



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH GmbH

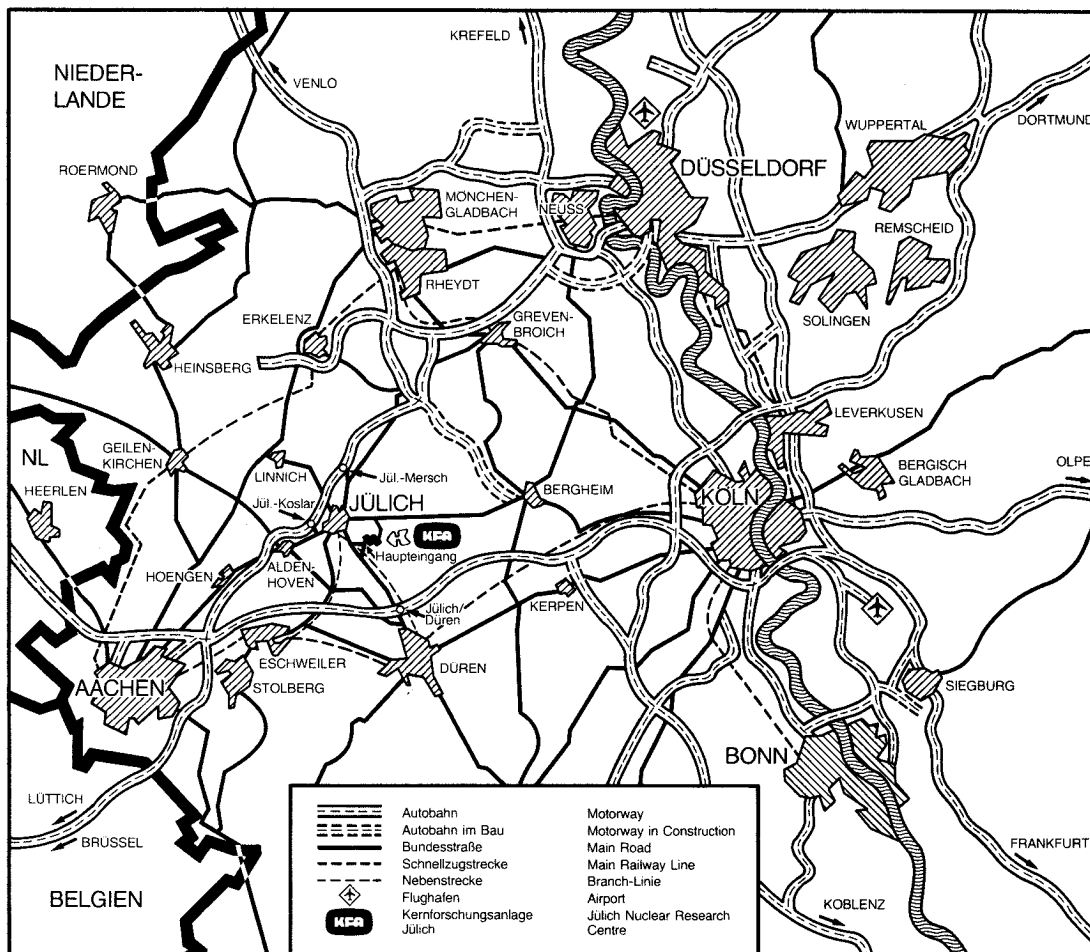
Institut für Kernphysik

**Untersuchung des Magnetspektrographen
BIG KARL auf Bildfehler und ihre Ursachen**

von

Dirk Paul

Jül-2169
Dezember 1987
ISSN 0366-0885



Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 2169
 Institut für Kernphysik Jül-2169

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH
 Postfach 19 13 · D-5170 Jülich (Bundesrepublik Deutschland)
 Telefon: 02461/610 · Telex: 833556-0 kf d

Untersuchung des Magnetspektrographen BIG KARL auf Bildfehler und ihre Ursachen

von

Dirk Paul

D 5 (Diss. Uni. Bonn)

Abstract

The ionoptical aberrations of the QQDDQ spectrograph BIG KARL are measured and analyzed in order to improve resolution and transmission at large acceptance. The entrance phasespace is scanned in a cartesian grid by means of a narrow collimated beam of scattered deuterons. The distortions due to the nonlinear transformation by the system are measured in the detector plane. A model is developed which describes the measured distortions. The model allows to locate nonlinearities in the system responsible for the observed distortions. It gives a good understanding of geometrical nonlinearities up to the fifth order and chromatical nonlinearities up to the third order. To confirm the model, the magnetic field in the quadrupoles is measured including the fringe field region. Furthermore, nonlinearities appearing in ideal magnets are discussed and compared to experimental data.

Keywords: ionoptics, magnetic spectrograph, aberrations, experimental raytracing.

Kurzfassung

Im Hinblick auf die erzielbare Impulsauflösung und die Transmission bei großem Raumwinkel werden die Bildfehler des QQDDQ-Spektrographen BIG KARL vermessen und analysiert. Hierzu wird ein feinkollimierter Deuteronenstrahl auf eine dünne Targetfolie fokussiert. Die von dem punktförmigen Targetfleck ausgehenden Strahlen gestreuter Teilchen werden mit dem Schlitzsystem zur Begrenzung des Raumwinkels fein ausgeblendet. Zur Durchführung der experimentellen Bahnverfolgung (experimental ray-tracing) wird der gesamte Raumwinkel in der Art eines cartesischen Gitters unterteilt. Die Verzerrungen des Phasenraums nach Durchlaufen des Systems werden bei verschiedenen Magneteinstellungen in der Detektorebene vermessen. Es wird ein Modell erarbeitet, welches die in der Detektorebene gemessenen Verzerrungen beschreibt. Das Modell erlaubt es, Bahnstörungen zu lokalisieren und ihre Auswirkungen zu bewerten. Zur Bestätigung des Modells wird die magnetische Feldverteilung im Bereich der beiden Eingangsquadrupole mit einer Hallsonde vermessen und analysiert. Man gewinnt ein umfassendes Verständnis der geometrischen Bildfehler bis zur fünften Ordnung und der chromatischen Fehler bis zur dritten Ordnung auch außerhalb der Mittelebene. Der vorangestellte theoretische Teil zeigt einige Grenzen der zur Zeit in numerischen Rechenverfahren angewendeten idealisierenden Modelle auf. Modellverfeinerungen werden diskutiert und deren Bedeutung im experimentellen Teil herausgearbeitet.

INHALT

	EINLEITUNG	1
Kap. 1	DER MAGNETSPEKTROGRAPH BIG KARL	
1.1	Aufbau	3
1.2	H_t -Windungen	5
1.3	Die Korrektureinstellung	8
1.4	Transmissionsmessung	9
Kap. 2	RECHENMETHODEN ZUR BEHANDLUNG DER IONENOPTIK	
2.1	Einführung	11
2.2	Die Bahngleichungen für die Mittelebene	13
2.2.1	Koordinaten und Konventionen	13
2.2.2	Die Bahngleichung nach Karl Brown	15
2.2.3	Aufstellung der Bahngleichung für einige Spezialfälle	16
2.3	Feldentwicklungen in Zylinderkoordinaten, $h=0$	18
2.3.1	Koordinaten	18
2.3.2	Die genäherte Differentialgleichung	18
2.3.3	Entwicklung des skalaren Potentials	19
2.3.4	Symmetriebetrachtungen	20
2.3.5	Multipolfelder	21
2.3.6	Die Feldentwicklung der Randfelder	21
2.4	Verfahren zur Lösung der Bewegungsgleichungen	26
2.4.1	Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung	26
2.4.2	Eine formale Lösung der inhomogenen Gleichung	27
2.4.3	Lösungsentwicklung nach K.Brown	28
2.4.4	Deutung der Green'schen Funktion nach K.Brown	29
2.4.5	Analyse des "Turtle"-Verfahrens	32
2.5	Bahnstörungen in idealen Magneten	34
2.5.1	Anregung von Störanteilen im Quadrupol	34
2.5.2	Anregungen dritter Ordnung im Dipol	35

Kap. 3	MESSVERFAHREN UND FELDMESSUNGEN	
3.1	Präparation des Strahls	40
3.2	Detektorsysteme	44
3.3	Präparation der Dipolfelder und Reproduzierbarkeiten	46
3.4	Durchführung der ionenoptischen Messungen . . .	49
3.5	Feldmessungen an den Quadrupolen	51
3.6	Vermessung und Analyse des Quadrupolrandfeldes .	55
3.7	Vermessung der Dipolkantenkonturen durch W.Hürlimann	58
Kap. 4	IONENOPTISCHE MESSERGEBNISSE UND INTERPRETATION	
4.1	Überblick über die Meßdaten	61
4.2	Modifikation der Computerprogramme	68
4.2.1	Organisation	68
4.2.2	Erweiterung und Anwendung der TURTLE-Module .	72
4.3	Erarbeitung eines Modells	76
4.3.1	Komponenten des Modells A	76
4.3.2	Freie Parameter des Modells A	77
4.3.3	Anpassung der Quadrupol- und Dipolfelder . . .	79
4.3.4	Anpassung hoher Multipolkomponenten	81
4.3.5	Chromatisches Verhalten	85
4.3.6	Merkmale der vertikalen Bewegung	86
4.3.7	Die Grenzen des Modells A	88
4.4	Maßnahmen zur Korrektur der Bildfehler	93
Kap. 5	ZUSAMMENFASSUNG	97
Anh. A	DIE QUADRUPOLE Q1, Q2	
A.1	Sättigungsverhalten	99
A.2	Kompensation von Feldfehlern	102
A.3	Anmerkungen zu den Rechenverfahren	105

Anh. B MATHEMATISCHER ANHANG

B.1	Aufstellung der Bahngleichung	108
B.2	Beweis zu Abschnitt 2.3.6.2	112
B.3	Integration der Lösungsentwicklung nach K.Brown	114
B.3.1	Die Integrationsvorschrift nach K.Brown . . .	114
B.3.2	Herleitung der Integrationsvorschrift	114
B.3.3	Diskussion der Integrationsvorschrift	116
B.4	Die "Turtle-Näherung"	117
B.4.1	Hilfssatz zu Abschnitt B.4.3, B.4.5, B.5 . . .	117
B.4.2	Die Turtle-Rekursion	117
B.4.3	Die formale Lösung	118
B.4.4	Die Turtle-Näherung	119
B.4.5	Kopplungsanteile	119
B.5	Simulation einer Anregung am Schwingungsbauch	120

Anh. C ABSCHÄTZUNGEN

C.1	Matrixelemente	124
C.2	Abschätzungen zu Kapitel 4	124

Anh. D ZUR OPTIK DES RANDFELDES

D.1	Die Näherung	128
D.2	Simulation am Punkt z_i	131
D.3	Fehlerabschätzung	135

Anh. E LITERATURVERZEICHNIS 139

Einleitung

Der Magnetspektrograph BIG KARL ist seit 1979 in Betrieb und ist das zentrale Instrument für hochauflösende Teilchenspektroskopie in Streuexperimenten im Institut für Kernphysik der Kernforschungsanlage Jülich. Das Jülicher Isochron-Zyklotron liefert Projektilen mit Energien von 22.5 bis 45 MeV/Nukleon. Der Spektrograph wurde mit einem maximalen " $B \cdot \rho$ "-Wert von ca. 3.5 Tm so ausgelegt, daß selbst die in speziellen Reaktionskanälen, z.B. (α, t), erzeugten Ejektile bei maximaler α -Teilchenenergie analysiert werden können. Durch diesen sehr hohen $B \cdot \rho$ -Wert ist das Instrument auch für Experimente am Ringbeschleuniger "COSY" [T-CO86] geeignet. Des weiteren können mit der neuen ECR-Quelle (ISIS) [T-IS87] Kernreaktionen untersucht werden, die durch Projektilen bis hinauf zum ^{32}S induziert werden.

Die für die experimentellen Möglichkeiten wichtigen Eigenschaften des Magnetsystems (ohne Detektoren, "Targets" usw.) lassen sich durch folgende Größen charakterisieren: Raumwinkelakzeptanz, Impulsauflösung, Impulsbereich und maximale magnetische Steifigkeit, wobei in der Praxis die Höchstwerte für die einzelnen Parameter nicht gleichzeitig erreichbar sind.

Von besonderer Bedeutung ist der Raumwinkel des Spektrometers. Vielfach ist es wichtig, durch große Raumwinkel die Meßzeiten zu reduzieren. Bei speziellen Experimenten ist ein großer Raumwinkel unabdingbar, nämlich zum gleichzeitigen Nachweis der in einem Vorwärtsskonus fliegenden Ejektile. Dies gilt insbesondere für mögliche Kernreaktionen mit ISIS-Teilchen und für Experimente aus der Mittelenergiephysik [I-KK86]. Zudem sind bei Experimenten mit schweren Teilchen Strahlgeometrien (z.B. die kinematische Defokussierung der Strahlführung, siehe [D-WH81]) an der Streufolie erforderlich, die

zu einer starken Verbreiterung des Strahlflecks führen, und damit die Strahlausdehnung im Spektrographen wesentlich vergrößern.

Bisher war die Transmission und optische Güte bei großen Raumwinkeln und großer Impulsakzeptanz im einzelnen nicht untersucht worden. Es war demzufolge nicht klar ersichtlich, welche Maßnahmen notwendig und sinnvoll sind, um experimentelle Anforderungen gezielt zu erfüllen. In der Vergangenheit hatte man mit Hilfe spezieller Korrekturalemente unter Anwendung iterativer Optimierungsprozeduren hohe Auflösungen bei begrenzten Eingangsöffnungen erreicht. Die so ermittelten Einstellungen beinhalteten starke Korrekturen, ließen jedoch nicht klar erkennen, welches die wesentlichen optischen Fehler sind, und durch welche Systemkomponenten sie entstehen.

Eine Klärung dieser Fragen war nur durch eine genaue Rekonstruktion der Strahlengänge möglich, die auf der Vermessung von Trajektorien beruht. Der Einfluß der (einzelnen) Systemkomponenten wird mittels eines Modells analysiert, um ein genaues Verständnis der Ionenoptik zu erlangen. Zudem wünscht man sich in der Praxis schnelle und reproduzierbare Einstellungen. Auch hier ist ein Modell in Form eines Computermodells nützlich.

Das erste Kapitel beschreibt das Gerät und den damals gegebenen Entwicklungsstand. Im zweiten Kapitel werden die Rechenmethoden beschrieben und einige sehr spezielle Fragen theoretisch behandelt. Das dritte Kapitel erläutert die Meßverfahren. Das vierte Kapitel beschreibt die Methoden und Ergebnisse bei der Interpretation der Meßdaten, und skizziert den weiteren Verlauf möglicher Entwicklungen. Mit Hilfe der Anhänge können die Methoden detailliert nachvollzogen werden. Eine Zusammenfassung findet man im fünften Kapitel.

Kapitel 1

Der Magnetspektrograph Big Karl

1.1 Aufbau

Die Gesamtkonfiguration zeigt **Abb.1.1** . Dies sind die wichtigsten Eckwerte:

Impuls/Ladung, maximal
Dispersion (variabel)
Impulsakzeptanz

$1.05 \text{ GeV}/c \hat{=} 3.5 \text{ Tm}$
 $d = 0 \dots 24 \text{ cm}/\%$
 $\gtrsim 4\%$ bei $d = 16 \text{ cm}/\%$

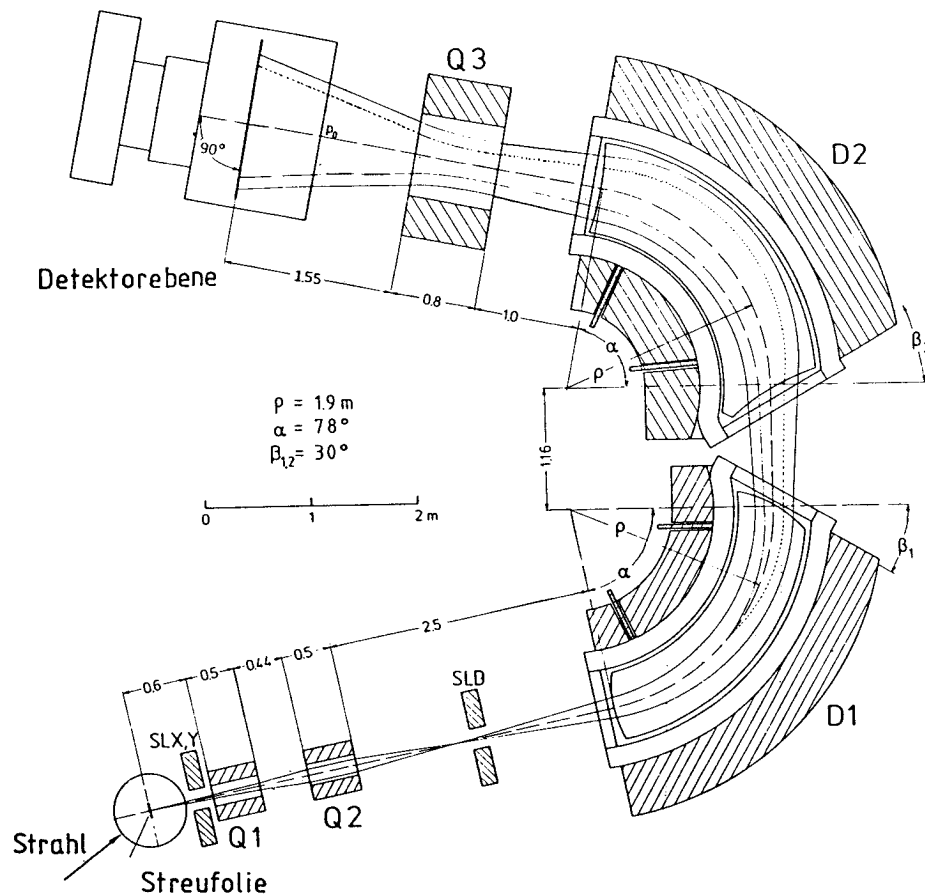
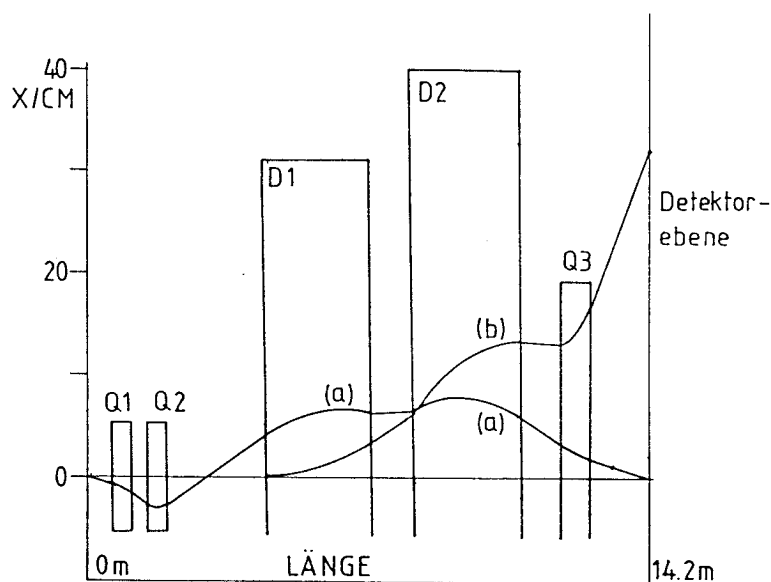


Abb.1.1 BIG KARL , Magnetkonfiguration

Dipole D1, D2, Quadrupole Q1, Q2, Q3, Schlitze SLX, SLY, SLD

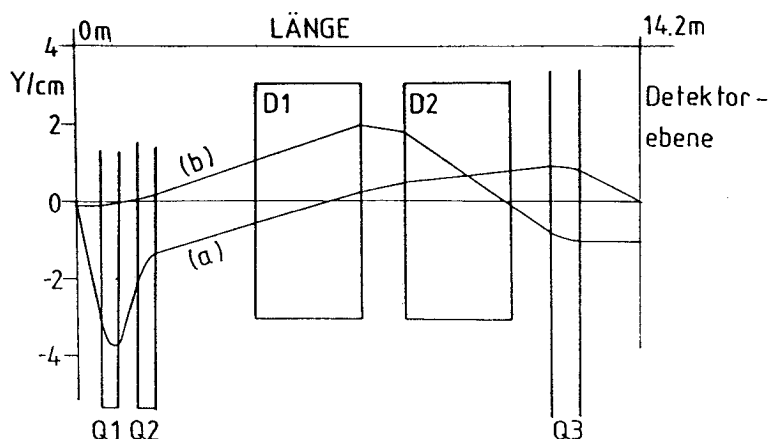


(a) $\theta_0 = 10 \text{ mrad}$, $x_0 = 0 \text{ cm}$, $\delta = 0\%$

(b) $\theta_0 = 0 \text{ mrad}$, $x_0 = 0 \text{ cm}$, $\delta = 2\%$

Anmerkung: Die Bahn mit $\theta_0 = 0 \text{ mrad}$, $x_0 = 1 \text{ cm}$, $\delta = 0\%$ nähert sich bis auf die erste und letzte Driftstrecke sehr stark der Bahn (a) an.

Strahlengang in der Horizontalen



(a) $\phi_0 = 10 \text{ mrad}$, $y_0 = 0 \text{ cm}$

(b) $\phi_0 = 0 \text{ mrad}$, $y_0 = 0 \text{ cm}$

Strahlengang in der Vertikalen

Abb.1.2 Strahlengang - Der Abstand einiger ausgesuchter Trajektorien zur Zentralbahn ist gegen die durchlaufene Länge aufgetragen. Die Anfangskoordinaten x_0 , θ_0 bzw. y_0 , ϕ_0 dieser Trajektorien an der Streufole sind oben angegeben (vgl. Abschnitt 2.2.1). Die Strahlengänge gelten für eine Dispersion $d = 16 \text{ cm}/\%$.

Den Strahlengang zeigt **Abb.1.2**. Ein besonderes Merkmal des Strahlenganges ist der durch das Quadrupoldublett Q1,Q2 gebildete Zwischenfokus. Eine Verschiebung dieses Fokus in Richtung Streufole und eine gleichzeitige Vergrößerung der Defokussierungsstärke des Quadrupols Q3 bewirkt eine Vergrößerung der Dispersion. Der Entwurfswert der ionenoptischen Auflösung nimmt mit zunehmender Dispersion zu.

Das maximale Verhältnis Impuls/Ladung von 3.5 Tm ist durch die Dipole D1,D2 vorgegeben. Um dieses Verhältnis auch in dem in **Abb.1.2** gezeigten Betriebsmodus zu ermöglichen, wurde nach den ersten Experimenten die Fokussierungsstärke des Quadrupoldoublets Q1,Q2 heraufgesetzt. Dies geschah durch Anbringung von Eisenprofilen auf den Polen. Dadurch wurde die Apertur in Q1 und Q2 etwa halbiert. Die Öffnung beträgt nun ca. 3 msr, siehe **Abb.1.3** , vgl. Anhang A.1 .

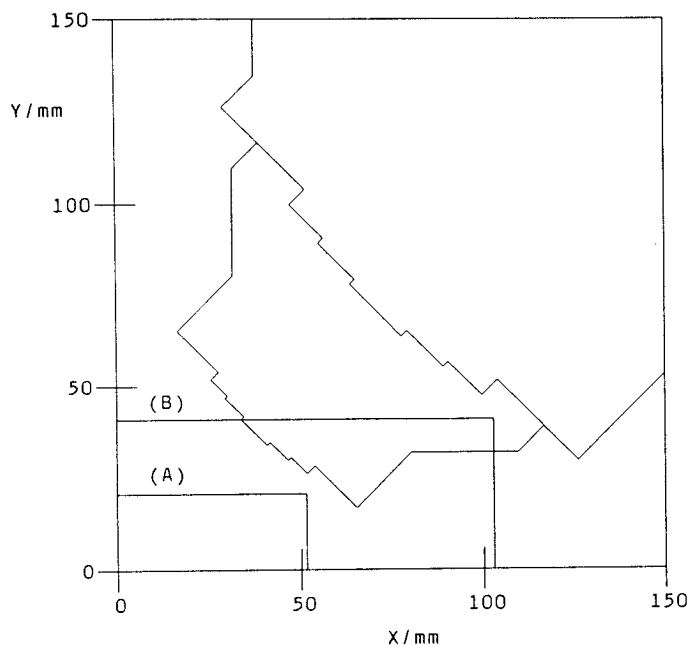


Abb.1.3 Die Polschuhe des Q1, Q2

- Die Abbildung zeigt ein Viertel des Quadrupols Q1, Q2 im Bereich der Polschuhe. Man erkennt die auf das alte Profil aufgesetzte Polschuhverlängerung. Die eingezeichneten Rechtecke bezeichnen die maximale Ausdehnung des Strahls im Quadrupol Q2 für Schlitzöffnungen

horizontal · vertikal

$\pm 15 \text{ mrad} \cdot \pm 50 \text{ mrad} = 3 \text{ msr (A)}$

$\pm 30 \text{ mrad} \cdot \pm 100 \text{ mrad} = 12 \text{ msr (B)}$

Diese Ausdehnungen gelten für einen "punktförmigen" Strahlfleck auf der Streufolie und für eine Einstellung mit einer Dispersion $d = 16 \text{ cm/\%}$.

1.2 H_t-Windungen

Die H_t-Windungen dienen dazu, in den Dipolmagneten Korrekturfelder zu erzeugen [V-KH73]. Die Windungen befinden sich in langgezogenen Schlitzen innerhalb des Polschuhs der Dipolmagnete (**Abb.1.4**). Die Schlitze haben jeweils einen Abstand von 6.4 cm und verlaufen parallel zum Zentralstrahl (siehe Abschnitt 2.2.1).

Die H_t-Ströme können einzeln eingestellt werden. Mit Hilfe eines Prozessrechners kann auch eine Stromverteilung vorgegeben werden, die in Form einer Taylorentwicklung um die Mittelachse parametrisiert ist [V-SM83]. Um die Reproduzierbarkeit der Korrekturfel-

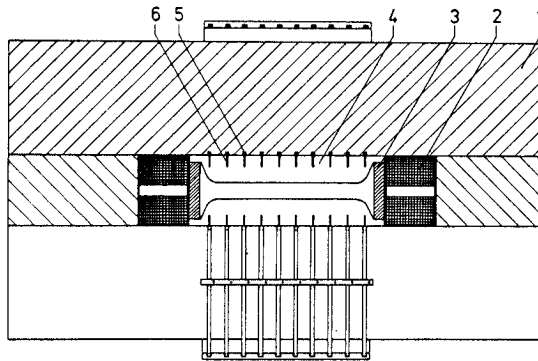


Abb.1.4 H_t -Windungen - 1 Joch,
2 Hauptspule, 3 Vakuumkammer,
4 Polschuh, 5 H_t -Windungen,
6 H_t -Schlitz, siehe [D-WH81].

der zu erreichen, muß der gesamte Dipolmagnet nach jeder Einstellung mit Hilfe einer entsprechenden Rampenfunktion zunächst in die Sättigung, und dann auf das gewünschte Magnetfeld gefahren werden. Man benötigt eine Wartezeit von 15 bis 30 Minuten nach dem Ablauf der Rampe, bis das Feld und die Feldform mit einer Genauigkeit von 10^{-4} konstant ist. (Dies gilt auch für abgeschaltete H_t -Windungen.) Nach einer Arbeit von K. Halbach [V-KH73b] kann man diese Einlaufzeit auf Wirbelstromeffekte zurückführen, die als "DC-aftereffect" bezeichnet werden; A.Abdel-Gawad [D-AG82] berechnet auf dieser Grundlage für einen typischen Fall eine Zeitkonstante von 16 min .

Die Windungen bewirken an der Polschuhoberfläche Tangentialkomponenten H_t der magnetischen Feldstärke $\vec{H}$. Ein grobes Modell sagt für jede Windung eine glockenkurvenförmige Verteilung der H_t -Komponente an der Oberfläche voraus, die um die Windungsposition zentriert ist. Im Falle eines unendlich ausgedehnten Dipolmagneten folgt aus den Feldgleichungen ein fester Zusammenhang zwischen dem Korrekturfeld $H_y(x,0)$ in der Mittelebene des Magneten und den Tangentialfeldern $H_t(\hat{x},y)$ an der Grenzfläche $(\hat{x},y)$. Halbach zeigt:

$$H_y(x,0) = \frac{1}{2y} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} H_t(\hat{x},y) \cdot \tanh\left(\frac{1}{2}\pi \cdot \frac{x-\hat{x}}{y}\right) \cdot d\hat{x} \quad (1.1)$$

Die verwendeten Größen sind in **Abb.1.5** nochmals dargestellt. An dieser Formel erkennt man qualitativ die Wirkungsweise der Windun-

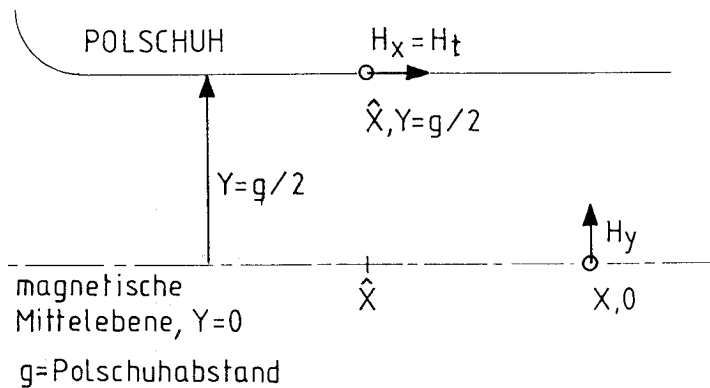


Abb. 1.5 Darstellung der Größen aus Gl. 1.1.1

gen. Die einzelnen Glockenfunktionen und die Gewichtsfunktion unter dem Integral erzeugen eine gewisse Welligkeit. Sieht man davon ab, so erzeugt eine gleichmäßige Stromverteilung über alle Windungen einen linearen Anstieg des Feldes $H_y(x, 0)$ mit x , eine lineare Stromverteilung in x erzeugt ein parabelähnliches Korrekturfeld. Schließlich ist ein Korrekturfeld mit einer x^3 -Abhängigkeit erfahrungsgemäß durch einen unerwünschten, starken Feldgradienten überlagert, der in der Praxis nur durch eine Vielzahl iterativer Einstellschritte zu eliminieren ist. Dies ist wegen der benötigten Einlaufzeiten besonders zeitaufwendig.

Es gibt Modelle, die die H_t -Verteilung für die einzelne Windung mit hoher Genauigkeit beschreiben, und deren Parametrisierung mit Hilfe entsprechender Feldmessungen angepaßt werden kann [D-AG82]. Diese Modelle sind sehr aufwendig, denn das Korrekturfeld "sieht" eine feldabhängige und anisotrope differentielle Permeabilität. Diese Modelle sind deshalb niemals angewendet worden, um eine Stromverteilung zur Erzeugung eines gewünschten Korrekturfeldes zu berechnen.

1.3 Die Korrektureinstellung

Abb.1.6 zeigt das Feldprofil in Dipol 1, das nach einer iterativen Optimierungsprozedur [D-WH81], [V-SM83] gefunden wurde und für die meisten Messungen üblicherweise benutzt wurde. Zur ionenoptischen Vermessung diente bereits die neuinstallierte Vieldraht-driftkammer [V-CM85], die die gesamte Fokalebene überspannt. Diese Einstellung, und eine entsprechende Einstellung im Dipolmagneten D2, führt zu guten Impulsaufösungen $\Delta p/p$ von nahezu $1 \cdot 10^{-4}$ über einen großen Teil der Fokalebene, wenn man in der Horizontalen eine Schlitzöffnung von maximal ± 10 mrad nicht überschreitet. In der Abbildung ist die maximale Strahlauslenkung für einen Öffnungswinkel von ± 10 mrad eingezeichnet. Trajektorien, die das Magnetprofil in weiter außen liegenden Bahnen durchlaufen, "sehen" Feldabweichungen des Dipolfeldes $\Delta B/B \gtrsim 10^{-3}$. Auf Grund dieses Profils wären die Dipole in der Apertur begrenzend gewesen. Das Aufsuchen eines anderen geeigneten Profils erschien mit den angewendeten Methoden wenig aussichtsreich.

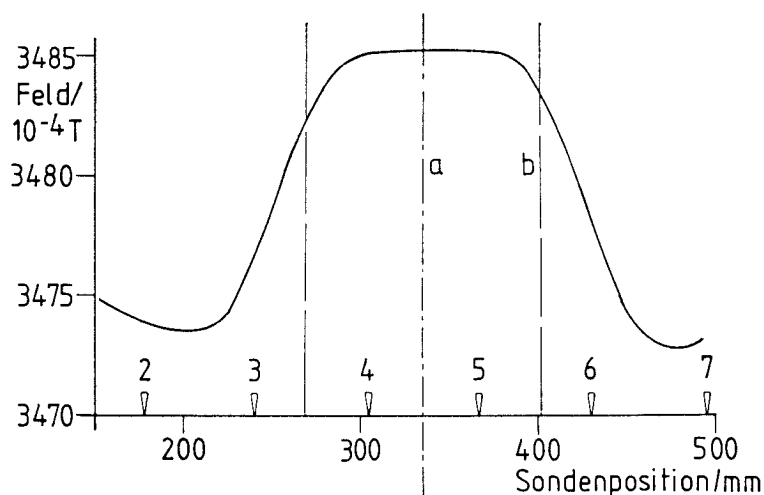


Abb.1.6 Feldprofil des Dipols D1 (Standardeinstellung bis 1985) – Die Feldmeßsonde kann radial in den Magneten eingefahren werden. Der Feldwert ist gegen die Position der Meßsonde aufgetragen. Die geometrische Zentralposition (a) liegt bei etwa $x=344$ mm. Die eingetragenen, maximalen Auslenkungen der Trajektorien (b) für horizontale Eingangsöffnungen von maximal 10 mrad, gelten für einen punktförmigen Strahlfleck. Die Positionen der H_t -Windungen sind ebenso eingezeichnet (numerierte Pfeile). Man erkennt die durch die Windung Nr.4 und Nr.5 im Feldprofil erzeugten Höcker.

1.4 Transmissionsmessung

Für die Messung von Reaktionsraten ist es notwendig zu wissen, welcher Anteil der in einem durch die Eingangsschlitze festgelegten Raumwinkel einfallenden Teilchen in der Detektorebene registriert wird¹⁾. Den maximal zulässigen Öffnungswinkel in der Vertikalen, an dem keine wesentliche Reaktionsrate im Magnetsystem verlorenggeht, ermittelt man experimentell zu etwa ± 40 bis ± 50 mrad.

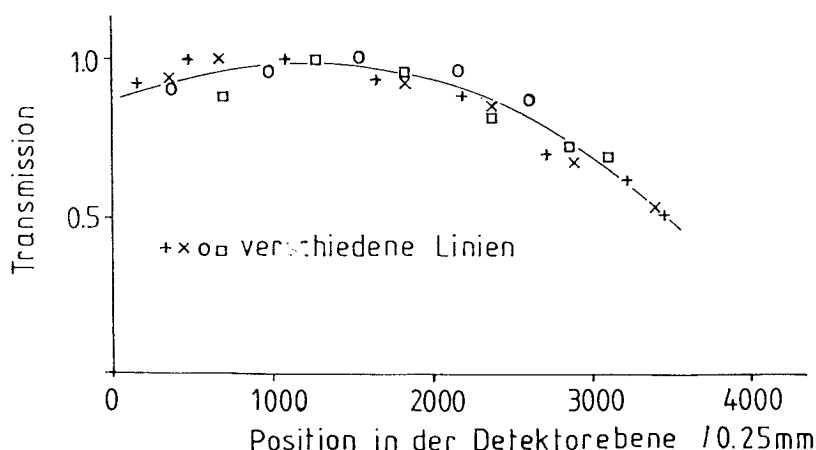


Abb.1.7 Transmissionsmessung - Die pro Stromnormal in einer Linie registrierte Teilchenzahl hängt von der Position in der Detektorebene ab. Das Detektorsystem kann weitgehend als Ursache für dieses Verhalten ausgeschlossen werden. Neben der elastisch gestreuten Linie wurden zusätzlich Linien angeregter Zustände für die Transmissionsmessung benutzt. Die magnetische Steifigkeit nimmt dabei nach links ab. Das gesamte Spektrum wurde durch Skalierung der Felder mehrfach verschoben.

Die Schlitze werden nun symmetrisch bis zu diesen maximal zulässigen Werten geöffnet. Die Position der beobachteten Linie in der Detektorebene wird durch Skalierung der magnetischen Felder mehrmals verändert. Man trägt die jeweils nachgewiesene Zahl von Reaktionsereignissen gegen die Linienposition in der Detektorebene auf (**Abb.1.7**). Jede Einzelmessung bezieht sich dabei auf eine festgelegte Ladungseinheit des Primärstrahles. Man stellt einen Verlust

1) Die Ansprechwahrscheinlichkeit des Detektors kann man mit Hilfe von möglichst zwei weiteren, in Koinzidenz betriebenen Detektoren überprüfen. Die so gemessene Ansprechwahrscheinlichkeit war ca.99%.

von 30-50% an den äußeren gegenüber den mittleren Positionen fest. Die Kurve zeigt, daß für äußere Bahnen Strahlteilchen im Magnetsystem verloren gehen. Die Form dieser Kurve ist von der genauen Wahl der Einstellungen abhängig. Auch dieses Verhalten sollte untersucht werden, da man annehmen muß, daß bei größeren Eingangsöffnungen der Bereich mit guter Transmission noch kleiner wird.

Kapitel 2

Rechenmethoden zur Behandlung der Ionenoptik

2.1 Einführung

Zur präzisen Beschreibung der Ionenoptik sind analytische Näherungen unverzichtbar, wenn man eine, alle Bahnabschnitte umfassende, Kartierung der Felder nicht zur Verfügung hat. Dann ist es notwendig, fundierte Annahmen über die Felder zu machen, um eine detaillierte modellmäßige Beschreibung der Optik zu ermöglichen.

Für eine quantitative Überprüfung der Daten hinsichtlich der analytischen Annahmen wurde das Programm "TURTLE" [P-Tu74] gewählt¹⁾. Das Programm beschreibt jeden Bahnabschnitt in einer analytischen Näherung. Als Ergebnis der Berechnung wird lediglich ein Phasenraumvektor an den nächsten Bahnabschnitt übergeben. Diese Methode erlaubt eine hohe Flexibilität in der Wahl der analytischen Beschreibung einzelner Bahnabschnitte, und kann auch leicht erweitert werden.

Die Auswirkung einzelner Bahnabschnitte im Gesamtsystem kann außerhalb des Programms transparent gemacht werden, indem man die Fortpflanzung von Bahnstörungen im System mit Hilfe des Transportformalismus verfolgt.

Die genannten Vorteile des analytischen Verfahrens werden dadurch eingeschränkt, daß die erreichte Genauigkeit in manchen Fällen schwierig abzuschätzen ist. Diese Schwierigkeit wäre nicht gegeben, wenn man eine Lösungsentwicklung nach einem strengen Schema vornähme. Allerdings wäre die Anwendung solcher Schemata bei zuneh-

1) Vgl. auch [T-EK84].

mender Zahl der Entwicklungsglieder im allgemeinen nicht praktikabel.

Das Kapitel widmet sich daher einer Absicherung der Rechen- und Abschätzverfahren. Insbesondere wird die Bahndynamik in idealen Magneten und in Randfeldern behandelt, da die im Programm TURTLE verwendeten Modelle in dieser Hinsicht nicht exakt genug sind. Z.B. wird das reine Gradientenfeld durch eine lineare Abbildung beschrieben. Ziel ist es, Inkonsistenzen zwischen Modell und Daten zu erklären.

Als Grundlage dient der von Karl Brown eingeführte Formalismus zur Beschreibung der nichtlinearen Magneto-optik, der mit Beschränkung auf eine "zweite Ordnung" formuliert wurde [T-KB67]. Brown benutzt das physikalische Bild eines zeitabhängigen, gestörten harmonischen Oszillators. Der Formalismus ist noch heute als Standard anerkannt, eine überarbeitete Version entstand 1984 [T-KB84].

Das Kapitel ist methodisch folgendermaßen aufgebaut: Die Abschnitte 2.2 und 2.3 widmen sich der Aufstellung der Bahngleichung, der Abschnitt 2.4 behandelt die Lösungsverfahren. In Abschnitt 2.5 werden einige Bahnstörungen im idealen Magneten abgeschätzt. Dabei gliedern sich diese Abschnitte in referierende und anwendungsbezogene Unterabschnitte. Im Anhang B werden u.a. Ableitungen einiger Literaturstellen gegeben, welche in der gewünschten Richtung aufgebaut sind.

2.2 Die Bahngleichungen für die Mittelebene

2.2.1 Koordinaten und Konventionen

Zur Festlegung eines Koordinatensystems wird in Übereinstimmung mit [T-KB67] eine Trajektorie ausgewählt und als Zentralbahn bestimmt. Die gewählte Zentralbahn führt durch die geometrischen Mittelpunkte der Quadrupolmagnete. Der Phasenraumvektor²⁾ $\vec{q}(t)$ einer beliebigen Trajektorie außerhalb der Zentralbahn enthält die Komponenten $q_1 \equiv x$, $q_2 \equiv x'$, $q_3 \equiv y$, $q_4 \equiv y'$, $q_5 \equiv 1$, $q_6 \equiv \delta$ (Abb.2.1). Der Bahnparameter t bezeichnet die Wegstrecke, die der Ursprung des mitbewegten Dreibeins $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_t$ auf der Zentralbahn zurückgelegt hat³⁾.

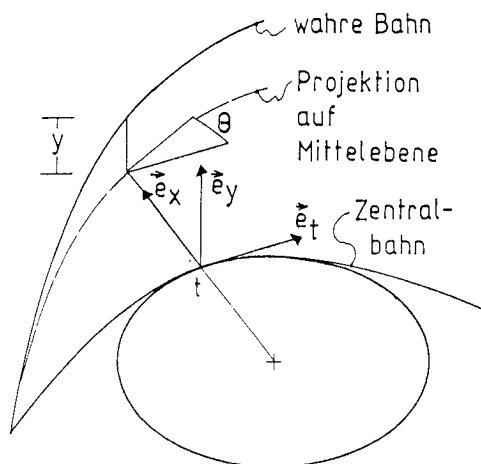


Abb.2.1 Krummlinige Koordinaten nach K. Brown – Das mitbewegte rechtshändige Dreibein $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_t$ ist mit der Koordinate $\vec{e}_t$ tangential zur Zentralbahn ausgerichtet; der Ursprung des Dreibeins liegt auf der Zentralbahn. ($\vec{e}_x$ ist der Einheitsvektor in Richtung der Koordinate x , u.s.w. .)

Die Koordinate x' ist die Änderung der Koordinate x nach dem Bahnparameter t . Projiziert man die beobachtete Trajektorie auf die x - t -Ebene, so kann man x' geometrisch interpretieren als

$$x' = \frac{dx}{dt} = (1+hx) \cdot \tan\theta, \quad (2.1)$$

wobei θ für den Winkel zwischen der projizierten Trajektorie und der Zentralbahn steht. h ist die Krümmung der Zentralbahn, siehe Gl.2.4. Für die Koordinate y' gilt Entsprechendes⁴⁾.

2) Die Bezeichnung $\vec{q}(t)$ wird in dieser Arbeit eingeführt.

3) Die Unterscheidung zwischen dem Bahnparameter t und der Zeit ist in der nichtlinearen Optik notwendig.

Die Koordinate δ ist die relative Impulsdifferenz des Teilchenimpulsbetrags $|\vec{p}|$ zum Impulsbetrag der Zentralbahn $|\vec{p}_{\text{Zentral}}|$:

$$\delta := \frac{|\vec{p}| - |\vec{p}_{\text{Zentral}}|}{|\vec{p}_{\text{Zentral}}|} \quad (2.2)$$

δ ist konstant, da nur zeitunabhängige Magnetfelder betrachtet werden⁵⁾. Alle Gleichungen sind im folgenden so formuliert, daß anstelle der Impulse die magnetische Steifigkeit $B\rho$ in [T·m] eingesetzt werden muß. Die Umrechnung von der in der Teilchenphysik üblichen Einheit für den Impuls [MeV/c] ist durch

$$B\rho / (\text{T} \cdot \text{m}) = 3.3356 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{p / (\text{MeV}/c)}{\text{Ladungszahl}} \quad (2.3)$$

gegeben.

l ist die Wegdifferenz zwischen dem Bahnparameter t und der tatsächlich durchlaufenen Weglänge, und für unsere Betrachtung ohne Bedeutung.

Wir beschränken uns in Abschnitt 2.2 auf die Mittelebene. Dort ist auf Grund der "Mittelebenensymmetrie" der verwendeten Magnete nur die Feldkomponente B_y ungleich Null. Wir benutzen die folgende Entwicklung:

$$B_y = B\rho_{\text{Zentral}} \cdot (h + K_1 x + K_2 x^2 \dots) \quad (2.4)$$

Dabei ist

$$h \hat{=} 1/\rho_{\text{Zentral}}$$

$$K_1 \hat{=} \frac{1}{B\rho_{\text{Zentral}}} \cdot \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \right)_{x=0}$$

$$K_2 \hat{=} \frac{1}{B\rho_{\text{Zentral}}} \cdot \left(\frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right)_{x=0}$$

$$\vdots$$

4) Für x' , y' wird die "Einheit" mrad = 10^{-3} verwendet.

5) Für δ wird die "Einheit" % = 10^{-2} verwendet.

h ist die Bahnkrümmung der Zentralbahn, ρ_{Zentral} der Zentralbahnradius, $B\rho_{\text{Zentral}}$ ist die magnetische Steifigkeit des Zentralteilchens. Die Entwicklungskoeffizienten K_n entsprechen der Definition von K.Brown. Außerdem benutzt K.Brown die Entwicklungskoeffizienten n, β, γ :

$$\begin{aligned} K_1 &= -n \cdot h^2 \\ K_2 &= \beta \cdot h^3 \\ K_3 &= \gamma \cdot h^4 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Die Normierung der Entwicklungskoeffizienten K_n hat den Vorteil, daß die Entwicklung auch für $h=0$ gültig ist. In dieser Arbeit werden daher ausschließlich die Koeffizienten K_n benutzt.

2.2.2 Die Bahngleichung nach Karl Brown

Brown stellt die folgende Bahngleichung für die Koordinate x auf. Wir schreiben diese Gleichung mit Hilfe der Koeffizienten K_n , wobei wir uns auf die Mittelebene beschränken:

$$x'' + (h^2 + K_1) \cdot x = h \cdot \delta + \sigma_x(\vec{q}, t), \quad (2.6)$$

$$\text{wobei } \sigma_x := -(K_2 + 2h \cdot K_1 + h^3)x^2 + \frac{1}{2}hx'^2 + h'xx' - h\delta^2 + (K_1 + 2h^2)\delta x \dots$$

Dabei ist:

$\vec{q} = \vec{q}(t)$	Phasenraumvektor nach Abschnitt 2.2.1
$x = x(t)$	Ortskoordinate
$h = h(t) = h_x(t)$	Krümmung der Zentralbahn, wie in Gl.2.4
$K_1 = K_1(t)$	normierter Feldgradient, wie in Gl.2.4
$K_i = K_i(t)$	höherer Feldanteil nach Gl.2.4
δ	relative Impulsdifferenz (Gl.2.2)
$\sigma_x = \sigma_x(\vec{q}(t), t)$	Störung
t	Bahnparameter

Der Strich steht für die Ableitung nach t . Sowohl die "rücktreibende Kraft" ($h^2 + K_1$) als auch die Inhomogenität $h \cdot \delta$ sind explizit vom Bahnparameter t abhängig. Die "Inhomogenität" σ_x ist explizit, und über den Phasenraumvektor $\vec{q}(t)$, implizit von t abhängig.

Die dispersiven Eigenschaften des Systems werden durch die Inhomogenität $h \cdot \delta$ verkörpert. Die Bewegung in der Vertikalen wird formal durch die gleiche Gleichung beschrieben. Auf Grund der Koordinatenwahl ist jedoch $h_y = 0$.

Ein Teilchen bewegt sich z.B. in einem Dipol- oder Quadrupolmagneten näherungsweise in einer durch den linearen Teil der Gleichung beschriebenen harmonischen Schwingung ("Betatron Schwingung"). Die "Inhomogenität" σ_x enthält "Störungen" zur zweiten Potenz in den Koordinaten x , x' und δ ; die y - und y' abhängigen Beiträge sind hier nicht aufgeführt. Diese Störungen werden durch die Bahnkrümmung h der Zentralbahn, die Impulsabhängigkeit der "rücktreibenden Kraft" und durch höhere Feldanteile verursacht. σ_x bewirkt "kleine" Bahnabweichungen von der harmonischen Schwingung, die im wesentlichen Gegenstand dieser Arbeit sind.

Brown benutzt die äußere Form einer inhomogenen, linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung (im charakteristischen Polynom), um die in Abschnitt 2.4 beschriebenen Lösungsverfahren auf die inhomogene Gleichung anwenden zu können.

2.2.3 Aufstellung der Bahngleichung für einige Spezialfälle

Wir stellen die Bahngleichung in der von Brown benutzten Form für einige spezielle Fälle auf, in denen wir Störungen in höherer als zweiter Potenz in den Koordinaten berücksichtigen. Dabei gehen wir von der in Anhang B.1 aufgestellten exakten Differentialgleichung aus. Zur Vereinfachung wird h als abschnittsweise konstant angenommen; die Gleichung gilt nur für die Mittelebene:

$$x'' = \frac{1}{1+hx} \left\{ h(1+hx)^2 + 2hx'^2 - \frac{\sqrt{(1+hx)^2 + x'^2}^3 \cdot B_y}{(1+\delta) \cdot B_{\rho_{\text{Zentral}}}} \right\} \quad (2.7)$$

Diese Gleichung ist auf Konsistenz mit Gl.2.6 geprüft worden.

Das reine Gradientenfeld - Wir betrachten den Fall $h=0$, $\delta=0$, $K_1 \neq 0$, $K_i=0$ für $i>1$. Dann erhält Gl.2.7 die einfache Form:

$$x'' = - \sqrt{1+x'^2}^3 K_1 x \quad (2.8)$$

$$\Rightarrow x'' + K_1 x = \sigma_x, \quad \sigma_x = -\frac{3}{2}K_1 x x'^2 - \frac{3}{8}K_1 x x'^4 \dots$$

Das reine Gradientenfeld erzeugt demnach auch für $\delta=0$ Störungen in ungerader Potenz in den Phasenraumkoordinaten. Dies kommt in der von Brown aufgestellten Gleichung wegen des Abbruchs der Störungsentwicklung nicht zum Ausdruck.

Das Gradientenfeld mit überlagertem Multipol - Wird dem Gradientenfeld ein Multipolfeld mit $K_i \neq 0$ überlagert, so erhält man zusätzlich eine Störung $\sigma_x^{\text{Multipol}}$ zu:

$$\sigma_x^{\text{Multipol}} = -K_i \{ x^i + \frac{3}{2}x^i x'^2 \dots \} \quad (2.9)$$

Für ein Multipolfeld mit $K_i \neq 0$ müssen demnach in der Bahngleichung Störungen in den Potenzen $i, i+2 \dots$ angenommen werden.

Das homogene Dipolfeld - Im Falle $\delta=0$, $K_i=0$ für alle i , $h \neq 0$, $h'=0$ erhalten wir für $hx \ll 1$, $x' \ll 1$ aus Gl.2.7⁶⁾:

$$\begin{aligned} x'' + h^2 x &= \sigma_x, \\ \sigma_x &= -h^3 x^2 + \frac{1}{2}hx'^2 - 2h^2 x x'^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Unter den angegebenen Bedingungen sind dies alle bis zur dritten Potenz in den Koordinaten auftretenden Beiträge.

6) Dazu entwickle $\sqrt{(1+hx)^2 + x'^2}^3$ und $1/(1+hx)$ bis zur dritten Potenz in hx und x' .

Die Lösung einiger Spezialfälle wird in Abschnitt 2.5 diskutiert.

2.3 Feldentwicklungen in Zylinderkoordinaten, $h=0$

2.3.1 Koordinaten

Im Falle $h=0$ vereinfachen sich die Feldentwicklungen stark und haben dennoch einen breiten Anwendungsbereich in allen nicht dispersiven Elementen. Auch die in Abschnitt 2.3.6.2 dargestellten Randfelder des Dipols werden unter der Annahme $h=0$ behandelt, um die wesentlichen Aussagen nicht durch einen aufwendigen Formalismus zu "verschleiern". Für $h=0$ wird daher $t \equiv z$ gesetzt, so daß x, y, z ein cartesisches Koordinatensystem bilden. $z=0$ wird je nach Bedarf festgelegt. Die im folgenden benutzten Zylinderkoordinaten r und ϕ definieren einen Punkt in der x, y -Ebene durch $x = r \cdot \cos \phi$, $y = r \cdot \sin \phi$ ⁷⁾.

2.3.2 Die genäherte Differentialgleichung

Setzt man $h=0$ und verzichtet in Gl.2.8, Gl.2.9 auf Beiträge in x' , so kann man die genäherte Differentialgleichung

$$x'' \approx - \frac{B_y}{(1+\delta) \cdot B_{\rho_{\text{Zentral}}}} = - \frac{B_y}{B_{\rho}} \quad (2.11)$$

benutzen. Diese Gleichung gilt auch außerhalb der Mittelebene. Sie wird (auch von Brown) zur Beschreibung hoher Multipolfelder angewendet.

7) Hinweis: Die Zylinderkoordinaten ϕ und r sind anders orientiert als die in Anhang B.1 benutzten Zylinderkoordinaten α und ρ .

2.3.3 Entwicklung des skalaren Potentials

Das magnetostatische Feld im Vakuum kann durch die folgenden Potentialfunktionen V und $\vec{A}$ dargestellt werden⁸⁾:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \text{rot } \vec{A}, & \text{mit der Eichung: } \text{div } \vec{A} &= 0, \\ \vec{B} &= -\text{grad } V, \text{ wenn } \vec{j} = 0, & \text{mit der Eichung: } V(x=0, y=0, z=0) &= 0\end{aligned}\quad (2.12)$$

V ist das "skalare magnetostatische Potential". Wo die Stromdichte $\vec{j}$ verschwindet, gilt für diese beiden Potentiale die "Laplacegleichung":

$$\Delta \vec{A} = 0 \quad ^9) \quad \text{bzw.} \quad \Delta V = 0 \quad (2.13)$$

$$\text{wobei } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Die allgemeine (reelle) Lösung der Laplacegleichung Gl.2.13 lautet (in Zylinderkoordinaten), siehe z.B. [L-BS85]:

$$\begin{aligned}V &= \sum_n c_n \cdot \sin(n \cdot \phi - \phi_n^0) \cdot r^n + \\ &\quad \sum_n \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} d\omega C_n(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot z - z_n(\omega)) \cdot \sin(n\phi - \phi_n(\omega)) \cdot i^{-n} \cdot J_n(i\omega \cdot r)\end{aligned}\quad (2.14)$$

$$\text{Dabei ist } J_n(i\omega \cdot r) = \sum_{m=0}^K \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \cdot \left(\frac{i \cdot \omega \cdot r}{2}\right)^{n+2m}$$

J_n wird als Besselfunktion 1. Gattung bezeichnet. Die (reellen) Amplituden c_n und $C_n(\omega)$ und die (reellen) Phasen ϕ_n^0 , $\phi_n(\omega)$ und $z_n(\omega)$ sind freie Parameter. i ist die imaginäre Zahl.

Die in $r=0$ singulären Anteile fehlen in Gl.2.14. Wegen der Periodizität $V(0) = V(2\pi)$ ist n ganz und positiv. Fordert man, die gegebenen Lösungen seien beschränkt für $z \rightarrow \infty$, so ist ω reell.

8) Siehe z.B. [L-JJ75]

9) Wirkt Δ auf eine vektorwertige Funktion, so ist die Operation komponentenweise durchzuführen.

2.3.4 Symmetriebetrachtungen

Wir betrachten die in **Abb.2.2** dargestellten Magnete. Vernachlässigt man Ungleichmäßigkeiten auf Grund von Fertigungstoleranzen der Polschuhe, Spulen und des Magneteisens, so kann man die zulässigen Lösungen weiter einschränken. Für die dargestellte Orientierung der Magnete gilt:

$$\begin{aligned} &\text{für alle } x \text{ und } z: \\ &B_x(x,0,z) = 0, \quad B_z(x,0,z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V(x,0,z) = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

In Gl.2.14 ist für V daher nur die Phase $\phi_n^0 = \phi_n(\omega) = 0$ erlaubt. Aus der Periodizität ergeben sich für n folgende Einschränkungen, solange der Magnet zylindersymmetrisch ist.

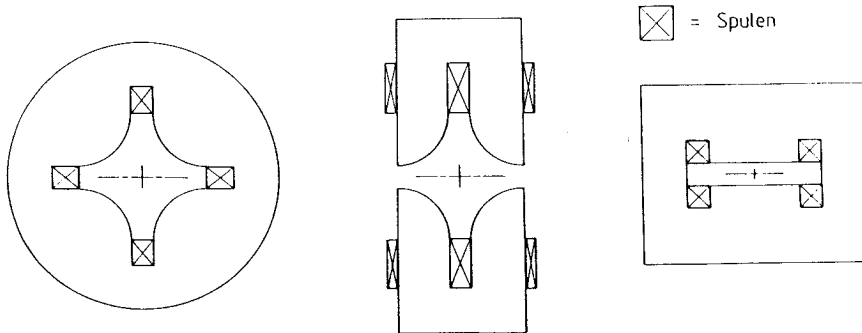


Abb.2.2a, $n=2,6,10,\dots$

Abb.2.2b, $n=2,4,6,\dots$

Abb.2.2c, $n=1,3,5,\dots$

Abb.2.2 Magnettypen und erlaubte Harmoniezahlen

Quadrupol, **Abb.2.2a** $\Rightarrow n = 2,6,10,14,\dots$
 Quadrupol, **Abb.2.2b** $\Rightarrow n = 2,4,6,8,10,\dots$
 zylindrischer Dipol, **Abb.2.2c** $\Rightarrow n = 1,3,5,\dots$

Für die am BIG KARL installierten Dipole sind für einen Schnitt wie in **Abb.2.2c** alle $n > 0$ erlaubt, da die Zylindersymmetrie nicht gewährleistet ist. Für die Diskussion der Randfelder am Eingang und Ausgang der Dipolmagnete in Abschnitt 2.3.6 wird dennoch angenommen, daß die wesentlichen Beiträge in $n=1,3,5$ zu finden sind, da im Randfeldbereich die Geometrie des Eisens entsprechend symmetrisch gestaltet ist¹⁰⁾. Für die am BIG KARL installierten Quadrupole Q1,

Q2 ("Collinstyp") ist $n=2,4,6\dots$ erlaubt, für den Quadrupol Q3 ist lediglich $n=2,6\dots$ erlaubt.

2.3.5 Multipolfelder

Explizit lauten die Entwicklungen für das Feld, für Skalar- und Vektorpotential im besonderen Fall von mittelebenensymmetrischen Feldern, die in z nicht veränderlich sind:

$$V = \sum_n c_n \cdot r^n \sin(n\phi) = \sum_n c_n \cdot \text{Im}(x+iy)^n \quad (2.16)$$

$$A_z = \sum_n c_n \cdot r^n \cos(n\phi) = \sum_n c_n \cdot \text{Re}(x+iy)^n$$

$$B_y = \text{Re} \left\{ \sum_n b_n \cdot (x+iy)^{n-1} \right\}, \quad B_x = \text{Im} \left\{ \sum_n b_n \cdot (x+iy)^{n-1} \right\},$$

$$\text{wobei } b_n = -n \cdot c_n = B_{\rho_{\text{Zentral}}} \cdot K_{n-1}$$

In den Bahngleichungen erhält man für den $2(j+1)$ -Pol im Falle $\delta=0$ mit der Näherung Gl.2.11 das Störglied:

$$\sigma_x \approx -K_j \cdot \text{Re} \left((x+iy)^j \right), \quad \sigma_y \approx -K_j \cdot \text{Im} \left((x+iy)^j \right) \quad (2.17)$$

wobei K_j die Entwicklungskoeffizienten nach Gl.2.4 sind.

In Abschnitt 2.2.3 wurde ausführlich ausgeführt, daß in der exakt aufgestellten Bahngleichung noch höhere Beiträge enthalten sind (Gl.2.9).

2.3.6 Die Feldentwicklung der Randfelder

2.3.6.1 Eine Darstellung des Randfeldes nach Halbach - [T-KH85]

Wir betrachten ideale, mittelebenensymmetrische Magnete und setzen in Gl.2.14 $\phi_n^0 = \phi_n(\omega) = 0$ ¹¹⁾. Faßt man die unter dem Integral verbleibenden ω -abhängigen Anteile zu einem Fourierintegral zusammen, er-

10) Vgl. auch Abschnitt 4.2.2.3, gedrehte Koordinaten.

hält man eine anschauliche und meßtechnisch zweckmäßige Darstellung von Gl.2.14 . Die (reelle) Funktion $f_n^{(0)}(z)$ wird folgendermaßen definiert und ihre 2m-te Ableitung $f_n^{(2m)}(z)$ lautet:

$$f_n^{(0)}(z) := c_n + \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} d\omega \left(\frac{\omega}{2}\right)^n C_n(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot z - z_n(\omega)) \quad (2.18)$$

$$f_n^{(2m)}(z) = (-1)^m 2^{2m} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} d\omega \left(\frac{\omega}{2}\right)^{n+2m} C_n(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot z - z_n(\omega)) \quad (2.19)$$

Wir substituieren das Fourierintegral in Gl.2.14 durch $f_n^{(2m)}$ und erhalten unter Verwendung der Abkürzungen

$$\Omega_{n,m}(r, \phi) := \frac{(-1)^m}{2^{2m} \cdot m! (n+m)!} \cdot r^{n+2m} \cdot \sin(n\phi) \quad (2.20a)$$

die bis auf die Einschränkung $\phi_n^0 = \phi_n(\omega) = 0$ vollständige Lösung:

$$V = \sum_n \sum_{m=0}^{\infty} f_n^{(2m)}(z) \cdot \Omega_{n,m}(r, \phi) \quad (2.20b)$$

Gl.2.20 ist in ähnlicher Weise von Halbach aufgestellt worden. $f_n^{(0)}$ enthält einen beliebigen in z konstanten Anteil c_n . Den Entwicklungsanteil $c_n \cdot \Omega_{n,0}(r, \phi)$ bezeichnet man als Multipolanteil, vgl. Abschnitt 2.3.5 . Der Anteil $f_n^{(0)}(z) \cdot \Omega_{n,0}(r, \phi)$ wird im folgenden ebenso "Multipol"-Anteil genannt, ist aber i.A. in z veränderlich. Die z-Abhängigkeit ist ganz in der Funktion $f_n^{(0)}(z)$ enthalten.

Wir betrachten einen idealen Magneten mit $2 \cdot N$ Polen, der sich dadurch auszeichnet, daß er in genügendem Abstand von der Feldkante ausschließlich einen in z konstanten Multipolanteil $f_N^{(0)} \cdot \Omega_{N,0}$ besitzt. Gl.2.20 fordert im Randfeld die "unvermeidlichen" Beiträge $f_N^{(2m)} \cdot \Omega_{N,m}$, $m=1,2,3,\dots$. Über die im Randfeld möglicherweise vorhandenen Anteile $f_n^{(2m)} \cdot \Omega_{n,m}$ mit $n \neq N$ macht Gl.2.20 keine Aussage. Zu diesen Anteilen gehört beispielsweise der im Quadrupolmagneten erlaubte Zwölfpolanteil.

11) Eine Drehung des Magneten um die z-Achse kann durch eine Phase $\phi_n^0 = \phi_n(\omega) = \text{konstant} \neq 0$ beschrieben werden. Im Falle $\phi_n^0 = \phi_n(\omega) = 0$ stimmen die Symmetrieebenen von Quadrupol und Spektrograph überein.

2.3.6.2 Das Randfeld des Dipolmagneten - Es ist im allgemeinen falsch, anzunehmen, im "idealen" Magneten mit $2 \cdot N$ Polen verschwänden im Randfeld die Multipolanteile $f_n^{(0)} \cdot \Omega_{n,0}$ mit $n \neq N$. Wir betrachten einen Dipolmagneten ($N=1$), der in x -Richtung unendlich ausgedehnt ist und eine gerade Polschuhkante besitzt. Wir nehmen daher Translationsinvarianz in x -Richtung an. Bei genauer Betrachtung der Feldentwicklung findet man, daß im Randfeld dieses Magneten Anteile vorhanden sind, die sich im Radial-Azimutalteil wie Sextupolanteile verhalten, auch wenn die Polschuhkante nicht gebogen ist.

Wir setzen in der Laplacegleichung Gl.2.13 wegen der Translationsinvarianz $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$. Die Lösung lautet unter dieser zusätzlichen Einschränkung (in cartesischen Koordinaten):

$$V_{\text{Dipol}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \cdot \tilde{f}_1^{(2j)}(z) \cdot y^{(2j+1)} \quad (2.21)$$

$\tilde{f}_1^{(0)}(z) \cdot y$ ist der Dipolanteil des Potentials mit beliebiger z -Abhängigkeit $\tilde{f}_1^{(0)}(z)$. $\tilde{f}_1^{(2j)}(z)$ sind $2j$ -fache Ableitungen der Funktion $\tilde{f}_1^{(0)}(z)$.

Um die Behandlung des Quadrupolrandfeldes und des Dipolrandfeldes miteinander vergleichen zu können, wird diese Lösung mit Hilfe der Entwicklung in Gl.2.20 konstruiert. Die z -Abhängigkeit der in n ungeraden Anteile aus Gl.2.20 wird folgendermaßen festgesetzt:

$$f_{2k+1}^{(0)} = \frac{1}{2^{2k}} \cdot \tilde{f}_1^{(2k)} \quad (2.22)$$

(Insbesondere beinhaltet Gl.2.22 $f_1^{(0)} = \tilde{f}_1^{(0)}$.) Die in n geraden Anteile $f_{2k}^{(0)}$ aus Gl.2.20 werden zu Null gesetzt; damit setzen wir in der Nähe des Randfeldes eine entsprechende Geometrie des Magneten voraus, vgl. Abschnitt 2.3.4. Wie Anhang B.2 zeigt, ist die allgemeine Lösung Gl.2.20 mit den Bedingungen Gl.2.22 identisch mit der Lösung Gl.2.21. Zur Veranschaulichung wird das "Konstruktionschema" für die ersten Glieder angedeutet, wobei $\Omega_{n,m}$ wie in Gl.2.20a definiert ist:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \sim r & & \sim r^3 & & \sim r^5 & & \sim r^7 & (2.23) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 V_{\text{Dipol}} = & \tilde{f}_1^{(0)} \cdot \Omega_{1,0} & + & \tilde{f}_1^{(2)} \cdot \Omega_{1,1} & + & \tilde{f}_1^{(4)} \cdot \Omega_{1,2} & + & \tilde{f}_1^{(6)} \cdot \Omega_{1,3} & + \dots] \\
 & + \frac{1}{4} \cdot & [& \tilde{f}_1^{(2)} \cdot \Omega_{3,0} & + & \tilde{f}_1^{(4)} \cdot \Omega_{3,1} & + & \tilde{f}_1^{(6)} \cdot \Omega_{3,2} & + \dots] \\
 & + \frac{1}{16} \cdot & & [& \tilde{f}_1^{(4)} \cdot \Omega_{5,0} & + & \tilde{f}_1^{(6)} \cdot \Omega_{5,1} & + \dots] \\
 & + \frac{1}{64} \cdot & & & & [& \tilde{f}_1^{(6)} \cdot \Omega_{7,0} & + \dots]
 \end{array}$$

$$V_{\text{Dipol}} = \tilde{f}_1^{(0)} \cdot y - \tilde{f}_1^{(2)} \cdot \frac{1}{6} \cdot y^3 + \tilde{f}_1^{(4)} \cdot \frac{1}{120} \cdot y^5 - \dots$$

Das Dipolfeld fällt im Randfeldbereich mit der Funktion $\tilde{f}_1^{(0)}(z)$ ab. Ist diese Funktion bekannt, liegen unter Annahme der Translationsinvarianz alle anderen Anteile der Lösung fest. Man erkennt, daß das Feld einen Sextupol $\tilde{f}_1^{(2)} \Omega_{3,0}$ (und höhere Multipole) enthält, damit die x-Abhängigkeit des Potentials verschwindet. Dieser Sextupol geht mit der gleichen z-Abhängigkeit ein, wie der erste Anteil des Randfeldes $\tilde{f}_1^{(2)} \cdot \Omega_{1,1}$. Dadurch ist gewährleistet, daß die Translationsinvarianz für alle z gilt.

Wir schneiden nun die Entwicklung des Potentials in Gl.2.23 hinter r^3 ab; dies entspricht der zweiten Ordnung in der für die Ionenoptik relevanten Feldentwicklung. Da die Translationsinvarianz beim realen Magneten nicht exakt verwirklicht ist, berücksichtigen wir dies in der folgenden angenäherten Darstellung des Potentials durch einen Freiheitsgrad λ :

$$\begin{aligned}
 V_{\text{Dipol}} = & \tilde{f}_1^{(0)} \cdot r \cdot \sin(\phi) & \text{---(A)} & (2.24) \\
 & - \tilde{f}_1^{(2)} \cdot \left((1-\lambda) \cdot \frac{1}{6} \cdot y^3 + \lambda \cdot \frac{1}{8} \cdot r^3 \cdot \sin\phi \right) + f_3^{(0)} \cdot r^3 \cdot \sin(3\phi) + \dots \\
 & \quad \quad \quad \text{(B)} \quad \quad \quad \text{(C)} \quad \quad \quad \text{(D)}
 \end{aligned}$$

Der Anteil (A) ist der Dipolanteil, Anteil (B) und (C) gewährleisten die Quellfreiheit des Feldes, der Anteil (D) ist ein Sextupolanteil, der z.B. durch eine Krümmung der Polschuhkante hervorgerufen wird. (Auf Grund des Entwicklungsabbruches werden die wegen (D) benötigten Anteile zur Wahrung der Quellfreiheit gestrichen.)

Die y -Komponenten des Feldes aus Anteil (D) und aus Anteil (C) haben eine quadratische x -Abhängigkeit¹²⁾. Wegen der komplizierten z -Abhängigkeit $\tilde{f}_1^{(2)}$ des Anteils (C) zeigt dieser jedoch hinsichtlich der Ionenoptik und der Feldmeßverfahren ein deutlich anderes Verhalten als Anteil (D). Die aus λ resultierenden Unsicherheiten werden in späteren Abschnitten weiterverfolgt.

2.3.6.3 Das Randfeld des Quadrupolmagneten – Bei dem 90° -drehsymmetrischen Quadrupol ($N=2$), wie in **Abb.2.2a**, ist die erste erlaubte Harmonische $\Omega_{6,0}$. Diese hat im Potential eine r -Abhängigkeit wie r^6 . Daher gilt nach Gl.2.20 :

$$V_{Q,90^\circ} = \frac{1}{2} \cdot f_2^{(0)} \cdot r^2 \sin(2\phi) - \frac{1}{24} \cdot f_2^{(2)} \cdot r^4 \sin(2\phi) \quad (2.25) \\ + \frac{1}{768} \cdot f_2^{(4)} \cdot r^6 \sin(2\phi) + \frac{1}{720} \cdot f_6^{(0)} \cdot r^6 \sin(6\phi) + \dots$$

Bis zur Abhängigkeit in r^4 liegt die Zusammensetzung des Randfeldes eindeutig fest, wenn man $f_2^{(0)}$ kennt. Die 90° -Drehsymmetrie läßt sich (im Gegensatz zur Translationsinvarianz beim Dipolmagneten) auch bei realen Magneten verwirklichen; die obige Festlegung des ersten Randfeldanteiles entspricht dann deutlich besser der Realität als die Festlegung des ersten Randfeldanteiles des Dipolmagneten nach Abschnitt 2.3.6.2. Die z -Abhängigkeit des ersten Randfeldanteiles ist $f_2^{(2)}(z)$.

Die Quadrupole Q1,Q2 des BIG KARL genügen lediglich der 180° -Drehsymmetrie wie in **Abb.2.2.b**. Die Teile des Jochs, die zur Zerstörung der 90° -Drehsymmetrie führen, liegen weit außerhalb des Aperturradius. Feldmessungen zeigen, daß man das Randfeld im ionenoptisch relevanten Bereich weitgehend als 90° -drehsymmetrisch annehmen kann.

12) $\frac{d}{dy}(r^3 \sin 3\phi) = 3x^2 - 3y^2$, $\frac{d}{dy}(r^3 \sin \phi) = x^2 + 3y^2$

2.4 Verfahren zur Lösung der Bewegungsgleichungen

2.4.1 Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

Die spezielle Lösung des homogenen Teils von Gl.2.6 ist durch die Anfangswerte x_0 und x'_0 festgelegt. Der Index "0" weist auf den Anfangspunkt $t=t_0$ hin: $x_0=x(t_0)$, $x'_0=x'|_{t_0}$. Brown benutzt das durch die Beziehung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ c' & s' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

festgelegte Lösungsfundamentalsystem $c(t)$ und $s(t)$, wobei $x(t)$ eine beliebige spezielle Lösung der homogenen Gleichung ist. Brown erzwingt dadurch die Anfangsbedingungen

$$c(t_0) = 1, s(t_0) = 0, c'(t_0) = 0, s'(t_0) = 1. \quad (2.27)$$

Auf Grund der Anfangsbedingungen werden die so festgelegten Lösungen der Schwingungsgleichung als "cosinus-" und "sinusähnliche" Funktion bezeichnet. Die Wronskideterminante dieses Fundamentalsystems ist konstant¹³⁾ und wegen Gl.2.27 identisch 1:

$$W_x(w) := c(t) \cdot s'(t) - c'(t) \cdot s(t) = 1 \quad (2.28)$$

K.Brown und andere Autoren identifizieren diese Gleichung in Erweiterung auf 6 Phasenraumkoordinaten mit dem "Liouville'schen Theorem".

13) Da c und s gemäß Voraussetzung die homogene Gleichung löst, gilt: $W' = c's' + cs'' - c''s - c's' = -(K_1 + h^2)cs + (K_1 + h^2)cs = 0$.

2.4.2 Eine formale Lösung der inhomogenen Gleichung

Mit Hilfe des Fundamentalsystems¹⁴⁾ c_x und s_x der homogenen Gleichung kann man eine "Green'sche Funktion" konstruieren [L-DK67]:

$$G_x(t, \tau) := s_x(t) \cdot c_x(\tau) - c_x(t) \cdot s_x(\tau) \quad \text{für } t \geq \tau \quad (2.29)$$

$$G_x(t, \tau) := 0 \quad \text{für } t < \tau ,$$

mit Hilfe der eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung Gl.2.6 dargestellt werden kann :

$$x(t) = x_{\text{homogen}}(t) + \delta \cdot \int_{t_0}^t G_x(t, \tau) \cdot h_x(\tau) \cdot d\tau + \int_{t_0}^t G_x(t, \tau) \cdot \sigma_x(\vec{q}, \tau) \cdot d\tau \quad (2.30a)$$

Die Summe der beiden ersten Anteile wird in den folgenden Kapiteln als $x_{\text{linear}}(t)$, der letzte Anteil wird als $x_{\text{stör}}$ bezeichnet:

$$x_{\text{stör}}(t) := \int_{t_0}^t G_x(t, \tau) \cdot \sigma_x(\vec{q}, \tau) \cdot d\tau \quad (2.30b)$$

Brown nennt

$$d_x(t) = \int_{t_0}^t G_x(t, \tau) \cdot h_x(\tau) \cdot d\tau \quad (2.31)$$

die Dispersion. Diese genügt gemäß dieser Definition der Anfangsbedingung

$$d_x(t_0) = 0 \quad (2.32)$$

Unter dem zweiten Integral in Gl.2.30a steht der unbekannte Phasenraumvektor $\vec{q} = (x, x', \dots)$. Diese Gleichung stellt daher lediglich eine formale Lösung dar.

14) Zur Unterscheidung von den fundamentalen Lösungen der Vertikalbewegung wird bisweilen der Index "x" hinzugefügt.

2.4.3 Lösungsentwicklung nach K.Brown

Um diesem Problem zu begegnen, entwickelt Brown die Lösung $x(t)$ in einer Taylorreihe nach den Anfangswerten x_0 , x'_0 u.s.w., wobei $x_0 = x(t_0)$ u.s.w., $\delta_0 = \delta$, da δ konstant ist. Die ersten Glieder lauten:

$$x = \frac{\partial x}{\partial x_0} \cdot x_0 + \frac{\partial x}{\partial x'_0} \cdot x'_0 + \frac{\partial x}{\partial \delta_0} \cdot \delta_0 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2} \cdot x_0^2 + \dots \quad (2.33)$$

Allgemeiner:

$$x(t) = \sum_{\kappa, \lambda, \mu, \nu, \chi} (x | x_0^\kappa x_0'^\lambda y_0''^\mu y_0'^\nu \delta_0^\chi) \cdot x_0^\kappa \cdot x_0'^\lambda \cdot y_0''^\mu \cdot y_0'^\nu \delta_0^\chi \quad (2.34)$$

wobei:

$$(x | x_0^\kappa x_0'^\lambda y_0''^\mu y_0'^\nu \delta_0^\chi) := \frac{1}{\kappa! \lambda! \mu! \nu! \chi!} \frac{\partial^{\kappa+\lambda+\mu+\nu+\chi} x}{\partial x_0^\kappa \partial x_0'^\lambda \partial y_0''^\mu \partial y_0'^\nu \partial \delta_0^\chi}$$

Die Ableitungen sind an der Stelle t auszuwerten. Entsprechende Entwicklungen sind für die Koordinaten x' , y , y' definiert.

$(x | x_0^\kappa x_0'^\lambda y_0''^\mu y_0'^\nu \delta_0^\chi)$ mit $\kappa+\lambda+\mu+\nu+\chi = n$ bezeichnet man als Aberrationen der Ordnung n für $n > 1$. Die Aberrationen sind Funktionen von t , die für $t=t_0$ verschwinden. (Gl.2.33, Gl.2.34 wird im Falle $t=t_0$ zur Identität.) Die ersten Ableitungen werden mit

$$c_x = \frac{\partial x}{\partial x_0}, \quad s_x = \frac{\partial x}{\partial x'_0}, \quad d_x = \frac{\partial x}{\partial \delta_0} \quad (2.35)$$

identifiziert, alle höheren Anteile $n > 1$ sind daher im Störanteil $x_{\text{Stör}}$ (Gl.2.30b) enthalten. Die Terme $\frac{\partial x}{\partial y_0'}$, $\frac{\partial x}{\partial y_0''}$ und einige Aberrationen verschwinden bei Mittelebenensymmetrie.

K.Brown gibt in [T-KB67], [T-KB84] alle Lösungsanteile bis zur zweiten Ordnung für den allgemeinsten Fall tabellarisch an. In [T-KB70] werden Richtlinien zum Entwurf von optischen Systemen in höherer Ordnung vorgeschlagen und eine Formel angegeben, die zur Berechnung der durch Feldfehler bewirkten Aberrationen von großer praktischer Bedeutung ist, siehe Anhang B.3.1 .

Man findet in sehr allgemeiner Formulierung für die Lösung der Bahngleichung das folgende Prinzip:

"Will man die Lösungsfunktion $x(t)$ bis zur Ordnung n exakt berechnen, ist es hinreichend, anstelle der exakten Funktion $x(t)$ die vollständige Lösungsentwicklung von $x(t)$ bis zur Ordnung $n-1$ unter dem Integral (Gl.2.30b) einzusetzen. Anstelle von $x'(t)$ kann die Ableitung dieser Lösungsentwicklung eingesetzt werden. (Entsprechendes gilt für die Phasenraumkoordinaten y und y' .) Die Entwicklung der Störung σ_x darf nach der Potenz n abgebrochen werden."

Diese Vorschrift ermöglicht ein rekursives Lösungsverfahren, da sukzessive mit steigender Ordnung n integriert werden kann. Die Vorschrift entspricht dem Lösungsverfahren, wie es von K.Brown angewendet wird; jedoch beinhaltet die obige Vorschrift eine exakte Anweisung, wie mit Störungen σ_x zu verfahren ist, die die Koordinate x' enthalten (vgl. Abschnitt 2.2.3). Dies geht aus der von K.Brown angegebenen Gleichung nicht hervor (siehe Anhang B.3).

Man erkennt, daß die Berechnung der Lösung bis zur zweiten Ordnung eine Sonderstellung einnimmt, da unter dem Integral nur die linearen Lösungsanteile eingesetzt zu werden brauchen. Setzt man bei der Berechnung der Lösung auch in höherer Ordnung lediglich lineare Anteile unter dem Integral ein, verliert man sogenannte Kopplungsbeiträge.

2.4.4 Deutung der Green'schen Funktion nach K.Brown

2.4.4.1 Einführung des Transportformalismus – Wir führen den "Transport"-Formalismus ein. Die folgende Schreibweise für die Lösungsfunktion $x(t)$ ist zu Gl.2.30a äquivalent, wenn man den Störanteil $x_{\text{Stör}}$ unterdrückt:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s & \dots & d \\ c' & s' & \dots & d' \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ \delta \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Kürzer:

$$\vec{q}_{\text{linear}}(t) = \underline{\underline{R}}(t, t_0) \cdot \vec{q}(t_0)$$

Die Matrix $\underline{\underline{R}}(t, t_0)$ wird als Transfermatrix bezeichnet.

Im Transportformalismus sind einige zweckmäßige Näherungsverfahren zur Beschreibung von nichtlinearen Lösungsanteilen gebräuchlich. Für die Anwendung der Näherungsverfahren ist es notwendig, zu verstehen, welche Lösungsanteile in der gerechneten Lösung enthalten sind, und wie die Genauigkeit geprüft werden kann. Die Green'sche Funktion stellt das Bindeglied zwischen der Beschreibung von Störanteilen im Transportformalismus und der formalen Lösung nach Gl.2.30a dar.

2.4.4.2 Formale Deutung im Transportformalismus – Konsistent mit Gl.2.36 wird ein Teilabschnitt $\underline{\underline{R}}(t, \tau)$ eingeführt:

$$\begin{aligned} \vec{q}_{\text{linear}}(t) &= \underline{\underline{R}}(t, \tau) \cdot \vec{q}_{\text{linear}}(\tau), \\ \Rightarrow \underline{\underline{R}}(t, \tau) &= \underline{\underline{R}}(t, t_0) \cdot \underline{\underline{R}}^{-1}(\tau, t_0) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Die Elemente R_{11} , R_{12} aus der Matrix $\underline{\underline{R}}(t, \tau)$ werden in dieser Arbeit als $\bar{c}$ und $\bar{s}$ bezeichnet. Man findet mit Gl.2.37¹⁵⁾:

$$\begin{aligned} \bar{c}(t, \tau) &\stackrel{\text{def}}{=} R_{11}(t, \tau) = c(t)s'(\tau) - s(t)c'(\tau) \\ \bar{s}(t, \tau) &\stackrel{\text{def}}{=} R_{12}(t, \tau) = s(t)c(\tau) - c(t)s(\tau) \quad \stackrel{t \geq \tau}{=} G_x(t, \tau) \end{aligned} \quad (2.38a/b)$$

Für die Basis $\bar{c}(t, \tau)$, $\bar{s}(t, \tau)$ gelten die Anfangsbedingungen Gl.2.27 entsprechend an der Stelle $t=\tau$.

15) Dies gilt auch, wenn die Dispersion in Gl.2.36 einbezogen ist.

$G_x(t, \tau)$ stimmt für $t \geq \tau$ formal mit der "lokalen" sinusähnlichen Funktion $\bar{s}(t, \tau)$ überein (vgl. [T-KB84]). Für die Anwendung der Green'schen Funktion (vgl. Anhang B.4, B.5) ist es wichtig zu wissen, daß diese auch aus einer beliebigen anderen Basis $\bar{c}$ und $\bar{s}$ konstruiert werden darf:

$$G_x(t, \tau) := \bar{s}_x(t, \bar{\tau}) \cdot \bar{c}_x(\tau, \bar{\tau}) - \bar{c}_x(t, \bar{\tau}) \cdot \bar{s}_x(\tau, \bar{\tau}), \quad t \geq \tau \quad (2.39)$$

Diese Green'sche Funktion ist für jedes $\bar{\tau}$ identisch mit der Green'schen Funktion aus Gl.2.29¹⁶⁾.

2.4.4.3 Die Winkel-"Kick" Näherung - Wir zerlegen das Integral in Gl.2.30b in kurze Intervalle $[\tau + \frac{1}{2}\Delta t, \tau - \frac{1}{2}\Delta t]$, in denen man den Phasenraumvektor $\vec{q}(\tau)$, die Green'sche Funktion $G(t, \tau)$ und die explizite t -Abhängigkeit von σ_x als konstant ansehen darf. Jedes Stück trägt einen Lösungsanteil $\Delta x(t)$ in $x_{\text{stör}}(t)$ bei, sobald $t \geq \tau + \frac{1}{2}\Delta t$ ist:

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= G(t, \tau) \cdot \sigma_x(\tau, \vec{q}(\tau)) \cdot \Delta t \\ \Delta x'(t) &= G'(t, \tau) \cdot \sigma_x(\tau, \vec{q}(\tau)) \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (2.40)$$

Die folgende Darstellung ist äquivalent, $\bar{s}(t, \tau)$ ist in Gl.2.38b definiert:

$$\Delta x(\tau) = 0, \quad \Delta x'(\tau) = \Delta t \cdot \sigma_x(\tau, \vec{q}(\tau)). \quad (2.41)$$

$$\Delta x(t) = \bar{s}(t, \tau) \cdot \Delta x'(\tau) \quad \text{für } t \geq \tau \quad [\text{T-KB84}]$$

An der Stelle τ , in deren Nähe die Störung wirksam ist, erzeugt man einen Winkel-"Kick" $\Delta x'(\tau)$; die angeregte Störung pflanzt sich mit der Phase einer "lokalen" sinusähnlichen Funktion $\bar{s}(t, \tau)$ nach hinten fort¹⁷⁾. Sämtliche bis zum Punkt t_m in den Teilintervallen angeregten Lösungsanteile ("Kicks") müssen der linearen Lösung über-

16) Anmerkung: In Gl.2.29 und Gl.2.41 sind die Sonderfälle $\bar{\tau} = t_0$ bzw. $\bar{\tau} = \tau$ dargestellt.

17) Funktionswerte $\bar{s}(t, \tau)$ findet man in Tabelle C.2, Anhang C.

lagert werden:

$$\vec{q}(t_m) = \underline{R}(t_m, t_0) \cdot \vec{q}(t_0) + \sum_{i=1}^m \underline{R}(t_m, t_i) \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta x'_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Dabei ist $\Delta x'_i = \Delta t \cdot \sigma_x(t_i, \vec{q}(t_i))$, die Punkte t_i sind mit aufsteigendem i entlang der Bahn nummeriert.

Dies ist die näherungsweise Darstellung der formalen Lösung (Gl.2.30a) mit Hilfe des Transport-Formalismus.

Gewöhnlich benutzt man Gl.2.41 für grobe Abschätzungen. Die Intervalllänge entspricht dann der Länge eines optischen Elementes. Neben der Intervalllänge ist es für die Genauigkeit entscheidend, wie man zur Berechnung von $\Delta x'$ die Koordinaten $\vec{q}(\tau)$ bzw. $\vec{q}(t_i)$ annähert, siehe nächster Abschnitt.

2.4.5 Analyse des "Turtle"-Verfahrens

Das Programm Turtle berechnet sukzessive die Bahnkoordinaten $\vec{q}(t_i)$, (Die diskreten Punkte t_i sind wiederum entlang der Teilchenbahn mit aufsteigendem i nummeriert.) Ein Bahnabschnitt $[t_i, t_{i-1}]$ entspricht dabei gewöhnlich einer Einheit wie Dipol, Quadrupol, Korrektur-element u.s.w.; eine solche Einheit darf (zu Lasten der Rechenzeit) beliebig unterteilt werden. Die nichtlinearen Lösungsanteile werden berücksichtigt, indem nach jedem Teilabschnitt eine Änderung $\Delta \vec{q}_i$ zum Phasenraumvektor addiert wird. In rekursiver Schreibweise:

$$\vec{q}(t_i) = \Delta \vec{q}_i + \underline{R}(t_i, t_{i-1}) \cdot \vec{q}(t_{i-1}) \quad (2.43)$$

Dabei ist auch $\Delta x \neq 0$ möglich. Setzt man formal die exakten Änderungen $\Delta \vec{q}_i$ in Gl.2.43 ein, erhält man die exakte Lösung, siehe Anhang B.4.2/B.4.3. Bei Verwendung von guten Näherungen für $\Delta \vec{q}_i$ ist man daher nicht auf kurze Intervalllängen angewiesen.

In einigen Fällen werden Phasenraumkoordinatenänderungen unter Verwendung der Lösungsentwicklung nach Gl.2.34 berechnet¹⁸⁾, wobei man nach den Eingangskoordinaten $\vec{q}(t_{i-1})$ der jeweiligen Einheit entwickelt. Es werden tabellierte Entwicklungskoeffizienten zweiter Ordnung benutzt, die nach der Länge der Einheit und nach Feldentwicklungen parametrisiert sind. Für diese Entwicklungskoeffizienten wird in [P-Tu74] der Ausdruck "lokale Aberrationen" geprägt. Diese "Turtle-Näherung" ist äquivalent dazu, die unbekannte Lösungsfunktion unter dem Integral in Gl.2.30b durch die lineare Lösung zu ersetzen, wobei jedoch die Koordinaten an der Stelle t_{i-1} als Anfangswerte eingehen, siehe Anhang B.4.4.

Zum wesentlichen Prinzip der Turtle-Methode gehört es, daß die Eingangskoordinaten am Punkt t_{i-1} in die Phasenraumkoordinatenänderungen $\Delta\vec{q}_i$ eingehen. Dadurch sind in der Lösung Kopplungsanteile nach Abschnitt 2.4.3 weitgehend enthalten. Es fehlen auf Grund der Näherungsverfahren lediglich solche Anteile, die an die innerhalb des Intervalls angeregten Anteile ankoppeln, siehe Anhang B.4.5. Durch eine Verkürzung der Intervalllängen bewirkt man bei dieser Art von Modulen ausschließlich eine verbesserte Berechnung von Kopplungsanteilen.

"Kurze" Störungen und Störungen in höherer Ordnung werden durch Winkel-"Kick"'s berücksichtigt. Auch hierbei gilt das Prinzip, daß die "aktuellen" Koordinaten in die Störungsanregung eingehen, die damit ebenfalls Kopplungsanteile enthält. Für den homogenen Dipolmagneten steht ein Modul zur Verfügung, welches die Koordinaten entsprechend einer geometrischen Konstruktion exakt berechnet.

Daraus zieht man für die Anwendung des Programms die folgende Schlußfolgerung. Wenn auch die vorgegebene Differentialgleichung durch TURTLE nicht exakt gelöst wird, ist in vielen Fällen die Erhöhung der Intervallzahl eine einfache Möglichkeit, die Genauigkeit der Lösung zu überprüfen. Verbleibende Fehlbeträge beim Vergleich

18) Eine Einschränkung gibt es jedoch hinsichtlich der Behandlung der Impulsabhängigkeit, vgl. Abschnitt 4.2.2.2.

mit dem Experiment resultieren dann möglicherweise aus den im Programm vernachlässigten Anteilen bei der Aufstellung der Differentialgleichung. Die Anwendung der Turtle-Methode zielt daher darauf ab, wichtige Störglieder in der Differentialgleichung kennenzulernen, und damit die eigentlichen "Ursachen" der Bildfehler zu lokalisieren.

2.5 Bahnstörungen in idealen Magneten

2.5.1 Anregung von Störanteilen im Quadrupol

Nach Gl.2.8 enthält die Differentialgleichung für das Quadrupolfeld die Störung $\sigma_x = -\frac{3}{2}K_1 xx'^2 + \dots$. Wir beschränken uns auf den niedrigsten Anteil, auf die Mittelebene und den Fall $\delta=0$. Wir interessieren uns für die durch die Störung auf der gesamten Länge des Quadrupols bewirkte Phasenraumkoordinatenänderungen Δx und $\Delta x'$ in Abhängigkeit von der Bahnauslenkung. Diese Abschätzungen sind deshalb interessant, da bei den ionenoptischen Messungen starke Bahnabweichungen auftraten, die nicht ohne zusätzliche Modellannahmen erklärt werden konnten.

Für eine praktische Abschätzung ist die Winkel-"Kick" Näherung (Gl.2.41) keine geeignete Methode, da die Koordinate x' während des gesamten Durchflugs durch den Quadrupol ihren Wert stark ändert und nicht als konstant angesehen werden darf, d.h. es wäre eine Aufteilung des Integrationsintervalls notwendig.

Wir benutzen daher Gl.2.30b. Die Integrationsgrenzen (Begrenzungen des Quadrupols) werden mit t_1, t_2 bezeichnet. Der Bahnabschnitt $[t_1, t_2]$ regt einen Lösungsanteil $\Delta x(t), \Delta x'(t)$ an:

$$\Delta x(t) = -\frac{3}{2} K_1 \int_{t_1}^{t_2} d\tau G(t, \tau) \cdot x(\tau) \cdot x'^2(\tau) \quad (2.44)$$

$$\Delta x'(t) = -\frac{3}{2} K_1 \int_{t_1}^{t_2} d\tau G'(t, \tau) \cdot x(\tau) \cdot x'^2(\tau)$$

Die in diesem Bahnabschnitt angeregten Lösungsanteile haben mindestens die Ordnung 3, Kopplungsanteile haben mindestens die Ordnung 4, da $\sigma_x = -\frac{3}{2} K_1 x x'^2$ der niedrigste Beitrag in der Differentialgleichung ist (für $\delta = 0\%$). Verzichtet man auf die Kopplungsanteile vgl. Abschnitt 2.4.3, kann die unbekannte Lösung x, x' unter dem Integral durch den linearen Lösungsanteil ersetzt werden.

Die durch die Quadrupole Q1, Q2, Q3 verursachten Bahnabweichungen in der Detektorebene sind in Tabelle 2.1 dargestellt. In Anhang B.5 wird im Detail dargestellt, wie die Bahnabweichungen berechnet wurden. Die Werte gelten für eine Dispersion von 16cm/% in der Detektorebene und ein horizontal und vertikal fokussiertes System.

Neben diesen Bahnstörungen dritter Ordnung erzeugt das Quadrupolrandfeld in der Stärke vergleichbare Bahnstörungen dritter Ordnung. In Anhang D wird gezeigt, daß man diese Beiträge abschätzen kann, ohne das Randfeld vermessen zu haben. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2.3 zusammengefaßt und werden dort mit den Ergebnissen aus Tabelle 2.1 verglichen.

2.5.2 Anregungen dritter Ordnung im Dipol

Die Betrachtung von Anregungen bis zur dritten Ordnung ist im idealen Dipol wesentlich komplizierter als im idealen Quadrupol, da die Differentialgleichung Gl.2.6 oder Gl.2.10 auch Störglieder in zweiter Potenz in den Koordinaten enthält; diese Störglieder sind in der Lage, Kopplungsanteile dritter Ordnung anzuregen. Wegen der

Möglichkeit, die Bahnen im idealen Dipol durch eine geometrische Konstruktion zu beschreiben, ist die Abschätzung dieser Beiträge weniger interessant.

Die durch das Störglied $\sigma_x = -2h^2 x x'^2$ (siehe Gl.2.10) verursachten Anregungen sind in Tabelle 2.2 aufgeführt, um einen Vergleich zu den in Abschnitt 2.5.2 errechneten, von den Quadrupolen herrührenden Anteilen zu erhalten (Tabelle 2.3). Die durch den idealen Dipol verursachten Anregungen dritter Ordnung sind dadurch jedoch nicht vollständig bestimmt.

Erläuterungen zur Tabelle 2.1 - Die erste Spalte der Tabelle bezeichnet den betrachteten Magneten. Aus rechentechnischen Gründen werden die Bahnabweichungen durch "Kick"'s an einer Stelle t_i simuliert, an der $x'(t_i)=0$ ist (zweite Spalte). Die dritte Spalte bezeichnet die normierte Feldstärke des Quadrupols, wobei "def." für defokussierend, und "fok." für fokussierend steht. Die vierte Spalte gibt die nach Gl.2.44 berechneten Phasenraumkoordinatenänderungen an der Stelle $t=t_i$ in Abhängigkeit von der dritten Potenz der Auslenkung x an. (Beachte: diese Werte gelten jeweils für die am obigen Tabellenrand angegebenen Anfangsbedingungen.) In den Spalten nach dem Doppelstrich sind die bewirkten Bahnänderungen für die Eingangswinkel $x'_0=16/32\text{mrad}$ durchgespielt. Im zweiten Teil der Tabelle ist dies für verschiedene Eingangsimpulse dargestellt. $x(t_i)$ ist die Auslenkung an der Stelle t_i . (Beachte: Im Falle Q1 und Q3 sind die Auslenkungen $x(t_i)$ reine Rechengrößen.) $\Delta x(t_i)$, $\Delta x'(t_i)$ sind die bewirkten Phasenraumkoordinatenänderungen. Δx_D ist die bewirkte Bahnänderung in der Detektorebene. Anmerkung: Der Fall $x'_0=32\text{mrad}$ ist mit den momentan gegebenen Aperturen am Big Karl nicht möglich.

Erläuterungen zur Tabelle 2.2 - Diese Tabelle ist analog zu Tabelle 2.1 aufgebaut.

Tabelle 2.1 Bahnstörungen durch $\sigma_x = -\frac{3}{2}K_1xx'^2$ $x_0 = 0 \text{ cm}, \delta = 0 \%$

	t_1-t_i t_2-t_i [cm]	K_1 [cm ⁻²]	$\Delta x/x^3$ [cm ⁻²] $\Delta x'/x^3$ [cm ⁻³]	x'_0 [mrad]	$x(t_i)$ [cm]	$\Delta x(t_i)$ [cm]	$\Delta x'(t_i)$ [mrad]	Δx_D [cm]
Q1	41.8	$-4.9 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-2}$	16.0 →	0.69	0.008	-0.18	0.007
	87.2	(def.)	$-5.6 \cdot 10^{-4}$	32.0 →	1.38	0.062	-1.5	0.057
Q2	-24.1	$4.0 \cdot 10^{-4}$	$2.7 \cdot 10^{-6}$	16.0 →	5.49	0.0005	0.11	-0.032
	21.2	(fok.)	$6.4 \cdot 10^{-5}$	32.0 →	10.98	0.0036	0.85	-0.256
Q3	-155.6	$-9.6 \cdot 10^{-5}$	$8.0 \cdot 10^{-4}$	16.0 →	-2.11	0.0075	-0.086	-0.010
	-82.6	(def.)	$9.1 \cdot 10^{-6}$	32.0 →	-4.22	0.060	-0.69	-0.080

Summe für $x'_0 = 16 \text{ mrad} \rightarrow$ -0.036Summe für $x'_0 = 32 \text{ mrad} \rightarrow$ -0.28 $x_0 = 0 \text{ cm}, x'_0 = 0 \text{ mrad}$

	t_1-t_i t_2-t_i [cm]	K_1 [cm ⁻²]	$\Delta x/x^3$ [cm ⁻²] $\Delta x'/x^3$ [cm ⁻³]	δ [%]	$x(t_i)$ [cm]	$\Delta x(t_i)$ [cm]	$\Delta x'(t_i)$ [mrad]	Δx_D [cm]
Q3	-1.3	$-9.6 \cdot 10^{-5}$	$-1.2 \cdot 10^{-5}$	1.0 →	-6.64	0.0036	-0.072	<u>-0.01</u>
	71.7	(def.)	$2.5 \cdot 10^{-7}$	2.0 →	-13.27	0.029	-0.57	<u>-0.09</u>
				3.0 →	-19.91	0.10	-1.93	<u>-0.29</u>

 t_1-t_i, t_2-t_i Abstand der Integrationsgrenzen vom Punkt t_i mit $x'(t_i)=0$ K_1 Fokussierungsstärke, x_0, x'_0, δ Koordinaten an der Streufole $x(t_i)$ Auslenkung an der Stelle t_i (Beachte Hinweise in Erläuterungen) $\Delta x(t_i), \Delta x'(t_i)$ Bahnstörungen an der Stelle t_i Δx_D Bahnstörungen in der Detektorebene $\Delta x/x^3 = \Delta x(t_i)/x^3(t_i)$, $\Delta x'/x^3 = \Delta x'(t_i)/x^3(t_i)$

Tabelle 2.2 Bahnstörungen durch $\sigma_x = -2h^2xx'^2$
 $x_0 = 0 \text{ cm}, \delta = 0 \%$

	$t_1 - t_i$ $t_2 - t_i$ [cm]	$1/h$ [cm] h^2 [cm ⁻²]	$\Delta x/x^3$ [cm ⁻²] $\Delta x'/x^3$ [cm ⁻³]	x'_0 [mrad]	$x(t_i)$ [cm]	$\Delta x(t_i)$ [cm]	$\Delta x'(t_i)$ [mrad]	Δx_D [cm]
D1	-190.0	195.9	$5.7 \cdot 10^{-6}$	16.0 →	-10.64	-0.0069	0.038	0.022
	77.6	$2.6 \cdot 10^{-5}$	$-3.2 \cdot 10^{-8}$	32.0 →	-21.28	-0.055	0.303	0.176
D2	-121.7	197.0	$-1.3 \cdot 10^{-6}$	16.0 →	-12.94	0.0028	0.084	0.059
	147.4	$2.6 \cdot 10^{-5}$	$-3.9 \cdot 10^{-8}$	32.0 →	-25.88	0.023	0.667	0.474

 Summe für $x'_0 = 16 \text{ mrad} \rightarrow$
0.081

 Summe für $x'_0 = 32 \text{ mrad} \rightarrow$
0.65
 $1/h$ Krümmungsradius

Alle anderen Größen entsprechen denen aus Tabelle 2.1

Tabelle 2.3 Bahnstörungen dritter Ordnung in der Detektorebene

(Zusammenfassung von Tabelle 2.1, 2.2, D.2)

Δx_D [cm]	$x_0 = 0 \text{ cm}, \delta = 0\%$ $x'_0 =$		$x_0 = 0 \text{ cm}, x'_0 = 0 \text{ mrad}$		
	16mrad	32mrad	$\delta = 1\%$	$\delta = 2\%$	$\delta = 3\%$
Randfelder Q1, Q2, Q3	0.10	0.8	0.01	0.11	0.4
$\sigma_x = -\frac{3}{2}K_1 xx'^2$	0.04	0.3	-0.01	-0.09	-0.3
$\sigma_x = -2h^2 xx'^2$	0.08	0.7	nicht berechnet		

Δx_D Bahnabweichung in der Detektorebene, die durch die angegebenen Störungen bewirkt wird.

x_0, x'_0, δ Koordinaten an der Streufole

Kapitel 3

Meßverfahren und Feldmessungen

Zur Messung der ionenoptischen Abbildungseigenschaften wurde das magnetoptische System BIG KARL mit Hilfe eines in der Orts-, Winkel-, und Impulskoordinate scharfen Strahls abgetastet. Die Erzeugung und Präparation des Strahls und die Positionsbestimmung der Trajektorien erfolgte mit den zur Verfügung stehenden Apparaturen. Ein Deuteronenstrahl mit einer Strahlenergie von 69 MeV wurde durch das Zyklotron JULIC erzeugt. Mit Hilfe des im Strahlführungssystem befindlichen Monochromatorsystems wurde ein impulsscharfer Strahl ausgeblendet und auf eine dünne Goldfolie fokussiert. Das im BIG KARL installierte Schlitzsystem definiert bei kleiner Öffnung zusammen mit dem Strahlfleck ein genügend schmales Bündel von elastisch gestreuten Deuteronen. Der Eingangswinkel im BIG KARL wurde durch gleichsinniges Verfahren der zusammengehörigen Schlitzbacken variiert. Für jeden Winkel wurde die Position der Trajektorie in der Detektorebene mit Hilfe einer Vieldrahtdriftkammer bestimmt. Diese Messungen wurden für unterschiedliche Einstellungen der Magnete durchgeführt.

3.1 Präparation des Strahls

Mit dem Zyklotron JULIC wurde ein Deuteronenstrahl mit einer Strahlenergie von 69 MeV erzeugt. Die magnetische Steifigkeit bei dieser Energie erfordert Magnetfeldstärken im BIG KARL im mittleren Bereich, so daß Sättigungseffekte nicht zu erwarten sind.

Abb.3.1 zeigt das Strahlführungssystem von der Zyklotronextraktion zur Streufolie im BIG KARL. Die zentralen Elemente sind die Monochromatormagnete AM1/AM2. Für Teilchen gleichen Impulses

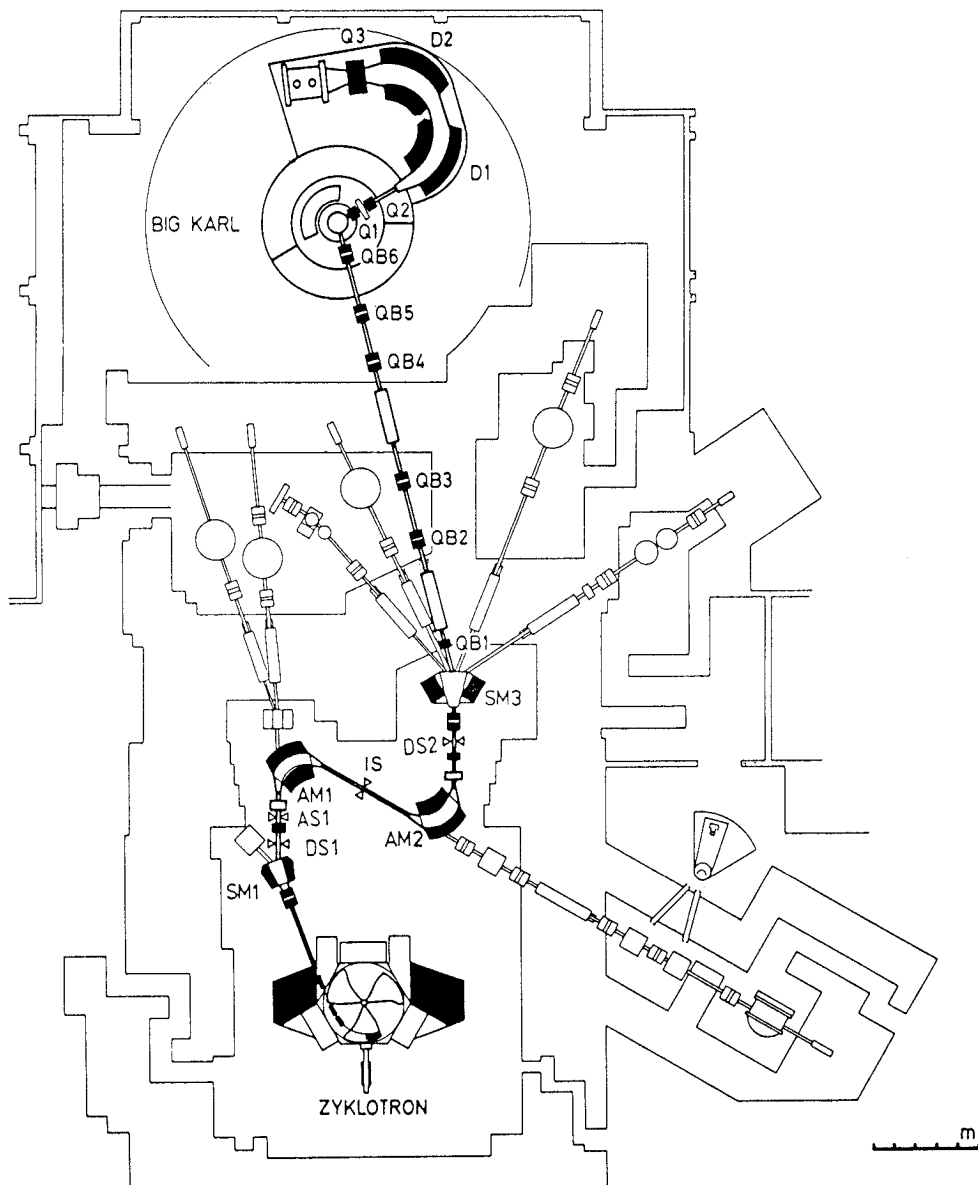


Abb.3.1 Die Strahlführung und der Doppelmonochromator – Das System führt den Strahl vom Zyklotron zur Streufolie und dient der Herstellung definierter Strahleigenschaften. Im folgenden eine Auflistung der für diese Anwendung wichtigen Magnete und Schlitze:

AM1,2	Analysiermagnete
QB1 ... QB6	Quadrupol"dublett"s (Doppelt fokussierendes Quadrupolsystem)
SM1,3	Schaltmagnete
DS1,2	Einlaß-, Auslaßschlitz des Doppelmonochromators
AS1	Schlitz zur Festlegung der Winkelakzeptanz des Analysiersystems
IS	Zwischenbildschlitz

wird eine "Punkt-zu-Punkt" Abbildung des Schlitzes DS1 auf den Schlitz DS2 erzeugt. Die Dispersion des Doppelmonochromators beträgt 32 cm/%. Mit dem Schlitz DS2 kann ein impulscharfer Strahl ausgeblendet werden. Der Schlitz AS1 bestimmt die Winkelakzeptanz des Strahlführungssystems. Die nachfolgenden Quadrupole QB dienen dazu, die Dispersion auf der Streufolie festzulegen und den Fokus auf oder hinter die Streufolie zu legen.

Für die Goldstreufolie erhält man bei einem Streuwinkel von 3° und einer großen Öffnung des Schlitzes AS1 von ± 0.8 cm eine sehr kleine kinematische Verbreiterung des Impulses von $2 \cdot |\delta|_{\max} \approx 1 \cdot 10^{-5}$, die durch den maximalen Einfallswinkel $|\theta_e|_{\max} = \pm 6$ mrad bewirkt wird. Eine kinematische Defokussierung der Strahlführung ist daher nicht notwendig.

Die Impulsunschärfe ist mit Hilfe des Schlitzes DS2 stark beschnitten worden. Nur auf diese Weise erreicht man, daß die dispersive Verbreiterung des Strahls sowohl auf der Streufolie und damit im Eingang des Spektrographen, als auch in der Detektorebene möglichst klein ist. Bei einer Schlitzöffnung des DS2 von ca. ± 0.4 mm ist $2|\delta|_{\max} \approx 0.25 \cdot 10^{-4}$. Die dispersive Verbreiterung des Strahlflecks, die bei ca. 0.5 mm liegt, bewirkt nur eine geringe Strahlausdehnung im Spektrographen (s.u.).

Die Einstellung der Strahlführungsquadrupole QB51, QB52, QB61, QB62 erfolgte nach Standardvorgaben. Mit Hilfe einer phosphorisierenden Streufolie wurde die Fokussierung feinjustiert und die Dispersion auf der Streufolie überprüft¹⁾. Die Strahlposition auf der Streufolie war bei Schlitzbewegungen des AS1 unverändert. Auch in der Detektorebene des BIG KARL sind keine Positionsänderungen beobachtet worden, wenn man bei kleiner Öffnung des Schlitzes AS1 beide Schlitzbacken gleichsinnig von der Position +0.5 cm nach -0.5 cm fuhr.

Das Schlitzsystem im BIG KARL besteht (u.a.) ebenso aus einem

1) Der Istwert der Dispersion kann durch Messung der Vergrößerung des Abschnitts von DS2 bis zur Streufolie bestimmt werden.

horizontalen und vertikalen Schlitz (SLX/SLY), dessen Backen jeweils unabhängig fahrbar sind. Die Schlitze befinden sich 40 cm respektive 43 cm von der Streufolie entfernt. Zur Durchführung der Messungen ist aus den an der Streufolie gestreuten Teilchen mit Hilfe der Blenden SLX (Abb.1.1) ein Strahl mit einer Winkeldivergenz von typischerweise ± 1 mrad in der Horizontalen ausgeblendet worden. Man schätzt ab, daß mit dieser Einstellung die Ausdehnung des Strahls im Bereich der Quadrupole kleiner als 1 cm ist, und im Bereich der Dipole in der Horizontalen maximal 2 cm beträgt, wenn man eine Ausdehnung des Strahls an der Streufolie von etwa 0.5 mm zusätzlich berücksichtigt. Die durch diese Öffnung bewirkte kinematische Verbreiterung in der Fokalebene ist vernachlässigbar klein.

Zur Zentrierung des Strahls im BIG KARL standen die Schlitzbacken bei kleiner Öffnung zunächst symmetrisch um die definitionsmäßige Mittelstellung. Der Strahlfleck auf der Streufolie ist in einer iterativen Prozedur mit Hilfe von Korrekturdipolen der Strahlführung so positioniert worden, daß sich beim Ändern der Quadrupolfelder der Quadrupole Q1,Q2 möglichst geringe Bewegungen des Strahls in der Detektorebene ergeben. Nach Abschluß dieser Einstellung bewegte sich beim Verfahren der Feldstärke der Quadrupole Q1,Q2 um $\pm 30\%$ die Strahlposition in der Detektorebene in horizontaler und vertikaler Richtung innerhalb eines Bereiches von 1 mm, das entspricht 1.7 mm bei Ein- und Ausschalten. Eine solche Bewegung erwartet man für einen (idealen) Strahl mit einem Eingangswinkel von etwa 0.2 mrad. Die mittlere Auslenkung des Strahlschwerpunkts vom magnetischen Mittelpunkt des Quadrupols ist im Quadrupol Q2 daher kleiner als 1 mm.

Vor Durchführung dieser Prozedur war der Strahlfleck zunächst in den Quadrupolen QB5, QB6 der Strahlführung zentriert worden. Diese Zentrierung unterscheidet sich von der Zentrierung im BIG KARL (Q1,Q2) um ca. 0.7 mm in der Vertikalen. In der vertikalen Zentrierung muß man offensichtlich Unsicherheiten in Kauf nehmen, die wegen der starken vertikalen Vergrößerung im Bereich der Dipole nicht unerheblich sind.

Um die vertikale Zentrierung auf andere Weise zu überprüfen, ist der Strahlfleck auf und ab bewegt worden, bis der Strahl im BIG KARL oben und unten "anstieß", d.h. in der Detektorebene in der Intensität deutlich abnahm. Die mit der Kamera beobachteten Strahlfleckpositionen zeigt **Abb.3.2** .

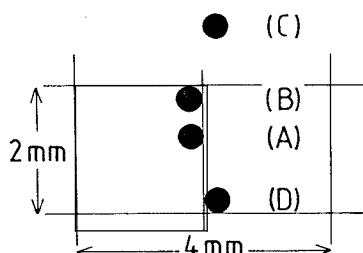


Abb.3.2 Justierung des Strahlflecks auf der Streufolie – Bei der Justierung des Strahlflecks gab es in der Vertikalen Unsicherheiten. Die Strahlfleckpositionen unterschieden sich, je nach dem, ob der Strahl mit Hilfe der Korrekturdipole in der Strahlführung so eingestellt war, daß er in den Strahlführungsquadrupolen QB5, QB6 (A) oder in den BIG KARL Quadrupolen Q1, Q2 (B) zentriert ist. Bei Beleuchtung der Punkte (C) und (D) stößt der Strahl an die Polschuhe der Dipole an, die Hälfte der Strahlintensität in der Detektorebene geht an diesen Punkten verloren. Der Rahmen entspricht einer Markierung auf der phosphorisierenden Streufolie.

3.2 Detektorsysteme

Zur Bestimmung der Strahlposition in der Detektorebene wurde das Vieldraht-Driftkammersystem nach Atencio/Morris [V-CM85], [D-DP83] benutzt. Die für diese Anwendung wesentliche Eigenschaft dieses Systems ist die Tatsache, daß die Kanalnummer im Ortsspektrum linear zur gemessenen Position ist.

Das Funktionsprinzip zeigt **Abb.3.3** . In einer Ebene sind abwechselnd Anoden- und Kathodendrähte im Abstand von 4 mm im Zählgas gespannt. Die Anoden werden über eine Verzögerungsleitung ausgelesen. Die Elektronik vergleicht das zeitliche Eintreffen der beiden an den Enden der Verzögerungsleitung eintreffenden Signale untereinander. Dieser Zeitabstand (TD) enthält die Information darüber, an welchem Draht das Teilchen eingetroffen ist. Außerdem werden diese Zeitpunkte mit dem Zeitpunkt des Eintreffens des Teilchens in einem am Ende des Systems aufgebauten Szintillator verglichen. Diese Zeitintervalle geben Aufschluß über den Abstand der Spur vom Zählendraht (Driftzeit, TS). Das im Moment des Absaugens der Elektro-

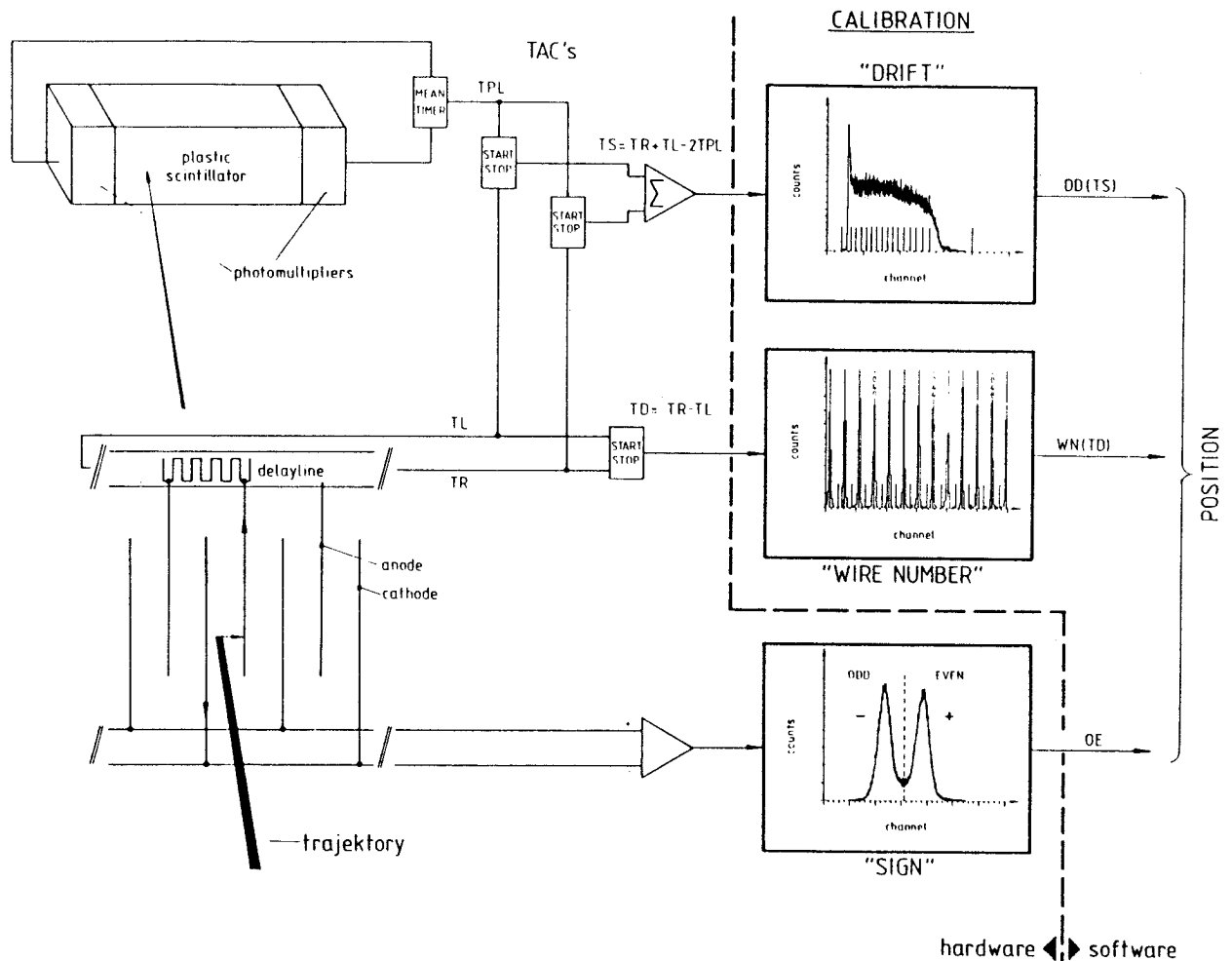


Abb.3.3 Schematische Darstellung des Detektorsystems aus [V-CM85] – Der Teilchenort wird aus drei Meßparametern berechnet (siehe Text). Den Abstand vom Zählrohr DD und die Drahtnummer WN bestimmt der Computer aus der Zeitsumme TS und der Zeitdifferenz TD durch Nachschlagen in einer Eich-tabelle. Das Influenz-Signal der Kathode wird über zwei alternierend verkabelte Kathoden"busse" einem Differenzverstärker zugeführt, und mittels einer Schwelle in eine Gerade/Ungerade Entscheidung (OE) umgesetzt. (TAC = Zeit- zu Amplituden Wandler.)

nenwolke durch die Anode an den benachbarten Kathoden influenzierte Signal gibt Auskunft darüber, an welcher Seite der Anode die Spur vorbeiführt. Daraus konstruiert der Computer den Ort, wobei jedem Anodendraht (beispielsweise) exakt 32 Kanäle zugeordnet werden, so daß jedem Kanal mit hoher Genauigkeit 0.25 mm entsprechen.

Die Genauigkeit, mit der die Position bestimmt wird, hängt wesentlich von der Genauigkeit ab, mit der die Driftzeit aus den Zeitsignalen extrahiert werden kann. Bei Signalanstiegszeiten von 20 ns an der Verzögerungsleitung treten typischerweise systematische Eich- und Adjustierfehler im ns-Bereich auf, so daß bei einer Driftgeschwindigkeit von ca. 0.05 mm/ns (siehe auch [V-BC74]) die Abweichungen von der Sollposition etwa 0.1 bis 0.2 mm betragen. Die Ortsauflösung (statistische Streuung der Ortskoordinate) beträgt etwa 0.2 mm bis 0.4 mm Halbwertsbreite.

3.3 Präparation der Dipolfelder und Reproduzierbarkeiten

Als vorbereitende Maßnahme wurde die Reproduzierbarkeit und Stabilität der Felder der Dipolmagnete untersucht. Als Feldmeßeinrichtung stehen NMR-Sonden zur Verfügung, die man in der Mittelebene in horizontaler Richtung senkrecht zum Zentralstrahl in die Dipolmagnete einfahren kann. Es ist dabei möglich, beim Einfahren in kurzen Abständen Feldmeßwerte zu nehmen, so daß man ein Feldprofil der Dipolmagnete erhält²⁾.

Abb.3.4 zeigt die zeitlichen Schwankungen des Dipolhauptfeldes über mehrere Stunden nach Fahren der Rampenfunktion (siehe Abschnitt 1.2). Bei Schwankungen von $1:10^4$ erwartet man eine Reproduzierbarkeit der in der Detektorebene gemessenen Positionen von besser als 2 mm (bei $d_x = 16 \text{ cm}/\%$). Die Linienposition ist bei drei Eintrittswinkeln in den Spektrographen und bei unveränderten Sollwerten der Netzgeräte zwei Stunden nach Fahren der Rampe über den Zeitraum von einer Stunde getestet worden. Pro Eintrittswinkel wurden 6 Positionsmessungen genommen. Die Positionen streuten jeweils

2) Der Vorteil der N(uklear)M(agnetische)R(esonance)-Meßsonden gegenüber Hallmeßsonden oder Spulenmeßsonden besteht für diese Anwendung darin, daß der Meßwert durch eine geringfügige Verkipfung der SONDENEbene gegen die magnetische Mittelebene nicht beeinflußt wird. Eine solche seitliche Verkipfung der Fahreinrichtung wurde mit zwei senkrecht zueinander stehenden Hall-Sonden nachgewiesen und beträgt etwa 3° über die Länge der Meßstrecke.

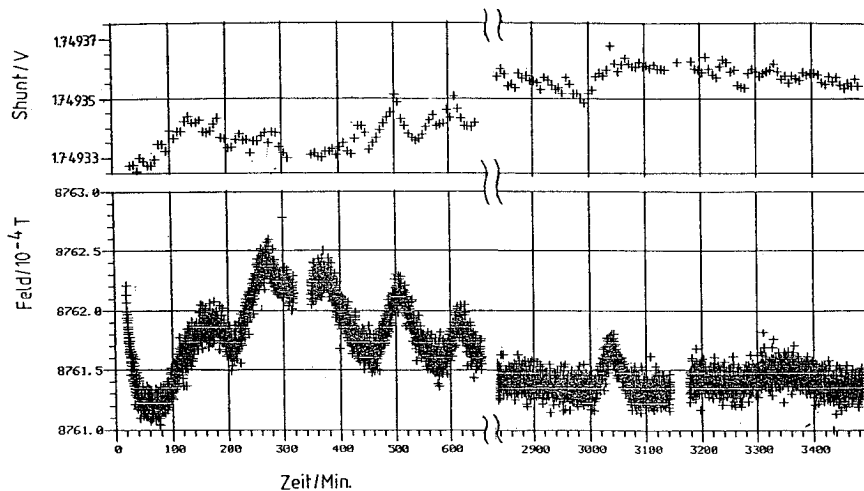


Abb.3.4 Zeitliche Schwankungen der Dipolfelder nach Fahren der Rampenfunktion -

Die Dipolfelder wurden in kurzen zeitlichen Abständen mit Hilfe der NMR-Sonden gemessen und protokolliert. Jedes Kreuz stellt einen Meßpunkt dar, so daß das durch Rauschsignale bedingte Fehlerband sichtbar wird. Der "Shunt"-Wert (Strommessung über temperaturstabilisierten Widerstand) gibt Aufschluß über das Regelverhalten der stromstabilisierten Netzgeräte.

innerhalb 0.5 mm . Auch spätere Reproduzierbarkeitsmessungen zeigten keine darüber hinaus gehenden Abweichungen. Um die Fehler durch Veränderungen der Magnetfelder so gering wie möglich zu halten, wurden sie während der ionenoptischen Messungen regelmäßig beobachtet.

Die Reproduzierbarkeit des Feldprofils nach erneutem Fahren der Rampe zum gleichen Dipolfeld bei vorgegebenen H_t -Strömen ist besser als $1:10^4$. Zur Überprüfung der Reproduzierbarkeit ist an das Feldprofil in Abb.1.6 (Abschnitt 1.3) eine Entwicklung nach Legendre-Polynomen angepaßt worden. (Bei gleichmäßiger Gewichtung der Meßpunkte über den Definitionsbereich erreicht man dadurch eine schwach korrelierte Parametrisierung.) Bei Wiederholungsmessungen des Feldprofils - auch nach erneutem Fahren der Rampenfunktion - schwankte der (maximale) Betrag jedes Entwicklungsanteils um weniger als 0.1 Gauss, ausgenommen ist dabei der nullte Entwicklungsanteil. Dabei sind bis zu 9 Anteile in die Parametrisierung einbezogen worden. Das bedeutet, daß auch die unerwünschte Welligkeit der Profile reproduzierbar ist. Voraussetzung dafür ist eine Wartezeit

von 1 bis 2 Stunden nach Fahren der Rampe. Die Reproduzierbarkeit des Dipolhauptfeldes nach Fahren der Rampenfunktion beträgt einige Gauss.

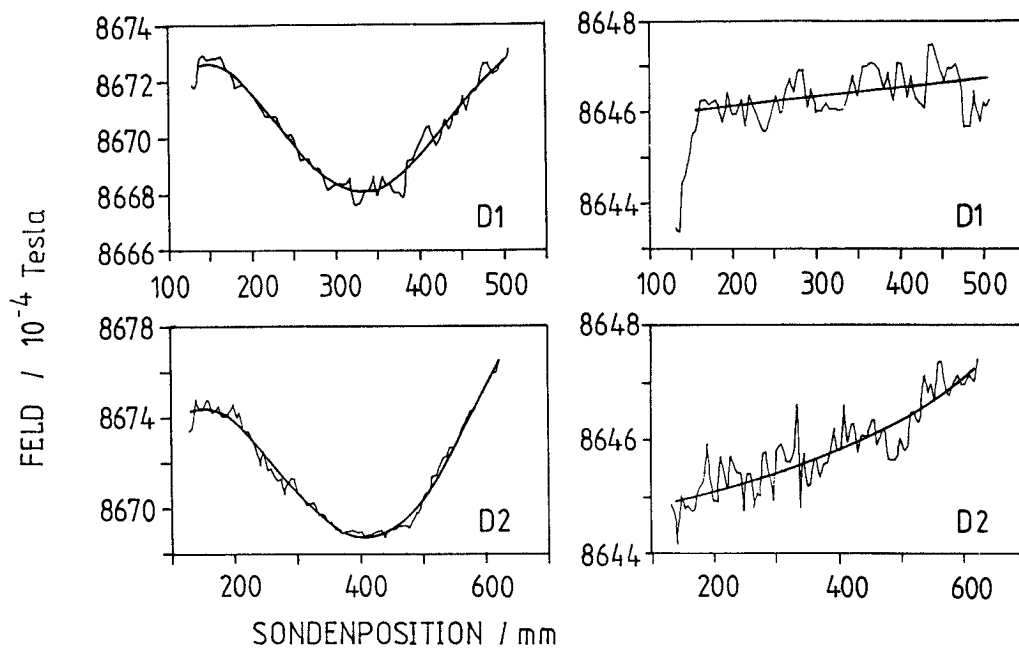


Abb.3.5 Feldprofile der Dipolmagnete - Das mittels einer NMR-Sonde gemessene Feld ist gegen die Sondenposition aufgetragen. Die gezackte Linie verbindet die einzelnen Meßpunkte. Auf der linken Seite sind die Ströme in den H_t -Windungen abgeschaltet. Der deutlich sichtbare Durchhang des Feldes hängt von der eingestellten Feldstärke ab. Auf der rechten Seite sind mit Hilfe des Programms "CYCLE" [V-SM83] folgende Stromverteilungen eingestellt worden: HTD1: 0.0/0.75/0.0 und HTD2: -0.2/0.5/0.0. Diese Einstellungen bewirken die folgenden H_t -Ströme: Dipol D1, Windung K1:3.4, K3:2.6, K5:1.9, K7:1.1, K9:0.4, K13:-0.4, K15:-1.1, K17:-1.9, K19:-2.6, K21:-3.4; Dipol D2: K2:2.6, K4:2.0, K6:1.6, K8:1.1, K10:0.6, K12:0.1, K14:-0.5, K23:-1.0, K18:-1.5, K20:-2.0, K22:-2.5, K24:-3.0. Die Numerierung der Windungen entspricht der Anschlußreihenfolge der Netzgeräte, die Stromangaben sind in Prozent der Netzgeräteleistung. (Erfahrungsgemäß können die Ströme jedoch nicht voll ausgefahren werden.) Man erkennt, daß die Windungen zur Korrektur des Durchhangs gut geeignet sind; im Dipol D2 blieb ein schwacher Gradient, der durch entsprechende Iteration voraussichtlich ebenso beseitigt werden kann. Beachte, daß an der Ordinate unterschiedliche Maßstäbe verwendet werden.

Die Dipolfelder haben bei abgestellten H_t -Strömen einen "Durchhang" von $5 \cdot 10^{-4}$. Dieser Durchhang konnte mit Hilfe der H_t -Windungen weitgehend kompensiert werden, so daß eine Feldhomogenität von etwa $1:10^4$ gewährleistet war. Die Felder in D1 hatten nach der Korrektur im ionenoptisch relevanten Bereich einen Durchhang von 0 bis 0.5 Gauss, die Felder in D2 zeigten einen schwachen

Gradienten von ca. 0.05 Gauss/cm . Die Reproduzierbarkeit dieser Feldfehler lag ebenso bei einigen zehntel Gauss. Die zur Messung verwendeten Feldprofile sind in **Abb.3.5** dargestellt, zum Vergleich sind die unkorrigierte Feldprofile ebenso dargestellt.

3.4 Durchführung der ionenoptischen Messungen

Nach der Justierung des Strahlflecks auf der Streufolie (Abschnitt 3.1) wurde nach dem folgenden Schema verfahren: Bei kleiner Öffnung der Schlitze SLX/SLY wurde jeweils ein Paar der Schlitzbacken (horizontal oder vertikal) in kurzen Abständen, welche typischerweise 2 mrad entsprachen, gleichsinnig verfahren. Für jede Position wurden die Koordinaten der Trajektorie in der Detektorebene durch Schwerpunktbildung bestimmt, und gegen die durch das Schlitzsystem definierten Anfangskoordinaten x'_0 und y'_0 aufgetragen. Bei allen hier behandelten Messungen wurde die Strahlfleckposition unverändert gelassen. Diese Messungen wurden für geänderte Magneteeinstellungen wiederholt.

Ein Beispiel für eine solche Messung zeigt **Abb.3.6** . Bei Verwendung der mit Hilfe der H_t -Windungen korrigierten, weitgehend homogenen Dipolfelder ist bei nahezu fokussiertem System eine antisymmetrische Abhängigkeit $x_D(x'_0)$ zu erkennen, die bei Eingangswinkeln $x'_0 > 10$ mrad eine starke Abweichung vom linearen Verhalten bewirkt, und bei Eintrittswinkeln von $x'_0 = 15$ mrad etwa 1 cm ausmacht. Diese Abweichung muß mit der erreichten Linienbreite bei kleinen Schlitzöffnungen ins Verhältnis gesetzt werden. Für die Meßpunkte mit Schlitzöffnungen von ± 0.5 mrad ergeben sich bei kleinen Eingangswinkeln x'_0 für die Ortsbestimmung in der x-Achse Halbwertsbreiten von ca. 0.5 mm . Dies erwartet man wegen der Vergrößerung des Spektrographen und wegen der Ortsauflösung des Detektors. Energieverluste in der Streufolie³⁾ und die beschriebenen kinematischen Verbreiterungen sind dabei vernachlässigbar.

3) Die Massenbelegung der Streufolie betrug 0.08 mg/cm² bzw. 0.2 mg/cm².

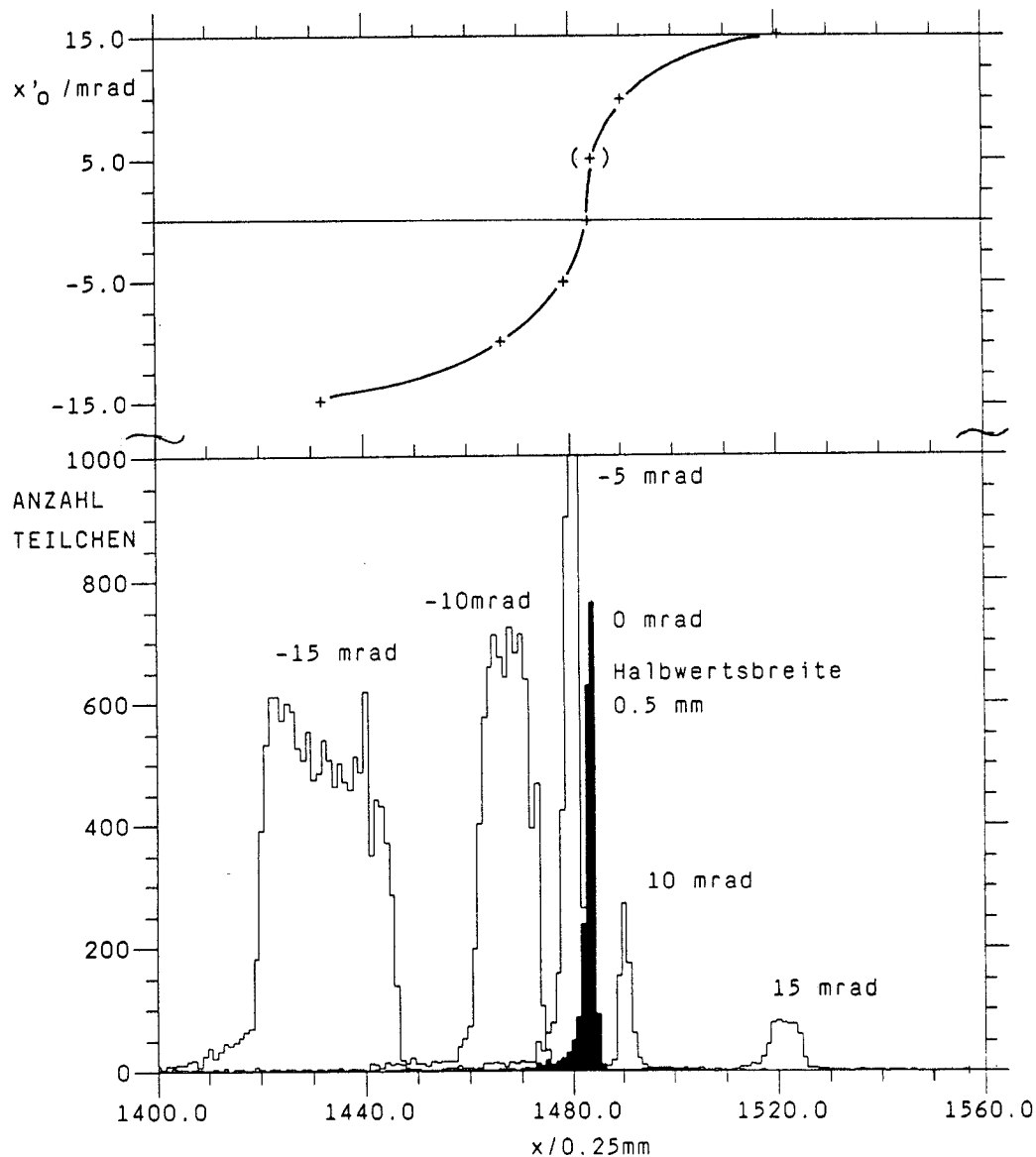


Abb.3.6 Typische Meßkurve und Linienbreiten – Das untere Bild zeigt die in der Detektorebene gemessenen Linien für die in der Nähe des Maximums eingetragenen horizontalen Eingangswinkel x'_0 . Die für zentralen Einfall gemessene Linie ist entsprechend hervorgehoben. Im oberen Bild ist der Linienschwerpunkt x_D in der Detektorebene (horizontale Achse) gegen den Eingangswinkel x'_0 (vertikale Achse) abgetragen. Die horizontalen Achsen beider Bilder stimmen überein. Der im oberen Bild in Klammern gesetzte Punkt fehlt in der unteren Abbildung, da es dort zu einer starken Überdeckung kommt. In einem schmalen Bereich ist die Linienbreite 2 bis 3 Kanäle.

Einen Überblick über weitere Messungen und die Interpretation gibt das nächste Kapitel. Zunächst werden einige Feldmessungen behandelt, die dort in die Berechnung der Trajektorien eingehen.

3.5 Feldmessungen an den Quadrupolen

Die Quadrupolfelder wurden mit Hilfe einer geeichten Hallsonde vermessen. Zur Vermessung von Multipolkomponenten sind sehr genaue Meßverfahren mit rotierenden Spulen im Einsatz [T-KH72]. Die wesentlichen Aussagen können jedoch auch aus Hallsondenmessungen extrahiert werden.

Das Feld wird auf einer durch die x- und y-Koordinate aufgespannten Schnittfläche in der Nähe der Quadrupolmitte bestimmt. Dort kann man davon ausgehen, daß das Feld durch eine z-unabhängige Multipolentwicklung nach Gl.2.16 beschrieben werden kann. Auf der Achse ($x, y=0$) wurde die Feldkomponente B_y , auf der Achse ($x=0, y$) wurde die Feldkomponente B_x in Abständen von maximal 0.4 mm vermessen. Der benutzte Meßtisch ist mit der Wasserwaage austariert worden.

Besonderes Augenmerk wurde auf die Zentrierung der Hallsonde in der magnetischen Mitte und ihre Ausrichtung gerichtet. Die Sonde war dazu auf einer drehbaren Fläche aufgeklebt, deren Drehachse in Richtung der Längsachse des Quadrupols (z-Achse) zeigte. Zur Zentrierung wurde iterativ ein Punkt gesucht, an dem – sowohl bei vertikaler als auch bei horizontaler Ausrichtung der Flächennormale der aktiven Sondenfläche – vor und nach einer Drehung um 180° jeweils die gleiche Auslese am Digitalvoltmeter erschien. Die seitliche Versetzung des Schwerpunktes der aktiven Fläche der Sonde von der Drehachse schätzt man danach unter Zugrundelegung des Feldgradienten auf etwa 2/10 mm. Der Abstand der Sonderebene von der Drehachse wird als sehr klein angenommen, da beim Ausfräsen der Klebefläche aus der Drehachse die Dicke des keramischen Sondenträgers berücksichtigt wurde.

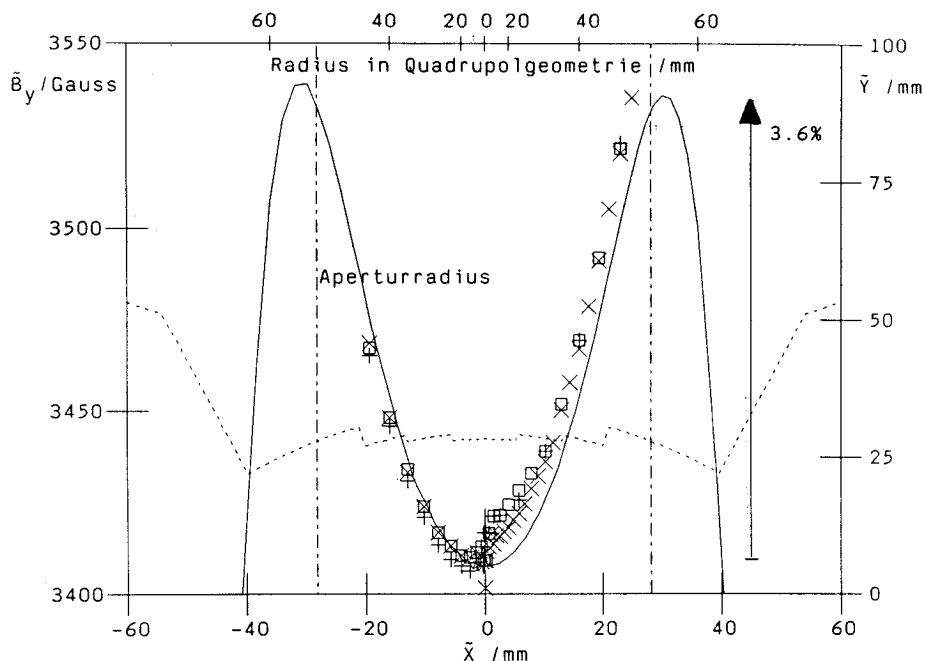
Betrachten wir den Fall der vertikalen Ausrichtung der Flächennormale zwecks Vermessung der B_y -Komponente. Man kann nach der vorhergehenden iterativen Prozedur annehmen, daß die Sonde nun in der Vertikalen zentriert ist, während sie in der Horizontalen um 2/10 mm seitlich versetzt ist. Dabei wird vorausgesetzt, der Qua-

drupol habe keine Dipolkomponente. Um die Flächennormale exakt auszurichten, wurde die Sonde an eine Position $x = 2$ cm gefahren, und die Auslese des Digitalvoltmeters wurde durch vorsichtiges Drehen der Achse optimiert. Daraufhin wurde nochmals das Zentrum gesucht, die Sonde wurde dabei jedoch nicht mehr verdreht. (Die Übereinstimmung der x-Koordinate mit der zuvor gefundenen x-Koordinate wurde überprüft.) Um den Gang der Spindeln des Meßtisches zu eliminieren, wurden die Meßpunkte immer in der gleichen Richtung abgefahren.

Die Sonde ist mit Hilfe einer käuflichen NMR-Aperatur nach K.Borer geeicht worden, [V-KB77]. Bei der Eichung mußten 4 verschiedene NMR-Eichsonden verwendet werden, deren Resonanzkreis jeweils an den entsprechenden Meßbereich angepaßt war. Beim Übergang von einem Meßbereich zum nächsten waren kleine Sprünge ($\approx 10^{-4}$) nicht vermeidbar. Die Eichkurve wird durch eine Polynomannäherung mit einer Genauigkeit von etwa 1 Gauss beschrieben.

Eine anschauliche Darstellung der Meßdaten erhält man durch Anwendung einer auch von Halbach zu Darstellungszwecken benutzten konformen Abbildung. Die Ortskoordinaten der Polkontur und der Symmetrieachsen werden nach der Vorschrift $\underline{w} = k\underline{v}^2$ abgebildet, dabei werden die alten Ortskoordinaten in der x-y-Ebene durch die komplexe Zahl $\underline{v}=(x,y)$ repräsentiert, die neuen Ortskoordinaten werden durch $\underline{w}=(\tilde{x},\tilde{y})$ repräsentiert [V-KH68]. Bei Anwendung dieser Abbildungsvorschrift erscheint der Quadrupolmagnet als Dipolmagnet, Halbach prägt den Ausdruck, "der Quadrupol wird in Dipolgeometrie dargestellt". Dabei fallen die Ortskoordinaten der oben gewählten Meßpunkte auf die Mittelebene des Dipolmagneten $\underline{w}_{\text{Mitteleb.}}=(\tilde{x},\tilde{y}=0)$. Da die ursprüngliche Potentialverteilung nun räumlich verzerrt ist, muß man neue Feldwerte errechnen zu $\underline{B}_w^*=\underline{B}_v^*/2k\underline{v}$. $\underline{B}_v=(B_x,B_y)$ ist das in der ursprünglichen Geometrie gemessene Feld, $\underline{B}_w=(\tilde{B}_x,\tilde{B}_y)$ ist das Feld in neuer Geometrie, der Stern bedeutet das konjugiert Komplexe.

In Abb.3.7 wird die Polkontur des Quadrupols Q2 in Dipolgeometrie dargestellt. Dazu ist $k=1/100$ mm gewählt worden. Die Feldwerte $\tilde{B}_y$ in der Mittelebene des "Dipolmagneten" sind gegen die neue Orts-



Symbole: Feldmessungen, Linien: "Poisson"-Berechnung/Polkontur

Abb.3.7 Polkontur und Felder des Quadrupols Q1, Q2 - Die Polkontur der Quadrupole Q1, Q2 und die gemessenen (Symbole) und gerechneten (Linie) Felder sind in "Dipol-geometrie" dargestellt. Der Pfeil rechts gibt den aus den ionenoptischen Messungen ermittelten Wert für die Feldüberhöhung am Aperturradius an. Die Daten deuten auf eine Überlagerung von einem 12-Pol mit einer relativen Stärke von $\approx 3.6\%$ und einem schwachen Achtpol mit einer relativen Stärke von $\approx 0.4\%$.

koordinate $\tilde{x}$ aufgetragen. Die Symbole stellen wiederholte Messungen dar, bei der die "magnetische Mitte" (der Punkt mit $B_x=0, B_y=0$) jeweils neu gesucht wurde.⁴⁾

Nimmt man an, die "magnetische Mitte" werde mit einer Genauigkeit von 0.05 mm gefunden, ergibt sich in **Abb.3.7** für einen Radius von 50 mm ein Fehler von $\Delta\tilde{B}_y=3.5$ Gauss, für einen Radius von 5 mm ein Fehler von $\Delta\tilde{B}_y=35$ Gauss. Die Streuungen zeigen, daß diese Genauigkeit eingehalten wird.

Die durchgezogene Linie ist das Ergebnis einer Berechnung mit Hilfe von "POISSON" [P-PO85]. Die errechneten Feldwerte auf den Symmetrieachsen des Quadrupols werden in gleicher Weise wie die

4) Auf der linken Seite gibt es für Radien größer als 44 mm keinen Meßpunkt. Dies war wegen der Vakuumkammer geometrisch bedingt. Die Entfernung der Vakuumkammer hätte eine Demontage des oberen Jochs erfordert.

Meßergebnisse dargestellt. Die Berechnung wurde in Quadrupolgeometrie mit einem sehr feinen Netz vorgenommen. Durch die Annahme $\mu=\infty$ sind Sättigungseffekte völlig außer Acht gelassen. Bei Rechnungen mit $\mu=\infty$ hat die Flußdichte keinen Einfluß auf relative Feldfehler. Daher darf das berechnete Feldprofil in der Weise skaliert werden, daß es in **Abb.3.7** zur Überdeckung mit den Meßwerten kommt.

Die gezeigte Verengung des Polschuhabstands an den Außenkanten des Polschuhs führt erwartungsgemäß zu einer Überhöhung des Feldes. In der Dipolgeometrie kann die erkennbare parabolische Durchbiegung der Feldkomponente $\tilde{B}_y$ als Sextupolanteil gedeutet werden, der am Aperturradius etwa 3 bis 4% des Dipolanteils zum Feld beiträgt. Diesem Sextupolanteil entspricht in der ursprünglichen Quadrupolgeometrie ein 12-Polbeitrag von 3 bis 4% des Quadrupolfeldes am Aperturradius. (Für diese Betrachtung ist der Normierungsfaktor k unerheblich.) Der Zwölfpolbeitrag wird ebenso durch eine "harmonische Analyse" (siehe [P-PO85]) des durch POISSON berechneten Quadrupolfeldes bestätigt.

Die geringen Abweichungen der Messungen von den Poissonrechnungen können durch einen zusätzlichen Achtpolbeitrag erklärt werden. Ebenso müssen auch solche Beiträge in Betracht gezogen werden, die in der idealisierten Geometrie des Quadrupols Q1, Q2 nicht erlaubt sind. Die Meßgenauigkeit läßt eine eindeutige Festlegung der entsprechenden freien Parameter nicht zu.

Die Feldmessungen und Feldberechnungen erklären weitgehend die ionenoptisch beobachteten Bahnstörungen, siehe Abschnitt 4.3.4. Der dort ermittelte relative Feldfehler ist in der Abbildung durch einen Pfeil gekennzeichnet. Hinweise zur Kompensation des Zwölfpols entnimmt man Anhang A.2 .

3.6 Vermessung und Analyse des Quadrupolrandfeldes

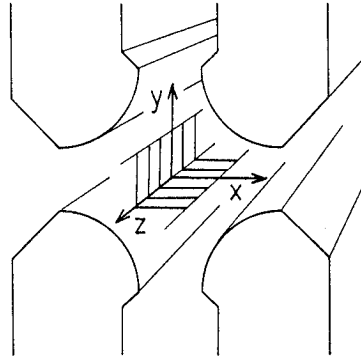


Abb.3.8 Raster zur Vermessung des Quadrupolrandfeldes, perspektivisch – Der Meßtisch wurde auf der Zylinderachse (z-Achse) in Abständen von 1 cm verfahren. An jedem dieser Punkte wurden auf der horizontalen Achse (x-Achse) und der vertikalen Achse (y-Achse) Meßpunkte in kurzen Abständen genommen.

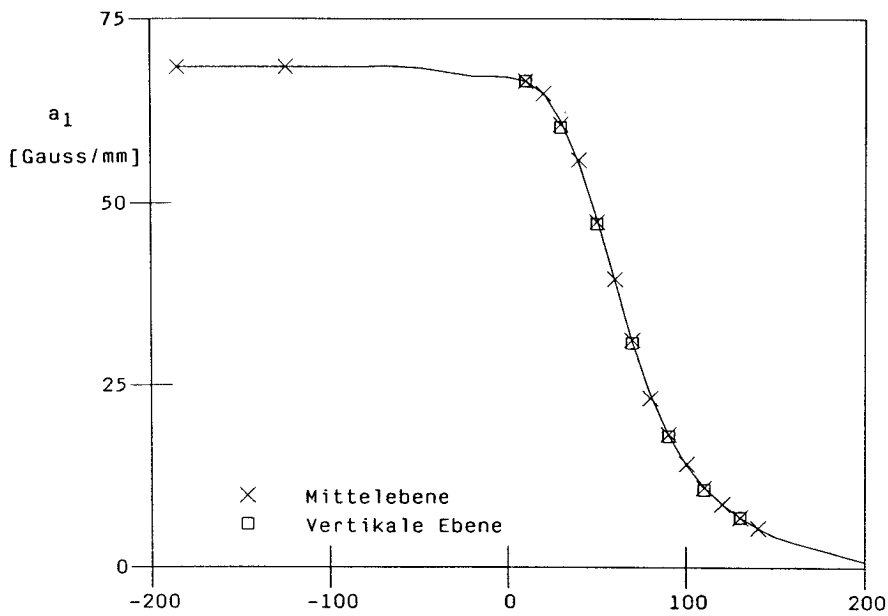
Ein Randfeld des Quadrupols Q2 ist mit Hilfe des im vorhergehenden Abschnitt benutzten Meßtisches in dem in **Abb.3.8** gezeigten Raster vermessen worden, z ist die Zylinderachse, vgl. Abschnitt 2.3.1. In der Mittelebene des Magneten ist die Feldkomponente B_y vermessen worden, in der Ebene $(x=0, y, z)$ ist die Feldkomponente B_x vermessen worden. Die Reduktion der Meßdaten wird für die Mittelebene beschrieben, in der Ebene $(x=0, y, z)$ wird analog vorgegangen. Die Meßpunkte werden mit Hilfe der Methode des kleinsten Fehlerquadrats folgendermaßen parametrisiert⁵⁾:

$$B_y(x, 0, z) = a_1(z) \cdot x + a_3(z) \cdot x^3 + a_5(z) \cdot x^5 \quad (3.1)$$

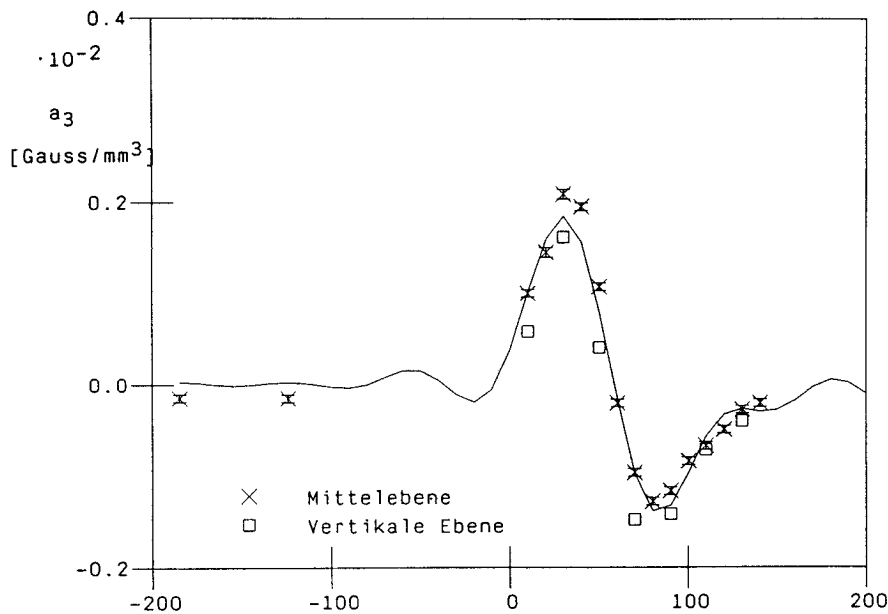
Dabei wurden alle Punkte bis zum Radius $r_{\max} = 4.8 \text{ cm}$ in die Anpassung mit gleicher Gewichtung einbezogen. (Der Aperturradius beträgt $r_{\text{Apertur}} = 5.3 \text{ cm}$.) Wegen der Unterdrückung des nächsthöheren Polynomanteils $a_7 \cdot x^7$ kann a_3 einen relativen Fehler von etwa maximal 30% enthalten.

Abb.3.9b zeigt die Koeffizienten $a_3(z)$ für die Mittelebene und die $(x=0)$ -Ebene im Vergleich. Die dargestellten Unterschiede werden im folgenden ignoriert. Dies ist gleichbedeutend damit, für das Randfeld innerhalb des Aperturradius (bis auf die Polarität) 90°-Drehsymmetrie anzunehmen.

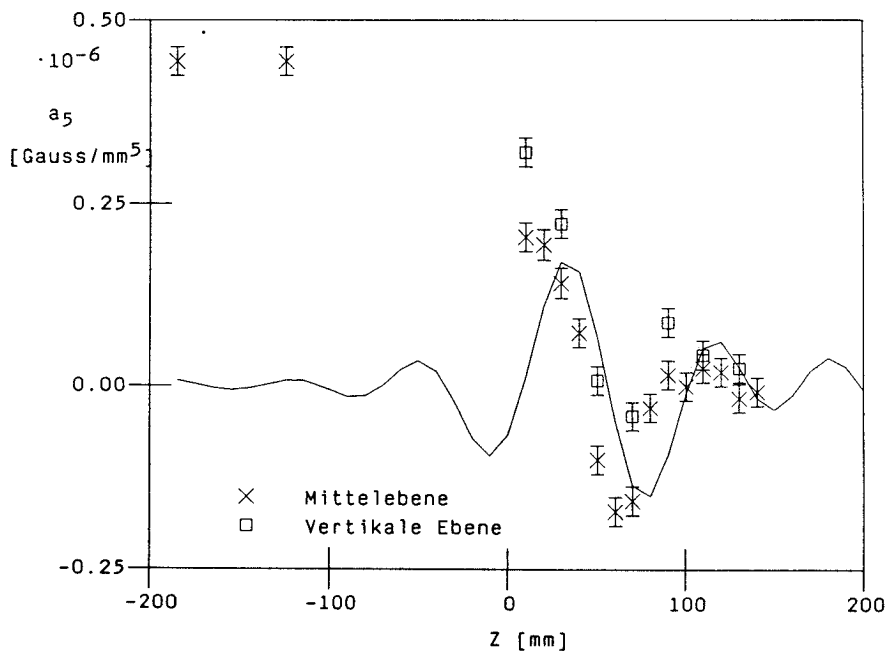
5) Die Anpassung wird für jedes diskrete z individuell vorgenommen.

**Abb. 3.9a**

Darstellung des
 Koeffizienten $a_1(z)$
 (Kreuz: Mittlelebene,
 Quadrat: $x=0$ Ebene)
 u. der Anpassung $-f_2^{(0)}(z)$
 (Linie)
 (Achsenbeschriftung
 der Abszisse
 am untersten
 Diagramm)

**Abb. 3.9b**

Darstellung des
 Koeffizienten $a_3(z)$
 (Kreuz: Mittlelebene,
 Quadrat: $x=0$ Ebene)
 u. der Anpassung $\frac{1}{12}f_2^{(2)}(z)$
 (Linie)

**Abb. 3.9c**

Darstellung des
 Koeffizienten $a_5(z)$
 (Kreuz: Mittlelebene,
 Quadrat: $x=0$ Ebene)
 u. der Anpassung $-\frac{1}{384}f_2^{(4)}(z)$
 (Linie)

Die Anpassungen $f_2^{(i)}(z)$
 sind über Gl.3.3
 miteinander verknüpft.

Die Meßdaten können durch die Feldentwicklung nach Abschnitt 2.3.6.3 beschrieben werden. Damit wird die zur Abschätzung der ionenoptischen Störungen des Randfeldes zugrundegelegte Feldentwicklung experimentell abgesichert. Für das Feld folgt aus Gl.2.25:

$$B_{\phi} = -\text{grad}_{\phi} V = -f_2^{(0)} \cdot r \cdot \cos(2\phi) + \frac{1}{12} \cdot f_2^{(2)} \cdot r^3 \cos(2\phi) - \frac{1}{384} \cdot f_2^{(4)} \cdot r^5 \cos(2\phi) - \frac{1}{120} \cdot f_6^{(0)} \cdot r^5 \cos(6\phi) + \dots \quad (3.2a)$$

Im Falle $\phi=0$:

$$B_y = -f_2^{(0)} \cdot x + \frac{1}{12} \cdot f_2^{(2)} \cdot x^3 - \left(\frac{1}{384} \cdot f_2^{(4)} + \frac{1}{120} \cdot f_6^{(0)} \right) \cdot x^5 + \dots \quad (3.2b)$$

Dabei ist $f_2^{(0)}(z)$ eine beliebige Funktion, die die z-Abhängigkeit des Quadrupolfeldanteils beschreibt. $f_2^{(j)}(z)$ ist die j-te Ableitung dieser Funktion. $f_6^{(0)}(z)$ ist die z-Abhängigkeit des Zwölfpolanteils. Durch Koeffizientenvergleich in Gl.3.1 und Gl.3.2b erkennt man, daß diese Funktionen entsprechend durch die experimentell bestimmten Koeffizienten wiedergegeben werden müssen. Zur Darstellung der Funktion $f_2^{(0)}$ und ihrer Ableitungen wird hier eine Fourierreihe benutzt. Damit wird $f_2^{(0)}(z)$ zu einer periodischen Funktion in z mit der Periodenlänge $2\pi L$.

$$f_2^{(0)}(z) = c_2 + \sum_{j=1}^{j_{\max}} \bar{C}(j) \cdot \sin\left(\frac{j \cdot z}{L} + z_2(j)\right) \quad (3.3a)$$

$$f_2^{(2m)}(z) = (-1)^m \sum_{j=1}^{j_{\max}} \left(\frac{j}{L}\right)^{2m} \cdot \bar{C}(j) \cdot \sin\left(\frac{j \cdot z}{L} + z_2(j)\right), \quad m \neq 0 \quad (3.3b)$$

Nach Gl.3.3 kann $f_2^{(0)}(z)$ und die Ableitungen $f_2^{(2m)}(z)$ mit demselben Parametersatz $\bar{C}(j)$ beschrieben werden. Die Fourierkoeffizienten $\bar{C}(j)$ beinhalten keine physikalische Aussage.

Abb.3.9a/b/c zeigt die Koeffizienten der Polynomentwicklung a_1, a_3, a_5 für die Mittelebene und für die $(x=0)$ -Ebene, die durchgezogenen Linien sind angepaßte Funktionen $-f_2^{(0)}(z), \frac{1}{12}f_2^{(2)}(z), \frac{-1}{384}f_2^{(4)}(z)$, welche nach Gl.3.3 die gleichen Koeffizienten $\bar{C}(j)$ benutzen.

Die in **Abb.3.9** gezeigten Anpassungen wurde durch Minimierung der Summe der Fehlerquadrate erzeugt. Die Periodenlänge ist zu $2\pi L = 100$ cm festgesetzt, $j_{\max} = 15$. Die Phase $z_2(j)$ ist unabhängig von j so festgesetzt, daß $f_2^{(0)}$ um die Mitte des Quadrupols symmetrisch ist. Zur Errechnung der Summe der Fehlerquadrate wurden die gewichteten Fehlerquadrate $\{a_1(z) - (-)f_2^{(0)}(z)\}^2$ und zusätzlich die gewichteten Fehlerquadrate $\{a_3(z) - \frac{1}{12}f_2^{(2)}(z)\}^2$ herangezogen. Dadurch wird verhindert, daß die durch Meßfehler bedingten Schwankungen in $a_1(z)$ hohe Fourierbeiträge anfachen. Weiterhin wurden hohe Fourierbeiträge dadurch unterdrückt, daß weit außerhalb des Magneten $a_1(z)$ zu Null gesetzt wurde, innerhalb des Magneten wurde $a_1(z)$ auf den Wert des Gradienten in der Mitte des Magneten gesetzt. Zur Überprüfung der Anpassungen wurde $f_2^{(2)}$ durch Bildung von Differenzenquotienten der Funktion $a_1(z)$ und anschließender Mittelung über benachbarte Meßpunkte ermittelt. Auch diese Methode ergab ähnliche Ergebnisse.

Die Anpassung bestätigt Gl.3.2. Die Abweichungen liegen innerhalb der durch Verwendung des Modells Gl.3.1 möglichen Interpretationsfehler. Im Randfeldbereich zeigt $a_5(z)$ ähnliche Strukturen wie $\frac{1}{384}f_2^{(4)}(z)$. Der Zwölfpolbeitrag $r^5 \cos(6\phi)$ spielt im Randfeld daher keine entscheidende Rolle (Gl.3.2). Das Anwachsen von $a_5(z)$ im Innern des Quadrupols ist durch einen Zwölfpolbeitrag $r^5 \cos(6\phi)$ im vorhergehenden Abschnitt erklärt worden.

3.7 Vermessung der Dipolkantenkonturen durch W.Hürlimann

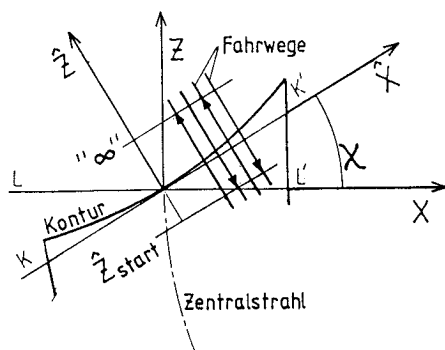


Abb.3.10 Fahrwege der Sonden zur Vermessung der Polkantenkontur (nach W.Hürlimann/A.Hardt/S.Martin)

Die Polkanten der Dipole D1, D2 sind kreisförmig gebogen. Um

den optischen Effekt dieser Krümmung berechnen zu können, sind die Randfelder der Dipole durch W.Hürlimann [D-WH81] mit Hilfe von Hallsonden und Spulen vermessen worden. Die Fahrwege der Sonden zeigt schematisch **Abb.3.10**. Dabei ist das Koordinatensystem $\hat{x}, \hat{z}$ gegenüber dem in Abschnitt 2.3.1 benutzten Koordinatensystem x, z um den sogenannten Polkantenwinkel χ geneigt. $\hat{x}$ liegt auf der Polkante KK' , x liegt auf der "Lotrechten" LL' . U.a. wurde eine "virtuelle Feldgrenze" auf folgende Weise bestimmt⁶⁾:

$$\hat{z}_{\text{VFB}}(\hat{x}) := \hat{z}_{\text{start}} + \frac{1}{B_y(\hat{z}_{\text{start}})} \int_{\hat{z}_{\text{start}}}^{\infty} d\hat{z}' B_y(\hat{x}, 0, \hat{z}') \quad (3.4)$$

$\hat{z}_{\text{start}}$ liegt dabei im Bereich des homogenen Dipolfeldes, " ∞ " im feldfreien Raum. Die von W.Hürlimann ermittelte Feldgrenze $\hat{z}_{\text{VFB}}(\hat{x})$ wurde in dieser Arbeit durch eine Parabel angepaßt:

$$\hat{z}_{\text{VFB}}(\hat{x}) = \frac{1}{2} \frac{1}{r_K} \hat{x}^2 + \hat{z}_{\text{VFB}}(0) \quad (3.5)$$

Der Parameter r_K entspricht dem Radius des Kreisbogens, dessen quadratischer Entwicklungsanteil durch die Parabel dargestellt wird. Es sind die folgenden Radien r_K ermittelt worden, $r_{K1} = 1.21\text{m}$, $r_{K2} = 1.23\text{m}$, $r_{K3} = 2.74\text{m}$, $r_{K4} = 3.99\text{m}$, in der Reihenfolge Eingang D1, Ausgang D1, Eingang D2, Ausgang D2 (**Abb.3.11**)⁷⁾. Die Konturen des ersten Dipols sind konvex, die des zweiten Dipols konkav.

Man stellt fest, daß die Beschreibung durch eine Parabel deutlich über den Aperturradius hinaus sehr präzise ist. Kante K2 bedingt die größten Abweichungen von der Parabel von maximal $\Delta z_{\text{VFB}} \approx \pm 0.25 \text{ mm}$ ⁸⁾ (siehe **Abb.3.11**). Diese Abweichung erzeugt eine Winkeländerung $\Delta x' = \frac{1}{\rho_z} \cdot \Delta z_{\text{VFB}} = \pm 0.13 \text{ mrad}$. Dabei ist $\rho_z = 1.95\text{m}$ der Radius der Zentralbahn. Dies bewirkt nach Gl.2.41 und Tabelle C2 in der Detektorebene Streuungen der Ortskoordinate von $\Delta x_D \approx \pm 0.7 \text{ mm}$.

6) Eine meßtechnisch einfache Methode zur Bestimmung der Feldgrenze beschreibt Halbach [V-KH74].

7) Die Anpassung enthält auch einen linearen Anteil, da die Kantenneigung nicht exakt dem Sollwert von 30° entspricht.

8) Zuverlässigkeit $\approx 90\%$

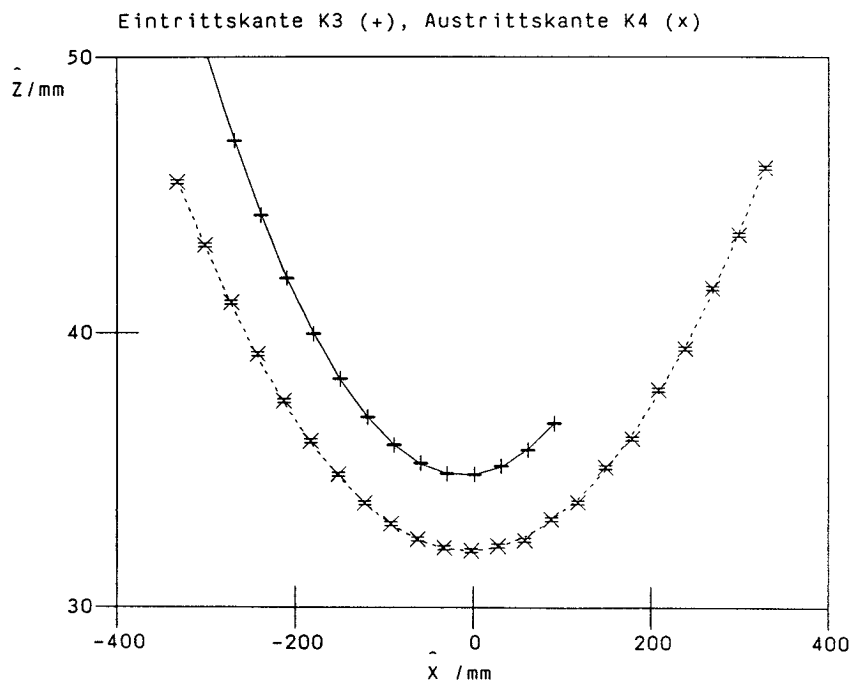
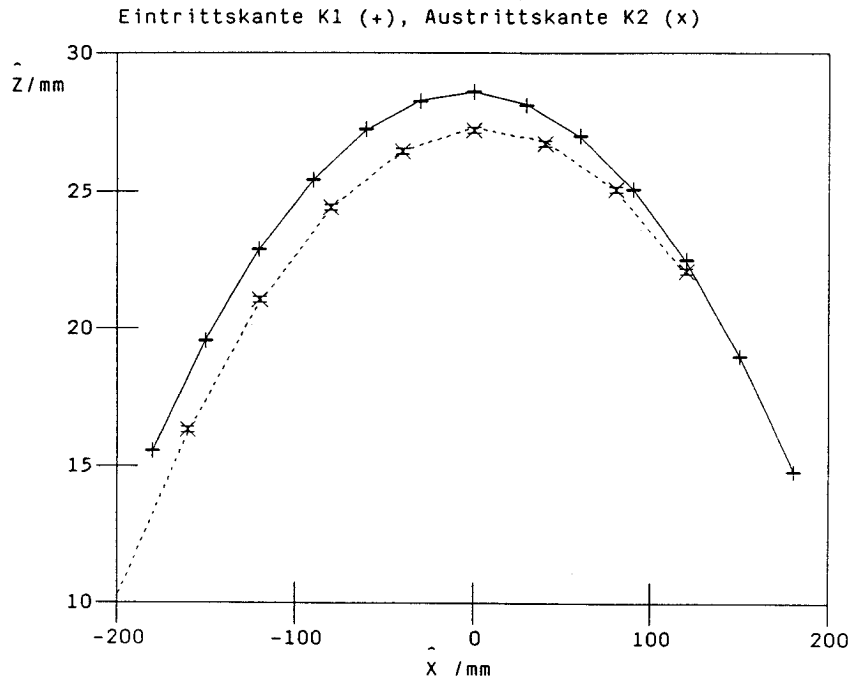


Abb.3.11 Anpassung der Polkantenkontur (Symbole) durch Parabelfunktionen – Die mit Hilfe des Integrationsverfahrens nach Gl.3.4 gewonnene "virtuelle Feldgrenze" der Dipolfelder wird durch ein Polynom 2. Ordnung angepaßt. (Die "gekippten" Koordinaten $\hat{x}$, $\hat{z}$ entnehme aus Abb.3.10, der Nullpunkt von $\hat{z}$ ist durch die Apparatur bedingt. Messung und Integration wurden durch W.Hürlimann u.a. vorgenommen.)

Kapitel 4

Ionenoptische Meßergebnisse und Interpretation

4.1 Überblick über die Meßdaten

Die Serie **Abb.4.1-01** bis **Abb.4.1-12** gibt einen Überblick über einen großen Teil der durchgeführten Messungen. In den Einzeldarstellungen sind die Ortskoordinaten der Trajektorien in der Detektorebene x_D oder y_D gegen die durch das Schlitzsystem definierte Anfangsordinate x'_0 , oder y'_0 aufgetragen. Im Kopf jedes Diagramms wird z.B. durch $x_D(y'_0)$ auf die Achsenbelegung hingewiesen.

Gemessene Koordinaten sind in Form von Symbolen gekennzeichnet. Die Serie zeigt ebenso die Ergebnisse von Modellrechnungen, die in Form von durchgezogenen oder gestrichelten Linien dargestellt werden. Die Modellrechnungen werden in späteren Abschnitten behandelt.

In einigen Diagrammen sind mehrere Symbole verwendet worden. Bei den in einem Diagramm mit dem gleichen Symbol zusammengefaßten Daten sind – mit Ausnahme der auf der horizontalen Achse aufgetra-

Auf den folgenden Seiten:

Abb.4.1 Meßreihen und Modell A, B, C – Die Koordinaten x_D bzw. y_D der in der Detektorebene vermessenen Trajektorien sind gegen die Anfangsordinaten x'_0 oder y'_0 an der Streufolie aufgetragen (Symbole). Die den Meßreihen zugrundeliegenden Magneteeinstellungen sind im Kopf der Diagramme eingetragen. >...< beinhaltet eine Kurzinformation (d=dispersiv ausgelenkt, y=vertikal ausgelenkt, 0=abgeschalteter Quadrupol, siehe Text). Die dargestellten Modellrechnungen A (durchgezogene Linie), B und C (gestrichelt) beruhen in allen Diagrammen auf jeweils denselben Annahmen. Die Balken kennzeichnen die Datenpunkte, die bei der Anpassung von Modell A zur Minimierung der Summe der Fehlerquadrate herangezogen worden sind.

Abb. 4.1-01 > . . . <

Darstellung:

$$x_D(x'_0), y'_0 = 0 \text{ mrad}$$

Felder:

$$D1, D2 = 0.8683 \text{ T}$$

$$Q1=7.64\text{mV}, Q2=5.84\text{mV},$$

$$Q3=4.47\text{mV}$$

Modell:A/B/C

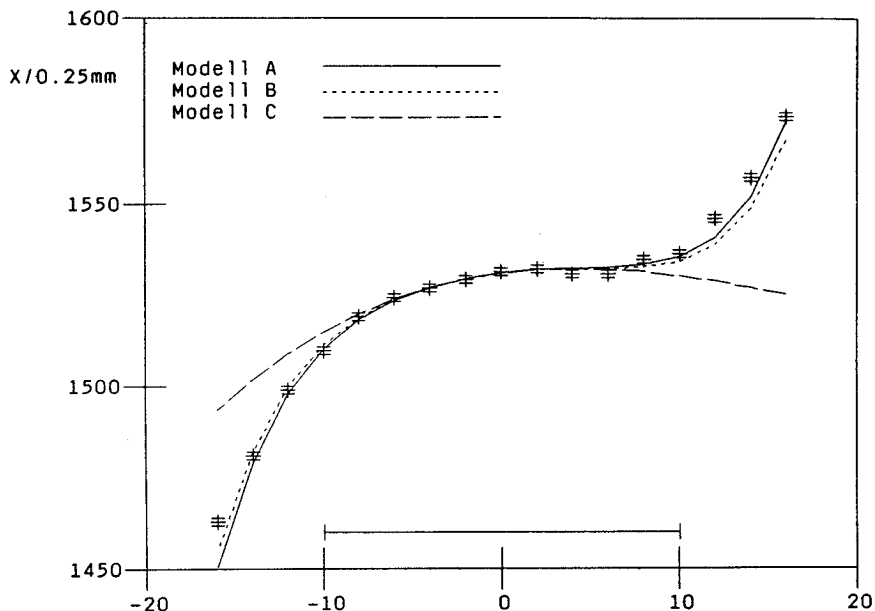


Abb. 4.1-03 >d. . . <

Darstellung:

$$x_D(x'_0), y'_0 = 0 \text{ mrad}$$

Felder:

$$D1, D2 = 0.8472 \text{ T}$$

$$Q1=7.48\text{mV}, Q2=5.71\text{mV},$$

$$Q3=4.38\text{mV}$$

Modell:A/B/C

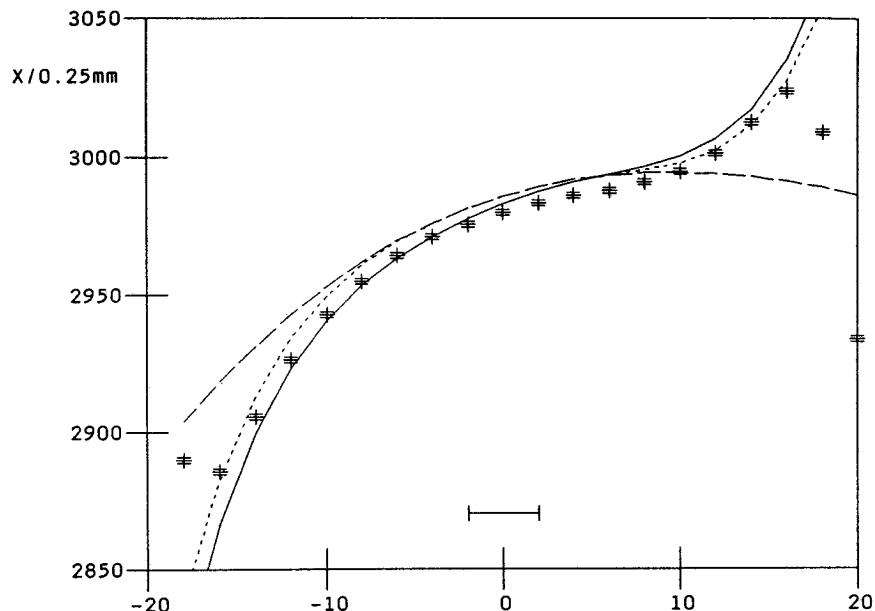


Abb. 4.1-05 > .y. <

Darstellung:

$$x_D(x'_0), y'_0 = 40(+)/-40(x) \text{ mrad}$$

Felder:

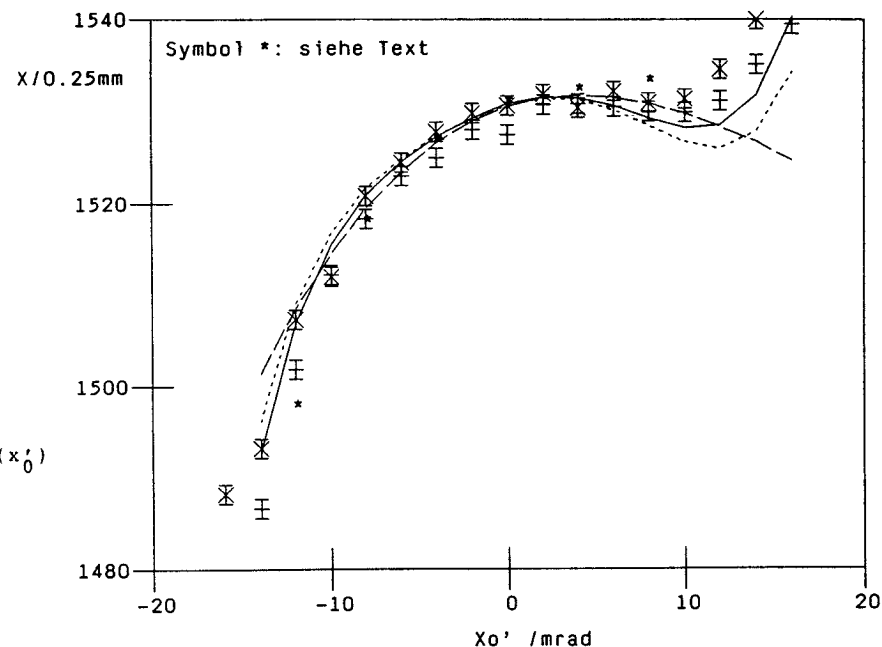
$$D1, D2 = 0.8683 \text{ T}$$

$$Q1=7.64\text{mV}, Q2=5.84\text{mV},$$

$$Q3=4.47\text{mV}$$

Modell:A/B/C

"*" = Nach Modell A berechnete Koordinaten $x_D(x'_0)$ mit $y'_0 = 0 \text{ mrad}$, entsprechend Abb. 4.1-01.



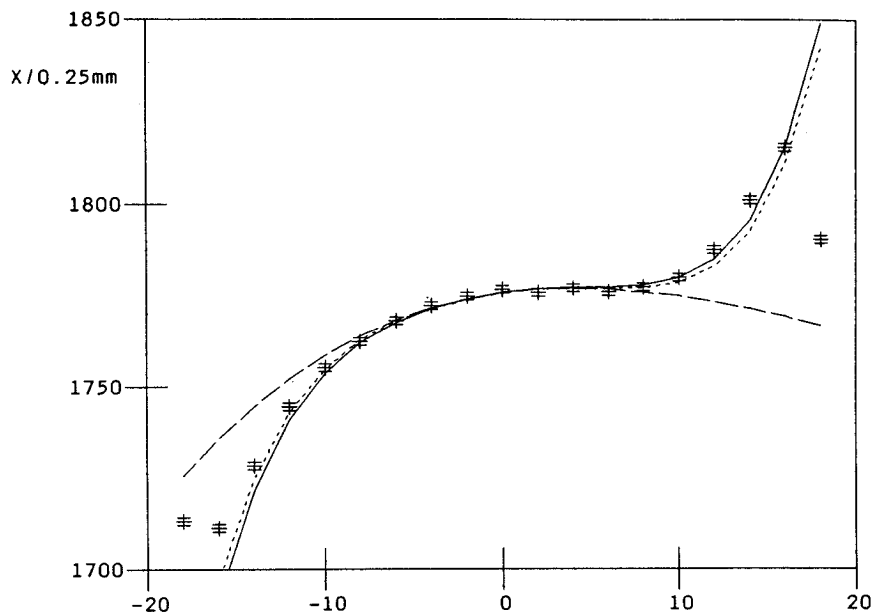


Abb. 4.1-02 > . . <

Darstellung:
 $x_D(x'_0), y'_0 = 0 \text{ mrad}$

Felder:
 $D1, D2 = 0.8646 \text{ T}$
 $Q1=7.64\text{mV}, Q2=5.84\text{mV},$
 $Q3=4.47\text{mV}$

Modell:A/B/C

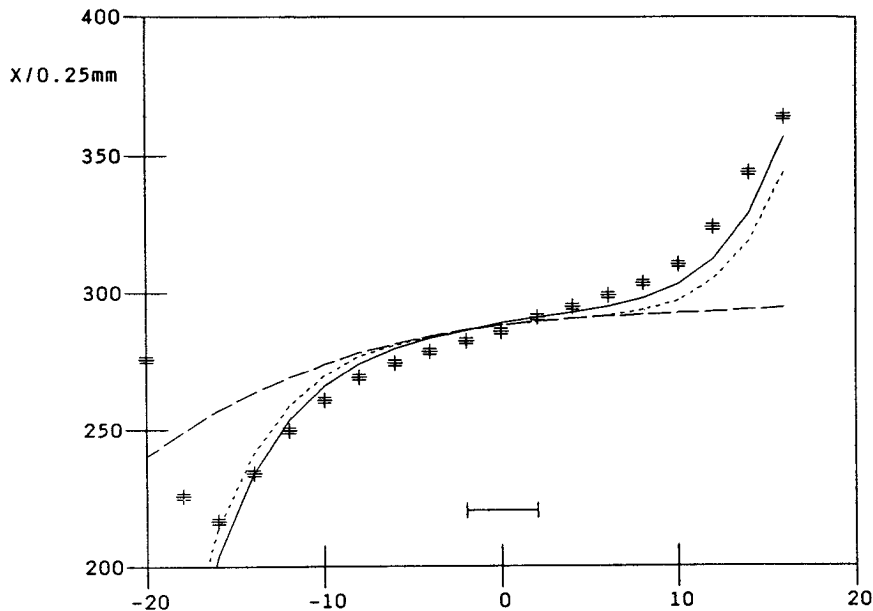


Abb. 4.1-04 >d. . <

Darstellung:
 $x_D(x'_0), y'_0 = 0 \text{ mrad}$

Felder:
 $D1, D2 = 0.8853 \text{ T}$
 $Q1=7.82\text{mV}, Q2=5.98\text{mV},$
 $Q3=4.57\text{mV}$

Modell:A/B/C

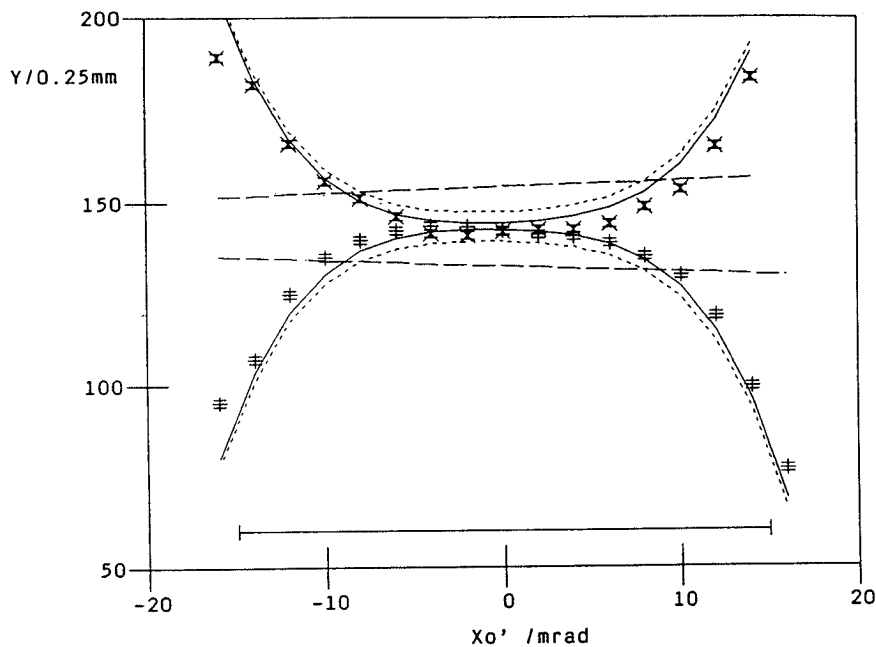


Abb. 4.1-06 > .y. <

Darstellung:
 $y_D(x'_0),$
 $y'_0 = 40(+)/-40(x) \text{ mrad}$

Felder:
 $D1, D2 = 0.8683 \text{ T}$
 $Q1=7.64\text{mV}, Q2=5.84\text{mV},$
 $Q3=4.47\text{mV}$

Modell:A/B/C

Abb.4.1-07 > .y. <

Darstellung:

$$y_D(y'_0), x'_0 = 0 \text{ mrad}$$

Felder:

$$D1, D2 = 0.8689 \text{ T}$$

$$Q1=7.64\text{mV}, Q2=5.84\text{mV},$$

$$Q3=4.55\text{mV}$$

Modell:A/B/C

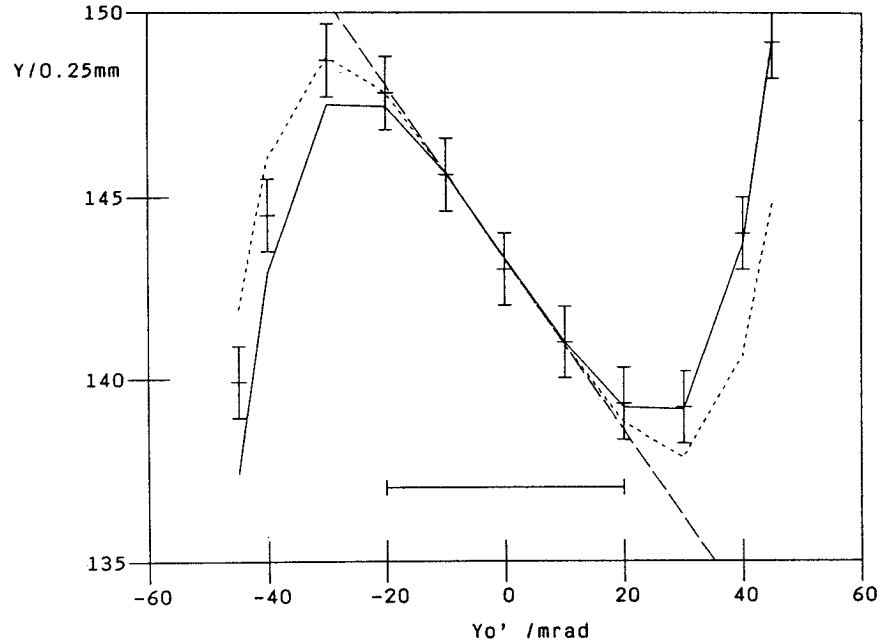


Abb.4.1-09 >d. .0<

Darstellung:

$$x_D(x'_0), y'_0 = 0 \text{ mrad}$$

Felder:

$$D1, D2 = 0.8853 \text{ T}$$

$$Q1=7.82\text{mV}, Q2=5.98\text{mV},$$

$$Q3=0.0\text{mV}$$

Modell:A/B/C

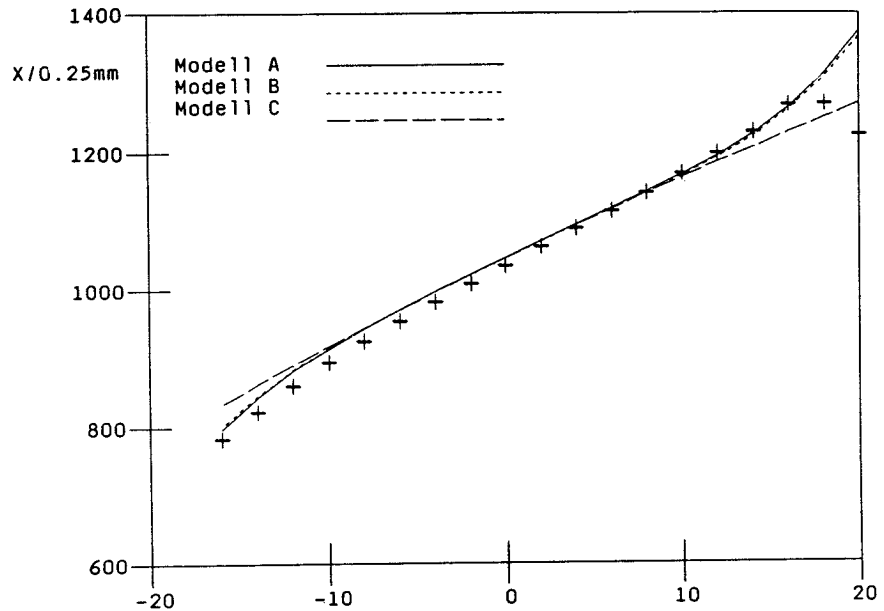


Abb.4.1-11 > . .0<

Darstellung:

$$x_D(x'_0), y'_0 = 0 \text{ mrad}$$

Felder:

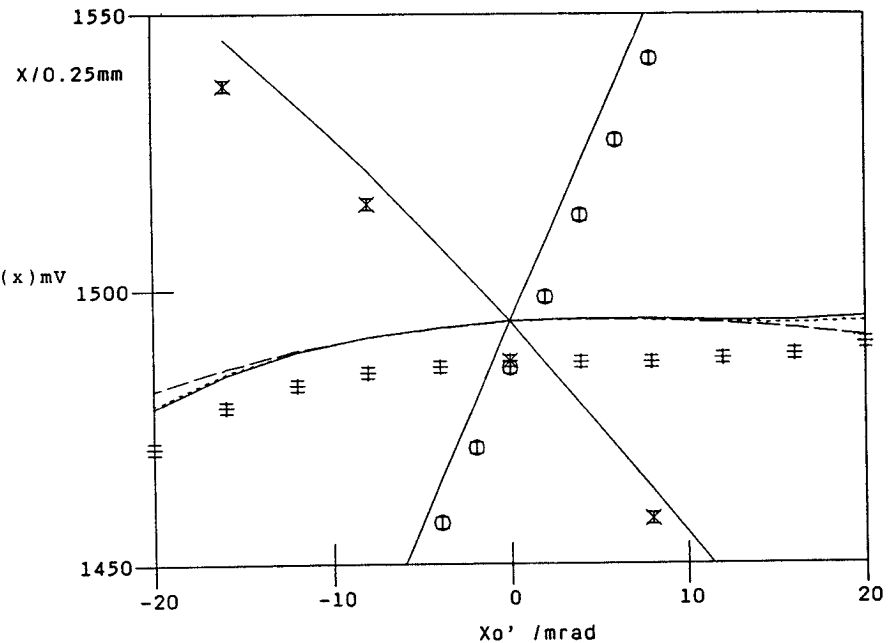
$$D1, D2 = 0.8688 \text{ T}$$

$$Q1=0.0\text{mV},$$

$$Q2=4.63(+)/5.87(o)/4.00(x)\text{mV}$$

$$Q3=4.46\text{mV}$$

Modell:A/B/C



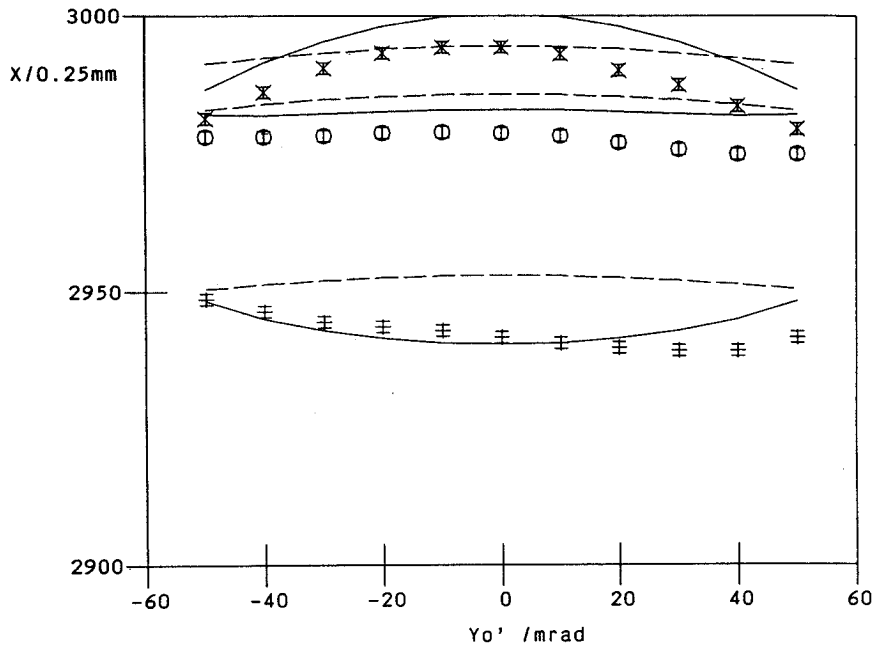


Abb. 4.1-08 >d.y. <

Darstellung:

$$x_D(y_0'),$$

$$x_0' = -10(+)/0(o)/+10(x) \text{ mrad}$$

Felder:

$$D1, D2 = 0.8472 \text{ T}$$

$$Q1=7.48\text{mV}, Q2=5.71\text{mV},$$

$$Q3=4.38\text{mV}$$

Modell:A/C

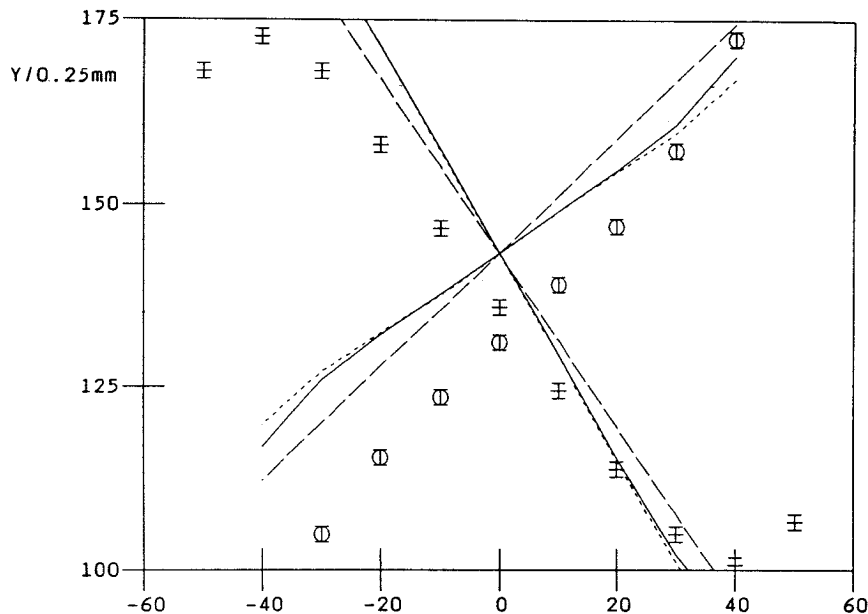


Abb. 4.1-10 >d.y. <

Darstellung:

$$y_D(y_0'), x_0' = 0 \text{ mrad}$$

Felder(+):

$$D1, D2 = 0.8472 \text{ T}$$

$$Q1=7.48\text{mV}, Q2=5.71\text{mV},$$

$$Q3=4.38\text{mV}$$

Felder(o):

$$D1, D2 = 0.8853 \text{ T}$$

$$Q1=7.82\text{mV}, Q2=5.98\text{mV},$$

$$Q3=4.57\text{mV}$$

Modell:A/B/C

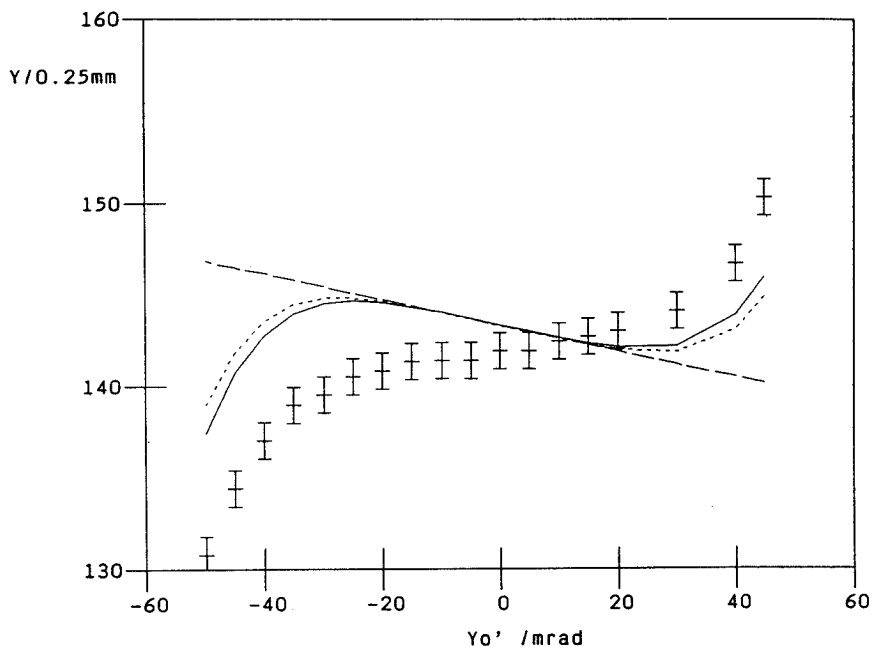


Abb. 4.1-12 >.y.0<

Darstellung:

$$y_D(y_0'), x_0' = 0 \text{ mrad}$$

Felder:

$$D1, D2 = 0.8688 \text{ T}$$

$$Q1=5.19\text{mV}, Q2=0.0\text{mV},$$

$$Q3=4.46\text{mV}$$

Modell:A/B/C

genen Koordinate x'_0 oder y'_0 - alle Phasenraumkoordinaten im Eingang und alle Magneteinstellungen konstant. Die wesentlichen nicht veränderlichen Koordinaten und Einstellungen sind im Kopf jedes Diagramms eingetragen. (Die Einstellungen der Quadrupole werden in Form einer an den Polschuhen gemessenen Hallspannung in mV angegeben.) Wird in einem Diagramm mehr als ein Symbol verwendet, so sind die zugrundeliegenden Einstellungen durch Schrägstriche getrennt und durch das in der graphischen Darstellung verwendete Symbol gekennzeichnet.

Die oben links dargestellte symbolische Kennzeichnung $\rangle . . \langle$ dient dazu, dem Leser das Erfassen der bei der Messung verwendeten Einstellungen zu erleichtern. Die drei durch Punkte getrennten Plätze geben dabei Aufschluß über die Zuordnung nach den im folgenden beschriebenen drei Kriterien. Die Plätze sind entweder leer oder beinhalten das unten genannte Symbol.

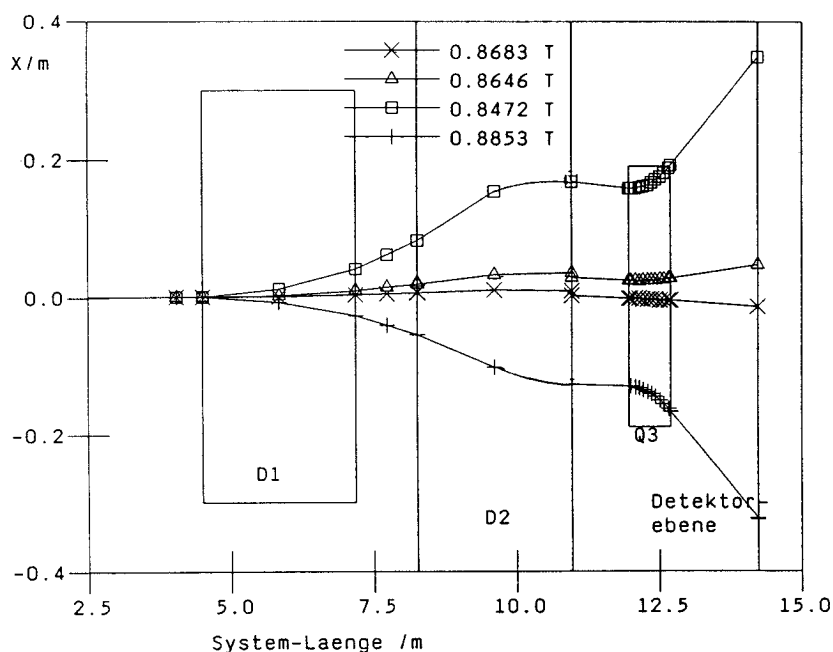


Abb.4.2 Simulation der dispersiven Auslenkung - Eine Impulsabweichung δ ist durch Feldänderungen simuliert worden. Die abgebildeten Trajektorien laufen zentral ein. Die Trajektorien sind für die in **Abb.4.1-01...04** gewählten Feldstärken nach Modell A berechnet worden. Wegen des großen Überhangs der Polschuhe kann Quadrupol Q3 über die Apertur (Rechteck) hinaus genutzt werden.

- Dipolhauptfelder: Abb.4.2 zeigt den nach Modell A (s.u.) gerechneten Bahnverlauf für zentral einlaufende Trajektorien¹⁾ mit den in Abb.4.1-01 bis Abb.4.1-04 verwendeten Einstellungen für Dipolhauptfelder und Quadrupole. Die Dipolhauptfelder sind in der Legende von Abb.4.2 eingetragen. Da nur die zentral einlaufenden Trajektorien dargestellt werden ($x_0=0$ cm, $x'_0=0$ mrad), verlaufen die Bahnen im nicht dargestellten Teilsystem Q1, Q2 zentral. Man erkennt, daß die Trajektorien für die in Abb.4.1-01, Abb.4.1-02 verwendeten Felder nahe der Zentralbahn verlaufen, die in Abb.4.1-03 und Abb.4.1-04 verwendeten Felder führen die Trajektorien nahe an den Aperturradius des Quadrupols Q3.²⁾ Die durch Dispersion stark ausgelenkten Trajektorien geben daher gesondert Aufschluß über den hinteren Teil des Systems. Alle Meßreihen, in denen auf Grund der Dipoleinstellungen die Dispersion zu einer starken Auslenkung der Trajektorien führt, erhalten an der ersten Stelle der symbolischen Kennzeichnung das Kürzel "d".
- Bahnverlauf in der Vertikalen: Als wesentliche Informationsquelle haben sich Trajektorien außerhalb der Mittelebene erwiesen (s.u.). Hierzu sind z.B. Darstellungen aufschlußreich, in denen die vertikale Ortskoordinate in der Detektorebene y_D als Funktion der horizontalen Anfangskoordinate x'_0 dargestellt wird (Abb.4.1-06). Die Trajektorien haben das System außerhalb der Mittelebene durchlaufen, $y'_0 \neq 0$. Alle Meßreihen, die Aussagen über das Verhalten außerhalb der Mittelebene machen, erhalten an der zweiten Stelle das Kürzel "y".
- Quadrupoleinstellungen: Bei einigen Meßreihen wurde einer der Quadrupole abgeschaltet, um die Konsistenz der Modelle bei starker Veränderung der Optik zu überprüfen. Solche Meßreihen erhalten an der dritten Stelle das Kürzel "0".

1) Anstelle des geometrischen Bahnverlaufs wird die Phasenraumkoordinate x gezeigt.

2) Die Einstellung der Quadrupole wird in Abschnitt 4.3.5 erläutert.

4.2 Modifikation der Computerprogramme

4.2.1 Organisation

Der Magnetspektrograph wird mit Hilfe eines Strahlverfolgungsprogramms modellmäßig nachgebildet. Die Berechnung der Trajektorien erfolgt mit Hilfe des Strahlverfolgungsprogramms DECAY-TURTLE [P-Tu74], welches zur Erhöhung der Genauigkeit einige Modifikationen erfahren hat, die im folgenden Abschnitt 4.2.2 erläutert sind.

Durch einen Vergleich von Messungen mit den Modellrechnungen kann geprüft werden, inwieweit die Meßdaten auf ein unerwünschtes oder unerwartetes Verhalten schließen lassen. Daraufhin können die notwendigen Schritte zur Korrektur eingeleitet werden.

Daher wurde nach einer Möglichkeit gesucht, Messungen und Berechnungen auf sinnvolle Weise miteinander zu vergleichen. Eine Anpassung der gemessenen Koordinaten durch eine Entwicklung nach Aberrationen (Gl.2.34) wurde nicht vorgenommen, vgl. [V-SM83]. Statt dessen werden die errechneten und gemessenen Koordinaten für jede einzelne Schlitz- und Magneteinstellung miteinander verglichen.

Wie in Abschnitt 4.1 erläutert wurde, sind die Magnetfelder vielfach verstellt worden, um einen umfassenden Überblick über das optische Verhalten zu erlangen. Um die Verträglichkeit der Interpretation an allen Meßreihen zu überprüfen, ist es notwendig, die vielfachen Einstellungen in die Strahlverfolgungsberechnungen mit einzubeziehen. Um Fehler zu vermeiden, war es sinnvoll, die Dateneingabe zu organisieren. Das zu diesem Zweck bereitgestellte improvisierte Programmsystem stellt die richtige Übergabe der Schlitz- und Magneteinstellungen an TURTLE sicher, und erlaubt es, ein Modell an die gemessenen Trajektorien anzupassen. Nicht zuletzt dient es einer organisierten Abspeicherung der Ergebnisse und ihrer graphischen Darstellung.

Eine grobe Beschreibung dieses Programms macht auf einfachste Weise verständlich, nach welchem Schema der Vergleich von Modellrechnungen und Messungen vorgenommen wurde.

Abb. 4.3 zeigt Daten (Rechtecke), Datenströme (Pfeile) und beteiligte Programmteile (Ovale), nicht aber den zeitlichen Ablauf der Berechnungen. Das "Statusprotokoll" (unten links im Bild) enthält für jeden Meßpunkt eine Beschreibung der Einstellungen. Die ersten sechs Argumente dieser Liste stellen die Anfangsphasenraumkoordinaten dar, von denen hier nur x'_0 und y'_0 ungleich 0 sind. Die restlichen Argumente beinhalten die Magneteinstellungen. Dieser Liste wird eine "Werte"-Liste der errechneten und gemessenen Phasenraumkoordinaten in der Detektorebene zugeordnet. Von diesen interessieren hier nur die errechneten bzw. gemessenen Koordinaten x_D^{mod} und y_D^{mod} bzw. x_D^{ist} und y_D^{ist} , wobei die Indizes für "Modell" und "Ist-Wert" stehen, der Index "D" für Detektorebene.

Oben im Bild erkennt man die Modellierung (TURTLE), welche für jeden Meßpunkt die vollständige Beschreibung der Konfiguration in aufbereiteter Form erhält. Die Aufbereitung übernehmen die Module "VERWALTUNG" und "SCHNITTSTELLE". Das Modul "VERWALTUNG" wird weiter unten erklärt. In dem Modul "SCHNITTSTELLE" werden Verknüpfungen definiert, die durch Operatorkreuze "x" angedeutet sind. Dazu zählen Skalierungen und das Addieren von Konstanten, wenn nötig unter Einbeziehung unbekannter Parameter, die in der "Liste freier Parameter" verzeichnet sind. Die in dieser Liste verzeichneten Eichfaktoren, relativen Feldfehler usw. haben für sämtliche Meßdaten Gültigkeit. Die Definition der Verknüpfungen und freien Parameter geschieht nach Gesichtspunkten der Dateninterpretation, und wird im einzelnen in Abschnitt 4.3.2 erläutert.

Die so definierten Einstellungen werden in dem für die Modellparameter bereitgestellten Speicherbereich "Aktuelle Konfiguration" zwischengespeichert, der bei jeder Änderung aktualisiert wird. Dieser Speicherbereich enthält den üblichen TURTLE-Eingabedatensatz. Nur ein Teil der im TURTLE-Eingabedatensatz enthaltenen Parameter werden durch das Modul "SCHNITTSTELLE" verwaltet. Ein anderer Teil

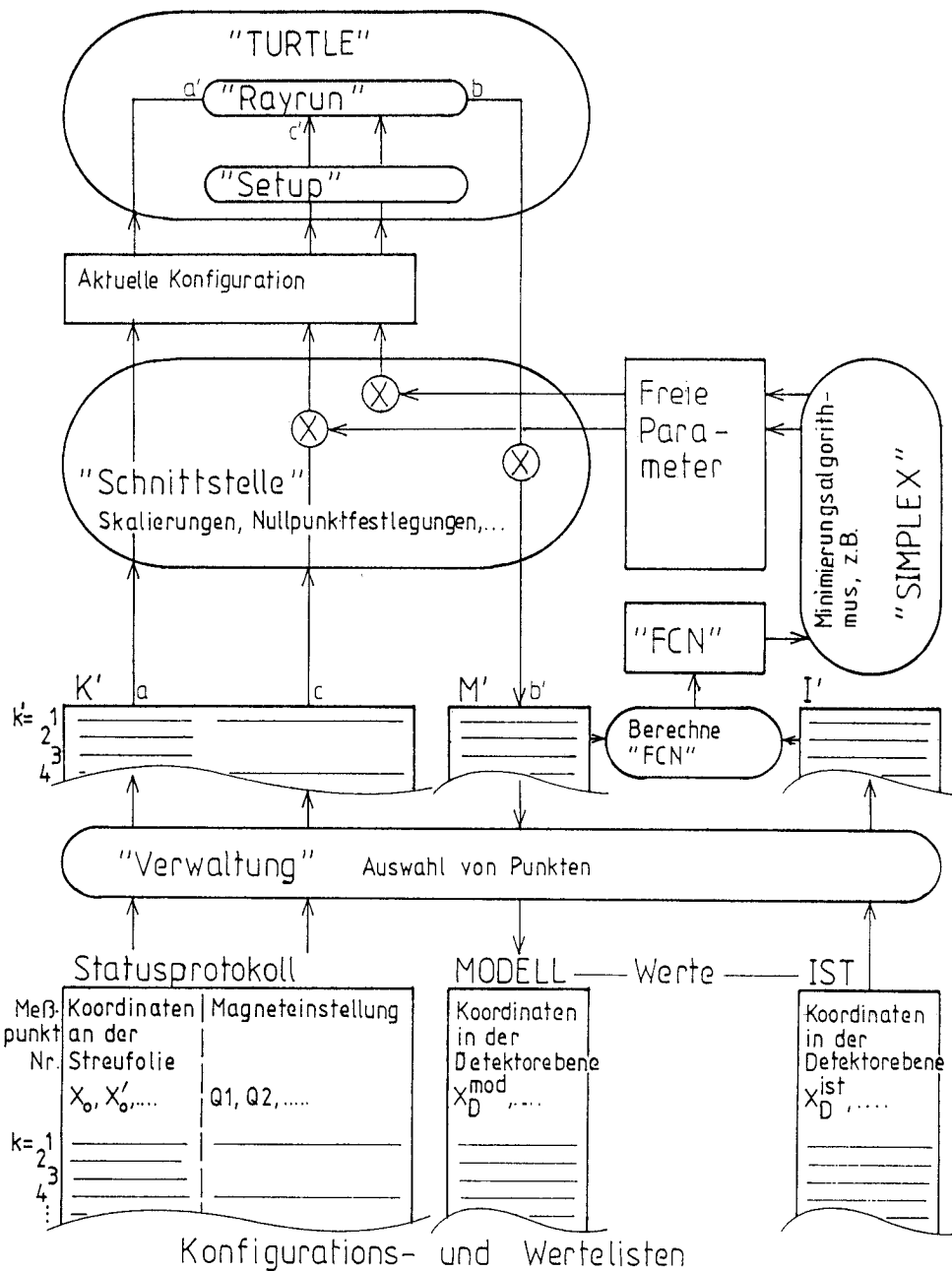


Abb. 4.3 Struktur und Datenstrom des Programms zur Unterstützung der heuristischen Modellanpassung - Eingabedaten (Statusprotokoll, Ist-Werte, freie Parameter/Anfangswerte) durchlaufen die durch Pfeile gekennzeichneten Kanäle bis zu den Ausgabedaten (Modell-Werte, freie Parameter/Endwerte). Ein Modul (Oval) entnimmt die Daten seinem Eingabespeicher (Rechtecke), verarbeitet sie und legt sie in seinem Ausgabespeicher ab, wo sie dem nächsten Modul zur Verfügung stehen. Der Programmablauf geht aus der Abbildung nicht eindeutig hervor. Das Diagramm vermittelt lediglich, welche Daten zur Durchführung eines Verarbeitungsschrittes bereitstehen müssen. Ein Iterationsschritt des Minimierungsalgorithmus erfordert mehrere Durchläufe durch den geschlossenen Kreis über "FCN". Teilweise konnten Bibliotheksmodule verwendet werden. Der Anschluß an TURTLE konnte nur durch Modifikation der TURTLE-internen Speicherverwaltung vorgenommen werden. Die Funktion einzelner Module ist im Text erklärt.

der Modellparameter liegt fest, das sind z.B. solche, die die Geometrie bestimmen. Jeder der in diesem Datensatz befindliche Parameter kann als variabel definiert werden, und wird in diesem Fall durch "SCHNITTSTELLE" aktualisiert.

Die Schlitz Einstellungen werden anstelle der durch einen Zufallzahlengenerator ("Monte-Carlo") erzeugten Phasenraumkoordinaten in das TURTLE-interne Modul "RAYRUN" eingespeist, welches die Bahnverfolgung vornimmt. Die aktualisierte Magnetkonfiguration geht in das TURTLE-interne Modul "SETUP" ein, welches alle Berechnungen erledigt, die von den Phasenraumkoordinaten unabhängig sind, um die Ergebnisse dem Modul RAYRUN zur Verfügung zu stellen.

Anmerkung: Zur Zeiteinsparung durchsetzt der Datenstrom aa'bb' das Schema mit "höherer Frequenz" als der Datenstrom cc', das Statusprotokoll ist entsprechend geordnet. Dadurch werden Mehrfachrechnungen reduziert, jedoch zugunsten einer einfachen Steuerung nicht grundsätzlich vermieden.

An dieses Schema ist ein Programm zur Minimierung der Summe der Fehlerquadrate angeschlossen, welches die "freien Parameter" variiert. Es hat sich als unsinnig erwiesen, zur Bestimmung der freien Parameter alle Meßpunkte gleichzeitig heranzuziehen. Daher werden aus dem Statusprotokoll bestimmte Meßpunkte ausgesucht. "VERWALTUNG" legt diese in der Liste K' ab, M' und I' werden entsprechend aufgefüllt. Die Auswahl wird nach interpretationsbedingten Gesichtspunkten vorgenommen. Dies geschieht durch Einschränkung des zulässigen Phasenraums und durch Festlegung einer Auswahl von Magneteinstellungen.

Die Summe der Fehlerquadrate wird aus dem Vergleich der durch TURTLE errechneten Phasenraumkoordinaten und der gemessenen Phasenraumkoordinaten gewonnen. Dabei wird berechnet:

$$FCN := \sum_{k'} \frac{1}{\Delta^2(k')} \sqrt{q_{\text{mod}}^2(k') - q_{\text{ist}}^2(k')} \quad (4.1)$$

k' ist hierbei eine laufende Nummer des Meßpunktes, summiert wird

über alle ausgewählten Meßpunkte. Als Koordinate q wird eine der Ortskoordinaten in der Detektorebene – entweder x_D oder y_D – gewählt, die Wahl kann sich für jede Meßreihe ändern. (Dadurch kann vertikale und horizontale Bewegung gleichzeitig in die Anpassung einfließen.) Δ^2 ermöglicht eine Gewichtung. Der Einfachheit halber wurden jedoch alle verwendeten Meßpunkte gleich gewichtet. Während einer Summation bleiben die "freien Parameter" unverändert.

Die Summe der Fehlerquadrate wird hier in Einklang mit der Bezeichnung im Handbuch zum Programmsystem "MINUIT" aus der allgemeinen Programmbibliothek des CERN als "FCN" bezeichnet. MINUIT minimiert die Variable FCN durch Variation der freien Parameter. Dabei wurde hauptsächlich vom Minimierungsalgorithmus "SIMPLEX" Gebrauch gemacht [P-MI83].

Sind die "freien Parameter" bestimmt und festgelegt worden, so wird die Konsistenz der Modellannahmen an allen Daten überprüft.

4.2.2 Erweiterung und Anwendung der TURTLE-Module

4.2.2.1 Quadrupole – Setzt man für jedes Teilchen den zentralen Impuls p_{zentral} aus Gl.2.2 neu fest zu $p_{\text{zentral}} = |\vec{p}|$, so verschwindet δ (siehe Gl.2.2) aus der Differentialgleichung Gl.2.6. Hat der Quadrupol- oder Multipolmagnet keine Dipolkomponente $B_y(0,0,t)$, so ändert sich $h=0$ dadurch nicht, und die Ortskurve der Zentralbahn bzw. das Koordinatensystem bleibt unverändert. In TURTLE wird zur Beschreibung der Quadrupole die Entwicklung nach δ nicht benutzt.

Um die Impulsabhängigkeit exakt wiederzugeben, wird im Programm TURTLE der in der Transfermatrix verwendete normierte Feldgradient K_1 (Definition siehe Gl.2.4) für jedes Teilchen neu berechnet: $K_1(B\rho) = B_{\text{Tip}} / r_a \cdot B\rho$. Dabei ist B_{Tip} das Feld an der Polschuhspitze, r_a ist die Apertur, und $B\rho$ die magnetische Steifigkeit des "aktuellen" Teilchens [P-TU74].

In TURTLE kann das Quadrupolfeld mit Multipolstörfeldern überlagert werden. Die optische Wirkung des Multipolstörfeldes wird in Form einer Winkeländerung $\Delta x'$ bzw. $\Delta y'$ berücksichtigt. Die Winkeländerung wird im Rahmen der Winkel-"Kick" Näherung (Gl.2.41) errechnet, der Störterm σ_x wird nach Gl.2.17 näherungsweise berechnet³⁾ :

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \Delta t \cdot \sigma_x, & \sigma_x &= -\frac{1}{B\rho} \cdot b_n \operatorname{Re}\left((x+iy)^{n-1}\right) \\ \Delta y' &= \Delta t \cdot \sigma_y, & \sigma_y &= -\frac{1}{B\rho} \cdot b_n \operatorname{Im}\left((x+iy)^{n-1}\right)\end{aligned}\quad (4.2)$$

b_n ist der Multipolkoeffizient wie in Gl.2.16 definiert. Δt ist die Ausdehnung des Multipolfeldes. In DECAY-TURTLE wird je eine Störung am Eingang und Ausgang des Quadrupolmagneten berücksichtigt, so daß $\Delta t = L/2$, L ist die Länge des Quadrupols.

Der beim reinen Gradientenfeld in der Differentialgleichung auftretende Störterm $\sigma_x = -\frac{3}{2}K_1 xx'^2$ aus Gl.2.8 wird in DECAY-TURTLE nicht berücksichtigt. Randfelder werden ebenfalls nicht berücksichtigt.

Deshalb wurde das Programm in der Weise ergänzt, daß die Wirkung des "Ein- und Ausschaltens" dieser Störungen abgeschätzt und entsprechend dargestellt werden kann. Dies dient dazu, die Wirkungen verschiedener Störungen in der Detektorebene miteinander zu vergleichen.

Die Störung $\sigma_x = -\frac{3}{2}K_1 xx'^2$ (Gl.2.8) kann auf einfache Weise wie die Multipolstörung im Rahmen der Winkel-"Kick" Näherung (Gl.2.41) behandelt werden. Danach errechnet man auf einem kurzen Stück Δt eine Bahnänderung:

$$\Delta x' = \Delta t \cdot \sigma_x, \quad \sigma_x = -\frac{3}{2}K_1 xx'^2 \quad (4.3)$$

Da sich x' im Verlauf des Durchflugs durch den Quadrupol stark än-

3) Dies ist aus dem Quelltext ersichtlich. Auf die in TURTLE gewählten Normierungen wird nicht eingegangen.

dert, muß die Ausdehnung Δt klein gewählt werden⁴⁾. Der Quadrupol wurde daher in 10 kurze Teilstücke aufgeteilt. In der Mitte jedes Teilstückes wird die Bahnänderung $\Delta x'$ mit Gl.4.3 aus den "aktuellen" Koordinaten x und x' berechnet. Desgleichen wurde verfahren, um die Genauigkeit der Multipolstörung zu erhöhen.

Um die Gültigkeit der Näherungen zu überprüfen, wurde die Aufteilung verfeinert (100 Teilstücke). Dadurch ändern sich die Positionen in der Fokalebene für eine in Q3 stark ausgelenkte Trajektorie insgesamt um 0.01 mm. Ist die Multipolkomponente eingeschaltet, ändert sich bei Verfeinerung der Aufteilung die Position in der Fokalebene für eine in Q2 stark ausgelenkte Trajektorie ($x'_0=16$ mrad) um 0.05 mm. Im Vergleich mit den durch die Störungen verursachten Bahnauslenkungen sind diese Abweichungen sehr klein (s.u.). Es wird daher angenommen, daß diese Näherungen im Rahmen dieser Anwendung genügend schnell konvergieren. Schließlich wurde das nächst höhere Glied in Gl.2.8 eingeschaltet; dessen Wirkung ist ebenfalls klein. Auch die x' -abhängigen Anteile der Multipolstörung (Gl.2.9) werden vernachlässigt.

Die Wirkung der Randfelder der Quadrupole wird mit Hilfe der in Tabelle D.1 verzeichneten Abschätzformeln berücksichtigt, die ebenfalls ein- und ausgeschaltet werden können. Randfelder gehen daher in der Weise ein, wie dies in Anhang D dargestellt wird.

4.2.2.2 Dipole - Die Koordinaten am Ausgang t_2 des Dipolmagneten werden durch eine Summation wie in Gl.2.34 berechnet, wobei der Entwicklungspunkt t_0 am Eingang t_1 des Dipolmagneten liegt. Dabei werden alle Aberrationen bis zur 2. Ordnung berücksichtigt, die in [T-KB67] verzeichnet sind. Allerdings ist das Verfahren von den Autoren von DECAY-TURTLE u.a. im Hinblick auf eine exaktere Beschreibung der Impulsabhängigkeit modifiziert worden, wie im Handbuch beschrieben.

4) Vgl. jedoch Abschnitt 2.5, wo eine analytische Methode benutzt wird.

Es ist möglich, ein Sextupolfeld oder ein Gradientenfeld auf der gesamten Länge des Dipols zu überlagern. Randfeldeffekte und die Wirkung von Feldkanten, die nicht senkrecht auf der Zentralbahn stehen, werden in einem eigenen Teilabschnitt behandelt.

Im Falle eines homogenen Dipolfeldes erlaubt TURTLE eine exakte Bahnberechnung, die sich aus einer geometrischen Konstruktion ergibt.

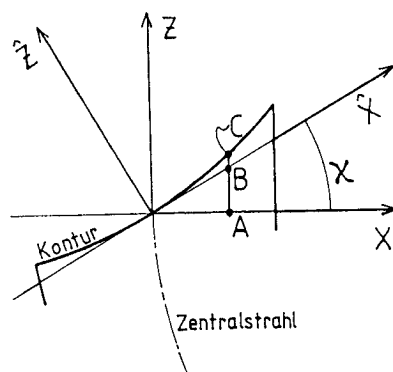


Abb.4.4 Geometrische Darstellung des Integrationsweges $\overline{BC}$ zur annähernden Berechnung des Impulsübertrages durch die Kantensextupole in TURTLE

4.2.2.3 Kantenkrümmung – Die Kantenkrümmung wird in TURTLE durch einen "kurzen" Sextupol berücksichtigt:

$$\Delta x' = h \cdot (\overline{BC}) = h \cdot \left(\frac{1}{\cos^3 \chi} \right) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{r_K} (x^2 - y^2) \quad (4.6)$$

Die Ermittlung der Radien r_K wird in Abschnitt 3.7 beschrieben. χ ist die in Abb.4.4 eingezeichnete Kantenneigung. $\Delta x'$ wird dabei angenähert. Die virtuelle Feldgrenze wird im gekippten Koordinatensystem $\hat{x}, \hat{z}$ am Entwicklungspunkt $\hat{x}=0$ durch einen Kreisbogen beschrieben. Man transformiert die Beschreibung des Bogens in das Koordinatensystem x, z und entwickelt an der Stelle $x=0$. Der quadratische Anteil ist die Strecke $\overline{BC} = \left(\frac{1}{2R \cos^3 \chi} \right) \cdot x^2$, welche der Berechnung von $\Delta x'$ zugrundeliegt. Tatsächlich kann der Kantensextupol aber an anderer Stelle und mit anderem Winkel durchlaufen werden. Bei einer Auslenkung von $x=5\text{cm}$ und $\chi=30^\circ$ beträgt die Länge des Weges ($\overline{AB}$) ca. 3cm, die Länge des Weges ($\overline{BC}$) einige mm.

4.2.2.4 Kantenneigung – TURTLE berücksichtigt zur Berechnung der Bahnstörung durch die Kantenneigung alle Aberrationen der 2.Ordnung. Diese schließen den Effekt der Kantenkrümmung ein. Die Beschreibung der Kanten wurde nicht modifiziert.

4.2.2.5 Effektive Längen – Die nach Gl.3.4 ermittelten "virtuellen" Feldgrenzen $z_{vfb}(0)$ liegen außerhalb der in Abb.1.1 bei der geometrischen Konstruktion der Zentralbahn ($\rho_z=1.92m$) berücksichtigten Feldbegrenzungen. Dies wird durch eine entsprechende Neufestlegung des Zentralbahnradius $\rho_z=1.95m$ berücksichtigt. (Da der "Überhang" des effektiven Feldes in D2 für die beiden Kanten unterschiedlich ist, muß dies durch einen zur Zentralbahn senkrechten Versatz von 0.7cm vor der zweiten Kante berücksichtigt werden.)

4.3 Erarbeitung eines Modells

4.3.1 Komponenten des Modells A

Abb.4.1 zeigt die an die Meßdaten angepaßten Modelle A, B, C. Für das Modell A sind die folgenden analytischen Beschreibungen der Spektrometerkomponenten, die in Abschnitt 4.2.2 im einzelnen erläutert worden sind, ausgewählt worden.

Die Dipole werden durch die geometrische Konstruktion beschrieben.

Die Quadrupole werden wie in Abschnitt 4.2.2.1 beschrieben. Dabei wird der Störterm in Gl.4.3 berücksichtigt, ebenso die Abschätzung für die Randfelder. Die Quadrupole Q1, Q2 enthalten außerdem eine Multipolkomponente. Um eine möglichst gute Abschätzung für Bahnänderungen durch Störterme und Multipolkomponenten zu erhalten, sind die Quadrupole in zehn Scheiben aufgeteilt worden. Um die Wirkung dieser Störungen in den Diagrammen zu veranschaulichen, wird Modell B und C eingeführt. Modell B geht durch Abschalten der Bahnstörungen dritter Ordnung im Hauptfeld und Randfeld der

Quadrupole aus Modell A hervor (vgl. Abschnitt 2.2.3 und 2.5.1). Im Modell C wird zusätzlich die Zwölfpolkkomponente in den Quadrupolen Q1 und Q2 abgeschaltet. Dabei werden keine neuen Anpassungen vorgenommen, vgl. Abschnitt 4.3.4.

Die Kanten enthalten die zur Beschreibung der Kantenkrümmung notwendigen Sextupolanteile. Damit gehen die von W.Hürlimann ermittelten Konturen der Dipolfelder (Abschnitt 3.7) in die Modelle A, B, C ein. Randfeldanteile an den Dipolkanten "(B)" und "(C)" aus Gl.2.24 werden nicht berücksichtigt.

4.3.2 Freie Parameter des Modells A

Um Kalibrierungsfehler zu eliminieren und eine möglichst gute Beschreibung der Messungen zu ermöglichen, werden für die Gradienten der Quadrupole und die Feldwerte der Dipole Skalierungsfaktoren γ als freie Parameter eingeführt. Da die Dipolhauptfelder mit präzisen NMR-Sonden gemessen werden, wird ein einheitlicher Eichfaktor $\gamma(D)$

$$\gamma(D) := \gamma(D1)=\gamma(D2) \quad (4.7a)$$

für beide Dipolfelder angenommen. In den Modellrechnungen wird für die magnetische Steifigkeit der Deuteronen der Wert $(B\rho)_{\text{Zentral}}^{\text{Modell}} = 1.713 \text{ Tm}$ eingesetzt. Für die Quadrupole gilt auf Grund unterschiedlicher Sondeneichungen:

$$\gamma(Q1) \neq \gamma(Q2) \neq \gamma(Q3) \quad (4.7b)$$

Die im TURTLE-Eingabedatensatz (Abb.4.3, aktuelle Konfiguration) verwendeten Felder B^{Modell} für Q1, Q2, D1, D2, Q3 werden folgendermaßen definiert (Programmteil "Schnittstelle"):

$$\begin{aligned} B^{\text{Modell}}(Q1) &= \gamma(Q1) \cdot B^{\text{Ist}}(Q1), \text{ entsprechend } Q2, Q3 \\ B^{\text{Modell}}(D1) &= \gamma(D) \cdot B^{\text{Ist}}(D1), \quad B^{\text{Modell}}(D2) = \gamma(D) \cdot B^{\text{Ist}}(D2) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Anmerkung: Das Verhältnis von Entwurfsimpuls p_{Zentral}^E und Dipolfeld B_y^{Modell} ist durch die Geometrie festgelegt. Bei Skalierung des Dipolfeldes $B^{\text{Modell}}(D1)$, $B^{\text{Modell}}(D2)$ wird daher auch der Entwurfsimpuls p_{Zentral}^E entsprechend skaliert, der sich demnach vom Eingangsimpuls p_{Zentral} unterscheidet.

Die Koordinaten x_D , y_D in der Detektorebene werden in einer Einheit von 0.25mm (=1 Kanal) bestimmt und beziehen sich auf den ersten Anodendraht. Der Abstand des Drahtes bezüglich der Symmetrieachse des Quadrupols Q3 ist nicht exakt vermessen worden. Dieser Abstand wird daher als freier Parameter angesehen und wird im folgenden als Δ_x b.z.w Δ_y bezeichnet.

Die in den Quadrupolen Q1, Q2 berücksichtigten Multipolkomponenten werden hier in der folgenden Normierung angegeben⁵⁾:

$$M_n = \frac{r_a^{n-2} b_n}{b_2} \quad (4.9)$$

Dabei ist b_n der Koeffizient des Multipolfeldes, b_2 der Koeffizient des Quadrupolfeldes (Gl.2.16) und r_a die Apertur des Quadrupolmagneten. Die Normierung ist so gewählt, daß durch M_n das Verhältnis von Störfeld zu Quadrupolfeld am Aperturradius angegeben wird. Modell A berücksichtigt eine Zwölfpolkkomponente ($n=6$), die anderen Komponenten ($n>2$) sind Null. Es wird angenommen, daß die Zwölfpolkkomponente b_6 proportional zum Quadrupolfeld b_2 skaliert. Da die Quadrupole baugleich sind, ist ein freier Parameter M_6 für beide Quadrupole ausreichend.

Zusammenfassung: Die freien Parameter des Modells A sind die Skalierungsfaktoren $\gamma(Q1)$, $\gamma(Q2)$, $\gamma(D)$, $\gamma(Q3)$ und die relative Multipolstärke M_6 . Mit Hilfe dieser Parameter werden die im Modell angenommenen Felder bzw. Feldanteile einheitlich mit den jeweils ge-

5) Die Normierung in TURTLE entspricht b_n/b_2 .

messenen Feldwerten (NMR- bzw. Hall-Messung) verkoppelt. Außerdem sind Positionskorrekturen Δ_x , Δ_y für die absolute Detektorposition vorgesehen; alle anderen geometrischen Abstände sind fest.

4.3.3 Anpassung der Quadrupol- und Dipolfelder

Zunächst wird $M_6=0$ gesetzt und es werden die Parameter $\gamma(\dots)$ und Δ_x , Δ_y festgelegt. Daraufhin erfolgt eine Anpassung von M_6 . Anschließend werden die Parameter γ und Δ_x , Δ_y noch einmal geringfügig korrigiert.

Die Anpassung der Eichfaktoren γ und Δ_x , Δ_y wird nochmals in zwei Schritte aufgeteilt.

Zunächst wird $\gamma(Q3)$, $\gamma(D)$ und Δ_x festgelegt. Dazu wird der Anfangsphasenraum auf $x'_0=0$ eingeschränkt. Es wird angenommen, daß der zentrale Strahl ($x'_0=0$) in den vorderen Quadrupolen zentriert ist. Dadurch werden die betrachteten Trajektorien von der Einstellung von Q1, Q2 unabhängig. Ziel ist es, in der Modellierung die Abstände der Trajektorien zur Symmetrieachse des Quadrupols Q3 richtig wiederzugeben.

Nur eine bestimmte Einstellung von $\gamma(Q3)$ führt dazu, daß der Abstand zweier mit verschiedenen Dipolhauptfeldern (8853 Gauss, 8472 Gauss) in der Detektorebene gemessenen Trajektorien durch das Modell wiedergegeben wird, da die Dispersion durch Q3 festgelegt wird. (Der Eingangsimpuls ist für alle Trajektorien gleich, durch die Feldänderung wird eine Impulsänderung simuliert.)

Der Abstand zur Symmetrieachse des Q3 ist durch die Dipolfelder bestimmt. Kennt man den wahren Abstand, so kann $\gamma(D)$ festgelegt werden. Eine Information über die Koordinaten in Q3 ist ebenso in den Meßdaten enthalten. Dazu wurde Q3 abgeschaltet. Eine Trajektorie, die Q3 nicht zentral durchläuft, wird beim Abschalten von Q3 in der Detektorebene versetzt. Dieser Sprung ist linear abhängig vom Abstand zur Zentralachse und von der bereits festgelegten Ein-

stellung $\gamma(Q3)$. Da die Trajektorien an der Symmetrieachse von Q3 angebunden werden, muß die Null-Position des Detektors an die Trajektorien angepaßt werden. Deshalb wird gleichzeitig Δ_x freigegeben.

Die Parameter $\gamma(D), \gamma(Q3), \Delta_x$ werden in einem Arbeitsgang an die oben erläuterte Auswahl von Meßpunkten angepaßt. Der Vergleich mit anderen Daten führt zu Inkonsistenzen in der Positionierung in der Detektorebene, die bis zu 2.5 mm betragen. Dies entspricht einem Fehler im Dipolfeld von etwa 1.3 Gauss.

Im zweiten Schritt werden die Einstellungen $\gamma(Q1)$ und $\gamma(Q2)$ festgelegt. Für einen dünnen Quadrupol erhält man näherungsweise bei einer Änderung der Fokussierungsstärke $\Delta K_1 = \Delta(\frac{1}{B\rho} b_2)$ nach Gl.2.41 die folgende Änderung der Position in der Detektorebene Δx_D (wenn $x_0=0$):

$$\Delta x_D = \bar{S}_x \cdot \Delta K_1 \cdot L \cdot S_x \cdot x'_0. \quad (4.10)$$

Die Gradienten $\partial x_D / \partial x'_0$ bzw. $\partial y_D / \partial y'_0$ in Abb.4.1-01 und Abb.4.1-07 sind damit über die Fokussierungsstärken K_1 der Quadrupole einstellbar. Dadurch ist $\gamma(Q1)$ und $\gamma(Q2)$ festgelegt.

Zusammenfassung: Die freien Parameter sind so angelegt, daß die Fokussierung in der Detektorebene, der Abstand der Trajektorie von der Achse des Quadrupols Q3 und die Dispersion angepaßt werden kann.

Die Anpassungen ergeben folgende Eichfaktoren: $\gamma(D)=1.0090$, $\gamma(Q1)=-0.05766$ T/mV, $\gamma(Q2)=0.05973$ T/mV, $\gamma(Q3)=0.06786$ T/mV. Aus Magnetfeldmessungen (Abschnitt 3.5) ergibt sich für den Gradientenanteil des Quadrupolfeldes ein Eichfaktor $\hat{\gamma}(Q2) = 0.06193$ T/mV. Damit weichen die in Modell A verwendeten Felder um +0.9% (Dipole) bzw. -3.6% (Quadrupol Q2) von den Feldmessungen ab. Der Fehler im Quadrupolfeld entspricht nach Gl.4.10 einem Fehler in der Fokussierung des Gesamtsystems von $\Delta x_D / x'_0 = 5.4 \cdot 10^{-2} \frac{\text{cm}}{\text{mrad}}$. Ein solcher Fehler entsteht z.B. dann, wenn die Neigung der zweiten Kante von Di-

pol D1 um ca. 32 mrad $\hat{=}$ 1.8° falsch angenommen wird.

4.3.4 Anpassung hoher Multipolkomponenten

Abb.4.5 zeigt drei konkurrierende Annahmen im Vergleich. Es wird nur ein Teil der Meßreihen gezeigt. In diesen sind die Trajektorien auf Grund der Dispersion nur wenig ausgelenkt.

In Test "M6" geht eine Zwölfpolkkomponente $M_6=4.3\%$ in Q1, Q2 ein, in Test "M4" geht eine Achtpolkkomponente $M_4=3.8\%$ ein. In Test "0" sind beide Multipolkomponenten abgeschaltet. Ausgehend vom Test "0" wurde jeweils eine der beiden Multipolkomponenten angepaßt. Zur Anpassung wurden nur die in **Abb.4.5-01** gezeigten Daten in einem Bereich $-15\text{mrad} < x'_0 < 15\text{mrad}$ verwendet. (Außer der Multipolkomponente wurde eine additive Konstante zugelassen.)

Vergleicht man nun die Tests "M6" und "M4" anhand von **Abb.4.5-07**, wird ein signifikanter Unterschied deutlich, der auf Grund der umgekehrten Polung der Störfelder in der vertikalen Symmetrieebene der Quadrupole zustandekommt.

Abb.4.5-06 zeigt, daß außerhalb der Mittelebene die vertikale Auslenkung y von der horizontalen Phasenraumkoordinate x'_0 abhängt, sobald Multipolkomponenten eingeschaltet sind. Die folgende Abschätzung zeigt am Beispiel von Test "M6", daß die in **Abb.4.5-01** und **Abb.4.5-06** dargestellten Bildfehler konsistent durch das Multipolfeld erklärt werden können.

Die Bahnstörung $\Delta x'$ wird nach **Gl.4.2** berechnet. Der Einfachheit halber wird für diese Abschätzung $\Delta z=L$ gesetzt, die "kurze Störung" wird demnach über den gesamten Quadrupol ausgedehnt. (L ist die Länge des Quadrupols.) Außerdem wird die Koordinate x in **Gl.4.2** in erster Ordnung abgeschätzt zu $x=s_x \cdot x'_0$. Damit gehen für diese Abschätzung "Kopplungen", vgl. Abschnitt 2.4.3, 2.4.5, verloren. Die Bahnabweichung in der Detektorebene wird nach **Gl.2.41** zu $\Delta x_D = \bar{s}_x \cdot \Delta x'$ berechnet.

Abb.4.5-01 > . . . <

Darstellung:

$$x_D(x'_0), y'_0 = 0 \text{ mrad}$$

Felder:

$$D1, D2 = 0.8683 \text{ T}$$

$$Q1=7.64\text{mV}, Q2=5.84\text{mV},$$

$$Q3=4.47\text{mV}$$

Test: "M4", "M6", "0"

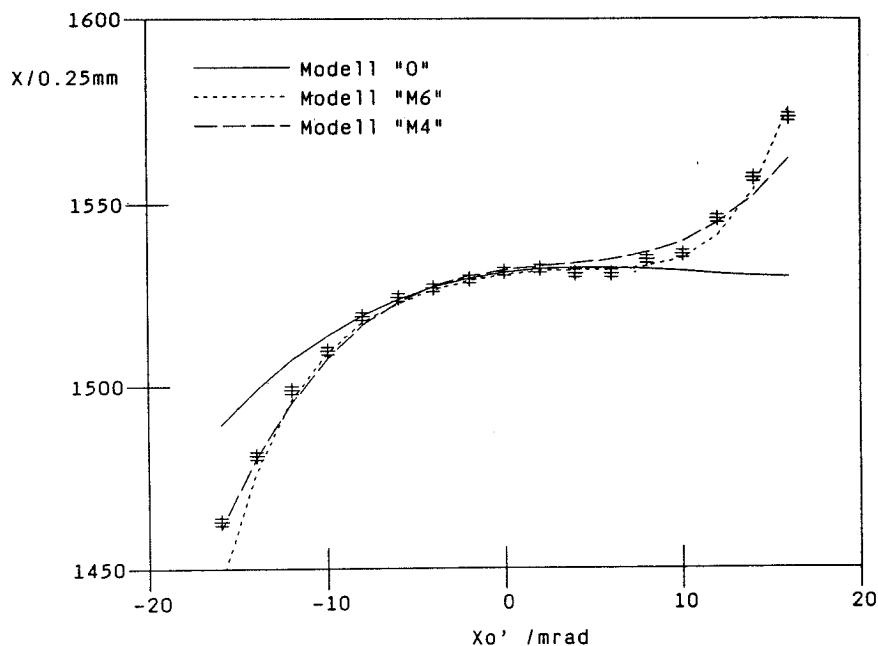


Abb.4.5-05 > .y. <

Darstellung:

$$x_D(x'_0), \\ y'_0 = 40(+)/-40(x) \text{ mrad}$$

Felder:

$$D1, D2 = 0.8683 \text{ T}$$

$$Q1=7.64\text{mV}, Q2=5.84\text{mV},$$

$$Q3=4.47\text{mV}$$

Test: "M4", "M6", "0"

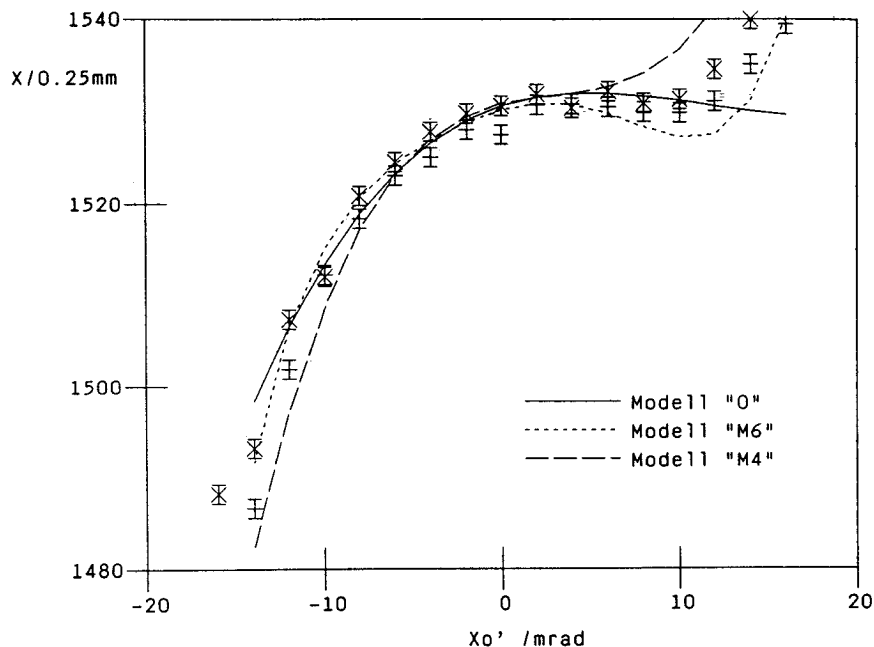
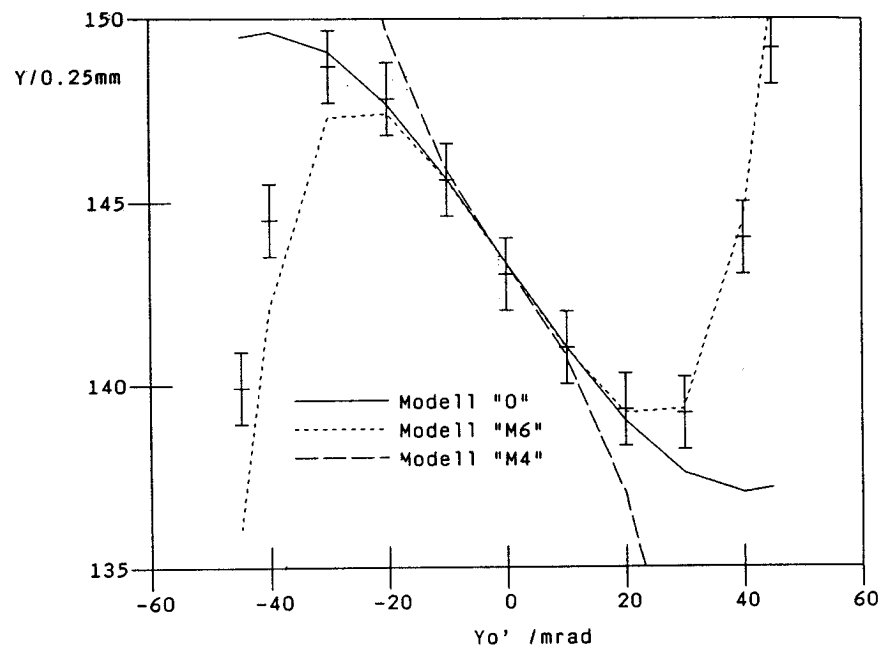
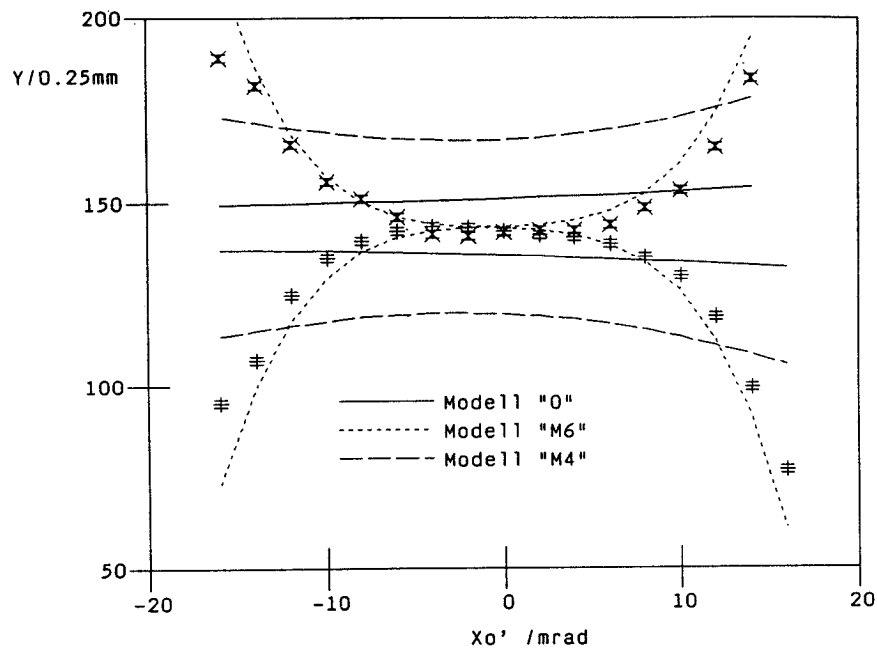


Abb.4.5 Verzerrungsmuster der Multipole - Die Meßdaten entsprechen Abb.4.1 (vgl. Legende Abb.4.1). Es ist nur ein Teil der Diagramme dargestellt, die Kennzeichnung -01 u.s.w. entspricht Abb.4.1. Die berechneten Verzerrungsmuster entstehen durch eine Achtpolkomponente ("M4") bzw. Zwölfpolkomponente ("M6") in den Quadrupolen Q1, Q2. Für "0" sind diese Komponenten abgeschaltet. Die charakteristischen Muster entstehen auf Grund der Quellfreiheit des Magnetfeldes.



Wir setzen den Ausdruck $x = s_x \cdot x'_0$ in Gl.4.2 ein und setzen dort $n=6$. Den so erhaltenen Ausdruck für $\Delta x'$ setzen wir in die Gleichung Gl.2.41 ein. Wir summieren über die von beiden Quadrupolen hervorgerufenen Störungen, $j=1,2$. Auf eine entsprechende Indizierung von $\bar{s}_x$ und s_x wird verzichtet. Geht man mit y analog vor, erhält man die durch die Multipolfelder hervorgerufenen Bahnabweichungen in der Detektorebene x_D, y_D :

$$\Delta x_D \approx \sum_{j=1}^2 \bar{s}_x \cdot L \cdot \frac{1}{p} \cdot b_6^{(j)} \cdot [s_x^5 x_0'^5 - 10 s_x^3 s_y^2 x_0'^3 y_0'^2 + 5 s_x^3 s_y^2 x_0' y_0'^4] \quad (4.11x)$$

$$\Delta y_D \approx \sum_{j=1}^2 \bar{s}_y \cdot L \cdot \frac{1}{p} \cdot b_6^{(j)} \cdot [s_y^5 y_0'^5 - 10 s_y^3 s_x^2 y_0'^3 x_0'^2 + 5 s_y^3 s_x^2 y_0' x_0'^4] \quad (4.11y)$$

Gl.4.11 gibt die Abhängigkeit der Abweichungen in der Detektorebene $\Delta x_D, \Delta y_D$ von den Koordinaten an der Streufole x'_0, y'_0 wieder. Die Differenz zwischen Test "M6" und Test "0" in Abb.4.5 wird näherungsweise durch $\Delta x_D, \Delta y_D$ nach Gl.4.11 beschrieben. Der Term in $x_0'^4 y_0'$ aus Gl.4.11.y erklärt weitgehend den Bildfehler in Abb.4.5-06, während der Term in $x_0'^5$ aus Gl.4.11x den in Abb.4.5-01 dargestellten Bildfehler konsistent erklärt, siehe Abschätzung Anh.C.2.1. Die in Gl.4.11 auftretenden Mischterme sind eine Folge der Laplacegleichung (Gl.2.13), und werden offensichtlich in der Ionenoptik sichtbar.

Man erkennt, daß die Annahme einer Zwölfpolkkomponente die gemessenen Daten zufriedenstellend erklärt und gegenüber der Annahme einer Achtpolkkomponente überlegen ist. Nähme man eine Störung in der notwendigen Stärke an späterer Stelle an, würden die im Teilsystem D1, D2, Q3 durch Dispersion stark ausgelenkten Trajektorien nicht wiedergegeben, vgl. Abschnitt 4.3.5 und 4.3.7.

Abb.4.5-06 zeigt offensichtlich ein für den Zwölfpol charakteristisches Verhalten. Deshalb ist in Modell A (Abb.4.1) eine Kurve der in "-06" dargestellten Daten zur Anpassung verwendet worden. Man erhält $M_6 = 3.6\%$. Der Unterschied zum oben ermittelten Wert ($M_6 = 4.3\%$), bei dem der Datensatz "-01" (siehe Abb.4.5-01) zur Anpassung verwendet wurde, deutet darauf hin, daß noch geringfügige

Differenzen durch andere Beiträge zu erklären sind. Die Deutung der Daten soll jedoch nicht überzogen werden.

Zusammenfassung: Zur Anpassung der nichtlinearen Eigenschaften in der Horizontalen und gleichzeitig in der Vertikalen reicht ein freier Parameter M_6 (Gl.4.9) weitgehend aus.

Die oben erläuterte **Abb.4.1** zeigt neben dem Modell A die Modelle B und C. In Modell B wurden in allen Quadrupolen die Störungen dritter Ordnung (vgl. Abschnitt 2.5.1) abgeschaltet. Im Modell C wurde außerdem die Zwölfpolkkomponente in den Quadrupolen Q1, Q2 abgeschaltet. Die restlichen Parameter dieser Modelle sind identisch mit denen von Modell A und unverändert.

Abb.4.1-01/-02 zeigt, daß die Störungen dritter Ordnung von der durch die Zwölfpolkkomponente (fünfte Ordnung) verursachten Störung überdeckt werden. Die Störungen dritter Ordnung sind jedoch ohnehin so klein, daß sie bei dem gegebenen Öffnungswinkel und der gegebenen Meßgenauigkeit nur schwierig nachweisbar sind. Ähnlich verhält es sich mit den durch die Dipole verursachten Fehlern dritter Ordnung, vgl. Abschnitt 2.5.2 .

In den Abbildungen 4.1-02/03/04 erkennt man für $|x'_0| > 16$ mrad einen "Knick" in den Meßdaten, der durch das Modell nicht wiedergegeben wird. Dieser Knick wird durch die Apertur des Quadrupols Q2 bewirkt, vgl. **Abb.1.3**, Abschnitt 1.1 .

4.3.5 Chromatisches Verhalten

Wegen des großen zur Verfügung stehenden Impulsbereiches von etwa 4 bis 5 % muß die Abhängigkeit der Abbildungseigenschaften vom Impuls berücksichtigt werden. Eine Impulsabweichung δ erzeugt beispielsweise einen relativen Fehler in der Fokussierungsstärke K_1 des Quadrupols Q2 zu $\Delta K_1/K_1 \approx -\delta$. Nach Gl.4.10 führt Q2 daher näherungsweise eine Aberration $(x|x'_0\delta) = \partial^2 x_D / \partial x'_0 \partial \delta \approx 1.5 \cdot 10^{-2}$ cm/mrad % in das System ein. Die gebogenen Feldkonturen im dispersiven Teil des

Systems haben den Zweck, die Aberration $(x|x'_0\delta)$ zu kompensieren.

Die in **Abb.4.1-03/04** betrachteten Trajektorienbündel verlaufen etwa spiegelsymmetrisch zur Zentralbahn und sind im dispersiven Teil des Systems stark ausgelenkt (**Abb.4.2**). Um eine Impulsänderung zu simulieren und zu veranschaulichen, sind in den Meßreihen **Abb.4.1-02/03/04** die Felder so skaliert worden, daß sämtliche Magnete relativ zueinander die gleichen Feldeinstellungen haben. Die mittlere Steigung $\Delta x_D/\Delta x'_0$ im Bereich $-10 \text{ mrad} \leq x'_0 \leq 10 \text{ mrad}$ der in diesen Abbildungen dargestellten Meßreihen ist in **Abb.4.6a** gegen das Dipolfeld aufgetragen. (Die obere Achse bezeichnet die simulierte Impulsabweichung δ .) Nimmt man an, daß $\Delta x_D/\Delta x'_0$ in guter Näherung höchstens quadratisch von δ abhängt, so findet man in der Nähe des zentralen Impulses ein Minimum. Der beobachtete Bildfehler muß daher im wesentlichen als Aberration dritter Ordnung $(x|x'_0\delta^2) = \partial^3 x_D / \partial x'_0 \partial \delta^2$ gedeutet werden, während $(x|x'_0\delta)$ weitestgehend kompensiert ist.

In **Abb.4.6a** sind ebenso die durch die Modelle A, B vorhergesagten Steigungen $\Delta x_D/\Delta x'_0$ eingezeichnet. Gerade die Tatsache, daß $(x|x'_0\delta)$ kompensiert ist, wird durch die Modelle nur unvollkommen wiedergegeben. Im Vergleich zu den beobachteten Bewegungen sind die Abweichungen der Modelle A, B von den Messungen nicht vernachlässigbar. Eine Diskussion möglicher Fehlerquellen wird in Abschnitt 4.3.7 durchgeführt.

4.3.6 Merkmale der vertikalen Bewegung

Die Abhängigkeit der horizontalen Position x_D vom vertikalen Einschußwinkel y'_0 wird in den charakteristischen Eigenschaften wiedergegeben (**Abb.4.1-08**). Diese Abhängigkeit ist in der Abbildung nach dem horizontalen Einschußwinkel x'_0 parametrisiert. Die Tatsache, daß hier dispersiv stark ausgelenkte Trajektorien betrachtet werden (Kürzel "d"), hat in diesem Zusammenhang keine Bedeutung, eine entsprechende Messung mit Positionen x_D in der Mitte der Detektorebene steht nicht zur Verfügung.

Abb.4.6a - Abhängigkeit der Fokussierung vom relativen Impuls
Experimentell + , Modell A, B und Test K3

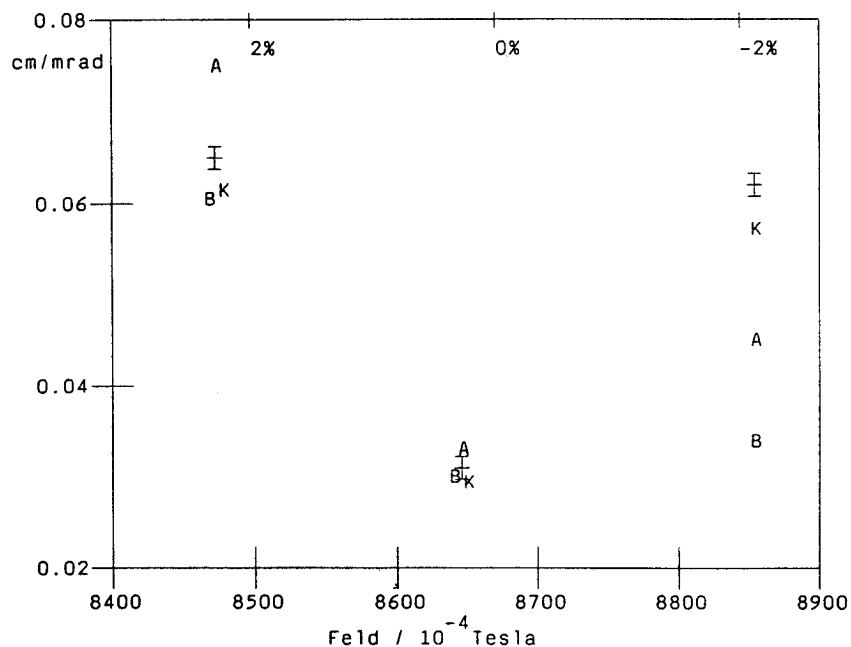


Abb.4.6b - Differenz zwischen Experiment und Modell A, B, K3

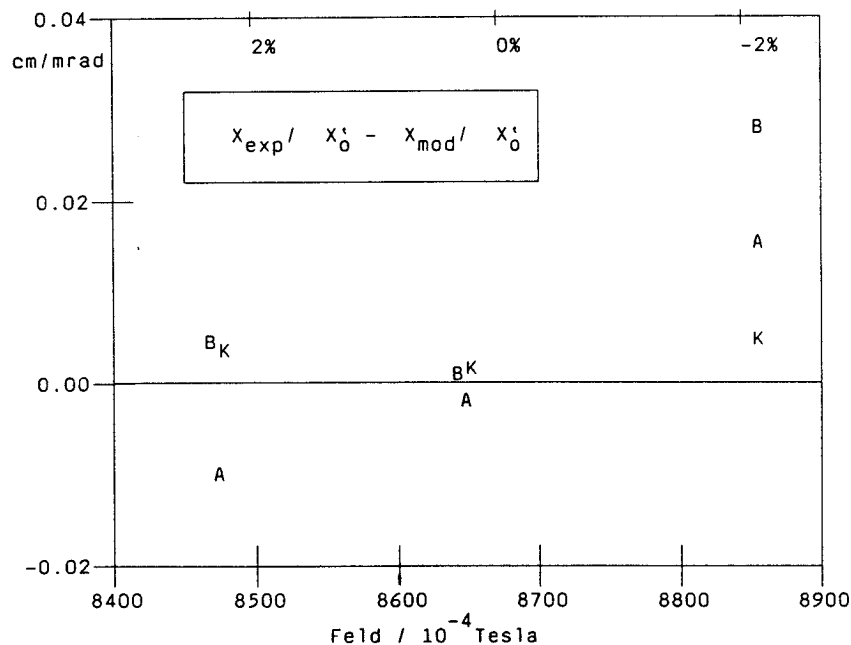


Abb.4.6a/b Chromatisches Verhalten - Die mittlere Steigung $\Delta x_D / \Delta x'_0$ im Bereich $-10\text{mrad} \leq x'_0 \leq 10\text{mrad}$ ist in **Abb.4.6a** gegen die (simulierte) Impulsabweichung δ aufgetragen. Die mit Fehlerbalken gekennzeichneten Werte sind experimentell, die mit A, B gekennzeichneten Werte entsprechen den Modellen. Test K3 (Symbol K) wird in Abschnitt 4.3.7 erläutert. **Abb.4.6b** zeigt die Differenzen zwischen experimentellem Wert und Modell A, B und Test K3.

Die nach $x'_0 = 0$ mrad parametrisierte Kurve zeigt eine schwache Durchbiegung, die von den Feldkanten der Dipole (vgl. Abschnitt 4.2.2.3) herrührt, und gemäß Modell C⁶⁾ im wesentlichen von der Koordinate x'_0 unabhängig ist. Bei den nach $x'_0 = \pm 10$ mrad parametrisierten Kurven ist nach Modell A eine im Verhältnis stärkere Durchbiegung überlagert, die auch in den Daten erkennbar wird – obwohl die Trajektorien der mit $x'_0 = -10$ mrad parametrisierten Kurve bereits außerhalb des Aperturradius von Q3 verlaufen. Diese Durchbiegung rührt vom Feldfehler in Q1, Q2, und ist auf gleiche Weise begründet, wie das entsprechende Gegenstück mit vertauschten Koordinaten in Abb.4.1-06 (vgl. Abschnitt 4.3.4).

Ein weiterer wesentlicher Aspekt der vertikalen Bewegung ist deren chromatische Abhängigkeit. Die in Abb.4.1-10 benutzten Einstellungen entsprechen exakt den in Abb.4.1-03/04 gewählten, so daß mit Hilfe der beiden dargestellten Messungen die Auswirkung einer Impulsänderung auf die bereits in Abschnitt 4.3.5 beschriebene Weise simuliert wird. Man schätzt (mit Hilfe von Gl.4.10) ab, daß die vom Impuls lineare Abhängigkeit der Fokussierungsstärke des Quadrupols Q1 bei der hier dargestellten Impulsänderung von etwa 4.5% eine Änderung der Fokussierung von etwa $5 \cdot 10^{-2}$ cm/mrad bewirkt. Aus den Messungen liest man eine vergleichbare Änderung ab. Das bedeutet, die lineare Impulsabhängigkeit der vertikalen Fokussierung, $(y|y'_0 \delta)$, ist im wesentlichen nicht kompensiert. Auch das Modell A sagt eine ähnliche Änderung voraus.

Abb.4.7 zeigt Strahlengänge in der Vertikalen.

4.3.7 Die Grenzen des Modells A

Die vorhergehende Analyse hat gezeigt, daß das mit Hilfe eines heuristischen Verfahrens gefundene Modell A die charakteristischen Abbildungsfehler wiedergibt. Abweichungen gibt es bei der Beschreibung des chromatischen Verhaltens. Die Differenzen liegen außerhalb

6) Modell C enthält keine Feldstörung in den Quadrupolen Q1, Q2, vgl. Abschnitt 4.3.4, vorletzter Absatz.

Abb.4.7a Berechnete Bahn $Y(t)$ nach Modell A
 $Y_0' = +30/-30$ mrad, $\delta = -2\%/0\%/2\%$

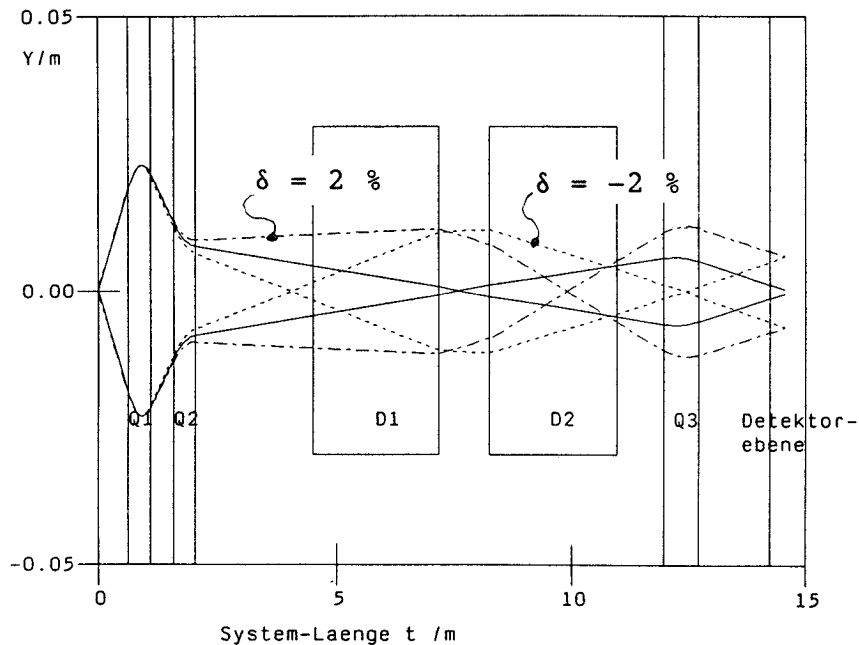


Abb.4.7b Berechnete Bahn $Y(t)$ nach Modell A
 $Y_0' = +60/-60$ mrad, $\delta = -2\%/0\%/2\%$

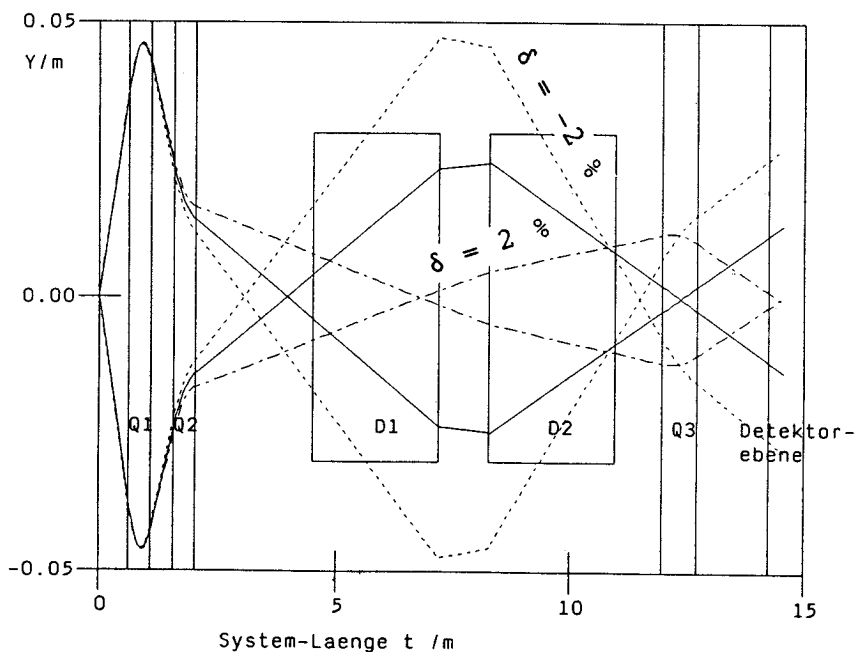


Abb.4.7 Strahlengänge in der Vertikalen – Der Strahlengang in der Vertikalen hängt stark von der Impulsabweichung δ ab. Ist das System für den zentralen Impuls $\delta=0$ in der Vertikalen fokussiert, so ist es für $\delta \neq 0$ nicht fokussiert (Abb.4.7a). Bei großer Strahlfleckausdehnung oder bei Fehladjustierung des Strahlflecks besteht wegen der großen vertikalen Vergrößerung in den Dipolen die Gefahr des "Abschneidens", insbesondere jedoch bei zusätzlicher Strahlausdehnung für $\delta \neq 0$. Eine zusätzliche Komplikation tritt wegen der Nichtlinearitäten in den Quadrupolen auf, die bei großen Öffnungen eine wiederum stark impulsabhängige überproportionale Ausdehnung bewirken (Abb.4.7b).

der statistischen Streuung der Meßwerte.

Abb.4.6b zeigt die in **Abb.4.6a** auftretenden Differenzen zwischen der durch Messung und durch die Modelle bestimmten Steigung, nämlich $\Delta x_D^{ist} / \Delta x'_0 - \Delta x_D^{mod} / \Delta x'_0$ (vgl. Abschnitt 4.3.5). Modell A hat gegenüber Modell B den Vorteil, daß in der Differenz die δ^2 -abhängigen Anteile nahezu verschwinden. D.h., die Aberration ($x|x'_0\delta^2$) wird durch das Modell richtig beschrieben, sobald man im Quadrupol Q3 die Störungen dritter Ordnung einschaltet. Die Differenzen in der Steigung können im Detail aus **Abb.4.8-03/-04** entnommen werden.

Die Aberration ($x|x'_0\delta$) ist dagegen weder durch das Modell A noch durch das Modell B exakt beschrieben (**Abb.4.6**). Das Modell A wird entsprechend korrigiert, indem der Krümmungsradius einer der Kanten verändert wird:

Kante	Modell A ⁷⁾	angepaßter Wert	Test(s.u.)
2.Kante D1	$r_{K2} = 1.23 (0.01) \text{ m}$	$r_{K2} = 1.05 \text{ m}$	"K2"
oder 1.Kante D2	$r_{K3} = 2.74 (0.01) \text{ m}$	$r_{K3} = 3.34 \text{ m}$	"K3"
oder 2.Kante D2	$r_{K4} = 3.99 (0.02) \text{ m}$	$r_{K4} = 4.85 \text{ m}$	"K4"

In **Abb.4.6** ist das Ergebnis für die Kante K3 dargestellt. Die Inkonsistenz in ($x|x'_0\delta$) verschwindet weitgehend (**Abb.4.6b**). (Die Differenz $x_D^{ist} - x_D^{mod}$ im Punkt $x'_0 = 0 \text{ mrad}$ bleibt jedoch erhalten, siehe **Abb.4.8** .) Die Veränderung der anderen Kanten führt zu ähnlichen Ergebnissen. Einer der Kantenradien muß demnach um ca.20% geändert werden, um das chromatische Verhalten annähernd richtig zu beschreiben. Es ist selbstverständlich nicht plausibel, die Inkonsistenz einer einzelnen Kante zuzuschreiben. Eine genaue Festlegung, an welcher Stelle im System passende Störungen zweiter Ordnung positioniert werden müssen, geht wegen der begrenzten Meßstatistik und der eingeschränkten Apertur aus den Messungen nicht hervor. Dies wird in der Bildbeschreibung zu **Abb.4.9** im Detail erläutert. Man schätzt leicht ab, daß die Streuungen in der gemessenen Koordinate x_D^{ist} durch Feldfehler in den Dipolfeldern verursacht werden können (Abschätzung Anh.C.2.2).

7) Zuverlässigkeit des Fehlers: $\approx 60\%$, Fehlerbalken in **Abb.3.7**: $\approx 60\%$

Abb.4.8-03, Modell: A/D/B, $X(X_0')$, $Y_0'=0$ mrad
 D1,D2: 8472 Gauss, $Q_1=7.48$, $Q_2=5.71$, $Q_3=4.38$

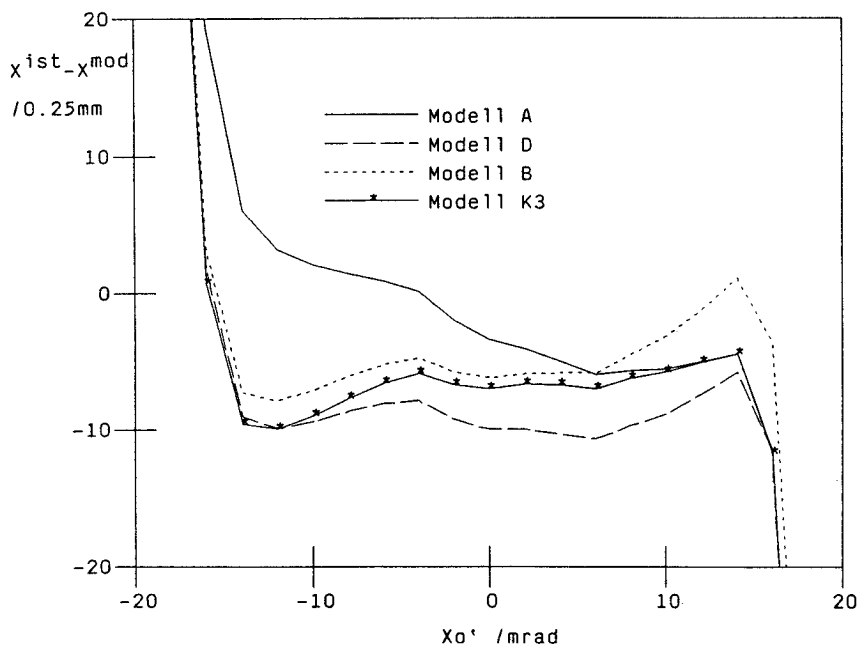


Abb.4.8-04, Modell: A/D/B, $X(X_0')$, $Y_0'=0$ mrad
 D1,D2: 8853 Gauss, $Q_1=7.82$, $Q_2=5.98$, $Q_3=4.57$

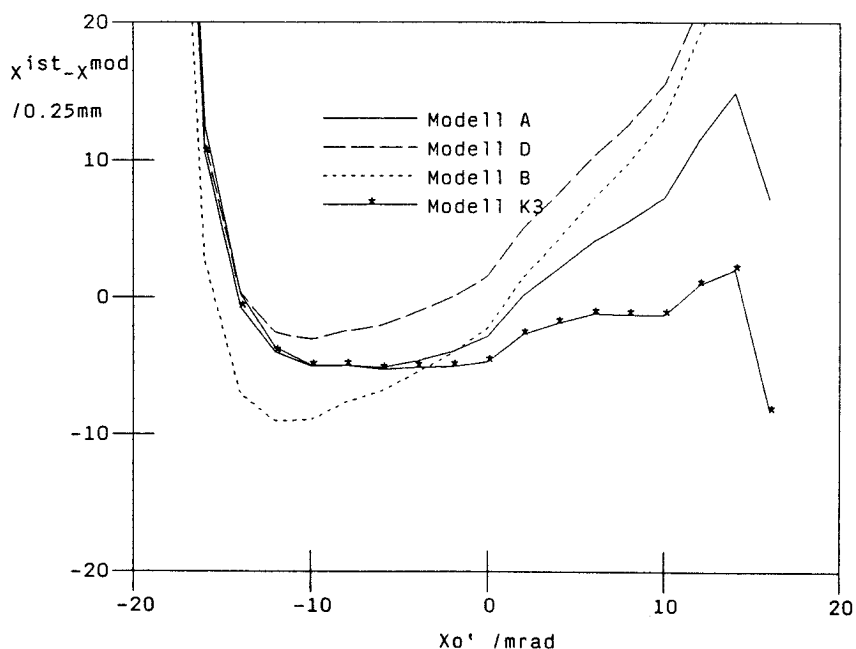


Abb.4.8-03/-04 Detaildarstellung des chromatischen Verhaltens - Die Abbildung zeigt im Detail die Differenzen zwischen den gemessenen Koordinaten x_D^{ist} und den gerechneten Koordinaten x_D^{mod} für die Modelle A, B, D (s.u.) und den Test "K3" bei starker dispersiver Auslenkung. In Modell B sind die durch das Randfeld und das ideale Gradientenfeld des Quadrupols verursachten Störungen dritter Ordnung abgeschaltet. In Modell D ist hingegen nur die Randfeldstörung der Quadrupole abgeschaltet. Für $x_0'=0$ mrad heben sich die durch beide Störungen hervorgerufenen Bahnänderungen etwa gegenseitig auf (vgl. Tabelle 2.3). Für $x_0' \neq 0$ mrad kommt es zu deutlichen Unterschieden zwischen den gezeigten Modellen, die auf die stark von x_0' abhängige und hohe Bahnneigung (hohes x') im Quadrupol Q3 zurückzuführen sind. Im Test "K3" ist die Kantenkrümmung phenomenologisch korrigiert worden (s.u.). Die bei $x_0'=\pm 15$ mrad stark abfallenden Äste werden durch die Apertur des Quadrupols Q2 verursacht.

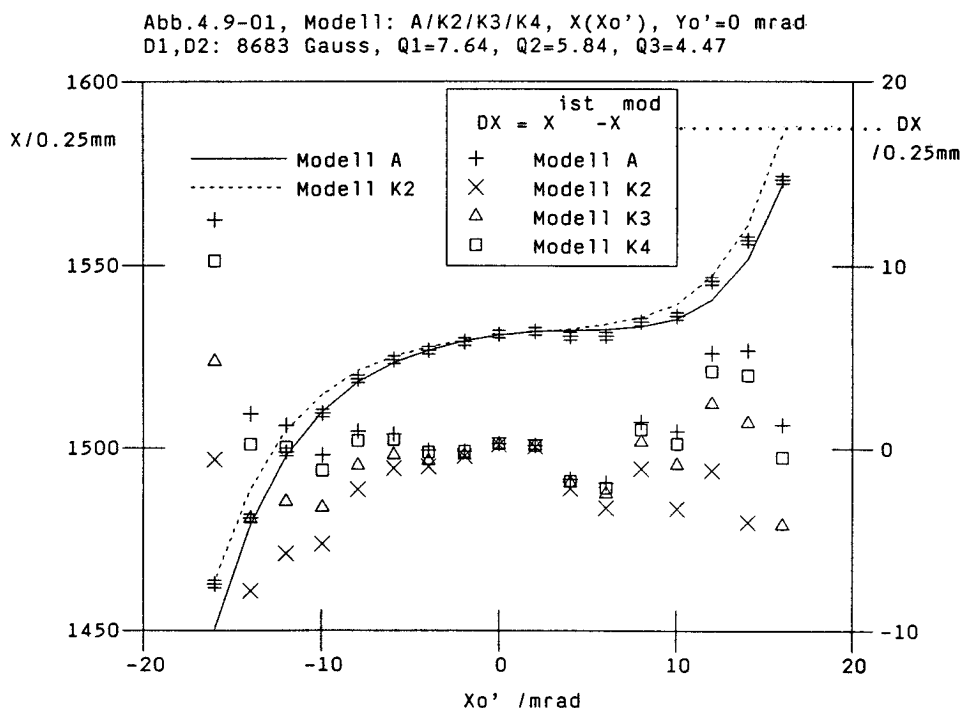


Abb.4.9 Detailldarstellung der statistischen Streuungen - Als zusätzliches Kriterium für die Positionierung der Korrektur müssen die in x_0' weit ausgelenkten Trajektorien herangezogen werden. Test "K2", "K3", "K4" wird mit den Daten aus **Abb.4.1-01** verglichen. Das Modell A wird auf gleiche Weise wie in **Abb.4.1-01** dargestellt, der Test "K2" ist entsprechend eingetragen. Die Differenz zwischen gemessener und gerechneter Koordinate $x^{\text{ist}} - x^{\text{mod}}$ ist für Modell A und Test "K2", "K3", "K4" im selben Diagramm dargestellt. Die rechte vertikale Achse gibt die Differenzen in einem vergrößerten Maßstab an, wobei die im Kasten eingetragene Legende zu beachten ist. Die Kantenänderung "K2" erzeugt die größten Abweichungen von Modell A, die Kantenänderung K4 erzeugt die geringsten Abweichungen. Die durch eine Änderung der Kanten bewirkte Änderung der errechneten Koordinate x^{mod} ist etwa so groß wie die Streuungen der gemessenen Koordinaten x^{ist} . Die Korrektur der Kantenradien kann daher nicht eindeutig positioniert werden.

Abschätzung Anh.C.2.3 zeigt, daß die Inkonsistenz im Eichfaktor $\gamma(Q_2)$ (Abschnitt 4.3.3) wegen der daraus folgenden Unsicherheit in der Koordinate x zu deutlichen Fehlern in der Bestimmung der Kantenkrümmung führen kann.

Möglicherweise liegt die Inkonsistenz in den Krümmungsradien auch im benutzten Kantenmodell begründet. Die vollständige Lösungsentwicklung des Dipolrandfeldes bis zur dritten Ordnung im Potential⁸⁾ enthält nach Gl.2.24 einen Freiheitsgrad λ . Die mit Hilfe der Integration nach Gl.3.4 ermittelte "virtuelle Feldgrenze" ist nicht

8) Dies entspricht der zweiten Ordnung im Feld.

sensitiv auf den Freiheitsgrad λ , da der Feldanteil in $f_1^{(2)}(z)$ nach Integration über z verschwindet.⁹⁾ Im Gegensatz dazu ist die nach Tabelle D.1 durch diesen Randfeldanteil bewirkte Bahnstörung in zweiter Ordnung dennoch sensitiv auf λ . Im Falle $\lambda \neq 0$ kann daher eine in der Mittelebene wirksame Bahnstörung 2. Ordnung eingeschaltet werden, die von den vermessenen Sextupolanteilen unabhängig ist. Wie in Anhang D ausgeführt, ist diese Störung in grober Näherung von der Ausdehnung des Randfeldes in z -Richtung unabhängig. Das Programm TURTLE stellt im Dipolrandfeld neben dem Sextupolanteil (Abschnitt 4.2.2.3) keinen freien Parameter zur Verfügung, der eine in der Mittelebene wirksame Beeinflussung der Eigenschaften in zweiter Ordnung zuläßt.

Wie Abschätzung C.2.4 zeigt, erzeugt man beispielsweise an der letzten Dipolkante eine Aberration zweiter Ordnung zu $(x|x'_0\delta) \approx \lambda \cdot 0.15 \text{ cm/mrad } \%$, was die Inkonsistenzen in $(x|x'_0\delta)$ möglicherweise erklärt, wenn man $\lambda \approx 3\%$ setzt. Fordert man, daß der Energieinhalt des Feldanteils in $f_1^{(2)}$ auf der Rechteckfläche, welche durch den Polschuhabstand und die Polschuhbreite festgelegt wird, ein Minimum annimmt, so erhält man für den freien Parameter λ ebenso einen Wert von wenigen Prozent.

4.4 Maßnahmen zur Korrektur der Bildfehler

In den vorhergehenden Abschnitten wurde deutlich, daß die in den Quadrupolen vorhandene Zwölfpolkkomponente für Aperturen größer als 10 mrad den überwiegenden Anteil an den erzeugten Bildfehlern hat, und zusätzlich Fehler in der vertikalen Bewegung erzeugt, die wegen der geringen vertikalen Aperturen in den Dipolen die Akzeptanz beeinträchtigen. Wenden wir uns nun den wichtigsten verbleibenden Bildfehlern zu.

Der geometrische Bildfehler zweiter Ordnung $(x|x'_0{}^2) = \partial^2 x / \partial x'_0{}^2$,

9) Das Integral über $f_1^{(2)}$ verschwindet, sobald die Integrationsgrenzen, wie vorausgesetzt, im homogenen Feldbereich liegen, vgl. Gl.D.1, und Integral I_0 in Gl.D.6/Gl.D.7 .

nämlich die "Durchbiegung" der Kurve in **Abb.4.1-01/02**, wird durch Modell und Messungen konsistent wiedergegeben. Da der chromatische Fehler zweiter Ordnung ($x|x'_0\delta$) gemäß den experimentellen Daten weitgehend kompensiert ist, sollte ($x|x'_0{}^2$) möglichst vor dem Dipol D1 korrigiert werden, um das chromatische Verhalten in zweiter Ordnung ($x|x'_0\delta$) nicht zu beeinflussen. Man schätzt mit Hilfe **Gl.2.41** ab, daß der Kantensextupol in der ersten Kante K1 (siehe Abschnitt 4.2.2.3) in seiner Stärke etwa verdoppelt werden müßte, um ($x|x'_0{}^2$) zu kompensieren. Dieser Wert kann sich jedoch stark ändern, wenn eine andere Dispersion gewählt wird. Eine geringere Dispersion hätte den Vorteil, daß der Quadrupol Q2 geringer erregt wird.

Die chromatischen Fehler werden durch die Aberration dritter Ordnung ($x|x'_0\delta^2$) beherrscht, die auch durch das Modell bestätigt werden kann. In Form eines Gedankenmodells wird nun die Kompensation durch eine Multipolstärke K_3 (**Gl.2.4**) diskutiert, die im dispersiven Teil des Systems an der Stelle τ eingeführt wird. Zur Vereinfachung unterdrücken wir die y -Abhängigkeiten, gehen von einem kleinen Strahlfleck ($x_0=0$) aus, und vernachlässigen Kopplungsanteile. Die Änderungen der Aberrationen in der Detektorebene t_D erhält man aus **Gl.B.18**, wobei der Integrand über das Integrationsintervall gemittelt wird:

$$\begin{aligned}\Delta(x|x'_0{}^3) &= G_x(t_D, \tau) \cdot K_3 \cdot \Delta t \cdot s_x^3(\tau) \\ \Delta(x|x'_0{}^2\delta) &= G_x(t_D, \tau) \cdot K_3 \cdot \Delta t \cdot 3s_x^2(\tau)d_x(\tau) \\ \Delta(x|x'_0\delta^2) &= G_x(t_D, \tau) \cdot K_3 \cdot \Delta t \cdot 3s_x(\tau)d_x^2(\tau) \\ \Delta(x|\delta^3) &= G_x(t_D, \tau) \cdot K_3 \cdot \Delta t \cdot d_x^3(\tau)\end{aligned}\tag{4.12}$$

Den Funktionswert der Greenschen Funktion $G_x(t_D, \tau)$ entnimmt man aus Anhang C, Tabelle C.2¹⁰⁾. Man erkennt, daß man neben der in Abschnitt 4.3.5 behandelten chromatischen Aberration ($x|x'_0\delta^2$) zusätzlich u.a. die chromatische Aberration ($x|x'_0{}^2\delta$) beeinflusst. Diese Aberration bedeutet anschaulich eine lineare Abhängigkeit der "Durchbiegung" ($x|x'_0{}^2$) (s.o.) vom relativen Impuls δ . Da sich das Verhältnis von d_x zu s_x zwischen D2 und Q3 stark ändert (siehe Tabelle C.1, Anhang C), erhält man je nach Positionierung τ des Kor-

10) Vgl. die Erläuterungen in Anhang C.1 und Abschnitt 2.4.4 .

rekturfeldes ein deutlich unterschiedliches Verhältnis von $\Delta(x|x'_0\delta^2)$ zu $\Delta(x|x'_0{}^2\delta)$. Da der größere Teil der chromatischen Aberrationen im Dipol D2 erzeugt wird, (vgl. Abschnitt 4.3.5 und 4.3.7), erhält man voraussichtlich die richtige Verkopplung der chromatischen Beiträge, wenn man den Fehler in oder direkt hinter D2 korrigiert. Vom praktischen Standpunkt ist dagegen möglicherweise die Erzeugung einer Achtpolkomponente in Q3 einfacher zu realisieren als die Herstellung einer entsprechenden gleichmäßigen Feldabhängigkeit mit Hilfe der H_t -Windungen in Dipol D2.

Über die "Änderung der Durchbiegung mit dem Impuls" $(x|x'_0{}^2\delta)$ kann wegen der starken Überlagerung durch geometrische Fehler aus den Daten keine zuverlässige Aussage mehr gewonnen werden. Dies macht deutlich, daß man mehrere Iterationsschritte benötigt, wenn man zu extremen Auflösungen bei großen Aperturen und gleichzeitig hoher Impulsakzeptanz gelangen will.

Daher ist es lediglich sinnvoll, ein grobes Gerüst für die nächsten möglichen Verfeinerungsstufen vorzugeben. Zunächst einige Schritte zur Anwendung von "konventionellen" Methoden, nämlich der Einführung von Multipolstärken im System:

- 1) Der Zwölfpol wird korrigiert (Anhang A.2), oder die Quadrupole Q1, Q2 werden ersetzt. Verwendet man weiterhin die Collinstyp-Quadrupole Q1, Q2 und erweitert die Apertur zu Lasten des maximalen Feldgradienten, ist auf mögliche Achtpolbeiträge zu achten.
- 2) Durchführung von Kontrollmessungen hinsichtlich der zweiten Ordnung, (chromatisch und geometrisch), möglicherweise Untersuchung der Dispersionsabhängigkeit.
- 3) Wenn $(x|x'_0\delta)$ als klein bestätigt werden kann, führt man Sextupolstärken im vorderen System ein. Möglicherweise ist es sinnvoll, einen Sextupolmagneten vor dem Dipol D1 einzuführen.¹¹⁾
Die H_t -Windungen eignen sich zur Herstellung eines homogenen

11) Beachte jedoch die Position des Zwischenfokus.

Dipolfeldes.

4) Kontrollmessungen und mögliche chromatische Korrekturen, s.o. .

Die chromatische Abhängigkeit der vertikalen Fokussierung (Abschnitt 4.3.6) muß man in Kauf nehmen. Deshalb sollte man schnelle Diagnoseverfahren zur vertikalen Zentrierung in den Dipolen entwickeln.

Als alternative bzw. komplementäre Methode möchte ich die unter der Bezeichnung "Fokalebene-rekonstruktionen" bekannten Computermethoden erwähnen. Diese benutzen die mit Hilfe von mehreren Kammern gemessene "Winkelinformation" in der Detektorebene. Das Modell A eignet sich auch hier zur Diskussion der benötigten Korrekturfunktionen. Man sollte jedoch anstreben, komplizierte Korrekturfunktionen zu vermeiden, da dies auf Grund der zahlreichen Einflüsse auf die Auflösung (Strahlführung, Strahlanpassung, Streufohlen) die Fehlerdiagnose erschwert.

Kapitel 5

Zusammenfassung

Die in x'_0 und y'_0 beobachteten Nichtlinearitäten bei der Abbildung in die Detektorebene werden durch die Modellrechnung erfaßt, sobald man in den Quadrupolen Q1, Q2 eine Zwölfpolkkomponente vorsieht. Die Zwölfpolkkomponente erklärt insbesondere das komplizierte Verhalten in der vertikalen Bewegung. Sie erklärt außerdem, warum der Bereich hoher Impulsauflösung gegenüber dem durch die Quadrupolaperturen vorgegebenen Akzeptanzbereich stark eingeschränkt ist.

Die mit der Annahme einer Zwölfpolkkomponente konkurrierenden Modellannahmen wie eine Achtpolkkomponente in den Quadrupolen, oder starke Bahnstörungen im dispersiven Teil des Systems können im Rahmen der Interpretation der ionenoptischen Messungen mit hoher Sicherheit als Ursache für das beobachtete starke nichtlineare Verhalten ausgeschlossen werden. Dadurch gelingt es, den überwiegenden Teil der die Apertur begrenzenden Bildfehler auf die Geometrie der Polschuhoberfläche der Quadrupole zurückzuführen. Der Feldfehler der Quadrupole Q1, Q2 konnte durch Feldmessungen und Berechnungen bestätigt werden. Möglichkeiten der Korrektur dieses Fehlers wurden aufgezeigt. Sättigungserscheinungen des Quadrupolmagneteisens und die besondere Form der Quadrupole (sogenannter Collinstyp) spielen bei der Höhe der hier benutzten Quadrupolerregung keine entscheidende Rolle, bei höheren als der hier benutzten Erregung weisen die Feldmessungen jedoch auf sättigungsabhängige Feldfehler hin.

Randfelder und Fehler dritter Ordnung werden im Programm TURTLE nur unvollständig berücksichtigt. Lösungsentwicklungen ergaben, daß die durch das Quadrupolrandfeld erzeugte Störung dritter Ordnung in einfacher Näherung keine freien Parameter besitzt, insbesondere von der Ausdehnung des Randfeldes und Apertur des Magne-

ten unabhängig ist und daher ohne genaue Kenntnis der Feldverteilung näherungsweise errechnet werden kann. Eine exemplarische Feldmessung am Quadrupol Q2 belegt, daß die Anteile der Lösungsentwicklung tatsächlich aus den Messungen extrahiert werden können. Die dreidimensionale Lösungsentwicklung des Dipolrandfeldes führte auf einen Modellparameter " λ ", der in der magnetischen Mittelebene in zweiter Ordnung ionenoptisch wirksam ist. Dieser Parameter wird durch die integrierende Methode zur Bestimmung der "virtuellen Feldgrenze" meßtechnisch nicht erfaßt.

Die Abschätzung von den in idealen Di- und Quadrupolmagneten und in den Quadrupolrandfeldern erzeugten Fehlern dritter Ordnung zeigt, daß diese bei der aktuellen Konfiguration im geometrischen Verhalten bei dem momentan gegebenen Status von dem durch die Zwölfpolkkomponente eingeführten Fehler fünfter Ordnung überlagert werden, und deshalb nur schwierig nachweisbar sind. Erst bei Verdoppelung der momentanen Aperturen führen diese Fehler zu deutlich sichtbaren Auswirkungen.

Die Beschreibung der chromatischen Eigenschaften, insbesondere die richtige Wiedergabe der Aberrationen $(x|x'_0\delta)$ und $(x|x'_0\delta^2)$ gelingt mit Hilfe der im Programm TURTLE vorgesehenen Beschreibungen nicht im ausreichenden Maße. Durch eine Modellverfeinerung, nämlich die Einbeziehung der Störungen dritter Ordnung im Quadrupolrandfeld und im idealen Gradientenfeld kann $(x|x'_0\delta^2)$ quantitativ beschrieben werden. (Beide Störungen werden im Quadrupol Q3 bei den dispersiv stark ausgelenkten Trajektorien wirksam.) Die Deutung der Inkonsistenzen in $(x|x'_0\delta)$ ist mit Hilfe des zuvor erwähnten Parameters " λ " möglich. Durch ihn wird der gemessene Bildfehler $(x|x'_0\delta)$, der weitgehend kompensiert ist, plausibel erklärt.

Die Untersuchungen zeigen, daß die angewendeten Modelle bis in den Bereich $\Delta p/p \approx 10^{-4}$ verfeinert werden können. Somit ist die Möglichkeit gegeben, die optischen Fehler auch unter wechselnden Einstellbedingungen im Modell darzustellen. Damit hat man einen Weg, eine gezielte Kompensation (Multipolfelder) oder Korrektur (Trajektorienrekonstruktionsverfahren) bei großen Aperturen durchzuführen.

Anhang A

Die Quadrupole Q1, Q2

A.1 Sättigungsverhalten

Dieser Abschnitt beleuchtet die Ursachen für die durch die Quadrupole Q1, Q2 verursachten Einschränkungen in der Apertur.

Der Fluß, der das Joch durchsetzt, wurde durch Integration der induzierten Spannung an einigen um das Joch gewickelten Meßspulen bestimmt. Zunächst ist der Quadrupol abgeschaltet. Die beim langsamen, stufenweisen Hochfahren integrierte mittlere Flußdichte ist in **Abb.A.1** gegen den durch die Netzgeräte gelieferten Spulenstrom aufgetragen. Die Spulenpositionen sind ebenso in der Abbildung verzeichnet. An der Spule 3 ist etwa die Hälfte des Flusses durch Spule 1 verloren.

Man erkennt, daß das Eisen im Bereich von Spule 1 bereits bei 20% des maximalen Stroms des Netzgerätes in die Sättigung geht. Dementsprechend steigt das Feld an der Polschuhspitze nur noch langsam an.

Dieses Verhalten wurde auch in Rechnungen mit "POISSON" überprüft. Eine Kommutierungskurve des Magneteisens war nicht verfügbar. Daher wurde die Kommutierungskurve der Dipolmagnete benutzt.¹⁾ Die Ergebnisse dieser Berechnungen führen im Bereich der Sättigung zu mäßiger Übereinstimmung mit den Messungen. Bei $I = 0.8 \cdot I_{\max}$ errechnet das Programm im Bereich der Spule 1 und an der

1) Das Magneteisen der Quadrupole wurde nach der amerikanischen Stahlnorm AME 1S (Kohlenstoffgehalt 0.02% bis 0.04%) geliefert, das Magneteisen der Dipolmagnete nach der deutschen Norm RFe 80 (Kohlenstoffgehalt $\leq 0.05\%$).

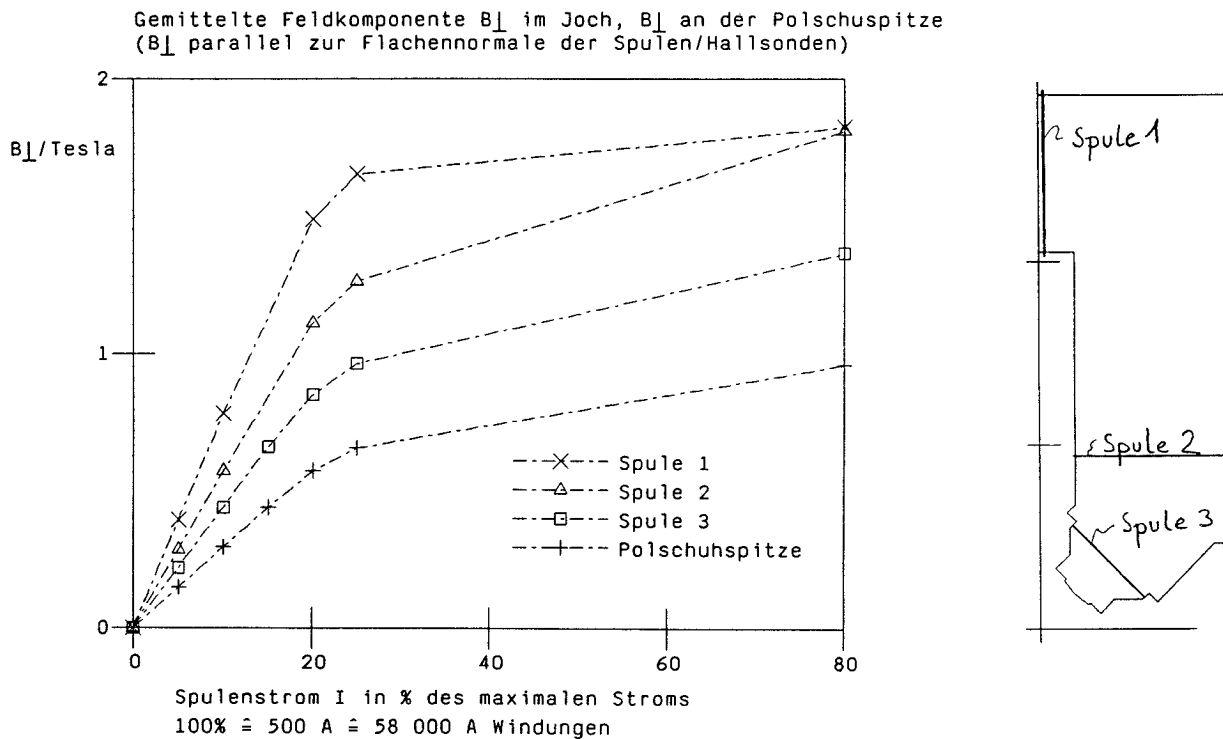


Abb.A.1 Messung der Flußdichten im Joch - Am Joch sind drei Windungen wie rechts gezeigt angebracht worden. Die beim Hochfahren des Magneten induzierten Spannungen wurden mit einem speziellen Digitalvoltmeter integriert. Die Abbildung zeigt die Flußdichte gegen den Spulenstrom. Das an der Polschuhspitze mit Hilfe einer geeichten Hallsonde gemessene Feld ist ebenso eingetragen.

Polschuhspitze etwa um 15 bis 20 % zu hohe Werte. Dennoch ist das Sättigungsverhalten des Quadrupols auch in der Rechnung deutlich zu erkennen.

Wir berechnen den Anteil des Wegintegrals $\int \vec{H} d\vec{s}$ im Luftraum zu

$$\left(\int \vec{H} d\vec{s} \right)_{\text{Luft}} = \int_0^{r_A} H_r \cdot dr = \frac{1}{2} \frac{\partial H_r}{\partial r} r_A^2 \quad (\text{A.1})$$

H_r ist die magnetische Erregung in radialer Richtung auf der Polschuhachse, r_A ist der Aperturradius. Bei $I=0.8 \cdot I_{\text{max}}$ beträgt dieser Anteil unter Zugrundelegung des gemessenen Feldgradienten etwa 19900 A. Die Spule (116 Windungen) stellt 46400 A zur Verfügung. Damit verbleiben für den Anteil des Wegintegrals $\int \vec{H} d\vec{s}$ im Eisen 26500 A.

Der Hersteller gibt an, bei $H=200$ A/cm eine Flußdichte von 1.95 T zu erreichen, dies bedeutet eine relative Permeabilität von $\mu_r=77$. Wir schätzen ein oberes $\mu_r^{\max}$ ab, indem wir annehmen, das Eisen sei auf der gesamten Weglänge $L \approx 60$ cm bei dem gemessenen Maximalwert zu $B \approx 1.85$ T gesättigt:

$$\left(\int \vec{H} d\vec{s} \right)_{\text{eisen}} = \frac{1}{\mu_r^{\max} \mu_0} \cdot B \cdot L = 26\,500 \text{ A} \Rightarrow \mu_r^{\max} = 33$$

Im Bereich des gesättigten Eisens ist μ_r tatsächlich kleiner als $\mu_r^{\max}$. Diese Abschätzung deutet darauf hin, daß die Angaben des Herstellers nicht erfüllt werden.

Die Flußdichte im Bereich von Spule 1 könnte auf einfache Weise vermindert werden, indem die Querschnittsfläche des Jochs durch Anbringen von Eisenblöcken oberhalb und unterhalb des Magneten vergrößert wird. Dies ist jedoch nicht möglich, da das untere Joch praktisch direkt auf tragenden Elementen der Gesamtkonstruktion steht. Eine drastische Verkürzung des Wegintegrals und eine Verringerung der Streuflüsse ist durch einfache Modifikationen bei der gegebenen Konstruktion kaum möglich.

Mit dem gegebenen Aperturradius erreicht man Feldgradienten von etwa 0.18 T/cm, mit denen man Teilchen mit einer magnetischen Härte von etwa 3.6 Tm in vertikaler und horizontaler Richtung bei einer eingestellten Dispersion von 16cm/% fokussieren kann.

Läßt man den Eisenanteil unberücksichtigt, erhält man die Faustformel:

$$\frac{\partial H_r}{\partial r} \propto \frac{1}{r_A^2} \quad (\text{A.2})$$

Bei Vergrößerung des Aperturradius um 1 cm (2 cm) geht nach dieser Faustformel der Gradient auf ca. 70% (53%) des ursprünglichen Wertes zurück. Ein Vergleich mit Feldmessungen bei 10cm Apertur zeigt²⁾, daß dieses Verhältnis geringfügig besser ist, ein Ver-

2) Diese Messungen sind aus Protokollbüchern aus dem Jahre 79/80 entnommen.

gleich mit einer Rechnung bei 7.5 cm Apertur zeigt, daß dieses Verhältnis u.U. geringfügig schlechter sein kann.

A.2 Kompensation von Feldfehlern

Die "harmonische Analyse" [P-PO85] des in **Abb.3.7** gezeigten, mit Poisson berechneten Feldes ergibt $M_6^P = 2.9\%$, $M_{10}^P = 0.6\%$ und $M_{14}^P = -0.4\%$. Das in **Abb.3.7** gezeigte Profil enthält offensichtlich kleine Beiträge hoher Multipolarität, die zur Überhöhung des Feldes von 3 bis 4% am Aperturradius führen. Da sich der mit Poisson ermittelte Wert von M_6 geringfügig von dem mit Hilfe der Ionenoptik ermittelten Wert unterscheidet, werden diese Koeffizienten mit einem "P" indiziert.

Halbach beschreibt ein Näherungsverfahren zur Abschätzung und Kompensation von Feldfehlern in Multipolmagneten [V-KH69]. Eine Äquipotentialfläche (des skalaren Potentials) des ungestörten Multipolfeldes wird als "ideale" Polschuhoberfläche angesehen. Ist die wahre Polschuhoberfläche gegenüber der idealen Oberfläche um das Stück h erhöht (**Abb.A.2a**), so wird das Potential in der Nähe der Oberfläche um näherungsweise

$$V_{\text{Stör}} = h \cdot |\vec{B}_{\text{Grund}}| \quad (\text{A.3})$$

angehoben. $|\vec{B}_{\text{Grund}}|$ ist der Betrag des ungestörten Feldes an der idealen Polschuhoberfläche. Halbach legt die Potentialwerte des Störpotentials auf der (gedachten) idealen Oberfläche durch Gl.A.3 fest. Die Lösung dieses Randwertproblems kann er als geschlossenes Integral über die ideale Polschuhoberfläche angeben.

Zwei schmale spiegelsymmetrisch zur Polschuhspitze auf der Oberfläche jedes Polschuhs angebrachte "Shims" (**Abb.A.2.a**) verursachen eine Änderung aller Multipolkomponenten d_n (s.u.):

$$\Delta d_n = 2N^2 \cdot \Delta a \cdot s_{\text{norm}} \cdot \text{Re}(L_{2m+1}) \quad (\text{A.4})$$

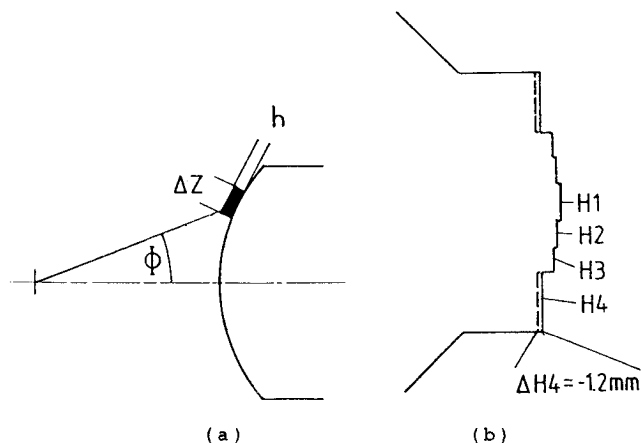


Abb.A.2 Darstellung der Größen h , Δz , ΔH - Die in Gl.A.4 gegebene Fläche Δa berechnet sich zu $\Delta a = \Delta z \cdot h$ (a). In Tabelle A.1 werden die Stufen $H_1 \dots H_4$ um $\Delta H_1 \dots \Delta H_4$ geändert (b).

N bezeichnet die Multipolarität des ungestörten Grundanteils, in Gl.A.4 gilt der Zusammenhang $n=N \cdot (2m+1)$, wobei $m=0,1,2,3 \dots$.

$\Delta a = \Delta z \cdot h$ ist die Fläche des Shims (Abb.A.2.a). Die von Halbach benutzten Koeffizienten d_n sind mit den in dieser Arbeit bisher benutzten Koeffizienten folgendermaßen verknüpft, wobei der Apertur-radius r_a der Normierung dient:

$$i^{2m} d_{N(2m+1)} = \frac{r_a^{N \cdot 2m}}{C_N} C_{N(2m+1)} = \frac{1}{2m+1} M_{N(2m+1)}$$

$\Delta a = \Delta z \cdot h$ bezeichnet die "Fläche" des Shims (siehe Abb.A.2a). s_{norm} und L_{2m+1} sind von $\hat{\phi}$ abhängig, $\hat{\phi}$ bezeichnet den Polarwinkel³⁾ zwischen Anbringungspunkt und Polschuhmitte.

$$s_{\text{norm}} = [\cosh\{(\pi/2)\tan N\hat{\phi}\}]^{-1} [\cos N\hat{\phi}]^{2/N-2}$$

L_3 ist z.B. definiert durch

$$L_3(\hat{\phi}) = \left(\frac{1}{4}\pi\right)^3 \left(e^{-i3N\psi(\hat{\phi})} + \frac{1}{3}e^{-iN\psi(\hat{\phi})} \right),$$

wobei wiederum $\psi(\hat{\phi})$ gegeben ist durch:

$$N\psi = 2\arctan\left(\tanh\left[(\pi/4)\tan(N\hat{\phi})\right]\right)$$

Zur Integration der Multipolkoeffizienten über einen größeren

3) Das mit $\hat{\phi}$ bezeichnete Koordinatensystem ist gegenüber dem in Abschnitt 2.3.1, 2.3.5 definierten System um 45° gedreht.

Abschnitt der Polschuhoberfläche wurde ein Programm erstellt. Es nähert die Abweichung $h(\hat{\phi})$ der wahren Oberfläche von einer (willkürlichen) idealen Referenzoberfläche durch eine Treppenfunktion⁴⁾ an, und summiert für jeden Schritt die nach Gl.A.4 berechneten Multipolanteile Δd_n . Außerdem berechnet es unter Zugrundelegung derselben Näherung Gl.A.3 das integrale Feld für einige ausgewählte Punkte. Um zu überprüfen, ob die $\hat{\phi}$ -Abhängigkeit richtig programmiert wurde, wird eine ideale Quadrupoloberfläche untersucht, die von der Referenzoberfläche abweicht. Wie erwartet, verschwinden bis auf den Grundanteil Δd_N alle Multipolkomponenten nach der Integration über die gesamte Oberfläche. Die Normierung der Multipolkoeffizienten wird durch einen Vergleich mit Poissonrechnungen überprüft (s.u.).

Die i-te Stufe des Profils der Quadrupole Q1, Q2 wird um den Betrag ΔH_i erhöht (Abb.A.2b). Tabelle A.1 gibt die Änderungen der Multipolkoeffizienten $\Delta M_n / \Delta H_i$ an. Zur Erstellung der Tabelle sind die integralen Multipolkoeffizienten für verschiedene Stufenhöhen mit Hilfe des Programms errechnet worden, daraus sind die Differenzbeträge für kleine Änderungen ermittelt worden⁵⁾.

Tabelle A.1 Empfindlichkeit der Koeffizienten M_6 , M_{10} , M_{14} auf Änderungen der Stufenhöhen $H_1 \dots H_4$

	$N\hat{\phi}$	$\frac{\Delta M_6}{\Delta H_i} \left[\frac{\%}{\text{mm}} \right]$	$\frac{\Delta M_{10}}{\Delta H_i} \left[\frac{\%}{\text{mm}} \right]$	$\frac{\Delta M_{14}}{\Delta H_i} \left[\frac{\%}{\text{mm}} \right]$
H_1	$0^\circ - 11^\circ$	-2.58	+3.58	-4.12
H_2	$11^\circ - 25^\circ$	-1.08	-1.24	+2.03
H_3	$25^\circ - 36^\circ$	+1.06	-2.54	+1.26
H_4	$36^\circ - 57^\circ$	+2.50	-0.10	-1.27

4) Diese Treppenfunktion darf nicht mit der Stufeneinteilung der Quadrupole Q1, Q2 verwechselt werden.

5) Setzt man für s_{norm} und L_{2m+1} einen Mittelwert für die gesamte Stufe ein und schätzt ΔM_n nach Gl.A.4 ab, enthält man gegenüber der mit Hilfe des Programms durchgeführten Summation Abweichungen bis zu 40%.

Eine Kompensation des Anteils $M_6^P = 2.9\%$ erreicht man durch Abfräsen der äußersten Stufe um $\Delta H_4 = -1.2\text{mm}$. Die völlige Kompensation der drei ersten Anteile M_6^P , M_{10}^P und M_{12}^P erreicht man mit einem sehr ungleichmäßigen Profil, die Änderungen sind $\Delta H_4 = -3.14\text{mm}$, $\Delta H_3 = +1.76\text{mm}$, $\Delta H_2 = -2.86\text{mm}$. Es wird vorgeschlagen, sich auf eine Veränderung der äußersten Stufe zu beschränken.

Der in **Abb.3.7** erkennbare Achtpolanteil und höhere Anteile M_{2mN} , $N=2$, $m=1,2,3\dots$ werden durch diese Korrektur nicht beeinflusst. Die Feldmessungen weisen ohnehin darauf hin, daß diese Anteile von der Erregung des Magneten abhängen.

A.3 Anmerkungen zu den Rechenverfahren

Die Grenzen des Näherungsverfahrens nach **Gl.A.3** werden im folgenden demonstriert. **Abb.A.3** zeigt drei Feldprofile, "A" und "B" haben eine Stufeneinteilung, "C" ist eine Hyperbelfunktion, die bei einem Winkel $\hat{\phi}_{\max} = 66.35^\circ$ "abgeschnitten" ist. Tabelle A.2 zeigt die Multipolkoeffizienten M_6^P , die mit Hilfe von Poisson errechnet wurden, und die Koeffizienten M_6^H , die durch Integration nach **Gl.A.4** ermittelt wurden, wobei von $\hat{\phi} = 0^\circ$ bis $\hat{\phi}_{\max}$ integriert wurde. Die Differenzen zwischen den Koeffizienten der Profile "A" und "B" werden durch das Näherungsverfahren wiedergegeben. (Dies gilt auch für die zwei nächst höheren Anteile. Auch die Veränderung einer einzelnen Stufe führt zur guten Übereinstimmung der beiden Verfahren.)

Tabelle A.2 Die Koeffizienten M_6 für die Profile "A", "B", "C" gemäß Finite-Element Rechnung und Integration nach **Gl.A.4**

		"A"	"B"	"C"	"B-A"	"C-A"
$M_6^P/\%$	(Poisson)	1.08	-0.23	-0.08	-1.31	-1.16
$M_6^H/\%$	(Integration)	-0.08	-1.34	0.0	-1.26	-0.08

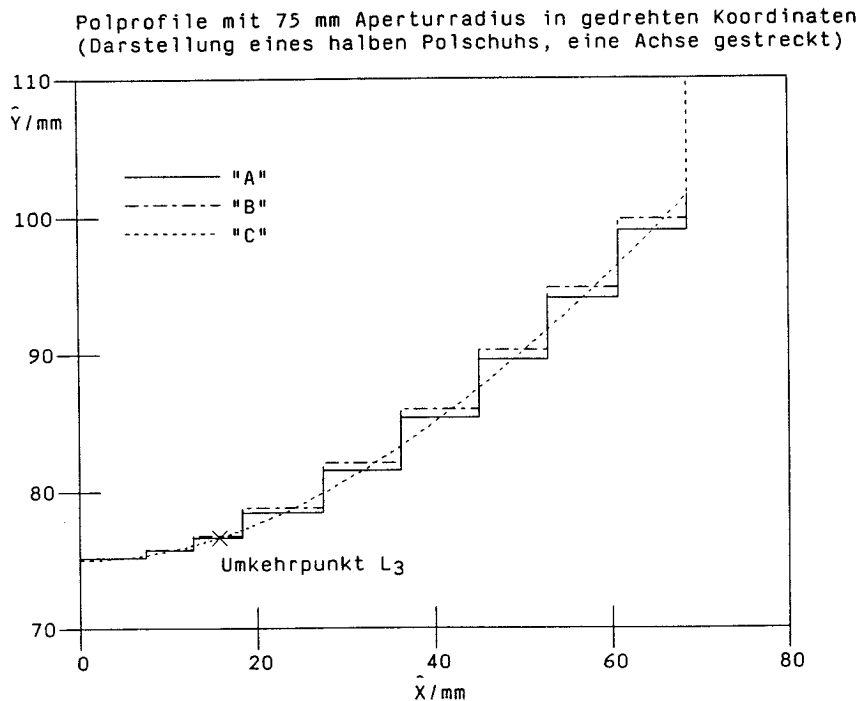


Abb.A.3 Polprofile mit 75 mm Aperturradius – Die Bezeichnung der Profile entspricht Tabelle A.2 . Das Koordinatensystem ist gegenüber dem in Abschnitt 2.3.1 definierten System um 45° gedreht.

Die Differenzen zwischen den Koeffizienten der Profile "A" und "C" stimmen nicht überein. Diese Tatsache muß in der folgenden Weise gedeutet werden: die an den Erhebungen auftretende Verdichtung der Feldlinien führt zu einer Verstärkung des Störpotentials nach Gl.A.3, während eine Vertiefung zu einer Abschwächung des Störpotentials führt, was durch den einfachen Störungsansatz (quasi "nullte" Näherung) nicht wiedergegeben wird.

Diese Arbeitshypothese erklärt, warum das Profil "A" nach Poisson-Rechnung in M_6 nicht kompensiert ist, obwohl die Stufen um das ideale Hyperbelprofil zentriert sind: Die Stufenhöhe nimmt nach außen hin zu. Daher wird gemäß der Hypothese für die äußeren Bereiche das "wahre" $V_{\text{Stör}}$ im Mittel nach oben gezogen. Die für M_6 wesentliche Funktion $\text{Re}(L_3)$ hat ihren einzigen Nulldurchgang (im Bereich $0^\circ \leq \hat{N} \leq 90^\circ$) bei $\hat{N} = 22.75^\circ$ (siehe Abbildung). Nach der Integration über das "wahre" $V_{\text{Stör}}$ verschwindet M_6 demzufolge im Profil "A" nicht. Bei dem in M_6 kompensierten Profil "B" tritt die "mittlere" Polschuhoberfläche für die äußeren Stufen deutlich hinter die ideale Hyperbeloberfläche zurück.

In diesem Sinne ist die durch die Stufung der Polschuhoberfläche erzeugte "Feinstruktur" des Feldes eine maßgebliche Ursache des ersten erlaubten Störanteils $M_6^P("A")$. Wie die Berechnung $M_6^P("C")$ zeigt, ist der durch "Abbrechen" des Pols bei $N\hat{\phi}_{\max} = 66.35^\circ$ bewirkte Fehler in diesem Falle vergleichsweise klein.

Es leuchtet daher ein, daß die Genauigkeit, mit der dieser Störanteil mit Hilfe der Finite-Elementmethode ("POISSON") vorausgesagt werden kann, sensibel von Netzdichten – gleichbedeutend mit Rechengenauigkeit – im Bereich der Polschuhoberfläche abhängen kann. Zusätzlich kann sich die "Feinstruktur" im Bereich der Sättigung gegenüber der $1/\mu=0$ Näherung stark ändern. Es wird daher zur Diskussion gestellt, ob sich die Voraussagekraft von Finite-Elementrechnungen durch Verwendung möglichst glatter Profile wesentlich erhöhen läßt, so daß meßtechnisch aufwendige Korrekturmaßnahmen am fertigen Magneten entfallen können.

Anhang B

Mathematischer Anhang

B.1 Aufstellung der Bahngleichung

Wir beschränken uns in der folgenden Ableitung der Bahngleichungen auf die Mittelebene. Weiterhin wird die Bahnkrümmung h der Zentralbahn und die Feldentwicklung nach Gl.2.4 abschnittsweise als konstant angesehen. Randfeldbereiche der Dipolfelder, in denen diese Annahme nicht zutrifft, werden unter vereinfachenden Annahmen in anderen Kapiteln behandelt.

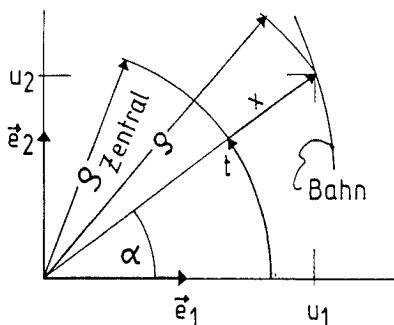


Abb.B.1 Hilfsweise Koordinatendefinitionen und Potentiale

$$u_1 = \rho \cdot \cos \alpha \quad u_2 = \rho \cdot \sin \alpha$$

$$A_\rho = A_1 \cdot \cos \alpha + A_2 \cdot \sin \alpha \quad p_\rho = p_1 \cdot \cos \alpha + p_2 \cdot \sin \alpha$$

$$A_\alpha = -A_1 \cdot \sin \alpha + A_2 \cdot \cos \alpha \quad p_\alpha = -p_1 \cdot \sin \alpha + p_2 \cdot \cos \alpha$$

$$x = \rho - \rho_{\text{Zentral}} \quad t = \alpha \cdot \rho_{\text{Zentral}} \quad p_x, p_w, A_x, A_w \text{ s.u.}$$

Wir benutzen das in **Abb.B.1** dargestellte, hilfsweise errichtete cartesische Koordinatensystem $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, welches in der Mittelebene liegt und seinen Ursprung im Krümmungsmittelpunkt der Zentralbahn hat. **Abb.B.1** zeigt zugleich die Polarkoordinaten α und ρ und die gekrümmten Koordinaten t und x , die den in Abschnitt 2.2.1 festgelegten Koordinaten entsprechen. Die Koordinate y steht senkrecht auf dieser Ebene.

$u_1, u_2, p_1, p_2, A_1, A_2$ sind die cartesischen Komponenten des Ortes, des Impulses bzw. des Vektorpotentials in Richtung $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. p_ρ und A_ρ sind die radialen Komponenten des Impulses bzw. des Vek-

torpotentials, p_α und A_α , sind die azimuthalen Komponenten.

Den Zusammenhang zwischen Feld und Vektorpotential erkennt man aus dem Differentialoperator der "Rotation" in den in **Abb.B.1** dargestellten zylindrischen Koordinaten ρ und α :

$$(B_\rho, B_\alpha, B_y) = \text{rot } \vec{A} = \left[\left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial A_y}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial \rho} \right), \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial (\rho A_\alpha)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial A_\rho}{\partial \alpha} \right) \right] \quad (\text{B.1})$$

In der Mittelebene ist nur die Feldkomponente $B_y \neq 0$. Außerdem ändert sich das Feld auf Grund der oben festgesetzten Vereinfachung nicht mit α . Wir können daher das Feld durch die Komponente A_α des Vektorpotentials beschreiben:

$$B_y = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial (\rho A_\alpha)}{\partial \rho} = \frac{1}{(1+hx)} \cdot \frac{\partial [(1+hx)A_\alpha]}{\partial x} \quad (\text{B.2})$$

Dabei ist $h = 1/\rho_{\text{Zentral}}$, $x = \rho - \rho_{\text{Zentral}}$, $(1+hx) = \rho/\rho_{\text{Zentral}}$. Legt man $A_\alpha(x=0) = 0$ fest, dann gilt der Zusammenhang:

$$(1+hx)A_\alpha = \int_0^x (1+h\hat{x})B_y d\hat{x} \quad (\text{B.3})$$

Insbesondere für $h=0$ ist dieser Zusammenhang trivial und gleichermaßen anwendbar.

Im statischen Magnetfeld sind $\hat{p}_1 = p_1 + \frac{q}{c}A_1$, und $\hat{p}_2 = p_2 + \frac{q}{c}A_2$ die kanonisch konjugierten Impulse zu den cartesischen Koordinaten u_1 und u_2 . (Kanonisch konjugierte Impulse sind im folgenden durch ein tiefgesetztes " $\hat{}$ " gekennzeichnet.) Die zu den Koordinaten t und x kanonisch konjugierten Impulse $\hat{p}_t$ und $\hat{p}_x$ ermittelt man nach [L-CS60] mit Hilfe der Erzeugenden $G = -\vec{\hat{p}} \cdot \vec{R}$, wobei $\vec{R}$ den Ortsvektor darstellt. Wir schreiben G mit Hilfe der "neuen" Ortskoordinaten t , x und der "alten" kanonischen Impulse p_1 und p_2 .

$$G(t, x, p_1, p_2) = -\vec{p} \cdot \vec{R} = \quad (B.4)$$

$$= -\left(p_1 \cdot \cos(t/\rho_{\text{Zentral}}) + p_2 \cdot \sin(t/\rho_{\text{Zentral}}) \right) \cdot (\rho_{\text{Zentral}} + x)$$

Wir verifizieren

$$-\frac{\partial G}{\partial p_1} = \rho \cdot \cos \alpha \stackrel{!}{=} u_1, \quad -\frac{\partial G}{\partial p_2} = \rho \cdot \sin \alpha \stackrel{!}{=} u_2 \quad (B.5)$$

Die "neuen" kanonischen Impulse sind daher

$$p_x = -\frac{\partial G}{\partial x} = p_1 \cdot \cos \alpha + p_2 \cdot \sin \alpha = p_\rho + \frac{q}{c} A_\rho \quad (B.6)$$

$$\begin{aligned} p_t = -\frac{\partial G}{\partial t} &= \frac{1}{\rho_{\text{Zentral}}} \frac{\partial G}{\partial \alpha} = \left(-p_1 \cdot \sin \alpha + p_2 \cdot \cos \alpha \right) \cdot \frac{\rho_{\text{Zentral}} + x}{\rho_{\text{Zentral}}} \\ &= \left(p_\alpha + \frac{q}{c} A_\alpha \right) \cdot (1+hx) \end{aligned}$$

Wir schreiben die Hamiltonfunktion mit Hilfe der "neuen" kanonischen Impulse p_x und p_t . Wir definieren $A_t = (1+hx)A_\alpha$ und setzen $A_\rho = 0$ (s.o.):

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 = \frac{1}{2m} \cdot (p_\alpha^2 + p_\rho^2) = \frac{1}{2m} \cdot \left[\left\{ \frac{p_t - \frac{q}{c} A_t}{1+hx} \right\}^2 + p_x^2 \right] \quad (B.7)$$

Diese Hamiltonfunktion beschreibt die zeitliche Bewegung.

Gesucht sind die Bahngleichungen. Bezieht man die Zeitkoordinate in das modifizierte Hamilton'sche Prinzip ein, so kann die Funktion $\kappa(x, p_x, t) = -p_t$ als neue Hamiltonfunktion bezüglich der neuen "Zeitkoordinate" t angesehen werden, [L-CS60], [L-G076]. Die Bewegungsgleichungen für diese Hamiltonfunktion sind gerade die Bahngleichungen. κ erhält man durch Umstellen von Gl.B.7. Wir setzen dabei $H = \frac{1}{2m} p^2$, wobei $p = |\vec{p}|$ der kinetische Impulsbetrag ist. Wir setzen für $A_t = (1+hx)A_\alpha$ das obige Integral Gl.B.3 ein. Das Vorzeichen für das Feld wird so gewählt, daß die transversale Impulskomponente (genauer: ihre Ableitung) eines Zentralteilchens in den Bahngleichungen verschwindet. Die neue Hamiltonfunktion ist:

$$\kappa = -\dot{p}_t = -(1+hx) \cdot \sqrt{p^2 - p_x^2} + \frac{q}{c} \int_0^x (1+h\hat{x}) B_y d\hat{x} \quad (\text{B.8})$$

Wir definieren δ wie in Gl.2.2, skalieren $\kappa \rightarrow \bar{\kappa} = \kappa / B_{\text{pZentral}}$, und führen $\Pi_x = (p_x / B_{\text{pZentral}})$ ein.

$$\bar{\kappa} = -(1+hx) \cdot \sqrt{(1+\delta)^2 - \Pi_x^2} + \frac{1}{B_{\text{pZentral}}} \int_0^x (1+h\hat{x}) B_y d\hat{x} \quad (\text{B.9})$$

Für $\bar{\kappa}$ gelten die Bewegungsgleichungen:

$$x' = \frac{\partial \bar{\kappa}}{\partial \Pi_x} = \frac{(1+hx) \Pi_x}{\sqrt{(1+\delta)^2 - \Pi_x^2}} \quad (\text{B.10a})$$

$$\Pi_x' = -\frac{\partial \bar{\kappa}}{\partial x} = h \cdot \sqrt{(1+\delta)^2 - \Pi_x^2} - \frac{(1+hx) \cdot B_y}{B_{\text{pZentral}}} \quad (\text{B.10b})$$

Mit der Feldentwicklung Gl.2.4 erhält man für $\Pi_x \ll 1$, $\delta \ll 1$, $hx \ll 1$:

$$x' = \Pi_x - \delta \Pi_x + hx \Pi_x + \dots \quad (\text{B.11})$$

$$\Pi_x' = h\delta - (h^2 + K_1)x - \frac{1}{2}h\Pi_x^2 - (K_2 + hK_1)x^2 + \dots$$

Dieses Differentialgleichungssystem kann durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ersetzt werden:

$$x'' = (1-\delta+hx) \Pi_x' + hx' \Pi_x + h' x \Pi_x \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x'' + (K_1 + h^2)x &= h\delta - (K_2 + 2hK_1 + h^3)x^2 + \frac{1}{2}hx'^2 + h'xx' - h\delta^2 + (K_1 + 2h^2)\delta x \dots \end{aligned}$$

Mit den Entwicklungskoeffizienten gemäß Gl.2.4 ist dies die von Brown aufgestellte Bahngleichung für die Koordinate x ; die y - und y' -abhängigen Terme fehlen hier gemäß Voraussetzung. Diese Gleichung enthält alle Beiträge des Störanteils bis zur zweiten Potenz in den Koordinaten.

Die folgende Bahngleichung für die Mittelebene ist exakt und konsistent mit Gl.B.10, Gl.B.11, Gl.B.12 ; der Einfachheit halber ist jedoch $h'=0$. Die Zwischenschritte zur Herleitung sind stichpunktartig in Abb.B.2 dargestellt.

$$x'' = \frac{1}{1+hx} \left\{ h(1+hx)^2 + 2hx'^2 - \frac{\sqrt{(1+hx)^2 + x'^2}^3 \cdot B_y}{(1+\delta) \cdot B_{\rho_{\text{Zentral}}}} \right\} \quad (\text{B.13})$$

Abb.B.2 Zwischenschritte zur Herleitung von Gl.B.13 stichpunktartig

Mit Gl.B.10a folgt $\Pi_x = \frac{(1+\delta)x'}{\sqrt{(1+hx)^2 + x'^2}}$ (Gl.A) und $\sqrt{(1+\delta)^2 - \Pi_x^2} = \frac{(1+\delta) \cdot (1+hx)}{\sqrt{(1+hx)^2 + x'^2}}$ (Gl.B)

Nach differenzieren von Gl.A : $\Pi'_x = \frac{(1+\delta)(1+hx)[x''(1+hx) - hx'^2]}{\sqrt{(1+hx)^2 + x'^2}^3}$ (Gl.C)

Durch Einsetzen von Gl.B in Gl.B.10b : $\Pi'_x = \frac{h(1+\delta)(1+hx)}{\sqrt{(1+hx)^2 + x'^2}} - \frac{(1+hx) \cdot B_y}{B_{\rho_{\text{Zentral}}}}$ (Gl.D)

Durch Gleichsetzen von Gl.C und Gl.D eliminiert man Π'_x und erhält nach Erweiterung der Brüche und Umstellung die Gl.B.13 .

B.2 Beweis zu Abschnitt 2.3.6.2

Behauptung: Die Lösung V aus Gl.2.20 ist mit den Bedingungen Gl.2.22 identisch mit der Lösung V_{Dipol} aus Gl.2.21 .

Hilfssatz: Mit den Definitionen Gl.2.20a gilt:

$$\frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \cdot y^{(2j+1)} = \sum_{k=0}^j \frac{1}{2^{2k}} \cdot \Omega_{2k+1, j-k} \quad (\text{B.14})$$

Beweis des Hilfssatzes Gl.B.14:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^j \frac{1}{2^{2k}} \cdot \Omega_{2k+1, j-k} \\ &= \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^{j-k}}{2^{2j} \cdot (j-k)! \cdot (k+j+1)!} \cdot r^{2k+1+j-k} \cdot \sin(2k+1)\phi \\ &= \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^{j-k}}{2^{2j} \cdot (j-k)! \cdot (k+j+1)!} \cdot (x^2 + y^2)^{j-k} \cdot \text{Im} \left((x+iy)^{2k+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{v=0}^j \frac{(-1)^v}{2^{2j} \cdot v! \cdot (2j+1-v)!} \cdot (x^2+y^2)^v \cdot \operatorname{Im} \left((x+iy)^{2j+1-2v} \right) \\
&= \frac{1}{(2j+1)!} \cdot \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2^{2j}} \sum_{v=0}^j \binom{2j+1}{v} \cdot (-x+iy)^v \cdot (x+iy)^{2j+1-v} \right\} \\
&= \frac{1}{(2j+1)!} \cdot \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2^{2j+1}} \sum_{v=0}^{2j+1} \binom{2j+1}{v} \cdot (-x+iy)^v \cdot (x+iy)^{2j+1-v} \right\} \\
&= \frac{1}{(2j+1)!} \cdot \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2^{2j+1}} (-x+iy+x+iy)^{2j+1} \right\} \stackrel{!}{=} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \cdot y^{2j+1} \quad \underline{\text{q.e.d}}
\end{aligned}$$

Beweis der Behauptung:

Folgerungen aus Gl.2.22:

$$f_{2k+1}^{(0)} = \frac{1}{2^{2k}} \cdot \tilde{f}_1^{(2k)} \Rightarrow f_{2k+1}^{(2j-2k)} = \frac{1}{2^{2k}} \cdot \tilde{f}_1^{(2j)} \quad , \quad j \geq k \quad (\text{B.15})$$

(Die Stetigkeit aller Ableitungen wird vorausgesetzt.)

Die in n geraden Anteile von V verschwinden gemäß Bedingung Gl.2.22 . Wir reorganisieren die Summationsreihenfolge für die in n ungeraden Anteile:

$$\begin{aligned}
V_{\text{ungerade}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{2k+1}^{(2m)}(z) \cdot \mathcal{Q}_{2k+1,m}(r, \phi) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j f_{2k+1}^{(2j-2k)}(z) \cdot \mathcal{Q}_{2k+1,j-k}(r, \phi)
\end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Nach Einsetzen der Bedingungen Gl.B.15 in Gl.B.16 ergibt sich mit dem Hilfssatz Gl.B.14 die Behauptung:

$$\begin{aligned}
V_{\text{ungerade}} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \frac{1}{2^{2k}} \cdot \tilde{f}_1^{(2j)}(z) \cdot \mathcal{Q}_{2k+1,j-k}(r, \phi) \\
&\stackrel{!}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{f}_1^{(2j)}(z) \cdot \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \cdot y^{(2j+1)} = V_{\text{Dipol}}
\end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

q.e.d

B.3 Integration der Lösungsentwicklung nach K.Brown

B.3.1 Die Integrationsvorschrift nach K.Brown

Eine Aberration $(x|x_0^K x_0'^\lambda y_0^\mu y_0'^\nu \delta^X)$ der Ordnung $n=\kappa+\lambda+\mu+\nu+\chi$ kann nach K.Brown folgendermaßen berechnet werden:

$$(x|x_0^K x_0'^\lambda y_0^\mu y_0'^\nu \delta^X) = \frac{i^{2+\mu+\nu} \cdot n!}{\kappa! \lambda! \mu! \nu! \chi!} \cdot \int_{t_0}^t G_x(t, \tau) \cdot K_n \cdot c_x^K \cdot s_x^\lambda \cdot c_y^\mu \cdot s_y^\nu \cdot d_x^\chi \cdot d\tau \quad (B.18)$$

+ Terme in K_{n-1} , K_{n-2} ...

Dabei sind $(x|x_0^K x_0'^\lambda y_0^\mu y_0'^\nu \delta^X)$ die in Gl.2.34 definierten Aberrationen, $G_x(t, \tau)$ die in Gl.2.29 definierte Greensche Funktion, c_x usw. die fundamentalen Lösungen der homogenen Gleichung nach Abschnitt 2.4.1, d_x die Dispersion nach Gl.2.31 und K_n die Feldkoeffizienten nach Gl.2.4 . Das alternierende Vorzeichen $i^{2+\mu+\nu}$ entspricht den in der Quelle angegebenen Vorzeichenbestimmungen (für Aberrationen in der x-Ebene), wobei nur $\mu+\nu$ =gerade zugelassen ist; i ist die imaginäre Zahl. Anteile mit $\mu+\nu$ =ungerade verschwinden gemäß der in Quelle angegebenen Vorschrift auf Grund der Mittelebenensymmetrie. Die in K_{n-1} usw. auftretenden Terme sind auch in Quelle nicht näher spezifiziert. Diese Terme kommen durch sogenannte Kopplungen zustande.

Eine Multipolstärke K_n geht nur in Aberrationen der Ordnung n oder in Aberrationen höherer Ordnung ein.

B.3.2 Herleitung der Integrationsvorschrift

Wir leiten Gl.B.18 für den Fall her, daß im System lediglich Multipolstörungen nach Gl.2.16 vorhanden sind, und nähern σ_x nach Gl.2.17 . Nach der Aufschlüsselung der Lösungsanteile in Gl.2.30 können wir σ_x für einen $2 \cdot (n+1)$ -Pol folgendermaßen darstellen ($n \geq 2$):

$$\sigma_x = -K_n \cdot \operatorname{Re} (x+iy)^n \quad (\text{B.19})$$

$$= -K_n \cdot \operatorname{Re} \left(x_{\text{homogen}} + d_x \cdot \delta + x_{\text{Stör}} + i \cdot y_{\text{homogen}} + i \cdot y_{\text{Stör}} \right)^n$$

i ist dabei die imaginäre Zahl. Der Anteil $x_{\text{Stör}}$, $y_{\text{Stör}}$ enthält alle Beiträge in zweiter und höherer Ordnung aus der Lösungsentwicklung Gl.2.34. Dieser Anteil wird vorläufig unterdrückt. Wir bedienen uns zur Darstellung von x_{homogen} , y_{homogen} des Fundamentalsystems c_x , s_x bzw. c_y , s_y und erhalten:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -K_n \cdot \operatorname{Re} \left(c_x x_0 + s_x x'_0 + d_x \delta + i \cdot c_y y_0 + i \cdot s_y y'_0 \right)^n \quad (\text{B.20}) \\ &= -\operatorname{Re} \left\{ \sum_{\substack{\kappa, \lambda, \mu, \nu, \chi \\ \text{mit } \kappa+\lambda+\mu+\nu+\chi=n}} \frac{n!}{\kappa! \lambda! \mu! \nu! \chi!} \cdot i^{\mu+\nu} \cdot K_n \cdot c_x^\kappa s_x^\lambda c_y^\mu s_y^\nu d_x^\chi \cdot x_0^\kappa x_0'^\lambda y_0^\mu y_0'^\nu \delta^\chi \right\} \end{aligned}$$

Wir setzen diesen Ausdruck für σ_x in Gl.2.30 ein und ziehen die Summe vor das Integral:

$$\begin{aligned} x &= x_{\text{homogen}} + d_x \delta + \sum_{\substack{\kappa, \lambda, \mu, \nu, \chi \\ \text{mit } \kappa+\lambda+\mu+\nu+\chi=n \\ \text{und } \mu+\nu=\text{gerade}}} \left\{ \frac{n!}{\kappa! \lambda! \mu! \nu! \chi!} \cdot i^{2+\mu+\nu} \cdot \int_{t_0}^t d\tau G_x(t, \tau) \cdot K_n \cdot c_x^\kappa s_x^\lambda c_y^\mu s_y^\nu d_x^\chi \right\} * \\ &\quad * x_0^\kappa x_0'^\lambda y_0^\mu y_0'^\nu \delta^\chi \quad (\text{B.21}) \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich mit Gl.2.34 erhält man für die Aberrationen $(x | x_0^\kappa x_0'^\lambda y_0^\mu y_0'^\nu \delta^\chi)$ den in großen geschweiften Klammern stehenden Ausdruck. Dies ist der Ausdruck, der in Gl.B.18 explizit angegeben wird.

Die in $x_{\text{Stör}}$ zusammengefaßten höheren Lösungsanteile wurden bisher unterdrückt. Wir berücksichtigen $x_{\text{Stör}}$ formal, und wir erhalten anstelle von Gl.B.20 (unter Weglassung der y -abhängigen Anteile):

$$\sigma_x = -K_n \cdot \left(c_x x_0 + s_x x'_0 + d_x \delta + x_{\text{Stör}} \right)^n \quad (\text{B.22})$$

$$= - \left\{ \sum_{\substack{\kappa, \lambda, \chi, \zeta \\ \text{mit } \kappa + \lambda + \chi + \zeta = n}} \frac{n!}{\kappa! \lambda! \chi! \zeta!} \cdot K_n \cdot c_x^\kappa s_x^\lambda d_x^\chi \cdot x_0^\kappa x'_0{}^\lambda \delta^\chi x_{\text{Stör}}^\zeta \right\}$$

Da $x_{\text{Stör}}$ die Koordinaten $x_0, x'_0, \dots, \delta$ mindestens in der zweiten Potenz enthält, entstehen (für $\zeta \neq 0$) unter der Summe in Gl.B.21 Beiträge in

$$x_0^\kappa x'_0{}^\lambda \delta^\chi \quad \text{mit } \kappa + \lambda + \chi > n \quad (\text{B.23})$$

Betrachten wir insbesondere einen Anteil in $x_{\text{Stör}}$, der $x_0, x'_0, \dots, \delta$ in k -ter Potenz enthält, so gilt für die an diesen Anteil "angekoppelten" Lösungsanteile:

$$(\text{B.24})$$

$$\kappa + \lambda + \chi > k$$

Die Ordnung eines solchen Kopplungsanteils übersteigt sowohl die Ordnung n der Multipolstärke K_n , an der er angeregt wurde, als auch die Ordnung k des bereits angeregten Lösungsanteils, an den dieser Anteil "angekoppelt" ist.

B.3.3 Diskussion der Integrationsvorschrift

Die durch Gl.B.18 getroffene Aussage ist, daß mit Hilfe der Multipolstärke K_n die Aberrationen n -ter Ordnung gezielt kompensiert werden können, ohne daß die Aberrationen niedrigerer Ordnung davon beeinflußt werden. Dies ist bei Entwurfs- und Einstellprozeduren von praktischer Bedeutung, da es sich anbietet, Aberrationen mit steigendem n zu kompensieren [T-KB70], [D-WH81], [V-SM83].

Wie man aus der obigen Ableitung erkennt, geht die Laplacegleichung in die Störung Gl.B.19 und damit in die Integrationsvorschrift Gl.B.18 ein; dabei liegt die Feldentwicklung für den zweidimensionalen Fall (Gl.2.16) zu Grunde.

Abschnitt B.3.2 zeigt, wie man durch Einsetzen der Lösungsentwicklung (Gl.2.33, Gl.2.34) in Gl.2.30 auf die von Brown aufgestellte Gleichung gelangt. Insbesondere auf Grund von Gl.B.24 ist das Lösungsprinzip in Abschnitt 2.4.3 formuliert worden. Störungen σ_x , die x' und y' enthalten (vgl. Abschnitt 2.2.3), werden in Gl.B.20 nicht explizit erfaßt. Das in Abschnitt 2.4.3 formulierte Lösungsprinzip darf auf diese Störterme erweitert werden. Dazu definiert man einen Störungsanteil der n-ten Ordnung folgendermaßen

$$\sigma_x \sim x^I \cdot x'^J \cdot y^K \cdot y'^L \cdot \delta^M \text{ mit } I+J+K+L+M = n, \quad (\text{B.25})$$

und benutzt entsprechend in Gl.B.20 $x' = c'x_0 + s'x'_0 + d'\delta \dots$

B.4 Die "Turtle-Näherung"

B.4.1 Hilfssatz zu Abschnitt B.4.3, B.4.5, B.5

Die folgende Beziehung wird in den beiden nächsten Abschnitten benötigt:

$$\bar{c}(t, \hat{t}) \cdot G_x(\hat{t}, \tau) + \bar{s}(t, \hat{t}) \cdot G'_x(\hat{t}, \tau) = G_x(t, \tau) \text{ für } \hat{t} \geq \tau, t \geq \tau \quad (\text{B.26a})$$

Ebenso gilt

$$\bar{c}(t, \hat{t}) \cdot \bar{s}_x(\hat{t}, \tau) + \bar{s}(t, \hat{t}) \cdot \bar{s}'_x(\hat{t}, \tau) = G_x(t, \tau) \text{ für } t \geq \tau \quad (\text{B.26b})$$

Man verifiziert dies leicht mit Gl.2.28 ("Liouville"). $\bar{c}$ und $\bar{s}$ ist in Gl.2.38 definiert.

B.4.2 Die Turtle-Rekursion

Aus der Turtle-Rekursion Gl.2.43 folgt für den nach m Teilabschnitten berechneten Phasenraumvektor $\vec{q}(t_m)$:

(B.27)

$$\begin{aligned}\vec{q}(t_m) &= \Delta \vec{q}_m + \underline{R}(t_m, t_{m-1}) \cdot (\Delta \vec{q}_{m-1} + \underline{R}(t_{m-1}, t_{m-2}) \cdot (\dots (\Delta \vec{q}_1 + \underline{R}(t_1, t_0) \cdot \vec{q}(t_0)) \dots)) \\ &= \sum_{i=1}^m \underline{R}(t_m, t_i) \cdot \Delta \vec{q}_i + \underline{R}(t_m, t_0) \cdot \vec{q}(t_0)\end{aligned}$$

Schreibt man Gl.B.27 explizit für die Koordinate $x(t_m)$, so identifiziert man den rechten Anteil mit dem linearen Lösungsanteil x_{linear} aus Gl.2.30. Der linke Anteil aus Gl.B.27 ergibt einen zusätzlichen Beitrag in $x(t_m)$.

$$x_{\text{links}}(t_m) = \sum_{i=1}^n \bar{c}(t_m, t_i) \cdot \Delta x_i + \bar{s}(t_m, t_i) \cdot \Delta x'_i \quad (\text{B.28})$$

$\bar{c}$ und $\bar{s}$ sind wie in Gl.2.38 definiert. Die ersten beiden Komponenten von $\Delta \vec{q}_i$ werden im folgenden als Δx_i und $\Delta x'_i$ bezeichnet.

B.4.3 Die formale Lösung

Wir setzen für die Phasenraumkoordinatenänderungen Δx_i und $\Delta x'_i$ formal das folgende Integral in Gl.B.28 ein:

$$\begin{aligned}\Delta x_i &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} G_x(t_i, \tau) \cdot \sigma_x(\vec{q}, \tau) \cdot d\tau \\ \Delta x'_i &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} G'_x(t_i, \tau) \cdot \sigma_x(\vec{q}, \tau) \cdot d\tau\end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Man erhält damit unter Verwendung von Gl.B.26 für x_{links} :

(B.30)

$$x_{\text{links}}(t_m) = \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} G_x(t_m, \tau) \cdot \sigma_x(\vec{q}, \tau) \cdot d\tau = \int_{t_0}^{t_m} G_x(t_m, \tau) \cdot \sigma_x(\vec{q}, \tau) \cdot d\tau$$

Dies ist gerade $x_{\text{stör}}(t_m)$ aus Gl.2.30 .

Die Turtle-Rekursion (Gl.2.43) führt demnach formal zur exakten Lösung (Gl.2.30), sobald man für die Phasenraumkoordinatenänderungen Δx_i , $\Delta x'_i$ die formale Lösung nach Gl.B.29 einsetzt.

B.4.4 Die Turtle-Näherung

Turtle berechnet in einigen Fällen den Störanteil Δx_i , $\Delta x'_i$ usw. mit Hilfe der Lösungsentwicklung Gl.2.34, wobei der Entwicklungspunkt t_{i-1} benutzt wird. Kopplungsanteile werden nicht berücksichtigt. Dies ist nach Abschnitt B.3 gleichbedeutend¹⁾ damit, unter dem Integral Gl.B.29 nur den linearen Anteil der Lösungsentwicklung in $\sigma_x(\vec{q}, t)$ einzusetzen. Der unter dem Integral eingesetzte Lösungsanteil wird im folgenden mit x_{Ein} bezeichnet:

$$x_{\text{Ein}}(t) = \bar{c}_x(t, t_{i-1}) \cdot x(t_{i-1}) + \bar{s}_x(t, t_{i-1}) \cdot x'(t_{i-1}) \quad (\text{B.31})$$

(Wir unterdrücken der Einfachheit halber im folgenden Terme in δ und y .) Turtle berechnet die Phasenraumkoordinatenänderungen Δx_i , $\Delta x'_i$ demnach aus den (zuvor berechneten) Koordinaten an der Stelle t_{i-1} .

B.4.5 Kopplungsanteile

Aus Gl.B.27/Gl.B.30 geht hervor, daß $x(t_{i-1})$ bereits einen Störanteil enthält, formal²⁾:

$$x(t_{i-1}) = c(t_{i-1}) \cdot x_0 + s(t_{i-1}) \cdot x'_0 + \int_{t_0}^{t_{i-1}} G_x(t_{i-1}, \tau) \cdot \sigma_x(\vec{q}, \tau) \cdot d\tau \quad (\text{B.32})$$

$$x'(t_{i-1}) = c'(t_{i-1}) \cdot x_0 + s'(t_{i-1}) \cdot x'_0 + \int_{t_0}^{t_{i-1}} G'_x(t_{i-1}, \tau) \cdot \sigma_x(\vec{q}, \tau) \cdot d\tau$$

Mit Gl.2.38 und Gl.B.26 findet man durch Einsetzen von Gl.B.32 in Gl.B.31:

$$x_{\text{Ein}}(t) = c_x \cdot x_0 + s_x \cdot x'_0 + \int_{t_0}^{t_{i-1}} G_x(t, \tau) \cdot \sigma_x(\vec{q}, \tau) \cdot d\tau \quad (\text{B.33})$$

1) Ersetze zunächst in Gl.2.34 und in Abschnitt B.3.2 t_0 gegen t_{i-1} und entsprechend $c(t)$ gegen $\bar{c}(t, t_{i-1})$ usw. .

2) Der Störanteil enthält wiederum Näherungen aus vorhergehenden Abschnitten.

Gegenüber der exakten formalen Lösung fehlt in x_{Ein} offensichtlich der Anteil

$$x_{\text{Diff}}(t) = \int_{t_{i-1}}^t G_x(t, \tau) \cdot \sigma_x(\vec{q}, \tau) \cdot d\tau \quad (\text{B.34})$$

wie in Gl.B.31 vorausgesetzt. Nur die an x_{Diff} angekoppelten Anteile gehen in der Lösung verloren, vgl. Gl.B.22. Je höher die Anzahl der verwendeten Intervalle ist, desto mehr nähert sich $x_{\text{Ein}}(t)$ der exakten Funktion $x_{\text{linear}}(t) + x_{\text{Stör}}(t)$.

Kopplungsanteile gehen trivialerweise verloren, wenn man $x(t_{i-1})$ in Gl.B.32 durch den linearen Anteil annähert.

B.5 Simulation einer Anregung am Schwingungsbauch

Wir simulieren die Anregung eines Störanteils durch einen "Kick" in beiden Phasenraumkoordinaten $\Delta x, \Delta x'$ an einer ausgesuchten Stelle t_i , an der die Winkelkoordinate x' für die betrachtete Bahn verschwindet. Das Verfahren ist so angelegt, daß die Ausdrücke für Δx und $\Delta x'$ möglichst übersichtlich werden. Dafür nimmt man in Kauf, daß die Stelle t_i nicht für alle Anfangsbedingungen einheitlich ist. Die Fortpflanzung des Störanteils kann in Analogie zum Winkel-"Kick" mit Hilfe der Gleichung

$$\Delta \vec{q}(t) = \underline{\underline{R}}(t, t_i) \cdot \Delta \vec{q}(t_i) \quad (\text{B.35})$$

verfolgt werden. Im Gegensatz zur Winkel-"Kick" Näherung ist dieses Verfahren bis auf die Anregung von Kopplungsanteilen exakt. Für die Anregung von Kopplungsanteilen gelten die bereits unter Abschnitt 2.4.5 für die "Turtle-Näherung" gemachten Aussagen. Das Verfahren wird am Beispiel der Anregungen des Störgliedes $\sigma_x = -\frac{3}{2}xx'^2$ eingeführt.

Wir benutzen Gl.2.44 und berechnen Δx , $\Delta x'$ an der Stelle t_i . Anstelle von $G(t_i, \tau)$ setzen wir $\bar{s}(t_i, \tau)$ ein, welches jedoch für $t_i < \tau$ im allgemeinen nicht verschwindet.

$$\Delta x(t_i) = -\frac{3}{2} K_1 \int_{t_1}^{t_2} d\tau \bar{s}(t_i, \tau) \cdot x(\tau) \cdot x'^2(\tau) \quad (\text{B.36})$$

$$\Delta x'(t_i) = -\frac{3}{2} K_1 \int_{t_1}^{t_2} d\tau \bar{s}'(t_i, \tau) \cdot x(\tau) \cdot x'^2(\tau)$$

Mit Hilfe von Gl.B.26b zeigt man, daß zwischen den nach Gl.B.36 und den nach Gl.2.44 berechneten Änderungen der Phasenraumkoordinaten für $t \geq t_2$ der Zusammenhang Gl.B.35 besteht. Man erkennt, daß die Anregung des Störanteils in dem Falle "simuliert" wird, in dem das Teilchen an der Stelle t_i die gesamte Störung noch nicht durchlaufen hat; in den Integrationsgrenzen ist dagegen die gesamte Länge der Störung eingeschlossen.

Zur Darstellung von $x(\tau)$ benutzen wir das folgende Fundamentalsystem (Lösungen des Gradientenfeldes):

$$\bar{c}_x(\tau, t_i) = \cos\left(\sqrt{-K_1} \cdot (\tau - t_i)\right) \quad (\text{B.37})$$

$$\bar{s}_x(\tau, t_i) = (1/\sqrt{-K_1}) \cdot \sin\left(\sqrt{-K_1} \cdot (\tau - t_i)\right)$$

Gl.B.37 gilt für $t_2 \geq t_i \geq t_1$ und $t_2 \geq \tau \geq t_1$. Unter dem Integral wird die folgende Lösungsnahe rung x_{Ein} , x'_{Ein} eingesetzt ($\delta=0$):

$$\begin{aligned} x_{\text{Ein}}(\tau) &= \bar{c}_x(\tau, t_i) \cdot x(t_i) + \bar{s}_x(\tau, t_i) \cdot x'(t_i) \\ x'_{\text{Ein}}(\tau) &= \bar{c}'_x(\tau, t_i) \cdot x(t_i) + \bar{s}'_x(\tau, t_i) \cdot x'(t_i) \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

($\bar{c}(\tau, t_i)$ und $\bar{s}(\tau, t_i)$ entsprechen für $t_2 \geq \tau \geq t_1$ den in Abschnitt 2.4.4 definierten Elementen der Teilmatrix $\underline{\mathbf{R}}(\tau, t_i)$.) $\bar{s}(t_i, \tau)$ in Gl.B.36 läßt sich ebenfalls mit Hilfe dieser Basis ausdrücken. Unter Benutzung von Gl.B.37 findet man:

$$\begin{aligned}\bar{s}(t_i, \tau) &= -\bar{s}(\tau, t_i) \\ \bar{s}'(t_i, \tau) &= \bar{c}(\tau, t_i)\end{aligned}\quad (\text{B.39})$$

$s'(t_i, \tau)$ bedeutet die totale Ableitung von $\bar{s}$ nach dem ersten Argument, ausgewertet an der Stelle t_i .

Legt man t_i so fest, daß für die betrachtete Bahn $x'(t_i) = 0$ gilt, so bleibt unter jedem der beiden Integrale Gl.B.36 jeweils ein Ausdruck. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\Delta x(t_i) &= + \frac{3}{2} K_1 x^3(t_i) \cdot \int_{t_1}^{t_2} d\tau \bar{s}(\tau, t_i) \bar{c}(\tau, t_i) \bar{c}'^2(\tau, t_i) \\ \Delta x(t_i) &= - \frac{3}{2} K_1 x^3(t_i) \cdot \int_{t_1}^{t_2} d\tau \bar{c}^2(\tau, t_i) \bar{c}'^2(\tau, t_i)\end{aligned}\quad (\text{B.40})$$

Nach Einsetzen von Gl.B.37 und Ausführung der Integration erhält man:

$$\Delta x(t_i) = \frac{3}{8} K_1 x^3(t_i) \cdot \sin^4 \sqrt{|K_1|} \tau \Big|_{\tau=t_1-t_i}^{\tau=t_2-t_i} \quad (\text{B.41a})$$

$$\Delta x'(t_i) = \frac{3}{2} K_1^2 x^3(t_i) \cdot \left[\frac{\tau}{8} - \frac{\sin 4 \sqrt{|K_1|} \tau}{32 \sqrt{|K_1|}} \right]_{\tau=t_1-t_i}^{\tau=t_2-t_i} \quad (\text{B.41b})$$

Im Falle des defokussierenden Feldes ist "sin" durch "sinh" zu ersetzen; Gl.B.41b erhält ein negatives Vorzeichen.

Die Stelle t_i ermittelt man z.B. aus den Eingangskoordinaten $x(t_1)$, $x'(t_1)$ am Quadrupol folgendermaßen:

$$t_1 - t_i = (1/\sqrt{|K_1|}) \cdot \arctan \left((1/\sqrt{|K_1|}) \cdot \frac{x'(t_1)}{x(t_1)} \right) \quad (\text{B.42})$$

Im Falle des defokussierenden Feldes ist "arctan" gegen "-arctanh"

zu ersetzen. Man findet, daß $\frac{x'(t_1)}{x(t_1)}$ bei den im oberen bzw. unteren Teil der Tabelle 2.1 gewählten Anfangsbedingungen jeweils durch die Funktionen $s_x(t_1)$ bzw. $d_x(t_1)$ festgelegt ist. Diese erhält man z.B. aus den Berechnungen mit dem Programm TRANSPORT [P-TR80], siehe Tabelle C.1, Anhang C. Die Fortpflanzung in die Detektorebene ermittelt man mit Gl.B.35 und Tabelle C.2 .

Zur Überprüfung der Vorzeichen macht man sich die in Abb.B.3 übertrieben dargestellten Bahnverläufe klar. In einigen Fällen gibt es innerhalb des Quadrupols keinen Punkt t_i mit $x'(t_i)=0$. Auch dieser Fall kann mit Gl.B.41 behandelt werden, wenn man den Quadrupol entsprechend verlängert, Abb.B.4 .

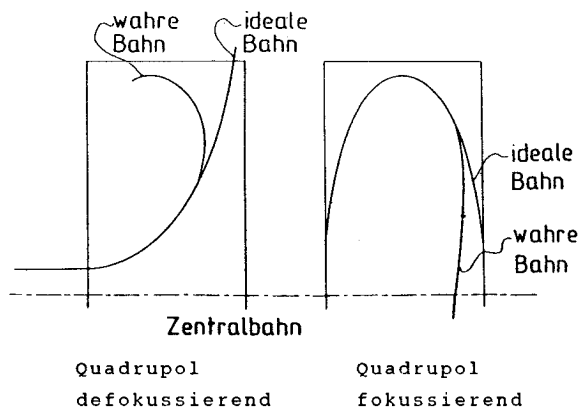


Abb.B.3 Vorzeichentest - Zur Überprüfung von Vorzeichen der Phasenraumkoordinatenänderungen macht man sich den Verlauf der wahren Bahn im Magnetfeld gegenüber der harmonischen Schwingung klar.

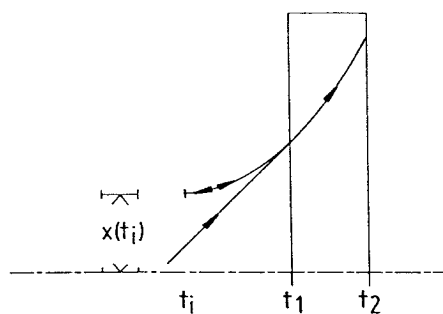


Abb.B.4 Spezialfall: t_i liegt außerhalb $[t_1, t_2]$ - In dem hier dargestellten Spezialfall liegt der Punkt t_i mit $x'(t_i)=0$ vor dem Quadrupol. $s(t_i)$, $s'(t_i)$ u.s.w erhält man (z.B. mit Hilfe von TRANSPORT) durch Einführung eines Quadrupols mit negativer Länge, der an die Stelle t_1 gesetzt wird. Die Störungsanregung stellt man sich (zwecks Berechnung der Bahnstörung mit Hilfe von Gl.B.41a/b) folgendermaßen vor: Das Teilchen erreicht über die Driftstrecke den Eingang des Quadrupols; daraufhin läuft es rückwärts durch ein gedachtes Quadrupolfeld zum Punkt t_i ; dort erfährt es die Phasenraumkoordinatenänderungen nach Gl.2.48, woraufhin es durch das gedachte Quadrupolfeld zum Eingang des Quadrupols zurückläuft.

Anhang C

Abschätzungen

C.1 Matrixelemente

Die in diesem Abschnitt benötigten Definitionen findet man in Abschnitt 2.4.4. Bei Anwendung der Winkel-"Kick" Näherung Gl.2.41 oder bei Anwendung von Gl.B.35 kann auf die Tabellen C.1, C.2 zurückgegriffen werden. Schätzt man die Koordinaten an der Stelle τ in linearer Näherung mit Hilfe von Tabelle C.1 ab, so verliert man Kopplungsanteile, vgl. Abschnitt 2.4.3. Zur Benutzung der "Kick"-näherung Gl.2.41 benötigt man die Matrixelemente $R_{12}(t_D, \tau) = \bar{s}_x(t_D, \tau) = G(t_D, \tau)$, siehe Tabelle C.2. Diese Tabelle enthält für die Benutzung von Gl.B.35 ebenso die Elemente $R_{11}(t_D, \tau) = \bar{c}(t_D, \tau)$.

Die Matrixelemente werden mit dem Programm TRANSPORT [P-TR80] bestimmt. Es wurde ein am Detektor vertikal und horizontal fokussiertes System mit einer Dispersion $d_x = 16 \text{ cm}/\%$ gefordert. Dies entspricht annähernd den in Abb.4.1-01 gezeigten Einstellungen.

C.2 Abschätzungen zu Kapitel 4

Abschätzung C.2.1: Für Abb.4.5-01 ist die Gl.4.11x anwendbar, in der entsprechend der Einstellung $y'_0 = 0 \text{ mrad}$ gesetzt wird. Man erkennt, daß die Gl.4.11 das antisymmetrische Verhalten von Test "M6" qualitativ erklärt. Daher kann mit Gl.4.11x der Koeffizient $L \cdot \frac{1}{B_p} \cdot b_6$ abgeschätzt werden. Bei $x'_0 = 15 \text{ mrad}$ hat man eine Differenz von Test "M6" und "0" von $\Delta x_D \approx 1 \text{ cm}$. Diese Abweichung erhält man, wenn man in Gl.4.11x $L \cdot \frac{1}{B_p} \cdot b_6^{(2)} = 1.85 \cdot 10^{-3} \text{ mrad/cm}^5$ annimmt. (Ein Teilchen mit einem Eingangswinkel von $x'_0 = 15 \text{ mrad}$ ist in Q2 etwa $x = 4.6 \text{ cm}$ ausge-

Tabelle C.1 Matricelemente der Matrix $\underline{R}(\tau, t_0)$, t_0 Streufole

	τ [m]	c_x	s_x [cm/mrad]	c'_x [mrad/cm]	s'_x	c_y	s_y [cm/mrad]	c'_y [mrad/cm]	s'_y	d_x [cm/%]	d'_x [mrad/%]
Q1	0.623 m	1.000	0.062	0.000	1.000	1.000	0.062	0.000	1.000	0.000	0.000
	1.077 m	1.550	0.150	26.216	3.183	0.536	0.072	-18.702	-0.629	0.000	0.000
Q2	1.559 m	2.812	0.303	26.216	3.183	-0.365	0.041	-18.702	-0.629	0.000	0.000
	2.013 m	2.776	0.313	-27.705	-2.768	-1.493	0.027	-34.348	-0.059	0.000	0.000
D1	4.505 m	-4.130	-0.376	-27.705	-2.768	-10.055	0.012	-34.348	-0.059	0.000	0.000
	7.180 m	-6.219	-0.613	-2.701	-0.427	-19.166	-0.004	18.449	-0.048	-1.560	-14.218
D1	8.273 m	-6.514	-0.660	-2.701	-0.427	-17.150	-0.009	18.449	-0.048	-3.114	-14.218
	10.964 m	-5.561	-0.593	27.855	2.791	0.985	-0.015	67.437	-0.022	-6.721	0.864
Q3	11.967 m	-2.768	-0.313	27.855	2.791	7.746	-0.017	67.437	-0.022	-6.635	0.864
	12.697 m	-1.298	-0.176	14.126	1.140	10.352	-0.015	0.867	0.095	-8.345	-49.708
Detektorebene											
	14.237 m	0.877	0.000	14.126	1.140	10.486	0.000	0.867	0.095	-16.000	-49.708

Spezielle Punkte τ , an denen $s'_x \approx 0$ ist

	τ [m]	c_x	s_x [cm/mrad]	c'_x [mrad/cm]	s'_x	c_y	s_y [cm/mrad]	c'_y [mrad/cm]	s'_y	d_x [cm/%]	d'_x [mrad/%]
(*)	0.205 m	1.460	0.043	-23.560	-0.008	0.601	0.001	17.697	1.704		
	1.800 m	3.102	0.343	-2.646	0.030	-0.878	0.030	-24.536	-0.294	0.000	0.000
(*)	13.523 m	-0.450	-0.132	7.518	-0.021	7.192	-0.003	-73.123	0.170	-15.819	-141.012

(*) Hier werden die Lösungsfunktionen des Quadrupols über die Grenzen des Quadrupols fortgesetzt.

Tabelle C.2 Matricelemente der Matrix $\underline{R}(t_D, \tau)$, t_D Detektorebene

	τ [m]	$\bar{c}_x$	$\bar{s}_x$ [cm/mrad]	$\bar{c}'_x$ [mrad/cm]	$\bar{s}'_x$	$\bar{c}_y$	$\bar{s}_y$ [cm/mrad]	$\bar{c}'_y$ [mrad/cm]	$\bar{s}'_y$
Q1	0.623 m	0.877	-0.054	14.126	0.264	10.486	-0.650	0.867	0.041
	1.077 m	2.788	-0.131	15.058	-0.351	-6.534	-0.748	1.220	-0.011
Q2	1.559 m	2.772	-0.264	14.970	-1.067	-6.620	-0.431	1.236	-0.070
	2.013 m	-2.458	-0.278	-7.611	-1.272	-0.609	-0.279	3.163	-0.163
D1	4.505 m	-2.392	0.325	-7.408	0.594	-0.615	-0.125	3.195	-0.960
	7.180 m	-0.375	0.538	-2.953	1.570	-0.506	0.042	-1.806	-1.829
D2	8.273 m	-0.375	0.580	-2.956	1.899	-0.509	0.095	-1.814	-1.639
	10.964 m	2.454	0.521	7.692	2.043	-0.233	0.159	-6.491	0.108
Q3	11.967 m	2.465	0.276	7.724	1.275	-0.236	0.183	-6.583	0.769
	12.697 m	0.993	0.153	0.000	1.000	1.000	0.158	0.000	1.000
Detektorebene									
	14.237 m	1.000	0.000	0.000	1.000	1.000	0.000	0.000	1.000

Spezielle Punkte τ , an denen $s'_x \approx 0$ ist

	τ [m]	$\bar{c}_x$	$\bar{s}_x$ [cm/mrad]	$\bar{c}'_x$ [mrad/cm]	$\bar{s}'_x$	$\bar{c}_y$	$\bar{s}_y$ [cm/mrad]	$\bar{c}'_y$ [mrad/cm]	$\bar{s}'_y$
	0.205 m	-0.007	-0.038	26.708	1.056	17.754	-0.010	-0.203	0.056
	1.800 m	0.026	-0.301	3.438	-1.308	-3.101	-0.316	2.088	-0.110
	13.523 m	-0.018	0.116	-8.851	1.349	1.777	0.031	7.071	0.684

lenkt und erfährt eine Störung von $\Delta x' = 3.8$ mrad, die sich in der Fokalebene zu $\Delta x_D \approx 1$ cm auswirkt.) Q1 trägt nur unwesentlich bei. Für Q1 wird entsprechend dem Skalierungsverhältnis der Quadrupolfelder für diese Einstellung $L \cdot \frac{1}{B\rho} \cdot b_6^{(1)} = -2.4 \cdot 10^{-3}$ mrad/cm⁵ angenommen.

Dieselbe Störung kann nun die Figuren in **Abb.4.5-06** erklären. Setzt man die obigen Werte für $L \cdot \frac{1}{B\rho} \cdot b_6^{(1)}$ und $L \cdot \frac{1}{B\rho} \cdot b_6^{(2)}$ in Gl.4.11y ein, so erhält man folgende Beiträge in Δy_D für einen Strahl mit den Anfangskoordinaten $x'_0 = 15$ mrad, $y'_0 = 40$ mrad : Der Anteil in $x'_0{}^4 y'_0$ liefert 1.8 cm, der Anteil in $x'_0{}^2 y'_0{}^3$ liefert -0.3 cm, der Term in $y'_0{}^5$ liefert 0.3 cm. Der Anteil $y'_0{}^5$ wird weitgehend durch die Störung in Q1, der Anteil $x'_0{}^4 y'_0$ wird weitgehend durch die Störung in Q2 bewirkt.

Abschätzung C.2.2: Nimmt man eine relative Feldstörung in den Dipolfeldern von 10^{-4} an, so verursacht diese auf ein kurzes Stück Δt eine Winkeländerung $\Delta x'$ und nach Gl.2.41 in der Detektorebene eine Bahnänderung Δx_D zu:

$$\Delta x_D = \bar{s}_x \cdot \Delta x', \quad \text{wobei } \Delta x' = 10^{-4} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \Delta t$$

$\bar{s}_x$ ist mit Ausnahme der ersten Hälfte von D1 etwa 0.6 cm/mrad. Für eine Abschätzung nehmen wir $\bar{s}_x$ als konstant an. Erstreckt sich eine für die Trajektorie sichtbare Unebenheit über die Länge eines halben Dipols (1.30m), so erhält man demnach $\Delta x' = 10^{-4} \cdot 0.5 \cdot 1.30 = 0.07 \cdot 10^{-3} = 0.07$ mrad und $\Delta x_D = 0.04$ cm. Die innerhalb der Öffnung $|x'_0| < 10$ mrad auftretenden Sprünge und Unebenheiten sind demnach weitgehend durch Feldinhomogenitäten begründet.

Abschätzung C.2.3: Wir betrachten die Unstimmigkeit im Quadrupolfeld Q2 als Fehler und verfolgen die Fortpflanzung. Aus dem Fehler im Quadrupolfeld resultiert ein Fehler x_f in der horizontalen Ortskoordinate. Beispielsweise berechnet man an der ersten Kante des zweiten Dipols K3 nach Gl.4.10 $x_f/x'_0 = 0.036$ cm/mrad¹⁾, während die horizontale Auslenkung etwa $x/x'_0 = -0.66$ cm/mrad beträgt. Die

1) $x_f \approx \Delta x$. Man entnimmt $\bar{s}_x$ der Matrix, die den Bahnabschnitt zwischen der Mitte des Q2 und der Kante K3 beschreibt.

durch die Kantenkrümmung bewirkte Winkeländerung $\Delta x'$ nach Gl.4.6 enthält damit einen relativen Fehler $\Delta x'_f / \Delta x' = 2x_f / x = 11\%$.

Abschätzung C.2.4: Wir berechnen die Ortsabweichung Δx_D in der Detektorebene unter Einsetzen der in Tabelle D.1 verzeichneten Störungen in Gl.B.35. Die benötigten Koordinaten x und x' werden in linearer Näherung berechnet.

$$\Delta x_D = \bar{s}_x \cdot \Delta x' + \bar{c}_x \cdot \Delta x$$

$$\Delta x' = \lambda \cdot h \cdot \frac{1}{4} \cdot (s' s x'_0 + ds' x'_0 \delta + d' s \delta x'_0 + d' d \delta^2)$$

$$\Delta x = -\lambda \cdot h \cdot \frac{1}{8} \cdot (s^2 x'^2_0 + 2dsx'_0 \delta + d^2 \delta^2)$$

c, s und d sind die Funktionen erster Ordnung an der Kante nach Tabelle C.1. $\Delta x, \Delta x'$ sind die Bahnstörungen an der Kante. Die Aberrationen findet man durch partielle Differentiation:

$$(x|x'_0 \delta) = \frac{\partial^2 x_D}{\partial x'_0 \partial \delta} = \lambda \cdot h \cdot [\bar{s} ds' + \bar{s} d' s - \bar{c} \cdot 2ds]$$

$$= \lambda \cdot [-5.0 \quad -0.1 \quad -9.9] \cdot 10^{-2} \frac{\text{cm}}{\text{mrad} \%} = -\lambda \cdot 15 \cdot 10^{-2} \frac{\text{cm}}{\text{mrad} \%}$$

Bemerkenswert ist, daß im Gegensatz zu den Quadrupolrandfeldern der seitliche Versatz Δx größere Wirkung hat als die Winkeländerung $\Delta x'$.

Anhang D

Zur Optik des Randfeldes

D.1 Die Näherung

In Abschnitt 2.3.6 wurden die "unvermeidbaren" Feldanteile des Randfeldes diskutiert. Wir interessieren uns für eine quantitative Aussage über die durch diese Feldanteile bewirkten Bahnstörungen. Ziel ist es, eine realistische Näherung zu finden, die möglichst wenig Annahmen über das Randfeld erforderlich macht.

Abb.3.9b zeigt die z -Abhängigkeit¹⁾ $f_2^{(2)}(z)$ des ersten "unvermeidlichen" Randfeldanteils, mit dem der Radial-Azimutalteil $\Omega_{2,1}(r, \phi)$ moduliert ist (Gl.2.20). Anhand der Abbildung macht man sich anschaulich klar, daß der (kinetische) Impulsübertrag integral verschwindet, wenn man $\Omega_{2,1}(r, \phi)$ als konstant annimmt. Der Radialteil ist jedoch bei einem Schrägdurchflug des Teilchens nicht konstant, so daß unkompenzierte Restbeträge im Impulsübertrag bestehen bleiben.

Im Verhältnis zur Periodenlänge der "Betatron"-Schwingung im Dipol- oder Quadrupolmagneten ist das Randfeld "kurz". Daher wird die ungestörte Teilchenbahn am einfachsten durch eine Gerade beschrieben. Der Schrägdurchflug kann auf diese Weise berücksichtigt werden.

Die z -Abhängigkeit des Randfeldanteils wird hingegen exakt berücksichtigt; dadurch erreicht man, daß der in Gl.2.18, Gl.2.19 gegebene Zusammenhang zwischen den Feldanteilen (und damit letztendlich die Laplace-Gleichung) in die Näherungsformel einfließen kann.

1) z ist die Zylinderachse, vgl. Abschnitt 2.3.1

h=0 - Wir kommen zur Formulierung der Näherungsansätze. Es werden die Zylinderkoordinaten r, ϕ, z bzw. die cartesischen Koordinaten x, y, z (siehe Abschnitt 2.3.1) benutzt. Die Krümmung h der Zentralbahn wird im Randfeldbereich vernachlässigt. Deshalb wird im folgenden die Zylinderachse z identisch mit t verwendet.

Das Intervall $[z_1, z_2]$ wird so gewählt, daß das Streufeld innerhalb der Intervallgrenzen liegt. An den Intervallgrenzen sollen alle Ableitungen der Funktion $f_n^{(0)}$ (siehe Gl.2.18, Gl.2.19) vernachlässigbar klein sein. Es wird angenommen:

$$f_n^{(j)}(z_1)=0, \quad f_n^{(j)}(z_2)=0 \quad \text{für alle } j>0 \quad (\text{D.1})$$

Den im Intervall $[z_1, z_2]$ angeregten Störanteil nennen wir $\Delta x(t)$. Zur Berechnung von $\Delta x(t)$ benutzen wir Gl.2.30b mit den entsprechenden Integrationsgrenzen. Zur Konstruktion der Green'schen Funktion, die wir explizit ausschreiben, benutzen wir das unten definierte Fundamentalsystem $\bar{c}$ und $\bar{s}$, vgl. Abschnitt 2.4.4. Die Anregung des Störanteils wird durch eine Änderung der Phasenraumkoordinaten am Punkt z_i "simuliert"; z_i liegt innerhalb des Integrationsintervalls²⁾, die Wahl dieses Punktes wird in Abschnitt D.2 diskutiert.

$$\Delta x(z_i) = \bar{s}_x(z_i, z_i) \cdot \int_{z_1}^{z_2} \bar{c}_x(\tau, z_i) \cdot \sigma_x(\vec{q}, \tau) \cdot d\tau - \bar{c}_x(z_i, z_i) \cdot \int_{z_1}^{z_2} \bar{s}_x(\tau, z_i) \cdot \sigma_x(\vec{q}, \tau) \cdot d\tau \quad (\text{D.2a})$$

$$\Delta x'_i(z_i) = \bar{s}'_x(z_i, z_i) \cdot \int_{z_1}^{z_2} \bar{c}_x(\tau, z_i) \cdot \sigma_x(\vec{q}, \tau) \cdot d\tau - \bar{c}'_x(z_i, z_i) \cdot \int_{z_1}^{z_2} \bar{s}_x(\tau, z_i) \cdot \sigma_x(\vec{q}, \tau) \cdot d\tau \quad (\text{D.2b})$$

Driftnäherung - $\bar{c}$ und $\bar{s}$ ist das Fundamentalsystem einer feldfreien Driftstrecke, mit Hilfe dessen die ungestörte Bahn durch eine Gerade beschrieben wird. L ist der seit z_i durchlaufene Weg, der auch negative Werte annehmen kann:

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_x(z, z_i) &= 1, & \bar{s}_x(z, z_i) &= L = z - z_i \\ \bar{c}'_x(z, z_i) &= 0, & \bar{s}'_x(z, z_i) &= 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \vec{q}(z) = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{q}(z_i) \quad (\text{D.3})$$

2) vgl. Anhang B.5

Genäherte Differentialgleichung - Wir benutzen die genäherte Differentialgleichung Gl.2.11 und zerlegen die rechte Seite entsprechend der Randfeldentwicklung:

$$\sigma_x^{n,m} \approx -\frac{1}{B\rho} B_y^{n,m}, \quad B_y^{n,m} := f_n^{(2m)}(z) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \Omega_{n,m}, \quad (D.4)$$

$$\sigma_y^{n,m} \approx -\frac{1}{B\rho} B_x^{n,m}, \quad B_x^{n,m} := f_n^{(2m)}(z) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \Omega_{n,m}.$$

Die z -Abhängigkeit $f_n^{(2m)}(z)$ und der Radial-Azimutalteil $\Omega_{n,m}$ der Potentialentwicklung werden in Gl.2.18 - Gl.2.20 definiert.

Lineare Näherung der impliziten z -Abhängigkeit von $\sigma_x - \sigma_y$ ist durch $f_n^{(2m)}(z)$ explizit von z abhängig; diese komplizierte z -Abhängigkeit wird exakt behandelt. Der Radial-Azimutalteil geht z.B. mit $\Omega(r) \sim r^3$; da sich r während des Durchflugs nur wenig ändert, kann man die Funktion $\Omega(r)$ durch eine jeweils passende Tangente annähern. Der Radius r wiederum ist unter Annahme der "Drift"-Näherung linear von z abhängig. Die implizite z -Abhängigkeit des Radialteils $\Omega(r(z))$ darf daher entwickelt und nach dem linearen Glied in z abgebrochen werden. Als Entwicklungspunkt dient der Punkt z_i . Durch die Entwicklung erreicht man, daß der Radial-Azimutalteil vor das Integral gezogen werden kann (s.u.). Unter Verwendung der Abkürzungen

$$\xi_{n,m} := -\frac{\partial}{\partial y} \Omega_{n,m}, \quad \nu_{n,m} := -\frac{\partial}{\partial x} \Omega_{n,m}$$

und unter Weglassung der Indizierung n,m (ν'_{z_i} analog):

$$\xi_{z_i} \equiv \xi_{n,m}(x(z_i), y(z_i))$$

$$\xi'_{z_i} \equiv \left. \frac{d\xi_{n,m}}{dz} \right|_{z_i} = \left. \frac{\partial x}{\partial z} \right|_{z_i} \cdot \left. \frac{\partial \xi_{n,m}}{\partial x} \right|_{\substack{x=x(z_i) \\ y=y(z_i)}} + \left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{z_i} \cdot \left. \frac{\partial \xi_{n,m}}{\partial y} \right|_{\substack{x=x(z_i) \\ y=y(z_i)}}$$

schreibt man die Taylorentwicklung sehr übersichtlich:

$$\sigma_x^{n,m}(\vec{q}(z), z) \approx \frac{1}{B\rho} f_n^{(2m)}(z) \cdot \left(\xi_{z_i} + (z - z_i) \cdot \xi'_{z_i} \right) \quad (D.5)$$

Wie man erkennt, ist die explizite z -Abhängigkeit exakt dargestellt, die implizite Abhängigkeit über den Radial-Azimutalteil ist entwickelt worden. In $\sigma_x^{n,m}(\vec{q}(z), z)$ müssen formal die "wahren" Koordinaten x und $\frac{\partial x}{\partial z} = x'$ eingesetzt werden. Anstelle der wahren Koordinaten werden die "ungestörten" Koordinaten unter dem Integral eingesetzt. Eine Fehlerabschätzung dazu wird in Abschnitt B.3 durchgeführt.

Schließlich sei bemerkt, daß keinerlei Annahme über die Ausdehnung des Randfeldes in z -Richtung gemacht wird.

D.2 Simulation am Punkt z_i

Unter Verwendung von Gl.D.2 mit den Näherungen Gl.D.3, Gl.D.4, Gl.D.5, erhält man:

$$\Delta x(z_i) = - \int_{z_1}^{z_2} (\tau - z_i) \cdot \sigma_x^{n,m}(\vec{q}, \tau) \cdot d\tau = - \frac{1}{B\rho} \cdot \left(\xi_{z_i} \cdot I_1 + \xi'_{z_i} \cdot I_2 \right) \quad (D.6a)$$

$$\Delta x'(z_i) = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_x^{n,m}(\vec{q}, \tau) \cdot d\tau = \frac{1}{B\rho} \cdot \left(\xi_{z_i} \cdot I_0 + \xi'_{z_i} \cdot I_1 \right) \quad (D.6b)$$

Dabei sind I_0, I_1, I_2 die Integrale³⁾:

$$I_0 \equiv \int_{z_1}^{z_2} f_n^{(2m)}(\tau) \cdot d\tau$$

3) $f_n^{(-1)}(z)$ ist eine beliebige Stammfunktion von $f_n^{(0)}(\tau)$, usw. .

$$\begin{aligned}
I_1 &\equiv \int_{z_1}^{z_2} (\tau - z_i) \cdot f_n^{(2m)}(\tau) \cdot d\tau \\
&= \left[(\tau - z_i) \cdot f_n^{(2m-1)}(\tau) \right]_{\tau=z_1}^{\tau=z_2} - \left[f_n^{(2m-2)}(\tau) \right]_{\tau=z_1}^{\tau=z_2} \\
I_2 &\equiv \int_{z_1}^{z_2} (\tau - z_i)^2 \cdot f_n^{(2m)}(\tau) \cdot d\tau
\end{aligned}$$

Betrachten wir die verschiedenen Beiträge zu $\sigma_x^{n,m}$ geordnet nach $m=0,1,2,\dots$.

$m=0$: Untersuchen wir die Randfelder des Dipols (Gl.2.24) und Quadrupols (Gl.2.25). Wir betrachten nur die "unvermeidlichen" Randfeldanteile und setzen daher $f_3^{(0)}$ bzw. $f_6^{(0)}$ zu Null. In diesem Fall bleibt mit $m=0$ lediglich ein z -abhängiger Dipol- bzw. Quadrupolanteil, welcher integral durch Festlegung einer "virtuellen" Feldgrenze berücksichtigt werden kann. Da die Länge der Randfelder im Vergleich zur Länge der Magnete vergleichsweise klein ist, fallen die hier durch den reinen Dipol- oder Quadrupolfeldanteil angeregten Störanteile wenig ins Gewicht. Im wesentlichen vermitteln diese Feldanteile im Randfeld eine lineare Abbildung; diese Anteile werden daher von der Diskussion ausgenommen.

Anmerkung - Es ist jedoch klar, daß Berechnungsfehler in der Bahndynamik in erster Ordnung zu Berechnungsfehlern in höherer Ordnung führen, siehe z.B. Gl.B.18.

$m=1$: Unter $m=1$ findet man z.B. im Quadrupolrandfeld einen Beitrag, der im Feld mit r^3 geht. Der Radial-Azimutalteil dieses Beitrags ist in der Mittelebene von Oktupolanteilen nicht unterscheidbar, besitzt jedoch eine 4-faltige ϕ -Abhängigkeit. Mit Gl.D.1 erhält man:

$$I_0 = 0, \quad I_1 = \left[-f_n^{(0)}(\tau) \right]_{\tau=z_1}^{\tau=z_2}, \quad I_2 \approx 0 \quad (D.7)$$

Das Integral I_2 hängt von der Wahl von z_i ab. Um I_2 zu Null setzen zu können, legt man den Punkt z_i in die Mitte des Randfeldes, also in die Nähe des Nulldurchganges der Funktion $f_n^{(2)}(z)$. (Dann ist der Integrand näherungsweise um z_i antisymmetrisch.) Durch entsprechende Auswertung der Meßdaten könnte der Punkt, an dem I_2 verschwindet, exakt gefunden werden. Dies ist jedoch nicht nötig, da man durch eine falsche Wahl von z_i nur einen geringen Fehler macht, siehe Abschnitt B.3 .

$m>1$: Man stellt fest, daß wegen Gl.D.1 alle Integrale verschwinden. Auch das Integral I_2 verschwindet⁴⁾ unabhängig von der Wahl von z_i .

Tabelle D.1 Bahnstörungen durch Randfelder

<u>Magnet</u> Bedingung	Potential	$\Delta x = -\frac{1}{B\rho}I_1 \cdot \xi_{zi}$ $\Delta y = -\frac{1}{B\rho}I_1 \cdot v_{zi}$	$\Delta x' = \frac{1}{B\rho}I_1 \cdot \xi'_{zi}$ $\Delta y' = \frac{1}{B\rho}I_1 \cdot v'_{zi}$
<u>Dipol</u> , $\lambda=0$ $f_3^{(0)} = \frac{1}{4}f_1^{(2)}$	$f_1^{(2)} \cdot (\Omega_{1,1} + \frac{1}{4}\Omega_{3,1})$ $= f_1^{(2)} \cdot \frac{-1}{6} \cdot y^3$	$\Delta x = -\bar{I} \cdot \frac{1}{2}y^2$ $\Delta y = 0$	$\Delta x' = \bar{I} \cdot y' \cdot y$ $\Delta y' = 0$
<u>Dipol</u> , $\lambda=1$ $f_3^{(0)} = 0$	$f_1^{(2)} \cdot \Omega_{1,1} =$ $f_1^{(2)} \cdot \frac{-1}{8} \cdot r^3 \cdot \sin\phi$	$\Delta x = -\bar{I} \cdot \frac{1}{8}(x^2 + 3y^2)$ $\Delta y = -\bar{I} \cdot \frac{1}{4}xy$	$\Delta x' = \bar{I} \cdot \frac{1}{4}(x'x + 3y'y)$ $\Delta y' = \bar{I} \cdot \frac{1}{4}(x'y + y'x)$
<u>Quadrupol</u> $f_4^{(0)} = 0$	$f_2^{(2)} \cdot \Omega_{2,1} =$ $f_2^{(2)} \cdot \frac{-1}{24}r^4 \cdot \sin(2\phi)$	$\Delta x = -\bar{I} \cdot \frac{1}{12}(x^3 + 3y^2x)$ $\Delta y = -\bar{I} \cdot \frac{1}{12}(y^3 + 3x^2y)$	$\Delta x' = \bar{I} \cdot [\frac{1}{4}x'(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}y'yx]$ $\Delta y' = \bar{I} \cdot [\frac{1}{4}y'(y^2 + x^2) + \frac{1}{2}x'xy]$

$\bar{I}$ steht für $\frac{1}{B\rho}I_1$ (siehe Gl.D.8)

Nimmt man $I_2=0$, bleiben schließlich nur zwei Störbeiträge in $m=1$ übrig, die lediglich von I_1 abhängen. I_1 ist gerade das Feld bzw. der Gradient im Innern der Magnete, zur Indizierung siehe Gl.D.4:

4) Zerlege I_2 mit Hilfe partieller Integration.

$$\text{Dipol: } I_1 = -B_y^{1,0}(z_2) + B_y^{1,0}(z_1), \quad (\text{D.8})$$

$$\text{Quadrupol: } I_1 = -\left. \frac{\partial B_y^{2,0}}{\partial x} \right|_{z_2} + \left. \frac{\partial B_y^{2,0}}{\partial x} \right|_{z_1}$$

Tabelle D.1 zeigt die Bahnstörungen explizit für Dipol- und Quadrupolmagneten. Speziell für den Dipolmagneten hatte die Feldentwicklung gezeigt, daß der erste Randfeldanteil ($m=1$) von den gewählten Randbedingungen abhängt. Die Wahl des Parameters λ aus Gl.2.24 wird in der ersten Spalte angegeben. Die zweite Spalte gibt das skalare Potential des zugrundeliegenden Feldanteils mit $m=1$ an. Die dritte und vierte Spalte gibt schließlich die einfache Annäherungsformel für die Berechnung der Koordinatenänderungen Δx und $\Delta x'$ an der Stelle z_i an. Die Vorzeichen für Δx , $\Delta x'$ macht man sich mit Abb.D.1 klar.

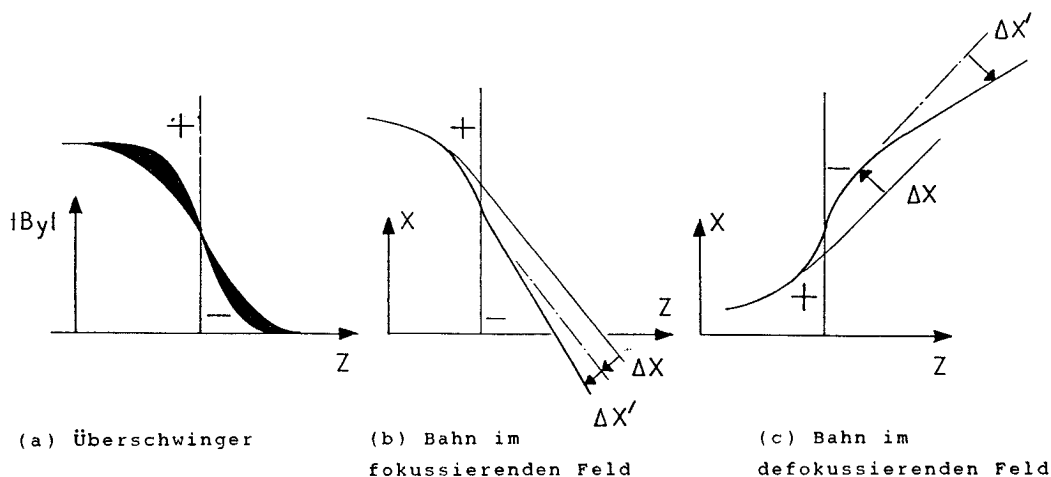


Abb.D.1 Vorzeichentest - Die Überschwinger (a) des Feldes aus dem ersten unvermeidlichen Randfeldanteil gehen im Quadrupol mit r^3 . ("+" bedeutet symbolisch betragsmäßige Vergrößerung des Feldes durch diesen Anteil, "-" entsprechend.) Die Überschwinger führen zu den gezeigten "wahren" Bahnen (b),(c). Der jeweils näher an der Zentralbahn liegende "Kick" ist schwächer; in der Summe bleibt daher ein durch den Pfeil angedeuteter Kick übrig, der mit richtigem Vorzeichen eingetragen ist.

Die durch die Randfelder der Quadrupole Q1, Q2, Q3 verursachten Störungen für den in Abb.1.2 gezeigten Betriebsmodus mit Dispersion $d_x=16\text{cm}/\%$ zeigt Tabelle D.2. Die Störung in der Detektorebene wird nach Gl.B.35 berechnet. Zur Berechnung können die Tabellen C.1 und C.2 in Anhang C verwendet werden.

Tabelle D.2 Die Wirkung der Randfelder der Quadrupole Q1, Q2, Q3

	$\frac{1}{B\rho}I_1$ [cm ⁻²]	x x' [cm] [mrad]	Δx $\Delta x'$ [cm] [mrad]	Δx_D [cm]	Σ
$x'_0 = 16 \text{ mrad}, \quad x_0 = 0 \text{ cm}, \quad \delta = 0 \text{ \%}$					
Q1 Eintritt	$4.9 \cdot 10^{-4}$	1.0 16	0.000 0.00	0.00 0.00	
Q1 Austritt	$-4.9 \cdot 10^{-4}$	2.4 51	0.000 -0.04	0.00 0.005	
Q2 Eintritt	$-4.0 \cdot 10^{-4}$	4.8 51	0.004 -0.12	0.010+0.032	
Q2 Austritt	$4.0 \cdot 10^{-4}$	5.0 -43	-0.004 -0.11	0.010+0.031	
Q3 Eintritt	$9.6 \cdot 10^{-5}$	-5.0 45	0.001 0.03	0.002+0.007	
Q3 Austritt	$-9.6 \cdot 10^{-5}$	-2.8 18	0.000 -0.00	0.00 0.00	<u>0.10</u>
$x'_0 = 32 \text{ mrad}, \quad x_0 = 0 \text{ cm}, \quad \delta = 0 \text{ \%}$					
Q1 Eintritt	$4.9 \cdot 10^{-4}$	2.0 32	0.000 0.00	0.00 0.00	
Q1 Austritt	$-4.9 \cdot 10^{-4}$	4.8 102	0.005 -0.29	0.01 +0.04	
Q2 Eintritt	$-4.0 \cdot 10^{-4}$	9.6 102	0.029 -0.94	0.07 +0.25	
Q2 Austritt	$4.0 \cdot 10^{-4}$	10.0 -86	-0.033 -0.86	0.08 +0.24	
Q3 Eintritt	$9.6 \cdot 10^{-5}$	-10.0 90	0.008 0.22	0.02 +0.06	
Q3 Austritt	$-9.6 \cdot 10^{-5}$	-5.6 36	-0.001 -0.03	0.00 0.00	<u>0.8</u>
$\delta = 1 \text{ \%}, \quad x'_0 = 0 \text{ mrad}, \quad x_0 = 0 \text{ cm}$					
Q3 Eintritt	$9.5 \cdot 10^{-5}$	-6.6 0	0.002 0.00	0.006+0.000	
Q3 Austritt	$-9.5 \cdot 10^{-5}$	-8.4 50	-0.005 0.08	-0.005+0.013	<u>0.014</u>
$\delta = 2 \text{ \%}, \quad x'_0 = 0 \text{ mrad}, \quad x_0 = 0 \text{ cm}$					
Q3 Eintritt	$9.4 \cdot 10^{-5}$	-13.3 2	0.018 0.01	0.044+0.002	
Q3 Austritt	$-9.4 \cdot 10^{-5}$	-16.7 99	-0.036 0.65	-0.036+0.100	<u>0.11</u>
$\delta = 3 \text{ \%}, \quad x'_0 = 0 \text{ mrad}, \quad x_0 = 0 \text{ cm}$					
Q3 Eintritt	$9.3 \cdot 10^{-5}$	-19.9 3	0.06 0.02	0.148+0.007	
Q3 Austritt	$-9.3 \cdot 10^{-5}$	-25.0 -149	-0.12 2.20	-0.120+0.336	<u>0.37</u>

Dabei sind:

- x, x' abgeschätzte Koordinaten beim Durchflug durch das Randfeld
 $\Delta x, \Delta x'$ Störungen nach Tabelle D.1
 Σ Summe über alle Beiträge Δx_D

D.3 Fehlerabschätzung

Im Programm Turtle ist eine Erweiterung eingefügt worden, welches für den Quadrupol die Bahnstörungen Δx , $\Delta x'$ nach Tabelle D.1 berechnet. Dieses Modul greift entsprechend der in Turtle verfolgten Philosophie auf die "ungestörten" Koordinaten am Eingang bzw. Ausgang des Quadrupols zurück. Dadurch macht man einen Fehler, da die "wahre" Lösung an der Stelle z_i bereits durch den ersten Abschnitt $[z_1, z_i]$ gestört ist.

Um die Auswirkung dieses Fehlers abzuschätzen, nehmen wir eine Randfeldausdehnung von $A = 6$ cm an (vgl. Abb.3.9b) und betrachten die weit ausgelenkte Trajektorie mit $x'_0 = 32$ mrad (Tabelle D.2). Das Teilchen wird in Q2 Austritt um ca. $\Delta x = 0.03$ cm seitlich versetzt; x' enthält daher einen Fehler von etwa $\Delta x/A = 5$ mrad. x' beträgt ungestört etwa 86 mrad. Daraus resultiert ein Fehler in $\Delta x'(z_i)$ oder in der Detektorebene Δx_D von 6%. Der Winkel-"Kick" $\Delta x'$ wird geringfügig zu klein berechnet.

Für die Wahl des Punktes z_i , an dem I_2 verschwindet (s.o.), wurde eine grobe Annahme gemacht. Wir nehmen an, der Punkt z_i sei um den Betrag Δz falsch gewählt worden. Wir ersetzen in Gl.D.5 und in Gl.D.6 den Entwicklungspunkt z_i durch $z_i + \Delta z$. Für die neuen und alten Entwicklungskoeffizienten in Gl.D.5 findet man in erster Näherung den folgenden Zusammenhang:

$$\xi_{z_i + \Delta z} = \xi_{z_i} + (1 + \Delta_{rel}) \cdot \Delta z \cdot \xi'_{z_i} \quad (D.9a/b/c)$$

$$\xi'_{z_i + \Delta z} = \xi'_{z_i} \cdot (1 + \Delta_{rel})$$

$$\text{wobei } \Delta_{rel} := \frac{2\Delta z \cdot x'(z_i)}{x(z_i)}$$

In die Abschätzung Δ_{rel} geht die x^3 -Abhängigkeit des Radial-Azimuthalteils $\xi_{2,1}$ ein. Dieser Faktor gilt daher nur für das Quadrupolrandfeld und in der Mittelebene. Durch Δ_{rel} wird berücksichtigt, daß die Bahn an einem anderen Entwicklungspunkt z_i entsprechend weiter außen oder innen liegt. Man erhält durch Ausschreiben der

Integrale (unter Berücksichtigung des Integrals I_2), unter Benutzung von Gl.D.9:

$$\Delta x(z_i + \Delta z) = \Delta x(z_i) - (1 + \Delta_{rel}) \cdot \Delta z \cdot \Delta x'(z_i) \quad (D.10a/b)$$

$$\Delta x'(z_i + \Delta z) = (1 + \Delta_{rel}) \cdot \Delta x'(z_i)$$

Bis auf die Korrektur Δ_{rel} verläuft die Bahn am Punkt $\Delta z_i + \Delta z$ erwartungsgemäß um $\Delta z \cdot \Delta x'(z_i)$ weiter außen bzw. innen.

Wir betrachten wiederum den Fall: Ausgang Quadrupol Q2, $x'_0 = 32$ mrad, siehe Tabelle D.2. Wir nehmen an, der Fehler in z_i betrage $\Delta z = 6$ cm (s.o.). In $\Delta x'$ erhalten wir den relativen Fehler von $\Delta_{rel} \sim 0.1$ ⁵⁾. Mit $\Delta x' = 0.86$ mrad, siehe Tabelle D.2, erhalten wir in Δx mit Gl.D.10a einen Fehler von $1.1 \cdot 6 \text{ cm} \cdot 0.86 \cdot 10^{-3} = 0.006$ cm gegenüber $\Delta x(z_i) = 0.03$ cm. Dieser Fehler ist mit 20% zwar verhältnismäßig groß, kommt aber praktisch nicht zur Geltung, da die Änderung Δx gegenüber $\Delta x'$ den deutlich kleineren Anteil in der Bahnabweichung Δx_D in der Detektorebene bewirkt. Die Fehlerannahme $\Delta z = 6$ cm ist zudem relativ hoch.

Selbstverständlich sind durch diese Fehlerbetrachtung nicht alle möglichen Fehler abgedeckt. Es wird aber plausibel, daß die Näherung auch bei extremen Auslenkungen im Rahmen grober Fehlergrenzen von möglicherweise 20 bis 30 % gute Werte für die bewirkten Änderungen in den Phasenraumkoordinaten liefert. Sieht man von den im Falle des Dipols notwendigen Annahmen über die Randbedingungen ab (vgl. Abschnitt 2.3.6.2), sind offensichtlich keine zusätzlichen Annahmen notwendig. Insbesondere geht die Ausdehnung des Randfeldes in z-Richtung nicht in die Näherung ein. Da man dennoch plausibel zeigen kann, daß die Näherung realistisch ist, darf man schlußfolgern, daß die Ausdehnung in z-Richtung keinen starken Einfluß hat. Durch Anbringung von "Äquipotentialplatten" können die Eigenschaften des Randfeldes nicht wesentlich verbessert werden⁶⁾. Es wird jedoch noch einmal ins Gedächtnis gerufen, daß die durch Äquipotentialplatten mit spezieller Geometrie zusätzlich bewirkten Multipol-

5) Ersetze mrad durch 10^{-3}

anteile im Randfeld in dieser Betrachtung nicht berücksichtigt werden, vgl. Abschnitt D.2 . Im Randfeld des Quadrupols Q2 sind solche Anteile nicht festgestellt worden, vgl. Abschnitt 3.6 . Wir dürfen die plausible Schlußfolgerung ziehen, daß die aufgestellten Näherungsformeln auch für den Quadrupol Q3 verwendet werden können, obwohl die Randfelder dieses Magneten nicht vermessen worden sind⁷⁾ .

6) Im Rahmen dieser Argumentation ergibt die Vorzeichenbetrachtung, daß die Verkürzung des Randfeldes möglicherweise eine geringfügige Verschlechterung der Randfeldeigenschaften bewirkt.

7) Wegen der großen Apertur dieses Magneten hätte die Vermessung den Aufbau eines großen und dementsprechend aufwendigen Meßtisches erfordert.

Anhang E

Literaturverzeichnis

Dissertationen und Diplomarbeiten

- D-AG82 "UNTERSUCHUNG
ZUM BAU EINES HOCHAUFLÖSENDEN MAGNETSPEKTROMETERS
UND MODELLMESSUNGEN
ZUR WIRKUNGSWEISE VON FELDKORREKTURSTRÖMEN IN EISEN"
A.Abdel-Gawad
D 82 (Diss. T.H.Aachen)
- D-DP83 "AUFBAU EINES ORTSEMPFINDLICHEN PROPORTIONAL - ZÄHLERS
UND MESSUNG DER ANREGUNGSENERGIE
DES TIEFSTLIEGENDEN $T = 2$ ZUSTANDES IN ^{40}Ca "
Dirk Paul (Diplomarbeit)
Institut für Kernphysik der Westfälischen
Wilhelms - Universität Münster
- D-HF75 "TOLERANZUNTERSUCHUNGEN
AN EINEM QUADRUPOLE-MAGNETFELDMESSSYSTEM"
H.P.Fuchs, Ingenieurarbeit
Zentrallabor für Elektronik
Interner Bericht
- D-WH81 "DER MAGNETSPEKTROGRAPH 'BIG KARL'
UND DIE UNTERSUCHUNG DES ÜBERGANGSKERNES ^{103}Ru
mit (d,p)- und (p,d)-REAKTIONEN"
W.HÜRLIMANN (Dissertation)
Spezielle Berichte
der Kernforschungsanlage Jülich - NR.104

Interne Berichte

- I-KK86 "RÜCKSTOSSFREIE KINEMATIK
UND TIEFLIEGENDE PIONISCHE ATOMZUSTÄNDE"
K.Kilian
IKP, KFA-Jülich, 1986

Lehrbücher, Tabellenwerke

- L-BS85 "TASCHENBUCH DER MATHEMATIK"
Bronstein-Semendjajew
Verlag Harri Deutsch
Thun und Frankfurt/Main, 1985
- L-CS60 "CLASSICAL MECHANICS, 2nd EDITION"
H.C.Corben, Philip Stehle
John Wiley & Sons, Inc. , New York·London, 1960
- L-DK67 "MATHEMATICS FOR PHYSICISTS"
Philippe Denner, André Krzywicki
Gemeinschaftlich veröffentlicht durch
Harper & Row, New York, Evanston & London
John Weatherhill, Inc., Tokyo, 1967
- L-GO76 "KLASSISCHE MECHANIK"
Herbert Goldstein
Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1976
- L-JJ75 "CLASSICAL ELECTRODYNAMICS"
SECOND EDITION
J.D.Jackson
John Wiley & Sons,
New York · Chichester · Brisbane · Toronto, 1975

Handbücher für Programme und Programm-Bibliotheken

P-MI83 "MINUIT", FUNCTION MINIMIZATION AND ERROR ANALYSIS

F.James, M.Roos

Cern Computer Centre Program Library

D506, D516

P-PO85 "POISSON GROUP PROGRAMS USERS'S GUIDE"

Ronald. F. Holsinger, Michael Helm

Lawrence Berkeley Lab., Berkeley, CA 94720

B46-161

P-TU74 "DECAY-TURTLE"

K.L. Brown, F.C. Iselin

CERN 74-2 (1974)

Benutzt wird die CERN-Version von "DECAY-TURTLE"
für DEC-VAX Computer (1978)

P-TR80 "TRANSPORT", A COMPUTER PROGRAM

FOR DESIGNING CHARGED PARTICLE BEAM TRANSPORT SYSTEMS

Karl.L. Brown, D.C. Carey, Ch. Iselin, F. Rothacker

CERN 80-04, 18 March 1980

Technische Berichte, Lectures

T-CO86 "KÜHLER-SYNCHROTRON COSY"

Technische Beschreibung, Stand August 1986

Arbeitsgruppe COSY

Jül-Spez-370

T-EK84 "COMPUTER PROGRAMS IN ACCELERATOR PHYSICS"

Eberhard Keil

CERN 84-01, 8 February 1984

- T-IS87 "COMMISSIONING OF ISIS AT JULIC"
J. Reich, W. Bräutigam, P. Wucherer,
H. Beuscher, W. Krauss-Vogt
24th European Cyclotron Progress Meeting
Nice, France
- T-KB67 "A FIRST- AND SECOND-ORDER MATRIX THEORY
FOR THE DESIGN OF BEAM TRANSPORT SYSTEMS
AND CHARGED PARTICLE SPECTROMETERS"
Karl L. Brown, July 1967
SLAC-75, UC-28,
Particle Accelerators And High-Voltage Machines
TID-4500
- T-KB70 "A SYSTEMATIC PROCEDURE FOR DESIGNING
HIGH RESOLVING POWER BEAM TRANSPORT SYSTEMS
OR CHARGED PARTICLE SPECTROMETERS"
Report submitted to the
Third International Magnet Symposium
Karl L. Brown
- Diese Quelle ist Teil des Handbuchs
zum CAD Programm "Transport"
CERN 80-04 (s.u.)
- T-KB84 "FIRST- AND SECOND ORDER CHARGED PARTICLE OPTICS"
Karl L.Brown, Roger V.Servranckx
SLAC-PUB-3381 (1984)
- T-KH72 "THE HILAC QUADRUPOLE MEASUREMENT EQUIPMENT"
Klaus Halbach
Engineering note, March 3 1972
Lawrence Radiation Laboratory - University of California
siehe auch [D-HF75]

T-KH85 "LECTURES" zum Magnetdesign
Klaus Halbach
Seminar an der KFA-Jülich im Frühjahr 1985

Veröffentlichungen in Fachzeitschriften

- V-BC74 FURTHER RESULTS ON THE OPERATION OF
HIGH-ACCURACY DRIFT CHAMBERS
A.Breskin, G.Charpak, B.Gaujoud, F.Sauli,
N.Trautner, W.Duinker, G.Schultz
Nucl. Instr. and Meth. 119 (1974) 9
- V-CM85 "THE NEW FOCAL PLANE DETECTOR
FOR THE MAGNET SPECTROMETER BIG KARL"
L.G. Atencio, G.P.A. Berg, P. Von Brentano,
B. Brinkmöller, G. Hlawatsch, J. Meissburger,
C.F. Moore, C.L. Morris, D. Paul, J.G.M. Römer,
M. Rogge, P. Von Rossen, T. Sagefka,
S.J. Seestrom-Morris, L. Zemlo
Nucl. Instr. and Meth. A242 (1985) 95
- V-KB77 "THE NUCLEAR MAGNETIC RESONANCE SYSTEM FOR THE
CERN MUON STORAGE RING"
K.Borer
Nucl. Instr. and Meth. 143 (1977) 203
- V-KH68 "APPLICATION OF CONFORMAL MAPPING TO EVALUATION AND
DESIGN OF MAGNETS CONTAINING IRON WITH NONLINEAR
B(H) CHARACTERISTICS"
Klaus Halbach
Nucl. Instr. and Meth. 64 (1968) 278
- V-KH69 "FIRST ORDER PERTURBATION EFFECTS IN IRON-DOMINATED
TWO-DIMENSIONAL SYMMETRICAL MULTIPOLES"
Klaus Halbach
Nucl. Instr. and Meth. 74 (1969) 147

- V-KH73 "FIELD CORRECTION WINDINGS FOR IRON MAGNETS"
Klaus Halbach
Nucl. Instr. and Meth. 107 (1973) 515
- V-KH73b "SOME EDDY CURRENT EFFECTS IN SOLID CORE MAGNETS"
Klaus Halbach
Nucl. Instr. and Meth. 107 (1973) 529
- V-KH74 "RAPID MEASUREMENT OF THE EFFECTIVE FIELD BOUNDARY
OF HOMOGENEOUS FIELD MAGNETS"
Klaus Halbach
Nucl. Instr. and Meth. 119 (1974) 329
- V-SM83 "THE QDDQ MAGNET SPECTROMETER 'BIG KARL'"
Siegfried A.Martin, Arno Hardt, Jürgen Meissburger,
Georg P.A. Berg, Ulrich Hacker, Werner Hürlimann,
Josef G.M.Römer, Thomas Sagefka, Adolf Retz,
Otto W.B.Schult, Karl L. Brown, Klaus Halbach
Nucl. Instr. and Meth. 214 (1983) 281

Danksagung

Hiermit möchte ich allen danken,
die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein Dank gilt vor allem
dem Direktorium des Instituts für Kernphysik der KFA Jülich,
das es mir ermöglicht hat, als Mitarbeiter der
"Abteilung kernphysikalische Großgeräte"
diese Arbeit anzufertigen.

Allen Mitarbeitern am Magnetspektrographen
sei für die gute Zusammenarbeit und herzliche Atmosphäre gedankt.
Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. Von Rossen,
der mir mit Rat und Tat zur Seite stand.

Besonders bedanke ich mich
bei Prof. Dr. F. Hinterberger und Prof. Dr. H.L. Hagedoorn
für das stete Interesse am Fortgang meiner Arbeit,
für die intensiven Diskussionen
und die kritische Durchsicht der Manuskripte.

Auch den Herren Dr. Martin, Dr. Rogge, Prof. Dr. Halbach
Dr. Hardt und Dr. Meissburger
danke ich für nützliche Ratschläge.
Insbesondere Herrn Dr. Meissburger sei
für die ausführliche Einweisung
in die meß- und regeltechnischen Komponenten
am Magnetsystem gedankt.

Allen, die mir beim "Schlitzefahren"
einige Handarbeit abgenommen haben,
sei herzlich gedankt.

Nicht zuletzt mein Dank an die Freunde im IKP
für die kameradschaftliche Zusammenarbeit.

