

HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND WIRTSCHAFT BERLIN

FACHBEREICH 2

MASCHINENBAU

Entwicklung einer Auslegungssoftware für ein Flüssigmetall-geschmiertes Radialrillengleitlager

MASTERARBEIT ZUR ERLANGUNG DES AKADEMISCHEN GRADS
Master of Science

Autor:
Marouane Barbri

Betreuer:
Prof. Dr.-Ing. Matthias Führer
Dipl.Ing. Anton Dimroth

3. Januar 2022



**Hochschule für Technik
und Wirtschaft Berlin**

University of Applied Sciences



Eigenständigkeitserklärung

Ich erkläre hiermit, dass

- Ich die vorliegende wissenschaftliche Arbeit selbständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt habe,
- Ich andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt habe,
- Ich die den benutzten Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe,
- die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfbehörde vorgelegen hat.

Ort, Datum

Unterschrift

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich während der Anfertigung dieser Abschlussarbeit unterstützt und motiviert haben. Zuerst geht mein Dank an Herr Prof. Dr.-Ing. Matthias und Herr Anton Dimroth, die meine Abschlussarbeit betreut und begutachtet haben. Für die hilfreichen Anregungen und die konstruktive Kritik bei der Erstellung dieser Arbeit möchte ich mich herzlich bedanken. Ebenfalls möchte ich mich bei allen Professoren bedanken, die mich während meines Studiums begleitet haben.

Abschließend möchte ich mich bei meinen Eltern und meine Freundin Dalal Chahbi Chahbi bedanken, die mir mein Studium durch ihre Unterstützung ermöglicht haben und stets ein offenes Ohr für meine Sorgen hatten.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	v
Tabellenverzeichnis	vii
1 Einleitung	1
2 Grundlagen und Stand der Technik	2
2.1 Einteilung von Lagersystemen	2
2.1.1 Wälzlager	3
2.1.2 Magnetlager	4
2.1.3 Gleitlager	5
2.2 Flüssigkeitgeschmiertes Gleitlager	6
2.2.1 Hydrostatische Gleitlager	6
2.2.2 Hydrodynamische Gleitlager	7
2.3 Radialrillengleitlager	8
2.3.1 Anwendung	9
2.4 Die Reynolds-Differentialgleichung	10
2.4.1 Herleitung	10
2.4.2 Randbedingung	12
2.5 Turbulenzmodell	13
2.6 Kavitationsmodell	14
2.6.1 Gümbel Modell	15
2.6.2 Swift-Stieber Modell	15
2.7 Vohr und Chow Modell	16
2.8 Jan Bootsma Modell	18
3 Methodik	19
3.1 Finite Differenzen Methode	19
3.1.1 Finite Differenzen Approximation	19
3.1.2 Zweidimensionales Problem	20
3.2 Störungsmethode	23
3.3 Statisch belastetes Gleitlager	23
3.4 Dynamisch belastetes Gleitlager	24
3.5 Stabilitätsanalyse	26
3.6 Struktur der Software	28
3.7 Numerische Lösung der Reynoldsgleichung für normale Gleitlager	30
3.8 Lösung des Vohr und Chow Modells	31
3.8.1 Analytischer Ansatz	31
3.8.2 Numerischer Ansatz	33
3.9 Numerische Lösung des Bootsma-Modells	34
3.10 Numerische Lösung der Reynoldsgleichung für Radialrillengleitlager	34
3.10.1 Direkte Differenzationsmethode (DDM)	35
3.10.2 Lokale Integrationsmethode (LIM)	38
4 Ergebnisse	41
4.1 Validierung	41
4.2 Statische Analyse	43
4.2.1 Schmierfilmdicke	43
4.2.2 Druckverteilung	43

4.2.3	Lagerkräfte	45
4.2.4	Lagertragfähigkeit	47
4.3	Dynamische Analyse	50
4.3.1	Steifigkeitskoeffizienten	50
4.3.2	Dämpfungskoeffizienten	54
4.4	Stabilität	58
4.4.1	Kritische Wirbelfrequenz	58
4.4.2	Kritische Masse	61
5	Diskussion	64
6	Zusammenfassung und Ausblick	66
	Literaturverzeichnis	1
A	Koeffizienten des Vohr und Chow Modells	II
B	Koeffizienten des Jan Bootsma Modells	I
C	Software-Code	II

Abbildungsverzeichnis

2.1	Einteilung von Lagersysteme [56]	2
2.2	Aufbau eines Kugellagers [9]	3
2.3	Aufbau eines Zylinderrollenlagers [2]	4
2.4	Aktive Magnetlager [51]	5
2.5	Passive Magnetlager [6]	5
2.6	Zylindrisches Gleitlager [1]	6
2.7	Hydrostatisches Gleitlager	7
2.8	Hydrodynamische Gleitlager	8
2.9	Radialrillengleitlager	9
2.10	Randbedingungen der Reynoldsgleichung	12
2.11	Turbulenzkoeffizienten über Re	14
2.12	Aggregatzstände eines Stoffes über Temperatur und Druck	14
2.13	Kavitation	15
2.14	Gümbel-Modell [38]	15
2.15	Swift-Stieber-Modell [38]	16
2.16	Geometrie eines Radialrillengleitlagers	16
2.17	Druckverteilung bei Radialrillengleitlager [52]	17
3.1	Die Näherungswerte von $f'(x_0)$ interpretiert als die Steigung der Sekante	20
3.2	Rechendomäne	21
3.3	Kräfte-Gleichgewicht für statische Last	24
3.4	Lagersteifigkeit und Dämpfung	25
3.5	Starrer gleitgelagerter Rotor	26
3.6	Programmstruktur	29
3.7	Meschgitter	30
3.8	Koordinatentransformation	35
3.9	Rillen-Damm-Grenzfläche	36
3.10	Meshsystem für im schrägen Koordinatensystem (OCS)	37
3.11	Randbedingungen im schrägen Koordinatensystem (OCS)	37
3.12	Integrationsfläche	39
4.1	Lagertragfähigkeit von Lager 1 aufgetragen über die Exzentrizität	42
4.2	Lagertragfähigkeit von Lager 2 über die Exzentrizität	42
4.3	Fluidfilmdicke bei $\varepsilon = 0.4$ (a): Lager 2, (b): Lager 3 $\beta = 30^\circ$ und $\gamma = 1$	43
4.4	Druckverteilung in Lager 1 bei $\varepsilon = 0.4$	44
4.5	Druckverteilung bei $\varepsilon = 0.4$ (a): Vohr und Chow-Modell; (b): Bootsma-Modell; (c): DDM; (d): LIM	45
4.6	Tangentiale Lagerkraft über die Exzentrizität	46
4.7	Radiale Lagerkraft über die Exzentrizität	46
4.8	Schwimmwinkel über die Exzentrizität	47
4.9	Tragfähigkeit von Lager 1 und Lager 2 über die Exzentrizität	47
4.10	Lagertragfähigkeit von Lager 2 über das Rille-Damm-Tiefenverhältnis, bei $\varepsilon = 0.4$ $\beta = 70^\circ$ und $\gamma = 1$	48
4.11	Lagertragfähigkeit von Lager 2 über den Rillenwinkel bei $\varepsilon = 0.4$, $H_0 = 2$ und $\gamma = 1$	49
4.12	Lagertragfähigkeit von Lager 2 über das Rille-Damm-Breitenverhältnis bei $\varepsilon = 0.4$ $\beta = 70^\circ$ und $H_0 = 2$	50
4.13	Direkte Steifigkeitskoeffizienten von über die Exzentrizität	51
4.14	gekoppelte Steifigkeitskoeffizienten über die Exzentrizität	51
4.15	Steifigkeitskoeffizienten bei $\beta = 70^\circ$ und $\gamma = 1$ und unterschiedlichen H_0	52

4.16	Steifigkeitskoeffizienten bei $H_0 = 2$ und $\gamma = 1$ unterschiedlichen Rillenwinkeln	53
4.17	Steifigkeitskoeffizienten bei $\beta = 70^\circ$, $H_0 = 2$ und unterschiedlichen γ	54
4.18	direkte Dämpfungskoeffizienten über die Exzentrizität	55
4.19	gekoppelte Dämpfungskoeffizienten über die Exzentrizität	55
4.20	Dämpfungskoeffizienten bei $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 1$ und unterschiedlichen H_0	56
4.21	Dämpfungskoeffizienten bei $H_0 = 2$, $\gamma = 1$ unterschiedlichen Rillenwinkel	57
4.22	Dämpfungskoeffizienten bei $H_0 = 2$ $\beta = 70^\circ$ und unterschiedlichen γ	58
4.23	kritische Wirbelfrequenz über die Exzentrizität	59
4.24	kritische Wirbelfrequenz bei $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 1$ und unterschiedlichen H_0	59
4.25	kritische Wirbelfrequenz bei $H_0 = 2$, $\gamma = 1$ und unterschiedlichen β	60
4.26	kritische Wirbelfrequenz bei $\beta = 70^\circ$, $H_0 = 1$ und unterschiedlichen γ	60
4.27	dimensionlose kritische Masse über die Exzentrizität	61
4.28	dimensionlose kritische Masse bei $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 1$ und unterschiedlichen H_0	61
4.29	dimensionlose kritische Masse bei $H_0 = 2$, $\gamma = 1$ und unterschiedlichen β	62
4.30	dimensionlose kritische Masse bei $\beta = 70^\circ$, $H_0 = 2$ und unterschiedlichen γ	62

Tabellenverzeichnis

2.1	Turbulenzkoeffizienten [38]	13
4.1	Lagerparameter	41

Abkürzungsverzeichnis

FDM Finite Differenzen Methode

PDE Partial Differential Equation

CCS Cartesian Coordinate System

CCS Oblique Coordinate System

DDM Direkte Differentiationsmethode

LIM Lokale Integrationsmethode

FEM Finite Element Methode

FVM Finite Volumen Methode

Symbolverzeichnis

b_r, b_g	Dammbreite (m), Rillenbreite (m)
C	Lagerspalt (m)
R, D	Lagerradius (m), Lagerdurchmesser (m)
$D_{i,j}, \bar{D}_{i,j}$	Dämpfungskoeffizienten ($Kg.s^{-1}$), dimensionlose Dämpfungskoeffizienten $\bar{D}_{i,j} = \frac{D_{i,j} \cdot C}{\omega W}$
e, ε	Exzentrizität (m), dimensionlose Exzentrizität $\varepsilon = \frac{e}{C}$
$F_r, F_t, \bar{F}_r, \bar{F}_t$	radiale, tangentielle Kraft (N), dimensionlose Kraft $\bar{F} = \frac{F}{\omega \eta R^2} \left(\frac{C}{R}\right)^2$
$h, \bar{h}$	Schmierfilmdicke in (m), dimensionlose Schmierfilmdicke $\bar{h} = \frac{h}{C}$
H_g	Rillentiefe (m)
H_0	Tiefenverhältnis $H_0 = \frac{H_g + C}{C}$
$H_{0,vc}$	Tiefenverhältnis nach Vohr und Chow $H_{0,vc} = H_0$
$H_{0,b}$	Tiefenverhältnis nach Bootsma $H_{0,b} = \frac{H_g}{C}$
k_x, k_z	Turbulenzkoeffizienten
$K_{i,j}, \bar{K}_{i,j}$	Steifigkeitskoeffizienten ($N.m^{-1}$), dimensionlose Steifigkeitskoeffizienten $\bar{K}_{i,j} = \frac{K_{i,j} \cdot C}{W}$
$K_{eq}, \bar{K}_{eq}$	äquivalente Steifigkeit ($N.m^{-1}$), dimensionlose äquivalente Steifigkeit $\bar{K}_{eq} = \frac{K_{eq} \cdot C}{W}$
L	Lagerlänge (m)
$M_{kr}, \bar{M}_{kr}$	kritische Masse (Kg), dimensionlose kritische Masse $\bar{M}_{kr} = \frac{M_{kr} \cdot C}{\omega_w^2 W}$
n_G	Rillenzahl
$p, \bar{p}$	lokaler Druck in (Pa), dimensionloser Druck $\bar{p} = \frac{p}{\omega \eta} \left(\frac{C}{R}\right)^2$
p_a, p_c	Umgebungsdruck (Pa), Kavitationsdruck (Pa)
Re^*	lokale Reynoldszahl
$t, \bar{t}$	Zeit (s), dimensionlose Zeit $\bar{t} = \omega t$
u, v, w	Geschwindigkeit in x, y und z-Richtung
$W, \bar{W}$	Lagertragfähigkeit (N), dimensionlose Tragfähigkeit $\bar{W} = \frac{W}{\omega \eta R^2} \left(\frac{C}{R}\right)^2$
x, y, z	kartesische Koordinaten
α	Breitenverhältnis nach Vohr und Chow $\alpha = \frac{b_g}{b_r + b_g}$
ρ	Dichte ($\frac{Kg}{m^3}$)
η	dynamische Viskosität (Pa.s)
θ	Umlaufkoordinate
ω, ω_w	Winkelgeschwindigkeit ($\frac{rad}{s}$), Wirbelgeschwindigkeit ($\frac{rad}{s}$)
γ	Breitenverhältnis nach Bootsma $\alpha = \frac{b_g}{b_r}$
Φ_0	Schwimmwinkel
λ_{kr}	dimensionlose kritische Wirbelfrequenz $\lambda_{kr} = \frac{\omega_w}{\omega_{kr}}$
ξ, η	schräge Koordinaten

Kapitel 1

Einleitung

Radialrillengleitlager stellen eine exotische Lagertechnologie dar, die heutzutage in vielen verschiedenen Bereichen eingesetzt wird, beispielsweise in der Medizintechnik sowie in der Computerindustrie. Die Forschung an Radialrillengleitlagern hat eine mehr als 60-jährige Geschichte. Sie haben in letzter Zeit erhebliche Aufmerksamkeit erhalten, da sie aufgrund ihrer hohen Steifigkeit- und Dämpfungseigenschaften eine bessere Alternative zu anderen Lagerarten anbieten. Außerdem benötigt diese Lager keine externe Ölversorgung, da sie die hydrodynamische Lastaufnahme durch den Druckaufbau im Schmierfilm erzeugen. Im Vergleich zu herkömmlichen Kugellagern, bieten Radialrillengleitlager zahlreiche Vorteile, wie zum Beispiel eine kompakte Struktur, gute Stabilität, geringe Vibrationsgeräusche, geringer Reibungsenergieverbrauch, geringer Verschleiß und lange Lebensdauer. Allerdings hängen die Eigenschaften des Radialrillengleitlagers von verschiedenen Parametern ab, die die Tragfähigkeit, sowie die Steifigkeit und die Dämpfung des Lagers beeinflussen. Aus diesem Grund muss das Radialrillengleitlager sorgfältig für die Anwendung ausgelegt werden, um seine Eigenschaften bestmöglich auszunutzen.

Ziel dieser wissenschaftlichen Arbeit liegt darin, ein Tool zur Auslegung von Radialrillengleitlagern zu entwickeln. Dieses Tool soll die statischen sowie die dynamischen Eigenschaften des Lagers bestimmen, um abschließend eine Stabilitätsanalyse des Systems durchführen zu können.

Um die Anforderung der Auslegungssoftware zu erfüllen, sollen geeignete mathematische Modelle zur Modellierung von Radialrillengleitlagern aufgebaut werden, die die Strömung innerhalb des Lagers beschreiben. Außerdem soll die Entstehung von Turbulenzen ebenfalls in Betrachtung gezogen werden. Zusätzlich soll das Kavitationsphänomen ausführlich analysiert werden, da es die Lagereigenschaften stark beeinträchtigt. Anschließend sollen die mathematischen Modelle gelöst und in einer Software umgesetzt, die die Lagereigenschaften anhand der gegebenen Lagerparameter ermittelt.

Um geeignete mathematische Modelle zu identifizieren, wird eine Literaturrecherche zur mathematischen Modellierung vollzogen. Dabei fließen unterschiedliche Modelle ein, die zur Modellierung des Radialrillengleitlagers verwendet werden. Außerdem werden verschiedene Turbulenzmodelle und Kavitationsmodelle herausgearbeitet, die anschließend in das Auslegungstool implementiert werden.

Anschließend werden die beschriebenen Modelle gelöst. Dabei wird die Lösungsmethode jedes einzelnen Modells ausführlich beschrieben. Außerdem wird anhand der ermittelten Lösungen eine statische und dynamische Analyse des Lagers durchgeführt, um die Lagereigenschaften zu ermitteln. Anschließend wird eine Stabilitätsanalyse im Beispiel eines starren Rotorsystems durchgeführt.

Im Anschluss werden die Ergebnisse der gelösten Modelle vorgestellt und anhand der Literatur validiert. Zusätzlich wird ein Vergleich zwischen einem Radialrillengleitlager und einem konventionellem Gleitlager durchgeführt, um die Besonderheiten des Radialrillengleitlagers aufzuzeigen. Außerdem wird eine parametrische Studie eines Radialrillengleitlagers durchgeführt, um die optimalen Parameter für bessere Stabilitätseigenschaften zu liefern.

Eine abschließende Interpretation der Ergebnisse wird im letzten Kapitel erfolgen. Dabei werden Schlussfolgerungen aus Kapitel 4 gezogen und Aussagen über die Eigenschaften des Radialrillengleitlagers getroffen.

Kapitel 2

Grundlagen und Stand der Technik

2.1 Einteilung von Lagersystemen

Lager sind ein unverzichtbares Bauelement im Maschinenbau. Sie dienen dazu, lineare oder rotatorische Bewegung zu ermöglichen und dabei die Reibung zwischen einem beweglichen und einem stationären Teil zu reduzieren. Außerdem werden die Lager zur Abstützung der Maschinenteile durch Aufnahme von bestehenden Lasten eingesetzt. Die Lager können nach ihrem Aufbau bzw. Funktionsprinzip in 3 Hauptgruppen unterteilt werden (Abbildung 2.1).^[22]

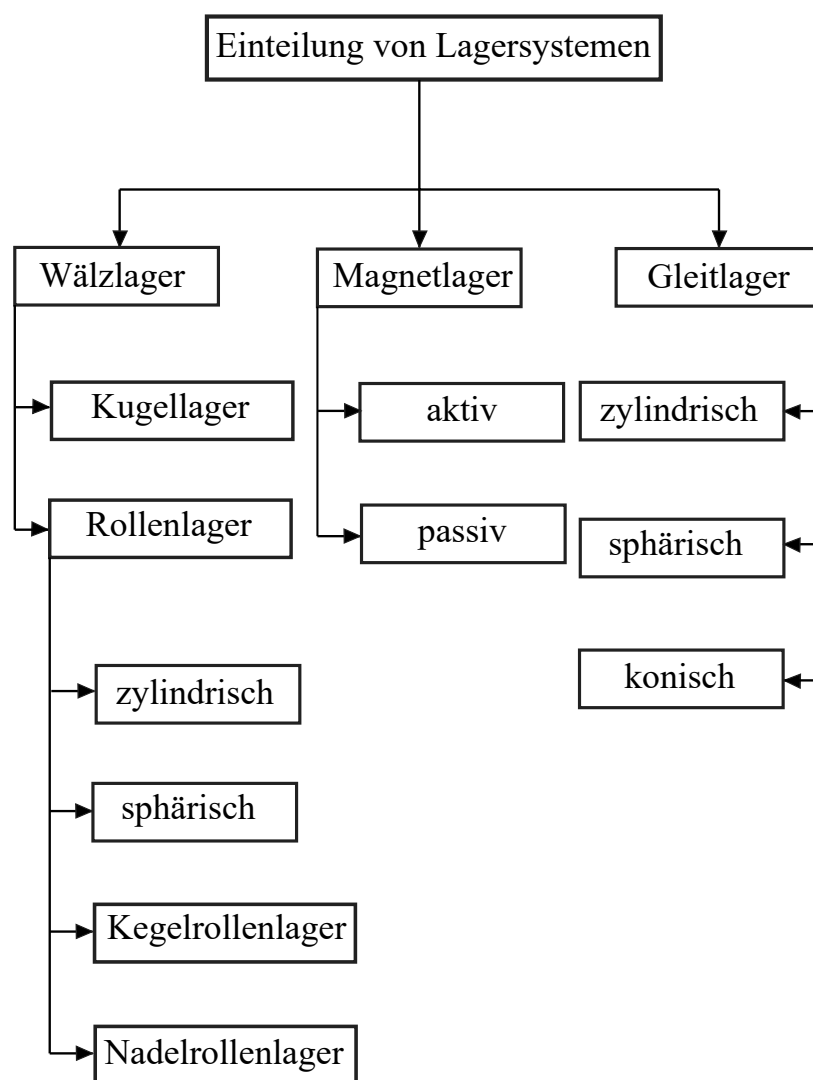


Abbildung 2.1: Einteilung von Lagersysteme ^[56]

2.1.1 Wälzlager

Wälzlager sind die am weitesten verbreitete Lagerart. Sie werden für einen reibungslosen, effizienten Betrieb in vielen Maschinen mit Drehbewegungen eingesetzt - von Autorädern, Motoren und Turbinen bis hin zu medizinischen Geräten [4]. Wälzlager bestehen im Allgemeinen aus zwei Ringen, dem Wälzkörper und dem Käfig, der für eine gleichmäßige Verteilung der Wälzkörper im Lager sorgt. Die Wälzkörper befinden sich dabei zwischen dem Außenring und dem Innenring und sind für die Rollreibung verantwortlich [5]. Wälzlager sind in der Regel sowohl statischen als auch dynamischen Lasten in Kombination mit Axial- oder Radialbelastungen ausgesetzt. Die Radialkräfte werden von der Welle über den Innenring, der von mehreren Wälzkörpern geteilt wird, auf den Außenring und in das Gehäuse übertragen. Die Anzahl der Wälzkörper, die die Last übertragen, hängt von den Elementabständen im Lager sowie der Toleranzklasse des Lagers ab. [26] Wälzlager werden nach Art der Wälzkörpern in zwei Hauptgruppen unterteilt. [29]

Kugellager

Ein Kugellager ist eine Art von Wälzlager, die aus Kugel als Wälzkörper bestehen. Dabei werden die Kugellaufbahnen durch das Innen und Außenring bestimmt (Abbildung 2.2) .

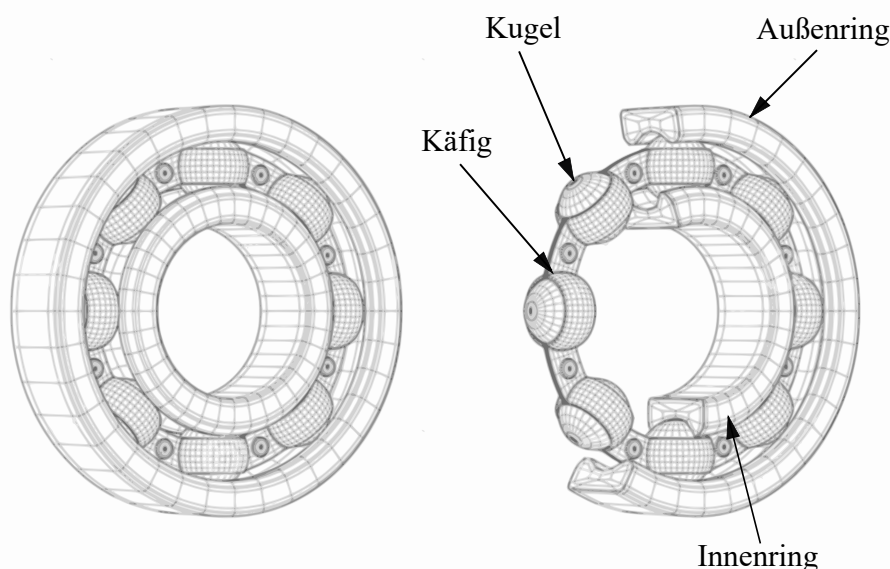


Abbildung 2.2: Aufbau eines Kugellagers [9]

Kugellager werden für hohe Belastungen verwendet und erzeugen einen nahezu punktförmigen Kontakt zwischen den Kugelelementen und der Laufbahn. Kugellager finden aufgrund ihrer vielfältigen Eigenschaften in vielen Bereichen Anwendung. Ein wichtiger Vorteil von Kugellagern ist ihre Fähigkeit, kombinierte radiale und axiale Lasten aufzunehmen. Ein weiterer Vorteil ist die geringere Empfindlichkeit gegenüber Unterbrechungen der Schmierung im Vergleich zu Gleitlagern. Das bedeutet, dass die Leistung des Lagers nicht durch fehlenden Schmierfilm beeinträchtigt wird. Dagegen haben Kugellager den Nachteil, dass sie ein relativ geringes Dämpfungsverhalten aufweisen. Ein weiterer Nachteil ist die begrenzte Lebensdauer, die von vielen Größen (Belastung, Schmierbedingung...) beeinflusst wird. [15][18] Kugellager werden in vielen verschiedenen Industriemaschinen, Getrieben, Pumpen und andere Hochgeschwindigkeitsanwendung eingesetzt. [53]

Rollenlager

Rollenlager sind eine Art von Wälzlager, bei denen der Wälzkörper rollenförmig ausgebildet ist. Sie werden oft für relativ hohe Lasten verwendet und haben eine viel größere Kontaktfläche als Kugellager. Rollenlager werden aufgrund ihrer Geometrie in unterschiedliche Nebengruppen unterteilt. [46]

Zylindrische Rollenlager (Abbildung 2.3) bestehen aus zylindrische Rollen und besitzen neben ihrer hohen radialen Tragfähigkeit eine relativ hohe Steifigkeit. Manche Zylinderrollenlager werden mit Rippen ausgelegt, was dem Lager ermöglicht, geringe axiale Belastungen zwischen dem Rollende

und den Rippen aufzunehmen. Wenn keine Rippen vorhanden sind, kann sich entweder der Außenring oder der Innenring in axiale Richtung bewegen. Daher wird diese Art von Lagern als sogenanntes Freiseitenlager verwendet, um die Wellenausdehnung aufzunehmen. Aufgrund Ihrer Eigenschaften kommen Zylinderrollenlager in Windturbinen, Pumpen und elektrische Motoren zum Einsatz.[41]

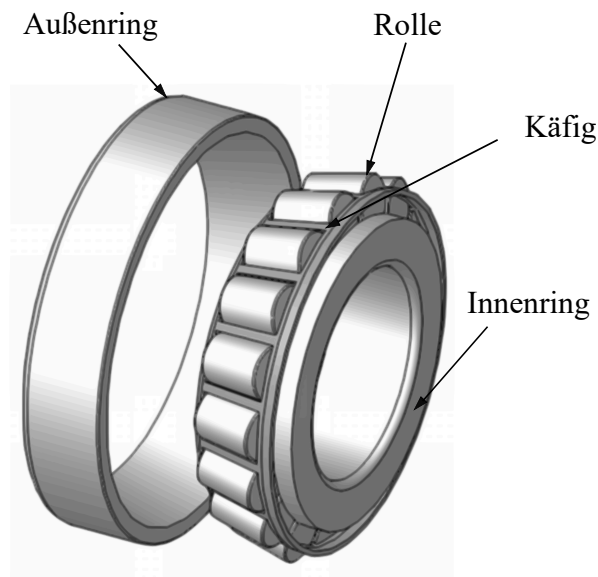


Abbildung 2.3: Aufbau eines Zylinderrollenlagers [2]

Eine weitere Art von Rollenlager ist das sphärische Rollenlager oder auch Pendelrollenlager genannt. Sie sind mit zwei Reihen von tonnenartigen Rollen und einer sphärischen Laufbahn ausgestattet. Pendelrollenlager werden oft aufgrund ihrer selbstausrichtenden Eigenschaft eingesetzt. Außerdem haben sie dank ihres niedrigen Reibungskoeffizienten einen relativ geringen Wartungsbedarf. Der Nachteil bei dieser Art von Rollenlagern liegt daran, dass sie aufgrund ihrer Geometrie relativ aufwändig herzustellen sind. Pendelrollenlager sind ein wesentlicher Bestandteil von Industriemaschinen. Sie werden bei Bohrausrüstungen, Turbinen, sowie Industriegetrieben eingesetzt. [54] [24]

Kegelrollenlager sind ebenfalls Rollenlager, die aus kegelförmigen Rollen, sowie konischen Laufbahnen bestehen. Sie werden hauptsächlich dort eingesetzt, wo eine Kombination aus radialer und axialer Last aufzunehmen ist. Ein weiterer Vorteil von Kegelrollenlager ist die reduzierte Reibung und somit der geringe Verschleiß. Daher besitzen sie eine relativ hohe Lebensdauer im Vergleich zu anderen Wälzlagern. Das Kegelrollenlager wird in vielen industriellen Anwendungen eingesetzt. Es ist ideal für Anwendungen, wo extreme Lastkräfte auftreten, beispielsweise bei hochbelasteten Industriegetrieben, Hebezeuge sowie Bergbaumaschinen.[41] [42]

Nadelrollenlager sind die kleinsten und leichtesten Lager in der Rollenlagergruppe, da hier die Wälzkörper aus dünnen Nadeln bestehen. Daher werden sie oft dort eingesetzt, wo ein geringeres Gewicht und kleinerer Platzbedarf erforderlich ist. Aufgrund der großen Anzahl von Wälzkörpern haben die Nadelrollenlager eine hohe Steifigkeit und sind für oszillierende Bewegungen geeignet. Nadelrollenlager kommen in verschiedenen Industriebereichen zum Einsatz, z.B. bei Luftkompressoren, Getrieben sowie bei Kraftübertragungssystemen in Fahrzeugen. [23] [23]

2.1.2 Magnetlager

Das Magnetlager stellt eine kontaktlose Lagertechnologie dar. Dabei wird die magnetische Lagerung durch magnetische Kräfte erreicht, die für einen kontaktlosen Abstützung der Welle sorgen. Magnetlager werden ebenfalls nach ihren Aufbau und Funktionsprinzip unterteilt.[48]

Bei aktiven Magnetlager wird eine magnetische Lagerung durch Anlegen von elektrischer Spannung

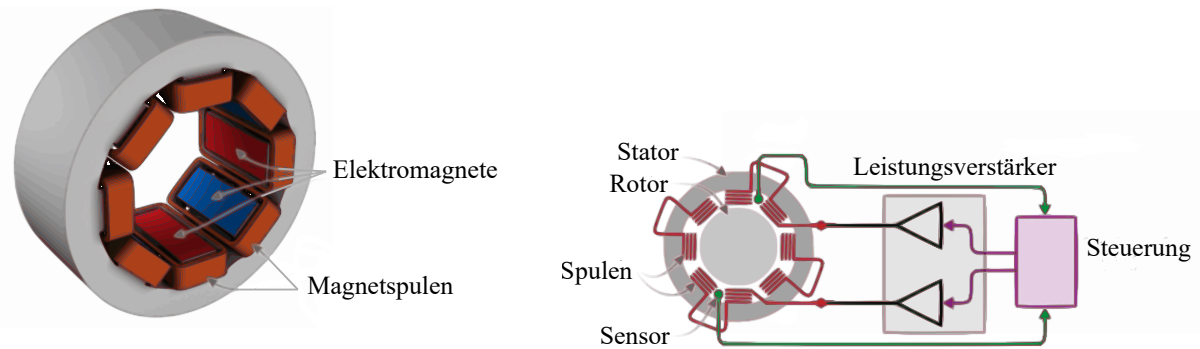


Abbildung 2.4: Aktive Magnetlager [51]

an einer Reihe von Elektromagneten (Stator) erreicht (Abbildung 2.4). Dieser wirkt mit einem ferromagnetischen Rotor zusammen, der auf der Welle montiert wird, um diese in einem Magnetfeld schweben zu lassen. Das Steuersystem regelt den Strom, damit eine ausreichende Stabilität der Kräfte und damit der Position des Rotors gewährleistet werden kann. Der wichtigste Vorteil bei Magnetlagern liegt daran, dass kein Kontakt bei der Lagerung besteht und dadurch auch kein Schmiermittel notwendig ist, da keine Reibung stattfindet. Außerdem besitzen Magnetlager eine längere Maschinenlebensdauer als bei herkömmlichen Lagern und können bei höheren Laufgeschwindigkeiten betrieben werden. Ein weiterer Vorteil von Magnetlager ist die leichte Messung bzw. Anpassung ihrer dynamischen Eigenschaften durch das integrierte Steuerungssystem, was bei herkömmlichen Lagern eine Neukonstruktion erfordert. [30]

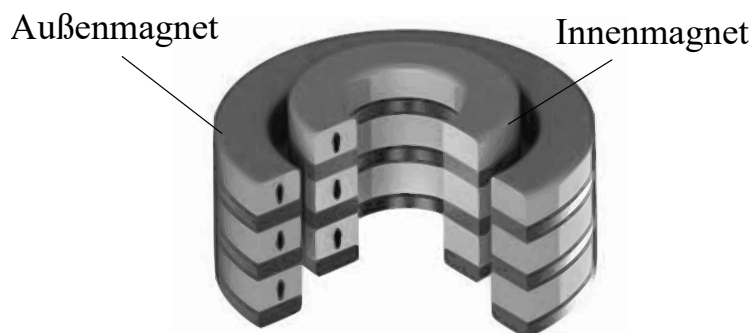


Abbildung 2.5: Passive Magnetlager [6]

Passive Magnetlager (Abbildung 2.5) verwenden dagegen Permanentmagneten, die die notwendigen Lagerkräfte erzeugen. Aufgrund der auf die Welle wirkende Kraft ergibt sich eine Verschiebung aus der Mittellage, die so lange bestehen bleibt, wie die Kraft wirkt. Aus diesem Grund werden passive Magnetlager dort eingesetzt, wo eine Positionsabweichung zugelassen werden kann. Der Vorteil bei diesen Magnetlagern liegt daran, dass diese nicht auf eine aktive Stromversorgung angewiesen sind. Ein weiterer Vorteil ist die günstige Beschaffungskosten, da passive Magnetlager keine aufwändige Steuerung benötigen. Passive Magnetlager werden häufig mit einem konventionellen Lager kombiniert, da eine kontaktlose Lagerung in radialer und axialer Richtung mit ausschließlich passiven Magnetlagern nicht möglich ist. Magnetlager finden aufgrund ihrer Eigenschaften in Hochgeschwindigkeitsturbomaschinen Anwendung. Bei Gasturbinen werden sie beispielsweise zur Lagerung des Motors eingesetzt. Außerdem werden Magnetlager auch bei Kompressoren sowie Generatoren verwendet. [49] [50]

2.1.3 Gleitlager

Gleitlager stellen aufgrund ihrer unkomplizierten Geometrie die einfachste Form von Lagern dar. Ihr Zweck besteht darin, eine Drehbewegung oder eine lineare Bewegung durch das Gleiten der Welle an der Lagerfläche zu ermöglichen (Abbildung 2.6) und dabei eine Last auszugleichen. Das Gleiten kann mithilfe von Schmiermitteln erleichtert werden. Gleitlager sind leicht herzustellen und können bei hohen Drehzahlen eingesetzt werden. Außerdem benötigen Gleitlager einen kleinen radialen Raum, da sie in der Regel dünnwandig hergestellt werden. Ein weiterer Vorteil ist die gute Geräusch- und Stoßdämpfung sowie die theoretisch unbegrenzte Lebensdauer. [7]

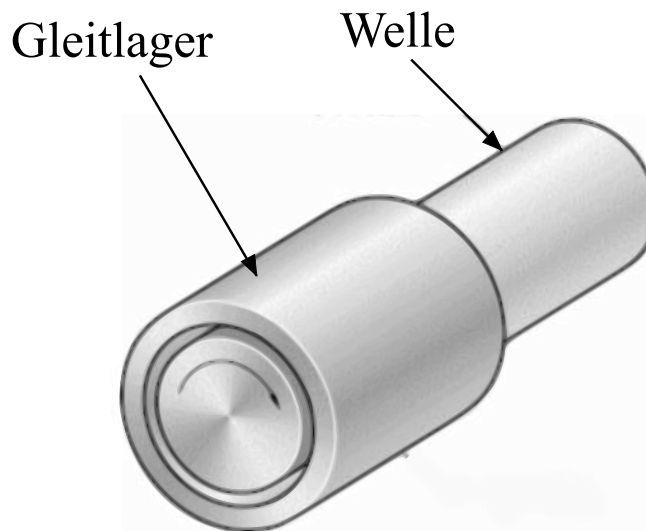


Abbildung 2.6: Zylindrisches Gleitlager [1]

Gleitlager können ebenfalls aufgrund ihrer Geometrie unterteilt werden:

Zylindrische Gleitlager sind die am meisten verwendete Art von Gleitlagern. Sie besitzen eine hohe radiale Tragfähigkeit, können axiale Verschiebung aufnehmen und werden insbesondere bei Schwingungsanwendungen eingesetzt. Zylindrische Gleitlager kommen aufgrund ihrer vielfältigen Eigenschaften in allen Industriebereichen zum Einsatz. Sie werden in Landwirtschaftsmaschinen sowie in Turbomaschinen verwendet.[36]

Sphärische Gleitlager werden zur Aufnahme von Wellen oder Stangen mit variierenden Ausrichtungsfehlern verwendet. Sie sind so ausgelegt, dass sie hohe Radiallasten aufnehmen können und eine gleichbleibende Leistung unter Bedingungen mit extremen Geschwindigkeiten und kritischen Anwendungsbelastungen bieten. Sphärische Gleitlager finden in vielen Bereichen Anwendung. Sie werden in Windturbinen sowie Zahnradantrieben eingesetzt. [43][25]

Konische Gleitlager werden in verschiedenen technischen Anwendungen verwendet. Durch die konische Form der Gleitfläche können die Lager axiale und radiale Belastungen in einer sehr kompakten Struktur aufnehmen. Sie werden oft als Hauptlager in Energieanlagen eingesetzt, um die Instandhaltungskosten sowie die Stromgestehungskosten zu reduzieren. [45]

2.2 Flüssigkeitgeschmiertes Gleitlager

2.2.1 Hydrostatische Gleitlager

Hydrostatische Gleitlager werden oft in der Industrie verwendet. Sie können große Lasten ohne Rotation der Wellenzapfen aufnehmen und bieten ein gutes und kontrollierbares Steifigkeit- und Dämpfungsverhalten an. Dabei wird der notwendige Druck im Lagerspalt durch externe Druckerzeugung erreicht und kontrolliert (Abbildung 2.7), was einen berührungsfreien Betrieb zum Wellenzapfen, eine regelbare Tragfähigkeit, sowie eine hohe Zentriersteifigkeit ermöglicht, auch wenn keine Rotation der Welle geschieht.[57]

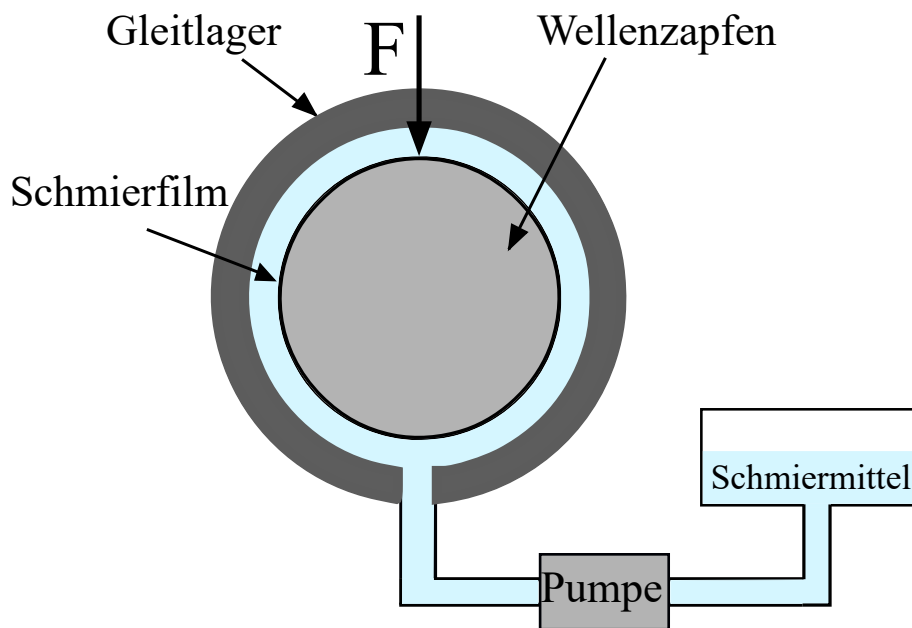


Abbildung 2.7: Hydrostatisches Gleitlager

Der Vorteil bei hydrostatischen Gleitlagern liegt darin, dass die Lagertragfähigkeit und die Steifigkeit nicht von der Viskosität des Fluids, sowie von der Schmierfilmdicke abhängen, was sich bei der Rotorlagerung von Pumpen mit Prozessflüssigkeit ideal eignet. Ein weiterer Vorteil ist der verschleißfreie Betrieb aufgrund des kontinuierlich vorhandenen Schmierfilms, was zu einer theoretisch unbegrenzte Lebensdauer des Lagers führt. Außerdem bieten hydrostatische Gleitlager relativ große Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten an, was für exakte Positionierung und Steuerung hervorragend geeignet ist.^[14] Hydrostatische Gleitlager zeigen andererseits auch einige Nachteile. Sie erfordern hohe Installations-, Wartungskosten und zusätzliche Ausrüstung. Außerdem kann die Leistung des Lagers durch Verunreinigungen im Schmiermittel beeinträchtigt werden. Deswegen muss zusätzlich eine Filtrationsanlage eingebaut werden. Hydrostatische Gleitlager werden oft aufgrund ihrer zahlreichen Eigenschaften bei nicht-viskosen Fluiden, einschließlich Gasen und Kryogenen eingesetzt. Sie werden bei Walzwerken und Schleudergussmaschinen, sowie in Prozessen mit hohen Drehzahlen wie Kugelmøhlen und Hochgeschwindigkeitsdrehbänken verbaut.^{[8][34]}

2.2.2 Hydrodynamische Gleitlager

Hydrodynamische Gleitlager stellen einen wesentlichen Bestandteil in rotierenden Systeme dar. sie werden zur Lagerung von Rotoren mit gleichzeitiger Lastaufnahme bei hohen Betriebsgeschwindigkeiten verwendet. Dabei wird durch die Rotation der Gleitpartner der notwendige Druck im dünnen Schmierfilm erzeugt, der die Welle von der Lagerfläche trennt, die Reibung verhindert und die Lastaufnahme ermöglicht (Abbildung 2.8). Hydrodynamische Gleitlager sind auf zwei Elemente angewiesen, um die notwendige Druck zur Lagerung der Welle zu erzeugen. Zunächst müssen die beiden Flächen relativ nah zu einander sein. Außerdem spielt die Viskosität des Schmiermittels eine wichtige Rolle bei der Erzeugung des hydrodynamischen Schmierfilms.^{[35][3]}

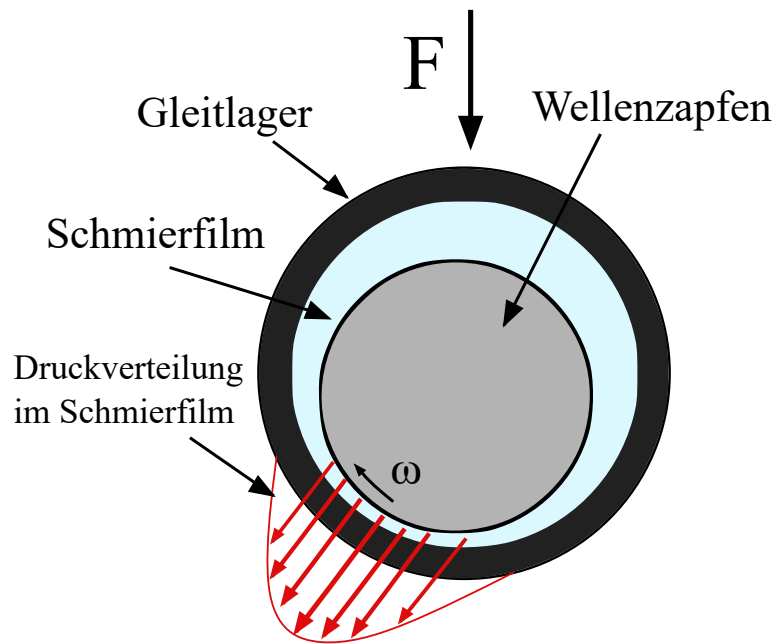


Abbildung 2.8: Hydrodynamische Gleitlager

Auch bei hydrodynamischen Gleitlagern stellt die theoretisch unbegrenzte Lebensdauer einen wichtigen Vorteil dar. Da die beiden gleitenden Flächen ständig durch den Schmierfilm getrennt sind, ist der Verschleiß extrem gering. Ein weiterer Vorteil ist die hohe Tragfähigkeit sowie das gute Steifigkeits- und Dämpfungsverhalten. Außerdem erfordern hydrodynamische Gleitlager keine zusätzliche Ausrüstung, da der Schmierfilmdruck intern durch die Rotation der Welle erzeugt wird.^[3]

Hydrodynamische Gleitlager haben den Nachteil, dass die Lagereigenschaften von der Drehzahl und der Schmierfilmdicke, sowie von der Viskosität des Fluids abhängig sind. Das bedeutet, dass die Auswahl des richtigen Schmiermittels mit der passenden Viskosität wichtig ist, um den Kontakt zwischen den Gleitpartnern zu vermeiden. Es wirkt sich ebenso ungünstig aus, dass beim Betrieb über der kritischen Drehzahl des Rotor-Lager-Systems hydrodynamische Instabilitäten ausgelöst werden, da der Wellenzapfen im konzentrischen Betrieb von seiner Gleichgewichtslage abweicht und mit einer bestimmten Rotationsgeschwindigkeit wirbelt. Darüber hinaus können thermische Effekte die Leistung des Lagers beeinträchtigen, wenn der Schmierfilm zu dünn ist oder die verfügbare Durchflussmenge zu gering ist. Hydrodynamische Gleitlager finden in verschiedenen Industriebereichen Anwendung. Sie werden bei Dampfturbinen und Kühlpumpen eingesetzt. Außerdem werden sie häufig in der Kupplung bei Schiffen verwendet.^[13]

2.3 Radialrillengleitlager

Radialrillengleitlager sind hydrodynamische Gleitlager, die häufig bei Hochgeschwindigkeitsmaschinen verwendet werden. Durch den Einsatz der Rillen (Abbildung 2.16) wird die Steifigkeit des Systems erhöht und das Dämpfungsverhalten verbessert. Außerdem können Radialrillengleitlager Aufgrund der Pumpwirkung der Rillen die Wirbelinstabilität reduzieren, die bei hydrodynamischen Gleitlagern auftritt.^[39]

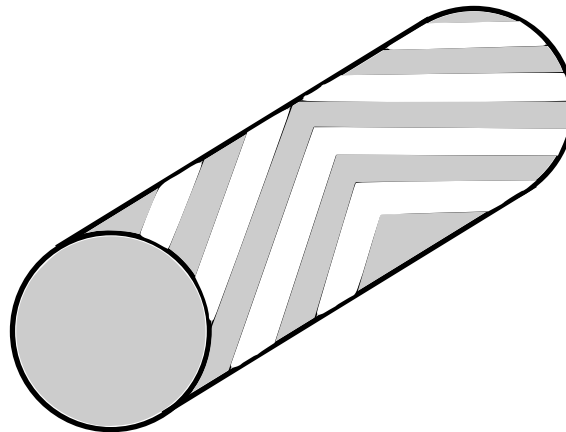


Abbildung 2.9: Radialrillengleitlager

2.3.1 Anwendung

In der Medizintechnik

Eine diagnostische Röntgenröhre muss eine große Strahlungsmenge aus einem möglichst kleinen Bereich der Anode, dem Brennfleck, in einer Zeit von einigen Millisekunden bis mehreren Sekunden abgeben. Die Strahlungsmenge muss genügend groß sein, damit eine ausreichende Anzahl an Elektronen am Eingang der Verstärkerröhre freigesetzt werden, oder um eine ausreichende Kontrast im Röntgenfilm nach der Verarbeitung zu erzeugen. Dabei beträgt der Wirkungsgrad der Umwandlung von elektrischer Energie in Röntgenstrahlung weniger als 1%. Mehr als 99% der zugeführten Energie wird daher in der Anode als Wärme freigesetzt. Bei einer stationären Anode würde das Material in kürzester Zeit lokal schmelzen, da die Wärme auf den Brennfleck konzentriert ist. Das Problem kann gelöst werden, in dem man die Anode rotieren lässt, da die Wärme dann über einen ringförmigen Bereich verteilt wird. Damit die Anode rotieren kann, muss diese gelagert werden. Dabei befindet sich die Anode und die Lager im inneren einer evakuierten Vakuumkammer. Die Lager und das Schmiermittel müssen daher eine Reihe von besonderen Anforderungen erfüllen. Das Schmiermittel darf das Vakuum in der Röhre nicht beeinträchtigen und muss die Wärme gut abführen können. Die Lager müssen hohe Temperaturen aushalten können und sollen elektrisch und möglichst auch thermisch leitfähig sein. Festmetall geschmierte Kugellager wurden hierfür früher verwendet. Obwohl Röntgenröhren schon seit Jahren in großen Stückzahlen mit dieser Lagerart hergestellt werden, werden derzeit erhebliche Anstrengungen unternommen, um die Suche nach alternativen Methoden zur Lagerung der Anode. Der Hauptgrund dafür ist die begrenzte Lebensdauer der Kugellager, die im Vakuum unter extremen Bedingungen betrieben werden. Ein weiteres Problem ist, dass die üblichen Methoden zur Berechnung der Lebensdauer von Kugellagern nur verwendet werden können, wenn diese fett- oder ölgeschmiert sind. Ein weiterer Nachteil von Kugellagern ist, dass diese einen hohen thermischen Widerstand gegen die Wärme besitzen, die von der Anode nach außen abgeführt werden soll. Außerdem stellt die akustische Belastung aufgrund der hohen Lautstärke von Kugellagern im Betrieb ein wichtiges Nachteil dar. Eine weitere Möglichkeit ist der Einsatz von Magnetlagern. Der Vorteil dabei liegt daran, dass kein Schmiermittel notwendig ist. Allerdings ist das Gleichgewicht der schwebenden Welle instabil, sodass aufwendige und damit eine teure elektronische Steuerung notwendig ist. Ein zusätzliches Problem bei Magnetlagern ist, dass es keine Möglichkeit gibt, die resultierende Wärme und den elektrischen Strom durch Leitung abzuführen. [21]

Damit alle Anforderungen erfüllt werden können, kommen Flüssigmetall-geschmierte- Radialrillengleitlager zum Einsatz. Ein extrem wichtiger Vorteil dabei ist, dass die Anode kontinuierlich rotieren kann, da die Lebensdauer von dieser Lagerart praktisch unbegrenzt ist. [55]

Zentrifugal-Blutpumpen stellen ein wichtiges Gerät in der Medizintechnik dar, insbesondere für Patienten mit Herzerkrankungen oder kongestiver Herzinsuffizienz. Zentrifugal-Blutpumpen werden häufig magnetisch gelagert. Allerdings ist es notwendig, ein System zur Verschiebungsmessung des Rotors und einen komplexen Regelkreis für die Steuerung des Magnetlagers zu verwenden. Blutpumpen mit einem Radialrillengleitlager brauchen hingegen kein Verschiebungsmessmodul und keinen komplexen Regelkreis für den Antrieb und die Steuerung des hydrodynamischen Lagers. Der Vorteil des hydrodynamischen Lagers ist daher die hohe Zuverlässigkeit, die für Blutpumpen mit Langzeiteinsatz besonders wichtig sind. [27] [32]

In der Computerindustrie

Radialrillengleitlager werden auch in der Computerindustrie verwendet. HDD Festplatten werden zum Speicher von digitalen Informationen auf rotierende Scheiben eingesetzt. Dabei drehen sich die Scheiben im Plattenlaufwerk mit hoher Geschwindigkeit gestützt auf die Nabe eines Spindelmotors. Ein Umwandler wird radial über die Scheibenoberfläche bewegt und ist für die Aufzeichnung bzw. das Lesen der Informationen zuständig. Aufgrund des technologischen Fortschritts in der Computerindustrie hat sich die Speicherkapazität der Festplatten erhöht und gleichzeitig ihre Größe reduziert, was bei der Herstellung größerer Präzision und geringer Toleranz erfordert. Dafür muss der Umwandler sehr nah an der Scheibenoberfläche platziert werden und die Scheibe muss sich in einer Ebene drehen, ohne dass diese wackelt. Deswegen ist die Lagerung, die die Speicherscheibe auf dem Spindelmotor stützt, von entscheidender Bedeutung ist. Früher kamen Kugellager zum Einsatz. Diese zeigen jedoch mechanische Probleme, wie Verschleiß und Instabilitäten. Daher bieten Radialrillengleitlager eine bessere Alternative zur Lagerung der Speicherscheiben. Dank ihrer Stabilitätseigenschaften kann die Scheibe auf einer einzigen Ebene stabil rotieren.[47][12]

2.4 Die Reynolds-Differentialgleichung

2.4.1 Herleitung

Um die statischen und dynamischen Eigenschaften des Lagers zu ermitteln, muss zunächst die Druckverteilung über das gesamte Lager berechnet werden. Diese wird durch die Lösung der Reynoldsgleichung erzielt, die von der Navier-Stokes Gleichung hergeleitet wird. Für ein dreidimensionales Problem lautet die Navier-Stokes Gleichung in vektorieller Schreibweise:

$$\left(\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{lokale Beschleunigung}} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}_{\text{konvektive Beschleunigung}} \right) \rho = \underbrace{-\vec{\nabla} p}_{\text{Druckkraft}} + \underbrace{\eta (\vec{\nabla}^2 \vec{v})}_{\text{Reibungskraft}} + \underbrace{\rho \vec{g}}_{\text{Gewichtskraft}} \quad (2.1)$$

Unter folgenden Annahmen lässt sich die obenstehende Gleichung vereinfachen:

- Der Druck ist konstant über die Schmierfilmdicke
- Die Änderung der Geschwindigkeitskomponente v_y ist in allen Richtungen vernachlässigbar
- Die Schmierpalthöhe ist sehr klein im Vergleich zur Lagerbreite und zum Radius des Rotors
- Reibungskräfte sind viel größer im Vergleich zu Trägheitskräften
- Die Oberfläche ist ideal glatt

Die Annahmen werden in N.S-Gleichung (Gl.2.1) umgesetzt. Es ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.2)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.3)$$

mit den Geschwindigkeitskomponenten:

$$u = v_x$$

$$v = v_y$$

$$w = v_z$$

Die Doppelte Integration von Gl.2.2 über die Spalthöhenkoordinaten y liefert:

$$\iint \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) d^2 y = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 \quad (2.4)$$

Die Konstanten C_1 und C_2 werden durch die Randbedingungen wie folgt bestimmt:

$$\begin{array}{llll}
y = 0 & \longmapsto & u = 0 & \longmapsto & C_2 = \eta \cdot u_b \\
y = h & \longmapsto & u = u_a & \longmapsto & C_1 = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{h}{2} - \frac{\eta}{h} (u_b - u_a)
\end{array}$$

Einsetzen der Konstanten C_1 und C_2 liefert:

$$u(y) = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - h \cdot y) + u_b \left(1 - \frac{y}{h}\right) + u_a \cdot \frac{y}{h} \quad (2.5)$$

Analog dazu liefert die doppelte Integration von Gl.2.3 über die Spalthöhenkoordinaten z die folgende Gleichung:

$$\iint \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) d^2 y = -\frac{\partial p}{\partial y} \frac{y^2}{2} + C_3 y + C_4 \quad (2.6)$$

Die Konstanten C_3 und C_4 werden durch die Randbedingung wie folgt bestimmt:

$$\begin{array}{llll}
y = 0 & \longmapsto & w = 0 & \longmapsto & C_4 = 0 \\
y = h & \longmapsto & w = 0 & \longmapsto & C_3 = -\frac{\partial p}{\partial z} \frac{h}{2}
\end{array}$$

Einsetzen der Konstanten C_3 und C_4 liefert:

$$w(y) = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - h \cdot y) \quad (2.7)$$

Die allgemeine Kontinuitäts-Gleichung lautet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \cdot u}{\partial x} + \frac{\partial \rho \cdot v}{\partial y} + \frac{\partial \rho \cdot w}{\partial z} = 0 \quad (2.8)$$

Unter Annahme, dass die Dichte über die gesamte Schmier-spalthöhe konstant ist und dass die Änderung der Geschwindigkeit v in allen Richtungen vernachlässigbar ist, wird die Kontinuitäts-Gleichung nach der Leibnitz-Regel integriert:

$$\int_{y=0}^h \frac{\partial \rho}{\partial t} dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \int_{y=0}^h u dz \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \int_{z=0}^h w dy \right) = 0 \quad (2.9)$$

Einsetzen von Gl.2.5 und Gl.2.7 in Gl.2.9 liefert:

$$\begin{aligned}
\int_{y=0}^h \frac{\partial \rho}{\partial t} dy &= \frac{\partial \rho \cdot h}{\partial t} \\
\int_{y=0}^h u dy &= q'_x = -\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{u_b + u_a}{2} \right) h \\
\int_{y=0}^h w dy &= q'_z = -\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}$$

q_x und q_z sind hierbei die Volumenströme in x und y -Richtung

mit U die relative Geschwindigkeit und ω die relative Winkelgeschwindigkeit der beiden Gleitflächen:

$$U = u_b - u_a \qquad \omega = \omega_b + \omega_a$$

Daraus ergibt sich die instationäre Reynoldsgleichung für laminare Strömung und inkompressible Fluide in der Form:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho \cdot h^3}{12\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho \cdot h^3}{12\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right)}_{\text{Poiseuille Term}} = \underbrace{\frac{U}{2} \cdot \frac{\partial \rho \cdot h}{\partial x}}_{\text{Couette Term}} + \underbrace{\frac{\partial \rho \cdot h}{\partial t}}_{\text{Verdrängungs-term}} \quad (2.10)$$

Poiseuille Strömung: Die beiden Poiseuille-Terme beschreiben die Strömung infolge von Druckgradienten innerhalb des Schmierfilms.

Couette Strömung: Der Couette-Term beschreibt die Strömung aufgrund von Oberflächengeschwindigkeiten. Da die Schmierfilmdicke entlang der Lagers variiert, kann die Strömungskontinuität nur erreicht werden, wenn eine ausgleichende Poiseuille-Strömung überlagert wird.

Verdrängungsströmung: Dieser Term entspricht die Strömung infolge von lokaler thermische Ausdehnung des Schmierfilms zwischen der beiden Lagerflächen.

Um die Berechnung zu vereinfachen, werden die Terme in der Reynoldsgleichung wie folgt normiert:

$$\begin{aligned} x &= R\theta & z &= \frac{L}{2} \cdot \bar{z} & h &= \bar{h} \cdot C \\ p &= \bar{p} \cdot \omega \cdot \eta \left(\frac{R}{C} \right)^2 & t &= \frac{\bar{t}}{\omega} & \rho &= \text{konst.} \end{aligned}$$

Für inkompressible Fluide wird die Variation der Dichte vernachlässigt. damit lässt sich die dimensionlose Reynoldsgleichung für laminare Strömungen und inkompressible Fluide wie folgt definieren:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\bar{h}^3}{12} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\bar{h}^3}{12} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} \quad (2.11)$$

2.4.2 Randbedingung

Zur Lösung der Reynoldsgleichung müssen zunächst die Randbedingungen festgelegt werden. Aufgrund der Symmetrie der Geometrie des Gleitlagers sowie der Rillengeometrie in axialer Richtung muss bei allen Modellen nur die Hälfte des Lagers berechnet werden. Anschließend lässt sich die resultierende Druckverteilung über die Symmetrieachse spiegeln. Aus diesem Grund, muss die Druckänderung in z-Richtung $\frac{\partial p}{\partial z}$ in allen Knotenpunkten gleich null sein, die sich an der Symmetrieachse befinden. Für die periodische Randbedingung müssen ausschließlich die gleichen Druckwerte am Anfang ($\theta = 0$) und Ende ($\theta = 2\pi$) der umlaufenden Koordinate zugewiesen werden. Für Punkte, die in der Lagerperipherie liegen, muss dem lokalen Druck der Wert des Umgebungsdruckes zugeordnet werden. Die Randbedingungen

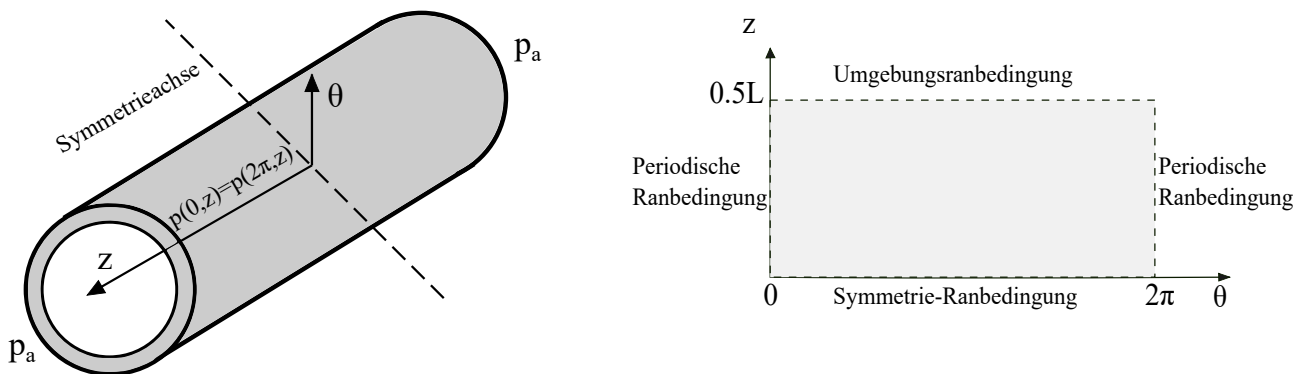


Abbildung 2.10: Randbedingungen der Reynoldsgleichung

können mathematisch wie folgt zusammengefasst werden:

$$\begin{cases} p(0, z) = p(2\pi, z) & \text{periodische Randbedingung} \\ p(\theta, 1) = p_a & \text{Umgebungsrandbedingung} \\ \frac{\partial p}{\partial z}(\theta, 0) = 0 & \text{Symmetrierandbedingung} \end{cases}$$

2.5 Turbulenzmodel

Aufgrund von Strömungsturbulenzen wird die Leistung von hydrodynamischen Gleitlagern beeinträchtigt. Der vorherrschende Trend zu leichten und kompakten Turbomaschinen, die mit höheren Drehzahlen betrieben werden, und die Verwendung von Prozessflüssigkeiten (mit niedriger Viskosität) und Gasen bedingen turbulente Betriebsbedingungen mit dominierenden Trägheitseffekten der Schmierstoffe. Die dimensionlose Reynoldsgleichung für turbulente Strömung wird wie folgt definiert[55] [38]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\bar{h}^3}{k_x} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\bar{h}^3}{k_z} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} \quad (2.12)$$

Dabei sind k_x und k_z die Turbulenzkoeffizienten in der x und z-Richtung und sind in folgender Gleichung dargestellt [55][38]:

$$k_x = 12 + C_1(Re^*)^{C_2} \quad k_z = 12 + C_3(Re^*)^{C_4}$$

Dabei stellt Re^* die lokale Reynoldszahl dar, die von der lokalen Schmierfilmdicke abhängig ist[38].

$$Re^* = \frac{\rho R \omega h}{\eta} \quad (2.13)$$

In dieser Arbeit werden zwei unterschiedliche Turbulenzmodelle eingeführt und verglichen. Zunächst das Constantinescu Turbulenzmodell, das auf der Prandtlschen Mischungsweghypothese beruht, die die Wirbelzähigkeit beschreibt, und das NG-Pan-Elrod-Turbulenzmodell basierend auf die Wirbeltheorie.[38]

Tabelle 2.1: Turbulenzkoeffizienten [38]

Turbulenzkoeffizienten	Turbulenzmodell	
	Constantinescu Modell	Ng-Pan-Elrod Modell
C_1	0.026	0.0136
C_2	0.8265	0.9
C_3	0.0198	0.0044
C_4	0.741	0.96

Die Variation der Turbulenzkoeffizienten k_x und k_z in Abhängigkeit von der Reynoldszahl ist in Abbildung 2.11 dargestellt. Wie aus der Abbildung ersichtlich ist, nimmt die Abweichung zwischen dem Constantinescus Modell und dem Ng-Pan-Elrod Ansatz mit steigender Reynoldszahl zu. Grund für diesen Unterschied liegt im Constantinescus Modell, bei dem die Pufferzone unbehandelt bleibt und nicht planare Strömungen nicht sorgfältig modelliert wurden. Auch die genaue Messung der Mischungslängenkonstante für Gleitlager mit kleinem Spiel stellt in diesem Modell eine große Herausforderung dar, während die meisten der genannten Probleme in der Ng-Pan-Elrod Turbulenzmodell behandelt wurden. Es ist auch zu erwähnen, dass die Turbulenzkoeffizienten in der Reynoldsgleichung Berücksichtigung finden sollten, wenn die mittlere Reynoldszahl über 2000 liegt. [38]

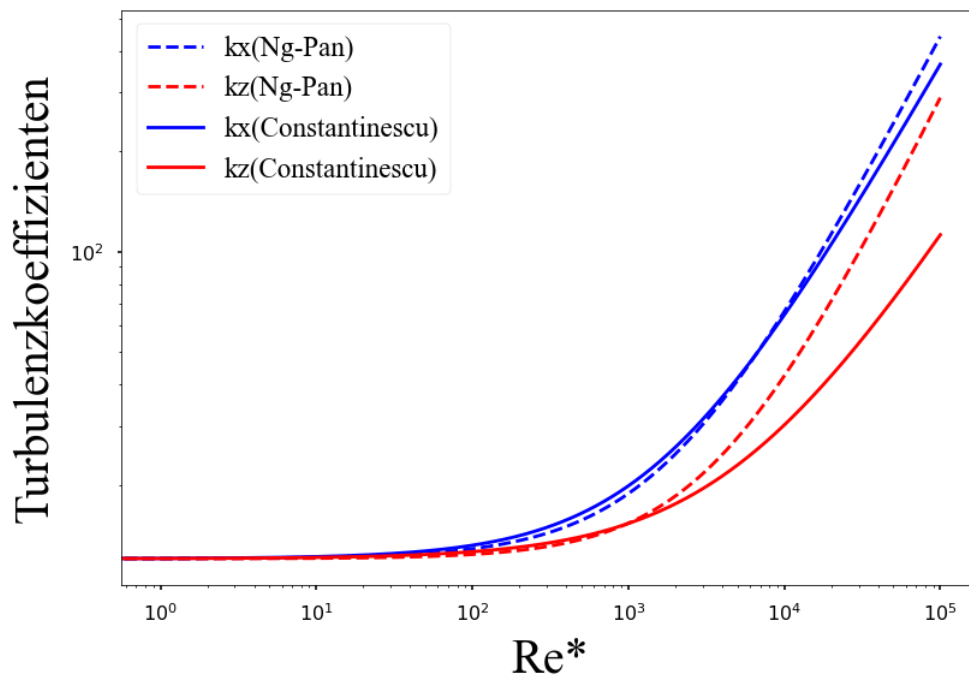


Abbildung 2.11: Turbulenzkoeffizienten über Re

2.6 Kavitationsmodell

Kavitation ist die Bildung und Expansion von Hohlräumen oder Blasen in einer Flüssigkeit auf eine Größe, bei der makroskopische Effekte beobachtet werden können. Die Hohlräume enthalten im Allgemeinen Gase, die durch die Verdampfung der Flüssigkeit entstehen. Eine ausreichende Reduzierung des Drucks im Fluid bei konstanter Temperatur (Abbildung 2.12) bewirkt eine explosive Verdampfung der Flüssigkeit, und damit auch die Entstehung von Kavitationen. [40]

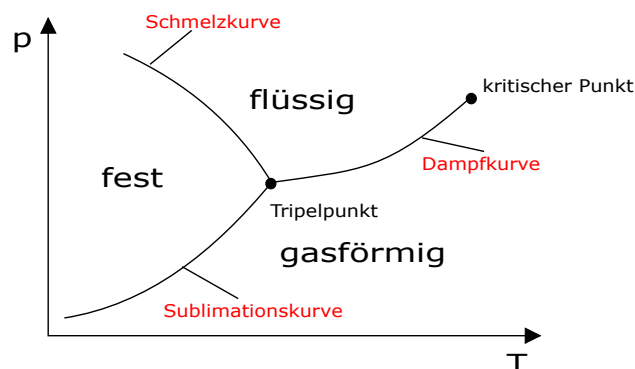


Abbildung 2.12: Aggregatzustände eines Stoffes über Temperatur und Druck

In hydrodynamischen Gleitlager kann der lokale Druck so drastisch abfällt, dass dieser den Kavitation- bzw. Dampfdruck erreicht bzw. unterschreitet. Das führt zum verdampfen des Fluids und bilden sich dabei Kavitationszonen (Abbildung 2.4), die wiederum einen Bruch des Schmierfilms bewirken. Die resultierenden Hohlräume im Schmierfilm werden durch die Strömung transportiert und brechen bei Druckerhöhung des Fluids zusammen. Die freigesetzte Energie kann die Gleitfläche mechanisch stark angreifen und damit zur Erosion des Lagerwerkstoffes führen. [10]

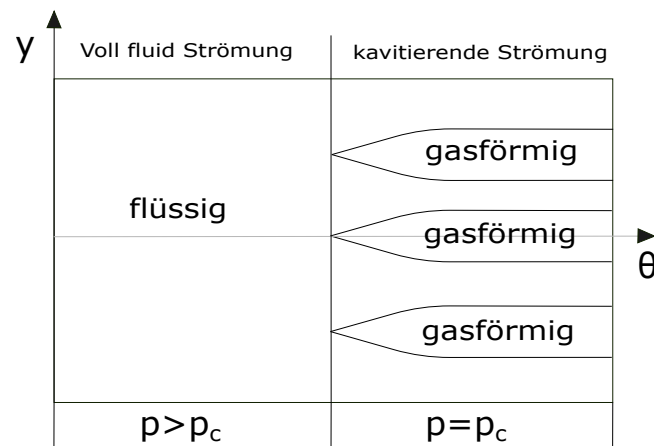


Abbildung 2.13: Kavitation

Das Kavitationsphänomen muss daher sorgfältig behandelt werden. Eine direkte Lösung der Reynoldsgleichung ohne Berücksichtigung von Kavitationsbildung kann bei hohen Drehzahlen bzw. Exzentrizitäten Druckwerte liefern, die unterhalb des Kavitationsdrucks liegen. Das würde physikalisch bedeuten, dass das Fluid Spannungskräfte aufnimmt, die höher sind, als die zulässige Spannung, die das Fluid aushalten kann. In der Realität kommt es an diesen Stellen zu einem Riss des Schmierfilms und es entstehen Kavitationszonen. Daher muss ein geeignetes Kavitationsmodell für die Reynoldsgleichung angewandt werden, um die Unterdrücke in der Lösung zu vermeiden. [33]

2.6.1 Gümbel Modell

Das Gümbel-Modell stellt das erste von zwei vorgestellten Kavitationsmodellen dar. Es wird in der Regel für den stationären Fall eingesetzt und schneidet lediglich Drücke unterhalb des Kavitationsdruckes ab. Hierbei ist der Druck nach dem Filmabriss an allen Stellen gleich den Kavitationsdruck. In diesem Modell wird davon ausgegangen, dass der Filmabriss übergangslos immer bei der minimalen Schmierfilmdicke auftritt, während die Filmneubildung physikalisch nicht betrachtet wird. Das ist eine sehr vereinfachte Modellannahme. Ein weiterer Nachteil liegt darin, dass dieses Modell den Massenerhaltungssatz an der Kavitationsgrenze und auch innerhalb der Kavitationsregion nicht erfüllt. Allerdings wird es wegen seiner einfachen numerischen Anwendung häufig eingesetzt. [10][38]

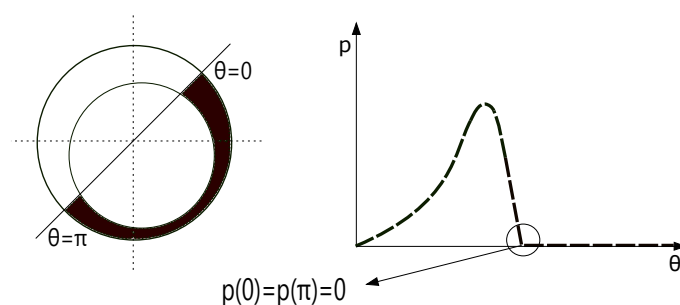


Abbildung 2.14: Gümbel-Modell [38]

2.6.2 Swift-Stieber Modell

Ein komplexeres Kavitationsmodell wurde von SWIFT und STIEBER [38] beschrieben, das auch als Reynoldsbedingung bezeichnet wird. Dabei wird die Lage der Kavitationsgrenze durch die Bedingung bestimmt, dass der lokale Druck gleich dem Kavitationsdruck ist ($p = p_c$). Er bleibt konstant über die Kavitationszone. Außerdem ist der Druckgradient $\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$ an der Kavitationsgrenze, was zu einem fließenden Übergang beim Abriss des Schmierfilms (Abbildung 2.15). [10][38]

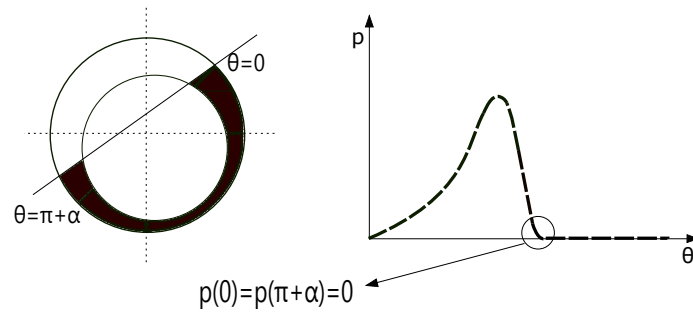


Abbildung 2.15: Swift-Stieber-Modell [38]

Die Strömung nach der Kavitationsgrenze ist gekennzeichnet durch gleichmäßig verteilte Hohlräume, zwischen denen die Flüssigkeit transportiert wird. Eine Filmneubildung erfolgt an der Stelle, wo der lokale Druck wieder größer als der Kavitationsdruck ist. Das Swift-Stieber-Modell ist damit massenkonservativ an der Abrissgrenze und wird für die weitere Berechnung verwendet.[38]

2.7 Vohr und Chow Modell

Dieses Modell wurde von Vohr und Chow in 1965 [52] zur Ermittlung der statischen Eigenschaften von Radialrillengleitlagern entwickelt. Im Gegensatz zum konventionellen Gleitlager, wird bei der analytischen Lösung der Reynoldsgleichung festgestellt, dass der Druckgradient in den Rille-Damm-Grenzflächen zwangsläufig diskontinuierlich ist. Grund dafür ist die komplexe Geometrie der Rillen (Abbildung 2.16) , die eine Unstetigkeit der Schmierfilmdicke an den Grenzflächen bewirkt.[52]

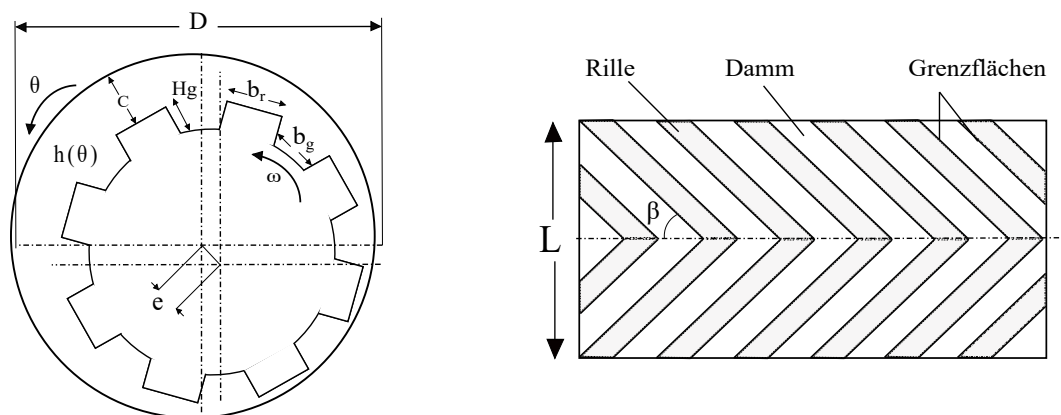


Abbildung 2.16: Geometrie eines Radialrillengleitlagers

Die Unstetigkeit der Schmierfilmdicke führt dazu, dass die Druckverteilung entlang der umlaufenden Koordinate einen periodischen sägezahnartige Verlauf zeigt (Abbildung 2.17), wobei G_0, G_1 und R_0, R_1 die Grenzfläche am Anfang und am Ende der Rille und des Damms bezeichnet.[52]

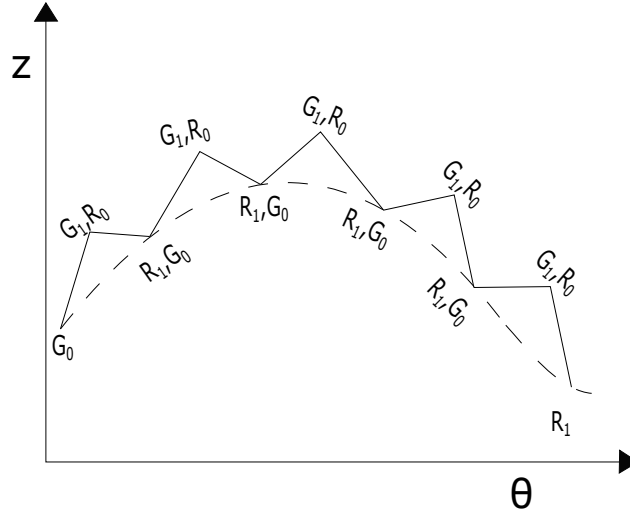


Abbildung 2.17: Druckverteilung bei Radialrillengleitlager [52]

Durch Vernachlässigung der periodischen sägezahnförmigen Schwankungen kann eine angenäherte, geglättete Druckverteilung berechnet werden. Hierfür müssen folgende Annahmen getroffen werden [52]:

- Unendliche Anzahl von Rillen ergibt eine infinitesimal kleine Breite der Rillen- und Dammbereiche.
- Die gesamte Druckänderung über ein Rille-Damm-Paar ist gleich der Summe der Druckänderungen über der Rille und über den Damm.
- Der Druckgradient parallel zu einer Rillen-Damm-Grenze ist auf beiden Seiten der Grenzfläche identisch.
- Der Massenstrom normal zu einer Rille-Damm-Schnittstelle ist kontinuierlich über die Grenzfläche

Nach Einsetzen der Annahmen in die Reynoldsgleichung ergibt sich folgende Gleichung für die geglättete Druckverteilung [52]:

$$C_1 \frac{L^2}{p_a} \frac{\partial^2 p_1}{\partial^2 z} + C_2 \frac{L}{p_a} \frac{\partial p_1}{\partial z} + C_3 \frac{L}{p_a} \frac{\partial^2 p_1}{\partial z \partial \theta} + C_4 \frac{1}{p_a} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} + C_5 \frac{1}{p_a} \frac{\partial^2 p_1}{\partial \theta^2} + C_6 \sin \theta + C_7 \cos \theta = 0 \quad (2.14)$$

Anschließend kann der Gesamtdruck durch Einführung der Störungsmethode wie folgt definiert [52]:

$$\bar{p}(\theta, y) = \bar{p}_0(y) + \varepsilon \bar{p}_1(\theta, y) \quad (2.15)$$

Die Koeffizienten C_1 bis C_7 sind in Appendix A definiert [52]. Aufgrund der linearen Abhängigkeit zwischen dem berechneten statischen Druck p_0 und der Lagerexzentrizität ε , sind die statischen Eigenschaften bei diesem Modell des Lagers ebenfalls von der Exzentrizität linear abhängig. Es ist noch zu erwähnen, dass dieses Modell für kompressible und inkompressible Fluide gilt [52]. Im Fall eines inkompressiblen Fluids müssen die Kompressibilitätseffekte vernachlässigt werden. Außerdem muss beachtet werden, dass Vohr und Chow die Schmierfilmdicke H_0 und das Breitenverhältnis α folgendermaßen definiert haben [52]:

$$H_{0,vc} = \frac{H_g + C}{C} \quad \alpha = \frac{b_g}{b_r + b_g}$$

Nach Lösung der Differentialgleichung nach dem lokalen Druck p_1 , können die Lagerkräfte durch Integration der ermittelten Druckverteilung wie folgt berechnet werden [52]:

$$F_r = -R \cdot \frac{L}{2} \cdot P_a \int_0^1 \int_0^{2\pi} p_1(\theta, \bar{z}) \cos \theta d\theta d\bar{z}$$

$$F_t = R \cdot \frac{L}{2} \cdot P_a \int_0^1 \int_0^{2\pi} p_1(\theta, \bar{z}) \sin \theta d\theta d\bar{z}$$

Die Lagertragfähigkeit lässt sich aus der berechneten Radialkraft F_r und der tangentialen Kraft F_t wie folgt ermitteln [52]:

$$W = \frac{F_r}{\cos \phi} = \frac{F_t}{\sin \phi} = \sqrt{F_t^2 + F_r^2}$$

2.8 Jan Bootsma Modell

Das Bootsma Modell ist ebenfalls ein Strömungsmodell zur Ermittlung der statischen Eigenschaften von Radialrillengleitlagern. Dieses Modell gilt ebenfalls für kompressible und inkompressible Fluide. Im Fall von kompressiblen Fluiden werden lediglich die lokalen Kompressibilitätseffekte vernachlässigt. Das bedeutet, dass die Variation der Dichte des kompressiblen Fluids über eine Rille und einen Damm in die umlaufende Richtung vernachlässigt wird. Die Gesamtvariation von ρ über das gesamte Lager ist jedoch nicht zu vernachlässigen. Dieses Modell basiert auch auf der Annahme, dass die Anzahl der Rillen so groß ist, dass sich die Breite eines Rille-Damm-Paares gegen null annähert, was zu einem geglätteten Verlauf der Druckverteilung führt.[31]

Für inkompressible Fluide wird die dimensionlose Reynoldsgleichung für das Bootsma Modell folgendermaßen definiert[31]:

$$\frac{\partial \bar{q}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{q}_z}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_\theta &= -A \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} - B \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + F \\ \bar{q}_z &= -B \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} - C \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + G \end{aligned}$$

mit

$$z = \bar{z} \cdot 2R \quad p = 6(\bar{p} - \bar{p}_0) \omega \eta \left(\frac{R}{C} \right)^2$$

Die Koeffizienten A...G sind in Appendix B dargestellt. Im Gegensatz zum Ansatz von Vohr und Chow ist der berechnete lokale Druck nicht linear abhängig von der Lagerexzentrizität und somit bilden die Lagereigenschaften keine lineare Funktion der Exzentrizität ab. Es ist zu beachten, dass Bootsma die Schmierfilmdicke H_0 und das Breitenverhältnis γ anders definiert hat, als Vohr und Chow. [31]

$$H_{0,b} = \frac{H_g}{C} \quad \gamma = \frac{b_g}{b_r}$$

Bootsma hat aus seinem ursprünglichen Modell durch die Anwendung der Störungsmethode eine lineare Approximation der Lagerkräfte bzw. der Lagertragfähigkeit entwickelt. Die radiale und tangentialen Lagerkräfte lassen sich damit wie folgt ausdrücken[31]:

$$\begin{aligned} \bar{F}_r &= -12\pi\varepsilon \frac{g_{11}}{\lambda^2 + \nu^2} \left(1 - \frac{\cos(\nu \bar{B})}{\cosh(\lambda \bar{B})} \right) \\ \bar{F}_t &= 12\pi\varepsilon \frac{((\nu^2 - \lambda^2) E + \nu g_{11}) \sinh(\lambda \bar{B}) - \lambda (g_{11} + 2\nu E) \sin(\nu \bar{B})}{\lambda (\lambda^2 + \nu^2) \cosh(\lambda \bar{B})} + \varepsilon E \bar{B} \end{aligned}$$

Kapitel 3

Methodik

3.1 Finite Differenzen Methode

Die Finite Differenzen Methode Finite Differenzen Methode (FDM) ist ein häufig verwendetes Verfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen (Partial Differential Equation (PDE)). Das Prinzip basiert auf der Approximierung des Differentialoperators mittels Ersetzen der Ableitungen in der Gleichung durch bestimmte Differenzenquotienten. Die zu untersuchende Domäne wird räumlich und zeitlich aufgeteilt, sodass die Näherung der Lösung in jedem Raum- bzw. Zeitpunkt berechnet werden kann. Der Fehler zwischen der numerischen Lösung und der exakten Lösung wird durch den Fehler bestimmt, der beim Übergang vom Differentialoperator zum Differentialquotienten der FDM entsteht. Dieser Fehler wird als Diskretisierungsfehler bezeichnet. [58]

3.1.1 Finite Differenzen Approximation

Ziel bei der Anwendung der Finite Differenzen Methode liegt darin, die partiellen Ableitungen durch die Annäherungsterme mit möglichst hoher Genauigkeit zu ersetzen. Dies führt zu einem großen algebraischen Gleichungssystem, das leicht rechnergestützt zu lösen ist. Für eine homogene Funktion $f(x)$, die mehrmals differenzierbar ist und jede Ableitung eine definierte begrenzte Funktion über ein Intervall darstellt. Die Funktion ist in der Rechendomäne definiert, die in äquidistant Intervalle Δh unterteilt ist. Die Ableitung erster Ordnung kann durch den Vorwärtsdifferenzenquotienten f'^{+} oder den Rückwärtsdifferenzenquotienten f'^{-} wie folgt approximiert werden[37]:

$$\begin{aligned} f'^{+}(x_0) &= \frac{f(x_0 + \Delta h) - f(x_0)}{\Delta h} \\ f'^{-}(x_0) &= \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta h)}{\Delta h} \end{aligned}$$

Eine weitere Möglichkeit ist die Anwendung des zentralen Differenzenquotienten. Dieser ist folgendermaßen definiert:

$$f'^0(x) = \frac{f(x_0 + \Delta h) - f(x_0 - \Delta h)}{2\Delta h}$$

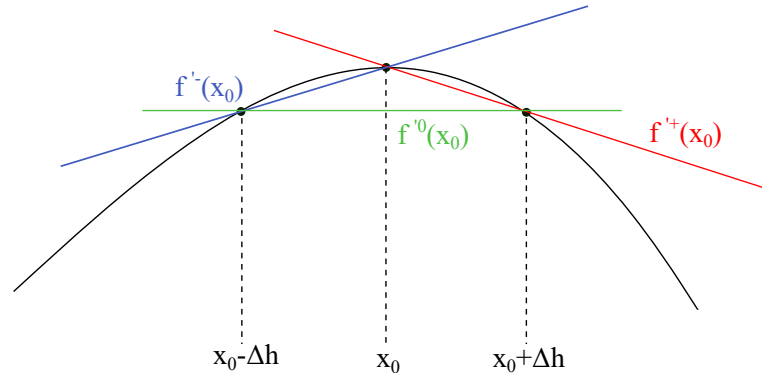


Abbildung 3.1: Die Näherungswerte von $f'(x_0)$ interpretiert als die Steigung der Sekante

Jede dieser Formeln liefert eine genaue Näherung erster Ordnung für $f'(x)$. Hierbei ist der resultierende Fehler ungefähr proportional zur Intervallgröße Δh . Der allgemeine Ansatz zur Analyse des Fehlers in einem FDM-Quotienten besteht darin, jeden der Funktionswerte von f in einer Taylor-Reihe um den Punkt zu erweitern [20]

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0 + \Delta h) - f(x_0)}{\Delta h} &= f'_{+}(x_0) + \frac{1}{2}\Delta h f''(x_0) + \frac{1}{6}\Delta h^2 f'''(x_0) + O(\Delta h^3) \\ \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta h)}{\Delta h} &= f'_{-}(x_0) + \frac{1}{2}\Delta h f''(x_0) - \frac{1}{6}\Delta h^2 f'''(x_0) + O(\Delta h^3) \\ \frac{f(x_0 + \Delta h) - f(x_0 - \Delta h)}{2\Delta h} &= f'^0(x_0) + \frac{1}{6}\Delta h^2 f'''(x_0) + O(\Delta h^4)\end{aligned}$$

Die Ableitung zweiter Ordnung lässt sich analog dazu wie folgt approximieren:

$$\frac{f(x_0 + \Delta h) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta h))}{\Delta h^2} = f''(x_0) + \frac{1}{2}\Delta h^2 f'''(x_0) + O(\Delta h^4)$$

Für ein ausreichend kleines Intervall wird der Fehler durch den Term $\frac{1}{2}\Delta h f'''(x_0)$ dominiert und alle anderen Terme können im Vergleich zu diesem Term vernachlässigt werden.

3.1.2 Zweidimensionales Problem

Analytische Lösungen von partiellen Differentialgleichungen liefern konkrete Funktionen, die die Variation der abhängigen Variablen im Definitionsbereich beschreiben. Die numerischen Lösungen, die auf der Finiten Differenzen Methode beruhen, liefern Werte an diskreten Punkten der Berechnungsdomäne, die als Gitterpunkte bezeichnet werden. [20] Bei einer zweidimensionalen Funktion $f(x, y)$, die von x und y abhängig ist, muss die Berechnungsdomäne in äquidistante Intervalle Δx und Δy zerteilt werden (Abbildung 3.2). [37]

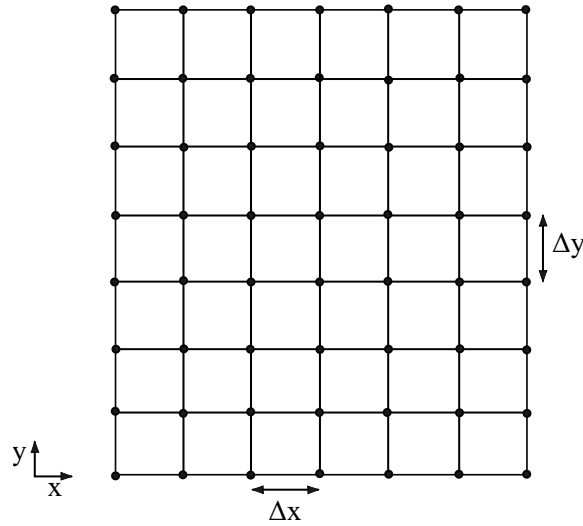


Abbildung 3.2: Rechendomäne

Um die Methodik zur Lösung der Differentialgleichungen zu erklären, wird folgende allgemeine Differentialgleichung angenommen, die sowohl direkte als auch gekoppelte partielle Ableitungen enthält.[37]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = G(x, y)$$

Die partiellen Ableitungen lassen sich anhand der Differenzenquotienten wie folgt approximieren [58]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{(f)_{i+1,j} - 2(f)_{i,j} + (f)_{i-1,j}}{\Delta x^2} & \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{(f)_{i+1,j} - (f)_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{(f)_{i,j+1} - 2(f)_{i,j} + (f)_{i,j-1}}{\Delta y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{(f)_{i,j+1} - (f)_{i,j-1}}{2\Delta y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{(f)_{i+1,j+1} - (f)_{i+1,j-1} - (f)_{i-1,j+1} + (f)_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} + O(\Delta x^2, \Delta y^2) \end{aligned}$$

Die Approximierung der gekoppelten partiellen Ableitung $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ führt zu einer größeren Fehler im Vergleich zu den anderen Termen.

Nach Einsetzen der Differenzenquotienten in die Differentialgleichung ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$Af_{i,j} + Bf_{i+1,j} + Cf_{i-1,j} + Df_{i,j+1} + Ef_{i,j-1} + Hf_{i+1,j+1} + If_{i-1,j-1} + Jf_{i+1,j-1} + Kf_{i-1,j+1} = G_{i,j}$$

Der nächste Schritt ist die Erstellung der Diagonalmatrix. Um die resultierende Gleichung lösen zu können, muss diese in eine Matrixgleichung umgeschrieben werden:

$$M_D \vec{f} = \vec{G}$$

M_D stellt hierbei eine zweidimensionale Diagonalmatrix mit der Größe $(n \cdot m, n \cdot m)$ dar, die die jeweiligen Koeffizienten enthält. n und m stellen dabei die Anzahl der Knotenpunkte in x und y Richtung. Um das M_D Matrix zu erstellen, wird der Koeffizient A in der Hauptdiagonale eingesetzt. Die Nebendiagonalen $(m+1)$ und $(-m-1)$ enthalten jeweils die Koeffizienten B und C . Die beiden Koeffizienten D und E befinden sich jeweils in den beiden ersten Nebendiagonalen. Die Diagonalen m und $-m$ bestehen jeweils aus den Koeffizienten J und I . Anschließend sind die Koeffizienten H und K jeweils in den Diagonalen

$m + 2$ und $-m - 2$ einzusetzen. [58][37]

$$M_D = \begin{pmatrix} & & & & & & m. \text{ Diagonale} & & & & \\ & A & D & 0 & \dots & 0 & J & B & H & 0 & 0 \\ & E & A & D & \dots & 0 & 0 & J & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & E & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & H \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 & \ddots & B \\ & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 & J \\ -m. \text{ Diagonale} & I & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ & C & I & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & J \\ & K & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & \vdots & \ddots & \ddots & I & 0 & \dots & 0 & E & A & D \\ & 0 & 0 & K & C & I & 0 & \dots & 0 & E & A \end{pmatrix}$$

$\vec{f}$ stellt den Lösungsvektor dar, und $\vec{G}$ enthält die Werte der G-Funktion und sind wie folgt definiert:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_{0,0} \\ f_{0,1} \\ \vdots \\ f_{0,m} \\ f_{1,0} \\ \vdots \\ f_{1,m} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n,m} \end{pmatrix} \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} G_{0,0} \\ G_{0,1} \\ \vdots \\ G_{0,m} \\ G_{1,0} \\ \vdots \\ G_{1,m} \\ \vdots \\ \vdots \\ G_{n,m} \end{pmatrix}$$

Das resultierende Gleichungssystem kann anschließend anhand des Python-Solvers gelöst werden. Das Python solver (spicy.spsolve) ist ein Python-Tool, das die Lösung von linearen Gleichungssystemen ermöglicht. Im Vergleich zu klassischen Iterationsverfahren zeigt das Python-Solver eine schnellere Konvergenz. Der Lösungsvektor kann in eine 2D-Matrix mit der Größe $(n \cdot m)$ umgewandelt werden:

$$f = \begin{pmatrix} f_{0,0} & f_{0,1} & \dots & f_{0,m} \\ f_{1,0} & f_{1,1} & \dots & f_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n,0} & f_{n,1} & \dots & f_{n,m} \end{pmatrix}$$

Diese Methode wird eingesetzt, um die in Kapitel 1 beschriebenen mathematischen Modelle zu diskretisieren. Die Lösung dieser Modelle wird im jeweiligen Unterkapitel ausführlich beschrieben. [37]

3.2 Störungsmethode

Für Gleitlager stellt die Störungsmethode das am häufigsten verwendete Verfahren zur Lösung der instationären Reynoldsgleichung dar. Das Störungsverfahren ist eine analytische Methode zur Bestimmung von Näherungslösungen nichtlinearer Gleichungen, für die keine exakte Lösung ermittelt werden kann. Sie sind geeignet, um Phänomene in schwingenden Systemen zu beschreiben, die durch nichtlineare Effekte verursacht werden. Aufgrund kleiner Störungen verlässt der Lagerzapfen seine Gleichgewichtslage und wirbelt mit einer radialen und tangentialen Komponente, die Druck- und Filmdickenstörungen hervorrufen.[16]

Die gestörte Filmdicke und der gestörte Druck lassen sich durch eine Reihenentwicklung wie folgt beschreiben[16][44]:

$$\bar{h} = \bar{h}_0 + \varepsilon_p e^{i\bar{t}} \cos(\theta) + \varepsilon_0 \phi e^{i\bar{t}} \sin(\theta) \quad (3.1)$$

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \varepsilon_p e^{i\bar{t}} \bar{p}_\varepsilon + \varepsilon_0 \phi e^{i\bar{t}} \bar{p}_\phi \quad (3.2)$$

Die Einführung der beiden gestörten Terme in der instationäre Reynoldsgleichung ergibt drei getrennte Differentialgleichungen, die den statischen Druck und den dynamischen Druck in Verbindung mit der Steifigkeit und der Dämpfung beschreiben.[16]

Setzt man die Gleichungen 3.1 und 3.2 in Gleichung 2.10 ein und betrachtet nur die Störungsterme erster Ordnung, erhält man die statische Reynoldsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{h}_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{h}_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{z}} \right) = 6 \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \theta} \quad (3.3)$$

Die dynamische Reynoldsgleichung in Verbindung mit dem Störungsterm $\varepsilon_p e^{i\bar{t}}$ wird folgendermaßen definiert:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{h}_0^3 \frac{\partial \bar{p}_\varepsilon}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{h}_0^3 \frac{\partial \bar{p}_\varepsilon}{\partial \bar{z}} \right) + 3 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{h}_0^2 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \theta} \cos(\theta) \right) \quad (3.4)$$

$$+ 3 \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{h}_0^2 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{z}} \cos(\theta) \right) = -6 \sin(\theta) + 12i \frac{\Omega}{\omega} \cos(\theta) \quad (3.5)$$

Die dynamische Reynoldsgleichung in Verbindung mit dem Störungsterm $\varepsilon_0 \phi e^{i\bar{t}}$ lässt sich wie folgt beschreiben:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{h}_0^3 \frac{\partial \bar{p}_\phi}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{h}_0^3 \frac{\partial \bar{p}_\phi}{\partial \bar{z}} \right) + 3 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{h}_0^2 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \theta} \sin(\theta) \right) \\ + 3 \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{h}_0^2 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{z}} \sin(\theta) \right) = 6 \cos(\theta) + 12i \frac{\Omega}{\omega} \sin(\theta)$$

Die Anwendung der Störungsmethode in der instationären Reynoldsgleichung ermöglicht die Berechnung des statischen sowie des dynamischen Drucks und somit die Ermittlung der statischen und dynamischen Eigenschaften des Lagers.

3.3 Statisch belastetes Gleitlager

Hydrodynamische Gleitlager sind für die Aufnahme einer statischen Last W ausgelegt. Im Gleichgewichtszustand, gekennzeichnet durch die exzentrische Verschiebung ε und den Anstellwinkel Φ , erzeugt das Gleitlager aufgrund des Drucks im Schmierfilm eine Reaktionskraft, die die extern aufgebrachte Last ausgleicht. Φ stellt hierbei den Winkel zwischen der Last und dem Exzentrizitätsvektor dar.

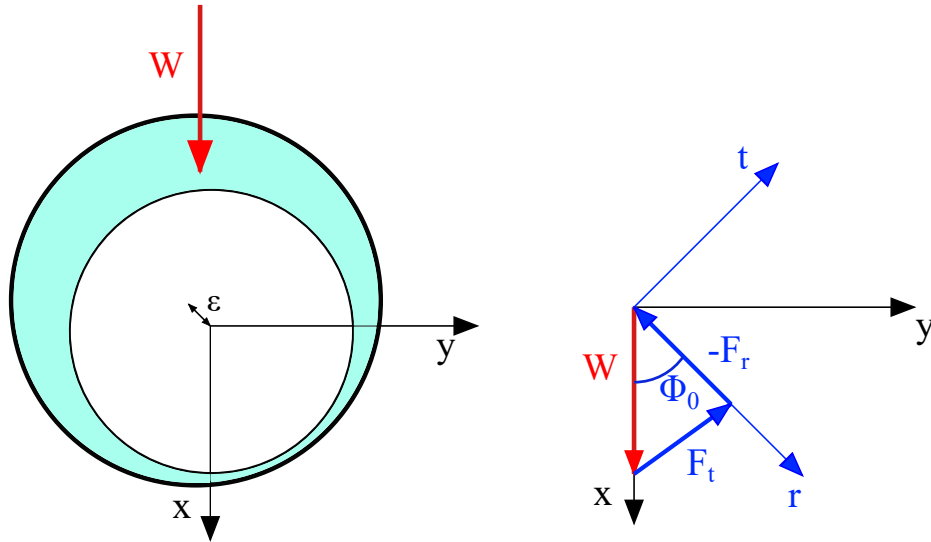


Abbildung 3.3: Kräfte-Gleichgewicht für statische Last

Die Lagerreaktionskräfte lassen sich durch die Integration der Druckfunktion über den gesamten Lagerbereich ermitteln[33]:

$$F_r = -R \int_0^L \int_0^{2\pi} p(\theta, z) \cos \theta d\theta dz$$

$$F_t = R \int_0^L \int_0^{2\pi} p(\theta, z) \sin \theta d\theta dz$$

Die Tragfähigkeit des Lagers W und der Anstellwinkel Φ lassen sich anschließend durch die tangentialen Reaktionskraft F_t und die radiale Reaktionskraft F_r ausrechnen[33]:

$$W = \sqrt{F_r^2 + F_t^2}$$

$$\Phi_0 = \arctan\left(\frac{F_t}{F_r}\right)$$

3.4 Dynamisch belastetes Gleitlager

Gleitlager können auch dynamisch belastet werden. Dynamische Belastung kann dabei zu Instabilität führen, wie z.B. Wirbelbewegung, die das Lager schädigen können. Um die Lagerschäden zu vermeiden, ist es sinnvoll, die Bedingung vorher zu bestimmen, unter denen das Lager stabil bleibt. Um das zu erzielen, müssen die direkten $K_{xx}, K_{yy}, D_{xx}, D_{yy}$ und gekoppelten $K_{xy}, K_{yx}, D_{xy}, D_{yx}$ Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten ermittelt werden.

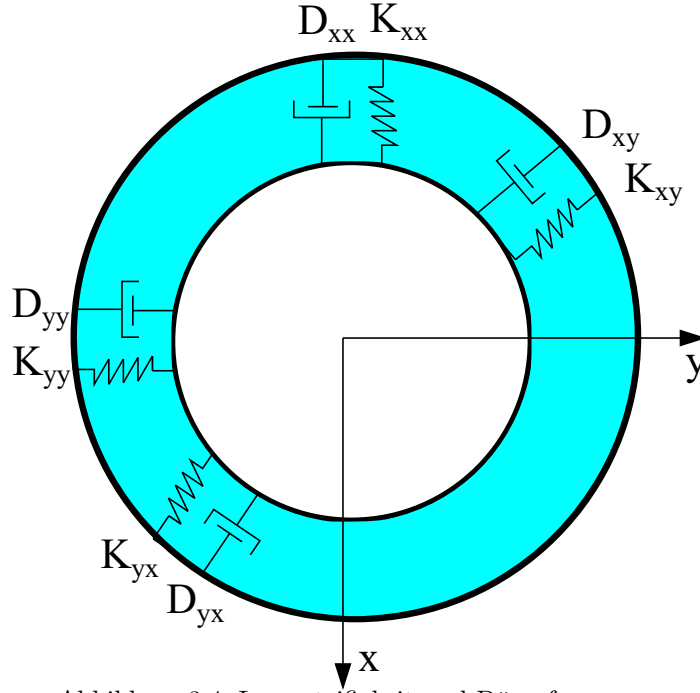


Abbildung 3.4: Lagersteifigkeit und Dämpfung

Mit Hilfe der Störungsmethode lassen sich die Koeffizienten in Störungskoordinaten ε, Φ durch Integration der dynamischen Druckterme ausrechnen [16][44]:

$$\begin{pmatrix} K_{\varepsilon\varepsilon} & K_{\varepsilon\Phi} \\ K_{\Phi\varepsilon} & K_{\Phi\Phi} \end{pmatrix} = -\frac{R}{C} \int_0^L \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} p_\varepsilon^R \\ p_\Phi^R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix} d\theta dz \quad (3.6)$$

(3.7)

$$\begin{pmatrix} D_{\varepsilon\varepsilon} & D_{\varepsilon\Phi} \\ D_{\Phi\varepsilon} & D_{\Phi\Phi} \end{pmatrix} = -\frac{R}{\omega C} \int_0^L \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} p_\varepsilon^I \\ p_\Phi^I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix} d\theta dz \quad (3.8)$$

Die Transformation von Störungskoordinaten in die kartesischen Koordinaten erfolgt durch folgende Gleichung[16][44]:

$$\begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Phi_0) & -\sin(\Phi_0) \\ \sin(\Phi_0) & \cos(\Phi_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{\varepsilon\varepsilon} & K_{\varepsilon\Phi} - \frac{F_t}{C} \\ K_{\Phi\varepsilon} & K_{\Phi\Phi} + \frac{F_r}{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Phi_0) & -\sin(\Phi_0) \\ \sin(\Phi_0) & \cos(\Phi_0) \end{pmatrix}^T \quad (3.9)$$

(3.10)

$$\begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & D_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Phi_0) & -\sin(\Phi_0) \\ \sin(\Phi_0) & \cos(\Phi_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{\varepsilon\varepsilon} & D_{\varepsilon\Phi} \\ D_{\Phi\varepsilon} & D_{\Phi\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Phi_0) & -\sin(\Phi_0) \\ \sin(\Phi_0) & \cos(\Phi_0) \end{pmatrix}^T \quad (3.11)$$

Eine weitere Methode zur Berechnung der Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten haben Vohr und Chow präsentiert[17]. Dabei lassen sich die Steifigkeitskoeffizienten anhand der Ableitungen der Radial-

und Tangentialkräfte über die Exzentrizität e wie folgt ermitteln[17]:

$$K_{xx} = \frac{\partial F_r}{\partial e} \cos(\Phi_0)^2 + \frac{\partial F_t}{\partial e} \cos(\Phi_0) \sin(\Phi_0) \quad (3.12)$$

$$K_{xy} = \frac{\partial F_t}{\partial e} \sin(\Phi_0)^2 + \frac{\partial F_r}{\partial e} \cos(\Phi_0) \sin(\Phi_0) \quad (3.13)$$

$$K_{yx} = -\frac{\partial F_t}{\partial e} \cos(\Phi_0)^2 + \frac{\partial F_r}{\partial e} \cos(\Phi_0) \sin(\Phi_0) - \frac{W}{e} \sin(\Phi_0) \quad (3.14)$$

$$K_{yy} = -\frac{\partial F_r}{\partial e} \sin(\Phi_0)^2 - \frac{\partial F_t}{\partial e} \cos(\Phi_0) \sin(\Phi_0) + \frac{W}{e} \cos(\Phi_0) \quad (3.15)$$

Analog dazu können die Dämpfungskoeffizienten durch die Ableitung der Lagerkräfte über die zeitliche Änderung der Exzentrizität sowie $\dot{e}$ die Wirbelgeschwindigkeit Ω_w berechnet werden[17]:

$$D_{xx} = \frac{\partial F_r}{\partial \dot{e}} \cos(\Phi_0)^2 + \frac{\partial F_t}{\partial \dot{e}} \cos(\Phi_0) \sin(\Phi_0) - \frac{\sin(\Phi_0)}{e} \left(\cos(\Phi_0) \frac{\partial F_r}{\partial \Omega} + \sin(\Phi_0) \frac{\partial F_t}{\partial \Omega} \right) \quad (3.16)$$

$$D_{xy} = \frac{\partial F_t}{\partial \dot{e}} \sin(\Phi_0)^2 + \frac{\partial F_r}{\partial \dot{e}} \cos(\Phi_0) \sin(\Phi_0) + \frac{\cos(\Phi_0)}{e} \left(\cos(\Phi_0) \frac{\partial F_r}{\partial \Omega} + \sin(\Phi_0) \frac{\partial F_t}{\partial \Omega} \right) \quad (3.17)$$

$$D_{yx} = -\frac{\partial F_t}{\partial \dot{e}} \cos(\Phi_0)^2 + \frac{\partial F_r}{\partial \dot{e}} \cos(\Phi_0) \sin(\Phi_0) - \frac{\sin(\Phi_0)}{e} \left(\sin(\Phi_0) \frac{\partial F_r}{\partial \Omega} - \cos(\Phi_0) \frac{\partial F_t}{\partial \Omega} \right) \quad (3.18)$$

$$D_{yy} = -\frac{\partial F_r}{\partial \dot{e}} \sin(\Phi_0)^2 - \frac{\partial F_t}{\partial \dot{e}} \cos(\Phi_0) \sin(\Phi_0) + \frac{\cos(\Phi_0)}{e} \left(\sin(\Phi_0) \frac{\partial F_r}{\partial \Omega} - \cos(\Phi_0) \frac{\partial F_t}{\partial \Omega} \right) \quad (3.19)$$

Die Steifigkeit- und Dämpfungseigenschaften spielen eine wichtige Rolle bei der Stabilität des Lager-Rotorsystems. Die Stabilitätsanalyse eines starren Rotors wird im nächsten Unterkapitel Anhand der ermittelten Lagereigenschaften durchgeführt.

3.5 Stabilitätsanalyse

Beispielhaft soll die Stabilitätsberechnung an einem starren Rotor (Abbildung 3.5) durchgeführt werden.

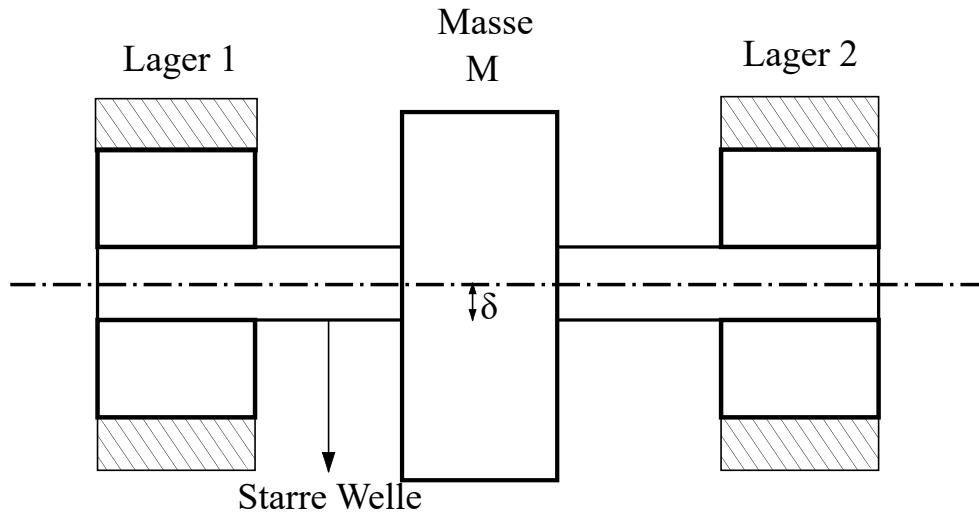


Abbildung 3.5: Starrer gleitgelagerter Rotor

Bei einem ausgewuchteten starren Rotor, der horizontal von zwei identischen Gleitlagern abgestützt ist, ist die Welle mit einer konzentrierten Masse M in der Mitte des Rotors verbunden (Abbildung 3.5). Bei einer Störung des Rotors weicht dieser von seiner Gleichgewichtslage ab. Das führt zu einer Wirbelbewegung des Rotorzentrums mit einer komplexen Frequenz $\delta + i\Omega$. Dabei ist die Wirbelbewegung von den dynamischen Eigenschaften des Lagersystems abhängig. Die Bewegungsgleichung der Welle kann wie folgt formuliert werden[16]:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & D_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M\delta\omega^2 \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

wenn die Massenexzentrizität $\delta > 0$, wirbelt der Rotor mit zunehmender Zeit immer weiter von seiner Gleichgewichtslage weg bis er anschließend zu einem Kontakt mit dem Lager kommt, was zu einer Beschädigung des Lagersystems führen kann. Bei $\delta < 0$ wird das Rotorzentrum schließlich in seine Gleichgewichtslage zurück wirbeln. Deswegen stellt $\delta = 0$ die kritische Bedingung zwischen Stabilität und Instabilität dar. Die Bahn des Rotormittelpunktes entspricht hierbei einem Kreis. Um die Bewegungsgleichung des symmetrischen starren Rotors aufzustellen, wird von der statischen Gleichgewichtslage der Welle ausgegangen, die bei bekannten Lagereigenschaften durch die statische Last $M \cdot g$ bestimmt ist. Die statischen Lagerkräfte entsprechen jeweils $F_{x0} = -\frac{M \cdot g}{2}$. setzt man die kritische Bedingung $\delta = 0$ in der obigen Gleichung ergibt sich[16]:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & D_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

um die Berechnung unabhängig von den Fluideigenschaften fortzusetzen, werden alle Terme normiert. Die dimensionslose Bewegungsgleichung lässt sich wie folgt definieren[16]

$$\begin{bmatrix} \bar{M} & 0 \\ 0 & \bar{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{D}_{xx} & \bar{D}_{xy} \\ \bar{D}_{yx} & \bar{D}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{K}_{xx} & \bar{K}_{xy} \\ \bar{K}_{yx} & \bar{K}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 0 \quad (3.21)$$

Mit

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{C} & Y &= \frac{y}{C} \\ \dot{X} &= \frac{\dot{x}}{C\omega} & \dot{Y} &= \frac{\dot{y}}{C\omega} \\ \ddot{X} &= \frac{\ddot{x}}{C\omega^2} & \ddot{Y} &= \frac{\ddot{y}}{C\omega^2} \\ \bar{K}_{i,j} &= K_{i,j} \frac{C^3}{\omega \eta R^4} & \bar{D}_{i,j} &= D_{i,j} \frac{C^3}{\eta R^4} \\ \bar{M} &= M \frac{C^3 \omega}{\eta R^4} & \tau &= \omega t \end{aligned}$$

Wenn das Rotorlagersystem instabil wird, geschieht dies bei einer kritischen Rotationsgeschwindigkeit (ω_{kr}) und der Rotor führt eine ungedämpfte Wirbelbewegung mit einer Wirbelfrequenz (Ω_{kr}) aus. Diese Wirbelbewegung lässt sich wie folgt ausdrücken[16]:

$$X = \hat{X} e^{i\lambda_{kr}\tau} \quad Y = \hat{Y} e^{i\lambda_{kr}\tau}$$

Wobei $\hat{X}$ und $\hat{Y}$ die Wirbelamplituden in x- und y-Richtung sind und $\lambda_{kr} = \frac{\Omega_{kr}}{\omega_{kr}}$ der kritischen Wirbelfrequenz entspricht. Setzt man die beiden Terme in Gleichung 3.21 ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{xx} + i\lambda_{kr}\bar{D}_{xx} - \bar{K}_{eq} & \bar{K}_{xy} + i\lambda_{kr}\bar{D}_{xy} \\ \bar{K}_{yx} + i\lambda_{kr}\bar{D}_{yx} & \bar{K}_{yy} + i\lambda_{kr}\bar{D}_{yy} - \bar{K}_{eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} = 0$$

$\bar{K}_{eq}$ stellt hierbei die äquivalente Steifigkeit des Lagersystems dar und wird auch als Instabilitätsgrenze bezeichnet.[16]

für eine nichttriviale Lösung des homogenen Systems muss die Determinante gleich null sein. Wenn man die Determinante sowohl für den Real- als auch den Imaginärteil gleich null setzt, lassen sich die dimensionlose Instabilitätsgrenze $\bar{K}_{eq}$, die kritische Wirbelfrequenz λ_{kr} und die dimensionlose kritische Masse $\bar{M}_{kr}$ folgendermaßen ermitteln[16]:

$$\bar{K}_{eq} = \frac{\bar{K}_{xx}\bar{D}_{yy} + \bar{K}_{yy}\bar{D}_{xx} - \bar{K}_{xy}\bar{D}_{yx} - \bar{K}_{yx}\bar{D}_{xy}}{\bar{D}_{xx} + \bar{D}_{yy}}$$

$$\lambda_{kr}^2 = \frac{(\bar{K}_{eq} - \bar{K}_{xx})(\bar{K}_{eq} - \bar{K}_{yy}) - \bar{K}_{xy}\bar{K}_{yx}}{\bar{D}_{xx}\bar{D}_{yy} - \bar{D}_{xy}\bar{D}_{yx}}$$

$$\bar{M}_{kr} = \frac{\bar{K}_{eq}}{\lambda_{kr}^2}$$

3.6 Struktur der Software

Um die unterschiedlichen Modelle umzusetzen, wird eine Auslegungssoftware implementiert (Abbildung 3.6). Zunächst müssen die Lagerparameter sowie die Fluideigenschaften im Input-Datei eingegeben werden. Beim Ausführen des Programms werden die eingegebenen Daten an den einzelnen Modelle ermittelt. Bei der direkten Lösung der Reynoldsgleichung wird zunächst die Reynoldszahl berechnet. Dabei wird festgestellt, ob es sich um eine laminare oder turbulente Strömung handelt. bei den Vohr und Chow Modelle wird der statische Druck berechnet, da es um eine laminere Modell handelt. Im Fall der Konvergenz wird die Berechnung fortgeführt und die statischen Eigenschaften des Lagers ermittelt. Wenn das Konvergenzkriterium nicht erfüllt ist, wird die Anzahl der Knotenpunkte erhöht und die Berechnung nochmal durchgeführt. Nachdem die statischen Eigenschaften des Lagers ermittelt worden sind, werden bei der Reynoldsgleichung die dynamischen Drücke und somit auch die dynamischen Eigenschaften des Lagers bestimmt. Anschließend wird eine Stabilitätsanalyse durchgeführt und die kritischen Terme ermittelt. Zum Schluß werden die Ergebnisse aus den einzelnen Modellen an den Output weitergeleitet und geplottet.

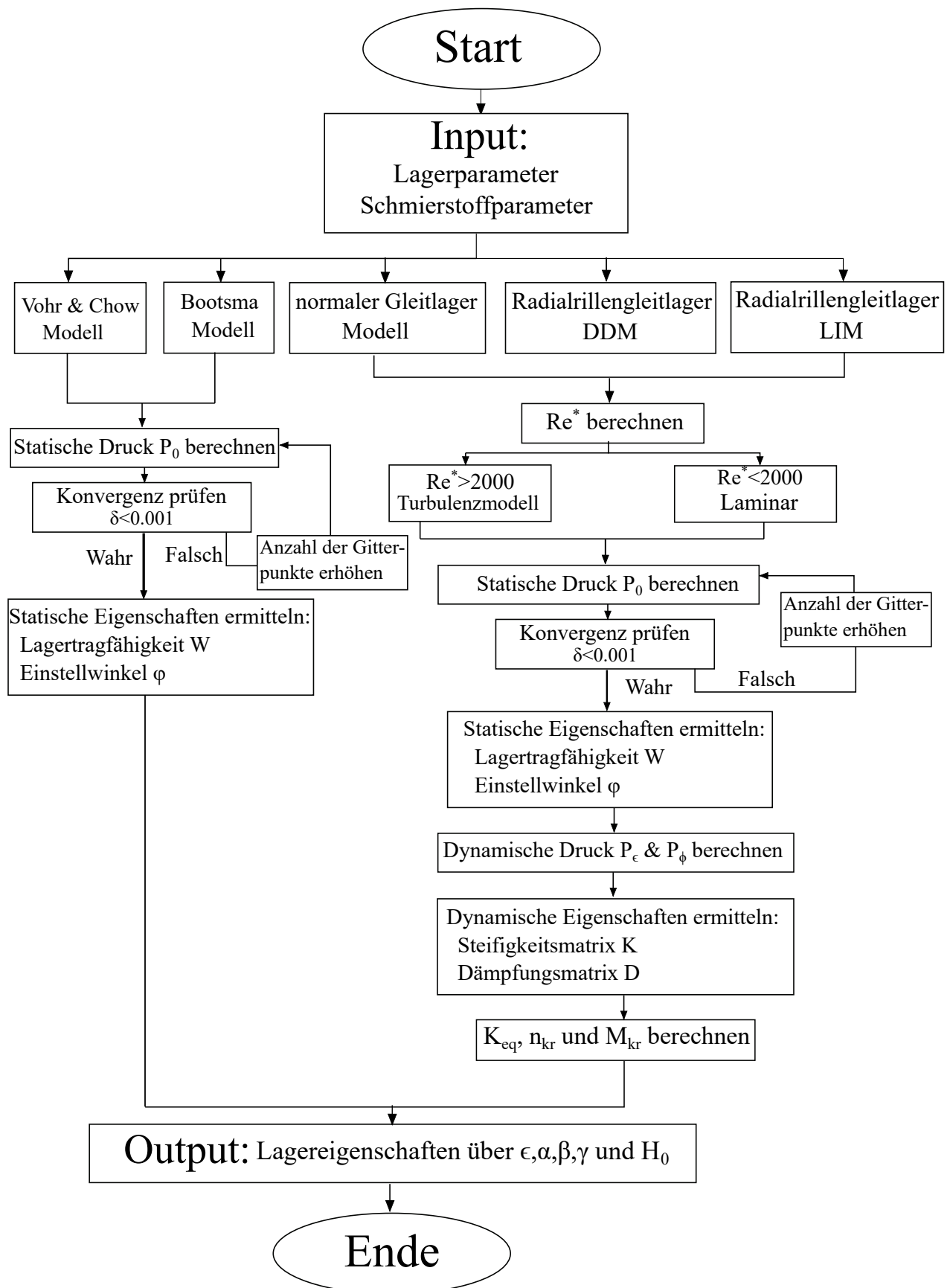


Abbildung 3.6: Programmstruktur

3.7 Numerische Lösung der Reynoldsgleichung für normale Gleitlager

Für ein konventionelles Gleitlager ist die Fluidfilmdicke wie folgt definiert[33]:

$$\bar{h}_0(\theta) = 1 + \varepsilon \cos(\theta) \quad (3.22)$$

Da die Fluidfilmdicke über die Umlaufkoordinate kontinuierlich ist, kann deren Änderung direkt über klassische Differenzierung der Gleichung 3.22 berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \theta} &= -\varepsilon \sin(\theta) & \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \theta} &= -3\varepsilon \sin(\theta) \bar{h}_0(\theta)^2 \\ \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \bar{z}} &= 0 \end{aligned}$$

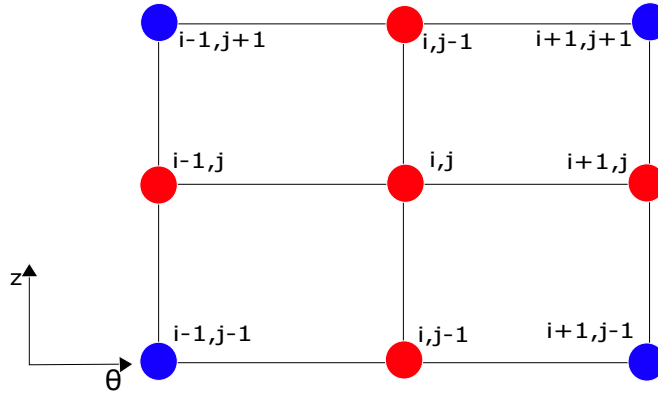


Abbildung 3.7: Meshgitter

Zur Diskretisierung der Differentialgleichungen wurde die Rechendomäne in $(n+1)(m+1)$ Knotenpunkte mit einem rechteckigen Gitter unterteilt (Abbildung 3.7). Anschließend wurde die zentrale Finite-Differenzen-Methode angewendet. Dabei sind die partiellen Ableitungen des Drucks wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}_k}{\partial \theta} &= \frac{(\bar{p}_k)_{i+1,j} - (\bar{p}_k)_{i-1,j}}{2\Delta\theta} & \frac{\partial^2 \bar{p}_k}{\partial^2 \theta} &= \frac{(\bar{p}_k)_{i+1,j} - (\bar{p}_k)_{i,j} + (\bar{p}_k)_{i-1,j}}{\Delta\theta^2} \\ \frac{\partial \bar{p}_k}{\partial \bar{z}} &= \frac{(\bar{p}_k)_{i,j+1} - (\bar{p}_k)_{i,j-1}}{2\Delta\bar{z}} & \frac{\partial^2 \bar{p}_k}{\partial^2 \bar{z}} &= \frac{(\bar{p}_k)_{i,j+1} - (\bar{p}_k)_{i,j} + (\bar{p}_k)_{i,j-1}}{\Delta\bar{z}^2} \end{aligned}$$

Das Einsetzen der Diskretisierungsterme in die statische und dynamische Reynoldsgleichung ergibt ein lineares Gleichungssystem, das anschließend durch den Python Solver gelöst werden kann. Das resultierende Gleichungssystem ist in Gleichung 3.23 dargestellt:

$$A_{k,ij}(\bar{p}_k)_{i,j} + B_{k,ij}(\bar{p}_k)_{i+1,j} + C_{k,ij}(\bar{p}_k)_{i-1,j} + D_{k,ij}(\bar{p}_k)_{i,j+1} + E_{k,ij}(\bar{p}_k)_{i,j-1} = F_{k,ij} \quad (3.23)$$

mit $k=0,\varepsilon$ und Φ . Die beiden dynamischen bestehen aus einem reellen und imaginären Anteil und lassen sich wie folgt definieren:

$$\bar{p}_\varepsilon = \bar{p}_\varepsilon^R + i\bar{p}_\varepsilon^I \quad \bar{p}_\Phi = \bar{p}_\Phi^R + i\bar{p}_\Phi^I$$

Für die statische Reynoldsgleichung sind die Koeffizienten $A_{0,ij} \dots F_{0,ij}$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} A_{0,ij} &= -2\bar{h}_{0,ij}^3 \left(\frac{1}{\Delta\theta^2} + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{1}{\Delta\bar{z}^2} \right) & B_{0,ij} &= \frac{\partial \bar{h}_{0,ij}^3}{\partial \theta} \frac{1}{2\Delta\theta} + \frac{\bar{h}_{0,ij}^3}{\Delta\theta^2} \\ C_{0,ij} &= -\frac{\partial \bar{h}_{0,ij}^3}{\partial \theta} \frac{1}{2\Delta\theta} + \frac{\bar{h}_{0,ij}^3}{\Delta\theta^2} & D_{0,ij} &= \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\bar{h}_{0,ij}^3}{\Delta\bar{z}^2} \\ E_{0,ij} &= \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\bar{h}_{0,ij}^3}{\Delta\bar{z}^2} & F_{0,ij} &= 6 \frac{\partial \bar{h}_{0,ij}^3}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Für die radiale Störungskomponente $\varepsilon_p e^{it}$ sind die Koeffizienten $A_{\varepsilon,ij} \dots F_{\varepsilon,ij}$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon,ij} &= A_{0,ij} & B_{\varepsilon,ij} &= B_{0,ij} \\ C_{\varepsilon,ij} &= C_{0,ij} & D_{\varepsilon,ij} &= D_{0,ij} \\ E_{\varepsilon,ij} &= E_{0,ij} & F_{\varepsilon,ij}^I &= 12i \frac{\omega_p}{\omega} \cos(\theta) \end{aligned}$$

$$F_{\varepsilon,ij}^R = -3 \left(\frac{\partial \bar{h}_{0,ij}^2}{\partial \theta} \cos(\theta) - \bar{h}_{0,ij}^2 \sin(\theta) \right) - 3 \bar{h}_{0,ij}^2 \cos(\theta) \frac{\partial^2 \bar{p}_{0,ij}}{\partial^2 \theta} \cos(\theta) - 6 \sin(\theta)$$

Für die tangentielle Störungskomponente $\Phi_p e^{it}$ sind die Koeffizienten $A_{\Phi,ij} \dots F_{\Phi,ij}$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} A_{\Phi,ij} &= A_{0,ij} & B_{\Phi,ij} &= B_{0,ij} \\ C_{\Phi,ij} &= C_{0,ij} & D_{\Phi,ij} &= D_{0,ij} \\ E_{\Phi,ij} &= E_{0,ij} & F_{\Phi,ij}^I &= 12i \frac{\omega_p}{\omega} \sin(\theta) \end{aligned}$$

$$F_{\Phi,ij}^R = -3 \left(\frac{\partial \bar{h}_{0,ij}^2}{\partial \theta} \cos(\theta) - \bar{h}_{0,ij}^2 \sin(\theta) \right) - 3 \bar{h}_{0,ij}^2 \cos(\theta) \frac{\partial^2 \bar{p}_{0,ij}}{\partial^2 \theta} \cos(\theta) + 6 \cos(\theta)$$

3.8 Lösung des Vohr und Chow Modells

Um die Genauigkeit des Vohr und Chow-Modells zu bewerten, wurde die allgemeine Differentialgleichung sowohl analytisch als auch numerisch gelöst. Bei der analytischen Lösung wird die Gleichung für inkompressible Fluide abgeleitet, indem die Kompressibilitätseffekte vernachlässigt werden. Im Gegensatz dazu wird bei der numerischen Ansatz die allgemeine Gleichung und die Kompressibilität des Fluids berücksichtigt.

3.8.1 Analytischer Ansatz

Die Gleichung 3.46 enthält Koeffizienten ($C_1 \dots C_7$), die von der axialen Koordinate z linear abhängig sind. um diese Abhängigkeit aufzuheben, werden alle Koeffizienten mit C_1 normiert[11]. Außerdem werden folgende Parameter eingeführt[11]:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{z}{L/2} & 2b &= \frac{C_3}{2C_1} & \bar{p}_1 &= \frac{p_1}{p_a} \\ c &= \frac{C_5}{4C_1} & cd &= \frac{C_6}{4C_1} & \vartheta &= \theta^* \\ p &= \bar{p}_1 - d \sin(\vartheta) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen wurden für die Verwendung bei Gasschmierung abgeleitet. Sie können jedoch auch für inkompressible Schmierstoffe verwendet werden, indem C_2 , C_4 und C_7 , auf Null gesetzt werden.[19]

Unter der Annahme, dass es sich um ein inkompressibles Fluid handelt, kann die Differentialgleichung wie folgt geschrieben werden [11]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + 2b \frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \vartheta} + c \frac{\partial^2 p}{\partial \vartheta^2} = 0 \quad (3.24)$$

Die Diskriminante lässt sich anhand folgender Gleichung ausrechnen:

$$D = b^2 - ac \leq 0 \quad (3.25)$$

Aufgrund der negativen Diskriminante, handelt es sich um ein elliptische Differentialgleichung. Ihre Lösung hängt von den beiden konjugierten Eigenwerten ab, die aus einem reellen und imaginären Anteil bestehen.[11]

$$\lambda_1 = b + i\sqrt{-D} \lambda_2 = b - i\sqrt{-D}$$

Die allgemeine Lösung kann durch zwei beliebige Funktionen ermittelt werden [11]:

$$p = f(\vartheta - \lambda_1 \xi) + g(\vartheta - \lambda_2 \xi) \quad (3.26)$$

In Bezug auf die Funktion p ergibt sich daraus:

$$p_1(\vartheta, \xi) = p + d = f(\vartheta - \lambda_1 \xi) + g(\vartheta - \lambda_2 \xi) + d \sin \vartheta \quad (3.27)$$

Da die Erregung sinusförmig ist, wird folgender Ansatz gewählt[11]:

$$p_1(\vartheta, \xi) = \beta_1 \sin(\vartheta - \lambda_1 \xi) + \gamma_1 \cos(\vartheta - \lambda_1 \xi) + \beta_2 \sin(\vartheta - \lambda_2 \xi) + \gamma_2 \cos(\vartheta - \lambda_2 \xi) + d \sin(\vartheta) \quad (3.28)$$

Die Differentialgleichung muss unter Berücksichtigung der folgenden Randbedingungen gelöst werden[11]:

$$p_1(\theta, \xi = 0) = 0 \quad (3.29)$$

$$p_1(\theta, \xi = 2) = 0 \quad (3.30)$$

$$\alpha(M_z)_{g1} + (1 - \alpha)(M_z)_{r1} = 0 \quad \text{für} \quad \xi = 1 \quad (3.31)$$

In der letzten Gleichung werden die Massenströme wie folgt angegeben[11]:

$$(M_z)_r = -\frac{\rho}{12\mu} \frac{h_r^3}{\alpha h_r^3 + (1 - \alpha) h_g^3} \left[-\alpha(h_g^3 - h_r^3) \cos \beta \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} + [\alpha h_r^3 + (1 - \alpha) h_g^3 + \alpha(h_g^3 - h_r^3) \cos^2 \beta] \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + 6\alpha\mu(\omega_g - \omega_r)(h_g - h_r) \cos \beta \sin \beta \right] \quad (3.32)$$

$$(M_z)_g = -\frac{\rho}{12\mu} \frac{h_r^3}{\alpha h_r^3 + (1 - \alpha) h_g^3} \left[(1 - \alpha)(h_g^3 - h_r^3) \cos \beta \sin \beta \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} + [\alpha h_r^3 + (1 - \alpha) h_g^3 - (1 - \alpha)(h_g^3 - h_r^3) \cos \beta] \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} - (1 - \alpha) 6\mu(\omega_g - \omega_r)(h_g - h_r) \cos \beta \sin \beta \right] \quad (3.33)$$

Durch Einsetzen dieser Terme lässt sich die Randbedingung für die Massenströme vereinfachen und ergibt[11]:

$$\kappa \frac{\partial p_1(\vartheta, \xi)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial p_1(\vartheta, \xi)}{\partial \xi} = 0 \quad \text{für} \quad \xi = 1 \quad (3.34)$$

$$\kappa = \frac{L h_g \alpha (\alpha - 1) \cos \beta (\sin \beta - 1) (h_g^2 + 3 h_g h_r + 3 h_r^2)}{2R (\alpha h_g^3 - 3 h_g h_r^2 - 3 h_g^2 h_r - h_g^3 - h_r^3 + 3 \alpha h_g h_r^2 + 3 \alpha h_g^2 h_r)} \quad (3.35)$$

Die Koeffizienten β_1 , β_2 , γ_1 und γ_2 werden durch Einsetzen der Gleichung 3.28 in die Randbedingung bestimmt[11]:

$$\beta_1 \sin(\vartheta) + \gamma_1 \cos(\vartheta) + \beta_2 \sin(\vartheta) + \gamma_2 \cos(\vartheta) + d \sin(\vartheta) = 0 \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} & \kappa (\beta_1 \cos(\vartheta - \lambda_1) - \gamma_1 \sin(\vartheta - \lambda_1) + \beta_2 \cos(\vartheta - \lambda_2) - \gamma_2 \sin(\vartheta - \lambda_2) + d \cos(\vartheta)) \\ & + (-\lambda_1 \beta_1 \cos(\vartheta - \lambda_1) + \lambda_1 \gamma_1 \sin(\vartheta - \lambda_1) - \lambda_2 \beta_2 \cos(\vartheta - \lambda_2) + \lambda_2 \gamma_2 \sin(\vartheta - \lambda_2)) = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Diese beiden Gleichungen müssen für jeden azimutalen Winkel θ gelten, insbesondere für π und $\pi/2$. [11]

$$\beta_1 (\kappa - \lambda_1) \cos(\lambda_1) + \gamma_1 (\kappa - \lambda_1) \sin(\lambda_1) + \beta_2 (\kappa - \lambda_2) \cos(\lambda_2) + \gamma_2 (\kappa - \lambda_2) \sin(\lambda_2) = -\kappa d \quad (3.38)$$

$$\beta_1 (\kappa - \lambda_1) \sin(\lambda_1) - \gamma_1 (\kappa - \lambda_1) \cos(\lambda_1) + \beta_2 (\kappa - \lambda_2) \sin(\lambda_2) - \gamma_2 (\kappa - \lambda_2) \cos(\lambda_2) = 0 \quad (3.39)$$

Diese Gleichung sollte für alle Werte von ϑ gültig sein, insbesondere für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi/2$. Diese vier Gleichungen 3.36-3.39 bestimmen die vier Koeffizienten.[11]

$$\beta_1 = -d \frac{\kappa(\kappa - \lambda_1) \cos(\lambda_1) - \kappa(\kappa - \lambda_2) \cos(\lambda_2) - (\kappa - \lambda_1)(\kappa - \lambda_2) \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + (\kappa - \lambda_2)^2}{(\kappa - \lambda_1)^2 - 2(\kappa - \lambda_1)(\kappa - \lambda_2) \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + (\kappa - \lambda_2)^2} \quad (3.40)$$

$$\gamma_1 = -d \frac{\kappa(\kappa - \lambda_1) \sin(\lambda_1) - (\kappa - \lambda_1)(\kappa - \lambda_2) - \kappa(\kappa - \lambda_2) \sin(\lambda_2)}{(\kappa - \lambda_1)^2 - 2(\kappa - \lambda_1)(\kappa - \lambda_2) \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + (\kappa - \lambda_2)^2} \quad (3.41)$$

$$\beta_2 = 1 - \beta_1 \quad (3.42)$$

$$\gamma_2 = -\gamma_1 \quad (3.43)$$

Die Lagerkräfte können durch den Lösungsvektor ausgedrückt werden[11]:

$$F_r = -LP_a \pi^2 R \left[\frac{\lambda_2 \beta_1 \cos(\lambda_1) - \lambda_2 \beta_1 - \lambda_1 \beta_2 \cos(\lambda_2) + \lambda_2 \gamma_1 \sin(\lambda_1) + \lambda_1 \gamma_2 \sin(\lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2} \right] \quad (3.44)$$

$$F_r = -LP_a \pi^2 R \left[\frac{2\lambda_2 \gamma_1 \sin\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)^2 + 2\lambda_1 \gamma_2 \sin\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)^2 + D\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \beta_1 \sin(\gamma_1) + \lambda_1 \gamma_2 \sin(\lambda)}{\lambda_1 \lambda_2} \right] \quad (3.45)$$

3.8.2 Numerischer Ansatz

Die numerische Lösung des Vohr und Chow Modells zur Validierung der analytischen Lösung basiert auf die allgemeine Differentialgleichung. Zu diesem Zweck werden die Koeffizienten C_2 , C_4 und C_7 berücksichtigt werden und somit kann auch die Kompressibilität des Fluids in Betracht gezogen werden.

$$C_1 \frac{L^2}{p_a} \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} + C_2 \frac{L}{p_a} \frac{\partial p_1}{\partial z} + C_3 \frac{L}{p_a} \frac{\partial^2 p_1}{\partial z \partial \theta} + C_4 \frac{1}{p_a} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} + C_5 \frac{1}{p_a} \frac{\partial^2 p_1}{\partial \theta^2} + C_6 \sin \theta + C_7 \cos \theta = 0 \quad (3.46)$$

für die Lösung von Gleichung 3.46 muss zunächst die Rechendomäne in einen rechteckigen Gitter mit $(n \cdot m)$ Knotenpunkten unterteilt werden. Dabei entsprechen n und m der Anzahl an Gitterknoten in θ - und in y-Richtung. Mithilfe der Finite-Differenzen-Methode können die partiellen Ableitungen wie folgt approximiert werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p_1}{\partial \theta^2} &= \frac{(p_1)_{i+1,j} - 2(p_1)_{i,j} + (p_1)_{i-1,j}}{\Delta \theta^2} & \frac{\partial p_1}{\partial \theta} &= \frac{(p_1)_{i+1,j} - (p_1)_{i-1,j}}{2\Delta \theta} \\ \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} &= \frac{(p_1)_{i,j+1} - 2(p_1)_{i,j} + (p_1)_{i,j-1}}{\Delta z^2} & \frac{\partial p_1}{\partial z} &= \frac{(p_1)_{i,j+1} - (p_1)_{i,j-1}}{2\Delta z} \\ \frac{\partial^2 p_1}{\partial \theta \partial z} &= \frac{(p_1)_{i+1,j+1} - (p_1)_{i+1,j-1} - (p_1)_{i-1,j+1} + (p_1)_{i-1,j-1}}{4\Delta \theta \Delta z} \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der FDM-Terme in Gleichung 3.46 ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit $(n \cdot m)$ Unbekannten:

$$\begin{aligned} A_{ij}(p_1)_{i,j} + B_{ij}(p_1)_{i+1,j} + C_{ij}(p_1)_{i-1,j} + D_{ij}(p_1)_{i,j+1} + E_{ij}(p_1)_{i,j-1} \\ + F_{ij}(p_1)_{i+1,j+1} + G_{ij}(p_1)_{i-1,j-1} + H_{ij}(p_1)_{i+1,j-1} + J_{ij}(p_1)_{i-1,j+1} = K_{ij} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $A_{ij} \dots K_{ij}$ sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \frac{-2C_1 L^2}{\Delta z^2 p_a} + \frac{-2C_5}{\Delta \theta^2 p_a} & B_{i,j} &= \frac{C_5}{\Delta \theta^2 p_a} + \frac{C_4}{2\Delta \theta p_a} \\ C_{i,j} &= \frac{C_5}{\Delta \theta^2 p_a} - \frac{C_4}{2\Delta \theta p_a} & D_{i,j} &= \frac{C_1 L^2}{\Delta z^2 p_a} + \frac{C_2 L}{2\Delta z p_a} \\ E_{i,j} &= \frac{C_1 L^2}{\Delta z^2 p_a} - \frac{C_2 L}{2\Delta z p_a} & F_{i,j} &= \frac{C_3 L}{4\Delta \theta \Delta z p_a} \\ G_{i,j} &= F_{i,j} & H_{i,j} &= -F_{i,j} \\ J_{i,j} &= -F_{i,j} & K_{i,j} &= -C_6 \sin(\theta) - C_7 \cos(\theta) \end{aligned}$$

Die analytische Lösung liefert eine Annäherung der statischen Lagereigenschaften im Fall eines inkompressiblen Fluid. diese Werden anschließend mit der Literatur verglichen, um eine Aussage über die Genauigkeit des Modells zu treffen.

3.9 Numerische Lösung des Bootsma-Modells

Die numerische Lösung des Bootsma-Modells basiert auf der selben Methode wie der numerische Ansatz von Vohr und Chow. Dabei lässt sich die allgemeine Differentialgleichung wie folgt definieren:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(-A \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} - B \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + F \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(-B \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} - C \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + G \right) = 0 \quad (3.47)$$

Nach algebraischer Manipulation kann die Gleichung 3.47 umgeschrieben werden:

$$A \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial B}{\partial \bar{z}} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + C \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{z}^2} + \left(\frac{\partial B}{\partial \theta} + \frac{\partial C}{\partial \bar{z}} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + 2B \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \theta \partial \bar{z}} = \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \quad (3.48)$$

Analog zur numerischen Lösung des Vohr und Chow Modells wird der Rechenbereich vernetzt und in $(n \cdot m)$ Knotenpunkte mit rechteckigem Gitter zerteilt. Anschließend können die partiellen Ableitungen des lokalen Drucks durch die Differenzenquotienten der FDM ersetzt werden.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \theta^2} &= \frac{(\bar{p})_{i+1,j} - 2(\bar{p})_{i,j} + (\bar{p})_{i-1,j}}{\Delta \theta^2} & \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} &= \frac{(\bar{p})_{i+1,j} - (\bar{p})_{i-1,j}}{2\Delta \theta} \\ \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{z}^2} &= \frac{(\bar{p})_{i,j+1} - 2(\bar{p})_{i,j} + (\bar{p})_{i,j-1}}{\Delta \bar{z}^2} & \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} &= \frac{(\bar{p})_{i,j+1} - (\bar{p})_{i,j-1}}{2\Delta \bar{z}} \\ \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \theta \partial \bar{z}} &= \frac{(\bar{p})_{i+1,j+1} - (\bar{p})_{i+1,j-1} - (\bar{p})_{i-1,j+1} + (\bar{p})_{i-1,j-1}}{4\Delta \theta \Delta \bar{z}} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der FDM-Terme ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, das mithilfe des Python Solvers gelöst werden kann.

$$\begin{aligned} A_{ij}(\bar{p})_{i,j} + B_{ij}(\bar{p})_{i+1,j} + C_{ij}(\bar{p})_{i-1,j} + D_{ij}(\bar{p})_{i,j+1} + E_{ij}(\bar{p})_{i,j-1} \\ + F_{ij}(\bar{p})_{i+1,j+1} + G_{ij}(\bar{p})_{i-1,j-1} + H_{ij}(\bar{p})_{i+1,j-1} + J_{ij}(\bar{p})_{i-1,j+1} = K_{ij} \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten $A_{i,j} \dots K_{i,j}$:

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \frac{-2A}{\Delta \theta^2} + \frac{-2C}{\Delta \bar{z}^2} & B_{i,j} &= \frac{A}{\Delta \theta^2} + \frac{1}{2\Delta \theta} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial B}{\partial \bar{z}} \right) \\ C_{i,j} &= \frac{A}{\Delta \theta^2} - \frac{1}{2\Delta \theta} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial B}{\partial \bar{z}} \right) & D_{i,j} &= \frac{C}{\Delta \bar{z}^2} + \frac{1}{2\Delta \bar{z}} \left(\frac{\partial B}{\partial \theta} + \frac{\partial C}{\partial \bar{z}} \right) \\ E_{i,j} &= \frac{C}{\Delta \bar{z}^2} - \frac{1}{2\Delta \bar{z}} \left(\frac{\partial B}{\partial \theta} + \frac{\partial C}{\partial \bar{z}} \right) & F_{i,j} &= \frac{2B}{4\Delta \theta \Delta \bar{z}} \\ G_{i,j} &= F_{i,j} & H_{i,j} &= -F_{i,j} \\ J_{i,j} &= -F_{i,j} & K_{i,j} &= \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \end{aligned}$$

Der numerische Lösung wird anschließend mit dem analytischen Ansatz verglichen, um den Einfluss des Fluidkompressibilität auf die statischen Eigenschaften des Lagers darzustellen. 3.6

3.10 Numerische Lösung der Reynoldsgleichung für Radialrillengleitlager

Um die Rille- und Dammbereiche besser zu modellieren, muss die Rechendomäne an die Geometrie der Rillen angepasst werden. Aus Abbildung 3.2 ist ersichtlich, dass die Struktur der Rillen eine Besonderheit darstellt.

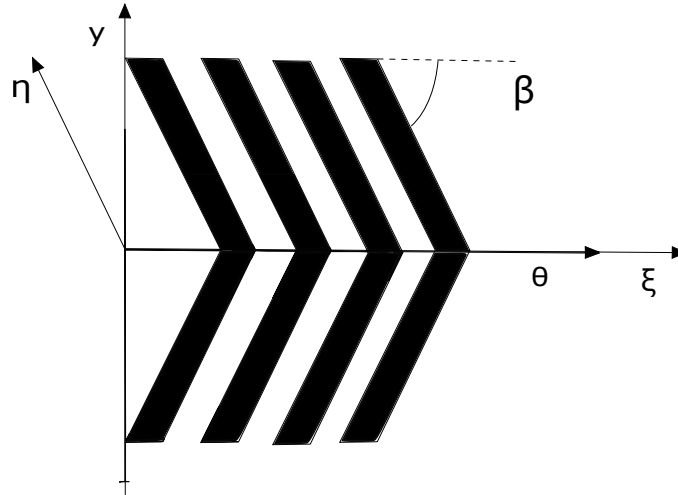


Abbildung 3.8: Koordinatentransformation

Das rechteckige Gitter im kartesischen Koordinatensystem (Cartesian Coordinate System (CCS)) erschwert den Umgang mit der Diskontinuität der Strömung in der Grenzflächen zwischen Rille und Damm. Daher erfolgt eine Koordinatentransformation. Die Berechnung und die Analyse wurden im schrägen Koordinatensystem (Oblique Coordinate System (OCS)) durchgeführt, das mit der Rillenrichtung übereinstimmt. Die Transformation von der physikalischen Domäne (θ, y) in die Rechendomäne (ξ, η) ist in folgender Gleichung definiert:

$$\xi = \theta + \frac{\bar{y}}{\tan(\beta)} \quad \eta = \frac{\bar{z}}{\sin(\beta)} \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\tan(\beta)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} + \frac{1}{\sin(\beta)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \quad (3.50)$$

Im Gegensatz zum normalen Gleitlager ist der Verlauf des Schmierfilms unstetig über die Rille-Damm-Grenzfläche, was eine Diskontinuität des Druckgradienten über die umlaufende Koordinate an dieser Stellen bewirkt. Um die Problematik der Schmierfilmdiskontinuität zu lösen, wurden zwei unterschiedliche Ansätze analysiert und berechnet. Die beiden Methoden sind in den folgenden Subkapiteln beschrieben.

3.10.1 Direkte Differenzationsmethode (DDM)

Nach Transformation der kartesischen in die gedrehten Koordinaten der Rechendomäne ergibt sich die dimensionlose Reynoldsgleichung im schrägen Koordinatensystem (OCS):

$$\begin{aligned} & \left(\bar{h}^3 + \frac{\bar{h}^3}{\tan^2(\beta)} \right) \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial^2 \xi} + \left(\frac{\partial \bar{h}^3}{\partial \xi} + \frac{1}{\tan^2(\beta)} \frac{\partial \bar{h}^3}{\partial \xi} + \frac{D^2}{L^2 \sin(\beta) \tan(\beta)} \frac{\partial \bar{h}^3}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} \\ & + \bar{h}^3 \left(\frac{D^2}{L^2 \sin(\beta)} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial^2 \eta} + \left(\left(\frac{D}{L \sin(\beta)} \right)^2 \frac{\partial \bar{h}^3}{\partial \eta} + \frac{D}{L \sin(\beta) \tan(\beta)} \frac{\partial \bar{h}^3}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta} \\ & + \frac{2D^2}{L^2 \sin(\beta) \tan(\beta)} \bar{h}^3 \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \eta \partial \xi} = 6 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi} + 12 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} \end{aligned}$$

Analog zum normalen Gleitlager wird die Störungsmethode in die Reynoldsgleichung eingeführt. Setzt man die Störungsglieder ein und vernachlässigt die Störungsterme höher als erster Ordnung, erhält man

die statische Reynoldsgleichung im schrägen Koordinatensystem:

$$\begin{aligned} & \left(\bar{h}_0^3 + \frac{\bar{h}_0^3}{\tan^2(\beta)} \right) \frac{\partial^2 \bar{p}_0}{\partial^2 \xi} + \left(\frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \xi} + \frac{1}{\tan^2(\beta)} \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \xi} + \frac{D}{L \sin(\beta) \tan(\beta)} \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \xi} \\ & + \bar{h}_0^3 \left(\frac{D}{L \sin(\beta)} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{p}_0}{\partial^2 \eta} + \left(\left(\frac{D}{L \sin(\beta)} \right)^2 \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \eta} + \frac{D}{L \sin(\beta) \tan(\beta)} \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \eta} \\ & + \frac{2D}{L \sin(\beta) \tan(\beta)} \bar{h}_0^3 \frac{\partial^2 \bar{p}_0}{\partial \eta \partial \xi} = 6 \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \xi} \end{aligned}$$

und die dynamische Reynoldsgleichung in Verbindung mit dem Störungsterm $\varepsilon_p e^{it}$:

$$\begin{aligned} & \left(\bar{h}_0^3 + \frac{\bar{h}_0^3}{\tan^2(\beta)} \right) \frac{\partial^2 \bar{p}_\varepsilon}{\partial^2 \xi} + \left(\frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \xi} + \frac{1}{\tan^2(\beta)} \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \xi} + \frac{D}{L \sin(\beta) \tan(\beta)} \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \bar{p}_\varepsilon}{\partial \xi} \\ & + \bar{h}_0^3 \left(\frac{D}{L \sin(\beta)} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{p}_\varepsilon}{\partial^2 \eta} + \left(\left(\frac{D}{L \sin(\beta)} \right)^2 \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \eta} + \frac{D}{L \sin(\beta) \tan(\beta)} \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \bar{p}_\varepsilon}{\partial \eta} \\ & + \frac{2D}{L \sin(\beta) \tan(\beta)} \bar{h}_0^3 \frac{\partial^2 \bar{p}_\varepsilon}{\partial \eta \partial \xi} = -6 \sin(\xi - \eta \cos(\beta)) - A(\theta, \bar{y}) + 12i \frac{\omega_p}{\omega} \cos(\xi - \eta \cos(\beta)) \end{aligned}$$

sowie die dynamische Reynoldsgleichung in Verbindung mit dem Störungsterm $\Phi_p e^{it}$:

$$\begin{aligned} & \left(\bar{h}_0^3 + \frac{\bar{h}_0^3}{\tan^2(\beta)} \right) \frac{\partial^2 \bar{p}_\Phi}{\partial^2 \xi} + \left(\frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \xi} + \frac{1}{\tan^2(\beta)} \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \xi} + \frac{D}{L \sin(\beta) \tan(\beta)} \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \bar{p}_\Phi}{\partial \xi} \\ & + \bar{h}_0^3 \left(\frac{D}{L \sin(\beta)} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{p}_\Phi}{\partial^2 \eta} + \left(\left(\frac{D}{L \sin(\beta)} \right)^2 \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \eta} + \frac{D}{L \sin(\beta) \tan(\beta)} \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \bar{p}_\Phi}{\partial \eta} \\ & + \frac{2D}{L \sin(\beta) \tan(\beta)} \bar{h}_0^3 \frac{\partial^2 \bar{p}_\Phi}{\partial \eta \partial \xi} = 6 \cos(\xi - \eta \cos(\beta)) - B(\theta, \bar{y}) + 12i \frac{\omega_p}{\omega} \sin(\xi - \eta \cos(\beta)) \end{aligned}$$

mit:

$$\begin{aligned} A(\theta, \bar{y}) &= 3 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{h}_0^2 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \theta} \cos(\theta) \right) + 3 \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{h}_0^2 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{y}} \cos(\theta) \right) \\ B(\theta, \bar{y}) &= 3 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{h}_0^2 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \theta} \sin(\theta) \right) + 3 \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{h}_0^2 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{y}} \sin(\theta) \right) \end{aligned}$$

Die Funktion für die Schmierfilmdicke ist in Gleichung dargestellt:

$$h(\xi, \eta) = \begin{cases} h_R(\xi, \eta) = 1 + \varepsilon \cos(\xi - \eta \cos(\beta)) & \text{Dammregion} \\ h_G(\xi, \eta) = \frac{H_G}{C} + 1 + \varepsilon \cos(\xi - \eta \cos(\beta)) & \text{Rillenregion} \end{cases}$$

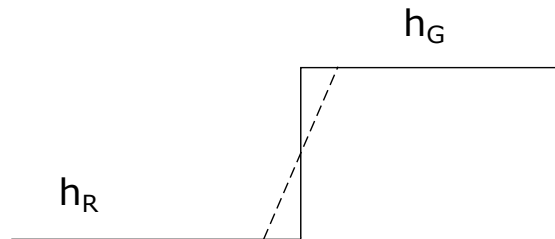


Abbildung 3.9: Rillen-Damm-Grenzfläche

Die Variation der Schmierfilmdicke sollte an den Rille-Damm-Grenzflächen sorgfältig behandelt werden. Die Ableitung von h muss aber nicht diskretisiert werden, da die genauen Werte durch klassische Differenziation ermittelt werden können. An den Grenzflächen ist die $\frac{\partial h}{\partial x}$ theoretisch unendlich, aber aufgrund der Viskosität kann eine Strömung in der Realität nicht unendlich steil entlang einer Wand

erfolgen. Deswegen wird die Rille-Damm-Grenze als Schräge modelliert (Abbildung 3.9). Die Ableitung der Schmierfilmdicke lässt sich wie folgt definieren:

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \eta} = \varepsilon \cos(\beta) \sin(\xi - \eta \cos(\beta))$$

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi} = \begin{cases} \pm \frac{H_g}{2C\Delta\xi} - \varepsilon \sin(\xi - \eta \cos(\beta)) & \text{Rillen-Damm-Grenze} \\ -\varepsilon \sin(\xi - \eta \cos(\beta)) & \text{Überall} \end{cases}$$

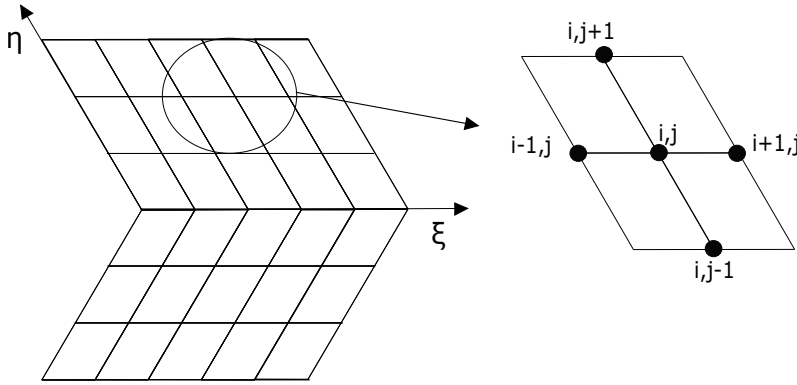


Abbildung 3.10: Meshsystem für im schrägen Koordinatensystem (OCS)

Zur Diskretisierung der Druckänderung muss die transformierte Rechendomäne in $(n \cdot m)$ Knotenpunkte mit rechteckigem Gitter in Bezug zum schrägen Koordinatensystem unterteilt werden (Abbildung 3.10). Dabei sind die partiellen Ableitungen mithilfe der zentralen FDM wie folgt zu approximieren:

$$\frac{\partial \bar{p}_k}{\partial \xi} = \frac{(\bar{p}_k)_{i+1,j} - (\bar{p}_k)_{i-1,j}}{2\Delta\xi} \quad \frac{\partial^2 \bar{p}_k}{\partial^2 \xi} = \frac{(\bar{p}_k)_{i+1,j} - (\bar{p}_k)_{i,j} + (\bar{p}_k)_{i-1,j}}{\Delta\xi^2}$$

$$\frac{\partial \bar{p}_k}{\partial \eta} = \frac{(\bar{p}_k)_{i,j+1} - (\bar{p}_k)_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \quad \frac{\partial^2 \bar{p}_k}{\partial^2 \eta} = \frac{(\bar{p}_k)_{i,j+1} - (\bar{p}_k)_{i,j} + (\bar{p}_k)_{i,j-1}}{\Delta\eta^2}$$

Nach Einsetzen der FDM-Terme ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit $(n \cdot m)$ Variablen. Dieses kann mithilfe des Python Solvers unter Berücksichtigung der Randbedingung 2.10 in Abbildung 3.11 gelöst werden:

$$A_{k,ij}(\bar{p}_k)_{i,j} + B_{k,ij}(\bar{p}_k)_{i+1,j} + C_{k,ij}(\bar{p}_k)_{i-1,j} + D_{k,ij}(\bar{p}_k)_{i,j+1} + E_{k,ij}(\bar{p}_k)_{i,j-1} \\ + F_{k,ij}(\bar{p}_k)_{i+1,j+1} + G_{k,ij}(\bar{p}_k)_{i-1,j-1} + H_{k,ij}(\bar{p}_k)_{i+1,j-1} + J_{k,ij}(\bar{p}_k)_{i-1,j+1} = K_{k,ij}$$

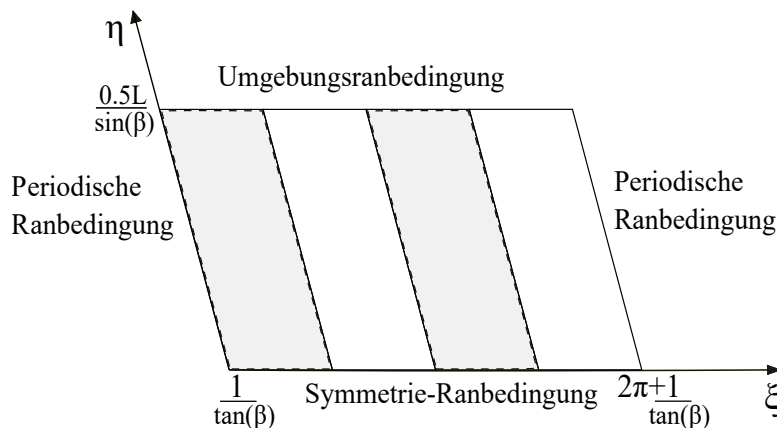


Abbildung 3.11: Randbedingungen im schrägen Koordinatensystem (OCS)

Für die statische Reynoldsgleichung sind die Koeffizienten $A_{0,ij} \dots F_{0,ij}$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
A_{0,ij} &= \frac{-2}{\Delta \xi^2} \left(\bar{h}_0^3 + \frac{\bar{h}_0^3}{\tan^2(\beta)} \right) - \frac{2}{\Delta \eta^2} \bar{h}_0^3 \left(\frac{D}{L \sin(\beta)} \right)^2 \\
B_{0,ij} &= \frac{-2}{\Delta \xi^2} \left(\bar{h}_0^3 + \frac{\bar{h}_0^3}{\tan^2(\beta)} \right) + \frac{1}{2\Delta \xi} \left(\frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \xi} + \frac{1}{\tan^2(\beta)} \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \xi} + \frac{D^2}{L^2 \sin(\beta) \tan(\beta)} \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \eta} \right) \\
C_{0,ij} &= \frac{-2}{\Delta \xi^2} \left(\bar{h}_0^3 + \frac{\bar{h}_0^3}{\tan^2(\beta)} \right) - \frac{1}{2\Delta \xi} \left(\frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \xi} + \frac{1}{\tan^2(\beta)} \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \xi} + \frac{D^2}{L^2 \sin(\beta) \tan(\beta)} \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \eta} \right) \\
D_{0,ij} &= \frac{1}{\Delta \eta^2} \bar{h}_0^3 \left(\frac{D}{L \sin(\beta)} \right)^2 + \frac{1}{2\Delta \eta} \left(\left(\frac{D}{L \sin(\beta)} \right)^2 \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \eta} + \frac{D^2}{L^2 \sin(\beta) \tan(\beta)} \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \xi} \right) \\
E_{0,ij} &= \frac{1}{\Delta \eta^2} \bar{h}_0^3 \left(\frac{D}{L \sin(\beta)} \right)^2 - \frac{1}{2\Delta \eta} \left(\left(\frac{D}{L \sin(\beta)} \right)^2 \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \eta} + \frac{D}{L \sin(\beta) \tan(\beta)} \frac{\partial \bar{h}_0^3}{\partial \xi} \right) \\
F_{0,ij} &= \frac{1}{4\Delta \xi \Delta \eta} \frac{2D^2}{L^2 \sin(\beta) \tan(\beta)} \bar{h}_0^3 \\
G_{0,ij} &= F_{0,ij} \\
H_{0,ij} &= -F_{0,ij} \\
J_{0,ij} &= -F_{0,ij} \\
K_{0,ij} &= 6 \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \xi}
\end{aligned}$$

Für die radiale Störungskomponente $\varepsilon_p e^{it}$ sind die Koeffizienten $A_{\varepsilon,ij} \dots F_{\varepsilon,ij}$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
A_{\varepsilon,ij} &= A_{0,ij} & B_{\varepsilon,ij} &= B_{0,ij} \\
C_{\varepsilon,ij} &= C_{0,ij} & D_{\varepsilon,ij} &= D_{0,ij} \\
E_{\varepsilon,ij} &= E_{0,ij} & F_{\varepsilon,ij} &= F_{0,ij} \\
G_{\varepsilon,ij} &= G_{0,ij} & H_{\varepsilon,ij} &= H_{0,ij} \\
J_{\varepsilon,ij} &= J_{0,ij} & K_{\varepsilon,ij}^I &= 12 \frac{\omega_p}{\omega} \cos(\xi - \eta \cos(\beta)) \\
K_{\varepsilon,ij}^R &= -6 \sin(\xi - \eta \cos(\beta)) - A(\theta, \bar{y})
\end{aligned}$$

Für die tangential Störungskomponente $\varepsilon_p e^{it}$ sind die Koeffizienten $A_{\varepsilon,ij} \dots F_{\varepsilon,ij}$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
A_{\varepsilon,ij} &= A_{0,ij} & B_{\varepsilon,ij} &= B_{0,ij} \\
C_{\varepsilon,ij} &= C_{0,ij} & D_{\varepsilon,ij} &= D_{0,ij} \\
E_{\varepsilon,ij} &= E_{0,ij} & F_{\varepsilon,ij} &= F_{0,ij} \\
G_{\varepsilon,ij} &= G_{0,ij} & H_{\varepsilon,ij} &= H_{0,ij} \\
J_{\varepsilon,ij} &= J_{0,ij} & K_{\varepsilon,ij}^I &= 12 \frac{\omega_p}{\omega} \sin(\xi - \eta \cos(\beta)) \\
K_{\varepsilon,ij}^R &= 6 \cos(\xi - \eta \cos(\beta)) - B(\theta, \bar{y})
\end{aligned}$$

Die direkte Lösung der Reynoldsgleichung Anhand der direkten Differentiation liefert eine genaueres Ergebnis im Vergleich zu den Annäherungsmodellen. Außerdem können die dynamischen Eigenschaften des Lager unter Einführung der Störungsmethode ermittelt werden.

3.10.2 Lokale Integrationsmethode (LIM)

Aufgrund der Unstetigkeit der Schmierfilmhöhe an der Rille-Damm-Grenze ist es schwer eine genaue Approximation ihrer Änderungen an diesen Stellen zu berechnen. Außerdem führt diese Unstetigkeit auch zu Diskontinuität des Druckgradienten entlang der umlaufenden Koordinate. Ein weiteres Problem ist die gekoppelte partielle Ableitung $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi \partial \eta}$, die eine relativ höheren Abweichung bei der Diskretisierung im Vergleich zum anderen FDM-Terme besitzt. Um die gekoppelte partielle Ableitung zu vermeiden, wird auf beiden Seiten der statischen Reynoldsgleichung 2.10 ein Flächenintegral eingeführt werden:

$$\iint_A \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\bar{h}^3}{12} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\bar{h}^3}{12} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) d\theta d\bar{y} = \iint_A \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} d\theta d\bar{y} \quad (3.51)$$

Mit Hilfe der Green-Integralformel kann das Flächenintegral in ein Kurvenintegral umgewandelt werden:

$$\oint_S \left(\frac{\bar{h}^3}{12} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) d\bar{y} - \oint_S \left(\frac{D}{L} \right)^2 \left(\frac{\bar{h}^3}{12} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) d\theta = \oint_S \frac{1}{2} \bar{h} d\bar{y} \quad (3.52)$$

Durch Einsetzen von Gleichung 3.50 und 3.50 kann die Gleichung 3.52 in das schräge Koordinatensystem transformiert werden:

$$\oint_S \left(\bar{h}^3 \sin(\beta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \bar{h}^3 \left(\frac{\cos(\beta)}{\tan(\beta)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} + \frac{1}{\tan(\beta)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta} \right) \right) d\eta \quad (3.53)$$

$$- \left(\frac{D}{L} \right)^2 \oint_S \bar{h}^3 \left(\frac{1}{\tan(\beta)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} + \frac{1}{\sin(\beta)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta} \right) d\xi = \oint_S 6\bar{h} \sin(\beta) d\eta \quad (3.54)$$

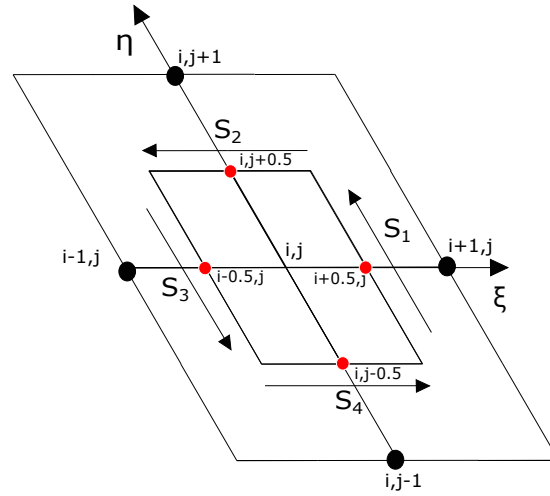


Abbildung 3.12: Integrationsfläche

mithilfe der Trapezregel, die zur numerischen Annäherung von Funktionsintegralen in einem geschlossenen Intervall eingesetzt wird, kann die Integration entlang der in Abbildung 3.12 dargestellten Kurvenrichtung durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} \oint_S \bar{h}^3 \sin(\beta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} d\eta &= -\bar{h}_{i-0.5,j}^3 \sin(\beta) \Delta\eta \left(\frac{\bar{p}_{i,j} - \bar{p}_{i-1,j}}{\Delta\xi} \right) + \bar{h}_{i+0.5,j}^3 \sin(\beta) \Delta\eta \left(\frac{\bar{p}_{i+1,j} - \bar{p}_{i,j}}{\Delta\xi} \right) \\ \oint_S 6\bar{h} \sin(\beta) d\eta &= 6 \sin(\beta) \Delta\eta (\bar{h}_{i+0.5,j} - \bar{h}_{i-0.5,j}) \\ \oint_S \left(\frac{D}{L} \right)^2 \bar{h}^3 \left(\frac{\cos(\beta)}{\tan(\beta)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} \right) d\eta &= \left(\frac{D}{L} \right)^2 \left(-\bar{h}_{i-0.5,j}^3 \frac{\cos(\beta)}{\tan(\beta)} \Delta\eta \left(\frac{\bar{p}_{i,j} - \bar{p}_{i-1,j}}{\Delta\xi} \right) + \bar{h}_{i+0.5,j}^3 \frac{\cos(\beta)}{\tan(\beta)} \Delta\eta \left(\frac{\bar{p}_{i+1,j} - \bar{p}_{i,j}}{\Delta\xi} \right) \right) \\ \oint_S \left(\frac{D}{L} \right)^2 \bar{h}^3 \left(\frac{1}{\tan(\beta)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta} \right) d\eta &= \left(\frac{D}{L} \right)^2 \left(-\bar{h}_{i-0.5,j}^3 \frac{1}{\tan(\beta)} \left(\frac{\bar{p}_{i,j+1} - \bar{p}_{i,j-1}}{2} \right) + \bar{h}_{i+0.5,j}^3 \frac{1}{\tan(\beta)} \left(\frac{\bar{p}_{i,j+1} - \bar{p}_{i,j-1}}{2} \right) \right) \\ \oint_S \left(\frac{D}{L} \right)^2 \bar{h}^3 \left(\frac{1}{\tan(\beta)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} \right) d\xi &= \left(\frac{D}{L} \right)^2 \left(\bar{h}_{i,j-0.5}^3 \frac{1}{\tan(\beta)} \left(\frac{\bar{p}_{i+1,j} - \bar{p}_{i-1,j}}{2} \right) - \bar{h}_{i,j+0.5}^3 \frac{1}{\tan(\beta)} \left(\frac{\bar{p}_{i+1,j} - \bar{p}_{i-1,j}}{2} \right) \right) \\ \oint_S \left(\frac{D}{L} \right)^2 \bar{h}^3 \left(\frac{1}{\sin(\beta)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta} \right) d\xi &= \left(\frac{D}{L} \right)^2 \left(\bar{h}_{i,j-0.5}^3 \frac{\Delta\xi}{\sin(\beta)} \left(\frac{\bar{p}_{i,j} - \bar{p}_{i,j-1}}{\Delta\eta} \right) - \bar{h}_{i,j+0.5}^3 \frac{\Delta\xi}{\sin(\beta)} \left(\frac{\bar{p}_{i,j+1} - \bar{p}_{i,j}}{\Delta\eta} \right) \right) \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Integrationsterme in Gleichung 3.54 ergibt sich folgende Gleichungssystem:

$$A_{k,ij}(\bar{p}_k)_{i,j} + B_{k,ij}(\bar{p}_k)_{i+1,j} + C_{k,ij}(\bar{p}_k)_{i-1,j} + D_{k,ij}(\bar{p}_k)_{i,j+1} + E_{k,ij}(\bar{p}_k)_{i,j-1} = F_{k,ij} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned}
A_{0,ij} &= -B_{0,ij} - C_{0,ij} - D_{0,ij} - E_{0,ij} \\
B_{0,ij} &= \bar{h}_{i+0.5,j}^3 \sin(\beta) \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \left(\bar{h}_{i+0.5,j}^3 \frac{\cos(\beta)\Delta\eta}{\tan(\beta)\Delta\xi} - \frac{\bar{h}_{i,j-0.5}^3 - \bar{h}_{i,j+0.5}^3}{2 \tan(\beta)} \right) \\
C_{0,ij} &= \bar{h}_{i-0.5,j}^3 \sin(\beta) \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \left(\bar{h}_{i-0.5,j}^3 \frac{\cos(\beta)\Delta\eta}{\tan(\beta)\Delta\xi} - \frac{-\bar{h}_{i,j-0.5}^3 + \bar{h}_{i,j+0.5}^3}{2 \tan(\beta)} \right) \\
D_{0,ij} &= \left(\frac{D}{L}\right)^2 \left(\bar{h}_{i,j+0.5}^3 \frac{\Delta\xi}{\sin(\beta)\Delta\eta} + \frac{\bar{h}_{i+0.5,j}^3 - \bar{h}_{i-0.5,j}^3}{2 \tan(\beta)} \right) \\
E_{0,ij} &= \left(\frac{D}{L}\right)^2 \left(\bar{h}_{i,j-0.5}^3 \frac{\Delta\xi}{\sin(\beta)\Delta\eta} + \frac{-\bar{h}_{i+0.5,j}^3 + \bar{h}_{i-0.5,j}^3}{2 \tan(\beta)} \right) \\
F_{0,ij} &= 6 \sin(\beta) (\bar{h}_{i+0.5,j} - \bar{h}_{i-0.5,j}) \Delta\eta
\end{aligned}$$

Die Lagereigenschaften, die durch die lokale Integrationsmethode ermittelt werden, sind anschließend mit den Ergebnissen der DDM zu vergleichen, um eine Aussage über den Einfluss des Fehlers zu treffen, der bei der Diskretisierung der gekoppelten partiellen Ableitung entsteht.

Kapitel 4

Ergebnisse

Anhand der in 3 beschriebenen Methoden, wurde ein Programm in Python implementiert. Zur Validierung des Programms wurden drei verschiedene Lager untersucht und die ermittelten Ergebnisse anschließend mit anderen Rechnungen aus der Literatur, sowie mit experimentellen Daten verglichen. Hierfür werden drei Lager mit verschiedenen Eigenschaften betrachtet. Lager 1 ist ein normales Gleitlager und Lager 2 ist ein Radialrillengleitlager mit der gleichen Geometrie wie das Lager 1. Die beiden Lager wurden in der Literatur berechnet und sind zur Validierung der Modelle gedacht, sowie zum Vergleich zwischen den Eigenschaften des normalen Gleitlagers im Gegensatz zum Radialrillengleitlager. Lager 3 ist ebenfalls ein Radialrillengleitlager, das für eine parametrische Studie verwendet wird. Dabei werden die Rillenparameter variiert und die Änderung der Lagereigenschaften betrachtet, um eine Aussage über die optimalen Lagerparameter zu treffen. Die Lagerparameter sowie die Fluideigenschaften des Schmiermittels sind in Tabelle 4.1 dargestellt:

Tabelle 4.1: Lagerparameter

Parameter	Lager 1	Lager 2	Lager 3
Rillenzahl n_G	0	8	8
Lagerdurchmesser D (m)	0.1	0.1	0.1
Lagerlänge L (m)	0.1	0.1	0.1
Lagerspalt C (m)	$6 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-6}$
Rillentiefe H_g (m)	-	$6 \cdot 10^{-6}$	$0 \dots 2C$
Rillenkantenwinkel β (°)	-	70	$0 \dots 90$
Breitenverhältnis γ	-	1	1
Drehzahl n (rpm)	5000	5000	5000
Fluidviskosität (Pa.s) η	$1.24 \cdot 10^{-3}$	$1.24 \cdot 10^{-3}$	$1.24 \cdot 10^{-3}$
Fluiddichte ρ ($\frac{kg}{m^3}$)	6440	6440	6440
Umgebungsdruck P_a (Pa)	0	0	0
Kavitationsdruck P_C (Pa)	-72139.79	-72139.79	-72139.79

4.1 Validierung

Zur Validierung des Modells für normale Gleitlager wurde das Lager 1 mithilfe des Python-Programms untersucht und die Lagertragfähigkeit in Abhängigkeit der Exzentrizität ermittelt. Die Ergebnisse wurden mit der Literatur verglichen [33]. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.1 dargestellt. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass bei steigender Exzentrizität der Wellenzapfen die Lagertragfähigkeit zunimmt. Allerdings wird ab einer Exzentrizität von $\epsilon = 0,5$ eine Abweichung der Ergebnisse im Vergleich zur Literatur festgestellt, die mit steigender Exzentrizität auch größer wird. Diese Abweichung kann dadurch erklärt werden, dass das beschriebene Modell aus der Literatur für kompressible Fluide gilt und dadurch die lokale Kompressibilität des Schmiermittels berücksichtigt wurde. Dagegen basieren die numerischen Ergebnisse auf einem inkompressiblen Modell, bei dem die Dichte als konstant angenommen wurde und

dadurch die lokale Änderung vernachlässigt werden kann. Außerdem wurde bei der Literatur [33] das Elrod Kavitationsmodell verwendet, das für kompressible Rechenmodelle geeignet ist. Deswegen wird die Abweichung der beiden Modelle erst ab einer Exzentrizität von $\epsilon = 0,5$ bemerkbar, da erst ab diesem Wert der Kavitationsdruck im Lager erreicht wird.

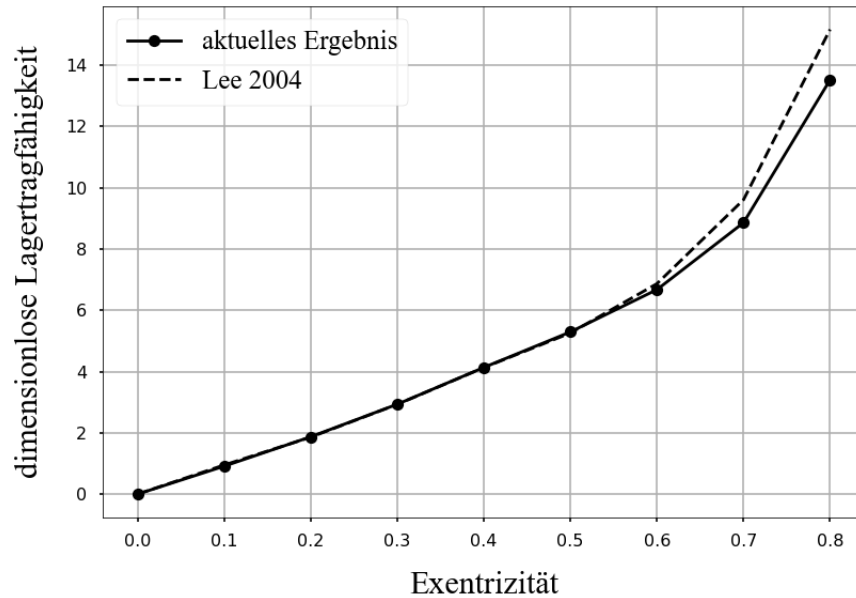


Abbildung 4.1: Lagertragfähigkeit von Lager 1 aufgetragen über die Exzentrizität

Zur Validierung der in Kapitel 3 beschriebenen Modelle für Radialrillengleitlager wurde die Tragfähigkeit des Lagers 2 anhand der implementierten Software ermittelt und mit der Literatur [33], sowie den experimentellen Werten [28] verglichen. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.2 dargestellt. Aus der Abbildung kann entnommen werden, dass das Bootsma Modell und das Vohr und Chow Modell deutlich von der Literatur und den experimentellen Werte abweichen. Das liegt daran, dass diese Modelle nur eine Approximation der Lagertragfähigkeit liefern, da die Druckverteilung durch Vernachlässigung der sägezahnförmigen Druckverteilung berechnet wird.

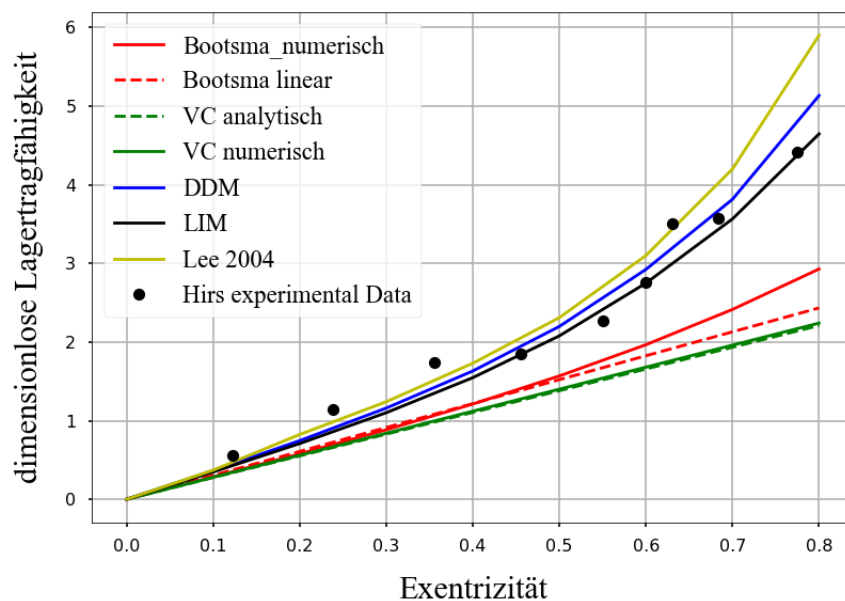


Abbildung 4.2: Lagertragfähigkeit von Lager 2 über die Exzentrizität

Außerdem lässt sich beim Bootsma Modell der Unterschied zwischen dem linearen Ansatz und dem

numerischen Ansatz dadurch erklären, dass es sich beim linearen Ansatz um eine lineare Approximierung des numerischen Ansatzes durch Anwendung der Störungsmethode handelt.

Beim Vohr und Chow Modell ist kein Unterschied zwischen dem analytischen Ansatz und dem numerischen Ansatz festzustellen. Obwohl der numerische Ansatz die lokale Kompressibilität des Schmiermittels durch Berücksichtigung der Koeffizienten C_2 , C_4 und C_7 in Gleichung 3.46 in Betrachtung zieht.

Die Direkte Differentiationsmethode (DDM) liefert ein relativ gutes Ergebnis, das sehr nah an den Literaturwerten [33] und im Bereich der experimentellen Werte [28] liegt. Diese experimentellen Daten wurden vom Hirs [28] ermittelt, der die Tragfähigkeit des Lagers 2 Anhand eines Prüfstandes gemessen hat. Allerdings lässt sich eine gewisse Abweichung erkennen, die mit steigender Exzentrizität zunimmt. Grund dafür liegt daran, dass die Werte aus der Literatur ebenfalls für kompressible Fluide gelten. Außerdem wurde in der Literatur ein unterschiedliches Kavitationsmodell angewendet, dass die lokale Änderung der Dichte in Betracht zieht.

Die Lokale Integrationsmethode (LIM)-Ansatz zeigt ebenfalls eine Abweichung zum DDM-Ansatz, die sich auch mit zunehmender Exzentrizität erhöht. Diese Abweichung kann dadurch erklärt werden, dass die DDM-Methode eine gekoppelt-partielle-Ableitung $\frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \eta}$ enthält. Dieser Term zeigt einen großen Fehler im Vergleich zu den anderen FDM-Termen.

4.2 Statische Analyse

4.2.1 Schmierfilmdicke

Der erste Schritt zur Lösung der Reynoldsgleichung ist die Bestimmung der lokalen Schmierfilmdicke. Deswegen muss diese sorgfältig behandelt werden, besonderes an den Grenzflächen zwischen Rille und Damm. Bei normalen Gleitlagern kann die Schmierfilmdicke direkt im kartesischen Koordinatensystem (CCS) durch eine cosinusförmige Funktion beschrieben werden. Aufgrund der V-förmigen Rillengeometrie, die gleichmäßig auf der Lagersoberfläche verteilt ist, muss eine Koordinatentransformation stattfinden, um das Koordinatensystem an die Rillengeometrie anzupassen (ocs! (ocs!)). Nach der Ermittlung der lokalen Fluidfilmdicke über das gesamte OCS, können die Werte in das CCS rücktransformiert werden. Die Schmierfilmdicke für Lager 2 und Lager 3 ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Aus der Abbildung kann man feststellen, dass lediglich die Anzahl der Rillen sowie der Rillenwinkel eine große Rolle bei der Verteilung der dimensionlosen Schmierfilmdicke spielen. Aus der Abbildung sowie aus der in Kapitel 3 beschriebenen Schmierfilmfunktion ist zu erkennen, dass die Rillenzahl indirekt proportional mit der Rillen- bzw. Dammbreite ist. Außerdem spielt der Rillenwinkel eine große Rolle bei der Schmierfilmverteilung und somit auch bei der Druckverteilung.

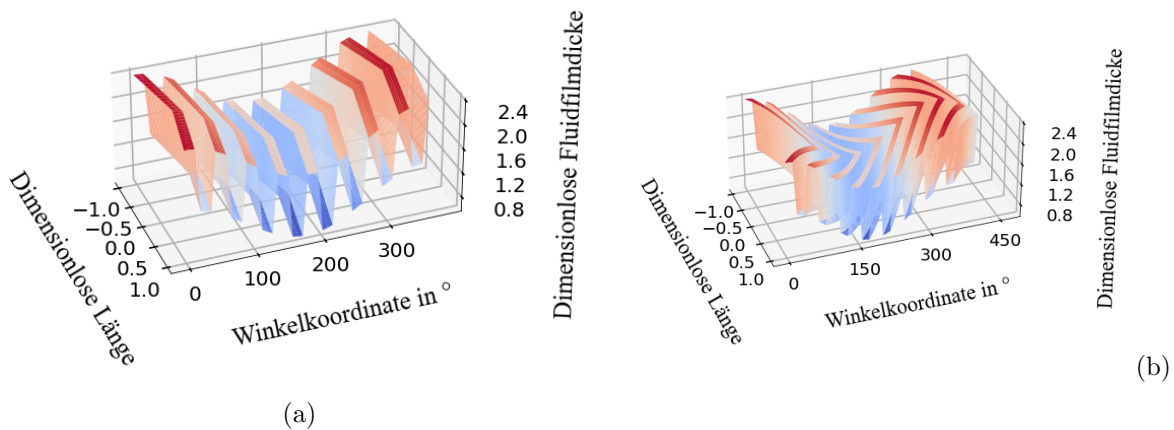


Abbildung 4.3: Fluidfilmdicke bei $\varepsilon = 0.4$ (a): Lager 2, (b): Lager 3 $\beta = 30^\circ$ und $\gamma = 1$

4.2.2 Druckverteilung

Zur Bestimmung der Lagereigenschaften muss zunächst die Druckverteilung über das gesamte Lager ermittelt werden. um die Berechnung unabhängig von den Fluideigenschaften sowie von der Drehzahl durchzuführen, wurde der resultierende Druck wie folgt normiert:

$$\bar{p} = \frac{p}{\omega \eta} \left(\frac{C}{R} \right)^2 \quad (4.1)$$

Die Abbildung 4.4 stellt die dimensionlose Druckverteilung in Lager 1 bei einer Exzentrizität von $\epsilon = 0,4$ dar. Da die Schmierfilmdicke in normalen hydrodynamischen Gleitlagern eine kontinuierliche Funktion ist, zeigt die resultierende Druckverteilung einen gleichmäßigen Verlauf über das Lagerlänge sowie die Umlaufkoordinate. Allerdings wird die Druckverteilung ab einer gewissen Exzentrizität durch Kavitationen beeinträchtigt, da der lokale Druck den Dampfdruck unterschreitet und dadurch den Schmierfilm bricht. Dabei bleibt der lokale Druck konstant über die Kavitationszone bis eine Filmneubildung erfolgt. Dieses Phänomen kann in der negativen Druckseite der Abbildung 4.4 erkannt werden. Außerdem ist der lokale Druck indirekt von der Schmierfilmdicke abhängig. Dadurch ist der lokale Druck an der Stelle maximal, wo die Schmierfilmdicke am kleinsten ist.

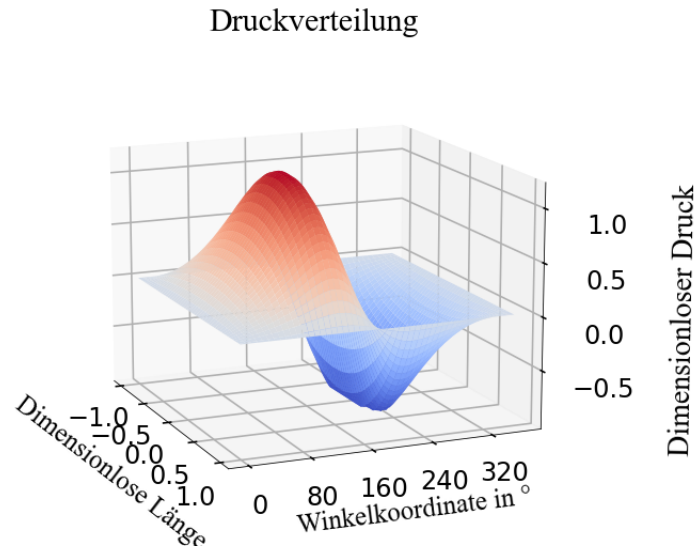


Abbildung 4.4: Druckverteilung in Lager 1 bei $\epsilon = 0.4$

Aufgrund der V-förmigen Rillengeometrie sowie der Unstetigkeit der Schmierfilmdickenfunktion ist die Druckverteilung bei Radialrillengleitlagern nicht mehr gleichmäßig. Die Ergebnisse der in 3 beschriebenen Methoden zur Ermittlung der Druckverteilung sind in Abbildung 4.5 dargestellt.

Die Abbildungen 4.5 (a) und (b) zeigen die Druckverteilung, die durch das Vohr und Chow Modell sowie das Bootsma Modell berechnet wurden. Allerdings liefern die beiden Modelle nur eine Annäherung des lokalen Drucks aufgrund der getroffenen Vereinfachungen. Sie basieren hauptsächlich auf dem Ansatz, dass die Rillenzahl so groß ist, dass die Breite einer Rille bzw. eines Damms gegen null konvergiert. Daraus ergibt sich die gleichmäßige Druckverteilung, die in Abbildung 4.5 zu sehen ist. Außerdem ist in beiden Annäherungsmodellen kein Kavitationsmodell berücksichtigt und sie gelten nur für laminare Strömungen. Allerdings wird bei Vohr und Chow im Vergleich zu Bootsma ein höherer maximaler Druck bzw. ein niedriger minimaler Druck erreicht. Außerdem ist die Verteilung des Drucks bei den beiden Modellen unterschiedlich, was auf die unterschiedlichen Annahmen der beiden Modelle zurückzuführen ist.

Die Druckverteilung des DDM sowie der LIM-Ansatzes ist in Abbildung 4.5 (c) und (d) dargestellt. Im Gegensatz zu den Annäherungsmodellen liefern die beiden Ansätze ein relativ literaturnahes Ergebnis. Dabei wird auch die Kavitationsentstehung, sowie die Turbulenz berücksichtigt. Außerdem zeigen die beiden Ansätze die gleiche Druckverteilung und unterscheiden sich durch eine geringe Abweichung in den lokalen Druckwerten. Dies ist auf den relativ hohen Fehler zurückzuführen, der bei der FDM-Approximierung der gekoppelten partiellen Ableitung im DDM-Ansatz entsteht.

Darüber hinaus unterscheidet sich die Druckverteilung bei Radialrillengleitlagern im Vergleich zu normalen Gleitlagern besonders bei kleinen Exzentrizitäten. Grund dafür ist die Pumpwirkung, die durch die Rillen induziert wird. Das Schmiermittel wird entlang der Rillen in die Mitte des Lager gepumpt, wodurch ein Druckaufbau entlang der Rille erfolgt. Wenn die Exzentrizität gegen null tendiert, wird die Druckverteilung periodisch. Im Gegensatz zu Radialrillengleitlagern wird bei normalen Gleitlagern kein Druck bei $\epsilon = 0$ generiert.

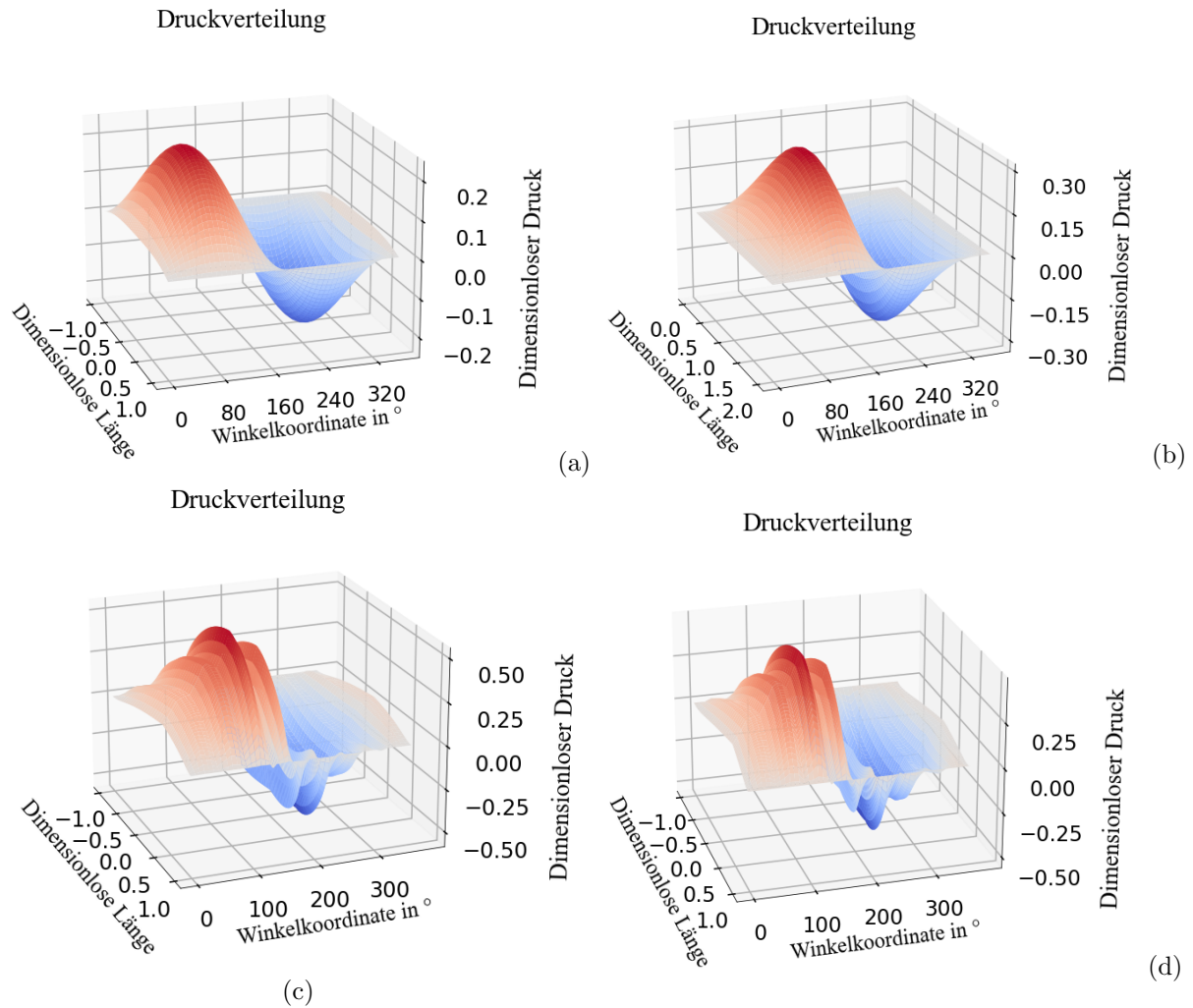


Abbildung 4.5: Druckverteilung bei $\varepsilon = 0.4$ (a): Vohr und Chow-Modell; (b): Bootsma-Modell; (c): DDM; (d): LIM

4.2.3 Lagerkräfte

Hydrodynamische Gleitlager werden zur Lastaufnahme eingesetzt. Dabei werden Lagerkräfte erzeugt, die die ausgeübte Last ausgleichen. Die Lagerkräfte wurden wie folgt normiert:

$$\bar{F} = \frac{F}{\omega \eta R^2} \left(\frac{C}{R} \right)^2 \quad (4.2)$$

Abbildung 4.6 zeigt den Verlauf der tangentialen Kraft bei unterschiedlichen Exzentrizitäten. Die Abbildung zeigt, dass die tangentielle Kraft bei steigender Exzentrizität zunimmt.

Das Lager 1 weist eine höhere tangentielle Kraft auf im Vergleich zu Lager 2. Bei den Annäherungsmodellen (Vohr/Chow und Bootsma) weichen die Werte der tangentialen Kraft deutlich von der DDM sowie der LIM-Methode ab. Bei Vohr und Chow-Modell ist die tangentielle Kraft direkt proportional zur Exzentrizität genau wie den linearen Ansatz vom Bootsma-Modell. Allerdings sind die Verläufe des analytischen und des numerischen Ansatzes des Vohr-Chow-Modells fast identisch. Damit hat die Kompressibilität des Fluids beim Vohr-und Chow Ansatz keinen Einfluss auf die tangentielle Lagerkraft. Des Weiteren weichen Der DDM und LIM-Ansatz leicht voneinander ab. Jedoch nimmt diese Abweichung bei steigender Exzentrizität zu.

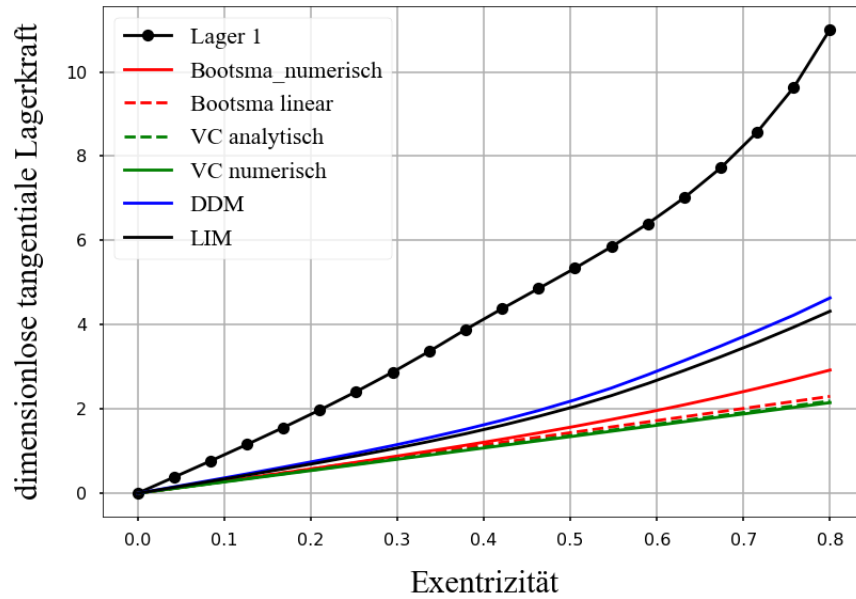


Abbildung 4.6: Tangentiale Lagerkraft über die Exzentrizität

Die Abbildung 4.7 stellt die Verläufe der radialen Lagerkräfte dar. Aus der Abbildung lässt sich feststellen, dass bei Lager 1 und 2 die tangentielle Kraft größer ist, als die radiale Kraft. Außerdem sind die Kräfte bei Lager 1 deutlich größer als bei Lager 2. Zusätzlich ist die radiale Kraft beim Vohr und Chow Modell ebenfalls eine lineare Funktion der Exzentrizität. Dies gilt auch für den linearen Ansatz von Bootsma. Allerdings ist aus der Abbildung 4.7 zu erkennen, dass die radiale Kraft bei den linearen Ansätzen größer ist im Vergleich zu den numerischen Ansätzen. Darüber hinaus zeigen die DDM und LIM einen ähnlichen Verlauf mit einer relativ kleinen Abweichung. Diese Abweichung nimmt jedoch bei $\epsilon > 0,6$ ab bis sie bei $\epsilon = 0,7$ gleich null ist und steigt wieder.

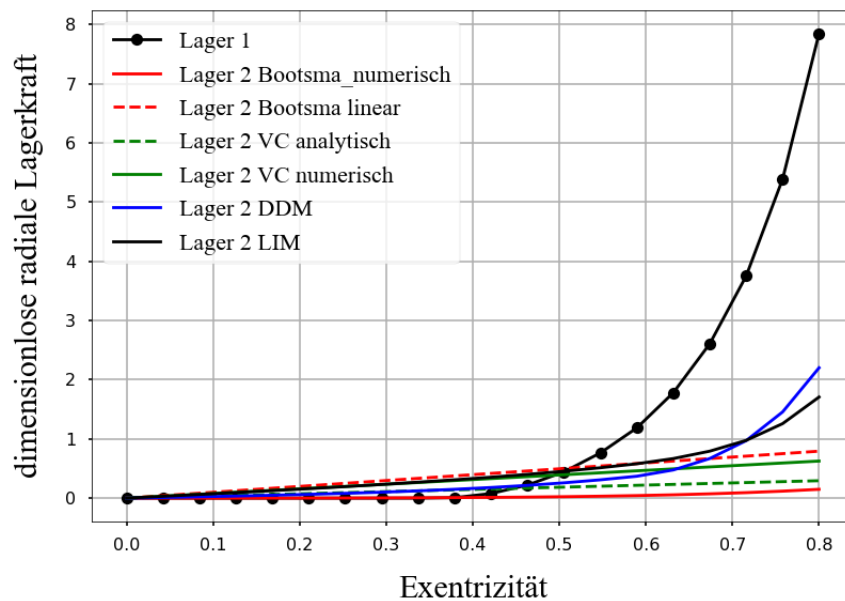


Abbildung 4.7: Radiale Lagerkraft über die Exzentrizität

Nachdem beide Lagerkräfte berechnet wurden, kann der Schwimmwinkel Φ aus dem Verhältnis der beiden Kräfte ermittelt werden. Der Verlauf des Schwimmwinkels ist in Abbildung 4.8 dargelegt. Dabei kann festgestellt werden, dass die Verläufe zwischen Lager 1 und Lager 2 unterschiedlich sind. Bei Lager 1 ist der Schwimmwinkel bei kleinen Exzentrizitäten gleich 90° . Ab ca. $\epsilon = 0,4$ nimmt Φ bei steigender Exzentrizität ab. Bei den Annäherungsmodellen 3.8 und 3.9 ist der Schwimmwinkel konstant, da die Lagerkräfte eine lineare Funktion von ϵ sind. Bei Lager 2 ist Φ ebenfalls konstant bei kleineren Exzentrizitäten. Allerdings

liegt dieser unter 90° . In Bezug auf F_r und F_t zeigen die DDM und LIM unterschiedliche Verläufe bei Φ . Allerdings sinkt der Schwimmwinkel bei beiden Ansätzen mit zunehmender Exzentrizität.

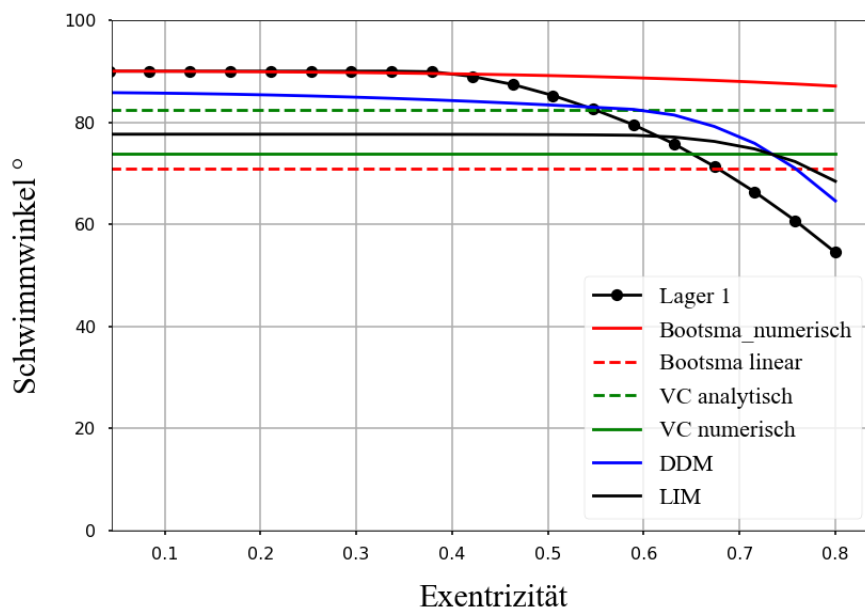


Abbildung 4.8: Schwimmwinkel über die Exzentrizität

4.2.4 Lagertragfähigkeit

Um einen besseren Vergleich zu ermöglichen, wurde Die Lagertragfähigkeit ebenfalls normiert. Dabei ist Der Normierungsfaktor wie folgt definiert:

$$\bar{W} = \frac{W}{\omega \eta R^2} \left(\frac{C}{R} \right)^2 \quad (4.3)$$

Die Tragfähigkeit von Lager 1 und Lager 2 sind in Abbildung 4.9 dargestellt. Für Lager 2 nimmt die Tragfähigkeit bei Erhöhung der Exzentrizität zu, genau wie bei Lager 1. Jedoch ist die Steigung relativ gering im Vergleich zu Lager 1.

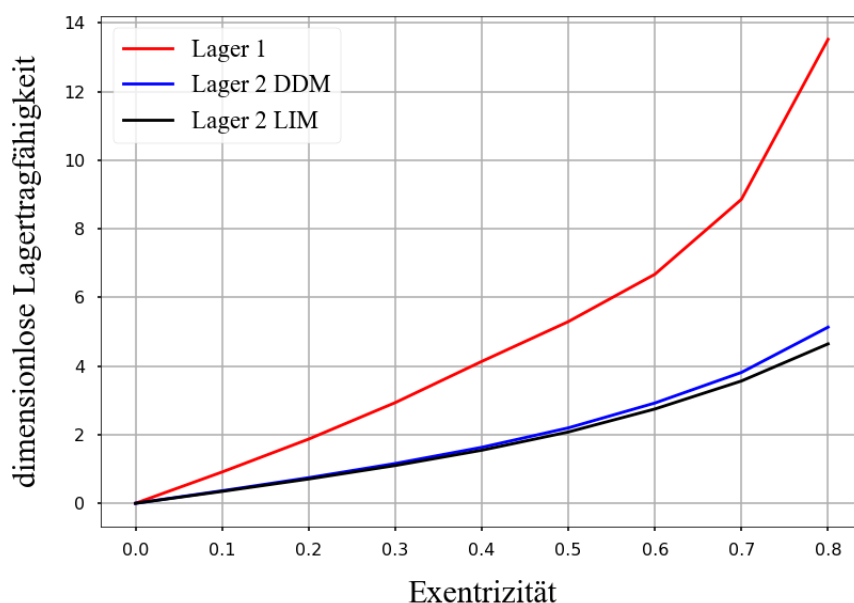


Abbildung 4.9: Tragfähigkeit von Lager 1 und Lager 2 über die Exzentrizität

In Bezug auf die Tragfähigkeit ist der Unterschied zwischen Radialrillengleitlagern und einfachen Gleitlagern bei leichter Belastung relativ gering. Im Fall einer schweren Belastung ist der Einsatz von einfachen Gleitlagern zu bevorzugen, da bei gleicher Exzentrizität und gleicher Abmessungen die Tragfähigkeit von einfachen Gleitlagern größer ist, als bei Radialrillengleitlagern.

Die Lagertragfähigkeit wird nicht nur von der Exzentrizität beeinflusst, sondern auch von unterschiedlichen Variablen, die sich hauptsächlich auf die Rillengeometrie beziehen. Darunter ist die Rillentiefe, die durch das Tiefenverhältnis H_0 zwischen Rille und Damm in der Berechnung ersetzt wird. Dabei wird diese wie folgt definiert:

$$H_0 = \frac{C + h_G}{C}$$

Die Abbildung 4.10 stellt den die Änderung der Tragfähigkeit von Lager 2 bei Variation des Tiefenverhältnis H_0 dar. Aus der Abbildung ist zu erkennen, dass die Lagertragfähigkeit bei allen Modellen mit steigendem H_0 sinkt. Wenn $H_0 = 1$ ist, bedeutet das, dass die Rillentiefe gleich null ist und somit keine Rillen vorhanden sind. Daher ist die Lagertragfähigkeit maximal, da es sich in diesem Fall um einen einfachen Gleitlager handelt. Bei Erhöhung von H_0 wird auch die Rillentiefe erhöht, dadurch wird die Schmierfilmdicke in den Rillen größer, was zu einer Verringerung des lokalen Drucks führt und somit auch die Tragfähigkeit des Lagers negativ beeinflusst. Je größer die lokale Schmierfilmdicke ist, desto geringer ist der lokale Druck. Allerdings sinkt die Tragfähigkeit des Lagers bei allen Modellen mit unterschiedlicher Steigung. Das liegt daran, dass jedes Modell auf einem unterschiedlichen Ansatz basiert. Bei Bootsma weichen die beiden Ansätze leicht voneinander ab. Das kann dadurch erklärt werden, dass der lineare Ansatz nur eine vereinfachte Linearisierung des numerischen Modells darstellt.

In Bezug auf das Vohr und Chow Modell zeigen die beiden Ansätze eine relativ hohe Abweichung im Bereich zwischen $H_0 = 1$ und $H_0 = 1.75$, die mit steigendem H_0 kleiner wird. Das liegt daran, dass der numerische Ansatz auch die Kompressibilität des Schmiermittels in Betrachtung nimmt und gilt somit für kompressible Fluide. Außerdem weicht die LIM-Methode ab einem Verhältnis von $H_0 = 2$ deutlich von der DDM-Methode ab. Dabei nimmt Die Differenz zwischen der DDM und der LIM mit steigender H_0 zu.

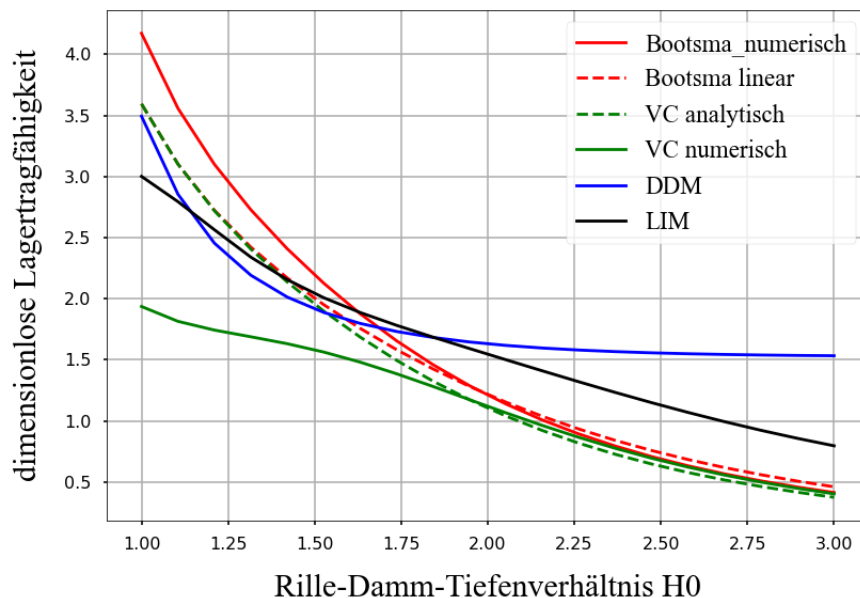


Abbildung 4.10: Lagertragfähigkeit von Lager 2 über das Rille-Damm-Tiefenverhältnis, bei $\varepsilon = 0.4$ $\beta = 70^\circ$ und $\gamma = 1$

Eine weitere Größe, die eine große Rolle zur Bestimmung der Lagertragfähigkeit spielt, ist der Rillenwinkel β . Diese Größe kann die Druckverteilung und folglich auch die Tragfähigkeit beeinflussen. Die Änderung der Lagertragfähigkeit über den Rillenwinkel ist in Abbildung 4.11 beschrieben.

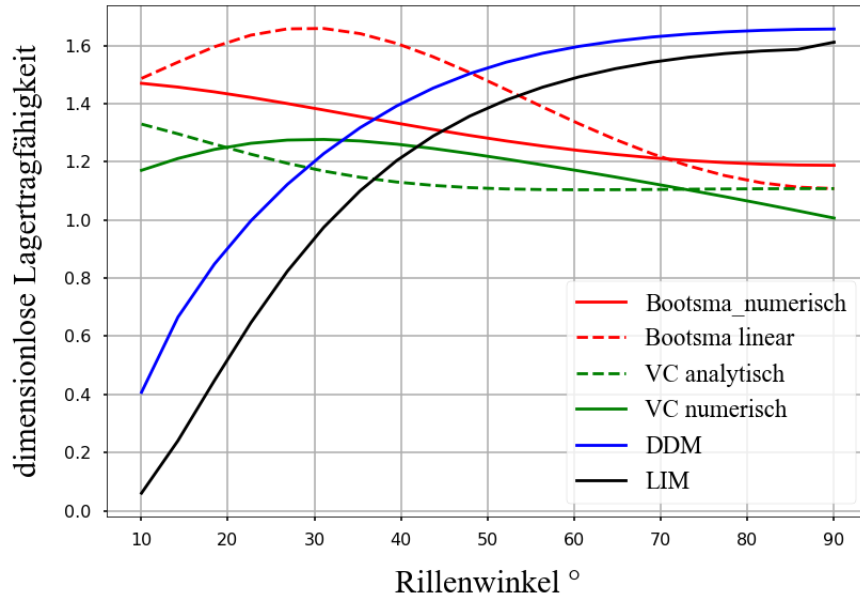


Abbildung 4.11: Lagertragfähigkeit von Lager 2 über den Rillenwinkel bei $\varepsilon = 0.4$, $H_0 = 2$ und $\gamma = 1$

Bei der numerischen Lösung des Bootsma-Modells liegt die maximale Lagertragfähigkeit an der Stelle $\beta = 0^\circ$, wenn die Rillen in der umlaufenden Richtung verteilt sind. Dagegen ist die minimale Tragfähigkeit bei $\beta = 90^\circ$ festzustellen. In diesem Fall sind die Rillen parallel zur Lagerachse ausgebildet. Das gilt ebenfalls für die analytische Lösung von Vohr- und Chow-Modelle, bei der die Variation der Fluidichte vernachlässigt wurde. Bei Berücksichtigung der Kompressibilität liegt die maximale Tragfähigkeit an der Stelle $\beta = 30^\circ$ genau wie bei dem linearen Ansatz von Bootsma. Bei der DDM- und der LIM-Methode zeigt die Tragfähigkeit einen deutlich unterschiedlichen Verlauf im Vergleich zu den Annäherungsmodelle. Dabei liegt der maximale Wert an der Stelle $\beta = 90^\circ$. Außerdem ist die minimale Tragfähigkeit bei einem Rillenwinkel von $\beta = 0^\circ$ deutlich zu erkennen.

Das Rillenverhältnis γ (Abbildung 2.16) ist ebenfalls bei der Bestimmung der Tragfähigkeit des Lagers von großer Bedeutung. Da diese auch von der Rillenanzahl abhängig ist, wird die Rillenbreite bei der Berechnung durch das Breitenverhältnis γ ersetzt. Diese ist wie folgt definiert:

$$\gamma = \frac{b_g}{b_r}$$

Die Änderung der Tragfähigkeit des Lagers 2 ist in Abbildung 4.12 dargestellt. Aus der Abbildung kann festgestellt werden, dass bei allen Modellen die Lagertragfähigkeit mit zunehmendem Breitenverhältnis steigt. Allerdings zeigen die Annäherungsmodelle eine degressive Steigung im Gegensatz zum DDM und LIM, bei denen die Tragfähigkeit progressiv steigt. Beim Bootsma-Modell verlaufen die beiden Ansätze mit einer identischen Steigung, zeigen jedoch eine relativ leichte Abweichung ab der Stelle $\gamma = 2$, die mit steigender Breitenverhältnis zunimmt. Das gilt auch für das Vohr und Chow-Modell. Hierbei ist die Abweichung allerdings größer im Vergleich zu Bootsma.

Die DDM und LIM-Methode zeigen im Gegensatz dazu einen progressiven Verlauf. Aus der Abbildung ist jedoch eine Abweichung zu erkennen, die bei steigendem γ kleiner wird.

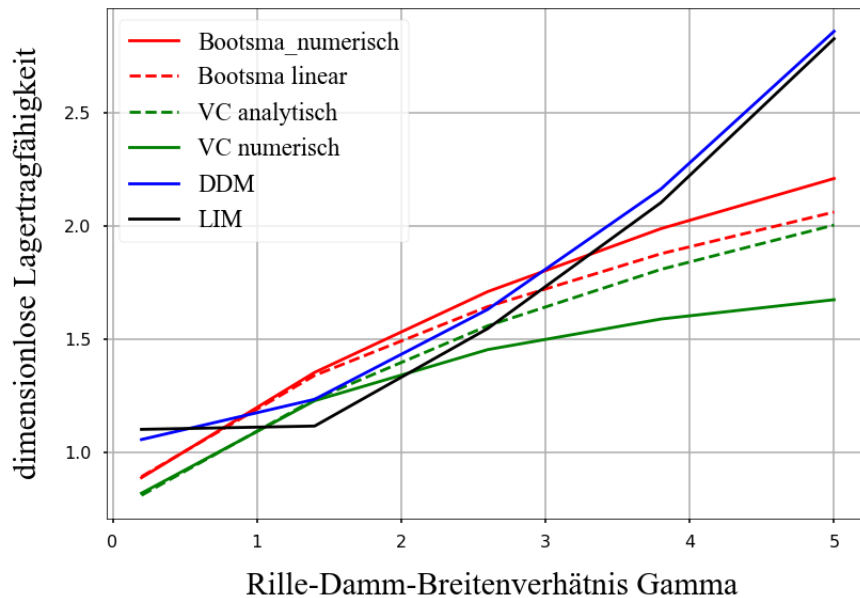


Abbildung 4.12: Lagertragfähigkeit von Lager 2 über das Rille-Damm-Breitenverhältnis bei $\varepsilon = 0.4$, $\beta = 70^\circ$ und $H_0 = 2$

4.3 Dynamische Analyse

Bei dynamisch belasteten Gleitlagern spielen die dynamischen Eigenschaften eine große Rolle sowohl zur Aufnahme von dynamischen Lasten und somit auch zur Stabilisierung des Rotorsystems. Die dynamischen Eigenschaften sind hierbei die Steifigkeits- und die Dämpfungskoeffizienten, die durch die Integration des radialen und tangentialen dynamischen Drucks ermittelt werden können. Um die Besonderheiten eines Radialrillengleitlagers besser darzustellen, werden Lager 1 und 2 dynamisch analysiert und die resultierenden Werte verglichen. Außerdem wird eine parametrische Studie des Lagers 2 durchgeführt. Dabei werden die Lagerparameter geändert und die Ergebnisse ausgewertet, um eine optimale Geometrie mit verbesserten Eigenschaften zu liefern.

4.3.1 Steifigkeitskoeffizienten

Hydrodynamische Gleitlager besitzen im Vergleich zu anderen Lagerarten eine relativ hohe Steifigkeit. Dabei wird zwischen direkten und gekoppelten Steifigkeitskoeffizienten unterschieden 3.4. Die direkten Steifigkeitskoeffizienten sind in Abbildung 4.13 dargestellt. Um die Ergebnisse besser vergleichen zu können, wurden alle Koeffizienten wie folgt normiert:

$$\bar{K}_{i,j} = K_{i,j} \frac{C}{W} \quad (4.4)$$

Außerdem sind die Steifigkeitskoeffizienten proportional zur Rotordrehzahl sowie zur Fluidviskosität. Damit kann das Lager ohne Rotation keine Steifigkeit aufweisen.

Aus der Abbildung lässt sich erkennen, dass die direkten Steifigkeitskoeffizienten beider Lager bei steigender Exzentrizität zunehmen. Allerdings ist K_{xx} größer bei Lager 2 wenn $\varepsilon < 0.4$. Das gilt ebenfalls für K_{yy} , wenn $\varepsilon < 0.58$ für . Bei höheren Exzentrizitäten sind die direkte Steifigkeitskoeffizienten des einfachen Gleitlagers größer im Vergleich zum Radialrillengleitlager.

Bei einem einfachen Gleitlager ist die radiale Lagerkraft F_r extrem klein, wenn $\varepsilon < 0.4$ (Abbildung 4.7) und dadurch ist $\Phi_0 \approx 90^\circ$ (Abbildung 4.8). Aus der Gleichung 3.15 lässt sich erkennen, dass die direkten Steifigkeitskoeffizienten stark von dem Schwimmwinkel abhängen. Bei kleinen Exzentrizitäten ist $\cos(\Phi_0) \approx 0$ und somit ist $K_{xx} \approx 0$.

Außerdem ist die Änderung der radialen Kraft $\frac{\partial F_r}{\partial e}$ bei normalen Gleitlager sehr gering (Abbildung 4.7), wenn $\varepsilon < 0,4$ ist. Da Φ in diesem Fall gleich 90° ist, ist lediglich die Änderung von F_r über die Exzentrizität von großer Bedeutung (Gleichung 3.15) Dadurch ist $K_{yy} \approx 0$.

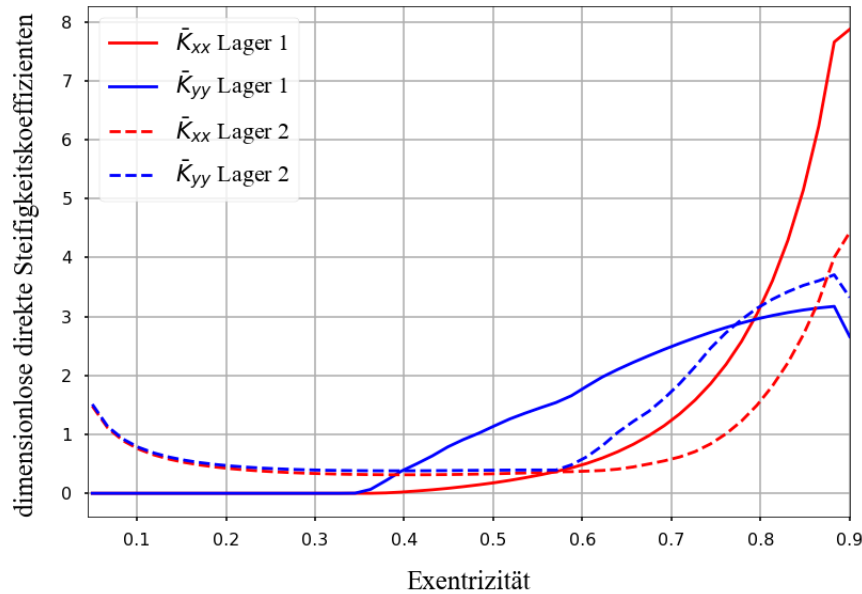


Abbildung 4.13: Direkte Steifigkeitskoeffizienten über die Exzentrizität

Wenn $\varepsilon > 0,4$ reißt der Kavitationsdruck erreicht und der Fluidfilm ab, was zu einer Erhöhung von $\frac{\partial F_r}{\partial e}$, da die Druckverteilung nicht mehr gleichmäßig ist.

Im Gegensatz zu einfachen Gleitlager weist die Druckverteilung bei Radialrillengleitlagern aufgrund des Pumpeneffekts der Rillen immer einen sägezahnförmigen Verlauf auf. Hierdurch ist die Änderung der radialen Kraft auch bei kleinen Exzentrizitäten nicht null. Außerdem wird der Kavitationsdruck erst bei höheren Exzentrizitäten.

In Addition zu den direkten Steifigkeitskoeffizienten weisen hydrodynamische Gleitlager auch gekoppelte Steifigkeitskoeffizienten auf. Diese sind in Abbildung 4.14 dargestellt. Es lässt sich aus der Abbildung feststellen, dass die Koeffizienten $\bar{K}_{xy}$ sowie $|\bar{K}_{yx}|$ bei Erhöhung der Exzentrizität sinken. Allerdings ist der Verlauf der beiden Koeffizienten fast identisch bei niedrigen Exzentrizitäten. Wenn $\epsilon < 0,4$, sind die Werte der dimensionlosen, gekoppelten Steifigkeitskoeffizienten bei beiden Lagern ähnlich. Wenn die Exzentrizität erhöht wird, wird die Steigung der beiden Koeffizienten unterschiedlich, besonders bei $\bar{K}_{xy}$.

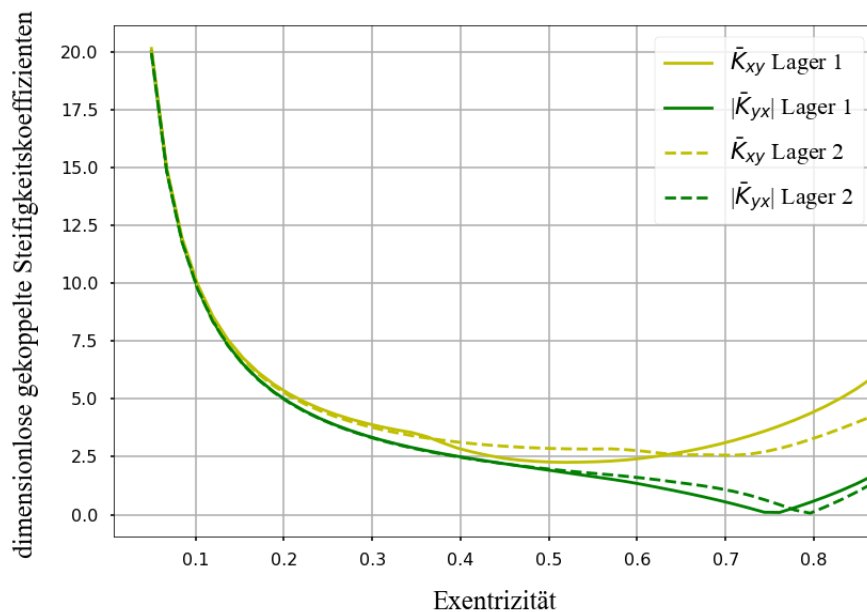


Abbildung 4.14: gekoppelte Steifigkeitskoeffizienten über die Exzentrizität

Um den Einfluss vom Tiefenverhältnis H_0 auf die dynamischen Eigenschaften des Lagers zu zeigen, wurden diese unter Variation von H_0 berechnet. Abbildung 4.15 stellt die Steifigkeitskoeffizienten in Abhängigkeit der Exzentrizität bei unterschiedlichen Tiefenverhältnissen H_0 dar. Die parametrische Studie über H_0 hat ergeben, dass Die dimensionlosen direkten Steifigkeitskoeffizienten $\bar{K}_{xx}$ und $\bar{K}_{yy}$ bei unterschiedlichen H_0 einen ähnlichen Verlauf zeigen. Allerdings die beiden Koeffizienten bei $H_0 = 3$ größer, wenn die Exzentrizität klein ist. Bei höheren Exzentrizitäten ($\varepsilon > 0,4$) wird die maximale direkte Steifigkeit bei einem Tiefenverhältnis von $H_0 = 1.5$ erreicht. Die gekoppelten Steifigkeitskoeffizienten $\bar{K}_{xy}$ und

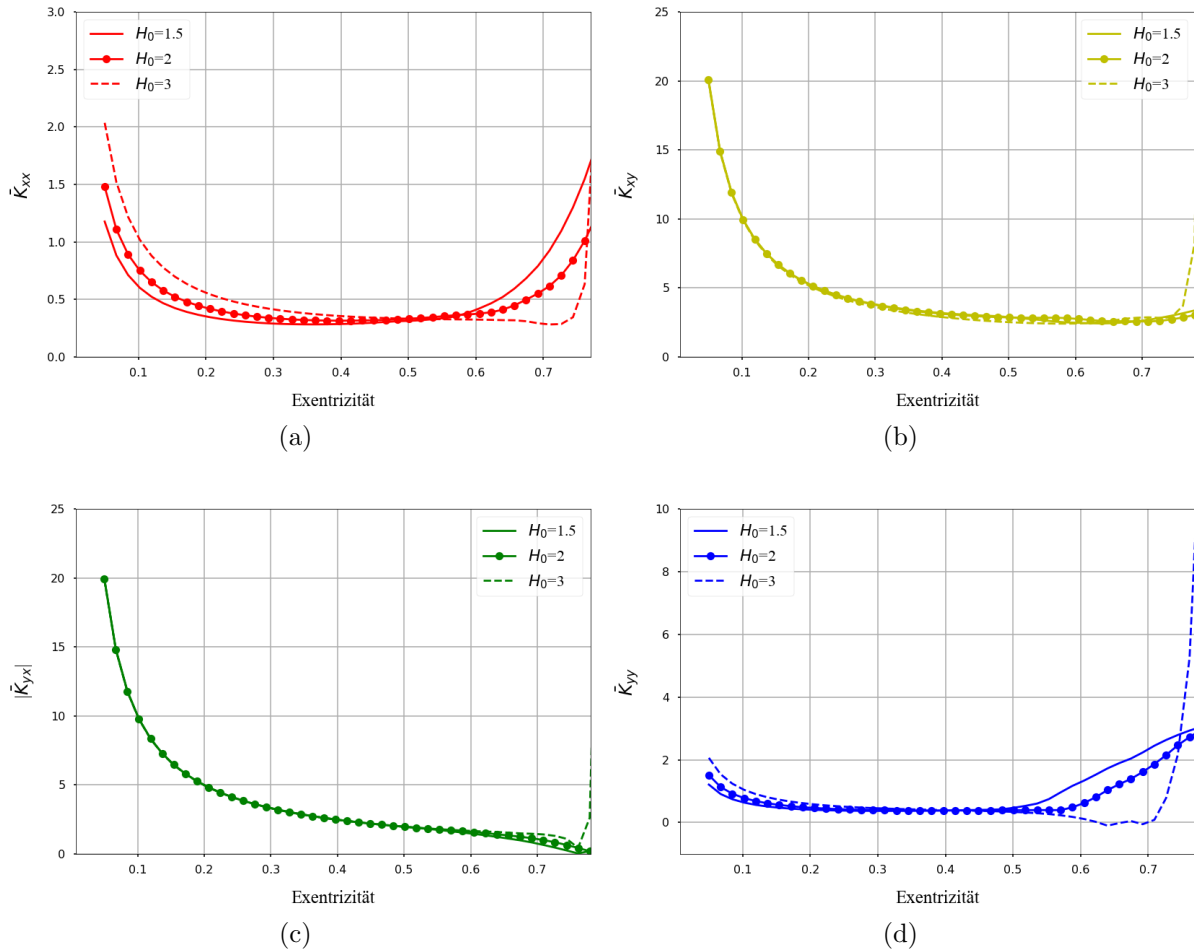


Abbildung 4.15: Steifigkeitskoeffizienten bei $\beta = 70^\circ$ und $\gamma = 1$ und unterschiedlichen H_0

$|\bar{K}_{yx}|$ werden im Vergleich zu den direkten Koeffizienten bei Änderung der Tiefenverhältnis nicht stark beeinflusst, besonders bei $\varepsilon < 0.6$. Bei Erhöhung der Exzentrizität wird bei $H_0 = 3$ eine bessere gekoppelte Steifigkeit erreicht.

Der Rillenwinkel β hat auch einen großen Einfluss auf die dynamischen Eigenschaften des Lagers. Abbildung 4.16 zeigt die Steifigkeitskoeffizienten in Abhängigkeit der Exzentrizität und bei verschiedenen Rillenwinkeln. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass die direkten Steifigkeitskoeffizienten bei Vergrößerung der Rillenwinkel abnehmen, wenn $\varepsilon < 0.6$ ist. Bei weiterer Erhöhung der Exzentrizität liegt die maximale direkte Steifigkeit bei $\beta = 40^\circ$. In Bezug auf die dimensionlosen, gekoppelten Steifigkeitskoeffizienten bewirkt eine Vergrößerung der Rillenwinkel eine Verringerung des absoluten Wertes. Innerhalb des Intervalls $40^\circ < \beta < 80^\circ$ ist nur eine leichte Abnahme der gekoppelten Koeffizienten zu erkennen, wenn β kleiner wird.

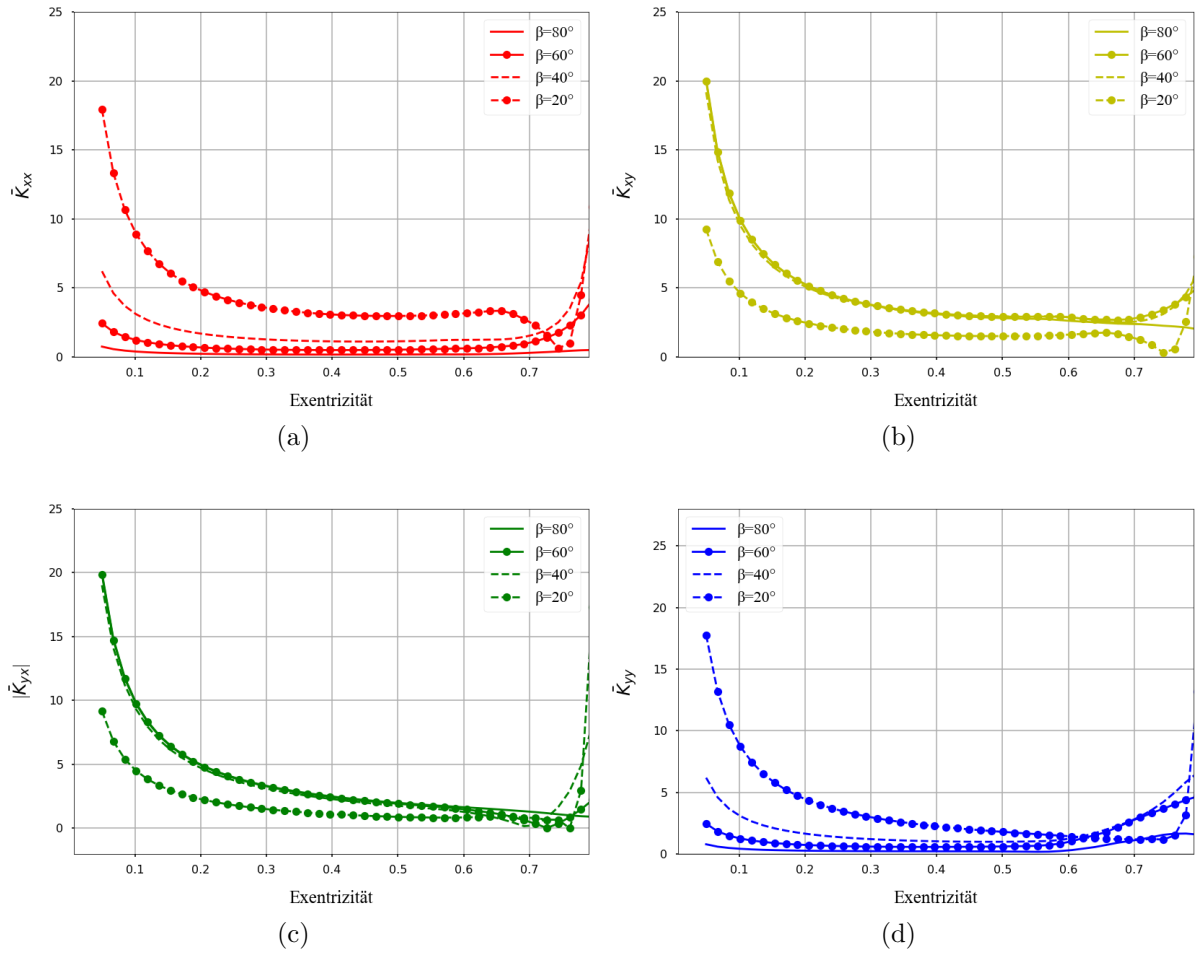


Abbildung 4.16: Steifigkeitskoeffizienten bei $H_0 = 2$ und $\gamma = 1$ unterschiedlichen Rillenkugellagerwinkeln

Analog zu den anderen Parametern wurde das Breitenverhältnis γ ebenfalls in Betrachtung gezogen. Die Ergebnisse der parametrischen Studie sind in Abbildung 4.17 dargestellt. Aus der Abbildung lässt sich erkennen, dass die höchste direkte Steifigkeit bei $\gamma = 1$ erreicht wird, wenn die Exzentrizität kleiner 0.7 ist. Wenn die Exzentrizität größer ist, liefert ein Lager mit $\gamma = 0.5$ eine bessere direkte Steifigkeit im Vergleich zu den anderen Fällen. Bei $\bar{K}_{yy}$ wird jedoch der höchsten Wert bei $\gamma = 2$ erreicht, wenn $0.55 < \varepsilon < 0.7$ ist.

Hinsichtlich der dimensionslosen, gekoppelten Steifigkeitskoeffizienten wird bei Änderung von γ fast keine Änderung der Koeffizienten $|\bar{K}_{yx}|$ festgestellt. Bei $\bar{K}_{xy}$ wird jedoch der Einfluss vom Breitenverhältnis erst erkannt, wenn $\varepsilon > 0.55$ ist.

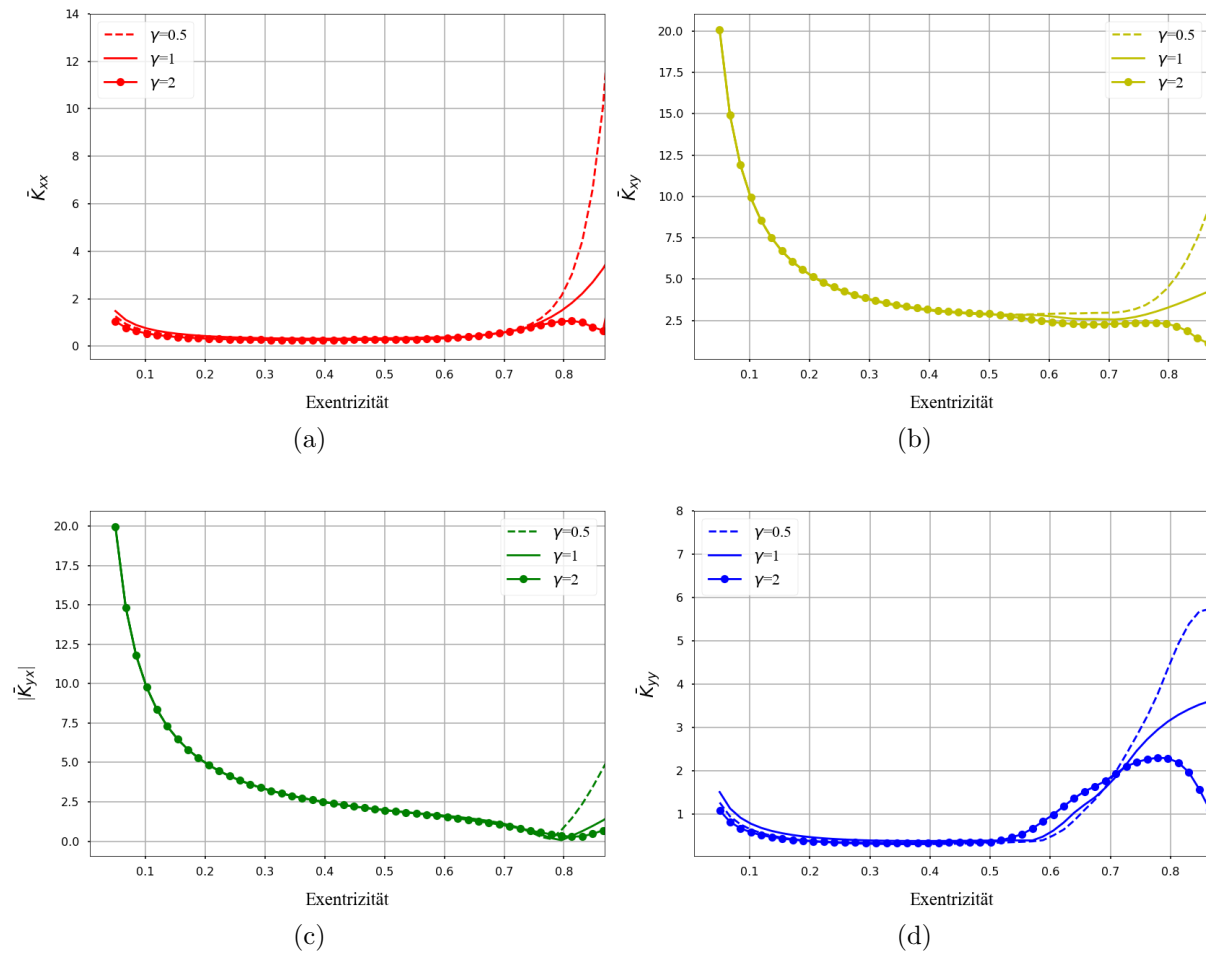


Abbildung 4.17: Steifigkeitskoeffizienten bei $\beta = 70^\circ$, $H_0 = 2$ und unterschiedlichen γ

4.3.2 Dämpfungskoeffizienten

Ein weiterer Vorteil von hydrodynamischen Gleitlagern ist das gute Dämpfungsverhalten. Dabei spielen die Dämpfungseigenschaften eine große Rolle bei der Stabilität des Rotorsystems. Deswegen wurden die Dämpfungskoeffizienten des Lagers 1 und 2 ermittelt und in Abbildung 4.18 und 4.19 zum Vergleich dargestellt. Zur besseren Visualisierung wurden die Dämpfungskoeffizienten ebenfalls normiert. Dabei gilt:

$$\bar{D}_{i,j} = D_{i,j} \frac{C * \omega}{W} \quad (4.5)$$

Im Gegensatz zu den Steifigkeitskoeffizienten sind die Dämpfungskoeffizienten nur zur Viskosität proportional.

Aus Abbildung 4.18 lässt sich feststellen, dass die direkten Dämpfungskoeffizienten bei Erhöhung der Exzentrizität abnehmen. $\bar{D}_{yy}$ steigt jedoch, wenn die Exzentrizität größer als 0,4 ist. bei $\epsilon < 0.6$ ist $\bar{D}_{xx}$ bei Lager 2 größer als bei Lager 1. Allerdings ist $\bar{D}_{yy}$ größer bei Lager 1. Außerdem ist $\bar{D}_{xx}$ bei beiden Lagern immer kleiner als $\bar{D}_{yy}$.

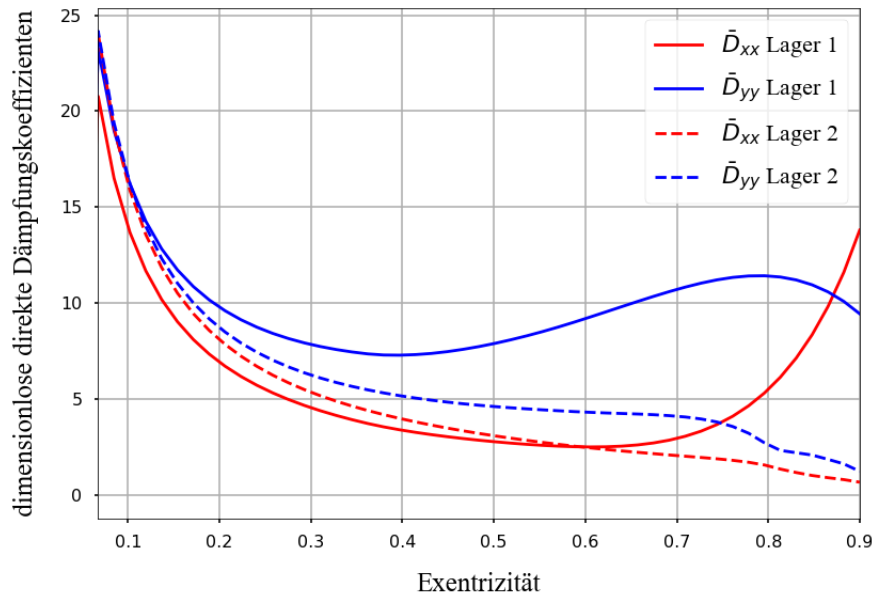


Abbildung 4.18: direkte Dämpfungskoeffizienten über die Exzentrizität

Die gekoppelte Dämpfungskoeffizienten sind in Abbildung 4.19 gezeigt. Dabei zeigt die Abbildung, dass die dimensionlosen gekoppelten Dämpfungskoeffizienten bei Lager 2 mit steigender Exzentrizität abnehmen. In Bezug auf Lager 1 bleiben die beiden Koeffizienten konstant wenn $\epsilon < 0.4$ ist. Hierbei gilt $\bar{D}_{xy} = 0$. Wenn $\epsilon > 0.4$ nimmt der Wert von $\bar{D}_{xy}$ bei steigender Exzentrizität zu. Dagegen sinkt der absolute Wert von $\bar{D}_{yx}$ zwischen $0.4 < \epsilon < 0.58$ und steigt danach weiter an. Außerdem sind die beiden Koeffizienten bei Lager 2 größer im Gegensatz zu Lager 1, wenn $\epsilon < 0.5$, was auf die Pumpwirkung der Rillen zurückzuführen ist. Bei großen Exzentrizitäten zeigt Lager 1 ein besseres Dämpfungsvermögen in die XY- sowie die YX-Richtung im Vergleich zu Lager 2.

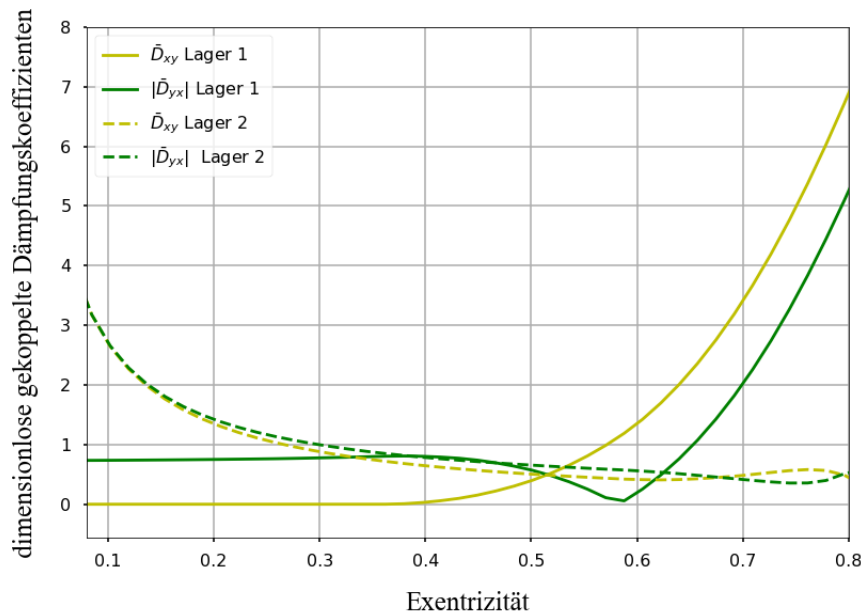


Abbildung 4.19: gekoppelte Dämpfungskoeffizienten über die Exzentrizität

Analog zur Lagersteifigkeit wurde ebenfalls eine parametrische Studie zur Ermittlung des optimalen Dämpfungsvermögens durchgeführt. Abbildung 4.20 zeigt die Verläufe der dimensionlosen Dämpfungskoeffizienten über die Exzentrizität bei verschiedenen Tiefenverhältnissen.

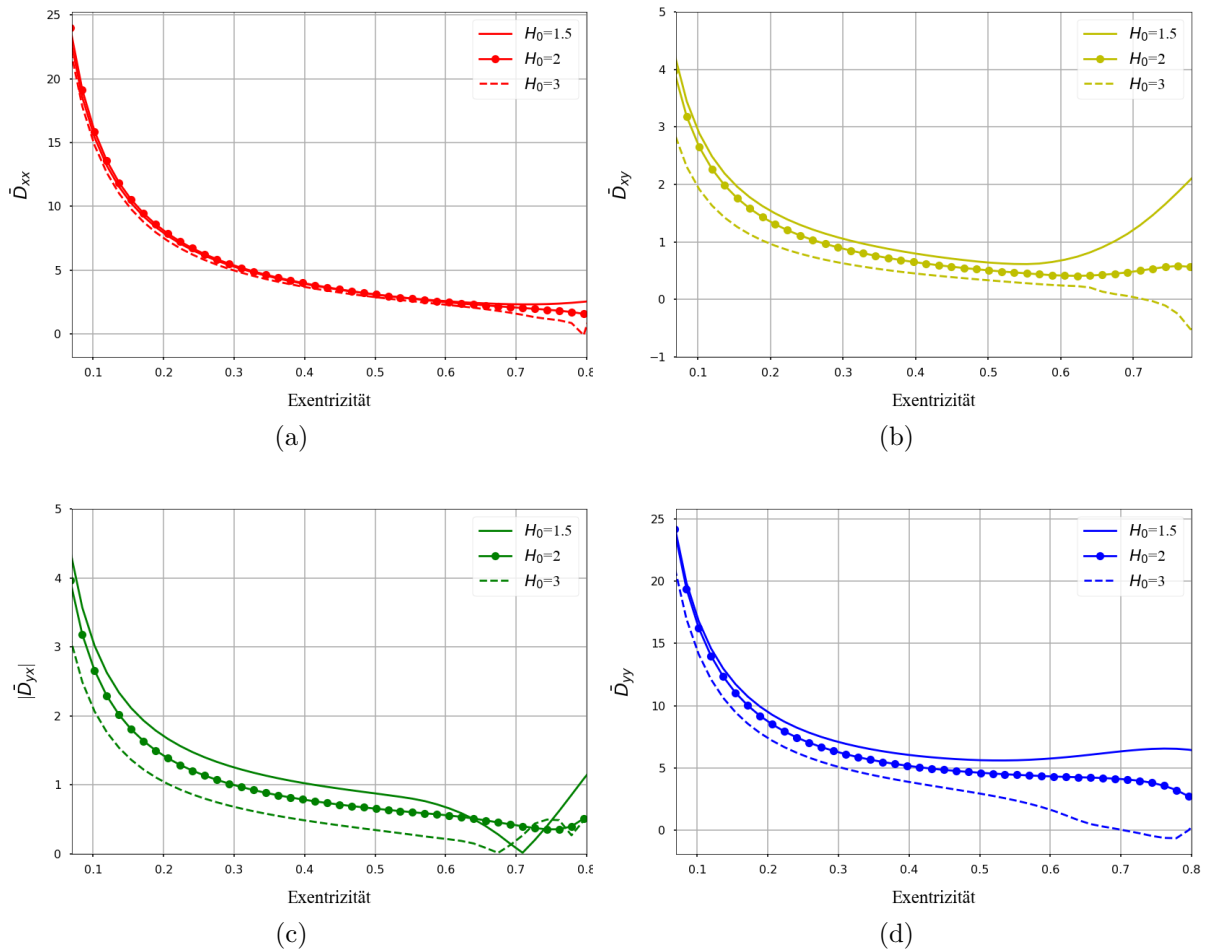


Abbildung 4.20: Dämpfungskoeffizienten bei $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 1$ und unterschiedlichen H_0

Aus der Abbildung 4.20 lässt sich eine leichte Änderung des Koeffizienten $\bar{D}_{xx}$ bei Erhöhung von H_0 feststellen. Im Gegensatz dazu nimmt der Koeffizient $\bar{D}_{yy}$ eine deutlich ab, wenn H_0 erhöht wird. Außerdem ist der Unterschied zwischen den Kurven auch von der Exzentrizität abhängig, da die Änderung bei Erhöhung der Exzentrizität ϵ zunimmt. Dabei ist die höchste direkte Steifigkeit bei $H_0 = 1.5$ zu erreichen.

Hinsichtlich der gekoppelten Dämpfungskoeffizienten $\bar{D}_{xy}$ wird ebenfalls eine Abnahme festgestellt, wenn H_0 erhöht wird. Das gilt auch für den absoluten Wert des Koeffizienten $\bar{D}_{yx}$. Dieser Koeffizient ist jedoch gleich null für den Fall $H_0 = 1.5$ und $H_0 = 3$, wenn $\epsilon \approx 0.7$. Dabei wird die höchste gekoppelte Steifigkeit auch bei $H_0 = 1.5$ erreicht.

In Bezug auf den Rillenwinkel sind die resultierenden Ergebnisse der parametrischen Studie in Abbildung 4.21 dargelegt. Dabei nehmen die beiden direkten Dämpfungskoeffizienten bei Erhöhung des Rillenwinkels zu. Es wird jedoch ab einem Winkel von $\beta = 40^\circ$ nur eine leichte Zunahme festgestellt. für den Fall $\beta = 60^\circ$ und $\beta = 80^\circ$ sind die beiden Kurven fast identisch. Im Gegensatz dazu nehmen die gekoppelten Dämpfungskoeffizienten $\bar{D}_{xy}$ und $|\bar{D}_{yx}|$ bei Vergrößerung des Rillenwinkels ab. die Änderung des Koeffizienten wird jedoch sehr klein, wenn β kleiner 40° ist.

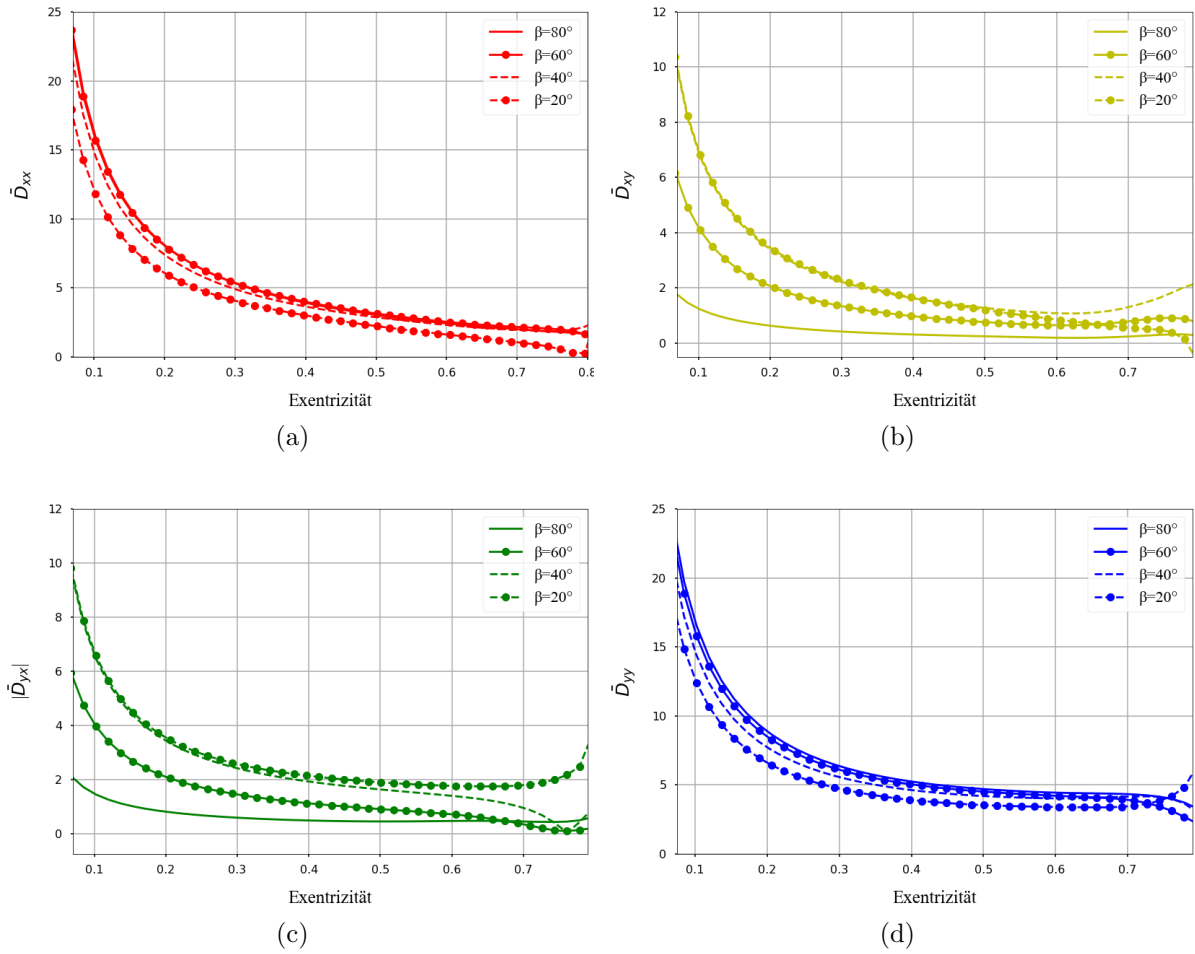


Abbildung 4.21: Dämpfungskoeffizienten bei $H_0 = 2$, $\gamma = 1$ unterschiedlichen Rillenwinkel

Die Abbildung 4.22 zeigt den Verlauf der Dämpfungskoeffizienten über unterschiedliche γ in Abhängigkeit der Exzentrizität.

Es lässt sich aus der Abbildung erkennen, dass der Verlauf des Koeffizienten $\bar{D}_{xx}$ bei Variation von γ fast identisch ist. Folglich hat das Breitenverhältnis γ keinen großen Einfluss auf den Koeffizienten $\bar{D}_{xx}$. Dagegen bewirkt die Erhöhung von γ eine Zunahme des Koeffizienten $\bar{D}_{yy}$, die bei Erhöhung der Exzentrizität größer wird.

Zusätzlich führt die Erhöhung des Breitenverhältnisses ebenfalls zu einer Steigerung der gekoppelten Dämpfungskoeffizienten $\bar{K}_{xy}$ und $|\bar{K}_{yx}|$. Dabei ist der Einfluss der Steigerung von γ relativ klein bei $\bar{K}_{xy}$ im Vergleich zu $|\bar{K}_{yx}|$.

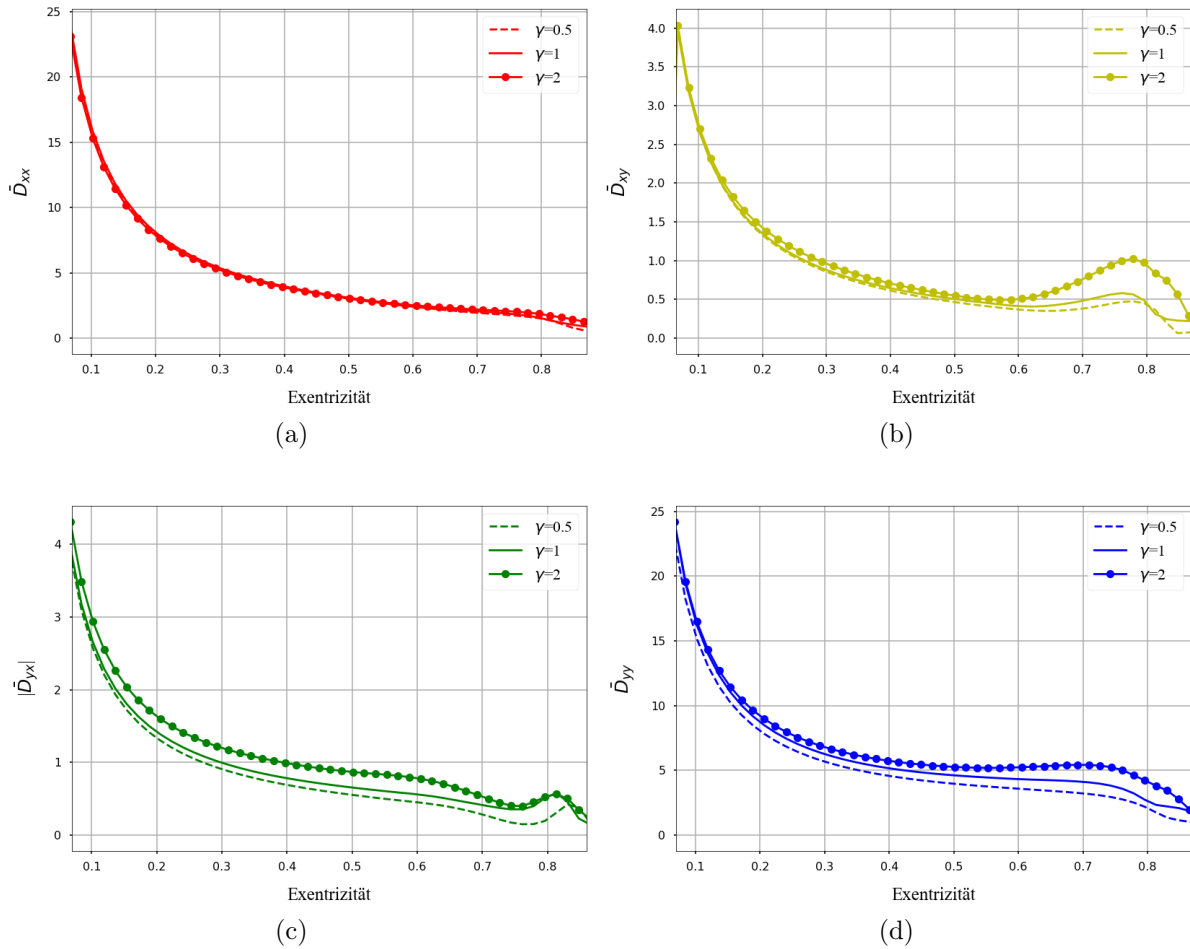


Abbildung 4.22: Dämpfungskoeffizienten bei $H_0 = 2$, $\beta = 70^\circ$ und unterschiedlichen γ

4.4 Stabilität

Nachdem die dynamischen Eigenschaften des Lagers ermittelt wurden, kann die Stabilität des Lager-Rotorsystems analysiert werden. Um eine Aussage über die Stabilität zu treffen, muss die kritische Wirbelfrequenz λ_{kr} sowie die kritische Masse M_{kr} berechnet [3](#).

4.4.1 Kritische Wirbelfrequenz

Die kritische Wirbelfrequenz ist die minimale Wirbelgeschwindigkeit, bei der es zu Instabilitäten im Lager-Rotor-system kommt. Die dimensionlose kritische Wirbelfrequenz wird wie folgt definiert:

$$\lambda_{kr} = \frac{\omega_w}{\omega_k r} \quad (4.6)$$

Abbildung [4.23](#) zeigt, dass die kritische Wirbelfrequenz bei beiden Lagern mit steigender Exzentrizität abnimmt. Allerdings weist Lager 1 eine maximale Wirbelfrequenz von 0,6 auf. Dabei verläuft λ_{kr} mit einer kontinuierlichen negativen Steigung bis zu einem minimalen Wert von 0.15 bei einer Exzentrizität von 0.78 erreicht wird. Dagegen liegt die Wirbelfrequenz bei Lager 2 bei einem Wert von 0.61 und bleibt dabei konstant bis zu $\epsilon < 0.4$. Bei Erhöhung der Exzentrizität ist eine leichte Zunahme der Wirbelfrequenz zu erkennen. Dabei wird ein maximaler Wert von 0.65 bei einer Exzentrizität von 0.58 erreicht. Danach nimmt die Wirbelfrequenz deutlich ab. Hierbei beträgt die minimale wirbelfrequenz 0.32 bei $\epsilon = 0.75$.

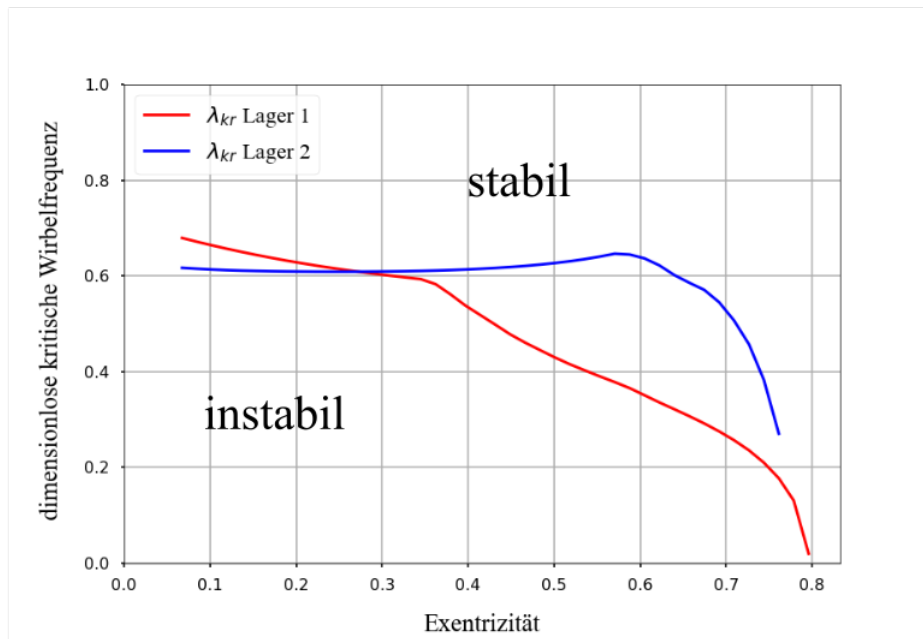
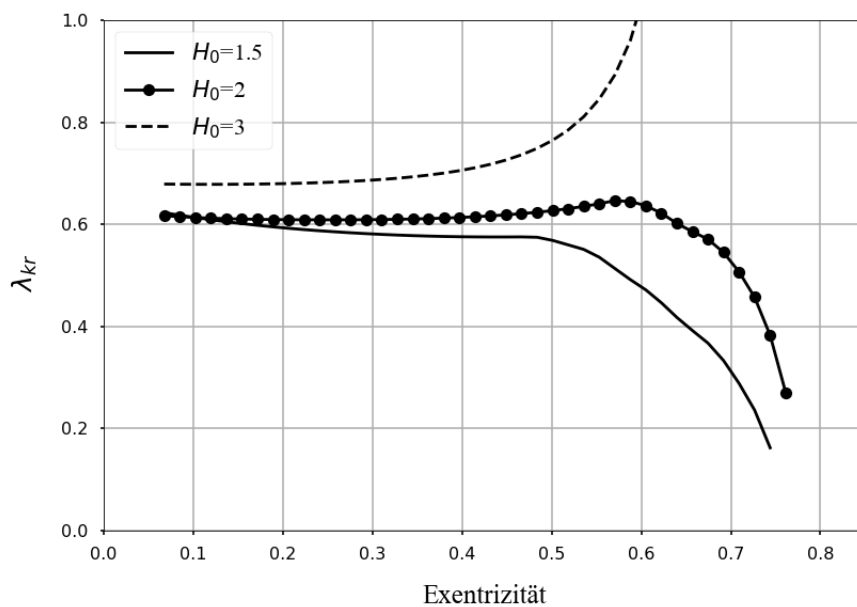


Abbildung 4.23: kritische Wirbelfrequenz über die Exzentrizität

Um die Stabilität des Rotor-Lagersystems zu verbessern, wurde mithilfe der ermittelten dynamischen Eigenschaften eine parametrische Analyse der Wirbelfrequenz durchgeführt.

Abbildung 4.24: kritische Wirbelfrequenz bei $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 1$ und unterschiedlichen H_0

Aus der Abbildung 4.24 ist ersichtlich, dass die Erhöhung des Tiefenverhältnisses H_0 eine Steigerung der kritischen Wirbelfrequenz und somit eine Verkleinerung des Stabilitätsbereiches bewirkt. Für den Fall $H_0 = 1.5$ nimmt die kritische Wirbelfrequenz mit steigender Exzentrizität kontinuierlich ab. Wenn $H_0 = 2$, ist die Wirbelfrequenz fast konstant bei 60% der kritischen Rotordrehzahl bis zu $\epsilon < 0.4$. Bei größeren ϵ wird eine leichte Zunahme von λ_{kr} erkannt und erreicht einen maximalen Wert von 0.65 bei $\epsilon = 0.58$. Anschließend nimmt λ_{kr} deutlich ab und erreicht einen minimalen Wert von 27% der kritischen Drehzahl. Im Gegensatz dazu nimmt die kritische Wirbelfrequenz kontinuierlich zu bis sie 100% der kritischen Drehzahl überschreitet, wenn $H_0 = 3$.

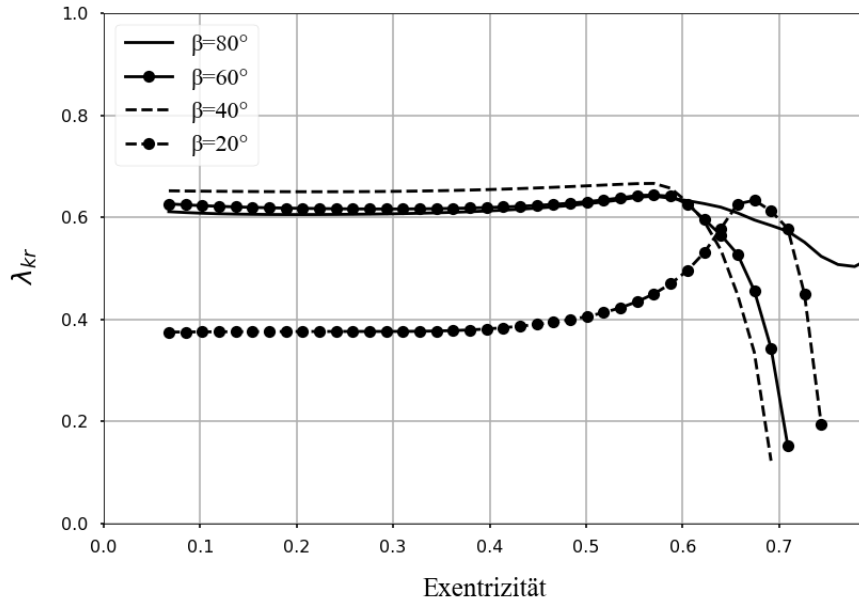


Abbildung 4.25: kritische Wirbelfrequenz bei $H_0 = 2$, $\gamma = 1$ und unterschiedlichen β

Die Abbildung 4.25 zeigt den Einfluss des Rillenwinkels auf die kritische Wirbelfrequenz bei unterschiedlichen Exzentrizitäten. Für $\epsilon < 0.5$ bleibt die Wirbelfrequenz fast konstant. Allerdings liegt der höchste Wert für λ_{kr} bei $\beta = 40^\circ$. Für $\beta = 60^\circ$ und $\beta = 80^\circ$ ist die Wirbelfrequenz fast identisch für Exzentrizitäten unter 0,6. Außerdem führt ein Rillenwinkel von 20° zu einer Abnahme der kritischen Wirbelfrequenz. Diese ist ebenfalls für kleine Exzentrizitäten konstant bei 36% und steigt wenn $0.4 < \epsilon < 0.67$ bis zu einem maximalen Wert von 0.63. Danach nimmt λ_{kr} bei größeren ϵ ab.

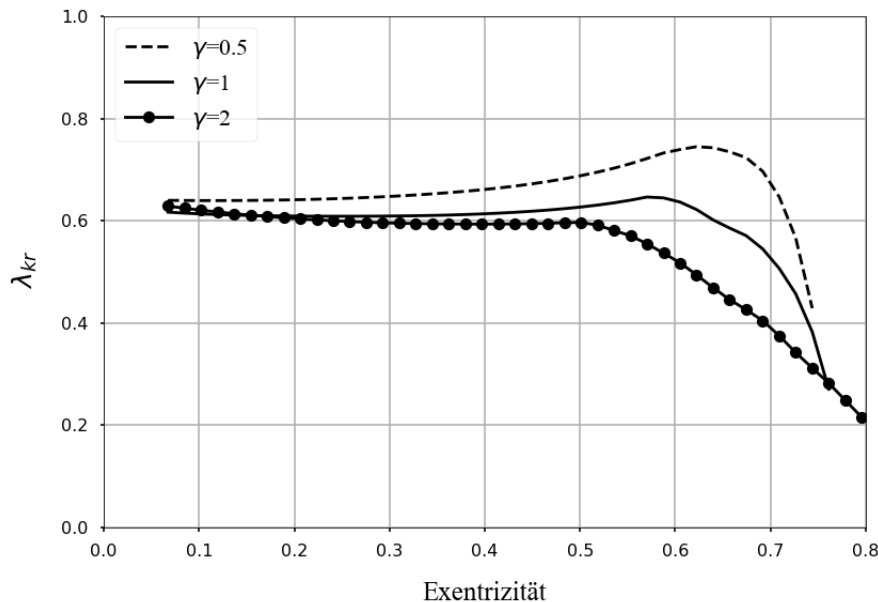


Abbildung 4.26: kritische Wirbelfrequenz bei $\beta = 70^\circ$, $H_0 = 1$ und unterschiedlichen γ

Die Abbildung 4.26 zeigt den Verlauf der kritischen Wirbelfrequenz bei unterschiedlichen γ . Die Abbildung zeigt, dass eine Erhöhung des Breitenverhältnisses eine Abnahme der kritischen Wirbelfrequenz bewirkt, besonders bei großen Exzentrizitäten. Bei $\gamma = 0.5$, steigt λ_{kr} bei weiterem Anstieg von ϵ bis zu einem Wert von 0.76. Danach sinkt λ_{kr} und erreicht einen minimalen Wert von 0,42. Bei $\gamma = 1$ ist eine relativ leichte Zunahme von λ_{kr} im Vergleich zum ersten Fall zu erkennen. Dabei liegt der maximale Wert bei 0,62 und der minimale bei 0,28. Wenn $\gamma = 2$ ist die kritische Wirbelfrequenz konstant bei $\epsilon < 0.5$ und nimmt bei größeren ϵ kontinuierlich ab.

4.4.2 Kritische Masse

Die kritische Masse entspricht der maximalen Masse, die das System dynamisch aufnehmen kann. Die dimensionlose kritische Masse wird wie folgt definiert:

$$\bar{M}_{kr} = \frac{M_{kr} C \omega^2}{2W} \quad (4.7)$$

Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass die kritische Masse bei Lager 1 mit steigender Exzentrizität zunimmt. Im Gegensatz dazu nimmt die dimensionlose kritische Masse bei Lager 2 ab, wenn $\varepsilon < 0.6$. Bei größeren ε nimmt der Wert von $\bar{M}_{kr}$ deutlich zu. Außerdem lässt sich feststellen, dass Lager 2 bei kleinen Exzentrizitäten eine größere Masse dynamisch aufnehmen kann im Vergleich zu Lager 1. Allerdings bei Exzentrizitäten höher 0,45, zeigt das Lager 1 eine bessere dynamische Lastaufnahme.

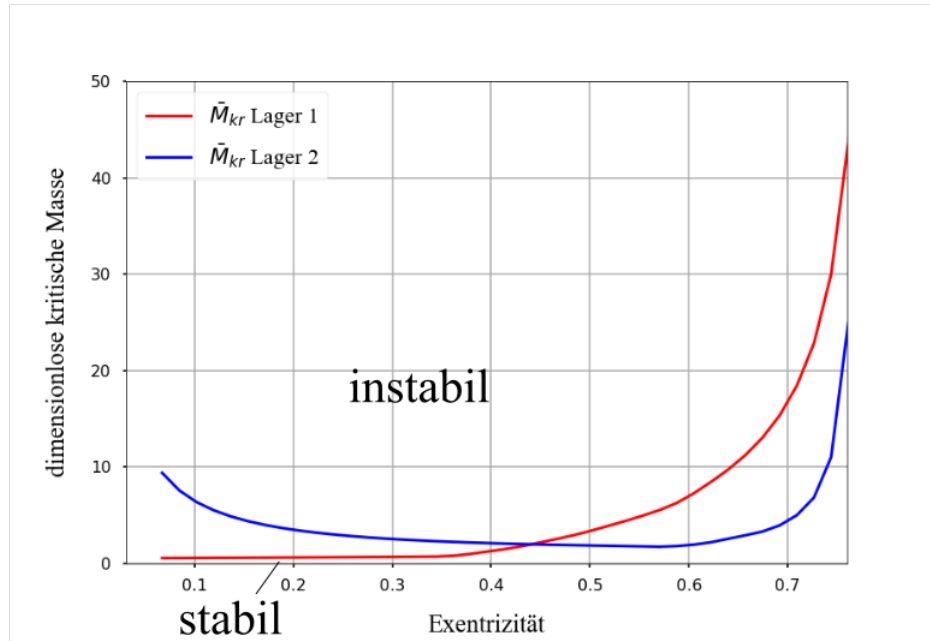


Abbildung 4.27: dimensionlose kritische Masse über die Exzentrizität

Abbildung 4.28, 4.29 und 4.30 stellt den Einfluss der verschiedenen Lagerparameter auf die kritische Masse in Abhängigkeit der Exzentrizität dar.

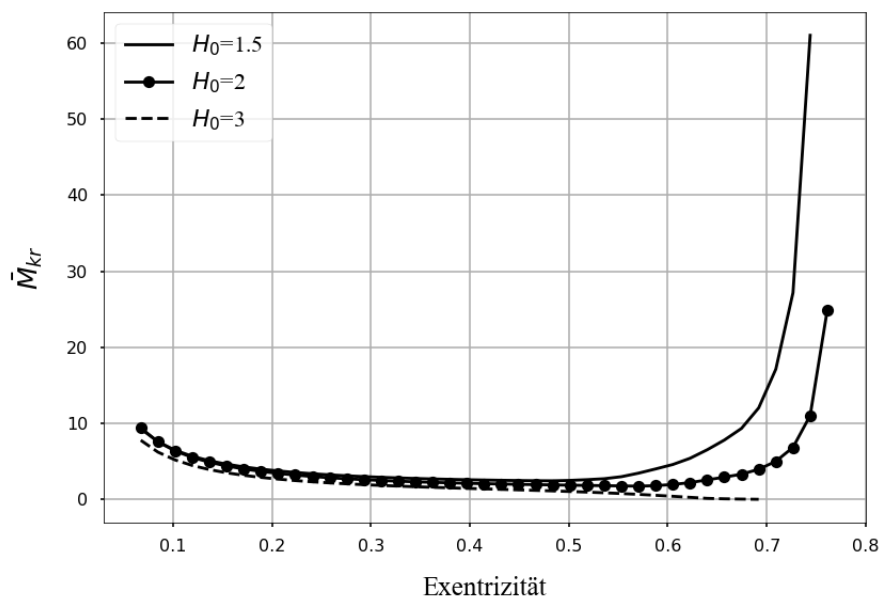


Abbildung 4.28: dimensionlose kritische Masse bei $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 1$ und unterschiedlichen H_0

Aus der Abbildung 4.28 ist ersichtlich, dass die kritische Masse mit zunehmendem H_0 kleiner wird. Für den Fall $H_0 = 1.5$ und $H_0 = 2$ ist die kritische Masse identisch für beiden Fälle, wenn die Exzentrizität klein ist. Die Erhöhung der Exzentrizität bewirkt eine Steigerung der Differenz zwischen beiden Fällen. Außerdem nimmt die kritische Masse in beiden Fällen bis ε , kleiner 0.5, kleiner 0.5. Bei weiterer Erhöhung von ε ist eine deutliche Zunahme der kritischen Masse zu erkennen. Im Gegensatz dazu nimmt die kritische Masse kontinuierlich ab, bis sie den Wert null bei $\varepsilon = 0.7$ erreicht, wenn $H_0 = 3$. Hierbei kann das System keine Masse dynamisch aufnehmen.

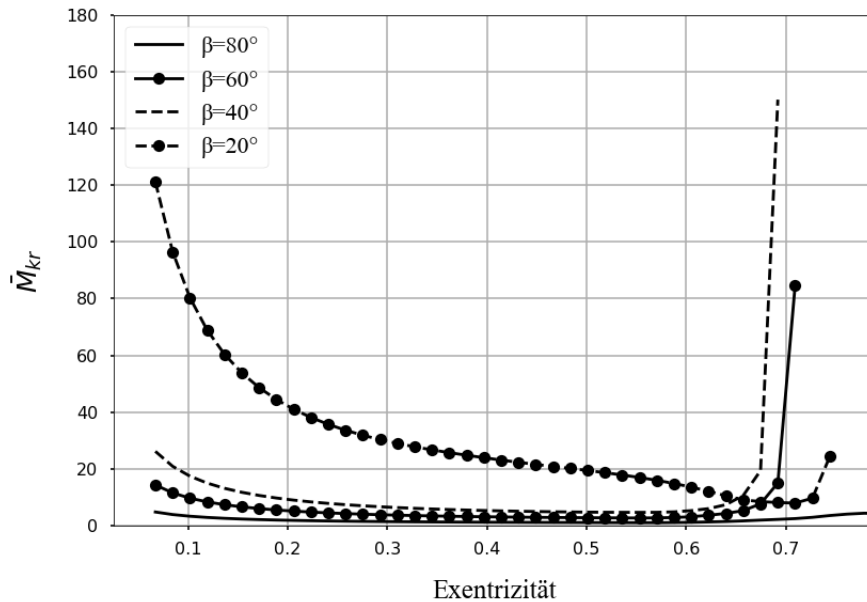


Abbildung 4.29: dimensionlose kritische Masse bei $H_0 = 2$, $\gamma = 1$ und unterschiedlichen β

Die Abbildung 4.29 zeigt den Verlauf der kritischen Masse bei verschiedenen Rillenkantenwinkeln. Es lässt sich feststellen, dass der Rillenkantenwinkel β einen großen Einfluss auf die Stabilität des Lager-Rotorsystems hat. Dabei führt die Erhöhung des Rillenkantenwinkels zu einer Abnahme der kritischen Massen, die das System dynamisch ausgleichen kann, wenn $\varepsilon < 0.65$ ist. Außerdem bewirkt eine Abnahme des Rillenkantenwinkels β von 40° auf 20° zu einer deutlichen Steigerung von $\bar{M}_{kr}$.

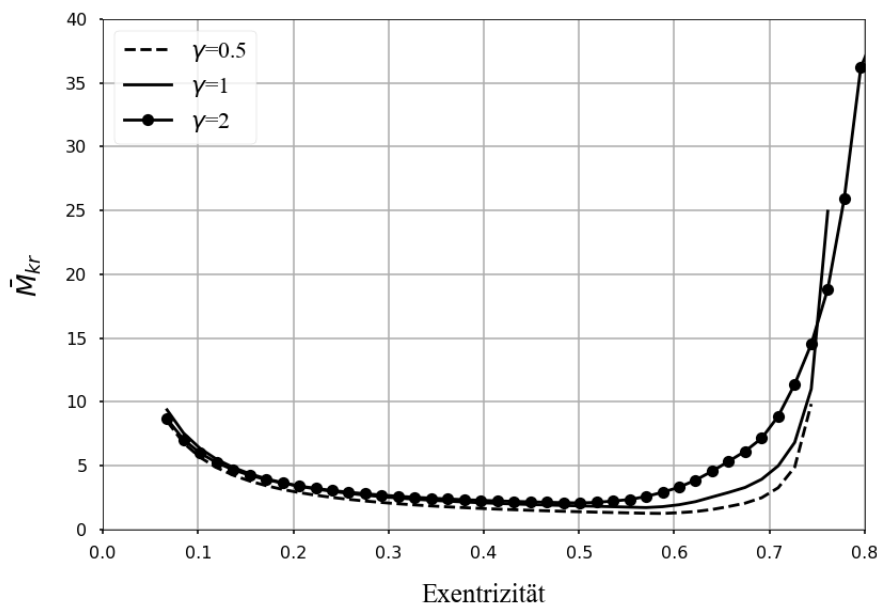


Abbildung 4.30: dimensionlose kritische Masse bei $\beta = 70^\circ$, $H_0 = 2$ und unterschiedlichen γ

Abbildung 4.30 stellt den Verlauf von $\bar{M}_{kr}$ bei unterschiedlichen γ dar. Dabei führt die Erhöhung von γ zu einer leichten Abnahme der kritischen Masse, wenn $\varepsilon < 0.6$. Bei größeren Exzentrizitäten wird der Einfluss von γ auf die kritische Masse stärker.

Mit Hilfe der in diesem Kapitel beschriebenen Ergebnisse lassen sich bestimmte Erkenntnisse herausstellen, die in 5 diskutiert werden. Außerdem ermöglicht die parametrische Analyse der statischen und dynamischen Lagereigenschaften eine bessere Auswahl der Lagerparameter anhand der Anwendung.

Kapitel 5

Diskussion

Im Rahmen dieser Masterarbeit wurden mathematische Modelle zur Modellierung von Radialrillengleitlager aufgebaut und anschließend in einer Auslegungssoftware implementiert.

Durch die Ergebnisse der Auslegungssoftware wird deutlich, dass sowohl die statischen als auch die dynamischen Eigenschaften von verschiedenen Lagerparametern (H_0, β, γ) beeinflusst werden. Diese Parameter spielen eine große Rolle zur Bestimmung der Stabilität des Systems. Im Falle einer statischen Belastung haben die Ergebnisse gezeigt, dass die Erhöhung der Exzentrizität zu einer Steigerung der Lagerkräfte und folglich der Lagertragfähigkeit führen. Dagegen nimmt der Schimmwinkel bei Erhöhung der Exzentrizität ab. Dies gilt jedoch für alle hydrodynamische Gleitlager. Außerdem wird der Einsatz von einem einfachen Gleitlager bevorzugt, wenn das Lager eine großen Last aufnehmen soll, da das normale Gleitlager eine höhere Lagertragfähigkeit im Vergleich zu Radialrillengleitlagern aufweist. Die parametrische Studie hat belegt, dass die Erhöhung des Tiefenverhältnisses H_0 zwischen Rille und Damm eine Verringerung der statischen Lagertragfähigkeit bewirkt. Des Weiteren führt die Vergrößerung des Rillenwinkels β zu einer Verbesserung der statischen Lagereigenschaften. Hinsichtlich das Breitenverhältnis γ nimmt die Lagertragfähigkeit bei Erhöhung von γ zu.

In Bezug auf die Annäherungsmodelle (Vohr/Chow und Bootsma) lässt sich aus den Ergebnissen der parametrischen Analyse interpretieren, dass die beiden Modelle nur zur Approximation der statischen Lagereigenschaften anzuwenden sind. Eine Optimierung anhand dieser Modelle kann allerdings nicht berücksichtigt werden, da die Abweichung zur analytischen Lösung stark von den Lagerparametern abhängt. Damit kann keine Aussage über die optimalen Lagerparameter für verbesserten Lagertragfähigkeit getroffen werden. Außerdem können anhand der beiden Annäherungsmodelle keine dynamischen Lagereigenschaften ermittelt werden. Deswegen kann auch keine Aussage über die Stabilität des Systems getroffen werden.

Im Falle eines dynamisch belasteten Gleitlagers, haben die Ergebnisse gezeigt, dass die dimensionslose Lagersteifigkeit und Dämpfung stark von der Exzentrizität abhängen. Im Vergleich zu Radialrillengleitlagern zeigen normale Gleitlager eine relativ höhere Steifigkeit und Dämpfung, wenn $\varepsilon > 0.4$. Das führt dazu, dass Radialrillengleitlager eine höhere Stabilitätsgrenze im Vergleich zu normalen Gleitlager aufweisen. Außerdem wird durch die Rillen der Kavitationsbereich im Schmierfilm bei gleicher Exzentrizität deutlich reduziert im Vergleich zu einfachen Gleitlager, was zu einer deutlichen Erhöhung der Stabilität führt. Grund dafür ist die Pumpwirkung der Rillen. Das Schmiermittel wird entlang der Rillen in das Gleitlager gepumpt, was zu einem Druckaufbau in diesem Bereich führt. Wenn das Lager bei hohen Drehzahlen und niedrigen Exzentrizität betrieben wird, wird dieser Druckaufbau die Fähigkeit der Welle, sich selbst zu zentrieren, wesentlich erhöhen. Deswegen wird der Einsatz von Radialrillengleitlagern für leichte Belastungsfälle und kleine Exzentrizitäten bevorzugt.

Durch die parametrische Analyse wurde festgestellt, dass die dynamischen Lagereigenschaften ebenfalls von den Lagerparameter beeinflusst werden. Dabei führt die Erhöhung des Tiefenverhältnisses H_0 zu einer Steigerung der direkten Lagersteifigkeit bei kleiner Exzentrizität. Allerdings nehmen die Dämpfungskoeffizienten leicht bei Erhöhung von H_0 ab, was auch für die Stabilitätsgrenze gilt. Außerdem bewirkt die Vergrößerung des Rillenwinkels eine Verringerung der direkten sowie der gekoppelten Steifigkeit des Lagers. Das Dämpfungsvermögen des Lagers wird jedoch verbessert, wenn der

Rillenwinkel vergrößert wird. Das führt dazu, dass der Stabilitätsbereich wesentlich größer wird, wenn β kleiner wird. In Bezug auf die Rillenbreite, lässt sich interpretieren, dass die maximale Steifigkeit bei $\gamma = 1$ zu erreichen ist, wenn die Exzentrizität klein ist. Außerdem wird die Lagerdämpfung durch Erhöhung von γ leicht verbessert. Allerdings ist lediglich eine leichte Abnahme der Stabilitätsgrenze zu erkennen, besonders bei kleinen Exzentrizitäten.

Aus der parametrischen Studie lassen sich für hydrodynamische Radiarillengleitlager die optimalen Parameter ableiten. Das hydrodynamische Radiarillengleitlager mit der Kombination $H_0 = 2$, $\beta = 40^\circ$ und $\gamma = 1$ ist für den Fall $\frac{L}{D} = 1$ und bei leichter Belastung zu bevorzugen.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der vorliegenden Arbeit war eine Auslegungssoftware für Radialrillengleitlager zu entwickeln, die sowohl die statischen als auch die dynamischen Lagereigenschaften in Abhängigkeit der Lagerparameter ermittelt. Aus diesem Grund wurden verschiedene mathematische Modelle aufgebaut, die die Strömung innerhalb des Schmierfilms beschreiben. Außerdem wurde die Entstehung von Turbulenzen während der Strömung durch Einführung eines Turbulenzmodells berücksichtigt. Dabei wurde das Constantinescu Modell und das Ng-Pan-Elrod Modell verglichen und anschließend das Ng-Pan-Elrod Modell in die Reynoldsgleichung eingeführt. Ein weiteres Phänomen ist die Entstehung von Kavitationszonen, die die Lagereigenschaften stark beeinflussen. Deswegen sollten die Kavitationzonen sorgfältig behandelt werden. Dabei wurde das Gümbel-Modell sowie das Swift-Stieber-Modell beschrieben und miteinander verglichen. Anschließend wurde das Swift-Stieber-Modell in die Reynoldsgleichung eingeführt.

Die mathematischen Modelle basieren hauptsächlich auf der Lösung der Reynoldsgleichung, die die Druckverteilung im Lagerspalt beschreibt. Aufgrund der komplexen Geometrie des Radialrillengleitlagers wurden zwei Annäherungsmodelle (Vohr und Chow Modell und Bootsma Modell) identifiziert, die eine Approximierung der statischen Lagereigenschaften durch vereinfachte Annahmen liefern. Diese beiden Modelle gelten sowohl für kompressible als auch für inkompressible Schmierstoffe. In Bezug auf das Vohr und Chow Modell wurde eine analytische und eine numerische Lösung vorgestellt. Dabei wurden bei der analytischen Lösung die Kompressibilitätseffekte des Fluids vernachlässigt. Dagegen wurden diese bei der numerischen Lösung berücksichtigt, um den Einfluss der Fluidkompressibilität auf die Lagereigenschaften zu beschreiben. Außerdem liefert das Vohr und Chow Modell eine Lagertragfähigkeit, die proportional zur Exzentrizität ist. Dagegen ist die Tragfähigkeit beim Bootsma Modell nicht linear anhängig von der Exzentrizität. Allerdings wurde noch eine linearisierte Lösung des Bootsma-Modells eingeführt, die unter Verwendung der Störungsmethode ermittelt wurde.

Um die resultierende Differentialgleichung zu lösen, wurde diese anhand der Finiten-Differenzen-Methode diskretisiert und anschließend in ein Python-basiertes Auslegungstool implementiert. Zusätzlich wurden zwei direkte Lösungen der Reynoldsgleichung für kompressible Fluide anhand zwei unterschiedlichen mathematischen Methoden vorgestellt. Zunächst wurde die Reynoldsgleichung anhand direkter Differentiation (DDM) mit der FDM diskretisiert. Dabei entsteht eine gekoppelte partielle Ableitung $\frac{\partial p}{\partial \xi \partial \eta}$, die im Vergleich zur direkten Ableitung einen relativ hohen Fehler aufweist. Daher wurde die lokale Integrationsmethode (LIM) verwendet, um den Diskretisierungsfehler zu vermeiden. Anschließend wurde eine Software in Python implementiert, die die Berechnung der Lagereigenschaften anhand der beschriebenen Modelle ermöglicht.

Um die berechneten Modelle zu validieren wurde ein einfaches Gleitlager und ein Radialrillengleitlager berechnet. Dabei wurden beide Lager statisch und dynamisch analysiert und anschließend miteinander verglichen, um die Besonderheiten des Radialrillengleitlagers aufzuzeigen. Nachdem die Lagereigenschaften ermittelt wurden, wurde eine Stabilität eines starren Lager-Rotorsystems untersucht. Außerdem wurde eine parametrische Studie des Radialrillengleitlagers durchgeführt, um die optimalen Lagerparameter für eine besseren Stabilität zu ermitteln.

Zusammenfassend lassen sich aus den Ergebnissen folgende Erkenntnisse herausstellen. Zunächst ist die Tragfähigkeit vom einfachen Gleitlager deutlich höher im Vergleich zu Radialrillengleitlagern.

Deswegen wird der Einsatz vom einfachen Gleitlager bei hohen Lasten bevorzugt. Dagegen weist das Radialrillengleitlager eine höhere Steifigkeit und Dämpfungsvermögen auf, wenn dieses bei kleinen Exzentrizitäten betrieben wird ($\varepsilon < 0.4$). Das führt dazu, dass Radialrillengleitlager eine bessere Stabilität haben. Grund dafür ist die Pumpwirkung der Rillen, die ein selbststabilisierenden Effekt hat.

Anhand der parametrischen Studie lassen sich die optimalen Lagerparameter ermitteln. In dem Fall, wo die Belastung gering ist und die Rotorstabilität von großer Bedeutung ist, wird Radialrillengleitlager mit den Parametern $H_0 = 2$, $\beta = 40$ und $\gamma = 1$ für $\frac{L}{D} = 1$ zu empfohlen.

Die vorliegende Methodik sowie die implementierte Software legen die Grundlage für weitere Forschungsansätze im Bereich von Radialrillengleitlagern. Im Hinblick auf das Schmiermittel könnten zusätzlich die Kompressibilitätseffekte untersucht werden, indem die vorliegenden Modelle für kompressible Fluide angepasst werden. Außerdem könnten andere Methoden zur Diskretisierung der Modelle verwendet werden. Beispielsweise die Finite-Elemente-Methode (Finite Element Methode (**FEM**)) oder die Finite-Volumen-Methode (Finite Volumen Methode (**FVM**)), um die Genauigkeit der Methoden zu vergleichen. Ein weiterer Ansatzpunkt wäre die ausführliche Modellierung der Kavitationszonen, sowie die Entwicklung von Methoden, die die Entstehung bzw. die Auswirkung dieser Phänomene reduzieren könnten. Zusätzlich könnten experimentelle Untersuchungen anhand neuer Technologien durchgeführt werden, die die Genauigkeit der Modelle besser bewerten.

Literaturverzeichnis

- [1] Bearings nizwa college of technology bearings introduction bearings, 03.01.2022. URL <https://slidetodoc.com/bearings-nizwa-college-of-technology-bearings-introduction-bearings/>.
- [2] Kegelrollenlager, 11.05.2018. URL <https://ht-engineering.de/Lager.html>.
- [3] Fundamentals of hydrodynamic bearings. In J. K. Wang and M. M. Khonsari, editors, *Thermohydrodynamic Instability in Fluid-Film Bearings*, pages 1–28. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK, 2016. ISBN 9780470059432. doi: \url{10.1002/9780470059432.ch1}.
- [4] Rolling element bearings. In R. X. Perez and H. P. Bloch, editors, *Pump Wisdom*, pages 51–70. Wiley, 2021. ISBN 9781119748182. doi: \url{10.1002/9781119748243.ch5}.
- [5] Rolling element bearings. In R. X. Perez and H. P. Bloch, editors, *Pump Wisdom*, pages 51–70. Wiley, 2021. ISBN 9781119748182. doi: \url{10.1002/9781119748243.ch5}.
- [6] Passive magnetic bearing system, pmbs, duraflux, centrifuges, flywheels, downhole rotating machines, active radial electromagnetic damper, rotating machines, radial dampers, radial bearings, stabilize rotordynamic modes, harsh environments, rotational energy dissipation, magnetic levitation — calnetix technologies, 28.12.2021. URL <https://www.calnetix.com/passive-magnetic-bearings>.
- [7] A. Adam, J. Haering, S. Rittmann, and M. Wilhelm. Plain bearings with a comprehensive range of applications. *MTZ worldwide*, 81(5):74–79, 2020. doi: \url{10.1007/s38313-020-0207-9}.
- [8] M. L. Adams. Hydrostatic bearings. In M. L. Adams, editor, *Bearings*, pages 191–212. CRC Press, Boca Raton : CRC Press, 2017., 2018. ISBN 9781315169798. doi: \url{10.1201/b22177-8}.
- [9] Alamy Limited. Set of drawing lines ball bearings with one cut outed where visible the inner parts on a white background. 3d rendering stock photo - alamy, 28.12.2021. URL <https://www.alamy.com/set-of-drawing-lines-ball-bearings-with-one-cut-outed-where-visible-the-inner-parts-on-a-white-background-3d-rendering-image364172147.html>.
- [10] Andreas Ludwig Krinner. *Multibody systems with lubricated contacts Cavitation, interface coupling, reduction and quasi-Newton techniques*. Dissertation, Technische Universität München, München, 2018-04-01.
- [11] Anton Dimroth, Helmut Soltner, Michael Butzek, Ghaleb Natour. Analytical solution for the smoothed pressure distribution in herringbone spiral grooved bearings with incompressible fluids, April 2021, Forschungszentrum Jülich.
- [12] T. Asada, H. Saitou, and D. Itou. Design of hydrodynamic bearing for mobile hdds. In *Digest of APMRC 2004, Asia-Pacific Magnetic Recording Conference 2004*, pages 40–41, Piscataway, NJ, 2004. IEEE Operations Center. ISBN 0-7803-8717-1. doi: \url{10.1109/APMRC.2004.1521940}.
- [13] D. Bonneau, A. Fatu, and D. Souchet. *Hydrodynamic Bearings*. John Wiley & Sons, Inc, Hoboken, NJ, USA, 2014. ISBN 9781119004769. doi: \url{10.1002/9781119004769}.
- [14] A. Bouzidane and M. Thomas. Equivalent stiffness and damping investigation of a hydrostatic journal bearing. *Tribology Transactions*, 50(2):257–267, 2007. ISSN 1040-2004. doi: \url{10.1080/10402000701309745}.
- [15] P. Brown. Ball bearings. *Scientific American*, 301(3):76, 2009. ISSN 0036-8733. doi: \url{10.1038/scientificamerican0909-76b}.

- [16] S.-K. Chen, H.-C. Chou, and Y. Kang. Stability analysis of hydrodynamic bearing with herringbone grooved sleeve. *Tribology International*, 55:15–28, 2012. ISSN 0301679X. doi: \url{10.1016/j.triboint.2012.05.015}.
- [17] C. Y. Chow and J. H. Vohr. Helical-grooved journal bearing operated in turbulent regime. *Journal of Lubrication Technology*, 92(2):346–357, 1970. ISSN 0022-2305. doi: \url{10.1115/1.3451407}.
- [18] R. Cross. Ball bearings and bearing balls. *American Journal of Physics*, 89(1):10, 2021. ISSN 0002-9505. doi: \url{10.1119/10.0002859}.
- [19] David P. Fleming und Bernard J. Hamrock. Optimization of self-acting herringbone journal bearings for maximum radial load capacity: Technical note.
- [20] H. Ding and C. Li. High-order finite difference methods for fractional partial differential equations. In G. Karniadakis, editor, *Numerical methods*, De Gruyter reference, pages 49–100. De Gruyter, Berlin and Boston, 2019. ISBN 9783110571684. doi: \url{10.1515/9783110571684-003}.
- [21] E. A. Muijderland, C. D. Roelandse, A. Vetter and P. Schreiber. *Diagnostic X-ray tube with spiral-groove bearings*.
- [22] H. Eggert and W. Kauschke, editors. *Structural Bearings*. Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, Berlin, Germany, 2012. ISBN 9783433601327. doi: \url{10.1002/9783433601327}.
- [23] H. FUJIWARA, T. KOBAYASHI, and K. FUJII. Dynamic analysis of radial needle roller bearings. *The Proceedings of Conference of Tokai Branch*, 2002.51(0):83–84, 2002. doi: \url{10.1299/jsmetokai.2002.51.83}.
- [24] B. Ghalamchi, J. T. Sopenan, and A. M. Mikkola. Dynamic model of spherical roller bearing. In *22nd Reliability, Stress Analysis, and Failure Prevention Conference - 25th Conference on Mechanical Vibration and Noise*, Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference - 2013, New York, NY, 2014. ASME. ISBN 978-0-7918-5599-7. doi: \url{10.1115/DETC2013-12102}.
- [25] A. O. Gorlenko, S. V. Davydov, and A. N. Erokhin. Tribodiagnostics spherical plain bearings. *Spravochnik. Inzhenernyi zhurnal*, pages 9–13, 2017. ISSN 0203347X. doi: \url{10.14489/hb.2017.12.pp.009-013}.
- [26] Hamrock, B. J. und Anderson, W. J. Rolling-element bearings: Nasa reference publication.
- [27] Q. Han, H.-w. Li, X. Men, X. Wang, and H. Zhao. Computational fluid dynamics analysis of hydrodynamic bearing clearances on hemolysis in a centrifugal blood pump. In *2015 International Conference on Fluid Power and Mechatronics (FPM)*, pages 1190–1194. IEEE, 82015. ISBN 978-1-4799-8770-2. doi: \url{10.1109/FPM.2015.7337299}.
- [28] G. G. Hirs. The load capacity and stability characteristics of hydrodynamic grooved journal bearings. *A S L E Transactions*, 8(3):296–305, 1965. ISSN 0569-8197. doi: \url{10.1080/05698196508972102}.
- [29] S.-W. Hong and V.-C. Tong. Rolling-element bearing modeling: A review. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 17(12):1729–1749, 2016. ISSN 2234-7593. doi: \url{10.1007/s12541-016-0200-z}.
- [30] Y. Ivannikov, A. Goriachkin, and D. Bragin. Cooling of an active magnetic bearing. *Hochschule der Elektromechanik*, 64(2):22–31, 2021. ISSN 01363360. doi: \url{10.17213/0136-3360-2021-2-22-31}.
- [31] J. Bootsma. *Liquid Lubricated Spiral groove Bearings*. PhD thesis, 1975.
- [32] R. Kosaka, T. Yamane, O. Maruyama, M. Nishida, T. Yada, S. Saito, and S. Hirai. Improvement of hemolysis in a centrifugal blood pump with hydrodynamic bearings and semi-open impeller. *Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. Annual International Conference*, 2007:3982–3985, 2007. ISSN 2375-7477. doi: \url{10.1109/IEMBS.2007.4353206}.
- [33] T. S. Lee, Y. G. Liu, and S. H. Winoto. Analysis of liquid-lubricated herringbone grooved journal bearings. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 14(3):341–365, 2004. ISSN 0961-5539. doi: \url{10.1108/09615530410517995}.

- [34] J. K. Martin. Hydrostatic journal bearings. In Q. J. Wang and Y.-W. Chung, editors, *Encyclopedia of Tribology*, pages 1774–1780. Springer US, Boston, MA, 2013. ISBN 978-0-387-92896-8. doi: \url{10.1007/978-0-387-92897-5.51}.
- [35] J. K. Martin and D. W. Parkins. Theoretical studies of a continuously adjustable hydrodynamic fluid film bearing. *Journal of Tribology*, 124(1):203–211, 2002. ISSN 0742-4787. doi: \url{10.1115/1.1396343}.
- [36] O. Matsushita, M. Tanaka, M. Kobayashi, P. Keogh, and H. Kanki. Basics of plain bearings. In O. Matsushita, M. Tanaka, M. Kobayashi, P. Keogh, and H. Kanki, editors, *Vibrations of Rotating Machinery*, Mathematics for Industry, pages 19–40. Springer Japan, Tokyo, 2019. ISBN 978-4-431-55452-3. doi: \url{10.1007/978-4-431-55453-0.2}.
- [37] M. M. Meerschaert, H.-P. Scheffler, and C. Tadjeran. Finite difference methods for two-dimensional fractional dispersion equation. *Journal of Computational Physics*, 211(1):249–261, 2006. ISSN 00219991. doi: \url{10.1016/j.jcp.2005.05.017}.
- [38] M. Miraskari, F. Hemmati, M. Y. Alqaradawi, and M. S. Gadala. Linear stability analysis of finite length journal bearings in laminar and turbulent regimes. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 231(10):1254–1267, 2017. ISSN 1350-6501. doi: \url{10.1177/1350650117691697}.
- [39] N. Miyanaga and J. Tomioka. Stability analysis of herringbone-grooved aerodynamic journal bearings for ultra high-speed rotations. *International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing*, 4(3):156–161, 2015. ISSN 17938198. doi: \url{10.7763/IJMMM.2016.V4.246}.
- [40] H. MORI, S. MIYATA, Y. ABE, and Y. FUJITA. Research on discontinuity of lubricant film in journal bearings : 1st report, bearing characteristics and lubricant film rupture. *Bulletin of JSME*, 10(42):1039–1047, 1967. ISSN 0021-3764. doi: \url{10.1299/jsme1958.10.1039}.
- [41] H. Nguyen-Schäfer. Cylinder roller bearings. In H. Nguyen-Schäfer, editor, *Computational Tapered and Cylinder Roller Bearings*, Springer eBook Collection, pages 41–71. Springer International Publishing, Cham, 2019. ISBN 978-3-030-05443-4. doi: \url{10.1007/978-3-030-05444-1.2}.
- [42] H. Nguyen-Schäfer. Tapered roller bearings. In H. Nguyen-Schäfer, editor, *Computational Tapered and Cylinder Roller Bearings*, Springer eBook Collection, pages 1–39. Springer International Publishing, Cham, 2019. ISBN 978-3-030-05443-4. doi: \url{10.1007/978-3-030-05444-1.1}.
- [43] Y. X. Qi and J. S. Feng. The load ratings of spherical plain bearings. *Wear*, 165(1):35–39, 1993. ISSN 00431648. doi: \url{10.1016/0043-1648(93)90369-W}.
- [44] T. V. V. L. N. Rao and J. T. Sawicki. Stability characteristics of herringbone grooved journal bearings incorporating cavitation effects. *Journal of Tribology*, 126(2):281–287, 2004. ISSN 0742-4787. doi: \url{10.1115/1.1645295}.
- [45] A. Rolink, G. Jacobs, T. Schröder, D. Keller, T. Jakobs, D. Bosse, J. Lang, and G. Knoll. Methodology for the systematic design of conical plain bearings for use as main bearings in wind turbines. *Forschung im Ingenieurwesen*, 85(2):629–637, 2021. ISSN 0015-7899. doi: \url{10.1007/s10010-021-00452-3}.
- [46] N. W. Sachs. Ball and roller bearings. In N. W. Sachs, editor, *Practical plant failure analysis*, pages 231–279. CRC Press, Boca Raton and London and New York, 2020. ISBN 9780429451041. doi: \url{10.1201/9780429451041-10}.
- [47] H. Saito and Y. Asaida. Development of hydrodynamic bearing for hdd. *The Proceedings of Conference of Tohoku Branch*, 2002.37(0):130–131, 2002. doi: \url{10.1299/jsmeth.2002.37.130}.
- [48] P. Samanta and H. Hirani. Magnetic bearing configurations: Theoretical and experimental studies. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(2):292–300, 2008. ISSN 0018-9464. doi: \url{10.1109/TMAG.2007.912854}.
- [49] P. Samanta and H. Hirani. On the evolution of passive magnetic bearings. *Journal of Tribology*, 144(4), 2022. ISSN 0742-4787. doi: \url{10.1115/1.4051815}.
- [50] T. S. Slininger, W. Chan, E. L. Severson, and B. Jawdat. An overview on passive magnetic bearings. In *2021 IEEE International Electric Machines & Drives Conference (IEMDC)*, pages 1–8. IEEE, 5172021. ISBN 978-1-6654-0510-2. doi: \url{10.1109/IEMDC47953.2021.9449571}.

- [51] B. Toulas. Magnetic bearings - the mechanical engineer's guide - engineeringclicks. *EngineeringClicks*, 2019-10-21. URL <https://www.engineeringclicks.com/magnetic-bearing/>.
- [52] J. H. Vohr and C. Y. Chow. Characteristics of herringbone-grooved, gas-lubricated journal bearings. *Journal of Basic Engineering*, 87(3):568–576, 1965. ISSN 0021-9223. doi: \url{10.1115/1.3650607}.
- [53] F. Wardle. Ball bearings. In *Ultra-Precision Bearings*, pages 37–146. Elsevier, 2015. ISBN 9780857091628. doi: \url{10.1533/9780857092182.37}.
- [54] B. Wilson. New spherical roller bearings. *Industrial Lubrication and Tribology*, 47(5):3–4, 1995. ISSN 0036-8792. doi: \url{10.1108/00368799510097907}.
- [55] M. Xu and W. Chen. Study on the performance of liquid metal lubricated v-groove bearing considering turbulence. *Applied Sciences*, 11(3):940, 2021. doi: \url{10.3390/app11030940}.
- [56] T. Yamane. Selection of bearing types: A key to durability. In T. Yamane, editor, *Mechanism of Artificial Heart*, pages 23–31. Springer Japan, Tokyo, 2016. ISBN 978-4-431-55829-3. doi: \url{10.1007/978-4-431-55831-6_4}.
- [57] X. Yang, W. Liu, H. Liu, X. Liu, and L. Zeng. A review on hydrostatic bearing: Research and analysis. *Recent Patents on Engineering*, 15, 2021. ISSN 18722121. doi: \url{10.2174/1872212115666210622144420}.
- [58] Y. Zhang. A finite difference method for fractional partial differential equation. *Applied Mathematics and Computation*, 215(2):524–529, 2009. ISSN 00963003. doi: \url{10.1016/j.amc.2009.05.018}.

Anhang A

Koeffizienten des Vohr und Chow Modells

$$p_0(z) = p_a + \frac{1}{\Delta R^2} \left(\frac{\alpha(1-\alpha)6\mu(u_p - u_g)(H_0 - 1)(H_0^3 - 1)\sin\beta\cos\beta}{\alpha(1-\alpha)(H_0^3 - 1)^2\sin^2\beta + H_0^3} \right) z$$

$$C_1 = \frac{H_0^3 + \alpha(1-\alpha)(H_0^3 - 1)^2\sin^2\beta}{\alpha + (1-\alpha)H_0^3} \left(\frac{r}{L} \right) \frac{p_0(z)}{p_a}$$

$$C_2 = \frac{\alpha(1-\alpha)\sin\beta\cos\beta(H_0^3 - 1)(H_0 - 1)}{\alpha + (1-\alpha)H_0^3}$$

$$C_3 = \frac{2\alpha(1-\alpha)\sin\beta\cos\beta(H_0^3 - 1)^2}{\alpha + (1-\alpha)H_0^3} \frac{p_0(z)}{p_a}$$

$$C_4 = \left(\frac{2(\alpha(1-\alpha)\sin\beta\cos\beta)^2(H_0^3 - 1)^3(H_0 - 1)}{\alpha + (1-\alpha)H_0^3(H_0^3 + \alpha(1-\alpha)\sin\beta^2(H_0^3 - 1)^2)} + \frac{\alpha(1-\alpha)\sin\beta^2(H_0^3 - 1)(H_0 - 1)}{\alpha + (1-\alpha)H_0^3} \right) \cdot \left(\frac{L}{R} \right) \Lambda - \left(1 - \frac{2\omega_w}{\omega_g + \omega_r} \right) (1 - \alpha + \alpha H_0) \left(\frac{L}{R} \right) \Lambda$$

$$C_5 = \frac{H_0^3 + \alpha(1-\alpha)\cos^2\beta(H_0^3 - 1)^2}{\alpha + (1-\alpha)H_0^3} \left(\frac{L}{r} \right) \frac{p_0(z)}{p_a}$$

$$C_6 = \frac{p_0(z)}{p_a} \left[\left(\frac{-3\alpha(1-\alpha)(H_0 - 1)^2\sin^2\beta\left(\frac{L}{r}\right)\Lambda}{(\alpha + (1-\alpha)H_0^3)^2} \right) \right.$$

$$\cdot \left(\frac{\alpha(1-\alpha)(H_0^3 - 1)^2\cos^2\beta((1-\alpha)H_0^2(H_0^2 + H_0 - 1) - \alpha(H_0^2 - H_0 - 1))}{H_0^3 + \alpha(1-\alpha)(H_0^3 - 1)^2\sin^2\beta} - H_0^2 \right)$$

$$\left. + \Lambda \left(\frac{L}{r} \right) \left(1 - \frac{2\omega_w}{\omega_r + \omega_g} \right) \right]$$

$$C_7 = \frac{3(H_0^3 - 1)(H_0^2 - 1)\left(\frac{R}{L}\right)}{\alpha + (1-\alpha)H_0^3} \left(\frac{\alpha(1-\alpha)(H_0 - 1)\left(\frac{L}{R}\right)\Lambda\sin\beta\cos\beta}{H_0^3 + \alpha(1-\alpha)(H_0^3 - 1)^2\sin\beta^2} \right)^2 (H_0^2(H_0^2 + 1) + \alpha(1-\alpha)(H_0^3 - 1)^2\sin\beta^2)$$

Anhang B

Koeffizienten des Jan Bootsma Modells

$$\begin{aligned}
 I_j &= \frac{\gamma H r^j + (H_0 + H_r)^j}{1 + \gamma} \\
 A &= \cos^2(\alpha) I_3 + \sin^2(\alpha) \frac{1}{I_{-3}} \\
 B &= \sin(\alpha) \cos(\alpha) \left(I_3 - \frac{1}{I_{-3}} \right) \\
 C &= \sin^2(\alpha) I_3 + \cos^2(\alpha) \frac{1}{I_{-3}} \\
 F &= (\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_g) \left(\sin^2(\alpha) \frac{I_{-2}}{I_{-3}} + \cos^2(\alpha) I_1 \right) + 2(\bar{\omega}_g - \bar{\omega}_w) I_1 \\
 G &= (\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_g) \sin(\alpha) \cos(\alpha) \left(I_1 - \frac{I_{-2}}{I_{-3}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_j &= \frac{\gamma + (H_0 + 1)^j}{1 + \gamma} \\
 A_0 &= A \\
 B_0 &= B \\
 C_0 &= C \\
 G_0 &= G \\
 B_1 &= \sin(\alpha) \cos(\alpha) \left(I_2 - \frac{I_{-4}}{I_{-3}^2} \right) \\
 C_1 &= 3 \sin^2(\alpha) I_2 + 3 \cos^2(\alpha) \frac{I_{-4}}{I_{-3}^2} \\
 F_1 &= \bar{\omega}_p + \bar{\omega}_g - 2\bar{\omega}_w + 3(\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_g) \sin^2(\alpha) \left(\frac{I_{-2} I_{-4}}{I_{-3}^2} - 1 \right) \\
 G_1 &= 3(\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_g) \sin(\alpha) \cos(\alpha) \left(1 - \frac{I_{-2} I_{-4}}{I_{-3}^2} \right) \\
 E &= \frac{1}{A_0} \left(B_1 \frac{G_0}{C_0} - F_1 \right) \\
 \lambda &= \frac{1}{C_0} \sqrt{\frac{I_3}{I_{-3}}} \\
 \nu &= \frac{B_0}{C_0} \\
 g_{11} &= \frac{C_0 G_1 - C_1 G_0}{C_0^2}
 \end{aligned}$$

Anhang C

Software-Code

Input-File

```
#Import notwendige Module
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use('seaborn-poster')
from scipy.sparse import csc_matrix
from scipy.sparse.linalg import spsolve
from scipy.integrate import simp
from scipy import sparse
from scipy.sparse import csr_matrix
from scipy.sparse import diags
from matplotlib.ticker import MaxNLocator
from mpl_toolkits.mplot3d.axes3d import Axes3D
from mpl_toolkits.mplot3d import proj3d
import matplotlib.font_manager as font_manager
csfont = {'fontname': 'Times New Roman'}
font = font_manager.FontProperties(family='Times New Roman',
                                  style='normal', size=23)

#Import Lagergeometrie

ng=                                #Rillenanzahl
n=6*ng+1                          #Anzahl der Knotenpunkte
L=                                #Lagerlaenge
Beta=                              #Rillenwinkel
R=                                #Lagerradius
D=                                #Lagerdurchmesser
C_r=                              #Lagerspalt
hg=                                #Rillentiefe

gamma=                             #Breitenverhaeltnis
H0=(hg+C_r)/C_r                   #Berechnung des Tiefenverhaeltnises
H0b=H0-1                          #Tiefenverhaeltnis nach Bootsma

#Schmierstoffeigenschaften
Visk=                              #Viskositaet
rho=                              #Dichte
Pa=                                #Umgebungsdruck in Pa
Pc=                                #Kavitationsdruck in Pa
Norm_p=(1/(Visk*Drehzahl))*(C_r/R)**2
pc=Pc*Norm_p                      #normierung des Kavitationsdruck

#Dynamik
```

```

Drehzahl=                #Rotorwinkelgeschwindigkeit in rad/s
omega1=0                 #Winkelgeschwindigkeit des gerillten Gleitpartners
omega2=                  #Winkelgeschwindigkeit des Glatten Gleitpartners
omega3=                  #Wirbelgeschwindigkeit
omega=abs(omega2-omega1) #Geschwindigkeitsdifferenz

U1=R*omega2              #Geschwindigkeit des gerillten Gleitpartner
V1=R*omega1              #Geschwindigkeit des glatten Gleitpartner

```

Schmierfilmdicke

```

from Input import*

def Film_thickness(epsilon):

    alpha=1/(gamma+1)      #Breite der Rille

    Pair=2*math.pi/ng     #Rille -Damm- Paar
    #Computentional Domaene
    xi = np.linspace(1/np.tan(Beta), (2*math.pi)+1/np.tan(Beta), n)
    y = np.linspace(0,1, n)
    eta=y/np.sin(Beta)

    #Fluidfilm thickness
    h_g=np.zeros((n,n))    #Rillenbereich
    h_r=np.zeros((n,n))    #Dammbereich
    h=np.zeros((n,n))

    for i in range(0,n):
        for j in range(0,n):
            h_r[i,j]=1+epsilon*np.cos(xi[i]-eta[j]*np.cos(Beta))
            h_g[i,j]=(hg/C_r)+1+epsilon*np.cos(xi[i]-eta[j]*np.cos(Beta))

    for i in range(0,n):
        for j in range(0,n):

            for k in range(-1,ng+1):

                if k*Pair+1/np.tan(Beta)-0.0001<abs(xi[i])<
                (k+alpha)*Pair+1/np.tan(Beta)-0.0001:
                    h[i,j]=h_g[i,j]

                if (k+alpha)*Pair+1/np.tan(Beta)-0.0001<abs(xi[i])<
                (k+1)*Pair+1/np.tan(Beta)-0.0001:
                    h[i,j]=h_r[i,j]

    #Koordinatenruecktransformation
    xv, yv = np.meshgrid(eta, xi)
    Dreh=np.zeros((n*n,3))    #Drehmatrix

    for i in range(0,n):
        for j in range(0,n):
            for k in range(0,n):
                Dreh[i+j*n,0]=xv[i,j]
                Dreh[i+j*n,1]=yv[i,j]
                Dreh[i+j*n,2]=h[i,j]

```

```

New=np.zeros_like(Dreh)
for i in range (0,n):
    for j in range (0,n):
        for k in range (0,n):
            New[i+j*n,1]=Dreh[i+j*n,1]-Dreh[i+j*n,0]*np.cos(Beta)
            New[i+j*n,0]=Dreh[i+j*n,0]*np.sin(Beta)
            New[i+j*n,2]=Dreh[i+j*n,2]

xv_new=np.zeros_like(xv)
yv_new=np.zeros_like(yv)
h_new=np.zeros_like(h)

for i in range (0,n):
    for j in range (0,n):
        for k in range (0,n):
            xv_new[i,j]=New[i+j*n,0]
            yv_new[i,j]=New[i+j*n,1]
            h_new[i,j]=New[i+j*n,2]

#Spiegelung der Schmierfilmdicke ueber die Symmetrieachse
h1=np.flip(h_new,1)

h2=np.hstack((h1,h_new))

y1=xv_new-1

yv_new=yv_new*180/math.pi

y2=np.hstack((y1,xv_new))
x1=np.flip(yv_new,1)
x2=np.hstack((x1,yv_new))

fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')

#Skallierung des Koorsdinatensystems
x_scale=2
y_scale=3.5
z_scale=2

scale=np.diag([x_scale, y_scale, z_scale, 1.0])
scale=scale*(1.0/scale.max())
scale[3,3]=1.0

def short_proj():
    return np.dot(Axes3D.get_proj(ax), scale)

ax.get_proj=short_proj

ax.plot_surface(y2, x2, h2,cmap='coolwarm', edgecolor='none')
csfont = {'FONTNAME': 'Times New Roman'}
ax.set_xlabel(" Dimensionlose Laenge",labelpad=40,fontsize=25,**csfont)
ax.set_ylabel(" Winkelkoordinate ",labelpad=70,fontsize=25,**csfont)
ax.set_zlabel(" Dimensionlose Fluidfilmdicke",rotation='horizontal',labelpad=54,
fontsize=25,**csfont)

ax.xaxis.set_tick_params(labelsize=20)
ax.xaxis.set_major_locator(MaxNLocator(5))
ax.yaxis.set_tick_params(labelsize=20)
ax.yaxis.set_major_locator(MaxNLocator(5))

```

```

ax.zaxis.set_tick_params(pad=25, labelsize=20)
ax.zaxis.set_major_locator(MaxNLocator(5))
ax.view_init(30, -20)
plt.show()
return fig

```

Modell für normale Gleitlager

```

from Input import*

def normales_Gleitlager(epsilon):
#Kartesische Koordinaten
    theta = np.linspace(0, 2*math.pi, n )
    delta_theta=theta[1]-theta[0]
    y = np.linspace(0,1, n)
    delta_y=y[1]-y[0]

#Schmierfilmdicke
    h=np.zeros((n,n))
    dh3=np.zeros((n,n))
    dh=np.zeros((n,n))

    for i in range (0,n):

        h[i,:]=1+epsilon*np.cos(theta[i])          #Schmierfilmdickenfunction
        dh3[i,:]=-3*epsilon*np.sin(theta[i])*np.power(h[i,:],2)      #Ableitung h^3
        dh[i,:]=-epsilon*np.sin(theta[i])          #Ableitung h

#Erstellung der Diagonalmatrizen
#Dx
#i+1
    a1=diags(np.ones(n*n-n),n).toarray()

#Periodic Boudary
    a2=diags(np.ones(2*n),-n*(n-2)).toarray()
    for i in range(0,n):
        a2[:,i]=0
#-i-1
    a3=diags(-1*np.ones(n*n-n),-n).toarray()
#Periodic Boundary
    a4=diags(-1*np.ones(2*n),n*(n-2)).toarray()

    for i in range(0,n):
        a4[:, -i-1]=0

#Dx(i+1-i-1)

    a=a1+a2+a3+a4

#End-Discharge Boundary
    for i in range (1,n):

        a[i*n,:]=0

    a[0,:]=0

#Dx2
#i+1

```

```

b1=diags(np.ones(n*n-n),n).toarray()

#Periodic Boudary
b2=diags(np.ones(2*n),-n*(n-2)).toarray()
for i in range(0,n):
    b2[:,i]=0
#i-1
b3=diags(np.ones(n*n-n),-n).toarray()
#Periodic Boundary
b4=diags(np.ones(2*n),n*(n-2)).toarray()

for i in range(0,n):
    b4[:, -i-1]=0

#Dx2(i+1-i-1)

b=b1+b2+b3+b4

#End-Discharge Boundary
for i in range(1,n):

    b[i*n,:]=0

b[0,:]=0

b5=diags(-2*np.ones(n*n),0).toarray()

b=b+b5

#dy
c1=diags(np.ones(n*n-1),1).toarray()
c2=diags(-1*np.ones(n*n-1),-1).toarray()

for i in range(1,n+1):
    c1[i*n-1,:]=0
    c1[i*n-1,i*n-2]=1
c=c1+c2

for i in range(1,n):

    c[i*n,:]=0

c[0,:]=0

#Dy2

d1=diags(np.ones(n*n-1),1).toarray()
d2=diags(np.ones(n*n-1),-1).toarray()

for i in range(1,n+1):
    d1[i*n-1,:]=0
    d1[i*n-1,i*n-2]=1
d=d1+d2

for i in range(1,n):

```

```

d[i*n,:]=0

d[0,:]=0

d3=diags(-2*np.ones(n*n),0).toarray()

d=d+d3

#Berechnung der mittleren Reynoldszahl
Re=rho*R*Drehzahl*1.5*C_r/Visk
kx=12
kz=12

#Bedingung fuer das Turbulenzmodel
if Re>2000:
    kx=12+0.0136*Re**0.9
    kz=12+0.0043*Re**0.98

A=dh3/(2*kx*delta_theta)
B=np.power(h,3)*1/((delta_theta**2)*kx)
E=((D/L)**2)*np.power(h,3)*1/((delta_y**2)*kz)
M=0.5*dh

A_i=np.zeros_like(a)

B_i=np.zeros_like(a)
D_i=np.zeros_like(a)

for i in range(0,n):
    for j in range(0,n):
        A_i[j+i*n]=A[i,j]*a[j+i*n]
        B_i[j+i*n]=B[i,j]*b[j+i*n]
        D_i[j+i*n]=E[i,j]*d[j+i*n]

Diag=A_i+B_i+D_i

M=np.reshape(M,(n*n))

p=spsolve(Diag, M)      #Loesung des Gleichungssystems
p=np.resize(p,(n,n))   #Vektor zu 2D-Matrix

p1=np.flip(p,1)        #Spiegelung der Druckverteilung
p0=np.hstack((p,p1))   #Zusammenfuegen der Druckverteilung

#Kavitationsbedingung
for i in range(0,n):
    for j in range(0,2*n):
        if p0[i,j]<=pc:
            p0[i,j]=pc
#dimensionbehaftet
p0=p0*Drehzahl*Visk*(R/C_r)**2

y = np.linspace(0,2, 2*n)      #gesamte Lagerlaenge

#Berechnung der statischen Eigenschaften

wx=np.zeros_like(p0)
wy=np.zeros_like(p0)

for i in range(0,n):
    wx[i,:]=p0[i,:]*np.cos(theta[i])

```

```

wy[i,:]=p0[i,:]*np.sin(theta[i])

Wx=simps(wx,y)

Wy=simps(wy,y)

Fr=-R*0.5*L*simps(Wx,theta)    #radiale Kraft
Ft=R*0.5*L*simps(Wy,theta)    #tangentielle Kraft

W=np.sqrt((Ft**2)+(Fr**2))    #Lagertragfaehigkeit

#Berechnung der dynamischen Drucke

#Imaginaerteil von p1
M1_im=np.zeros((n,n))
for i in range(n):
    for j in range(n):

        M1_im[i,j]=(omega3/Drehzahl)*np.cos(theta[i])
M1_im=np.reshape(M1_im,(n*n))

p1_im=spsolve(Diag, M1_im)
p1_im=np.resize(p1_im,(n,n))

p1=np.flip(p1_im,1)
p1_im=np.hstack((p1_im,p1))

for i in range(0,n):
    for j in range(0,2*n):
        if p1_im[i,j]<=pc:
            p1_im[i,j]=pc
p1_im=p1_im*Drehzahl*Visk*(R/C_r)**2

Dx=np.zeros_like(p0)
Dy=np.zeros_like(p0)

for i in range(0,n):
    Dx[i,:]=p1_im[i,:]*np.cos(theta[i])
    Dy[i,:]=p1_im[i,:]*np.sin(theta[i])

Dxx=-R*0.5*L*simps(simps(Dx,y),theta)/(Drehzahl*C_r)
Dyx=-R*0.5*L*simps(simps(Dy,y),theta)/(Drehzahl*C_r)

#Imaginaerteil von p2
M2_im=np.zeros((n,n))
for i in range(n):
    for j in range(n):
        M2_im[i,j]=(omega3/Drehzahl)*np.sin(theta[i])
M2_im=np.reshape(M2_im,(n*n))

p2_im=spsolve(Diag, M2_im)
p2_im=np.resize(p2_im,(n,n))

p1=np.flip(p2_im,1)
p2_im=np.hstack((p2_im,p1))

```

```

for i in range (0,n):
    for j in range (0,2*n):
        if p2_im[i,j]<=pc:
            p2_im[i,j]=pc

p2_im=p2_im*Drehzahl*Visk*(R/C_r)**2

Dx2=np.zeros_like(p0)
Dy2=np.zeros_like(p0)

for i in range (0,n):
    Dx2[i,:]=p2_im[i,:]*np.cos(theta[i])
    Dy2[i,:]=p2_im[i,:]*np.sin(theta[i])

Dxy=-R*0.5*L*simps(simps(Dx2,y),theta)/(Drehzahl*C_r)
Dyy=-R*0.5*L*simps(simps(Dy2,y),theta)/(Drehzahl*C_r)

phi=np.arctan(abs(Ft/Fr))

#Transformation von Stoerungskoordinaten in x-y
Dxx1=np.cos(phi)*(Dxx*np.cos(phi)-Dyx*np.sin(phi))-np.sin(phi)*(Dxy*np.cos(phi)
-Dyy*np.sin(phi))
Dxy1=np.sin(phi)*(Dxx*np.cos(phi)-Dyx*np.sin(phi))+np.cos(phi)*(Dxy*np.cos(phi)
-Dyy*np.sin(phi))
Dyx1=np.cos(phi)*(Dxx*np.sin(phi)+Dyx*np.cos(phi))-np.sin(phi)*(Dxy*np.sin(phi)
+Dyy*np.cos(phi))
Dyy1=np.sin(phi)*(Dxx*np.sin(phi)
+Dyx*np.cos(phi))+np.cos(phi)*(Dxy*np.sin(phi)+Dyy*np.cos(phi))

return Fr, Ft, W,Dxx1,Dxy1,Dyx1,Dyy1

#Steifigkeit_koeffizienten
Epsilon=np.linspace(0.05,0.9,30)

delta_epsilon=Epsilon[1]-Epsilon[0]
Ergebnis=((([0])*np.shape(Epsilon)[0]))

for i in range(np.shape(Epsilon)[0]):
    Ergebnis[i]=normales_Gleitlager(Epsilon[i])

W=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
Ft=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
Fr=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
dFt=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
dFr=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
phi=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])

#Kraftgradient ueber Exzentricitaet

for i in range(0,np.shape(Epsilon)[0]):
    W[i]=Ergebnis[i][2]
    Ft[i]=Ergebnis[i][1]
    Fr[i]=Ergebnis[i][0]
for i in range(1,np.shape(Epsilon)[0]-1):
    dFt[i]=(Ft[i+1]-Ft[i-1])/(2*delta_epsilon*C_r)
    dFr[i]=abs((Fr[i+1]-Fr[i-1])/(2*delta_epsilon*C_r))

```

```

dFt[np.shape(Epsilon)[0]-1]=(Ft[np.shape(Epsilon)[0]-1]
-Ft[np.shape(Epsilon)[0]-2])/(delta_epsilon*C_r)
dFr[np.shape(Epsilon)[0]-1]=abs((Fr[np.shape(Epsilon)[0]-1]
-Fr[np.shape(Epsilon)[0]-2])/(delta_epsilon*C_r))

dFt[0]=(Ft[1]-Ft[0])/(delta_epsilon*C_r)
dFr[0]=abs((Fr[1]-Fr[0])/(delta_epsilon*C_r))

for i in range(0,np.shape(Epsilon)[0]):
    phi[i]=np.arctan(Ft[i]/abs(Fr[i]))

Kxx=dFr*(np.cos(phi)**2)+dFt*np.cos(phi)*np.sin(phi)
Kxy=dFt*(np.sin(phi)**2)+dFr*np.cos(phi)*np.sin(phi)
Kyx=-dFt*(np.cos(phi)**2)+dFr*np.cos(phi)*np.sin(phi)-(W/(Epsilon*C_r))*np.sin(phi)
Kyy=dFr*(np.sin(phi)**2)-dFt*np.cos(phi)*np.sin(phi)+(W/(Epsilon*C_r))*np.cos(phi)

#Normierung der Steifigkeitskoeffizienten
Kxx=Kxx*C_r/W
Kxy=Kxy*C_r/W
Kyx=Kyx*C_r/W
Kyy=Kyy*C_r/W

#Daempfungskoeffizient
Dxx=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
Dxy=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
Dyx=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
Dyy=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
for i in range(1,np.shape(Epsilon)[0]):
    Dxx[i]=Ergebnis[i][3]
    Dxy[i]=Ergebnis[i][4]
    Dyx[i]=Ergebnis[i][5]
    Dyy[i]=Ergebnis[i][6]

#Normierung der Daempfungskoeffizienten
Dxx=Dxx*C_r*Drehzahl/W
Dxy=Dxy*C_r*Drehzahl/W
Dyx=Dyx*C_r*Drehzahl/W
Dyy=Dyy*C_r*Drehzahl/W

#Instabilitaetsgrenze
K_eq=np.zeros_like(Epsilon)

for i in range(np.shape(Epsilon)[0]):
    K_eq[i]=(Kxx[i]*Dyy[i]+Kyy[i]*Dxx[i]-Kxy[i]*Dyx[i]-Kyx[i]*Dxy[i])/(Dxx[i]+Dyy[i])

#kritische Wirbelfrequenz
omega_kr=np.zeros_like(Epsilon)

for i in range(np.shape(Epsilon)[0]):
    omega_kr[i]=np.sqrt(((K_eq[i]-Kxx[i])*(K_eq[i]-Kyy[i])-Kxy[i]*Kyx[i])
/(Dxx[i]*Dyy[i]-Dxy[i]*Dyx[i]))

#Kritische Masse
M_kr=np.zeros_like(Epsilon)

for i in range(np.shape(Epsilon)[0]):
    M_kr[i]=K_eq[i]/(omega_kr[i]**2)

```

Linearer Ansatz von Bootsma

```

from Input import*                                #import Input-Datei

def Bootsma_linear(Epsilon,beta,H0,gamma):        #Funktion definieren
    omega3=0
    H0b=H0-1
    Ld=L/D                                         #Laengen-Durchmesser verhaeltnis

#Koeffizienten definieren
    def I(j):
        I=(gamma+(H0b+1)**j)/((1+gamma))
        return I

#Koeffizienten

    A0=(np.cos(beta)**2)*I(3)+(np.sin(beta)**2)*(1/I(-3))

    B0=np.sin(beta)*np.cos(beta)*(I(3)-(1/I(-3)))

    C0=(np.sin(beta)**2)*I(3)+(np.cos(beta)**2)*(1/I(-3))

    G0=((omega2-omega1)/omega)*np.sin(beta)*np.cos(beta)*(I(1)-(I(-2)/I(-3)))

    B1=3*np.sin(beta)*np.cos(beta)*(I(2)-(I(-4)/(I(-3)**2)))

    C1=3*(np.sin(beta)**2)*I(2)+3*(np.cos(beta)**2)*I(-4)/(I(-3)**2)

    F1=(omega2/omega)+(omega1/omega)-2*omega3+3*((omega2-omega1)/omega)
    *(np.sin(beta)**2)*((I(-2)*I(-4)/(I(-3)**2))-1)

    G1=3*((omega2-omega1)/omega)*np.sin(beta)*np.cos(beta)*(1-(I(-2)*I(-4)
    /(I(-3)**2)))

    E=(1/A0)*((B1*G0/C0)-F1)

    Lambda=(1/C0)*np.sqrt(I(3)/I(-3))

    v=B0/C0

    g11=(C0*G1-C1*G0)/(C0**2)

#Lagerkraefte

    Fr=-12*math.pi*(g11/((Lambda**2)+v**2))*(1-(np.cos(v*Ld)/np.cosh(Lambda*Ld)))

    Ft=-12*math.pi*(((v**2)-(Lambda**2))*E+v*g11)
    *np.sinh(Lambda*Ld)-Lambda*(g11+2*v*E)*np.sin(v*Ld)
    /(Lambda*((Lambda**2)+(v**2))*np.cosh(Lambda*Ld))+E*Ld

    W=np.sqrt((Fr**2)+(Ft**2)) #Load Capacity Bootsma

#Dimensionsbehaftete Groessen

    W=W*Epsilon*Visk*Drehzahl*(R**4)/(C_r**2)

    Fr=Epsilon*Fr*Visk*Drehzahl*(R**4)/(C_r**2)

    Ft=Epsilon*Ft*Visk*Drehzahl*(R**4)/(C_r**2)

    return Fr,Ft,W

```

Numerische Lösung des Bootsma-Modells

```

from Input import*                                #Input-Datei einbinden

def Bootsma_numerisch(Epsilon,beta,H0,gamma):
    H0b=H0-1                                       #Tiefenverhaeltnis nach Bootsma
    #Kartesische Koordinaten
    theta = np.linspace(0, 2*math.pi, n )
    delta_theta=theta[1]-theta[0]
    y = np.linspace(0,L/(2*R), n)
    delta_y=y[1]-y[0]

    #Scmierfilmdicke
    def hr(theta1):
        hr=1+Epsilon*np.cos(theta1)
        return hr

    #Definition der I-Funktion
    def I(theta1,j):
        I=(gamma*(hr(theta1)**j)+(H0b+hr(theta1))**j)/((1+gamma))
        return I

    #Erstellung der Diagonalmatrizen
    #pi+1-pi
    a1=diags(np.ones(n*n-n),n).toarray()

    #periodische Randbedingung
    a2=diags(np.ones(2*n),-n*(n-2)).toarray()

    for i in range(0,n):
        a2[:,i]=0

    a3=diags(-1*np.ones(n*n),0).toarray()

    a=a1+a2
    #Umgebungsrandbedingung
    for i in range(1,n):

        a[i*n,:]=0
    a[0,:]=0
    a=a+a3

    #Pi-1-pi
    b1=diags(np.ones(n*n-n),-n).toarray()

    b2=diags(-1*np.ones(n*n),0).toarray()

    #periodische Randbedingung
    b3=diags(np.ones(2*n),n*(n-2)).toarray()

    for i in range(0,n):
        b3[:, -i-1]=0

    b=b1+b3

    #Umgebungsrandbedingung
    for i in range(1,n):

```

```

        b[i*n,:]=0
b[0,:]=0

b=b+b2

#pj+1-pj

c1=diags(np.ones(n*n-1),1).toarray()
for i in range(1,n+1):
    c1[i*n-1,:]=0
    c1[i*n-1,i*n-2]=1

for i in range(1,n):

    c1[i*n,:]=0

c1[0,:]=0

c2=diags(-1*np.ones(n*n),0).toarray()

c=c1+c2

#pj-1-pj

d1=diags(np.ones(n*n-1),-1).toarray()
d2=diags(-1*np.ones(n*n),0).toarray()

for i in range(1,n):

    d1[i*n,:]=0

d1[0,:]=0

d=d1+d2


#Koeffizienten definieren
def A(theta1):
    A=(np.cos(beta)**2)*I(theta1,3)+(np.sin(beta)**2)*(1/I(theta1,-3))
    return A

def B(theta1):
    B=np.sin(beta)*np.cos(beta)*(I(theta1,3)-(1/I(theta1,-3)))
    return B

def C(theta1):
    C=(np.sin(beta)**2)*I(theta1,3)+(np.cos(beta)**2)*(1/I(theta1,-3))
    return C

def F(theta1):
    F=((omega2-omega1)/omega)*((np.sin(beta)**2)*(I(theta1,-2)
    /(I(theta1,-3)))+(np.cos(beta)**2)
    *I(theta1,1))+2*((omega1-omega3)/omega)*I(theta1,1)
    return F


#Berechnung der Matrix-Koeffizienten
Bi=np.zeros((n,n))

```

[illegible]

Analytische Lösung des Vohr-und-Chow-Modells

```

from Input import*

def VC_analytisch(Epsilon,beta,H0,gamma):

    alpha=1/(gamma+1)                #Breitenverhaetnis nach Vohr und Chow

    #Kartesische Koordinaten
    theta = np.linspace(0, 2*math.pi, n )
    delta_theta=theta[1]-theta[0]
    y = np.linspace(0,1, n)
    delta_y=y[1]-y[0]

    #Druck P0(z):

    sigma=((6*Visk*(omega2+omega1))/Pa)*(R/C_r)**2
    sigma_s=(6*Visk*(omega2-omega1)/Pa)*(R*L/C_r**2)

    P0=1+((alpha*(1-alpha)*np.sin(beta)
    *np.cos(beta)*((H0**3)-1)*(H0-1))
    /((H0**3)+alpha*(1-alpha)*(np.sin(beta)**2)*((H0**3)-1)**2))
    *(y/L)*sigma*(L/R)

    #Koeffizienten C1...C7

    C1=((((H0**3)+alpha*(1-alpha)*(np.sin(beta)**2)*((H0**3)-1)**2))
    /(alpha+(1-alpha)*(H0**3)))*(R/L)*P0

    C2=((alpha*(1-alpha)*np.sin(beta)*np.cos(beta)*((H0**3)-1)*(H0-1))
    /(alpha+(1-alpha)*(H0**3)))*(R/L)*sigma_s

    C3=((2*alpha*(1-alpha)*np.sin(beta)*np.cos(beta)*((H0**3)-1)**2))
    /(alpha+(1-alpha)*(H0**3))*(P0)

    C4=(((((2*(alpha*(1-alpha)*np.sin(beta)*np.cos(beta))**2)
    *(((H0**3)-1)**3)*(H0-1))/((alpha+(1-alpha)
    *(H0**3))*((H0**3)+alpha*(1-alpha)*(np.sin(beta)**2)
    *((H0**3)-1)**2)))+(alpha*(1-alpha)*(np.sin(beta)**2)
    *((H0**3)-1)*(H0-1))
    /(alpha+(1-alpha)*(H0**3))))*sigma_s)
    -(1-(2*omega3/(omega1+omega2)))
    *(1-alpha+alpha*H0)*sigma*(L/R)

    C5=((((H0**3)+alpha*(1-alpha)*(np.cos(beta)**2)*((H0**3)-1)**2)
    /(alpha+(1-alpha)*(H0**3)))*(P0)*(L/R)

    C6=(P0)*((( -3*alpha*(1-alpha)*((H0-1)**2)
    *(np.sin(beta)**2)*sigma_s)/((alpha+(1-alpha)*(H0**3))**2))*
    (((alpha*(1-alpha)*((H0**3)-1)**2)
    *(np.cos(beta)**2)*((1-alpha)*(H0**2)*((H0**2)+H0-1)-alpha
    *((H0**2)-H0-1)))/((H0**3)+alpha*(1-alpha)
    *(((H0**3)-1)**2)*(np.sin(beta)**2)))
    -(H0**2))+sigma*(L/R)*(1-(2*omega3
    /(omega1+omega2))))

    C7=((3*((H0**3)-1)*((H0**2)-1)*(R/L))
    /(alpha+(1-alpha)*(H0**3)))*(((alpha*(1-alpha)
    *(H0-1)*sigma_s*np.sin(beta)*np.cos(beta))
    /((H0**3)+alpha*(1-alpha)*((H0**3)-1)**2))

```

```

*(np.sin(beta)**2))**2)*((H0**2)*((H0**2)+1)
+alpha*(1-alpha)*(((H0**3)-1)**2)
*(np.sin(beta)**2))

#Normierte Koeffizienten

C6_norm=C6/(4*C1)
C5_norm=C5/(4*C1)
C3_norm=C3/(2*C1)

#Faktoren

F_alpha=(-rho/(12*Visk))*((C_r**3)/(alpha*(C_r**3)+(1-alpha)*
(hg+C_r)**3))*(((hg+C_r)**3)-(C_r**3))*np.cos(beta)*(1/R)
*((1-alpha)*(-alpha)+alpha*(1-alpha)*np.sin(beta))

F_beta=(2/L)*(-rho/(12*Visk))*((C_r**3)/(alpha*(C_r**3)
+(1-alpha)*(hg+C_r)**3))*((1-alpha)*(alpha*(C_r**3)
+(1-alpha)*((C_r+hg)**3)+alpha*((C_r+hg)**3)
-(C_r**3))*(np.cos(beta)**2))+alpha*(alpha*(C_r**3)
+(1-alpha)*((C_r+hg)**3)-(1-alpha)
*((C_r+hg)**3)-(C_r**3))*(np.cos(beta)**2)))

F_delta=(rho/(12*Visk))*((C_r**3)/(alpha*(C_r**3)+(1-alpha)*(hg+C_r)**3))
*6*Visk*((U1-V1))*((hg+C_r)-C_r)*np.cos(beta)
*np.sin(beta)*(-alpha*(1-alpha)+alpha*(1-alpha))

F_kappa=F_alpha/F_beta

#Substitutionen der Parameter
B=C3_norm[0]/2

C=C5_norm[0]

D=C6_norm[0]/C5_norm[0]

#Berechnung der Determinante

Det=B**2-C

#Berechnung der Eigenwerte

lambda1=complex(B,np.sqrt(abs(Det)))
lambda2=complex(B,-np.sqrt(abs(Det)))

a1=F_kappa-lambda1
a2=F_kappa-lambda2

#Bestimmung der Loesungsvector

Beta11=D*((a2**2)+a1*F_kappa*np.cos(lambda1)
-a2*F_kappa*np.cos(lambda2)-a1*a2
*np.cos(lambda1-lambda2))/((a1**2)
-2*np.cos(lambda1-lambda2)*a1*a2+(a2**2)))

Gamma11=D*(a2*F_kappa*np.sin(lambda2)
-a1*F_kappa*np.sin(lambda1)+a1*a2
*np.sin(lambda1-lambda2))/((a1**2)
-2*np.cos(lambda1-lambda2)*a1*a2+(a2**2)))

```

```

Beta21=D*((a1**2)-a1*F_kappa*np.cos(lambda1)
+a2*F_kappa*np.cos(lambda2)-a1*a2*np.cos(lambda1-lambda2))
/((a1**2)-2*np.cos(lambda1-lambda2)*a1*a2+(a2**2))

Gamma21=D*(a2*F_kappa*np.sin(lambda2)-
a1*F_kappa*np.sin(lambda1)+a1*a2*np.sin(lambda1-lambda2))
/((a1**2)-2*np.cos(lambda1-lambda2)*a1*a2+(a2**2))

Vek1=np.array((Beta11,Gamma11,Beta21,Gamma21))

#Druckverteilung
p11=np.zeros((n,n))

for i in range(0,n):
    for j in range(0,n):

        p11[i,j]=(Beta11*np.sin(theta[i]-y[j]*lambda1))
        +Gamma11*np.cos(theta[i]-y[j]*lambda1)
        +Beta21*np.sin(theta[i]-y[j]*lambda2)
        +Gamma21*np.cos(theta[i]-y[j]*lambda2)
        +D*np.sin(theta[i])

#Lagertragfaehigkeit

wx=np.zeros_like(p11)
wy=np.zeros_like(p11)

for i in range(0,n):
    wx[i,:]=p11[i,:]*np.cos(theta[i])
    wy[i,:]=p11[i,:]*np.sin(theta[i])

Wx=simps(wx,y)

Wy=simps(wy,y)

Fr=Epsilon*2*R*0.5*L*Pa*simps(Wx,theta)
Ft=Epsilon*2*R*0.5*L*Pa*simps(Wy,theta)

W=np.sqrt((Fr**2)+(Ft**2))

p1=np.flip(p11,1)

p=np.hstack((p11,p1))
p=p*Epsilon

return Fr,Ft,W

```

Numerische Lösung der Vohr-und-Chow-Modells

```

from Input import*

def VC_numerisch(Epsilon,Beta,H0,gamma):
    alpha=1/(gamma+1) #Breitenverhaeltnis nach Vohr und Chow

    #Kartesische Koordinaten
    theta = np.linspace(0, 2*math.pi, n )

```

```

delta_theta=theta[1]-theta[0]
y = np.linspace(0,L/2, n)
delta_y=y[1]-y[0]

#Druck P0(z):

sigma=((6*Visk*(omega2+omega1))/Pa)*(R/C_r)**2
sigma_s=(6*Visk*(omega2-omega1)/Pa)*(R*L/C_r**2)

P0=1+((alpha*(1-alpha)*np.sin(Beta)*np.cos(Beta)
*((H0**3)-1)*(H0-1))/((H0**3)
+alpha*(1-alpha)*(np.sin(Beta)**2)*((H0**3)-1)**2))
*(y/L)*sigma*(L/R)

#Koeffizienten C1...C7

C1=((((H0**3)+alpha*(1-alpha)*(np.sin(Beta)**2)*((H0**3)-1)**2))
/(alpha+(1-alpha)*(H0**3)))*(R/L)*P0

C2=((alpha*(1-alpha)*np.sin(Beta)*np.cos(Beta)*((H0**3)-1)*(H0-1))
/(alpha+(1-alpha)*(H0**3)))*(R/L)*sigma_s

C3=((2*alpha*(1-alpha)*np.sin(Beta)*np.cos(Beta)
*((H0**3)-1)**2))/(alpha+(1-alpha)*(H0**3))*(P0)

C4=(((((2*(alpha*(1-alpha)*np.sin(Beta)*np.cos(Beta))**2)*
(((H0**3)-1)**3)*(H0-1))/((alpha+(1-alpha)
*(H0**3))*((H0**3)+alpha*(1-alpha)
*(np.sin(Beta)**2)*((H0**3)-1)**2)))
+((alpha*(1-alpha)*(np.sin(Beta)**2)*
((H0**3)-1)*(H0-1))/(alpha+(1-alpha)
*(H0**3))))*sigma_s)-(1-(2*omega3
/(omega1+omega2))))
*(1-alpha+alpha*H0)*sigma*(L/R)

C5=((((H0**3)+alpha*(1-alpha)*(np.cos(Beta)**2)*((H0**3)-1)**2)
/(alpha+(1-alpha)*(H0**3)))*(P0)*(L/R)

C6=(P0)*((( -3*alpha*(1-alpha)*((H0-1)**2)*(np.sin(Beta)**2)*sigma_s)
/((alpha+(1-alpha)*(H0**3))**2))*(((alpha*(1-alpha)
*((H0**3)-1)**2)*(np.cos(Beta)**2)
*((1-alpha)*(H0**2)*((H0**2)+H0-1)
-alpha*((H0**2)-H0-1)))
/((H0**3)+alpha*(1-alpha)*((H0**3)-1)**2)
*(np.sin(Beta)**2)))
-(H0**2))+sigma*(L/R)
*(1-(2*omega3/(omega1+omega2))))

C7=((3*((H0**3)-1)*((H0**2)-1)*(R/L))/(alpha+(1-alpha)*(H0**3)))
*((alpha*(1-alpha)*(H0-1)*sigma_s
*np.sin(Beta)*np.cos(Beta))
/((H0**3)+alpha*(1-alpha)
*((H0**3)-1)**2)*(np.sin(Beta)**2)))**2)
*((H0**2)*((H0**2)+1)+alpha*(1-alpha)
*((H0**3)-1)**2)*(np.sin(Beta)**2))

#Erstellung der Diagonalmatrizen
#Dx
#i+1
a1=diags(np.ones(n*n-n),n).toarray()

```

```

#Periodische Randbedingung
a2=diags(np.ones(2*n),-n*(n-2)).toarray()
for i in range(0,n):
    a2[:,i]=0
#-i-1
a3=diags(-1*np.ones(n*n-n),-n).toarray()
#Periodische Randbedingung
a4=diags(-1*np.ones(2*n),n*(n-2)).toarray()

for i in range(0,n):
    a4[:, -i-1]=0

#Dx(i+1-i-1)

a=a1+a2+a3+a4

#Umgebungsbedingung
for i in range(1,n):

    a[i*n,:]=0

a[0,:]=0

#Dx2

#i+1
b1=diags(np.ones(n*n-n),n).toarray()

#Periodische Randbedingung
b2=diags(np.ones(2*n),-n*(n-2)).toarray()
for i in range(0,n):
    b2[:,i]=0
#-i-1
b3=diags(np.ones(n*n-n),-n).toarray()
#Periodic Boundary
b4=diags(np.ones(2*n),n*(n-2)).toarray()

for i in range(0,n):
    b4[:, -i-1]=0

#Dx2(i+1-i-1)

b=b1+b2+b3+b4

#Umgebungsbedingung
for i in range(1,n):

    b[i*n,:]=0

b[0,:]=0

b5=diags(-2*np.ones(n*n),0).toarray()

b=b+b5

#dy
c1=diags(np.ones(n*n-1),1).toarray()
c2=diags(-1*np.ones(n*n-1),-1).toarray()

```

```

for i in range (1,n+1):
    c1[i*n-1,:]=0
    c1[i*n-1,i*n-2]=1
c=c1+c2

for i in range (1,n):

    c[i*n,:]=0

c[0,:]=0

#Dy2

d1=diags(np.ones(n*n-1),1).toarray()
d2=diags(np.ones(n*n-1),-1).toarray()

for i in range (1,n+1):
    d1[i*n-1,:]=0
    d1[i*n-1,i*n-2]=1
d=d1+d2

for i in range (1,n):

    d[i*n,:]=0

d[0,:]=0

d3=diags(-2*np.ones(n*n),0).toarray()

d=d+d3

#dxdy

e1=diags(np.ones(n*n-n-1),n+1).toarray()

e2=diags(-1*np.ones(n*n-n+1),n-1).toarray()

e3=diags(np.ones(n*n-n-1),-n-1).toarray()

e4=diags(-1*np.ones(n*n-n+1),-n+1).toarray()

e5=diags(-1*np.ones(2*n-1),n*(n-2)+1).toarray()
e5[n:,:]=0

e6=diags(np.ones(2*n+1),n*(n-2)-1).toarray()
e6[n:,:]=0

e7=diags(np.ones(2*n+1),-n*(n-2)+1).toarray()
e7[:n*(n-1),:]=0

e8=diags(-1*np.ones(2*n-1),-n*(n-2)-1).toarray()
e8[:n*(n-1),:]=0

```

```
e=e1+e2+e3+e4+e5+e6+e7+e8
```

```
for i in range (1,n):
    e[i*n-1,:]=0
    e[i*n,:]=0
```

```
e[0,:]=0
e[n*n-1,:]=0
```

```
#Berechnung der Koeffizienten
```

```
B=np.zeros_like(a)
D=np.zeros_like(a)
E=np.zeros_like(a)
M_i_j=np.zeros((n,n))
for i in range (0,n):
    for j in range (0,n):
        B[j+i*n]=(C5[j]/Pa)*(1/delta_theta**2)*b[j+i*n]
        D[j+i*n]=((L**2)*C1[j]/Pa)*(1/delta_y**2)*d[j+i*n]
        E[j+i*n]=(L*C3[j]/Pa)*(1/(4*delta_y*delta_theta))*e[j+i*n]
        M_i_j[i,j]=-C6[j]*np.sin(theta[i])-C7*np.cos(theta[i])
```

```
A=a*(C4/Pa)*(1/(2*delta_theta))
C=c*(L*C2/Pa)*(1/(2*delta_y))
```

```
#Umgebungsrandbedingung
```

```
for i in range (0,n):
    for j in range(0,n):
        M_i_j[:,0]=0
```

```
M_i_j=np.reshape(M_i_j,(n*n))          #2D Matrix zu Vektor
```

```
Diag=A+B+C+D+E                          #Gesamtmatrix
```

```
p=spsolve(Diag, M_i_j)                  #Loesung des Gleichungssystems
p=np.resize(p,(n,n))                    #Vektor zu 2D-Matrix
```

```
p1=np.flip(p,1)                          #Spiegelung der Druckverteilung
```

```
p0=np.hstack((p,p1))                    #Zusammenfuegen der Druckverteilung
```

```
y = np.linspace(0,2, 2*n)               #Gesamte Lagerlaenge
```

```
#Berechnung der Lagerkrafte
```

```
wx=np.zeros_like(p0)
wy=np.zeros_like(p0)

for i in range (0,n):
    wx[i,:]=p0[i,:]*np.cos(theta[i])
    wy[i,:]=p0[i,:]*np.sin(theta[i])
```

```
Wx=simps(wx,y)
```

```
Wy=simps(wy,y)
```

```
Fr=-Epsilon*R*0.5*L*simps(Wx,theta)
```

```
Ft=Epsilon*R*0.5*L*simps(Wy,theta)
```

```
W=np.sqrt((Fr**2)+(Ft**2))
```

```
return Fr,Ft,W
```

DDM-Methode

```
from Input import*
```

```
def DDM(epsilon ,Beta ,H0,gamma):
```

```
    drehzahl=Drehzahl
    alpha=1/(gamma+1)                #Breitenverhaeltnis nach Vohr und Chow
    #Kartesische Koordinaten
    Pair=2*math.pi/ng                #Rille -Damm-Paar
    theta = np.linspace(0, (2*math.pi), n )
    delta_theta=theta[1]-theta[0]
    y = np.linspace(0,1, n)
    delta_y=y[1]-y[0]

    #Computational Domaene
    xi=np.linspace(1/np.tan(Beta), (2*math.pi)+1/np.tan(Beta), n )
    delta_xi=xi[1]-xi[0]
    eta=y/np.sin(Beta)
    delta_eta=eta[1]-eta[0]

    #Schmierfilmdicke
    h_g=np.zeros((n,n))
    hr=np.zeros((n,n))
    h=np.zeros((n,n))

    for i in range (0,n):
        for j in range (0,n):
            hr[i,j]=1+epsilon*np.cos(xi[i]-eta[j]*np.cos(Beta))    #Damm
            h_g[i,j]=epsilon*np.cos(xi[i]-eta[j]*np.cos(Beta))+H0    #Rille

    #Unterteilung der Domaene in Rille und Damm
    for i in range (0,n):
        for j in range (0,n):
            for k in range (-ng,ng+3):
                if k*Pair+1/np.tan(Beta)+0.0001<abs(xi[i])<
                    (k+alpha)*Pair+1/np.tan(Beta)-0.0001:
                    h[i,j]=h_g[i,j]
                if (k+alpha)*Pair+1/np.tan(Beta)-0.0001<abs(xi[i])<
                    (k+1)*Pair+1/np.tan(Beta)+0.0001:
                    h[i,j]=hr[i,j]

    #Grenzflaechen zwischen Rillen und Damm
    I=int((n-1)/ng)
    J=int(((1-alpha)*I))
    for i in range (0,ng+1):
        for j in range (0,n):
            h[I*i,j]=h[I*i,j]+0.5*(H0-1)
            h[I*i-J,j]=h[I*i-J,j]+0.5*(H0-1)

    dhxi=np.zeros((n,n))                #Ableitung nach xi
    dhxi3=np.zeros((n,n))                #Ableitung h^3 nach xi
    dtheta3=np.zeros((n,n))              #Ableitung h^3 nach eta
    for i in range (0,n):
        for j in range (0,n):
            dhxi[i,j]=-epsilon*np.sin(xi[i]-eta[j]*np.cos(Beta))
            dtheta3[i,j]=3*epsilon*np.cos(Beta)
```

```

        *np.sin(xi[i]-eta[j]*np.cos(Beta))*h[i,j]**2

for i in range(1,ng+1):
    for j in range(0,n):
        dhxi[I*i-J,j]=-epsilon*np.sin(xi[I*i-J]
        -eta[j]*np.cos(Beta))-((H0-1)/(2*delta_xi))

for i in range(0,ng+1):
    for j in range(0,n):
        dhxi[I*i,j]=-epsilon*np.sin(xi[I*i]
        -eta[j]*np.cos(Beta))+((H0-1)/(2*delta_xi))

for i in range(0,n):
    for j in range(0,n):
        dhxi3[i,j]=3*dhxi[i,j]*h[i,j]**2

#Erstellung der Diagonal-Matrizen
#Dx
#i+1
a1=diags(np.ones(n*n-n),n).toarray()

#Periodic Boudary
a2=diags(np.ones(2*n),-n*(n-2)).toarray()
for i in range(0,n):
    a2[:,i]=0
#-i-1
a3=diags(-1*np.ones(n*n-n),-n).toarray()
#Periodic Boundary
a4=diags(-1*np.ones(2*n),n*(n-2)).toarray()

for i in range(0,n):
    a4[:, -i-1]=0

#Dx(i+1-i-1)

a=a1+a2+a3+a4

#End-Discharge Boundary
for i in range(1,n):

    a[i*n,:]=0

a[0,:]=0

#Dx2
#i+1
b1=diags(np.ones(n*n-n),n).toarray()

#Periodic Boudary
b2=diags(np.ones(2*n),-n*(n-2)).toarray()
for i in range(0,n):
    b2[:,i]=0
#-i-1
b3=diags(np.ones(n*n-n),-n).toarray()
#Periodic Boundary
b4=diags(np.ones(2*n),n*(n-2)).toarray()

for i in range(0,n):
    b4[:, -i-1]=0

```

```

#Dx2( i+1-i-1)

b=b1+b2+b3+b4
#End-Discharge Boundary
for i in range (1,n):

    b[i*n,:]=0

b[0,:]=0

b5=diags(-2*np.ones(n*n),0).toarray()

b=b+b5

#dy
c1=diags(np.ones(n*n-1),1).toarray()
c2=diags(-1*np.ones(n*n-1),-1).toarray()

for i in range (1,n+1):
    c1[i*n-1,:]=0
    c1[i*n-1,i*n-2]=1
c=c1+c2

for i in range (1,n):

    c[i*n,:]=0

c[0,:]=0

#Dy2
d1=diags(np.ones(n*n-1),1).toarray()
d2=diags(np.ones(n*n-1),-1).toarray()

for i in range (1,n+1):
    d1[i*n-1,:]=0
    d1[i*n-1,i*n-2]=1
d=d1+d2

for i in range (1,n):

    d[i*n,:]=0

d[0,:]=0

d3=diags(-2*np.ones(n*n),0).toarray()

d=d+d3

#dxdy

e1=diags(np.ones(n*n-n-1),n+1).toarray()

e2=diags(-1*np.ones(n*n-n+1),n-1).toarray()

e3=diags(np.ones(n*n-n-1),-n-1).toarray()

e4=diags(-1*np.ones(n*n-n+1),-n+1).toarray()

```

```

e5=diags(-1*np.ones(2*n-1),n*(n-2)+1).toarray()
e5[n:,:]=0

e6=diags(np.ones(2*n+1),n*(n-2)-1).toarray()
e6[n:,:]=0

e7=diags(np.ones(2*n+1),-n*(n-2)+1).toarray()
e7[:n*(n-1),:]=0

e8=diags(-1*np.ones(2*n-1),-n*(n-2)-1).toarray()
e8[:n*(n-1),:]=0

e=e1+e2+e3+e4+e5+e6+e7+e8

for i in range(1,n):
    e[i*n-1,:]=0
    e[i*n,:]=0
e[0,:]=0
e[n*n-1,:]=0

#Berechnung der mittleren Reynoldszahl
Re=rho*R*Drehzahl*2*C_r/Visk
kx=12
kz=12

#Bedingung fuer das Turbulenzmodel
if Re>2000:
    kx=12+0.0136*Re**0.9
    kz=12+0.0043*Re**0.98

#Koeffizient

A_i=np.zeros_like(h)
B_i=np.zeros_like(h)
C_i=np.zeros_like(h)
D_i=np.zeros_like(h)
E_i=np.zeros_like(h)

for i in range(0,n):
    for j in range(0,n):
        A_i[i,j]=(1/(2*delta_xi))*(((dhxi3[i,j]+dhxi3[i,j]
        /((np.tan(Beta)**2)))/kx)+((D**2)*dtheta3[i,j]/((L**2)*np.sin(Beta)
        *np.tan(Beta)*kz)))
        B_i[i,j]=(1/((delta_xi**2)*kx))
        *((h[i,j]**3)+(h[i,j]**3)/(np.tan(Beta)**2))
        C_i[i,j]=(1/(2*delta_eta*kz))
        *(dtheta3[i,j]*((D**2)/((L**2)*np.sin(Beta)))**2)
        +((D**2)*dhxi3[i,j]/((L**2)*np.sin(Beta)*np.tan(Beta)))
        D_i[i,j]=(1/((delta_eta**2)*kz))
        *(h[i,j]**3)*((D**2)/((L**2)*np.sin(Beta)))**2
        E_i[i,j]=2*((D**2)*(h[i,j]**3)
        /((L**2)*np.sin(Beta)*np.tan(Beta)*kz))
        *(1/(4*delta_xi*delta_eta))

A=np.zeros_like(a)
B=np.zeros_like(a)
C=np.zeros_like(a)
E=np.zeros_like(a)
F=np.zeros_like(a)

```

```

for i in range (0,n):
    for j in range (0,n):

        A[j+i*n]=A_i[i,j]*a[j+i*n]
        B[j+i*n]=B_i[i,j]*b[j+i*n]
        C[j+i*n]=C_i[i,j]*c[j+i*n]
        E[j+i*n]=D_i[i,j]*d[j+i*n]
        F[j+i*n]=E_i[i,j]*e[j+i*n]

M=0.5*dhxi

Diag=A+B+C+E+F                                #Summe der Diagonalmatrizen

M=np.reshape(M,(n*n))

p=spsolve(Diag, M)                                #Loesung des GS
p=np.resize(p,(n,n))                            #Vektor zu 2D-Matrix
p1=np.flip(p,1)

p0=np.hstack((p,p1))

#Kavitationbedingung
for i in range (0,n):
    for j in range (0,2*n-1):
        if p0[i,j]<=pc:
            p0[i,j]=pc

y = np.linspace(0,2, 2*n)

p0=p0*Drehzahl*Visk*(R/C_r)**2                #Dimensionsbehaftet

#Berechnung der statischen Eigenschaften
wx=np.zeros_like(p0)
wy=np.zeros_like(p0)

for i in range (0,n):
    wx[i,:]=p0[i,:]*np.cos(xi[i])
    wy[i,:]=p0[i,:]*np.sin(xi[i])

Wx=simps(wx,y)

Wy=simps(wy,y)

Fr=R*0.5*L*simps(Wx,xi)
Ft=R*0.5*L*simps(Wy,xi)

W=np.sqrt((Fr**2)+(Ft**2))

#dynamische Drucke
#Imaginaerteil von p1
M1_im=np.zeros((n,n))
for i in range (n):
    for j in range (n):

        M1_im[i,j]=(omega3/Drehzahl)*np.cos(xi[i])
M1_im=np.reshape(M1_im,(n*n))

p1_im=spsolve(Diag, M1_im)

```

```

p1_im=np.resize(p1_im,(n,n))

p1=np.flip(p1_im,1)
p1_im=np.hstack((p1_im,p1))

for i in range(0,n):
    for j in range(0,2*n):
        if p1_im[i,j]<=pc:
            p1_im[i,j]=pc
p1_im=p1_im*Drehzahl*Visk*(R/C_r)**2

Dx=np.zeros_like(p0)
Dy=np.zeros_like(p0)

for i in range(0,n):
    Dx[i,:]=p1_im[i,:]*np.cos(xi[i])
    Dy[i,:]=p1_im[i,:]*np.sin(xi[i])

Dxx=-R*0.5*L*simps(simps(Dx,y),xi)/(Drehzahl*C_r)
Dyx=-R*0.5*L*simps(simps(Dy,y),xi)/(Drehzahl*C_r)

#Imaginaerteil von p2
M2_im=np.zeros((n,n))
for i in range(n):
    for j in range(n):
        M2_im[i,j]=(omega3/Drehzahl)*np.sin(xi[i])
M2_im=np.reshape(M2_im,(n*n))

p2_im=spsolve(Diag, M2_im)
p2_im=np.resize(p2_im,(n,n))

p1=np.flip(p2_im,1)
p2_im=np.hstack((p2_im,p1))
for i in range(0,n):
    for j in range(0,2*n):
        if p2_im[i,j]<=pc:
            p2_im[i,j]=pc

p2_im=p2_im*Drehzahl*Visk*(R/C_r)**2

Dx2=np.zeros_like(p0)
Dy2=np.zeros_like(p0)

for i in range(0,n):
    Dx2[i,:]=p2_im[i,:]*np.cos(xi[i])
    Dy2[i,:]=p2_im[i,:]*np.sin(xi[i])

Dxy=-R*0.5*L*simps(simps(Dx2,y),xi)/(Drehzahl*C_r)
Dyy=-R*0.5*L*simps(simps(Dy2,y),xi)/(Drehzahl*C_r)

phi=np.arctan(abs(Ft/Fr))

Dxx1=np.cos(phi)*(Dxx*np.cos(phi)-Dyx*np.sin(phi))-np.sin(phi)*(Dxy*np.cos(phi)

```

```

-Dyy*np.sin(phi))
Dxy1=np.sin(phi)*(Dxx*np.cos(phi)-Dyx*np.sin(phi))+np.cos(phi)*(Dxy*np.cos(phi)
-Dyy*np.sin(phi))
Dyx1=np.cos(phi)*(Dxx*np.sin(phi)+Dyx*np.cos(phi))-np.sin(phi)*(Dxy*np.sin(phi)
+Dyy*np.cos(phi))
Dyy1=np.sin(phi)*(Dxx*np.sin(phi)+Dyx*np.cos(phi))+np.cos(phi)*(Dxy*np.sin(phi)
+Dyy*np.cos(phi))

return Fr, Ft, W,Dxx1,Dxy1,Dyx1,Dyy1

#Steifigkeit_koeffizienten
Epsilon=np.linspace(0.05,0.9,30)
delta_epsilon=Epsilon[1]-Epsilon[0]
Ergebnis=((([0])*np.shape(Epsilon)[0]))

for i in range(np.shape(Epsilon)[0]):
    Ergebnis[i]=DDM(Epsilon[i],Beta,H0,gamma)

W=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
Ft=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
Fr=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
dFt=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
dFr=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
phi=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])

#Kraftgradient ueber Exzentricitaet

for i in range(0,np.shape(Epsilon)[0]):
    W[i]=Ergebnis[i][2]
    Ft[i]=Ergebnis[i][1]
    Fr[i]=Ergebnis[i][0]
for i in range(1,np.shape(Epsilon)[0]-1):
    dFt[i]=(Ft[i+1]-Ft[i-1])/(2*delta_epsilon*C_r)
    dFr[i]=abs((Fr[i+1]-Fr[i-1])/(2*delta_epsilon*C_r))

    dFt[np.shape(Epsilon)[0]-1]=(Ft[np.shape(Epsilon)[0]-1]
-Ft[np.shape(Epsilon)[0]-2])
/(delta_epsilon*C_r)
    dFr[np.shape(Epsilon)[0]-1]=abs((Fr[np.shape(Epsilon)[0]-1]
-Fr[np.shape(Epsilon)[0]-2])
/(delta_epsilon*C_r))

    dFt[0]=(Ft[1]-Ft[0])/(delta_epsilon*C_r)
    dFr[0]=abs((Fr[1]-Fr[0])/(delta_epsilon*C_r))

for i in range(0,np.shape(Epsilon)[0]):
    phi[i]=np.arctan(Ft[i]/abs(Fr[i]))

Kxx=dFr*(np.cos(phi)**2)+dFt*np.cos(phi)*np.sin(phi)
Kxy=dFt*(np.sin(phi)**2)+dFr*np.cos(phi)*np.sin(phi)
Kyx=-dFt*(np.cos(phi)**2)+dFr*np.cos(phi)*np.sin(phi)-(W/(Epsilon*C_r))*np.sin(phi)
Kyy=dFr*(np.sin(phi)**2)-dFt*np.cos(phi)*np.sin(phi)+(W/(Epsilon*C_r))*np.cos(phi)

#Normierung
Kxx=Kxx*C_r/W
Kxy=Kxy*C_r/W
Kyx=Kyx*C_r/W
Kyy=Kyy*C_r/W

```

```

#Daempfungskoeffizient
Dxx=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
Dxy=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
Dyx=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
Dyy=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
for i in range(1,np.shape(Epsilon)[0]):
    Dxx[i]=Ergebnis[i][3]
    Dxy[i]=Ergebnis[i][4]
    Dyx[i]=Ergebnis[i][5]
    Dyy[i]=Ergebnis[i][6]

Dxx=Dxx*C_r*Drehzahl/W
Dxy=Dxy*C_r*Drehzahl/W
Dyx=Dyx*C_r*Drehzahl/W
Dyy=Dyy*C_r*Drehzahl/W

#Instabilitaetsgrenze
K_eq=np.zeros_like(Epsilon)

for i in range(np.shape(Epsilon)[0]):
    K_eq[i]=(Kxx[i]*Dyy[i]+Kyy[i]*Dxx[i]-Kxy[i]*Dyx[i]-Kyx[i]*Dxy[i])/(Dxx[i]+Dyy[i])

#kritische Wirbelfrequenz
omega_kr=np.zeros_like(Epsilon)

for i in range(np.shape(Epsilon)[0]):
    omega_kr[i]=np.sqrt(((K_eq[i]-Kxx[i])*(K_eq[i]-Kyy[i])-Kxy[i]*Kyx[i]))
                        /(Dxx[i]*Dyy[i]-Dxy[i]*Dyx[i]))

#Kritische Masse
M_kr=np.zeros_like(Epsilon)

for i in range(np.shape(Epsilon)[0]):
    M_kr[i]=K_eq[i]/(omega_kr[i]**2)

```

LIM-Methode

```

from Input import*

def LIM(epsilon,beta,H0,gamma):
    alpha=1/(gamma+1) #Breitenverhaeltnis nach Vohr und Chow

    Pair=2*math.pi/ng #Rille -Damm-Paar

    #Berechnung der mittleren Reynoldszahl
    Re=rho*R*Drehzahl*2*C_r/Visk
    kx=12
    kz=12

    #Bedingung fuer das Turbulenzmodel
    if Re>2000:
        kx=12+0.0136*Re**0.9
        kz=12+0.0043*Re**0.98

    #Kartesische Koordinaten
    theta = np.linspace(0, (2*math.pi), n )
    delta_theta=theta[1]-theta[0]
    y = np.linspace(0,1, n)

```

```

delta_y=y[1]-y[0]

#Computational Domaen

xi = np.linspace(1/np.tan(beta), (2*math.pi)+1/np.tan(beta), n )
delta_xi=xi[1]-xi[0]
eta=y/np.sin(beta)
delta_eta=eta[1]-eta[0]

#Unterteilung der Rille-Damm Bereiche
def h(xi1,eta1):
    for k in range(-ng,ng+1):
        if k*Pair+1/np.tan(beta)+0.0001<abs(xi1)<
(k+alpha)*Pair+1/np.tan(beta)-0.0001:
            h=H0+epsilon*np.cos(xi1-eta1*np.cos(beta))

        if (k+alpha)*Pair+1/np.tan(beta)-0.0001<abs(xi1)<
(k+1)*Pair+1/np.tan(beta)+0.0001:
            h=1+epsilon*np.cos(xi1-eta1*np.cos(beta))

    return h

#Erstellung der Diagonalmatrizen
#pi+1-pi
a1=diags(np.ones(n*n-n),n).toarray()

#periodic Boundary
a2=diags(np.ones(2*n),-n*(n-2)).toarray()

for i in range(0,n):
    a2[:,i]=0

a3=diags(-1*np.ones(n*n),0).toarray()

a=a1+a2
#End-Discharge Boundary
for i in range(0,n):

    a[i*n,:]=0
a[0,:]=0
a=a+a3

#Pi-1-pi

b1=diags(np.ones(n*n-n),-n).toarray()

b2=diags(-1*np.ones(n*n),0).toarray()

#Periodic Boundary
b3=diags(np.ones(2*n),n*(n-2)).toarray()

for i in range(0,n):
    b3[:, -i-1]=0

b=b1+b3

#End-Discharge Boundary
for i in range(0,n):

```

```

        b[i*n,:]=0
b[0,:]=0

b=b+b2

#pj+1-pj

c1=diags(np.ones(n*n-1),1).toarray()
for i in range(1,n+1):
    c1[i*n-1,:]=0
    c1[i*n-1,i*n-2]=1

for i in range(0,n):

    c1[i*n,:]=0

c1[0,:]=0

c2=diags(-1*np.ones(n*n),0).toarray()

c=c1+c2

#pj-1-pj

d1=diags(np.ones(n*n-1),-1).toarray()
d2=diags(-1*np.ones(n*n),0).toarray()

for i in range(0,n):

    d1[i*n,:]=0

d1[0,:]=0

d=d1+d2

A=np.zeros((n,n))
B=np.zeros((n,n))
C=np.zeros((n,n))
E=np.zeros((n,n))
M=np.zeros((n,n))
I=int((n-1)/ng)
J=int(((1-alpha)*I))

#Filmdicke an Grenzflaechen
def hm(xi1,eta1):
    hm=h(xi1,eta1)-0.25*hg/C_r
    return hm

def hn(xi1,eta1):
    hn=h(xi1,eta1)+0.25*hg/C_r
    return hn

def hi(xi1,eta1):
    hi=h(xi1,eta1)+0.5*hg/C_r
    return hi

#Koeffizienten
for i in range(0,n):

```

```

for j in range (0,n):

    A[i,j]=(delta_eta/(kx*delta_xi))*np.sin(beta)
    *(h(xi[i]+0.5*delta_xi,eta[j])**3)+((D/L)**2)
    *(((h(xi[i],eta[j]-0.5*delta_eta)**3)
    +(h(xi[i],eta[j]+0.5*delta_eta)**3))
    /(2*kz*np.tan(beta)))+(delta_eta*np.cos(beta)
    /(delta_xi*kz*np.tan(beta)))
    *(h(xi[i]+0.5*delta_xi,eta[j])**3))
    B[i,j]=(delta_eta/(kx*delta_xi))
    *np.sin(beta)*(h(xi[i]-0.5*delta_xi,eta[j])**3)
    +((D/L)**2)*(((h(xi[i],eta[j]-0.5*delta_eta)
    **3)+(-h(xi[i],eta[j]+0.5*delta_eta)**3))
    /(2*kz*np.tan(beta)))
    +(delta_eta*np.cos(beta)/(delta_xi*kz*np.tan(beta)))
    *(h(xi[i]-0.5*delta_xi,eta[j])**3))
    C[i,j]=((D/L)**2)*((delta_xi/(delta_eta*kz*np.sin(beta)))
    *(h(xi[i],eta[j]+0.5*delta_eta)**3)+(0.5/(kz*np.tan(beta)))
    *((h(xi[i]+0.5*delta_xi,eta[j])**3)
    +(-h(xi[i]-0.5*delta_xi,eta[j])**3)))
    E[i,j]=((D/L)**2)*((delta_xi/(delta_eta*kz*np.sin(beta)))
    *(h(xi[i],eta[j]-0.5*delta_eta)**3)+(0.5/(kz*np.tan(beta)))
    *((-h(xi[i]+0.5*delta_xi,eta[j])**3)
    +(h(xi[i]-0.5*delta_xi,eta[j])**3)))
    M[i,j]=0.5*(h(xi[i]+0.5*delta_xi,eta[j])
    -h(xi[i]-0.5*delta_xi,eta[j]))
    *delta_eta*np.sin(beta)

#Druck an Grenzflaechen
for i in range (0,ng+1):
    for j in range (0,n):

        A[I*i,j]=(delta_eta/(kx*delta_xi))
        *np.sin(beta)*(hm(xi[I*i]+0.5*delta_xi,eta[j])**3)
        +((D/L)**2)*(((h(xi[I*i],eta[j]-0.5*delta_eta)**3)
        +(h(xi[I*i],eta[j]+0.5*delta_eta)**3))/(2*kz*np.tan(beta)))
        +(delta_eta*np.cos(beta)/(delta_xi*kz*np.tan(beta)))
        *(hm(xi[I*i]+0.5*delta_xi,eta[j])**3))
        B[I*i,j]=(delta_eta/(kx*delta_xi))
        *np.sin(beta)*(hn(xi[I*i]-0.5*delta_xi,eta[j])**3)+((D/L)**2)
        *(((h(xi[I*i],eta[j]-0.5*delta_eta)**3)
        +(-h(xi[I*i],eta[j]+0.5*delta_eta)**3))
        /(2*kz*np.tan(beta)))+(delta_eta*np.cos(beta)
        /(delta_xi*kz*np.tan(beta)))
        *(hn(xi[I*i]-0.5*delta_xi,eta[j])**3))
        C[I*i,j]=((D/L)**2)*((delta_xi/(delta_eta*kz*np.sin(beta)))
        *(h(xi[I*i],eta[j]+0.5*delta_eta)**3)+(0.5/(kz*np.tan(beta)))*
        ((hm(xi[I*i]+0.5*delta_xi,eta[j])**3)
        +(-hn(xi[I*i]-0.5*delta_xi,eta[j])**3)))
        E[I*i,j]=((D/L)**2)*((delta_xi/(delta_eta*kz*np.sin(beta)))
        *(h(xi[I*i],eta[j]-0.5*delta_eta)**3)
        +(0.5/(kz*np.tan(beta)))*((-hm(xi[I*i]+0.5*delta_xi,eta[j])**3)
        +(hn(xi[I*i]-0.5*delta_xi,eta[j])**3)))
        M[I*i,j]=0.5*(hm(xi[I*i]+0.5*delta_xi,eta[j])
        -hn(xi[I*i]-0.5*delta_xi,eta[j]))
        *delta_eta*np.sin(beta)

for i in range (1,ng+1):
    for j in range (0,n):

        A[I*i-J,j]=(delta_eta/(kx*delta_xi))*np.sin(beta)

```

```

*(hn(xi[I*i-J]+0.5*delta_xi, eta[j])**3)
+((D/L)**2)
*((( -hi(xi[I*i-J], eta[j]-0.5*delta_eta)**3)
+(hi(xi[I*i-J], eta[j]+0.5*delta_eta)**3))
/(2*kz*np.tan(beta)))+(delta_eta*np.cos(beta)
/(delta_xi*kz*np.tan(beta)))*(hn(xi[I*i-J]
+0.5*delta_xi, eta[j])**3))
B[I*i-J, j]=(delta_eta/(kx*delta_xi))*np.sin(beta)
*(hn(xi[I*i-J]-0.5*delta_xi, eta[j])**3)
+((D/L)**2)*(((hi(xi[I*i-J], eta[j]-0.5*delta_eta)**3)
+(-hi(xi[I*i-J], eta[j]+0.5*delta_eta)**3))
/(2*kz*np.tan(beta)))+(delta_eta*np.cos(beta)/(delta_xi*kz*np.tan(beta)))*
(hn(xi[I*i-J]-0.5*delta_xi, eta[j])**3))
C[I*i-J, j]=((D/L)**2)*((delta_xi/(delta_eta*kz*np.sin(beta)))
*(hi(xi[I*i-J], eta[j]+0.5*delta_eta)**3)+(0.5/(kz*np.tan(beta)))
*(hn(xi[I*i-J]+0.5*delta_xi, eta[j])**3)
+(-hn(xi[I*i-J]-0.5*delta_xi, eta[j])**3)))
E[I*i-J, j]=((D/L)**2)*((delta_xi/(delta_eta*kz*np.sin(beta)))
*(hi(xi[I*i-J], eta[j]-0.5*delta_eta)**3)
+(0.5/(kz*np.tan(beta)))*((-hn(xi[I*i-J]+0.5*delta_xi, eta[j])**3)
+(hn(xi[I*i-J]-0.5*delta_xi, eta[j])**3)))
M[I*i-J, j]=0.5*(hn(xi[I*i-J]+0.5*delta_xi, eta[j])
-hn(xi[I*i-J]-0.5*delta_xi, eta[j]))
*delta_eta*np.sin(beta)

for i in range(n):
    for j in range(0, n):
        M[i, 0]=0

A_i=np.zeros_like(a)

B_i=np.zeros_like(a)
C_i=np.zeros_like(a)
D_i=np.zeros_like(a)

for i in range(0, n):
    for j in range(0, n):
        A_i[j+i*n]=A[i, j]*a[j+i*n]
        B_i[j+i*n]=B[i, j]*b[j+i*n]
        C_i[j+i*n]=C[i, j]*c[j+i*n]
        D_i[j+i*n]=E[i, j]*d[j+i*n]

Diag=A_i+B_i+D_i+C_i                                #Summe der Diagonalmatrizen

M=np.reshape(M, (n*n))
p=spsolve(Diag, M)                                     #Loesung der GS
p=np.resize(p, (n, n))                                #Vektor zu 2D-Matrix

#Spiegelung der Druckverteilung
p1=np.flip(p, 1)
p0=np.hstack((p, p1))
#Kavitation
for i in range(0, n):
    for j in range(0, 2*n):
        if p0[i, j]<=pc:
            p0[i, j]=pc
y = np.linspace(0, 2, 2*n)

#Berechnung der statischen Eigenschaften
p0=p0*Drehzahl*Visk*(R/C_r)**2
wx=np.zeros_like(p0)

```

```

wy=np.zeros_like(p0)

for i in range(0,n):
    wx[i,:]=p0[i,:]*np.cos(xi[i])
    wy[i,:]=p0[i,:]*np.sin(xi[i])

Wx=simps(wx,y)

Wy=simps(wy,y)

Fr=-R*0.5*L*simps(Wx,xi)
Ft=R*0.5*L*simps(Wy,xi)

W=np.sqrt((Fr**2)+(Ft**2))

#dynamische Eigenschaften
#Imaginaerteil von p1
M1_im=np.zeros((n,n))
for i in range(n):
    for j in range(n):
        M1_im[i,j]=(omega3/Drehzahl)*np.sin(beta)
        *delta_eta*(np.sin(xi[i]+0.5*delta_xi)
        -np.sin(xi[i]-0.5*delta_xi))
M1_im=np.reshape(M1_im,(n*n))

p1_im=spsolve(Diag, M1_im)
p1_im=np.resize(p1_im,(n,n))

p1=np.flip(p1_im,1)
p1_im=np.hstack((p1_im,p1))

for i in range(0,n):
    for j in range(0,2*n):
        if p1_im[i,j]<=pc:
            p1_im[i,j]=pc
p1_im=p1_im*Drehzahl*Visk*(R/C_r)**2

Dx=np.zeros_like(p0)
Dy=np.zeros_like(p0)

for i in range(0,n):
    for j in range(0,n):
        Dx[i,j]=p1_im[i,j]*np.cos(xi[i])
        Dy[i,j]=p1_im[i,j]*np.sin(xi[i])

Dxx=-R*0.5*L*simps(simps(Dx,y),xi)/(Drehzahl*C_r)
Dyx=-R*0.5*L*simps(simps(Dy,y),xi)/(Drehzahl*C_r)

#Imaginaerteil von p2
M2_im=np.zeros((n,n))
for i in range(n):
    for j in range(n):
        M2_im[i,j]=-(omega3/Drehzahl)*np.sin(beta)
        *delta_eta*(np.cos(xi[i]+0.5*delta_xi)
        -np.cos(xi[i]-0.5*delta_xi))
M2_im=np.reshape(M2_im,(n*n))

```

```

p2_im=spsolve(Diag, M2_im)
p2_im=np.resize(p2_im,(n,n))

p1=np.flip(p2_im,1)
p2_im=np.hstack((p2_im,p1))
for i in range(0,n):
    for j in range(0,2*n):
        if p2_im[i,j]<=pc:
            p2_im[i,j]=pc

p2_im=p2_im*Drehzahl*Visk*(R/C_r)**2

Dx2=np.zeros_like(p0)
Dy2=np.zeros_like(p0)

for i in range(0,n):
    for j in range(0,n):
        Dx2[i,j]=p2_im[i,j]*np.cos(xi[i])
        Dy2[i,j]=p2_im[i,j]*np.sin(xi[i])

Dxy=-R*0.5*L*simps(simps(Dx2,y),xi)/(Drehzahl*C_r)
Dyy=-R*0.5*L*simps(simps(Dy2,y),xi)/(Drehzahl*C_r)

phi=np.arctan(abs(Ft/Fr))

D_Matrix=np.array([[Dxx,Dxy],[Dxy,Dyy]])
Phi_array=np.array([[np.cos(phi),-np.sin(phi)],[np.sin(phi),np.cos(phi)]])

DMatrix=np.dot(np.dot(Phi_array,D_Matrix),np.transpose(Phi_array))

Dxx1=np.cos(phi)*(Dxx*np.cos(phi)-Dyx*np.sin(phi))-np.sin(phi)*(Dxy*np.cos(phi)
-Dyy*np.sin(phi))
Dxy1=np.sin(phi)*(Dxx*np.cos(phi)-Dyx*np.sin(phi))+np.cos(phi)*(Dxy*np.cos(phi)
-Dyy*np.sin(phi))
Dyx1=np.cos(phi)*(Dxx*np.sin(phi)+Dyx*np.cos(phi))-np.sin(phi)*(Dxy*np.sin(phi)
+Dyy*np.cos(phi))
Dyy1=np.sin(phi)*(Dxx*np.sin(phi)+Dyx*np.cos(phi))+np.cos(phi)*(Dxy*np.sin(phi)
+Dyy*np.cos(phi))

return Fr, Ft, W,Dxx1,Dxy1,Dyx1,Dyy1

#Steifigkeit_koeffizienten
Epsilon=np.linspace(0.05,0.9,30)
delta_epsilon=Epsilon[1]-Epsilon[0]
Ergebnis=(([[0]]*np.shape(Epsilon)[0]))

for i in range(np.shape(Epsilon)[0]):
    Ergebnis[i]=LIM(Epsilon[i],Beta,H0,gamma)

W=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
Ft=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
Fr=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
dFt=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
dFr=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
phi=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])

```

```
#Kraftgradient ueber Exzentricitaet
```

```
for i in range(0,np.shape(Epsilon)[0]):
    W[i]=Ergebnis[i][2]
    Ft[i]=Ergebnis[i][1]
    Fr[i]=Ergebnis[i][0]
for i in range(1,np.shape(Epsilon)[0]-1):
    dFt[i]=(Ft[i+1]-Ft[i-1])/(2*delta_epsilon*C_r)
    dFr[i]=abs((Fr[i+1]-Fr[i-1])/(2*delta_epsilon*C_r))

    dFt[np.shape(Epsilon)[0]-1]=(Ft[np.shape(Epsilon)[0]-1]
    -Ft[np.shape(Epsilon)[0]-2])/(delta_epsilon*C_r)
    dFr[np.shape(Epsilon)[0]-1]=abs((Fr[np.shape(Epsilon)[0]-1]
    -Fr[np.shape(Epsilon)[0]-2])/(delta_epsilon*C_r))

    dFt[0]=(Ft[1]-Ft[0])/(delta_epsilon*C_r)
    dFr[0]=abs((Fr[1]-Fr[0])/(delta_epsilon*C_r))

for i in range(0,np.shape(Epsilon)[0]):
    phi[i]=np.arctan(Ft[i]/abs(Fr[i]))

Kxx=dFr*(np.cos(phi)**2)+dFt*np.cos(phi)*np.sin(phi)
Kxy=dFt*(np.sin(phi)**2)+dFr*np.cos(phi)*np.sin(phi)
Kyx=-dFt*(np.cos(phi)**2)+dFr*np.cos(phi)*np.sin(phi)-(W/(Epsilon*C_r))*np.sin(phi)
Kyy=dFr*(np.sin(phi)**2)-dFt*np.cos(phi)*np.sin(phi)+(W/(Epsilon*C_r))*np.cos(phi)
```

```
Kxx=Kxx*C_r/W
Kxy=Kxy*C_r/W
Kyx=Kyx*C_r/W
Kyy=Kyy*C_r/W
```

```
#Daempfungskoeffizient
```

```
Dxx=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
Dxy=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
Dyx=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
Dyy=np.zeros(np.shape(Epsilon)[0])
for i in range(1,np.shape(Epsilon)[0]):
    Dxx[i]=Ergebnis[i][3]
    Dxy[i]=Ergebnis[i][4]
    Dyx[i]=Ergebnis[i][5]
    Dyy[i]=Ergebnis[i][6]
```

```
Dxx=Dxx*C_r*Drehzahl/W
Dxy=Dxy*C_r*Drehzahl/W
Dyx=Dyx*C_r*Drehzahl/W
Dyy=Dyy*C_r*Drehzahl/W
```

```
K_eq=np.zeros_like(Epsilon)
```

```
for i in range(np.shape(Epsilon)[0]):
    K_eq[i]=(Kxx[i]*Dyy[i]+Kyy[i]*Dxx[i]-Kxy[i]*Dyx[i]-Kyx[i]*Dxy[i])/(Dxx[i]+Dyy[i])
```

```
omega_kr=np.zeros_like(Epsilon)
```

```

for i in range(np.shape(Epsilon)[0]):
    omega_kr[i]=np.sqrt(((K_eq[i]-Kxx[i])*(K_eq[i]-Kyy[i])-Kxy[i]*Kyx[i]))
    /(Dxx[i]*Dyy[i]-Dxy[i]*Dyx[i]))

#Kritische Masse
M_kr=np.zeros_like(Epsilon)

for i in range(np.shape(Epsilon)[0]):
    M_kr[i]=K_eq[i]/(omega_kr[i])

```

Postprocessing

```

from Input import*
from matplotlib.backends.backend_pdf import PdfPages
from Bootsma_linear import Bootsma_linear
from Bootsma_numerisch import Bootsma_numerisch
from VC_analytisch import VC_analytisch
from VC_numerisch import VC_numerisch
from Filmdicke import Film_thickness
#Import Ergebnisse fuer normales Gleitlager
from Normales_Gleitlager import normales_Gleitlager
from Normales_Gleitlager import W as W_norm
from Normales_Gleitlager import Kxx as Kxx_norm
from Normales_Gleitlager import Kxy as Kxy_norm
from Normales_Gleitlager import Kyx as Kyx_norm
from Normales_Gleitlager import Kyy as Kyy_norm
from Normales_Gleitlager import Dxx as Dxx_norm
from Normales_Gleitlager import Dxy as Dxy_norm
from Normales_Gleitlager import Dyx as Dyx_norm
from Normales_Gleitlager import Dyy as Dyy_norm
from Normales_Gleitlager import omega_kr as omega_kr_norm
from Normales_Gleitlager import M_kr as M_kr_norm

##Import Ergebnisse fuer DDM
from DDM import DDM
from DDM import W as WDDM
from DDM import Kxx as Kxx_DDM
from DDM import Kxy as Kxy_DDM
from DDM import Kyx as Kyx_DDM
from DDM import Kyy as Kyy_DDM
from DDM import Dxx as Dxx_DDM
from DDM import Dxy as Dxy_DDM
from DDM import Dyx as Dyx_DDM
from DDM import Dyy as Dyy_DDM
from DDM import omega_kr as omega_kr_DDM
from DDM import M_kr as M_kr_DDM

##Import Ergebnisse fuer LIM
from LIM import LIM
from LIM import W as W_LIM
from LIM import Kxx as Kxx_LIM
from LIM import Kxy as Kxy_LIM
from LIM import Kyx as Kyx_LIM
from LIM import Kyy as Kyy_LIM
from LIM import Dxx as Dxx_LIM
from LIM import Dxy as Dxy_LIM

```

```

from LIM import Dyx as Dyx_LIM
from LIM import Dyy as Dyy_LIM
from LIM import omega_kr as omega_kr_LIM
from LIM import M_kr as M_kr_LIM

#Plotfunktion definieren
#plot fuer zwei funktionen
def Figures2(x, y,z,xlabel ,ylabel ,titel1 ,titel2 ):
    fig = plt.figure()
    a= plt.plot(x, y,'r-',label=titel1)
    b=plt.plot(x, z,'b-',label=titel2)
    plt.xlabel(xlabel ,labelpad=20,fontsize=30,**csfont)
    plt.ylabel(ylabel ,labelpad=20,fontsize=30,**csfont)
    plt.legend(loc='upper left ',prop=font)
    plt.grid()
    return

#Plot fuer 4 Funktionen
def Figures4(x, y1,y2,y3,y4,xlabel ,ylabel ,titel1 ,titel2 ,titel3 ,titel4 ):
    fig = plt.figure()
    a= plt.plot(x, y1,'r-',label=titel1)
    b=plt.plot(x, y2,'m-',label=titel2)
    c= plt.plot(x, y3,'g-',label=titel3)
    d=plt.plot(x, y4,'b-',label=titel4)
    plt.xlabel(xlabel ,labelpad=20,fontsize=30,**csfont)
    plt.ylabel(ylabel ,labelpad=20,fontsize=30,**csfont)
    plt.legend(loc='upper left ',prop=font)
    plt.grid()
    return fig

#Plot fuer 6 Funktionen
def Figures6(x, y1,y2,y3,y4,y5,y6,xlabel ,ylabel ,titel1 ,
titel2 ,titel3 ,titel4 ,titel5 ,titel6 ):

    fig = plt.figure()
    a= plt.plot(x, y1,'r-',label=titel1)
    b=plt.plot(x, y2,'r--',label=titel2)
    c= plt.plot(x, y3,'g-',label=titel3)
    d=plt.plot(x, y4,'g--',label=titel4)
    e= plt.plot(x, y5,'b-',label=titel5)
    f=plt.plot(x, y6,'k-',label=titel6)
    plt.xlabel(xlabel ,labelpad=20,fontsize=30,**csfont)
    plt.ylabel(ylabel ,labelpad=20,fontsize=30,**csfont)
    plt.legend(loc='upper left ',prop=font)
    plt.grid()
    return fig

#Plot fuer 7 Funktionen
def Figures7(x, y1,y2,y3,y4,y5,y6,y7,xlabel ,ylabel ,titel1 ,titel2 ,titel3
,titel4 ,titel5 ,titel6 ,titel7 ):
    fig = plt.figure()
    a= plt.plot(x, y1,'k-o',label=titel1)
    b=plt.plot(x, y2,'r-',label=titel2)
    c= plt.plot(x, y3,'r--',label=titel3)
    d=plt.plot(x, y4,'g-',label=titel4)
    e= plt.plot(x, y5,'g--',label=titel5)
    f=plt.plot(x, y6,'b-',label=titel6)
    g=plt.plot(x, y7,'k-',label=titel7)
    plt.xlabel(xlabel ,labelpad=20,fontsize=30,**csfont)
    plt.ylabel(ylabel ,labelpad=20,fontsize=30,**csfont)

```

```

plt.legend(loc='upper left',prop=font)
plt.grid()
return fig

#Ergebnisse zu Exzentrizitaet
Epsilon=np.linspace(0.05,0.9,30)
W_Bootsma_lin=np.zeros_like(Epsilon)
W_Bootsma_num=np.zeros_like(Epsilon)
W_VC_analy=np.zeros_like(Epsilon)
W_VC_num=np.zeros_like(Epsilon)

for i in range(0,np.shape(Epsilon)[0]):
    W_Bootsma_lin[i]=Bootsma_linear(Epsilon[i], Beta, H0, gamma)[2]
    W_Bootsma_num[i]=Bootsma_numerisch(Epsilon[i], Beta, H0, gamma)[2]
    W_VC_analy[i]=VC_analytisch(Epsilon[i], Beta, H0, gamma)[2]
    W_VC_num[i]=VC_numerisch(Epsilon[i], Beta, H0, gamma)[2]

#Ergebnisse ueber H0
H0_array=np.linspace(1,3,20)
W_Bootsma_lin_H0=np.zeros_like(H0_array)
W_Bootsma_num_H0=np.zeros_like(H0_array)
W_VC_analy_H0=np.zeros_like(H0_array)
W_VC_num_H0=np.zeros_like(H0_array)
W_DDM_H0=np.zeros_like(H0_array)
W_LIM_H0=np.zeros_like(H0_array)
for i in range(0,np.shape(H0_array)[0]):
    W_Bootsma_lin_H0[i]=Bootsma_linear(0.4, Beta, H0_array[i], gamma)[2]
    W_Bootsma_num_H0[i]=Bootsma_numerisch(0.4, Beta, H0_array[i], gamma)[2]
    W_VC_analy_H0[i]=VC_analytisch(0.4, Beta, H0_array[i], gamma)[2]
    W_VC_num_H0[i]=VC_numerisch(0.4, Beta, H0_array[i], gamma)[2]
    W_DDM_H0[i]=DDM(0.4, Beta, H0_array[i], gamma)[2]
    W_LIM_H0[i]=LIM(0.4, Beta, H0_array[i], gamma)[2]

#Ergebnisse ueber Beta
Beta_array=np.linspace(0.175,0.5*math.pi,20)
W_Bootsma_lin_Beta=np.zeros_like(Beta_array)
W_Bootsma_num_Beta=np.zeros_like(Beta_array)
W_VC_analy_Beta=np.zeros_like(Beta_array)
W_VC_num_Beta=np.zeros_like(Beta_array)
W_DDM_Beta=np.zeros_like(Beta_array)
W_LIM_Beta=np.zeros_like(Beta_array)
for i in range(0,np.shape(Beta_array)[0]):
    W_Bootsma_lin_Beta[i]=Bootsma_linear(0.4, Beta_array[i], H0, gamma)[2]
    W_Bootsma_num_Beta[i]=Bootsma_numerisch(0.4, Beta_array[i], H0, gamma)[2]
    W_VC_analy_Beta[i]=VC_analytisch(0.4, Beta_array[i], H0, gamma)[2]
    W_VC_num_Beta[i]=VC_numerisch(0.4, Beta_array[i], H0, gamma)[2]
    W_DDM_Beta[i]=DDM(0.4, Beta_array[i], H0, gamma)[2]
    W_LIM_Beta[i]=LIM(0.4, Beta_array[i], H0, gamma)[2]

#Ergebnisse ueber gamma
gamma_array2=np.array([0.2,0.5,1,2,5])
W_Bootsma_lin_gamma=np.zeros_like(gamma_array)
W_Bootsma_num_gamma=np.zeros_like(gamma_array)
W_VC_analy_gamma=np.zeros_like(gamma_array)
W_VC_num_gamma=np.zeros_like(gamma_array)
W_DDM_gamma=np.zeros_like(gamma_array)

```

```

W_LIM_gamma=np.zeros_like(gamma_array)
for i in range(0,np.shape(gamma_array)[0]):
    W_Bootsma_lin_gamma[i]=Bootsma_linear(0.4, Beta, H0, gamma_array[i])[2]
    W_Bootsma_num_gamma[i]=Bootsma_numerisch(0.4, Beta, H0, gamma_array[i])[2]
    W_VC_analy_gamma[i]=VC_analytisch(0.4, Beta, H0, gamma_array[i])[2]
    W_VC_num_gamma[i]=VC_numerisch(0.4, Beta, H0, gamma_array[i])[2]
    W_DDM_gamma[i]=DDM(0.4, Beta, H0, gamma_array[i])[2]
    W_LIM_gamma[i]=LIM(0.4, Beta, H0, gamma_array[i])[2]

#Normierung der Tragfaehigkeit
Norm=(1/(Drehzahl*Visk*(R**2)))*(C_r/R)**2
W_Bootsma_lin_dim=W_Bootsma_lin*Norm
W_Bootsma_num_dim=W_Bootsma_num*Norm
W_VC_analy_dim=W_VC_analy*Norm
W_VC_num_dim=W_VC_num*Norm
W_norm_dim=W_norm*Norm
W_DDM_dim=W_DDM*Norm
W_LIM_dim=W_LIM*Norm

W_Bootsma_lin_H0_dim=W_Bootsma_lin_H0*Norm
W_Bootsma_num_H0_dim=W_Bootsma_num_H0*Norm
W_VC_analy_H0_dim=W_VC_analy_H0*Norm
W_VC_num_H0_dim=W_VC_num_H0*Norm
W_DDM_H0_dim=W_DDM_H0*Norm
W_LIM_H0_dim=W_LIM_H0*Norm

W_Bootsma_lin_Beta_dim=W_Bootsma_lin_Beta*Norm
W_Bootsma_num_Beta_dim=W_Bootsma_num_Beta*Norm
W_VC_analy_Beta_dim=W_VC_analy_Beta*Norm
W_VC_num_Beta_dim=W_VC_num_Beta*Norm
W_DDM_Beta_dim=W_DDM_Beta*Norm
W_LIM_Beta_dim=W_LIM_Beta*Norm

W_Bootsma_lin_gamma_dim=W_Bootsma_lin_gamma*Norm
W_Bootsma_num_gamma_dim=W_Bootsma_num_gamma*Norm
W_VC_analy_gamma_dim=W_VC_analy_gamma*Norm
W_VC_num_gamma_dim=W_VC_num_gamma*Norm
W_DDM_gamma_dim=W_DDM_gamma*Norm
W_LIM_gamma_dim=W_LIM_gamma*Norm

#Fluidfilm
fig0=Film_thickness(0.4)
#Plots ueber Exzentrizitaet
fig1=Figures7(Epsilon, W_norm_dim, W_Bootsma_lin_dim,
    W_Bootsma_num_dim, W_VC_analy_dim, W_VC_num_dim,
    W_DDM_dim, W_LIM_dim, 'Exzentrizitaet', 'dimensionlose
    Lagertragfaehigkeit', 'Normales Gleitlager', 'Bootsma
    linear', 'Bootsma numerisch', 'Vohr und Chow
    analytisch', 'Vohr und Chow numerisch', 'DDM',
    'LIM')
fig2=Figures4(Epsilon, Kxx_norm, Kxx_DDM, Kyy_norm,
    Kyy_DDM, 'Exzentrizitaet', 'dimensionlose direkte
    Steifigkeitskoeffizienten', 'Kxx normales Gleitlager',
    'Kxx Radialrillengleitlager', 'Kyy normales
    Gleitlager', 'Kyy Radialrillengleitlager')
fig3=Figures4(Epsilon, Kxy_norm, Kxy_DDM, abs(Kyx_norm),
    abs(Kyy_DDM), 'Exzentrizitaet', 'dimensionlose gekoppelte
    Steifigkeitskoeffizienten', 'Kxy normales Gleitlager',
    'Kxy Radialrillengleitlager', '|Kxy| normales

```

```

    Gleitlager ', '|Kyx| Radialrillengleitlager ')
fig3=Figures4(Epsilon, Kxx_norm, Kxx-DDM, Dyy_norm,
Dyy-DDM, 'Exzentrizitaet ', 'dimensionlose direkte
Daempfungskoeffizienten ', 'Dxx normales Gleitlager ',
'Dxx Radialrillengleitlager ', 'Dyy normales
Gleitlager ', 'Dyy Radialrillengleitlager ')

fig5=Figures4(Epsilon, Kxy_norm, Kxy-DDM, abs(Kyx_norm),
abs(Kyy-DDM), 'Exzentrizitaet ', 'dimensionlose gekoppelte
Daempfungskoeffizienten ', 'Dxy normales Gleitlager ',
'Dxy Radialrillengleitlager ', '|Dxy| normales
Gleitlager ', '|Dyx| Radialrillengleitlager ')

fig6=Figures2(Epsilon, omega_kr_norm, omega_kr-DDM,
'Exzentrizitaet ', 'dimensionlose kritische
Wirbelfrequenz ', 'normales Gleitlager ',
'Radialrillengleitlager ')
fig7=Figures2(Epsilon, M_kr_norm, M_kr-DDM,
'Exzentrizitaet ', 'dimensionlose kritische Masse ',
'normales Gleitlager ', 'Radialrillengleitlager ')

#Plots ueber H0
fig8=Figures6(H0_array, W_Bootsma_lin_H0_dim,
W_Bootsma_num_H0_dim, W_VC_analy_H0_dim,
W_VC_num_H0_dim, W-DDM_H0_dim, W_LIM_H0_dim, 'H0',
'dimensionlose Lagertragfaehigkeit ', 'Bootsma linear ',
'Botsma numerisch ', 'Vohr und Chow analytisch ', 'Vohr
und Chow numerisch ', 'DDM', 'LIM')

#Plots ueber Beta
Beta_array=Beta_array*180/math.pi
fig9=Figures6(Beta_array, W_Bootsma_lin_Beta_dim,
W_Bootsma_num_Beta_dim, W_VC_analy_Beta_dim,
W_VC_num_Beta_dim, W-DDM_Beta_dim, W_LIM_Beta_dim,
'Rillenwinkel ', 'dimensionlose Lagertragfaehigkeit ',
'Bootsma linear ', 'Botsma numerisch ', 'Vohr und Chow
analytisch ', 'Vohr und Chow numerisch ', 'DDM',
'LIM')

#Plots ueber gamma
fig10=Figures6(gamma_array, W_Bootsma_lin_gamma_dim,
W_Bootsma_num_gamma_dim, W_VC_analy_gamma_dim,
W_VC_num_gamma_dim, W-DDM_gamma_dim, W_LIM_gamma_dim,
'$\gamma$', 'dimensionlose Lagertragfaehigkeit ',
'Bootsma linear ', 'Botsma numerisch ', 'Vohr und Chow
analytisch ', 'Vohr und Chow numerisch ', 'DDM',
'LIM')

pp = PdfPages('Ergebnisse.pdf')
pp.savefig(fig0)
pp.savefig(fig1)
pp.savefig(fig2)
pp.savefig(fig3)
pp.savefig(fig5)
pp.savefig(fig6)
pp.savefig(fig7)
pp.savefig(fig8)
pp.savefig(fig9)
pp.savefig(fig10)
pp.close()

```