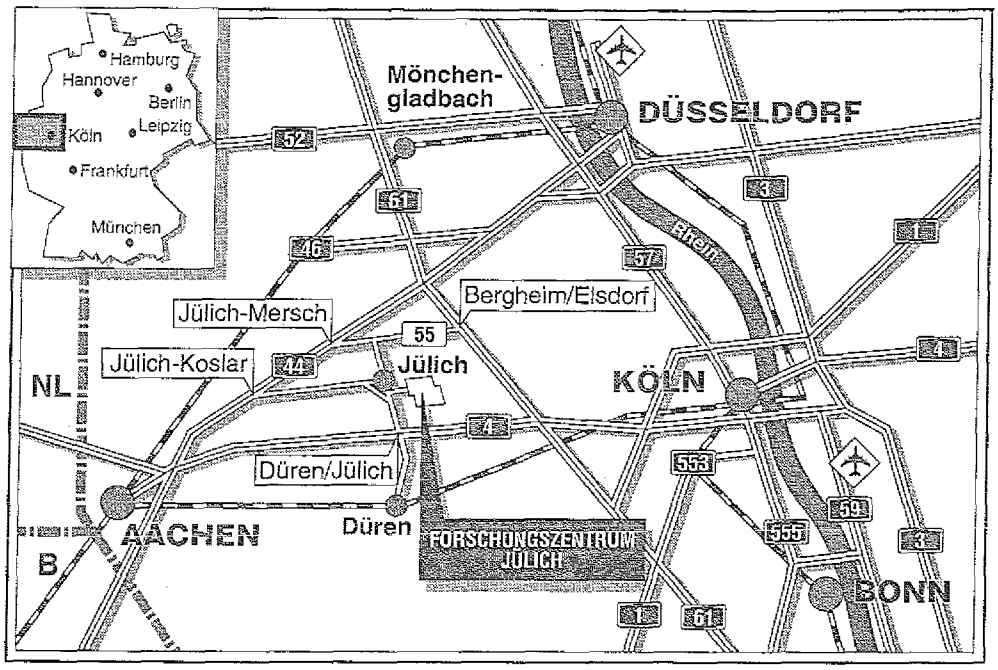
FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH GmbH

KFA

Institut für Kernphysik

Analyse spurioser Schwerpunkt-bewegungen in effektiven chiral-invarianten Solitonmodellen mit Valenzquarks

Torsten Neuber



Berichte des Forschungszentrums Jülich ; 2797
ISSN 0944-2952
Institut für Kernphysik Jül-2797
D 294 (Diss. Ruhr-Universität Bochum)

Zu beziehen durch: Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek
D-52425 Jülich · Bundesrepublik Deutschland
Telefon: 02461/61-6102 · Telefax: 02461/61-6103 · Telex: 833556-70 kfa d

Analyse spurioser Schwerpunkt-bewegungen in effektiven chiral-invarianten Solitonmodellen mit Valenzquarks

Torsten Neuber

Preface

Since more than ten years quark-meson models allowing for solitonic solutions on the classical level are seccessfully used to describe the complex structure of baryons and to evaluate static observables as well as formfactors of the nucleon and the Δ-isobar. In the present thesis the nucleon is considered as a chiral soliton and treated in the framework of two chiral symmetric soliton models, the linear sigma-model of Gell-Mann and Lévy with the nucleon fields replaced by quark fields and a chiral invariant version of the chromodielectric model (CD-model). Both models comprise an important feature of the underlying theory of strong interations, QCD, namely hidden chiral symmetry, and the CD-model, moreover, a phenomenlogical confinement of the (valence-) quark fields. Such models have been proposed to bridge our rich knowledge of the low energy phenomena and the fundamental theory, since an evaluation of a solution of the QCD is far too complicated to be expected in the near future and a perturbative treatment is justified only int the high energy regime. Hence hadronic models should incorporate the basic features of QCD, but avoid the full complexity of a nonabelian gauge theory.

The goal and main intention of this work is the evaluation of techniques, which allow for an analysis of the spurious center-of-mass effects in the framework of chiral symmetric quark-meson models. Since the solitonic solutions of chiral models break both, translational and rotational invariance of the underlying lagrangian (the latter symmetry is violated in spin- and isospin space), an appropriate procedure to account for the spurious center-of-mass motion on the one hand and to construct states of definite spin and isospin on the other is provided by Peierls-Yoccoz projections, simultaneously performed onto spin, isospin and linear momentum. Such projection techniques allow for the evaluation of nucleon observables with center-of-mass effects removed.

To this end the solitonic solutions of these models are investigated in a first step on the mean-field level using the variational principle. The minimisation of the classical energy enforces the quark- and meson fields to have hedgehog structure. A quantum Fock state is constructed as a tensor product of a Slater determinant for the N_c valence quark fields in the $1s$-orbit exhibiting spin-flavour hedgehog confuguration and coherent states for all meson fields involved. Simultaneous eigenstates of zero linear momentum and angular momentum are constructed by performing the corresponding projections using the observation, that the projection operator onto zero linear momentum commutes with the one onto angular momentum. In other words a composite particle has a definite spin in its rest frame.

Due to methodical and technical reasons, boost operations are approximated by projections onto finite linear momentum, although the wellknown 'Peierls-Yoccoz problem' arises from this procedure stating that states of different momenta cannot related to each other by an appropriate Lorentztranformation, hence violating Einstein's energy-momentum relation even in the nonrelativistic limit. This problem can be circumvented by applying the variational principle after the projections have been performed. Such a variation (after the projection) has been carried out approximately in the framework of the CD-model. There this method becomes important also from

another point of view. It is necessary in order to fit the experimental data, especially the neutron charge radius.

It turns out that the static observables of the nucleon, as for instance charge radii, magnetic moments and the axial vector coupling constant, with the exception of the energy calculated from the linear sigma-model are almost unaffected by the linear momentum projection, while for those ones evaluated from the CD-model center-of-mass corrections are more important. Nevertheless the observables calculated from both models are in good agreement with experiment.

Parts of this work have been published ore will soon be submitted.

- *Linear and angular Momentum projected Observables in the chiral chromodielectric Model of the Nucleon*

  M. Fiolhais, T. Neuber, K. Goeke, P. Alberto and J. N. Urbano

  Physics Letters, **268 B** (1991) 1

- *Neutron–Proton Mass Differrence in a baryonic Medium and the Nolen–Schiffer Anomaly*

  M. Fiolhais, C. Christov, T. Neuber, M. Bergmann and K. Goeke

  Physics Letters, **269 B** (1991) 43

- *Peierls-Yoccoz linear and angular Momentum projected Observables in the linear chiral Sigma-Model*

  T. Neuber and K. Goeke

  Physics Letters, **281 B** (1992) 202

- *Nucleon Description in a projected chiral Soliton Model with dynamical Confinement*

  T. Neuber, M. Fiolhais, K. Goeke and J. N. Urbano

  Nuclear Physics **A**, in press

- *Nucleon form factors in a projected chiral soliton model with dynamical confinement*

  M. Fiolhais, T. Neuber and K. Goeke

  submitted to *Nucl. Phys.* **A**

- *Hadronic neutron-proton splitting in chiral soliton models with valence quarks*

  T. Neuber and M. Fiolhais

  in progress

This work got benefit from the contributions and support of several people. First I would like to thank my supervisor, Prof. Dr. Klaus Goeke, for his support, valuable suggestions and encouragement, which have made possible the research work.

I want to express my deep acknowledgement to Dr. Enrique Ruiz Arriola, who became a friend during the period we have been working in the same department. During numerous discussions

we have had he made useful suggestions and gave many valuable hints. Many basic features and details concerning soliton models I have learned from him.

I am indebted to Prof. Dr. José N. Urbano for the invitations to the physics department of the University of Coimbra, Portugal, during summer 1990, 1991 and 1992. Especially I want to thank Dr. Manuel Fiolhais and Dr. Pedro Alberto for their kind hospitality, friendship and support. To a large extent the work on the chromodielectric model was done in Coimbra.

I am also very grateful to Dr. Frank Grümmer and Michael Bergmann for supporting me in solving difficulties connected with numerical problems and the computing facilites in Jülich and Bochum.

Finally I want to express my gratitude to all members of the *Institut für Kernphysik* at the *Forschungsanlage Jülich* and the *Institut für Theoretische Physik II* at the *Ruhr-Universität Bochum* for the kind atmosphere, in which this work was done.

Bochum, June 1993 T. N.

INHALTSVERZEICHNIS

VERZEICHNIS DER TABELLEN

VERZEICHNIS DER ABBILDUNGEN

1. Einleitung

Analog zur Streuung von α-Teilchen an Atomen, die Rutherford studierte und die zur Entdeckung des Atomkerns als Konstituenten des Atoms führte, hat die tiefinelastische Lepton-Nukleon-Streuung bei hohen Impuls- und Energieüberträgen die komplexe innere Struktur des Nukleons enthüllt. Die Interpretation und Auswertung dieser Experimente im Rahmen des sehr erfolgreichen Quark-Parton-Modells zeigte, daß Nukleonen aus geladenen Konstituenten, die die Quantenzahlen der Quarks tragen, und neutralen, den Gluonen, aufgebaut sind.

Die Theorie, die die Wechselwirkung dieser Konstituenten in allen Energiebereichen beschreibt, ist nach heutiger Ansicht eine relativistische lokale Yang-Mills-Feldtheorie, die Quantenchromodynamik[1]. Auf der Grundlage dieser Theorie sind Baryonen als Bindungszustände dreier (Valenz-) Quarks, neben Quark-Antiquark-Paaren und Gluonen, aufzufassen, deren Wechselwirkung untereinander durch Gluonen vermittelt wird. Die wichtigsten Eigenschaften dieser quantisierten, renormierbaren Eichtheorie sind

- ▷ die *asymptotische Freiheit* der Quarks[2],
- ▷ ihr *Confinement*[3] sowie
- ▷ die *spontane Brechung der chiralen Symmetrie*[4].

Im Gegensatz zu einer abelschen Eichtheorie, wie der Quantenelektrodynamik, führt der nichtabelsche Charakter der Eichgruppe der QCD auf eine asymptotisch freie Theorie[5], d. h. die renormalisierte Kopplungskonstante $\alpha_s(q^2)$, die eine Funktion des transferierten Viererimpulses ist, strebt für große Impulse $q^2 \to \infty$ gegen Null. Im Limes hoher Impulsüberträge verhalten sich die Quarks in Hadronen also wie freie Teilchen. Eine störungstheoretische Behandlung der Hochenergiephänomene ist dann gerechtfertigt und steht in Einklang mit den experimentellen Ergebnissen.

Der Einschluß (Confinement) der Quarks und Gluonen in Hadronen ist eine Eigenschaft der Quark-Gluon-Wechselwirkung, die bei kleinen Impulsen und großen Kopplungskonstanten $\alpha_s(q^2)$ auftritt, bis heute aber nur numerisch im Rahmen von Gittereichtheorien aus der QCD 'abgeleitet' werden konnte, jedoch postuliert wird, um der Tatsache Rechnung zu tragen, daß freie Quarks in der Natur (bisher) nicht beobachtet wurden. Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß in der Natur nur Coloursinglets existieren, die unter $SU_c(N_c = 3)$-Transformationen invariant sind, d. h. nur die Kombinationen

$$\sum_{c=1}^{3} \bar{q}_c q_c \quad \text{Mesonen} \quad \text{und} \quad \sum_{c_1,c_2,c_3=1}^{3} \varepsilon_{c_1 c_2 c_3} q_{c_1} q_{c_2} q_{c_3} \quad \text{Baryonen} \tag{1.1}$$

treten auf.

Die spontane Brechung der chiralen Symmetrie hat ihre Ursache in der komplizierten Struktur des QCD-Vakuums. Exakte chirale Invarianz der klassischen Lagrangedichte unter globalen $SU(n)_L \otimes SU(n)_R$-Flavourtransformationen (n: Anzahl der Flavourfreiheitsgrade) liegt vor, falls

die Strommassen m_0 der Quarks identisch Null sind. Diese Bedingung ist im $SU(2)$-Sektor (nur u- und d-Quarks) hinreichend gut erfüllt ($m_0 \sim 4 - 8$ MeV). Da Elemente U der chiralen Gruppe mit dem Paritätsoperator antikommutieren — dies sind gerade die Transformationen U, deren Generatoren die axialen 'Ladungen' sind (siehe weiter unten) — gibt es Eigenzustände des Hamiltonoperators, $|N\rangle$ und $U|N\rangle$, die energetisch entartet sind, aber entgegengesetzte Parität haben. Das Fehlen entarteter Zustände unterschiedlicher Parität im hadronischen Spektrum kann nicht durch die explizite Brechung der chiralen Symmetrie durch die endlichen Strommassen der Quarks erklärt werden, da dann beispielsweise ein Teilchen mit ähnlicher Masse wie das Nukleon, aber entgegengesetzter Parität existieren müßte. Dieses Problem läßt sich durch die Annahme, das QCD-Vakumm sei nicht chiral invariant, lösen, d. h. die Generatoren der chiralen Gruppe annihilieren das QCD-Vakuum nicht und die chirale Symmetrie ist spontan gebrochen.

$$Q_L^i|0\rangle \neq 0 \qquad\qquad Q_R^i|0\rangle \neq 0 \tag{1.2}$$

Definiert man die isovektoriellen und isoaxialen Generatoren $Q^i = Q_L^i + Q_R^i$ und $Q_5^i = Q_R^i - Q_L^i$, so verhindert bereits die Forderung $Q_5^i|0\rangle \neq 0$ die Existenz von Paritätsdubletts. Andererseits führt $Q^i|0\rangle = 0$ auf Isospinmultipletts, die experimentell gut bestätigt sind. Im Zusammenhang mit der Realisierung der chiralen Symmetrie im Nambu-Goldstone Mode, d. h. der Hamiltonoperator kommutiert mit den Generatoren der chiralen Gruppe, das Vakuum aber bricht die chirale Symmetrie, fordert das Goldstone-Theorem[6] die Existenz dreier masseloser pseudoskalarer Goldstone-Bosonen, die die Quantenzahlen der Pionen tragen und mit diesen identifiziert werden können. Die explizite Brechung der chiralen Symmetrie durch einen Quarkmassenterm in der Lagrangedichte — die Strommassen sind zwar klein aber von Null verschieden — ist die Ursache der endlichen Pionmasse m_π.

Die perturbative Behandlung der QCD ist nur bei großen Impulsen und Energien zu rechtfertigen, nicht jedoch bei kleinen, d. h. bei der Untersuchung von Problemen, deren Längenskala in der Größenordnung von ca. ~ 1 fm liegt. Eine direkte Lösung der QCD ist bisher aufgrund der komplizierten nichtabelschen Struktur, die die Selbstwechselwirkung der Gluonfelder bewirkt, nicht gelungen. Die Diskretisierung und Lösung der QCD auf einem vierdimensionalen Gitter, die im Rahmen der Gittereichtheorien versucht wird[7], erfordert einen enormen Rechenaufwand sowie zahlreiche technische Approximationen. Eine Beschreibung der Wechselwirkung von Hadronen oder der Formation von Atomkernen in naher Zukunft scheint ausgeschlossen. In der jüngsten Vergangenheit sind daher zahlreiche effektive Modelle entworfen worden, die die Lücke zwischen der fundamentalen Theorie und der reichhaltigen Kenntnis der niederenergetischen Phänomenologie zu schließen versuchen. Derartige Modelle sollten durch die QCD motiviert, zukünftig möglicherweise aus dieser ableitbar sein und wichtige Eigenschaften im Niederenergiebereich, wie Confinement und chirale Symmetrie, enthalten, jedoch die Schwierigkeiten einer nichtabelschen Eichtheorie vermeiden.

Das einfachste baryonische Modell ist das MIT-Bag-Modell[8,9], das ein Nukleon oder Baryon durch eine Blase (Bag) mit einer Ausdehnung von etwa 1 fm beschreibt, in deren Inneren sich drei relativistische Quarks frei bewegen können. Die Aufspaltung der Hadronen kann durch die pertur-

bative Ankopplung von Gluonen erfolgreich wiedergegeben werden. Die Realisierung der chiralen Symmetrie, die im MIT-Bag-Modell verletzt ist, führte durch die störungstheoretische Ankopplung von Pionen an der Oberfläche des Bags auf das Cloudy-Bag-Modell[10]. Die Translationsinvarianz der zugrundeliegenden Theorie ist jedoch durch die Konzeption der Bagmodelle verletzt, und deren Lösungen enthalten spuriose Schwerpunktbewegungen. Verschiedene Techniken und Ansätze sind entwickelt worden, um Schwerpunktkorrekturen und Rückstoßeffekte aus den Lösungen des MIT-Bag-Modells[11–13] und des Cloudy-Bag-Modells[14,15] zu eliminieren und deren Auswirkungen auf statische Observable und Formfaktoren zu studieren. Die grundlegenden Probleme jedoch bereiten die Randwertbedingungen an der Oberfläche des Bags, die eine konsistente Behandlung der Translationsbewegung erheblich erschweren.

Der Bagradius, der die Ausdehnung hadronischer Systeme charakterisiert, ist ein willkürlicher Parameter in beiden Modellen, der frei variiert, aber nicht aus QCD bestimmt werden kann. Modellvorstellungen, die die oben geschilderte Schwierigkeit vermeiden und in denen die Bindung der Quarks nicht durch einen starren Bag beschrieben wird, sondern durch ein selbstkonsistentes nichtperturbatives Feld erfolgt, wurden erstmals von Friedberg und Lee[16] formuliert. Eine chirale Version eines solchen Modells wurde von Birse und Banerjee[17] und von Ripka, Kahana und Soni[18] vorgeschlagen. Dieses Modell, das eine neue Version des älteren Gell-Mann-Lévy-Modells[19] ist, in welchem die Fermionfelder als Quarkfelder reinterpretiert werden, enthält skalare isoskalare und pseudoskalare isovektorielle Bosonfelder, die durch die Wechselwirkung mit den Quarkfeldern erzeugt werden.

Im Gegensatz zum MIT- und Cloudy-Bag-Modell jedoch beinhalten diese solitonischen Modelle kein Confinement der Quarks, da die die Quarks bindenden selbstkonsistenten mesonischen Felder eine endliche 'Höhe' haben, die Masse der Quarks außerhalb des Bags zwar groß aber endlich ist. Ein absolutes Confinement aller Objekte, die Farbladungen tragen, kann eichinvariant durch ein Colourdielektrikum in die Theorie eingeführt werden, falls dieses eine lokale Funktion eines skalaren Feldes ist, das im physikalischen Vakuum verschwindet[20]. Nielson und Patkós[21] benutzen einen 'Block-Spinning'-Ansatz, um zu zeigen, wie ein colourdielektrisches Feld im Rahmen der QCD zu begründen ist. Formale und numerische Analysen[22] stützen die These, daß das dielektrische Feld im QCD-Vakuum verschwindet und so ein Confinement der Quarks generiert. Dieser Zugang führt auch zu einer direkten Kopplung des colourdielektrischen Feldes an die Quarkfelder, die von verschiedenen Gruppen[23–28] untersucht wurde. Durch die Einführung der chiralen Felder des linearen σ-Modells können chiral invariante colourdielektrische Modelle (CD-Modelle) konstruiert werden[29,30,31], die nun zwei der wesentlichsten Eigenschaften der QCD im Niederenergiebereich in sich vereinen, spontan gebrochene chirale Symmetrie und absolutes Confinement der Quarkfelder und die qualitativ dem Cloudy-Bag-Modell[32] ähneln.

Dynamische Prozesse, Schwerpunkteffekte sowie baryonische Observable können, zumindest im Prinzip, auf der Grundlage solcher solitonischen Modelle, die auf einer relativistischen Feldtheorie beruhen, behandelt werden. Die starke Wechselwirkung der Felder untereinander erlaubt jedoch die Anwendung der Standardmethoden der Störungstheorie nicht und stellt daher eine erhebliche Erschwernis dar, die beim Auffinden der Lösungen dieser Modelle zutage tritt. Nur nichtpertur-

bative Methoden, die in Analogie zu Methoden der Vielkörperphysik entwickelt wurden, kommen deshalb zur Untersuchung von Modellen mit stark wechselwirkenden Feldern in Frage.

Ausgangspunkt der Beschreibung der komplexen inneren Struktur der Hadronen ist die Mean-Field-Approximation (MFA), die auf der Ersetzung der Feldoperatoren im Hamiltonoperator durch ihre klassischen komplexwertigen Funktionen und der Vernachlässigung der Quantenfluktuationen beruht. Die auf klassischem Niveau aus der Lagrangedichte abgeleiteten Bewegungsgleichungen für die Quark- und Mesonfelder bilden ein System gekoppelter nichtlinearer Differentialgleichungen, das solitonische Lösungen aufweist.

Da die nichtchiralen Versionen der solitonischen Modelle nur skalare isoskalare Mesonenfelder enthalten, die nicht zum Spin und Isospin des Solitons beitragen, werden die Spin-Flavourwellenfunktionen der drei Valenzquarks so gekoppelt, daß die Produktwellenfunktion den Spin und Isospin des zu untersuchenden hadronischen Systems hat. Die Spin-Flavourwellenfunktion des aus Quarks und skalaren Mesonen aufgebauten Teilchens genügt damit per Konstruktion der Rotationsinvarianz, d. h. sie ist Eigenfunktion des Drehimpuls- und Isospinoperators. Diese klassischen Solitonen jedoch sind lokalisierte Objekte, die die Translationsinvarianz der zugrundeliegenden Lagrangedichte brechen, d. h. sie sind keine Eigenfunktionen des Impulsoperators. Die spuriosen Schwerpunktbewegungen, die daher in den solitonischen Lösungen enthalten sind, tragen zur Energie und zu anderen Observablen des Baryons bei und sollten aus den Lösungen eliminiert werden, um korrigierte Werte für die baryonischen Observablen zu erhalten und diese mit den experimentellen Daten vergleichen zu können. Die Berechnung der Schwerpunktkorrekturen und die konsistente Formulierung der Herstellung der Translations- und Rotationssymmetrie im Rahmen chiraler Solitonmodelle ist der wesentliche Gegenstand dieser Arbeit.

Ein möglicher Weg Schwerpunkteffekte zu erfassen, ist die Konstruktion von Eigenzuständen des Impulses mittels Peierls-Yoccoz-Projektionstechniken[33,34], die allerdings Quantenzustände aller beteiligten Felder, d. h. einen Produkt-Fockzustand der Quark- und Mesonfelder, erfordern. Damit Projektionsrechnungen praktisch ausführbar sind, werden Effekte, die auf die Polarisation des Diracsees zurückzuführen sind, vernachlässigt und der Fockzustand ist ein Produkt aus einem antisymmetrischen Produktzustand der drei Valenzquarks (Slaterdeterminante) und kohärenten Zuständen der Mesonfelder. Letzterer besitzt quasiklassische Eigenschaften in dem Sinne, daß er die Heisenberg'sche Unschärferelation minimiert[35,36], und wurde von Bardeen et al.[37] sowie Huang und Stump[38] zum Zweck von Projektionsrechnungen in solitonischen Modellen vorgeschlagen. In dieser Näherung ist die klassische Energie mit dem Erwertungswert des kanonisch quantisierten, normalgeordneten Hamiltonoperators identisch. Projektionsrechnungen, die auf derartigen Fockzuständen beruhen, wurden im Friedberg-Lee-Modell von Lübeck et al.[39] und in einer nichtchiralen Version des colourdielektrischen Modells von Leech und Birse[40] ausgeführt. Zustände, die aus Peierls-Yoccoz-Projektionen auf unterschiedliche Impulse hervorgehen, können nicht durch eine geeignete Lorentztransformation miteinander verbunden werden, da die Projektion auf endlichen Impuls eine nichtrelativistische Prozedur ist. Zur Berechnung von Ladungsradien und magnetischen Momenten unterwerfen Lübeck et al.[39] daher den auf den Impuls $q = 0$ projizierten Ruhezustand des Nukleons einer relativistischen Boostoperation. Betz und Goldflam[41] hatten zuvor bereits die

Auswirkungen einer klassischen Boostoperation auf die solitonischen Eigenschaften studiert, jedoch Schwerpunktkorrekturen vernachlässigt.

Die klassischen Lösungen chiral invarianter solitonischer Modelle brechen nicht nur die Translationsinvarianz, sondern auch die Rotationsinvarianz im Spin- und Isospinraum, da eine stationäre Lösung der klassischen Bewegungsgleichungen mit extremaler Energie Hedgehog-Struktur hat[26,42,43,44,45,46]. Ein Fockzustand, der in der oben beschriebenen Weise auf der Grundlage der klassischen Lösungen als Tensorprudukt aus Quark- und Mesonfeldern, die Hedgehog-Spin-Flavour-Struktur haben, konstruiert ist, ist nicht invariant unter Drehungen, sowohl im Konfigurationsraum als auch im Isospinraum. Das heißt, der Hedgehog besitzt keinen definierten Spin und Isospin, und Observable, die mit diesem Zustand berechnet wurden, können nicht mit baryonischen Observablen identifiziert werden. Um die Eigenschaften von Baryonen mit guten Quantenzahlen im Rahmen chiral invarianter Modelle mit Valenzquarks zu studieren, wird eine Projektion des Hedgehogs auf Drehimpuls und Isospin notwendig.

Um die Drehimpulssymmetrie der Lagrangedichte dieser Modelle zu restaurieren, wurden in der jüngsten Vergangenheit zwei Wege beschritten, die Peierls-Yoccoz-Projektion des Hedgehogs[47,48,49,50] und die semiklassische Quantisierung[51,52,53] (Cranking-Methode), die Adkins, Nappi und Witten[54] im Rahmen eines topologischen Modells, des Skyrme-Modells[55], benutzt haben. Cranking-Techniken beruhen auf der Parametrisierung der Drehungen durch kollektive Koordinaten und der Einführung einer adiabatischen Zeitabhängigkeit dieser Koordinaten. Die langsame Bewegung wird ähnlich wie der starre Rotator in der Quantenmechanik quantisiert und die Drehung von der Dynamik des Systems vollständig entkoppelt. Im Ergebnis führt dies zu Rotationsbanden im baryonischen Spektrum und die hauptsächliche Attraktivität dieses Verfahrens ist durch seine Einfachheit begründet. Peierls-Yoccoz-Projektionstechniken dagegen sind ein Spezialfall der Generatorkoordinatenmethode und basieren auf einer Diagonalisierung des Hamiltonoperators in einem 'kollektiven' Unterraum, der von erzeugenden Funktionen aufgespannt wird, die durch Anwendung der Gruppenelemente der entsprechenden Symmetriegruppe auf den symmetriebrechenden Zustand konstruiert werden. Die Anwendung dieses Verfahrens auf die Hedgehog-Fockzustände führte im Rahmen des linearen Quark-Sigma-Modells, das auf der Gell-Mann-Lévy-Lagrangedichte[19] beruht, und im Rahmen eines um Vektormesonen erweiterten Quark-Meson-Modells[26,46,56] zu einer guten Beschreibung statischer Observabler[47,50,49] und Formfaktoren[43,56] des Nukleons und der Δ-Resonanz. Mit den gleichen Methoden wurden die Effekte, die ein nukleares Medium auf die baryonischen Observablen ausübt, behandelt[57]. Schwerpunkteffekte jedoch sind in den aufgeführten Modellrechnungen unberücksichtigt geblieben und ein Vergleich der ermittelten Observablen mit experimentellen Daten ist im strengen Sinne etwas fragwürdig.

Abschätzungen der Schwerpunkteffekte in chiralen Modellen sind von Stern und Clément[53], Leech und Birse[58,59] sowie Kitagawa[52] vorgenommen worden. Diese Abschätzungen beruhen zumeist auf der separaten Behandlung der Schwerpunkteffekte und der Drehimpulsprojektion[53,52], d. h. Beiträge zur Energie eines Baryons, die auf die spuriosen Schwerpunktkomponenten der klassischen Lösungen zurückzuführen sind, werden durch Korrekturterme der Art $\langle : \boldsymbol{P}^2 : \rangle/(2M)$ berücksichtigt, Beiträge, deren Ursache die Brechung der Drehimpulssymmetrie ist, durch Cran-

king-Techniken behandelt. Schwerpunktkorrekturen der Ladungsradien greifen auf eine Näherungsmethode, die von Dethier et al.[60] entwickelt wurde, zurück. Eine derartige Vorgehensweise fußt also auf der nichtstatthaften Entkopplung der Translations- und Rotationsbewegung. Leech und Birse[59] behandeln Schwerpunkteffekte in einem colourdielektrischen Modell durch PY-Impulsprojektion und berücksichtigen die chirale Symmetrie durch störungstheoretische Ankopplung von Pionen an Quarks in Analogie zum Cloudy-Bag-Modell[61].

Die grundlegende Absicht und das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist die konsistente Behandlung von Translations- und Rotationsbewegung im Rahmen chiral invarianter Solitonmodelle mit Valenzquarks. Zu diesem Zweck wird eine kombinierte Peierls-Yoccoz-Projektionstechnik entwickelt, die eine simultane Projektion der Mean-Field-Fockzustände auf Eigenzustände des linearen Impulses, Drehimpulses und Isospins leistet. Spuriose Schwerpunktkomponenten können so aus dem Hedgehog-Ansatz eliminiert und statische Observable des Nukleons und der Δ-Resonanz berechnet werden. In dieser Arbeit werden schwerpunktkorrigierte Observablen im Rahmen zweier chiral invarianter Quark-Meson-Modelle, des Gell-Mann-Lévy-Modells[19] und einer chiral invarianten Version eines colourdielektrischen Modells[31] (CD-Modell), ermittelt und mit den experimentellen Ergebnissen verglichen. Im Gegensatz zum Gell-Mann-Lévy-Modell erfolgt die Bindung der Quarks im CD-Modell nicht durch die chiralen σ- und π-Felder, sondern im wesentlichen durch ein 'gluonisches' colourdielektrisches Feld, das ein phänomenologisches Confinement der Quarks bewirkt, so daß beide Modelle recht unterschiedlich sind, folgende Annahmen in beiden Modellen jedoch vorausgesetzt werden:

- ▷ *Die spontane Brechung der chiralen Symmetrie ist ein wesentlicher Mechanismus der QCD im Niederenergiebereich*
- ▷ *Das Valenzquark-Bild ist gültig und Effekte der Polarisation von Seequarks können durch die Annahme dynamischer Mesonfelder berücksichtigt werden.*
- ▷ *Kohärente Zustände auf der Basis ebener Wellen sind eine adäquate Beschreibung mesonischer Quantenzustände.*

Der Inhalt dieser Arbeit gliedert sich neben diesem einführenden Abschnitt in fünf weitere Kapitel. Nachfolgend werden die beiden Modelle, deren Lösungen Grundlage der Projektionsrechnungen sind, vorgestellt und diskutiert. Die Bedeutung der chiralen Symmetrie wird kurz angeschnitten und die Ideen, die eine Brücke zwischen QCD und CD-Modell schlagen sollen, beleuchtet.

Die Entwicklung klassischer solitonischer Lösungen in beiden Modellen ist Gegenstand des dritten Kapitels. Es wird gezeigt, daß die stationären Variationslösungen des Gell-Mann-Lévy-Modells mit extremaler Energie Hedgehog-Struktur aufweisen und daß dies unter der vereinfachenden Annahme eines skalaren isoskalaren colourdielektrischen Feldes auch im CD-Modell gültig ist. Die stark unterschiedlichen klassischen Lösungen der Modelle, die eingehend behandelt werden, sind die Grundlage der Konstruktion eines Fockzustands, der auf der kanonischen Quantisierung des Hamiltonoperators beruht und als Tensorprodukt einer Slaterdeterminante der drei Valenzquarks und kohärenter Zustände aller auftretenden Mesonfelder konstruiert werden kann, so daß klassische

Energie und Erwartungswert des normalgeordneten Hamiltonoperators identisch sind.

Im vierten Kapitel werden Peierls-Yoccoz-Projektionen, die aus der Kernphysik bekannt sind, kurz eingeführt und eine zentrale Grundlage der vorliegenden Arbeit bewiesen: Im Gegensatz zu den Generatoren der Translation und der Rotation kommutieren die Projektionsoperatoren auf Impuls $q = 0$ und Drehimpuls J, so daß gemeinsame Eigenfunktionen des Spins J, Isospins T und Impulses $q = 0$ durch simultane Projektion erzeugt werden können, d. h. ein baryonischer Zustand hat in seinem Ruhesystem einen definierten Spin (und Isospin). Diese Aussage ist nicht mehr gültig, falls Projektionen auf endliche Impulse betrachtet werden. Da zur Berechnung von Ladungsradien und magnetischen Momenten Zustände mit endlichem Impuls benötigt werden, werden Boostoperationen und alternativ Projektionen auf endlichen Impuls diskutiert. Da bei kleinen und mittleren Impulsen ($q < 0.5$ GeV) die projizierte Nukleonmasse gut die Einstein-Relation der geboosteten Masse reproduziert (siehe Kapitel 4), werden in dieser Arbeit Boost-Operationen durch Impulsprojektionen genähert. Auf unterschiedliche endliche Impulse projizierte Zustände gehen nicht durch Lorentztransformationen auseinander hervor, da die Projektion eine nichtrelativistische Prozedur ist. Vielmehr haben diese Zustände unterschiedliche innere Struktur und hängen vom Impuls ab. Dieser Sachverhalt ist unter dem Schlagwort Peierls-Yoccoz-Problem bekannt, das durch eine Variation der projizierten Zustände umgangen werden kann. Ein approximatives Verfahren zur Projektion vor der Variation (VaP(a)-Verfahren), das im CD-Modell Verwendung findet, wird in einem letzten Abschnitt des vierten Kapitels entwickelt und vorgestellt.

Die Berechnung verschiedener statischer Observabler des Nukleons und der Δ-Resonanz unter Berücksichtigung der Schwerpunktkorrekturen sowie die Ergebnisse der numerischen Analyse sind im fünften Kapitel zusammengefaßt. Einleitend wird die Ruheenergie des Nukleons behandelt, und es stellt sich heraus, daß der größte Teil der Korrelationsenergie von 500–600 MeV im Gell-Mann-Lévy-Modell auf den ein freies σ-Feld beschreibenden Anteil des Hamiltonoperators zurückzuführen ist, und die Ruhemasse des Nukleons aufgrund dieser Beobachtung nur unter Schwierigkeiten an den experimentellen Wert angepaßt werden kann. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, ob die Beschreibung der kohärenten σ-Zustände auf der Grundlage ebener Wellen möglicherweise zu einer Überschätzung der Nullpunktenergien führt. Die Entwicklung der mesonischen Feldoperatoren in einer Basis aus Oszillatorwellenfunktionen, die den lokalisierten Charakter des Solitons widerspiegeln und eine mögliche Distorsion der Basis aus ebenen Wellen durch die solitonischen Felder berücksichtigen sollen, und die Berechnung einfacher Schwerpunktkorrekturen auf der Grundlage beider Basissysteme führt jedoch zu nahezu gleichen Ergebnissen, zeigt aber, daß diese einfachen Korrekturen zu einer wesentlichen Überschätzung der Korrelationsenergie im Vergleich zur Projektion führen. Im CD-Modell sind die Schwerpunktkorrekturen zur Energie kleiner und eine Anpassung an die experimentelle Masse des Nukleons stellt aufgrund des Confinements der Quarks kein Problem dar. Die Auswirkungen der Impulsprojektion auf die anderen Observablen des Nukleons, die in den folgenden Abschnitten behandelt werden, sind erheblich geringer, da Anhebungen der Quarkanteile Absenkungen der Mesonanteile der Observablen gegenüberstehen. Dies gilt prinzipiell auch für das CD-Modell. Da jedoch auch die bei Projektion vor der Variation wesentlich verstärkten chiralen Felder noch deutlich kleiner sind als im

Gell-Mann-Lévy-Modell, heben sich die Wirkungen der Impulsprojektion nicht mehr auf und diese werden, insbesondere für den Ladungsradius des Protons, wichtig. Die Projektion vor der Variation ist im Hinblick auf den Ladungsradius des Neutrons und den Pion-Nukleon-Sigma Term besonders bedeutsam. Dies gilt auch für die betrachteten Virialtheoreme, die im Gell-Mann-Lévy-Modell nur durch eine Verallgemeinerung des Hedgehog-Ansatzes[49] zu erfüllen sind.

Das sechste Kapitel bietet einen Überblick über die wichtigsten Ergebnisse beider Modelle. Die Resultate werden mit den experimentellen Daten sowie Ergebnissen des Nambu-Jona-Lasinio-Modells verglichen und Projektionsmethoden Crankingtechniken gegenübergestellt und kommentiert. Die umfanreichen Anhänge enthalten zahlreiche Details der Projektionsrechnungen.

2. Chiral invariante Solitonmodelle mit Valenzquarks

Wie in der vorangegangenen Einleitung bereits festgestellt wurde, ist die spontane Brechung der chiralen Symmetrie einer der wesentlichen Mechanismen der QCD im Niederenergiebereich. Die Verletzung der chiralen Symmetrie durch das hadronische Vakuum, die durch einen Parameter, das skalare Quarkkondensat, $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$, charakterisiert ist, konnte in einfacher Weise das Fehlen von Paritätsdubletts im hadronischen Spektrum erklären und die Existenz dreier nahezu masseloser Pion-Felder (falls nur der $SU(2)$-Sektor betrachtet wird) mit Hilfe des Goldstonetheorems deuten. Die endliche Pionmasse, $m_\pi = 140$ MeV, ist auf die explizite Brechung der chiralen Symmetrie durch die kleinen, aber von Null verschiedenen Strommassen der Quarks, zurückzuführen, wie aus der Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation[62]

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -\frac{1}{2}(m_u + m_d)\langle 0|\bar{u}u + \bar{d}d|0\rangle \tag{2.1}$$

zu ersehen ist.

Bevor die Einzelheiten beider Modelle, deren tranlations- und rotationsinvariante Lösungen Gegenstand dieser Arbeit sind, erörtert werden, sollen die wichtigsten Eigenschaften der chiralen Gruppe diskutiert werden. Die Realisierung der chiralen Symmetrie in Nambu-Goldstone Mode im Rahmen eines Quark-Meson-Modells wird Thema des Abschnitts über das Gell-Mann-Lévy Modell sein. Themengebiet des letzten Abschnitts dieses Kapitels sind die Ideen, die ein phänomenologisches Confinement der Quarkfreiheitsgrade durch ein colourdielektrisches Feld begründen, sowie die chirale Erweiterung des sogenannten colourdielektrischen (CD-) Modells.

Die kleinsten nichttrivialen Darstellungen der chiralen Gruppe, $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$, haben Dimension $2T+1=2$. Dies sind die links- und rechtshändigen Komponenten

$$\begin{aligned} q_L &= \frac{1}{2}\left(1-\gamma^5\right)q & q_R &= \frac{1}{2}\left(1+\gamma^5\right)q \\ \bar{q}_L &= \bar{q}\frac{1}{2}\left(1+\gamma^5\right) & \bar{q}_R &= \bar{q}\frac{1}{2}\left(1-\gamma^5\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

des Quarkfeldes, die Eigenspinoren der Helizitätsmatrix γ^5 und den Darstellungen $\left(\frac{1}{2},0\right)$ und $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ zuzuordnen sind[(a)]. Sie transformieren sich gemäß

$$q_L \xrightarrow{L} \left(I - \frac{i}{2}\vec{\beta}\cdot\vec{\tau}\right)q_L \qquad q_R \xrightarrow{R} \left(I - \frac{i}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}\right)q_R\,, \tag{2.3}$$

da die infinitesimal Erzeugenden der fundamentalen Darstellung die Paulimatrizen τ_i sind. Die zu Gl. (2.3) äquivalenten Transformationen des Quarkspinors sind durch

$$q \longrightarrow \left[I - \frac{i}{2}\left(\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}\right)\cdot\vec{\tau}\right]q \tag{2.4a}$$

$$q \longrightarrow \left[I - \frac{i}{2}\left(\frac{\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{2}\right)\cdot\vec{\tau}\gamma^5\right]q \tag{2.4b}$$

[(a)] Die Notation (j,j') für eine Darstellung der Gruppe $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ bezeichnet eine irreduzible Darstellung der Dimension $2j+1$ hinsichtlich der Gruppe $SU(2)_L$ und eine der Dimension $2j'+1$ hinsichtlich der Gruppe $SU(2)_R$.

gegeben. Der Ausdruck (2.4a) beschreibt Drehungen im Isospinraum um den Winkel $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})/2$, (2.4$b$) axiale Transformationen mit 'Winkel' $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})/2$. man zeigt leicht, daß der kinetische Term des Quarkfeldes

$$\imath\,\bar{q}\partial_\mu\gamma^\mu q = \imath\,\bar{q}_L\partial_\mu\gamma^\mu q_L + \imath\,\bar{q}_R\partial_\mu\gamma^\mu q_R \tag{2.5}$$

in der Lagrangedichte invariant unter der Transformation (2.3) ist

$$\imath\,\bar{q}_{L,(R)}\partial_\mu\gamma^\mu q_{L,(R)} \xrightarrow{L,(R)} \imath\,\bar{q}_{L,(R)}\partial_\mu\gamma^\mu q_{L,(R)}\,, \tag{2.5a}$$

dies jedoch nicht für den Massenterm

$$m\bar{q}q = m\left(\bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L\right) \tag{2.6}$$

gilt.

Um die Transformationseigenschaften der Darstellung $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ zu studieren, sei zunächst festgestellt, daß die chirale Gruppe isomorph zur Gruppe der vierdimensionalen, orthogonalen Transformationen, d. h. isomorph zur Gruppe $O(4)$ ist. Die infinitesimale Transformation eines vierdimensionalen Vektors $x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ lautet dann (Summenkonvention):

$$x^\nu \longrightarrow \left[\delta^\nu{}_\mu + \frac{1}{2}\epsilon_{\sigma\rho}\left(I^\nu{}_\mu\right)^{\sigma\rho}\right] x^\mu \tag{2.7}$$

Die Gruppe $O(4)$ besitzt sechs unabhängige Parameter, die sich zu einem antisymmetrischen Tensor, $\epsilon_{\sigma\rho} = -\epsilon_{\rho\sigma}$ zusammenfassen lassen. Ihre sowohl in den Indexpaaren $(\nu\,\mu)$ als auch $(\sigma\,\rho)$ antisymmetrischen infinitesimalen Erzeugenden, d. h. es ist

$$\left(I_{\nu\mu}\right)^{\sigma\rho} = -\left(I_{\mu\nu}\right)^{\sigma\rho} \qquad \left(I_{\nu\mu}\right)^{\sigma\rho} = -\left(I_{\nu\mu}\right)^{\rho\sigma}\,, \tag{2.8}$$

können mit Hilfe der Invarianz der Länge des Vektors x^μ, $x^\mu x_\mu = s^2 = const.$ unter orthogonalen Transformationen konstruiert werden.

$$\left(I_{\nu\mu}\right)^{\sigma\rho} = \delta^\sigma{}_\mu\delta^\rho{}_\nu - \delta^\sigma{}_\nu\delta^\rho{}_\mu \tag{2.9}$$

Da die Darstellung $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ der chiralen Gruppe vierdimensional ist, sind mit Gl. (2.9) auch die infinitesimalen Transformationsmatrizen dieser Darstellung gefunden, die die Drehung (euklidische Metrik, $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$) eines vierdimensionalen Feldes $(\sigma, \vec{\pi})$ beschreiben. Es liegt nahe, die infinitesimale Transformation des Feldes $(\sigma, \vec{\pi})$ durch die gleichen Parameter auszudrücken, die bereits zur Beschreibung der Spinortransformation (2.3) verwendet wurden. Setzt man

$$\frac{1}{2}\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right) = \left(\epsilon_{01}, \epsilon_{02}, \epsilon_{03}\right) \tag{2.10a}$$

und

$$\frac{1}{2}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right) = \left(\epsilon_{23}, \epsilon_{31}, \epsilon_{12}\right) \qquad \left[\frac{1}{2}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\right]_i = \epsilon_{jk} \quad i,j,k\ zyklisch \tag{2.10b}$$

so findet man

$$\sigma \longrightarrow \sigma - \frac{1}{2}\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) \cdot \vec{\pi} \tag{2.11a}$$

$$\vec{\pi} \longrightarrow \vec{\pi} + \frac{1}{2}\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) \sigma + \frac{1}{2}\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) \wedge \vec{\pi} \tag{2.11b}$$

und äquivalent zu den Gln. (2.4a, b)

$$\begin{aligned} \sigma &\longrightarrow \sigma \\ \vec{\pi} &\longrightarrow \vec{\pi} + \frac{1}{2}\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) \wedge \vec{\pi} \end{aligned} \tag{2.12a}$$

sowie

$$\begin{aligned} \sigma &\longrightarrow \sigma - \frac{1}{2}\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\pi} &\longrightarrow \vec{\pi} + \frac{1}{2}\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) \sigma \end{aligned} \tag{2.12b}$$

Gl. (2.12a) bringt zum Ausdruck, daß das σ-Feld sich wie ein Skalar, das $\vec{\pi}$-Feld sich wie ein Vektor unter Isospintransformationen verhält. Da $\sigma^2 + \vec{\pi}^2$ die Länge des Vektors $(\sigma, \vec{\pi})$ ist, ist der Ausdruck $\sigma^2 + \vec{\pi}^2$ invariant unter chiralen Transformationen. Das gleiche gilt natürlich auch für die kinetische Energie der Mesonfelder, $\partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma + \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \partial_\mu \vec{\pi}$, da nur globale Transformationen betrachtet werden. Die einfachste chiral invariante Kopplung der Quarkfelder an die Mesonfelder ist durch

$$\bar{q}\left(\sigma + \imath\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\right) q = \bar{q}_L \left(\sigma + \imath\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\right) q_R + \bar{q}_R \left(\sigma + \imath\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\right) q_L \tag{2.13}$$

gegeben. Das lineare Sigma-Modell von Gell-Mann und Lévy hat eine chiral symmetrische Lagrangedichte, die diese Felder enthält und in welcher die Fermionfelder nicht mehr als Nukleon- sondern als Quarkfelder interpretiert werden.

2.1. Das Gell-Mann-Lévy Modell

Das lineare Sigma-Modell, ursprünglich von Schwinger[63] vorgeschlagen, und von Gell-Mann und Lévy[19] weiterentwickelt, um die PCAC-Hypothese mit einzubeziehen, beschreibt die Wechselwirkung elementarer Nukleonfelder mit den chiralen Feldern σ und $\vec{\pi}$. Die Lagrangedichte hat die Form

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_S + c\sigma \tag{2.14}$$

worin

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S = \bar{\psi}\left[\imath\gamma^\mu \partial_\mu + g\left(\sigma + \imath\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\right)\right] \psi \\ + \frac{1}{2}\partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma + \frac{1}{2}\partial^\mu \vec{\pi} \cdot \partial_\mu \vec{\pi} - U(\sigma, \vec{\pi}) \end{aligned} \tag{2.15}$$

der chiral invariante Anteil der Lagrangedichte $\mathcal{L}$ ist, der das mesonische Selbstwechselwirkungspotential

$$U(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\lambda}{4}\left(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \nu^2\right)^2 - U_0 \tag{2.16}$$

enthält, das aufgrund seiner Gestalt auch als Mexican-Hat-Potential bezeichnet wird, was offensichtlich wird, wenn man $U(\sigma, \vec{\pi})$ als Funktion von σ und $|\vec{\pi}| = \sqrt{\vec{\pi} \cdot \vec{\pi}}$ dreidimensional aufträgt. Die Konstante U_0 ist so gewählt, daß das Minimum des Potentials den Wert Null annimmt, $U(\langle \sigma \rangle_{vac}, \langle \vec{\pi} \rangle_{vac}) = 0$. Da keine Kopplungen der Felder, die mit Ableitungen verbunden sind und keine Potenzen der Felder größer als vier auftreten, ist die Lagrangedichte (2.14) renormalisierbar. Die Bezeichnung linear unterscheidet dieses Modell von seiner nichtlinearen Version, in welcher die mesonischen Felder auf dem chiralen Zirkel liegen, d. h. die Bedingung

$$\sigma^2 + \vec{\pi}^2 = f_\pi^2 \tag{2.17}$$

erfüllen.

Da die Lagrangedichte (2.15) invariant unter chiralen Transformationen ist, können mit Hilfe des Noethertheorems ein erhaltener Isovektorstrom und ein erhaltener axialer Isovektorstrom konstruiert werden.

$$\vec{V}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu \frac{\vec{\tau}}{2}\psi + \vec{\pi} \wedge \partial^\mu \vec{\pi} \tag{2.18a}$$

$$\vec{A}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu \gamma^5 \frac{\vec{\tau}}{2}\psi + \sigma \partial^\mu \vec{\pi} - \vec{\pi}\partial^\mu \sigma \tag{2.18b}$$

Die zugeordneten Ladungen

$$Q_i = \int d^3x V_i^0(x,t) \tag{2.19a}$$

$$Q_i^5 = \int d^3x A_i^0(x,t) \tag{2.19b}$$

sind Konstanten der Bewegung und erfüllen die Kommutatorrelationen der Lie-Algebra der Transformationsgruppe

$$[Q_i, Q_j] = \imath \varepsilon_{ijk} Q_k \tag{2.20a}$$

$$\left[Q_i^5, Q_j^5\right] = \imath \varepsilon_{ijk} Q_k \tag{2.20b}$$

$$\left[Q_i, Q_j^5\right] = \imath \varepsilon_{ijk} Q_k^5 \tag{2.20c}$$

worin ε_{ijk} die Strukturkonstanten der $SU(2)$ sind. Die Verbindung zu den Generatoren der chiralen Gruppe, $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$, erhält man durch

$$Q_i^L = \frac{1}{2}\left(Q_i - Q_i^5\right) \tag{2.21a}$$

$$Q_i^R = \frac{1}{2}\left(Q_i + Q_i^5\right) \tag{2.21b}$$

und damit die üblichen Kommutatorregeln

$$\left[Q_i^L, Q_j^L\right] = \imath \varepsilon_{ijk} Q_k^L \tag{2.22a}$$

$$\left[Q_i^R, Q_j^R\right] = \imath \varepsilon_{ijk} Q_k^R \tag{2.22b}$$

$$\left[Q_i^L, Q_j^R\right] = 0 \tag{2.22c}$$

für die Generatoren Q_i^L und Q_i^R der chiralen Transformationen.

Ist $c = 0$, so ist die Lagrangedichte des linearen Sigma-Modells exakt invariant unter chiralen Transformationen und die Zustände niedrigster Energie, die Vakua, die mit den Minima des Potentials identifiziert werden, sind entartet und liegen auf dem 'Kreis'

$$\sigma^2 + \vec{\pi}^2 = \sigma_v^2 \,, \tag{2.23}$$

d. h. man erhält eine unendliche Anzahl entarteter Vakuumzustände. Da das Vakuum eine wohldefinierte Parität hat, wählen wir

$$\langle 0|\sigma|0\rangle = \sigma_v \qquad \langle 0|\vec{\pi}|0\rangle = 0 \tag{2.24}$$

Setzt man das um seinen Vakuumerwartungswert $\sigma_v = \pm\nu$ verschobene σ-Feld

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_v \tag{2.25}$$

in die Lagrangedichte (2.14) ein

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \bar{\psi}\left[\imath\gamma^\mu\partial_\mu + g\sigma_v + g\left(\sigma_0 + \imath\gamma^5\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\right)\right]\psi \\ + \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma_0\partial_\mu\sigma_0 + \frac{1}{2}\partial^\mu\vec{\pi}\cdot\partial_\mu\vec{\pi} - \frac{\lambda^2}{2}\left(3\sigma_v^2 - \nu^2\right)\sigma_0^2 - \frac{\lambda^2}{2}\left(\sigma_v^2 - \nu^2\right)\vec{\pi}^2 \\ - \frac{\lambda^2}{4}\left(\sigma_0^2 + \vec{\pi}^2\right)^2 - \lambda^2\sigma_v\sigma_0\left(\sigma_0^2 + \vec{\pi}^2\right) + \left[c - \lambda^2\sigma_v\left(\sigma_v^2 - \nu^2\right)\right]\sigma_0 \,,\end{aligned} \tag{2.26}$$

so erhält man keinen Term, der quadratisch in $\vec{\pi}$ ist, d. h. im Gegensatz zur Masse des σ-Feldes $m_\sigma^2 = 2\lambda^2\nu^2$ ist die Pionmasse Null, in Übereinstimmung mit dem Goldstonetheorem. Die Pionen sind also die Goldstonebosonen des linearen Sigma-Modells. Des weiteren erhalten die fermionischen Felder durch die spontane Brechung der chiralen Symmetrie eine Isodublettmasse.

$$m_N = g\sigma_v \tag{2.27}$$

Diese Eigenschaften sollen im Folgenden etwas formaler untersucht werden. Mit Hilfe der kanonischen Kommutatorrelationen

$$\left[\partial^0\pi_i(x,t), \pi_j(y,t)\right] = -\imath\,\delta_{ij}\delta^3(x-y) \tag{2.28a}$$

$$\left[\partial^0\sigma(x,t), \sigma(y,t)\right] = -\imath\,\delta^3(x-y) \tag{2.28b}$$

findet man

$$\left[Q_i^5, \pi_j(0)\right] = -\imath\,\delta_{ij}\sigma(0) \tag{2.29a}$$

$$\left[Q_i^5, \sigma(0)\right] = \imath\,\pi(0) \tag{2.29b}$$

und damit

$$\langle 0|\left[Q_i^5, \pi_j(0)\right]|0\rangle = -\imath\,\delta_{ij}\sigma_v \tag{2.30}$$

für den Vakuumerwartungswert des Kommutators (2.29a). Nach Einschieben eines vollständigen Systems intermediärer Zustände und Verwendung des Translationsoperators,

$$e^{i\hat{P}\cdot x} A_i^0(x) e^{-i\hat{P}\cdot x} = A_i^0(0)\,, \tag{2.31}$$

erhält man:

$$\begin{aligned} -i\,\delta_{ij}\sigma_v = \sum_n (2\pi)^3\,\delta^3(p_n)\Big[&\langle\, 0|A_i^0(0)|n\,\rangle\langle\, n|\pi_j(0)|0\,\rangle e^{-iE_n t} \\ &- \langle\, 0|\pi_j(0)|n\,\rangle\langle\, n|A_i^0(0)|0\,\rangle e^{iE_n t}\Big] \end{aligned} \tag{2.32}$$

Da die linke Seite der Gl. (2.32) zeitunabhängig und ungleich Null ist, gilt aufgrund der δ-Funktion auf der rechten Seite von (2.32) (Goldstonetheorem)

$$E_n = M_n = 0 \qquad \forall\, n \tag{2.33}$$

und weiterhin, da die masselosen Pionen den einzigen Beitrag zur Summe in (2.32) bilden

$$\langle\, 0|A_i^0(0)|\pi\,\rangle \neq 0 \qquad \langle\, \pi|\pi_i(0)|0\,\rangle \neq 0 \tag{2.34}$$

also schließlich:

$$\begin{aligned} -i\,\delta_{ij}\sigma_v = \sum_{k=1}^{3} \int \frac{d^3p}{2p_0}\,\delta^3(p_n)\Big[&\langle\, 0|A_i^0(0)|\pi_k(p)\,\rangle\langle\, \pi_k(p)|\pi_j(0)|0\,\rangle \\ &- \langle\, 0|\pi_j(0)|\pi_k(p)\,\rangle\langle\, \pi_k(p)|A_i^0(0)|0\,\rangle\Big] \end{aligned} \tag{2.35}$$

Mit der Normierung

$$\langle\, 0|\pi_j(0)|\pi_k(p)\,\rangle = \delta_{jk} \tag{2.36}$$

kann Gl. (2.35) durch

$$\langle\, 0|A_i^0(0)|\pi_k(p)\,\rangle = i\,\delta_{ik} p^0 \sigma_v \tag{2.37}$$

erfüllt werden. Da A_i^μ eine vektorielle Größe ist, erfordert Kovarianz

$$\langle\, 0|A_i^\mu(0)|\pi_k(p)\,\rangle = i\,\delta_{ik} p^\mu \sigma_v\,. \tag{2.38}$$

Mit (2.31) erhält man aus (2.38) ferner das Matrixelement der Divergenz des axialen Stromes,

$$\langle\, 0|\partial_\mu A_i^\mu(x)|\pi_k(p)\,\rangle = \delta_{ik} m_\pi^2 \sigma_v e^{-ip\cdot x}\,, \tag{2.39}$$

worin p_μ der Viererimpuls des Pions ist, $p_\mu p^\mu = m_\pi^2$.

Ist die Lagrangedichte also invariant unter chiralen Transformationen, so hat die mit dieser Aussage verbundene Stromerhaltung, $\partial_\mu \vec{A}^\mu = 0$ (Noethertheorem), zur Folge, daß die Pionen masselos, $m_\pi = 0$, sein müssen, was jedoch im Widerspruch zu den experimentellen Fakten steht. Die

chirale Symmetrie muß also verletzt sein. Da jedoch die Masse des Pions, $m_\pi = 140$ MeV, im hadronischen Maßstab klein ist, ist die chirale Symmetrie nur schwach verletzt, oder anders ausgedrückt, der axiale Strom ist teilweise erhalten. Dieser Sachverhalt ist unter dem Namen PCAC-Hypothese (partially conserved axial current) bekannt und soll im Folgenden erläutert werden.

Die hadronische Komponente des Matrixelements, $\langle 0|J^\mu_{hadr}|\pi\rangle$, das den Zerfall des geladenen Pions in Leptonen, hauptsächlich Muonen und entsprechende Neutrinos, z. B. $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$, beschreibt, wird auf den Axialvektorstrom zurückgeführt, da die Parität in der starken Wechselwirkung erhalten sein soll. In Analogie zu Gl. (2.38) hat man

$$\langle 0|A^\mu_i(0)|\pi_j(p)\rangle = \imath\,\delta_{ij} f_\pi p^\mu \tag{2.40}$$

worin f_π die in den Pion-Zerfällen gemessene Pion-Zerfallskonstante, $f_\pi = 93$ MeV, ist. Die gleiche Argumentationskette, die zu Gl. (2.39) führte, führt mit Gl. (2.31) und der Normierung (2.36) auf

$$\langle 0|\partial_\mu A^\mu_i(x)|\pi_j(p)\rangle = m_\pi^2 f_\pi \langle 0|\pi_i(x)|\pi_j(p)\rangle \tag{2.41}$$

Die Verallgemeinerung dieses Ausdrucks auf Operatorniveau

$$\partial_\mu \vec{A}^\mu(x) = m_\pi^2 f_\pi \vec{\pi}(x) \tag{2.42}$$

bezeichnet man als PCAC-Hypothese[19,64,65,66,67].

Die explizite Brechung der chiralen Symmetrie des Sigma-Modells durch den Term $c\sigma$ hat zur Folge, daß im Gegensatz zum Vektorstrom, der weiterhin erhalten ist, der axiale Strom keine Erhaltungsgröße mehr ist, denn mit (2.12*b*) findet man:

$$\delta\mathcal{L} = \delta\left(\mathcal{L}_S + c\sigma\right) = -c\frac{1}{2}\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)\cdot\vec{\pi} \tag{2.43}$$

Da allgemein für die Divergenz eines Stroms

$$\varepsilon^a \partial_\mu J^\mu_a = -\imath\,\partial^\mu\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\left(\partial^\mu\phi_i\right)}\delta\phi_i\right] = \delta\mathcal{L} \tag{2.44}$$

gilt , worin ε^a die infinitesimalen Parameter der globalen Transformation

$$\phi_i \to \phi_i + \delta\phi_i = \phi_i + \imath\,\varepsilon^a t^a_{ij}\phi_j \tag{2.45}$$

sind, folgt aus den Gln. (2.44) und (2.45) unmittelbar

$$\partial_\mu \vec{A}^\mu(x) = -c\vec{\pi}(x) \tag{2.46}$$

Die explizite Brechung der chiralen Symmmetrie durch Einführung des Terms $c\sigma$[b] ist konsistent mit der PCAC-Hypothese, falls

$$c = -m_\pi^2 f_\pi \tag{2.47}$$

---

[b] Wird die chirale Symmetrie etwa durch einen Massenterm für die Fermionfelder explizit gebrochen, dessen Einführung dann isospininvariant ist, falls die Massen des Fermiondubletts den gleichen Wert m haben, so ist: $\partial_\mu \vec{A}^\mu = \imath\, m\bar{\psi}\gamma^5\vec{\tau}\psi$. Übereinstimmung mit der PCAC-Hypothese kann nur erzielt weden, falls $\vec{\pi} = \imath\,\frac{m}{f_\pi m_\pi^2}\bar{\psi}\gamma^5\vec{\tau}\psi$ das Pionfeld durch die Fermionfelder (Quarkfelder) ausgedrückt wird. Dies bedeutet jedoch, daß das Pionfeld kein unabhängiger Freiheitsgrad des Modells mehr ist.

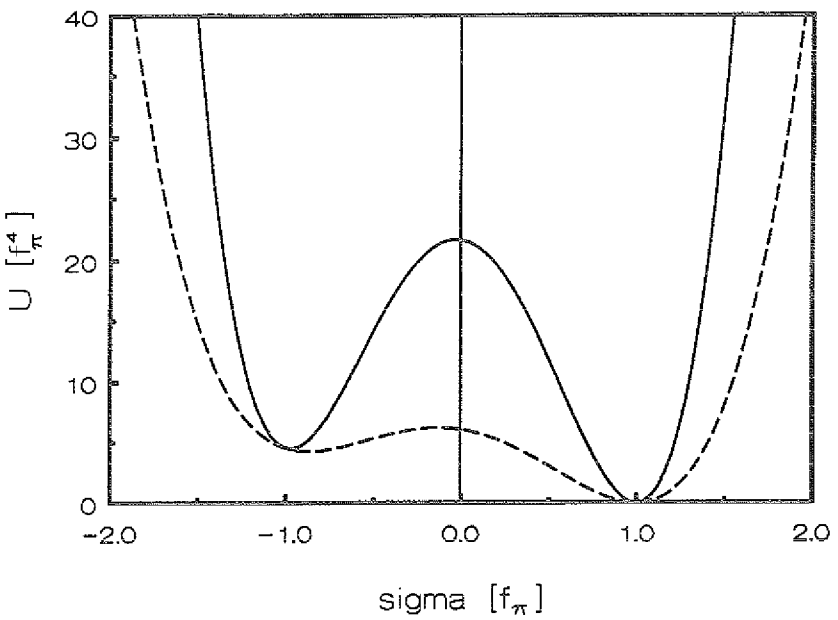


Abb. 2.1: Mexican-Hat-Potential

Die Abbildung zeigt einen $\vec{\pi} = 0$-Schnitt durch die Hyperfläche $U(\sigma, \vec{\pi}) - m_\pi^2 f_\pi$ Die durchgezogene Kurve bezieht sich auf $m_\sigma = 1.2$ GeV, die gestrichelte auf $m_\sigma = 0.6$ GeV, die anderen Parameter haben ihre experimentellen Werte, $m_\pi = 140$ MeV und $f_\pi = 93$ MeV.

gesetzt wird.

Der Term $c\sigma = -m_\pi^2 f_\pi \sigma$ verschiebt die nun nicht mehr entarteten Minima des Mexican-Hat-Potentials (siehe Bild 2.1), das nun ein globales Minimum aufweist und es tritt darüberhinaus ein Massenterm für Pionen auf. Aus der Lagrangedichte (2.26) liest man für die Mesonmassen ab:

$$m_\pi^2 = \lambda^2 \left(\sigma_v^2 - \nu^2\right) \tag{2.48a}$$

$$m_\sigma^2 = \lambda^2 \left(3\sigma_v^2 - \nu^2\right) \tag{2.48b}$$

Aus der für ein Minimum der Energiedichte des Mesonpotentials notwendigen Bedingung

$$\left[\frac{\partial}{\partial \sigma} U(\sigma, \vec{\pi})\right]_{\sigma_0 = 0, \vec{\pi} = 0} = 0 \tag{2.49}$$

erhält man noch

$$\lambda^2 \left(\sigma_v^2 - \nu^2\right) - c = 0\,. \tag{2.50}$$

In Verbindung mit $c = -m_\pi^2 f_\pi$ kann die PCAC-Hypothese im linearen Sigma-Modell erfüllt werden und alle Potentialparameter sowie der Vakuumerwartungswert des σ-Feldes können durch die mesonischen Massen, m_π und m_σ, und die Pion-Zerfallskonstante f_π ausgedrückt werden.

$$\langle 0|\sigma|0\rangle = \sigma_v = f_\pi \tag{2.51a}$$

$$\lambda^2 = \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{2f_\pi} \tag{2.51b}$$

$$\nu^2 = f_\pi^2 \frac{m_\sigma^2 - 3m_\pi^2}{m_\sigma^2 - m_\pi^2} \tag{2.51c}$$

Birse und Banerjee[17] und Kahana, Ripka und Soni[18] haben unabhängig voneinander das Sigma-Modell als effektives Quark-Meson-Modell aufgefaßt, d. h. die ursprünglichen Nukleonfelder des Modells durch Quarkfelder ersetzt. Die Lagrangedichte hat dann die Form

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\sum_{a=1}^{N_c} \bar{q}_a \left[\imath \gamma^\mu \partial_\mu + g \left(\sigma + \imath \gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \right) \right] q_a \\ &+ \frac{1}{2} \partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \partial_\mu \vec{\pi} - U(\sigma, \vec{\pi}) - m_\pi^2 f_\pi \sigma \,,\end{aligned} \tag{2.52}$$

in welcher sie in der vorliegenden Arbeit Verwendung finden soll. Das Modell weist solitonische Lösungen auf, die jedoch die Translations- und Rotationsinvarianz der zugrundeliegenden Lagrangedichte verletzen. Derartige chirale Solitonen wurden bereits von anderen Autoren[47,49] diskutiert, eine konsistente Behandlung der Schwerpunkteffekte wurde jedoch nicht durchgeführt.

2.2. Das colourdielektrische Modell

Im linearen Sigma-Modell, das im vorangegangenen Abschnitt vorgestellt wurde, sind die Quarkfelder durch die mesonischen Felder, σ und π, gebunden, aber ein absolutes Confinement der Quarks wird durch die chiralen Felder nicht generiert. Die Beschreibung vieler experimenteller Phänomene bei höheren Energien jedoch erfordert theoretische Modelle, die die langreichweitigen Eigenschaften des Confinements beinhalten ohne die elementaren Quark- und Gluonfreiheitsgrade der QCD aufzugeben. Das Confinement der farbigen Objekte ist daher eine wichtige, wenn nicht möglicherweise sogar die dominante Eigenschaft der starken Wechselwirkung bei niedrigen Energien. Die Annahme der Existenz eines Confinements der Quarks und Gluonen wird durch Gittereichrechnungen stark unterstützt.

Ein einfacher und intuitiver Weg diesen Sachverhalt modellmäßig zu erfassen, ist die Einführung einer colourdielektrischen Funktion[20,16]. Diese Größe soll im perturbativen Vakuum , in welchem die Quarks und Gluonen frei propagieren können, gleich Eins, im physikalischen Vakuum aber gleich Null sein. Die Wechselwirkung gluonischer Felder mit einem skalaren Feld in solitonischen Modellen wird durch die dielektrische Funktion $\kappa(\sigma)$ vermittelt, die so gewählt wird, daß $\kappa(0) = 1$ und $\kappa(\sigma_v) = 0$ ist. Dieser Mechanismus führt zu einem Colourconfinement, wie aus dem Gauss'schen Gesetz

$$\nabla \cdot D^a = \rho^a \tag{2.53}$$

zu ersehen ist, worin $\vec{D}^a = \kappa(r)\vec{E}^a$ ist. Eine isolierte Farbladung führt nun zu einem D-Feld, dessen asymptotisches Verhalten ($r \to \infty$) proptotional zu $1/r^2$ ist. Die Energie des colourdielektrischen Feldes

$$\int d^3r \, \frac{D^2(r)}{\kappa(r)} \tag{2.54}$$

wird divergieren, da $\kappa(r)$ exponentiell gegen Null strebt, wenn das σ-Feld seinen physikalischen Vakuumerwartungswert im Limes $r \to \infty$ erreicht. Die Energie eines isolierten farbigen Objektes ist also unendlich groß.

Die den colourdielektrischen Modellen zugrundeliegende Idee[68] ist es, das nichtperturbative Vakuum der QCD durch ein perfektes chromodielektrisches Medium mit $\kappa = 0$ zu beschreiben. Die Region, in der $\kappa = 0$ ist, formt eine Blase (Bag) um die $\kappa \neq 0$-Region im Inneren des Hadrons und die Dynamik des Confinements reduziert sich darauf, die Werte des dielektrischen Feldes im Gebiet der Colourladungen zu bestimmen.

Nielson und Patkós[21] haben eine Verfahrensweise vorgeschlagen, die die Ableitung eines dielektrischen Feldes aus den Eigenschaften der QCD unter bestimmten Annahmen erlaubt. Sie benutzen einen 'Block-Spinning'-Zugang, um zu zeigen wie ein colourdielektrisches Feld aus der QCD zu begründen wäre. Eine ausführliche Diskussion dieser Ideen findet man beispielsweise in Ref. 21, 69, 70; hier sind nur die wichtigsten Schritte aufgeführt. Als relevante Freiheitsgrade werden die in Zeit und Raum diskretisierten Feldvariablen

$$U(x, x+\varepsilon) = \exp\left\{ \imath g_s \int_x^{x+\varepsilon} dy^\mu A_\mu(y) \right\} \tag{2.55}$$

eingeführt, die den Paralleltransport in Gegenwart eines Eichfeldes von einen Gitterpunkt x zu einem benachbarten Punkt $x+\varepsilon$ symbolisieren. Die Mittelung über alle Pfade innerhalb eines Kastens der Seitenlänge L führt auf

$$\begin{aligned} \overline{U(x, x+\varepsilon)} &= average\left[\exp\left\{ \imath g_s \int_x^{x+\varepsilon} dy^\mu A_\mu(y) \right\}\right] \\ &\simeq K(x) + \imath \varepsilon^\mu B_\mu(x) \end{aligned} \tag{2.56}$$

worin $B_\mu = \frac{1}{2}\lambda^a B_\mu^a$ das 'grobfaserige' ('coarse-grained') Gluon-Feld ist. Ein Colour-Singlet Vektorfeld, das aufgrund der $SU(3)$-Eichgruppe ebenfalls auftritt[71], wurde im ursprünglichen Ansatz von Nielson und Patkós vernachlässigt.

Die kovarianten Ableitungen können unter Verwendung von

$$\overline{U(x, x+\varepsilon)}\psi(x+\varepsilon) \simeq \psi(x) + \varepsilon^\mu D_\mu \psi(x) \tag{2.57}$$

definiert werden.

$$D_\mu = K\partial_\mu + \imath g_s B_\mu \tag{2.58}$$

Die Kombination $K^{-1}B_\mu$ tranformiert sich ebenso wie der der Feldstärketensor

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu\left(K^{-1}B_\nu\right) - \partial_\nu\left(K^{-1}B_\mu\right) - \imath g_s\left[K^{-1}B_\mu, K^{-1}B_\nu\right] \tag{2.59}$$

kanonisch unter den 'coarse-grained' Eichtransformationen.

Das resultierende Pfadintegral, das eine effektive Wirkung in den Variablen K und B_μ festlegt, ist zu kompliziert, um auf analytischem Wege entwickelt zu werden. Nielson und Patkós berücksichtigen daher nur die einfachsten Terme, deren Auftreten man erwarten würde, falls man die

volle effektive Wirkung nach Potenzen von K und B_μ sowie deren Ableitungen entwickeln würde. Dies sind der eichinvariante Colour-Singlet-Anteil von K und seine Ableitung sowie der einfachste eichinvariante Ausdruck, den man mit B_μ bilden kann.

$$\mathrm{Tr}\left(D_\mu B_\nu - D_\nu B_\mu\right)^2 = Tr\left(K^4 G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}\right) \tag{2.60}$$

Nach Nielson und Patkós hat dann die effektive Lagrangedichte die folgende Form:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(K^4 G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}c\left(\partial_\mu \mathrm{Tr}K\right)^2 - V\left(\mathrm{Tr}K\right) + \ldots \tag{2.61}$$

Nimmt man an, die Colour-Singlet-Anteile von K dominieren, so hat (2.61) die Form einer Eichtheorie mit Colour-Dielektrikum

$$\kappa = K^4 + \ldots \tag{2.62}$$

worin die Punkte Terme höherer Ordnung in K und seinen Ableitungen andeuten sollen. Führt man ein skalares Feld für den Singlet-Anteil von K ein

$$K = g\chi + Oktettanteile\,, \tag{2.63}$$

das aufgrund der Mittelung über die gluonischen Feldkonfigurationen als Glueball-Feld interpretiert werden kann, so erhält man, falls nur Singlet-Anteile von K Berücksichtigung finden, für die effektive gluonische Lagrangedichte in niedrigster Ordnung

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4}\kappa(\chi)\mathrm{Tr}\left(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\chi\right)^2 - U(\chi) \tag{2.64}$$

worin

$$\kappa(\chi) = (g\chi)^4 + \ldots \tag{2.65}$$

die dielektrische Funktion ist. Eine entsprechende Wechselwirkung der Quarkfelder mit dem colourdielektrischen Feld erhält man mit Hilfe der kovarianten Ableitung.

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi}\left[\gamma^\mu\left(g\chi\imath\,\partial_\mu - g_s B_\mu\right) - m\right]\psi \tag{2.66}$$

Dieser Kopplungstyp wird auch von Broniowski et al.[26] als einfachste Möglichkeit der Kopplung chiral invarianter Felder, wie dem Glueball-Feld, an Quarkfelder vorgeschlagen. Kanonische Quarkfelder können durch die Umskalierung

$$\psi \to \psi' = \frac{\psi}{\sqrt{g\chi}} \tag{2.67}$$

definiert werden. Der Term $\partial_\mu\chi$, der durch (2.67) auftritt, kann durch partielle Integration eliminiert werden und mit Hilfe der Erhaltung des Baryon-Stroms findet man:

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi}\left[\gamma^\mu\left(\imath\,\partial_\mu - \frac{g_s B_\mu}{g\chi}\right) - \frac{m}{g\chi}\right]\psi \tag{2.68}$$

Diese effektive Wirkung beinhaltet ein absolutes Confinement, vorausgesetzt $K \to 0$ im physikalischen Vakuum. Die perturbativen Abschätzungen von Nielson und Patkós zeigen, daß $K_v < 1$, jedoch ist eine nichtstörungstheoretische Behandlung notwendig. Gittereichrechnungen, die von Pirner et al.[22] durchgeführt wurden und auf einer unterschiedlichen Mittelungsprozedur beruhen, zeigen, daß K_v klein wird, falls die Länge L groß ist. Jedoch fußen diese Abschätzungen auf endlichen Gitterabständen, so daß nicht klar ist, ob der Grenzwert tatsächlich den Wert Null annimmt.

Absolutes Confinement der Quarks in der Lagrangedichte (2.68) wird durch das Confinement der Gluonfelder generiert. Auch wenn die Effekte der Gluon-Felder groß sind, wird die Struktur baryonischer Zustände durch die direkte Kopplung von Quark- und dielektrischem Feld

$$\mathcal{L}_{q\chi} = \bar{\psi}\left[\frac{m}{g\chi}\right]\psi \tag{2.69}$$

bestimmt, die ebenso ein Confinement der Quarkfelder erzeugt, sofern sich das Minimum des Potentials $U(\chi)$ an der Stelle $\chi_v = 0$ befindet, d. h. für den Vakuumerwartungswert gilt:

$$\langle 0|\chi|0\rangle = 0 \tag{2.70}$$

Dies ist die Basis für solitonische Modelle mit Confinement, wie sie beispielsweise von Chanfray et al.[23] vorgeschlagen wurden. Die Interpretation von m in (2.69) als Quark-Strommasse scheint aufgrund der riesigen isospinabhängigen Effekte[72] physikalisch wenig sinnvoll. Besser ist es m als die sehr viel größere dynamische Quarkmasse aufzufassen. Eine chiral symmetrische Version dieses Modells kann dann durch Hinzunahme der chiralen Felder des linearen Sigma-Modells konstruiert werden[29,30,31].

$$\mathcal{L}_{q\chi} = \bar{\psi}\left[\frac{g_\pi}{g\chi}\left(\sigma + \imath\,\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\gamma^5\right)\right]\psi \tag{2.71}$$

Die Verfahrensweise der Erzeugung dynamischer Quarkmassen hat Banerjee[73] veranlaßt, eine Quark-Meson Kopplung proportioanal zu χ^{-2} vorzuschlagen. In dieser Arbeit werden daher allgemeine Kopplungen der Art χ^{-p} diskutiert werden.

Die chiral symmetrische Erweiterung der Modelle, in denen die Quarkfelder einem absoluten Confinement unterliegen, erfolgt durch die Ersetzung des Quarkmassenterms durch die Kopplung an die chiralen Felder, σ und π. Ein Quarkmassenterm wird dann durch spontane Brechung der chiralen Symmetrie — wie im vorangegangenen Abschnitt erläutert — erzeugt. Derartige Modelle beinhalten also sowohl (verborgene) chirale Symmetrie als auch ein (phänomenologisches) Confinement der Quarks und sind damit den verschiedenen chiral erweiterten Versionen des MIT-Bag-Modells ähnlich[74,75,61,32]. Die Lagrangedichte des chiral invarianten colourdielektrischen Modells, das im Rahmen dieser Arbeit behandelt werden soll, hat die folgende Form[26,31,76]

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \bar{\psi}\left[\imath\,\partial_\mu\gamma^\mu + \left(\frac{g}{\chi}\right)^p\left(\sigma + \imath\,\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\gamma^5\right)\right]\psi + \frac{1}{2}\partial^\mu\chi\partial_\mu\chi - U(\chi)\\ + \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma + \frac{1}{2}\partial^\mu\vec{\pi}\cdot\partial_\mu\vec{\pi} - U_m(\sigma,\vec{\pi}) - m_\pi^2 f_\pi\sigma\end{aligned} \tag{2.72}$$

worin U_m das Mexican-Hat-Potential (2.16) und

$$U(\chi) = \frac{1}{2} m_\chi \chi^2 \left[1 + \left(\frac{8\eta^4}{\gamma^2} - 2 \right) \left(\frac{\chi}{\gamma m_\chi} \right) + \left(1 - \frac{6\eta^4}{\gamma^2} \right) \left(\frac{\chi}{\gamma m_\chi} \right)^2 \right] \tag{2.73}$$

das Selbswechselwirkungspotential des dielektrischen Feldes ist, das bis zu Termen vierter Ordnung entwickelt wurde.

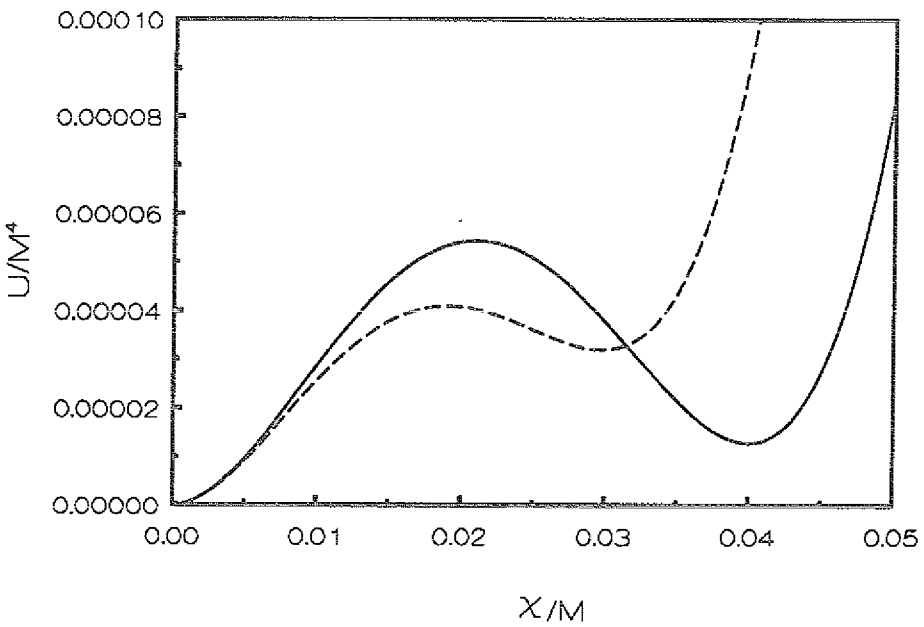


Abb. 2.2: Selbstwechselwirkunkspotential des CD-Feldes

Die Abbildung zeigt das Potential des χ-Feldes als Funktion des von χ/M — $M = m_\chi$ ist die Glueball-Masse — für zwei verschiedene Parametersätze, $\gamma = 0.040$ und $\eta = 0.06$ (durchgezogene Kurve) sowie $\gamma = 0.019$ und $\eta = 0.06$ (gestrichelte Kurve).

Das Potential $U(\chi)$ besitzt drei Parameter, m_χ, γ und η und weist (im Allgemeinen) zwei Minima auf, ein globales an der Stelle $\chi = 0$ und eine lokales (siehe Bild 2.2).

CD-Modelle dieser Art wurden verschiedentlich benutzt um nukleonische Eigenschaften zu berechnen[40,52,76,59] und Quarkmaterie zu studieren[77,78]. Ebenso wie im linearen Sigma-Modell verletzen auch hier die chiralen solitonischen Lösungen Translations- und Rotationssymmetrien, die im Rahmen dieser Arbeit durch kombinierte Projektion auf Spin, Isospin und Impuls restauriert werden.

3. Klassische solitonische Lösungen chiraler Valenzquarkmodelle

Im vorhergehenden Kapitel haben wir zwei effektive chirale Quark-Meson Modelle, das Gell-Mann Levy Modell und das chiral invariante colourdielektrische Modell, die phänomenologisch die niederenergetischen Eigenschaften der QCD wiederspiegeln, vorgestellt und diskutiert. Gegenstand dieses Kapitels ist nun die Entwicklung *klassischer* solitonischer Lösungen derartiger chiraler Valenzquarkmodelle. Einführend werden wir zunächst die Hamiltonoperatoren der betrachteten Modelle angeben und die klassischen Bewegungsgleichungen aufstellen. Die Variationslösungen minimaler Energie dieses gekoppelten nichtlinearen partiellen Differentialgleichungssystems sind durch die Hedgehog-Konfiguration der Quark- und Mesonfelder charakterisiert (siehe Anhang A). Im Rahmen des Hedgehog-Ansatzes kann das Funktional der klassischen Energie berechnet und nach den Feldern, die nun nur noch von $|r|$ abhängen, variiert werden. Das partielle Differentialgleichungssystem geht somit in ein gewöhnliches über, das für entsprechende Randwertbedingungen numerisch gelöst werden kann. Das geschilderte Verfahren wird anhand des Gell-Mann-Levy Modells demonstriert. Die solitonischen Lösungen des colourdielektrischen Modells erhalten wir in gleicher Weise. Sie werden in einem nachfolgenden Abschnitt kursorisch behandelt. Um nun nukleonische Eigenschaften (Ruhemasse, Ladungsradien etc.) durch Projektionstechniken aus den chiralen Modellen zu extrahieren ist es notwendig den Lagrangian des jeweiligen Modells zu quantisieren und einen Fockzustand aller beteiligten Felder zu definieren, so daß der Erwartungswert des quantisierten Hamiltonians identisch mit der klassischen Energie des Systems ist (Mean-Field Näherung). Dies wird in einem abschließenden Abschnitt erläutert.

3.1. Hamiltonoperatoren der Modelle

Die Hamiltonoperatoren des Gell-Mann-Levy Modells und des colourdielektrischen Modells erhält man in der üblichen Weise aus dem Energie-Impulstensor

$$T^{\mu\nu} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi_i\right)} \partial_\nu \phi_i - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \tag{3.1}$$

der entsprechenden Lagrangedichten $\mathcal{L}$.

$$H = \int d^3x\, T^{00}(x) \tag{3.2}$$

Der Hamiltonoperator, den man für das Gell-Mann-Levy Modell erhält,

$$H = H_q + H_{qm} + H_\sigma + H_\pi + H_{NL} \tag{3.3}$$

setzt sich aus einer Summe von Termen, der kinetischen Energie der Quarks, der Quark-Meson Wechselwirkungsenergie, der kinetischen Energie des σ- und π-Feldes sowie der nichtlinearen Selbstwechselwirkungsenergie der Mesonfelder, dem Mexican-Hat Potential zusammen. Drückt man die einzelnen Terme durch die Feldoperatoren und ihre kanonisch konjugierten Impulse

$$p_\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 \sigma\right)} \qquad \vec{p}_\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 \vec{\pi}\right)} \tag{3.4}$$

aus, so findet man:

$$H_q = \sum_{a=1}^{3} \int d^3x\, \bar{q}_a(x)\,(-\imath\gamma\cdot\nabla + g f_\pi)\, q_a(x) \tag{3.5a}$$

$$H_{qm} = g \sum_{a=1}^{3} \int d^3x\, \bar{q}_a(x)\,(\sigma(x) + \imath\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}(x)\gamma_5)\, q_a(x) \tag{3.5b}$$

$$H_\sigma = \frac{1}{2}\int d^3x\, \left[p_\sigma^2(x) + (\nabla\sigma(x))^2 + m_\sigma^2\sigma^2(x)\right] \tag{3.5c}$$

$$H_\pi = \frac{1}{2}\int d^3x\, \left[\vec{p}_\pi(x)\cdot\vec{p}_\pi(x) + (\nabla\vec{\pi}(x)\cdot\nabla\vec{\pi}(x)) + m_\pi^2\vec{\pi}(x)\cdot\vec{\pi}(x)\right] \tag{3.5d}$$

$$\begin{aligned} H_{NL} = \frac{\lambda^2}{4}\int d^3x\, \Big[&(\vec{\pi}(x)\cdot\vec{\pi}(x))^2 + \sigma^4(x) + 4 f_\pi \sigma^3(x) + \\ &+ 2\,(\vec{\pi}(x)\cdot\vec{\pi}(x))\,\sigma(x)\,(\sigma(x) + 2f_\pi)\Big] \end{aligned} \tag{3.5e}$$

In den Gln. (3.5*a–e*) wurde der um seinen Vakuumerwartungswert f_π — Ursache der spontanen Symmetriebrechung — verschobene σ-Feldoperator ($\sigma \to \sigma - f_\pi$) eingesetzt, so daß ein expliziter Massenterm ($\bar{q}g f_\pi q$) für die Quarkfelder auftritt.

Für spätere Zwecke (Projektion) ist es nützlich, die Operatoren H_σ und H_π durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der Mesonfelder auszudrücken. Entwickeln wir die Mesonfeldoperatoren nach ebenen Wellen, so sind die Operatoren der kinetischen Energie der Mesonfelder (einschließlich ihrer jeweiligen Massenterme) in dieser Basis diagonal, und wir erhalten

$$H_\sigma = \int d^3k\, \omega_\sigma(k) a^\dagger(k) a(k) \tag{3.5c'}$$

$$H_\pi = \sum_{i=1}^{3} \int d^3k\, \omega_\pi(k) b_i^\dagger(k) b_i(k) \tag{3.5d'}$$

worin $\omega_\pi(k) = \sqrt{k^2 + m_\pi^2}$ und $\omega_\sigma(k) = \sqrt{k^2 + m_\sigma^2}$ die Dispersionsrelationen freier Wellen sind.

Den Hamiltonoperator des colourdielektrischen Modells erhalten wir nun in gleicher Weise wie beim Gell-Mann-Levy Modell. Es ist:

$$H = H_q + H_{qm} + H_\sigma + H_\pi + H_\chi + H_{NL} \tag{3.6}$$

Die Terme H_π, H_σ und H_{NL} sind durch die Gln. (3.5*c–e*) gegeben. Die $1/\chi$-Kopplung beinflußt einzig den Massenterm der Quarks und die Quark-Meson Wechselwirkungsenergie. Zusätzlich haben wir natürlich noch die kinetische Energie des χ-Feldes und seine Selbstwechselwirkungsenergie, zusammengefaßt in dem Term H_χ, zu berücksichtigen.

$$H_q = \sum_{a=1}^{3} \int d^3x\, \bar{q}_a(x) \left[-\imath\gamma\cdot\nabla + f_\pi \left(\frac{g}{\chi(x)}\right)^p\right] q_a(x) \tag{3.7a}$$

$$H_{qm} = \sum_{a=1}^{3} \int d^3x\, \bar{q}_a(x) \left(\frac{g}{\chi(x)}\right)^p [\sigma(x) + \imath\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}(x)\gamma_5]\, q_a(x) \tag{3.7b}$$

$$H_\chi = \int d^3x \, \frac{1}{2} \left[p_\chi^2(x) + (\nabla\chi(x))^2 + m_\chi^2 \chi^2(x) \right] + \\ + \frac{m_\chi}{\gamma} \left(\frac{4\eta^4}{\gamma^2} - 1 \right) \chi^3(x) + \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 - \frac{6\eta^4}{\gamma^2} \right) \chi^4(x) \tag{3.7c}$$

In den folgenden Abschnitten werden wir die solitonischen Lösungen der klassischen Bewegungsgleichungen im SU(2)-Flavour Sektor, auf den wir uns hier beschränken wollen, vorstellen und diskutieren.

3.2. Hedgehog-Ansatz und Variationslösung der Bewegungsgleichungen des Gell-Mann-Levy Modells

Die klassische Energie E_{cl} des Gell-Mann-Levy Modells erhält man aus dem Hamiltonoperator (3.3), indem man die Feldoperatoren der Mesonfelder durch entsprechende komplexwertige Funktionen ersetzt. Im Fall der Quarks beschränkt man sich hierbei auf die Valenzquarks. Die klassischen Felder selbst werden dann mit Hilfe des Variationsprinzips bestimmt. Da nur zeitunabhängige Lösungen von Interesse sind, können Felder und kanonisch konjugierte Impulse unabhängig voneinander variiert werden. Die Variation der Felder und Momente ist jedoch unter der einschränkenden Bedingung auszuführen, daß die Baryonenzahl eine Erhaltungsgröße ist. Diese Aussage ist gleichwertig mit der Bedingung, daß die Quarkfelder die Norm

$$N_q = \int d^3x \, q(x)^\dagger q(x) = 1 \tag{3.8}$$

haben. Derartige Nebenbedingungen werden üblicherweise mittels der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren berücksichtigt. Wir haben daher die stationären Lösungen des Funktionals

$$F[q, \sigma, \pi] = E_{cl}[q, \sigma, \pi] - \varepsilon \int d^3x \, q(x)^\dagger q(x) \tag{3.9}$$

zu ermitteln. Die Variation des Funktionals (3.9) $\delta F[\psi_i(x)]/\delta\psi_i(y) = 0$, in welchem die ψ_i die Felder und ihre kanonisch konjugierten Momente bezeichnen, führt dann auf ein gekoppeltes nichtlineares partielles Differentialgleichungssystem.

$$[-\imath\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + g\,(\sigma(x) + \imath\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(x))]\, q(x) = \varepsilon q(x) \tag{3.10a}$$

$$\left[-\nabla^2 + m_\sigma^2\right] \sigma(x) + \frac{\delta H_{NL}[\sigma, \vec{\pi}]}{\delta\sigma} + g\bar{q}(x)q(x) = 0 \tag{3.10b}$$

$$p_\sigma(x) = 0 \tag{3.10c}$$

$$\left[-\nabla^2 + m_\pi^2\right] \vec{\pi}(x) + \frac{\delta H_{NL}[\sigma, \vec{\pi}]}{\delta\vec{\pi}} + \imath g\bar{q}(x)\gamma_5 \vec{\tau} q(x) = 0 \tag{3.10d}$$

$$\vec{p}_\pi(x) = 0 \tag{3.10e}$$

Es ist im Allgemeinen eine technisch sehr anspruchsvolle Aufgabe alle solitonischen Lösungen eines derartigen Differentialgleichungssystems aufzufinden. Da wir jedoch nur die Lösung niedrigster Energie, außer der trivialen Lösung, hier betrachten wollen, dürfen wir annehmen, daß die drei Quarks, die das Baryon aufbauen, im Ortsraum den Zustand niedrigster Energie (1s-Orbit) besetzen und identische Spin-Flavour Struktur haben.

$$\langle r|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} u(r) \\ \imath v(r)\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{r} \end{pmatrix} |\chi(\eta)\rangle \tag{3.11}$$

Hierin ist $|\chi(\eta)\rangle$ ein noch näher zu spezifizierender Spin-Flavour Zustand eines Quarks mit beliebiger Colourquantenzahl. M. Fiolhias[79,44] hat gezeigt, daß die allgemeinste Spin-Flavour Konfiguration durch den generalisierten Hedgehog Zustand in der Form

$$|\chi(\eta)\rangle = \cos\eta\,|u\downarrow\rangle - \sin\eta\,|d\uparrow\rangle \tag{3.12}$$

beschrieben wird, sofern der Lagrangian — wie in unserem Fall — invariant unter Lorentztransformationen und Drehungen im Isospinraum ist. Ist der Lagrangian auch unter der Zeitumkehrtransformation invariant — dies ist hier natürlich auch der Fall — so läßt sich beweisen, daß der Hedgehog $|\chi(\eta = \frac{\pi}{4})\rangle$ ein stationärer Zustand der Bewegungsgleichungen mit extremaler Energie ist[42,46]. Ein detaillierter Beweis findet sich in Anhang A. Darüberhinaus ist der Hedgehog ($\eta = \pi/4$) im Limes exakter chiraler Invarianz ($m_\pi \to 0$) die Variationslösung minimaler Energie des linearen σ-Modells, falls die Erwartungswerte der Mesonfelder auf dem chiralen Zirkel liegen[45,79], also die Bedingung

$$\langle\sigma^2(r)\rangle + \langle\vec{\pi}^2(r)\rangle = f_\pi^2 \tag{3.13}$$

erfüllt ist. Die numerische Berechnung der Energie $E(\eta)$ zeigt, daß dies auch dann gültig bleibt, falls von der Bedingung (3.13) abgewichen wird, die Mesonfelder also nicht auf dem chiralen Zirkel liegen, bzw. $m_\pi \neq 0$ ist[49]. Die Umkehrung dieser Aussage ist nicht gültig.

Die Strukturen der Bosonfelder sind durch die Quellterme (vgl. Anhang A Gln. ($A.15a$) und ($A.15b$)) in den Bewegungsgleichungen ($3.10b, d$), also durch die Quark-Hedgehog Konfiguration festgelegt. Wir wollen dies anhand der Quark-Pion Wechselwirkungsenergie

$$E_{q\pi} = ig\sum_{a=1}^{3}\int d^3r\,\bar{q}_a(r)\gamma_5\vec{\pi}(r)\vec{\tau}q_a(r) \tag{3.14}$$

verdeutlichen. Für die Energie $E_{q\pi}$ erhalten wir nach Einsetzen des Quark-Hedgehogs (3.11, 3.12) in Gl. (3.14):

$$E_{q\pi} = g\frac{3}{2\pi}\int d^3x\,u(r)v(r)\left[\left(\pi_1(r)\frac{x_1}{r} + \pi_2(r)\frac{x_2}{r}\right)\sin 2\eta + \pi_3(r)\frac{x_3}{r}\right] \tag{3.15}$$

Ist $\eta = \frac{\pi}{4}$, so haben alle Quellterme die gleiche Struktur mit identischen radialen Anteilen, und der Quark-Hedgehog erzeugt ein klassisches π-Feld, welches die Struktur einer p-Welle aufweist.

$$\vec{\pi}(x) = \frac{x}{r}\phi(r) \tag{3.16}$$

In analoger Weise stellt sich heraus, daß das σ-Feld sphärisch symmetrisch, also eine reine s-Welle ist.

Ein Resümee der bisherigen Überlegungen und derjenigen aus Anhang A führt auf die Aussage: Sind Zeitumkehr, Drehungen im Isospinraum und Lorentztransformationen Symmetrietransformationen eines Lagrangians, dieser also invariant unter diesen Transformationen, so ist der Hedgehog

$$\langle r|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix} u(r) \\ iv(r)\,\sigma\cdot\hat{r}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\downarrow\rangle - |d\uparrow\rangle\right) \tag{3.17a}$$

$$\sigma(r) = \sigma(r) \tag{3.17b}$$

$$\vec{\pi}(x) = \frac{x}{r}\phi(r) \tag{3.17c}$$

eine Variationslösung minimaler Energie des Funktionals (3.9), in welchem die Boson-Felder als klassische Felder aufgefaßt werden. Der Hedgehog ist ein Eigenzustand des Grandspinoperators[18]

$$\vec{G} = J + \vec{T} \tag{3.18}$$

mit dem Eigenwert $G = 0$. Dies hat natürlich zur Folge, daß sich die solitonischen Lösungen nicht nach Eigenwerten (J^2, J_3) des Spins und des Isospins $(\vec{T}^2, T_3)$ klassifizieren lassen, also keinen definierten Spin und Isospin haben[(a)].

Die klassische Energie der Hedgehog Konfiguration

$$\begin{aligned} E_{cl} = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \Bigg\{ & \frac{3}{4\pi}\Big[u(r)\frac{\partial}{\partial r}v(r) - v(r)\frac{\partial}{\partial r}u(r) + \frac{2}{r}u(r)v(r) + \\ & + g\left[\left(f_\pi + \sigma(r)\right)\left(u^2(r) - v^2(r)\right) + 2u(r)v(r)\phi(r)\right]\Big] + \\ & + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}\sigma(r)\right)^2 + m_\sigma^2\sigma^2(r) + \left(\frac{\partial}{\partial r}\phi(r)\right)^2 + \frac{2}{r^2}\phi^2(r) + m_\pi^2\phi^2(r)\right] + \\ & + \frac{\lambda^2}{4}\left[\phi^4(r) + \sigma^4(r) + 4f_\pi\sigma^3(r) + 2\left(\sigma^2(r) + 2f_\pi\sigma(r)\right)\phi^2(r)\right]\Bigg\} \end{aligned} \tag{3.19}$$

ist ein Funktional der Felder u, v, σ und π, deren radiale Gestalt mit Hilfe des Variationsprinzips unter Einschluß der Nebenbedingung

$$N_q\left[u, v\right] = \int dr \left(u^2(r) + v^2(r)\right) \tag{3.20}$$

zu ermitteln ist. Die Variation der Felder des Funktionals,

$$F\left[u, v, \sigma, \pi\right] = E_{cl}\left[u, v, \sigma, \pi\right] - 3\varepsilon N_q\left[u, v\right] \tag{3.21}$$

welches die Bedingung (3.20), die die Erhaltung der Baryonenzahl garantiert, in Form eines Lagrange'sche Multiplikators enthält, führt auf ein gekoppeltes nichtlineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem.

$$\frac{\partial}{\partial r}u(r) = -\left[\varepsilon + g\left(\sigma(r) + f_\pi\right)\right]v(r) + gu(r)\phi(r) \tag{3.22a}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}v(r) = -\frac{2}{r}v(r) + \left[\varepsilon - g\left(\sigma(r) + f_\pi\right)\right]u(r) + gv(r)\phi(r) \tag{3.22b}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2}\sigma(r) = & -\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\sigma(r) - \frac{3}{4\pi}g\left(u^2(r) - v^2(r)\right) + \\ & + m_\sigma^2\sigma(r) + \lambda^2\left[\sigma^2(r)\left(\sigma(r) + 3f_\pi\right) + \phi^2(r)\left(\sigma(r) + f_\pi\right)\right] \end{aligned} \tag{3.22c}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2}\phi(r) = & -\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\phi(r) + \frac{2}{r^2}\phi(r) - \frac{3}{2\pi}gu(r)v(r) + \\ & + m_\pi^2\phi(r) + \lambda^2\phi(r)\left[\phi^2(r) + \sigma(r)\left(\sigma(r) + 2f_\pi\right)\right] \end{aligned} \tag{3.22d}$$

[(a)] Man zeigt leicht, daß der Hedgehog kein Eigenzustand von (J^2, J_3) und $(\vec{T}^2, T_3)$ ist.

Der Hedgehog Ansatz ist eine exakte Lösung der Bewegungsgleichungen (3.10), d. h. sowohl die Variation der klassischen Hedgehog Energie (3.19), wie das Einsetzen des Hedgehogs in die Bewegungsgleichungen (3.10*a–e*) führt auf das Differentialgleichungssystem (3.22*a–d*)[46]. Die beiden ersten Gleichungen (3.22*a*) und (*b*) entsprechen der Diracgleichung, die die Mesonfelder $\sigma(r)$ und $\phi(r)$ als Potentiale enthält. Die Gleichungen (3.22*c*) und (*d*) sind als Klein-Gordon Gleichungen zu interpretieren, in welchen die Quellterme $\left(u^2(r) - v^2(r)\right)$ für das σ-Feld und $u(r)v(r)$ für das π-Feld auftreten. Das System (3.22) ist ein Differentialglgeichungssystem 6. Ordnung, so daß wir 6 Randwertbedingungen zu spezifizieren haben. Damit die Gleichungen (3.22*b*, *c*) und (*d*) im Limes $r \to 0$ endlich sind, fordern wir:

$$v(r \to 0) = 0 \tag{3.23a}$$

$$\phi(r \to 0) = 0 \tag{3.23b}$$

$$\left[\frac{\partial \sigma(r)}{\partial r}\right]_{r \to 0} = 0 \tag{3.23c}$$

In Anhang C werden die Randwertbedingungen diskutiert, denen die Felder im Limes $r \to \infty$ zu genügen haben. Diese sind:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\sigma(r) + (1 + m_\sigma r)\,\sigma(r) = 0 \tag{3.23d}$$

$$r\,(1 + m_\pi r)\,\frac{\partial}{\partial r}\phi(r) + \left[2 + 2m_\pi r + (m_\pi r)^2\right]\phi(r) = 0 \tag{3.23e}$$

$$u(r)\left[\frac{1}{\sqrt{gf_\pi + \varepsilon}} + r\sqrt{gf_\pi - \varepsilon}\right] - rv(r)\sqrt{gf_\pi + \varepsilon} = 0 \tag{3.23f}$$

Die beiden ersten Randwertbedingungen implizieren unmittelbar

$$\left[\frac{\partial u(r)}{\partial r}\right]_{r \to 0} = 0\,, \tag{3.24}$$

die letzte bewirkt ein Einschränkung der Eigenwerte ε der Valenzquarks.

$$-gf_\pi \leq \varepsilon \leq +gf_\pi \tag{3.25}$$

Das System (3.22) mit den Randwertbedingungen (3.23) kann auf numerischem Wege gelöst werden, so daß die Bedingung (3.20) erfüllt ist. Eine effiziente Lösungsmethode besteht darin, zwei weitere Differentialgleichungen

$$\frac{\partial N_q(r)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\int_0^r d\rho\,\rho^2\left(u^2(\rho) + v^2(\rho)\right) \tag{3.26a}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0 \tag{3.26b}$$

mit den Randwertbedingungen

$$N_q(r \to 0) = 0 \tag{3.27a}$$

$$N_q(r \to \infty) = 1 \tag{3.27b}$$

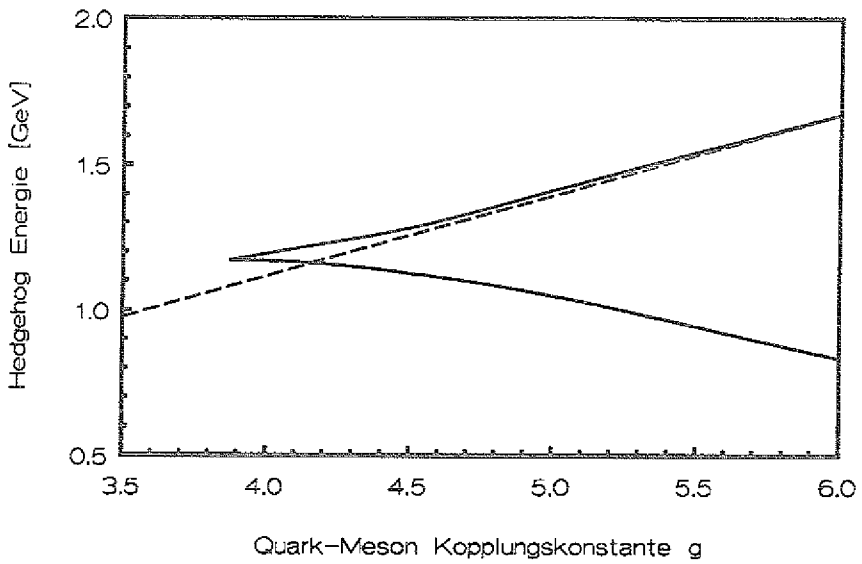


Abb. 3.1: Hedgehog-Energie E_{cl} versus Quark-Meson Kopplungskonstante g

Eine normierte, lokalisierte solitonische Lösung endlicher Energie (durchgezogene Linien) der Bewegungsgleichungen (3.22) tritt nur oberhalb des Grenzwertes g_{krit} auf, der bei den hier gewählten Parametern, $m_\sigma = 0.6$ GeV, $m_\pi = 0.1396$ GeV und $f_\pi = 93$ MeV, bei etwa $g_{krit} \simeq 3.86$ liegt. Die gestrichelte Linie zeigt die Energie drei freier Quarks — $3gf_\pi$.

dem System (3.22) hinzuzufügen. Dies garantiert, daß die Bedingung (3.20) stets erfüllt ist.

Wir können zwei Arten von Lösungen unterscheiden, die Vakuumlösung mit $E_{cl} = 0$, für die alle Felder identisch verschwinden, und eine Lösung mit endlicher Energie, die oberhalb eines Grenzwertes $g \geq g_{krit}$ auftritt. Bild 3.1 entnimmt man, daß letztere Lösung in zwei Äste zerfällt. Der obere Ast enthält Lösungen, deren Quark-Eigenwert $\varepsilon \simeq gf_\pi$ nahe am Kontinuum liegt und deren Energie größer als $3gf_\pi$ — der Energie drei freier Quarks — ist.

Dieser Zweig solitonischer Lösungen ist daher instabil und kann in drei freie Quarks zerfallen. Eine ausführliche Diskussion dieser Problematik findet man in Ref. 80. Der uns interessierende Zweig lokalisierter solitonischer Lösungen ist der untere, der gegen den Zerfall in drei Quarks stabil ist. Die Energie nimmt mit zunehmendem g stark ab und kann sogar negativ werden. Ebenso nehmen die Quark-Eigenwerte ab und werden ab etwa $g \simeq 5.5$ negativ. In Bild 3.2 sind für eine typische Lösung des unteren Zweiges die radialen Anteile der oberen ($u(r)$) und unteren ($v(r)$) Komponenten des Quarkspinors aufgetragen, in Bild 3.3 die radialen Anteile der Meson-Wellenfunktionen. Die im Gegensatz zur Lösung des oberen Zweiges ausgeprägte kleine Komponente $v(r)$ des Quarkspinors zeigt deutlich den relativistischen Charakter der solitonischen Lösungen dieses Zweiges. Alle Felder weisen eine ausgeprägte Struktur auf und gehen ab etwa 1.0–1.2 fm in ihre asymtotische Form über.

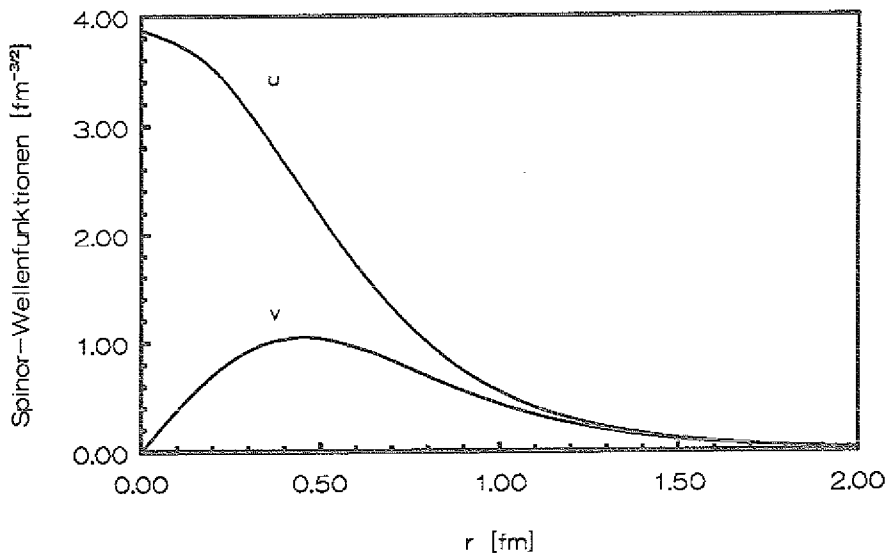


Abb. 3.2: Radiale Abhängigkeit der Spinorfelder u und v im linearen σ-Modell Aufgetragen sind die Felder $u(r)$ und $v(r)$ für die Parameter $m_\sigma = 1.2$ GeV und $g = 5.0$.

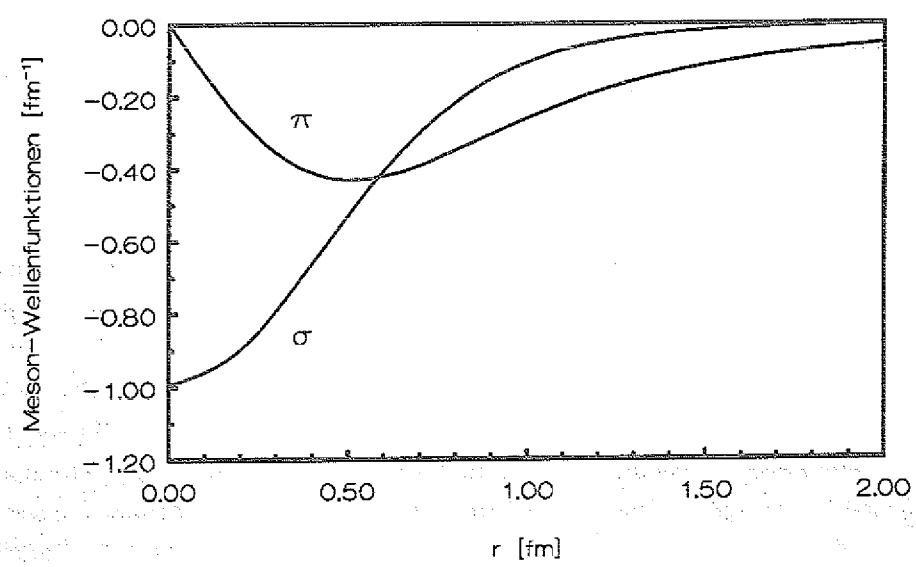


Abb. 3.3: Radiale Abhängigkeit der Mesonfelder σ und ϕ im linearen σ-Modell Die Parameter sind die gleichen wie in Bild 3.2.

3.3. Colourdielektrisches Modell

Die Verfahren, die bei der Erarbeitung einer solitonischen Lösung des linearen σ-Modells zum Tragen kamen, können nun unmittelbar für die Lösung des Colourdielektrische Modell übernommen werden. Um die klassische Energie des colourdielektrischen Modells zu berechnen, ist es jedoch notwendig, unseren Ansatz für die Mesonfelder zu erweitern, da in diesem Modell das χ-Feld hinzukommt. Die räumliche Konfiguration dieses Feldes ist jedoch nicht mehr vollständig durch die Struktur der Quellterme — festgelegt durch den Quark-Hedgehog — in der mesonischen Bewegungsgleichung bestimmt, da das χ-Feld nichtlinear an die Quarkfelder koppelt. Da das χ-Feld als Glueballfeld niedrigster Energie interpretiert wird und die gleichen Quantenzahlen ($J^{PC} = 0^{++}, T = 0$) wie das σ-Feld besitzt, liegt es nahe ebenfalls eine sphärisch symmetrische Struktur, also eine s-Welle für dieses Feld anzusetzen. Dies ist konsistent mit der Hedgehog-Konfiguration der übrigen Felder, so daß der Hedgehog in Verbindung mit der sphärischen Struktur des χ-Feldes wiederum eine exakte Lösung der Bewegungsgleichungen mit extremaler Energie ist (vgl. Anhang A). Setzen wir den Ansatz

$$\langle r|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} u(r) \\ iv(r)\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|u\downarrow\rangle - |d\uparrow\rangle\right) \tag{3.28a}$$

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \sigma(r) \tag{3.28b}$$

$$\vec{\pi}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{r}\phi(r) \tag{3.28c}$$

$$\chi(\boldsymbol{x}) = \chi(r) \tag{3.28d}$$

in den Hamiltonian (3.6), welcher die Mesonfelder als klassische Felder enthält, ein so erhalten wir die klassische Energie

$$\begin{aligned} E_{cl} = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \Bigg\{ & \frac{3}{4\pi}\Bigg[u(r)\frac{\partial}{\partial r}v(r) - v(r)\frac{\partial}{\partial r}u(r) + \frac{2}{r}u(r)v(r) + \\ & + \left(\frac{g}{\chi(r)}\right)^p \left[\left(f_\pi + \sigma(r)\right)\left(u^2(r) - v^2(r)\right) + 2u(r)v(r)\phi(r)\right]\Bigg] + \\ & + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}\sigma(r)\right)^2 + m_\sigma^2\sigma^2(r) + \left(\frac{\partial}{\partial r}\phi(r)\right)^2 + \frac{2}{r^2}\phi^2(r) + m_\pi^2\phi^2(r)\right] + \\ & + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}\chi(r)\right)^2 + m_\chi^2\chi^2(r)\right] + \\ & + \frac{\lambda^2}{4}\left[\phi^4(r) + \sigma^4(r) + 4f_\pi\sigma^3(r) + 2\left(\sigma^2(r) + 2f_\pi\sigma(r)\right)\phi^2(r)\right] + \\ & + \frac{m_\chi}{\gamma}\left(4\frac{\eta^4}{\gamma^2} - 1\right)\chi^3(r) + \frac{1}{2}\frac{1}{\gamma^2}\left(1 - 6\frac{\eta^4}{\gamma^2}\right)\chi^4(r)\Bigg\} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Die Variation der Felder des Energiefunktionals führt dann unter Einschluß der Nebenbedingung (3.20) auf das folgende Differentialgleichungssystem,

$$\frac{\partial}{\partial r}u(r) = -\left[\varepsilon + \left(\frac{g}{\chi(r)}\right)^p \left(\sigma(r) + f_\pi\right)\right] v(r) + \left(\frac{g}{\chi(r)}\right)^p u(r)\phi(r) \tag{3.30a}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}v(r) = -\frac{2}{r}v(r) + \left[\varepsilon - \left(\frac{g}{\chi(r)}\right)^p (\sigma(r) + f_\pi)\right] u(r) - \left(\frac{g}{\chi(r)}\right)^p v(r)\phi(r) \tag{3.30b}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\sigma(r) = &-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\sigma(r) + \frac{3}{4\pi}\left(\frac{g}{\chi(r)}\right)^p \left(u^2(r) - v^2(r)\right) + \\ &+ m_\sigma^2\sigma(r) + \lambda^2\left[\sigma^2(r)(\sigma(r) + 3f_\pi) + \phi^2(r)(\sigma(r) + f_\pi)\right]\end{aligned} \tag{3.30c}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\phi(r) = &-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\phi(r) + \frac{2}{r^2}\phi(r) + \frac{3}{2\pi}\left(\frac{g}{\chi(r)}\right)^p u(r)v(r) + \\ &+ m_\pi^2\phi(r) + \lambda^2\phi(r)\left[\phi^2(r) + \sigma(r)(\sigma(r) + 2f_\pi)\right]\end{aligned} \tag{3.30d}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\chi(r) = &-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\chi(r) - \frac{3}{4\pi}\frac{p}{g}\left(\frac{g}{\chi(r)}\right)^{p+1}\left[(\sigma(r) + f_\pi)\left(u^2(r) - v^2(r)\right) + 2u(r)v(r)\phi(r)\right] + \\ &+ m_\chi^2\chi(r) + \chi^2(r)\left[\frac{3}{2}\frac{m_\chi}{\gamma}\left(8\frac{\eta^4}{\gamma^2} - 2\right) + \frac{2}{\gamma^2}\left(1 - 6\frac{\eta^4}{\gamma^2}\right)\chi(r)\right]\end{aligned} \tag{3.30e}$$

das im Limes $r \to 0$ mit den Randwertbedingungen

$$v(r \to 0) = 0 \tag{3.31a}$$

$$\phi(r \to 0) = 0 \tag{3.31b}$$

$$\left[\frac{\partial\sigma(r)}{\partial r}\right]_{r\to 0} = 0 \tag{3.31c}$$

$$\left[\frac{\partial\chi(r)}{\partial r}\right]_{r\to 0} = 0 \tag{3.31d}$$

und im Limes $r \to \infty$ mit den Randwertbedingungen (vgl. Anhang C)

$$r\frac{\partial}{\partial r}\sigma(r) + (1 + m_\sigma r)\,\sigma(r) = 0 \tag{3.31e}$$

$$r\frac{\partial}{\partial r}\chi(r) + (1 + m_\chi r)\,\chi(r) = 0 \tag{3.31f}$$

$$r\,(1 + m_\pi r)\frac{\partial}{\partial r}\phi(r) + \left[2 + 2m_\pi r + (m_\pi r)^2\right]\phi(r) = 0 \tag{3.31g}$$

$$u(r) - v(r) = 0 \tag{3.31h}$$

zu lösen ist. Numerische Lösungen dieses und ähnlicher Modelle sind bereits von anderen Autoren vorgestellt und diskutiert worden (siehe zum Beispiel Refs. 31–52). Die wichtigsten Eigenschaften der numerischen Lösungen des Systems (3.30*a*–*e*), die mit Hilfe des Programmpaketes COLSYS[81] entwickelt wurden, sind im Folgenden zusammengestellt.

Der exponentielle Anstieg der Quarkmasse, hervorgerufen durch die $1/\chi$–Kopplung des colour-dielektrischen Feldes an die Quarkfelder, erzwingt einen doppeltexponentiellen fall-off der Funktionen $u(r)$ und $v(r)$ (siehe Anhang C Gl. (*C*.26)). Um eine konvergente Lösung zu erzielen, darf daher das Intervall $[0, r_{max}]$, in welchem das System (3.30*a*–*e*) gelöst werden soll, nicht zu groß gewählt werden. Der cut-off Radius muß jedoch so groß sein, daß die mesonischen Felder bereits ihre asymptotische Form erreicht haben. Für die hier betrachteten Parametersätze hat es sich bewährt, $r_{max} \sim 1.9 - 2.2$ fm zu wählen. Die Felder u und v sind dann bereits um 5–6 Größenordnungen kleiner als ihr Maximalwert. Die Mesonfelder — insbesondere das π-Feld — können jedoch

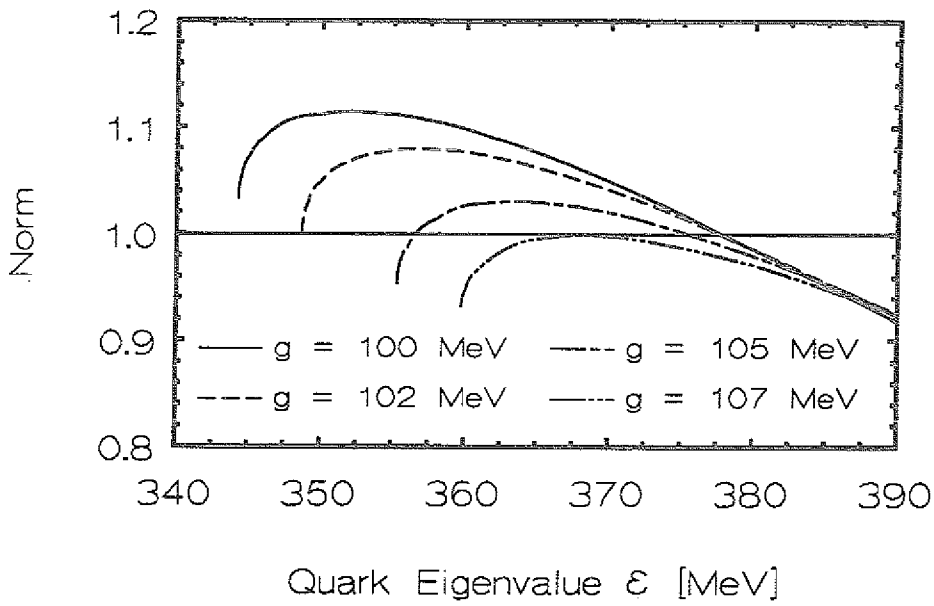


Abb. 3.4: Norm des Quarkspinors versus Quark-Eigenwert ε

Für verschiedene Kopplungskonstanten g ($m_\chi = 1.4$ GeV, $\eta = 0.075$ und $\gamma = 0.019$) ist hier die Norm gegen den Quark-Eigenwert ε aufgetragen. Oberhalb von $g = 107$ Mev existiert keine normierbare Lösung mehr. In einem schmalen Bereich von 5 Mev findet man zwei normierbare Lösungen und für Kopplungskonstanten $g < 102$ MeV dann nur noch eine.

an der Stelle $r = r_{max}$ noch nicht als vernachlässigbar klein betrachtet werden und müssen daher — zur Berechnung der Energie oder der Ladungsradien beispielsweise — durch ihre asymptotischen Formen analytisch fortgesetzt werden.

Ausgeprägte Strukturen der chiralen Felder, $\sigma(r)$ und $\phi(r)$, treten unabhängig von anderen Modellparametern nur für große Quark–Meson–Kopplungskonstanten $g \sim 100$ MeV auf. Untersucht man derartige Lösungen, so stellt sich heraus, daß in einem kleinen Bereich der Kopplungskonstanten g zwei normierbare Lösungen existieren (siehe Bild 3.4). Oberhalb eines kritischen Wertes von g existiert keine normierbare Lösung mehr, und mit abnehmendem g findet man zunächst zwei und dann nur noch eine Lösung des Systems (3.30*a–e*) mit der Norm $N = 1$. Aus Bild 3.4 ist zu entnehmen, daß die Funktion $N(\varepsilon)$ mit abnehmenden Werten ε zunächst monoton wächst[c], ein Maximum durchläuft, und dann sehr rasch wieder abfällt. Man ist daher vielleicht versucht anzunehmen, daß es — falls überhaupt eine normierbare Lösung existiert — stets zwei Lösungen geben sollte. Dies ist jedoch nicht der Fall. Es ist nicht möglich, eine konvergente Lösung zu finden, falls ε einen unteren Grenzwert unterschreitet, so daß in der Tat nur eine Lösung mit der Norm $N = 1$ für kleine Kopplungskonstanten zu existieren scheint. Es wird sich zeigen, daß physikalisch verwertbare Lösungen immer beim größeren der beiden Eigenwerte zu finden sind.

[c] Ein Wiederanstieg von $N(\varepsilon)$ ist auch für sehr große ε nicht zu beobachten.

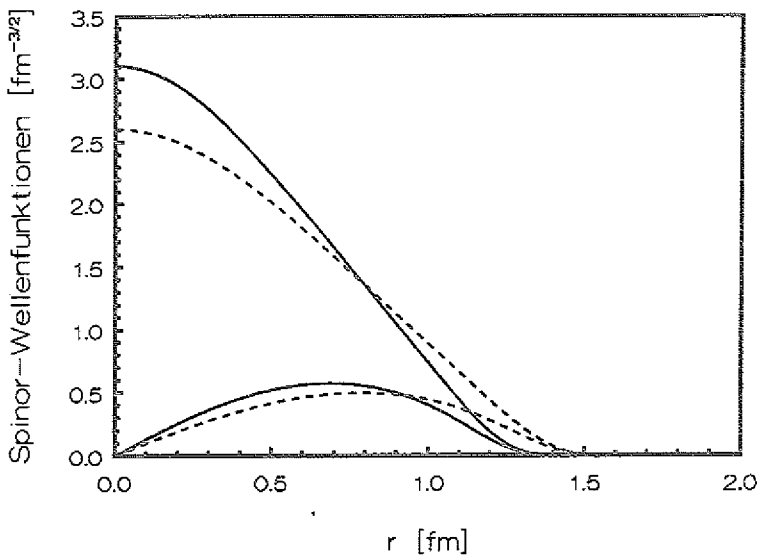


Abb. 3.5: Radiale Form der Felder u und v im CD-Modell

Für den gleichen Parametersatz wie in Bild 3.4 sind für $g = 102$ MeV beide normierbaren Lösungen für $u(r)$ und $v(r)$ aufgetragen. Die entsprechenden Eigenwerte sind $\varepsilon = 349$ MeV (durchgezogene Linie) und $\varepsilon = 378$ MeV (gestrichelte Linie).

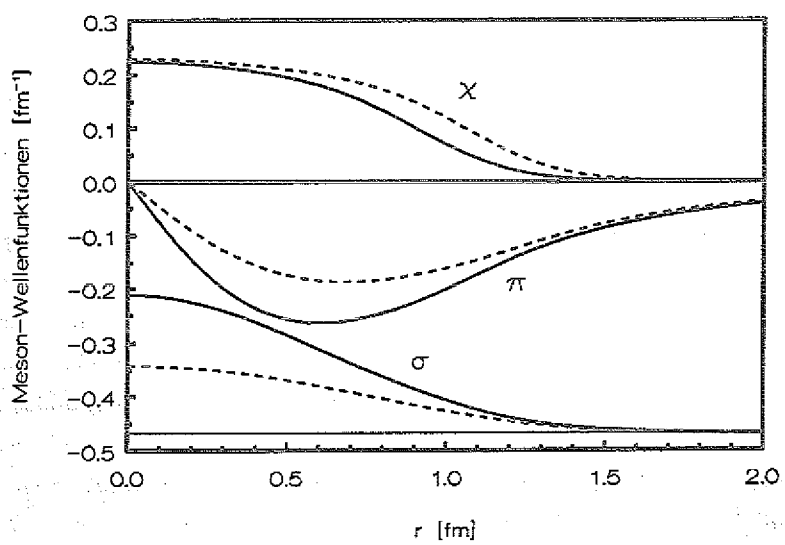


Abb. 3.6: Radiale Form der Mesonfelder χ, ϕ und σ im CD-Modell

Parametersatz und Zuordnung der Kurven zu den Eigenwerten ist der Bildunterschrift zu Bild 3.5 zu entnehmen. Der besseren Übersichtlichkeit halber wurde $\sigma(r)$ an der Abszisse gespiegelt und um f_π verschoben ($\sigma \to -\sigma - f_\pi$).

In Bild 3.5 sind die radialen Anteile der Quarkfelder $u(r)$ und $v(r)$, in Bild 3.6 diejenigen der Mesonfelder $\chi(r), \phi(r)$ und $\sigma(r)$ für eine Kopplungskonstante g aufgetragen, die gerade noch

zwei normierte Lösungen erlaubt. Beide Lösungen unterscheiden sich deutlich voneinander. Dies gilt insbesondere für die Mesonfelder. Die Graphen von $u(r)$, $v(r)$ und $\chi(r)$, die dem kleineren der beiden Eigenwerte zuzuordnen sind, haben geringere Ausdehnung und weisen auf einen geringeren Solitonradius hin, Pion- und Sigmafeld sind erheblich stärker ausgeprägt. Werte von $|\sigma(r=0)| \geq f_\pi$ sind jedoch nie aufgetreten, in Übereinstimmung mit den Beobachtungen von Drago et al.[82]. Allgemein läßt sich feststellen, daß mit abnehmender Kopplungskonstante (ansteigendem Quarkeigenwert) die Ausdehnung der Felder wächst und die Pion- und Sigmafelder zunehmend gegen ihre Vakuumerwartungswerte streben und für Kopplungskonstanten $g \sim 20-30$ MeV nahezu verschwinden. Die klassischen Lösungen für $\sigma(r)$ und $\phi(r)$ sind im colourdielektrischen Modell sehr viel schwächer als im linearen σ-Modell, da die Bindung der Quarks hier im wesentlichen durch das χ-Feld bewirkt wird.

Um das phänomenologische Confinement der Quarks im colourdielektrischen Modell zu illustrieren, ist in Bild 3.7 die radiale Abhängigkeit des Massenterms — $gf_\pi/\chi(r)$ — der Quarks aufgezeichnet. Je nach Kopplungskonstante zeigt der Term $gf_\pi/\chi(r)$ in einem großen Bereich einen nahezu konstanten Verlauf, um dann in einen sehr steilen exponentiellen Anstieg überzugehen. Freie Quarks können daher nicht außerhalb eines 'Bags', dessen Radius durch die Kopplungskonstante g festgelegt wird, existieren, da ihre Masse in einem solchen Fall unendlich groß wird. Im Zentrum des Solitons ist der Quarkeigenwert ε stets größer als die dynamische Masse m_q der Quarks und ein Quark verhält sich dort wie ein quasifreies Teilchen. In der Region, in der $m_q > \varepsilon$ gilt, streben die Funktionen $u(r)$ und $v(r)$ jedoch sehr schnell gegen null.

3.4. Quantisierungsverfahren und Fockzustand

Die solitonischen Lösungen, die wir in den beiden vorangegangenen Abschnitten diskutierten, haben wir aus den klassischen Hamiltondichten gewonnen, indem wir die auftretenden Felder als c-Funktionen und nicht als Quantenfelder betrachtet haben. Im nächsten Kapitel wollen wir ein Projektionsverfahren vorstellen, das uns in die Lage versetzt, sowohl nukleonische Eigenschaften aus den erwähnten Modellen zu extrahieren als auch spuriose Schwerpunktsbewegungen der Solitonlösung zu berücksichtigen. Die Anwendung dieser Projektionsmethode — simultane Peierls-Yoccoz-Projektion auf Spin, Isospin und Impuls — setzt jedoch einen Quantenzustand der zu projizierenden Felder voraus. Um dies zu erreichen, fordern wir, daß die Feldoperatoren den kanonischen Quantisierungsregeln genügen, und konstruieren einen Fockzustand als Tensorprodukt einer Slaterdeterminante für die Fermionfelder und kohärenter Zustände für alle beteiligten Bosonfelder in der Weise, daß der Erwartungswert des Hamiltonoperators in diesem Zustand durch die klassische Energie gegeben ist (Mean-Field Näherung).

Die Quantisierung des Hamilton'schen Funktionals geschieht durch die Forderungen, die an die Fermion- und Bosonfelder zu stellen sind. Diese müssen die kanonischen Kommutator- bzw. Antikommutatorregeln für Zeitpunkte $x_0 = y_0$ erfüllen.

$$[\hat{\sigma}(x), \hat{p}_\sigma(y)]_{x_0=y_0} = i\delta^3(x-y) \tag{3.32a}$$

$$\left[\hat{\pi}^a(x), \hat{p}^b_\pi(y)\right]_{x_0=y_0} = i\delta^{ab}\delta^3(x-y) \tag{3.32b}$$

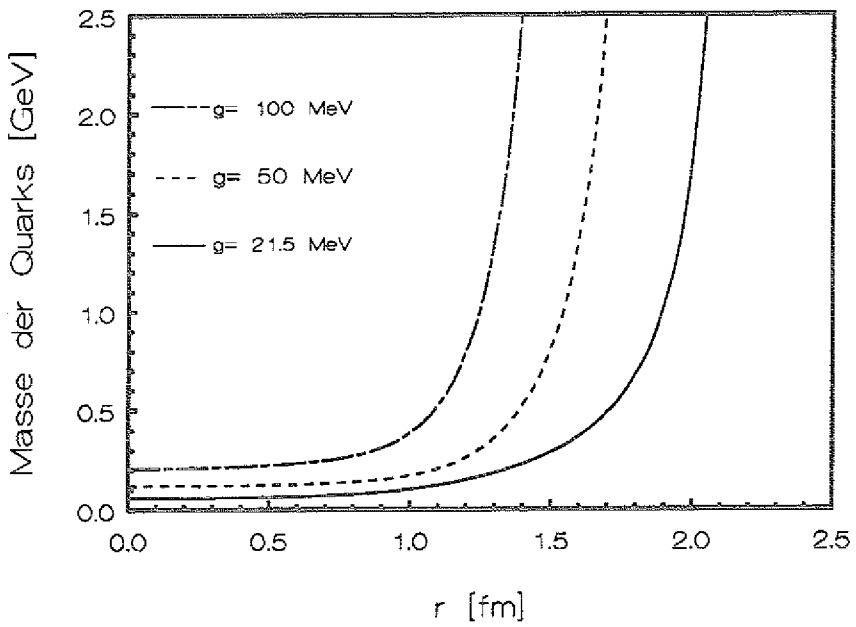


Abb. 3.7: Radiale Abhängigkeit des Quark-Massenterms gf_π/χ
Der Parametersatz ist wiederum derselbe wie in Bild 3.5. Deutlich sichtbar ist die zunehmende Ausdehnung der des χ-Feldes mit abnehmender Kopplungskonstante g.

$$\left\{ \hat{q}_\alpha(x), \hat{q}_\beta^\dagger(y) \right\}_{x_0=y_0} = \imath\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{3.32c}$$

Die obigen Vertauschungsrelationen führen auf die üblichen Entwicklungen der Feldoperatoren.

$$\hat{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}}\left(f_n(\boldsymbol{x})a_n + f_n^*(\boldsymbol{x})a_n^\dagger\right) \tag{3.33a}$$

$$\hat{p}_\sigma(\boldsymbol{x}) = -\imath\sum_n \sqrt{\frac{\omega_n}{2}}\left(f_n(\boldsymbol{x})a_n - f_n^*(\boldsymbol{x})a_n^\dagger\right) \tag{3.33b}$$

$$\hat{\vec{\pi}}(\boldsymbol{x}) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}}\left(g_n(\boldsymbol{x})\vec{b}_n + g_n^*(\boldsymbol{x})\vec{b}_n^\dagger\right) \tag{3.33c}$$

$$\hat{\vec{p}}_\pi(\boldsymbol{x}) = -\imath\sum_n \sqrt{\frac{\omega_n}{2}}\left(g_n(\boldsymbol{x})\vec{b}_n - g_n^*(\boldsymbol{x})\vec{b}_n^\dagger\right) \tag{3.33d}$$

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{x}) = \sum_n \left(\alpha_n(\boldsymbol{x})B_n + \beta_n(\boldsymbol{x})D_n^\dagger\right) \tag{3.33e}$$

Die jeweiligen Summen erstrecken sich über geeignete vollständige Sätze orthonormierter Funktionen und die Operatoren lassen sich als Erzeugungs-und Vernichtungsoperatoren interpretieren. Zu jedem vollständigen Satz derartiger Funktionen kann ein Fockraum durch Anwendung der Erzeugungsoperatoren auf den 0–Teilchen-Zustand konstruiert werden, der jeweils durch

$$a_n|0\rangle = 0 \quad b_n|0\rangle = 0 \quad B_n|0\rangle = 0 \quad D_n|0\rangle = 0 \quad \forall n \tag{3.34}$$

definiert ist. Dieser 0–Teilchen-Zustand kann als Vakuumzustand interpretiert werden, falls er rotations- und translationsinvariant ist, d.h. falls die Basen — $f_n(\boldsymbol{x}), g_n(\boldsymbol{x}), \alpha_n(\boldsymbol{x}), \beta(\boldsymbol{x})$ — den genannten Invarianzbedingungen genügen. Ist dies nicht der Fall, so erhält man einen solchen (invarianten) Zustand mit Hilfe einer Bogoliubov-Transformation, die die nichtinvariante Basis in eine invariante überführt.

Bei der Konstruktion des fermionischen Anteils des Fockzustands werden die Seezustände im weiteren nicht mit einbezogen. Dies ist im Hinblick auf die Gradientenentwicklung des bosonisierten NJL-Modells sinnvoll, da die Seezustände durch die kinetische Energie der Mesonfelder absorbiert werden, so daß die explizite Berücksichtigung des Diracsees im Gell-Mann-Levy Modell 'double counting' bedeuten würde. Ebenso verfahren wir im colourdielektrischen Modell und betrachten auch hier nur den Valenzquarkanteil des fermionischen Fockzustands, obwohl eine klare Rechtfertigung einer solchen Approximation wie im σ-Modell hier nicht gegeben ist. Jedoch sind die Quarkeigenwerte ε im clourdielektrischen Modell sehr viel größer als im linearen σ–Modell. Dort liegt die Masse der Konstituentenquarks $m_q = g f_\pi$ bei 400—500 Mev, während ε einige zehn Mev (für Kopplungskonstanten $g \sim 5$) nicht übersteigt und ab etwa $g \sim 5.5$ sogar negativ wird. Im colourdielektrischen Modell beobachtet man sehr viel größere Werte von ε (300—400 Mev), die im Zentrum des Solitons ($r = 0$) stets größer sind als die dynamische Quarkmasse (siehe auch Bild 3.7). Man darf daher wohl annehmen, daß eine Polarisation des Diracsees durch die Valenzquarks unwahrscheinlich ist und die Seezustände vernachlässigt werden dürfen. Des weiteren haben Drago[82] et al. die Beiträge zur Energie, die auf den Diracsee zurückzuführen sind, in einem chiral invarianten colourdielektrischen Modell abgeschätzt, und erhalten nur eine geringfügige Erhöhung der Energie, so daß eine Vernachlässigung dieser Beiträge gerechtfertigt scheint. Wir behandeln also hier beide Modelle auf gleicher Grundlage und können so vergleichende Aussagen — im Rahmen der verwendeten Näherungen — machen.

Um das Pauli-Prinzip zu erfüllen, haben wir einen antisymmetrischen Zustand der $N_c = 3$ Quarkfelder im Colourraum, d. h. eine Slaterdeterminante, zu konstruieren. Wir setzen also für einen allgemeinen Valenzquarkzustand

$$|q^{N_c}\rangle = \prod_{a=1}^{N_c} \int d^3x\, \psi_a^\dagger(x) q_{val}(x) |0\rangle_b \tag{3.35}$$

an[(d)]. $q_{val}(x)$ ist die in Abschnitt 3.2 eingeführte klassische Quarkwellenfunktion mit Hedgehog-Konfiguration.

$$|q^{N_c}\rangle = B_1^\dagger B_2^\dagger \cdot \ldots \cdot B_{N_c}^\dagger |0\rangle_b \tag{3.36}$$

$$\langle r|B_k^\dagger|0\rangle_b = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} u(r) \\ iv(r)\sigma^k \cdot \hat{r} \end{pmatrix} |\chi_{hh}\rangle^k \tag{3.37}$$

[(d)]Der Index b deutet an, daß es sich bei dem Zustand $|0\rangle_b$ um den 'Vakuumzustand', genauer 0–Teilchen-Zustand, hinsichtlich einer Basis aus gebundenen Spinorzuständen handelt.

Im Allgemeinen ist der Zustand $|0\rangle_b$ weder rotations- noch translationsinvariant, sondern eine Linearkombination freier Zustände mit positiver und negativer Energie, da die Quarkfelder in einer Basis aus gebundenen Lösungen der klassischen Diracgleichung entwickelt werden. Dies hat zur Folge, daß die Überläppe zwischen gedrehten und verschobenen Quarkvakua von eins verschieden sind. Wir benutzen hier die gleiche Approximation wie in Ref. 39 und vernachlässigen hier Abweichungen dieser Überläppe von eins.

Die Gradientenentwicklung der Wirkung des NJL-Modells führt auf die Wirkung des linearen chiralen Sigma-Modells mit Valenzquarks[83,46], so daß Seezustände nicht weiter berücksichtigt werden müssen. Formal entspricht dies der Forderung $\beta_n(\boldsymbol{x}) \equiv 0\ \forall n$ in Gl. (3.33*e*) zu setzen. Unter dieser Voraussetzung kann man nun zeigen, daß der 0-Teilchen-Zustand $|0\rangle_b$ invariant unter Rotationen und Translationen ist, d. h. die Überläppe der Quarkvakua sind identisch eins.

Die Beschreibung der Quantenzustände der Mesonfelder erfolgt durch kohärente Zustände[(e)].

$$|\sigma\rangle = U(\hat{p}_\sigma)|0\rangle, \tag{3.38}$$

die mit Hilfe des unitären Operators[84]

$$U(\hat{p}_\sigma) = \exp\left\{-\imath \int d^3\boldsymbol{x}\, \sigma_{cl}(\boldsymbol{x})\hat{p}_\sigma(\boldsymbol{x})\right\} \tag{3.39}$$

konstruiert werden können[(f)]. Diese sind Eigenzustände des Vernichtungsoperators

$$a_n|\sigma\rangle = \sqrt{\frac{\omega_n}{2}}\,\eta_n|\sigma\rangle \tag{3.40}$$

worin

$$\eta_n = \int d^3\boldsymbol{x}\, f_n^*(\boldsymbol{x})\sigma_{cl}(\boldsymbol{x}) \tag{3.41}$$

die Entwicklungskoeffizienten der der klassischen Feldkonfiguration sind. Aus der wichtigen Eigenschaft

$$U^{-1}(\hat{p}_\sigma)F(\hat{\sigma})U(\hat{p}_\sigma) = F(\hat{\sigma} + \sigma_{cl}) \tag{3.42}$$

lassen sich die Erwartungswerte normalgeordneter Produkte der Feldoperatoren sowie der konjugierten Impulse im Zustand $|\sigma\rangle$ ableiten.

$$\langle\sigma| : \hat{\sigma}^N(\boldsymbol{r}) : |\sigma\rangle = \sigma_{cl}^N(\boldsymbol{r}) \tag{3.43a}$$

$$\langle\sigma| : \hat{p}_\sigma^N(\boldsymbol{r}) : |\sigma\rangle = 0 \tag{3.43b}$$

(e) Die folgenden Gleichungen beziehen sich alle auf den kohärenten Zustand des σ-Feldes. Die kohärenten Zustände des χ-Feldes werden völlig analog konstruiert, und die kohärenten π-Zustände werden gebildet, indem man über die einzelnen Isospinkomponenten von $\vec{\pi}_{cl}(\boldsymbol{x})$ und $\hat{\vec{p}}_\pi(\boldsymbol{x})$ summiert.

(f) Eine detaillierte Diskussion kohärenter Zustände findet man in Anhang B.

Die Erwartungswerte (3.43a) und (b) haben die gleichen Eigenschaften wie die Mean–Field Näherung (MFA), die in in den den vorhergehenden Abschnitten benutzt wurde, um die Bewegungsgleichungen zu erhalten. Berechnet man die Energie als Erwartungswert des Hamiltonians, so erhält man die klassische Energie des Solitons (Gln. (3.19) und (3.29)), die auf die Bewegungsgleichungen (3.22a–d) bzw. (3.30a–e) führt, die in den Abschnitten 3.2 und 3.3 diskutiert wurden.

Die Normalordnung der Produkte der Feldoperatoren eleminiert die divergenten Beiträge zu den Erwartungswerten, die in den Fluktuationen der kohärenten Zustände enthalten sind, d. h. die (divergenten) Vakuumerwartungswerte werden abgezogen. Klassische Approximation (MFA) und statische Erwartungswerte normalgeordneter Produkte der Feldoperatoren (3.43a) und (3.43b) sind daher identisch. Alle Quantenbeiträge zu diesen Erwartungswerten sind durch die Normalordnung beseitigt. Diese hängen daher nicht weiter von den gewählten Basisfunktionen $f_n(x)$ (und den zugehörigen Vakuumzuständen) ab, nach welchen die Feldoperatoren und ihre konjugierten Momente entwickelt werden (siehe Gln. (3.33a) und (b)). Die Wahl der Basis mag deshalb unbedeutend erscheinen. Dies trifft jedoch nicht mehr zu, falls Erwartungswerte zwischen verschiedenen kohärenten Zuständen betrachtet werden, wie sie bei Projektionsrechnungen auftreten. Die Ausdrücke (B.27) und (B.28) aus Anhang B hängen explizit von der gewählten Basis ab, die die Quantenfluktuationen der kohärenten Zustände durch die Wahl des Vakuums festlegt.

Um Projektionsrechnungen ausführbar zu gestalten, werden die Feldoperatoren

$$\sigma(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\omega_\sigma(k)}} \left[e^{i\,k\cdot x} a(k) + e^{-i\,k\cdot x} a^\dagger(k)\right] \tag{3.44a}$$

$$\vec{\pi}(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\omega_\pi(k)}} \left[e^{i\,k\cdot x} \vec{b}(k) + e^{-i\,k\cdot x} \vec{b}^\dagger(k)\right] \tag{3.44b}$$

nach ebenen Wellen mit den Dispersionsrelationen

$$\omega_\sigma = \sqrt{m_\sigma^2 + k^2} \qquad \omega_\pi = \sqrt{m_\pi^2 + k^2} \tag{3.44c}$$

entwickelt. Ein entscheidender Vorteil dieser Basis besteht darin, daß sie invariant unter Translationen und Rotationen ist, was zu erheblichen Vereinfachungen der Projektionsrechnungen führt.

Distorsionen dieser Moden , wie sie durch die solitonischen Felder verursacht werden können, sind jedoch nicht berücksichtigt, so daß möglicherweise wichtige Effekte vernachlässigt sind[69]. Die Verwendung der Eigenmoden des Solitons zur Konstruktion der kohärenten Zustände anstelle der ebenen Wellen stellt eine vom physikalischen Standpunkt aus wünschenswerte Verbesserung des Ansatzes (3.44) dar. Die Realisierung eines solchen Verfahrens erfordert jedoch die Bewältigung großer technischer Schwierigkeiten, da eine vollständige orthonormierte Basis zu konstruieren ist, und der im Allgemeinen nicht translations– und rotationsinvariante 0–Teilchen–Zustand durch eine Bogoliubov–Transformation in einen invarianten Vakuumzustand überführt werden muß, bevor ein kohärenter Zustand mit Hilfe des unitären Operators (3.39) gebildet werden kann. Eine 'distorted wave' Basis zur Entwicklung der Feldoperatoren zu verwenden, Moden und Frequenzen durch Variation der Energie zu bestimmen, ist ein anderer Zugang zu diesem Problem[85,86]. Der mit dieser

Basis verbundene Vakuumzustand ist jedoch ebenfalls nicht invariant, und Projektionsrechnungen erfordern daher die Auswertung von Überlappintegralen zwischen gedrehten und verschobenen Vakuumzuständen. Ein formales Schema für eine derartige Vorgehensweise wurde von Wilets[87] ausgearbeitet, praktische Rechnungen jedoch stoßen auf umfangreiche technische Probleme.

Eine weitere Komplikation bei der Berechnung von Erwartungswerten kohärenter Zustände entsteht durch die ungewöhnliche $1/\chi$-Kopplung des colourdielektrischen Feldes an die Quarkfelder im CD-Modell. Wir folgen hier Leech und Birse[40] und nehmen an, daß der dem χ-Feldoperator entsprechende Ausdruck (3.43a) als Definition des Erwartungswertes für $: 1/\chi :$ anzusehen ist, Gl. (3.43a) also auch für negative Potenzen ($N < 0$) des Feldoperators Gültigkeit hat. Eine solche Annahme ließe sich durch Entwicklung von $1/\chi$ um den Vakuumerwartungswert und Normalordnen der resultierenden Reihe rechtfertigen, wäre der Vakuumerwartungswert des χ-Feldes nicht identisch null[40,69]. Der Ausdruck (3.43a) wird daher als definierende Gleichung für $N = -1$ aufgefaßt.

Fassen wir die Überlegungen dieses Abschnitts zusammen, so stellen wir fest, daß der (Hedgehog-) Fockzustand — wir benötigen einen Quantenzustand für die nachfolgenden Projektionsrechnungen — für das lineare σ-Modell durch den Ausdruck

$$|\Psi_{hh}\rangle = \prod_{a=1}^{3} \int d^3x\, \psi_a^\dagger(x) q_{val}(x) |0\rangle_F U(\hat{p}_\sigma) U(\hat{\vec{p}}_\pi) |0\rangle_B \tag{3.45a}$$

und für das colourdielektrische Modell durch

$$|\Psi_{hh}\rangle = \prod_{a=1}^{3} \int d^3x\, \psi_a^\dagger(x) q_{val}(x) |0\rangle_F U(\hat{p}_\sigma) U(\hat{p}_\chi) U(\hat{\vec{p}}_\pi) |0\rangle_B \tag{3.45b}$$

gegeben ist. Die Quarkfelder sind in einer Basis aus gebundenen Lösungen der klassischen Diracgleichung entwickelt, die Bosonfelder nach ebenen Wellen mit der physikalischen Masse in der Dispersionsrelation für die Energie. Für beide Zustände gilt, daß die klassische Energie

$$E_{cl} = \langle \Psi_{hh} | : H : | \Psi_{hh} \rangle \tag{3.46}$$

durch den Erwartungswert des normalgeordneten Hamiltonoperators im Zustand $|\Psi_{hh}\rangle$ gegeben ist.

4. Restauration verletzter Symmetrien durch Peierls-Yoccoz-Projektion

Die Korrelationen der in den Lagrangefunktionen auftretenden Felder (Teilchen) haben wir im vorangegangenen Kapitel durch eine symmetriebrechende Mean-Field Näherung beschrieben. Die den klassischen solitonischen Lösungen der Gleichungssysteme (3.22*a*–*d*) und (3.30*a*–*e*) zugeordneten Fockzustände (3.45*a*) und (3.45*b*) sind zwar (näherungsweise) Eigenfunktionen der Hamiltonoperatoren (3.3) und (3.6), jedoch keine Eigenfunktionen der Symmetrieoperatoren S, mit denen diese Hamiltonoperatoren kommutieren.

$$[H, S] = 0 \tag{4.1}$$

Solitonen, wie wir sie bisher betrachtet haben, sind klassische lokalisierte Objekte, die weder einen definierten Spin J und Isospin T noch einen definierten Impuls q besitzen. Modellzustände, die der Beschreibung physikalischer Baryonen dienen, sollten jedoch simultane Eigenfunktionen des Drehimpulses, Isospins und linearen Impulses sein. Die solitonischen Lösungen brechen jedoch insbesondere die Translations- und Rotationsinvarianz (Spin- und Isospininvarianz), denen die Hamiltonoperatoren der betrachteten Modelle genügen.

Obwohl der Erwartungswert des Impulses aufgrund der Symmetrien des Solitons verschwindet

$$\langle \Psi_{hh} | : \boldsymbol{P} : | \Psi_{hh} \rangle = 0 \,, \tag{4.2a}$$

ist der Erwartungswert des Quadrates des Impulsoperators ungleich null.

$$\langle \Psi_{hh} | : \boldsymbol{P}^2 : | \Psi_{hh} \rangle \neq 0 \tag{4.2b}$$

In den Mean-Field Lösungen sind daher spuriose Schwerpunktsbewegungen vorhanden, deren kinetische Energie in der Gesamtenergie des Solitons enthalten ist. Derartige Schwerpunktsbewegungen 'verzerren' beispielsweise die Ladungsverteilung und äußern sich in einer Zunahme des Ladungsradius.

Eine ähnliche Situation tritt für die Erwartungswerte des Drehimpulses (Isospins) auf

$$\langle \Psi_{hh} | : \boldsymbol{J} : | \Psi_{hh} \rangle = 0 \,, \tag{4.3a}$$

der im Hedgehog-Zustand verschwindet. Da der Hedgehog jedoch kein Eigenzustand des Drehimpulses ist, tragen Quark- und Pionfelder zum Erwartungswert von $\boldsymbol{J}^2$ via Quantenfluktuationen bei.

$$\langle \Psi_{hh} | : \boldsymbol{J}^2 : | \Psi_{hh} \rangle \neq 0 \tag{4.3b}$$

Um nun einerseits nukleonische Observable (Ruhemasse, Ladungsradien, magnetische Momente etc.) aus den Modellen zu extrahieren, andererseits die spuriosen Schwerpunktsbewegungen des Solitons zu elimieren, werden im Folgenden Techniken vorgestellt, die eine simultane Projektion des

Fock-Ansatzzustands auf Eigenräume der Symmetrieoperatoren, mit denen der Hamiltonoperator kommutiert, erlauben. Gegenstand dieses Kapitels ist also die Konstruktion simultaner Eigenfunkionen des Spins, Isospins und linearen Impulses auf der Grundlage von Wellenfunktionen, die man aus der Mean-Field Näherung erhält.

4.1. Simultane Projektion auf Drehimpuls und linearen Impuls

Die Projektionstechniken, die in diesem Abschnitt erläutert werden sollen, sind ein Spezialfall der Generatorkoordinaten-Methode[34]. Sie basieren auf einer Diagonalisierung des Hamiltonoperators in einem 'kollektiven' Unterraum, der von den sogenannten erzeugenden Funkionen $|\phi(\Omega)\rangle$ aufgespannt wird, die von einem oder mehreren kontinuierlichen Parametern Ω (Generatorkoordinaten) abhängen. Einen kontinuierlichen Satz erzeugender Funktionen erhält man durch Anwendung der (unitären) Gruppenelemente $R(\Omega)$ der entsprechenden Symmetriegruppe auf den symmetriebrechenden Zustand $|\phi\rangle$

$$|\phi(\Omega)\rangle = R(\Omega)|\phi\rangle \tag{4.4}$$

Die Zustände $|\phi(\Omega)\rangle$ haben alle denselben Energieerwartungswert, da der Hamiltonoperator mit $R(\Omega)$ kommutiert. Die Peierls-Yoccoz-Projektionsmethode fußt nun darauf, die Zustände (4.4) als erzeugende Funktionen einer Generatorkoordinatenmethode zu verwenden.

$$|\psi\rangle = \int d\Omega\, f(\Omega)|\phi(\Omega)\rangle \tag{4.5}$$

Die Variation der Energie im Hinblick auf die Gewichtsfunktion $f(\Omega)$

$$\frac{\delta}{\delta f}\left[\frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}\right] = 0 \tag{4.6}$$

und Lösung der aus dem Variationsprinzip (4.6) resultierenden Hill-Wheeler-Gleichung[88]

$$\int d\Omega'\,\langle\phi(\Omega)|H|\phi(\Omega')\rangle f(\Omega') = E\int d\Omega'\,\langle\phi(\Omega)|\phi(\Omega')\rangle f(\Omega') \tag{4.7}$$

ist äquivalent mit der Diagonalisierung von H in einem Unterraum, welcher durch $|\phi(\Omega)\rangle$ aufgespannt wird. Der Projektor P_ϕ auf diesen Unterraum ist invariant unter den Gruppenelementen $R(\Omega)$, und wir können gemeinsame Eigenfunktionen von $P_\phi H P_\phi$ und $R(\Omega)$ konstruieren. Das heißt, es existiert eine Funktion $f(\Omega)$, so daß die Energie ein Minimum annimmt und $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand des Symmetrieoperators ist, der die Transformationen $R(\Omega)$ erzeugt[34]. Um eine derartige Funktion zu finden, entwickeln wir $f(\Omega)$ nach einem vollständigen Satz von Eigenfunktionen des Symmetrioperators S, was für alle abelschen Gruppen auf eine Fourierzerlegung hinausläuft.

Die räumlichen Translationen in drei Dimensionen

$$U(\boldsymbol{a}) = \exp\left\{-\imath\,\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}\right\}, \tag{4.8}$$

deren infinitesimal Erzeugende der Impulsoperator $\hat{\boldsymbol{P}}$ ist, bilden eine abelsche Gruppe. Entwickeln wir die Gewichtsfunktionen $f(\boldsymbol{a})$ nach ebenen Wellen, den Eigenfunktionen des Impulsoperators, so ist gemäß Gl. (4.5)

$$|\psi\rangle = \int d^3\boldsymbol{q}\, g(\boldsymbol{q})\, P_{\boldsymbol{q}}|\phi\rangle \tag{4.9}$$

worin

$$P_q = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3a \exp\left\{\imath\, a \cdot \left(q - \hat{P}\right)\right\} = |q\rangle\langle q| \tag{4.10}$$

der Projektionsoperator auf den Impuls q ist. P_q ist ein Projektor im mathematischen Sinn, d. h. es ist

$$P_q P_{q'} = P_q \delta^3(q - q') \qquad P_q^\dagger = P_q \tag{4.11}$$

wie aus der Diracnotation für P_q sofort ersichtlich wird.

Dies ist für nichtabelsche Gruppen nicht mehr gültig, wie wir im Fall der Drehgruppe, die wir als nächste untersuchen wollen, sehen werden. Parametrisieren wir die Drehungen durch einen Satz von Eulerwinkeln $\Omega = (\alpha, \beta, \gamma)$, und entwickeln die Gewichtsfunktionen

$$f(\Omega) = \frac{2J+1}{8\pi^2} \sum_{JMK} g_{JMK} \mathcal{D}^J_{MK}(\Omega)^* \tag{4.12}$$

nach Eigenfunktionen $\mathcal{D}^J_{MK}(\Omega)^*$ (Wignerfunktionen) des Drehoperators

$$R(\Omega) = \mathrm{e}^{-\imath\,\alpha \hat{J}_z} \mathrm{e}^{-\imath\,\beta \hat{J}_y} \mathrm{e}^{-\imath\,\gamma \hat{J}_z}, \tag{4.13}$$

so erhalten wir den Ansatz

$$|\psi\rangle = \sum_{JMK} g_{JMK} P^J_{MK} |\phi\rangle. \tag{4.14}$$

Der Operator

$$P^J_{MK} = \frac{2J+1}{8\pi^2} \int d^3\Omega\, \mathcal{D}^J_{MK}(\Omega)^* R(\Omega) = |\,JM\,\rangle\langle\,JK\,| \tag{4.15}$$

ist kein Projektionsoperator, vielmehr gilt:

$$P^J_{MK} P^{J'}_{M'K'} = \delta_{JJ'} \delta_{KM'} P^J_{MK'} \qquad \left(P^J_{MK}\right)^\dagger = P^J_{KM} \tag{4.16}$$

Die Integration in Gl. (4.15) erstreckt sich über den gesamten Parameterraum der Drehgruppe. Es ist also:

$$\int d^3\Omega = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} d\beta \sin\beta \int_0^{2\pi} d\gamma \tag{4.17}$$

Der Zustand $|\phi\rangle$ kann in eine Basis bestehend aus Drehimpulseigenzuständen zerlegt werden.

$$|\phi\rangle = \sum_{JM\alpha} c_{JM}(\alpha) |\alpha J M \alpha\rangle \tag{4.18}$$

Wenden wir den Operator (4.16) auf den Zustand $|\phi\rangle$ an, so erhalten wir

$$P^J_{MK} |\phi\rangle = \langle\, JK|\phi\,\rangle\, |\,JM\,\rangle = c_{JK}\, |\,JM\,\rangle \tag{4.19}$$

Eigenzustände des Drehimpulses mit den Quantenzahlen (J, M). Solche Eigenzustände lassen sich gemäß

$$|\alpha, JM\rangle = \sum_K g_{JK}(\alpha) P^J_{MK} |\phi\rangle \tag{4.20}$$

konstruieren, worin α alle weiteren Quantenzahlen bezeichnet, die notwendig sind, um den Zustand (4.20) zu klassifizieren.

Eigenzustände des Isospins werden nun auf völlig analoge Weise konstruiert. Ist der Zustand $|\phi\rangle$ weder ein Eigenzustand des Spins noch des Isospins, so wird eine simultane Projektion notwendig. Analog zu Gl. (4.18) zerlegen wir $|\phi\rangle$ in eine Basis (Tensorprodukt) aus Eigenzuständen des Spins und Isospins.

$$|\phi\rangle = \sum_\alpha \sum_{JM} \sum_{TM_T} c_{JMTM_T}(\alpha) |\alpha JM, TM_T\rangle \tag{4.21}$$

Ein simultaner Eigenzustand des Spins und des Isospins ist dann durch

$$|\alpha JM, TM_T\rangle = \sum_{KK_T} g_{JKTK_T}(\alpha) P^J_{MK} P^T_{M_T K_T} |\phi\rangle \tag{4.22}$$

gegeben. Die Koeffizienten g_{JKTM_T} sind Lösungen der Hill-Wheeler Gleichung

$$\sum_{KK'_T} \left(\langle\phi| : H : P^J_{K'K} P^T_{K'_T K_T} |\phi\rangle - E_{JT\alpha} \langle\phi| P^J_{K'K} P^T_{K'_T K_T} |\phi\rangle \right) g_{JK'TK'_T}(\alpha) = 0, \tag{4.23}$$

die man durch Variation der Energie

$$E_{JT\alpha} = \frac{\sum_{K'K'_T} \sum_{KK_T} g_{JK'TK'_T}(\alpha)^* g_{JKTK_T}(\alpha) \langle\phi| : H : P^J_{K'K} P^T_{K'_T K_T} |\phi\rangle}{\sum_{K'K'_T} \sum_{KK_T} g_{JK'TK'_T}(\alpha)^* g_{JKTK_T}(\alpha) \langle\phi| P^J_{K'K} P^T_{K'_T K_T} |\phi\rangle} \tag{4.24}$$

erhält.

Da jedoch der Hedgehog-Zustand ein Eigenzustand Grandspinoperators

$$\vec{G} |\Psi_{hh}\rangle = \left(J + \vec{T} \right) |\Psi_{hh}\rangle = 0 \tag{4.25}$$

mit dem Eigenwert $G = 0$ ist, erübrigt sich entweder die Projektion auf den Spin J oder diejenige auf den Isospin $\vec{T}$. Die Zerlegung (4.21) hat daher die Gestalt[a]:

$$|\Psi_{hh}\rangle = \sum_{JM} \sum_{TM_T} a_{JM,TM_T} \delta_{JT} \delta_{M\,-M_T} |JM, TM_T\rangle = \sum_{JM} (-1)^{J+M} c_J |JM, J\,-M\rangle \tag{4.26}$$

[a] Die Zerlegung des Hedgehog-Zustands folgt aus der Tatsache, daß $(J_i + T_i)|\Psi_{hh}\rangle = 0$ für $i = 1, 2, 3$ gelten muß. Diese Bedingung erzwingt für $i = 3$ den Ansatz $|JM, J\,-M\rangle$, da dieser ein Spin-Isospin-Eigenzustand sein muß. Für $i = 1, 2$ kann die Bedingung durch $a_{JM,J-M} = (-1)^{J+M} c_J$ erfüllt werden, da $(J_i + T_i) \sum_M (-1)^{J+M} c_J |JM, J\,-M\rangle \equiv 0$ ist.

Der resultierende projizierte (Eigen-) Zustand des Spins und Isospins hat die Quantenzahlen $J = T$ und $M = -M_T$

$$|JM, TM_T\rangle \equiv |JM\ -M\rangle = P_{JM}|\Psi_{hh}\rangle \tag{4.27}$$

und nur eine der beiden Drehimpulsprojektionen muß ausgeführt werden[50,47,89]. Der Operator

$$P_{JM} = \frac{2J+1}{2\pi}\int d^3\Omega\, \mathcal{D}^J_{MM}(\Omega)^* R(\Omega) \tag{4.28}$$

ist ein Projektor, der die Bedingungen

$$P^\dagger_{JM} = P_{JM} \qquad\qquad P^2_{JM} = P_{JM} \tag{4.29}$$

erfüllt.

Da die Generatoren der Translationen, die Impulsoperatoren $\hat{\boldsymbol{P}}$, nicht mit den Generatoren der Drehungen im Spinraum, den Drehimpulsoperatoren $\hat{\boldsymbol{J}}$, vertauschen, können keine gemeinsamen Eigenzustände des Impuls- und Drehimpulsoperators durch Projektion auf die Quantenzahlen $\boldsymbol{q} \neq 0$ und J erzeugt werden. Der Projektionsoperator auf den Impuls $\boldsymbol{q} = 0$ kommutiert jedoch mit den Drehungen, oder anders ausgedrückt: Der Projektor auf den Impuls $\boldsymbol{q} = 0$ ist drehinvariant (siehe auch Anhang D von Ref. 90). der Beweis ist einfach. Aus dem Verhalten des Vektoroperators $\hat{\boldsymbol{P}}$ unter Drehungen

$$R^{-1}(\Omega)\hat{P}_i R(\Omega) = \sum_j \mathcal{R}^{-1}_{ij}(\Omega)\hat{P}_j, \tag{4.30}$$

worin $\mathcal{R}(\Omega)$ die Drehmatrix im dreidimensionalen euklidischen Raum ist, folgt, daß:

$$R^\dagger(\Omega)\exp\left\{-\imath\, \boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}\right\} R(\Omega) = \exp\left\{-\imath \sum_{kl} \hat{P}_k \mathcal{R}_{kl}(\Omega) a_l\right\} \tag{4.31}$$

Damit erhält man für den Ausdruck

$$P_{\boldsymbol{q}} R(\Omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3\boldsymbol{a}\, \mathrm{e}^{\imath\, \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{q}} R(\Omega) U(\mathcal{R}(\Omega)\boldsymbol{a}) \tag{4.32}$$

nach Tranformation der Variablen

$$\boldsymbol{a}' = \mathcal{R}(\Omega)\boldsymbol{a} \tag{4.33}$$

in Gl. (4.32) das Ergbnis[91]

$$R^\dagger(\Omega) P_{\boldsymbol{q}} R(\Omega) = P_{\mathcal{R}(\Omega)\boldsymbol{q}}. \tag{4.34}$$

Der im Hilbertraum um den Winkel Ω gedrehte Projektionsoperator auf den Impuls $\boldsymbol{q}$ ist also mit dem Projektionsoperator auf den im euklididschen Raum um den Winkel Ω gedrehten Impuls $\boldsymbol{q}$ äquivalent. Aus Gl. (4.34) folgt für $\boldsymbol{q} = 0$:

$$\left[P_{\boldsymbol{q}=0}, R(\Omega)\right] = 0 \tag{4.35}$$

und weiter

$$\left[P_{q=0}, P^J_{MK}\right] = 0\,, \tag{4.36}$$

was zu beweisen war. Durch Projektion eines Zustandes $|\psi\rangle$ auf Spin J und Impuls $q = 0$ erhält man einen simultanen Eigenzustand der Impuls- und Drehimpulsoperatoren mit den Eigenwerten $q = 0$ und (J, M). Anders ausgedrückt, der Spin eines Teilchens ist nur in seinem Ruhesystem definiert. In gleicher Weise finden wir noch

$$\left[\int d^3a\, f(a^2)U(a), R(\Omega)\right] = 0, \tag{4.37}$$

da $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a^2$ invariant unter Drehungen ist. Die Funktion $f(a^2)$ ist eine beliebige analytische Funktion von a^2.

Fassen wir in den Gln. (4.25), (4.27) und (4.36) enthaltenen Aussagen zusammen, so können wir den Modellzustand für ein Baryon, das die Quantenzahlen $J = T$ und $M_J = -M_T$ trägt, in seinem Ruhesystem durch simultane Projektion

$$|B_\alpha(\boldsymbol{q} = 0)\rangle \to P_{q=0}P_{JM}|\Psi_{hh}\rangle = |JM - M, \boldsymbol{q} = 0\rangle \tag{4.38}$$

des Hedgehog-Ansatzes auf den Impuls $\boldsymbol{q} = 0$ und den Spin (Isospin) $J = T$ erzeugen[b]. Der Zustand (4.38) ist ein simultaner Eigenzustand des Impulses mit Eigenwert $\boldsymbol{q} = 0$, des Spins J und des Isospins $T = J$ und geht durch kombinierte Peierls-Yoccoz-Projektion des Hedgehog Fockzustands (3.45*a*) bzw. (3.45*b*) hervor. Der Zustand (4.38) dient im weiteren zur Beschreibung eines Baryons in seinem Ruhesystem sowie zur Berechnung statischer Größen, wie der Ruhemasse und der Axialvektorkopplungskonstanten g_A, die als Erwartungswerte eines Zustandes mit $\boldsymbol{q} = 0$ berechnet werden.

4.2. Projektion auf endlichen Impuls, Boostoperationen

Um elektromagnetische Eigenschaften des Nukleons, Ladungsradien und magnetische Momente, aus den Modellen zu extrahieren, benötigen wir nukleonische Zustände mit endlichem Impuls $\boldsymbol{q} \neq 0$. Ladungsradien wie magnetische Momente ergeben sich aus der Reihenentwicklung der entsprechenden Formfaktoren, die man aus den Matrixelementen des Vektorstroms zwischen Nukleonzuständen mit endlichen Impulsen $\boldsymbol{q}$ und $\boldsymbol{q}'$ erhält (siehe nächstes Kapitel). Derartige Modellzustände des Nukleons können auf verschiedenen Wegen aus dem Fockzustand (3.45*a*) bzw. (3.45*b*) erzeugt werden. Zwei dieser Möglichkeiten sollen in diesem Abschnitt diskutiert werden:

- Boost des auf den Impuls $\boldsymbol{q} = 0$ projizierten Drehimpulseigenzustands, $P_{q=0}P_{JM}|\Psi_{hh}\rangle$, aus seinem Ruhesystem in ein System, das sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ bewegt.
- Peierls-Yoccoz-Projektion des Drehimpulseigenzustands, $P_{JM}|\Psi_{hh}\rangle$, auf endlichen Impuls $\boldsymbol{q} \neq 0$

[b] α gibt die Quantenzahlen, die den Baryon–Zustand charakterisieren, summarisch an.

Boostoperationen wurden von Betz und Goldflam[41] verwendet, um rückstoßkorrigierte Formfaktoren aus dem Friedberg-Lee-Modell[16] zu berechnen. In dieser Arbeit werden jedoch Modellzustände des Baryons in seinem Ruhesystem durch die Mean-Field Lösungen des Modells approximiert und keine Eigenzustände des Impulsoperators konstruiert. Darüberhinaus sind die Quantenfluktuationen des mesonischen Feldes nicht berücksichtigt, d. h. das Mesonfeld wird als klasssisches Feld (c-Funktion) in die Theorie eingeführt. Diese methodischen Schwächen wurden von Lübeck et al.[39] ausgeräumt, die Boostoperationen auf einen impulsprojizierten ($q = 0$) Quantenzustand anwendeten, der in ähnlicher Weise wie in Abschnitt 3.4 beschrieben auf den Mean-Field Lösungen des Friedberg-Lee-Modells fußt. Diese Verfahren (wie auch jenes aus Ref. 41) besitzt den Vorteil, daß die geboosteten Zustände korrekte Lorentztransformationseigenschaften haben. Dies bedeutet unter anderen, daß die Erwartungswerte des Hamiltonoperators und des Impulsoperators die Energie-Impuls-Relation

$$E^2(q) = M_0^2 + q^2 \tag{4.39}$$

erfüllen, worin M_0 die Ruhemasse ist.

Den Zustand eines Baryons mit dem Impuls

$$q = M_0 \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \hat{v} \tag{4.40}$$

finden wir demnach durch Anwendung des Boostoperators

$$B(v) = \exp\{-\imath y \cdot K\} \tag{4.41}$$

auf den Ruhezustand des Baryons

$$|N_\alpha(q)\rangle = B(v)|N_\alpha(q=0)\rangle \rightarrow B(v)|JM_J, TM_T, q=0\rangle, \tag{4.42}$$

welcher ein Eigenzustand des Hamiltonoperators[(c)] und aller mit ihm kommutierenden Symmetrieoperatoren projiziert auf den Impuls $q = 0$ ist. Die in Gl. (4.41) auftretenden Rapiditäten sind durch

$$y = \hat{v} \operatorname{artanh} v \tag{4.43}$$

definiert.

Die Generatoren K_i der Boostoperationen $B(v)$ (sowie die Generatoren J_i der Drehungen $R(\Omega)$) sind im verallgemeinerten (antisymmetrischen) Drehimpulstensor

$$M_{\mu\nu} = \int d^3x \, \left(T_{0\mu}(x)x_\nu - T_{0\nu}(x)x_\mu\right) \tag{4.44}$$

zusammengefaßt

$$K_i = M_{0i} \qquad \text{und} \qquad J_i = \frac{1}{2}\sum_{ij} \varepsilon_{ijk} M_{jk}, \tag{4.45}$$

[(c)] Die Zustände (4.42) sind keine exakten Eigenzustände des Vierer-Impulses, da sie nur näherungsweise Eigenzustände des Hamiltonoperators sind.

worin $T_{\mu\nu}$ der (symmetrisierte) Energie-Impulstensor (3.1) ist. Da der Drehimpulstensor (4.44) eine Erhaltungsgröße ist

$$\frac{dM_{\mu\nu}}{dt} = 0\,, \tag{4.46}$$

und wir im Heisenbergbild arbeiten, können wir im Ausdruck für K $t = 0$ setzen und erhalten:

$$K = \int d^3x\, x\mathcal{H}(x) \tag{4.47}$$

Aus den Vertauschungsrelationen[92]

$$\left[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}\right] = \imath\left(g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}\right) \tag{4.48a}$$

$$\left[M_{\mu\nu}, P_\rho\right] = \imath\left(g_{\nu\rho}P_\mu - g_{\mu\rho}P_\nu\right), \tag{4.48b}$$

die zusammen die Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe bilden, und der Haussdorfformel

$$\begin{aligned} B^\dagger(v)P_\mu B(v) = P_\mu &+ \imath\sum_{j_1} y_{j_1}\left[K_{j_1}, P_\mu\right] + \frac{\imath^2}{2!}\sum_{j_1 j_2} y_{j_1}y_{j_2}\left[K_{j_2}, \left[K_{j_1}, P_\mu\right]\right] + \dots \\ &+ \frac{\imath^n}{n!}\sum_{j_1\dots j_n} y_{j_1}\cdot\ldots\cdot y_{j_n}\left[K_{j_n}, \left[K_{j_{n-1}}, \dots\left[K_{j_1}, P_\mu\right]\dots\right]\right] + \dots \end{aligned} \tag{4.49}$$

findet man:

$$\mathrm{e}^{\imath\,\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{K}} H \mathrm{e}^{-\imath\,\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{K}} = H\cosh y + \hat{\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{P}\sinh y \tag{4.50a}$$

$$\mathrm{e}^{\imath\,\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{K}} P_k \mathrm{e}^{-\imath\,\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{K}} = \hat{y}_k\left[H\sinh y + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{P}\left(\cosh y - 1\right)\right] + P_k \tag{4.50b}$$

worin

$$\cosh y = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{E(p)}{M_0} \qquad \sinh y = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{p}{M_0} \tag{4.50c}$$

ist. Diese Beziehungen bringen die Tatsache zum Ausdruck, daß sich $(H, \boldsymbol{P})$ wie ein Vierer-Vektor unter Lorentztransformationen verhält. Da die Zustände $|JM_J, TM_T, \boldsymbol{q} = 0\rangle$ definitionsgemäß Eigenzustände des linearen Impulses mit $\boldsymbol{q} = 0$ sind, erhalten wir mit

$$E(y) = \langle \mathrm{e}^{\imath\,\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{K}} H \mathrm{e}^{-\imath\,\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{K}}\rangle = M_0\cosh y \tag{4.51a}$$

$$p(y) = \langle \mathrm{e}^{\imath\,\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{K}} P \mathrm{e}^{-\imath\,\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{K}}\rangle = M_0\sinh y \tag{4.51b}$$

worin $M_0 = \langle H\rangle$ die Ruhemasse ist, aus den Gln. (4.50a) und (4.50b) die korrekte Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2(y) - p^2(y) = M_0^2\,. \tag{4.39$'$}$$

Lübeck et al.[39] haben die Rapiditäten y der geboosteten Zustände (4.42) durch p/M_0 bis zur Ordnung p^2 genähert und den Ladungsradius des Protons

$$\langle r_c^2\rangle_p = \frac{3}{4M_0^2}\frac{\int d^3x\,\langle p=0|\left[\left[J_0^{em}(0), K_3\right]_+, K_3\right]_+|p=0\rangle}{\langle p=0|p=0\rangle} \tag{4.52}$$

sowie sein magnetisches Moment

$$\mu_p = \frac{1}{4M_0} \frac{\int d^3x \, \langle p=0| \, [K \times J^{em}(0)]_3 - [J^{em}(0) \times K]_3 \, |p=0 \rangle}{\langle p=0|p=0 \rangle} \tag{4.53}$$

bestimmt. Um die Ausdrücke (4.52) und (4.53) auszuwerten, sind die Boostoperatoren normalzuordnen, um divergente Anteile der Erwartungswerte, die von Produkten der Feldoperatoren herrühren, zu beseitigen. Eine solche Vorgehensweise ist jedoch etwas fragwürdig, da dies nicht bedeutet, Vakuumerwartungswerte von physikalischen Größen abzuziehen[69,40].

Aus diesem Grund und wegen der technischen Komplexität, die die volle Dynamik verursacht, die im Ansatz (4.42) enthalten ist, approximieren wir hier die Boostoperationen durch Peierls-Yoccoz-Projektionen auf endlichen Impuls $q \neq 0$, d. h. wir nähern einen baryonischen Zustand mit dem Impuls q durch

$$|N_\alpha(q)\rangle \to P_q P_{JM} |\Psi hh\rangle = P_q |\Psi_{JM}\rangle \, . \tag{4.54}$$

Im Ansatz (4.54) ist die Reihenfolge der Projektionsoperatoren zu beachten, die nun nicht mehr miteinander vertauschen[(d)]. Quantenzustände projiziert auf unterschiedliche endliche Impulse lassen sich jedoch nicht mehr durch geeignete Lorentztransformationen miteinander verbinden. Die Ursache hierfür liegt darin, daß die Projektion auf endlichen Impuls eine nichtrelativistische Prozedur ist und Zustände mit unterschiedichen endlichen Impulsen nicht die gleiche interne Struktur besitzen, also von q abhängen. Die äußert sich auch darin, daß die Energie-Impuls-Beziehung (4.39) nicht mehr gültig ist.

Stattdessen erhält man

$$E(q) = M_0 + \frac{q^2}{2M^*} + \mathcal{O}(q^4) \tag{4.55}$$

für die Entwicklung der Energie in Potenzen von q^2. Der Inertialparameter M^* läßt sich in den chiral invarianten Modellen, die wir hier behandeln, durch einen Vergleich der nach Potenzen von q^2 entwickelten Energie

$$E(q) = \frac{\int d^3a \, e^{i\,a\cdot q} h(a)}{\int d^3a \, e^{i\,a\cdot q} n(a)} = \frac{\mathcal{H}(q)}{\mathcal{N}(q)} \tag{4.56}$$

leicht ermitteln, falls eine Projektion auf den Drehimpuls vernachlässigt wird, also nur eine Projektion des Hedgehog-Fockzustands auf den Impuls q betrachtet wird. In diesem Fall hängen der Energie- und der Normüberlapp

$$h(a) = \langle U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh}| : H : |U(+\frac{a}{2})\Psi_{hh}\rangle \tag{4.57a}$$

$$n(a) = \langle \Psi_{hh}|U(a)|\Psi_{hh}\rangle \tag{4.57b}$$

[(d)] Die umgekehrte Reihenfolge der beiden Projektionsoperatoren führt bei der Berechnung des Ladungsradius und des magnetischen Moments auf Resultate, die nicht sinnvoll sind.

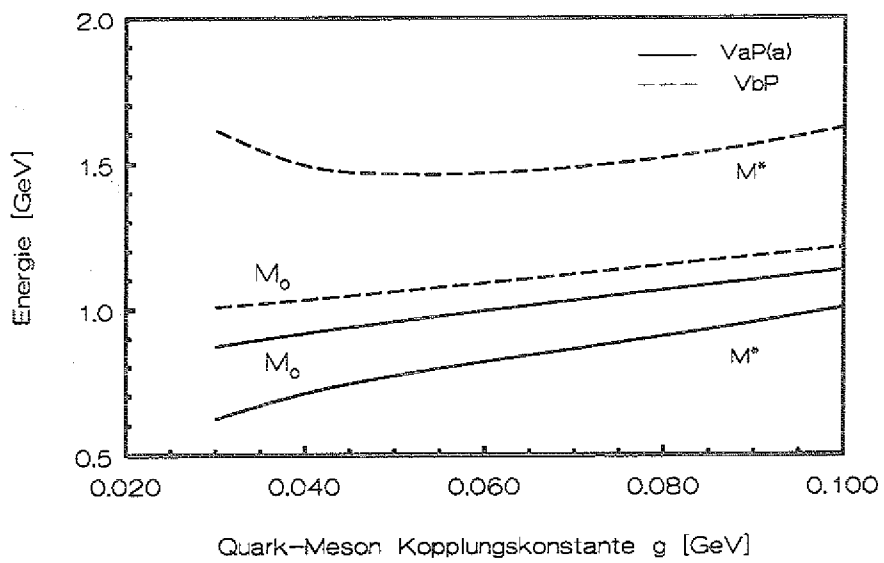


Abb. 4.1: Peierls-Yoccoz-Problem im colourdielektrischen Modell

Die Ruhemasse $M_0 = E(q=0)$ (gemäß Gl. (4.56)) und der Inertialparameter M^* (Gl. (4.60)) sind für zwei verschiedene Variationsverfahren — Variation vor der Projektion (VbP) und approximative Variation nach der Projektion (VaP(a)), die im nachfolgenden Abschnitt erläutert wird — gegen die Quark-Meson-Kopplungskonstante g aufgetragen. Für das VbP-Verfahren ist $M^* > M_0$ und für das VaP(a)-Verfahren findet man $M^* < M_0$; im letzten Fall ist die Differenz zwischen M_0 und M^* jedoch erheblich geringer als im ersten.

nur vom Betrag $a = |\boldsymbol{a}|$ des Verschiebungsvektors ab (siehe Anhänge D und E). Mit den Ausdrücken

$$\left[\frac{d}{d_i}\mathcal{N}(q)\right]_{q=0} = \left[\frac{d}{d_i}\mathcal{H}(q)\right]_{q=0} = 0 \tag{4.58a}$$

$$\left[\frac{d^2}{d_i d_j}\mathcal{N}(q)\right]_{q=0} = -\frac{1}{3}\delta_{ij}\int d^3\boldsymbol{a}\, a^2 n(a) \tag{4.58b}$$

$$\left[\frac{d^2}{d_i d_j}\mathcal{H}(q)\right]_{q=0} = -\frac{1}{3}\delta_{ij}\int d^3\boldsymbol{a}\, a^2 h(a) \tag{4.58c}$$

erhält man

$$E(q) = M_0 + \frac{q^2}{6}\,\frac{\int da\, a^4\,[M_0 n(a) - h(a)]}{\int da\, a^2 n(a)} + \mathcal{O}(q^4) \tag{4.59}$$

worin $M_0 = E(q=0)$ die Ruhemasse des Hedgehog-Baryons ist. Durch Vergleich mit Gl. (4.55) ergibt sich schließlich:

$$M^* = 3\,\frac{\int d^3\boldsymbol{a}\,\langle\,\Psi_{hh}|U(\boldsymbol{a})|\Psi_{hh}\,\rangle}{\int d^3\boldsymbol{a}\, a^2\langle\,U(-\frac{\boldsymbol{a}}{2})\Psi_{hh}|M_0 - :H:|U(+\frac{\boldsymbol{a}}{2})\Psi_{hh}\,\rangle} \tag{4.60}$$

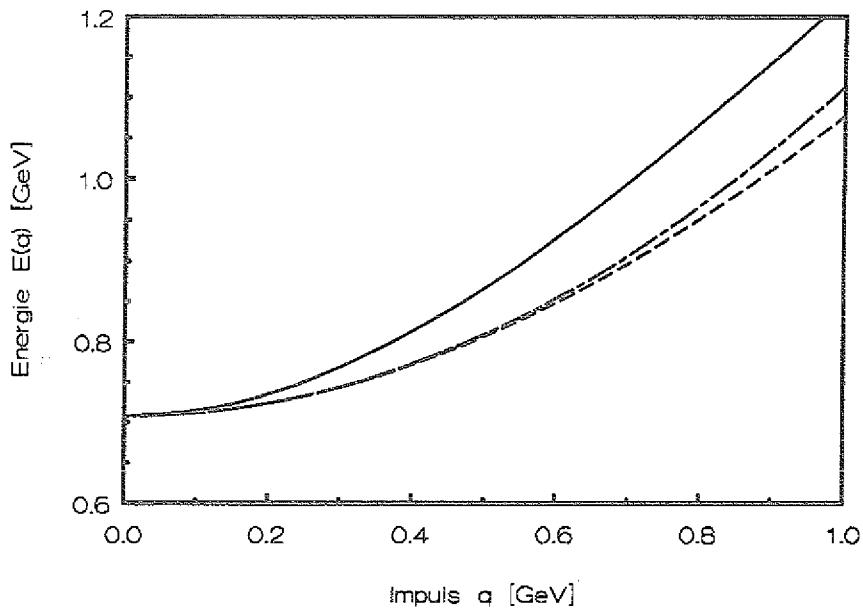


Abb. 4.2: Energie-Impuls-Relationen im Gell-Mann-Lévy-Modell
Die durchgezogene Linie bezeichnet die relativistische Energie-Impuls-Beziehung, $E(q) = \sqrt{M_0^2 + q^2}$. Die Relation $E(q)$, die aus der Projektion des Hamiltonoperators auf endlichen Impuls q gemäß Gl. (4.56) resultiert, ist durch die gestrichelte Kurve dargestellt und $E(q)$ gemäß Gl. (4.59) durch die strichpunktierte Kurve. Für den Parametersatz $g = 5.0$ und $m_\sigma = \sqrt{m_\pi^2 + 4g^2 f_\pi^2}$ erhält man aus Gl. (4.59) $M^* = 1.233$ GeV und $M_0 = E(q = 0) = 0.708$ GeV aus Gl. (4.56) für die Ruhemasse des Hedgehog-Baryons (keine Drehimpulsprojektion). Ähnliche Resultate ergeben sich für andere Parametersätze.

Ruhemasse M_0 und Inertialmasse M^* weichen bei einer Variation vor der Projektion erheblich voneinander ab (siehe Bild 4.1). Diese Tatsache ist unter der Bezeichnung Peierls-Yoccoz-Problem bekannt. Im nichtrelativistischen Grenzfall jedoch sind die Quantenzustände, die durch Variation des Energiefunktionals nach der Projektion (VaP) erzeugt werden, invariant unter Galileitransformationen[34]. Die Energie, berechnet als Erwartungswert des Hamiltonoperators im Zustand $P_q|\phi\rangle$, erfüllt in diesem Fall die (nichtrelativistische) Energie-Impuls-Beziehung[(e)]

$$E(q) = M_0 + \frac{q^2}{2M_0}. \tag{4.61}$$

[(e)]Die korrekte Masse kann man auch in einer Generatorkoordinaten-Methode erhalten. Thouless und Peierls[93] haben vorgeschlagen nicht nur Zustände mit unterschiedlicher räumlicher Position $|\phi(a)\rangle = \exp\{\imath\, a \cdot P\}\,|\phi\rangle$ zu überlagern, sondern auch solche mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten $|\phi(a,v)\rangle = \exp\{-\imath\, M_0 v \cdot R\}\,|\phi(a)\rangle$ (R ist die Schwerpunktskoordinate). Die Gewichtsfunktionen $f(a,v)$ werden durch Variation der Energie bestimmt (doppeltes Projektionsverfahren). Die Zustände die man auf diese Weise erhält sind ebenfalls invariant unter Galileitransformationen.

Leech und Birse[40] fanden in einer nicht chiral invarianten Version des CD-Modells, daß $M^* > M$, falls ein VbP-Verfahren angewendet wird. Ein Näherungsverfahren zur Variation nach der Projektion (VaP(a)), das wir mit leichten Änderungen hier übernehmen werden (siehe Abschnitt 4.3), führt auf $M^* < M$. Ein ähnliches Resultat beobachten wir auch im chiral invarianten CD-Modell (Bild 4.1). Es bleibt daher zu hoffen, daß eine verbesserte VaP-Methode, wie sie beispielsweise in Ref. 94 vorgestellt wird, zu einer Lösung des Peierls-Yoccoz-Problems beiträgt.

Bild 4.2 ist zu entnehmen, daß die Unterschiede, die auftreten, falls man die relativistische Energie-Impuls-Relation, $E(q) = \sqrt{M_0^2 + q^2}$, mit den genäherten Beziehungen (4.56) und (4.59) vergleicht, bei nicht zu großen Impulsen ($q < 0.5$ GeV) nur gering sind. In der Arbeit von Lübeck et al.[39] sind beide Ansätze, (4.42) und (4.54)[f], untersucht worden. Die Resultate für den Ladungsradius und (insbesondere dasjenige) für das magnetische Moment des Protons differieren nur geringfügig. Wir geben daher zur Untersuchung der chiral invarianten Modelle dem Ansatz (4.54) (Projektion) hier den Vorzug gegenüber dem technisch und methodisch schwierigerem Ansatz (4.42) (Boosting), da nur kleine Werte von q^2 in Betracht gezogen werden.

4.3. Variation nach Projektion

Die radialen Funktionen $u(r)$, $v(r)$, $\sigma(r)$, $\phi(r)$ und $\chi(r)$, auf denen die MFA-Fockzustände basieren, sind in Kapitel 3 durch Variation des Funktionals (3.21), d. h. durch Lösen der Differentialgleichungssysteme (3.22*a–d*) bzw. (3.30*a–e*), bestimmt worden. Variiert wurden also dort die nichtprojizierten Fockzustände (3.45*a*) bzw. (3.45*b*). Physikalische Größen können nun als Erwartungswerte der jeweiligen Operatoren in projizierten Fockzuständen ermittelt werden — Variation vor Projektion (VbP).

Diese Methode jedoch verletzt das Variationsprinzip, da nicht der projizierte Zustand variiert wird[34]. Vielmehr sollte der projizierte Fockzustand als Ansatz im Variationsprinzip dienen und die radialen Funktionen durch Optimierung der projizierten Energie, $\langle \Psi_{hh} | : H : P_{q=0} P_{JM} | \Psi_{hh} \rangle$, unter Einschluß der Nebenbedingung (3.20) berechnet werden — Variation nach Projektion (VaP). Dieses Verfahren führt auf ein System gekoppelter (nichtlinearer) Integro-Differentialgleichungen, welche mit 'elementaren' numerischen Mitteln nur lösbar sind, falls die Projektion auf linearen Impuls nicht durchgeführt wird, Schwerpunktskorrekturen also vernachlässigt werden. Im allgemeinen Fall simultaner Drehimpuls- und Impulsprojektion wird eine numerische Lösung eines solchen Integro-Differentialgleichungssystems extrem aufwendig und kompliziert.

Daher übernehmen wir hier ein approximatives Verfahren, das von Leech und Birse[40] entwickelt wurde, um die Ruhemasse des Nukleons und der Delta-Resonanz, berechnet als Erwartungswerte des (auf Spin J, Isospin $T = J$ und Impuls $q = 0$) projizierten Hamiltonoperators des CD-Modells, zu optimieren — approximative Variation nach Projektion (VaP(a)). Das VaP(a)-Verfahren beruht auf der Variation der Amplituden der bosonischen Funktionen, die zu diesem

[f] Die Drehimpulsprojektion in diesen Ansätzen erübrigt sich bei Anwendung auf das Friedberg-Lee-Modell natürlich, da dieses nur ein skalares, isoskalares Mesonfeld enthält.

Zweck umskaliert werden.

$$\sigma(r) \to \Lambda_\sigma \sigma(r) \qquad \phi(r) \to \Lambda_\phi \phi(r) \qquad \chi(r) \to \Lambda_\chi \chi(r) \tag{4.62}$$

Die Λ's sind Variationsparameter. Die Quarkfelder, $u(r)$ und $v(r)$, werden durch Lösen der 'Mean-Field-Diracgleichung'

$$\frac{\partial}{\partial r} u(r) = -\left[\varepsilon + \left(\frac{g}{\Lambda_\chi \chi(r)}\right)^p \left(\Lambda_\sigma \sigma(r) + f_\pi\right)\right] v(r) + \left(\frac{g}{\Lambda_\chi \chi(r)}\right)^p u(r) \Lambda_\phi \phi(r) \tag{3.30a'}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} v(r) = -\frac{2}{r} v(r) + \left[\varepsilon - \left(\frac{g}{\Lambda_\chi \chi(r)}\right)^p \left(\Lambda_\sigma \sigma(r) + f_\pi\right)\right] u(r) - \\ - \left(\frac{g}{\Lambda_\chi \chi(r)}\right)^p v(r) \Lambda_\phi \phi(r) \tag{3.30b'}$$

ermittelt, welche die umskalierten Mesonfelder (4.62) enthält. Die Ruheenergie des Nukleons bzw. Deltas wird eine Funktion der Variationsparameter Λ_σ, Λ_ϕ und Λ_χ und kann optimiert werden. Der Eigenwert ε der Quarks wird wie in Abschnitt 3.2 beschrieben durch die Bedingung

$$\int_0^\infty dr\, r^2 \left(u^2(r) + v^2(r)\right) = 1 \tag{4.63}$$

festgelegt. Die Lösung des Systems (3.30a'–3.30b') erfolgt durch Hinzunahme der beiden nichtlinearen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial r} N(r) = \frac{\partial}{\partial r} \int_0^r d\rho\, \rho^2 \left(u^2(\rho) + v^2(\rho)\right) \tag{4.64a}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} = 0 \tag{4.64b}$$

mit den Randwertbedingungen

$$\lim_{r \to 0} N(r) = 0 \qquad \lim_{r \to \infty} N(r) = 1 \tag{4.64c}$$

zur linearen Diracgleichung. Dies garantiert, daß der Code, der zur numerischen Lösung des Differentialgleichungssystems verwendet wird, nicht die triviale Lösung der Diracgleichung wählt. Die Randwertbedingungen (3.31a) und (3.31h), denen die Quarkfelder genügen müssen, können daher beibehalten werden, und es ist nicht notwendig einen Anfangswert vorzusehen wie in Ref. 40.

Bild 4.3 und Bild 4.4 zeigen die radialen Quark- und Mesonfunktionen für beide Verfahren, Mean-Field Näherung und VaP(a)-Methode für einen ausgewählten Parametersatz des CD-Modells. Die Form der Quarkfelder wird durch die VaP(a)-Prozedur nur leicht verändert. Die Felder sind gegenüber denjenigen der Mean-Field Approximation am Ursprung etwas schwächer, besitzen jedoch eine größere Ausdehnug. Im Gegensatz zur geringfügigen Verstärkung des colour-dielektrischen Feldes $\chi(r)$ (Bild 4.4), werden die die Amplituden der chiralen Felder, $\sigma(r)$ und $\phi(r)$, durch die Optimierung der projizierten Energie erheblich angehoben. Diese Verstärkung der chiralen Felder ist für eine deutliche Verbesserung einiger Observabler im Hinblick auf die Übereinstimmung mit dem Experiment verantwortlich (siehe Kapitel 5).

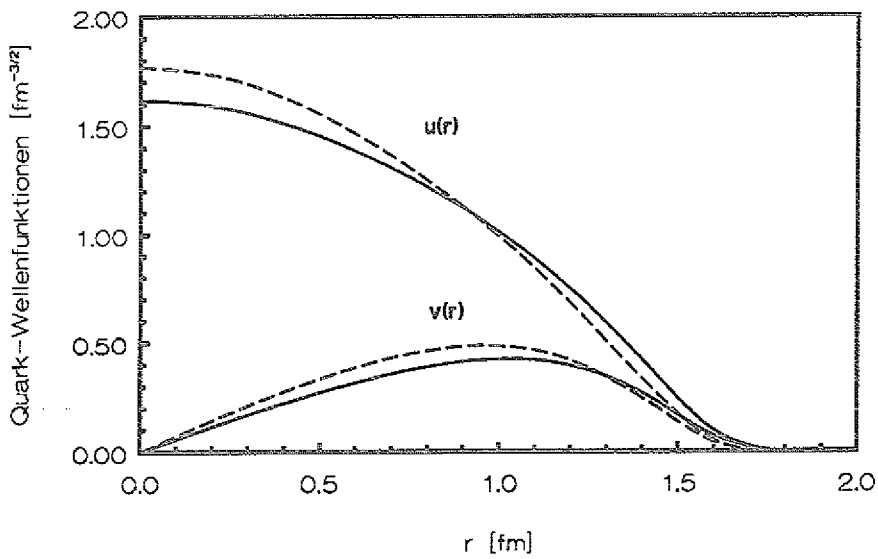


Abb. 4.3: Quarkfelder für die Projektionsmethoden VbP und VaP(a)

Die radialen Spinorfelder, $u(r)$ und $v(r)$, im CD-Modell für den Parametersatz $g = 0.059$ GeV, $\eta = 0.06$, $\gamma = 0.04$ und $m_\chi = 1.4$ GeV sind hier aufgetragen. Die gestrichelte Kurve zeigt die Mean-Field-Lösung, die in der VbP-Methode verwendet wird, die durchgezogene Linie bezieht sich auf die VaP(a)-Methode (Erläuterungen im Text).

Das hier vorgestellte Verfahren, das näherungsweise eine Variation nach der Projektion erlaubt, beinhaltet keine unabhängige Variation der Quarkfelder wie sie von Lübeck et al.[39] durchgeführt wurde, die die Ausdehnug der Quarkfelder wie auch das Verhältnis von großer und kleiner Komponente des Quarkspinors parametrisierten, garantiert jedoch ein Minimum der projizierten Energie. Kitagawa[94] hat eine Verbesserung dieser Variationsverfahren[(g)] vorgeschlagen, die zu einer Lösung des Peierls-Yoccoz-Problems (zumindest im nichtchiralen CD-Modell) beiträgt. In unserem Fall jedoch würde das Verfahren von Kitagawa zu einem kaum noch vertretbaren numerischen Aufwand führen, da in wir im Gegensatz zu Ref. 94 eine chiral invariante Version des CD-Modells hier betrachten.

Leech und Birse[40] haben auch die Breite des CD-Feldes, $\chi(r) \to \lambda\chi(r/\mu)$, untersucht, jedoch

[(g)] Die Methode Kitagawas beruht auf der Gauss'schen Momentenentwicklung des Norm- und Energieüberlapps bis zu Termen der Ordnung P^2. Die Lösung der Bewegungsgleichungen, die aus der Variation der auf diese Weise approximativ projizierten Energie resultieren, werden in den exakten Ausdruck für die projizierte Energie wieder eingesetzt. Die höheren Terme der Gauss'schen Momentenentwicklung finden in einer weiteren Variation, die durch einen Parameter charakterisiert ist, Berücksichtigung. Dieses doppelte Variationsverfahren führt auf nahezu übereinstimmende Werte der statischen und dynamischen Massen, M_0 und M^*.

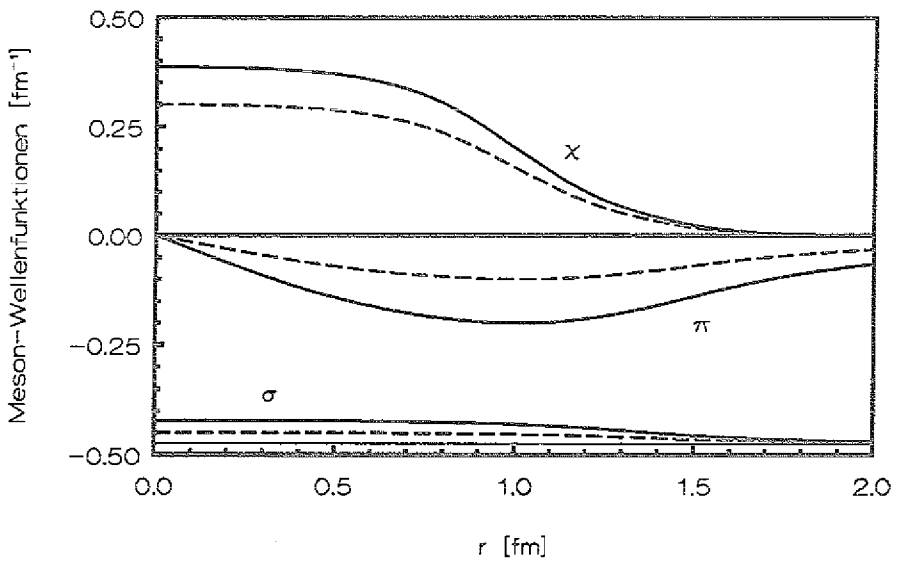


Abb. 4.4: Bosonfelder für die Projektionsmethoden VbP und VaP(a)

Gezeigt werden die radialen bosonischen Funktionen $\sigma(r)$, $\phi(r)$ und $\chi(r)$ für den gleichen Parametersatz wie in Bild 4.3. Die Variationsparameter, die durch die Optimierung der projizierten Energie bestimmt werden, sind: $\Lambda_\sigma = 2.29$, $\Lambda_\phi = 2.02$ und $\Lambda_\chi = 1.29$

festgestellt, daß der Variationsparameter μ für ein Minimum der projizierten Energie immer nahe bei eins liegt ($\mu \simeq 1$). Fiolhais et al.[49] haben die Amplitude des Pion-Feldes variiert, um ein Minimum der (hier nur spin- und isospin-) projizierten Energie, berechnet im Gell-Mann-Lévy-Modell im Rahmen eines verallgemeinerten Hedgehog-Ansatzes, zu finden. Wiederum spielte eine von der Mean-Field Näherung abweichende Breite des Pion-Feldes nur eine sehr geringe Rolle. Wir variieren hier daher nur die Amplituden der mesonischen Funktionen und nicht auch deren Ausdehnung, um die Zahl der Variationsparameter und damit den numerischen Aufwand (Rechenzeit) in Grenzen zu halten, obwohl wir versuchsweise verschiedene (fixierte) Breiten der Boson-Felder ausprobierten, was jedoch zu keinen signifikanten neuen Resultaten führte.

5. Statische Observable in chiralen Valenzquarkmodellen

In Kapitel 3 haben wir die klassischen solitonischen Lösungen des chiral invarianten colour-dielektrischen Modells und des linearen σ-Modells vorgestellt und diskutiert. Auf der Grundlage dieser Lösungen haben wir mit Hilfe eines kanonischen Quantisierungsverfahrens MFA-Fockzustände konstruiert, die jedoch die Translations- und Rotationsinvarianz der Hamiltonoperatoren verletzen, d. h. keine Eigenzustände der entsprechenden Symmetrieoperatoren sind. Um simultane Eigenzustände aller Symmetrieoperatoren zu erzeugen, sind in Kapitel 4 Projektionsmethoden entwickelt worden, die die Konstruktion baryonischer Modellzustände mit definiertem Spin und Isospin sowie die Beseitigung spurioser Schwerpunktseffekte aus den MFA-Lösungen erlauben. Statische Observable des Nukleons und der Δ-Resonanz, wie Ruheenergie, Ladungsradien, magnetische Momente etc., können als Erwartungswerte der jeweiligen Operatoren im projizierten Zustand berechnet werden. Hierin finden entweder die Mean-Field Lösungen Verwendung (VbP) oder die Wellenfunktionen, die aus dem VaP(a)-Verfahren stammen.

Beide chiral invarianten Modelle, die wir hier untersuchen, enthalten einige Parameter. Zwei dieser Parameter, die Pion-Masse $m_\pi = 0.140$ GeV und die Pion-Zerfallskonstante $f_\pi = 0.093$ GeV, erhalten ihre experimentellen Werte. Die beiden weiteren Parameter des Gell-Mann-Lévy-Modells, die Sigma-Masse m_σ und die Quark-Meson-Kopplungskonstante g, werden als freie Parameter des Modells aufgefaßt, und die Abhängigkeit der Observablen von diesen Größen in den folgenden Abschnitten ausführlich gezeigt. Im Gegensatz zum linearen σ-Modell ist im CD-Modell die Masse des σ-Feldes nur von untergeordneter Bedeutung, und wir haben ihr dort den Wert $m_\sigma = 1.2$ GeV zugeordnet. Die Masse des CD-Feldes, m_χ, die Größen η und γ, die die Selbstwechselwirkungsenergie des χ-Feldes festlegen, und die Quark-Meson-Kopplungskonstante g sowie der Exponent p der $1/\chi$-Kopplung des CD-Feldes an die Quarks werden als freie Parameter des CD-Modells betrachtet. Es ist jedoch in einem weiten Bereich eine 'Balance' der Parameter zu beobachten. Eine Absenkung der Kopplungskonstanten g beispielsweise kann durch eine geeignete Anhebung von γ, d. h. durch eine Verschiebung des lokalen Minimums von $U(\chi)$, kompensiert werden und führt auf ähnliche Wellenfunktionen für Quarks und Mesonen, vorausgesetzt die anderen Parameter bleiben ungeändert. Es ist daher möglich verschiedene Parametersätze zu finden, die alle zu vergleichbaren Ergebnissen für die Observablen führen[76,95]und darüberhinaus gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten zu erzielen. Wir beschränken unsere Untersuchung des CD-Modells daher im wesentlichen auf einen Parametersatz. Der Exponent der $1/\chi$-Kopplung erhält den Wert $p = 1$. Die Masse des χ-Feldes legen wir mit $m_\chi = 1.4$ GeV fest, ein Wert, den auch Gittereich-Rechnungen nahelegen[96,97]. Schießlich benutzen wir noch $\eta = 0.06$ und $\gamma = 0.04$ und untersuchen die Abhängigkeit der Observablen von der Quark-Meson-Kopplungskonstanten g.

Nachdem wir kurz auf das Normüberlappintegral eingehen, wenden wir uns der Berechnung der Ruhemassen des Nukleons und der Δ-Resonanz zu. In Abschnitt 5.2 gehen wir auf die elektromagnetischen Eigenschaften des Nukleons, Ladungsradien und magnetische Momente von Proton und Neutron, und in Abschnitt 5.3 auf die axialen Eigenschaften (Axialvektorkopplungskonstante

g_A) ein. Virialtheoreme bieten die Möglichkeit die Qualität der verwendeten Näherungsverfahren (Variationsmethoden) zu testen und festzustellen wie gut ein Eigenzustand von H approximiert wird. Die Berechnung der Nukleon-Pion-Nukleon-Kopplungskonstanten $g_{\pi NN}$ aus dem Quell- wie dem Feldterm führt auf ein solches Virialtheorem. Thema des Abschnitts 5.5 ist die isoskalare axiale Kopplungskonstante g_A^0 und der Zusammenhang mit der Spinstrukturfunktion des Protons. In den letzten beiden Abschnitten dieses Kapitels befassen wir uns mit der hadronischen Massenaufspaltung zwischen Proton und Neutron und dem Pion-Nukleon-Sigma-Term.

Der Überlapp zwischen gedrehten und verschobenen Zuständen kann als Produkt von Faktoren geschrieben werden, die jeweils nur Quark-, π-, σ- und χ-Funktionen enthalten. Der Ansatz (4.38) für ein Baryon im Ruhesystem führt mit Gl. (4.11) auf

$$\langle J=T, M=J, q=0 | J=T, M=J, q=0 \rangle = \delta^3(0)\mathcal{N}_{J=T}(q=0) \tag{5.1}$$

für den Überlapp. Da uns hier nur die Berechnung von Erwartungswerten interessiert ist der relevante Teil des Normüberlappintegrals durch

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{J=T}(q=0) &= \int d^3a \int d^3\Omega\, \mathcal{D}^T_{TT}(\Omega)^* \langle \Psi_{hh} | U(a) R(\Omega) | \Psi_{hh} \rangle \\ &= \int d^3a \int d^3\Omega\, \mathcal{D}^T_{TT}(\Omega)^* \left[n_q(a)\mathcal{N}_q(\Omega)\right]^3 \left[n_\pi(a)\mathcal{N}_\pi(\Omega, a)\right] n_\sigma(a) n_\chi(a)\end{aligned} \tag{5.2}$$

gegeben, worin eine Drehung im Isospinraum betrachtet wurde. Die Überlappfunktionen $n_q(a)$, $\mathcal{N}_q(\Omega)$, $n_\sigma(a)$, $n_\pi(a)$ und $\mathcal{N}_\pi(\Omega, a)$ sind in Anhang D aufgeführt. Da das Gell-Mann-Lévy-Modell natürlich kein CD-Feld enthält, ist in Gl. (5.2) $n_\chi(a) \equiv 1$ zu setzen, um den entsprechenden Ausdruck für dieses Modell zu erhalten. Den Ausdrücken(D.29), (D.30a–k), (M.1) und (M.24) entnimmt man die Normüberlappintegrale für das Nukleon und die Δ-Resonanz.

$$\mathcal{N}_{J=T=\frac{1}{2}}(q=0) = 2\pi \int_0^\infty da\, a^2 n(a) \int_{-1}^{+1} ds\, \frac{e^{-z}}{z} \Big(I_1(z) + I_2(z) \Big) \tag{5.3a}$$

$$\mathcal{N}_{J=T=\frac{1}{2}}(q=0) = 2\pi \int_0^\infty da\, a^2 n(a) \int_{-1}^{+1} ds\, \frac{e^{-z}}{z} \Big(I_1(z) + 4I_2(z) + 3I_3(z) \Big) \tag{5.3b}$$

worin $n(a) = n_q^3(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) n_\chi(a)$ und $I_k(z)$ die modifizierten Besselfunktionen[98,89] sind.

5.1. Ruhemasse des Nukleons und der Δ-Resonanz

Die Ruheenergien des Nukleons und des Δ sind durch die Erwartungswerte des normalgeordneten Hamiltonoperators im simultan auf Spin $J = \frac{1}{2}$ (bzw. $J = \frac{3}{2}$), Isospin $T = J$ und linearen Impuls $q = 0$ projizierten Hedgehog-Zustand gegeben. Benutzt man die Invarianz des Hamiltonoperators unter Drehungen und Translationen, so findet man

$$E_{J=T}(q=0) = M_{J=T} = \frac{\langle \Psi_{hh} | : H : P_{q=0} P_{JJ} | \Psi_{hh} \rangle}{\mathcal{N}_{J=T}(q=0)}\,. \tag{5.4}$$

Die Hamiltonoperatoren der beiden Modelle bestehen aus verschiedenen Anteilen (Gln. (3.5a–e), (3.6) und (3.7a–c) in Abschnitt 3.1), für die wir die Erwartungswerte in den projizierten Zuständen

zu berechnen haben. Der Quarkanteil H_q, der die kinetische Energie der Quarks und die Quark-Meson-Wechselwirkungsenergie umfaßt, ist durch

$$\frac{\langle \Psi_{hh} | : H_q : P_{q=0} P_{JJ} | \Psi_{hh} \rangle}{\mathcal{N}_{J=T}(q=0)} = 3\varepsilon \tag{5.5}$$

gegeben, vorausgesetzt der Spinor $q(r)$ ist eine Lösung der Diracgleichung (Gl. (3.22a–d) oder (3.30a–e)) mit den Feldern $\sigma(r)$ und $\phi(r)$ bzw. $\sigma(r)$, $\phi(r)$ und $\chi(r)$. Die Berechnung der Erwartungswerte des Mexican-Hat-Potentials und der kinetischen Energie der Mesonfelder sowie auch der Quarkfelder im projizierten Zustand (4.30) wird in Anhang E gezeigt. Das Ergebnis für den Erwartungswert der Selbstwechselwirkung des CD-Feldes wird dort nicht explizit aufgeführt. Dessen Berechnung verläuft jedoch völlig analog zu derjenigen, die wir bei Termen der Art $\hat{\sigma}^n$ (Selbstwechselwirkungstermen des skalaren isoskalaren σ-Feldes) auszuführen haben.

Ein wichtiger Aspekt des Projektionsformalismus ist es, daß sich seine Resultate mit Hilfe einfacher Summenregeln überprüfen lassen. Für den Erwartungswert eines skalaren isoskalaren Operators S im Mean-Field-Hedgehog-Zustand

$$S_{MF} = \frac{\langle \Psi_{hh} | : S : | \Psi_{hh} \rangle}{\langle \Psi_{hh} | \Psi_{hh} \rangle} \tag{5.6}$$

erhalten wir mit der Zerlegung (4.26)[a]

$$S_{MF} = \sum_{JM} \frac{|c_J|^2}{\langle \Psi_{hh} | \Psi_{hh} \rangle} \frac{\langle \Psi_{hh} | : S : P_{JM} | \Psi_{hh} \rangle}{\langle \Psi_{hh} | P_{JM} | \Psi_{hh} \rangle} \tag{5.7}$$

und mit

$$c_J = \langle \Psi_{hh} | P_{JJ} | \Psi_{hh} \rangle \tag{5.8}$$

sowie der Beobachtung, daß das Matrixelement $\langle \Psi_{hh} | : S : P_{JM} | \Psi_{hh} \rangle = \langle \Psi_{hh} | : S : P_{JJ} | \Psi_{hh} \rangle$ unabhängig von M ist,

$$\sum_J (2J+1) \frac{\langle \Psi_{hh} | : S : P_{JJ} | \Psi_{hh} \rangle}{\langle \Psi_{hh} | : S : | \Psi_{hh} \rangle} = 1 \tag{5.9}$$

Ist S der Einheitsoperator ($S \equiv 1$), so folgt aus Gl. (5.9) die Summenregel für die Norm.

$$\sum_J \mathcal{P}_J = \sum_J (2J+1) \frac{\langle \Psi_{hh} | P_{JJ} | \Psi_{hh} \rangle}{\langle \Psi_{hh} | \Psi_{hh} \rangle} = 1 \tag{5.10}$$

$\mathcal{P}_J$ ist die Wahrscheinlichkeit einen Zustand mit Spin J und Isospin $T = J$ im Hedgehog-Zustand zu finden. Hat man $S \equiv H$, so ergibt sich die Summenregel für die Energie.

$$\sum_J \mathcal{E}_J = \sum_J (2J+1) \frac{\langle \Psi_{hh} | : H : P_{JJ} | \Psi_{hh} \rangle}{\langle \Psi_{hh} | : H : | \Psi_{hh} \rangle} = 1 \tag{5.11}$$

---

[a] Wir verwenden hier normierte Eigenzustände des Spin- und Isospinoperators $|JM - M\rangle = P_{JM}|\Psi_{hh}\rangle / \langle \Psi_{hh} | P_{JJ} | \Psi_{hh} \rangle^{1/2}$.

Die Gln. (5.9–5.11) lassen sich leicht auf den allgemeineren Fall einer simultanen Projektion auf Spin, Isospin und linearen Impuls $q = 0$ übertragen.

$$\sum_J \mathcal{P}_{J,q=0} = \sum_J (2J+1) \frac{\langle \Psi_{hh} | P_{JJ} P_{q=0} | \Psi_{hh} \rangle}{\langle \Psi_{hh} | P_{q=0} \Psi_{hh} \rangle} = 1 \tag{5.10'}$$

$$\sum_J \mathcal{E}_{J,q=0} = \sum_J (2J+1) \frac{\langle \Psi_{hh} | : H : P_{JJ} P_{q=0} | \Psi_{hh} \rangle}{\langle \Psi_{hh} | : H : P_{q=0} \Psi_{hh} \rangle} = 1 \tag{5.11'}$$

In Tab. 5.1 sind die Wahrscheinlichkeiten $\mathcal{P}_J$, $\mathcal{P}_{J,q=0}$ sowie $\mathcal{E}_J$ und $\mathcal{E}_{J,q=0}$ für Zustände $J = T \leq 7/2$. aufgelistet.

Projektion	J,T		$J,T,q=0$	
$J=T$	$\mathcal{P}_J$	$\mathcal{E}_J$	$\mathcal{P}_{J,q=0}$	$\mathcal{E}_{J,q=0}$
1/2	0.326	0.286	0.377	0.328
3/2	0.468	0.449	0.483	0.468
5/2	0.170	0.206	0.122	0.169
7/2	0.032	0.042	0.017	0.032
$\sum_{J=1/2}^{7/2}$	0.996	0.991	0.999	0.997

Tab. 5.1: Summenregeln für Norm und Energie im Gell-Mann-Lévy-Modell
Für den Parametersatz $g = 4.5$ und $m_\sigma = 1.0$ GeV sind die Wahrscheinlichkeiten $\mathcal{P}_J$, $\mathcal{P}_{J,q=0}$ sowie $\mathcal{E}_J$ und $\mathcal{E}_{J,q=0}$ (siehe Text) angegeben.

Bemerkenwert ist, daß die Summen im Fall der kombinierten Projektion auf Spin, Isospin und Impuls $q = 0$ (Gln. (5.10′) und (5.11′)) signifikant schneller konvergieren als dies bei reiner Drehimpulsprojektion der Fall ist. Die Wahrscheinlichkeit einen Nukleon- oder Δ-Zustand im Hedgehog-Fockzustand zu finden wird also durch die Impulsprojektion angehoben, diejenige einen Zustand mit höherem Spin und Isospin $J = T$ zu finden entsprechend abgesenkt.

Die Ruheenergien des Nukleons und der Δ-Resonanz sind die beiden einzigen Größen im linearen σ-Modell, die signifikant durch die Projektion auf den Impuls $q = 0$ beinflußt werden (siehe Bild 5.1). Eine einfache Drehimpulsprojektion (JT-Projektion) führt auf eine Nullpunktsenergie, d. h. Absenkung der Nukleonenergie im Vergleich zur Mean-Field-Energie, von etwa 200 MeV[49,79,47]. Aufgrund des skalaren isoskalaren Charakters des σ-Feldes, trägt der Anteil des Hamiltonoperators, der das freie σ-Feld beschreibt,

$$\mathcal{H}_\sigma = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + m_\sigma \sigma^2\right) \tag{5.12}$$

nicht zur Korrelationsenergie bei. Der Erwartungswert von $\mathcal{H}_\sigma$ im JT-projizierten Zustand ist also der gleiche wie im Mean-Field-Fockzustand. Wird jedoch eine JTq-Projektion ausgeführt, also Schwerpunktskorrekturen für diesen Term berücksichtigt, so treten Korrelationsenergien von

ca. 500 Mev auf (siehe Tab. 5.2). Während die Energieabsenkungen der übrigen Terme (E_q, E_π, E_{qm} und E_{NL}) des Hamiltonoperators durchaus nicht vernachlässigbar sind, sich jedoch teilweise gegenseitig wieder aufheben (negative Vorzeichen der Terme E_{qm} und E_{NL}), ist die Absenkung der Energie des freien σ-Feldes, die durch die Impulsprojektion bewirkt wird, besonders signifikant. Dies ist die wesentliche Ursache dafür, daß die Energie des Nukleons durch alle drei Projektionen insgesamt um etwa 400–500 MeV abgesenkt wird.

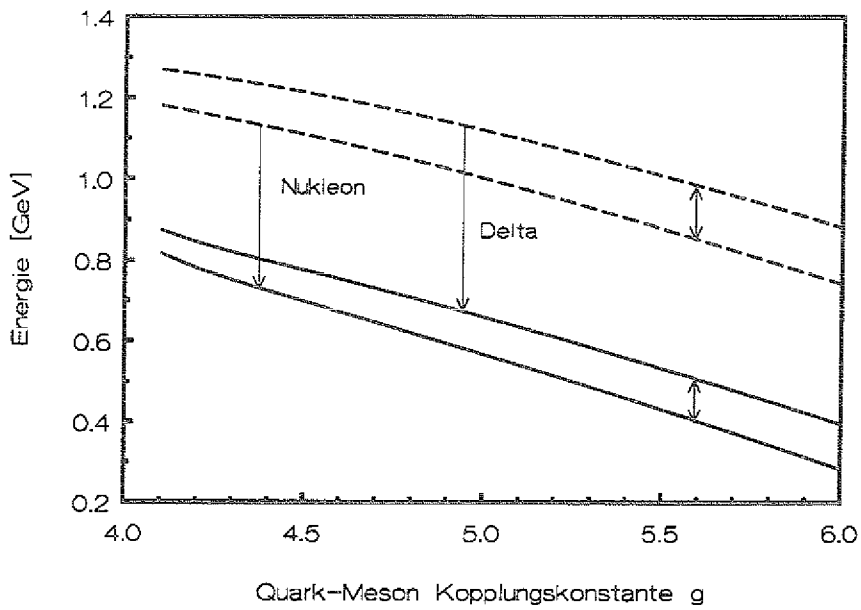


Abb. 5.1: Ruhemasse des Nukleons und der Δ-Resonanz im σ-Modell

Die gestrichelten Kurven beziehen sich auf Größen, die aus einer reinen Drehimpuls-(JT-) Projektion hervorgehen, während durchgezogene Kurven auf Größen verweisen, die simultan einer zusätzlichen Impuls-(JTq-) Projektion unterworfen wurden. Die abwärtsgerichteten ↓-Pfeile verbinden Zustände mit gleichem Spin und Isospin und ihre Länge entspricht der spuriosen Schwerpunktsenergie. Die ↕-Doppelpfeile zeigen die N-Δ-Aufspaltung für $m_\sigma = 1.0$ GeV.

Um die experimentelle Masse des Nukleons $M_N = 0.938$ GeV zu reproduzieren, ist es notwendig, die Masse des σ-Feldes nicht zu groß zu wählen (siehe Bild 5.2), und die Quark-Meson-Kopplungskonstante nahe bei g_{krit} zu belassen

Der in Tab. 5.3 aufgeführte Parametersatz $m_\sigma = 0.6$ GeV und $g = 4.1$ stellt eine optimale Wahl dar, falls die $JTq = 0$-projizierte Energie des Nukleonmodell-Zustandes an die experimentelle Energie angepaßt werden soll. Im Fall der JT-Projektion ist dies der Parametersatz $g = 5.0$ und $m_\sigma = 1.2$ GeV. Die Abhängigkeit anderer Observabler von den Parametern g und m_σ ist deutlich schwächer ausgeprägt, wie wir in den folgenden Abschnitten noch sehen werden. Die N-Δ-Aufspaltung, die für eine reine Drehimpulsprojektion allenfalls die Hälfte ihres experimentellen Wertes erreicht, ist ebenfalls stark vom gewählten Parametersatz abhängig und schrumpft im

	$J=T=\frac{1}{2}$		$J=T=\frac{3}{2}$	
Projektion auf	J,T	$J,T,q=0$	J,T	$J,T,q=0$
E_q [GeV]	1.035	0.780	1.035	0.796
E_σ [GeV]	1.446	0.921	1.446	0.946
E_π [GeV]	0.269	0.144	0.413	0.240
E_{qm} [GeV]	-0.591	-0.336	-0.591	-0.352
E_{NL} [GeV]	-1.049	-0.810	-1.088	-0.854
$\sum E_i$ [GeV]	1.109	0.698	1.214	0.776

Tab. 5.2: Zusammensetzung der N-und Δ-Energie im σ-Modell

Die aufgelisteten Energien E_q, E_σ, E_π, E_{qm} und E_{NL} sind die Erwartungswerte des gemäß Gl. (3.3) zerlegten Hamiltonoperators des Gell-Mann-Lévy-Modells für den Parametersatz $g=4.5$ und $m_\sigma=1.0$ GeV.

Parameter	$g=4.1$ $m_\sigma=0.6$ GeV		$g=4.1$ $m_\sigma=1.2$ GeV		Experiment
Projektion	J, T	J, T, $q=0$	J, T	J, T, $q=0$	
E_N [GeV]	1.149	0.930	1.191	0.758	0.938
$E_\Delta - E_N$ [GeV]	0.062	0.034	0.090	0.063	0.294
Parameter	$g=5.0$ $m_\sigma=0.6$ GeV		$g=5.0$ $m_\sigma=1.2$ GeV		Experiment
Projektion	J, T	J, T, $q=0$	J, T	J, T, $q=0$	
E_N [GeV]	0.980	0.655	1.014	0.525	0.938
$E_\Delta - E_N$ [GeV]	0.118	0.085	0.110	0.087	0.294

Tab. 5.3: Energie des Nukleons und N-Δ-Aufspaltung im linearen σ-Modell

Fall der $JTq=0$-Projektion auf 1/3–1/4 der experimentellen Aufspaltung. Es scheint als ob der Beitrag des π-Feldes in den betrachteten chiralen Modellen allein nicht ausreicht den experimentellen Wert der N-Δ-Aufspaltung zu erklären[(b)]. Weitere, hier nicht berücksichtigte Effekte, wie Gluon-Korrekturen[53,59] oder die Ankopplung von Vektormesonen[56] können diese Situation jedoch verbessern.

[(b)]Im Gegensatz zu den Peierls-Yoccoz-Projektionstechniken führt das semiklassische Quantisierungsverfahren (Cranking-Modell) auf wesentlich größere Werte der Δ-N-Aufspaltung[53,51] $E_\Delta - E_N \sim 200-250$ Mev. Th. Meißner [83] hat ein effektives chirales Modell mit Diracsee (Nambu-Jona-Lasinio-Modell) ebenfalls mit Hilfe des Cranking-Modells untersucht, jedoch keine Schwerpunktskorrekturen berücksichtigt. Die experimentelle Δ-N-Aufspaltung anzupassen stellt dort keine Schwierigkeit dar.

Tab. 5.2 entnehmen wir, daß die relative Absenkung der Energie des π-Feldes, E_π, durch die Impulsprojektion zwar größer als diejenige des σ-Feldes, aber aufgrund der wesentlich geringeren Masse des π-Feldes absolut nicht sehr bedeutsam ist. Stern und Clément[53] vertreten die Ansicht, daß die Fluktuationen des σ-Feldes durch kohärente Zustände nicht gut beschrieben werden und behandeln das σ-Feld deshalb als klassisches Feld (keine Quantenfluktuationen).

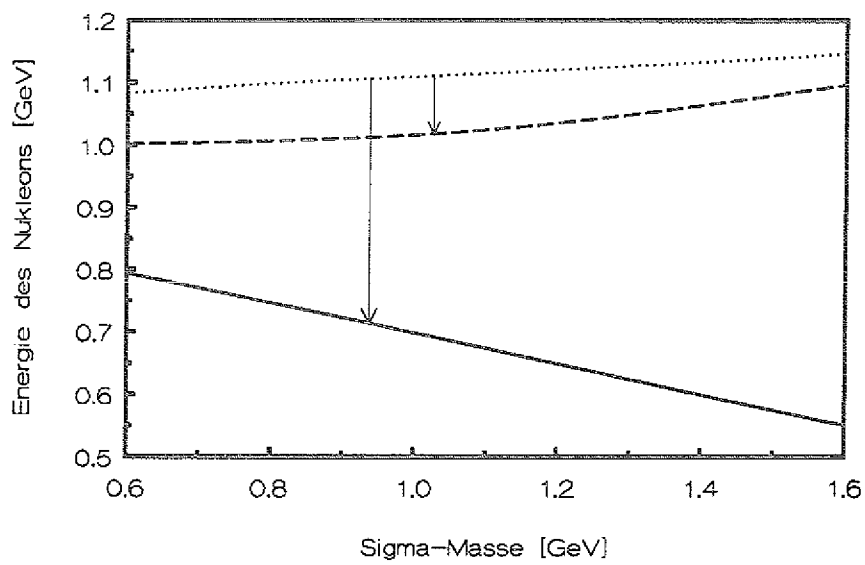


Abb. 5.2: Energie des Nukleons versus m_σ im Gell-Mann-Lévy-Modell

Die JT-projizierte Energie des Nukleons hängt nur wenig von der Masse des σ-Feldes ab (punktierte Kurve). Im Gegensatz dazu weist die Ruhenergie des Nukleons, die man aus der $JT\mathbf{q} = 0$-Projektion erhält, eine große Abhängigkeit von m_σ auf (durchgezogene Kurve). Die Nullpunktsenergie wächst mit zunehmender Masse des σ-Feldes stark an. Wird jedoch das σ-Feld keiner Impulsprojektion unterworfen, so ergeben sich sehr viel geringere Nullpunktsenergien (gestrichelte Kurve). Die Quark-Meson-Kopplungskonstante ist hier $g = 4.5$.

Folgen wir diesem Vorschlag und führen keine Impulsprojektion des σ-Feldes aus, so entfallen die großen Nullpunktsenergien, die aus der Projektion des Terms (5.12) resultieren (siehe Tab. 5.4), und die Korrelationsenergien sind entsprechend kleiner[c].

---

[c] Die Ausdrücke für die projizierte Energie und die aus dem Quellterm berechnete projizierte Nukleon-Pion-Nukleon-Kopplungskonstante $g^s_{\pi NN}$, die sich ergeben, falls eine Projektion des σ-Feldes vernachlässigt wird, erhält man aus den entsprechenden Ausdrücken in Anhang E und Anhang J, indem man in diese $\sigma(r_\pm) = \sigma(r)$ und $n_\sigma(a) \equiv 1$ einsetzt. Die Ergebnisse für Ladungsradien, magnetische Momente etc. aber auch für die Axialvektorkopplungskonstante — dort tritt der σ-Feldoperator explizit auf — sind formal die gleichen, mit Ausnahme der Tatsache, daß der Normüberlapp für das σ-Feld entfällt, d. h. wie oben $n_\sigma(a) \equiv 1$ gilt.

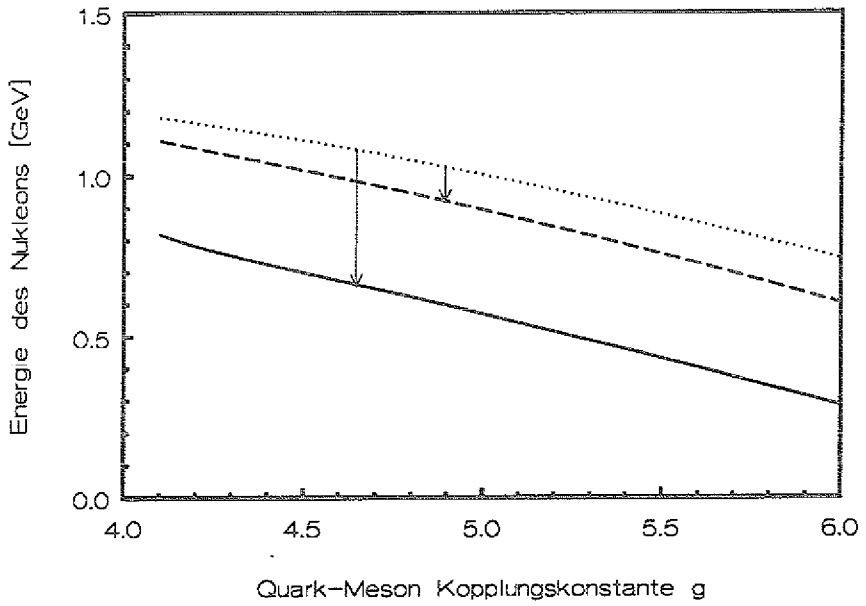


Abb. 5.3: Effekte der Projektion des σ-Feldes im Gell-Mann-Lévy-Modell

Die Zuordnung der Kurven ist hier dieselbe wie in Bild 5.2. Die Absenkung der Energie des Nukleons durch die Impulsprojektion war bereits in Bild 5.1 aufgetragen. Werden Schwerpunktskorrekturen für das σ-Feld nicht vorgenommen, so resultiert dies in erheblich höheren Werten der 'Ruheenergie' des Nukleons. Die Masse des σ-Feldes beträgt hier $m_\sigma = 1.0$ GeV.

Parameter	$g = 4.1$ $m_\sigma = 0.6$ GeV		$g = 4.1$ $m_\sigma = 1.2$ GeV		Experiment
Projektion	J, T	J, T, $q = 0$	J, T	J, T, $q = 0$	
E_N [GeV]	1.149	1.101	1.191	1.121	0.938
$E_\Delta - E_N$ [GeV]	0.062	0.027	0.090	0.041	0.294
Parameter	$g = 5.0$ $m_\sigma = 0.6$ GeV		$g = 5.0$ $m_\sigma = 1.2$ GeV		Experiment
Projektion	J, T	J, T, $q = 0$	J, T	J, T, $q = 0$	
E_N [GeV]	0.980	0.872	1.014	0.916	0.938
$E_\Delta - E_N$ [GeV]	0.118	0.069	0.110	0.059	0.294

Tab. 5.4: Ruheenenergie des Nukleons und Δ-N-Aufspaltung im σ-Modell ohne Projektion des σ-Feldes für verschiedene Parametersätze

Die Masse des Nukleons dem experimentellen Wert anzupassen fällt nun natürlich sehr leicht, und es ist nicht mehr notwendig eine Quark-Meson-Kopplungskonstante zu wählen, die nahe am kritischen Wert g_{krit} liegt. Dies ist im Hinblick auf die Tatsache, daß die Energien in einem

VbP-Verfahren berechnet wurden, interessant, da ein realistischeres VaP-Verfahren eine weitere Energieabsenkung vermuten läßt, und die Masse des Nukleons dann dem experimentellen Wert kaum mehr angepaßt werden kann. Die anderen Observablen des Nukleons werden durch die Vernachlässigung der Schwerpunktskorrekturen für das σ-Feld kaum beinflußt. Der Nachteil dieser Methode besteht darin, daß die spuriosen Schwerpunktseffekte, die in der Mean-Field-Lösung des σ-Feldes vorhanden sind, nun nicht beseitigt werden. Um auch diese Effekte zu berücksichtigen, ohne die Größe der Nullpunktsenergie drastisch zu überschätzen, wie dies durch die hier verwendeten Approximationen möglicherweise geschieht, schlagen Stern und Clément[53] vor, die Quantenfluktuationen des σ-Feldes in einer Random-Phase-Approximation[80] zu behandeln.

Banerjee und Ren[99] fanden, daß der Erwartungswert des Quadrates des Impulsoperators, $\langle P_\sigma^2 \rangle$, drastisch reduziert wird, falls eine (One-Loop-) distordierte Basis anstatt der Basis aus ebenen Wellen zur Beschreibung der Quantenfluktuationen des σ-Feldes verwendet wird. Dies könnte bedeuten, daß die Energieabsenkung, die durch die Impulsprojektion verursacht wird, erheblich geringer ausfällt, falls eine bessere Basis für das σ-Feld gewählt wird.

Bisher haben wir die Meson-Feldoperatoren in einer translations- und rotationsinvarianten Basis aus ebenen Wellen entwickelt und diese zur Formulierung kohärenter Zustände benutzt. Erwartungswerte der Feldoperatoren zwischen gleichen kohärenten Zuständen, $\langle \sigma | : \hat{\sigma}^n(x) : | \sigma \rangle = \sigma^n(x)$, sind unabhängig von der Wahl der Basis, da alle divergenten Beiträge zum Erwartungswert, die durch die Quantenfluktuationen der kohärenten Zustände verursacht werden, durch die Normalordnung der Feldoperatoren beseitigt werden. Überlappintegrale, wie z. B. $\langle \sigma | U(a) | \sigma \rangle$, hängen jedoch explizit von der gewählten Basis ab, und wir wollen im Folgenden den Grad an Willkür untersuchen, der durch die Wahl einer speziellen Basis entsteht. Von einem technischen Standpunkt aus betrachtet ist die Basis aus ebenen Wellen zu bevorzugen, da der Überlapp zwischen gedrehten und verschobenen Vakuumzuständen identisch eins ist. Vom physikalischen Standpunkt jedoch ist die Basis, die von den Eigenmoden des Solitons gebildet wird, hervorgehoben, da sie den lokalisierten Charakter des Solitons wiederspiegelt und als ein erster Schritt zu Loop-Korrekturen aufgefaßt werden kann. Projektionsrechnungen in einer solchen Basis führen jedoch auf erhebliche technische Probleme und sind bisher niemals praktisch ausgeführt worden. Um dennoch ein Gefühl für die zu erwartenden Effekte zu entwickeln, benutzen wir zu Vergleichsmöglichkeiten eine Basis, die sehr viel einfacher (harmonischer Oszillator) zu handhaben ist, aber nichtsdestoweniger die endliche Ausdehnung des Systems wiederspiegelt. Auch auf der Grundlage dieser Basis sollen keine Projektionsrechnungen durchgeführt werden, sondern wir entwickeln die mesonischen Feldoperatoren in dieser Basis, konstruieren kohärente Zustände und berechnen die Erwartungswerte des Quadrates des Impulsoperators, $\langle \Psi_{hh} | : P_m^2 : | \Psi_{hh} \rangle$, in beiden Basen, um diese miteinander zu vergleichen.

Die Quantenzustände eines freien Teilchens, Lösungen der freien Klein-Gordon-Gleichung

$$\left[-\nabla^2 + m^2 \right] \psi(x) = 0 \,, \tag{5.13}$$

beschreiben die Wechselwirkung des quantisierten mesonischen Feldes mit dem Baryon nicht. Um eine solche Wechselwirkung zu simulieren, die Bewegung eines Mesons in einem lokalisierten Feld,

modifizieren wir die Klein-Gordon-Gleichung.

$$\left[-\nabla^2 + m^2 + V(r)\right] \psi(x) = \varepsilon^2 \psi(x) \tag{5.14}$$

Die Lösungen der Gl. (5.14) bilden ein vollständiges Orthonormalsystem und wir entwickeln die Meson-Feldoperatoren und deren konjugierte Impulse

$$\hat{\sigma}(x) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_n^\sigma}} \left(f_n(x) a_n + f_n^*(x) a^\dagger \right) \tag{5.15a}$$

$$\hat{p}_\sigma(x) = -\imath \sum_n \frac{\sqrt{\varepsilon_n^\sigma}}{2} \left(f_n(x) a_n - f_n^*(x) a^\dagger \right) \tag{5.15b}$$

$$\hat{\vec{\pi}}(x) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_n^\pi}} \left(g_n(x) \vec{b}_n + g_n^*(x) \vec{b}^\dagger \right) \tag{5.15c}$$

$$\hat{\vec{p}}_\pi(x) = -\imath \sum_n \frac{\sqrt{\varepsilon_n{}^\pi}}{2} \left(g_n(x) \vec{b}_n - g_n^*(x) \vec{b}^\dagger \right) \tag{5.15d}$$

in diesem Fundamentalsystem. Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren erfüllen die kanonischen Vertauschungsregeln und der 0–Teilchen-Zustand in dieser Basis ist wie üblich definiert: $a_n|0\rangle = \vec{b}_n|0\rangle = 0$. Kohärente Hedgehog-Zustände können nun, wie in Anhang B beschrieben, konstruiert werden. Die Erwartungswerte $\langle \Psi_{hh}| : P_m^2 : |\Psi_{hh}\rangle$, worin

$$P_\sigma = \frac{1}{2} \int d^3x \, [\hat{p}_\sigma(x) \nabla \hat{\sigma}(x) + \nabla \hat{\sigma}(x) \hat{p}_\sigma(x)] \tag{5.16a}$$

$$P_\pi = \frac{1}{2} \int d^3x \, \left[\hat{\vec{p}}_\pi(x) \cdot \nabla \hat{\vec{\pi}}(x) + \nabla \hat{\vec{\pi}}(x) \cdot \hat{\vec{p}}_\pi(x)\right] \tag{5.16b}$$

ist, lassen sich berechnen, sobald eine Basis spezifiziert ist (siehe Anhang F).

Die Entwicklung dieser Erwartungswerte erfordert einen vollständigen orthonormierten Satz Lösungen (deren Anzahl unendlich ist) der Klein-Gordon-Gleichung (5.14). Aus diesem Grund ist es wünschenswert eine analytische Lösung zu haben, um den Rechenaufwand zu begrenzen. Wir verwenden daher inGl. (5.14) für $V(r)$ das Potential des harmonischen Oszillators

$$V(r) = \alpha^4 r^2 \tag{5.17}$$

mit $\alpha = \sqrt{m\omega}$. Die Klein-Gordon-Gleichung

$$\left[-\nabla^2 + m^2\omega^2 r^2\right] \psi(x) = \left(\varepsilon^2 - m^2\right) \psi(x) \tag{5.18}$$

läßt sich mit der Variablentransformation ($p = -\imath \nabla$)

$$x_i' = \alpha x_i = \sqrt{m\omega}\, x_i \tag{5.19a}$$

$$p_i' = \frac{p_i}{\alpha} = \frac{p_i}{\sqrt{m\omega}} \tag{5.19b}$$

$$E' = \frac{\varepsilon^2 - m^2}{2\alpha^2} = \frac{\varepsilon^2 - m^2}{2m\omega} \tag{5.19c}$$

auf die Form

$$\frac{1}{2}\left(p'^2 + x'^2\right)\psi(x) = E'\psi(x) \tag{5.20}$$

bringen. Die Lösungen[100] dieser Gleichung, deren Energieeigenwerte durch

$$E' = 2n + l + \frac{3}{2} \tag{5.20d}$$

gegeben sind, sind:

$$\psi(x) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\Omega) \tag{5.20e}$$

mit

$$R_{nl} = N_{nl}\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{\mu}\binom{n}{\mu}\frac{(2l+1)!!}{(2l+2\mu+1)!!}(\alpha r)^{2\mu+l}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2 r^2} \tag{5.20f}$$

worin

$$N_{nl}^2 = \frac{\alpha^3}{\sqrt{\pi}}\frac{2^{l-n+2}}{n!}\frac{(2l+2n+1)!!}{[(2l+1)!!]^2} \tag{5.20g}$$

eine Normierungskonstante ist. Die Lösungen sind orthonormiert, d. h. es gilt insbesondere:

$$\int_0^\infty dr\, r^2 R_{nl}(r)R_{n'l'}(r) = \delta_{nn'}\delta_{ll'} \tag{5.21}$$

Damit die mesonischen Felder eine ähnliche Ausdehnung durch die Lösung der Klein-Gordon-Gleichung (5.20) erhalten, wie sie durch die selbstkonsistente Mean-Field-Lösung zugrunde gelegt wird, passen wir den Parameter ω des harmonischen Oszillatorpotentials so an, daß $V(r)$ mit der radialen Form der mesonischen Funktion $\sigma(r)$ im Bereich $0 \le r \le r_{inf}$ übereinstimmt, worin r_{inf} der Wendepunkt der Funktion $\sigma(r)$ ist. Das heißt, wir haben das Minimum des Ausdrucks

$$S(\omega) = \int_0^{r_{inf}} dr\,(\sigma(r) - V_\omega(r))^2 \tag{5.22}$$

in Abhängigkeit von ω zu bestimmen. Für die Parameterbereiche $4.0 \le g \le 6.0$ und $0.6 \le m_\sigma \le 2.0$ GeV findet man Werte des Potentialparameters ω zwischen 160 und 200 MeV.

Die Erwartungswerte $\langle : P_\sigma^2 : \rangle$ und $\langle : P_\pi^2 : \rangle$ können nun unter Beachtung der Hedgehog-Struktur der Meson-Felder berechnet werden, wobei verschiedene Funktionen ψ_n und Dispersionsrelationen ε_n entsprechend den unterschiedlichen Massen, m_π und m_σ, Verwendung finden. In einer Basis aus ebenen Wellen erhalten wir für die Erwartungswerte:

$$\langle \Psi_{hh} | : P_\sigma^2 : | \Psi_{hh} \rangle = \int_0^\infty dp\, p^4 \omega_\sigma(p)\left[\int_0^\infty dr\, j_0(pr)\sigma(r)\right]^2 \tag{5.23a}$$

$$\langle \Psi_{hh} | : P_\pi^2 : | \Psi_{hh} \rangle = \int_0^\infty dp\, p^4 \omega_\pi(p)\left[\int_0^\infty dr\, j_1(pr)\phi(r)\right]^2 \tag{5.23b}$$

Die Erwartungswerte, berechnet in einer Basis aus Oszillatorfunktionen, finden sich in Anhang F.

Die Ergebnisse sind in Tab. 5.5 und Bild 5.4 zusammengefaßt. Obwohl die Normalordnung der Feldoperatoren bezüglich unterschiedlicher Vakua erfolgt, weichen die Ergebnisse für die beiden

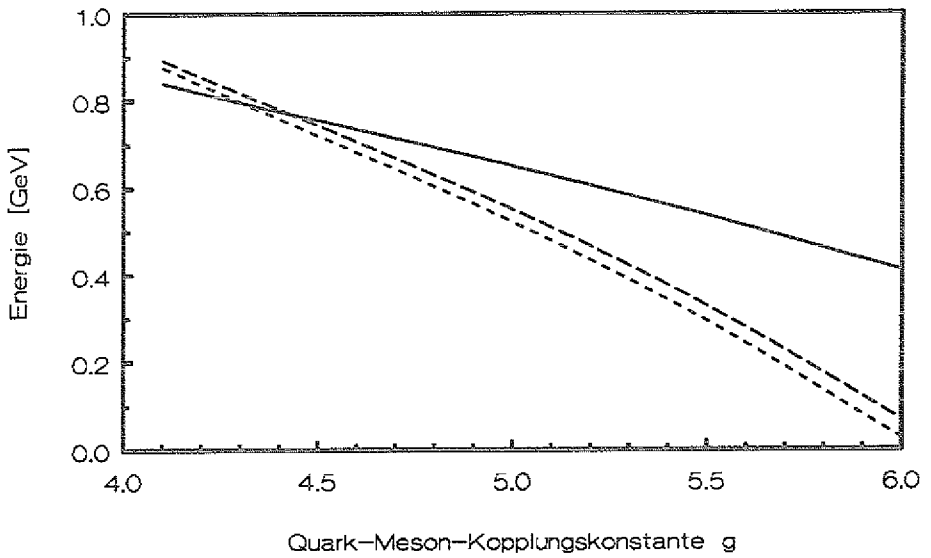


Abb. 5.4: Schwerpunktskorrekturen zur Mean-Field-Energie für verschiedene Basissysteme im linearen σ-Modell

Die durchgezogene Linie gibt die auf den Impuls $q = 0$ projizierte Energie des Hedgehog-Baryons (keine Drehimpulsprojektion) an. Schwerpunktskorrekturen zur Mean-Field-Energie des Hedgehog-Zustands sind gemäß Gl. (5.24) für eine Basis aus ebenen Wellen (langgestrichelte Kurve) und für eine Basis aus Oszillatorwellenfunktionen (kurzgestrichelte Kurve) aufgetragen.

Basissysteme nur geringfügig voneinander ab (siehe Tab. 5.5). Darüberhinaus haben wir den Erwartungswert des quadrierten Impulsoperators der Quarkfelder

$$\langle \Psi hh | : \boldsymbol{P}_q^2 : | \Psi_{hh} \rangle = 3 \int d^3x \, \nabla q^\dagger(x) \cdot \nabla q(x) \,, \tag{5.23c}$$

dessen Wert mit den addierten Werten der Mesonfelder vergleichbar ist, berechnet und eine Abschätzung der Korrekturen für die Hedgehog-Energie gemäß

$$M = E_{MF} - \frac{\langle \Psi_{hh} | : \boldsymbol{P}_q^2 + \boldsymbol{P}_\sigma^2 + \boldsymbol{P}_\pi^2 : | \Psi_{hh} \rangle}{2E_{MF}} \tag{5.24}$$

vorgenommen (siehe Bild 5.4). Diese Korrekturen sind mit denjenigen zu vergleichen, die von einer (reinen) Impulsprojektion des Hedgehog-Zustands herrühren. Die Korrekturen, die aus der Verwendung unterschiedlicher Basissysteme resultieren, stimmen in einem weiten Bereich der Kopplungskonstante g nahezu überein, aber diese Korrekturen sind im Vergleich zu denen, die sich aus einer Impulsprojektion ergeben, für Kopplungskonstanten $g > 4.5$ viel zu groß. Da beide Basissätze für die obigen Größen zu sehr ähnlichen Ergebnissen führen, darf man hoffen, daß die Projektionsrechnungen, die auf einem Basissystem ebener Wellen fußen, eine zuverlässig Approximation sind.

Parameter	$g = 4.5 \quad m_\sigma = 1.2$ GeV	
Basen	ebene Wellen	Oszillatorbasis
$\langle P_q^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ [GeV] *	0.817	0.817
$\langle P_\sigma^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ [GeV]	0.636	0.673
$\langle P_\pi^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ [GeV]	0.540	0.547
E_{MF} [GeV]	1.278	1.278
M [GeV]	0.744	0.721
E_{hh} $(q = 0)$ [GeV]	0.756	
Parameter	$g = 4.5 \quad m_\sigma = 0.6$ GeV	
Basen	ebene Wellen	Oszillatorbasis
$\langle P_q^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ [GeV] *	0.724	0.724
$\langle P_\sigma^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ [GeV]	0.464	0.503
$\langle P_\pi^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ [GeV]	0.407	0.417
E_{MF} [GeV]	1.206	1.206
M [GeV]	0.830	0.812
E_{hh} $(q = 0)$ [GeV]	0.872	

Tab. 5.5: Erwartungswerte des Quadrates des Impuloperatoren

*Zusätzlich zu den Erwartungswerten der quadrierten Impulsoperatoren, die mittels kohärenter Zustände berechnet wurden, die auf einem Fundamentalsystem aus ebenen Wellen oder Oszillatorfunktionen basieren, sind die korrigierte Masse des Hedgehog-Baryons und die impulprojizierte Hedgehogenergie aufgelistet. Der Erwartungswert des quadrierten Impulsoperators der Quarkfelder (gekennzeichnet mit dem Symbol *) ist in einer Basis aus gebundenen Spinorwellenfunktionen (Lösungen der Diracgleichung) berechnet.*

Wie im linearen σ-Modell ist im chiralen colourdielektrischen Modell die Ruheenergie diejenige Größe, die am stärksten durch die Projektion auf den Impuls $q = 0$ beinflußt wird. Betrachtet man eine JT–Projektion, die auf die Mean-Field-Lösungen angewendet wird (VbP), so beobachtet man nur sehr geringe Nullpunktsenergien. Die Energie des Nukleons liegt in diesem Fall nur ca. 30 MeV unterhalb der Mean-Field-Energie. Dies ist hauptsächlich auf das sehr schwache Pion-Feld zurückzuführen. Eine exakte Variation der JT–projizierten Energie (VaP) — dies bedeutet, die entsprechenden Integro-Differentialgleichungen zu lösen — führt auf eine weitere Reduktion der Energie des Nukleons um etwa 20 MeV, was auf eine nicht geringe Verstärkung der pionischen Funktion $\phi(r)$ hindeutet (siehe Tab. 5.6). Korrelationsenergien von 250–300 MeV erhält man durch simultane Projektion der Mean-Field-Lösungen auf J, T und $q = 0$ und eine weitere Abnahme der Nukleonenergie von ca. 130 MeV, falls das VaP(a)-Verfahren verwendet wird. Die Situation im CD-Modell ist also von derjenigen des linearen σ-Modells grundlegend verschieden, wo eine

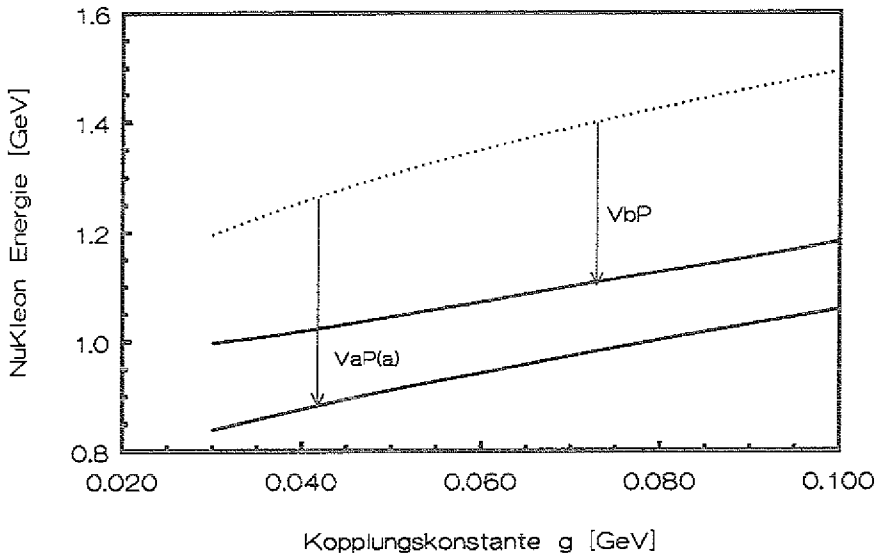


Abb. 5.5: Ruhemasse des Nukleons im CD-Modell

Die Energie des Nukleons, berechnet mit den Mean-Field-Lösungen (VbP) oder mit dem VaP(a)-Verfahren, ist als Funktion der Quark-Meson-Kopplungskonstanten dargestellt. Die Länge der abwärtsgerichteten Pfeile deutet die Größe der Korrelationsenergie bezogen auf die Mean-Field-Energie (punktierte Kurve) an, die sich für die unterschiedlichen Variationsverfahren (VbP und VaP(a)) bei simultaner Projektion auf $J = T = 1/2$ und $q = 0$ ergibt. Die Modellparameter sind: $m_\sigma = 1.2$ GeV, $m_\chi = 1.4$ GeV, $\eta = 0.06$ und $\gamma = 0.04$

Projektionsmethode	VbP		VaP(a)		Experiment
Projection onto	J,T	J,T,q	J,T *	J,T,q	
E_N [GeV]	1.318	1.069	1.296	0.939	0.939
$E_\Delta - E_N$ [GeV]	0.024	0.018	0.047	0.051	0.293

Tab. 5.6: Energie des Nukleons und Δ-N-Aufspaltung im CD-Modell

*Die Variation der projizierten Energie führt auf eine Verstärkung des Pion-Feldes und bewirkt eine Vergrößerung der Δ-N-Aufspaltung. Der Parametersatz ist derselbe wie in Bild 5.5 ($g = 0.059$ GeV). Die Größen, in der mit dem Symbol * bezeichneten Spalte, gehen aus exakter Variation der projizierten Energie hervor.*

JT–Projektion für die Hälfte der Korrelationsenergie von etwa 500 MeV verantwortlich ist.

Da das CD-Modell ein dynamisch erzeugtes Confinement beinhaltet, lassen sich viele unterschiedliche Parametersätze finden, die alle in der Lage sind die experimentelle Nukleonenergie wiederzugeben. Die Δ-N-Aufspaltung jedoch ist viel zu gering. Dies ist auf das schwach aus-

geprägte π-Feld zurückzuführen, das auch durch die VaP-Verfahren nicht ausreichend verstärkt wird, um die Aufspaltung zu erklären. Wir haben hier das gleiche Problem wie im linearen σ-Modell und müssen weitere, hier nicht berücksichtigte, Effekte in die Theorie mit aufnehmen, wie beispielsweise Gluonkorrekturen oder Vektormesonen, um die Δ-N-Aufspaltung zu erklären.

5.2. Elektromagnetische Eigenschaften des Nukleons

Die wichtigste Informationsquelle über die in der Natur auftretenden Teilchen ist die Analyse der Streuung dieser Teilchen durch andere Teilchen oder Felder. Bedeutendstes Hilfsmittel dieser Analyse sind die Feynmandiagramme, deren Regelwerk durch die Lagrangefunktion des Systems definiert ist. Diese Regeln beinhalten sowohl die Definition der Propagatoren aller beteiligten Teilchen wie auch der Vertexfunktionen.

Der Vertex für die Wechselwirkung eines ausgedehnten Systems, das eine innere Struktur besitzt, mit den Quanten eines äußeren Feldes kann in Analogie zur Wechselwirkung punktförmiger Teilchen mit diesen Feldquanten konstruiert werden. In erster Ordnung Störungsentwicklung der Kopplungskonstanten ist daher der Vertex, der die Wechselwirkung von Nukleonen mit einem externen Feld beschreibt, durch

$$\Gamma^{\mu}_{i\to f}(p,p') = \langle\, N_f(p')|J^{\mu}(0)|N_i(p)\,\rangle \tag{5.25}$$

gegeben, worin die Komponenten des Lorentzvektors $\Gamma^{\mu}_{i\to f}(p,p')$ willkürliche komplexe Funktionen der Impulse p' und p sind. Der Strom J^{μ} kann hierin der elektromagnetische Strom, der Pion-Strom oder auch der axiale Strom sein. Die Definition der Formfaktoren beruht auf der Annahme, daß Nukleonen durch Diracspinoren beschrieben werden, die im Gegensatz zu punktförmigen Spin–1/2–Teilchen in nichtlokaler Weise mit den Quanten des externen Feldes wechselwirken, d. h. die Wechselwirkung hängt vom Impuls der Feldquanten ab. Die allgemeinste Form der Vertexfunktion für die elastische Streuung von Nukleonen lautet[101] dann:

$$\Gamma^{\mu}_{i\to f}(p,p') = \langle\, N_f(p')|J^{\mu}(0)|N_i(p)\,\rangle = \bar{u}_f(p')F^{\mu}(p,p')u_i(p) \tag{5.26}$$

In Gl. (5.26) ist $F^{\mu}(p,p')$ eine Funktion der Impulse p und p' sowie ein Operator im Raum der Diracspinoren, u_f und u_i sind Diracspinoren

$$u(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix}\chi_s\\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\chi_s\end{pmatrix} \tag{5.27}$$

und i und f sind Quantenzahlen, die den Anfangs- und Endzustand des Nukleons (Spin und Isospin) charakterisieren. Für einen der wichtigsten Streuprozesse, die elastische Elektron-Nukleon-Streuung, sollen im Folgenden die elektromagnetischen Formfaktoren abgeleitet und deren Momente, Ladungsradien und magnetische Momente des Nukleons, im Rahmen der betrachteten baryonischen Modelle berechnet werden.

Aus den 4er-Vektoren p und p' können zwei linear unabhängige (Lorentz-) Vektoren und ein (Lorentz-) Skalar gebildet werden.

$$p^{\mu}_{+} = (p'+p)^{\mu} \tag{5.28a}$$

$$p_-^\mu = (p' - p)^\mu \tag{5.28b}$$
$$p_-^2 = q^2 \tag{5.28c}$$

Mit p_- und p_+ sowie den Matrizen γ^μ, γ^5 und $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ kann man 12 linear unabhängige 4er-Vektoren[d] konstruieren[101].

$$\begin{array}{ll}
(1)\ p_+^\mu & (7)\ \gamma\cdot p_- p_+^\mu \\
(2)\ p_-^\mu & (8)\ \gamma\cdot p_+ p_+^\mu \\
(3)\ \gamma^\mu & (9)\ \gamma\cdot p_- p_-^\mu \\
(4)\ \sigma^{\mu\nu} p_+^\mu & (10)\ \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\gamma^5\gamma_\nu p_{+\,\lambda}\, p_{-\,\sigma} \\
(5)\ \sigma^{\mu\nu} p_-^\mu & (11)\ \gamma\cdot p_+ \gamma\cdot p_- p_+^\mu \\
(6)\ \gamma\cdot p_+ p_-^\mu & (12)\ \gamma\cdot p_+ \gamma\cdot p_- p_-^\mu
\end{array} \tag{5.29}$$

Die Funktion $F^\mu(p,p')$ kann nun in der Form

$$F^\mu(p,p') = \sum_{i=1}^{12} F_i'(q^2) v_i^\mu(p,p') \tag{5.30}$$

geschrieben werden, worin die v_i^μ den Satz linear unabhängiger Vektoren repräsentiert und $F_i'(q^2)$ willkürliche komplexe Funktionen des Skalars q^2 sind.

Da u_f und u_i Lösungen der Diracgleichung

$$(\gamma\cdot p - m_i)\, u_i(p) = 0 \qquad \bar{u}_f(p')\,(\gamma\cdot p' - m_f) = 0 \tag{5.31}$$

sind, läßt sich die Anzahl der Ausdrücke $\bar{u}_f(p') v_j^\mu u_i(p)$ erheblich reduzieren. Aus den Beziehungen

$$\bar{u}_f(p')\gamma\cdot p_\pm u_i(p) = \bar{u}_f(p')\,(m_f \pm m_i)\, u_i(p) \tag{5.32a}$$
$$\bar{u}_f(p')\,(\gamma\cdot p_+)\,(\gamma\cdot p_-)\, u_i(p) = \bar{u}_f(p')\left(m_f^2 - m_i^2 - 2m_i m_f + 2p\cdot p'\right) u_i(p) \tag{5.32b}$$
$$\bar{u}_f(p')\sigma^{\mu\nu} p_{\pm\,\nu} u_i(p) = i\,\bar{u}_f(p')\left[(\pm m_i - m_f)\,\gamma^\mu + p_\mp^\mu\right] u_i(p) \tag{5.32c}$$

und mit Hilfe der Formel

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\gamma^5\gamma_\nu = \frac{1}{3}\left(\sigma^{\lambda\sigma}\gamma^\mu + \sigma^{\sigma\mu}\gamma^\lambda + \sigma^{\mu\lambda}\gamma^\sigma\right) \tag{5.32d}$$

folgt, daß sich die Ausdrücke $\bar{u}_f(p') v_j^\mu u_i(p)$ $j = (4), \ldots, (12)$ auf diejenigen für $j = (1), (2), (3)$ zurückführen lassen, d. h.

$$\langle N_f(p')|J_{em}^\mu(0)|N_i(p)\rangle = \bar{u}_f(p')\left[F_1'(q^2)p_+^\mu + F_2'(q^2)p_-^\mu + F_3'(q^2)\gamma^\mu\right] u_i(p) \tag{5.33}$$

Der Ausdruck (5.33) ergibt sich allein aus der Tatsache, daß $\langle N_f(p')|J_{em}^\mu(0)|N_i(p)\rangle$ ein Lorentzvektor ist und die Nukleonen auf der Massenschale liegen, also $p^2 = m_i^2$ und $p'^2 = m_f^2$ gilt.

---

[d] Mit Hilfe gruppentheoretischer Methoden kann man zeigen, daß keine weiteren linear unabhängigen Vektoren existieren.

Weitere einschränkende Bedingungen ergeben sich aus der Hermitizität des Stromes J^{μ}_{em}.

$$\langle N_f(p')|J^{\mu}_{em}(0)|N_i(p)\rangle = \langle N_i(p)|J^{\mu}_{em}(0)|N_f(p')\rangle^* \tag{5.34}$$

Für einen beliebigen Operator $O^{\mu}_{i\to f}(p,p')$ bedeutet dies:

$$\bar{u}_f(p')O^{\mu}_{i\to f}(p,p')u_i(p) = \left[\bar{u}_i(p)O^{\mu}_{f\to i}(p',p)u_f(p')\right]^{\dagger} = \bar{u}_f(p')\left[\gamma_0\left(O^{\mu}_{i\to f}(p,p')\right)^{\dagger}\gamma_0\right]u_i(p) \tag{5.35}$$

Falls Anfangs- und Endzustand die gleiche Masse haben, gilt $F'_j(q^2)_{i\to f} = F'_j(q^2)_{f\to i}$, und es ist:

$$F'_1(q^2) = F'_1(q^2)^* \qquad F'_2(q^2) = -F'_2(q^2)^* \qquad F'_3(q^2) = F'_3(q^2)^* \tag{5.36}$$

Aus der Erhaltung des Stroms

$$\partial_\mu J^{\mu}_{em}(x) = 0 \Rightarrow \partial_\mu\left[e^{ix\cdot P}J^{\mu}_{em}(0)e^{ix\cdot P}\right] = 0 \Rightarrow \left[P_\mu, J^{\mu}_{em}(0)\right] = 0 \tag{5.37}$$

folgern wir mit Hilfe der Diracgleichung und der Tatsache, daß die Fockzustände $|N_i(p)\rangle$ und $|N_f(p')\rangle$ Eigenzustände des Impulsoperators P^{μ} sind, daß

$$\begin{aligned}&\langle N_f(p')|\left[P_\mu, J^{\mu}_{em}(0)\right]|N_i(p)\rangle = \\ &= \bar{u}_f(p')\left[F'_1(q^2)\left(m_f^2 - m_i^2\right) + F'_2(q^2)p^2_- + F'_3(q^2)\left(m_f - m_i\right)\right]u_i(p) = 0\end{aligned} \tag{5.38}$$

und damit $F'_2(q^2) = 0$, falls $m_f = m_i = M_N$.

Definiert man die reellen Funktionen

$$F_1(q^2) = 2M_N F'_1(q^2) + F'_3(q^2) \tag{5.39a}$$

$$F_2(q^2) = -2M_N F'_1(q^2) \tag{5.39b}$$

und benutzt die Identität

$$(p+p')^{\mu} = \gamma\cdot p'\gamma^{\mu} + \gamma^{\mu}\gamma\cdot p - i\sigma^{\mu\nu}\left(p'-p\right)_{\nu}\ , \tag{5.39c}$$

so ergibt sich für die Vertexfunktion der elastischen Elektron-Nukleon-Streuung:

$$\langle N_f(p')|\ J^{\mu}_{em}(0)|N_i(p)\rangle = \bar{u}_f(p')\left[F_1(q^2)\gamma^{\mu} + i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}\frac{F_2(q^2)}{2M_N}\right]u_i(p) \tag{5.40}$$

Den Vertex für die Streuung eines punktförmigen Teilchens erhält man zurück, falls in Gl. (5.40) $F_1(q^2) = 1$ und $F_2(q^2) = 0$ gesetzt wird. Die Abweichung der Formfaktoren von diesen Werten kann somit als Maß für die Ausdehnung eines Teilchens aufgefaßt werden.

Die bisherigen Betrachtungen sind in allen Systemen gültig. Für die Ausführung praktischer Rechnungen jeoch hat sich herausgestellt, daß das Breit-System am geeignetsten ist. Dieses System ist dadurch definiert, daß die Zeitkomponente des Impulsübertrags q null ist.

$$\begin{aligned} p' &= \left(E, +\frac{q}{2}\right) \qquad & q &= (0,q) \\ p &= \left(E, -\frac{q}{2}\right) \qquad & E &= \sqrt{M_N^2 + \frac{q^2}{4}} \end{aligned} \tag{5.41}$$

Benutzen wir den expliziten Ausdruck (5.27) für die Spinoren, so hat die Vertexfunktion im Breit-System die Form:

$$\langle N_f(+\tfrac{q}{2})|\, J^0_{em}(0)|N_i(-\tfrac{q}{2})\rangle = (\chi_s)^\dagger_f\,(\chi_s)_i\left[F_1(q^2) - \frac{q^2}{4M_N^2}F_2(q^2)\right] \tag{5.42a}$$

$$\langle N_f(+\tfrac{q}{2})|\, J_{em}(0)|N_i(-\tfrac{q}{2})\rangle = (\chi_s)^\dagger_f\,\frac{\imath\,\sigma\times q}{2M_N}\,(\chi_s)_i\left[F_1(q^2) + F_2(q^2)\right] \tag{5.42b}$$

Die Sachs-Formfaktoren[102]

$$G_E(q^2) = F_1(q^2) + \frac{q^2}{4M_N^2}F_2(q^2) \tag{5.43a}$$

$$G_M(q^2) = F_1(q^2) + F_2(q^2) \tag{5.43b}$$

stellen eine Verbindung zu experimentell zugänglichen Daten (Ladung und magnetisches Moment) her.

Parameter	$g = 4.1$ $m_\sigma = 0.6$ GeV		$g = 4.1$ $m_\sigma = 1.2$ GeV		Experiment
Projektion auf	J, T	J, T, q	J, T	J, T, q	
$\langle r_c^2\rangle_p$ [fm^2]	0.97	0.88	0.69	0.66	0.74
$\langle r_c^2\rangle_n$ [fm^2]	-0.030	-0.031	-0.046	-0.047	-0.12
μ_p [n. m.]	2.27	2.43	2.31	2.47	2.79
μ_n [n. m.]	-1.70	-1.76	-1.81	-1.90	-1.91
$\mu_p/\lvert\mu_n\rvert$	1.33	1.38	1.28	1.30	1.46
Parameter	$g = 5.0$ $m_\sigma = 0.6$ GeV		$g = 5.0$ $m_\sigma = 1.2$ GeV		Experiment
Projektion auf	J, T	J, T, q	J, T	J, T, q	
$\langle r_c^2\rangle_p$ [fm^2]	0.65	0.59	0.58	0.54	0.74
$\langle r_c^2\rangle_n$ [fm^2]	-0.064	-0.063	-0.076	-0.074	-0.12
μ_p [n. m.]	2.46	2.61	2.45	2.56	2.79
μ_n [n. m.]	-1.98	-2.02	-2.04	-2.06	-1.91
$\mu_p/\lvert\mu_n\rvert$	1.24	1.29	1.20	1.25	1.46

Tab. 5.7: Ladungsradien und magnetische Momente im linearen σ-Modell

Für verschiedene Parametersätze sind die Ladungsradien und magnetischen Momente von Proton und Neutron aufgelistet

Ladungsradien und magnetische Momente von Proton und Neutron werden nun durch Entwicklung des elektrischen bzw. magnetischen Formfaktors ermittelt.

$$G_E(q^2) = G_E(0) - \frac{1}{6}\langle r_c^2\rangle q^2 + \mathcal{O}(q^4) \tag{5.44a}$$

$$G_M(q^2) = \imath\,\frac{\alpha}{2M_N}G_M(0) + \mathcal{O}(q^3) \tag{5.44b}$$

In Gl. (5.44a) ist $G_E(0)$ die Ladung des Nukleons und in Gl. (5.44b) haben wir abkürzend $\alpha = \langle \chi_s | \sigma | \chi_s \rangle$ verwendet. Das magnetische Moment μ ist durch $G_M(0) = 2M_N\mu$ gegeben. Wie in Abschnitt 4.2 bereits dargelegt wurde, erhalten wir den Modellzustand für ein Nukleon mit Impuls p durch Projektion des Hedgehog-Zustands auf den Spin (Isospin) $J = T$ und $M_J = -M_T$ und nachfolgende Projektion auf den linearen Impuls p.

$$|N_\alpha(p)\rangle \rightarrow |p, JTM\rangle = P_q P_{JM} |\Psi_{hh}\rangle = P_q |\Psi_{JM}\rangle \tag{5.45}$$

Die detaillierte Berechnung der Ladungsradien und der magnetischen Momente für das Proton und das Neutron mit dem Ansatz (5.45) ist in Anhang H und Anhang I aufgeführt.

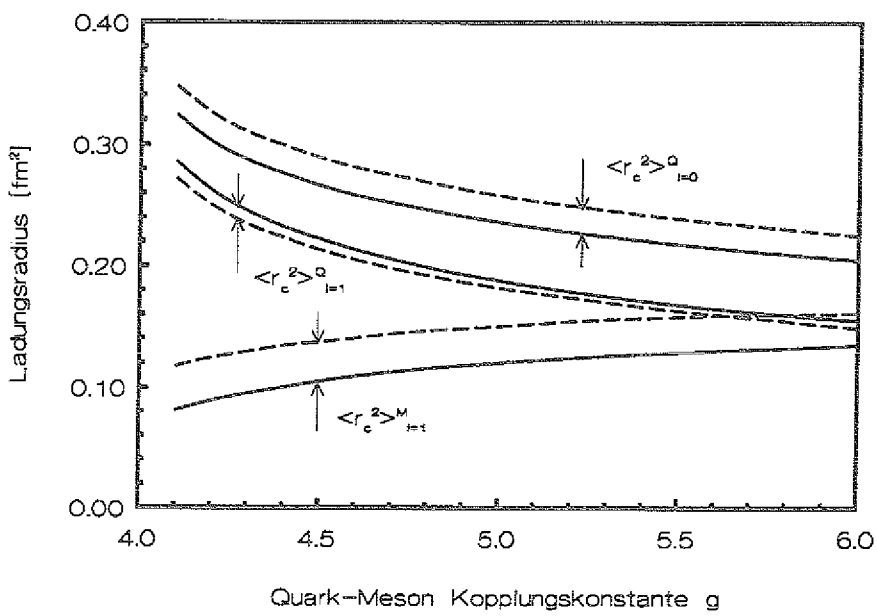


Abb. 5.6: Isospinanteile des Ladungsradius im linearen σ-Modell

Für den Parameterwert $m_\sigma = 1.0$ GeV sind die isoskalaren und isovektoriellen Anteile des Ladungsradius, die von den Quark- und Mesonanteilen des elektromagnetischen Stroms herrühren, gegen die Quark-Meson Kopplungskonstante g aufgetragen. Die gestrichelten Linien resultieren aus einer J,T–Projektion, die durchgezogenen Kurven aus der simultanen J,T,q–Projektion

Die Ergebnisse für das Gell-Mann-Lévy-Modell sind in den Bildern 5.2.1–5 und in Tab. 5.7 zusammengestellt. Die Effekte, die durch die Berücksichtigung der spuriosen Schwerpunktsbewegungen auftreten, werden dann besonders deutlich, wenn man die isoskalaren und isovektoriellen Anteile betrachtet, aus denen sich die Ladungsradien und die magnetischen Momente des Protons und Neutrons zusammensetzen (Bild 5.6 und Bild 5.7).

Die J,T,q–Projektion bewirkt eine Absenkung des isoskalaren Quarkanteils $\langle r_c^2 \rangle^Q_{I=0}$ und des isovektoriellen Mesonanteils $\langle r_c^2 \rangle^M_{I=1}$ des Ladungsradius um etwa 15%, während der isovektorielle

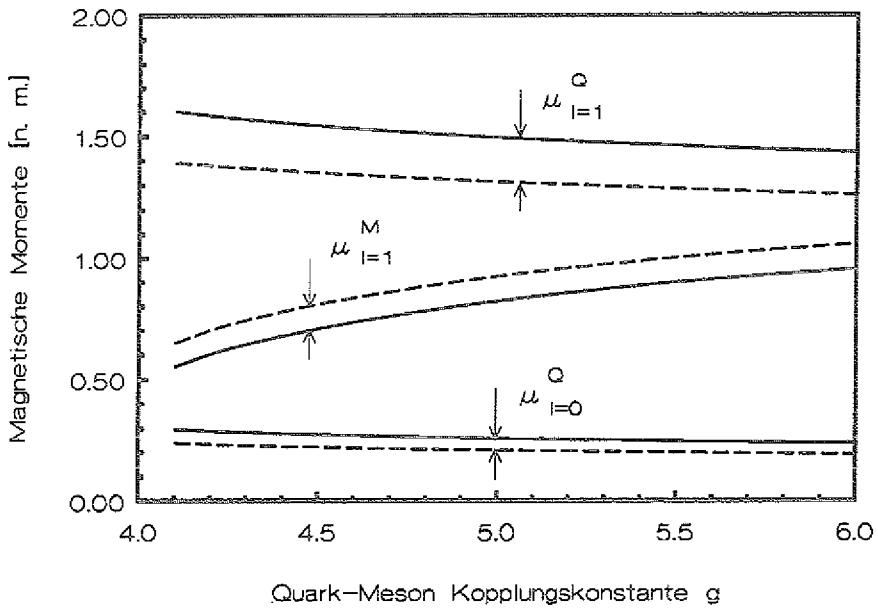


Abb. 5.7: Isospinanteile des magnetischen Moments im linearen σ-Modell Parameterwerte und Zuordnung der Kurven ist die gleiche wie in Bild 5.6.

Quarkanteil $\langle r_c^2 \rangle^Q_{I=1}$ nur geringfügig angehoben wird. Die Eliminierung der spuriosen Schwerpunktseffekte hat zur Folge, daß der Ladungsradius des Protons (Bild 5.8)

$$\langle r_c^2 \rangle_p = \langle r_c^2 \rangle^Q_{I=0} + \langle r_c^2 \rangle^Q_{I=1} + \langle r_c^2 \rangle^M_{I=1} \tag{5.46a}$$

um ca. 10% abgesenkt wird.

Dagegen übt die Impulsprojektion auf den Ladungsradius des Neutrons

$$\langle r_c^2 \rangle_n = \langle r_c^2 \rangle^Q_{I=0} - \langle r_c^2 \rangle^Q_{I=1} - \langle r_c^2 \rangle^M_{I=1} \tag{5.46b}$$

praktisch keinen Einfluß aus, da sich die nun gegenläufigen Wirkungen der Projektion auf den linearen Impuls gegenseitig nahezu wegheben.

Beide Ladungsradien, der des Protons und der des Neutrons, lassen sich nicht gleichzeitig an die experimentellen Werte, $\langle r_c^2 \rangle_p = 0.74$ fm^2 und $\langle r_c^2 \rangle_p = -0.12$ fm^2, anpassen. Ähnlich wie bei der Ruhemasse des Nukleons erfordert die Anpassung des Protonradius Kopplungskonstanten, die in der Nähe des kritischen Wertes — $g \simeq g_{crit}$ — liegen sowie kleine Werte für die Masse des σ-Feldes (siehe Tab. 5.7). Um jedoch gute Übereinstimmung des Neutronradius mit dem experimentellen Wert zu erzielen, sind große Werte der Kopplungskonstanten g nötig (siehe Bild 5.8 und Bild 5.9), da in diesem Fall das pionische Feld $\phi(r)$ stark ausgeprägt ist. Die Masse des σ-Feldes hat nur einen geringen Einfuß auf die Ergebnisse für die Ladungsradien (und auch die magnetischen Momente), falls Kopplungskonstanten $g > 4.5$ betrachtet werden, so daß eine Änderung des Wertes $m_\sigma = 1.0$ GeV keine Verbesserung der Resultate erwarten läßt.

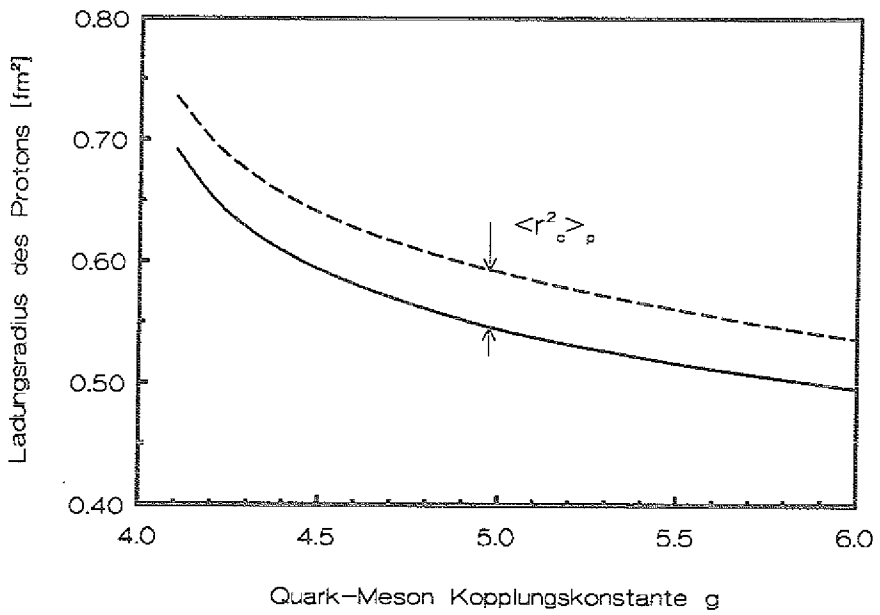


Abb. 5.8: Ladungsradius des Protons im linearen σ-Modell
Parameterwerte und Zuordnung der Kurven ist die gleiche wie in Bild 5.6.

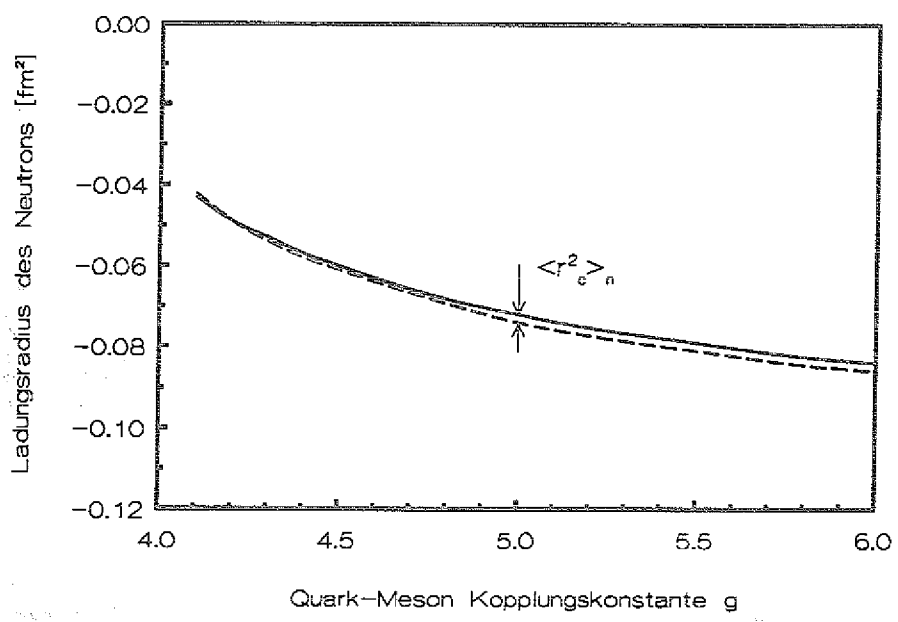


Abb. 5.9: Ladungsradius des Neutrons im linearen σ-Modell
Parameterwerte und Zuordnung der Kurven ist die gleiche wie in Bild 5.6.

Eine etwas andere Situation treffen wir bei der Betrachtung der magnetischen Momente an.

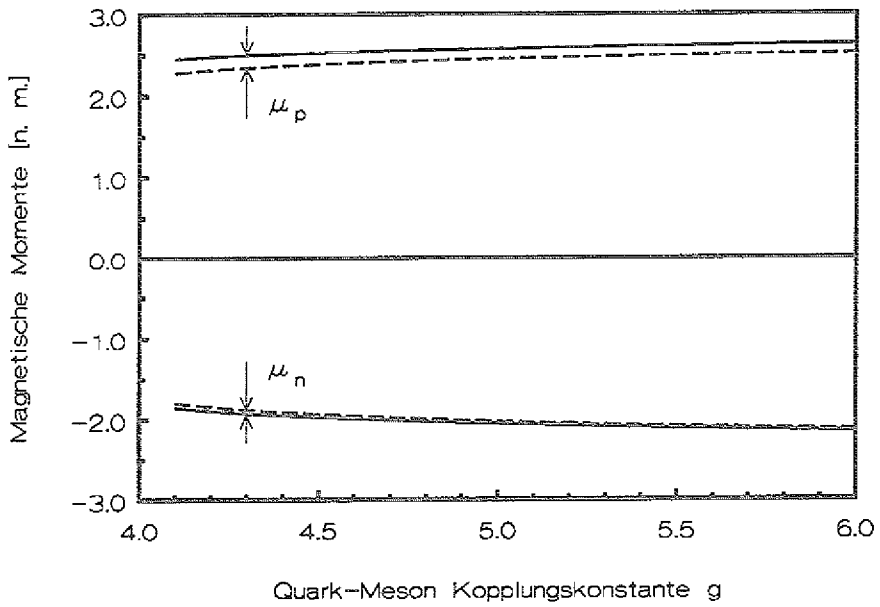


Abb. 5.10: Magnetische Momente des Protons und Neutrons im linearen σ-Modell

Parameterwerte und Zuordnung der Kurven ist die gleiche wie in Bild 5.6.

Sowohl das magnetische Moment des Protons wie das des Neutrons zeigen nur eine sehr geringe Abhängigkeit von den frei wählbaren Modellparametern, g und m_σ (siehe auch Bild 5.10). Beide Momente jedoch weichen nur etwa 10% oder weniger von den experimentellen Werten, $\mu_p = 2.79$ n. m. und $\mu_n = -1.91$ n. m., ab. Die Beseitigung der spuriosen Schwerpunktseffekte hat nahezu keine Änderung der Ergebnisse zur Folge, da sich die Wirkungen der Impulsprojektion auf die einzelnen Isospinkomponenten der Quark- und Mesonanteile des magnetischen Moments gerade gegenseitig wegheben (Bild 5.7).

Die Ergebnisse, die wir für das colourdielektrische Modell erhalten, sind in den Bildern 5.11–5.13 und in Tab. 5.9 zusammengefaßt. Das VaP(a)-Verfahren, das näherungsweise eine Variation der $J, T, q = 0$–projizierten Energie erlaubt, bewirkt für alle Parametersätze eine Verstärkung der chiralen Felder, $\sigma(r)$ und $\phi(r)$, wie in Abschnitt 4.3 dargelegt wurde (siehe Bild 4.3 und 4.4). Die durchschnittliche Zahl der Pionen

$$N_\pi = \langle \Psi_{hh} | \sum_{i=1}^{3} \int d^3k \, b_i^\dagger(k) b_i(k) | \Psi_{hh} \rangle \tag{5.47}$$

in der Mesonwolke vergrößert sich daher von etwa $N_\pi \simeq 0.1$ für die Mean-Field Näherung[76] auf ca. $N_\pi \simeq 0.6$ für die VaP(a)-Rechnungen. Ebenso werden werden die isovektoriellen mesonischen Anteile der Observablen erheblich verstärkt (siehe Tab. 5.8)

Dies hat zur Folge, daß der Ladungsradius des Neutrons durch das VaP(a)-Verfahren sehr stark abgesenkt wird und, verglichen mit dem Experiment, verbesserte Werte annimmt (Bild 5.12). An-

$\vec{V}_\mu$ / $\vec{A}_\mu$	Quark-Anteil				Meson-Anteil	
Isospin	$I = 0$		$I = 1$		$I = 1$	
Projektionsmethode	VbP	VaP(a)	VbP	VaP(a)	VbP	VaP(a)
$\langle r_c^2 \rangle$ [fm^2]	0.292	0.335	0.281	0.287	0.036	0.139
μ [n. m.]	0.309	0.270	1.580	1.485	0.151	0.621
g_A	—	—	1.395	1.360	0.013	0.062

Tab. 5.8: Quark- und Mesonanteile verschiedener Größen im CD-Modell

Quark- und Mesonanteile für den Ladungsradius, das magnetische Moment und die Axialvektorkopplungskonstante sind für den Parametersatz $m_\sigma = 1.2$ GeV, $m_\chi = 1.4$ GeV, $\eta = 0.06$, $\gamma = 0.04$ und $g = 0.059$ GeV angegeben. Der Vektorstrom enthält isoskalare und isovektorielle Beiträge, die getrennt aufgeführt sind. Alle Größen beziehen sich auf die J, T, q-Projektion.

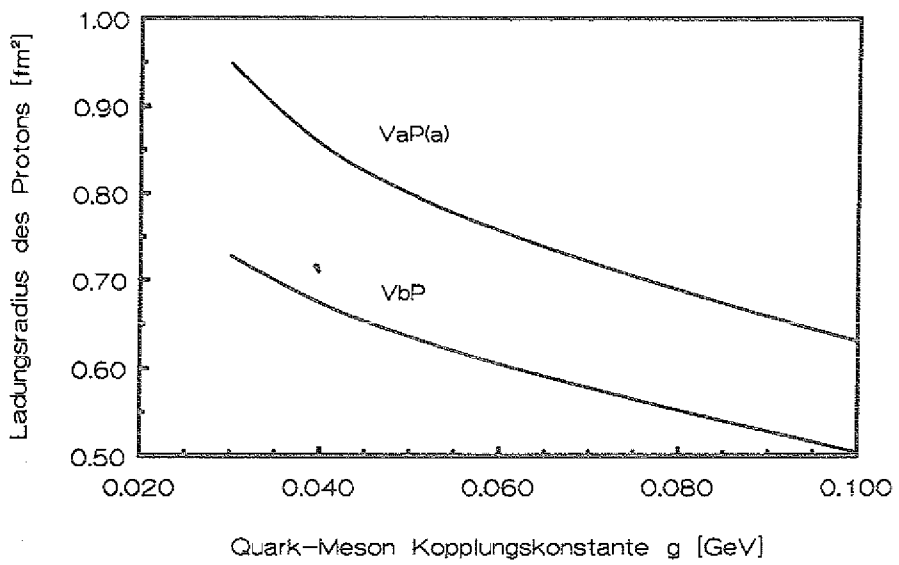


Abb. 5.11: Ladungsradius des Protons im CD-Modell

Der Ladungsradius des Protons ist für beide Variationsverfahren, Projektion der Mean-Field Lösungen (VbP) und approximative Variation nach der Projektion (VaP(a)), als Funktion der Quark-Meson Kopplungskonstanten g dargestellt. Die Werte der Modellparameter sind: $m_\sigma = 1.2$ GeV, $m_\chi = 1.4$ GeV, $\eta = 0.06$ und $\gamma = 0.04$.

dererseits wird der Ladungsradius des Protons durch die VaP(a)-Prozedur angehoben (Bild 5.11), und es können im CD-Modell, im Gegensatz zum Gell-Mann-Lévy-Modell, Parametersätze gefunden werden, die beide Radien und die Ruhemasse des Nukleons in gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten bringen.

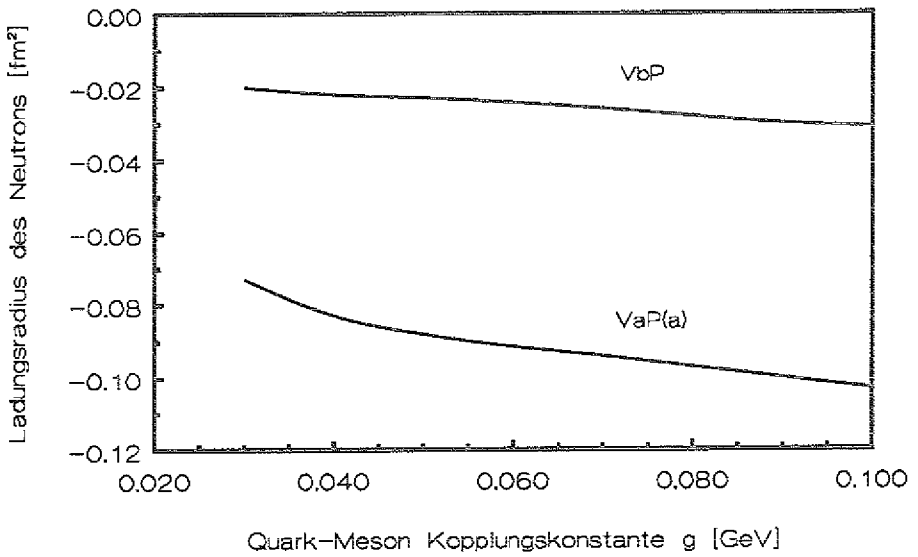


Abb. 5.12: Ladungsradius des Neutrons im CD-Modell
Beschreibung und Parameterwerte wie in Bild 5.11

Obwohl der Effekt der linearen Momentenprojektion auf den Ladungsradius des Neutrons vernachlässigbar klein ist, ist ein großer Effekt auf den Radius des Protons zu beobachten (3. und 4. Spalte der Tab. 5.9). Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Quarkanteile der isokalaren und isovektoriellen Komponenten des Vektorstroms, $\langle r_c^2 \rangle_{I=0}^{Q}$ und $\langle r_c^2 \rangle_{I=1}^{Q}$, beide durch die Impulsprojektion abgesenkt werden. Diese Effekte heben sich für den Ladungsradius des Neutrons gegenseitig auf, addieren sich jedoch im Fall des Protons.

Projektionsmethode	VbP		VaP(a)		Experiment
Projektion auf	J,T	J,T,q	J,T^*	J,T,q	
$\langle r_c^2 \rangle_p$ [fm^2]	0.891	0.608	0.843	0.760	0.74
$\langle r_c^2 \rangle_n$ [fm^2]	-0.027	-0.025	-0.075	-0.090	-0.12
μ_p [n. m.]	2.21	2.04	2.22	2.38	2.79
μ_n [n. m.]	-1.55	-1.42	-1.70	-1.84	-1.91
$\mu_p/\lvert\mu_n\rvert$	1.43	1.44	1.31	1.29	1.46

Tab. 5.9: Ladungsradien und magnetische Momente im CD-Modell

*Für den gleichen Parametersatz wie in Tab. 5.8 sind die Ladungsradien und magnetischen Momente des Protons und Neutrons aufgeführt. Die Größen in der mit dem Symbol * gekennzeichneten Spalte sind mit radialen Funktionen berechnet, die aus einer exakten Variation der J,T-projizierten Energie hervorgehen.*

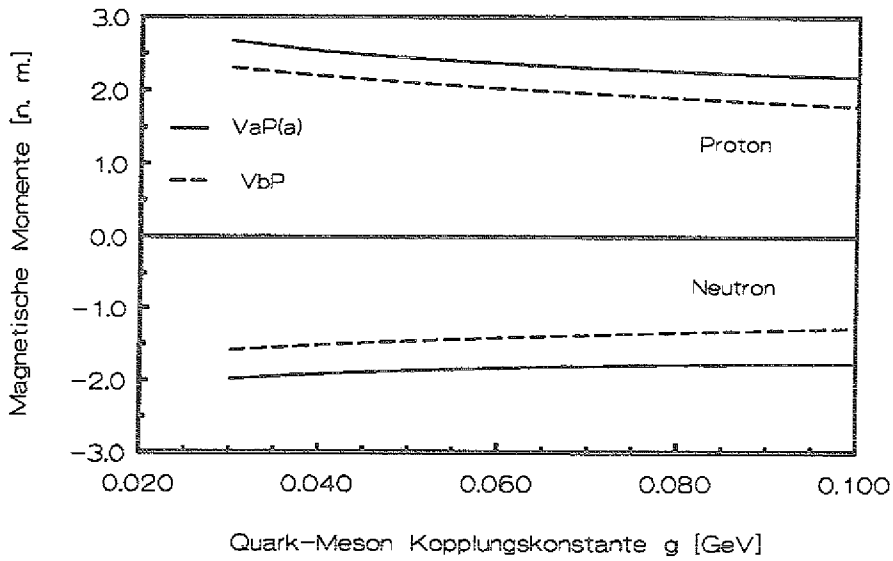


Abb. 5.13: Magnetische Momente des Protons und Neutrons im CD-Modell Beschreibung und Parameterwerte wie in Bild 5.11

Die magnetischen Momente von Proton und Neutron sind in Bild 5.13 aufgetragen. Die Auswirkungen der Projektion auf linearen Impuls sind eher gering und die VaP(a)-Methode verursacht wiederum eine Absenkung des Momentes für das Neutron und eine Anhebung desjenigen des Protons, was ebenfalls durch die Verstärkung des isovektoriellen mesonischen Stromanteils, $\mu^M_{I=1}$, hervorgerufen wird (siehe Tab. 5.8). Obwohl sich das Verhältnis $\mu_p/|\mu_n|$ im Vergleich zum Experiment verschlechtert, verschiebt das VaP(a)-Verfahren die magnetischen Momente, die in einem weiten Bereich der Quark-Meson Kopplungskonstanten g recht stabil sind, näher zu den experimentellen Daten hin. Aus Tab. 5.9 ist abzulesen, daß das Verhältnis der magnetischen Momente von Proton und Neutron dann mit dem experimentellen Wert gut übereinstimmt, falls eine Variation nach Projektion unterbleibt, die chiralen Felder also nur schwach ausgeprägt sind. Dasselbe Phänomen ist im linearen σ-Modell zu beobachten (Tab. 5.7). Sind Kopplungskonstante g und Masse des σ-Feldes klein, so sind die chiralen Felder schwächer, der Wert des isovektoriellen mesonischen Anteils des magnetischen Moments, $\mu^M_{I=1}$, verringert sich (siehe Bild 5.7) und das Verhältnis $\mu_p/|\mu_n|$ nähert sich dem experimentellen Wert an. Nur eines der beiden magnetischen Momente, entweder das des Protons oder das des Neutrons kann daher genau an den experimentellen Wert angepaßt werden. In beiden Modellen gelingt dies im Hinblick auf andere Observable eher für das magnetische Moment des Neutrons. Jedoch sind die Abweichungen des magnetischen Moments des Protons nicht größer als 15%, so daß beide Momente in zufriedenstellender Weise mit den experimentell gemessenen übereinstimmen.

5.3. Axialvektorkopplungskonstante

In ähnlicher Weise wie dies im vorhergehenden Abschnitt erfolgte, können wir auch die mit dem Axialvektorstrom zusammenhängenden Formfaktoren bestimmen. Ein Satz von 12 linear unbhängigen Lorentz-Pseudovektoren wird durch Multiplikation der Lorentz-Vektoren (5.29) mit γ^5 konstruiert. Da γ^5 mit allen γ-Matrizen γ^μ antikommutiert, bleiben alle Argumente, die im Fall des elektromagnetischen Vektorstroms zu Gl. (5.33) geführt haben, auch hier gültig, d. h. die Vertexfunktion des Axialvektorstroms läßt sich in der Form

$$\begin{aligned}&\langle N_f(p',s')|\vec{A}^\mu(0)|N_i(p,s)\rangle = \\ &= \bar{u}_f(p',s')\left[G_A(q^2)\gamma^\mu + \frac{G_P(q^2)}{2M_N}p_-^\mu + \frac{G_T(q^2)}{2M_N}p_+^\mu\right]\gamma^5\frac{\vec{\tau}}{2}u_i(p,s)\end{aligned} \tag{5.48}$$

schreiben.

In Analogie zu den Gln. (5.35) und (5.36) folgern wir aus der Hermitizität des Stromes $\vec{A}^\mu$, daß

$$G_A(q^2) = G_A^*(q^2) \qquad G_P(q^2) = G_P^*(q^2) \qquad G_T(q^2) = -G_T^*(q^2) \tag{5.49}$$

Weitere einschränkende Bedingungen für die Formfaktoren $G_A(q^2)$, $G_P(q^2)$ und $G_T(q^2)$ ergeben sich aus der Invarianz der Lagrangefunktion unter der Zeitumkehrtransformation. Diese Symmetrieoperation ist antiunitär[(e)], d. h.

$$\langle\phi|\mathcal{T}|\psi\rangle = \langle\mathcal{T}^\dagger\phi|\psi\rangle^* \tag{5.50}$$

und vertauscht die Richtung des 3er-Impulses $\boldsymbol{p}$ und des Spins eines Diracspinors[103]. Die Feldoperatoren eines Spin-1/2-Feldes transformieren sich unter $\mathcal{T}$ gemäß

$$\mathcal{T}\hat{\psi}(x_0,\boldsymbol{x})\mathcal{T}^{-1} = T\hat{\psi}(-x_0,\boldsymbol{x}) \qquad \mathcal{T}\hat{\psi}^\dagger(x_0,\boldsymbol{x})\mathcal{T}^{-1} = \hat{\psi}^\dagger(-x_0,\boldsymbol{x})T^\dagger\,, \tag{5.51}$$

worin $T = \imath\gamma^1\gamma^3$ eine 4×4-Matrix ist, für die $T = T^\dagger = T^{-1}$ gilt. Die Wirkung von T auf den Spinor $u(p_0,\boldsymbol{p},s)$ ist durch

$$Tu(p_0,\boldsymbol{p},s) = \mathrm{e}^{\imath\,\alpha_+(\boldsymbol{p},s)}u^*(p_0,-\boldsymbol{p},-s) \tag{5.52}$$

gegeben, worin $\alpha_+(\boldsymbol{p},s)$ ein vom Impuls und Spin abhängiger Phasenfaktor ist.

Betrachten wir die dritte Isospinkomponente und den räumlichen Anteil des Axialvektorstroms, so können wir schreiben:

$$\begin{aligned}&\langle N_f(p_0',\boldsymbol{p}',s')|\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}\left(A^i\right)_3(0)\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}|N_i(p_0,\boldsymbol{p},s)\rangle = \\ &\mathrm{e}^{\imath\,\alpha_+(\boldsymbol{p},s)-\alpha_+(\boldsymbol{p}',s')}\langle N_f(p_0',-\boldsymbol{p}',-s')|\mathcal{T}\left(A^i\right)_3(0)\mathcal{T}^{-1}|N_i(p_0,-\boldsymbol{p},-s)\rangle\end{aligned} \tag{5.53}$$

[(e)] Die Zeitumkehrtransformation $\mathcal{T}$ kann als Produkt $\mathcal{T} = \mathcal{U}\mathcal{K}$ der unitären Transformation $\mathcal{U}$ und des antilinearen Operators $\mathcal{K}$ angesetzt werden. $\mathcal{K}$ ist die Operation der komplexen Konjugation, d. h. $\mathcal{K}$ überführt jede komplexwertige Größe in ihr komplex Konjugiertes: $f \xrightarrow{\mathcal{K}} f^*$

Da

$$T\left(A^i\right)_3(0)T^{-1} = (A_i)_3(0) \tag{5.54}$$

hat man für die rechte Seite der Gl. (5.53):

$$\begin{aligned} r.h.s. &= e^{i(\alpha_+(p,s)-\alpha_+(p',s'))}\bar{u}_f^*(-p',-s')\left[G_A^*(q^2)\gamma_i^* - \frac{G_P^*(q^2)}{2M_N}q_i - \frac{G_T^*(q^2)}{2M_N}p_{+i}\right]\gamma^5\frac{\tau_3}{2}u_i^*(-p,-s) \\ &= u^\dagger(p',s')T^\dagger\gamma^0\left[G_A^*(q^2)\gamma_i^* - \frac{G_P^*(q^2)}{2M_N}q_i - \frac{G_T^*(q^2)}{2M_N}p_{+i}\right]\gamma^5 T\frac{\tau_3}{2}u_i(p,s) \end{aligned}$$

Mit

$$T^\dagger\left(\gamma^0\gamma_i\gamma^5\right)^* T = \gamma^0\gamma^i\gamma^5 \qquad T^\dagger\left(\gamma^0\gamma^5\right)^* T = \gamma^0\gamma^5 \tag{5.55}$$

folgt dann:

$$r.h.s. = \bar{u}(p',s')\left[G_A^*(q^2)\gamma^i + \frac{G_P^*(q^2)}{2M_N}q^i + \frac{G_T^*(q^2)}{2M_N}p_+^i\right]\gamma^5 T\frac{\tau_3}{2}u_i(p,s)$$

Durch Vergleich mit der linken Seite der Gl. (5.53) (siehe Gl. (5.48)) erhält man schließlich:

$$G_A(q^2) = G_A^*(q^2) \qquad G_P(q^2) = G_P^*(q^2) \qquad G_T(q^2) = G_T^*(q^2) \tag{5.56}$$

Aus den Gln. (5.49) und (5.56) schließen wir, daß

$$G_T(q^2) \equiv 0\,, \tag{5.57}$$

die Vertexfunktion also die folgende Form hat:

$$\langle N_f(p',s')|A_3(0)|N_i(p,s)\rangle = \bar{u}_f(p',s')\left[G_A(q^2)\gamma + \frac{G_P(q^2)}{2M_N}q\right]\gamma^5\frac{\tau_3}{2}u_i(p,s) \tag{5.58}$$

Im Breit-System ergibt sich für den Vertex schließlich

$$\begin{aligned} &\langle N_f(p',s')|A_3(0)|N_i(p,s)\rangle = \\ &= \left(\chi_{t'}^\dagger\frac{\tau_3}{2}\chi_t\right)\chi_{s'}^\dagger\left\{\frac{E}{M_N}G_A(q^2)\sigma_T + \left(G_A(q^2) - \frac{q^2}{4M_N^2}G_P(q^2)\right)\sigma_L\right\}\chi_s\,, \end{aligned} \tag{5.59}$$

worin

$$\sigma_L = \hat{q}\,(\sigma\cdot\hat{q}) \tag{5.60a}$$

$$\sigma_T = \sigma - \hat{q}\,(\sigma\cdot\hat{q}) \tag{5.60b}$$

die longitudinalen und transversalen Komponenten des Paulivektors σ bezüglich des Einheitsvektor $\hat{q} = q/|q|$ sind.

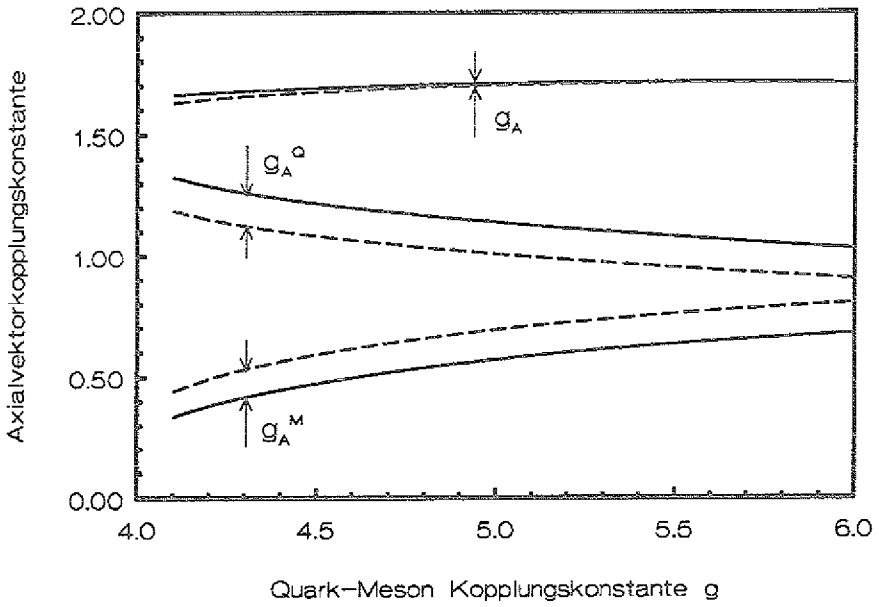


Abb. 5.14: Axialvektorkopplungskonstante im Gell-Mann-Lévy-Modell

Die Resultate für Quark- und Mesonfeldoperatoren sind getrennt aufgetragen. Die gestrichelten Kurven beziehen sich auf Größen, die aus der J,T-Projektion, die durchgezogenen auf Größen, die aus der $J,T,q=0$-Projektion hervorgehen. Der Wert von g_A ist nahezu ungeändert, da sich die spuriosen Schwerpunkteffekte gegenseitig aufheben. Die Masse des σ-Feldes ist: $m_\sigma = 1.0$ GeV

Im Limes $q \to 0$ erhält man aus dem axialen Formfaktor $G_A(q^2)$ die Axialvektorkopplungskonstante g_A.

$$g_A = \lim_{q\to 0} G_A(q^2) \tag{5.61}$$

Die Berechnung der Axialvektorkopplungskonstanten (siehe Anhang G) erfordert daher nur Ruhezustände des Nukleons ($q = 0$), die wir wie in Abschnitt 4.1 beschrieben durch simultane Projektion des Hedgehog-Zustands auf den Impuls $q = 0$ und Spin $J = T = 1/2$ erzeugen.

$$|N_\alpha(q=0) \to P_{q=0}P_{JM}|\Psi_{hh}\rangle = |JM, -M, q=0\rangle \tag{5.62}$$

Die für die Bestimmung der Ladungsradien und magnetischen Momente notwendige Approximation, d. h. die Projektion auf einen endlichen Impuls $q \neq 0$, entfällt also hier.

Das Ergebnis für das Gell-Mann-Lévy-Modell ist in Bild 5.14 gezeigt. Die Zunahme der Beiträge der Quarkfelder zu g_A, die auf die Projektion auf den Impuls q zurückzuführen ist, wird durch eine entsprechende Abnahme der Beiträge der Mesonfelder kompensiert, so daß der Wert von g_A durch die Beseitigung der spuriosen Schwerpunkteffekte nicht geändert wird. Unabhängig von den Parametersätzen und den Projektionstechniken jedoch ist die Axialvektorkopplungskonstante in allen Fällen im Vergleich zum experimentellen Wert, $g_A = 1.25$, deutlich zu groß. Diese

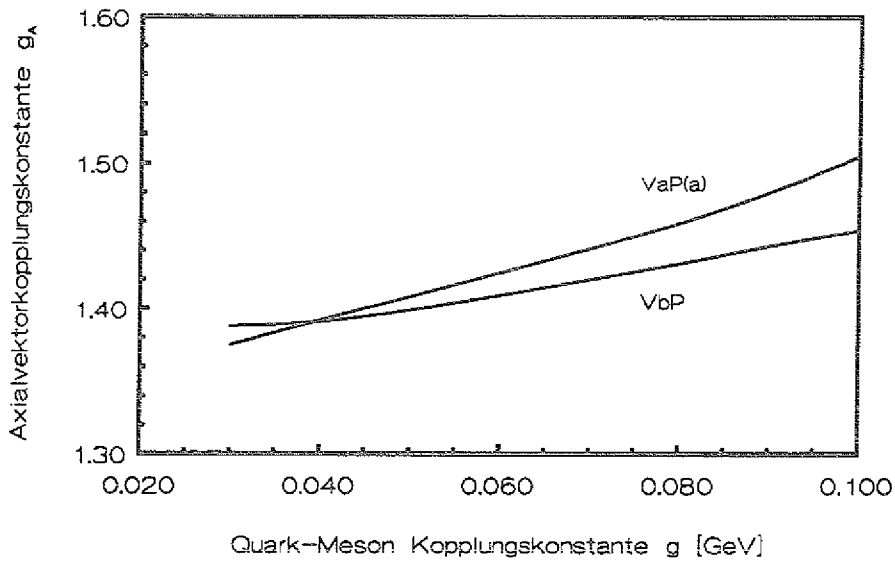


Abb. 5.15: Axialvektorkopplungskonstante im CD-Modell

Die Ergebnisse sind für beide Variationsverfahren, Projektion der Mean-Field-Lösungen (VbP) und approximative Variation der $J, Tq = 0$-projizierten Energie (VaP(a)), aufgetragen. Der Parametersatz ist derselbe wie in Bild 5.5.

grundsätzliche 'Versagen' des Gell-Mann-Lévy-Modells ist seit geraumer Zeit bekannt[47,49], und die Impulsprojektion verbessert diese Situation nicht.

Wakamatsu[104,105] führt diese grobe Überschätzung des Wertes von g_A im Gell-Mann-Lévy-Modell auf Inkonsistenzen der effektiven gekoppelten Quark-Meson-Modelle zurück. Da in diesen Modellen die Mesonen nicht als zusammengesetzte Quark-Antiquark-Systeme betrachtet, sondern als von den Quarkfeldern unabhängige Freiheitsgrade behandelt werden, ist ein 'double counting' dieser Freiheitsgrade nicht ausgeschlossen. Die Annahme, die Polarisation der Diracsee-Quarks werde durch die kinetische Energie der mesonischen Felder absorbiert (Gradientenentwicklung der bosonisierten Version des Nambu-Jona-Lasinio-Modells), und das Gell-Mann-Lévy-Modell sei infolgedessen eine hinreichend gute Näherung des solitonischen Sektors des NJL-Modells, wird durch die numerische Analyse — zumindest für den Fall der Axialvektorkopplungskonstante — widerlegt. In einem chiralen Quark-Modell setzt sich jede Observable aus einem Valenz- und einem auf der Vakuumpolarisation beruhenden Seebeitrag zusammen, $\langle O \rangle \doteq \langle O \rangle^{val} + \langle O \rangle^{v.p.}$, in einem chiralen Quark-Meson-Modell aus dem Valenz- und Mesonbeitrag, $\langle O \rangle = \langle O \rangle^{val} + \langle O \rangle^{mes}$. M. Wakamatsu[104,105] und Th. Meißner[83] haben unabhängig voneinander gezeigt, daß zwar $E^{mes} \simeq E^{v.p.}$, aber $g_A^{mes} \gg g_A^{v.p.}$ ist. Die kinetische Energie der Mesonfelder simuliert also mit hinreichender Genauigkeit den Seebeitrag zur Energie im NJL-Modells, aber die Vermutung, dies sei auch für g_A gültig, resultiert in einer wesentlichen Überschätzung der Axialvektorkopplungskonstanten.

Bild 5.15 zeigt die Resultate für g_A im CD-Modell. Ebenso wie dies bereits bei den Ladungsradien und den magnetischen Momenten zu beobachten war, wird auch der isovektorielle Mesonanteil

von g_A durch das VaP(a)-Verfahren deutlich verstärkt (Tab. 5.8), bleibt aber im Vergleich zum isovektoriellen Quarkanteil klein. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Funktion $\sigma(r)$, die im mesonischen Anteil von g_A explizit auftritt, obschon um einen Faktor größer als zwei (Bild 4.4) verstärkt, dennoch nicht sehr von ihrem Vakuumerwartungswert abweicht. Die Axialvektorkopplungskonstante wird daher durch die Quarkbeiträge dominiert, und dies resultiert in einem Wert kleiner als derjenige des σ-Modells. Wie bereits zuvor werden Quarkbeiträge angehoben und Mesonbeiträge abgesenkt, aber die Schwerpunkteffekte heben sich nicht mehr gegenseitig auf. Die Impulsprojektion beinflußt daher den Wert von g_A und hebt diesen um etwa 10% an. Dagegen üben die Variationsmethoden (VbP oder VaP(a)) und die Modellparameter nur einen geringen Einfluß auf den Wert von g_A aus; in allen Fällen findet man: $g_A \sim 1.4 - 1.5$.

5.4. Nukleon-Pion-Nukleon Kopplungskonstante, Goldberger-Treiman-Relation

Thema des nachfolgenden Abschnitts ist die Definition eines Formfaktors, der die Wechselwirkung eines Nukleons mit einem Pion, beschreibt. Im Gegensatz zu den elektromagnetischen und axialen Formfaktoren kann dieser Formfaktor experimentell nicht bestimmt werden[f]. Er erlangt jedoch eine große Bedeutung in phänomenologischen Modellen, wie beispielsweise dem Bonn-Potential[106], die der Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Nukleonen durch Austausch von Bosonen (One-Boson-Exchange-Potentials) dienen.

Die allgemeinste Form, die das Matrixelement des pseudoskalaren isovektoriellen Stroms $\vec{J}_\pi$ annehmen kann, ist durch

$$\langle N_f(p')|\vec{J}_\pi(0)|N_i(p)\rangle = \imath\, \bar{u}_f(p')\gamma^5 \vec{\tau} g_{\pi NN}(q^2) u_i(p) \tag{5.63}$$

gegeben. Aus der Invarianz des Stromoperators unter der Zeitumkehrtransformation folgt, daß $g_{\pi NN}(q^2)$ reell ist. Der pionische Strom $\vec{J}_\pi$ ist durch den Quellterm in der Bewegungsgleichung (Euler-Lagrange-Gleichung) für das π-Feld festgelegt.

$$\left(\partial_0^2 - \nabla^2 + m_\pi^2\right) \vec{\pi}(x) = \vec{J}_\pi(x) \tag{5.64}$$

Betrachtet man die Pion-Nukleon-Wechselwirkung wiederum im Breit-System, so findet man für die Vertexfunktion unmittelbar:

$$\langle N_\alpha(-\frac{q}{2})|\vec{J}_\pi(0)|N_{\alpha'}(\frac{q}{2})\rangle = \imath \frac{g_{\pi NN}(q^2)}{2M_N} \langle \chi_{t'}|\vec{\tau}|\chi_t\rangle \langle \chi_{s'}|\sigma \cdot q|\chi_s\rangle \tag{5.65}$$

Die Zeitentwicklung eines beliebigen Operators $\mathcal{O}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{O} = -\imath\, [\mathcal{O}, H] \tag{5.66}$$

ist die Grundlage eines Virialtheorems, das im Folgenden behandelt werden soll. Die zweite Ableitung des Pion-Feldoperators nach der Zeit $\partial_0^2 \vec{\pi}(x) = \partial_0 \vec{p}_\pi(x)$ kann durch

$$\partial_0 \vec{p}_\pi(x) = -\imath\, [\vec{p}_\pi(x), H] \tag{5.67}$$

[f] Experimentell zugäglich ist die Vertexfunktion nur für Pionen, die auf der Massenschale liegen, d. h. der 4er-Impulsübertrag erfüllt die Beziehung $q^2 = m_\pi^2$

ausgedrückt werden. Ist nun der projizierte Hedgehog-Zustand ein exakter Eigenzustand des Hamiltonoperators, so läßt sich der Nukleon-Pion-Nukleon Formfaktor auch direkt aus dem π-Feld ermitteln, da in diesem Fall

$$\langle JM - M, +\frac{q}{2} | \left(-\nabla^2 + m_\pi^2\right) \vec{\pi} | JM - M, -\frac{q}{2} \rangle = \langle JM - M, +\frac{q}{2} | \vec{J}_\pi | JM - M, -\frac{q}{2} \rangle \quad (5.68)$$

gilt. Dies bedeutet, daß der aus dem Matrixelement des Pionstroms $\vec{J}_\pi$ berechnete Nukleon-Pion-Nukleon Formfaktor, $g^s_{\pi NN}(q^2)$, gleich demjenigen aus dem Pionfeld, $g^f_{\pi NN}(q^2)$, berechneten ist, vorausgesetzt ein exakter Eigenzustand des Hamiltonoperators liegt vor.

Ein weiteres Virialtheorem ist durch die Golberger-Treiman-Relation

$$g^{GT}_{\pi NN}(q^2 = 0) = g_A \frac{M_N}{f_\pi} \quad (5.69)$$

gegeben, falls der Impulsübertrag $q^2 = 0$ verschwindet. Der Grad der Verletzung der Identitäten

$$g^s_{\pi NN}(0) = g^f_{\pi NN}(0) = g^{GT}_{\pi NN}(0)\,, \quad (5.70)$$

die für eine exakte Lösung des Hamilton'schen Eigenwertproblems erfüllt sind, stellen ein zuverlässiges Indiz für die Qualität der Näherungslösung dar. Die in Gl. (5.70) aufgeführten Größen sind für das Gell-Mann-Lévy-Modell sowohl aus dem Pionstrom

$$\vec{J}_\pi(x) = -i\,g \sum_{a=1}^{3} \bar{q}_a(x)\gamma^5 \vec{\tau} q_a - \frac{\partial}{\partial \vec{\pi}} U(\sigma, \vec{\pi}) \quad (5.71)$$

als auch aus dem Pionfeld selber für beide Fälle, J,T- und J,T,q-Projektion, berechnet (siehe Anhang J) und miteinander verglichen worden (siehe Bild 5.17).

Bild 5.17 zeigt einen Vergleich der mit den verschiedenen Methoden berechneten Nukleon-Pion-Nukleon Kopplungskonstanten. Die Ergebnisse gehen aus kombinierter J,T,q–Projektion der Mean-Field-Lösungen (Variation vor Projektion) des Gell-Mann-Lévy-Modells hervor und weichen deutlich voneinander ab. Eine erhebliche Verletzung der Virialtheoreme ist also festzustellen. Diese Beobachtung bleibt auch dann gültig, wenn nur eine reine Drehimpulsprojektion in Betracht gezogen wird. Dies führt zwar zu einer Verringerung der Werte von $g^s_{\pi NN}(q^2 = 0)$ (siehe Bild 5.16), läßt jedoch $g^{GT}_{\pi NN}(q^2 = 0)$ nahezu unverändert, da die Schwerpunktskorrekturen für g_A vernachlässigbar klein sind (Abschnitt 5.3) und $g^f_{\pi NN}(q^2 = 0)$ ohnehin nicht von der Impulsprojektion beeinflußt wird (Anhang J). Diese Situation läßt sich (für J,T–Projektion) auch durch Variation nach der Projektion nicht verbessern[49]. Dies bedeutet, daß die benutzten Näherungsverfahren nicht zu 'guten ' Eigenfunktionen des Hamiltonoperators führen. Erst die Verallgemeinerung des Hedgehog-Ansatzzustands (siehe Anhang A) in Verbindung mit einer Optimierung der J,T–projiziertzen Energie (VaP) führt zu einer Verletzung der Virialtheoreme, die nur noch ca 6% beträgt[49]. Ob diese Beobachtung auch für eine kombinierte Projektion auf Drehimpuls und linearen Impuls gültig bleibt, kann nur vermutet werden, da eine simultane Berücksichtigung der Schwerpunktskorrekturen für den generalisierten Hedgehog-Zustand zu einem unvertretbaren technischen Aufwand führt.

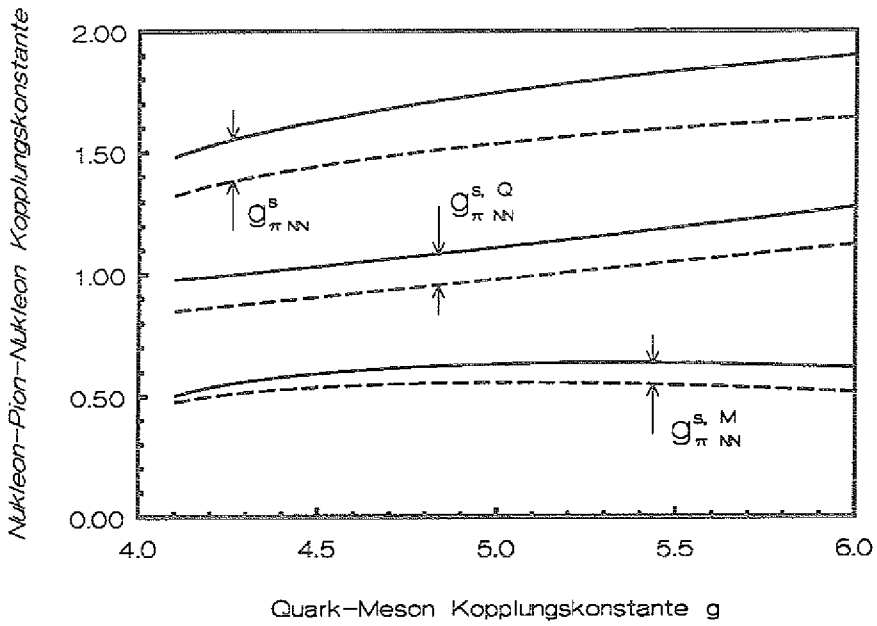


Abb. 5.16: Nukleon-Pion-Nukleon Kopplungskonstante im linearen σ-Modell

Gezeigt wird die Nukleon-Pion-Nukleon Kopplungskonstante, $g^s_{\pi NN}(q^2=0)$, sowie ihre Quark- und Mesonanteile, berechnet im Gell-Mann-Lévy-Modell aus dem Pionstrom (5.71) ($m_\sigma = 1.0$ GeV). Die durchgezogenen Linien beziehen sich auf Ergebnisse unter Einschluß der Schwerpunktkorrekturen, die gestrichelten auf reine J,T-Projektion. Im Gegensatz zu anderen statischen Observablen des Gell-Mann-Lévy-Modells ist ein drastischer Effekt der simultanen Projektion auf Spin,Isospin und Impuls feststellbar, da sich hier die cm-Korrekturen der Quark- und Mesonanteile nicht gegenseitig wegheben, sondern addieren.

Anders als im Gell-Mann-Lévy-Modell scheint eine Generalisierung des Hedgehog-Ansatzes im colourdielektrischen Modell nicht notwendig zu sein. Die Virialtheoreme (5.70) können in zufriedenstellender Weise erfüllt werden, vorausgesetzt, es ist die projizierte Energie, die variiert wird (siehe Tab. 5.10). Aufgrund der komplizierten Struktur des Quarkterms des pionischen Stroms im CD-Modell

$$\vec{J}_\pi(x) = -\imath\left(\frac{g}{\chi(x)}\right)^p \sum_{a=1}^{3} \bar{q}_a(x)\gamma^5\vec{\tau}q_a(x) - \frac{\partial}{\partial\vec{\pi}}U(\sigma,\vec{\pi}) \tag{5.72}$$

stößt man auf erhebliche Schwierigkeiten bei der Berechnung der Nukleon-Pion-Nukleon Kopplungskonstanten, $g^s_{\pi NN}(q^2=0)$, aus dem Pionstrom (5.72). Daher wurde diese Größe nur für den Fall der J,T-Projektion berechnet.

Wie bereits erwähnt, ist die πN-Kopplungskonstante nur für Pionen, die auf der Massenschale liegen, d. h. falls die Relation $q^2 = -q^2 = m_\pi^2$ erfüllt ist, experimentell meßbar. Es müssen also Korrekturen an den Werten, die für $q^2 = 0$ berechnet sind, angebracht werden. Folgen wir dem Vorschlag von Miller et al.[107], so erhalten wir derartige Korrekturen durch Entwicklung des

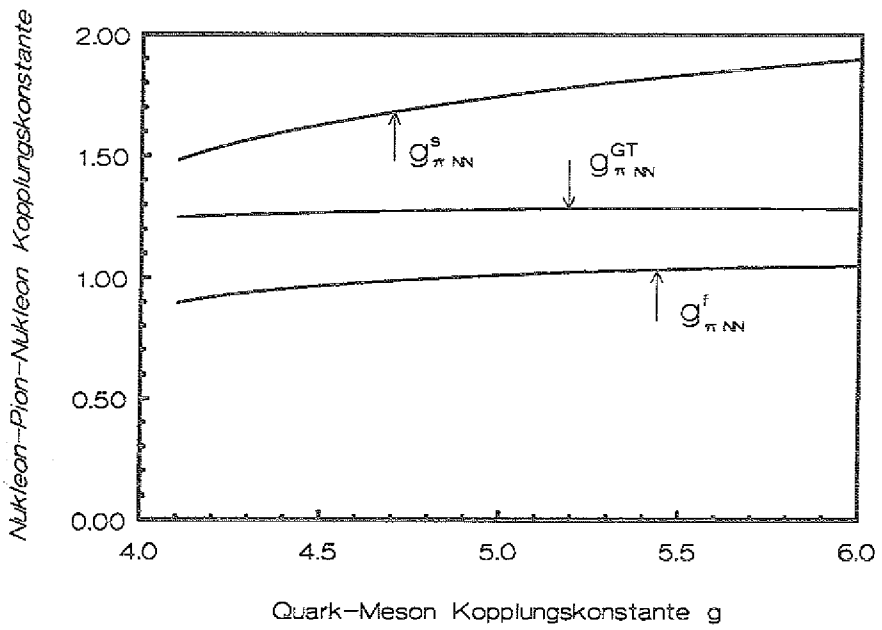


Abb. 5.17: Virialtheoreme im linearen σ-Modell

Die Nukleon-Pion-Nukleon Kopplungskonstanten $g^s_{\pi NN}(q^2=0)$, $g^f_{\pi NN}(q^2=0)$ und $g^{GT}_{\pi NN}(q^2=0)$ sind mit den Mean-Field-Lösungen des σ-Modells ($m_\sigma = 1.0$ GeV) berechnet worden.

Projektionsmethode	VbP		VaP(a)		Experiment
Projektion auf	J,T	J,T,q	J,T *	J,T,q	
$g^f_{\pi NN}(q^2=0)\, m_\pi/2M_N$	0.58	0.58	0.97	1.18	0.94
$g^s_{\pi NN}(q^2=0)\, m_\pi/2M_N$	0.96	—	0.88	—	0.94
$g^{GT}_{\pi NN}(q^2=0)\, m_\pi/2M_N$	0.98	1.06	1.01	1.07	0.94
g_A	1.30	1.41	1.35	1.42	1.25

Tab. 5.10: Virialtheoreme im CD-Modell

*Die Liste enthält die für verschiedene Projektionsmethoden berechneten Nukleon-Pion-Nukleon Kopplungskonstanten sowie die Axialvektorkopplungskonstante g_A. Die Ergebnisse in der mit dem Symbol * gekennzeichneten Spalte gehen aus den Lösungen einer exakten Variation der drehimpulsprojizierten Energie hervor. Da $g_{\pi NN}(q^2)$ nur an der Stelle $q^2 = m_\pi^2$ dem Experiment zugänglich ist, $g_{\pi NN}(q^2 = m_\pi^2)\,(m_\pi/2M_N) = 1.0$, ist unter der Rubrik Experiment der Wert eingetragen, den mam aus der Goldberger-Treiman-Relation erhält, falls man die experimentellen Werte für g_A, m_π und f_π einsetzt. Der Parametersatz ist: $m_\chi = 1.4$ GeV, $g = 0.059$ GeV, $\eta = 0.06$ und $\gamma = 0.04$.*

Projektion auf	J,T	J,T,q	Experiment
$g^f_{\pi NN}(q^2=0)\,m_\pi/2M_N$	0.97	0.97	0.94
$g^s_{\pi NN}(q^2=0)\,m_\pi/2M_N$	1.44	1.63	0.94
$g^f_{\pi NN}(q^2=m_\pi^2)\,m_\pi/2M_N$ (1)	1.02	—	1.0
$g^s_{\pi NN}(q^2=m_\pi^2)\,m_\pi/2M_N$ (1)	1.52	—	1.0
$g^f_{\pi NN}(q^2=m_\pi^2)\,m_\pi/2M_N$ (2)	1.04	—	1.0
$g^s_{\pi NN}(q^2=m_\pi^2)\,m_\pi/2M_N$ (2)	1.52	—	1.0

Tab. 5.11: Soft-Pion-Korrekturen im Gell-Mann-Lévy-Modell

Aufgeführt sind die Nukleon-Pion-Nukleon Kopplungskonstanten berechnet im linearen σ-Modell ($g = 4.5$ und $m_\sigma = 1.0$ GeV) für den Impulsübertrag $q^2 = 0$ und die gemäß Gl. (5.73) (gekennzeichnet durch (1), $\langle r_\pi^2 \rangle = 0.61$ fm^2) sowie die gemäß Gl. (5.74) (gekennzeichnet durch (2)) korrigierten Werte.

Nukleon-Pion-Nukleon-Formfaktors.

$$g_{\pi NN}(q^2) = g_{\pi NN}(0) - \frac{1}{6}\langle r_\pi^2 \rangle q^2 + \mathcal{O}(q^4) \tag{5.73}$$

Die theoretische Berechnung dieser Kopplungskonstanten kann jedoch auch durch analytische Fortsetzung des Nukleon-Pion-Nukleon-Formfaktors in den Bereich zeitartiger Impulsüberträge, $q^2 > 0$, erfolgen[54,51] (siehe Anhang J). Unabhängig vom betrachteten Modell gilt

$$g_{\pi NN}(|q|^2 = -m_\pi^2)\frac{m_\pi}{2M_N} = -\frac{4\pi}{3}\frac{C_\phi}{m_\pi}, \tag{5.74}$$

worin C_ϕ die Amplitude der pionischen Funktion $\phi(r)$ für große radiale Abstände $r \to \infty$ ist (siehe Anhang C). Tab. 5.11 entnimmt man, daß die Soft-Pion-Korrekturen im Gell-Mann-Lévy-Modell kleiner als 10% sind. Beide Korrekturverfahren (Gln. (5.73) und (5.74)) führen insbesondere für die Größe $g^s_{\pi NN}(q^2 = m_\pi^2)$ zu gleichen Ergebnissen, d. h. die Näherungsmethode (5.73) ist für kleine Impulsüberträge $q^2 \simeq m_\pi^2$ voll gerechtfertigt. Die Berücksichtigung von Schwerpunktskorrekturen könnte daher — ähnlich wie beim Ladungsradius — durch Berechnung des simultan auf J,T,q–projizierten Radius $\langle r_\pi^2 \rangle$ erfolgen. Eine solche Vorgehensweise bietet allerdings große technische Schwierigkeiten, da in diesem Fall die dritte Ableitung des Matrixelementes des Pionstroms involviert ist. Da jedoch nach den bisherigen Erfahrungen nicht zu erwarten steht, daß die Schwerpunktskorrekturen für den Radius $\langle r_\pi^2 \rangle$ größer als 20% sein werden, können diese Korrekturen der Soft-Pion-Korrekturen vernachlässigt werden. Dies gilt auch noch im CD-Modell, obwohl mit größeren Schwerpunktskorrekturen für $\langle r_\pi^2 \rangle$ zu rechnen ist, da auch hier nur sehr kleine Soft-Pion-Korrekturen zu beobachten sind.

5.5. Isoskalare axiale Kopplungskonstante und Spinstrukturfunktionen

Die Untersuchung der internen Spinstruktur des Nukleons durch die European Muon Collaboration[108] in tiefinelastischer Streuung polarisierter geladener Leptonen an ebenfalls polarisierten Targets (Nukleonen) legt nahe, daß der Spin des Protons nur zu einem geringen Bruchteil von den intrinsischen Quarkspins getragen wird. Dieses überraschende, im Widerspruch zum naiven Quarkmodell stehende Resultat hat zahlreiche Anstrengungen [53,109–119] ausgelöst, dieses Phänomen theoretisch zu erhellen.

Die direkte Berechnung der Spinstrukturfunktion $g_1^N(x)$ des Nukleons im Rahmen des Quark-Parton-Modells (im Bjorken-Limes: $\nu \to \infty$, $Q \to \infty$, $x = Q^2/(2M_N\nu)$ festgehalten)[(g)]

$$g_1(x) = \frac{1}{2}\sum_i e_i^2 \left[q_i^+(x) - q_i^-(x)\right] \tag{5.75}$$

aus den Verteilungs- (Dichte-) funktionen der Quarks ($q^\pm(x)$ ist die Verteilungsfunktion eines Quarks mit dem Impulsanteil x, das eine dem Nukleon parallele (+) oder antiparallele (−) Helizität hat) stellt ein schwieriges Unterfangen dar, da eine Boostoperation auf ein System mit Impuls $|q| \to \infty$ (infinite momentum frame) erforderlich wird. Das Integral über alle Impulsanteile der Spinstrukturfunktion jedoch kann mit Hilfe der Strom-Algebra[67] angegeben werden.

$$\int_0^1 dx\, g_1^N(x) = \frac{1}{2}\langle N\uparrow|\bar{\psi}(0)Q_c^2\gamma_3\gamma_5\psi(0)|N\uparrow\rangle \tag{5.76}$$

In Gl. (5.76) ist Q_c der Ladungsoperator der Quarks, der im SU(2)-Sektor durch

$$Q_c = \frac{1}{6} + \frac{\tau_3}{2} \qquad Q_c^2 = \frac{5}{18} + \frac{\tau_3}{6} \tag{5.77}$$

gegeben ist. Bemerkenswert ist die Verbindung von Hochenergieeigenschaften (linke Seite der Gl. (5.76)) mit Niederenergiematrixelementen.

Die Bjorken-Summenregel[121,122]

$$\int_0^1 dx\, \left[g_1^p(x) - g_1^n(x)\right] = \frac{1}{6}|g_A| \tag{5.78a}$$

erlaubt die Ableitung des Integrals der Spinstrukturfunktion des Neutrons aus der entsprechenden Größe für das Proton und der Axialvektorkopplungskonstanten. Die Summe der Integrale der Spinstrukturfunktionen definiert nun die isoskalare axiale Kopplungskonstante g_A^0.

$$\int_0^1 dx\, \left[g_1^p(x) + g_1^n(x)\right] = \frac{5}{18}|g_A^0| \tag{5.78b}$$

[(g)] Die Bezeichnungsweise ist die im Quark-Parton-Modell übliche: ν ist der Energietransfer im Laborsystem, Q^2 das Quadrat des 4er-Impulstransfers und x ($0 \le x \le 1$) Bjorkens Skalenvariable (siehe z. B. Ref. 120).

Die EMC-Gruppe gibt den aus den Meßwerten der Spinasymmetrie[h] $A = \frac{d\sigma^{\uparrow\downarrow} - d\sigma^{\uparrow\uparrow}}{d\sigma^{\uparrow\downarrow} + d\sigma^{\uparrow\uparrow}}$ gewonnenen Wert des Integrals der Spinstrukturfunktion des Protons mit

$$\int_0^1 dx\, g_1^p(x) = 0.114 \pm 0.012(statistisch) \pm 0.026(systematisch) \tag{5.79a}$$

an. Aus dem experimentellen Wert für die Axialvektorkopplungskonstante, $g_A = 1.254 \pm 0.006$, und der Bjorken-Summenregel findet man

$$\int_0^1 dx\, g_1^n(x) = -0.077 \pm 0.012(statistisch) \pm 0.026(systematisch) \tag{5.79b}$$

für das Integral von $g_1^n(x)$, und schließlich:

$$g_A^0 = 0.133 \pm 0.136 \tag{5.79c}$$

Die Berechnung der Integrale der Spinstrukturfunktionen für das Proton und das Neutron in den chiralen Valenzquarkmodellen, die wir hier behandeln, kann durch die Gln. (5.76) und (5.77) (siehe Anhang K) erfolgen.

$$\int_0^1 dx\, g_1^N(x) = \frac{1}{12}\left(\frac{5}{3} + (-)^{\frac{1}{2}-t_3}\right) \langle N(q=0,s,t)|\bar{q}(0)\gamma_3\gamma_5 q(0)|N(q=0,s,t)\rangle \tag{5.80}$$

In Gl. (5.80) gibt $t_3 = \pm 1/2$ die dritte Isospinkomponente des Nukleons an.

Die Ergebnisse für verschiedene Modelle sind in Tab. 5.12 zusammengefaßt. Alle Resultate für das Integral der Spinstrukturfunktion des Neutrons basieren auf der Gültigkeit der Bjorken-Summenregel (Gl. (5.78a)). Der Wert für $\int_0^1 dx\, g_1^p(x)$ ist für alle betrachteten Modelle in Regel um den Faktor zwei zu groß verglichen mit dem experimentellen Wert und mit Ausnahme des Gell-Mann-Lévy-Modells — g_A ist hier sehr viel größer als das experimentelle Meßergebnis — sind die Resultate für $\int_0^1 dx\, g_1^n(x)$ deutlich zu klein. In diesem Zusammenhang liegt natürlich der Wert für g_A^0 in allen Modellen erheblich über dem aus den Daten der EMC-Gruppe extrahierten (Gl. (5.79c))[i].

Im Gegensatz zu g_A wird die Korrektur spurioser Schwerpunkteffekte für g_A^0 wichtig (siehe Bild 5.18). Dies ist darauf zurückzuführen, daß abgesehen vom Normüberlapp nur Quarkfelder zu g_A^0 beitragen, ein gegenläufiger Effekt durch Schwerpunktkorrekturen der Mesonfelder also nicht möglich ist.

Von untergeordneter Bedeutung sind die Schwerpunktkorrekturen im CD-Modell, sie betragen weniger als 10% (Tab. 5.12). Des weiteren hängt g_A^0 wenig vom verwendeten Parametersatz ab, so daß man in einem großen Bereich der Potentialparameter η und γ sowie der Kopplungskonstanten

---

[h] $d\sigma^{\uparrow\downarrow(\uparrow\uparrow)}$ ist der Wirkungsquerschnitt, falls die Spins des Leptons und des Nukleons parallel (antiparallel) sind.

[i] Eine Reanalyse der EMC-Daten und neuere Meßresultate lassen jedoch einen größeren Wert für $g_A^0 \sim 0.5$ vermuten[123].

Modelle	g_A	g_A^0	$\int_0^1 dx\, g_1^p(x)$	$\int_0^1 dx\, g_1^n(x)$
Nichtrelativistisches Quarkmodell*	$\frac{5}{3} = 1.67$	1	$\frac{5}{18} = 0.28$	0
MIT Bag--Modell*	$\frac{5\Omega(\Omega-1)}{9} = 1.09$	0.65	$\frac{1}{6}g_A = 0.18$	0
naives CBM*				
$R = 0.8$ [fm]	0.98	0.50	0.151	-0.013
$R = 1.1$ [fm]	1.02	0.55	0.161	-0.008
CBM* mit $g_A = 1.254$				
$R = 0.8$ [fm]	1.254	0.63	0.193	-0.017
$R = 1.1$ [fm]	1.254	0.68	0.198	-0.010
Gell-Mann--Lévy--Modell	1.69 (1.67)	0.65 (0.53)	0.231 (0.213)	-0.050 (-0.065)
CD-Modell				
VbP	1.41 (1.30)	0.78 (0.75)	0.226 (0.212)	-0.009 (-0.005)
VaP(a)	1.42	0.72	0.218	-0.018
Experiment	1.254	0.133	0.114	−0.077

Tab. 5.12: Axiale Eigenschaften verschiedener Modelle

Die Ergebnisse der mit dem Symbol versehenen Zeilen sind Ref.* 109 *entnommen (CBM: Cloudy-Bag-Modell). Die in Klammern gesetzten Resultate des Gell-Mann-Lévy-Modells (Parametersatz: $g = 4.5$ und $m_\sigma = 1.0$ GeV) und des CD-Modells (Parametersatz: $g = 0.059$ GeV, $m_\chi = 1.4$ GeV, $\eta = 0.06$ und $\gamma = 0.04$) beziehen sich auf eine reine J,T-Projektion. Die experimentellen Ergebnisse entsprechen den Angaben der EMC-Gruppe*[108] *(Gln.* (5.79a–c)*).*

g und der Masse des χ-Feldes nahezu unveränderte Resultate erhält. Da die radialen Komponenten der Quarkfelder, $u(r)$ und $v(r)$, durch die Variation der $J,Tq = 0$-projizierten Energie nur wenig geändert werden, ist auch der Einfluß des VaP(a)-Verfahrens auf g_A^0 nur geringfügig (siehe Bild 5.19). Unabhängig von Methoden und Parametersätzen findet man im CD-Modell also $g_A^0 \sim 0.7 - 0.8$.

Gehen wir davon aus, daß das Nukleon nur aus Quarks des SU(2)-Sektors (u- und d-Quarks)

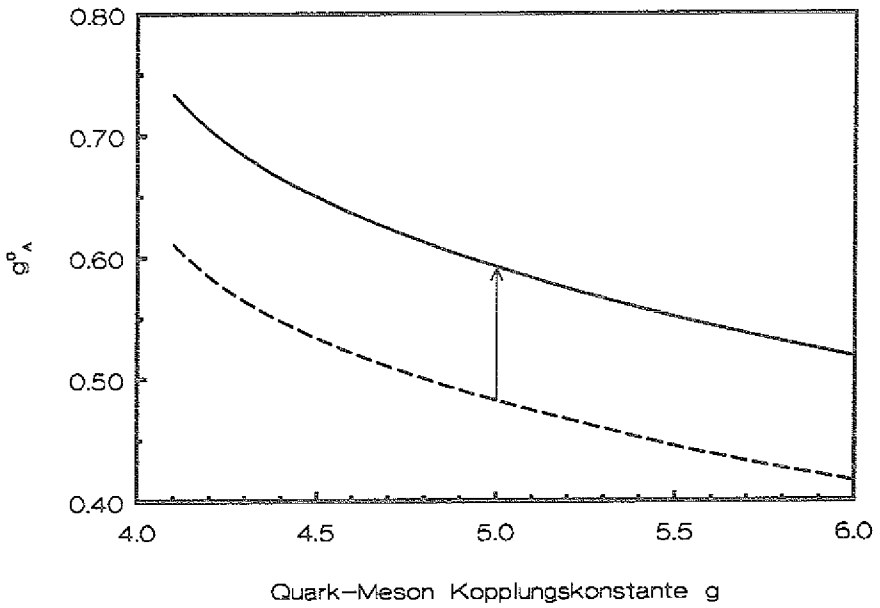


Abb. 5.18: Isoskalare axiale Kopplungskonstante im linearen σ-Modell

Im Gegensatz zur isovektoriellen axialen Kopplungskonstanten (siehe Bild 5.14) zeigt die isoskalare axiale Kopplungskonstante eine deutliche Abhängigkeit von der Quark-Meson Kopplungskonstanten g ($m_\sigma = 1.0$ GeV). Schwerpunktkorrekturen (durchgezogene Linie) heben den J,T-projizierten Wert von g_A^0 (gestrichelte Linie) um ca. 20% an.

aufgebaut ist, und vernachlässigen ferner QCD-Strahlungskorrekturen[108,124], so kann der Spinanteil der Quarks am Spin des Protons, $\langle S_z \rangle = +1/2$, aus

$$2\int_0^1 dx\, g_1^p(x) = \frac{4}{9}\Delta u + \frac{1}{9}\Delta d \tag{5.81a}$$

$$2\int_0^1 dx\, g_1^n(x) = \frac{4}{9}\Delta d + \frac{1}{9}\Delta u \tag{5.81b}$$

den Integralen über die Spinstrukturfunktionen und den Quarkverteilungsverteilungsfunktionen, Δu und Δd,

$$\Delta u = \int_0^1 dx\, \left[q_u^+ + q_{\bar{u}}^+ - q_u^- - q_{\bar{u}}^-\right] \tag{5.82}$$

berechnet werden. Die gemittelte z-Komponente des Spins, S_z, des u-(d-) Quarks im Proton ist dann durch

$$\langle S_z \rangle_u = \frac{1}{2}\Delta u \qquad \langle S_z \rangle_d = \frac{1}{2}\Delta d \tag{5.83}$$

gegeben, und

$$\langle S_z \rangle_{u+d} = \frac{1}{2}(\Delta u + \Delta d) \tag{5.84}$$

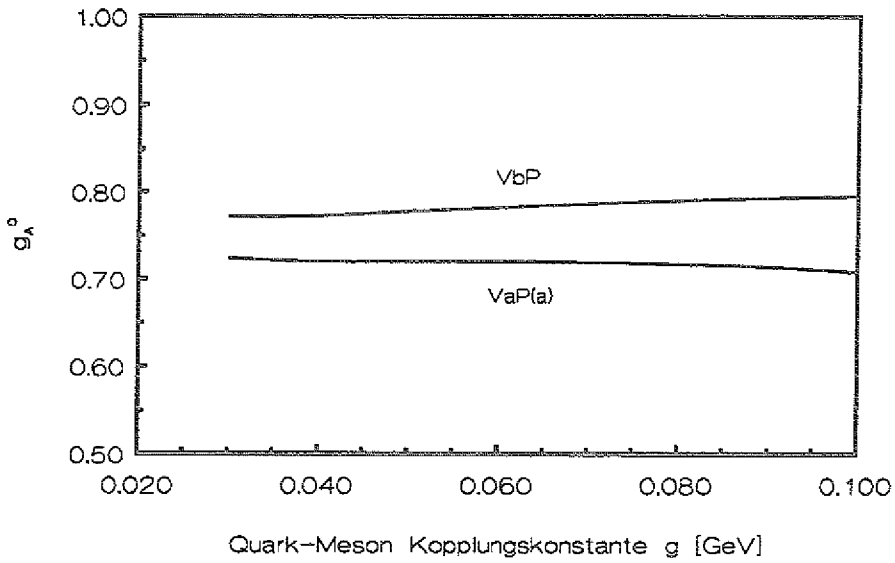


Abb. 5.19: Isoskalare axiale Kopplungskonstante im CD-Modell

Für beide Variationsverfahren sind die Ergebnisse für g_A^0 für den gleichen Parametersatz wie in Tab. 5.12 gezeigt.

Modelle	$\langle S_z \rangle_u$	$\langle S_z \rangle_d$	$\langle S_z \rangle_{u+d}$
Gell-Mann- -Lévy- -Modell	0.574	-0.278	0.296
CD-Modell			
VbP	0.548	-0.157	0.391
VaP(a)	0.534	-0.174	0.36
Experiment	$0.348 \pm 0.023 \pm 0.051$	$-0.280 \pm 0.023 \pm 0.051$	$0.068 \pm 0.047 \pm 0.103$

Tab. 5.13: Spinanteil der Quarks am Spin des Protons

Die angegebenen Werte sind alle mit den impulsprojizierten Größen aus Tab. 5.12 berechnet worden. Die experimentellen Daten sind Ref. 108 entnommen und sind unter Berücksichtigung der (kleinen) QCD-Strahlungskorrekturen ermittelt worden.

ist der Spinanteil der Quarks im Proton.

Während die Daten der EMC-Gruppe den Spin des Protons nur zu einem sehr kleinen Anteil auf den Spin der Quarks zurückführen (ca 14%), der Spin des Protons also im wesentlichen wohl von den Spins der Gluonen oder dem Bahndrehimpuls getragen wird, finden wir für das Gell-Mann-

Lévy-Modell einem Anteil, der bei etwa 60% liegt, und für das CD-Modell einen von 70%–80%.

5.6. Massenaufspaltung zwischen Proton und Neutron

Die experimentell bestimmbare Massendifferenz zwischen Proton und Neutron

$$\Delta M_{np} = M_n - M_p = 1.293 \quad \text{MeV} \tag{5.85}$$

ist auf zwei Ursachen zurückzuführen, einen Coulombanteil, ΔM^c_{np}, der auf der unterschiedlichen Ladungsverteilung von Proton und Neutron beruht, und einen hadronischen Anteil, ΔM^h_{np}, dessen Ursprung in der Brechung der Isospininvarianz, d. h. in der Differenz zwischen den Strommassen der u- und d-Quarks, zu suchen ist[j].

$$\Delta M_{np} = \Delta M^c_{np} + \Delta M^h_{np} \tag{5.86}$$

Die Größe des Coulombbeitrags, die auf einer Analyse der nukleonischen Formfaktoren fußt, wird von Gasser und Leutwyler[125] mit

$$\Delta M^c_{np} = (-0.76 \pm 0.30) \quad \text{MeV} \tag{5.86a}$$

angegeben. Zusammen mit dem experimentellen Wert (5.86) der Proton-Neutron-Aufspaltung ergibt sich hieraus für den hadronischen Anteil

$$\Delta M^h_{np} = (2.05 \pm 0.30) \quad \text{MeV} \tag{5.86b}$$

Die Differenz der Strommassen von u- und d-Quark

$$\Delta m = m_d - m_u = 2.5 - 5.6 \quad \text{MeV} \tag{5.86c}$$

wurde ebenfalls von Gasser und Leutwyler[125] abgeschätzt.

Da die Massendifferenz ΔM_{np} sehr viel kleiner als die Masse der Nukleonen ist und auch der Wert von Δm nur ca. 1% der Konstituentenquarkmassen beträgt, ist eine perturbative Behandlung der Isospininvarianzverletzung gerechtfertigt. Vernachlässigen wir pionische Massenunterschiede, da diese von höherer Ordnung sind, und Beimischungen von s-Quarks, so ist der Störterm in der Lagrangefunktion durch

$$\mathcal{L}_m = -m_u \bar{u}u - m_d \bar{d}d \tag{5.87}$$

gegeben. Dieser Term läßt sich folgendermaßen umschreiben

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2}(m_u + m_d)\,\bar{q}q + (m_d - m_u)\,\bar{q}\frac{\tau_3}{2}q\,, \tag{5.87'}$$

[j] Die Massendifferenz ΔM_{np} kann nicht allein durch die auf der elektromagnetischen Wechselwirkung beruhende Aufspaltung ΔM^c_{np} erklärt werden, da in diesem Fall die Masse des Protons, im Widerspruch zum Experiment, größer sein müßte als die des Neutrons, da ersteres positiv geladen und letzteres neutral ist.

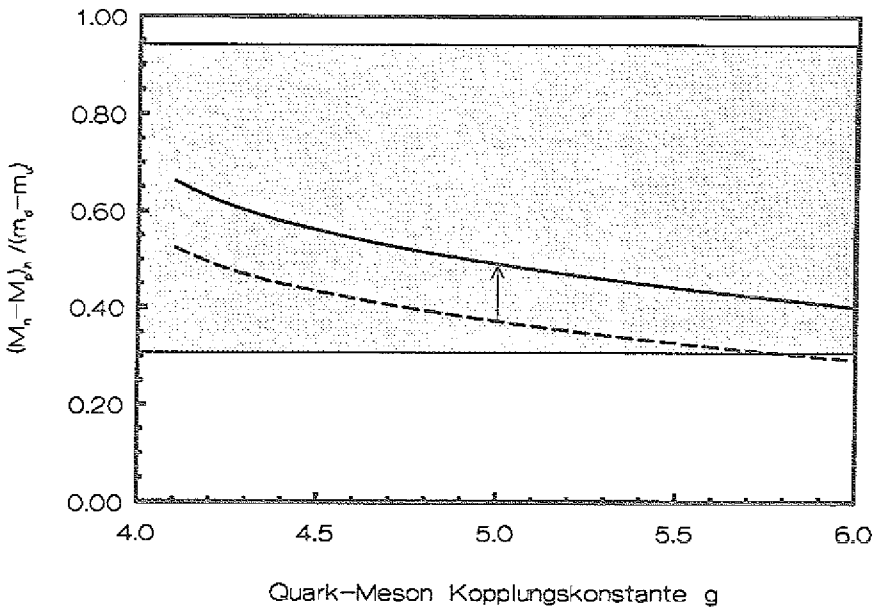


Abb. 5.20: Hadronische Proton-Neutron-Aufspaltung im linearen σ-Modell

Die durch Punkte markierte Fläche bezeichnet den 'experimentellen' Bereich der hadronischen Massenaufspaltung zwischen Proton und Neutron. Die gestrichelte Kurve gibt die Ergebnisse an, die man aus reiner Drehimpulsprojektion erhält, die durchgezogene Kurve diejenigen, die man aus der kombinierten $J, T, q = 0$-Projektion erhält. Die Masse des σ-Feldes ist: $m_\sigma = 1.0$ GeV

und wir erhalten für die hadronische Massenaufspaltung zwischen Proton und Neutron unmittelbar:

$$\frac{\Delta M_{np}}{\Delta m} = \langle p, q = 0 | \int d^3r\, \bar{q}(r) \frac{\tau_3}{2} q(r) | p, q = 0 \rangle - \langle n, q = 0 | \int d^3r\, \bar{q}(r) \frac{\tau_3}{2} q(r) | n, q = 0 \rangle \quad (5.88)$$

Die Berechnung des Ausdrucks (5.88) findet sich in Anhang L.

Die Ergebnisse für das lineare σ-Modell sind in Bild 5.20, diejenigen für das CD-Modell in Bild 5.21 festgehalten. Während im Gell-Mann-Lévy-Modell die Resultate geringfügig von der Quark-Meson Kopplungskonstante abhängen, sind diese im CD-Modell von den Parametern nahezu vollständig unabhängig. Aufgrund der großen Unsicherheiten bei der Abschätzung der Massendifferenz der Strommassen und der nicht unerheblischen Schwankungsbreite des Coulombanteils ist der 'experimentelle' Bereich der relativen hadronischen Aufspaltung zischen Proton und Neutron entsprechend groß (Bild 5.20 und Bild 5.21), so daß alle Resultate durch Wahl von Δm gemäß Gl. (5.86*c*) an den experimentellen Wert der hadronischen Aufspaltung (Gl. (5.86*b*)) angepaßt werden können, unabhängig davon welches Modell oder welches Projektions- oder Variationsverfahren betrachtet wird. Hervorzuheben ist jedoch die ausgezeichnete Übeinstimmung der Ergebnisse des CD-Modells, die mit dem VaP(a)-Verfahren erzielt werden, mit dem Experiment, falls ein mittlerer Wert $\Delta m = 3.0$ MeV gewählt wird (Bild 5.21).

Fiolhais et al.[126] haben auf der Grundlage der hier vorgestellten Projektionsmethoden die

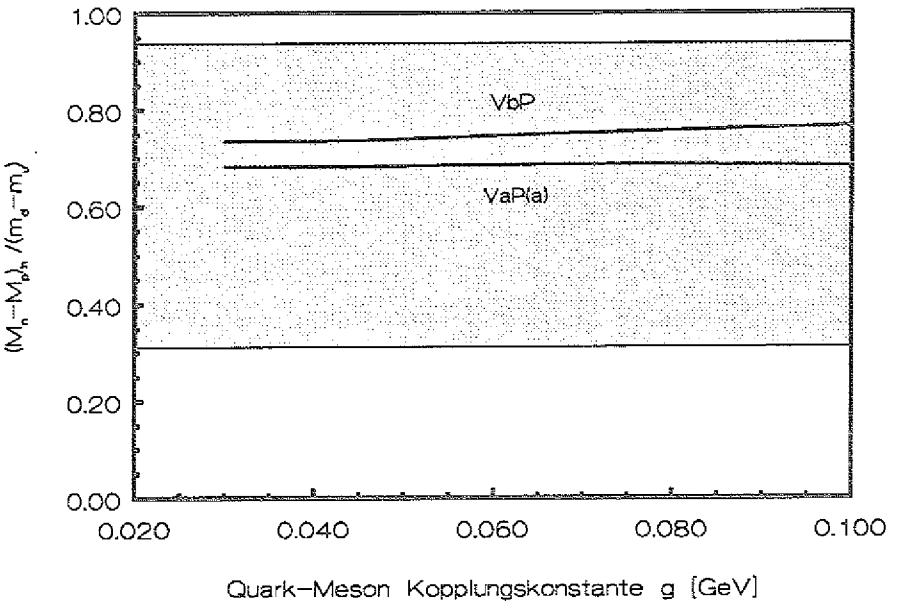


Abb. 5.21: Hadronische Proton-Neutron-Aufspaltung im CD-Modell
Für den Paramertersatz $m_\chi = 1.4$ GeV, $\eta = 0.06$ und $\gamma = 0.04$ ist die relative hadronische Massendifferenz zwischen Proton und Neutron aufgetragen.

hadronische und elektromagnetische Massendifferenz zwischen Proton und Neutron in einem nuklearen Medium berechnet, und die Auswirkungen der dichteabhängigen Massendifferenz

$$\Delta M_{np}(\rho) = M_n(\rho) - M_p(\rho) \tag{5.89}$$

auf die Nolen-Schiffer-Anomalie[127,128] abgeschätzt. Die dichteabhängigen mesonischen Größen, $f_\pi(\rho)$, $m_\pi(\rho)$ und $m_\sigma(\rho)$, werden in einem ersten Schritt aus den Lösungen des Nambu-Jona-Lasinio-Modells[129] bei endlicher Mediumdichte ermittelt[57]. In einem zweiten Schritt werden die nukleonischen Eigenschaften aus dem Gell-Mann-Lévy-Modell (mit den Parametern $f_\pi(\rho)$, $m_\pi(\rho)$ und $m_\sigma(\rho)$) extrahiert, da Energien und elektromagnetische Eigenschaften (Formfaktoren) durch die Gradientenentwicklung der bosonisierten Version des NJL-Modells, also durch das Gell-Mann-Lévy-Modell, hinreichend gut beschrieben werden[130]. Die Berechnung der hadronischen Aufspaltung kann analog zu Gl. (5.88) erfolgen, nur daß nun in Gl. (5.88) die dichteabhängigen Proton- und Neutronzustände einzusetzen sind. Die elektromagnetische Massendifferenz kann mit Hilfe der ebenfalls dichteabhängigen Formfaktoren[57] ermittelt werden[126]. Es stellt sich jedoch heraus, daß $\Delta M_{np}(\rho)$ im Gegensatz zur benötigten Abnahme mit zunehmender Dichte ansteigt. Dieser Effekt wird jedoch vollständig überlagert, falls man dem Umstand Rechnung trägt, daß Valenz-Proton und -Neutron in Spiegelkernen verschiedene orbitale Radien besitzen, und daher auf Proton und Neutron unterschiedliche Mediumdichten einwirken.

$$\Delta M_{np}(\rho_n, \rho_p) = M_n(\rho_n) - M_p(\rho_p) \tag{5.89'}$$

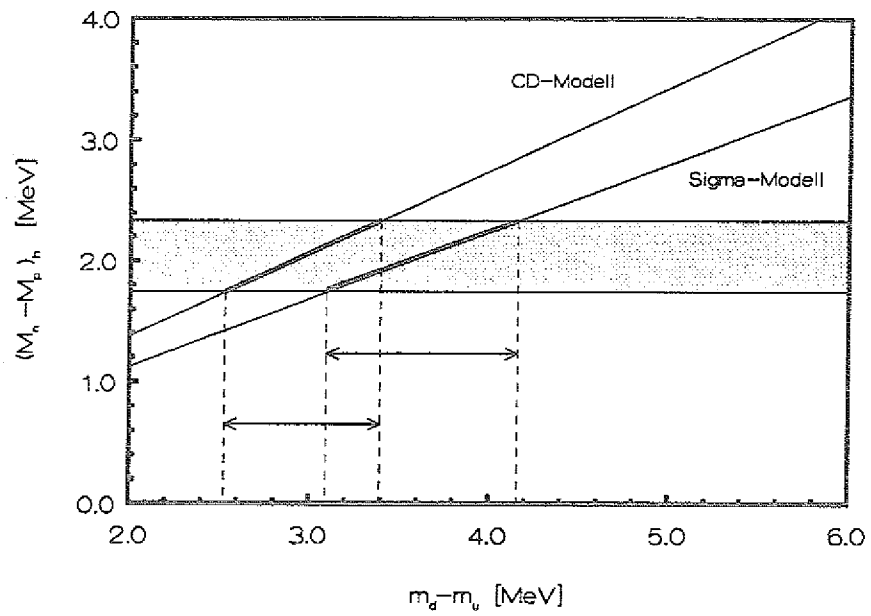


Abb. 5.22: Hadronische Proton-Neutron-Aufspaltung versus Δm

Die Größe der hadronischen Aufspaltung zwischen Proton und Neutron ΔM^h_{np} ist hier gegen die Massendifferenz $\Delta m = m_d - m_u$ zwischen d- und u-Quark aufgetragen. Im Gell-Mann-Lévy-Modell wurde der Parametersatz $g = 4.5$ und $m_\sigma = 1.2$ GeV, im CD-Modell (VaP(a)-Verfahren) der Parametersatz $g = 0.059$ GeV, $m_\chi = 1.4$ GeV, $\eta = 0.06$ und $\gamma = 0.04$ verwendet. Die durch Punkte gekennzeichnete Fläche gibt den experimentellen Bereich der hadronischen Aufspaltung, $\Delta M^h_{np} = 2.05 \pm 0.30$ MeV, an. Die Doppelpfeile markieren das Intervall, in welchem die aus den Modellen extrahierten Resultate gerade die experimentellen Daten innerhalb deren Fehlergrenzen reproduzieren.

Dieser Effekt führt zu einer deutlichen Überschätzung der Nolen-Schiffer-Anomalie um etwa eine Größenordnung[126]. Es scheint jedoch so, daß die Brechung der Isospininvarianz wesentliche Züge dieses Phänomens widerspiegelt.

5.7. Pion-Nukleon-Sigma Term

Der Pion-Nukleon-Sigma Term stellt ein wichtiges empirisches Maß für die Brechung der chiralen Symmetrie in der QCD dar und begründet somit einschränkende Bedingungen für Modelle, die die hadronische Struktur beschreiben und die chirale Symmetrie approximativ beinhalten. Er ist durch

$$\sigma_{\pi N} = \langle p(q=0)| \frac{1}{3} \sum_{a=1}^{3} \left[Q^{5a}, \left[Q^{5a}, H \right] \right] |p(q=0)\rangle \tag{5.90}$$

definiert, worin $|p(q=0)\rangle$ der Ruhezustand eines Protons, H der Hamiltonoperator des Systems und

$$Q^{5a} = \int d^3x \left\{ \bar{\psi}(x)\gamma^0\gamma^5 \frac{\tau^a}{2} \psi(x) + \left(\partial^0 \sigma(x)\right) \pi^a(x) - \left(\partial^0 \pi^a(x)\right) \sigma(x) \right\} \tag{5.91}$$

die axiale Ladung ist.

Werte für $\sigma_{\pi N}$ lassen sich auf zwei verschiedenen Wegen aus den experimentell zugänglichen Daten ermitteln[131]. Eine Methode stützt sich auf die Analyse der πN-Steudaten unter Berücksichtigung der PCAC-Relation ($\sigma_{\pi N} \sim 60$ MeV), eine andere fußt auf dem Spektrum des Baryon-Oktetts, erster Ordnung Störungstheorie in den Quark-Strommassen und führt in Verbindung mit der Annahme, daß der s-Quarkanteil des Nukleons klein ist (Zweig-Regel) auf $\sigma_{\pi N} \sim 25$ MeV. Die große Diskrepanz zwischen beiden Werten ließ zunächst vermuten, daß das Nukleon einen erheblichen s-Quarkanteil besitzen müsse und die Zweig-Regel signifikant verletzt sei[132,133]. Gasser et al.[134] jedoch reduzierten in einer kürzlich durchgeführten neuen Analyse der πN-Streudaten diesen Unterschied und fanden: $\sigma_{\pi N} \simeq 45 \pm 7$ MeV. Andererseits ist die Möglichkeit in Betracht zu ziehen, daß die baryonische Oktettmasse signifikant nichtlinear von der s-Quarkmasse abhängt[135,136], was größere Werte für $\sigma_{\pi N}$ (> 25 MeV) als die störungstheoretische Abschätzung zur Folge hat, ohne daß ein deutlicher s-Quarkanteil im Nukleon notwendig wird. Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß die Unstimmigkeiten zwischen verschiedenen Datensätzen[137] und daß eine alternative Methode zur Bestimmung von $\sigma_{\pi N}$ zu deutlich kleineren Werten führen[138].

Der die chirale Symmetrie brechende Teil

$$\mathcal{L}_{SB}^{(1)} = m_\pi^2 f_\pi \hat{\sigma} \tag{5.92}$$

der Lagrangedichte, proportional zu $\hat{\sigma}$, ist der einzige, der zu dem doppelten Koommutator in Gl. (5.90) beiträgt, d. h. der $\pi N \sigma$-Term ist durch den Erwartungswert

$$\sigma_{\pi N} = -f_\pi m_\pi^2 \langle p(q=0)| : \int d^3r\, \hat{\sigma}(r) : |p(q=0)\rangle \tag{5.93}$$

des σ-Feldoperators zwischen den auf $J = T = 1/2$, $M_T = -M_J = 1/2$ und $q = 0$ projizierten Zuständen des Hedgehog-Fockzustands gegeben. Aufgrund der einfachen Struktur dieses Operators, ist $\sigma_{\pi N}$ sowohl von der Drehimpulsprojektion (skalarer isoskalarer Operator) als auch von der Impulsprojektion unbeeinflußt, da die Überläppe in Zähler und Nenner, die aus der Impulsprojektion resultieren, identisch sind und sich daher gegenseitig wegheben. Der $\pi N \sigma$-Term ist also durch seinen Mean-Field-Ausdruck

$$\sigma_{\pi N} = -4\pi m_\pi^2 f_\pi \int_0^\infty dr\, r^2 \sigma_0(r) \tag{5.94}$$

gegeben.

Die Brechung der chiralen Symmetrie durch den der Lagrangedichte chiral invarianter Quark-Meson-Modelle hinzugefügten Ausdruck (5.92), dessen Einführung mit der PCAC-Relation

$$\partial^\mu A_\mu^a = -m_\pi^2 f_\pi \pi^a \tag{5.95}$$

konsistent ist, kann jedoch ebenso durch einen die chirale Invarianz verletzenden Massenterm für die Quarksfelder

$$\mathcal{L}_{SB}^{(2)} = -m\bar{\psi}\psi \tag{5.96}$$

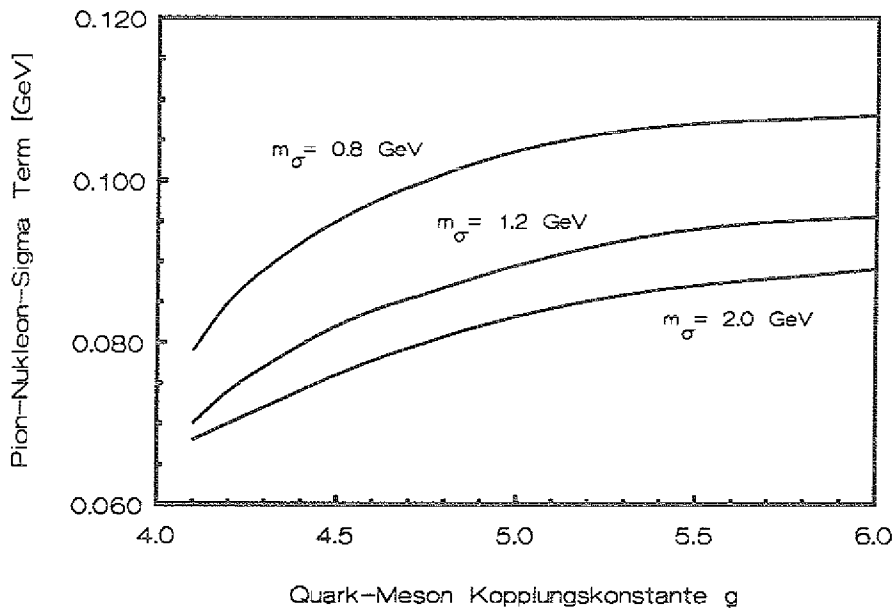


Abb. 5.23: Pion-Nukleon-Sigma Term im linearen σ-Modell

Für drei verschiedene Werte m_σ ist der $\pi N\sigma$-Term gegen die Quark-Meson Kopplungskonstante g aufgetragen. Alle Resultate liegen erheblich über dem experimentellen Bereich.

erfolgen[139]. Beide Möglichkeiten sind im Hinblick auf die Quarkstruktur der QCD als gleichwertig zu bertrachten. Dennoch wird im Rahmen der Quark-Meson-Modelle die Brechung der chiralen Symmetrie durch $\mathcal{L}_{SB}^{(1)}$ bevorzugt, da der Ausdruck (5.96) auf eine nicht der PCAC-Relation entsprechende Divergenz des Axialvektorstroms führt.

$$\partial^\mu A_\mu^a = m\bar{\psi}i\gamma_5\tau^a\psi \tag{5.97}$$

Da die Meson- und Quarkfelder in den Quark-Meson-Modellen unabhängig voneinander sind, besteht keine Verbindung zwischen dem bilinearen Quarkfeldoperator auf der rechten Seite der Gl. (5.97) und dem Pion-Feld. Folglich sind die beiden $\pi N\sigma$-Terme, die aus den Ausdrücken (5.94) und

$$\sigma_{\pi N} = m\int d^3x\,\langle N(q=0)|:\bar{\psi}\psi:|N(q=0)\rangle \tag{5.98}$$

resultieren, voneinander verschieden. Eine numerische Analyse bestätigt dies (für Quarkstrommassen $m \sim 6-10$ MeV), auch für den Fall, daß alle Projektionen vernachlässigt werden und nur die Mean-Field-Ergebnisse miteinander verglichen werden. In einem chiral invarianten Quarkmodell, wie dem Nambu-Jona-Lasinio-Modell[129], treten derartige Inkonsistenzen nicht auf. Im Rahmen des bosonisierten NJL-Modells kann man zeigen, daß die Ausdrücke (5.94) und(5.98) äquivalent sind[139,140].

Daß die Werte für $\sigma_{\pi N}$ im Gell-Mann-Lévy-Modell (Gl. (5.94)) ganz erheblich über den auf experimentellen Daten beruhenden Abschätzungen liegen (siehe Bild 5.23), führt Wakamatsu[139] auf die oben beschriebenen Unstimmigkeiten zurück[(k)]. Die Ursache liege darin, daß in diesen Modellen die Quark- und Mesonfelder als voneinander unabhängige Freiheitsgrade behandelt werden, und daher 'double counting' unvermeidbar sei, da die interne Quark-Antiquark-Struktur der Mesonen keine Berücksichtigung finde. Die Annahme, die Polarisation der Diracsee-Quarks werde durch die kinetische Energie der Mesonfelder korrekt simuliert, läßt sich im Fall einiger physikalischer Größen, wie dem $\pi N\sigma$-Term (siehe auch die Diskussion in Abschnitt 5.3), dann nicht länger aufrechterhalten.

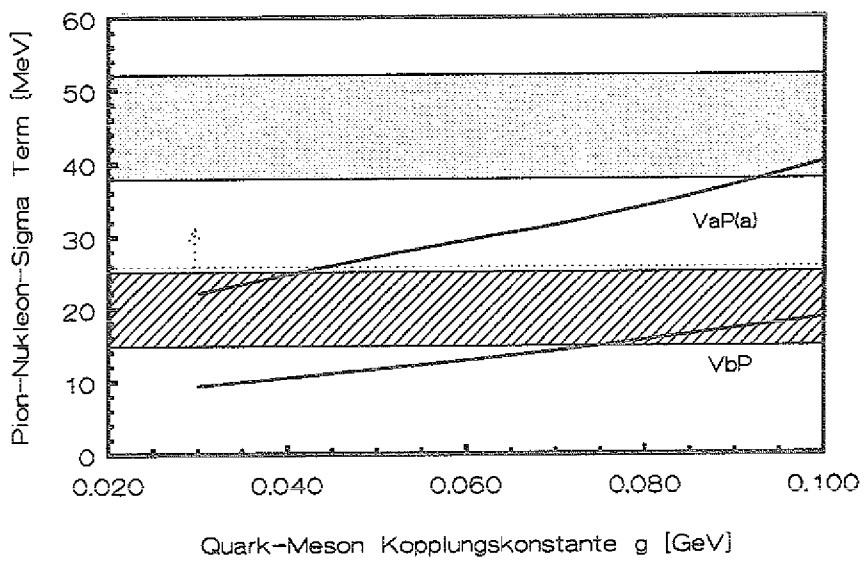


Abb. 5.24: Pion-Nukleon-Sigma Term im CD-Modell

Der $\pi N\sigma$-Term ist für beide Variationsverfahren (VbP und VaP(a)) gegen die Quark-Meson Kopplungskonstante g aufgetragen. Die durch Punkte gekennzeichnete Fläche markiert den auf der πN-Streudatenanalyse gegründeten experimentellen Bereich[134] von $\sigma_{\pi N}$, die punktierte Linie gibt die (vermutlich) untere Grenze der experimentellen Werte von $\sigma_{\pi N}$ an, die auf dem Spektrum des Baryon-Oktetts beruhen (siehe Text). Die schraffierte Fläche schließlich bezeichnet den Bereich der Resultate ($\sigma_{\pi N} \sim 15 - 25$ MeV), die mit Hilfe von Gitteichrechnungen[141,142,143] ermittelt wurden.

Die nicht ganz eindeutige experimentelle Situation und die Resultate des CD-Modells für $\sigma_{\pi N}$ (Gl. (5.94)) sind in Bild 5.24 aufgetragen. Wird $\sigma_{\pi N}$ aus der Mean-Field-Lösung ermittelt, so erweist sich sein Wert als zu klein verglichen mit den experimentellen Daten. Das VaP(a)-Verfahren

[(k)]Im NJL-Modell findet man im Bereich physikalisch sinnvoller Kopplungskonstanten[83] $\sigma_{\pi N} \sim 35 - 40$ MeV.

jedoch bewirkt eine signifikante Verstärkung von $\sigma_{\pi N}$

$$\sigma_{\pi N} \rightarrow \Lambda_\sigma \sigma_{\pi N} \,, \tag{5.99}$$

da in der Regel Werte für $\Lambda_\sigma \sim 2.2-2.5$ (Λ_σ ist der Variationsparamenter des σ-Feldes) beobachtet werden. Die VaP(a)-Resultate sind deutlich verbessert, sind aber im Vergleich zu den aus den πN-Streudaten extrahierten Werten für $\sigma_{\pi N}$ etwas zu klein (siehe Bild 5.24). Die Auswirkungen einer Variation des Modellparamenters m_σ wurden nicht untersucht. Es ist allerdings zu vermuten, daß eine Verringerung von m_σ zu einer weiteren (geringfügigen) Anhebung von $\sigma_{\pi N}$ führt, da die räumliche Ausdehnung des σ-Feldes mit abnehmendem m_σ ansteigt.

Birse und McGovern[144] haben im Rahmen eines chiral invarianten CD-Modells, das jedoch kein Potential $U(\chi)$, sondern nur einen Massenterm für das χ-Feld enthält, den $\pi N \sigma$-Term

$$\sigma_{\pi N} = \frac{m_\pi^2}{m_\sigma^2} f_\pi \int d^3r \, \langle N | J_\sigma | N \rangle \tag{5.100}$$

aus dem Strom J_σ, der durch die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m_\sigma^2\right) \sigma(x) = J_\sigma(x) \tag{5.101}$$

festgelegt ist, mit Hilfe störungstheoretischer Methoden, ähnlich denen im Cloudy-Bag-Modell[32], berechnet. Die erhalten Werte für $\sigma_{\pi N}$, die zwischen 32 und 38 Mev liegen, und damit in etwa den hier aus dem σ-Feld mit dem VaP(a)-Verfahren berechneten Werten übereinstimmen.

6. Resümee

Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung von Verfahren und Techniken, die eine quantitative Analyse spurioser Schwerpunkteffekte im Rahmen effektiver chiral invarianter Quark-Meson-Modelle ermöglichen, die seit geraumer Zeit erfolgreich zur Beschreibung des Nukleons und seiner Eigenschaften (statischer Observabler sowie Formfaktoren) Verwendung finden. Das Nukleon, das eine komplexe innere Struktur besitzt, wird in dieser Arbeit im Rahmen des Gell-Mann-Lévy-Modells und einer chiral invarianten Version des colourdielektrischen Modells (CD-Modells) als (chirales) Soliton aufgefaßt. Beide Modelle spiegeln eine grundlegende Eigenschaft der QCD bei niedrigen Energien wider, die spontane Brechung der chiralen Symmetrie. Darüberhinaus weist das CD-Modell ein phänomenologisches Confinement der Quarkfreiheitsgrade auf und genügt somit einer weiteren wichtigen Forderung der QCD, die jedoch bis heute nicht aus dieser fundamentalen Theorie abgeleitet werden konnte.

Das geeignetste Verfahren, einerseits spuriose Schwerpunktkomponenten aus symmetrieverletzenden Quantenzuständen zu eliminieren, andererseits Zustände mit definiertem Spin und Isospin zu erzeugen, bieten die aus der Kernphysik bekannten Peierls-Yoccoz-Projektionstechniken, die eine Berechnung baryonischer Observabler bei simultaner Berücksichtigung der Schwerpunkteffekte erlauben. Die Anwendung solcher Projektionsverfahren setzt jedoch die Konstruktion eines Quantenzustands voraus, der zumindest näherungsweise eine Lösung des Eigenwertproblems der betrachteten Quark-Meson-Modelle ist.

Zu diesem Zweck werden in einem ersten Schritt die klassischen solitonischen Lösungen der chiralen Valenzquarkmodelle durch Variation der von den Quark- und Mesonfeldern abhängigen (klassischen) Energie konstruiert und untersucht. Die Struktur einer nichttrivialen Lösung der Lagrangefunktionen, welche minimale Energie und Baryonenzahl $B = 1$ besitzt, ist durch eine sphärisch symmetrische räumliche Verteilung der drei Valenzquarks charakterisiert, d. h. diese besetzen jeweils einen 1s-Zustand. Die Optimierung der klassischen Energie erzwingt eine Hedgehog-Struktur der Spin-Flavour-Wellenfunktion der Quarks, falls die Bosonfelder linear an die Quarkfelder koppeln und die Lagrangefunktion invariant unter Isospin- Lorentz- und Zeitumkehrtransformationen ist. Die Feldkonfigurationen der klassischen Bosonfelder sind dann durch die Quellterme in den mesonischen Bewegungsgleichungen vollständig festgelegt, d. h. das Pionfeld weist p-Wellenstruktur, das Sigmafeld s-Wellenstruktur auf. Besitzt das colourdielektrische χ-Feld, das im CD-Modell in nichtlinearer Weise an die Quarkfelder koppelt, sphärische Symmetrie (s-Welle), so ist auch in diesem Fall der Hedgehog eine Variationslösung minimaler Energie des Hamilton'schen Funktionals. Im Rahmen des Hedgehog-Ansatzes sind die klassischen Energien beider Modelle Funktionale der radialen Anteile der Quark- und Bosonfelder. Diese nur von $|r|$ abhängigen Funktionen wurden mit Hilfe des Variationsprinzips unter Einschluß der Nebenbedingung ermittelt, daß eine Lösung mit Baryonenzahl $B = 1$ gesucht ist.

Diese sogenannten Mean-Field-Lösungen des Gell-Mann-Lévy-Modells und des CD-Modells weisen stark unterschiedlichen Charakter auf. Ausgeprägten Strukturen der radialen Anteile der

chiralen Felder, $\phi(r)$ und $\sigma(r)$, im linearen σ-Modell stehen entsprechende bosonische Funktionen im CD-Modell gegenüber, die für physikalisch sinnvolle Quark-Meson Kopplungskonstanten durch ihre Vakuumerwartungswerte approximiert werden können, d. h. $\sigma(r) \sim f_\pi$ und $\phi(r) \sim 0$. Im Gegensatz zum Gell-Mann-Lévy-Modell, dessen Quarkfelder, $u(r)$ und $v(r)$, einen einfachen exponentiellen Abfall aufweisen, erfordern die Randbedingungen im CD-Modell eine doppeltexponentiellen Abfall der Quarkfelder, was eine erhebliche Erschwernis der numerischen Analyse der Schwerpunkteffekte in diesem Modell zur Folge hat.

Die Quantisierung des Hamilton'schen Funktionals erfolgt durch die kanonischen Quantisierungsregeln, denen die Quark- und Mesonfeldoperatoren genügen. Der für die Anwendung der Peierls-Yoccoz-Projektionstechniken erforderliche Fockzustand wird als Tensorprodukt einer Slaterdeterminante für die Fermionfelder und kohärenten Zuständen für alle beteiligten Bosonfelder konstruiert. Die Entwicklung der bosonischen Feldoperatoren in einer Basis aus ebenen Wellen — freie Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung — vereinfacht die Projektionsrechnungen entscheident, da der mit dieser Basis verbundene 0-Teilchen-Zustand translations- und rotationsinvariant ist und daher als physikalischer Vakuumzustand interpretiert werden kann. Die Berechnung von Erwartungswerten in projizierten Zuständen zeigt, daß die Wahl der Basis keinesfalls willkürlich ist. Grundlage der Konstruktion kohärenter Zustände sollten vielmehr die Eigenmoden des Solitons sein, die die Wechselwirkung eines Mesons mit dem Solitonfeld beschreiben. Der mit einer lokalisierten Basis verbundene 0-Teilchen-Zustand jedoch ist im Allgemeinen weder translations- noch rotationsinvariant. Dieser Mangel kann zwar durch eine Bogoliubov-Transformation, die den nichtinvarianten Zustand in einen invarianten (und somit physikalisch sinnvollen) überführt[69], beseitigt werden, aber die praktische Ausführung derartiger (Projektions-) Rechnungen gestaltet sich äußerst schwierig und wurde daher unterlassen.

Ein erster Schritt die Effekte abzuschätzen, die auf der möglichen Distorsion der Basis aus ebenen Wellen durch die solitonischen Felder beruhen, erfolgte durch die Berechnung einfacher Schwerpunktkorrekturen,

$$M = E_{hh} - \frac{\langle \Psi_{hh} | : P_\sigma^2 + P_{\pi^2} + P_q^2 : | \Psi_{hh} \rangle}{2E_{hh}}, \tag{6.1}$$

zur Mean-Field-Energie E_{hh} im σ-Modell auf der Grundlage zweier unterschiedlicher Basissysteme. Die Erwartungswerte der normalgeordneten Quadrate der Impulsoperatoren der bosonischen Felder, $\langle : P_\sigma^2 : \rangle$ und $\langle : P_\pi^2 : \rangle$, zwischen kohärenten Zuständen, die entweder auf einer Basis aus ebenen Wellen oder einer Basis aus harmonischen Oszillatorwellenfunktionen fußen, sind nahezu gleich, so daß die Ausführung von Projektionsrechnungen in Verbindung mit der Konstruktion kohärenter Zustände in einer Basis aus ebenen Wellen gerechtfertigt scheint. Eine tiefergehende Untersuchung diese Problemkreises steht jedoch noch aus.

Die bisher betrachteten Solitonen sind klassische lokalisierte Objekte, die Symmetrien, die der Hamiltonoperator erfüllt, $[H, S] = 0$, nicht genügen. Insbesondere brechen die solitonischen Lösungen die Translations-, Drehimpuls- und Isospininvarianz des Hamiltonoperators, d. h. sie enthalten spuriose Schwerpunktkomponenten und sind weder Eigenfunktionen des Spins und Isospins noch

Parameter	$g = 4.1$ $m_\sigma = 0.6$ GeV	$g = 4.1$ $m_\sigma = 1.2$ GeV	Experiment
E_N [GeV]	0.930 (1.149)	0.759 (1.191)	0.940
$E_\Delta - E_N$ [GeV]	0.034 (0.062)	0.063 (0.091)	0.294
$\langle r_c^2 \rangle_p$ [fm^2]	0.88 (0.97)	0.66 (0.69)	0.74
$\langle r_c^2 \rangle_n$ [fm^2]	-0.031 (-0.030)	-0.047 (-0.046)	-0.12
g_A	1.65 (1.61)	1.66 (1.64)	1.25
μ_p [n. m.]	2.43 (2.27)	2.47 (2.31)	2.79
μ_n [n. m.]	-1.76 (-1.70)	-1.90 (-1.85)	-1.91
$\mu_p/\lvert\mu_n\rvert$	1.38 (1.33)	1.30 (1.24)	1.46
$g^s_{\pi NN}(0)\frac{m_\pi}{2M_N}$	1.32 (1.22)	1.61 (1.41)	—
$g^f_{\pi NN}(0)\frac{m_\pi}{2M_N}$	0.83	0.92	—
$g^{GT}_{\pi NN}(0)\frac{m_\pi}{2M_N}$	1.24 (1.21)	1.25 (1.24)	0.94
$\sigma_{\pi N}$ [MeV]	99	70	$\sim 25 - 52$
$\Delta M^h_{np}/\Delta m$	0.76 (0.63)	0.63 (0.49)	$\sim 0.3 - 0.9$
g^0_A	0.82 (0.71)	0.71 (0.58)	$\sim 0.0 - 0.5$
Parameter	$g = 5.0$ $m_\sigma = 0.6$ GeV	$g = 5.0$ $m_\sigma = 1.2$ GeV	Experiment
E_N [GeV]	0.655 (0.980)	0.526 (1.014)	0.940
$E_\Delta - E_N$ [GeV]	0.086 (0.118)	0.873 (0.111)	0.294
$\langle r_c^2 \rangle_p$ [fm^2]	0.59 (0.65)	0.54 (0.58)	0.74
$\langle r_c^2 \rangle_n$ [fm^2]	-0.063 (-0.064)	-0.074 (-0.076)	-0.12
g_A	1.70 (1.68)	1.71 (1.71)	1.25
μ_p [n. m.]	2.61 (2.46)	2.56 (2.45)	2.79
μ_n [n. m.]	-2.02 (-1.98)	-2.06 (-2.04)	-1.91
$\mu_p/\lvert\mu_n\rvert$	1.29 (1.24)	1.24 (1.20)	1.46
$g^s_{\pi NN}(0)\frac{m_\pi}{2M_N}$	1.56 (1.41)	1.89 (1.63)	—
$g^f_{\pi NN}(0)\frac{m_\pi}{2M_N}$	0.98	1.02	—
$g^{GT}_{\pi NN}(0)\frac{m_\pi}{2M_N}$	1.28 (1.27)	1.29 (1.29)	0.94
$\sigma_{\pi N}$ [MeV]	124	89	25–52
$\Delta M^h_{np}/\Delta m$	0.52 (0.39)	0.48 (0.37)	$\sim 0.3 - 0.9$
g^0_A	0.63 (0.51)	0.58 (0.48)	$\sim 0.0 - 0.5$

Tab. 6.1: Zusammenfassung der Resultate im Gell-Mann-Lévy-Modell

des linearen Impulses. Eigenfunktionen der Generatoren dieser Symmetrien können allerdings durch simultane Projektion des (symmetrieverletzenden) Fockzustands auf die Eigenräume der mit dem Hamiltonoperator kommutierenden Symmetrieoperatoren erzeugt werden. Da der Projektionsoperator auf den Impuls $q = 0$ mit demjenigen auf den Drehimpuls J vertauscht, können gemeinsame Eigenfunktionen des Impulses, Spins und Isospins durch simultane Projektion des Hedgehog-Ansatzes auf die Quantenzahlen $J = T$, $M_J = -M_T$ und $q = 0$ konstruiert werden. Der Modellzustand für ein Baryon mit definiertem Spin und Isospin in seinem Ruhesystem, der Grundlage der Berechnung von Größen ist, die sich als Erwartungswerte von Zuständen mit dem Implus $q = 0$ ergeben, wie beispielsweise die Ruhemasse oder die Axialvektorkopplungskonstante, geht also aus kombinierter Projektion des Fock-Ansatzzustands hervor.

Um jedoch auch Schwerpunkteffekte der elektromagnetischen Eigenschaften des Nukleons (Ladungsradien und magnetische Momente) abschätzen zu können, ist es erforderlich, Zustände mit endlichem Impuls $q \neq 0$ zu betrachten. Damit Zustände mit unterschiedlichen Impulsen q und q' durch Lorentztransformationen miteinander verbunden sind, der relativistischen Invarianz der Theorie also Rechnung getragen wird, müssen Zustände mit Impuls $q \neq 0$ durch Boost des auf Impuls $q = 0$ (und Spin J) projizierten Fockzustands konstruiert werden. Eine solche Vorgehensweise stößt jedoch nicht nur auf große technische Schwierigkeiten in den chiralen Modellen, da die volle Dynamik involviert ist, sondern auch auf methodische Probleme, da bei der Berechnung von Ladungsradien und magnetischen Momenten divergente Vakuumbeiträge von Produkten der Feldoperatoren, die nicht nur von den Stromoperatoren, sondern auch von den Boostoperatoren herrühren, abzuziehen sind.

Eine (nichtrelativistische) Peierls-Yoccoz-Projektion auf endlichen Impuls $q \neq 0$ ist zwar frei von derartigen Problemen, birgt aber den Nachteil, daß Zustände mit unterschiedlichen Impulsen nicht die gleiche interne Struktur besitzen, und die Energie-Impuls-Relation folglich nicht erfüllt ist, d. h. träge und dynamische Masse differieren. Dieser Nachteil, unter der Bezeichnung Peierls-Yoccoz-Problem bekannt, kann zwar im nichtrelativistischen Grenzfall durch Variation des projizierten Zustands (VaP-Verfahren) behoben werden, jedoch erfüllen Energieerwartungswerte die korrekte relativistische Energie-Impuls-Relation nur, falls die Zustände mit Impuls $q \neq 0$ durch Boost des Ruhezustands erzeugt werden. Allerdings konnte gezeigt werden, daß die Unterschiede zwischen den Energien $E_{hh}(q)$, die einerseits auf der korrekten relativistischen Energie-Impuls-Beziehung, andererseits auf der Projektion auf endlichen Impuls basieren, für kleine Impulse ($|q| < 0.2$ GeV) sehr gering sind, so daß die Simulation des Boostoperators durch eine Projektion auf Impuls $q \neq 0$ für die Berechnung der Momente der Formfaktoren, d. h. der Ableitungen der Formfaktoren an der Stelle $q = 0$, auch im Licht der Ergebnisse von Lübeck et al.[39] gerechtfertigt ist.

Die approximative Variation der $J, T, q = 0$-projizierten Zustände (VaP(a)-Verfahren), die in Abschnitt 4.3 beschrieben ist, trägt nicht nur zur Lösung des Peierls-Yoccoz-Problems bei, sondern führt auch zu einer erheblichen Verstärkung der chiralen Felder des CD-Modells. Das Verfahren beruht auf einer Reskalierung der Amplituden der mesonischen Funktionen, einer Lösung der Mean-Field-Diracgleichung, die die reskalierten Bosonfunktionen enthält, sowie einer Optimierung der von

den Skalierungsfaktoren abhängigen Ruheenergie des Nukleons. Eine Verbesserung aller Resultate des CD-Modells verglichen mit den experimentellen Daten ist zu beobachten. Dies gilt insbesondere für den Ladungsradius des Neutrons und den Pion-Nukleon-Sigma Term, die beide nicht an das Experiment angepaßt werden können, falls es die Mean-Field-Lösungen sind, die projiziert werden. Ebenso werden Virialtheoreme, wie die Goldberger-Treiman-Relation, die durch die projizierten Mean-Field Lösungen stark verletzt sind, durch das VaP(a)-Verfahren zumindest näherungsweise erfüllt.

Tab. 6.1 zeigt eine Übersicht über die Ergebnisse der Projektionsrechnungen im Gell-Mann-Lévy-Modell für verschiedene Parametersätze. Die eingeklammerten Größen erhält man, falls die Schwerpunktkorrekturen vernachlässigt werden, also eine reine J,T-Projektion durchgeführt wird. Da sich die Schwerpunktkorrekturen der Quark- und Mesonanteile der Stromoperatoren gegenseitig wegheben, sind nur geringe Auswirkungen der Eliminierung der Schwerpunkteffekte auf die Observablen zu beobachten. Die einzige Ausnahme bildet die Nukleon-Pion-Nukleon Kopplungskonstante, $g^s_{\pi NN}(0)$, die aus dem Pion-Strom ermittelt wird. Hier addieren sich die Wirkungen der Projektion auf den Impuls und heben sich nicht weg. Die Ursache hierfür liegt möglicherweise darin, daß der mesonische Anteil des Pion-Stroms proportional zur dritten Potenz der Feldoperatoren ist und nicht proportional zur zweiten, wie dies beim elektromagnetischen and isovektoriellen axialen Strom der Fall ist. Die starke Absenkung der Energie des Nukleons durch die Impulsprojektion kann auf die großen Nullpunktsenergien des Hamiltonoperators, der das freie σ-Feld beschreibt, zurückgeführt werden. In diesem Zusammenhang ist erneut die Frage aufzuwerfen, ob die Entwicklung des σ-Feldoperators in einer Basis aus ebenen Wellen eine gute Beschreibung der Quantenfluktuationen dieses Feldes ist und damit eine adäquate Grundlage für Projektionsrechnungen darstellt.

Sollen die Ruheenergie des Nukleons und der Ladungsradius des Protons an das Experimnent anpaßt werden, so sind kleine Werte für die Masse des σ-Feldes und kleine Quark-Meson Kopplungskonstanten g zu wählen, die Anpassung der übrigen Observablen (insbesondere des Ladungsradius des Neutrons) jedoch erfordert eher größere Werte für g. Die gleichzeitige Beschreibung aller statischen Observablen des Nukleons im Gell-Mann-Lévy-Modell ist daher etwas problematisch. Unabhängig von Parametersätzen und Projektionsmethoden jedoch sind die Werte für die Axialvektorkopplungskonstante g_A und den Pion-Nukleon-Sigma Term $\sigma_{\pi N}$ im Gell-Mann-Lévy-Modell immer erheblich zu groß.

Dies ist möglicherweise auf Inkonsistenzen der effektiven gekoppelten Quark-Meson-Modelle, in denen die Quarks und Mesonen als voneinander unabhängige Freiheitsgrade behandelt werden, zurückzuführen. Die Annahme, die mesonischen Terme eines Quark-Meson-Modells (Gell-Mann-Lévy-Modell) absorbieren die Seeanteile eines chiralen Quark-Modells (Gradientenentwicklung der bosonisierten Version des Nambu-Jona-Lasinio-Modells), ist nur für die Energie, die Ladungsradien und die magnetischen Momente gültig, jedoch nicht mehr für die Axialvektorkopplungskonstante (siehe Tab. 6.2). Die Isospinanteile der Ladungsradien und der magnetischen Momente sind in beiden Modellen von gleicher Größenordnung, obgleich sie auf unterschiedlichen Quantisierungsverfahren fußen. Bemerkenswert ist, daß die isoskalaren Seeanteile des Ladungsradius

Modell	Gell-Mann-Lévy	Nambu-Jona-Lasinio
$E_\Delta - E_N$ [GeV]	0.103	0.261
$\langle r_c^2 \rangle_{I=0}^{Q/val}$ [fm^2]	0.309	0.223
$\langle r_c^2 \rangle_{I=1}^{Q/val}$ [fm^2]	0.235	0.220
$\langle r_c^2 \rangle_{I=0}^{M/v.p.}$ [fm^2]	0.000	0.038
$\langle r_c^2 \rangle_{I=1}^{M/v.p.}$ [fm^2]	0.131	0.223
$\langle r_c^2 \rangle_p$ [fm^2]	0.674	0.704
$\langle r_c^2 \rangle_n$ [fm^2]	-0.057	-0.182
$\mu_{I=0}^{Q/val}$ [n. m.]	0.24	0.29
$\mu_{I=1}^{Q/val}$ [n. m.]	1.41	0.79
$\mu_{I=0}^{M/v.p.}$ [n. m.]	0.00	0.03
$\mu_{I=1}^{M/v.p.}$ [n. m.]	0.73	0.31
μ_p [n. m.]	2.38	1.42
μ_n [n. m.]	-1.90	-0.78
$g_A^{Q/val}$	1.10	0.73
$g_A^{M/v.p.}$	0.56	0.03
g_A	1.66	0.76

Tab. 6.2: Gell-Mann-Lévy- versus Nambu-Jona-Lasinio-Modell

Tab. 6.2 zeigt einen Vergleich elektromagnetischer und axialer Eigenschaften des Nukleons, die einerseits mittels J,T-Projektion aus dem Gell-Mann-Lévy-Modell (Parametersatz: $g = 4.5$, $m_\sigma = 2gf_\pi \simeq 0.8$ GeV), andererseits mittels semiklassischer Quantisierung (Cranking-Modell) aus dem Nambu-Jona-Lasinio-Modell[145] *(Parameter: $M = gf_\pi = 0.420$ GeV, $m_\pi = 0.140$ GeV) extrahiert wurden.*

und des magnetischen Moments im NJL-Modell (im Gegensatz zu den isovektoriellen) nahezu verschwinden und damit den isoskalaren mesonischen Anteilen, die im elektromagnetischen Strom des Gell-Mann-Lévy-Modells nicht auftreten und daher identisch null sind, entsprechen. Eine völlig andere Situation trifft man im Fall der Axialvektorkopplungskonstanten an; einem ausgeprägten isovektoriellen mesonischen Anteil steht ein sehr kleiner Seebeitrag gegenüber.

Daß g_A im NJL-Modell dennoch nicht gut reproduziert wird, wie dies im Gell-Mann-Lévy-Modell ohne den mesonischen Anteil insbesondere unter Hinzunahme der Schwerpunktkorrekturen der Fall wäre, ist unter Umständen ein Artifakt der semiklassischen Quantisierung, die nur dann eine gute Näherungsmethode ist, falls 'scharfe' Überläppe vorliegen. Ein Vergleich der hier zum Zuge kommenden Peierl-Yoccoz-Projektion mit der Cranking-Methode zeigt, daß diese Voraussetzung wohl nicht erfüllt ist, da erhebliche Unterschiede der isovektoriellen Anteile der Observablen (die isoskalaren Anteile müssen übereinstimmen, was im Rahmen von Rundungsfehlern und nume-

Methode	J,T-Projektion	Cranking
$E_\Delta - E_N$ [GeV]	0.111	~ 0.250
$\langle r_c^2 \rangle^Q_{I=0}$ [fm^2]	0.251	0.255
$\langle r_c^2 \rangle^Q_{I=1}$ [fm^2]	0.174	0.150
$\langle r_c^2 \rangle^M_{I=1}$ [fm^2]	0.153	0.450
$\langle r_c^2 \rangle_p$ [fm^2]	0.578	0.855
$\langle r_c^2 \rangle_n$ [fm^2]	-0.076	-0.345
$\mu^Q_{I=0}$ [n. m.]	0.23	0.22
$\mu^Q_{I=1}$ [n. m.]	1.28	0.88
$\mu^M_{I=1}$ [n. m.]	0.96	1.07
μ_p [n. m.]	2.45	2.17
μ_n [n. m.]	-2.04	-1.73
g_A^Q	1.01	0.69
g_A^M	0.70	0.64
g_A	1.71	1.33

Tab. 6.3: Peierls-Yoccoz-Projektion versus Cranking-Modell

Δ-N-Aufspaltung, Ladungsradien, magnetische Momente und die Axialvektorkopplungskonstante sind im Gell-Mann-Lévy-Modell (Parametersatz: $g = 5.0$, $m_\sigma = 1.2$ GeV) mittels Peierls-Yoccoz-Spin-Isospin-Projektion und mittels Cranking[53] berechnet und einander gegenübergestellt. Die Δ-N-Aufspaltung im Cranking-Modell bezieht sich auf die Kopplungskonstante $g = 5.38$

rischer Genauigkeit auch der Fall ist, da nur Mean-Field-Größen miteinander verglichen werden), berechnet mit beiden Methoden, feststellbar sind (siehe Tab. 6.3). Mit einer Ausnahme folgen die isovektoriellen Größen des NJL-Modells im Vergleich zu denjenigen des Gell-Mann-Lévy-Modells der durch das Cranking-Modell vorgezeichneten Tendenz, d. h. die Abweichungen der isovektoriellen Anteile der Observablen im NJL-Modells gegenüber denjenigen des linearen σ-Modells hat gleiche Richtung und ähnliche Größenordnung wie die Abweichungen, die im σ-Modell aufgrund der unterschiedlichen Quantisierungsverfahren beobachtet werden. Die Fortschreibung des im Cranking-Modell beobachteten Trends ließe eher einen größeren isovektoriellen Beitrag des magnetischen Moments im NJL-Modell als im Gell-Mann-Lévy-Modell vermuten. Tatsächlich ist dieser aber weniger als halb so groß, was in der Folge zu Werten der magnetischen Momente im NJL-Modell für Proton und Neutron führt, die verglichen mit den experimentellen Daten um den Faktor zwei zu klein sind.

Einen sehr viel geringeren Einfluß auf die Observablen üben die chiralen Felder im CD-Modell aus. Der isovektorielle mesonische Beitrag zur Axialvektorkopplungskonstanten bleibt auch bei

Verstärkung der chiralen Felder durch das VaP(a)-Verfahren sehr gering, so daß g_A durch den Quarkanteil dominiert wird, und unabhängig von Parametersätzen und Variationsverfahren einen Wert annimmt, der bis auf ca. 10% mit dem Experiment übereinstimmt. Schwerpunkteffekte nehmen daher auch in diesem Modell einen bedeutenderen Rang ein als im Gell-Mann-Lévy-Modell, da sich die Auswirkungen der Impulsprojektion auf Valenz- und Mesonbeitrag zu den Observablen nicht mehr gegenseitig wegheben. Dies gilt in besonderer Weise für den Ladungsradius des Protons, dessen Schwerpunktkorrekturen nicht vernachlässigbar sind.

Parameter	$p = 1$ $g = 35.8$ MeV	$p = 2$ $g = 35.8$ MeV	$p = 4$ $g = 35.8$ MeV	**Experiment**
E_N [GeV]	0.903	0.939	0.940	0.939
$\langle r_c^2 \rangle_p$ [fm^2]	0.900	0.766	0.716	0.74
$\langle r_c^2 \rangle_n$ [fm^2]	-0.083	-0.101	-0.117	-0.12
g_A	1.40	1.41	1.43	1.27
μ_p [n. m.]	2.61	2.44	2.37	2.79
μ_n [n. m.]	-1.96	-1.88	-1.88	-1.91
$\mu_p/\lvert\mu_n\rvert$	1.33	1.30	1.26	1.46
$\sigma_{\pi N}$ [MeV]	24.0	27.3	30.8	25 – 50
$\frac{m_\pi}{2M_N} g^f_{\pi NN}(q^2 = 0)$	1.21	1.23	1.28	
$\frac{m_\pi}{2M_N} g^{GT}_{\pi NN}(q^2 = 0)$	1.05	1.06	1.08	0.96
g_A^0	0.73	0.71	0.70	0.0 – 0.5
$\Delta M^h_{np}/\Delta m$	0.69	0.68	0.67	0.3 – 0.9

Tab. 6.4: Zusammenfassung der Resultate im CD-Modell

Tab. 6.4 zeigt eine Übersicht über die Ergebnisse der Projektionsrechnungen im CD-Modell für drei verschieden Exponenten p des χ-Feldes. Die Quark-Meson Kopplungskonstanten g wurden jeweils so gewählt, daß die Ruheenergie des Nukleons und der Ladungsradius des Protons in etwa mit den experimentellen Daten übereinstimmen. Die übrigen Parameter des CD-Modells ($\gamma = 0.019$, $\eta = 0.080$ und $m_\chi = 1.4$ GeV) sind in allen drei Fällen ($p = 1, 2, 4$) dieselben. Alle angegebenen Resultate beziehen sich auf die kombinierte J, T, q-Projektion und wurden mit den Wellenfunktionen, die aus dem VaP(a)-Verfahren hervorgehen, berechnet.

Der ursprüngliche Ansatz von Nielson und Patkós[21] sah im Exponenten der skalaren Kopplung des colourdielektrischen Feldes an die Quarkfelder $p = 1$ vor. Überlegungen zur dynamischen Symmetriebrechung haben Banerjee[73] veranlaßt, $p = 2$ vorzuschlagen. Die Untersuchung des CD-Modells mittels kombinierter Projektion auf Spin, Isospin und linearen Impuls im Rahmen des VaP(a)-Verfahrens wurde daher auf drei verschiedene Exponenten p ausgedehnt. Die Wirkungen der Wahl verschiedener Exponenten auf die Observablen des Nukleons sind in Tab. 6.3 zusammen-

gefaßt. Die Übereinstimmung der, insbesondere für $p = 2$ und $p = 4$, ermittelten Werte mit den experimentellen Daten ist ausgezeichnet (siehe Tab. 6.3). Dies gilt auch für $p = 1$, falls der in Kapitel 5 angegebene Parametersatz verwendet wird.

Die in dieser Arbeit vorgestellten Methoden einer simultanen Projektion auf Spin, Isospin und linearen Impuls erlauben die Eliminierung der spuriosen Schwerpunktbewegung aus baryonischen Wellenfunktionen und stellen somit ein geeignetes Werkzeug zur Untersuchung chiral invarianter effektiver Quark-Meson-Modelle dar. Schwerpunkteffekte sind in zwei effektiven Quark-Meson-Modellen mit Hilfe deartiger Methoden studiert und eine Vielzahl nukleonischer Observabler berechnet worden. Insbesondere im colourdielektrischen Modell konnte eine gute Übereinstimmung der Observablen des Nukleons mit den experimentellen Daten erzielt werden. Dennoch gibt es eine Anzahl offener Fragen und Probleme sowie Anwendungen, deren Lösung von Interesse ist und die zum Teil bereits erwähnt wurden. So lassen sich beispielsweise derartige Projektionstechniken auf chirale Valenzquarkmodelle mit Vektormesonen erweitern und die Schwerpunkteffekte in derartigen Modellen abschätzen. Andererseits ermutigen die guten Resultate im CD-Modell weitere Observable im Rahmen dieses Modells zu berechnen. Da bereits Mean-Field-Lösungen mit Valenzquarks in 2s- und 1p-Orbitalen im Gell-Mann-Lévy-Modell gefunden wurden[146], könnte die Untersuchung eines Spektrums, das Nukleonen mit positiver und negativer Parität umfaßt, innerhalb des CD-Modells besonders vielversprechend sein, da dieses ein phänomenologisches Confinement enthält und keine freien Quarkzustände auftreten können. Des weiteren seien die Vorhersagen der Modelle für die elektromagnetische Polarisierbarkeit erwähnt. Schließlich ist die Berechnung des elektrischen Dipolmoments des Neutrons, die wichtige Rückschlüsse auf CP-verletzende Terme der QCD-Lagrangefunktion zuläßt[147], auch im Rahmen der hier vorgestellten Modelle und Projektionstechniken möglich.

Anhang A. Hedgehog-Zustand und chirale Quark-Meson Modelle

Der Hedgehog-Zustand und seine Eigenschaften im Hinblick auf effektive chirale Quark-Meson Lagrangefunktionen im SU(2)-Flavour-Sektor, welche willkürliche mesonische Selbstwechselwirkungen enthalten, ist Gegenstand dieses Abschnitts[46,26,42,43]. Fordert man, daß die Lagrangefunktion invariant unter Lorentztransformationen, Drehungen im Isospinraum und unter Zeitumkehr ist, so kann man zeigen, daß der Hedgehog eine stationäre Lösung der klassischen Bewegungsgleichungen ist. Die Strukturen der bosonischen Felder sind durch die Quellterme in den Euler-Lagrange-Gleichungen für diese Felder gegeben, d. h. die bilinearen Kopplungen der (Valenz-) Quarkfelder legen die Struktur der Mesonfelder fest.

Die Lagrangefunktion im SU(2)-Sektor, die wir betrachten wollen, habe die Form

$$L = L_q + L_m + L_I \tag{A.1}$$

worin

$$L_q = \bar{q}(x)\left(\imath\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)q(x) \tag{A.2a}$$

$$L_m = L_m(\phi_i, \partial_\mu\phi_i) \tag{A.2b}$$

$$L_I = \bar{q}(x)\sum_i \Gamma_i\phi_i(x)q(x) \tag{A.2c}$$

Die Lagrangefunktion setzt sich also aus drei Termen zusammen, welche die kinetische Energie der Quarks (L_q), die kinetische Energie der Mesonen und beliebige Selbstkopplungen der Bosonfelder (L_m) sowie einen Quark-Meson Wechselwirkungsterm (L_I) enthält, welcher linear in den Bosonfeldern $\phi_i(x)$ und bilinear in den Quarkfeldern $q(x)$ ist. Γ_i sind die bilinearen Kovarianten der Diractheorie, genauer

$$L_I = \sum_i\sum_{\alpha,\beta}\bar{q}_\alpha(x)\Gamma_{\alpha\beta}T_i\phi_i(x)q_\beta(x) \tag{A.2c'}$$

worin α und β Spinorindizes sind und $T_i = \delta_{i0}$, falls $\phi_i(x) = \phi_0(x)$ ein isoskalares Feld ist, und $T_i = \tau_i$, falls $\phi_i(x)$ ein isovektorielles Feld beschreibt.

Um nun zu zeigen, daß der Hedgehog-Zustand eine Variationslösung mit minimaler Energie im Rahmen der Mean-Field Approximation[(a)] ist, nehmen wir an, daß die Lagrangedichte ($A.1$) invariant unter Lorentztransformationen, Drehungen im Isospinraum und Zeitumkehr ist. Weiterhin müssen wir fordern, daß die drei Valenzquarks den gleichen 1s-Zustand besetzen und identische Spin-Flavour Struktur haben. Der Quarkspinor hat dann die folgende Form

$$q(x) = \frac{e^{-\imath\varepsilon t}}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix} u(r) \\ \imath v(r)\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\end{pmatrix}|\chi(\alpha)\rangle \tag{A.3}$$

[(a)] Die Mean-Field Approximation ist gleichwertig mit unserer Annahme, die Mesonfelder als zeitunabhängige klassische Felder aufzufaßen.

worin

$$|\chi(\alpha)\rangle = \alpha_1|u\uparrow\rangle + \alpha_2|u\downarrow\rangle + \alpha_3|d\uparrow\rangle + \alpha_4|d\downarrow\rangle \tag{A.3a}$$

einen generellen Spin-Flavouranteil des Fockzustands der Quarkfelder beschreibt, der der Normierungsbedingung

$$\sum_{i=1}^{4} |\alpha_i|^2 = 1 \tag{A.3b}$$

genügt. Es ist zweckmäßig die von M. Fiolhais[44] eingeführte Parametrisierung des Spin-Flavour-Zustands an Stelle der durch Gl. (A.3a) gegebenen für die folgenden Überlegungen zu verwenden. Er hat gezeigt, daß sich jeder beliebige Spin-Flavour-Zustand (A.3a) durch zwei Sätze von Eulerwinkeln — $\Omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ und $\tilde{\Omega} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ — und einen weiteren Parameter η ausdrücken läßt.

$$|\chi(\Omega, \tilde{\Omega}, \eta)\rangle = R(\Omega)\tilde{R}(\tilde{\Omega})\,[\cos\eta\,|u\downarrow\rangle - \sin\eta\,|d\uparrow\rangle] \tag{A.3a'}$$

Hierin sind $R(\Omega)$ und $R(\tilde{\Omega})$ Drehoperatoren im Spin- bzw. Isospinraum.

Da $R(\Omega)$ und $\tilde{R}(\tilde{\Omega})$ Symmetrieoperationen des Lagrangian (A.1) sind, sind die klassischen Bewegungsgleichungen

$$-\nabla^2\phi_i(x) + m_i^2\phi_i(x) + V(\phi_i) = \bar{q}(x)\Gamma_i q(x) \tag{A.4a}$$

$$\left[-\imath\alpha\cdot\nabla + m + \sum_i \Gamma_i\phi_i(x)\right] q(x) = \varepsilon q(x) \tag{A.4b}$$

forminvariant, und die Energie ist unabhängig von den Drehwinkeln Ω und $\tilde{\Omega}$. Ohne unsere Überlegungen einzuschränken, können wir daher $\Omega = \tilde{\Omega} = 0$ setzen, und erhalten:

$$|\chi(\eta)\rangle = \cos\eta\,|u\downarrow\rangle - \sin\eta\,|d\uparrow\rangle \tag{A.3a''}$$

Man kann zeigen, daß die Energie $E(\eta)$ für $\eta = 0$ und $\eta = \frac{\pi}{4}$ einen Extremwert annimmt. Zu diesem Zweck betrachten wir die 'Grand-Reversal'-Transformation[26],

$$G = \mathcal{T}e^{-\imath\pi I_2} \tag{A.5}$$

die sich aus der Zeitumkehrtransformation[(b)] $\mathcal{T}$ und einer Drehung um die 2-Achse im Isospinraum mit Winkel π zusammensetzt. Wenden wir die Transformation G auf den Quarkspinor (A.3) an, so erhalten wir:

$$G\,|q(\eta)\rangle = \frac{\imath}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix} u(r) \\ \imath v(r)\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r} \end{pmatrix}\sigma_2\tau_2|\chi(\eta)\rangle \tag{A.6}$$

Eine explizite Rechnung zeigt, daß

$$\sigma_2\tau_2|\chi(\eta)\rangle = -\sin\eta\,|u\downarrow\rangle + \cos\eta\,|d\uparrow\rangle \tag{A.7}$$

[(b)]Die Wirkung der Zeitumkehrtransformation auf Spinoren wurde in Abschnitt 5.3 behandelt.

gilt. Setzen wir nun $\eta = \frac{\pi}{4} + \delta$, so ergibt sich mit $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)$ und $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)$ aus Gl. $(A.6)$:

$$G\,|q(\frac{\pi}{4} + \delta)\rangle = -\imath\,|q(\frac{\pi}{4} - \delta)\rangle \tag{A.8}$$

Den tranformierten Spinor erhält man also bis auf einen irrelevanten Phasenfaktor durch die Spiegelung $\delta \to -\delta$. Da G eine Symmetrieoperation des Lagrangian $(A.1)$ ist, dieser also invariant unter der Tranformation G ist, müssen die Spinoren $|q(\frac{\pi}{4}+\delta)\rangle$ und $|q(\frac{\pi}{4}-\delta)\rangle$ zur gleichen Energie gehören, also gilt:

$$E(\frac{\pi}{4} + \delta) = E(\frac{\pi}{4} - \delta) \tag{A.9}$$

Gl. $(A.9)$ ist für jeden Wert von δ gültig, und es folgt, daß $\eta = \frac{\pi}{4}$ ein stationärer Punkt der Energie $E(\eta)$ ist.

In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß $\eta = 0$ ebenfalls ein stationäre Punkt ist. Dreht man den Quarkspinor $(A.3)$ im Isospinraum um die 3-Achse mit Winkel π,

$$F = \mathrm{e}^{-\imath\pi I_3} = -\imath\tau_3 \tag{A.10}$$

so findet man mit

$$F\,|q(\eta)\rangle = -\frac{\imath}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix} u(r) \\ \imath v(r)\sigma\cdot\hat{r}\end{pmatrix}\tau_3|\chi(\eta)\rangle \tag{A.11}$$

und

$$\tau_3|\chi(\eta)\rangle = \cos\eta\,|u\downarrow\rangle + \sin\eta\,|d\uparrow\rangle = |\chi(-\eta)\rangle \tag{A.12}$$

daß :

$$F\,|q(\eta)\rangle = -\imath\,|q(-\eta)\rangle \tag{A.13}$$

Wir können also den gleichen Schluß wie oben ziehen, und stellen fest, da nach Voraussetzung L invariant unter Drehungen im Isospinraum ist, daß $E(\eta) = E(-\eta)$ gilt; $\eta = 0$ also ebenfalls ein stationärer Punkt der Energie ist. Da die η-Abhängigkeit der Quellterme der Mesonenfelder durch $\sin 2\eta$ (siehe Gln. $(A.15a)$ und $(A.15b)$ sowie Gln. $(A.16a\text{–}c)$) gegeben ist, ist die Energie periodisch, d. h. $E(\eta = 0) = E(\eta = \pi)$ Die Energie $E(\eta)$ weist also im Bereich $0 \leq \eta \leq \pi$ ein Maximum und ein Minimum auf oder ist konstant.

Fassen wir unsere bisherigen Überlegungen zusammen, so stellen wir fest, daß der Hedgehog $(\eta = \frac{\pi}{4})$ eine Lösung der klassischen Bewegungsgleichungen mit extremaler Mean-Field-Energie ist. Eine weitergehende Aussage ist auf der Grundlage von Symmetriebetrachtungen nicht möglich. Bemerkenswert bleibt die Tatsache, daß die getroffenen Aussagen unabhängig von der konkreten Ausgestaltung der Quark-Meson-Kopplung sind und innerhalb der Mean-Field Näherung allein aus allgemeinen Invarianzforderungen, die an den Lagrangian zu stellen sind, und der Annahme, daß die Valenzquarks identische räumliche (1s-Orbit) und Spin-Flavour-Zustände besetzen, ableitbar sind.

Daß der Hedgehog in der Tat die Lösung mit mimimaler Energie darstellt[c], muß die numerische Lösung der Bewegungsgleichungen und nachfolgende Berechnung der Mean-Field Energie zeigen. M. Fiolhais[49] hat eine derartige Rechnung für das Gell-Mann-Levy Modell durchgeführt und gezeigt, daß durch den Hedgehog-Zustand

$$|\chi_h\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\downarrow\rangle - |d\uparrow\rangle) \tag{A.14}$$

tatsächlich die Spin-Flavour-Konfiguration mit minimaler Energie gegeben ist (vgl. Bild $A.1$).

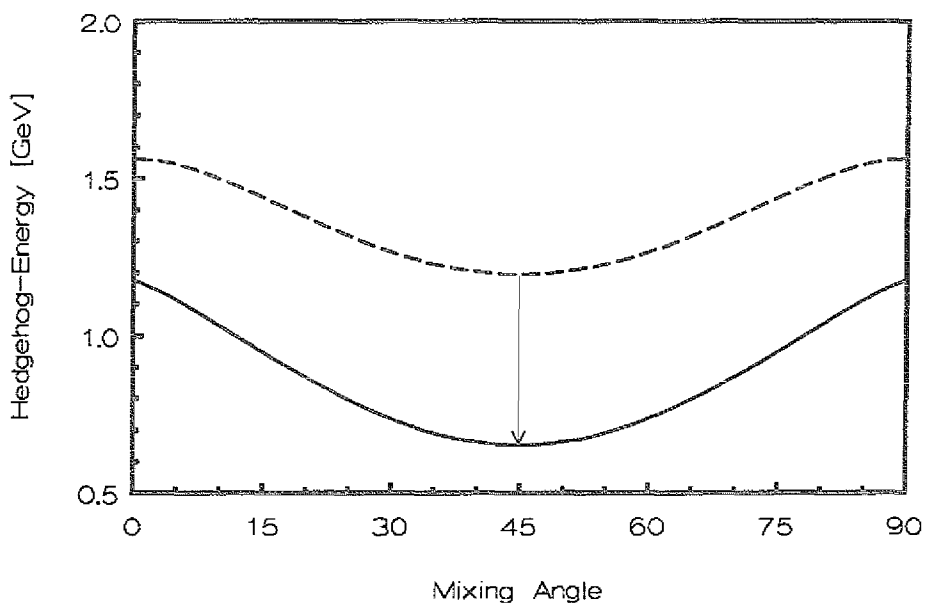


Abb. A.1: Hedgehog-Energie versus Mischungswinkel η

Die gestrichelte Linie bezeichnet die Mean-Field-Energie des Hedgehog-Zustands, die durchgezogene die auf den Impuls $q = 0$ projizierte Hedgehog-Energie (Variation vor Projektion) für die Modellparameter $m_\sigma = 1.2$ GeV und $g = 5.0$. In beiden Fällen liegt das Minimum der Energie bei $\eta = \frac{\pi}{4}$. Ähnliche Ergebnisse erhält man für alle möglichen Kombinationen der Parameter m_σ, g, f_π und m_π, sofern einen solitonische Lösung existiert.

Eine ähnliche Rechnung liegt für das chirale colourdielektrische Modell nicht vor. Wir dürfen jedoch annehmen, daß auch hier der Hedgehog die Variationslösung minimaler Energie ist, da die

[c]An der Stelle $\eta = 0$ liegt ein Maximum vor.

Kopplung $\bar{\psi}\left(\frac{g}{\chi}\right)^p(\sigma + \imath\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\gamma_5)\,\psi$ des Glueball-Feldes an die Quarks im Limes $p \to 0$ verschwindet und nur mehr die im Gell-Mann-Levy Modell bereits untersuchte Kopplung von σ- und π-Feld an die Quarks vorliegt. Es ist sehr unwahrscheinlich, daß der Hedgehog für eine bestimmte Kombination von Kopplungskonstanten seine Eigenschaft — Variationslösung minimaler Energie — grundlegend ändert und zu einem Maximum der Energie wird.

Die Struktur der Mesonfelder ist durch die Quellterme $\frac{\delta L_I}{\delta\phi_i}$ in den Bewegungsgleichungen festgelegt. Deren explizite Form ist für das Gell-Mann-Levy Modell durch die folgenden Gleichungen gegeben;

$$\langle\, q|\bar{q}(x)q(x)|q\,\rangle = \frac{1}{4\pi}\left(u^2(r) - v^2(r)\right) \tag{A.15a}$$

$$\langle\, q|\bar{q}(x)\imath\gamma_5\tau_i q(x)|q\,\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\frac{x_i}{r}u(r)v(r)\sin 2\eta & \text{falls } i = 1,2 \\ \frac{1}{2\pi}\frac{x_i}{r}u(r)v(r) & \text{falls } i = 3 \end{cases} \tag{A.15b}$$

worin $|q\,\rangle$ der durch Gl. $(A.3)$ gegebene Fockzustand für ein Quark mit beliebiger Colourquantenzahl ist. Aus Gl. $(A.15a)$ wird sofort ersichtlich, daß $E(\eta)$ eine Konstante ist, falls nur skalare, isoskalare Mesonfelder an die Quarks gekoppelt werden. Sobald jedoch isovektorielle Felder hinzukommen, ist dies nicht mehr Fall, und die Energie hängt explizit von η ab. Weiterhin wird deutlich, daß die Bewegungsgleichungen für die Mesonfelder nur dann lösbar sind, falls die klassische Amplitude des σ-Feldes eine reine s-Welle und diejenige des π-Feldes eine reine p-Welle ist.

Betrachtet man das colourdielektrische Modell, so stößt man auf die Schwierigkeit, daß durch die $\frac{1}{\chi}$-Kopplung des Glueball-Feldes an die Quarks die Quark-Meson-Kopplung nicht mehr linear ist, wie dies eingangs vorausgesetzt wurde. Vielmehr hängen nun die Quellterme von den Bosonfeldern selbst ab, und die Struktur dieser Felder ist nicht allein durch die Gestalt der Quarkspinoren $(A.3)$ bestimmt. Damit die Mesonfelder die gleiche Hedgehog-Struktur wie im Fall des Gell-Mann-Levy Modells aufweisen, nehmen wir zusätzlich an, daß das χ-Feld sphärisch symmetrisch, also eine reine s-Welle ist. Diese Annahme ist gerechtfertigt, da das χ-Feld als skalares, isoskalares Glueball-Feld interpretiert wird, also die gleiche Struktur $(J^{PC} = 0^{++}, T = 0)$ wie das σ-Feld besitzt. Im Rahmen dieser Annahme erhalten wir dann:

$$\langle\, q|\bar{q}(x)\left(\frac{g}{\chi(x)}\right)^p q(x)|q\,\rangle = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{g}{\chi(r)}\right)^p\left(u^2(r) - v^2(r)\right) \tag{A.16a}$$

$$\langle\, q|\bar{q}(x)\left(\frac{g}{\chi(x)}\right)^p \imath\gamma_5\tau_i q(x)|q\,\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\frac{x_i}{r}\left(\frac{g}{\chi(r)}\right)^p u(r)v(r)\sin 2\eta & \text{falls } i = 1,2 \\ \frac{1}{2\pi}\frac{x_i}{r}\left(\frac{g}{\chi(r)}\right)^p u(r)v(r) & \text{falls } i = 3 \end{cases} \tag{A.16b}$$

und

$$\langle\, q|\bar{q}(x)\frac{p}{g}\left(\frac{g}{\chi(x)}\right)^{p+1}(\sigma(x) + \imath\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}(x)\gamma_5)\,q(x)|q\,\rangle =$$
$$\frac{p}{4\pi g}\left(\frac{g}{\chi(r)}\right)^{p+1}\left[\left(u^2(r) - v^2(r)\right)\sigma(r) + 2u(r)v(r)\phi(r)\left[\frac{x_1^2 + x_2^2}{r^2}\sin 2\eta + \left(\frac{x_3}{r}\right)^2\right]\right] \tag{A.16c}$$

Im Fall, daß $\eta = \frac{\pi}{4}$ ist, hat man in Gl. $(A.16c)$ $\left[(x_1^2 + x_2^2)\sin 2\eta + x_3^2\right] = r^2$. Dies ist konsistent mit der Annahme, daß $\chi(x) = \chi(r)$ eine s-Welle ist.

Anhang B. Feldoperatoren und Konstruktion kohärenter Zustände

Die Eigenschaften der kohärenten Zustände, die der quantenmechanischen Beschreibung mesonischer Zustände dienen, sowie deren Translation und Rotation sind Gegenstand dieses Abschnitts. In einem ersten Schritt wird die Definition kohärenter Zustände angegeben und deren quasiklassische Eigenschaften abgeleitet und diskutiert. Anschließend behandeln wir die Drehung und Translation kohärenter Zustände.

<u>**Konstruktion und Eigenschaften kohärenter Zustände:**</u> Am Beispiel des σ-Feldes werden die Feldoperatoren und ihre konjugierten Momente

$$\hat{\sigma}(x) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} \left(\phi_n(x) a_n + \phi_n^*(x) a_n^\dagger\right) \tag{B.1a}$$

$$\hat{p}_\sigma(x) = -\imath \sum_n \sqrt{\frac{\omega_n}{2}} \left(\phi_n(x) a_n - \phi_n^*(x) a_n^\dagger\right) \tag{B.1b}$$

nach einem Satz orthonormierter Funktionen

$$\int d^3x\, \phi_n^*(x) \phi_m(x) = \delta_{nm} \tag{B.2}$$

entwickelt. Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren erfüllen die üblichen kanonischen Vertauschungsrelationen

$$\left[a_n\,,\, a_m^\dagger\right] = \delta_{nm}\,. \tag{B.2c}$$

In Verbindung mit diesen läßt sich ein 0–Teilchenzustand definieren

$$a_n\,|0\rangle = 0 \qquad \forall\, n\,. \tag{B.2d}$$

der hier als Näherung des physikalischen Vakuumzustands anzusehen ist, falls er translations- und rotationsinvariant ist.

Ein normierter kohärenter Zustand kann nun durch die unitäre Transformation[84]

$$U(\hat{p}_\sigma, \hat{\sigma}) = \exp\left\{-\imath \int d^3x\, \sigma_{cl}(x) \hat{p}_\sigma(x) + p_{\sigma,cl}(x) \hat{\sigma}(x)\right\} \tag{B.3}$$

erzeugt werden.[(a)].

$$|\sigma, p_\sigma\rangle = U(\hat{\sigma}, \hat{p}_\sigma)\,|0\rangle \tag{B.4}$$

Da hier $p_{\sigma,cl} \equiv 0$ gilt, hängt die Transformation U von $\hat{\sigma}$ nicht weiter ab, und es ist:

$$|\sigma\rangle = U(\hat{p}_\sigma)\,|0\rangle \tag{B.5}$$

[(a)]Die mit dem Index cl versehenen Größen bezeichnen die klassischen Felder.

Die Erwartungswerte kohärenter Zustände lassen sich mit Hilfe der folgenden wichtigen Eigenschaft der Transformation U angeben. Ist $F(\hat{\sigma})$ eine analytische, d. h. in eine Potenzreihe entwickelbare, Funktion des Feldoperators $\hat{\sigma}$, so gilt:

$$U^{\dagger} F(\hat{\sigma}) U = F(\hat{\sigma} + \sigma_{cl}) \tag{B.6}$$

Dies läßt sich durch Reihenentwicklung (Haussdorfformel) zeigen

$$\begin{aligned} U^{\dagger}\hat{\sigma}(\boldsymbol{x})U = \hat{\sigma}(\boldsymbol{x}) + \imath\,[A, \hat{\sigma}(\boldsymbol{x})] + \frac{\imath^2}{2!}[A, [A\,, \hat{\sigma}(\boldsymbol{x})]] + \ldots \\ + \frac{\imath^n}{n!}\Big[A, \Big[A, \ldots, [A, [A, \hat{\sigma}(\boldsymbol{x})]] \ldots\Big]\Big] + \ldots \end{aligned} \tag{B.7}$$

worin abkürzend

$$A = \int d^3\boldsymbol{x}\, \sigma_{cl}(\boldsymbol{x}) \hat{p}_{\sigma}(\boldsymbol{x}) \tag{B.8}$$

gesetzt wurde. Mit den kanonischen Kommutatorrelationen für die Felder $\hat{\sigma}$ und $\hat{p}_{\sigma}$

$$[\hat{\sigma}(\boldsymbol{x})\,,\, \hat{p}_{\sigma}(\boldsymbol{y})] = \imath\,\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{B.9}$$

erhält man sofort:

$$[A\,,\, \hat{\sigma}(\boldsymbol{x})] = -\imath\,\sigma_{cl}(\boldsymbol{x}) \tag{B.10}$$

Setzt man dies in die Reihenentwicklung $(B.7)$ ein, so ist die Beziehung $(B.6)$ für den Fall $F(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}$ gezeigt. Aufgrund der Unitarität von U ergibt sich für eine beliebige ganzzahlige positive Potenz des Feldoperators:

$$U^{\dagger}\hat{\sigma}^n(\boldsymbol{x})U = (\hat{\sigma}(\boldsymbol{x}) + \sigma_{cl}(\boldsymbol{x}))^n \tag{B.11}$$

und da nach Voraussetzung F analytisch ist, ist die Eigenschaft $(B.6)$ bewiesen.

Da der Vakuumerwartungswert des Feldoperators verschwindet, erhält man nun mit den Gln. $(B.5)$ und $(B.6)$ für das Matrixelement:

$$\langle\sigma|\hat{\sigma}(\boldsymbol{x})|\sigma\rangle = \sigma_{cl}(\boldsymbol{x}) \tag{B.12}$$

Der Erwartungswertes des normalgeordneten Produkts,

$$:\hat{\sigma}^N(\boldsymbol{x}): = \sum_{\nu=0}^{N} \binom{N}{\nu} \hat{\sigma}_{+}^{N-\nu}(\boldsymbol{x})\hat{\sigma}_{-}^{\nu}(\boldsymbol{x}) \tag{B.13}$$

worin

$$\hat{\sigma}_{-}(\boldsymbol{x}) = \sum_{n} \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} \phi_n(\boldsymbol{x}) a_n \tag{B.14}$$

und $\hat{\sigma}_+(x) = \hat{\sigma}_-^\dagger(x)$ ist, kann nun ebenfalls angegeben werden, wenn man berücksichtigt, daß für die Transformation der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren eine ähnliche Beziehung wie für die Feldoperatoren gilt, d. h.:

$$U^\dagger a_k U = a_k + \sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\eta_k \tag{B.15a}$$

$$U^\dagger a_k^\dagger U = a_k^\dagger + \sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\eta_k^* \tag{B.15b}$$

Die Entwicklungskoeffizienten η_k des klassischen Feldes $\sigma_{cl}(x)$ sind durch

$$\eta_k = \int d^3x\, \phi_k^*(x)\sigma_{cl}(x) \tag{B.16}$$

gegeben. Die Gln. ($B.15a$) und ($B.15b$) ergeben sich analog zu Gl. ($B.7$) durch Reihenentwicklung und Ausnutzung der Gln. ($B.1b$) und ($B.1c$). Das Verhalten der $\hat{\sigma}_\pm^n$ unter der Transformation U kann nun leicht berechnet werden und man erhält mit Gl. ($B.13$) schließlich:

$$\langle\sigma| : \hat{\sigma}^N(x) : |\sigma\rangle = \sigma_{cl}^N(x) \tag{B.17}$$

Eine Möglichkeit der Konstruktion kohärenter Zustände, wie sie im weiteren benutzt werden wird, erhält man durch Einsetzen der Gl. ($B.1b$) in Gl. ($B.5$). Der kohärente Zustand ist dann durch

$$|\sigma\rangle = U|0\rangle = \exp\left\{C^\dagger - C\right\}|0\rangle \tag{B.18}$$

gegeben, worin $C^\dagger$ und C die nicht kommutierenden Operatoren

$$C = \sum_n \sqrt{\frac{\omega_n}{2}}\eta_n^* a_n \tag{B.19a}$$

$$C^\dagger = \sum_n \sqrt{\frac{\omega_n}{2}}\eta_n a_n^\dagger \tag{B.19b}$$

sind. Da jedoch die Kommutatorregeln

$$[C^\dagger,[C^\dagger,C]] = [C,[C^\dagger,C]] = 0 \tag{B.20}$$

erfüllt[148] sind, hat man:

$$e^{C^\dagger - C} = e^{C^\dagger}e^{-C}e^{-\frac{1}{2}[C^\dagger,-C]} \tag{B.21}$$

Beachtet man noch, daß

$$e^{-C}|0\rangle = |0\rangle$$

so erhält man mit der Normierungskonstanten

$$N_\sigma = \exp\left\{\sum_n \frac{\omega_n}{2}|\eta_n|^2\right\} \tag{B.22}$$

für den kohärenten Zustand:

$$|\sigma\rangle = N_\sigma^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\sum_n \sqrt{\frac{\omega_n}{2}}\eta_n a_n^\dagger\right\}|0\rangle \tag{B.23}$$

Die equivalenten Ausdrücke (B.5) und (B.23) können beide jeweils als definierende Gleichungen des kohärenten Zustands aufgefaßt werden. Dieser ist ein Eigenzustand des Vernichtungsoperators.

$$a_k|\sigma\rangle = UU^\dagger a_k U|0\rangle = \sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\eta_k|\sigma\rangle \tag{B.24}$$

Zur Berechnung von Überlappintegralen werden auch die Erwartungswerte der Feldoperatoren zwischen verschiedenen kohärenten Zuständen benötigt. Aus den Gln. (B.13–B.14) und(B.24) folgt:

$$\langle\sigma^{(1)}| : \hat{\sigma}^N(x) : |\sigma^{(2)}\rangle = \langle\sigma^{(1)}|\sigma^{(2)}\rangle \left[\frac{1}{2}\left(\sum_n \phi_n^*(x)\eta_n^{(1)*} + \sum_n \phi_n(x)\eta_n^{(2)}\right)\right]^N$$

Mit Hilfe der Vollständigkeitsrelation der Basiszustände ϕ_n

$$\sum_n \phi_n^*(x)\phi_n(y) = \delta^3(x-y) \tag{B.25}$$

und der Gl. (B.16), hat man:

$$\sum_n \phi_n(x)\eta_n = \int d^3y \sum_n \phi_n^*(y)\phi_n(x)\sigma_{cl}(y) = \sigma_{cl}(x) \tag{B.26a}$$

und analog

$$\sum_n \phi_n^*(x)\eta_n^* = \int d^3y \sum_n \phi_n^*(x)\phi_n(y)\sigma_{cl}^*(y) = \sigma_{cl}^*(x) \tag{B.26b}$$

Da $\sigma_{cl}(x)$ rell ist (dies folgt unmittelbar aus der notwendigen Hermitezität des Exponenten der unitären Transformation U, da $\hat{p}_\sigma$ aus Gl. (B.1b) hermitesch ist), ergibt sich für den obigen Ausdruck:

$$\langle\sigma^{(1)}| : \hat{\sigma}^N(x) : |\sigma^{(2)}\rangle = \langle\sigma^{(1)}|\sigma^{(2)}\rangle \left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{cl}^{(1)}(x) + \sigma_{cl}^{(2}(x)\right)\right]^N \tag{B.27}$$

Auf völlig analoge Weise erhält man außerdem

$$\langle\sigma^{(1)}| : \hat{p}_\sigma^N(x) : |\sigma^{(2)}\rangle = \langle\sigma^{(1)}|\sigma^{(2)}\rangle \left[-\frac{i}{2}\sum_n \omega_n\left(\phi_n(x)\eta_n^{(1)*} - \phi_n^*(x)\eta_n^{(2)}\right)\right]^N \tag{B.28}$$

Entwickeln wir die Feldoperatoren und ihre konjugierten Momente nach ebenen Wellen,

$$\phi_k(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{i\,k\cdot x} \tag{B.29}$$

so lauten die den Gln. ($B.1a$–b) entsprechenden Ausdrücke für das σ-Feld,

$$\hat{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \, \frac{1}{\sqrt{2\omega_\sigma(k)}} \left(a(k)\mathrm{e}^{\imath\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + a^\dagger(k)\mathrm{e}^{-\imath\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right) \tag{B.30a}$$

$$\hat{p}_\sigma(\boldsymbol{x}) = -\imath \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \, \sqrt{2\omega_\sigma(k)} \left(a(k)\mathrm{e}^{\imath\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} - a^\dagger(k)\mathrm{e}^{-\imath\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right) \tag{B.30b}$$

mit der Eigenenergie,

$$\omega_\sigma(k) = \sqrt{k^2 + m_\sigma^2} \tag{B.30c}$$

und für die isovektoriellen Komponenten des π-Feldes

$$\hat{\vec{\pi}}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \, \frac{1}{\sqrt{2\omega_\pi(k)}} \left(\vec{b}(k)\mathrm{e}^{\imath\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \vec{b}^\dagger(k)\mathrm{e}^{-\imath\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right) \tag{B.31a}$$

$$\hat{\vec{p}}_\pi(\boldsymbol{x}) = -\imath \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \, \sqrt{2\omega_\pi(k)} \left(\vec{b}(k)\mathrm{e}^{\imath\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} - \vec{b}^\dagger(k)\mathrm{e}^{-\imath\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right) \tag{B.31b}$$

mit der Eigenenergie.

$$\omega_\pi(k) = \sqrt{k^2 + m_\pi^2} \tag{B.31c}$$

Die Entwicklungskoeffizienten $\eta(k)$ und $\xi(k)$ finden wir durch Fouriertransformation der klassischen Feldkonfigurationen $\sigma(\boldsymbol{x})$ und $\pi_i(\boldsymbol{x})$[b].

$$\eta(k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3x \, \sigma(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\imath\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{B.32a}$$

$$\xi_i(k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3x \, \pi_i(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\imath\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{B.32b}$$

mit den Umkehrtransformationen

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \, \frac{1}{2} \left[\eta(k)\mathrm{e}^{\imath\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \eta^*(k)\mathrm{e}^{-\imath\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right] \tag{B.33a}$$

$$\pi_i(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \, \frac{1}{2} \left[\xi_i(k)\mathrm{e}^{\imath\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \xi_i^*(k)\mathrm{e}^{-\imath\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right] \tag{B.33b}$$

Um den kohärenten π-Zustand zu bilden, ist über die Isospin-Komponenten des π-Feldes zu summieren.

$$|\sigma\rangle = N_\sigma^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\int d^3k \sqrt{\frac{\omega_\sigma(k)}{2}} \eta(k) a^\dagger(k)\right\} |0\rangle \tag{B.34a}$$

$$|\pi\rangle = N_\pi^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\sum_{i=1}^{3} \int d^3k \sqrt{\frac{\omega_\pi(k)}{2}} \xi_i(k) b_i^\dagger(k)\right\} |0\rangle \tag{B.34b}$$

---

[b] Der Index cl wird im folgenden fallengelassen. Eine Verwechslung mit den jeweiligen Operatoren ist ausgeschlossen, da letztere durch das Symbol ˆ hinreichend gekennzeichnet sind.

Bevor wir uns der Translation und Rotation der kohärenten Zustände zuwenden, wollen wir noch einen wichtigen Spezialfall untersuchen. Haben die klassischen Feldkonfigurationen Hedgehog-Struktur, d. h.

$$\langle\sigma|\hat{\sigma}(\boldsymbol{x})|\sigma\rangle = \sigma(r) \tag{B.35a}$$

$$\langle\pi|\hat{\pi}_i(\boldsymbol{x})|\pi\rangle = \frac{x_i}{r}\phi(r) = \hat{x}_i\phi(r) \tag{B.35b}$$

so läßt sich die Winkelintegration ausführen und die Gln. ($B.32a$–b) lauten dann:

$$\eta(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int dr r^2\, j_0(kr)\sigma(r) \tag{B.36a}$$

$$\xi_i(\boldsymbol{k}) = -\imath\,\frac{k_i}{k}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int dr r^2\, j_1(kr)\phi(r) = -\imath\,\hat{k}_i A(k) \tag{B.36b}$$

worin $\sigma(r)$ und $\phi(r)$ durch

$$\sigma(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int dk k^2\, j_0(kr)\eta(r) \tag{B.37a}$$

$$\phi(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int dk k^2\, j_1(kr)A(k) \tag{B.37b}$$

gegeben sind.

<u>**Translation und Rotation eines kohärenten Zustands:**</u> Wir betrachten zunächst die Translation eines kohärenten Zustands

$$U(\boldsymbol{x})|\sigma\rangle = \mathrm{e}^{-\imath\,\boldsymbol{x}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}} N_\sigma^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\int d^3k\sqrt{\frac{\omega_\sigma(k)}{2}}\eta(k)a^\dagger(\boldsymbol{k})\right\}|0\rangle\,, \tag{B.38}$$

deren infinitesimal Erzeugende der Impulsoperator ist,

$$\hat{\boldsymbol{P}}_\sigma = -:\frac{1}{2}\int d^3x\,\hat{p}_\sigma(\boldsymbol{x})\nabla\hat{\sigma}(\boldsymbol{x}) + \nabla\hat{\sigma}(\boldsymbol{x})\hat{p}_\sigma(\boldsymbol{x}):\tag{B.39}$$

der aus der Invarianz der Lagrangefunktion unter Translationen mit Hilfe des Noether-Theorems abzuleiten ist.

Da die im Folgenden abgeleiteten Formeln nur gültig sind, falls der Vakuumzustand $|0\rangle$ translationsinvariant ist, d. h.

$$U|0\rangle = |0\rangle \tag{B.40}$$

benutzen wir hier die Entwicklung der Feldoperatoren nach ebenen Wellen, für welche Gl. ($B.40$) erfüllt ist. Wir führen nun eine Taylorentwicklung des kohärenten Zustands (Gl. ($B.38$)) durch

$$U(\boldsymbol{x})|\sigma\rangle = N_\sigma^{-\frac{1}{2}}U(\boldsymbol{x})\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^3k_1\ldots d^3k_n\kappa(k_1)\ldots\kappa(k_n)a^\dagger(\boldsymbol{k}_1)\ldots a^\dagger(\boldsymbol{k}_n)\right]|0\rangle \tag{B.41}$$

und berechnen die Translation des n-fachen Produkts der Erzeugungsoperatoren[c].

$$Ua^\dagger(k_1)\dots a^\dagger(k_n)|0\rangle = \left(Ua^\dagger(k_1)U^\dagger\right)\left(Ua^\dagger(k_2)U^\dagger\right)\dots\left(Ua^\dagger(k_n)U^\dagger\right)U|0\rangle \qquad (B.42)$$

Das Verhalten des Erzeugungsoperators unter der Translation U läßt sich durch Reihenentwicklung

$$U(x)a^\dagger(k)U^\dagger(x) = a^\dagger(k) - \imath\sum_{j=1}^{3} x_j[\hat{P}_j, a^\dagger(k)] + \dots$$
$$+\frac{(-\imath)^n}{n!}\sum_{j_1\cdots j_n} x_{j_1}\cdot\dots\cdot x_{j_n}\left[\hat{P}_{j_n},\left[\hat{P}_{j_{n-1}},\dots,[\hat{P}_{j_1}, a^\dagger(k)]\dots\right]\right] + \dots \qquad (B.43)$$

bestimmen. Aus

$$[\hat{P}_j, a^\dagger(k)] = k_j a^\dagger(k) \qquad (B.44)$$

und der Summation der Reihe erhält man

$$U(x)a^\dagger(k)U^\dagger(x) = a^\dagger(k)e^{-\imath k\cdot x} \qquad (B.45)$$

Setzt man dieses Ergebnis in Gl. $(B.41)$ ein, so erhält man für den verschobenen kohärenten Zustand des σ-Feldes und analog für den des π-Feldes:

$$U_\sigma(x)|\sigma\rangle = N_\sigma^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\int d^3k\sqrt{\frac{\omega_\sigma(k)}{2}}e^{-ik\cdot x}\eta(k)a^\dagger(k)\right\}|0\rangle \qquad (B.46a)$$

$$U_\pi(x)|\pi\rangle = N_\pi^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\sum_{t=1}^{3}\int d^3k\sqrt{\frac{\omega_\pi(k)}{2}}e^{-ik\cdot x}\xi_t(k)b_t^\dagger(k)\right\}|0\rangle \qquad (B.46b)$$

Wir untersuchen nun die Wirkung der Drehoperatoren $\tilde{R}(\tilde{\Omega})$ im Isospinraum und $R(\Omega)$ im Konfigurationsraum auf einen kohärenten Zustand. Die Drehungen $\tilde{R}$ und R sind durch ihren jeweiligen Satz von Eulerwinkeln $\tilde{\Omega} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ und $\Omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ charakterisiert. Da das σ-Feld sowohl im Orts-Spin-Raum als auch im Isospinraum skalar ist, ist es unter Drehungen invariant, und wir können die weiteren Betrachtungen auf das π-Feld beschränken. Der kohärente Zustand des π-Feldes wird wie in Gl. $(B.41)$ in eine Taylorreihe entwickelt und das Verhalten des Erzeugungsoperators unter Drehungen studiert. Wiederum benützen wir die essentielle Forderung, daß der Vakuumzustand rotationsinvariant ist.

$$\tilde{R}(\tilde{\Omega})R(\Omega)|\pi\rangle = \tilde{R}(\tilde{\Omega})R(\Omega)N_\pi^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i_1\dots i_n}\int d^3k_1\dots d^3k_n\,\zeta_{i_1}(k_1)\cdot\dots\cdot\zeta_{i_n}(k_n)$$
$$\times b_{i_1}^\dagger(k_1)\cdot\dots\cdot b_{i_n}^\dagger(k_n)|0\rangle \qquad (B.47)$$

worin $\zeta_i(k) = \sqrt{\frac{\omega_\pi(k)}{2}}\xi_i(k)$ ist

[c]Abkürzend haben wir $\kappa(k) = \left(\frac{\omega_\sigma(k)}{2}\right)^{1/2}\eta(k)$ verwendet.

Mit

$$R(\Omega)b^{\dagger}(\boldsymbol{k})R^{-1}(\Omega) = b^{\dagger}(\mathcal{R}(\Omega)\boldsymbol{k}) \tag{B.48}$$

und der folgenden Variablentransformation[d]

$$\boldsymbol{k}' = \mathcal{R}(\Omega)\boldsymbol{k} \tag{B.49}$$

sowie[e]

$$\tilde{R}(\tilde{\Omega})b_i^{\dagger}(\boldsymbol{k})\tilde{R}^{-1}(\tilde{\Omega}) = \sum_{j=1}^{3} \mathcal{R}_{ij}^{-1}(\tilde{\Omega})b_j^{\dagger}(\boldsymbol{k}) \tag{B.50}$$

und[f]

$$\tilde{R}(\tilde{\Omega})\left(\vec{b}^{\dagger}(\boldsymbol{k})\cdot\vec{\zeta}(\boldsymbol{k})\right)\tilde{R}^{-1}(\tilde{\Omega}) = \vec{b}^{\dagger}(\boldsymbol{k})\cdot\left(\mathcal{R}(\tilde{\Omega})\vec{\zeta}(\boldsymbol{k})\right) \tag{B.51}$$

erhalten wir

$$\tilde{R}(\tilde{\Omega})R(\Omega)|\pi\rangle = N_\pi^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\sum_{i=1}^{3}\int d^3k\sqrt{\frac{\omega_\pi(\boldsymbol{k})}{2}}\sum_{j=1}^{3}\mathcal{R}_{ij}(\tilde{\Omega})\xi_j\left(\mathcal{R}^{-1}(\Omega)\boldsymbol{k}\right)b_i^{\dagger}(\boldsymbol{k})\right\}|0\rangle \tag{B.52}$$

und im Hedgehog-Fall

$$\tilde{R}(\tilde{\Omega})R(\Omega)|\pi\rangle = N_\pi^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-i\sum_{i=1}^{3}\int d^3k\sqrt{\frac{\omega_\pi(\boldsymbol{k})}{2}}\frac{k_i'}{k}A(\boldsymbol{k})b_i^{\dagger}(\boldsymbol{k})\right\}|0\rangle \tag{B.53}$$

worin $\boldsymbol{k}' = \mathcal{R}(\omega)\boldsymbol{k}$ und $\mathcal{R}(\omega) = \mathcal{R}(\tilde{\Omega})\mathcal{R}^{-1}(\Omega)$ das Produkt der beiden Drehungen $\mathcal{R}(\tilde{\Omega})$ und $\mathcal{R}^{-1}(\Omega)$ ist.

Anmerkung: Hat die klassische π-Amplitude Hedgehog-Struktur, so können wir uns auf eine Drehung beschränken (siehe Gl. (B.53)) Dies gilt nicht mehr, falls beispielsweise ein generalisierter Hedgehog-Zustand $\zeta_j(\boldsymbol{k}) = -i\hat{k}_jA_j(\boldsymbol{k})$ betrachtet wird. Hier wirkt die Drehung im Isospinraum auf die Komponenten von $\vec{A}$ und die im Ortsraum auf diejenigen von $\boldsymbol{k}$.

Abschließend läßt sich nun die Translation des gedrehten Hedgehog-Zustands angeben. Man erhält

$$U(\boldsymbol{x})R(\Omega)|\pi\rangle = N_\pi^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\sum_{i=1}^{3}\int d^3k\sqrt{\frac{\omega_\pi(\boldsymbol{k})}{2}}\sum_{j=1}^{3}\mathcal{R}_{ij}^{-1}(\Omega)\xi_j(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-i\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}b_i^{\dagger}(\boldsymbol{k})\right\}|0\rangle \tag{B.54a}$$

falls die Drehung im Spinraum und

$$U(\boldsymbol{x})\tilde{R}(\Omega)|\pi\rangle = N_\pi^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\sum_{i=1}^{3}\int d^3k\sqrt{\frac{\omega_\pi(\boldsymbol{k})}{2}}\sum_{j=1}^{3}\mathcal{R}_{ij}(\Omega)\xi_j(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-i\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}b_i^{\dagger}(\boldsymbol{k})\right\}|0\rangle \tag{B.54b}$$

falls die Drehung im Isospinraum erfolgt.

---

[d] $R(\Omega)$ beschreibt einen allgemeinen Drehoperator im Hilbertraum; $\mathcal{R}(\Omega)$ ist die Drehmatrix im euklidischen Raum.

[e] Die hier getroffenen Konventionen sind die gleichen wie in Ref. 148

[f] $\vec{a}$ bezeichnet einen Vektor im Isospinraum; $\boldsymbol{a}$ einen im Ortsraum

Anhang C. Randwertbedingungen der solitonischen Gleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir die Randwertbedingungen herleiten, denen die solitonischen Gleichungen im Limes $r \to \infty$ genügen. Für diesen Grenzfall streben alle beteiligten Felder gegen null, also $\sigma(r), \chi(r), \phi(r), u(r), v(r) \to 0$ falls $r \to \infty$; und wir erhalten die Randwertbedingungen, indem wir alle nichtlinearen Terme der solitonischen Gleichungen vernachlässigen. Wir wollen zunächst die

<u>Randwertbedingungen für die Meson–Felder</u> betrachten. Aus den nichtlinearen Differentialgleichungssystemen für das σ-Modell und das colourdielektrische Modell ergibt sich dann im Limes $r \to \infty$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\sigma(r) = -\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\sigma(r) + m_\sigma^2\sigma(r) \tag{C.1a}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\phi(r) = -\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\phi(r) + \frac{2}{r}\phi(r) + m_\sigma^2\sigma(r) \tag{C.1b}$$

für das Sigma– und das Pion–Feld. Das colourdielektrische Feld $\chi(r)$ genügt demselben Gleichungstyp wie das Sigma–Feld (Gl. $(C.1a)$). Mit Hilfe der Substitutionen $x_\sigma = m_\sigma r$ und $x_\pi = m_\pi r$ ($m_\pi \neq 0$ und $m_\sigma \neq 0$) lassen sich die Gln. $(C.1a)$ und $(C.1b)$ in Bessel'sche Differentialgleichungen

$$x^2 f''(x) + 2x f'(x) - \left[x^2 + n(n+1)\right] f(x) = 0 \tag{C.2}$$

für $n = 0$ (Gl. $(C.1a)$) und $n = 1$ (Gl. $(C.1b)$ überführen. Die im Limes $r \to \infty$ regulären Lösungen sind die modifizierten sphärischen Besselfunktionen der dritten Art.

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} K_{n+\frac{1}{2}}(x) \tag{C.3}$$

Aus (AS 10.2.17)[a] entnehmen wir die Lösungen für die Fälle $n = 0$ und $n = 1$. Es ist:

$$\sigma(r) = C_\sigma \frac{e^{m_\sigma r}}{m_\sigma r} \tag{C.4a}$$

$$\phi(r) = C_\phi \frac{e^{m_\pi r}}{m_\pi r}\left(1 + \frac{1}{m_\pi r}\right) \tag{C.4b}$$

Die Randwertbedingungen, welche die Ableitungen der Felder mit ihren Funktionswerten im Limes $r \to \infty$ verknüpfen, erhalten wir nun durch Ableiten der obigen Lösungen. Die Rekursionsformel (AS 10.2.20) liefert

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2x}} K_{\frac{3}{2}}(x)\right] = -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} K_{\frac{1}{2}}(x) - \frac{2}{x}\sqrt{\frac{\pi}{2x}} K_{\frac{3}{2}}(x) \tag{C.5}$$

und aus (AS 10.2.17) hat man:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2x}} K_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{x}{x+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}} K_{\frac{3}{2}}(x) \tag{C.6}$$

---

[a] Die Formelnummerierung (AS...) bezieht sich auf Ref. 149.

so daß :

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2x}}K_{\frac{3}{2}}(x)\right] = -\frac{x^2+2\,(x+1)}{x\,(x+1)}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}K_{\frac{3}{2}}(x) \tag{C.7}$$

Für das σ-Feld ergibt sich durch Differenzieren und Wiedereinsetzen der Lösung $(C.4a)$ unmittelbar

$$r\frac{\partial}{\partial r}\sigma(r) + (1+m_\sigma r)\,\sigma(r) = 0 \tag{C.8a}$$

und für das ϕ-Feld durch Einsetzen von $x = m_\pi r$ in Gl. $(C.7)$

$$r\,(1+m_\pi r)\,\frac{\partial}{\partial r}\phi(r) + \left[2+2m_\pi r+(m_\pi r)^2\right]\phi(r) = 0 \tag{C.8b}$$

Abschließend betrachten wir noch die Randwertbedingung, die das π-Feld zu erfüllen hat, falls $m_\pi = 0$ ist. Die Differentialgleichung $(C.1b)$ geht dann in eine Differentialgleichung des Euler'schen Typs über,

$$r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\phi(r) + 2r\frac{\partial}{\partial r}\phi(r) - 2\phi(r) = 0 \tag{C.9}$$

die durch die Substitution $r = \mathrm{e}^\varrho$ in eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten überführt wird.

$$f''(\varrho) + f'(\varrho) - 2f(\varrho) = 0 \tag{C.10}$$

Die Lösung der Gl. $(C.10)$ kann mit Standardmethoden ermittelt werden und wir erhalten:

$$\phi(r) = Ar + \frac{B}{r^2} \tag{C.11}$$

Da die Lösung im Limes $r \to \infty$ regulär ist, folgt $A = 0$, und wir erhalten die Randwertbedingung

$$r\frac{\partial}{\partial r}\phi(r) + 2\phi(r) = 0 \tag{C.8b'}$$

Eine Unterscheidung der Fälle $m_\pi \neq 0$ und $m_\pi = 0$ erübrigt sich also, da Gl. $(C.8b')$ aus Gl. $(C.8b)$ im Grenzfall $m_\pi \to 0$ hervorgeht.

Wir wenden uns nun der Betrachtung der

Randwertbedingungen für die Quarkfelder $u(r)$ und $v(r)$ zu und behandeln zunächst das

Gell-Mann-Levy-Modell Wie im Fall der Mesonenfelder können wir die nichtlinearen Terme, d. h. die Kopplungen des Quarkspinors an die Mesonenfelder, vernachlässigen und erhalten ein lineares gekoppeltes Differentialgleichungssystem,

$$\frac{\partial}{\partial r}u(r) = -\,(gf_\pi+\varepsilon)\,v(r) \tag{C.12a}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}v(r) = -\frac{2}{r}v(r) - (gf_\pi-\varepsilon)\,u(r) \tag{C.12b}$$

welches wir exakt lösen können. Differenzieren der Gl. $(C.12b)$ liefert

$$r^2\frac{d^2}{dr^2}v(r) + 2r\frac{d}{dr}v(r) - \left[(\beta r)^2+2\right]v(r) = 0 \tag{C.13}$$

worin abkürzend

$$\beta = \sqrt{(gf_\pi - \varepsilon)(gf_\pi + \varepsilon)} \tag{C.14}$$

gesetzt wurde. Die Substitution $x = \beta r$ führt nun auf dieselbe Bessel'sche Differentialgleichung, wie wir sie bereits für das Pion-Feld erhalten haben, d. h. die im Limes $r \to \infty$ reguläre Lösung lautet also:

$$v(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta r}} K_{\frac{3}{2}}(\beta r) \tag{C.15}$$

Anwenden der Rekursionsformel ($C.5$) für die Ableitung von $v(r)$ und Einsetzen in ($C.12b$) ergibt dann:

$$u(r) = \sqrt{\frac{gf_\pi + \varepsilon}{gf_\pi - \varepsilon}} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta r}} K_{\frac{1}{2}}(\beta r) \tag{C.16}$$

Dividieren wir Gl. ($C.16$) durch Gl. ($C.15$) und setzen die expliziten Ausdrücke für die Bessel'schen Funktionen ein (AS 10.2.17), so erhalten wir die Randwertbedingung, welcher die großen und kleinen Komponenten des Quarkspinors im Limes $r \to \infty$ genügen müssen. Es ist:

$$u(r)\left[\frac{1}{\sqrt{gf_\pi + \varepsilon}} + r\sqrt{gf_\pi - \varepsilon}\right] - rv(r)\sqrt{gf_\pi + \varepsilon} = 0 \tag{C.17}$$

Für das

<u>Colourdielektrische Modell</u> hatten wir die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial r}u(r) = -\left[\varepsilon + \left(\frac{g}{\chi(r)}\right)^p (\sigma(r) + f_\pi)\right] v(r) + \left(\frac{g}{\chi(r)}\right)^p u(r)\phi(r) \tag{C.18a}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}v(r) = -\frac{2}{r}v(r) + \left[\varepsilon - \left(\frac{g}{\chi(r)}\right)^p (\sigma(r) + f_\pi)\right] u(r) - \left(\frac{g}{\chi(r)}\right)^p v(r)\phi(r) \tag{C.18b}$$

abgeleitet. Wollen wir die Lösungen dieser Gleichungen im Lines $r \to \infty$ untersuchen, so haben wir zunächst das Verhalten des colourdielektrischen Feldes in die Gln. ($C.18a$) und ($C.18b$) für große Abstände einzusetzen. Das Feld $\chi(r)$ zeigt im Limes $r \to \infty$ das gleiche Verhalten wie das σ-Feld,

$$\chi(r) = C_\chi \frac{e^{-m_\chi r}}{m_\chi r} \tag{C.19}$$

und wir erhalten aus den Gln. ($C.18a$) und ($C.18b$) zusammen mit der Definition

$$X(r) = -f_\pi \left(\frac{g}{C_\chi}\right)^p (m_\chi r)^p e^{pm_\chi r} \tag{C.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}u(r) = -\left[\frac{\varepsilon}{f_\pi} - X(r)\left(\frac{\sigma(r)}{f_\pi} + 1\right)\right] v(r) - X(r)u(r)\frac{\phi(r)}{f_\pi} \tag{C.21a}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}v(r) = -\frac{2}{r}v(r) + \left[\frac{\varepsilon}{f_\pi} + X(r)\left(\frac{\sigma(r)}{f_\pi} + 1\right)\right] u(r) + X(r)v(r)\frac{\phi(r)}{f_\pi} \tag{C.21b}$$

Damit die Funktionswerte der Felder $u(r)$ und $v(r)$ und ihre Ableitungen im Limes $r \to \infty$ verschwinden, fordern wir, daß

$$\lim_{r\to\infty} (u(r)X(r)) = \lim_{r\to\infty} (v(r)X(r)) = 0 \tag{C.22}$$

gilt, und erhalten für die führenden Terme der rechten Seiten der Gln. ($C.21a$) und ($C.21b$):

$$\frac{\partial}{\partial r}u(r) = X(r)v(r) \tag{C.23a}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}v(r) = X(r)u(r) \tag{C.23b}$$

Durch Differenzieren der beiden Gln. ($C.23a$) und ($C.23b$) zeigt man leicht, daß

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}u(r) = \frac{X'(r)}{X(r)}\frac{\partial}{\partial r}u(r) + X^2(r)u(r) \tag{C.23a'}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}v(r) = \frac{X'(r)}{X(r)}\frac{\partial}{\partial r}v(r) + X^2(r)v(r) \tag{C.23b'}$$

Diese beiden Gleichungen sind identisch, und wir erhalten im Limes $r \to \infty$:

$$u(r \to \infty) = v(r \to \infty) \tag{C.24}$$

Ist der Exponent p ganzzahlig, so läßt sich die asymptotische Form der Felder $u(r)$ und $v(r)$, d. h. die Lösungen der Gln. ($C.23a'$) und (b') angeben. Setzen wir den Ansatz,

$$u(r) = \exp\left\{-P_n(m_\chi r)e^{m_\chi r}\right\} \tag{C.25}$$

in dem $P_n(m_\chi r)$ ein Polynom n-ten Grades ist, in eine der obigen Differentialgleichungen ein, so finden wir durch Koeffizientenvergleich, daß $n = p$ gilt. Betrachtet man den Fall $p = 1$, so erhält man für hinreichend große Abstände $|r|$:

$$u(r \to \infty) = v(r \to \infty) = C\exp\left\{-\frac{gf_\pi}{C_\chi m_\chi}\left(m_\chi r - 1\right)e^{m_\chi r}\right\} \tag{C.26}$$

Vergleicht man die asymptotische Form der Quarkfelder im Gell-Mann-Levy Modell mit derjenigen, die wir im colourdielektrischen Modell entwickelt haben, so stellt man fest, daß im ersten Fall die Felder u und v exponentiell gegen 0 streben, während im letzteren Fall die $1/\chi$-Kopplung des Glueballfeldes an die Quarkfelder einen doppeltexponentiellen Abfall der Felder bewirkt. Dies hat erhebliche numerische Probleme zur Folge, falls das Intervall $[0, r_{max}]$, in welchem die solitonischen Bewegungsgleichungen gelöst werden, zu groß gewählt wird.

Anhang D. Normüberlapp

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit dem Normüberlapp des Hedgehog-Zustands,

$$\langle \Psi_{hh}|U(\boldsymbol{a})R(\Omega)|\Psi_{hh}\rangle = n_q^3(a)\mathcal{N}_q^3(\Omega)n_\pi(a)\mathcal{N}_\pi(\Omega,\boldsymbol{a})n_\sigma(a) \tag{D.1}$$

der sich aus den Überläppen der Valenzquarks und der der kohärenten Mesonzustände zusammensetzt.

$$\langle\, q|U(\boldsymbol{a})R(\Omega)|q\,\rangle = n_q^3(a)\mathcal{N}_q^3(\Omega) \tag{D.1a}$$

$$\langle\, \pi|U(\boldsymbol{a})R(\Omega)|\pi\,\rangle = n_\pi(a)\mathcal{N}_\pi(\Omega,\boldsymbol{a}) \tag{D.1b}$$

$$\langle\, \sigma|U(\boldsymbol{a})R(\Omega)|\sigma\,\rangle = n_\sigma(a) \tag{D.1c}$$

Wir werden im folgenden explizite Ausdrücke für die rechten Seiten der Gln. ($D.1a$–c) ableiten.

<u>**Normüberlapp der kohärenten mesonischen Zustände:**</u> Den Normüberlapp des π-Feldes

$$\langle\pi|U(\boldsymbol{a})R(\Omega)|\pi\rangle = n_\pi(a)\mathcal{N}_\pi(\Omega,\boldsymbol{a}) \tag{D.2}$$

erhalten wir unmittelbar als Matrixelement des kohärenten π-Zustands und des nacheinander gedrehten und verschobenen π-Zustands, das mit den in Anhang B beschriebenen Eigenschaften der kohärenten Zustände ausgewertet werden kann. Für spätere Zwecke wollen wir hier jedoch den Ausdruck

$$I_F(\Omega) = \int d^3\boldsymbol{a}\, F(\boldsymbol{a})\langle\pi|U(\boldsymbol{a})R(\Omega)|\pi\rangle \tag{D.3}$$

betrachten, in welchem $F(\boldsymbol{a})$ eine zunächst beliebige Funktion des Verschiebungsvektors $\boldsymbol{a}$ ist. Wir benutzen die Gln. ($B.54$) und ($B.24$) aus Anhang B in Gl. ($D.3$) und erhalten

$$I_F(\Omega) = \int d^3\boldsymbol{a}\, F(\boldsymbol{a})\exp\left\{\sum_{ij}\int d^3\boldsymbol{k}\,\zeta_i^*(\boldsymbol{k})\mathcal{R}_{ij}(\Omega)\zeta_j(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\imath\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}}\right\} \tag{D.4}$$

worin

$$\zeta_i(\boldsymbol{k}) = -\imath\sqrt{\frac{\omega_\pi(k)}{2}}\frac{k_i}{k}A(k) = -\imath\sqrt{\frac{\omega_\pi(k)}{2}}\hat{k}_i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int drr^2\, j_1(kr)\phi(r) \tag{D.5}$$

ist[(1)]. Die Winkelintegration im Exponenten läßt sich nun ausführen (Gl. ($P.3c$)) und wir haben:

$$\begin{aligned} I_F(\Omega) = N_\pi^{-1}\int d^3\boldsymbol{a}\, F(\boldsymbol{a})\exp&\left\{\frac{4\pi}{3}\int dkk^2\,\frac{\omega_\pi(k)}{2}\big(j_0(ka)+j_2(ka)\big)A^2(k)\sum_{ij}\mathcal{R}_{ij}(\Omega)\delta_{ij}\right\} \\ \times\exp&\left\{-4\pi\int dkk^2\,\frac{\omega_\pi(k)}{2}j_2(ka)A^2(k)\sum_{ij}\left[\hat{a}_i\mathcal{R}_{ij}(\Omega)\hat{a}_j\right]\right\} \end{aligned} \tag{D.6}$$

[(1)]Da $\vec{\zeta}^T(\boldsymbol{k})\mathcal{R}(\Omega)\vec{\zeta}(\boldsymbol{k}) = \vec{\zeta}^T(\boldsymbol{k})\mathcal{R}^{-1}(\Omega)\vec{\zeta}(\boldsymbol{k})$, hängt der Normüberlapp nicht davon ab, ob die Drehung im Konfigurationsraum oder Isospinraum durchgeführt wird.

Wir definieren die Funktionen

$$f_l^\pi(a) = 2\pi \int dk k^2 j_l(ka)\omega_\pi(k)A^2(k) \tag{D.7}$$

und führen die in Anhang N angegebene Drehung der Integrationsvariablen $\boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{a} \to T^{-1}(\Omega')\boldsymbol{a} \tag{D.8}$$

ein, die die Bilinearform $\hat{\boldsymbol{a}}^T\mathcal{R}(\Omega)\hat{\boldsymbol{a}}$ in $\hat{\boldsymbol{a}}^T\mathcal{R}_z(\phi)\hat{\boldsymbol{a}}$ überführt. Wir benutzen noch die Gl. $(N.11)$ und erhalten nun für den Ausdruck $(D.6)$ schließlich:

$$I_F(\Omega) = N_\pi^{-1} \int d^3a\, F\left[T^{-1}(\Omega'(\Omega)\boldsymbol{a}\right] n_\pi(a)\exp\left\{2z(a,s)\left[\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right]\right\} \tag{D.9}$$

Um eine kompakte Schreibweise für den Normüberlapp zu erreichen, haben wir noch die Funktionen

$$n_\pi(a) = N_\pi^{-1}\exp\{f_0^\pi\} \quad \Rightarrow \quad n_\pi(a=0) = 1 \tag{D.10a}$$

$$z(a,s) = \frac{2}{3}\left(f_0^\pi(a) + P_2(s)f_2^\pi(a)\right) \tag{D.10b}$$

eingeführt, worin $P_2(s) = \frac{1}{2}\left(3s^2-1\right)$ das Legendre-Polynom 2.Ordnung ist. $n_\pi(a)$ in Gl. $(D.2)$ ist durch Gl. $(D.10a)$ definiert; für $\mathcal{N}_\pi(\Omega, z(\boldsymbol{a}))$ hat man nun:

$$\mathcal{N}_\pi(\Omega, z(\boldsymbol{a})) = \exp\left\{2z(a,s)\left[\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) - 1\right]\right\} \tag{D.11}$$

Bevor wir uns dem Normüberlapp der Valenzquarks zuwenden, berechnen wir noch den des kohärenten σ-Feldes. Da das σ-Feld sowohl im Konfigurationsraum als auch im Isospinraum skalar ist, ist es drehinvariant und der Normüberlapp hängt nicht von den Drehwinkeln $\Omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ ab.

$$\langle\sigma|U(\boldsymbol{a})R(\Omega)|\sigma\rangle = \langle\sigma|U(\boldsymbol{a})|\sigma\rangle = n_\sigma(a) \tag{D.12}$$

Auf die gleiche Weise wie bei der Berechnung des π-Normüberlapps erhalten wir:

$$n_\sigma(a) = N_\sigma^{-1}\exp\left\{\int d^3\boldsymbol{k}\,\kappa(k)^*\kappa(k)\mathrm{e}^{-i\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}}\right\} \tag{D.13}$$

worin

$$\kappa(k) = \sqrt{\frac{\omega_\sigma(k)}{2}}\eta(k) = \sqrt{\frac{\omega_\sigma(k)}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int drr^2 j_0(kr)\sigma(r) \tag{D.14}$$

war. Da κ reell ist und nur von $|\boldsymbol{k}|$ abhängt, kann das Integral $\int d\Omega_k \ldots$ im Exponenten berechnet werden, und man erhält:

$$n_\sigma(a) = N_\sigma^{-1}\exp\{f_0^\sigma(a)\} \quad \Rightarrow \quad n_\sigma(a=0) = 1 \tag{D.15}$$

Analog zu Gl. $(D.7)$ haben wir

$$f_l^\sigma(a) = 2\pi \int dk k^2 \omega_\sigma(k) j_l(ka)\eta(k) \tag{D.16}$$

definiert.

<u>Normüberlapp der Valenzquarks</u> Der Normüberlapp der Quarks errechnet sich aus dem Matrixelelment

$$\langle q|U(a)R(\Omega)|q\rangle = \int d^3r\, q^\dagger(r)U(a)R(\Omega)q(r) = n_q(a)\mathcal{N}_q(\Omega) \tag{D.17}$$

worin der Quarkspinor durch

$$q(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix} u(r) \\ \imath\, v(r)\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r}\end{pmatrix}|\chi_{hh}\rangle \tag{D.18a}$$

$$|\chi_{hh}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\downarrow\langle - |d\uparrow\rangle) \tag{D.18b}$$

gegeben war. Wir stellen zunächst fest, daß $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r}$ ein Skalar ist und deshalb unter Drehungen im Konfigurationsraum invariant ist. Die Drehungen $R(\Omega)$ wirken also nur auf die Hedgehog-Spinflavourfunktion $|\chi_{hh}\rangle$. Der Normüberlapp hat daher die folgende Gestalt:

$$\mathcal{N}_q(\Omega)n_q(a) = \langle\chi_{hh}|R^{J=\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\gamma)|\chi_{hh}\rangle\int d^3r\, q^\dagger(r)q(r-a) \tag{D.19}$$

Aus der expliziten Darstellung des Drehoperators für Spin $J=\frac{1}{2}$ (vgl. Anhang O) erhalten wir[(2)]:

$$\mathcal{N}_q(\Omega) = \langle\chi_{hh}|R^{J=\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\gamma)|\chi_{hh}\rangle = \cos\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \tag{D.20}$$

Die Wirkung der Translation $U(a)$ auf den Quarkspinor wird zweckmäßig im Impulsraum betrachtet. Um also

$$n_q(a) = \int d^3r\, q^\dagger(r)q(r-a) \tag{D.21}$$

zu ermitteln, führen wir die Fouriertransformierte des Quarkspinors ein. Es ist:

$$\tilde{q}(p) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int d^3r\, e^{-\imath p\cdot r}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix} u(r) \\ \imath\, v(r)\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r}\end{pmatrix}|\chi_{hh}\rangle \tag{D.22}$$

Die Integration $\int d\Omega_r\ldots$ läßt sich ausführen und man hat mit den Gln. ($P.3a$–b) aus Anhang P

$$\tilde{q}(p) = \sqrt{\frac{1}{2\pi^2}}\begin{pmatrix} \tilde{u}(p) \\ \tilde{v}(p)\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p}\end{pmatrix}|\chi_{hh}\rangle \tag{D.23}$$

worin die Funktionen $\tilde{u}(p)$ und $\tilde{v}(p)$ durch

$$\tilde{u}(p) = \int dr r^2\, j_0(pr)u(r) \tag{D.24a}$$

$$\tilde{v}(p) = \int dr r^2\, j_1(pr)u(r) \tag{D.24b}$$

---

(2) Das Ergebnis ist das gleiche, falls die Drehung im Isospinraum durchgeführt wird; also $\langle\chi_{hh}|R^{J=\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\gamma)|\chi_{hh}\rangle = \langle\chi_{hh}|R^{T=\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\gamma)|\chi_{hh}\rangle$

gegeben sind. Die Berechnung des Normüberlapps erfolgt nun mit der Rücktransformierten,

$$q(r \pm a) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3p\, \tilde{q}(p) \mathrm{e}^{i\, p\cdot(r\pm a)} \tag{D.25}$$

die in Gl. $(D.21)$ eingesetzt das Ergebnis

$$n_q(a) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3r \int d^3p \int d^3k\, q^\dagger(k) q(p) \mathrm{e}^{i\, r\cdot(p-k)} \mathrm{e}^{-i\, p\cdot a} \tag{D.26}$$

liefert. Hieraus wird mit der Orthogonalitätsrelation der Eigenfunktionen des Impulsoperators

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3r\, \mathrm{e}^{i\, r\cdot(p-k)} = \delta^3(p-k) \tag{D.27}$$

und der Gl. $(P.3a)$ aus Anhang P sofort

$$n_q(a) = \frac{2}{\pi} \int dp p^2\, j_0(pa) \Big(\tilde{u}^2(p) + \tilde{v}^2(p)\Big) \tag{D.28}$$

Der Nornüberlapp der Valenzquarks hängt wie der des kohärenten σ-Zustands also nur vom Betrag des Translationsvektors a ab, d. h. die Variablentransformation aus Gl. $(D.8)$ ändert diese Überläppe nicht und wir können nun den Normüberlapp des Hedgehog-Zustands angeben.

Zusammenfassung: Normüberlapp Der Normüberlapp des Hedgehog-Zustands

$$\langle \Psi_{hh} | U(a) R(\Omega) | \Psi_{hh} \rangle = n_q^3(a) \mathcal{N}_q^3(\Omega) n_\pi(a) \mathcal{N}_\pi(\Omega, a) n_\sigma(a) \tag{D.29}$$

hat nun eine Form, die eine nachfolgende Integration der Eulerwinkel wie sie in Anhang M beschrieben wird erlaubt. Im einzelnen sind:

$$\mathcal{N}_q(\Omega) = \cos\frac{\beta}{2} \cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \tag{D.30a}$$

$$\mathcal{N}_\pi(\Omega, z) = \exp\left\{2z\left[\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) - 1\right]\right\} \tag{D.30b}$$

$$z = z(a,s) = \frac{2}{3}\left[f_0^\pi(a) + P_2(s) f_2^\pi(a)\right] \tag{D.30c}$$

$$f_l^\pi(a) = 2\pi \int dk k^2\, j_l(ka) \omega_\pi(k) A^2(k) \tag{D.30d}$$

$$P_2(s) = \frac{1}{2}(3s^2 - 1) \tag{D.30e}$$

$$s = \cos\theta_a \tag{D.30f}$$

$$A(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int dr r^2\, j_1(kr) \phi(r) \tag{D.30g}$$

$$n(a) = n_q^3(a) n_\sigma(a) n_\pi(a) \tag{D.30h}$$

$$n_\sigma(a) = \exp\left\{2\pi \int dk k^2\, (j_0(ka) - 1)\, \omega_\sigma(k) \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int dr r^2\, j_0(kr) \sigma(r)\right]^2\right\} \tag{D.30i}$$

$$n_\pi(a) = \exp\left\{2\pi \int dk k^2\, (j_0(ka) - 1)\, \omega_\pi(k) \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int dr r^2\, j_1(kr) \phi(r)\right]^2\right\} \tag{D.30j}$$

$$n_q(a) = \frac{2}{\pi} \int dk k^2\, j_0(ka) \left(\left[\int dr r^2\, j_0(kr) u(r)\right]^2 + \left[\int dr r^2\, j_1(kr) v(r)\right]^2\right) \tag{D.30k}$$

In Anhang M wird das Integral

$$\frac{2J+1}{8\pi^2}\int d^3\Omega\,\mathcal{D}^J_{JJ}(\Omega)^*\mathcal{N}^3_q(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)=F^1_k(z) \tag{D.31}$$

analytisch ausgewertet. Speziell für das Nukleon ($k=0\Leftrightarrow J=T=\frac{1}{2}$) gilt damit:

$$\frac{1}{4\pi^2}\int d^3a\int d^3\Omega\,\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Omega)^*\mathcal{N}^3_q(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)=2\pi\int_0^\infty daa^2\,n(a)\int_{-1}^{+1}ds\,\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z}\big(I_1(z)+I_2(z)\big) \tag{D.32}$$

Anhang E. Energie des projizierten Solitons

In diesem Abschnitt zeigen wir die Berechnung der Energie des auf linearen Impuls $q = 0$ und Spin (Isospin) projizierten Hedgehogzustands. Da die kinetische Energie der Quarks sowie die Quark–Meson–Wechselwirkungsenergie durch den Eigenwert ε der Diracgleichung gegeben sind, benötigen wir zur Ermittlung der Gesamtenergie des Solitons noch die projizierte nichtlineare Wechselwirkungsenergie (Mexican Hat Potential) und die kinetische Energie der Mesonen. Diese sollen im folgenden berechnet werden.

E.1. Nichtlineare Wechselwirkungsenergie

Die Hamiltondichte des Mexican Hat Potentials

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{\lambda}{4}\left[\left(\hat{\vec{\pi}}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\vec{\pi}}(\boldsymbol{r})\right)^2 + \left(2\hat{\sigma}^2(\boldsymbol{r}) + 4f_\pi\hat{\sigma}(\boldsymbol{r})\right)\left(\hat{\vec{\pi}}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\vec{\pi}}(\boldsymbol{r})\right) + \hat{\sigma}^4(\boldsymbol{r}) + 4f_\pi\hat{\sigma}^3(\boldsymbol{r})\right] \qquad (E.1)$$

besteht aus fünf einzelnen Termen. Wir befassen uns zunächst mit der Berechnung des Überlapps für den π^4–Term

$$\begin{aligned}&\int d^3\boldsymbol{r}\,\langle\, U(-\tfrac{\boldsymbol{a}}{2})\Psi_{hh}|:\left(\hat{\vec{\pi}}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\vec{\pi}}(\boldsymbol{r})\right)^2:|U(+\tfrac{\boldsymbol{a}}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\,\rangle = \\ &= n_q^3(a)\mathcal{N}_q^3(\Omega)\int d^3\boldsymbol{r}\,\langle\, U(-\tfrac{\boldsymbol{a}}{2})\pi|:\left(\hat{\vec{\pi}}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\vec{\pi}}(\boldsymbol{r})\right)^2:|U(+\tfrac{\boldsymbol{a}}{2})R(\Omega)\pi\,\rangle \qquad (E.2)\end{aligned}$$

und können dann die anderen Terme unmittelbar angeben.

Wir verwenden die Überlegungen aus Anhang B und finden:

$$\begin{aligned}&\frac{\langle\, U(-\frac{\boldsymbol{a}}{2})\pi|:\left(\hat{\vec{\pi}}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\vec{\pi}}(\boldsymbol{r})\right)^2:|U(+\frac{\boldsymbol{a}}{2})R(\Omega)\pi\,\rangle}{\mathcal{N}_\pi(\Omega,\boldsymbol{a})} = \\ &= \frac{1}{16}\left[\sum_{i=1}^{3}\left[\langle\, U(-\tfrac{\boldsymbol{a}}{2})\pi|\hat{\pi}_i(\boldsymbol{r})|U(-\tfrac{\boldsymbol{a}}{2})\pi\,\rangle + \langle\, U(+\tfrac{\boldsymbol{a}}{2})R(\Omega)\pi|\hat{\pi}_i(\boldsymbol{r})|U(+\tfrac{\boldsymbol{a}}{2})R(\Omega)\pi\,\rangle\right]^2\right]^2 \qquad (E.3)\end{aligned}$$

Setzen wir in die Matrixelemente, die in Gl. $(E.3)$ auftreten, die Entwicklung der π–Feldoperatoren nach ebenen Wellen (Gl. $(B.31a)$) ein, benutzen die Gln. $(B.54b)$ und $(B.24)$ aus Anhang B, so ergibt sich:

$$\langle\, U(-\frac{\boldsymbol{a}}{2})\pi|\hat{\pi}_i(\boldsymbol{r})|U(-\frac{\boldsymbol{a}}{2})\pi\,\rangle = \pi_i(\boldsymbol{r}+\frac{\boldsymbol{a}}{2}) \qquad (E.4a)$$

und

$$\langle\, U(+\frac{\boldsymbol{a}}{2})R(\Omega)\pi|\hat{\pi}_i(\boldsymbol{r})|U(+\frac{\boldsymbol{a}}{2})R(\Omega)\pi\,\rangle = \sum_{j=1}^{3}\mathcal{R}_{ij}(\Omega)\pi_j(\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{a}}{2}) \qquad (E.4b)$$

Aus der Hedgehogstruktur des klassischen π–Feldes

$$\langle\,\pi|\hat{\pi}_i(\boldsymbol{r})|\pi\,\rangle = \hat{r}_i\phi(r) \qquad (E.5)$$

erhalten wir mit den Bezeichnungen

$$r_\pm = r \pm \frac{a}{2} \tag{E.6a}$$

und

$$\phi_\pm = \phi(|r_\pm|) \tag{E.6b}$$

zusammen mit den Gln. $(E.4a)$ und $(E.4b)$ für das Überlappintegral des π^4–Terms:

$$\begin{aligned}
&\int d^3a \int d^3r \int d^3\Omega\, \mathcal{D}^T_{TT}(\Omega)^* \langle U(-\tfrac{a}{2})\Psi_{hh}| : \left(\hat{\tilde{\pi}}(r)\cdot\hat{\tilde{\pi}}(r)\right)^2 : |U(+\tfrac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle = \\
&= \frac{1}{16}\int d^3a \int d^3r \int d^3\Omega\, \mathcal{D}^T_{TT}(\Omega)^* \mathcal{N}^3_q(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega, a) \\
&\quad \times \left\{ \left(\phi_+^2 + \phi_-^2\right)^2 + 4\left(\phi_+^2 + \phi_-^2\right)\phi_+\phi_- \left(\hat{r_+}^T \mathcal{R}(\Omega)\hat{r_-}\right) + \phi_+^2\phi_-^2 \left(\hat{r_+}^T \mathcal{R}(\Omega)\hat{r_-}\right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{E.7}$$

Wir führen in Gl. $(E.7)$ die in Anhang N beschriebene Transformation der Integrationsvariablen

$$\begin{aligned}
r &\to T^{-1}(\Omega)r \\
a &\to T^{-1}(\Omega)a
\end{aligned} \tag{E.8}$$

ein, die die Drehung $\mathcal{R}(\Omega)$ in eine Drehung $\mathcal{R}_z(\zeta)$ um die z–Achse mit Winkel ζ überführt, also[1]

$$\hat{r}_+^T \mathcal{R}(\Omega)\hat{r}_- \to \hat{r}_+^T \mathcal{R}_z(\zeta)\hat{r}_- \tag{E.9}$$

und können nun die Integration der Eulerwinkel angehen. Dazu betrachten wir den Ausdruck:

$$\hat{r}_+^T \mathcal{R}_z(\zeta)\hat{r}_- = r^2 P_2(t) - \frac{a^2}{4}P_2(s) + \frac{1}{2}Sp\mathcal{R}(\Omega)\left[r^2\left(1-t^2\right) - \frac{a^2}{4}\left(1-s^2\right)\right] + \sin\zeta\,(r\times a)_3 \tag{E.10}$$

worin

$$\begin{aligned}
s &= \cos\theta_a \\
t &= \cos\theta_r
\end{aligned} \tag{E.11}$$

und

$$(r\times a)_3 = ar\sin\theta_a \sin\theta_r \sin(\phi_a - \phi_r) \tag{E.12}$$

ist. Wir drücken noch $r_\pm^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} \pm a\cdot r$ durch die Polarkoordinaten von $r = (r, \theta_r, \phi_r)$ und $a = (a, \theta_a, \phi_a)$ aus

$$r_\pm = \left[r^2 + \frac{a^2}{4} \pm ar\left(\sin\theta_a \sin\theta_r \cos(\phi_a - \phi_r) + st\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{E.13}$$

[1] Alle weiteren Terme hängen von $r_\pm^2$ ab und sind daher unter Drehungen der Koordinaten a und r invariant.

und stellen fest, daß alle Integrale, die linear von $\sin(\phi_a - \phi_r)$ abhängen, verschwinden, da:

$$\int_0^{2\pi} d\phi_a \int_0^{2\pi} d\phi_r \, F(\cos(\phi_a - \phi_r)) \sin(\phi_a - \phi_r) = 0 \tag{E.14}$$

Wir haben also:

$$\begin{aligned}
&\int d^3a \int d^3r \, \hat{r}_+^T \mathcal{R}_z(\zeta) \hat{r}_- = \\
&= \int d^3a \int d^3r \left\{ r^2 P_2(t) - \frac{a^2}{4} P_2(s) + \frac{1}{2} Sp\mathcal{R}(\Omega) \left[r^2 \left(1 - t^2\right) - \frac{a^2}{4} \left(1 - s^2\right) \right] \right\} \qquad (E.15a) \\
&\int d^3a \int d^3r \left(\hat{r}_+^T \mathcal{R}_z(\zeta) \hat{r}_- \right)^2 = \\
&= \int d^3a \int d^3r \left\{ \left[r^2 P_2(t) - \frac{a^2}{4} P_2(s) \right]^2 + \frac{1}{4} \left[Sp\mathcal{R}(\Omega) \right]^2 \left[r^2 \left(1 - t^2\right) - \frac{a^2}{4} \left(1 - s^2\right) \right]^2 + \right. \\
&\quad \left. + Sp\mathcal{R}(\Omega) \left[r^2 P_2(t) - \frac{a^2}{4} P_2(s) \right] \left[r^2 \left(1 - t^2\right) - \frac{a^2}{4} \left(1 - s^2\right) \right] + \sin^2\zeta \left[(r \times a) \right]^2 \right\} \qquad (E.15b)
\end{aligned}$$

In Anhang N wird gezeigt, daß

$$\cos\zeta = \frac{1}{2} \left(Sp\mathcal{R}(\Omega) - 1 \right) \tag{E.16a}$$

also

$$\sin^2\zeta = 1 - \frac{1}{4} \left(Sp\mathcal{R}(\Omega) - 1 \right)^2 \tag{E.16b}$$

gilt. Setzen wir die Ergebnisse $(E.15a)$, $(E.15b)$ und $(E.16b)$ in Gl. $(E.7)$ ein, so sehen wir, daß der Ausdruck $(E.7)$ nur noch von Potenzen von $Sp\mathcal{R}(\Omega)$ in den Eulerwinkeln abhängt. Derartige Integrale der Eulerwinkel

$$\frac{2T+1}{8\pi^2} \int d^3\Omega \, \mathcal{D}_{TT}^T(\Omega)^* \mathcal{N}_q^3(\Omega) \mathcal{N}_\pi(\Omega, z) \left[\mathcal{R}(\Omega) \right]^m = F_k^m(z) \tag{E.17}$$

werden in Anhang M behandelt. Wir erhalten daher aus dem Ausdruck $(E.7)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{2T+1}{8\pi^2} \int d^3a \int d^3r \int d^3\Omega \, \mathcal{D}_{TT}^T(\Omega)^* \langle U(-\tfrac{a}{2}) \Psi_{hh} | : \left(\hat{\tilde{\pi}}(r) \cdot \hat{\tilde{\pi}}(r) \right)^2 : | U(+\tfrac{a}{2}) R(\Omega) \Psi_{hh} \rangle = \\
&= \frac{1}{16} \int d^3a \, n(a) \int d^3r \left\{ \left(\phi_+^2 + \phi_-^2 \right)^2 F_k^0(z) + \right. \\
&\quad + 4 \left(\phi_+^2 + \phi_-^2 \right) \left(\frac{\phi_+}{r_+} \frac{\phi_-}{r_-} \right) \left[\left(r^2 P_2(t) - \frac{a^2}{4} P_2(s) \right) F_k^0(z) + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2} \left[r^2 \left(1 - t^2\right) - \frac{a^2}{4} \left(1 - s^2\right) \right] F_k^1(z) \right] + \\
&\quad + \left(\frac{\phi_+}{r_+} \frac{\phi_-}{r_-} \right)^2 \left[4 \left[\left(r^2 P_2(t) - \frac{a^2}{4} P_2(s) \right)^2 + \frac{3}{4} \left[(r \times a)_3 \right]^2 \right] F_k^0(z) + \right. \\
&\qquad + 4 \left[\left(r^2 P_2(t) - \frac{a^2}{4} P_2(s) \right) \left[r^2 \left(1 - t^2\right) - \frac{a^2}{4} \left(1 - s^2\right) \right] + \frac{1}{2} \left[(r \times a)_3 \right]^2 \right] F_k^1(z) + \\
&\qquad \left. \left. + \left[\left[r^2 \left(1 - t^2\right) - \frac{a^2}{4} \left(1 - s^2\right) \right]^2 - \left[(r \times a)_3 \right]^2 \right] F_k^2(z) \right] \right\} \qquad (E.18)
\end{aligned}$$

Weiterhin können wir auf analytischem Wege die Integration über die Azimutwinkel ϕ_a und ϕ_r ausführen und die Integration des Polarwinkels von a abseparieren. Zu diesem Zweck führen wir die folgende Transformation der Variablen im Integral $(E.18)$ ein:

$$r = D(a)r' \tag{E.19}$$

worin $D(a)$ die Drehung

$$D(a) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & \cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{E.20}$$

ist. Wir haben hier für die Polarkoordinaten des Verschiebungsvektors a die Bezeichnungen

$$a = (a, \vartheta, \varphi) \tag{E.21a}$$

eingeführt. Die Polarkoordinaten von r' sind durch

$$r' = (r = r', \theta, \phi) \tag{E.21b}$$

gekennzeichnet. Aus

$$r \cdot a = r'^T D^T a = ar\cos\theta \tag{E.22}$$

ersieht man, daß die Argumente

$$r_\pm = \left[r^2 + \frac{a^2}{4} \pm ar\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}} \tag{E.23}$$

nicht mehr von den Azimutwinkeln der neuen Koordinaten und auch nicht vom Polarwinkel $s = \cos\vartheta$ des Verschiebungsvektors a abhängen. Da a unter der Transformation $(E.19)$ invariant ist, sind noch t^2 und t^4 sowie $[(r \times a)_3]^2$ durch r' und a auszudrücken. Es ist:

$$\int_0^{2\pi} d\phi\, t^2 = \pi\left\{2u^2s^2 + \left(1-u^2\right)\left(1-s^2\right)\right\} \tag{E.24a}$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi\, t^4 = \frac{\pi}{4}\left\{35u^4s^4 - 30u^4s^2 - 30u^2s^4 + 36u^2s^2 + 3u^4 - 6u^2 + 3s^4 - 6s^2 + 3\right\} \tag{E.24b}$$

und

$$\int_0^{2\pi} d\phi\, [(r \times a)_3]^2 = \pi a^2 r^2 \left(1-u^2\right)\left(1-s^2\right) \tag{E.24c}$$

worin wir $u = \cos\theta$ gesetzt haben. Aus Gl. $(E.22)$ geht hervor, daß die Integration über den Polarwinkel ϑ separat ausgeführt werden kann. Wir können daher die Funktionen

$$G_k^{mn}(a) = \int_{-1}^{+1} ds\, s^n F_k^m\left(z(a,s)\right) \tag{E.25}$$

definieren, die nur noch vom Betrag des Verschiebungsvektors $|a|$ abhängen. wobei m und n die Werte $m = 0, 1, 2$ und $n = 0, 2, 4$ durchlaufen. Wir setzen nun die Gln. ($E.24a$–c) in den Ausdruck ($E.18$) ein und enden , nachdem wir die anderen Terme des Mexican Hat Potentials auf die gleiche Weise berechnet haben, mit dem folgenden Resultat für die nichtlineare Wechselwirkungsenergie, projiziert auf dem Impuls $q = 0$ und den Spin $J = T$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2J+1}{8\pi^2}\int d^3a \int d^3r \int d^3\Omega\, \mathcal{D}^J_{JJ}(\Omega)^* \langle U(-\tfrac{a}{2})\Psi_{hh} \,|: \mathcal{H}_{NL}(r) :|\, U(+\tfrac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle = \\
&= \frac{\lambda^2}{4}\pi^2 \int da\, a^2 n(a) \int dr\, r^2 \int_{-1}^{+1} du \Bigg\{ \frac{1}{4}\left(\phi_+^2+\phi_-^2\right)^2 G_k^{00}(a) \\
&+ \frac{1}{4}\left(\phi_+^2+\phi_-^2\right)\left(\frac{\phi_+}{r_+}\frac{\phi_-}{r_-}\right)\Bigg[\left(G_k^{00}(a) - 3G_k^{02}(a) + G_k^{12}(a)\right)\left(r^2(1-3u^2)+\frac{a^2}{2}\right) \\
&\qquad\qquad + G_k^{10}(a)\left(r^2(1+u^2)-\frac{a^2}{2}\right)\Bigg] \\
&+ \frac{1}{32}\left(\frac{\phi_+}{r_+}\frac{\phi_-}{r_-}\right)^2 \Bigg[G_k^{00}(a)\left(r^4(27u^4-30u^2+11)+a^2r^2(-18u^2+14)+\frac{a^4}{2}\right) \\
&\qquad + G_k^{02}(a)\left(r^4(-270u^4+252u^2-30)+a^2r^2(48u^2-24)-3a^4\right) \\
&\qquad + G_k^{04}(a)\left(r^4(315u^4-270u^2+27)+a^2r^2(-54u^2+18)+\frac{9}{2}a^4\right) \\
&\qquad + G_k^{10}(a)\left(r^4(-18u^4+4u^2-2)+8a^2r^2-a^4\right) \\
&\qquad + G_k^{12}(a)\left(r^4(180u^4-120u^2+4)-a^2r^2(28u^2+4)+4a^4\right) \\
&\qquad + G_k^{14}(a)\left(r^4(-210u^4+180u^2-18)-a^2r^2(-36u^2+12)-3a^4\right) \\
&\qquad + G_k^{20}(a)\left(r^4(3u^4+2u^2+3)+a^2r^2(2u^2-6)+\frac{a^4}{2}\right) \\
&\qquad + G_k^{22}(a)\left(r^4(-30u^4+12u^2+2)+a^2r^2(4u^2+4)-a^4\right) \\
&\qquad + G_k^{24}(a)\left(r^4(35u^4-30u^2+3)+a^2r^2(-6u^2+2)+\frac{a^4}{2}\right)\Bigg] \\
&+ \left[2\left(\frac{\sigma_+ + \sigma_-}{2}\right)^2 + 4f_\pi\left(\frac{\sigma_+ + \sigma_-}{2}\right)\right]\left(\phi_+^2+\phi_-^2\right) G_k^{00}(a) \\
&+ \left[\left(\frac{\sigma_+ + \sigma_-}{2}\right)^2 + 2f_\pi\left(\frac{\sigma_+ + \sigma_-}{2}\right)\right]\left(\frac{\phi_+}{r_+}\frac{\phi_-}{r_-}\right)\Bigg[G_k^{00}(a)\left(r^2(-3u^2+1)+\frac{a^2}{2}\right) + \\
&\qquad G_k^{02}(a)\left(r^2(9u^2-3)-3\frac{a^2}{2}\right) + G_k^{10}(a)\left(r^2(u^2+1)-\frac{a^2}{2}\right) + \\
&\qquad G_k^{12}(a)\left(r^2(-3u^2+1)+\frac{a^2}{2}\right)\Bigg] \\
&+ 4\left[\left(\frac{\sigma_+ + \sigma_-}{2}\right)^4 + 4f_\pi\left(\frac{\sigma_+ + \sigma_-}{2}\right)^3\right] G_k^{00}(a)\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{E.26}
$$

In Gl. ($E.26$) haben wir die folgenden vom Verschiebungsvektor $\boldsymbol{a}$ abhängigen Funktionen verwendet:

$$n(a) = n_q^3(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) \tag{E.27a}$$

$$n_q(a) = \frac{2}{\pi} \int dp p^2 j_0(pa) \left(\tilde{u}^2(p) + \tilde{v}^2(p)\right) \tag{E.27b}$$

$$n_\pi(a) = \exp\left\{f_0^\pi(a) - f_0^\pi(a=0)\right\} \tag{E.27c}$$

$$n_\sigma(a) = \exp\left\{f_0^\sigma(a) - f_0^\sigma(a=0)\right\} \tag{E.27d}$$

$$z(a,s) = \frac{2}{3}\left(f_0^\pi(a) + P_2(s) f_2\pi(a)\right) \tag{E.27e}$$

$$f_l^\pi(a) = 2\pi \int dp p^2 j_l(pa) \omega_\pi(p) A^2(p) \tag{E.27f}$$

$$f_0^\sigma(a) = 2\pi \int dp p^2 j_0(pa) \omega_\sigma(p) \eta^2(p) \tag{E.27g}$$

$$P_2(s) = \frac{1}{2}\left(3s^2 - 1\right) \tag{E.27h}$$

$$\phi_\pm = \phi\left(|r_\pm|\right) \tag{E.27i}$$

$$\sigma_\pm = \sigma\left(|r_\pm|\right) \tag{E.27j}$$

$$|r_\pm| = \left[r^2 + \frac{a^2}{4} \pm aru\right]^{\frac{1}{2}} \tag{E.27k}$$

$$u = \cos\theta_{\boldsymbol{r}} \tag{E.27l}$$

$$s = \cos\theta_{\boldsymbol{a}} \tag{E.27m}$$

worin

$$\tilde{u}(p) = \int dr r^2 j_0(pr) u(r) \tag{E.28a}$$

$$\tilde{v}(p) = \int dr r^2 j_1(pr) v(r) \tag{E.28b}$$

$$A(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int dr r^2 j_1(pr) \phi(r) \tag{E.28c}$$

$$\eta(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int dr r^2 j_0(pr) \sigma(r) \tag{E.28d}$$

Abschließend betrachten wir noch den Fall, daß der Hedgehogzustand nur auf den Spin $J = T$ projiziert wird, die lineare Impulsprojektion also vernachlässigt wird. Im Grenzfall $\boldsymbol{a} \to 0$ erhalten wir mit

$$z \to z_0 = \frac{2}{3} f_0^\pi(a=0) \tag{E.29a}$$

$$s \to 1 \tag{E.29b}$$

$$G_k^{mn}(a) \to F_k^m(z_0) \tag{E.29c}$$

$$\phi\left(r_\pm\right) \to \phi(r) \tag{E.29d}$$

$$\sigma\left(r_\pm\right) \to \sigma(r) \tag{E.29e}$$

aus Gl. (E.26) nach Integration über u:

$$\frac{2T+1}{8\pi}\int d^3r\int d^3\Omega\,\mathcal{D}^T_{TT}(\Omega)^*\langle\,\Psi_{hh}|:\mathcal{H}(r):|R(\Omega)\Psi_{hh}\,\rangle =$$
$$= 2\pi\Bigg\{\frac{1}{15}\left(9F^0_k(z_0)+4F^1_k(z_0)+F^2_k(z_0)\right)\int drr^2\,\phi^4(r)+$$
$$+\frac{2}{3}\left(3F^0_k(z_0)+F^1_k(z_0)\right)\int drr^2\,\phi^2(r)\sigma(r)\,(\sigma(r)+2f_\pi)+$$
$$+F^0_k(z_0)\int drr^2\,\sigma^3(r)\,(\sigma(r)+4f_\pi)\Bigg\} \qquad (E.30)$$

E.2. Kinetische Energie der Mesonen

Wir wollen zunächst die kinetische Energie des Pions

$$H_\pi = \sum_{i=1}^{3}\int d^3k\,\omega_\pi(k)b_i^\dagger(k)b_i(k) \qquad (E.31)$$

betrachten und haben dazu das Überlappintegral

$$\int d^3a\int d^3\Omega\,\mathcal{D}^T_{TT}(\Omega)^*\langle\,U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh}|\sum_{i=1}^{3}\int d^3k\,\omega_\pi(k)b_i^\dagger(k)b_i(k)|U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\,\rangle =$$
$$= \int d^3a\int d^3\Omega\,\mathcal{D}^T_{TT}(\Omega)^*n_q^3(a)\mathcal{N}_q^3(\Omega)n_\sigma(a)$$
$$\times\,\langle\,U(-\frac{a}{2})\pi|\sum_{i=1}^{3}\int d^3k\,\omega_\pi(k)b_i^\dagger(k)b_i(k)|U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\pi\,\rangle \qquad (E.32)$$

zu berechnen. Aus den Gln. (B.54b) und (B.24) erhalten wir unmittelbar:

$$\langle\,U(-\frac{a}{2})\pi|\sum_{i=1}^{3}\omega_\pi(k)b_i^\dagger(k)b_i(k)|U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\pi\,\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{N}_\pi(\Omega,a)n_\pi(a)\mathrm{e}^{-\imath\,k\cdot a}\omega_\pi^2(k)A^2(k)\hat{k}^T\mathcal{R}(\Omega)\hat{k} \qquad (E.33)$$

und können die Integration über den Raumwinkel Ω_k anschließen.

$$\int d\Omega_k\,\mathrm{e}^{-\imath\,k\cdot a}\sum_{ij}\hat{k}_i\mathcal{R}_{ij}(\Omega)\hat{k}_j = \frac{4\pi}{3}\left[(j_0(ka)+j_2(ka))Sp\mathcal{R}(\Omega)-3j_2(ka)\hat{a}^T\mathcal{R}(\Omega)\hat{a}\right] \qquad (E.34)$$

Mit der Definition

$$g_l^\pi = 2\pi\int dkk^2\,j_l(ka)\omega_\pi^2(k)A^2(k) \qquad (E.35)$$

und der Tranformation (E.8) in der Integrationsvariablen a sowie

$$\hat{a}^T\mathcal{R}_z(\zeta)\hat{a} = P_2(s)+\frac{1}{2}Sp\mathcal{R}(\Omega)\left(1-s^2\right) \qquad (E.36)$$

ergibt sich schließlich:

$$\int d^3a \int d^3\Omega\, \mathcal{D}^T_{TT}(\Omega)^* \langle U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh}| \sum_{i=1}^{3} \int d^3k\, \omega_\pi(k) b_i^\dagger(k) b_i(k) |U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle =$$
$$= \int d^3a \int d^3\Omega\, \mathcal{D}^T_{TT}(\Omega)^* n(a) \mathcal{N}_q^3(\Omega) \mathcal{N}_\pi(\Omega, z)$$
$$\times \frac{1}{3}\left[Sp\mathcal{R}(\Omega)\left(g_0^\pi(a) + P_2(s) g_2^\pi(a)\right) + 3P_2(s) g_2^\pi(a)\right] \qquad (E.37)$$

Die Integration der Eulerwinkel stellt nun kein Problem mehr dar. Mit Gl. $(E.17)$ und der Definition $(E.25)$ folgt sofort:

$$\frac{2T+1}{8\pi^2} \int d^3a \int d^3\Omega\, \mathcal{D}^T_{TT}(\Omega)^* \langle U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh}| : H_\pi : |U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle =$$
$$= \frac{\pi}{3} \int da a^2\, n(a) \Big\{ 2g_0^\pi(a) G_k^{10}(a) +$$
$$+ g_2^\pi(a) \left[3G_k^{00}(a) - G_k^{10}(a) + 3G_k^{12}(a) - 9G_k^{02}(a)\right] \Big\} \qquad (E.38)$$

Die Berechnung des Überlappintegrals für die kinetische Energie des σ–Feldes ist wesentlich einfacher, da dieses aufgrund seines skalaren isoskalaren Charakters drehinvariant ist, und somit nur der Normüberlapp von den Eulerwinkeln abhängt. Benutzt man die gleichen Methoden wie im Fall des π–Feldes, so hat man sehr schnell:

$$\frac{2T+1}{8\pi^2} \int d^3a \int d^3\Omega\, \mathcal{D}^T_{TT}(\Omega)^* \langle U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh}| : H_\sigma : |U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle =$$
$$= 2\pi \int da a^2\, n(a) g_0^\sigma(a) G_k^{00}(a) \qquad (E.39)$$

wobei

$$g_0^\sigma(a) = 2\pi \int dk k^2\, j_0(ka) \omega_\sigma^2(k) \eta^2(k) \qquad (E.40)$$

ist.

E.3. Kinetische Energie der Quarks

Die kinetische Energie der Quarks

$$H_q = \int d^3r\, \bar{q}(\vec{r}) (-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla})\, q(\vec{r}) \qquad (E.41)$$

wird zwar nicht benötigt, um die Gesamtenergie des projizierten Solitons anzugeben, wird hier jedoch berechnet, damit die einzelnen Anteile an der Gesamtenergie, d. h. kinetische Energien der Quarks und Mesonen, Quark–Meson–Wechselwirkungsenergie und Energie des Mexican Hat Potentials, aufgelistet werden können. Die Quark–Meson–Wechselwirkungsenergie ergibt sich demzufolge als Differenz zwischen Gesamtenergie und der Summe der kinetischen Energien und der

nichtlinearen Wechselwirkungsenergie der Mesonfelder. Man zeigt leicht, daß für das Überlappintegral

$$\frac{2T+1}{8\pi^2}\int d^3\boldsymbol{a}\int d^3\Omega\,\mathcal{D}^T_{TT}(\Omega)^*\langle\, U(-\frac{\boldsymbol{a}}{2})\Psi_{hh}|H_q|U(+\frac{\boldsymbol{a}}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\,\rangle =$$
$$= \frac{2T+1}{8\pi^2}\int d^3\boldsymbol{a}\int d^3\Omega\int d^3\boldsymbol{r}\,\mathcal{D}^T_{TT}(\Omega)^*3n_q^2(a)n_\pi(a)n_\sigma(a)\mathcal{N}_q^2(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,\boldsymbol{a})$$
$$\times\langle\,\chi_{hh}|\bar{q}(\boldsymbol{r}+\frac{\boldsymbol{a}}{2})(-\imath\gamma\cdot\nabla)\,q(\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{a}}{2})|r(\Omega)\chi_{hh}\,\rangle \qquad (E.42)$$

der folgende Ausdruck gilt:

$$\int d^3\boldsymbol{r}\,\langle\,\chi_{hh}|\bar{q}(\boldsymbol{r}+\frac{\boldsymbol{a}}{2})(-\imath\gamma\cdot\nabla)\,q(\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{a}}{2})|R(\Omega)\chi_{hh}\,\rangle =$$
$$= \mathcal{N}_q(\Omega)\frac{4}{\pi}\int dpp^2\,j_0(pa)p\tilde{u}(p)\tilde{v}(p) \qquad (E.43)$$

indem man die Fouriertranformierte des Quarkspinors

$$q(\boldsymbol{r}\pm\frac{\boldsymbol{a}}{2}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int d^3\boldsymbol{p}\,q(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\imath\,\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r}\pm\frac{\boldsymbol{a}}{2})} \qquad (E.44a)$$

$$q(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\frac{1}{2\pi^2}}\begin{pmatrix}\tilde{u}(p)\\ \tilde{v}(p)\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\end{pmatrix} \qquad (E.44b)$$

und seine Ableitung in Gl. ($E.42$) einsetzt. Die Integration der Eulerwinkel reduziert sich damit auf diejenige des Normüberlapps. Wir enden mit dem Ausdruck:

$$\frac{2T+1}{8\pi^2}\int d^3\boldsymbol{a}\int d^3\Omega\,\mathcal{D}^T_{TT}(\Omega)^*\langle\, U(-\frac{\boldsymbol{a}}{2})\Psi_{hh}|H_q|U(+\frac{\boldsymbol{a}}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\,\rangle =$$
$$= 3\int daa^2\,n_q^2(a)n_\pi(a)n_\sigma(a)e_q(a)G_k^{00}(a) \qquad (E.45)$$

worin wir noch abkürzend

$$e_q(a) = \frac{4}{\pi}\int dpp^3\,j_0(pa)\tilde{u}(p)\tilde{v}(p) \qquad (E.46)$$

gesetzt haben.

Zum Absclußdieses Abschnitts geben wir noch die kinetischen Energien der Quark- und Mesonfelder für den Fall der reinen Drehimpulsprojektion an. Um die Beziehung

$$\int dpp^2\,j_l(pr)j_{l'}(pr') = \frac{\pi}{2rr'}\delta\left(r-r'\right)\delta_{ll'} \qquad (E.47)$$

bei der Auswertung der Funktionen $e_q(a)$, $g_0^\pi(a)$ und $g_0^\sigma(a)$ im Grenzfall $\boldsymbol{a}\longrightarrow 0$ benutzen zu können, schreiben wir mit Hilfe der Rekursionsformeln der sphärischen Besselfunktionen für:

$$pj_1(pr) = -\frac{\partial}{\partial r}j_0(pr) \qquad (E.48a)$$

$$pj_0(pr) = \left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2}{r}\right)j_1(pr) \qquad (E.48b)$$

Wir erhalten damit nach partieller Integration für die Ausdrücke

$$\int drr^2\, pj_1(pr) f(r) = \int drr^2\, j_0(pr) \left(\frac{2}{r} f(r) + \frac{\partial}{\partial r} f(r) \right) \tag{E.49a}$$

$$\int drr^2\, pj_0(pr) \sigma(r) = - \int drr^2\, j_1(pr) \frac{\partial}{\partial r} \sigma(r) \tag{E.49b}$$

worin $f(r)$ eine der Funktionen $u(r)$, $v(r)$ oder $\phi(r)$ ist. Damit und mit Gl. $(E.47)$ haben wir nun:

$$e_q(a=0) = \int drr^2 \left[\frac{2}{r} u(r) v(r) + u(r) \frac{\partial}{\partial r} v(r) - v(r) \frac{\partial}{\partial r} u(r) \right] \tag{E.50a}$$

$$g_0^\pi(a=0) = 4\pi \frac{1}{2} \int drr^2 \left[2 \left(\frac{\phi(r)}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi(r)}{\partial r} \right)^2 + m_\pi^2 \phi^2(r) \right] \tag{E.50b}$$

$$g_0^\sigma(a=0) = 4\pi \frac{1}{2} \int drr^2 \left[\left(\frac{\partial \sigma(r)}{\partial r} \right)^2 + m_\sigma^2 \sigma^2(r) \right] \tag{E.50c}$$

Die Ausdrücke $(E.50a\text{–}c)$ gleichen natürlich den entspechenden Ausdrücken der Mean Field Energien. Im Fall der kinetischen Energien der Quarks und des Sigmas sind die drehimpulsprojizierten Größen durch $(E.50a)$ und $(E.50c)$ bereits gegeben, da sich die Projektionskoeffizienten in Zähler und Nenner kürzen. Für das Pion hat man:

$$\int d^3\Omega\, \mathcal{D}_T^{TT}(\Omega)^* \langle\, \Psi_{hh} | : \int d^3r\, \mathcal{H}_\pi(r) : | R(\Omega) \Psi_{hh} \,\rangle = \frac{1}{3} g_0^\pi(a=0) \frac{F_k^1(z_0)}{F_k^0(z_0)} \tag{E.51}$$

Anhang F. Matrixelemente des Impulsoperators

Zur Entwicklung der Mesonfeldoperatoren haben wir bisher das Fundamentalsystem der freien Klein–Gordon–Gleichung, die ebenen Wellen, benutzt, da wir einen tranlations- und rotationsinvarianten Vakuumzustand bei der Konstruktion der kohärenten Mesonzuständen zugrunde legten. In diesem Abschnitt wollen wir hiervon abweichen und die Feldoperatoren nach Eigenzuständen des harmonischen Oszillators entwickeln sowie kohärente Zustände auf der Grundlage dieses Basissystems konstruieren. Dies hat zur Folge, daß der 0–Teilchen–Zustand ('Vakuum') nun nicht mehr translationsinvariant ist, jedoch eine approximative Wechselwirkung des Mesons mit dem Solitonfeld vorliegt. Spin- und impulsprojizierte Größen in dieser neuen Basis zu berechnen ist technisch sehr kompliziert, und wir beschränken uns deshalb darauf Matrixelemente des Hedgehogzustands anzugeben, die vom gewählten Basissystem abhängen. Wir wollen daher die Erwartungswerte des Quadrates des Impulsoperators, $\langle\,\sigma| : \boldsymbol{P}_\sigma^2 : |\sigma\,\rangle$ und $\langle\,\pi| : \boldsymbol{P}_\pi^2 : |\pi\,\rangle$, ermitteln und die Auswirkungen eines Wechsels des Basissystems für diese Größen studieren. Die Impulsoperatoren sind wie üblich durch

$$\boldsymbol{P}_\sigma = - : \int d^3\boldsymbol{x}\, \hat{p}_\sigma(\boldsymbol{x}) \nabla \hat{\sigma}(\boldsymbol{x}) : \tag{F.1a}$$

$$\boldsymbol{P}_\pi = - : \int d^3\boldsymbol{x}\, \hat{\vec{p}}_\pi(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla \hat{\vec{\pi}}(\boldsymbol{x}) : \tag{F.1b}$$

gegeben. Um die obigen Erwartungswerte angeben zu können, ist es hilfreich die Wirkung des Impuloperators $\boldsymbol{p} \to \frac{1}{i}\nabla$ auf die Eigenzustände des gewählten Basissystems zu kennen. Im Fall der ebenen Wellen ist dies einfach , da diese selbst Eigenfunktionen des Impuloperators sind. Im Fall der Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators wollen wir uns zunächst mit der Berechnung der

<u>Matrixelemente $\langle\, n'l'm'|\boldsymbol{p}|nlm\,\rangle$</u> befassen.

$$|nlm\,\rangle = A_{nl}\,(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\eta})^n\, \mathcal{Y}_{lm}(\boldsymbol{\eta})|0\,\rangle \tag{F.2}$$

ist ein Eigenzustand $\langle\, \boldsymbol{x}|nlm\,\rangle = \psi_{nlm}(\boldsymbol{x})$ des harmonischen Oszillators

$$\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{x}^2\right)\psi_{nlm}(\boldsymbol{x}) = E_{nl}\psi_{nlm}(\boldsymbol{x}) \tag{F.3}$$

mit dem Eigenwert

$$E_{nl} = 2n + l + \frac{3}{2} \tag{F.4}$$

und der Normierungskonstanten

$$A_{nl} = (-)^n \sqrt{\frac{4\pi}{(2n+2l+1)!!(2n)!!}} \tag{F.5}$$

Argumente der Kugelfunktionen

$$\mathcal{Y}_{lm}(\boldsymbol{r}) = r^l Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}}) \tag{F.6}$$

sind die Erzeugungsoperatoren η (die Vernichter seien hier mit $\xi = \eta^\dagger$ bezeichnet), die den Zustand $|nlm\rangle$ aus dem Grundzustand $|0\rangle$ aufbauen. Da

$$p = \frac{i}{\sqrt{2}}(\eta - \eta) \tag{F.7}$$

als Funktion der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren geschrieben werden kann, haben wir das Matrixelement $\langle n'l'm'|\eta|nlm\rangle$ zu berechnen. Dazu betrachten wir η

$$\eta^1_q = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\mathcal{Y}_{1q}(\eta) \tag{F.8}$$

als sphärischen Tensoroperator der Stufe $k = 1$ und erhalten leicht mit

$$\begin{aligned}\eta^1_q \mathcal{Y}_{lm}(\eta) = (-)^{l+m+q}\Big\{&\sqrt{l}\begin{pmatrix}1 & l & l-1\\ q & m & -(m+q)\end{pmatrix}(\eta\cdot\eta)\,\mathcal{Y}_{l-1,m+q}(\eta) - \\ &-\sqrt{l+1}\begin{pmatrix}1 & l & l+1\\ q & m & -(m+q)\end{pmatrix}\mathcal{Y}_{l+1,m+q}(\eta)\Big\}\end{aligned} \tag{F.9}$$

das Matrixelement

$$\begin{aligned}\langle n'l'm'|\eta^1_q|nlm\rangle = -(-)^{l+m+q}\Bigg[&\begin{pmatrix}1 & l & l+1\\ q & m & -(m+q)\end{pmatrix}\sqrt{(l+1)(2n+2l+3)}\,\delta_{n',n}\delta_{l',l+1}\delta_{m',m+q} + \\ &+\begin{pmatrix}1 & l & l-1\\ q & m & -(m+q)\end{pmatrix}\sqrt{2l(n+1)}\,\delta_{n',n+1}\delta_{l',l-1}\delta_{m',m+q}\Bigg]\end{aligned} \tag{F.10}$$

Durch hermitesche Konjugation

$$\left(\eta^1_q\right)^\dagger = (-)^q\xi^1_{-q} \tag{F.11}$$

des Ausdrucks (F.10) finden wir die Matrixelemente

$$\begin{aligned}\langle n'l'm'|\xi^1_q|nlm\rangle = (-)^{l+m+q}\Bigg[&\begin{pmatrix}1 & l & l-1\\ q & -m & m-q\end{pmatrix}\sqrt{l(2n+2l+1)}\,\delta_{n',n}\delta_{l',l-1}\delta_{m',m-q} + \\ &+\begin{pmatrix}1 & l & l+1\\ q & -m & m-q\end{pmatrix}\sqrt{2n(l+1)}\,\delta_{n',n-1}\delta_{l',l+1}\delta_{m',m-q}\Bigg]\end{aligned} \tag{F.12}$$

Mit Hilfe des Wigner–Eckart–Theorems ergibt sich aus (F.10), (F.12) und (F.7) nach Auswertung der 3J–Symbole für das reduzierte Matrixelement des Impulsoperators:

$$\langle n'l'\|p^1\|nl\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\left[\delta_{l',l+1}\sqrt{l+1}F^+_{n',n}(l) + \delta_{l',l-1}\sqrt{l}F^-_{n',n}(l)\right] \tag{F.13}$$

worin

$$F^+_{n',n}(l) = \sqrt{2n}\,\delta_{n',n-1} + \sqrt{2n+2l+3}\,\delta_{n',n} \tag{F.13a}$$

$$F^-_{n',n}(l) = \sqrt{2n+2l+1}\,\delta_{n',n} + \sqrt{2n+2}\,\delta_{n',n+1} \tag{F.13b}$$

ist. Hieraus leitet man leicht die Matrixelemente der sphärischen Komponenten des Impulsoperators ab. Es ist:

$$\langle n'l'm'|p_0^1|nlm\rangle = \frac{\imath}{\sqrt{2}}\delta_{m',m}\left\{\delta_{l',l+1}\sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+3)}}\,F^+_{n',n}(l) - \right.$$
$$\left. - \delta_{l',l-1}\sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l-1)(2l+1)}}\,F^-_{n',n}(l)\right\} \qquad (F.14a)$$

$$\langle n'l'm'|p_{\pm1}^1|nlm\rangle = \frac{\imath}{2}\delta_{m',m\pm1}\left\{\delta_{l',l+1}\sqrt{\frac{(l\pm m+1)(l\pm m+2)}{(2l+1)(2l+3)}}\,F^+_{n',n}(l) + \right.$$
$$\left. + \delta_{l',l-1}\sqrt{\frac{(l\mp m)(l\mp m-1)}{(2l-1)(2l+1)}}\,F^-_{n',n}(l)\right\} \qquad (F.14b)$$

Damit sind wir nun in der Lage die

<u>**Matrixelemente** $\langle\sigma| : \boldsymbol{P}_\sigma^2 : |\sigma\rangle$ **und** $\langle\pi| : \boldsymbol{P}_\pi^2 : |\pi\rangle$</u> zu berechnen. Im folgenden ist die Berechnung des Erwartungswertes von $\boldsymbol{P}_\pi^2$ gezeigt; die Berechnung von $\langle\sigma| : \boldsymbol{P}_\sigma^2 : |\sigma\rangle$ erfolgt auf die gleiche Weise und ist am Ende dieses Abschnitts aufgeführt.

Der Operator des Impulsquadrates[a] $\boldsymbol{P}_\pi^2$ ausgedrückt durch die sphärischen Komponenten der Feldoperatoren lautet nun:

$$P^2 =: \sum_{Q=-1}^{+1}(-)^Q \sum_{q=-1}^{+1}(-)^q \sum_{Q'=-1}^{+1}(-)^{Q'} \int d^3x\, \hat{p}^1_{-Q}(x)\nabla^1_q\hat{\pi}^1_Q(x)$$
$$\times \int d^3x'\, \hat{p}^1_{-Q'}(x')\nabla^1_{-q}\hat{\pi}^1_{Q'}(x') \qquad (F.15)$$

worin

$$\hat{\pi}^1_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{nl}}}\left[\psi_{nlm}(x)\,(a_{nlm})^1_q + \psi^*_{nlm}(x)\left(a^\dagger_{nlm}\right)^1_q\right] \qquad (F.16a)$$

$$\hat{p}^1_q(x) = -\imath\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\sqrt{\frac{2\varepsilon_{nl}}{2}}\left[\psi_{nlm}(x)\,(a_{nlm})^1_q - \psi^*_{nlm}(x)\left(a^\dagger_{nlm}\right)^1_q\right] \qquad (F.16b)$$

$\psi_{nlm}(x)$ ist das orthonormierte Basissystem der durch das Oszillatorpotential modifizierten Klein–Gordon–Gleichung im Ortsraum. Die sphärischen Komponenten der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren genügen der Vertauschungsregel:

$$\left[(a_{n'l'm'})^1_{q'}\,,\,\left[(a_{nlm})^1_q\right]^\dagger\right] = \delta_{qq'}\delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'} \qquad (F.17)$$

Die kohärenten Zustände sind natürlich auch Eigenzustände der sphärischen Tensorkomponenten des Vernichtungsoperators, also

$$(a_{nlm})^1_q\,|\pi\rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_{nl}}{2}}\,(\xi_{nlm})^1_q\,|\pi\rangle \qquad (F.18)$$

---

[a] Der Index π zur Kennzeichnung pionischer Größen ist bis auf weiteres weggelassen.

mit

$$(\xi_{nlm})^1_q = \int d^3x\, \psi_{nlm}(x)\pi^1_q(x) = \int d^3x\, R_{nl}(r)Y^*_{lm}(\Omega)\pi^1_q(x) \tag{F.19}$$

Fordern wir, daß die klassische Pionamplitude Hedgehog–Struktur hat, daß also gilt

$$\pi^1_q(x) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{1q}(\hat{x})\phi(r) \tag{F.20}$$

so erhalten wir

$$(\xi_{nlm})^1_q = \delta_{l,1}\delta_{m,q}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int_0^\infty dr r^2\, R_{nl}(r)\phi(r) \equiv \delta_{l,1}\delta_{m,q}C_n \tag{F.21}$$

Wir setzen die Gln. $(F.16a,b)$ in Gl. $(F.15)$ ein, berechnen das normalgeordnete Produkt der Erzeugungs- und Vrenichtungsoperatoren, und erhalten mit den Gln. $(F.14a,b)$ und $(F.21)$ nach einiger Rechnung:

$$\langle\pi| : P^2_\pi : |\pi\rangle = \frac{1}{2}\sum_{Q,q}(-)^q \sum_{n,l,m}\sum_{n_1,n_2} C_{n_1}C_{n_2}\langle n_1 1Q|p^1_q|nlm\rangle\, \varepsilon^\pi_{nl}\langle nlm|p^1_{-q}|n_2 1Q\rangle \tag{F.22}$$

und weiter nach Einsetzen der Matrixelemente des Impulsoperators

$$\langle\pi| : P^2_\pi : |\pi\rangle = \frac{3}{4}\alpha^2_\pi\left\{\sum_{n=0}^\infty \varepsilon^\pi_{n2}\left[(2n+4)\,C^2_n + 2\sqrt{(2n+2)(2n+5)}\,C_{n+1}C_n + (2n+3)\,C^2_{n+1}\right] + \right.$$
$$\left. + \varepsilon^\pi_{00}\,C^2_0\right\} \tag{F.23}$$

In völlig analoger Weise hat man

$$\langle\sigma| : P^2_\sigma : |\sigma\rangle = \frac{1}{2}\sum_{Q,q}(-)^q \sum_{n,l,m}\sum_{n_1,n_2} S_{n_1}S_{n_2}\langle n_1 00|p^1_q|nlm\rangle\, \varepsilon^\sigma_{nl}\langle nlm|p^1_{-q}|n_2 00\rangle \tag{F.24}$$

und schließlich

$$\langle\sigma| : P^2_\sigma : |\sigma\rangle = \frac{1}{4}\alpha^2_\sigma\sum_{n=0}^\infty \varepsilon^\sigma_{n1}\left[\sqrt{2n+3}\,S_n + \sqrt{2n+2}\,S_{n+1}\right]^2 \tag{F.25}$$

worin

$$\varepsilon^\pi_{nl} = \sqrt{\alpha^2_\pi(4n+2l+3)+m^2_\pi} \tag{F.26a}$$
$$\varepsilon^\sigma_{nl} = \sqrt{\alpha^2_\sigma(4n+2l+3)+m^2_\sigma} \tag{F.26b}$$

und

$$S_n = \sqrt{4\pi}\int_0^\infty dr r^2\, R_{n0}(r)\sigma(r) \tag{F.27}$$

Es verbleibt noch die

Berechnung der Koeffizienten C_n und S_n Der radiale Anteil der Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators ist durch

$$R_{nl}(r) = N_{nl} \sum_{\mu=0}^{n} A_\mu^{nl} (\alpha r)^{2\mu+l} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2 r^2} \tag{F.28}$$

gegeben, worin

$$A_\mu^{nl} = (-)^n \binom{n}{\mu} \frac{(2l+1)!!}{(2l+2\mu+1)!!} \tag{F.28a}$$

und

$$N_{nl}^2 = \frac{\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{l-n+2}}{n!} \frac{(2l+2\mu 1)!!}{((2l+1)!!]^2} \tag{F.28b}$$

die Normierungskonstante ist. Dies stzen wir in die Gln. ($F.9$) und ($F.27$) ein und erhalten:

$$C_n = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} N_{n1} \sum_{\mu=0}^{n} A_\mu^{n1} \alpha_\pi^{2\mu+1} \int_0^\infty dr\, r^{2\mu+3} \phi(r) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha_\pi^2 r^2} \tag{F.29a}$$

$$S_n = \sqrt{4\pi} N_{n0} \sum_{\mu=0}^{n} A_\mu^{n0} \alpha_\sigma^{2\mu} \int_0^\infty dr\, r^{2\mu+3} \phi(r) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha_\sigma^2 r^2} \tag{F.29b}$$

Im Intervall $[0, r_{max}]$ sind die Felder $\sigma(r)$ und $\phi(r)$ durch die Lösungen des nichtlinearen Differentialgleichungssystems ($3.22a$–d) gegeben und die Integrale in den Gln. ($F.29a$) und ($F.29b$) können numerisch ausgewertet werden. Abhängig von den gewählten Oszillatorparametern α_π und α_σ können im Bereich $r > r_{max}$ für große Werte der radialen Quantenzahl n Funktionswerte der zu integrierenden Funktion auftreten, die von vergleichbarer Größenordnung sind wie im Bereich $r < r_{max}$. Die Annahme, daß die Beiträge zu den Integralen in Gl. ($F.29a$) bzw. ($F.29b$) im Intervall (r_{max}, ∞) klein im Vergleich zu denjenigen des Intervalls $[0, r_{max}]$ sind, ist dann nicht gerechtfertigt und eine Approximation des Integrals $\int_0^\infty dr \ldots$ durch $\int_0^{r_{max}} dr \ldots$ nicht statthaft. Korrekturterme zu den Integralen $\int_0^{r_{max}} dr \ldots$ lassen sich jedoch mit Hilfe der asymptotischen Entwicklungen

$$\sigma_a(r) = A_\sigma \frac{\mathrm{e}^{-m_\sigma r}}{m_\sigma r} \tag{F.30a}$$

$$\phi_a(r) = A_\pi \frac{\mathrm{e}^{-m_\pi r}}{m_\pi r} \left(1 + \frac{1}{m_\pi r}\right) \tag{F.30b}$$

der Mesonfelder für $r > r_{max}$ leicht berechnen. Die Koeffizienten C_n und S_n lassen sich dann in der folgenden Weise schreiben:

$$C_n = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} N_{n1} \sum_{\mu=0}^{n} A_\mu^{n1} \alpha_\pi^{2\mu+1} \left(I_{\pi,<}^{2\mu+3} + I_{\pi,>}^{2\mu+3}\right) \tag{F.31a}$$

$$S_n = \sqrt{4\pi} N_{n0} \sum_{\mu=0}^{n} A_\mu^{n0} \alpha_\sigma^{2\mu} \left(I_{\sigma,<}^{2\mu+2} + I_{\sigma,>}^{2\mu+2}\right) \tag{F.31b}$$

worin

$$I^k_{\pi,<} = \int_0^{r_{max}} dr\, r^k \phi(r) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha_\pi^2 r^2} \tag{F.32a}$$

$$I^k_{\sigma,<} = \int_0^{r_{max}} dr\, r^k \sigma(r) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha_\sigma^2 r^2} \tag{F.32b}$$

$$I^k_{\pi,>} = \int_{r_{max}}^{\infty} dr\, r^k \phi_a(r) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha_\pi^2 r^2} \tag{F.32c}$$

$$I^k_{\sigma,>} = \int_{r_{max}}^{\infty} dr\, r^k \sigma_a(r) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha_\sigma^2 r^2} \tag{F.32d}$$

ist. Für die Integrale ($F.32c$) und ($F.32d$) lassen sich Rekursionsformeln entwickeln. Dazu definieren wir die Funktion

$$F_n(\rho) = \int_\rho^\infty dr\, r^n \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2 r^2} \mathrm{e}^{-mr} \tag{F.33}$$

und berechnen $F_0(\rho)$ und $F_1(\rho)$. Man findet schnell:

$$F_0(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\alpha} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(\frac{m}{\alpha}\right)^2} erfc\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\rho + \frac{m}{\alpha}\right)\right] \tag{F.34a}$$

$$F_1(\rho) = \frac{1}{\alpha^2}\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2\rho^2 - m\rho} - mF_0(\rho)\right] \tag{F.34b}$$

Partielle Integration des Ausdrucks ($F.33$) ergibt dann unmittelbar

$$F_n(\rho) = \frac{1}{\alpha^2}\left[\rho^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2\rho^2 - m\rho} + (n-1)F_{n-2}(\rho) - mF_{n-1}(\rho)\right] \tag{F.35}$$

und damit:

$$I^k_{\pi,>} = \frac{A_\pi}{m_\pi}\left[F^\pi_{k-1}(r_{max}) + \frac{1}{m_\pi}F^\pi_{k-2}(r_{max})\right] \tag{F.36a}$$

$$I^k_{\sigma,>} = \frac{A_\sigma}{m_\sigma}F^\sigma_{k-1}(r_{max}) \tag{F.36b}$$

Anhang G. Axialvektorkopplungskonstante

Die Axialvektorkopplungskonstante, deren Berechnung Thema dieses Abschnitts ist, erhält man aus der jeweils dritten räumlichen sowie isovektoriellen Komponente des Axialvektorstroms

$$\vec{A}^{\mu}(x) = \bar{q}(x)\gamma^{\mu}\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}q(x) + \sigma(x)\partial^{\mu}\vec{\pi}(x) - \vec{\pi}(x)\partial^{\mu}\sigma(x) \tag{G.1}$$

im Breit-System. und dem axialen Formfaktor

$$\begin{aligned}&\langle N_{\alpha}(+\frac{\boldsymbol{q}}{2})|A_3^3(0)|N_{\alpha'}(-\frac{\boldsymbol{q}}{2})\rangle = \\ &\frac{E}{m}(\chi_t^{\dagger}|\frac{\tau_3}{2}|\chi_t)\,\chi_s^{\dagger}\left\{\sigma_3 G_A(q^2) - \frac{q_3}{2E}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\sigma})\left[G_P(q^2) + \frac{G_A(q^2)}{2(E+m)}\right]\right\}\chi_s\end{aligned} \tag{G.2}$$

für den Impulsübertrag $\boldsymbol{q} = 0$. Hierin sind χ_t die Isospin- und χ_s die Spinwellenfunktion. Setzt man in Gl. $(G.2)$ $t_3 = -\frac{1}{2}$, $s_3 = \frac{1}{2}$ und $\boldsymbol{q} = 0$, so erhält man die Axialvektorkopplungskonstante g_A als Matrixelement von $A_3^3(0)$ zwischen den Modellzuständen des Neutrons im Ruhesystem.

$$g_A = G_A(0) = -2\frac{\int d^3\boldsymbol{x}\,\langle n\uparrow, \boldsymbol{q}=0|A_3^3(0)|n\uparrow, \boldsymbol{q}=0\rangle}{\langle n\uparrow, \boldsymbol{q}=0|n\uparrow, \boldsymbol{q}=0|\rangle} \tag{G.3}$$

Den Modellzustand $|\boldsymbol{q}=0, JM_J, TM_T\rangle$ erhalten wir durch Projektion des Hedgehog-Ansatzes auf den Impuls $\boldsymbol{q} = 0$ und den Spin $J = T$ und $M_J = -M_T$.

$$|N_{\alpha}(\boldsymbol{q}=0)\rangle \rightarrow |\boldsymbol{q}=0, JM_J, TM_T\rangle = |\boldsymbol{q}=0, JTM\rangle = P_{\boldsymbol{q}=0}P_{TM}|\Psi_{hh}\rangle \tag{G.4}$$

Da aufgrund der Hedgehog-Struktur des Ansatzes nur eine der Projektionen, die auf Spin J oder auf Isospin T, ausgeführt werden muß, beziehen sich die folgenden Rechnungen auf die Isospin-Projektion. Die Projektion auf Spin J ist equivalent und führt selbstverständlich zum gleichen Ergebnis. Setzt man nun Gl. $(G.4)$ in Gl. $(G.3)$ ein und berücksichtigt noch das Verhalten des Tensoroperators $A_{1\,Q}^3$ unter Drehungen im Isospinraum,

$$P_{M\,M}^T A_{1\,Q}^3 P_{M\,M}^T = \sum_{Q=-1}^{+1} C_Q A_{1\,Q}^3 P_{M-Q\,M}^T \tag{G.5}$$

worin C_Q das Produkt der Wigner'schen $3J$–Symbole

$$C_Q = (2T+1)\begin{pmatrix} T & 1 & T \\ -M & 0 & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & 1 & T \\ -M & Q & M-Q \end{pmatrix} \tag{G.6}$$

ist, so erhält man

$$g_A = -2\sum_{Q=-1}^{+1} C_Q \frac{\int d^3x d^3b d^3b'\,\langle U(b')\Psi_{hh}|A_{1\,Q}^3(0)|U(b)P_{M-Q\,M}^T\Psi_{hh}\rangle}{\int d^3b d^3b'\,\langle U(b')\Psi_{hh}|U(b)P_{TT}^T\Psi_{hh}\rangle} \tag{G.7}$$

worin $U(b)$ die im Projektor $P_{q=0}$ enthaltene Translation $U(b) = \exp\left\{-i\,b\cdot\hat{P}\right\}$ ist. Die Substitution der Variablen b und b' im Zähler und Nenner des obigen Ausdrucks

$$b = r + \frac{a}{2} \tag{G.8a}$$

$$b' = r - \frac{a}{2} \tag{G.8b}$$

ergibt mit

$$U^{\dagger}(r)A^3_{1\,Q}(0)U(r) = A^3_{1\,Q}(r) \tag{G.9}$$

eine wesentliche Vereinfachung der Gl. $(G.7)$. Da hier $T = \frac{1}{2}$ und $M = -\frac{1}{2}$ ist, kann das erste der $3J$–Symbole in Gl. $(G.6)$ ausgewertet werden und wir erhalten nach Einsetzen des expliziten Ausdrucks für den Projektor $P^T_{M\,M}$ aus Gl. $(G.7)$:

$$g_A = -2\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & Q & -\frac{1}{2}-Q\end{pmatrix} \times \frac{\int d^3a\,d^3r\,d^3\Omega\,\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}-Q\,-\frac{1}{2}}(\Omega)^*\langle\, U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh}|A^3_{1\,Q}(r)|U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\,\rangle}{\int d^3a\,d^3\Omega\,\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}(\Omega)^*\langle\,\Psi_{hh}|U(a)R(\Omega)|\Psi_{hh}\,\rangle} \tag{G.10}$$

Mit der Auswertung dieses neunfachen Integrals wollen wir uns in den nächsten beiden Abschnitten befassen. Wir werden zunächst die Überlappintegrale

$$\int d^3r\,\langle\, U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh}|A^3_i(r)|U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\,\rangle$$

betrachten und im Anschlußdie Integration der Eulerwinkel behandeln. Wir wenden uns nun der Berechnung der Überlappintegrale zu und betrachten zunächst denjenigen Anteil des Axialvektorstroms, welcher nur Quarkfelder enthält.

<u>**Quark-Feldoperatoren:**</u> Aus praktischen Erwägungen führen wir die Drehung des Hedgehog-Zustands im Isospinraum aus und haben deshalb die sphärischen Komponenten des Isovektors

$$\begin{aligned}\int d^3r\,\langle\, U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh}|\bar{q}(r)\gamma^3\gamma_5\frac{\tau_i}{2}q(r)|U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\,\rangle &= \\ = 3n_q^2(a)n_\pi(a)n_\sigma(a)\mathcal{N}_q^2(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,a)I_i^3(a,\Omega)\end{aligned} \tag{G.11}$$

zu berechnen.

$$I_i^3(a,\Omega) = \int d^3r\,\langle\,\chi_{hh}|\bar{q}(r+\frac{a}{2})\gamma^3\gamma_5\frac{\tau_i}{2}q(r-\frac{a}{2})|R(\Omega)\chi_{hh}\,\rangle \tag{G.12}$$

Wir gehen wie bei der Berechnung des Normüberlapps der Quarks vor, berechnen im Impulsraum das Überlappintegral $(G.12)$ durch Fouriertransformation des Quarkspinors (vgl. Anhang D, Gln. $(D.22$–$D.27)$) und erhalten nach dem Ausmultiplizieren der γ-Matrizen:

$$I_i^3(a,\Omega) = \frac{1}{2\pi^2}\int d^3p\,e^{-i\,p\cdot a}\langle\,\chi_{hh}|\tilde{u}^2(p)\sigma_3 + \tilde{v}^2(p)\,(\sigma\cdot\hat{p})\,\sigma_3\,(\sigma\cdot\hat{p})\,|\frac{\tau_i}{2}R(\Omega)\chi_{hh}\,\rangle \tag{G.13}$$

Mit den Antikommutatorrelationen

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2\delta_{ij} \tag{G.14}$$

und

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})^2 = 1 \tag{G.15}$$

ergibt sich

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})\, \sigma_i\, (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) = 2\hat{p}_i\, (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) - \sigma_i \tag{G.16}$$

Dies setzen wir in Gl. (G.13) ein, erhalten

$$I_i^3(\boldsymbol{a}, \Omega) = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3p\, e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}} \sum_{k=1}^{3} \left[\delta_{3k}\left(\tilde{u}^2(p) - \tilde{v}^2(p)\right) + 2\tilde{v}^2(p)\hat{p}_3\hat{p}_k\right] \langle \chi_{hh} | \sigma_k \frac{\tau_i}{2} R(\Omega) | \chi_{hh} \rangle \tag{G.17}$$

und können die Raumwinkelintegration $\int d\Omega_{\boldsymbol{p}} \ldots$ ausführen (vgl. Anhang P, Gln. ($P.3a$–c)). Definiert man noch die Funktionen $A_{q0}(a)$ und $A_{q2}(a)$, die nur von $|\boldsymbol{a}|$ abhängen,

$$A_{q0}(a) = \frac{2}{\pi} \int dp p^2\, j_0(pa)\left(\tilde{u}^2(p) - \frac{1}{3}\tilde{v}^2(p)\right) \tag{G.18a}$$

$$A_{q2}(a) = \frac{2}{\pi} \int dp p^2\, j_2(pa)\tilde{v}^2(p) \tag{G.18b}$$

so ergibt sich aus Gl. (G.17) schließlich:

$$I_i^3(\boldsymbol{a}, \Omega) = \sum_{k=1}^{3} \left[\delta_{3k}\left(A_{q0}(a) + \frac{2}{3}A_{q2}(a)\right) - 2A_{q2}(a)\hat{a}_3\hat{a}_k\right] \langle \chi_{hh} | \sigma_k \frac{\tau_i}{2} R(\Omega) | \chi_{hh} \rangle \tag{G.19}$$

Um die Integration der Eulerwinkel Ω im Normüberlapp auf analytischem Wege ausführen zu können, haben wir im Integral $\int d^3\boldsymbol{a} \ldots$ die Variablentransformation (Drehung)

$$\boldsymbol{a} \to T[\Omega'(\Omega)]\, \boldsymbol{a} \tag{G.20}$$

vorgenommen (vgl. Anhänge N undD). Wir haben dann für das Überlappintegral (G.11)

$$\begin{aligned} &\int d^3\boldsymbol{a} \int d^3\boldsymbol{r}\, \langle U(+\tfrac{\boldsymbol{a}}{2})\Psi_{hh} | \bar{q}(\boldsymbol{r})\gamma^3\gamma_5 \tfrac{\tau_i}{2} q(\boldsymbol{r}) | U(-\tfrac{\boldsymbol{a}}{2}) R(\Omega)\Psi_{hh} \rangle = \\ &= 3 \int d^3\boldsymbol{a}\, n_q^3(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) I_i^3(\Omega, T^{-1}\left[\Omega'(\Omega)\right] \boldsymbol{a}) \\ &\times \left[\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right]^2 \exp\left\{2z\left[\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) - 1\right]\right\} \end{aligned} \tag{G.21}$$

<u>**Integration der Eulerwinkel:**</u> Der Ausdruck (G.21) befindet sich nun in einer Form, die eine analytische Integration der Eulerwinkel ermöglicht. Um eine größere Übersichtlichkeit der Integrale zu erreichen, haben wir die Integration über den Translationsvektor $\boldsymbol{a}$ weggelasen und betrachten nur die Integranden, die von den Eulerwinkeln abhängen. Wir beginnen mit dem Matrixelement

(a) $\langle\, \chi_{hh}|\sigma_3\frac{\tau_q^1}{2}|R(\Omega)\chi_{hh}\,\rangle$, das in Anhang O (Gln. $(O.10a)$) berechnet ist, und betrachten das Integral

$$\frac{1}{2\pi^2}\int d^3\Omega\,\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}-q,-\frac{1}{2}}(\Omega)^*\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\mathcal{N}_q^2(\Omega)\langle\, \chi_{hh}|\sigma_3\frac{\tau_q^1}{2}|R(\Omega)\chi_{hh}\,\rangle \tag{G.22}$$

Mit

$$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}-q,-\frac{1}{2}}(\Omega)=\begin{cases}\cos\frac{\beta}{2}e^{i\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} & \text{falls } q=0\\ -\sin\frac{\beta}{2}e^{i\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)} & \text{falls } q=-1\end{cases} \tag{G.23}$$

und der Substitution $(M.3)$ aus Anhang M erhält man sofort:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi^2}\int d^3\Omega\,\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}-q,-\frac{1}{2}}(\Omega)^*\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\mathcal{N}_q^2(\Omega)\langle\, \chi_{hh}|\sigma_3\frac{\tau_q^1}{2}|R(\Omega)\chi_{hh}\,\rangle=\\ &=\begin{cases}-\frac{1}{\pi}\int_0^1 dx\int_0^{4\pi}d\varphi\,x^2\cos^4\frac{\varphi}{2}e^{2z\left(x\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)-1} & \text{falls } q=0\\ \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_0^1 dx\int_0^{4\pi}d\varphi\,x\,(1-x)\cos^2\frac{\varphi}{2}e^{2z\left(x\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)-1} & \text{falls } q=-1\end{cases}\end{aligned} \tag{G.24}$$

Diese Integrale werden ebenfalls in Anhang M behandelt (Gln. $(M.36a\text{–}b)$ und $(M.36d)$). Wir erhalten also schließlich:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi^2}\int d^3\Omega\,\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}-q,-\frac{1}{2}}(\Omega)^*\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\mathcal{N}_q^2(\Omega)\langle\, \chi_{hh}|\sigma_3\frac{\tau_q^1}{2}|R(\Omega)\chi_{hh}\,\rangle=\\ &=\begin{cases}-\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right) & \text{falls } q=0\\ \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)-I_2(z)\right) & \text{falls } q=-1\end{cases}\end{aligned} \tag{G.25}$$

Im noch verbleibenden Spin-Flavour-Matrixelement

(b) $\sum_{k=1}^3\,\hat{a}_3(\Omega)\hat{a}_k(\Omega)\langle\, \chi_{hh}|\sigma_k\frac{\tau_q^1}{2}|R(\Omega)\chi_{hh}\,\rangle$ führen wir zunächst die Integration des Azimutwinkels von α aus, um die Ergebnisse aus Anhang N

$$\int_0^{2\pi}d\phi_\alpha\hat{a}_i(\Omega)\hat{a}_j(\Omega)=C_{ij}(\Omega,s)$$

benutzen zu können. Wir sind dann in der Lage die Integrale

$$\frac{1}{2\pi^2}\int d^3\Omega\,\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}-q,-\frac{1}{2}}(\Omega)^*\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\mathcal{N}_q^2(\Omega)C_{3k}(\Omega,s)\langle\, \chi_{hh}|\sigma_k\frac{\tau_q^1}{2}|R(\Omega)\chi_{hh}\,\rangle \tag{G.26}$$

anzugeben.

- $q=0,\ k=1$

  Wir setzen die Funktionen $C_{31}(\Omega,s)$ und $\langle\, \chi_{hh}|\sigma_1\frac{\tau_q^1}{2}|R(\Omega)\chi_{hh}\,\rangle$ in den Ausdruck $(G.26)$ ein und erhalten für das Integral über den Winkel α

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}d\gamma\int_0^{\pi}\sin\beta d\beta\ldots\int_0^{2\pi}d\alpha\,e^{-i\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\\ &\qquad\times\cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\end{aligned} \tag{G.27}$$

woraus nach der Substitution ($M.3$)

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_0^1 dx \int_0^{4\pi} d\varphi \ldots \int_0^{2\pi} d\alpha' \sin\left(2\alpha' - \varphi\right) = 0 \qquad (G.28)$$

wird.

- $q = 0,\ k = 2$

  Da hier die gleiche Abhängigkeit vom Winkel α vorliegt wie in Gl. ($G.27$), verschwindet auch dieser Term.

$$\frac{1}{2\pi^2}\int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\Omega)^* \mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\mathcal{N}_q^2(\Omega)C_{32}(\Omega,s)\langle\, \chi_{hh}|\sigma_2\frac{\tau_0^1}{2}|R(\Omega)\chi_{hh}\,\rangle = 0 \qquad (G.29)$$

- $q = 0,\ k = 3$

  Der Integrand hängt hier nur von $\alpha + \gamma = \varphi$ ab und wir können die Integration über die neuen Variablen x und φ mit den Gln. ($M.37a$–h) aus Anhang M problemlos ausführen.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi^2}\int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\Omega)^* \mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\mathcal{N}_q^2(\Omega)C_{33}(\Omega,s)\langle\, \chi_{hh}|\sigma_3\frac{\tau_0^1}{2}|R(\Omega)\chi_{hh}\,\rangle &= \\ = -\frac{2\pi}{3}\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z) + I_2(z)\right) & \qquad (G.30)\end{aligned}$$

Im Fall $q = -1$ gehen wir in gleicher Weise wie oben vor. Die Integrale $\int_0^{2\pi} d\alpha \ldots$ lassen sich alle mit elementaren Mitteln auswerten und man erhält:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi^2}\int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\Omega)^* \mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\mathcal{N}_q^2(\Omega)C_{3k}(\Omega,s)\langle\, \chi_{hh}|\sigma_k\frac{\tau_{-1}^1}{2}|R(\Omega)\chi_{hh}\,\rangle &= \\ = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{15}\pi\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z) - I_2(z)\right)P_2(s) & \text{falls } k = 1,2 \\ \frac{\sqrt{2}}{15}2\pi\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z) - I_2(z)\right)\left(2 - s^2\right) & \text{falls } k = 3 \end{cases} & \qquad (G.31)\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi^2}\int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}-q,-\frac{1}{2}}(\Omega)^* \mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\mathcal{N}_q^2(\Omega)\sum_{k=1}^{3} C_{3k}(\Omega,s)\langle\, \chi_{hh}|\sigma_k\frac{\tau_q^1}{2}|R(\Omega)\chi_{hh}\,\rangle &= \\ = \begin{cases} -\frac{2\pi}{3}\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z) + I_2(z)\right) & \text{falls } q = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3}\pi\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z) - I_2(z)\right)\left(1 - s^2\right) & \text{falls } q = -1 \end{cases} & \qquad (G.32)\end{aligned}$$

Um den Quarkanteil von g_A zu bestimmen , ist nun nur noch mit den entsprechenden $3J$-Symbolen zu multiplizieren (siehe Gl. ($G.10$)) und über q zu summieren. Die Integration über den Betrag und den Kosinus des Polarwinkels von a erfolgt numerisch. Nach Division durch den Normüberlapp ergibt sich:

$$\begin{aligned}g_A^{Quark} = \frac{1}{3}\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) A_{q0}(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(5I_1(z) + I_2(z)\right)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z) + I_2(z)\right)} + \\ + \frac{4}{9}\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) A_{q2}(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}P_2(s)\left(I_1(z) - I_2(z)\right)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z) + I_2(z)\right)} & \qquad (G.33)\end{aligned}$$

<u>Meson-Feldoperatoren:</u> Zur Berechnung des Überlapps

$$\int d^3r \, \langle U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh} | : \hat{\sigma}(r)\partial_j\hat{\pi}_i(r) - \hat{\pi}_i(r)\partial_j\hat{\sigma}(r) : | U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh} \rangle \tag{G.34}$$

benötigen wir die Matrixelemente

$$I^{M_1}(\Omega, a) = \langle U(-\frac{a}{2})\sigma | \hat{\sigma}(r) | U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\sigma \rangle \tag{G.35a}$$

$$I_j^{M_2}(\Omega, a) = \langle U(-\frac{a}{2})\sigma | \partial_j\hat{\sigma}(r) | U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\sigma \rangle \tag{G.35b}$$

$$I_i^{M_3}(\Omega, a) = \langle U(-\frac{a}{2})\pi | \hat{\pi}_i(r) | U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\pi \rangle \tag{G.35c}$$

$$I_{ij}^{M_4}(\Omega, a) = \langle U(-\frac{a}{2})\pi | \partial_j\hat{\pi}_i(r) | U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\pi \rangle \tag{G.35d}$$

Die Entwicklung der Meson-Feldoperatoren nach ebenen Wellen findet sich in Anhang B. Wir hatten dort für die folgenden Ausdrücke für das π- und σ-Feld abgeleitet:

$$\hat{\sigma}(r) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \, \frac{1}{\sqrt{2\omega_\sigma(k)}} \left(a(k)\mathrm{e}^{\imath k\cdot r} + a^\dagger(k)\mathrm{e}^{-\imath k\cdot r} \right) \tag{G.36a}$$

$$\partial_j\hat{\sigma}(r) = -i\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \, \frac{1}{\sqrt{2\omega_\sigma(k)}} k_j \left(a(k)\mathrm{e}^{\imath k\cdot r} - a^\dagger(k)\mathrm{e}^{-\imath k\cdot r} \right) \tag{G.36b}$$

$$\hat{\pi}_i(r) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \, \frac{1}{\sqrt{2\omega_\pi(k)}} \left(b_i(k)\mathrm{e}^{\imath k\cdot r} + b_i^\dagger(k)\mathrm{e}^{-\imath k\cdot r} \right) \tag{G.36c}$$

$$\partial_j\hat{\pi}_i(r) = -i\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \, \frac{1}{\sqrt{2\omega_\pi(k)}} k_j \left(b_i(k)\mathrm{e}^{\imath k\cdot r} - b_i^\dagger(k)\mathrm{e}^{-\imath k\cdot r} \right) \tag{G.36d}$$

Wir führen die Drehungen der kohärenten π-Zustände jeweils im Spinraum durch und erhalten mit den Ausdrücken für die Translation und Rotation eines kohärenten Zustands (vgl. Anhang B) für die Matrixelemente $I^{M_r}(\Omega, a)$ $(r = 1, \ldots, 4)$:

$$I^{M_1}(\Omega, a, r) = n_\sigma(a) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \, \eta(k) \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^{\imath k\cdot r} + \mathrm{e}^{-\imath k\cdot r} \right) \mathrm{e}^{-\imath k\cdot\frac{a}{2}} \tag{G.37a}$$

$$I_j^{M_2}(\Omega, a, r) = n_\sigma(a) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \, \eta(k) k_j \frac{1}{2\imath} \left(\mathrm{e}^{\imath k\cdot r} - \mathrm{e}^{-\imath k\cdot r} \right) \mathrm{e}^{-\imath k\cdot\frac{a}{2}} \tag{G.37b}$$

$$\begin{aligned} I_i^{M_3}(\Omega, a, r) = n_\pi(a)\mathcal{N}_\pi(\Omega, a) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=1}^{3} \int d^3k \, A(k) k_k \\ \times \frac{1}{2\imath} \left[\mathcal{R}_{ik}^{-1}(\Omega)\mathrm{e}^{\imath k\cdot r} - \delta_{ik}\mathrm{e}^{-\imath k\cdot r} \right] \mathrm{e}^{-\imath k\cdot\frac{a}{2}} \end{aligned} \tag{G.37c}$$

$$\begin{aligned} I_{ij}^{M_4}(\Omega, a, r) = -n_\pi(a)\mathcal{N}_\pi(\Omega, a) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=1}^{3} \int d^3k \, k A(k) k_k k_j \\ \times \frac{1}{2} \left[\mathcal{R}_{ik}^{-1}(\Omega)\mathrm{e}^{\imath k\cdot r} + \delta_{ik}\mathrm{e}^{-\imath k\cdot r} \right] \mathrm{e}^{-\imath k\cdot\frac{a}{2}} \end{aligned} \tag{G.37d}$$

Damit lassen sich nun die Integrale mit Gl. $(P.3c)$

$$\int d^3r \, I^{M_1}(\Omega, a, r) I_{ij}^{M_4}(\Omega, a, r) = -\int d^3r \, I_j^{M_2}(\Omega, a, r) I_i^{M_3}(\Omega, a, r) \tag{G.38}$$

berechnen und wir erhalten für den Überlapp

$$\int d^3r \, \langle U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh}| : \hat{\sigma}(r)\partial_j\hat{\pi}_i(r) - \hat{\pi}_i(r)\partial_j\hat{\sigma}(r) : |U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle =$$
$$= -n(a)\mathcal{N}_q^3(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,a)\left[\frac{1}{3}\left(A_{m0}(a)+A_{m2}(a)\right)\left(\mathcal{R}_{ji}(\Omega)+\delta_{ij}\right) - \right.$$
$$\left. A_{m2}(a)\left(\hat{a}_i\hat{a}_j + \sum_{k=1}^{3}\hat{a}_j\mathcal{R}_{ki}(\Omega)\hat{a}_k\right)\right] \qquad (G.39)$$

In Gl. $(G.39)$ haben wir noch das Produkt

$$n(a) = n_q^3(a)n_\pi(a)n_\sigma(a) \qquad (G.40)$$

und die Funktionen

$$A_{m0}(a) = 2\pi\int dp\, p^3 A(p)\eta(p)\left(1+j_0(pa)\right) \qquad (G.41a)$$

$$A_{m2}(a) = 2\pi\int dp\, p^3 A(p)\eta(p)j_2(pa) \qquad (G.41b)$$

eingeführt. Die Variablensubstitution $\boldsymbol{a} \to T^{-1}(\Omega')\boldsymbol{a}$ im Integral $\int d^3\boldsymbol{a}\ldots$ liefert nach Integration über den Azimutwinkel $\phi_{\boldsymbol{a}}$:

$$\int_0^\infty da a^2 \int_{-1}^{+1} ds \int d^3r \, \langle U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh}| : \hat{\sigma}(r)\partial_j\hat{\pi}_i(r) - \hat{\pi}_i(r)\partial_j\hat{\sigma}(r) : |U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle =$$
$$= -n(a)\mathcal{N}_q^3(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\left[\frac{2\pi}{3}\left(A_{m0}(a)+A_{m2}(a)\right)\left(\mathcal{R}_{ji}(\Omega)+\delta_{ij}\right) - \right.$$
$$\left. A_{m2}(a)\sum_{k=1}^{3} C_{jk}(\Omega,s)\left(\mathcal{R}_{ki}(\Omega)+\delta_{ki}\right)\right] \qquad (G.42)$$

<u>**Integration der Eulerwinkel**</u> Genauso wie im vorausgegangenen Abschnitt, in dem wir den Überlapp der Quark-Feldoperatoren besprochen haben, können wir nun die Integration der Eulerwinkel in Gl. $(G.42)$ behandeln. Wir betrachten wiederum zunächst nur die Ausdrücke, welche von den Eulerwinkeln abhängen und beginnen mit

<u>(a) $\left(\mathcal{R}_{3j}(\Omega)+\delta_{3j}\right)$</u> , dessen sphärische Komponenten durch

$$\left[\mathcal{R}_{3j}(\Omega)+\delta_{3j}\right]_q^1 = \begin{cases} -\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}e^{i\alpha} & \text{falls } q=+1 \\ 2\cos^2\frac{\beta}{2} & \text{falls } q=0 \\ \sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}e^{-i\alpha} & \text{falls } q=-1 \end{cases} \qquad (G.43)$$

gegeben sind. Da die Drehung im Spinraum erfolgt, benötigen wir nun die Wignerfunktionen $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ und $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$. Es ist:

$$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}-q,\frac{1}{2}}(\Omega) = \begin{cases} \sin\frac{\beta}{2}e^{i\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)} & \text{für } q=+1 \\ \cos\frac{\beta}{2}e^{-i\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} & \text{für } q=0 \end{cases} \qquad (G.44)$$

Damit erhält man nun:

$$\frac{1}{4\pi^2}\int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}-q,\frac{1}{2}}(\Omega)^*\mathcal{N}^3_q(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\left[\mathcal{R}_{3j}(\Omega)+\delta_{3j}\right]^1_q = \\ = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)-I_3(z)\right) & \text{für } q=+1 \\ \frac{1}{2}\frac{e^{-z}}{z}\left(3I_1(z)+4I_2(z)+I_3(z)\right) & \text{für } q=0 \end{cases} \tag{G.45}$$

Die sphärischen Komponenten des Ausdrucks

(b) $\sum_{k=1}^3 (\mathcal{R}_{k3}(\Omega)+\delta_{k3})\, C^1_{q,k}(\Omega,s)$ erhält man aus $C^1_{\pm1,k}(\Omega,s) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(C_{1,k}(\Omega,s)\pm\imath C_{2,k}(\Omega,s)\right)$ und $C^1_{0,k}(\Omega,s) = C_{3,k}(\Omega,s)$. Die $C_{i,j}(\Omega,s)$ wurden in Anhang N berechnet.

$$\sum_{k=1}^3 (\mathcal{R}_{k3}(\Omega)+\delta_{k3})\, C^1_{q,k}(\Omega,s) = \\ = \begin{cases} \sqrt{2}\pi\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left[\left(1-s^2\right)e^{\imath\alpha} - \imath\frac{2\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)e^{\imath\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}}{1-\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}P_2(s)\right] & \text{für } q=+1 \\ 4\pi\left[s^2-\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\frac{\sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}}{1-\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}P_2(s)\right] & \text{für } q=0 \end{cases} \tag{G.46}$$

Berücksichtigen wir noch, daß für eine beliebige Funktion F

$$\int_0^{4\pi} d\varphi\, \sin\frac{\varphi}{2}F(\cos\frac{\varphi}{2}) = 0 \tag{G.47}$$

gilt, so haben wir mit Hilfe der Integrale über die Eulerwinkel aus Anhang M:

$$\frac{1}{4\pi^2}\int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}-q,\frac{1}{2}}(\Omega)^*\mathcal{N}^3_q(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\sum_{k=1}^3 (\mathcal{R}_{k3}(\Omega)+\delta_{k3})\, C^1_{q,k}(\Omega,s) = \\ = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\left(1-s^2\right)\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)-I_3(z)\right) & \text{für } q=+1 \\ \frac{\pi}{6}\frac{e^{-z}}{z}\left[3s^2\left(I_1(z)-I_3(z)\right)+\left(5I_1(z)+8I_2(z)+3I_3(z)\right)\right] & \text{für } q=0 \end{cases} \tag{G.48}$$

Dieses Ergebnis setzen wir nun in Gl. $(G.10)$ ein und haben für den Mesonanteil:

$$g_A^{Meson} = \frac{4}{9}\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n(a) A_{m0}(a)\int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right)} \tag{G.49}$$

Durch Addition der Gln. $(G.33)$ und $(G.49)$ erhalten wir schließlich die Axialvektorkopplungskonstante.

Zusammenfassung: Axialvektorkopplungskonstante

$$
\begin{aligned}
g_A = \frac{1}{3}\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) A_{q0}(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z}\left(5I_1(z)+I_2(z)\right)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right)} + \\
+\frac{4}{9}\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) A_{q2}(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z} P_2(s)\left(I_1(z)-I_2(z)\right)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right)} + \\
+\frac{4}{9}\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n(a) A_{m0}(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right)}
\end{aligned}
\tag{G.50}
$$

Die Funktionen $A_{q0}(a)$, $A_{q2}(a)$, $A_{m0}(a)$, $n_q(a)$, $n_\sigma(a)$, $n_\pi(a)$, $n(a)$, $f_l^\pi(a)$ und $z(a,s)$ sind durch

$$A_{q0}(a) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dp\, p^2 j_0(pa)\left[\tilde{u}^2(p) - \frac{1}{3}\tilde{v}^2(p)\right] \tag{G.51a}$$

$$A_{q2}(a) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dp\, p^2 j_2(pa)\tilde{v}^2(p) \tag{G.51b}$$

$$A_{m0}(a) = -2\pi\int_0^\infty dp\, p^3 A(p)\eta(p)\left(1 + j_0(pa)\right) \tag{G.51c}$$

$$n_\sigma(a) = \exp\left\{2\pi\int_0^\infty dp\, p^2\left(j_0(pa)-1\right)\omega_\sigma(p)\eta^2(p)\right\} \tag{G.51d}$$

$$n_\pi(a) = \exp\left\{2\pi\int_0^\infty dp\, p^2\left(j_0(pa)-1\right)\omega_\pi(p)A^2(p)\right\} \tag{G.51e}$$

$$n_q(a) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dp\, p^2 j_0(pa)\left(\tilde{u}^2(p) + \tilde{v}^2(p)\right) \tag{G.51f}$$

$$n(a) = n_q^3(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) \tag{G.51g}$$

$$f_l^\pi(a) = 2\pi\int_0^\infty dp\, p^2 j_l(pa)\omega_\pi(p)A^2(p) \tag{G.51h}$$

$$z(a,s) = \frac{2}{3}\left(f_0^\pi(a) + \frac{1}{2}\left(3s^2-1\right) f_2^\pi(a)\right) \tag{G.51i}$$

gegeben, worin

$$\tilde{u}(p) = \int dr\, r^2 j_0(pr) u(r) \tag{G.52a}$$

$$\tilde{v}(p) = \int dr\, r^2 j_1(pr) v(r) \tag{G.52b}$$

$$A(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int dr\, r^2 j_1(pr)\phi(r) \tag{G.52c}$$

$$\eta(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int dr\, r^2 j_0(pr)\sigma(r) \tag{G.52d}$$

$$\omega_\sigma(p) = \sqrt{p^2 + m_\sigma^2} \tag{G.52e}$$

$$\omega_\pi(p) = \sqrt{p^2 + m_\pi^2} \tag{G.52f}$$

ist.

Wird die lineare Momentenprojektion vernachlässigt, d. h. nur eine Projektion auf den Drehimpuls J betrachtet, so ergibt sich im Limes $|a| \to 0$:

$$g_A = \frac{1}{3} A_{q0}(a=0) \frac{5I_1(z_0) + I_2(z_0)}{I_1(z_0) + I_2(z_0)} + \frac{4}{9} A_{m0}(a=0) \tag{G.53}$$

worin

$$z_0 = \frac{2}{3} f_0^\pi(a=0) = \frac{2}{3} N_\pi \tag{G.54}$$

und N_π die Anzahl der Pionen ist. Die Funktionen A_{q0} und A_{m0} an der Stelle $a = 0$ erhält man durch Einsetzen der Gln. ($G.52a$–b) in ($G.51a$) und der Gln. ($G.52c$–d) in ($G.51c$). Es ist:

$$A_{m0}(a=0) = 8 \int dpp^2 \int drr^2 \, \phi(r) p j_1(pr) \int dr' r'^2 \, j_0(pr') \sigma(r') \tag{G.55}$$

In Gl. ($G.55$) setzen wir nun

$$p j_1(pr) = -\frac{d}{dr} j_0(pr) \tag{G.56}$$

und erhalten nach partieller Integration mit

$$\int dpp^2 \, j_l(pr) j_l(pr') = \frac{\pi}{2rr'} \delta(r - r') \tag{G.57}$$

aus Gl. ($G.55$)

$$A_{m0}(a=0) = -4\pi \int drr^2 \, \phi(r) \frac{d\sigma(r)}{dr} \tag{G.58}$$

und in gleicher Weise

$$A_{q0}(a=0) = \int drr^2 \left(u^2(r) - \frac{1}{3} v^2(r) \right) \tag{G.59}$$

Setzt man $A_{q0}(0)$ und $A_{m0}(0)$ in Gl. ($G.53$) ein, so erhält man die Resultate aus Ref. 79 (vgl. Formel (H63) und (H64)).

Anhang H. Ladungsradien für Proton und Neutron

Wir wollen in diesem Abschnitt die Ladungsradien für das Proton $\langle r_c^2 \rangle^p$ und das Neutron $\langle r_c^2 \rangle^n$ ableiten. Diese sind durch die Entwicklung des elektrischen Formfaktors $G_E(q^2)$ nach Potenzen von q^2 definiert. Letzteren erhalten wir aus der Zeit- und der dritten Isospinkomponente des Vektorstroms im Breitsystem. Es ist also:

$$G_E(q^2) = G_E(0) - \frac{1}{3}\langle r_c^2 \rangle \frac{q^2}{2} + \mathcal{O}(q^4) = \langle N_\alpha(+\frac{q}{2})|V_3^0(0)|N_{\alpha'}(-\frac{q}{2})\rangle \tag{H.1}$$

worin

$$V_i^\mu(x) = \sum_{a=1}^{3} \bar{q}_a(x)\gamma^\mu \left(\frac{1}{6} + \frac{\tau_i}{2}\right) q_a(x) + (\bar{\pi}(x) \wedge \partial^\mu \bar{\pi}(x))_i \tag{H.2}$$

der Vektorstrom und $\left(\frac{1}{6} + \frac{\tau_i}{2}\right)$ der Ladungsoperator der Quarks im $SU(2)$-Flavour-Sektor ist.

Der Ansatzzustand $|N_\alpha(q)\rangle \to |q, JM_J, TM_T\rangle$ geht aus dem Hedgehogzustand durch Projektion auf den Spin (Isospin) $J = T$ und $M_J = -M_T$ und nachfolgende Projektion auf den Impuls q hervor.

$$|N_\alpha(q)\,\alpha \to |q, JTM\rangle = P_q P_{JM}|\Psi_{hh}\rangle = P_q|\Psi_{JM}\rangle \tag{H.3}$$

Im Rahmen dieser Approximation erhält man für den elektrischen Formfaktor den folgenden Ausdruck.

$$G_E(q^2) = \frac{\int d^3x\,\langle P_{\frac{q}{2}}\Psi_{JM}|V_3^0(0)|P_{-\frac{q}{2}}\Psi_{JM}\rangle}{\langle P_{\frac{q}{2}}\Psi_{JM}|P_{\frac{q}{2}}\Psi_{JM}\rangle} \tag{H.4}$$

in dem wir

$$\langle \Psi_{JM}|P_{\frac{q}{2}}|\Psi_{JM}\rangle = \langle \Psi_{JM}|P_{-\frac{q}{2}}|\Psi_{JM}\rangle \tag{H.5}$$

verwendet haben[a]. Aus Gl. $(H.1)$ folgt dann für den Ladungsradius die Beziehung:

$$\langle r_c^2 \rangle = -3\sum_{ij} \hat{q}_i\hat{q}_j \left[\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j}\frac{V(q)}{N(q)}\right]_{q=0} \tag{H.6}$$

worin $V(q)$ und $N(q)$ mit Zähler und Nenner der Gl. $(H.4)$ zu identifizieren sind. Im einzelnen ist daher:

$$V(q) = \int d^3x d^3b d^3b'\, e^{-i(b+b')\frac{q}{2}}\langle U(b')\Psi_{JM}|V_3^0(0)|U(b)\Psi_{JM}\rangle \tag{H.7a}$$

$$N(q) = \int d^3b d^3b'\, e^{i(b-b')\frac{q}{2}}\langle U(b')\Psi_{JM}|U(b)\Psi_{JM}\rangle \tag{H.7b}$$

Wir bilden die Ableitungen und setzen

$$\left[\frac{\partial N(q)}{\partial q_i}\right]_{q=0} = 0 \tag{H.8}$$

---

[a] Ein Beweis findet sich am Ende dieses Abschnitts

in Gl. (H.6) ein[b], integrieren diese über den Raumwinkel Ω_q und erhalten für den Ladungsradius:

$$\langle r_c^2 \rangle = \frac{\int d^3x d^3b d^3b' \, \frac{1}{4} \left(b + b'\right)^2 \langle U(b')\Psi_{JM} | V_3^0(0) | U(b)\Psi_{JM} \rangle}{\int d^3b d^3b' \, \langle U(b')\Psi_{JM} | U(b)\Psi_{JM} \rangle} - G_E(0) \frac{\int d^3b d^3b' \, \frac{1}{4} \left(b - b'\right)^2 \langle U(b')\Psi_{JM} | U(b)\Psi_{JM} \rangle}{\int d^3b d^3b' \, \langle U(b')\Psi_{JM} | U(b)\Psi_{JM} \rangle} \tag{H.9}$$

In Gl. (H.9) haben wir den Integralausdruck

$$\frac{\int d^3x d^3b d^3b' \, \langle U(b')\Psi_{JM} | V_3^0(0) | U(b)\Psi_{JM} \rangle}{\int d^3b d^3b' \, \langle U(b')\Psi_{JM} | U(b)\Psi_{JM} \rangle} = G_E(0) \tag{H.10}$$

mit der Ladung $G_E(0)$ des Nukleons identifiziert. Dies ist anschaulich sofort klar, da das Integral (H.10) gerade das 1. Glied der Taylorentwicklung des elektrischen Formfaktors $G_E(q^2)$ ist. Wir werden aber noch im weiteren Verlauf der Rechnung die Gültigkeit dieser Behauptung zeigen.

Um das fünfzehnfache Integral (H.9) zu vereinfachen, betrachten wir zunächst den Ausdruck

$$\int d^3b d^3b' \, \left(b + b'\right)^2 \langle U(b')\Psi_{JM} | V_3^0(0) | U(b)\Psi_{JM} \rangle \tag{H.11}$$

setzen

$$U^\dagger(b') V_3^0(0) U(b') U^\dagger(b') U(b) = V_3^0(b') U(b - b') \tag{H.12}$$

ein, führen die Variablentranformation[c]

$$\begin{aligned} z &= b - b' \\ y &= b' \end{aligned} \tag{H.13}$$

durch und erhalten für das Integral (H.11):

$$\int d^3z d^3y \, \left(z^2 + 4z \cdot y + 4y^2\right) \langle \Psi_{JM} | V_3^0(y) | U(z)\Psi_{JM} \rangle \tag{H.14}$$

Mit Hilfe der Kommutatoren

$$\left[\int d^3z \, \left(z^2\right)^n U(z), R(\Omega) \right] = 0 \tag{H.15}$$

sowie der Invarianz der Zeitkomponente des Vektorstroms $V_3^0(x)$ unter Raumspiegelungen

$$z \cdot \int d^3y y \langle V_3^0(y) \rangle = 0 \tag{H.16}$$

---

[b] siehe Fußnote (a)

[c] Diese und alle weiteren Transformationen sind linear. Werden sie in Zähler und Nenner durchgeführt, so kürzen sich die Jakobideterminanten.

ergibt sich für das Integral (H.14):

$$\int d^3z d^3y \left(z^2 + 4y^2\right) \langle \Psi_{hh} | P^J_{MM} V^0_3(0) P^J_{MM} | U(z) \Psi_{hh} \rangle \tag{H.17}$$

Wir nutzen nun die Invarianz von $V^0_i(x)$ unter Drehungen im Spinraum, d. h.

$$P^J_{MM} V^0_i(x) P^J_{MM} = V^0_i(x) P^J_{MM} \tag{H.18}$$

führen die Umkehrung der Transformation (H.13) ein und enden mit:

$$\begin{aligned} &\int d^3b d^3b' \, (b+b')^2 \langle U(b')\Psi_{JM} | V^0_3(0) | U(b)\Psi_{JM} \rangle = \\ &= \int d^3b d^3b' \, (b+b')^2 \langle U(b')\Psi_{hh} | V^0_3(0) | U(b) P^J_{MM} \Psi_{hh} \rangle \end{aligned} \tag{H.19}$$

Völlig analog zeigt man noch

$$\int d^3b d^3b' \, (b-b')^2 \langle U(b')\Psi_{JJ} | U(b)\Psi_{JJ} \rangle = \int d^3b d^3b' \, (b-b')^2 \langle U(b')\Psi_{hh} | U(b) P^J_{JJ} \Psi_{hh} \rangle \tag{H.20}$$

Die Integrale (H.19) und(H.20) setzt man in den Ausdruck für den Ladungsradius ein und endet nach Substitution der Variablen

$$\begin{aligned} b' &= r - \frac{a}{2} \\ b &= r + \frac{a}{2} \end{aligned} \tag{H.21}$$

und einsetzen des expliziten Ausdrucks für den Projektor P^J_{MK} mit:

$$\begin{aligned} \langle r_c^2 \rangle = &\frac{\int d^3a \int d^3\Omega \int d^3r \, r^2 \mathcal{D}^J_{MM}(\Omega)^* \langle U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh} | V^0_3(r) | U(+\frac{a}{2}) R(\Omega) \Psi_{hh} \rangle}{\int d^3a \int d^3\Omega \, \mathcal{D}^J_{JJ}(\Omega)^* \langle \Psi_{hh} | U(a) R(\Omega) | \Psi_{hh} \rangle} \\ &- \frac{1}{4} G_E(0) \frac{\int d^3a a^2 \int d^3\Omega \, \mathcal{D}^J_{JJ}(\Omega)^* \langle \Psi_{hh} | U(a) R(\Omega) | \Psi_{hh} \rangle}{\int d^3a \int d^3\Omega \, \mathcal{D}^J_{JJ}(\Omega)^* \langle \Psi_{hh} | U(a) R(\Omega) | \Psi_{hh} \rangle} \end{aligned} \tag{H.22}$$

In den folgenden Abschnitten befassen wir uns mit der Auswertung des Integrals (H.22). Wir beginnen mit dem Überlapp des isoskalaren Teils des Vektorstroms $\frac{1}{6}\bar{q}(r)\gamma^0 q(r)$.

<u>Isoskalarer Vektorstrom</u> Wir berechnen zunächst also das Überlappintegral

$$\begin{aligned} &\int d^3r \, r^2 \langle U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh} | \frac{1}{6}\bar{q}(r)\gamma^0 q(r) | U(+\frac{a}{2}) R(\Omega) \Psi_{hh} \rangle = \\ &= \frac{1}{2} n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) \mathcal{N}_q^2(\Omega) \mathcal{N}_\pi(\Omega, a) I^0_{I=0}(\Omega, a) \end{aligned} \tag{H.23}$$

mit

$$I^0_{I=0}(\Omega, a) = \int d^3r \, r^2 \langle \chi_{hh} | q^\dagger(r + \frac{a}{2}) q(r - \frac{a}{2}) | R(\Omega) \chi_{hh} \rangle \tag{H.24}$$

Wie bei der Berechung des Normüberlapps in Anhang D setzen wir in den Ausdruck (H.24) die Fouriertransformierte des Spinors

$$\bar{q}(r \pm \frac{a}{2}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3p \sqrt{\frac{1}{2\pi^2}} \begin{pmatrix} \tilde{u}(p) \\ \tilde{v}(p)\,\sigma \cdot \hat{p} \end{pmatrix} e^{i\,p\cdot(r \pm \frac{a}{2})} \tag{H.25}$$

ein, schreiben für

$$r^2 e^{i\,(p-k)\cdot r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial k_i} e^{i\,(p-k)\cdot r} \tag{H.26}$$

und erhalten nach zweimaliger partieller Integration:

$$I^0_{I=0}(\Omega, a) = \sum_{i=1}^{3} \int d^3p \,\langle \chi_{hh} | \left[\frac{\partial}{\partial k_i}\left(e^{-i\,k\cdot\frac{a}{2}} q^\dagger(k)\right)\right]_{k=p} \frac{\partial}{\partial p_i}\left(e^{-i\,p\cdot\frac{a}{2}} q(p)\right) | R(\Omega)\chi_{hh} \rangle \tag{H.27}$$

Die Auswertung des Ausdrucks im Integranden ergibt mit Gl. (H.25):

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\partial}{\partial k_i}\left(e^{-i\,k\cdot\frac{a}{2}} q^\dagger(k)\right)\right]_{k=p} \frac{\partial}{\partial p_i}\left(e^{-i\,p\cdot\frac{a}{2}} q(p)\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi^2} e^{-i\,p\cdot a} \sum_{i=1}^{3} \Bigg\{ -\frac{1}{4} a_i^2 \tilde{u}^2(p) + \hat{p}_i^2 \left(\frac{\partial \tilde{u}(p)}{\partial p}\right)^2 - i\,a\hat{a}_i \hat{p}_i \tilde{u}(p) \frac{\partial \tilde{u}(p)}{\partial p} \\
&\quad - \frac{1}{4} a_i^2 \tilde{v}^2(p) + \hat{p}_i^2 \left(\frac{\partial \tilde{v}(p)}{\partial p}\right)^2 - i\,a\hat{a}_i \hat{p}_i \tilde{v}(p) \frac{\partial \tilde{v}(p)}{\partial p} \\
&\quad - \frac{i}{2} a \frac{\tilde{v}^2}{p} \left[\hat{a}_i\,(\sigma\cdot\hat{p})\,\sigma_i + \hat{a}_i \sigma_i\,(\sigma\cdot\hat{p}) - 2\hat{a}_i \hat{p}_i\right] \\
&\quad + \hat{p}_i \frac{\partial \tilde{v}(p)}{\partial p} \frac{\tilde{v}(p)}{p} \left[(\sigma\cdot\hat{p})\,(\sigma_i - \hat{p}_i\,(\sigma\cdot\hat{p})) + (\sigma_i - \hat{p}_i\,(\sigma\cdot\hat{p}))\,(\sigma\cdot\hat{p})\right] \\
&\quad + \left(\frac{\partial \tilde{v}(p)}{\partial p}\right)^2 (\sigma_i - \hat{p}_i\,(\sigma\cdot\hat{p}))^2 \Bigg\}
\end{aligned} \tag{H.28}$$

Die Antikommutatorrelationen für die σ-Matrizen

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2\delta_{ij} \tag{H.29}$$

erlauben die Berechnung der folgenden Ausdrücke in Gl. (H.28). Es ist:

$$\sum_{ij} \left(\hat{a}_i \sigma_j \hat{p}_j \sigma_i + \hat{a}_i \sigma_i \sigma_j \hat{p}_j\right) = 2\hat{a}\cdot\hat{p} \tag{H.30a}$$

$$\sum_{i} (\sigma_i - \hat{p}_i\,(\sigma\cdot\hat{p}))^2 = 2 \tag{H.30b}$$

$$\left[(\sigma\cdot\hat{p})\left(\sigma_i \hat{p}_i - \hat{p}_i^2\,(\sigma\cdot\hat{p})\right) + \left(\sigma_i \hat{p}_i - \hat{p}_i^2\,(\sigma\cdot\hat{p})\right)(\sigma\cdot\hat{p})\right] = 0 \tag{H.30c}$$

Wir setzen den aus den Gln. (H.30a–c) und (H.28) resultierenden Ausdruck in Gl. (H.27) ein und können das Integral über den Raumwinkel Ω_p in Gl. (H.27) berechnen (vgl. Gln. (P.3a) und

$(P.3b))$.

$$I^0_{I=0}(\Omega,a) = \frac{2}{\pi}\mathcal{N}_q(\Omega)\int dpp^2\left\{-aj_1(pa)\left[\tilde{u}(p)\frac{\partial\tilde{u}(p)}{\partial p}+\tilde{v}(p)\frac{\partial\tilde{v}(p)}{\partial p}\right]\right.$$
$$\left.+\,j_0(pa)\left[\left(\frac{\partial\tilde{u}(p)}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde{v}(p)}{\partial p}\right)^2+2\left(\frac{\tilde{v}(p)}{p}\right)^2-\frac{a^2}{4}\left(\tilde{u}^2(p)+\tilde{v}^2(p)\right)\right]\right\} \quad (H.31)$$

Die mit $j_1(pa)$ multiplizierten Teile des Integranden können durch partielle Integration und mit Hilfe der Rekursionsformeln der sphärischen Besselfunktionen weiter umgeformt werden. Man hat:

$$\begin{aligned}
&-\int dpp^2\, aj_1(pa)\tilde{u}(p)\frac{\partial\tilde{u}(p)}{\partial p} = \\
&= -\frac{1}{2}\int dpp^2\, aj_1(pa)\tilde{u}(p)\frac{\partial\tilde{u}(p)}{\partial p}+\frac{1}{2}\int dp\,\tilde{u}(p)\frac{\partial}{\partial p}\left[ap^2j_1(pa)\tilde{u}(p)\right] = \\
&= \frac{1}{2}\int dpp^2\, a^2j_0(pa)\tilde{u}(p)^2 \qquad (H.32a)
\end{aligned}$$

und analog

$$-\int dpp^2\, aj_1(pa)\tilde{v}(p)\frac{\partial\tilde{v}(p)}{\partial p} = \frac{1}{2}\int dpp^2\, a^2j_0(pa)\tilde{v}(p)^2 \qquad (H.32b)$$

Die Substitution der Variablen im Integral $\int d^3\boldsymbol{a}\ldots$ (Gl. $(H.22)$)

$$\boldsymbol{a} \to T^{-1}(\Omega)\boldsymbol{a} \qquad (H.33)$$

führt dann unmittelbar auf:

$$\begin{aligned}
&\int d^3\boldsymbol{r}\, r^2\langle U(-\frac{\boldsymbol{a}}{2})\underline{\Psi}_{hh}|\frac{1}{6}\bar{q}(\boldsymbol{r})\gamma^0q(\boldsymbol{r})|U(+\frac{\boldsymbol{a}}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle = \\
&= \frac{1}{2}n_q^2(a)n_\pi(a)n_\sigma(a)\mathcal{N}_q^3(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,\boldsymbol{a})R_q(a) \qquad (H.34)
\end{aligned}$$

worin

$$R_q(a) = \frac{2}{\pi}\int dpp^2j_0(pa)\left[\frac{a^2}{4}\left(\tilde{u}^2(p)+\tilde{v}^2(p)\right)+\left(\frac{\partial\tilde{u}(p)}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde{v}(p)}{\partial p}\right)^2+2\left(\frac{\tilde{v}(p)}{p}\right)^2\right] \quad (H.35)$$

Wir stellen noch fest, daß sich die Ableitungen der Funktionen $\tilde{u}(p)$ und $\tilde{v}(p)$ sowie $\frac{\tilde{v}(p)}{p}$ als Fouriertransformierte der Funktionen $u(r)$ und $v(r)$ schreiben lassen. Sie sind am Ende dieses Abschnitts zusammengestellt.

Der Verlauf der bisherigen Rechnung zeigt, daß der Überlapp

$$\begin{aligned}
&\int d^3\boldsymbol{r}\,\langle U(-\frac{\boldsymbol{a}}{2})\Psi_{hh}|\frac{1}{6}\bar{q}(\boldsymbol{r})\gamma^0q(\boldsymbol{r})|U(+\frac{\boldsymbol{a}}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle = \\
&= \frac{1}{2}n_q^3(a)n_\pi(a)n_\sigma(a)\mathcal{N}_q^3(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,\boldsymbol{a}) \qquad (H.36)
\end{aligned}$$

auf den Normüberlapp zurückgeführt werden kann.

Die Integration der Eulerwinkel des Ausdrucks ($H.34$) ist die gleiche wie beim Normüberlapp. Der isoskalare Radius lautet daher:

$$\langle r_c^2 \rangle_{I=0} = \frac{1}{2} \frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) R_q(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z} \left(I_1(z) + I_2(z)\right)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z} \left(I_1(z) + I_2(z)\right)} - \frac{1}{8} \frac{\int_0^\infty da\, a^4 n(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z} \left(I_1(z) + I_2(z)\right)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z} \left(I_1(z) + I_2(z)\right)} \tag{H.37}$$

<u>Isovektorieller Teil des Vektorstrom (Quarks)</u> Die Berechnung des Überlapps für den isovektoriellen Quarkanteil des Vektorstroms $\frac{\tau_3}{2} \bar{q}(r) \gamma^0 q(r)$ verläuft völlig analog zu der des isoskalaren Anteils. Es ist:

$$\int d^3r\, r^2 \langle U(-\frac{a}{2}) \Psi_{hh} | \frac{\tau_3}{2} \bar{q}(r) \gamma^0 q(r) | U(+\frac{a}{2}) R(\Omega) \Psi_{hh} \rangle = \\ = \frac{3}{2} n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) \mathcal{N}_q^2(\Omega) \mathcal{N}_\pi(\Omega, z) R_q(a) \langle \chi_{hh} | \tau_3 R(\Omega) | \chi_{hh} \rangle \tag{H.38}$$

worin

$$\langle \chi_{hh} | \tau_3 R(\Omega) | \chi_{hh} \rangle = i \cos \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\alpha + \gamma}{2} \right) \tag{H.39}$$

ist (Drehung im Spinraum). Mit Hilfe der Wignerfunktionen (Gl. ($O.3$)) und der Gln. ($M.36a$–f) ergegen sich für die Integrale der Eulerwinkel:

$$\frac{1}{4\pi^2} \int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{MM}(\Omega)^* \langle \chi_{hh} | \tau_3 R(\Omega) | \chi_{hh} \rangle \mathcal{N}_q^2(\Omega) \mathcal{N}_\pi(\Omega, z) = \\ = -\frac{2}{3} M \frac{e^{-z}}{z} \left(I_1(z) - I_2(z)\right) \tag{H.40}$$

Wir erhalten dann den isovektoriellen Quarkanteil des Ladungsradius des Protons durch Projektion auf $M_T = -M_J = \frac{1}{2}$ und den des Neutrons durch Projektion auf $M_T = -M_J = -\frac{1}{2}$.

$$\langle r_c^2 \rangle_{q,I=1} = \langle r_c^2 \rangle^p_{q,I=1} = -\langle r_c^2 \rangle^n_{q,I=1} \tag{H.41}$$

worin

$$\langle r_c^2 \rangle^p_{q,I=1} = \frac{1}{2} \frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) R_q(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z} \left(I_1(z) - I_2(z)\right)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z} \left(I_1(z) + I_2(z)\right)} \\ - \frac{1}{8} \frac{\int_0^\infty da\, a^2 n(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z} \left(I_1(z) - I_2(z)\right)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z} \left(I_1(z) + I_2(z)\right)} \\ \times \frac{\int_0^\infty da\, a^4 n(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z} \left(I_1(z) + I_2(z)\right)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z} \left(I_1(z) + I_2(z)\right)} \tag{H.42}$$

und für das Neutron

$$\langle r_c^2 \rangle^n_{q,I=1} = -\langle r_c^2 \rangle^p_{q,I=1} \tag{H.43}$$

<u>Isovektorieller Teil des Vektorstroms:Mesonen</u> Wir haben das Überlappintegral

$$\int d^3r\, r^2 \langle U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh}| \left(\hat{\vec{\pi}}(r) \wedge \hat{\vec{p}}_\pi(r)\right)_3 |U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle =$$
$$= n_q^3(a) n_\sigma(a) \mathcal{N}_q^3(\Omega) I^0_{m,I=1}(\Omega, a) \qquad (H.44)$$

mit

$$I^0_{m,I=1}(\Omega, a) = \int d^3r\, r^2 \langle U(-\frac{a}{2})\pi| \sum_{jk} \varepsilon_{3jk} \hat{\pi}_j(r) \partial^0 \hat{\pi}_k(r) |U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\pi\rangle \qquad (H.45)$$

zu berechnen. Wir setzen in Gl. $(H.45)$ die Entwicklung der π-Feldoperatoren nach ebenen Wellen (Gln. $(B.31a)$) und $(B.31b)$ ein, benutzen die Gln. $(B.54a)$ und $(B.24)$ aus Anhang B, schreiben für

$$r^2 e^{\pm \imath\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial k_i^2} e^{\pm \imath\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \qquad (H.46)$$

und enden nach zweimaliger partieller Integration mit:

$$I^0_{m,I=1}(\Omega, a) = \frac{\imath}{4} n_\pi(a) \mathcal{N}(\Omega, a) \sum_{ijk} \varepsilon_{3jk} \int d^3p \int d^3k\, \omega_\pi(p) A(p) e^{-\imath\, \boldsymbol{k}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{2}}$$
$$\times \left\{ \delta^3(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) \left[D_{ij}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}) - \sum_{mn} \mathcal{R}_{nk} \hat{p}_n \mathcal{R}_{mj} D_{im}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}) \right] + \right.$$
$$\left. + \delta^3(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) \sum_m \left[D_{ij}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}) \mathcal{R}_{mk} \hat{p}_m + \hat{p}_j \mathcal{R}_{mk} D_{im}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}) \right] \right\} \qquad (H.47)$$

wobei wir

$$D_{ij}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}) = \frac{\partial^2}{\partial k_i^2} \left(e^{-\imath\, \boldsymbol{k}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{2}} A(k) \hat{k}_j \right) \qquad (H.48)$$

gesetzt und im letzten Term

$$\sum_{jk} \varepsilon_{3jk} \hat{p}_k \mathcal{R}^{-1}_{jm}(\Omega) \hat{k}_m = -\sum_{jk} \varepsilon_{3jk} \hat{p}_j \mathcal{R}_{mk}(\Omega) \hat{k}_m \qquad (H.49)$$

verwendet haben. Wir bilden die Ableitungen

$$\nabla_k^2 \left(e^{-\imath\, \boldsymbol{k}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{2}} A(k) \hat{k}_j \right) = e^{-\imath\, \boldsymbol{k}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{2}} \left\{ \hat{k}_j \left[-\frac{a^2}{4} A(k) + \frac{\partial^2}{\partial k} A(k) + \frac{2}{k} \frac{\partial}{\partial k} A(k) - \frac{2}{k^2} A(k) \right] + \right.$$
$$\left. + \imath\, a \left(\hat{a} \cdot \hat{k} \right) \hat{k}_j \left[\frac{A(k)}{k} - \frac{\partial}{\partial k} A(k) \right] - \imath\, a \hat{a}_j \frac{A(k)}{k} \right\} \qquad (H.50)$$

und integrieren über den Raumwinkel $d\Omega_k$ (vgl. Anhang P Gln. $(P.3b\text{–}d)$). Die beiden ersten Terme verschwinden, da sie jeweils einem symmetrischen Tensor bilden, dessen Überschiebung mit dem total antisymmetrischen ε-Tensor null ergibt. Es ist:

$$\sum_{jk} \sum_{mn} \mathcal{R}_{nk} \mathcal{R}_{mj} \varepsilon_{3jk} = 0 \qquad \sum_{jk} \varepsilon_{3jk} \delta_{jk} = 0 \qquad (H.51)$$

Die beiden verbleibenden Terme liefern die Überschiebungen

$$\sum_{jkm} \varepsilon_{3jk}\delta_{mj}\mathcal{R}_{mk}(\Omega) = \sum_{jk} \varepsilon_{3jk}\mathcal{R}_{jk}(\Omega) \tag{H.52a}$$

$$\sum_{jkm} \varepsilon_{3jk}\mathcal{R}_{mk}(\Omega)\hat{a}_m\hat{a}_j = (\hat{a}\times\mathcal{R}(\Omega)\hat{a})_3 \tag{H.52b}$$

und wir erhalten mit

$$\frac{j_2(ka)}{ka} = \frac{1}{5}(j_1(ka)+j_3(ka)) \tag{H.53}$$

nach Substitution der Variablen $\boldsymbol{a}\to T^{-1}(\Omega)\boldsymbol{a}$ im Integral $\int d^3a\ldots$

$$\begin{aligned}\int d^3r\, r^2 \langle U(-\tfrac{\boldsymbol{a}}{2})\Psi_{hh}|\left(\vec{\pi}(\boldsymbol{r})\wedge\vec{p}_\pi(\boldsymbol{r})\right)_3|U(+\tfrac{\boldsymbol{a}}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle &= \\ = \imath n(a)\mathcal{N}_q^3(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\Bigg[R_{m1}(a)\sum_{jk}\varepsilon_{3jk}\mathcal{R}_{jk}(\Omega)+ \\ + R_{m2}(a)\left(T^{-1}(\Omega)\hat{a}\times\mathcal{R}^{-1}(\Omega)T^{-1}(\Omega)\hat{a}\right)_3\Bigg]\end{aligned} \tag{H.54}$$

worin wir

$$\begin{aligned}R_{m1}(a) = \frac{2\pi}{3}\int dk k^2\,\omega_\pi(k)\Bigg\{&(j_0(ka)+j_2(ka))\left[-\frac{a^2}{4}A^2(k)+A(k)\frac{\partial^2}{\partial k^2}A(k)\right]+ \\ &+(2j_0(ka)+j_2(ka))\left[\frac{A(k)}{k}\frac{\partial}{\partial k}A(k)-\left(\frac{A(k)}{k}\right)^2\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{H.55a}$$

$$\begin{aligned}R_{m2}(a) = 2\pi\int dk k^2\,\omega_\pi(k)\Bigg\{&j_2(ka)\left[\frac{a^2}{4}A^2(k)-A(k)\frac{\partial^2}{\partial k^2}A(k)+\frac{A(k)}{k}\frac{\partial}{\partial k}A(k)-\left(\frac{A(k)}{k}\right)^2\right]- \\ &-j_1(ka)(ka)\frac{A(k)}{k}\frac{\partial}{\partial k}A(k)\Bigg\}\end{aligned} \tag{H.55b}$$

gesetzt haben. Die Funktionen $A(k)$, $\frac{\partial}{\partial k}A(k)$, $\frac{\partial^2}{\partial k^2}A(k)$ und $\frac{A(k)}{k}$ lassen sich als Fouriertransformierte von $\phi(r)$ schreiben. Sie sind am Ende des Abschnitts zusammengestellt.

Der Überlapp

$$\begin{aligned}\int d^3r\,\langle U(-\tfrac{\boldsymbol{a}}{2})\Psi_{hh}|\left(\vec{\pi}(\boldsymbol{r})\wedge\vec{p}_\pi(\boldsymbol{r})\right)_3|U(+\tfrac{\boldsymbol{a}}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle &= \\ = \imath n(a)\mathcal{N}_q^3(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\Bigg[\sum_{jk}\varepsilon_{3jk}\mathcal{R}_{jk}(\Omega)\frac{1}{3}(f_0^\pi(a)+f_2^\pi(a))- \\ -\left(T^{-1}(\Omega)\hat{a}\times\mathcal{R}^{-1}(\Omega)T^{-1}(\Omega)\hat{a}\right)_3 f_2^\pi(a)\Bigg]\end{aligned} \tag{H.56}$$

läßt sich analog zu Gl. (H.54) berechnen. Die Funktionen $f_l^\pi(a)$ sind in Anhang D (Gl. (D.7)) aufgeführt.

Integration der Eulerwinkel Die Überlappintegrale (H.54) und (H.56) sind nun so umgeformt, daß die Integration der Eulerwinkel auf analytischem Wege erfolgen kann. Der Ausdruck

(1) $\sum_{jk} \varepsilon_{3jk}\mathcal{R}_{jk}(\Omega)$ läßt sich aus der expliziten Darstellung der Drehmatrix (Gl. (N.2)) berechnen.

$$\sum_{jk} \varepsilon_{3jk}\mathcal{R}_{jk}(\Omega) = -4\cos^2\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \tag{H.57}$$

Dies setzen wir in das Integral über die Eulerwinkel ein und erhalten mit den Gln. (M.36a–f):

$$\frac{i}{4\pi^2}\int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{MM}(\Omega)^*\mathcal{N}_q^3(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega)\sum_{jk}\varepsilon_{3jk}\mathcal{R}_{jk}(\Omega) = M\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)-I_3(z)\right) \tag{H.58}$$

Für den Ausdruck

(2) $\left(T^{-1}(\Omega)\hat{a}\times\mathcal{R}^{-1}(\Omega)T^{-1}(\Omega)\hat{a}\right)_3$ schreiben wir

$$T^{-1}(\Omega)\hat{a}\times T^{-1}(\Omega)\left(T(\Omega)\mathcal{R}^{-1}(\Omega)T^{-1}(\Omega)\right)\hat{a} = T^{-1}(\Omega)\hat{a}\times T^{-1}(\Omega)\mathcal{R}_z^{-1}(\phi)\hat{a} \tag{H.59}$$

setzen die Gln. (N.15a–c) sowie (N.8a–c) ein und berechnen das Integral über den Azimutwinkel ϕ_a des Verschiebungsvektors a.

$$\int_0^{2\pi} d\phi_a\left(T^{-1}(\Omega)\hat{a}\times\mathcal{R}^{-1}(\Omega)T^{-1}(\Omega)\hat{a}\right)_3 = -4\pi\left(1-s^2\right)\cos^2\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \tag{H.60}$$

worin $s=\cos\theta_a$ ist. Das Eulerwinkelintegral ist also das gleiche wie oben.

$$\frac{i}{4\pi^2}\int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{MM}(\Omega)^*\mathcal{N}_q^3(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega)\left(T^{-1}(\Omega)\hat{a}\times\mathcal{R}^{-1}(\Omega)T^{-1}(\Omega)\hat{a}\right)_3 = M\pi\left(1-s^2\right)\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)-I_3(z)\right) \tag{H.61}$$

Die Ergebnisse (H.58) und(H.61) können nun in die Gln. (H.54) und (H.56) eingesetzt werden. Aus Gl. (H.56) folgt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty daa^2n(a)\int_{-1}^{+1}ds\int d^3r d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{MM}(\Omega)^*\langle U(-\tfrac{a}{2})\Psi_{hh}|\left(\hat{\vec{\pi}}(r)\wedge\hat{\vec{p}}_\pi(r)\right)_3|U(\tfrac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle = \\ = 2M\pi\int_0^\infty daa^2\,n(a)\int_{-1}^{+1}ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)-I_3(z)\right) \\ \times\left[\frac{1}{3}\left(f_0^\pi(a)+f_2^\pi(a)\right)-\frac{1}{2}\left(1-s^2\right)f_2^\pi(a)\right]\end{aligned} \tag{H.62}$$

Dieser Ausdruck kann weiter umgeformt werden. Aus Gl. (D.10b) ersieht man, daß

$$\frac{1}{3}\left(f_0^\pi(a)+f_2^\pi(a)\right)-\frac{1}{2}\left(1-s^2\right)f_2^\pi(a) = \frac{z}{2} \tag{H.63}$$

ist, und erhält mit der Rekursionsformel

$$I_1(z)-I_2(z) = \frac{4}{z}I_2(z) \tag{H.64}$$

für die modifizierten Besselfunktionen:

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty daa^2 n(a)\int_{-1}^{+1} ds\int d^3r d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{MM}(\Omega)^*\langle U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh}|\left(\tilde{\pi}(r)\wedge\tilde{p}_\pi(r)\right)_3|U(\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle =$$
$$= 4M\pi\int_0^\infty daa^2\, n(a)\int_{-1}^{+1} ds\,\frac{e^{-z}}{z}I_2(z) \qquad (H.65)$$

Damit haben wir nun für den mesonischen Teil des Ladungsradius

$$\langle r_c^2\rangle_{m,I=1} = \langle r_c^2\rangle^p_{m,I=1} = -\langle r_c^2\rangle^n_{m,I=1} \qquad (H.66)$$

mit

$$\langle r_c^2\rangle_{m,I=1} = -\frac{1}{2}\frac{\int_0^\infty daa^2\, n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)-I_3(z)\right)\left[R_{m1}(a)+\frac{1}{2}\left(1-s^2\right)R_{m2}(a)\right]}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right)}$$
$$-\frac{1}{4}\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}I_2(z)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right)}$$
$$\times\frac{\int_0^\infty da\, a^4 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right)} \qquad (H.67)$$

Aus den Gln. $(H.37)$, $(H.42)$ und $(H.67)$ folgt nun noch:

$$G_E(0) = \begin{cases} 1 & \text{falls } M = -\frac{1}{2} \text{ 'Projektion auf Proton'} \\ 0 & \text{falls } M = +\frac{1}{2} \text{ 'Projektion auf Neutron'} \end{cases} \qquad (H.68)$$

Zusammenfassung: Ladungsradien Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen, so erhalten wir für die Ladungsradien des Protons und Neutrons:

$$Proton: \quad \langle r_c^2\rangle^p = \langle r_c^2\rangle_{q,I=0} + \langle r_c^2\rangle_{q,I=1} + \langle r_c^2\rangle_{m,I=1} \qquad (H.69a)$$
$$Neutron: \quad \langle r_c^2\rangle^n = \langle r_c^2\rangle_{q,I=0} - \langle r_c^2\rangle_{q,I=1} - \langle r_c^2\rangle_{m,I=1} \qquad (H.69b)$$

also

$$\langle r_c^2\rangle^p = \frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) R_q(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}I_1(z)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right)}$$
$$-\frac{1}{4}\frac{\int_0^\infty da\, a^4 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right)}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\int_0^\infty daa^2\, n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)-I_3(z)\right)\left[R_{m1}(a)+\frac{1}{2}\left(1-s^2\right)R_{m2}(a)\right]}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right)} \qquad (H.70a)$$

$$\langle r_c^2\rangle^n = \frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) R_q(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}I_2(z)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right)}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\int_0^\infty daa^2\, n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)-I_3(z)\right)\left[R_{m1}(a)+\frac{1}{2}\left(1-s^2\right)R_{m2}(a)\right]}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right)} \qquad (H.70b)$$

Die Funktionen $R_q(a)$, $R_{m1}(a)$, $R_{m2}(a)$, $n(a)$, $n_q(a)$, $n_\pi(a)$, $n_\sigma(a)$ und $z(a,s)$ sind durch

$$R_q(a) = \frac{2}{\pi}\int dpp^2\, j_0(pa)\left[\frac{a^2}{4}\left(\tilde{u}^2(p)+\tilde{v}^2(p)\right)+\left(\frac{\partial\tilde{u}(p)}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde{v}(p)}{\partial p}\right)^2+2\left(\frac{\tilde{v}(p)}{p}\right)^2\right] \tag{H.71a}$$

$$R_{m1}(a) = \frac{2\pi}{3}\int dkk^2\,\omega_\pi(k)\Bigg\{\left(j_0(ka)+j_2(ka)\right)\left[-\frac{a^2}{4}A^2(k)+A(k)\frac{\partial^2}{\partial k^2}A(k)\right]+$$
$$+\left(2j_0(ka)+j_2(ka)\right)\left[\frac{A(k)}{k}\frac{\partial}{\partial k}A(k)-\left(\frac{A(k)}{k}\right)^2\right]\Bigg\} \tag{H.71b}$$

$$R_{m2}(a) = 2\pi\int dkk^2\,\omega_\pi(k)\Bigg\{j_2(ka)\left[\frac{a^2}{4}A^2(k)-A(k)\frac{\partial^2}{\partial k^2}A(k)+\frac{A(k)}{k}\frac{\partial}{\partial k}A(k)-\left(\frac{A(k)}{k}\right)^2\right]-$$
$$-j_1(ka)(ka)\frac{A(k)}{k}\frac{\partial}{\partial k}A(k)\Bigg\} \tag{H.71c}$$

$$n(a) = n_q^3(a)n_\pi(a)n_\sigma(a) \tag{H.71d}$$

$$n_q(a) = \int dpp^2\, j_0(pa)\left(\tilde{u}^2(p)+\tilde{v}^2(p)\right) \tag{H.71e}$$

$$n_\pi(a) = \exp\left\{f_0^\pi(a)-f_0^\pi(a=0)\right\} \tag{H.71f}$$

$$n_\sigma(a) = \exp\left\{f_0^\sigma(a)-f_0^\sigma(a=0)\right\} \tag{H.71g}$$

$$z(a,s) = \frac{2}{3}\left(f_0^\pi(a)+P_2(s)f_2^\pi(a)\right) \tag{H.71h}$$

$$f_l^\pi(a) = 2\pi\int dpp^2\, j_l(pa)\omega_\pi(p)A^2(p) \tag{H.71i}$$

$$f_0^\sigma(a) = 2\pi\int dpp^2\, j_0(pa)\omega_\sigma(p)\eta^2(p) \tag{H.71j}$$

$$P_2(s) = \frac{1}{2}\left(3s^2-1\right) \tag{H.71k}$$

gegeben, worin

$$\tilde{u}(p) = \int drr^2\, j_0(pr)u(r) \tag{H.72a}$$

$$\tilde{v}(p) = \int drr^2\, j_1(pr)u(r) \tag{H.72b}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\tilde{u}(p) = -\int drr^3\, j_1(pr)u(r) \tag{H.72c}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\tilde{v}(p) = \frac{1}{3}\int drr^3\left(j_0(pr)-2j_2(pr)\right)v(r) \tag{H.72d}$$

$$\frac{\tilde{v}(p)}{p} = \frac{1}{3}\int drr^3\left(j_0(pr)+j_2(pr)\right)v(r) \tag{H.72e}$$

$$\eta(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int drr^2\, j_0(pr)\sigma(r) \tag{H.72f}$$

$$A(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int drr^2\, j_1(pr)\phi(r) \tag{H.72g}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}A(p) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int drr^3\left(j_0(pr)-2j_2(pr)\right)\phi(r) \tag{H.72h}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2}A(p) = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int drr^3\left(2j_3(pr)-3j_1(pr)\right)\phi(r) \tag{H.72i}$$

$$\frac{A(p)}{p} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int drr^3 \left(j_0(pr) + j_2(pr)\right)\phi(r) \qquad (H.72j)$$

sind.

Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir noch die Ladungsradien des Protons und Neutrons für den Fall angeben, daß die lineare Impulsprojektion vernachlässigt wird, also nur eine Projektion auf den Spin bzw. Isospin ausgeführt wird. Zu diesem Zweck leiten wir zunächst eine modifizierte Version des Ausdrucks $(H.71b)$ her. Mit Hilfe der Rekursionsformeln der sphärischen Besselfunktionen und der Gl. $(H.72j)$ können die Ausdücke $(H.72h)$ und $(H.72i)$ umgeformt werden. Es ist:

$$\frac{\partial}{\partial p}A(p) = \frac{A(p)}{p} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int drr^3\, j_2(pr)\phi(r) \qquad (H.72h')$$

$$\frac{\partial}{\partial p}A(p) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int drr^3\, j_0(pr)\phi(r) - 2\frac{A(p)}{p} \qquad (H.72h'')$$

und damit

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2}A(p) = \frac{2}{p}\left(\frac{A(p)}{p} - \frac{\partial}{\partial p}A(p)\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int drr^4\, j_1(pr)\phi(r) \qquad (H.72i')$$

Aus diesen Ausdrücken finden wir die modifizierten Versionen der Funktionen $R_{m1}(a)$ und $R_{m2}(a)$:

$$R_{m1}(a) = \frac{2\pi}{3} \int dkk^2\, \omega_\pi(k) \Bigg\{ \left(j_0(ka) + j_2(ka)\right) \left[-\frac{a^2}{4}A^2(k) - A(k)B(k)\right] + \\ + j_2(ka) \left[\left(\frac{A(k)}{k}\right)^2 - \frac{A(k)}{k}\frac{\partial}{\partial k}A(k)\right] \Bigg\} \qquad (H.71b')$$

$$R_{m2}(a) = 2\pi \int dkk^2\, \omega_\pi(k) \Bigg\{ j_2(ka) \left[\frac{a^2}{4}A^2(k) + A(k)B(k) + 3\frac{A(k)}{k}\left(\frac{A(k)}{k} - \frac{\partial}{\partial k}A(k)\right)\right] - \\ - j_1(ka)(ka)\frac{A(k)}{k}\frac{\partial}{\partial k}A(k) \Bigg\} \qquad (H.71c')$$

worin wir noch

$$B(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int dr\, r^4 j_1(pr)\phi(r) \qquad (H.72k)$$

gesetzt haben. Mit

$$\int dpp^2\, j_l(pr) j_{l'}(pr') = \frac{\pi}{2rr'}\delta\left(r - r'\right)\delta_{ll'} \qquad (H.73)$$

und Gl. $(H.71b')$erhalten wir aus den Ausdrücken $(H.70a)$ und $(H.70b)$:

$$\langle r_c^2 \rangle^p = \frac{I_1(z_0)}{I_1(z_0) + I_2(z_0)} \int drr^4 \left(u^2(r) + v^2(r)\right) + \\ + \frac{2}{3}\frac{I_1(z_0) - I_3(z_0)}{I_1(z_0) + I_2(z_0)} \int dpp^2\, \omega_\pi(p) \int drr^2\, j_1(pr)\phi(r) \int dr' r'^4\, j_1(pr)\phi(r) \qquad (H.74a)$$

$$\langle r_c^2 \rangle^n = \frac{I_2(z_0)}{I_1(z_0) + I_2(z_0)} \int drr^4 \left(u^2(r) + v^2(r)\right) - \\ - \frac{2}{3}\frac{I_1(z_0) - I_3(z_0)}{I_1(z_0) + I_2(z_0)} \int dpp^2\, \omega_\pi(p) \int drr^2\, j_1(pr)\phi(r) \int dr' r'^4\, j_1(pr)\phi(r) \qquad (H.74b)$$

Es bleiben noch die Beweise der Gln. $(H.5)$ und $(H.8)$ nachzutragen. Die Ableitung des vom Impulsübertrag abhängigen Normüberlapps $N(q)$ an der Stelle $q = 0$ ist durch den Ausdruck

$$\left[\frac{d}{dq_i}\langle\Psi_{JJ}|P_q|\Psi_{JJ}\rangle\right]_{q=0} = \imath\int d^3a\, a_i\langle\Psi_{JJ}|U(a)|\Psi_{JJ}\rangle \tag{H.75}$$

gegeben. Wir betrachten den pionischen Anteil des Überlapps im Integranden der Gl. $(H.75)$. Es ist:

$$\begin{aligned}\langle\pi|P^J_{JJ}U(a)P^J_{JJ}|\pi\rangle = &\left(\frac{2J+1}{8\pi^2}\right)^2\int d^3\Omega\int d^3\Omega'\mathcal{D}^J_{JJ}(\Omega)^*\mathcal{D}^J_{JJ}(\Omega')^* \\ &\times N_\pi^{-1}\exp\left\{\sum_{ijk}\int d^3k\, A^2(k)\mathcal{R}^T_{ik}(\Omega')\hat{k}_k\mathcal{R}_{ij}(\Omega)\hat{k}_j e^{-\imath k\cdot a}\right\}\end{aligned} \tag{H.76}$$

Der Ausdruck $(H.76)$ ist offensichtlich invariant unter Spiegelungen $a \to -a$ des Verschiebungsvektors a; denn die Integration im Exponenten über den Raumwinkel Ω_k liefert:

$$\begin{aligned}&\sum_{ijk}\int d^3k\,\mathcal{R}^T_{ik}(\Omega')\hat{k}_k\mathcal{R}_{ij}(\Omega)\hat{k}_j A^2(k)e^{-\imath k\cdot a} = \\ &= \frac{4\pi}{3}\left[Sp\mathcal{R}(\omega)(f_0^\pi(a)+f_2^\pi(a)) - 3f_2^\pi(a)\hat{a}^T\mathcal{R}(\omega)\hat{a}\right]\end{aligned} \tag{H.77}$$

worin $\mathcal{R}(\omega)$ das Produkt der Drehmatrizen $\mathcal{R}(\Omega)$ und $\mathcal{R}(\Omega')$ ist.

$$\mathcal{R}_{jk}(\omega) = \sum_i \mathcal{R}_{ki}(\Omega')\mathcal{R}_{ij}(\Omega) \tag{H.78}$$

Die entsprechenden Überlappintegrale für die Quark- und Sigmafelder hängen natürlich nur von a^2 ab und man hat also

$$\langle\Psi_{hh}|P^J_{JJ}U(a)P^J_{JJ}|\Psi_{hh}\rangle = \langle\Psi_{hh}|P^J_{JJ}U(-a)P^J_{JJ}|\Psi_{hh}\rangle \tag{H.79}$$

und damit den Beweis für die Behauptung $(H.8)$

$$\left[\frac{\partial}{\partial q_i}N(q)\right]_{q=0} = 0 \tag{H.80}$$

Aus den obigen Betrachtungen folgt weiterhin

$$\begin{aligned}\langle\Psi_{JJ}|P_{+q}\Psi_{JJ}\rangle &= \int d^3a\,\langle\Psi_{JJ}|U(+a)|\Psi_{JJ}\rangle e^{-\imath q\cdot a} \\ &= \int d^3a\,\langle\Psi_{JJ}|U(-a)|\Psi_{JJ}\rangle e^{\imath q\cdot(-a)} \\ &= \langle\Psi_{JJ}|P_{-q}\Psi_{JJ}\rangle\end{aligned} \tag{H.81}$$

womit auch $(H.5)$ gezeigt ist.

Anhang I. Magnetische Momente des Protons und Neutrons

In diesem Abschnitt wenden wir uns der Berechnung der magnetischen Momente des Protons (μ^p) und Neutrons (μ^n) zu. Wie bei der Untersuchung der Ladungsradien erhalten wir die magnetischen Momente durch Potenzreihenentwicklung des magnetischen Formfaktors $G_M(q^2)$, der durch die jeweils dritten räumlichen und isovektoriellen Komponenten des Vektorstroms im Breitsystem gegeben ist

$$\langle N_\alpha(+\frac{q}{2})|\vec{V}(0)|N_{\alpha'}(-\frac{q}{2})\rangle = \langle \chi_T|\frac{\vec{\tau}}{2}|\chi_T\rangle\langle \chi_J|\frac{\imath}{2M_N}\sigma \times q|\chi_J\rangle G_M(q^2) \tag{I.1}$$

und $\vec{V}(x)$ der räumliche Anteil des Isovektor–Vektorstroms aus Gl. (H.2) ist. Unser Ansatzzustand

$$|N_\alpha(q)\rangle \rightarrow |q, JM_J, TM_T\rangle = P_q P_{JM}|\Psi_{hh}\rangle = P_q|\Psi_{JTM}\rangle \tag{I.2}$$

ist der gleiche wie im Fall der Ladungsradien (vgl. Gl. (H.3)) und wir haben analog zu Gl. (H.4)

$$\imath\mu(\frac{\vec{\tau}}{2})\alpha \times q + \mathcal{O}(q^3) = \frac{\int d^3x\langle P_{\frac{q}{2}}\Psi_{JTM}|\vec{V}(0)|P_{-\frac{q}{2}}\Psi_{JTM}\rangle}{\langle P_{\frac{q}{2}}\Psi_{JTM}|P_{\frac{q}{2}}\Psi_{JTM}\rangle} \tag{I.3}$$

worin wir Gl. (H.5) und

$$G_M(0) = 2m\mu \tag{I.4}$$

sowie die Abkürzung

$$\alpha = \langle \chi_J|\sigma|\chi_J\rangle \tag{I.5}$$

verwendet haben. Entwickeln wir die rechte Seite der Gl. (I.3) nach Potenzen des Impulsübertrags q, so führt dies zusammen mit Gl. (H.8) nach Einsetzen des expliziten Ausdrucks für den Projektor P_q unmittelbar auf:

$$\pm\mu\alpha \times q = -\frac{1}{2}\frac{\int d^3x \int d^3b \int d^3b'\, q\cdot(b+b')\,\langle U(b')\Psi_{JTM}|V_3(0)|U(b)\Psi_{JTM}\rangle}{\int d^3b \int d^3b'\,\langle U(b')\Psi_{JTM}|U(b)\Psi_{JTM}\rangle} \tag{I.6}$$

Da wir hier die magnetischen Momente des Nukleons berechnen wollen, haben wir in Gl. (I.6) noch

$$\langle \chi_{T=\frac{1}{2}}|\tau_i|\chi_{T=\frac{1}{2}}\rangle = \begin{cases} +\delta_{i3} & \text{falls } M_T = +\frac{1}{2} \text{ Proton} \\ -\delta_{i3} & \text{falls } M_T = -\frac{1}{2} \text{ Neutron} \end{cases} \tag{I.7}$$

eingeführt. Wir betrachten den Ausdruck

$$U^\dagger(b')V_3(0)U(b')U^\dagger(b')U(b) = V_3(b')U(b-b') \tag{I.8}$$

im Zähler der Gleichung Gl. ($I.6$), führen die Variablensubstitution[a]

$$\begin{aligned} z &= b - b' \\ y &= b' \end{aligned} \tag{I.9}$$

durch und erhalten:

$$Z = \int d^3x \int d^3y \int d^3z\, q \cdot (z + 2y) \langle \Psi_{JTM} | V_3(y) | U(z) \Psi_{JTM} \rangle \tag{I.10}$$

Aufgrund der Eigenschaft

$$\int d^3y \langle \vec{V}(y) \rangle = 0 \tag{I.11}$$

ist weiter

$$\int d^3z \int d^3y\, q \cdot z \langle \Psi_{JTM} | V_3(y) | U(z) \Psi_{JTM} \rangle = 0 \tag{I.12}$$

und damit

$$Z = \int d^3x \int d^3y \int d^3z\, 2q \cdot y \langle \Psi_{JTM} | V_3(y) | P_{q=0} \Psi_{JTM} \rangle \tag{I.13}$$

Der Projektor auf den Impuls $q = 0$ vertauscht mit demjenigen auf den Spin J und mit der Projektionseigenschaft

$$P^T_{MM} V_3(y) P^T_{MM} = \sum_{q=-1}^{+1} C_q(T, M) V_{1,q}(y) P^T_{M-q,M} \tag{I.14a}$$

$$C_q(T, M) = (2T + 1) \begin{pmatrix} T & 1 & T \\ -M & 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 1 & T \\ -M & q & M - q \end{pmatrix} \tag{I.14b}$$

erhalten wir, nachdem wir die Schritte, die von Gl. ($I.6$) zum Ausdruck ($I.13$) geführt haben, rückgängig gemacht haben:

$$\mu \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{q} = \mp \frac{1}{2} \sum_{q=-1}^{+1} C_q(T, M) \frac{\int d^3x \int d^3b \int d^3b'\, \boldsymbol{q} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}') \langle U(\boldsymbol{b}') \Psi_{hh} | V_{1,q}(0) | U(\boldsymbol{b}) P^T_{M-q,M} \Psi_{hh} \rangle}{\int d^3b \int d^3b' \langle U(\boldsymbol{b}') \Psi_{hh} | P^T_{TT} | U(\boldsymbol{b}) \Psi_{hh} \rangle} \tag{I.15}$$

Die Variablentransformation

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{a}}{2} \\ \boldsymbol{b}' &= \boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{a}}{2} \end{aligned} \tag{I.16}$$

(vgl. Gl. ($H.21$)) führt schließlich auf:

$$\mu \boldsymbol{\alpha} \times \hat{\boldsymbol{q}} = \mp \sum_{q=-1}^{+1} C_q(T, M) \frac{\int d^3a \int d^3r\, \hat{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{r} \langle U(-\frac{\boldsymbol{a}}{2}) \Psi_{hh} | V_{1,q}(\boldsymbol{r}) | U(\frac{\boldsymbol{a}}{2}) P^T_{M-q,M} \Psi_{hh} \rangle}{\int d^3a \langle \Psi_{hh} | U(\boldsymbol{a}) P^T_{TT} | \Psi_{hh} \rangle} \tag{I.17}$$

---

[a] Diese und alle weiteren Substitutionen sind linear. Die Jacobideterminanten hängen daher nicht von den Koordinanten ab und kürzen sich, falls die Substitutionen in Zähler und Nenner der Gl. ($I.6$) durchgeführt werden. Die Jacobideterminanten sind daher hier weggelassen.

Um die Abhängigkeit von der Richtung des Impulsübertrags zu eliminieren, multiplizieren wir Gl. ($I.17$) mit $(\alpha \times \hat{q})$ und bilden das Integral über den Raumwinkel Ω_q. Für die linke Seite der Gl. ($I.17$) hat man nun

$$\begin{aligned}\int d\Omega_q\,(\alpha \times \hat{q})^2 &= \int d\Omega_q \sum_i \left[\sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\alpha_j\hat{q}_k \sum_{mn} \varepsilon_{imn}\alpha_m\hat{q}_n\right] \\ &= \int d\Omega_q \sum_{jk}\sum_{mn} \left(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{km}\delta_{jn}\right)\alpha_j\alpha_m\hat{q}_k\hat{q}_n \\ &= \frac{8\pi}{3}\alpha^2 \qquad (I.18a)\end{aligned}$$

und für die rechte Seite der Gl. ($I.17$) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int d\Omega_q\,\hat{q}\cdot r\,[(\alpha \times \hat{q})\cdot A] &= \int d\Omega_q \sum_l r_l\hat{q}_l \sum_i \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\alpha_j\hat{q}_k A_i \\ &= \frac{4\pi}{3}\sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\alpha_j\hat{r}_k A_i \\ &= \frac{4\pi}{3}\,[\alpha\cdot(r \times A)] \qquad (I.18b)\end{aligned}$$

worin A ein beliebiger Vektor im Spinraum sein kann. Wir setzen die Beziehungen ($I.18a$) und ($I.18b$) in Gl. ($I.17$) ein und erhalten nun mit $\alpha_i = \langle \chi_{J=\frac{1}{2}}|\sigma_i|\chi_{J=\frac{1}{2}}\rangle = \delta_{i3}$:

$$\begin{aligned}\mu = \mp\frac{1}{2}\sum_{q=-1}^{+1}(2T+1)\begin{pmatrix} T & 1 & T \\ -M & 0 & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & 1 & T \\ -M & q & M-q\end{pmatrix} \\ \times \frac{\int d^3a \int d^3\Omega \int d^3r\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{M-q,M}(\Omega)^* \left[r \times \langle U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh}|V_{1,q}(r)|U(\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle\right]_3}{\int d^3a \int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Omega)^*\langle \Psi_{hh}|U(a)R(\Omega)|\Psi_{hh}\rangle} \qquad (I.19)\end{aligned}$$

Wir können nun die Überlappintegrale für die einzelnen Terme des Vektoroperators bestimmen, und beginnen mit dem isoskalaren Anteil $\frac{1}{6}\bar{q}(r)\gamma^k q(r)$

<u>Isoskalarer Vektorstrom: Quarkfelder</u> Wir betrachten hier das Überlappintegral

$$\begin{aligned}&\sum_{jk} \varepsilon_{3jk} \int d^3r r_j \langle U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh}|\frac{1}{6}\bar{q}(r)\gamma^k q(r)|U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle = \\ &= \frac{1}{2}n_q^2(a)\mathcal{N}_q^2(\Omega)n_\pi(a)\mathcal{N}_\pi(\Omega,a)n_\sigma(a)\sum_{jk}\varepsilon_{3jk}I_{jk}(\Omega,a) \qquad (I.20)\end{aligned}$$

worin wir

$$I_{jk}(\Omega,a) = \int d^3r r_j \langle \chi_{hh}|\bar{q}(r+\frac{a}{2})\gamma^k q(r-\frac{a}{2})|R(\Omega)\chi_{hh}\rangle \qquad (I.21)$$

gesetzt haben. Die weitere Vorgehensweise ist grundsätzlich die gleiche wie bei der Berechnung der Ladungsradien. Wir setzen die Fouriertransformierte des Quarkspinors

$$q\left(r \pm \frac{a}{2}\right) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3p \frac{1}{\sqrt{2\pi^2}} \begin{pmatrix} \tilde{u}(p) \\ \tilde{v}(p)\,\sigma\cdot\hat{p}\end{pmatrix} e^{i\,p\cdot(r\pm\frac{a}{2})} \qquad (I.22)$$

in Gl. ($I.21$) ein, benutzen die Beziehung

$$r_j e^{i\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')} = -i\frac{\partial}{\partial p_j} e^{i\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')} \tag{I.23}$$

und erhalten mit der Ableitung des Spinors

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_j}\left[e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{2}}\begin{pmatrix}\tilde{u}(p)\\ \tilde{v}(p)\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\end{pmatrix}\right] &= \\ = e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{2}}\left\{-i\,a\hat{a}_j\begin{pmatrix}\tilde{u}(p)\\ \tilde{v}(p)\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial p}\tilde{u}(p)\hat{p}_j\\ \frac{\partial}{\partial p}\tilde{v}(p)\hat{p}_j\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+\frac{\tilde{v}(p)}{p}\left(\sigma_j-\hat{p}_j\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\right)\end{pmatrix}\right\}\end{aligned} \tag{I.24}$$

nach partieller Integration

$$\begin{aligned}I_{jk}(\Omega,\boldsymbol{a}) = \frac{i}{2\pi^2}\int d^3p\, e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}}\langle\chi_{hh}|\frac{i}{2}a\hat{a}_j\tilde{u}(p)\tilde{v}(p)\sum_{i=1}^{3}\hat{p}_i\left(\sigma_k\sigma_i+\sigma_i\sigma_k\right)+ \\ +\tilde{u}(p)\frac{\partial}{\partial p}\tilde{v}(p)\sigma_k\hat{p}_j\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+\tilde{v}(p)\frac{\partial}{\partial p}\tilde{u}(p)\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\sigma_k\hat{p}_j+ \\ +\tilde{u}(p)\frac{\tilde{v}(p)}{p}\left[\sigma_k\sigma_j-\sigma_k\hat{p}_j\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\right]|R(\Omega)\chi_{hh}\rangle\end{aligned} \tag{I.25}$$

Unter Beachtung der Kommutatorregeln für die σ-Matrizen ergibt sich hieraus, nachdem das Integral über den Raumwinkel $\Omega_{\boldsymbol{p}}$ ausgeführt ist (Gln. ($P.3a$–c)), mit Hilfe der Integrale

$$\begin{aligned}\int dpp^2\,\tilde{u}(p)\frac{\partial}{\partial p}\tilde{v}(p)\left(j_0(pa)+j_2(pa)\right) &= \\ = -\int dpp^2\left[\left(2j_0(pa)+j_2(pa)\right)\tilde{u}(p)\frac{\tilde{v}(p)}{p}+\left(j_0(pa)-j_2(pa)\right)\tilde{v}(p)\frac{\partial}{\partial p}\tilde{u}(p)\right]\end{aligned} \tag{I.26a}$$

$$\begin{aligned}\int dpp^2\,j_2(pa)\tilde{u}(p)\frac{\partial}{\partial p}\tilde{v}(p) &= \\ = -\int dpp^2\left[j_2(pa)\left(\tilde{v}(p)\frac{\partial}{\partial p}\tilde{u}(p)-\tilde{u}(p)\frac{\tilde{v}(p)}{p}\right)+j_1(pa)\tilde{u}(p)\frac{\tilde{v}(p)}{p}\right]\end{aligned} \tag{I.26b}$$

$$\begin{aligned}\int dpp^2\,j_2(pa)\tilde{v}(p)\frac{\partial}{\partial p}\tilde{u}(p) &= \\ = -\int dpp^2\left[j_2(pa)\left(\tilde{u}(p)\frac{\partial}{\partial p}\tilde{v}(p)-\tilde{u}(p)\frac{\tilde{v}(p)}{p}\right)+j_1(pa)\tilde{u}(p)\frac{\tilde{v}(p)}{p}\right]\end{aligned} \tag{I.26c}$$

und den Definitionen

$$M_{q1}(a) = -\frac{4}{3\pi}\int dpp^2\left(j_0(pa)+j_2(pa)\right)\tilde{v}(p)\frac{\partial}{\partial p}\tilde{u}(p) \tag{I.27a}$$

$$M_{q2}(a) = -\frac{2}{\pi}\int dpp^2\,j_2(pa)\left\{\tilde{u}(p)\frac{\partial}{\partial p}\tilde{v}(p)-\tilde{v}(p)\frac{\partial}{\partial p}\tilde{u}(p)-\tilde{u}(p)\frac{\tilde{v}(p)}{p}\right\} \tag{I.27b}$$

für die Überschiebung

$$\begin{aligned}\sum_{jk}\varepsilon_{3jk}I_{jk}(\Omega,\boldsymbol{a}) = i\sum_{jk}\varepsilon_{3jk}\Big\{M_{q1}(a)\langle\chi_{hh}|\sigma_j\sigma_k R(\Omega)|\chi_{hh}\rangle+ \\ +M_{q2}(a)\sum_i\hat{a}_i\hat{a}_j\langle\chi_{hh}|\sigma_i\sigma_k R(\Omega)|\chi_{hh}\rangle\Big\}\end{aligned} \tag{I.28}$$

Nun führen wir noch die in Anhang N beschriebene Transformation $\boldsymbol{a} \to T^{-1}(\Omega)\boldsymbol{a}$ der Variablen im Integral $\int d^3\boldsymbol{a}\ldots$ durch und erhalten für das Integral über den Azimutwinkel $\phi_{\boldsymbol{a}}$ des Überlappintegrals $(I.20)$

$$\sum_{jk} \varepsilon_{3jk} \int d\phi_{\boldsymbol{a}} \int d^3r r_j \langle U(-\frac{\boldsymbol{a}}{2})\Psi_{hh}|\frac{1}{6}\bar{q}(r)\gamma^k q(r)|U(\frac{\boldsymbol{a}}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle =$$
$$= -\frac{i}{2} n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) \mathcal{N}_q^2(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\Big\{ 2\pi M_{q1}(a) \sum_{jk} \varepsilon_{3jk} \langle \chi_{hh}|\sigma_j\sigma_k R(\Omega)|\chi_{hh}\rangle +$$
$$+ M_{q2}(a) \sum_{jk} \varepsilon_{3jk} \sum_i C_{ij}(\Omega,s) \langle \chi_{hh}|\sigma_i\sigma_k R(\Omega)|\chi_{hh}\rangle \Big\} \quad (I.29)$$

Die in Gl. $(I.29)$ aufgeführten Erwartungswerte zwischen den Spin–Flavour Anteilen der Hedgehogzustände sind in Anhang O (Gln. $(O.13)$ und $(O.15)$) berechnet. Die mit Ihnen gebildeten Integrale über die Eulerwinkel $\Omega = (\alpha,\beta,\gamma)$ können ähnlich wie in den vorangegangenen Anhängen auf analytischem Wege ermittelt werden. Mit Hilfe der Gln. $(M.36b)$ und $(M.36d)$ finden wir unmittelbar

$$\frac{i}{4\pi^2} \int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{MM}(\Omega)\mathcal{N}_q^2(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z) \sum_{jk} \varepsilon_{3jk} \langle \chi_{hh}|\sigma_j\sigma_k R^{T=\frac{1}{2}}(\Omega)|\chi_{hh}\rangle =$$
$$= \frac{4\pi}{3} M \frac{e^{-z}}{z}\Big(I_1(z) - I_2(z)\Big) \quad (I.30)$$

und

$$\frac{i}{4\pi^2} \int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{MM}(\Omega)\mathcal{N}_q^2(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z) \sum_{ijk} \varepsilon_{3jk} C_{ij}(\Omega,s) \langle \chi_{hh}|\sigma_j\sigma_k R^{T=\frac{1}{2}}(\Omega)|\chi_{hh}\rangle =$$
$$= \frac{4\pi}{3} M \left(1 - s^2\right) \frac{e^{-z}}{z}\Big(I_1(z) - I_2(z)\Big) \quad (I.31)$$

Diese Ergebnisse setzen wir in Gl. $(I.19)$ ein und erhalten für den isoskalaren Teil des magnetischen Moments

$$\mu_{q,I=0} = \frac{1}{6} \frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) M_{q1}(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z}\big(I_1(z) - I_2(z)\big)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z}\big(I_1(z) + I_2(z)\big)} +$$
$$+ \frac{1}{12} \frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) M_{q2}(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z}\left(1 - s^2\right)\big(I_1(z) - I_2(z)\big)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z}\big(I_1(z) + I_2(z)\big)} \quad (I.32)$$

Isovektorieller Teil des Vekktorstroms: Quarkfelder Das Überlappintegral des isovektoriellen Teils des Vektorstroms $\frac{\tau_q^1}{2}\bar{q}(r)\gamma^k q(r)$ erhalten wir völlig analog zu demjenigen des isoskalaren Teils. Es ist:

$$\sum_{jk} \varepsilon_{3jk} \int d\phi_{\boldsymbol{a}} \int d^3r r_j \langle U(-\frac{\boldsymbol{a}}{2})\Psi_{hh}|\frac{1}{6}\bar{q}(r)\gamma^k q(r)|U(\frac{\boldsymbol{a}}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle =$$
$$= -3i\, n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) \mathcal{N}_q^2(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\Big\{ 2\pi M_{q1}(a) \sum_{jk} \varepsilon_{3jk} \langle \chi_{hh}|\frac{\tau_q^1}{2}\sigma_j\sigma_k R^{T=\frac{1}{2}}(\Omega)|\chi_{hh}\rangle +$$
$$+ M_{q2}(a) \sum_{jk} \varepsilon_{3jk} \sum_i C_{ij}(\Omega,s) \langle \chi_{hh}|\frac{\tau_q^1}{2}\sigma_i\sigma_k R^{T=\frac{1}{2}}(\Omega)|\chi_{hh}\rangle \Big\} \quad (I.33)$$

Die Spin–Flavour–Matrixelemente in Gl. ($I.33$) sind in Anhang O (Gln. ($O.14$) und ($O.16$)) angegeben. Für die Integrale über die Eulerwinkel (vgl. Anhang M Gln. ($M.36a$–f) und ($M.37a$–h)) erhalten wir damit:

$$\frac{i}{4\pi^2}\int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{M-q,M}(\Omega)^* \mathcal{N}_q^2(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\sum_{jk}\varepsilon_{3jk}\langle\chi_{hh}|\frac{\tau_q^1}{2}\sigma_j\sigma_k R^{T=\frac{1}{2}}(\Omega)|\chi_{hh}\rangle =$$
$$= \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{e^{-z}}{z}\Big(I_1(z)-I_2(z)\Big) & \text{falls } q=2M=\pm 1 \\ \frac{e^{-z}}{z}\Big(I_1(z)+I_2(z)\Big) & \text{falls } q=0, M=\pm\frac{1}{2} \end{cases} \qquad (I.34)$$

sowie

$$\frac{i}{4\pi^2}\int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{M-q,M}(\Omega)^* \mathcal{N}_q^2(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\sum_{ijk}\varepsilon_{3jk}C_{ij}(\Omega,s)\langle\chi_{hh}|\frac{\tau_q^1}{2}\sigma_j\sigma_k R^{T=\frac{1}{2}}(\Omega)|\chi_{hh}\rangle =$$
$$= \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{6}\frac{e^{-z}}{z}\left(1-s^2\right)\Big(I_1(z)-I_2(z)\Big) & \text{falls } q=2M=\pm 1 \\ \frac{2\pi}{3}\frac{e^{-z}}{z}\Big(I_1(z)+I_2(z)\Big) & \text{falls } q=0, M=\pm\frac{1}{2} \end{cases} \qquad (I.35)$$

und nach Einsetzen der Gln. ($I.33$–$I.35$) in Gl. ($I.19$) für den isovektoriellen Quarkanteil des magnetischen Moments:

$$\mu^p_{q,I=1} = -\mu^n_{q,I=1} = \mu_{q,I=1} \qquad (I.36)$$

worin

$$\mu_{q,I=1} = \frac{1}{6}\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) M_{q1}(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\big(5I_1(z)+I_2(z)\big)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\big(I_1(z)+I_2(z)\big)} +$$
$$+\frac{1}{6}\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) M_{q2}(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\big(I_1(z)+I_2(z)\big)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\big(I_1(z)+I_2(z)\big)} +$$
$$+\frac{1}{12}\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) M_{q2}(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(1+s^2\right)\big(I_1(z)-I_2(z)\big)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\big(I_1(z)+I_2(z)\big)} \qquad (I.37)$$

<u>Isovektorieller Teil des Vektorstroms: Mesonfelder</u> Das Überlappintegral, das wir in diesem Abschnitt berechnen wollen, lautet:

$$I_{3p}(\Omega,a) = \sum_{jk}\varepsilon_{3jk}\int d^3r\, r_j\langle U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh}| : \left[\hat{\vec{\pi}}(r)\wedge\frac{\partial}{\partial x^k}\hat{\vec{\pi}}(r)\right]_p : |U(+\frac{a}{2})\Psi_{hh}\rangle =$$
$$= n_q^3(a)\mathcal{N}_q^3(\Omega)n_\sigma(a)\sum_{jk}\varepsilon_{3jk}\sum_{mn}\varepsilon_{pmn}\int d^3r\, r_j\langle U(-\frac{a}{2})\pi| : \hat{\pi}_m(r)\frac{\partial}{\partial x^k}\hat{\pi}_n(r) : |U(\frac{a}{2})\pi\rangle \qquad (I.38)$$

Wir setzen die Entwicklung des π–Feldoperators und seiner Ableitung nach ebenen Wellen

$$\hat{\pi}_i(r) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int d^3k\,\frac{1}{\sqrt{2\omega_\pi(k)}}\left(b_i(k)e^{i\,k\cdot r} + b_i^\dagger(k)e^{-i\,k\cdot r}\right) \qquad (I.39a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\hat{\pi}_i(r) = -i\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int d^3k\,\frac{1}{\sqrt{2\omega_\pi(k)}}k_k\left(b_i(k)e^{i\,k\cdot r} - b_i^\dagger(k)e^{-i\,k\cdot r}\right) \qquad (I.39b)$$

in Gl. ($I.38$) ein, benutzen dieGln. ($B.54a$), ($B.24$) und ($I.23$) und erhalten nach parieller Integration:

$$I_{3p}(\Omega,\boldsymbol{a}) = -\frac{1}{4}n(a)\mathcal{N}_q^3(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,\boldsymbol{a})\sum_{jk}\varepsilon_{3jk}\sum_{mn}\varepsilon_{pmn}\int d^3\boldsymbol{p}\int d^3\boldsymbol{k}\,pA(p)\mathrm{e}^{-\imath\,\boldsymbol{p}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{2}}$$
$$\times\left\{\frac{\partial}{\partial k_j}\left[\mathrm{e}^{-\imath\,\boldsymbol{k}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{2}}A(k)\hat{k}'_m\right]\left(\hat{p}_k\hat{p}'_n\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})+\hat{p}_k\hat{p}_n\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial k_j}\left[\mathrm{e}^{-\imath\,\boldsymbol{k}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{2}}A(k)\hat{k}_m\right]\left(\hat{p}_k\hat{p}_n\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})+\hat{p}_k\hat{p}'_n\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\right)\right\} \qquad (I.40)$$

worin wir

$$\hat{k}'_m = \sum_i \mathcal{R}_{mi}(\Omega)\hat{k}_i \qquad (I.41)$$

gesetzt haben. Einsetzen der Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial k_j}\left[\mathrm{e}^{-\imath\,\boldsymbol{k}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{2}}A(k)\hat{k}_m\right] = \mathrm{e}^{-\imath\,\boldsymbol{k}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{2}}\left[-\frac{\imath}{2}a\hat{a}_jA(k)\hat{k}_m+\hat{k}_j\hat{k}_m\frac{\partial}{\partial k}A(k)+\frac{A(k)}{k}\left(\delta_{jm}-\hat{k}_j\hat{k}_m\right)\right] \qquad (I.42)$$

und Auswerten der Integrale über den Raumwinkel Ω_p (Gln. ($P.3a$–c)) führt auf:

$$I_{3p}(\Omega,\boldsymbol{a}) = -\frac{\pi}{3}n(a)\mathcal{N}_q^3(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,\boldsymbol{a})\sum_{jk}\varepsilon_{3jk}\sum_{mn}\varepsilon_{pmn}$$
$$\times\int dp\,p^2A^2(p)\Big\{\left(\mathcal{R}_{nk}(\Omega)\mathcal{R}_{mj}(\Omega)+\delta_{kn}\delta_{mj}\right)+$$
$$\left(j_0(pa)+j_2(pa)\right)\left(\delta_{mj}\mathcal{R}_{nk}(\Omega)+\delta_{nk}\mathcal{R}_{mj}(\Omega)\right)-$$
$$-3j_2(pa)\mathcal{R}_{mj}(\Omega)\left(\hat{a}_n\hat{a}_k+\sum_l\mathcal{R}_{nl}(\Omega)\hat{a}_k\hat{a}_l\right)\Big\} \qquad (I.43)$$

Wir führen noch die Definitionen

$$M_{m0}(a) = 2\pi\int dpp^2\,j_0(pa)A^2(p) \qquad (I.44a)$$

$$M_{m2}(a) = 2\pi\int dpp^2\,j_2(pa)A^2(p) \qquad (I.44b)$$

ein, ermitteln die Überschiebungen in Gl. ($I.43$) und erhalten nach Transformation der Variablen im Integral $\int d^3\boldsymbol{a}\ldots$ (vgl. Anhang N) für das Integral über den Azimutwinkel $\phi_{\boldsymbol{a}}$ von $\boldsymbol{a}$:

$$\int_0^{2\pi}d\phi_{\boldsymbol{a}}\,I_{3p}(\Omega,\boldsymbol{a}) = -\frac{1}{6}n(a)\mathcal{N}_q^3(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)$$
$$\times\Big\{2\pi M_{m0}(a=0)\Big[2\delta_{3p}+\sum_{jk}\varepsilon_{3jk}\sum_{mn}\varepsilon_{pmn}\mathcal{R}_{nk}(\Omega)\mathcal{R}_{mj}(\Omega)\Big]+$$
$$+4\pi\left(M_{m0}(a)+M_{m2}(a)\right)\left[\delta_{3p}Sp\mathcal{R}(\Omega)-\mathcal{R}_{3p}(\Omega)\right]-$$
$$-3M_{m2}(a)\Big[\delta_{3p}\hat{\boldsymbol{a}}^T\mathcal{R}_z(\phi)\hat{\boldsymbol{a}}-\sum_l\mathcal{R}_{3l}(\Omega)C_{pl}(\Omega,s)+$$
$$+\sum_{jk}\varepsilon_{3jk}\sum_{mn}\varepsilon_{pmn}\mathcal{R}_{mj}(\Omega)C_{nk}(\Omega,s)\Big]\Big\} \qquad (I.45)$$

Wir haben nun die Aufgabe die sphärischen Komponenten der in Gl. ($I.45$) auftretenden Ausdrücke

$$[F_{3p}]^1_q = \begin{cases} \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(F_{31} \pm \imath F_{32}) & \text{falls } q = \pm 1 \\ F_{33} & \text{falls } q = 0 \end{cases} \tag{I.46}$$

aufzufinden und die zugehörigen Eulerwinkelintegrale

$$\frac{1}{4\pi^2}\int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{M-q,M}(\Omega)^* \mathcal{N}^3_q(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\,[F_{3p}]^1_q \tag{I.47}$$

zu bestimmen. Die hierzu notwendigen formeln und Methoden sind in den Anhängen N und M zusammengestellt.

$\underline{\left[2\delta_{3p} + \sum_{jk}\varepsilon_{3jk}\sum_{mn}\varepsilon_{pmn}\mathcal{R}_{mj}(\Omega)\mathcal{R}_{nk}(\Omega)\right]^1_q}$

$$\left[2\delta_{3p} + \sum_{jk}\varepsilon_{3jk}\sum_{mn}\varepsilon_{pmn}\mathcal{R}_{mj}(\Omega)\mathcal{R}_{nk}(\Omega)\right]^1_q = \begin{cases} -\frac{4}{\sqrt{2}}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\imath\alpha} & \text{falls } q = +1 \\ 4\cos^2\frac{\beta}{2} & \text{falls } q = 0 \\ \frac{4}{\sqrt{2}}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-\imath\alpha} & \text{falls } q = -1 \end{cases} \tag{I.48}$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{M-q,M}(\Omega)^* \mathcal{N}^3_q(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\left[2\delta_{3p} + \sum_{jk}\varepsilon_{3jk}\sum_{mn}\varepsilon_{pmn}\mathcal{R}_{mj}(\Omega)\mathcal{R}_{nk}(\Omega)\right]^1_q =$$
$$= \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z}\big(3I_1(z) + 4I_2(z) + I_3(z)\big) & \text{falls } q = 0, M = \pm\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z}\big(3I_1(z) - I_3(z)\big) & \text{falls } q = 2M = \pm 1 \end{cases} \tag{I.49}$$

$\underline{\left[2\delta_{3p}Sp\mathcal{R}(\Omega) - \mathcal{R}_{3p}(\Omega)\right]^1_q}$

$$\left[2\delta_{3p}Sp\mathcal{R}(\Omega) - \mathcal{R}_{3p}(\Omega)\right]^1_q = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{2}}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-\imath\gamma} & \text{falls } q = +1 \\ 2\cos^2\frac{\beta}{2}\left(2\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) - 1\right) & \text{falls } q = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\imath\gamma} & \text{falls } q = -1 \end{cases} \tag{I.50}$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{M-q,M}(\Omega)^* \mathcal{N}^3_q(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\left[2\delta_{3p}Sp\mathcal{R}(\Omega) - \mathcal{R}_{3p}(\Omega)\right]^1_q =$$
$$= \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z}\big(I_1(z) + 2I_2(z) + I_3(z)\big) & \text{falls } q = 0, M = \pm\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z}\big(3I_1(z) - I_3(z)\big) & \text{falls } q = 2M = \pm 1 \end{cases} \tag{I.51}$$

$\underline{\left[\delta_{3p}\hat{a}^T\mathcal{R}(\Omega)\hat{a}\right]^1_q}$

$$\left[\delta_{3p}\hat{a}^T\mathcal{R}(\Omega)\hat{a}\right]^1_0 = P_2(s) + \frac{1}{2}Sp\mathcal{R}(\Omega)\left(1 - s^2\right) \tag{I.52}$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{M-q,M}(\Omega)^* \mathcal{N}^3_q(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\left[\delta_{3p}\hat{a}^T\mathcal{R}(\Omega)\hat{a}\right]^1_0 =$$
$$= \frac{1}{4}\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z}\left[3s^2\big(I_1(z) - I_3(z)\big) + I_1(z) + 4I_2(z) + 3I_3(z)\right] \tag{I.53}$$

$\underline{\left[\sum_{l=1}^{3} C_{pl}(\Omega,s)\mathcal{R}_{3l}(\Omega)\right]_q^1}$

$$\left[\sum_{l=1}^{3} C_{pl}(\Omega,s)\mathcal{R}_{3l}(\Omega)\right]_q^1 =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{2}\pi \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left\{\left(1-s^2\right)\mathrm{e}^{-\imath\gamma} - \imath P_2(s)\mathrm{e}^{\imath\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{1-\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}\right\} & \text{falls } q=+1 \\ 2\pi\left\{\frac{1}{2}\left[\cos^2\frac{\beta}{2}\left(1+s^2\right)\left(1-s^2\right)\right] - P_2(s)\frac{\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}}{1-\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}\right\} & \text{falls } q=0 \quad (I.54) \\ -\sqrt{2}\pi \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left\{\left(1-s^2\right)\mathrm{e}^{\imath\gamma} + \imath P_2(s)\mathrm{e}^{-\imath\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{1-\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}\right\} & \text{falls } q=-1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{M-q,M}(\Omega)^*\mathcal{N}_q^3(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\left[\sum_{l=1}^{3} C_{pl}(\Omega,s)\mathcal{R}_{3l}(\Omega)\right]_q^1 =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{6}\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z}\left[3s^2\left(I_1(z)-I_3(z)\right)+I_1(z)+4I_2(z)+3I_3(z)\right] & \text{falls } q=0, M=\pm\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\left(1-s^2\right)\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z}\left(I_1(z)-I_3(z)\right) & \text{falls } q=2M=\pm 1 \end{cases} \quad (I.55)$$

$\underline{\left[\sum_{jk}\varepsilon_{3jk}\sum_{mn}\varepsilon_{pmn}\mathcal{R}_{mj}(\Omega)C_{nk}(\Omega,s)\right]_q^1}$

$$\left[\sum_{jk}\varepsilon_{3jk}\sum_{mn}\varepsilon_{pmn}\mathcal{R}_{mj}(\Omega)C_{nk}(\Omega,s)\right]_{+1}^1 = -\sqrt{2}\pi\Bigg\{\left(1-s^2\right)\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-\imath\gamma}+$$
$$+P_2(s)\frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{1-\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}\Bigg[-2\imath\,\mathrm{e}^{\imath\alpha}\cos^2\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)+$$
$$+\mathrm{e}^{\imath\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}\left(2\sin^2\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)+\imath\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right)\Bigg]\Bigg\} \quad (I.56a)$$

$$\left[\sum_{jk}\varepsilon_{3jk}\sum_{mn}\varepsilon_{pmn}\mathcal{R}_{mj}(\Omega)C_{nk}(\Omega,s)\right]_0^1 = 2\pi\Bigg\{\left(1-s^2\right)\cos^2\frac{\beta}{2}\left(2\cos^2\frac{\beta}{2}-1\right)-$$
$$-P_2(s)\sin^2\frac{\beta}{2}\left[1-\frac{\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{1-\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}\right]\Bigg\} \quad (I.56b)$$

$$\left[\sum_{jk}\varepsilon_{3jk}\sum_{mn}\varepsilon_{pmn}\mathcal{R}_{mj}(\Omega)C_{nk}(\Omega,s)\right]_{-1}^1 = \sqrt{2}\pi\Bigg\{\left(1-s^2\right)\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\imath\gamma}+$$
$$+P_2(s)\frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{1-\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}\Bigg[+2\imath\,\mathrm{e}^{-\imath\alpha}\cos^2\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)+$$
$$+\mathrm{e}^{-\imath\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}\left(2\sin^2\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)-\imath\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right)\Bigg]\Bigg\} \quad (I.56c)$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{M-q,M}(\Omega)^* \mathcal{N}_q^3(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\left[\sum_{jk}\varepsilon_{3jk}\sum_{mn}\varepsilon_{pmn}\mathcal{R}_{mj}(\Omega)C_{nk}(\Omega,s)\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{6}\frac{e^{-z}}{z}\left[5I_1(z)+8I_2(z)+3I_3(z)-3s^2\big(I_1(z)-I_3(z)\big)\right] & \text{falls } q=0, M=\pm\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi s^2\frac{e^{-z}}{z}\big(I_1(z)-I_3(z)\big) & \text{falls } q=2M=\pm 1 \end{cases} \qquad (I.57)$$

Die Gln. $(I.49)$, $(I.51)$, $(I.53)$, $(I.55)$ und $(I.57)$ setzt man nun in Gl. $(I.19)$ ein und erhält zusammen mit Gl. $(I.45)$ für den isovektoriellen Mesonanteil des magnetischen Moments:

$$\mu^p_{m,I=1} = -\mu^n_{m,I=1} = \mu_{m,I=1} \qquad (I.58)$$

worin

$$\mu_{q,I=1} = \frac{1}{9}\Bigg\{ M_{m0}(a=0) + \frac{1}{4}\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n(a) M_{m1}(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\big(3I_1(z)+4I_2(z)+I_3(z)\big)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\big(I_1(z)+I_2(z)\big)} +$$

$$+\frac{1}{4}\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n(a) M_{m2}(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}P_2(s)\big(I_1(z)-I_3(z)\big)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\big(I_1(z)+I_2(z)\big)}\Bigg\} \qquad (I.59)$$

<u>**Zusammenfassung: Magnetisches Moment**</u> Wir fassen die Ergebnisse der vorausgegangenen Rechnung zusammen und erhalten für die magnetischen Momente des Protons und des Neutrons:

$$\textit{Proton}: \quad \mu^p = \mu_{q,I=0} + \mu_{q,I=1} + \mu_{m,I=1} \qquad (I.60a)$$

$$\textit{Neutron}: \quad \mu^n = \mu_{q,I=0} - \mu_{q,I=1} - \mu_{m,I=1} \qquad (I.60b)$$

also

$$\mu^p = \frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) M_{q1}(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}I_1(z)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\big(I_1(z)+I_2(z)\big)} +$$

$$+\frac{1}{3}\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) M_{q2}(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}I_1(z)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\big(I_1(z)+I_2(z)\big)} +$$

$$+\frac{1}{9}M_{m0}(a=0) + \frac{1}{36}\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n(a) M_{m1}(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\big(3I_1(z)+4I_2(z)+I_3(z)\big)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\big(I_1(z)+I_2(z)\big)} -$$

$$-\frac{1}{36}\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n(a) M_{m2}(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}P_2(s)\big(I_1(z)-I_3(z)\big)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\big(I_1(z)+I_2(z)\big)} \qquad (I.61a)$$

$$\mu^n = -\frac{1}{3}\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) M_{q1}(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\big(2I_1(z)+I_2(z)\big)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\big(I_1(z)+I_2(z)\big)} -$$

$$-\frac{1}{6}\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) M_{q2}(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left[s^2\big(I_1(z)-I_2(z)\big)+I_1(z)+I_2(z)\right]}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\big(I_1(z)+I_2(z)\big)} -$$

$$-\frac{1}{9}M_{m0}(a=0)-\frac{1}{36}\frac{\int_0^\infty da\,a^2n(a)M_{m1}(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(3I_1(z)+4I_2(z)+I_3(z)\right)}{\int_0^\infty da\,a^2n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right)}+$$

$$+\frac{1}{36}\frac{\int_0^\infty da\,a^2n(a)M_{m2}(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}P_2(s)\left(I_1(z)-I_3(z)\right)}{\int_0^\infty da\,a^2n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right)} \tag{I.61b}$$

Die in den Gln. ($I.61a$) und ($I.61b$) auftretenden Funktionen des Verschiebungsvektors $\boldsymbol{a}$ sind durch

$$M_{q1}(a)=-\frac{4}{3\pi}\int dpp^2\left\{\left(j_0(pa)+j_2(pa)\right)\tilde{v}(p)\frac{\partial}{\partial p}\tilde{u}(p)\right\} \tag{I.62a}$$

$$M_{q2}(a)=-\frac{2}{\pi}\int dpp^2\,j_2(pa)\left\{\tilde{u}(p)\frac{\partial}{\partial p}\tilde{v}(p)-\tilde{v}(p)\frac{\partial}{\partial p}\tilde{u}(p)-\tilde{u}(p)\frac{\tilde{v}(p)}{p}\right\} \tag{I.62b}$$

$$M_{m0}(a)=2\pi\int dpp^2\,j_0(pa)A^2(p) \tag{I.62c}$$

$$M_{m2}(a)=2\pi\int dpp^2\,j_2(pa)A^2(p) \tag{I.62d}$$

$$n(a)=n_q^3(a)n_\pi(a)n_\sigma(a) \tag{I.62e}$$

$$n_q(a)=\frac{2}{\pi}\int dpp^2\,j_0(pa)\left(\tilde{u}^2(p)+\tilde{v}^2(p)\right) \tag{I.62f}$$

$$n_\pi(a)=\exp\left\{2\pi\int dpp^2\left(j_0(pa)-1\right)\omega_\pi(p)A^2(p)\right\} \tag{I.62g}$$

$$n_\sigma(a)=\exp\left\{2\pi\int dpp^2\left(j_0(pa)-1\right)\omega_\sigma(p)\eta^2(p)\right\} \tag{I.62h}$$

$$z(a,s)=\frac{2}{3}\left(f_0^\pi(a)+P_2(s)f_2^\pi(a)\right) \tag{I.62i}$$

$$f_l^\pi(a)=2\pi\int dpp^2\,j_l(pa)\omega_\pi(p)A^2(p) \tag{I.62j}$$

$$P_2(s)=\frac{1}{2}\left(3s^2-1\right) \tag{I.62k}$$

gegeben. In die Gln. ($I.62a$–j) haben wir die folgenden Fouriertransformierten einzusetzen

$$\tilde{u}(p)=\int drr^2\,j_0(pr)u(r) \tag{I.63a}$$

$$\tilde{v}(p)=\int drr^2\,j_1(pr)v(r) \tag{I.63b}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\tilde{u}(p)=-\int drr^3\,j_1(pr)u(r) \tag{I.63c}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\tilde{v}(p)=\frac{1}{3}\int drr^3\left(j_0(pr)-2j_2(pr)\right)v(r) \tag{I.63d}$$

$$\frac{\tilde{v}}{p}=\frac{1}{3}\int drr^3\left(j_0(pr)+j_2(pr)\right)v(r) \tag{I.63e}$$

$$A(p)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int drr^2\,j_1(pr)\phi(r) \tag{I.63f}$$

$$\eta(p)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int drr^2\,j_0(pr)\sigma(r) \tag{I.63g}$$

Abschließend betrachten wir noch den Fall, daß die lineare Momentenprojektion vernachlässigt wird. Aus den Gln. ($I.61a$) und($I.61b$) ergibt sich zusammen mit

$$\int dpp^2\, j_l(pr) j_l(pr') = \frac{\pi}{rr'}\delta\left(r - r'\right) \tag{I.64}$$

für die Funktionen $M_{q1}(a)$, $M_{q2}(a)$, $M_{m0}(a)$ und $M_{m2}(a)$ im Grenzfall $a \to 0$:

$$M_{q1}(a) = \frac{2}{3}\int dr\, r^3 v(r) u(r) \tag{I.65a}$$

$$M_{q2}(a) = 0 \tag{I.65b}$$

$$M_{m0}(a) = 2\pi \int dr\, r^2 \phi^2(r) \tag{I.65c}$$

$$M_{m2}(a) = 0 \tag{I.65d}$$

Hieraus folgt nun umittelbar

$$\begin{aligned}\mu^p = \frac{2}{3}\frac{I_1(z_0)}{I_1(z_0) + I_2(z_0)}\int dr\, r^3 v(r) u(r) + \\ + \frac{1}{9}\frac{7I_1(z_0) + 8I_2(z_0) + I_3(z_0)}{I_1(z_0) + I_2(z_0)}\frac{\pi}{2}\int dr\, r^2 \phi^2(r)\end{aligned} \tag{I.66a}$$

für das magnetische Moment des Protons und

$$\begin{aligned}\mu^n = -\frac{2}{9}\frac{2I_1(z_0) + I_2(z_0)}{I_1(z_0) + I_2(z_0)}\int dr\, r^3 v(r) u(r) \\ - \frac{1}{9}\frac{7I_1(z_0) + 8I_2(z_0) + I_3(z_0)}{I_1(z_0) + I_2(z_0)}\frac{\pi}{2}\int dr\, r^2 \phi^2(r)\end{aligned} \tag{I.66b}$$

für das magnetische Moment des Neutrons.

Anhang J. Nukleon–Pion–Nukleon Kopplungskonstante

Die Berechnung der Nukleon – Pion – Nukleon Kopplungskonstante $g_{\pi NN}(q^2=0)$, die wir aus der Reihenentwicklung des Pion-Formfaktors $g_{\pi NN}(q^2)$ und den Matrixelementen des Pion-Stroms im Breitsystem erhalten,

$$\langle N_\alpha(-\frac{q}{2})|\vec{J}_\pi(0)|N_{\alpha'}(\frac{q}{2})\rangle = \imath\frac{g_{\pi NN}(q^2)}{2M_N}\langle\chi_T|\vec{\tau}|\chi_T\rangle\langle\chi_J|\sigma\cdot q|\chi_J\rangle \tag{J.1}$$

ist Thema dieses Abschnitts. Der Pion-Strom $\vec{J}_\pi(x)$ ist durch den Quellterm in der Bewegungsgleichung für den Pion-Feldoperator

$$\left(\partial_0^2 - \nabla^2 + m_\pi^2\right)\vec{\pi}(x) = \vec{J}_\pi(x) \tag{J.2}$$

gemäß den Euler-Lagrange-Gleichungen festgelegt,

$$\vec{J}_\pi(x) = -\imath g\sum_{a=1}^{3}\bar{q}_a(x)\gamma_5\vec{\tau}q_a(x) - \lambda^2\left(\sigma^2(x)+\vec{\pi}^2(x)+2f_\pi\sigma(x)\right)\vec{\pi}(x) \tag{J.3a}$$

oder mit Hilfe der Zeitentwicklung des kanonisch konjugierten Impulses $\partial_0\vec{p}_\pi(x) = -\imath[\vec{p}_\pi(x),H]$ durch

$$-\imath[\vec{p}_\pi(x),H] - \nabla^2\vec{\pi}(x) + m_\pi^2\vec{\pi}(x) = \vec{J}_\pi(x) \tag{J.3b}$$

gegeben. Um ein Maß für die Qualität unserer Nukleon-Wellenfunktion zu erhalten, berechnen wir $g_{\pi NN}(0)$ sowohl aus dem Quellterm (Gl. (J.3a)) als auch aus dem Feldterm (Gl. (J.3b). Unser Ansatzzustand $|\pm\frac{q}{2},JM_J,TM_T\rangle = P_{\pm\frac{q}{2}}P^J_{M_JM_J}P^T_{M_TM_T}|\Psi_{hh}\rangle$ ist natürlich der gleiche wie bei der Berechnug der Ladungsradien oder der magnetischen Momente. Da $\vec{J}_\pi(t,x) = -\vec{J}_\pi(t,-x)$ gilt (Pseudoskalar), können wir in gleicher Weise wie bei der Ermittlung der magnetischen Momente vorgehen und erhalten:

$$\frac{g_{\pi NN}(0)}{2M_N} = -2\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\sum_{q=-1,0}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & q & -(\frac{1}{2}+q)\end{pmatrix}$$
$$\times\frac{\int d^3a d^3r d^3\Omega\,\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}-q,-\frac{1}{2}}(\Omega)^* z\langle U(-\frac{a}{2}\Psi_{hh}|[J_\pi(r)]^1_q|U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle}{\int d^3a d^3\Omega\,\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Omega)^*\langle\Psi_{hh}|U(a)R(\Omega)|\Psi_{hh}\rangle} \tag{J.4}$$

Wir wenden uns nun der Berechnung der einzelnen Anteile der Nukleon–Pion–Nukleon Kopplungskonstante zu und beginnen mit dem

Quellterm: Quarkanteil des Pion-Stroms , d. h. wir haben hier also das Überlappintegral

$$-\imath g\int d^3r z\langle U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh}|\bar{q}(r)\gamma^5\tau_i q(r)|U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle =$$
$$= -3\imath g n_q^2(a)\mathcal{N}_q^2(\Omega)n_\pi(a)\mathcal{N}_\pi(\Omega,a)n_\sigma(a)\langle\chi_{hh}|\bar{q}(r+\frac{a}{2})\gamma^5\tau_i q(r-\frac{a}{2})|R(\Omega)\chi_{hh}\rangle \tag{J.5}$$

zu untersuchen. Hierzu gehen wir wie in den vorangegangenen Abschnitten vor, setzen die Fouriertransformierte des Quarkspinors

$$q\left(r \pm \frac{a}{2}\right) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3p \frac{1}{\sqrt{2\pi^2}} \begin{pmatrix} \tilde{u}(p) \\ \tilde{v}(p)\sigma \cdot \hat{p} \end{pmatrix} e^{ip\cdot(r\pm\frac{a}{2})} \tag{J.6}$$

in Gl. (J.5) ein, drücken z durch

$$z e^{ir\cdot(p-p')} = -i\frac{\partial}{\partial p_3} e^{ir\cdot(p-p')} \tag{J.7}$$

aus und erhalten nach partieller Integration, Einsetzen der Ableitung des Spinors (Gl. (I.24)) sowie der Integration über den Raumwinkel Ω_p (Gln. (P.3a–c)) mit Hilfe der Beziehung (I.26a):

$$\begin{aligned} -ig \int_0^{2\pi} d\phi_a \int d^3r\, z \langle U(-\tfrac{a}{2})\Psi_{hh}|\bar{q}(r)\gamma^5\tau_i q(r)|U(+\tfrac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle = \\ = -3ig n_q^2(a)\mathcal{N}_q^2(\Omega)n_\pi(a)\mathcal{N}_\pi(\Omega,a)n_\sigma(a) \\ \times \sum_{j=1}^{3}\left[2\pi M_{q1}(a)\delta_{3j} + M_{q2}(a)C_{3j}(\Omega,s)\right]\langle \chi_{hh}|\sigma_j\tau_i R(\Omega)|\chi_{hh}\rangle \end{aligned} \tag{J.8}$$

In Gl. (J.8) haben wir zusätzlich noch die in Anhang N beschriebene Transformation $a \to T^{-1}(\Omega)a$ der Variablen im Integral $\int d^3a \ldots$ durchgeführt. Die Funktionen $M_{q1}(a)$ und $M_{q2}(a)$ hängen nur noch von $|a|$ ab und sind durch die Gln. (I.27a) und (I.27b) definiert. Die Integrale über die Eulerwinkel, die sich aus Gl. (J.8) ergeben, sind dieselben, die wir bereits bei der Berechnung des Quarkanteils der Axialvektorkopplungskonstanten kennengelernt haben. Wir übernehmen die dortigen Ergebnisse (Gln. (G.25) und (G.32)) und können den Quarkanteil nun unmittelbar angeben.

$$\begin{aligned} \frac{g^Q_{\pi NN}(0)}{2M_N} = \frac{g}{3}\Bigg[\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a)n_\pi(a)n_\sigma(a)M_{q2}(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left[2I_1(z) - s^2(I_1(z)-I_2(z))\right]}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}(I_1(z)+I_2(z))} + \\ + \frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a)n_\pi(a)n_\sigma(a)M_{q1}(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}(5I_1(z)+I_2(z))}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}(I_1(z)+I_2(z))}\Bigg] \end{aligned} \tag{J.9}$$

Im nächsten Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem mesonischen Anteil des Pion-Stroms aus dem Quellterm.

Quellterm: Mesonischer Anteil des Pion-Stroms Wir befassen uns hier zunächst mit der Berechnung des Terms $\vec{\pi}^2\vec{\pi}$. Die Ermittlung der anderen Terme ist wesentlich einfacher und kann anschließend in analoger Weise ausgeführt werden. Wir können auf die gleiche Methode zurückgreifen, die wir bei der Berechnung des $(\vec{\pi}\cdot\vec{\pi})^2$-Terms, der in der nichtlinearen Wechselwirkungsenergie auftrat, erarbeitet haben. In Analogie zu Gl. (E.3) erhalten wir für den Überlapp des $\vec{\pi}^2\vec{\pi}$-Terms:

$$\begin{aligned} \langle U(-\tfrac{a}{2})\Psi_{hh}| : \left(\hat{\vec{\pi}}(r)\cdot\hat{\vec{\pi}}(r)\right)\hat{\pi}_i(r) : |U(+\tfrac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle = \\ = n(a)\mathcal{N}_q^3(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,a)\left[\langle U(-\tfrac{a}{2})\pi|\hat{\pi}_i(r)|U(-\tfrac{a}{2})\pi\rangle + \langle U(+\tfrac{a}{2})R(\Omega)\pi|\hat{\pi}_i(r)|U(+\tfrac{a}{2})R(\Omega)\pi\rangle\right] \\ \times \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{3}\left[\langle U(-\tfrac{a}{2})\pi|\hat{\pi}_j(r)|U(-\tfrac{a}{2})\pi\rangle + \langle U(+\tfrac{a}{2})R(\Omega)\pi|\hat{\pi}_j(r)|U(+\tfrac{a}{2})R(\Omega)\pi\rangle\right]^2 \end{aligned} \tag{J.10}$$

Die Matrixelemente, die auf der rechten Seite der Gl. ($J.10$) auftreten, sind bereits in Anhang E angegeben (Gln. ($E.4a$) und ($E.4b$)). Führen wir in den Integralen $\int d^3\boldsymbol{r}\ldots$ und $\int d^3\boldsymbol{a}\ldots$ die in Anhang N beschriebene Transformation der Variablen

$$\boldsymbol{r} \to T^{-1}(\Omega)\boldsymbol{r} \tag{J.11a}$$

$$\boldsymbol{a} \to T^{-1}(\Omega)\boldsymbol{a} \tag{J.11b}$$

und anschließend noch die Transformation

$$\boldsymbol{r} \to D(\boldsymbol{a})\boldsymbol{r} \tag{J.11c}$$

durch, worin die Drehmatrix $D(\boldsymbol{a})$ durch Gl. ($E.20$) definiert ist, übernehmen die Bezeichnungsweise $\boldsymbol{r}_\pm = \boldsymbol{r} \pm \frac{\boldsymbol{a}}{2}$ und $\phi_\pm = \phi(|\boldsymbol{r}_\pm|)$ aus Anhang E, so erhalten wir für das Überlappintegral:

$$\begin{aligned}
&\int d^3\boldsymbol{a} \int d^3\boldsymbol{r} \int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}-q,-\frac{1}{2}}(\Omega)^* \langle U(-\frac{\boldsymbol{a}}{2})\Psi_{hh}| : \left(\hat{\vec{\pi}}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\vec{\pi}}(\boldsymbol{r})\right)\hat{\pi}^1_q(\boldsymbol{r}) : |U(+\frac{\boldsymbol{a}}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle = \\
&= \frac{1}{8}\int d^3\boldsymbol{a}\, n(a) \int d^3\boldsymbol{r} \int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}-q,-\frac{1}{2}}(\Omega)^* \mathcal{N}^3_q(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\left[T^{-1}D\boldsymbol{r}\right]_3 \\
&\qquad \times \left[T^{-1}\left(D\boldsymbol{r}+\frac{\boldsymbol{a}}{2}\right)\frac{\phi_+}{r_+} + T^{-1}\mathcal{R}_z(\delta)\left(D\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{a}}{2}\right)\frac{\phi_-}{r_-}\right]_q^1 \\
&\qquad \times \left[\phi_+^2+\phi_-^2+2\frac{\phi_+}{r_+}\frac{\phi_-}{r_-}\left(D\boldsymbol{r}+\frac{\boldsymbol{a}}{2}\right)^T\mathcal{R}_z(\delta)\left(D\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{a}}{2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{J.12}$$

Die oben aufgeführten Transformation der Integrationsvariablen bewirken, daß die allgemeine Drehung $\mathcal{R}(\Omega)$ in eine Drehung um die z-Achse $\mathcal{R}_z(\delta)$ mit Drehwinkel δ übergeht, und die Argumente $|\boldsymbol{r}_\pm|$ der Pion-Wellenfunktion ϕ weder vom Azimut- noch vom Polarwinkel des Verschiebungsvektors $\boldsymbol{a}$ abhängig sind (Gl. ($E.23$)). Dies bedeutet, daß wir die Integrationen über die Azimutwinkel von $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{a}$ auf analytischen Wege ausführen und die Integration über den Polarwinkel von $\boldsymbol{a}$ von den übrigen Integralen abtrennen können. Um die Integrale über die Azimutwinkel sowie diejenigen über die Eulerwinkel angeben zu können, drücken wir im Folgenden die einzelnen Terme der Gl. ($J.12$) durch die Polarkoordinaten der Integrationsvariablen aus.

Führen wir für die Polarkoordinaten des Verschiebungsvektors $\boldsymbol{a}$ und des Vektors $\boldsymbol{r}$ die Bezeichnungen

$$\boldsymbol{a} = (a, \vartheta, \varphi) \tag{J.13a}$$

$$\boldsymbol{r} = (r, \theta, \phi) \tag{J.13b}$$

ein, so erhalten wir für den Ausdruck $\left(D\boldsymbol{r}+\frac{\boldsymbol{a}}{2}\right)^T\mathcal{R}_z(\delta)\left(D\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{a}}{2}\right)$ in diesen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\left(D\boldsymbol{r}+\frac{\boldsymbol{a}}{2}\right)^T\mathcal{R}_z(\delta)\left(D\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{a}}{2}\right) &= r^2\left[t^2(1-\cos\delta)+\cos\delta\right] - \frac{a^2}{4}\left[s^2(1-\cos\delta)+\cos\delta\right] - \\
&\quad - r\,a\,\sin\delta\sin\vartheta\sin\theta\sin\phi
\end{aligned} \tag{J.14}$$

worin

$$t^2 = \cos^2\theta\cos^2\vartheta - 2\sin\theta\cos\theta\cos\phi\sin\vartheta\cos\vartheta + \sin\theta\cos^2\phi\sin^2\vartheta \tag{J.15}$$

ist.

Somit hängt also nur der Term $\left[T^{-1}Dr\right]_3 \left[T^{-1}\left(Dr+\frac{a}{2}\right)\frac{\phi_+}{r_+}+T^{-1}\mathcal{R}_z(\delta)\left(Dr-\frac{a}{2}\right)\frac{\phi_-}{r_-}\right]_q^1$ vom Azimutwinkel φ von $\boldsymbol{a}$ ab und wir können unmittelbar die Integrale

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left[T^{-1}Dr\right]_3 \left[T^{-1}\mathcal{R}_z(\delta)Dr\right]_0^1 = \pi r^2\left\{\left(1-t^2\right)\cos\delta\sin^2\bar{\beta}+2t^2\cos^2\bar{\beta}\right\} \qquad (J.16a)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left[T^{-1}Dr\right]_3 \left[T^{-1}\mathcal{R}_z(\delta)Dr\right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}r^2 e^{\imath\bar{\gamma}}\left\{\sin\bar{\beta}\cos\bar{\beta}\left[\cos\delta\left(1-t^2\right)-2t^2\right]-\right.$$
$$\left.-\imath\sin\delta\sin\bar{\beta}\left(1-t^2\right)\right\} \qquad (J.16b)$$

und

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left[T^{-1}Dr\right]_3 \left[T^{-1}\mathcal{R}_z(\delta)a\right]_0^1 = \pi a r\left\{\cos\theta\left[\sin^2\vartheta\cos\delta\sin^2\bar{\beta}-2\cos^2\vartheta\cos^2\bar{\beta}\right]+\right.$$
$$+\sin\theta\cos\phi\sin\vartheta\cos\vartheta\left[\cos\delta\sin^2\bar{\beta}-2\cos^2\bar{\beta}\right]+$$
$$\left.+\sin\theta\sin\phi\sin\vartheta\sin\delta\sin^2\bar{\beta}\right\} \qquad (J.17a)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left[T^{-1}Dr\right]_3 \left[T^{-1}\mathcal{R}_z(\delta)a\right]_{-1}^1 =$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}a r e^{\imath\bar{\gamma}}\sin\bar{\beta}\left\{-\imath\sin\vartheta\left[\sin\theta\cos\phi\cos\vartheta\sin\delta-\sin\theta\sin\phi\cos\delta++\cos\theta\sin\vartheta\sin\delta\right]+\right.$$
$$+\cos\bar{\beta}\left[\sin\theta\sin\vartheta\left(\cos\phi\cos\vartheta\left(2+\cos\delta\right)+\sin\phi\sin\delta\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\cos\theta\left(\cos\delta\sin^2\vartheta-2\cos^2\vartheta\right)\right]\right\} \qquad (J.17b)$$

angeben. Die Terme $\int_0^{2\pi} d\varphi \left[T^{-1}Dr\right]_3 \left[T^{-1}r\right]_q^1$ und $\int_0^{2\pi} d\varphi \left[T^{-1}Dr\right]_3 \left[T^{-1}a\right]_q^1$ erhält man leicht aus den obigen Ausdrücken, indem man dort $\delta = 0$ setzt. Die Abhängigkeit der Winkel $\bar{\beta}, \bar{\gamma}$ und δ von den Eulerwinkeln $\Omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ findet sich in Anhang N (Gln. $(N.6a)$ und $(N.8a\text{–}e)$).

Setzen wir nun die Gln. $(J.16a, b)$ und $(J.17a, b)$ sowie die Ausdrücke $(J.14)$ und $(J.15)$ in das Überlappintegral $(J.12)$ ein, so kann die Integration über die Eulerwinkel leicht mit Hilfe der in Anhang M aufgelisteten Integrale (Gln. $(M.36a\text{–}g)$ und $(M.37a\text{–}j)$) ausgeführt werden. Wählen wir für die Polarwinkel noch die Bezeichnungen

$$u = \cos\theta \qquad s = \cos\vartheta \qquad (J.18)$$

und summieren die Komponenten von q auf, so erhält man für den $(\vec{\pi}\cdot\vec{\pi})\,\vec{\pi}$-Term:

$$
\begin{aligned}
&2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sum_{q=-1,0} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & q & -(\frac{1}{2}+q) \end{pmatrix} \\
&\qquad \times \int d^3a d^3r d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}-q,-\frac{1}{2}}(\Omega)^* z\langle U(-\frac{\boldsymbol{a}}{2}\Psi_{hh}| : (\bar{\pi}(r)\cdot\bar{\pi}(r))\,\pi^1_q(r) : |U(+\frac{\boldsymbol{a}}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle = \\
&= \frac{\pi^2}{9}\int_0^\infty da\, a^2 n(a) \int_0^\infty dr\, r^2 \int_0^1 du \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z}\Bigg\{\Bigg[2r^2\left(\frac{\phi_+}{r_+}+\frac{\phi_-}{r_-}\right)+aru\left(\frac{\phi_+}{r_+}-\frac{\phi_-}{r_-}\right)\Bigg] \\
&\qquad \times \Bigg[\left(\frac{1}{8}\frac{\phi_+}{r_+}\frac{\phi_-}{r_-}\right)\Bigg[\Big(I_1(z)+4I_2(z)+3I_3(z)\Big)\Big(4r^2-a^2\Big)+ \\
&\qquad\qquad + 3\Big(I_1(z)-I_3(z)\Big)\Big[r^2\Big(3u^2s^2-u^2-s^2+1\Big)-a^2s^2\Big]\Bigg]+ \\
&\qquad + \Big(\phi_+^2+\phi_-^2\Big)\Big(I_1(z)+I_2(z)\Big)\Bigg]+ \\
&\qquad + \left(\frac{1}{8}\frac{\phi_+}{r_+}\frac{\phi_-}{r_-}\right)\left(\frac{\phi_+}{r_+}+\frac{\phi_-}{r_-}\right)6a^2r^2\Big(I_1(z)-I_3(z)\Big)\Big(1-u^2\Big)\Big(1-s^2\Big)\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{J.19}
$$

Die weiteren von den mesonischen Feldoperatoren abhängigen Terme lassen sich nun auf die gleiche Weise ermitteln. Bevor wir diese zusammenfassend angeben, wenden wir uns noch dem

Feldterm zu. Setzen wir voraus, daß der Zustand $|\Psi_{hh}\rangle$ ein exakter Eigenzustand des Hamiltonoperators ist, so haben wir in diesem Term nur noch das folgende Überlappintegrals[a]

$$
\int d^3r\, z\langle U(-\frac{\boldsymbol{a}}{2}\Psi_{hh}|\pi_i(r)|U(+\frac{\boldsymbol{a}}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle \tag{J.20}
$$

zu berechnen. In diesen Ausdruck setzen wir die Entwicklung des π-Feldoperators nach ebenen Wellen ein, benutzen die Beziehung (J.7), und erhalten mit Hilfe der Eigenschaften kohärenter Zustände, die wir in Anhang B behandelt haben,

$$
\begin{aligned}
&\int d^3r\, z\langle U(-\frac{\boldsymbol{a}}{2}\Psi_{hh}|\pi_i(r)|U(+\frac{\boldsymbol{a}}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle = \\
&\qquad = I_\phi n(a)\mathcal{N}^3_q(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\boldsymbol{a},\Omega)\,(\delta_{i3}+\mathcal{R}_{i3}(\Omega))
\end{aligned}
\tag{J.21}
$$

worin I_ϕ das Integral

$$
I_\phi = 2\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\partial A(k)}{\partial k}\right]_{k=0} = \frac{2\pi}{3}\int_0^\infty dr\, r^3\phi(r) \tag{J.22}
$$

ist. Die Integrale der Eulerwinkel lassen sich mit Hilfe der sphärischen Komponenten

$$
[\delta_{i3}+\mathcal{R}_{i3}(\Omega)]^1_q = \begin{cases} 2\cos^2\frac{\beta}{2} & \text{falls } q=0 \\ \sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}e^{-i\alpha} & \text{falls } q=-1 \end{cases} \tag{J.23}
$$

---

[a] Das Überlappintegral des Ausdrucks $\nabla^2\pi(r)$ verschwindet.

leicht berechnen, und man findet schließlich:

$$\frac{g_{\pi NN}(0)}{2M_N} = -\frac{2}{3} m_\pi^2 I_\phi \tag{J.24}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man, falls nur eine reine Drehimpulsprojektion in Betracht gezogen wird. Dies ist darauf zurückzuführen, daß der Pion-Feldoperator linear im Überlappintegral auftritt und daher einerseits eine Abhängigkeit dieses Integrals von a nur durch den Normüberlapp gegeben ist, andererseits die Integration über die Eulerwinkel bis auf einen konstanten Faktor im gleichen Ausdruck resultiert wie diejenige des Normüberlapps, so daß sich das Überlappintegral (*J*.20) und der Normüberlapp, in Gl. (*J*.4) eingesetzt, gegenseitig wegheben.

Abschließend geben wir noch eine

<u>Zusammenfassung</u> der Ergebnisse diese Abschnitts. Für den Quarkanteil des Quellterms haben wir abgeleitet:

$$\begin{aligned}\frac{g^{s,Q}_{\pi NN}(0)}{2M_N} = \frac{g}{3}\Bigg[&\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) M_{q2}(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z}\left[2I_1(z) - s^2\big(I_1(z) - I_2(z)\big)\right]}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z}\big(I_1(z) + I_2(z)\big)} \\ &+ \frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) M_{q1}(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z}\big(5I_1(z) + I_2(z)\big)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a) \int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z}\big(I_1(z) + I_2(z)\big)}\Bigg]\end{aligned} \tag{J.25}$$

und für den mesonischen Anteil des Quellterms:

$$\begin{aligned}\frac{g^{s,M}_{\pi NN}(0)}{2M_N} = &\frac{\lambda^2}{N_N}\frac{\pi}{36}\int_0^\infty daa^2 n(a)\int_0^\infty drr^2\int_0^1 du\int_0^1 ds\left[2r^2\left(\frac{\phi_+}{r_+}+\frac{\phi_-}{r_-}\right)+aru\left(\frac{\phi_+}{r_+}-\frac{\phi_-}{r_-}\right)\right] \\ &\times\Bigg[\left(\frac{1}{8}\frac{\phi_+}{r_+}\frac{\phi_-}{r_-}\right)\Bigg[\frac{e^{-z}}{z}\Big(I_1(z)+4I_2(z)+3I_3(z)\Big)\Big(4r^2-a^2\Big)+ \\ &\qquad +3\frac{e^{-z}}{z}\Big(I_1(z)-I_3(z)\Big)\Big[r^2\Big(3u^2s^2-u^2-s^2+1\Big)-a^2s^2\Big]\Bigg]+ \\ &+\Big[\Big(\phi_+^2+\phi_-^2\Big)+(\sigma_++\sigma_-)\left[(\sigma_++\sigma_-)+4f_\pi\right]\Big]\frac{e^{-z}}{z}\Big(I_1(z)+I_2(z)\Big)\Bigg]+ \\ &+\frac{\lambda^2}{N_N}\frac{\pi}{36}\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^\infty dr\, r^2\int_0^1 du\int_0^1 ds\left(\frac{1}{8}\frac{\phi_+}{r_+}\frac{\phi_-}{r_-}\right)\left(\frac{\phi_+}{r_+}+\frac{\phi_-}{r_-}\right) \\ &\times 6a^2r^2\Big(1-u^2\Big)\Big(1-s^2\Big)\frac{e^{-z}}{z}\Big(I_1(z)-I_3(z)\Big)\end{aligned} \tag{J.26}$$

worin N_N der Normüberlapp

$$N_N = \int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z}\Big(I_1(z)+I_2(z)\Big) \tag{J.27}$$

des Nukleons ist. Wir erhalten damit für die Nukleon–Pion–Nukleon Kopplungskonstante, ermittelt aus dem Strom (*J*.3*a*):

$$g^s_{\pi NN}(q^2=0) = g^{s,Q}_{\pi NN}(q^2=0) + g^{s,M}_{\pi NN}(q^2=0) \tag{J.28}$$

und aus dem Srom ($J.3b$)

$$\frac{g^f_{\pi NN}(q^2=0)}{2M_N} = -\frac{4}{9}m_\pi^2 \int_0^\infty dr\, r^3 \phi(r) \tag{J.29}$$

Die in den Gln. ($J.25$–$J.27$) auftretenden Funktionen des Verschiebungsvektors $\boldsymbol{a}$ sind durch

$$M_{q1}(a) = -\frac{4}{3\pi}\int dp p^2 \left\{ (j_0(pa) + j_2(pa))\, \tilde{v}(p) \frac{\partial}{\partial p}\tilde{u}(p) \right\} \tag{J.30a}$$

$$M_{q2}(a) = -\frac{2}{\pi}\int dp p^2\, j_2(pa) \left\{ \tilde{u}(p)\frac{\partial}{\partial p}\tilde{v}(p) - \tilde{v}(p)\frac{\partial}{\partial p}\tilde{u}(p) - \tilde{u}(p)\frac{\tilde{v}(p)}{p} \right\} \tag{J.30b}$$

$$n(a) = n_q^3(a) n_\pi(a) n_\sigma(a) \tag{J.30c}$$

$$n_q(a) = \frac{2}{\pi}\int dp p^2\, j_0(pa) \left(\tilde{u}^2(p) + \tilde{v}^2(p) \right) \tag{J.30d}$$

$$n_\pi(a) = \exp\left\{ 2\pi \int dp p^2 \left(j_0(pa) - 1 \right) \omega_\pi(p) A^2(p) \right\} \tag{J.30e}$$

$$n_\sigma(a) = \exp\left\{ 2\pi \int dp p^2 \left(j_0(pa) - 1 \right) \omega_\sigma(p) \eta^2(p) \right\} \tag{J.30f}$$

$$z(a,s) = \frac{2}{3}\left(f_0^\pi(a) + P_2(s) f_2^\pi(a) \right) \tag{J.30g}$$

$$f_l^\pi(a) = 2\pi \int dp p^2\, j_l(pa) \omega_\pi(p) A^2(p) \tag{J.30h}$$

$$P_2(s) = \frac{1}{2}\left(3s^2 - 1 \right) \tag{J.30i}$$

$$r_\pm = r \pm \frac{a}{2} \tag{J.30j}$$

$$|r_\pm| = r_\pm = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4} \pm aru} \tag{J.30k}$$

$$\phi_\pm = \phi(r_\pm) \tag{J.30l}$$

$$\sigma_\pm = \sigma(r_\pm) \tag{J.30m}$$

gegeben. In die Gln. ($J.30a$–h) haben wir die folgenden Fouriertransformierten einzusetzen

$$\tilde{u}(p) = \int dr r^2\, j_0(pr) u(r) \tag{J.31a}$$

$$\tilde{v}(p) = \int dr r^2\, j_1(pr) v(r) \tag{J.31b}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\tilde{u}(p) = -\int dr r^3\, j_1(pr) u(r) \tag{J.31c}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\tilde{v}(p) = \frac{1}{3}\int dr r^3 \left(j_0(pr) - 2 j_2(pr) \right) v(r) \tag{J.31d}$$

$$\frac{\tilde{v}}{p} = \frac{1}{3}\int dr r^3 \left(j_0(pr) + j_2(pr) \right) v(r) \tag{J.31e}$$

$$A(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int dr r^2\, j_1(pr) \phi(r) \tag{J.31f}$$

$$\eta(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int dr r^2\, j_0(pr) \sigma(r) \tag{J.31g}$$

Wird die lineare Impulsprojektion vernachlässigt, d. h. nur eine Projektion des Hedgehog-Zustands auf $J = T$ ausgeführt, so hat man im Limes $\boldsymbol{a} \to 0$ aus dem Quellterm:

$$\begin{aligned}\frac{g^s_{\pi NN}(0)}{2M_N} = \frac{2}{9} g \int_0^\infty dr\, r^3 u(r) v(r)\, \frac{5I_1(z_0) + I_2(z_0)}{I_1(z_0) + I_2(z_0)} + \\ + \lambda^2 \Bigg[\frac{\pi}{9} \int_0^\infty dr\, r^3 \phi^3(r)\, \frac{3I_1(z_0) + 4I_2(z_0) + I_3(z_0)}{I_1(z_0) + I_2(z_0)} + \\ + \frac{4\pi}{9} \int_0^\infty dr\, r^3 \phi(r) \sigma^2(r) + \\ + \frac{8\pi}{9} f_\pi \int_0^\infty dr\, r^3 \phi(r) \sigma(r) \Bigg]\end{aligned} \tag{J.32}$$

worin z_0 durch

$$z_0 = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dp\, p^2 \omega_\pi(p) A^2(p) \tag{J.33}$$

gegeben ist.

<u>Soft–Pion Korrekturen</u> Wie wir in Abschnitt 5.4 dargelegt haben, berechnen wir die Soft–Pion Korrekturen unter Vernachlässigung von Schwerpunktskorrekturen aus dem Formfaktor $g_{\pi NN}(q^2)$,

$$\int d^3r\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \langle N \uparrow | \vec{J}_\pi(\boldsymbol{r}) | N \uparrow \rangle = i \frac{g_{\pi NN}(q^2)}{2M_N} \langle \chi_t | \vec{\tau} | \chi_t \rangle \langle \chi_s | \boldsymbol{\sigma} | \chi_s \rangle \cdot \boldsymbol{q} \tag{J.34}$$

den wir analytisch zum Punkt $q^2 = -m_\pi^2$ fortsetzen. Die Multiplikation des obigen Ausdrucks mit $\langle \chi_s | \boldsymbol{\sigma} | \chi_s \rangle \cdot \boldsymbol{q}$ und Integration über den Raumwinkel $\Omega_{\boldsymbol{q}}$ liefert nun

$$\begin{aligned}\frac{g_{\pi NN}(q^2)}{2M_N} = -2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sum_{Q=-1,0} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & Q & -(\frac{1}{2}+Q) \end{pmatrix} \\ \times \frac{d^3r\, z \left(3 \frac{j_1(qr)}{qr}\right) \int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}-Q,-\frac{1}{2}}(\Omega)^* \langle \Psi_{hh} | [J_\pi(\boldsymbol{r})]^1_Q | R(\Omega) \Psi_{hh} \rangle}{\int d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Omega)^* \langle \Psi_{hh} | R(\Omega) | \Psi_{hh} \rangle}\end{aligned} \tag{J.35}$$

worin q für raumartige Impulsüberträge ($q^2 < 0$) rell und für zeitartige ($q^2 > 0$) imaginär ($|\boldsymbol{q}| \to ip$, p rell) ist.

Benutzen wir den Pion–Strom ($J.3a$) zur Berechnung des Formfaktors, so können wir die Integration der Eulerwinkel, die zum Ergebnis ($J.32$) führte, übernehmen und erhalten unmittelbar:

$$\begin{aligned}\frac{g^s_{\pi NN}(q^2)}{2M_N} = \frac{2}{3} g \int_0^\infty dr\, r^3 \frac{j_1(qr)}{qr} u(r) v(r)\, \frac{5I_1(z_0) + I_2(z_0)}{I_1(z_0) + I_2(z_0)} + \\ + \lambda^2 \Bigg[\frac{\pi}{3} \int_0^\infty dr\, r^3 \frac{j_1(qr)}{qr} \phi^3(r)\, \frac{3I_1(z_0) + 4I_2(z_0) + I_3(z_0)}{I_1(z_0) + I_2(z_0)} + \\ + \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dr\, r^3 \frac{j_1(qr)}{qr} \phi(r) \sigma^2(r) + \\ + \frac{8\pi}{9} f_\pi \int_0^\infty dr\, r^3 \frac{j_1(qr)}{qr} \phi(r) \sigma(r) \Bigg]\end{aligned} \tag{J.36}$$

Im Fall $q^2 > 0$ haben wir in die Integrale des Ausdrucks ($J.36$)

$$\frac{j_1(\imath pr)}{\imath pr} = \sqrt{\frac{\pi}{2pr}}\,\frac{I_{3/2}(pr)}{pr} = \frac{\cosh pr}{(pr)^2} - \frac{\sinh pr}{(pr)^3} \tag{J.37}$$

einzusetzen. Aus der asymptotischen Form der Felder $u(r)$, $v(r)$, $\phi(r)$ und $\sigma(r)$, die wir in Anhang C diskutierten, ersieht man, daß alle Integrale konvergieren, sofern

$$p < \min\left\{3m_\pi, m_\pi + m_\sigma, 2\sqrt{(gf_\pi)^2 - \varepsilon^2}\right\} \tag{J.38}$$

erfüllt ist.

Ermitteln wir $g_{\pi NN}(q^2)$ aus dem Pion–Feld, so ist festzustellen, daß der Term, der den Laplace–Operator enthält, nun nicht mehr verschwindet. Insbesondere haben wir den Überlapp

$$I_i(q,\Omega) = \int d^3r\,\frac{j_1(qr)}{qr}\,z\langle\,\pi|\nabla^2\pi_i(r)|R(\Omega)\pi\,\rangle \tag{J.39}$$

zu berechnen. Mit Hilfe von

$$\begin{aligned}\nabla^2\left[\hat{r}_i\phi(r)\right] &= \imath\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\nabla^2\int d^3k\,\mathrm{e}^{-\imath\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{k}_iA(k) = \\ &= -\hat{r}_i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int dk\,k^4 j_1(kr)A(k)\end{aligned} \tag{J.40}$$

findet man leicht, daß

$$I_i(q,\Omega) = -\frac{2\pi}{3}\mathcal{N}_\pi(\Omega,z_0)\big(\delta_{i3} + R_{i3}(\Omega)\big)\int dr\,r^3\frac{j_1(qr)}{qr}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int dk\,k^4 j_1(kr)A(k) \tag{J.41}$$

der Überlapp ($J.41$) in gleicher Weise von den Eulerwinkeln abhängt wie der Ausdruck ($J.21$). Um das zweifache Integral ($J.41$) weiter zu vereinfachen benutzen wir

$$k^2 j_1(kr) = \left[\frac{2}{r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]j_1(kr) \tag{J.42}$$

und erhalten schließlich nach zweifacher partieller Integration und Integration der Eulerwinkel:

$$\begin{aligned}\frac{g_{\pi NN}(q^2)}{2M_N} = &-\left(m_\pi^2 + q^2\right)\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty dr\,r^3\,\frac{j_1(qr)}{qr}\phi(r) - \\ &-\frac{4\pi}{3}\lim_{r\to\infty}\left[r^3\frac{j_1(qr)}{qr}\frac{\partial\phi(r)}{\partial r} - r^2\phi(r)\frac{\partial j_1(qr)}{\partial(qr)}\right]\end{aligned} \tag{J.43}$$

Ist der 4er–Impulsübertrag raumartig, so ergibt sich aus der asymptotischen Form des Pion–Feldes

$$\phi(r) = C_\phi\frac{\mathrm{e}^{-m_\pi r}}{m_\pi r}\left(1 + \frac{1}{m_\pi r}\right) \qquad \text{falls} \qquad r > R, \tag{J.44}$$

daß der von der partiellen Integration herrührende Limes in Gl. ($J.43$) verschwindet. Das Integral in Gl. ($J.43$) konvergiert und kann auf numerischem Wege bestimmt werden. Der Formfaktor lautet also:

$$\frac{g_{\pi NN}(q^2)}{2M_N} = -\left(m_\pi^2 + q^2\right)\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty dr\,r^3\frac{j_1(qr)}{qr}\phi(r) \tag{J.45}$$

Für ein zeitartiges q^2 findet man mit Hilfe von Gl. (J.44) und Gl. (J.37):

$$\lim_{r\to\infty}\left[r^3\frac{j_1(qr)}{qr}\frac{\partial\phi(r)}{\partial r}-r^2\phi(r)\frac{\partial j_1(qr)}{\partial(qr)}\right]=\begin{cases}0 & \text{falls } -m_\pi^2<q^2<0\\ -\frac{4\pi}{3}\frac{C_\phi}{m_\pi^2} & \text{falls } q=\imath m_\pi\end{cases} \tag{J.46}$$

Zur Berechnung des Integrals in Gl. (J.43) zerlegen wir dieses in einen Anteil $\int_0^R dr\ldots$, welcher sich über das Intervall $0\le r<R$ erstreckt, und einen Anteil $\int_R^\infty\ldots$, der das Intervall $R\le r<\infty$ umfaßt und in welchem das Pion–Feld durch seine asymptotische Form (J.44) approximiert werden kann. Der erste Anteil muß numerisch bestimmt werden, der zweite kann auf analytischem Wege berechnet werden. Hierzu benutzen wir

$$\frac{j_1(\imath pr)}{\imath pr}=\frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left[\frac{\sinh pr}{pr}\right] \tag{J.47}$$

und finden nach partieller Integration:

$$\begin{aligned}-\frac{4\pi}{3}\left(m_\pi^2-p^2\right)\int_R^\infty dr\,r^3\frac{j_1(\imath pr)}{\imath pr}\phi(r)=&-\frac{4\pi}{3}\frac{C_\phi}{p^2}\left(m_\pi^2-p^2\right)\left[-f_p(R)+\lim_{r\to\infty}f_p(r)\right]-\\&-\frac{4\pi}{3}\frac{C_\phi}{p^2}\left[\lim_{r\to\infty}g_p(r)-g_p(R)\right]\end{aligned} \tag{J.48}$$

worin

$$f_p(r)=\frac{1}{m_\pi p}\left(1+\frac{1}{m-\pi r}\right)\left(\mathrm{e}^{-(m_\pi-p)r}-\mathrm{e}^{-(m_\pi+p)r}\right) \tag{J.48a}$$

$$g_p(r)=\frac{m_\pi-p}{p}\mathrm{e}^{-(m_\pi+p)r}-\frac{m_\pi+p}{p}\mathrm{e}^{-(m_\pi-p)r} \tag{J.48b}$$

Hieraus erhält man zusammen mit Gl. (J.45) für den Formfaktor,

$$\begin{aligned}\frac{g_{\pi NN}(-p^2)}{2M_N}=&-\frac{4\pi}{3}\left(m_\pi^2-p^2\right)\int_0^R dr\,r^3\left[\frac{\cosh pr}{(pr)^2}-\frac{\sinh pr}{(pr)^3}\right]\phi(r)+\\&+\frac{4\pi}{3}\frac{C_\phi}{m_\pi^2}\frac{m_\pi^2-p^2}{p^2}\mathrm{e}^{-m_\pi R}(1+m_\pi R)\frac{\sinh pr}{pr}-\\&-\frac{4\pi}{3}\frac{C_\phi}{p^2}\mathrm{e}^{-m_\pi R}\left(\cosh pR+\frac{m_\pi}{p}\sinh pR\right)\end{aligned} \tag{J.49}$$

falls $p<m_\pi$ ist, und

$$\frac{g_{\pi NN}(q^2=-m_\pi^2)}{2M_N}=-\frac{4\pi}{3}\frac{C_\phi}{m_\pi^2} \tag{J.50}$$

falls $p=m_\pi$ ist.

Anhang K. Isoskalare axiale Kopplungskonstante

In diesem Abschnitt sind die wesentlichsten Züge der Berechnung der isoskalaren axialen Kopplungskonstanten g_A^0 aufgeführt.

$$g_A^0 = \langle N\uparrow, q=0|\bar{q}(0)\gamma_3\gamma_5 q(0)|N\uparrow, q=0\rangle \tag{K.1}$$

Der Ansatzzustand, den wir verwenden, ist wie in den vorangegangenen Abschnitten der auf den Impuls $q = 0$ und Drehimpuls $J = T$ projizierte Hedgehogzustand $|\Psi_{hh}\rangle$. Die Drehung des Hedgehogzustands wird zweckmäßig im Isospinraum ausgeführt, da g_A^0 eine isoskalare Größe ist. Es ist also:

$$g_A^0 = \frac{\int d^3a d^3r d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\Omega)^* \langle U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh}|\bar{q}(r)\gamma_3\gamma_5 q(r)||U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle}{\int d^3a d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Omega)^* \langle \Psi_{hh}|U(a)R(\Omega)|\Psi_{hh}\rangle} \tag{K.2}$$

Die Auswertung des Matrixelementes im Zähler der Gl. $(K.2)$ erfolgt durch Einsetzen der Fouriertransformierten des Quarkspinors, Integration über den Raumwinkel Ω_p und Transformation der Integrationsvariablen $a \to T^{-1}(\Omega)a$ in Analogie zur Berechnung des Quarkanteils der Axialvektorkopplungskonstanten g_A. Man findet für den Überlapp schließlich:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} d\phi_a \int d^3r\, \langle U(-\frac{a}{2})\Psi_{hh}|\bar{q}(r)\gamma_3\gamma^5 q(r)|U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\rangle = \\
&= 3n_q^2(a)\mathcal{N}_q^2(\Omega)n_\pi(a)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)n_\sigma(a)\Big\{2\pi\langle\chi_{hh}|\sigma_3 R^{T=\frac{1}{2}}(\Omega)|\chi_{hh}\rangle\left[A_{q0}(a)+\frac{2}{3}A_{q2}(a)\right] - \\
&\qquad - 2A_{q2}(a)\sum_{i=1}^{3} C_{3i}(\Omega,s)\langle\chi_{hh}|\sigma_i R^{T=\frac{1}{2}}(\Omega)|\chi_{hh}\rangle\Big\}
\end{aligned} \tag{K.3}$$

Die Funktionen $A_{q0}(a)$ und $A_{q2}(a)$ sind durch die Gln. $(G.18a)$ und(b) definiert.

Die Berechnung der Integrale über die Eulerwinkel der Matrixelemente

$$\langle\chi_{hh}|\sigma_3 R^{T=\frac{1}{2}}(\Omega)|\chi_{hh}\rangle = \imath\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \tag{K.4a}$$

und

$$\sum_{i=1}^{3} C_{3i}(\Omega,s)\langle\chi_{hh}|\sigma_i R^{T=\frac{1}{2}}(\Omega)|\chi_{hh}\rangle = 2\pi\imath\, s^2\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \tag{K.4b}$$

ist mit Hilfe der in Anhang M aufgelisteten Integrale leicht möglich. Für g_A^0 erhält man somit also:

$$\begin{aligned}
g_A^0 = &\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a)n_\pi(a)n_\sigma(a)A_{q0}(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)-I_2(z)\right)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right)} - \\
&- \frac{4}{3}\frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a)n_\pi(a)n_\sigma(a)A_{q2}(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}P_2(s)\left(I_1(z)-I_2(z)\right)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\,\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z)+I_2(z)\right)}
\end{aligned} \tag{K.5}$$

Der Vollständigkeit halber listen wir noch die vom Verschiebungsvektor a abhängigen Funktionen auf.

$$A_{q0}(a) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dp\, p^2 j_0(pa)\left[\tilde{u}^2(p) - \frac{1}{3}\tilde{v}^2(p)\right] \tag{K.6a}$$

$$A_{q2}(a) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dp\, p^2 j_2(pa)\tilde{v}^2(p) \tag{K.6b}$$

$$n_\sigma(a) = \exp\left\{2\pi\int_0^\infty dp\, p^2\left(j_0(pa) - 1\right)\omega_\sigma(p)\eta^2(p)\right\} \tag{K.6c}$$

$$n_\pi(a) = \exp\left\{2\pi\int_0^\infty dp\, p^2\left(j_0(pa) - 1\right)\omega_\pi(p)A^2(p)\right\} \tag{K.6d}$$

$$n_q(a) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dp\, p^2 j_0(pa)\left(\tilde{u}^2(p) + \tilde{v}^2(p)\right) \tag{K.6e}$$

$$n(a) = n_q^3(a)n_\pi(a)n_\sigma(a) \tag{K.6f}$$

$$f_l^\pi(a) = 2\pi\int_0^\infty dp\, p^2 j_l(pa)\omega_\pi(p)A^2(p) \tag{K.6g}$$

$$z(a,s) = \frac{2}{3}\left(f_0^\pi(a) + \frac{1}{2}\left(3s^2 - 1\right)f_2^\pi(a)\right) \tag{K.6h}$$

$$P_2(s) = \frac{1}{2}\left(3s^2 - 1\right) \tag{K.6i}$$

worin

$$\tilde{u}(p) = \int dr\, r^2 j_0(pr)u(r) \tag{K.7a}$$

$$\tilde{v}(p) = \int dr\, r^2 j_1(pr)v(r) \tag{K.7b}$$

$$A(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int dr\, r^2 j_1(pr)\phi(r) \tag{K.7c}$$

$$\eta(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int dr\, r^2 j_0(pr)\sigma(r) \tag{K.7d}$$

ist.

Im Limes $a \to 0$ erhhält man für g_A^0:

$$g_A^0 = \frac{I_1(z_0) - I_2(z_0)}{I_1(z_0) + I_2(z_0)}A_{q0}(0) \tag{K.8}$$

mit

$$A_{q0}(0) = \int_0^\infty dr\, r^2\left(u^2(r) - \frac{1}{3}v^2(r)\right) \tag{K.9}$$

und

$$z_0 = \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty dp\, p^2\omega_\pi(p)A^2(p) \tag{K.10}$$

Anhang L. Hadronische Massendifferenz von Proton und Neutron

Die hadronische Massendifferenz zwischen Proton und Neutron bezogen auf den Massenunterschied zwischen u- und d-Quark ist durch

$$\frac{M_n - M_p}{\Delta m} = \langle\, p, q=0 | \int d^3r\, \bar{q}(r)\frac{\tau_3}{2}q(r)|p, q=0\,\rangle - \langle\, n, q=0 | \int d^3r\, \bar{q}(r)\frac{\tau_3}{2}q(r)|n, q=0\,\rangle \quad (L.1)$$

gegeben, worin

$$|p\,\rangle = \delta_{J,T}\delta_{-M,M_T} P^{T=\frac{1}{2}}_{M_T=\frac{1}{2},M_T=\frac{1}{2}}|\Psi_{hh}\,\rangle \quad (L.2a)$$

$$|n\,\rangle = \delta_{J,T}\delta_{-M,M_T} P^{T=\frac{1}{2}}_{M_T=-\frac{1}{2},M_T=-\frac{1}{2}}|\Psi_{hh}\,\rangle \quad (L.2b)$$

Da der Operator $\bar{q}\frac{\tau_3}{2}q$ im Spinraum skalar ist, führt man die Drehung des Hedgehogzustands am zweckmäßigsten im Orts-Spin-Raum aus. Es ist dann:

$$\frac{M_n - M_p}{\Delta m} = \frac{\int d^3a\, d^3r\, d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\Omega)^*\langle\, U(-\frac{a}{2}\Psi_{hh}|\bar{q}(r)\frac{\tau_3}{2}q(r)|U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\,\rangle}{\int d^3a d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Omega)^*\langle\, \Psi_{hh}|U(a)R(\Omega)|\Psi_{hh}\,\rangle} - \frac{\int d^3a\, d^3r\, d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Omega)^*\langle\, U(-\frac{a}{2}\Psi_{hh}|\bar{q}(r)\frac{\tau_3}{2}q(r)|U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\,\rangle}{\int d^3a d^3\Omega\, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Omega)^*\langle\, \Psi_{hh}|U(a)R(\Omega)|\Psi_{hh}\,\rangle} \quad (L.3)$$

Das Überlappintegral des Operators $\bar{q}\frac{\tau_3}{2}q$ wird in der üblichen Weise ermittelt. Man findet:

$$\int d^3r\, \langle\, U(-\frac{a}{2}\Psi_{hh}|\bar{q}(r)\frac{\tau_3}{2}q(r)|U(+\frac{a}{2})R(\Omega)\Psi_{hh}\,\rangle = \\ = 3n_q^2(a)\mathcal{N}_q^2(\Omega)n_\pi(a)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)n_\sigma(a)S_{q0}(a)\langle\, \chi_{hh}|\frac{\tau_3}{2}R^{J=\frac{1}{2}}(\Omega)|\chi_{hh}\,\rangle \quad (L.4)$$

worin

$$S_{q0}(a) = \frac{2}{\pi}\int dp\, p^2 j_0(pa)\left(\tilde{u}^2(p) - \tilde{v}^2(p)\right) \quad (L.5)$$

ist. Mit

$$\frac{1}{4\pi^2}\int d^3\Omega \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{M,M}(\Omega)^*\mathcal{N}_q^2(\Omega)\mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\langle\, \chi_{hh}|\frac{\tau_3}{2}R^{J=\frac{1}{2}}(\Omega)|\chi_{hh}\,\rangle = -\frac{M}{3}\frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z) - I_2(z)\right) \quad (L.6)$$

$M = \pm\frac{1}{2}$ hat man schließlich:

$$\frac{M_n - M_p}{\Delta m} = \frac{\int_0^\infty da\, a^2 n_q^2(a)n_\pi(a)n_\sigma(a)S_{q0}(a)\int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z) - I_2(z)\right)}{\int_0^\infty da\, a^2 n(a)\int_0^1 ds\, \frac{e^{-z}}{z}\left(I_1(z) + I_2(z)\right)} \quad (L.7)$$

woraus man im Limes $a \to 0$

$$\frac{M_n - M_p}{\Delta m} = \frac{I_1(z_0) - I_2(z_0)}{I_1(z_0) + I_2(z_0)}S_{q0}(0) \quad (L.8)$$

mit

$$S_{q0}(0) = \int_0^\infty dr\, r^2\left(u^2(r) - v^2(r)\right) \quad (L.9)$$

erhält.

Anhang M. Integration der Eulerwinkel

In diesem Abschnitt erläutern wir die analytische Integration der Eulerwinkel $\Omega = (\alpha, \beta, \gamma)$. Der

<u>Normüberlapp</u> beinhaltet ein Integral des Typs:

$$N_J(z) = \frac{2J+1}{8\pi^2} \int d^3\Omega\, \mathcal{D}^J_{JJ}(\Omega)^* \mathcal{N}^3_q(\Omega) \mathcal{N}_\pi(\Omega, z) \tag{M.1}$$

Die Funktionen $\mathcal{N}_\pi(\Omega, z)$, $\mathcal{N}_q(\Omega)$ und die Wigner-Funktion $\mathcal{D}^J_{JJ}(\Omega)$ sind durch

$$\mathcal{D}^J_{JJ}(\Omega)^* = \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2J} e^{i(\alpha+\gamma)J} \tag{M.2a}$$

$$\mathcal{N}_\pi(\Omega, z) = \exp\left\{2z\left(\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) - 1\right)\right\} \tag{M.2b}$$

$$\mathcal{N}_q(\Omega) = \cos\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \tag{M.2c}$$

$$z(a, s) = \frac{2}{3}\left(f_0^\pi(a) + P_2(s) f_2^\pi(a)\right) \tag{M.2d}$$

$$f_l^\pi(a) = 2\pi \int dp p^2\, \omega_\pi(p) j_l(pa) A^2(p) \tag{M.2e}$$

$$P_2(s) = \frac{1}{2}\left(3s^2 - 1\right) \tag{M.2f}$$

$$s = \cos\theta_a \tag{M.2g}$$

gegeben. $\int d^3\Omega \ldots$ ist eine abkürzende Schreibweise für:

$$\int d^3\Omega \ldots = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin\beta d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma \ldots \tag{M.2h}$$

Nach der Substitution der Variablen (α, β, γ)

$$\begin{aligned} \varphi &= \alpha + \gamma & 0 \le \varphi \le 4\pi \\ \alpha' &= \alpha & 0 \le \alpha' \le 2\pi \\ x &= \cos^2\frac{\beta}{2} & 0 \le x \le 1 \end{aligned} \tag{M.3}$$

mit der Jakobideterminante

$$d\alpha\,(d\beta \sin\beta)\, d\gamma = -2 d\alpha' dx d\varphi \tag{M.4}$$

können wir die Integration über den Winkel α sofort ausführen. Wir setzen noch

$$k = J - \frac{1}{2} \iff J = k + \frac{1}{2} \tag{M.5}$$

und definieren:

$$F_k(n, z) = \frac{k+1}{\pi} e^{-2z} \int_0^1 dx \int_0^{4\pi} d\varphi\, e^{2zx\cos^2\frac{\varphi}{2}} x^{n+k+1} \left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{2n+1} \cos\left(k\varphi + \frac{\varphi}{2}\right) \tag{M.6}$$

Falls $n = 1$ gesetzt wird, erhalten wir den Normüberlapp ($M.1$), d. h.

$$F_k(1, z) = N_J(z) \tag{M.7}$$

und den Normüberlapp für verschiedene Spinzustände $J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$, indem wir $k = 0, 1, \ldots$ setzen.

Um die Funktionen $F_k(n, z)$ zu ermitteln, leiten wir eine Rekursionsformel ab, die eine Beziehung zwischen $F_k(n, z)$ und $F_k(n+1, z)$ herstellt. Wir betrachten die Ableitung des Produkts $e^{2z} F_k(n, z)$ nach z und erhalten aus Gl. ($M.6$):

$$F_k(n+1, z) = \frac{1}{2}\left[2F_k(n, z) + \frac{d}{dz}F_k(n, z)\right] \tag{M.8}$$

Zur Berechnung des Normüberlapps $F_k(n, z)$ genügt also die Kenntnis von

$$F_k(0, z) = \frac{k+1}{\pi} e^{-2z} \int_0^1 dx \int_0^{4\pi} d\varphi\, e^{2zx\cos^2\frac{\varphi}{2}} x^{k+1} \cos\frac{\varphi}{2} \cos\left(k\varphi + \frac{\varphi}{2}\right) \tag{M.9}$$

Wir führen zunächst die trigonometrischen Umformungen

$$\cos\frac{\varphi}{2} \cos\left(k\varphi + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos(k\varphi) + \cos(k+1)\varphi\right] \tag{M.10a}$$

$$\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi) \tag{M.10b}$$

ein und erhalten:

$$F_k(0, z) = \frac{k+1}{2\pi} e^{-2z} \int_0^1 dx\, x^{k+1} e^{zx} \int_0^{4\pi} d\varphi\, e^{zx\cos\varphi} \left[\cos(k\varphi) + \cos(k+1)\varphi\right] \tag{M.11}$$

Die Integration des Winkels φ kann nun mit Hilfe von (AS:9.6.19)[a]

$$I_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{t\cos\vartheta} \cos(n\vartheta)\, d\vartheta \tag{M.12}$$

ausgeführt werden; worin $I_n(t)$ die modifizierten Besselfunktionen sind. Mit Hilfe der analytischen Fortsetzung (AS:9.6.30)

$$I_\nu\left(e^{i m\pi}\right) = e^{i m\nu\pi} I_\nu(t) \tag{M.13}$$

zeigt man für $\nu = n$ und $m = 1$, daß

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} d\varphi\, e^{t\cos\varphi} \cos(n\varphi) = I_n(t) \tag{M.14}$$

[a] Das Kürzel AS mit der nachfolgenden Formelnummerierung bezieht sich auf die entsprechend bezeichneten Formeln in Ref. 149.

Dies geschieht wie folgt:

$$\begin{aligned}
I_n(t) &= (-1)^n I_n(-t) \\
&= (-1)^n \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\vartheta\, \mathrm{e}^{-t\cos\vartheta} \cos(n\vartheta) \\
&= (-1)^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta\, \mathrm{e}^{-t\cos\vartheta} \cos(n\vartheta) \\
&= (-1)^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta\, \mathrm{e}^{-t\cos(\vartheta-\pi)} \cos(n\vartheta - n\pi) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta\, \mathrm{e}^{t\cos\vartheta} \cos(n\vartheta) \qquad (M.15)
\end{aligned}$$

Die wiederholte Anwendung der Schritte in Gl. $(M.15)$, jedoch mit der Substitution $\vartheta \to \vartheta - 2\pi$ im vorletzten Schritt liefert das Ergebnis $(M.14)$, und damit ist nun:

$$F_k(0,z) = 2(k+1)\mathrm{e}^{-2z} \int_0^1 dx\, x^{k+1} \mathrm{e}^{zx} \left(I_k(zx) + I_{k+1}(zx)\right) \qquad (M.16)$$

Die letzte Integration kann nach der Substitution

$$t = zx \qquad (M.17)$$

ebenfalls analytisch ausgeführt werden.

$$F_k(0,z) = 2(k+1)\mathrm{e}^{-2z} z^{-(k+2)} \int_0^z dt\, t^{k+1} \mathrm{e}^t \left(I_k(t) + I_{k+1}(t)\right) \qquad (M.18)$$

Wir setzen in Tabelle (AS:11.3.2) $a = -1$ und $b = 1$ sowie $p = -1$ in Formel (AS:11.3.1) und erhalten:

$$F_k(0,z) = 2(k+1)\mathrm{e}^{-2z} z^{-(k+2)} \left(g_{k+1,k+1}(z) + g_{k+1,k}(z)\right) \qquad (M.19)$$

Mit (AS:11.3.3)

$$g_{k+1,k}(z) = \mathrm{e}^z z^{k+1} I_k(z) - (2k+1) g_{k,k}(z) - g_{k+1,k+1}(z) \qquad (M.20)$$

und (AS:11.3.12)

$$\int_0^z \mathrm{e}^t t^k I_k(t) dt = \frac{\mathrm{e}^z z^{k+1}}{2k+1} \left(I_k(z) - I_{k+1}(z)\right) \qquad (M.21)$$

ergibt sich schließlich:

$$F_k(0,z) = 2(k+1)\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z} I_{k+1}(z) \qquad (M.22)$$

Setzen wir dies in die Gl. $(M.8)$ ein und benutzen die Rekursionsbeziehungen (AS:9.6.26) der modifizierten Besselfunktionen, so erhalten wir für die Ableitung

$$\frac{d}{dz} F_k(0,z) = \frac{1}{2}\Big(F_{k-1}(0,z) - 2F_k(0,z) + F_{k+1}(0,z)\Big) \qquad (M.23)$$

und für den Normüberlapp:

$$N_J(z) = F_k(1,z) = \frac{1}{2}\frac{e^{-z}}{z}\Big[kI_k(z) + 2(k+1)I_{k+1}(z) + (k+2)I_{k+2}(z)\Big] \qquad (M.24)$$

oder auch

$$F_k(1,z) = \frac{1}{4}\Big(F_{k-1}(0,z) + 2F_k(0,z) + F_{k+1}(0,z)\Big) \qquad (M.25)$$

Im nächsten Abschnitt wollen wir Überlappintegrale betrachten, die bei der Berechnung der projizierten Energie auftreten. Dies sind

<u>Integrale des Typs</u>

$$F_k^m(z) = \frac{2J+1}{8\pi^2}\int d^3\Omega\, \mathcal{D}^J_{JJ}(\Omega)^*\,(Sp\mathcal{R}(\Omega))^m\, \mathcal{N}_\pi(\Omega,z)\mathcal{N}_q^3(\Omega) \qquad (M.26)$$

Wir drücken den Normüberlapp durch die Spur der Drehmatrix $\mathcal{R}(\Omega)$ aus (Gl. $(N.6b)$) und schreiben

$$F_k^m(z) = \frac{2J+1}{8\pi^2}\int d^3\Omega\, \mathcal{D}^J_{JJ}(\Omega)^*\,(Sp\mathcal{R}(\Omega))^m \exp\left\{\frac{z}{2}\,(Sp\mathcal{R}(\Omega)-3)\right\}\left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right)^3 \qquad (M.27)$$

Falls $m = 0$ ist, so erhalten wir den Normüberlapp, es ist also:

$$F_k^0(z) = F_k(0,z) \qquad (M.28)$$

Ähnlich wie im letzten Abschnitt (Gl. $(M.8)$) erhalten wir aus der Ableitung $\frac{d}{dz}F_k^m(z)$ eine Rekursionsbeziehung zwischen $F_k^{m+1}(z)$ und $F_k^m(z)$.

$$F_k^{m+1}(z) = 2\frac{d}{dz}F_k^m(z) + 3F_k^m(z) \qquad (M.29)$$

Zur Berechnung der Integrale $F_k^m(z)$ für beliebige Werte von m ist die Kenntnis der Funktion $F_k(0,z)$ (Gl. $(M.22)$) sowie ihre Ableitungen, die sich durch wiederholte Anwendung der Gl. $(M.23)$ ergeben, ausreichend. Wir wollen hier noch die Fälle $m = 1$ und $m = 2$ betrachten.

$$F_k^0(z) = \frac{1}{4}\Big(\qquad F_{k-1} + 2F_k + F_{k+1}\qquad\Big) \qquad (M.30a)$$

$$F_k^1(z) = \frac{1}{4}\Big(\qquad F_{k-2} + 3F_{k-1} + 4F_k + 3F_{k+1} + F_{k+2}\qquad\Big) \qquad (M.30b)$$

$$F_k^2(z) = \frac{1}{4}\Big(F_{k-3} + 4F_{k-2} + 8F_{k-1} + 10F_k + 8F_{k+1} + 4F_{k+2} + F_{k-3}\Big) \qquad (M.30c)$$

Der Kürze wegen haben wir die Argumente der Funktionen $F_k(0,z)$ in den Gln. $(M.30a\text{–}c)$ weggelassen.

Abschließend betrachten wir noch einige Integrale der Eulerwinkel, die bei der Auswertung von Matrixelementen nukleonischer Observabler auftreten. Diese sind

<u>Integrale des Typs</u>

$$K_l(m,z) = \frac{1}{4\pi}\int_0^1 dx \int_0^{4\pi} d\varphi \, \exp\left\{2z\left(x\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1\right)\right\} \frac{x^{l+m}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{2m}}{x\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1} \qquad (M.31)$$

worin l die Werte $l = 0, 1, 2, \ldots$ und m die Werte $m = 1, 2, \ldots$ annehmen können. Wir definieren die Funktion

$$G_l(m,z) = \frac{d}{dz}K_l(m,z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 dx \int_0^{4\pi} d\varphi \, x^{l+m}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{2m} \exp\left\{2z\left(x\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1\right)\right\} \qquad (M.32)$$

und geben die zu Gl. $(M.8)$ analoge Rekursionsformel an

$$G_l(m+1,z) = \frac{1}{2}\left[2G_l(m,z) + \frac{d}{dz}G_l(m,z)\right] \qquad (M.33)$$

Die Funktionen $G_l(m,z)$ lassen sich mit den gleichen Methoden berechnen, wie wir sie für die Berechnung des Normüberlapps entwickelt haben. Die $K_l(m,z)$ sind dann durch das Integral

$$K_l(m,z) = \int^z dt \, G_l(m,t) \qquad (M.34)$$

bis auf eine Integrationskonstante gegeben, die im weiteren Verlauf der Rechnung aber nicht mehr benötigt wird. Das Integral $(M.34)$ mußfür die verschiedenen Werte von $l = 0, 1, 2, \ldots$ jedoch nur jeweils einmal für $m = 1$ berechnet werden. Dies ist mit Hilfe von (AS:11.3.1-4) und (AS:11.3.7-8) leicht möglich. Für Werte $m > 1$ kann die aus Gl. $(M.33)$ folgende Rekursion

$$K_l(m+1,z) = K_l(m,z) + \frac{1}{2}G_l(m,z) \qquad (M.35)$$

benutzt werden. Die Funktionen $K_l(m,z)$ und $G_l(m,z)$ sind im folgenden für einige Kombinationen von $l = 0, 1, 2$ und $m = 1, 2, 3, 4$ zusammengestellt.

$$G_0(1,z) = \frac{e^{-z}}{z} I_1(z) \qquad (M.36a)$$

$$G_0(2,z) = \frac{1}{2}\frac{e^{-z}}{z}\Big(I_1(z) + I_2(z)\Big) \qquad (M.36b)$$

$$G_0(3,z) = \frac{1}{16}\frac{e^{-z}}{z}\Big(5I_1(z) + 8I_2(z) + 3I_3(z)\Big) \qquad (M.36c)$$

$$G_1(1,z) = \frac{1}{3}\frac{e^{-z}}{z}\Big(2I_1(z) + I_2(z)\Big) \qquad (M.36d)$$

$$G_1(2,z) = \frac{1}{8}\frac{e^{-z}}{z}\Big(3I_1(z) + 4I_2(z) + I_3(z)\Big) \qquad (M.36e)$$

$$G_1(3,z) = \frac{1}{24}\frac{e^{-z}}{z}\Big(6I_1(z) + 11I_2(z) + 6I_3(z) + I_4(z)\Big) \qquad (M.36f)$$

$$G_2(1,z) = \frac{1}{10}\frac{e^{-z}}{z}\Big(5I_1(z) + 4I_2(z) + I_3(z)\Big) \qquad (M.36g)$$

$$K_0(1,z) = -\mathrm{e}^{-z}\Big(I_0(z) + I_1(z)\Big) \tag{M.37a}$$

$$K_0(2,z) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z} I_1(z) - \mathrm{e}^{-z}\Big(I_0(z) + I_1(z)\Big) \tag{M.37b}$$

$$K_0(3,z) = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z}\Big(3I_1(z) + I_2(z)\Big) - \mathrm{e}^{-z}\Big(I_0(z) + I_1(z)\Big) \tag{M.37c}$$

$$K_0(4,z) = \frac{1}{32}\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z}\Big(29I_1(z) + 16I_2(z) + 3I_3(z)\Big) - \mathrm{e}^{-z}\Big(I_0(z) + I_1(z)\Big) \tag{M.37d}$$

$$K_1(1,z) = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z} I_1(z) - \mathrm{e}^{-z}\Big(I_0(z) + I_1(z)\Big) \tag{M.37e}$$

$$K_1(2,z) = \frac{1}{6}\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z}\Big(4I_1(z) + I_2(z)\Big) - \mathrm{e}^{-z}\Big(I_0(z) + I_1(z)\Big) \tag{M.37f}$$

$$K_1(3,z) = \frac{1}{48}\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z}\Big(41I_1(z) + 20I_2(z) + 3I_3(z)\Big) - \mathrm{e}^{-z}\Big(I_0(z) + I_1(z)\Big) \tag{M.37g}$$

$$K_1(4,z) = \frac{1}{48}\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z}\Big(47I_1(z) + 31I_2(z) + 9I_3(z) + I_4(z)\Big) - \mathrm{e}^{-z}\Big(I_0(z) + I_1(z)\Big) \tag{M.37h}$$

$$K_2(1,z) = \frac{2}{15}\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z}\Big(4I_1(z) + I_2(z)\Big) - \mathrm{e}^{-z}\Big(I_0(z) + I_1(z)\Big) \tag{M.37i}$$

$$K_2(2,z) = \frac{1}{60}\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z}\Big(47I_1(z) + 20I_2(z) + 3I_3(z)\Big) - \mathrm{e}^{-z}\Big(I_0(z) + I_1(z)\Big) \tag{M.37j}$$

Anhang N. Transformation der Drehmatrix

Bei der Berechnung des Normüberlapps und auch anderer Überlappintegrale treten Bilinearformen der Art

$$\hat{a}\mathcal{R}(\Omega)\hat{a} = \sum_{i,j} \hat{a}_i \mathcal{R}(\Omega)\hat{a}_j \tag{N.1}$$

mit

$$\mathcal{R}(\Omega) = \begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\beta\cos\alpha - \sin\alpha\sin\gamma & -\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha & \sin\beta\cos\alpha \\ \cos\gamma\cos\beta\sin\alpha + \sin\gamma\cos\alpha & -\sin\gamma\cos\beta\sin\alpha + \cos\gamma\cos\alpha & \sin\beta\sin\alpha \\ -\cos\gamma\sin\beta & \sin\gamma\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \tag{N.2}$$

im Exponenten des Integranden und im Integranden selbst auf. Die hier betrachteten Integrale des Verschiebungsvektors $\boldsymbol{a}$ und der Eulerwinkel Ω lassen sich allgemein in der Form

$$\int d^3\boldsymbol{a} \int d^3\Omega\, F(\hat{\boldsymbol{a}})G(\hat{\boldsymbol{a}}^T\mathcal{R}(\Omega)\hat{\boldsymbol{a}})f(|\boldsymbol{a}|) \tag{N.3}$$

schreiben. Eine direkte Integration der Eulerwinkel $\Omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ ist mit elementaren Methoden nicht mehr möglich[a]. Wir führen deshalb eine

<u>**Ähnlichkeitstransformation der Drehmatrix**</u> $\mathcal{R}(\Omega)$ auf ein Koordinatensystem durch, in welchem die Drehachse mit der z-Achse zusammenfällt. Eine solche Ähnlichkeitsabbildung (in unserem Fall ist es eine Drehung $T(\Omega')$ kann für jede orthogonale Matrix konstruiert werden (vgl. Goldstein: Klassische Mechanik S. 136ff). Es ist daher:

$$T(\Omega')\mathcal{R}(\Omega)T^{-1}(\Omega') = \mathcal{R}_z(\phi) \tag{N.4}$$

worin

$$\mathcal{R}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{N.5}$$

eine Drehung um die z-Achse mit Winkel ϕ beschreibt. Da die Spur unter Drehungen invariant ist, läßt sich der Drehwinkel ϕ aus der Forderung

$$Sp\mathcal{R}(\Omega) = Sp\mathcal{R}_z(\phi) \tag{N.6}$$

bestimmen. Wir erhalten:

$$\cos\phi = \frac{1}{2}\left(Sp\mathcal{R}(\Omega) - 1\right) \tag{N.6a}$$

$$Sp\mathcal{R}(\Omega) = 4\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) - 1 \tag{N.6b}$$

$$\cos^2\frac{\phi}{2} = \cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \tag{N.6c}$$

---

[a] Die Integration der Eulerwinkel wird in Anhang M behandelt. Funktionen, die nur von den Eulerwinkeln Ω abhängen, sind daher hier nicht brücksichtigt.

Die Eulerwinkel β' und γ' (α' wird nicht benötigt) der Transformationsmatrix $T(\alpha', \beta', \gamma')$ lassen sich durch einen Vergleich der Matrixelemente aus der Umkehrung der Gl. (N.4) ermitteln.

$$\mathcal{R}(\Omega) = T^{-1}(\Omega')\mathcal{R}_z(\phi)T(\Omega') \tag{N.7}$$

Es ergibt sich:

$$\sin^2\beta' = \frac{\sin^2\frac{\beta}{2}}{1-\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} \tag{N.8a}$$

$$\cos^2\beta' = \frac{\cos^2\frac{\beta}{2}\sin^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{1-\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} \tag{N.8b}$$

$$\cos\beta'\sin\beta' = \frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{1-\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} \tag{N.8c}$$

$$\sin\gamma' = \cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) \tag{N.8d}$$

$$\cos\gamma' = \sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) \tag{N.8e}$$

Da in allen Überlappintegralen nur geradzahlige Potenzen der trigonometrischen Funktionen der Eulerwinkel Ω' auftreten, sind hier nur die positiven Wurzeln dieser Funktionen berücksichtigt (Gln. (N.8c–e)).

Wie in Gl. (N.3) bereits angedeudet erscheinen bei der Auswertung der Überlappintegrale nicht nur Bilinearformen des Typs (N.1) im Integranden, sondern auch andere Funktionen $F(\hat{\boldsymbol{a}})$ des Verschiebungsvektors $\boldsymbol{a}$. Wir sind nun in der Lage sowohl die Bilinearform (N.1) als auch die Funktionen $F(\hat{\boldsymbol{a}})$ durch den Satz von Eulerwinkeln (α, β, γ) und die sphärischen Koordinaten von

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a\sin\theta_{\boldsymbol{a}}\cos\phi_{\boldsymbol{a}} \\ a\sin\theta_{\boldsymbol{a}}\sin\phi_{\boldsymbol{a}} \\ a\cos\theta_{\boldsymbol{a}} \end{pmatrix} \tag{N.9}$$

auszudrücken. Die Koordinatentransformation

$$\boldsymbol{a} \rightarrow T^{-1}(\Omega')\boldsymbol{a} \tag{N.10}$$

im Integral $\int d^3\boldsymbol{a}\ldots$ führt die Bilinearform (N.1) über in

$$\left(T^T(\Omega')\hat{\boldsymbol{a}}\right)^T \mathcal{R}(\Omega)\left(T(\Omega')\hat{\boldsymbol{a}}\right) = \hat{\boldsymbol{a}}^T\mathcal{R}_z(\phi)\hat{\boldsymbol{a}} = P_2(s) + \frac{1}{2}Sp\mathcal{R}(\Omega)\left(1-s^2\right) \tag{N.11}$$

worin $s = \cos\theta_{\boldsymbol{a}}$ der Kosinus des Polarwinkels von $\boldsymbol{a}$ und $P_2(s)$ das Legendre-Polynom 2.Ordnung ist.

$$P_2(s) = \frac{1}{2}\left(3s^2-1\right) \tag{N.12}$$

Das Integral ($N.3$) lautet nun

$$\int d^3a \int d^3\Omega\, F(T^{-1}(\Omega')a) G(\hat{a}\mathcal{R}_z(\phi)\hat{a}) f(|a|) \tag{$N.13$}$$

wobei Ω' und ϕ Funktionen der Eulerwinkel $\Omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ sind. (Gln. ($N.8a$–e) und ($N.6a$–c)). Da G vom Azimutwinkel ϕ_a nicht abhängt, können wir die

Integrale der Azimutwinkel $\int_0^{2\pi} d\phi_a\, F(T^{-1}(\Omega')a)$ für den symmetrischen Ausdruck

$$C_{ij}(\Omega, s) = \sum_{kl} \int_0^{2\pi} d\phi_a\, T^{-1}_{ik}(\Omega')\hat{a}_k T^{-1}_{jl}(\Omega')\hat{a}_l \tag{$N.14$}$$

angeben. Wir setzen

$$\begin{aligned}\left[T^{-1}(\Omega')a\right]_1 &= (\cos\gamma'\cos\beta'\cos\alpha' - \sin\alpha'\sin\gamma')\hat{a}_1 \\ &\quad + (\cos\gamma'\cos\beta'\sin\alpha' + \sin\gamma'\cos\alpha')\hat{a}_2 - \cos\gamma'\sin\beta'\hat{a}_3 \qquad (N.15a)\\ \left[T^{-1}(\Omega')a\right]_2 &= (-\sin\gamma'\cos\beta'\cos\alpha' - \cos\gamma'\sin\alpha')\hat{a}_1 \\ &\quad + (-\sin\gamma'\cos\beta'\sin\alpha' + \cos\gamma'\cos\alpha')\hat{a}_2 + \sin\gamma'\sin\beta'\hat{a}_3 \qquad (N.15b)\\ \left[T^{-1}(\Omega')a\right]_3 &= \sin\beta'\cos\alpha'\hat{a}_1 + \sin\beta'\sin\alpha'\hat{a}_2 + \cos\beta'\hat{a}_3 \qquad (N.15c)\end{aligned}$$

in Gl. ($N.14$) ein und erhalten

$$C_{11}(\Omega, s) = 2\pi\left[s^2 - P_2(s)\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\sin^2\frac{\beta}{2}}{1-\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}\right)\right] \tag{$N.16a$}$$

$$C_{12}(\Omega, s) = -2\pi P_2(s)\frac{\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\sin^2\frac{\beta}{2}}{1-\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} \tag{$N.16b$}$$

$$C_{13}(\Omega, s) = -2\pi P_2(s)\frac{\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{1-\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} \tag{$N.16c$}$$

$$C_{22}(\Omega, s) = 2\pi\left[s^2 - P_2(s)\left(1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\sin^2\frac{\beta}{2}}{1-\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}\right)\right] \tag{$N.16d$}$$

$$C_{23}(\Omega, s) = 2\pi P_2(s)\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{1-\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} \tag{$N.16e$}$$

$$C_{33}(\Omega, s) = 2\pi\left[s^2 - P_2(s)\frac{\sin^2\frac{\beta}{2}}{1-\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}\right] \tag{$N.16f$}$$

Alle weiteren Integrale des Typs ($N.3$), die bei der Berechnung von Überläppen der Statischen Observablen auftreten, lassen sich nun durch die Matrixelemente $C_{ij}(\Omega, s)$ ausdrücken.

Anhang O. Spin-Flavour-Matrixelemente

Werten wir Matrixelemente der Quark-Feldoperatoren zwischen Hedgehog-Zuständen aus, so treten in den Überlappintegralen Matrixelemente von Funktionen des Spin- und Isospinoperators zwischen den gedrehten Spin-Flavour-Wellenfunktionen der Quarks auf. Diese lassen sich allgemein in der Form

$$\langle \chi_{hh} | \vec{F}(\sigma, \vec{\tau}) | R(\Omega) \chi_{hh} \rangle \tag{O.1}$$

wobei

$$|\chi_{hh}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|u \downarrow\rangle - |d \uparrow\rangle \right) \tag{O.2}$$

schreiben, und sollen Gegenstand des vorliegenden Abschnitts für verschiedene Funktionen $\vec{F}(\sigma, \vec{\tau})$ sein. Der gedrehte Hedgehog-Zustand $R(\Omega)|\chi_{hh}\rangle$ läßt sich leicht aus der Darstellung des Drehoperators (Wigner-Funktion) für Spin $J = \frac{1}{2}$ (Isospin $T = \frac{1}{2}$) ermitteln[1].

$$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\alpha}{2}} \cos\frac{\beta}{2} e^{-i\frac{\gamma}{2}} & -e^{-i\frac{\alpha}{2}} \sin\frac{\beta}{2} e^{i\frac{\gamma}{2}} \\ e^{i\frac{\alpha}{2}} \sin\frac{\beta}{2} e^{-i\frac{\gamma}{2}} & e^{i\frac{\alpha}{2}} \cos\frac{\beta}{2} e^{i\frac{\gamma}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b^* & a^* \end{pmatrix} \tag{O.3}$$

Der im Spinraum bzw. Isospinraum gedrehte Spin-Flavouranteil des Hedgehog-Zustands lautet damit:

$$R^{J=\frac{1}{2}}(\Omega)|\chi_{hh}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-b|u \uparrow\rangle + a^*|u \downarrow\rangle - a|d \uparrow\rangle - b^*|d \downarrow\rangle \right) \tag{O.4a}$$

$$R^{T=\frac{1}{2}}(\Omega)|\chi_{hh}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a|u \downarrow\rangle + b^*|d \downarrow\rangle + b|u \uparrow\rangle - a^*|d \uparrow\rangle \right) \tag{O.4b}$$

Wir benötigen noch die Zustände, die sich aus der Anwendung der kartesischen Komponenten des Spin- (Isospin-) Operators, dargestellt durch die Pauli–Matrizen, auf die Basiszustände $|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$ ergeben,

$$\sigma_k |\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle = \begin{cases} |\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\rangle & \text{falls } k = 1 \\ \pm i |\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\rangle & \text{falls } k = 2 \\ \pm |\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle & \text{falls } k = 3 \end{cases} \tag{O.5}$$

und sind dann in der Lage die auftretenden Matrixelemente ($O.1$) anzugeben.

Wir beginnen mit dem Normüberlapp. Aus den Gln. ($O.2$) und ($O.4a$) oder ($O.4b$) erhält man sofort:

$$\langle \chi_{hh} | R(\Omega) | \chi_{hh} \rangle = \Re e \left\{ e^{-i\frac{\alpha}{2}} \cos\frac{\beta}{2} e^{-i\frac{\gamma}{2}} \right\} = \cos\frac{\beta}{2} \cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \tag{O.6}$$

Es ist hier unerheblich, ob wir die Drehung im Spinraum (Gl. ($O.4a$)) oder Isospinraum (Gl. ($O.4b$) betrachten, da die Ergebnisse identisch sind.

---

[1] Die Matrix $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ ist so angeordnet, daß aufeinanderfolgende Zeilen den Werten $m = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ entsprechen; für die Spalten gilt die gleiche Reihenfolge von links nach rechts.

Aus den Gln. ($O.4b$) (Drehung im Isospinraum) und ($O.5$) ergibt sich nun sofort:

$$\langle \chi_{hh}|\sigma_i R^{T=\frac{1}{2}}(\Omega)|\chi_{hh}\rangle = \begin{cases} -\imath \sin\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) & \text{falls } i=1 \\ \imath \sin\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) & \text{falls } i=2 \\ \imath \cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) & \text{falls } i=3 \end{cases} \tag{O.7}$$

Aus

$$\begin{aligned} \tau^1_\pm &= \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 \pm \imath\tau_2) \\ \tau^1_0 &= \tau_3 \end{aligned} \tag{O.8}$$

sowie

$$\begin{aligned} T_\pm|T,M\rangle &= \sqrt{T(T+1)-M(M\pm 1)}\,|T,M\pm 1\rangle \\ T_3\,|T,M\rangle &= M\,|T,M\rangle \end{aligned} \tag{O.9}$$

lassen sich nacheinander die Erwartungswerte von $\frac{\tau^1_q}{2}\sigma_i R^{T=\frac{1}{2}}$ im Hedgehogzustand berechnen. Man hat:

$$\langle \chi_{hh}|\frac{\tau^1_q}{2}\sigma_1 R^{T=\frac{1}{2}}(\Omega)|\chi_{hh}\rangle = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4}\cos\frac{\beta}{2}e^{\imath\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} & \text{falls } q=+1 \\ \frac{1}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) & \text{falls } q=0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\frac{\beta}{2}e^{-\imath\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} & \text{falls } q=+1 \end{cases} \tag{O.10a}$$

$$\langle \chi_{hh}|\frac{\tau^1_q}{2}\sigma_2 R^{T=\frac{1}{2}}(\Omega)|\chi_{hh}\rangle = \begin{cases} \imath\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\frac{\beta}{2}e^{\imath\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} & \text{falls } q=+1 \\ \frac{1}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) & \text{falls } q=0 \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\frac{\beta}{2}e^{-\imath\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} & \text{falls } q=+1 \end{cases} \tag{O.10b}$$

$$\langle \chi_{hh}|\frac{\tau^1_q}{2}\sigma_3 R^{T=\frac{1}{2}}(\Omega)|\chi_{hh}\rangle = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4}\sin\frac{\beta}{2}e^{\imath\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)} & \text{falls } q=+1 \\ -\frac{1}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) & \text{falls } q=0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}\sin\frac{\beta}{2}e^{-\imath\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)} & \text{falls } q=+1 \end{cases} \tag{O.10c}$$

Mit Hilfe der Gln. ($O.7$) und ($O.10a$–c), der Antikommutatorrelationen der σ–Matrizen

$$\{\sigma_i,\sigma_j\} = 2\delta_{ij} \tag{O.11}$$

und

$$\imath\sigma_i = \sigma_j\sigma_k \qquad i,j,k \quad \textit{zyklisch} \tag{O.12}$$

erhalten wir für die Matrixelemente

$$\sum_{jk}\varepsilon_{3jk}\langle \chi_{hh}|\sigma_j\sigma_k R^{T=\frac{1}{2}}(\Omega)|\chi_{hh}\rangle = 2\imath\langle \chi_{hh}|\sigma_3 R^{T=\frac{1}{2}}(\Omega)|\chi_{hh}\rangle = -2\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \tag{O.13}$$

und

$$\sum_{jk} \varepsilon_{3jk} \langle \chi_{hh} | \frac{\tau_q^1}{2} \sigma_j \sigma_k R^{T=\frac{1}{2}}(\Omega) | \chi_{hh} \rangle = \begin{cases} \imath \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\beta}{2} \mathrm{e}^{\imath \left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)} & \text{falls } q = +1 \\ -\imath \cos \frac{\beta}{2} \cos \left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) & \text{falls } q = 0 \\ -\imath \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\beta}{2} \mathrm{e}^{-\imath \left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)} & \text{falls } q = +1 \end{cases} \tag{O.14}$$

Wir benötigen noch die Matrixelemente

$$\sum_{ijk} \varepsilon_{3jk} C_{ij}(\Omega, s) \langle \chi_{hh} | \sigma_i \sigma_k R^{T=\frac{1}{2}}(\Omega) | \chi_{hh} \rangle = -2\pi \cos \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \left(1 - s^2\right) \tag{O.15}$$

und

$$\sum_{ijk} \varepsilon_{3jk} C_{ij}(\Omega, s) \langle \chi_{hh} | \frac{\tau_q^1}{2} \sigma_i \sigma_k R^{T=\frac{1}{2}}(\Omega) | \chi_{hh} \rangle =$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \imath \sin \frac{\beta}{2} \mathrm{e}^{\imath \left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + s^2\right) - \imath P_2(s) \frac{\cos^2 \frac{\beta}{2} \sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{1 - \cos^2 \frac{\beta}{2} \cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} \right\} & \text{falls } q = +1 \\ -\imath \pi \cos \frac{\beta}{2} \cos \left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \left\{ \left(1 - s^2\right) + P_2(s) \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{1 - \cos^2 \frac{\beta}{2} \cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} \right\} & \text{falls } q = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi \imath \sin \frac{\beta}{2} \mathrm{e}^{-\imath \left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + s^2\right) + \imath P_2(s) \frac{\cos^2 \frac{\beta}{2} \sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{1 - \cos^2 \frac{\beta}{2} \cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} \right\} & \text{falls } q = -1 \end{cases} \tag{O.16}$$

die mit den in Anhang N (Gl. ($N.16a$–f)) angegebenen Koeffizienten $C_{ij}(\Omega, s)$ berechnet sind.

Anhang P. Einige Fourierintegrale

Bei der Berechnung der Überlappintegrale treten verschiedentlich Integrale des Typs

$$F_n(q) = \int d^3r\, \hat{r}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \hat{r}_{i_n} f(r) e^{\imath \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} = \int dr r^2 f(r) \int d\Omega_r\, \hat{r}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \hat{r}_{i_n} e^{\imath \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \qquad (P.1)$$

auf, worin $r = |\boldsymbol{r}|$ ist. Wir wollen an dieser Stelle die Integration des Raumwinkels $\Omega = (\theta_r, \phi_r)$ in Gl. $(P.1)$ behandeln. Das obige Raumwinkelintegral kann in der folgenden Weise umgeschrieben werden.

$$\int d\Omega_r\, \hat{r}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \hat{r}_{i_n} e^{\imath \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} = \left(-\frac{\imath}{r}\right)^n \frac{\partial^n}{\partial q_{i_1} \ldots \partial q_{i_n}} \int d\Omega_r\, e^{\imath \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} = 4\pi \left(-\frac{\imath}{r}\right)^n \frac{\partial^n}{\partial q_{i_1} \ldots \partial q_{i_n}} j_0(qr) \quad (P.2)$$

Mit den Rekursionsformeln für die sphärischen Besselfunktionen erhält man nun nacheinander für $n = 0, (1), 4$:

$$\int d\Omega_r\, e^{\imath \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} = 4\pi j_0(qr) \qquad (P.3a)$$

$$\int d\Omega_r\, \hat{r}_i e^{\imath \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} = 4\pi i \hat{q}_i j_1(qr) \qquad (P.3b)$$

$$\int d\Omega_r\, \hat{r}_i \hat{r}_j e^{\imath \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} = \frac{4\pi}{3}\Big[\delta_{ij} j_0(qr) + j_2(qr)\big(\delta_{ij} - 3\hat{q}_i\hat{q}_j\big)\Big] \qquad (P.3c)$$

$$\int d\Omega_r\, \hat{r}_i \hat{r}_j \hat{r}_k e^{\imath \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} = \frac{4\pi\imath}{5}\Big[\big(j_0(qr) + j_3(qr)\big)\big(\hat{q}_i\delta_{jk} + \hat{q}_j\delta_{ik} + \hat{q}_k\delta_{ij}\big) - 5 j_3(qr)\hat{q}_i\hat{q}_j\hat{q}_k\Big] \qquad (P.3d)$$

$$\begin{aligned}\int d\Omega_r\, \hat{r}_i \hat{r}_j \hat{r}_k \hat{r}_l e^{\imath \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} = \frac{4\pi}{105}\Big[&\big(7j_0(qr) + 10 j_2(qr) + 3 j_4(qr)\big)\big(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}\big) \\ &- 15\big(j_2(qr) + j_4(qr)\big)\big(\hat{q}_i\hat{q}_l\delta_{jk} + \hat{q}_i\hat{q}_j\delta_{kl} + \hat{q}_j\hat{q}_l\delta_{ik} + \hat{q}_i\hat{q}_k\delta_{jl} + \hat{q}_k\hat{q}_l\delta_{ij} + \hat{q}_j\hat{q}_k\delta_{il}\big) \\ &+ 105 j_4(qr)\hat{q}_i\hat{q}_j\hat{q}_k\hat{q}_l\Big]\end{aligned} \qquad (P.3e)$$

LITERATURVERZEICHNIS

1. W. Marciano und H. Pagels, *Phys. Rep.* **36** (1978) 137;
   H. Fritzsch, M. Gell-mann und H. Leutwyler, *Phys. Lett.* **47 B** (1973) 365;
   S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973) 494

2. H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1346;
   D. J. Gross und F. Wilzcek, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1343, *Phys. Rev.* **D 8** (1973) 3633

3. G. t'Hooft, *Nucl. Phys.* **B 138** (1978) 1, *Nucl. Phys.* **B 153** (1979) 141

4. S. Coleman und E. Witten, *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 100;
   I.Bars, *Phys. Lett.* **109 B** (1982) 73

5. E. V. Shuryak, *Phys. Rep.* **115** (1984) 151

6. J. Goldstone, *Nuov. Cim.* **19** (1961) 154;
   J. Goldstone, A. Salam und S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127** (1961) 965

7. M. Creutz, L. Jakobs und C. Rebbi, *Phys. Rep.* **95 C** (1983) 201;
   M. Creutz: *Quarks, Gluons und Lattices*,
   Cambridge University Press, Cambridge 1983

8. A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn und V. F. Weisskopf,
   Phys. Rev. **D 9** (1974) 3471;
   A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson und C. B. Thorn, *Phys. Rev.* **D 10** (1974) 2599

9. T. De Grand, R. L. Jaffe, K. Johnson und J. Kiskis, *Phys. Rev.* **D 12** (1975) 2060

10. A. W. Thomas, *Adv. in Nucl. Phys.* **13** (1983) 1

11. J. F. Donoghue und K. Johnson, *Phys. Rev.* **D 21** (1980) 1975

12. C. E. Carlson, T. H. Hanson und C. Peterson, *Phys. Rev.* **D 27** (1983) 1556

13. K. F. Liu und C. W. Wong, *Phys. Lett.* **113 B** (1982) 1;
    C. W. Wong, *Phys. Rev.* **D 24** (1981) 1416;
    I. F. Lan und C. W. Wong, *Nucl. Phys.* **A 423** (1984) 397

14. S. Lee, K. J. Kong und Il.-T-Cheon, *Phys. Lett.* **202 B** (1988) 21

15. R. Tegen, M. Schedl und W. Weise, *Phys. Lett.* **125 B** (1983) 9;
    R. Tegen und W. Weise, *Z. Phys.* **A 314** (1983) 357;
    E. Oset, R. Tegen und W. Weise, *Nucl. Phys.* **A 426** (1984) 456

16. R. Friedberg und T. D. Lee, *Phys. Rev.* **D 15** (1977) 1694;
    Phys. Rev. **D 16** (1977) 1096; *Phys. Rev.* **D 18** (1978) 2623

17. M. C. Birse und M. K. Banerjee, *Phys. Lett.* **136 B** (1984) 284;
Phys. Rev. **D 31** (1985) 118

18. S. Kahana, G. Ripka und V. Soni, *Nucl. Phys.* **A 415** (1984) 351;
G. Ripka und S. Kahana, *Phys. Lett.* **155 B** (1985) 327;
G. Ripka und S. Kahana, *Phys. Rev.* **D 36** (1987) 1233

19. M. Gell-Mann und M. Lévy, *Nuov. Cim.* **16** (1960) 745

20. J. P. Kogut und L. Susskind, *Phys. Rev.* **D 9** (1974) 3501

21. H. B. Nielsen und A. Patkós, *Nucl. Phys.* **B 195** (1982) 137

22. H. J. Pirner, J. Wroldsen und M. Ilgenfritz, *Nucl. Phys.* **B 294** (1987) 905;
S. H. Lee, T. D. Cohen und M. K. Banerjee, *Phys. Rev.* **D 40** (1989) 3060

23. M. Chanfray, O. Nachtmann und H. Pirner, *Phys. Lett.* **147 B** (1984) 249

24. A. Schuh, H. J. Pirner und L. Wilets, *Phys. Lett.* **174 B** (1986) 10

25. W. Broniowski, M. K. Banerjee und T. D. Cohen, Univ. of Maryland preprints ORO 5126-282 (1985) und 5126-298 (1986)

26. W. Broniowski und M. K. Banerjee, *Phys. Rev.* **D 34** (1986) 849

27. A. G. Williams, L. R. Dodd und A. W. Thomas, *Phys. Lett.* **176 B** (1986) 158;
L. R. Dodd, A. G. Williams und A. W. Thomas *Phys. Rev.* **D 35** (1987) 1040

28. A. G. Williams und A. W. Thomas, *Phys. Rev.* **C 33** (1986) 1070

29. I. Duck, *Phys. Rev.* **D 36** (1986) 1493

30. M. K. Banerjee, *Nuclear Chromodynamics* (S. Brodsky und E. Moniz, eds.) World Scientific, Singapore 1986

31. W. Broniowski, *Fizica* **19** Suppl. 2 (1987) 38

32. A. W. Thomas, in: *Advances in Nuclear Physics* (J. W. Negele und E. Vogts, eds.), Vol 13, (Plenum, New York 1984).

33. R. E. Peierls und J. Yoccoz, *Proc. Roy. Soc.* **A70** (1957) 381;
J.J. Griffin und J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* **108** (1957) 108

34. P. Ring und P. Schuck: *The nuclear many-body problem*, Springer, 1980

35. R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **131** (1963) 2766

36. P. Carruthers und N. N. Nieto, *Am. J. Phys.* **33** (1965) 537

37. W. Bardeen, A. M. S. Chanowitz, S. D. Drell, M. Weinstein und T.-M. Yan, *Phys. Rev.* **D 11** (1975) 1094

38. K. Huang und D. R. Stump, *Phys. Rev.* **D 14** (1976) 223

39. E. G. Lübeck, M. C. Birse, E. M. Henley und L. Wilets, *Phys. Rev.* **D 33** (1986) 234; E. G. Lübeck, E.M. Henley und L. Wilets, *Phys. Rev.* **D 35** (1987) 2809

40. R. G. Leech und M. C. Birse, *Nucl. Phys.* **A 494** (1989) 489

41. M. Betz und R. Goldflam, *Phys. Rev.* **D 28** (1983) 2848

42. E. Ruiz Arriola, P. Alberto, J. N. Urbano und K. Goeke, *Z. Phys.* **A 333** (1989) 203

43. P. Alberto, E. Ruiz Arriola, M. Fiolhais, F. Grümmer, J. N. Urbano und K. Goeke, *Phys. Lett.* **208 B** (1988) 75; *Z. Phys.* **A 336** (1990) 449

44. M. Fiolhais, J. N. Urbano und K. Goeke,*Phys. Lett.* **150 B** (1985) 253

45. K. Goeke, J. N. Urbano, M. Fiolhais und M. Harvey *Phys. Lett.* **164 B** (1985) 249

46. E. Ruiz Arriola, *Doktorarbeit*, Ruhr-Universität Bochum (1990), FRG
P. Alberto, *Doktorarbeit*, Universidade de Coimbra (1991), Portugal

47. M. C. Birse, *Phys. Rev.* **D 33** (1986) 1934

48. M. Fiolhais, A. Nippe, K. Goeke, F. Grümmer und J. N. Urbano, *Phys. Lett.* **194 B** (1987) 187

49. M. Fiolhais, K. Goeke, F. Grümmer und J. N. Urbano, *Nucl. Phys.* **A 481** (1988) 727

50. B. Golli und M. Rosina, *Phys. Lett.* **165 B** (1985) 347

51. T. D. Cohen und M. K. Banerjee, *Phys. Lett.* **167 B** (1986) 21
T. D. Cohen und W. Broniowski, *Phys. Rev.* **D 34** (1986) 3472

52. H. Kitagawa, *Nucl. Phys.* **A 487** (1988) 544

53. J. Stern und G. Clément, *Nucl. Phys.* **A 504** (1989) 621

54. G.S. Adkins, C. R. Nappi und E. Witten, *Nucl. Phys.* **B 228** (1983) 552; G. S. Adkins und C. R. Nappi, *Nucl. Phys.* **B 233** (1984) 109

55. T. H. R. Skyrme, *Proc. Roy. Soc.* **A260** (1961)127
I. Zahed und G. E. Brown, *Phys. Rep.* **142** (1986) 1

56. E. Ruiz Arriola, P. Alberto, K. Goeke und J. N. Urbano, *Phys. Lett.* **236 B** (1990) 381; P. Alberto, E. Ruiz Arriola, J. N. Urbano und K. Goeke, *Phys. Lett.* **247 B** (1990) 210

57. C. Christov, E. Ruiz Arriola und K. Goeke, *Nucl. Phys.* **A 510** (1990) 689; *Phys. Lett.* **225 B** (1989) 22; *Phys. Lett.* **243 B** (1990) 333

58. R. G. Leech , Ph. D. thesis, Univ. of Manchester(1990), UK
R. G. Leech und M. C. Birse, Univ. of Manchester(1991), preprint MC/TH 91/11

59. R. G. Leech und M. C. Birse, *J. Phys.* **G 18** (1992) 785

60. J. L. Dethier, R. Goldflam, E. M. Henley und L. Wilets, *Phys. Rev.* **D 27** (1983) 2191

61. S. Théberge, A. W. Thomas und G. A. Miller, *Phys. Rev.* **D 22** (1980) 2383

62. M. Gell-Mann, R. Oakes und B. Renner, *Phys. Rev.* **175** (1968) 2195

63. J. Schwinger, *Ann. Phys.* **2** (1958) 407

64. Y. Nambu, *Phys. Rev. Lett.* **4** (1960) 380

65. K. C. Chou, *Soviet Phys.* JETP **12** (1961) 492

66. M. Gell-Mann und Y. Ne'eman, *The Eightfold Way*, Benjamin, N. Y., 1965

67. S. L. Adler und R. F. Dashen, *Current Algebras*, Benjamin, N. Y., 1968

68. T. D. Lee: *Particle physics und introduction to field theory*, Harwood Academic Press, N.Y., 1981

69. M. C. Birse, *Progress in Part. und Nucl. Physics* **25** (1990) 1

70. H. Pirner, in *Progress in medium energy physics*, Proc. Chinese-German Symp. on medium energy physics (Taipei, 1988), eds. W.-Y-P. Hwang und J. Speth, World Scientific, Singapore, 1990

71. J. F. Mathiot, G. Chanfray und H. J. Pirner, *Nucl. Phys.* **A 500** (1989) 605

72. A. G. Williams und A. W. Thomas, *Phys. Lett.* **154 B** (1985) 320

73. M. K. Banerjee in: *Quarks, Mesons und Nuclei*, (W.-Y. P. Hwang und E. M. Henley, eds.) World Scientific, Singapore, 1988

74. A. Chodos und C. B. Thorn, *Phys. Rev.* **D 12** (1975) 2733

75. V. Vento, J. G. Jun, E. M. Nyman, M. Rho, und G. E. Brown, *Nucl. Phys.* **A 345** (1980) 413

76. M. Fiolhais, T. Neuber, K. Goeke, P. Alberto und J. N. Urbano, *Phys. Lett.* **268 B** (1991) 1

77. S. K. Ghosh und S. C. Phatak, *J. Phys.* **G 18** (1992) 755

78. W. Broniowski, M. Čibej, M. Kutschera und M. Rosina, *Phys. Rev.* **D 41** (1990) 285

79. M. Fiolhais, Doktorarbeit, University of Coimbra (1988), Portugal

80. W. Broniowski und Th. D. Cohen, *Nucl. Phys.* **A 458** (1986) 652

81. U. Ascher, J. Christiansen und R. D. Russel, *Math. Com.* **33** (1979) 659; *A.C.M. Trans. on Math. Softare* **7** (1981) 209

82. A. Drago, K. Bräuer und A. Faessler, *J. Phys.* **G 15** (1989) L7

83. Th. Meißner, *Doktorarbeit*, Ruhr–Universität Bochum (1991), FRG

84. J. G. Taylor, *Ann. of Phys.* **115** (1978) 153

85. T. Barnes und G. I. Ghundour, *Phys. Rev.* **D 22** (1980) 924

86. P. M. Stevenson, *Z. Phys.* **C 24** (1984) 87

87. L. Wilets, *Foundations of Physics*, **16**, 171

88. D. H. Hill und J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* **89** (1953) 1102

89. M. Fiolhais und M. Rosina, *Portg. Phys.* **17** (1986)49

90. H. R. Fiebig und E. Hadjimichael, *Phys. Rev.* **D 30** (1984) 181, 195

91. T. Neuber und K. Goeke, *Phys. Lett.* **281 B** (1992) 202

92. P. Ramond: *Field Theory: A Modern Primer*;
Addison-Wesley, Publishing Company

93. R .E. Peierls und D. J. Thouless, *Nucl. Phys.* **38** (1962) 154

94. H. Kitagawa, *Nucl. Phys.* **A 519** (1990) 721

95. T. Neuber, M. Fiolhais, K. Goeke und J. N. Urbano, *Nuclear Physics* **A**, im Druck

96. T. De Grand, *Phys. Rev.* **D 36** (1987) 179

97. R. Gupta, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 1288

98. M. Čibej, M. Fiolhais, B. Golli und M. Rosina, *J. Phys.* **G 18** (1992) 49

99. M. K. Banerjee und C. Y. Ren, private Mitteilung an M. C. Birse
zitiert aus *Progress in Part. und Nucl. Phys.* **25** (1990) 1

100. M. Moshinsky: *The Harmonic Oscillator in Modern Physics,*
Gordon und Breach Science Pub., N. Y. ,1969

101. J. Bernstein: *Elementary Particles und Their Currents* W. H. Freeman und Company, San Francisco (1968)

102. F. J. Ernst, R. G. Sachs und K. C. Wali, *Phys. Rev.* **119** (1960) 1105

103. J. D. Bjorken und S. D. Drell: *Relativistische Quantenfeldtheorie*, Bibliographisches Institut Mannheim, 1967

104. M. Wakamatsu, *Phys. Lett.* **234 B** (1990) 223

105. M. Wakamatsu, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **109** (1992) 115

106. K. Machleid, H. Holinde und Ch. Elster, *Phys. Rep.* **149** (1987) 1

107. G. A. Miller, A. W. Thomas und S. Thebérge,*Phys. Lett.* **91 B** (1980) 192

108. J. Ashman et al., *Phys. Lett.* **206 B** (1988) 364

109. A. W. Schreiber und A. W. Thomas, *Phys. Lett.* **215 B** (1988) 141

110. M. Glück und E. Reya, *Phys. Lett.* **270 B** (1991) 65

111. A. Hosaka und W. Weise, *Phys. Lett.* **232 B** (1989) 442

112. U. Ellwanger und B. Stech, *Phys. Lett.* **241 B** (1990) 409

113. F. E. Close und A. W. Thomas, *Phys. Lett.* **212 B** (1988) 227

114. H. Fritzsch, *Phys. Lett.* **229 B** (1989) 122

115. H. Fritzsch, Max-Planck preprint MPI-PAE/PTh 44/90, Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München FRG

116. V. Sanjosé und V. Vento, *Phys. Lett.* **225 B** (1989) 15

117. C. J. Benesh und G. A. Miller, *Phys. Lett.* **215 B** (1988) 381

118. C. J. Benesh und G. A. Miller, *Phys. Lett.* **222 B** (1989) 476

119. J. Ellis, *Nucl. Phys.* **A 546** (1992) 447

120. Otto Nachtmann: *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*, Vieweg Verlagsgesellschaft, Braunschweig 1986

121. J. D. Bjorken, *Phys. Rev.* **148** (1966) 1467

122. J. D. Bjorken, *Phys. Rev.* **D 1** (1970) 1376

123. K. Rith auf der DPG-Tagung, Mainz, März 1993

124. J. Kodaira et al. ,*Phys. Rev.* **D 20** (1979) 627, *Nucl. Phys.* **B 159** (1979) 99

125. J. Gasser und H. Leutwyler, *Phys. Rep.* **87** (1982) 77

126. M. Fiolhais, C. Christov, T. Neuber, M. Bergmann und K. Goeke, *Phys. Lett.* **269 B** (1991) 43

127. J. A. Nolen und J. P. Schiffer, *Annu. Rev. Nucl. Sci.* **19** (1969) 414

128. S. Shlomo, *Rep. Prog. Phys.* bf 41 (1978) 957

129. Y. Nambu und G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122** (1961) 345, *Phys. Rev.* **124** (1961) 246

130. Th. Meißner et al. ,*Phys. Lett.* **214 B** (1988) 312;
Th. Meißner, F.Grümmer und K. Goeke, *Ann. Phys.* **202** (1990) 197

131. Ta-Pei Cheng und Ling-Fong Li: *Gauge theory of elementary particle physics*, Oxford University Press, Oxford 1984

132. R. L. Jaffe, *Nucl. Phys.* **A 478** (1988) 3

133. J. F. Donoghue und C. R. Nappi, *Phys. Lett.* **168 B** (1986) 105

134. J. Gasser, H. Leutwyler und M. E. Sainio, *Phys. Lett.* **253 B** (1991) 252, 260

135. J. Gasser, *Ann. Phys.* **136**(1981) 62

136. J. P. Blaizot, M. Rho und N. N. Scoccola, *Phys. Lett.* **209 B** (1988) 27;
J. A. McGovern und M. C. Birse, *Phys. Lett.* **209 B** (1988) 163;
J. Stern und G. Clément, *Phys. Lett.* **241 B** (1990) 552

137. W. Kluge, *Rep. Prog. Phys.* **54**(1991) 1251;
T. E. O. Ericson, CERN preprint CERN-TH.6165/91

138. M. K. Banerjee und J. B. Cammarata, *Phys. Rev.* **D 18** (1978) 4078

139. M. Wakamatsu, *Phys. Lett.* **300 B** (1993) 152

140. Th. Meißner und K. Goeke, *Nucl. Phys.* **A 524** (1991) 719

141. L. Maiani et. al., *Nucl. Phys.* **B 293** (1987) 420

142. P. Bacilieri et. al., *Phys. Lett.* **214 B** (1988) 115;
S.Cabasino et. al., *Phys. Lett.* **258 B** (1991) 195, 202

143. F. R. Brown et al., *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 1062;
K. M. Bitar et. al., *Phys. Rev.* **D 42** (1990) 3794;
R. Gupta et. al., *Phys. Rev.* **D 44** (1991) 3272;
R. Altmeyer et. al., HLRZ preprint 92-17 (1992)

144. M. C. Birse und J. A. McGovern, University of Manchester preprint MC/TH 92/15, Manchester, UK

145. C. Christov: private Mitteilung

146. P. Alberto: private Mitteilung

147. J. A. McGovern und M. C. Birse University of Manchester preprint MC/TH 91/19, Manchester, UK

148. A. Messiah: *Quantenmechanik, Bund 2*, Walter de Gruyter & Co, Berlin 1979

149. M. Abramowitz und I. A. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1972

FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH GmbH

KFA

Jül-2797
Juli 1993
ISSN 0944-2952