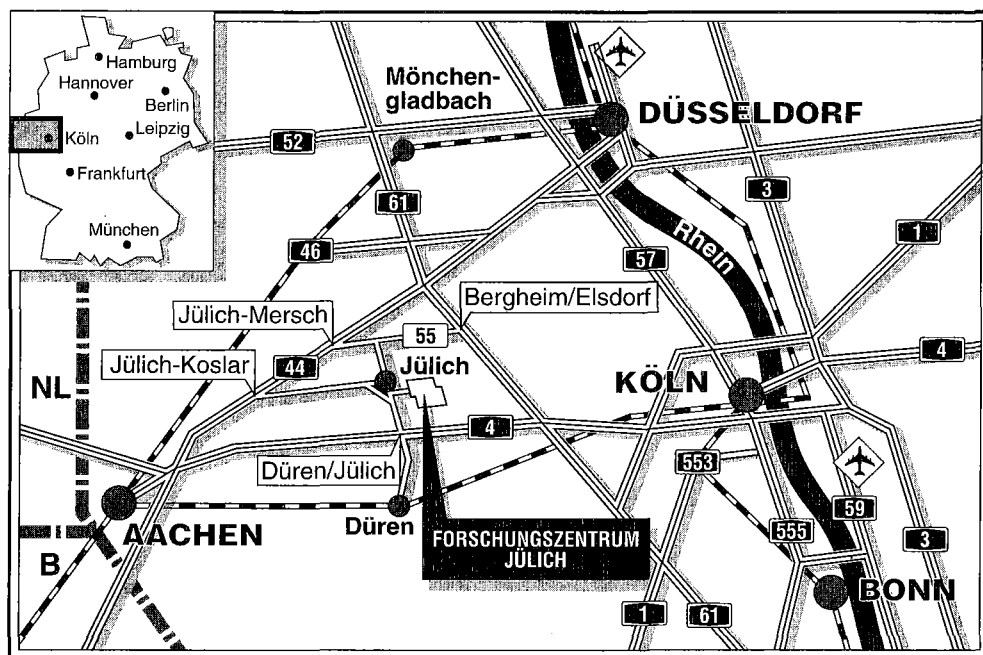


Institut für Kernphysik

**Pion-Pion Wechselwirkungen
in dichter/heißer Materie**

Ralf Rapp



Berichte des Forschungszentrums Jülich ; 3195

ISSN 0944-2952

Institut für Kernphysik Jül-3195

D5 (Diss. Universität Bonn)

Zu beziehen durch: Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek
D-52425 Jülich · Bundesrepublik Deutschland

Telefon: 02461/61-61 02 · Telefax: 02461/61-61 03 · Telex: 833 556-70 kfa d

Pion-Pion Wechselwirkungen in dichter/heißer Materie

Ralf Rapp

Abstract

Employing $\pi\pi$ meson exchange models we examine modifications of the $\pi\pi$ interaction in a dense nuclear medium and in hot hadronic matter as *e.g.* produced in ultrarelativistic heavy ion collisions. Within an effective scattering equation medium effects are induced by modifying the intermediate 2-pion propagator through interactions with surrounding hadrons.

In the first part of this work a standard treatment of the pion propagation in cold nuclear matter is used to study s-wave $\pi\pi$ correlations. Already at saturation density a 2-pion bound state occurs in the σ -channel of the Jülich $\pi\pi$ model, even leading to pion pair condensation in slightly compressed nuclear matter. It is shown, however, that constraints from chiral symmetry inhibit this mechanism. A 'chirally improved' version of the Jülich model is constructed in which pair condensation is strongly suppressed. We apply this model to calculate the correlated 2-pion exchange contribution to the central part of the Nucleon-Nucleon potential in the nuclear medium.

In the second part pion properties in a hot pion gas are investigated within the finite temperature Greens function formalism. Single-pion selfenergy and in-medium $\pi\pi$ scattering amplitudes are evaluated selfconsistently keeping the full off-shell dynamics of the problem. At zero pion chemical potential the medium effects turn out to be rather moderate. We furthermore calculate the thermodynamic state variables (pressure, entropy and energy density) of an interacting pion gas, where a $\sim 15\%$ increase compared to a free π - ρ gas is observed.

Finally we extend an earlier developed model for ρ meson propagation in nuclear matter for evaluating e^+e^- invariant mass spectra as recently measured by the CERES/NA45 collaboration in central S-Au collisions at 200 GeV/u projectile energy. The ρ propagator is renormalized by coupling to 2-pion states. Maintaining gauge invariance we include the interaction of the pions with Nucleons and thermally excited Δ resonances. When calculating the resulting dilepton yield from in-medium ρ decays we find that the experimentally observed enhancement below the ρ mass region can be largely accounted for.

Abstract

Im Rahmen von $\pi\pi$ -Mesonaustauschmodellen untersuchen wir Modifikationen der $\pi\pi$ -Wechselwirkung im dichten nuklearen Medium sowie in heißer hadronischer Materie (letztere erzeugt man z.B. in ultrarelativistischen Schwerionenreaktionen). Ausgehend von einer effektiven Streugleichung werden Medium-Effekte durch Wechselwirkungen der beiden intermediären Pionen mit umgebenden Hadronen induziert.

Basierend auf einer Standardbehandlung der in-Medium Pionpropagation analysieren wir im ersten Teil dieser Arbeit s-Wellen $\pi\pi$ -Korrelationen in kalter Kernmaterie. Im σ -Kanal des Jülicher $\pi\pi$ -Modells bildet sich bereits bei Sättigungsdichte ein 2-Pion-Bindungszustand heraus, der in leicht komprimierter Kernmaterie sogar zur Pionpaarkondensation führt. Es zeigt sich jedoch, daß aus der chiralen Symmetrie folgende Eigenschaften der $\pi\pi$ -Wechselwirkung einen derartigen Mechanismus unterbinden. Aus dieser Erkenntnis entwickeln wir eine 'chiral verbesserte' Version des Jülich-Modells, in der ein Kondensationsverhalten stark unterdrückt ist. Dieses Modell wird dann angewendet, um die Medium-Modifikation des korrelierten 2-Pion austausches im zentralen Nukleon-Nukleon Potential zu berechnen.

Im zweiten Teil der Arbeit wird der thermodynamische Greensfunktionen-Formalismus verwendet, um Pioneigenschaften im heißen Piongas zu untersuchen. Die 1-Pion selbstenergie und in-Medium $\pi\pi$ -Streuamplituden werden selbstkonsistent und unter voller Beibehaltung der off-shell Dynamik des Problems berechnet. Bei verschwindendem chemischen Potential der Pionen stellen sich nur vergleichsweise schwache Medium-Effekte ein. Die weiterhin ermittelten thermodynamischen Zustandsgrößen (Druck-, Entropie- und Energiedichte) eines wechselwirkenden Piongases weisen einen ca. 15%-igen Anstieg im Vergleich zu einem freien π - ρ -Gas auf.

Schließlich erweitern wir noch ein früher entwickeltes Modell für die ρ -Meson-Propagation in Kernmaterie zur Berechnung von e^+e^- -invarianten-Massen-Spektren wie sie kürzlich von der CERES/NA45-Kollaboration in zentralen S-Au-Kollisionen bei 200 GeV/u Einschußenergie gemessen wurden. Der ρ -Propagator wird durch Kopplung an 2-Pionzustände renormiert. Unter Aufrechterhaltung der Eichinvarianz berücksichtigen wir die Wechselwirkung der Pionen mit Nukleonen und thermisch angeregten Δ -Resonanzen. Nach Berechnung der aus in-Medium ρ -Zerfällen resultierenden Dileptonproduktionsrate finden wir, daß die Überhöhung in den experimentell gemessenen Spektren unterhalb der ρ -Masse im wesentlichen erklärt werden kann.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	$\pi\pi$ -Korrelationen und das Nukleon-Nukleon Potential in kalter Kernmaterie	4
1.2	$\pi\pi$ -Wechselwirkungen bei endlicher Temperatur und ultrarelativistische Schwerionenreaktionen	5
2	Pion-Pion Wechselwirkungen in kalter Kernmaterie	11
2.1	Einführung	11
2.2	Streugleichung und Medium-Modifikationen	12
2.3	Pionselbstenergie und 2-Pionpropagator in kalter Kernmaterie	13
2.3.1	In-Medium 1-Pionpropagator	13
2.3.2	In-Medium 2-Pionpropagator	16
2.4	$\pi\pi$ -Wechselwirkung im Jülicher Mesonaustauschmodell	18
2.4.1	Das Mesonaustausch-Modell im freien Raum	20
2.4.2	Jülich-Modell in kalter Kernmaterie	22
2.5	Chirale Symmetrie und Lineares σ -Modell	24
2.5.1	Aspekte der chiralen Symmetrie	24
2.5.2	Lineares σ -Modell im freien Raum	25
2.5.3	Lineares σ -Modell in kalter Kernmaterie	29
2.6	Chiral verbessertes Jülich $\pi\pi$ -Modell	31
2.6.1	'Chirale' Erweiterung der freien Jülich $\pi\pi$ -Wechselwirkung	31
2.6.2	Chiral verbessertes Jülich-Modell in kalter Kernmaterie	36
3	Medium-Modifikationen des Nukleon-Nukleon Potentials im σ-Kanal	39
3.1	Einführung	39
3.2	$N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ -Amplituden und das N - N -Potential im freien Raum	41
3.2.1	Das Mesonaustauschmodell für den Prozeß $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$, Frazer-Fulco-Amplituden	41
3.2.2	Spektralfunktion und effektives N - N -Potential	42
3.3	Der σ -Kanal des N - N -Potentials in kalter Kernmaterie	46
3.4	Der Einfluß der chiralen Restauration auf das zentrale N - N -Potential	49
3.4.1	Die Brown-Rho'sche Skalenhypothese	49
3.4.2	Brown-Rho-Scaling in der $\pi\pi$ -Wechselwirkung und im N - N -Potential	50

4	Pion-Wechselwirkungen im heißen Piongas	53
4.1	Einführung	53
4.2	Thermodynamischer Greensfunktionen-Formalismus im heißen Piongas . .	56
4.2.1	Pionselbstenergie bei endlicher Temperatur	56
4.2.2	Unkorrelierter 2-Pionpropagator bei endlicher Temperatur	60
4.3	Selbstkonsistenz und numerische Resultate im Mesonaustauschbild	62
4.3.1	Transformation der $M_{\pi\pi}$ -Amplitude, Näherungen	62
4.3.2	Pionselbstenergie und 2-Pionpropagator in niedrigster Ordnung; thermische Anregungen	64
4.3.3	Selbstkonsistentes Brueckner-Schema	67
4.3.4	Vergleich mit Resultaten in Quasiteilchennäherung	71
4.3.5	Einfluß der chiralen Symmetrie und chirale Restauration bei endli- cher Temperatur	74
4.3.6	Mittlere freie Weglängen	80
5	Zustandsgleichung des heißen Piongases	83
5.1	Einführung	83
5.2	Das Thermodynamische Potential eines wechselwirkenden Piongases	85
5.2.1	Unterste Ordnung von $\Omega_{\pi\pi}(T)$	86
5.2.2	Höhere Ordnungen von $\Omega_{\pi\pi}(T)$	87
5.2.3	Quasiteilchenbeiträge: $\Omega_{\pi}^Q(T)$	92
5.3	Thermodynamische Zustandsgrößen und numerische Resultate	93
5.3.1	Druck, Energie und Entropie	93
5.3.2	Numerische Resultate auf Brueckner-Niveau	95
5.4	Zustandsgleichung bei chiraler Restauration	99
6	ρ-Propagator und Dileptonspektren bei CERN-SpS Energien	103
6.1	Einführung	103
6.2	ρ -Propagator und Dileptonproduktionsrate in heißer Materie	106
6.3	Anwendung auf S-Au Kollisionen bei 200 GeV/u	113
7	Zusammenfassung und Perspektiven	119
A	Lindhardfunktionen und Parameter in der Pionselbstenergie	123
B	Pseudopotentiale und Parameter im 'chiral verbesserten' Jülich-Modell	126
C	Auswertung von Matsubara-Summen	131
D	Kinematische Variablen in ultrarelativistischen Schwerionenreaktionen	133

Kapitel 1

Einleitung

Zu den fundamentalen Problemen der starken Wechselwirkung gehört nicht nur das Verständnis von Prozessen mit einer kleinen Anzahl von Freiheitsgraden, wie z.B. der Wechselwirkung zweier Quarks oder zweier Nukleonen, sondern auch die Beschreibung kollektiver Phänomene in Vielteilchensystemen. Als fundamentale Theorie der starken Wechselwirkung gilt heutzutage die Quantenchromodynamik (QCD), deren elementare Freiheitsgrade die Quarks und Gluonen sind. Jedoch ist es z.B. bislang nicht gelungen, die Eigenschaften des aus wechselwirkenden Quarks und Gluonen aufgebauten Nukleons direkt aus der QCD zu berechnen. Ursache hierfür ist der Anstieg der starken Kopplungskonstante $\alpha_s(q^2)$ zweier wechselwirkender Quarks mit abnehmendem Impulsübertrag q^2 , d.h. mit steigendem Abstand r . Die in der Quantenelektrodynamik (QED) erfolgreiche störungstheoretische Behandlung der Quantenfeldgleichungen ist somit im Mittel- und Niederenergiebereich ($q^2 \leq 5 \text{ GeV}^2$) der QCD nicht möglich. In diesem Regime sind die Quarks und Gluonen zu sogenannten 'Farbsingulets' in Hadronen eingeschlossen ('Confinement'-Eigenschaft der QCD).

Mit der Identifikation der Hadronen als der relevanten Freiheitsgrade gelingt es jedoch, im Rahmen effektiver Theorien ein quantitatives Verständnis einer Vielzahl von Phänomenen in der Mittlerenergie- und Kernphysik zu gewinnen. So läßt sich z.B. die freie Streuung zweier Nukleonen erfolgreich durch den Austausch von Mesonen beschreiben (Bonn-Potential [1]); eine (in der Jülich-Gruppe konsequent verfolgte) Erweiterung dieses Konzepts auf andere Hadron-Hadron-Prozesse hat sich ebenfalls bewährt. Ein besonderer Vorzug dieser Mesonaustauschmodelle besteht in ihrer Anwendungsmöglichkeit zur Berechnung von Modifikationen der Wechselwirkung in der Umgebung stark wechselwirkender hadronischer Materie. In der vorliegenden Arbeit interessieren wir uns insbesondere für die Medium-Modifikationen der $\pi\pi$ -Wechselwirkung; die behandelte Thematik untergliedert sich im wesentlichen in zwei Teile, deren Relevanz wir in den folgenden zwei Abschnitten kurz beleuchten möchten.

1.1 $\pi\pi$ -Korrelationen und das Nukleon-Nukleon Potential in kalter Kernmaterie

Ausgehend von mikroskopischen Modellen der N - N -Wechselwirkung ist im Rahmen von sogenannten Brueckner-Rechnungen (und insbesondere ihren relativistischen Erweiterungen [2]) eine zufriedenstellende Reproduktion der Grundzustandseigenschaften von Kernmaterie (und mit gewissen Abstrichen von Atomkernen) möglich (für einen Übersichtsartikel vgl. z.B. Ref. [3]). Die Bruecknertheorie basiert im wesentlichen auf einer effektiven, in-Medium N - N -Streugleichung, der Bethe-Goldstone-Gleichung, in Verbindung mit einem durch kollektive 2-Teilchen-Wechselwirkungen generierten 'mittleren' Feld, dem jedes einzelne Nukleon ausgesetzt ist. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, inwieweit Medium-Modifikationen der ausgetauschten Mesonen die in-Medium N - N -Wechselwirkung, und damit letzten Endes auch die Eigenschaften von Kernmaterie (bzw. Atomkernen), beeinflussen. So wird z.B. der wesentliche Anteil der mittelreichweitigen Attraktion im N - N -Potential durch den Austausch eines (fiktiven) ' σ '-Mesons generiert (mit einer 'effektiven' Masse $m_\sigma \simeq 500$ - 600 MeV). Tatsächlich ist das ' σ '-Meson jedoch als s-Wellen Zustand zweier korrelierter Pionen zu verstehen. Erste Untersuchungen von s-Wellen $\pi\pi$ -Korrelationen in Kernmaterie deuteten die Möglichkeit der Ausbildung von gebundenen $\pi\pi$ -Zuständen unterhalb der 2-Pionschwelle ($E_{\pi\pi} \leq 2m_\pi = 280$ MeV) an [4, 5, 6]. Detaillierte Rechnungen von Aouissat *et al.* [7, 8] bestätigen diesen Trend: im Rahmen des phänomenologischen $\pi\pi$ -Modells von Johnstone und Lee [9] und mittels einer Standardbehandlung der Pionpropagation in Kernmaterie tritt bereits bei Sättigungsdichte ($\rho = \rho_0 = 0.16$ fm $^{-3}$) ein Bindungszustand in Schwellennähe auf, der bei weiterer Erhöhung der Dichte rapide zu kleineren Energien wandert und dabei praktisch die gesamte Stärke der $\pi\pi$ -Amplitude im skalaren-isokalaren (σ -) Kanal absorbiert. Bei $\rho \simeq 1.3\rho_0$ ist dieser Bindungszustand bei $E_{\pi\pi} = 0$ angelangt, d.h. es setzt Pionpaarkondensation ein (dieser Wert für die kritische Dichte der Paarkondensation liegt deutlich unter dem entsprechenden Wert für 1-Pionkondensation, $\rho_c^\pi \simeq 3\rho_0$, im zugrunde liegenden Modell für die 1-Pionselbstenergie). Ein solcher Mechanismus hätte schwerwiegende Konsequenzen für die Zustandsgleichung von Kernmaterie: die Ausbildung eines derartigen s-Wellen $\pi\pi$ -Bindungszustandes bedeutet für die in-Medium N - N -Wechselwirkung den Austausch eines sehr leichten ' σ '-Mesons mit hoher Kopplungsstärke (entsprechend der im gebundenen $\pi\pi$ -Zustand angesammelten 'Stärke'), was einer erheblichen Verstärkung der Attraktion in Verbindung mit einer sehr großen Reichweite ($r \simeq 1/m_\sigma$) entspricht. Für Kernmaterie hätte dies eine drastische 'Überbindung' ('Overbinding') der Nukleonen zur Folge, so daß die Einstellung eines Sättigungsverhaltens auf beträchtliche Schwierigkeiten stoßen sollte. Geeignete Kompensationsmechanismen von vergleichbarem Ausmaß liegen nicht ohne weiteres auf der Hand, so daß es plausibel erscheint, die Ursache des Problems im zugrunde liegenden $\pi\pi$ -Modell zu suchen. Im zweiten Kapitel dieser Arbeit werden wir sehen, daß ein analoges Verhalten auch im $\pi\pi$ -Mesonaustauschmodell der Jülich-Gruppe [10, 11] auftritt, also kein Artefakt des von Aouissat *et al.* benutzten separablen Modells ist.

Beide Modelle (insbesondere das wesentlich komplexere Jülich-Modell) liefern zwar eine gute Beschreibung der Vakuum- $\pi\pi$ -Streudaten, gehorchen aber nicht den Bedingungen der chiralen Symmetrie. Diese legt bestimmte Eigenschaften der freien (off-shell) $\pi\pi$ -Wech-

selwirkung unterhalb der 2-Pionschwelle fest [12, 13], welche u.a. das Auftreten repulsiver Beiträge bedingen, die sowohl im Johnstone-Lee- als auch im Jülich-Modell nicht vorhanden sind. Im weiteren Verlauf des zweiten Kapitels untersuchen wir daher, welche Konsequenzen die aus der chiralen Symmetrie folgenden Eigenschaften für das in-Medium Verhalten der $\pi\pi$ -Wechselwirkung im (sub-) Schwellenbereich haben. Die daraus gewonnenen Erkenntnisse verwenden wir schließlich zur Konstruktion eines 'chiral verbesserten' Jülich-Modells, welches einerseits ein realistischeres Verhalten in Kernmaterie zeigt, andererseits aber weiterhin eine gute Beschreibung der experimentellen $\pi\pi$ -Streudaten bis zu hohen Energien ($E_{\pi\pi} \leq 2$ GeV) und Partialwellen ($J \leq 2$) leistet.

Im dritten Kapitel quantifizieren wir die oben getroffenen Aussagen über die Auswirkungen von Medium-modifizierten $\pi\pi$ -Wechselwirkungen auf das N - N -Potential: aus einer mesontheoretischen $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ -Amplitude berechnen wir mittels einer Dispersionsrelation das in-Medium N - N -Potential im σ -Kanal.

1.2 $\pi\pi$ -Wechselwirkungen bei endlicher Temperatur und ultrarelativistische Schwerionenreaktionen

Eine weiterer, vielleicht noch wichtigerer Grund zur Untersuchung von in-Medium Eigenschaften von Hadronen ist durch die sogenannten ultrarelativistischen Schwerionenstoßexperimente motiviert [14] (URHIC=Ultrarelativistic Heavy-Ion Collisions). Das zentrale Ziel dieser Experimente ist die Erzeugung eines neuartigen Materiezustandes, des sogenannten Quark-Gluon-Plasmas (QGP). Die Vorhersage für die Existenz des QGP beruht auf einer weiteren charakteristischen Eigenschaft der QCD, der 'asymptotischen Freiheit', welche besagt, daß die starke Kopplungskonstante $\alpha_s(q^2)$ mit steigendem Impulsübertrag (d.h. bei kleiner werdendem Abstand) *abnimmt*. Man erwartet daher bei einer hinreichend starken Verdichtung von Kernmaterie, daß die bei kleinen Dichten in Nukleonen eingeschlossenen Quarks und Gluonen zu einer Art 'homogenen' Mediums verschmelzen. In Analogie zu einem elektromagnetischen Plasma, bei dem sich die Atome/Moleküle in ihre (elektromagnetischen) Bestandteile (Atomkerne und Elektronen) auflösen, hat man für den Zustand 'quasifreier' Quarks und Gluonen den Namen 'Quark-Gluon-Plasma' eingeführt. Ein derartiger Zustand hat wahrscheinlich auch zu Beginn des Universums ca. 10^{-6} Sekunden nach dem Urknall vorgelegen. Durch Kollision auf hohe Energien beschleunigter Atomkerne (die zuvor vollständig von ihrer Elektronenhülle getrennt werden) erhofft man sich, ein QGP für einen kurzen Zeitraum im Labor herzustellen. Die folgenden zwei Umstände ermöglichen dabei die Erzeugung von Kerndichten, die weit über normale Sättigungsdichte $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ hinausgehen [15]:

- (a) in zentralen Stößen bei ('relativistischen') Laborenergien von $E_{lab} = 1-2$ GeV/u (d.h. pro Nukleon), wie sie z.B. am SIS (GSI Darmstadt) erreicht werden, dringen die zwei kollidierenden Atomkerne ineinander ein und stoppen sich dabei gegenseitig vollständig ab; in diesem naiven Szenario würden die beiden überlagerten Kerne einer Dichte von $2\rho_0$ entsprechen;
- (b) bei 'ultrarelativistischen' Energien $E_{lab} \geq 10$ GeV/u findet eine erhebliche Lorentzkontraktion der Schwerionen statt; typische Laborenergien am AGS (Brookha-

ven National Laboratory, NY, USA) von $E_{lab} \simeq 15$ GeV/u entsprechen einer CMS -Energie von $E_{cms} = \frac{1}{2} \sqrt{s} \simeq 3$ GeV/u, d.h. der Lorentz- γ -Faktor beträgt für jeden der beiden Kerne im CMS der Kollision $\gamma = E/M_N \simeq 3$; nimmt man nach wie vor volle 'Stopping Power' $S=100\%$ an, so erscheinen hier nukleare Dichten von bis zu $6\rho_0$ möglich.

Es ist jedoch nicht klar, ob Kernmateriedichten von $6\rho_0$ ausreichen, um einen Übergang ins QGP zu erzeugen. Andererseits nimmt bei weiterer Erhöhung der Strahlenergie (z.B. am CERN-SpS mit $E_{lab} \simeq 200$ GeV/u) die Stopping Power ab [16] und mit ihr die Baryondichte in der zentralen Kollisionszone (letztere ist charakterisiert durch die sogenannte mittlere 'Rapiditätszone', vgl. Anhang D für genauere Erläuterungen). An den zukünftigen Collider-Experimenten RHIC (Relativistic Heavy-Ion Collider, BNL) und LHC (Large Hadron Collider, CERN) werden die CMS -Energien so groß sein ($E_{cms} \geq 100$ GeV/u), daß sich die kollidierenden Kerne in zentralen Stößen durchdringen und dabei eine hochangeregte, im wesentlichen Baryon-freie mittlere Zone hinterlassen, während der Großteil der Baryonen in den äußeren beiden 'Fragmentierungszonen' davongetragen wird. Der Anregungsgrad der zentralen Zone wird üblicherweise durch eine (effektive) Temperatur charakterisiert; typische Werte liegen bei $T^{SIS} \simeq 75$ MeV für die GSI-Experimente und $T \simeq 120-180$ MeV am AGS bzw. SpS. Unter RHIC-Bedingungen kann hadronische Materie voraussichtlich auf Temperaturen $T > 250$ MeV 'aufgeheizt' werden. Gemäß dem Phasendiagramm hadronischer Materie (Abb. 1.1) sollte dies ausreichen, um einen Pha-

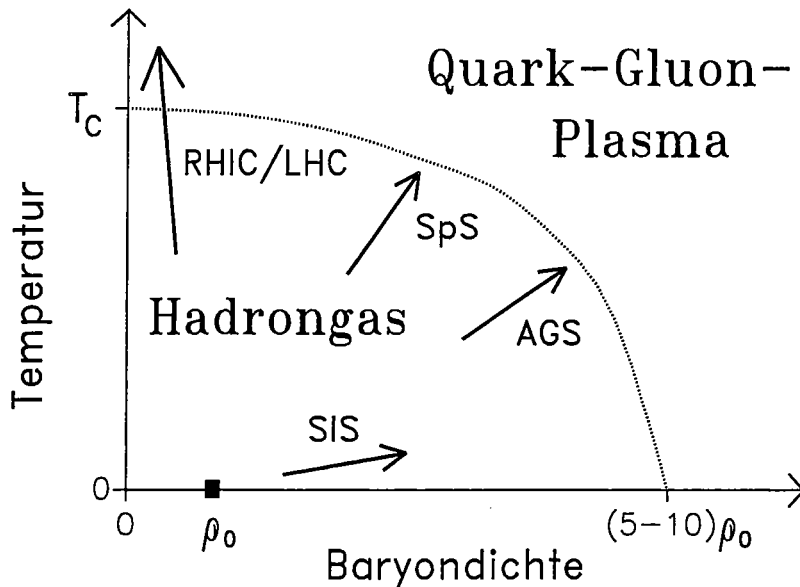


Abbildung 1.1: Phasendiagramm stark wechselwirkender Materie in der T - ρ -Ebene (T : Temperatur, ρ : Baryondichte).

senübergang ins QGP bei endlicher *Temperatur* zu erzeugen: Im Gegensatz zu hohen Baryondichten, bei denen ein Deconfinement der Quarks und Gluonen durch 'überlappende' Nukleonen einsetzt, erwartet man bei genügend hohen Temperaturen einen analogen Mechanismus durch Überlapp thermisch angeregter Mesonen. In URHIC-Experimenten läuft dieser Vorgang umgekehrt ab: nach der (erhofften) Formation eines QGP in der frühen Phase ('pre-equilibrium stage') einer zentralen Schwerionenkollision vollzieht sich ein Phasenübergang in ein heißes Hadrongas, in dem die relevanten Freiheitsgrade wieder durch Mesonen und Baryonen repräsentiert werden. Erhebliche Wechselwirkungen im expandierenden hadronischen System machen jedoch die Identifikation von Signaturen eines möglicherweise formierten QGP zu einer schwierigen Aufgabe. Die letztendlich im Detektor beobachteten Hadronen geben im wesentlichen Auskunft über den Freezeout-Zustand der Reaktion, d.h. über das Stadium, in dem die hadronischen Wechselwirkungen im expandierenden System aufgrund ihrer endlichen Reichweite abklingen. Eine möglichst genaue Kenntnis der in-Medium Eigenschaften von Hadronen und deren Wechselwirkungen ist daher ein wichtiger Schritt auf dem Weg zu einem quantitativen Verständnis der in URHIC's stattfindenden Prozesse.

Bei RHIC-Energien ist zu erwarten, daß die zentrale Reaktionszone von den leichtesten Mesonen, den Pionen, dominiert wird. Verschiedene Aspekte eines heißen, wechselwirkenden Piongas wurden unter Verwendung unterschiedlicher Modelle in der Literatur der vergangenen Jahren diskutiert, u.a. 1-Pion optische Potentiale [17, 18, 19, 20], mittlere freie Weglängen [21, 22], in-Medium $\pi\pi$ -Wirkungsquerschnitte [23, 24, 19], thermodynamische Zustandsgleichungen [25, 26], hydrodynamische Eigenschaften [27, 28] oder numerische Lösungen einer bosonischen Boltzmann-Gleichung [29] zur Simulation der Dynamik von URHIC's. Die letztgenannten beiden Punkte sind dabei im wesentlichen als Anwendung der erstgenannten zu betrachten: so ist z.B. die Zustandsgleichung eines Piongas wichtiger Bestandteil hydrodynamischer Rechnungen, während in der Boltzmann-Gleichung explizite Abhängigkeiten von in-Medium 1-Teilchen-Potentiale ('Mean-Field'-Term) und in-Medium $\pi\pi$ -Wirkungsquerschnitten ('Collision-Integral') auftreten. Im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit (Kapitel 4 und 5) werden wir versuchen, eine vereinheitlichende Beschreibung der ersten vier genannten Aspekte zu geben.

Wie eingangs erwähnt, ist die Anwendung von störungstheoretischen Methoden in einem stark wechselwirkenden System zweifelhaft. Ein gebräuchlicher nicht-perturbativer Zugang zur Beschreibung von Vielteilchensystemen bei endlicher Temperatur besteht im thermodynamischen Greensfunktionen-Formalismus (TGFF), den wir in Kapitel 4 zur Ableitung der Selbstenergie eines im heißen Piongas propagierenden Pions sowie des unkorrelierten 2-Pionpropagators verwenden werden. Letzterer induziert über eine 2-Teilchen-Streugleichung Medium-Modifikationen in der $\pi\pi$ -Streuamplitude, die ihrerseits wieder zur Berechnung der Pionselbstenergie herangezogen wird. Das daraus resultierende, nicht-lineare Gleichungssystem vom Bruecknertyp wird selbstkonsistent und unter voller Berücksichtigung der off-shell Dynamik des Problems (numerisch) gelöst. Dies ermöglicht es uns, die Zuverlässigkeit verschiedener Versionen der häufig angewandten Quasiteilchennäherung zu untersuchen (z.B. basiert die Simulation von URHIC's im Rahmen von Boltzmann-Transport-Gleichungen zumeist auf dem Quasiteilchenkonzept). Aus den weiterhin ermittelten mittleren freien Weglängen eines Pions im heißen Gas lassen sich z.B. Aussagen über die Freezeout-Bedingungen im URHIC's treffen: erst wenn die mittleren

freien Weglängen in etwa der räumlichen Ausdehnung des pionischen Vielteilchensystems entsprechen, erscheint es sinnvoll, von einem 'Freezeout' zu sprechen.

In Kapitel 5 werden wir dann die selbstkonsistenten Resultate für Pion selbstenergie und $\pi\pi$ -Streuamplitude benutzen, um die Zustandsgleichung eines wechselwirkenden Piongases zu berechnen. Frühere Analysen derselben führten auf scheinbar widersprüchliche Ergebnisse: ausgehend von einer empirischen Parametrisierung der freien $\pi\pi$ -Streuphasen fanden Welke *et al.* [25] im Rahmen einer relativistischen Virialentwicklung einen Anstieg der thermodynamischen Zustandsgrößen (Druck-, Entropie- und Energiedichte). Bunatian und Kämpfer benutzten hingegen die Weinberg-Lagrangedichte [30], die eine zuverlässige Beschreibung der Niederenergie-s-Wellen $\pi\pi$ -Wechselwirkung liefert. Als Resultat ihrer selbstkonsistenten Hartree-Rechnungen im TGFF zeigten die Zustandsvariablen einen Abfall mit steigender Temperatur [26]. Unser thermodynamischer Zugang wird ebenfalls auf dem TGFF basieren, so daß eine mit den Analysen aus Kapitel 4 kompatible Beschreibung gewährleistet ist. Als zugrunde liegende $\pi\pi$ -Wechselwirkung dient uns in den Kapiteln 4 und 5 erneut das Jülicher Mesonaustauschmodell, und wir werden auch im heißen Piongas den Einfluß der chiralen Symmetrie auf das Niederenergieverhalten der in-Medium $\pi\pi$ -Amplitude untersuchen.

Neben den hadronischen Observablen wird in URHIC-Experimenten ein besonderes Augenmerk auf elektromagnetische Proben gerichtet, insbesondere Photonen und Dileptonenpaare (e^+e^- - oder $\mu^+\mu^-$ -Paare) [31]. Wie erstmals von Shuryak betont [32], besteht ihr entscheidender Vorteil in einer vernachlässigbaren Wechselwirkung mit dem hadronischen Medium, d.h. vom Zeitpunkt ihrer Entstehung an können sie praktisch ungehindert das stark wechselwirkende hadronische System passieren. Sie sind somit ideale Sonden zur Untersuchung der heißen und dichten inneren Reaktionszone in frühen Stadien einer Schwerionenkollision. So gilt z.B. der invariante Massenbereich $M \simeq 1-3 \text{ GeV}/c^2$ als ein geeignetes Fenster zur Beobachtung einer erhöhten Dileptonproduktion als Folge thermischer $q\bar{q}$ -Annihilationen in einem equilibrierten QGP. Die dominanten Beiträge thermischer Dileptonabstrahlung aus der hadronischen Gasphase dürften dagegen aus $\pi^+\pi^-$ -Annihilationen generiert werden (wegen ihrer kleinen Masse sind die Pionen die thermisch am einfachsten anzuregenden Hadronen). Dementsprechend sollte der zugehörige, relevante invariante Massenbereich, in dem eine verstärkte Produktion von Dileptonen zu erwarten ist, bei $M \simeq 0.3-1 \text{ GeV}/c^2$ liegen, insbesondere wenn man entsprechend der Vektordominanz-Hypothese annimmt, daß der dominante Prozess über ρ -Resonanzformation abläuft, d.h. $\pi^+\pi^- \rightarrow \rho \rightarrow \gamma \rightarrow l^+l^-$ (l =Lepton). Ein derartiger Effekt wurde in einer kürzlich publizierten Arbeit der CERES/NA45-Kollaboration tatsächlich beobachtet [33]: die in zentralen S-Au Kollisionen (bei 200 GeV/u Einschußenergie der Schwefelprojekte) gemessenen e^+e^- -Spektren zeigen eine starke Überhöhung im Vergleich zu unter analogen Bedingungen analysierten Proton-Au Kollisionen (insbesondere im invarianten Massenbereich um $0.5 \text{ GeV}/c^2$). Da die Anzahl der produzierten Pionen in den S-Au Stößen um mehr als eine Größenordnung über der in den p-Au Stößen liegt, wurde diese Überhöhung $\pi^+\pi^-$ -Annihilationen zugeschrieben. Mit Hilfe einer relativistischen Transporttheorie-Rechnung konnten Li, Ko und Brown nachweisen, daß die $\pi^+\pi^-$ -Annihilation in ein ρ -Meson mit anschließender Konversion in ein Photon nebst Zerfall in ein e^+e^- -Paar tatsächlich die beobachtete Überhöhung erklären kann [34]. Die entscheidende Annahme in dieser Analyse ist, daß die ρ -Meson Masse als Folge der 'chiralen Restauration' (d.h. Wiederherstellung der

im Vakuum spontan gebrochenen chiralen Symmetrie) bei endlicher Temperatur/Dichte gemäß der Brown-Rho'schen Skalenhypothese ('BR-Scaling') [35] abfällt. Bei Verwendung der freien ρ -Masse ($m_\rho=0.77 \text{ GeV}/c^2$) verschlechterte sich die Übereinstimmung mit den CERES-Daten deutlich. Im sechsten Kapitel gehen wir der Frage nach, ob nicht auch mehr 'konventionelle', in der Arbeit von Li *et al.* nicht berücksichtigte Medium-Effekte im ρ -Propagator in der Lage sind, eine Überhöhung in den e^+e^- -Spektren unterhalb der ρ -Masse zu erzeugen: aufgrund der starken Ankopplung des ρ -Mesons an intermediäre 2-Pionzustände konnte bereits in früheren Arbeiten [36, 37, 38] gezeigt werden, daß der ρ -Propagator in Kernmaterie erheblichen Medium-Modifikationen unterliegt, die in erster Linie auf der wohlbekannten 'Renormierung' der 1-Pionpropagation beruhen. Ausgehend von einer eichinvarianten Formulierung des in-Medium ρ -Propagators von Chanfray und Schuck [38] erweitern wir insbesondere die Berechnung der in-Medium 1-Pionselbstenergie auf endliche Temperaturen. Unter Berücksichtigung der Zeitentwicklung einer zentralen S-Au Kollision sowie der CERES-Detektor-Akzeptanz untersuchen wir so in einer ersten Rechnung die Auswirkungen dieser 'konventionellen' Medium-Modifikationen des ρ -Mesons auf das resultierende e^+e^- -Spektrum.

Zum Abschluß dieser Arbeit geben wir in Kapitel 7 eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Resultate und Ansatzpunkte für weiterführende Untersuchungen.

Kapitel 2

Pion-Pion Wechselwirkungen in kalter Kernmaterie

2.1 Einführung

In diesem Kapitel nehmen wir eine detaillierte Analyse des Verhaltens unterschiedlicher, effektiver $\pi\pi$ -Wechselwirkungen in kalter Kernmaterie vor. Im folgenden Abschnitt geben wir zunächst die der Beschreibung der Vakuum- $\pi\pi$ -Wechselwirkungen zugrunde liegende 2-Teilchen-Streugleichung an und diskutieren kurz die verschiedenen Typen von Medium-Modifikationen, die im Rahmen eines solchen Zugangs behandelt werden können. Im dritten Abschnitt stellen wir das von uns verwendete Modell für in-Medium-Pionselbstenergie [39, 40] und 2-Pionpropagator [8, 41] vor, welches die Grundlage der in diesem Kapitel vorgenommenen Medium-Modifikationen bildet: es basiert auf einer Standardbehandlung der 1-Pionpropagation in Kernmaterie, bei der die Beiträge zur Pionselbstenergie von Delta-Nukleonloch und Nukleon-Nukleonloch Anregungen generiert werden.

In Erweiterung zu früheren Rechnungen von Schuck *et al.* [4], Chanfray *et al.* [5] und Mull *et al.* [6] wurde in der Arbeit von Aouissat *et al.* [7, 8] die volle off-shell Dynamik der Pionselbstenergie berücksichtigt. Der daraus resultierende in-Medium 2-Pionpropagator wurde dann im Rahmen des rein phänomenologischen Johnstone-Lee Modells [9] zur Berechnung der in-Medium $\pi\pi$ -Streuamplitude im σ -Kanal (isoskalare s-Welle) herangezogen. Dabei trat bereits bei Sättigungsdichte $\rho = \rho_0$ ($\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$) ein 2-Pionbindungszustand auf, der bei leichter Kompression ($\rho = 1.3\rho_0$) sogar zur Pionpaarkondensation führte – mit problematischen Konsequenzen für die Zustandsgleichung von Kernmaterie, wie in der Einleitung erwähnt.

Um die Modellabhängigkeit dieses Mechanismus' zu prüfen, werden wir im 4. Abschnitt analoge Rechnungen im von Lohse/Pearce *et al.* [10, 11] entwickelten $\pi\pi$ -Mesonaustauschmodell ('Jülich-Modell') durchführen. Dieses liefert eine konsistente Beschreibung der experimentellen $\pi\pi$ -Streudaten über einen weiten Energiebereich (bis ca. $E = 1.5 \text{ GeV}$ Schwerpunktsenergie) und bis in hohe Partialwellen. Insbesondere ist seine off-shell Dynamik bei kleinen Energien grundlegend verschieden von der im Johnstone-Lee Modell. Aber auch das Jülich-Modell führt zu einer Instabilität bzgl. s-Wellen Pionpaarkondensation,

wobei die kritische Kondensationsdichte sogar noch etwas niedriger als im Johnstone-Lee-Modell liegt.

Ein wesentliches Defizit dieser beiden Modelle besteht darin, daß sie bestimmte Aspekte der chiralen Symmetrie nicht beinhalten. Wie von Weinberg Ende der 60er Jahre gezeigt, ist die chirale Symmetrie jedoch von entscheidender Bedeutung für das Niederenergieverhalten der $\pi\pi$ -Wechselwirkung. Im 5. Abschnitt diskutieren wir daher zunächst einige wichtige, aus der chiralen Symmetrie folgenden Eigenschaften der $\pi\pi$ -Wechselwirkung und analysieren anschließend das in-Medium Verhalten des linearen σ -Modells, welches den 'chiralen' Bedingungen per constructionem genügt. In diesem Modell ist die $\pi\pi$ -Wechselwirkung tatsächlich frei von einem Kondensationsverhalten in Kernmaterie. Allerdings ist das lineare σ -Modell nicht in der Lage, die freie $\pi\pi$ -Streuung für höhere Energien ($E \leq 1$ GeV) und in höheren Partialwellen ($J \leq 1$) zu beschreiben. Darüber hinaus ist es sehr fragwürdig, ob der in diesem Modell entscheidende Freiheitsgrad, nämlich eine energetisch tiefliegende ($E \approx 600$ MeV), genuine σ -Resonanz in der Natur überhaupt realisiert ist. Im 6. und letzten Abschnitt konstruieren wir daher ein 'chiral verbessertes' Jülich Modell, welches einerseits eine konsistente Beschreibung der experimentellen $\pi\pi$ -Streudaten liefert (bis $E \approx 2$ GeV und für $J \leq 2$), andererseits aber ein möglichst stabiles Verhalten bei der Anwendung auf die Berechnung von s-Wellen $\pi\pi$ -Korrelationen in kalter Kernmaterie zeigen soll.

2.2 Streugleichung und Medium-Modifikationen

An alle verwendeten Modelle zur Pion-Pion Wechselwirkung stellen wir die Anforderung, daß eine zufriedenstellende Beschreibung der experimentellen Streudaten im freien Raum gewährleistet ist. Im Prinzip ist die zugehörige $\pi\pi$ -Streuamplitude $M_{\pi\pi}$ aus der relativistischen Bethe-Salpeter-Gleichung [42] zu bestimmen. Um in der Praxis zu Lösungen dieser Gleichung zu gelangen, sind jedoch Näherungen erforderlich. Wir verwenden in dieser Arbeit ausschließlich das Blankenbecker-Sugar-(BbS-) Reduktionsschema [43], welches die Bethe-Salpeter-Gleichung in eine dreidimensionale Streugleichung vom Lippmann-Schwinger-Typ überführt,

$$M_{\pi\pi} = V_{\pi\pi} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V_{\pi\pi} G_{\pi\pi} M_{\pi\pi} , \quad (2.1)$$

die numerischen Lösungsmethoden zugänglich ist. $G_{\pi\pi}$ bezeichnet den 2-Pion-Zwischenzustands-Propagator; die sogenannten Pseudopotentiale $V_{\pi\pi}$ werden aus einer effektiven Meson-Lagrangedichte abgeleitet und charakterisieren die zugehörigen irreduziblen 2-Pion-Wechselwirkungsgraphen (Borngraphen). Diese elementaren Diagramme werden durch Lösung von Glg. (2.1) in alle Ordnungen aufsummiert, wobei die Impulsintegration durch Einführung von phänomenologischen Formfaktoren regularisiert wird. Durch geeignete Wahl von Cutoff-Parametern und effektiven Kopplungskonstanten kann in der Regel eine gute Reproduktion der experimentellen Streudaten bis weit über die 2-Pionschwelle hinaus erreicht werden. Dies ist einer der Vorteile gegenüber z.B. der chiralen Störungstheorie, die zwar eine fundamentale Lösung des Renormierungsproblems offeriert, aber in ihrem Gültigkeitsbereich nur wenige 100 MeV über die 2-Pionschwelle hinausreicht.

Der für unsere Zwecke entscheidende Vorteil einer mikroskopischen Streugleichung liegt jedoch in ihrer Anwendungsmöglichkeit auf die Untersuchung von in-Medium Eigenschaften hadronischer 2-Teilchen-Wechselwirkungen. Der einfachste Medium-Effekt besteht in einer Modifikation des intermediären 2-Pionpropagators. Gerade hier erweist sich die BbS-Streugleichung als besonders geeignet, da sich die Definition des Vakuum-BbS-2-Pionpropagators direkt für den Fall kalter Kernmaterie übernehmen läßt, wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden.

Ein zweiter Typ von Medium-Effekten, der im Rahmen einer mikroskopischen Streugleichung behandelt werden kann, bezieht sich auf die Modifikation der Wechselwirkung selbst, d.h. der 2-Teilchen-Pseudopotentiale. Zum einen bietet sich die Möglichkeit, die Propagatoren der Wechselwirkungsträger, d.h. der ausgetauschten Mesonen, zu modifizieren. Des weiteren können auch Korrekturen der Wechselwirkungsvertizes berücksichtigt werden – im einfachsten Fall durch eine effektive (dichteabhängige) Parametrisierung der Kopplungskonstanten. Wir werden Medium-Effekte in den Pseudopotentialen an einigen Stellen durch Reduktion der Austauschteilchen-Massen bzw. Kopplungskonstanten gemäß dem Brown-Rho'schen Skalengesetz [35] einbeziehen. Derartige Eingriffe in die Pion-Pion Wechselwirkung führen in der Regel zu erheblichen Effekten, sind aber stark modellabhängig und daher nur begrenzt aussagekräftig.

Bei zunehmender Teilchendichte treten in verstärktem Maße Drei- und Mehrteilchen-Wechselwirkungen auf, die jedoch äußerst schwierig in eine Vielteilchentheorie einzuschließen sind. Wir werden solche Prozesse in dieser Arbeit vernachlässigen, was bei den betrachteten relativ kleinen Dichten gerechtfertigt erscheint.

2.3 Pionselfstenergie und 2-Pionpropagator in kalter Kernmaterie

2.3.1 In-Medium 1-Pionpropagator

Der Propagator eines freien Pions mit Impulsbetrag k und Energie k_0 ist gegeben durch

$$D_\pi^0(k_0, k) = \frac{1}{k_0^2 - k^2 - m_\pi^2 + i\eta} \quad (2.2)$$

mit infinitesimalem $\eta \rightarrow 0$. In Kernmaterie wird der Propagator durch die Wechselwirkung mit den umgebenden Nukleonen modifiziert. Mit Hilfe der Dyson-Gleichung lassen sich alle irreduziblen Beiträge, charakterisiert durch die Pionselfstenergie Σ_π , in alle Ordnungen aufsummieren, so daß der dichteabhängige Pionpropagator folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{aligned} D_\pi(k_0, k; \rho) &= D_\pi^0(k_0, k) + D_\pi^0(k_0, k) \Sigma_\pi(k_0, k; \rho) D_\pi(k_0, k; \rho) \\ &= \frac{1}{k_0^2 - k^2 - m_\pi^2 - \Sigma_\pi(k_0, k; \rho) + i\eta} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Für den Fall isospinsymmetrischer Kernmaterie, auf den wir uns stets beschränken, werden die dominanten Beiträge zu Σ_π von p-Wellen Nukleon-Nukleonloch- (NN^{-1}) und Delta-Nukleonloch- (ΔN^{-1}) Anregungen generiert (s-Wellen Beiträge sind typischerweise um

eine Größenordnung kleiner [40]). Die zugehörigen wohlbekannten Lindhardfunktionen ϕ_α in einem freien Fermigas ergeben sich aus einem Faltungsintegral über Teilchen- und Lochpropagator als:

$$\phi_\alpha(k_0, k) = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} [G_a^0(E + k_0, \vec{p} + \vec{k}) G_{b-1}^0(E, \vec{p}) + G_a^0(E - k_0, \vec{p} - \vec{k}) G_{b-1}^0(E, \vec{p})] \quad (2.4)$$

mit $\alpha \equiv ab^{-1} = NN^{-1}, \Delta N^{-1}$ und den Propagatoren

$$\begin{aligned} G_N^0(E, \vec{p}) &= \frac{1 - f^N(\vec{p})}{E - E_N(\vec{p}) + i\eta} \\ G_{N^{-1}}^0(E, \vec{p}) &= \frac{f^N(\vec{p})}{E - E_N(\vec{p}) - i\eta} \\ G_\Delta^0(E, \vec{p}) &= \frac{1}{E - E_\Delta(\vec{p}) + i\eta} \end{aligned} \quad (2.5)$$

sowie der Nukleon-Fermiverteilung

$$f^N(p; \rho) = \Theta(k_F - p) , \quad (2.6)$$

wobei Θ die Stufenfunktion bezeichnet. Aufgrund der verschwindenden Δ -Dichte in Kernmaterie tritt für den Δ -Propagator kein 'Pauli-Blocking'-Faktor $(1 - f)$ auf. Der Zusammenhang zwischen Fermiimpuls k_F und Kernmateriedichte ρ ist bestimmt durch

$$\begin{aligned} \rho &= g_N \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f^N(p) \\ &= \frac{2k_F^3}{3\pi^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

mit dem Spin-Isospin-Entartungsfaktor $g_N = 4$ für Nukleonen. Die Baryonenergien behandeln wir in nicht-relativistischer Kinematik,

$$\begin{aligned} E_N(\vec{p}) &= \frac{\vec{p}^2}{2M_N} \\ E_\Delta(\vec{p}) &= \frac{\vec{p}^2}{2M_\Delta} + (M_\Delta - M_N) - \frac{i}{2} \Gamma_\Delta^{med}(k_0, k) , \end{aligned} \quad (2.8)$$

was für kalte Kernmaterie eine gute Näherung darstellt ($k_F \ll M_N$) und zudem eine analytische Integration der Lindhardfunktionen bei voller Berücksichtigung der Fermibewegung ermöglicht. Insbesondere im NN^{-1} -Kanal spielt die Fermibewegung der Nukleonen eine entscheidende Rolle bei der Ausbildung von 2-Pionbindungszuständen und der letztendlichen Pionpaarkondensation im Rahmen des Johnstone-Lee- bzw. des Jülich-Mesonaustauschmodells, wie von Aouissat *et al.* in den Ref. [8, 41] gezeigt. Die explizite Form der Lindhardfunktionen findet sich in Anhang A. Aus ihnen ergeben sich die sogenannten pionischen Suszeptibilitäten $\chi^{(0)}$ und die Pionselbstenergie $\Sigma_\pi^{(0)}$ in unterster

Ordnung zu

$$\begin{aligned}\chi_\alpha^{(0)}(k_0, k) &= \frac{f_{\pi\alpha}^2}{m_\pi^2} \Gamma_\pi^2(k) SI(\alpha) \phi_\alpha(k_0, k) \\ \Sigma_\alpha^{(0)}(k_0, k) &= -k^2 \chi_\alpha^{(0)}(k_0, k)\end{aligned}\quad (2.9)$$

mit den πNN - bzw. $\pi N\Delta$ -Kopplungskonstanten $f_{\pi\alpha}$, einem Monopol-Formfaktor $\Gamma_\pi(k)$ zur Simulation der endlichen Ausdehnung der Pion-Baryon-Vertizes und Spin-Isospin-Faktoren $SI(\alpha)$ (siehe Anhang A für weitere Details). Der Name 'Suszeptibilität' wurde eingeführt, um die formale Verwandtschaft zur Propagation einer klassischen elektromagnetischen Welle durch ein Medium von elektrischen Dipolen zu betonen [44, 40]. Dort tritt aber eine durch das kurzreichweitige Feld der ausgerichteten Dipole erzeugte, abschwächende Korrektur zur Suszeptibilität $\chi^{(0)}$ in unterster Ordnung auf, so daß sich die korrigierte Suszeptibilität ergibt zu:

$$\chi = \frac{\chi^{(0)}}{1 + g'\chi^{(0)}} , \quad (2.10)$$

was mit dem Wert $g' = \frac{1}{3}$ als klassische *Lorentz-Lorenz* Korrektur bezeichnet wird. Dieses Phänomen findet seine Parallele in der nuklearen Pionphysik, bekannt als *Ericson-Ericson-Lorentz-Lorenz* Korrektur [44, 45]: M. und T.E.O. Ericson konnten zeigen, daß die Berücksichtigung von kurzreichweitigen Spin-Isospin-Korrelationen zwischen Nukleon und Nukleonloch sowie zwischen Delta und Nukleonloch eine Repulsion vom Typ (2.10) generiert:

$$\begin{aligned}\chi_\alpha(k_0, k) &= \frac{\chi_\alpha^{(0)}(k_0, k)}{1 + g'_\alpha \chi_\alpha^{(0)}(k_0, k)} \\ \Rightarrow \Sigma_\alpha(k_0, k) &= -k^2 \chi_\alpha(k_0, k) .\end{aligned}\quad (2.11)$$

Derartige Korrekturen sind unbedingt zu berücksichtigen, um zu einer realistischen Beschreibung der Pion-Propagation in kalter Kernmaterie zu gelangen. Ohne diese würde bereits unterhalb der Sättigungsdichte ρ_0 1-Pionkondensation einsetzen [46, 47], was z.B. empirischen Beobachtungen an Atomkernen widerspricht [48]. g'_α bezeichnen die Landau-Migdalparameter, die die ganze Information über die Dynamik der kurzreichweitigen Spin-Isospin-Korrelationen enthalten und somit im Prinzip impuls- und dichteabhängig sind. In den vergangenen 20 Jahren wurden große Anstrengungen unternommen, ihre genauen Werte zu bestimmen, z.B. durch Analyse von Gamow-Teller Resonanzspektren [49], mittels Brueckner-G-Matrix-Rechnungen [50] oder mit Hilfe mesontheoretischer Rechnungen, die auf einer komplizierten Verknüpfung von π -, ρ - und ω -Austausch basieren [51]. Für $\rho \leq \rho_0$ sind die Impuls- und Dichteabhängigkeiten in der Regel nicht sehr stark ausgeprägt. In dieser Arbeit werden wir solche Abhängigkeiten vernachlässigen, wählen dafür aber als konservative Abschätzung relativ hohe Werte von

$$\begin{aligned}g'_{NN-1} &\equiv g'_{11} = 0.8 , \\ g'_{\Delta N-1} &\equiv g'_{22} = 0.5\end{aligned}\quad (2.12)$$

in pionischen Einheiten (d.h. der zugehörige 'Kraftstärkefaktor' beträgt $C_0 = 4\pi \frac{f_{\pi NN}^2}{4\pi} \frac{1}{m_\pi^2} \approx 400 \text{ MeVfm}^3$) [40]. Darüber hinaus induzieren die kurzreichweitigen Korrelationen Übergänge zwischen dem NN^{-1} - und dem ΔN^{-1} -Kanal, so daß die kombinierte Aufsummation der Spin-Isospin-Korrelationen in beliebige Ordnung auf ein gekoppeltes System von zwei Gleichungen führt (vgl. auch Abb. 2.1):

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \chi_1^{(0)} - \chi_1^{(0)} g'_{11} \chi_1 - \chi_1^{(0)} g'_{12} \chi_2 \\ \chi_2 &= \chi_2^{(0)} - \chi_2^{(0)} g'_{21} \chi_1 - \chi_2^{(0)} g'_{22} \chi_2.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Dabei wurden die Abkürzungen $\chi_1^{(0)} = \chi_{NN^{-1}}^{(0)}$ und $\chi_2^{(0)} = \chi_{\Delta N^{-1}}^{(0)}$ eingeführt. Die Übergangs-Migdalparameter g'_{12}, g'_{21} fixieren wir ebenfalls bei 0.5. Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt über Matrixinversion mit dem Endresultat

$$\chi_\pi \equiv \chi_1 + \chi_2 = \frac{\chi_1^{(0)} + \chi_2^{(0)} - \chi_1^{(0)} \chi_2^{(0)} (g'_{12} + g'_{21} - g'_{11} - g'_{22})}{(1 + \chi_1^{(0)} g'_{11}) (1 + \chi_2^{(0)} g'_{22}) - \chi_1^{(0)} \chi_2^{(0)} g'_{12} g'_{21}}. \quad (2.14)$$

Daraus geht schließlich die Pionselfstenergie hervor als

$$\Sigma_\pi(k_0, k; \rho) = -k^2 \chi_\pi(k_0, k; \rho), \quad (2.15)$$

welche in Verbindung mit Glg. (2.3) den Pionpropagator in kalter Kernmaterie definiert.

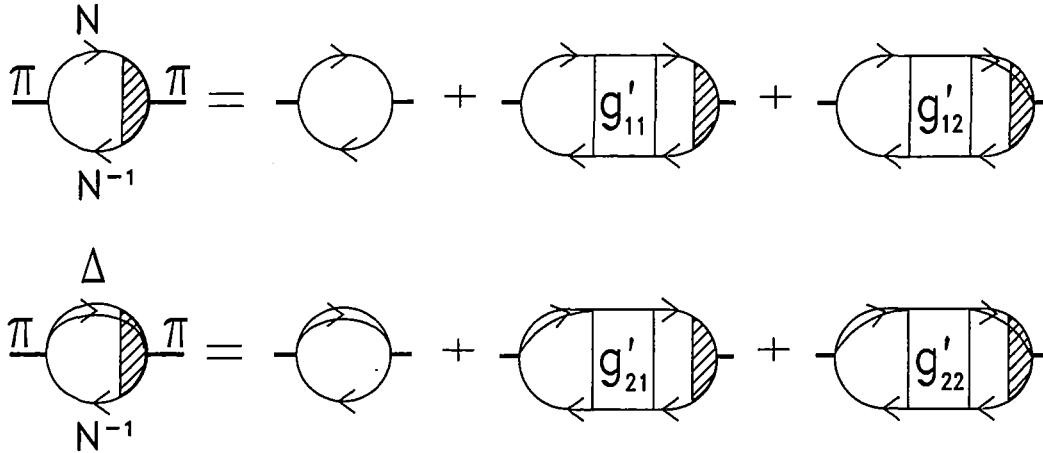


Abbildung 2.1: Gekoppelte Graphen für pioninduzierte NN^{-1} - und ΔN^{-1} -Anregung in Kernmaterie; die Kästchen mit den Migdalparametern g' charakterisieren die kurzreichweitigen Spin-Isospin-Korrelationen mit den entsprechenden Übergängen zwischen den beiden Kanälen; die schraffierten Vertizes deuten die Iteration der elementaren Diagramme an.

2.3.2 In-Medium 2-Pionpropagator

Der nächste Schritt besteht in der Ableitung des unkorrelierten 2-Pionpropagators in kalter Kernmaterie. Im Vakuum ist er für zwei Pionen mit Impulsen $\vec{k}$ und $-\vec{k}$ gegeben

durch

$$\begin{aligned} G_{\pi\pi}^0(E, \vec{k}) &= \int \frac{idk_0}{\pi} D_{\pi}^0(k_0, \vec{k}) D_{\pi}^0(E - k_0, -\vec{k}) \\ &= \frac{1}{\omega_k} \frac{1}{E^2 - 4\omega_k^2 + i\eta} \end{aligned} \quad (2.16)$$

mit $\omega_k = \sqrt{m_{\pi}^2 + k^2}$. Aufgrund der Lorentzinvarianz im freien Raum ist es hier nicht erforderlich, eine etwaige Abhängigkeit vom totalen Schwerpunktsimpuls der Pionen zu berücksichtigen.

Die BbS-Reduktion der Bethe-Salpeter-Gleichung führt genau auf Glg. (2.16) für den in der zugehörigen Streugleichung (2.1) zu benutzenden 2-Pionpropagator. Wir können somit Glg. (2.16) direkt für die Anwendung in kalter Kernmaterie erweitern:

$$G_{\pi\pi}(E, \vec{k}) = \int \frac{idk_0}{\pi} D_{\pi}(k_0, \vec{k}) D_{\pi}(E - k_0, -\vec{k}) . \quad (2.17)$$

Da durch die unumgängliche Festlegung eines Ruhesystems für die Kernmaterie die Lorentzinvarianz gebrochen wird, stellt die Beschränkung auf verschwindende Schwerpunktsimpulse ('back-to-back'-Kinematik) in Glg. (2.17) eine Näherung dar. Für den von uns betrachteten Fall zweier Pionen ist diese jedoch nicht so bedenklich wie es z.B. für den 2-Nukleon-Propagator in Kernmaterie wäre, bei dem Pauli-Blocking-Effekte eine nicht vernachlässigbare Rolle spielen (z.B. in Brueckner-G-Matrix-Rechnungen).

Glg. (2.17) ist in einer für numerische Rechnungen ungeeigneten Form, u.a. aufgrund der bis $k_0 = \pm\infty$ reichenden Integration, die für $E \rightarrow 0$ zu signifikanten Ungenauigkeiten führt. Wir können derartige Probleme auf folgende Weise umgehen [8, 38, 41]: zunächst setzen wir für die beiden 1-Pionpropagatoren in Glg. (2.17) ihre Spektraldarstellung ein,

$$\begin{aligned} D_{\pi}(k_{0+}, \vec{k}) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\pi} \frac{Im D_{\pi}(\omega_+, \vec{k})}{k_0 - \omega + i\eta} \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{d\omega^2}{\pi} \frac{Im D_{\pi}(\omega_+, \vec{k})}{k_0^2 - \omega^2 + i\eta} \end{aligned} \quad (2.18)$$

mit $\omega_+ \equiv \omega + i\eta$ etc., $d\omega^2 = 2\omega d\omega$. Beim Übergang zur 2. Zeile wurde die analytische Eigenschaft

$$Im D_{\pi}(\omega + i\eta, \vec{k}) = -Im D_{\pi}(-\omega + i\eta, \vec{k}) \quad (2.19)$$

ausgenutzt. Die k_0 -Integration in Glg. (2.17) läßt sich dann durch Schließen der Kontur ausführen mit dem Resultat

$$G_{\pi\pi}(E, \vec{k}) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega^2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'^2}{\pi} Im D_{\pi}(\omega_+, \vec{k}) Im D_{\pi}(\omega'_+, -\vec{k}) \frac{(\omega + \omega')}{2\omega\omega'} \frac{1}{E^2 - (\omega + \omega')^2 + i\eta} . \quad (2.20)$$

Die Berechnung des Imaginärteils liefert:

$$Im G_{\pi\pi}(E, \vec{k}) = - \int_0^E \frac{d\omega}{\pi} Im D_{\pi}(\omega_+, \vec{k}) Im D_{\pi}(E - \omega_+, -\vec{k}) , \quad (2.21)$$

welcher nun lediglich noch eine Integration bis E erfordert. Der Realteil wird aus einer Dispersionsrelation berechnet:

$$\text{Re}G_{\pi\pi}(E, \vec{k}) = -\mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dE'^2}{\pi} \frac{\text{Im}G_{\pi\pi}(E', \vec{k})}{E^2 - E'^2}. \quad (2.22)$$

An dieser Stelle ist zwar auch eine Integration bis $E' = \infty$ notwendig, aber diese Methode hat gegenüber der 'direkten' Integration von Glg. (2.17) den entscheidenden Vorteil, daß $\text{Im}G_{\pi\pi}$ für $E \rightarrow 0$ per constructionem verschwindet. Für $E > 2m_\pi$ und z.B. $\rho = \rho_0$ weichen beide Methoden weniger als 10% voneinander ab.

In Abb. 2.2 sind Imaginär- und Realteil von $G_{\pi\pi}(E, k)$ für feste Pionimpulse k gegen die 2-Pionenergie E aufgetragen. Für $k = 100$ MeV/c befindet sich der überwiegende Teil der Stärke noch in einer Mode zweier in-Medium-(quasi-)Pionen $\tilde{\pi}$, wobei der 'Peak' durch die (attraktiven) ΔN^{-1} -Anregungen eine leichte Verschiebung zu kleineren Energien sowie eine Verbreiterung erfährt (im freien Raum ist $\text{Im}G_{\pi\pi} \propto \delta(E - E_{on})$ mit $E_{on} = 2\sqrt{m_\pi^2 + k^2}$, was in Abb. 2.2 durch vertikale Linien angedeutet ist). Man erkennt aber schon die Ausbildung einer zweiten Maximumstruktur bei $E \simeq \frac{1}{2}E_{on}$, was der gleichzeitigen Propagation eines Quasipions und eines in die NN^{-1} -Mode angeregten Pions entspricht. Für $k = 250$ MeV/c findet eine weitere Aufweichung der 2-Quasipion-Moden statt: bei 1.5-facher Sättigungsdichte (gepunktete Linie im mittleren Teil von Abb. 2.2) überwiegt bereits die Stärke in der $\tilde{\pi}-NN^{-1}$ -Mode bei $E \simeq 300$ MeV; auch tritt eine weitere, sehr breite Peakstruktur um $E \simeq 150$ MeV auf: beide Pionen propagieren hier in der NN^{-1} -Mode. Für $k = 400$ MeV/c zeigt die 2-Pionspektralfunktion eine Struktur von mindestens vier überlagerten, breiten Maxima, die sich im wesentlichen über den gesamten Energiebereich von $E = 0$ bis etwas über $E = E_{on}$ erstreckt; bei z.B. $\rho = 1.5\rho_0$ befindet sich der dominante Peak bereits bei $E \simeq \frac{1}{2}E_{on}$.

Zusammenfassend halten wir fest, daß der unkorrelierte 2-Pionpropagator in kalter Kernmaterie erheblichen Medium-Modifikationen unterworfen wird; insbesondere ist die Kopplung an das Nukleon-Nukleonloch-Kontinuum keineswegs vernachlässigbar. Die relativ großen Breiten der verschiedenen, überlappenden Maximumstrukturen unterstreichen die Notwendigkeit einer exakten off-shell Behandlung wie durch Glgn. (2.21), (2.22) gegeben.

2.4 $\pi\pi$ -Wechselwirkung im Jülicher Mesonaustauschmodell

Bei der Berechnung von $\pi\pi$ -Korrelationen in kalter Kernmaterie werden wir uns stets auf die s-Wellen $\pi\pi$ -Wechselwirkung beschränken. In höheren Partialwellen sind die Bindungseffekte aufgrund einer größeren Zentrifugalbarriere unterdrückt.

Nach einer Partialwellenzerlegung nimmt die Streugleichung (2.1) folgende Gestalt an:

$$M_{\pi\pi}^{JI}(E, q, q') = V_{\pi\pi}^{JI}(E, q, q') + \int_0^\infty \frac{dk k^2}{(2\pi)^2} V_{\pi\pi}^{JI}(E, q, k) G_{\pi\pi}(E, k) M_{\pi\pi}^{JI}(E, k, q'), \quad (2.23)$$

wobei J und I den Gesamtdrehimpuls und -isospin des Pionpaares bezeichnen. E ist die Startenergie und q, q' sind die Beträge der Dreierimpulse von ein- und auslaufenden Pionen

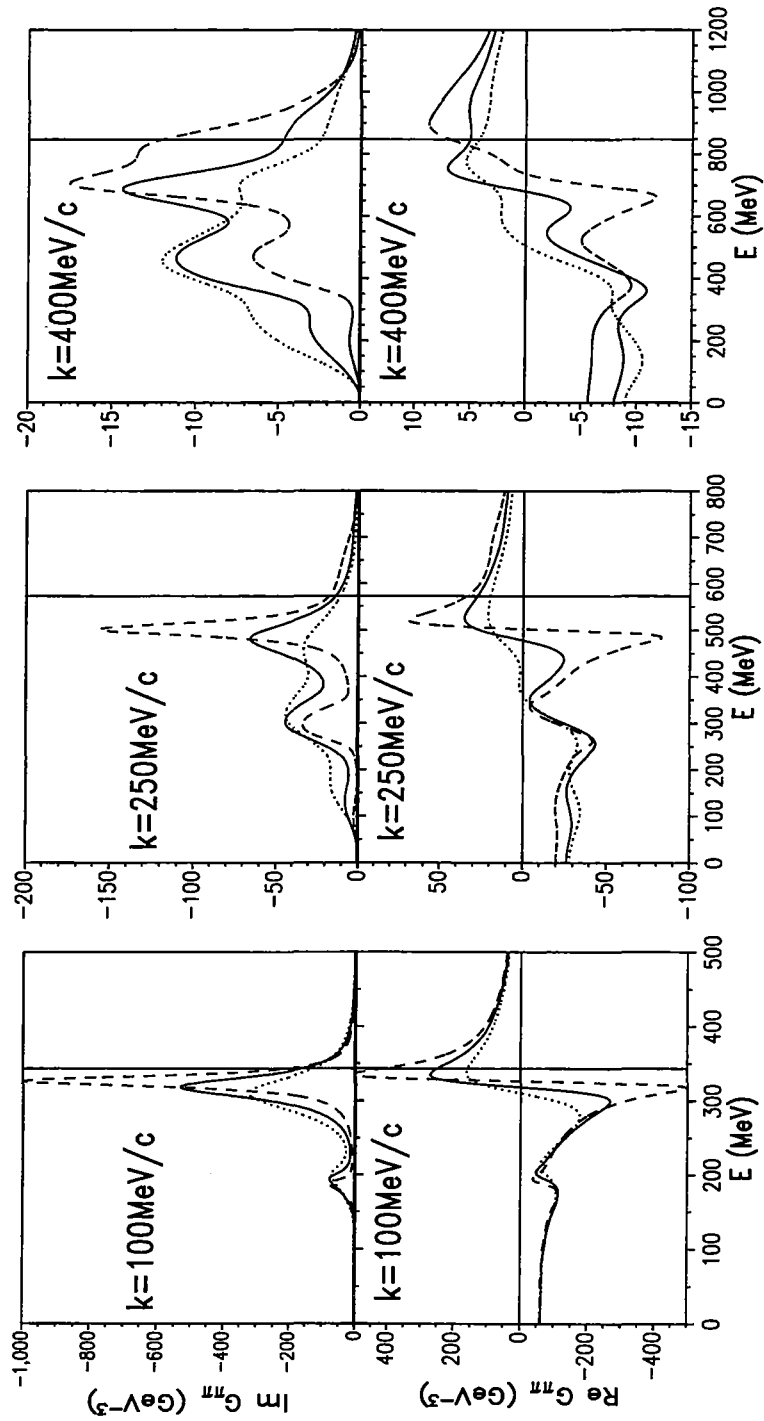


Abbildung 2.2: Unkorrelierter 2-Pionpropagator bei verschiedenen Impulsen und Kernmaterie-Dichten; gestrichelte Linien: $\rho=0.5\rho_0$, durchgezogene: $\rho=\rho_0$, gepunktete: $\rho=1.5\rho_0$; die on-shell Energie E_{on} im Vakuum ist durch die vertikalen Linien angedeutet.

in ihrem Schwerpunktsystem (CMS). Bevor wir zu den in-Medium Resultaten kommen, wiederholen wir zunächst die für unsere Analysen wichtigsten Aspekte der Jülich- $\pi\pi$ -Wechselwirkung im Vakuum.

2.4.1 Das Mesonaustausch-Modell im freien Raum

Im Rahmen des von Lohse/Pearce *et al.* [10, 11] entwickelten Modells für die $\pi\pi$ -Streuung im freien Raum basieren die Pseudopotentiale ausschließlich auf explizitem Mesonaustausch, wobei durch zusätzliche Ankopplung des $K\bar{K}$ -Kanals eine sehr gute Beschreibung der experimentellen Streuphasen über $E=1$ GeV hinaus erreicht wird (der angekoppelte $K\bar{K}$ -Kanal wurde in Glg. (2.23) nicht explizit angegeben, ist aber in unseren Rechnungen enthalten). Die verschiedenen Beiträge sind in Abb. 2.3 gezeigt. Es sind dies:

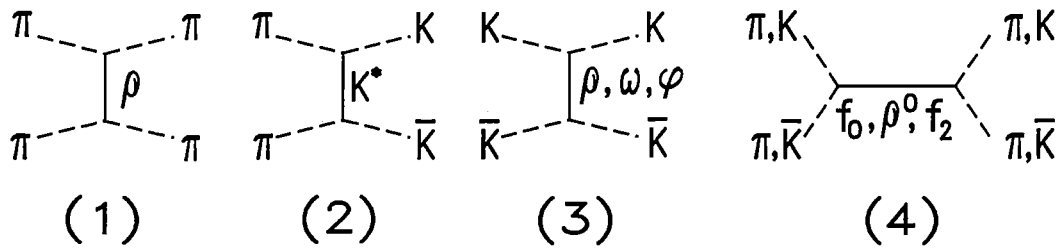


Abbildung 2.3: Mesonaustauschbeiträge im Jülich- $\pi\pi$ -Modell.

- (1) $\rho(770)$ t-Kanal-Austausch zwischen zwei Pionen, wodurch im wesentlichen die s-Wellen $\pi\pi$ -Wechselwirkung im Niederenergiebereich bestimmt ist;
- (2) $K^*(892)$ t-Kanal-Austausch für $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ Übergänge;
- (3) t-Kanal-Vektormesonaustausch von $\rho(770)$, $\omega(783)$ und $\phi(1020)$ im $K\bar{K}$ -Kanal; die Kombination dieser Beiträge führt zur Formation eines skalaren-isoskalaren $K\bar{K}$ -Bindungszustandes, der als $f_0(980)$ interpretiert wird und den scharfen Anstieg der $\delta_{\pi\pi}^{00}$ -Phase bei $E \simeq 1$ GeV erklären kann;
- (4) genuine Polgraphen für $\pi\pi/K\bar{K}$ -Annihilation in $f_0(1400)$ -, $\rho(770)$ - und $f_2(1270)$ -Mesonen, welche zur quantitativen Reproduktion der Streuphasen $\delta_{\pi\pi}^{00}(E > 1\text{GeV})$, $\delta_{\pi\pi}^{11}$ und $\delta_{\pi\pi}^{20}$ erforderlich sind.

Der für unsere Zwecke wichtigste Beitrag wird durch t-Kanal ρ -Austausch vermittelt, den wir im folgenden etwas genauer diskutieren; der entsprechende Term im Wechselwirkungsanteil der Lagrangedichte lautet:

$$\mathcal{L}_{\pi\pi\rho}^{int} = g_{\pi\pi\rho}(\vec{\pi} \times \partial^\mu \vec{\pi}) \cdot \vec{\rho}_\mu \quad (2.24)$$

($\vec{\pi}$: Isovektor-Pionfeld, $\vec{\rho}_\mu$: Vektor-Isovektor- ρ -Meson-Feld, $g_{\pi\pi\rho}$: Kopplungskonstante), woraus sich mit Standard-Reduktionsmethoden die zugehörige Bornamplitude ergibt zu:

$$M_{B,\pi\pi\rho}^I(s, t, u) = IF g_{\pi\pi\rho}^2 \left(\frac{s-u}{t-m_\rho^2} + \frac{s-t}{u-m_\rho^2} \right), \quad (2.25)$$

ausgedrückt in t -/ u -'Crossing'-symmetrischer Form mit den Mandelstam-Variablen

$$\begin{aligned} s &= (q_1^{(4)} + q_2^{(4)})^2 = (q_3^{(4)} + q_4^{(4)})^2 \\ t &= (q_1^{(4)} - q_3^{(4)})^2 = (q_4^{(4)} - q_2^{(4)})^2 \\ u &= (q_1^{(4)} - q_4^{(4)})^2 = (q_3^{(4)} - q_2^{(4)})^2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

$(q_i^{(4)})$: Viererimpulse) und einem Isospinfaktor

$$IF = \begin{cases} 2, I = 0 \\ 1, I = 1 \\ -1, I = 2 \end{cases} \quad (2.27)$$

Für den Gebrauch der Bornamplitude in einer dreidimensionalen Streugleichung ist eine Vorschrift für die off-shell Fortsetzung von s , t und u erforderlich. Durch die BbS-Reduktion der Bethe-Salpeter-Gleichung werden die Viererimpulse der gestreuten Pionen 'on-energy-shell' gesetzt, d.h.

$$\begin{aligned} q_{1/2}^{(4)} &= (E/2, \pm \vec{q}) \\ q_{3/4}^{(4)} &= (E/2, \pm \vec{q}') \end{aligned} \quad (2.28)$$

für die ein- und auslaufenden Impulse, respektive. Daraus ergibt sich für die 'on-energy-shell' Fortsetzung der Mandelstam-Variablen:

$$\begin{aligned} s &= E^2 \\ t &= -(\vec{q} - \vec{q}')^2 = -q^2 - q'^2 + 2qq'x \\ u &= -(\vec{q} + \vec{q}')^2 = -q^2 - q'^2 - 2qq'x \end{aligned} \quad (2.29)$$

mit $x = \cos \theta$, $\theta = \angle(\vec{q}, \vec{q}')$.

Zur Regularisierung der Streugleichung ist die Einführung eines phänomenologischen Formfaktors notwendig, der der endlichen Ausdehnung der hadronischen Vertizes Rechnung trägt. Im vorliegenden Fall wurde eine Dipolform gewählt, die für t -Kanal ρ -Austausch folgende Gestalt annimmt:

$$F^{(t)}(q, q', x) = \left(\frac{2\Lambda_\rho^2 - m_\rho^2}{2\Lambda_\rho^2 - t} \right)^2 \quad (2.30)$$

mit Λ_ρ : Cutoff-Parameter. Nach einer zusätzlichen Partialwellenentwicklung erhält man für das in die Streugleichung eingehende Pseudopotential des t -/ u -Kanal ρ -Austausches:

$$V_{\pi\pi\rho}^{JI}(E, q, q') = IF g_{\pi\pi\rho}^2 \int_{-1}^{+1} dx \left(F^{(t)}(q, q', x) \right)^2 \frac{E^2 + (\vec{q} + \vec{q}')^2}{-(\vec{q} - \vec{q}')^2 - m_\rho^2} P_J(x), \quad (2.31)$$

wobei sich der Faktor 2 vom u -Kanal-Austauschgraphen mit einem Faktor $\frac{1}{2}$ für die Symmetrisierung der identischen Pionen aufgehoben hat.

Im Rahmen des Jülich-Modells besteht die $\pi\pi$ -Wechselwirkung im repulsiven, skalaren-isotensoriellen Kanal ($JI = 02$) ausschließlich aus der Iteration des t-Kanal ρ -Austausches, was die freien Parameter $g_{\pi\pi\rho}$ und Λ_ρ durch Anpassung an die δ^{02} -Phase im wesentlichen festlegt. Im σ -Kanal ergibt der attraktive ρ -Austausch einen ca. 70-prozentigen Anteil zur voll iterierten Streuamplitude in Schwellennähe ($E \simeq 2m_\pi$). Die übrigen 30% werden durch zusätzliche (konstruktive) Interferenzen mit dem $f_0(1400)$ -Polgraphen sowie dem angekoppelten $K\bar{K}$ -Kanal (und hier insbesondere dem $K^*(892)$ -Austausch) generiert.

2.4.2 Jülich-Modell in kalter Kernmaterie

Den in Abschnitt 2.3 abgeleiteten in-Medium 2-Pionpropagator, Glgn. (2.21) und (2.22), setzen wir nun in die partialwellenzerlegte Streugleichung (2.23) ein. Für die Pseudopotentiale berücksichtigen wir alle im Jülich-Modell enthaltenen Beiträge, wobei der im angekoppelten Kanal auftretende $K\bar{K}$ -Propagator in seiner Vakuumform belassen wird. Da die aus t-Kanal Mesonaustausch hervorgehenden Pseudopotentiale nicht separabel sind, ist eine numerische Lösung der Streugleichung erforderlich. Dies wird in völliger Analogie zum Vakuum-Fall durch Diskretisierung der Impulsintegration und anschließender Matrixinversion erreicht (Haftel-Tabakin-Verfahren [52]). Die resultierende (on-shell) Amplitude im σ -Kanal ist für verschiedene Dichten in Abb. 2.4 dargestellt. Bei halber Sättigungsdichte finden wir eine beträchtliche Ansammlung von Stärke im Bereich der 2-Pionschwelle; für $\rho = \rho_0$ bildet sich bereits ein Bindungszustand unterhalb der Schwelle bei $E \simeq m_\pi$ aus, der sich bei leichter Kompression ($\rho = 1.14\rho_0$) extrem verschärft und praktisch die ganze Stärke im σ -Kanal absorbiert (man beachte die um einen Faktor von ca. 30 erweiterte y-Achsenkala auf der rechten Seite von Abb. 2.4). Bei $\rho = 1.25\rho_0$ (gepunktete Linien auf der linken Seite von Abb. 2.4) ist dieser Bindungszustand kondensiert: man erkennt nur noch die repulsive Flanke für $E \geq 0$ im Realteil der Amplitude. Der entscheidende Effekt in diesem Kondensationsmechanismus ist die Kopplung der Pionen an tiefliegende NN^{-1} -Anregungen, wobei die attraktive ΔN^{-1} -Mode unterstützend durch eine Verschiebung von Stärke zu kleinen Energien hin wirkt [7, 8].

Im Gegensatz zum Johnstone-Lee-Modell, welches durch Iteration eines phänomenologischen σ -Polgraphen charakterisiert ist, basiert die Niederenergie-Attraktion im Jülich-Modell auf t-Kanal-Austausch eines ρ -Mesons. Trotz der daraus resultierenden völlig unterschiedlichen (off-shell) Dynamik entwickelt sich auch in diesem Fall eine unrealistische Instabilität bzgl. s-Wellen-Pionpaarkondensation. Die kritische Kondensationsdichte liegt sogar noch etwas niedriger ($\rho_c^{\pi\pi} = 1.15\rho_0$) als im Johnstone-Lee-Modell ($\rho_c^{\pi\pi} \simeq 1.3\rho_0$). In beiden Fällen setzt Pionpaarkondensation deutlich vor der 1-Pionkondensation ein (in unserem Modell für Σ_π liegt diese bei $\rho_c^\pi \simeq 3\rho_0$). Ursache hierfür ist die in beiden Modellen rein attraktive $\pi\pi$ -Wechselwirkung im skalaren-isoskalaren Kanal in Verbindung mit der durch die umgebende Kernmaterie hervorgerufenen Aufweichung der 1-Pion-Dispersionsrelation.

Es stellt sich die Frage, ob das Problem dieser Rechnungen im Modell für die Pionselbstenergie zu suchen ist, z.B.

- (a) in der Vernachlässigung von Pauli-Blocking-Effekten bei der gleichzeitigen Propagation beider Pionen in der NN^{-1} - (oder ΔN^{-1} -) Mode, oder

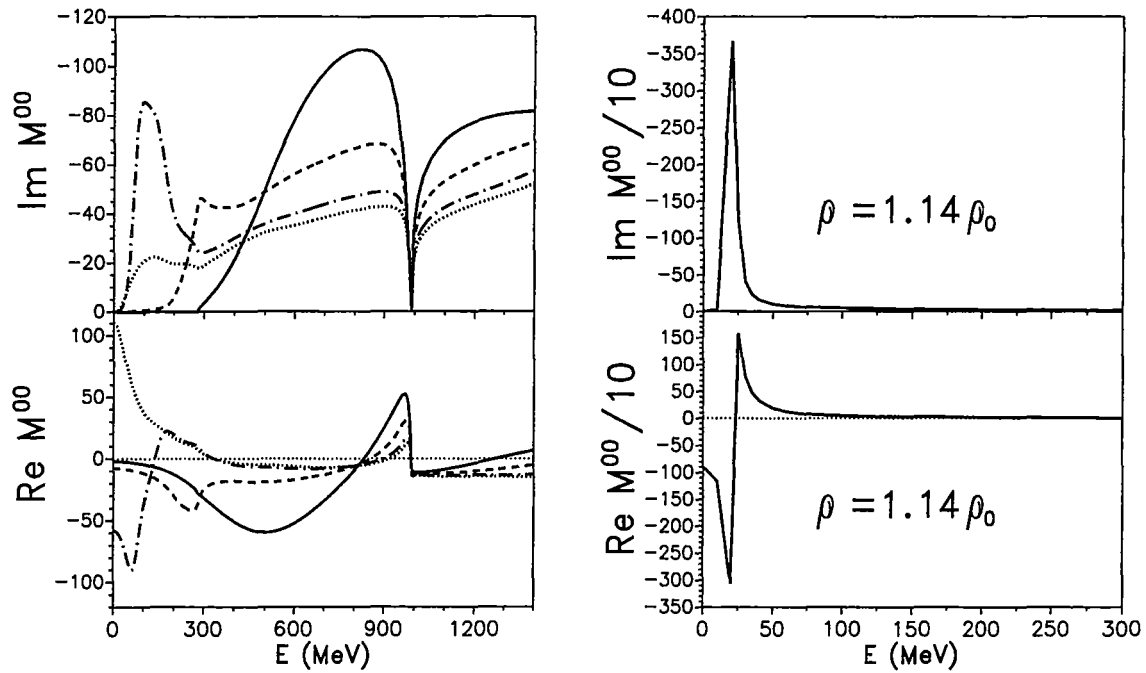


Abbildung 2.4: *In-Medium $\pi\pi$ -Amplituden im Jülich-Modell; gestrichelte Linien: $\rho=0.5\rho_0$, strichpunktierte: $\rho=\rho_0$, gepunktete: $\rho=1.25\rho_0$; die durchgezogene Linie auf der linken Seite repräsentiert die freie Amplitude; die rechte Seite zeigt die Amplitude kurz vor der Pionpaarkondensation.*

(b) in einer nicht berücksichtigten Dichteabhängigkeit der Migdal-Parameter etc..

Zu (a) wurde von Z. Aouissat in seiner Dissertation [7] eine Abschätzung des Effekts vorgenommen, und er erwies sich als klein. Zu (b) merken wir an, daß wir in Abschnitt 2.3.1 sehr konservative (hohe) Werte für die g' angesetzt haben. Zudem hat sich das von uns verwendete Modell als sehr erfolgreich bei der Beschreibung unterschiedlicher Phänomene in der nuklearen Pionphysik erwiesen, z.B. bei Analysen optischer Pion-Kernpotentiale [53] oder von Δ -Resonanzen in Kernen [51].

Wesentlich naheliegender ist es, das Problem in der $\pi\pi$ -Wechselwirkung zu suchen. Im Prinzip ist diese in ihrer Niederenergie-Dynamik zu einem Großteil von der chiralen Symmetrie bestimmt. Entsprechende 'chirale Constraints' sind weder im Johnstone-Lee-Modell noch in der Jülich-Wechselwirkung enthalten. Um die Auswirkungen solcher 'Constraints' zu prüfen, werden wir im nächsten Abschnitt das in-Medium-Verhalten des linearen σ -Modells untersuchen, welches per constructionem den Bedingungen der chiralen Symmetrie genügt.

2.5 Chirale Symmetrie und Lineares σ -Modell

2.5.1 Aspekte der chiralen Symmetrie

Die chirale Symmetrie der starken Wechselwirkung beruht auf der Invarianz der zugrunde liegenden Lagrangedichte bzgl. $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ Gruppentransformationen, die als Algebra aus der Kombination der $SU(2)_V$ -Isovektor- und der $SU(2)_A$ -Axialvektor-Transformationen hervorgehen.

Die spontane Brechung der $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -Symmetrie im Goldstone-Modus führt einerseits zur Massengeneration der Fermionfelder (Nukleonen) und bedingt andererseits die Existenz masseloser pseudoskalarer Teilchen (Goldstone-Bosonen), die in der Natur mit den Pionen identifiziert werden.

Die $SU(2)_V$ -Symmetrie impliziert die Erhaltung des Vektorstroms (Noether-Theorem) und führt zur in der Natur sehr gut realisierten Isospin-Invarianz der starken Wechselwirkung. Die $SU(2)_A$ -Symmetrie ist aufgrund der endlichen Pionmasse explizit gebrochen, was eine nicht-verschwindende Divergenz des zugehörigen Axialvektorstroms zur Folge hat, der sogenannten *PCAC*-Relation (*Partially Conserved Axial Current*):

$$\partial_\mu \vec{j}_5^\mu = f_\pi m_\pi^2 \vec{\pi} + \mathcal{O}(m_\pi^4) \quad (2.32)$$

mit $f_\pi = 93$ MeV (Pionzerfallskonstante). Die auf der für hadronische Prozesse typischen Massenskala ($\simeq M_N \simeq 1$ GeV) kleine Pionmasse ($m_\pi/M_N \simeq 10\%$) rechtfertigt die Interpretation der Pionen als Goldstone-Bosonen.

Aus der *PCAC*-Relation lassen sich nun Theoreme für die Streuung von Pionen mit verschwindendem Dreierimpuls ableiten, die sogenannten 'Soft-Pion'-Theoreme. Ein Pion wird dabei als 'soft' bezeichnet, falls sein Viererimpuls identisch verschwindet (d.h. $\vec{q} = 0$ und $m_\pi = 0$). Wichtige Beispiele für 'Soft-Pion'-Theoreme in der $\pi\pi$ -Wechselwirkung sind:

- (1) das Adler-Theorem, welches das Verschwinden der skalaren-isoskalaren $\pi\pi$ -Streuamplitude an dem kinematischen Punkt mit $s = t = u = m_\pi^2$ fordert:

$$M_{\pi\pi}^{00}(s = t = u = m_\pi^2) = 0 ; \quad (2.33)$$

eine solche Kinematik ist z.B. realisiert, wenn einer der insgesamt vier ein- und auslaufenden Viererimpulse 'soft' ist:

$$q_1^{(4)} = (0, \vec{0}), q_2^{(4)} = (m_\pi, \vec{0}), q_3^{(4)} = (m_\pi, \vec{0}), q_4^{(4)} = (m_\pi, \vec{0}) .$$

- (2) das 'Soft-Pion'-Theorem, welches für die Streuung eines on-shell Pions ($q_1^{(4)} = (m_\pi, \vec{0}), q_3^{(4)} = (m_\pi, \vec{0})$) an einem 'soften' Pion ($q_2^{(4)} = (0, \vec{0}), q_4^{(4)} = (0, \vec{0})$) fordert:

$$M_{\pi\pi}^{00}(s = u = m_\pi^2, t = 0) = \frac{m_\pi^2}{f_\pi^2} ; \quad (2.34)$$

- (3) die Weinberg-Tomezawa-Relation [12], welche das Verschwinden der s-Wellen $\pi\pi$ -Streulängen im chiralen Limes fordert:

$$\begin{aligned} \lim_{m_\pi \rightarrow 0} a^{0I} &= - \lim_{m_\pi \rightarrow 0} \frac{M_{\pi\pi}^{0I}(s = 4m_\pi^2, t = u = 0)}{32\pi m_\pi} \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (2.35)$$

Alle diese 'Soft-Pion'-Theoreme beziehen sich auf die off-shell Dynamik der Streuamplitude unterhalb der physikalischen 2-Pionschwelle, wo $M_{\pi\pi}^{00}$ rein reell ist. Besonders bemerkenswert ist, daß $M_{\pi\pi}^{00}$ im Theorem (2), Glg. (2.34), einen positiven Wert annimmt, der auf eine Quelle von Repulsion in der Niederenergie- $\pi\pi$ -Wechselwirkung schließen läßt. Eine derartige Repulsion ist z.B. in dem im vorangegangenen Abschnitt diskutierten Jülich-Modell (und ebenso im Johnstone-Lee-Modell) in keiner Weise vorhanden (vgl. auch Glg. (2.31) für $I=0$ bzw. $Re M_{\pi\pi}^{00}$ für $\rho=0$ in Abb. 2.4). Andererseits ist aber zu erwarten, daß repulsive Beiträge zumindest einen Aufschub der s-Wellen-Pionpaarkondensation zu höheren Kernmateriedichten hin bewirken. Daraufhin werden wir im folgenden zunächst das lineare σ -Modell untersuchen.

2.5.2 Lineares σ -Modell im freien Raum

Der Wechselwirkungsanteil der Lagrangedichte des linearen σ -Modells ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\pi\pi\sigma}^{int} = -\lambda^2 f_\pi \vec{\pi}^2 \sigma - \frac{\lambda^2}{4} (\vec{\pi}^2)^2 \quad (2.36)$$

mit σ : σ -Feld. Daraus ergibt sich die isoskalare $\pi\pi$ -Bornamplitude zu

$$M_{B,\pi\pi\sigma}^{I=0}(s, t, u) = 2\lambda^2 \left(3 \frac{s - m_\pi^2}{s - m_\sigma^2} + \frac{t - m_\pi^2}{t - m_\sigma^2} + \frac{u - m_\pi^2}{u - m_\sigma^2} \right) \quad (2.37)$$

mit $\lambda^2 = (m_\sigma^2 - m_\pi^2)/2f_\pi^2$ und m_σ : σ -Mesonmasse. Für die im vorigen Unterabschnitt angegebenen 'Soft-Pion'-Theoreme liefert diese Bornamplitude:

$$\begin{aligned} M_{B,\pi\pi\sigma}^{I=0}(s = t = u = m_\pi^2) &= \frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{f_\pi^2} (0 + 0 + 0) \\ &= 0 \\ M_{B,\pi\pi\sigma}^{I=0}(s = u = m_\pi^2, t = 0) &= \frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{f_\pi^2} \left(\frac{m_\pi^2}{m_\sigma^2} \right) \\ &= \frac{m_\pi^2}{f_\pi^2} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_\sigma^2} \right), \end{aligned} \quad (2.38)$$

d.h. Glgn. (2.33), (2.34) sind bis zur Ordnung $\mathcal{O}(m_\pi^4)$ erfüllt (analog zur PCAC-Relation (2.32)). Entsprechendes gilt für die Streulängenbedingung (2.35).

Nach der Einführung von Formfaktoren, einer Partialwellenentwicklung und mit der BbS-Identifikation der Mandelstam-Variablen, Glg. (2.29), erhalten wir aus Glg. (2.37) die zugehörigen Pseudopotentiale für den σ -Polgraphen,

$$V_{\pi\pi\sigma}^{00(s)}(E, q, q') = \frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{f_\pi^2} F^{(s)}(q) 3 \frac{E^2 - m_\pi^2}{E^2 - m_\sigma^2} F^{(s)}(q'), \quad (2.39)$$

sowie für die Summe der t-/u-Kanal Austauschgraphen

$$V_{\pi\pi\sigma}^{00(t)}(E, q, q') = \frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{f_\pi^2} \int_{-1}^{+1} dx \left(F^{(t)}(q, q', x) \right)^2 \frac{-(\vec{q} - \vec{q}')^2 - m_\pi^2}{-(\vec{q} - \vec{q}')^2 - m_\sigma^2}. \quad (2.40)$$

Meson X	Masse m_X [MeV]	Cutoff Λ_X [MeV]	Formfaktor
s-Kanal $\sigma^{(0)}$	800	1250	$(2\Lambda^2)^2/(2\Lambda^2 + 4q^2)^2$
t-Kanal σ	"	"	$(2\Lambda^2)^2/(2\Lambda^2 + (\vec{q} - \vec{q}')^2)^2$

Tabelle 2.1: *Parameter und Formfaktor-Typen für das lineare σ -Modell für sowohl die on-energy-shell als auch on-mass-shell Vorschrift.*

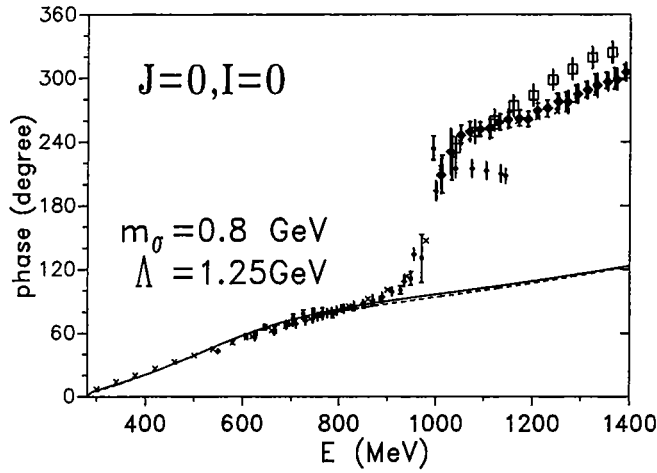


Abbildung 2.5: *Streuphasen-Fit im linearen σ -Modell mit on-energy-shell (durchgezogene Linie) und on-mass-shell Vorschrift (gestrichelte Linie).*

Mit diesen lösen wir (numerisch) die Streugleichung (2.23) und gelangen mit den in Tab. 2.1 angegebenen Parametern zu einer guten Reproduktion der experimentellen $\delta_{\pi\pi}^{00}$ -Phase bis ca. $E=0.9$ GeV (siehe durchgezogene Linie in Abb. 2.5).

Die nach Lösung der Lippmann-Schwinger-Gleichung (LSG) erhaltene, voll iterierte Streuamplitude $M_{\pi\pi}^{00}(E, q, q')$ genügt jedoch nicht mehr der Streulängenbedingung (2.35), was wir im folgenden kurz illustrieren möchten. Wie aus Glg. (2.35) sofort ersichtlich, muß die on-shell Streuamplitude an der 2-Pionschwelle, $M_{\pi\pi}^{00}(E = 2m_\pi, 0, 0)$, im chiralen Limes mindestens in 2.Ordnung gegen Null streben (d.h z.B. in $\mathcal{O}(m_\pi^2)$ oder $\mathcal{O}(m_\pi \cdot q)$ etc.). Um ein entsprechendes Verhalten für die volle Lösung der LSG zu garantieren, muß dies in jeder Ordnung n der iterativen Lösung, schematisch geschrieben als

$$\begin{aligned}
M &= V + VGM \\
&= V + VGV + VGVGV + \dots \\
&\equiv M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)} + \dots,
\end{aligned} \tag{2.41}$$

erfüllt sein. Bereits nach der ersten Iteration der Pseudopotentiale erhält die entsprechende Streuamplitude

$$M_{\pi\pi}^{00,(n=2)}(E = 2m_\pi, q = 0, q' = 0) = \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^2} V_{\pi\pi}^{00}(E = 2m_\pi, q = 0, k) G_{\pi\pi}(E = 2m_\pi, k) \times V_{\pi\pi}^{00}(E = 2m_\pi, k, q' = 0) \quad (2.42)$$

jedoch schon Beiträge von $\mathcal{O}(1)$. Um dies einzusehen, betrachten wir ein 'Testpotential' der Form $V(E, q, q') = F(q)(q^2 + q'^2)F(q')$. Die zugehörige Streuamplitude in 2.Ordnung lautet:

$$\begin{aligned} M^{(2)}(E, q, q') &= F(q)F(q') \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^2} (q^2 + k^2) F(k) G_{\pi\pi}(E, k) F(k) (k^2 + q'^2) \\ &= F(q)F(q') \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^2} F(k)^2 G_{\pi\pi}(E, k) [k^4 + k^2(q^2 + q'^2) + q^2 q'^2], \quad (2.43) \end{aligned}$$

und es ist genau der erste (k^4 -) Term in den eckigen Klammern, der für $m_\pi, q, q' \rightarrow 0$ von $\mathcal{O}(1)$ ist, da er (nach Ausführen der k -Integration) weder von m_π noch von q oder q' abhängt (für $q, q' \rightarrow 0$ gehen die Formfaktoren gegen eine Konstante). Die Struktur des 'Testpotentials' findet sich in analoger Form im Pseudopotential des t-Kanal σ -Austausches wieder (die q, q' -Abhängigkeiten im Nenner von Glg. (2.40) spielen dabei keine Rolle); d.h., das getrennte Auftreten der *externen* Impulse im $(-q^2 - q'^2)$ -Term von $V_{\pi\pi\sigma}^{00(t)}$ führt bei Iteration in der Lippmann-Schwinger-Gleichung zu einer Streuamplitude $M_{\pi\pi\sigma}^{00} \propto \mathcal{O}(1)$, was die Verletzung der Streulängenbedingung (2.35) nach sich zieht. Die Ursache hierfür liegt offensichtlich in der durch den BbS-Formalismus vorgeschriebenen off-shell Fortsetzung der Mandelstam-Variablen, Glg. (2.29), begründet. Aber auch z.B. in der Zeitgeordneten Störungstheorie ($TOPT$ =Time-Ordered Perturbation Theory) [54], einem anderen gebräuchlichen Reduktionsschema für die Bethe-Salpeter-Gleichung, tritt ein völlig analoges Problem auf [55]. Es erscheint also nicht möglich, durch konsistenten Gebrauch einer effektiven Meson-Lagrangedichte in Verbindung mit einer mikroskopischen Streugleichung das korrekte Streulängenverhalten im chiralen Limes zu garantieren. Einen möglichen Ausweg bildet z.B. die Verwendung separabler Potentiale: ist das Pseudopotential so beschaffen, daß es sich als eine Summe vom Typ

$$V(E, q, q') = \sum_i u_i(E, q) u_i(E, q') \quad (2.44)$$

schreiben läßt, wobei die $u_i(E, q)$ mindestens von der Ordnung $\mathcal{O}(m_\pi)$ (oder $\mathcal{O}(q)$ oder $\mathcal{O}(E)$) sind, dann ist in jedem Schritt der iterativen Lösung der Streugleichung sichergestellt, daß die Amplitude für $m_\pi, q, q' \rightarrow 0$ in mindestens 2.Ordnung verschwindet. Die Separabilität ist dabei nicht von entscheidender Bedeutung, sondern die Eigenschaft des Integralkerns $V(E, q, q')$, daß bei festem Impuls q für $E, m_\pi, q' \rightarrow 0$ V mindestens linear gegen Null geht (und umgekehrt auch bei fixem q' für $E, m_\pi, q \rightarrow 0$; aufgrund der üblichen Symmetrie $V(E, q, q') = V(E, q', q)$ ist dies automatisch erfüllt). Diese Eigenschaft nennen wir *Quasi-Separabilität* [55]. Ein derartiges Verhalten wurde in Ref. [41] für die Pseudopotentiale des linearen σ -Modells, Glgn. (2.39) und (2.40), durch eine alternative Wahl

der off-shell Vorschrift für die Mandelstam-Variablen erreicht: anstelle der BbS-Vorschrift, Glg. (2.29), wurde eine on-mass-shell Identifikation verwendet:

$$\begin{aligned} s &= E^2 \\ t &= (\omega_q - \omega_{q'})^2 - (\vec{q} - \vec{q}')^2 = 2m_\pi^2 - 2\omega_q\omega_{q'} + 2qq'x \\ u &= (\omega_q - \omega_{q'})^2 - (\vec{q} + \vec{q}')^2 = 2m_\pi^2 - 2\omega_q\omega_{q'} - 2qq'x. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Nach Vernachlässigung von t und u gegenüber m_σ^2 im Nenner der t-/u-Kanal σ -Austausch-Propagatoren ergab sich so folgendes Pseudopotential:

$$V_{\pi\pi\sigma}^{00}(E, q, q') = \frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{f_\pi^2} \left(3 \frac{E^2 - m_\pi^2}{E^2 - m_\sigma^2} + \frac{4\omega_q\omega_{q'} - 2m_\pi^2}{m_\sigma^2} \right) F(q)F(q'), \quad (2.46)$$

welches offensichtlich von 'quasiseparabler' Form ist.

Die Werte von t und u in Glg. (2.45) folgen aus den Viererimpulsen

$$\begin{aligned} q_{1/2}^{(4)} &= (\omega_q, \pm \vec{q}) \\ q_{3/4}^{(4)} &= (\omega_{q'}, \pm \vec{q}'), \end{aligned} \quad (2.47)$$

d.h. die Pionenergien werden 'on-mass-shell' gesetzt. Die Wahl $s = E^2$ ist physikalisch motiviert: wir möchten die s-Kanal σ -Resonanz als fixen Pol in der Energie bewahren.

Die Vorschrift (2.45) ist sicherlich kein eindeutiges Verfahren zur Konstruktion von Pseudopotentialen, die nach Iteration in einer Streugleichung zu einer Streuamplitude führen, welche der Streulängenbedingung (2.35) genügt; dies könnte z.B. auch mit der Ersetzung der 'kritischen' Terme ($q^2 + q'^2$) durch ihr geometrisches Mittel $2qq'$ erreicht werden. Die on-mass-shell Vorschrift erscheint uns jedoch als eine einheitlichere, natürlichere Wahl, die bei Verwendung einer zugrunde liegenden, (gebrochen-) chiralsymmetrischen Lagrangedichte automatisch die Erhaltung der Streulängenbedingung (2.35) nach Lösung der Streugleichung garantiert.

Die Verifizierung der 'Soft-Pion'-Theoreme (1) und (2), Glgn. (2.33) und (2.34), über die Born'sche Näherung hinaus ist hingegen schwierig; z.B. ist im Falle des Adler-Theorems nicht offensichtlich, wie die intermediären 2-Pionenzustände zu wählen sind, da die zwei auslaufenden Pionen on-shell sind, eines der beiden einlaufenden jedoch 'soft'. Wir begnügen uns daher mit der Feststellung, daß die repulsiven Beiträge, die auf 'tree-level' die Erfüllung der 'Soft-Pion'-Theoreme (1) und (2) sicherstellen, auch bei Iteration in einer Streugleichung ein zumindest qualitativ analoges Verhalten in der $\pi\pi$ -Wechselwirkung induzieren. Zusammenfassend schlagen wir also folgendes Verfahren für die Konstruktion von $\pi\pi$ -Pseudopotentialen vor, die bei Iteration in einer dreidimensionalen Streugleichung (Lippmann-Schwinger-Typ) die chirale Symmetrie in effektiver ('minimaler') Weise berücksichtigen:

- 1.) Man starte von einer (on-shell) Born-Amplitude, die aus einer (gebrochen) chiralsymmetrischen Lagrangedichte abzuleiten ist; diese Born-Amplitude ist in Crossing-symmetrischer Form als Funktion der Mandelstam-Variablen s , t und u auszudrücken;

- 2.) die Mandelstam-Variablen sind entsprechend der in Glg. (2.45) angegebenen off-shell Vorschrift zu ersetzen;
- 3.) man führe phänomenologische Formfaktoren ein, um die Konvergenz der Impulsintegration in der Streugleichung (2.1) zu gewährleisten.

Es ist natürlich wünschenswert, eine effektive Streugleichung zu konstruieren, die die Symmetrien einer zugrunde liegenden Lagrangedichte per constructionem in beliebiger Ordnung der Iteration erhält. Anstrengungen in diese Richtung werden zur Zeit von Aouissat *et al.* [56] unternommen, die den in der Kernphysik sehr erfolgreichen *RPA*-Formalismus (*RPA*=Random Phase Approximation) [57] auf eine Boson-Streugleichung verallgemeinern.

Kehren wir nun zum linearen σ -Modell zurück. Mit unserem oben angegebenen 'Rezept' nimmt das partialwellenzerlegte, minimal chiral-symmetrische Pseudopotential im $JI = 00$ -Kanal folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
 V_{\pi\pi\sigma}^{00(s)}(E, q, q') &= \frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{f_\pi^2} F^{(s)}(q) 3 \frac{E^2 - m_\pi^2}{E^2 - m_\sigma^2} F^{(s)}(q') , \\
 V_{\pi\pi\sigma}^{00(t)}(E, q, q') &= \frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{f_\pi^2} \int_{-1}^{+1} dx \left(F^{(t)}(q, q', x) \right)^2 \frac{m_\pi^2 - 2\omega_q \omega_{q'} - 2qq'x}{2m_\pi^2 - 2\omega_q \omega_{q'} - 2qq'x - m_\sigma^2} .
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Das mit identischer σ -Masse m_σ und Cutoff-Parameter Λ_σ berechnete Resultat für die $\delta_{\pi\pi}^{00}$ -Streuphase (gestrichelte Linie in Abb. 2.5) unterscheidet sich nur marginal von dem mit der BbS-Vorschrift vorgenommenen Fit. Es zeigt sich somit, daß die Ersetzung der on-energy-shell Vorschrift (2.29) durch die on-mass-shell Vorschrift (2.45) nur einen sehr moderaten Eingriff in die off-shell Dynamik der Pseudopotentiale im Bereich oberhalb der 2-Pionschwelle darstellt – zumindest solange die verwendeten Cutoffs in der typischen Größenordnung der hadronischen Energieskala liegen (wählt man z.B. eine größere σ -Masse, was im Fit einen höheren Cutoff bedingt, werden die Abweichungen zwischen den beiden Vorschriften stärker).

2.5.3 Lineares σ -Modell in kalter Kernmaterie

Mit den durch Glgn. (2.21) und (2.22) gegebenen in-Medium 2-Pionpropagator berechnen wir die Streuamplitude in kalter Kernmaterie mittels des im vorangegangenen Abschnitt diskutierten $\pi\pi$ -Modells. Die Resultate für $M_{\pi\pi}^{00}$ unter Benutzung der on-mass-shell (OMS-) Vorschrift sind auf der linken Seite von Abb. 2.6 dargestellt. Die Amplitude zeigt keinerlei Anzeichen von Pionpaarkondensation, und sogar bei 2-facher Sättigungsdichte ($\rho = 2\rho_0$) beobachten wir keine signifikante Ansammlung von Stärke unterhalb der 2-Pionschwelle (d.h. für $E < 2m_\pi$). Lediglich in direkter Schwellennähe zeigt sich eine kleine Überhöhung gegenüber der Vakuumkurve. Dies bestätigt noch einmal die Resultate aus Ref. [41], wo unter Benutzung der separablen Näherung, Glg. (2.46), ein ganz analoges Verhalten auftrat, und zeigt, daß die t -/ u -Abhängigkeit im Nenner der σ -Austausch-Propagatoren vernachlässigbar ist.

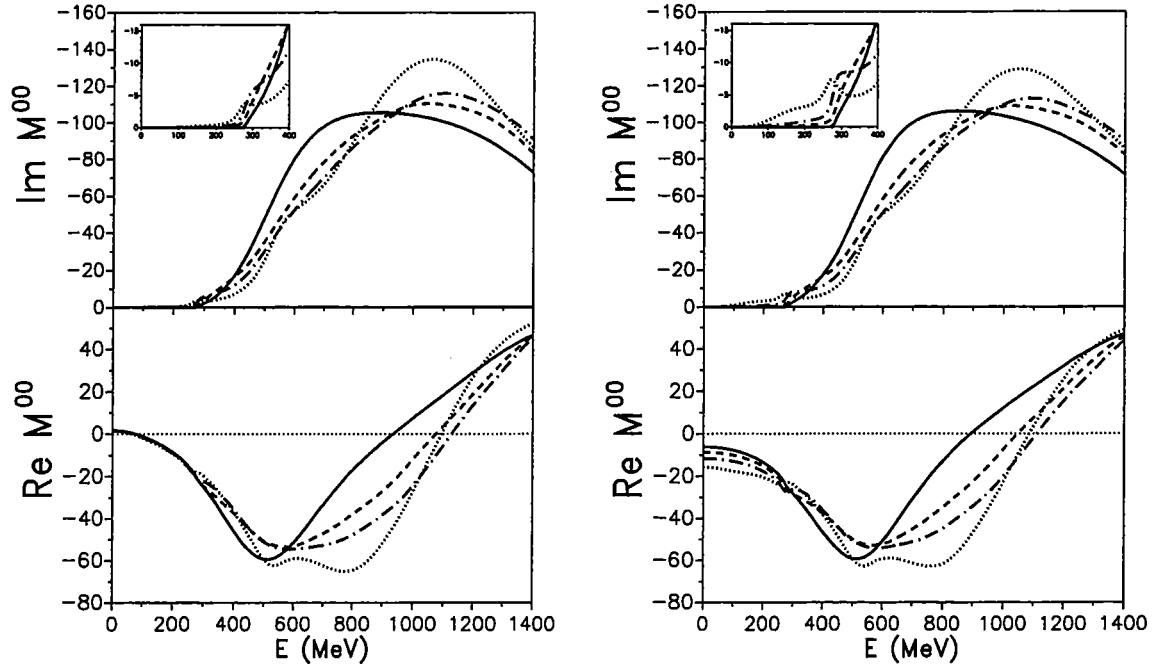


Abbildung 2.6: *In-Medium $\pi\pi$ -Amplitude im linearen σ -Modell unter Benutzung der on-mass-shell (linke Seite) und on-energy-shell Vorschrift; gestrichelte Linien: $\rho = 0.5\rho_0$, strichpunktiete: $\rho = \rho_0$, gepunktete: $\rho = 2\rho_0$; die durchgezogenen Linien repräsentieren die Amplitude im freien Raum.*

Auf der rechten Seite von Abb. 2.6 sind die in-Medium Resultate unter Benutzung der on-energy-shell (BbS-) Vorschrift (2.29) aufgetragen. Auch hier sorgen die repulsiven Wechselwirkungsbeiträge für ein Ausbleiben von s-Wellen-Pionpaarkondensation; allerdings erkennt man für Dichten $\rho \geq \rho_0$ eine deutlich größere Ansammlung von Stärke im Bereich der 2-Pionschwelle, die sich für $\rho = 2\rho_0$ sogar beträchtlich unterhalb $E = 2m_\pi$ fortsetzt. Insbesondere weist auch der Realteil der Amplitude im sub-Schwellenbereich eine unterschiedliche Struktur im Vergleich zu den mit der OMS-Vorschrift ermittelten Resultaten auf: einerseits bleibt bereits im Vakuum (durchgezogene Linien) $\text{Re}M_{\pi\pi}^{00}$ für $E \rightarrow 0$ rein attraktiv (im OMS-Fall findet bei $E \simeq 80$ MeV ein Übergang zu Repulsion statt) und andererseits – noch wichtiger – setzt in Kernmaterie eine Verstärkung der Attraktion ein, während $\text{Re}M_{\pi\pi}^{00}(E \leq 2m_\pi)$ mit der OMS-Vorschrift völlig stabil bleibt.

Wir halten also fest, daß im linearen σ -Modell die Erfüllung der 'Soft-Pion'-Theoreme (1) und (2) auf Born-Level eine erhebliche Repulsion in der $\pi\pi$ -Wechselwirkung bei sehr kleinen Energien induziert, was die Entstehung eines Pionpaarkondensats in Kernmaterie verhindert. Die darüber hinaus vorgenommene effektive Wiederherstellung der Streulängenbedingung (2.35) für die volle Lösung der Iterationsgleichung hat zudem eine quantitative

Unterdrückung von Stärke im sub-/Schwellenbereich der in-Medium $\pi\pi$ -Streuamplitude zur Folge.

2.6 Chiral verbessertes Jülich $\pi\pi$ -Modell

Das im vorangegangenen untersuchte, explizit chiral symmetrische lineare σ -Modell führt zur gewünschten Unterdrückung von s-Wellen $\pi\pi$ -Bindungszuständen in kalter Kernmaterie. Allerdings ist es in seiner Anwendbarkeit auf die Beschreibung der experimentellen $\pi\pi$ -Streuphasen auf s-Wellen Zustände und Energien $E \leq 1$ GeV beschränkt. Zudem ist es vom experimentellen Standpunkt her sehr fragwürdig, ob die sehr breite Struktur der $\pi\pi$ -Amplitude im $II=00$ -Kanal eine Interpretation als genuine σ -Resonanz überhaupt zuläßt. Außerdem sprechen theoretische Gründe dafür, daß die tiefstliegende genuine Resonanz im skalaren Kanal der $\pi\pi$ -Streuung erst bei Energien $E \simeq 1.4$ GeV zu erwarten ist (z.B. treten die demselben Mesonmultipllett zugeordneten skalaren Resonanzen der $K\pi$ -Streuung, die $K_0^*(1430)$ -Mesonen, bei $E \simeq 1.43$ GeV auf).

In diesem Abschnitt konstruieren wir daher ein effektives Mesonaustauschmodell, welches einerseits eine konsistente, quantitative Beschreibung der $\pi\pi$ -Streudaten bis $E \simeq 2$ GeV erlaubt (wobei auf eine tiefliegende σ -Resonanz verzichtet werden kann), andererseits aber ein möglichst stabiles Verhalten bei der Berechnung von in-Medium $\pi\pi$ -Korrelationen in Kernmaterie zeigt. Wir realisieren dies durch eine 'chirale Verbesserung' des bei der Analyse der freien $\pi\pi$ -Wechselwirkung sehr erfolgreichen Jülicher Mesonaustauschmodells [10, 11].

2.6.1 'Chirale' Erweiterung der freien Jülich $\pi\pi$ -Wechselwirkung

Bevor wir den ('effektiven') Einschluß der chiralen Symmetrie in das von Lohse/Pearce *et al.* entwickelte Mesonaustauschmodell diskutieren, betrachten wir zunächst, inwieweit dieses Modell die 'soft-Pion'-Theoreme aus Abschnitt 2.5.1 verletzt.

Der Borngraph des t-Kanal ρ -Austausches liefert für die invariante Amplitude am Adlerpunkt (aus Glg. (2.25)):

$$\begin{aligned} M_{B,\pi\pi\rho}^{00}(s=u=t=m_\pi^2) &= 2g_{\pi\pi\rho}^2 \left(\frac{m_\pi^2 - m_\pi^2}{m_\pi^2 - m_\rho^2} + \frac{m_\pi^2 - m_\pi^2}{m_\pi^2 - m_\rho^2} \right) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.49)$$

in Übereinstimmung mit Glg. (2.33). Am 'soft-Punkt' erhält man jedoch

$$\begin{aligned} M_{B,\pi\pi\rho}^{00}(s=u=t=m_\pi^2) &= 2g_{\pi\pi\rho}^2 \left(\frac{m_\pi^2 - 0}{m_\pi^2 - m_\rho^2} \right) \\ &= -1.79, \end{aligned} \quad (2.50)$$

in grober Verletzung des in Glg. (2.34) geforderten Wertes von $m_\pi^2/f_\pi^2=2.25$ (der im Lohse/Pearce-Modell mit Gradientenkopplung versehene $f_0(1400)$ -Polgraph ist in diesem Zusammenhang vernachlässigbar: sein Wert z.B. am 'soft-Punkt' beträgt $M_{B,f_0}^{00} = -0.0027$; der zusätzlich angekoppelte $K\bar{K}$ -Kanal trägt auf Born-Niveau überhaupt nicht

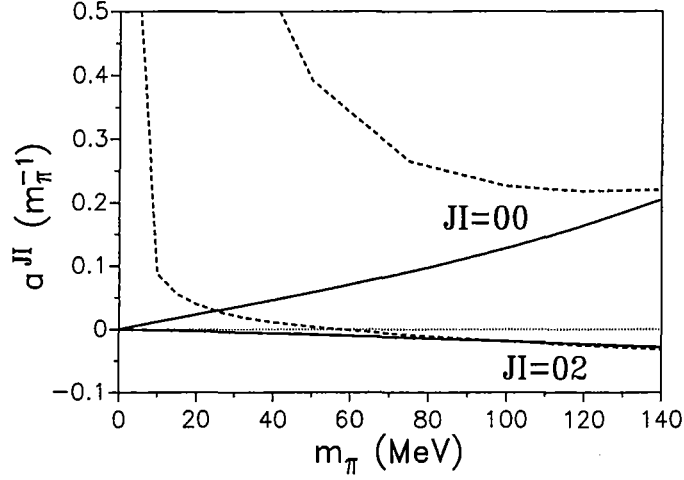


Abbildung 2.7: *s*-Wellen Streulängen im chiralen Limes; gestrichelte Linien: Lohse/Pearce-Modell, durchgezogene Linien: 'chiral' verbessertes Jülich-Modell.

bei). Die Streulängenbedingung für die vollständig iterierten *s*-Wellen Amplituden ist ebenfalls nicht erfüllt: wie aus Abb. 2.7 ersichtlich, divergieren die $a^{0I}(m_\pi)$ für $m_\pi \rightarrow 0$. Ursache hierfür ist der *t*-Kanal ρ -Austausch in Verbindung mit der BbS-off-shell-Fortsetzung (2.29), was zu einer Amplitude $M_{\pi\pi}^{0I} \propto \mathcal{O}(1)$ führt (analog zur Diskussion des *t*-Kanal σ -Austausches in Abschnitt 2.5.2). Mit

$$a^{0I} = -\frac{M_{\pi\pi}^{0I}(E = 2m_\pi, q = q' = 0)}{32\pi m_\pi} \quad (2.51)$$

erhält man so im chiralen Limes eine $(1/m_\pi)$ -Divergenz der *s*-Wellen Streulängen. Um eine chiral verbesserte Version der Jülich- $\pi\pi$ -Wechselwirkung zu konstruieren, starten wir von der Lagrangedichte des nicht-linearen σ -Modells. Bis zur 4. Ordnung in den Pionfeldern lautet diese (vgl. Ref. [13] oder auch Bhaduri, Kap. 4 [58]):

$$\mathcal{L}_{nl\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi})^2 - \frac{1}{2}m_\pi^2 \vec{\pi}^2 + \frac{1}{4f_\pi^2} \vec{\pi}^2 (\partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi}) - \frac{m_\pi^2}{8f_\pi^2} (\vec{\pi}^2)^2. \quad (2.52)$$

$\mathcal{L}_{nl\sigma}$ ist, bis auf die explizite Brechung durch die endliche Pionmasse, chiral invariant. Die zugehörige Bornamplitude für $\pi\pi$ -Streuung ergibt sich aus dem Wechselwirkungsanteil von $\mathcal{L}_{nl\sigma}$ (3. und 4. Term in Glg. (2.52)). Nach der Projektion auf Isospin-Zustände findet man

$$\begin{aligned} M_{B,\pi\pi,nl\sigma}^{I=0}(s, t, u) &= -\frac{1}{f_\pi^2} [3(s - m_\pi^2) + (t - m_\pi^2) + (u - m_\pi^2)] \\ &= -\frac{1}{f_\pi^2} [3s + t + u - 5m_\pi^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{B,\pi\pi,nls}^{I=1}(s,t,u) &= -\frac{1}{f_\pi^2}[(t-m_\pi^2)-(u-m_\pi^2)] \\
&= -\frac{1}{f_\pi^2}[t-u] \\
M_{B,\pi\pi,nls}^{I=2}(s,t,u) &= -\frac{1}{f_\pi^2}[(t-m_\pi^2)+(u-m_\pi^2)] \\
&= -\frac{1}{f_\pi^2}[t+u-2m_\pi^2] .
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Man erkennt hier noch deutlich den Zusammenhang zum linearen σ -Modell: die $I = 0$ -Amplitude geht aus Glg. (2.37) durch den Grenzübergang $m_\sigma \rightarrow \infty$ hervor, d.h. expliziter σ -Austausch geht in $\pi\pi$ -Kontakt-Wechselwirkungen über. Vom empirischen Standpunkt her ist es daher verständlich, daß es schwierig sein wird, mit dem nicht-linearen σ -Modell eine gute Reproduktion der attraktiven $\delta_{\pi\pi}^{00}$ -Streuphase zu erreichen: die Hauptquelle der Attraktion im $JI = 00$ -Kanal des *linearen* σ -Modells, der s-Kanal σ -Polgraph, ist durch den Grenzübergang $m_\sigma \rightarrow \infty$ stark unterdrückt. Andererseits weiß man jedoch aus der p-Wellen $\pi\pi$ -Wechselwirkung, das $\pi\pi$ -Zustände einer starken (s-Kanal-) Ankopplung an die ρ -Resonanz unterliegen, welche aus Konsistenzgründen auch im t-Kanal berücksichtigt werden sollte. Die Isospin-Struktur des $\pi\pi\rho$ -Vertex' ist dabei gerade so beschaffen, daß t-Kanal ρ -Austausch attraktiv für $I = 0$ und repulsiv für $I = 2$ beiträgt, was genau dem Verhalten der s- (und d-) Wellen $\pi\pi$ -Streuphasen entspricht.

Das ρ -Meson kann systematisch als Eichboson einer versteckten, lokalen $SU(2)_V$ -Symmetrie in die Lagrangedichte (2.52) eingeführt werden [30, 59]. Die durch das ρ -Meson induzierten Zusatzterme sind gegeben durch [30]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{gaug} &= -\frac{1}{2}m_\rho^2[\vec{\rho}_\mu - \frac{g_{\pi\pi\rho}}{m_\rho^2}\vec{\pi} \times \partial_\mu\vec{\pi}]^2 \\
&= -\frac{1}{2}m_\rho^2\vec{\rho}_\mu^2 + g_{\pi\pi\rho}\vec{\rho}_\mu \cdot (\vec{\pi} \times \partial_\mu\vec{\pi}) - \frac{g_{\pi\pi\rho}^2}{2m_\rho^2}(\vec{\pi} \times \partial_\mu\vec{\pi})^2 ,
\end{aligned} \tag{2.54}$$

d.h. eine konsistente Eichung, die die chirale Invarianz der Lagrangedichte erhält, bedingt das Auftreten einer weiteren $\pi\pi$ -Kontakt-Wechselwirkung (3. Term in $\mathcal{L}_{gaug}$; der 2. Term ist genau der ρ -Austausch, siehe Glg. (2.24)) Die aus dem zusätzlichen Kontaktterm resultierende Bornamplitude (die wir mit einem Index 'crs' für 'cross-product contact term' versehen) lautet:

$$\begin{aligned}
M_{B,\pi\pi,crs}^{I=0}(s,t,u) &= \frac{2g_{\pi\pi\rho}^2}{m_\rho^2}(2s-t-u) \\
M_{B,\pi\pi,crs}^{I=1}(s,t,u) &= \frac{2g_{\pi\pi\rho}^2}{m_\rho^2}3(t-u) \\
M_{B,\pi\pi,crs}^{I=2}(s,t,u) &= -\frac{g_{\pi\pi\rho}^2}{m_\rho^2}(2s-t-u) .
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Für kleine Impulsüberträge, $t, u \ll m_\rho^2$, bewirken diese Bornamplituden eine Kompensation der Beiträge vom ρ -Meson Austausch, Glg. (2.25), z.B. am 'soft-point':

$$\begin{aligned} M_{B,\pi\pi,crs}^{I=0}(s = u = m_\pi^2, t = 0) &= \frac{2g_{\pi\pi\rho}^2}{m_\rho^2} m_\pi^2 \\ &= 1.73 \end{aligned} \quad (2.56)$$

unter Benutzung des gleichen Wertes für $g_{\pi\pi\rho}^2/4\pi$ wie in Glg. (2.50) (=2.1 im Lohse/Pearce-Modell). In Verbindung mit den Kontakt-Wechselwirkungen aus dem nicht-linearen σ -Modell, Glg. (2.53), bleiben so die 'soft-Pion'-Theoreme auf Tree-Level gewahrt.

Zur konkreten Konstruktion eines chiral verbesserten Jülich-Modells verfahren wir genau nach dem in Abschnitt 2.5.2 vorgeschlagenem 'Rezept': Ausgangspunkt ist das geeichte, nicht-lineare σ -Modell; der zugehörige Wechselwirkungsanteil der Lagrangedichte, der das Niederenergie-Verhalten der $\pi\pi$ -Wechselwirkung bestimmt, setzt sich aus den Glgn. (2.52) und (2.54) zusammen:

$$\mathcal{L}_{gnl}^{int} = \frac{1}{4f_\pi^2} \vec{\pi}^2 (\partial^\mu \vec{\pi} \cdot \partial_\mu \vec{\pi}) - \frac{m_\pi^2}{8f_\pi^2} (\vec{\pi}^2)^2 + g_{\pi\pi\rho} \vec{\rho}_\mu \cdot (\vec{\pi} \times \partial^\mu \vec{\pi}) - \frac{g_{\pi\pi\rho}^2}{2m_\rho^2} (\vec{\pi} \times \partial_\mu \vec{\pi})^2. \quad (2.57)$$

Die daraus resultierenden Bornamplituden, ausgedrückt in den Mandelstam-Variablen s , t und u , sind in den Glgn. (2.53), (2.25) und (2.55) angegeben. Darüber hinaus liefert der 4.Term in $\mathcal{L}_{gnl}^{int}$ auch noch eine ρ s-Kanal Amplitude (Polgraph), die jedoch nur in der p-Welle beiträgt (siehe Anhang B).

Die Mandelstam-Variablen werden gemäß der on-mass-shell Vorschrift (2.45) ersetzt, um die Streulängenbedingung (2.35) für die volle Lösung der Streugleichung zu garantieren (vgl. Abb. 2.7). Nach Partialwellenentwicklung und Hinzufügen von (Dipol-) Formfaktoren erhalten wir so Pseudopotentiale $V_{\pi\pi}^{JI}(E, q, q')$, die in die Streugleichung (2.23) eingesetzt werden. Analog zum Lohse/Pearce-Modell koppeln wir zusätzlich den $K\bar{K}$ -Kanal an mit direkter Wechselwirkung zwischen Kaon und Antikaon über Vektormesonaustausch von $\rho(770)$, $\omega(782.6)$ und $\phi(1020)$ (für eine chiral invariante $K\bar{K}$ -Wechselwirkung sind im Prinzip – in $SU(3)$ -Erweiterung der chiralen Symmetrie – noch $K\bar{K}$ -Kontaktterme zu berücksichtigen; derartige Beiträge vernachlässigen wir jedoch, da sie in vorliegender Arbeit keine wichtige Rolle spielen). Des weiteren erfordert die quantitative Reproduktion der $\delta_{\pi\pi}^{00}$ - und $\delta_{\pi\pi}^{20}$ -Phasen für $E \geq 1$ GeV die Einführung von genuinen $f_0(1400)$ - und $f_2(1270)$ -Polgraphen. Die explizite Form aller Pseudopotentiale und die für den in Abb. 2.8 gezeigten Gesamtfitt verwendeten Parameter sind in Anhang B zu finden. Wir beschränken uns an dieser Stelle auf folgende Anmerkungen:

- um eine hinreichend große Attraktion in $\delta_{\pi\pi}^{00}(E \leq 1 \text{ GeV})$ zu generieren, muß der Cutoff-Parameter für den (attraktiven) ρ -t-Kanal Austausch größer gewählt werden als für die (im wesentlichen repulsiven) Kontakt-Wechselwirkungen; andererseits bedingen höhere Werte für die Kontaktterm-Cutoffs Λ_c eine Unterdrückung des Kondensationsverhaltens in Kernmaterie, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden; für den in Abb. 2.8 gezeigten Fit haben wir daher versucht, eine in Einklang mit Daten möglichst hohe Wahl für die Λ_c zu treffen;

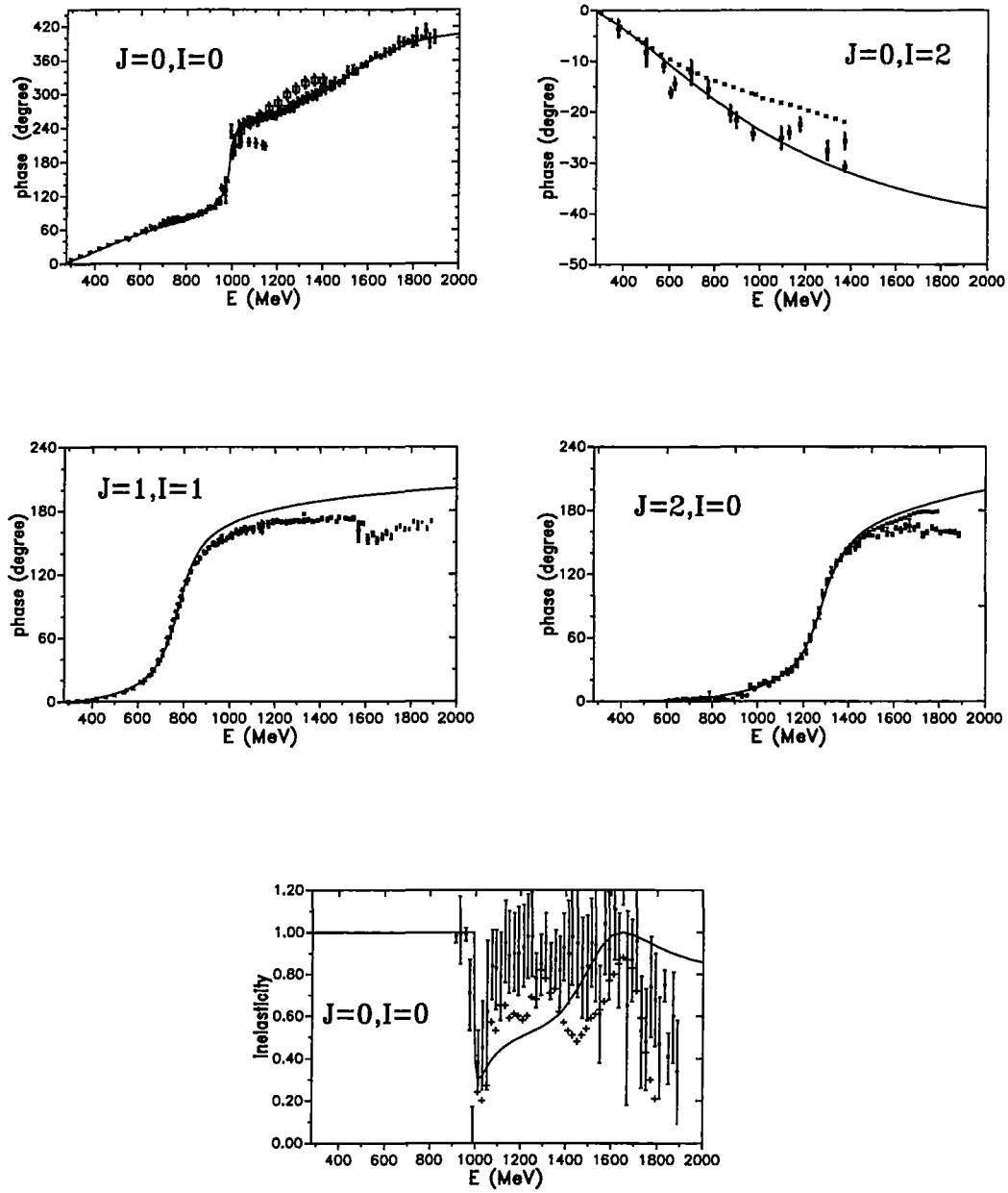


Abbildung 2.8: Streuphasenfit im chiral verbesserten Jülich-Modell entsprechend den in Anhang B angegebenen Parametern.

- die s-Wellen Streulängen betragen

$$\begin{aligned} a^{00} &= 0.21 m_\pi^{-1} \\ a^{02} &= -0.029 m_\pi^{-1}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

in guter Übereinstimmung mit einer kürzlich vorgenommenen, experimentellen Analyse von Burkhardt und Lowe [60], die

$$\begin{aligned} a_{exp}^{00} &= (0.20 \pm 0.01) m_\pi^{-1} \\ a_{exp}^{02} &= (-0.032 \pm 0.04) m_\pi^{-1}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

ergab;

- der kombinierte Beitrag von $K\bar{K}$ -Kanal und $f_0(1400)$ -Polgraph zur skalaren-isoskalaren Streulänge a^{00} ist wesentlich geringer als im Lohse/Pearce-Modell (5% im Vergleich zu 30%); dies bestätigt die Feststellung, daß das Niederenergie-Verhalten der $\pi\pi$ -Wechselwirkung fast ausschließlich durch die Lagrangedichte $\mathcal{L}_{gns}^{int}$, Glg. (2.57), bestimmt ist.

2.6.2 Chiral verbessertes Jülich-Modell in kalter Kernmaterie

Mit dem 2-Pionpropagator aus Abschnitt 2.3.2 berechnen wir wieder die in-Medium $M_{\pi\pi}$ -Amplitude im $II=00$ -Kanal des im vorangegangenen Unterabschnitt diskutierten $\pi\pi$ -Modells. Wie aus der linken Seite von Abb. 2.9 ersichtlich, führen die gegenüber dem Lohse/Pearce-Modell vorgenommenen 'chiralen' Verbesserungen tatsächlich zu einer erheblichen Unterdrückung der Bindungseffekte: für Dichten um $\rho = \rho_0$ beobachten wir in $Im M_{\pi\pi}^{00}$ zwar noch eine signifikante Ansammlung von Stärke um die 2-Pionschwelle herum, aber für $E \leq 1.5 m_\pi$ zeigt die in-Medium Amplitude ein sehr stabiles Verhalten: ähnlich wie bei der OMS-Version des linearen σ -Modells (linke Seite in Abb. 2.6) bleibt die bei $E \simeq \frac{1}{2} m_\pi$ einsetzende Repulsion in $Re M_{\pi\pi}^{00}$ für Dichten $\rho \leq 1.5 \rho_0$ erhalten. Begünstigt durch die starke Aufweichung des in-Medium 2-Pionpropagators (vgl. Abb. 2.2) setzt sich bei weiterer Dichteerhöhung ($\rho > 1.5 \rho_0$) die Attraktion im t-Kanal ρ -Austausch gegenüber den repulsiven Kontakt-Wechselwirkungen durch: es kommt wieder zur Ausbildung eines $\pi\pi$ -Bindungszustandes, der bei einer kritischen Dichte von $\rho_c^{\pi\pi} \simeq 2 \rho_0$ schließlich kondensiert. Diese ist jetzt fast doppelt so groß wie im Lohse/Pearce-Modell, liegt aber nach wie vor unter dem Wert für 1-Pionkondensation ($\rho_c^\pi \simeq 3 \rho_0$ in unseren Modell für Σ_π).

Für Energien deutlich oberhalb der 2-Pionschwelle sind kaum Unterschiede zwischen dem Lohse/Pearce- und dem chiral verbesserten Modell zu erkennen: in beiden Fällen finden wir eine beträchtliche, mit steigender Dichte zunehmende Reduktion von $Im M_{\pi\pi}^{00}$, was auf die im höheren Energiebereich analoge Wechselwirkungs-Dynamik in beiden Modellen zurückzuführen ist (t-Kanal ρ -Austausch; die leicht modifizierte off-shell Vorschrift induziert dabei keine signifikanten Abweichungen). Hingegen zeigt $Im M_{\pi\pi}^{00}$ im linearen σ -Modell keine ausgeprägte Tendenz zur Reduktion.

Um den quantitativen Einfluß der Kontaktterme genauer zu studieren, wiederholen wir die Berechnung der in-Medium Amplitude $M_{\pi\pi}^{00}$ bei leicht reduzierten Kontaktterm-Cutoffs ($\Lambda_c = 700$ MeV; durch geringfügige Nachregelung der Mesonaustausch-Cutoffs kann ein Fit

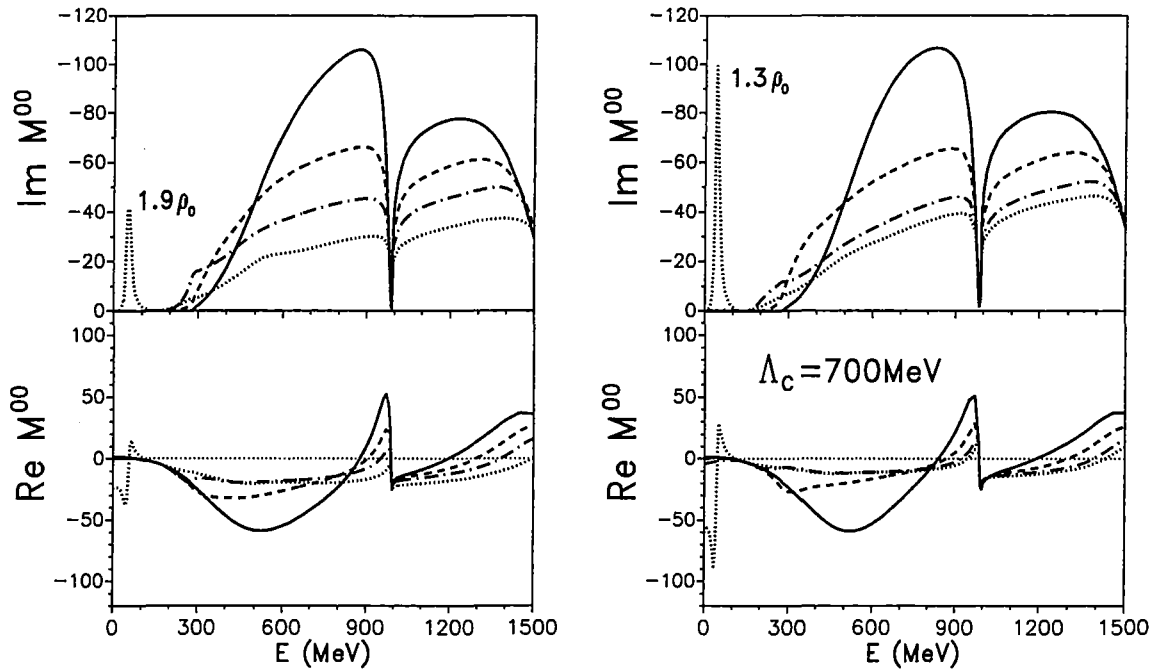


Abbildung 2.9: *In-Medium $\pi\pi$ -Streuamplitude im skalaren-isokalaren Kanal des 'chiral verbesserten' Jülich-Modells (linke Seite: Kontaktterm-Cutoffs Λ_c zwischen 700 und 950 MeV, rechte Seite: einheitliches Λ_c reduziert auf 700 MeV); gestrichelte Linien: $\rho = 0.5\rho_0$, strichpunktierte: $\rho = \rho_0$; die durchgezogenen Linien repräsentieren die freie Amplitude.*

an die experimentellen Streudaten von analoger Qualität wie in Abb. 2.8 erzielt werden, siehe Ref. [55]). Der Unterschied der auf der rechten Seite von Abb. 2.9 dargestellten Resultate zu denen auf der linken Seite ist evident: bereits bei Sättigungsdichte (strichpunktierte Linien) erkennt man eine einsetzende Attraktion in $Re M_{\pi\pi}^{00}(E)$, die für $\rho = 1.3\rho_0$ zur Ausbildung eines scharfen Bindungszustandes führt (gepunktete Linien auf der rechten Seite von Abb. 2.9), der bei weiterer Kompression ($\rho = 1.4\rho_0$) kondensiert. Neben der erheblich geringeren kritischen Dichte ist auch die im kondensierenden Bindungszustand absorbierte Stärke größer im Falle der leicht reduzierten Kontaktterm-Cutoffs.

Zusammenfassend halten wir fest, daß aus der (gebrochenen) chiralen Symmetrie folgende Eigenschaften der $\pi\pi$ -Wechselwirkung unbedingt zu berücksichtigen sind, um ein realistisches Verhalten von effektiven $\pi\pi$ -Modellen in kalter Kernmaterie zu ermöglichen. Wir konnten zeigen, daß eine entsprechende Erweiterung des bei der Beschreibung der freien $\pi\pi$ -Streudaten sehr erfolgreichen Jülicher Mesonaustauschmodells möglich ist. Diese Erweiterung besteht in:

- (a) der Einführung von $\pi\pi$ -Kontakt-Wechselwirkungen, wie sie aus dem geeichten, nicht-linearen σ -Modell folgen; so konnten die 'soft-Pion' Theoreme zumindest auf Born-niveau erfüllt werden;
- (b) einer leichten Modifikation der off-shell Fortsetzung für die in der Streugleichung iterierten Pseudopotentiale; damit konnte der korrekte chirale Limes der aus der voll iterierten Amplitude berechneten s-Wellen-Streulängen wiederhergestellt werden.

Der wesentliche Effekt dieser 'chiralen Verbesserungen' besteht in der Einführung einer repulsiven Dynamik in die sub-Schwellen $\pi\pi$ -Wechselwirkung im skalaren-isoskalaren Kanal. Als Folge dieser Repulsion ist die im ursprünglichen Lohse/Pearce-Modell bereits bei leicht verdichteter Kernmaterie ($\rho \simeq 1.15\rho_0$) einsetzende s-Wellen Pionpaarkondensation stark unterdrückt. Andererseits ist nach wie vor eine gute Anpassung an die experimentellen $\pi\pi$ -Streudaten bis zu hohen Energien ($E \leq 2$ GeV) und Partialwellen ($J \leq 2$) möglich. Die quantitative Frage nach der kritischen Dichte $\rho_c^{\pi\pi}$ für ein eventuell auftretendes Pionpaarkondensat bei höheren Dichten bleibt jedoch offen. Zum einen ist zu erwarten, daß noch weitere, in diesem Kapitel nicht behandelte Medium-Effekte darauf Einfluß nehmen, z.B. Modifikationen der Austauschmesonen oder Korrekturen von Wechselwirkungsvertizes (insbesondere des $\pi\pi\rho$ -Vertex'). Zum anderen ist $\rho_c^{\pi\pi}$ abhängig von den bei Ankopplung der Kontakt-Wechselwirkungen auftretenden Cutoff-Parametern, die durch die $\pi\pi$ -Streudaten allein nicht festgelegt werden können. Die Situation ist somit in gewisser Weise vergleichbar mit dem in den 70er und 80er Jahren intensiv diskutierten Problem der 1-Pionkondensation: nur durch konsistente Analyse einer Vielzahl verschiedener experimenteller Phänomene im Vakuum und in Kernmaterie kann die Eingrenzung der effektiven $\pi\pi$ -Wechselwirkungen zugrunde liegenden Parameter gelingen. Im folgenden Kapitel versuchen wir einen weiteren Schritt in diese Richtung zu vollziehen, indem wir die Konsequenzen von Medium-modifizierten s-Wellen $\pi\pi$ -Korrelationen für das Nukleon-Nukleon Potential untersuchen.

Kapitel 3

Medium-Modifikationen des Nukleon-Nukleon Potentials im σ -Kanal

3.1 Einführung

Die Hauptquelle der mittelreichweitigen ($r \simeq 1\text{-}2\text{ fm}$) Attraktion im Nukleon-Nukleon Potential besteht im Austausch eines korrelierten Paares zweier Pionen. Dieser Beitrag zur $N\text{-}N$ -Wechselwirkung wird in effektiven Modellen [1] meist durch den Austausch eines (fiktiven) σ -Mesons mit der Masse $m_\sigma \simeq 500\text{-}600\text{ MeV}$ parametrisiert, entsprechend der resonanzartigen Struktur im skalaren-isoskalaren Kanal der $\pi\pi$ -Wechselwirkung. In neueren Entwicklungen des Bonn-Potentials gelang es jedoch, den σ - (und ρ -) Austausch durch die volle Dynamik des korrelierten 2-Pionsystems zu ersetzen und dabei die quantitative Beschreibung der elastischen $N\text{-}N$ -Streudaten weitgehend zu erhalten [61, 62]. Die Grundlage dieser Arbeiten bildet ein mesontheoretisches Modell für die $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ -Übergangsamplituden im pseudophysikalischen Bereich (d.h. für Schwerpunktsenergien unterhalb der Nukleon-Antinukleon-Schwelle), aus denen durch dispersionstheoretische Methoden ein $N\text{-}N$ -Potential extrahiert werden kann (vgl. Abb. 3.1). Durso *et al.* [63] wendeten dieses Modell auf die Untersuchung von Medium-Modifikationen des mittelreichweitigen Anteils des $N\text{-}N$ -Potentials an, indem sie für die $\pi\pi$ -Wechselwirkung im σ -Kanal den von Mull *et al.* [6] berechneten Einfluß des nuklearen Mediums einbezogen. Durso's Analyse beschränkte sich auf den kinematischen Bereich oberhalb der 2-Pionschwelle. Wie wir im vorangegangenen Kapitel jedoch gesehen haben, führt eine detaillierte Berücksichtigung der off-shell Dynamik des Medium-modifizierten 2-Pionpropagators zu nicht-vernachlässigbaren Effekten im sub-Schwellenbereich der skalaren-isoskalaren $\pi\pi$ -Amplitude. Nach einer kurzen Wiederholung der Grundzüge des mesontheoretischen $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ -Modells im folgenden Abschnitt werden wir im 3.Abschnitt die von Durso *et al.* durchgeführten Analysen entsprechend erweitern, d.h.

- den in Abschnitt 2.3 abgeleiteten 2-Pionpropagator verwenden;
- den kinematischen Bereich unterhalb der 2-Pionschwelle einbeziehen und

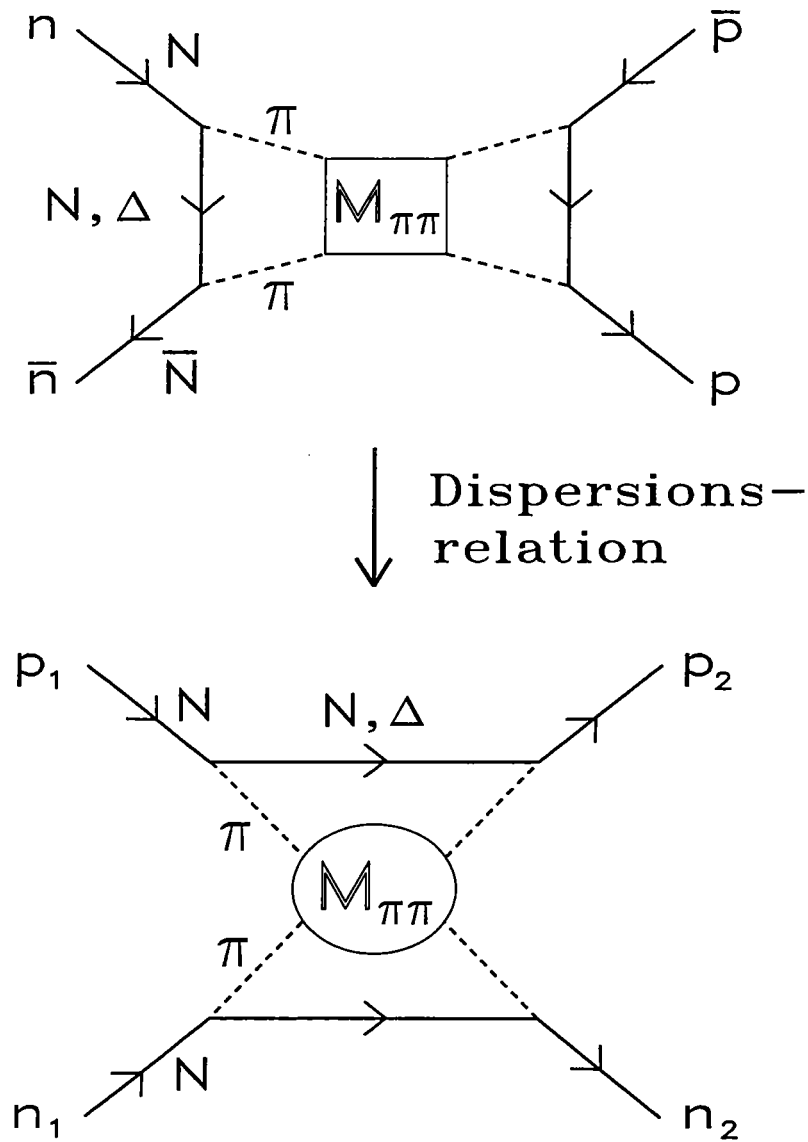


Abbildung 3.1: Mesonaustauschmodell zur Berechnung des korrelierten 2-Pionaustausches im Nukleon-Nukleon Potential; oberer Teil: mikroskopisches Modell für den Prozeß $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ unter Verwendung der vollen $\pi\pi$ -Wechselwirkung $M_{\pi\pi}$ sowie $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ -Bornamplituden mit den Viererimpulsen $n = (E_n, \vec{n})$, $\bar{n} = (E_{\bar{n}}, -\vec{n})$ des einlaufenden $N\bar{N}$ -Paares und $p = (E_p, \vec{p})$, $\bar{p} = (E_{\bar{p}}, -\vec{p})$ des auslaufenden $N\bar{N}$ -Paares. Mit dispersionstheoretischen Techniken wird daraus das N - N -Potential V_{NN}^{corr} für den Austausch eines korrelierten Paares zweier Pionen extrahiert (unterer Teil), wobei wir die Viererimpulse der einlaufenden Nukleonen mit $p_1 = (E_{p_1}, \vec{k})$, $n_1 = (E_{n_1}, -\vec{k})$ und die der auslaufenden mit $p_2 = (E_{p_2}, \vec{k}')$, $n_2 = (E_{n_2}, -\vec{k}')$ bezeichnen. Die Zeitrichtung in den Diagrammen läuft von links nach rechts.

- die Auswirkungen der in Kapitel 2 vorgenommenen 'chiralen' Verbesserungen studieren.

Im 4. Abschnitt wenden wir uns dann einem Szenario zu, welches durch das sogenannte 'Brown-Rho-Scaling' [35] charakterisiert ist. Als Folge der Wiederherstellung der chiralen Symmetrie bei endlicher Dichte sagt das BR-Scaling die gleichmäßige Reduktion von z.B. Vektormesonmassen und Pionzerfallskonstante voraus, wodurch eine Dichteabhängigkeit in den Pseudopotentialen der $\pi\pi$ -Wechselwirkung induziert wird.

3.2 $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ -Amplituden und das N - N -Potential im freien Raum

3.2.1 Das Mesonaustauschmodell für den Prozeß $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$, Frazer-Fulco-Amplituden

Eine ausführliche Darstellung der Konstruktion von mikroskopischen Modellen für die Vakuum- $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ -Annihilation im pseudophysikalischen Bereich findet sich in den Ref. [61, 62]. Wir folgen hier im wesentlichen dem in den Ref. [11, 64] geschilderten Verfahren und Notationen, da diese auf dem Blankenbecker-Sugar-Reduktionsschema der zugrunde liegenden vierdimensionalen Streugleichungen basieren. Die zur späteren Extraktion eines N - N -Potentials relevante Streuamplitude $\tau_{N\bar{N} \rightarrow \pi\pi}$ setzt sich zusammen aus einer Übergangs-Bornamplitude $\tau_{B,N\bar{N} \rightarrow \pi\pi}$ und einem Rückstreuungsterm, der die volle $\pi\pi$ -Amplitude $M_{\pi\pi}$ aus Glg. (2.23) enthält. Nach einer Partialwellenentwicklung nimmt die Streugleichung so folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \langle 00 | \tau_{N\bar{N} \rightarrow \pi\pi}^{JI}(t', q, p) | \lambda_N \lambda_{\bar{N}} \rangle &= \langle 00 | \tau_{B,N\bar{N} \rightarrow \pi\pi}^{JI}(t', q, p) | \lambda_N \lambda_{\bar{N}} \rangle \\ &+ \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^2} \langle 00 | M_{\pi\pi}^{JI}(t', q, k) | 00 \rangle G_{\pi\pi}^0(t', k) \langle 00 | \tau_{B,N\bar{N} \rightarrow \pi\pi}^{JI}(t', k, p) | \lambda_N \lambda_{\bar{N}} \rangle, \end{aligned} \quad (3.1)$$

wobei $\lambda_N, \lambda_{\bar{N}}$ die Nukleon-/Antinukleon-Helizitäten bezeichnen, p deren relativen CM S-Impuls und q den 2-Pion CM S-Impuls (die Helizität der spinlosen Pionen ist null). $t' \equiv E^2$ steht für die externe Startenergie. Diese in der Literatur übliche Bezeichnung ist dadurch motiviert, daß beim letztendlichen Übergang zum N - N -Potential t' gerade dem Viererimpulsübertrag zwischen den beiden Nukleonen entspricht. Da das $N\bar{N}$ -System nur zu Gesamtsospin $I=0$ oder 1 koppeln kann und das $\pi\pi$ -System der Auswahlregel $J + I = \text{gerade}$ unterliegt, beschränkt sich die $\pi\pi$ -Amplitude in Glg. (3.1) für niedrige Partialwellen ($J \leq 1$) auf den σ -($JI=00$ -) und ρ -($JI=11$ -) Kanal. Der Zusammenhang zwischen den on-shell τ -Amplituden und den in der Literatur häufig verwendeten 'Frazer-Fulco'-Helizitäts-Amplituden $f_\pm^J$ [65] ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f_+^{JI}(t') &= \frac{p_{on} M_N}{4(2\pi)^2 (p_{on} q_{on})^J} \langle 00 | \tau_{N\bar{N} \rightarrow \pi\pi}^{JI}(t', q_{on}, p_{on}) | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle \\ f_-^{JI}(t') &= -\frac{p_{on} M_N}{2(2\pi)^2 \sqrt{t'} (p_{on} q_{on})^J} \langle 00 | \tau_{N\bar{N} \rightarrow \pi\pi}^{JI}(t', q_{on}, p_{on}) | \frac{1}{2} (-\frac{1}{2}) \rangle \end{aligned} \quad (3.2)$$

mit den on-shell Impulsen

$$\begin{aligned} p_{on} &= \left(\frac{t'}{4} - M_N^2 \right)^{1/2} \\ q_{on} &= \left(\frac{t'}{4} - m_\pi^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Die wesentlichen Bestandteile des von Pearce *et al.* [11, 64] entwickelten Modells bestehen in Nukleon- und Δ -Austausch für die Übergangs-Bornamplituden $\tau_{B,N\bar{N} \rightarrow \pi\pi}$ sowie dem 'Coupled Channel' $\pi\pi$ -Modell aus Abschnitt 2.4.1 (für den konsistenten Einbezug des $K\bar{K}$ -Kanals wurden auch Übergangs-Bornamplituden $\tau_{B,N\bar{N} \rightarrow K\bar{K}}$ in Verbindung mit der vollen $K\bar{K} \rightarrow \pi\pi$ -Amplitude $M_{K\bar{K} \rightarrow \pi\pi}$ berücksichtigt; der daraus resultierende zusätzliche Rückstreuungsterm wurde in Glg. (3.1) nicht explizit angegeben, ist aber in allen unseren Rechnungen enthalten). Die im $N\bar{N}$ -Sektor freien vier Parameter (2 Formfaktor-Cutoffs $\Lambda_{NN\pi}, \Lambda_{N\Delta\pi}$ sowie 2 Kopplungsverhältnisse, siehe Ref. [64] für Details) können so gewählt werden, daß eine zufriedenstellende Reproduktion der quasiempirischen Frazer-Fulco-Amplituden [66] erreicht wird (vgl. linke Spalte in Abb. 3.2). Ein wichtiger Aspekt bei den in-Medium Rechnungen in den Abschnitten 3 und 4 wird in der Verwendung des 'chiral' verbesserten Jülich-Modells aus Abschnitt 2.6.1 bestehen. Um auch für dieses Modell eine akzeptable Beschreibung der quasiempirischen Frazer-Fulco-Amplituden zu gewährleisten, mußten die Parameter der $N\bar{N}$ -Übergangs-Bornamplituden leicht nachjustiert werden. Dabei haben wir aus Konsistenzgründen die dem $\pi\pi$ -Sektor entsprechenden Mandelstam-Variablen mit der on-mass-shell Vorschrift belegt. Den resultierenden Refit zeigt die rechte Spalte in Abb. 3.2.

3.2.2 Spektralfunktion und effektives N - N -Potential

Zur Berechnung des aus korreliertem 2π -Austausch hervorgehenden Beitrags zum N - N -Potential ist die Kenntnis des Imaginärteils der Amplitude für den Prozeß $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ im pseudophysikalischen Bereich ($4m_\pi^2 \leq t' \leq 4M_N^2$) erforderlich. Die zugehörigen Spektralfunktionen lassen sich über eine Unitaritätsrelation zu den Frazer-Fulco-Amplituden in Bezug setzen. Für den uns interessierenden Fall des s-Wellen korrelierten 2π -Austausches gibt es eine unabhängige Spektralfunktion, die wir in Anlehnung an Ref. [63] mit η_{00} bezeichnen (in den Ref. [61, 62] wurde die Bezeichnung $\rho_1^{(+)}$ verwendet). Es gilt:

$$\eta_{00}(t') = 24\pi \sqrt{\frac{t' - 4m_\pi^2}{t'}} \frac{1}{(t' - 4M_N^2)^2} \left[|f_+^{00}(t')|^2 - |f_{B,+}^{00}(t')|^2 \right] \Theta(t' - 4m_\pi^2), \quad (3.4)$$

Die Subtraktion der Bornamplitude $|f_{B,+}^{00}|^2$ wird vorgenommen, um nach Übergang zum Nukleon-Nukleon Potential den unkorrelierten Anteil des 2π -Austausches entfernt zu haben (dieser ist bereits explizit im Bonn-Potential enthalten, und zwar in der Iteration des 1-Pionenaustausches unter Einbezug von Δ -Zwischenzuständen). Mit Hilfe einer Dispersionsrelation kann nun die analytische Fortsetzung in den für N - N -Streuung relevanten

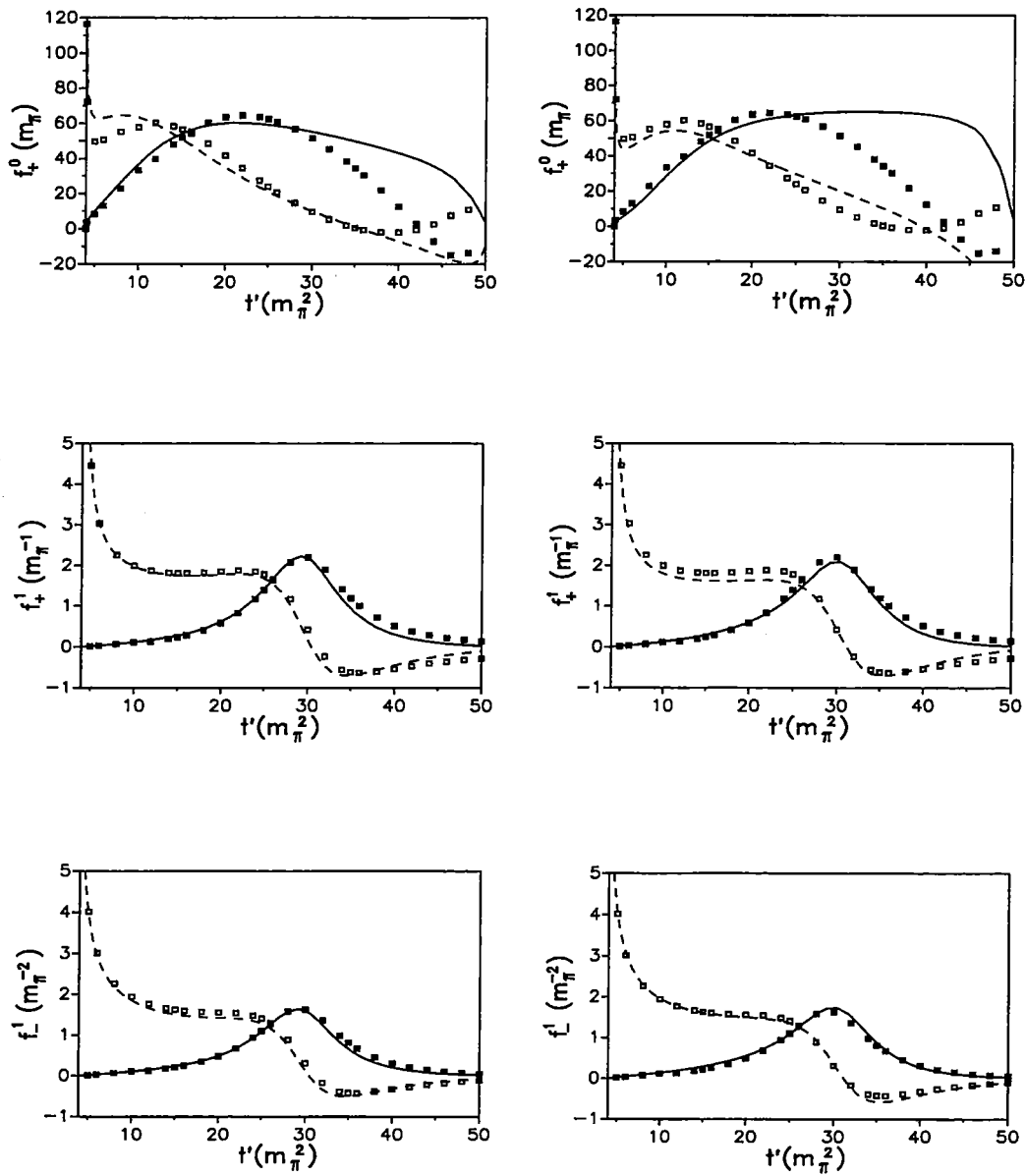


Abbildung 3.2: Anpassung an die freien, quasiempirischen Frazer-Fulco-Amplituden von Höhler et al. (gekennzeichnet durch Kästchen) im Lohse/Pearce-Modell (linke Seite) und im chiral verbesserten Jülich-Modell (rechte Seite); durchgezogene Linien: Imaginärteil, gestrichelte: Realteil.

kinematischen Bereich von Viererimpulsüberträgen $-\infty \leq t \leq 0$ vorgenommen werden. Für zwei korrelierte Pionen im σ -Kanal resultiert das zugehörige N - N -Potential in

$$V_{NN\sigma}(t) = -\frac{\kappa}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} dt' \frac{\eta_{00}(t')}{t-t'} P_1 \quad (3.5)$$

mit einem kinematischen Faktor $\kappa = M_N^2 / (2\pi)^3 (E_{p_1} E_{n_1} E_{p_2} E_{n_2})^{1/2}$, den Nukleonenergien $E_{p_1} = E_{n_1} = \sqrt{M_N^2 + k^2}$, $E_{p_2} = E_{n_2} = \sqrt{M_N^2 + k'^2}$ (vgl. Abb. 3.1) und einem die ein- und auslaufenden Spinoren der Nukleonen verknüpfenden Operator $P_1 = 1^n 1^p$. Zur anschaulichen Repräsentation der späteren Ergebnisse wird es sich als nützlich erweisen, das Impulsraum-Potential Glg. (3.5) in ein effektives Ortsraum-Potential zu transformieren (wie in Ref. [63] vorgeschlagen). Dazu gehen wir in den quasistatischen Limes über, d.h. approximieren t durch den Dreierimpulsübertrag, $t \simeq -(\vec{k}' - \vec{k})^2 \equiv \vec{k}''^2$, und ersetzen die relativistischen Nukleonenergien im κ -Faktor durch ihre Massen. Dies ermöglicht die Anwendung einer Fouriertransformation, welche auf ein lokales Zentralpotential

$$V_{NN\sigma}^C(r) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{d^3 k''}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}'' \cdot \vec{r}} \int_{4m_\pi^2}^{t_c} dt' \frac{\eta_{00}(t')}{t-t'} \quad (3.6)$$

führt. Die k'' -Integration kann analytisch ausgeführt werden:

$$V_{NN\sigma}^C(r) = -\frac{1}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{t_c} dt' \frac{\eta_{00}(t')}{4\pi} \frac{\exp(-\sqrt{t'} r)}{r}, \quad (3.7)$$

was von der Form eines Yukawa-Potentials mit einer über das 2-Pion-Kontinuum ausgebreiteten Massenverteilung und Kopplungsstärke $\eta_{00}(t')$ ist. Die Einführung eines scharfen Cutoffs von $t_c = 50m_\pi^2$ ist hauptsächlich dadurch motiviert, daß unser Modell (wie auch die quasiempirische Information) für höhere t' -Werte zu unzuverlässig wird. Aufgrund des exponentiellen Abfalls im Integranden von Glg. (3.7) ist das Ortsraum-Potential numerisch insensitive bzgl. Variation von t_c (solange $r \geq 0.1$ fm).

Durso *et al.* benutzten die Glgn. (3.4) und (3.7) zur Berechnung von Medium-Modifikationen, indem sie in Glg. (3.1) die Vakuum-Amplitude $M_{\pi\pi}^{00}$ durch die in-Medium Version von Mull *et al.* [6] ersetzen. Die aus der Unitaritätsrelation abgeleitete Form von η_{00} aus Glg. (3.4) läßt jedoch keine offensichtliche Fortsetzung unterhalb der 2-Pionschwelle zu (z.B. sind die Vakuum-Frazer-Fulco-Amplituden für $t' \leq 4m_\pi^2$ immer noch endlich), so daß die untere Grenze der t' -Integration bei $4m_\pi^2$ belassen wurde. Es erscheint jedoch konsistenter, die in Kernmaterie auftretende Stärke im sub-Schwellenbereich der 2-Pionenzustände einzubeziehen. Zu diesem Zweck nehmen wir eine 'direkte' Berechnung der Amplitude $M_{N\bar{N}}$ für den Prozeß $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ vor. Die entsprechende Streugleichung für ein ein- und auslaufendes $N\bar{N}$ -Paar mit Impulsen $\vec{n}, -\vec{n}$ und $\vec{p}, -\vec{p}$ sowie Startenergie $\sqrt{t'}$ lautet (vgl. auch den oberen Teil in Abb. 3.1):

$$M_{N\bar{N}}(t', \vec{p}, \vec{n}) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tau_B^\dagger(t', \vec{p}, \vec{q}) G_{\pi\pi}^0(t', q) \tau_B(t', \vec{q}, \vec{n}) + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tau_B^\dagger(t', \vec{p}, \vec{q}) G_{\pi\pi}^0(t', q) \int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3} M_{\pi\pi}(t', \vec{q}, \vec{q}') G_{\pi\pi}^0(t', q') \tau_B(t', \vec{q}', \vec{n}), \quad (3.8)$$

wobei $\tau_B^\dagger$ die hermitesche Konjugation von τ_B bedeutet; die Faktoren von $1/2$ kompensieren die 'Doppelzählung' bei geschlossenen Loops identischer Bosonen. Nach einer Partialwellenzerlegung gelangt man zu

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda | M_{N\bar{N}}^{JI}(t') | \Sigma \rangle &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{(2\pi)^3} \langle 00 | \tau_B^{JI}(t', q, p) | \Lambda \rangle^* G_{\pi\pi}^0(t', q) \langle 00 | \tau_B^{JI}(t', q, n) | \Sigma \rangle \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{(2\pi)^3} \langle 00 | \tau_B^{JI}(t', q, p) | \Lambda \rangle^* G_{\pi\pi}^0(t', q) \\
&\quad \times \int_0^\infty \frac{q'^2 dq'}{(2\pi)^2} M_{\pi\pi}^{JI}(t', q, q') G_{\pi\pi}^0(t', q') \langle 00 | \tau_B^{JI}(t', q', n) | \Sigma \rangle \\
&\equiv \langle \Lambda | M_{N\bar{N}}^{00, bare}(t') | \Sigma \rangle + \langle \Lambda | M_{N\bar{N}}^{00, rescat}(t') | \Sigma \rangle
\end{aligned} \tag{3.9}$$

mit den Helizitätszuständen $\Sigma = \sigma\bar{\sigma}$, $\Lambda = \lambda\bar{\lambda}$ der ein- und auslaufenden N , $\bar{N}$. Wir benötigen $M_{N\bar{N}}^{JI}$ ausschließlich on-shell und im pseudophysikalischen Bereich, d.h. $n = p = \sqrt{t'/4 - M_N^2}$ sind rein imaginär. Daher sind auch die oberhalb der $N\bar{N}$ -Schwelle reellen Übergangsamplituden $\tau_B^{JI}(t')$ für $t' < 4M_N^2$ rein imaginär, das Produkt $\tau_B^{JI}(t')^* \tau_B^{JI}(t')$ jedoch wieder eine reelle Zahl. Das bedeutet, daß die $N\bar{N}$ -Amplitude $M_{N\bar{N}}^{JI}(t')$ im freien Raum nur für $t' \geq 4m_\pi^2$ einen endlichen Imaginärteil annimmt, da für $t' < 4m_\pi^2$ der Propagator $G_{\pi\pi}^0(t', q)$ und daher auch $M_{\pi\pi}^{JI}(t', q, q')$ reell bleiben (vgl. auch Glg. (2.23)). Die Relation zur Spektralfunktion im σ -Kanal ist gegeben durch

$$Im \left[\langle ++ | M_{N\bar{N}}^{00, rescat}(t') | ++ \rangle \right] = \frac{4\pi}{3} \eta_{00}(t') \langle ++ | P_1 | ++ \rangle \tag{3.10}$$

mit dem Einheitsmatrizelement zwischen N - und $\bar{N}$ -Spinoren

$$\begin{aligned}
\langle ++ | P_1 | ++ \rangle &= (\bar{u}_\lambda(\vec{p}) 1^p v_{\bar{\lambda}}(-\vec{p})) (\bar{v}_{\bar{\sigma}}(-\vec{n}) 1^n u_\sigma(\vec{n})) \\
&= \frac{p}{M_N} \frac{n}{M_N} \\
&= \frac{t' - 4M_N^2}{4M_N^2},
\end{aligned} \tag{3.11}$$

so daß η_{00} durch den Imaginärteil der $N\bar{N}$ -Amplitude ausgedrückt werden kann als

$$\eta_{00}(t') = -\frac{4M_N^2}{t' - 4M_N^2} \frac{3}{4\pi} Im \left[\langle ++ | M_{N\bar{N}}^{00, rescat}(t') | ++ \rangle \right]. \tag{3.12}$$

Der entscheidende Vorteil dieser Darstellung gegenüber Glg. (3.4) liegt darin, daß die rechte Seite im Vakuum für $t' < 4m_\pi^2$ verschwindet, ohne daß eine explizite Θ -Funktion eingeführt werden muß. Dieser Umstand ermöglicht es, bei den im nächsten Abschnitt durchzuführenden in-Medium Rechnungen den Bereich unterhalb der freien 2-Pionschwelle in natürlicher Weise einzuschließen, da die Streugleichung (3.9) auch für $t' < 4m_\pi^2$ wohldefiniert ist (ganz analog zur $\pi\pi$ -Streugleichung (2.23), vgl. auch Anhang B).

3.3 Der σ -Kanal des N - N -Potentials in kalter Kernmaterie

Die Struktur von Glg. (3.9) läßt im Prinzip drei Quellen von Medium-Effekten zu, und zwar

- (1) in der Übergangs-Bornamplitude $\tau_{B,N\bar{N} \rightarrow \pi\pi}$;
- (2) im 2-Teilchen-Zwischenzustandspropagator $G_{\pi\pi}$, der $\tau_{B,N\bar{N} \rightarrow \pi\pi}$ und $M_{\pi\pi}$ verknüpft;
- (3) in der $\pi\pi$ -Streuamplitude $M_{\pi\pi}$.

Modifikationen von $\tau_{B,N\bar{N} \rightarrow \pi\pi}$, die z.B. an den Propagatoren des Nukleon- oder Δ -Austausches vorzunehmen wären, werden wir nicht betrachten, da solche im Kontext einer Nukleon-Nukleon Streugleichung zu behandeln sind; wir interessieren uns hier jedoch nur für den Einfluß des nuklearen Mediums auf das N - N -Potential.

Medium-Modifikationen des in Glg. (3.9) *explizit* eingehenden 2-Pionpropagators sollte man aus Konsistenzgründen natürlich berücksichtigen, da die Medium-Effekte in der $M_{\pi\pi}$ -Amplitude auf ganz analoge Weise generiert werden. Andererseits wird z.B. für den 1-Pionpropagator in Kernmaterie argumentiert [3, 67], daß die aus der Aufweichung der 1-Piondispersionsrelation hervorgehende Verstärkung der Attraktion im N - N -Potential durch repulsive Terme in 3-Nukleon-Wechselwirkungen kompensiert wird. Da wir 3-Teilchen-Wechselwirkungen im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht behandeln und darüber hinaus eine möglichst enge Analogie zum 1-Bosonaustauschbild bewahren möchten, verzichten wir auch auf den Typ (2) der oben angegebenen Medium-Effekte.

Den Einfluß der Kernmaterie auf die $N\bar{N}$ -Amplitude $M_{N\bar{N}}$ berücksichtigen wir also allein durch Verwendung der in-Medium $\pi\pi$ -Amplitude $M_{\pi\pi}$ aus den Abschnitten 2.4 und 2.6. Die so aus den Glgn. (3.9) und (3.12) ermittelte $N\bar{N}$ -Spektralfunktion ist in Abb. 3.3 dargestellt. Das Verhalten der $M_{\pi\pi}$ -Amplituden aus den Abbn. 2.4 und 2.9 überträgt sich im wesentlichen auch auf η_{00} . Im Lohse/Pearce-Modell [11, 64] finden wir wieder eine erhebliche Ansammlung von Stärke im Schwellenbereich sowie den bei $\rho = \rho_0$ und $t' \simeq m_\pi^2$ auftretenden Bindungszustand. Aufgrund der quadratischen Energieskala der x -Achse wirkt dieser optisch schmaler als in der $M_{\pi\pi}$ -Amplitude aus Abb. 2.4; zudem ist $\dim[\eta_{00}] = (\text{Energie})^{-2}$, so daß im Vergleich zur dimensionslosen $M_{\pi\pi}$ -Amplitude eine sehr viel stärkere Gewichtung kleiner Energien erfolgt. Im chiral verbesserten Jülich-Modell ist die sub-Schwellenstärke deutlich unterdrückt, jedoch erkennt man für $\rho = \rho_0$ eine beträchtliche Überhöhung für $t' \leq 14m_\pi^2$, was ungefähr mit dem entsprechenden Energiebereich in Abb. 2.9 übereinstimmt. Die z.T. etwas spitze Struktur von η_{00} direkt an der 2-Pionschwelle ist eine Folge des in Glg. (3.9) eingehenden *Vakuum*-2-Pionpropagators, dessen Imaginärteil ab $t' \leq 4m_\pi^2$ verschwindet. Für höhere t' ($\geq 10 - 15m_\pi^2$) sind die Werte der in-Medium Spektralfunktion im Vergleich zur Vakuum-Kurve unterdrückt, stärker ausgeprägt im Lohse/Pearce-Modell. Dabei ist die Fläche unter den Kurven in sehr guter Näherung erhalten:

$$\int_0^{t_c=50m_\pi^2} dt' \eta_{00}(t') \simeq \text{const} \quad (\text{dimensionslos}), \quad (3.13)$$

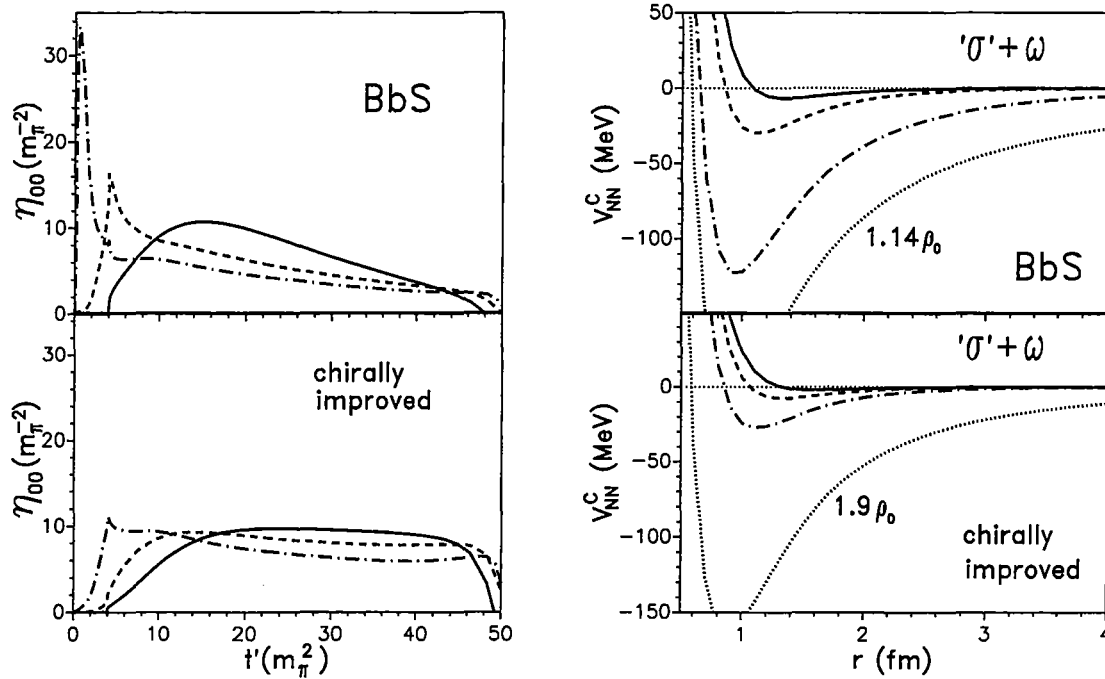


Abbildung 3.3: *In-Medium $N\bar{N}$ -Spektralfunktion im σ -Kanal (linke Seite) und zugehöriges N - N -Zentralpotential (rechte Seite), ergänzt mit freiem ω -Austausch; die beiden oberen Graphen zeigen die Resultate im Lohse/Pearce-Modell, die beiden unteren im chiral verbesserten Jülich-Modell; gestrichelte Linien: $\rho=0.5\rho_0$, strichpunktierte: $\rho=\rho_0$; die durchgezogenen Linien sind die Resultate im Vakuum.*

d.h. der Netto-Effekt besteht einfach in einer Verschiebung von Stärke zu kleineren Energien.

Die quantitative Auswirkung dieses Mechanismus' läßt sich am besten anhand eines Ortsraum-Potentials veranschaulichen, wie wir es mittels Glg. (3.7) extrahieren können (wobei die untere Grenze der t' -Integration von $4m_\pi^2$ auf 0 reduziert wird). Um eine realistischere Darstellung zu ermöglichen, haben wir in den N - N -Potentialen auf der rechten Seite von Abb. 3.3 noch den Austausch eines scharfen ('zero-width') ω -Mesons einbezogen mit

$$\eta_\omega(t') = \pi g_{NN\omega}^2 \delta(t' - m_\omega^2) \quad (3.14)$$

und $g_{NN\omega}^2/(4\pi)=20$ aus dem Bonn-Potential [1]. Bereits bei moderaten Dichten (z.B. $\rho = 0.5\rho_0$) tritt im Lohse/Pearce-Modell eine signifikante Verstärkung der mittelreichweiten Attraktion ein, die bis Sättigungsdichte noch erheblich zunimmt. Bei weiterer leichter Kompression der Kernmaterie ($\rho = 1.14\rho_0$) generiert der im σ -Kanal der $\pi\pi$ -Wechselwirkung entstehende, extrem scharfe Bindungszustand bei $E \simeq 25$ MeV (vgl. rechte Seite

von Abb. 2.4) eine überaus starke, sehr langreichweitige Attraktion: das Minimum des N - N -Zentralpotentials liegt jetzt bei $V_{NN}^C(r \simeq 0.95\text{fm}) \simeq -210$ MeV. Trotz identischer zugrunde liegender Modelle für die Vakuum- $\pi\pi$ - und $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ -Born-Amplituden finden wir also ein qualitativ unterschiedliches Verhalten des in-Medium N - N -Potentials im Vergleich zu Ref. [63]: dort bewirkte die Reduktion der $N\bar{N}$ -Spektralfunktion η_{00} oberhalb der 2-Pionschwelle eine mit steigender Dichte nachlassende Attraktion. Die Ursache dieser Diskrepanz ist offensichtlich: durch Einbezug der sub-Schwellenstärke in η_{00} wird die in unserer Analyse ebenfalls auftretende Reduktion für höhere Energien erheblich überkompensiert; entscheidend für das quantitative Ausmaß dieser Überkompensation ist dabei die 'exakte' off-shell Behandlung des unkorrelierten 2-Pionpropagators (Abschnitt 2.3), insbesondere dessen Kopplung an tiefliegende Nukleon-Nukleonloch-Anregungen. Vom empirischen Gesichtspunkt her bedeuten diese Resultate aber zunächst keineswegs eine Verbesserung – im Gegenteil: eine derart dominante, mit steigender Dichte stark zunehmende Attraktion dürfte zu erheblichen Schwierigkeiten im Saturierungsproblem von Kernmaterie führen.

Eine bedeutende 'Entschärfung' der Situation kann durch den Einbezug der 'chiralen Constraints' in die $\pi\pi$ -Wechselwirkung erreicht werden. Im Rahmen des 'chiral verbesserten' Modells aus Abschnitt 2.6 ist der Anstieg der Attraktion in $V_{NN}^C(r)$ wesentlich schwächer ausgeprägt (rechter, unterer Graph in Abb. 3.3): bei Sättigungsdichte findet sich das Minimum bei $V_{NN}^C(r \simeq 1.1\text{fm}) \simeq -25$ MeV (im Vergleich zu $V_{NN}^C(r \simeq 1\text{fm}) \simeq -125$ MeV im Lohse/Pearce-Modell) und liegt somit noch in einem realistischen Bereich typischer N - N -Zentralpotentiale (siehe z.B. Ref. [3]). Dennoch bleibt eine durchaus signifikante Dichteabhängigkeit der Attraktion bestehen. Im Hinblick auf das Saturierungsproblem von Kernmaterie sind daher kompensierende Mechanismen notwendig, d.h. dichteabhängige, repulsive Beiträge, wie sie z.B. in sogenannten Dirac-Brueckner-Rechnungen [68, 2] als Folge eines relativistischen Vielteilchen-Effekts generiert werden können. Andererseits erscheint es plausibel, einen geeigneten Kompensationsmechanismus ebenfalls auf 1-Bosonaustausch-Niveau zu suchen, z.B. durch eine analog zum hier betrachteten σ -Kanal durchzuführende Modifikation des ρ -Kanals; eine durch Kopplung an in-Medium $\pi\pi$ -Zustände aufgeweichte (d.h. zu kleineren Energien verlagerte) ρ -Spektralfunktion könnte die gewünschte, mit der Dichte ansteigende Repulsion liefern (eine zuverlässige Beschreibung des ρ -Propagators in Kernmaterie verlangt die Berücksichtigung von in-Medium-Korrekturen des $\pi\pi\rho$ -Vertex' [36, 37, 38], die einen beträchtlichen Zusatzaufwand erfordern und an dieser Stelle nicht behandelt werden; wir kommen auf dieses Problem im 6.Kapitel zurück im Kontext von in URHIC's erzeugter, hochangeregter Materie).

Eine weitere Möglichkeit zur Erzeugung einer dichteabhängigen Repulsion im N - N -Potential könnte die Realisierung des Brown-Rho'schen Skalengesetzes [35] bieten, demgemäß u.a. die Vektormesonmassen m_ρ und m_ω als Folge der chiralen Restauration mit steigender Dichte abfallen. Andererseits bedingt eine Reduktion der ρ -Masse aber auch eine erhöhte Attraktion im σ -Kanal der $\pi\pi$ -Wechselwirkung, was wiederum die Verschiebung von Stärke zu kleinen t' in $\eta_{00}(t')$ begünstigt. Diese konkurrierenden Effekte werden wir im folgenden Abschnitt etwas genauer untersuchen.

3.4 Der Einfluß der chiralen Restauration auf das zentrale N - N -Potential

3.4.1 Die Brown-Rho'sche Skalenhypothese

Neben den bis jetzt ausschließlich diskutierten, durch in-Medium 2-Teilchen-Wechselwirkungen induzierten Modifikationen gibt es natürlich noch weitere, wenn auch weniger etablierte Ursachen für die Änderung von Hadroneigenschaften in Kernmaterie; eine davon beruht auf einer möglichen Modifikation der der starken Wechselwirkung zugrunde liegenden Vakuum-Struktur, insbesondere einer Dichteabhängigkeit von bestimmten Vakuum-Erwartungswerten ('Kondensaten'). Bekanntestes Beispiel hierfür ist das sogenannte (skalare) Quarkkondensat $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$. Da Kernmaterie bei Saturierungsdichte noch als ein verdünntes Gas wohl-separierter Nukleonen betrachtet werden kann, erscheint es vernünftig, eine Dichteentwicklung für das in-Medium Quarkkondensat $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle^\rho$ vorzunehmen. In unterster Ordnung erhält man so [69, 70]:

$$\langle 0|\bar{q}q|0\rangle^\rho = \langle 0|\bar{q}q|0\rangle^{\rho=0} + \langle N|\bar{q}q|N\rangle \rho, \quad (3.15)$$

wobei $\langle N|\bar{q}q|N\rangle$ das Quarkkondensat im Nukleon bezeichnet. Dieses kann zum πN -Sigma-term, $\Sigma_{\pi N}$, in Bezug gesetzt werden [71] mittels

$$\Sigma_{\pi N} = \frac{1}{2}(m_u + m_d) \langle N|\bar{q}q|N\rangle \quad (3.16)$$

($m_{u/d}$: Current-Quarkmassen). Unter zusätzlicher Benutzung der Gellmann-Oakes-Renner Relation [72],

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -\frac{1}{2}(m_u + m_d) \langle 0|\bar{q}q|0\rangle^0, \quad (3.17)$$

kann die Dichteabhängigkeit des Quarkkondensats in ausschließlich meßbaren Größen ausgedrückt werden:

$$\frac{\langle 0|\bar{q}q|0\rangle^\rho}{\langle 0|\bar{q}q|0\rangle^0} = 1 - \frac{\Sigma_{\pi N}}{m_\pi^2 f_\pi^2} \rho. \quad (3.18)$$

Durch die Analyse des Verhaltens effektiver chiraler Lagrangedichten im Medium leiteten Brown und Rho folgendes 'Skalengesetz' ab [35, 73]:

$$\Phi(\rho) = \frac{m_V^*}{m_V} = \frac{m_\sigma^*}{m_\sigma} = \frac{M_N^*}{M_N} = \frac{f_\pi^*}{f_\pi} = \frac{\Lambda^*}{\Lambda} \quad (3.19)$$

mit $m_V = m_\rho, m_\omega$. Die mit einem Stern versehenen Größen bezeichnen die in-Medium Werte von Vektormeson-, σ - und Nukleon-Massen, der Pionzerfallskonstante sowie den Cutoff-Parametern effektiver Theorien. Das Skalenverhältnis $\Phi(\rho)$ ist im wesentlichen durch die Dichteabhängigkeit des Quarkkondensats bestimmt:

$$\Phi(\rho) \simeq \left(\frac{\langle 0|\bar{q}q|0\rangle^\rho}{\langle 0|\bar{q}q|0\rangle^0} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.20)$$

was für einen typischen Wert des πN -Sigmaters von 45 MeV

$$\Phi(\rho_0) \simeq 0.87 \quad (3.21)$$

liefert. Hatsuda und Lee [74] berechneten Vektormesonmassen in Kernmaterie mit Hilfe der QCD-Summenregel-Technik; sie fanden ein mit dem 'BR-Scaling', Glg. (3.19), kompatibles Ergebnis (bis zur ersten Ordnung in ρ):

$$\frac{m_V(\rho)}{m_V(0)} = 1 - C \frac{\rho}{\rho_0} \quad (3.22)$$

mit $C = 0.18 \pm 0.06$. Die Massen der pseudoskalaren Mesonen sind aus dem Skalengesetz ausgeschlossen [73], was im Falle der Pionmasse z.B. von Delorme *et al.* [75] bestätigt werden konnte.

Im folgenden Abschnitt zeigen wir, wie das BR-Skalengesetz in ein Mesonaustauschmodell implementiert werden kann, und welche Konsequenzen daraus für die in-Medium $N\bar{N}$ -Spektralfunktion und das zentrale N - N -Potential folgen.

3.4.2 Brown-Rho-Scaling in der $\pi\pi$ -Wechselwirkung und im N - N -Potential

Die Berücksichtigung des Brown-Rho'schen Skalengesetzes im Jülicher Mesonaustauschmodell geschieht durch entsprechende Modifikation von Parametern in den Pseudopotentialen $V_{\pi\pi}^{JJ}$ gemäß Glg. (3.19) (für die konkreten Rechnungen verwenden wir die Relation (3.22) mit $C=0.15$). Im einzelnen sind dies (vgl. dazu auch die expliziten Potentialausdrücke in Abschnitt 2.4.1 und Anhang B):

- (1) die Reduktion der (physikalischen) ρ -Masse im t-Kanal ρ -Propagator sowie im t-Kanal Formfaktor (siehe Glg. (2.31));
- (2) die Reduktion des Cutoff-Parameters Λ_ρ im t-Kanal Formfaktor;

zudem im chiralen verbesserten Jülich-Modell:

- (3) die Reduktion der Pionzerfallskonstante f_π und ρ -Masse m_ρ in den 'Kopplungskonstanten' der Kontakt-Wechselwirkung; auf eine Skalierung der Cutoffs Λ_c in den Kontaktterm-Formfaktoren wird aufgrund der konstant gehaltenen Pionmasse verzichtet; die (dimensionslose) $\pi\pi\rho$ -Kopplungskonstante wird ebenfalls konstant angesetzt, da die KSFR-Relation [76] auch im Medium gelten soll:

$$2g_{\pi\pi\rho}^2 (f_\pi^*)^2 = (m_\rho^*)^2. \quad (3.23)$$

Den $f_0(1400)$ -Polgraph sowie die Vektormeson-Austausche im angekoppelten $K\bar{K}$ -Kanal lassen wir unverändert: ersterer hat wenig Einfluß auf den Niederenergiebereich der $\pi\pi$ -Wechselwirkung, und im $K\bar{K}$ -Sektor fehlen in unserem Modell zudem die kompensierend wirkenden, aus einer (approximativen) chiralen $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ -Symmetrie folgenden Kontakt-Wechselwirkungen. Da wir uns hier auf s-Wellen-Wechselwirkung beschränken,

ist es nicht erforderlich, Scaling-Effekte im ρ -Polgraphen einzubeziehen (wir kommen darauf in den Kapiteln 4 und 5 im Kontext eines heißen Piongases zurück, d.h. bei endlicher Temperatur). Auch in der $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ -Übergangsamplitude nehmen wir keine Skalierung der (Nukleon- und Δ -) Massen und Formfaktor-Cutoffs vor.

Für den 2-Pionpropagator in kalter Kernmaterie verwenden wir wieder Glgn. (2.21) und (2.22) aus Abschnitt 2.3 mit den in die Pionselbstenergie eingehenden effektiven Nukleon- und Δ -Massen (vgl. Anhang A)

$$\begin{aligned} M_N^* &= M_N - (1 - 0.2\rho/\rho_0) \\ M_\Delta^* &= M_\Delta - (M_N - M_N^*) . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Diese Werte sind im Rahmen der theoretischen Unsicherheit konsistent mit dem BR-Scaling. Weitere mögliche Scaling-Effekte in Σ_π ignorieren wir, da diese so konstruiert ist, daß eine Vielzahl von Phänomenen der Kernphysik damit beschrieben werden kann.

Im Lohse/Pearce-Modell erkennt man eine leichte Verstärkung der (sub-) Schwelleneffekte in der $N\bar{N}$ -Spektralfunktion (vgl. die linken, oberen Graphen in den Abbn. 3.3 und 3.4), d.h. die Reduktion des Cutoff-Parameters Λ_ρ wird durch die Reduktion der ρ -Masse geringfügig überkompensiert (s-Wellen $\pi\pi$ -Paarkondensaton setzt jetzt bei einer kritischen

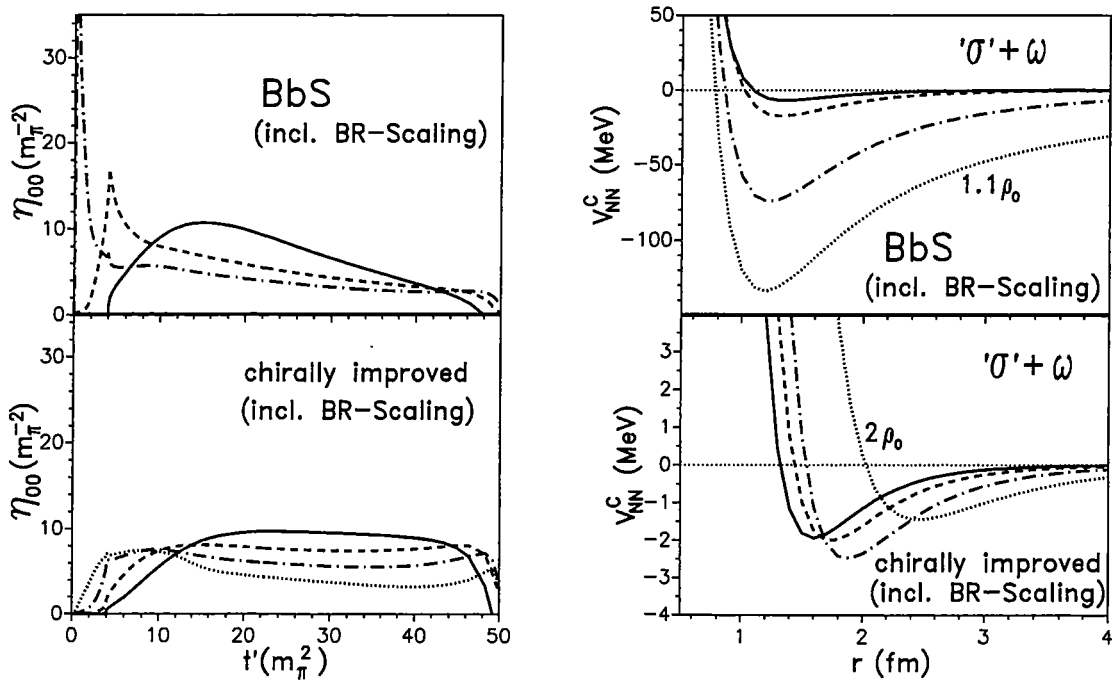


Abbildung 3.4: In-Medium $N\bar{N}$ -Spektralfunktion im σ -Kanal und zugehöriges N - N -Zentralpotential (ergänzt mit ω -Austausch) unter Einbezug des Brown-Rho-Scaling; Kurvenidentifikation wie in Abb.3.3.

Dichte von $\rho_c^{\pi\pi} = 1.11\rho_0$ ein). Der Beitrag des σ -Kanals zum in-Medium N - N -Potential (rechter, oberer Graph in Abb. 3.4) ist daher sehr ähnlich zu dem in Abb. 3.3; die gleichzeitige Skalierung der ω -Masse in Glg. (3.14) verstärkt dagegen die Repulsion, so daß die Potentialmulden insgesamt etwas flacher geworden sind. Dennoch resultiert das Kondensationsverhalten der $\pi\pi$ -Wechselwirkung nach wie vor in einem starken Anstieg der Attraktion mit der Dichte, so daß auch hier ein Saturierungsverhalten von Kernmaterie schwierig einzurichten sein sollte.

Die Situation ändert sich entscheidend im Rahmen des chiral verbesserten Jülich-Modells. Die zusätzlichen $\pi\pi$ -Kontakt-Wechselwirkungen, deren Effekt sich durch die Reduktion von f_π und m_ρ noch verstärkt hat, verhindern in erhöhtem Maße die Ansammlung von Stärke im Bereich (und unterhalb) der 2-Pionschwelle in η_{00} (vgl. die linken, unteren Graphen in den Abbn. 3.3 und 3.4). Andererseits läßt ihr Einfluß für $t' \geq 4m_\pi^2$ schnell nach, so daß die stärkere Gewichtung des t-Kanal ρ -Austausches mit wachsender Dichte zur Ausbildung einer Maximumstruktur bei $t' \simeq 10m_\pi^2$ führt. Im zentralen Nukleon-Nukleon Potential (rechter, unterer Graph in Abb. 3.4) kommt es so zu einer Ausbalancierung der Beiträge von korreliertem, s-Wellen 2π -Austausch und ω -Austausch. Mit steigender Dichte wandert das Minimum zu größeren Abständen und erreicht für $V_{NN}^C(\rho=1.3\rho_0, r=2\text{fm}) = -2.7$ MeV seinen Minimalwert. Tatsächlich spiegelt dieses Verhalten in guter Näherung die vom BR-Scaling geforderte Skalierung der Masse m_σ eines effektiven ' σ '-Mesons wider: ersetzt man den korrelierten 2π -Austausch durch ein scharfes ' σ '-Meson der Masse m_σ analog zu Glg. (3.14) (wie z.B. in älteren Versionen des Bonn-Potentials [1]) und skaliert dann m_σ gemäß Glg. (3.19), so ergibt sich eine Dichteabhängigkeit von $V_{NN}^C(r)$, die in guter Übereinstimmung mit dem unteren rechten Graphen in Abb. 3.4 ist (wie von Durso *et al.* in Ref. [63] gezeigt); d.h. also, daß die Anwendung des BR-Scaling im chiral verbesserten Jülich-Modell in nicht-trivialer Weise das entsprechende Skalenverhalten für das (dynamisch generierte) ' σ '-Meson liefert.

Ein so beschaffenes in-Medium Verhalten des N - N -Potentials sollte mit einem Saturierungsmechanismus für Kernmaterie vereinbar sein, ähnlich wie es im Rahmen des relativistischen σ - ω - (Walecka-) Modells der Fall ist [77]. In einem realistischen mikroskopischen Modell sind natürlich noch weitere Beiträge und deren Medium-Modifikationen zu berücksichtigen, z.B. $\rho(770)$ - und π -Austausch oder auch 3-Körperkräfte. Es bleibt somit die Aufgabe einer mikroskopischen Vielkörpertheorie, unter Anwendung Medium-modifizierter Mesonaustauschpotentiale eine quantitative Reproduktion der Grundzustandseigenschaften von Kernmaterie zu erzielen. Diesbzgl. wurden in den vergangenen Jahren mit den sogenannten (relativistischen) Dirac-Brueckner-Hartree-Fock Rechnungen beachtliche Erfolge erzielt [2]. Diese basieren zumeist auf realistischen N - N -Wechselwirkungen, wobei jedoch die dort eingehenden mesonischen Freiheitsgrade in der Regel in ihrer Vakuumform belassen werden, was zunächst nicht gerechtfertigt erscheint. Andererseits besteht die Möglichkeit, daß eine detaillierte Analyse von Medium-Effekten im N - N -Potential (und in evtl. einzubeziehenden 3-Körperkräften) zu einer Kompensation der unterschiedlichen, für sich allein großen Beiträge führt, wie wir es z.B. am soeben untersuchten Fall von s-Wellen korreliertem 2π - (' σ '-) und ω -Austausch gesehen haben. Das so gewonnene tiefere Verständnis der in-Medium Dynamik von Kernmaterie könnte so zu einer nachträglichen Rechtfertigung des 'Einfrierens' der mesonischen Freiheitsgrade dienen.

Kapitel 4

Pion-Wechselwirkungen im heißen Piongas

4.1 Einführung

Ultrarelativistische Schwerionenstoßexperimente an den zukünftigen Collider-Maschinen RHIC (im Bau befindlicher 'Relativistic Heavy-Ion Collider' am Brookhaven National Laboratory (BNL)) und LHC ('Large Hadron Collider', in Planung am CERN) werden die in laufenden 'fixed target' Experimenten (z.B. BNL-AGS oder CERN-SpS) erreichten *CMS*-Energien um ca. eine Größenordnung übertreffen: die höchsten derzeit verfügbaren Energien liegen bei $E_{lab}=200$ GeV/N am CERN-SpS; das entspricht einer *CMS*-Energie von $E_{cms}^{SpS} = \frac{1}{2}\sqrt{s} \simeq \frac{1}{2}\sqrt{2E_{lab}M_N}=10$ GeV/u im Vergleich zu $E_{cms}^{RHIC}=100$ GeV/u in Kollisionen von auf jeweils 100 GeV/u beschleunigten Schwerionen am RHIC. Man erwartet daher, daß sich unter RHIC-Bedingungen die in zentralen Stößen kollidierenden Atomkerne im wesentlichen penetrieren und so eine hochangeregte mittlere Zone mit verschwindender Baryondichte hinterlassen. Nach der Hadronisierung wird diese Zone dann von mehreren tausend Pionen dominiert. Ein Verständnis der Vielteilchen-Eigenschaften dieses heißen Piongases ist somit eine wichtige Voraussetzung, um – aus experimenteller Sicht – zu einer Identifikation von Signaturen eines in der frühen Kollisionsphase möglicherweise formierten Quark-Gluon-Plasmas zu gelangen.

Ein offensichtliches Problem bei der theoretischen Beschreibung dieser sehr komplexen, hochenergetischen Reaktionen besteht in der Frage, ob das Konzept einer Temperatur sinnvoll ist. Die Größe des hadronischen Systems (bzw. die Anzahl der produzierten Hadronen) legt einen thermodynamischen Zugang nahe, aber kommt es auch zur Ausbildung eines (zumindest annähernden bzw. lokalen) thermischen Gleichgewichts? Dazu folgende Abschätzung: in zentralen ^{16}O -Au-Stößen bei $E_{lab}(^{16}\text{O})=200$ GeV/u am CERN-SpS werden ca. $N_\pi=400$ Pionen im Endzustand beobachtet. Ein typischer Wert von $R_{fo} \simeq 6-8$ fm für den 'Freezeout'-Radius des pionischen 'Feuerballs' liefert eine Freezeout-Dichte von $n_\pi \simeq 0.2-0.4$ fm $^{-3}$; bei einem gemittelten $\pi\pi$ -Wirkungsquerschnitt von $\langle \sigma_{\pi\pi} \rangle = 15$ mb ergibt sich eine mittlere freie Weglänge von $\lambda_\pi \simeq 1/(\langle \sigma_{\pi\pi} \rangle n_\pi) = 1.5-3.5$ fm, so daß die durchschnittliche Anzahl von Kollisionen pro Pion ungefähr 3 beträgt. Die Etablierung eines thermischen Gleichgewichts erscheint also realistisch, insbesondere bei den noch sehr

viel größeren Pionsystemen, die unter RHIC-Bedingungen zu erwarten sind.

Durch rein empirische Anpassungen von (Gleichgewichts-) Bose- bzw. Fermiverteilungen an experimentelle Transversalimpulsspektren geladener Hadronen können 'effektive' Temperaturen für den Freezeout-Zeitpunkt des hadronischen Feuerballs extrahiert werden (eine andere Methode besteht in der Analyse von relativen Häufigkeiten der produzierten Sekundärteilchen [78]). Typische Werte für zentrale S-Au(W,Pb)-Kollisionen bei CERN-SpS Energien liegen bei $T_{fo}=150-170 \text{ MeV} \approx m_\pi$. Es stellt sich daher die Frage, inwieweit ein umgebendes Piongas die Wechselwirkung zweier Pionen beeinflusst. In quantitativer Hinsicht ist die Kenntnis der vollen Dynamik der in-Medium¹ $\pi\pi$ -Wechselwirkung z.B. eine wichtige Voraussetzung, um bei der numerischen Simulation von URHIC's mit Hilfe einer bosonischen Boltzmann-Gleichung Rückschlüsse auf die Experimente ziehen zu können [29]. Diese ist eine Integro-Differential-Gleichung in der (Pion-) Phasenraumdichte $f_1 \equiv f(\vec{r}, \vec{p}_1, t)$ von der Gestalt

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\vec{p}_1}{m} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f_1 - \vec{\nabla}_{\vec{r}} U \vec{\nabla}_{\vec{p}_1} f_1 = I_{coll}[f_1] . \quad (4.1)$$

Das 2-Teilchen-Kollisionsintegral,

$$I_{coll}[f_1] \propto \int d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 \delta^{(4)}(p_1^{(4)} + p_2^{(4)} - p_3^{(4)} - p_4^{(4)}) \frac{d\sigma_{12 \rightarrow 34}}{d\Omega} (f_1 f_2 \bar{f}_3 \bar{f}_4 - f_3 f_4 \bar{f}_1 \bar{f}_2) \quad (4.2)$$

mit $\bar{f}_i = 1 + f_i$, enthält die explizite Abhängigkeit vom in-Medium ($\pi\pi$ -) Wirkungsquerschnitt. Ein weiterer Medium-Effekt resultiert aus dem sogenannten 'Mean-Field'-Term, charakterisiert durch ein 'mittleres' 1-Teilchen-Potential $U = U(\vec{r})$, welches jedes einzelne Pion aufgrund der Wechselwirkung mit den umgebenden Gaspionen verspürt. Physikalisch ist dieser Effekt äquivalent zur Einführung einer Selbstenergie in den 1-Pionpropagator (vgl. z.B. Glg. (2.3)). Bei Vernachlässigung von 3- und Mehrteilchen-Wechselwirkungen kann die Pionselbstenergie im Piongas aus der $\pi\pi$ -Streuamplitude berechnet werden. Letztere hängt über den 1- bzw. 2-Pionpropagator wieder von der Pionselbstenergie ab, so daß sich ein Selbstkonsistenz-Problem vom Brueckner-Typ ergibt, in Analogie zu mikroskopischen Vielteilchen-Theorien für Kernmaterie, vgl. Abb. 4.1. In den Ref. [19, 79] wurde dieses Selbstkonsistenz-Problem für ein thermisches Piongas im Rahmen des Mesonaustauschbildes für die $\pi\pi$ -Wechselwirkung (numerisch) gelöst. Bei diesen Untersuchungen deutete sich jedoch an, daß die für den 1-Pionpropagator vorgenommene Quasiteilchennäherung (QPA) ab Temperaturen $T \geq m_\pi$ unzuverlässig werden könnte. Ein wichtiger Aspekt des vorliegenden Kapitels besteht daher darin, die Zuverlässigkeit der QPA genauer zu untersuchen.

Im folgenden Abschnitt leiten wir im Rahmen des Matsubara-Formalismus exakte, modelunabhängige Ausdrücke für die Pionselbstenergie und den unkorrelierten 2-Pionpropagator bei endlicher Temperatur ab. Zur Berechnung der durch den 2-Pionpropagator induzierten Medium-Modifikationen der $\pi\pi$ -Wechselwirkung ziehen wir wieder das in den vorangegangenen Kapiteln verwendete Mesonaustauschmodell heran. Dieses erweist sich für unsere Zwecke insofern als geeignet, daß es einerseits den Einschluß von Medium-Effekten auf mikroskopischer Basis zuläßt und andererseits eine konsistente Beschreibung

¹mit 'Medium' beziehen wir uns in den Kapiteln 4 und 5 stets auf ein heißes Piongas

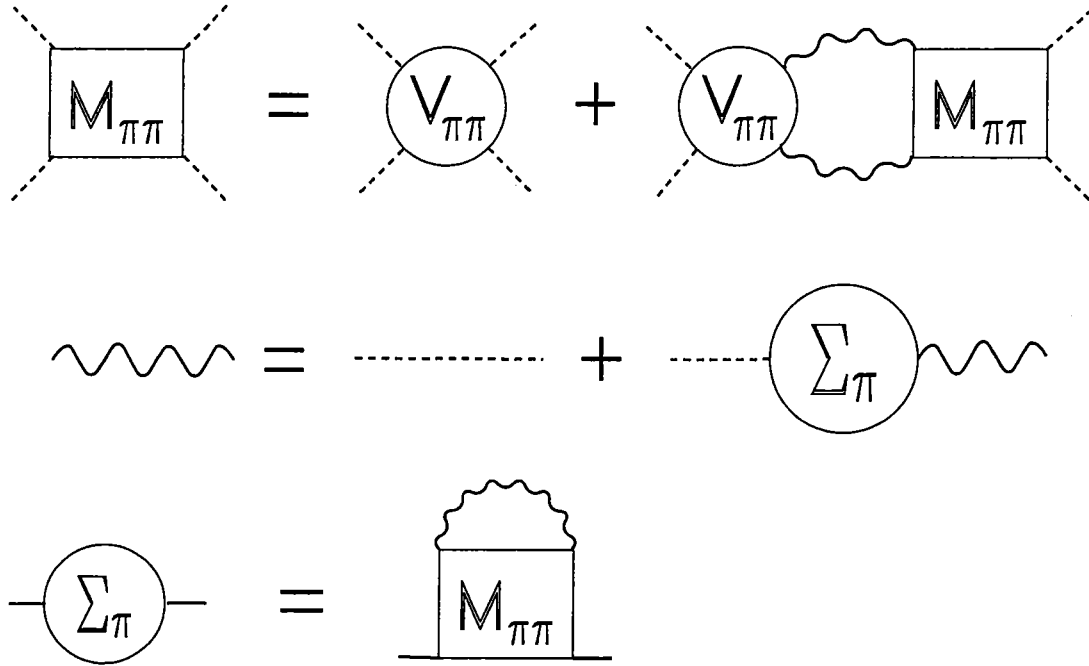


Abbildung 4.1: *Brueckner-Theorie im heißen Piongas; oberer Graph: in-Medium Streugleichung, mittlerer Graph: Dyson-Gleichung für den 1-Pionpropagator, unterer Graph: Pionselbstenergie; gestrichelte Linien charakterisieren freie Pionen, geschlängelte die in-Medium Propagation eines Pions.*

der $\pi\pi$ -Wechselwirkung in höheren Partialwellen liefert. Letzteres ermöglicht eine realistische Berechnung der Pionselbstenergie, zu der alle Partialwellen bis $J < 3$ signifikant beitragen [79]. In Abschnitt 4.3.1 zeigen wir zunächst, wie die aus einer effektiven Streugleichung hervorgehende $\pi\pi$ -Amplitude zur Berechnung der Pionselbstenergie verwendet werden kann und welche Näherungen wir dazu einführen. In Abschnitt 4.3.2 diskutieren wir die numerischen Resultate für Pionselbstenergie und in-Medium 2-Pionpropagator in 'unterster' Ordnung (d.h. unter Benutzung der freien $M_{\pi\pi}$ -Amplitude), wobei wir insbesondere den Einfluß von in bisherigen Arbeiten [17, 18, 19, 20] nicht berücksichtigten Beiträgen untersuchen. In Abschnitt 4.3.3 lösen wir das Piongas-Brueckner-Problem in *selbstkonsistenter* Form durch numerische Iteration unter voller Berücksichtigung der off-shell Dynamik der 1- und 2-Pionpropagation. Die so erzielten Resultate vergleichen wir dann mit verschiedenen Approximationsstufen der QPA.

In Kapitel 2 haben wir gesehen, daß ein realistisches sub-Schwellenverhalten der $\pi\pi$ -Wechselwirkung ein (effektiv) chirales symmetrisches $\pi\pi$ -Modell erfordert. Im Rahmen unserer 'exakten' off-shell Rechnungen bietet es sich daher an, den Einfluß der chiralen Symmetrie auf den Niederenergiebereich der $\pi\pi$ -Wechselwirkung auch im heißen Piongas zu studieren. Dazu werden wir wieder das 'chiral verbesserte' Modell aus Abschnitt 2.6 her-

anziehen. In diesem Zusammenhang diskutieren wir auch kurz ein Szenario, bei dem sich das Brown-Rho'sche Skalenverhalten (von m_ρ, f_π etc.) als Folge der chiralen Restauration bei endlicher *Temperatur* einstellt. Abschließend verwenden wir unsere Resultate noch zur Berechnung von mittleren freien Weglängen und gehen auf die damit verbundene Frage nach den Freezeout-Bedingungen eines thermischen Piongases ein.

4.2 Thermodynamischer Greensfunktionen-Formalismus im heißen Piongas

Zur Berechnung der 1- und 2-Pioneigenschaften bei endlicher Temperatur charakterisierenden Größen verwenden wir die thermodynamische Greensfunktionen-Methode, wie z.B. in den Ref. [80, 39, 81] geschildert. Die zentrale Größe ist der thermische (retardierte) 1-Pionpropagator, der aus der Lösung der Dyson-Gleichung hervorgeht als

$$\begin{aligned} D_\pi^T(\omega_+, k) &= D_\pi^0(\omega_+, k) + D_\pi^0(\omega_+, k) \Sigma_\pi(\omega_+, k; T) D_\pi^T(\omega_+, k) \\ &= \left[(\omega_+)^2 - \omega_k^2 - \Sigma_\pi(\omega_+, k; T) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

mit $\omega_+ \equiv \omega + i\eta$ (η infinitesimal), $\omega_k^2 = m_\pi^2 + k^2$ und dem freien 1-Pionpropagator $D_\pi^0(\omega_+, k) = [(\omega_+)^2 - \omega_k^2]^{-1}$. Die zugehörige Pionspektralfunktion ist definiert als die Unstetigkeit ('Cut') des Pionpropagators auf der reellen Energieachse:

$$\begin{aligned} A_\pi^T(\omega, k) &\equiv i[D_\pi^T(\omega_+, k) - D_\pi^T(\omega_-, k)] \\ &= -2 \operatorname{Im} D_\pi^T(\omega_+, k). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Daraus ergibt sich die Spektraldarstellung des Pionpropagators zu

$$D_\pi^T(\omega_+, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{A_\pi^T(\omega', k)}{\omega_+ - \omega'}. \quad (4.5)$$

Eine wichtige Eigenschaft der (exakten) Pionspektralfunktion ist die Erfüllung der Energiegewichteten Summenregel (bei festem Impuls k):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega A_\pi^T(\omega) = 1. \quad (4.6)$$

Die in praktischen Rechnungen in der Regel erforderlichen Näherungen an den 1-Pionpropagator sollten diese Beziehung nach Möglichkeit nicht verletzen, d.h. Glg. (4.6) kann z.B. als Kriterium für die Konsistenz von Näherungen benutzt werden.

Die entscheidende Größe zur Berechnung des in-Medium 1-Pionpropagators ist die Pion-selbstenergie $\Sigma_\pi(\omega_+, k; T)$, die wir im folgenden Abschnitt ableiten.

4.2.1 Pion-selbstenergie bei endlicher Temperatur

In einem hinreichend verdünnten Piongas sind die dominanten Beiträge zur Selbstenergie eines propagierenden Pions durch 2-Teilchen-Wechselwirkungen mit den umgebenden

Medium-Pionen gegeben. Dazu folgende Abschätzung: die Dichte eines freien Piongases beträgt

$$n_\pi^0(\mu_\pi, T) = g_\pi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f^\pi(\omega_k; \mu_\pi, T) \quad (4.7)$$

mit $g_\pi=3$ (Spin-Isospin-Entartungsfaktor für Pionen) und der Pion-Boseverteilung

$$f^\pi(\omega_k; \mu_\pi, T) = (\exp[(\omega_k - \mu_\pi)/T] - 1)^{-1} . \quad (4.8)$$

Für die von uns betrachteten Maximaltemperaturen von $T=200$ MeV ergibt sich im chemischen Gleichgewicht $n_\pi^0(\mu_\pi = 0, T = 200 \text{ MeV}) = 0.32 \text{ fm}^{-3}$, d.h. die Pionen sind bei einem mittleren Abstand von $d_{mean} \simeq (n_\pi^0)^{(-1/3)} \simeq 1.5 \text{ fm}$ noch wohl-separiert, so daß 3- und Mehrteilchen-Wechselwirkungen relativ unwahrscheinlich erscheinen.

Die Anwendung von Impulsraum-Feynmanregeln im thermodynamischen Greensfunktionen-Formalismus (vgl. z.B. Kap. 7 in Ref. [39]) liefert für die Pion selbstenergie im Piongas

$$\Sigma_\pi(z_\nu, k; T) = (-T) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{\nu'=-\infty}^{+\infty} M_{\pi\pi}^T(z_\nu + z_{\nu'}, \vec{k}, \vec{p}) D_\pi^T(z_{\nu'}, \vec{p}) , \quad (4.9)$$

wobei $M_{\pi\pi}^T$ die thermodynamische $\pi\pi$ -Vorwärtsstreuamplitude bezeichnet, die wir in Abschnitt 4.3 berechnen werden. Anschaulich entspricht Glg. (4.9) dem Schließen von zwei externen Pionlinien der $M_{\pi\pi}^T$ -Amplitude, vgl. unteres Diadramm in Abb. 4.1. Die Summation erfolgt über alle (diskreten) Matsubara-Frequenzen

$$z_{\nu'} = i\omega_{\nu'} , \quad \omega_{\nu'} = 2\pi\nu'T \quad (4.10)$$

mit ganzzahligen ν' . Zur expliziten Auswertung der Matsubara-Summe setzen wir zunächst die Spektraldarstellungen für 1-Pionpropagator, Glg. (4.5), und $\pi\pi$ -Streuamplitude,

$$M_{\pi\pi}^T(z_\nu + z_{\nu'}, \vec{k}, \vec{p}) = - \int \frac{dE'}{\pi} \frac{\text{Im} M_{\pi\pi}^T(E'_+, \vec{k}, \vec{p})}{z_\nu + z_{\nu'} - E' + i\eta} , \quad (4.11)$$

in Glg. (4.9) ein:

$$\Sigma_\pi(z_\nu, k) = - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{dE'}{\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \text{Im} M_{\pi\pi}^T(E'_+, \vec{k}, \vec{p}) A_\pi^T(\omega'_+, p) (-T) \sum_{\nu'} \frac{1}{z_\nu + z_{\nu'} - E'} \frac{1}{z_{\nu'} - \omega'} . \quad (4.12)$$

Unter Benutzung von (siehe Anhang C)

$$(-T) \sum_{\nu'} \frac{1}{z_{\nu'} - \omega'} = f^\pi(\omega') \quad (4.13)$$

können wir die Matsubara-Summe in Glg. (4.12) ausführen:

$$\begin{aligned} (-T) \sum_{\nu'} \frac{1}{z_\nu + z_{\nu'} - E'} \frac{1}{z_{\nu'} - \omega'} &= \frac{-T}{z_\nu + \omega' - E'} \sum_{\nu'} \left(\frac{1}{z_{\nu'} - \omega'} - \frac{1}{z_\nu + z_{\nu'} - E'} \right) \\ &= \frac{f^\pi(\omega') - f^\pi(E')}{z_\nu + \omega' - E'} . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nach analytischer Fortsetzung auf die reelle Achse erhält man

$$\Sigma_\pi(\omega, k; T) = - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{dE'}{\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \text{Im} M_{\pi\pi}^T(E'_+, \vec{k}, \vec{p}) A_\pi^T(\omega'_+, p) \frac{f^\pi(\omega') - f^\pi(E')}{\omega_+ + \omega' - E'}. \quad (4.15)$$

Für $\omega' \rightarrow 0$ bzw. $E' \rightarrow 0$ werden die Pole in den Boseverteilungen durch das gleichzeitige Verschwinden der Spektralfunktion bzw. $\text{Im} M_{\pi\pi}(E')$ kompensiert. Der Imaginärteil der Selbstenergie resultiert aus dem δ -Funktionsanteil von $1/(\omega_+ + \omega' - E')$, der eine triviale Ausführung der E' -Integration ermöglicht. Der positive Anteil der ω' -Integration führt dann auf den Standard-Beitrag, der üblicherweise in der Literatur verwendet wird [17, 18, 19, 20]; wir bezeichnen ihn mit dem Superscript A:

$$\text{Im} \Sigma_\pi^A(\omega_+, k; T) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \text{Im} M_{\pi\pi}^T(\omega_+ + \omega', \vec{k}, \vec{p}) A_\pi^T(\omega', p) [f^\pi(\omega') - f^\pi(\omega + \omega')]. \quad (4.16)$$

Man beachte, daß auch der Matsubara-Formalismus den 'Korrektur'-Term $f^\pi(\omega + \omega')$ liefert, wie er von Chanfray und Davesne [20] bereits im Realzeit-Formalismus gefunden wurde. Im Gegensatz zu dem durch $f^\pi(\omega')$ charakterisierten absorptiven Prozeß für das propagierende Pion beschreibt der $f^\pi(\omega + \omega')$ -Term die durch Wechselwirkungen der Gas-pionen ermöglichte 'Emission' eines Pions mit Energie-Impuls (ω, k) .

Der negative Energieanteil der ω' -Integration in Glg. (4.15) kann unter Ausnutzung der analytischen Eigenschaften von Spektralfunktion und $M_{\pi\pi}$ -Amplitude umgeschrieben werden in

$$\begin{aligned} \text{Im} \Sigma_\pi^B(\omega_+, k; T) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \text{Im} M_{\pi\pi}^T(|\omega - \omega'|_+, \vec{k}, \vec{p}) A_\pi^T(\omega', p) \\ &\quad \times [\text{sgn}(\omega - \omega') f^\pi(\omega') - f^\pi(|\omega - \omega'|)] \end{aligned} \quad (4.17)$$

mit $\text{sgn}(\omega - \omega') = \pm 1$ entsprechend $\omega - \omega' > 0$ oder < 0 . Die bei negativen ω' auftretende '1' in

$$f^\pi(-\omega') = -1 - f^\pi(\omega') \quad (4.18)$$

muß dabei entfernt werden, da der daraus entstehende Beitrag im Limes $T \rightarrow 0$ nicht verschwindet; die Selbstenergie ist jedoch als reiner Medium- (Temperatur-) Effekt konzipiert, so daß per definitionem alle im freien Fall beitragenden Terme zu subtrahieren sind. Man beachte, daß beide Terme, $\text{Im} \Sigma_\pi^A$ und $\text{Im} \Sigma_\pi^B$, erforderlich sind, um das korrekte analytische Verhalten der Selbstenergie,

$$\text{Im} \Sigma_\pi(-\omega + i\eta) = -\text{Im} \Sigma_\pi(\omega + i\eta), \quad (4.19)$$

zu garantieren.

Um ein besseres Verständnis für die Struktur des 'B'-Anteils zu gewinnen, ersetzen wir für den Moment die thermische Spektralfunktion und die $M_{\pi\pi}$ -Amplitude in Glgn. (4.16) und (4.17) durch ihre Vakuumform, d.h.

$$A_\pi^0(\omega', k) = \frac{\pi}{\omega_p} [\delta(\omega' - \omega_p) - \delta(\omega' + \omega_p)]. \quad (4.20)$$

Da $ImM_{\pi\pi}^0(\omega + \omega') \neq 0$ nur für $\omega + \omega' > 2m_\pi$, ist in diesem Fall $Im\Sigma_\pi^A(\omega, k) \neq 0$, falls $\omega > m_\pi$, d.h. für on-shell Pionen. Dagegen ist $Im\Sigma_\pi^B(\omega, k) \neq 0$ nur für $\omega > 3m_\pi$, repräsentiert also den Effekt 'thermischer Anregungen'.

Den Realteil der Selbstenergie berechnen wir mittels einer Dispersionsrelation, welche den Wert von $Re\Sigma_\pi$ jedoch nur bis auf eine Konstante festlegt. Wir führen eine Subtraktion bei $\omega = 0$ durch:

$$\begin{aligned} Re\Sigma_\pi(\omega, k) &= -\mathcal{P} \int \frac{d\omega'}{\pi} \frac{Im\Sigma_\pi(\omega'_+, k)}{\omega - \omega'} - Re\Sigma_\pi(0, k) \\ &= -\mathcal{P} \int \frac{d\omega'^2}{\pi} \frac{Im\Sigma_\pi(\omega'_+, k)}{\omega^2 - \omega'^2} \frac{\omega^2}{\omega'^2}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ohne die Subtraktionsvorschrift erhält man unrealistisch große Werte für $Re\Sigma_\pi$, was durch ein schwaches Konvergenzverhalten von $Im\Sigma_\pi(\omega)$, d.h. letztendlich von $ImM_{\pi\pi}(\omega + \omega')$, für große ω' verursacht wird. Die Subtraktion bei $\omega = 0$ beschleunigt die Konvergenz des Dispersionsintegrals und unterdrückt so große Beiträge von hohen Energien, bei denen das Mesonaustauschbild, welches wir zur Berechnung von $M_{\pi\pi}$ heranziehen werden, seine Gültigkeit verliert. Um die Subtraktionsprozedur darüber hinaus numerisch zu überprüfen, führen wir folgende Testrechnung durch: wir approximieren in Glg. (4.15) $f^\pi(E') \simeq f^\pi(\omega + \omega')$, was auf der Annahme beruht, daß die dominanten Beiträge im zweiten Term des Hauptwert-Integrals über E' aus einem relativ kleinen Bereich um den Pol $E' = \omega + \omega'$ herum herrühren. Wir können dann den Realteil der Spektraldarstellung (4.11) zurückeinsetzen, so daß sich der Realteil von Σ_π in analoger Form zum Imaginärteil schreiben läßt als

$$Re\Sigma_\pi(\omega, k; T) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega'}{2\pi} ReM_{\pi\pi}^T(\omega + \omega', \vec{k}, \vec{p}) A_\pi^T(\omega', p) [f^\pi(\omega') - f^\pi(\omega + \omega')]. \quad (4.22)$$

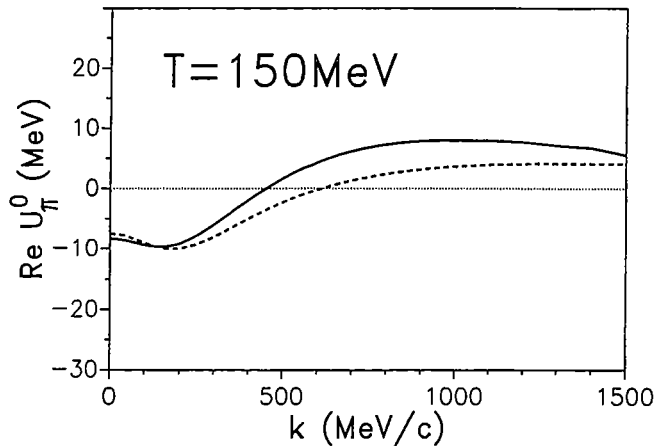


Abbildung 4.2: Vergleich der zwei Berechnungsweisen des Realteils des 1-Pionpotentials im heißen Piongas ($T=150$ MeV); durchgezogene Linie: mit subtrahierter Dispersionsrelation aus $Im\Sigma_\pi$, gestrichelte Linie: approximativ mittels Glg. (4.22).

Unter Benutzung der Vakuum-Pionspektralfunktion A_π^0 und der freien $M_{\pi\pi}$ -Amplitude aus dem Lohse/Pearce $\pi\pi$ -Modell berechnen wir $Re\Sigma_\pi$ sowohl aus Glg. (4.21) als auch aus Glg. (4.22). In Abb. 4.2 sind die resultierenden 'on-shell' Pionpotentiale, gegeben durch

$$ReU_\pi(\omega_k, k) = \frac{Re\Sigma_\pi(\omega_k, k)}{2\omega_k}, \quad (4.23)$$

aufgetragen (siehe Glg. (4.54) für deren Definition). Für kleine Pionenergien stimmen beide Resultate gut überein. Bei höheren Energien treten zwar größere Diskrepanzen auf, die aber relativ zur Pionenergie kaum signifikant sind: für $k \geq 400$ MeV/c beträgt die durch ReU_π hervorgerufene (relative) Änderung der on-shell Energie nur noch

$$\frac{ReU_\pi}{\omega_k} \approx 1-2\%. \quad (4.24)$$

4.2.2 Unkorrelierter 2-Pionpropagator bei endlicher Temperatur

Für die Berechnung der Streuamplitude $M_{\pi\pi}^T$ zweier Pionen innerhalb eines heißen Pionengases im Rahmen der BbS-Streugleichung (2.1) benötigen wir den in-Medium Zwischenzustandspropagator $G_{\pi\pi}^T$ zweier nicht-wechselwirkender Pionen. In Matsubara-Darstellung ist dieser gegeben durch [82]

$$G_{\pi\pi}^T(\Omega_\lambda, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = (-T) \sum_{z_\nu} D_\pi^T(z_\nu, \vec{k}_1) D_\pi^T(\Omega_\lambda - z_\nu, \vec{k}_2) \quad (4.25)$$

mit den 1-Pionimpulsen $\vec{k}_1, \vec{k}_2$ und den 1- bzw. 2-Pion-Matsubara-Frequenzen z_ν bzw. Ω_λ . Einsetzen der Spektraldarstellung für die 1-Pionpropagatoren liefert

$$G_{\pi\pi}^T(\Omega_\lambda, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = -T \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi} A_\pi^T(\omega, \vec{k}_1) A_\pi^T(\omega', \vec{k}_2) \sum_\nu \frac{1}{z_\nu - \omega} \frac{1}{\Omega_\lambda - z_\nu - \omega'}. \quad (4.26)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} (-T) \sum_\nu \frac{1}{z_\nu - \omega} \frac{1}{\Omega_\lambda - z_\nu - \omega'} &= \frac{(-T)}{\Omega_\lambda - \omega - \omega'} \sum_\nu \left[\frac{1}{z_\nu - \omega} - \frac{1}{z_\nu - \Omega_\lambda + \omega'} \right] \\ &= \frac{1}{\Omega_\lambda - \omega - \omega'} [f^\pi(\omega) - f^\pi(-\omega')] \\ &= \frac{1 + f^\pi(\omega) + f^\pi(\omega')}{\Omega_\lambda - \omega - \omega'}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Im Kontext des thermischen 2-Pionpropagators ist der durch die '1' im Bosefaktor generierte Temperatur-unabhängige Beitrag zu $G_{\pi\pi}^T$ nicht zu entfernen, da $G_{\pi\pi}^T$ für $T \rightarrow 0$ nicht verschwindet, d.h. die '1' repräsentiert gerade den Vakuum 2-Pionpropagator. Nach analytischer Fortsetzung auf die reelle Achse erhalten wir:

$$G_{\pi\pi}^T(E_+, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi} A_\pi^T(\omega, \vec{k}_1) A_\pi^T(\omega', \vec{k}_2) \frac{1 + f^\pi(\omega) + f^\pi(\omega')}{E_+ - \omega - \omega'}. \quad (4.28)$$

Für die in Abschnitt 4.3 folgenden numerischen Rechnungen ist es günstig, zunächst wieder den Imaginärteil zu berechnen. Wir nehmen dabei gleichzeitig eine Zerlegung bzgl. der positiven und negativen Bereiche der ω - und ω' -Integrationen vor, die es uns erlaubt, eine genauere Identifikation der verschiedenen Beiträge vorzunehmen; wir beschränken uns auf 2-Pionenergien $E > 0$ (was der für die Berechnung der $\pi\pi$ -Streuamplitude relevante Fall ist):

A) Für $\omega, \omega' \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
ImG_{\pi\pi}^{T,A}(E_+, \vec{k}_1, \vec{k}_2) &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} A_\pi^T(\omega, \vec{k}_1) A_\pi^T(\omega', \vec{k}_2) [1 + f^\pi(\omega) + f^\pi(\omega')] \\
&\quad \times (-\pi) \delta(E - \omega - \omega') \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} A_\pi^T(\omega, \vec{k}_1) A_\pi^T(E - \omega, \vec{k}_2) [1 + f^\pi(\omega) + f^\pi(E - \omega)] \\
&\quad \times \Theta(E - \omega) \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^E \frac{d\omega}{2\pi} A_\pi^T(\omega, \vec{k}_1) A_\pi^T(E - \omega, \vec{k}_2) [1 + f^\pi(\omega) + f^\pi(E - \omega)] .
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Im Limes $T \rightarrow 0$ und in 'back-to-back' Kinematik, d.h. für $\vec{k} \equiv \vec{k}_1 = -\vec{k}_2$, reproduziert Beitrag A genau den Imaginärteil des freien BbS-Propagators, Glg. (2.16) (vgl. auch Glg. (2.21));

B) für $\omega \geq 0, \omega' \leq 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
ImG_{\pi\pi}^{T,B_1}(E_+, \vec{k}_1, \vec{k}_2) &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{d\omega'}{2\pi} A_\pi^T(\omega, \vec{k}_1) A_\pi^T(\omega', \vec{k}_2) [1 + f^\pi(\omega) + f^\pi(\omega')] \\
&\quad \times (-\pi) \delta(E - \omega - \omega') \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} A_\pi^T(\omega, \vec{k}_1) A_\pi^T(\omega - E, \vec{k}_2) \\
&\quad \times [1 + f^\pi(\omega) - 1 - f^\pi(\omega - E)] \Theta(\omega - E) \\
&= -\frac{1}{2} \int_E^\infty \frac{d\omega}{2\pi} A_\pi^T(\omega, \vec{k}_1) A_\pi^T(\omega - E, \vec{k}_2) \\
&\quad \times [1 + f^\pi(\omega) + f^\pi(\omega - E)] .
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Da der Integrand in Glg. (4.28) symmetrisch bzgl. des Austausches $\omega \leftrightarrow \omega'$ ist, liefert der Bereich $\omega \leq 0, \omega' \geq 0$ das gleiche Resultat, so daß

$$ImG_{\pi\pi}^{T,B}(E_+, \vec{k}_1, \vec{k}_2) \equiv -\int_E^\infty \frac{d\omega}{2\pi} A_\pi^T(\omega, \vec{k}_1) A_\pi^T(\omega - E, \vec{k}_2) [1 + f^\pi(\omega) + f^\pi(\omega - E)] . \tag{4.31}$$

In Analogie zu $Im\Sigma_\pi^B$ aus Glg. (4.17) repräsentiert $ImG_{\pi\pi}^{T,B}$ den Effekt thermischer Anregungen, der für $T \rightarrow 0$ verschwindet;

C) für $\omega, \omega' \leq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{Im} G_{\pi\pi}^{T,C}(E_+, \vec{k}_1, \vec{k}_2) &= \int_{-\infty}^0 \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{d\omega'}{2\pi} A_{\pi}^T(\omega, \vec{k}_1) A_{\pi}^T(\omega', \vec{k}_2) [1 + f^{\pi}(\omega) + f^{\pi}(\omega')] \\ &\quad \times (-\pi) \delta(E - \omega - \omega') \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

solange $E > 0$.

Falls $E < 0$, verschwindet Beitrag A, Beitrag C nimmt den negativen Wert der rechten Seite von Glg. (4.29) an und Beitrag B wechselt das Vorzeichen, so daß

$$\begin{aligned} \text{Im} G_{\pi\pi}^T(E_+, \vec{k}_1, \vec{k}_2) &= \text{Im} G_{\pi\pi}^{T,A}(E_+, \vec{k}_1, \vec{k}_2) + \text{Im} G_{\pi\pi}^{T,B}(E_+, \vec{k}_1, \vec{k}_2) \\ &= -\text{Im} G_{\pi\pi}^T((-E)_+, \vec{k}_1, \vec{k}_2), \end{aligned} \quad (4.33)$$

d.h. die 2-Pionspektralfunktion hat die korrekte analytische Eigenschaft.

Den Realteil von $G_{\pi\pi}^T$ ermitteln wir wieder mittels einer Dispersionsrelation (vgl. auch Glg. (2.22)):

$$\text{Re} G_{\pi\pi}^T(E, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = -\mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{dE'^2}{\pi} \frac{\text{Im} G_{\pi\pi}^T(E', \vec{k}_1, \vec{k}_2)}{E^2 - E'^2}. \quad (4.34)$$

4.3 Selbstkonsistenz und numerische Resultate im Mesonaustauschbild

4.3.1 Transformation der $M_{\pi\pi}$ -Amplitude, Näherungen

Die Berechnung der Pionselbstenergie erfordert die Kenntnis der Vorwärtsstreuamplitude $M_{\pi\pi}$. In einem vorgegebenen Isospinkanal I ist diese über eine Partialwellenzerlegung gegeben durch

$$M_{\pi\pi}^I(E, q, q', \cos \theta = 1) = \frac{1}{2} \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) M_{\pi\pi}^{JI}(E, q, q') P_J(\cos \theta = 1) \quad (4.35)$$

mit $P_J(\cos \theta = 1) = 1$ für beliebiges J . Nach Mittelung über die Isospins,

$$M_{\pi\pi} = \frac{1}{3} (M_{\pi\pi}^{I=0} + 3M_{\pi\pi}^{I=1} + 5M_{\pi\pi}^{I=2}), \quad (4.36)$$

erhält man so

$$M_{\pi\pi}(E, q, q') = \frac{1}{6} \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{I=0}^2 (2J+1)(2I+1) M_{\pi\pi}^{JI}(E, q, q'). \quad (4.37)$$

Die $M_{\pi\pi}^{JI}$ verschaffen wir uns durch Lösung der Lippmann-Schwinger-Gleichung in einem festen Spin-Isospin-Kanal,

$$M_{\pi\pi}^{JI}(E, q, q') = V_{\pi\pi}^{JI}(E, q, q') + \int_0^{\infty} \frac{dk}{(2\pi)^2} k^2 V_{\pi\pi}^{JI}(E, q, k) G_{\pi\pi}^T(E, k) M_{\pi\pi}^{JI}(E, k, q'), \quad (4.38)$$

womit die Wechselwirkung zweier Pionen in ihrem Schwerpunktsystem (CMS) beschrieben wird. Im Vakuum sind die Werte der dimensionslosen ('invarianten') $M_{\pi\pi}$ -Amplitude unabhängig von der Wahl des Bezugssystems. Bei endlicher Temperatur ist die Lorentzinvarianz jedoch durch Festlegung eines thermischen Bezugssystems (in dem die Temperatur definiert ist) gebrochen. Die in die Berechnung der Pionselfstenergie, Gln. (4.16) und (4.17), eingehende Amplitude $ImM_{\pi\pi}^T(\omega_+ + \omega', \vec{k}, \vec{p})$ für die Vorwärtsstreuung eines propagierenden Pions mit Viererimpuls $k^{(4)} = (\omega, \vec{k})$ an einem Medium-Pion mit Viererimpuls $p^{(4)} = (\omega', \vec{p})$ nimmt somit nach der Transformation ins 2π - CMS eine Abhängigkeit vom Schwerpunktsimpuls $\vec{P} \equiv \vec{k} + \vec{p}$ der beiden Pionen an. Für verschwindendes chemisches Potential ($\mu_\pi = 0$) und im hier betrachteten Temperaturbereich ($T \leq 200$ MeV) ist diese Abhängigkeit relativ schwach; wir werden sie daher vernachlässigen (wie in Ref. [79] gezeigt, kann dies zu einer geringfügigen Überschätzung der Effekte führen). Für die Transformation der $M_{\pi\pi}$ -Amplitude ins CMS setzen wir also an:

$$M_{\pi\pi}(\omega_+ \pm \omega', \vec{k}, \vec{p}) = M_{\pi\pi}(\sqrt{s}, q_{cm}, q_{cm}) \quad (4.39)$$

mit der CMS -Energie

$$\begin{aligned} s &\equiv E^2 \\ &= (\omega \pm \omega')^2 - (\vec{k} + \vec{p})^2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Zur Berechnung des (off-shell) CMS -Impulses $q_{cm} = q_{cm}(\omega, \omega', k, p, \cos \alpha)$ mit $\alpha = \angle(\vec{k}, \vec{p})$, verlangen wir die Lorentzinvarianz der kinematischen Größen

$$\begin{aligned} u &= (\omega \mp \omega')^2 - (\vec{k} - \vec{p})^2 \\ &= (q_{01} - q_{02})^2 - 4\vec{q}_{cm}^2 \\ m_{inv,k}^2 &= \omega - \vec{k}^2 \\ &= q_{01}^2 - \vec{q}_{cm}^2 \\ m_{inv,p}^2 &= \omega' - \vec{p}^2 \\ &= q_{02}^2 - \vec{q}_{cm}^2, \end{aligned} \quad (4.41)$$

wobei die zweite Zeile jeder Gleichung die Werte im CMS angibt. Dieses Gleichungssystem in den Unbekannten q_{01} , q_{02} und q_{cm} lösen wir für q_{cm} mit dem Resultat

$$\vec{q}_{cm}^2 = \frac{1}{s} \left[\frac{1}{4}(s - m_{inv,k}^2 - m_{inv,p}^2)^2 - m_{inv,k}^2 m_{inv,p}^2 \right]. \quad (4.42)$$

Gln. (4.16) und (4.17) lassen sich nun explizit ausrechnen. Wir führen dazu noch die Variablentransformation

$$\begin{aligned} \cos \alpha &\rightarrow E \\ d \cos \alpha &= -\frac{ds}{2pk} = -\frac{EdE}{pk} \end{aligned} \quad (4.43)$$

durch und erhalten:

$$Im\Sigma_\pi^A(\omega_+, k) = \frac{1}{k} \int_0^\infty \frac{p dp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} A_\pi^T(\omega', p) [f^\pi(\omega') - f^\pi(\omega + \omega')] I^4$$

$$Im\Sigma_\pi^B(\omega_+, k) = \frac{1}{k} \int_0^\infty \frac{p dp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} A_\pi^T(\omega'_+, p) [\text{sgn}(\omega - \omega') f^\pi(\omega') + f^\pi(|\omega - \omega'|)] I^B \quad (4.44)$$

mit

$$I^{A/B} = \int_{E_{min}^{A/B}}^{E_{max}^{A/B}} dE E Im M_{\pi\pi}^T(E, q_{cm}, q_{cm}) , \quad (4.45)$$

wobei die oberen und unteren Grenzen,

$$\begin{aligned} E_{max}^{A/B} &= [(\omega \pm \omega')^2 - k^2 - p^2 + 2kp]^{1/2} \\ E_{min}^{A/B} &= [(\omega \pm \omega')^2 - k^2 - p^2 - 2kp]^{1/2} , \end{aligned} \quad (4.46)$$

zu $\cos \alpha = \pm 1$ gehören. Aus praktischen Gründen, d.h. zur Reduzierung des numerischen Rechenaufwands, nehmen wir folgende weitere Näherungen vor:

- Beschränkung der Partialwellensumme in Glg. (4.37) auf $J < 3$;
- Vernachlässigung negativer Werte für s und q_{cm}^2 , die im entsprechenden Fall auf Null gesetzt werden ;
- Abschneiden des Energieintervalls $I^{A/B}$ bei $E_{max}^{A/B} = 2 \text{ GeV}$;
- Vernachlässigung der Selbstenergie für Impulse $k > 4 \text{ GeV}/c$.

Bei allen vier Approximationen haben wir geprüft, daß sie keinen signifikanten Einfluß auf die Resultate ausüben.

In Konsistenz mit der Vernachlässigung der $\vec{P}$ -Abhängigkeit in der $M_{\pi\pi}$ -Amplitude können wir uns bei der Berechnung des thermischen 2-Pionpropagators ebenfalls auf back-to-back Kinematik beschränken, d.h. in Glgn. (4.29), (4.31), und (4.34) $\vec{k} \equiv \vec{k}_1 = -\vec{k}_2$ setzen.

4.3.2 Pionselfstenergie und 2-Pionpropagator in niedrigster Ordnung; thermische Anregungen

In diesem Abschnitt zeigen wir zunächst die (Zwischen-) Ergebnisse für Σ_π und $G_{\pi\pi}^T$ im ersten Iterationsschritt zur Lösung des vollen Selbstkonsistenz-Problems, d.h. unter Benutzung der freien $M_{\pi\pi}$ -Amplitude. Dazu setzen wir den freien 2-Pionpropagator sowie die Vakuum-Pseudopotentiale aus dem Lohse/Pearce-Modell in Glg. (4.38) ein. Mittels Glg. (4.37) und der Vakuum-Pionspektralfunktion, Glg. (4.20), berechnen wir dann $Im\Sigma_\pi$ aus den Glgn. (4.16), (4.17) und $Re\Sigma_\pi$ aus Glg. (4.21).

Zur anschaulicheren Darstellung definieren wir sogenannte 'optische' Pionpotentiale [17], in unterster Ordnung gegeben durch

$$U_\pi^0(k) = \frac{\Sigma_\pi(\omega_k, k)}{2\omega_k} . \quad (4.47)$$

Diese haben die Dimension [Energie] und können wegen

$$\begin{aligned} (\omega_k^*)^0 &= \sqrt{\omega_k^2 + \Sigma_\pi(\omega_k, k)} \\ &\simeq \omega_k + \frac{\Sigma_\pi(\omega_k, k)}{2\omega_k} \end{aligned} \quad (4.48)$$

als Modifikation durch ein im Piongas entstehendes 'mittleres' Feld aufgefaßt werden. Die U_π^0 zeigen die typische Resonanzstruktur bei $k \simeq 400$ -500 MeV (vgl. Abb. 4.3), hervorgerufen durch ρ -Resonanzformation des propagierenden Pions bei Kollisionen mit umgebenden Gaspionen. Die hohen Werte von $Im U_\pi^0$ bei niedrigen und hohen Impulsen sind im wesentlichen auf s- bzw. d-Wellen Wechselwirkung zurückzuführen. In unterster Ordnung und on-shell gibt es keine Beiträge thermischer Anregungen zu $Im U_\pi^0$, da $Im \Sigma_\pi^B(\omega_k, k)$ verschwindet wegen $E_{max}^B = [(\omega_k - \omega_p)^2 - k^2 - p^2 + 2pk]^{1/2} = [2m_\pi^2 - 2(\omega_k \omega_p - pk)]^{1/2} \leq 2m_\pi$ und $Im M_{\pi\pi}^0(E \leq 2m_\pi) = 0$, so daß $I^B = 0$, siehe Glgn. (4.45), (4.46). Da $Re \Sigma_\pi$ über eine Dispersionsrelation aus $Im \Sigma_\pi$ extrahiert wird, Glg. (4.21), treten nicht-verschwindende off-shell Beiträge von $Im \Sigma_\pi^B(\omega', k)$ zu $Re U_\pi^0(k)$ auf, die einen leichten Anstieg der Attraktion im on-shell Impulsbereich $0 \leq k \leq 1.5$ GeV/c zur Folge haben (vgl. durchgezogene

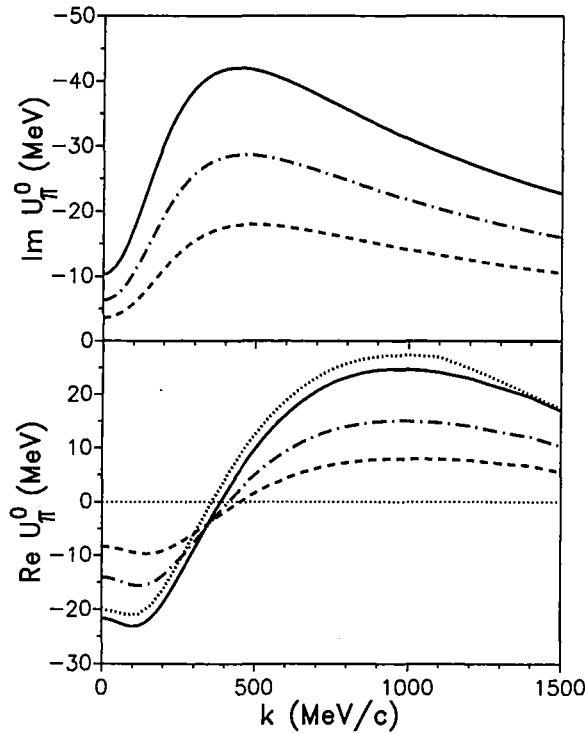


Abbildung 4.3: On-shell 1-Pionpotentiale im heißen Piongas in unterster Ordnung; gestrichelte Linien: $T=150$ MeV, strichpunktierte: $T=175$ MeV, durchgezogene: $T=200$ MeV, gepunktete: $T=200$ MeV ohne thermische Anregungen.

und gepunktete Linie im unteren Graph von Abb. 4.3).

Der thermische 2-Pionpropagator in unterster Ordnung ist in Abb. 4.4 aufgetragen. Für kleinen Impuls erkennt man eine durch die Attraktion in ReU_π^0 bewirkte Verschiebung des Quasiteilchenpeaks zu kleineren Energien, sowie zu höheren Energien bei großem Impuls wegen $ReU_\pi^0 > 0$. Der wesentliche Effekt thermischer Anregungen in $G_{\pi\pi}^T$ besteht in der Ausbildung einer kleinen Maximumstruktur bei kleinen Energien $E \leq m_\pi$ (stärker ausgeprägt für größere Temperaturen).

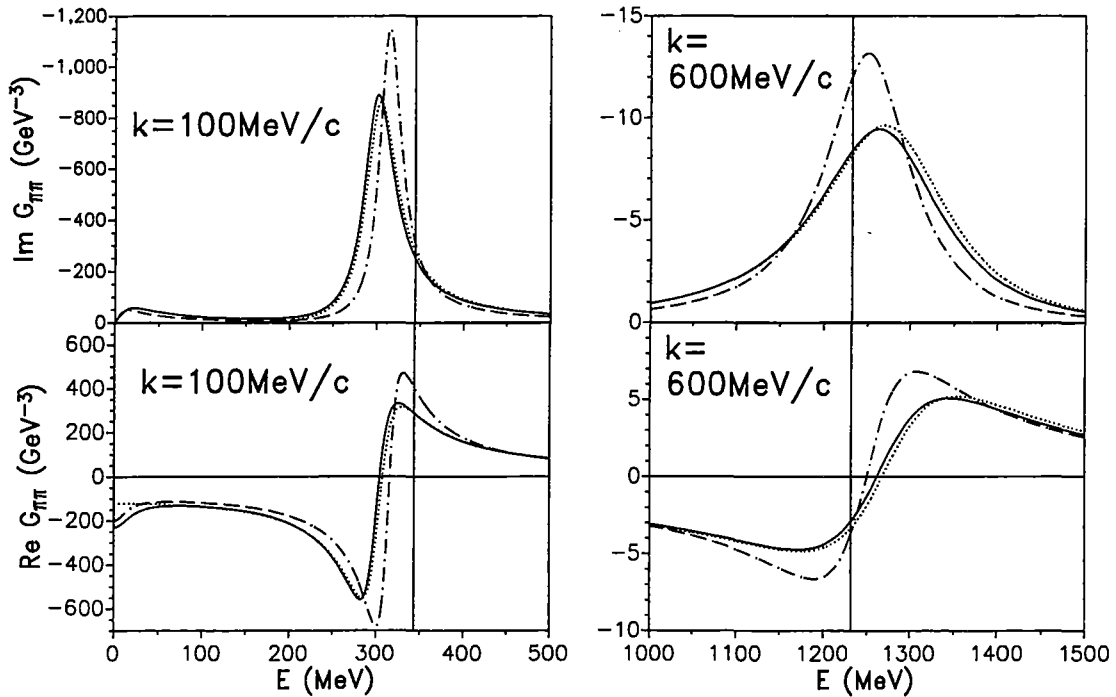


Abbildung 4.4: Thermischer 2-Pionpropagator in unterster Ordnung für $T=175$ MeV (strichpunktierte Linien) und $T=200$ MeV (durchgezogene Linien) sowie ohne die Beiträge thermischer Anregungen bei $T=200$ MeV (gepunktete Linien).

4.3.3 Selbstkonsistentes Brueckner-Schema

Der komplette Satz selbstkonsistenter Gleichungen zur Beschreibung von 1- und 2-Teilcheneigenschaften im heißen Piongas ist (in schematischer Form) gegeben durch:

$$\begin{aligned}
M_{\pi\pi}^T(E) &= V_{\pi\pi}(E) + \int V_{\pi\pi}(E) G_{\pi\pi}^T(E) M_{\pi\pi}^T(E) \\
Im G_{\pi\pi}^T(E, k) &= - \int \frac{d\omega}{\pi} Im D_{\pi}^T(\omega, k) Im D_{\pi}^T(E - \omega, k) [1 + f^{\pi}(\omega) + f^{\pi}(E - \omega)] \\
Re G_{\pi\pi}^T(E, k) &= - \mathcal{P} \int \frac{dE'}{\pi} \frac{Im G_{\pi\pi}^T(E', k)}{E - E'} \\
D_{\pi}^T(\omega, k) &= \frac{1}{\omega^2 - \omega_k^2 - \Sigma_{\pi}(\omega, k)} \\
Im \Sigma_{\pi}(\omega, k) &= - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega'}{\pi} Im M_{\pi\pi}^T(\omega + \omega', \vec{k}, \vec{p}) Im D_{\pi}^T(\omega', p) [f^{\pi}(\omega') - f^{\pi}(\omega + \omega')] \\
Re \Sigma_{\pi}(\omega, k) &= - \mathcal{P} \int \frac{d\omega'}{\pi} \frac{Im \Sigma_{\pi}(\omega', k)}{\omega - \omega'} \frac{\omega}{\omega'} .
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Die Pseudopotentiale der $\pi\pi$ -Wechselwirkung extrahieren wir aus dem Lohse/Pearce-Modell (in Vakuum-Form). Der im Jülich-Modell angekoppelte $K\bar{K}$ -Kanal ist in allen unseren Rechnungen enthalten. Dabei wird der $K\bar{K}$ -Zwischenzustandspropagator in 'Minimalform' Medium-modifiziert, d.h. durch Ergänzung eines Kaon-Bosefaktors unter Vernachlässigung von Selbstenergiebeiträgen:

$$G_{K\bar{K}}^0(E, k) \rightarrow G_{K\bar{K}}^T(E, k) = \frac{1 + 2f^K(\omega_k^K)}{E^2 - 4(\omega_k^K)^2 + i\eta} \tag{4.50}$$

mit $\omega_k^K = \sqrt{m_K^2 + k^2}$. Die Auswirkungen dieser Modifikation sind sehr gering. Die Glgn. (4.49) definieren ein z.B. aus der Kernphysik wohl bekanntes Problem [83] vom Bruecknertyp [39]. Wir lösen es bei vorgegebener Temperatur und chemischem Potential $\mu_{\pi}=0$ durch numerische Iteration: ausgehend von der Vakuum $M_{\pi\pi}$ -Amplitude berechnen wir zunächst die Pionselbstenergie und den 2-Pionpropagator in 'unterster Ordnung' (wie in Abschnitt 4.3.2 diskutiert). Diesen setzen wir dann wieder in die Streugleichung ein und erhalten so die in-Medium $M_{\pi\pi}^T$ -Amplitude, die erneut zur Berechnung von Σ_{π} verwendet wird usw..

Das Konvergenzverhalten läßt sich am einfachsten an den iterativen Werten der in-Medium Pionmasse, definiert durch

$$(m_{\pi}^*)^2 = m_{\pi}^2 + Re \Sigma_{\pi}(m_{\pi}^*, 0) , \tag{4.51}$$

ablesen. Wie aus Tab. 4.1 ersichtlich, kann bereits nach wenigen Iterationsschritten Selbstkonsistenz erreicht werden. Jeder Iterationsschritt ist dabei mit einem erheblichen numerischen Rechenaufwand verbunden.

In Abb. 4.5 sind die selbstkonsistenten Resultate für die $M_{\pi\pi}^{JI}$ -Amplitude in σ -($JI=00$ -), ρ -($JI=11$ -) und f_2 -($JI=20$ -) Kanal dargestellt. In der s-Welle sind die Effekte am stärksten ausgeprägt: im Bereich der 2-Pionschwelle beobachten wir im Imaginärteil eine deutliche Überhöhung im Vergleich zur freien Amplitude, die hauptsächlich von der erhöhten

Schritt	$T=150 \text{ MeV}$	$T=175 \text{ MeV}$	$T=200 \text{ MeV}$
n	$m_\pi^*[\text{MeV}]$	$m_\pi^*[\text{MeV}]$	$m_\pi^*[\text{MeV}]$
1	130.94	124.75	115.94
2	132.12	128.46	122.17
3	132.02	127.94	123.31
4	132.03	128.03	123.64
5		128.02	123.54
6			123.55

Tabelle 4.1: *Entwicklung der in-Medium Pionmasse im Laufe der numerischen Selbstkonsistenz-Iteration*

Niederenergie-Gewichtung durch die Bosefaktoren in $G_{\pi\pi}^T$ hervorgerufen wird. Die leichte Attraktion bei kleinen Energien in $Re\Sigma_\pi$ in Verbindung mit einem endlichen $Im\Sigma_\pi$ (vgl. Abb. 4.6) ermöglicht zudem eine signifikante Ansammlung von Stärke bis $E=0$ hin. Im Gegensatz zum Verhalten in kalter Kernmaterie (Kapitel 2.4) kommt es jedoch nicht zur Ausbildung von 2-Pionbindungszuständen. Auch im ρ -Kanal finden wir in $ImM_{\pi\pi}^{11}$ eine Überhöhung für kleinere Energien ($E \leq 600 \text{ MeV}$), obwohl Schwelleneffekte aufgrund der Zentrifugalbarriere schon stark unterdrückt sind. Sowohl im σ - als auch im ρ -Kanal sind die Maximalwerte im Real- und Imaginärteil reduziert, d.h. die Resonanzstrukturen werden einer 'thermischen' Verbreiterung unterzogen. Gleichzeitig zeigt sich eine leichte Verschiebung der Peakpositionen zu höheren Energien, was ebenfalls für die $f_2(1270)$ -Resonanz zutrifft. Dieses Verhalten ist auf die in $Re\Sigma_\pi$ einsetzende Repulsion für $\omega \geq 3m_\pi$ zurückzuführen (vgl. Abb. 4.6). Im allgemeinen sind die Medium-Modifikationen oberhalb 2-Pionenergien von $E \simeq 1 \text{ GeV}$ nur noch sehr schwach ausgeprägt, was verständlich ist, wenn man bedenkt, daß die Bosefunktion $f^\pi(\omega; T)$ für z.B. $T=175 \text{ MeV}$ und $\omega=600 \text{ MeV}$ bereits auf 3% abgefallen ist.

Die in-Medium, on-shell Piondispersionsrelation ist gegeben durch

$$\omega_k^{*2} = \omega_k^2 + \Sigma_\pi(e_k, k) \quad (4.52)$$

mit der selbstkonsistenten Quasiteilchenenergie

$$e_k^2 = \omega_k^2 + Re\Sigma_\pi(e_k, k) , \quad (4.53)$$

welche die Resonanzstelle der 1-Pionspektralfunktion bestimmt. Die selbstkonsistenten optischen (on-shell) Pionpotentiale nehmen dann entsprechend Glg. (4.47) die Form an:

$$U_\pi(k) \equiv \frac{\Sigma_\pi(e_k, k)}{2\omega_k} ; \quad (4.54)$$

diese sind in Abb. 4.6 gegen den on-shell Impuls k aufgetragen. Der Einfluß der Selbstkonsistenz im Vergleich zur untersten Ordnung erweist sich dabei als relativ gering: in ImU_π tritt eine leichte Verbreiterung der Peakstruktur auf (entsprechend den Medium-Modifikationen in $ImM_{\pi\pi}^T$), was auch im Realteil eine Abflachung der Kurven bewirkt; der

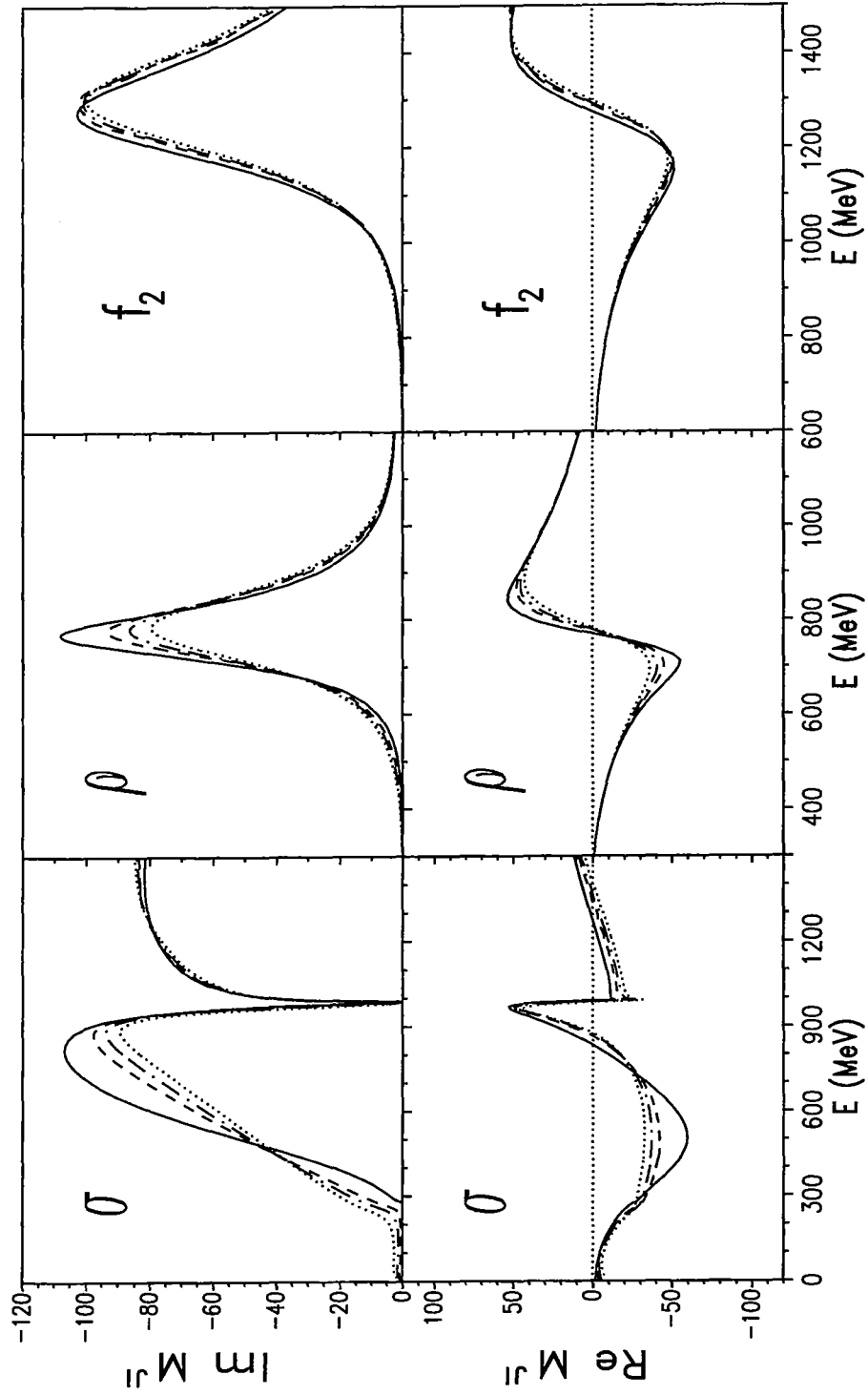


Abbildung 4.5: Selbstkonsistente $\pi\pi$ -Streuamplituden im heißen Piongas im BbS-Jülich-Modell; gestrichelte Linien: $T=150$ MeV, strichpunktierte: $T=175$ MeV, gepunktete: $T=200$ MeV, durchgezogene: Vakuum.

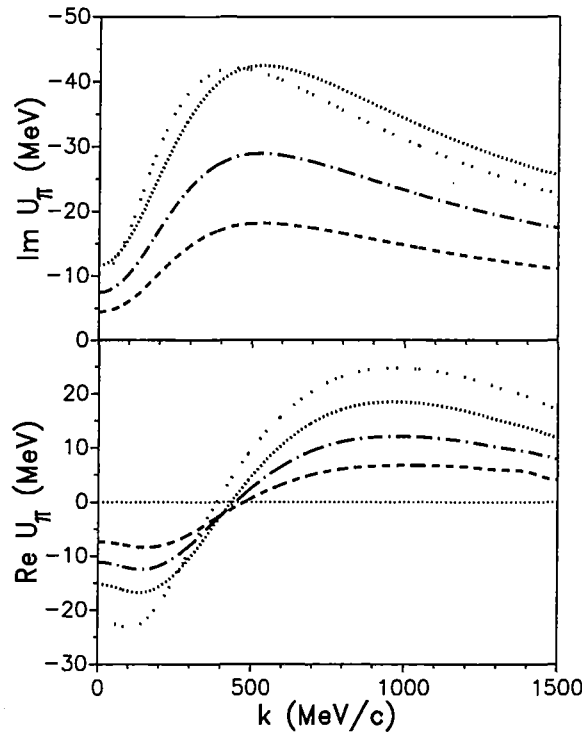


Abbildung 4.6: *Selbstkonsistente optische Pionpotentiale im heißen Piongas unter Benutzung des BbS-Jülich-Modells; Linienidentifikation wie in Abb. 4.5; die doppelt-gepunktete Linie ist das unterste-Ordnungs-Resultat für $T=200$ MeV.*

signifikanteste Effekt ist dabei ein Nachlassen der Attraktion bei kleinen on-shell Energien (für z.B. $T=200$ MeV ist $|ReU_\pi(k \leq 100 \text{ MeV/c})|$ um fast 30% kleiner als in unterster Ordnung).

Insgesamt erscheinen die Auswirkungen der Selbstkonsistenz also nicht sehr groß zu sein. Tatsächlich ist die moderate Ausprägung der Medium-Modifikationen in Piondispersionsrelation und $\pi\pi$ -Amplitude die Folge einer Vielzahl sich kompensierender Effekte; ersetzt man z.B. bei der Berechnung der Pionselbstenergie in Glg. (4.16) in allen Schritten der Iteration die Pionspektralfunktion durch ihren Quasiteilchenanteil, $A_\pi^{QPA}(\omega', p) = \pi/e_p \delta(\omega' - e_p)$, so stellt sich in den selbstkonsistenten Resultaten z.B. eine Peakverschiebung der ρ -Resonanz zu *kleineren* Energien ein. Bei der Einführung von Näherungen ist also Vorsicht geboten. Wir werden diesen Aspekt im folgenden Abschnitt genauer untersuchen.

4.3.4 Vergleich mit Resultaten in Quasiteilchennäherung

Piongas-Brueckner-Rechnungen in der Quasiteilchennäherung (QPA) wurden ausführlich in den Ref. [79, 19] diskutiert. Wir begnügen uns an dieser Stelle mit einer kurzen Wiederholung der wichtigsten Ergebnisse.

Bei Vernachlässigung thermischer Anregungen, Glg. (4.17), und unter Verwendung der in Glg. (4.22) eingeführten Näherung nimmt die Pionselbstenergie in QPA folgende Gestalt an:

$$\Sigma_{\pi}^{QPA}(e_k, k) = \frac{1}{k} \int_0^{\infty} \frac{p^2 dp}{2e_p(2\pi)^2} [f^{\pi}(e_p) - f^{\pi}(e_p + e_k)] \int_{E_{min}}^{E_{max}} E dE M_{\pi\pi}(E) \quad (4.55)$$

mit der on-shell Streuamplitude $M_{\pi\pi}(E) \equiv M_{\pi\pi}(E, q_{on}, q_{on})$, $q_{on}^2 = \frac{1}{4}E^2 - m_{\pi}^2$. Den thermischen 2-Pionpropagator werden wir in verschiedenen Approximationsstufen betrachten (thermische Anregungen, Glg. (4.29), bleiben dabei ebenfalls unberücksichtigt):

- (a) Vernachlässigung der endlichen Pionbreite (d.h. es wird $Im\Sigma_{\pi} \equiv 0$ gesetzt) sowie der Energieabhängigkeit von $Re\Sigma_{\pi}$; der 2-Pionpropagator in back-to-back Kinematik ergibt sich dann aus Glgn. (4.29) und (4.34) zu

$$G_{\pi\pi}^{T,a}(E, k) = \frac{1}{e_k} \frac{1 + 2f^{\pi}(e_k)}{E^2 - 4e_k^2 + i\eta}; \quad (4.56)$$

- (b) Einbezug des endlichen Imaginärteils von Σ_{π} bei bleibender Vernachlässigung der Energieabhängigkeit, so daß

$$G_{\pi\pi}^{T,b}(E, k) = \frac{1}{\omega_k^*} \frac{1 + 2f^{\pi}(e_k)}{E^2 - 4\omega_k^{*2} + i\eta} \quad (4.57)$$

mit ω_k^{*2} aus Glg. (4.52); da der Bosefaktor eine rein reelle Verteilungsfunktion darstellt, ergibt dort die Einführung eines komplexen Energiearguments keinen Sinn;

- (c) Berücksichtigung der Energieabhängigkeit der Selbstenergie in erster Ordnung einer Taylorentwicklung um die Quasiteilchenenergie e_k herum, d.h.

$$\Sigma_{\pi}(\omega, k) \simeq \Sigma_{\pi}(e_k, k) + \frac{\partial \Sigma_{\pi}(\omega, k)}{\partial \omega^2} \Big|_{e_k} (\omega^2 - e_k^2). \quad (4.58)$$

Die Entwicklung in ω^2 (anstatt ω) ist die natürliche Wahl entsprechend der quadratischen Piondispersionsrelation. In dieser nächst-höheren Ordnung lautet der 2-Pionpropagator

$$G_{\pi\pi}^{T,c}(E, k) = \frac{1}{\bar{\omega}_k} \frac{z_k(1 + 2f^{\pi}(e_k))}{E^2 - 4\bar{\omega}_k^2 + i\eta} \quad (4.59)$$

mit $\bar{\omega}_k^2 = e_k^2 + iz_k Im\Sigma_{\pi}(e_k, k)$ und der sogenannten 'Polstärke'

$$z_k = \left(1 - \frac{\partial \Sigma_{\pi}(\omega, k)}{\partial \omega^2} \Big|_{e_k} \right)^{-1} \quad (4.60)$$

(vgl. auch Ref. [83] für den Fall von Nukleonen in Kernmaterie). Man beachte, daß auch in dieser Variante der QPA keine Kenntnis von off-shell Eigenschaften der Pionselbstenergie erforderlich ist.

Entsprechend diesen drei Approximationsschemen (die wir im folgenden mit 'a', 'b' und 'c' bezeichnen) führen wir wieder selbstkonsistente Brueckner-Rechnungen mittels numerischer Iteration durch. In Abb. 4.7 sind die zugehörigen Resultate mit den exakten off-shell Rechnungen verglichen ($\mu_\pi=0$). Die in Schema 'a' ermittelten $M_{\pi\pi}$ -Amplituden zeigen dabei eine erstaunlich gute Übereinstimmung mit den Resultaten der vollen off-shell Behandlung. Lediglich in der Niederenergie-s-Wellen Wechselwirkung ($E \leq 400$ MeV) finden wir signifikante Abweichungen; in diesem Bereich liegen die in Schema 'b' berechneten Amplituden näher an den exakten Resultaten, d.h. für kleine Energien ist der Einfluß eines endlichen Imaginärteils der Pionselbstenergie am wichtigsten. Andererseits führt Schema 'b' bei höheren Energien zu einer leichten Überschätzung der Resonanzverbreiterungen und -peakreduktionen. Der Einbezug einer endlichen Polstärke bewirkt jedoch eine grobe Abweichung von den exakten Resultaten (vgl. die in Schema 'c' berechneten strichpunktierten Linien in Abb. 4.7); die extreme Verschärfung in den Resonanzbereichen ist tatsächlich ein Effekt, der sich im Laufe der selbstkonsistenten Iteration immer weiter aufschauelt und ausschließlich auf den Imaginärteil der Polstärke zurückgeführt werden kann [19] (beschränkt man die Polstärke auf den Realteil der Selbstenergie-Ableitung, erhält man ein völlig entgegengesetztes Ergebnis: die Resonanzverbreiterung und -unterdrückung ist noch stärker ausgeprägt als in Schema 'b'). Ein Problem bei der Einführung einer endlichen Polstärke besteht in der Verletzung der Summenregel (4.6) für die 1-Pionspektralfunktion. Diese ist zwar für z.B. $T=175$ MeV je nach Impulswert k um nicht mehr als 20% verletzt, was jedoch zu unkontrollierten Auswirkungen in der selbstkonsistenten Lösung des Brueckner-Problems führen kann. In den Schemata 'a' und 'b' ist die Normierungsbedingung für A_π^T hingegen erfüllt. Zudem besteht im Approximationsschema 'c' eine gewisse Inkonsistenz insofern, als daß eine analoge Energieentwicklung für die in die Pionselbstenergie eingehende Spektralfunktion nicht durchgeführt wurde, vgl. Glg. (4.15). In den (on-shell) optischen Pionpotentialen (unterer Teil in Abb. 4.7) sind die Abweichungen zwischen den unterschiedlichen Näherungen weniger stark ausgeprägt. Da Σ_π durch Integration von $M_{\pi\pi}$ berechnet wird, treten kompensierende Effekte auf (z.B. wird die Resonanzüberhöhung in Schema 'c' zu einem gewissen Grade durch die gleichzeitige Resonanzverschärfung ausgeglichen). Dennoch zeigt Schema 'a' auch in U_π die relativ beste Übereinstimmung mit den 'exakten' Rechnungen.

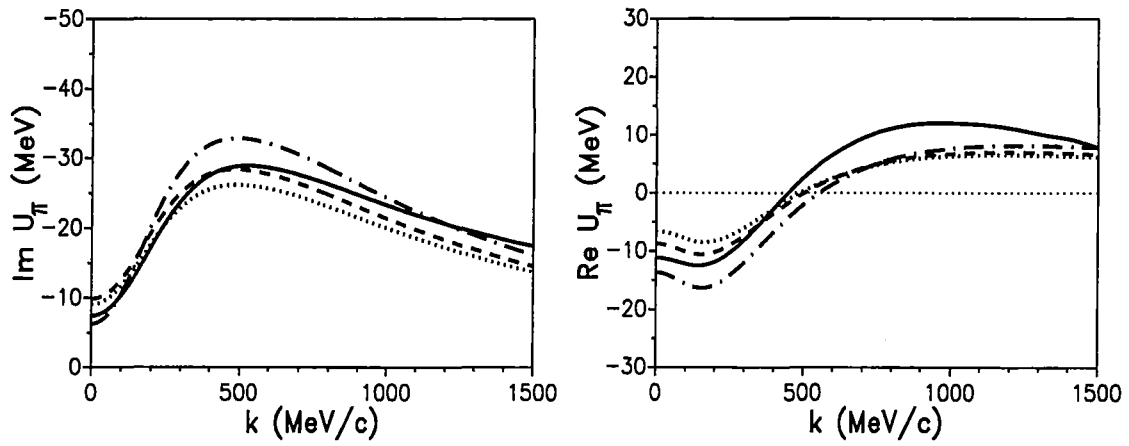
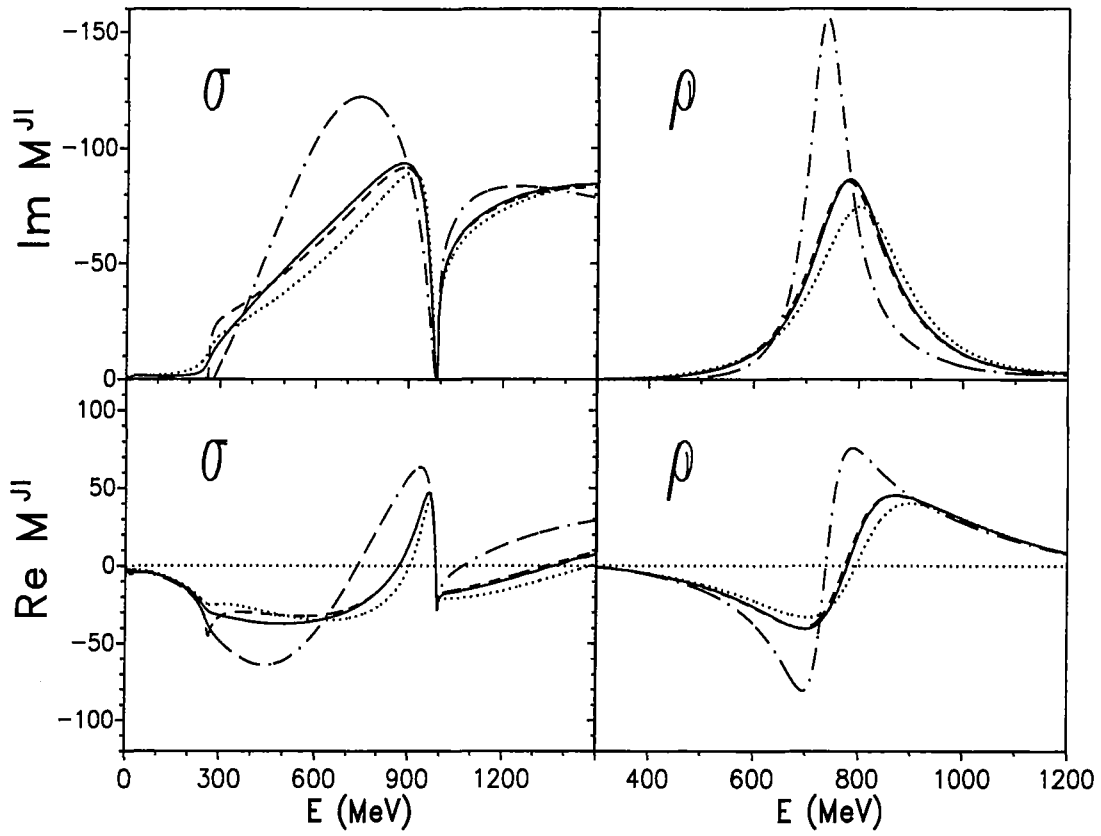


Abbildung 4.7: Selbstkonsistente Brueckner-Rechnungen im heißen Piongas ($\mu_\pi=0$, $T=175$ MeV) in der QPA; oberer Teil: $\pi\pi$ -Streuamplitude, unterer Teil: optische 1-Pionpotentiale; gestrichelte Linien: Schema 'a', gepunktete: Schema 'b', strichpunktierte: Schema 'c'; durchgezogene: volle off-shell Rechnung aus Abschnitt 4.3.3.

4.3.5 Einfluß der chiralen Symmetrie und chirale Restauration bei endlicher Temperatur

In Analogie zur Wiederherstellung der spontan gebrochenen chiralen Symmetrie bei endlicher nuklearer Dichte erwartet man einen ähnlichen Mechanismus auch mit steigender Temperatur (bei verschwindender Baryondichte): das 'Aufheizen' des Vakuums bedingt eine Absenkung von Vakuumerwartungswerten wie z.B. dem Quarkkondensat $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$ oder Gluonkondensat $\langle 0|G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}|0\rangle$. Die Temperaturabhängigkeit des Quarkkondensats wurde in Ref. [84] für verschiedene Modellansätze berechnet, die alle ein ähnliches Verhalten zeigen, näherungsweise parametrisiert durch

$$\langle 0|\bar{q}q|0\rangle^T = \langle 0|\bar{q}q|0\rangle^0 \sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_c^x}\right)^2}. \quad (4.61)$$

T_c^x bezeichnet dabei die kritische Temperatur des chiralen Phasenübergangs – nicht zu verwechseln mit dem Phasenübergang von hadronischer Materie in ein Quark-Gluon-Plasma (QGP). Typische Werte für T_c^x liegen bei 140-170 MeV und sind somit nur wenig kleiner als die erwarteten kritischen Temperaturen für den Übergang ins QGP.

Gemäß dem Brown-Rho'schen Skalengesetz, Glg. (3.19), induziert die Reduktion des Quarkkondensats eine Verringerung von in-Medium Hadronmassen etc.. In Ref. [73] wurde argumentiert, daß der Skalierungsfaktor Φ auch bei endlicher Temperatur mit Glg. (3.20) kompatibel ist, d.h.

$$\Phi(T) \simeq \left(\frac{\langle 0|\bar{q}q|0\rangle^T}{\langle 0|\bar{q}q|0\rangle^0} \right)^{1/3}. \quad (4.62)$$

Mit Glg. (4.61) erhält man so

$$\frac{m_V(T)}{m_V(0)} \simeq \frac{m_\sigma(T)}{m_\sigma(0)} \simeq \frac{f_\pi(T)}{f_\pi(0)} \simeq \frac{\Lambda(T)}{\Lambda(0)} \simeq \sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_c^x}\right)^2}. \quad (4.63)$$

Explizite Berechnungen z.B. der Vektormesonmassen $m_V(T)$ basierend auf dem QCD-Summenregel-Verfahren bestätigen im wesentlichen dieses Verhalten [85]. Das Gluonkondensat variiert wahrscheinlich erheblich schwächer mit der Temperatur [84] und wird daher vernachlässigt.

In den Kapiteln 2 und 3 haben wir festgestellt, daß eine zuverlässige Beschreibung der in-Medium $\pi\pi$ -Wechselwirkung im Bereich der 2-Pionschwelle und darunter die Berücksichtigung von aus der chiralen Symmetrie folgenden Eigenschaften erfordert. Da insbesondere die Reduktion von $m_\rho(T)$ eine Verstärkung der Schwelleneffekte in der s-Wellen $\pi\pi$ -Amplitude antizipieren läßt, werden wir die Rechnungen für das 'Chirale Restaurations-Szenario' im Rahmen des 'chiral verbesserten' Jülich-Modells aus Abschnitt 2.6 durchführen. Vorher gehen wir jedoch noch kurz auf die Resultate der Brueckner-Rechnungen in diesem Modell ein.

Chiral verbessertes $\pi\pi$ Modell im Brueckner-Schema

Unter Verwendung des in Abschnitt 2.6 konstruierten Mesonaustauschmodells lösen wir den selbstkonsistenten Satz von Brueckner-Gleichungen (4.49) wieder mittels numerischer

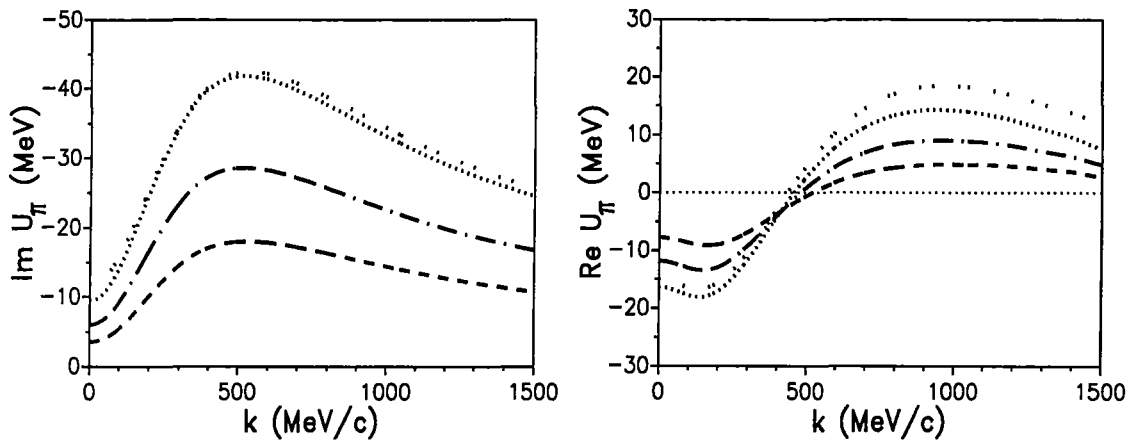
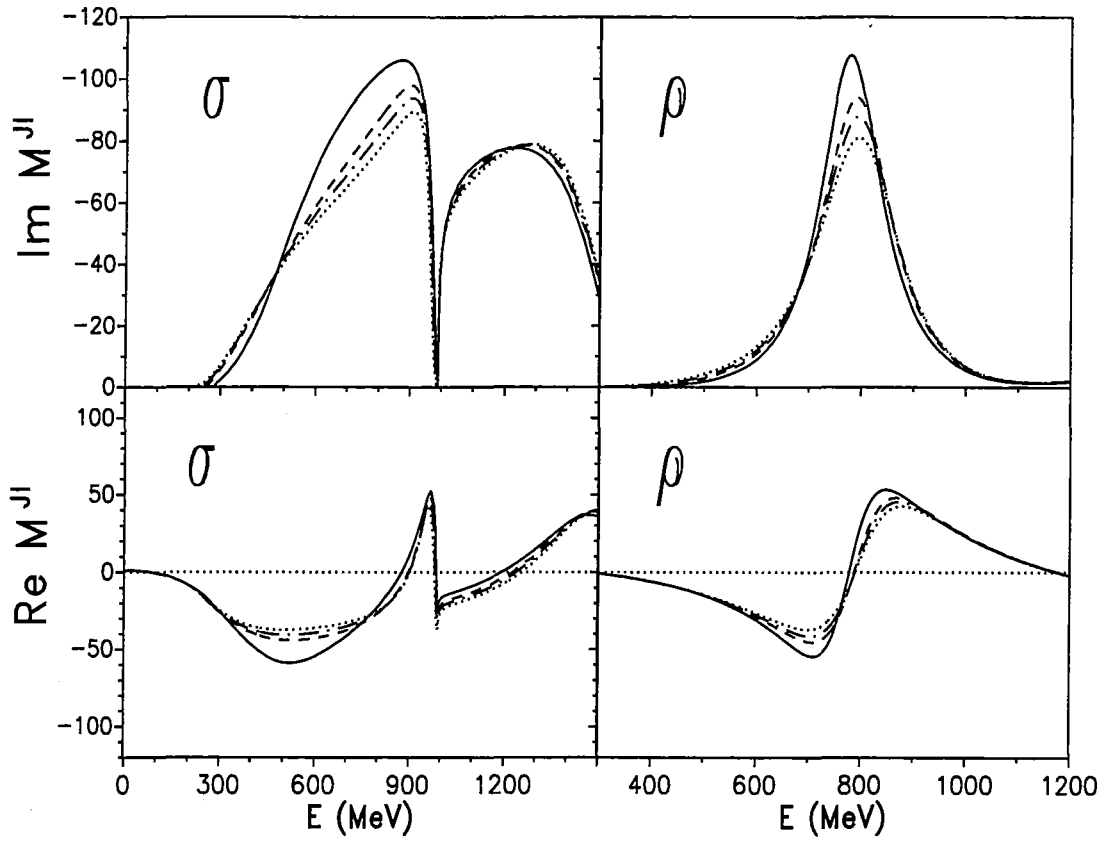


Abbildung 4.8: Selbstkonsistente Brueckner-Rechnungen im heißen Piongas ($\mu_\pi=0$) im chiral verbesserten Jülich-Modell (oberer Teil: $\pi\pi$ -Streuamplitude, unterer Teil: optische 1-Pionpotentiale) bei $T=150$ MeV (gestrichelte Linien), $T=175$ MeV (strich-punktiert) und $T=200$ MeV (gepunktet); durchgezogene Linien repräsentieren freie $\pi\pi$ -Streuung.

Iteration bei vorgegebenen Temperaturen $T = 150, 175$ und 200 MeV sowie $\mu_\pi=0$.

Die konvergierten Ergebnisse für on-shell $\pi\pi$ -Amplituden und optische 1-Pionpotentiale sind in Abbn. 4.8 und 4.9 aufgetragen. Für $E \geq 3m_\pi$ zeigt die in-Medium $\pi\pi$ -Wechselwirkung ein praktisch identisches Verhalten wie im Lohse/Pearce-Modell, vgl. Abb. 4.5; lediglich im sub-/Schwellenbereich der Amplitude im σ -Kanal finden wir – wie nach den Analysen aus Kapitel 2 nicht anders zu erwarten – eine beträchtliche Unterdrückung von Stärke in der chiral verbesserten Version, siehe Abb. 4.9. Dementsprechend ergibt sich auch in $\text{Im}U_\pi(k)$ eine leichte Reduktion für kleine Energien bzw. on-shell Impulse (vgl. die gepunktete mit der doppelt-punktierten Linie im unteren linken Teil von Abb. 4.8). Der Realteil des optischen Potentials weist bei $T=200$ MeV etwas größere Abweichungen auf, auch bei hohen on-shell Impulsen. Da dieser aus einer off-shell Integration des Imaginärteils hervorgeht, liegt es nahe, diese Diskrepanz dem stärker ausgeprägten off-shell Verhalten der on-energy-shell Vorschrift in der BbS-Version des $\pi\pi$ -Modells zuzuschreiben (vgl. Glgn. (2.29) und (2.45)).

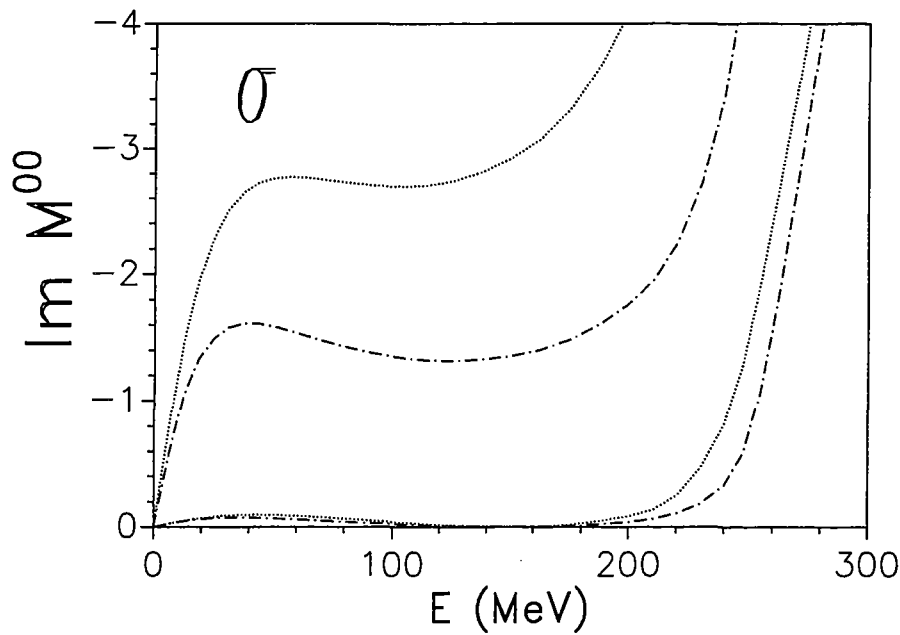


Abbildung 4.9: Selbstkonsistente $\pi\pi$ -Streuamplitude im Niederenergiebereich des σ -Kanals (Brueckner-Schema, $\mu_\pi=0$) für $T=175$ MeV (strich-punktierte Linien) und $T=200$ MeV (gepunktete Linien); die oberen beiden Kurven sind im Lohse/Pearce-Modell, die unteren beiden im chiral verbesserten Jülich-Modell gerechnet.

Chirale Restauration im heißen Piongas

Wie in Abschnitt 3.4.2 diskutiert, führt das Brown-Rho-Scaling zu einer Dichte- bzw. Temperaturabhängigkeit der 2-Pion-Wechselwirkungspotentiale. Bei der Skalierung der entsprechenden Parameter in den Pseudopotentialen werden wir uns wieder auf den $SU(2)$ -Sektor der $\pi\pi$ -Wechselwirkung beschränken, d.h. keine Modifikationen in den $V_{\pi\pi \rightarrow KK^-}$ - bzw. V_{KK^-} -Potentialen des angekoppelten $K\bar{K}$ -Kanals vornehmen. In Abschnitt 3.4.2 wurde bereits die Reduktion der für die s-Wellen- $\pi\pi$ -Wechselwirkung relevanten Parameter motiviert; es waren dies

- die physikalische ρ -Masse m_ρ sowie der Formfaktor-Cutoff Λ_ρ für t-Kanal ρ -Austausch;
- die Pionzerfallskonstante f_π und ρ -Masse m_ρ in den $\pi\pi$ -Kontakt-Wechselwirkungen.

Für die selbstkonsistenten Piongas-Rechnungen müssen wir das Skalenverhalten jedoch auch in den höheren Partialwellen berücksichtigen, insbesondere in der p-Welle, d.h. im s-Kanal ρ -Polgraphen. In der freien $\pi\pi$ -Streuung ist der ρ -Polgraph durch einen nackten Resonanzpropagator der Form

$$D_\rho^{bare}(E) = \frac{1}{E^2 - (m_\rho^{(0)})^2} \quad (4.64)$$

mit nackter Masse $m_\rho^{(0)}$ charakterisiert (z.B. $m_\rho^{(0)} = 1134$ MeV im chiral verbesserten Jülich-Modell, vgl. Anhang B). Durch Iteration in der Lippmann-Schwinger-Glg. erfolgt eine 'Renormierung' der nackten $\rho^{(0)}$ -Resonanz, so daß die experimentelle Breite ($\Gamma_\rho = 150$ MeV) und Resonanzposition ($E = 770$ MeV) reproduziert werden. Zum Einschluß der Brown-Rho'schen Skalenhypothese verfahren wir wie folgt: die in den Formfaktor des $\pi\pi\rho^{(0)}$ -Vertex',

$$F^{(s)}(q) = \left(\frac{2\Lambda_{\rho^{(0)}}^2 + m_\rho^2}{2\Lambda_{\rho^{(0)}}^2 + 4\omega_q^2} \right)^2, \quad (4.65)$$

eingehenden Cutoff-Parameter $\Lambda_{\rho^{(0)}}$ und physikalische Masse m_ρ werden nach Glg. (4.63) skaliert. Die in den nackten ρ -Propagator D_ρ^{bare} eingehende nackte Masse $m_\rho^{(0)}$ wird dann so nachjustiert, daß die Peakposition der renormierten ρ -Resonanz in der freien p-Wellen-Amplitude $M_{\pi\pi}^{11}(E)$ bei $E = m_\rho(T)$ auftritt. Auf diese Weise bleibt die in den $\pi\pi$ -Pseudopotentialen konstruierte Konsistenz der ρ -Resonanzposition im s-Kanal und der physikalischen Masse $m_\rho(T)$ des im t-Kanal ausgetauschten (effektiven) ρ -Mesons gewahrt. Tatsächlich stellt sich heraus, daß die temperaturabhängige Nachjustierung der nackten Masse sehr genau dem Skalengesetz (4.63) folgt (gepunktete Linie in Abb. 4.10), was in Anbetracht der nicht-Linearität der Lippmann-Schwinger-Glg. ein nicht-triviales Ergebnis ist (neben dem ρ -Polgraphen tragen im $JJ=11$ -Kanal auch noch t-Kanal ρ -Austausch und Kontakt-Wechselwirkungen mit den entsprechenden Werten für $m_\rho(T)$, $\Lambda_\rho(T)$ und $f_\pi(T)$ bei).

Die selbstkonsistenten Resultate (bei $\mu_\pi=0$, $T=150, 165$ MeV) für in-Medium $\pi\pi$ -Amplituden und on-shell optische Pionpotentiale finden sich in Abb. 4.11. Die ρ -Resonanz zeigt die in den $\pi\pi$ -Pseudopotentialen eingeführte Verschiebung zu kleineren Energien. Die durch den thermischen 2-Pionpropagator induzierten Medium-Effekte bewirken keine weitere

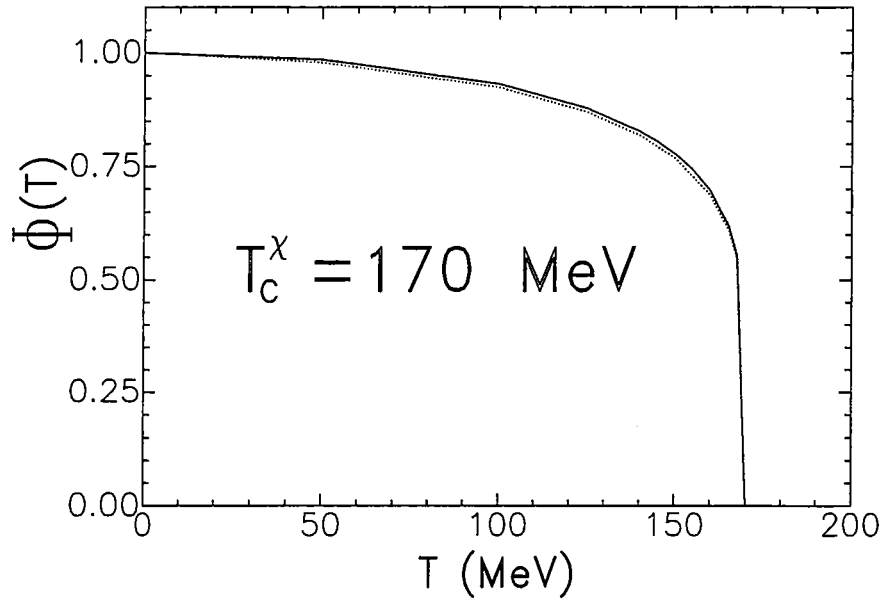


Abbildung 4.10: *Brown-Rho-Scaling Faktor bei endlicher Temperatur (durchgezogene Linie) und das bei Anpassung der nackten ρ -Masse resultierende Verhältnis $m_\rho^{(0)}(T)/m_\rho^{(0)}(0)$ (gepunktete Linie).*

signifikante Veränderung der Resonanzposition, so daß auch im Medium die Konsistenz von renormierter s-Kanal Masse und effektiver t-Kanal Masse erhalten bleibt. Die wesentliche Ursache für die Peakreduktion liegt in der Skalierung von $\Lambda_{\rho(0)}$ und m_ρ im s-Kanal-Formfaktor $F^{(s)}(q)$, wodurch die Kopplung der 2-Pionzustände an den nackten ρ -Propagator D_ρ^{bare} abgeschwächt wird (im Grenzfall $T \rightarrow T_c^\chi$ findet wegen $\Lambda_{\rho(0)}, m_\rho \rightarrow 0$ eine völlige Entkopplung statt). Im σ -Kanal erkennt man einen deutlichen Anstieg der Attraktion im Schwellenbereich von $Re M_{\pi\pi}^{00}$, was mit einer beträchtlichen Überhöhung im Imaginärteil der Amplitude einhergeht. Beides ist auf den durch das BR-Scaling verstärkten Einfluß des attraktiven t-Kanal ρ -Austausches sowie der Kontakt-Wechselwirkung $V_{\pi\pi, nls}$ aus Glg. (2.53) zurückzuführen. Letztere wird jedoch für $E \lesssim m_\pi$ repulsiv; in Verbindung mit dem aus der ρ -Eichung hervorgehenden, rein repulsiven Kontaktterm aus Glg. (2.55) entsteht so eine erhöhte Repulsion bei sehr kleinen sub-Schwellenenergien, so daß in diesem Bereich eine Ansammlung von Stärke in $Im M_{\pi\pi}^{00}$ unterdrückt ist.

Entsprechend dem Verhalten in der thermischen $M_{\pi\pi}$ -Amplitude wandert die Resonanzstruktur in $U_\pi(k)$ zu kleineren Impulsen (d.h. on-shell Energien). Insbesondere für $k=0$ zeigen sowohl der Imaginärteil als auch der Realteil wesentlich größere Werte als in den Rechnungen ohne BR-Scaling (vgl. den unteren Teil in Abb. 4.11 mit dem in Abb. 4.8).

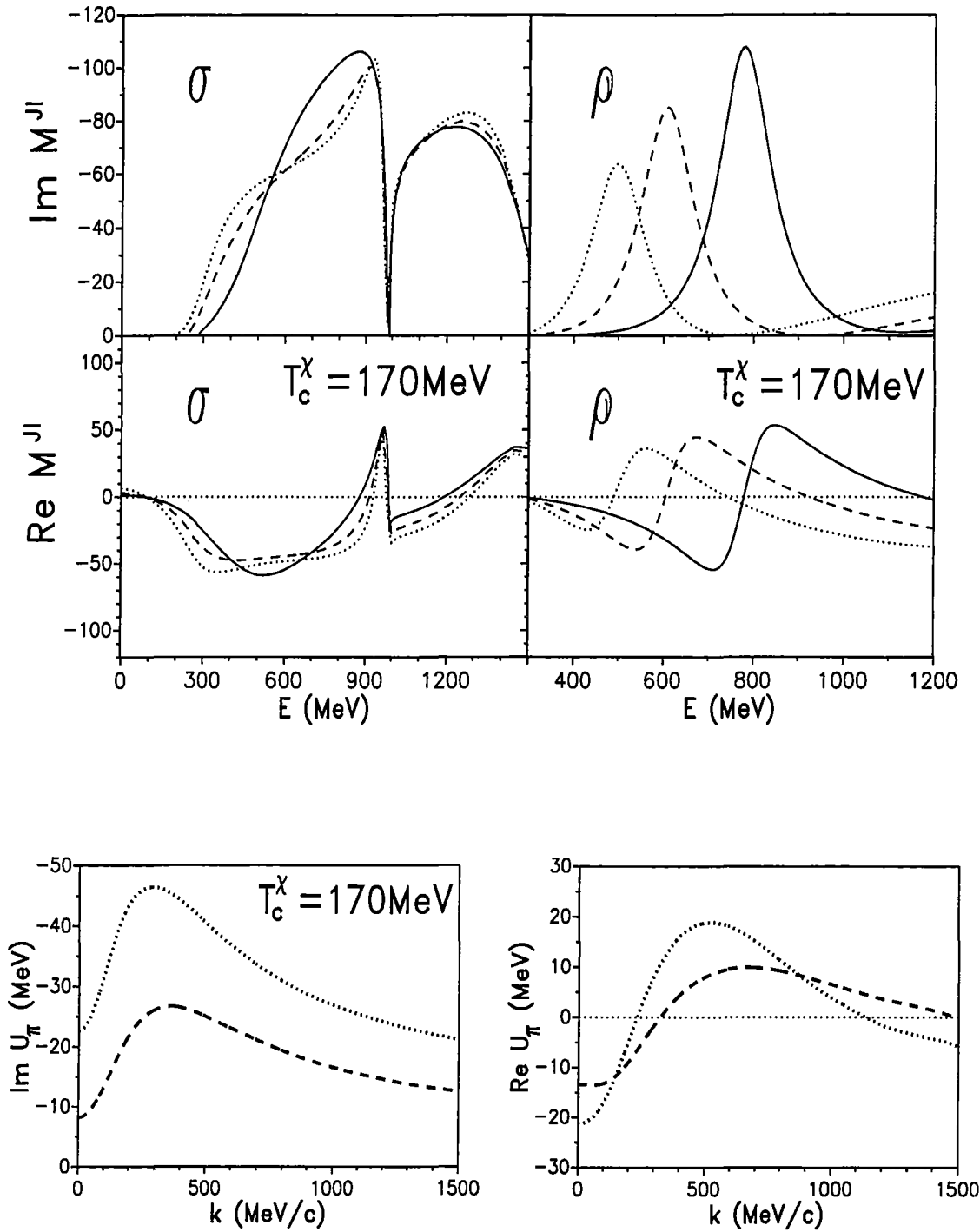


Abbildung 4.11: Selbstkonsistente $\pi\pi$ -Streuamplitude (oberer Teil) und optische 1-Pionpotentiale (unterer Teil) im heißen Piongas ($\mu_\pi=0$) bei chiraler Restauration, charakterisiert durch das BR-Scaling von m_ρ, f_π etc.; gestrichelte Linien: $T=150 \text{ MeV}$, gepunktete: $T=165 \text{ MeV}$; die durchgezogenen Linien repräsentieren die freie Streuung.

4.3.6 Mittlere freie Weglängen

Zum Abschluß dieses Kapitels kommen wir noch einmal auf die zu Beginn angesprochene Frage der mittleren freien Weglänge λ_π eines im heißen Gas propagierenden Pions zurück. Ausgehend von der in-Medium Piondispersionsrelation, Glg. (4.52), ist die Dämpfung einer propagierenden Pionwelle durch die zeitliche Entwicklung der zugehörigen Intensität bestimmt:

$$I(t) = I_0 e^{-ik^{(4)} \cdot x^{(4)}} \left(e^{-ik^{(4)} \cdot x^{(4)}} \right)^* . \quad (4.66)$$

Für ein on-shell Pion mit reellem Dreierimpuls $\vec{k}$ und Viererimpuls $k^{(4)} = (\omega_k^*, \vec{k})$ findet man

$$I(t) = I_0 e^{-\Gamma_k t} \quad (4.67)$$

mit der Quasipionbreite $\Gamma_k = -2\text{Im}\omega_k^*$ (die inverse Breite $\tau_k = 1/\Gamma_k$ wird auch als Relaxationszeit bezeichnet [21]). Die mittlere freie Weglänge λ_π ist als die Strecke definiert, die ein Pion zurücklegt, bis die Intensität auf $1/e$ abgefallen ist, d.h.

$$\lambda_\pi(k) = \tau_k v_\pi(k) \quad (4.68)$$

mit der Gruppengeschwindigkeit $v_\pi(k) = \partial e_k / \partial k$. In unterster Ordnung einer Entwicklung in Σ_π ergibt sich mit

$$\begin{aligned} \Gamma_k &\simeq -2 \frac{\text{Im}\Sigma_\pi(e_k, k)}{2\omega_k} \\ &= -2\text{Im}U_\pi(k) \end{aligned} \quad (4.69)$$

und $v_\pi(k) \simeq k/\omega_k$ die z.B. auch in den Ref. [21, 22] angegebene Beziehung

$$\begin{aligned} \lambda_\pi(k) &= -\frac{k/\omega_k}{2\text{Im}U_\pi} \\ &= -\frac{k}{\text{Im}\Sigma_\pi} . \end{aligned} \quad (4.70)$$

Aus den selbstkonsistenten 1-Pionpotentialen (im Rahmen des chiral verbesserten Jülich-Modells) resultiert die in Abb. 4.12 gezeigte Temperatur- und Impulsabhängigkeit der mittleren freien Weglängen. Versuchen wir diese zu der in der Einführung vorgenommenen Abschätzung (Abschnitt 4.1) in Bezug zu setzen: dazu nehmen wir an, daß die in einer zentralen 200 GeV/u O-Au Kollision produzierten $N_\pi=400$ Pionen ein thermisches Gas bilden. Im chemischen Gleichgewicht, d.h. für $\mu_\pi=0$ (worauf alle unsere Rechnungen basieren), und $T=200$ MeV liefert Glg. (4.7) eine Piondichte von $n_\pi(T=200 \text{ MeV})=0.32 \text{ fm}^{-3}$ (die Verwendung der in-Medium Quasipionenergie e_k führt praktisch auf den gleichen Wert); der zugehörige 'Feuerball'-Radius r_{FB} berechnet sich dann aus

$$N_\pi = V_{FB} n_\pi \quad (4.71)$$

zu $r_{FB}=6.7 \text{ fm}$, was deutlich oberhalb der gepunkteten Linie im rechten Graph von Abb. 4.12 liegt, d.h. die Pionen müßten durchschnittlich noch 2-3 λ_π zurücklegen, bevor sie die heiße Zone verlassen könnten. Die gleiche Abschätzung für $T=150 \text{ MeV}$ ergibt

$$n_\pi(T=150 \text{ MeV}) = 0.12 \text{ fm}^{-3} \Rightarrow r_{FB} = 9.3 \text{ fm} ; \quad (4.72)$$

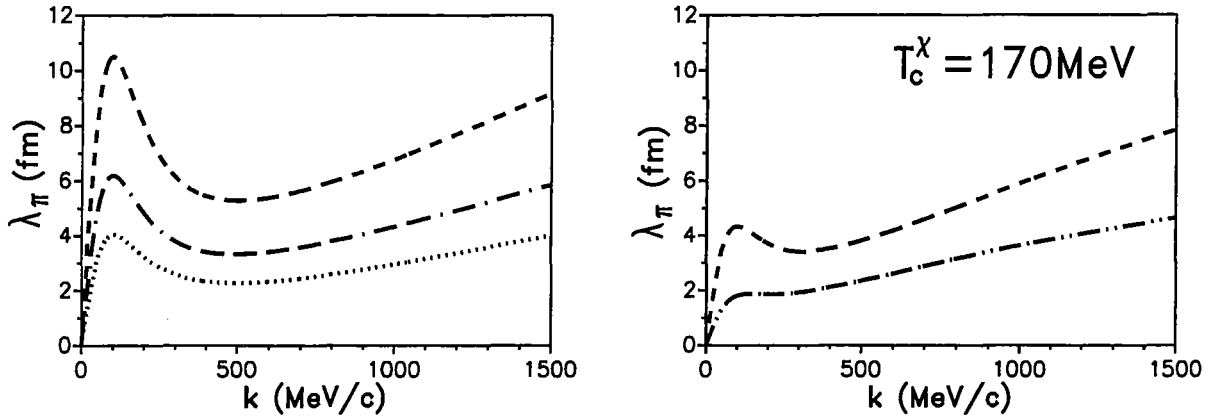


Abbildung 4.12: Mittlere freie Weglängen eines Pions im heißen Piongas (unter Benutzung des chiral verbesserten Jülich-Modells) im Rahmen der Brueckner-Theorie (linke Seite; Linienidentifikation von oben nach unten: $T=150, 175$ und 200 MeV) und bei Einschluß des BR-Scaling in den $\pi\pi$ -Pseudopotentialen (rechte Seite für $T=150, 165$ MeV).

ein Vergleich mit der gestrichelten Linie auf der linken Seite von Abb. 4.12 zeigt, daß sich die λ_π jetzt im Bereich des Feuerball-Radius bewegen, d.h. in diesem naiven Modell wäre 150 MeV eine obere Grenze für eine (konsistente) Freezeout-Temperatur.

Bei Einschluß des BR-Scaling liegen die mittleren freien Weglängen noch erheblich niedriger. In einem solchen Szenario sollte es daher relativ schnell zur Einstellung eines thermischen Gleichgewichts und einer langen Wechselwirkungsphase mit Freezeout-Temperaturen deutlich unterhalb 150 MeV kommen.

Eine realistischere Beschreibung laufender URHIC-Experimente muß natürlich den Einfluß einer endlichen Baryondichte sowie (thermisch) angeregter Mesonen berücksichtigen. Dies sollte zu einer weiteren Verkleinerung von λ_π – und damit auch der Freezeout-Temperatur – führen. Andererseits wurde für die CERN-Experimente die Möglichkeit eines endlichen chemischen Potentials $\mu_\pi > 0$ diskutiert, welches als eine Erklärung der beobachteten Überhöhung kleiner Transversalimpulse in den Pion- p_t -Spektren angeführt wurde [86]. Endliche (positive) Werte für μ_π haben bei vorgegebener Temperatur eine Erhöhung der Piondichte und damit eine Reduktion des Piongas-’Volumens’ zur Folge, was wiederum eine effektive Erhöhung der Freezeout-Temperatur zuläßt; umgekehrt gehen jedoch auch die λ_π weiter zurück, wie selbstkonsistente Rechnungen in der QPA für $\mu_\pi > 0$ gezeigt haben [79]. Eine quantitative Antwort auf diese Fragen kann erst in einer zukünftigen Arbeit gegeben werden, z.B. durch Verwendung unserer selbstkonsistenten Resultate in einer numerischen Transporttheorie-Rechnung im Rahmen einer bosonischen Boltzmann-Glg. [29].

Kapitel 5

Zustandsgleichung des heißen Piongases

5.1 Einführung

Neben den experimentellen Anstrengungen in ultrarelativistischen Schwerionenstößen (URHIC's) sowie theoretischen Analysen, die zumeist auf *effektiven* Modellen der starken Wechselwirkung basieren, wurde in den letzten Jahren ein weiterer Zugang zur Untersuchung von heißer und/oder dichter hadronischer (bzw. Quark-Gluon-) Materie verfolgt: die sogenannten Gittereichtheorien (*LGT*= Lattice Gauge Theory). Deren Ausgangspunkt ist die *fundamentale* Lagrangedichte der QCD, $\mathcal{L}_{QCD}$, formuliert in den elementaren Freiheitsgraden, den Fermionfeldern der Quarks und den Eichfeldern der Gluonen. Im Pfadintegral-Formalismus lassen sich daraus durch Diskretisierung der Raum-Zeit-Integrale z.B. thermodynamische Zustandsgrößen stark wechselwirkender Materie berechnen, d.h. man erhält so Informationen über das Verhalten stark wechselwirkender Vielteilchensysteme 'direkt' aus den Grundgleichungen der QCD. Die neuesten Resultate dieser numerisch äußerst aufwendigen Rechnungen sind im Falle endlicher Temperatur und verschwindender Baryondichte in Abb. 5.1 gezeigt [87]. Man erkennt einen steilen Anstieg der Energiedichte bei einer ('kritischen') Temperatur von ca. 150 MeV, interpretiert als Phasenübergang der chiralen Restauration. Um jedoch ein Verständnis der in der Numerik verborgenen, relevanten physikalischen Prozesse zu erlangen, muß wieder auf die Modellierung mittels effektiver Modelle zurückgegriffen werden, z.B. mit (semi-klassischen) Instantonmodellen [88], effektiven Quarkmodellen [89] oder auch Hadrongas-Modellen [90, 91, 22]. Zudem ist die Kenntnis einer realistischen Zustandsgleichung z.B. auch eine wichtige Voraussetzung hydrodynamischer Modelle für die Zeitentwicklung von URHIC's [28], und LGT-Rechnungen sind aufgrund begrenzter Gittergrößen sowie technischer Probleme bei der Einführung dynamischer Fermionfelder derzeit noch nicht in der Lage, zuverlässige quantitative Aussagen über die thermodynamischen Eigenschaften heißer hadronischer Materie zu treffen.

In diesem Kapitel werden wir uns mit der Zustandsgleichung (EoS= Equation of State) eines thermischen Piongases beschäftigen. Im Rahmen einer relativistischen Virialentwicklung der Zustandsfunktion, beschränkt auf 2-Teilchen-Kollisionen, verwendeten Welke *et*

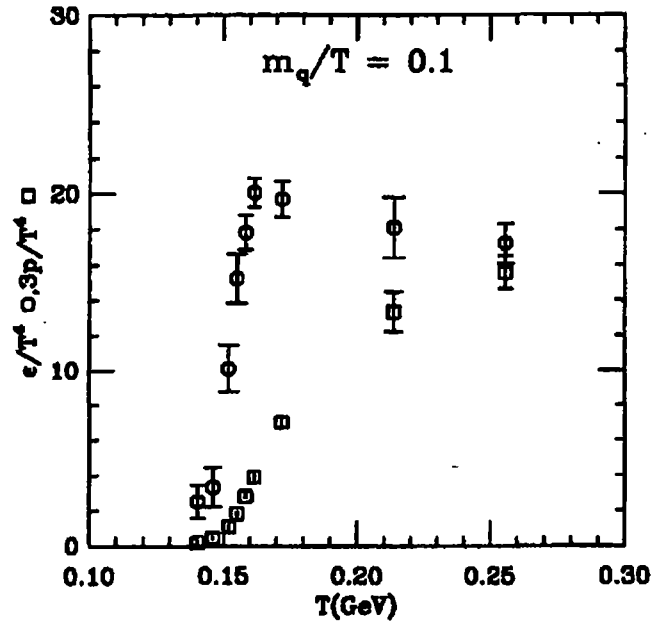


Abbildung 5.1: Gitter-QCD Resultate für Druck- und Energiedichte stark wechselwirkender Materie als Funktion der Temperatur (nach Karsch et al. [87]).

al. [25] eine empirische Parametrisierung der Vakuum- $\pi\pi$ -Streuphasen zur Berechnung von Teilchen-, Druck-, Entropie- und Energiedichte eines wechselwirkenden Piongases. Sie fanden, daß der Netto-Effekt der $\pi\pi$ -Wechselwirkung durch den resonanten $JI=11$ -(ρ -) Kanal generiert wird, der zu einem Anstieg der thermodynamischen Zustandsgrößen relativ zum freien Gas für Temperaturen $T \geq 100$ MeV führt. Quantitativ war dieser Beitrag so groß wie man es von einer Beimischung freier ρ -Mesonen erwarten würde, oder anders ausgedrückt: die relativ scharfe ρ -Resonanz in der $\pi\pi$ -Wechselwirkung 'simuliert' die Präsenz freier ρ -Mesonen, ein wohlbekannter Mechanismus aus dem Beth-Uhlenbeck-Formalismus [92]. Bunatian und Kämpfer verfolgten dagegen einen anderen Zugang [26], der auf dem Greensfunktionen-Formalismus bei endlicher Temperatur basiert. Die Grundlage ihrer $\pi\pi$ -Wechselwirkung bildete die Weinberg-Lagrangedichte, die zur Beschreibung der Niederenergie-, s-Wellen $\pi\pi$ -Streuung geeignet ist. Als Resultat selbstkonsistenter Rechnungen in der Hartree-Näherung fanden sie einen *Abfall* der thermodynamischen Zustandsgrößen für Temperaturen $T \geq 150$ MeV.

Um die Diskrepanz dieser beiden Analysen zu studieren, werden wir im folgenden eine erneute Berechnung der EoS vornehmen. Dazu werden wir einerseits ein realistisches $\pi\pi$ -Modell verwenden, welches die Vakuum-Streudaten bis zu relativ hohen Energien reproduziert, andererseits aber auch die Medium-Modifikationen von 1-Pionpropagator und $\pi\pi$ -Streuamplitude selbstkonsistent und bis in alle Ordnungen berücksichtigen. Unser Formalismus entspricht dem von Bunatian und Kämpfer, jedoch über die Hartree-Näherung hinaus erweitert. Dies ermöglicht uns die direkte Anwendung der im vorangegangenen Kapitel erzielten Resultate auf die Untersuchung der Thermodynamik des heißen Pion-

gases. Zur Reduktion des numerischen Rechenaufwandes werden wir uns auf die Quasiteilchennäherung (QPA) beschränken, die, wie in Kapitel 4 diskutiert, unter gewissen Voraussetzungen eine gute Übereinstimmung mit den 'exakten' off-shell Rechnungen liefert.

Im zweiten Abschnitt schidern wir zunächst den Formalismus zur Berechnung des thermodynamischen Potentials $\Omega_\pi(T)$, der sich im wesentlichen an der Arbeit von Carneiro und Pethick [93] orientiert. Im dritten Abschnitt leiten wir aus $\Omega_\pi(T)$ die thermodynamischen Zustandsvariablen Druck-, Entropie- und Energiedichte ab und diskutieren die numerischen Resultate im Rahmen des Jülich- $\pi\pi$ -Modells [10, 11] ohne Anwendung von Medium-Modifikationen auf die Mesonaustauschpotentiale (Brueckner-Theorie). Im vierten Abschnitt betrachten wir die Möglichkeit zusätzlicher Medium-Effekte in den $\pi\pi$ -Wechselwirkungspotentialen, induziert durch das Brown-Rho Skalengesetz als Folge der chiralen Restauration bei endlicher Temperatur.

5.2 Das Thermodynamische Potential eines wechselwirkenden Piongases

Der Ausgangspunkt unserer Analyse ist der wohlbekannte Ausdruck für das thermodynamische Potential eines Gases wechselwirkender Bosonen bei endlicher Temperatur [94]. Für ein wechselwirkendes Piongas hat er die Form

$$\Omega_\pi(T) = \Omega_\pi^Q(T) + \Omega_{\pi\pi}(T) , \quad (5.1)$$

wobei der erste Term den Quasiteilchen-Anteil repräsentiert, während der zweite Term aus den Wechselwirkungen zwischen den Quasiteilchen resultiert. Thermodynamische Konsistenz verlangt die Berücksichtigung beider Terme.

Mit Hilfe des retardierten 1-Pionpropagators,

$$D_\pi(\omega_+, k) = \left(\omega_+^2 - m_\pi^2 - k^2 - \Sigma_\pi(\omega_+, k) \right)^{-1} , \quad (5.2)$$

($\omega_+ \equiv \omega + i\eta$, $\Sigma_\pi(\omega_+, k)$: Pionselbstenergie), kann der Quasiteilchen-Anteil geschrieben werden als

$$\Omega_\pi^Q(T) = -\frac{3}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{\pi} f^\pi(\omega) \operatorname{Im}\{\ln[-D_\pi^{-1}(\omega_+, k)] - D_\pi(\omega_+, k)\Sigma_\pi(\omega_+, k)\} \quad (5.3)$$

($f^\pi(\omega) = (\exp(\omega/T) - 1)^{-1}$: thermische Bosefunktion). Der Wechselwirkungs-Beitrag $\Omega_{\pi\pi}(T)$ ist die Summe aller sogenannter 'Skeleton'-Diagramme, die aus einer perturbativen Entwicklung der Streuamplitude hervorgehen. Im Rahmen des Matsubara-Formalismus ist der Beitrag von n -ter Ordnung Mesonaustausch gegeben durch

$$\Omega_{\pi\pi}^{(n)}(T) = \frac{3}{2} \frac{1}{4n} (-T) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{z_\nu} D_\pi(z_\nu, k) \Sigma_\pi^{(n)}(z_\nu, k) . \quad (5.4)$$

Graphisch entspricht dies dem Schließen der zwei externen Linien der Pionselbstenergie. Der Faktor $3/2$ resultiert aus der Spin-Isospin-Entartung der Pionen sowie der bei geschlossenen Boson-Loops erforderlichen Symmetrisierung. Der Faktor $1/4n$ kompensiert

die Mehrfachzählung identischer Diagramme, die durch die Anzahl der Möglichkeiten gegeben ist, aus den Diagrammen für $\Omega_{\pi\pi}(T)$ durch Schneiden einer 1-Pionlinie den n -ten Ordnungsbeitrag der Pionselfstenergie zu regenerieren, vgl. Abb. 5.2. Im Falle von $\pi\pi$ -

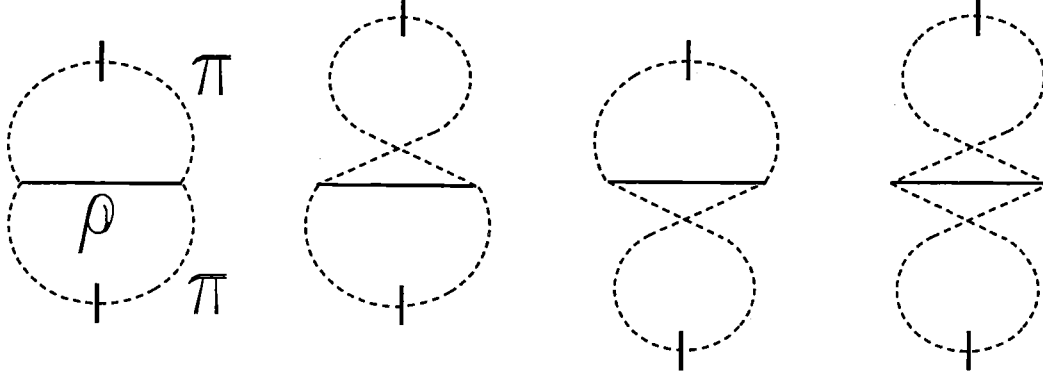


Abbildung 5.2: *Skeleton-Diagramme erster Ordnung für ρ -s-Kanal Austausch in der $\pi\pi$ -Wechselwirkung; die vertikalen Striche deuten die verschiedenen Möglichkeiten an, aus den geschlossenen Diagrammen einen 1.Ordnungsbeitrag zur 1-Pionselfstenergie zu regenerieren.*

Kontakt-Wechselwirkungen, wie sie in den Ref. [26, 95] betrachtet wurden, ist der korrekte Zählfaktor $1/2n$ aufgrund nicht vorhandener u -Kanal Austauschgraphen.

Wir wenden uns zunächst der Auswertung des 2-Teilchen-Wechselwirkungs-Beitrags $\Omega_{\pi\pi}(T)$ zu.

5.2.1 Unterste Ordnung von $\Omega_{\pi\pi}(T)$

In unterster Ordnung ($n=1$) wurde $\Omega_{\pi\pi}(T)$ bereits in Ref. [26] berechnet. Im Kontext eines Mesonaustauschmodells erhält man:

$$\Omega_{\pi\pi}^{(1)}(T) = \frac{3}{8} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} f^\pi(\omega) A_\pi(\omega, k) \times \int \frac{d\omega'}{2\pi} f^\pi(\omega') A_\pi(\omega', p) M_{\pi\pi}^{(1)}(\omega + \omega', k, p), \quad (5.5)$$

wobei $M_{\pi\pi}^{(1)}$ die Spin-Isospin gemittelte Vorwärts-Streuamplitude in erster Ordnung bezeichnet. Unter Benutzung der QPA für die Pion-Spektralfunktion,

$$A_\pi(\omega, k) = \frac{\pi}{e_k} [\delta(\omega - e_k) - \delta(\omega + e_k)], \quad (5.6)$$

kann Glg. (5.5) vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned} \Omega_{\pi\pi}^{(1)}(T) = & \frac{3}{8} \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^2} \int_{+1}^{-1} dx \frac{1}{2e_k} \frac{1}{2e_p} \times \\ & \{ M_{\pi\pi}^{(1)}(e_p + e_k, \vec{k}, \vec{p}) [f^\pi(e_k) f^\pi(e_p) + (f^\pi(e_k) + 1)(f^\pi(e_p) + 1)] \\ & + M_{\pi\pi}^{(1)}(e_k - e_p, \vec{k}, \vec{p}) [f^\pi(e_k)(f^\pi(e_p) + 1) + (f^\pi(e_k) + 1)f^\pi(e_p)] \} \end{aligned} \quad (5.7)$$

mit $x \equiv \cos \alpha$, $\alpha = \angle(\vec{k}, \vec{p})$ und den Quasiteilchenenergien e_k, e_p gemäß Glg. (4.53). Die rechte Seite (*rhs*) von Glg. (5.7) divergiert aufgrund der verschiedenen '1'-en in den Besetzungszahlfaktoren. Wie bei der Berechnung der Pionselfstenergie in Abschnitt 4.2.1 ist jedoch das thermodynamische Potential bei endlicher Temperatur relativ zum Vakuum zu definieren, d.h. wir subtrahieren seinen Wert bei $T = 0$. Dies wird approximativ durch Entfernen der '1'-en in Glg. (5.7) vollzogen [26] (vgl. auch die Anmerkung im Anschluß an Glg. (4.17)), so daß

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_{\pi\pi}^{(1)}(T) &\equiv \Omega_{\pi\pi}^{(1)}(T) - \Omega_{\pi\pi}^{(1)}(0) \\ &\approx \frac{3}{8} \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2 2e_k} \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^2 2e_p} 2f^\pi(e_k) f^\pi(e_p) \times \\ &\quad \int_{-1}^{+1} dx \{ M_{\pi\pi}^{(1)}(e_p + e_k, \vec{k}, \vec{p}) + M_{\pi\pi}^{(1)}(e_k - e_p, \vec{k}, \vec{p}) \} .\end{aligned}\quad (5.8)$$

Im folgenden werden wir die 'Tilde' nicht mehr mitschreiben und uns stets auf subtrahierte ('renormierte') Größen beziehen. Für praktische Rechnungen muß die $M_{\pi\pi}$ -Amplitude wieder ins 2-Pion-*CMS* transformiert werden, wie in Abschnitt 4.3.1 erläutert. Wir erhalten:

$$\Omega_{\pi\pi}^{(1)}(T) = \frac{3}{8} \int \frac{k dk}{(2\pi)^2 e_k} \int \frac{p dp}{(2\pi)^2 e_p} f^\pi(e_k) f^\pi(e_p) [I_A^{(1)} + I_B^{(1)}] \quad (5.9)$$

mit

$$I_{A/B}^{(1)} \equiv \int_{E_{min}^{A/B}}^{E_{max}^{A/B}} E dE M_{\pi\pi}^{(1)}(E, q, q) \quad (5.10)$$

entsprechend den Glgn. (4.45), (4.46).

5.2.2 Höhere Ordnungen von $\Omega_{\pi\pi}(T)$

Im Mesonaustauschbild wird die volle $M_{\pi\pi}$ -Amplitude durch Lösung der Lippmann-Schwinger-Gleichung (4.38) generiert. In einer schematischen Störungsreihe kann diese auch geschrieben werden als

$$\begin{aligned}M &= V + VGM \\ &= V + VGV + VGVGV + \dots \\ &\equiv M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)} + \dots\end{aligned}\quad (5.11)$$

Über die Born'sche Näherung hinaus, d.h. für $n \geq 2$, nimmt die M -Amplitude durch intermediäre on-shell 2-Pionzustände einen endlichen Imaginärteil an. Dementsprechend wird auch die Pionselfstenergie in n -ter Ordnung, $\Sigma_\pi^{(n)}$, eine komplexe Größe. Um Glg. (5.4) für $n \geq 2$ auszuwerten, wenden wir wieder ein Standard-Verfahren an, indem wir die Spektraldarstellungen von 1-Pionpropagator und Pionselfstenergie einsetzen,

$$D_\pi(z_\nu, k) = \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{A_\pi(\omega', k)}{z_\nu - \omega' + i\eta}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_\pi^{(n)}(z_\nu, k) &= - \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{2Im\Sigma_\pi^{(n)}(\omega, k)}{z_\nu - \omega + i\eta} - Re\Sigma_\pi^{(n)}(0, k) \\
&= - \int \frac{d\omega}{2\pi} 2Im\Sigma_\pi^{(n)}(\omega, k) \left(\frac{1}{z_\nu - \omega + i\eta} + \frac{\mathcal{P}}{\omega} \right). \quad (5.12)
\end{aligned}$$

Entsprechend den Untersuchungen in Abschnitt 4.2.1 muß die Dispersionsrelation für die Selbstenergie mit einer Subtraktion bei $\omega=0$ ergänzt werden.

Die Matsubara-Summe in Glg. (5.4) kann nun analytisch ausgeführt werden. Mit dem zu Glg. (4.15) analogen Ausdruck für $Im\Sigma_\pi^{(n)}(\omega_+, k)$ ergibt sich der Beitrag zum thermodynamischen Potential in n -ter Ordnung der $\pi\pi$ -Streuung zu

$$\begin{aligned}
\Omega_{\pi\pi}^{(n)}(T) &= -\frac{3}{2} \frac{1}{4n} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{dE'}{\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi} A_\pi(\omega', p) A_\pi(\omega, k) \times \\
&\quad ImM_{\pi\pi}^{(n)}(E', \vec{k}, \vec{p}) \frac{[f^\pi(\omega') - f^\pi(E')][\omega f^\pi(\omega) - (E' - \omega')f^\pi(E' - \omega')]}{(\omega_+ + \omega' - E')(E' - \omega')}. \quad (5.13)
\end{aligned}$$

Man beachte, daß der Imaginärteil der *rhs*, gegeben durch den δ -Funktionsanteil von $1/(\omega_+ + \omega' - E')$, identisch verschwindet (der zweite Besetzungszahlfaktor wird am Pol Null) – wie es auch sein sollte, da $\Omega_{\pi\pi}(T)$ eine reelle Größe ist. Nach Anwendung der QPA, Glg. (5.6), und Ausführen der trivialen Winkelintegrationen findet man

$$\begin{aligned}
\Omega_{\pi\pi}^{(n)}(T) &= -\frac{3}{2} \frac{1}{4n} \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2 2e_k} \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^2 2e_p} \int_{+1}^{-1} dx \int_0^\infty \frac{dE'}{\pi} ImM_{\pi\pi}^{(n)}(E', q, q) \times \\
&\quad 2[F^\pi(E', k, p) + G^\pi(E', k, p)] \quad (5.14)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
F^\pi(E', k, p) &= \frac{[f^\pi(e_p) - f^\pi(E')][e_k f^\pi(e_k) - (E' - e_p)f^\pi(E' - e_p)]}{(e_k + e_p - E')(E' - e_p)} \\
&\quad + \frac{[f^\pi(e_p) + f^\pi(E')][e_k f^\pi(e_k) - (E' + e_p)f^\pi(E' + e_p)]}{(e_k + e_p + E')(E' + e_p)} \\
G^\pi(E', k, p) &= -\frac{[f^\pi(e_p) - f^\pi(E')][e_k f^\pi(e_k) - (E' - e_p)f^\pi(E' - e_p)]}{(-e_k + e_p - E')(E' - e_p)} \\
&\quad + \frac{[f^\pi(e_p) + f^\pi(E')][e_k f^\pi(e_k) - (E' + e_p)f^\pi(E' + e_p)]}{(e_k - e_p - E')(E' + e_p)}. \quad (5.15)
\end{aligned}$$

Der zweite Term in F^π resultiert aus dem negativen Bereich der Integration über E' in Glg. (5.13). Er geht aus dem ersten Term hervor durch die Ersetzung $E' \rightarrow (-E')$ nebst Einführung eines Minuszeichens wegen $ImM_{\pi\pi}(-E' + i\eta) = -ImM_{\pi\pi}(E' + i\eta)$. Analog dazu erhält man die Funktion G^π aus F^π durch die Ersetzung $e_k \rightarrow (-e_k)$ mit zusätzlichem Minuszeichen aufgrund der Antisymmetrie der Pion-Spektralfunktion, Glg. (5.6). Da Glg. (5.13) völlig symmetrisch in den Viererimpulsen $(\omega, \vec{k})$, $(\omega', \vec{p})$ ist, ergibt sich ein Faktor 2 für den negativen Energieanteil von $A_\pi(\omega', p)$.

Man kann nicht erwarten, daß die Berechnung von $\Omega_{\pi\pi}^{(n)}(T)$ Ordnung für Ordnung zu einer konvergenten Reihe führt. Die Born'sche Reihe der Lippmann-Schwinger-Glg. (5.11)

konvergiert z.B. nicht, und obwohl bei der Summation des thermodynamischen Potentials,

$$\Omega_{\pi\pi}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{\pi\pi}^{(n)}(T) , \quad (5.16)$$

ein zusätzlicher Faktor $1/n$ auftritt, bedingt dies nicht notwendigerweise eine Veränderung des Konvergenzverhaltens der Reihe. Insbesondere die s-Kanal Polgraphen (d.h. genuine $\pi\pi$ -Resonanzen) erweisen sich als problematisch, da sie in jeder Ordnung $n \geq 2$ nicht-integrable Singularitäten aufweisen. Im folgenden Abschnitt werden wir diese im Detail untersuchen.

s-Kanal Polgraphen

Im Mesonaustauschmodell ist eine genuine Resonanz durch einen separablen Bornterm der Form

$$V_{\alpha}^{JI}(E', q_1, q_3) = v_{\pi\pi\alpha}(q_1) D_{\alpha}^{bare}(E') v_{\pi\pi\alpha}(q_3) \quad (5.17)$$

mit dem nackten Resonanz-Propagator

$$D_{\alpha}^{bare}(E') = \frac{1}{E'^2 - (m_{\alpha}^{(0)})^2} \quad (5.18)$$

charakterisiert, wobei $m_{\alpha}^{(0)}$ die nackte Masse der Resonanz α mit Spin-Isospin-Quantenzahlen JI bezeichnet. Die Vertexfunktionen $v_{\pi\pi\alpha}$ enthalten Kopplungskonstanten, Isospin- und Formfaktoren sowie kinematische Faktoren entsprechend der Spin-Impuls-Struktur der Kopplung (vgl. auch Anhang B).

Die Lippmann-Schwinger-Glg. (4.38) ist im Falle eines separablen Potentials [9] analytisch lösbar:

$$\begin{aligned} M_{\alpha}^{JI}(E', q_1, q_3) &= v_{\pi\pi\alpha}(q_1) D_{\alpha}^{bare}(E') v_{\pi\pi\alpha}(q_3) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\Sigma_{\alpha}(E')}{E'^2 - (m_{\alpha}^{(0)})^2} \right]^{n-1} \\ &= \frac{v_{\pi\pi\alpha}(q_1) v_{\pi\pi\alpha}(q_3)}{E'^2 - (m_{\alpha}^{(0)})^2 - \Sigma_{\alpha}(E')} , \end{aligned} \quad (5.19)$$

wobei

$$\Sigma_{\alpha}(E') = \int \frac{q^2 dq}{(2\pi)^2} v_{\pi\pi\alpha}(q)^2 G_{\pi\pi}(E', q) \quad (5.20)$$

für die durch Kopplung der Resonanz α an intermediäre $\pi\pi$ -Zustände (' $\pi\pi$ -Bubbles') generierte Selbstenergie steht. In Glg. (5.19) ist der Summationsindex so gewählt, daß $n=1$ dem Bornterm entspricht. Offensichtlich induziert der Beitrag n -ter Ordnung aus Glg. (5.19) einen Pol der Ordnung n bei der E' -Integration in Glg. (5.14), welche somit singulär wird. Andererseits bewirkt die unendliche Summe von $\pi\pi$ -Bubbles eine einfache 'Renormierung' des nackten Propagators, die zu einer Verschiebung der Peak-Position (durch $Re\Sigma_{\alpha}(E')$) sowie einer endlichen Resonanzbreite führt (durch $Im\Sigma_{\alpha}(E')$). Wie wir jetzt zeigen werden, impliziert dies die Möglichkeit, die $\Omega_{\pi\pi\alpha}^{(n)}(T)$ bis in alle Ordnungen

aufzusummieren und gleichzeitig das Auftreten von Divergenzen zu vermeiden. Die Auswertung von Glg. (5.16) für reine Resonanz-Streuung erfordert die Summation folgender Reihe:

$$\begin{aligned}
\Omega_{\pi\pi\alpha}(T) &\propto \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Im} M_{\pi\pi\alpha}^{(n)}(E', q, q) \\
&= v_{\pi\pi\alpha}(q)^2 D_{\alpha}^0(E') \text{Im} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\Sigma_{\alpha}(E')}{(E'^2 - (m_{\alpha}^{(0)})^2)} \right)^n \right] \\
&= v_{\pi\pi\alpha}(q)^2 \text{Im} \left[\frac{1}{\Sigma_{\alpha}(E')} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\Sigma_{\alpha}(E')}{(E'^2 - (m_{\alpha}^{(0)})^2)} \right)^n \right], \quad (5.21)
\end{aligned}$$

wobei wir eine Null in Form des ($n=1$ -) Bornterms hinzugefügt haben, der keinen Imaginärteil besitzt. Unter Benutzung der Identität

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (5.22)$$

können wir die Summe in Glg. (5.21) analytisch ausführen und erhalten so für das zugehörige thermodynamische Potential

$$\begin{aligned}
\Omega_{\pi\pi\alpha}(T) &= -\frac{3}{8} \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2 2e_k} \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^2 2e_p} \int_{+1}^{-1} dx \int_0^{\infty} \frac{dE'}{\pi} \frac{1}{2} SI(\alpha) v_{\pi\pi\alpha}(q)^2 \times \\
&\quad \text{Im} \left\{ \frac{(-1)}{\Sigma_{\alpha}(E')} \ln \left[1 - \frac{\Sigma_{\alpha}(E')}{E'^2 - (m_{\alpha}^{(0)})^2} \right] \right\} 2 [F^{\pi}(E', k, p) + G^{\pi}(E', k, p)] \quad (5.23)
\end{aligned}$$

mit dem Spin-Isospin-Gewichtsfaktor

$$SI(\alpha) = \frac{(2J+1)(2I+1)}{3} \quad (5.24)$$

und einem weiteren Faktor $1/2$ aus der Partialwellenzerlegung der $M_{\pi\pi}$ -Amplitude (siehe Glg. (B.4)).

Die numerische Berechnung von Glg. (5.23) im Jülich-Modell liefert jedoch unrealistisch hohe Werte. Eine genauere Untersuchung zeigt, daß bei festem Impuls k die dominanten Beiträge der p -Integration aus einem Impulsbereich $p \gtrsim 20$ GeV/c kommen. Der Grund dafür findet sich im schwachen Abschneideverhalten der (Dipol-) Formfaktoren,

$$F^{(s)}(q) = \left(\frac{2\Lambda_{\alpha}^2 + m_{\alpha}^2}{2\Lambda_{\alpha}^2 + 4\omega_q^2} \right)^2, \quad (5.25)$$

die in die Vertexfunktionen $v_{\pi\pi\alpha}(q)$ eingehen: Im Limes großer p -Werte, $p \gg k$, verhält sich der CMS -Impuls wie $q^2 \propto p$, so daß man in $v_{\pi\pi\alpha}(q)^2 \propto F(q)^2$ praktisch vier Potenzen im Impuls verliert. Man beachte dabei, daß die Besetzungszahlfaktoren F^{π} und G^{π} aus Glg. (5.15) Terme unabhängig von $f^{\pi}(e_p)$ enthalten, in denen somit keine 'thermische Unterdrückung' wirksam ist. Die theoretische Ursache dieses Problems besteht in der durch

die Einführung von Formfaktoren bedingten Verletzung der Lorentzinvarianz. Um derart unrealistische Beiträge hoher Impulse dennoch zu vermeiden, haben wir uns entschieden, an jedem Vertex die Ersetzung

$$F^{(s)}(q) \rightarrow \sqrt{F^{(s)}(k)F^{(s)}(p)} = \left(\frac{2\Lambda_\alpha^2 + m_\alpha^2}{2\Lambda_\alpha^2 + 4\omega_k^2} \right) \left(\frac{2\Lambda_\alpha^2 + m_\alpha^2}{2\Lambda_\alpha^2 + 4\omega_p^2} \right), \quad (5.26)$$

vorzunehmen. Auf diese Weise werden die relevanten Beiträge zu den Impulsintegrationen in Glg. (5.23) wieder auf den realistischen Bereich $p, k \lesssim \Lambda_\alpha$ eingeschränkt (z.B. ist $\Lambda_\rho^{(0)} = 3.3$ GeV im Lohse/Pearce-Modell).

t-Kanal Vektormeson-Austausch

Im Jülich-Modell wird der dominante Beitrag zur Niederenergie- $\pi\pi$ -Wechselwirkung durch t-Kanal ρ -Austausch vermittelt. Das zugehörige Pseudopotential ist von nicht-separabler Form

$$V_{\rho ex}^{JI}(E', q_1, q_3) = v_{\pi\pi\rho ex}(E', q_1, q_3) D_\rho(E', q_1, q_3), \quad (5.27)$$

mit dem effektiven ρ -t-Kanal Propagator

$$D_\rho(E', q_1, q_3) = \frac{1}{t - m_\rho^2}, \quad (5.28)$$

der 'renormierten' (physikalischen) Masse $m_\rho = 770$ MeV und dem Viererimpulsübertrag $t = (q_3^{(4)} - q_1^{(4)})^2$. Die Nicht-Separabilität verhindert sowohl eine analytische Lösung der Streugleichung (4.38) als auch eine geschlossene Summation des thermodynamischen Potentials, Glg. (5.16). Daher sind wir gezwungen, die t-Kanal Austausch-Beiträge zu $\Omega_{\pi\pi}(T)$ Ordnung für Ordnung zu berechnen. Daß wir dennoch ein realistisches Resultat erhalten können, verdanken wir den folgenden zwei Umständen:

- der ρ -t-Kanal Propagator, Glg. (5.28), weist keine Pole in dem für die Berechnung von $\Omega_{\pi\pi}^{(n)}(T)$ relevanten kinematischen Bereich auf; dies garantiert die Abwesenheit von Divergenzen Ordnung für Ordnung;
- wie es sich im Rahmen der in Abschnitt 5.3.3 diskutierten numerischen Resultate herausstellen wird, konvergiert die Reihe (5.16) im Falle der geschlossenen Leiter-summe relativ schnell (z.B. beträgt der 3.Ordnungs-Beitrag typischerweise nur noch 10% des Beitrags in 2.Ordnung).

Bei Auswerten von Glg. (5.14) mittels des Pseudopotentials Glg. (5.27) in der Störungsentwicklung Glg. (5.11) stoßen wir auf das gleiche Problem wie bei den Polgraphen: unrealistisch große Beiträge von sehr hohen Impulsen. Wir umgehen es auf analoge Weise, und zwar durch Ersetzung des in die Vertexfunktion aus Glg. (5.27) eingehenden Formfaktors in separabler Näherung:

$$F^{(t)}(q, q)^2 \rightarrow F(k)F(p). \quad (5.29)$$

Diese separable Form wurde so angepaßt, daß die ρ -Austausch Amplitude in 2.Ordnung zufriedenstellend reproduziert wird (wir haben uns numerisch davon überzeugt, daß Variationen im Rahmen dieser Anpassung keinen signifikanten Einfluß auf $\Omega_{\pi\pi\rho ex}^{(2)}(T)$ haben).

Eine weitere charakteristische Eigenschaft des Jülich-Modells besteht im Auftreten eines skalaren-isoskalaren Bindungszustandes im angekoppelten $K\bar{K}$ -Kanal, der durch attraktiven Vektormesonaustausch zwischen Kaon und Antikaon generiert und als $f_0(980)$ interpretiert wird (vgl. auch Abschnitt 2.4.1). Um diese resonanzartige Struktur in unsere Berechnung von $\Omega_{\pi\pi}(T)$ einzubeziehen, verfahren wir wie folgt: anstatt die Leiterdiagramme mit intermediären $K\bar{K}$ -Zuständen aufzusummieren, simulieren wir das $f_0(980)$ als genuine Resonanz, d.h. wir wählen entsprechende Resonanzparameter, so daß die volle $\delta_{\pi\pi}^{00}$ -Streuphase ohne Kopplung an den $K\bar{K}$ -Kanal reproduziert werden kann. Den voll iterierten Beitrag der $f_0(980)$ -Polgraphen zu $\Omega_{\pi\pi}(T)$ berechnen wir dann gemäß Glg. (5.23).

Bevor wir diesen Abschnitt beenden, müssen wir darauf hinweisen, daß jegliche Interferenzterme zwischen s-Kanal Polgraphen ('Bubble-Summe') und t-Kanal Austauschgraphen ('Leitersumme') vernachlässigt werden. Die folgenden zwei Argumente sprechen dafür, daß dies eine akzeptable Approximation liefert:

- in den resonanten Kanälen (z.B. im $JJ=11$ - $\rho(770)$ -Kanal oder $JJ=20$ - $f_2(1270)$ -Kanal) der $\pi\pi$ -Amplitude dominieren die jeweiligen Polgraph-Beiträge, so daß zu erwarten ist, daß der zusätzliche Einbezug von t-Kanal-Austausch Prozessen einen quantitativ kleinen Effekt in $\Omega_{\pi\pi}(T)$ bewirkt; z.B. ist im ρ - und f_2 -Kanal der t-Kanal ρ -Austausch attraktiv und führt in der kombinierten Bubble-Leitersumme (die aus der numerischen Lösung der Streugleichung hervorgeht) zu einer schwachen zusätzlichen 'Renormierung' der Resonanz. Unsere Resultate für $\Omega_{\pi\pi\rho}(T)$ und $\Omega_{\pi\pi f_2}(T)$ sollten daher als untere Abschätzung des 'exakten' Wertes angesehen werden. Für die (simulierte) $f_0(980)$ -Resonanz im $JJ=00$ -Kanal ist die Situation nicht so klar, aber wie die numerischen Resultate zeigen werden, ergibt die f_0 -Bubble-Summe selbst einen sehr kleinen Beitrag;
- wie bereits weiter oben erwähnt, konvergiert der ρ -t-Kanal Austausch in $\Omega_{\pi\pi}^{(n)}(T)$ sehr schnell, wobei die $(n+1)$ -te Ordnung nur noch typischerweise 10% der n -ten Ordnung beträgt.

5.2.3 Quasiteilchenbeiträge: $\Omega_{\pi}^Q(T)$

Für die Berechnung des Quasiteilchenanteils von $\Omega_{\pi}(T)$ werden wir uns ebenfalls der QPA, Glg. (5.6), bedienen. Wir folgen dabei im wesentlichen der Vorgehensweise aus Ref. [93]. Zunächst nutzen wir die analytische Eigenschaft des 1-Pionpropagators aus,

$$D_{\pi}(\omega_+, k) = D_{\pi}^*(\omega_-, k) , \quad (5.30)$$

um den negativen Energiebereich der ω -Integration in Glg. (5.3) zu transformieren. Unter Benutzung der für komplexe Zahlen z geltenden Identität

$$Im[\ln(z)] = -Im[\ln(z^*)] , \quad (5.31)$$

und nach Entfernen des divergenten Vakuum-Anteils (wie in Abschnitt 5.2.1 erklärt) erhält man

$$\Omega_{\pi}^Q(T) = -\frac{3}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} 2f^{\pi}(\omega) Im\{\ln[-D_{\pi}^{-1}(\omega_+, k)] - D_{\pi}(\omega_+, k)\Sigma_{\pi}(\omega_+, k)\} . \quad (5.32)$$

Den ersten Term in geschwungenen Klammern können wir mit Hilfe der Beziehung

$$\text{Im}[\ln(-D_\pi^{-1}(\omega_+, k))] = \pi \Theta[\text{Re} D_\pi^{-1}(\omega, k)] - \arctan \left[\frac{-\text{Im} \Sigma_\pi(\omega_+, k)}{\text{Re} D_\pi^{-1}(\omega, k)} \right] \quad (5.33)$$

umformen. Bei Vernachlässigung des Imaginärteils der Pionselbstenergie (was wir wie in Abschnitt 4.3.3 Schema 'a' nennen werden) vereinfacht sich Glg. (5.32) zu

$$\Omega_\pi^{Q,a}(T) = \frac{3}{2\pi^2} \int dk k^2 \{ T \ln(1 - e^{-e_k/T}) - \frac{1}{2e_k} f^\pi(e_k) \text{Re} \Sigma_\pi(e_k, k) \} . \quad (5.34)$$

Der erste Term entspricht dem Beitrag 'freier' Quasiteilchen mit modifizierter Dispersionsrelation $e_k = e(k)$, während der zweite Term durch ein dynamisch generiertes mittleres Feld ('mean field') entsteht. Deren qualitatives Verhalten deckt sich mit der anschaulichen Vorstellung, daß der Gasdruck, $p_\pi = -\Omega_\pi$, kleiner wird für schwerere Teilchen, aber größer bei repulsivem Mean Field ($\text{Re} \Sigma_\pi > 0$) und umgekehrt.

Bei Einbezug des endlichen Imaginärteils der Pionselbstenergie ($\equiv$ Schema 'b') treten in $\Omega_\pi^Q(T)$ weitere Terme auf:

$$\begin{aligned} \Omega_\pi^{Q,b}(T) = & \frac{3}{2\pi^2} \int dk k^2 \{ T \ln(1 - e^{-e_k/T}) - \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} f^\pi(\omega) \arctan \left[\frac{\text{Im} \Sigma_\pi((e_k)_+, k)}{\omega^2 - \omega_k^2 - \text{Re} \Sigma_\pi((e_k), k)} \right] \} \\ & + \frac{3}{2\pi^2} \int dk k^2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} f^\pi(\omega) \frac{\text{Im} \Sigma_\pi((e_k)_+, k)(\omega^2 - \omega_k^2)}{[\omega^2 - e_k^2]^2 + [\text{Im} \Sigma_\pi((e_k)_+, k)]^2} . \end{aligned} \quad (5.35)$$

Wir werden wieder beide Approximationsschemen in unseren numerischen Rechnungen diskutieren.

5.3 Thermodynamische Zustandsgrößen und numerische Resultate

5.3.1 Druck, Energie und Entropie

Aus dem thermodynamischen Potential lassen sich die Zustandsvariablen, Druckdichte $p(T)$, Entropiedichte $s(T)$ und Energiedichte $\epsilon(T)$, über die thermodynamischen Standardrelationen bei verschwindendem chemischen Potential ableiten:

$$p(T) = -\Omega(T) \quad (5.36)$$

$$s(T) = -\frac{\partial \Omega(T)}{\partial T} \quad (5.37)$$

$$\epsilon(T) = T s(T) - p(T) . \quad (5.38)$$

Wie in den Ref. [94, 93] erläutert, wirkt die partielle Temperatur-Ableitung aufgrund der Stationaritätsbedingung

$$\frac{\delta \Omega}{\delta \Sigma} = 0 \quad (5.39)$$

nur auf die explizite Temperaturabhängigkeit in den Besetzungszahlfaktoren. Somit erhalten wir für die Quasiteilchenbeiträge zur Entropie aus Glg. (5.34):

$$s_{\pi}^{Q,a}(T) = \frac{3}{2\pi^2} \int dk k^2 \{ (1 + f^{\pi}(e_k)) \ln(1 + f^{\pi}(e_k)) - f^{\pi}(e_k) \ln(f^{\pi}(e_k)) - \frac{1}{2e_k} \frac{\partial f^{\pi}(e_k)}{\partial T} \text{Re} \Sigma_{\pi}(e_k, k) \} , \quad (5.40)$$

bzw. bei Berücksichtigung einer endlichen Pionbreite aus Glg. (5.35):

$$s_{\pi}^{Q,b}(T) = \frac{3}{2\pi^2} \int dk k^2 \{ (1 + f^{\pi}(e_k)) \ln(1 + f^{\pi}(e_k)) - f^{\pi}(e_k) \ln(f^{\pi}(e_k)) - \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} \frac{\partial f^{\pi}(\omega)}{\partial T} \arctan \left[\frac{\text{Im} \Sigma_{\pi}(e_k, k)}{\omega^2 - \omega_k^2 - \text{Re} \Sigma_{\pi}(e_k, k)} \right] + \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} \frac{\partial f^{\pi}(\omega)}{\partial T} \frac{\text{Im} \Sigma_{\pi}(e_k, k)(\omega^2 - \omega_k^2)}{(\omega^2 - e_k^2)^2 + (\text{Im} \Sigma_{\pi}(e_k, k))^2} \} , \quad (5.41)$$

was konsistent ist mit den in Ref. [93] angegebenen Ausdrücken. In unserem Kontext von Mesonaustausch-Wechselwirkungen ergibt sich für die Skeletonbeiträge zur Entropie (in Ref. [93] mit $-\partial\Phi/\partial T$ bezeichnet):
in unterster Ordnung aus Glg. (5.9)

$$s_{\pi\pi}^{(1)}(T) = -\frac{3}{8} \int \frac{kdk}{(2\pi)^2 e_k} \int \frac{pdp}{(2\pi)^2 e_p} [I_A^{(1)} + I_B^{(1)}] \left[\frac{\partial f^{\pi}(e_k)}{\partial T} f^{\pi}(e_p) + f^{\pi}(e_k) \frac{\partial f^{\pi}(e_p)}{\partial T} \right] , \quad (5.42)$$

für höhere Ordnungen im t-Kanal ρ -Austausch aus Glg. (5.14):

$$s_{\pi\pi}^{(n)}(T) = -\frac{3}{2} \frac{1}{4n} \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2 2e_k} \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^2 2e_p} \int_{+1}^{-1} dx \int_0^{\infty} \frac{dE'}{\pi} \text{Im} M_{\pi\pi}^{(n)}(E', q, q) \times 2 \left[\frac{\partial F^{\pi}(E', k, p)}{\partial T} + \frac{\partial G^{\pi}(E', k, p)}{\partial T} \right] \quad (5.43)$$

und einem analogen Ausdruck $s_{\pi\pi\alpha}(T)$ für die s-Kanal Polgraphen aus Glg. (5.23). Die Energiedichte ergibt sich in trivialer Weise aus Glg. (5.38).

Um unsere Resultate bzgl. thermodynamischer Konsistenz zu prüfen, werden wir auch noch einen alternativen Weg zur Berechnung der Druckdichte beschreiten, und zwar durch Integration von Glg. (5.37):

$$p_{\pi}(T) = \int_0^T dT' s_{\pi}(T') . \quad (5.44)$$

Für die in die thermodynamischen Zustandsgrößen eingehenden $\pi\pi$ -Streuamplituden und Pionselbstenergie ziehen wir die im selbstkonsistenten Brueckner-Schema ermittelten Resultate aus Abschnitt 4.3.3 heran. Zur Reduzierung der numerischen Komplexität des Problems beschränken wir uns dabei auf die QPA in den Schemen 'a' bzw. 'b' (entsprechend den Glgn. (4.55) und (4.56) bzw. (4.57)), die sich als akzeptable Approximation an die 'exakten' off-shell Rechnungen erwiesen haben.

5.3.2 Numerische Resultate auf Brueckner-Niveau

Bei vorgegebener Temperatur und verschwindendem chemischen Potential ($\mu_\pi = 0$) berechnen wir selbstkonsistent die in-Medium $\pi\pi$ -Streuamplitude und Pionselbstenergie, die dann zur Ermittlung der verschiedenen Beiträge zum thermodynamischen Potential weiterverwendet werden; im einzelnen sind dies:

- (i) die Skeleton-Diagramme in unterster Ordnung, Glg. (5.9);
- (ii) die Resonanz- $\pi\pi$ -Bubble-Summe in allen Ordnungen, Glg. (5.23), für die Resonanzen $\alpha = \rho(770), f_2(1270)$ und die simulierte $f_0(980)$;
- (iii) die Skeleton-Diagramme des t-Kanal ρ -Austausches in 2. und 3.Ordnung gemäß Glg. (5.14);
- (iv) die Quasipion-Beiträge gegeben durch Glg. (5.34) bzw. (5.35).

Wir konzentrieren uns zunächst auf Schema 'a', in dem der Imaginärteil der Pionselbstenergie vernachlässigt wird. Die vollen Resultate für Druck-, Entropie- und Energiedichte (durchgezogene Linien) sind in Abb. 5.3 mit den Resultaten für freie Pionen (strichpunktierte Linien), freie ρ -Mesonen (punktierte Linien) sowie deren Summe (strichdoppelt-punktierte Linien) verglichen. Zuerst merken wir an, daß der Quasiteilchenanteil, Glg. (5.34), bei allen Temperaturen auf ca. 1% genau mit der EoS für freie Pionen,

$$\Omega_\pi^{free}(T) = \frac{3T}{2\pi^2} \int dk k^2 \ln(1 - e^{-\omega_k/T}) , \quad (5.45)$$

übereinstimmt. Die Ursache dafür liegt in einer Kompensation des Mean-Field-Beitrags (2.Term in Glg. (5.34)) mit der kinematischen Modifikation $\omega_k \rightarrow e_k$ in der e -Funktion des ersten Terms. Aber auch die absolute Größe dieser beiden 1-Pion-Medium-Modifikationen für sich beläuft sich bei allen Temperaturen auf weniger als 5% des freien Gases. Dieses Verhalten steht im Widerspruch zu den Resultaten aus Ref. [26], wo eine mit wachsender Temperatur stärker werdende Reduktion der thermodynamischen Zustandsgrößen relativ zum freien Gas gefunden wurde. Diese Reduktion entsteht durch einen Anstieg der in-Medium Pionmasse, der zu einer dominanten Unterdrückung des $\ln$ -Terms in Glg. (5.34) führt. Der Anstieg der Pionmasse wiederum liegt in der Netto-Repulsion der durch die Weinberg-Lagrangedichte gegebenen Niederenergie- $\pi\pi$ -Wechselwirkung begründet (z.B. beträgt die zugehörige Spin-Isospin-gewichtete Summe der s-Wellen Born-amplitude [die on-shell mit dem nicht-linearen σ -Modell übereinstimmt, vgl. Glg. (2.53)] an der 2-Pionschwelle: $M_{\pi\pi}^{J=0}(s = 4m_\pi^2) = M_{\pi\pi}^{00}(s = 4m_\pi^2) + 5M_{\pi\pi}^{02}(s = 4m_\pi^2) = 3m_\pi^2/f_\pi^2$, also repulsiv). In unserer Analyse erweist es sich jedoch als wichtig, sowohl den Bereich höherer Energien (im wesentlichen bis 1 GeV 2-Pion-*CMS*-Energie) als auch höhere Partialwellen der $\pi\pi$ -Wechselwirkung einzubeziehen. Die resonante p-Welle trägt z.B. signifikant zu $Re\Sigma_\pi(e_k, k)$ bei, während in s- und d-Welle starke Kompensationseffekte zwischen den attraktiven $I=0$ - und repulsiven $I=2$ -Kanälen auftreten [25, 79].

Kommen wir nun zur Diskussion der Skeleton-Diagramme. Der Effekt der Graphen in erster Ordnung, Glg. (5.9), ist klein: deren kombinierter Beitrag ist weniger als 1% von

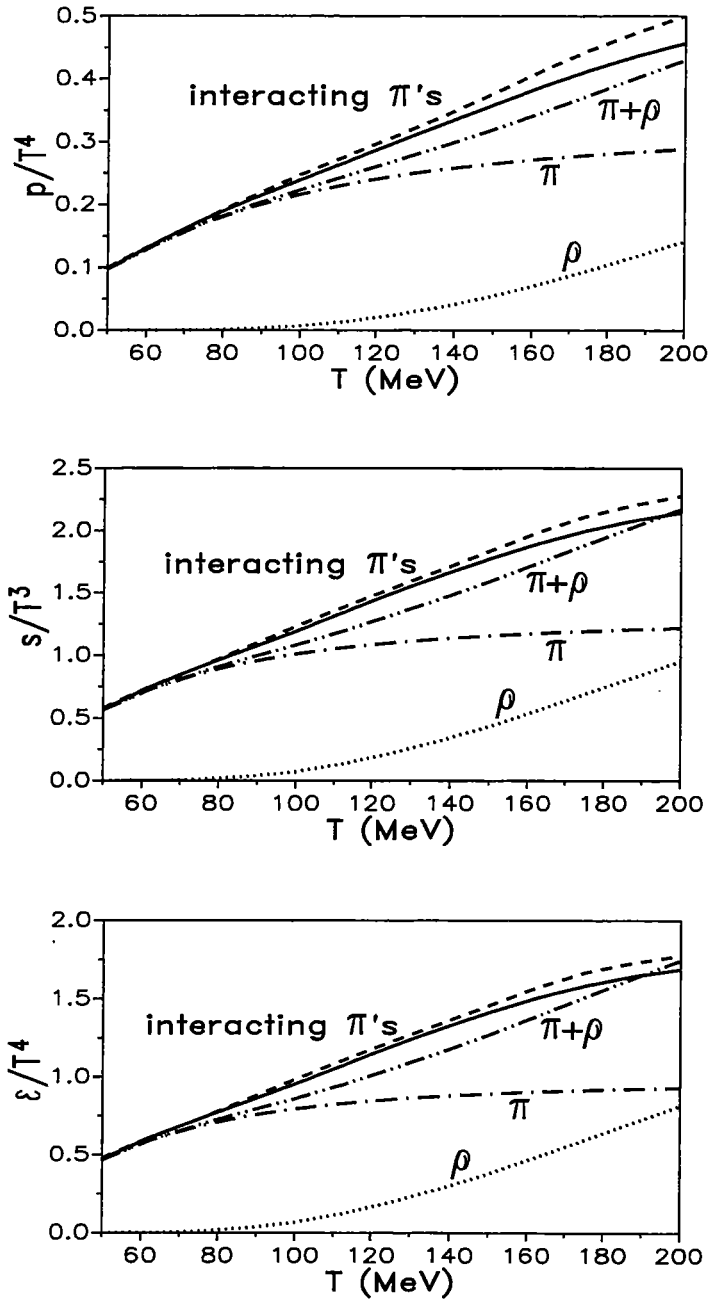


Abbildung 5.3: Druck-, Entropie- und Energiedichte des heißen Piongases ($\mu_\pi=0$) im Brueckner-Schema in QPA bei Vernachlässigung (Schema 'a': durchgezogene Linien) und Einbezug (Schema 'b': gestrichelte Linien) einer endlichen Pionbreite; gepunktete, strich-punktete und strich-doppelt-punktete Linien sind für freie π - und ρ -Mesonen.

T [MeV]	$p_{\pi\pi\rho}/p_{\pi}^{free}$	$s_{\pi\pi\rho}/s_{\pi}^{free}$	$\epsilon_{\pi\pi\rho}/\epsilon_{\pi}^{free}$
150	26%	41%	45%
200	43%	56%	60%

Tabelle 5.1: Beiträge der ρ -Polgraph Skeletondiagramme zu den thermodynamischen Zustandsgrößen eines wechselwirkenden heißen Piongases auf Brueckner-Niveau bei Vernachlässigung der Pionbreite.

$\Omega_{\pi}^{free}(T)$ im betrachteten Temperaturbereich. Die wichtigste Rolle spielen die s-Kanal ρ -Polgraphen, siehe Tab. 5.1. Es ist bemerkenswert, daß der G^{π} -Term in Glg. (5.23), der aus dem negativen Bereich der ω -Integration in Glg. (5.13) hervorgeht, fast die Hälfte des Beitrags zu $p_{\pi\pi\rho}(T)$, $s_{\pi\pi\rho}(T)$ und $\epsilon_{\pi\pi\rho}(T)$ ausmacht. Ohne diesen liegen unsere Werte für $p_{\pi\pi\rho}(T)$, $s_{\pi\pi\rho}(T)$ und $\epsilon_{\pi\pi\rho}(T)$ etwas unter denen eines freien ρ -Gases, $p_{\rho}^{free}(T)$, $s_{\rho}^{free}(T)$ und $\epsilon_{\rho}^{free}(T)$ (gepunktete Linien in Abb. 5.3). Dies bestätigt im Prinzip die Resultate aus Ref. [25], daß die p-Wellen $\pi\pi$ -Wechselwirkung der Präsenz freier ρ -Mesonen gleichkommt, wobei die leichte Reduktion in unserem Fall dem Anstieg der in-Medium-Breite des ρ -Mesons und den vernachlässigten Interferenzen mit t-Kanal ρ -Austausch-Diagrammen zugeschrieben werden kann.

Der Einfluß weiterer $\pi\pi$ -Resonanzen ist klein: bei $T=200$ MeV ist $p_{\pi\pi f_2} = 3.8\% p_{\pi}^{free}$, $p_{\pi\pi f_0} = 0.3\% p_{\pi}^{free}$, und ähnlich für Entropie- und Energiedichte. Ein etwas größerer Beitrag entsteht durch den ρ -t-Kanal Austausch in 2.Ordnung, vgl. Tab. 5.2. In 3.Ordnung

T [MeV]	$p_{\pi\pi\rho ex}^{(2)}/p_{\pi}^{free}$	$s_{\pi\pi\rho ex}^{(2)}/s_{\pi}^{free}$	$\epsilon_{\pi\pi\rho ex}^{(2)}/\epsilon_{\pi}^{free}$
150	7.0%	8.5%	8.9%
200	9.8%	11.2%	11.7%

Tabelle 5.2: Beiträge der Skeleton-Diagramme des ρ -t-Kanal Austausches in 2.Ordnung zu den thermodynamischen Zustandsgrößen eines wechselwirkenden heißen Piongases auf Brueckner-Niveau bei Vernachlässigung der Pionbreite.

sind die Werte bereits um eine Größenordnung kleiner.

Das Gesamtbild, das sich für die Temperaturabhängigkeit der thermodynamischen Zustandsvariablen ergibt, ist für alle drei sehr ähnlich: von Temperaturen $T \geq 100$ MeV an erkennt man einen beträchtlichen Anstieg der selbstkonsistent berechneten Druck-, Entropie- und Energiedichte des wechselwirkenden Gases relativ zu freien Pionen, die sogar die Werte eines nicht-wechselwirkenden Gases thermischer π - und ρ -Mesonen überschreitet. Diese Überhöhung resultiert aus Beiträgen negativer Energien, die in natürlicher Weise aus unserem Formalismus hervorgehen, sowie aus Niederenergie-t-Kanal-Austausch eines virtuellen ρ -Mesons zwischen zwei Pionen. Bei sehr hohen Temperaturen $T > 200$ MeV wird die thermische Verbreiterung der ρ -Resonanz so groß, daß diese nicht mehr länger das thermodynamische Verhalten freier ρ -Mesonen simuliert: Entropie und Energie fallen unterhalb die Werte eines freien π - ρ -Gases ab (es sei hier noch einmal daran erinnert, daß im Beth-Uhlenbeck-Formalismus [92, 82] eine hinreichend scharfe 2-Teilchenresonanz thermodynamisch einer unabhängigen Spezies entsprechend den Quantenzahlen der Resonanz

gleichkommt).

Bei Berücksichtigung einer endliche Breite, $Im\Sigma_\pi$, für die Quasipionen ($\equiv$ Schema 'b') beobachten wir über den gesamten Temperaturbereich eine leichte Überhöhung der thermodynamischen Zustandsgrößen (gestrichelte Linien in Abb. 5.3) im Vergleich zu den Resultaten ohne Einschluß von $Im\Sigma_\pi$. Die Hauptquelle dieses Anstiegs sind die ρ -t-Kanal Skeleton-Diagramme in 2.Ordnung, die ρ -Polgraph Skeleton-Diagramme und die Quasiteilchen-Beiträge, Glg. (5.35), vgl. Tab. 5.3.

	$p_{\pi\pi\rho\pi}^{(2)}/p_\pi^{free}$	$p_{\pi\pi\rho}/p_\pi^{free}$	p_π^Q/p_π^{free}	p_π^{tot}/p_π^{free}
$Im\Sigma_\pi \equiv 0$	9.8%	43%	99.8%	158.4%
$Im\Sigma_\pi < 0$	13.3%	46.6%	107.6%	173.7%

Tabelle 5.3: Verschiedene Beiträge zur Druckdichte eines wechselwirkenden Piongases im Brueckner-Schema bei $T = 200$ MeV mit (untere Zeile) und ohne (obere Zeile) Einbezug einer endlichen Pionbreite.

Im Falle der Skeleton-Diagramme beruht dieser Anstieg auf der Tatsache, daß $ImM_{\pi\pi}(E')$ einen nicht-verschwindenden Imaginärteil unterhalb der (in-Medium) 2-Pionschwelle annimmt; das E' -Integral in Glgn. (5.14), (5.23) erhält so einen zusätzlichen Beitrag, der praktisch die ganze Abweichung zu Schema 'a' ausmacht (tatsächlich führt die energieunabhängige Breite, wie wir sie im Rahmen von Schema 'b' verwenden, zu einem endlichen Wert von $ImM_{\pi\pi}(E' = 0)$, was in Verbindung mit dem Bosefaktor $f^\pi(E')$ in Glg. (5.15) eine Singularität in der E' -Integration von Glg. (5.14) für $E' \rightarrow 0$ zur Folge hat; um dies zu verhindern, haben wir für kleine E' einen Unterdrückungsfaktor eingeführt, den wir in Anlehnung an die vollen off-shell Resultate aus Abschnitt 4.3.3 bestimmt haben; auf gleiche Weise haben wir die in Glg. (5.35) auftretende Divergenz für $\omega \rightarrow 0$ behandelt).

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem Test unserer numerischen Resultate bzgl. thermodynamischer Konsistenz. Dazu berechnen wir erneut die Druckdichte, diesmal jedoch durch Integration der Entropiedichte gemäß Glg. (5.44), was einer impliziten Überprüfung der Stationaritätsbeziehung (5.39) gleichkommt. Wie aus Abb. 5.4 ersichtlich, besteht eine sehr gute Übereinstimmung des so ermittelten $p_\pi(T)$ mit der 'direkten' Rechnung bei Vernachlässigung der Pionbreite (Schema 'a'). Bei Einbezug eines endlichen $Im\Sigma_\pi$ (Schema 'b') sind die aus Glg. (5.44) resultierenden Werte für die Druckdichte etwas kleiner (bis zu 5%) als in der 'direkten' Rechnung, wodurch ungefähr die Hälfte der Überhöhung im Vergleich zu Schema 'a' verloren geht. Wie bei der Diskussion der verschiedenen Approximationsstufen der QPA in Abschnitt 4.3.3 erweist sich somit auch im Rahmen des thermodynamischen Formalismus' die komplette Vernachlässigung der Pionbreite als die zuverlässigere Näherung.

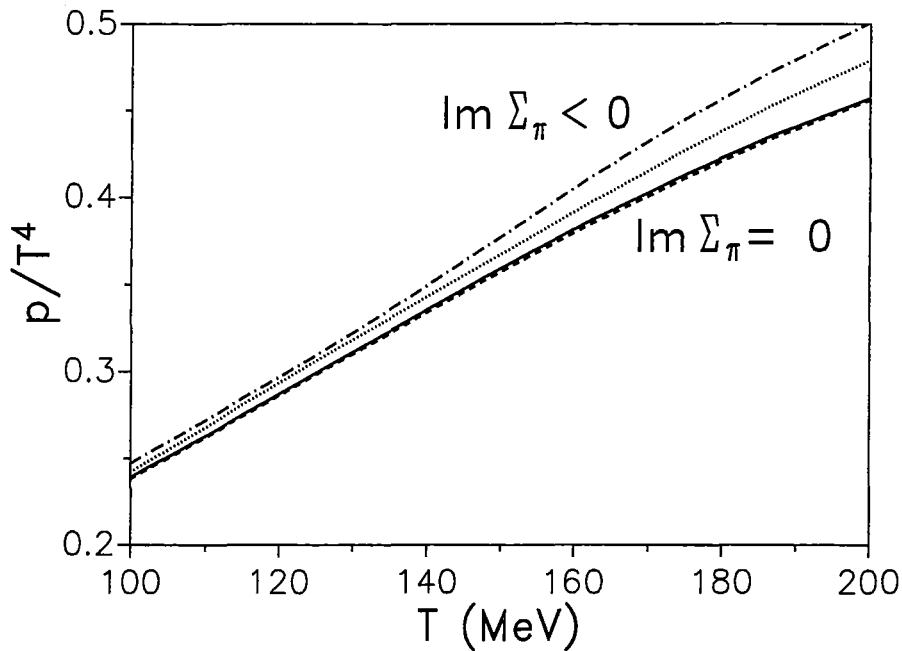


Abbildung 5.4: Test der thermodynamischen Konsistenz im heißen Piongas durch unterschiedliche Berechnung der Druckdichte: (i) 'direkte' Rechnung, d.h. die Summe der Glgn. (5.9), (5.14), (5.23) und (5.34) bzw. (5.35) (durchgezogene bzw. strichpunktierte Linie), (ii) Integration der Entropiedichte gemäß Glg. (5.44) (gestrichelte bzw. gepunktete Linie); die beiden unteren Linien sind ohne, die beiden oberen mit einer endlichen Pionbreite berechnet.

5.4 Zustandsgleichung bei chiraler Restauration

In den Rechnungen des vorangegangenen Abschnitts wurden keine Medium-Effekte im Wechselwirkungskern der $\pi\pi$ -Streugleichung vorgenommen. Da unser $\pi\pi$ -Modell auf explizitem (Vektor-) Mesonaustausch basiert, sind bei endlicher Dichte/Temperatur jedoch auch Modifikationen des Propagators der ausgetauschten Mesonen (bzw. der Wechselwirkungsvertizes) zu erwarten. Das einfachste Beispiel einer solchen Modifikation besteht in der Berücksichtigung des 'Brown-Rho Scaling', wie bereits in den Abschnitten 3.4 und 4.3.4 durchgeführt. In diesem Abschnitt untersuchen wir die Auswirkungen der chiralen Restauration bei endlicher Temperatur auf die Zustandsgleichung eines wechselwirkenden Piongases. Dazu führen wir (wie in Abschnitt 4.3.5) das Skalengesetz Glg. (4.63) in die Pseudopotentiale der $\pi\pi$ -Wechselwirkung ein. Eine möglichst realistische Beschreibung der dadurch induzierten, beträchtlichen Modifikationen, insbesondere im Bereich der 2-Pionschwelle, erfordert die Berücksichtigung der chiralen Symmetrieeigenschaften der $\pi\pi$ -Wechselwirkung. Im σ -Kanal finden so z.B. Kompensationseffekte

zwischen der Verstärkung des attraktiven (t-Kanal) Austausches eines ρ -Mesons und einer erhöhten Repulsion in $\pi\pi$ -Kontaktwechselwirkungen statt. Andererseits läßt der Einfluß chiraler 'Constraints' auf die $\pi\pi$ -Streuamplitude genügend oberhalb der 2-Pionschwelle (ab $E \simeq 400$ MeV) schnell nach. Dies rechtfertigt die Verwendung des (nicht chiralsymmetrischen) Modells von Lohse/Pearce im vorangegangenen Abschnitt, in dem die Piongas-Brueckner-Rechnungen nur zu sehr moderaten Schwelleneffekten führten.

Für die folgende Untersuchung wählen wir eine chiral verbesserte Version des Mesonaustauschmodells, die in Abschnitt 2.6 bzw. Ref. [55] vorgestellt wurde. Aufgrund der zusätzlichen $\pi\pi$ -Kontaktwechselwirkungen in der zugehörigen chiral invarianten Lagrangedichte treten weitere Beiträge zum thermodynamischen Potential $\Omega_\pi(T)$ auf. Diese können ohne weiteres in den Quasiteilchenanteil $\Omega_\pi^Q(T)$ sowie den Wechselwirkungsanteil in unterster Ordnung, $\Omega_{\pi\pi}^{(1)}(T)$, einbezogen werden; für $\Omega_{\pi\pi}^{(n)}(T)$ berücksichtigen wir alle Beiträge bis in zweite Ordnung, d.h.

- ρ -Austausch in zweiter Ordnung, gegeben durch Glg. (5.14) für $n=2$ mit

$$\frac{1}{8} \text{Im} M_{\pi\pi}^{(2)} = \frac{1}{8} V_{\rho ex} \text{Im} G_{\pi\pi} V_{\rho ex} , \quad (5.46)$$

wobei wir explizit den Entartungsfaktor $1/4n$ mitgeschrieben haben;

- Kontaktwechselwirkungen in zweiter Ordnung, ebenfalls gegeben durch Glg. (5.14), aber mit Ersetzung des Entartungsfaktor $\frac{1}{8}$ durch $\frac{1}{4}$ aufgrund nicht vorhandener Austauschgraphen (vgl. die Bemerkungen im Anschluß an Glg. (5.4)):

$$\frac{1}{4} \text{Im} M_{\pi\pi}^{(2)} = \frac{1}{4} V_{cont} \text{Im} G_{\pi\pi} V_{cont} ; \quad (5.47)$$

- ρ -Austausch in erster Ordnung plus Kontaktwechselwirkungen in erster Ordnung; in diesem Fall beträgt der entsprechende Entartungsfaktor $\frac{1}{6}$:

$$\frac{1}{6} \text{Im} M_{\pi\pi}^{(2)} = \frac{1}{6} V_{cont} \text{Im} G_{\pi\pi} V_{\rho ex} . \quad (5.48)$$

Numerisch erweisen sich höhere Ordnungen erneut als vernachlässigbar. Um eine einheitliche Behandlung der Kontaktwechselwirkungen zu ermöglichen, benutzen wir einen gemeinsamen Formfaktor (mit Cutoff $\Lambda_c=700$ MeV) für alle drei Typen von Kontakttermen (vgl. Abschnitt 2.6).

Bei Berechnung der Zustandsgleichung im chiral verbesserten Jülich-Modell im Brueckner-Schema (d.h. ohne Einschluß des Brown-Rho-Scaling) unterscheiden sich die Resultate für Druck-, Entropie- und Energiedichte um weniger als 5% von denen des vorherigen Abschnitts, was noch einmal die Behauptung bestätigt, daß die chirale Symmetrie nur einen geringen Einfluß auf die $\pi\pi$ -Wechselwirkung hat, solange keine starken Schwelleneffekte auftreten.

Kommen wir nun zum Szenario unter Einbezug der chiralen Restauration: der Einfachheit halber vernachlässigen wir hier den $K\bar{K}$ -Kanal, dessen Beiträge sich im vorigen Abschnitt als sehr klein herausgestellt haben; ansonsten gehen wir genauso vor wie in Abschnitt 4.3.5

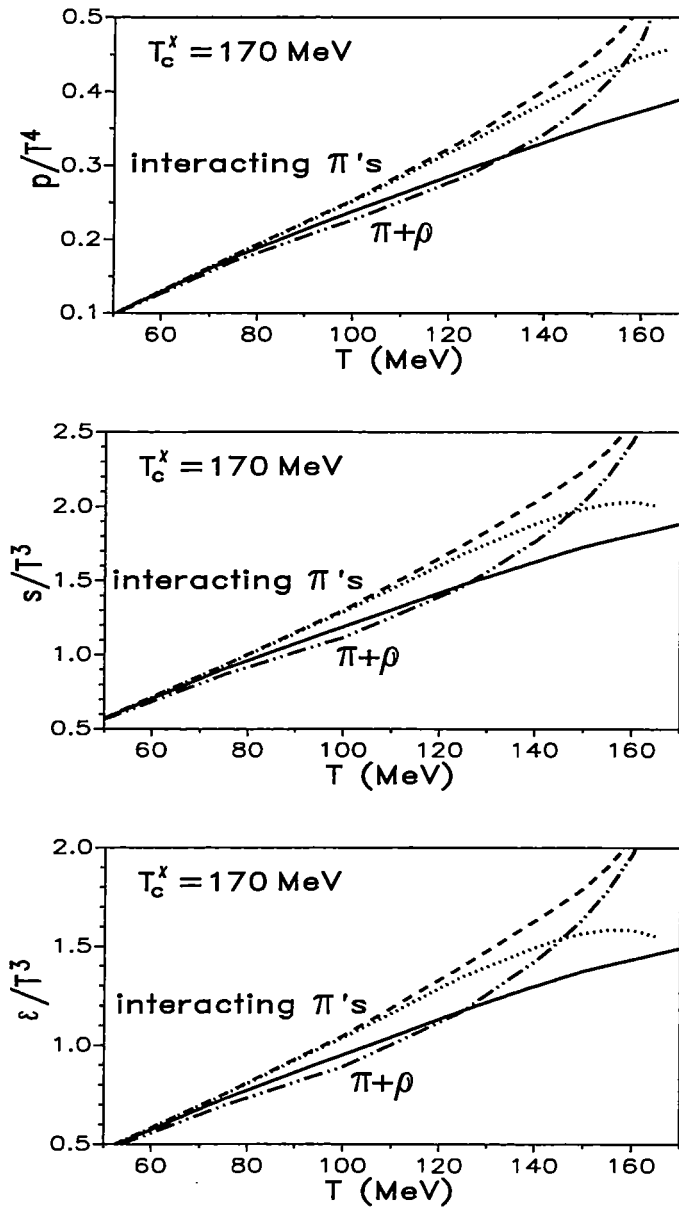


Abbildung 5.5: Druck-, Entropie- und Energiedichte eines heißen Piongases ($\mu_\pi=0$, endliche Pionbreite vernachlässigt) bei chiraler Restauration, charakterisiert durch das Brown-Rho-Scaling von $m_\rho(T)$, $f_\pi(T)$, $\Lambda_\rho(T)$ etc. (gepunktete Linien); bei Berechnung der gestrichelten Linien wurde auf eine Skalierung der Cutoffs Λ_ρ verzichtet; volle Linien: Brueckner-Resultate aus dem vorigen Abschnitt; strich-doppelt-punktierte: freies π - ρ -Gas mit skaliertem ρ -Masse.

geschildert (Skalierung von $m_\rho(T)$, $f_\pi(T)$ und $\Lambda_\rho(T)$ gemäß der Vorschrift (4.63) sowie Adjustierung von $m_\rho^{(0)}(T)$, so daß die s-Kanal ρ -Resonanz in der voll iterierten $M_{\pi\pi}^{11}$ -Amplitude bei $E = m_\rho(T)$ auftritt); bei vorgegebener Temperatur T und chemischem Potential $\mu_\pi=0$ berechnen wir selbstkonsistent $M_{\pi\pi}$ -Amplitude und Pionselbstenergie und ermitteln daraus $\Omega_\pi(T)$ wie in Abschnitt 5.2 erläutert (wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf Schema 'a', d.h. vernachlässigen jeglichen Imaginärteil der Pionselbstenergie, was sich als zuverlässigste Näherung erwiesen hat). Die resultierenden Druck-, Entropie- und Energiedichten (gepunktete Linien) im Vergleich zum freien π - ρ -Gas (mit entsprechender Skalierung der freien ρ -Masse; strich-doppelt-punktierte Linien) zeigt Abb. 5.5. Wir finden erneut, daß die Zustandsgleichung des wechselwirkenden Gases in etwa mit der eines freien π - ρ -Gases übereinstimmt, wobei für Temperaturen $T \leq 150$ MeV eine bis zu 15%-ige Überhöhung durch vom ρ -Polgraph verschiedene $\pi\pi$ -Wechselwirkungen verursacht wird. Ab $T \simeq 150$ MeV übersteigen die Werte für $p_\pi(T)$, $s_\pi(T)$ und $\epsilon_\pi(T)$ im freien π - ρ -Gas die des wechselwirkenden Piongases. Die Ursache hierfür ist die folgende: die Reduktion des Cutoff-Parameters (sowie der physikalischen ρ -Masse) im Formfaktor des s-Kanal Polgraphen, Glg. (5.26), schwächt die Kopplung der 2-Pionzustände an das nackte ρ -Meson ab, so daß der Haupteffect der $\pi\pi$ -Wechselwirkung in den thermodynamischen Zustandsgrößen (trotz gleichzeitiger Reduktion der nackten ρ -Masse) unterdrückt wird (im Grenzfall $T \rightarrow T_c^\chi$ gilt $\Lambda_\rho(T), m_\rho(T) \rightarrow 0$ und somit $\Omega_{\pi\pi\rho}(T_c^\chi)=0$). Das Bild wandelt sich, wenn wir auf eine Skalierung der Formfaktor-Cutoffs (in ρ -Austausch und -Polgraphen) verzichten (bei entsprechend geringerer Reduktion der nackten Masse $m_\rho^{(0)}(T)$, so daß das Maximum der $M_{\pi\pi}$ -Amplitude nach wie vor bei $m_\rho(T)$ auftritt): hier sorgt die anhaltend starke $\pi\pi\rho$ -Kopplung für einen fortgesetzten Anstieg von $p_\pi(T)$, $s_\pi(T)$ und $\epsilon_\pi(T)$ für $T \rightarrow T_c^\chi$ (gestrichelte Linien in Abb. 5.5); allerdings beobachten wir auch in diesem Fall, daß die Überhöhung im Vergleich zum freien π - ρ -Gas nahe T_c^χ nachläßt. Das liegt hier jedoch an der Tatsache, daß die Renormierung des vollen ρ -Propagators erhebliche Beiträge vom nunmehr stark attraktiven t-Kanal Austausch eines ρ -Mesons mit Masse $m_\rho(T)$ erhält. Derartige Beiträge sind in unserem Approximationsschema zur Berechnung von $\Omega_{\pi\pi}$ jedoch nicht berücksichtigt (vgl. die Anmerkungen am Ende von Abschnitt 5.2.2), obwohl sie nahe T_c^χ sicherlich nicht mehr vernachlässigbar sind.

Kapitel 6

ρ -Propagator und Dileptonspektren bei CERN-SpS Energien

6.1 Einführung

Typische Observablen in zentralen ultrarelativistischen Schwerionenstoßexperimenten sind z.B. Transversalimpuls- und Rapiditätsspektren verschiedener Hadronen (Pionen, Protonen, Kaonen etc.), deren relative Häufigkeiten (z.B. K^+/π^+ - oder $\bar{p}/p$ -Verhältnisse) oder auch 2-Teilchen-Korrelationsfunktionen (z.B. Hanbury-Brown-Twiss Korrelationsmessungen von Pionpaaren zur Bestimmung des Reaktionsvolumens [96]). Ein Nachteil solcher hadronischen Observablen besteht darin, daß der zugehörige, letztendlich im Detektor gemessene Zustand dem Freezeout-Stadium des hadronischen Systems entspricht, d.h. dem Zeitpunkt, zu dem die (starke) Wechselwirkung zwischen den Hadronen im wesentlichen abgeklungen ist. Um daraus Informationen über die frühe Phase der Schwerionenkollision (d.h. bei hohen Dichten und Temperaturen) zu extrahieren, sind daher in der Regel zusätzliche Modellannahmen bzw. die Kenntnis der bis zum Freezeout stattfindenden in-Medium-Wechselwirkungen im hadronischen Vielteilchensystem erforderlich. Mit dieser Fragestellung haben wir uns in den Kapiteln 4 und 5 für den idealisierten Fall eines thermischen Piongases auseinandergesetzt.

Dagegen können Teilchen, die nicht der starken Wechselwirkung unterliegen (z.B. Photonen, Elektronen), nach ihrer Entstehung den hadronischen 'Feuerball' ohne weitere Wechselwirkung passieren und somit ungestörte Information aus der inneren dichten/heißeren Reaktionszone heraustragen. Als besonders geeignete Probe gelten dabei Dileptonpaare (e^+e^- - oder $\mu^+\mu^-$ -Paare) [32], die z.B. aus dem elektromagnetischen Zerfall der Vektormesonen $\rho(770)$, $\omega(783)$, $\phi(1020)$, $J/\Psi(3097)$ etc. hervorgehen. Von der Messung invarianter Massenspektren von Dileptonen in URHIC's verspricht man sich daher, Aufschlüsse über die in-Medium Eigenschaften u.a. der Vektormesonen zu gewinnen. Voraussetzung dafür ist, daß deren Lebensdauer klein genug ist, um zu einem signifikanten Anteil vor Einsetzen des hadronischen Freezeouts zu zerfallen. Für das ρ -Meson ist diese Bedingung sicherlich erfüllt: bei einer (Vakuum-) Halbwertsbreite von $\Gamma_\rho \simeq 150$ MeV ergibt sich die Lebensdauer zu $\tau_\rho = \hbar/\Gamma_\rho = 1.3$ fm/c, so daß bei einer typischen Freezeoutzeit von $t_{fo} \simeq 10$ -15 fm/c die meisten der thermisch angeregten ρ -Mesonen auch wieder in der heißen Zone zerfallen.

Die (Vakuum-) Lebensdauer des ω -Mesons beträgt hingegen $\tau_\omega \simeq 23$ fm/c, d.h. der Großteil der ω -Mesonen dürfte nach dem Freezeout im freien Raum zerfallen und sich somit der Beobachtung von Medium-Modifikationen weitgehend entziehen. Für das ϕ -Meson ist die Situation komplizierter [97]: im Vakuum ist der Hauptzerfallskanal, $\phi \rightarrow K\bar{K}$, durch den geringen Phasenraum der beiden Kaonen zwar stark unterdrückt ($m_\phi = 1020$ MeV ist nur wenig größer als $m_K + m_{\bar{K}} \simeq 990$ MeV, wobei sich K und $\bar{K}$ noch in einer relativen p-Welle befinden), aber eine in-Medium Reduktion der Kaon-/Antikaon-Massen könnte zu einem starken Anstieg der Zerfallsbreite führen, so daß die ϕ -Meson Lebensdauer im freien Raum, $\tau_\phi \simeq 40$ fm/c, erheblich sinken würde.

Die sehr geringen elektromagnetischen Verzweigungsverhältnisse der Vektormesonen von typischerweise $\Gamma_{tot}/\Gamma_{e^+e^-} \leq 10^{-4}$ stellen hohe Anforderungen an die Experimentiertechnik (zudem müssen die Dileptonen vor dem 'Hintergrund' von bis zu mehreren hundert geladenen Hadronen identifiziert werden); erste Messungen dieser Art wurden bei einer Einschuienergie der Schwerionen von 1-2 GeV/u am Bevalac durchgeführt [98], die jedoch aufgrund einer geringen Statistik in ihrer Aussagekraft beschränkt sind. Diesbzgl. gelang in den neuesten Experimenten am CERN-SpS eine deutliche Verbesserung; bei der wesentlich höheren Laborenergie von 200 GeV/u wurden Schwefel-Projektile mit schweren Targets kollidiert und $\mu^+\mu^-$ [99] bzw. e^+e^- [33] Spektren bei niedrigen und mittleren invarianten Massen ($M_{l+l^-} \leq 3$ GeV/c²) gemessen.

Wir werden uns in diesem Kapitel auf die Analyse der CERES-Daten beschränken; in zentralen S-Au Stößen fand man dort einen starken Anstieg der Dileptonproduktion für $M_{e^+e^-} \leq 1$ GeV/c² im Vergleich zu unter analogen Bedingungen durchgeführten p-Be und p-Au Stößen (vgl. Abb. 6.1). Während sich in letzteren die e^+e^- -Spektren gut durch be-

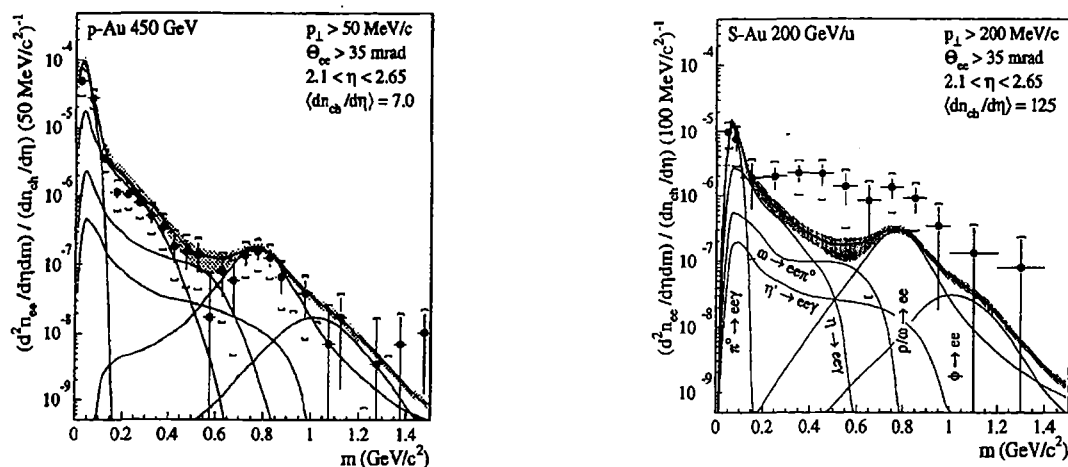


Abbildung 6.1: Invariante-Massen-Spektren von e^+e^- -Paaren, gemessen von der CERES/NA45-Kollaboration bei Beschui eines Goldtargets mit Protonen (linke Seite) bzw. Schwefelkernen (rechte Seite) am CERN-SpS; die schattierten Zonen kennzeichnen die Unsicherheit in der Simulation von thermischen Hadronzerfallen im CERES-Ereignis-Generator.

kannte Hadronzerfälle in einer Monte-Carlo-Simulation reproduzieren lassen, ist dies für das S-Au Experiment nicht mehr möglich. Aufgrund der um einen Faktor von ca. 20 höheren Pionmultiplizität in den S-Au Stößen wurde diese Überhöhung $\pi^+\pi^-$ -Annihilationen zugeschrieben.

Im Rahmen einer mikroskopischen Transporttheorie-Rechnung stellte sich heraus [34], daß die Berücksichtigung des Prozesses $\pi^+\pi^- \rightarrow \rho \rightarrow \gamma \rightarrow e^+e^-$ ohne Anwendung von Medium-Modifikationen zwar zum gewünschten Anstieg der Gesamt- e^+e^- -Produktion führt, allerdings in Verbindung mit einer Überschätzung der Daten im Bereich der freien ρ -Masse bei gleichzeitiger Unterschätzung für invariante Massen $M_{e^+e^-} \simeq 0.2-0.6 \text{ GeV}/c^2$. Durch Einschluß des Brown-Rho'schen Skalengesetzes bei endlicher Temperatur und Dichte (im wesentlichen gemäß Glgn. (3.19) und (4.63)) konnten Li, Ko und Brown [34] jedoch eine ausgezeichnete Beschreibung der CERES-Daten erzielen, was als Evidenz für die chirale Restauration ausgelegt wurde.

Es stellt sich jedoch die Frage, ob nicht auch eine mehr konventionelle Erklärung der Überhöhung des Spektrums bei kleinen invarianten Massen möglich ist: so wurde z.B. gefunden, daß der ρ -Propagator in dichter (kalter) Kernmaterie erheblichen Modifikationen unterworfen wird [36, 37, 38], die unabhängig vom BR-Scaling auftreten und in der Analyse von Li *et al.* nicht berücksichtigt wurden. Ursache dieser Medium-Modifikationen ist die Kopplung des ρ -Mesons an intermediäre $\pi\pi$ -Zustände; vom Pionpropagator in Kernmaterie weiß man andererseits, daß er durch Kopplung an Δ -Nukleonloch-Paare eine starke Renormierung erfährt. Die daraus resultierende 'Aufweichung' der Piondispersionsrelation führt zu einer Verbreiterung der ρ -Meson-Spektralfunktion, insbesondere auch zu einer beträchtlichen Überhöhung unterhalb der ρ -Resonanzposition [36, 37, 38]. Um eine realistische Anwendung dieser Rechnungen auf die CERES-Daten in 200 GeV/u S-Au Kollisionen zu ermöglichen, sind jedoch noch weitere Punkte zu beachten:

- (1) die endliche Temperatur des hadronischen Systems muß berücksichtigt werden; dies bedeutet einerseits, daß der Einfluß der relativ hohen Piondichte auf die intermediären 2π -Zustände des ρ -Propagators einzuschließen ist; andererseits ist bei den am CERN-SpS erreichten Temperaturen um 150 MeV auch ein großer Anteil der nukleonischen Gaskomponente in baryonische Resonanzen (insbesondere die $\Delta(1232)$ -Resonanz) thermisch angeregt (vgl. Abb. 6.2). Für den ΔN^{-1} -Kanal des 1-Pionpropagators hat dies z.B. zur Folge, daß sowohl weniger Nukleonen zur Anregung zur Verfügung stehen als auch ein bei $T=0$ nicht vorhandenes Pauli-Blocking der angeregten Δ 's auftritt;
- (2) der Zeitentwicklung einer zentralen S-Au Kollision muß Rechnung getragen werden: die im Vergleich zur 'Lebensdauer' des wechselwirkenden, expandierenden hadronischen Feuerballs kleine Lebensdauer des ρ -Mesons ($\tau_\rho \simeq \frac{1}{10} t_{fo}$) hat zur Folge, daß die Abstrahlung von Dileptonen aus ρ -Zerfall während des gesamten Zeitraums der Expansionsphase stattfindet; bei den entsprechend unterschiedlichen Dichten und Temperaturen verändert sich natürlich auch die Energieabhängigkeit der in-Medium ρ -Spektralfunktion;
- (3) die von der CERES-Kollaboration auferlegten Akzeptanzbedingungen ('Cuts') für die im Detektor gemessenen Elektronen- und Positronenspuren müssen auch auf

unsere theoretisch berechneten Dileptonpaare angewendet werden.

Im folgenden Abschnitt wiederholen wir zunächst die wichtigsten Aspekte der Ableitung des eichinvarianten ρ -Propagators sowie der zugehörigen Dileptonproduktionsrate, wie sie von Chanfray und Schuck [38] durchgeführt wurde. Der Schwerpunkt der Darstellung liegt dabei auf den von uns vorgenommenen Erweiterungen auf heiße hadronische Materie [101]. Diese bestehen in einer Verallgemeinerung der für die 1-Pionpropagation relevanten Lindhardfunktionen auf endliche Temperatur, wobei wir neben dem ΔN^{-1} -Kanal auch noch NN^{-1} -, $N\Delta^{-1}$ - sowie $\Delta\Delta^{-1}$ -Anregungen unter voller Beibehaltung der off-shell Dynamik einbeziehen (vgl. Anhang A). Wie wir in Kapitel 2 gesehen hatten, ist insbesondere im Falle der tiefliegenden NN^{-1} -Anregungen eine exakte off-shell Behandlung wichtige Voraussetzung für eine zuverlässige Beschreibung des in-Medium 1- (bzw. 2-) Pionpropagators (analoges sollte für den $\Delta\Delta^{-1}$ -Kanal zutreffen). Im 3. Abschnitt beschäftigen wir uns dann mit den unter den Punkten (2) und (3) erwähnten Aspekten und berechnen schließlich Dileptonspektren, die wir im Vergleich mit den CERES-Daten diskutieren.

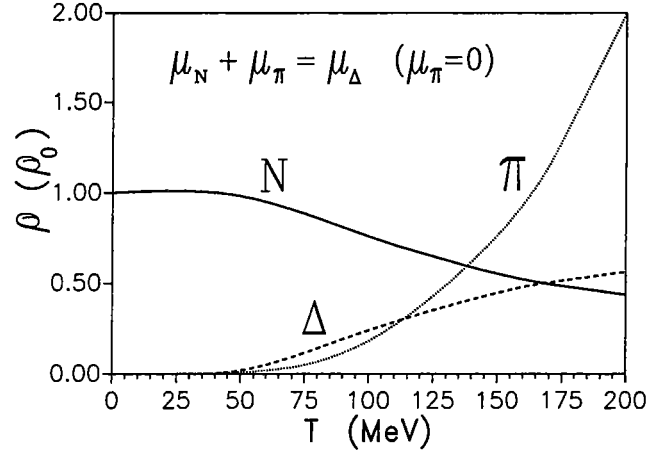


Abbildung 6.2: Temperaturabhängigkeit der Pion-, Nukleon- und Deltadichte im chemischen Gleichgewicht bei vorgegebener Baryondichte $\rho_{N\Delta} \equiv \rho_N + \rho_\Delta = \rho_0$.

6.2 ρ -Propagator und Dileptonproduktionsrate in heißer Materie

Eine ausführliche Darstellung des hier verwendeten Zugangs zur Berechnung eines effektiv eichinvarianten ρ -Propagators findet sich in Ref. [38]. Ausgangspunkt ist die Definition des thermischen (retardierte) Propagators eines ρ -Mesons mit Viererimpuls $q^{(4)} = (q_0, \vec{q})$:

$$D_\rho^{\mu\nu}(q^{(4)}; T) = -i \int d^4x e^{-iq^\mu x_\mu} \sum_i \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} \langle i | [\rho_3^\mu(x), \rho_3^\nu(0)] | i \rangle \Theta(x_0), \quad (6.1)$$

wobei die Summation über alle möglichen Zustände i des Systems der Temperatur $T = \beta^{-1}$ mit der Wahrscheinlichkeitsgewichtung $P_i = e^{-\beta E_i}/Z$ durchzuführen ist. ρ_3^μ bezeichnet die dritte Isospinkomponente des ρ -Mesonfeldes $\vec{\rho}^\mu$. Unter Benutzung des Vektor-Dominanz-Modells (VDM), welches den vom Photon getragenen (elektromagnetischen) Strom J^μ mit der neutralen Komponente des ρ -Mesonfeldes in Bezug setzt,

$$J^\mu = \frac{(m_\rho^{(0)})^2}{g} \rho_3^\mu \quad (6.2)$$

($m_\rho^{(0)}$: nackte ρ -Masse, g : universelle VDM-Kopplungskonstante), läßt sich die Dileptonproduktionsrate $R = dN_{l+l-}/d^4x$ (pro Einheitsvolumen und -zeitintervall) berechnen zu [102]:

$$\frac{dN_{l+l-}}{d^4x d^4q} = \frac{\alpha^2}{3\pi^2 M^2} H(q^{(4)}; T) \quad (6.3)$$

mit der elektromagnetischen Kopplungskonstante $\alpha = 1/137$ und der invarianten Dileptonmasse $M^2 = q^\mu q_\mu$. Der Vorfaktor in Glg. (6.3) charakterisiert den elektromagnetischen Anteil des Prozesses, der in unterster Ordnung Störungstheorie ($\rightarrow$ Faktor α^2) und im ultrarelativistischen Limes ($m_{l\pm} \ll M$) behandelt wurde (der Faktor $\frac{1}{M^2}$ resultiert aus dem Photonpropagator), vgl. Abb. 6.3. Der hadronische Anteil wird beschrieben durch

$$H(q^{(4)}; T) = f^\rho(q_0, T) \frac{(m_\rho^{(0)})^4}{\pi g^2} g_{\mu\nu} \text{Im} D_\rho^{\mu\nu}(q^{(4)}; T) \quad (6.4)$$

($f^\rho(q_0, T) = [e^{q_0/T} - 1]^{-1}$). Bei Beschränkung auf back-to-back Kinematik (d.h. verschwindenden Dreierimpuls des ρ -Mesons: $\vec{q}=0$) folgt aus der Forderung nach Eichinvarianz,

$$q_\mu D_\rho^{\mu\nu} = 0, \quad (6.5)$$

daß nur die Raumkomponenten des ρ -Propagators beitragen, und daß dieser diagonal ist, d.h.

$$D_\rho^{ij}(q_0, \vec{q}=0; T) = \delta^{ij} D_\rho(q_0; T). \quad (6.6)$$

Somit kann Glg. (6.4) vereinfacht werden zu

$$H(q_0, \vec{q}=0; T) = -f^\rho(q_0, T) \frac{3(m_\rho^{(0)})^4}{\pi g^2} \text{Im} D_\rho(q_0; T) \quad (6.7)$$

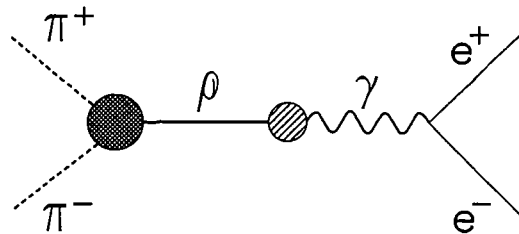


Abbildung 6.3: Vektor-Dominanz-Modell für die $\pi^+\pi^-$ -Annihilation in ein Elektron-Positron-Paar.

mit dem skalaren Anteil des ρ -Propagators

$$D_\rho(q_0; T) = [q_0^2 - (m_\rho^{(0)})^2 - \Sigma_\rho(q_0; T)]^{-1} \quad (6.8)$$

und der zugehörigen ρ -Selbstenergie Σ_ρ .

Bevor wir die Medium-Modifikationen des ρ -Mesons im Detail diskutieren, benötigen wir zunächst ein realistisches Modell für die ρ -Propagation im Vakuum. In diesem Fall ist die Selbstenergie praktisch ausschließlich durch die Kopplung an intermediäre 2-Pionzustände bestimmt (ein freies ρ zerfällt zu $\approx 100\%$ in diesen Kanal), was durch die Iteration eines nackten ρ -Polgraphen in einer Lippmann-Schwinger-Glg. (LSG) im Spin-Isospin-Kanal $JI=11$ beschrieben werden kann:

$$M_{\pi\pi}^{11}(E, q_1, q_3) = V_{\pi\pi}^{11}(E, q_1, q_3) + \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} k^2 V_{\pi\pi}^{11}(E, q_1, k) G_{\pi\pi}^0(E, k) M_{\pi\pi}^{11}(E, k, q_3) \quad (6.9)$$

mit dem freien 2-Pionpropagator $G_{\pi\pi}^0(E, k)$ aus Glg. (2.16) und dem ρ -Polgraph-Pseudopotential

$$V_{\pi\pi}^{11}(E, q_1, q_3) = v(q_1) D_\rho^{bare}(E) v(q_3), \quad (6.10)$$

welches sich aus dem nackten ρ -Propagator und den Vertexfunktionen zusammensetzt:

$$\begin{aligned} D_\rho^{bare}(E) &= [E^2 - (m_\rho^{(0)})^2]^{-1} \\ v(q_1) &= \sqrt{\frac{2}{3}} g_{\pi\pi\rho} 2q_1 F(q_1). \end{aligned} \quad (6.11)$$

In Anlehnung an die in den vorangegangenen Kapiteln verwendeten Mesonaustauschmodelle setzen wir den hadronischen Formfaktor wieder in Dipolform an (eine Monopolforn liefert praktisch identische Resultate), normiert auf eins an der physikalischen Resonanzposition $m_\rho = 0.77 \text{ GeV}/c^2$:

$$F(q_1) = \left(\frac{2\Lambda_\rho^2 + m_\rho^2}{2\Lambda_\rho^2 + 4\omega_{q_1}^2} \right)^2. \quad (6.12)$$

Um eine analytische Lösung der LSG (6.9) zu ermöglichen, vernachlässigen wir hier den (kleinen) Beitrag weiterer $\pi\pi$ -Wechselwirkungen (z.B. Kontaktterme oder t-Kanal ρ -Austausch); die freien Parameter $\Lambda_\rho, m_\rho^{(0)}$ und $g_{\pi\pi\rho}$ werden dann so angepaßt, daß eine gute Reproduktion der p-Wellen $\pi\pi$ -Streuphasen sowie des elektromagnetischen Formfaktors des Pions,

$$\begin{aligned} |F_\pi(E)|^2 &= \frac{(m_\rho^{(0)})^4}{(E^2 - (m_\rho^{(0)})^2 - \text{Re}\Sigma_\rho^0(E))^2 + \text{Im}\Sigma_\rho^0(E)^2} \\ &\equiv (m_\rho^{(0)})^4 |D_\rho^0(E)|^2, \end{aligned} \quad (6.13)$$

erzielt wird (vgl. Abb. 6.4), wobei die ρ -Selbstenergie im freien Raum gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \Sigma_\rho^0(E) &= \bar{\Sigma}_\rho^0(E) - \bar{\Sigma}_\rho^0(0), \\ \bar{\Sigma}_\rho^0(E) &= \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^2} v(k)^2 G_{\pi\pi}^0(E, k). \end{aligned} \quad (6.14)$$

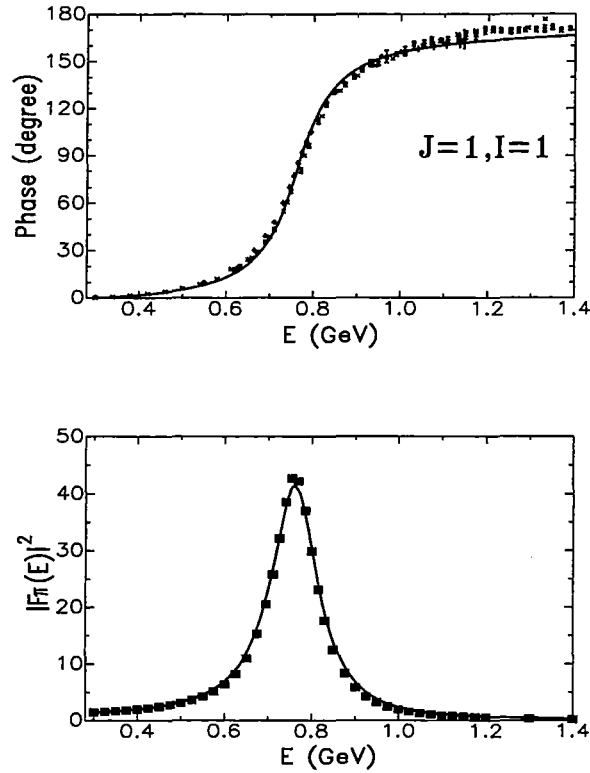


Abbildung 6.4: Anpassung an die freie $\pi\pi$ -Streuphase im $JI=11$ -Kanal und den elektromagnetischen Pion-Formfaktor durch Iteration eines ρ -Polgraphen mit $\pi\pi$ -Zwischenzuständen; die Kästchen im unteren Graph sind aus der Gounaris-Sakurai-Formel [100] berechnet, die selbst eine sehr gute Reproduktion der experimentellen Daten liefert.

Die Subtraktion bei $E=0$ ist erforderlich, um die Normierung $F_\pi(0)=1$ zu erfüllen.

Eine zuverlässige Beschreibung des in-Medium ρ -Propagators,

$$D_\rho(q_0) = [q_0^2 - (m_\rho^{(0)})^2 - \Sigma_\rho(q_0)]^{-1}, \quad (6.15)$$

muß den Bedingungen der Eichinvarianz (bzw. Stromerhaltung) genügen. Wie in den Ref. [36, 37, 38] gezeigt, treten bei der Kopplung der intermediären Pionen an ΔN^{-1} -Zustände zusätzliche Möglichkeiten zur Abstrahlung eines Photons auf, die im Prinzip aus einer konsistenten elektromagnetischen Eichung einer die hadronischen $\rho\pi N\Delta$ -Wechselwirkungen beschreibenden Lagrangedichte resultieren. Die zusätzlichen Diagramme können näherungsweise durch eine effektive Renormierung des in-Medium $\pi\pi\rho$ -Vertex' eingeschlossen werden. Gemäß den Ableitungen von Chanfray und Schuck führt dies auf

folgenden Ausdruck für die in-Medium ρ -Selbstenergie (Glg. (5.10) in Ref. [38]):

$$\begin{aligned}\bar{\Sigma}_\rho(q_0) = & g_{\pi\pi\rho}^2 \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4} F(k)^2 \left\{ \frac{4}{3}k^2 \left[1 + \frac{1}{2}(\Pi^0(k_0 + \frac{1}{2}q_0, k) + \Pi^0(k_0 - \frac{1}{2}q_0, k)) \right]^2 \right. \\ & \times D_\pi(k_0 + \frac{1}{2}q_0, k) D_\pi(k_0 - \frac{1}{2}q_0, k) + 2\Pi^0(k_0 - \frac{1}{2}q_0, k) D_\pi(k_0 + \frac{1}{2}q_0, k) \\ & \left. + \frac{4}{3}k^2 (\Pi^0 C_\rho D_\rho \Pi^0)(k_0 - \frac{1}{2}q_0, k) D_\pi(k_0 + \frac{1}{2}q_0, k) \right\} \quad (6.16)\end{aligned}$$

mit

$$D_\pi(k_0, k) = [k_0^2 - \omega_k^2 - \Sigma_\pi(k_0, k)]^{-1}, \quad (6.17)$$

$$D_\rho(k_0, k) = [k_0^2 - \omega_\rho(k)^2 - C_\rho \Sigma_\pi(k_0, k)]^{-1}, \quad (6.18)$$

$$\Pi^0(k_0, k) = \frac{1}{k^2} \Sigma_\pi(k_0, k) \quad (6.19)$$

und $C_\rho=2.2$, $\omega_\rho(k)^2 = m_\rho^2 + k^2$. Die Pionselbstenergie Σ_π wird weiter unten diskutiert. Der ρ -Propagator sollte im Prinzip selbstkonsistent aus den Glg. (6.15) und (6.18) berechnet werden. Da jedoch $D_\rho(k_0, k)$ in einem kinematisch völlig anderen Regime als der zeitartige Propagator $D_\rho(q_0, 0)$ ermittelt wird, ist der Einfluß der Selbstkonsistenz gering und kann vernachlässigt werden [38]. Durch Einführung der longitudinalen und transversalen Spin-Isospin 'Response'-Funktionen,

$$\begin{aligned}\Pi_L(k_0, k) &= (k_0^2 - \omega_k^2) \Pi^0(k_0, k) D_\pi(k_0, k) \\ \Pi_T(k_0, k) &= (k_0^2 - \omega_\rho(k)^2) \Pi^0(k_0, k) D_\rho(k_0, k), \quad (6.20)\end{aligned}$$

kann Glg. (6.16) umgeschrieben werden in

$$\begin{aligned}\bar{\Sigma}_\rho(q_0) = & \frac{g_{\pi\pi\rho}^2}{3} \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4} F(k)^2 \left\{ 4k^2 D_\pi(k_0, k) D_\pi(q_0 - k_0, k) \right. \\ & \times \left[1 + \Pi^0(k_0, k) + \Pi^0(q_0 - k_0, k) + \frac{1}{2}\Pi^0(k_0, k)\Pi^0(q_0 - k_0, k) \right] \\ & \left. + \frac{1}{2}\Pi_L(k_0, k) D_\pi(q_0 - k_0, k) + \Pi_T(k_0, k) D_\pi(q_0 - k_0, k) \right\}. \quad (6.21)\end{aligned}$$

An dieser Stelle approximieren wir die Pionselbstenergien in den eckigen Klammern durch ihren Realteil, aber wir behalten die volle off-shell Abhängigkeit von D_π , Π_L und Π_T bei, indem wir ihre Spektraldarstellungen einsetzen und so den Imaginärteil der ρ -Selbstenergie berechnen zu (analog zur Ableitung in Abschnitt 2.3.2):

$$\begin{aligned}Im\Sigma_\rho(q_0) = & \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^2} v(k)^2 \int_0^{q_0} \frac{dk_0}{\pi} Im D_\pi(q_0 - k_0, k) \\ & \times Im \left\{ \alpha(q_0, k_0, k) D_\pi(k_0, k) + \frac{1}{2k^2} \Pi_L(k_0, k) + \frac{1}{k^2} \Pi_T(k_0, k) \right\}, \quad (6.22)\end{aligned}$$

wobei die reelle Funktion α definiert ist durch

$$\begin{aligned}\alpha(q_0, k_0, k) &= [1 + \Pi_R^0(k_0, k) + \Pi_R^0(q_0 - k_0, k) + \frac{1}{2}\Pi_R^0(k_0, k)\Pi_R^0(q_0 - k_0, k)] \\ \Pi_R^0(k_0, k) &= Re\Pi^0(k_0, k). \quad (6.23)\end{aligned}$$

Den Realteil von Σ_ρ erhalten wir über ein Dispersionsintegral:

$$\text{Re}\Sigma_\rho(q_0) = -\mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dE'^2}{\pi} \frac{\text{Im}\Sigma_\rho(E')}{q_0^2 - E'^2} \frac{q_0^2}{E'^2} . \quad (6.24)$$

Die Subtraktion bei $q_0=0$, die den Faktor q_0^2/E'^2 generiert, ist einerseits erforderlich, um – in Analogie zum freien Fall – die korrekte Normierung des elektromagnetischen Pion-Formfaktors zu gewährleisten. Andererseits dient sie der Erhaltung der Eichinvarianz im hier betrachteten Limes $\vec{q} \rightarrow 0$ [38]. Wegen $\text{Im}\Sigma_\pi(q_0)=0$ hat die Subtraktion keine Auswirkungen auf den Imaginärteil, Glg. (6.22).

Es bleibt noch das Modell für die Pionselbstenergie Σ_π zu spezifizieren. Wir berechnen diese im üblichen Bild von Teilchen-Loch-Anregungen, erweitert für den Gebrauch bei endlicher Temperatur [103]. Als Folge einer thermisch angeregten Δ -Komponente im heißen Gas treten neben den bei $T=0$ beitragenden ΔN^{-1} - und NN^{-1} -Anregungen auch noch $N\Delta^{-1}$ - und $\Delta\Delta^{-1}$ -Moden auf. Die zugehörige Lindhardfunktion in einem vorgegebenen Anregungskanal $\alpha=ab^{-1}$, $a,b=N,\Delta$, ist von der Form (vgl. auch Anhang A):

$$\phi_\alpha(k_0, k) = - \int dp \frac{p^2}{(2\pi)^2} \frac{f^b(E_p^b)}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{+1} dx \sum_{m=1}^2 \frac{1 - f^a(E_{pk}^a(x))}{\pm k_0 + E_p^b - E_{pk}^a(x) \pm \frac{i}{2}(\Gamma_a + \Gamma_b)} \quad (6.25)$$

mit direktem ($m=1$, Vorzeichen '+') und gekreuztem ($m=2$, Vorzeichen '-') Graph sowie relativistischen Baryonenergien

$$\begin{aligned} E_p^{N,\Delta} &= (M_{N,\Delta}^2 + p^2)^{1/2} \\ E_{pk}^{N,\Delta}(x) &= (M_{N,\Delta}^2 + p^2 + k^2 + 2pkx)^{1/2} \end{aligned} \quad (6.26)$$

und Fermiverteilungen

$$f^a(E_p^a) = (1 + \exp[(E_p^a - \mu_a)/T])^{-1} . \quad (6.27)$$

Daraus ergeben sich die Nukleon- und Δ -Dichte zu

$$\rho_a(\mu_a, T) = g_a \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f^a(E_p^a) \quad (6.28)$$

mit Spin-Isospin-Entartungsfaktoren $g_N=4$, $g_\Delta=16$. Für die Δ -Breite wählen wir eine relativistische Parametrisierung

$$\Gamma_\Delta(k_0, k) = \frac{2}{3} \frac{f_{\pi N\Delta}^2}{4\pi} \frac{q_{cms}^3}{\sqrt{s}} \frac{M_N}{m_\pi^2} \Gamma_\pi^2(k) \Theta(\sqrt{s} - M_N - m_\pi) F_{fit} + 20 \frac{\rho_N}{\rho_0} \text{MeV} , \quad (6.29)$$

(Notationen aus Anhang A), ergänzt durch einen dichteabhängigen Term, den wir aus Pion-Kern optischen Potentialen abgeschätzt haben. $F_{fit}=1.36$ wurde eingeführt, um die freie Breite von 115 MeV bei der Resonanzenergie $\sqrt{s}=1232$ MeV zu reproduzieren. Auf eine in-Medium Nukleonbreite haben wir verzichtet (tatsächlich sind die später diskutierten Resultate relativ insensitive bzgl. Variationen in $\Gamma_{N,\Delta}$). Die Berücksichtigung

der kurzreichweitigen Teilchen-Loch-Korrelationen, parametrisiert durch Landau-Migdal-Parameter $g'_{\alpha\beta}$, führt auf ein System 4 gekoppelter Gleichungen in den Suszeptibilitäten χ_α :

$$\chi_\alpha = \chi_\alpha^{(0)} - \sum_\beta \chi_\alpha^{(0)} g'_{\alpha\beta} \chi_\beta$$

$$\chi_\alpha^{(0)}(k_0, k) = \left(\frac{f_{\pi\alpha} \Gamma_\pi(k)}{m_\pi} \right)^2 SI(\alpha) \phi_\alpha(k_0, k) . \quad (6.30)$$

Es wird durch Matrixinversion gelöst, so daß das Endresultat für die Pionselbstenergie lautet:

$$\Sigma_\pi(k_0, k) = -k^2 \sum_\alpha \chi_\alpha(k_0, k) . \quad (6.31)$$

Die Migdalparameter setzen wir auf $g'_{\alpha\beta}=0.8$ für $\alpha\beta=aa^{-1}bb^{-1}$ und 0.5 für alle anderen. Um in der ρ -Selbstenergie den Einfluß der Piongaskomponente zumindest in minimaler Weise einzubeziehen, haben wir den Integranden der k_0 -Integration in Glg. (6.22) noch mit einem 2-Pion-Bosefaktor $[1 + f^\pi(k_0) + f^\pi(q_0 - k_0)]$ versehen, den wir in Abschnitt 4.2.2 für die intermediären 2-Pionzustände im Piongas abgeleitet haben (die Beiträge thermischer Anregungen sowie der Piongas-Selbstenergie werden dabei vernachlässigt). Die exakte Behandlung von Σ_ρ bei endlicher Temperatur bleibt einer zukünftigen Arbeit vorbehalten.

Der Imaginärteil des ρ -Propagators im heißen $\pi N\Delta$ -Gas ist in Abb. 6.5 dargestellt. Bereits bei moderater Dichte und Temperatur findet eine erhebliche Verbreiterung der Resonanz statt. Obwohl die Peakposition zu höheren Energien verschoben wird, bildet sich den-

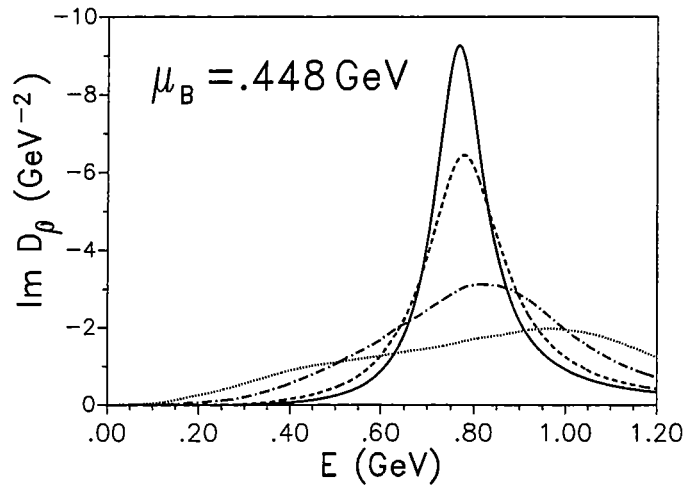


Abbildung 6.5: Imaginärteil des ρ -Propagators in Ruhe ($\vec{q}=0$) im heißen $\pi N\Delta$ -Gas ($\mu_N=\mu_\Delta=0.448$ GeV, $\mu_\pi=0$) bei Temperaturen $T=104.5$ MeV (gestrichelte Linie), $T=135.2$ MeV (strichpunktiert) und $T=153.8$ MeV (gepunktet); die zugehörigen N - Δ -Dichten betragen $\rho_{N\Delta}/\rho_0=0.1, 0.5$ und 1.1 , respektive; die durchgezogene Linie repräsentiert den freien ρ -Propagator.

noch eine betr chliche Überhöhung im Vergleich zur Vakuumkurve bei Energien $E \simeq 0.2\text{--}0.6$ GeV aus ( hnlich wie in den Ref. [36, 37, 38] gefunden).

6.3 Anwendung auf S-Au Kollisionen bei 200 GeV/u

Gln. (6.3), (6.7), (6.15), (6.22) und (6.24) bestimmen die Dileptonproduktionsrate pro Einheitsvolumen und Viererimpulsintervall bei verschwindendem Dreierimpuls des ρ -Mesons und bei vorgegebener N - Δ - (bzw. Pion-) Dichte und Temperatur. Um die im Laufe einer zentralen S-Au Kollision entstehende Gesamtanzahl von Dileptonen aus ρ -Zerfall zu berechnen, müssen wir die Produktionsrate über die zeitliche Entwicklung des hadronischen Systems integrieren. Dafür ist die Kenntnis der Gastemperatur und -dichte zu jedem Zeitpunkt der Expansion des hadronischen Feuerballs erforderlich. Um diese zu bestimmen, ziehen wir die im Rahmen der (numerischen) Transporttheorie-Rechnung von Li *et al.* [34] ermittelten Resultate heran. Für eine zentrale S-Au Kollision bei 200 GeV/u Projektilenergie finden sie, daß der 'Anfangszustand' der hadronischen Expansionsphase durch eine Baryondichte von $\rho_B^{ini}=3.5\rho_0$ und Temperatur $T^{ini}=170$ MeV charakterisiert ist. Berücksichtigt man alle Nukleon-/Deltaresonanzen mit Massen $M_a \leq 1.7$ GeV sowie die leichtesten Hyperonen ($a=N, N(1440), N(1520), N(1535), N(1650), N(1675), N(1680), N(1700), \Delta, \Delta(1600), \Delta(1620), \Delta(1700), \Lambda(1112), \Sigma(1193)$) und nimmt darüber hinaus chemisches Gleichgewicht an,

$$\mu_N = \mu_\Delta = \dots = \mu_Y \equiv \mu_B, \quad (6.32)$$

dann ergibt sich aus den Anfangsbedingungen das chemische Potential der Baryonen zu $\mu_B=0.448$ GeV. Um die Baryonmassen in einheitlicher Form zu behandeln, verzichten wir hier auf die Einführung von effektiven Massen für Nukleon und Δ (tatsächlich ergeben sich unter Benutzung von z.B. $M_N^* = M_N - 0.1\rho_N/\rho_0$ und $M_\Delta^* = M_\Delta - (M_N - M_N^*)$ nur geringfügige Änderungen in unserem Endresultat für das e^+e^- -Spektrum). Die für die Berechnung der Dileptonproduktionsrate relevante Dichte von Nukleonen und Δ 's beträgt im Anfangszustand

$$\begin{aligned} \rho_{N\Delta}^{ini} &= \rho_N^{ini} + \rho_\Delta^{ini} \\ &\simeq 2\rho_0, \end{aligned} \quad (6.33)$$

in akzeptabler Übereinstimmung mit den in Ref. [34] angegebenen Werten. In Anlehnung an die Transport-Rechnungen approximieren wir die zeitliche Temperaturentwicklung des expandierenden Feuerballs durch einen exponentiellen Abfall

$$T(t) = (T^{ini} - T^\infty)e^{-t/\tau} + T^\infty \quad (6.34)$$

mit $T^\infty=115$ MeV, $\tau=10$ fm/c. Unter der Annahme, daß das chemische Potential der Baryonen konstant bleibt, sind zu jedem Zeitpunkt t die Baryondichten (insbesondere $\rho_{N\Delta}$)  ber Glg. (6.28) festgelegt, vgl. Abb. 6.6. Die Auswirkungen von Oberflächeneffekten des Systems können wir an dieser Stelle nicht behandeln, d.h. wir approximieren es durch ein homogenes Gas von Hadronen.

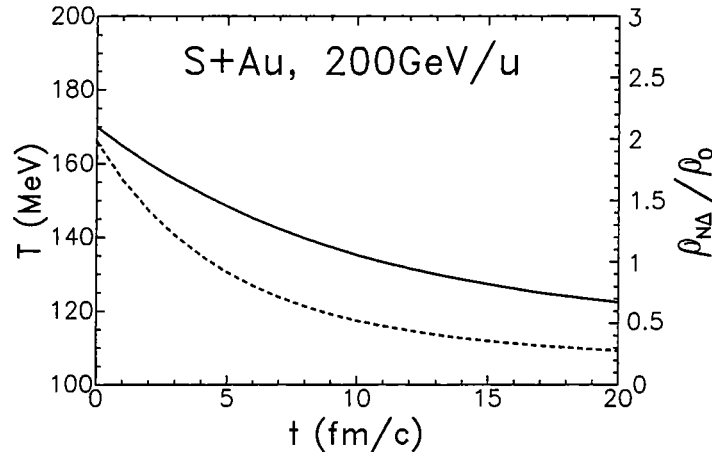


Abbildung 6.6: Für unsere Rechnung verwendete Zeitentwicklung von Temperatur (durchgezogene Linie, linke Skala) und N - Δ -Dichte (gestrichelte Linie, rechte Skala) einer zentralen S-Au-Kollision; der Temperaturverlauf wurde an die mikroskopischen Transportrechnungen von Li et al. angepaßt; der Dichteverlauf folgt daraus durch Festlegung des Wertes bei $t=0$.

Um einen direkten Vergleich mit den experimentellen Dileptonspektren zu ermöglichen, müssen noch zwei weitere Punkte beachtet werden. Der erste betrifft die Näherung, daß die Produktionsrate (bzw. der ρ -Propagator) nur in back-to-back Kinematik berechnet worden ist. Für freie Pionen ist die Dileptonrate bei endlichem Schwerpunktimпульs $\vec{q}$ des Pionpaares gegeben durch [104]

$$\frac{dN_{e^+e^-}}{d^4x d^4q}(q_0, \vec{q}) = \left(\frac{dN_{e^+e^-}}{d^4x d^4q} \right)_{\vec{q}=\vec{0}} F(M, q; T) \quad (6.35)$$

mit

$$F(M, q; T) = \frac{\exp [-(\sqrt{\vec{q}^2 + M^2} - M)/T]}{\sqrt{1 + \vec{q}^2/M^2}}. \quad (6.36)$$

Wir nehmen an, daß diese Beziehung auch bei endlicher Dichte/Temperatur näherungsweise erfüllt ist. Der genaue Einfluß von Medium-Effekten bei endlichem $\vec{q}$ muß in einer zukünftigen Arbeit geklärt werden.

Der zweite Punkt betrifft die experimentelle Akzeptanz des CERES-Detektors. In den S-Au Stößen wurden nur Dielektronenspuren ausgewertet, die einen Öffnungswinkel von $\Theta_{e^+e^-} > 35$ mrad hatten und bei denen beide Spuren einen Transversalimpuls $p_t > 0.2$ GeV/c aufwiesen. Des weiteren wurde verlangt, daß die Spuren aus der zentralen Rapiditätszone der Kollision stammen, d.h. $2.1 < \eta < 2.65$, wo η die sogenannte Pseudorapidität bezeichnet (vgl. Anhang D für die Definition der in URHIC's verwendeten kinematischen Variablen). Um diese experimentellen 'Randbedingungen' in unsere theoretische Rechnung einzuschließen, haben wir stochastisch $\rho \rightarrow e^+e^-$ -Zerfälle simuliert: bei vorgegebener Temperatur und invarianter Masse M wird stochastisch eine im ρ -Impuls $\vec{q}$ isotrope Verteilung

gemäß Glg. (6.36) generiert; das zugehörige zeitartige Photon wird dann isotrop in e^+e^- -Paare zerfallen gelassen. Nach einer Lorentztransformation der Leptonen vom thermischen in das Labor-(Detektor-) System werden beide Leptonenbahnen den experimentellen Cuts unterzogen. Wenn beide Spuren diese passieren, gilt das Dielektronpaar als akzeptiert, was insgesamt in einer Akzeptanzfunktion $A(M, T)$ resultiert.

Die Integration der Produktionsrate über die zeitliche Entwicklung der S-Au Kollision sowie über alle ρ -Impulse liefert uns die pro Einheitsvolumen und invariantes Massenintervall abgestrahlte Anzahl von e^+e^- -Paaren zu

$$\frac{dN_{e^+e^-}}{d^3x dM} = \int_0^{t_{fo}} dt \left(\frac{dN_{e^+e^-}(M; T(t), \rho_{N\Delta}(t))}{d^4x d^4q} \right)_{\vec{q}=\vec{0}} C(M; T(t)), \quad (6.37)$$

wobei

$$C(M; T) = A(M; T) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} F(M, q; T) \quad (6.38)$$

die Detektor-Akzeptanzfunktion sowie die $\vec{q} \neq \vec{0}$ -Korrekturen enthält. Schließlich bleibt noch eine Volumen-Normierungskonstante offen; diese wird bestimmt, indem wir Glg. (6.37) für den Zerfall freier ρ -Mesonen ausrechnen, über die invariante Masse integrieren und den so erhaltenen Wert auf die entsprechende Gesamtanzahl von freien ρ -Zerfällen in der Transport-Rechnung von Li *et al.* normieren:

$$N_V = \frac{\int_0^{M_{max}} dM \left(\frac{dN_{e^+e^-}}{dM} \right)_{transport}^{vac}}{\int_0^{M_{max}} dM \left(\frac{dN_{e^+e^-}}{d^3x dM} \right)_{vac}}, \quad (6.39)$$

so daß

$$\left(\frac{dN_{e^+e^-}}{dM} \right)^{med} = N_V \left(\frac{dN_{e^+e^-}}{d^3x dM} \right)^{med}. \quad (6.40)$$

Die Freezeout-Zeit in Glg. (6.37) legen wir bei $t_{fo}=10$ fm/c fest; mit Glg. (6.34) erhält man so eine Freezeout-Temperatur von $T_{fo}=135$ MeV. Obwohl der ρ -Propagator zu diesem Zeitpunkt noch nicht wieder seine Vakuum-Form angenommen hat, ist die Sensitivität unserer Rechnungen bzgl. dieser 'sudden break-up approximation' relativ gering (für z.B. $t_{fo}=15$ fm/c ändern sich die Endresultate um weniger als 10%). Eine konsistente Definition des Freezeouts ist in unserem stark vereinfachten Modell für die Zeitentwicklung nicht möglich, sondern kann nur im Rahmen einer mikroskopischen Simulation der gesamten Reaktionsdynamik vorgenommen werden.

Unser Endresultat für das Dileptonspektrum ist in Abb. 6.7 im Vergleich zu den CERES-Daten dargestellt. Zusätzlich zu den e^+e^- -Paaren aus ρ -Zerfall haben wir noch die Beiträge der freien Dalitzzerfälle

$$\pi^0 \rightarrow \gamma e^+ e^-, \quad \eta \rightarrow \gamma e^+ e^-, \quad \omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^- \quad (6.41)$$

sowie des freien elektromagnetischen ω -Zerfalls,

$$\omega \rightarrow e^+ e^-, \quad (6.42)$$

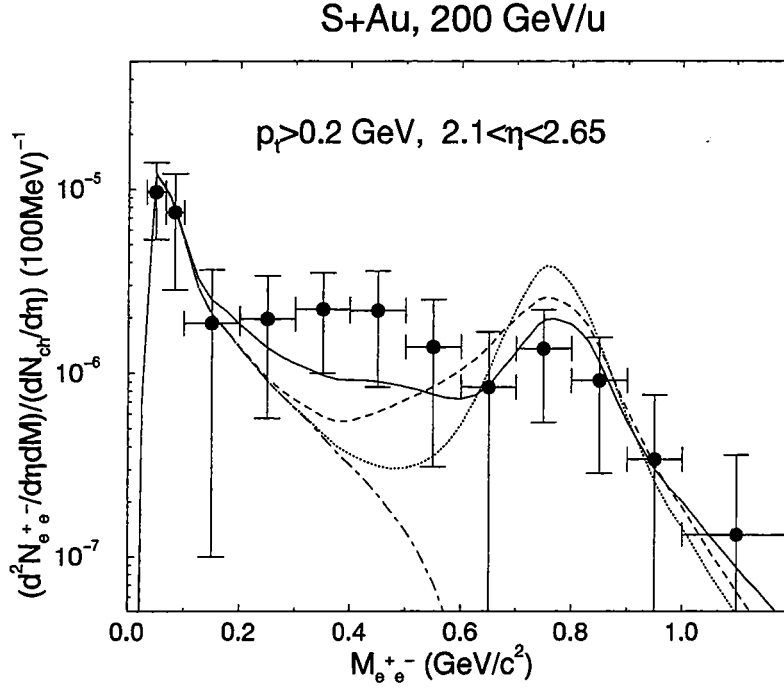


Abbildung 6.7: Dielektronspektren aus freiem Dalitz-Zerfall (strichpunktierte Linie), freiem Dalitz- + freiem ω - + freiem ρ - (gepunktete Linie) und freiem Dalitz- + freiem ω - + in-Medium ρ -Zerfall (durchgezogene Linie); die gestrichelte Linie wurde ohne Pion-Bosefaktor und ohne NN^{-1} -, $N\Delta^{-1}$ - und $\Delta\Delta^{-1}$ -Anregungskanäle berechnet; die Punkte repräsentieren die CERES-Daten.

die wir ebenfalls aus den Transportrechnungen von Li *et al.* [34] extrahiert haben, hinzugefügt (die Transportresultate für diese Zerfallskanäle sind in guter Übereinstimmung mit der von der CERES-Kollaboration durchgeführten Monte-Carlo-Simulation unter der Annahme eines freien thermischen Hadrongases [33], vgl. Abb. 6.1). Die Dalitzzerfälle bevölkern im wesentlichen die invariante Massenregion $M \leq 0.3 \text{ GeV}/c^2$ (strichpunktierte Linie in Abb. 6.7), während die elektromagnetischen ω -Zerfälle einen relativ scharfen Peak bei $M = m_\omega$ generieren. Die Lebensdauer der π^0 - bzw. η -Mesonen beträgt $\tau_{\pi^0} = 2.5 \cdot 10^{-7} \text{ fm}/c$ bzw. $\tau_\eta = 1.7 \cdot 10^{-5} \text{ fm}/c$, d.h. Medium-Modifikationen während der wechselwirkenden hadronischen Gasphase spielen hier keine Rolle. Wie in der Einführung erwähnt, ist die Situation im ω -Zerfall weniger klar, insbesondere wenn eine signifikante Resonanzverbreiterung bei endlicher Temperatur/Dichte z.B. durch Ankopplung an 3π -Zustände stattfindet. In der Analyse von Li *et al.* [34], wo eine relativ starke Medium-Abhängigkeit der ω -Masse in Form einer Reduktion gemäß des Brown-Rho-Scaling angenommen wurde, zeigte sich eine sehr moderate Veränderung im e^+e^- -Spektrum gegenüber freien ω -Zerfällen.

Bevor wir zur Diskussion unserer Resultate kommen, ist noch zu klären, ob unabhängig von der $\pi^+\pi^-$ -Annihilation auch noch Zerfälle von thermischen ρ -Mesonen im hadronischen System hinzugefügt werden müssen. Dieses Problem ist eng mit der Frage nach

der thermodynamischen Behandlung eines wechselwirkenden Hadronengases verknüpft, und die Antwort wurde im Prinzip von Dashen *et al.* [105] gegeben und von Gale und Kapusta [102] in unserem Kontext betont: man startet die Beschreibung des thermodynamischen Systems mit stabilen Teilchen (Pionen, Nukleonen); durch Berücksichtigung ihrer Wechselwirkungen werden die Beiträge von (kurzlebigen) Resonanzen (ρ , Δ etc.) automatisch eingeschlossen, wie wir (und auch Welke *et al.* [25]) es am Beispiel der ρ -Resonanz im wechselwirkenden Piongas in Kapitel 5 gesehen haben. Für die soeben gestellte Frage bedeutet das also, daß neben der $\pi^+\pi^-$ -Annihilation *keine* zusätzlichen $\rho \rightarrow e^+e^-$ -Zerfälle einbezogen werden sollten.

Ohne Anwendung von Medium-Modifikationen ergibt sich aus den Prozessen $\rho, \omega \rightarrow e^+e^-$ und $\pi^0, \eta \rightarrow \gamma e^+e^-$, $\omega \rightarrow \pi^0 e^+e^-$ das durch die gepunktete Linie dargestellte Spektrum in Abb. 6.7, welches die CERES-Daten im invarianten Massenbereich $0.3 \text{ GeV}/c^2 \leq M \leq 0.8 \text{ GeV}/c^2$ deutlich verfehlt. Genau in diesem Bereich führt die Verwendung unseres in-Medium ρ -Propagators zu einer entscheidenden Verbesserung in der Beschreibung der experimentellen Daten (durchgezogene Linie): alle Meßpunkte können nun im Rahmen ihrer Fehlerbalken erreicht werden, was bei Betrachtung der im heißen $\pi N \Delta$ -Gas induzierten Medium-Effekte in der ρ -Spektralfunktion, Abb. 6.5, sofort plausibel wird. Um eine genauere Einsicht in die physikalisch ablaufenden Prozesse in den numerisch relativ aufwendigen Rechnungen zu erlangen, haben wir auch noch ein Spektrum unter Vernachlässigung der NN^{-1} -, $N\Delta^{-1}$ - und $\Delta\Delta^{-1}$ -Kanäle in der Pion selbstenergie sowie ohne den Bosefaktor $[1 + f^\pi(k_0) + f^\pi(q_0 - k_0)]$ in $Im\Sigma_\rho$, Glg. (6.22), durchgeführt (gestrichelte Linie in Abb. 6.7). Offensichtlich führt die alleinige Berücksichtigung von ΔN^{-1} -Anregungen zu einer wesentlichen Verschlechterung in der Beschreibung der Daten. Natürlich kann man auch von unserer vollen Rechnung nicht behaupten, daß sie eine gute Reproduktion des CERES- e^+e^- -Spektrums liefert. Bei einer in naher Zukunft zu erwartenden Präzisierung der Meßpunkte könnte es sehr wohl passieren, daß die durchgezogene Linie im Bereich um $M \simeq 0.35 \text{ GeV}/c^2$ außerhalb der Fehlerbalken liegt. Allerdings fehlen in unserer Analyse sicherlich noch Effekte, die eine weitere Anhebung der theoretischen Kurve ermöglichen können; Möglichkeiten hierfür sind:

- (a) weitere dynamische Medium-Modifikationen des ρ -Propagators, wie z.B. Einbezug von Pion-Wechselwirkungen mit weiteren thermisch angeregten Baryonresonanzen oder, vielleicht noch wichtiger, mit der Piongaskomponente (wie in Kapitel 4 diskutiert) in Verbindung mit direkten ρ - π -Wechselwirkungen (mittels eines geeigneten Modells zur π - ρ -Streuung);
- (b) Einführung eines positiven chemischen Potentials $\mu_\pi > 0$ für die Pionen, was eine Verstärkung der Niederenergiegewichtung in den Pion-Bosefaktoren sowie eine Vergrößerung der aus der Piongaskomponente generierten Pion-Selbstenergie zur Folge hat. Ein derartiges Szenario wurde im Kontext von URHIC's erstmals von Kataja und Ruuskanen vorgeschlagen [86], um die in 200 GeV/u S-S Kollisionen beobachtete Überhöhung kleiner Transversalimpulse in den Pion- p_t -Spektren zu erklären ('low- p_t enhancement'). Bei einer gleichzeitig vorhandenen endlichen Baryondichte stößt ein solches Konzept jedoch auf Schwierigkeiten, da in diesem Fall die Pionen an tief liegende NN^{-1} - (bzw. $\Delta\Delta^{-1}$ -) Moden koppeln können, deren Anregungsspektrum

bereits bei $\omega=0$ beginnt; ein endliches $\mu_\pi>0$ führt dann zu Energien $(\omega - \mu_\pi)<0$, so daß man ein Bosekondensat vorliegen hätte;

- (c) e^+e^- -Produktion aus in-Medium ' σ' ' $\rightarrow \gamma^* \rightarrow e^+e^-$ -Zerfällen, wie von Weldon [106] diskutiert (mit ' σ' ' ist hier wieder die fiktive niederenergetische Resonanz im skalaren-isoskalaren Kanal der $\pi\pi$ -Streuung gemeint). Dieser Prozeß ist im Vakuum zwar nicht möglich (das Photon hat Spin 1), kann im ladungsasymmetrischen nuklearen Medium aber durchaus beitragen – insbesondere bei invarianten Massen um $M \simeq 2 m_\pi$, wenn, wie in den Kapiteln 2 und 4 gesehen, eine signifikante Ansammlung von Stärke im Schwellenbereich der $M_{\pi\pi}^{00}$ -Amplitude auftritt.

Andererseits ist nicht auszuschließen, daß trotz Berücksichtigung all dieser 'konventionellen' Effekte keine befriedigende Erklärung hinreichend genauer Dileptonenmessungen (die z.B. auch am RHIC vorgesehen sind) erreicht werden kann. Dann wäre es tatsächlich möglich, daß die CERES-Daten eine erste, direkte Evidenz für die aus der chiralen Restauration folgende Brown-Rho'sche Skalenhypothese (insbesondere einer fallenden ρ -Masse) gezeigt haben.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Perspektiven

Das zentrale Thema der vorliegenden Arbeit war die Untersuchung von Pion-Pion Wechselwirkungen in der Umgebung hadronischer Materie sowie daraus folgender Implikationen hinsichtlich empirischer Beobachtungen in stark wechselwirkenden Vielteilchensystemen.

Im ersten Teil der Arbeit (Kapitel 2 und 3) haben wir uns mit dem Einfluß des nuklearen Mediums beschäftigt. Als Ausgangspunkt unserer Analysen diente eine mikroskopische $\pi\pi$ -Streugleichung vom Lippmann-Schwinger-Typ, welche durch das Blankenbecker-Sugar-(BbS-) Reduktionsverfahren aus der relativistischen Bethe-Salpeter-Gleichung hervorgeht. Die einfachste Form eines Medium-Effekts, die in einer solchen Streugleichung induziert wird, besteht in einer Modifikation des 2-Pionpropagators im Zwischenzustand eines bis in alle Ordnungen aufsummierten 2-Pion-Wechselwirkungspotentials. Basierend auf einer konventionellen Beschreibung der 1-Pionpropagation in isospinsymmetrischer Kernmaterie haben wir in-Medium s-Wellen $\pi\pi$ -Korrelationen unter Benutzung verschiedener Modelle, die eine zufriedenstellende Reproduktion der freien $\pi\pi$ -Streudaten liefern, analysiert. In Erweiterung früherer Rechnungen wurde dabei die volle off-shell Dynamik der in die Pionselbstenergie eingehenden Kopplungen an NN^{-1} - und ΔN^{-1} -Anregungen berücksichtigt. Die zunächst im Jülicher Mesonaustauschmodell durchgeführten Rechnungen bestätigen die von Aouissat *et al.* im Rahmen des rein phänomenologischen Johnstone-Lee-Modells gefundene Instabilität im skalaren-isoskalaren Kanal (σ -Kanal) der $\pi\pi$ -Wechselwirkung: trotz unterschiedlicher off-shell Dynamik (ρ -t-Kanal Austausch bzw. σ -Polgraph im Jülich- bzw. Johnstone-Lee-Modell) sagen beide Modelle eine 2-Pionpaarkondensation (d.h. einen 2-Pionbindungszustand mit relativistischer Gesamtenergie $E_{\pi\pi}=0$) in leicht komprimierter Kernmaterie voraus ($\rho=1.2-1.3\rho_0$). Der kondensierende Bindungszustand absorbiert dabei nahezu die gesamte Stärke der $\pi\pi$ -Amplitude des σ -Kanals. Da die mittelreichweitige Attraktion im Nukleon-Nukleon Potential auf ' σ '-Austausch beruht (genauer: auf Austausch eines zu Spin-Isospin $JI=00$ gekoppelten Pionpaares), bewirkt ein derartiges in-Medium Verhalten der $\pi\pi$ -Wechselwirkung einen drastischen Anstieg von Stärke und Reichweite dieser Attraktion in Kernmaterie (wie in Kapitel 3 demonstriert). Unter diesen Umständen erscheint die Einstellung eines Sättigungsmechanismus' von Kernmaterie nicht mehr möglich.

Ein Problem der beiden oben erwähnten $\pi\pi$ -Modelle besteht darin, daß sie bestimmte aus der chiralen Symmetrie folgende Eigenschaften nicht erfüllen (z.B. die 'soft-Pion'-Theoreme oder das Verschwinden der s-Wellen $\pi\pi$ -Streulängen im chiralen Limes, d.h. für

$m_\pi \rightarrow 0$). Im weiteren Verlauf des zweiten Kapitels konnten wir nachweisen, daß derartige 'chirale' Bedingungen einen wichtigen Einfluß auf das Niederenergieverhalten der $\pi\pi$ -Wechselwirkung nehmen, insbesondere im Bereich und unterhalb der 2-Pionschwelle. So zeigt z.B. das lineare σ -Modell, welches zumindest in Born'scher Näherung die soft-Pion-Theoreme erfüllt, keinerlei Anzeichen von Pionpaarkondensation bei einer nur sehr moderaten Ansammlung von Stärke im Schwellenbereich der in-Medium $\pi\pi$ -Amplitude. Durch eine gegenüber der BbS-Vorschrift leichten Modifikation der in der Streugleichung benötigten off-shell Fortsetzung der $\pi\pi$ -Potentiale gelang es uns zudem, den chiralen Streulängens-Limes für die voll iterierte Lösung der Lippmann-Schwinger-Gleichung wiederherzustellen, was für die in-Medium $\pi\pi$ -Amplitude eine weitere Unterdrückung der Schwelleneffekte zur Folge hat. Aufbauend auf diesen Erkenntnissen haben wir eine Vorschrift angegeben, die es ermöglicht, aus einer (gebrochen) chiral invarianten Lagrangedichte effektiv ('minimal') chiral symmetrische $\pi\pi$ -Modelle zu konstruieren. Um die bei der Beschreibung der freien $\pi\pi$ -Streuung auftretenden Defizite des linearen σ -Modells zu überwinden, haben wir so – ausgehend vom geeichten, nicht-linearen σ -Modell – eine chiral verbesserte Version der Jülich $\pi\pi$ -Wechselwirkung erstellt. Diese liefert sowohl eine gute Reproduktion der freien $\pi\pi$ -Streudaten als auch ein realistisches Verhalten bei der Anwendung auf die Berechnung von s-Wellen Korrelationen in Kernmaterie für Dichten $\rho \lesssim 2\rho_0$. Letzteres wird in erster Linie durch die neu hinzugekommenen $\pi\pi$ -Kontakt-Wechselwirkungen erreicht, die eine starke Quelle von Repulsion bei kleinen Energien darstellen, so daß das Kondensationsverhalten zu wesentlich höheren Dichten aufgeschoben wird. Zur weiteren quantitativen Eingrenzung der in die Kontaktterme eingehenden Parameter bietet es sich z.B. an, die von Grion *et al.* [107] durchgeführten Messungen invarianter $\pi^+\pi^-$ -Massenverteilungen in $A(\pi^+, \pi^+\pi^-)$ -Reaktionen zu analysieren. Diese zeigen einen erheblichen systematischen Anstieg des Wirkungsquerschnittes in Schwellennähe mit wachsender Kernmassenzahl A . Eine weitere Möglichkeit für einen Test des chiral verbesserten $\pi\pi$ -Modells wurde in Kapitel 3 verfolgt: mit Hilfe eines in der Jülich-Gruppe entwickelten, mikroskopischen Modells für den $NN \rightarrow \pi\pi$ -Prozeß im pseudophysikalischen Bereich haben wir mittels dispersi-onstheoretischer Methoden ein Nukleon-Nukleon Potential für korrelierten 2π - (' σ ') Austausch in Kernmaterie extrahiert. In Erweiterung der von Durso *et al.* [63] durchgeführten Rechnungen konnten wir einerseits den Energiebereich unterhalb der 2-Pionschwelle einbeziehen und andererseits zeigen, daß – im Vergleich zum Lohse/Pearce-Modell – die chiral verbesserte Version für Dichten $\rho \leq \rho_0$ zu einer bedeutenden Stabilisierung des zentralen in-Medium N - N -Potentials führt. Für eine Quantifizierung dieser Aussage sind auch hier weitere Rechnungen erforderlich, z.B. die Erweiterung auf den ρ -Kanal (unter Berücksichtigung der für die Vektorstromerhaltung notwendigen Medium-Korrekturen des $\pi\pi\rho$ -Vertex') und die letztendliche Anwendung in einer Dirac-Brueckner-Hartree-Fock-Rechnung [2] zur Bestimmung der Grundzustandseigenschaften von Kernmaterie. Zum Abschluß des dritten Kapitels haben wir den Einfluß der chiralen Restauration bei endlicher Dichte in Form des Brown-Rho-Scaling untersucht: die entsprechende Reduktion von $m_\rho(\rho)$, $f_\pi(\rho)$ etc. führt zu einer leichten Erhöhung der Stärke im 2-Pion-Schwellenbereich der $NN \rightarrow \pi\pi \rightarrow NN$ -Spektralfunktion (bei Verwendung der chiral verbesserten $\pi\pi$ -Wechselwirkung; im Lohse/Pearce-Modell stellt sich nach wie vor 2π -Kondensation ein). Der daraus resultierende Anstieg der Attraktion im N - N -Zentralpotential entspricht in guter Näherung dem Austausch eines scharfen ('zero-width') σ -Mesons mit skaliertem

Masse $m_\sigma(\rho)$, d.h. unser dynamisches Modell für in-Medium 2π - (σ' -) Austausch liefert in diesem Fall das auch für m_σ geforderte Skalenverhalten; bei zusätzlichem (repulsiven) Austausch eines scharfen ω -Mesons mit skaliertem Masse $m_\omega(\rho)$ ergibt sich so eine bemerkenswerte Ausbalancierung der verschiedenen Dichteeffekte.

Im zweiten Teil der Arbeit (Kapitel 4-6) haben wir Pioneigenschaften in *heißer* hadronischer Materie untersucht, deren Verständnis für die Analyse der äußerst komplexen ultrarelativistischen Schwerionenreaktionen von Bedeutung ist.

Im Rahmen des thermodynamischen Greensfunktionen-Formalismus wurde in Kapitel 4 ein Brueckner-Schema zur Berechnung von Pionselbstenergie und $\pi\pi$ -Streuamplitude im heißen Piongas, wie man es in zentralen Kollisionen an den zukünftigen Beschleunigern RHIC und LHC erwartet, formuliert. Unter erneuter Verwendung von Mesonaustauschmodellen für die $\pi\pi$ -Wechselwirkung wurde das Brueckner-Problem bei verschwindendem chemischen Potential ($\mu_\pi=0$) durch numerische Iteration gelöst. Die entscheidende Verbesserung gegenüber früheren Analysen besteht in einer exakten Behandlung der off-shell Dynamik von Pionselbstenergie und 2-Pionpropagator sowie der Berücksichtigung neuartiger Beiträge ('thermische' Anregungen). Aufgrund verschiedener sich kompensierender Effekte zeigen die selbstkonsistenten Endresultate für die in-Medium $\pi\pi$ -Streuamplitude im wesentlichen eine leichte Verbreiterung und Peakreduktion der Resonanzstrukturen in σ -, ρ - und f_2 -Kanal. Im Vergleich zum Lohse/Pearce-Modell führt die Verwendung der chiral verbesserten $\pi\pi$ -Wechselwirkung auch im heißen Piongas zu einer Unterdrückung der ohnehin schon schwach ausgeprägten sub-Schwellenstärke im σ -Kanal. Für höhere Energien ($E_{\pi\pi} \geq 500$ MeV) liefern beide Modelle praktisch identische Ergebnisse. Des weiteren konnten wir zeigen, daß die einfachste Form der in praktischen Anwendungen wichtigen Quasiteilchennäherung eine gute Übereinstimmung mit den 'exakten' Rechnungen aufweist. Zudem wurden die Auswirkungen des BR-Scaling als Folge der chiralen Restauration bei endlicher Temperatur untersucht, wobei wir uns auf die Verwendung des chiral verbesserten $\pi\pi$ -Modells beschränkt haben: es entwickelt sich eine beträchtliche Amplituden-Überhöhung im Schwellenbereich des σ -Kanals sowie eine in die $\pi\pi$ -Potentiale eingeführte Verschiebung der ρ -Resonanz zu kleineren Energien. Eine abschließende Abschätzung mittels aus der Pionselbstenergie berechneter mittlerer freier Weglängen ergab, daß konsistente Werte für Freezeout-Temperaturen unter RHIC-/LHC-Bedingungen nicht oberhalb von $T=150$ MeV liegen sollten, sofern $\mu_\pi=0$. Eine Präzisierung dieser Abschätzung durch Anwendung unserer Resultate in dynamischen Transporttheorie-Simulationen sowie eine Erweiterung der Rechnungen auf endliches chemisches Potential erscheinen uns als sinnvolle Fortsetzung dieser Arbeit, insbesondere in Annäherung an die in URHIC-Experimenten realisierten Bedingungen.

Basierend auf den selbstkonsistenten Resultaten aus Kapitel 4 wurde im 5. Kapitel eine Berechnung der Zustandsgleichung eines heißen wechselwirkenden Piongasen präsentiert ($\mu_\pi=0$). Aus dem ebenfalls im Greensfunktionen-Zugang ermittelten thermodynamischen Potential $\Omega_\pi(T)$ wurden mit Hilfe thermodynamischer Standardrelationen die Zustandsvariablen Druck-, Entropie- und Energiedichte extrahiert. Im Vergleich zum freien Piongas zeigen diese einen beträchtlichen Anstieg für Temperaturen $T \geq 100$ MeV, der zum Großteil durch ρ -Resonanzformation im Wechselwirkungsanteil von $\Omega_\pi(T)$ ('Skeleton-Diagramme') generiert wird und quantitativ in etwa dem Beitrag freier ρ -Mesonen entspricht – ein Mechanismus, der aus dem Beth-Uhlenbeck-Zugang wohlbekannt ist und auch von Welke

et al. [25] mittels einer relativistischen Virialentwicklung, basierend auf empirischen $\pi\pi$ -Streuphasen, gefunden wurde. Darüber hinaus finden wir für $T \simeq m_\pi$ eine ca. 10-15%-ige Überhöhung gegenüber den freien π - ρ -Gas-Werten, welche im wesentlichen auf t-/u-Kanal ρ -Austausch zwischen zwei Pionen beruht (die Quasiteilchenbeiträge zu $\Omega_\pi(T)$ stimmen sehr genau mit denen eines freien Piongases überein). Im Gegensatz zu unseren Resultaten führen die auf der Weinberg-Lagrangedichte basierenden Rechnungen von Bunatian und Kämpfer zu einer Reduktion der Zustandsvariablen im Vergleich zum freien Piongas. Die Anwendbarkeit der Weinberg-Lagrangedichte ist jedoch auf die s-Wellen $\pi\pi$ -Wechselwirkung in Schwellennähe beschränkt. Unsere Schlußfolgerung daraus lautet, daß ein höherer Energiebereich (bis $E_{\pi\pi} \simeq 1$ GeV) und höhere Partialwellen (insbesondere die resonante p-Welle) in der $\pi\pi$ -Wechselwirkung unbedingt zu berücksichtigen sind, um zu einer realistischen Beschreibung eines wechselwirkenden Piongases zu gelangen. Allerdings finden sich auch in unseren Resultaten keinerlei Anzeichen für einen Phasenübergang (wie er z.B. in QCD-Gitterrechnungen beobachtet wird). Dazu ist offensichtlich der Einbezug weiterer physikalischer Phänomene erforderlich, z.B. Abweichungen vom chemischen Gleichgewicht ($\mu_\pi > 0$) oder Änderungen der zugrunde liegenden Vakuumstruktur etwa in Form der chiralen Restauration (wie zu Ende des 5. Kapitels angedeutet).

Schließlich haben wir im 6. Kapitel versucht, die von der CERES/NA45-Kollaboration gemessene Überhöhung der Dileptonproduktion bei kleinen invarianten Massen in zentralen 200 GeV/u S-Au Kollisionen auf Zerfälle Medium-modifizierter ρ -Mesonen zurückzuführen. Der wesentliche Mechanismus in unseren Rechnungen beruht auf der Kopplung des ρ -Mesons an 2-Pionzwischenzustände in Verbindung mit einer Renormierung der Pionpropagation in hadronischer Materie. Ausgehend von einer effektiv eichinvarianten Formulierung des Prozesses $\pi^+\pi^- \rightarrow \rho \rightarrow \gamma \rightarrow e^+e^-$ in Kernmaterie nach Chanfray und Schuck [38] haben wir die ρ -Selbstenergie auf ein heißes $\pi N\Delta$ -Gas erweitert und die zugehörige e^+e^- -Produktionsrate unter voller Beibehaltung der off-shell Dynamik des ρ -Propagators ermittelt. Mittels einer stark vereinfachten Modellierung der Raum-/Zeitentwicklung zentraler S-Au Kollisionen (in Anlehnung an relativistische Transporttheorie-Rechnungen von Li *et al.* [34]) und unter Berücksichtigung der Detektorakzeptanz des CERES-Experiments gelang es uns, das aus in-Medium ρ -Zerfällen entstehende e^+e^- -Spektrum zu berechnen. Als Resultat dieser Rechnung zeigt sich, daß die in den CERES-Daten beobachtete Überhöhung bei invarianten Massen von 0.2-0.6 GeV/c² tatsächlich zu einem Großteil durch die Kopplung des ρ -Mesons an in-Medium 2-Pionzustände generiert werden kann. Im Vergleich zu der von Li *et al.* durchgeführten Transportrechnung, die eine gute Beschreibung der CERES-Daten unter der Annahme einer reduzierten ρ -Masse gemäß der BR-Skalenhypothese liefert, bietet unsere Analyse somit eine alternative Erklärungsmöglichkeit. Zum gegenwärtigen Zeitpunkt erscheint jedoch auch eine Kombination beider Effekte möglich. Quantitative Schlußfolgerungen diesbezüglich erfordern detailliertere theoretische Untersuchungen (z.B. eine eichinvariante Formulierung des in-Medium ρ -Propagators bei endlichem Impuls) sowie eine erhöhte Genauigkeit der experimentellen Daten.

Anhang A

Lindhardfunktionen und Parameter in der Pionselfstenergie

Zur Berechnung der Lindhardfunktionen, Glg. (2.4), führt man zunächst unter Benutzung der nichtrelativistischen Baryonpropagatoren aus Glg. (2.5) eine Konturintegration in der Energievariablen durch. Die einfache p-Abhängigkeit der nichtrelativistischen Baryonenergien, Glg. (2.8), in Verbindung mit der Fermi-Stufenfunktion, Glg. (2.6), ermöglicht dann eine analytische Ausführung der Integrationen über p und $\cos \alpha$ ($\alpha = \angle(\vec{k}, \vec{p})$). Im NN^{-1} -Kanal erhält man so:

$$\begin{aligned} \text{Re}\phi_{NN^{-1}}(k_0, k) &= \frac{M_N p_F}{4\pi^2} \left[1 - \frac{p_F}{2k} (1 - z_-^2) \ln\left(\left|\frac{z_- + 1}{z_- - 1}\right|\right) + \frac{p_F}{2k} (1 - z_+^2) \ln\left(\left|\frac{z_+ + 1}{z_+ - 1}\right|\right) \right], \\ \text{Im}\phi_{NN^{-1}}(k_0, k) &= \begin{cases} \frac{M_N p_F^2}{8\pi k} (1 - z_-^2), & \text{falls } k|p_F - \frac{k}{2}| \leq k_0 M_N \leq k(p_F + \frac{k}{2}) \\ \frac{M_N^2 k_0}{4\pi k}, & \text{falls } k < 2p_F \text{ und } 0 \leq k_0 M_N \leq k(p_F - \frac{k}{2}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

mit

$$z_{\pm} = \frac{k_0 M_N}{k p_F} \pm \frac{k}{2 p_F}, \quad (\text{A.2})$$

und im ΔN^{-1} -Kanal:

$$\begin{aligned} \phi_{\Delta N^{-1}}(k_0, k) &= -\frac{p_F^2}{(2\pi)^2 \beta^3} \left[\beta \frac{A_1 - A_2}{p_F} + \frac{1}{2} \left(\beta^2 - \frac{A_1^2}{p_F^2} \right) \ln\left(\frac{A_1/p_F + \beta}{A_1/p_F - \beta}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\beta^2 - \frac{A_2^2}{p_F^2} \right) \ln\left(\frac{-A_2/p_F + \beta}{-A_2/p_F - \beta}\right) \right] \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

mit

$$\beta \equiv \frac{k}{M_{\Delta}}, \quad A_{1/2} \equiv k_0 \mp \left(\frac{k^2}{2M_{\Delta}} + M_{\Delta} - M_N - \frac{i}{2} \Gamma_{\Delta}^{\text{med}}(k_0, k) \right). \quad (\text{A.4})$$

Dabei ist es üblich, die Δ -Breite $\Gamma_{\Delta}^{\text{med}}$ im rückwärtslaufenden Graphen zu vernachlässigen [108]. Diese setzt sich aus zwei Anteilen zusammen:

$$\Gamma_{\Delta}^{\text{med}} = \Gamma_{\Delta}^{(1)} + \Gamma_{\Delta}^{(2)}. \quad (\text{A.5})$$

Für $\Gamma_{\Delta}^{(1)}$ benutzen wir eine von Oset/Salcedo abgeleitete Version [109, 110], die relativistische sowie Pauli-Blocking-Korrekturen enthält:

$$\Gamma_{\Delta}^{(1)}(k_0, k) = \frac{2}{3} \frac{f_{\pi N \Delta}^2}{4\pi} \frac{q_{cms}^3}{m_{\pi}^2} \frac{(W + M_N)^2 - m_{\pi}^2}{4W^2} \frac{1}{2} (1 + \bar{\mu}) \Gamma_{\pi}^2(k) . \quad (\text{A.6})$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= \begin{cases} -1, \bar{\mu}^0 \leq -1 \\ \bar{\mu}^0, -1 \leq \bar{\mu}^0 \leq +1 \\ +1, \bar{\mu}^0 \geq +1 \end{cases} \\ \bar{\mu}^0 &= \frac{E_N^{cms}(M_N + k_0) - E_F W}{k q_{cms}} , \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

der invarianten Δ -Masse

$$W^2 = (M_N + k_0)^2 - k^2 , \quad (\text{A.8})$$

der Nukleonenergie/-impuls im Δ -Ruhesystem

$$\begin{aligned} E_N^{cms} &= \sqrt{M_N^2 + q_{cms}^2} \\ q_{cms}^2 &= \frac{(W^2 - M_N^2 - m_{\pi}^2)^2 - 4M_N^2 m_{\pi}^2}{4W^2} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

und der Nukleon-Fermienergie

$$E_F = \sqrt{M_N^2 + k_F^2} . \quad (\text{A.10})$$

Der in Ref. [109] noch zusätzlich angegebene Tensoranteil ist numerisch vernachlässigbar. Für den Pion-Baryon-Vertex-Formfaktor $\Gamma_{\pi}(k)$ wählen wir die übliche Monopol-Parametrisierung

$$\Gamma_{\pi}(k) = \left(\frac{\Lambda_{\pi}^2 - m_{\pi}^2}{\Lambda_{\pi}^2 + k^2} \right) \quad (\text{A.11})$$

mit $\Lambda_{\pi}=1.2$ GeV. Der zweite Term in Glg. (A.5),

$$\Gamma_{\Delta}^{(2)}(k_0) = 48 \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 + \frac{k_0 - m_{\pi}}{C_1 - m_{\pi}} \right) \Lambda(k_0) \quad (\text{A.12})$$

wurde eingeführt, um das in Pion-optischen Potentialen wohlbekannte ρ^2 -Verhalten zu generieren [111], wobei $C_1=380$ MeV und der Formfaktor

$$\Lambda(k_0) = \left(1 - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{k_0 - C_2}{10}\right)} \right) \left(\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{k_0 - C_3}{15}\right)} \right) \quad (\text{A.13})$$

die Beiträge von Energien $k_0 \leq C_2=110$ MeV und $k_0 \geq C_3=400$ MeV unterdrückt. Eine quantitative Reproduktion Pion-optischer Potentiale erfordert darüber hinaus noch die Berücksichtigung von Pion-induzierten 2-Nukleon-2-Loch-(2p2h-) Anregungen, deren Imaginärteil parametrisiert werden kann mit

$$Im\chi^{2p2h}(k_0, k) = -0.3 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \Lambda(k_0) \Gamma_{\pi}^2(k) . \quad (\text{A.14})$$

Der zugehörige Realteil spielt in unserem Kontext eine untergeordnete Rolle und wird daher vernachlässigt. Aus praktischen Gründen schließen wir χ^{2p2h} in die ΔN^{-1} -Suszeptibilität ein, d.h. wir ersetzen in Glg. (2.9)

$$\chi_{\Delta N^{-1}}^{(0)}(k_0, k) \rightarrow \chi_{\Delta N^{-1}}^{(0)}(k_0, k) + i \text{Im} \chi^{2p2h}(k_0, k) . \quad (\text{A.15})$$

Wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, verwenden wir in unseren Rechnungen effektive Nukleon- und Δ -Massen [112], d.h. für alle in Σ_π eingehenden M_N, M_Δ führen wir die Substitution

$$\begin{aligned} M_N &\rightarrow M_N^* = M_N(1 - 0.2\rho/\rho_0) \\ M_\Delta &\rightarrow M_\Delta^* = M_\Delta - (M_N - M_N^*) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

durch. Die Reduktion der Δ -Masse ist so gewählt, daß die Massendifferenz $dM = (M_\Delta^* - M_N^*)$ konstant bleibt; wir tragen so dem empirischen Fakt Rechnung, daß bei der Anregung von Δ -Resonanzen in Kernen nur vergleichsweise geringe Verschiebungen in der Resonanzenergie (die durch dM bestimmt sind) beobachtet werden [51].

Die Kopplungskonstanten $f_{\pi\alpha}$ und $SI(\alpha)$, die beim Übergang von der Suszeptibilität zur Selbstenergie auftreten (siehe Glg. (2.9)), sind in Tab. (A.1) zusammengefaßt. Neben den

α	NN^{-1}	ΔN^{-1}	$N\Delta^{-1}$	$\Delta\Delta^{-1}$
$SI(\alpha)$	4	16/9	4/9	400
$f_{\pi\alpha}^2/4\pi$	0.081	0.324	0.324	0.00324

Tabelle A.1: *Spin-Isospin-Übergangsfaktoren und Kopplungskonstanten für pioninduzierte Teilchen-Loch-Anregungen in Kernmaterie bzw. im heißen N - Δ -Gas.*

NN^{-1} - und ΔN^{-1} -Kanälen sind dort auch die entsprechenden Faktoren für pioninduzierte, p-Wellen- $N\Delta^{-1}$ - und $\Delta\Delta^{-1}$ -Anregungen aufgeführt [113, 79]. Die letzteren beiden sind in *heißer* Kernmaterie relevant, wo durch thermische Anregung der Nukleonen eine endliche Δ -Komponente generiert wird. Derartige Beiträge zur Pionselbstenergie werden in Kapitel 6 benötigt.

Anhang B

Pseudopotentiale und Parameter im 'chiral verbesserten' Jülich-Modell

Die zur Iteration in der partialwellenzerlegten Lippmann-Schwinger-Glg. (2.23) verwendeten Pseudopotentiale der $\pi\pi$ -Streuung ergeben sich aus den in den Abschnitten 2.4.1 und 2.6.1 angegebenen Bornamplituden durch

- (a) Ersetzung der Mandelstam-Variablen s , t und u durch die on-mass-shell Vorschrift, Glg. (2.45);
- (b) Einführung von phänomenologischen (Dipol-) Formfaktoren zur Simulation der endlichen Ausdehnung der Meson-Wechselwirkungsvertizes; dabei wird unterschieden zwischen
 - (i) s-Kanal Meson-Polgraphen:

$$F^{(s)}(q) = \left(\frac{2\Lambda^2 + m^2}{2\Lambda^2 + 4\omega_q^2} \right)^2, \quad (\text{B.1})$$

wo m die physikalische Masse der Resonanz bezeichnet;

- (ii) t -(u -) Kanal Meson-Austauschgraphen:

$$F^{(t)}(q, q', \cos \theta) = \left(\frac{2\Lambda^2 - m^2}{2\Lambda^2 + (\vec{q} - \vec{q}')^2} \right)^2; \quad (\text{B.2})$$

- (iii) Kontakt-Wechselwirkungsgraphen:

$$F^{(c)}(q) = \left(\frac{2\Lambda^2 - 4m_\pi^2}{2\Lambda^2 + 4q^2} \right)^2; \quad (\text{B.3})$$

- (c) Durchführung einer Partialwellenzerlegung der Isospin-projizierten Bornamplituden:

$$M_B^I(E, \vec{q}, \vec{q}') = \frac{1}{2} \sum_J (2J+1) P_J(x) M_B^{JI}(E, q, q') \quad (\text{B.4})$$

mit den CMS -Impulsen $\vec{q}$ bzw. $\vec{q}'$ der ein- bzw. auslaufenden Pionen und $x = \cos \theta$, $\theta = \angle(\vec{q}, \vec{q}')$. Mit einer analogen Entwicklung für die volle M^I -Amplitude überführt man so die Streugleichung (2.1) in ihre partialwellenzerlegte Form (2.23). Unter Benutzung der Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{+1} dx P_J(x) P_{J'}(x) = \frac{2}{2J+1} \delta_{JJ'} , \quad (B.5)$$

ergeben sich die V^{JI} dann durch Umkehrung von Glg. (B.4) zu

$$V^{JI}(E, q, q') = \int_{-1}^{+1} dx P_J(x) M_B^I(E, \vec{q}, \vec{q}') (F(\vec{q}, \vec{q}'))^2 \quad (B.6)$$

mit zwei entsprechenden Formfaktoren aus (b).

Da das Jülich-Modell zusätzlich noch die Kopplung an den $K\bar{K}$ -Kanal enthält, treten neben der $\pi\pi$ -Wechselwirkung $V_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}$ auch noch Übergangspotentiale $V_{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}$, $V_{K\bar{K} \rightarrow \pi\pi}$ sowie direkte $K\bar{K}$ -Wechselwirkungen $V_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}$ auf. Wir unterscheiden diese durch Einführung eines Index' $\mu\nu$ mit $\mu, \nu = \pi\pi, K\bar{K}$. Des weiteren bezeichnen $m_1 = m_\pi, m_K$ bzw. $m_3 = m_\pi, m_K$ die Massen der Teilchen im einlaufenden (μ) bzw. auslaufenden (ν) Kanal und $\omega_q^{(1,3)}$ die zugehörigen on-mass-shell Energien. Die Isospinfaktoren IF der 3-Meson-Vertizes sind in Tab. (B.1) aufgeführt. Der Symmetrisierungsfaktor n beträgt $1/2, 1/\sqrt{2}$ und 1 für $\pi\pi \rightarrow \pi\pi, \pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ und $K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$, respektive (für weitere Details siehe Ref. [114, 115]).

Nach diesen Vorbemerkungen sind wir nun in der Lage, die expliziten Ausdrücke für alle Pseudopotentiale anzugeben:

(1) t-Kanal Vektormesonaustausch:

$$V_{\mu\nu}^{JI}(E, q, q') = g_1 g_3 n IF \int_{-1}^{+1} dx P_J(x) \frac{E^2 - m_1^2 - m_3^2 + 2\omega_q^{(1)}\omega_{q'}^{(3)} + 2qq'x}{m_1^2 + m_3^2 - 2\omega_q^{(1)}\omega_{q'}^{(3)} + 2qq'x - m_\alpha^2} F^{(t)}(q, q', x)^2 ; \quad (B.7)$$

(2) s-Kanal $\rho(770)$ -Polgraph:

$$V_{\mu\nu}^{11}(E, q, q') = g_1 g_3 n IF \frac{2}{3} \frac{4qq'}{E^2 - (m_\rho^{(0)})^2} F^{(s)}(m_1, q) F^{(s)}(m_3, q') ; \quad (B.8)$$

(3) s-Kanal $f_2(1270)$ -Polgraph:

$$V_{\mu\nu}^{20}(E, q, q') = \frac{g_1 g_3}{m_1 m_3} n IF \frac{2}{5} \frac{32q^2 q'^2 / 3}{E^2 - (m_{f_2}^{(0)})^2} F^{(s)}(m_1, q) F^{(s)}(m_3, q') ; \quad (B.9)$$

(4) s-Kanal $f_0(1400)$ -Polgraph:

$$V_{\mu\nu}^{00}(E, q, q') = \frac{g_1 g_3}{m_1 m_3} n IF 2 \frac{[(\omega_q^{(1)})^2 + q^2][(\omega_{q'}^{(3)})^2 + q'^2]}{E^2 - (m_{f_0}^{(0)})^2} F^{(s)}(m_1, q) F^{(s)}(m_3, q') ; \quad (B.10)$$

Kanal	Meson	IF		
		$I=0$	$I=1$	$I=2$
$\pi\pi \rightarrow \pi\pi$	$f_0^{(0)}$	3	—	—
	$\rho^{(0)}$	—	2	—
	ρ	2	1	-1
	$f_2^{(0)}$	3	—	—
$\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$	$f_0^{(0)}$	$-\sqrt{6}$	—	—
	$\rho^{(0)}$	—	2	—
	K^*	$\sqrt{6}$	2	—
	$f_2^{(0)}$	$-\sqrt{6}$	—	—
$K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$	$f_0^{(0)}$	2	—	—
	$\rho^{(0)}$	—	2	—
	ρ	3	-1	—
	ω	1	1	—
	ϕ	1	1	—
	$f_2^{(0)}$	2	—	—

Tabelle B.1: Isospinfaktoren für Meson-Meson-Meson-Kopplung entsprechend den Wechselwirkungs-Lagrangedichten in Tab. (B.2).

(5) Kontakt-Wechselwirkungen:

wir beschränken uns bei diesen auf den $\pi\pi$ -Sektor; entsprechend den drei verschiedenen Termen in der Lagrangedichte (2.57) unterscheiden wir drei Typen von Kontakttermen, vgl. auch Tab. (B.2):

(5a) den für die explizite Symmetriebrechung verantwortlichen, zweiten Term in Glg. (2.57); dieser trägt nur für $J=0$ bei:

$$\begin{aligned}
V_{\pi\pi}^{00}(E, q, q') &= \frac{5m_\pi^2}{f_\pi^2} F^{(c)}(q) F^{(c)}(q') \\
V_{\pi\pi}^{02}(E, q, q') &= 0.4 V_{\pi\pi}^{00}(E, q, q') ;
\end{aligned} \tag{B.11}$$

(5b) den ersten Term in Glg. (2.57), der die Dynamik im nicht-linearen σ -Modell charakterisiert; die nicht-verschwindenden Beiträge sind:

$$\begin{aligned}
V_{\pi\pi}^{00}(E, q, q') &= -\frac{1}{f_\pi^2} [3E^2 + 4(m_\pi^2 - \omega_q \omega_{q'})] F^{(c)}(q) F^{(c)}(q') \\
V_{\pi\pi}^{02}(E, q, q') &= -\frac{1}{f_\pi^2} [4(m_\pi^2 - \omega_q \omega_{q'})] F^{(c)}(q) F^{(c)}(q') \\
V_{\pi\pi}^{11}(E, q, q') &= -\frac{1}{f_\pi^2} \frac{4}{3} q q' F^{(c)}(q) F^{(c)}(q') ;
\end{aligned} \tag{B.12}$$

(5c) den aus einer konsistenten Eichung hervorgehenden, vierten Term in Glg. (2.57), dessen nicht-verschwindende Beiträge sind:

$$\begin{aligned}
V_{\pi\pi}^{00}(E, q, q') &= 2 \frac{g_{\pi\pi\rho}^2}{m_\rho^2} [2E^2 - 4(m_\pi^2 - \omega_q \omega_{q'})] F^{(c)}(q) F^{(c)}(q') \\
V_{\pi\pi}^{02}(E, q, q') &= -\frac{1}{2} V_{\pi\pi}^{00}(E, q, q') \\
V_{\pi\pi}^{11}(E, q, q') &= \frac{g_{\pi\pi\rho}^2}{m_\rho^2} 4qq' F^{(c)}(q) F^{(c)}(q') .
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Die Parameter, die wir für den in Abb. 2.8 gezeigten Fit verwendet haben, sind in Tab. (B.2) zusammengefaßt.

Die Relation der (on-shell) $M_{\pi\pi}^{JI}$ -Amplitude zu den experimentellen Streuphasen ist gegeben durch

$$M_{\pi\pi}^{JI}(E) = -\frac{32\pi\omega_{q_{on}}}{q_{on}} \sin(\delta^{JI}(E)) \exp(i\delta^{JI}(E)) , \tag{B.14}$$

wobei die Impulsargumente in der on-shell Amplitude festgelegt sind durch

$$q = q' = q_{on} \equiv \frac{1}{2} \sqrt{E^2 - 4m_\pi^2} . \tag{B.15}$$

Diese Vorschrift behalten wir auch für den sub-Schwellenbereich bei ($E \leq 2m_\pi$), der in den in-Medium Rechnungen relevant ist (in diesem Fall wird q_{on} rein imaginär).

$\pi\pi$ -Kanal				
Meson X	Kopplung	Koppl.-Konst. $(g_{\pi\pi X})^2/4\pi$	Masse m_X [MeV]	Cutoff Λ_X [MeV]
$f_0^{(0)}(1400)$	$(g_{\pi\pi f_0}/m_\pi) (\partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi}) \phi_{f_0}$	0.01	1585	1700
$\rho^{(0)}(770)$	$g_{\pi\pi\rho} (\vec{\pi} \times \partial_\mu \vec{\pi}) \cdot \vec{\rho}^\mu$	1.6	1134	3590
$\rho(770)$	"	3.0	770	1380
$f_2^{(0)}(1270)$	$(g_{\pi\pi f_2}/m_\pi) (\partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial_\nu \vec{\pi}) \phi_{f_2}^{\mu\nu}$	0.015	1563	2285
Kontakt- wechsel- wirkungen	$(m_\pi^2/8f_\pi^2) (\vec{\pi}^2)^2$	$f_\pi=93$ MeV	$m_\pi=139.57$	700
	$(1/4f_\pi^2) (\vec{\pi})^2 (\partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi})$	"	-	950
	$(g_{\pi\pi\rho}^2/2m_\rho^2) (\vec{\pi} \times \partial^\mu \vec{\pi})^2$	1.6	$m_\rho=770$	760

$\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ -Kanal				
Meson X	Kopplung	Koppl.-Konst. $(g_{K\pi X})^2/4\pi$	Masse m_X [MeV]	Cutoff Λ_X [MeV]
$K^*(895)$	$g_{\pi K K^*} \partial^\mu \vec{\pi} \cdot (K \vec{\tau} K_\mu^*)$	0.75	895	1420

$K\bar{K}$ -Kanal				
Meson X	Kopplung	Koppl.-Konst. $(g_{K\bar{K}X})^2/4\pi$	Masse m_X [MeV]	Cutoff Λ_X [MeV]
$f_0^{(0)}(1400)$	$(g_{K\bar{K}f_0}/m_K) \partial_\mu \bar{K} \partial^\mu K \phi_{f_0}$	0.0025	1585	1700
$\rho^{(0)}(770)$	$g_{K\bar{K}\rho} (K \vec{\tau} \partial_\mu \bar{K}) \cdot \vec{\rho}^\mu$	0.4	1134	3590
$\rho(770)$	"	0.75	770	2100
$\omega(782)$	$g_{K\bar{K}\omega} (K \partial_\mu \bar{K}) \omega^\mu$	-0.75	782.6	2100
$\phi(1020)$	$g_{K\bar{K}\phi} (K \partial_\mu \bar{K}) \phi^\mu$	-1.5	1020	2100
$f_2^{(0)}(1270)$	$(g_{K\bar{K}f_2}/m_K) \partial_\mu K \partial_\nu \bar{K} \phi_{f_2}^{\mu\nu}$	0.0038	1563	2285

Tabelle B.2: Kopplungen und Parameter für das 'chiral verbesserte' $\pi\pi/K\bar{K}$ -Jülich-Modell unter Benutzung der on-mass-shell Vorschrift (2.45); s-Kanal Polgraphen sind mit einem Superscript '(0)' versehen; diese induzieren ebenfalls $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ -Übergänge, die im mittleren Teil der Tabelle nicht aufgeführt sind; sie ergeben sich aus der Kombination eines $\pi\pi$ -Polgraph-Vertex' aus dem oberen Teil mit einem $K\bar{K}$ -Polgraph-Vertex' aus dem unteren Teil der Tabelle.

Anhang C

Auswertung von Matsubara-Summen

In den Kapiteln 4 und 5 haben wir mehrfach von Relationen des Typs

$$(-T) \sum_{\nu} \frac{1}{z_{\nu} - y} = f^{\pi}(y) \quad (\text{C.1})$$

Gebrauch gemacht ($z_{\nu} = i\omega_{\nu}$ mit den (Boson-) Matsubara-Frequenzen $\omega_{\nu} = 2\pi\nu T, \nu \in Z$, und der Bosefunktion $f^{\pi}(y)$). In diesem Anhang geben wir eine explizite Ableitung von Glg. (C.1) an, wobei wir im wesentlichen Ref. [39] folgen.

Wir stellen zunächst fest, daß die Funktion $f(\zeta) = (e^{\zeta} - 1)^{-1}$ in $\zeta_{\nu} = 2\pi\nu i$ einfache Pole mit Residuum 1 hat, was man wie folgt einsehen kann: unter Ausnutzung der Formel zur Bestimmung des Residuums einer Funktion g mit einer Polstelle erster Ordnung in $\zeta = a$ [116],

$$\text{res}_a g = \lim_{\zeta \rightarrow a} (\zeta - a)g(\zeta) , \quad (\text{C.2})$$

finden wir für $g=f$ und $a=\zeta_0=0$:

$$\begin{aligned} \text{res}_0 f &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta f(\zeta) \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\zeta}{\zeta + \zeta^2/2 + \dots} = 1 , \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

und wegen $f(\zeta + 2\pi i) = f(\zeta)$ folgt daraus die gleiche Eigenschaft für alle $\zeta_{\nu} = 2\pi\nu i$. Wenn wir daher die Funktion über eine die imaginäre Achse einschließende Integrationskontur C in der komplexen ζ -Ebene integrieren (vgl. Abb. C.1), gilt:

$$\int_C d\zeta \frac{h(\zeta)}{e^{\zeta} - 1} = 2\pi i \sum_{\nu} h(\zeta_{\nu}) \quad (\text{C.4})$$

für jede in einer Umgebung der imaginären ζ -Achse holomorphen Funktion $h(\zeta)$. Für unsere Zwecke wählen wir

$$h(\zeta) = \frac{e^{\eta\zeta}}{\zeta - y/T} \quad (\text{C.5})$$

mit reellem $y > 0$ und infinitesimalem $\eta > 0$. Nach einer zusätzlichen Variablentransformation $\zeta \rightarrow z = \zeta T$ erhält man

$$\sum_{\nu} \frac{e^{\eta z_{\nu}/T}}{z_{\nu} - y} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{T} \frac{1}{e^{z/T} - 1} \frac{e^{\eta z/T}}{z - y} . \quad (\text{C.6})$$

Neben den einfachen Polen auf der imaginären Achse besitzt der Integrand nur noch einen weiteren einfachen Pol bei $z=y$. Wir können daher die Kontur C deformieren zu $C_1 + C_2$, siehe Abb. C.1. Der Beitrag der Bogenstücke C_2 verschwindet für hinreichend große

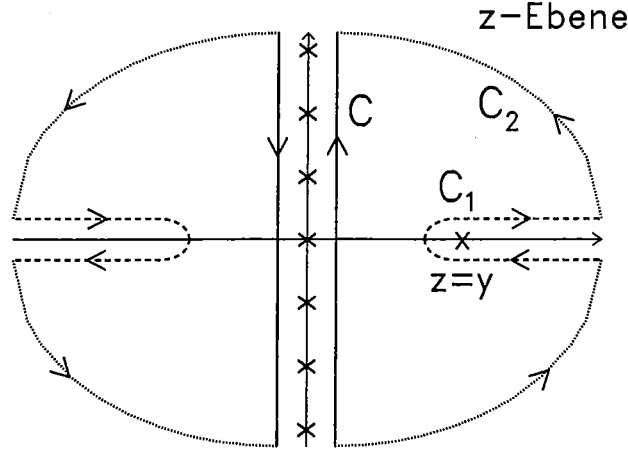


Abbildung C.1: Integrationskonturen zur Berechnung von Matsubara-Summen; die Kontur C (durchgezogene Linie) wird deformiert in $C_1 + C_2$ (gestrichelte und gepunktete Linien); die Kreuze repräsentieren die (einfachen) Pole des Integranden in Glg. (C.6); auf der imaginären Achse sind dies gerade die Matsubara-Frequenzen $z_\nu = i\omega_\nu = 2\pi i\nu T$.

Radien: für $\text{Re}z > 0$ verhält sich der Integrand für $|z| \rightarrow \infty$ wie $\exp[(\eta - 1)\text{Re}z/T]/|z|$, und für $\text{Re}z < 0$ wie $\exp[\eta\text{Re}z/T]/|z|$. Die verbleibende Integration über C_1 kann durch Anwendung der Cauchy'schen Integralformel [116] ausgeführt werden:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{dz}{T} \frac{1}{e^{z/T} - 1} \frac{e^{\eta z/T}}{z - y} = -\frac{1}{T} \frac{e^{\eta y/T}}{e^{y/T} - 1}, \quad (\text{C.7})$$

wobei das Minuszeichen aus dem mathematisch negativen Umlaufsinn resultiert. Die Kombination der Glgn. (C.6) und (C.7) liefert

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} \frac{1}{z_{\nu} - y} &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\sum_{\nu} \frac{e^{\eta z_{\nu}}}{z_{\nu} - y} \right) \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{T} \frac{e^{\eta y/T}}{e^{y/T} - 1} \right) \\ &= -\frac{1}{T} f^{\pi}(y), \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

was zu zeigen war.

Anhang D

Kinematische Variablen in ultrarelativistischen Schwerionenreaktionen

Die Anwendungen unserer Rechnungen auf URHIC's beziehen sich ausschließlich auf zentrale Kollisionen, die bei einem Stoßparameter $b=0$ stattfinden (d.h. maximaler 'Überlapp' der beiden Kerne in der x-y-Ebene); wir beschränken die Diskussion daher auf diesen Fall, vgl. Abb. D.1.

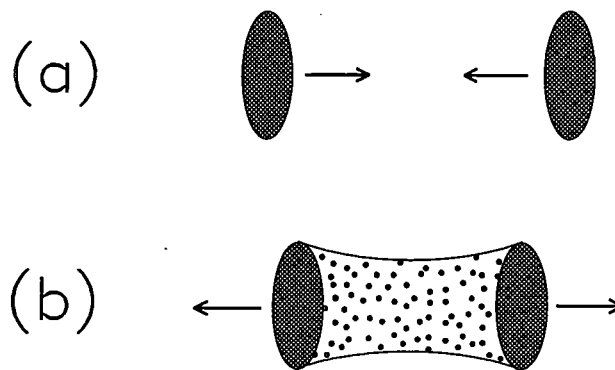


Abbildung D.1: Schematische Darstellung zweier in ihrem CMS-System zentral kollidierender, lorentzkontrahierter Schwerionen; (a) vor der Kollision (die Kerne bewegen sich entlang der z-Achse), (b) nach der Kollision (angedeutet sind die Target- und Projektil-Fragmentierungsregionen sowie die 'zentrale' Zone).

Die z-Achse wird als die Strahlachse der beschleunigten Schwerionen gewählt. Zur Charakterisierung der Kinematik eines im Detektor gemessenen Teilchens der Masse m nimmt

man folgende Aufspaltung seiner Energie $E = \sqrt{m^2 + p^2}$ und Impulskomponenten vor [117]:

$$\begin{aligned} E &= m_t \cosh y \\ p_z &= m_t \sinh y \\ m_t &\equiv \sqrt{m^2 + p_t^2} \\ p_t &\equiv \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \end{aligned} \quad (D.1)$$

mit dem Transversalimpuls p_t , der 'transversalen' Masse m_t und der Rapidität

$$\begin{aligned} y &\equiv \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right) \\ &= \tanh^{-1} \left(\frac{p_z}{E} \right), \end{aligned} \quad (D.2)$$

wobei die zweite Zeile aus einer Identität der Umkehrfunktion des Tangens-Hyperbolicus,

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad (D.3)$$

hervorgeht.

Da endliche Transversalimpulse nur aus (im Idealfall multiplen) Wechselwirkungen zwischen den Hadronen generiert werden können, enthalten deren Transversalimpulsverteilungen im Prinzip Informationen über den 'thermischen' Zustand des hadronischen Vielteilchensystems und werden daher oft benutzt, um einer zentralen Kollision eine 'effektive' Temperatur zuzuordnen.

Die Rapidität dagegen charakterisiert die Longitudinalimpulsverteilungen und hat die vorteilhafte Eigenschaft, daß sie sich unter Lorentztransformationen parallel zur z-Achse additiv verhält: nimmt man einen 'Boost' in ein mit $\beta = v_z/c$ bewegtes System entlang der z-Achse vor, so gilt für die Energie E^* und Impulskomponente p_z^* im bewegten System:

$$\begin{aligned} E^* &= \gamma E - \gamma \beta p_z \\ p_z^* &= -\gamma \beta E + \gamma p_z, \end{aligned} \quad (D.4)$$

was für die Rapidität y^* im bewegten System zur Folge hat:

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E^* + p_z^*}{E^* - p_z^*} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) \\ &= y - \tanh^{-1} \beta. \end{aligned} \quad (D.5)$$

Rapiditätsverteilungen haben also die Eigenschaft, daß sie unter Lorentzboosts ihre Form bewahren. Als 'zentrale' Rapidität y_{cm} in einer Schwerionenkollision bezeichnet man den Wert für y , den ein Teilchen besitzt, welches im Schwerpunktsystem der Kollision eine verschwindende p_z -Komponente hat. Dazu die folgenden drei Beispiele:

- (1) für die Kollision zweier auf jeweils 10 GeV/u beschleunigter Schwerionen gleichen Typs A in ihren CMS findet man:

$$y_{cm} = 0$$

und mit $p_{z,max} = \sqrt{E^2 - M_N^2}$ für die maximale/minimale Rapidität:

$$y_{max/min} = \pm \tanh^{-1} \frac{p_{z,max}}{E} \simeq \pm 3$$

- (2) bei der Kollision eines 200 GeV/u Projektils vom Typ A mit einem ruhenden Target-Kern A (z.B. in S-S Kollisionen am CERN-SpS) gilt:

$$\begin{aligned} y_{target} &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{M_N}{M_N} \right) = 0 \\ y_{projectile} &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E_{lab} + p_{z,lab}}{E_{lab} - p_{z,lab}} \right) = 6 ; \end{aligned}$$

die CMS -Energie beträgt $s = (M_N + E_{lab})^2 - p_{z,lab}^2$, d.h. $E_{cms} = \frac{1}{2}\sqrt{s} = 10$ GeV/u, entspricht also der in Beispiel (1) betrachteten CMS -Kollision. Daher folgt

$$y_{cm} = \tanh^{-1} \frac{p_{z,cms}}{E_{cms}} = 3 ,$$

d.h. im Vergleich zu (1) wurde die Rapiditätsverteilung gerade um 3 Einheiten verschoben;

- (3) in Kapitel 6 analysieren wir Reaktionen von 200 GeV/u Schwefelprojektilen mit ruhenden Goldkernen: Target- und Projektilrapidity stimmen mit Beispiel (2) überein, die zentrale Rapidity liegt nun jedoch aufgrund der asymmetrischen Kernmassen näher an y_{target} : die totale CMS -Energie des S-Au Systems beträgt

$$s_{tot} = ([197M_N + 32 \cdot 200\text{GeV}]^2 - [32 \cdot 200\text{GeV}]^2) = (1550\text{GeV})^2 ,$$

so daß

$$\begin{aligned} E_{cms} &= \frac{1550\text{GeV}}{(197 + 32)u} = 6.769\text{GeV/u} \\ \Rightarrow p_{z,cms} &= \sqrt{E_{cms}^2 - M_N^2} = 6.703\text{GeV/u} \\ \Rightarrow y_{cm} &\simeq 2.66 . \end{aligned}$$

In experimentellen Messungen wird üblicherweise die sogenannte 'Pseudorapidity' verwendet, definiert als

$$\eta = -\ln \left(\tan \frac{\Theta}{2} \right) , \quad (\text{D.6})$$

wobei Θ den Zenitwinkel des gemessenen Teilchens relativ zur z-Achse bezeichnet. Den Zusammenhang zur Rapidität kann man durch eine Entwicklung von y in (m/p) herstellen; für ultrarelativistische Impulse, $p \gg m$, gilt dann

$$\frac{E + p_z}{E - p_z} = \frac{\sqrt{1 + m^2/p^2} + p_z/p}{\sqrt{1 + m^2/p^2} - p_z/p} \simeq \frac{1 + p_z/p}{1 - p_z/p}. \quad (\text{D.7})$$

Mit $p_z/p = \cos \Theta$ ergibt sich so aus Glg. (D.2):

$$\begin{aligned} y \simeq \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \cos \Theta}{1 - \cos \Theta} \right) &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\cos^2 \Theta/2}{\sin^2 \Theta/2} \right) \\ &= -\ln(\tan \Theta/2) = \eta, \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

d.h. im ultrarelativistischen Grenzfall sind Rapidität und Pseudorapidität identisch. Rapiditätsspektren von Protonen geben z.B. Auskunft über die in der Einleitung erwähnte 'Stopping Power' S einer Kollision: eine um y_{cm} gehäufte Verteilung läßt auf einen hohen Abstoppungsgrad schließen, während eine Proton-Rapiditätsverteilung mit 2 Maxima nahe $y_{projectile}$ und y_{target} darauf hindeutet, daß sich die zwei kollidierenden Kerne im wesentlichen penetriert haben.

Literaturverzeichnis

- [1] R. Machleidt, K. Holinde und Ch. Elster, Phys. Rep. **149** (1987) 1.
- [2] R. Brockmann und R. Machleidt, Phys. Rev. **C42** (1990) 1965.
- [3] R. Machleidt, Adv. Nucl. Phys. **19** (1989) 189.
- [4] P. Schuck, G. Chanfray und W. Nörenberg, Z. Phys. **A330** (1988) 119.
- [5] G. Chanfray, Z. Aouissat, P. Schuck und W. Nörenberg, Phys. Lett. **B256** (1991) 325.
- [6] V. Mull, J. Wambach und J. Speth, Phys. Lett. **B286** (1992) 13.
- [7] Z. Aouissat, Thesis Report, ISN 93-63. Grenoble.
- [8] Z. Aouissat, G. Chanfray und P. Schuck, Mod. Phys. Lett. **A15** (1993) 1379.
- [9] J.A. Johnstone und T.-S.H. Lee, Phys. Rev. **C34** (1986) 243.
- [10] D. Lohse, J. W. Durso, K. Holinde und J. Speth, Phys. Lett. **B234** (1989) 235; Nucl. Phys. **A 516** (1990) 513;
- [11] B.C. Pearce, K. Holinde und J. Speth, Nucl. Phys. **A541** (1992) 663.
- [12] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **17** (1966) 616.
- [13] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett **18** (1967) 188.
- [14] *Proceedings of the 11th International Conference on Ultrarelativistic Nucleus-Nucleus Collisions ('Quark Matter '95')*, Nucl. Phys. **A590** 1c.
- [15] S. Nagamiya, Nucl. Phys. **A544** (1992) 5c.
- [16] J. Stachel und G. R. Young, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **42** (1992) 537.
- [17] E.V. Shuryak, Nucl. Phys. **A533** (1991) 761.
- [18] A. Schenk, Nucl. Phys. **B363** (1991) 97.
- [19] R. Rapp und J. Wambach, Phys. Lett **B315** (1993) 220.
- [20] G. Chanfray und D. Davesne, Zeit. Phys. **A349** (1994) 65.

- [21] J. L. Goity und H. Leutwyler, Phys. Lett. **B228** (1989) 517.
- [22] Mad. Prakash, Man. Prakash, R. Venugopalan und G. M. Welke, Phys. Rep. **227** (1993) 321.
- [23] Z. Aouissat, G. Chanfray, P. Schuck und G. M. Welke, Zeit. Phys. **A340** (1991) 347.
- [24] H.W. Barz, G.F. Bertsch, P. Danielewicz und H. Schulz, Phys. Lett. **B275** (1992) 19.
- [25] G. M. Welke, R. Venugopalan und M. Prakash, Phys. Lett. **B245** (1990) 137;
- [26] G.G. Bunatian und B. Kämpfer, preprint FZR 93-28.
- [27] S. Gavin, Nucl. Phys. **B351** (1991) 561.
- [28] H. von Gersdorff, L. D. Mc Lerran, M. Kataja und P. V. Ruuskanen, Phys. Rev. **D34** (1986) 794; M. Kataja, P. V. Ruuskanen, L. D. Mc Lerran und H. von Gersdorff, Phys. Rev. **D34** (1986) 2755.
- [29] G.M. Welke und G.F. Bertsch, Phys. Rev. **C45** (1992) 1403; H.W. Barz, P. Danielewicz, H. Schulz und G.M. Welke, Phys. Lett. **B287** (1992) 40.
- [30] S. Weinberg, Phys. Rev. **166** (1968) 1568.
- [31] I. Tserruya, Nucl. Phys. **A590** (1995) 127c.
- [32] E. V. Shuryak, Phys. Lett. **B78** (1978) 150.
- [33] G. Agakichiev *et al.*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 1272; CERES-Kollaboration, P. Wurm *et al.*, Nucl. Phys. **A590** (1995) 103c.
- [34] G. Q. Li, C. M. Ko und G. E. Brown, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4007; Phys. Rev. C, to be published.
- [35] G. E. Brown und M. Rho, Phys. Rev. Lett. **66** (1991).
- [36] M. Asakawa, C. M. Ko, P. Lévai und X.J. Qiu, Phys. Rev. **C46**, R1159 (1992).
- [37] M. Herrmann, B. Friman und W. Nörenberg, Nucl. Phys. **A545** (1992) 267c; Nucl. Phys. **A560** (1993) 411.
- [38] G. Chanfray und P. Schuck, Nucl. Phys. **A545** (1992) 271c; Nucl. Phys. **A555** (1993) 329.
- [39] L. Fetter und J. D. Walecka, *'Quantum Theory of Many-Particle Systems'*, McGraw-Hill, New York 1971.
- [40] T. E. O. Ericson und W. Weise, *'Pions and Nuclei'*, Clarendon, Oxford 1988.
- [41] Z. Aouissat, R. Rapp, G. Chanfray, P. Schuck und J. Wambach, Nucl. Phys. **A581** (1995) 571.

- [42] E. E. Salpeter und H. A. Bethe, Phys. Rev. **84** (1951) 1232.
- [43] R. Blencenbecler und R. Sugar, Phys. Rev. **142** (1966) 1051.
- [44] M. Ericson und T. E. O. Ericson, Ann. of Phys. **36** (1966) 323.
- [45] G. E. Brown, Nucl. Phys. **A518** (1990) 99.
- [46] J. Meyer-ter-Vehn, Zeit. Phys. **A287** (1978) 241.
- [47] A. B. Migdal, O. A. Martin und I. I. Mishustin, Sov. Phys. **JETP** **39** (1974) 212.
- [48] S. Barshay und G. E. Brown, Phys. Lett. **B47** (1973) 107.
- [49] J. Speth, V. Klemt, J. Wambach und G. E. Brown, Nucl. Phys. **A343** (1980) 382.
- [50] W. H. Dickhoff und H. Mütter, Nucl. Phys. **A437** (1987) 394.
- [51] F. Osterfeld, Rev. Mod. Phys. **64** (1992) 491.
- [52] M.I. Haftel und F. Tabakin, Nucl. Phys. **A158** (1970) 1.
- [53] W. M. Alberico, M. Ericson und A. Molinari, Ann. Phys. **154** (1984) 356.
- [54] D. Schütte, Nucl. Phys. **A221** (1974) 450.
- [55] R. Rapp, J. W. Durso und J. Wambach, Nucl. Phys. **A**, in Druck.
- [56] Z. Aouissat, G. Chanfray, P. Schuck und J. Wambach, in Vorbereitung.
- [57] P. Ring und P. Schuck, *'The Nuclear Many-Body Problem'*, Springer-Verlag, New York 1980.
- [58] R. K. Bhaduri, *'Models of the Nucleon'*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts 1988.
- [59] M. Bando, T. Kugo, S. Uehara, K. Yamawaki und T. Yanagida, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 1215.
- [60] H. Burkhardt und J. Lowe, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 2622.
- [61] H.-C. Kim, J. W. Durso und K. Holinde, Phys. Rev. **C49** (1994) 2355.
- [62] H.-C. Kim, Dissertation, Bonn 1994, in *Berichte des Forschungszentrum Jülich* Nr. 2771, Jülich 1994.
- [63] J.W. Durso, H.-C. Kim und J. Wambach, Phys. Lett. **B298** (1993) 267.
- [64] C. Schütz, K. Holinde, J. Speth, B. C. Pearce und J. W. Durso, Phys. Rev. **C51** (1995) 1374.
- [65] W. R. Frazer und J. R. Fulco, Phys. Rev. **117** (1960) 1609.

- [66] G. Höhler, in *'Pion-Nucleon Scattering'*, hrsg. von H. Schopper, Landolt-Börnstein, New Series Group I, Vol. 9b, Pt. 2 (Springer-Verlag, New York, 1983).
- [67] B. Friedman und V. R. Pandharipande, Nucl. Phys. **A361** (1981) 502.
- [68] M. R. Anastasio, L. S. Celenza, W. S. Pong und C. M. Shakin, Phys. Rep. **100** (1983) 327.
- [69] E. G. Drukarev und E. M. Levin, Nucl. Phys. **A511** (1990) 679.
- [70] T. D. Cohen, R. J. Furnstrahl und D. K. Griegel, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 961.
- [71] T. P. Cheng und L. F. Li, *'Gauge Theories of Elementary Particle Physics'*, Calderon Press, Oxford 1984.
- [72] M. Gellmann, R. J. Oakes und B. Renner, Phys. Rev. **175** (1968) 2195.
- [73] C. Adami und G. E. Brown, Phys. Rep. **234** (1993) 1.
- [74] T. Hatsuda und S. H. Lee, Phys. Rev. **C46** (1992) R34.
- [75] J. Delorme, M. Ericson und T. E. O. Ericson, Phys. Lett. **B291** (1992) 379.
- [76] K. Kawarabayahi und M. Suzuki, Phys. Rev. Lett. **16** (1966) 255;
Riazuddin und Fayyazuddin, Phys. Rev. **147** (1966) 1071.
- [77] B. D. Serot und J. D. Walecka, Adv. Nucl. Phys. **16** (1986) 1.
- [78] P. Braun-Munzinger, J. Stachel, J. P. Wessels und N. Xu, SUNY-preprint RHI-95-8, LANL-preprint-board no. NUCL-TH9508020.
- [79] R. Rapp, Diplomarbeit, Bonn 1993, unveröffentlicht.
- [80] L.P. Kadanoff und G.A. Baym, *'Quantum Statistical Mechanics'*, Benjamin, New York 1962.
- [81] W.-D. Kraeft, D. Kremp, W. Ebeling und G. Röpke, *'Quantum Statistics of Charged Particle Systems'*, Akademie-Verlag, Berlin, 1986.
- [82] M. Schmidt, G. Röpke und H. Schulz, Ann. Phys. **202** (1990) 57.
- [83] J. P. Jeukenne, A. Lejeune und C. Mahaux, Phys. Rep. **25** (1976) 83.
- [84] C. Adami, T. Hatsuda und I. Zahed, Phys. Rev. **D43** (1991) 921.
- [85] T. Hatsuda, Nucl. Phys. **A544** (1992) 27c; T. Hatsuda, Y. Koike und S. H. Lee, Nucl. Phys. **B394** (1993) 221; Phys. Rev. **D47** (1993) 1225.
- [86] M. Kataja und P. V. Ruuskanen, Phys. Lett. **B243** (1990) 181.
- [87] F. Karsch, Nucl. Phys. **A590** (1995) 367c.

- [88] T. Schäfer, E. V. Shuryak und J. J. M. Verbaarschot, Phys. Rev. **D51** (1995) 1267.
- [89] P. Zhuang, J. Huefner und S.P. Klevansky, Nucl. Phys. **A576** (1994) 525.
- [90] G. E. Brown, H. A. Bethe und P. M. Pizzochero, Phys. Lett. **B263** (1991) 337.
- [91] R. Venugopalan und M. Prakash, Nucl. Phys. **A546** (1992) 718.
- [92] G. E. Beth und E. Uhlenbeck, Physica **3** (1936) 729.
- [93] G. M. Carneiro und C. J. Pethick, Phys. Rev. **B11** (1975) 1106.
- [94] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov und I. E. Dzyaloshinski, '*Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*', Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1963.
- [95] G. G. Bunatian und J. Wambach, Phys. Lett. **B336** (1994) 290.
- [96] NA35 Kollaboration, G. Roland *et al.*, Nucl. Phys. **A566** (1994) 527c; NA44 Kollaboration, H. Beker *et al.*, Nucl. Phys. **A566** (1994) 115c.
- [97] D. Lissauer und E. V. Shuryak, Phys. Lett. **B253** (1991) 15; E. V. Shuryak und V. Thorsson, Nucl. Phys. **A536** (1992) 739.
- [98] G. Roche *et al.*, Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 1069; C. Naudet *et al.*, Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 2652.
- [99] HELIOS-3 Kollaboration, M. Masera *et al.*, Nucl. Phys. **A590** (1995) 93c.
- [100] G. J. Gounaris und J. J. Sakurai, Phys. Rev. Lett. **21** (1968) 244.
- [101] G. Chanfray, R. Rapp und J. Wambach, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 368.
- [102] C. Gale und J. Kapusta, Nucl. Phys. **B357** (1991) 65.
- [103] R. Rapp und J. Wambach, Nucl. Phys. **A573** (1994) 626.
- [104] C. Song, V. Koch, S. H. Lee und C. M. Ko, LBL-preprint 37388(1995), LANL preprint board no. HEP-PH 9506387.
- [105] R. Dashen, S. Ma und H. J. Bernstein, Phys. Rev. **187** (1969) 345.
- [106] H. A. Weldon, Phys. Lett. **B274** (1992) 133.
- [107] P. Camerini, N. Grion, R. Rui und D. Vetterli, Nucl. Phys. **A552** (1993) 451.
- [108] E. Oset, H. Toki und W. Weise, Phys. Rep. **83** (1982) 281.
- [109] E. Oset und L. L. Salcedo, Nucl. Phys. **A468** (1987) 631.
- [110] L. L. Salcedo, PhD thesis report, Univ. of Valladolid, 1985.
- [111] L.S. Kisslinger, Phys. Rev. **98** (1955) 761.

- [112] C. Mahaux, P. F. Bortignon, R. A. Broglia und C. H. Dasso, Phys. Rep. **120** (1985) 1.
- [113] G. E. Brown und W. Weise, Phys. Rep. **22** (1975) 279.
- [114] D. Lohse, Diplomarbeit, Bonn 1989, in *Berichte des Forschungszentrum Jülich* Nr. 526, Jülich 1989.
- [115] G. Janssen, Dissertation, Bonn 1995, in *Berichte des Forschungszentrum Jülich* Nr. 3065, Jülich 1995.
- [116] W. Fischer und I. Lieb, '*Funktionentheorie*', Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1988.
- [117] Particle Data Group, Phys. Rev. **D50** (1994) 1173.

Danksagung

Zunächst danke ich Prof. J. Speth für die wohlwollende Unterstützung und das Interesse an dieser Dissertation.

Mein ganz besonderer Dank gilt Prof. J. Wambach für die Betreuung dieser Arbeit, die konstante Bereitschaft physikalische Probleme zu diskutieren sowie für die Vermittlung einer Vielzahl von Kontakten mit internationalen Wissenschaftlern. Insbesondere ermöglichte er auch zwei 4-6 monatige Forschungsaufenthalte an der University of Illinois at Urbana-Champaign, die mich in physikalischer und privater Hinsicht sehr bereichert haben. Dem Deutschen Akademischen Austauschdienst (DAAD) danke ich für die Finanzierung derselben.

Auch viele andere Personen haben zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Explizit bedanken möchte ich mich in diesem Zusammenhang bei den Professoren G. E. Brown, V. Koch, J. W. Durso, P. Schuck, G. Chanfray, T.-S. H. Lee, K. Holinde und G. G. Bunatian sowie den Doktoren D. Blaschke und Z. Aouissat.

Den Professoren T.-S. H. Lee, V. R. Brown, G. Chanfray und G. Röpke sowie Dr. D. Blaschke danke ich für die Gastfreundschaft während meinen Forschungsaufenthalten an ihren Heimatinstitutionen.

Prof. D. Schütte bin ich für die Übernahme des Korreferats zu Dank verpflichtet.

Bei den Mitarbeitern der Theoriegruppen des IKP in Jülich und des Loomis Laboratory of Physics in Urbana bedanke ich mich für die freundschaftliche und von Hilfsbereitschaft geprägte Arbeitsatmosphäre.

Der größte Dank gilt meinen Eltern für ihre in jeglicher Hinsicht großzügige Unterstützung.

Jül-3195
Februar 1996
ISSN 0944-2952