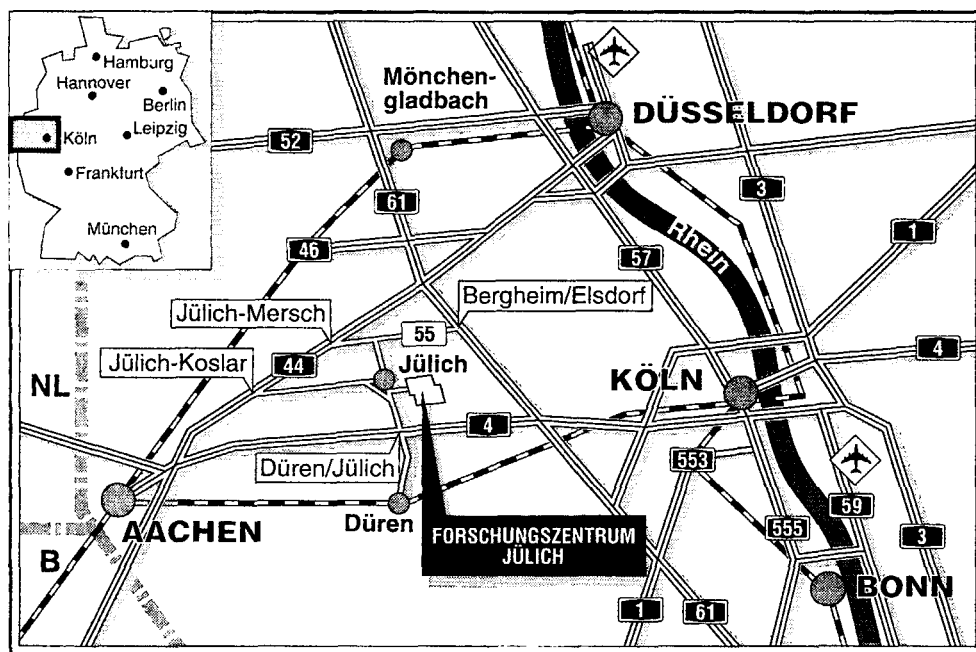


Institut für Werkstoffe der Energietechnik

**Die mathematischen Entwicklungsschritte
für das „Ein-Parameter-Modell“**

Formulierung für höhere Temperaturen

Birgit Reichert



Berichte des Forschungszentrums Jülich ; 3107

ISSN 0944-2952

Institut für Werkstoffe der Energietechnik Jül-3107

Zu beziehen durch: Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek

D-52425 Jülich · Bundesrepublik Deutschland

Telefon: 02461/61-61 02 · Telefax: 02461/61-61 03 · Telex: 833 556-70 kfa d

Jül-3107
September 1995
ISSN 0944-2952

Die mathematischen Entwicklungsschritte für das „Ein-Parameter-Modell“

Formulierung für höhere Temperaturen

Birgit Reichert

The Mathematical Steps of Development of the 'One-Parameter-Model'

-Formulation for higher temperatures-

**by
Birgit Reichert**

Abstract

The constitutive equation 'One-Parameter-Model' describes the inelastic deformation of metallic materials. The report outlines the formulation for its application at higher temperatures ($0,5 \times T_m < T < 0,75 \times T_m$). The constitutive equation treats the interaction between dislocations (Kocks-Mecking model) or the interaction between dislocations and particles of a second phase (modified model) as essential mechanism for the hardening process. The second phase particles are considered in two ways: they may be stable or have a time dependent evolution. A further approach combines both hardening mechanisms (hybrid model).

The systematical treatment of the basic equations leads to a complete set of constitutive equations describing the mechanical behaviour at higher temperatures for the loading conditions of either strain rate $\dot{\epsilon} = \text{const.}$ (constant strain rate test) or stress $\sigma = \text{const.}$ (creep test).

A few graphical representations of model calculations, i.e. stress-strain curves and strain rate versus time curves, show the capability for reproducing the influence of unstable second phase particles. Furthermore, qualitative comparison of calculated curves with experimental data of the heat resistant material INCOLOY alloy 800H gives new hints for the explanation of features in the mechanical behaviour of this alloy.

Die mathematischen Entwicklungsschritte für das "Ein-Parameter-Modell"

-Formulierung für höhere Temperaturen-

**von
Birgit Reichert**

Kurzfassung

Die Stoffgleichung "Ein-Parameter-Modell" zur Beschreibung der inelastischen Verformung metallischer Werkstoffe wird für die Anwendung bei höheren Temperaturen ($0,5 \times T_m < T < 0,75 \times T_m$) formuliert. Dabei wird in Anlehnung an die Literatur der Verfestigungsprozeß einmal über die Wechselwirkung von Versetzungen mit Versetzungen (Kocks-Mecking Modell) und zum zweiten über die Wechselwirkung von Versetzungen mit Teilchen einer zweiten Phase formuliert (Modifiziertes Modell). Die Teilchen einer zweiten Phase werden unterschieden in stabile und solche, die eine zeitabhängige Ausscheidung und Reifung erfahren können. Ebenso wird eine Kombination der beiden zuvor erwähnten Mechanismen für den Verfestigungsprozeß formuliert (Hybrid Modell).

Aus den Grundgleichungen des Modells werden systematisch und ausführlich für jeden Ansatz der Verfestigung analytische Lösungen zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens bei höheren Temperaturen unter der Bedingung Dehnrate $\dot{\epsilon} = \text{const.}$ (Zugversuch) und Spannung $\sigma = \text{const.}$ (Kriechversuch) hergeleitet.

Einige graphische Umsetzungen der Modellrechnungen, Spannungs-Dehnungs-Kurven und Dehnraten-Zeit-Kurven, zeigen, daß das Modell in der Lage ist, den Einfluß von instabilen Teilchen einer zweiten Phase sinnvoll wiederzugeben. Im qualitativen Vergleich mit experimentellen Daten der hochwarmfesten Legierung INCOLOY alloy 800H ergeben sich zudem neue Erklärungsmöglichkeiten für Besonderheiten im mechanischen Verhalten dieser Legierung.

Inhaltsverzeichnis	Seite
1. Einleitung	1
2. Theoretischer Hintergrund des Ein-Parameter-Modells	3
2.1 Stoffgleichungen	3
2.2 Grundgleichungen des Ein-Parameter-Modells	3
2.2.1 Strukturparameter	3
2.2.2 Kinetische Gleichung	4
2.2.3 Entwicklungsgleichung der Struktur	5
2.3 Eigenschaften des Ein-Parameter-Modells	9
3. Hinweise zum Aufbau des Berichts	11
4. Übersicht der häufig wiederkehrenden Größen	13
5. Die kinetische Grundgleichung in differentieller Form	15
6. Formulierung für $\dot{\epsilon} = \text{const.}$	17
6.1 Kocks-Mecking Modell	(KM) 17
6.2 Modifiziertes Modell	20
6.2.1 Version 1: Teilchendurchmesser konstant	(M1) 20
6.2.2 Version 2: Teilchendurchmesser nicht konstant	(M2) 23
6.3 Hybrid Modell	26
6.3.1 Version 1: Teilchendurchmesser konstant	(H1) 26
6.3.2 Version 2: Teilchendurchmesser nicht konstant	(H2) 32
6.3.3 Version 3: Zwei Gewichtungsparemeter	(H3) 38

7. Formulierung für $\sigma = \text{const.}$	42
7.1 Kocks-Mecking Modell	(KM) 42
7.2 Modifiziertes Modell	45
7.2.1 Version 1: Teilchendurchmesser konstant	(M1) 45
7.2.2 Version 2: Teilchendurchmesser nicht konstant	(M2) 47
7.3 Hybrid Modell	49
7.3.1 Version 1: Teilchendurchmesser konstant	(H1) 49
7.3.2 Version 2: Teilchendurchmesser nicht konstant	(H2) 53
7.3.3 Version 3: Zwei Gewichtungsparemeter	(H3) 58
8. Der Entfestigungskoeffizient k_2	63
9. Die Lösungsgleichungen im tabellarischen Überblick	65
10. Die experimentell zu bestimmenden Größen	67
11. Graphische Umsetzung der Modellrechnungen	69
Literatur	74
Formelzeichen	75

1. Einleitung

Das "Ein-Parameter-Modell" ist eine Stoffgleichung, die eine einheitliche Beschreibung der inelastischen Verformung von metallischen Werkstoffen unter verschiedenen Belastungsbedingungen ermöglichen soll.

In der einfachsten Formulierung, die hier behandelt wird, wird in Anlehnung an einen Vorschlag von Kocks /1/, die Struktur durch einen einzigen Parameter beschrieben.¹ Estrin und Mecking /2/ entwickelten Formulierungen für das Ein-Parameter-Modell, die für die Anwendung bis in den Kriechbereich, aber bei noch relativ niedrigen Temperaturen, gelten sollen. Darauf aufbauend erweiterte Schwarze /3/ den Anwendungsbereich zu höheren Temperaturen, bei denen die Ausscheidungs- und Wachstumskinetik von Teilchen einer zweiten Phase wichtig ist.

In diesen Arbeiten wurden die mathematischen Formulierungen des Ein-Parameter-Modells zur Modellierung der behandelten Belastungsfälle stellenweise vereinfacht, um eine unkomplizierte Anpassung an die experimentellen Daten möglich zu machen.

Der hier vorliegende Bericht wurde im Rahmen von Vorarbeiten zur Anpassung des Modells an das mechanische Verhalten einer Legierung im Temperaturbereich $0,5 \times T_m < T < 0,75 \times T_m$ erstellt. Die bisherigen mathematischen Vernachlässigungen werden in diesem Bericht nicht mehr zugelassen, sie werden im folgenden, wenn immer möglich, vermieden. Unter dieser Forderung wird ein Satz an integrierten Stoffgleichungen auf der Basis des Ein-Parameter-Modells systematisch für den Zugversuch (Dehnrate $\dot{\epsilon} = \text{const.}$) und für den Kriechversuch (Spannung $\sigma = \text{const.}$) entwickelt und vollständig dargestellt.

Dazu wird in Kapitel 2 der theoretische Hintergrund des Modells noch einmal kurz skizziert. Es werden dabei die mikrostrukturellen Mechanismen, auf denen das Modell basiert, genannt. Der Bericht bringt jedoch keine umfassende Darstellung der metallkundlichen Grundlagen; der Leser wird auf die schon zitierte Literatur hierzu hingewiesen /1,2/.

In Kapitel 3 werden Hinweise zum Aufbau des Berichts gegeben. Dem Leser wird dadurch erleichtert, sich in der Entwicklung des Modells zurechtzufinden.

Das Kapitel 4 listet die häufig wiederkehrenden Größen des Modells auf.

Kapitel 5 enthält die differentielle Behandlung der kinetischen Grundgleichung, für die nachfolgend analytische Lösungen entwickelt werden.

In Kapitel 6 werden Lösungen für $\dot{\epsilon} = \text{const.}$ entwickelt. Für die Verfestigung werden die zwei metallkundlichen Mechanismen zugrundegelegt, die auch von Estrin und Mecking in /2/ behandelt wurden: die Wechselwirkung von Versetzungen untereinander sowie die Wechselwirkung von Versetzungen mit verfestigenden Teilchen in der Matrix. Zusätzlich werden auch Kombinationen beider Mechanismen behandelt. Diese Ansätze führen zu den unterschiedlichen Formulierungen unter 6.1 bis 6.3.

Kapitel 7 enthält die analoge Darstellung der Lösungen für die Bedingung $\sigma = \text{const.}$. Die Formulierung der Entfestigung wird in Kapitel 8 erläutert.

Um sich einen schnellen Überblick der entwickelten Lösungen verschaffen zu können, wird in Kapitel 9 eine tabellarische Zusammenfassung gegeben.

¹ Es wäre richtiger von einer "Gefügevariable" zu sprechen, aber aus historischen Gründen wird der Begriff "Strukturparameter" beibehalten.

Im Kapitel 10 werden die experimentell zu bestimmenden Größen des Modells zusammenfassend dargestellt und es wird kurz erläutert, welche experimentellen Untersuchungen zur Bestimmung der Größen nötig sind.

Im Kapitel 11 werden zur Verdeutlichung der analytischen Lösungen einige ausgewählte graphische Umsetzungen vorgestellt.

Die Literatur und eine Erläuterung der verwendeten Formelzeichen befindet sich am Ende des Berichts.

2. Theoretischer Hintergrund des Ein-Parameter-Modells

2.1 Stoffgleichungen

Stoffgleichungen für die Beschreibung des mechanischen Verhaltens von metallischen Werkstoffen kann man nach zwei unterschiedlichen Ansätzen für ihre Formulierung einteilen:

a) *Kontinuumsmechanische Stoffgleichungen*

Die Beziehungen zwischen den mechanischen Größen werden als phänomenologische mathematische Beschreibung formuliert. Da keine allgemeingültige Regel existiert, um inelastische Formänderungen aus den Grundgesetzen der Kontinuumsmechanik herzuleiten, werden gut geeignete mathematische Funktionen verwendet und an das Verhalten der Werkstoffe angepaßt.

b) *Metallphysikalische Stoffgleichungen*

Die mechanischen Gleichungen gehen von metallkundlichen Formulierungen für das Verhalten der mikrostrukturellen Parameter, wie Korngröße, Versetzungsdichte und -anordnung, Teilchen einer zweiten Phase, Texturen aus, die den mechanischen Zustand entscheidend bestimmen.

Das Ein-Parameter-Modell gehört zu den Stoffgleichungen (b), da es die Beschreibung des mechanischen Verhaltens des Werkstoffes an metallkundlichen Mechanismen orientiert. Man erwartet, daß dadurch auch zuverlässige Aussagen über das mechanische Werkstoffverhalten formuliert werden können, die über den experimentell gesicherten Datenumfang hinausgehen.

Die Bildung des Modells geht auf ein Konzept von Cottrell und Stokes /4/ zurück, das von Kocks und Mecking /5/ aufgegriffen wurde: es wird streng unterschieden zwischen der *Kinetik des plastischen Fließens bei fixierter Struktur* und der *Entwicklung der Struktur*. Dabei wird die Beschreibung der Struktur mittels *eines einzigen Strukturparameters* vorgenommen.

2.2 Grundgleichungen des Ein-Parameter-Modells

2.2.1 Strukturparameter

Der Einfluß der Mikrostruktur des Werkstoffes auf die Eigenschaften, die die Stoffgleichung beschreibt, wird im allgemeinen durch die Einführung von Strukturparametern S_i berücksichtigt.

Es wird davon ausgegangen, daß alle Strukturparameter S_i im Laufe der inelastischen Verformung unter einer konstanten Beanspruchung (σ bzw. ε) einem Sättigungswert S_{is} zustreben. Dies tun sie jedoch mit unterschiedlichen Raten, d.h. mit fortschreitender Verformung werden immer mehr Strukturparameter ihren stationären Zustand erreicht haben, bis schließlich nur noch der "langsamste" Strukturparameter seine Sättigung anstrebt. Diese Vorstellung wird beim Ein-Parameter-Modell zur Vereinfachung genutzt, indem alle "schnellen"

Strukturparameter vernachlässigt werden und nur die Entwicklungskinetik des "langsamsten" Strukturparameters betrachtet wird.

Dabei bleibt zu beachten, daß diese Ein-Parameter-Schreibweise nur für solche Verformungsvorgänge erfolgreich sein kann, deren Dehnungsbereich wesentlich größer ist, als der Dehnungsbereich, in dem die Relaxation der "schnellen" Strukturparameter stattfindet.

Seit den Arbeiten von Taylor /6/ ist nun bekannt, daß bei der Verfestigung von Metallen die Versetzungsdichte eine der wichtigsten Strukturgrößen darstellt.

Im Ein-Parameter-Modell wird daher der Strukturparameter mit der Versetzungsdichte verknüpft.

Dazu wird ein charakteristischer Wert $\hat{\tau}$ der Schubspannung τ eingeführt /1/, der bei Estrin /7/ als mechanischer Widerstand der Gleitung beweglicher Versetzungen bei $T=0$ Kelvin bezeichnet wird. Dieser wird folgendermaßen mit dem mittleren Versetzungsabstand $l = (\sqrt{\rho})^{-1}$ korreliert:

$$\hat{\tau} = \alpha G b \sqrt{\rho} \quad (a)$$

Für den Fall der Verformung eines Polykristalls wird mit dem Taylorfaktor M ($\hat{\sigma} = M\hat{\tau}$) der Strukturparameter $\hat{\sigma}$ analog zu $\hat{\tau}$ formuliert. Obwohl es möglich ist, daß sich der Taylormodul während der Verformung durch Texturentwicklung laufend ändern kann, wird dies in der Formulierung unberücksichtigt gelassen:

$$\hat{\sigma} = M \alpha G b \sqrt{\rho} \quad (b)$$

Es besteht eine Quadratwurzelbeziehung zwischen Fließspannung und Versetzungsdichte:

$$\sigma \propto \sqrt{\rho} \quad (c)$$

Diese Beziehung ist experimentell für nicht teilchengehärtete Kupferlegierungen über drei Größenordnungen bestätigt worden /8/, und begründet aus experimenteller Sicht die Formulierung des Strukturparameters, wie sie im Ein-Parameter-Modell gewählt worden ist.

2.2.2 Kinetische Gleichung

Für eine definierte Struktur, gegeben durch einen Strukturparameter S , wird die Dehnraten- und Temperaturabhängigkeit der Fließspannung durch die kinetische Gleichung beschrieben. In allgemeiner Form kann sie folgendermaßen formuliert werden:

$$\sigma = \sigma(S, \dot{\epsilon}, T) \quad (d)$$

Darin ist der Strukturparameter S als interne Zustandsgröße aufzufassen. Die Kinetik der Verformung ist nur vom momentanen Materialzustand abhängig. Dies bedeutet, daß die Beschreibung der Verformung ab jedem beliebigen Zeitpunkt möglich werden sollte, natürlich unter der Voraussetzung, daß S bekannt ist.

Als relevanter Strukturparameter wird im Ein-Parameter-Modell die Versetzungsdichte betrachtet (vgl. 2.2.1). Als Zusammenhang zwischen Abgleitgeschwindigkeit und beweglicher Versetzungsdichte wird die Orowansche Gleichung genutzt:

$$\dot{\gamma} = \rho_m b \bar{v} \quad (e)$$

Darin folgt die mittlere Versetzungsgeschwindigkeit einer Arrhenius-Gleichung:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 \exp\left(-\frac{\Delta G(\tau)}{kT}\right) \quad (f)$$

Die Aktivierungsenergie ΔG wird dabei durch eine angelegte Schubspannung τ reduziert. Die Abhängigkeit $\Delta G(\tau)$ gibt den Charakter der Wechselwirkung zwischen den bewegten Versetzungen und Hindernissen bei fixierter Struktur wieder. Sie bestimmt maßgeblich den Wert der mittleren Versetzungsgeschwindigkeit $\bar{v}$ im Gegensatz zu dem Vorfaktor $\bar{v}_0$.

Für das Ein-Parameter-Modell wird diese Spannungsabhängigkeit der Aktivierungsenergie durch eine Näherung in Form einer Potenzgleichung beschrieben, deren Herleitung bei Kocks, Argon und Ashby /9/ zu finden ist:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 \left(\frac{\tau}{\hat{\tau}}\right)^m \quad (g)$$

Die Abgleitgeschwindigkeit läßt sich mit dieser Näherung folgendermaßen formulieren, wenn $\dot{\gamma}_0 = \rho_m b \bar{v}_0$ gesetzt wird:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 \left(\frac{\tau}{\hat{\tau}}\right)^m \quad (h)$$

Für den Fall der Polykristallverformung wird durch Verwendung des Taylorfaktors M ($\dot{\epsilon} = \frac{1}{M} \dot{\gamma}$) obige Gleichung zu:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 \left(\frac{\sigma}{\hat{\sigma}}\right)^m \quad (i)$$

Diese Gleichung wird im Ein-Parameter Modell als kinetische Gleichung verwendet.

2.2.3 Entwicklungsgleichung der Struktur

Die inelastische Verformung läßt sich dann vollständig beschreiben, wenn neben der kinetischen Gleichung eine Formulierung für die Strukturentwicklung im Laufe der Verformung aufgestellt wird. Allgemein wird die Entwicklungsgleichung der Struktur folgendermaßen ausgedrückt:

$$\dot{S} = f(S, \dot{\epsilon}, T) \quad (j)$$

Auch hier wird der Strukturparameter S als interne Zustandsgröße aufgefaßt. Die Entwicklungsrate der Struktur wird auch von ihrem momentanen Wert abhängen.

Da die Versetzungsdichte als einziger Strukturparameter im Ein-Parameter-Modell benutzt wird, ist die Entwicklungsgleichung so gewählt worden, daß sie die Änderung der Versetzungsdichte ρ mit einer Änderung der Abgleitung γ verbindet. Dies bedeutet, daß Änderungen der Versetzungsdichte ρ , die explizit von der Zeit t abhängen (statische Erholung), vom Modell nicht erfasst werden und nur die konkurrierenden Prozesse der Dehnungsverfestigung und der dynamischen Entfestigung beschrieben werden.

a) Ansätze für die Verfestigung

Die Verfestigung ergibt sich aus der Akkumulation der Versetzungsdichte bedingt durch Immobilisierung und Speicherung von Versetzungen. Diese Speicherung wird mit Hilfe der mittleren freien Abgleitlänge L der Versetzungen beschrieben, die den mittleren Laufweg einer beweglichen Versetzung in der Gleitebene bis zu ihrer Immobilisierung angibt. Es gilt allgemein für den verfestigenden Teil der Entwicklungsgleichung:

$$\frac{d\rho^+}{d\gamma} = \frac{1}{Lb} \quad (k)$$

Die Bestimmung der mittleren freien Weglänge ist abhängig von der Art des Hindernisses, auf das die bewegte Versetzung trifft:

I) Grobkörniger, einphasiger Werkstoff

Der Laufweg der Versetzungen wird im wesentlichen durch andere Versetzungen begrenzt. Wenn sich bei der Verformung von Metallen Subkornstrukturen ausbilden, wird die Größe der Subkörner entscheidend. Die Subkorngröße ist nach Blum /10/ ebenso wie der mittlere Versetzungsabstand abhängig von der mittleren Versetzungsdichte. Für den Laufweg folgt:

$$L_{\text{ver}} \approx L_{\text{sub}} = \beta (\sqrt{\rho})^{-1} \quad (l)$$

Der Faktor β dient der Beschreibung der Selbstorganisation der ursprünglich regellos angenommenen Versetzungen in die Subkornstruktur. Er variiert eigentlich entlang einer Verformungskurve, wird aber für das Modell als konstant angesehen. Damit wird auch der Einfluß der Anordnung der Versetzungen auf die Verfestigung vernachlässigt.

II) Feinkörniger, einphasiger Werkstoff

Im Fall, daß die Korngröße kleiner ist als die durch Versetzungsdichte und Subkorngrößen bestimmte mittlere freie Weglänge, werden die Korngrenzen zum laufwegbegrenzenden Hindernis. Folgende Bedingung sollte erfüllt werden:

$$d_{\text{korn}} \ll 100 (\sqrt{\rho})^{-1} \vee 10 L_{\text{sub}} \quad (m)$$

Der Laufweg einer Versetzung wird dann in Abhängigkeit vom Korndurchmesser formuliert:

$$L_{\text{korn}} = \xi d_{\text{korn}} \quad (n)$$

Dabei wird der numerische Proportionalitätsfaktor ξ als Konstante betrachtet.

III) Werkstoff mit Teilchen einer zweiten Phase

Es werden zunächst Teilchen betrachtet, deren Durchmesser während der Verformung konstant sein soll (z.B. ODS-Legierungen). Dann stellen die Teilchenabstände die Laufwegbegrenzung dar, solange diese Abstände kleiner sind als Versetzungsabstände, Subkörner oder Korngrößen. Der Laufweg ist dann mit dem Teilchendurchmesser über einen konstanten numerischen Proportionalitätsfaktor χ zu verknüpfen:

$$L_{\text{teil}} = \chi d_{\text{teil}} \quad (o)$$

In einer weitergehenden Überlegung ist Schwarze [3] davon ausgegangen, daß ein Werkstoff Teilchen enthält, die sich im Verlauf der Verformung zahlenmäßig und größenmäßig verändern (z.B. carbidbildende Legierungen). Damit können Ausscheidungs- und Reifungsvorgänge von Teilchen in die Betrachtung mit einbezogen werden. Der Laufweg einer Versetzung hängt dann von einem nicht mehr konstantem Teilchendurchmesser ab:

$$L = \zeta d(t) \quad (p)$$

Eine Spannungsabhängigkeit wird zunächst vernachlässigt. Aber auch in dieser Vorstellung nimmt Schwarze an, daß, nach einer endlichen Zeit, Teilchenzahl und Teilchengröße stationäre Werte annehmen. Damit wird das Konzept der Sättigung in diesem Punkt beibehalten und entsprechend ein Sättigungsdurchmesser d_s der Teilchen und der Sättigungslaufweg L_s der Versetzungen eingeführt.

Zur Erläuterung der Vorgehensweise im Modell kann diese Beziehung in der allgemeinen Form $L = L(t)$ verwendet werden, da eine spezielle Formulierung für den Laufweg L erst sinnvoll ist, wenn eine Anpassung an einen konkreten Werkstoff vorgenommen wird.

b) Ansätze für die Entfestigung

Die Entfestigung wird assoziiert mit Umordnung und Annihilation von Versetzungen, die dazu ihre Gleitebene durch Quergleiten von Schraubenanteilen und Klettern von Stufenanteilen verlassen müssen. In der Vorstellung verschwindet eine bewegte Versetzung während der Verformung dann, wenn sie auf ihrem Gleitweg auf eine verankerte Versetzung mit entgegengesetztem Burgersvektor b trifft. Dieser Vor-

gang sollte damit proportional zur Dichte der verankerten Versetzungen sein. Da die Dichte der mobilen Versetzungen als sehr viel kleiner als die der verankerten angenommen wird, ist der entfestigende Teil der Entwicklungsgleichung:

$$\frac{d\rho^-}{dy} = -k_2\rho f \quad (q)$$

Darin wird k_2 als Entfestigungskoeffizient bezeichnet. Der Faktor f ist von Estrin /11/ eingeführt worden. Er soll die Wechselwirkungen zwischen Versetzungen und Teilchen, z.B. gemäß dem von Arzt und Rösler /12/ vorgeschlagenen Ablösemechanismus, einfließen lassen. Im Folgenden soll dieser Mechanismus zunächst ausgeklammert werden, daher wird $f = 1$ gesetzt.

Im Ein-Parameter-Modell setzt sich die vollständige Formulierung der Entwicklungsgleichung der Struktur additiv aus dem verfestigenden und dem entfestigenden Teil zusammen:

$$\frac{d\rho}{dy} = \frac{d\rho^+}{dy} + \frac{d\rho^-}{dy} \quad (r)$$

Je nach Verfestigungsmechanismus, der der mathematischen Modellentwicklung zugrunde liegt, ergeben sich die verschiedenen Ansätze des Ein-Parameter-Modells. Für die weitere mathematische Entwicklung werden in jedem Ansatz entsprechend zum Entfestigungskoeffizienten k_2 , Koeffizienten für die Verfestigung definiert. Außerdem wird durch den Taylormodul M die Struktur des Polykristalls berücksichtigt. Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht der Modellansätze (die Parameter g und j in (H3) sind Gewichtungsparemeter für jeden der beiden Verfestigungsmechanismen):

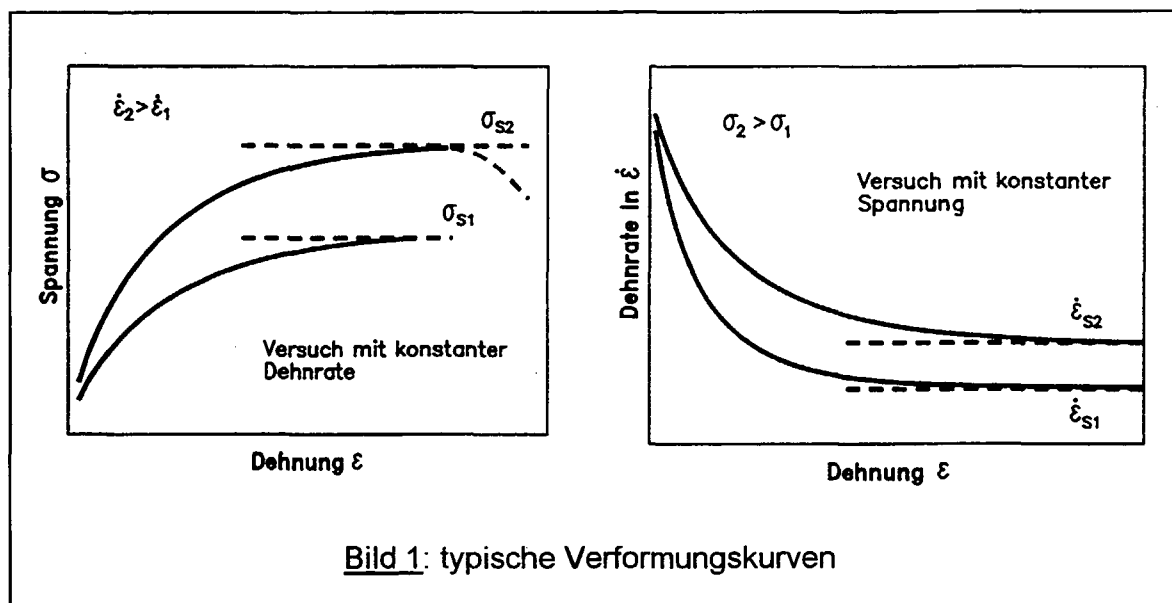
Ansatz (Abk.)	Laufweg	Entwicklungsgleichung (Einkristall)	Entwicklungsgleichung (Polykristall)
(KM)	$L_{\text{sub}} = \beta(\sqrt{\rho})^{-1}$	$\frac{d\rho}{dy} = \frac{1}{b\beta}\sqrt{\rho} - k_2\rho$ Verfestigungskoeffizient: $k_1 = \frac{1}{b\beta}$	$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M(k_1\sqrt{\rho} - k_2\rho)$
(M1)	$L_{\text{teil}} = \chi d_{\text{teil}}$	$\frac{d\rho}{dy} = \frac{1}{b\chi d_{\text{teil}}} - k_2\rho$ Verfestigungskoeffizient: $k = \frac{1}{b\chi d_{\text{teil}}}$	$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M(k - k_2\rho)$

(M2)	$L = \zeta d(t)$	$\frac{d\rho}{d\gamma} = \frac{L_s}{b\zeta L_s d(t)} - k_2 \rho$ Verfestigungskoeffizient: $k_0 = \frac{1}{bL_s}$	$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M \left(k_0 \frac{L_s}{L} - k_2 \rho \right)$
(H1)	$L_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{L_{\text{sub}}} + \frac{1}{L_{\text{teil}}}}$	$\frac{d\rho}{d\gamma} = \frac{1}{b\beta} \sqrt{\rho} + \frac{1}{b\chi d_{\text{teil}}} - k_2 \rho$	$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M \left(k_1 \sqrt{\rho} + k - k_2 \rho \right)$
(H2)	$L_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{L_{\text{sub}}} + \frac{1}{L}}$	$\frac{d\rho}{d\gamma} = \frac{1}{b\beta} \sqrt{\rho} + \frac{L_s}{b\zeta L_s d(t)} - k_2 \rho$	$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M \left(k_1 \sqrt{\rho} + k_0 \frac{L_s}{L} - k_2 \rho \right)$
(H3)	$L_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{g L_{\text{sub}}} + \frac{1}{j L}}$	$\frac{d\rho}{d\gamma} = \frac{1}{b\beta} \sqrt{\rho} g + \frac{L_s}{b\zeta L_s d(t)} j - k_2 \rho$	$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M \left(k_1 \sqrt{\rho} g + k_0 \frac{L_s}{L} j - k_2 \rho \right)$

KM: Kocks-Mecking Modell; M: modifiziertes Modell; H: Hybrid Modell

2.3 Eigenschaften des Ein-Parameter-Modells

In Kapitel 2.2.1 wurde bereits erwähnt, daß dem Modell die Vorstellung des Erreichens eines Sättigungszustandes zugrundeliegt. Dies verdeutlicht Bild 1 für Versuche mit konstanter Dehnrage $\dot{\varepsilon}$ und solche mit konstanter Spannung σ .



In der Philosophie des Modells wird die gesamte Spannungs-Dehnungs-Kurve als "Transiente" zwischen einem Anfangswert und einem Sättigungswert der Fließspannung σ_s verstanden.

Der primäre Bereich einer Kriechkurve wird als physikalisch äquivalent zum Spannungs-Dehnungs-Verlauf eines monotonen Zugversuchs verstanden, d.h. die Konstanten sollten für beide Belastungsfälle verwendet werden können.

Formal besteht dann die Möglichkeit, von dem mechanischen Verhalten des Werkstoffs bei einem kurzzeitigen Zugversuch ($\dot{\epsilon} = \text{const.}$) auf sein Verhalten bei einem langzeitigen Kriechversuch ($\sigma = \text{const.}$) zu schließen. Besondere Behandlung bedürfen jedoch solche Größen im Modell, die sich im Versuch mit konstanter Dehnrage zeitlich so langsam ändern, daß sie nicht erfaßt werden.

Eine Behandlung von Werkstoffschädigungen ist im Ein-Parameter-Modell nicht vorgesehen.

3. Hinweise zum Aufbau des Berichts

Das Ein-Parameter-Modell kennt drei Ansätze. Sie unterscheiden sich darin, welcher metallphysikalische Mechanismus der Verfestigung im Vordergrund der Formulierung steht:

- *Kocks-Mecking-Modell*

In diesem Ansatz wird die Verfestigung durch Wechselwirkung der Versetzungen untereinander beschrieben. Der Ansatz wird im folgenden mit "KM" abgekürzt.

- *Modifiziertes Modell*

Dieser Ansatz beinhaltet als Mechanismus der Verfestigung die Wechselwirkung zwischen Teilchen und Versetzungen. Dabei wird zwischen Teilchen mit konstantem Durchmesser und solchen mit sich veränderndem Durchmesser unterschieden. Die Abkürzungen für diese beiden Versionen lauten "M1" ($d=\text{const.}$) und "M2" ($d\neq\text{const.}$).

- *Hybrid Modell*

Dieser Ansatz berücksichtigt sowohl die Wechselwirkung zwischen Versetzungen als auch die Wechselwirkung zwischen Teilchen und Versetzungen für die Verfestigung. Auch hier wird, wie im modifizierten Modell, zwischen konstantem Teilchendurchmesser, "H1", und nicht konstantem Teilchendurchmesser, "H2", unterschieden. Zusätzlich zu diesen beiden Versionen wird in diesem Bericht eine dritte Version formuliert, die sich aus dem Wunsch der Gewichtung der beiden Verfestigungsmechanismen entwickelt hat. Sie wird mit "H3" abgekürzt.

Das Ein-Parameter-Modell bietet, neben der speziellen Ausformulierung für verschiedene Verfestigungsmechanismen, die Möglichkeit, Lösungen für den Belastungsfall $\dot{\epsilon}=\text{const.}$ und $\sigma=\text{const.}$ herzuleiten. In Kapitel 6 sind die drei Ansätze für den Belastungsfall $\dot{\epsilon}=\text{const.}$ behandelt, und in Kapitel 7 für $\sigma=\text{const.}$. Da das Ein-Parameter-Modell die Zielsetzung verfolgt, von Kurzzeitversuchen ($\dot{\epsilon}=\text{const.}$) auf Langzeitversuche ($\sigma=\text{const.}$) zu schließen, gibt es Größen, die unter der Bedingung $\dot{\epsilon}=\text{const.}$ in Kapitel 6 hergeleitet werden und für die Bedingung $\sigma=\text{const.}$ in Kapitel 7 weiterhin als gültig betrachtet werden. Dies sind die athermische Verfestigungsrate, der Strukturparameter des Sättigungszustandes und die Sättigungsspannung. Um ein mühsames Auffinden dieser Größen innerhalb der drei Ansätze in Kapitel 6 zu vermeiden, sind sie in Kapitel 4 zusammengestellt worden.

Die Nummerierung der Gleichungen weist einige Besonderheiten auf, die im folgenden erläutert werden:

- Da die Rechenschritte der mathematischen Herleitungen für jeden Ansatz ausführlich dargestellt sind, ist nicht jede Gleichung mit einer Nummer versehen. Vielmehr sind nur solche Gleichungen nummeriert, die einen wichtigen Zwischenschritt markieren.

- Die Nummerierung enthält die Abkürzungen für die entsprechenden Ansätze (KM; M1, M2; H1, H2, H3).
- Innerhalb von Kapitel 6 ($\varepsilon = \text{const.}$) wird in jedem Ansatz mit der gleichen Zahl die Nummerierung begonnen und mit der gleichen Zahl beendet. Die Gleichungsidentifikation unterscheidet sich in diesem Kapitel nur durch die Abkürzung für den jeweiligen Ansatz. (17KM), (17M1), ..., (17H3) bezeichnen also den gleichen Zwischenschritt der Herleitung bei dem jeweiligen Ansatz.
Das Gleiche gilt für Kapitel 7 ($\sigma = \text{const.}$). Dabei wird von Kapitel 6 zu Kapitel 7 die Nummerierung fortlaufend durchgeführt.

Außerdem wird darauf hingewiesen, daß zu den Gleichungen in den folgenden Kapiteln nur noch wenig erläuternder Text gegeben wird. Es wird vorausgesetzt, daß der Leser die Ausführungen in Kapitel 2 soweit nachvollzogen hat, um den Entwicklungsschritten folgen zu können.

4. Übersicht der häufig wiederkehrenden Größen

Athermische Verfestigungsraten:

$$\Theta_{II} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{1}{2} M^2 \alpha G b k_1 \quad (20KM)$$

$$\tilde{\Theta}_{II} = \frac{1}{2} M^2 \alpha G b k_1 \quad (33KM)$$

$$\Theta_{a(M1)}^2 = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} M^3 \alpha^2 G^2 b^2 k \quad (20M1)$$

$$\tilde{\Theta}_{a(M1)}^2 = M^3 \alpha^2 G^2 b^2 k \quad (33M1)$$

$$\Theta_{a(M2)}^2 = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} M^3 \alpha^2 G^2 b^2 k_0 \quad (20M2)$$

$$\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 = M^3 \alpha^2 G^2 b^2 k_0 \quad (33M2)$$

$$\Theta_{h(H1)} = \frac{\Theta_{a(M1)}^2}{2\sigma} + \Theta_{II} \quad (20H1)$$

$$\Theta_{h(H2)} = \frac{\Theta_{a(M2)}^2}{2\sigma} \frac{L_S}{L} + \Theta_{II} \quad (20H2)$$

Strukturparameter des Sättigungszustandes:

$$\hat{\sigma}_{s(KM)} = M \alpha G b \frac{k_1}{k_2} \quad (23KM)$$

$$\hat{\sigma}_{s(M1)} = M \alpha G b \sqrt{\frac{k}{k_2}} \quad (23M1)$$

$$\hat{\sigma}_{s(M2)} = M \alpha G b \sqrt{\frac{k_0}{k_2}} \quad (23M2)$$

$$\hat{\sigma}_{s(H1)} = \frac{\hat{\sigma}_{s(KM)}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\hat{\sigma}_{s(KM)}}{2} \right)^2 + \hat{\sigma}_{s(M1)}^2} \quad (23H1)$$

$$\hat{\sigma}_{s(H2)} = \frac{\hat{\sigma}_{s(KM)}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\hat{\sigma}_{s(KM)}}{2} \right)^2 + \hat{\sigma}_{s(M2)}^2 \frac{L_S}{L_X}} \quad (23H2)$$

$$p_1 = \frac{\hat{\sigma}_{s(KM)}}{\hat{\sigma}_{s(H1)}} \quad (23H1a)$$

$$p_2 = \frac{\hat{\sigma}_{s(KM)}}{\hat{\sigma}_{s(H2)}} \quad (23H2a)$$

$$(1-p_1) = \frac{\hat{\sigma}_{s(M1)}^2}{\hat{\sigma}_{s(H1)}^2} \quad (23H1b)$$

$$(1-p_2) = \frac{\hat{\sigma}_{s(M2)}^2 \frac{L_s}{L_x}}{\hat{\sigma}_{s(H2)}^2} \quad (23H2b)$$

Sättigungsspannungen:

$$\sigma_{s(KM)} = \hat{\sigma}_{s(KM)} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(KM)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (25KM)$$

$$\sigma_{s(M1)} = \hat{\sigma}_{s(M1)} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(M1)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (25M1)$$

$$\sigma_{s(M2)} = \hat{\sigma}_{s(M2)} \sqrt{\frac{L_s}{L_x}} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (25M2)$$

$$\sigma_{s(H1)}^2 = \hat{\sigma}_{s(H1)}^2 \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(H1)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \quad (25H1)$$

$$\sigma_{s(H2)}^2 = \hat{\sigma}_{s(H2)}^2 \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(H2)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \quad (25H2)$$

5. Die kinetische Grundgleichung in differentieller Form

Die Abhängigkeit der Fließspannung σ von der plastischen Dehnrates $\dot{\varepsilon}$ und der absoluten Temperatur T bei einer gegebenen Struktur des Materials wird durch die kinetische Gleichung beschrieben (vgl. Kapitel 2.2.2):

$$\sigma = \sigma(S, \dot{\varepsilon}, T) \quad (1)$$

Diese kinetische Gleichung kann bei konstanter Temperatur in folgender Form differentiell ausgedrückt werden:

$$d\sigma|_T = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \ln \dot{\varepsilon}} \right)_S d \ln \dot{\varepsilon} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial S} \right)_{\dot{\varepsilon}} dS \quad (2)$$

Die Verfestigungsrate ist durch $\Theta = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ gegeben, damit wird Gleichung (2) zu:

$$\Theta = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \Big|_T = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \ln \dot{\varepsilon}} \right)_S \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d\varepsilon} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial S} \right)_{\dot{\varepsilon}} \frac{dS}{d\varepsilon} \quad (3)$$

Der Strukturparameter S wird in den Modellen mit der Gesamtversetzungsdichte ρ korreliert; er wird nach Gleichung (b) auf S.4 in eine mechanische Festigkeit $\hat{\sigma}$ von Hindernissen transformiert (vgl. Kapitel 2.2.1):

$$\hat{\sigma} = M\alpha Gb\sqrt{\rho} \quad (4)$$

Es wird vorausgesetzt, daß die Fließspannung in der kinetischen Gleichung in (1) folgendermaßen aussieht:

$$\sigma = f(\dot{\varepsilon}, T) \hat{\sigma} = f(\dot{\varepsilon}, T) M\alpha Gb\sqrt{\rho} \quad (5)$$

Laut Gleichung (5) existiert also eine Proportionalität zwischen der Fließspannung σ und der Quadratwurzel der Versetzungsdichte ρ ; dieser Zusammenhang ist experimentell über drei Größenordnungen bestätigt worden. Gleichung (3) wird mit $\hat{\sigma}$ zu:

$$\Theta = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \Big|_T = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \ln \dot{\varepsilon}} \right)_{\hat{\sigma}} \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d\varepsilon} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \hat{\sigma}} \right)_{\dot{\varepsilon}} \frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} \quad (6)$$

Die kinetische Gleichung (5) enthält in dem Term $f(\dot{\varepsilon}, T)$ eine Arrheniusfunktion. Die Spannungsabhängigkeit von $\dot{\varepsilon}$ wird im Modell in Form einer Potenzgleichung angenähert (vgl. Kapitel 2.2.2):

$$\sigma = \hat{\sigma} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (7)$$

Die partiellen Ableitungen $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \ln \dot{\varepsilon}}\right)_{\hat{\sigma}}$ bzw. $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \hat{\sigma}}\right)_{\dot{\varepsilon}}$ in Gleichung (6) werden im folgenden gemäß Gleichung (7) gebildet:

$$\sigma = \hat{\sigma} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \Rightarrow \ln \left(\frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \right) = \frac{1}{m} \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \Rightarrow m \ln \left(\frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \right) = \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)$$

$$\Rightarrow m(d \ln \sigma - d \ln \hat{\sigma}) = d \ln \dot{\varepsilon} - d \ln \dot{\varepsilon}_0$$

$$\text{mit } \dot{\varepsilon}_0 = \text{const} \Rightarrow d \ln \dot{\varepsilon}_0 \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow m(d \ln \sigma - d \ln \hat{\sigma}) = d \ln \dot{\varepsilon} \quad (8)$$

1. Partielle Ableitung ($\hat{\sigma} = \text{const.} \Rightarrow d \ln \hat{\sigma} \rightarrow 0$)

Gleichung (8) vereinfacht sich zu:

$$m d \ln \sigma = d \ln \dot{\varepsilon} \Rightarrow m \frac{\partial \sigma}{\sigma} = d \ln \dot{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial \ln \dot{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{m} \quad (9)$$

2. Partielle Ableitung ($\dot{\varepsilon} = \text{const.} \Rightarrow d \ln \dot{\varepsilon} \rightarrow 0$)

Gleichung (8) vereinfacht sich zu:

$$m(d \ln \sigma - d \ln \hat{\sigma}) = 0 \Rightarrow d \ln \sigma = d \ln \hat{\sigma} \Rightarrow \frac{\partial \sigma}{\sigma} = \frac{\partial \hat{\sigma}}{\hat{\sigma}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{\sigma}} = \frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \quad (10)$$

Die partiellen Ableitungen in den Gleichungen (9) und (10) werden in Gleichung (6) eingesetzt:

$$\Theta = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\sigma}{m} \right) \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d\varepsilon} + \left(\frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \right) \frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} \quad (11)$$

Lösungen für die Differentialgleichung (11) werden sowohl für die Bedingung $\dot{\varepsilon} = \text{const.}$ als auch für die Bedingung $\sigma = \text{const.}$ entwickelt.

6. Formulierung für $\dot{\varepsilon} = \text{const.}$

Gleichung (11) vereinfacht sich zu:

$$\Theta = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \right) \frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} \quad (12)$$

Mit Gleichung (4) für $\hat{\sigma}$ erhält man folgenden Ausdruck für $\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon}$:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = M\alpha Gb \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \frac{d\rho}{d\varepsilon} \quad (13)$$

6.1 Kocks-Mecking-Modell

Die Verfestigung wird durch Wechselwirkung von Versetzungen untereinander bewirkt. Die Entwicklungsgleichung für $\frac{d\rho}{d\varepsilon}$ wird in diesem Ansatz wie folgt gewählt (vgl. Kapitel 2.2.3):

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M(k_1\sqrt{\rho} - k_2\rho) \quad (14KM)$$

Gleichung (14KM) eingesetzt in Gleichung (13) ergibt:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{1}{2} M^2 \alpha Gb (k_1 - k_2 \sqrt{\rho}) = \frac{1}{2} M^2 \alpha Gb k_1 \left(1 - \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\rho} \right)$$

Mit Gleichung (4) lässt sich $\sqrt{\rho}$ durch $\hat{\sigma}$ ersetzen:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{1}{2} M^2 \alpha Gb k_1 \left(1 - \frac{k_2}{k_1} \frac{\hat{\sigma}}{M\alpha Gb} \right) \quad (15KM)$$

Einsetzen der Gleichung (15KM) in Gleichung (12) ergibt:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \right) \frac{1}{2} M^2 \alpha Gb k_1 \left(1 - \frac{k_2}{k_1} \frac{\hat{\sigma}}{M\alpha Gb} \right) \quad (16KM)$$

Der Ausdruck $\left(\frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \right)$ kann durch die kinetische Gleichung (7) durch die Dehnrage ersetzt werden. Es folgt:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{1}{2} M^2 \alpha Gb k_1 \left(1 - \frac{k_2}{k_1} \frac{\hat{\sigma}}{M\alpha Gb} \right) \quad (17KM)$$

a) athermische Verfestigungsrate

Für die Herleitung der athermischen Verfestigungsrate wird die Entwicklungsgleichung für die Versetzungsstruktur ohne den Term für die dynamische Entfestigung angesetzt:

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = Mk_1\sqrt{\rho} \quad (18KM)$$

Mit Gleichung (18KM) wird der Ausdruck $\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon}$ gebildet:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = M\alpha Gb \frac{1}{2\sqrt{\rho}} Mk_1\sqrt{\rho} = \frac{1}{2} M^2 \alpha Gb k_1 \quad (19KM)$$

Gleichung (19KM) und (7) eingesetzt in Gleichung (12) ergibt:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{1}{2} M^2 \alpha Gb k_1 \equiv \Theta_{II} \quad (20KM)$$

b) Strukturparameter für den Sättigungszustand

$$\hat{\sigma}_s = M\alpha Gb\sqrt{\rho_s} \quad (21KM)$$

Einen Ausdruck für ρ_s erhält man aus Gleichung (14KM) wie folgt:

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = 0 = M(k_1\sqrt{\rho_s} - k_2\rho_s) \Rightarrow \sqrt{\rho_s} = \frac{k_1}{k_2} \quad (22KM)$$

Mit Gleichung (22KM) wird Gleichung (21KM) zu:

$$\hat{\sigma}_s = M\alpha Gb \frac{k_1}{k_2} \equiv \hat{\sigma}_{s(KM)} \quad (23KM)$$

Folgender Zusammenhang läßt sich mit Gleichung (20KM) herstellen:

$$\frac{Mk_2}{2} = \frac{\Theta_{II}}{\hat{\sigma}_{s(KM)}} \quad (23KMa)$$

Einsetzen der in den Gleichungen (20KM) und (23KM) definierten Größen Θ_{II} und $\hat{\sigma}_s$ in Gleichung (17KM) ergibt:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \Theta_{II} \left(1 - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{s(KM)}} \right) \quad (24KM)$$

Die kinetische Gleichung (7) ist aufgrund von $\dot{\varepsilon} = \text{const.}$ wie folgt gültig:

$$\frac{\sigma}{\hat{\sigma}} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(KM)}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} = \frac{\sigma_{s(KM)}}{\hat{\sigma}_{s(KM)}} \Rightarrow \frac{\sigma}{\sigma_{s(KM)}} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{s(KM)}} \quad (25KM)$$

Es folgt für die Verfestigungsrate in Gleichung (24KM):

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \Theta_{II} \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_{s(KM)}} \right) \quad (26KM)$$

Zum Integrieren werden die Variablen getrennt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\sigma_{s(KM)} - \sigma)} d\sigma &= \frac{\Theta_{II}}{\sigma_{s(KM)}} d\varepsilon \\ \Rightarrow \int_{\sigma_i}^{\sigma} \frac{1}{\sigma - \sigma_{s(KM)}} d\sigma &= \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -\frac{\Theta_{II}}{\sigma_{s(KM)}} d\varepsilon \quad (27KM) \end{aligned}$$

Die Größen mit dem Index "i" bezeichnen Anfangswerte. Die Durchführung der Integration ist elementar:

$$\begin{aligned} \ln(\sigma - \sigma_{s(KM)}) \Big|_{\sigma_i}^{\sigma} &= -\frac{\Theta_{II}}{\sigma_{s(KM)}} \varepsilon \Big|_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} \quad \frac{\Theta_{II}}{\sigma_{s(KM)}} = \frac{1}{\varepsilon_{r(KM)}} \\ \Rightarrow \ln(\sigma - \sigma_{s(KM)}) - \ln(\sigma_i - \sigma_{s(KM)}) &= -\frac{1}{\varepsilon_{r(KM)}} (\varepsilon - \varepsilon_i) \end{aligned}$$

$$\frac{\sigma - \sigma_{s(KM)}}{\sigma_i - \sigma_{s(KM)}} = \exp \left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{\varepsilon_{r(KM)}} \right] \quad (28KM)$$

6.2 Modifiziertes Modell

Die Verfestigung wird durch Wechselwirkung der Versetzungen mit Teilchen bewirkt.

6.2.1 Version 1: Teilchendurchmesser konstant

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M(k - k_2\rho) \quad (\text{vgl. Kapitel 2.2.3}) \quad (14M1)$$

Gleichung (14M1) eingesetzt in Gleichung (13) ergibt unter Verwendung von Gleichung (4) :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} &= M\alpha Gb \frac{1}{2\sqrt{\rho}} M(k - k_2\rho) = \frac{1}{2} \frac{M^3 \alpha^2 G^2 b^2}{\hat{\sigma}} (k - k_2\rho) \\ \frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} &= \frac{1}{2} \frac{M^3 \alpha^2 G^2 b^2}{\hat{\sigma}} k \left(1 - \frac{k_2}{k} \frac{\hat{\sigma}^2}{M^2 \alpha^2 G^2 b^2} \right) \end{aligned} \quad (15M1)$$

Einsetzen der Gleichung (15M1) in Gleichung (12) ergibt:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \right) \frac{1}{2} \frac{M^3 \alpha^2 G^2 b^2}{\hat{\sigma}} k \left(1 - \frac{k_2}{k} \frac{\hat{\sigma}^2}{M^2 \alpha^2 G^2 b^2} \right) \quad (16M1)$$

Mit Gleichung (7) wird Gleichung (16M1) umgeformt zu:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{1}{2} \frac{M^3 \alpha^2 G^2 b^2}{\sigma} k \left(1 - \frac{k_2}{k} \frac{\hat{\sigma}^2}{M^2 \alpha^2 G^2 b^2} \right) \quad (17M1)$$

a) athermische Verfestigungsrate

Für die Herleitung der athermischen Verfestigungsrate wird die Entwicklungsgleichung für die Versetzungsstruktur ohne den Term für die dynamische Entfestigung angesetzt:

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = Mk \quad (18M1)$$

Mit Gleichung (18M1) wird der Ausdruck $\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon}$ gebildet:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = M\alpha Gb \frac{1}{2\sqrt{\rho}} Mk = \frac{1}{2} \frac{M^3 \alpha^2 G^2 b^2}{\hat{\sigma}} k \quad (19M1)$$

Gleichungen (19M1) und (7) eingesetzt in Gleichung (12) ergibt:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{1}{2} \frac{M^3 \alpha^2 G^2 b^2}{\sigma} k \equiv \frac{\Theta_{a(M1)}^2}{2\sigma}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} M^3 \alpha^2 G^2 b^2 k \equiv \Theta_{a(M1)}^2 \quad (20M1)$$

b) Strukturparameter für den Sättigungszustand

$$\hat{\sigma}_s = M \alpha G b \sqrt{\rho_s} \quad (21M1)$$

Einen Ausdruck für ρ_s erhält man aus Gleichung (14M1) wie folgt:

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = 0 = M(k - k_2 \rho_s) \Rightarrow \rho_s = \frac{k}{k_2} \quad (22M1)$$

Mit Gleichung (22M1) wird Gleichung (21M1) zu:

$$\hat{\sigma}_s = M \alpha G b \sqrt{\frac{k}{k_2}} \equiv \hat{\sigma}_{s(M1)} \quad (23M1)$$

Folgender Zusammenhang lässt sich mit Gleichung (20M1) herstellen:

$$M k_2 = \frac{\Theta_{a(M1)}^2}{\sigma_{s(M1)}^2} \quad (23M1a)$$

Einsetzen der Größen aus den Gleichungen (20M1) und (23M1) in (17M1):

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{\Theta_{a(M1)}^2}{2\sigma} \left(1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(M1)}^2} \right) \quad (24M1)$$

Die kinetische Gleichung (7) ist aufgrund von $\dot{\varepsilon} = \text{const.}$ wie folgt gültig:

$$\frac{\sigma}{\hat{\sigma}} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(M1)}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} = \frac{\sigma_{s(M1)}}{\hat{\sigma}_{s(M1)}} \Rightarrow \frac{\sigma}{\sigma_{s(M1)}} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{s(M1)}} \quad (25M1)$$

Es folgt für die Verfestigungsrate in Gleichung (24M1):

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{\Theta_{a(M1)}^2}{2\sigma} \left(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_{s(M1)}^2} \right) \quad (26M1)$$

Zum Integrieren werden die Variablen getrennt:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{(\sigma_{s(M1)}^2 - \sigma^2)} d\sigma &= \frac{\Theta_{a(M1)}^2}{2\sigma_{s(M1)}^2} d\varepsilon \\ \Rightarrow \int_{\sigma_i}^{\sigma} \frac{2\sigma}{\sigma_{s(M1)}^2 - \sigma^2} d\sigma &= \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} \frac{\Theta_{a(M1)}^2}{\sigma_{s(M1)}^2} d\varepsilon \end{aligned} \quad (27M1)$$

Die Größen mit dem Index "i" bezeichnen Anfangswerte. Die Durchführung der Integration ist elementar:

$$\ln(\sigma^2 - \sigma_{s(M1)}^2) \Big|_{\sigma_i}^{\sigma} = - \frac{\Theta_{a(M1)}^2}{\sigma_{s(M1)}^2} \varepsilon \Big|_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} \quad \text{Definiere: } \frac{\Theta_{a(M1)}^2}{\sigma_{s(M1)}^2} = \frac{1}{\varepsilon_{r(M1)}}$$

$$\Rightarrow \ln(\sigma^2 - \sigma_{s(M1)}^2) - \ln(\sigma_i^2 - \sigma_{s(M1)}^2) = - \frac{1}{\varepsilon_{r(M1)}} (\varepsilon - \varepsilon_i)$$

$$\frac{\sigma^2 - \sigma_{s(M1)}^2}{\sigma_i^2 - \sigma_{s(M1)}^2} = \exp \left[- \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{\varepsilon_{r(M1)}} \right] \quad (28M1)$$

6.2.2 Version 2: Teilchendurchmesser nicht konstant

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M(k - k_2\rho) \quad \text{mit } k = k_0 \frac{L_s}{L} \quad (\text{vgl. Kapitel 2.2.3}) \quad (14M2)$$

Gleichung (14M2) eingesetzt in Gleichung (13) ergibt unter Verwendung von Gleichung (4):

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} &= M\alpha Gb \frac{1}{2\sqrt{\rho}} M \left(k_0 \frac{L_s}{L} - k_2\rho \right) = \frac{1}{2} \frac{M^3 \alpha^2 G^2 b^2}{\hat{\sigma}} \left(k_0 \frac{L_s}{L} - k_2\rho \right) \\ \frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} &= \frac{1}{2} \frac{M^3 \alpha^2 G^2 b^2}{\hat{\sigma}} k_0 \frac{L_s}{L} \left(1 - \frac{k_2}{k_0} \frac{L}{L_s} \frac{\hat{\sigma}^2}{M^2 \alpha^2 G^2 b^2} \right) \end{aligned} \quad (15M2)$$

Einsetzen der Gleichung (15M2) in Gleichung (12) ergibt:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \right) \frac{1}{2} \frac{M^3 \alpha^2 G^2 b^2}{\hat{\sigma}} k_0 \frac{L_s}{L} \left(1 - \frac{k_2}{k_0} \frac{L}{L_s} \frac{\hat{\sigma}^2}{M^2 \alpha^2 G^2 b^2} \right) \quad (16M2)$$

Mit Gleichung (7) wird Gleichung (16M2) umgeformt zu:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{1}{2} \frac{M^3 \alpha^2 G^2 b^2}{\sigma} k_0 \frac{L_s}{L} \left(1 - \frac{k_2}{k_0} \frac{L}{L_s} \frac{\hat{\sigma}^2}{M^2 \alpha^2 G^2 b^2} \right) \quad (17M2)$$

a) athermische Verfestigungsrate

Für die Herleitung der athermischen Verfestigungsrate wird die Entwicklungsgleichung für die Versetzungsstruktur ohne den Term für die dynamische Entfestigung angesetzt:

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M k_0 \frac{L_s}{L} \quad (18M2)$$

Mit Gleichung (18M2) wird der Ausdruck $\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon}$ gebildet:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = M\alpha Gb \frac{1}{2\sqrt{\rho}} M k_0 \frac{L_s}{L} = \frac{1}{2} \frac{M^3 \alpha^2 G^2 b^2}{\hat{\sigma}} k_0 \frac{L_s}{L} \quad (19M2)$$

Gleichungen (19M2) und (7) eingesetzt in Gleichung (12) ergibt:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{1}{2} \frac{M^3 \alpha^2 G^2 b^2}{\sigma} k_0 \frac{L_s}{L} \equiv \frac{\Theta_{a(M2)}^2}{2\sigma} \frac{L_s}{L}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} M^3 \alpha^2 G^2 b^2 k_0 \equiv \Theta_{a(M2)}^2 \quad (20M2)$$

b) Strukturparameter für den Sättigungszustand

$$\hat{\sigma}_s = M \alpha G b \sqrt{\rho_s} \quad (21M2)$$

Einen Ausdruck für ρ_s erhält man aus Gleichung (14M2) wie folgt:

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = 0 = M \left(k_0 \frac{L_s}{L_x} - k_2 \rho_s \right) \Rightarrow \rho_s = \frac{k_0}{k_2} \frac{L_s}{L_x} \quad (22M2)$$

Hierbei bezeichnet ρ_s einen Sättigungswert der Versetzungsdichte, der sich ausbilden würde, wenn $L=L_x$ konstant wäre. Da L eine Funktion der Zeit ist muß folgende Beziehung beachtet werden: $t \leq t_x \leq t_s$.

Mit Gleichung (22M2) wird Gleichung (21M2) zu:

$$\hat{\sigma}_s = M \alpha G b \sqrt{\frac{k_0}{k_2}} \sqrt{\frac{L_s}{L_x}} \equiv \hat{\sigma}_{s(M2)} \sqrt{\frac{L_s}{L_x}}$$

$$\rightarrow \hat{\sigma}_{s(M2)} = M \alpha G b \sqrt{\frac{k_0}{k_2}} \quad (23M2)$$

Folgender Zusammenhang läßt sich mit Gleichung (20M2) herstellen:

$$M k_2 = \frac{\Theta_{a(M2)}^2}{\sigma_{s(M2)}^2} \frac{L_s}{L_x} \quad (23M2a)$$

Einsetzen der Größen aus den Gleichungen (20M2) und (23M2) in (17M2):

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{\Theta_{a(M2)}^2}{2\sigma} \frac{L_s}{L} \left(1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(M2)}^2} \frac{L}{L_s} \right) \quad (24M2)$$

Die kinetische Gleichung (7) ist aufgrund von $\dot{\varepsilon} = \text{const.}$ wie folgt gültig:

$$\frac{\sigma}{\hat{\sigma}} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} = \frac{\sigma_{s(M2)}}{\hat{\sigma}_{s(M2)} \sqrt{L_s/L_x}} \Rightarrow \frac{\sigma}{\sigma_{s(M2)}} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{s(M2)} \sqrt{L_s/L_x}} \quad (25M2)$$

Es folgt für die Verfestigungsrate in Gleichung (24M2):

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{\Theta_{a(M2)}^2}{2\sigma} \frac{L_s}{L} \left(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_{s(M2)}^2} \frac{L}{L_x} \right) \quad (26M2)$$

Zum Integrieren werden die Variablen getrennt und der Laufweg der Versetzungen L sowie der Referenz-Laufweg L_x zur Vereinfachung als konstant angesehen:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} &= \frac{\Theta_{a(M2)}^2}{2\sigma} \frac{L_s}{L} \left(\frac{\sigma_{s(M2)}^2 \frac{L_x}{L} - \sigma^2}{\sigma_{s(M2)}^2 \frac{L_x}{L}} \right) \Rightarrow \frac{\sigma}{\left(\sigma_{s(M2)}^2 \frac{L_x}{L} - \sigma^2 \right)} d\sigma = \frac{\Theta_{a(M2)}^2}{2\sigma_{s(M2)}^2} \frac{L}{L_x} \frac{L_s}{L} d\varepsilon \\ \Rightarrow \int_{\sigma_i}^{\sigma} \frac{2\sigma}{\sigma^2 - \sigma_{s(M2)}^2 \frac{L_x}{L}} d\sigma &= \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -\frac{L_s}{L_x} \frac{\Theta_{a(M2)}^2}{\sigma_{s(M2)}^2} d\varepsilon \end{aligned} \quad (27M2)$$

Die Größen mit dem Index "i" bezeichnen Anfangswerte. Die Durchführung der Integration ist elementar:

$$\ln \left(\sigma^2 - \sigma_{s(M2)}^2 \frac{L_x}{L} \right) \Big|_{\sigma_i}^{\sigma} = -\frac{L_s}{L_x} \frac{\Theta_{a(M2)}^2}{\sigma_{s(M2)}^2} \varepsilon \Big|_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} \quad \text{Definiere: } \frac{\Theta_{a(M2)}^2}{\sigma_{s(M2)}^2} = \frac{1}{\varepsilon_{r(M2)}}$$

$$\Rightarrow \ln \left(\sigma^2 - \sigma_{s(M2)}^2 \frac{L_x}{L} \right) - \ln \left(\sigma_i^2 - \sigma_{s(M2)}^2 \frac{L_x}{L} \right) = -\frac{L_s}{L_x} \frac{1}{\varepsilon_{r(M2)}} (\varepsilon - \varepsilon_i)$$

$$\frac{\sigma^2 - \sigma_{s(M2)}^2 \frac{L_x}{L}}{\sigma_i^2 - \sigma_{s(M2)}^2 \frac{L_x}{L}} = \exp \left[-\frac{L_s}{L_x} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{\varepsilon_{r(M2)}} \right] \quad (28M2)$$

Die Gleichung (28M2) ist eine Näherungslösung, da der Term für die Entwicklung der Carbidstruktur nicht integriert worden ist. Sobald jedoch der Sättigungszustand bei der Carbidentwicklung erreicht wird, daß heißt, wenn der Carbid Durchmesser sich nicht mehr nennenswert ändert, sollte $L=L_x=L_s$ werden. Die Lösung des Integrals geht dann von einer Näherungslösung in eine exakte Lösung über.

6.3. Hybrid-Modell

Die Verfestigung wird durch Wechselwirkung von Versetzungen untereinander und Wechselwirkung von Versetzungen mit Teilchen bewirkt.

6.3.1 Version 1: Teilchendurchmesser konstant

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M(k + k_1\sqrt{\rho} - k_2\rho) \quad (\text{vgl. Kapitel 2.2.3}) \quad (14H1)$$

Gleichung (14H1) eingesetzt in Gleichung (13) ergibt:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{M\alpha Gb}{2\sqrt{\rho}} M(k + k_1\sqrt{\rho} - k_2\rho)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{M^3\alpha^2 G^2 b^2}{2\hat{\sigma}} k_2 \left(\frac{k}{k_2} + \frac{k_1}{k_2} \frac{\hat{\sigma}}{M\alpha Gb} - \frac{\hat{\sigma}^2}{M^2\alpha^2 G^2 b^2} \right) \quad (15H1)$$

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \right) \frac{M^3\alpha^2 G^2 b^2}{2\hat{\sigma}} k_2 \left(\frac{k}{k_2} + \frac{k_1}{k_2} \frac{\hat{\sigma}}{M\alpha Gb} - \frac{\hat{\sigma}^2}{M^2\alpha^2 G^2 b^2} \right) \quad (16H1)$$

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{Mk_2}{2\sigma} \left(\frac{k}{k_2} M^2\alpha^2 G^2 b^2 + \frac{k_1}{k_2} M\alpha Gb\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^2 \right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{Mk_2}{2\sigma} \left(\hat{\sigma}_{s(M1)}^2 + \hat{\sigma}_{s(KM)}\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^2 \right) \quad (17H1)$$

a) athermische Verfestigungsrate

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M(k + k_1\sqrt{\rho}) \quad (18H1)$$

Mit Gleichung (18H1) wird der Ausdruck $\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon}$ gebildet:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{M\alpha Gb}{2\sqrt{\rho}} M(k + k_1\sqrt{\rho})$$

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{M^3 \alpha^2 G^2 b^2}{2\hat{\sigma}} \left(k + k_1 \frac{\hat{\sigma}}{M \alpha G b} \right) \quad (19H1)$$

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \left(\frac{M^3 \alpha^2 G^2 b^2}{2\sigma} k + \frac{M^2 \alpha G b}{2\sigma} k_1 \hat{\sigma} \right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{\Theta_{a(M)}^2}{2\sigma} + \Theta_{II} \equiv \Theta_{h(H1)} \quad (20H1)$$

b) Strukturparameter für den Sättigungszustand

$$\hat{\sigma}_s = M \alpha G b \sqrt{\rho_s} \quad (21H1)$$

Einen Ausdruck für ρ_s erhält man aus Gleichung (14H1) wie folgt:

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = 0 = M \left(k + k_1 \sqrt{\rho_s} - k_2 \rho_s \right) \Rightarrow k_2 \rho_s - k_1 \sqrt{\rho_s} - k = 0$$

$$\text{Substitution: } \sqrt{\rho_s} = u \Rightarrow u^2 - \frac{k_1}{k_2} u - \frac{k}{k_2} = 0$$

$$\Rightarrow u = \frac{k_1}{2k_2} \pm \sqrt{\frac{k_1^2}{4k_2^2} + \frac{k}{k_2}} \Rightarrow u = \frac{k_1}{2k_2} \pm \frac{k_1}{2k_2} \sqrt{1 + \frac{4kk_2}{k_1^2}}$$

Rücksubstitution und da $\rho < 0$ nicht möglich folgt:

$$\Rightarrow \sqrt{\rho_s} = \frac{1}{2} \frac{k_1}{k_2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4kk_2}{k_1^2}} \right) \quad (22H1)$$

$$\hat{\sigma}_s = M \alpha G b \frac{1}{2} \frac{k_1}{k_2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4kk_2}{k_1^2}} \right) \equiv \hat{\sigma}_{s(H1)}$$

Mit Gleichung (23KM) folgt:

$$\hat{\sigma}_s = \hat{\sigma}_{s(KM)} \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4kk_2}{k_1^2}} \right) \equiv \hat{\sigma}_{s(H1)} \quad (23H1)$$

Parameter p_1 wird definiert:
$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4kk_2}{k_1^2}}} \equiv p_1 = \frac{\hat{\sigma}_{s(KM)}}{\hat{\sigma}_{s(H1)}} \quad (23H1a)$$

$$p_1=1 \Rightarrow \text{Kocks-Mecking Modell (KM)}$$

Zusammenhang zwischen den Sättigungsstrukturparametern des modifizierten Modells und des Hybrid-Modells:

$$\hat{\sigma}_{s(H1)}^2 = \hat{\sigma}_{s(KM)}^2 \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4kk_2}{k_1^2}} \right)^2$$

$$\hat{\sigma}_{s(H1)}^2 = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{s(KM)}^2 + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{s(KM)}^2 \sqrt{1 + \frac{4kk_2}{k_1^2}} + M^2 \alpha^2 G^2 b^2 \frac{k}{k_2}$$

$$\hat{\sigma}_{s(H1)}^2 = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{s(KM)}^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4kk_2}{k_1^2}} \right) + \hat{\sigma}_{s(M1)}^2$$

$$\hat{\sigma}_{s(H1)}^2 = p_1^2 \hat{\sigma}_{s(H1)}^2 p_1^{-1} + \hat{\sigma}_{s(M1)}^2 \Rightarrow (1 - p_1) = \frac{\hat{\sigma}_{s(M1)}^2}{\hat{\sigma}_{s(H1)}^2} \quad (23H1b)$$

$$p_1=0 \Rightarrow \text{Modifiziertes Modell (M1)}$$

Der Parameter p_1 kann Werte zwischen 1 und 0 annehmen und legt damit fest, zu welchen Anteilen die Verfestigung über Versetzungswechselwirkung oder Wechselwirkung zwischen Versetzungen und Teilchen erfolgt:

$$0 \leq p_1 \leq 1 \Rightarrow \text{Hybrid Modell (H1)}$$

Erweitern der Gleichung (17H1) um den Sättigungsstrukturparameter des Hybrid-Modells:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{Mk_2}{2\sigma} \hat{\sigma}_{s(H1)}^2 \left(\frac{\hat{\sigma}_{s(M1)}^2}{\hat{\sigma}_{s(H1)}^2} + \frac{\hat{\sigma}_{s(KM)} \hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{s(H1)}^2} - \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(H1)}^2} \right)$$

Für den Entfestigungskoeffizienten gilt sowohl Gleichung (23KM_a) als auch Gleichung (23M1_a), daher ist die weitere Entwicklung des Hybrid-Modells einmal mit den Größen des KM-Modells und zum anderen mit den Größen des modifizierten Modells (M1) möglich. Einführen des definierten Parameters p_1 ergibt:

$$KM: \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{\Theta_{II}}{\sigma \sigma_{s(KM)}} \hat{\sigma}_{s(H1)}^2 \left((1-p_1) + \frac{p_1 \hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{s(H1)}} - \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(H1)}^2} \right) \quad (24H1a)$$

$$M1: \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{\Theta_{a(M1)}^2}{2\sigma \sigma_{s(M1)}^2} \hat{\sigma}_{s(H1)}^2 \left((1-p_1) + \frac{p_1 \hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{s(H1)}} - \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(H1)}^2} \right) \quad (24H1b)$$

Die kinetische Gleichung (7) ist aufgrund von $\dot{\varepsilon} = \text{const.}$ wie folgt gültig:

$$\frac{\sigma^2}{\hat{\sigma}^2} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(H1)}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} = \frac{\sigma_{s(H1)}^2}{\hat{\sigma}_{s(H1)}^2} \Rightarrow \frac{\sigma^2}{\sigma_{s(H1)}^2} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(H1)}^2} \quad (25H1)$$

Es folgt für die Verfestigungsraten in den Gleichungen (24H1a) und (24H1b):

$KM: \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{\Theta_{II}}{\sigma \sigma_{s(KM)}} \sigma_{s(H1)}^2 \left((1-p_1) + \frac{p_1 \sigma}{\sigma_{s(H1)}} - \frac{\sigma^2}{\sigma_{s(H1)}^2} \right) \quad (26H1a)$	$M1: \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{\Theta_{a(M1)}^2}{2\sigma \sigma_{s(M1)}^2} \sigma_{s(H1)}^2 \left((1-p_1) + \frac{p_1 \sigma}{\sigma_{s(H1)}} - \frac{\sigma^2}{\sigma_{s(H1)}^2} \right) \quad (26H1b)$
--	--

Definiere: $Z_{KM} = \frac{\Theta_{II}}{\sigma_{s(KM)}}$ und $Z_{M1} = \frac{\Theta_{a(M1)}^2}{2\sigma_{s(M1)}^2}$

$$\Rightarrow \frac{\sigma d\sigma}{(1-p_1) + \frac{p_1 \sigma}{\sigma_{s(H1)}} - \frac{\sigma^2}{\sigma_{s(H1)}^2}} = Z_{(KM;M1)} \sigma_{s(H1)}^2 d\varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_{\sigma_i}^{\sigma} \frac{\sigma}{\sigma^2 - p_1 \sigma_{s(H1)} \sigma - (1-p_1) \sigma_{s(H1)}^2} d\sigma = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -Z_{(KM;M1)} d\varepsilon \quad (27H1)$$

Zum Integrieren wird eine Partialbruchzerlegung durchgeführt:

a) Bestimmung der Nullstellen des Nenners

$$\sigma^2 - p_1 \sigma_{s(H1)} \sigma - (1 - p_1) \sigma_{s(H1)}^2 = 0$$

$$\sigma_{1/2} = \frac{p_1 \sigma_{s(H1)}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} p_1^2 \sigma_{s(H1)}^2 + (1 - p_1) \sigma_{s(H1)}^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{1/2} = \frac{p_1 \sigma_{s(H1)}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_{s(H1)}^2 (p_1^2 + 4 - 4p_1)}$$

$$\sigma_{1/2} = \frac{p_1 \sigma_{s(H1)}}{2} \pm \frac{1}{2} \sigma_{s(H1)} (p_1 - 2) \Rightarrow \sigma_{1/2} = \frac{\sigma_{s(H1)}}{2} (p_1 \pm (p_1 - 2))$$

$$\sigma_1 = \sigma_{s(H1)} (p_1 - 1) \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \sigma_{s(H1)}$$

b) Bilden des Partialbruchs

$$\frac{\sigma}{(\sigma - \sigma_{s(H1)} (p_1 - 1))(\sigma - \sigma_{s(H1)})} = \frac{A}{(\sigma - \sigma_{s(H1)} (p_1 - 1))} + \frac{B}{(\sigma - \sigma_{s(H1)})}$$

c) Bestimmung der Koeffizienten

$$\sigma = A(\sigma - \sigma_{s(H1)}) + B(\sigma - \sigma_{s(H1)} (p_1 - 1))$$

$$\text{für } \sigma = \sigma_1 \Rightarrow \sigma_{s(H1)} (p_1 - 1) = A(\sigma_{s(H1)} p_1 - 2\sigma_{s(H1)}) \Rightarrow A = \frac{(1 - p_1)}{(2 - p_1)}$$

$$\text{für } \sigma = \sigma_2 \Rightarrow \sigma_{s(H1)} = B\sigma_{s(H1)} (1 - (p_1 - 1)) \Rightarrow B = \frac{1}{(2 - p_1)}$$

Das Integral in Gleichung (27H1) läßt sich nun folgendermaßen schreiben:

$$\int_{\sigma_i}^{\sigma} \frac{(1 - p_1)}{(2 - p_1)} \frac{1}{(\sigma + \sigma_{s(H1)} (1 - p_1))} d\sigma + \int_{\sigma_i}^{\sigma} \frac{1}{(2 - p_1)} \frac{1}{(\sigma - \sigma_{s(H1)})} d\sigma = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -Z_{(KM;M1)} d\varepsilon$$

Lösen des Integrals ergibt:

$$(1-p_1) \ln(\sigma + \sigma_{s(H1)}(1-p_1)) \Big|_{\sigma_i}^{\sigma} + \ln(\sigma - \sigma_{s(H1)}) \Big|_{\sigma_i}^{\sigma} = -(2-p_1) Z_{(KM;M1)} \varepsilon \Big|_{\varepsilon_i}^{\varepsilon}$$

Definiere:
$$(2-p_1) Z_{KM} \equiv \frac{1}{\varepsilon_{r(H1)}} = \frac{(2-p_1) \Theta_{II}}{\sigma_{s(KM)}}$$

oder:

$$(2-p_1) Z_{M1} \equiv \frac{1}{\varepsilon_{r(H1)}} = \frac{(2-p_1) \Theta_{a(M1)}^2}{2\sigma_{s(M1)}^2}$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{\sigma + \sigma_{s(H1)}(1-p_1)}{\sigma_i + \sigma_{s(H1)}(1-p_1)} \right)^{1-p_1} + \ln \left(\frac{\sigma - \sigma_{s(H1)}}{\sigma_i - \sigma_{s(H1)}} \right) = - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{\varepsilon_{r(H1)}}$$

$$\left(\frac{\sigma + \sigma_{s(H1)}(1-p_1)}{\sigma_i + \sigma_{s(H1)}(1-p_1)} \right)^{1-p_1} \left(\frac{\sigma - \sigma_{s(H1)}}{\sigma_i - \sigma_{s(H1)}} \right) = \exp \left[- \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{\varepsilon_{r(H1)}} \right] \quad (28H1)$$

Laut Definition nimmt der Parameter p_1 Werte zwischen 0 und 1 an. Die Gleichung (28H1) geht bei Einsetzen der Randwerte in die Lösung des KM-Modells oder des modifizierten Modells (M1) über:

$p_1=1$: KM-Modell, Gleichung (28KM)

$p_1=0$: modifiziertes Modell, Gleichung (28M1)

6.3.2 Version 2: Teilchendurchmesser nicht konstant

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M(k + k_1\sqrt{\rho} - k_2\rho) \quad \text{mit } k = k_0 \frac{L_s}{L} \quad (\text{vgl. Kapitel 2.2.3}) \quad (14H2)$$

Gleichung (14H2) eingesetzt in Gleichung (13) ergibt:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{M\alpha Gb}{2\sqrt{\rho}} M\left(k_0 \frac{L_s}{L} + k_1\sqrt{\rho} - k_2\rho\right)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{M^3\alpha^2 G^2 b^2}{2\hat{\sigma}} k_2 \left(\frac{k_0 L_s}{k_2 L} + \frac{k_1}{k_2} \frac{\hat{\sigma}}{M\alpha Gb} - \frac{\hat{\sigma}^2}{M^2\alpha^2 G^2 b^2} \right) \quad (15H2)$$

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \right) \frac{M^3\alpha^2 G^2 b^2}{2\hat{\sigma}} k_2 \left(\frac{k_0 L_s}{k_2 L} + \frac{k_1}{k_2} \frac{\hat{\sigma}}{M\alpha Gb} - \frac{\hat{\sigma}^2}{M^2\alpha^2 G^2 b^2} \right) \quad (16H2)$$

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{Mk_2}{2\sigma} \left(\frac{k_0 L_s}{k_2 L} M^2\alpha^2 G^2 b^2 + \frac{k_1 M\alpha Gb \hat{\sigma}}{k_2} - \hat{\sigma}^2 \right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{Mk_2}{2\sigma} \left(\hat{\sigma}_{s(M2)}^2 \frac{L_s}{L} + \hat{\sigma}_{s(KM)} \hat{\sigma} - \hat{\sigma}^2 \right) \quad (17H2)$$

a) athermische Verfestigungsrate

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M\left(k_0 \frac{L_s}{L} + k_1\sqrt{\rho}\right) \quad (18H2)$$

Mit Gleichung (18H2) wird der Ausdruck $\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon}$ gebildet:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{M\alpha Gb}{2\sqrt{\rho}} M\left(k_0 \frac{L_s}{L} + k_1\sqrt{\rho}\right)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{M^3\alpha^2 G^2 b^2}{2\hat{\sigma}} \left(k_0 \frac{L_s}{L} + k_1 \frac{\hat{\sigma}}{M\alpha Gb} \right) \quad (19H2)$$

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \left(\frac{M^3\alpha^2 G^2 b^2}{2\sigma} k_0 \frac{L_s}{L} + \frac{M^2\alpha Gb}{2\sigma} k_1 \hat{\sigma} \right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{\Theta_{a(M2)}^2}{2\sigma} \frac{L_s}{L} + \Theta_{II} \equiv \Theta_{h(H2)} \quad (20H2)$$

b) Strukturparameter für den Sättigungszustand

$$\hat{\sigma}_s = M\alpha Gb\sqrt{\rho_s} \quad (21H2)$$

Einen Ausdruck für ρ_s erhält man aus Gleichung (14H2) wie folgt:

$$\frac{dp}{d\varepsilon} = 0 = M \left(k_0 \frac{L_s}{L_x} + k_1 \sqrt{\rho_s} - k_2 \rho_s \right) \Rightarrow k_2 \rho_s - k_1 \sqrt{\rho_s} - k_0 \frac{L_s}{L_x} = 0$$

$$\text{Substitution: } \sqrt{\rho_s} = u \Rightarrow u^2 - \frac{k_1}{k_2} u - \frac{k_0}{k_2} \frac{L_s}{L_x} = 0$$

$$\Rightarrow u = \frac{k_1}{2k_2} \pm \sqrt{\frac{k_1^2}{4k_2^2} + \frac{k_0}{k_2} \frac{L_s}{L_x}} \Rightarrow u = \frac{k_1}{2k_2} \pm \frac{k_1}{2k_2} \sqrt{1 + \frac{4k_0 k_2}{k_1^2} \frac{L_s}{L_x}}$$

Rücksubstitution und da $\rho < 0$ nicht möglich folgt:

$$\Rightarrow \sqrt{\rho_s} = \frac{1}{2} \frac{k_1}{k_2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4k_0 k_2}{k_1^2} \frac{L_s}{L_x}} \right) \quad (22H2)$$

$$\hat{\sigma}_s = M\alpha Gb \frac{1}{2} \frac{k_1}{k_2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4k_0 k_2}{k_1^2} \frac{L_s}{L_x}} \right) \equiv \hat{\sigma}_{s(H2)}$$

Mit Gleichung (23KM) folgt:

$$\hat{\sigma}_s = \hat{\sigma}_{s(KM)} \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4k_0 k_2}{k_1^2} \frac{L_s}{L_x}} \right) \equiv \hat{\sigma}_{s(H2)} \quad (23H2)$$

Parameter p_2 wird definiert:
$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4k_0 k_2}{k_1^2} \frac{L_s}{L_x}}} \equiv p_2 = \frac{\hat{\sigma}_{s(KM)}}{\hat{\sigma}_{s(H2)}} \quad (23H2a)$$

$p_2 = 1 \Rightarrow$ Kocks-Mecking Modell (KM)

Zusammenhang zwischen den Sättigungsstrukturparametern des modifizierten Modells und des Hybrid-Modells:

$$\hat{\sigma}_{s(H2)}^2 = \hat{\sigma}_{s(KM)}^2 \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4k_0 k_2 L_s}{k_1^2 L_x}} \right)^2$$

$$\hat{\sigma}_{s(H2)}^2 = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{s(KM)}^2 + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{s(KM)}^2 \sqrt{1 + \frac{4k_0 k_2 L_s}{k_1^2 L_x}} + M^2 \alpha^2 G^2 b^2 \frac{k_0 L_s}{k_2 L_x}$$

$$\hat{\sigma}_{s(H2)}^2 = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{s(KM)}^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4k_0 k_2 L_s}{k_1^2 L_x}} \right) + \hat{\sigma}_{s(M2)}^2 \frac{L_s}{L_x}$$

$$\hat{\sigma}_{s(H2)}^2 = p_2^2 \hat{\sigma}_{s(H2)}^2 p_2^{-1} + \hat{\sigma}_{s(M2)}^2 \frac{L_s}{L_x} \Rightarrow (1 - p_2) = \frac{\hat{\sigma}_{s(M2)}^2 \frac{L_s}{L_x}}{\hat{\sigma}_{s(H2)}^2} \quad (23H2b)$$

$p_2 = 0 \Rightarrow$ Modifiziertes Modell (M2)

Der Parameter p_2 kann Werte zwischen 1 und 0 annehmen und legt damit fest, zu welchen Anteilen die Verfestigung über Versetzungswechselwirkung oder Wechselwirkung zwischen Versetzungen und Carbiden erfolgt:

$0 \leq p_2 \leq 1 \Rightarrow$ Hybrid Modell (H2)

Erweitern der Gleichung (17H2) um den Sättigungsstrukturparameter des Hybrid-Modells:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{Mk_2}{2\sigma} \hat{\sigma}_{s(H2)}^2 \left(\frac{\hat{\sigma}_{s(M2)}^2 \frac{L_s}{L}}{\hat{\sigma}_{s(H2)}^2} + \frac{\hat{\sigma}_{s(KM)} \hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{s(H2)}^2} - \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(H2)}^2} \right)$$

Für den Entfestigungskoeffizienten gilt sowohl Gleichung (23KMa) als auch Gleichung (23M2a), daher ist die weitere Entwicklung des Hybrid-Modells einmal mit den Größen des KM-Modells und zum anderen mit den Größen des modifizierten Modells (M2) möglich. Einführen des definierten Parameters p_2 ergibt:

$$KM: \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{\Theta_{||}}{\sigma \sigma_{s(KM)}} \hat{\sigma}_{s(H2)}^2 \left((1 - p_2) \frac{L_s}{L} + \frac{p_2 \hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{s(H2)}} - \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(H2)}^2} \right) \quad (24H2a)$$

$$M2: \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{\Theta_{a(M2)}^2}{2\sigma\sigma_{s(M2)}^2} \frac{L_s}{L_x} \hat{\sigma}_{s(H)}^2 \left((1-p_2) \frac{L_s}{L} + \frac{p_2 \hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{s(H2)}} - \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(H2)}^2} \right) \quad (24H2b)$$

Die kinetische Gleichung (7) ist aufgrund von $\dot{\varepsilon} = \text{const.}$ wie folgt gütig:

$$\frac{\sigma^2}{\hat{\sigma}^2} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} = \frac{\sigma_{s(H2)}^2}{\hat{\sigma}_{s(H2)}^2} \Rightarrow \frac{\sigma^2}{\sigma_{s(H2)}^2} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(H2)}^2} \quad (25H2)$$

Es folgt für die Verfestigungsraten in den Gleichungen (24H2a) und (24H2b):

$$KM: \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{\Theta_{II}}{\sigma\sigma_{s(KM)}} \sigma_{s(H2)}^2 \left((1-p_2) \frac{L_x}{L} + \frac{p_2 \sigma}{\sigma_{s(H2)}} - \frac{\sigma^2}{\sigma_{s(H2)}^2} \right) \quad (26H2a)$$

$$M2: \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{\Theta_{a(M2)}^2}{2\sigma\sigma_{s(M2)}^2} \frac{L_s}{L_x} \sigma_{s(H2)}^2 \left((1-p_2) \frac{L_x}{L} + \frac{p_2 \sigma}{\sigma_{s(H2)}} - \frac{\sigma^2}{\sigma_{s(H2)}^2} \right) \quad (26H2b)$$

$$\text{Definiere: } Z_{KM} = \frac{\Theta_{II}}{\sigma_{s(KM)}} \text{ und } Z_{M2} = \frac{\Theta_{a(M2)}^2}{2\sigma_{s(M2)}^2} \frac{L_s}{L_x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma d\sigma}{(1-p_2) \frac{L_x}{L} + \frac{p_2 \sigma}{\sigma_{s(H2)}} - \frac{\sigma^2}{\sigma_{s(H2)}^2}} = Z_{(KM;M2)} \sigma_{s(H2)}^2 d\varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_{\sigma_i}^{\sigma} \frac{\sigma}{\sigma^2 - p_2 \sigma_{s(H2)} \sigma - \frac{L_x}{L} (1-p_2) \sigma_{s(H2)}^2} d\sigma = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -Z_{(KM;M2)} d\varepsilon \quad (27H2)$$

Zum Integrieren wird eine Partialbruchzerlegung durchgeführt:

a) Bestimmung der Nullstellen des Nenners

$$\sigma^2 - p_2 \sigma_{s(H2)} \sigma - \frac{L_x}{L} (1-p_2) \sigma_{s(H2)}^2 = 0$$

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = \frac{p_2 \sigma_{s(H2)}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} p_2^2 \sigma_{s(H2)}^2 + \frac{L_x}{L} (1-p_2) \sigma_{s(H2)}^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{1/2} = \frac{p_2 \sigma_{s(H_2)}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_{s(H_2)}^2 (p_2^2 + 4 \frac{L_x}{L} (1 - p_2))}$$

Eine Hilfsvariable wird definiert: $r = \sqrt{p_2^2 + 4 \frac{L_x}{L} (1 - p_2)}$

$$\Rightarrow \sigma_{1/2} = \frac{p_2 \sigma_{s(H_2)}}{2} \pm \frac{1}{2} \sigma_{s(H_2)} r \Rightarrow \sigma_{1/2} = \frac{\sigma_{s(H_2)}}{2} (p_2 \pm r)$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{\sigma_{s(H_2)}}{2} (p_2 + r) \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_{s(H_2)}}{2} (p_2 - r)$$

b) Bilden des Partialbruchs

$$\frac{\sigma}{\left(\sigma - \frac{\sigma_{s(H_2)}}{2} (p_2 + r) \right) \left(\sigma - \frac{\sigma_{s(H_2)}}{2} (p_2 - r) \right)} = \frac{A}{\left(\sigma - \frac{\sigma_{s(H_2)}}{2} (p_2 + r) \right)} + \frac{B}{\left(\sigma - \frac{\sigma_{s(H_2)}}{2} (p_2 - r) \right)}$$

c) Bestimmung der Koeffizienten

$$\sigma = A \left(\sigma - \frac{\sigma_{s(H_2)}}{2} (p_2 - r) \right) + B \left(\sigma - \frac{\sigma_{s(H_2)}}{2} (p_2 + r) \right)$$

$$\text{für } \sigma = \sigma_1 \Rightarrow \frac{\sigma_{s(H_2)}}{2} (p_2 + r) = A \left(\frac{\sigma_{s(H_2)}}{2} (p_2 + r) - \frac{\sigma_{s(H_2)}}{2} (p_2 - r) \right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \left(\frac{p_2}{r} + 1 \right)$$

$$\text{für } \sigma = \sigma_2 \Rightarrow \frac{\sigma_{s(H_2)}}{2} (p_2 - r) = B \left(\frac{\sigma_{s(H_2)}}{2} (p_2 - r) - \frac{\sigma_{s(H_2)}}{2} (p_2 + r) \right)$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p_2}{r} \right)$$

Das Integral in Gleichung (27H2) läßt sich nun folgendermaßen schreiben:

$$\int_{\sigma_i}^{\sigma} \frac{1}{2} \left(\frac{p_2}{r} + 1 \right) \frac{d\sigma}{\left(\sigma - \frac{\sigma_{s(H_2)}}{2} (p_2 + r) \right)} + \int_{\sigma_i}^{\sigma} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p_2}{r} \right) \frac{d\sigma}{\left(\sigma - \frac{\sigma_{s(H_2)}}{2} (p_2 - r) \right)} = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -Z_{(KM;M2)} d\varepsilon$$

Lösen des Integrals ergibt:

$$\left(1 + \frac{p_2}{r}\right) \ln \left(\sigma - \frac{\sigma_{s(H2)}}{2} (p_2 + r) \right) \Big|_{\sigma_i}^{\sigma} + \left(1 - \frac{p_2}{r}\right) \ln \left(\sigma - \frac{\sigma_{s(H2)}}{2} (p_2 - r) \right) \Big|_{\sigma_i}^{\sigma} = -2Z_{(KM;M2)} \varepsilon \Big|_{\varepsilon_i}^{\varepsilon}$$

Definiere:

$$2Z_{KM} \equiv \frac{1}{\varepsilon_{r(H2)}} = \frac{2\Theta_{II}}{\sigma_{s(KM)}}$$

oder:

$$2Z_{M2} \equiv \frac{1}{\varepsilon_{r(H2)}} = \frac{\Theta_{a(M2)}^2}{\sigma_{s(M2)}^2} \frac{L_S}{L_X}$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{\sigma - \frac{\sigma_{s(H2)}}{2} (p_2 + r)}{\sigma_i - \frac{\sigma_{s(H2)}}{2} (p_2 + r)} \right)^{\left(1 + \frac{p_2}{r}\right)} + \ln \left(\frac{\sigma - \frac{\sigma_{s(H2)}}{2} (p_2 - r)}{\sigma_i - \frac{\sigma_{s(H2)}}{2} (p_2 - r)} \right)^{\left(1 - \frac{p_2}{r}\right)} = - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{\varepsilon_{r(H2)}}$$

$$\left(\frac{\sigma - \frac{\sigma_{s(H2)}}{2} (p_2 + r)}{\sigma_i - \frac{\sigma_{s(H2)}}{2} (p_2 + r)} \right)^{\left(1 + \frac{p_2}{r}\right)} \left(\frac{\sigma - \frac{\sigma_{s(H2)}}{2} (p_2 - r)}{\sigma_i - \frac{\sigma_{s(H2)}}{2} (p_2 - r)} \right)^{\left(1 - \frac{p_2}{r}\right)} = \exp \left[- \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{\varepsilon_{r(H2)}} \right] \quad (28H2)$$

Laut Definition nimmt der Parameter p_2 Werte zwischen 0 und 1 an. Die Gleichung (28H2) geht bei Einsetzen der Randwerte in die Lösung des KM-Modells (28KM) oder des modifizierten Modells (28M2) über.

Zu beachten ist, daß sowohl in der Sättigungsspannung für das Hybrid-Modell (H2) als auch in den Parametern p_2 und r der Ausdruck $L(t)$ für die Entwicklung der Carbidstruktur steckt. Damit ist dieser Ausdruck nicht integriert worden. Die Lösung ist also eine Näherungslösung, und wird erst zu einer exakten Lösung, wenn $L=L_X=L_S$ wird.

6.3.3 Version 3: Zwei Gewichtungparameter

In dieser Version des Hybrid-Modells werden die Parameter j und g direkt in die Entwicklungsgleichung für $\frac{d\rho}{d\varepsilon}$ eingeführt. Die Parameter j und g haben jetzt nur die Aufgabe, zwischen Verfestigung durch Versetzungswechselwirkung und Wechselwirkung zwischen Carbiden und Versetzungen zu gewichten; es wird ihnen keine Definitionsgleichung zugewiesen (vgl. Kapitel 2.2.3):

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M(kj + k_1\sqrt{\rho}g - k_2\rho) \quad \text{mit } k = k_0 \frac{L_s}{L} \quad (14H3)$$

Gleichung (29H3) eingesetzt in Gleichung (13) ergibt:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{M\alpha Gb}{2\sqrt{\rho}} M \left(k_0 \frac{L_s}{L} j + k_1\sqrt{\rho}g - k_2\rho \right)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{M^3(\alpha Gb)^2}{2\hat{\sigma}} \left(k_0 \frac{L_s}{L} j + k_1\sqrt{\rho}g - \frac{1}{2}k_2\rho - \frac{1}{2}k_2\rho \right)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{M^3(\alpha Gb)^2}{2\hat{\sigma}} \left(\frac{k_0 L_s}{L} j + k_1\sqrt{\rho}g - \frac{M\alpha Gb k_1}{2\hat{\sigma}_{s(KM)}} \rho - \frac{(M\alpha Gb)^2 k_0}{2\hat{\sigma}_{s(M2)}^2} \rho \right)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{M^3(\alpha Gb)^2}{2\hat{\sigma}} \left(\frac{k_0 L_s}{L} j + \frac{k_1 \hat{\sigma} g}{M\alpha Gb} - \frac{\hat{\sigma}^2 k_1}{2\hat{\sigma}_{s(KM)} M\alpha Gb} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2\hat{\sigma}_{s(M2)}^2} k_0 \right)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{M^3(\alpha Gb)^2}{2\hat{\sigma}} \left(k_0 \left(\frac{L_s}{L} j - \frac{\hat{\sigma}^2}{2\hat{\sigma}_{s(M2)}^2} \right) + \frac{k_1}{M\alpha Gb} \left(\hat{\sigma} g - \frac{\hat{\sigma}^2}{2\hat{\sigma}_{s(KM)}} \right) \right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{2\sigma} \left(\Theta_{a(M2)}^2 \left(\frac{L_s}{L} j - \frac{\sigma^2}{2\sigma_{s(M2)}^2} \frac{L_x}{L_s} \right) + 2\Theta_{||} \left(\sigma g - \frac{\sigma^2}{2\sigma_{s(KM)}} \right) \right) \quad (26H3)$$

Trennen der Variablen:

$$\frac{\sigma d\sigma}{\Theta_{a(M2)}^2 \frac{L_s}{L} j - \Theta_{a(M2)}^2 \frac{\sigma^2}{2\sigma_{s(M2)}^2} \frac{L_x}{L_s} + 2\Theta_{||} \sigma g - \Theta_{||} \frac{\sigma^2}{\sigma_{s(KM)}}} = \frac{1}{2} d\varepsilon$$

$$\frac{\sigma d\sigma}{\sigma^2 \left(\frac{\Theta_{a(M2)}^2}{2\sigma_{s(M2)}^2} \frac{L_s}{L_x} + \frac{\Theta_{II}}{\sigma_{s(KM)}} \right) - \Theta_{a(M2)}^2 \frac{L_s}{L} j - 2\Theta_{II}\sigma g} = -\frac{1}{2} d\varepsilon$$

$$\left(\frac{\Theta_{a(M2)}^2}{2\sigma_{s(M2)}^2} \frac{L_s}{L_x} + \frac{\Theta_{II}}{\sigma_{s(KM)}} \right) = \frac{1}{2} M k_2 + \frac{1}{2} M k_2 = M k_2 \quad (\text{vgl. Gl. (23KMa) und (23M2a)})$$

$$\frac{\sigma d\sigma}{\sigma^2 - \frac{\Theta_{a(M2)}^2}{M k_2} \frac{L_s}{L} j - \frac{2\Theta_{II}\sigma}{M k_2} g} = -\frac{1}{2} M k_2 d\varepsilon$$

$$\frac{\sigma d\sigma}{\sigma^2 - \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{(M \alpha G b)^2 k_0}{k_2} \frac{L_s}{L} j - \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{M \alpha G b k_1 g \sigma}{k_2}} = -\frac{1}{2} M k_2 d\varepsilon$$

$$\frac{\sigma d\sigma}{\sigma^2 - \sigma_{s(KM)} \sigma g - \sigma_{s(M2)}^2 \frac{L_x}{L} j} = -\frac{1}{2} M k_2 d\varepsilon$$

Zum Integrieren wird eine Partialbruchzerlegung durchgeführt:

a) Bestimmung der Nullstellen des Nenners

$$\sigma^2 - g \sigma_{s(KM)} \sigma - \frac{L_x}{L} j \sigma_{s(M2)}^2 = 0$$

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = \frac{g \sigma_{s(KM)}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} g^2 \sigma_{s(KM)}^2 + \frac{L_x}{L} j \sigma_{s(M2)}^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\frac{1}{2}} = \frac{g \sigma_{s(KM)}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_{s(KM)}^2 \left(g^2 + 4 \frac{L_x}{L} \frac{\sigma_{s(M2)}^2}{\sigma_{s(KM)}^2} j \right)}$$

Eine Hilfsvariable wird definiert: $v = \sqrt{g^2 + 4 \frac{L_x}{L} \frac{\sigma_{s(M2)}^2}{\sigma_{s(KM)}^2} j}$

$$\Rightarrow \sigma_{\frac{1}{2}} = \frac{g \sigma_{s(KM)}}{2} \pm \frac{1}{2} \sigma_{s(KM)} v \Rightarrow \sigma_{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_{s(KM)}}{2} (g \pm v)$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{\sigma_{s(KM)}}{2}(g+v) \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_{s(KM)}}{2}(g-v)$$

b) Bilden des Partialbruchs

$$\frac{\sigma}{\left(\sigma - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2}(g+v)\right)\left(\sigma - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2}(g-v)\right)} = \frac{A}{\left(\sigma - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2}(g+v)\right)} + \frac{B}{\left(\sigma - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2}(g-v)\right)}$$

c) Bestimmung der Koeffizienten

$$\sigma = A\left(\sigma - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2}(g-v)\right) + B\left(\sigma - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2}(g+v)\right)$$

$$\text{für } \sigma = \sigma_1 \Rightarrow \frac{\sigma_{s(KM)}}{2}(g+v) = A\left(\frac{\sigma_{s(KM)}}{2}(g+v) - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2}(g-v)\right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{v} + 1\right)$$

$$\text{für } \sigma = \sigma_2 \Rightarrow \frac{\sigma_{s(KM)}}{2}(g-v) = B\left(\frac{\sigma_{s(KM)}}{2}(g-v) - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2}(g+v)\right)$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{g}{v}\right)$$

Das Integral läßt sich nun folgendermaßen schreiben:

$$\int_{\sigma_i}^{\sigma} \frac{1}{2}\left(\frac{g}{v} + 1\right) \frac{d\sigma}{\left(\sigma - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2}(g+v)\right)} + \int_{\sigma_i}^{\sigma} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{g}{v}\right) \frac{d\sigma}{\left(\sigma - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2}(g-v)\right)} = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -\frac{1}{2} M k_2 d\varepsilon$$

$$\text{Definiere: } \frac{1}{\varepsilon_{r(H3)}} = M k_2 = \frac{2\Theta_{II}}{\sigma_{s(KM)}} = \frac{\Theta_{a(M1)}^2}{\sigma_{s(M1)}^2} = \frac{\Theta_{a(M2)}^2}{\sigma_{s(M2)}^2} \frac{L_S}{L_X} = \frac{1}{\varepsilon_{r(H2)}}$$

Lösen des Integrals ergibt:

$$\left(1 + \frac{g}{v}\right) \ln \left(\sigma - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2} (g + v) \right) \Big|_{\sigma_i}^{\sigma} + \left(1 - \frac{g}{v}\right) \ln \left(\sigma - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2} (g - v) \right) \Big|_{\sigma_i}^{\sigma} = - \frac{1}{\varepsilon_{r(H2)}} \varepsilon \Big|_{\varepsilon_i}^{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{\sigma - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2} (g + v)}{\sigma_i - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2} (g + v)} \right)^{\left(1 + \frac{g}{v}\right)} + \ln \left(\frac{\sigma - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2} (g - v)}{\sigma_i - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2} (g - v)} \right)^{\left(1 - \frac{g}{v}\right)} = - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{\varepsilon_{r(H2)}}$$

$$\left(\frac{\sigma - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2} (g + v)}{\sigma_i - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2} (g + v)} \right)^{\left(1 + \frac{g}{v}\right)} \left(\frac{\sigma - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2} (g - v)}{\sigma_i - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2} (g - v)} \right)^{\left(1 - \frac{g}{v}\right)} = \exp \left[- \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{\varepsilon_{r(H2)}} \right] \quad (28H3)$$

Betrachtung der Grenzfälle:

$$a) \quad g=0 \text{ und } j=1 \Rightarrow v = \sqrt{4 \frac{\sigma_{s(M2)}^2 L_X}{\sigma_{s(KM)}^2 L}}$$

$\Rightarrow$ **Modifiziertes Modell (M2)**

$$b) \quad g=1 \text{ und } j=1 \Rightarrow v = \sqrt{1 + 4 \frac{\sigma_{s(M2)}^2 L_X}{\sigma_{s(KM)}^2 L}}$$

$\Rightarrow$ **Hybrid Modell (H2)**

$$c) \quad g=1 \text{ und } j=0 \Rightarrow v=1$$

$\Rightarrow$ **Kocks-Mecking-Modell (KM)**

$$d) \quad g=0 \text{ und } j=0 \Rightarrow v=0$$

$\Rightarrow$ **keine Verfestigung**

7. Formulierung für $\sigma = \text{const.}$

Gleichung (11) vereinfacht sich zu:

$$0 = \left(\frac{\sigma}{m} \right) \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} + \left(\frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \right) \frac{d \hat{\sigma}}{d \varepsilon} \quad (29)$$

7.1 Kocks-Mecking Modell

Die Verfestigung wird durch Wechselwirkung von Versetzungen untereinander bewirkt. Mit den Gleichungen (15KM), (20KM), (23KM) und (7) folgt für den zweiten Summanden der Gleichung (29):

$$0 = \left(\frac{\sigma}{m} \right) \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} + \Theta_{II} \left(1 - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{s(KM)}} \right) \Rightarrow \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} = -\Theta_{II} \left(1 - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{s(KM)}} \right) \frac{m}{\sigma} \quad (30KM)$$

Diese Formulierung ergibt sich analog bei Verwendung von Gleichung (24KM). An dieser Stelle findet in der Mathematik des Modells die Verwendung der Größen statt, die unter der Bedingung konstanter Dehnrates hergeleitet wurden. Damit wird die Forderung erfüllbar, von einem Versuch mit konstanter Dehnrates auf einen mit konstanter Spannung zu schließen.

Um einen Ausdruck für $\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{s(KM)}}$ zu erhalten, wird die kinetische Gleichung (7) für den nicht-stationären und den stationären Zustand betrachtet:

$$\sigma = \hat{\sigma} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \quad \text{und} \quad \sigma_{s(KM)} = \hat{\sigma}_{s(KM)} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(KM)}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}}$$

Da $\sigma = \text{const.}$ muß $\sigma = \sigma_{s(KM)}$ gelten. Daraus folgt:

$$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{s(KM)}} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{-\frac{1}{m}} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(KM)}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(KM)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (31KM)$$

Einsetzen von Gleichung (31KM) in Gleichung (30KM) ergibt:

$$\frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} = -\Theta_{II} \left(1 - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(KM)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \frac{m}{\sigma} \quad (32KM)$$

Für die Integration muß die Dehnrates aus der athermischen Verfestigungsrate separiert werden:

$$\Theta_{||} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{1}{2} M^2 \alpha G b k_1 \equiv \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \tilde{\Theta}_{||} \quad \text{mit} \quad \tilde{\Theta}_{||} = \frac{1}{2} M^2 \alpha G b k_1 \quad (33KM)$$

Es folgt für Gleichung (32KM):

$$\frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} = -\tilde{\Theta}_{||} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \left(1 - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(KM)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \frac{m}{\sigma} \quad (34KM)$$

Zum Integrieren werden die Variablen getrennt:

$$\int_{\dot{\varepsilon}_i^{\frac{1}{m}} \dot{\varepsilon}_0^{\frac{1}{m}} \left(1 - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(KM)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{m}} \right)}^{\dot{\varepsilon}^{\frac{1}{m}}} \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{\left(1 - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(KM)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{m}} \right)} = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -\frac{\tilde{\Theta}_{||} m}{\dot{\varepsilon}_0^{\frac{1}{m}} \sigma} d \varepsilon \Rightarrow \int_{\dot{\varepsilon}_i^{\frac{1}{m}} \left(\dot{\varepsilon}^{\frac{1}{m}} - \dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{\frac{1}{m}} \right)}^{\dot{\varepsilon}^{\frac{1}{m}}} \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{\left(\dot{\varepsilon}^{\frac{1}{m}} - \dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{\frac{1}{m}} \right)} = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -\frac{\tilde{\Theta}_{||} m}{\dot{\varepsilon}_0^{\frac{1}{m}} \sigma} d \varepsilon$$

$$\text{Substitution: } \dot{\varepsilon}^{\frac{1}{m}} = u \Rightarrow \frac{du}{d \varepsilon} = \frac{1}{m} \dot{\varepsilon}^{\frac{1}{m}-1} \Rightarrow m du = u \frac{1}{\dot{\varepsilon}} d \dot{\varepsilon} \Rightarrow \frac{m}{u} du = d \ln \dot{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \int_{u_i}^u \frac{m du}{u(u - \dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{\frac{1}{m}})} = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -\frac{\tilde{\Theta}_{||} m}{\dot{\varepsilon}_0^{\frac{1}{m}} \sigma} d \varepsilon \Rightarrow \int_{u_i}^u \frac{du}{u(u - \dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{\frac{1}{m}})} = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -\frac{\tilde{\Theta}_{||}}{\dot{\varepsilon}_0^{\frac{1}{m}} \sigma} d \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_{u_i}^u \frac{\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{\frac{1}{m}} + u - u}{u(u - \dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{\frac{1}{m}})} du = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -\frac{\tilde{\Theta}_{||} \dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{\frac{1}{m}}}{\dot{\varepsilon}_0^{\frac{1}{m}} \sigma} d \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_{u_i}^u \frac{-(u - \dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{\frac{1}{m}}) + u}{u(u - \dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{\frac{1}{m}})} du = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -\frac{\tilde{\Theta}_{||} \dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{\frac{1}{m}}}{\dot{\varepsilon}_0^{\frac{1}{m}} \sigma} d \varepsilon$$

$$\text{Definieren: Relaxationsdehnung} \quad \frac{1}{e_{r(KM)}} = \frac{\tilde{\Theta}_{||} \dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{\frac{1}{m}}}{\dot{\varepsilon}_0^{\frac{1}{m}} \sigma}$$

$$\Rightarrow \int_{u_i}^u -\frac{1}{u} du + \int_{u_i}^u \frac{1}{\left(u - \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(KM)\right)} du = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -\frac{1}{e_{r(KM)}} d\varepsilon$$

$$\Rightarrow -\ln u \Big|_{u_i}^u + \ln \left(u - \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(KM)\right) \Big|_{u_i}^u = -\frac{1}{e_{r(KM)}} \varepsilon \Big|_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} \Rightarrow \ln \left(\frac{u - \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(KM)}{u} \right) \Big|_{u_i}^u = -\frac{1}{e_{r(KM)}} \varepsilon \Big|_{\varepsilon_i}^{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{\left(u - \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(KM)\right) u_i}{\left(u_i - \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(KM)\right) u} \right) = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{e_{r(KM)}} \Rightarrow \frac{\left(u - \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(KM)\right) u_i}{\left(u_i - \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(KM)\right) u} = \exp \left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{e_{r(KM)}} \right]$$

Rücksubstitution:

$$\frac{\left(\dot{\varepsilon}_i^{1/m} - \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(KM)\right) \dot{\varepsilon}_i^{1/m}}{\left(\dot{\varepsilon}_i^{1/m} - \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(KM)\right) \dot{\varepsilon}_i^{1/m}} = \exp \left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{e_{r(KM)}} \right] \quad (35KM)$$

7.2 Modifiziertes Modell

Die Verfestigung wird durch Wechselwirkung von Versetzungen mit Teilchen bewirkt.

7.2.1 Version 1: Teilchendurchmesser konstant

Mit Gleichung (24M1) für den zweiten Summanden folgt für Gleichung (29):

$$0 = \left(\frac{\sigma}{m} \right) \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} + \frac{\Theta_{a(M1)}^2}{2\sigma} \left(1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(M1)}^2} \right) \Rightarrow \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} = - \frac{\Theta_{a(M1)}^2}{2\sigma} \left(1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(M1)}^2} \right) \frac{m}{\sigma} \quad (30M1)$$

Um einen Ausdruck für $\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(M1)}^2}$ zu erhalten wird wie auf S. 42 vorgegangen:

$$\Rightarrow \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(M1)}^2} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(M1)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{2}{m}} \quad (31M1)$$

Einsetzen von Gleichung (31M1) in Gleichung (30M1) ergibt:

$$\frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} = - \frac{\Theta_{a(M1)}^2 m}{2\sigma^2} \left(1 - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(M1)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{2}{m}} \right) \quad (32M1)$$

Für die Integration muß die Dehnrage aus der athermischen Verfestigungsrate separiert werden:

$$\Theta_{a(M1)}^2 = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} M^3 \alpha^2 G^2 b^2 k \equiv \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \tilde{\Theta}_{a(M1)}^2 \quad \text{mit} \quad \tilde{\Theta}_{a(M1)}^2 = M^3 \alpha^2 G^2 b^2 k \quad (33M1)$$

Es folgt für Gleichung (32M1):

$$\frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} = - \frac{\tilde{\Theta}_{a(M1)}^2 m}{2\sigma^2} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \left(1 - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(M1)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{2}{m}} \right) \quad (34M1)$$

Zum Integrieren werden die Variablen getrennt:

$$\int_{\frac{\dot{\varepsilon}_i}{\dot{\varepsilon}_0}^{\frac{2}{m}} \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\dot{\varepsilon}}^{\frac{2}{m}} \left(1 - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(M1)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{2}{m}} \right)} \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} \frac{\tilde{\Theta}_{a(M1)}^2 m}{\dot{\varepsilon}_0^{\frac{2}{m}} 2\sigma^2} d \varepsilon \Rightarrow \int_{\frac{\dot{\varepsilon}_i}{\dot{\varepsilon}_0}^{\frac{2}{m}} \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\dot{\varepsilon}}^{\frac{2}{m}} \left(1 - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(M1)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{2}{m}} \right)} \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} \frac{\tilde{\Theta}_{a(M1)}^2 m}{\dot{\varepsilon}_0^{\frac{2}{m}} 2\sigma^2} d \varepsilon$$

$$\text{Substitution: } \dot{\varepsilon}^{2/m} = u \Rightarrow \frac{du}{d\dot{\varepsilon}} = \frac{2}{m} \dot{\varepsilon}^{2/m-1} \Rightarrow \frac{m}{2} du = u \frac{1}{\dot{\varepsilon}} d\dot{\varepsilon} \Rightarrow \frac{m}{2} du = d \ln \dot{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \int_{u_i}^u \frac{m du}{2u(u - \dot{\varepsilon}_{s(M1)}^{2/m})} = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -\frac{\tilde{\Theta}_{a(M1)}^2 m}{\dot{\varepsilon}_0^{2/m} 2\sigma^2} d\varepsilon \Rightarrow \int_{u_i}^u \frac{du}{u(u - \dot{\varepsilon}_{s(M1)}^{2/m})} = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -\frac{\tilde{\Theta}_{a(M1)}^2}{\dot{\varepsilon}_0^{2/m} \sigma^2} d\varepsilon$$

Die Rechenschritte zur Lösung des Integrals entsprechen denen, die beim Kocks-Mecking-Modell vollzogen wurden (vgl. S.43/44). Die Relaxationsdehnung im modifizierten Modell wird wie folgt definiert:

$$\text{Definieren: Relaxationsdehnung } \frac{1}{e_{r(M1)}} = \frac{\tilde{\Theta}_{a(M1)}^2 \dot{\varepsilon}_{s(M1)}^{2/m}}{\dot{\varepsilon}_0^{2/m} \sigma^2}$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{(u - \dot{\varepsilon}_{s(M1)}^{2/m}) u_i}{(u_i - \dot{\varepsilon}_{s(M1)}^{2/m}) u} \right) = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{e_{r(M1)}} \Rightarrow \frac{(u - \dot{\varepsilon}_{s(M1)}^{2/m}) u_i}{(u_i - \dot{\varepsilon}_{s(M1)}^{2/m}) u} = \exp \left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{e_{r(M1)}} \right]$$

Rücksubstitution:

$$\frac{(\dot{\varepsilon}^{2/m} - \dot{\varepsilon}_{s(M1)}^{2/m}) \dot{\varepsilon}_i^{2/m}}{(\dot{\varepsilon}_i^{2/m} - \dot{\varepsilon}_{s(M1)}^{2/m}) \dot{\varepsilon}^{2/m}} = \exp \left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{e_{r(M1)}} \right] \quad (35M1)$$

7.2.2 Version 2: Teilchendurchmesser nicht konstant

Mit Gleichung (24M2) für den zweiten Summanden folgt für Gleichung (29):

$$0 = \left(\frac{\sigma}{m} \right) \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} + \frac{\Theta_{a(M2)}^2}{2\sigma} \frac{L_S}{L} \left(1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(M2)}^2} \frac{L}{L_S} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} = - \frac{\Theta_{a(M2)}^2}{2\sigma} \frac{L_S}{L} \left(1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(M2)}^2} \frac{L}{L_S} \right) \frac{m}{\sigma} \quad (30M2)$$

Um einen Ausdruck für $\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(M2)}^2}$ zu erhalten wird die kinetische Gleichung (7) für den nicht-stationären und den stationären Zustand betrachtet (vgl. Gl. (25M2) auf S. 25):

$$\sigma = \hat{\sigma} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \quad \text{und} \quad \sigma_{s(M2)} = \hat{\sigma}_{s(M2)} \sqrt{\frac{L_S}{L_X}} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(M2)}^2} = \frac{L_S}{L_X} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{2}{m}} \quad (31M2)$$

Einsetzen von Gleichung (31M2) in Gleichung (30M2) ergibt:

$$\frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} = - \frac{\Theta_{a(M2)}^2 m}{2\sigma^2} \frac{L_S}{L} \left(1 - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{L}{L_X} \right) \quad (32M2)$$

Für die Integration muß die Dehnrates aus der athermischen Verfestigungsrate separiert werden:

$$\Theta_{a(M2)}^2 = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} M^3 \alpha^2 G^2 b^2 k_0 \equiv \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 \quad \text{mit} \quad \tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 = M^3 \alpha^2 G^2 b^2 k_0 \quad (33M2)$$

Es folgt für Gleichung (32M2):

$$\frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} = - \frac{\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 m}{2\sigma^2} \frac{L_S}{L} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \left(1 - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{L}{L_X} \right) \quad (34M2)$$

Zum Integrieren werden die Variablen getrennt:

$$\int_{\dot{\varepsilon}_i^{2/m}}^{\dot{\varepsilon}^{2/m}} \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}^{2/m} \left(1 - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{2/m} \frac{L}{L_x} \right)} = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} - \frac{\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 m L_s}{\dot{\varepsilon}_0^{2/m} 2 \sigma^2 L} d\varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_{\dot{\varepsilon}_i^{2/m}}^{\dot{\varepsilon}^{2/m}} \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{\left(\dot{\varepsilon}^{2/m} - \dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} \frac{L}{L_x} \right)} = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} - \frac{\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 m L_s}{\dot{\varepsilon}_0^{2/m} 2 \sigma^2 L} d\varepsilon$$

Substitution: $\dot{\varepsilon}^{2/m} = u \Rightarrow \frac{du}{d\varepsilon} = \frac{2}{m} \dot{\varepsilon}^{2/m-1} \Rightarrow \frac{m}{2} du = u \frac{1}{\dot{\varepsilon}} d\varepsilon \Rightarrow \frac{m}{2u} du = d \ln \dot{\varepsilon}$

$$\Rightarrow \int_{u_i}^u \frac{du}{u \left(u - \dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} \frac{L}{L_x} \right)} = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} - \frac{\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 L_s}{\dot{\varepsilon}_0^{2/m} \sigma^2 L} d\varepsilon$$

Die Rechenschritte zur Lösung des Integrals entsprechen denen, die beim Kocks-Mecking Modell vollzogen wurden (vgl. S. 43/44). Dabei ist zu beachten, daß beide Seiten der Gleichung mit $\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} \frac{L}{L_x}$ erweitert werden und damit L auf der rechten Seite verschwindet. Bei der Integration werden L und L_x als Konstante betrachtet. Die Relaxationsdehnung wird wie folgt definiert:

Definieren: Relaxationsdehnung $\frac{1}{e_{r(M2)}} = \frac{\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 \dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{\dot{\varepsilon}_0^{2/m} \sigma^2}$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{\left(u - \dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} \frac{L}{L_x} \right) u_i}{\left(u_i - \dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} \frac{L}{L_x} \right) u} \right) = - \frac{L_s}{L_x} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{e_{r(M2)}} \Rightarrow \frac{\left(u - \dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} \frac{L}{L_x} \right) u_i}{\left(u_i - \dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} \frac{L}{L_x} \right) u} = \exp \left[- \frac{L_s}{L_x} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{e_{r(M2)}} \right]$$

Rücksubstitution:

$$\frac{\left(\dot{\varepsilon}^{2/m} - \dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} \frac{L}{L_x} \right) \dot{\varepsilon}_i^{2/m}}{\left(\dot{\varepsilon}_i^{2/m} - \dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} \frac{L}{L_x} \right) \dot{\varepsilon}^{2/m}} = \exp \left[- \frac{L_s}{L_x} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{e_{r(M2)}} \right] \quad (35M2)$$

7.3 Hybrid Modell

Die Verfestigung wird durch Wechselwirkung von Versetzungen untereinander und von Versetzungen mit Teilchen bewirkt.

7.3.1 Version 1: Teilchendurchmesser konstant

Gleichung (24H1a) oder (24H1b) kann für den zweiten Summanden der Gleichung (29) eingesetzt werden:

$$KM: 0 = \left(\frac{\sigma}{m} \right) \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} + \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{\Theta_{II}}{\sigma \hat{\sigma}_{s(KM)}} \hat{\sigma}_{s(H1)}^2 \left((1-p_1) + \frac{p_1 \hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{s(H1)}} - \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(H1)}^2} \right) \quad (30H1a)$$

$$M1: 0 = \left(\frac{\sigma}{m} \right) \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} + \frac{\Theta_{a(M1)}^2}{2 \sigma \hat{\sigma}_{s(M1)}^2} \hat{\sigma}_{s(H1)}^2 \left((1-p_1) + \frac{p_1 \hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{s(H1)}} - \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(H1)}^2} \right) \quad (30H1b)$$

Die kinetische Gleichung (7) ist aufgrund von $\sigma = \text{const.}$ wie folgt gültig:

$$\hat{\sigma} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} = \hat{\sigma}_{s(H1)} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(H1)}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \Rightarrow \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{s(H1)}} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(H1)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (31H1)$$

$$KM: \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} = - \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{\Theta_{II} m}{\sigma^2 \hat{\sigma}_{s(KM)}} \hat{\sigma}_{s(H1)}^2 \left((1-p_1) + p_1 \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(H1)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{m}} - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(H1)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{2}{m}} \right) \quad (32H1a)$$

$$M1: \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} = - \frac{\Theta_{a(M1)}^2 m}{2 \sigma^2 \hat{\sigma}_{s(M1)}^2} \hat{\sigma}_{s(H1)}^2 \left((1-p_1) + p_1 \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(H1)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{m}} - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(H1)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{2}{m}} \right) \quad (32H1b)$$

Für die Integration muß die Dehnrage aus der athermischen Verfestigungsrate separiert werden (vgl. (33KM) und (33M1)):

$$KM: \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} = - \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{\tilde{\Theta}_{II} m}{\sigma^2 \hat{\sigma}_{s(KM)}} \hat{\sigma}_{s(H1)}^2 \left((1-p_1) + p_1 \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(H1)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{m}} - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(H1)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{2}{m}} \right) \quad (34H1a)$$

$$M1: \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} = - \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{\tilde{\Theta}_{a(M1)}^2 m}{2 \sigma^2 \hat{\sigma}_{s(M1)}^2} \hat{\sigma}_{s(H1)}^2 \left((1-p_1) + p_1 \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(H1)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{m}} - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(H1)}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{\frac{2}{m}} \right) \quad (34H1b)$$

Definiere: $Y_{KM} = \frac{\tilde{\Theta}_{II}}{\dot{\varepsilon}_0^{2/m} \sigma^2 \hat{\sigma}_{s(KM)}}$ und $Y_{M1} = \frac{\tilde{\Theta}_{a(M1)}^2}{\dot{\varepsilon}_0^{2/m} 2 \sigma^2 \hat{\sigma}_{s(M1)}^2}$

Zum Integrieren werden die Variablen getrennt:

$$\Rightarrow \int_{\dot{\varepsilon}_i^{1/m}}^{\dot{\varepsilon}^{1/m}} \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{\left(\dot{\varepsilon}^{2/m} + \frac{p_1}{1-p_1} \dot{\varepsilon}_{s(H1)}^{1/m} \dot{\varepsilon}^{1/m} - \frac{1}{1-p_1} \dot{\varepsilon}_{s(H1)}^{2/m} \right)} = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -Y_{(KM;M1)} m (1-p_1) \hat{\sigma}_{s(H1)}^2 d\varepsilon$$

Substitution: $\dot{\varepsilon}^{1/m} = u \Rightarrow \frac{du}{d\dot{\varepsilon}} = \frac{1}{m} \dot{\varepsilon}^{1/m-1} \Rightarrow m du = u \frac{1}{\dot{\varepsilon}} d\dot{\varepsilon} \Rightarrow \frac{m}{u} du = d \ln \dot{\varepsilon}$

$$\Rightarrow \int_{u_i}^u \frac{du}{u \left(u^2 + \frac{p_1}{1-p_1} \dot{\varepsilon}_{s(H1)}^{1/m} u - \frac{1}{1-p_1} \dot{\varepsilon}_{s(H1)}^{2/m} \right)} = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -Y_{(KM;M1)} (1-p_1) \hat{\sigma}_{s(H1)}^2 d\varepsilon$$

Partialbruchzerlegung:

a) Bestimmung der Nullstellen des Nenners

$$u \left(u^2 + \frac{p_1}{1-p_1} \dot{\varepsilon}_{s(H1)}^{1/m} u - \frac{1}{1-p_1} \dot{\varepsilon}_{s(H1)}^{2/m} \right) = 0$$

$$u_0 = 0 \quad \text{und} \quad u_{1/2} = -\frac{p_1}{2(1-p_1)} \dot{\varepsilon}_{s(H1)}^{1/m} \pm \sqrt{\frac{p_1^2}{4(1-p_1)^2} \dot{\varepsilon}_{s(H1)}^{2/m} + \frac{1}{1-p_1} \dot{\varepsilon}_{s(H1)}^{2/m}}$$

$$\Rightarrow u_{1/2} = -\frac{p_1}{2(1-p_1)} \dot{\varepsilon}_{s(H1)}^{1/m} \pm \sqrt{\frac{1}{4(1-p_1)^2} \dot{\varepsilon}_{s(H1)}^{2/m} (p_1^2 + 4(1-p_1))}$$

$$\Rightarrow u_{1/2} = -\frac{p_1}{2(1-p_1)} \dot{\varepsilon}_{s(H1)}^{1/m} \pm \frac{1}{2(1-p_1)} \dot{\varepsilon}_{s(H1)}^{1/m} (p_1 - 2)$$

$$\Rightarrow u_{1/2} = \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H1)}^{1/m}}{2(1-p_1)} (-p_1 \pm (p_1 - 2)) \Rightarrow u_1 = -\frac{\dot{\varepsilon}_{s(H1)}^{1/m}}{1-p_1} \wedge u_2 = \dot{\varepsilon}_{s(H1)}^{1/m}$$

b) Bilden des Partialbruchs

$$\frac{1}{u \left(u + \frac{\dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1)}{1-p_1} \right) \left(u - \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1) \right)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{\left(u + \frac{\dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1)}{1-p_1} \right)} + \frac{C}{\left(u - \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1) \right)}$$

c) Bestimmung der Koeffizienten

$$1 = A \left(u + \frac{\dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1)}{1-p_1} \right) \left(u - \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1) \right) + B u \left(u - \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1) \right) + C u \left(u + \frac{\dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1)}{1-p_1} \right)$$

$$\text{für } u = u_0 \Rightarrow 1 = -A \frac{\dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1)}{1-p_1} \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1) \Rightarrow A = -\frac{1-p_1}{\dot{\varepsilon}_s^{2/m}(H1)}$$

$$\text{für } u = u_1 \Rightarrow 1 = -B \frac{\dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1)}{1-p_1} \left(-\frac{\dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1)}{1-p_1} - \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1) \right) \Rightarrow B = \frac{(1-p_1)^2}{\dot{\varepsilon}_s^{2/m}(H1)(2-p_1)}$$

$$\text{für } u = u_2 \Rightarrow 1 = C \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1) \left(\dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1) + \frac{\dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1)}{1-p_1} \right) \Rightarrow C = \frac{1-p_1}{\dot{\varepsilon}_s^{2/m}(H1)(2-p_1)}$$

$$\int_{u_i}^u \frac{(2-p_1)du}{u} + \int_{u_i}^u \frac{(1-p_1)du}{\left(u + \frac{\dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1)}{1-p_1} \right)} + \int_{u_i}^u \frac{du}{\left(u - \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1) \right)} = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} Y_{(KM;M1)} \dot{\varepsilon}_s^{2/m}(H1) (2-p_1) \hat{\sigma}_s^2(H1) d\varepsilon$$

$$\text{Definiere: } Y_{KM} \dot{\varepsilon}_s^{2/m}(H1) (2-p_1) \hat{\sigma}_s^2(H1) \equiv \frac{1}{e_{r(H1)}} = \frac{\tilde{\Theta}_{II} (2-p_1) \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(KM)}{\dot{\varepsilon}_0^{1/m} \sigma}$$

oder:

$$Y_{M1} \dot{\varepsilon}_s^{2/m}(H1) (2-p_1) \hat{\sigma}_s^2(H1) \equiv \frac{1}{e_{r(H1)}} = \frac{\tilde{\Theta}_{a(M1)}^2 (2-p_1) \dot{\varepsilon}_s^{2/m}(M1)}{\dot{\varepsilon}_0^{2/m} 2\sigma^2}$$

Lösen des Integrals ergibt:

$$\begin{aligned}
 & -(2-p_1) \ln(u) \Big|_{u_i}^u + (1-p_1) \ln \left(u + \frac{\dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1)}{1-p_1} \right) \Big|_{u_i}^u + \ln \left(u - \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1) \right) \Big|_{u_i}^u = - \frac{\varepsilon}{e_{r(H1)}} \Big|_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} \\
 & \Rightarrow -\ln \left(\frac{u}{u_i} \right)^{(2-p_1)} + \ln \left(\frac{u + \frac{\dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1)}{1-p_1}}{u_i + \frac{\dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1)}{1-p_1}} \right)^{(1-p_1)} + \ln \left(\frac{u - \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1)}{u_i - \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1)} \right) = - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{e_{r(H1)}}
 \end{aligned}$$

Rücksubstitution:

$$\left(\frac{\dot{\varepsilon}_i^{1/m}}{\dot{\varepsilon}^{1/m}} \right)^{(2-p_1)} \left(\frac{\dot{\varepsilon}^{1/m} + \frac{\dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1)}{1-p_1}}{\dot{\varepsilon}_i^{1/m} + \frac{\dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1)}{1-p_1}} \right)^{(1-p_1)} \left(\frac{\dot{\varepsilon}^{1/m} - \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1)}{\dot{\varepsilon}_i^{1/m} - \dot{\varepsilon}_s^{1/m}(H1)} \right) = \exp \left[- \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{e_{r(H1)}} \right] \quad (35H1)$$

Laut Definition nimmt der Parameter p_1 Werte zwischen 0 und 1 an. Die Gleichung (35H1) geht bei Einsetzen der Randwerte in die Lösung des KM-Modells oder des modifizierten Modells (M1) über:

$p_1=1$: KM-Modell, Gleichung (35KM)

$p_1=0$: modifiziertes Modell (M1), Gleichung (35M1)

7.3.2 Version 2: Teilchendurchmesser nicht konstant

Gleichung (24H2a) oder (24H2b) kann für den zweiten Summanden der Gleichung (29) eingesetzt werden:

$$KM: 0 = \left(\frac{\sigma}{m} \right) \frac{d \ln \dot{\epsilon}}{d \epsilon} + \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{\Theta_{II} m}{\sigma \hat{\sigma}_{s(KM)}} \hat{\sigma}_{s(H2)}^2 \left((1-p_2) \frac{L_X}{L} + p_2 \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{s(H2)}} - \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(H2)}^2} \right) \quad (32H2a)$$

$$M2: 0 = \left(\frac{\sigma}{m} \right) \frac{d \ln \dot{\epsilon}}{d \epsilon} + \frac{\Theta_{a(M2)}^2 m}{2 \sigma \hat{\sigma}_{s(M2)}^2} \hat{\sigma}_{s(H2)}^2 \left((1-p_2) \frac{L_X}{L} + p_2 \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{s(H2)}} - \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(H2)}^2} \right) \quad (30H2b)$$

Die kinetische Gleichung (7) ist aufgrund von $\sigma = \text{const.}$ wie folgt gültig:
(Zu beachten ist, daß der Sättigungsstrukturparameter im Gegensatz zu H1 nun auch eine Abhängigkeit vom Laufweg enthält (vgl. (23H2a) und (23H2b)).)

$$\hat{\sigma} \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} = \hat{\sigma}_{s(H2)} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(H2)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \Rightarrow \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{s(H2)}} = \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(H2)}}{\dot{\epsilon}} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (31H2)$$

$$KM: \frac{d \ln \dot{\epsilon}}{d \epsilon} = - \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{\Theta_{II} m}{\sigma^2 \hat{\sigma}_{s(KM)}} \hat{\sigma}_{s(H2)}^2 \left((1-p_2) \frac{L_X}{L} + p_2 \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(H2)}}{\dot{\epsilon}} \right)^{\frac{1}{m}} - \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(H2)}}{\dot{\epsilon}} \right)^{\frac{2}{m}} \right) \quad (32H2a)$$

$$M2: \frac{d \ln \dot{\epsilon}}{d \epsilon} = - \frac{\Theta_{a(M2)}^2 m}{2 \sigma^2 \hat{\sigma}_{s(M2)}^2} \hat{\sigma}_{s(H2)}^2 \left((1-p_2) \frac{L_X}{L} + p_2 \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(H2)}}{\dot{\epsilon}} \right)^{\frac{1}{m}} - \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(H2)}}{\dot{\epsilon}} \right)^{\frac{2}{m}} \right) \quad (32H2b)$$

Für die Integration muß die Dehnrates aus der athermischen Verfestigungsrate separiert werden (vgl (33KM) und (33M2)):

$$KM: \frac{d \ln \dot{\epsilon}}{d \epsilon} = - \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{\tilde{\Theta}_{II} m}{\sigma^2 \hat{\sigma}_{s(KM)}} \hat{\sigma}_{s(H2)}^2 \left((1-p_2) \frac{L_X}{L} + p_2 \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(H2)}}{\dot{\epsilon}} \right)^{\frac{1}{m}} - \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(H2)}}{\dot{\epsilon}} \right)^{\frac{2}{m}} \right) \quad (34H2a)$$

$$M2: \frac{d \ln \dot{\epsilon}}{d \epsilon} = - \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 m}{2 \sigma^2 \hat{\sigma}_{s(M2)}^2} \hat{\sigma}_{s(H2)}^2 \left((1-p_2) \frac{L_X}{L} + p_2 \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(H2)}}{\dot{\epsilon}} \right)^{\frac{1}{m}} - \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(H2)}}{\dot{\epsilon}} \right)^{\frac{2}{m}} \right) \quad (34H2b)$$

Definiere: $Y_{KM} = \frac{\tilde{\Theta}_{II}}{\dot{\varepsilon}_0^{2/m} \sigma^2 \hat{\sigma}_{s(KM)}}$ und $Y_{M2} = \frac{\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2}{\dot{\varepsilon}_0^{2/m} 2 \sigma^2 \hat{\sigma}_{s(M2)}^2}$

Zum Integrieren werden die Variablen getrennt:

$$\int_{\dot{\varepsilon}_i^{1/m}}^{\dot{\varepsilon}^{1/m}} \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{\left(\dot{\varepsilon}^{2/m} + \frac{p_2}{(1-p_2)} \frac{L}{L_X} \dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m} \dot{\varepsilon}^{1/m} - \frac{1}{(1-p_2)} \frac{L}{L_X} \dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{2/m} \right)} = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -Y_{(KM,M2)} m (1-p_2) \frac{L_X}{L} \hat{\sigma}_{s(H2)}^2 d\varepsilon$$

Substitution: $\dot{\varepsilon}^{1/m} = u \Rightarrow \frac{du}{d\varepsilon} = \frac{1}{m} \dot{\varepsilon}^{1/m-1} \Rightarrow m du = u \frac{1}{\dot{\varepsilon}} d\varepsilon \Rightarrow \frac{m}{u} du = d \ln \dot{\varepsilon}$

$$\int_{u_i}^u \frac{du}{\left(u^2 + \frac{p_2}{(1-p_2)} \frac{L}{L_X} \dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m} u - \frac{1}{(1-p_2)} \frac{L}{L_X} \dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{2/m} \right)} = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -Y_{(KM,M2)} (1-p_2) \frac{L_X}{L} \hat{\sigma}_{s(H2)}^2 d\varepsilon$$

Partialbruchzerlegung:

a) Bestimmung der Nullstellen des Nenners

$$u \left(u^2 + \frac{p_2}{(1-p_2)} \frac{L}{L_X} \dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m} u - \frac{1}{(1-p_2)} \frac{L}{L_X} \dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{2/m} \right) = 0$$

$$u_0 = 0 \text{ und } u_{1/2} = -\frac{p_2}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_X} \dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m} \pm \sqrt{\frac{p_2^2}{4(1-p_2)^2} \left(\frac{L}{L_X} \right)^2 \dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{2/m} + \frac{1}{(1-p_2)} \frac{L}{L_X} \dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{2/m}}$$

$$\Rightarrow u_{1/2} = -\frac{p_2}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_X} \dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m} \pm \sqrt{\frac{1}{4(1-p_2)^2} \left(\frac{L}{L_X} \right)^2 \dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{2/m} \left(p_2^2 + 4(1-p_2) \frac{L_X}{L} \right)}$$

$$\Rightarrow u_{1/2} = -\frac{p_2}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_X} \dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m} \pm \frac{1}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_X} \dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m} \sqrt{p_2^2 + 4(1-p_2) \frac{L_X}{L}}$$

Definiere: $r = \sqrt{p_2^2 + 4 \frac{L_X}{L} (1-p_2)} \Rightarrow u_{1/2} = \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m}}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_X} (-p_2 \pm r)$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m}}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} (r-p_2) \wedge u_2 = -\frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m}}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} (r+p_2)$$

b) Bilden des Partialbruchs

$$\begin{aligned} & \frac{1}{u \left(u - \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m}}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} (r-p_2) \right) \left(u + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m}}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} (r+p_2) \right)} \\ &= \frac{A}{u} + \frac{B}{\left(u - \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m}}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} (r-p_2) \right)} + \frac{C}{\left(u + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m}}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} (r+p_2) \right)} \end{aligned}$$

c) Bestimmung der Koeffizienten

$$\begin{aligned} 1 &= A \left(u - \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m}}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} (r-p_2) \right) \left(u + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m}}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} (r+p_2) \right) \\ &+ Bu \left(u + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m}}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} (r+p_2) \right) + Cu \left(u - \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m}}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} (r-p_2) \right) \end{aligned}$$

$$\text{für } u = u_0 \Rightarrow 1 = A \left(-\frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m}}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} (r-p_2) \right) \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m}}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} (r+p_2) \right)$$

$$\Rightarrow A = -\frac{4(1-p_2)^2}{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{2/m} (r^2 - p_2^2)} \left(\frac{L_x}{L} \right)^2$$

$$\text{für } u = u_1 \Rightarrow 1 = B \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m}}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} (r-p_2) \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m}}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} (r-p_2) + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m}}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} (r+p_2) \right)$$

$$\Rightarrow B = \frac{2(1-p_2)^2}{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{2/m} r(r-p_2)} \left(\frac{L_x}{L} \right)^2$$

$$\text{für } u=u_2 \Rightarrow 1 = C \left(-\frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m} L}{2(1-p_2) L_x} (r+p_2) \right) \left(-\frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m} L}{2(1-p_2) L_x} (r+p_2) - \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m} L}{2(1-p_2) L_x} (r-p_2) \right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{2(1-p_2)^2}{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{2/m} r(r+p_2)} \left(\frac{L_x}{L} \right)^2$$

$$\int_{u_i}^u -2r \frac{du}{u} + \int_{u_i}^u (r+p_2) \frac{du}{\left(u - \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m} L}{2(1-p_2) L_x} (r-p_2) \right)} + \int_{u_i}^u (r-p_2) \frac{du}{\left(u + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m} L}{2(1-p_2) L_x} (r+p_2) \right)}$$

$$= \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} -Y_{(KM;M2)} \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{2/m} r(r^2 - p_2^2)}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} \hat{\sigma}_{s(H2)}^2 d\varepsilon$$

Definiere: $Y_{KM} \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{2/m} r(r^2 - p_2^2)}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} \hat{\sigma}_{s(H2)}^2 \equiv \frac{1}{e_{r(H2)}} = \frac{2\tilde{\Theta}_{II} \dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{1/m} r}{\dot{\varepsilon}_0^{1/m} \sigma}$

oder:

$$Y_{M2} \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{2/m} r(r^2 - p_2^2)}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} \hat{\sigma}_{s(H2)}^2 \equiv \frac{1}{e_{r(H2)}} = \frac{\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 \dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} r L_s}{\dot{\varepsilon}_0^{2/m} \sigma^2 L_x}$$

Lösen des Integrals ergibt:

$$-2 \ln(u) \Big|_{u_i}^u + (r+p_2) \ln \left(u - \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m} L_x}{2(1-p_2)} (r-p_2) \right) \Big|_{u_i}^u + (r-p_2) \ln \left(u + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/m} L_x}{2(1-p_2)} (r+p_2) \right) \Big|_{u_i}^u = \frac{\varepsilon}{e_{r(H2)}} \Big|_{\varepsilon_i}^{\varepsilon}$$

$$-\ln\left(\frac{u}{u_i}\right)^{2r} + \ln\left(\frac{u - \frac{\dot{\varepsilon}_i^{1/2} \frac{L_x}{L} (r-p_2)}{2(1-p_2)}}{u_i - \frac{\dot{\varepsilon}_i^{1/2} \frac{L_x}{L} (r-p_2)}{2(1-p_2)}}\right)^{(r+p_2)} + \ln\left(\frac{u + \frac{\dot{\varepsilon}_i^{1/2} \frac{L_x}{L} (r+p_2)}{2(1-p_2)}}{u_i + \frac{\dot{\varepsilon}_i^{1/2} \frac{L_x}{L} (r+p_2)}{2(1-p_2)}}\right)^{(r-p_2)} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)^2}{e_{r(H2)}} \Big|_{\varepsilon_i}$$

Rücksubstitution:

$$\left(\frac{\dot{\varepsilon}_i^{1/2}}{\dot{\varepsilon}_i^{1/2}}\right)^{2r} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_i^{1/2} - \frac{\dot{\varepsilon}_i^{1/2} \frac{L_x}{L} (r-p_2)}{2(1-p_2)}}{\dot{\varepsilon}_i^{1/2} - \frac{\dot{\varepsilon}_i^{1/2} \frac{L_x}{L} (r-p_2)}{2(1-p_2)}}\right)^{(r+p_2)} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_i^{1/2} + \frac{\dot{\varepsilon}_i^{1/2} \frac{L_x}{L} (r+p_2)}{2(1-p_2)}}{\dot{\varepsilon}_i^{1/2} + \frac{\dot{\varepsilon}_i^{1/2} \frac{L_x}{L} (r+p_2)}{2(1-p_2)}}\right)^{(r-p_2)} = \exp\left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{e_{r(H2)}}\right] \quad (35H2)$$

Laut Definition nimmt der Parameter p_2 Werte zwischen 0 und 1 an. Die Gleichung (35H2) geht bei Einsetzen von $p_2=0$ in die Lösung des modifizierten Modells (M2) über (Gleichung (35M2)).

Für die zweite Randbedingung muß eine Grenzwertbetrachtung durchgeführt werden:

$$\lim_{p_2 \rightarrow 1} \left(\frac{r-p_2}{1-p_2}\right) = \lim_{p_2 \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{p_2^2 + 4 \frac{L_x}{L} (1-p_2)} - p_2}{1-p_2}\right) = \frac{-2 \frac{L_x}{L}}{-1} = 2 \frac{L_x}{L}$$

Damit geht für $p_2=1$ die Gleichung (35H2) in die Lösung des KM-Modells über (Gleichung (35KM)).

7.3.3 Version 3: Zwei Gewichtungparameter

Für den zweiten Summanden der Gleichung (29) wird ein Ausdruck, der die beiden Gewichtungparameter enthält, eingesetzt:

$$0 = \left(\frac{\sigma}{m} \right) \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} + \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \frac{1}{2\sigma} \left(\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 \frac{L_s}{L} j + 2\tilde{\Theta}_{||} \hat{\sigma} g - \frac{2\tilde{\Theta}_{||} \hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{s(KM)}} \right) \quad (30H3)$$

$$\frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} = - \frac{m}{\dot{\varepsilon}_0^{\frac{2}{m}} 2\sigma^2} \left(\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 \frac{L_s}{L} j \dot{\varepsilon}^{\frac{2}{m}} + 2\tilde{\Theta}_{||} \sigma \dot{\varepsilon}_0^{\frac{1}{m}} g \dot{\varepsilon}^{\frac{1}{m}} - 2\tilde{\Theta}_{||} \sigma \dot{\varepsilon}_0^{\frac{1}{m}} \dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{\frac{1}{m}} \right)$$

$$\frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} = - \frac{\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 m L_s}{\dot{\varepsilon}_0^{\frac{2}{m}} 2\sigma^2 L} j \left(\dot{\varepsilon}^{\frac{2}{m}} + \frac{2\tilde{\Theta}_{||} \sigma \dot{\varepsilon}_0^{\frac{1}{m}} g}{\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 j} \frac{L}{L_s} \dot{\varepsilon}^{\frac{1}{m}} - \frac{2\tilde{\Theta}_{||} \sigma \dot{\varepsilon}_0^{\frac{1}{m}} \dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{\frac{1}{m}}}{\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 j} \frac{L}{L_s} \right)$$

$$\frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} = - \frac{\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 m L_s}{\dot{\varepsilon}_0^{\frac{2}{m}} 2\sigma^2 L} j \left(\dot{\varepsilon}^{\frac{2}{m}} + \frac{\hat{\sigma}_{s(KM)} \sigma \dot{\varepsilon}_0^{\frac{1}{m}} g}{\hat{\sigma}_{s(M2)}^2 j} \frac{L}{L_s} \dot{\varepsilon}^{\frac{1}{m}} - \frac{\hat{\sigma}_{s(KM)} \sigma \dot{\varepsilon}_0^{\frac{1}{m}} \dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{\frac{1}{m}}}{\hat{\sigma}_{s(M2)}^2 j} \frac{L}{L_s} \right)$$

$$\frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \varepsilon} = - \frac{\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 m L_s}{\dot{\varepsilon}_0^{\frac{2}{m}} 2\sigma^2 L} j \left(\dot{\varepsilon}^{\frac{2}{m}} + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{\frac{2}{m}} g}{\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{\frac{1}{m}} j} \frac{L}{L_x} \dot{\varepsilon}^{\frac{1}{m}} - \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{\frac{2}{m}}}{j} \frac{L}{L_x} \right) \quad (34H3)$$

Zum Integrieren werden die Variablen getrennt:

$$\int_{\dot{\varepsilon}_i^{\frac{1}{m}}}^{\dot{\varepsilon}^{\frac{1}{m}}} \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{\left(\dot{\varepsilon}^{\frac{2}{m}} + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{\frac{2}{m}} g}{\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{\frac{1}{m}} j} \frac{L}{L_x} \dot{\varepsilon}^{\frac{1}{m}} - \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{\frac{2}{m}}}{j} \frac{L}{L_x} \right)} = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} - \frac{\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 m L_s}{\dot{\varepsilon}_0^{\frac{2}{m}} 2\sigma^2 L} j d \varepsilon$$

$$\text{Substitution: } \dot{\varepsilon}^{\frac{1}{m}} = u \Rightarrow \frac{du}{d \varepsilon} = \frac{1}{m} \dot{\varepsilon}^{\frac{1}{m}-1} \Rightarrow m du = u \frac{1}{\dot{\varepsilon}} d \dot{\varepsilon} \Rightarrow \frac{m}{u} du = d \ln \dot{\varepsilon}$$

$$\int_{u_i}^u \frac{du}{u \left(u^2 + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{\frac{2}{m}} g}{\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{\frac{1}{m}} j} \frac{L}{L_x} u - \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{\frac{2}{m}}}{j} \frac{L}{L_x} \right)} = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} - \frac{\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 m L_s}{\dot{\varepsilon}_0^{\frac{2}{m}} 2\sigma^2 L} j d \varepsilon$$

Partialbruchzerlegung:**a) Bestimmung der Nullstellen des Nenners**

$$u \left(u^2 + \frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m} g}{\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} \frac{L}{L_X} u - \frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{j} \frac{L}{L_X} \right) = 0$$

$$u_0 = 0 \quad \text{und} \quad u_{1/2} = -\frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m} g}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} \frac{L}{L_X} \pm \sqrt{\left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m} g}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} \frac{L}{L_X} \right)^2 + \frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{j} \frac{L}{L_X}}$$

$$\Rightarrow u_{1/2} = -\frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m} g}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} \frac{L}{L_X} \pm \frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} \frac{L}{L_X} \sqrt{g^2 + \frac{4\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{2/m} j L_X}{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}}$$

$$\text{Definiere:} \quad v = \sqrt{g^2 + \frac{4\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{2/m} j L_X}{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}}$$

$$\Rightarrow u_{1/2} = \frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} \frac{L}{L_X} (-g \pm v)$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} \frac{L}{L_X} (v - g) \wedge \Rightarrow u_2 = -\frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} \frac{L}{L_X} (v + g)$$

b) Bilden des Partialbruchs

$$\begin{aligned} & \frac{1}{u \left(u - \frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} \frac{L}{L_X} (v - g) \right) \left(u + \frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} \frac{L}{L_X} (v + g) \right)} \\ &= \frac{A}{u} + \frac{B}{\left(u - \frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} \frac{L}{L_X} (v - g) \right)} + \frac{C}{\left(u + \frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} \frac{L}{L_X} (v + g) \right)} \end{aligned}$$

c) Bestimmung der Koeffizienten

$$1 = A \left(u - \frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m}} \frac{L}{j L_X} (v - g) \right) \left(u + \frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m}} \frac{L}{j L_X} (v + g) \right) \\ + Bu \left(u + \frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m}} \frac{L}{j L_X} (v + g) \right) + Cu \left(u - \frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m}} \frac{L}{j L_X} (v - g) \right)$$

$$\text{für } u = u_0 \Rightarrow 1 = A \left(-\frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m}} \frac{L}{j L_X} (v - g) \right) \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m}} \frac{L}{j L_X} (v + g) \right)$$

$$\Rightarrow A = -\frac{4\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{2/m} j^2}{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{4/m} (v^2 - g^2)} \left(\frac{L_X}{L} \right)^2$$

$$\text{für } u = u_1 \Rightarrow 1 = B \frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m}} \frac{L}{j L_X} (v - g) \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m}} \frac{L}{j L_X} (v - g) + \frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m}} \frac{L}{j L_X} (v + g) \right)$$

$$\Rightarrow B = \frac{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{2/m} j^2}{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{4/m} v(v - g)} \left(\frac{L_X}{L} \right)^2$$

$$\text{für } u = u_2 \Rightarrow 1 = C \left(-\frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m}} \frac{L}{j L_X} (v + g) \right) \left(-\frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m}} \frac{L}{j L_X} (v + g) - \frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}}{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m}} \frac{L}{j L_X} (v - g) \right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{2\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{2/m} j^2}{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{4/m} v(v + g)} \left(\frac{L_X}{L} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
& \int_{u_i}^u -2v \frac{du}{u} + \int_{u_i}^u (v+g) \frac{du}{\left(u - \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} L}{2\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{1/m} j L_X} (v-g) \right)} + \int_{u_i}^u (v-g) \frac{du}{\left(u + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} L}{2\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{1/m} j L_X} (v+g) \right)} \\
&= \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} \frac{\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 v (v^2 - g^2)}{\dot{\varepsilon}_0^{2/m} 2\sigma^2 2j} \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{4/m} L_S L}{\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{2/m} L_X^2} d\varepsilon
\end{aligned}$$

Definiere (vgl. H2 S. 56):

$$\frac{\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 v (v^2 - g^2)}{\dot{\varepsilon}_0^{2/m} 2\sigma^2 2j} \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{4/m} L_S L}{\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{2/m} L_X^2} = \frac{\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2 \dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} v L_S}{\dot{\varepsilon}_0^{2/m} \sigma^2 j L_X} = \frac{2\tilde{\Theta}_{II} \dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{1/m} v}{\dot{\varepsilon}_0^{1/m} \sigma j} \equiv \frac{1}{e_{r(H3)}}$$

Lösen des Integrals ergibt:

$$\begin{aligned}
& -2v \ln(u) \Big|_{u_i}^u + (v+g) \ln \left(u - \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} L}{2\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} (v-g) \right) \Big|_{u_i}^u + (v-g) \ln \left(u + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} L}{2\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} (v+g) \right) \Big|_{u_i}^u = \frac{\varepsilon}{e_{r(H3)}} \Big|_{\varepsilon_i}^{\varepsilon} \\
& -\ln \left(\frac{u}{u_i} \right)^{2v} + \ln \left(\frac{u - \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} L}{2\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} (v-g)}{u_i - \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} L}{2\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} (v-g)} \right)^{(v+g)} + \ln \left(\frac{u + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} L}{2\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} (v+g)}{u_i + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} L}{2\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} (v+g)} \right)^{(v-g)} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{e_{r(H3)}} \Big|_{\varepsilon_i}^{\varepsilon}
\end{aligned}$$

Rücksubstitution:

$$\left(\frac{\dot{\varepsilon}_i^{1/m}}{\dot{\varepsilon}_i^{1/m}} \right)^{2v} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_i^{1/m} - \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} L}{2\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} (v-g)}{\dot{\varepsilon}_i^{1/m} - \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} L}{2\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} (v-g)} \right)^{(v+g)} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_i^{1/m} + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} L}{2\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} (v+g)}{\dot{\varepsilon}_i^{1/m} + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/m} L}{2\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{1/m} j} (v+g)} \right)^{(v-g)} = \exp \left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{e_{r(H3)}} \right]$$

(35H3)

Betrachtung der Grenzfälle:

$$\text{a) } g=0 \text{ und } j=1 \Rightarrow v = 2 \frac{\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{1/m}}{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{1/m}} \sqrt{\frac{L_X}{L}}$$

$\Rightarrow$ Modifiziertes Modell (M2)

$$\text{b) } g=1 \text{ und } j=1 \Rightarrow v = \sqrt{1 + 4 \frac{\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{2/m}}{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}} \frac{L_X}{L}}$$

$\Rightarrow$ Hybrid Modell (H2)

$$\text{c) } g=1 \text{ und } j=0 \Rightarrow \lim_{g \rightarrow 1, j \rightarrow 0} \left(\frac{v-g}{j} \right) = \lim_{g \rightarrow 1, j \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{g^2 + 4 \frac{\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{2/m}}{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}} j \frac{L_X}{L}} - g}{j} \right)$$

$$= \frac{2 \frac{\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{2/m}}{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}} \frac{L_X}{L}}{1} = 2 \frac{\dot{\epsilon}_{s(KM)}^{2/m}}{\dot{\epsilon}_{s(M2)}^{2/m}} \frac{L_X}{L}$$

$\Rightarrow$ Kocks-Mecking-Modell

$$\text{d) } g=0 \text{ und } j=0 \Rightarrow \text{keine Verfestigung}$$

8. Der Entfestigungskoeffizient k_2

Allgemein muß der Entfestigungskoeffizient k_2 eine Abhängigkeit von der Sättigungsdehnrate aufweisen. Um einen Eindruck zu gewinnen, wie dies konkret aussehen kann, wird eine mathematische Formulierung für den Entfestigungskoeffizienten aus einem Vergleich der Sättigungsspannung, einmal formuliert über die kinetische Gleichung und zum anderen über die Potenzgleichung nach Norton, $\dot{\epsilon} = K\sigma^n$, hergeleitet. Dies wird durchgeführt für das KM-Modell und die Versionen 1 und 2 des modifizierten Modells:

$$KM: \quad \sigma_{s(KM)} \equiv M\alpha Gb \frac{k_1}{k_2} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(KM)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \equiv \sigma_0 \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(KM)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{vgl. Gl. (23KM)})$$

$$\Rightarrow \frac{M\alpha Gb k_1}{\sigma_0} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(KM)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(KM)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{-\frac{1}{n}} = k_2 \quad \text{Definiere: } \frac{M\alpha Gb k_1}{\sigma_0} = k_{20(KM)}$$

$$\Rightarrow k_2 = k_{20(KM)} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(KM)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(KM)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{-\frac{1}{n}} \quad \text{Definiere: } \frac{1}{q_{(KM)}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow k_2 = k_{20(KM)} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(KM)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{-\frac{1}{q_{(KM)}}} \quad (36KM)$$

$$M1: \quad \sigma_{s(M1)}^2 \equiv (M\alpha Gb)^2 \frac{k}{k_2} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(M1)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \equiv \sigma_0^2 \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(M1)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{2}{n}} \quad (\text{vgl. Gl. (23M1)})$$

$$\Rightarrow \frac{(M\alpha Gb)^2 k}{\sigma_0^2} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(M1)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(M1)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{-\frac{2}{n}} = k_2 \quad \text{Definiere: } \frac{(M\alpha Gb)^2 k}{\sigma_0^2} = k_{20(M1)}$$

$$\Rightarrow k_2 = k_{20(M1)} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(M1)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(M1)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{-\frac{2}{n}} \quad \text{Definiere: } \frac{2}{q_{(M1)}} = \frac{2}{n} - \frac{2}{m}$$

$$\Rightarrow k_2 = k_{20(M1)} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(M1)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{-\frac{2}{q_{(M1)}}} \quad (36M1)$$

$$M2: \quad \sigma_{s(M2)}^2 \equiv (M\alpha Gb)^2 \frac{L_S}{L_X} \frac{k_0}{k_2} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \equiv \sigma_0^2 \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{2}{n}} \quad (\text{vgl. Gl. (23M2)})$$

$$\Rightarrow \frac{(M\alpha Gb)^2 k_0}{\sigma_0^2} \frac{L_S}{L_X} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(M)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(M)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{-\frac{2}{n}} = k_2 \quad \text{Definiere: } \frac{(M\alpha Gb)^2 k_0}{\sigma_0^2} = k_{20(M2)}$$

$$\Rightarrow k_2 = k_{20(M2)} \frac{L_S}{L_X} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\frac{2}{m}} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{-\frac{2}{n}} \quad \text{Definiere: } \frac{2}{q_{(M2)}} = \frac{2}{n} - \frac{2}{m}$$

$$\Rightarrow k_2 = k_{20(M2)} \frac{L_S}{L_X} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{s(M2)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{-\frac{2}{q_{(M2)}}} \quad (36M2)$$

9. Die Lösungsgleichungen im tabellarischen Überblick

Dehnrate konstant:

	Entwicklungsgleichung der Versetzungsdichte	Lösungsgleichung
KM	$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M(k_1\sqrt{\rho} - k_2\rho)$ (14KM)	$\frac{\sigma - \sigma_{s(KM)}}{\sigma_i - \sigma_{s(KM)}} = \exp\left[\frac{-(\varepsilon - \varepsilon_i)}{\varepsilon_{r(KM)}}\right]$ (28KM)
M1	$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M(k - k_2\rho)$ (14M1)	$\frac{\sigma^2 - \sigma_{s(M1)}^2}{\sigma_i^2 - \sigma_{s(M1)}^2} = \exp\left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{\varepsilon_{r(M1)}}\right]$ (28M1)
M2	$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M\left(k_0 \frac{L_S}{L} - k_2\rho\right)$ (14M2)	$\frac{\sigma^2 - \sigma_{s(M2)}^2 \frac{L_X}{L}}{\sigma_i^2 - \sigma_{s(M2)}^2 \frac{L_X}{L}} = \exp\left[-\frac{L_S}{L_X} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{\varepsilon_{r(M2)}}\right]$ (28M2)
H1	$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M(k + k_1\sqrt{\rho} - k_2\rho)$ (14H1)	$\left(\frac{\sigma + \sigma_{s(H1)}(1 - p_1)}{\sigma_i + \sigma_{s(H1)}(1 - p_1)}\right)^{(1-p_1)} \left(\frac{\sigma - \sigma_{s(H1)}}{\sigma_i - \sigma_{s(H1)}}\right) = \exp\left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{\varepsilon_{r(H1)}}\right]$ (28H1)
H2	$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M\left(k_0 \frac{L_S}{L} + k_1\sqrt{\rho} - k_2\rho\right)$ (14H2)	$\left(\frac{\sigma - \frac{\sigma_{s(H2)}}{2}(p_2 + r)}{\sigma_i - \frac{\sigma_{s(H2)}}{2}(p_2 + r)}\right)^{(1+p_2/r)} \left(\frac{\sigma - \frac{\sigma_{s(H2)}}{2}(p_2 - r)}{\sigma_i - \frac{\sigma_{s(H2)}}{2}(p_2 - r)}\right)^{(1-p_2/r)} = \exp\left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{\varepsilon_{r(H2)}}\right]$ (28H2)
H3	$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M\left(k_0 \frac{L_S}{L} j + k_1\sqrt{\rho} g - k_2\rho\right)$ (14H3)	$\left(\frac{\sigma - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2}(g + v)}{\sigma_i - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2}(g + v)}\right)^{(1+g/v)} \left(\frac{\sigma - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2}(g - v)}{\sigma_i - \frac{\sigma_{s(KM)}}{2}(g - v)}\right)^{(1-g/v)} = \exp\left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{\varepsilon_{r(H2)}}\right]$ (28H3)

KM: Kocks-Mecking Modell;

M: modifiziertes Modell;

H: Hybrid Modell

Spannung konstant:

	Entwicklungsgleichung der Versetzungsdichte	Lösungsgleichung
KM	$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M(k_1\sqrt{\rho} - k_2\rho)$ $(14KM)$	$\frac{\left(\dot{\varepsilon}_m^{1/2} - \dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{1/2}\right)\dot{\varepsilon}_i^{1/2}}{\left(\dot{\varepsilon}_i^{1/2} - \dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{1/2}\right)\dot{\varepsilon}_m^{1/2}} = \exp\left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{e_{r(KM)}}\right]$ $(35KM)$
M1	$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M(k - k_2\rho)$ $(14M1)$	$\frac{\left(\dot{\varepsilon}_m^{2/3} - \dot{\varepsilon}_{s(M1)}^{2/3}\right)\dot{\varepsilon}_i^{2/3}}{\left(\dot{\varepsilon}_i^{2/3} - \dot{\varepsilon}_{s(M1)}^{2/3}\right)\dot{\varepsilon}_m^{2/3}} = \exp\left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{e_{r(M1)}}\right]$ $(35M1)$
M2	$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M\left(k_0 \frac{L_S}{L} - k_2\rho\right)$ $(14M2)$	$\frac{\left(\dot{\varepsilon}_m^{2/3} - \dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/3} \frac{L}{L_x}\right)\dot{\varepsilon}_i^{2/3}}{\left(\dot{\varepsilon}_i^{2/3} - \dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{2/3} \frac{L}{L_x}\right)\dot{\varepsilon}_m^{2/3}} = \exp\left[-\frac{L_S}{L_x} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{e_{r(M2)}}\right]$ $(35M2)$
H1	$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M(k + k_1\sqrt{\rho} - k_2\rho)$ $(14H1)$	$\left(\frac{\dot{\varepsilon}_i^{1/2}}{\dot{\varepsilon}_m^{1/2}}\right)^{(2-p_1)} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_m^{1/2} + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H1)}^{1/2}}{(1-p_1)}}{\dot{\varepsilon}_i^{1/2} + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H1)}^{1/2}}{(1-p_1)}}\right)^{(1-p_1)} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_m^{1/2} - \dot{\varepsilon}_{s(H1)}^{1/2}}{\dot{\varepsilon}_i^{1/2} - \dot{\varepsilon}_{s(H1)}^{1/2}}\right) = \exp\left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{e_{r(H1)}}\right]$ $(35H1)$
H2	$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M\left(k_0 \frac{L_S}{L} + k_1\sqrt{\rho} - k_2\rho\right)$ $(14H2)$	$\left(\frac{\dot{\varepsilon}_i^{1/2}}{\dot{\varepsilon}_m^{1/2}}\right)^{2r} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_m^{1/2} - \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/2}}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} (r-p_2)}{\dot{\varepsilon}_i^{1/2} - \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/2}}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} (r-p_2)}\right)^{(r+p_2)} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_m^{1/2} + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/2}}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} (r+p_2)}{\dot{\varepsilon}_i^{1/2} + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(H2)}^{1/2}}{2(1-p_2)} \frac{L}{L_x} (r+p_2)}\right)^{(r-p_2)} = \exp\left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{e_{r(H2)}}\right]$ $(35H2)$
H3	$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M\left(k_0 \frac{L_S}{L} j + k_1\sqrt{\rho} g - k_2\rho\right)$ $(14H3)$	$\left(\frac{\dot{\varepsilon}_i^{1/2}}{\dot{\varepsilon}_m^{1/2}}\right)^{2v} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_m^{1/2} - \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{1/2}}{2\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{1/2}} \frac{L}{L_x} (v-g)}{\dot{\varepsilon}_i^{1/2} - \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{1/2}}{2\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{1/2}} \frac{L}{L_x} (v-g)}\right)^{(v+g)} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_m^{1/2} + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{1/2}}{2\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{1/2}} \frac{L}{L_x} (v+g)}{\dot{\varepsilon}_i^{1/2} + \frac{\dot{\varepsilon}_{s(M2)}^{1/2}}{2\dot{\varepsilon}_{s(KM)}^{1/2}} \frac{L}{L_x} (v+g)}\right)^{(v-g)} = \exp\left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{e_{r(H3)}}\right]$ $(35H3)$

KM: Kocks-Mecking Modell;

M: modifiziertes Modell;

H: Hybrid Modell

10. Die experimentell zu bestimmenden Größen

Um eine Modellrechnung entsprechend der Lösung eines Ansatzes (KM),..., (H3) durchführen zu können, müssen folgende Größen bekannt sein:

- a) Laufweg einer Versetzung $L(t)$ (bei M2, H2 und H3)
- b) Exponent der kinetischen Gleichung m
- c) Sättigungsspannung $\sigma_{s(i)}$
- d) athermische Verfestigungsrate Θ_i
- e) Sättigungsdehnrate $\dot{\epsilon}_{s(i)}$

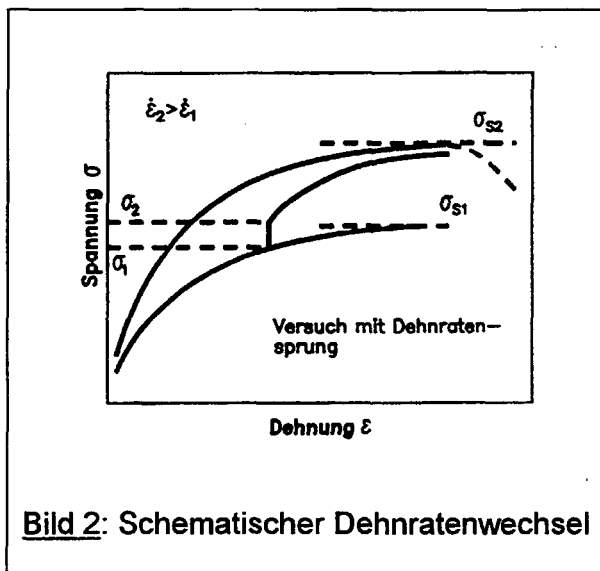
Dabei ist zu beachten, daß diese Größen für die verschiedenen Ansätze auch unterschiedliche Werte annehmen können. Ihre experimentelle Bestimmung wird nachfolgend kurz erläutert. Dabei wird nur die prinzipielle Vorgehensweise verdeutlicht.

zu a) *Auslagern des Werkstoffs*

Der Werkstoff wird bei einer Temperatur zu verschiedenen Zeiten ausgelagert. Mit geeigneten mikroskopischen Methoden wird die Ausscheidung und Reifung von Teilchen einer zweiten Phase erfasst und daraus der Laufweg L als Funktion der Zeit ermittelt.

zu b) *Dehnratenwechselversuche*

Proben des Werkstoffs werden Dehnratenwechselversuchen unterzogen, um den Exponenten m der kinetischen Gleichung zu bestimmen. Dies verdeutlicht schematisch Bild 2.



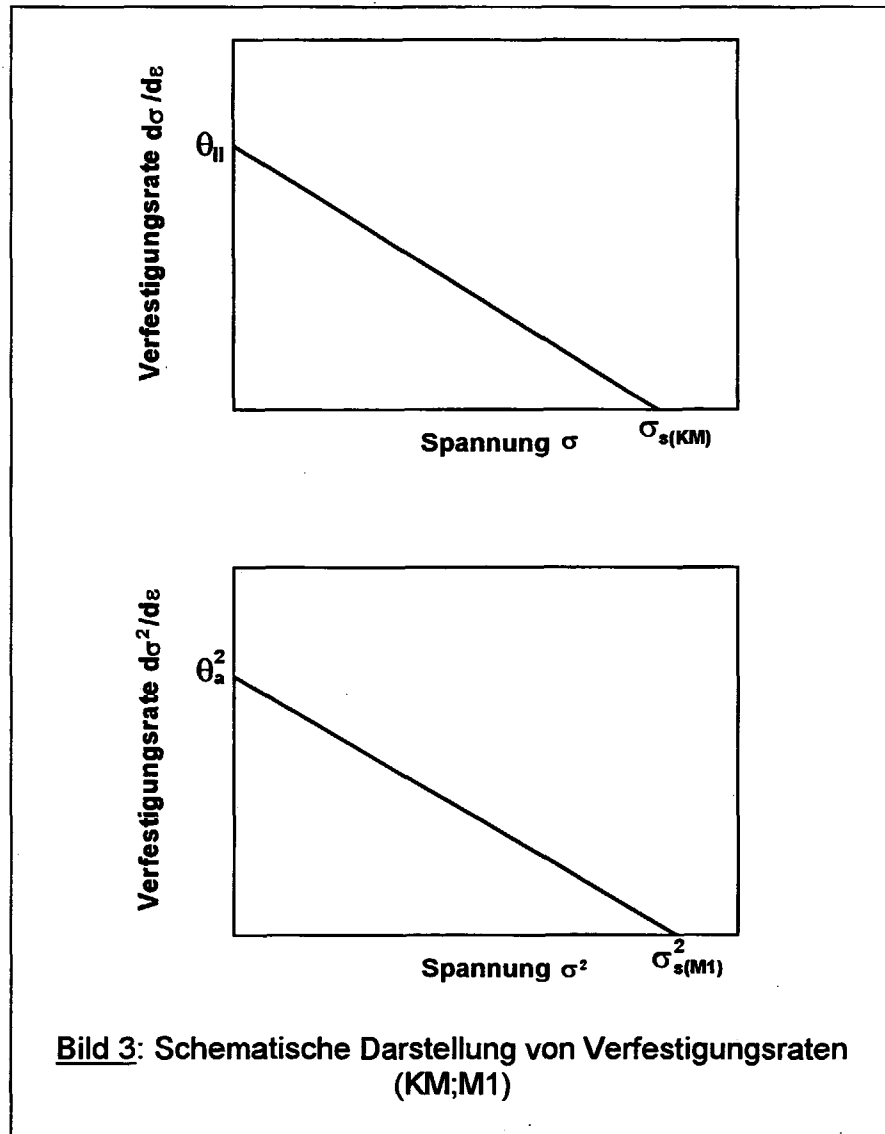
Es gilt:

$$\frac{1}{m} = \frac{\ln \sigma_2 - \ln \sigma_1}{\ln \dot{\epsilon}_2 - \ln \dot{\epsilon}_1}$$

zu c) und d) *Versuche mit konstanter Dehnrate*

Proben werden einer konstanten Dehnrate ausgesetzt. Aus den aufgenommenen Spannungs-Dehnungs-Kurven sind die Sättigungsspannungen abzulesen (s. Bild 1, S.9).

Zudem kann aus einer Auftragung der Daten, wie in Bild 3 dargestellt ist, die athermische Verfestigungsrate bestimmt werden.



zu e) *Versuche mit konstanter Spannung*

Proben werden einer konstanten Spannung oder Last ausgesetzt. Aus den aufgenommenen Daten kann die Sättigungsdehnrage ermittelt werden (s. Bild 1, S. 9).

Das Modell enthält natürlich noch mehr Größen als die zuvor genannten (vgl. Kapitel 2). So sind z.B. in den Sättigungsgrößen der Taylorfaktor M , der Schubmodul G , der Burgersvektor b und die Versetzungsdichte ρ enthalten. Prinzipiell besteht also die Möglichkeit über die Messung dieser physikalischen Größen eine Modellrechnung aufzubauen. Auf ihre aufwendigere Bestimmung kann jedoch verzichtet werden, solange der zuvor beschriebene Weg, die Modellrechnungen durchzuführen, gewählt werden kann.

11. Graphische Umsetzung der Modellrechnung

In diesem Kapitel soll anhand weniger Beispiele gezeigt werden, wie der Charakter der Kurvenverläufe durch das Ein-Parameter-Modell wiedergegeben werden kann. Dabei wurde die Kurvenmodellierung mit fiktiven Eingabewerten berechnet; eine Anpassung an das Experiment liegt diesen Rechnungen nicht zugrunde.

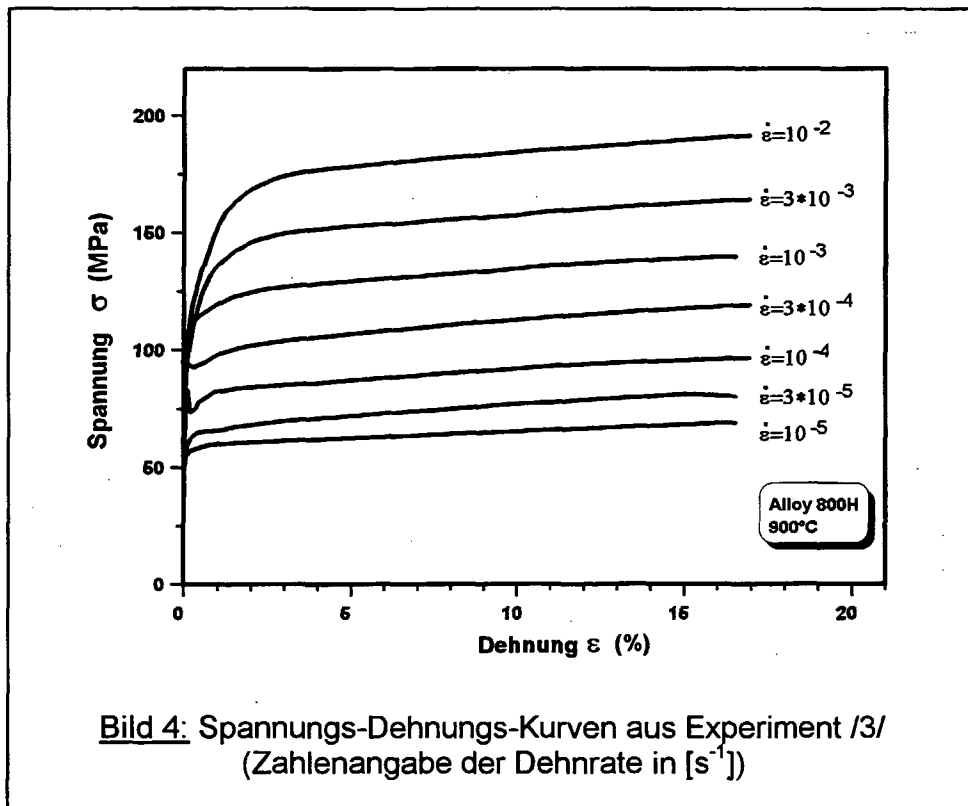
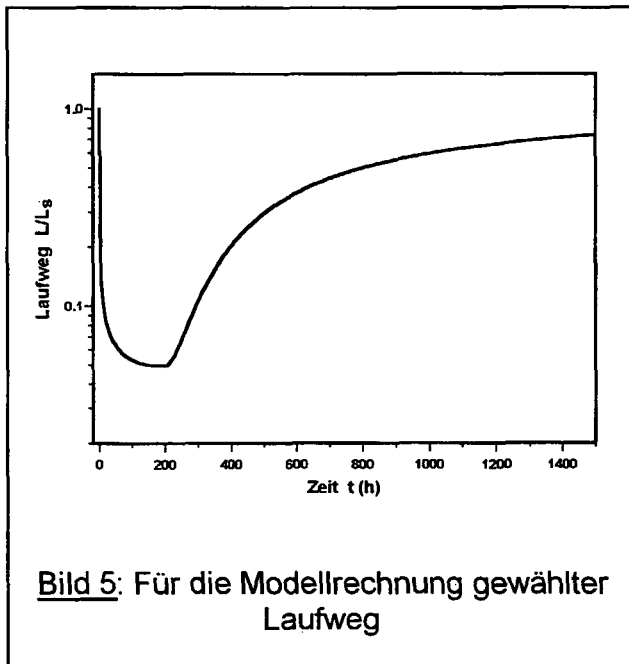


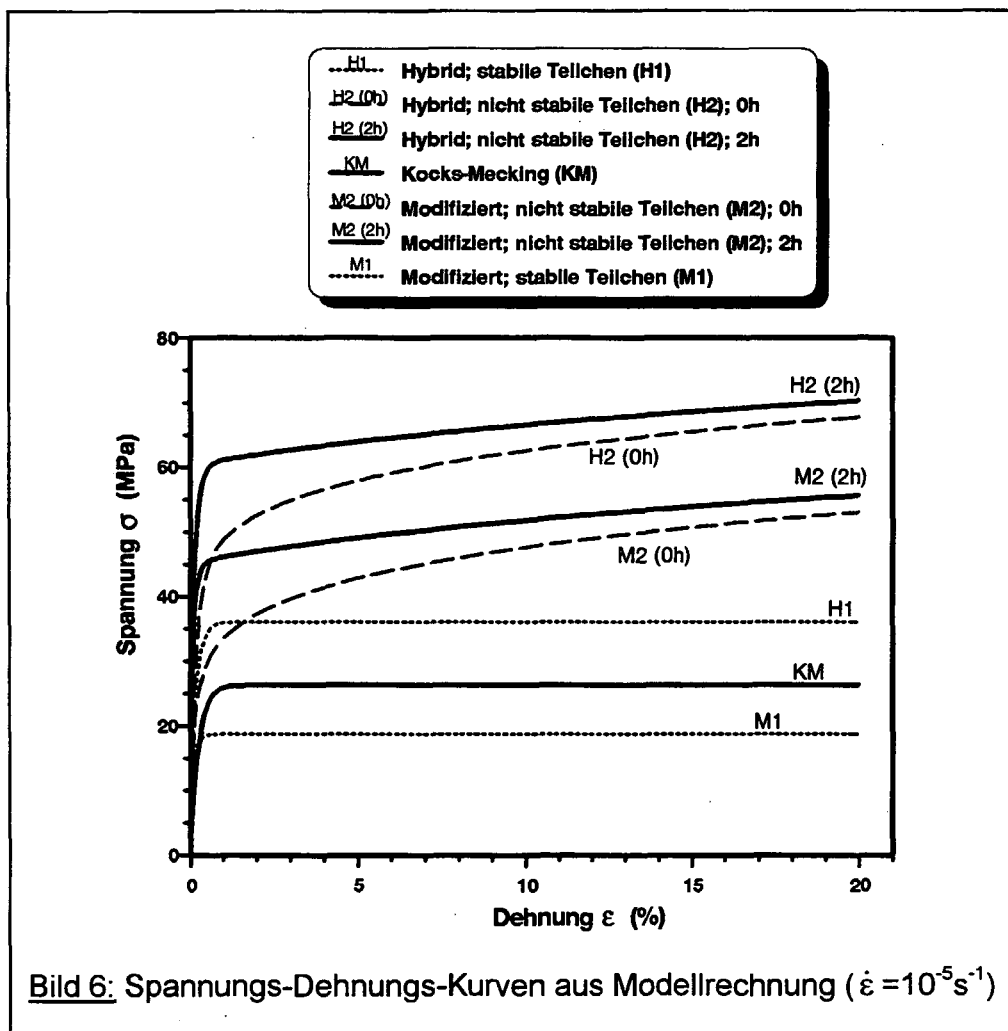
Bild 4: Spannungs-Dehnungs-Kurven aus Experiment /3/
(Zahlenangabe der Dehnrates in $[s^{-1}]$)

Bild 4 zeigt Spannungs-Dehnungs-Kurven von Proben aus dem Werkstoff INCOLOY alloy 800H, die mit konstanter Dehnrates bei $900^{\circ}C$ belastet wurden. INCOLOY alloy 800H zeichnet sich dadurch aus, daß während der Verformung bei hohen Temperaturen Carbide ausgeschieden werden, die das mechanische Verhalten beeinflussen. Man geht davon aus, daß die Carbide, solange sie ausgeschieden werden, den Laufweg von Versetzungen immer weiter begrenzen, bis das gesamte Volumen der Carbide ausgeschieden ist. Ab diesem Zeitpunkt führt Reifung der Carbide, bei der größere Carbide auf Kosten kleinerer wachsen, wieder zu einer Vergrößerung des Laufweges, bis schließlich ein stationärer Zustand erreicht wird.

Bild 5 zeigt einen Verlauf des Laufweges der Versetzungen über der Zeit, wie ihn eine solche Carbidentwicklung erzeugen kann. Dieser Verlauf ist für die folgenden Modellrechnungen benutzt worden. Aus **Bild 4** ist jedoch nicht ersichtlich, ob im Zugversuch ein Einfluß der Carbidentwicklung aufgetreten ist oder nicht. Daß das nicht auszuschließen ist, zeigt **Bild 6**, das Modellrechnungen von Spannungs-Dehnungs-Kurven bei der Dehnrates $\dot{\epsilon} = 10^{-5} s^{-1}$ darstellt. Die Größen, die dafür in das Modell eingesetzt worden sind, sind zum Teil in Anlehnung an die Arbeit von Schwarze /3/ und zum anderen Teil fiktiv gewählt worden, um zunächst prüfen zu können, wie das Modell qualitativ arbeitet.



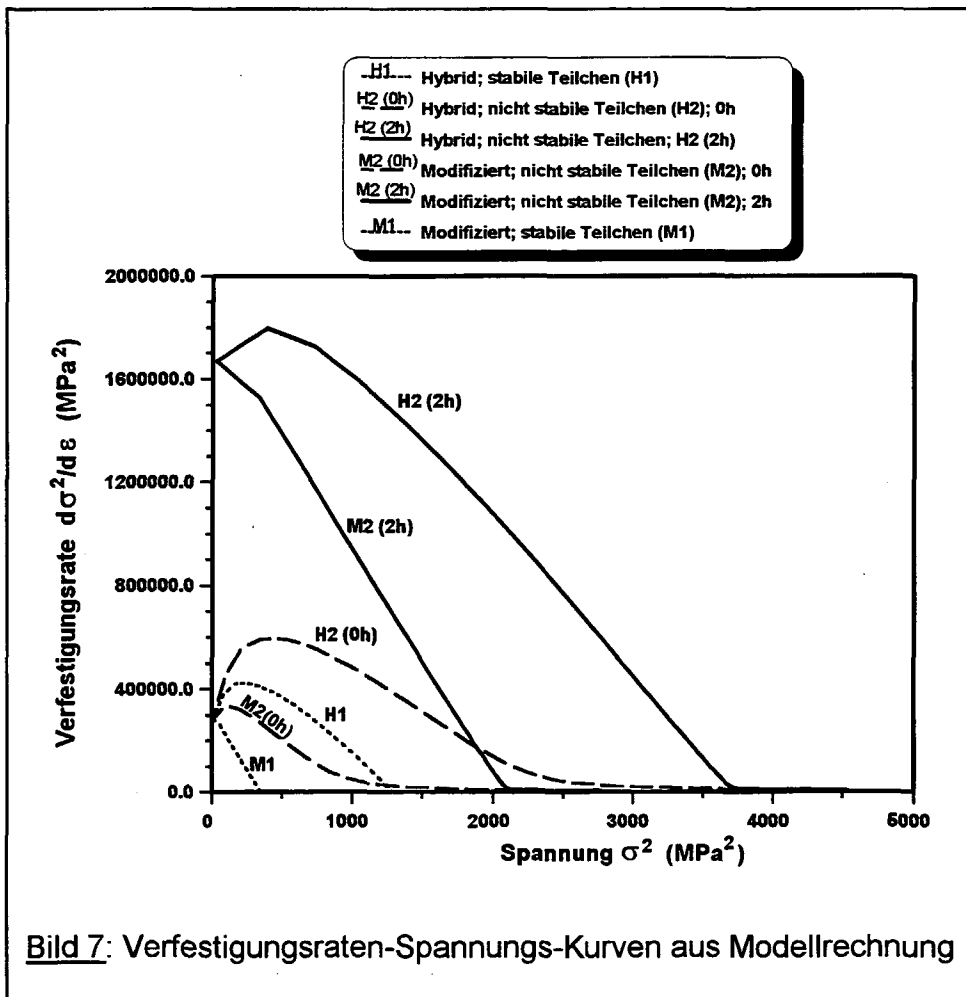
Bei einem Vergleich der Spannungs-Dehnungs-Kurven von (H1) und (H2) in Bild 6, beiden Modellrechnungen liegt die gleiche Sättigungsspannung zugrunde, wird deutlich, daß nach dem Modell die Carbidentwicklung einen erheblichen verfestigenden Einfluß auf den Verlauf der Spannung haben kann. Wird die Rechnung bis zu langen Zeiten fortgesetzt, erreichen die Kurven (H2) auch tatsächlich das Sättigungsniveau von (H1). Wird diese Erkenntnis auf die Zugversuche angewendet, so wird ersichtlich, daß ein einfaches Ablesen der Sättigungsspannung aus dem Versuch nicht richtig wäre.



Vielmehr würde im Zugversuch eine Spannungsverlauf gemessen, der zwar die Sättigungsspannung enthält, der aber in jedem Dehnungsschritt noch durch die Funktion $L(t)$ beeinflusst ist: $\sigma_{\text{Versuch}} \approx \sigma_{s(i)} \frac{L_s}{L}$.

Ebenso kann eine vorherige Auslagerung des Werkstoffs zu weiteren Veränderungen des Spannungsverlaufs führen, wie Bild 6 für den Ansatz (H2) zeigt. Einmal wurde die Modellrechnung für das lösungsgeglühte Material (0h) und zum anderen für zwei Stunden (2h) Auslagerung durchgeführt. Wie stark der Einfluß der Auslagerung auf die Spannungs-Dehnungs-Kurve ist, hängt natürlich davon ab, wie die Kinetik der Carbidentwicklung aussieht.

Deutlicher erkennbar wird der Einfluß der Carbidentwicklung, wenn auf der Basis dieser Daten die Verfestigungsrate über der Spannung aufgetragen wird. Dies zeigt für die in Bild 6 dargestellten Spannungs-Dehnungs-Kurven eine Modellrechnung, die in Bild 7 wiedergegeben ist. Lediglich der Verlauf der Verfestigungsrate für den Ansatz (M1) des Modells zeigt einen linearen Verlauf. Schon die Modellrechnung für den Ansatz (H1) weicht von der Geraden ab, obwohl dabei stabile Teilchen einer zweiten Phase angenommen werden.



Noch stärker werden die Veränderungen im Verlauf der Verfestigungsraten bei den Ansätzen (M2) und (H2), die die zuvor beschriebene Carbidentwicklung verarbeiten. Dabei zeigt die Modellrechnung für zwei Stunden (2h) Auslagerung, welchen großen Effekt diese relativ kurze Zeit auf den Verlauf der Verfestigungsrate haben kann. Diese Abweichungen von der ursprünglichen Geraden sind zwar zunächst überraschend, können aber einen neuen Ansatz bieten, ungewöhnliche Meßergebnisse aus Versuchen mit konstanter Dehnrage zu erläutern. Dies zeigt Bild 8, das den Verlauf der Verfestigungsrate über der Spannung für weitere Proben aus INCOLOY alloy 800H bei 800°C zeigt.

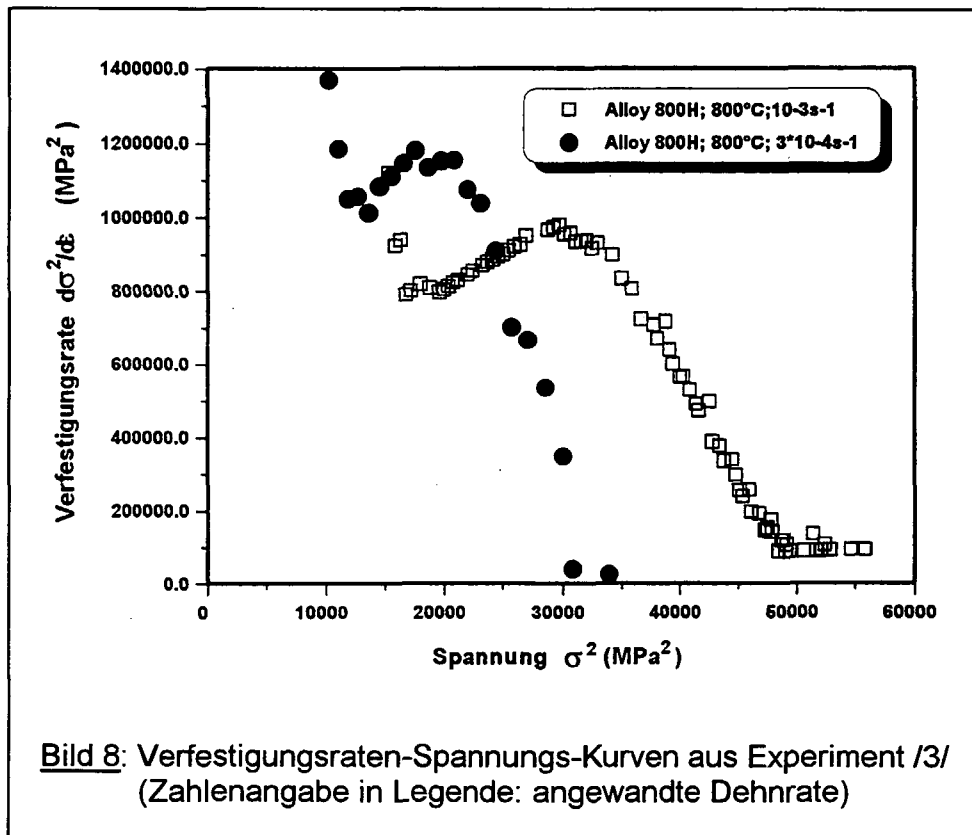
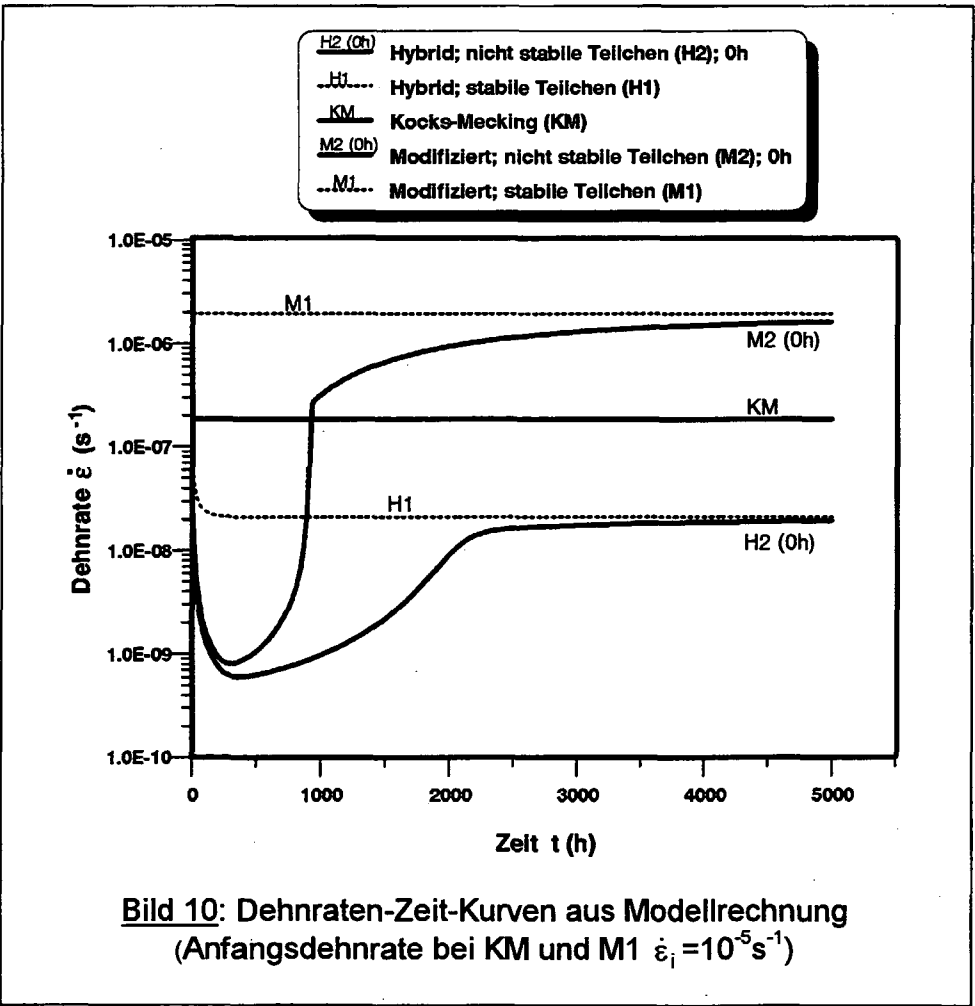
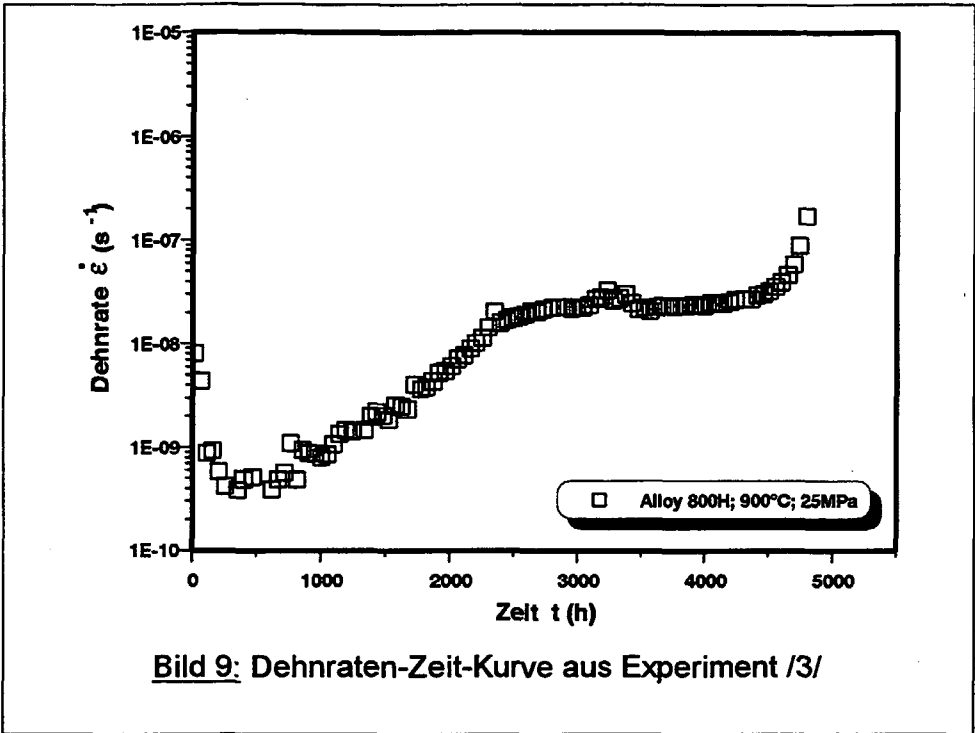


Bild 9 und Bild 10 zeigen, wiederum für INCOLOY alloy 800H bei 900°C, einen qualitativen Vergleich zwischen einem Kriechexperiment bei konstanter Last und Modellrechnungen, durchgeführt für den Belastungsfall konstanter Spannung.

Aus Bild 9 geht hervor, daß bei einer Belastung von 25MPa die Ausscheidung der Carbide zunächst zu einer minimalen Dehnrage führt, die nicht die stationäre Dehnrage ist. Danach steigt, durch die Reifung der Carbide, die Dehnrage wieder an, bis das stationäre Niveau erreicht ist. In diesem Fall ist die Verformung der Probe durch die relativ niedrige äußere Spannung so langsam abgelaufen, daß die Kinetik der Carbidentwicklung in ihren einzelnen Stadien in der Dehnrage-Zeit-Kurve abgebildet wurde.

Das Modell ist in der modifizierten Version (M2) und der Hybridversion (H2), jeweils für den Fall der sich entwickelnden Carbide, in der Lage, einen solchen Verlauf qualitativ wiederzugeben, Bild 10. Für die Rechnung wurden die gleichen Werte für die experimentell zu bestimmenden Größen eingesetzt, die für den Belastungsfall konstanter Dehnrage gewählt worden waren.



Literatur

- /1/ U.F. Kocks:
"Laws for Work-Hardening and Low-Temperature Creep"
Journal of Engineering Materials and Technology (ASME H) 98 (1976), 76
- /2/ Y. Estrin, H. Mecking:
"A Unified Phenomenological Description of Work Hardening and Creep Based on One-Parameter Models"
Acta Metallurgica 32 (1984), 57
- /3/ E. Schwarze, H. Schuster, H. Nickel:
"Anwendung der Stoffgleichung 'Ein-Parameter-Modell' auf eine hochwarmfeste Legierung"
Forschungszentrum Juelich 2714 (1993)
- /4/ A.H. Cottrell, R.J. Stokes:
Acta Metallurgica 2 (1954), 341
- /5/ U.F. Kocks, H. Mecking:
"Dislocation Kinetics at Not-So-Constant Structure"
in M.F. Ashby et.al.: "Dislocation Modelling of Physical System"
Pergamon Press Oxford (1981), 173
- /6/ G. Taylor:
Proceedings of the Royal Society A145 (1934), 362
- /7/ Y. Estrin:
"Stoffgesetze der plastischen Verformung und des plastischen Fließens"
TU Hamburg-Harburg, Habilitationsschrift (1986)
- /8/ U.F. Kocks, H. Mecking:
"Kinetics of Flow and Strain-Hardening"
Acta Metallurgica 29 (1981), 1865
- /9/ A.S. Argon, M.F. Ashby, U.F. Kocks:
"Thermodynamics and Kinetics of Slip"
Progress in Material Science 19 (1975)
- /10/ W. Blum:
"Gleitung und Erholung während plastischer Verformung kristalliner Stoffe bei hoher Temperatur"
Uni Erlangen-Nürnberg, Habilitationsschrift (1978)
- /11/ Y. Estrin:
"Strain Hardening and Creep Behaviour of Materials Containing Non-Shearable Second-Phase Particles"
in Proceedings of DGM Symposium "Gefüge und mechanische Eigenschaften von Werkstoffen" Bad Nauheim BRD (1990)
- /12/ J. Rösler, E. Arzt:
"A new Model-Based Creep Equation for Dispersion Strengthened Materials"
Acta Metallurgica et Materialia 38 (1990), 671

Formelzeichen

A :	Koeffizient der Partialbruchzerlegung
α :	numerische Konstante
b :	Burgersvektor
B :	Koeffizient der Partialbruchzerlegung
β :	numerischer Faktor zur Beschreibung der Selbstorganisation von Versetzungen
C :	Koeffizient der Partialbruchzerlegung
χ :	numerischer Proportionalitätsfaktor
d_{korn} :	Korndurchmesser
d_{teil} :	konstanter Durchmesser von Teilchen einer zweiten Phase
$d(t)$:	veränderlicher Durchmesser von Teilchen einer zweiten Phase
d_S :	Sättigungsdurchmesser von Teilchen einer zweiten Phase
$e_{r(KM)}$:	Relaxationsdehnung im Kocks-Mecking-Modell bei konstanter Spannung
$e_{r(M1)}$:	Relaxationsdehnung im modifizierten Modell (M1) bei konstanter Spannung
$e_{r(M2)}$:	Relaxationsdehnung im modifizierten Modell (M2) bei konstanter Spannung
$e_{r(H1)}$:	Relaxationsdehnung im Hybrid-Modell (H1) bei konstanter Spannung
$e_{r(H2)}$:	Relaxationsdehnung im Hybrid-Modell (H2) bei konstanter Spannung
$e_{r(H3)}$:	Relaxationsdehnung im Hybrid-Modell (H3) bei konstanter Spannung
ε :	Dehnung
ε_i :	Anfangsdehnung
$\varepsilon_{r(KM)}$:	Relaxationsdehnung im Kocks-Mecking-Modell bei konstanter Dehnrage
$\varepsilon_{r(M1)}$:	Relaxationsdehnung im modifizierten Modell (M1) bei konstanter Dehnrage
$\varepsilon_{r(M2)}$:	Relaxationsdehnung im modifizierten Modell (M2) bei konstanter Dehnrage
$\varepsilon_{r(H1)}$:	Relaxationsdehnung im Hybrid-Modell (H1) bei konstanter Dehnrage
$\varepsilon_{r(H2)}$:	Relaxationsdehnung im Hybrid-Modell (H2) bei konstanter Dehnrage
$\varepsilon_{r(H3)}$:	Relaxationsdehnung im Hybrid-Modell (H3) bei konstanter Dehnrage
$\dot{\varepsilon}$:	Dehnrage
$\dot{\varepsilon}_0$:	Normierungsdehnrage
$\dot{\varepsilon}_i$:	Anfangsdehnrage
$\dot{\varepsilon}_{s(KM)}$:	Sättigungsdehnrage im Kocks-Mecking-Modell
$\dot{\varepsilon}_{s(M1)}$:	Sättigungsdehnrage im modifizierten Modell (M1)
$\dot{\varepsilon}_{s(M2)}$:	Sättigungsdehnrage im modifizierten Modell (M2)
$\dot{\varepsilon}_{s(H1)}$:	Sättigungsdehnrage im Hybrid-Modell (H1)

$\dot{\varepsilon}_s(H2)$	Sättigungsdehnrate im Hybrid-Modell (H2)
f	Faktor zur Berücksichtigung des Ablösens von Versetzungen von Teilchen
γ	Abgleitung
$\dot{\gamma}$	Abgleitgeschwindigkeit
$\dot{\gamma}_0$	Vorfaktor der Abgleitgeschwindigkeit
G	Schubmodul
ΔG	Aktivierungsenergie
g	Gewichtungparameter im Hybrid-Modell (H3)
j	Gewichtungparameter im Hybrid-Modell (H3)
k	Verfestigungskoeffizient im modifizierten Modell (M1)
k_0	Verfestigungskoeffizient im modifizierten Modell (M2)
k_1	Verfestigungskoeffizient im Kocks-Mecking-Modell
k_2	Entfestigungskoeffizient
$k_{20(KM)}$	numerischer Koeffizient im Kocks-Mecking-Modell
$k_{20(M1)}$	numerischer Koeffizient im modifizierten Modell (M1)
$k_{20(M2)}$	numerischer Koeffizient im modifizierten Modell (M2)
K	Konstante in der Nortongleichung
l	mittlerer Versetzungsabstand
L	Laufweg einer Versetzung abhängig von veränderlichen Teilchen einer zweiten Phase
L_{ver}	Laufweg einer Versetzung abhängig von der Versetzungsdichte
L_{sub}	Laufweg einer Versetzung bei Subkombildung
L_{korn}	Laufweg einer Versetzung bestimmt durch die Korngröße
L_{teil}	Laufweg einer Versetzung abhängig von konstanten Teilchen einer zweiten Phase
L_X	veränderlicher Laufweg einer Versetzung nach Zeit t_X
L_S	Sättigungslaufweg einer Versetzung bei Zeit t_S
M	Taylor-Modul
m	Exponent in kinetischer Gleichung
n	Norton-Exponent
$\bar{v}$	mittlere Versetzungsgeschwindigkeit
$\bar{v}_0$	Vorfaktor der mittleren Versetzungsgeschwindigkeit
p_1	Parameter im Hybrid-Modell (H1)
p_2	Parameter im Hybrid-Modell (H2)
$q_{(KM)}$	Exponent im Kocks-Mecking-Modell
$q_{(M1)}$	Exponent im modifizierten Modell (M1)
$q_{(M2)}$	Exponent im modifizierten Modell (M2)
r	Hilfsvariable im Hybrid-Modell (H2)
ρ	Versetzungsdichte

ρ_m :	bewegliche Versetzungsdichte
ρ_s :	Sättigungsversetzungsdichte
S_i :	Strukturparameter
$\dot{S}$:	Entwicklung der Struktur
S_{is} :	Strukturparameter in der Sättigung
σ :	Spannung
σ_i :	Anfangsspannung
σ_0 :	Normierungsspannung in der Nortongleichung
$\sigma_{s(KM)}$:	Sättigungsspannung im Kocks-Mecking-Modell
$\sigma_{s(M1)}$:	Sättigungsspannung im modifizierten Modell (M1)
$\sigma_{s(M2)}$:	Sättigungsspannung im modifizierten Modell (M2)
$\sigma_{s(H1)}$:	Sättigungsspannung im Hybrid-Modell (H1)
$\sigma_{s(H2)}$:	Sättigungsspannung im Hybrid-Modell (H2)
$\hat{\sigma}$:	Strukturparameter zur Fließspannung
$\hat{\sigma}_{s(KM)}$:	Sättigungsstrukturparameter im Kocks-Mecking-Modell
$\hat{\sigma}_{s(M1)}$:	Sättigungsstrukturparameter im modifizierten Modell (M1)
$\hat{\sigma}_{s(M2)}$:	Sättigungsstrukturparameter im modifizierten Modell (M2)
$\hat{\sigma}_{s(H1)}$:	Sättigungsstrukturparameter im Hybrid-Modell (H1)
$\hat{\sigma}_{s(H2)}$:	Sättigungsstrukturparameter im Hybrid-Modell (H2)
τ :	Schubspannung
$\hat{\tau}$:	Strukturparameter zur Schubspannung
T :	Temperatur
T_m :	Schmelztemperatur
Θ :	Verfestigungsrate
Θ_{II} :	athermische Verfestigungsrate im Kocks-Mecking-Modell
$\tilde{\Theta}_{II}$:	Hilfsvariable zur athermischen Verfestigungsrate im Kocks-Mecking-Modell
$\Theta_{a(M1)}^2$:	athermische Verfestigungsrate im modifizierten Modell (M1)
$\tilde{\Theta}_{a(M1)}^2$:	Hilfsvariable zur athermischen Verfestigungsrate im modifizierten Modell (M1)
$\Theta_{a(M2)}^2$:	athermische Verfestigungsrate im modifizierten Modell (M2)
$\tilde{\Theta}_{a(M2)}^2$:	Hilfsvariable zur athermischen Verfestigungsrate im modifizierten Modell (M2)
$\Theta_{h(H1)}$:	athermische Verfestigungsrate im Hybrid-Modell (H1)
$\Theta_{h(H2)}$:	athermische Verfestigungsrate im Hybrid-Modell (H2)

u :	Substitutionsvariable
v :	Hilfsvariable im Hybrid-Modell (H3)
ξ :	numerischer Proportionalitätsfaktor
Y_{KM} :	Hilfsvariable im Hybrid-Modell (H1;H2) bei konstanter Spannung
Y_{M1} :	Hilfsvariable im Hybrid-Modell (H1) bei konstanter Spannung
Y_{M2} :	Hilfsvariable im Hybrid-Modell (H2) bei konstanter Spannung
Z_{KM} :	Hilfsvariable im Hybrid-Modell (H1;H2) bei konstanter Dehnrate
Z_{M1} :	Hilfsvariable im Hybrid-Modell (H1) bei konstanter Dehnrate
Z_{M2} :	Hilfsvariable im Hybrid-Modell (H2) bei konstanter Dehnrate
ζ :	numerischer Proportionalitätsfaktor

Danksagung

Der vorgelegte Bericht ist im Rahmen der Forschungsarbeiten des Sonderforschungsbereiches 370 „Integrative Werkstoffmodellierung“ am Institut für Werkstoffe der Energietechnik (IWE) des Forschungszentrums Jülich entstanden. Ich danke an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. H. Nickel für die Möglichkeit der Durchführung des Promotionsvorhabens am Institut. Der Sonderforschungsbereich 370 wird von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziert.

Mein Dank gilt außerdem jenen im Sonderforschungsbereich als auch im Forschungszentrum Jülich, die immer wieder Zeit hatten, kritische Punkte in der Modellentwicklung mit mir zu diskutieren und einer Lösung näher zu bringen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. H. Schuster, der die Entstehung dieses Berichtes mit viel Verständnis für die Details des Modells und intensiver Diskussion begleitet hat.