \frac{\partial \rho^*/\rho}{\partial p} \right) w_L & (-\rho U + \rho^s w_L) \frac{\partial \rho}{\partial T} - \rho^s \frac{\partial \rho^*/\rho}{\partial T} w_L & \rho^s T - \rho U \frac{\partial \rho^*/\rho}{\partial T} w_L & 0 & -\rho U \frac{\partial \rho^*/\rho}{\partial T} w_L & \delta w_L \\
 U \frac{\partial \rho^*/\rho}{\partial p} w_L & -\rho + U \frac{\partial \rho^*/\rho}{\partial T} w_L & U \frac{\rho^*}{\rho} - 3 \frac{\rho^* \rho^s}{\rho} w_L & \frac{\rho^*}{\rho} w_L & -\frac{\rho^*}{\rho} w_L & \delta v_L \\
 0 & 0 & \frac{\rho^* \rho^s}{\rho} w_L & 0 & -\rho^* U + \frac{\rho^* \rho^s}{\rho} w_L & \delta w_t
 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.19)$$

In linearer Ordnung in w kann man sehen, daß die letzte Zeile von (4.19) von den ersten vier entkoppelt. Das heißt, die transversale Bewegung δw_t (und $\delta v_t = (\rho^*/\rho) \delta w_t$) ist unabhängig von den restlichen Variablen:

$$\left(-U + \frac{\rho^s}{\rho} w_L \right) \delta w_t = 0 \quad (4.20)$$

Diese Mode mit der Geschwindigkeit

$$u = \frac{\rho^s}{\rho} w_L + v_L = v_L^* \quad (4.21)$$

stellt folglich ebenfalls eine Scherdiffusion dar. Die Fluktuationen parallel zu $\vec{k}$ sind durch die obere 4x4 Matrix aus (4.19) gegeben. Das Verschwinden derer Determinante ergibt die Geschwindigkeiten des ersten und zweiten Schalls (Anhang E):

$$u_1 = \pm \left(c_1 + v_L \right) \quad (4.22)$$

und

$$u_2 = \pm c_2 + v_L + w_L \left(2 \frac{p^s}{\rho} - \frac{\sigma}{\rho^n} \frac{\partial \rho^n}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right) , \quad (4.23)$$

wo

$$c_1^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\sigma} , \quad c_2^2 = \left. \frac{\rho^s}{\rho^n} \sigma^2 \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right|_{\rho} \quad (4.24)$$

jeweils die Geschwindigkeiten vom ersten und zweiten Schall in einer Superflüssigkeit mit verschwindendem Gleichgewichtsstrom sind. Aus Gln. (4.22,23)⁽³¹⁾ ist ersichtlich, daß eine konstante baryzentrische Geschwindigkeit in die Ausbreitungsrichtung des Schalls denselben Einfluß auf die Modenfrequenzen in einer Superflüssigkeit hat wie in einer Euler-Flüssigkeit: die Frequenzen erhalten eine Doppler-Verschiebung $\vec{v} \cdot \hat{k}$. Die Geschwindigkeit des zweiten Schalls ist nach (4.23) anisotrop. Der anisotrope Teil ergibt in ^4He eine Korrektur der Größenordnung von w , und somit etwa eines Prozentes (der temperaturabhängige Ausdruck in Klammern in (4.23) ist für einen ausgedehnten Temperaturbereich etwa von der Größenordnung $1, w \lesssim 10^{-2} c_2^{(31)}$).

Zweite Ordnung in w .

Nachdem Terme der Ordnung w^2 Gln. (4.19) zugefügt wurden (s. Anhang F), betrachte ich nun das Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix}
 -\frac{U^2}{c^2} & 0 & 0 & \rho & 0 \\
 1 - \frac{U^2}{c^2} + \frac{\rho^2}{\rho^2} \frac{w_L^2}{c^2} & -2\rho^2 A w_L^2 & \frac{2\rho^2}{\rho} w_L & 0 & 0 \\
 \frac{\rho^2}{\rho} \frac{U}{c^2} w_L & (-\rho U + \rho^2 w_L) \frac{\partial T}{\partial T} - \rho^2 A w_L & \rho^2 \sigma - \rho U A w_L + \rho^2 A w_L^2 & 0 & -\rho U A w_L + \rho^2 A w_L w_L \\
 -\frac{\rho^2}{\rho^2} \frac{U w_L}{c^2} - \frac{\rho^2}{\rho^2} \frac{w_L^2}{c^2} & -\sigma + U A w_L + 3 \frac{\rho^2}{\rho} A w_L^2 & \frac{U \rho^2}{\rho} - 3 \frac{\rho^2}{\rho} w_L & 0 & -\frac{\rho^2}{\rho} w_L \\
 \frac{\rho^2}{\rho^2} \frac{w_L w_L}{c^2} & -2\rho^2 A w_L w_L & \frac{\rho^2}{\rho} w_L & 0 & -\rho^2 U + \frac{\rho^2}{\rho} w_L
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \delta p \\
 \delta T \\
 \delta w_L \\
 \delta v_L \\
 \delta w_t
 \end{bmatrix}
 = 0, \quad (4.25)$$

wo $A = \partial(\rho^n/\rho)/\partial T|_{p, w^2}$.

Die Bewegungsgleichungen für die tt-Richtung sind auch in diesem Fall von den restlichen entkoppelt. Man erhält, wie in (4.16):

$$(-U + \frac{\rho^2}{\rho} w_L) \delta w_{tt} = 0, \quad (4.26)$$

so daß

$$u = v_L^n \quad (4.27)$$

Die Geschwindigkeiten der restlichen Moden ergeben sich aus dem Verschwinden der Determinante der Matrix (4.25):

$$\begin{aligned}
 & (-\sigma + UA w_L) \cdot \left\{ \left[1 + \frac{\rho^s \rho^s}{\rho^2} \frac{w_L^2}{c_1^2} - \frac{U^2}{c_1^2} \right] (-\rho^s \sigma + \rho UA w_L) \left(\frac{\rho^s \rho^s}{\rho} w_L - U \rho^n \right) \right\} \\
 & + \left\{ -\frac{\rho^n}{\rho^2} + \frac{U w_L}{c_1^2} \frac{2 \rho^s \rho^s}{\rho} w_L (-U \rho^n) + \left[1 + \frac{\rho^s \rho^s}{\rho^2} \frac{w_L^2}{c_1^2} - \frac{U^2}{c_1^2} \right] \left[\frac{\rho^s \rho^s}{\rho} w_L (-\frac{\rho^n}{\rho} w_L) - \left(\frac{\rho^n}{\rho} U - 3 \frac{\rho^s \rho^s}{\rho^2} w_L \right) \left(\frac{\rho^s \rho^s}{\rho} w_L - U \rho^n \right) \right] \right\} \\
 & \cdot \left[(U \rho - \rho^s w_L) \frac{\gamma_s}{\partial T} - \rho \sigma A w_L \right] = 0 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

Folgt:

$$\begin{aligned}
 & (U - \frac{\rho^s}{\rho} w_L) \cdot \left\{ 2 \frac{\rho^s \rho^s}{\rho^2} \frac{w_L^2}{c_1^2} U^2 + \left[1 + \frac{\rho^s \rho^s}{\rho^2} \frac{w_L^2}{c_1^2} - \frac{U^2}{c_1^2} \right] \left[-\frac{\rho^s}{\rho} w_L^2 + U^2 + 3 \left(\frac{\rho^s}{\rho} \right)^2 w_L^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(4 \frac{\rho^s}{\rho} - 2 \frac{\sigma}{\rho^n} \frac{\gamma_p^n}{\gamma_T} \frac{\gamma_T}{\partial \sigma} \right) w_L U - c_1^2 \right] \right\} = 0 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.29}$$

Die Lösungen von Gl. (4.29) ergeben:

i) eine diffusive Mode mit:

$$u = \frac{\rho^s}{\rho} w_L + v_L = v_L^n \tag{4.30}$$

ii) für die Geschwindigkeit des ersten Schalls mache ich den Ansatz, daß diese sich nur geringfügig verändern kann gegenüber dem isotropen Wert c_1 , und somit ist durch eine Entwicklung nach w_L^2 gegeben:

$$U_1^2 = c_1^2 + \eta w_L^2 \tag{4.31}$$

(die Koeffizienten von Termen in w oder in w_t^2 ergeben Null).

Mit Gl. (4.31) ergibt Gl. (4.29):

$$\eta = 3 \frac{\rho^n c^s}{\rho^2} \quad , \quad (4.32)$$

so daß

$$U_i^2 = c_i^2 + 3 \frac{\rho^n \rho^s}{\rho^2} w_\ell^2 \quad . \quad (4.33)$$

Wenn $v = g/\rho = 0$, so daß $w = g/\rho^n - (\rho/\rho^n) v^s = -(\rho/\rho^n) v^s$, folgt:

$$u_i^2 = c_i^2 + 3 \frac{\rho^s}{\rho^n} (v_\ell^s)^2 \quad , \quad (4.34)$$

und im Ginzburg-Landau-Bereich (d.h. in niedrigster Ordnung in $\rho^s/\rho \ll 1$):

$$u_i^2 = c_i^2 + 3 \frac{\rho^s}{\rho} (v_\ell^s)^2 \quad (4.35)$$

iii) die Geschwindigkeit des zweiten Schalls ist aus Gl.

(4.29) gegeben durch:

$$U^2 - \left(4 \frac{\rho^s}{\rho} - 2 \frac{\sigma}{\rho^n} \frac{\partial \rho^n}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right) w_\ell U + \left(-c_i^2 - \frac{\rho^s}{\rho} w_\ell^2 + 3 \left(\frac{\rho^s}{\rho} \right)^2 w_\ell^2 \right) = 0 \quad , \quad (4.36)$$

und man erhält:

$$U_2 = \left(2 \frac{\rho^s}{\rho} - \frac{\sigma}{\rho^n} \frac{\partial \rho^n}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right) w_2 \pm \sqrt{c_2^2 + \frac{\rho^s}{\rho} w_t^2 + \left(\frac{\rho^s}{\rho} \right)^2 w_2^2} \quad (4.37)$$

Wenn $v = 0$, ist $w = -(\rho/\rho^n) v^s$, so daß

$$u_2 = \left(-2 \frac{\rho^s}{\rho^n} + \frac{\rho \sigma}{(\rho^n)^2} \frac{\partial \rho^n}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right) v_2^s \pm \sqrt{c_2^2 + \frac{\rho^s \rho}{(\rho^n)^2} (v_t^s)^2 + \left(\frac{\rho^s}{\rho^n} \right)^2 (v_2^s)^2} \quad (4.38)$$

Im Ginzburg-Landau-Bereich, das heißt in niedrigster Ordnung in $\rho^s/\rho \ll 1$, ist (4.38) gegeben durch:

$$u_2 = \pm \sqrt{c_2^2 + \frac{\rho^s}{\rho} (v_t^s)^2} \quad (4.39)$$

Ich werde nun die Eigenvektoren zu den erhaltenen Modenfrequenzen bestimmen (s. Anhang G). Um die Eigenvektoren im CC-Zustand mit denen im FF-Zustand (wo $g=0$) zu vergleichen (s. 4.3.), betrachte ich auch hier $g=0$, so daß $w = -(\rho/\rho^n) v^s$.

i) Eine der beiden diffusiven Moden (4.30) besteht, ebenfalls wie im FF-Zustand, aus einer gekoppelten Temperatur-Scherdiffusion:

$$\sigma \delta T = v_t^s \delta w_t \quad (4.40)$$

Die restlichen Variablen koppeln nicht an diese Temperatur-

Scherdiffusion.

ii) Der erste Schall weist zum Teil ähnliche Kopplungen wie in einer isotropen Superflüssigkeit auf, nämlich:

$$\frac{\delta p}{\rho} = \frac{\delta v_L}{u_s} = \pm \frac{\delta v_L}{c_s} \quad (4.41)$$

$$\delta T = \delta w_t = 0 \quad (4.42)$$

Es ergeben sich zusätzlich - wenn auch sehr kleine - Fluktuationen im Gegenstrom w_L :

$$\delta w_L = \mp \frac{\rho}{\rho^n} \frac{v_L^s}{c_s} \delta v_L \approx \mp \frac{v_L^s}{c_s} \delta v_L \quad (4.43)$$

und somit in der Entropiedichte

$$\frac{\delta \sigma}{\sigma} = \mp 2 \frac{\rho^s}{\rho^n} \frac{v_L^s}{c_s} \frac{\delta p}{\rho} \approx \mp 2 \frac{\rho^s}{\rho} \frac{v_L^s}{c_s} \frac{\delta p}{\rho} \quad (4.44)$$

iii) Der zweite Schall im CC-Zustand besitzt dieselben Eigenschaften wie die Goldstone-Mode des FF-Zustands. Es handelt sich hier ebenfalls um die Propagation einer Entropie-Scherwelle:

$$\delta w_t = w_t \frac{\delta \sigma}{\sigma} \quad (4.45)$$

die durch Fluktuationen im Gegenstrom hervorgerufen wird:

$$\frac{\delta \sigma}{\sigma} = \frac{\rho^s}{\rho} \frac{\delta w_L}{u_s} \quad (4.46)$$

Dichtefluktuationen sind vom zweiten Schall entkoppelt:

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{v_2}{u_2} = 0 \quad . \quad (4.47)$$

4.3. Zusammenfassung der Resultate und Vergleich mit dem FF-Zustand.

In diesem Kapitel habe ich die kollektiven Moden im CC-Zustand des $^4\text{HeII}$, einer nicht magnetischen, einkomponentigen Superflüssigkeit, untersucht. Wir werden sie nun mit denen im FF-Zustand in einer zweckmäßig ebenfalls einkomponentigen Superflüssigkeit ohne Spinfreiheitsgrade vergleichen (s. Anhang D, wo von den Variablen aus Kapitel III $\rho_4 = \dot{\rho}_4 = \Lambda = 0$ gesetzt wird, was die Zahl der hydrodynamischen Variablen (und Moden) auf sechs reduziert).

Für die sechs hydrodynamischen Moden des CC-Zustandes erhielt ich eine Scherdiffusion, eine Temperatur-Scherdiffusion, eine propagierende Dichtekompressionswelle (erster Schall) und, als Goldstone-Mode der gebrochenen RETS, ebenfalls wie im FF-Zustand, eine propagierende Temperatur-Scherwelle. Obwohl von experimenteller Relevanz nur die Ausdrücke der Modengeschwindigkeiten bis zur ersten Ordnung im (kleinen) Gegenstrom w sind, entfalten sich die Eigenschaften der RETS-Brechung erst bei Betrachtung der Bewegungsgleichungen bis zur zweiten Ordnung in w . In der Tat ergibt die Rechnung bis zur ersten Ordnung qualitativ dasselbe Modenspektrum einer Superflüssigkeit mit "gewöhn-

licher" Phasen-Symmetriebrechung. Insbesondere entkoppeln die Scherungen von den longitudinalen Oszillationen der anderen Variablen. Die Hinzunahme von Termen zweiter Ordnung in den Bewegungsgleichungen bewirkt dann lineare Kopplungen (in w) der Variablen.

Wie ein Vergleich der Ausdrücke dieses Kapitels mit Anhang D zeigt, stimmt das Modenspektrum des CC-Zustandes qualitativ mit dem des FF-Zustandes überein, insofern die Modengeschwindigkeiten und die jeweiligen Eigenvektoren in beiden Systemen analoge Abhängigkeiten von dem jeweiligen symmetriebrechenden Feld ($\vec{v}_f$ im FF-Zustand und $\vec{v}^s$ im CC-Zustand) haben. Die Unterschiede, die in den jeweiligen Ausdrücken auftreten, resultieren aus: i) den anisotropen Eigenschaften des FF-Zustands im Gegensatz zum isotropen Verhalten des CC-Zustands (ρ^s = Skalar, s. Kapitel II), ii) den unterschiedlichen Gleichgewichtszuständen beider Systeme (spontane RETS-Brechung im stromlosen Gleichgewichtszustand im FF-Zustand; durch einen Gleichgewichtsstrom bewirkte RETS-Brechung im CC-Zustand).

ANHANG A: Galilei-Transformation einer zweikomponentigen Superflüssigkeit.

Die Energie eines zweikomponentigen superflüssigen Systems (ohne Magnetisierung) ist gegeben durch (s. Gl. (2.43)):

$$d\mathcal{E} = Tds + \mu_3 d\rho_3 + \mu_4 d\rho_4 + \vec{v}^n \cdot d\vec{g} + \vec{f}_3^s \cdot d\vec{v}_3^s + \vec{f}_4^s \cdot d\vec{v}_4^s \quad (\text{A.1})$$

Sei nun eine Galilei-Transformation $\vec{v} \rightarrow \vec{v} - \vec{u}$, die den Beobachter vom unbewegten Inertialsystem in ein anderes überführt, das sich mit der Geschwindigkeit $\vec{u}$ bewegt. Die Energiedichte $d\mathcal{E}$ in (A.1) ändert zu $d\mathcal{E}'$, die chemischen Potentiale μ_3 und μ_4 jeweils zu μ'_3 und μ'_4 :

$$d\mathcal{E}' = Tds + \mu'_3 d\rho_3 + \mu'_4 d\rho_4 + (\vec{v}^n - \vec{u}) \cdot d(\vec{g} - \rho\vec{u}) + \vec{f}_3^s \cdot d(\vec{v}_3^s - \vec{u}) + \vec{f}_4^s \cdot d(\vec{v}_4^s - \vec{u}) \quad (\text{A.2})$$

Unter der Galilei-Transformation ist:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' + \frac{\rho}{2} u^2 + \vec{u} \cdot (\vec{g} - \rho\vec{u}) \quad , \quad (\text{A.3})$$

wo $\rho = \rho_3 + \rho_4$, so daß

$$d\mathcal{E} = d\mathcal{E}' + \frac{\rho}{2} du^2 + \frac{u^2}{2} d\rho + (\vec{g} - \rho\vec{u}) \cdot d\vec{u} + \vec{u} \cdot d\vec{g} - u^2 d\rho - \rho\vec{u} \cdot d\vec{u} \quad (\text{A.4})$$

Mit (A.2) folgt:

$$\begin{aligned} d\mathcal{E} = & Tds + \left(\mu'_3 - \vec{u} \cdot \vec{v}^n + \frac{u^2}{2} \right) d\rho_3 + \left(\mu'_4 - \vec{u} \cdot \vec{v}^n + \frac{u^2}{2} \right) d\rho_4 \\ & + \vec{v}^n \cdot d\vec{g} + \vec{f}_3^s \cdot d\vec{v}_3^s + \vec{f}_4^s \cdot d\vec{v}_4^s + (\vec{g} - \vec{f}_3^s - \vec{f}_4^s - \rho\vec{v}^n) \cdot d\vec{u} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Vergleich zu (A.1) ergibt die Beziehungen:

$$\mu_3 = \mu'_3 - \vec{u} \cdot \vec{v}^n + \frac{u^2}{2} \quad (\text{A.6})$$

$$\mu_4 = \mu'_4 - \vec{u} \cdot \vec{v}^n + \frac{u^2}{2}$$

und

$$\vec{g} = \vec{f}_3^s + \vec{f}_4^s + \rho \vec{v}^n \quad (\text{A.7})$$

ANHANG B: Reaktive Flüsse im Fulde-Ferrell-Zustand.

Die Methode zur Bestimmung der hydrodynamischen Flüsse ist in den Textbüchern von Khalatnikov⁽¹²⁾ und Putermann⁽¹⁸⁾ und von Liu⁽²²⁾ beschrieben worden. Hier gebrauche ich sie, um die Flüsse im FF-Zustand zu bestimmen.

Die hydrodynamischen Gleichungen des FF-Zustandes sind (Kapitel III):

$$\dot{\epsilon} + \vec{\nabla} \cdot \vec{Q} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\dot{\rho}_3 + \vec{\nabla} \cdot \vec{f}_3 = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\dot{\rho}_4 + \vec{\nabla} \cdot \vec{f}_4 = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\dot{g}_i + \nabla_i p + \nabla_j \pi_{ij} = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\dot{\lambda}_i + \nabla_j h_{ij} = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\dot{s} + \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\hbar}{2m_3} \dot{\phi} + \mu_3 + \vec{v}_3^q \cdot \vec{v}^n = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\hbar}{m_4} \dot{\phi}_4 + \mu_4 = 0 \quad (\text{B.8})$$

Die Fluktuationen der Variablen $s, \rho_3, \rho_4, \vec{g}, \vec{\lambda}, \vec{v}_3^i, \vec{v}_4^i$ erhöhen die Energiedichte :

$$d\varepsilon = Tds + \mu_3 dp_3 + \mu_4 dp_4 + \vec{v}^n \cdot d\vec{g} + \vec{\omega} \cdot d\vec{\lambda} + \vec{f}_3^s \cdot d\vec{v}_3^s + \vec{f}_4^s \cdot d\vec{v}_4^s, \quad (\text{B.9})$$

wo

$$\vec{v}_3^s = \frac{\hbar}{2m_3} \vec{\nabla} \phi \quad (\text{B.10})$$

$$\vec{v}_4^s = \frac{\hbar}{m_4} \vec{\nabla} \phi_4 \quad (\text{B.11})$$

Der Erhaltungssatz der Energie

$$\dot{\varepsilon} + \vec{\nabla} \cdot \vec{Q} = 0 \quad (\text{B.12})$$

folgt dann, wie nun gezeigt wird, von den obigen Gleichungen und erlaubt es, die reaktiven Flüsse zu bestimmen. Aus (B.9):

$$\dot{\varepsilon} = T\dot{s} + \mu_3 \dot{p}_3 + \mu_4 \dot{p}_4 + \vec{v}^n \cdot \dot{\vec{g}} + \vec{\omega} \cdot \dot{\vec{\lambda}} + \vec{f}_3^s \cdot \dot{\vec{v}}_3^s + \vec{f}_4^s \cdot \dot{\vec{v}}_4^s, \quad (\text{B.13})$$

und mit (B.1-8) folgt:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} = & -T \nabla_j f_j - \mu_3 \nabla_j f_{3j} - \mu_4 \nabla_j f_{4j} - v_j^n (\nabla_j p + \nabla_i \pi_{ji}) \\ & - \omega_i \nabla_j h_{ij} - f_{3j}^s \nabla_j (\mu_3 + \vec{v}_3^n \cdot \vec{v}_3^n) - f_{4j}^s \nabla_j \mu_4, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

wo $\nabla_j p$ durch die Duhem-Gibbs-Relation gegeben ist:

$$\nabla_j p = s \nabla_j T + \lambda_i \nabla_j \omega_i + p_3 \nabla_j \mu_3 + p_4 \nabla_j \mu_4 + g_i \nabla_j v_i^n - f_{3i}^s \nabla_j v_{3i}^s - f_{4i}^s \nabla_j v_{4i}^s. \quad (\text{B.15})$$

Mit (B.15) folgt aus (B.14):

$$\begin{aligned}
 \dot{\epsilon} = & -\nabla_j \left[T f_j + \omega_i h_{ij} + \mu_3 f_{3j} + \mu_4 f_{4j} + v_i^\eta \pi_{ij} \right] \\
 & + \left[f_j - s v_j^\eta \right] \nabla_j T + \left[h_{ij} - \omega_i v_j^\eta \right] \nabla_j \omega_i \\
 & + \left[f_{3j} - \rho_3 v_j^\eta - f_{3j}^s \right] \nabla_j \mu_3 + \left[f_{4j} - \rho_4 v_j^\eta - f_{4j}^s \right] \nabla_j \mu_4 \\
 & + \left[\pi_{ij} - v_j^\eta g_i - f_{3j}^s v_i^\eta \right] \nabla_j v_i^\eta .
 \end{aligned}
 \tag{B.16}$$

Aus (B.16) erhält man Gl. (B.12), indem jeder der Koeffizienten der unabhängigen Gradienten $(\nabla_j T, \nabla_j \omega_i, \nabla_j \mu_3, \nabla_j \mu_4, \nabla_j v_i^\eta)$ zu Null gesetzt wird. Daraus folgt:

$$Q_j = T f_j + \omega_i h_{ij} + \mu_3 f_{3j} + \mu_4 f_{4j} + v_i^\eta \pi_{ij} \tag{B.17}$$

$$f_j = s v_j^\eta \tag{B.18}$$

$$h_{ij} = \omega_i v_j^\eta \tag{B.19}$$

$$f_{3j} = \rho_3 v_j^\eta + f_{3j}^s \tag{B.20}$$

$$f_{4j} = \rho_4 v_j^\eta + f_{4j}^s \tag{B.21}$$

$$\pi_{ij} = v_j^\eta g_i + f_{3j}^s v_i^\eta . \tag{B.22}$$

ANHANG C: Lösung der hydrodynamischen Gleichungen des Fulde-Ferrell-Zustandes.

Aus den neun linearen algebraischen Gleichungen (3.23-29) werde ich nun die Eigenwerte für die Geschwindigkeiten u der neun hydrodynamischen Moden bestimmen.

Aus Gln. (3.26,27) ergibt sich

$$u \left(\frac{\delta \xi}{\xi} - \frac{\delta \sigma}{\sigma} \right) = 0 \quad , \quad (C.1)$$

und aus Gl. (3.25) folgt für die Komponente $g_{\perp}$ von $\vec{g}$ senkrecht zur $(\vec{k}, \vec{q})$ -Ebene

$$u \delta g_{\perp} = 0 \quad . \quad (C.2)$$

Damit sind die Eigenwerte für die Schwingungen der Variablen $(\delta \xi / \xi - \delta \sigma / \sigma)$ und $\delta g_{\perp}$ Null.

Ich definiere:

$$\gamma = \frac{\vec{v}_q \cdot \hat{k}}{|\vec{v}_q|} \quad (C.3)$$

$$\rho_{\nu ij}^n = \rho_{ij} - \rho_{\nu ij}^s \quad \gamma = 3,4 \quad (C.4)$$

$$[\rho_{\nu}^{\theta}]_i = \rho_{\nu ij}^{\theta} \hat{k}_j \quad \gamma = 3,4 \quad , \quad \theta = n, s \quad (C.5)$$

$$\{\rho_{\nu}^{\theta}\} = \rho_{\nu ij}^{\theta} \hat{k}_i \hat{k}_j \quad \gamma = 3,4 \quad , \quad \theta = n, s \quad (C.6)$$

$$c_p^2 = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \right|_{c, \sigma, \xi} \quad (C.7)$$

$$c_c^2 = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} \right|_{\rho, \sigma, \xi} \quad (C.8)$$

$$c_T^2 = \left. \sigma^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} \right|_{\rho, c, \xi} \quad (C.9)$$

$$c_m^2 = \left. \frac{\hbar}{2m_3} \xi^2 \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right|_{\rho, c, \sigma} \quad (C.10)$$

und gebrauche folgende Beziehungen:

$$\rho_3 = c \rho, \quad \rho_4 = (1-c) \rho \quad (C.11)$$

$$\delta \rho_3 = c \delta \rho + \rho \delta c, \quad \delta \rho_4 = (1-c) \delta \rho - \rho \delta c \quad (C.12)$$

Ich eliminiere aus den Bewegungsgleichungen zunächst die Variablen $\vec{v}_3, \vec{v}_4, \delta \sigma, \delta \xi$. Ich erhalte dann für Gln. (3.23-25, 31, 33) folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} & \left[-u^2 \rho c + (\rho_3^p - \rho_3^T) \gamma u \right] \frac{\delta \rho}{\rho} + \left[-u^2 \rho + \rho_3^c \gamma u \right] \delta c + \{ \rho_3^s \} \delta \mu_3 + \{ \rho_3^x \} \delta \mu_4 \\ & + \left[\{ \rho_3^s \} v_j^q + [\rho_3^q]_j u + \rho_3^T v^q \gamma \hat{k}_j \right] v_j^q = 0 \end{aligned} \quad (C.13)$$

$$\begin{aligned} & \left[-(1-c) \rho u^2 + (\rho_4^p - \rho_4^T) \gamma u \right] \frac{\delta \rho}{\rho} + \left[u^2 \rho + \rho_4^c \gamma u \right] \delta c + \{ \rho_4^s \} \delta \mu_3 + \{ \rho_4^x \} \delta \mu_4 \\ & + \left[\{ \rho_4^s \} v_j^q + [\rho_4^q]_j u + \rho_4^T v^q \gamma \hat{k}_j \right] v_j^q = 0 \end{aligned} \quad (C.14)$$

$$\begin{aligned}
 & \left[-\rho(c_T^2 + c_m^2) \hat{k}_i - (\rho_3^p + \rho_4^p - (\rho_3^T + \rho_4^T)) u v_i^q + (\rho_3^p - \rho_3^T) v_i^q \sigma v_i^q \right] \delta \rho \\
 & + \left[(\rho_3^c + \rho_4^c) u v_i^q + \rho_3^c v_i^q \sigma v_i^q \right] \delta c \\
 & + \left[-[\rho_3^s + \rho_4^s]_i + \rho_3^T \hat{k}_i + \rho_3^T \frac{v_i^q}{u} \sigma \hat{k}_i + \{\rho_3^s\} \frac{v_i^q}{u} \right] \delta \mu_3 \\
 & + \left[-[\rho_4^s + \rho_3^s]_i + \rho_4^T \hat{k}_i + \rho_4^T \frac{v_i^q}{u} \sigma \hat{k}_i + \{\rho_4^s\} \frac{v_i^q}{u} \right] \delta \mu_4 \\
 & + \left[-[\rho_3^s + \rho_4^s]_i v_j^q - u \rho_{ij}^q - (\rho_3^T + \rho_4^T) v_i^q \hat{k}_j + \rho \frac{c_T^2 + c_m^2}{u} \hat{k}_i \hat{k}_j + \rho_3^T \frac{v_i^q}{u} \sigma v_j^q \hat{k}_i - (\rho_3^T + \rho_4^T) v_j^q \hat{k}_i \right. \\
 & \left. + \{\rho_3^s\} \frac{v_i^q v_j^q}{u} - [\rho_3^s + \rho_4^s]_j v_i^q + \rho_3^T \frac{v_i^q}{u} \sigma v_j^q \hat{k}_j \right] v_j^q = 0 \quad (C.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [c_f^2 + c_T^2 + c_m^2] \frac{\delta \rho}{\rho} + [(1-c) c_c^2] \delta c + \left[-1 + \frac{1}{\rho} (\rho_3^p - c \rho_3^c - \rho_3^T) \frac{v_i^q}{u} \sigma \right] \delta \mu_3 \\
 & + \left[\frac{1}{\rho} (\rho_4^p - c \rho_4^c - \rho_4^T) \frac{v_i^q}{u} \sigma \right] \delta \mu_4 + \left[-\frac{c_T^2 + c_m^2}{u} \hat{k}_j + \frac{1}{\rho} (\rho_3^p - c \rho_3^c - \rho_3^T) \frac{v_i^q}{u} \sigma v_j^q - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\rho} (\rho_3^p + \rho_4^p - c(\rho_3^c + \rho_4^c) - (\rho_3^T + \rho_4^T) \frac{v_i^q}{u} \sigma) \right] v_j^q = 0 \quad (C.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [-c_c^2] \delta c + \left[1 - \frac{\rho_3^p}{\rho} \frac{v_i^q}{u} \sigma \right] \delta \mu_3 + \left[-1 - \frac{\rho_4^c}{\rho} \frac{v_i^q}{u} \sigma \right] \delta \mu_4 \\
 & + \left[\frac{1}{\rho} (\rho_3^c + \rho_4^c) \frac{v_i^q}{u} \sigma \right] v_j^q = 0 \quad (C.17)
 \end{aligned}$$

Unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung

$$\sigma(c), \sigma\left(\frac{u_c^2}{u_c^2}\right), \sigma\left(\frac{c_T^2}{c_c^2}\right), \sigma\left(\frac{c_m^2}{c_c^2}\right), \sigma\left(\frac{(v_i^q)^2}{c_c^2}\right), \sigma\left(\frac{c_T^2}{c_c^2}\right), \sigma\left(\frac{c_m^2}{c_c^2}\right), \sigma\left(\frac{(v_i^q)^2}{c_c^2}\right)$$

lassen sich Gln. (C.13-17) vereinfachen, wie nun folgt.

Aus (C.17):

$$\delta\mu_4 = \delta\mu_3 - c^2 \delta c + \frac{1}{\rho} (\rho_3^c + \rho_4^c) v_j^q v_j^n \quad (C.18)$$

Gl. (C.18) in (C.16) eingesetzt, ergibt:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = - \frac{c^2}{c_p^2} \delta c + \frac{1}{c_p^2} \delta\mu_3 + \delta \left(\frac{v_j^q}{c_p^2} \right) v_j^n \quad (C.19)$$

Erster und zweiter Schall.

Oberhalb von T_c , d.h. mit $\rho_3^i = 0$, $\rho_3^n = \rho_3$, $\rho_4^i = \rho^s$, $\rho^n = \rho_4^n + \rho_3$,
ergeben Gln. (C.18,19) in Gln (C.13-15) eingesetzt:

$$\begin{bmatrix} -u^2 c & -u^2 \rho & \rho_3 u \\ -(1-c)u^2 + \frac{\rho^s}{\rho} c_p^2 & u^2 \rho & \rho_4^n u \\ \frac{\rho^n}{\rho} c_p^2 & \rho_3 c^2 & -\rho^n u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\rho \\ \delta c \\ v_x^n \end{bmatrix} = 0 \quad (C.20)$$

und v_t^n entkoppelt mit Eigenwert $u=0$. Hieraus folgt

$$\begin{pmatrix} -u^2 c + \frac{\rho_3}{\rho} c_p^2 & -u^2 \rho + \frac{\rho_3^2}{\rho^n} c^2 \\ (-1+c)u^2 + \frac{\rho^s}{\rho} c_p^2 + \frac{\rho_4^n}{\rho} c_p^2 & u^2 \rho + \frac{\rho_4^n \rho_3}{\rho^n} c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta c \end{pmatrix} = 0 \quad (C.21)$$

Das Verschwinden der Determinante ergibt schließlich:

$$u_1^2 = c_p^2 = \frac{\gamma p}{\gamma \rho} \quad (C.22)$$

$$u_2^2 = \frac{\rho^s}{\rho^n} c^2 c_c^2 = \frac{\rho^s}{\rho^n} c^2 \frac{\delta c}{\delta c} \quad (C.23)$$

Die Eigenvektoren hierzu ergeben aus (C.21) jeweils $\delta c = 0$ und $\delta \rho = 0$.

Die Goldstone-Mode des FF-Zustandes.

Hinreichend nahe an T_c ist die Geschwindigkeit der Goldstone-Mode u verschwindend klein, so daß Terme $\delta(u^2/c_c^2), \delta(u^2/c_c^2)$ vernachlässigt werden können. Ich werde u in erster Ordnung der an T_c verschwindenden Dichtenquotienten $\rho_3^s/\rho_3, \rho_4^s/\rho_3, \rho_3^T/\rho_3, \rho_3^c/\rho_3, \rho_4^c/\rho_3$ ($v=3,4$) ausdrücken.

Gln. (C.18,19) in (C.14) eingesetzt, ergibt:

$$\delta \mu_3 = c_c^2 \delta c - \frac{1}{\rho_4^s} \left[\rho_3^s v_j^q + [\rho_3^T]_j u + \rho_4^T v_j^q r \hat{k}_j + \frac{[\rho_4^s]}{\rho} (\rho_3^c + \rho_4^c) v_j^q \right] v_j^n \quad (C.24)$$

Gln. (C.18,19,24) in (C.13) eingesetzt, ergibt:

$$c_c^2 \delta c = \left[-v_j^q - \frac{[\rho_3^T]}{[\rho_3^s]} u - \frac{\rho_3^T}{[\rho_3^s]} v_j^q r \hat{k}_j \right] v_j^n, \quad (C.25)$$

und schließlich Gln. (C.18,19,24,25) in Gl. (C.15) eingesetzt, ergibt:

$$a_{ij} v_j^n = 0 \quad (i,j) = (l,t), \quad (C.26)$$

wo l und t jeweils die (zu $\vec{k}$) longitudinale und transversale Komponente symbolisieren, und

$$a_{ij} = \left\{ \left[-(\rho_3^s + \rho_x^s) \right]_i + \rho_3 \hat{k}_i + \left\{ \rho_3^s \right\} \frac{v_i^q}{u} + \rho_3^s \frac{v_i^q}{u} \gamma \hat{k}_i \right] \left[-v_j^q - \frac{\gamma \rho_3^s}{\left\{ \rho_3^s \right\}} u - \frac{\rho_3^s}{\left\{ \rho_3^s \right\}} v_j^q \gamma \hat{k}_j \right] \right. \\ \left. - \left[\rho_3^s + \rho_x^s \right]_j v_i^q - \left[\rho_3^s + \rho_x^s \right]_j v_i^q - \left(\rho_3^s + \rho_4^s + \rho_3^s \frac{v_i^q}{u} \gamma \right) \left(v_j^q \hat{k}_i + v_j^q \hat{k}_i \right) \right. \quad (C.27)$$

$$+ \left\{ \rho_3^s \right\} \frac{v_i^q v_j^q}{u} - u \rho_{ij}^n + p \frac{c_T^2 + c_m^2}{u} \hat{k}_i \hat{k}_j \left\{ \rho_3^s \right\} u \\ \cong u^2 \left[\left\{ \rho_3^s \right\} \rho_{ij}^n + \left[\rho_3^s \right]_i \left[\rho_3^s \right]_j \right] + \left\{ \rho_3^s \right\} \rho_3 v^q u \left(\hat{q}_i \hat{k}_j + \hat{q}_j \hat{k}_i \right) \\ - \left\{ \rho_3^s \right\} p \left(c_T^2 + c_m^2 \right) \hat{k}_i \hat{k}_j + \rho_3^s v^q u \left[\gamma \left[\rho_3^s \right]_i \hat{k}_j + \gamma \left[\rho_3^s \right]_j \hat{k}_i + \left\{ \rho_3^s \right\} \left(\hat{q}_i \hat{k}_j + \hat{q}_j \hat{k}_i \right) \right] \\ + \left(\rho_3^s v^q \right)^2 \gamma^2 \hat{k}_i \hat{k}_j + \left\{ \rho_3^s \right\} \rho_4^s v^q u \left(\hat{q}_i \hat{k}_j + \hat{q}_j \hat{k}_i \right) \quad (C.28)$$

$$= u^2 \left[\rho_3^s \left(\rho_{11}^n - \rho_{11}^n \right) + \left(\rho_3^s + \rho_x^s \right)^2 \right] \hat{q}_i \hat{q}_j \\ + \left[-\frac{u^2}{\gamma} \left(\rho_3^s + \rho_x^s \right) \rho_3 + \left(\rho_3^s \rho_3 + \rho_x^s \rho_3^s + \rho_3^s \rho_4^s \right) v^q u \right] \left(\hat{q}_i \hat{k}_j + \hat{q}_j \hat{k}_i \right) \quad (C.29) \\ + \left[\rho_3^2 \frac{u^2}{\gamma^2} + 2 \rho_3 \rho_3^s v^q \frac{u}{\gamma} - \rho_3^s p \left(c_T^2 + c_m^2 \right) + \left(\rho_3^s v^q \right)^2 \right] \hat{k}_i \hat{k}_j + \rho_3^s \rho_1^s u^2 \delta_{ij} .$$

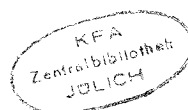
Um zur Gl. (C.29) zu gelangen wurden folgende Beziehungen verwendet:

$$\left(\rho_3^s \right)_1 = \left(\rho_x^s \right)_1 = 0 \quad (C.30)$$

$$\left(\rho_3^s \right)_1 = \rho_3^s , \quad \left(\rho_x^s \right)_1 = \rho_x^s , \quad (C.31)$$

so daß

$$\left(\rho_3^s \right)_1 = \rho_3 \quad (C.32)$$



$$\begin{aligned} [\rho_3]_i &= \gamma \left((\rho_3^n)_\parallel - (\rho_3^n)_\perp \right) \hat{q}_i + (\rho_3^n)_\perp \hat{k}_i \\ &= -\gamma (\rho_3^s + \rho_3^z) \hat{q}_i + \rho_3 \hat{k}_i \end{aligned} \quad (C.33)$$

$$\{\rho_3^s\} = \gamma^2 \rho_3^s \quad (C.34)$$

Ferner ist in (C.29):

$$\hat{q}_i \hat{q}_j = \begin{pmatrix} \gamma^2 & \gamma (1-\gamma^2)^{1/2} \\ \gamma (1-\gamma^2)^{1/2} & 1-\gamma^2 \end{pmatrix} \quad (C.35)$$

$$\hat{q}_i \hat{k}_j + \hat{q}_j \hat{k}_i = \begin{pmatrix} 2\gamma & (1-\gamma^2)^{1/2} \\ (1-\gamma^2)^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \quad (C.36)$$

$$\hat{k}_i \hat{k}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (C.37)$$

Aus dem Verschwinden der Determinante von a_{ij} aus (C.29) ergibt sich eine Wurzel $u=0$ (die weitere Wurzel $u=0$ entsteht künstlich, wenn man die skalare Bewegungsgleichung für ϕ_3 in der vektoriellen Form (3.28) betrachtet). Die verbleibende Gl. zweiter Ordnung, mit der zusätzlichen Annahme, daß $(\rho^n)_\parallel - (\rho^n)_\perp \ll \rho_3$, ist gegeben durch:

$$\left(\frac{u}{\gamma}\right)^2 + \frac{u}{\gamma} 2 \frac{\rho_3^T v^q}{\rho_3} + \left[-\frac{\rho_3^s \rho}{\rho_3^2} (c_T^2 + c_m^2) - \frac{\rho_3^s}{(\rho^n)_\perp} (1-\gamma^2) (v^q)^2 + \left(\frac{\rho_3^T}{\rho_3} v^q \right)^2 \right] = 0 \quad (C.38)$$

Ihre Lösung ergibt die Geschwindigkeit der Goldstone-Mode des FF-Zustandes (s. Kapitel III).

ANHANG D: Eigenvektoren des FF-Zustandes.

Wie in 4.3. begründet, betrachte ich den FF-Zustand in einer einkomponentigen Superflüssigkeit ohne Magnetisierung. Das heißt, von den Variablen aus Kapitel III setze ich hier

$\rho_4 = f_4^s = \Lambda = 0$, so daß die Bewegungsgleichungen gegeben sind durch:

$$-u \delta \rho + \left[\vec{\rho}^s \vec{v}^s + \vec{\rho}^n \vec{v}^n + \left(\rho^T \frac{\delta \sigma}{\sigma} + \rho^p \frac{\delta \rho}{\rho} \right) \vec{v}^q \right] \cdot \hat{k} = 0 \quad (D.1)$$

$$\begin{aligned} & -u \left[\vec{\rho}^s \vec{v}^s + \vec{\rho}^n \vec{v}^n + \left(\rho^T \frac{\delta \sigma}{\sigma} + \rho^p \frac{\delta \rho}{\rho} \right) \vec{v}^q \right] + \delta p \hat{k} \\ & + \left\{ \left[\vec{\rho}^s (\vec{v}^s \cdot \vec{v}^n) + \left(\rho^T \frac{\delta \sigma}{\sigma} + \rho^p \frac{\delta \rho}{\rho} \right) \vec{v}^q \right] \cdot \hat{k} \right\} \vec{v}^q = 0 \end{aligned} \quad (D.2)$$

$$-u \left(\frac{\delta \sigma}{\sigma} + \frac{\delta \rho}{\rho} \right) + \vec{v}^n \cdot \hat{k} = 0 \quad (D.3)$$

$$-u \vec{v}^s + \left[\delta \mu + \vec{v}^q \cdot \vec{v}^n \right] \hat{k} = 0, \quad (D.4)$$

wo

$$\vec{v}^n = \vec{v} + \frac{\rho^s}{\rho} \vec{w} - \left(\frac{\rho^T}{\rho} \frac{\delta \sigma}{\sigma} + \frac{\rho^p}{\rho} \frac{\delta \rho}{\rho} \right) \vec{v}^q \quad (D.5)$$

$$\vec{v}^s = \vec{v} - \frac{\rho^s}{\rho} \vec{w} - \left(\frac{\rho^T}{\rho} \frac{\delta \sigma}{\sigma} + \frac{\rho^p}{\rho} \frac{\delta \rho}{\rho} \right) \vec{v}^q \quad (D.6)$$

$$\vec{w} = \vec{v}^n - \vec{v}^s \quad (D.7)$$

$$\delta \mu = c_1^2 \frac{\delta \rho}{\rho} - \frac{1}{\rho} \sigma^2 \frac{\delta T}{\delta \sigma} \delta \sigma - \frac{\rho^s - \rho^T}{\rho} \vec{v}^q \cdot \vec{w} \quad (D.8)$$

$$c_1^2 = c_p^2 = \frac{\lambda_1^2}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\rho^s \sigma^2 \frac{\delta T}{\delta \sigma}}{\rho}$$

Zum Zwecke des Vergleichs mit dem CC-Zustand berechne ich hier die kleinen Korrekturen zum ersten Schall. Nach einigen algebraischen Schritten erhalte ich:

$$u_1^2 = c_1^2 + \left[\frac{\rho^s}{[\rho^n]_e} + 2 \frac{\rho^f}{[\rho^n]_e} + \frac{(\rho^f)^2}{\rho [\rho^n]_e} \right] (\gamma v_q)^2, \quad (D.9)$$

und in niedrigster Ordnung in $\rho^s/\rho \ll 1$:

$$u_1^2 = c_1^2 + \left[\frac{\rho^s}{\rho} \gamma^2 + 2 \frac{\rho^f}{\rho} + \frac{(\rho^f)^2}{\rho^2} \right] (\gamma v_q)^2. \quad (D.10)$$

Für die Geschwindigkeit des zweiten Schalls erhalte ich in niedrigster Ordnung in $\rho^s/\rho \ll 1$:

$$u_2 = \gamma \left[-\frac{\rho^T}{\rho} \pm \sqrt{c_2^2 + \frac{\rho^s}{\rho} (1-\gamma^2) (v_q)^2} \right], \quad (D.11)$$

und für den Fall, daß $\rho^T \sim \rho^s$,

$$u_2 = \pm \gamma \sqrt{c_2^2 + \frac{\rho^s}{\rho} (1-\gamma^2) (v_q)^2}. \quad (D.12)$$

Eigenvektoren.

Vernachlässigt werden Terme in $\gamma (v_q/c_1)^2, \gamma (c_2/c_1)^2$.

i) Diffusionen.

Eine Mode mit $u = 0$ entspricht Fluktuationen in v_{μ} . Für die weitere Mode mit $u = 0$ erhalte ich aus (D.1,2):

$$\vec{v} \cdot \hat{k} = \delta k = 0 \quad (D.13)$$

Aus (D.4,11) folgt:

$$\sigma \delta T = v_t^q v_t^n \quad (D.14)$$

ii) Erster Schall.

(D.1) ergibt

$$\frac{\delta p}{\rho} = \frac{\vec{v} \cdot \hat{k}}{u_1} = \pm \frac{\vec{v} \cdot \hat{k}}{c_1} \quad (D.15)$$

Mit (D.20) (s. unten) ergeben (D.5,6,8) jeweils:

$$\vec{v}^n = \vec{v} - \frac{\rho^p}{\rho} \frac{\vec{v} \cdot \hat{k}}{u_1} \vec{v}^q + \frac{\rho^s}{\rho} \vec{w} \quad (D.16)$$

$$\vec{v}^s = \vec{v} - \frac{\rho^p}{\rho} \frac{\vec{v} \cdot \hat{k}}{u_1} \vec{v}^q - \frac{\rho^n}{\rho} \vec{w} \quad (D.17)$$

$$\delta \mu = c_1^2 \frac{\delta p}{\rho} \quad (D.18)$$

Gln. (D.16-18) in (D.4) eingesetzt ergeben:

$$\left(\frac{\rho^n}{\rho} \vec{w} \right) \cdot \hat{k} = \mp \frac{v^q}{c_1} \left(\hat{q} + \frac{\rho^p}{\rho} \tau \hat{k} \right) \cdot \vec{v} \quad (D.19)$$

(D.15) in (D.3) ergibt:

$$\frac{\delta \sigma}{\sigma} = \left(\frac{\rho^s}{\rho} \frac{w}{u_1} \right) \cdot \hat{k} - \frac{\rho^p}{\rho} \frac{v^q}{u_1} \frac{\vec{v} \cdot \hat{k}}{u_1} \quad (D.20)$$

wo $\delta \sigma / \sigma$ nach (D.9,19) der Größenordnung $(v^q/u_1)(\delta p/\rho)$ ist.

Schließlich folgt aus (D.4):

$$V_t = 0 \quad (D.21)$$

iii) Zweiter Schall.

Im Ginzburg-Landau-Bereich, $\rho^s/\rho \ll 1$ benutze ich den Ausdruck (D.12) und berechne die Eigenvektoren konsistent zu dieser Näherung.

Gln. (D.1,3) ergeben:

$$u \frac{\delta \sigma}{\sigma} = -\frac{1}{\rho} \delta f^s \quad (D.22)$$

$$\frac{\delta \sigma}{\sigma} = \frac{1}{u_1} \left(\frac{\vec{\rho}^s}{\rho} \cdot \vec{w} \right) \cdot \hat{k} \quad (D.23)$$

Gln. (D.1,4,23) ergeben:

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{\vec{v} \cdot \hat{k}}{u_2} = \frac{v_t^2}{c^2} \left[\left(\frac{\vec{\rho}^s}{\rho} \cdot \hat{k} - \frac{\rho^s}{\rho} \hat{q} \right) \cdot \vec{w} - \frac{\rho^s}{\rho} \gamma^2 \left(\frac{\vec{\rho}^s}{\rho} \cdot \vec{w} \right) \cdot \hat{k} \right] \sim 0 \quad (D.24)$$

Aus (D.4) folgt:

$$V_t = -\frac{v_t^2}{u_2} \left(\frac{\vec{\rho}^s}{\rho} \cdot \hat{k} \right) \cdot \vec{w} \quad (D.25)$$

ANHANG E: Lösung der hydrodynamischen Gleichungen des stromtragenden Zustandes (erste Ordnung in w).

Die hydrodynamischen Gleichungen des CC-Zustandes (Gln. (4.2-5,7)) werden hier um die Gleichgewichtswerte linearisiert und gelöst. (Mit w und v werden die Gleichgewichtswerte, während mit δw und δv die Auslenkungen bezeichnet.)

i) Massenerhaltung:

$$\dot{\rho} + \nabla_j (\rho v_j) = 0 \quad (E.1)$$

$$\dot{\rho} + v_j \nabla_j \rho + \rho \nabla_j v_j = 0 \quad (E.2)$$

Mit den Definitionen $u = w/k$, $U = u - v_\ell$, und nach einer Fourier-Entwicklung ist

$$-U \delta \rho + \rho \delta v_\ell = 0 \quad (E.3)$$

$\delta \rho$ ist nach Gl. (2.83) proportional zu δp und $\delta(w^2) = 2(w_\ell \delta w_\ell + w_t \delta w_t)$. Somit ist (E.2):

$$-U \frac{\partial \rho}{\partial p} \delta p - U \rho^2 \frac{\partial \rho^n / \rho}{\partial p} w_\ell \delta w_\ell + \rho \delta v_\ell - U \rho^2 \frac{\partial \rho^n / \rho}{\partial p} w_t \delta w_t = 0 \quad (E.4)$$

ii) Impulserhaltung:

$$\dot{g}_i + \nabla_i p + \nabla_j (v_j^n g_i + g_j^s v_i^s) = 0, \quad (E.5)$$

und mit

$$\vec{g} = \rho \vec{v} = \rho \vec{v}^n + \vec{g}^s, \quad \vec{v}^n = \vec{v} + \frac{\rho^s}{\rho} \vec{w}, \quad \vec{v}^s = \vec{v} - \frac{\rho^n}{\rho} \vec{w}, \quad (E.6)$$

ist (E.5):

$$\dot{g}_i + \nabla_i p + \nabla_j (\rho v_j v_i + \frac{\rho^n \rho^s}{\rho} w_j w_i) = 0 \quad (E.7)$$

$$\rho \dot{v}_i + v_i \dot{\rho} + v_j \rho \nabla_j v_i + v_i v_j \nabla_j \rho + v_j \rho \nabla_j v_i + \nabla_i p - \nabla_j (\frac{\rho^n \rho^s}{\rho} w_j w_i) = 0. \quad (E.8)$$

Der zweite, dritte und vierte Terme ergeben (E.2) und sind somit Null. D.h.

$$\rho \dot{v}_i + \rho v_j \nabla_j v_i + \nabla_i p + \frac{\rho^n \rho^s}{\rho} w_i \nabla_j w_j + \frac{\rho^n \rho^s}{\rho} w_j \nabla_j w_i = 0. \quad (E.9)$$

Nach ebenen Wellen entwickelt, erhält man:

$$-\rho U \delta v_i + \delta_{il} \delta p + \frac{\rho^n \rho^s}{\rho} w_i \delta w_l + \frac{\rho^n \rho^s}{\rho} w_l \delta w_i = 0. \quad (E.10)$$

Für $i = 1$ und $i = t$ erhält man jeweils:

$$\delta p + 2 \frac{\rho^n \rho^s}{\rho} w_l \delta w_l - \rho U \delta v_l = 0 \quad (E.11)$$

und

$$\frac{\rho^n \rho^s}{\rho} w_t \delta w_l + \frac{\rho^n \rho^s}{\rho} w_l \delta w_t - \rho U \delta v_t = 0. \quad (E.12)$$

Für $i = tt$ erhält man:

$$-\rho U \delta v_{tt} + \frac{\rho^n}{\rho} w_{\ell} \delta w_{tt} = 0 \quad , \quad (E.13)$$

und da $\delta v_{tt}^s = 0$, ist:

$$\delta v_{tt} = \frac{\rho^n}{\rho} \delta w_{tt} \quad , \quad (E.14)$$

und aus Gl. (E.13) folgt:

$$(-U + \frac{\rho^s}{\rho} w_{\ell}) \delta w_{tt} = 0 \quad . \quad (E.15)$$

iii) Entropiedechteerhaltung:

$$\dot{s} + \nabla_j (s v_j^n) = 0 \quad , \quad (E.16)$$

oder mit (E.6)

$$\dot{s} + \nabla_j (s v_j + s \frac{\rho^s}{\rho} w_j) = 0 \quad (E.17)$$

$$\rho \dot{\sigma} + \sigma \dot{\rho} + \sigma \rho \nabla_j v_j + \sigma v_j \nabla_j \rho + \rho v_j \nabla_j \sigma + \sigma \rho^s \nabla_j w_j + \rho^s w_j \nabla_j \sigma + \sigma w_j \nabla_j \rho^s = 0 \quad . \quad (E.18)$$

Der zweite, dritte und vierte Term in (E.18) ergeben Null (Gl. (E.2)), und somit erhält man:

$$(-\rho U + \rho^s w_{\ell}) \delta \sigma + \rho^s \sigma \delta w_{\ell} + \rho \sigma w_{\ell} \delta \left(\frac{\rho^s}{\rho} \right) + \frac{\rho^s}{\rho} \sigma w_{\ell} \delta \rho = 0 \quad (E.19)$$

Da $\partial(\rho^s/\rho)/\partial x = -\partial(\rho/\rho^s)/\partial x$, mit $x = (p, t \text{ oder } w^2)$, und nach Gl.

(2.83) für $\delta \sigma$, erhält man:

$$\begin{aligned} & \sigma w_L \left(\frac{\rho^s}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} - \rho \frac{\partial \rho^n / \rho}{\partial p} \right) \delta p + \left[(-\rho U + \rho^s w_L) \frac{\partial \sigma}{\partial T} - \rho \sigma w_L \frac{\partial \rho^n / \rho}{\partial T} \right] \delta T \\ & + \left(\rho^s \sigma - \rho U \frac{\partial \rho^n / \rho}{\partial T} w_L \right) \delta w_L - \rho U \frac{\partial \rho^n / \rho}{\partial T} w_t \delta w_t = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

iv) Josephson-Gleichung:

$$\dot{v}_i^s + \nabla_i \left(\mu_s + \frac{(v^s)^2}{2} \right) = 0 \quad (\text{E.21})$$

Hier kann i lediglich 1 sein. Mit Gln. (E.6, 2.78), d.h.

$\nabla \mu_s = \nabla p / \rho - \sigma \nabla T - (\rho^n / 2\rho) \nabla(w^2)$, ist (E.21):

$$\dot{v}_L - w_L \left(\frac{\rho^n}{\rho} \right) - \frac{\rho^n}{\rho} \dot{w}_L + \nabla \mu_s + \left(v_L - \frac{\rho^n}{\rho} w_L \right) \nabla \left(v_L - \frac{\rho^n}{\rho} w_L \right) = 0 \quad (\text{E.22})$$

$$\begin{aligned} & \left(\dot{v}_L + v_L \nabla v_L \right) - w_L \left(\left(\frac{\rho^n}{\rho} \right) + v_L \nabla \left(\frac{\rho^n}{\rho} \right) \right) - \frac{\rho^n}{\rho} \left(\dot{w}_L + v_L \nabla w_L \right) \\ & + \frac{1}{\rho} \nabla p - \sigma \nabla T - \frac{\rho^n}{2\rho} \nabla(w^2) - \frac{\rho^n}{\rho} w_L \nabla v_L + \left(\frac{\rho^n}{\rho} \right)^2 w_L \nabla w_L = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

Mit Gl. (2.83):

$$\begin{aligned} & -U \delta v_L + U w_L \frac{\partial \rho^n / \rho}{\partial p} \delta p + U w_L \frac{\partial \rho^n / \rho}{\partial T} \delta T + U \frac{\rho^n}{\rho} \delta w_L + \frac{1}{\rho} \delta p - \sigma \delta T \\ & - \frac{\rho^n}{\rho} w_L \delta w_L - \frac{\rho^n}{\rho} w_t \delta w_t - \frac{\rho^n}{\rho} w_L \delta v_L + \left(\frac{\rho^n}{\rho} \right)^2 w_L \delta w_L = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

Mit Gl. (E.11):

$$\begin{aligned} & U \frac{\partial \rho^n / \rho}{\partial p} w_L \delta p + \left(-\sigma + U \frac{\partial \rho^n / \rho}{\partial T} w_L \right) \delta T + \left(U \frac{\rho^n}{\rho} - 3 \frac{\rho^s \rho^n}{\rho^2} w_L \right) \delta w_L - \\ & - \frac{\rho^n}{\rho} w_t \delta w_t - \frac{\rho^n}{\rho} w_L \delta v_L = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

Schließlich, da $\delta v_t^s = 0$, ist $\delta v_t = (\rho^n / \rho) \delta v_t^n$ und $\delta w_t = \delta v_t^n$, so daß

$$\delta v_t = \frac{\rho^n}{\rho} \delta w_t \quad . \quad (E.26)$$

Gln. (E.4,11,12,20,25,26) stellen ein komplettes Gleichungssystem in den Variablen $\delta p, \delta T, \delta w_x, \delta v_x, \delta w_t, \delta v_t$ dar.

Geschwindigkeiten des ersten und zweiten Schalls.

Die longitudinalen Fluktuationen sind durch die obere 4x4 Matrix aus (4.19) gegeben. Das Verschwinden der Sekulardeterminante bis zur linearen Ordnung in w ergibt die folgende Gleichung für die Geschwindigkeiten des ersten und zweiten Schalls:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial \sigma}{\partial T} \left(-U + \frac{\rho^s}{\rho} w_x \right) - \frac{\sigma}{\rho} w_x \frac{\partial \rho^n}{\partial T} \right] \left[U \rho^n \left(1 - U^2 \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) - 3 \frac{\rho^n \rho^s}{\rho} w_x \left(1 - U^2 \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \right] \\ & + \left[-U \sigma w_x \frac{\partial \rho^n}{\partial T} - U \sigma \frac{\rho^s}{\rho} w_x \frac{\partial \rho^n}{\partial T} + \sigma^2 \rho^s \right] \left[1 - U^2 \frac{\partial \rho}{\partial p} \right] = 0 . \end{aligned} \quad (E.27)$$

Mit $c_1^2 = \partial p / \partial \rho|_\sigma$, $c_2^2 = (\rho^s / \rho^n) \sigma^2 \partial T / \partial \sigma|_p$, folgt:

$$\left[-U^2 + c_1^2 \right] \left[-U^2 + c_2^2 + U w_x \left(4 \frac{\rho^s}{\rho} - 2 \frac{\sigma}{\rho^n} \frac{\partial \rho^n}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right) \right] = 0 . \quad (E.28)$$

Die Geschwindigkeiten des ersten und zweiten Schalls ergeben so:

$$u_1^2 = c_1^2 \quad \text{oder} \quad u_1 = \pm (v_x + c_1) \quad (E.29)$$

$$-U^2 + 2Uw_L \left(2 \frac{\rho^s}{\rho} - \frac{\sigma}{\rho^n} \frac{\partial \rho^n}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right) + c_z^2 = 0$$

$$\left[U - w_L \left(2 \frac{\rho^s}{\rho} - \frac{\sigma}{\rho^n} \frac{\partial \rho^n}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right) \right]^2 - c_z^2 + \sigma(w^2) = 0 \quad (\text{E.30})$$

und es folgt:

$$u_z = \pm c_z + v_L + w_L \left(2 \frac{\rho^s}{\rho} - \frac{\sigma}{\rho^n} \frac{\partial \rho^n}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right) . \quad (\text{E.31})$$

ANHANG F: Die linearisierten Gleichungen des CC-Zustandes, mit Termen zweiter Ordnung in w.

Ich definiere:

$$A = \left. \frac{\partial \rho^n / \rho}{\partial T} \right|_{p, w^2}, \quad B = \left. \frac{\partial \rho^n / \rho}{\partial w^2} \right|_{p, T} \quad (F.1)$$

i) Massenerhaltung:

Diese ist auch in Ordnung w^2 durch Gl. (E.4) gegeben:

$$-U \frac{\partial \rho}{\partial p} \delta p - U \rho^2 \frac{\partial \rho^n / \rho}{\partial p} w_e \delta w_e + \rho \delta v_e - U \rho^2 \frac{\partial \rho^n / \rho}{\partial p} w_t \delta w_t = 0 \quad (F.2)$$

ii) Impulsdichteerhaltung:

Zu Gl. (E.11) kommt der Term

$$w_e w_i \nabla \left(\frac{\rho^n \rho^s}{\rho} \right) = -2 \rho^n w_e w_i \nabla \left(\frac{\rho^n}{\rho} \right) + \frac{\rho^n \rho^s}{\rho^2} w_e w_i \nabla \rho \quad (F.3)$$

hinzu. Das heißt, (E.20) erhält zusätzlich die Terme:

$$-2 \rho^n A w_e w_i \delta T + \frac{\rho^n \rho^s}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} w_e w_i \delta p. \quad (F.4)$$

Somit erhält man statt der Gln. (E.11,12) jeweils:

$$\left(1 + \frac{\rho^s}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} w_\ell^2\right) \delta p - 2 \rho^n A w_\ell \delta T + 2 \frac{\rho^s \rho^s}{\rho} w_\ell \delta w_\ell - \rho U \delta v_\ell = 0, \quad (\text{F.5})$$

und mit (E.26),

$$\frac{\rho^s \rho^s}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} w_\ell w_t \delta p - 2 \rho^n A w_\ell w_t \delta T + \frac{\rho^s \rho^s}{\rho} w_t \delta w_\ell - \left(\rho^n U + \frac{\rho^s \rho^s}{\rho} w_\ell\right) \delta w_t = 0. \quad (\text{F.6})$$

iii) Entropiedichteerhaltung:

(E.20) erhält die zusätzlichen Terme:

$$\begin{aligned} \rho^s w_\ell \frac{\partial \sigma}{\partial w^2} \delta(w^2) + \sigma w_\ell \rho \frac{\partial \rho^s / \rho}{\partial w^2} \delta(w^2) = \\ = (\rho^s A w_\ell^2 - 2 \sigma \rho B w_\ell^2) \delta w_\ell + (\rho^s A w_\ell w_t - 2 \sigma \rho B w_\ell w_t) \delta w_t. \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

Folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\rho^s \sigma}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} w_\ell \delta p + \left[(-\rho U + \rho^s w_\ell) \frac{\partial \sigma}{\partial T} - \rho \sigma A w_\ell \right] \delta T + \\ + (\rho^s \sigma - \rho U A w_\ell + \rho^s A w_\ell^2 - 2 \sigma \rho B w_\ell^2) \delta w_\ell + (-\rho U A w_t + \rho^s A w_\ell w_t - 2 \sigma \rho B w_\ell w_t) \delta w_t = 0. \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

iv) Josephson-Gleichung:

Gl. (E.23) erhält den zusätzlichen Term:

$$\frac{\rho^n}{\rho} w_\ell^2 \nabla \left(\frac{\rho^n}{\rho} \right). \quad (\text{F.9})$$

In (E.24) fügt man hinzu die Terme:

$$U \frac{\partial \rho^n / \rho}{\partial w^2} w_\ell \delta(w^2) + \frac{\rho^n}{\rho} \frac{\partial \rho^n / \rho}{\partial T} w_\ell^2 \delta T \quad . \quad (F.10)$$

Statt (E.11) verwendet man jetzt (F.5) und erhält, statt (E.25):

$$\begin{aligned} & - \frac{\rho^n \rho^s}{\rho^3} \frac{w_\ell^2}{c_t^2} \delta \rho + \left(-\sigma + U A w_\ell + 3 \frac{\rho^n}{\rho} A w_\ell^2 \right) \delta T + \left(U \frac{\rho^n}{\rho} - 3 \frac{\rho^n \rho^s}{\rho^3} w_\ell + 2 U B w_\ell^2 \right) \delta w_\ell \\ & - \frac{\rho^n}{\rho} w_\ell \delta v_\ell + \left(- \frac{\rho^n}{\rho} w_t + 2 U B w_\ell w_t \right) \delta w_t = 0 \quad . \quad (F.11) \end{aligned}$$

ANHANG G: Die Eigenvektoren im stromtragenden Zustand.

Konsistent mit der Berechnung der Schallgeschwindigkeiten bis zur zweiten Ordnung in w werden die Eigenvektoren bis zur ersten Ordnung berechnet. Vernachlässigt werden Terme $\mathcal{O}(w^2/c^2)$, $\mathcal{O}(c_1^2/c^2)$.

i) Diffusionen.

Eine Mode mit $U = (\rho^s/\rho) w_\ell$ entspricht Fluktuationen in δg_μ . Für die weitere Mode mit $U = (\rho^s/\rho) w_\ell$ ergibt (4.25e) (oder (4.25c)):

$$\delta w_\ell = \frac{w_\ell}{c^2} \delta p, \quad (\text{G.1})$$

und da

$$\frac{\delta p}{c^2} = \frac{\delta \rho}{\rho}, \quad (\text{G.2})$$

ist:

$$\delta w_\ell = w_\ell \frac{\delta \rho}{\rho}. \quad (\text{G.3})$$

(G.1) in (4.25b) ergibt:

$$\delta p = 0, \quad (\text{G.4})$$

so daß, mit (4.25a),

$$\delta p = \delta \rho = \delta v_\ell = \delta w_\ell = 0 . \quad (G.5)$$

Aus (4.25d) folgt:

$$\sigma \delta T = - \frac{\rho^n}{\rho} w_t \delta w_t \quad (G.6)$$

(die Wiederholung der Indizes l oder t impliziert keine Summation).

Da $w = g(\rho^n - (\rho/\rho^n) v^s)$, ergibt sich für den Gleichgewichtszustand $g = 0$ (wie der des FF-Zustandes):

$$w = - \frac{\rho}{\rho^n} v^s , \quad (G.7)$$

und (G.6) ergibt:

$$\sigma \delta T = v_t^s \delta w_t . \quad (G.8)$$

ii) Erster Schall.

G1. (4.25a) mit $\delta \rho/\rho = \delta p/(\rho c^2)$ und dem Ausdruck (4.35) ergibt:

$$\frac{\delta p}{\rho} = \frac{\delta v_\ell}{u_1} = \pm \frac{\delta v_\ell}{c_1} . \quad (G.9)$$

Aus (4.25b) folgt:

$$- 2 \frac{\rho^n \rho^s}{\rho^2} \frac{w_\ell^2}{c_1^2} \delta p + 2 \frac{\rho^n \rho^s}{\rho^2} w_\ell \delta w_\ell = 0 ,$$

so daß

$$\delta w_\ell = \frac{w_\ell}{c^2} \frac{\delta p}{\rho} \quad , \quad (G.10)$$

oder mit (4.25a):

$$\delta w_\ell = \frac{w_\ell}{u_1} \delta v_\ell = \pm \frac{w_\ell}{c_1} \delta v_\ell \quad ,$$

oder mit (G.7)

$$\delta w_\ell = \mp \frac{\rho}{\rho^n} \frac{v_\ell^s}{c_1} \delta v_\ell \quad . \quad (G.11)$$

(G.10) in (4.25c) ergibt:

$$2\rho^s \sigma \delta w_\ell + (-\rho U + \rho^s w_\ell) \frac{\partial \sigma}{\partial T} \delta T = 0 \quad ,$$

mit (G.11) folgt:

$$\sigma \delta T = 2 \frac{c_2^2}{c^2} \frac{\rho^n}{\rho} w_\ell \delta v_\ell = -2 \frac{c_2^2}{c^2} v_\ell^s \delta v_\ell \quad , \quad (G.12)$$

das heißt

$$\delta T = 0 \quad . \quad (G.13)$$

(G.9) in (G.12) ergibt:

$$\frac{\delta \sigma}{\sigma} = 2 \frac{\rho^s}{\rho} \frac{w_\ell}{u_1} \frac{\delta \rho}{\rho} = \mp 2 \frac{\rho^s}{\rho^n} \frac{v_\ell^s}{c_1} \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (G.14)$$

(G.10) in (4.25e) ergibt:

$$2 \frac{p^* p^s}{\rho} w_t \delta w_l - \left(p^* U - \frac{p^* p^s}{\rho} w_l \right) \delta w_t = 0 \quad ,$$

und mit (G.11):

$$\delta w_t = 0 \quad . \quad (G.15)$$

ii) Zweiter Schall.

Aus (4.25b) folgt:

$$\delta p + 2 \frac{p^* p^s}{\rho} w_l \delta w_l = 0 \quad ,$$

so daß

$$\frac{\delta p}{\rho} = -2 \frac{p^* p^s}{\rho^2} w_l \delta w_l \quad . \quad (G.16)$$

Mit (4.25a) ergibt (G.16):

$$c_1^2 \frac{\delta p}{\rho} = c_1^2 \frac{\delta v_l}{u_2} = -2 \frac{p^* p^s}{\rho^2} w_l \delta w_l \quad ,$$

und mit (G.20) unten:

$$\frac{\delta p}{\rho} = \frac{\delta v_l}{u_2} = 0 \quad . \quad (G.17)$$

(G.16) in (4.25c) ergibt:

$$(-u_2 \rho + p^s w_l) \frac{\partial T}{\partial T} \delta T + p^s \delta w_l = 0 \quad . \quad (G.18)$$

Mit u_2 in niedrigster Ordnung in f^s/ρ gegeben,
 $u_2 = \pm \sqrt{c_2^2 + (f^s/\rho) w_t^2}$, folgt:

$$G \delta T = \frac{c_2^2}{u_2} \frac{\rho^n}{\rho} \delta w_e \quad (G.19)$$

$$\frac{\delta \sigma}{\sigma} = \frac{\rho^s}{\rho} \frac{\delta w_e}{u_2} \quad (G.20)$$

(G.17) in (4.25e) ergibt:

$$\frac{\rho^n \rho^s}{\rho} w_t \delta w_e + \left(\frac{\rho^n \rho^s}{\rho} w_e - u_2 \rho^n \right) \delta w_t = 0 \quad ,$$

und mit (G.18):

$$\frac{\rho^n \rho^s}{\rho} w_t \left[-\frac{1}{\rho^s} (-u_2 \rho + \rho^s w_e) \right] \frac{\delta \sigma}{\sigma} + \left(\frac{\rho^n \rho^s}{\rho} w_e - u_2 \rho^n \right) \delta w_t = 0 \quad ,$$

so daß

$$\delta w_t = w_t \frac{\delta \sigma}{\sigma} \quad (G.21)$$

(G.20) in (G.21) ergibt:

$$\delta w_t = \frac{\rho^s}{\rho} \frac{w_t}{u_2} \delta w_e \quad (G.22)$$

ANHANG H: Äquivalenz der Koeffizienten ρ^T und ρ^p des FF-Zustandes mit $\partial(\rho^*/\rho)/T$ und $\partial(\rho^*/\rho)/\partial p$ im CC-Zustand.

Nach Gln. (2.72, 70) ergeben sich im FF-Zustand einer einkomponentigen Superflüssigkeit (zwecks Vergleich mit dem CC-Zustand) folgende Beziehungen:

$$\delta T = \left. \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right|_{p, \vec{w}} \delta \sigma - \frac{\rho^T}{\rho \sigma} \vec{v}^2 \cdot \delta \vec{w} \quad (\text{H.1})$$

$$\delta p = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{T, \vec{w}} \delta \rho - \rho^p \vec{v}^2 \cdot \delta \vec{w} \quad (\text{H.2})$$

Hieraus folgt:

$$\delta \sigma = \left. \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right|_{p, \vec{w}} \delta T + \left. \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right|_{p, \vec{w}} \frac{\rho^T}{\rho \sigma} \vec{v}^2 \cdot \delta \vec{w} \quad (\text{H.3})$$

$$\delta \rho = \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{T, \vec{w}} \delta p + \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{T, \vec{w}} \rho^p \vec{v}^2 \cdot \delta \vec{w} \quad (\text{H.4})$$

Vergleich mit den entsprechenden Beziehungen im CC-Zustand, nämlich:

$$\delta \sigma = \left. \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right|_{p, \vec{w}} \delta T + \frac{\partial \rho^*/\rho}{\partial T} \vec{w} \cdot \delta \vec{w} \quad (\text{H.5})$$

$$\delta \rho = \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{T, \vec{w}} \delta p + \rho^2 \frac{\partial \rho^*/\rho}{\partial p} \vec{w} \cdot \delta \vec{w} \quad (\text{H.6})$$

ergeben die Äquivalenz der Koeffizienten ρ^T und ρ^p im FF-Zustand

mit jeweils $\partial(c^*/c)/\partial T$ und $\partial(c^*/c)/\partial p$ im CC-Zustand:

$$\rho^T \vec{v}_T \hat{=} \rho^T \left(\frac{\partial \rho^*/\rho}{\partial T} \right)_{p, \vec{w}} \left(\frac{\partial T}{\partial T} \right)^{-1}_{p, \vec{w}} \vec{w} \quad (\text{H.7})$$

$$\rho^p \vec{v}_T \hat{=} \rho^2 \left(\frac{\partial \rho^*/\rho}{\partial p} \right)_{T, \vec{w}} \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)^{-1}_{T, \vec{w}} \vec{w} \quad (\text{H.8})$$

REFERENZEN.

1. M. Liu, Physica 109 & 110B, 1615 (1982)
2. M. Liu, M.C. Cross, Phys. Rev. Lett. 41, 250 (1978)
3. M. Liu, M.C. Cross, Phys. Rev. Lett. 43, 296 (1979)
4. M. Liu, Phys. Rev. Lett. 43, 1740 (1979)
5. L.R. Corruccini, D.D. Osheroff, Phys. Rev. Lett. 45, 2029 (1980)
6. J.P. Carton, J. de Phys. Lett. 36, L213 (1975); E.P. Bashkin, A.E. Meyerovich, Adv. Phys. 30, 1 (1981)
7. P. Fulde, R.A. Ferrell, Phys. Rev. 135, 550 (1964); A.I. Larkin, Y.N. Ovchinnikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 47, 1136 (1964) [Sov. Phys. JETP 20, 762 (1965)]; S. Takada, T. Izuyama, Prog. Theor. Phys. 41, 635 (1969); S. Takada, Prog. Theor. Phys. 43, 27 (1970); D. Saint-James, G. Sarma, E.J. Thomas, "Type II Superconductivity", Pergamon Press
8. A.E. Meyerovich, JETP 54, 115 (1981) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. 81, 226 (1981)]
9. T.L. Ho, N.D. Mermin, Phys. Rev. Lett. 44, 330 (1980)
10. M. Liu, Thesis TU München, 1976
11. F. Jähnig, H. Schmidt, Ann. Phys. (N.Y.) 71, 129 (1972)
12. P.C. Martin, O. Parodi, P.C. Pershan, Phys. Rev. A6, 2401 (1972)
13. I.M. Khalatnikov, "An introduction to the theory of superfluidity" (Benjamin, New York, 1965)
14. P. de Gennes, Mol. Cryst. Liq. Cryst. 12, 193 (1971); M. Liu, Phys. Rev. A19, 2090 (1979)

- 15 H.M. Bozler, T. Bartolac, K. Luey and A.L. Thomson, J. de Phys. C6, 283 (1978); A.I. Ahonen, T.A. Alvesalo, T. Haavasoja and M.C. Veuro, J. de Phys. C6, 285 (1978); H. Godfrin, G. Frossati, D. Thoulouze, M. Chapellier and W.G. Clark, J. de Phys. C6, 287 (1978); M.T. Beal-Monod and D.L. Mills, J. de Phys. C6, 290 (1978).
16. M.R. Stern, M. Liu, Physica 109 & 110B, 2099 (1982)
17. P.W. Anderson, Rev. Mod. Phys. 38, 298 (1966)
18. L.D. Landau, E.M. Lifshitz, "Lehrbuch der theoretischen Physik" I, Akademie-Verlag-Berlin, 1981.
19. B.I. Halperin, P.C. Hohenberg, Phys. Rev. 188, 898 (1969).
20. D. Forster, "Hydrodynamic fluctuations, broken symmetry, and correlation functions", Benjamin Reading, 1975
21. M. Liu, M.R. Stern, Phys. Rev. Lett. 48, 1842 (1982)
22. M. Liu, Phys. Rev. B18, 1165 (1978)
23. M. Liu, Habilitationsschrift, 1980.
24. P.G. de Gennes, "The physics of Liquid Crystals", Clarendon, Oxford, 1974.
25. H. Schmidt, "Symmetries and broken symmetries in condensed matter physics", Idset-Paris, 1981.
26. A.F. Andreev, E.P. Bashkin, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 69, 319 (1975) [Sov. Phys. JETP 42, 164 (1975)]; G.E. Volovik, V.P. Mineev, I.M. Khalatnikov, ibid. 69, 675 (1975) [42, 342 (1975)]
27. J.C. Wheatley, Am. J. Phys. 36, 181 (1968); A.I. Ahonen, M.A. Paalanen, R.C. Richardson, Y. Takano, J. Low Temp. Phys. 25, 733 (1976); D.S. Greywall, M.A. Paalanen, Physica 109 & 110B, 1575 (1982)
28. S.J. Putterman, "Superfluid hydrodynamics", North-Holland, Amsterdam, 1974.

29. R. Graham, Phys. Rev. Lett. 33, 1431 (1974); R.Graham, H. Pleiner, Phys. Rev. Lett. 34, 792 (1975); H. Pleiner, "Hydrodynamik der superflüssigen Phasen von ^3He ", Dissertation, 1977.
30. B.Y. Cheng, B.K. Sarma, I.D. Calder, S. Bhattacharya, J.B. Ketterson, Phys. Rev. Lett. 46, 828 (1981)
31. I.M. Khalatnikov, JETP 3, 649 (1956) (Zh. Eksp. Theor. Fiz. 30, 617 (1956)).
32. L.D. Landau, E.M. Lifshitz, "Lehrbuch der theoretischen Physik" VI, Akademie-Verlag-Berlin, 1974
33. J. Maynard, Phys. Rev. B14, 3868 (1976)
34. R. Carey, F. Pobell, J. Low Temp. Phys. 24, 449 (1976)