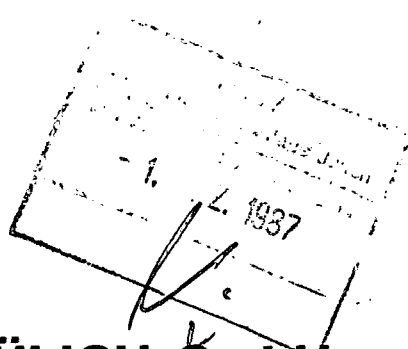




KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH GmbH

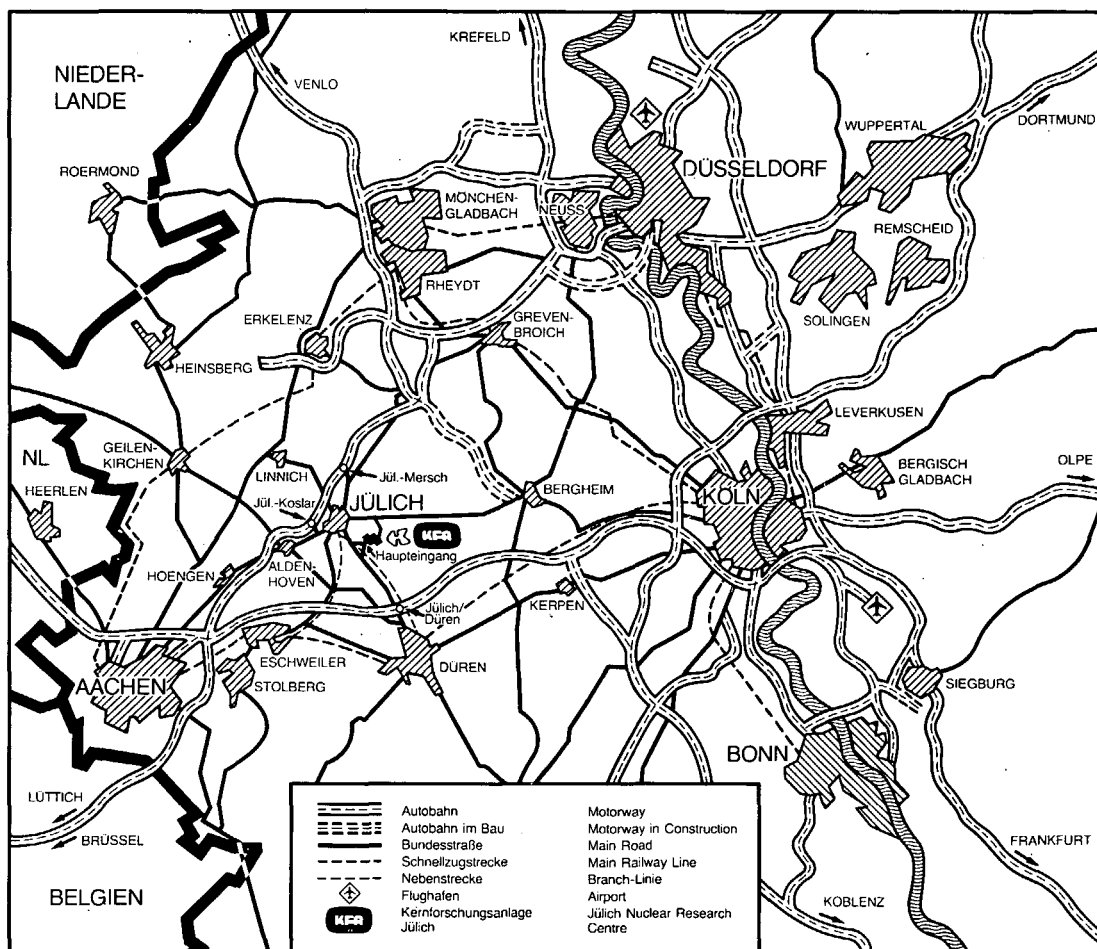
Institut für Reaktorwerkstoffe

**Statistische und systematische Fehler
bei der Ermittlung der Festigkeit
spröder Materialien**

von

Karl Bongartz

Jül - 2158
September 1987
ISSN 0366-0885



Als Manuskript gedruckt.

Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 2158

Institut für Reaktorwerkstoffe JÜL – 2158

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH

Postfach 1913 · D-5170 Jülich (Bundesrepublik Deutschland)

Telefon: 024 61/610 · Telex: 833 556-0 kf d

**Statistische und systematische Fehler
bei der Ermittlung der Festigkeit
spröder Materialien**

von

Karl Bongartz

Statistical and Systematic Errors in the
Strength Determination of Brittle
Materials

by

Karl Bongartz

Summary

A computer simulation method was set up to determine the scatter in the strength measurement on structural components (tubes) of ceramic materials caused by their Weibull strength distribution. The aim was an estimate of the number of specimens necessary for the experimental strength determination. The experimental strength determination comprises measurements on components under simulated operation conditions (e. g. a tube section) as well as on small specimens of identical material in the 4-point bending test.

The results shows, that a small number of tests is sufficient to determine mean strength directly on components, but a big number of specimens is needed to determine the strength for a technologically significant low fracture probability. With acceptable effort this objective can be achieved only using small specimens.

Statistische und systematische Fehler
bei der Ermittlung der Festigkeit
spröder Materialien

von
Karl Bongartz

Kurzfassung

Zwecks Abschätzung des erforderlichen Probenumfangs bei der experimentellen Bestimmung der Festigkeit von Bauteilen aus keramischen Materialien wurden Fehler in der Messung, die durch die Weibullstatistik der Festigkeit bedingt sind, durch Computersimulation ermittelt. Es wurde davon ausgegangen, daß die Messung einerseits am Bauteil selbst unter simulierten Betriebsbedingungen durchgeführt wird (d. h. man ermittelt z. B. die Berstfestigkeit von Rohren bei gleichmäßigem Innendruck), und andererseits die Festigkeit mit kleinen Proben (kleinen Rechteckstreifen) des gleichen Materials im 4-Punkt-Biegetest gemessen wird.

Das Ergebnis zeigt, daß eine kleine Anzahl von Proben ausreicht, um die mittlere Festigkeit direkt am Bauteil zu bestimmen, dagegen braucht man für die Bestimmung der Festigkeit mit einer technologisch signifikant niedrigen Bruchwahrscheinlichkeit eine große Anzahl von Proben. Dies läßt sich mit annehmbarem Aufwand nur durch die Benutzung kleiner Proben erreichen.

1. Einleitung

Der spröde Bruch von Keramiken richtet sich nach einer für das Material und das Meßverfahren charakteristischen statistischen Verteilung der Festigkeit. Ursache sind die schwachen Stellen im Material, die in Anordnung und Größe statistisch verteilt sind. Die Festigkeit einer speziellen Probe ist dadurch mit der schwächsten Stelle in gerade dieser Probe verbunden. Ist das Volumen einer Probe groß und die Spannung homogen verteilt, so wird die Wahrscheinlichkeit, daß sich eine bei der vorgegebenen Spannung bruchauslösende schwache Stelle in der Probe befindet, groß und es ist eine niedrige Festigkeit zu erwarten. Ist umgekehrt die Probe des gleichen Materials klein und die Spannung auf enge Bereiche der Probe konzentriert, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine schwache Stelle im Bereich hoher Spannungen zu finden, geringer. Diese Probe hat daher mit größerer Wahrscheinlichkeit eine höhere Festigkeit. Die Festigkeit einer Probe eines bestimmten Materials hängt daher von der Geometrie und der Spannungsverteilung im Material während der Belastung ab.

Es gibt zwei wichtige Einschränkungen hinsichtlich der Messung der Festigkeit eines spröden Materials:

- Im Labor kann die Messung an einem Material nur an einer begrenzten Zahl von Proben, im allgemeinen weniger als 100 pro Serie, durchgeführt werden. Hieraus lassen sich Bruchwahrscheinlichkeiten nur bis zu einem Wert, der größer als 10^{-2} ist, bestimmen. Oft ist es jedoch wünschenswert, eine gemessene Verteilung zu niedrigeren Wahrscheinlichkeiten zu extrapolieren, wobei man voraussetzt, daß die mathematische Beschreibung der Verteilung im Extrapolationsbereich gilt.
- Aus experimentellen Gründen ist es oft unumgänglich, Festigkeiten an Proben mit bestimmten Geometrien und unter bestimmten Spannungsverteilungen zu messen. Hierbei können Geometrie und Spannungsverteilung stark von denjenigen des Körpers, dessen Festigkeit man wissen möchte, abweichen. Im Biegetest z. B. hat die Probe des Materials die Geometrie eines Streifens. Dieser erfährt bei der Belastung ein Biegemoment, daraus ergeben sich Spannungsfelder, die sehr inhomogen sind.

Das Objekt, für welches man die Festigkeit wissen will, kann jedoch z. B. eine Ringschale des gleichen Materials im Rohr unter der gleichförmigen Belastung des Gas-Innendruckes sein. Hier muß die im Biegetest gemessene Festigkeit in eine äquivalente Festigkeit der Ringschale im Rohr umgerechnet werden.

Für die Auslegung keramischer Bauteile, wie z. B. Wärmetauscherrohre, benötigt man die Festigkeit des keramischen Materials. Um sie experimentell zu bestimmen, sind zwei Arten von Messungen möglich:

- a. Rohre eines bestimmten Materials werden unter gleichförmigem Innendruck bis zum Bruch belastet. Diese Testbedingungen decken hinsichtlich Geometrie und Belastungsart eine Betriebsbedingung ab, d. h. eine der Bedingungen, denen das Material in der technischen Anwendung unterworfen ist.
- b. Kleine rechteckige Proben aus dem gleichen Material werden im sogenannten 4-Punkt-Biegetest bis zum Bruch belastet.

Die im Test (a) gemessene Festigkeit kommt derjenigen in der technischen Anlage am nächsten. Da aber der Test (a) einen sehr hohen Aufwand erfordert, ist er nur für niedrige Probenzahlen durchführbar. Aus diesem Grund wird der Test (b) vorgesehen, der relativ einfach und deshalb mit wesentlich größeren Probenzahlen durchführbar ist. Der Mittelwert und die statistische Verteilung der Festigkeit, die der Test (b) ergibt, sind jedoch nicht direkt für die Originalgeometrie und -belastung gültig. Sie müssen, wie später gezeigt wird, in die für die Originalbedingungen relevanten Werte umgerechnet werden. Schwerpunkt ist eine Aussage über die notwendigen Probenzahlen für Test (a) oder (b) und über die Möglichkeiten und Grenzen, die mit den Daten aus Messungen an Kleinproben errechnete Festigkeit von Bauteilen experimentell zu prüfen.

Im vorliegenden Bericht wird eine grundlegende Untersuchung über zugehörige Auswerteverfahren dargelegt, die über den speziellen Anwendungsfall hinaus Gültigkeit hat. Es wird eine Aussage darüber entwickelt, welche Vorgehensweise mit Kleinproben- und Bauteilmessungen empfehlenswert ist.

Es wird ein mathematischer Ausdruck verwendet, von dem man annehmen kann, daß er das volumen- und spannungsverteilungsabhängige Verhalten einer Probe richtig beschreibt.

Dazu wird für die statistische Verteilung der Festigkeit eine Weibullverteilung angenommen. Die Anwendbarkeit gerade dieses statistischen Modells läßt sich nur mit sehr großen Probenzahlen prüfen, die für Tests im allgemeinen nicht zur Verfügung stehen. Es wurde daher eine Computersimulation durchgeführt: Die zwei Parameter, welche eine bestimmte Weibullverteilung, d. h. einen fiktiven Werkstoff kennzeichnen, wurden vorgegeben.

Mit Hilfe von Zufallszahlen wurden dann im Computer Verteilungen von Festigkeitswerten aus dieser Weibullverteilung erzeugt, die angenommenen Meßreihen entsprechen. Aus diesen Verteilungen wurden zur Simulation des Auswerteverfahrens mit verschiedenen Anpassungsmethoden dann die Werte für die beiden Parameter wieder ermittelt. So ließen sich statistische Fehler und systematische Abweichungen der durch Anpassung gewonnenen Werte von den festen Ausgangswerten in Abhängigkeit von der jeweiligen Anpassungsmethode und der Probenzahl bestimmen. Eine Erhöhung der Streuung der Verteilungen durch Meßfehler wurde nicht betrachtet.

2. Der Weibullformalismus

Nach unserer jetzigen Kenntnis ist die beste mathematische Beschreibung für die Festigkeitsverteilung spröder Materialien gegeben durch die sogenannte Weibullverteilung /1/.

$$W = 1 - \exp \left[- K \int_A \bar{\sigma}^m(\vec{\kappa}) dA \right] \quad (1)$$

W ist die kumulative Wahrscheinlichkeit für Bruch; $\vec{\kappa}$ ist der Ortsvektor. $\bar{\sigma}(\vec{\kappa})$ ist die ortsabhängige Spannung im Probenvolumen oder auf der Probenoberfläche. A kann entsprechend Volumen oder Oberfläche der Probe sein, je nachdem ob Rißentstehung im Volumen oder der Oberfläche angenommen wird; der Exponent m ist der sogenannte Weibullparameter.

Man kann für die Spannung schreiben

$$\sigma(\psi) = \sigma_{\max} f(\psi)$$

$\sigma_{\max}$ ist die kontinuumsmechanisch errechnete, im betrachteten Bereich auftretende Maximalspannung, $f(\psi)$ ist der der Probe entsprechende Formfaktor ≤ 1 . Damit ergibt sich aus Gleichung (1):

$$W = 1 - \exp \left[- K \sigma_{\max}^m \int_A f^m(\psi) dA \right] \quad (2)$$

Die Größe $\sigma_{\max}$ in Gleichung (2) ist als Zerreißfestigkeit definiert; für die mediane Festigkeit $\sigma_{0,5}$ ist $W = 0,5$. Allgemein ist σ_W die Festigkeit mit einer kumulativen Ausfallwahrscheinlichkeit W .

Wir betrachten von einem Material zwei verschiedene Konfigurationen (Proben) I und II, die jeweils durch eine bestimmte Geometrie und Belastungsart (Spannungsverteilung im Material) gekennzeichnet sind. Die Parameter, welche beide Konfigurationen charakterisieren, sind:

Konfiguration	I	II
Festigkeit mit Ausfallwahrscheinlichkeit W	σ_{IW}	σ_{IIW}
Spannungsverteilung	$f_I(\psi)$	$f_{II}(\psi)$
Volumen bzw. Oberfläche	A_I	A_{II}
Bruchwahrscheinlichkeit	W_I	W_{II}

Durch Einsetzen der Parameter von Konfiguration I bzw. II in Gleichung (2) erhält man W_I bzw. W_{II} . Durch Setzen $W_I = W_{II} = W$ erhält man

$$\sigma_{IIW} = \sigma_{IW} \left[\frac{\int_{A_I} f_I^m(\psi) dA}{\int_{A_{II}} f_{II}^m(\psi) dA} \right]^{\frac{1}{m}} \quad (3)$$

Diese Formel gestattet es z. B., die mediane Festigkeit $\sigma_{I0,5}$ die an einer Probenart I gemessen wurde, in die äquivalente Festigkeit der

Probenart II, $\bar{\sigma}_{II0,5}$, umzurechnen. Nimmt man z. B. an, daß die Spannung in I und II konstant ist, d. h. $f_I(\sigma) = f_{II}(\sigma) = 1$ und Rißbildung im Volumen erfolgt, so vereinfacht sich Gleichung (3)

$$\bar{\sigma}_{II0,5} = \bar{\sigma}_{I0,5} \left[\frac{V_I}{V_{II}} \right]^{\frac{1}{m}}$$

D. h. die medianen Festigkeiten verhalten sich qualitativ umgekehrt zueinander wie die Volumina der Proben.

Für die mediane Zerreißfestigkeit $\bar{\sigma}_{0,5}$ ist $W = 0,5$, damit läßt sich Gleichung (2) schreiben:

$$W = 1 - \exp [- a \sigma^m] \quad (4)$$

mit

$$a = - \frac{\ln 0,5}{\bar{\sigma}_{0,5}^m}$$

für die mittlere Zerreißfestigkeit gilt:

$$\bar{\sigma} = \int_0^{\infty} \sigma \frac{dW}{d\sigma} d\sigma$$

mit der Substitution $a \sigma^m = t$ erhält man:

$$\bar{\sigma} = a^{-\frac{1}{m}} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{m}} e^{-t} dt$$

oder

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{0,5} (-\ln 0,5)^{-\frac{1}{m}} \Gamma(1 + \frac{1}{m})$$

Γ ist die Gammafunktion. Aus der obigen Gleichung ergibt sich: für $m \geq 3$ unterscheiden sich mittlere und mediane Festigkeit $\bar{\sigma}$ und $\bar{\sigma}_{0,5}$ um etwa 1 %, d. h. sie sind nahezu identisch. Wir brauchen also im Rahmen unserer Betrachtungen nicht zwischen $\bar{\sigma}$ und $\bar{\sigma}_{0,5}$ zu unterscheiden.

Von Weibull wurde ursprünglich vorgeschlagen, daß es eine bestimmte untere Grenze σ_u für die Festigkeit gäbe /2/, damit hätte dann Gleichung (4) die Form

$$W(\sigma) = 1 - \exp \left[\ln 0,5 \left(\frac{\sigma - \bar{\sigma}_u}{\bar{\sigma}_{0,5} - \bar{\sigma}_u} \right)^m \right]$$

In /3, 4/ wurde gezeigt, daß die Anpassung einer Verteilung dieser Form nicht zu brauchbaren Ergebnissen führt, da die statistische Ungenauigkeit in den berechneten Werten für $\bar{\sigma}_u$ und m sehr groß wird. Deshalb wird empfohlen, daß für spröde Materialien $\bar{\sigma}_u = 0$, sowohl im Sinne einer konservativen Auswertung als auch im Hinblick auf die Konsistenz in der Definition des Weibullparameters.

Außer der medianen Festigkeit $\bar{\sigma}_{0,5}$ mit der Bruchwahrscheinlichkeit $W = 0,5$ ist z. B. die Festigkeit $\bar{\sigma}_{0,01}$, die die Bruchwahrscheinlichkeit $W = 0,01$ impliziert, von technischem Interesse. Man erhält sie durch Umformung von Gleichung (4). Für eine Festigkeit $\bar{\sigma}_W$ mit der Ausfallwahrscheinlichkeit W hat man allgemein

$$\bar{\sigma}_W = \bar{\sigma}_{0,5} \left[\frac{\ln(1-W)}{\ln 0,5} \right]^{\frac{1}{m}} \quad (5)$$

für $W = 0,01$ gilt

$$\bar{\sigma}_{0,01} = \bar{\sigma}_{0,5} [0,0145]^{\frac{1}{m}}$$

3. Bestimmung von Festigkeit und Weibullparameter aus einer vorgegebenen Festigkeitsverteilung

Die Festigkeitsverteilung eines spröden Körpers liege als gemessene Verteilung, bestehend aus N Werten $\bar{\sigma}_i$, die an N identischen Proben gemessen wurde, vor. Aus dieser Verteilung lassen sich mit mehreren Methoden die Parameter $\bar{\sigma}_{0,5}$ und m, welche die Weibullverteilung charakterisieren, bestimmen. Von den infragekommenden Methoden wurden die Least Squares Fit (LSF) und die Maximum Likelihood Fit (MLF)-Methode näher untersucht. Andere infragekommende Methoden wurden bereits in /3, 4/ untersucht.

3.1 Die Least Squares Fit (LSF)-Methode

Man ordnet die N gemessenen Werte $\bar{\sigma}_i$ ($i = 1, \dots, N$) in der Reihenfolge $i = 1 \rightarrow N$ der Größe nach. Jedem Wert $\bar{\sigma}_i$ ordnet man die kumulative Wahrscheinlichkeit

$$W(\bar{\sigma}_i) = \frac{i - 0,5}{N} \quad /3, 7/ \quad (6)$$

zu. Dies ist die kumulative Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Bruch sich bei der Spannung $\bar{\sigma}_i$ ereignet. Die Wahl des Ausdrucks $W(\bar{\sigma}_i)$ in Gleichung (6) stellt eine gewisse Willkür dar. Die Wahrscheinlichkeit $W(\bar{\sigma}_i)$ ließe sich auch definieren als

$$W(\bar{\sigma}_i) = \frac{i}{N + 1} \quad /3, 5-7/ \quad (7a)$$

$$W(\bar{\sigma}_i) = \frac{i - 0,3}{N + 0,4} \quad /7/ \quad (7b)$$

Es muß im wesentlichen gewährleistet sein, daß $W(\bar{\sigma}_1) > 0$ und $W(\bar{\sigma}_N) < 1$ ist.

Dieser gemessenen Verteilung stellt man die theoretische Weibullverteilung, Gleichung (4), die wir nochmals schreiben, gegenüber:

$$W(\bar{\sigma}) = 1 - \exp \left[\ln 0,5 \left(\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_{0,5}} \right)^m \right] \quad (8)$$

Die beiden Parameter $\vartheta_{0,5}$ und m werden durch Anpassung dieser Verteilung an die gemessene folgendermaßen bestimmt:

Man logarithmiert Gleichung (8) zweimal und hat

$$\ln [-\ln (1-W)] = m \ln \vartheta - m \ln \vartheta_{0,5} + \ln (-\ln 0,5) \quad (9)$$

Gleichung (9) läßt sich schreiben

$$Y = mX + U \quad (10a)$$

Dies ist eine lineare Gleichung mit

$$Y = \ln [-\ln (1-W)] \quad (10b)$$

$$X = \ln \vartheta \quad (10c)$$

$$U = -m \ln \vartheta_{0,5} + \ln (-\ln 0,5) \quad (10d)$$

Es sei die Wahrscheinlichkeitsverteilung $W_i(\vartheta_i)$ an N Proben gemessen worden. Mit N Wertepaaren $Y_i = \ln[-\ln (1-W_i)]$ und $X_i = \ln \vartheta_i$ lautet dann die Bedingung, daß die Summe A aller Abstandsquadrate der gemessenen Punkte der Verteilung von der theoretischen ein Minimum sein soll:

$$A = \sum_{i=1}^N (Y_i - mX_i - U)^2 = \text{Min} \quad (11)$$

d. h.

$$\frac{\partial A}{\partial m} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial A}{\partial U} = 0 \quad (12)$$

für den Weibullparameter m erhält man den Ausdruck:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i (X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^N X_i (X_i - \bar{X})} \quad (13)$$

und für die Konstante U

$$U = \bar{Y} - m\bar{X} \quad (14)$$

Mit Gleichung (10d) erhält man für $\sigma_{0,5}$

$$\sigma_{0,5} = \exp \left\{ 1/m [\ln (-\ln 0,5)] - U \right\} \quad (15)$$

3.2 Die Maximum Likelihood Fit (MLF)-Methode

Die Likelihood-Funktion L für die Festigkeiten einer gemessenen Verteilung $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$ ist:

$$L = f(\sigma_1) f(\sigma_2) \dots f(\sigma_N) \quad (16)$$

$f(\sigma)$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $\partial W / \partial \sigma$, mit Gleichung (4) ist

$$f(\sigma) = am \sigma^{m-1} \exp [-a \sigma^m] \quad (17)$$

m und a sind die Parameter, für welche L ein Maximum hat, man hat mit Gleichungen (16) und (17)

$$L = \prod_{i=1}^N am \sigma_i^{m-1} \exp [-a \sigma_i^m]$$

bzw.

$$\ln L = N \cdot \ln a + N \cdot \ln m + (m-1) \sum_{i=1}^N \ln \sigma_i - a \sum_{i=1}^N \sigma_i^m \quad (18)$$

Die Extremalbedingung lautet

$$\frac{\partial \ln L}{\partial m} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \ln L}{\partial a} = 0$$

Dies gibt:

$$\frac{N}{m} + \sum_{i=1}^N \ln \varpi_i - a \sum_{i=1}^N \varpi_i^m \ln \varpi_i = 0 \quad (19)$$

und

$$\frac{N}{a} - \sum_{i=1}^N \varpi_i^m = 0 \quad (20)$$

Elimination von a aus Gleichung (19) und (20) gibt die Bestimmungsgleichung für m , die z. B. mit der Newton-Raphson-Methode zu lösen ist:

$$\frac{N}{m} - N \frac{\sum_{i=1}^N \varpi_i^m \ln \varpi_i}{\sum_{i=1}^N \varpi_i^m} + \sum_{i=1}^N \ln \varpi_i = 0 \quad (21)$$

a und damit $\varpi_{0,5}$ ergibt sich aus Gleichung (20).

3.3 Andere Auswertemethoden

Zusätzlich zu den erwähnten werden in der Literatur noch andere Methoden beschrieben.

3.3.1 Die Methode der Momente

Diese Methode setzt die Momente der gemessenen und derjenigen der theoretischen Verteilung gleich. Somit ergibt sich mit Gleichung (4):

$$\bar{\varpi} = \frac{\sum \varpi_i}{N} = a^{-\frac{1}{m}} T(1 + \frac{1}{m}) \quad (22)$$

$$s^2 = \frac{\sum (\varpi_i - \bar{\varpi})^2}{N - 1} = a^{-\frac{2}{m}} [T(1 + \frac{2}{m}) - T^2(1 + \frac{1}{m})] \quad (23)$$

Gleichungen (22) und (23) ergeben die Bestimmungsgleichung für m:

$$\frac{S}{\bar{\sigma}} = \frac{[\tau(1+2/m) - \tau^2(1+1/m)]^{\frac{1}{2}}}{\tau(1+1/m)} \quad (24)$$

Gleichung (24) läßt sich iterativ nach m lösen, $\bar{\sigma}_{0,5}$ ergibt sich aus Gleichung (22).

Die Methode wurde in /4/ untersucht, es zeigte sich, daß sie keine Vorteile gegenüber der LSF-Methode hat.

3.3.2 Alternative Lösungen des linearen Modells

In /3/ wurde der Vorschlag gemacht, Gleichung (9) folgendermaßen zu benutzen: Man unterteile die gemessene Verteilung $X_i = \ln \bar{\sigma}_i$ und $Y_i = \ln[-\ln(1-W_i)]$ in drei gleiche Gruppen entsprechend der Größe von $\bar{\sigma}_i$. m ist dann die Steigung der Geraden, welche die Schwerpunkte der beiden extremen Gruppen verbindet.

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{N/3} Y_i - \sum_{i=2/3N}^N Y_i}{\sum_{i=1}^{N/3} X_i - \sum_{i=2/3N}^N X_i} \quad (25)$$

Diese Methode erfordert den geringsten Rechenaufwand, hat aber, wie in /3/ gezeigt wurde, einen größeren statistischen sowie systematischen Fehler gegenüber der LSF-Methode.

Eine andere Alternative des linearen Modells wird von Kamiya in /8/ vorgeschlagen: Man läßt von N gemessene Festigkeiten einen gewissen Bruchteil δ/N , d. h. die kleinste, die größte und deren Nachbarn aus. Auf die verbleibenden Proben wendet man die LSF-Methode an. Jede Probe nach Abzug des Bruchteils δ/N hat jedoch die gleichen Koordinaten im linearen Weibullplot wie vor dem Abzug.

Wie in /8/ gezeigt wird, ergeben sich für Probenzahlen ≥ 20 bei Auslassen von 2-4 % der Werte geringfügig kleinere Standardabweichungen und systematische Fehler im Weibullparameter, die aber für die Praxis irrelevant sind. Für Probenzahlen kleiner als 20 hat die Methode keinerlei Vorteil.

4. Zu erwartende statistische Fehler in der experimentellen Bestimmung von Festigkeit und Weibullparameter

Die bei der Bestimmung von Weibullparameter und Festigkeit durch Anpassung einer Weibullverteilung an eine gemessene Festigkeitsverteilung auftretenden statistischen und systematischen Fehler wurden untersucht. Es wurden dabei als Anpassungsmethoden die Least Squares Fit (LSF)- und Maximum Likelihood Fit (MLF)-Methoden betrachtet. Für diese Untersuchung wurde ein spezielles Computerprogramm erstellt.

Wenn der Weibullparameter m und die mediane Festigkeit $\bar{\sigma}_{0,5}$ mittels einer der genannten Methoden aus einer an N Proben gemessenen Festigkeitsverteilung bestimmt werden, so haben sie im allgemeinen nicht die wahren Werten des Materials, die wir M und $\Sigma_{0,5}$ nennen. Diese Abweichung kann zwei Ursachen haben:

- (a) Fehler in der Messung, bedingt durch die Apparatur etc. und
- (b) Fehler, die durch die statistische Verteilung der Festigkeit nach Weibull bedingt sind.

Fehler (a) werden in dieser Untersuchung nicht betrachtet. Bei den Fehlern (b) hat man nochmals zu unterscheiden zwischen einer statistischen Schwankung des Meßwertes und, wie sich zeigen wird, einer systematischen Abweichung des Meßwertes vom Sollwert. Beide hängen ab von der Probenzahl N und der jeweils benutzten Auswertungsmethode.

Es soll zunächst systematisch dargelegt werden, wie diese beiden statistisch bedingten Fehler ermittelt wurden. Abb. 1 demonstriert das Schema der folgenden Studie.

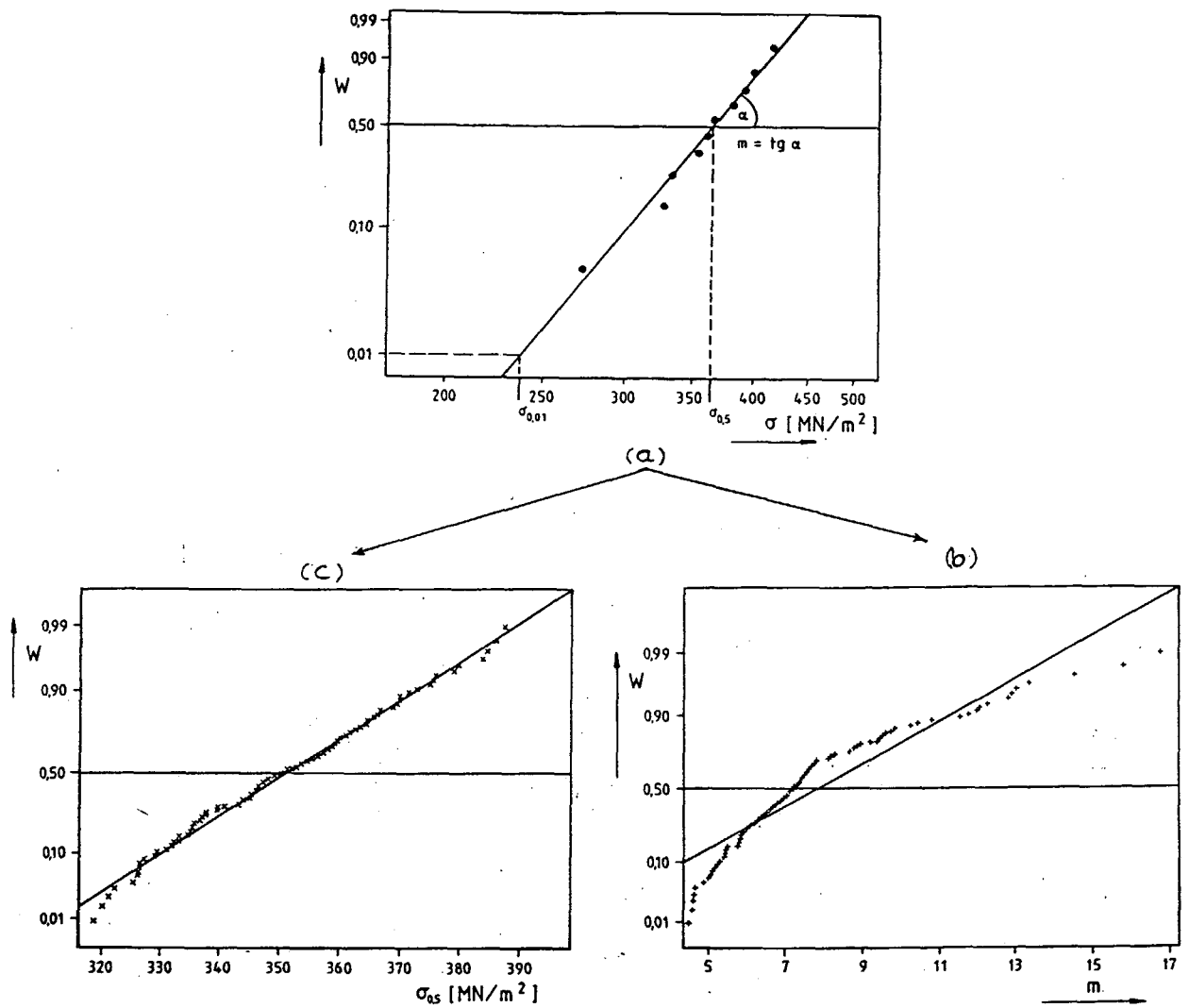


Abb. 1: Schema der Fehlerbestimmung für die mediane Festigkeit $\sigma_{0.5}$ und den Weibullparameter m aus 100 Festigkeitsverteilungen, die jeweils an 10 Proben gemessen wurden.

- (a) Weibullauftragung der Festigkeiten σ_i einer Messung an 10 Proben. Die nach der LSF-Methode angepaßte Weibullverteilung ist eingetragen. Ihre Steigung ist α , sie ergibt den Weibullparameter m . Die mediane Festigkeit $\sigma_{0.5}$ sowie die Festigkeit mit 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit $\sigma_{0.01}$ der angepaßten Verteilung sind eingezeichnet.
- (b) Gaußauftragung der Verteilung für $\sigma_{0.5}$ aus 100 Messungen. Ein Punkt in diesem Plot entspricht dem Wert $\sigma_{0.5}$, der aus einer Messung an 10 Proben (Abb. 1a) resultiert. Eine angepaßte Gaußverteilung ist eingezeichnet.
- (c) Gaußauftragung der Verteilung für m aus 100 Messungen. Ein Punkt in diesem Plot entspricht dem Wert m , der aus einer Messung an 10 Proben (Abb. 1a) resultiert. Eine angepaßte Gaußverteilung ist eingezeichnet.

Die Anpassung einer Weibullverteilung an eine mit 10 Proben gemessene Verteilung ist in Abb. 1a gezeigt: Über den 10 gemessenen Festigkeiten σ_i ist deren kumulative Wahrscheinlichkeit W_i nach Weibull aufgetragen. Auf der x-Achse hat man also $X_i = \ln \sigma_i$ und auf der y-Achse $Y_i = \ln[-\ln(1-W_i)]$. An diese Punkte ist eine Gerade (d. h. in dieser Auftragung eine Weibullverteilung) nach der LSF-Methode angepaßt. α ist die Steigung dieser Geraden; für den Weibullparameter gilt $m = \text{tg}\alpha$. Die mediane Festigkeit $\sigma_{0,5}$ sowie die Festigkeit mit 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit der angepaßten Weibullverteilung sind in Abb. 1a eingezeichnet.

Um die Unsicherheit der aus einem solchen Probensatz abgeleiteten Werte m und $\sigma_{0,5}$ abschätzen zu können, ist es erforderlich, die in Abb. 1a skizzierte Messung möglichst oft zu wiederholen. Jede Messung liefert jetzt ein Wertepaar $\sigma_{0,5}$ und m . Wiederholt man die Messung z. B., 100 mal, so erhält man 100 Wertepaare $\sigma_{0,5}$ und m . Diese stellen nun je eine neue statistische Verteilung dar, die ihren (unvermeidbaren) Fehler angibt. In Abb. 1b ist die kumulative Wahrscheinlichkeit dieser $\sigma_{0,5}$ -Werte und in Abb. 1c diejenige der m -Werte in einem Gaußplot aufgetragen. In beide Abbildungen 1b und 1c ist eine angepaßte Gaußsche Gerade aufgetragen. Es zeigt sich, daß die $\sigma_{0,5}$ -Werte in 1b relativ gut auf dieser Geraden liegen. Man kann schließen, daß die Verteilung der $\sigma_{0,5}$ -Werte einer Gaußverteilung sehr nahekommt. Dies trifft nicht zu für die m -Werte. (Mit wachsender Probenzahl N pro Messung nähert sich allerdings auch die Verteilung der m -Werte in Abb. 1c einer Gaußverteilung.)

Als Maß für die Zuverlässigkeit der Bestimmung von $\sigma_{0,5}$ und m nach Abb. 1a werden die Mittelwerte $\bar{\sigma}_{0,5}$, $\bar{m}$ und die Standardabweichungen $\Delta\sigma_{0,5}$, Δm aus den Verteilungen in Abb. 1b bzw. 1c berechnet. Diese unterliegen jedoch wiederum einer statistischen Schwankung. Um die genannten Mittelwerte und Standardabweichungen möglichst präzise zu bestimmen, wurde in der nachfolgenden Simulationsstudie die in Abb. 1a demonstrierte Prozedur mit jeweils N Meßproben 3000 mal wiederholt, was zu jeweils 3000 Punkten in Abb. 1b und 1c führte.

Wegen des hohen Aufwandes wäre es nicht möglich eine solche Studie an 3000 Meßreihen zu je N Proben ($N = 3, \dots, 200$) experimentell durchzuführen. Die reine Statistik läßt sich aber repräsentativ untersuchen, wenn man Weibullfestigkeitsverteilungen, so, wie sie bei einer Messung anfallen würden, mit Hilfe von Zufallszahlen im Computer erzeugt. Eine solche Simulationsstudie ist im folgenden beschrieben.

4.1 Erzeugung der statistischen Festigkeitsverteilungen zur Simulation von gemessenen Festigkeitsverteilungen

Mit Hilfe von Zufallszahlen wurden statistische Verteilungen $W_i(\sigma_i)$ erzeugt. Es wurde dafür die Gleichung (8) umgeformt zu

$$\sigma_i = \sigma_{0,5} \exp \left[\frac{1}{m} \ln \frac{\ln(1-W_i)}{\ln 0,5} \right] \quad (26)$$

Für jede Verteilung wurden $m = M$ und $\sigma_{0,5} = \Sigma_{0,5}$, d. h. die Sollwerte, vorgegeben. Dann wurden in Gleichung (26) N Zufallszahlen zwischen 0 und 1 für die W_i eingesetzt und die N σ_i jeweils einer Verteilung errechnet. Die so ermittelten σ_i entsprechen einer experimentell an N Meßproben eines Materials mit vorgegebener medianer Festigkeit $\Sigma_{0,5}$ und Weibullparameter M ermittelten Festigkeitsverteilung. Für die Parameter wurden folgende Werte benutzt:

Weibullparameter: $M = 7$ und 30

Mediane Festigkeit: $\Sigma_{0,5} = 350 \text{ MN/m}^2$

Zahl der Proben pro Verteilung: $N = 3; 4; 5; 7; 10; 16; 20; 60; 100$
und 200

Für jeden Satz von Parametern wurde die Rechnung 3000 mal wiederholt, d. h. es wurden 3000 simulierte Verteilungen erzeugt.

4.2 Statistische Fehler in Festigkeit und Weibullparameter gemessen an einer Probe

Aus jeder der wie in 4.1 beschrieben erzeugten Verteilungen wurden mediane Festigkeit $\bar{\sigma}_{0,5}$ und Weibullparameter m durch Anpassung ermittelt. Sie entsprechen den durch Messung an einer Probe zu erwartenden Werten. Für die Anpassung wurden sowohl die LSF als auch die MLF-Methoden benutzt. Bei der LSF-Methode wurde außerdem noch die Wahrscheinlichkeit einmal nach Gleichung (6)

$$W(\sigma_i) = \frac{i - 0,5}{N}$$

(dies sei die LSF/a-Methode)

bzw. nach Gleichung (7a)

$$W(\sigma_i) = \frac{i}{N+1}$$

(dies sei die LSF/b-Methode)

angenommen, so daß also insgesamt nach den 3 Methoden LSF/a, LSF/b und MLF angepaßt wurde.

Für jeden Satz der vorgegebenen Parameter M , $\Sigma_{0,5}$ und N wurden mit jeder der genannten Methoden durch Anpassung an die erzeugten Weibullverteilungen jeweils 3000 Werte für die beiden Größen Weibullparameter m und mediane Festigkeit $\bar{\sigma}_{0,5}$ ermittelt. Für die daraus resultierenden Verteilungen für m und $\bar{\sigma}_{0,5}$ wurden deren Mittelwerte $\bar{m}$ und $\bar{\bar{\sigma}}_{0,5}$ sowie relative Standardabweichungen $\Delta\bar{\sigma}_{0,5}/\Sigma_{0,5}$ und $\Delta m/M$ bestimmt. Ferner wurden durch Vergleich von $\bar{m}$ und $\bar{\bar{\sigma}}_{0,5}$ mit den vorgegebenen Werten M und $\Sigma_{0,5}$ die systematischen Abweichungen für m und $\bar{\sigma}_{0,5}$ d. h. $\bar{m}/M$ und $\bar{\bar{\sigma}}_{0,5}/\Sigma_{0,5}$ bestimmt.

Im Rahmen der erreichbaren statistischen Genauigkeit läßt sich das Resultat folgendermaßen zusammenfassen:

- Eine systematische Abweichung der medianen Festigkeit vom exakt vorgegebenen Wert tritt nicht auf: $\bar{\bar{\sigma}}_{0,5}/\Sigma_{0,5} = 1$

- Die Standardabweichung der medianen Festigkeit $\Delta \bar{\sigma}_{0,5}/\bar{\sigma}_{0,5}$ ist für alle 3 untersuchten Anpassungsmethoden identisch.
- Die Standardabweichung des Weibullparameters $\Delta m/M$ ist unabhängig von M. Sie ist stark abhängig von der verwendeten Anpassungsmethode.
- Es tritt eine hohe systematische Abweichung des Weibullparameters $\bar{m}/M$ auf. Sie ist unabhängig von M, hängt jedoch stark von der verwendeten Anpassungsmethode ab.

Die aus dieser Rechnung resultierenden Ergebnisse für $\Delta m/M$, $\Delta \bar{\sigma}_{0,5}/\bar{\sigma}_{0,5}$ und $\bar{m}/M$ sind in Tabelle 1 in Abhängigkeit von der Probenzahl N eingetragen.

Die Standardabweichung für den Weibullparameter ist relativ groß, sie ist wesentlich größer als diejenige für die mediane Festigkeit. Sie ist abhängig von der Anpassungsmethode. Die systematische Abweichung des Weibullparameters ist ebenfalls abhängig von der Anpassungsmethode. Jedoch läßt sich die systematische Abweichung für eine Anpassungsmethode vorherbestimmen (wie hier geschehen). Die bei der Bestimmung des Weibullparameters durch Anpassung auftretende systematische Abweichung läßt sich dadurch eliminieren, daß man den jeweils berechneten Weibullparameter durch den vorherbestimmten Faktor der systematischen Abweichung $\bar{m}/M$, der durch Probenanzahl und Anpassungsmethoden charakterisiert ist, dividiert. Die unter Verwendung dieser m-Korrektur ermittelten Standardabweichungen für m werden jetzt für alle drei Untersuchungsmethoden praktisch identisch. Sie sind in der Tabelle 1 angegeben (Für größere Probenzahlen $N \geq 10$ liefert die MLF-Methode geringfügig kleinere Werte, die in Klammern angegeben sind. Dies sollte für die Praxis aber ohne Belang sein). Es läßt sich also noch ein weiteres wichtiges Resultat ablesen:

- Wenn man davon ausgeht, daß der Weibullparameter hinsichtlich der systematischen Abweichung korrigiert ist, kann man sagen, daß alle drei Anpassungsmethoden gleichwertig sind.

Tab. 1: Systematische Abweichung für den Weibullparameter. Relative Standardabweichungen für: Weibullparameter ohne bzw. mit m-Korrektur, sowie mediane Festigkeit für $M = 7$ bzw. 30 . Die Standardabweichungen sind auf den Sollwert der jeweiligen Größe bezogen. Als Anpassungsmethoden wurden LSF/a, LSF/b bzw. MLF benutzt. Die Probenzahl ist variiert zwischen 3 und 200 .

Proben- zahl N	Systematische Ab- weichung			relat. Standardabweichung (%)					
	des Weibullparameters							der medianen Festigkeit	
	$\bar{m}/M$			$\Delta m/M$				$\Delta \sigma_{0,5}/\Sigma 0,5$	
				o. m-Korrektur			m. m-Kor.		
	LSF/a	LSF/b	MLF	LSF/a	LSF/b	MLF	nicht abhängig v. Fit		
	nicht abhängig von M							M=7	M=30
3	1,63	1,12	2,19	191	132	260	118	9,6	2,3
4	1,32	0,95	1,66	99	72	123	75	8,4	2,0
5	1,20	0,91	1,45	70	53	85	58	7,6	1,8
7	1,10	0,86	1,27	46	36	50	42	6,5	1,5
10	1,06	0,87	1,17	33	28	34	32(29)	5,2	1,2
16	1,03	0,88	1,10	26	23	24	25(22)	4,2	0,98
20	1,02	0,89	1,07	23	20	21	23(19)	3,8	0,87
30	1,01	0,91	1,05	19	17	16	18(15)	3,1	0,71
60	1,00	0,94	1,02	13	13	11	13(10)	2,2	0,51
100	1,00	0,95	1,01	10	10	8	10(8)	1,6	0,38
200	1,00	0,97	1,01	7,4	7,3	5,7	7,4(5,6)	1,2	0,28

Wie vorher ausgeführt, wird die durch die Anpassungsmethode bedingte systematische Abweichung des Weibullparameters generell als Korrektur bei der Bestimmung desselben aus einer gemessenen Verteilung benötigt. In Tabelle 2 ist daher nochmals ein umfangreicherer Satz von Korrekturfaktoren $\bar{m}/M$ als Funktion der Probenzahl angegeben und zwar für die LSF/a, LSF/b und die MLF-Methode.

Tab. 2: Korrekturfaktor für die Bestimmung des Weibullparameters aus einer gemessenen Festigkeitsverteilung nach der LSF/a, LSF/b bzw. der MLF-Methode in Abhängigkeit von der Probenzahl.

Proben- zahl N	Korrekturfaktor $\bar{m}/M$		
	LSF/a	LSF/b	MLF
3	1,625	1,118	2,194
4	1,320	0,995	1,663
5	1,202	0,902	1,453
6	1,141	0,879	1,341
7	1,104	0,869	1,268
8	1,080	0,865	1,219
9	1,066	0,865	1,187
10	1,057	0,868	1,166
11	1,051	0,872	1,151
12	1,046	0,875	1,139
13	1,041	0,878	1,128
14	1,036	0,880	1,117
15	1,031	0,882	1,108
16	1,027	0,884	1,099
17	1,023	0,886	1,091
18	1,020	0,888	1,084
19	1,018	0,890	1,078
20	1,016	0,892	1,074

Proben- zahl N	Korrekturfaktor $\bar{m}/M$		
	LSF/a	LSF/b	MLF
22	1,014	0,898	1,067
24	1,013	0,902	1,063
26	1,013	0,905	1,060
28	1,012	0,908	1,056
30	1,011	0,911	1,053
32	1,010	0,914	1,050
34	1,009	0,916	1,047
36	1,008	0,919	1,045
38	1,007	0,921	1,042
40	1,006	0,922	1,040
45	1,005	0,928	1,035
50	1,003	0,932	1,031
55	1,002	0,935	1,027
60	1,001	0,938	1,024
70	1,000	0,942	1,019
80	1,000	0,946	1,016
90	1,000	0,948	1,013
100	1,000	0,950	1,011
150	1,000	0,963	1,009
200	1,000	0,970	1,008

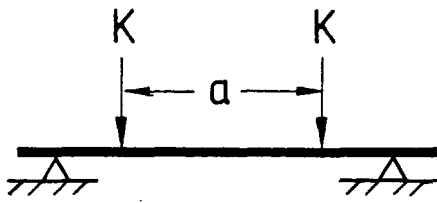
4.3 Statistische Fehler einer indirekt bestimmten Festigkeit (durch Umrechnung einer gemessenen in eine für andere Geometrie und Belastungsart relevanten Festigkeit)

Als direkt bestimmte Festigkeit bezeichnen wir die mediane Festigkeit der Meßprobe $\sigma_{0,5}$ da sie direkt aus der Anpassung einer Weibullverteilung an eine gemessene Festigkeitsverteilung folgt. Als indirekt bestimmte Festigkeiten bezeichnen wir alle aus $\sigma_{0,5}$ durch Umrechnung gewonnenen Festigkeiten so z. B. auch die Festigkeit der Meßprobe mit 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit. Diese ergibt sich durch Extrapolation der angepaßten Weibullverteilung zur Wahrscheinlichkeit 0,01 (siehe Abb. 1a). Zu ihrer Bestimmung wird Gl. (5) benutzt mit $W = 0,01$. Da, wie wir sehen werden, in alle indirekt bestimmten Festigkeiten bei der Berechnung außer $\sigma_{0,5}$ auch der Weibullparameter eingeht, der eine relativ hohe Streuung hat, bekommen diese auch eine relativ hohe Unsicherheit.

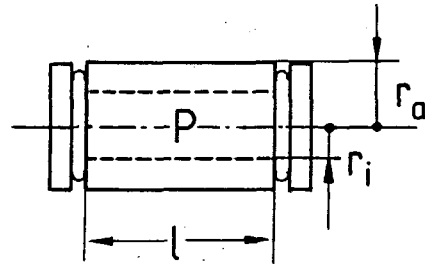
Wie unter Pkt. 2 ausgeführt, kann die Festigkeit eines keramischen Körpers nicht rein materialspezifisch definiert werden. Sie hängt außer vom Material noch von der Geometrie des betrachteten Körpers und der Art der Belastung ab.

In der Praxis braucht man oft die Festigkeit eines Materials, die für ein bestimmtes Bauteil (z. B. Rohr unter gleichmäßiger Innenbelastung) relevant ist. Meistens läßt sich diese aber nur unter schwierigen Bedingungen experimentell direkt ermitteln. Daher wird sie häufig an kleinen Proben des gleichen Materials einfacher Geometrie unter einer Belastung, die leicht zu realisieren ist, bestimmt. Die für die Meßprobe relevante Festigkeit muß dann in die für das Bauteil relevante umgerechnet werden. Durch diese Umrechnung, in welche der Weibullparameter eingeht, bekommt die Festigkeit eine stark erhöhte statistische Unsicherheit, die, wie sich zeigen wird, ebenfalls durch die relativ hohe Unsicherheit im Weibullparameter bedingt ist.

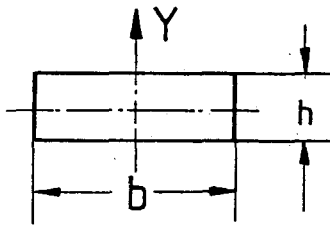
Wir nehmen im folgenden an, daß die Festigkeiten für keramische Materialien in anwendungsbezogener Geometrie und Belastungsart (d. h. an Rohren unter Innendruckbelastung) gemessen werden und als Ergänzung hierzu auch die Festigkeit kleiner rechteckiger Biegeproben des gleichen Materials im 4-Punkt-Biegetest (siehe Abb. 2).



(a) 4-Punkt-Biegetest am Rechteckvollstab



(b) Rohrrinnendrucktest



Querschnitt d. Stabes

Abb. 2: Zwei Konfigurationen bei der Ermittlung der Festigkeit eines spröden Materials

- a) 4-Punkt-Biegetest: a = Kräfteabstand; b = Breite der Probe;
 h = Höhe der Probe; K = Belastung
- b) Rohr-Innendruck-Konfiguration: r_i = Rohrrinnenradius;
 r_a = Rohraußenradius; l = Rohrlänge; p = Innendruck

Man hat dabei z. B. die Möglichkeit, die im Biegetest gemessene Festigkeit in die äquivalente Festigkeit des Rohres unter Innendruckbelastung umzurechnen und mit der in dieser Konfiguration direkt gemessenen zu vergleichen.

Für die Umrechnung der im 4-Punkt-Biegetest (Konfiguration I) gemessene Festigkeit einer Probe mit der Ausfallwahrscheinlichkeit W $\sigma_{IW} = \sigma_W$ in die für das Rohr unter Innendruck (Konfiguration II) relevante σ_{RW} wird Gleichung (3) benutzt. Es ist noch nicht geklärt, ob Rißentstehung im Volumen oder auf der Oberfläche erfolgt, daher sollen im folgenden beide Möglichkeiten in Betracht gezogen werden.

Bei der Annahme "Rißbildung im Volumen" (a), ist in Gleichung (3) die Integration über das Volumen zu erstrecken, die resultierende Festigkeit des Rohres ist σ_{RW}^{Vol} . Bei Annahme "Rißbildung auf der Oberfläche" (b), ist das entsprechende Integral über die Oberfläche zu erstrecken, die resultierende Festigkeit des Rohres ist σ_{RW}^{Fl} . Zur Integration tragen nur Bereiche mit Zugspannung bei.

Für die Umrechnung in Gleichung (3) wird die Spannungsverteilung im Rohr mit dem Innendruck p benötigt, diese ist gegeben durch /9/:

$$\sigma_t(r) = p \frac{(r_a/r)^2 + 1}{(r_a/r_i)^2 - 1}$$

$$\sigma_a = p \frac{1}{(r_a/r_i)^2 - 1}$$

$$\sigma_r(r) = p \frac{1 - (r_a/r)^2}{(r_a/r_i)^2 - 1}$$

σ_t , σ_a , σ_r sind Tangential-, Achsial- und Radialspannungen. σ_r ist negativ und bleibt unberücksichtigt. Es gilt allgemein $\sigma_a \leq 0,5 \sigma_r$. Die Spannung geht mit σ^m , $m \geq 7$ in Gleichung (3) ein, ein Beitrag von σ_a zum Integral ist also gering, daher wurde σ_a hier vernachlässigt. Für $r = r_i$ erreicht σ_t seinen Maximalwert σ_t^{max} . σ_t läßt sich also schreiben:

$$\sigma_{t(r)} = \sigma_t^{\max} \frac{(r_a/r)^2 + 1}{(r_a/r_i)^2 + 1}$$

$\sigma_t^{\max}$ ist als Zerreißfestigkeit definiert, für die Formfaktoren in Gleichung (3) ergibt sich also:

Annahme	Formfaktor
(a)	$\begin{cases} f_I(\kappa) = 2/h \cdot Y & (\text{Probe, Volumen}) \\ f_{II}(\kappa) = \frac{1 + (r_a/r)^2}{1 + (r_a/r_i)^2} & (\text{Rohr, Volumen}) \end{cases}$
(b)	$\begin{cases} f_I(\kappa) = 1 & (\text{Probe, Fläche unten}) \\ f_{II}(\kappa) = 1 & (\text{Rohr, Fläche innen}) \\ f_{III}(\kappa) = \frac{2}{1 + (r_a/r_i)^2} & (\text{Rohr, Fläche außen}) \end{cases}$

Einsetzen der obigen Ausdrücke und σ_{IW} in Gleichung (3) ergibt die Umrechnungsformel für die Festigkeiten σ_{RW}^{Fl} bzw. σ_{RW}^{Vol} .

Mit der Annahme der Rißentstehung im Volumen (a) hat man:

$$\sigma_{RW}^{Vol} = \sigma_W \left\{ \frac{h \cdot a \cdot b \cdot [1 + (r_a/r_i)^2]^m}{4 \cdot (m+1) \cdot \pi \cdot 1 \cdot INT} \right\}^{\frac{1}{m}} \quad (27)$$

$$\text{mit } INT = \int_{r_i}^{r_a} r [1 + (r_a/r)^2]^m dr$$

Die Annahme Rißentstehung in der Oberfläche (b) führt zu:

$$\sigma_{RW}^{Fl} = \sigma_W \frac{a \cdot b}{2 \cdot 1 \cdot \left\{ r_i + r_a \left[\frac{2}{1 + (r_a/r_i)^2} \right]^m \right\}}^{\frac{1}{m}} \quad (28)$$

Für die Umrechnung der an der Probe gemessenen Festigkeit σ_w in die äquivalente Festigkeit des Rohres σ_{RW}^{Fl} bzw. σ_{RW}^{Vol} wurden die Gleichungen (27) bzw. (28) verwendet. Für die in beide Gleichungen eingehende Dimensionen von Bauteil (Rohr unter gleichmäßigem Innendruck) und Probe (in 4-Punkt-Biegetest) waren folgende Werte vorgegeben:

Probe:

Kräfteabstand:	$a = 20 \text{ mm}$
Breite	$b = 3,5 \text{ mm}$
Höhe	$h = 4,5 \text{ mm}$

Bauteil (Rohr):

Außenradius:	$r_a = 30 \text{ mm}$
Innenradius:	$r_i = 25 \text{ mm}$

für die Länge des Rohres l wurde ein Wert von 100 mm angenommen. Dies ist ein willkürlicher Wert, dessen Einfluß auf die äquivalenten Festigkeiten jedoch relativ gering ist: Verdopplung von l hat eine Zunahme dieser Festigkeit bei $m = 7$ um weniger als 10% zur Folge.

Es wurden zunächst die Sollwerte, d. h. die zu erwartenden Werte für die verschiedenen Festigkeiten berechnet. Dabei wurde ausgegangen von den festen vorgegebenen Werten der Probe: $\Sigma_{0,5}$ = mediane Festigkeit und M = Weibullparameter.

Die zu erwartende Festigkeit der Probe mit 1% Ausfallwahrscheinlichkeit $\Sigma_{0,01}$ wurde mit Gleichung (5) mit $W = 0,01$, $m = M$ und $\sigma_{0,5} = \Sigma_{0,5}$ bestimmt. Die zu erwartenden äquivalenten Festigkeiten für das Rohr für die Versagenswahrscheinlichkeit W , σ_{RW}^{Fl} bzw. σ_{RW}^{Vol} wurden mit den Gleichungen (27) und (28) bestimmt. Zur Bestimmung der medianen Werte (Ausfallwahrscheinlichkeit $W = 0,5$), wurden für σ_{WI} der vorgegebene Wert $\Sigma_{0,5}$ eingesetzt. Zur Bestimmung der Werte für die Ausfallwahrscheinlichkeit $W = 0,01$ wurde für σ_{WI} der vorher ermittelte Wert $\Sigma_{0,01}$ eingesetzt.

Die Tabelle 3 gibt das Verhältnis der Sollwerte der so ermittelten Festigkeiten zum vorgegebenen Wert der medianen Festigkeit der Probe.

Tabelle 3: Sollwert der Festigkeit der Meßprobe für Versagenswahrscheinlichkeit $W = 0,01$. Sollwerte der äquivalenten Festigkeiten des Bauteils unter der Annahme "Rißentstehung in der Oberfläche" (Index Fl) sowie "im Volumen" (Index Vol) für die Versagenswahrscheinlichkeit $W = 0,5$ sowie $W = 0,01$. Der Weibullparameter hatte die Werte $M = 7$ bzw. 30 . Alle Sollfestigkeiten sind auf die vorgegebene mediane Festigkeit der Probe $\Sigma_{0,5}$ bezogen.

Weibull- parameter M	Sollwerte (relativ)				
	der Festigkeit Meßprobe	der äquivalenten Festigkeit Bauteil			
	W = 0,01	W = 0,5		W = 0,01	
	$\Sigma_{0,01}/\Sigma_{0,5}$	$\Sigma_{R0,5}^{FL}/\Sigma_{0,5}$	$\Sigma_{R0,5}^{Vol}/\Sigma_{0,5}$	$\Sigma_{R0,01}^{FL}/\Sigma_{0,5}$	$\Sigma_{R0,01}^{Vol}/\Sigma_{0,5}$
7	0,55	0,44	0,33	0,24	0,18
30	0,87	0,83	0,77	0,72	0,87

Der Sollwert, d. h. die zu erwartende äquivalente mediane Festigkeit des Rohres, beträgt für $M = 7$ ~40 % und für $M = 30$ ~80 % der medianen Festigkeit der Probe. Die entsprechenden Werte für die äquivalente Festigkeit des Rohres mit 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit betragen ~20 bzw. ~80 %.

Es wurde dann die in 4.1 und 4.2 beschriebene Rechnung fortgeführt. Es waren für einen Parametersatz: Weibullparameter M , Festigkeit $\Sigma_{0,5}$ und Probenzahl N 3000 Weibullverteilungen mit jeweils N Zufallszahlen berechnet worden und an jede Verteilung durch LSF/a-, LSF/b- bzw. MLF-Anpassung jeweils ein Weibullparameter m' und eine mediane Probenfestigkeit $\Sigma_{0,5}$ ermittelt worden.

Jeder m' -Wert wurde durch den für Auswertemethoden und Probenzahl charakteristischen Korrekturfaktor (Tabelle 3) dividiert. Die so korrigierten Werte seien m . Für jedes Wertepaar m und $\bar{\sigma}_{0,5}$ wurde unter Benutzung der Gleichungen (5), (27) und (28) $\bar{\sigma}_{0,01}^{FL}$, $\bar{\sigma}_{R0,01}^{FL}$, $\bar{\sigma}_{R0,01}^{VL}$ sowie $\bar{\sigma}_{R0,5}^{FL}$ und $\bar{\sigma}_{R0,5}^{VL}$ berechnet. Dies gab für jede der genannten Größen eine Verteilung mit 3000 Werten. Aus diesen Verteilungen wurden für jede Größe Mittelwert und Standardabweichung bestimmt und durch den Sollwert, d. h. den zu erwartenden Wert der betreffenden Größe dividiert. Damit ergab sich die systematische Abweichung und die relative Standardabweichung, die in den Tabellen 4 und 5 angegeben sind.

Tabelle 4: Systematische Abweichung: für die äquivalente mediane Festigkeit am Bauteil $\bar{\sigma}_{R0,5}^{FL}/\bar{\sigma}_{R0,5}^{FL}$, für die Festigkeit mit 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit an der Meßprobe $\bar{\sigma}_{0,01}^{FL}/\bar{\sigma}_{0,01}^{FL}$ und für die äquivalente Festigkeit mit 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit am Bauteil $\bar{\sigma}_{R0,01}^{FL}/\bar{\sigma}_{R0,01}^{FL}$ in Abhängigkeit von der Probenzahl. Der Weibullparameter M hatte die Werte 7 bzw. 30. Die für die Umrechnung der Festigkeiten benutzten m -Werte sind korrigiert.

Proben- zahl N	Systematische Abweichung					
	der medianen Festigkeit		der Festigkeit für 1 % Ausfallwahr- scheinlichkeit			
	für Bauteil $\bar{\sigma}_{R0,5}^{FL}/\bar{\sigma}_{R0,5}^{FL}$		für Meßprobe $\bar{\sigma}_{0,01}^{FL}/\bar{\sigma}_{0,01}^{FL}$		für Bauteil $\bar{\sigma}_{R0,01}^{FL}/\bar{\sigma}_{R0,01}^{FL}$	
	M=7	M=30	M=7	M=30	M=7	M=30
3	0,76	0,90	0,79	0,92	0,79	0,85
4	0,86	0,94	0,88	0,95	0,88	0,91
5	0,90	0,96	0,92	0,97	0,92	0,94
7	0,93	0,97	0,95	0,98	0,95	0,96
10	0,96	0,98	0,97	0,99	0,97	0,97
16	0,97	0,99	0,98	0,99	0,98	0,98
20	0,98	0,99	0,98	0,99	0,98	0,99
30	0,99	0,99	0,99	1,00	0,99	0,99
60	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
100	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
200	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Tabelle 4 gibt die systematische Abweichung für:

1. die äquivalente mediane Festigkeit im Bauteil (Rohr) $\bar{\sigma}_{R0,5}^{FL} / \sum \sigma_{R0,5}^{FL}$
2. die Festigkeit mit 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit an der Meßprobe $\bar{\sigma}_{0,01} / \sum \sigma_{0,01}$
3. die äquivalente Festigkeit mit 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit am Bauteil (Rohr) $\bar{\sigma}_{R0,01}^{FL} / \sum \sigma_{R0,01}^{FL}$

Bei den äquivalenten Festigkeiten sind nur die Werte angegeben, für die bei der Umrechnung (Formel (27) und (28)) Oberflächenabhängigkeit der Rißentstehung angenommen ist. Bei Annahme von Volumenabhängigkeit ergibt sich qualitativ das gleiche Bild.

Aufgrund der Korrektur des Weibullparameters werden die systematischen Abweichungen für alle Auswertemethoden identisch. Für kleine Probenzahlen ($N=3$) beträgt die systematische Abweichung in unserem Fall 0,8 bei $M = 7$ und 0,9 bei $M = 30$. Mit zunehmender Probenzahl, etwa ab $N = 30$ gehen alle systematischen Abweichungen praktisch gegen 1.

Über die systematischen Abweichungen der Festigkeiten läßt sich generell sagen:

- a) für Festigkeiten auf die Meßprobe bezogen gilt:
 - Eine systematische Abweichung der medianen Festigkeit existiert nicht.
 - Die systematische Abweichung der Festigkeit mit 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit hängt nur ab von Weibullparameter und Probenzahl. Zwecks Korrektur von $\bar{\sigma}_{0,01}$ braucht sie nur einmal vorausberechnet zu werden, d. h. die Werte in Tabelle 4 gelten generell.
- b) für die äquivalenten Festigkeiten auf ein Bauteil (Rohr) bezogen gilt:
 - Die systematische Abweichung hängt außer von Probenzahl und Weibullparameter ab von Geometrie und Belastungsart der Probe, an der die Festigkeit gemessen wurde, sowie Geometrie und Belastungsart des Bauteils für welches die äquivalente Festigkeit berechnet wurde. Für eine Korrektur muß sie für jede betrachtete Konfiguration Meßprobe-Bauteil speziell vorausberechnet werden.
- c) für alle systematischen Abweichungen gilt:
 - Bei Korrektur von m werden die systematischen Abweichungen unabhängig von der Anpassungsmethode.

Tabelle 5: Relative Standardabweichungen der medianen Festigkeit sowie der Festigkeit mit 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit jeweils für die Meßprobe bzw. das Bauteil alle bezogen auf den Sollwert der jeweiligen Größe. Der Weibullparameter M hatte die Werte 7 bzw. 30. Die Probenzahl N ist zwischen 3 und 200 variiert. Bei der Umrechnung auf die äquivalenten Festigkeiten ist Rißentstehung auf der Oberfläche angenommen. Die bei der Umrechnung benutzten m-Werte sind korrigiert.

Proben- zahl N	Relat. Standardabweichung (%)							
	der medianen Festigkeit				d. Festigk f. 1 % Ausfall- wahrscheinlichkeit			
	für Meßprobe		für Bauteil		für Meßprobe		für Bauteil	
	$\Delta \sigma_{0,5} / \Sigma 0,5$		$\Delta \sigma_{R0,5}^{FL} / \Sigma R0,5^{FL}$		$\Delta \sigma_{0,01} / \Sigma 0,01$		$\Delta \sigma_{R0,01}^{FL} / \Sigma R0,01^{FL}$	
	M=7	M=30	M=7	M=30	M=7	M=30	M=7	M=30
3	9,6	2,3	51	16	41	13	80	25
4	8,4	2,0	44	12	34	9,8	70	19
5	7,6	1,8	39	10	30	8,3	63	16
7	6,5	1,5	33	8,3	25	6,7	53	13
10	5,2	1,2	28	6,6	21	5,3	44	11
16	4,2	0,98	23	5,2	17	4,2	36	8,7
20	3,8	0,87	21	4,7	15	3,8	33	7,9
30	3,1	0,71	17	3,8	13	3,1	27	6,4
60	2,2	0,51	13	2,7	9,3	2,2	20	4,6
100	1,6	0,38	10	2,1	7,2	1,7	16	3,6
200	1,2	0,28	6,8	1,5	5,0	1,2	11	2,5

Tabelle 5 gibt die relative Standardabweichungen für

1. die mediane Festigkeit der Meßprobe
2. die äquivalente mediane Festigkeit des Bauteils (Rohr)
3. die Festigkeit für 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit der Meßprobe
4. die äquivalente Festigkeit des Bauteils für 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit.

Alle sind bezogen auf den Sollwert der jeweiligen Größe. Bei der Berechnung von 2, 3 und 4 wurden die korrigierten m-Werte benutzt, es ergaben sich somit für alle untersuchten Anpassungsmethoden identische Werte. Das Ergebnis läßt sich folgendermaßen charakterisieren:

- Die mediane Festigkeit der Meßprobe hat eine relativ niedrige Standardabweichung.
- Alle übrigen durch Umrechnung bestimmten Festigkeiten haben bei gleichem M wesentlich höhere Standardabweichungen.
- Grund für die hohe Unsicherheit in den durch Umrechnung ermittelten Festigkeiten ist die hohe Unsicherheit des Weibullparameters, der in die Umrechnung eingeht.
- Zur Erzielung einer bestimmten Genauigkeit, d. h. einer Standardabweichung von z. B. 10 % bei $M=7$ in der Festigkeit der Meßprobe benötigt man für die Messung (wie man Tabelle 5 entnimmt)
 - * 3 Proben für deren mediane Festigkeit
 - * 50 Proben für deren Festigkeit mit 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit.
- Fordert man bei gleichem M die gleiche Genauigkeit für die äquivalente Festigkeit des Bauteils (Rohr) so benötigt man für die Messung:
 - * 100 Proben für deren mediane Festigkeit
 - * 200 Proben für deren Festigkeit mit 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit.
- Hinsichtlich der Brauchbarkeit der Anpassungsmethoden kann man sagen:
 - * Alle getesteten Anpassungsmethoden LSF/a, LSF/b und MLF ergeben identische Standardabweichungen, sind also praktisch gleichwertig, sofern man die m-Korrektur (Tabelle 2) anwendet.
 - * Die MLF-Methode erfordert einen etwa doppelt so hohen Rechenaufwand wie die beiden LSF-Methoden. Ihre systematische Abweichung in m ist am höchsten, daher ist es naheliegend, der LSF/a- oder LSF/b-Methode den Vorzug zu geben.

Die Tabelle 6 gibt einen Überblick über Probenzahlen, die für die Messung einer bestimmten Festigkeit erforderlich sind, sofern man eine bestimmte Genauigkeit (Standardabweichung) fordert. Die angegebenen Probenzahlen gelten für $M=7$. Für $M=30$ werden die erforderlichen Probenzahlen um einen Faktor von etwa 20 niedriger.

Tabelle 6: Erforderliche Probenzahl N für die Messung von medianer Festigkeit und Festigkeit mit 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit, sowohl für die Meßprobe als auch für den äquivalenten Wert für das Bauteil. Bei den äquivalenten Festigkeiten ist bei der Umrechnung sowohl Rißbildung an der Oberfläche (Index "Fl"), als auch im Volumen (Index "Vol") angenommen. Die Werte gelten für den Weibullparameter $M=7$, für $M=30$ werden die erforderlichen Probenzahlen um einen Faktor von etwa 20 niedriger.

Geforderte Genauigkeit (Standardabweichung (%))	Erforderliche Probenzahl N für eine Messung von					
	medianer Festigkeit			Festigkeit f. 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit		
	Meßprobe	äquivalent Bauteil		Meßprobe	äquivalent Bauteil	
	$\bar{G}_{0,5}$	$\bar{G}_{R0,5}^{FL}$	$\bar{G}_{R0,5}^{Vol}$	$\bar{G}_{0,01}$	$\bar{G}_{R0,01}^{FL}$	$\bar{G}_{R0,01}^{Vol}$
5	10	> 200	> 200	200	> 200	> 200
10	3	100	150	50	200	> 200
20	< 3	20	30	10	60	80
50	< 3	3	4	< 3	6	10

Man entnimmt der Tabelle 6 folgendes:

Wenn man für einen Weibullparameter $m = 7$ z. B. die Festigkeit eines Rohres für das Verhalten unter gleichmäßigem Innendruck bestimmen will, und zwar mit einer Genauigkeit von 10 %, dann hat man zwei Möglichkeiten:

- a) Messung an einer Probe anderer Geometrie und Belastungsart (in unserem Fall ist das ein rechteckiger Streifen im 4-Punkt-Biegetest) mit nachfolgender Umrechnung der gemessenen medianen Festigkeit der Probe $\bar{\sigma}_{0,5}$ mit dem gemessenen Weibullparameter m in die äquivalente Festigkeit des Bauteils (Rohr). Es ergibt sich:
- Zur Bestimmung der äquivalenten medianen Festigkeit des Bauteils $\bar{\sigma}_{R0,5}^{FL}$ braucht man dazu den Test von mindestens 100 Biegeproben.
 - Zur Bestimmung der äquivalenten Festigkeit des Bauteils für eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 1 %, $\bar{\sigma}_{R0,01}^{FL}$, braucht man dazu mind. 200 Biegeproben im Test.
- b) Messung am Rohr selbst bei Originalgeometrie und -belastung (d. h. Messung der Berstfestigkeit an Rohren bei gleichmäßigem Innendruck; das Rohr selbst ist jetzt die Meßprobe).
- Zur Bestimmung der medianen Festigkeit des Rohres (jetzt $\bar{\sigma}_{0,5}$) braucht man 3 Rohrproben.
 - Zur Bestimmung der Festigkeit des Rohres mit 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit (jetzt $\bar{\sigma}_{0,01}$) braucht man 50 Rohrproben.

Man sieht also, daß man im Fall b) zur Bestimmung der medianen Festigkeit des Rohres 3 Rohrproben benötigt, was sich mit vertretbarem Aufwand durchführen läßt. Für $\bar{\sigma}_{0,01}$ wäre die erforderliche Rohrprobenzahl 50, was nicht machbar ist. Nun ist aber die hohe Unsicherheit in $\bar{\sigma}_{0,01}$ nahezu ausschließlich durch die Unsicherheit des Weibullparameters bedingt. Der Weibullparameter ist eine rein materialspezifische Größe und kann daher statt am Rohr auch an einfacheren Proben des gleichen Materials z. B. im 4-Punkt-Biegetest gemessen werden. Für die Bestimmung der Festigkeit mit 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit wäre es daher zweckmäßig, Methode a) und b) zu kombinieren und folgendermaßen vorzugehen:

- Messung der medianen Festigkeit $\bar{\sigma}_{0,5}$ am Rohr selbst mit 3 Proben.
- Messung des Weibullparameters m im 4-Punkt-Biegetest an 50 Proben.
- Berechnung von $\bar{\sigma}_{0,01}$ für das Rohr mit Formel (5) (mit $W=0,01$ und den oben bestimmten Werten für m und $\bar{\sigma}_{0,5}$).

5. Zusammenfassung

Zwecks Abschätzung des erforderlichen Probenumfangs bei der experimentellen Bestimmung der Festigkeit von Bauteilen aus keramischen Materialien wurden Fehler in der Messung, die durch die Weibullstatistik der Festigkeit bedingt sind, durch Computersimulation ermittelt. Es wurde davon ausgegangen, daß die Messung einerseits am Bauteil selbst unter simulierter Betriebsbelastung durchgeführt wird (d. h. man ermittelt z. B. die Berstfestigkeit von Rohren bei gleichmäßigem Innendruck), andererseits die Festigkeit mit kleinen Proben (kleine Rechteckstreifen) des gleichen Materials im 4-Punkt-Biegetest gemessen wird.

Der Ausleger von keramischen Apparaturen muß besonders wegen der gegenüber metallischen Werkstoffen großen Streubreite der Festigkeit die Möglichkeit haben, die Ausfallwahrscheinlichkeiten zu berechnen. Es interessieren deshalb nicht so sehr Mittelwerte, sondern Belastungen, bei denen sehr geringe (0,01 oder kleinere) Ausfallwahrscheinlichkeiten erwartet werden können. Deshalb braucht man ausreichend genaue Angaben über die statistische Festigkeitsverteilung in Bauteilen.

Es liegt nahe, die Statistik entweder mit Kleinproben oder direkt am Bauteil zu messen. Fordert man eine Genauigkeit (Standardabweichung) von 10 % in der Bestimmung der Festigkeit des Bauteils für 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit, $\bar{\sigma}_{0,01}$, so ergab die Studie für einen Werkstoff mit dem Weibullparameter $m = 7$ folgendes:

- a) bei ausschließlicher Verwendung von Kleinprobendaten benötigt man mindestens 200 Biegeproben im 4-Punkt-Biegetest, um nach Umrechnung die gewünschte Genauigkeit für das Bauteil (Rohr) zu erhalten;
- b) bei direkter und ausschließlicher Messung mit Bauteilen (Rohren) ist die mediane Festigkeit $\bar{\sigma}_{0,5}$ mit 3 Proben bestimmbar. Die Festigkeit des Rohres mit 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit erfordert wegen der hohen Unsicherheit im Weibullparameter jedoch mindestens 50 Rohrproben.

Bei ausschließlicher Verwendung von Klein- oder Großproben wird also entweder die erforderliche Kleinprobenzahl mit 200 sehr groß, oder eine Direktmessung am Rohr erfordert mit 50 Rohrproben einen wohl nicht realisierbaren Aufwand. Es ist zweckmäßig, die Messung sowohl an Kleinproben als auch am Bauteil vorzunehmen und dabei folgendermaßen vorzugehen:

- Direktmessung der medianen Festigkeit $\sigma_{0,5}$, die außer vom Material auch von Geometrie und Belastungsart der Probe abhängt, an 3 Großproben.
- Messung des Weibullparameters m , als rein materialspezifische Größe, an 50 Kleinproben.
- Berechnung von $\sigma_{0,01}$ für das Bauteil aus den oben bestimmten $\sigma_{0,5}$ und m .

Im einzelnen wurde die Studie folgendermaßen durchgeführt:

Es wurden Weibullverteilungen für die Festigkeit von spröden Materialien durch Computersimulation, d. h. mit Hilfe von Zufallszahlen erzeugt. Vorgegeben waren dabei der Weibullparameter M und die mediane Festigkeit $\sigma_{0,5}$ angenommener Materialien.

Drei Anpassungsverfahren zur Bestimmung des Weibullparameters m und der medianen Festigkeit $\sigma_{0,5}$ einer z. B. experimentell, d. h. durch Messung an einer Probe gegebenen Festigkeitsverteilung wurden durch Anwendung auf die erzeugten Festigkeitsverteilungen auf ihre Brauchbarkeit überprüft. Die Anpassungsverfahren waren: Die Least Squares Fit (LSF)-Methode in zwei Modifikationen (LSF/a mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion $W(\sigma_i) = (i - 0,5)/N$ und LSF/b mit $W(\sigma_i) = i/(N+1)$), und die Maximum Likelihood Fit (MLF)-Methode. Die Probenzahl N , d. h. die Zahl der Festigkeiten pro Verteilung, wurde zwischen 3 und 200 variiert. Für den vorgegebenen Weibullparameter M wurden die Werte 7 und 30 benutzt. Für jede Wertekombination N , M und $\sigma_{0,5}$ wurden 3000 Verteilungen erzeugt. Mit jedem der drei Anpassungsverfahren wurden aus jeder Verteilung je ein Weibullparameter m und eine mediane Festigkeit $\sigma_{0,5}$ bestimmt.

Aus den so resultierenden Verteilungen von m und $\sigma_{0,5}$ wurden deren Mittelwerte $\bar{m}$ und $\bar{\sigma}_{0,5}$ sowie Standardabweichungen $\Delta m/M$ und $\Delta \sigma_{0,5}/\bar{\sigma}_{0,5}$ bestimmt.

Für solche direkt, d. h. durch Messung an einer Probe, ermittelten Werte ergab sich:

- Die Standardabweichung der medianen Probenfestigkeit $\Delta \bar{\sigma}_{0,5} / \bar{\sigma}_{0,5}$ ist für alle drei Anpassungsmethoden identisch.
- Eine systematische Abweichung der medianen Festigkeit tritt nicht auf: $\bar{\sigma}_{0,5} / \bar{\sigma}_{0,5} = 1$.
- Die Standardabweichung des Weibullparameters $\Delta m / m$ ist unabhängig von M . Sie ist etwa 10 mal so groß wie diejenige der medianen Festigkeit. Sie hängt stark von der jeweils verwendeten Anpassungsmethode ab.
- Es tritt eine hohe systematische Abweichung des Weibullparameters $\bar{m} / M$ auf, die stark von der jeweils verwendeten Anpassungsmethode und der Zahl der Meßproben abhängt. Sie wird als Korrektur für m benötigt und ist in einer Tabelle für Probenzahlen $N=3$ bis 200 für die LSF/a, LSF/b und MLF Anpassungsmethode angegeben.
- Bei Korrektur des Weibullparameters m mit seiner vorherberechneten systematischen Abweichung wird seine Standardabweichung unabhängig von der jeweils verwendeten Anpassungsmethode.
- Alle drei untersuchten Anpassungsmethoden sind (bei Korrektur von m) hinsichtlich der zu erwartenden statistischen sowie systematischen Fehler in medianer Festigkeit der Meßprobe und Weibullparameter gleichwertig.

Die indirekt, d. h. durch Umrechnung aus $\bar{\sigma}_{0,5}$ und m ermittelten Festigkeiten, sind:

die Festigkeit der Meßprobe mit 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit, $\bar{\sigma}_{0,01}$, und die dazu äquivalente Festigkeit des Bauteils gleichen Materials mit anderer Geometrie und Belastungsart $\bar{\sigma}_{R0,01}^{FL}$, sowie die äquivalente mediane Festigkeit des Bauteils, $\bar{\sigma}_{R0,5}^{FL}$.

- Bei Korrektur des Weibullparameters werden die systematischen Abweichungen und Standardabweichungen aller indirekt bestimmten Festigkeiten unabhängig von der verwendeten Anpassungsmethode, d. h. alle drei untersuchten Methoden sind auch hinsichtlich dieser zu erwartenden Fehler gleichwertig.
- Der systematische Fehler in $\bar{\sigma}_{0,01}$ hängt nur ab von Weibullparameter und Probenzahl. Die in Tabelle 4 angegebenen Werte können also generell zur Korrektur dieser Größe benutzt werden.

- Die systematischen Fehler in $\sigma_{R0,5}^{FL}$ und $\sigma_{R0,01}^{FL}$ hängen von Weibullparameter und Probenzahl und zusätzlich noch von Geometrie und Belastungsart der Meßprobe bzw. des Bauteils ab. Sie müssen für eine Korrektur für jede infrage kommende Konfiguration Meßprobe-Bauteil durch eine Simulationsrechnung vorausbestimmt werden.
- Die für die Messung einer bestimmten Festigkeit erforderlichen Probenzahlen, sofern man eine bestimmte Genauigkeit fordert, sind in einer Tabelle angegeben.

Literatur

- /1/ Freudenthal, Fracture-Mathematical Fundamentals, Vol. II, Academic Press, (1969)
- /2/ Weibull, W., J. Appl. Mech. 18, 239 (1951)
- /3/ Trustrum, K., Jayatilaka A. De S., J. Mat. Sci., 14, 1080 (1979)
- /4/ Bongartz, K.; Schuster, H.: KFA-Report, Jül-1291
- /5/ Heavans, J.W.; Murgatroyd, P.N.: J. Am. Ceram. Soc. 53, 503, (1970)
- /6/ Scott, W.D.; Gaddipati, A.: Fracture Mechanics of Ceramics 3, Plenum Press, New York, 125 (1978)
- /7/ Gumbel, E.J.: Statistics of Extremes, Columbia University Press, New York, Chap. 2 (1958)
- /8/ Kamiya, N.; Kamigaito, O.: J. Mat. Sci. 19, 4021, (1984)
- /9/ Finnie, I.; Heller, W.R.: Creep of Engineering Materials, McGraw-Hill Book Company, New York, 182 (1959)

Danksagung

Herrn Dr. H. Schuster danke ich für die kritische Durchsicht des Manuskriptes.