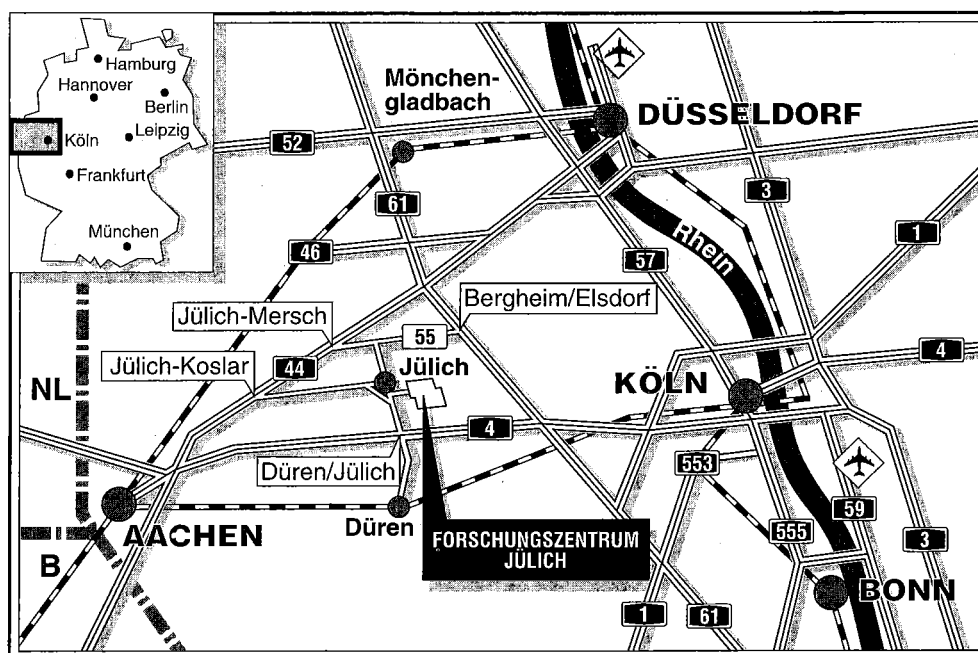


Institut für Kernphysik

**Effekte höherer Ordnung in der
elektromagnetischen Dissoziation
schwach gebundener Kerne**

Dominique Kalassa Munongo



Berichte des Forschungszentrums Jülich ; 3168

ISSN 0944-2952

Institut für Kernphysik Jül-3168

D5 (Diss. Universität Bonn)

Zu beziehen durch: Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek
D-52425 Jülich · Bundesrepublik Deutschland
Telefon: 02461/61-61 02 · Telefax: 02461/61-61 03 · Telex: 833556-70 kfa d

Effekte höherer Ordnung in der elektromagnetischen Dissoziation schwach gebundener Kerne

Dominique Kalassa Munongo

Abstract

The present work deals with the dissociation mechanisms of loosely bound nuclei in heavy ion collisions, a subject which is closely related to current experiments at heavy ion colliders (RIKEN, GSI, GANIL, MSU-NSCL etc). Our study is based on the available data on the photodissociation of ^{11}Be , ^9Be , ^{11}Li , and the neutron capture by ^{13}C . Generalising the effective range treatment of photo-nuclear reactions near threshold to describe reactions involving also bound states with a non-zero angular momentum, we derive general expressions for electromagnetic and diffraction dissociation matrix elements and cross-sections, which appear in good approximation to be independent of any assumption on the shape of the nuclear interaction. We have also calculated the mean square distance of loosely bound clusters to the core. Corrections can be worked out in a systematic way. Our mainly analytical calculations are in good agreement with the experimental data and with the previously available numerical results.

We have studied the effects of higher order electromagnetic interactions in the Coulomb dissociation of ^{11}Li and ^9Be in the sudden approximation and we have found a trend to the reduction of the dissociation probability. Higher order effects introduce also an asymmetry in the angular distribution of the emitted particles. We have finally studied the time evolution of the final state wave function after a Coulomb dissociation.

Übersicht

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Dissoziationsmechanismen von schwach gebundenen Kernen in Schwerionenstößen. Dieses Thema steht in engem Zusammenhang mit gängigen Experimenten an Schwerionenbeschleunigern (RIKEN, GSI, GANIL, MSU-NSL usw.). Unsere Untersuchungen basieren auf den Photodissoziationsdaten von ^{11}Be , ^9Be , ^{11}Li und dem Neutroneneinfang durch ^{12}C . Wir verallgemeinern die Beschreibung von photonuklearen Reaktionen derart, daß wir auch Kernreaktionen von Zuständen mit nicht verschwindendem Bahndrehimpuls behandeln können. Wir leiten allgemeine Ausdrücke für die Matrixelemente und Wirkungsquerschnitte für die elektromagnetische Dissoziation und für die Dissoziation durch Beugung her. Diese Größen sind in guter Näherung unabhängig von der Kernwechselwirkung. Außerdem haben wir auch den mittleren quadratischen Abstand von schwach gebundenen Clustern bestimmt. Korrekturen können in systematischer Weise berechnet werden. Unsere überwiegend analytischen Resultate stimmen mit vorhandenen experimentellen Daten und numerischen Berechnungen gut überein.

Wir haben die Effekte höherer Ordnung der elektromagnetischen Wechselwirkung in der Coulombdissoziation von ^{11}Li und ^9Be studiert und hierbei eine allgemeine Tendenz zur Reduktion der Dissoziationswahrscheinlichkeiten gefunden. Effekte höherer Ordnungen erzeugen auch eine Asymetrie in der Winkelverteilung der Fragmente. Schließlich haben wir die Zeitentwicklung der Wellenfunktion nach der Coulombdissoziation studiert.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Allgemeine Theorie der Coulombanregung in relativistischen Stößen	5
2.1	Grundlagen	5
2.2	Coulombstreuung des Projektils	7
2.3	Coulombanregung	8
2.3.1	Übergangsamplitude in semi-klassischer Näherung . . .	8
2.3.2	Multipoloperatoren	11
2.3.3	Wirkungsquerschnitte	13
2.4	Photodissoziation	14
2.5	Methode der äquivalenten Photonen	16
3	Teilcheneinfang und Photodissoziation	18
3.1	Absorption und Emission von elektromagnetischer Strahlung durch Kerne	18
3.2	Teilcheneinfang durch einen spinlosen Core	22
3.3	Photodissoziation	27
4	Eigenschaften von schwach gebundenen Kernen	29
4.1	Einleitung	29
4.2	Teilchen im Kastenpotential	29
4.2.1	Grundzustände mit $l = 0$	29
4.2.2	Grundzustände mit $l \geq 1$	32
4.2.3	Kontinuumszustände	35
4.2.4	Elastische Streuung	36

4.2.5	Elektromagnetische Dissoziation	37
4.3	Systeme mit Coulombwechselwirkung	37
4.4	Modellunabhängige Beschreibung	40
4.4.1	Motivation	40
4.4.2	Kontaktwechselwirkung	40
4.4.3	Verallgemeinerung auf den Aufbruch von Zuständen mit relativem Bahndrehimpuls $\neq 0$	43
4.4.4	Aufenthaltswahrscheinlichkeit in klassisch verbotenen Regionen	45
4.4.5	Mittlere quadratische Radien	47
4.4.6	Systeme mit Coulombwechselwirkung	52
4.5	Anwendung auf ausgewählte Systeme	53
4.5.1	Photodissoziation von ^{11}Be	53
4.5.2	Neutroneneinfang durch ^{12}C	58
4.5.3	Photodissoziation von ^9Be	59
5	Dissoziation von schwach gebundenen Kernen in peripheren Kollisionen	64
5.1	Einleitung	64
5.2	Coulombdissoziation von ^{11}Be	65
5.3	Coulombdissoziation von ^9Be	68
5.4	Nukleare Beiträge	68
5.5	Anwendungen	72
6	Effekte höherer Ordnung in der Coulombdissoziation	74
6.1	Motivation	74
6.2	Zeitabhängige Störungstheorie	75
6.3	Sudden approximation	76
6.4	Coulombdissoziation	78
6.5	Übergänge vom Grund- zum Grundzustand	81
6.6	Effekte höherer Ordnung in der Coulombdissoziation von ^{11}Li	83
6.7	Effekte höherer Ordnung in der Coulombdissoziation von ^9Be	85
6.8	Zeitentwicklung der Wellenfunktion nach der Coulombdisso- ziation	90
6.9	Weitere Entwicklungen	97
7	Zusammenfassung und Ausblick	99

Kapitel 1

Einleitung

Das elektromagnetische Feld einer schnell bewegten Ladungsverteilung stellt eine intensive Quelle quasi-reeller Photonen dar. Mit Hilfe dieses Photonenpektrums lassen sich viele kern- als auch astrophysikalische Fragestellungen untersuchen. Von besonderem Interesse ist hierbei die Anregung von Riesenresonanzen oder die Bestimmung des astrophysikalischen S -Faktors. In jüngster Zeit hat daher das Interesse an peripheren Schwerionenstößen zugenommen. In diesen Stößen, bei denen sich die beteiligten Ionen nicht überlappen, kann die starke Wechselwirkung zwischen den Kernen fast vollständig vernachlässigt werden. Demnach ist es möglich, die Anregung der beteiligten Kerne durch das zeitlich veränderliche elektromagnetische Feld zu erklären.

In diesem Zusammenhang gehen wir in der vorliegende Arbeit auf sogenannte Aufbruchreaktionen (Coulombdissoziationen) ein, bei denen Nukleonen oder Cluster aus dem Kern befreit werden. Mit dieser Methode versuchen wir, die besondere Struktur von leichten Kernen jenseits der Stabilitätslinie der Elemente zu untersuchen. Die vorliegende Arbeit versteht sich nicht nur als eine Einführung in die grundlegenden Denkweisen, sondern will auch eine Anregung zu weiteren Arbeiten auf diesem modernen und interessanten Gebiet sein.

In Kap.2 geben wir eine allgemeine Einführung in die Theorie der Coulombanregung, welche von großer Bedeutung für die Motivation und das Verständnis dieser Arbeit ist. Wir verwenden dabei gemäß der gängigen Literatur eine Zerlegung des Projektils in Clustern und leiten die durch die Bewegung im Coulombfeld induzierte Wechselwirkung zwischen den Clustern ab. Das Anregungspotential wird dabei durch die Differenz der Summe der

potentiellen Energien der Cluster und der potentiellen Energie des ganzen Kerns gegeben. Wir können dabei die Ablenkung des schnellen und relativ schweren Projektils im Coulombfeld des Targets vernachlässigen, was die Rechnungen in semi-klassischer Näherung sehr vereinfacht. Wir entwickeln dann die Wechselwirkung nach elektromagnetischen (vektoriellen) Multipolfeldern. Dies macht einen Vergleich mit photonuklearen Prozessen möglich.

Die photonuklearen Reaktionen werden in der Praxis oft anhand von Kernmodellen beschrieben. Die Coulombdissoziationsquerschnitte werden dann daraus hergeleitet und mit dem Experiment verglichen. In Kap. 3 geben wir die theoretischen Grundlagen der elektromagnetischen Wechselwirkung eines Spin-1/2 Clusters mit einem spinlosen Core. Dies ist für eine Vielzahl von Experimenten wichtig. Diese Theorie wird in Kap. 4 auf die Photodissoziation von leichten Kernen angewandt.

Die Weizsäcker-Williamsmethode stellt eine elegante Beziehung zwischen Coulombanregung und Photoabsorption in erster Ordnung der Störungstheorie her. Dabei agiert das Target als Quelle eines virtuellen Photonenspektrums, welches die Anregung des Targets erzeugt. Einige Beispiele werden in Kap. 5 besprochen. Diese einfache Beziehung wird aber gestört, wenn Effekte höherer Ordnungen wichtig werden. Diese Effekte müssen deshalb sorgfältig untersucht werden, die Grundlagen dazu werden in Kap. 6 gelegt.

Kapitel 2

Allgemeine Theorie der Coulombanregung in relativistischen Stößen

2.1 Grundlagen

Die Grundlagen für die theoretische Behandlung der elektromagnetischen Anregung von Kernen in peripheren Kollisionen wurden in den Referenzen [14, 17, 18, 16] gelegt. Wir betrachten hier Kollisionen schwerer Ionen, bei denen die kinematischen Bedingungen eine klassische Beschreibung der Projektilbahn zulassen. Dieser Ansatz ist gerechtfertigt; falls

$$\eta = \frac{Z_t Z_p e^2}{\hbar v} \gg 1. \quad (2.1)$$

Z_p und Z_t sind die Ladungszahlen des Projektils bzw. des Targets, und v ist deren Relativgeschwindigkeit. Eine semi-klassische Theorie der Coulombanregung [20, 21, 22] reicht deshalb für die Zwecke dieser Arbeit aus. Außerdem vernachlässigen wir Effekte der starken Wechselwirkung bei großen Impaktparametern ($b \geq 15 fm$).

Die Wechselwirkung des Projektils mit dem elektromagnetischen Feld des Targets wird beschrieben durch

$$V_{int} = \int d^3r \rho(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} J^i(\vec{x}, t) A^i(\vec{x}, t), \quad (2.2)$$

wobei $\rho(\vec{x}, t)$ und $J^i(\vec{x}, t)$ die Ladungs- bzw. Stromverteilungen des Projektils, $\phi(\vec{x}, t)$ und $\vec{A}(\vec{x}, t)$ die Liénard-Wiechert Potentiale des bewegten Targets im Ruhesystem des Projektils [19] bezeichnen :

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{Z_t e}{(1 - \vec{\beta}_t \vec{n}) R |_{ret}} , \quad (2.3)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{Z_t e \vec{\beta}_t}{(1 - \vec{\beta}_t \vec{n}) R |_{ret}} . \quad (2.4)$$

Dabei ist $\vec{\beta}_t = \frac{\vec{v}_t}{c}$ und $\vec{n}$ der Einheitsvektor in Richtung des Abstandsvektors mit

$$\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}_t(t') . \quad (2.5)$$

Die retardierte Zeit t' wird hierbei definiert durch

$$t' = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_t|}{c} . \quad (2.6)$$

Das Projektil bewegt sich bei den hier untersuchten Energien ($E \geq 30 MeV$) praktisch auf einer Geraden. Die Potentiale in Gln.(2.3,2.4) werden im Ruhesystem des Projektils durch das bewegten Target erzeugt. Sie lauten [19]

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{\gamma Z_t e}{((x - b_x)^2 + (y - b_y)^2 + \gamma^2(z - vt)^2)^{1/2}} \quad (2.7)$$

und

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\vec{v}}{c} \phi(\vec{x}, t) . \quad (2.8)$$

Wir haben die Ortsvektoren mit

$$\vec{x} = (x, y, z) , \quad (2.9)$$

$$\vec{x}_t = (b_x, b_y, vt) . \quad (2.10)$$

und den Stoßpaktparameter mit

$$\vec{b} = (b_x, b_y, 0) \quad (2.11)$$

im Schwerpunktsystem des Projektils bezeichnet. Die Bewegung erfolgt aufgrund der Drehimpulserhaltung in Zentralfeldern in einer Ebene.

Die Strom- und Ladungsverteilung im Kern sind nicht genau bekannt. Es existieren für diese Verteilungen verschiedene Modelle, die durch Vergleiche mit dem Experiment gerechtfertigt sind. Es wird sehr oft die Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{x}, t) = e \sum_N Z_N \delta(\vec{x} - \vec{x}_N) \quad (2.12)$$

verwendet. N bezeichnet das jeweilige Nukleon. Die in Gl.(2.12) angegebene Ladungsverteilung führt i.A. auf ein kompliziertes Vielteilchenproblem, da die Kernwechselwirkungen und Wellenfunktionen der Nukleonen sehr komplex sind.

2.2 Coulombstreuung des Projektils

Die nichtrelativistische Streuung von elektrisch geladenen Teilchen im Coulombfeld mit dem Potential

$$V(r) = \frac{Z_t Z_p e^2}{r} \quad (2.13)$$

wird in Referenz [23] behandelt. Der Wirkungsquerschnitt läßt sich in der semi-klassischen Näherung aus der Beziehung

$$b = a \cot \frac{\theta}{2} \quad (2.14)$$

zwischen dem Impaktparameter b and dem Streuwinkel θ herleiten. Hierbei bezeichnet a den minimalen Abstand der beiden Cluster :

$$a = \frac{Z_p Z_t e^2}{\gamma \mu v_\infty^2}. \quad (2.15)$$

Dabei ist v_∞ die Anfangsgeschwindigkeit des Projektils, γ ist der Lorentzfaktor :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_\infty^2}{c^2}}} \quad (2.16)$$

und μ die reduzierte Masse. Der Rutherfordquerschnitt ist damit gegeben durch

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_R = \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta}$$

$$= \frac{a^2}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} . \quad (2.17)$$

Er stimmt mit der quantenmechanischen Rechnung überein. Relativistische Korrekturen können durch den Faktor γ im Nenner von Gl.(2.15) berücksichtigt werden.

2.3 Coulombanregung

2.3.1 Übergangsamplitude in semi-klassischer Näherung

Die Wechselwirkung zwischen Projektil und Target Gl.(2.2) führt sowohl zu einer Änderung der relativen Bewegung zwischen den beiden Teilchen (z. B. Coulombstreuung des Projektils bzw. des Targets) als auch zu deren innerer Anregung. Dies kann durch die folgende Zerlegung verdeutlicht werden :

$$V_{int} = V_C + (V_{int} - V_C). \quad (2.18)$$

Die Coulombwechselwirkung ist am Projektilort ($\vec{r} = 0$) gegeben durch

$$V_C(t) \simeq \frac{\gamma Z_t Z_p e^2}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{1/2}}. \quad (2.19)$$

Falls der Kern aus einer Reihe von Clustern besteht, können wir folgenden Ansatz machen :

$$\rho(\vec{x}, t) = e \sum_c Z_c \delta(\vec{x} - \vec{x}_c). \quad (2.20)$$

Damit lautet die elektromagnetische Wechselwirkung

$$V_{int} \simeq e \sum_c Z_c (\phi(\vec{x}_c, t) - \vec{\beta}_c \vec{A}(\vec{x}_c, t)). \quad (2.21)$$

Dieser Ansatz ist sicherlich gerechtfertigt für leicht gebundene Cluster, wodurch das Vielteilchenproblem erheblich vereinfacht wird. Die inneren Wellenfunktionen des Kerns werden aus phänomenologischen Modellen über die Wechselwirkungen der Nukleonen oder Clustern berechnet.

Die elektromagnetische Wechselwirkung mit dem Target induziert Übergänge zwischen den Eigenzuständen des Projektils. Sie können im Rahmen der zeitabhängigen Störungstheorie beschrieben werden. Die Übergangsamplitude ist in erster Ordnung der Störungstheorie gegeben durch

$$a_{fi} = \langle f | \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \tilde{V}_{int}(t) | i \rangle , \quad (2.22)$$

die Übergangsenergie mit:

$$\hbar\omega = E_f - E_i. \quad (2.23)$$

In Gl.(2.22) bezeichnet $\tilde{V}_{int}(t) = V_{int}(t) - V_C(t)$ den Anteil der Restwechselwirkung nach Abtrennung der Schwerpunktsenergie.

$\tilde{V}(t)$ läßt sich nach Multipolen entwickeln, denn der Nenner von Gl.(2.7) ist im wesentlichen die Greensche Funktion des Laplace-Operators

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.24)$$

Er kann wie folgt entwickelt werden :

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_t|} = \sum_{\lambda} \frac{r_{<}^{\lambda}}{r_{>}^{\lambda+1}} P_{\lambda}(\cos \xi). \quad (2.25)$$

Dabei ist ξ der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{x}_t$. Es gilt nach dem Additionstheorem der Kugelflächenfunktionen [27] :

$$P_{\lambda}(\cos \xi) = 4 \pi \sum_{\nu} \frac{1}{2\lambda + 1} Y_{\lambda}^{\nu*}(\hat{x}) Y_{\lambda}^{\nu}(\hat{x}_t). \quad (2.26)$$

Die Kugelfunktionen sind Eigenfunktionen von L^2 , wobei der Operator $\vec{L}$ definiert wird durch

$$\vec{L} = i \vec{x} \times \nabla. \quad (2.27)$$

Daraus folgt bei Verwendung von vektoriellen Kugelfunktionen $\vec{L}Y_{\lambda}^{\nu*}(\hat{x})$

$$P_{\lambda}(\cos \xi) = \frac{4 \pi}{\lambda(\lambda + 1)} \sum_{\nu} \frac{1}{2\lambda + 1} \vec{L}Y_{\lambda}^{\nu*}(\hat{x}) \vec{L}Y_{\lambda}^{\nu}(\hat{x}_t). \quad (2.28)$$

Gln. (2.26) und (2.28) sind zwei verschiedene spektrale Darstellungen der nichtrelativistischen Greenschen Funktion. Somit kann eine Multipolentwicklung der Wechselwirkung $\tilde{V}_{int}(t)$ vorgenommen werden. Die Übergangsamplitude a_{fi} aus Gl.(2.22) ist dann gegeben durch [21]

$$a_{fi} = \frac{Z_i e}{i\hbar} \sum_{\pi\lambda\nu} \frac{4\pi}{2\lambda + 1} (-1)^{\nu} M(\pi\lambda, -\nu) S_{\pi\lambda,\nu}(\omega). \quad (2.29)$$

Dabei sind die $M(\pi\lambda, -\nu)$ elektromagnetische Multipolmomente [20] und $S_{\pi\lambda, \nu}$ semi-klassische Bahnintegrale mit $\pi = E$ für elektrische und $\pi = M$ für magnetische Multipolmomente. Eine Verwechslung mit der Kreiszahl π ist hier nicht zu befürchten. Die Multipolmatrixelemente lauten :

$$M(M\lambda \nu) = \frac{-i}{c(\lambda + 1)} \langle f | \vec{J} \cdot \vec{L} (r^\lambda Y_\lambda^\nu(\hat{x})) | i \rangle \quad (2.30)$$

und

$$M(E\lambda \nu) = \langle f | \rho(\vec{x}) r^\lambda Y_\lambda^\nu(\hat{x}) | i \rangle, \quad (2.31)$$

mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.32)$$

Diese Ausdrücke sind formal die Langwellennäherung ($qr \ll 1$ mit $q = \frac{\omega}{c}$) der exakten elektrischen bzw. magnetischen Multipolmomente. Diese erhält man aus einer relativistischen Theorie der elektromagnetischen Wechselwirkung, bei der die Zeitabhängigkeit der Wechselwirkung über das Kernvolumen mitberücksichtigt wird. Sie gelten formal nur für kleine Abstände vom Kern. Die Wellenfunktionen von gebundenen Kernzuständen fallen außerhalb des Kernradius oft sehr stark ab, so daß die Korrekturen zu den Matrixelementen vernachlässigt werden können.

Diese semi-klassischen Bahnintegrale $S_{\pi\lambda \nu}$ lauten

$$S(E\lambda \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{r_t^{\lambda+1}} Y_\lambda^\nu(\hat{r}_t) \quad (2.33)$$

und

$$S(M\lambda \nu) = \frac{i}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{r_t^{\lambda+1}} \vec{r}_t \cdot \vec{L} Y_\lambda^\nu(\hat{r}_t), \quad (2.34)$$

sie sind in [16] ausgerechnet worden. Für die Übergangsamplituden erhält man somit

$$a_{fi}(b) = \frac{-iZ_t e}{\gamma \hbar v} \sum_{\pi\lambda\nu} (-1)^\nu \sqrt{2\lambda+1} k^\lambda G_{\pi\lambda\nu}\left(\frac{c}{v}\right) K_\nu\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) \langle I_f m_f | M(\pi\lambda, -\nu) | I_i m_i \rangle. \quad (2.35)$$

Die Anregungsamplitude ist demnach eine Summe unendlich vieler Teilamplituden. Es spielen aber in der Praxis nur eine begrenzte Zahl von Termen

eine Rolle, zum einen wegen des raschen Abfalls der Übergangsmatrixelemente und zum anderen aufgrund von Auswahlregeln, die zum Teil aus der Drehimpulsalgebra folgen. Somit werden nur wenige Multipolmomente zur Beschreibung von Experimenten nötig, wie z.B. die elektrischen Dipol- und Quadrupolmomente ($\pi\lambda = E1$) bzw. ($\pi\lambda = E2$) und das magnetische Dipolmoment ($\pi\lambda = M1$).

In Gl. (2.35) sind die $K_\nu(x)$ die modifizierten Besselfunktionen dritter Art [24]. Sie divergieren für kleine Argumente und verschwinden exponentiell für große Argumente, so daß sich mit

$$b_{max} = \frac{\gamma v}{\omega} \quad (2.36)$$

eine natürliche Grenze für die relevanten Impaktparameter bzw. Frequenzen in der Anregungsamplitude in Gl. (2.35) ergibt. Die $G_{\pi\lambda\nu}$ sind die relativistischen Winther-Alder Funktionen [21, 25].

Die Formel in Gl.(2.35) gibt eine gute Beschreibung der Coulombanregung bei mittleren Energien, hier $E \simeq 100 MeV$ pro Nukleon. Bertulani und Baur haben Korrekturen für hochrelativistische Stöße in der Eikonalnäherung [26, 29] ausgerechnet. Die Anregungsamplitude divergiert für kleine Stoßparameter, so daß auch hier Korrekturen notwendig werden.

2.3.2 Multiploperatoren

Für die Übergangsamplituden Gl. (2.22) gilt in erster Ordnung :

$$a_{fi} = -\frac{1}{c^2} \int dx \int dx' J^\mu(x) G_0(x, x') J_\mu(x'). \quad (2.37)$$

Die dabei verwendete relativistische Green'sche Funktion lautet

$$G_0(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{e^{iq|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \quad (2.38)$$

Die Spektraldarstellungen der relativistischen Green'schen Funktionen sind in Kugelkoordinaten gegeben durch

$$G_0(\vec{x}, \vec{x}') = i4\pi q \sum_{\lambda\nu} j_\lambda(qr_<) Y_{\lambda}^{\nu*}(\hat{x}_<) h_\lambda(qr_>) Y_{\lambda}^{\nu}(\hat{x}_>) \quad (2.39)$$

bzw.

$$G_0(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{i4\pi q}{\lambda(\lambda+1)} \sum_{\lambda\nu} j_\lambda(qr_<) \vec{L} Y_\lambda^{\nu*}(\hat{x}_<) h_\lambda(qr_>) \vec{L} Y_\lambda^\nu(\hat{x}_>). \quad (2.40)$$

Mit diesen Darstellungen können die Multipoloperatoren umgeschrieben zu

$$M(M\lambda \nu) = -\frac{(2\lambda+1)!!}{cq^\lambda(\lambda+1)} \langle f | \vec{J} \cdot \vec{L} (j_\lambda(qr) Y_\lambda^\nu(\hat{x})) | i \rangle \quad (2.41)$$

und

$$M(E\lambda \nu) = -\frac{(2\lambda+1)!!}{q^\lambda} \langle f | \rho(\vec{x}, t) j_\lambda(qr) Y_\lambda^\nu(\hat{x}) | i \rangle. \quad (2.42)$$

Die letzte Gleichung läßt sich unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \vec{J}(\vec{x}, t) = \dot{\rho}(\vec{x}, t) \quad (2.43)$$

mit der Annahme

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho(x) e^{i\omega t}, \quad (2.44)$$

d.h.

$$\rho(\vec{x}, t) = \frac{1}{i\omega} \nabla \vec{J} \quad (2.45)$$

umformen. Nun möchten wir unter Berücksichtigung des Green'schen Satzes [19] den Multipoloperator in Gl.(2.42) auf eine vektorielle Form bringen. Dazu benötigt man die Identität [19]

$$\nabla(\phi \vec{V}) = V.(\nabla \phi) + \phi (\nabla.V). \quad (2.46)$$

Zusätzlich gilt in der Langwellennäherung:

$$\nabla(j_\lambda(qr) Y_\lambda^\nu(\hat{r})) \simeq \frac{-i}{(\lambda+1)} \nabla \times \vec{L}(j_\lambda(qr) Y_\lambda^\nu(\hat{r})). \quad (2.47)$$

Diese Beziehung folgt aus den Eigenschaften von vektoriellen Kugelflächenfunktionen [20]. Wir kommen schließlich zu dem Ergebnis

$$M(E\lambda \nu) = -\frac{(2\lambda+1)!!}{cq^{\lambda+1}(\lambda+1)} \langle f | \vec{J} \cdot \nabla \times \vec{L}(j_\lambda(qr) Y_\lambda^\nu(\hat{x})) | i \rangle. \quad (2.48)$$

2.3.3 Wirkungsquerschnitte

Aus Gl.(2.35) läßt sich die Wahrscheinlichkeit für die Coulombanregung des Projektils vom Anfangs- in den Endzustand mit Wellenvektor $\vec{k}$, berechnen:

$$P_{fi}(\vec{k}, \vec{b}) = |a_{fi}(\vec{k}, \vec{b})|^2. \quad (2.49)$$

Daraus ergibt sich die totale Anregungsamplitude

$$P_{fi}(\vec{b}) = \int dE_f P_{fi}(\vec{k}, \vec{b}) \varrho_f(E_f), \quad (2.50)$$

wobei $\varrho_f(E_f)$ die Anzahldichte der Endzustände im Energieintervall $[E_f, E_f + \delta E_f]$ bezeichnet. Man findet

$$\varrho_f(E_f) = \delta(E - E_f) \quad (2.51)$$

für gebundene Zustände und

$$d\varrho_f(E_f) = \frac{\mu k d\Omega_k}{(2\pi)^3 \hbar^2}, \quad (2.52)$$

falls die Endzustände im Kontinuum liegen. Der Wirkungsquerschnitt für die reine Coulombanregung ist gegeben durch

$$\sigma_{CD} = \int db \, 2\pi b P(b), \quad (2.53)$$

wobei hier das übliche Verfahren der Summierung der Übergangswahrscheinlichkeiten über die Spins der Endzustände und der Mittelung über die Anfangszustände durchzuführen ist.

Der Wirkungsquerschnitt für die innere Anregung des Projektils vom Anfangszustand ψ_i in den Endzustand ψ_f bei gleichzeitiger Streuung in den Raumwinkel $(\Omega, \Omega + d\Omega)$ ist in erster Ordnung gegeben durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_R P_{fi}(b). \quad (2.54)$$

Dabei ist $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_R$ der Rutherfordquerschnitt aus Gl.(2.17) und P_{fi} die Anregungswahrscheinlichkeit. Die Gl.(2.54) folgt aus einer Multipolentwicklung [20] der Wechselwirkung in Gl.(2.3). Der Monopolterm ist verantwortlich

für die Rutherfordstreuung des Targets, während die höheren Terme auch zeitabhängige Wechselwirkungen enthalten, die eine Anregung des Projektils erzeugen. Wir betrachten zunächst Übergänge, in denen Anfangs- und Endzustand gebunden sind. Man erhält den zweifach differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_{CD}}{dE d\Omega_k} = & \left(\frac{Z_te}{\hbar v}\right)^2 \sum_{\lambda I_f} a^{-2\lambda+2} \frac{dB}{dE}(E\lambda, I_f \rightarrow I_i) \frac{df_{E\lambda}}{d\Omega} + \\ & \left(\frac{va^{-\lambda+1}}{c}\right)^2 \frac{dB}{dE}(M\lambda, I_f \rightarrow I_i) \frac{df_{M\lambda}}{d\Omega} \end{aligned} \quad (2.55)$$

mit den Multipolübergangsstärken

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dE}(\pi\lambda, I_i \rightarrow I_f) &= \frac{\mu\hbar k}{(2\pi)^3\hbar^2} \frac{1}{2I_i+1} \sum_{m_i, m_f} |\langle f | M(\pi\lambda\nu) | i \rangle|^2 \\ &= \frac{\mu k}{(2\pi)^3\hbar^2} \frac{2I_f+1}{2I_i+1} |\langle f || M(\pi\lambda) || i \rangle|^2. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Die reduzierten Matrixelemente berechnen sich gemäß dem Wiener-Eckart-Theorem [27] :

$$\langle J_f m_f | \Omega(\lambda\nu) | J_i m_i \rangle = \langle J_i M_i \lambda\nu | J_f m_f \rangle \langle J_f || \Omega(\lambda) || J_i \rangle. \quad (2.57)$$

$\Omega(\lambda\nu)$ ist dabei ein beliebiger Tensoroperator [27].

Die $f_{\pi\lambda}$ in Gl. (2.55) sind dimensionslose Größen, die aus dem Rutherfordquerschnitt und den semiklassischen Bahnintegralen gebildet werden.

2.4 Photodissoziation

Die vektoriellen elektromagnetischen Multipolfelder sind wie folgt definiert :

$$A_{E\lambda\nu}(\vec{x}) = \frac{-i}{q\sqrt{\lambda(\lambda+1)}} \nabla \times (\vec{L}j_\lambda(qr)Y_\lambda^\nu(\hat{x})), \quad (2.58)$$

$$A_{M\lambda\nu}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda+1)}} \vec{L}j_\lambda(qr)Y_\lambda^\nu(\hat{x}). \quad (2.59)$$

Sie sind eine vollständige Basis für die Darstellung von elektromagnetischen Vektorpotentialen im Vakuum. Von großer Bedeutung ist die Entwicklung der ebenen elektromagnetischen Welle

$$\vec{A}_P(\vec{x}) = N_\gamma \vec{\epsilon}_P e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \quad (2.60)$$

nach den oben genannten Multipolfeldern [28, 20] :

$$\vec{A}_P(\vec{x}) = P (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda} (2\lambda + 1)^{\frac{1}{2}} i^{\lambda} D_{P\nu}^{\lambda}(\phi_\gamma, \theta_\gamma, 0) (A_{M\lambda\nu}(\vec{x}) + i P A_{E\lambda\nu}(\vec{x})). \quad (2.61)$$

Dabei ist $\vec{\xi}_P$ die Polarisationsrichtung der Welle und $(\phi_\gamma, \theta_\gamma)$ die Richtung ihres Wellenvektors $\vec{k}$. $D_{P\nu}^{\lambda}$ sind Transformationsmatrizen von einem Koordinatensystem mit der z -Achse parallel zu $\vec{k}$ zum aktuellen Koordinatensystem. Die Normierungsvorschrift liefert

$$N_\gamma = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2 c^2}{E_\gamma V}}. \quad (2.62)$$

Gl.(2.61) führt zu einer wichtigen Beziehung zwischen den Matrixelementen und Wirkungsquerschnitten für Photoabsorption und Coulombdissoziation in erster Ordnung der Störungstheorie :

$$\sigma_{abs}^{\pi\lambda}(I_i \rightarrow I_f) = (2\pi)^3 \frac{\lambda + 1}{\lambda} \frac{q^{2\lambda-1}}{((2\lambda + 1)!!)^2} \frac{dB}{dE}(\pi\lambda, I_i \rightarrow I_f). \quad (2.63)$$

Diese Beziehung geht verloren, falls höhere Ordnungen der Coulombanregung wichtig werden. Der Wirkungsquerschnitt für Photoabsorption seinerseits ist eng mit dem inversen Prozeß des Strahlungseinfangs verwandt. Die Unterschiede in der Dichte der Endzustände pro Energieintervall

$$d\rho_f = \frac{q^2 d\Omega_q}{(2\pi)^3 \hbar c} \quad (2.64)$$

und der Spinkonfigurationen von Anfangs- und Endzustand, werden vollständig durch das Prinzip des detaillierten Gleichgewichts berücksichtigt [48] :

$$\sigma_{capt}^{\pi\lambda}(\pi\lambda, I_i \rightarrow I_f) = \frac{2 (2I_c + 1)}{(2I_a + 1)(2I_b + 1)} \frac{q^2}{k^2} \sigma_{abs}^{\pi\lambda}. \quad (2.65)$$

Dabei ist $E_\gamma = \hbar qc$ die Energie des Photons. Diese Beziehung ist besonders nützlich, falls der interessierende Wirkungsquerschnitt experimentell nur schwer zugänglich ist (z.B. Strahlungseinfangsreaktionen der Astrophysik), während der inverse Prozess, die Photoabsorption, sehr wohl meßbar ist.

2.5 Methode der äquivalenten Photonen

Der einfache Zusammenhang zwischen den Matrixelementen der Photoabsorption und der Coulombanregung erlaubt es, den differentiellen Wirkungsquerschnitt für reine Coulombanregung wie folgt zu schreiben :

$$\frac{d^2 \sigma_{CD}^{\pi\lambda}}{dE d\Omega} = \frac{dn_{\pi\lambda}(E)}{d\Omega} \frac{\sigma_{abs}^{\pi\lambda}(E)}{E}. \quad (2.66)$$

Daraus ergibt sich

$$\sigma_{CD}^{\pi\lambda} = \int d\omega \frac{n_{\pi\lambda}(\omega)}{\omega} \sigma_{abs}^{\pi\lambda}(\omega). \quad (2.67)$$

Diese Beziehung gibt eine einfache Interpretation von $n_{\pi\lambda}$ als die Zahl der virtuellen Photonen pro Energieintervall die dem elektromagnetischen Feld des bewegten Target in ihrer Wirkung äquivalent sind. Aus der Definition von Gl.(2.53) folgt außerdem die stoßparameterabhängige Dissoziationswahrscheinlichkeit

$$P(b) = \int \frac{d\omega}{\omega} N_{\pi\lambda}(\omega, b) \sigma_{abs}^{\pi\lambda}(\omega) \quad (2.68)$$

mit

$$\frac{dn_{\pi\lambda}(\omega)}{db} = 2\pi b N_{\pi\lambda}(\omega, b). \quad (2.69)$$

$N_{\pi\lambda}(\omega, b)$ läßt sich aus der Dissoziationsamplitude und -wahrscheinlichkeit mit dem Photodissoziationsquerschnitt (siehe Gl.(2.35), Gl.(2.50), Gl.(2.53)) berechnen. Nutzt man die Beziehung zwischen Stoßparameter und Streuwinkel Gl.(2.14) aus, so ergibt sich :

$$\frac{dn_{\pi\lambda}(\omega)}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_R N_{\pi\lambda}(\omega, b). \quad (2.70)$$

Wenn eine geradlinige Trajektorie vorausgesetzt wird, findet man die äquivalenten Photonenzahlen der führenden Multipolordnungen [25] :

$$\begin{aligned}
n_{E1}(\omega) &= \frac{2}{\pi} Z_1^2 \alpha \left(\frac{c}{v} \right)^2 \left[X K_0(X) K_1(X) - \frac{v^2 X^2}{2c^2} (K_1^2(X) - K_0^2(X)) \right], \\
n_{M1}(\omega) &= \frac{2}{\pi} Z_1^2 \alpha \left[X K_0(X) K_1(X) - \frac{X^2}{2} (K_1^2(X) - K_0^2(X)) \right], \\
n_{E2}(\omega) &= \frac{2}{\pi} Z_1^2 \alpha \left(\frac{c}{v} \right)^4 \left[2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) K_1^2 + X \left(2 - \frac{v^2}{c^2} \right) K_0(X) K_1(X) \right. \\
&\quad \left. - \frac{v^4 X^2}{2c^4} (K_1^2(X) - K_0^2(X)) \right]
\end{aligned} \tag{2.71}$$

mit $X = \frac{\omega b}{\gamma v}$.

Kapitel 3

Teilcheneinfang und Photodissoziation

3.1 Absorption und Emission von elektromagnetischer Strahlung durch Kerne

Die Emission und Absorption von Strahlung durch Materie lassen sich mit Hilfe der Quantenmechanik beschreiben. Der Hamiltonoperator eines Kerns, der in Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld steht, lautet :

$$H = H_{Kern} + H_{Feld} + H_{Int}. \quad (3.1)$$

Hierbei sind die Hamiltonoperatoren gegeben durch :

$$H_{Kern} = \sum_i \frac{\vec{P}_i^2}{2m_i} + V(r_i) + \sum_{i,j} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|), \quad (3.2)$$

$$H_{Feld} = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\vec{E}^2(\vec{r}, t) + \vec{B}^2(\vec{r}, t)), \quad (3.3)$$

$$H_{Int}(\vec{r}, t) = \int d^3r (\rho(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)). \quad (3.4)$$

Der Hamiltonoperator H_{Kern} bestimmt die Eigenzustände des Kerns über die stationäre Schrödingergleichung :

$$H_{Kern}\psi = E\psi. \quad (3.5)$$

Es handelt sich dabei um ein sehr kompliziertes Vielteilchensystem, bestehend aus teilweise identischen Teilchen, das oft nicht exakt gelöst werden kann.

Das mittlere Kernpotential $V(r_i)$ wird von den Nukleonen und deren Wechselwirkungen erzeugt. Eine mikroskopische Beschreibung wird im Prinzip durch das Hartree-Fock-Verfahren gegeben, siehe dazu das Lehrbuch von Ring und Schuck [33]. Diese Rechnungen werden aber in der Praxis schnell sehr kompliziert. Allerdings sind phänomenologische Potentiale in der Beschreibung von Kernspektren bzw. Kernreaktionen in der Regel ausreichend. Die Zweiteilchenwechselwirkung enthält Anteile der Wechselwirkungen, die im mittleren Feld nicht berücksichtigt wurden. Sie führt daher zu kurzreichweitigen Korrelationen zwischen den Nukleonen, z.B. zu Paarungsphänomenen. Dabei koppeln zwei identische Nukleonen zu spinlosen Paaren.

Eine weitere Vereinfachung des Problems stellt die Zerlegung des Kerns in eine Reihe von Nukleonengruppen dar, die man Cluster nennt. Diese Zerlegung basiert auf der Tendenz der Nukleonen, in mehr oder weniger stabilen Gruppen aufzutreten. Es handelt sich dabei meistens um Protonen, Neutronen, Deuteronen, Tritium-Kerne und α -Teilchen. Die Wellenfunktion des Kerns wird durch eine Überlagerung aller möglichen Clusterkonfigurationen gebildet. Dies ist die Grundlage der modernen Beschreibung von leichten Kernen mit der Generator coordinate method (GCM) [34, 33] bzw. der Resonating-Group Method [35, 36, 37, 38, 39, 40]. Die mit diesen Modellen gewonnenen Wellenfunktionen können dann zur Berechnung von elektromagnetischen Matrixelementen verwendet werden. Eine gute Beschreibung der experimentellen Daten erfordert jedoch eine genaue Anpassung von vielen Potentialparametern, welche zum Teil kritisch werden kann. Die gängigsten Ansätze für die nukleare Wechselwirkung zwischen den Clustern bei niedrigen Energien sind das δ - oder Kontaktpotential

$$V(\vec{r}) = v_0 \delta(\vec{r}) \quad (3.6)$$

und das Rechteckpotential

$$V(\vec{r}) = V, \quad (r \leq a). \quad (3.7)$$

Beide betonen die kurze Reichweite der Kernkräfte. Als realistischeres Potential gilt das Woods-Saxon Potential

$$V(r) = \frac{V_w}{1 + \exp \frac{(r-R_w)}{a_w}}, \quad (3.8)$$

wobei V_w die Tiefe, R_w die Reichweite und a_w die 'Diffuseness' des Woods-Saxon Potentials bezeichnen. Es wird dabei oft die Parametrisierung $a_w \simeq 0.65 \text{ fm}$ gewählt, welche einer Reichweite von ca. 1.3 fm für die Kernkräfte entspricht. Gl.(3.8) stellt eine Fermi-Funktion dar, die für $a_w \rightarrow 0$ in ein Kastenpotential übergeht.

Die oben genannten Potentiale reichen bereits aus, um viele elektromagnetische Prozesse adäquat zu beschreiben. Ein Potential, welches die Komplexität der nuklearen Wechselwirkung besser zum Ausdruck bringt, ist das Minnesota-Potential [30].

Der Wechselwirkungsoperator $H_{Int}(\vec{r}, t)$ erzeugt Übergänge zwischen den verschiedenen Eigenzuständen von Materie und Strahlungsfeld, durch die die Absorption bzw. die Emission von Photonen beschrieben wird. Der Feldoperator $\vec{A}(\vec{r})$ agiert auf das Strahlungsfeld durch Erzeugung und Vernichtung von Photonen. Es gilt in der Coulombbeichung

$$A(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{q}} \sum_{P=\pm 1} a_{\vec{q}P} \vec{A}_{\vec{q}P}(\vec{r}, t) + a_{\vec{q}P}^* \vec{A}_{\vec{q}P}^*(\vec{r}, t). \quad (3.9)$$

Ein Photon wird beschrieben durch die ebene Welle

$$\vec{A}_{\vec{q}P}(\vec{r}, t) = N_{\gamma} \vec{\epsilon}_P e^{i(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (3.10)$$

Dabei ist $\vec{\epsilon}_P$ der Polarisationsvektor mit $\vec{\epsilon}_P \cdot \vec{q} = 0$ und mit dem Normierungsfaktor aus Gl.(2.62). Die elektromagnetischen Felder werden wie folgt berechnet:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3.11)$$

und

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (3.12)$$

Die Energie des elektromagnetischen Feldes ist dann gegeben durch

$$H_{Feld} = \int d^3r \sum_P \sum_{\vec{q}} n_{\vec{q}P} \hbar \omega, \quad (3.13)$$

mit der Photonendichte pro Mode $n_{P\vec{q}} = a_{P\vec{q}}^* a_{P\vec{q}}$. Die Eigenzustände des elektromagnetischen Feldes können durch die Besetzungszahlen der Moden dargestellt werden :

$$\Phi = | n_{\vec{q}_1 P_1} \dots n_{\vec{q}_m P_m} \dots \rangle. \quad (3.14)$$

Sie sind Eigenfunktionen der Dichteoperatoren

$$n_{P\vec{q}} = a_{\vec{q}P}^+ a_{\vec{q}P} \quad (3.15)$$

mit den Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren $a_{\vec{q}P}^+$ und $a_{\vec{q}P}$. Es gilt :

$$a_{\vec{q}P} | n_{\vec{q}P} > = \sqrt{n_{\vec{q}P}} | n_{\vec{q}P} - 1 >, \quad (3.16)$$

$$a_{\vec{q}P}^+ | n_{\vec{q}P} > = \sqrt{n_{\vec{q}P} + 1} | n_{\vec{q}P} + 1 >, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} [a_{\vec{q}P}, a_{\vec{q}'P'}^+] &= a_{\vec{q}P} a_{\vec{q}'P'}^+ - a_{\vec{q}'P'}^+ a_{\vec{q}P} \\ &= \delta^3(\vec{q} - \vec{q}') \delta_{PP'}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Der Wirkungsquerschnitt für den Strahlungseinfang eines Teilchens ist gegeben durch

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar} | \langle f | \vec{J} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) | i \rangle |^2 \varrho_f. \quad (3.19)$$

Dabei ist ϱ_f die Anzahldichte der Endzustände.

Der Erwartungswert der Stromdichte lautet [20] :

$$\begin{aligned} \langle f | \vec{J}(\vec{r}, t) | i \rangle &= \frac{e\hbar}{2M} \sum_{j=1}^N \int \left\{ -i[\psi_j^* \nabla_j \psi_i - (\nabla_j \psi_j^*) \psi_i] \right. \\ &\quad \left. + K_j \nabla_j \times [\psi_j^* \sigma_j \psi_i] \right\} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_j) dr_1 dr_2 \dots dr_N. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Die Zustände ψ_i und ψ_f sind Funktionen der Clusterkoordinaten $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$. Die Stromdichte enthält einen Konvektionsanteil, der von der Bahnbewegung der Ladungen herrührt, und einen Magnetisierungsanteil, der von den Spins der Cluster erzeugt wird. Die Faktoren K_j bezeichnen die magnetischen Momente in Einheiten von Kernmagnetonen. Es gilt für Protonen und Neutronen

$$K_p = 2.79 \quad (3.21)$$

und

$$K_n = -1.91. \quad (3.22)$$

3.2 Teilcheneinfang durch einen spinlosen Core

Wir behandeln hier zunächst den Strahlungseinfang von leichten Spin 1/2-Nukleonenclustern (Teilchen b) durch einen spinlosen Kern (Teilchen a). Dieser Spezialfall kommt sehr häufig vor.

Die Wechselwirkung des Kerns mit den Nukleonenclustern wird dabei durch ein phänomenologisches Kernpotential beschrieben. Die Eigenfunktion des Systems (a, b) lautet im gebundenen Zustand

$$\psi_f = \sum_{\tau_f} g_{l_f} < l_f m_f - \tau_f s_f \tau_f | I_f m_f > Y^{m_f - \tau_f}(\hat{r}) \chi_{s_f}^{\tau_f} \quad (3.23)$$

und im Kontinuum

$$| \vec{k} s_2 \tau_2 > = \sum_{l_i=0}^{\infty} \{4 \pi (2l_i + 1)\}^{1/2} i^{l_i} e^{i\Delta_{l_i}} g_{l_i}(kr) Y_{l_i}^0(\hat{r}) \chi_{s_2}^{\tau_2}, \quad (3.24)$$

wobei s_2, τ_2 die Spinquantenzahlen des einfallenden Clusters b und I_f, m_f die des Endkerns ($c = a + b$) sind. Die $g_{l_i}(kr)$ bzw. $g_{l_i}(r)$ sind die Radialteile der Eigenfunktionen. Dabei stellt Δ_{l_i} die gesamte Phasenverschiebung durch nukleare und elektromagnetische Wechselwirkungen dar. Die Spineigenfunktionen lauten explizit

$$\chi_{1/2}^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

$$\chi_{1/2}^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Die so definierten Spinzustände sind Eigenfunktionen des Spinoperators σ^3

$$\sigma^3 \chi^\pm = \pm \chi^\pm \quad (3.27)$$

mit

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Aus der Multipolentwicklung für Photonen Gl.(2.61) folgt, daß die Photonenemission eines nuklearen Zweiclustersystem in der Langwellennäherung durch folgende Wechselwirkungen beschrieben werden kann [41, 42] :

$$H_{Int}^P(\vec{r}) \simeq H_{E1}^P(\vec{r}) + H_{M1}^P(\vec{r}) + H_{E2}^P(\vec{r}). \quad (3.29)$$

Die auftretenden Hamiltonoperatoren sind gegeben durch :

$$H_{E1}^P(\vec{r}) = -iN_\gamma \sqrt{\frac{4\pi}{3}} eq\mu \left(\frac{Z_1}{M_1} - \frac{Z_2}{M_2} \right) P D_{\nu P}^{1*}(\phi_\gamma, \theta_\gamma, 0) O_{E1}(r) Y_1^{\nu*}(\hat{r}), \quad (3.30)$$

$$H_{M1}^P(\vec{r}) = N_\gamma \frac{eq\hbar}{2M_P c} D_{\nu P}^{1*}(\phi_\gamma, \theta_\gamma, 0) O_{M1}(r) \times [M_P \mu \left(\frac{Z_1}{M_1} + \frac{Z_2}{M_2} \right) L + K_1 \sigma_1 + K_2 \sigma_2] \cdot \vec{\epsilon}_\nu, \quad (3.31)$$

$$H_{E2}^P(\vec{r}) = -N_\gamma \sqrt{\frac{\pi}{15}} e q^2 \mu^2 \left(\frac{Z_1}{M_1^2} + \frac{Z_2}{M_2^2} \right) P D_{\nu P}^{2*}(\phi_\gamma, \theta_\gamma, 0) O_{E2}(r) Y_2^{\nu*}(\hat{r}). \quad (3.32)$$

Dabei ist $\vec{r}$ der relative Abstand zwischen den Clustern, $K_{1(2)}$ sind die magnetischen Momente in Kernmagnetonen und μ ist die reduzierte Masse der Cluster. Die $D_{\nu P}^J(\phi_\gamma, \theta_\gamma, 0)$ sind die Transformationskoeffizienten der Kugelfunktionen $Y_l^m(\hat{r})$ in einem Koordinatensystem, in dem sich das elektromagnetische Feld in Richtung $(\phi_\gamma, \theta_\gamma)$ ausbreitet. Dabei bezeichnet P die Helizität des Photons. Ein Drehimpulsoperator $\vec{J} = (J^1, J^2, J^3)$ läßt sich allgemein durch folgende Algebra definieren :

$$\begin{aligned} [J^i, J^j] &= J^i J^j - J^j J^i \\ &= i\epsilon_{ijk} J^k. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Die Gesamtdrehimpulsoperatoren $\vec{J}^2, J^3$ definieren seine Eigenfunktionen. Für die Kopplung von zwei Drehimpulsen gilt

$$|JM\rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle. \quad (3.34)$$

Die Entwicklungskoeffizienten werden als Clebsch-Gordan-Koeffizienten bezeichnet.

Die orthogonalen Einheitsvektoren ϵ_ν lauten in einer Standardbasis $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ des Raumes mit $\epsilon_3 = \epsilon_0$

$$\epsilon_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

$$\epsilon_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Sie bilden eine vollständige sphärische Basis des dreidimensionalen Raum und sind Eigenfunktionen des Spin-Einsoperators S_3

$$S_3 \varepsilon_\nu = \nu \varepsilon_\nu \quad (3.37)$$

mit

$$S_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Wir verzichten hier auf eine ausführliche Darstellung der Drehimpulsalgebra und verweisen auf die sehr umfangreiche Literatur [27, 20].

Die Radialabhängigkeit der Wechselwirkung wird beschrieben durch die Operatoren

$$O_{M1}(r) \simeq 1, \quad (3.39)$$

$$O_{E1}(r) \simeq r \quad (3.40)$$

und

$$O_{E2}(r) \simeq r^2, \quad (3.41)$$

welche jeweils für die magnetische Dipol-, elektrische Dipol- und Quadrupolwechselwirkungen stehen. Diese Ausdrücke gelten für $qr \ll 1$, d.h. für kleine relative Abstände der Cluster. Obiger Ansatz wird durch den relativ schnellen Abfall der gebundenen Wellenfunktionen außerhalb des Kernradius gerechtfertigt. Für größere Abstände müssen im Prinzip die exakten Radialteile der elektromagnetischen Multipolfelder verwendet werden. Bailey *et al* [43] haben aber auch in diesem Fall brauchbare Näherungen für die radialen Operatoren angegeben :

$$O_{E1}(r) = \frac{3}{\rho^3} [(\rho^2 - 2)\sin\rho + 2\rho\cos\rho] r, \quad (3.42)$$

$$O_{M1}(r) = \frac{1}{2\rho} (\sin\rho + \rho\cos\rho), \quad (3.43)$$

$$O_{E2}(r) = \frac{15}{\rho^5} [(5\rho^2 - 12)\sin\rho + (12 - \rho^2)\rho\cos\rho] r^2. \quad (3.44)$$

Dabei haben wir die Hilfsvariable $\rho = qr$ verwendet. Eine kompaktere Schreibweise des Dipoloperators lautet

$$O_{E1}(r) = 3rj_1'(\rho). \quad (3.45)$$

Mit Hilfe dieser Operatoren können wir die Matrixelemente auch unter Berücksichtigung der Coulombwechselwirkung im Endzustand berechnen.

Der Wirkungsquerschnitt für den Teilcheneinfang ist gegeben durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_\gamma} = \frac{1}{(2S_a + 1)(2S_b + 1)} \frac{2\pi}{\hbar v_i} \frac{q^2}{(2\pi)^3 \hbar c} \sum_{m_f, \tau_2, P} |\langle \psi_f | H_{int}^P(\vec{r}) | \psi_i \rangle|^2. \quad (3.46)$$

Dabei ist v_i die Geschwindigkeit des einfallenden Clusters. Es wird die Spinsummierung bzw. -mittelung vorgenommen. Wir finden

$$\sum_{m_f \tau_f} |\langle l_f m_f - \tau_2 S_2 \tau_2 | I_f m_f \rangle|^2 = \frac{2I_f + 1}{2l_f + 1}, \quad (3.47)$$

falls die Summe nur über Paarungen (m_f, τ_2) läuft, bei denen $m_f - \tau_2$ konstant gehalten wird. Die restlichen Paarungen sind nicht von Interesse, weil die entsprechenden Winkelintegrationen in den Matrixelementen Null ergeben. Nach einer längeren aber einfachen Rechnung ergibt sich für den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned} \sum_{m_f, \beta_2} \int d\Omega_\gamma & \left| \langle 0 I_f m_f | \sum_{P\nu} P D_{\nu P}^{\lambda*}(\phi_\gamma, \theta_\gamma, 0) Y_\lambda^{\nu*}(\hat{r}) O_{E\lambda}(r) | k S_2 \beta_2 \rangle \right|^2 \\ &= 8\pi(2I_f + 1) \sum_{l_i} (2l_i + 1) \begin{pmatrix} l_i & \lambda & l_f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 |R_{l_i \lambda l_f}^{(1)}|^2. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Wir haben dabei die Formeln für die Raumwinkelintegration über drei Kugelfunktionen, die Vollständigkeitsrelationen für die Wigner'schen 3j-Symbole [27] und die Orthogonalitätsrelationen für die Transformationskoeffizienten $D_{P,\nu}^J$ [27] verwendet. Schließlich findet man für den totalen Wirkungsquerschnitt in elektrischer Dipolnäherung

$$\sigma_1^{(n,\gamma)} = \sum_{l_i} \sigma_{1l_i}^{(n,\gamma)}, \quad (3.49)$$

wobei

$$\sigma_{1l_i}^{(n,\gamma)} = \frac{16\pi \alpha (z_{eff}^{(1)})^2 E_\gamma^3}{3 (\hbar c)^3 \frac{v}{c}} \frac{(2I_f + 1)(2l_i + 1)}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \begin{pmatrix} l_i & 1 & l_f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 |R_{l_i 1 l_f}^{(1)}|^2. \quad (3.50)$$

mit der Definition

$$Z_{eff}^{(1)} = \mu \left(\frac{Z_1}{M_1} - \frac{Z_2}{M_2} \right) \quad (3.51)$$

für die effektive Ladung. Das Radialintegral ist dabei gegeben durch

$$R_{l_i, 1l_f}^{(1)} = \int_0^\infty dr r^2 g_f(r) O_{E1}(r) g_{l_i}(k, r), \quad (3.52)$$

wobei man die Auswahlregel $l_i = l_f \pm 1$ beachten muß. Dieses Resultat wurde in dieser Form in Ref. [1] angegeben und stimmt mit dem von Ref.[3] überein.

Die oben definierte effektive Ladung ist ein wesentlicher Faktor für die Stärke der Dipolübergänge. Ein weiterer Bestimmungsfaktor ist das Radialintegral, welches die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts wesentlich beeinflusst. Es wird mit Hilfe von Modellwellenfunktionen berechnet.

Die elektrische Quadrupolwechselwirkung läßt sich auf ähnliche Weise behandeln. Wir finden:

$$\sigma_2^{(n,\gamma)} = \sum_{l_i} \sigma_{2l_i}^{(n,\gamma)} \quad (3.53)$$

mit

$$\sigma_{2l_i}^{(n,\gamma)} = \frac{4\pi}{15} \frac{\alpha (z_{eff}^{(2)})^2 E_\gamma^5}{(\hbar c)^5 \frac{v}{c}} \frac{(2I_f + 1)(2l_i + 1)}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \begin{pmatrix} l_i & 2 & l_f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 |R_{l_i, 2l_f}^{(1)}|^2. \quad (3.54)$$

Die effektive Ladung ist in diesem Fall gegeben durch

$$Z_{eff}^{(2)} = \mu^2 \left(\frac{Z_1}{M_1^2} + \frac{Z_2}{M_2^2} \right) \quad (3.55)$$

Das Radialintegral lautet

$$R_{l_i, 2l_f}^{(1)} = \int_0^\infty dr r^2 g_f(r) O_{E2}(r) g_{l_i}(k, r). \quad (3.56)$$

Die Auswahlregeln sind $l_i = l_f, l_f \pm 2$. Wir sehen, daß der elektrische Quadrupolwirkungsquerschnitt bei niedrigen Energien ($E_\gamma \leq 10 \text{ MeV}$) wegen des Faktors $(\hbar c)^2 \simeq (197.327 \text{ MeV})^2 \text{ fm}$ im Nenner von Gl.(3.54) in der Regel viel kleiner als der entsprechende Dipolterm Gl.(3.50) ist. Ausnahmen treten auf, wenn die effektive Dipolladung Gl.(3.51) klein wird, oder der Dipolübergang zu einem Kanal führt, der eine Resonanz enthält.

Diese Ergebnisse lassen sich leicht auf beliebige elektrische Multipolordnungen verallgemeinern. Wir finden

$$\sigma_{\lambda l_i}^{(n,\gamma)} = \frac{8\pi(2\lambda+1)(\lambda+1)}{\lambda(2\lambda+1)!!^2} \frac{\mu c^2 \alpha (z_{eff}^{(\lambda)})^2}{\hbar c} \frac{q^{2\lambda+1}}{k} \frac{(2I_f+1)(2l_i+1)}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \begin{pmatrix} l_i & \lambda & l_f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 |R_{l_i \lambda l_f}^{(1)}|^2 \quad (3.57)$$

mit der effektiven Ladung

$$Z_{eff}^{(\lambda)} = \mu^\lambda \left(\frac{Z_1}{M_1^\lambda} + (-1)^\lambda \frac{Z_2}{M_2^\lambda} \right) . \quad (3.58)$$

Sie verschwindet für ungerade Multipolordnungen, falls

$$\frac{Z_1}{M_1^\lambda} = \frac{Z_2}{M_2^\lambda} . \quad (3.59)$$

In diesem Fall folgt eine starke Unterdrückung dieser Reaktionen im Experiment. Eine vollständiges Verschwinden dieser Multipole taucht aber nicht auf [45] .

3.3 Photodissoziation

Der Wirkungsquerschnitt für elektische Multipolübergänge eines spinlosen Cores läßt sich aus Gl.(3.57) bei Verwendung des Prinzips des detaillierten Gleichgewichts allgemein angeben:

$$\sigma_{E\lambda l_i}^{(\gamma,n)} = \frac{4\pi(2\lambda+1)(\lambda+1)}{\lambda(2\lambda+1)!!^2} \frac{\mu c^2 \alpha (z_{eff}^{(\lambda)})^2}{\hbar c} k q^{2\lambda-1} (2l_i+1) \begin{pmatrix} l_i & \lambda & l_f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 |R_{l_i \lambda l_f}^{(1)}|^2 . \quad (3.60)$$

Die Spins der Cluster treten in diesem Ausdruck nicht mehr auf.

Im Falle eines Cores mit beliebigem Spin erhält man eine komplizierte Kopplung von mehreren Drehimpulsen . Ausführliche Untersuchungen sind in

der allgemeinen Literatur zu finden [27]. Christy und Mitarbeiter [41] haben entsprechende Modelle auf den Einfang von Teilchen ohne innere Bahndrehimpulse angewandt. Die Struktur der Wirkungsquerschnitte bleibt dabei wie in Gl.(3.50), lediglich der drehimpulsabhängige Teil wird komplizierter.

Kapitel 4

Eigenschaften von schwach gebundenen Kernen

4.1 Einleitung

Nach dem allgemeinen Formalismus von Kap.1 und Kap.2 werden wir uns in diesem Kapitel der Beschreibung von exotischen Kernen widmen. Sie werden dadurch charakterisiert, daß einige Nukleonen nur leicht an den zentralen Core gebunden sind und der mittlere quadratische Abstand wesentlich größer ist als der Kernradius. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Bereich der Kernkräfte ist relativ klein, was zu einer Vereinfachung der mathematischen Beschreibung führt. Wir studieren zunächst die Eigenschaften von leicht gebundenen Kernen in Kastenpotentialen bzw. Woods-Saxon-Potentialen und ihre elektromagnetischen Reaktionen. Ein wesentlicher Beitrag dieser Arbeit ist der Versuch, eine modellunabhängige Beschreibung dieser Phänomene zu liefern, die zu ihrem besseren Verständnis führt.

4.2 Teilchen im Kastenpotential

4.2.1 Grundzustände mit $l = 0$

Die radialen Eigenfunktionen für das Kastenpotential lauten :

$$g_{l_f}(r) = A_0 j_0(\xi r) \quad r \leq a; \quad (4.1)$$

$$g_{lf}(r) = B_0 h_0^{(1)}(i\beta r) \quad r \geq a, \quad (4.2)$$

wobei

$$\xi = \sqrt{\frac{2\mu(E - V_0)}{\hbar^2}}, \quad (4.3)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2\mu(-E)}{\hbar^2}}. \quad (4.4)$$

$$(4.5)$$

Daraus folgt

$$\xi^2 + \beta^2 = -\frac{2\mu V_0}{\hbar^2}. \quad (4.6)$$

Dabei sind $j_l(z)$, $n_l(z)$ und $h_l^{(1)}(z)$ Besselfunktionen mit halbzahligem Index [24]. V_0 bezeichnet den Wert des Potentials für $r \leq a$ und $E = -B$ ist die Energie des Teilchens, a ist die Reichweite des Potentials. Die reduzierte Masse der Cluster ist durch

$$\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \quad (4.7)$$

gegeben. Die Bindungsenergie wird experimentell bestimmt. Sie muß deshalb an ein Potential angepaßt werden. Die Stetigkeit der logarithmischen Ableitung bei $r = a$ führt auf die Eigenwertgleichung

$$\xi a \cot \xi a = -\beta a. \quad (4.8)$$

Die Lösung des Gleichungssystems in Gl. (4.6) und in Gl. (4.8) muss i.a. numerisch erfolgen. Analytische Näherungen sind möglich, falls die Bindungsenergie klein ist. Wir nutzen dabei die Tatsache aus, daß Lösungen mit der Energie $E = 0$ bei solchen Werten des Potentials auftreten, für die gilt [46] :

$$\xi a = \frac{(2n+1)\pi}{2}. \quad (4.9)$$

Für endliche Bindungsenergien machen wir den Ansatz

$$\xi a \simeq \frac{(2n+1)\pi}{2} + x. \quad (4.10)$$

Wir entwickeln $\cot \xi a$ nach Potenzen von x und lösen die Eigenwertgleichung. In erster Näherung ergibt sich

$$x \simeq \frac{2\beta a}{(2n+1)\pi}. \quad (4.11)$$

Wir können daraus den Wert des Potentials für $n = 1$ abschätzen, falls die Bindungsenergie bekannt ist :

$$V_0 \simeq -\frac{\hbar^2}{2\mu a^2} \left[\left(\frac{3\pi}{2} + x \right)^2 + (\beta a)^2 \right]. \quad (4.12)$$

Dieser Wert ist bereits eine gute Näherung zum exakten Wert, er kann aber auch als Startwert für numerische Iterationen dienen.

Die Konstanten A_0 und B_0 lassen sich aus der Stetigkeit der Wellenfunktion am Potentialrand und der Normierungsbedingung des Grundzustands bestimmen :

$$\int_0^\infty dr \quad |g_{1f}|^2 = 1. \quad (4.13)$$

Wir finden

$$\begin{aligned} A_0 &= \left\{ a^3 \left(I_1 + |F|^2 I_2 \right) \right\}^{-1/2}, \\ B_0 &= F A, \end{aligned} \quad (4.14)$$

wobei der Faktor F durch

$$F = \frac{j_0(\xi a)}{h_0(i\beta r)}. \quad (4.15)$$

gegeben ist. Die Integrale berechnen sich wie folgt :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 d\rho \quad \rho^2 j_0^2(\xi a \rho) \\ &= \frac{1}{2(\xi a)^3} (\xi a - \sin(\xi a) \cos(\xi a)), \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^\infty d\rho \quad \rho^2 |h_0(i\beta a \rho)|^2 \\ &= \frac{e^{-\beta a}}{2(\beta a)^3}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Der Term, der das Produkt $\cos \xi a \sin \xi a$ enthält, trägt nur geringfügig zum inneren Integral bei und kann deshalb oft vernachlässigt werden. Falls die Bindungsenergie nicht zu groß wird ($x \ll 1$), streben die Koeffizienten Gl.(4.14) gegen die Werte

$$\begin{aligned}\tilde{A}_0 &\rightarrow \left(\frac{2\xi^2\beta}{1+\beta a} \right)^{1/2}, \\ \tilde{B}_0 &\rightarrow - \left(\frac{2\beta^3}{1+\beta a} \right)^{1/2} e^{\beta a}.\end{aligned}\quad (4.18)$$

Letztere entsprechen der Normierungsvorschrift von Hansen und Johnson [13] für die äußere Wellenfunktion, die eine wichtige Rolle in der Beschreibung der elektromagnetischen Reaktionen von leichten Kernen spielt, siehe z.B. Ref. [47]. $\tilde{A}_0$ und $\tilde{B}_0$ unterscheiden sich nur um wenige Prozente von den exkten Werten und stellen deshalb eine gute Näherung dar.

4.2.2 Grundzustände mit $l \geq 1$

Die radialen Eigenfunktionen lauten im Fall $l \geq 1$

$$g_{l_f}(r) = A_1 j_1(\xi r) \quad r \leq a, \quad (4.19)$$

$$g_{l_f}(r) = B_1 h_1^{(1)}(i\beta r) \quad r \geq a \quad (4.20)$$

mit

$$\xi = \sqrt{\frac{2\mu(E - V_1)}{\hbar^2}}. \quad (4.21)$$

Die Eigenwerte sind in diesem Fall Lösungen des Systems [46] :

$$\xi^2 + \beta^2 = -\frac{2\mu V_1}{\hbar^2}, \quad (4.22)$$

$$\frac{\cot \xi a}{\xi a} - \frac{1}{(\xi a)^2} = \frac{1}{\beta a} + \frac{1}{\beta^2 a^2}. \quad (4.23)$$

Falls die Bindungsenergie bekannt ist, läßt sich das Potential durch die Bestimmung von ξ festlegen. Die Lösung für $\beta a = 0$ lautet :

$$\xi a = n\pi. \quad (4.24)$$

Die Reihenentwicklung von $\cot \xi a$ führt auf

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} \quad (4.25)$$

mit dem kleinen Parameter x :

$$x = \xi a - n\pi. \quad (4.26)$$

Jetzt ist $n = 1$. Die Eigenwertgleichung führt dann auf die iterative Lösung

$$\xi_{m+1}a = \pi + \frac{3\pi - \xi_m a (\xi_m a - \pi)^2}{3 \xi_m^2 a^2 D}, \quad (4.27)$$

wobei :

$$D = \frac{1}{\beta a} + \frac{1}{(\beta a)^2}. \quad (4.28)$$

Wir erhalten nacheinander die Näherungen :

$$\xi_0 a \simeq \pi, \quad (4.29)$$

$$\xi_1 a \simeq \pi + \frac{1}{\pi D}. \quad (4.30)$$

Letztere ist in vielen Fällen bereits eine hinreichend gute Näherung. Diese Vorgehensweise kann auch bei der Interpretation numerischer Resultate nützlich sein.

Die Konstanten A_1 und B_1 lassen sich wieder aus der Stetigkeit der Wellenfunktion am Potentialrand und der Normierung des Grundzustands bestimmen. Wir finden für den allgemeinen Fall ($l > 0$)

$$\frac{1}{A_l^2} = \frac{a^3}{2} \left\{ -j_{l-1}(\xi a) j_{l+1}(\xi a) + (-1)^l \frac{J_l^2(\xi a)}{|h_l^{(1)}(i\beta a)|^2} h_{l-1}^{(1)}(i\beta a) h_{l+1}^{(1)}(i\beta a) \right\}. \quad (4.31)$$

Dabei wurde folgende Identität benutzt :

$$\int_1^\infty d\rho \rho^2 |h_l^{(1)}(i\beta a \rho)|^2 = \frac{(-1)^l}{2} [h_{l-1}^{(1)}(i\beta a) h_{l+1}^{(1)}(i\beta a) - (h_l^{(1)}(i\beta a))^2]. \quad (4.32)$$

Das Minuszeichen stammt vom Imaginärteil der Wellenfunktionen und stellt sicher, daß das Integral positiv definit ist. Das Integral läßt sich unter Verwendung der Definition

$$h_l^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_l(z), \quad (4.33)$$

wobei $H_l^{(1)}(z)$ eine sphärische Hankelfunktion bezeichnet, berechnen. Integrale über Zylinderfunktionen sind z.B. in Abramovitz-Stegun [24] und Gradstein-Rytshik [53] tabelliert. Für den Fall $l = 0$, kann man die Rekursionseigenschaft

$$f_{l-1}(z) = \frac{(2l+1)}{z} f_l(z) - f_{l+1}(z), \quad (4.34)$$

benutzen, um $h_{-1}^{(1)}(z)$ zu bestimmen. Wir finden

$$h_{-1}^{(1)}(i\rho) = -i \frac{e^{-\rho}}{\rho}. \quad (4.35)$$

Es ist aber einfacher, das Integral direkt zu berechnen.

Der erste Term auf der rechten Seite von Gl.(4.31) ist klein, dies folgt aus der Tatsache, daß die Eigenwertgleichung sich i.A. asymptotisch ($\beta a \rightarrow 0$) auf

$$j_{l-1}(\xi a) = 0 \quad (4.36)$$

reduziert. Hiermit haben wir eine Methode gefunden, welche die äußeren Wellenfunktionen auch für höhere Drehimpulse normiert :

$$B_l = A_l \frac{j_l(\xi a)}{h_l^{(1)}(i\beta a)}. \quad (4.37)$$

Eine gute Näherungen für die Konstanten A_l und B_l ist gegeben durch

$$\frac{1}{A_l^2} \simeq \frac{a^3}{2} \left\{ (-1)^l \frac{J_l^2(\xi a)}{|h_l^{(1)}(i\beta a)|^2} h_{l-1}^{(1)}(i\beta a) h_{l+1}^{(1)}(i\beta a) \right\}, \quad (4.38)$$

$$B_l \simeq \left\{ \frac{2}{a^3} \frac{(-1)^l}{h_{l-1}^{(1)}(i\beta r) h_{l+1}^{(1)}(i\beta r)} \right\}^{1/2}. \quad (4.39)$$

Diese Koeffizienten stellen brauchbare Näherungen zu den Normierungsfaktoren der Wellenfunktion im Kastenpotential dar. Die Lösungen für $l_f = 0$

und $l_f = 1$ sind wohl bekannt und einfach zu bestimmen [46], siehe Gln. (4.10, 4.30). Falls die Bindungsenergie klein wird ($\xi a \rightarrow n\pi$) erhalten wir für $l = 1$:

$$\tilde{A}_1 = \left(\frac{2}{a^3} \frac{1}{3 + 3\beta a + (\beta a)^2} \right)^{1/2} \frac{(1 + \beta a)}{j_1(\xi a)}, \quad (4.40)$$

und

$$\tilde{B}_1 = i \left(2\beta^3 \frac{\beta a}{3 + 3\beta a + (\beta a)^2} \right)^{1/2} e^{\beta a}. \quad (4.41)$$

Die Eigenwertgleichung für $l_f = 2$ lautet :

$$\tan(\xi a) = \xi a. \quad (4.42)$$

Diese Gleichung hat eine Nullstelle in der Nähe von $\xi a = 3\pi/2$. Diesen wert können wir auf der rechten Seite von Gl.(4.42) einsetzen. Man erhält die Näherung

$$\xi a \simeq 4.5, \quad (4.43)$$

welche dem genauen Wert besser entspricht. Dieses Problem läßt sich mit dem Ansatz $\xi a = (4n - 1)\pi/2$ allgemeiner auf die gleiche Art behandeln. Wir finden für $l = 2$:

$$A_2 = \left\{ \frac{2}{a^3 j_2^2(\xi a)} \frac{(3 + 3\beta a + \beta^2 a^2)^2}{(1 + \beta a)(15 + 15\beta a + 6\beta^2 a^2 + \beta^3 a^3)} \right\}^{1/2}, \quad (4.44)$$

$$B_2 = \left\{ 2\beta^3 \frac{\beta^3 a^3}{(1 + \beta a)(15 + 15\beta a + 6\beta^2 a^2 + \beta^3 a^3)} \right\}^{1/2} e^{\beta a}. \quad (4.45)$$

Wir sehen, daß die Koeffizienten B_l für schwach gebundene Kerne praktisch unabhängig von den speziellen Details der Clusterwechselwirkung sind.

4.2.3 Kontinuumszustände

Die radialen Partialwellen lauten

$$g_{l_i}(r) = C_{l_i} j_{l_i}(\kappa_{l_i} r) \quad r \leq a, \quad (4.46)$$

$$g_{l_i}(r) = \cos \delta_{l_i} j_{l_i}(kr) - \sin \delta_{l_i} n_{l_i}(kr) \quad r \geq a, \quad (4.47)$$

mit

$$\kappa_{l_i} = \sqrt{\frac{2\mu(E - V_{l_i})}{\hbar^2}}, \quad (4.48)$$

$$k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}. \quad (4.49)$$

Die äußeren Funktionen sind bereits so normiert, daß sie die asymptotischen Randbedingungen einer Streulösung erfüllen. V_{l_i} ist der drehimpulsabhängige Wert des Potentials. Die Forderung nach Stetigkeit der Wellenfunktion für zu der Bedingung :

$$C_{l_i} = \frac{\cos \delta_{l_i} j_{l_i}(ka) - \sin \delta_{l_i} n_{l_i}(ka)}{j_{l_i}(\kappa_{l_i} a)}. \quad (4.50)$$

Die Streuphasen δ_{l_i} lassen sich aus der Stetigkeit der logarithmischen Ableitung berechnen :

$$\tan \delta_{l_i} = \frac{(ka) j_{l_{i+1}}(ka) j_{l_i}(\kappa_{l_i} a) - (\kappa_{l_i} a) j_{l_i}(ka) j_{l_{i+1}}(\kappa_{l_i} a)}{(ka) n_{l_{i+1}}(ka) j_{l_i}(\kappa_{l_i} a) - (\kappa_{l_i} a) n_{l_i}(ka) j_{l_{i+1}}(\kappa_{l_i} a)}. \quad (4.51)$$

Wie haben damit einen Satz von Wellenfunktionen konstruiert, der eine effektive Beschreibung der elastischen Streuung und der elektromagnetischen Reaktionen bei niedrigen Energien für alle l ermöglicht.

4.2.4 Elastische Streuung

Der Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung eines Clusters an einem Core wird aus den Streuphasen berechnet, siehe z.B. [48]

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l_i} (2l_i + 1) \sin^2 \delta_{l_i}. \quad (4.52)$$

In guter Näherung kann die Summation nach endlich vielen Termen abgebrochen werden. Bei niedrigen Energien ist nur die s-Wellenstreuung von Bedeutung.

4.2.5 Elektromagnetische Dissoziation

Die Wirkungsquerschnitte für Strahlungseinfang und für Photodissoziation wurden bis auf die radialen Integrale in Kap.2 berechnet.

$$\begin{aligned}
 R_{l_i, \lambda l_f} = & A_{l_f} C_{l_i} \int_0^a dr r^2 j_{l_i}(\kappa r) O_{E\lambda}(r) j_{l_f}(\xi r) \\
 & + B_{l_f} \cos \delta_{l_i} \int_a^\infty dr r^2 j_{l_i}(kr) O_{E\lambda}(r) h_{l_f}^{(1)}(i\beta r) \\
 & - B_{l_f} \sin \delta_{l_i} \int_a^\infty dr r^2 n_{l_i}(kr) O_{E\lambda}(r) h_{l_f}^{(1)}(i\beta r). \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

Die hier auftretenden Integrale können analytisch berechnet werden .

4.3 Systeme mit Coulombwechselwirkung

Die Methoden der vorhergehenden Abschnitte sind nur für Clustersysteme ohne Coulombwechselwirkung gültig. Dies trifft also nur für den Einfang von Neutronen zu. Möchte man den allgemeinen Fall von geladenen Clustern untersuchen, so müssen die oben diskutierten Methoden erweitert werden. Die Grundidee bleiben dabei erhalten. Falls wir auch hier einen effektiv en drehimpulsabhängigen Potentialtopf für $r < a$ voraussetzen, ändert sich dabei nur die Gestalt der Wellenfunktionen im äusseren Bereich. Eine solche Vorgehensweise wurde bereits mit Erfolg angewendet [3].

Die Kontinuumswellenfunktionen lauten :

$$g_{l_i}(r) = C_{l_i} j_{l_i}(\kappa_{l_i} r) \quad r \leq a \quad (4.54)$$

$$g_{l_i}(r) = \cos \delta_{l_i} \frac{F_{l_i}(\eta, kr)}{kr} - \sin \delta_{l_i} \frac{G_{l_i}(\eta, kr)}{kr} \quad r \geq a \quad (4.55)$$

mit dem Sommerfeldparameter

$$\eta = Z_1 Z_2 \alpha \left(\frac{c}{v} \right) \quad (4.56)$$

und mit $\alpha = e^2/\hbar c$. $F_l(\eta, z)$. $G_l(\eta, z)$ sind dabei die üblichen Coulombfunktionen [24, 48, 52]. Sie sind nicht mehr durch elementare Funktionen darstellbar und werden numerisch berechnet. Die Streuphasen werden wie folgt berechnet :

$$\tan \delta_{l_i} = \frac{(ka) f_{l_i}^{(2)'}(\eta, ka) j_{l_i}(\kappa_{l_i} a) - (\kappa_{l_i} a) f_{l_i}^{(2)}(\eta, ka) j_{l_i}'(\kappa_{l_i} a)}{(ka) f_{l_i}^{(1)'}(\eta, ka) j_{l_i}(\kappa_{l_i} a) - (\kappa_{l_i} a) f_{l_i}^{(1)}(\eta, ka) j_{l_i}'(\kappa_{l_i} a)}. \quad (4.57)$$

Wobei die Funktionen $f_l^{(1,2)}(\eta, \rho)$ wie folgt definiert sind :

$$f_l^{(1)}(\eta, \rho) = \frac{G_l(\eta, \rho)}{\rho}, \quad (4.58)$$

$$f_l^{(2)}(\eta, \rho) = \frac{F_l(\eta, \rho)}{\rho}. \quad (4.59)$$

Die Bezeichnung $f_l^{(n)}$ bedeutet dabei die Ableitung nach ρ . Viele ihrer Eigenschaften lassen sich unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften der Coulomb- bzw. Whittakerfunktionen gewinnen. Wir finden z.B. die Rekursionsrelation :

$$(l+1) \frac{df_l(\rho)}{d\rho} = \left(\frac{(l+1)l}{\rho} + \eta \right) f_l(\rho) - \left((l+1)^2 + \eta^2 \right)^{1/2} f_{l+1}(\rho). \quad (4.60)$$

Damit kann man Gl.(4.57) nur mit Hilfe von Coulomb- und Besselfunktionen formulieren, ohne dabei ihre Ableitungen zu verwenden.

Die Coulombfunktionen sind mit den sog. Whittakerfunktionen [24] eng verwandt :

$$F_{li}(\eta, kr) = C_{li}(\eta) M_{x,y}(z) \quad (4.61)$$

Die Variablen x und y sind dabei gegeben durch :

$$x = l + \frac{1}{2}, \quad (4.62)$$

$$y = i\eta, \quad (4.63)$$

$$z = -i2kr. \quad (4.64)$$

Die Whittakerfunktionen $M_{x,y}(z)$ und $W_{x,y}(z)$ bilden ebenfalls einen vollständigen Satz von Funktionen für die Darstellung von Systemen mit Coulombwechselwirkung. Insbesondere eignen sie sich zur Beschreibung gebundener Zustände. $W_{x,y}(z)$ ist nicht regulär im Ursprung.

Die Radialwellenfunktion im gebundenen Zustand ist gegeben durch :

$$g_{lf}(r) = A_{lf} j_{lf}(\xi r) \quad r \leq a, \quad (4.65)$$

$$g_{lf}(r) = B_{lf} \frac{H_{lf}^{(-)}(i\eta, -i\beta r)}{\beta r} \quad r \geq a. \quad (4.66)$$

Dabei ist $H_{l_f}^{(\mp)}(z)$ wie folgt definiert :

$$H_l^{(\mp)}(\eta, z) = e^{\pm i\sigma_l} (F_l(\eta, z) \pm iG_l(\eta, z)) . \quad (4.67)$$

Die Coulombstreuphase σ_l ist gegeben durch

$$\sigma_l = \arg \Gamma(l + 1 + i\eta). \quad (4.68)$$

Die Coulombfunktionen reduzieren sich im Grenzfall $\eta = 0$ ganz natürlich auf [48]

$$F_l(\eta = 0, \rho) = \rho j_l(\rho), \quad (4.69)$$

$$G_l(\eta = 0, \rho) = \rho n_l(\rho), \quad (4.70)$$

$$H_l^{(+)}(\eta = 0, \rho) = \rho h_l^{(1)}(\rho), \quad (4.71)$$

$$H_l^{(-)}(\eta = 0, \rho) = \rho h_l^{(2)}(\rho). \quad (4.72)$$

Weitere Eigenschaften werden z.B. in den Referenzen [55, 56] angegeben.

Die Funktion $H_l^{(-)}$ mit den komplexen Argumenten von Gl.(4.67) ist proportional zur Whittakerfunktion mit reellen Argumenten $W_{-\eta', l_i + \frac{1}{2}}(2\beta r)$, k wird dabei überall durch $-i\beta$ ersetzt, η' sieht genau so aus wie η , jedoch mit k ersetzt durch β . Die Coulomb- bzw. Whittakerfunktionen lassen sich z.B. aus der numerischen Lösung der entsprechenden Differentialgleichungen, aus ihrer Definition mit Hilfe der konfluenten hypergeometrischen Funktion oder aus ihren Integraldarstellungen berechnen. Sämtliche Programme stehen in der Literatur zur Verfügung. Die Eigenwertgleichungen folgen aus der Stetigkeit der logarithmischen Ableitung. Die Potentialtiefe läßt sich iterativ bestimmen. Wir können unter Verwendung der Whittakerfunktionen, modellunabhängige Normierung für die Grundzustandswellenfunktionen angeben:

$$\begin{aligned} g_{l_f}(r) &= B_f \frac{W_{-\eta, l_f + \frac{1}{2}}(2\beta r)}{2\beta r} \\ &= B_f w_{-\eta, l_f}(2\beta r), \end{aligned} \quad (4.73)$$

mit

$$B_{l_f} \simeq \left\{ \frac{2}{a^3} \frac{1}{|w_{-\eta, l_f}(2\beta a)|^2 + 2 \int_1^\infty d\rho \rho^2 |w_{-\eta, l_f}(2\beta a\rho)|^2} \right\}^{1/2}, \quad (4.74)$$

$$A_f = B_f \frac{w_{-\eta, l_f}(2\beta a)}{j_{l_f}(\xi a)}. \quad (4.75)$$

Diese Ausdrücke stellen formal eine weitere Verallgemeinerung des entsprechenden Normierungsfaktors der äußeren Wellenfunktion auf Systeme mit Coulombwechselwirkung im Endzustand dar.

Wir haben uns in dieser Arbeit mehr auf Systeme ohne Coulombwechselwirkung konzentriert, weil hier die Möglichkeit von analytischen Rechnungen eher gegeben ist. Somit können unsere Ideen besser entwickelt und eleganter dargestellt werden.

4.4 Modellunabhängige Beschreibung

4.4.1 Motivation

Für die Beschreibung der Wechselwirkung im Endzustand bei niedrigen Energien gibt es verschiedene Modelle, wie z.B. das Kasten- oder das Oszillatorpotential. Beide beschreiben die experimentellen Daten.

Die Wirkungsquerschnitte für elastische Streuung bei niedrigen Energien hängen nur unwesentlich von der speziellen Gestalt des optischen Potentials ab, sie werden vielmehr von einigen Potentialparametern bestimmt, wie z.B. durch die Relativenergie der beteiligten Teilchen, die effektive Reichweite, die Streulänge und die Bindungsenergie eines leichtgebundenen oder virtuellen Zustandes. Man erhält besonders einfache Ausdrücke für die Wirkungsquerschnitte in der effektiven Reichweitennäherung siehe Lehrbücher [28, 2, 7, 48] oder die Originalliteratur [49, 50, 51]. Ähnliche Verhältnisse sind bei elektromagnetischen Reaktionen von leicht gebundenen Zuständen zu erwarten, da die Valenznukleonen sich mit großer Wahrscheinlichkeit außerhalb der Reichweite der Kernkräfte aufhalten und daher der innere Bereich nur geringfügig zu den radialen Integralen beiträgt.

4.4.2 Kontaktwechselwirkung

Die einfachste Methode, die nukleare Wechselwirkung zwischen zwei Clustern zu beschreiben, ist die Verwendung eines Kontaktpotentials. Man kann es sich als Kastenpotential mit verschwindender Reichweite vorstellen, unter der Randbedingung, daß das Produkt $V a^2$, der Tiefe mit dem Quadrat der

Reichweite konstant bleibt, was ein sehr tiefes Potential

$$\frac{2mVa^2}{h^2} \simeq (2N+1) \frac{\pi}{2} \quad (4.76)$$

erfordert. Falls die Bindungsenergie des Systems bekannt ist, läßt sich die Tiefe des Potentials mit den Methoden vom Abschnitt 1.2.1 errechnen.

Die radiale Grundzustandswellenfunktion ist gegeben durch :

$$g_f(r) = N_f \sqrt{2\beta^3} h_0^{(1)}(i\beta r), \quad (4.77)$$

mit der Normierung

$$N_f = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}. \quad (4.78)$$

Die Wellenfunktion ist zwar nicht regulär im Ursprung, bleibt aber quadratisch integrierbar, so daß sich sinnvolle Wahrscheinlichkeitsdichten definieren lassen.

Die Kontinuumswellenfunktionen mit den Randbedingungen der elastischen Streuung werden gegeben durch:

$$|\psi_i(\vec{r})\rangle = \sum_i \{4\pi(2l_i+1)\}^{1/2} i^{l_i} e^{i\delta_{l_i}} g_{l_i}(kr) Y_{l_i}^0(\hat{k}). \quad (4.79)$$

Sie sind orthogonal zur Grundzustandswellenfunktion. Für die radialen Partialwellenfunktionen gilt

$$g_{l_i}(kr) = \cos \delta_{l_i} j_{l_i}(kr) - \sin \delta_{l_i}(kr), \quad (4.80)$$

wobei $\delta_{l_i} = 0$ für $l_i \geq 1$ und

$$\tan \delta_0 = -\frac{k}{\beta}. \quad (4.81)$$

Eine weitere nützliche Eigenschaft des Funktionensystems ist die Vollständigkeitsrelation :

$$g_f(\vec{r}) g_f^*(\vec{r}') + \frac{1}{2\pi^3} \int d^3q \psi_i(\vec{r}) \psi_i^*(\vec{r}') = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (4.82)$$

Aus den Ausführungen von Kap. 2 folgt der Wirkungsquerschnitt für die elektromagnetische Dissoziation von leichten Kernen in elektrischer Dipolnäherung:

$$\sigma_{E1}^{(\gamma,n)} = \frac{4\pi}{3} \alpha (Z_{eff}^{(1)})^2 k (k^2 + \beta^2) \sum_{l_i} (2l_i + 1) \begin{pmatrix} l_i & 1 & l_f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 |R_{l_i 1 l_f}|^2. \quad (4.83)$$

Dabei ist k die relative Wellenzahl der Cluster im Schwerpunktsystem. Das Radialintegral lautet für $l_f = 0$

$$R_{110} \simeq N_f \frac{\sqrt{2\beta} 2k}{(k^2 + \beta^2)^2}. \quad (4.84)$$

Es führt auf den Wirkungsquerschnitt [2, 28]:

$$\sigma_1^{(\gamma,n)} \simeq N_f^2 \frac{32\pi}{3} \alpha \beta Z_{eff}^2 \left(\frac{k}{k^2 + \beta^2} \right)^3. \quad (4.85)$$

Diese Formel beschreibt das allgemeine Verhalten des Wirkungsquerschnitts bis auf den Normierungsfaktor gut. Folgende Korrekturen zu Gl. (4.85) sind vorgeschlagen worden [28]:

$$N_f^2 = \frac{1}{1 - \beta a} \quad (4.86)$$

bzw. [13]

$$N_f^2 = \frac{e^{\beta a}}{(1 + \beta a)^{1/2}}. \quad (4.87)$$

Letztere wurde in dieser Arbeit als Normierung der äußeren Wellenfunktion im Kastenpotential abgeleitet.

Der Quadrupolnäherung ergibt

$$\sigma_2^{(\gamma,n)} = N_f^2 \frac{\pi}{60} \frac{\alpha (\hbar c Z_{eff}^{(2)})^2}{(\mu c^2)^2} k (k^2 + \beta^2)^3 |R_{220}|^2. \quad (4.88)$$

mit dem Radialintegral

$$R_{220} \simeq N_f^2 \sqrt{2\beta} \frac{8k^2}{(k^2 + \beta^2)^3}. \quad (4.89)$$

Daraus folgt

$$\sigma_{E2}^{(\gamma,n)} \simeq N_f^2 \frac{32\pi}{15} \alpha\beta \frac{\hbar^2 c^2 Z_{eff}^2}{\mu^2 c^2} k^2 \left(\frac{k}{k^2 + \beta^2} \right)^3. \quad (4.90)$$

Der E2-Wirkungsquerschnitt ist in etwa drei Größenordnungen kleiner als der E1-Querschnitt bei niedrigen Energien ($E \ll 10 \text{ MeV}$).

Diese Art der Beschreibung elektromagnetischer Prozesse wurde von Bethe und Longmire [57] für die Photodissoziation des Deuterons vorgeschlagen. Seitdem wird sie in vielen Bereichen der Physik bei der Beschreibung schwachgebundener Systeme in Atomen [58], Kernen [59] und Festkörpern [60] verwendet. Sie stellt eine nützliche Methode der Quantenmechanik dar. Ihr Anwendungsbereich ist jedoch oft auf Clustersysteme ohne relativen Bahndrehimpuls beschränkt. Wir geben in dieser Arbeit eine Verallgemeinerung an.

4.4.3 Verallgemeinerung auf den Aufbruch von Zuständen mit relativem Bahndrehimpuls $\neq 0$

Bei den Ausführungen des letzten Abschnitts wurde eine sehr kurze Reichweite der Kernkräfte vorausgesetzt, was nur für s-Wellen zutrifft. Die Tatsache aber, daß der Wechsele Wirkungsbereich für schwachgebundene Kerne nur geringfügig zu den Radialintegralen in Gl. (4.83) beiträgt, erlaubt uns, in guter Näherung diese Integrale ganz allgemein durch ihren äußeren Anteil anzunähern. Die Verhältnisse sind besonders einfach im Falle von direkten Aufbruchreaktionen mit $\delta_{li} \simeq 0$.

Die Grundzustandswellenfunktion ist gegeben durch

$$g_{lf}(r) = N_f \sqrt{2\beta^3} h_{lf}^{(1)}(i\beta r). \quad (4.91)$$

mit dem Normierungsfaktor vom Kastenpotential Gl. (4.37). $B_{lf} = N_f \sqrt{2\beta^3}$. Die radialen Integrale sind in der Langwellennäherung gegeben durch,

$$R_{li1lf} = \int_0^\infty dr r^3 g_{lf}(r) g_{li}(k, r). \quad (4.92)$$

Ein weiterer Vorteil des Modells ist, daß die radialen Integrale für alle gültigen Werte des Grundzustandsdrehimpulses begrenzt sind.

Wir finden für p -Wellengrundzustände bei Beschränkung der Integration auf den Außenraum :

$$R_{110} \simeq N_f \frac{\sqrt{2}\beta e^{-\beta a}}{(\beta^2 + k^2)} \left\{ \cos(ka + \delta_0) \left(a + \frac{k^2 + 3\beta^2}{\beta(k^2 + \beta^2)} \right) + \frac{\sin(ka + \delta_0)}{k} \left(\beta a + \frac{2\beta}{(\beta^2 + k^2)} \right) \right\} . \quad (4.93)$$

Dabei wird der Beitrag der d -Welle zur Photodissoziation wegen der Zentrifugalbarriere vernachlässigt. Wir berechnen nun den Photodissoziationsquerschnitt unter Verwendung niederenergetischer Streuphasen [7] :

$$\tan \delta_0 \simeq -\frac{k}{\kappa} \quad (4.94)$$

mit

$$\kappa = -\frac{1}{a} + \frac{r_o k^2}{2} . \quad (4.95)$$

Im Fall kleiner κ zeigt der Wirkungsquerschnitt einen ausgeprägten Peak. Wir finden für d -Wellengrundzustände

$$R_{112} = N_f \sqrt{2} \beta \frac{k (3 k^2 + 5 \beta^2)}{\beta^2 (k^2 + \beta^2)^2} , \quad (4.96)$$

bzw.

$$R_{312} = N_f \sqrt{2} \beta \frac{2 k^3}{\beta^2 (k^2 + \beta^2)^2} \quad (4.97)$$

und

$$\sigma(\gamma, n) \simeq N_f^2 \frac{16\pi}{3} \alpha Z_{eff}^2 \frac{k^3 (3 k^4 + 6 k^2 \beta^2 + 5 \beta^4)}{\beta^3 (k^2 + \beta^2)^3} . \quad (4.98)$$

Dieser Ausdruck zeigt keinen Peak mehr bei niedrigen Energien. Ein solches Verhalten wurde auch von Sagawa beobachtet [10].

Schließlich finden wir im allgemeinen Fall des Grundzustandes mit Bahndrehimpuls $l_f > 0$ die Radialintegrale [64]

$$R_{(l_f-1)1l_f} = N_f \sqrt{2} \beta \frac{k^{l_f-1} [(2l_f-1) k^2 + (2l_f+1)\beta^2]}{\beta^{l_f} (k^2 + \beta^2)^2} , \quad (4.99)$$

und

$$R_{(l_f+1) \rightarrow l_f} = N_f \sqrt{2\beta} \frac{2 k^{l_f+1}}{\beta^{l_f} (k^2 + \beta^2)^2} . \quad (4.100)$$

Damit läßt sich der Photodissoziationsquerschnitt allgemeiner berechnen. Wir möchten hier noch auf das bemerkenswerte Verhalten des Teicheneinfangquerschnitts hinweisen, welcher für S -Welleneinfang bei niedrigen Energien divergiert. Dies wird aus Gln. (4.83 , 4.93) unter Berücksichtigung des detaillierten Gleichgewichts Gl.(2.65) ersichtlich.

4.4.4 Aufenthaltswahrscheinlichkeit in klassisch verbotenen Regionen

Ein Problem, das der Berechnung des mittleren quadratischen Radius sehr ähnelt, ist die Bestimmung der gesamten Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Kerne soweit voneinander liegen, daß sie keine nukleare Wechselwirkung mehr verspüren. Diese wird gegeben durch :

$$P_f = B_{l_f}^2 \int_a^\infty dr r^2 |h_{l_f}^{(1)}(i\beta r)|^2 . \quad (4.101)$$

Dieses Problem ist in Ref.[62] numerisch studiert worden. Wir verwenden hier die Normierungsvorschriften aus Gl. (4.39), um die Ergebnisse analytisch anzugeben. Dabei ergibt sich

$$P_0 \simeq \frac{1}{1+x} , \quad (4.102)$$

$$P_1 \simeq \frac{2\text{Exp}E_2(2x) + x(4\text{Exp}E_1(2x) + 1)}{3 + 3x + x^2} \quad (4.103)$$

und

$$P_2 \simeq \frac{18\text{Exp}E_4(2x) + 36x\text{Exp}E_3(2x) + 30x^2\text{Exp}E_2(2x) + x^3(12\text{Exp}E_1(x) + 1)}{(1+x)(15 + 15x + 6x^2 + x^3)} \quad (4.104)$$

mit der Abkürzung

$$\text{Exp}E_n(x) = \exp(x) E_n(x) . \quad (4.105)$$

Die Exponentialintegrale $E_n(x)$ können rekursiv berechnet werden [24].

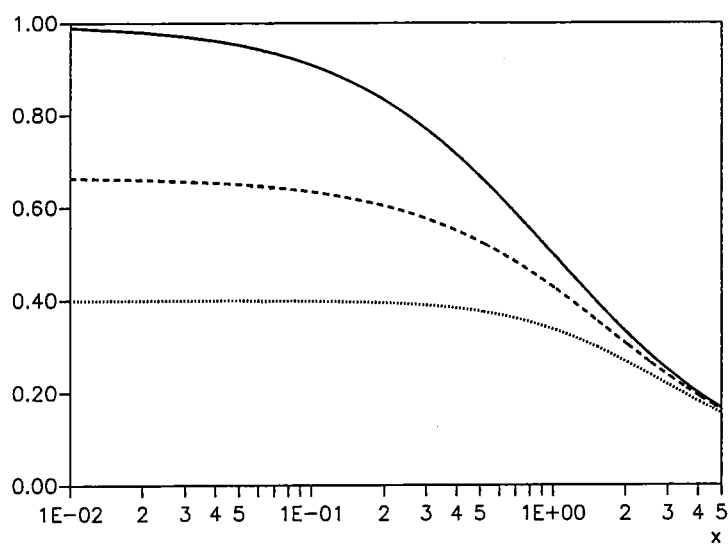


Abbildung 4.1: Aufenthaltswahrscheinlichkeit in klassisch verbotenen Regionen als Funktion von x für $l_f = 0$ (durchgezogene Linie), $l_f = 1$ (gestrichelte Linie) und $l_f = 2$ (gepunktete Linie).

Abb. 4.1 zeigt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit P als Funktion von x . Das asymptotische Verhalten für $x = \beta a \rightarrow 0$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} P_0 &\simeq 1, \\ P_1 &\simeq \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (4.106)$$

und

$$P_2 \simeq \frac{2}{5}. \quad (4.107)$$

Diese Ergebnisse stimmen mit der Literatur [61, 62] überein. Darüber hinaus können wir die asymptotischen Werte für höhere Drehimpulse ($l_f \geq 0$) allgemein angeben :

$$\begin{aligned} P_{l_f} &\simeq \frac{2(2l_f - 1)!!^2}{(2l_f - 3)!!(2l_f + 1)!!} E_{2l_f}(0) \\ &\simeq \frac{2}{(2l_f + 1)}. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Wie man sieht, sind die Effekte der Drehimpulsbarriere in diesem Formalismus einfach zu erklären. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Außenraum ist sehr gering für Zustände mit $l_f > 2$. Die Dissoziationsquerschnitte bei niedrigen Energien sind geringer. Das gleiche Verhalten für den mittleren quadratischen Radius wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

4.4.5 Mittlere quadratische Radien

Wir können mit Hilfe der äußeren Wellenfunktionen den mittleren quadratischen Abstand ρ^2 zwischen zwei schwach gebundenen Clustern berechnen, oder anders gesagt, die sogenannte Halogröße bestimmen. Wir machen den Ansatz

$$\rho^2 \simeq B_{l_f}^2 \int_a^\infty dr r^4 |h_{l_f}^{(1)}(i\beta r)|^2. \quad (4.109)$$

Der Beitrag des inneren Bereichs des Kerns variiert wenig mit der Bindungsenergien, welche wesentlich kleiner als das Wechselwirkungspotential ist. Wir werden diesen Beitrag daher zunächst vernachlässigen.

Der Fall $l_f = 0$ ist von Hansen und Jonson [13] analytisch beschrieben worden. Sie fanden

$$\frac{\rho^2}{a^2} = \frac{1}{2\beta^2 a^2} \frac{1 + 2\beta a + 2\beta^2 a^2}{1 + \beta a} . \quad (4.110)$$

Die Fälle $l_f = 0, 1, 2$ sind von Riisager et al [61, 62] unter Verwendung verschiedener Modelle der Kernwechselwirkung numerisch studiert worden. Wir studieren hier den Fall $l_f = 1$ und finden

$$\rho^2 \simeq B_{l_f}^2 \frac{e^{-2\beta a}}{2\beta^5} \left(\frac{5}{2} + 3\beta a + a^2 \beta^2 \right) , \quad (4.111)$$

was zusammen mit der von uns angegebenen Normierung im Kastenpotential zu folgender Gleichung führt:

$$\frac{\rho^2}{a^2} = \frac{1}{2\beta a} \frac{5 + 6\beta a + 2\beta^2 a^2}{3 + 3\beta a + (\beta a)^2} . \quad (4.112)$$

Wir erhalten insbesondere das asymptotische Verhalten für $x = \beta a \rightarrow 0$

$$\frac{\rho^2}{a^2} \rightarrow \frac{5}{6\beta a} , \quad (4.113)$$

was bis auf leichte numerische Abweichung dem Skalenverhalten von Riisager et al [61] für Ein-nukleonen-halos mit Bahndrehimpuls entspricht: $l_f = 1$,

$$\frac{\rho^2}{a^2} = \frac{3.65 \text{ MeV}^{1/2} \text{ fm}}{\sqrt{B a^2}} \quad (4.114)$$

B ist dabei die Bindungsenergie. Dies ist mit dem mittleren quadratischen Radius von S -Wellenzuständen zu vergleichen

$$\rho^2 \rightarrow \frac{1}{2\beta^2} , \quad (4.115)$$

welcher bei kleinen Bindungsenergien größer wird. Der mittlere quadratische Radius von d -Wellen läßt sich wie folgt schreiben :

$$\frac{\rho^2}{a^2} = \frac{36 \exp(2x) E_2(2x) + x (72 \exp(2x) E_1(2x) + 37) + 14x^2 + 2x^3}{2 (1 + x)(15 + 15x + 6x^2 + x^3)} . \quad (4.116)$$

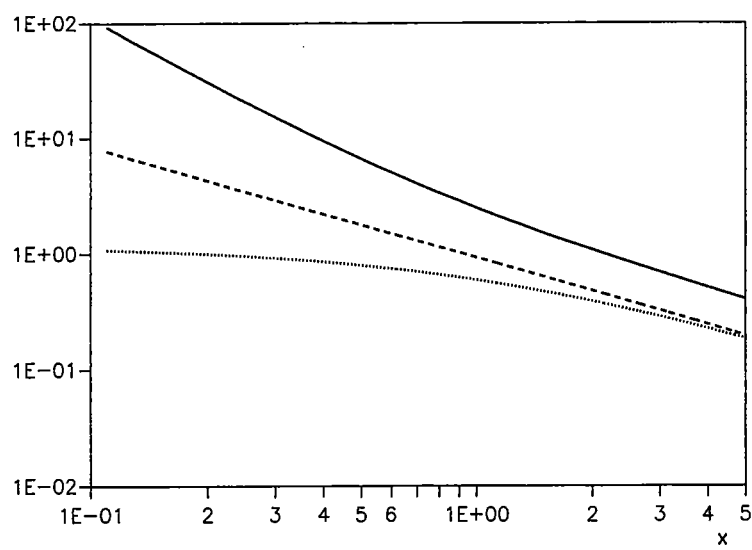


Abbildung 4.2: $\frac{\ell^2}{a^2}$ als Funktion von x . Die Kurven sind wie in Abb 4.1 bezeichnet.

Abb.4.2 zeigt die Abhängigkeit des mittleren quadratischen Radius von x . Der mittlere Abstand strebt für $x = 0$ gegen einen konstanten Wert. Wir erhalten für $l_f = 2$:

$$\frac{\rho^2}{a^2} \simeq \frac{6}{5} . \quad (4.117)$$

Dies läßt sich gut mit dem numerischen Ergebnis aus Ref.[61] vergleichen

$$\frac{\rho^2}{a^2} \simeq 1.40, \quad (4.118)$$

bei dem der Beitrag des Wechsele Wirkungsbereichs mitberücksichtigt wird. Man kann das asymptotische Verhalten der mittleren Haloradien auch allgemein studieren.

Das äußere Integral läßt sich in diesem Fall schreiben als:

$$\rho^2 \simeq B_{l_f}^2 \sum_{\mu, \nu=0}^{l_f+1} \frac{c_{\mu\nu}}{\beta^{2l_f+2-\mu-\nu}} \int dr \frac{e^{-2\beta r}}{r^{2l_f-2-\mu-\nu}} . \quad (4.119)$$

Die $c_{\mu\nu}$ sind Koeffizienten, die sich aus der Definition der sphärischen Hankelfunktionen berechnen lassen. Wir unterscheiden zwei wichtige Fälle bei der Berechnung dieser Teilintegrale [62] :

a) Falls $2l_f - 2 - \mu - \nu = n \leq 1$ ist, dann divergieren diese Teilintegrale. Im Falle $n = 1$ ist diese Divergenz geringer als die $1/\beta$ -Divergenz im Fall $n = 0$. Die sphärische Hankelfunktion $h_{l_f}(i\beta r)$ hat bei geringer Bindungsenergie die Asymptotik

$$h_{l_f}(i\beta r) \simeq -(-i)^{l_f} \frac{(2l_f - 1)!!}{(\beta r)^{l_f+1}} e^{-\beta r} . \quad (4.120)$$

Wir kommen damit zu einer Abschätzung für B_f :

$$|B_{l_f}|^2 \simeq \frac{2}{a^3} \frac{(\beta a)^{2l_f+2}}{(2l_f - 3)!! (2l_f + 1)!!} e^{2\beta a} . \quad (4.121)$$

Das Integral in Gl. (4.119) ergibt eine logarithmische Divergenz, falls $n = 1$, die für $\beta a = 0$ durch den Normierungsfaktor Gl. (4.121) absorbiert wird und schließlich keinen Beitrag zum Haloradius liefert.

Der maximale Divergenzgrad des mittleren quadratischen Radius ist für $(\mu = \nu = 0)$ erreicht. Er verhält sich dann wie

$$\frac{\rho^2}{a^2} \sim (\beta a)^{2l_f-3} . \quad (4.122)$$

Dieser Ausdruck divergiert asymptotisch für $l_f \leq 1$ und verschwindet sonst. Der erste Fall entspricht der Bildung von Halos [61] und ist in dieser Arbeit Gl.(4.110, 4.112) analytischs berechnet worden.

b) Falls $n \geq 2$, dann konvergieren die Teilintegrale, so daß der maximale Divergenzgrad $(\mu = \nu = 0)$ Null wird, was der Näherung in Gl. (4.121) entspricht. Wir finden für den mittleren quadratischen Radius

$$\frac{\rho^2}{a^2} = \frac{2 (2l_f - 1)}{(2l_f - 1) (2l_f + 3)} E_{2l_f-2}(2\beta a) , \quad (4.123)$$

wobei mit $E_m(z)$ ein Exponentialintegrale [24] bezeichnet sind. Außerdem gilt:

$$E_m(0) = \frac{1}{m-1} . \quad (4.124)$$

Schließlich finden wir

$$\frac{\rho^2}{a^2} \simeq \frac{2 (2l_f - 1)}{(2l_f + 3)(2l_f - 3)} . \quad (4.125)$$

Der Beitrag des inneren Integrals zum mittleren quadratischen Radius läßt sich wie folgt berechnen :

$$\rho_i^2 \simeq A_f^2 \int_0^a dr r^4 j_{l_f}^2(\xi r) \quad (4.126)$$

Das Integral in Gl.(4.126) ist analytisch gelöst werden, numerische Verfahren sind aber hier vorzuziehen. Das Resultat wird Wert vom entsprechenden Wert für ξa oder allgemein vom verwendeten Modell abhängen.

Diese Ergebnisse zeigen, daß ρ nicht divergiert, aber unter Umständen wesentlich grösser als a sein wird, d.h.

$$\rho \geq a + 0.65 \text{ fm}. \quad (4.127)$$

In diesem Fall kann man auch von Nukleonenhalos sprechen. In der Definition von Rüsager *et al.* [61] wurde er Fall nicht mitberücksichtigt. Er ist aber

nicht ganz unwichtig, da solche Halos auch bei größeren Kernen für $l_f = 2$ auftreten können. Diese Möglichkeit wird für größere Drehimpulse sehr stark eingeschränkt, da ρ asymptotisch wesentlich kleiner als a wird, wie die Gln. (4.123, 4.124) zeigen. Unsere Ausführungen zeigen deutlich, daß der äußere Bereich die größte Bedeutung bei der Berechnung der mittleren quadratischen Radien und der höheren Momente von leicht gebundenen Nukleonen ($l_f \leq 2$) einnimmt. Sie können deshalb unabhängig vom Kernmodell abgeschätzt werden. Der gesamte Radius des Kerns wird gewöhnlich aus dem Core und dem Haloradius gemittelt:

$$\rho^2 = \frac{A_c}{A_c + A_h} \rho_c^2 + \frac{A_h}{A_c + A_h} \rho_h^2, \quad (4.128)$$

wobei ρ_h^2 der in diesem Abschnitt berechnete mittlere quadratische Radius ist. $A_{c(h)}$ bezeichnet die Masse des Core bzw. des Haloclusters.

4.4.6 Systeme mit Coulombwechselwirkung

Die Methoden der vorigen Abschnitte lassen sich auf Clustersysteme mit Coulombwechselwirkung ausdehnen. Es ist dazu nötig die Besselfunktionen durch geeignet normierte Coulombfunktionen bzw. Whittakerfunktionen zu ersetzen. Dabei bleibt nur zu klären, inwiefern diese Beschreibung den experimentellen Sachverhalt (z.B. Schwellenreaktionen, Aufenthalt in klassisch verbotenen Regionen und mittlere quadratische Radien) richtig reproduziert. Das radiale Moment ρ^n von Ordnung n ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \rho^n &\simeq B_f^2 \int_a^\infty dr r^{2+n} |w_{-\eta, l}(2\beta r)|^2 \\ &= B_f^2 \int_a^\infty dr r^{2+n} \exp[(\beta_1 - \beta_2)r] w_{-\eta, l}(2\beta_1 r) w_{-\eta, l_f}(2\beta_2 r) \end{aligned} \quad (4.129)$$

mit $\beta_1 \rightarrow \beta_2 = \beta$. Wir verwendeten die Notation der vorangegangenen Abschnitte. Die Integrale können numerisch berechnet werden. Der letzte Ausdruck kann für $l_f = 0$ bei Integration über den ganzen Raum durch analytische Ausdrücke [53, 54] angegeben werden, falls $\beta a \ll 1$. Unser Ansatz könnte dazu helfen, die allgemeinen Bedingungen für das Auftreten und die Größe von Protonenhalos zu finden. Diese Frage wurde bisher nur unzureichend in der Literatur [62] studiert, außerdem wurde die Energieabhängigkeit der Normierungskonstanten nicht vollständig behandelt.

4.5 Anwendung auf ausgewählte Systeme

Die Überlegungen der vorhergehenden Abschnitte waren sehr allgemein. Wir möchten nun ihre Gültigkeit anhand einiger spezieller Beispiele zeigen. Es handelt sich dabei um leicht gebundene Clustersysteme mit relativem Drehimpuls $l_f = 0$ bzw. $l_f = 1$ ohne Coulombwechselwirkung im Endzustand. Viele diese Kerne zeigen einen großen Überschuß von Nukleonen einer Sorte und zerfallen durch Nukleonen- oder Elektronen- bzw. Positronenemission. Wir werden die Systeme ^{11}Be , ^{11}Li , ^9Be , ^8Li untersuchen, welche Gegenstand intensiver Forschung sind. Das Interesse an exotischen Kernen ist durch die Entwicklung von experimentellen Möglichkeiten zur Produktion und Nachweis von leichten radioaktiven Kernen gewachsen. Die meisten Experimente werden an Beschleunigeranlagen (RIKEN -Wako, Japan; GSI-Darmstadt, Deutschland; GANIL-Caen, Frankreich ; und MSU-NSCL , U.S.A.; etc) durchgeführt.

Diese Kerne sind auch vom Standpunkt der Theorie her wegen ihrer besonderen Struktur interessant. Sie sind zur Zeit Gegenstand zahlreicher Modellrechnungen und zeigen besonders große elektromagnetische Dissoziationsquerschnitte. Einige von ihnen spielen eine große Rolle in der Elementensynthese in Sternen [66].

4.5.1 Photodissoziation von ^{11}Be

Das Clustersystem $^{10}\text{Be} - n$ ist zur Zeit Gegenstand vieler Untersuchungen. Es ist neben dem Deuteron ein nahezu klassisches Beispiel eines schwach gebunden Clustersystems, wobei das Valenzneutron fern vom Core liegt ($r \simeq 5 \text{ fm}$) [63] und deshalb ein Halo bildet. Einige experimenteller Daten stehen zur Verfügung [4].

Die theoretische Beschreibung erfolgt zunächst im Rahmen des in dieser Arbeit beschriebenen Kastenpotentials. Wir berechneten die Reichweite der Kernwechselwirkung ($a = 3.785 \text{ fm}$), und bestimmten die Potentialtiefe ($V = 37.638 \text{ MeV}$), die den gebundenen s -Wellenzustand mit der Bindungsenergie $B = 0.503 \text{ MeV}$ reproduziert, und finden für die Normierungskonstanten im Kastenpotential $A_0 = 0.5561 \text{ fm}^{3/2}$ für die innere, bzw. $B_0 = 0.1127 \text{ fm}^{3/2}$ für die äußere Grundzustandswellenfunktion. Diese können mit den von uns angegebenen analytischen Näherungen Gln. (4.38, 4.39, 4.10) verglichen werden, die $\hat{A}_0 \simeq 0.5566 \text{ fm}^{3/2}$ und $\hat{B}_0 \simeq 0.1113 \text{ fm}^{3/2}$

ergeben. Wir stellen fest, daß unsere Näherungen sehr gut mit den genauen Werten übereinstimmen (Genauigkeit besser als 1%).

Die Berechnung des Photodissoziationsquerschnitts im Kastenpotential erfolgt ohne Problem. Die Ergebnisse stimmen auch mit den experimentellen Daten gut überein [47]. Wir prüfen nach, ob sich diese Daten auch durch ein Woods-Saxon-potential beschreiben lassen. Als Parameter des Potentials wählen in diesem Fall für die Tiefe $V_w = 33.3 \text{ MeV}$, die Reichweite $R_w = 3.785 \text{ fm}$ und die 'Diffuseness' $a_w = 0.65 \text{ fm}$. Die radialen Wellenfunktionen (Partialwellen im Kontinuum) werden dabei mit Hilfe des Numerov- oder Cowellalgorithmus [65, 68, 69] für eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in kanonischer Form numerisch berechnet. Wir definieren zunächst $\psi_n = \psi(r_n)$. Dann wird die reduzierte radiale Schrödingergleichung

$$\psi''(r) = A(r) \psi(r) \quad (4.130)$$

mit

$$A(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} - V(r) \right) \quad (4.131)$$

rekursiv gelöst :

$$\left(1 + \frac{h^2}{12} A_{n+1}\right) \psi_{n+1} = 2\left(1 - \frac{5h^2}{12} A_n\right) \psi_n - \left(1 + \frac{h^2}{12} A_{n-1}\right) \psi_{n-1}. \quad (4.132)$$

Dabei ist h der Diskretisierungsschritt. Das Verfahren verlangt die Vorgabe von zwei Startwerten. Diese sind bei Verwendung des asymptotischen Verhaltens der Wellenfunktion einfach zu berechnen. Für kleine Abstände folgt:

$$\psi_1 \sim h^l, \quad (4.133)$$

bei großen Abständen gilt für gebundene Zustände

$$\psi(r) \sim \exp(-\beta r) \quad (4.134)$$

und für Kontinuumszustände

$$\begin{aligned} \psi(r) &\sim \cos \delta_l j_l(kr) - \sin \delta_l n_l(kr) \\ &\simeq \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l). \end{aligned} \quad (4.135)$$

Die Wellenfunktion im Bereich der Kernkräfte wird von $r = 0$ bis $r = a$ aber außerhalb des Kerns in umgekehrter Richtung, also von $r = \infty$ bis

$r = a$ berechnet. Die Anpassung erfolgt an der Stelle $r = 10a$ durch die Forderung nach Stetigkeit der logarithmischen Ableitung. Diese Bedingung bestimmt die erlaubten Werte einiger Modellparameter (z.B. Energie und Potentialtiefe). Die numerische Berechnung der Streuphasen wird mit Hilfe der logarithmischen Ableitung bei großen Abstand r durchgeführt :

$$\tan \delta_{l_i} = \frac{(\gamma r + l_i) j_{l_i}(kr) - kr j_{l_i-1}(kr)}{(\gamma r + l_i) n_{l_i}(kr) - kr n_{l_i-1}(kr)}. \quad (4.136)$$

Die Normierung der Wellenfunktion wird damit sehr einfach. Dieses Verfahren ist eine Variante der Fox-Goodwinmethode [67], welche sich durch einen hohen Konvergenzgrad auszeichnet.

Abb.4.3 zeigt den Photodissoziationsquerschnitt in Abhängigkeit von der Relativenergie der Cluster. Die Vorhersage der modellunabhängigen Rechnung ist zwar noch realistisch, liegt aber im sensiblen Bereich des Maximums deutlich höher als die eben beschriebenen Modelle. Dies kann man z.B. durch eine Änderung der Normierungsvorschrift korrigieren [64] :

$$N_f^2 = 1 + \beta a + \beta^2 a^2 + \dots \quad (4.137)$$

Dies stellt eine unvollständige Reihenentwicklung des Normierungsfaktors aus Gl.(4.18) dar. Mit dieser Entwicklung wird die Übereinstimmung mit den Modellrechnungen wieder erlangt.

Eine andere Möglichkeit, dieses Problem zu lösen, wird durch die Verwendung realistischer Streuphasen für die Kontinuumswellenfunktion gegeben. Die Normierung des Grundzustands bleibt dabei ungeändert, da der Beitrag des Kernkräftebereichs zu den elektromagnetischen Übergängen bei sehr niedrigen Energien vernachlässigbar ist. Infolgedessen erstrecken sich die radialen Integrale nicht mehr über den ganzen Raum. Der Dissoziationsquerschnitt wird somit etwas reduziert. Diese Korrekturen bringen das Maximum des Wirkungsquerschnitts in die Nähe der experimentellen Werte. Sie reichen aus, um die Ergebnisse der Modellrechnungen praktisch vollständig zu reproduzieren und liefern eine erneute Bestätigung für das Vernachlässigen des Beitrages des Wechselwirkungsbereichs zum Dipolübergang.

Wie schon erwähnt, sind die experimentell gemessenen Streuphasen an der Schwelle durch die Wahl verschiedener Potentiale reproduzierbar. Die Frage nach einer modellunabhängigen Parametrisierung der Streuphasen bei niedrigen Energien ist besonders wichtig für die Interpretation experimenteller Ergebnisse in Beziehung mit gewissen Kerneigenschaften (gebundene

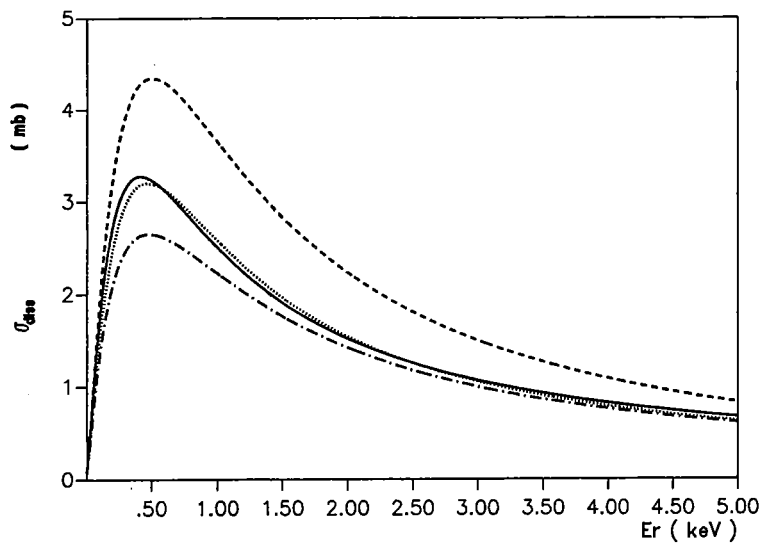


Abbildung 4.3: Totaler Wirkungsquerschnitt für die Photodissoziation von ^{11}Be im Woods-Saxon-potential (durchgezogene Linie), im Kastenpotential (gepunktet gestrichelte Linie), in der Effektivreichweitennäherung (gestrichelte Linie) und in der Effektivreichweitennäherung mit den Streuphasen vom Kastenpotential (gepunktete Linie).

und virtuelle Zustände, Resonanzen etc.). Für s -Wellen ist dies bereits in der Reichweitennäherung durchgeführt worden [49, 7, 28]. Eine Verallgemeinerung auf beliebige Partialwellen bleibt noch aus. Eine Klärung dieser Fragen würde es auch erlauben, die elastischen Streuphasen aus den Photodissoziationsdaten näherungsweise zu bestimmen, und darüberhinaus Rückschlüsse über die Kernstruktur erlauben. Der allgemeine Ausdruck für die Streuphasen lautet :

$$\tan \delta_{l_i} = \frac{ka j'_{l_i}(ka) - za j_{l_i}(ka)}{ka n'_{l_i}(ka) - za n_{l_i}(ka)}, \quad (4.138)$$

wobei z ist die logarithmische Ableitung an der Stelle $r = a$ ist. Falls Resonanzen bei niedrigen Energien ausgeschlossen sind, können wir za als konstant annehmen. Dies führt zu dem Ansatz

$$\frac{j_{l_i}(ka)}{n_{l_i}(ka)} \cot \delta_{l_i} = \kappa_{l_i} a. \quad (4.139)$$

Dabei ist κ_l eine Konstante, die von l und von der logarithmischen Ableitung z an der Stelle $r = a$ abhängt

$$\kappa a \simeq \frac{l_i + 1 + za}{za - l_i}, \quad (4.140)$$

bzw

$$za \simeq \frac{l_i(\kappa a + 1) + 1}{\kappa a - 1}. \quad (4.141)$$

Der Ansatz aus Gl. (4.139) ergibt eine gute Parametrisierung der Streuphasen bei niedrigen Energien. Im Energiebereich $E < 1.3 \text{ MeV}$ wurde κ mit einer Genauigkeit von ca. 1% bestimmt. Die Verwendung der vollen Besselfunktionen ist dabei wichtig. Die Änderung von κ mit der Energie wird erst bei höheren Energien wesentlich. Korrekturen der Ordnung $O(k^2)$ zu κ werden hier deshalb vernachlässigt. Wir finden für ^{11}Be :

$$\kappa a \simeq 1.28. \quad (4.142)$$

Dieser Wert ist mit $\kappa_l a = 1$ für reine Potentialstreuung zu vergleichen. Diese Art von Parametrisierung kann bei der Analyse von Daten bei niedrigen Energien sehr hilfreich werden, weil die κ 's eine wenn auch, nicht triviale Beziehung, zur Kernstruktur haben. Man wird z.B. bei Anwesenheit eines

gebundenen Zustandes nahe der Schwelle erwarten, daß sich die Logarithmische Ableitung nicht sehr mit der Energie ändert, also :

$$za \simeq i\beta a \frac{h_{l_i}(i\beta a)}{h'_{l_i}(i\beta a)}. \quad (4.143)$$

Dies stellt eine algebraische Gleichung vom Grade $l_f + 1$ für βa dar. Für $l_f = 1$ lautet sie explizit für:

$$\beta^2 a^2 + \beta a(2 + za) + (2 + za) = 0. \quad (4.144)$$

Die Lösungen mit positivem βa stellen gebundene Zustände und die Lösungen mit negativem βa stellen virtuelle Zustände dar, in Analogie zur Diskussion von gebundenen Zuständen nahe der Schwelle [7]. Aus dieser Gleichung folgt für ^{11}Be ($za \simeq 4.556$) einen virtuellen Zustand im p-Kanal bei ca. 2.44MeV , was relativ gut mit dem experimentellen Wert $E \simeq 2.67\text{MeV}$ übereinstimmt.

^{11}Be ist nahezu ein idealer Halokern. Es handelt sich um ein Zweikörperproblem mit kleiner Bindungsenergie, und dementsprechend ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit außerhalb des Kerns groß. Komplikationen durch die Zentrifugalbarriere bzw. die Coulombwechselwirkung sind gering.

4.5.2 Neutroneneinfang durch ^{12}C

Die Beschreibung des Neutroneneinfangs durch ^{12}C ist ähnlich der Photo-dissoziation von ^{11}Be . Die einzige Komplikation liegt in der höheren Bindungsenergie. Der Endzustand ist in diesem Fall ein angeregter Zustand von ^{13}C . Einige Daten von Neutroneneinfangsreaktionen bei niedrigen Energien liegen vor. Es existieren ebenfalls verschiedene Modellrechnungen [47]. Diese Rechnungen zeigen, daß die Daten bei sehr niedrigen Energien gut durch die Annahme einer Punktwechselwirkung beschrieben werden, wenn man den Normierungsfaktor Gl. (4.18) geeignet wählt. Eine deutliche Abweichung tritt aber bei höheren Energien auf. Wir haben dieses Phänomen im letzten Abschnitt bereits auf die Vernachlässigung der korrekten Streuphasen zurückgeführt. Es ist auch die Genauigkeit des Normierungsfaktors B_0 im Vergleich zum exakten Kastenpotentialparameter bei dieser Bindungsenergie nachzuprüfen.

Wir haben folgende Parameter für das Kastenpotential verwendet

$$a = 3.947 \text{ fm} \quad (4.145)$$

und

$$V_0 = -37.04 \text{ MeV} \quad (4.146)$$

um die Bindungsenergie ($B = 1.86 \text{ MeV}$) zu reproduzieren. Außerdem setzen wir $V_1 = -48.0 \text{ MeV}$ im p -Kanal. Die Normierungsfaktoren des Grundzustands ergeben sich zu

$$A_0 = \frac{0.6494}{fm^{3/2}} \quad (4.147)$$

und

$$B_0 = \frac{0.4529}{fm^{3/2}}. \quad (4.148)$$

Die modellunabhängigen Näherungen Gln.(4.38,4.39) ergeben

$$A_0 \simeq \frac{0.6493}{fm^{3/2}} \quad (4.149)$$

und

$$B_0 \simeq \frac{0.4643}{fm^{3/2}}. \quad (4.150)$$

Man beachte die bemerkenswerte Genauigkeit in Anbetracht der hohen Bindungsenergie.

Abb. 4.4 zeigt die Abhängigkeit des Neutroneneinfangquerschnitts von der Energie. Die Verwendung von realistischen Streuphasen verbessert die Beschreibung. Dabei variiert κ sehr rasch mit der Energie und divergiert bei sehr kleinen Energien. Die Streuphasen verschwinden dementsprechend schneller als im Fall von ^{11}Be . Der Einfluß des Kernkräftebereichs wird auch durch die Abweichung des modellunabhängigen Wirkungsquerschnitts vom realen Kastenpotential schneller bemerkbar. Dies ist durch die hohe Bindungsenergie zu erklären. Man beachte, daß in beiden Fällen κ merklich von eins, also von einer reinen Potentialstreuung abweicht. Abb. 4.5 zeigt den Neutroneneinfangquerschnitt in den d -Zustand von ^{13}C mit einer Bindungsenergie von 1.08 MeV . Die Ergebnisse mit der Effektivreichweitennäherung sind sehr ähnlich zur Rechnung von Mengoni *et al.* [70]. Dieser Quelle entnehmen wir auch die experimentellen Daten in Abb. 4.5.

4.5.3 Photodissoziation von ^9Be

Unsere Betrachtungen haben sich bisher auf Clustersysteme mit kurzreichweitiger Wechselwirkung beschränkt. Der Grundzustand von ^9Be ist aber

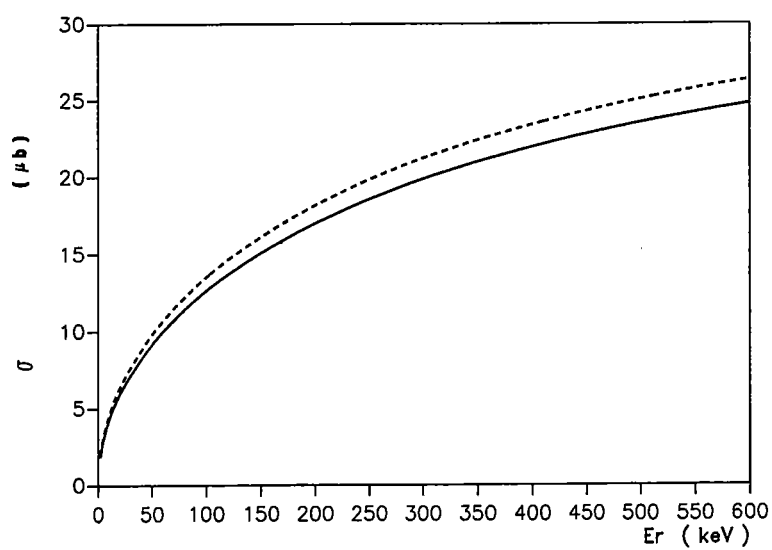


Abbildung 4.4: Totaler Wirkungsquerschnitt für den Neutroneneinfang durch ^{12}C im Kastenpotential (durchgezogene Linie) und in der Effektivreichweitennäherung (gestrichelte Linie)

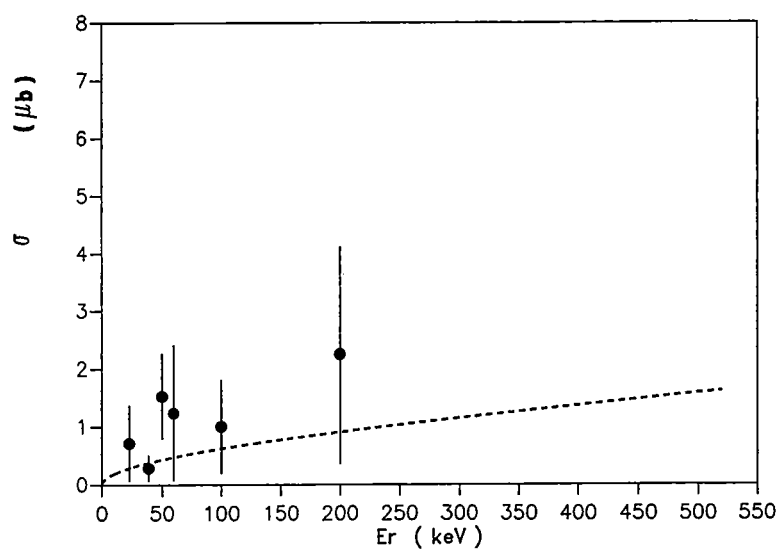


Abbildung 4.5: Totaler Wirkungsquerschnitt für den Neutroneneinfang durch ^{13}C in der Effektivreichweitennäherung (gestrichelte Linie).

eine p -Welle, die effektive Wechselwirkung hat damit wegen des Zentrifugalpotentials eine unendliche Reichweite. Die Bindungsenergie ist relativ hoch (1.666 MeV). Es ist also von vorneherein nicht klar, ob eine modellunabhängige Näherung in diesem Fall möglich ist. Wir haben sie in [11] vorgeschlagen und in [64] abgeschlossen. In dieser Arbeit sollen die Ergebnisse für ${}^9\text{Be}$ mit den Modellrechnungen aus Ref.[1] und mit experimentellen Daten aus Ref.[8] verglichen werden.

Wir haben folgende Parameter für das Kastenpotential verwendet

$$a = 3.6 \text{ fm} \quad (4.151)$$

und

$$V_1 = -21.026 \text{ MeV} , \quad (4.152)$$

um die Bindungsenergie ($B = 1.666 \text{ MeV}$) zu reproduzieren. Die Daten zur Photodissoziaton [8] konnten mit dem Kastenpotential

$$V_0 = 40.493 \text{ MeV} \quad (4.153)$$

angepaßt werden. Der Normierungsfaktor der äußeren Wellenfunktion berechnet sich im Grundzustand zu

$$B_1 = \frac{0.18422}{\text{fm}^{3/2}}, \quad (4.154)$$

während die modellunabhängige Näherung

$$B_1 \simeq \frac{0.1919}{\text{fm}^{3/2}} \quad (4.155)$$

ergibt. Man beachte wieder die bemerkenswerte Genauigkeit trotz der hohen Bindungsenergie. Abb 4.6 zeigt den Photodissoziationsquerschnitt von ${}^9\text{Be}$ bei niedrigen Energien.

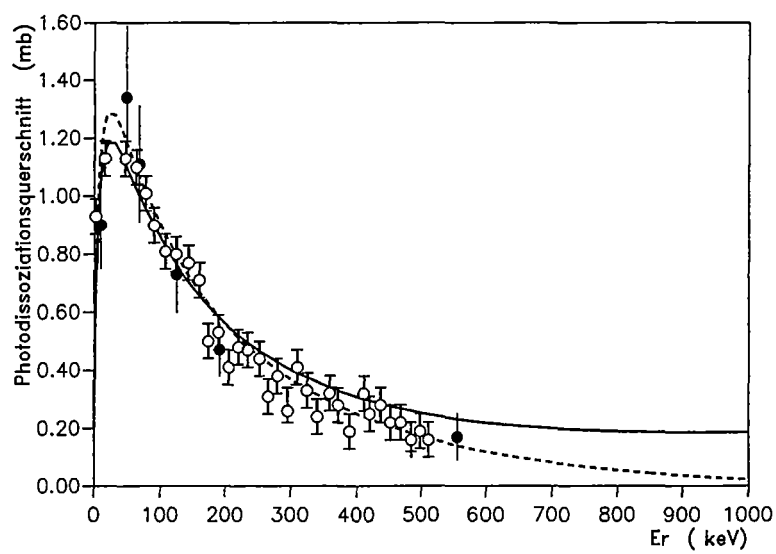


Abbildung 4.6: Totaler Wirkungsquerschnitt für die Photodissoziation von ${}^9\text{Be}$ im Kastenpotential (durchgezogene Linie) und in der Effektivreichweitennäherung (gestrichelte Linie).

Kapitel 5

Dissoziation von schwach gebundenen Kernen in peripheren Kollisionen

5.1 Einleitung

Wir haben in den vorigen Kapiteln die enge Beziehung zwischen Coulomb- und Photodissoziation ausführlich erläutert. Diese Beziehung erlaubt es im Prinzip, photonukleare Reaktionsquerschnitte aus den Daten der Coulombdissoziation zu gewinnen. Wir sind nun auch in der Lage Photodissoziations- bzw. Teilcheneinfangsquerschnitte theoretisch zu berechnen (s. Kap. 3), und daraus Vorhersagen über die Coulombdissoziation zu machen. Andere Dissoziationsmechanismen können bei diesen Berechnungen ebenfalls mitberücksichtigt werden, wie z.B. die Absorption eines Teils der vollständigen Projektilwellenfunktion durch das Target [77, 78, 79, 25] oder die Absorption einer Projektilkomponente (Nukleon, Cluster, etc.). Der letzte Prozeß wird *stripping* genannt. Strippingquerschnitte von schwach gebundenen Kernen werden z.B. in Ref.[71] berechnet.

Wenn man bei diesen Prozessen von möglichen Komplikationen durch das Anregungsschema des Projektils absieht, erscheinen Coulomb und Photodissoziation als beinahe äquivalente Prozesse. In diesem Kapitel werden wir die Verhältnisse anhand einiger Beispiele studieren.

5.2 Coulombdissoziation von ^{11}Be

Die Methode der äquivalenten Photonenzahlen kann sehr gut am Aufbruch von ^{11}Be in peripheren Schwerionenstößen (z.B. ^{208}Pb) erläutert werden. Aus den grundlegenden Methoden aus Kap. 2 lassen sich auch die differentiellen Dissoziationsquerschnitte errechnen. Die Dipolstärke des Übergangs ($^{11}\text{Be} + \text{Pb} \rightarrow \text{Pb} + ^{10}\text{Be} + n$) wird gegeben durch:

$$\frac{dB}{dE_x} = \frac{9\hbar c}{16\pi^3 E_x} \sigma^{(\gamma,n)}(E_x). \quad (5.1)$$

Der dabei verwendete Photodissoziationsquerschnitt ist in Gl.(4.83) angegeben. Abb. 5.1 zeigt die Dipolstärke als Funktion der Photonenenergie. Die Ergebnisse stimmen mit den experimentellen Daten aus Ref. [4] gut überein.

Die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts vom Stoßparameter ist gegeben durch:

$$\frac{d\sigma_{CD}}{db} = 2\pi b \int d\omega \frac{N(b,\omega)}{\omega} \sigma(\omega). \quad (5.2)$$

Dabei ist $\hbar\omega$ die Photonenenergie, $N(\omega, b)$ die Photonendichte pro Frequenzintervall und pro Fläche und b der Stoßparameter. Für $N(\omega, b)$ gilt [19, 25]:

$$N(b,\omega) = \frac{1}{\pi^2} Z_T^2 \alpha \frac{c^2}{v^2} \frac{\omega^2}{\gamma^2 v^2} \left[K_1^2(X) + \frac{K_0^2(X)}{\gamma^2} \right]. \quad (5.3)$$

$X = \frac{\omega b}{\gamma v}$ ist der Adiabasieparameter. Wir finden im Grenzfall $X \simeq 0$ (d.h. in der sog. *sudden approximation*) :

$$N_0(b) = \frac{1}{\pi^2} \alpha \left(\frac{Z_T c}{bv} \right)^2. \quad (5.4)$$

Abb.5.2 zeigt die Stoßparameterabhängigkeit des Dissoziationsquerschnitts Gl.(5.2). Der differentielle Wirkungsquerschnitt in erster Ordnung Störungstheorie weicht von den Daten aus Ref. [4] für kleine Stoßparameter nicht nennenswert ab.

Andere Observablen des oben beschriebenen Prozesses sind die longitudinale und die transversale Impulsverteilung der Fragmente nach der Coulombdissoziation. Da ihre Beschreibung nicht zum Thema dieser Arbeit gehört,

Fig. 1

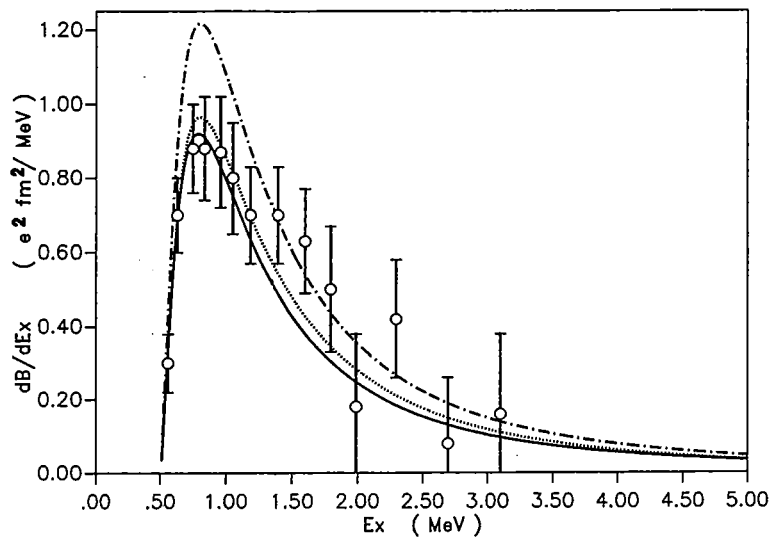


Abbildung 5.1: Dipolstärke als Funktion der Photonenenergie in der Effektivreichweitennäherung (gestrichelte Linie), und im Kastenpotential (durchgezogene Linie). Die gepunktete Linie folgt aus der Effektivreichweitennäherung bei Änderung der Normierungskonstanten wie im Abschnitt [4.5.3].

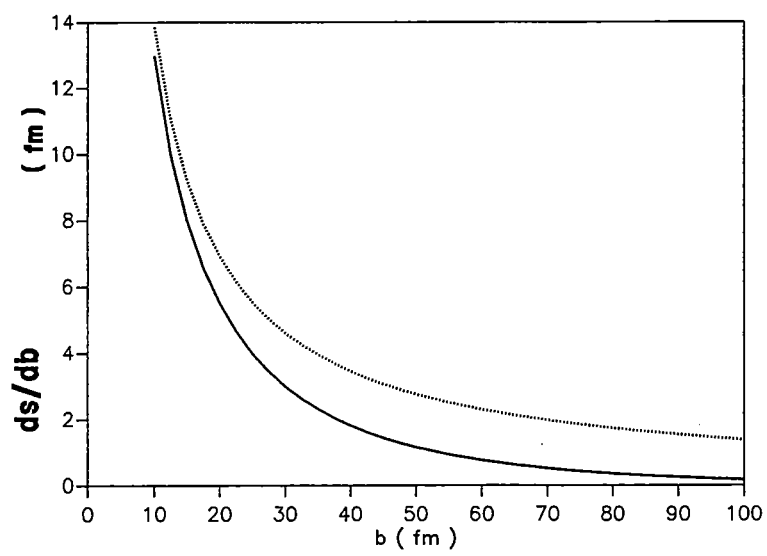


Abbildung 5.2: Differentieller Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{db}$ als Funktion des Stossparameters.

verweisen hier vielmehr auf die ausführliche Literatur [72, 73, 74, 75] u. andere. Man erhält im allgemeinen eine gute Beschreibung der relativen Verhältnisse zwischen den Kanälen. Die absolute Normierung der differentiellen Wirkungsquerschnitte ist allerdings oft ein Problem. Wir denken, daß die in dieser Arbeit entwickelten Normierungsvorschriften hier nützlich sein können.

5.3 Coulombdissoziation von ${}^9\text{Be}$

Wir verwenden hier den gleichen Formalismus wie im vorigen Abschnitt, um Vorhersagen über die Coulombdissoziation von ${}^9\text{Be}$ zu machen. Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall eines p-Wellengrundzustandes. Die Coulombdissoziationsexperimente haben sich bis jetzt auf s-Wellenzuständen konzentriert, bei denen die Theorie im wesentlichen wohl verstanden ist.

Abb.5.3 zeigt die Dipolstärke als Funktion der Photonenenergie gemäß Gl.(5.1). Für den Fall der Coulombdissoziation von ${}^9\text{Be}$ erwarten wir eine gute Beschreibung der Coulombdissoziationsexperimente mit Hilfe der Effektivreichweitennäherung.

5.4 Nukleare Beiträge

Die Dissoziation von schwach gebundenen Kernen wird maßgeblich durch die langreichweitige elektromagnetische Wechselwirkung erzeugt. Eine vollständige Diskussion der Dissoziationsprozesse, insbesondere die Frage nach der Impulsverteilung der Fragmente, erfordert aber die Berücksichtigung nuklearer Reaktionsmechanismen. Vor allem die Absorption eines Teils des Projektils durch das Target spielt in diesem Zusammenhang eine wichtige Rolle. Das Target wird dabei in guter Näherung als 'schwarze Scheibe' beschrieben [77]. Dieses Phänomen wird für das Deuterium am elegantesten durch die Theorie von Akhiezer und Sitenko [78] sowie Evlanov und Sokolov [79] beschrieben. Sie fanden den dreifach differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega_1 d\Omega_2 dE_2} = \frac{\mu}{(2\pi)^3 \hbar^2} \frac{k_1 k_2}{k} |f_d(\vec{q}, \vec{Q})|^2. \quad (5.5)$$

Dabei ist $\hbar\vec{k}$ der Impuls des Projektils im Schwerpunktsystem, $\hbar\vec{k}_1$ bzw. $\hbar\vec{k}_2$ sind die Impulse der Fragmente und $\hbar\vec{Q}$ ist den Impulsübertrag an das Projektil während der Streuung.

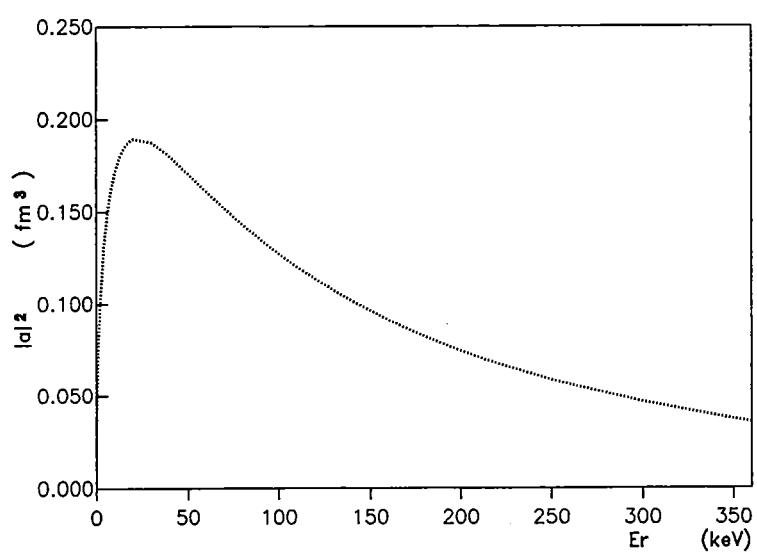


Abbildung 5.3: Dipolstärke $\frac{dB}{dE}$ als Funktion der relativen Energie

Die gesamte 'Streuamplitude' für Coulomb- und nukleare Dissoziation wird dabei gegeben durch :

$$f_d(\vec{q}, \vec{Q}) = f_N(\vec{q}, \vec{Q}) + f_C(\vec{q}, \vec{Q}). \quad (5.6)$$

Die Amplitude für Coulombanregung ist dabei mit $f_C(\vec{q}, \vec{Q})$ bezeichnet. Die durch nukleare Effekte hervorgerufene Amplitude $f_N(\vec{q}, \vec{Q})$ wird für leicht gebundene Nukleonen in Ref. [25] berechnet:

$$\begin{aligned} f_N(\vec{q}, \vec{Q}) \simeq & \quad ikR \left\{ \frac{J_1(QR)}{Q} [F(-\beta_2 \vec{Q}, \vec{q}) + F(\beta_1 \vec{Q}, \vec{q})] \right. \\ & - \frac{ikR^2}{2\pi} \int d^2 Q' \frac{J_1(Q'R)}{Q'} \frac{J_1(|\vec{Q} - \vec{Q}'| R)}{|\vec{Q} - \vec{Q}'|} F(\beta_1 \vec{Q} - \vec{Q}', \vec{q}) \}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Dabei ist $\beta_1 = m_2/m_1 + m_2$, $\beta_2 = m_1/m_1 + m_2$ und $R = 1.2A_T^{1/3} fm$. Der Formfaktor $F(\vec{Q}, \vec{q})$ ist gegeben durch

$$F(\vec{Q}, \vec{q}) = \int d^3 r \psi_i^*(\vec{r}) e^{i\vec{Q}\vec{r}} \psi_f(\vec{r}), \quad (5.8)$$

wobei ψ_f die Grund- und ψ_i die Kontinuumszustandswellenfunktion darstellen. Die obere Zeile von Gl. (5.7) entspricht der sog. Stoßnäherung, welche i.A. die Winkelverteilung der Fragmente und die Dissoziationsquerschnitte bei niedrigen Impulsüberträgen gut beschreibt. Die untere Zeile trägt nur bei höheren Energien wesentlich zur nuklearen Amplitude bei.

Der Formfaktor $F(\vec{Q}, \vec{q})$ läßt sich am einfachsten in der Effektivreichweitennäherung berechnen. Das Integral in Gl.(5.8) läßt sich durch Partialwellenentwicklung des Übergangsoperators und des Kontinuumszustands berechnen. Der Wechselwirkungsradius a bildet dabei die untere Grenze des radialen Integrationsbereichs. Die Endlichkeit des Integrals ist damit gesichert.

Das Integral aus Gl. (5.8) läßt sich für gebundene s -Wellenneutronen bei Integration über den ganzen r -Bereich analytisch berechnen. Man erhält:

$$F(\vec{Q}, \vec{q}) \simeq N_f \sqrt{8\pi\beta} \left\{ \frac{1}{(\vec{Q} - \vec{q})^2 + \beta^2} + \frac{1}{2Q(i\beta + Q)} \ln \frac{q - Q - i\beta}{q + Q - i\beta} \right\}. \quad (5.9)$$

Dies ist bis auf den Normierungsfaktor die (komplex konjugierte) Formel von Akhieser und Sitenko [78]. Es sei darauf hingewiesen, daß es sich hierbei nur

um eine Näherung handelt. Das Integral sollte sich normalerweise nur über das Gebiet außerhalb der Reichweite der Kernkräfte erstrecken. Außerdem werden die Streuphasen in den höheren Kanälen nicht mitberücksichtigt, so daß Gl.(5.11) nicht von allgemeiner Gültigkeit ist. Dies gilt insbesondere für Kerne mit einer endlichen Ausdehnung. Die exakte Lösung von Gl.(5.9) ist jedoch von großer Wichtigkeit für das Verständnis der Dissoziationsmechanismen in Schwerionenstößen und für die Beschreibung der Impulsverteilung der Fragmente. Wir sehen hier von diesen Schwierigkeiten ab und finden in der Dipolnäherung

$$F(\vec{Q}, \vec{q}) \simeq N_f \sqrt{32\pi\beta} \frac{\vec{Q} \cdot \vec{q}}{(q^2 + \beta^2)^2} \quad (5.10)$$

mit den Normierungskoeffizienten $N_f = B_{1f}(2\beta^3)^{-1/2}$ aus Gl. (4.39). Die obige Gleichung läßt sich bei Beschränkung der Integration auf den äußeren Bereich wie folgt verbessern :

$$F(\vec{Q}, \vec{q}) \simeq \sqrt{2\pi\beta} \quad N_f \left\{ 2 \int_a^\infty dr \frac{\sin(\Delta r)}{\Delta} e^{-\beta r} - \frac{1}{iQ(\beta - iq)} \int_a^\infty dr \frac{e^{-\beta r + i(Q-q)r} - e^{-\beta r + i(Q+q)r}}{r} \right\}, \quad (5.11)$$

Dabei haben wir die Definition $\vec{\Delta} = \vec{Q} - \vec{q}$ verwendet. Wir finden schließlich für den Formfaktor

$$F(\vec{Q}, \vec{q}) \simeq N_f \sqrt{8\pi\beta} e^{-\beta a} \left\{ \frac{\beta \sin \Delta a + \Delta \cos \beta a}{\Delta(\beta^2 + \Delta^2)} - \frac{1}{2Q} \frac{e^{\beta a}}{q + i\beta} [E_1^+(\beta, Q, q) - E_1^-(\beta, Q, q)] \right\}, \quad (5.12)$$

mit der Notation :

$$E_1^\pm(\beta, Q, q) = E_1(\beta a - iQa \pm iqa). \quad (5.13)$$

Diese Überlegungen lassen sich auch auf die Aufspaltung von Kernen mit beliebigen Drehimpulsen ausdehnen. Der Formfaktor läßt sich nämlich allgemein schreiben als:

$$F_{if}(\vec{Q}, \vec{q}) \simeq B_f \left\{ \int d^3r e^{i\vec{Q}\vec{r}} h_{l_f}^{(1)}(i\beta r) Y_{l_f}^{m_l}(\hat{r}) - \frac{1}{\beta - iq} \int d^3r e^{i\vec{Q}\vec{r}} \frac{e^{-iqr}}{r} h_{l_f}^{(1)}(i\beta r) Y_{l_f}^{m_l}(\hat{r}) \right\}. \quad (5.14)$$

Die Winkelintegration läßt sich nach einer Partialwellenentwicklung der Exponentialfunktion leicht durchführen. Man findet bis auf einen Phasenfaktor:

$$F(\vec{Q}, \vec{q}) \simeq 4\pi B_f \left\{ Y_{l_f}^{m_l}(\hat{\Delta}) \int_a^\infty dr r^2 j_{l_f}(\Delta r) h_{l_f}^{(1)}(i\beta r) - \frac{1}{(q + i\beta)} Y_{l_f}^{m_l}(\hat{Q}) \int_a^\infty dr r e^{-iqr} j_{l_f}(Qr) h_{l_f}(i\beta r) \right\}. \quad (5.15)$$

Dieser Ausdruck läßt sich mit Hilfe von Besselfunktionen und Exponentialintegralen analytisch lösen, so daß wir im Rahmen dieser Arbeit nicht im einzelnen darauf einzugehen brauchen. Das erste Integral Gl.(5.15) kann sogar der Einfachheit halber auf den ganzen Integrationsbereich erstreckt werden. Diese Überlegungen lassen sich auf den Fall einer Coulombwechselwirkung im Endzustand allerdings nicht so einfach übertragen. Man kann aber noch eine Partialwellenentwicklung des Übergangsoperators $e^{i\vec{Q}\vec{r}}$ und der Wellenfunktionen durchführen. Es sei noch darauf hingewiesen, daß das Matrixelement Gl.(5.8) auch bei der Berechnung von Effekten höherer Ordnungen der Coulombwechselwirkung auftritt.

5.5 Anwendungen

Die Verwendung der Coulombanregung zum Studium von Kerneigenschaften gehört schon seit langem zum Werkzeug der Kernphysik. Mit Hilfe der Coulombanregung können z.B. Riesenresonanzen sehr effektiv angeregt werden. In neuester Zeit wird die Coulombanregung auch zum Studium der Struktur von leichten radioaktiven Kernen fern der Stabilitätslinie eingesetzt. Einige von den dabei untersuchten Reaktionen spielen eine große Rolle bei der Entstehung von Kernen in den Sternen durch Teilcheneinfang. Da die relevanten Temperaturen für kernphysikalische Verhältnisse sehr niedrig sind (etwa

15keV), ist die direkte Messung der Teilcheneinfangquerschnitte im Labor enorm schwierig. Diese Wirkungsquerschnitte sind wegen der Coulombbarriere oft nicht nur klein, sie ändern sich auch rapide mit der Energie. In der Praxis definiert man daher eine Größe, die sich nur relativ wenig mit der Energie ändert, den sogenannten astrophysikalischen S -Faktor :

$$S(E) = \sigma_{capt}(E) E \exp(2\pi\eta). \quad (5.16)$$

Eine gute Übersicht über die Anwendung der Coulombdissoziation in der Astrophysik kann man in dem Übersichtsartikel von Baur und Rebel [80] finden.

Kapitel 6

Effekte höherer Ordnung in der Coulombdissoziation

6.1 Motivation

Die enge Beziehung zwischen den Wirkungsquerschnitten für Coulomb - und Photodissoziation hat zur Anwendung der Coulombdissoziation auch auf Systeme, bei denen direkte Photonukleare Reaktionen experimentell zu erfassen sind, z.B. Systeme mit einem radioaktiven Kern im Endzustand, geführt. Die einfache Beziehung zwischen den Wirkungsquerschnitten gilt aber nur in erster Ordnung der Störungstheorie. Diese reicht wegen der kleinen elektromagnetischen Kopplungskonstanten oft zur Beschreibung der experimentellen Daten völlig aus, falls der Stoßparameter nicht zu klein wird, bzw. falls der Impulsübertrag in der Streuung relativ klein bleibt. Allerdings wird die Unitarität der Streumatrix bei größeren Impulsüberträgen in dieser Näherung verletzt. Dies macht die Berücksichtigung von Effekten höherer Ordnungen erforderlich. Letztere können die oben erwähnte einfache Beziehung zwischen den Wirkungsquerschnitten für Photo- und Coulombdissoziation zerstören. Es ist deshalb wichtig bei vielen Anwendungen ihre Größe abzuschätzen. In diesem Zusammenhang sei auch erwähnt, daß neuerdings Fragen der anomalen Impulsverteilung der Fragmente (*Post-acceleration*) aufgetreten sind, die man möglicherweise als Effekte höherer Ordnungen beschreiben kann. Auf eine befriedigende Erklärung bleibt zu warten.

Die Effekte höherer Ordnungen lassen sich im Prinzip durch die numeri-

sche Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung berücksichtigen. Dies ist im dreidimensionalen Raum aber technisch sehr aufwendig und die Interpretation der Ergebnisse wird sehr kompliziert.

Eine Methode, die diese Probleme umgeht, ist von Bertulani [81] vorgeschlagen worden. Sie verwendet eine Partialwellenentwicklung der Wellenfunktion, bei der die Zeitabhängigkeit auf den Radialteil der Wellenfunktion beschränkt bleibt. Diese Überlegungen sind neu und noch nicht ganz ausgereift. Es ist zu erwarten, daß die rasche Entwicklung der Computertechnik bald neue Möglichkeiten zur numerischen Behandlung mehrdimensionaler Differentialgleichungen eröffnen wird. Wir wenden jedoch in dieser Arbeit den traditionellen Formalismus der zeitabhängigen Störungstheorie an, um die Effekte höherer Ordnungen in der Coulombdissoziation von schwach gebundenen Kernen an zwei Beispielen (^{11}Li und ^9Be) zu demonstrieren.

6.2 Zeitabhängige Störungstheorie

Im Laufe der Zeit sind Verschiedene Methoden zur approximativen Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$i\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} = H_0(\vec{x}) + V(\vec{x},t)\psi(\vec{x},t) \quad (6.1)$$

entwickelt worden, s. z.B. die Monographien [48, 2] und die Lehrbücher [82, 7, 46]. Der Hamiltonoperator des betrachteten Systems wird dabei fast immer in einen zeitabhängigen und in einen zeitunabhängigen Anteil zerlegt. Der zeitunabhängige Anteil bestimmt die stationären Zustände des Systems, die ihrerseits eine vollständige Basis für die Entwicklung beliebiger Wellenfunktionen bilden. Der zeitabhängige Anteil des Hamiltonoperators erzeugt Übergänge zwischen diesen stationären Eigenzuständen des Systems.

Die Zeitentwicklung der Wellenfunktion kann am elegantesten durch den Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild dargestellt werden, s. die oben erwähnten Lehrbücher und Monographien sowie Refn. [83, 85, 84, 86]. Die Wellenfunktion ist im Wechselwirkungsbild gegeben durch:

$$\psi_I(\vec{x},t) = \exp\left(\frac{iH_0t}{\hbar}\right)\psi(\vec{x},t). \quad (6.2)$$

Dabei ist $\psi(\vec{x}, t)$ eine Lösung der Schrödingergleichung Gl.(6.1). Diese lautet im Wechselwirkungsbild :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_I(\vec{x}, t) = V_I(\vec{x}, t) \psi_I(\vec{x}, t), \quad (6.3)$$

wobei $V_I(\vec{x}, t)$ der Störoperator im Wechselwirkungsbild ist:

$$V_I(\vec{x}, t) = \exp\left(i\frac{H_0 t}{\hbar}\right) V(\vec{x}, t) \exp\left(-i\frac{H_0 t}{\hbar}\right). \quad (6.4)$$

Die Differentialgleichung (6.3) kann iterativ gelöst werden. Eine geschlossene Lösung ist symbolisch durch den Zeitentwicklungsoperator $U(t, t_0)$ gegeben:

$$\psi_I(\vec{x}, t) = U(t, t_0) \psi_I(\vec{x}, t_0), \quad (6.5)$$

wobei $U(t, t_0)$ der folgende unitäre Operator ist:

$$U(t, t_0) = T \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(x, t')\right). \quad (6.6)$$

Die Anfangszeit wird üblicherweise in die ferne Vergangenheit gelegt ($t \rightarrow -\infty$). T in Gl.(6.6) ist der Zeitordnungsoperator:

$$T(A(t)B(t')) = \begin{cases} A(t)B(t') & t > t'; \\ B(t')A(t) & t' > t. \end{cases} \quad (6.7)$$

Die Übergangsamplitude in den Kontinuumszustand $\psi_i(\vec{r}, t)$ ist gegeben durch :

$$a_{fi} = \langle \psi_i(\vec{x}, t) | \psi_f(\vec{x}, t_0) \rangle, \quad (6.8)$$

$\psi_i(\vec{x}, t = \infty)$ ist ein stationärer Zustand, der die Randbedingungen einer Streuwellenfunktion erfüllt. Aus der Übergangsamplitude können die Übergangswahrscheinlichkeit und der Wirkungsquerschnitt berechnet werden.

6.3 Sudden approximation

Die Bestimmung des Zeitentwicklungsoperators im Wechselwirkungsbild ist äquivalent zur exakten Lösung der Schrödingergleichung in der üblichen Formulierung der Wellenmechanik. Eine exakte Lösung des Problems ist i.A.

nicht möglich. Es haben sich aber einige Verfahren zur näherungsweisen Lösung bewährt. Vor allem die Störungstheorie, die eine Entwicklung der Wellenfunktionen und gewisser Observablen nach Potenzen der Wechselwirkung darstellt, ist hier zu nennen. In manchen Fällen treten allerdings Divergenzen in der Entwicklung bei der Störungstheorie auf, die durch das Verfahren der sog. Renormierung beseitigt werden können. Dieses Verfahren wird aber immer schwieriger, wenn man zu höheren Ordnungen übergeht. Außerdem ist die Unitarität des Entwicklungsoperators nicht in jeder Ordnung automatisch gewährleistet. Dies kann zu Anregungswahrscheinlichkeiten führen, die größer als eins sind und deshalb physikalisch nicht mehr interpretierbar sind. Näherungsmethoden, die nicht auf die Störungstheorie basieren, können in diesen Fällen von Hilfe sein.

Eine solche Methode ist die sog. *sudden approximation*. Dabei ist die Wellenfunktion im Wechselwirkungsbild ist gegeben durch

$$\psi_I(\vec{x}, t) = \exp \left(\frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t dt' V_I(\vec{x}, t') \right) \psi_f(\vec{x}, -\infty), \quad (6.9)$$

falls die Wechselwirkungszeit

$$\tau_{Stoss} = \frac{b}{\gamma v} \quad (6.10)$$

viel kleiner als die typische Übergangszeit von Kernanregungen

$$\tau = \frac{1}{\omega} \quad (6.11)$$

ist. Für die Coulombanregung findet man in Dipolnäherung für die innere Wellenfunktion im Endzustand ($t \rightarrow \infty$) im Grenzfall

$$\frac{\tau_{Stoss}}{\tau} \rightarrow 0 \quad (6.12)$$

die Wellenfunktion :

$$\psi_I(\vec{r}) = e^{(i\vec{q} \cdot \vec{r})} \psi_f(\vec{r}) \quad (6.13)$$

Dabei ist ψ_f die Wellenfunktion des Grundzustands und

$$\hbar q = \frac{2Z_T Z_{eff}^{(1)} e^2}{bv} \quad (6.14)$$

die Änderung des relativen Impulses der Fragmente in Schwerpunktskoordinaten, v die Geschwindigkeit des Projektils im Bezug auf das Target und $Z_{eff}^{(1)}$ die effektive Ladungszahl des Projektils beim Dipolübergang :

$$Z_{eff}^{(1)} = \mu \left(\frac{Z_1}{m_1} - \frac{Z_2}{m_2} \right). \quad (6.15)$$

Wir haben uns hier auf die relative Wellenfunktion der Cluster beschränkt. Der gesamte Hamiltonoperator des Projektils kann jedoch in einen Schwerpunktanteil und einen inneren Anteil separiert werden. Das führt zu einer entsprechenden Faktorisierung der gesamten Wellenfunktion. Der Schwerpunktanteil beschreibt dabei im wesentlichen die Coulombstreuung und wird daher in dieser Arbeit nicht behandelt.

Wir verwenden weiter die Grundzustandswellenfunktion Gl. (3.26) zur Berechnung der Observablen. Der Kontinuumszustand wird bei niedrigen Energien im wesentlichen durch eine ebene Welle mit einer Streuphasenkorrektur im s -Kanal Gl. (4.80) gegeben. Genauer gesagt stellt diese den Wert der Wellenfunktion für große Abstände dar. Allgemeiner gilt:

$$\psi_i(\vec{r}) = 4\pi \sum_{l_i, m_i} i^{l_i} \exp(i\delta_{l_i}) g_{l_i}(k, r) Y_{l_i}^{m_i*}(\hat{k}) Y_{l_i}^{m_i}(\hat{r}) \chi_{1/2}^{\beta_2}. \quad (6.16)$$

Dabei können wir die Partialwellen $g_l(kr)$ vom Drehimpulsabhängigen Kastenpotential oder Näherungen hierfür verwenden.

6.4 Coulombdissoziation

Die Amplitude für die Coulombdissoziation ist in der *sudden approximation* gegeben durch :

$$a_{fi} = \int d^3r \psi_i^*(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \psi_f(\vec{r}). \quad (6.17)$$

Sie kann durch Partialwellenentwicklung des Übergangsoperators berechnet werden :

$$e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} = 4\pi \sum_{\lambda\nu} i^\lambda j_\lambda(qr) Y_\lambda^{\nu*}(\hat{q}) Y_\lambda^\nu(\hat{r}). \quad (6.18)$$

Für die Besselfunktionen $j_\lambda(qr)$ kann für den Fall, daß $qa \ll 1$, auch die 'Langwellennäherung'

$$j_\lambda(qr) \simeq \frac{(qr)^\lambda}{(2\lambda + 1)!!}, \quad (6.19)$$

verwendet werden. Der Impulsübertrag ist in der *sudden approximation* rein transversal. Sein Richtungsvektor ist in sphärischen Koordinaten (θ, ϕ) gegeben durch:

$$\hat{q} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right). \quad (6.20)$$

Es tragen nur Terme mit $\lambda + \nu = 2n$ zur Summe in Gl.(6.18) bei. Die z -Achse liegt in Richtung der Projektilbewegung, und der Stoßparameter in x -Richtung.

Es bleibt noch zu bemerken, daß eine geschlossene Formel für die Übergangsamplitude Gl.(6.17) gefunden werden kann, wenn es sich beim Grundzustand um eine s -Welle handelt (s. Abschnitt 6.6). In diesem Fall ist die äußere Wellenfunktion über den ganzen Raum quadratisch integrierbar. Dies gilt allerdings nicht für höhere relative Bahndrehimpulse der Cluster. Die Verwendung der Effektivreichweitennäherung erfordert die Beschränkung der radialen Integration auf das Gebiet außerhalb der Reichweite der Kernkräfte.

Die quadratische Amplitude für einen Übergang zwischen unpolarisierten Anfangs- und Endzustand in der *sudden approximation* wurde in Ref. [11] angegeben. Sie lautet :

$$\begin{aligned} |a_s(\vec{k}, \vec{b})|^2 &= \frac{(4\pi)^3}{(2I_f + 1)} \sum_{m_f \beta_2} \left\| \sum_{\lambda, l_i, \nu} \{(2l_i + 1)(2\lambda + 1)(2l_f + 1)\}^{1/2} \right. \\ &\quad i^{-l_i + \lambda} \exp(-i\delta_{l_i}) < l_f m_f - \beta_2 S_2 \beta_2 | I_f m_f > \\ &\quad R_{l_i \lambda}^{(2)} Y_{l_i}^{\nu + m_f - \beta_2}(\hat{k}) Y_{\lambda}^{-\nu}(\hat{q}) \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} l_i & \lambda & l_f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_i & \lambda & l_f \\ \beta_2 - \nu - m_f & \nu & m_f - \beta_2 \end{pmatrix} \right\|^2. \quad (6.21) \end{aligned}$$

Bei der Integration über den Raumwinkel Ω_k finden wir, unter Berücksichtigung des Additionstheorems der Kugelflächenfunktionen Gl. (2.26) und der Vollständigkeitsrelation für die Wigner 3J - Symbole [27] :

$$\int d\Omega |a_s(\vec{k}, \vec{b})|^2 = (4\pi)^2 \sum_{l_i, \lambda} (2l_i + 1) (2\lambda + 1) \begin{pmatrix} l_i & \lambda & l_f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 |R_{l_i \lambda l_f}^{(2)}|^2. \quad (6.22)$$

Das in Gl.(6.21) aufgetretene Radialintegral ist gegeben durch :

$$R_{l_i \lambda l_f}^{(2)} = \int dr g_{l_i}(kr) j_{\lambda}(qr) g_{l_f}(r). \quad (6.23)$$

Die Radialintegrale können so normiert werden, daß die Analogie zur Entwicklung des freien elektromagnetischen Feldes nach Multipolfeldern offensichtlich wird:

$$R_{l_i \lambda l_f}^{(3)} = \frac{(2\lambda + 1)!!}{q^\lambda} \int dr g_{l_i}(kr) j_\lambda(qr) g_{l_f}(r) . \quad (6.24)$$

Mit Gl.(6.22) erhalten die Stoßparameter abhängige Dissoziationswahrscheinlichkeit :

$$\begin{aligned} P(b) &= \int \frac{dk}{(2\pi)^3} k^2 \int d\Omega |a_s(k, b)|^2 \\ &= \int \frac{d\omega}{\omega} \frac{1}{\pi} k(k^2 + \beta^2) \sum_{l_i \lambda} (2l_i + 1) \begin{pmatrix} l_i & \lambda & l_f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \\ &\quad \frac{2\lambda + 1}{(2\lambda + 1)!!^2} q^{2\lambda} |R_{l_i \lambda l_f}^{(3)}|^2 . \end{aligned} \quad (6.25)$$

Dieses Ergebnis stimmt für $\lambda = 1$ mit demjenigen überein, daß man unter Verwendung der Methode der äquivalenten Photonenzahlen in erster Ordnung der *sudden approximation* in der Langwellennäherung erhalten würde. Bei dieser Methode ist die Stoßparameter abhängige Dissoziationswahrscheinlichkeit gegeben durch:

$$P(b) = \int \frac{d\omega}{\omega} N_{1s}(\omega, q) \sigma^{(\gamma, n)} \quad (6.26)$$

mit

$$\sigma^{(\gamma, n)} = \frac{4\pi}{3} \alpha Z_{eff}^2 k(k^2 + \beta^2) \sum_{l_i} (2l_i + 1) \begin{pmatrix} l_i & 1 & l_f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 |R_{l_i 1 l_f}^{(3)}|^2 . \quad (6.27)$$

Die Anzahl der virtuellen Photonen ist damit gegeben durch :

$$\begin{aligned} N_{1s} &\simeq \frac{q^2}{4\pi^2 (Z_{eff}^{(1)})^2 \alpha} \\ &= \alpha \left(\frac{Z_{tc}}{\pi b v} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.28)$$

Die Verhältnisse lassen sich wie folgt verallgemeinern

$$P(b) = \int \frac{d\omega}{\omega} \sum_{\lambda} N_{\lambda s}(\omega, q) \sigma_{\lambda s}^{(\gamma, n)}(\omega), \quad (6.29)$$

mit

$$N_{\lambda s}(\omega, q) = \frac{q^2}{2\pi^2(Z_{eff})^2\alpha} \left(\frac{qc}{\omega}\right)^{2\lambda-2} \frac{\lambda}{\lambda+1} \quad (6.30)$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda s}^{(\gamma, n)}(\omega) = & \frac{2\pi(2\lambda+1)(\lambda+1)}{\lambda(2\lambda+1)!!^2} \alpha Z_{eff}^2 k (k^2 + \beta^2) \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2\lambda-2} \\ & \sum_{l_i} (2l_i+1) \begin{pmatrix} l_i & \lambda & l_f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 |R_{l_i \lambda l_f}^{(3)}|^2 . \end{aligned} \quad (6.31)$$

Wir erhalten schließlich den totalen Dissoziationsquerschnitt wie üblich durch Integration über den Stoßparameter:

$$\sigma_{cd} = \int \frac{d\omega}{\omega} \sum_{\lambda} n_{\lambda s}(\omega) \sigma_{\lambda s}^{(\gamma, n)}(k, q) , \quad (6.32)$$

wobei

$$n_{\lambda s}(\omega) = 2\pi \int db \, b \, N_{\lambda s}(\omega, q) . \quad (6.33)$$

Die hier auftretenden partiellen Wirkungsquerschnitte unterscheiden sich von den elektrischen Wirkungsquerschnitten nur durch den radialen Übergangoperator, der hier eine reine Besselfunktion und nicht deren Ableitungen enthält. Dadurch werden die Wirkungsquerschnitte kleiner. Diese Formulierung vereinfacht die numerische Berechnung der Wirkungsquerschnitte. Analytische Ausdrücke für die radialen Integrale in Gl.(6.21) können in der Effektivreichweitennäherung gefunden werden.

6.5 Übergänge vom Grund- zum Grundzustand

Die Amplitude eines Überganges vom Grundzustand in den Grundzustand wird in der *sudden approximation* gegeben durch :

$$a_0 = \int d^3r \psi_f^*(\vec{r}) e^{i \vec{q} \cdot \vec{r}} \psi_f(\vec{r}) . \quad (6.34)$$

Man findet in führender Ordnung für die Dissoziationswahrscheinlichkeit [13]:

$$\begin{aligned} P_{cd}(b) &= 1 - |a_0|^2 \\ &\simeq \frac{q^2 \langle r^2 \rangle}{3} , \end{aligned} \quad (6.35)$$

wobei $\langle r^2 \rangle$ den mittleren quadratischen Radius bezeichnet. Wir berechnen den totalen Dissoziationsquerschnitt für Zweiclustersysteme durch Integration über die relevanten Stoßparameter :

$$\sigma_{cd} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} db \, 2\pi b \, P_d(b). \quad (6.36)$$

Damit ergibt sich :

$$\sigma_{cd} \simeq \frac{8\pi Z_t^2 (Z_{eff}^{(1)})^2 e^4 \langle r^2 \rangle}{3\hbar^2 v^2} \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}. \quad (6.37)$$

Dabei ist b_{min} die Summe von Projektil- und Targetradius:

$$b_{min} \simeq (A_t^{1/3} + A_p^{1/3}) \, 1.2 \, fm. \quad (6.38)$$

Der maximale Stoßparameter ist in nichtrelativistischer Näherung von der Ordnung [88] :

$$b_{max} \simeq \frac{\hbar v}{\sqrt{8B}}. \quad (6.39)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß diese Werte nur eine Abschätzung des experimentellen Sachverhalts darstellen. Die Kenntnis des genauen Wertes ist wegen des logarithmischen Verhaltens nicht sehr wichtig. Eine vollständige Diskussion dieses Problems ist im Rahmen der semi-klassischen Theorie nicht möglich.

Der maximale Stoßparameter b_{max} darf i.A. als ein natürlicher Cut - off für die Coulombanregung angesehen werden. Er kann durch Anpassung an experimentellen Daten definiert werden. Man kann z.B. die mittlere relative Energie der Cluster nach der Dissoziation zur Abschätzung des maximalen Stoßparameters benutzen. Die entsprechende Photonenenergie genügt dabei der Bedingung :

$$\frac{\bar{E}_\gamma b_{max}}{\hbar v} \simeq 1. \quad (6.40)$$

Die Ergebnisse sind dann mit den experimentellen Werten zu vergleichen. Wie aus Gl.(6.37) ersichtlich, ist der genaue Wert des mittleren quadratischen Radius wichtig. Für Zweiclustersysteme ohne Coulombwechselwirkung finden wir:

$$\sigma_{cd} \simeq \frac{8\pi Z_t^2 Z_p^2 e^4 m^2 \langle r^2 \rangle}{3v^2 (M + m)^2 \hbar^2} \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}. \quad (6.41)$$

dabei ist m die Masse des kleinsten Clusters, M die Masse des größten Clusters und B deren Bindungsenergie. Die Verwendung der Effektivreichweittennäherung bzw. des entsprechenden Kastenpotentialmodells erlaubt die Herleitung von geschlossenen Ausdrücken für den Dissoziationsquerschnitt :

$$\sigma_{cd} \simeq \frac{2\pi Z_t^2 Z_p^2 e^4 m}{3v^2(M+m)MB} \frac{e^{2\beta a}}{1+\beta a} \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}. \quad (6.42)$$

Dieser stimmt für kleine Bindungsenergien mit der Formel von Hansen [88] überein. Wir können z.B. für p-Wellenzustände nahe der Schwelle den mittleren quadratischen Radius aus Gl.(4.112) verwenden. Wir finden:

$$\sigma_{cd} \simeq \frac{4\pi}{3\beta a} \left(\frac{Z_t Z_p e^2 m a}{(M+m)\hbar v} \right)^2 \frac{5+6\beta a+2\beta^2 a^2}{3+3\beta a+\beta^2 a^2} \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}. \quad (6.43)$$

Entsprechende Formeln lassen sich in dieser Weise auch für Grundzustände mit höheren Drehimpulsen berechnen.

6.6 Effekte höherer Ordnung in der Coulombdissoziation von ^{11}Li

Der ^{11}Li -Kern ist wegen zahlreicher Besonderheiten Gegenstand vieler Untersuchungen. Die zwei Valenzneutronen und der ^9Li -Core bilden jeweils ungebundene Zweikörpersysteme, während der gesamte Kern gebunden ist. Viele Phänomene lassen sich durch die Annahme eines Dineutronclusters beschreiben, dessen Bindungsenergie so niedrig (ca. 0.3 MeV) ist, daß es einen Halo um den Core bildet [13]. Viele Rechnungen werden durch diese Annahme vereinfacht. Wir setzen weiter eine Kontaktwechselwirkung zwischen Dineutron und Core voraus. Dies ergibt bekanntlich einige Probleme mit der Normierung der Matrixelemente. Für eine qualitative Analyse bleibt die Normierung jedoch noch brauchbar. Wir verwenden dieses Modell, um die Effekte höherer Ordnung bei der Coulombdissoziation abzuschätzen.

Der Grundzustand wird in diesem Modell durch die Wellenfunktion

$$|0\rangle = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \frac{e^{-\beta r}}{r} \quad (6.44)$$

beschrieben. Der Kontinuumszustand lautet :

$$|\vec{k}\rangle = e^{i\vec{k}\vec{r}} - \frac{1}{\beta + ik} \frac{e^{ikr}}{r} . \quad (6.45)$$

Die Coulombanregung wird in Dipolnäherung durch folgendes Potential im Schwerpunktsystem des Targets beschrieben :

$$V_{Dipole}(t) = \gamma Z_t Z_{eff}^{(1)} e^2 \frac{by + vtz}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} . \quad (6.46)$$

Relativistische Korrekturen werden dabei mitberücksichtigt.

Wir haben die Übergangsamplituden dann unter verschiedenen Näherungen berechnet :

(i) In erster Ordnung der zeitabhängiger Störungstheorie. Es ergibt sich :

$$a_i^1 = \sqrt{32\pi\beta} \frac{kq}{(k^2 + \beta^2)^2} X [K_1(X) \sin\theta \sin\phi - i\gamma K_0(X) \cos\theta .] \quad (6.47)$$

(ii) Im Grenzfall $X = \frac{\omega b}{\gamma v} \rightarrow 0$. Dieser Fall entspricht der *sudden approximation* in erster Ordnung entspricht. Wir erhalten:

$$a_s^1 = \sqrt{32\pi\beta} \frac{kq}{(k^2 + \beta^2)^2} \sin\theta \sin\phi . \quad (6.48)$$

(iii) In der *sudden approximation*, die Wechselwirkung wird jedoch in allen Ordnungen berücksichtigt:

$$\begin{aligned} a_s &= \langle \vec{k} | \exp i\vec{q}\vec{r} | 0 \rangle \\ &= \sqrt{8\pi\beta} \left\{ \frac{1}{(\vec{k} - \vec{q})^2 + \beta^2} + \frac{1}{2q} \frac{1}{k + i\beta} \ln \frac{(k - q) - i\beta}{(k + q) - i\beta} \right\} . \end{aligned} \quad (6.49)$$

Wir können daraus die Übergangswahrscheinlichkeiten berechnen und die Bedingungen für die Gültigkeit der *sudden approximation* studieren. Insbesondere die Abhängigkeit von der Projektilenergie im Laborsystem kann untersucht werden. Wir nehmen an, daß die *sudden approximation* gilt, wenn sie in erster Ordnung mit der zeitabhängigen Störungstheorie übereinstimmt.

Die Abbildungen 6.1, 6.2 und 6.3 zeigen die Übergangswahrscheinlichkeiten für die Coulombdissoziation von ^{11}Li am ^{208}Pb bei einer Projektilenergie von 30 MeV pro Nukleon und einem Stoßparameter von 15 fm in

Abhängigkeit von der Relativenergie der Fragmente in den vorhin beschriebenen Näherungen. Die *sudden approximation* stimmt mit der zeitabhängigen Störungstheorie bei sehr niedrigen Relativenergien gut überein. Diese Tatsache wird bei höheren Projektilenergien noch deutlicher. Abb. 6.4 zeigt die Richtungsabhängigkeit der Dissoziationswahrscheinlichkeiten für eine Relativenergie von 300 keV. Wir stellen fest, daß die Berücksichtigung von höheren Ordnungen der Wechselwirkung eine Asymetrie in der Verteilung der ${}^9\text{Li}$ -Kerne, parallel und antiparallel zum Stoßparameter auftritt. Es wurde eine bedeutende Verschiebung der Geschwindigkeitsverteilung von Li -Kernen in Richtung der Projektilbewegung zu größeren Energien hin beobachtet. Dieser Effekt wird als *Postacceleration* bezeichnet [89, 87]. Er konnte trotz vieler Versuche bisher nicht quantenmechanisch erklärt werden. Ansatzpunkte für künftige Untersuchungen werden durch die Verwendung realistischer Wellenfunktionen gegeben. Sie sollten eine bessere Beschreibung der Photodissoziation von ${}^{11}\text{Li}$ ergeben, und die Berücksichtigung höherer Multipolordnungen der Coulombwechselwirkung ermöglichen.

6.7 Effekte höherer Ordnung in der Coulombdissoziation von ${}^9\text{Be}$

Der obige Fall von ${}^{11}\text{Li}$ stellt die klassische Behandlung eines Kerns mit einem s -Wellengrundzustand dar. Es kann aber auch notwendig sein, die gleichen Vorgänge für Kerne mit höherem relativem Drehimpuls zwischen den Clustern zu untersuchen, da diese auch in der Natur vorkommen. Wir haben daher außerdem die Photodissoziation von Kernen mit einem p -Grundzustand am Beispiel von ${}^9\text{Be}$ studiert. Wir verwenden hier das gleiche Modell eines drehimpulsabhängigen Kastenpotentials und berechnen die Amplitude für die Coulombdissoziation in der *sudden approximation* Gl.(6.21). Beschränkt man sich auf die erste Ordnung, so ergibt sich:

$$|a_s^1(\vec{k}, \vec{b})|^2 = 3(4\pi)^3 \sum_{m_f \beta_2} \left\| \sum_{\lambda, l_i, \nu} (2l_i + 1)^{1/2} i^{-l_i} \exp(-i\delta_{l_i}) R_{l_i \lambda l_f}^{(4)} Y_{l_i}^{\nu+m_f-\beta_2}(\hat{k}) Y_{\lambda}^{-\nu}(\hat{q}) \begin{pmatrix} l_i & \lambda & l_f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_i & \lambda & l_f \\ \beta_2 - \nu - m_f & \nu & m_f - \beta_2 \end{pmatrix} \right\|^2 \quad (6.50)$$

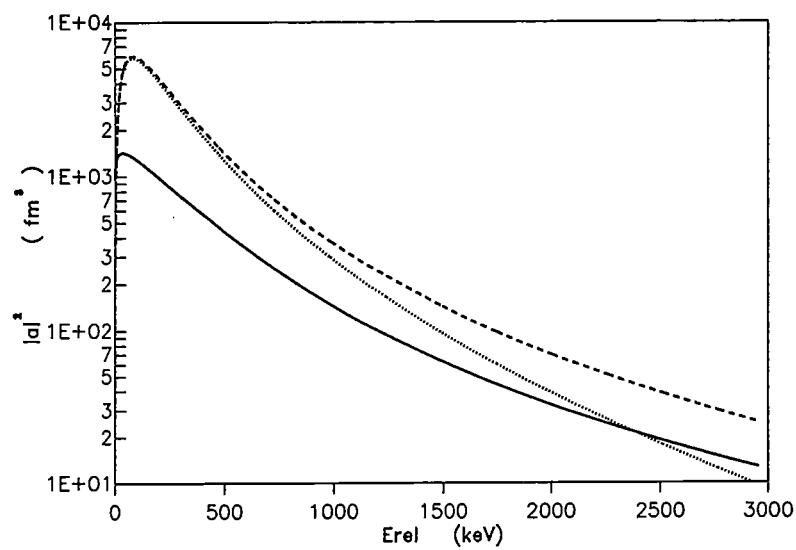


Abbildung 6.1: Wahrscheinlichkeit für die Coulombdissoziation von ^{11}Li in Richtung des Stoßparameters (y -Achse). Die gepunktete Linie wurde in erster Ordnung Störungstheorie, die gestrichelte Linie in erster Ordnung der *sudden approximation* und die durchgezogene Linie in allen Ordnungen der *sudden approximation* bei 30 MeV/A Projektilenergie berechnet.

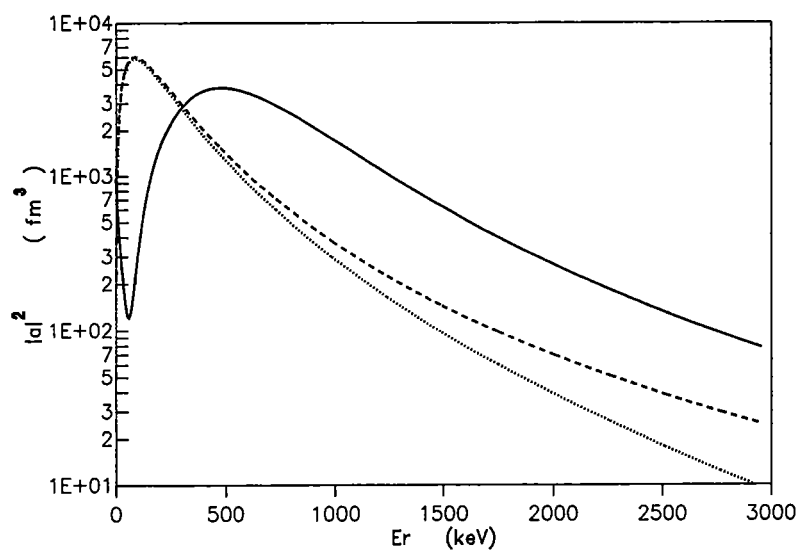


Abbildung 6.2: Übergangswahrscheinlichkeit in der dem Stoßparameter entgegengesetzten Richtung bei 30 MeV/A -Projektilenergie. Sonst wie Abb. 6.1.

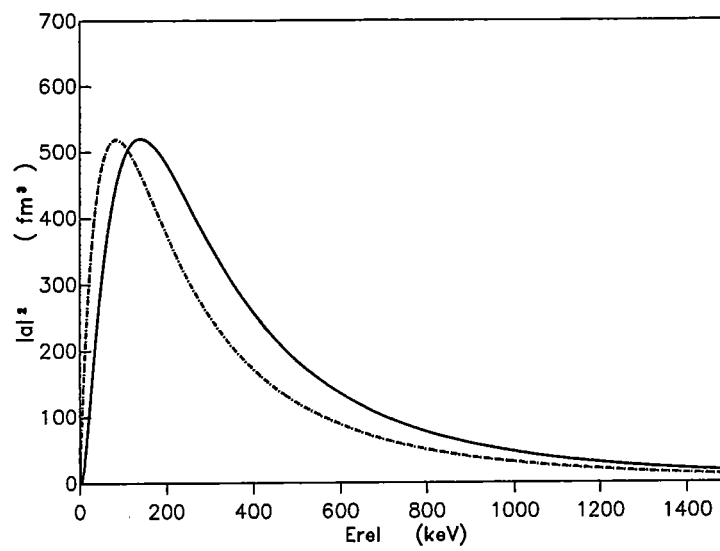


Abbildung 6.3: Wie Abb.6.2, aber bei $800 MeV/A$ -Projektilenergie. Die *sudden approximation* stimmt in erster Ordnung praktisch mit der zeitabhängigen Störungstheorie überein.

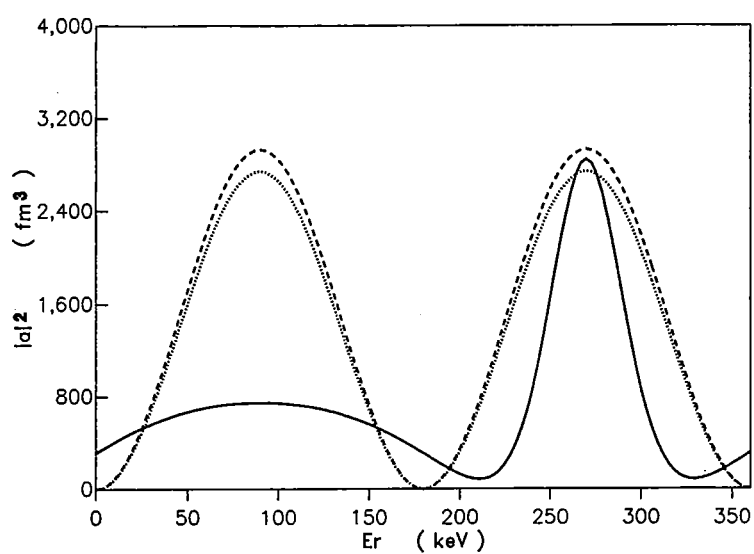


Abbildung 6.4: Abhängigkeit der Dissoziationswahrscheinlichkeit vom Azimuthwinkel ϕ bei einer Stoßenergie von $30 \text{ MeV}/A$.

Dabei wurde für das Radialintegral $R_{l_i l_f}^{(2)}$ in der Langwellennäherung ($j_1(qr) \rightarrow \frac{qr}{3}$) verwendet. Wir berechnen außerdem die Dissoziationswahrscheinlichkeit in erster Ordnung der zeitabhängigen Störungstheorie. Es ergibt sich

$$|a_i^1(\vec{k}, \vec{b})|^2 = X^2 K_1^2(X) |a_s^1|^2 + \frac{X^2 K_0^2(X)}{\gamma^2} |\langle \vec{k} | qz | 0 \rangle|^2, \quad (6.51)$$

mit

$$\begin{aligned} |\langle \vec{k} | qz | 0 \rangle|^2 &= 9(4\pi)^2 \sum_{m_f \beta_2} \left\| \sum_{\lambda, l_i, \nu} (2l_i + 1)^{1/2} i^{-l_i} \exp(-i\delta_{l_i}) R_{l_i \lambda}^{(4)} \right. \\ &\quad Y_{l_i}^{\nu+m_f-\beta_2}(\hat{k}) \begin{pmatrix} l_i & \lambda & l_f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} l_i & \lambda & l_f \\ \beta_2 - \nu - m_f & \nu & m_f - \beta_2 \end{pmatrix} \right\|^2. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Abb 6.5 zeigt die Übergangswahrscheinlichkeit in Richtung des Stoßparameters. Dabei wurde die erste Ordnung der zeitabhängigen Störungstheorie mit der zweiten Ordnung der *sudden approximation* für die Coulombdissoziation von ${}^9\text{Be}$ am ${}^{208}\text{Pb}$ bei 30 MeV pro Nukleon Projektilenergie und 15 fm Stoßparameter als Funktion der Relativenergie der Fragmente.

Abb 6.6 zeigt die Übergangswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit des Azimutwinkels ϕ in der $x-y$ -Ebene senkrecht zur Projektilbewegung bei einer Relativenergie von 24 KeV in erster Ordnung der zeitabhängigen Störungstheorie und in zweiter Ordnung der *sudden approximation*.

6.8 Zeitentwicklung der Wellenfunktion nach der Coulombdissoziation

Die Frage nach der Zeitentwicklung von Wellenpaketen hat vor kurzem im Zusammenhang mit dem Tunneleffekt an Interesse gewonnen [90]. Wir studieren hier die Entwicklung der Wellenfunktion nach der Coulombdissoziation.

Die Wellenfunktion ist nach einem schnellen Stoß gegeben durch :

$$\Psi(r, t, m_f) = \sum_{\beta_2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} a(k, m_f, \beta_f) \cdot e^{-iEt/\hbar} |k S_2 \beta_2 \rangle. \quad (6.53)$$

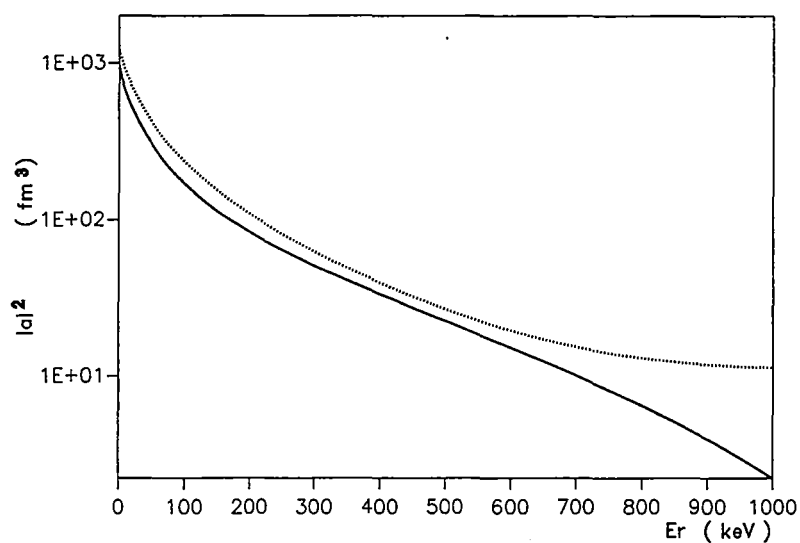


Abbildung 6.5: Wahrscheinlichkeit für die Coulombdissoziation von ${}^9\text{Be}$ in Richtung des Stoßparameters (y -Achse). Die gepunktete Linie wurde in erster Ordnung der zeitabhängigen Störungstheorie und die durchgezogene Linie in zweiter Ordnung der *sudden approximation* bei 30 MeV pro Nukleon Projektilenergie berechnet.

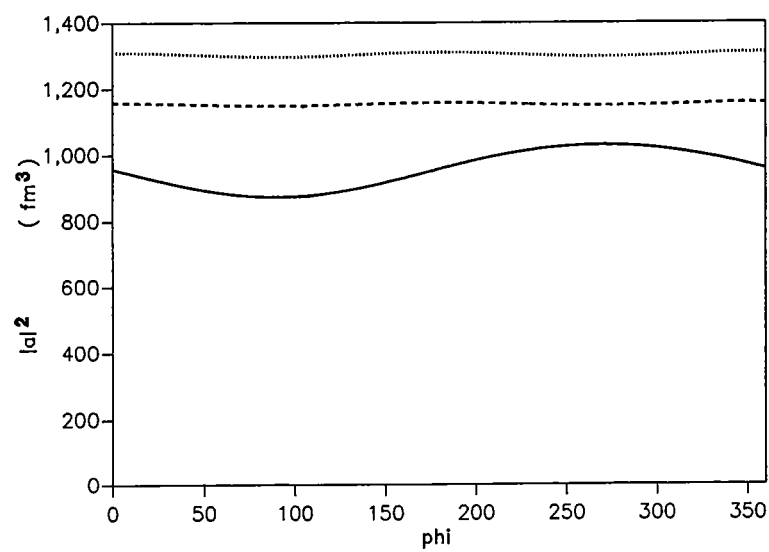


Abbildung 6.6: Abhängigkeit der Dissoziationswahrscheinlichkeit vom Azimutwinkel ϕ . Die Relativenergie der Fragmente beträgt in diesem Fall 24 keV .

Wenn wir nur die führenden Terme der Wechselwirkung und der Wellenfunktionen berücksichtigen (z.B. $\lambda = 1$ und $l_i = 0$), dann ergibt sich

$$\Psi(r, t, m_f) \simeq \phi(r, t) \cdot \sum_{\beta_2} \langle l_f m_f - \beta_2 S_2 \beta_2 | I_f m_f \rangle Y_{l_f}(\hat{q})^{m_f - \beta_2} \chi_{S_2}^{\beta_2}, \quad (6.54)$$

mit

$$\begin{aligned} \phi(r, t) &= \frac{2i}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 R_{011}^{(2)}(k) g_0(kr) e^{-i \frac{Et}{\hbar}} \\ &= \frac{2i}{\pi r} \int_0^\infty dk k R_{011}^{(2)}(k) \sin(kr + \delta_0) e^{-i \frac{Et}{\hbar}}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

$R_{l_i \lambda l_f}$ ist das Radialintegral aus Gl.(6.23), wobei $g_{l_f}(r)$ den Grundzustand und $g_{l_i}(kr)$ den Kontinuumszustand darstellen. Wir nehmen an, daß der Faktor $k R_{011}$ sich nur langsam mit der Relativenergie ändert, und benützen die Sattelpunktmethode (Methode der stationnären Phase), um die Wellenfunktion zu berechnen. Wir definieren zu diesem Zweck die Zeitkonstanten:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \left. \frac{\mu}{\hbar k} \frac{d(ka + \delta_0)}{dk} \right|_{k=k_s}, \\ \tau_2 &= \left. \frac{\mu}{\hbar} \frac{d^2(ka + \delta_0)}{dk^2} \right|_{k=k_s}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Wir berechnen dann den Sattelpunkt k_s aus der Bedingung für die stationnären Phase:

$$k_s = \frac{\mu(r - a)}{\hbar(t - \tau_1)}. \quad (6.57)$$

Bei sehr niedrigen Energien wird k_s iterativ bestimmt. Dabei wird τ_1 sehr schnell vernachlässigbar gegenüber t . Wir finden schließlich:

$$\phi(r, t) \simeq \left(\frac{\mu}{i2\pi\hbar(t - \tau_2)} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{k_s R_{011}^{(2)}(k_s)}{r} e^{i(k_s r + \delta_0(k_s) - \frac{\hbar k_s^2 t}{2\mu})}. \quad (6.58)$$

Abb 6.7 zeigt die Werte von τ_1 und τ_2 bei niedrigen Energien.

Abb 6.8 zeigt die Zeitentwicklung der radialen Wellenfunktion bei einem Abstand von $r = 150 \text{ fm}$ zwischen den Aufspaltungsprodukten. Abb 6.9 zeigt die Änderung der Wellenfunktion mit dem relativen Abstand für große Zeiten ($ct = 6000 \text{ fm}$)

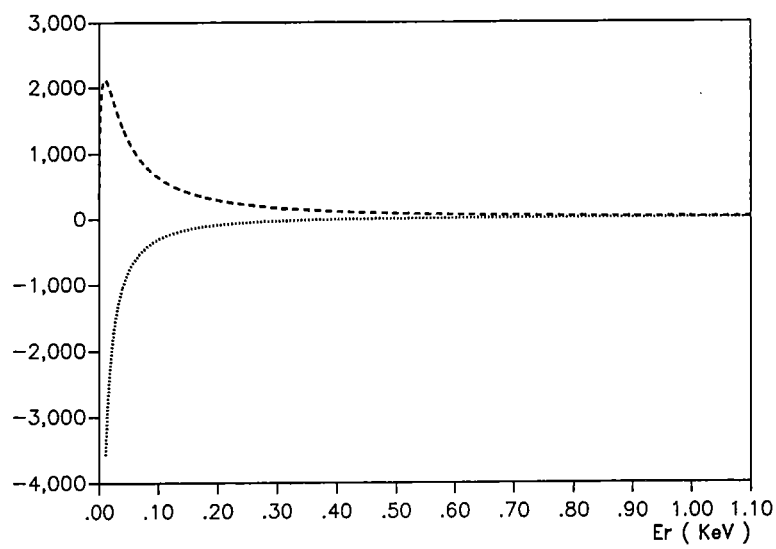


Abbildung 6.7: $c\tau_1$ (gepunktete Linie) und $c\tau_2$ (gestrichelte Linie) als Funktion der Relativenergie der Fragmente.

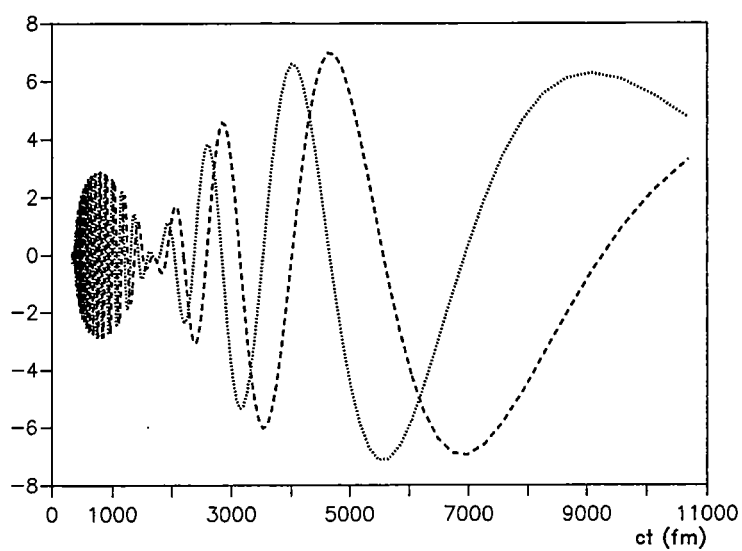


Abbildung 6.8: Zeitentwicklung des Realteils (gestrichelte Linie) und des Imaginärteils (gepunktete Linie) der Kontinuumswellenfunktion $\psi(r, t, 3/2)$ bei $r = 150 \text{ fm}$.

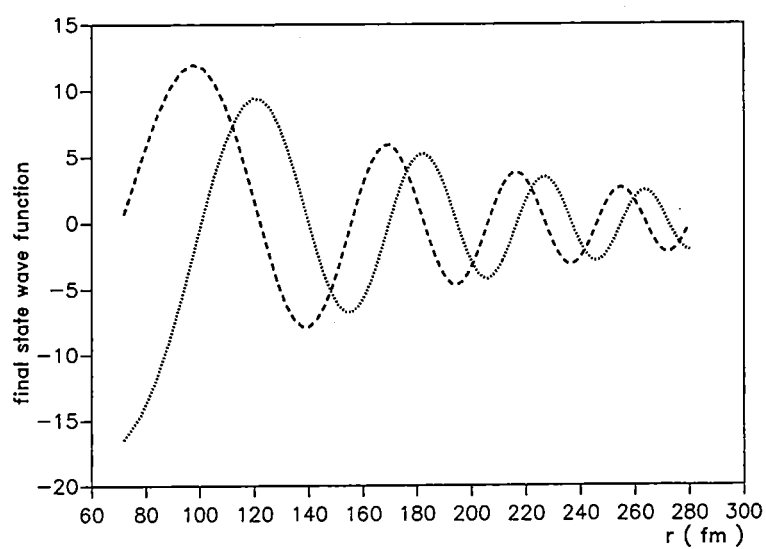


Abbildung 6.9: Abhängigkeit der Wellenfunktion $\psi(r, t, 3/2)$ vom Radius für $ct = 6000$ fm.

6.9 Weitere Entwicklungen

Die *Sudden approximation* gilt nur bei hohen Projektilenergien bzw. kleinen Anregungsenergien, während die erste Ordnung der zeitabhängigen Störungstheorie nur für kleine Übergangsamplituden von Bedeutung ist, da sonst die Unitariät der Streumatrix verletzt wird. Die Beiträge höherer Ordnungen sind oft klein, können aber in den Fällen von Bedeutung werden, in denen die Amplitude erster Ordnung verschwindet.

Eine formale Lösung der Schrödingergleichung, die die *sudden approximation* und die erste Ordnung der Störungstheorie als Grenzfälle enthält, wird im Wechselwirkungsbild durch die Magnusentwicklung des Zeitentwicklungsoperators gegeben [91, 92]:

$$T \exp \int_{-\infty}^t dt' V_I(\vec{x}, t') = \exp \sum_n \Omega_n(t) , \quad (6.59)$$

mit

$$\begin{aligned} \Omega_1(t) &= \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{t_1} dt_1 V_I(t_1) , \\ \Omega_2(t) &= \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_2} [V_I(t_1), V_I(t_2)] , \\ \Omega_n(t) &= \frac{1}{(i\hbar)^n} \int_{-\infty}^t dt_1 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n [V_I(t_1), \dots [V_I(t_{n-1}), V_I(t_n)] \dots] . \end{aligned} \quad (6.60)$$

Diese Methode stellt ein Analogon zum Baker-Hausdorff-Campbell Theorem dar.

Die aus diesen Ausdrücken entstehenden Matrixelemente n-facher Integrale lassen sich gewöhnlich in jeder Ordnung durch Entwicklung nach vollständigen Basen von H_0 berechnen. Dieses Verfahren ist besonders nützlich im Falle eines diskreten Spektrums, z.B. bei Mehrphononenanregungen. In der genannten Entwicklung tragen dann nur wenige Zustände zum Übergang bei. Die Verhältnisse werden jedoch sehr kompliziert bei Übergängen ins Kontinuum. Näherungsmethoden, die nicht auf der Störungstheorie basieren, sind hier besonders gefragt.

Der erste Term der Magnusentwicklung Gl. (6.59) stellt eine Verbesserung sowohl der *sudden approximation* als auch der ersten Ordnung der

zeitabhängigen Störungstheorie dar. Die Matrixelemente lassen sich aus der *sudden approximation* durch die Substitution

$$\vec{q} \rightarrow (0, qX K_1(X), -iq \frac{X}{\gamma} K_0(X)) \quad (6.61)$$

erhalten. X ist der Adiabasierparameter und $\hbar\vec{q}$ der Impulsübertrag. Die praktische Berechnung der Übergangsmatrixelemente aus Gl. (6.59) ist sehr schwierig. Typel und Baur haben eine Entwicklung der Übergangsamplitude zweiter Ordnung für kleine Adiabasierparameter angegeben siehe Ref. [93]. Sie haben damit die Effekte höherer Ordnungen in der Coulombdissoziation von ^{11}Li und ^8B berechnet, konnten damit aber die *Post-acceleration* beim ^{11}Li nicht erklären.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Die Frage nach der Struktur von schwach gebundenen exotischen Kernen und deren Anregungsmechanismen ist durch die Entwicklung leistungsfähiger Schwerionenbeschleuniger wie auch durch die Beziehungen zu Fragen der nuklearen Astrophysik sehr aktuell geworden. Verschiedene Aspekte dieses Forschungsgebiets wurden bereits in der Literatur ausführlich behandelt [80]. Es sei hier erwähnt, daß sich in peripheren Schwerionenstößen auch einige Prozesse der Elementarteilchenphysik studieren lassen, wenn die Kollisionsenergie hinreichend hoch ist wie z.B. die Produktion von Leptonenpaaren oder die Konversion von Hadronen (Primakoff-Effekt) genannt. In diesem Zusammenhang wird unter anderem nach Higgsbosonen und weiteren Teilchen in $\gamma - \gamma$ -Stößen (' doppelter Primakoff-Effekt ') gesucht, die das Standardmodell vervollständigen bzw. ergänzen sollen. Die theoretische Beschreibung der Daten aus peripheren Kollisionen wird wesentlich erleichtert, weil die Beiträge der starken Wechselwirkung vernachlässigbar sind.

Die fundamentale Beziehung zwischen der Coulomb- und der Photodissoziation wurde in Kap. 2 durch die Methode der äquivalenten Photonen herausgearbeitet. Diese Beziehung folgte aus der ersten Ordnung der Störungstheorie. Man kann sich die Verhältnisse so vorstellen, daß das Projektil durch das äquivalente Photonenspektrum des Targets angeregt wird und möglicherweise dabei zerfällt. Virtuelle Photonen von einem Kern können auch mit den Photonen anderer Kerne reagieren. Dies führt z.B. zur Leptonenpaarproduktion [94, 25, 95, 96]. Dieser Prozeß spielt eine große Rolle bei hohen Kollisionsenergien. Er ist aber nicht Gegenstand dieser Arbeit.

In Kap.3 studierten wir die Wechselwirkung des freien elektromagne-

tischen Feldes mit dem Kern und leiteten einige nützliche Dissoziationsquerschnitte für Systeme aus zwei Nukleonencluster mit beliebigem relativem Bahndrehimpuls her. Die von Rolfs [3] angegebenen Resultate wurden reproduziert und auf allgemeine elektrische Multipolübergänge erweitert. Dieser Formalismus hebt die zentrale Rolle der radialen Integrale in diesen Übergängen hervor. Ihre Berechnung erfordert die Kenntnis der Wellenfunktionen in Anfangs- und Endzustand. In dieser Arbeit wurden für diese Wellenfunktionen verschiedene Modelle verwendet. Da Kernreaktionen sind bei niedrigen Energien nicht sehr empfindlich auf die Einzelheiten der starken Wechselwirkung zwischen den Clustern sind, haben wir in Kap.4 der Einfachheit halber ein drehimpulsabhängiges Kastenpotential vorausgesetzt. Damit konnten die Radialintegrale und die Wirkungsquerschnitte berechnet werden. Die Ergebnisse wurden gelegentlich mit einem Woods-Saxon-Potential verglichen. Eine gute Beschreibung der Experimente wird dabei durch Anpassung der Potentialparameter erreicht. Dieses Verfahren ist zwar kritisierbar, eine Beschreibung der Daten, die von der fundamentalen Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung ausgeht, ist aber nicht ohne erheblichen Aufwand möglich. Im Falle von schwach gebundenen Kernen ist es möglich, die elektromagnetischen Matrixelemente mit guter Genauigkeit ohne jeden expliziten Bezug auf die Kernwechselwirkung zu berechnen, weil die Nukleonencluster sich überwiegend außerhalb des Wechselwirkungsgebietes aufhalten. Dies erlaubt die Herleitung von einfachen analytischen Näherungen [64]. Diese Näherungen sind besonders nützlich, da sie sehr allgemein sind und sie somit die wirklich relevanten Parameter bei diesen Reaktionen zeigen können. Es handelt sich dabei um die Bindungsenergie, die effektive Reichweite und die Relativenergie der Fragmente. Wir haben auch aufgezeigt, daß die Normierung der äußeren Wellenfunktion bei geringer Bindungsenergie fast unabhängig vom Modell wird. Dies erleichtert die Beschreibung von Schwellenreaktionen und erlaubt in manchen Fällen sogar Vorhersagen. Die Normierungsfaktoren erlauben sogar die analytische Berechnung einiger Kerneigenschaften von großer Bedeutung, wie z.B. die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in klassisch verbotenen Regionen oder die mittleren quadratischen Radien von Kernzuständen. Unsere Berechnungen decken sich mit der Literatur und bringen Ergänzungen bzw. Korrekturen zu den vorhandenen überwiegend numerischen Resultaten. Es wäre herauszufinden, inwiefern die in diesem Abschnitt entwickelten Ideen und Verfahren auf etwas kompliziertere Systeme anwendbar bleiben. Unsere Methode läßt sich im Prinzip auch auf Protonen erweitern.

Die Kenntnis der Photodissoziationsquerschnitte aus Kap.4 erlaubt uns, theoretische Vorhersagen für die Coulombdissoziation in erster Ordnung Störungstheorie zu machen. Dies wurde in Kap.5 am Beispiel von ^{11}Be und ^9Be demonstriert. Die Ergebnisse wurden mit vorhandenen Experimenten verglichen.

In Kap.6 studierten wir die Effekte höherer Ordnungen der Coulombwechselwirkung auf die Dissoziation von leichten, schwach gebundenen Kernen. Die geringe Größe der elektromagnetischen Kopplungskonstanten macht ihre Berücksichtigung oft nicht nötig. Die Abschätzung elektromagnetischer Effekte ist jedoch wichtig, wenn man Photodissoziationsquerschnitte aus Schwerionenstößen herleiten will. Dies haben wir im Falle von ^{11}Li und ^9Be in der *sudden approximation* berechnet. Es zeigte sich, daß die Effekte höherer Ordnung den Coulombdissoziationsquerschnitt ein wenig abschwächen und daß sie eine Asymmetrie in der Winkelverteilung der Fragmente bezüglich des Stoßparametervektors erzeugen. Die Matrixelemente in der *sudden approximation* haben sehr ähnliche Struktur wie die elektrischen Multipolmomente. Eine formale Lösung der zeitabhängigen Schrödinger Gleichung gibt die Magnusentwicklung, welche eine Verbesserung zur *sudden approximation* in systematischer Weise darstellt. Es bleibt zu untersuchen, inwiefern diese bei der Beschreibung einiger Effekte, wie der beobachteten *post-acceleration* von geladenen Fragmenten [89], und bei der Berechnung der zeitlichen Entwicklung der Wellenfunktion nach einer Coulombdissoziation vom Nutzen sein kann.

Literaturverzeichnis

- [1] D. M. Kalassa, G. Baur, J. Phys.G 20 (1994) 1023 - 1033.
- [2] T. Y. Wu and T. Ohmura, *Quantum Scattering Theory*, Prentice-Hall Inc., Englewoods Cliffs, N.J.,1962.
- [3] C. Rolfs, Nucl. Phys. A217 (1973) 29 - 70.
- [4] T. Nakamura *et al*, Phys. Lett. B 331 (1994) 296-301.
- [5] G. Baur, C.A. Bertulani, D.M. Kalassa, Nucl. Phys. A550 (1992) 527-539.
- [6] H. Esbensen, G. F. Bertsch, und C. A. Bertulani, Higher dynamical effects in Coulomb dissociation, to be published
- [7] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik* Bd.3, Akademie Verlag Berlin (1967) 525-531.
- [8] M. Fugishiro *et al.*, Can. J. Phys. 60 (1982) 1672.
- [9] G. Kuechler, A. Richter, W. von Witsch, Z. Phys. A 326 (1987) 447 - 454.
- [10] H. Sagawa, Nucl. Phys. A 583 (1995) 754c.
- [11] D.M. Kalassa, G. Baur, in The Proceedings of the Jülich Conference on GeV- Beams (1994), Machner und Sistemich Eds., World Scientific (1995) 474.
- [12] F. Barker, Can. J. Phys. 60 (1983) 1672.

- [13] P. G. Hansen und B. Jonson, *Europhys. Lett.* 4 (1987) 409.
- [14] K. Alder und A. Winther, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* 32 (1960) no. 8, Nachdruck in S. 209 ff.
- [15] K. Alder und A. Winther, *Electromagnetic Excitation*, North Holland, Amsterdam (1966).
- [16] K. Alder und A. Winther, *Electromagnetic Excitation*, North Holland, Amsterdam (1975).
- [17] L.C. Biedenharn und P.J. Brussard, *Coulomb Excitation*, Clarendon Press, Oxford (1965).
- [18] G. Breit, in *Handbuch der Physik*, Band XLI/1, Springer, Berlin (1959) 496.
- [19] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York (1975).
- [20] J.M. Eisenberg, W. Greiner, *Excitation Mechanisms of the Nucleus*, North-Holland, Amsterdam (1970).
- [21] A. Winther, K. Alder, *Nuclear Physics A* 319 (1979) 518-532.
- [22] C. Bertulani, Dissertation, Universität Bonn (1987).
- [23] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd 2: Klassische Feldtheorie*, Akademie Verlag Berlin (1967).
- [24] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Pocket Book of Mathematical Functions*, Harry Deutsch Verlag Thun (1984).
- [25] C.A. Bertulani, G. Baur, *Phys. Report.* 163 (1988) 1.
- [26] R.J. Glauber, in *Lectures in Theoretical Physics*, Vol. I, ed. W.E. Britin (Interscience, New York, 1959) p. 315.
- [27] Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University Press (1974).
- [28] J.M. Blatt, V. W. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, Wiley, New York (1952).

- [29] C. Joachain, C. Quig, Rev. Mod. Phys. 46 (1974) 279.
- [30] H. Kanada, T. Kaneko, Y. C. Tang A380 (1982) 87.
- [31] T.D. Lee, C.N. Yang, Phys. Rev. 104 (1956) 254.
- [32] C.S. Wu, E. Ambler, R.W. Hayward, D.D. Hoppes and R.P. Hudson, Phys. Rev. 105 (1957) 1413.
- [33] P. Ring, P. Schuck, *The Nuclear Many Body Problem*, Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin (1980).
- [34] J.J. Griffin, J.A. Wheeler, Phys. Rev. 108 (1957) 311.
- [35] J.A. Wheeler, Phys. Rev. 52 (1937) 1087, 1107.
- [36] K. Wildermuth, Y. C. Tang, *A Unified Theory of the Nucleus*, Vieweg, Braunschweig (1977).
- [37] Y. C. Tang, Nucl. Phys. A71 (1965) 459.
- [38] K. Langanke, H. Friedrich, Adv. in Nucl. Phys. 17 (1986) 223.
- [39] K. Langanke, Adv. in Nucl. Phys 17 (1986) 85.
- [40] S. Typel, Dissertation, Universität Münster, (1994).
- [41] R.F. Christy, I. Duck, Nucl. Phys. A24 (1961) 89.
- [42] T.A. Tombello, P.D. Parker, Phys. Rev. 131 (1963) 2582.
- [43] G.M. Bailey, G.M. Griffiths, T.W. Donnelly, Nucl. Phys. A94 (1967) 502.
- [44] A. Messiah, Quantenmechanik, Band 1, Walter de Gruyter, Berlin, New York (1976).
- [45] H. Rebel, Workshop on Nuclear Reaction Cross-sections of Astrophysical interest (Kernforschungszentrum Karlsruhe, February 1985).
- [46] L. I. Schiff, *Quantum mechanics*, McGraw Hill Book Comp., New York (1995).

- [47] T. Otsuka et al., Phys. Rev. C 49 (1994) 2289.
- [48] C.J. Joachain, *Quantum Collision Theory*, North-Holland Publishing, Amsterdam (1975).
- [49] H.A. Bethe, Phys. Rev. 76, (1949) 38.
- [50] L.D. Landau, J.J. Smorodinski, J.P. U.S.S.R. 8 (1944) 154.
- [51] L.D. Landau, J.J. Smorodinski, J.P. U.S.S.R. 11 (1947) 195.
- [52] M. Hull, G. Breit, Handbuch der Physik 41 (1959) 1.
- [53] Gradshteyn Ryzhik, *Tables of series, products and Integrals*, Verlag Harry-Deutsch, Thun-Frankfurt/Main (1981).
- [54] A. Erdelyi, Tables of Integral Transforms, Volume 2, McGraw - Hill, New York (1954).
- [55] M. Hull, G. Breit, in *Encyclopedia of Physics* 41, Springer Verlag Berlin York (1959).
- [56] C.E. Fröberg, Rev. Mod. Phys. 27 (1955) 399.
- [57] H. A. Bethe, C. Longmire, Phys. Rev. 77, (1950) 67.
- [58] T. Ohmura, H. Ohmura, Phys. Rev. 118 (1960) 154.
- [59] L. Hulthén, M. Sugawara, *Handbuch der Physik* 39/1, Springer Verlag (1957).
- [60] S.F. Ham, in *Solid States Physics*, ed. Seitz and Turnbull, Vol. 1 (1955) 127.
- [61] D.V. Fedorov, A.S. Jensen, K. Riisager, Phys. Lett. B 312 (1993) 1-5.
- [62] K. Riisager, A.S. Jensen and P. Möller, Nucl. Phys. A 548 (1992) 393-413.
- [63] M. Fukuda et al., Phys. Lett. B268(1991) 339.
- [64] D. M. Kalassa, G. Baur, zu erscheinen in J. Phys. G

- [65] Koonin, Meredith, Physik auf dem Personalcomputer, Bd I, Oldenburg Verlag.
- [66] G. Baur, H. Rebel, J. Phys. G (20) 1-33.
- [67] Fox, Goodwin, Proc. Cambr. Phil. Soc. 45 (1949) 373.
- [68] B.V. Numerov, Monthly notices Roy. Astr. Soc. 84 (1924) 592.
- [69] P. Cowell, A.C. Grommelin, Appendices to Greenwich Observations for 1909, Edinburgh, p. 84
- [70] A. Mengoni, T. Otsuka, M. Ishihara, Phys. Rev. C52 (1995) R2334.
- [71] P. Banerjee, R. Shyam, Phys. Lett. B 349 (1995) 421.
- [72] R. Shyam, P. Banerjee, G. Baur, Nucl. Phys. A540 (1992) 341.
- [73] P. Banerjee, R. Shyam, Nucl. Phys. A 561 (1993) 112-132.
- [74] M.S. Hussein, K. W. McVoy, Nucl. Phys. A445 (1985) 124-139.
- [75] C.A. Bertulani, K. W. McVoy, Phys. Rev. C46 (1992) 2638-2641.
- [76] Y. Ogawa, Y. Suzuki, K. Yabana, Nucl. Phys. A 588 (1995).77c
- [77] R. J. Glauber, Phys. Rev. 99 (1955) 115.
- [78] A. I. Akhiezer, A. G. Sitenko, Phys. Rev. 106 (1957) 1236.
- [79] M. V. Evlanov, A. M. Sokolov, Nucl. Phys. A452 (1986) 477.
- [80] G. Baur, Rebel, J. Phys. G 20 (1994) 1-33.
- [81] C. A. Bertulani, G. Bertsch, Phys. Rev. C 49 (1994) 2839.
- [82] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, North Holland (1965).
- [83] P. A. M. Dirac, *The principles of Quantum Mechanics*, Clarendon Press, Oxford (1924).
- [84] S. Tomanaga, Prog. Theor. Phys. (Kyoto) 1-27.

- [85] J. Schwinger, Phys. Rev. 74 (1948) 1439.
- [86] F. J. Dyson, Phys. Rev. 75 (1949) 486.
- [87] C. A. Bertulani, G. Baur, D. M. Kalassa, Nucl. Phys. A 550 (1992) 527-539.
- [88] P. G. Hansen, Nuclear Physics News, No 1, Vol. 3 (1991) 21 - 26.
- [89] K. Ieki *al*, Phys. Rev. Lett. 70 (1993) 730.
- [90] A. Enders A, G. Nimtz , Phys. Rev. E48 (1993) 632.
- [91] W. Magnus, Comm. Pure Appl. Math. 7 (1954) 649.
- [92] I. Bialynicki-Birula, B. Mielnik und J. Plebanski, Ann. Phys. (N.Y.).
- [93] S. Typel, G. Baur, Nucl. Phys. A 573 (1994) 486
- [94] V.M. Budnev, I.F. Ginzburg, G. V. Medelin, V. G. Zerbo, Phys. Rep. 15 (1975) 181.
- [95] N. Baron, Dissertation , Universität Bonn (1994).
- [96] J. Eichler J. , W.E. Meyerhof, *Relativistic atomic Collisisions* , Academic Press , San Diego, California, USA (1995).

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1991 bis 1995 am Institut für Kernphysik des Forschungszentrums Jülich. Allen Mitarbeitern des Instituts möchte ich hier für die angenehme Arbeitsatmosphäre während dieser Zeit danken.

Ich möchte Herrn Prof. Dr. Speth herzlich für die Aufnahme in das Institut und für die wohlwollende Unterstützung meiner Aktivitäten danken. Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. G. Baur für die Betreuung während der gesamten Arbeit.

Herrn Dr. N. Baron danke ich für die Unterstützung bei der Einarbeitung, Herrn A. Mündel und Frau N. Stein danke ich für die sorgfältige Durchsicht des Manuskripts. Herrn Dr. Z. Aouissat danke ich für nützliche Diskussionen.

Bei Fr. Burck, Fr. Tesch und Fr. Bley möchte ich mich für ihre stets freundliche Hilfsbereitschaft bei der Erledigung jeglicher Verwaltungsangelegenheiten bedanken.

Dem Deutschen Akademischen Austauschdienst bin zu großem Dank verpflichtet. Seine finanzielle Unterstützung hat diese Arbeit erst ermöglicht.

Meiner Familie wird hier für ihr Verständnis und ihre große Geduld ausdrücklich noch einmal gedankt.

Jül-3168
Januar 1996
ISSN 0944-2952