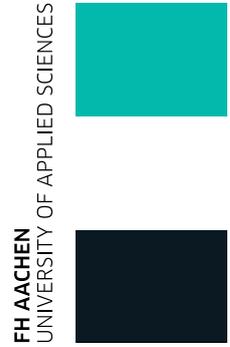


**Fachhochschule Aachen**  
Campus Jülich



Fachbereich: Medizintechnik und Technomathematik  
Studiengang: Angewandte Mathematik und Informatik

---

**Streuprobleme für periodische Medien**

---

**Masterarbeit**

vorgelegt von

**Sina Mattfeldt**

Matrikelnummer: 3294404

Jülich, den 27. Oktober 2023

# Eigenständigkeitserklärung

Diese Arbeit ist von mir selbstständig angefertigt und verfasst. Es sind keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet worden.

Jülich, den 27. Oktober 2023

---

Sina Mattfeldt

Diese Arbeit wurde betreut von:

1. Prüfer: Prof. Dr. Andreas Kleefeld
2. Prüfer: Prof. Dr. Johannes Grotendorst

Die vorliegende Arbeit wurde in Zusammenarbeit mit dem Jülich Supercomputing Centre der Forschungszentrum GmbH angefertigt.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Problemstellung und mathematische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Geometrischer Aufbau . . . . .	3
2.2	Mathematische Problemstellung . . . . .	4
2.3	Randintegralgleichungsmethode der Helmholtz-Gleichung . . . . .	6
2.4	Die Green'sche Funktion . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Ewalds Methode für den Doppelschichtoperator</b>	<b>20</b>
3.1	Alternative Darstellung der Hankelfunktion . . . . .	22
3.2	Konvergenz des Anteils des Doppelschichtoperators mit Singulärstelle . . . . .	36
3.3	Konvergenz des Anteils des Doppelschichtoperators ohne Singulärstelle . . . . .	46
3.4	Konvergenz der abgeschnittenen Reihen des Doppelschichtoperators	52
<b>4</b>	<b>Ewalds Methode für den Einfachschichtoperator</b>	<b>62</b>
4.1	Konvergenz des Anteils des Einfachschichtoperators mit Singulärstelle . . . . .	63
4.2	Konvergenz des Anteils des Einfachschichtoperators ohne Singulärstelle . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>83</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Geometrischer Aufbau des periodischen Mediums . . . . .	3
3.1	Konvergenz der Reihen mit der Hilfe der Hankelfunktion und ihrer Fourier-Reihendarstellung der ganzen Ebene und Halbebene für die Ableitung der Fundamentallösung nach $y_2$ . . . . .	20
3.2	Integrationskurve $\gamma_1$ . . . . .	23
3.3	Integrationskurve $\gamma_{12}$ . . . . .	30
3.4	Integrationskurve $\gamma_2$ . . . . .	31
3.5	Integrationskurve $\gamma_3$ . . . . .	32
3.6	Integrationskurve $\gamma_4$ . . . . .	33
4.1	Konvergenz der Reihen mit der Hilfe der Hankelfunktion und ihrer Fourier-Reihendarstellung der ganzen Ebene und Halbebene für die Fundamentallösung . . . . .	62
4.2	Konvergenz der Reihen mit der Hilfe der Hankelfunktion, ihrer Fourier- Reihendarstellung und der Darstellung über die Ewald'sche-Methode der ganzen Ebene und Halbebene für die Fundamentallösung . . . . .	80
4.3	Konvergenz der Reihen mit der Hilfe der Hankelfunktion, ihrer Fourier- Reihendarstellung und der Darstellung über die Ewald'sche-Methode der ganzen Ebene und Halbebene für die Ableitung der Fundamentallösung nach $y_2$ . . . . .	82

# 1 Einleitung

Sowohl in der Natur als auch im Bereich der Technik liegen häufig Strukturen in periodischer (in gleichen Abständen wiederkehrender) Form vor. Aus diesem Grund ist es nicht verwunderlich, dass auch Streuprobleme von periodischen Medien, vor allem in der Physik und Technik, weit verbreitet sind. Einige Beispiele hierfür sind die Betrachtung des Einflusses von elektromagnetischen Wellen und Unterwasserschall durch natürliche Wellenzüge auf der Oberfläche des Ozeans [25] oder die Kristallstrukturanalyse, welche durch Beugung geeigneter Strahlung, wie monochromatische Röntgenstrahlung, am Kristallgitter den atomaren Aufbau eines Kristalls bestimmen kann [9]. Aber auch bei der Entwicklung und Simulation von dünnen Solarzellen mit periodischen photonischen Nanostrukturen, müssen Streuprobleme für periodische Medien gelöst werden [20].

Da es sich bei einem periodischen Medium um ein unbeschränktes Gebiet handelt, ist es notwendig, ein geeignetes mathematisches Modell zu finden, welches diese Probleme lösen kann. Neben der dabei zu definierenden Differentialgleichung, müssen auch die Randbedingungen und die entsprechenden Austrahlungsbedingungen festgelegt werden. Der Vorteil der periodischen Struktur besteht darin, lediglich eine Zelle, welche periodisch wiederholt wird, betrachten zu müssen.

Ein spezielles Problem, welches bereits des öfteren untersucht wurde, ist das akustische Streuproblem im zweidimensionalen Raum mit einem Streuobjekt, welches entlang einer Richtung periodisch ist und mit einer Punktquelle angestrahlt wird [4], [3], [6], [16]. Bisher ist es jedoch so, dass der ganze Raum bei der Lösung eines solchen Streuproblems betrachtet wird. Das führt dazu, dass die Fundamentallösung eine nicht-hebbare Singulärstelle aufweist.

Aus diesem Grund soll in dieser Masterarbeit das periodische Streuobjekt innerhalb der oberen Halbebene definiert werden und die anschließenden Berechnungen auf diese beschränkt werden. Das Ziel dieser Masterarbeit ist es, ein geeignetes mathematisches Modell, welches das äußere Dirichlet-Problem auf dem oberen Halbraum löst, zu definieren. Anschließend soll dieses in eine Form gebracht werden, welche sich möglichst schnell mit Hilfe eines Rechners lösen lässt.

Das mathematische Modell basiert dabei auf der Randelementmethode. Anders als bei den gängigen Finite-Differenzen-, Finite-Volumen- und Finite-Elemente-Methoden, wird bei der Randintegralgleichungsmethode zunächst mit Hilfe der Fundamentallösung und den Integraloperatoren die Dichte auf dem Rand des Bereichs berechnet. Anschließend kann die Lösung des Problems an jedem beliebigen Punkt im Raum berechnet werden. Die dabei benötigte Fundamentallösung und ihre Ableitung werden durch Reihen beschrieben. Zur Beschleunigung der Konvergenz dieser Reihen und der damit einhergehenden besseren Berechenbarkeit auf einem verwendeten Rechner, wird die Ewald-Methode verwendet. Die für die Analyse der Konvergenzgeschwindigkeit benötigten Berechnungen werden in der Programmiersprache Matlab

durchgeführt.

Zu Anfang dieser Masterarbeit sollen in Kapitel 2 die Problemstellung und die mathematischen Grundlagen erläutert werden, welche für das Verständnis dieser Masterarbeit notwendig sind. Dabei wird als Erstes der geometrische Aufbau des Streuobjekts in Abschnitt 2.1 beschrieben. Anschließend wird die mathematische Problemstellung des akustischen Streuproblems in der oberen Halbebene definiert (Abschnitt 2.2). Damit diese gelöst werden kann, muss sie mit Hilfe der Randelementmethode diskretisiert werden. Die dafür benötigte Theorie wird in Abschnitt 2.3 beschrieben. Die für die Randelementmethode benötigte quasiperiodische Green'sche Funktion wird in Abschnitt 2.4 hergeleitet und auf Singularstellen untersucht.

In Kapitel 3 wird versucht, die Konvergenz des Doppelschichtoperators mit Hilfe der Ewald-Methode zu beschleunigen. Dazu ist zunächst eine alternative Darstellungsform der Hankelfunktion notwendig, welche in Abschnitt 3.1 bewiesen wird. Die in dem Doppelschichtoperator enthaltene Reihe wird anschließend in einen Anteil aufgesplittet, welcher die gleiche Singularstelle besitzt, dafür aber mit exponentieller Geschwindigkeit konvergiert und einen Anteil der keine Singularstelle besitzt, dafür aber auch nicht mit exponentieller Geschwindigkeit konvergiert. Der erste Anteil wird in Abschnitt 3.2 genauer analysiert. Bei dem zweiten Anteil wird in Abschnitt 3.3 versucht, mit Hilfe einer Fourier-Transformation, diesen in eine schneller konvergente Form zu überführen. Da bei einer Simulation lediglich mit Partialsummen gearbeitet werden kann, wird im darauf folgenden Abschnitt 3.4 die Konvergenz der abgeschnittenen Reihen betrachtet.

Neben dem Doppelschichtoperator soll auch der Einschichtoperator untersucht werden (Kapitel 4). Bei diesem wird ebenfalls zuerst der Teil der Reihe mit Singularstelle untersucht und die dazugehörige Konvergenz beschrieben (Abschnitt 4.1). Anschließend wird der Teil ohne Singularstelle betrachtet (Abschnitt 4.2). Am Schluss wird erneut die Konvergenz der abgeschnittenen Reihen betrachtet.

## 2 Problemstellung und mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel soll zunächst die Problemstellung erläutert werden und anschließend ein Überblick über die für die folgenden Kapitel benötigten mathematischen Grundlagen gegeben werden. Dafür wird zunächst der geometrische Aufbau des periodischen Mediums erläutert. Im Anschluss wird das mathematische Problem formuliert und betrachtet, welche Bedingungen das Streuproblem erfüllen muss. Dieses Problem soll mit Hilfe einer geeigneten Methode gelöst werden. Dafür wird in Abschnitt 2.3 zuerst eine passende Methode gewählt und danach genauer erläutert. Abschließend wird die für die gewählte Randintegralgleichungsmethode benötigte Green'sche Funktion berechnet und ihre Eigenschaften auf dem Rand des periodischen Gebiets betrachtet.

### 2.1 Geometrischer Aufbau

In diesem Kapitel soll der geometrische Aufbau des periodischen Mediums erläutert werden.

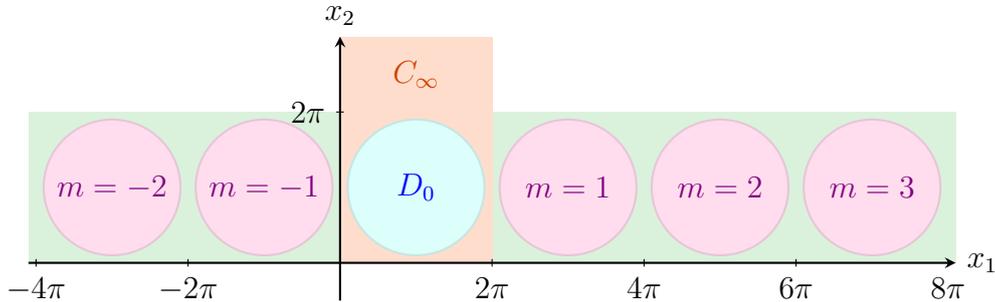


Abbildung 2.1: Geometrischer Aufbau des periodischen Mediums

Bei dem in dieser Masterarbeit betrachteten Streuobjekt handelt es sich um ein periodisches Gebiet mit Periode  $d = 2\pi$  entlang der  $x_1$ -Achse. Dieses ist in der oberen Halbebene definiert. Die Beschränkung auf die obere Halbebene  $\mathbb{R}_+^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  wird gewählt, da hierdurch Polstellen, die im freien Raum auftreten würden, wegfallen [12, S. 126]. Dieses wird in Abschnitt 2.4 näher erläutert. Für den Aufbau des periodischen Streuobjekts, welcher in Abbildung 2.1 dargestellt ist, wird zunächst ein Grundobjekt  $D_0$  definiert, wobei  $\overline{D_0} \subset (0, 2\pi) \times (0, h)$  mit  $h > 0$  gilt. Anschließend wird dieses Grundobjekt durch Verschiebung entlang der  $x_1$ -Achse mit einer Verschiebungsweite von  $2\pi m$ , wobei  $m \in \mathbb{Z}$ , dupliziert. So entsteht das periodische Streuobjekt  $D = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (D_0 + 2\pi m e^{(1)})$ , wobei  $e^{(1)} = (1, 0)^\top$  der erste kanonische

Einheitsvektor ist. Für dieses periodische Streuobjekt gilt  $D \subset \mathbb{R} \times (0, h) \subset \mathbb{R}_+^2$ . Darüber hinaus wird der Bereich  $C_\infty = (0, 2\pi) \times (0, \infty)$  im Folgenden als eine Zelle bezeichnet und  $\Gamma$  als der Rand des periodischen Objekts.

## 2.2 Mathematische Problemstellung

Das periodische Streuobjekt wird durch eine ebene Welle

$$u_{\text{inc}} = e^{ik(x_1 \sin \theta - x_2 \cos \theta)} = e^{ik(x_1 \alpha - x_2 \beta)} \quad (2.1)$$

mit der Wellenzahl  $k > 0$  und dem Ausbreitungswinkel  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$  bestrahlt [6]. Das resultierende Feld  $u$ , auch totales Feld genannt, setzt sich durch das Superpositionsprinzip aus dem einfallenden Feld  $u_{\text{inc}}$  und dem gestreuten Feld  $u_{\text{sca}}$  zusammen mit  $u = u_{\text{inc}} + u_{\text{sca}}$ . Dabei kann das gestreute Feld durch die partielle Differentialgleichung

$$\Delta u_{\text{sca}} + k^2 u_{\text{sca}} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{D} \quad (2.2)$$

zusammen mit einer der Dirichlet-Randbedingungen

$$u_{\text{sca}} = -u_{\text{inc}} \quad \text{auf } \partial D \quad (2.3)$$

oder der Neumann-Randbedingung

$$\frac{\partial u_{\text{sca}}}{\partial v} = \frac{du_{\text{inc}}}{dv} \quad \text{auf } \partial D \quad (2.4)$$

oder einer Komposition beider Randbedingungen berechnet werden. Die Einheitsnormale  $v$  ist durch  $\frac{(-p'(x), 1)}{\sqrt{1+p'(x)^2}}$  gegeben. [7, S. 3]

Für die Gewährleistung der Eindeutigkeit und der physikalischen Bedeutung, dem Abfall der Amplitude des gestreuten Feldes, ist es notwendig eine zusätzliche Ausstrahlungsbedingung hinzuzufügen. Bei nicht-periodischen, begrenzten Streuobjekten im freien Raum, wird hierfür häufig die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung im Unendlichen genutzt [8, S. 19]. Diese beschreibt das asymptotische Verhalten der Wellen in großer Entfernung zum Streuobjekt. Aufgrund der Unbegrenztheit des periodischen Streuobjekts in  $x_1$ -Richtung ist es nicht mehr möglich die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung einzuhalten. [21, S. 54] Deshalb ist es notwendig eine andere Ausstrahlungsbedingung zu definieren. Dafür wird das gestreute Feld in einen strahlenden Anteil und einen geführten Anteil aufgeteilt. Der strahlende Anteil nimmt, wie bei der Sommerfeld'schen Ausstrahlungsbedingung, mit zunehmendem Abstand zum Streuobjekt in alle Richtungen ab. Der geführte Anteil bleibt jedoch in  $x_1$ -Richtung gleich und verringert sich nur in  $x_2$ -Richtung exponentiell, weshalb sie auch als Oberflächenwellen bezeichnet werden. [15]

Eine Ausstrahlungsbedingung, die das berücksichtigt ist die Rayleigh Ausstrahlungsbedingung. Für diese wird ausgenutzt, dass die einfallenden Wellen quasi-periodisch sind. Eine quasiperiodische Funktion  $f$  ist eine Funktion, für welche

$$f(z + w) = g(z, f(z))$$

gilt, wobei  $g$  eine „einfachere“ Funktion als  $f$  ist. Dieses ist für die einfallende Welle gegeben, denn für diese gilt:  $u_{\text{inc}}(x + 2\pi e^{(1)}) = u_{\text{inc}}(x)e^{2i\pi k\alpha}$ . Somit ist 2.1 eine  $\alpha$ -quasiperiodische Funktion in  $x_1$ .

Im nächsten Schritt wird eine periodische Funktion

$$v(x, y) := u_{\text{sca}}(x, y)e^{-i\alpha x}$$

definiert. Diese ist periodisch, da

$$v(x + 2\pi, y) = u_{\text{sca}}(x + 2\pi, y)e^{-i\alpha(x + 2\pi)} = u_{\text{sca}}(x, y)e^{-i\alpha x} = v(x, y)$$

wobei  $u_{\text{sca}}(x + 2\pi, y) = u_{\text{sca}}(x, y)e^{i\alpha 2\pi}$  eine quasiperiodische Funktion ist.

Für die Formulierung der Rayleigh Strahlungsbedingung wird die Periodizität der Funktion  $v(x, y)$  ausgenutzt und das gestreute Feld in eine Fourierreihe entwickelt

$$u_{\text{sca}}(x, y) = e^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(y)e^{inkx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(y)e^{i\alpha_n x}, \quad (2.5)$$

mit dem Parameter  $\alpha_n := \alpha + n\frac{2\pi}{d} = \alpha + n$ .

Nach Bedingung (2.2) erfüllt das gestreute Feld die Helmholtz-Gleichung und es gilt somit

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{dv_n}{dy^2} + (k^2 - \alpha_n^2) v_n \right] e^{inKx} = 0, \quad (2.6)$$

wenn  $y > h$ . Es lässt sich erkennen, dass die linke Seite der Gleichung (2.6) als Fourierreihe der Nullfunktion angesehen werden kann. Aus diesem Grund muss für jedes  $n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{dv_n}{dy^2} + (k^2 - \alpha_n^2) v_n = 0$$

gelten. Die Lösung dieser Gleichung ist

$$v_n = A_n e^{-i\beta_n y} + B_n e^{i\beta_n y}$$

wobei  $\beta_n := \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$  für  $\alpha_n^2 \leq k^2$  und sonst  $\beta_n := i\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$ .

Setzt man diese Lösung nun in die Gleichung (2.5) ein, so lässt sich das gestreute Feld für  $y > h$  durch

$$u_{\text{sca}}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i(\alpha_n x - \beta_n y)} + B_n e^{i(\alpha_n x + \beta_n y)},$$

beschreiben. Dieses muss die bereits oben beschriebene Ausstrahlungsbedingung im Unendlichen einhalten. Aus diesem Grund ist es notwendig,  $A_n = 0$  zu setzen, da für  $\alpha_n^2 \leq k^2$   $A_n e^{i(\alpha_n x - \beta_n y)}$  die einfallende Welle beschreibt, während  $A_n e^{i(\alpha_n x - \beta_n y)}$  für  $\alpha_n^2 > k^2$  nicht begrenzt ist.

Daher ist die Welle nur dann auslaufend, wenn sie die Rayleigh Entwicklung (Rayleigh expansion) erfüllt

$$u_{\text{sca}}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{i(\alpha_n x + \beta_n y)}.$$

Diese Summe besteht, wenn  $\alpha_n^2 < k^2$ , lediglich aus einer endlichen Anzahl von ebenen Wellen, die sich in das Fernfeld ausbreiten. Ist  $\alpha_n^2 > k^2$ , dann handelt es sich um eine evaneszente Welle. Das sind Wellen, die sich in einem bestimmten Bereich oder Material nicht ausbreiten können und aus diesem Grund exponentiell abklingen. In diesem beschriebenen Aufbau klingen Sie für  $y \rightarrow \infty$  ab. Gilt  $\alpha_n^2 = k^2$  handelt es sich um Wood'sche Intensitätsanomalien. Diese werden näher in [21, S. 123] erläutert, sollen aber nicht Bestandteil dieser Masterarbeit sein. [7, S. 4]

Zusammen mit dieser Rayleigh-Ausstrahlungsbedingung können nun die zwei mathematischen Probleme definiert werden, die in dieser Masterarbeit gelöst werden sollen. Das erste Problem ist das äußere Dirichlet-Problem des periodischen Mediums  $D$ .

**Problem 2.1** (Äußeres Dirichlet-Problem).

Finde eine Lösung  $u \in C^2(\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbb{R}_+^2 \setminus D)$ , die

$$\Delta u_{\text{sca}} + k^2 u_{\text{sca}} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{D}, \quad (2.7)$$

$$u_{\text{sca}} = -u_{\text{inc}} \quad \text{auf } \partial D \quad (2.8)$$

und die Rayleigh-Ausstrahlungsbedingung

$$u_{\text{sca}}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{i(\alpha_n x + \beta_n y)}.$$

erfüllt.

Das zweite Problem ist das äußere Neumann-Problem des periodischen Mediums  $D$ .

**Problem 2.2** (Äußeres Neumann-Problem).

Finde eine Lösung  $u \in C^2(\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbb{R}_+^2 \setminus D)$ , die

$$\Delta u_{\text{sca}} + k^2 u_{\text{sca}} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{D}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial u_{\text{sca}}}{\partial \nu} = \frac{\partial u_{\text{inc}}}{\partial \nu} \quad \text{auf } \partial D \quad (2.10)$$

und die Rayleigh-Ausstrahlungsbedingung

$$u_{\text{sca}}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{i(\alpha_n x + \beta_n y)}.$$

erfüllt.

## 2.3 Randintegralgleichungsmethode der Helmholtz-Gleichung

Diese zwei Problemstellungen 2.1 und 2.1 sollen nun mit Hilfe einer geeigneten Methode gelöst werden. Die bekanntesten Methoden sind die Finite-Differenzen-, die Finite-Volumen-, die Finite-Elemente- und die Randintegralgleichungsmethode. Bei den ersten drei Methoden wird ein Gebiet definiert, in welchem das Problem gelöst

werden soll. Dieses wird anschließend diskretisiert und an den jeweiligen Stützstellen die Lösung berechnet. Wie in Kapitel 2.1 bereits erläutert, ist das Problem im gesamten oberen Halbraum zu lösen, ohne den Bereich  $D$ , in welchem das periodische Medium definiert ist. Aus diesem Grund reicht es nicht aus lediglich ein beschränktes Gebiet zu betrachten, wie es bei den ersten drei Methoden der Fall wäre. Eine geeignetere Methode für die zwei Probleme 2.1 und 2.2 ist die zuletzt genannte Randintegralgleichungsmethode. Bei dieser wird zunächst mit Hilfe von Integraloperatoren und der darin als Integralkern enthaltenen Fundamentallösung die Dichte auf dem Rand berechnet. Anschließend kann an jedem beliebigen Punkt im Raum die Lösung berechnet werden. Die dafür verwendete Diskretisierungsmethode heißt Randelementmethode, soll aber in dieser Masterarbeit nicht näher betrachtet werden. Der Nachteil der Randintegralgleichungsmethode ist, dass es nicht für alle Probleme möglich ist, die Fundamentallösung auf dem Rand zu berechnen. Wie später in Kapitel 2.4 gezeigt werden kann, existiert eine Fundamentallösung für die in dieser Masterarbeit betrachteten Probleme auf dem Rand. Aus diesem Grund wird im Folgenden die Randintegralgleichungsmethode verwendet.

Das Lösen der zwei betrachteten Probleme 2.1 und 2.2 erfolgt, indem zunächst ein Schicht-Ansatz angewendet wird. Im Fall der bei uns definierten Probleme kann dabei zwischen dem Einfachschichtansatz und dem Doppelschichtansatz unterschieden werden. Das Ziel ist es, dabei aus den zwei Potentialen die Lösungen des äußeren Dirichlet- beziehungsweise des äußeren Neumannproblems zu konstruieren.

**Definition 2.3** (Einfachschichtpotential).

Das Einfachschichtpotential mit der Dichte  $\psi \in C(\partial D)$  ist durch

$$SL_k[\psi](x) := \int_{\partial D} \psi(y) \cdot \Phi_k(x, y) ds, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad (2.11)$$

definiert. [8, S. 39]

**Definition 2.4** (Doppelschichtpotential).

Das Doppelschichtpotential mit der Dichte  $\psi \in C(\partial D)$  ist durch

$$DL_k[\psi](x) := \int_{\partial D} \psi(y) \cdot \frac{d}{dv(y)} \Phi_k(x, y) ds, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad (2.12)$$

definiert, wobei  $v(y)$  der äußere Normalenvektor an der Stelle  $y$  ist. [8, S. 39]

Damit dieses durchgeführt werden kann, müssen zunächst die Potentiale auf den jeweiligen Rändern ermittelt werden. Das wird mit den sogenannten Sprungrelationen gemacht. Für die Beschreibung der Sprungrelationen müssen zunächst die Integraloperatoren auf dem Rand, wie in [8, S.41] definiert werden.

**Definition 2.5** (Rand-Einfachschichtoperator  $S_k$ ).

Der Rand-Einfachschichtoperator mit kontinuierlicher Dichte  $\psi$  ist durch

$$S_k[\psi](x) = \int_{\partial D} \psi(y) \cdot \Phi_k(x, y) ds, \quad x \in \partial D \quad (2.13)$$

definiert.

**Definition 2.6** (Rand-Doppelschichtoperator  $D_k$ ).

Der Rand-Doppelschichtoperator mit kontinuierlicher Dichte  $\psi$  ist durch

$$D_k[\psi](x) = \int_{\partial D} \psi(y) \cdot \frac{d}{dv(y)} \Phi_k(x, y) ds, \quad x \in \partial D \quad (2.14)$$

definiert.

So gilt für den Einfachschichtansatz, wie in [8, Theorem 3.1] nachzulesen ist,

**Satz 2.7** (Sprungrelationen für das Einfachschichtpotential).

Sei  $\psi \in C(\partial D)$ . Mit

$$w(x) = SL_k[\psi](x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad (2.15)$$

folgt damit

$$\begin{aligned} w_+(x) &= S_k[\psi](x), & x \in \partial D \\ w_-(x) &= S_k[\psi](x), & x \in \partial D, \end{aligned} \quad (2.16)$$

wobei  $w_{\pm}(x) := \lim_{h \rightarrow 0^+} w(x \pm hv(x))$  und  $v(x)$  die äußere Normale ist.

Es lässt sich zum einen erkennen, dass  $w_+(x)$  bedeutet, dass sich von außen an den Rand angenähert wird, wohingegen  $w_-(x)$  das Annähern von innen beschreibt. Zum anderen lässt sich erkennen, dass ein kontinuierlicher Übergang ohne Sprünge vorliegt. Für den Doppelschichtansatz gelten die in dem Satz (2.8) definierten Sprungrelationen [8, Theorem 3.1].

**Satz 2.8** (Sprungrelationen für das Doppelschichtpotential).

Sei  $\psi \in C(\partial D)$ . Mit

$$w(x) = DL_k[\psi](x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad (2.17)$$

folgt damit

$$\begin{aligned} w_+(x) &= D_k[\psi](x) + \frac{1}{2}\psi(x), & x \in \partial D \\ w_-(x) &= D_k[\psi](x) - \frac{1}{2}\psi(x), & x \in \partial D, \end{aligned} \quad (2.18)$$

wobei  $w_{\pm}(x) := \lim_{h \rightarrow 0^+} w(x \pm hv(x))$  und  $v(x)$  die äußere Normale ist.

Anders als bei den Sprungrelationen des Einfachschichtpotentials liegt hier ein Sprung am Rand des betrachteten Gebiets vor. Das bedeutet  $w_{\pm}(x)$  nimmt unterschiedliche Werte an, je nachdem ob die Annäherung von innen oder außen erfolgt.

Für die Betrachtung des äußeren Neumann-Problems sind darüber hinaus die Ableitungsoperatoren  $D_k^{\top}$  und  $N_k$  zu definieren.

**Definition 2.9** (Ableitungsoperator  $D_k^\top$ ).

Der Ableitungsoperator  $D_k^\top$  sei definiert durch

$$D_k^\top[\psi](x) = \int_{\partial D} \psi(y) \cdot \partial_{v(x)} \Phi_k(x, y) ds(y), \quad x \in \partial D \quad (2.19)$$

wobei  $\psi$  die kontinuierliche Dichte-Funktion ist. [8, S.42]

**Definition 2.10** (Ableitungsoperator  $N_k$ ).

Der Ableitungsoperator  $N_k$  sei definiert durch

$$N_k[\psi](x) = \partial_{v(x)} \int_{\partial D} \psi(y) \cdot \partial_{v(y)} \Phi_k(x, y) ds(y), \quad x \in \partial D \quad (2.20)$$

wobei für die Dichte-Funktion  $\psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ . [8, S. 42]

Diese zwei Ableitungsoperatoren werden im weiteren Verlauf dazu genutzt, die Sprungrelationen der Normalableitung des Einfachschichtpotentials und des Doppelschichtpotentials zu berechnen. Dabei gelten nach [8, Theorem 3.1] die zwei folgenden Sätze.

**Satz 2.11** (Sprungrelationen für die Normalableitung des Einfachschichtpotentials).

Sei  $\psi \in C(\partial D)$ . Mit

$$w(x) = \text{SL}_k[\psi](x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad (2.21)$$

folgt damit

$$\begin{aligned} \partial_{v(x)} w_+(x) &= D_k^\top[\psi](x) - \frac{1}{2}\psi(x), & x \in \partial D \\ \partial_{v(x)} w_-(x) &= D_k^\top[\psi](x) + \frac{1}{2}\psi(x), & x \in \partial D, \end{aligned} \quad (2.22)$$

wobei  $\partial_{v(x)} w_\pm(x) := \lim_{h \rightarrow 0^+} v(x) \nabla w(x \pm hv(x))$  und  $v(x)$  die äußere Normale ist.

**Satz 2.12** (Sprungrelationen für die Normalableitung des Doppelschichtpotentials).

Sei  $\psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ . Mit

$$w(x) = \text{DL}_k[\psi](x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad (2.23)$$

folgt damit

$$\begin{aligned} \partial_{v(x)} w_+(x) &= N_k[\psi](x), & x \in \partial D \\ \partial_{v(x)} w_-(x) &= N_k[\psi](x), & x \in \partial D. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Im Gegensatz zu den Sprungrelationen (2.16) und (2.18) tritt bei der Betrachtung der Sprungrelationen für die Normalableitungen der jeweiligen Potentiale im Fall des Einfachschichtpotentials ein Sprung auf, wohingegen bei dem Doppelschichtpotential kein Sprung auftritt.

Mit Hilfe dieser Sprungrelationen lassen sich nun die Potentiale auf dem Rand berechnen. Für das äußere Dirichlet-Problem 2.1 wird zunächst der Einfachschichtansatz ausprobiert. Dieser besagt, dass

$$u(x) = \text{SL}_k[\psi](x), \quad x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \partial D \quad (2.25)$$

zu berechnen ist, wobei darauf zu achten ist, dass unser Problem lediglich in der oberen Halbebene definiert ist und  $\psi$  eine unbekannte Randfunktion ist. Diese kann ermittelt werden, indem die Sprungrelationen des Einfachschichtpotentials ausgenutzt werden. Deshalb ist als erstes

$$\text{S}_k[\psi](x) = -u_{\text{inc}}, \quad x \in \partial D \quad (2.26)$$

auf dem Rand zu lösen. Anschließend kann die so berechnete Dichtefunktion in (2.25) eingesetzt werden.

Im Gegensatz dazu wird jetzt versucht, das äußere Dirichlet-Problem mit dem Doppelschichtansatz zu lösen

$$u(x) = \text{DL}_k[\psi](x), \quad x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \partial D. \quad (2.27)$$

Wieder wird dafür im ersten Schritt die unbekannte Randfunktion  $\psi$  auf dem Rand berechnet, in dem die Sprungrelationen des Satzes 2.8 verwendet werden. Dabei ist anzumerken, dass die erste Sprungrelation von (2.18) zu verwenden ist, da das äußere Dirichlet-Problem betrachtet wird und somit der Wert auf dem Rand von außen angenähert werden muss. So kann

$$\frac{1}{2}\psi(x) + \text{D}_k[\psi](x) = -u_{\text{inc}}, \quad x \in \partial D. \quad (2.28)$$

auf dem Rand berechnet werden.

Sowohl der Einfachschichtoperator als auch der Doppelschichtoperator des äußeren Dirichlet-Problems 2.1 sind nicht immer invertierbar. So gilt für den Einschichtoperator, dass dieser nur genau dann invertierbar ist, wenn für die Wellenzahl gilt, dass  $k^2$  kein Eigenwert des inneren Dirichlet-Problems des Laplace-Operators ist [22, Theorem 3.9.1]. Ebenso gilt für den Operator  $\frac{1}{2}I + \text{D}_k[\psi](x)$ , dass dieser im Fall, dass  $k^2$  ein Eigenwert des inneren Neumann-Problems der Laplace-Gleichung ist, nicht invertierbar ist. [22, Exercise 3.9.5]

Im nächsten Schritt wird ein passender Ansatz für das äußere Neumann-Problem 2.2 gesucht. Als erstes wird wieder der Einschichtansatz ausprobiert. Bei diesem ist wieder (2.25) in dem Außenraum der oberen Halbebene zu lösen. Die unbekannte Randfunktion  $\psi$  kann mit Hilfe der Sprungrelation

$$\text{D}_k^\top[\psi](x) - \frac{1}{2}\psi(x) = \frac{du_{\text{inc}}}{dv}, \quad x \in \partial D \quad (2.29)$$

berechnet werden. Genau wie bei dem äußeren Dirichlet-Problem ist auch in diesem Fall das Problem nicht immer lösbar, da für jeden Eigenwert  $k^2$  des inneren Dirichlet-Problems des Operators  $-\Delta$  der Term  $\text{D}_k^\top[\psi](x) - \frac{1}{2}I$  der Sprungrelation nicht invertierbar ist. [22, Theorem 3.9.3]

Aus diesem Grund wird der Doppelschichtansatz versucht. Bei diesem soll wieder der Ansatz (2.27) verwendet werden. Die Dichtefunktion  $\psi$  auf dem Rand wird mit Hilfe der Sprungrelation von außen

$$N_k[\psi](x) = \frac{du_{\text{inc}}}{dv}, \quad x \in \partial D, \quad (2.30)$$

vergleiche (2.24), berechnet. Auch der Operator lässt sich nur invertieren, wenn  $k^2$  kein Eigenwert des inneren Neumann-Problems der Laplace-Gleichung ist. Das Problem dieses Ansatzes ist außerdem, dass die Ableitung  $\partial_{v(x)}$  des Ableitungsoperators  $N_k$  nicht generell in das Integral gezogen werden darf. Aus diesem Grund ist dieser Operator nicht leicht lösbar und dieser Ansatz sollte in jedem Fall vermieden werden. [22, Exercise 3.9.6]

Deshalb wird im Folgenden ein anderer Ansatz betrachtet. Anstelle des indirekten Schicht-Ansatzes wird der direkte Zugang gewählt. Dieser basiert auf dem Darstellungssatz von Green. Für den Außenraum gilt damit nach [8, Theorem 2.4]

**Satz 2.13** (Darstellungssatz von Green für den Außenraum).

*Angenommen die beschränkte Menge  $D$  sei das offene Komplement eines unbeschränkten Gebiets der Klasse  $C^2$  und  $v$  sei der Einheitsnormalenvektor des Rands  $\partial D$ , der in Richtung des Äußeren von  $D$  gerichtet ist. Sei  $u \in C^2(\mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}_+^2 \setminus D)$  eine Funktion, die eine Lösung der Helmholtzgleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$  in  $\mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}$  ist und die eine Normalenableitung der Form*

$$\partial_{v(x)} u_+(x) := \lim_{h \rightarrow 0^+} v(x) \nabla u(x + hv(x)) \quad (2.31)$$

*gleichmäßig auf dem Rand besitzt. Dann gilt*

$$u(x) = DL_k[u](x) - SL_k[\partial_v u](x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D. \quad (2.32)$$

Auf dieser Grundlage lässt sich die Integralgleichung für das äußere Neumann-Problem mit Hilfe der zwei Sprungrelationen (2.16) und (2.18) auf dem Rand zusammensetzen als

$$u(x) = D_k[u](x) + \frac{1}{2}u(x) - S_k[\partial_v u](x), \quad x \in \partial D. \quad (2.33)$$

Die Ableitung  $\partial_v u = \frac{\partial u_{\text{inc}}}{\partial v}$  ist auf dem Rand bekannt, da das Neumann-Problem betrachtet wird. Daraus folgt das zu lösende Problem,

$$D_k[u](x) - \frac{1}{2}u(x) = S_k[g](x), \quad x \in \partial D \quad (2.34)$$

wobei sich die bekannten Terme auf der rechten Seite befinden. Nachdem dieses Problem für  $u$  auf dem Rand gelöst werden konnte, wird das Ergebnis in (2.32) eingesetzt und anschließend durch Ausnutzung von  $\partial_v u = g$  das Potential im Außenraum berechnet

$$u(x) = DL_k[u](x) - SL_k[g](x), \quad x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \partial D. \quad (2.35)$$

Analog kann das äußere Dirichlet-Problem mit dieser Methode beschrieben werden. Dafür ist lediglich anders als zuvor  $u = -u_{\text{inc}}$  einzusetzen. Daraus folgt das zu lösende Problem,

$$S_k[\partial_v u](x) = D_k[-u_{\text{inc}}](x) + \frac{1}{2}u_{\text{inc}}, \quad x \in \partial D. \quad (2.36)$$

wobei sich die bekannten Terme auf der rechten Seite befinden. Nach dem dieses Problem für  $\partial_v u$  auf dem Rand gelöst werden konnte, wird das Ergebnis in (2.32) eingesetzt und anschließend durch Ausnutzung von  $u = -u_{\text{inc}}$  das Potential im Außenraum berechnet

$$u(x) = DL_k[-u_{\text{inc}}](x) - SL_k[\partial_v u](x), \quad x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \partial D. \quad (2.37)$$

Sowohl bei dem äußeren Dirichlet-Problem als auch bei dem äußeren Neumann-Problem sind die Randintegralgleichungen lösbar, jedoch, genau wie bei dem indirekten Ansatz, nicht immer eindeutig lösbar. Ist  $k^2$  entweder ein Eigenwert des inneren Dirichlet-Problems oder des inneren Neumann-Problems der Laplace-Gleichung, dann ist die Randintegralgleichung nicht eindeutig lösbar. [14, S.266, S. 272]

Aus diesem Grund soll in dieser Arbeit ein anderer Ansatz verwendet werden, der bereits in [8, S. 48] erläutert wurde. Bei diesem wird eine komplexe Linearkombination des Doppel- und Einfachschichtpotentials gewählt. Für das äußere Dirichlet-Problem muss zunächst

$$\frac{1}{2}\psi(x) + D_k[\psi](x) - iS_k[\psi](x) = -u_{\text{inc}}(x), \quad x \in \partial D \quad (2.38)$$

auf dem Rand berechnet werden, mit der unbekanntem Dichtefunktion  $\psi \in C(\partial D)$ . Der darin enthaltene Operator  $\frac{1}{2}I + D_k - iS_k$  ist invertierbar. Dieses lässt sich mit Hilfe der Riesz-Fredholm-Theorie beweisen. Anschließend kann

$$u(x) = DL_k[\psi](x) - iSL_k[\psi](x), \quad x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \partial D \quad (2.39)$$

berechnet werden. Das so berechnete äußere Dirichlet-Problem ist gut gestellt.

Das äußere Neumann-Problem kann ebenso mit einer komplexen Linearkombination des Doppel- und Einfachschichtansatzes gebildet werden

$$u(x) = -SL_k[\psi](x) - iDL_k[\psi](x), \quad x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \partial D. \quad (2.40)$$

Die unbekanntem Randfunktion  $\psi$  wird mit Hilfe der Sprungrelationen berechnet

$$\frac{1}{2}\psi(x) - D_k^\top[\psi](x) - iN_k[\psi](x) = \frac{u_{\text{inc}}}{\partial v}, \quad x \in \partial D. \quad (2.41)$$

[8, S. 50]

Im weiteren Verlauf dieser Masterarbeit wird das äußere Neumann-Problem nicht weiter betrachtet. Stattdessen wird der Fokus auf das äußere Dirichlet-Problem 2.1 gelegt und mit Hilfe der komplexen Linearkombination des Einfach- und Doppelschichtansatzes ((2.38) und (2.39)) gelöst.

## 2.4 Die Green'sche Funktion

Für die Berechnung des gestreuten Felds wird die Dirichlet-Green'sche Funktion des oberen Halbraums  $\mathbb{R}_+^2$  benötigt. Die Green'sche Funktion der Helmholtzgleichung im  $\mathbb{R}^2$  ist gegeben durch  $G_k(x, y) = iH_0^{(1)}(k\|x - y\|)/4$  mit der Hankel-Funktion erster Art und Ordnung Null  $H_0^{(1)}$ . Für die Beschränkung auf den oberen Halbraum ist es notwendig, zusätzlich eine Korrektor-Funktion  $h^y(x)$  für jedes  $y \in \mathbb{R}_+^2$  zu finden und diese von der Green'schen Funktion der Helmholtzgleichung im  $\mathbb{R}^2$  abziehen.

Diese ist definiert durch

$$\begin{aligned} \Delta_x h^y(x) &= 0 & \text{in} & \quad x \in \mathbb{R}_+^2 \\ h^y(x) &= G(x - y) & \text{auf} & \quad x_2 = 0 \end{aligned}$$

und lässt sich durch das Prinzip der Spiegelladungen ermitteln. Daraus folgt das  $h^y(x) = G(x - \tilde{y})$  die notwendige Korrekturfunktion ist, wobei es sich bei  $\tilde{y} = (y_1, -y_2)$  um den Reflektionspunkt handelt.

Zusammengefügt ergibt sich damit, dass die Dirichlet-Green'sche Funktion wie folgt auf der oberen Halbebene definiert ist:

$$G_k^+(x, y) = iH_0^{(1)}(k\|x - y\|)/4 - iH_0^{(1)}(k\|x - \tilde{y}\|)/4.$$

Im nächsten Schritt wird die  $d$ -quasiperiodische Green'sche Funktion

$$G_\alpha^+(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha m d} G_k^+(x - m d e^{(1)}, y) \quad (2.42)$$

definiert, welche sich als eine Reihe von verschobene Punktquellen interpretieren lässt.

Diese ist äquivalent zu der Darstellung

$$G_\alpha^+(x, y) = \frac{i}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_m(\alpha)} e^{i(m+\alpha)(x_1 - y_1)} \left[ e^{i\beta_m(\alpha)|x_2 - y_2|} - e^{i\beta_m(\alpha)(x_2 + y_2)} \right], \quad (2.43)$$

wobei  $\beta_m(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha_m^2}$  gilt.

*Beweis.* Der Grundaufbau des Beweises wurde bereits in [18] beschrieben. Wobei hier alle Zwischenschritte genau ausgeführt werden.

Zunächst kann die Hankelfunktion in eine Integraldarstellung umgeschrieben werden. Dafür wird die Formel (2.26) aus [19] verwendet. Diese besagt, dass

$$H_{2n}(kr) \cos(2n\theta) = -\frac{2i}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\gamma(t)} e^{-k\gamma(t)|x_2 - y_2|} \cos(k(x_1 - md - y_1)t) c_{2n}(t) dt, \quad (2.44)$$

wobei

$$\gamma(t) := \begin{cases} -i\sqrt{1-t^2} & \text{für } |t| \leq 1 \\ \sqrt{t^2-1} & \text{für } |t| > 1 \end{cases} \quad (2.45a)$$

$$c_{2n}(t) := \begin{cases} \cos(2n \arcsin(t)) & \text{für } |t| \leq 1 \\ (-1)^n \cosh(2n \arccos(t)) & \text{für } |t| > 1, \end{cases} \quad (2.46a)$$

sowie

$$r := \sqrt{(x_1 - md - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

gilt.

In unserem Fall wird die Hankelfunktion erster Art und Ordnung  $n = 0$  betrachtet, wodurch sich (2.44) zu

$$H_0^{(1)}(kr) = -\frac{2i}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\gamma(t)} e^{-k\gamma(t)|x_2-y_2|} \cos(k(x_1 - md - y_1)t) dt, \quad (2.47)$$

reduziert.

Die Funktionen  $\cos(k((x_1 - md - y_1))t)$  mit  $d = 2\pi$  und  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $\gamma(t)$  und auch  $e^{ik\gamma(t)|x_2-y_2|}$  sind symmetrische Funktion bezüglich der Ordinatenachse. Da das Produkt, bzw. der Quotient zweier gerader Funktionen gerade ist, ist der Integrand ebenfalls eine symmetrische Funktion bezüglich der Ordinatenachse und es lässt sich (2.47) in

$$H_0^{(1)}(kr) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\gamma(t)} e^{-k\gamma(t)|x_2-y_2|} \cos(k(x_1 - md - y_1)t) dt, \quad (2.48)$$

umschreiben.

Im nächsten Schritt wird

$$\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\gamma(t)} e^{-k\gamma(t)|x_2-y_2|} i \sin(k(x_1 - md - y_1)t) dt$$

zu der rechten Seite von (2.48) addiert. Die Sinusfunktion ist eine ungerade Funktion. Multipliziert man diese mit einer geraden Funktion so entsteht eine ungerade Funktion. Diese wird anschließend von  $-\infty$  bis  $\infty$  integriert. Es wird demnach eine

Null hinzuaddiert und verändert nichts an der Gleichung

$$\begin{aligned}
 & -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma(t)} e^{-k\gamma(t)|x_2-y_2|} \cos(k(x_1 - md - y_1)t) dt \\
 & + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma(t)} e^{-k\gamma(t)|x_2-y_2|} i \sin(k(x_1 - md - y_1)t) dt \\
 & = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma(t)} e^{-k\gamma(t)|x_2-y_2|} (\cos(k(x_1 - md - y_1)t) - i \sin(k(x_1 - md - y_1)t)) dt.
 \end{aligned}$$

Anschließend kann die Eulersche Formel angewendet werden und es resultiert

$$H_0^{(1)}(kr) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma(t)} e^{-k\gamma(t)|x_2-y_2|} e^{-ik(x_1-md-y_1)t} dt.$$

Zusätzlich gilt damit auch

$$H_0^{(1)}(k\tilde{r}) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma(t)} e^{-k\gamma(t)|x_2+y_2|} e^{-ik(x_1-md-y_1)t} dt,$$

wobei  $\tilde{r} := \sqrt{(x_1 - md - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2}$  und die Betragsstriche von  $x_2 + y_2$  weggelassen werden können, da nur der obere Halbraum betrachtet wird.

Damit gilt für die quasiperiodische Green'sche Funktion

$$G_{\alpha}^{+}(x, y) = \frac{i}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha md} \frac{-i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma(t)} (e^{-k\gamma(t)|x_2-y_2|} - e^{-k\gamma(t)(x_2+y_2)}) e^{-ik(x_1-md-y_1)t} dt.$$

Umgeformt folgt daraus

$$\begin{aligned}
 G_{\alpha}^{+}(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma(t)} (e^{-k\gamma(t)|x_2-y_2|} - e^{-k\gamma(t)(x_2+y_2)}) e^{-ik(x_1-y_1)t} e^{ikmdt} e^{i\alpha md} dt \\
 &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma(t)} (e^{-k\gamma(t)|x_2-y_2|} - e^{-k\gamma(t)(x_2+y_2)}) e^{-ik(x_1-y_1)t} e^{ikmd(t+\frac{\alpha}{k})} dt.
 \end{aligned}$$

Auf diesen Ausdruck kann die Summenformel von Poisson angewandt werden, denn die Funktion  $f(t) = \frac{1}{\gamma(t)} (e^{-k\gamma(t)|x_2-y_2|} - e^{-k\gamma(t)(x_2+y_2)}) e^{-ik(x_1-y_1)t}$  ist eine Schwartz-

Funktion

$$\begin{aligned}
 G_{\alpha}^{+}(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma(t)} \left( e^{-k\gamma(t)|x_2-y_2|} - e^{-k\gamma(t)(x_2+y_2)} \right) \\
 &\quad e^{-ik(x_1-y_1)t} \frac{2\pi}{dk} \delta\left(t + \frac{\alpha}{k} + \frac{2\pi m}{dk}\right) dt \\
 &= \frac{1}{2dk} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\gamma(c)} \left( e^{-k\gamma(c)|x_2-y_2|} - e^{-k\gamma(c)(x_2+y_2)} \right) e^{ik(x_1-y_1)\left(\frac{\alpha}{k} + \frac{2\pi m}{dk}\right)},
 \end{aligned}$$

mit  $c = -\left(\frac{\alpha}{k} + \frac{2\pi m}{dk}\right)$ . Nun wird eine weitere Variable  $\beta_m(\alpha)$  eingeführt

$$k\gamma(c) := \begin{cases} -i\sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi m}{d} + \alpha\right)^2} & \text{für } \left| -\left(\frac{\alpha}{k} + \frac{2\pi m}{dk}\right) \right| \leq 1 \quad (2.49a) \\ \sqrt{\left(\frac{2\pi m}{d} + \alpha\right)^2 - k^2} =: \beta_m(\alpha) & \text{für } \left| -\left(\frac{\alpha}{k} + \frac{2\pi m}{dk}\right) \right| > 1 \quad (2.49b) \end{cases}$$

Für  $c \leq 1$  ist somit der Radikant ein positiver Wert. Wohingegen für  $c > 1$  der Radikant einem negativen Wert entspricht. Damit lässt sich erkennen, dass (2.49b) für  $\left| -\left(\frac{\alpha}{k} + \frac{2\pi m}{dk}\right) \right| > 1$  auf Grund von  $\sqrt{t^2 - 1} = -i\sqrt{1 - t^2} = -i\sqrt{1 - t^2}$  umgeschrieben werden kann zu

$$k\gamma(c) = -i\sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi m}{d} + \alpha\right)^2} = -i\beta_m(\alpha).$$

Damit ist eine Fallunterscheidung nicht mehr notwendig.

Bei dem Aufbau des periodischen Gebiets wurde eine Periodenlänge von  $d = 2\pi$  gewählt.

Damit lässt sich nun insgesamt die Formel der quasiperiodischen Funktion zu

$$G_{\alpha}^{+}(x, y) = \frac{i}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_m(\alpha)} \left( e^{i\beta_m(\alpha)|x_2-y_2|} - e^{i\beta_m(\alpha)(x_2+y_2)} \right) e^{i(x_1-y_1)(\alpha+m)},$$

vereinfachen. □

Für die Berechnung des Einschichtoperators ist es notwendig zu prüfen, ob die quasiperiodische Green'sche Funktion Singularstellen besitzt und ob diese hebbbar sind.

Für  $\beta_m(\alpha) = 0$  liegt eine Definitionslücke vor, da hier durch Null dividiert wird. Allerdings entspricht auch der Dividend in diesem Fall Null. Aus diesem Grund wird L'Hospital angewendet, um zu überprüfen, ob es sich um eine hebbare Definitionslücke handelt.

Für  $\beta_m(\alpha) = 0$ :

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\beta_m(\alpha) \rightarrow 0} G_\alpha^+(x, y) \\
 &= \frac{i}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lim_{\beta_m(\alpha) \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{d\beta_m(\alpha)} \left[ \left( e^{i\beta_m(\alpha)|x_2-y_2|} - e^{i\beta_m(\alpha)(x_2+y_2)} \right) e^{i(x_1-y_1)(\alpha+m)} \right]}{\frac{d}{d\beta_m(\alpha)} [\beta_m(\alpha)]} \\
 &= \frac{i}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lim_{\beta_m(\alpha) \rightarrow 0} e^{i(x_1-y_1)(\alpha+m)} \left( i|x_2 - y_2| e^{i\beta_m(\alpha)|x_2-y_2|} \right. \\
 &\quad \left. - i(x_2 + y_2) e^{i\beta_m(\alpha)(x_2+y_2)} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i(x_1-y_1)(\alpha+m)} \left( (x_2 + y_2) - |x_2 - y_2| \right)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $G_\alpha^+(x, y)$  stetig fortsetzbar für  $\beta_m(\alpha) = 0$  ist.

Wird im Gegensatz dazu die Green'sche Funktion im gesamten Raum  $G_\alpha^\pm(x, y)$  berechnet, so wird diese durch

$$G_\alpha^\pm(x, y) = \frac{i}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_m(\alpha)} e^{i\beta_m(\alpha)|x_2-y_2|} e^{i(x_1-y_1)(\alpha+m)}$$

definiert [4]. Bei dieser liegt eine nicht-hebbare Singulärstelle im Fall  $\beta_m(\alpha) = 0$  vor.

Neben dem Einschichtoperator wird auch der Doppelschichtoperator und dafür der Gradient  $\nabla G_\alpha^+(x, y)$  benötigt.

Die Ableitung nach  $y_1$  für  $\beta_m(\alpha) \neq 0$  ist gegeben durch

$$\frac{dG_\alpha^+(x, y)}{dy_1} = \frac{1}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_m(\alpha)} (\alpha + m) e^{i(x_1-y_1)(\alpha+m)} \left( e^{i\beta_m(\alpha)|x_2-y_2|} - e^{i\beta_m(\alpha)(x_2+y_2)} \right).$$

Dabei ist für  $\beta_m(\alpha) = 0$  die Definitionslücke wieder eine hebbare Singulärstelle

$$\begin{aligned}
 \lim_{\beta_m(\alpha) \rightarrow 0} \frac{d}{dy_1} [G_\alpha^+(x, y)] &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lim_{\beta_m(\alpha) \rightarrow 0} \\
 &\quad \frac{\frac{d}{d\beta_m(\alpha)} \left[ (\alpha + m) e^{i(x_1-y_1)(\alpha+m)} \left( e^{i\beta_m(\alpha)|x_2-y_2|} - e^{i\beta_m(\alpha)(x_2+y_2)} \right) \right]}{\frac{d}{d\beta_m(\alpha)} [\beta_m(\alpha)]} \\
 &= \frac{i}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lim_{\beta_m(\alpha) \rightarrow 0} (\alpha + m) e^{i(x_1-y_1)(\alpha+m)} \\
 &\quad \left( |x_2 - y_2| e^{i\beta_m(\alpha)|x_2-y_2|} - (x_2 + y_2) e^{i\beta_m(\alpha)(x_2+y_2)} \right) \\
 &= \frac{i}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\alpha + m) e^{i(x_1-y_1)(\alpha+m)} \left( |x_2 - y_2| - (x_2 + y_2) \right).
 \end{aligned}$$

Die Ableitung nach  $y_2$  für  $x_2 \neq y_2$  ist gegeben durch

$$\frac{d}{dy_2} [G_\alpha^+(x, y)] = \frac{1}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i(x_1-y_1)(\alpha+m)} \left( e^{i\beta_m(\alpha)(x_2+y_2)} + \frac{x_2 - y_2}{|x_2 - y_2|} e^{i\beta_m(\alpha)|x_2-y_2|} \right).$$

Allerdings tritt im Fall  $x_2 = y_2$  eine nicht hebbare Singulärstelle auf, wie auch in [?, S. 13] nachzulesen ist und im Folgenden nachgerechnet wird. Dabei ist zu beachten, dass  $\frac{x_2 - y_2}{|x_2 - y_2|} = \frac{|x_2 - y_2|}{x_2 - y_2}$  gilt und  $Z$  durch  $Z := e^{i\beta_m(\alpha)(x_2 + y_2)} + \frac{x_2 - y_2}{|x_2 - y_2|} e^{i\beta_m(\alpha)|x_2 - y_2|}$  definiert ist.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x_2 \rightarrow y_2} \frac{d}{dx_2} [Z] &= \lim_{x_2 \rightarrow y_2} \frac{\frac{d}{dx_2} [(x_2 - y_2)e^{i\beta_m(\alpha)(x_2 + y_2)} + |x_2 - y_2|e^{i\beta_m(\alpha)|x_2 - y_2|}]}{\frac{d}{dx_2} [x_2 - y_2]} \\
 &= \lim_{x_2 \rightarrow y_2} [(x_2 - y_2)i\beta_m(\alpha) + 1] e^{i\beta_m(\alpha)(x_2 + y_2)} \\
 &\quad + \left[ \frac{|x_2 - y_2|}{x_2 - y_2} + (x_2 - y_2)i\beta_m(\alpha) \right] e^{i\beta_m(\alpha)|x_2 - y_2|} \\
 &= \lim_{x_2 \rightarrow y_2} \frac{\frac{d}{dx_2} [(x_2 - y_2)^2 i\beta_m(\alpha) + (x_2 - y_2)] e^{i\beta_m(\alpha)(x_2 + y_2)}}{\frac{d}{dx_2} [x_2 - y_2]} \\
 &\quad + \frac{\frac{d}{dx_2} [|x_2 - y_2| + (x_2 - y_2)^2 i\beta_m(\alpha)] e^{i\beta_m(\alpha)|x_2 - y_2|}}{\frac{d}{dx_2} [x_2 - y_2]} \\
 &= \lim_{x_2 \rightarrow y_2} [2(x_2 - y_2)i\beta_m(\alpha) + 1 + (x_2 - y_2)^2 i^2 \beta_m^2(\alpha) \\
 &\quad + (x_2 - y_2)i\beta_m(\alpha)] e^{i\beta_m(\alpha)(x_2 + y_2)} + \left[ \frac{|x_2 - y_2|}{x_2 - y_2} + 2(x_2 - y_2)i\beta_m(\alpha) \right. \\
 &\quad \left. + (x_2 - y_2)i\beta_m(\alpha) + (x_2 - y_2)|x_2 - y_2| i^2 \beta_m^2(\alpha) \right] e^{i\beta_m(\alpha)|x_2 - y_2|} \\
 &= \lim_{x_2 \rightarrow y_2} [-(x_2 - y_2)^2 \beta_m^2(\alpha) + 3(x_2 - y_2)i\beta_m(\alpha) + 1] e^{i\beta_m(\alpha)(x_2 + y_2)} \\
 &\quad + \left[ \frac{|x_2 - y_2|}{x_2 - y_2} + 3(x_2 - y_2)i\beta_m(\alpha) - (x_2 - y_2)|x_2 - y_2| \beta_m^2(\alpha) \right] \\
 &\quad \cdot e^{i\beta_m(\alpha)|x_2 - y_2|}
 \end{aligned}$$

Es lässt sich erkennen, dass selbst durch beliebig häufiges Anwenden der Regel von L'Hospital der Term  $\frac{|x_2 - y_2|}{x_2 - y_2}$  immer auftreten wird. Er bleibt bestehen, da die Ableitung von  $|x_2 - y_2|e^{i\beta_m(\alpha)|x_2 - y_2|}$  durch die Produktregel immer  $\left[ \frac{|x_2 - y_2|}{x_2 - y_2} + \frac{x_2 - y_2}{|x_2 - y_2|} |x_2 - y_2| \right] e^{i\beta_m(\alpha)|x_2 - y_2|}$  liefert. Der rechte Summand lässt sich kürzen und es bleibt lediglich  $\left[ \frac{|x_2 - y_2|}{x_2 - y_2} + (x_2 - y_2) \right] e^{i\beta_m(\alpha)|x_2 - y_2|}$  stehen. Der linke Summand bleibt jedoch der gleiche und lässt sich auch nicht anderweitig kürzen. Somit wird selbst durch beliebig häufiges Anwenden von L'Hospital der problematische Term  $\frac{|x_2 - y_2|}{x_2 - y_2}$  immer auftreten.

Wird statt  $\frac{|x_2 - y_2|}{x_2 - y_2}$  der Kehrwert  $\frac{x_2 - y_2}{|x_2 - y_2|}$  betrachtet, lässt sich das gleiche Verhalten erkennen. In diesem Fall wird nur der problematische Term  $\frac{x_2 - y_2}{|x_2 - y_2|} e^{i\beta_m(\alpha)|x_2 - y_2|}$  untersucht.

$$\begin{aligned}
\lim_{x_2 \rightarrow y_2} \frac{d}{dx_2} [Z] &= \lim_{x_2 \rightarrow y_2} \frac{\frac{d}{dx_2} [(x_2 - y_2)e^{i\beta_m(\alpha)|x_2 - y_2|}]}{\frac{d}{dx_2} [|x_2 - y_2|]} \\
&= \lim_{x_2 \rightarrow y_2} \frac{\left[ i\beta_m(\alpha)(x_2 - y_2) \frac{x_2 - y_2}{|x_2 - y_2|} + 1 \right] e^{i\beta_m(\alpha)|x_2 - y_2|}}{\frac{x_2 - y_2}{|x_2 - y_2|}} \\
&= \lim_{x_2 \rightarrow y_2} \left[ i\beta_m(\alpha)(x_2 - y_2) + \frac{|x_2 - y_2|}{x_2 - y_2} \right] e^{i\beta_m(\alpha)|x_2 - y_2|} \\
&= \lim_{x_2 \rightarrow y_2} \frac{[i\beta_m(\alpha)(x_2 - y_2)|x_2 - y_2| + (x_2 - y_2)] e^{i\beta_m(\alpha)|x_2 - y_2|}}{|x_2 - y_2|} \\
&= \lim_{x_2 \rightarrow y_2} \frac{\frac{d}{dx_2} [(i\beta_m(\alpha)(x_2 - y_2)|x_2 - y_2| + (x_2 - y_2)) e^{i\beta_m(\alpha)|x_2 - y_2|}]}{\frac{d}{dx_2} [|x_2 - y_2|]} \\
&= \lim_{x_2 \rightarrow y_2} \frac{[2i\beta_m(\alpha)|x_2 - y_2| + 1 - \beta_m^2(\alpha)(x_2 - y_2)^2 + i\beta_m(\alpha)|x_2 - y_2|]}{\frac{x_2 - y_2}{|x_2 - y_2|}} \\
&\quad \cdot e^{i\beta_m(\alpha)|x_2 - y_2|} \\
&= \lim_{x_2 \rightarrow y_2} \left[ 2i\beta_m(\alpha)(x_2 - y_2) + \frac{x_2 - y_2}{|x_2 - y_2|} - \beta_m^2(\alpha)(x_2 - y_2)|x_2 - y_2| \right. \\
&\quad \left. + i\beta_m(\alpha)(x_2 - y_2) \right] e^{i\beta_m(\alpha)|x_2 - y_2|}
\end{aligned}$$

Auch in diesem Fall bleibt der Term  $\frac{x_2 - y_2}{|x_2 - y_2|}$  trotz beliebig häufigem Anwenden von der Regel von L'Hospital bestehen.

Damit handelt es sich in dem Fall  $x_2 = y_2$  um eine nicht-hebbare Singulärstelle.

### 3 Ewalds Methode für den Doppelschichtoperator

Neben der nicht-hebbaren Singularität des Doppelschichtoperators ist eine weitere negative Eigenschaft, dass die Ableitung der Fundamentallösung nach  $y_2$  in der Nähe der nicht-hebbaren Singulärstellen nur langsam konvergiert. Dieses lässt sich anhand der Abbildung 3.1 erkennen. In der linken Abbildung 3.1(a) ist die Konvergenz

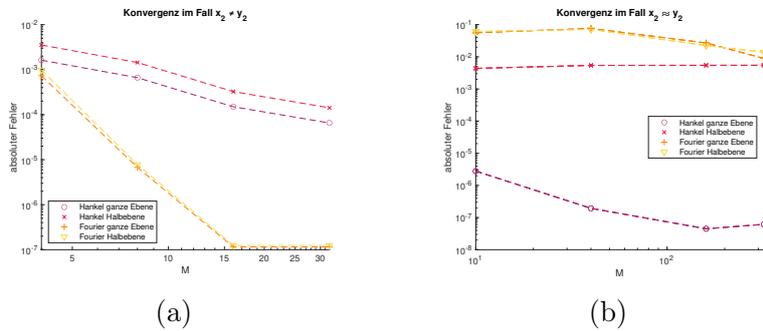


Abbildung 3.1: Konvergenz der Reihen mit der Hilfe der Hankelfunktion und ihrer Fourier-Reihendarstellung der ganzen Ebene und Halbebene für die Ableitung der Fundamentallösung nach  $y_2$ . 3.1(a): Fall  $x_2 \neq y_2$ , 3.1(b): Fall  $x_2 = y_2$ .

genz für einen Punkt dargestellt, für den  $x_2 \neq y_2$  gilt. Dabei wurden die Parameter  $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{d}$ ,  $k = \frac{2}{d}$ ,  $x_1 = 0,02\pi$ ,  $x_2 = 0,4\pi$ ,  $y_1 = 0,1$ ,  $y_2 = 0,1$  und  $d = 2\pi$  verwendet.

Die Konvergenzordnung  $O(M^{-p})$  kann approximativ mit Hilfe von  $p = \frac{\ln\left(\frac{E_M}{E_{4M}}\right)}{\ln(4)}$ , wobei  $E_M$  der Betrag des absoluten Fehlers der Partialsumme von  $-M$  bis  $M$  ist, berechnet werden. Für den ersten Fall kann so gezeigt werden, dass die Reihen der Fourierreihenentwicklung eine Konvergenzordnung von  $p = 6,4765$  besitzen. Die Hankelfunktionen weisen hingegen eine Konvergenzordnung von  $p = 1,7$  auf. Vor allem die Konvergenzordnung der Fourierreihenentwicklung variiert, wenn der Ort des zu betrachteten Punkts verändert wird. Besonders wenn  $x_2 \approx y_2$  gilt, kann eine deutlich kleinere Konvergenzordnung, wie beispielsweise in Abbildung 3.1(b) beobachtet werden. Dort hat die Fourier-transformierte Reihe eine berechnete Konvergenzordnung von  $p = 0,42$ . Für die Generierung dieser Abbildung wurden die Parameter  $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{d}$ ,  $k = \frac{2}{d}$ ,  $x_1 = 0,02\pi$ ,  $x_2 = 0,4\pi$ ,  $y_1 = 1,8$ ,  $y_2 = 0,402\pi$  und  $d = 2\pi$  gewählt. Aus diesem Grund wird im Folgenden mit Hilfe der Ewald-Methode eine andere Darstellungsform gesucht, die auch in der Nähe von  $x_2 = y_2$  schnell konvergiert.

Die Idee der Ewald-Methode ist es, die quasi-periodische Funktion aufzusplitten in einen Anteil, der die Singularität enthält, dafür jedoch schnell konvergiert, und in einen Anteil, der keine Singularitäten aufweist, dafür aber nur langsam konvergiert.

Grundlage für die Ewald-Methode ist eine quasi-periodische Funktion

$$F(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x - mde^{(1)}).$$

In diesem Fall wird die Ableitung der Funktion (2.42) nach  $y_2$

$$f(x - mde^{(1)}) = \frac{ik}{4} e^{i\alpha md} \left[ \frac{(x_2 - y_2) H_1^{(1)}(k\|x - mde^{(1)} - y\|)}{\|x - mde^{(1)} - y\|} + \frac{(x_2 + y_2) H_1^{(1)}(k\|x - mde^{(1)} - \tilde{y}\|)}{\|x - mde^{(1)} - \tilde{y}\|} \right] \quad (3.1)$$

betrachtet. Bei dieser Funktion (3.1) handelt es sich um den problematischen Anteil des Doppelschichtoperators, da dieser, wie bereits in Kapitel 2.4 gezeigt wurde, eine nicht-hebbare Singulärstelle enthält. Zusammen resultiert daraus die quasi-periodische Funktion

$$F(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{ik}{4} e^{i\alpha md} \left[ \frac{(x_2 - y_2) H_1^{(1)}(k\|x - mde^{(1)} - y\|)}{\|x - mde^{(1)} - y\|} + \frac{(x_2 + y_2) H_1^{(1)}(k\|x - mde^{(1)} - \tilde{y}\|)}{\|x - mde^{(1)} - \tilde{y}\|} \right]. \quad (3.2)$$

Die Funktion (3.1) wird aufgesplittet in einen Anteil  $g$ , der eine Singularität enthält, dafür jedoch schnell konvergiert und einen Anteil  $f - g$ , der langsamer konvergiert, dafür aber keine Singularität enthält

$$f = g + (f - g).$$

Der Vorteil der Betrachtung der quasi-periodischen Funktion  $F(x)$  in dieser Darstellungsform

$$F(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g(x - mde^{(1)}) + \sum_{m \in \mathbb{Z}} [f(x - mde^{(1)}) - g(x - mde^{(1)})]$$

wird in den folgenden Unterkapiteln deutlich gemacht. Dafür wird zunächst in Kapitel 3.1 eine alternative Darstellungsform der Hankelfunktion eingeführt. Diese wird in Kapitel 3.2 und 3.3 benötigt, um für die zwei Anteile  $g$  und  $f - g$  zu zeigen, dass diese so transformiert werden können, dass sie exponentiell schnell konvergieren.

Die Ableitung der Fundamentallösung nach  $y_1$  wird in dieser Arbeit nicht betrachtet, da diese keine nicht-hebbare Singulärstelle besitzt. Es kann jedoch ein in Kapitel 4 näher erläuteter Ansatz gemacht werden, dass die zwei Terme, die zum einen durch die Betrachtung des ganzen Raums und zum anderen durch das Prinzip der Spiegelladungen hergeleitet wurden, separat analysiert werden. Dann kann die gleiche Vorgehensweise, wie sie in diesem Kapitel für die Ableitung nach  $y_2$  durchgeführt wird, verwendet werden.

### 3.1 Alternative Darstellung der Hankelfunktion

Die Hankelfunktion ist in vielen unterschiedlichen Darstellungen bekannt. Eine dieser Darstellungen ist das Schläfli-Sommerfeldsche Integral. Dieses ist beispielsweise in [5, Lemma 5.5] und in [1, Formel 9.1.25] durch

$$H_n^{(1)}(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty+i\pi} e^{z \sinh(\omega) - n\omega} d\omega, \quad (3.3)$$

wobei  $|\arg(z)| < \frac{\pi}{2}$ , definiert. Mit Hilfe dieser Integraldarstellung wird die Hankelfunktion in eine andere Form überführt, mit der im weiteren Verlauf die Konvergenz, von den in der Ewald-Methode verwendeten Funktionen  $g$  und  $f - g$ , gezeigt werden kann. Dazu wird zunächst das Lemma 3.1 definiert und anschließend bewiesen.

**Lemma 3.1.** Für  $n, r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$  und  $k \in \mathbb{C}$ , sodass  $\arg(k) \in (0, \frac{\pi}{2})$ , gilt

$$H_n^{(1)}(kr) = \frac{2}{i\pi} e^{-i\pi n} \left(\frac{k}{2r}\right)^n \int_{\gamma_1} t^{-2n-1} e^{-r^2 t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} dt, \quad (3.4)$$

wobei  $\gamma_1$  eine Integrationskurve in der komplexen Ebene ist. Sie startet im Ursprung in Richtung  $e^{i\phi}$  mit  $-\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{4}$ . [3, Lemma 3.3]

Wie in dem Beweis des Lemmas 3.3 aus [3, S. 48 ff.] gezeigt wird, kann das Schläfli-Sommerfeldsche Integral der Hankelfunktion (3.3) durch die Betrachtung von anderen Konturintegralen in die oben genannte Form (3.4) überführt werden. Der hier angegebene Beweis ist eine ausführlichere Version dieses Vorgehens.

*Beweis.* Dazu werden zu Anfang die zwei Konturintegrale

$$\{-R+t+i\beta : 0 \leq t \leq R\} \cup \{i(\beta-t) : 0 < t < \beta\} \cup \gamma_{11} = \{-t : 0 \leq t \leq R\} \quad (3.5)$$

und

$$\gamma_{12} = \{-R+it : 0 < t < \beta\} \quad (3.6)$$

definiert.

Dabei ist zu beachten, dass im Folgenden nur der Fall in dem  $\beta > 0$  betrachtet wird. Der Grund dafür liegt an der im späteren Verlauf erläuterten Herangehensweise, bei der der Integralsatz von Cauchy eine wichtige Rolle spielt. Für diesen Satz ist eine Voraussetzung, dass die Funktion, über die integriert wird, in dem betrachteten Gebiet holomorph ist. Der Integrand der Gleichung (3.3) ist jedoch nicht für alle  $\beta$  holomorph, wie sich leicht an dem folgenden Gegenbeispiel zeigen lässt.

**Beispiel 3.2.** Wäre der Integrand unabhängig von  $\beta$  überall holomorph, so wäre das Randintegral einer beliebigen geschlossenen Kurve über den Integranden Null. Wird allerdings das Integral von dem Integranden von (3.3) über die Kurve  $\gamma_{11} \cup \gamma_{12}$  berechnet, wobei  $\beta < 0$  ist, so ist das Ergebnis ungleich Null. So gilt beispielsweise für die Parameter  $n = 2$ ,  $z = 1 + 5i$ ,  $R = 6$  und  $\beta = -\frac{\pi}{4}$ , dass der Wert des Integrals

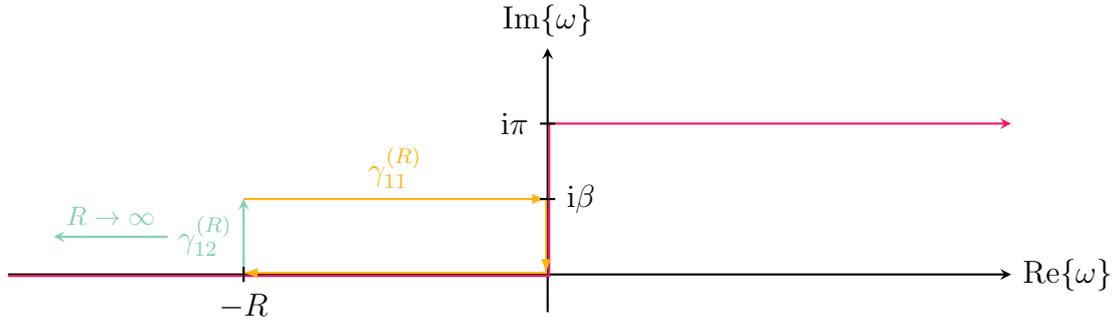


Abbildung 3.2: Magenta: Integrationskurve der Formel (3.3)

Orange: Integrationskurve  $\gamma_{11}$

Pastellgrün: Integrationskurve  $\gamma_{12}$

$-3 \cdot 10^{240} + 5 \cdot 10^{240}i$  entspricht, wohingegen, wenn  $\beta = \frac{\pi}{4}$  gewählt wird, das Integral den gewünschten Wert Null ergibt.

**Beispiel 3.3.** Ebenso ist die zusätzliche Einschränkung  $\arg(z) > 0$  notwendig. Wird diese nicht erfüllt, so tritt das gleiche Problem wie im Fall  $\beta < 0$  auf. Das Integral entlang einer geschlossenen Kurve ist wieder ungleich Null, wie das Beispiel mit den Parametern  $n = 2$ ,  $z = 1 - 5i$ ,  $R = 6$  und  $\beta = -\frac{\pi}{4}$  zeigt. In diesem Fall entspricht der berechnete Wert des Integrals  $-3 \cdot 10^{240} - 5 \cdot 10^{240}i$ .

Im nächsten Schritt wird der Integralsatz von Cauchy verwendet. Da es sich bei dem Integrand in Formel (3.3) um eine holomorphe Funktion handelt und somit das Randintegral einer geschlossenen Kurve über dieser Funktion gleich Null ist, folgt für die zwei in Formel (3.5) und (3.6) definierten Ränder mit der in Abbildung (3.2) dargestellten Richtung, dass neben

$$\int_{\gamma_{11}} e^{z \sinh(\omega) - n\omega} d\omega + \int_{\gamma_{12}} e^{z \sinh(\omega) - n\omega} d\omega = 0$$

auch

$$\int_{\gamma_{11}} e^{z \sinh(\omega) - n\omega} d\omega = - \int_{\gamma_{12}} e^{z \sinh(\omega) - n\omega} d\omega$$

gilt.

Wird das Integral über  $\gamma_{12}$  genauer betrachtet, kann gezeigt werden, dass dieses für große  $R$  gegen Null geht. Für diesen Nachweis werden zunächst die bereits definierten Einschränkungen  $\beta > 0$  und  $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$  verwendet. Später kann gezeigt werden, dass unter den stärkeren Bedingungen  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  und  $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$  die Konvergenz gegen Null erfüllt ist. Durch das Einsetzen der Kontur  $\gamma_{12}$ , lässt sich das Integral wie folgt umschreiben

$$\int_{\gamma_{12}} e^{z \sinh(\omega) - n\omega} d\omega = i \int_0^\beta e^{z \sinh(-R+it) - n(-R+it)} dt = i \int_0^\beta e^{z \sinh(-R+it)} e^{nR} e^{-int} dt. \quad (3.7)$$

Im ersten Schritt muss nun gezeigt werden, dass dieser Integrand für große  $R$  gegen Null geht. Dafür wird zunächst der Realteil des Exponenten betrachtet und mit Hilfe des Theorems für hyperbolische Funktionen zu

$$\sinh(x + iy) = \cos(y) \sinh(x) + i \sin(y) \cosh(x),$$

umgeformt. In diesem Theorem für hyperbolische Funktionen sind  $x = -R$  und  $y = t$  zu setzen.

Unter Berücksichtigung, dass es sich bei  $\sinh$  um eine ungerade Funktion und bei  $\cosh$  um eine gerade Funktion handelt, kann der Realteil des ersten Exponenten wie folgt umgeformt werden

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z \sinh(-R + it)) &= \operatorname{Re}(z \cos(t) \sinh(-R)) + \operatorname{Re}(iz \sin(t) \cosh(-R)) \\ &= -\operatorname{Re}(z) \cos(t) \sinh(R) - \operatorname{Im}(z) \sin(t) \cosh(R), \end{aligned} \quad (3.8)$$

dabei ist zu beachten, dass

$$\operatorname{Re}(iz) = \operatorname{Re}(i(x + iy)) = \operatorname{Re}(ix - y) = -\operatorname{Re}(y) = -\operatorname{Im}(z)$$

gilt.

Im nächsten Schritt werden sowohl der linke als auch der rechte Term von (3.8) genauer betrachtet. Die hyperbolischen Funktionen wachsen für größer werdendes  $R$  exponentiell an. Wenn zusätzlich  $\operatorname{Re}(z) \cos(t) > 0$  und  $\operatorname{Im}(z) \sin(t) > 0$  gilt, so liegt für die absoluten Werte der beiden Terme ein exponentielles Wachstum vor. Durch die zuvor getätigte Einschränkung  $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$  heißt das, dass  $\operatorname{Re}(z) > 0$  ist und somit  $\cos(t) > 0$  erfüllt sein muss. Unter Beachtung der zuvor getätigten Bedingung, dass  $\beta > 0$  ist, tritt dieses genau dann ein, wenn  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  gilt. Für den rechten Term gilt somit, dass wegen der gerade getätigten Einschränkung von  $\beta$ ,  $\sin(t) > 0$  ist. Aus diesem Grund muss auch  $\operatorname{Im}(z) > 0$  sein, was durch die bereits getätigte Bedingung  $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$  immer gilt.

Es lässt sich erkennen, dass sowohl der absolute Wert des linken als auch des rechten Terms von Gleichung (3.8) auf Grund der Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen für wachsendes  $R$  exponentiell ansteigt. Deshalb gilt  $\operatorname{Re}(z \sinh(-R + it)) + nR < 0$  für große  $R$ , da die negative Exponentialfunktion für diese  $R$  schneller fällt, als die lineare Funktion  $nR$  wächst.

Es ist nicht nötig neben dem Realteil auch den Imaginärteil zu betrachten. Allgemein kann eine komplexe Exponentialfunktion wie folgt umgeschrieben werden

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)). \quad (3.9)$$

Hierbei ist direkt zu erkennen, dass der zweite Faktor immer durch Eins beschränkt ist. Das Produkt einer Nullfolge, welches wie bereits gezeigt die reelle Exponentialfunktion in diesem Fall ist, und einer beschränkten Folge ergibt wieder eine Nullfolge [23, S. 54].

Daraus folgt direkt, dass

$$\int_{\gamma_{11}} \lim_{R \rightarrow \infty} e^{z \sinh(\omega) - n\omega} d\omega = - \int_{\gamma_{12}} \lim_{R \rightarrow \infty} e^{z \sinh(\omega) - n\omega} d\omega = 0. \quad (3.10)$$

gilt.

Damit Aussagen über die mögliche Veränderung des Integrationspfades getroffen werden können, ist es notwendig, Integration und Limesbildung zu vertauschen.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{11}} e^{z \sinh(\omega) - n\omega} d\omega = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{12}} e^{z \sinh(\omega) - n\omega} d\omega = 0. \quad (3.11)$$

Diese Vertauschung ist nicht immer erlaubt. Mithilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz für fallende Folgen [17] lässt sich jedoch zeigen, dass das Vertauschen von Integration und Limesbildung unter Einhaltung der geforderten Einschränkungen zulässig ist.

**Satz 3.4** (Satz von der monotonen Konvergenz; Variante für fallende Folgen). *Ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Funktionenfolge nichtnegativer, messbarer Funktionen  $f_n: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\int_{\Omega} f_1 d\mu < \infty$ , die  $\mu$ -fast überall monoton fallend gegen eine messbare Funktion  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  konvergiert, so gilt ebenso*

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu. \quad (3.12)$$

Es wird untersucht, ob der Satz von der monotonen Konvergenz unter den gewählten Einschränkungen anwendbar ist. Dafür wird zu Anfang der Integrand von (3.7) in

$$\begin{aligned} e^{z \sinh(-R+it)+nR-int} &= e^{\operatorname{Re}(z \sinh(-R+it)+nR-int)} e^{i \operatorname{Im}(z \sinh(-R+it)+nR-int)} \\ &=: f_R(t) g_R(t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

aufgesplittet. Anschließend werden die Funktionen  $f_R(t)$  und  $g_R(t)$  vereinfacht, wobei die Umformungen mit Hilfe von (3.8) und der Darstellung von  $z := a + ib$  durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} f_R(t) &:= e^{\operatorname{Re}(z \sinh(-R+it)+nR-int)} \\ &= e^{-\operatorname{Re}(z) \cos(t) \sinh(R) - \operatorname{Im}(z) \sin(t) \cosh(R) + \operatorname{Re}\{nR\} - \operatorname{Re}\{int\}} \\ &= e^{-a \cos(t) \sinh(R) - b \sin(t) \cosh(R) + nR}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} g_R(t) &:= e^{i \operatorname{Im}(z \sinh(-R+it)+nR-int)} \\ &= e^{i[\operatorname{Im}(z) \cos(t) \sinh(-R) + \operatorname{Im}(iz \sin(t) \cosh(-R)) + \operatorname{Im}(nR) - \operatorname{Im}(int)]} \\ &= e^{i[-b \cos(t) \sinh(R) + a \sin(t) \cosh(R) - nt]} \\ &= \cos(-b \cos(t) \sinh(R) + a \sin(t) \cosh(R) - nt) \\ &\quad + i \sin(-b \cos(t) \sinh(R) + a \sin(t) \cosh(R) - nt). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dabei ist zu beachten, dass

$$\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Im}(i(a + ib)) = \operatorname{Im}(ia - b) = a = \operatorname{Re}(z)$$

gilt.

Angenommen  $f_R$  erfüllt alle geforderten Bedingungen für den Satz der monotonen Konvergenz, dann würde folgen, dass für  $f_R$  Integration und Grenzwertbildung vertauscht werden könnten und das Ergebnis auf Grund von (3.10) Null ist

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\beta f_R(t) dt = \int_0^\beta \lim_{R \rightarrow \infty} f_R(t) dt = 0. \quad (3.16)$$

Darüber hinaus ist die Funktion mit  $|g_R| \leq 1$  beschränkt. Auf dieser Basis kann gezeigt werden, dass dann auch für  $f_R g_R$  die Vertauschung von Integration und Grenzwertbildung erlaubt ist. Zu zeigen sind dafür folgenden Gleichungen:

$$\int_0^\beta \lim_{R \rightarrow \infty} f_R(t) g_R(t) dt = \int_0^\beta \lim_{R \rightarrow \infty} f_R(t) dt = 0 \quad (3.17)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\beta f_R(t) g_R(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\beta f_R(t) dt = 0. \quad (3.18)$$

Die erste Gleichung (3.17) folgt direkt aus der Begründung, dass das Produkt einer Nullfolge  $f_R$  und einer beschränkten Folge  $g_R$  wieder eine Nullfolge  $f_R g_R$  ergibt [23, S. 54]. Die zweite Gleichung kann durch die folgenden Abschätzungen begründet werden. Zum einen ist

$$\int_0^\beta \lim_{R \rightarrow \infty} f_R(t) g_R(t) dt \leq \int_0^\beta \lim_{R \rightarrow \infty} f_R(t) dt = 0, \quad (3.19)$$

da  $|g_R(t)| \leq 1$  und damit auch  $f_R g_R \leq f_R$ . Zum anderen ist

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\beta f_R(t) g_R(t) dt &\geq - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\beta |f_R(t) g_R(t)| dt \\ &\geq - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\beta |f_R(t)| |g_R(t)| dt \\ &\geq - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\beta |f_R(t)| dt = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Aufgrund der beiden Abschätzungen (3.19) und (3.20) kann direkt auf (3.18) geschlossen werden.

Daraus folgt, dass es ausreichend ist zu zeigen, dass für  $f_R$  die Bedingungen des

Satzes 3.4 erfüllt sind.

Im ersten Schritt muss überprüft werden, ob es sich bei  $f_R$  um eine monoton fallende Funktion handelt, das heißt, ob  $f_{R+1} \leq f_R$  gilt. Dafür werden die folgenden Umformungsschritte getätigt

$$\begin{aligned}
 & f_{R+1} \leq f_R \\
 \Leftrightarrow & e^{-a \cos(t) \sinh(R+1) - b \sin(t) \cosh(R+1) + n(R+1)} \leq e^{-a \cos(t) \sinh(R) - b \sin(t) \cosh(R) + nR} \\
 \Leftrightarrow & -a \cos(t) \sinh(R+1) - b \sin(t) \cosh(R+1) + nR + n \\
 & \leq -a \cos(t) \sinh(R) - b \sin(t) \cosh(R) + nR \\
 \Leftrightarrow & -a \cos(t) [\sinh(R) \cosh(1) + \cosh(R) \sinh(1)] \\
 & - b \sin(t) [\cosh(R) \cosh(1) + \sinh(R) \sinh(1)] + n \tag{3.21} \\
 & \leq -a \cos(t) \sinh(R) - b \sin(t) \cosh(R) + nR \\
 \Leftrightarrow & -a \cos(t) \sinh(R) \cosh(1) - a \cos(t) \cosh(R) \sinh(1) \\
 & - b \sin(t) \cosh(R) \cosh(1) - b \sin(t) \sinh(R) \sinh(1) + n \\
 & \leq -a \cos(t) \sinh(R) - b \sin(t) \cosh(R).
 \end{aligned}$$

Da  $\cosh(1) \approx 1.54 > 1$ ,  $\sinh(1) \approx 1.18 > 1$ ,  $t \geq 0$  und  $R \geq 0$ , können die folgenden Abschätzungen getätigt werden

$$\begin{aligned}
 & -a \cos(t) \sinh(R) \cosh(1) \leq -a \cos(t) \sinh(R) \\
 & -b \sin(t) \cosh(R) \cosh(1) \leq -b \sin(t) \cosh(R) \tag{3.22} \\
 & -a \cos(t) \cosh(R) \sinh(1) - b \sin(t) \sinh(R) \sinh(1) \leq 0.
 \end{aligned}$$

Daraus kann direkt abgelesen werden, dass es von der jeweiligen Ordnung  $n$  der Hankelfunktion abhängt, ob die Funktion  $f_R$  eine monoton fallende Funktion ist. Aus diesem Grund wird (3.21) nun nach  $n$  umgestellt

$$\begin{aligned}
 n \leq & a \cos(t) \sinh(R) [\cosh(1) - 1] + b \sin(t) \cosh(R) [\cosh(1) - 1] \\
 & + a \cos(t) \cosh(R) \sinh(1) + b \sin(t) \sinh(R) \sinh(1). \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

Die rechte Seite von (3.23) wird minimal, wenn  $t \rightarrow 0$  und  $R \rightarrow 0$  gilt. In diesem Fall ist  $n \leq 0$  und die Funktion (3.14) ist immer monoton fallend. Im späteren Verlauf sollen Hankelfunktionen betrachtet werden, die eine größere Ordnung als Null haben. Deshalb ist es notwendig im nächsten Schritt zu untersuchen, ob es eine Stelle  $R$  gibt, ab der die Funktion  $f_R$  immer monoton fallend ist. Dafür muss zunächst berechnet werden, an welcher Stelle  $f_R$  maximal wird. In diesem Fall reicht es aus, den Exponenten zu untersuchen, da es sich bei der Funktion (3.14) um eine Exponentialfunktion handelt und diese eine monoton wachsende Funktion ist. Zunächst wird demnach die Ableitung

$$\begin{aligned}
 df_R & := \frac{df_R}{dR} = \frac{d[-a \cos(t) \sinh(R) - b \sin(t) \cosh(R) + nR]}{dR} \\
 & = -a \cos(t) \cosh(R) - b \sin(t) \sinh(R) + n \stackrel{!}{=} 0 \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

berechnet und so die potentiellen Extremstellen

$$R_m^{(1)} = \ln \left( \frac{n + \sqrt{-\cos(t)^2 a^2 + \sin(t)^2 b^2 + n^2}}{a \cos(t) + b \sin(t)} \right) \quad (3.25)$$

$$R_m^{(2)} = \ln \left( \frac{n - \sqrt{-\cos(t)^2 a^2 + \sin(t)^2 b^2 + n^2}}{a \cos(t) + b \sin(t)} \right) \quad (3.26)$$

ermittelt. Im Anschluss kann gezeigt werden, dass es sich bei (3.25) um ein Maximum und bei (3.26) um ein Minimum handelt. Hierfür wird zunächst die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} ddf_R(R, t) &:= \frac{ddf_R}{dR} = \frac{d[-a \cos(t) \cosh(R) - b \sin(t) \sinh(R) + n]}{dR} \\ &= -a \cos(t) \sinh(R) - b \sin(t) \cosh(R) \end{aligned} \quad (3.27)$$

gebildet und anschließend an den Stellen (3.25) und (3.26) ausgewertet

$$ddf_R(R_m^{(1)}, t) = \frac{-n\sqrt{-a^2 \cos(t)^2 - b^2 \cos(t)^2 + b^2 + n^2} + (a^2 + b^2) \cos(t)^2 - b^2 - n^2}{n + \sqrt{-a^2 \cos(t)^2 - b^2 \cos(t)^2 + b^2 + n^2}} \quad (3.28)$$

$$ddf_R(R_m^{(2)}, t) = \frac{-n\sqrt{-a^2 \cos(t)^2 - b^2 \cos(t)^2 + b^2 + n^2} - (a^2 + b^2) \cos(t)^2 + b^2 + n^2}{-n + \sqrt{-a^2 \cos(t)^2 - b^2 \cos(t)^2 + b^2 + n^2}}. \quad (3.29)$$

Zum Schluss muss nur noch gezeigt werden, dass  $ddf_R(R_m^{(1)}, t) < 0$  und  $ddf_R(R_m^{(2)}, t) > 0$  ist. Dafür wird zunächst die erste Forderung untersucht. Es lässt sich erkennen, dass aufgrund der zuvor getätigten Einschränkung, dass  $n > 0$  ist und der Tatsache, dass die Wurzelfunktion einen Wertebereich  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  hat, der Nenner von (3.28) größer Null ist. Deshalb reicht es aus

$$-n\sqrt{-a^2 \cos(t)^2 - b^2 \cos(t)^2 + b^2 + n^2} + (a^2 + b^2) \cos(t)^2 - b^2 - n^2 < 0 \quad (3.30)$$

zu zeigen. Durch Umformungen folgt

$$\begin{aligned} &-n\sqrt{-a^2 \cos(t)^2 - b^2 \cos(t)^2 + b^2 + n^2} < +b^2 + n^2 - (a^2 + b^2) \cos(t)^2 \\ \Leftrightarrow &-n\sqrt{-a^2 \cos(t)^2 - b^2 \cos(t)^2 + b^2 + n^2} < \sqrt{b^2 + n^2 - a^2 \cos(t)^2 - b^2 \cos(t)^2}^2 \\ \Leftrightarrow &-n < \sqrt{b^2 + n^2 - a^2 \cos(t)^2 - b^2 \cos(t)^2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dieses ist mit der gleichen Begründung, warum der Nenner von (3.28) größer Null

ist, immer erfüllt.

Im Anschluss wird die zweite Forderung untersucht. Der Fall, dass  $Sq \geq n$ , wobei  $Sq := \sqrt{b^2 + n^2 - a^2 \cos(t)^2 - b^2 \cos(t)^2}$ , ist nicht erlaubt, da dann der Numerand von (3.25) kleiner Null werden würde und dieses außerhalb des Definitionsbereichs ist. Aus diesem Grund genügt es, den Fall  $Sq < n$  zu betrachten. Es lässt sich erkennen, dass dann der Nenner von (3.29) negativ ist. Deshalb muss der Zähler kleiner Null sein, um zu beweisen, dass es sich bei (3.26) um ein Minimum handelt

$$-n\sqrt{-a^2 \cos(t)^2 - b^2 \cos(t)^2 + b^2 + n^2} - (a^2 + b^2) \cos(t)^2 + b^2 + n^2 < 0. \quad (3.32)$$

Durch das Umstellen der Ungleichung kann dieses verifiziert werden

$$\begin{aligned} & b^2 + n^2 - (a^2 + b^2) \cos(t)^2 < n\sqrt{-a^2 \cos(t)^2 - b^2 \cos(t)^2 + b^2 + n^2} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{b^2 + n^2 - a^2 \cos(t)^2 - b^2 \cos(t)^2} < n\sqrt{-a^2 \cos(t)^2 - b^2 \cos(t)^2 + b^2 + n^2} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{b^2 + n^2 - a^2 \cos(t)^2 - b^2 \cos(t)^2} < n, \end{aligned} \quad (3.33)$$

da die letzte Zeile genau der Voraussetzung entspricht.

Durch die Betrachtung des jeweiligen Numerus der Logarithmusfunktionen (3.25) und (3.26) unter Beachtung aller getätigten Parameterabschätzungen lässt sich direkt erkennen, dass  $R_m^{(1)} > R_m^{(2)}$ . Dieses bedeutet, dass der letzte Extremwert das Maximum an der Stelle  $R_m^{(1)}$  sein muss und demnach eine monoton fallende Folge vorliegen muss. Da bei dem Satz von Beppo Levi der Grenzwert für  $R \rightarrow \infty$  betrachtet wird, genügt es die Folge  $f_R$  zu betrachten, wobei  $R$  bei (3.25) startet. Für diese Folge ist die Monotonie gezeigt.

Im zweiten Schritt muss gezeigt werden, dass das erste Folgenglied  $f_R(R_m^{(1)}, t)$  integrierbar ist. Dieses gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & \int_0^\beta e^{-a \cos(t) \sinh(R_m^{(1)}) - b \sin(t) \cosh(R_m^{(1)}) + nR_m^{(1)}} dt < \infty \\ \Leftrightarrow & \int_0^\beta e^{-a \cos(t) \sinh\left(\ln\left(\frac{n + \sqrt{-\cos(t)^2 a^2 + \sin(t)^2 b^2 + n^2}}{a \cos(t) + b \sin(t)}\right)\right)} \\ & \cdot e^{-b \sin(t) \cosh\left(\ln\left(\frac{n + \sqrt{-\cos(t)^2 a^2 + \sin(t)^2 b^2 + n^2}}{a \cos(t) + b \sin(t)}\right)\right)} n \ln\left(\frac{n + \sqrt{-\cos(t)^2 a^2 + \sin(t)^2 b^2 + n^2}}{a \cos(t) + b \sin(t)}\right) dt < \infty. \end{aligned} \quad (3.34)$$

In diesem Fall reicht es zu zeigen, dass jeder einzelne Exponent von (3.34) nach oben beschränkt ist. Keiner der Exponenten weist Polstellen auf. Zunächst wird der erste Exponent betrachtet. Dieser ist beschränkt, da  $a > 0$  eine feste Zahl kleiner unendlich ist und  $\cos(t) \in (0, \frac{\pi}{2})$  gilt. Wäre der Exponent unbeschränkt, müsste die Sinus hyperbolicus Funktion den Wert  $-\infty$  annehmen. Das tritt lediglich ein, wenn auch der natürliche Logarithmus gegen  $-\infty$  geht und damit der Numerus Null wird. Da jedoch der Nenner des Numerus beschränkt ist und  $n > 0$  eine feste Zahl

ist, kann dieses nie eintreten. Auch die zweite Exponentialfunktion ist nach oben beschränkt, da  $b > 0$ ,  $\sin(t) \in (0, \frac{\pi}{2})$  und der Wertebereich des Cosinus hyperbolicus größer Null ist. Zum Schluss wird der letzte Exponent betrachtet. Da  $n > 0$  wieder ein fester Wert ist, und der Zähler des Numerus nach oben beschränkt ist, sowie der Nenner des Numerus für  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$  nie Null werden kann, ist der ganze Exponent nach oben beschränkt.

Daraus folgt, dass alle notwendigen Bedingungen für den Satz von der monotonen Konvergenz (Variante für fallende Folgen) erfüllt sind und die Vertauschung von Integration und Grenzwertbildung bei der Funktion  $f_R$  (3.16) erlaubt ist. Wie bereits gezeigt wurde, folgt daraus direkt, dass dieses auch für  $f_R g_R$  gilt (3.11).

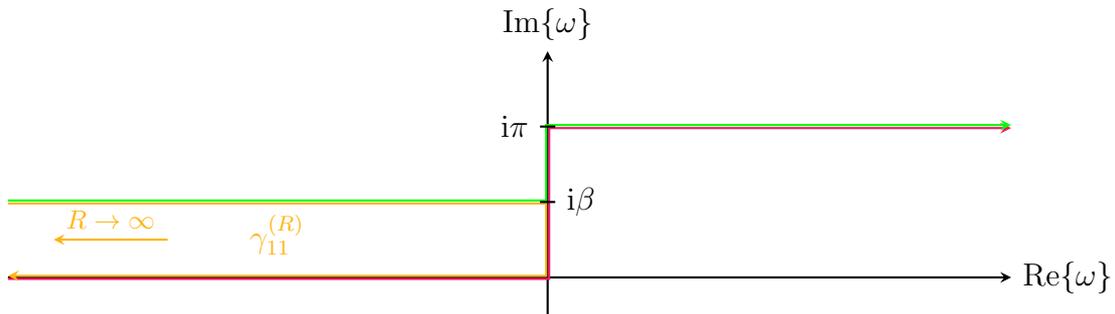


Abbildung 3.3: Magenta: Integrationskurve der Formel (3.3)  
 Orange: Integrationskurve  $\gamma_{11}$  für  $R \rightarrow \infty$   
 Grün: Integrationskurve der Formel (3.35)

Der in Abbildung (3.2) dargestellte Integrationspfad ist nur eine Möglichkeit von vielen, denn solange Anfangs- und Endpunkt bei den unterschiedlichen Integrationspfaden identisch sind, ist der exakte Weg irrelevant, da diese dann das gleiche Wegintegral besitzen. Somit könnte auch der in Abbildung (3.3) grün eingezeichnete Pfad verwendet werden. Wie in Formel (3.11) herausgefunden wurde, ist das Wegintegral über  $\gamma_{12}$  für  $\lim_{R \rightarrow \infty}$  Null. Deshalb lässt sich für (3.3) nun

$$H_n^{(1)}(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty+i\beta}^{\infty+i\pi} e^{z \sinh(\omega) - n\omega} d\omega \quad (3.35)$$

schreiben. Im nächsten Schritt wird zum einen  $\beta = \frac{\pi}{2} - \arg(z)$  gewählt und zum anderen die Definition von der hyperbolischen Funktion  $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$$H_n^{(1)}(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty+i(\frac{\pi}{2}-\arg(z))}^{\infty+i\pi} e^{\frac{z}{2}(e^\omega - e^{-\omega})} e^{-n\omega} d\omega. \quad (3.36)$$

Für die gewünschte Darstellung (3.4) muss nun lediglich zweimal die Substitutionsregel angewendet werden. Das erste Mal wird  $u = e^\omega$  substituiert. Dafür muss dieses zunächst nach  $\omega$  umgestellt werden  $\omega = \ln u =: \phi(u)$  und anschließend nach  $u$  abgeleitet werden  $\frac{d\phi(u)}{du} = \frac{1}{u}$ . Damit gilt  $d\omega = \frac{1}{u} du$  und für die Gleichung (3.36)

gilt

$$H_n^{(1)}(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{\gamma_2} e^{\frac{z}{2}(u-\frac{1}{u})} u^{-n-1} du. \quad (3.37)$$

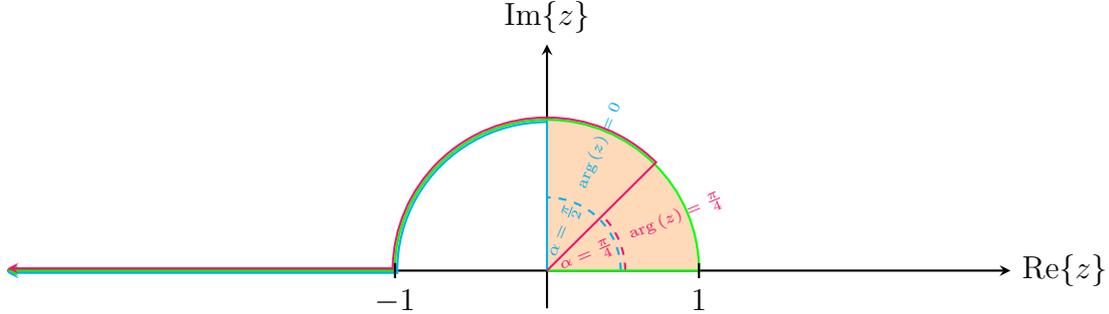


Abbildung 3.4: Integrationskurve  $\gamma_2$ , wobei Cyan:  $\arg(z) = 0$ ;  
Magenta:  $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ ; Grün:  $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$

Der Integrationspfad ist in diesem Fall  $\gamma_2$ . Dieser ist in Abbildung (3.5) dargestellt und ist wie folgt berechnet worden. Als erstes werden die Eckpunkte der Integrationskurve, die in Abbildung dargestellt ist, transformiert diese sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} E_{21} &= e^{-\infty+i(\frac{\pi}{2}-\arg(z))} = e^{-\infty} e^{i(\frac{\pi}{2}-\arg(z))} = 0 \\ E_{22} &= e^{0+i(\frac{\pi}{2}-\arg(z))} = e^{i(\frac{\pi}{2}-\arg(z))} \\ E_{23} &= e^{0+i\pi} = -1 \\ E_{24} &= e^{\infty+i\pi} = e^{\infty} e^{i\pi} = -\infty. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Wo exakt der Punkt  $E_{22}$  liegt, hängt von dem gewählten  $z$  ab. Da  $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$  gilt, folgt für den transformierten Eckpunkt  $E_{22}$ , dass dieser auf dem Kreisbogen des ersten Quadranten mit Radius eins liegen muss.

Die erste Teilstrecke  $\gamma_{21}$ , die vom Eckpunkt  $E_{21}$  zum Eckpunkt  $E_{22}$  führt, ist eine Gerade vom Ursprung in Richtung  $e^{i(\frac{\pi}{2}-\arg(z))}$ . Dieses liegt daran, dass der zusätzliche Term  $e^x$ , mit  $x \in (-\infty, 0)$ , lediglich etwas an der Entfernung zum Ursprung ändert, nicht aber an dem Winkel, wo der Punkt liegt.

Bei der zweiten Teilstrecke  $\gamma_{22}$ , die von Eckpunkt  $E_{22}$  zum Eckpunkt  $E_{23}$  führt, handelt es sich um eine Kurve entlang des Kreisbogens mit Radius 1, weil in diesem Fall nur der imaginäre Teil verändert wird und allgemein  $e^z = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$  gilt. Damit verändert sich folglich nur der Winkel und nicht der Radius.

Die letzte Teilstrecke  $\gamma_{23}$  ist auf Grund der gleichen Begründung, wie bei der ersten Teilstrecke wieder eine Gerade von dem Eckpunkt  $E_{23}$  zum Eckpunkt  $E_{24}$ .

Die zweite Substitution erfolgt nachdem  $z = kr$ , wobei  $r > 0$ , ersetzt wird

$$H_n^{(1)}(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{\gamma_2} e^{\frac{kr}{2}(u-\frac{1}{u})} u^{-n-1} du. \quad (3.39)$$

Es wird  $u = \frac{-2rt^2}{k}$  substituiert. Dafür wird zunächst wieder die Ableitung nach  $t$

betrachtet  $\frac{du}{dt} = -\frac{4rt}{k}$  und anschließend  $u$  sowie  $du = -\frac{4rt}{k}dt$  in (3.39) eingesetzt

$$H_n^{(1)}(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{\gamma_3} e^{\frac{kr}{2} \left( \frac{-2rt^2}{k} - \frac{-k}{2rt^2} \right)} \left( \frac{-2rt^2}{k} \right)^{-n-1} \left( -\frac{4rt}{k} \right) dt.$$

Diese Darstellung lässt sich wie folgt vereinfachen

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(z) &= \frac{2}{i\pi} \int_{\gamma_3} e^{-r^2t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} \left( \frac{-2rt^2}{k} \right)^{-n} \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{2}{i\pi} \int_{\gamma_3} e^{-r^2t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} (-1)^n \left( \frac{k}{2r} \right)^n t^{-2n-1} dt \\ &= \frac{2}{i\pi} e^{i\pi n} \left( \frac{k}{2r} \right)^n \int_{\gamma_3} e^{-r^2t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} t^{-2n-1} dt. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Dabei ist zu beachten, dass  $(-1)^n = e^{i\pi n}$  gilt. Dieses lässt sich leicht über den Versuch,  $-1$  als komplexe Exponentialfunktion zu schreiben  $e^{ix} = -1$ , erklären. Es folgt, dass  $ix = \log(-1) = i\pi$  und somit  $x = \pi$  gilt. Wird nun alles zusammengesetzt, folgt  $(-1)^n = (e^{i\pi})^n = e^{i\pi n}$ .

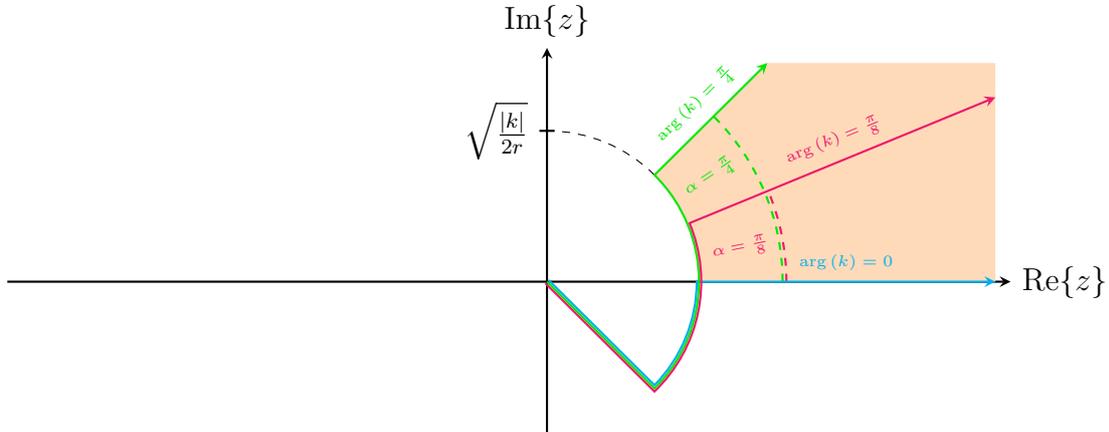


Abbildung 3.5: Integrationskurve  $\gamma_3$ , wobei Cyan:  $\arg(z) = 0$ ;  
Magenta:  $\arg(z) = \frac{\pi}{8}$ ; Grün:  $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$

Das Kurvenintegral  $\gamma_3$  ist in Abbildung (3.5) abgebildet und lässt sich wieder über die Berechnung der Eckpunkte herleiten. Wobei jeder Eckpunkt (3.38) in  $t = \sqrt{-\frac{uk}{2r}}$  für  $u$  eingesetzt werden muss. Für die Punkte  $E_{32}$ ,  $E_{33}$  und  $E_{44}$  werden die komplexen Zahlen in Polarkoordinaten transformiert mit  $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\phi+k2\pi}{n}}$ , wobei  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  ist. Daraus lassen sich die Eckpunkte ableiten

$$\begin{aligned}
 E_{31} &= \sqrt{-\frac{0k}{2r}} = 0 \\
 E_{32} &= \sqrt{-\frac{e^{i(\frac{\pi}{2}-\arg(kr))}k}{2r}} = \sqrt{-\frac{e^{i(\frac{\pi}{2}-\arg(k))}|k|e^{i\arg(k)}}{2r}} \\
 &= \sqrt{-\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}|k|}{2r}} = \sqrt{e^{i\pi}\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}|k|}{2r}} = \sqrt{\frac{e^{i\frac{3\pi}{2}}|k|}{2r}} \\
 E_{321} &= \sqrt{\frac{|k|}{2r}}e^{i\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{\frac{|k|}{2r}}e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
 E_{322} &= \sqrt{\frac{|k|}{2r}}e^{i\frac{3\pi+2\pi}{2}} = \sqrt{\frac{|k|}{2r}}e^{i\frac{7\pi}{4}} = -\sqrt{\frac{|k|}{2r}}e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
 E_{33} &= \sqrt{-\frac{(-1)k}{2r}} = \sqrt{\frac{k}{2r}} = \sqrt{\frac{|k|e^{i\arg(k)}}{2r}} \\
 E_{331} &= \sqrt{\frac{|k|}{2r}}e^{i(\frac{\arg(k)}{2})} \\
 E_{332} &= \sqrt{\frac{|k|}{2r}}e^{i(\frac{\arg(k)}{2}+\pi)} = -\sqrt{\frac{|k|}{2r}}e^{i(\frac{\arg(k)}{2})} \\
 E_{34} &= \sqrt{-\frac{(-\infty)k}{2r}} = \sqrt{\frac{\infty|k|e^{i\arg(k)}}{2r}} \\
 E_{341} &= \sqrt{\frac{\infty|k|}{2r}}e^{i\frac{\arg(k)}{2}} \\
 E_{342} &= \sqrt{\frac{\infty|k|}{2r}}e^{i\frac{\arg(k)}{2}+\pi} = -\sqrt{\frac{\infty|k|}{2r}}e^{i\frac{\arg(k)}{2}}.
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

In diesem Fall sind die Eckpunkt der Integrationskurve  $E_{31}$ ,  $E_{322}$ ,  $E_{331}$  und  $E_{341}$ . Sowohl die Punkte  $E_{31}$  und  $E_{322}$  als auch die Punkte  $E_{331}$  und  $E_{341}$  werden jeweils mit einer Gerade verbunden. Die Verbindung zwischen den Eckpunkten  $E_{322}$  und  $E_{331}$  ist wie bei der Integrationskurve  $\gamma_2$  wieder ein Kreisbogen.

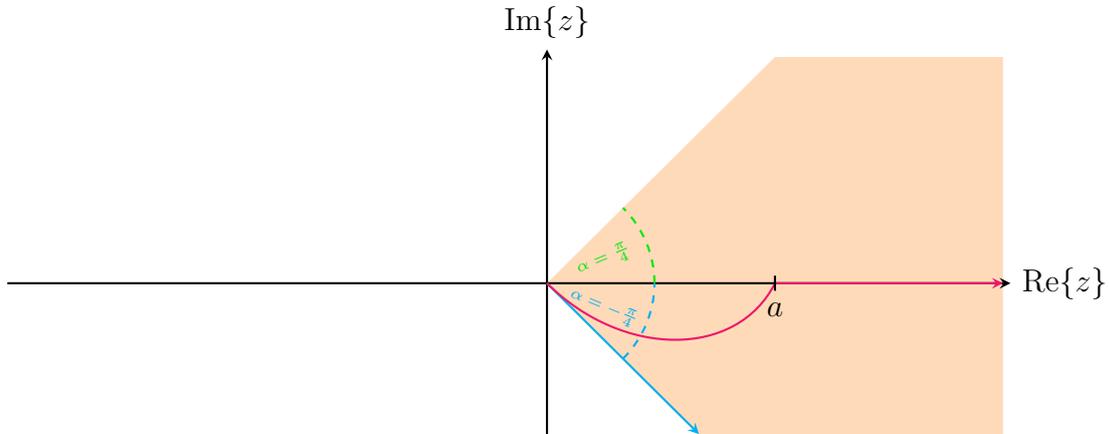


Abbildung 3.6: Integrationskurve  $\gamma_4$

Es ist aber auch eine Abweichung von dieser Kurve erlaubt, solange zwei Bedingungen erfüllt sind. Beide Bedingungen lassen sich auf den Integralsatz von Cauchy

zurückführen. Dieser besagt, dass der Wert eines zu berechnenden Integrals unabhängig von der exakten Integrationskurve ist, solange der Anfangs und der Endpunkt gleich bleiben und der Integrand entlang der Integrationspfade holomorph ist.

Die erste Bedingung lautet somit, dass der Integrationspfad im Ursprung starten und in die gleiche Richtung  $e^{-i\frac{\pi}{4}}$  wie bei der Kurve  $\gamma_3$  starten muss. Die Begründung dafür ist, dass der Integrand im gesamten Gebiet, bis auf im Ursprung holomorph ist.

Werden zunächst die einzelnen Faktoren des Integranden betrachtet, lässt sich erkennen, dass  $e^{-r^2 t^2}$  für jedes beliebige  $t \in \mathbb{C}$  holomorph ist. Sowohl bei dem Faktor  $e^{\frac{k^2}{4t^2}}$ , als auch bei dem Faktor  $t^{-2n-1}$  liegt der einzige kritische Punkt bei  $t = 0 + 0i$  vor. An diesem Punkt sind die beiden Terme nicht holomorph. Eine Ausnahme im letzten genannten Term ist gegeben, wenn  $n = -\frac{1}{2}$ , da in diesem Fall der Term eins entspricht. Da das Produkt von holomorphen Funktionen wieder holomorph ist [11, S.20], folgt, dass der ganze Integrand an jedem Punkt außer im Ursprung holomorph ist. Aus diesem Grund darf in diesem Punkt die Integrationskurve nicht verändert werden und es muss die Richtung  $e^{i\frac{\pi}{4}}$  bestehen bleiben.

Die zweite Bedingung besagt, dass der Integrationsweg in der Richtung  $e^{i\phi}$ , wobei  $-\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{4}$ , gegen unendlich gehen muss. Diese Bedingung kann leicht hergeleitet werden. Zunächst gilt auf Grund der oben genannten Regel, dass der Endpunkt der Integrationskurve bei unendlich mit der Richtung  $e^{i\frac{\arg(k)}{2}}$  liegen muss. Im nächsten Schritt, wird betrachtet, welche Auswirkungen die Veränderung der Richtung des Endpunkts auf das zu berechnende Integral hat. Dazu wird zunächst die Kurve

$$\gamma_4 = \sqrt{\frac{\ell|k|}{2r}} e^{im\frac{\arg(k)}{2}} \quad (3.42)$$

definiert, wobei  $m$  die Richtung bestimmt, in welcher der Endpunkt liegt. Für  $m = 1$  und  $\ell = \infty$  handelt es sich um den Eckpunkt  $E_{34_1}$ . Die Behauptung besagt, dass es irrelevant ist, wo sich der Endpunkt genau auf der Kurve  $\gamma_4$  befindet, so lange  $-1 + 4z < m < 1 + 4z$ , wobei  $z \in \mathbb{Z}$ . Wird nun diese Kurve (3.42) für  $t$  in der Formel (3.40) eingesetzt und nur das Integral betrachtet, so folgt, dass

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_3} e^{-r^2 t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} t^{-2n-1} dt \\ &= \int_{m_a}^{m_e} e^{-r^2 \left[ \sqrt{\frac{\ell|k|}{2r}} e^{im\frac{\arg(k)}{2}} \right]^2 + \frac{k^2}{4 \left[ \sqrt{\frac{\ell|k|}{2r}} e^{im\frac{\arg(k)}{2}} \right]^2} \left[ \sqrt{\frac{\ell|k|}{2r}} e^{im\frac{\arg(k)}{2}} \right]^{-2n-1}} dm. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Der Integrationsbereich ist gegeben durch  $m_a$  und  $m_e$ , diese werden nun genauer betrachtet und angegeben, wann dieses Integral Null entspricht. In diesem Fall führt eine Veränderung der Richtung des Endpunktes nicht zu einer Veränderung des

Integrals selbst. Dafür wird die Formel zunächst vereinfacht zu

$$\begin{aligned}
 (3.43) &= \int_{m_a}^{m_e} e^{-r^2 \frac{\ell|k|}{2r} e^{im \arg(k)} + \frac{k^2}{4 \frac{\ell|k|}{2r} e^{im \arg(k)}} \left[ \sqrt{\frac{\ell|k|}{2r}} \right]^{-2n-1} \left[ e^{im \frac{\arg(k)}{2}} \right]^{-2n-1} dm \\
 &= \int_{m_a}^{m_e} e^{-\frac{r\ell|k|}{2} e^{im \arg(k)}} e^{\frac{r|k|}{2\ell e^{im \arg(k)}}} \sqrt{\frac{2r}{\ell|k|}}^{-2n+1} e^{im \arg(k)(-n-\frac{1}{2})} dm.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Werden nun die einzelnen Faktoren betrachtet, lässt sich leicht erkennen, dass

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2r}{\ell|k|}}^{-2n+1} = 0. \tag{3.45}$$

Das bedeutet, dass das ganze Integral nur dann ungleich Null sein, wenn mindestens ein anderer Faktor für  $\ell \rightarrow \infty$  gegen unendlich strebt und dieses schneller geschieht, als die anderen Faktoren gegen Null gehen.

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} e^{im \arg(k)(-n-\frac{1}{2})} = e^{im \arg(k)(-n-\frac{1}{2})}$$

kann nur Punkte auf dem Einheitskreis annehmen. Da somit der Vektor dieses Punktes immer die Länge eins hat, spielt er in der Rechnung keine Rolle.

Für den folgenden Term gilt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} e^{\frac{r|k|}{2\ell e^{im \arg(k)}}} = e^0 = 1,$$

da  $\ell$  im Nenner des Exponenten steht und  $e^{im \arg(k)}$ , wie oben beschrieben, immer auf dem Einheitskreis liegt. Somit liegen auch auf Grund dieses Terms keine Einschränkungen für den Integrationsbereich vor. Anders ist das bei dem nächsten Term

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} e^{-\frac{r\ell|k|}{2} e^{im \arg(k)}}. \tag{3.46}$$

In diesem Fall ist das  $\ell$  im Exponenten im Zähler. Das führt dazu, dass es einen erheblichen Unterschied macht, ob der Realteil  $\operatorname{Re}\left\{\frac{r|k|}{2} e^{im \arg(k)}\right\}$  größer oder kleiner Null ist. Da sowohl  $|k|$  als auch  $r$  einen positiver Realteil haben, genügt es  $\operatorname{Re}\{e^{im \arg(k)}\}$  zu betrachten. Wie bereits oben beschrieben, liegen diese Punkte abhängig von  $m$  und  $\arg(k)$  auf dem Einheitskreis. Mit der bereits formulierten Einschränkung  $\arg(k) \in (0, \frac{\pi}{2})$  liegt die strengste Einschränkung für  $m$  bei  $\arg(k) = \frac{\pi}{2}$  vor. Ist  $-1 + 4z < m < 1 + 4z$ , wobei  $z \in \mathbb{Z}$ , so liegt der Punkt auf der positiven reellen Seite des Einheitskreises. Dieses führt in dem Term (3.46) dazu, dass dieser für  $\ell \rightarrow \infty$  zu Null wird. Würde ein anderes  $m$  gewählt werden, so würde der Term für  $\ell \rightarrow \infty$  gegen unendlich gehen und dieses mit exponentieller Geschwindigkeit. Das ist schneller, als der Term (3.45) gegen Null abfällt und deshalb wäre das ganze Integral ungleich Null. Wird nun erneut die Kurve  $\gamma_4$  betrachtet und setzt zum einen  $\arg(k) = \frac{\pi}{2}$  und zum anderen die für  $m$  gezeigten Restriktionen, so lässt sich erkennen, dass die Richtung des Endpunkts so gewählt werden muss, dass diese im Bereich  $e^{im \frac{\arg(k)}{2}} = e^{i\phi}$  liegt, wobei  $-\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{4}$ .  $\square$

## 3.2 Konvergenz des Anteils des Doppelschichtoperators mit Singulärstelle

Wie bereits in Kapitel 3 beschrieben, wird die Funktion (3.1) bei der Ewald-Methode in zwei Teile aufgesplittet. In diesem Kapitel wird der Anteil  $g$  betrachtet, welcher die gleichen Singulärstellen wie  $f$  enthält. Von diesem Teil kann außerdem gezeigt werden, dass er für große  $m$  exponentiell schnell fällt.

Zur Vereinfachung, werden zunächst

$$u := x_1 - md - y_1 \quad (3.47a)$$

$$v := x_2 - y_2 \quad (3.47b)$$

$$\tilde{v} := x_2 + y_2 \quad (3.47c)$$

$$w := \sqrt{u^2 + v^2} \quad (3.47d)$$

$$\tilde{w} := \sqrt{u^2 + \tilde{v}^2} \quad (3.47e)$$

definiert. Zusammen mit (3.1) folgt, dass im Folgenden eine Funktion gesucht wird, die die gleiche Singulärstelle, wie

$$f(x - mde^{(1)}) = \frac{ik}{4} e^{i\alpha md} \left[ \frac{vH_1^{(1)}(kw)}{w} + \frac{\tilde{v}H_1^{(1)}(k\tilde{w})}{\tilde{w}} \right] \quad (3.48)$$

hat und zusätzlich exponentiell schnell konvergiert. Dabei werden in den folgenden Betrachtungen die ersten Faktoren ignoriert und lediglich der Teil in den Klammern von (3.48) betrachtet

$$f_1(kw, k\tilde{w}) = \frac{vH_1^{(1)}(kw)}{w} + \frac{\tilde{v}H_1^{(1)}(k\tilde{w})}{\tilde{w}}. \quad (3.49)$$

Im ersten Schritt wird die in Kapitel 3.1 hergeleitete alternative Integraldarstellung der Hankelfunktion (3.4) verwendet. Dabei ist zum einen zu beachten, dass in diesem Fall die Ordnung der Hankelfunktion  $n = 1$  gilt, da der Doppelschichtoperator und damit die Ableitung der Hankelfunktion betrachtet wird. Zum anderen wird die Integrationskurve  $\gamma_4$  in zwei Abschnitte aufgeteilt. Der erste Abschnitt ist der Teil der roten Kurve aus Abbildung 3.6, welcher den Ursprung mit dem Punkt  $a$  verbindet. Der zweite Abschnitt ist der Teil der Integrationskurve, welcher von diesem Punkt  $a$  ins Unendliche innerhalb des pfirsichfarbenen Bereichs der Abbildung 3.6 strebt. Der Punkt  $a$  ist ein Punkt, welcher sich auf der positiven Abszissenachse befindet. In dieser Masterarbeit wird der Punkt als beliebig angenommen. Es kann jedoch in einer weiterführenden Forschung ein optimales  $a$  ermittelt werden, sodass die Anzahl an Reihengliedern minimiert wird, welche berechnet werden muss, um eine gewisse Genauigkeit gewährleisten zu können.

Für die Betrachtung einer zu (3.49) ähnlichen Funktion, welche neben der gleichen Singularität zusätzlich ein exponentielles Fallen der Konvergenz für große  $m$  zeigt, wird die alternative Darstellung der Hankelfunktion verwendet, wobei das Konturintegral durch den zweiten beschriebenen Abschnitt definiert sein soll. Demnach wird

die Funktion (3.4) mit  $n = 1$ , also

$$H_1^{(1)}(kr) = \frac{-k}{i\pi r} \int_{\gamma_1} t^{-3} e^{-r^2 t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} dt \quad (3.50)$$

in (3.49) eingesetzt und lediglich der zweite Abschnitt des Konturintegrals verwendet

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{v \left( \frac{-k}{i\pi w} \int_a^\infty t^{-3} e^{-w^2 t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} dt \right)}{w} + \frac{\tilde{v} \left( \frac{-k}{i\pi \tilde{w}} \int_a^\infty t^{-3} e^{-\tilde{w}^2 t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} dt \right)}{\tilde{w}} \\ &= -\frac{k}{i\pi} \left( \frac{v}{w^2} \int_a^\infty t^{-3} e^{-w^2 t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} dt + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \int_a^\infty t^{-3} e^{-\tilde{w}^2 t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} dt \right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Für diesen Teil gilt

**Satz 3.5.** Für  $w > 0$  und  $\arg(k) \in [0, \frac{\pi}{2})$  gilt

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{i\pi} \left\{ -\frac{v}{w^3} \frac{1}{a^2} \left[ e^{-(aw)^2} - (aw)^2 \left( -\gamma - 2 \ln(aw) - \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n (aw)^{2n}}{nn!} \right) \right] J_1(kw) \right. \\ &\quad - \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^3} \frac{1}{a^2} \left[ e^{-(a\tilde{w})^2} - (a\tilde{w})^2 \left( -\gamma - 2 \ln(a\tilde{w}) - \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n (a\tilde{w})^{2n}}{nn!} \right) \right] J_1(k\tilde{w}) \\ &\quad \left. + h(v, w, k, a) + h(\tilde{v}, \tilde{w}, k, a) \right\}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

wobei die Funktion  $h$  eine analytische Funktion bezüglich der zwei Argumente  $kw$  und  $\frac{k}{a}$  beziehungsweise bezüglich  $k\tilde{w}$  und  $\frac{k}{a}$  ist. Darüber hinaus gilt

$$|g_1| \leq \frac{|k|}{2\pi a^2} e^{\frac{|k|^2}{4a^2}} \left( \frac{|v|}{w^2} \frac{e^{-w^2 a^2}}{w^2 a^2} + \frac{|\tilde{v}|}{\tilde{w}^2} \frac{e^{-\tilde{w}^2 a^2}}{\tilde{w}^2 a^2} \right). \quad (3.53)$$

*Beweis.* Der Aufbau des Beweises ist an [4] angelehnt, wobei in dem Paper zum einen nicht nur die obere Halbebene, sondern die ganze Ebene im Raum betrachtet wird. Zum anderen wird hier die Ableitung der Fundamentallösung nach  $y_2$  betrachtet, wohingegen in [4] die Fundamentallösung betrachtet wird

Die Funktion (3.51) wird im Folgenden in eine andere Form umgeformt, von der gezeigt werden kann, dass diese für große  $m$  exponentiell schnell konvergiert.

Dazu wird als erstes die Definition der Potenzreihe der Exponentialfunktion ausgenutzt

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (3.54)$$

Deshalb gilt für die Funktion  $g_1$

$$\begin{aligned}
 g_1 &= -\frac{k}{i\pi} \left( \frac{v}{w^2} \int_a^\infty t^{-3} e^{-w^2 t^2} e^{\frac{k^2}{4t^2}} dt + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \int_a^\infty t^{-3} e^{-\tilde{w}^2 t^2} e^{\frac{k^2}{4t^2}} dt \right) \\
 &= -\frac{k}{i\pi} \left[ \frac{v}{w^2} \int_a^\infty t^{-3} e^{-w^2 t^2} \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{j!} \left( \frac{k}{2t} \right)^{2j} dt + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \int_a^\infty t^{-3} e^{-\tilde{w}^2 t^2} \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{j!} \left( \frac{k}{2t} \right)^{2j} dt \right] \\
 &= -\frac{k}{i\pi} \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{j!} \left( \frac{k}{2} \right)^{2j} \left( \frac{v}{w^2} \int_a^\infty t^{-2j-3} e^{-w^2 t^2} dt + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \int_a^\infty t^{-2j-3} e^{-\tilde{w}^2 t^2} dt \right). \tag{3.55}
 \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wird  $s = \frac{t^2}{a^2}$  substituiert. Mit  $t = a\sqrt{s}$  und  $\frac{dt}{ds} = \frac{a}{2\sqrt{s}}$  folgt daraus, dass

$$\begin{aligned}
 g_1 &= -\frac{k}{i\pi} \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{j!} \left( \frac{k}{2} \right)^{2j} \left( \frac{v}{w^2} \int_1^\infty (a\sqrt{s})^{-2j-3} e^{-w^2 (a\sqrt{s})^2} \frac{a}{2\sqrt{s}} ds \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \int_1^\infty (a\sqrt{s})^{-2j-3} e^{-\tilde{w}^2 (a\sqrt{s})^2} \frac{a}{2\sqrt{s}} ds \right) \\
 &= -\frac{k}{2i\pi} \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{j!} \left( \frac{k}{2} \right)^{2j} \left( \frac{v}{w^2} \int_1^\infty a^{-2(j+1)} (\sqrt{s})^{-2(j+2)} e^{-w^2 a^2 s} ds \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \int_1^\infty a^{-2(j+1)} (\sqrt{s})^{-2(j+2)} e^{-\tilde{w}^2 a^2 s} ds \right) \tag{3.56} \\
 &= -\frac{k}{2i\pi} \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{j!} \left( \frac{k}{2} \right)^{2j} \left( \frac{1}{a} \right)^{2(j+1)} \left( \frac{v}{w^2} \int_1^\infty s^{-(j+2)} e^{-w^2 a^2 s} ds \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \int_1^\infty s^{-(j+2)} e^{-\tilde{w}^2 a^2 s} ds \right).
 \end{aligned}$$

Das in (3.56) auftretende Integral wird durch partielle Integration berechnet. Dafür wird zunächst

$$I_j(\tau) := \int_1^\infty s^{-j-2} e^{-\tau s} ds \tag{3.57}$$

definiert, wobei  $\tau := (wa)^2$  und  $\tilde{\tau} := (\tilde{w}a)^2$ . In diesem Fall wird nur das Integral (3.57) mit dem Parameter  $\tau$  betrachtet, wobei die Auswertung mit  $\tilde{\tau}$  analog erfolgt.

Anschließend wird  $I_{j+1}(\tau)$  durch partielle Integration berechnet.

$$\begin{aligned}
 I_{j+1}(\tau) &= \int_1^{\infty} s^{-j-3} e^{-\tau s} ds \\
 &= \left[ \frac{-1}{j+2} s^{-j-2} e^{-\tau s} \right]_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \frac{-1}{j+2} s^{-j-2} (-\tau) e^{-\tau s} ds \\
 &= \frac{1}{j+2} 1^{-j-2} e^{-\tau} - \frac{1}{j+2} \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \left( \frac{1}{s} \right)^{j+2} e^{-\tau s} \right\} - \frac{\tau}{j+2} \int_1^{\infty} s^{j-2} e^{-\tau s} ds.
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Da sowohl  $\lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{s} \right)^{j+2} = 0$  als auch  $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-\tau s} = 0$ , entspricht der mittlere Term Null und fällt somit weg. Bei dem Integral des letzten Terms von (3.58) handelt es sich genau um die Definition (3.57). Daraus ergibt sich insgesamt

$$I_{j+1}(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{j+2} - \frac{\tau}{j+2} I_j(\tau) \tag{3.59}$$

und damit

$$I_j(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{j+1} - \frac{\tau}{j+1} I_{j-1}(\tau). \tag{3.60}$$

Die Funktion (3.60) liegt in einer rekursiven Darstellung vor. Im nächsten Schritt wird sie in eine explizite Darstellung transformiert. Dazu wird zunächst die rekursive Form ausgeschrieben

$$I_j(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{j+1} - \frac{\tau}{j+1} \left( \frac{e^{-\tau}}{j} - \frac{\tau}{j} \left( \frac{e^{-\tau}}{j-1} - \frac{\tau}{j-1} \left( \dots \left( \frac{e^{-\tau}}{2} - \frac{\tau}{2} I_0(\tau) \right) \dots \right) \right) \right), \tag{3.61}$$

wobei  $I_0(\tau) = \int_1^{\infty} s^{-2} e^{-\tau s} ds$  ist. Fürs Erste wird die Multiplikation aller zweiten Terme betrachtet

$$I_j^{(1)}(\tau) = -\frac{\tau}{j+1} \left( -\frac{\tau}{j} \left( -\frac{\tau}{j-1} \left( \dots \left( -\frac{\tau}{2} I_0(\tau) \right) \dots \right) \right) \right). \tag{3.62}$$

Diese lässt sich durch das Produkt

$$\begin{aligned}
 I_j^{(1)}(\tau) &= (-1)^j \prod_{m=0}^{j-1} \frac{\tau}{j+1-m} I_0(\tau) \\
 &= \tau^j I_0(\tau) \frac{(-1)^j}{\prod_{m=0}^{j-1} j+1-m} \\
 &= \tau^j I_0(\tau) c_{j+1,j}
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

beschreiben, wobei der letzte Faktor durch

$$c_{j,l} := \frac{(-1)^l}{l-1 \prod_{m=0}^{l-1} j-m} \quad (3.64)$$

definiert ist. Im Anschluss wird die Berechnung der anderen Terme genauer betrachtet. Diese lassen sich durch

$$\begin{aligned} I_j^{(2)}(\tau) &= \frac{e^{-\tau}}{j+1} - \frac{\tau}{j+1} \frac{e^{-\tau}}{j} + \frac{\tau}{j+1} \frac{\tau}{j} \frac{e^{-\tau}}{j-1} - \frac{\tau}{j+1} \frac{\tau}{j} \frac{\tau}{j-1} \frac{e^{-\tau}}{j-2} \\ &\quad \dots (-1)^{j-1} \frac{\tau^{j-1} e^{-\tau}}{\prod_{m=0}^{j-1} j+1-m} \\ &= -e^{-\tau} \sum_{l=1}^j \frac{(-1)^l \tau^{l-1}}{\prod_{m=0}^{l-1} j+1-m} \\ &= -e^{-\tau} \sum_{l=1}^j c_{j+1,l} \tau^{l-1} \end{aligned} \quad (3.65)$$

darstellen. Die explizite Darstellung von  $I_j(\tau)$  wird durch die Zusammenfügung von (3.63) und (3.65) erreicht

$$I_j(\tau) = c_{j+1,j} \tau^j I_0(\tau) - e^{-\tau} \sum_{l=1}^j c_{j+1,l} \tau^{l-1}. \quad (3.66)$$

Diese Resultate werden im nächsten Schritt verwendet, um  $g_1$  weiter umzuformen und in die gewünschte Darstellungsform zu überführen. Dafür wird zunächst die Definition (3.57) und anschließend die explizite Form (3.66) in (3.56) eingesetzt

$$\begin{aligned}
 g_1 &= -\frac{k}{2i\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2j} \left(\frac{1}{a}\right)^{2(j+1)} \left( \frac{v}{w^2} \int_1^{\infty} s^{-(j+2)} e^{-w^2 a^2 s} ds \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \int_1^{\infty} s^{-(j+2)} e^{-\tilde{w}^2 a^2 s} ds \right) \\
 &= -\frac{k}{2i\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2j} \left(\frac{1}{a}\right)^{2(j+1)} \left( \frac{v}{w^2} I_j(\tau) + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} I_j(\tilde{\tau}) \right) \\
 &= -\frac{k}{2i\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2j} \left(\frac{1}{a}\right)^{2(j+1)} \left[ \frac{v}{w^2} \left( c_{j+1,j} \tau^j I_0(\tau) - e^{-\tau} \sum_{l=1}^j c_{j+1,l} \tau^{l-1} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \left( c_{j+1,j} \tilde{\tau}^j I_0(\tilde{\tau}) - e^{-\tilde{\tau}} \sum_{l=1}^j c_{j+1,l} \tilde{\tau}^{l-1} \right) \right] \\
 &= \frac{k}{2i\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2j} \left(\frac{1}{a}\right)^{2(j+1)} \\
 &\quad \cdot \left[ \frac{v}{w^2} \left( -c_{j+1,j} (wa)^{2j} I_0((wa)^2) + e^{-(wa)^2} \sum_{l=1}^j c_{j+1,l} (wa)^{2(l-1)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \left( -c_{j+1,l} (\tilde{w}a)^{2j} I_0((\tilde{w}a)^2) + e^{-(\tilde{w}a)^2} \sum_{l=1}^j c_{j+1,l} (\tilde{w}a)^{2(l-1)} \right) \right] \\
 &= \frac{k}{2i\pi} \left\{ \frac{v}{w^2} \left[ -\left(\frac{1}{a}\right)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2j} c_{j+1,j} w^{2j} I_0((wa)^2) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + e^{-(wa)^2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=1}^j \frac{c_{j+1,l}}{j!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2j} \left(\frac{1}{a}\right)^{2(j+1)} (wa)^{2(l-1)} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \left[ -\left(\frac{1}{a}\right)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2j} c_{j+1,j} \tilde{w}^{2j} I_0((\tilde{w}a)^2) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + e^{-(\tilde{w}a)^2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=1}^j \frac{c_{j+1,l}}{j!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2j} \left(\frac{1}{a}\right)^{2(j+1)} (\tilde{w}a)^{2(l-1)} \right] \right\}. \tag{3.67}
 \end{aligned}$$

Danach werden die zwei Doppelsummen aus (3.67) genauer betrachtet. Betrachtet werden die nächsten Umformungsschritte nur für den zweiten Term aus (3.67). Der vierte Term folgt analog. Dafür wird als erstes wieder die Definition von  $c_{j+1,l}$  eingesetzt.

$$\begin{aligned}
 s &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=1}^j \frac{c_{j+1,l}}{j!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2j} \left(\frac{1}{a}\right)^{2(j+1)} (wa)^{2(l-1)} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=1}^j \frac{(-1)^l}{j! \prod_{m=0}^{l-1} j+1-m} \left(\frac{k}{2}\right)^{2j} \left(\frac{1}{a}\right)^{2(j+1)} (wa)^{2(l-1)} \tag{3.68}
 \end{aligned}$$

Anschließend wird die Reihenfolge der beiden Summen vertauscht. Dafür werden zunächst die Grenzen der zwei Laufvariablen  $j$  und  $l$  betrachtet. Diese sind durch  $0 \leq j < \infty$  und  $1 \leq l \leq j$  gegeben. Aus diesen zwei Beschränkungen kann zum einen abgeleitet werden, dass  $l$  auch innerhalb der Grenzen  $1 \leq l < \infty$  liegen muss, da  $l \leq j$  und  $j < \infty$  gilt. Zum anderen kann durch die zweite Einschränkung abgelesen werden, dass  $j$  nach unten durch  $l$  begrenzt wird. Nach oben ist der Laufindex weiterhin mit  $\infty$  unbegrenzt. Zusammengesetzt leitet sich damit  $l \leq j < \infty$  ab. Aus diesem Grund lassen sich die beiden Summenglieder wie folgt vertauschen und anschließend auf die Grenzen  $0 \leq l < \infty$  und  $1 \leq j < \infty$  beschränken

$$\begin{aligned}
 s &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=l}^{\infty} \frac{(-1)^l}{j! \prod_{m=0}^{l-1} j+1-m} \left(\frac{k}{2}\right)^{2j} \left(\frac{1}{a}\right)^{2(j+1)} (wa)^{2(l-1)} \\
 &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(j+l-1)! \prod_{m=0}^{l-1} j+l-m} \left(\frac{k}{2}\right)^{2(j+l-1)} \left(\frac{1}{a}\right)^{2(j+l)} (wa)^{2(l-1)} \quad (3.69) \\
 &= \left(\frac{2}{kwa}\right)^2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{j+l,l}}{(j+l-1)!} \left(\frac{k}{2a}\right)^{2j} \left(\frac{k w}{2}\right)^{2l}.
 \end{aligned}$$

Dieses wird nun in (3.67) eingesetzt

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \frac{k}{2i\pi} \left\{ \frac{v}{w^2} \left[ - \left(\frac{1}{a}\right)^2 I_0((wa)^2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2j} c_{j+1,j} w^{2j} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + e^{-(wa)^2} \left(\frac{2}{kwa}\right)^2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{j+l,l}}{(j+l-1)!} \left(\frac{k}{2a}\right)^{2j} \left(\frac{k w}{2}\right)^{2l} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \left[ - \left(\frac{1}{a}\right)^2 I_0((\tilde{w}a)^2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2j} c_{j+1,j} \tilde{w}^{2j} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + e^{-(\tilde{w}a)^2} \left(\frac{2}{k\tilde{w}a}\right)^2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{j+l,l}}{(j+l-1)!} \left(\frac{k}{2a}\right)^{2j} \left(\frac{k\tilde{w}}{2}\right)^{2l} \right] \right\} \quad (3.70) \\
 &= \frac{1}{i\pi} \left\{ \frac{v}{w^2} \left[ - \left(\frac{1}{a}\right)^2 I_0((wa)^2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2j+1} c_{j+1,j} w^{2j} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + e^{-(wa)^2} \frac{2}{kw^2 a^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{j+l,l}}{(j+l-1)!} \left(\frac{k}{2a}\right)^{2j} \left(\frac{k w}{2}\right)^{2l} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \left[ - \left(\frac{1}{a}\right)^2 I_0((\tilde{w}a)^2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2j+1} c_{j+1,j} \tilde{w}^{2j} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + e^{-(\tilde{w}a)^2} \frac{2}{k\tilde{w}^2 a^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{j+l,l}}{(j+l-1)!} \left(\frac{k}{2a}\right)^{2j} \left(\frac{k\tilde{w}}{2}\right)^{2l} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt werden der erste und der dritte Term von (3.70) vereinfacht. Dafür wird wieder die Definition von  $c_{j,l}$  (3.64) genutzt. Wird diese genauer be-

trachtet, lässt sich erkennen, dass es sich bei dem Nenner in dem Fall  $L = j$  um die Definition der Fakultät handelt. Daraus folgt, dass

$$c_{j,j} = \frac{(-1)^j}{\prod_{m=0}^{j-1} j - m} = \frac{(-1)^j}{j!} \quad (3.71)$$

gilt. Zusammen mit

$$c_{j+1,j+1} = \frac{(-1)^{j+1}}{\prod_{m=0}^j j + 1 - m} = (-1) \frac{(-1)^j}{\prod_{m=0}^{j-1} j + 1 - m} = -c_{j+1,j} \quad (3.72)$$

wird dieses nun verwendet, um den ersten und den dritten Term aus (3.70) in eine Form umzuformen, in die später die Besselfunktion eingesetzt werden kann. Dafür wird wieder nur der erste Term betrachtet, wobei der dritte Term analog funktio- niert.

Desweiteren wird die Definition der Besselfunktion  $J_n(z)$  mit  $n$ -ter Ordnung

$$J_n(z) := \left(\frac{1}{2}z\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!(n+k)!} \quad (3.73)$$

aus [1, S. 360] verwendet. Wird mit Hilfe der oben genannten Zusammenhänge (4.25), (3.72) und (3.73) der erste Term von (3.70) genauer betrachtet, lässt sich erkennen, dass die Besselfunktion wie folgt eingesetzt werden kann

$$\begin{aligned} t_1 &:= \frac{1}{i\pi} \frac{v}{w^2} \left(\frac{1}{a}\right)^2 I_0((wa)^2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2j+1} c_{j+1,j} w^{2j} \\ &= -\frac{1}{i\pi} \frac{v}{w^2} \left(\frac{1}{a}\right)^2 I_0((wa)^2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2j+1} c_{j+1,j+1} w^{2j} \\ &= -\frac{1}{i\pi} \frac{v}{w^2} \left(\frac{1}{a}\right)^2 I_0((wa)^2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2j+1} \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!} w^{2j} \\ &= \frac{1}{i\pi} \frac{v}{w^3} \left(\frac{1}{a}\right)^2 I_0((wa)^2) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k w}{2}\right)^1 \frac{(-1)^j}{j!(j+1)!} \left(\frac{k w}{2}\right)^{2j} \\ &= \frac{1}{i\pi} \frac{v}{w^3} \left(\frac{1}{a}\right)^2 I_0((wa)^2) J_1(kw). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Dieser wird anschließend wieder in (3.70) eingesetzt. Gleiches gilt für den dritten

Term

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \frac{1}{i\pi} \left[ -\frac{v}{w^3} \frac{1}{a^2} I_0((wa)^2) J_1(kw) \right. \\
 &\quad + \frac{v}{w^4} e^{-(wa)^2} \frac{2}{ka^2} \sum_{l=1}^{\infty} \left( \frac{k w}{2} \right)^{2l} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{j+l,l}}{(j+l-1)!} \left( \frac{k}{2a} \right)^{2j} \\
 &\quad - \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^3} \frac{1}{a^2} I_0((\tilde{w}a)^2) J_1(k\tilde{w}) \\
 &\quad \left. + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^4} e^{-(\tilde{w}a)^2} \frac{2}{ka^2} \sum_{l=1}^{\infty} \left( \frac{k\tilde{w}}{2} \right)^{2l} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{j+l,l}}{(j+l-1)!} \left( \frac{k}{2a} \right)^{2j} \right] \\
 &= \frac{1}{i\pi} \left[ -\frac{v}{w^3} \frac{1}{a^2} I_0((wa)^2) J_1(kw) \right. \\
 &\quad + \frac{v}{w} e^{-(wa)^2} \sum_{l=1}^{\infty} \left( \frac{k w}{2} \right)^{2l-3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{j+l,l}}{(j+l-1)!} \left( \frac{k}{2a} \right)^{2j+2} \\
 &\quad - \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^3} \frac{1}{a^2} I_0((\tilde{w}a)^2) J_1(k\tilde{w}) \\
 &\quad \left. + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}} e^{-(\tilde{w}a)^2} \sum_{l=1}^{\infty} \left( \frac{k\tilde{w}}{2} \right)^{2l-3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{j+l,l}}{(j+l-1)!} \left( \frac{k}{2a} \right)^{2j+2} \right]. \tag{3.75}
 \end{aligned}$$

Für das Erreichen der in Satz 3.5 definierten Darstellungsform von  $g_1$ , wird lediglich ein weiterer Umformungsschritt benötigt. Die dafür notwendige generalisierte Integralexponentialfunktion ist durch

$$E_n(z) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-zt}}{t^n} dt \tag{3.76}$$

definiert [1, S. 228] und soll die Funktion  $I_0((aw)^2)$  ersetzen. Mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs lässt sich leicht erkennen, dass

$$I_0((aw)^2) = \int_1^{\infty} s^{-2} e^{-(aw)^2 s} ds = \int_1^{\infty} \frac{e^{-(aw)^2 t}}{t^2} dt = E_2((aw)^2) \tag{3.77}$$

gilt. Das bedeutet, dass die generalisierte Integralexponentialfunktion für  $n = 2$  und  $z = (aw)^2$  für  $I_0((aw)^2)$  eingesetzt werden kann. Zum anderen wird die Definition

$$E_{n+1}(z) := \frac{1}{n} [e^{-z} - z E_n(z)] \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{3.78}$$

verwendet [1, S. 229]. Im Fall  $n = 1$  und  $z = (aw)^2$  folgt damit für die generalisierte Integralexponentialfunktion (3.78)

$$E_2((aw)^2) := e^{-(aw)^2} - (aw)^2 E_1((aw)^2). \tag{3.79}$$

Anschließend wird die Reihendarstellung der Integralexponentialfunktion wobei  $n =$

1 ist, verwendet. Diese ist durch

$$E_1(z) := -\gamma - \ln(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{nn!} \quad (|\arg(z)| < \pi) \quad (3.80)$$

gegeben [1, S. 229], wobei  $\gamma \approx 0,57721$  die Eulerkonstante ist. Daraus folgt insgesamt, dass in (3.75)

$$\begin{aligned} I_0((aw)^2) &= e^{-(aw)^2} - (aw)^2 \left( -\gamma - \ln((aw)^2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (aw)^{2n}}{nn!} \right) \\ &= e^{-(aw)^2} - (aw)^2 \left( -\gamma - 2 \ln(aw) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (aw)^{2n}}{nn!} \right) \end{aligned} \quad (3.81)$$

eingesetzt werden kann und damit

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{i\pi} \left\{ -\frac{v}{w^3} \frac{1}{a^2} \left[ e^{-(aw)^2} - (aw)^2 \left( -\gamma - 2 \ln(aw) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (aw)^{2n}}{nn!} \right) \right] J_1(kw) \right. \\ &\quad + \frac{v}{w} e^{-(wa)^2} \sum_{l=1}^{\infty} \left( \frac{k w}{2} \right)^{2l-3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{j+l,l}}{(j+l-1)!} \left( \frac{k}{2a} \right)^{2j+2} \\ &\quad - \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^3} \frac{1}{a^2} \left[ e^{-(a\tilde{w})^2} - (a\tilde{w})^2 \left( -\gamma - 2 \ln(a\tilde{w}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (a\tilde{w})^{2n}}{nn!} \right) \right] J_1(k\tilde{w}) \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}} e^{-(\tilde{w}a)^2} \sum_{l=1}^{\infty} \left( \frac{k\tilde{w}}{2} \right)^{2l-3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{j+l,l}}{(j+l-1)!} \left( \frac{k}{2a} \right)^{2j+2} \right\} \end{aligned} \quad (3.82)$$

gilt. Bei dieser Form handelt es sich um die in dem Satz 3.5 definierte Darstellungsform (3.52). Der zweite und der vierte Term von (3.82) sind dabei, genau wie in dem Fall, wo der ganze Raum betrachtet wird, analytische Funktionen bezüglich der Argumente  $kw$  und  $\frac{k}{a}$  beziehungsweise bezüglich  $k\tilde{w}$  und  $\frac{k}{a}$  [4, S. 6]. Das bedeutet, dass der erste Teil des Satzes bewiesen ist.

Für den zweiten Teil muss gezeigt werden, dass  $g_1$  exponentiell schnell konvergiert. Dafür wird zunächst das Zwischenergebnis (3.56) verwendet. Das in diesem Zwischenergebnis befindliche Integral  $I_j((wa)^2)$  wird als erstes nach oben durch

$$\begin{aligned} I_j((wa)^2) &= \int_1^{\infty} s^{-(j+2)} e^{-w^2 a^2 s} ds \\ &\leq \int_1^{\infty} e^{-w^2 a^2 s} ds \\ &= \left[ -\frac{e^{-w^2 a^2 s}}{w^2 a^2} \right]_1^{\infty} \\ &= \frac{e^{-w^2 a^2}}{w^2 a^2} \end{aligned} \quad (3.83)$$

abgeschätzt. Dieses Ergebnis wird anschließend im ersten Schritt von (4.32) verwendet, um  $|g_1|$  nach oben abzuschätzen. Anschließend wird die Definition der Exponentialfunktion als Potenzreihe (3.54) genutzt. Daraus folgt, dass sich  $|g_1|$  durch

$$\begin{aligned}
 |g_1| &= \left| \frac{k}{2i\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2j} \left(\frac{1}{a}\right)^{2(j+1)} \left( \frac{v}{w^2} \int_1^{\infty} s^{-(j+2)} e^{-w^2 a^2 s} ds \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \int_1^{\infty} s^{-(j+2)} e^{-\tilde{w}^2 a^2 s} ds \right) \right| \\
 &\leq \frac{|k|}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left| \left(\frac{k}{2a}\right)^{2j} \frac{1}{a^2} \left( \frac{|v| e^{-w^2 a^2}}{w^2 w^2 a^2} + \frac{|\tilde{v}| e^{-\tilde{w}^2 a^2}}{\tilde{w}^2 \tilde{w}^2 a^2} \right) \right| \\
 &= \frac{|k|}{2\pi a^2} e^{\frac{|k|^2}{4a^2}} \left( \frac{|v| e^{-w^2 a^2}}{w^2 w^2 a^2} + \frac{|\tilde{v}| e^{-\tilde{w}^2 a^2}}{\tilde{w}^2 \tilde{w}^2 a^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

nach oben abschätzen lässt, was genau dem entspricht, welches in Satz 3.5 behauptet wird, siehe (3.53). Damit sind beide Teile des Satzes bewiesen.  $\square$

Mit Hilfe dieses Satzes und einigen Zwischenergebnissen des Beweises wird nun erneut die Funktion (3.48) betrachtet. In dieser wird zunächst der Teil  $f_1(kw, k\tilde{w})$  (3.49) durch das Zwischenergebnis (3.56) ersetzt

$$\begin{aligned}
 g(kw, k\tilde{w}) &= -\frac{1}{2\pi} e^{i\alpha m d} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2a}\right)^{2(j+1)} \left( \frac{v}{w^2} \int_1^{\infty} s^{-(j+2)} e^{-w^2 a^2 s} ds \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \int_1^{\infty} s^{-(j+2)} e^{-\tilde{w}^2 a^2 s} ds \right).
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

Die daraus folgende quasiperiodische Funktion

$$\begin{aligned}
 F_1(kw, k\tilde{w}) &:= -\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} e^{i\alpha m d} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2a}\right)^{2(j+1)} \left( \frac{v}{w^2} \int_1^{\infty} s^{-(j+2)} e^{-w^2 a^2 s} ds \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \int_1^{\infty} s^{-(j+2)} e^{-\tilde{w}^2 a^2 s} ds \right).
 \end{aligned} \tag{3.86}$$

hat die gleiche Singulärstelle wie (3.48) und konvergiert zusätzlich exponentiell schnell.

### 3.3 Konvergenz des Anteils des Doppelschichtoperators ohne Singulärstelle

In diesem Abschnitt wird nun der Teil der Funktion (3.1) betrachtet, der keine Singulärstelle enthält. Dieser ist in der aktuellen Form nicht exponentiell fallend.

Deswegen wird er in diesem Kapitel mit Hilfe einer Fouriertransformation in eine Form transformiert, von der später gezeigt werden kann, dass sie exponentiell schnell konvergiert. Das Vorgehen basiert auf [4], wobei hier der obere Halbraum statt des ganzen Raums und die Ableitung der Fundamentallösung nach  $y_2$  betrachtet wird.

Ausgangspunkt ist wieder die quasi-periodische Funktion  $F$  der Funktion  $f$  (3.1), welche den problematischen Anteil des Doppelschichtoperators beinhaltet. Von dieser wird als erstes die Funktion  $F_1$  (3.86), welche die gleiche Singulärstelle wie  $F$  enthält, subtrahiert. In diesem Fall wird die Funktion  $F_1$  als eine von  $g_1$  abhängige Funktion  $F_1 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{ik}{4} e^{i\alpha md} g_1$  definiert. Zusammen mit der alternativen Darstellungsform der Hankelfunktion (3.50) und der daraus folgenden Definition von  $g_1$  (3.51) resultiert daraus

$$\begin{aligned}
 F_2(kw, k\tilde{w}) &= F(kw, k\tilde{w}) - F_1(kw, k\tilde{w}) \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{ik}{4} e^{i\alpha md} \left[ \frac{vH_1^{(1)}(kw)}{w} + \frac{\tilde{v}H_1^{(1)}(k\tilde{w})}{\tilde{w}} - g_1(kw, k\tilde{w}) \right] \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{ik}{4} e^{i\alpha md} \left[ -\frac{kv}{i\pi w^2} \int_{\gamma_1} t^{-3} e^{-w^2 t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} dt - \frac{k\tilde{v}}{i\pi \tilde{w}^2} \int_{\gamma_1} t^{-3} e^{-\tilde{w}^2 t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} dt \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k}{i\pi} \left( \frac{v}{w^2} \int_a^\infty t^{-3} e^{-w^2 t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} dt + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \int_a^\infty t^{-3} e^{-\tilde{w}^2 t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} dt \right) \right] \\
 &= -\frac{k^2}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha md} \left[ \frac{v}{w^2} \int_{\gamma_5} t^{-3} e^{-w^2 t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} dt + \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \int_{\gamma_5} t^{-3} e^{-\tilde{w}^2 t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} dt \right], \tag{3.87}
 \end{aligned}$$

wobei  $\gamma_5$  dem Integrationsweg  $\gamma_1$ , welcher nicht in dem Intervall  $(a, \infty)$  liegt, entspricht. Diese Funktion soll im späteren Verlauf Fourier-transformiert. Zur Vereinfachung wird in diesem Abschnitt nur der erste Teil von (3.87) betrachtet

$$h_1(kw, k\tilde{w}) := \frac{k^2}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha md} \frac{v}{w^2} \int_{\gamma_5} t^{-3} e^{-w^2 t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} dt \tag{3.88}$$

der zweite Teil folgt analog.

Als erstes wird bei (3.88) die Reihenfolge von Integration und Summation vertauscht und anschließend das neutrale Element durch  $1 = e^{i\alpha\tilde{u}} e^{-i\alpha\tilde{u}}$  eingesetzt, wobei  $\tilde{u} := x_1 - y_1$  gilt. Damit gilt für  $h_1$

$$\begin{aligned}
 h_1(kw, k\tilde{w}) &= \frac{k^2 v}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha md} \frac{1}{w^2} \int_{\gamma_5} t^{-3} e^{-u^2 t^2} e^{-v^2 t^2} e^{\frac{k^2}{4t^2}} dt \\
 &= \frac{k^2 v}{4\pi} \int_{\gamma_5} t^{-3} e^{-v^2 t^2} e^{\frac{k^2}{4t^2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha md} \frac{1}{w^2} e^{-u^2 t^2} dt \\
 &= \frac{k^2 v}{4\pi} \int_{\gamma_5} t^{-3} e^{-v^2 t^2} e^{\frac{k^2}{4t^2}} e^{i\alpha\tilde{u}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha md} \frac{e^{-i\alpha\tilde{u}}}{w^2} e^{-u^2 t^2} dt. \tag{3.89}
 \end{aligned}$$

Auf die Summe

$$s_d(\tilde{u}) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha m d} \frac{e^{-i\alpha \tilde{u}}}{w^2} e^{-u^2 t^2} \quad (3.90)$$

wird die Poissonsche Summenformel angewendet. Diese besagt, dass

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\ell), \quad (3.91)$$

wenn  $f$  eine Schwartz-Funktion ist und

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega \cdot t} dt \quad (3.92)$$

gilt. In diesem Fall wird die Generalisierung dieser Aussage benötigt, da eine Periodenlänge  $d \neq 1$  vorliegt. Diese besagt, dass

$$s_d(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{d} \mathcal{F}(s) \left( \frac{\ell}{d} \right) e^{i2\pi \frac{\ell}{d} x} \quad (3.93)$$

gilt, wobei

$$s_d(x) \hat{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(x + nd) \quad (3.94)$$

ist. Im Folgenden soll damit (3.90) berechnet werden. Dazu werden zunächst die komplexen Fourier-Koeffizienten berechnet

$$c_\ell := \frac{1}{d} \mathcal{F}(s) \left( \frac{\ell}{d} \right). \quad (3.95)$$

Nach Definition des komplexen Fourier-Koeffizienten [24, S. 606] kann dieser durch

$$c_\ell = \frac{1}{d} \int_0^d s_d(\tilde{u}) e^{-i2\pi \frac{\ell}{d} \tilde{u}} d\tilde{u} \quad (3.96)$$

berechnet werden. Anschließend wird (3.90) eingesetzt und die Reihenfolge von Integration und Summation vertauscht.

$$\begin{aligned} c_\ell &= \frac{1}{d} \int_0^d \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha m d} \frac{e^{-i\alpha \tilde{u}}}{w^2} e^{-u^2 t^2} e^{-i2\pi \frac{\ell}{d} \tilde{u}} d\tilde{u} \\ &= \frac{1}{d} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha m d} \int_0^d \frac{e^{-(\tilde{u}-md)^2 t^2}}{(\tilde{u}-md)^2 + v^2} e^{-i(\alpha+2\pi \frac{\ell}{d})\tilde{u}} d\tilde{u} \end{aligned} \quad (3.97)$$

Im nächsten Schritt wird die Definition  $\alpha_\ell = \alpha + \ell \frac{2\pi}{d}$  ausgenutzt und zusätzlich das

neutrale Element  $e^{-i\alpha_\ell md} e^{i\alpha_\ell md}$  eingefügt. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 c_\ell &= \frac{1}{d} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha_\ell md} e^{-i\alpha_\ell md} \int_0^d \frac{e^{-(\tilde{u}-md)^2 t^2}}{(\tilde{u}-md)^2 + v^2} e^{-i\alpha_\ell \tilde{u}} e^{i\alpha_\ell md} d\tilde{u} \\
 &= \frac{1}{d} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi \ell m} \int_0^d \frac{e^{-(\tilde{u}-md)^2 t^2}}{(\tilde{u}-md)^2 + v^2} e^{-i\alpha_\ell (\tilde{u}-md)} d\tilde{u} \\
 &= \frac{1}{d} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^d \frac{e^{-(\tilde{u}-md)^2 t^2}}{(\tilde{u}-md)^2 + v^2} e^{-i\alpha_\ell (\tilde{u}-md)} d\tilde{u}.
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

Durch Substitution von  $s = \tilde{u} - md$ , wobei  $\frac{d\tilde{u}}{ds} = 1$  kann (4.48) in

$$\begin{aligned}
 c_\ell &= \frac{1}{d} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-md}^{-md+d} \frac{e^{-s^2 t^2}}{s^2 + v^2} e^{-i\alpha_\ell s} ds \\
 &= \frac{1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2 t^2}}{s^2 + v^2} e^{-i\alpha_\ell s} ds
 \end{aligned} \tag{3.99}$$

überführt werden. Dieses Integral lässt sich nicht mit Hilfe der gängigen Methoden analytisch berechnen. Beispielhaft soll im Folgenden versucht werden, das Integral auf Basis des Residuensatzes zu berechnen. Dieser stellt eine Verallgemeinerung des bereits erwähnten Integralsatzes von Cauchy dar und sagt nach [10, S. 140] folgendes aus

**Satz 3.6.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  und  $C \subset\subset \Omega$  ein glatt und positiv berandetes, einfach zusammenhängendes Gebiet. Außerdem seien  $z_1, \dots, z_k$  Punkte in  $C$  und  $f : \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Dann ist*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \left( \sum_{j=1}^k \text{Res}_{z_j}(f) \right) 2\pi i, \tag{3.100}$$

wobei  $C \subset\subset \Omega$  bedeutet, dass  $C$  relativ kompakt in  $\Omega$  liegt.

Die Idee ist es, das Integral (3.99) zunächst lediglich von  $-R$  bis  $R$  zu berechnen und anschließend den Grenzwert  $\lim_{R \rightarrow \infty}$  dieses Ergebnisses zu berechnen. Für den ersten Abschnitt muss zunächst ein geschlossener Halbkreis der oberen Halbebene definiert werden, der groß genug ist, um den Pol des Integranden von (3.99) zu enthalten. Dieser geschlossene Halbkreis wird im Folgenden als  $S_R$  bezeichnet. Der Integrand enthält zwei jeweils einfache Pole bei  $\pm iv$ . Weiterhin gilt, dass wenn  $a$  ein Pol erster Ordnung ist, dann gilt

$$\text{Res}_a(f) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z). \tag{3.101}$$

Hier wird der geschlossene obere Halbkreis  $S_R$  betrachtet, weshalb im Folgenden nur

der Pol an der Stelle  $iv$  betrachtet wird. Daraus folgt in unserem Fall

$$\operatorname{Res}_{iv}(f) = \lim_{s \rightarrow iv} (s - iv) \frac{e^{-is\alpha_m - s^2 t^2}}{s^2 + v^2} = \frac{0}{0}. \quad (3.102)$$

Auf Grund des Ergebnisses  $\frac{0}{0}$  ist es notwendig die Regel von L'Hospital anzuwenden. Dazu wird zuerst der Zähler von (3.102) betrachtet.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (s - iv) e^{-is\alpha_m - s^2 t^2} &= e^{-is\alpha_m - s^2 t^2} + (s - iv) (-i\alpha_m - 2st^2) e^{-is\alpha_m - s^2 t^2} \\ &= (1 - i\alpha_m s - 2s^2 t^2 - v\alpha_m + 2ivst^2) e^{-is\alpha_m - s^2 t^2} \end{aligned} \quad (3.103)$$

und anschließend der Nenner

$$\frac{d}{ds} (s^2 + v^2) = 2s. \quad (3.104)$$

Damit folgt für das Residuum

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{iv}(f) &= \lim_{s \rightarrow iv} (1 - i\alpha_m s - 2s^2 t^2 - v\alpha_m + 2ivst^2) \frac{e^{-is\alpha_m - s^2 t^2}}{2s} \\ &= \frac{e^{v\alpha_m + v^2 t^2}}{2iv}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Das zu betrachtende Integral des geschlossenen oberen Halbkreises

$$\int_{S_R} \frac{e^{-s^2 t^2 - i\alpha_m s}}{s^2 + v^2} ds = \int_{-R}^R \frac{e^{-s^2 t^2 - i\alpha_m s}}{s^2 + v^2} ds + \int_{S_R^+} \frac{e^{-s^2 t^2 - i\alpha_m s}}{s^2 + v^2} ds \quad (3.106)$$

lässt sich aufsplitten, in ein Integral, welches einen Integrationsbereich von  $-R$  bis  $R$  hat und ein Integral, über den kreisförmigen Teil  $S_R^+$  des geschlossenen oberen Halbkreises. Letzteres wird im nächsten Schritt genauer betrachtet und versucht zu zeigen, dass dieses für große  $R$  gegen Null strebt. Dafür soll zunächst der Betrag des Integral nach oben abgeschätzt werden. Zur Umsetzung wird als erstes eine Parametrisierung mit  $s = Re^{i\theta}$ , wobei  $\theta \in [0, \pi]$  und  $\frac{ds}{d\theta} = iRe^{i\theta}$ , durchgeführt. Anschließend wird die umgekehrte Dreiecksungleichung verwendet, welche besagt, dass  $|y - x| \geq |y| - |x|$  gilt. Danach wird die ursprünglich vorgenommene Parametrisierung zurück substituiert. Der dadurch entstandene Integrand kann mit Hilfe einer quadratischen Ergänzung umgeformt werden. Durch anschließendes Substituieren von  $y := \frac{2t^2 s + i\alpha_m}{2t}$  kann das Integral in eine Form überführt werden, die bis auf die Betragstriche und dem Faktor  $\frac{1}{t}$  des Integranden, der Definition der Fehlerfunktion entspricht. Das resultierende Kurvenintegral ist definiert durch  $\tilde{S}_R^+ := \frac{2t^2 Re^{i\theta} + i\alpha_m}{2t}$ ,

wobei  $\theta \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{S_R^+} \frac{e^{-s^2 t^2 - i\alpha_m s}}{s^2 + v^2} ds \right| &\leq \int_{S_R^+} \left| \frac{e^{-s^2 t^2 - i\alpha_m s}}{s^2 + v^2} \right| ds \\
 &= \int_0^\pi \frac{|e^{-R^2 e^{2i\theta} t^2 - i\alpha_m R e^{i\theta}}|}{\|R^2 e^{2i\theta} - (-v^2)\|} i R e^{i\theta} d\theta \\
 &\leq \int_0^\pi \frac{|e^{-R^2 e^{2i\theta} t^2 - i\alpha_m R e^{i\theta}}|}{\|R^2 |e^{2i\theta}| - |(-v^2)|\|} i R e^{i\theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{|R^2 - v^2|} \int_0^\pi |e^{-R^2 e^{2i\theta} t^2 - i\alpha_m R e^{i\theta}}| i R e^{i\theta} d\theta \quad (3.107) \\
 &= \frac{1}{|R^2 - v^2|} \int_{S_R^+} |e^{-s^2 t^2 - i\alpha_m s}| ds \\
 &= \frac{|e^{-\frac{\alpha_m^2}{4t^2}}|}{|R^2 - v^2|} \int_{S_R^+} \left| e^{-\left(\frac{2t^2 s + i\alpha_m}{2t}\right)^2} \right| ds \\
 &= \frac{|e^{-\frac{\alpha_m^2}{4t^2}}|}{|R^2 - v^2|} \int_{\tilde{S}_R^+} |e^{-y^2}| \frac{1}{t} dy.
 \end{aligned}$$

Auch durch weitere Umformungen konnte nicht gezeigt werden, dass der Betrag des Integrals (3.107) durch Null beschränkt ist.

Aus diesen Gründen können die Fourierkoeffizienten

$$c_\ell = \frac{1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2 t^2}}{s^2 + v^2} e^{-i\alpha_\ell s} ds \quad (3.108)$$

nicht weiter vereinfacht werden und das Integral muss im späteren Verlauf numerisch berechnet werden. Anschließend werden die so ermittelten Fourierkoeffizienten in die Summe (3.93) eingesetzt. Damit kann  $s_d(\tilde{u})$  durch

$$s_d(\tilde{u}) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2 t^2}}{s^2 + v^2} e^{-i\alpha_\ell s} ds e^{i2\pi \frac{\ell}{d} \tilde{u}} \quad (3.109)$$

berechnet werden. Wird das Resultat der Poissonschen Summenformel (3.93) ver-

wendet und in  $h_1$  (3.89) eingesetzt, so resultiert

$$\begin{aligned} h_1(kw, k\tilde{w}) &= \frac{k^2 v}{4\pi} \int_{\gamma_5} t^{-3} e^{-v^2 t^2} e^{\frac{k^2}{4t^2}} e^{i\alpha\tilde{u}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha m d} \frac{e^{-i\alpha\tilde{u}}}{w^2} e^{-u^2 t^2} dt \\ &= \frac{k^2 v}{4\pi} \int_{\gamma_5} t^{-3} e^{-v^2 t^2} e^{\frac{k^2}{4t^2}} e^{i\alpha\tilde{u}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2 t^2}}{s^2 + v^2} e^{-i\alpha_\ell s} ds e^{i2\pi \frac{\ell}{d} \tilde{u}} dt. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Ein weiteres Vereinfachen ist an dieser Stelle nicht möglich, da das innere Integral numerisch berechnet werden muss. Daraus resultiert die Reihe

$$\begin{aligned} F_2(kw, k\tilde{w}) &= - \left[ \frac{k^2 v}{4\pi} \int_{\gamma_5} t^{-3} e^{-v^2 t^2} e^{\frac{k^2}{4t^2}} e^{i\alpha\tilde{u}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2 t^2}}{s^2 + v^2} e^{-i\alpha_\ell s} ds e^{i2\pi \frac{\ell}{d} \tilde{u}} dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{k^2 \tilde{v}}{4\pi} \int_{\gamma_5} t^{-3} e^{-\tilde{v}^2 t^2} e^{\frac{k^2}{4t^2}} e^{i\alpha\tilde{u}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2 t^2}}{s^2 + \tilde{v}^2} e^{-i\alpha_\ell s} ds e^{i2\pi \frac{\ell}{d} \tilde{u}} dt \right]. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Allerdings kann die Reihe  $F_2(kw, k\tilde{w})$  auch auf anderem Weg berechnet werden. Dafür muss zunächst der Einfachschichtoperator betrachtet werden. Wird dieser auf die gleiche Weise in zwei Anteile gesplittet, wie es bei diesem Doppelschichtoperator getan wurde, so kann  $F_2$  einfach durch das Ableiten des zweiten Anteils des Einfachschichtoperators nach  $y_2$  berechnet werden. Dieses wird später in Abschnitt 4.2 in Rechnung (4.68) durchgeführt.

### 3.4 Konvergenz der abgeschnittenen Reihen des Doppelschichtoperators

Die in den Kapiteln 3.2 und 3.3 definierten Reihen (3.86) und (3.111), wurden mit Hilfe der Ewald-Methode definiert und stellen eine schneller konvergente Version der Reihe (3.2) dar. Da diese Reihen im Folgenden in numerischen Berechnungen verwendet werden sollen, ist es notwendig die Reihen lediglich für eine endliche Anzahl von Reihengliedern auszuwerten. In diesem Kapitel wird ein geeignetes Indexintervall  $m = [m_0 - M, m_0 + M]$  definiert und betrachtet, wie schnell diese Reihe gegen die exakte Lösung konvergiert. Es soll demnach betrachtet werden, wie sich die Differenzen der partiellen Summen

$$\begin{aligned} F_{1,M}(kw, k\tilde{w}) &:= \sum_{m=m_0-M}^{m_0+M} \frac{1}{2\pi} e^{i\alpha m d} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left( \frac{k}{2a} \right)^{2(j+1)} \left( \frac{v}{w^2} \int_1^{\infty} s^{-(j+2)} e^{-w^2 a^2 s} ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \int_1^{\infty} s^{-(j+2)} e^{-\tilde{w}^2 a^2 s} ds \right), \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$F_{2,M}(kw, k\tilde{w}) = \frac{i\sqrt{\pi}k}{8d} \operatorname{erfc} \left( -\frac{ik}{2\sqrt{a}} \right) \sum_{m=m_0-M}^{m_0+M} e^{i\alpha m \tilde{u}} [e^{v\alpha m} - e^{\tilde{v}\alpha m}] \quad (3.113)$$

und der Reihen (3.86) sowie (3.111) verhalten.

Die Konvergenz der Reihe (3.111) wird in diesem Kapitel nicht behandelt, sondern in Abschnitt 4.2 genannt. Der Grund dafür ist, dass die Darstellungsform (3.111) ein Integral enthält, welches numerisch berechnet werden muss. In Kapitel 4.2 wird hingegen der Anteil der Ewald'schen Methode ohne Singularstellen über den Einfachschicht Operator hergeleitet. Daraus resultiert eine andere Darstellungsform, für die eine entsprechende Konvergenz angegeben werden kann.

Darum wird in diesem Kapitel lediglich die Reihe (3.86) betrachtet. Dafür wird zunächst die Reihe

$$F_{aux}^{(1)}(R, \kappa, v) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \kappa^j \int_1^{\infty} s^{-j-v} e^{-Rs} ds \quad (3.114)$$

definiert. Bei dieser handelt es sich um eine Generalisierung der hinteren Reihe aus der Gleichung (3.86). Damit können sowohl die Reihe (3.86) als auch die partielle Summe (3.112) in eine von der Funktion (3.114) abhängige Darstellung umgeschrieben werden.

$$F_{1,M}(kw, k\tilde{w}) := \left(\frac{k}{2a}\right)^2 \sum_{m=m_0-M}^{m_0+M} \frac{e^{i\alpha md}}{2\pi} \left[ \frac{v}{w^2} F_{aux}^{(1)}\left(w^2 a^2, \left(\frac{k}{2a}\right)^2, 2\right) - \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} F_{aux}^{(1)}\left(\tilde{w}^2 a^2, \left(\frac{k}{2a}\right)^2, 2\right) \right] \quad (3.115)$$

Diese Hilfsfunktion (3.114) kann, wie in Lemma 3.7 beschrieben, nach oben abgeschätzt werden und wird anschließend verwendet, um die Differenz der Reihe (3.86) und der partiellen Summe (3.112) nach oben abzuschätzen.

**Lemma 3.7.** Für  $R > 0$ ,  $\arg(\kappa) \in [0, \frac{\pi}{2})$  und  $v \geq 0$  gilt

$$|F_{aux}^{(1)}(R, \kappa, v)| \leq \frac{e^{|\kappa|-R}}{R} \quad (3.116)$$

und zusätzlich gilt für alle  $M \in \mathbb{N}$ ,  $v > 0$

$$\left| F_{aux}^{(1)}(R, \kappa, v) - \sum_{j=0}^M \frac{1}{j!} \kappa^j \int_1^{\infty} s^{-j-v} e^{-Rs} ds \right| \leq \frac{e^{|\kappa|-R}}{M+v} \left( \frac{|\kappa|}{M+1} \right)^{M+1} \quad (3.117)$$

*Beweis.* Die erste Abschätzung kann mit Hilfe der Taylorreihe der Exponentialfunktion gezeigt werden. Zunächst gilt auf Grund der Definition von  $F_{aux}^{(1)}$  und der

Anwendung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
 |F_{aux}^{(1)}(R, \kappa, v)| &\stackrel{\text{def}}{=} \left| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \kappa^j \int_1^{\infty} s^{-j-v} e^{-Rs} ds \right| \\
 &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{\kappa^j}{j!} \int_1^{\infty} s^{-j-v} e^{-Rs} ds \right| \\
 &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\kappa|^j}{j!} \int_1^{\infty} \frac{1}{|s^{j+v}|} |e^{-Rs}| ds.
 \end{aligned} \tag{3.118}$$

Der Term  $\frac{1}{|s^{j+v}|}$  kann auf Grund der Voraussetzungen  $s \geq 1$ ,  $j \geq 0$  und  $v \geq 0$  durch eins nach oben abgeschätzt werden. Zusätzlich kann das Integral direkt berechnet werden und anschließend die Definition der Taylorreihe der Exponentialfunktion verwendet werden. Damit gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
 |F_{aux}^{(1)}(R, \kappa, v)| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\kappa|^j}{j!} \int_1^{\infty} |e^{-Rs}| ds \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\kappa|^j}{j!} \int_1^{\infty} e^{-Rs} ds \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\kappa|^j}{j!} \left[ \frac{e^{-R}}{R} - \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{e^{-Rs}}{R} \right] \\
 &= \frac{e^{-R}}{R} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\kappa|^j}{j!} \\
 &= \frac{e^{-R}}{R} e^{|\kappa|}.
 \end{aligned} \tag{3.119}$$

Damit konnte der erste Teil (3.116) des Lemmas 3.7 gezeigt werden. Für den zweiten Teil muss gezeigt werden, dass

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \kappa^j \int_1^{\infty} s^{-j-v} e^{-Rs} ds - \sum_{j=0}^M \frac{1}{j!} \kappa^j \int_1^{\infty} s^{-j-v} e^{-Rs} ds \right| \leq \frac{e^{|\kappa|-R}}{M+v} \left( \frac{|\kappa|}{M+1} \right)^{M+1} \tag{3.120}$$

Dieses lässt sich mit Hilfe der generalisierten Integralexponentialfunktion folgern. Diese ist definiert durch

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xt}}{t^n} dt \tag{3.121}$$

[13, S.21]. Durch das Hinzuziehen der Abschätzung

$$\frac{e^{-x}}{x+n} < E_n(x) \leq \frac{e^{-x}}{x+n-1} \tag{3.122}$$

aus [13, S. 26] und dem anschließenden Einsetzen der Definition der generalisierten Integraleponentialfunktion, gilt die Abschätzung

$$\frac{e^{-x}}{x+n} < \int_1^{\infty} e^{-xt} t^{-n} dt \leq \frac{e^{-x}}{x+n-1}. \quad (3.123)$$

Durch Koeffizientenvergleich dieses Integrals und dem Integral der  $F_{aux}^{(1)}$ -Funktion, wobei  $t \hat{=} s$ ,  $n \hat{=} j+v$ , und  $x \hat{=} R$  lassen sich die Abschätzungen

$$\frac{e^{-R}}{R+j+v} < \int_1^{\infty} s^{-j-v} e^{-Rs} ds \leq \frac{e^{-R}}{R+j+v-1}. \quad (3.124)$$

über das Integral der  $F_{aux}^{(1)}$ -Funktion machen. Im nächsten Schritt wird wieder die Differenz (3.120) betrachtet. Durch Verwendung der Dreiecksungleichung und der Abschätzung (3.124) kann die Differenz zunächst durch

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \kappa^j \int_1^{\infty} s^{-j-v} e^{-Rs} ds - \sum_{j=0}^M \frac{1}{j!} \kappa^j \int_1^{\infty} s^{-j-v} e^{-Rs} ds \right| &= \left| \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \kappa^j \int_1^{\infty} s^{-j-v} e^{-Rs} ds \right| \\ &\leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j!} |\kappa|^j \int_1^{\infty} |s^{-j-v} e^{-Rs}| ds \\ &= \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j!} |\kappa|^j \int_1^{\infty} s^{-j-v} e^{-Rs} ds \\ &\leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j!} |\kappa|^j \frac{e^{-R}}{R+j+v-1} \end{aligned} \quad (3.125)$$

nach oben beschränkt werden. Für den Nenner des letzten Terms gilt  $R+j+v-1 \geq R+M+1+v-1 = R+M+v \quad \forall j \geq M+1$ , wobei die rechte Seite nun unabhängig von dem Summenindex ist. Zusammen mit der Verschiebung des Indexbereichs und der Verwendung der Definition der Taylorreihe der Exponentialfunktion kann die

betrachtete Differenz weiter nach oben beschränkt werden

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \kappa^j \int_1^{\infty} s^{-j-v} e^{-Rs} ds - \sum_{j=0}^M \frac{1}{j!} \kappa^j \int_1^{\infty} s^{-j-v} e^{-Rs} ds \right| &\leq \frac{e^{-R}}{R+M+v} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j!} |\kappa|^j \\
 &= \frac{e^{-R}}{R+M+v} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\kappa|^{j+M+1}}{(j+M+1)!} \\
 &\leq \frac{e^{-R}}{R+M+v} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\kappa|^j |\kappa|^{M+1}}{j!(M+1)!} \\
 &= \frac{e^{-R}}{R+M+v} \frac{|\kappa|^{M+1}}{(M+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\kappa|^j}{j!} \\
 &\leq \frac{e^{-R}}{R+M+v} \left( \frac{|\kappa|}{M+1} \right)^{M+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\kappa|^j}{j!} \\
 &= \frac{e^{|\kappa|-R}}{R+M+v} \left( \frac{|\kappa|}{M+1} \right)^{M+1} \\
 &\leq \frac{e^{|\kappa|-R}}{M+v} \left( \frac{|\kappa|}{M+1} \right)^{M+1}.
 \end{aligned} \tag{3.126}$$

□

Dieses Lemma 3.7 wird nun in Satz 3.8 dazu verwendet, die Differenz der Reihe (3.86) und der partiellen Summe (3.112) nach oben abzuschätzen.

**Satz 3.8.** *Definiere  $m_0 \in \mathbb{Z}$ , wobei  $\tilde{u} - m_0 d \in (-L/2, L/2]$  und sei  $M \in \mathbb{N}$ . Dann gilt*

$$\begin{aligned}
 |F_1(kw, k\tilde{w}) - F_{1,M}(kw, k\tilde{w})| &\leq \frac{|k^2| e^{\frac{|k^2|}{4a^2} - (aMd)^2}}{4a^4\pi (1 - e^{-2Md^2a^2})} \\
 &\cdot \left[ \frac{|v| e^{-(v^2a^2)}}{(M^2d^2 + v^2)^2} + \frac{|\tilde{v}| e^{-(\tilde{v}^2a^2)}}{(M^2d^2 + \tilde{v}^2)^2} \right].
 \end{aligned} \tag{3.127}$$

*Beweis.* Zunächst werden die Definitionen der beiden Funktionen in Abhängigkeit von der Hilfsfunktion  $F_{aux}^{(1)}$  eingesetzt

$$\begin{aligned}
 |F_1(kw, k\tilde{w}) - F_{1,M}(kw, k\tilde{w})| &= \left| \left( \frac{k}{2a} \right)^2 \left[ \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i\alpha md}}{2\pi} \left[ \frac{v}{w^2} F_{aux}^{(1)} \left( w^2 a^2, \left( \frac{k}{2a} \right)^2, 2 \right) \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} F_{aux}^{(1)} \left( \tilde{w}^2 a^2, \left( \frac{k}{2a} \right)^2, 2 \right) \right] - \sum_{m=m_0-M}^{m_0+M} \frac{e^{i\alpha md}}{2\pi} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \cdot \left[ \frac{v}{w^2} F_{aux}^{(1)} \left( w^2 a^2, \left( \frac{k}{2a} \right)^2, 2 \right) - \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} F_{aux}^{(1)} \left( \tilde{w}^2 a^2, \left( \frac{k}{2a} \right)^2, 2 \right) \right] \right] \right|.
 \end{aligned} \tag{3.128}$$

Die zwei Summen unterscheiden sich lediglich in dem Indexintervall. Der nach der Subtraktion verbleibende Indexbereich ist gegeben durch  $m < m_0 - M \vee m > m_0 + M$  und lässt sich auch beschreiben durch  $|m - m_0| \geq M + 1$ . Zusammen mit der Dreiecksungleichung folgt damit

$$\begin{aligned}
 |F_1(kw, k\tilde{w}) - F_{1,M}(kw, k\tilde{w})| &= \left| \left( \frac{k}{2a} \right)^2 \sum_{|m-m_0| \geq M+1} \frac{e^{i\alpha md}}{2\pi} \right. \\
 &\quad \cdot \left. \left[ \frac{v}{w^2} F_{aux}^{(1)} \left( w^2 a^2, \left( \frac{k}{2a} \right)^2, 2 \right) - \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} F_{aux}^{(1)} \left( \tilde{w}^2 a^2, \left( \frac{k}{2a} \right)^2, 2 \right) \right] \right| \\
 &\leq \frac{|k^2|}{4a^2} \sum_{|m-m_0| \geq M+1} \left| \frac{e^{i\alpha md}}{2\pi} \right| \left| \left[ \frac{v}{w^2} F_{aux}^{(1)} \left( w^2 a^2, \left( \frac{k}{2a} \right)^2, 2 \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} F_{aux}^{(1)} \left( \tilde{w}^2 a^2, \left( \frac{k}{2a} \right)^2, 2 \right) \right] \right| \\
 &\leq \frac{|k^2|}{8a^2\pi} \sum_{|m-m_0| \geq M+1} \left| \left[ \frac{v}{w^2} F_{aux}^{(1)} \left( w^2 a^2, \left( \frac{k}{2a} \right)^2, 2 \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} F_{aux}^{(1)} \left( \tilde{w}^2 a^2, \left( \frac{k}{2a} \right)^2, 2 \right) \right] \right|.
 \end{aligned} \tag{3.129}$$

Im nächsten Schritt wird eine leicht abgewandelte Form der Dreiecksungleichung verwendet. Diese besagt, dass  $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  und wird nun gemeinsam mit der ersten Aussage (3.116) aus Lemma 3.7 verwendet

$$\begin{aligned}
 |F_1(kw, k\tilde{w}) - F_{1,M}(kw, k\tilde{w})| &\leq \frac{|k^2|}{8a^2\pi} \sum_{|m-m_0| \geq M+1} \left[ \left| \frac{v}{w^2} F_{aux}^{(1)} \left( w^2 a^2, \left( \frac{k}{2a} \right)^2, 2 \right) \right| \right. \\
 &\quad \left. + \left| \frac{\tilde{v}}{\tilde{w}^2} F_{aux}^{(1)} \left( \tilde{w}^2 a^2, \left( \frac{k}{2a} \right)^2, 2 \right) \right| \right] \\
 &\leq \frac{|k^2|}{8a^2\pi} \sum_{|m-m_0| \geq M+1} \left[ \frac{|v| e^{|\left(\frac{k}{2a}\right)^2| - (w^2 a^2)}}{w^2 w^2 a^2} + \frac{|\tilde{v}| e^{|\left(\frac{k}{2a}\right)^2| - (\tilde{w}^2 a^2)}}{\tilde{w}^2 \tilde{w}^2 a^2} \right] \\
 &= \frac{|k^2|}{8a^4\pi} e^{\frac{|k^2|}{4a^2}} \sum_{|m-m_0| \geq M+1} \left[ \frac{|v| e^{-(w^2 a^2)}}{w^4} + \frac{|\tilde{v}| e^{-(\tilde{w}^2 a^2)}}{\tilde{w}^4} \right] \\
 &= \frac{|k^2|}{8a^4\pi} e^{\frac{|k^2|}{4a^2}} \sum_{|m-m_0| \geq M+1} \left[ \frac{|v| e^{-((u^2+v^2)a^2)}}{(u^2+v^2)^2} + \frac{|\tilde{v}| e^{-((u^2+\tilde{v}^2)a^2)}}{(u^2+\tilde{v}^2)^2} \right]
 \end{aligned} \tag{3.130}$$

Damit die betrachtete Differenz durch eine Grenze beschränkt wird, welche keine Reihe enthält, werden als nächstes zwei Nebenrechnungen durchgeführt. Diese haben das Ziel  $u^2$  nach unten abzuschätzen. Dafür wird zunächst die neue Variable  $\mu$  durch  $|m - m_0| =: \mu \geq M + 1$  eingeführt, wobei die letzte Abschätzung auf Grund des definierten Summenindexes gilt. Mit Hilfe dieser wird im Folgenden gezeigt, dass

zum einen

$$u^2 \geq [(M+1)d - |\tilde{u} - m_0d| + (\mu - (M+1))d]^2 \quad (3.131)$$

und zum anderen

$$[(M+1)d - |\tilde{u} - m_0d| + (\mu - (M+1))d]^2 \geq M^2d^2 \quad (3.132)$$

gilt. Die erste Beschränkung (3.131) kann gezeigt werden, indem  $u$  zunächst wieder in eine von  $\tilde{u}$  abhängigen Form geschrieben wird und anschließend das neutrale Element in der Form  $\pm m_0d$  eingefügt wird

$$u^2 = (\tilde{u} - md)^2 = [\tilde{u} - m_0d + (m_0 - m)d]^2. \quad (3.133)$$

Für diese Darstellungsform kann nun gezeigt werden, dass

$$[\tilde{u} - m_0d + (m_0 - m)d]^2 \geq [-|\tilde{u} - m_0d| + \mu d]^2 \quad (3.134)$$

erfüllt ist. Dafür genügt es zu zeigen, dass

$$|\tilde{u} - m_0d + (m_0 - m)d| \geq -|\tilde{u} - m_0d| + \mu d \quad (3.135)$$

gilt. Dieses lässt sich mit einer Fallunterscheidung durchführen

$$\text{Fall 1: } \quad m_0 - m \geq M + 1 > 0 \quad \wedge \quad \tilde{u} - md \in \left[0, \frac{L}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\tilde{u} - m_0d + (m_0 - m)d| &= ||\tilde{u} - m_0d| + |(m_0 - m)d|| \\ &\geq -|\tilde{u} - m_0d| + |(m_0 - m)d| \\ &= -|\tilde{u} - m_0d| + \mu d \end{aligned} \quad (3.136)$$

$$\text{Fall 2: } \quad m_0 - m < -(M + 1) < 0 \quad \wedge \quad \tilde{u} - md \in \left[0, \frac{L}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\tilde{u} - m_0d + (m_0 - m)d| &= ||\tilde{u} - m_0d| - |(m_0 - m)d|| \\ &= -|\tilde{u} - m_0d| + |(m_0 - m)d| \\ &= -|\tilde{u} - m_0d| + \mu d \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$\text{Fall 3: } \quad m_0 - m \geq M + 1 > 0 \quad \wedge \quad \tilde{u} - md \in \left(-\frac{L}{2}, 0\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\tilde{u} - m_0d + (m_0 - m)d| &= -|\tilde{u} - m_0d| + |(m_0 - m)d| \\ &= -|\tilde{u} - m_0d| + \mu d \end{aligned} \quad (3.138)$$

$$\text{Fall 4: } \quad m_0 - m < -(M + 1) < 0 \quad \wedge \quad \tilde{u} - md \in \left(-\frac{L}{2}, 0\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\tilde{u} - m_0d + (m_0 - m)d| &= -|\tilde{u} - m_0d| - |(m_0 - m)d| \\ &= ||\tilde{u} - m_0d| + |(m_0 - m)d|| \\ &> -|\tilde{u} - m_0d| + (m_0 - m)d \\ &= -|\tilde{u} - m_0d| + \mu d. \end{aligned} \quad (3.139)$$

Daraus folgt insgesamt die geforderte Bedingung (3.135) und damit (3.134). Im

letzten Schritt wird nur noch das Nullelement mit  $\pm (M + 1) d$  eingefügt und das Ziel der ersten Nebenrechnung (3.131) ist bewiesen.

Die zweite Nebenrechnung hat das Ziel (3.132) zu zeigen. Die auf der linken Seite befindlichen Terme in der großen Klammer können durch  $(M + 1) d > 0$ ,  $|\tilde{u} - m_0 d| \in [0, \frac{L}{2}]$  und  $(\mu - (M + 1)) d \geq 0$  abgeschätzt werden. Deshalb können diese Umformungen getätigt werden, wobei die letzten beiden auf der Tatsache basieren, dass der letzte Term jeweils  $\geq 0$  ist

$$\begin{aligned}
 [(M + 1) d - |\tilde{u} - m_0 d| + (\mu - (M + 1)) d]^2 &\geq [(M + 1) d - d + (\mu - (M + 1)) d]^2 \\
 &= [Md + (\mu - (M + 1)) d]^2 \\
 &= M^2 d^2 + 2Md(\mu - (M + 1)) d + (\mu - (M + 1))^2 d^2 \\
 &\geq M^2 d^2 + 2Md^2(\mu - (M + 1)) \\
 &\geq M^2 d^2.
 \end{aligned} \tag{3.140}$$

Damit ist auch das Ziel der zweiten Nebenrechnung bewiesen. Durch das Zusammenfügen dieser zwei Nebenrechnungen (3.131) und (3.132)

$$u^2 \geq [(M + 1) d - |\tilde{u} - m_0 d| + (\mu - (M + 1)) d]^2 \geq M^2 d^2 \tag{3.141}$$

existiert nun eine untere Schranke für  $u^2$ , die unabhängig von dem Reihenindex ist. Diese wird jetzt verwendet, um die ursprünglich betrachtete Differenz (3.130) weiter noch oben abschätzen zu können. Dabei wird sie lediglich für in den Nenner vorliegenden  $u^2$  verwendet. Für den Zähler wird das Zwischenergebnis

$$u^2 \geq M^2 d^2 + 2Md^2(\mu - (M + 1)) \tag{3.142}$$

aus (3.140) benutzt. Der Grund dafür ist, dass so eine Darstellung gefunden werden kann, auf die später die Aussage über die Konvergenz der geometrischen Reihe angewendet werden kann. Dafür ist es wichtig, dass der Nenner unabhängig von dem Reihenindex ist. Da eine möglichst kleine obere Schranke für die Differenz (3.130) gefunden werden soll, wird in diesem Fall das Zwischenergebnis (3.142) gewählt.

Des weiteren kann die Reihe  $\sum_{|m-m_0| \geq M+1}$  durch  $2 \sum_{\mu=M+1}^{\infty}$  ersetzt werden.

$$\begin{aligned}
 |F_1(kw, k\tilde{w}) - F_{1,M}(kw, k\tilde{w})| &\leq \frac{|k^2|}{8a^4\pi} e^{\frac{|k^2|}{4a^2}} \sum_{|m-m_0| \geq M+1} \left[ \frac{|v| e^{-((u^2+v^2)a^2)}}{(u^2+v^2)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{|\tilde{v}| e^{-((u^2+\tilde{v}^2)a^2)}}{(u^2+\tilde{v}^2)^2} \right] \\
 &\leq \frac{|k^2|}{8a^4\pi} e^{\frac{|k^2|}{4a^2}} \sum_{|m-m_0| \geq M+1} \left[ \frac{|v| e^{-((u^2+v^2)a^2)}}{(M^2d^2+v^2)^2} + \frac{|\tilde{v}| e^{-((u^2+\tilde{v}^2)a^2)}}{(M^2d^2+\tilde{v}^2)^2} \right] \\
 &= \frac{|k^2|}{8a^4\pi} e^{\frac{|k^2|}{4a^2}} \left[ \frac{|v| e^{-(v^2a^2)}}{(M^2d^2+v^2)^2} + \frac{|\tilde{v}| e^{-(\tilde{v}^2a^2)}}{(M^2d^2+\tilde{v}^2)^2} \right] \sum_{|m-m_0| \geq M+1} e^{-u^2a^2} \\
 &\leq \frac{|k^2|}{8a^4\pi} e^{\frac{|k^2|}{4a^2}} \left[ \frac{|v| e^{-(v^2a^2)}}{(M^2d^2+v^2)^2} + \frac{|\tilde{v}| e^{-(\tilde{v}^2a^2)}}{(M^2d^2+\tilde{v}^2)^2} \right] \\
 &\quad \cdot \sum_{|m-m_0| \geq M+1} e^{-(M^2d^2+2Md^2(\mu-(M+1)))a^2} \\
 &= \frac{|k^2|}{4a^4\pi} e^{\frac{|k^2|}{4a^2} - (aMd)^2} \left[ \frac{|v| e^{-(v^2a^2)}}{(M^2d^2+v^2)^2} + \frac{|\tilde{v}| e^{-(\tilde{v}^2a^2)}}{(M^2d^2+\tilde{v}^2)^2} \right] \\
 &\quad \cdot \sum_{\mu=M+1}^{\infty} e^{-2Md^2(\mu-(M+1))a^2}.
 \end{aligned} \tag{3.143}$$

Im nächsten Schritt soll die Aussage über die Konvergenz der geometrischen Reihe ausgenutzt werden. Diese besagt, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \forall \quad |q| < 1 \tag{3.144}$$

[24, S. 347]. Deshalb wird zunächst der Reihenindex von (3.143) verschoben und anschließend in eine Form gebracht, auf die diese Aussage angewendet werden kann

$$\begin{aligned}
 |F_1(kw, k\tilde{w}) - F_{1,M}(kw, k\tilde{w})| &\leq \frac{|k^2|}{4a^4\pi} e^{\frac{|k^2|}{4a^2} - (aMd)^2} \left[ \frac{|v| e^{-(v^2a^2)}}{(M^2d^2+v^2)^2} + \frac{|\tilde{v}| e^{-(\tilde{v}^2a^2)}}{(M^2d^2+\tilde{v}^2)^2} \right] \\
 &\quad \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} e^{-2Md^2(\mu+M+1-(M+1))a^2} \\
 &= \frac{|k^2|}{4a^4\pi} e^{\frac{|k^2|}{4a^2} - (aMd)^2} \left[ \frac{|v| e^{-(v^2a^2)}}{(M^2d^2+v^2)^2} + \frac{|\tilde{v}| e^{-(\tilde{v}^2a^2)}}{(M^2d^2+\tilde{v}^2)^2} \right] \\
 &\quad \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} e^{(-2Md^2a^2)^\mu}.
 \end{aligned} \tag{3.145}$$

Da  $M > 0$ ,  $a > 0$  und  $d > 0$  gilt folgt daraus, dass  $-2Md^2a^2 < 0$  und damit

$\left|e^{-2Md^2a^2}\right| < 1$ . Aus diesem Grund kann die betrachtete Differenz der ganzen Reihe und der abgeschnittenen Reihe durch den folgenden Ausdruck nach oben beschränkt werden.

$$|F_1(kw, k\tilde{w}) - F_{1,M}(kw, k\tilde{w})| \leq \frac{|k^2| e^{\frac{|k^2|}{4a^2} - (aMd)^2}}{4a^4\pi (1 - e^{-2Md^2a^2})} \cdot \left[ \frac{|v| e^{-(v^2a^2)}}{(M^2d^2 + v^2)^2} + \frac{|\tilde{v}| e^{-(\tilde{v}^2a^2)}}{(M^2d^2 + \tilde{v}^2)^2} \right]. \quad (3.146)$$

□

## 4 Ewalds Methode für den Einfachschichtoperator

Im vorherigen Kapitel 3 wurde die Ewald'sche Methode benutzt, um die Konvergenz des Doppelschichtoperators zu beschleunigen. Dazu wurde dieser in einen Anteil aufgespalten, der die Singulärstelle beinhaltet, dafür jedoch schnell konvergiert (Abschnitt 3.2) und in einen Anteil, der keine Singulärstellen enthält, dafür jedoch langsam konvergiert (Abschnitt 3.3). Wie bereits in Kapitel 2.4 gezeigt werden konnte, enthält der Einfachschichtoperator keine nicht-hebbare Singularität. Trotzdem soll auch in diesem Fall die Methode von Ewald angewendet werden. Der Grund dafür lässt sich durch die Betrachtung der Abbildung 4.1 erkennen. Zuerst wird der

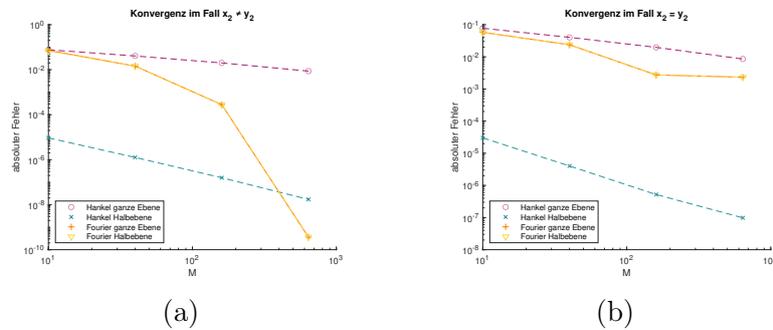


Abbildung 4.1: Konvergenz der Reihen mit der Hilfe der Hankelfunktion und ihrer Fourier-Reihendarstellung der ganzen Ebene und Halbebene für die Fundamentallösung. 4.1(a): Fall  $x_2 \neq y_2$ , 4.1(b): Fall  $x_2 = y_2$ .

Fall  $x_2 \neq y_2$  betrachtet. Es wird wie in Kapitel 3, Seite 20, die Konvergenzordnung berechnet. In diesem Fall konvergieren die beiden Reihen, welche mit Hilfe der Hankelfunktion im ganzen Raum, beziehungsweise im oberen Halbraum definiert sind, mit  $p = \frac{1}{2}$  beziehungsweise mit  $p = 0,7$ . Die erste Konvergenz konnte bereits analytisch in [2, Lemma 6.1] gezeigt werden, wobei in dem Lemma  $j = 5$  zu setzen ist. Wird hingegen die Fourierreihenentwicklung der beiden Reihen untersucht, kann darüber hinaus eine exponentielle Geschwindigkeit der Konvergenz beider Reihen beobachtet werden. Anders stellt sich dieses im Fall  $x_2 = y_2$  dar. Sowohl die Darstellungsformen der Reihen über die Hankelfunktion, als auch über die Fourierreihenentwicklung konvergieren nicht mit exponentieller Geschwindigkeit.

Aus diesem Grund besteht das Ziel in diesem Kapitel darin den Anteil ohne Singularität durch die gleichen Methodiken, wie sie bereits in Kapitel 3.3 erläutert wurden, in eine schneller konvergente Form zu bringen. Dieses wird im Folgenden dadurch zustande gebracht, dass zunächst jeweils nur ein einzelner Term von (2.42) betrachtet wird. Diese einzelnen Terme enthalten wieder jeweils eine nicht hebbare Singulärstelle, wie für den ersten Term bereits in dem Paper [4] gezeigt wurde. Nach der Durchführung von Ewalds Methode für jeden einzelnen Term sollen die Resultate beider Terme wieder zusammengeführt werden. Von diesem soll im späteren Verlauf

gezeigt werden, dass es sich dabei um eine schneller konvergente Form von (2.42) handelt.

## 4.1 Konvergenz des Anteils des Einfachschichtoperators mit Singulärstelle

Genau wie in Kapitel 3.2 sollen in diesem Kapitel die Terme mit den Singulärstelle betrachtet werden. Da bereits in Kapitel 2.4 gezeigt werden konnte, dass es sich bei 3.3 um eine hebbare Singulärstelle handelt, werden in diesem Kapitel zunächst die einzelnen Terme

$$G_{\alpha,1}^+(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha m d} i H_0^{(1)}(k \|x - y\|) / 4 \quad (4.1)$$

und

$$G_{\alpha,2}^+(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha m d} i H_0^{(1)}(k \|x - \tilde{y}\|) / 4 \quad (4.2)$$

betrachtet und anschließend wieder zu

$$G_{\alpha}^+(x, y) = G_{\alpha,1}^+(x, y) - G_{\alpha,2}^+(x, y) \quad (4.3)$$

zusammengeführt. Bei dem ersten Term (4.1) handelt es sich um die Green'sche Funktion, die auftritt, wenn das gesamte Feld betrachtet wird und nicht die Einschränkung auf die obere Halbebene besteht. Genau wie in Kapitel 3.2 werden zunächst jeweils nur die Teile

$$f_0^{(1)}(kw) = H_0^{(1)}(kw) \quad (4.4)$$

und

$$f_0^{(2)}(k\tilde{w}) = H_0^{(1)}(k\tilde{w}) \quad (4.5)$$

der Funktionen (4.1) und (4.2) betrachtet. Nun kann wieder die in Kapitel 3.1 hergeleitete alternative Integraldarstellung der Hankelfunktion verwendet werden. Dabei ist darauf zu achten, dass in diesem Fall die Ordnung der Hankelfunktion  $n = 0$  ist und damit

$$H_0^{(1)}(kr) = \frac{2}{i\pi} \int_{\gamma_1} t^{-1} e^{-r^2 t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} dt \quad (4.6)$$

gilt. Von diesem Integral wird, wie bei dem Doppelschichtoperator nur der zweite Abschnitt des Konturintegrals verwendet, und anschließend in (4.4)

$$g_0^{(1)}(kw) = \frac{2}{i\pi} \int_a^{\infty} t^{-1} e^{-w^2 t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} dt \quad (4.7)$$

beziehungsweise (4.5)

$$g_0^{(2)}(k\tilde{w}) = \frac{2}{i\pi} \int_a^{\infty} t^{-1} e^{-\tilde{w}^2 t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} dt \quad (4.8)$$

eingesetzt. Diese beiden Funktionen unterscheiden sich lediglich in dem Eingabeparameter  $w$  beziehungsweise  $\tilde{w}$  und werden aus diesem Grund im Folgenden beide durch  $g_0(kw) := g_0^{(1)}(kw) = g_0^{(2)}(kw)$  definiert. Für diesen Operator wurde bereits der Satz

**Satz 4.1.** *Für  $w > 0$  und  $\arg(k) \in [0, \frac{\pi}{2})$  gilt*

$$g_0(kw) = \frac{1}{i\pi} \left( -\gamma - 2 \ln(aw) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (aw)^{2n}}{nn!} \right) J_0(kw) + h_0^{(1)} \left( kw, \frac{k}{a} \right), \quad (4.9)$$

wobei  $h_0^{(1)}$  eine analytische Funktion bezüglich der zwei Argumente  $kw$  und  $\frac{k}{a}$  ist. Darüber hinaus gilt

$$|g_0(kw)| \leq \frac{1}{a^2\pi} e^{\frac{|k|^2}{4a^2}} \frac{e^{-w^2 a^2}}{w^2} \quad (4.10)$$

in [4] gezeigt. Der dazu durchgeführte Beweis soll nun auf gleiche Weise, nur ausführlicher, für den zweiten Operator (4.8) durchgeführt werden. Dazu muss lediglich  $w$  durch  $\tilde{w}$  ersetzt werden.

*Beweis.* Wie in Kapitel 3.2 soll die betrachtete Funktion (4.8) erneut in eine Form umgeformt werden, von der gezeigt werden kann, dass diese für große  $m$  exponentiell schnell konvergiert.

Zunächst gilt für die Funktion  $g_0(k\tilde{w})$  durch die Ausnutzung der Definition der Potenzreihe der Exponentialfunktion (3.54):

$$\begin{aligned} g_0(k\tilde{w}) &= \frac{2}{i\pi} \int_a^{\infty} t^{-1} e^{-\tilde{w}^2 t^2} e^{\frac{k^2}{4t^2}} dt \\ &= \frac{2}{i\pi} \int_a^{\infty} t^{-1} e^{-\tilde{w}^2 t^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left( \frac{k}{2t} \right)^{2j} dt \\ &= \frac{2}{i\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left( \frac{k}{2} \right)^{2j} \int_a^{\infty} t^{-2j-1} e^{-\tilde{w}^2 t^2} dt. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Im zweiten Schritt wird  $s = \frac{t^2}{a^2}$  substituiert. Mit  $t = a\sqrt{s}$  und  $\frac{dt}{ds} = \frac{a}{2\sqrt{s}}$  folgt daraus, dass

$$\begin{aligned} g_0(k\tilde{w}) &= \frac{2}{i\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left( \frac{k}{2} \right)^{2j} \int_1^{\infty} (a\sqrt{s})^{-2j-1} e^{-\tilde{w}^2 (a\sqrt{s})^2} \frac{a}{2\sqrt{s}} ds \\ &= \frac{1}{i\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left( \frac{k}{2} \right)^{2j} \int_1^{\infty} a^{-2j} \sqrt{s}^{-2j-2} e^{-\tilde{w}^2 a^2 s} ds \\ &= \frac{1}{i\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left( \frac{k}{2a} \right)^{2j} \int_1^{\infty} s^{-j-1} e^{-\tilde{w}^2 a^2 s} ds. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Das in (4.12) auftretende Integral wird durch partielle Integration berechnet. Dafür

wird zunächst

$$I_j^{(0)}(\tau) := \int_1^{\infty} s^{-j-1} e^{-\tau s} ds \quad (4.13)$$

definiert, wobei  $\tau := (wa)^2$  und  $\tilde{\tau} := (\tilde{w}a)^2$ . Dieses Integral unterscheidet sich von (3.57) nur durch den Exponenten von  $s$ . In diesem Fall wird nur das Integral (4.13) mit dem Parameter  $\tau$  betrachtet, wobei die Auswertung mit  $\tilde{\tau}$  analog erfolgt. Anschließend wird  $I_{j+1}^{(0)}(\tau)$  durch partielle Integration berechnet.

$$\begin{aligned} I_{j+1}^{(0)}(\tau) &= \int_1^{\infty} s^{-j-2} e^{-\tau s} ds \\ &= \left[ \frac{-1}{j+1} s^{-j-1} e^{-\tau s} \right]_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \frac{-1}{j+1} s^{-j-1} (-\tau) e^{-\tau s} ds \\ &= \frac{1}{j+1} 1^{-j-1} e^{-\tau} - \frac{1}{j+1} \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \left( \frac{1}{s} \right)^{j+1} e^{-\tau s} \right\} - \frac{\tau}{j+1} \int_1^{\infty} s^{-j-1} e^{-\tau s} ds. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Da sowohl  $\lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{s} \right)^{j+1} = 0$  als auch  $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-\tau s} = 0$ , entspricht der mittlere Term Null und fällt somit weg. Bei dem Integral des letzten Terms von (4.14) handelt es sich genau um die Definition (4.13). Daraus ergibt sich insgesamt

$$I_{j+1}^{(0)}(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{j+1} - \frac{\tau}{j+1} I_j^{(0)}(\tau) \quad (4.15)$$

und damit

$$I_j^{(0)}(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{j} - \frac{\tau}{j} I_{j-1}^{(0)}(\tau). \quad (4.16)$$

Die Funktion (4.16) liegt in einer rekursiven Darstellung vor. Im nächsten Schritt wird sie in eine explizite Darstellung transformiert. Dazu wird zunächst die rekursive Form ausgeschrieben

$$I_j^{(0)}(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{j} - \frac{\tau}{j} \left( \frac{e^{-\tau}}{j-1} - \frac{\tau}{j-1} \left( \frac{e^{-\tau}}{j-2} - \frac{\tau}{j-2} \left( \dots \left( \frac{e^{-\tau}}{1} - \frac{\tau}{1} I_0^{(0)}(\tau) \right) \dots \right) \right) \right), \quad (4.17)$$

wobei  $I_0^{(0)}(\tau) = \int_1^{\infty} s^{-1} e^{-\tau s} ds$  ist. Fürs Erste wird die Multiplikation aller zweiten Terme betrachtet

$$I_j^{(0)(1)}(\tau) = -\frac{\tau}{j} \left( -\frac{\tau}{j-1} \left( -\frac{\tau}{j-2} \left( \dots \left( -\frac{\tau}{1} I_0^{(0)}(\tau) \right) \dots \right) \right) \right). \quad (4.18)$$

Diese lässt sich durch das Produkt

$$\begin{aligned}
 I_j^{(0)(1)}(\tau) &= (-1)^j \prod_{m=0}^{j-1} \frac{\tau}{j-m} I_0^{(0)}(\tau) \\
 &= \tau^j I_0^{(0)}(\tau) \frac{(-1)^j}{\prod_{m=0}^{j-1} j-m} \\
 &= \tau^j I_0^{(0)}(\tau) c_{j,j}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

beschreiben, wobei der letzte Faktor durch (3.64) definiert ist. Im Anschluss wird die Berechnung der anderen Terme genauer betrachtet. Diese lassen sich durch

$$\begin{aligned}
 I_j^{(0)(2)}(\tau) &= \frac{e^{-\tau}}{j} - \frac{\tau}{j} \frac{e^{-\tau}}{j-1} + \frac{\tau}{j} \frac{\tau}{j-1} \frac{e^{-\tau}}{j-2} - \frac{\tau}{j} \frac{\tau}{j-1} \frac{\tau}{j-2} \frac{e^{-\tau}}{j-3} \\
 &\quad \dots (-1)^{j-1} \frac{\tau^{j-1} e^{-\tau}}{\prod_{m=0}^{j-1} j-m} \\
 &= -e^{-\tau} \sum_{l=1}^j \frac{(-1)^l \tau^{l-1}}{\prod_{m=0}^{l-1} j-m} \\
 &= -e^{-\tau} \sum_{l=1}^j c_{j,l} \tau^{l-1}
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

darstellen. Die explizite Darstellung von  $I_j^{(0)}(\tau)$  wird durch das Zusammenfügen von (4.19) und (4.20) erreicht

$$I_j^{(0)}(\tau) = c_{j,j} \tau^j I_0^{(0)}(\tau) - e^{-\tau} \sum_{l=1}^j c_{j,l} \tau^{l-1}. \tag{4.21}$$

Diese Resultate werden im nächsten Schritt verwendet, um  $g_0(k\tilde{w})$  weiter umzuformen und in die gewünschte Darstellungsform zu überführen. Dafür wird zunächst

die Definition (4.13) und anschließend die explizite Form (4.21) in (4.12) eingesetzt

$$\begin{aligned}
 g_0(k\tilde{w}) &= \frac{1}{i\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2a}\right)^{2j} \int_1^{\infty} s^{-j-1} e^{-\tilde{w}^2 a^2 s} ds \\
 &= \frac{1}{i\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2a}\right)^{2j} I_j^{(0)}(\tilde{w}^2 a^2) \\
 &= \frac{1}{i\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2a}\right)^{2j} \left( c_{j,j}(\tilde{w}^2 a^2)^j I_0^{(0)}(\tilde{w}^2 a^2) - e^{-\tilde{w}^2 a^2} \sum_{l=1}^j c_{j,l}(\tilde{w}^2 a^2)^{l-1} \right) \\
 &= \frac{1}{i\pi} \left( I_0^{(0)}(\tilde{w}^2 a^2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{j,j}}{j!} \left(\frac{k\tilde{w}}{2}\right)^{2j} \right. \\
 &\quad \left. - e^{-\tilde{w}^2 a^2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=1}^j \frac{c_{j,l}}{j!} \left(\frac{k}{2a}\right)^{2j} (\tilde{w}^2 a^2)^{l-1} \right).
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Anschließend wird die Doppelsumme aus (4.22) genauer betrachtet. Bei dieser wird die Reihenfolge der beiden Summen vertauscht. Dafür werden zunächst die Grenzen der zwei Laufvariablen  $j$  und  $l$  betrachtet. Diese sind durch  $0 \leq j < \infty$  und  $1 \leq l \leq j$  gegeben. Aus diesen zwei Beschränkungen kann zum einen abgeleitet werden, dass  $l$  auch innerhalb der Grenzen  $1 \leq l < \infty$  liegen muss, da  $l \leq j$  und  $j < \infty$  gilt. Zum anderen kann durch die zweite Einschränkung abgelesen werden, dass  $j$  nach unten durch  $l$  begrenzt wird. Nach oben ist der Laufindex weiterhin unbegrenzt mit  $\infty$ . Zusammengesetzt leitet sich damit  $l \leq j < \infty$  ab. Aus diesem Grund lassen sich die beiden Summenglieder wie folgt vertauschen und anschließend auf die Grenzen  $0 \leq l < \infty$  und  $1 \leq j < \infty$  beschränken

$$\begin{aligned}
 s_0 &:= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=1}^j \frac{c_{j,l}}{j!} \left(\frac{k}{2a}\right)^{2j} (\tilde{w}a)^{2(l-1)} \\
 &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=l}^{\infty} \frac{c_{j,l}}{j!} \left(\frac{k}{2a}\right)^{2j} (\tilde{w}a)^{2(l-1)} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=l+1}^{\infty} \frac{c_{j,l+1}}{j!} \left(\frac{k}{2a}\right)^{2j} (\tilde{w}a)^{2l} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{j+l,l+1}}{(j+l)!} \left(\frac{k}{2a}\right)^{2(j+l)} (\tilde{w}a)^{2l} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{j+l,l+1}}{(j+l)!} \left(\frac{k}{2a}\right)^{2j} \left(\frac{k\tilde{w}}{2}\right)^{2l}.
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Dieses wird nun in (4.22) eingesetzt

$$\begin{aligned}
 g_0(k\tilde{w}) &= \frac{1}{i\pi} \left( I_0^{(0)}(\tilde{w}^2 a^2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{j,j}}{j!} \left( \frac{k\tilde{w}}{2} \right)^{2j} \right. \\
 &\quad \left. - e^{-\tilde{w}^2 a^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{j+l,l+1}}{(j+l)!} \left( \frac{k}{2a} \right)^{2j} \left( \frac{k\tilde{w}}{2} \right)^{2l} \right) \\
 &= \frac{1}{i\pi} \left( I_0^{(0)}(\tilde{w}^2 a^2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{j,j}}{j!} \left( \frac{k\tilde{w}}{2} \right)^{2j} \right. \\
 &\quad \left. - e^{-\tilde{w}^2 a^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{k\tilde{w}}{2} \right)^{2l} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{j+l,l+1}}{(j+l)!} \left( \frac{k}{2a} \right)^{2j} \right). \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wird der erste Term von (4.24) vereinfacht. Dafür wird wieder die Definition von  $c_{j,l}$  aus (3.64) genutzt. Wird diese genauer betrachtet, lässt sich erkennen, dass es sich bei dem Nenner in dem Fall  $L = j$  um die Definition der Fakultät handelt. Daraus folgt, dass

$$c_{j,j} = \frac{(-1)^j}{\prod_{m=0}^{j-1} j-m} = \frac{(-1)^j}{j!} \tag{4.25}$$

gilt. Dieses wird nun verwendet, um den ersten Term aus (3.70) in eine Form umzuformen, in die die Besselfunktion (3.73) eingesetzt werden kann.

$$\begin{aligned}
 t_1 &:= \frac{1}{i\pi} I_0^{(0)}(\tilde{w}^2 a^2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{j,j}}{j!} \left( \frac{k\tilde{w}}{2} \right)^{2j} \\
 &= \frac{1}{i\pi} I_0^{(0)}(\tilde{w}^2 a^2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!j!} \left( \frac{k\tilde{w}}{2} \right)^{2j} \\
 &= \frac{1}{i\pi} I_0^{(0)}(\tilde{w}^2 a^2) J_0(k\tilde{w}) \tag{4.26}
 \end{aligned}$$

Anschließend wird das Ergebnis (4.26) wieder in (4.24) eingesetzt

$$\begin{aligned}
 g_0(k\tilde{w}) &= \frac{1}{i\pi} \left( I_0^{(0)}(\tilde{w}^2 a^2) J_0(k\tilde{w}) \right. \\
 &\quad \left. - e^{-\tilde{w}^2 a^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{k\tilde{w}}{2} \right)^{2l} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{j+l,l+1}}{(j+l)!} \left( \frac{k}{2a} \right)^{2j} \right). \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

Die in Satz 4.1 definierte Darstellungsform von  $g_0(k\tilde{w})$  wird erreicht, indem die generalisierte Integral exponentialfunktion (3.76) für das Integral  $I_0^{(0)}(\tilde{w}^2 a^2)$  (4.13) in (4.27) ersetzt wird. Anders als bei der Betrachtung des Doppelschichtoperators gilt in diesem Fall  $n = 1$ , wie mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs leicht zu erkennen ist:

$$I_0^{(0)}(a^2 \tilde{w}^2) = \int_1^{\infty} s^{-1} e^{-(a^2 \tilde{w}^2) s} ds = \int_1^{\infty} \frac{e^{-(a\tilde{w})^2 t}}{t} dt = E_1((a\tilde{w})^2). \tag{4.28}$$

Zusätzlich wird erneut die Reihendarstellung der Integraleponentialfunktion (3.80) verwendet. Daraus folgt, dass das betrachtete Integral durch

$$\begin{aligned} I_0^{(0)}(a^2\tilde{w}^2) &= -\gamma - \ln((a\tilde{w})^2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (a\tilde{w})^{2n}}{nn!} \\ &= -\gamma - 2 \ln(a\tilde{w}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (a\tilde{w})^{2n}}{nn!} \end{aligned} \quad (4.29)$$

dargestellt werden kann. Dieses Ergebnis wird nun in (4.27) eingesetzt, wodurch die in Satz 4.1 definierte Darstellungsform entsteht

$$\begin{aligned} g_0(k\tilde{w}) &= \frac{1}{i\pi} \left[ \left( -\gamma - 2 \ln(a\tilde{w}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (a\tilde{w})^{2n}}{nn!} \right) J_0(k\tilde{w}) \right. \\ &\quad \left. - e^{-(a\tilde{w})^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{k\tilde{w}}{2} \right)^{2l} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{j+l,l+1}}{(j+l)!} \left( \frac{k}{2a} \right)^{2j} \right]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Dabei ist darauf zu achten, dass der zweite Term von (4.30) analytisch bezüglich der zwei Argumente  $k\tilde{w}$  und  $\frac{k}{a}$  ist [4, S. 6]. Das bedeutet, dass der erste Teil des Satzes bewiesen ist, wobei der Beweis für  $\tilde{w}$  statt für  $w$  durchgeführt wurde.

Für den zweiten Teil muss gezeigt werden, dass  $g_0(k\tilde{w})$  exponentiell schnell konvergiert. Dafür wird zunächst das Zwischenergebnis (4.12) verwendet. Das in diesem Zwischenergebnis befindliche Integral  $I_j((a\tilde{w})^2)$  wird als erstes nach oben durch

$$\begin{aligned} I_j^{(0)}((a\tilde{w})^2) &:= \int_1^{\infty} s^{-(j+1)} e^{-(a\tilde{w})^2 s} ds \\ &\leq \int_1^{\infty} e^{-(a\tilde{w})^2 s} ds \\ &= \left[ -\frac{e^{-(a\tilde{w})^2 s}}{(a\tilde{w})^2} \right]_1^{\infty} \\ &= \frac{e^{-(a\tilde{w})^2}}{(a\tilde{w})^2} \end{aligned} \quad (4.31)$$

abgeschätzt. Dieses Ergebnis wird anschließend im ersten Schritt von (4.32) verwendet, um  $|g_0(k\tilde{w})|$  nach oben abzuschätzen. Anschließend wird die Definition der Exponentialfunktion als Potenzreihe (3.54) genutzt. Daraus folgt, dass sich  $|g_0(k\tilde{w})|$

durch

$$\begin{aligned}
 |g_0(k\tilde{w})| &= \left| \frac{1}{i\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2a}\right)^{2j} \int_1^{\infty} s^{-j-1} e^{-\tilde{w}^2 a^2 s} ds \right| \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{|k|}{2a}\right)^{2j} \int_1^{\infty} s^{-j-1} e^{-\tilde{w}^2 a^2 s} ds \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{|k|}{2a}\right)^{2j} \frac{e^{-(a\tilde{w})^2}}{(a\tilde{w})^2} \\
 &= \frac{1}{a^2\pi} e^{\frac{|k|^2}{4a^2}} \frac{e^{-(a\tilde{w})^2}}{\tilde{w}^2}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

nach oben abschätzen lässt, was genau dem entspricht, was in Satz 4.1 behauptet wird, siehe (4.10). Damit sind beide Teile des Satzes bewiesen.  $\square$

Aus diesem Satz können direkt die folgenden Aussagen über die zusammengeführten Operatoren der Green'schen Funktion der oberen Halbebene (4.3) abgeleitet werden.

**Satz 4.2.** Für  $w > 0$ ,  $\tilde{w} > 0$  und  $\arg(k) \in [0, \frac{\pi}{2})$  gilt

$$\begin{aligned}
 g_0(kw) - g_0(k\tilde{w}) &= \frac{1}{i\pi} \left[ \left( -\gamma - 2 \ln(aw) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (aw)^{2n}}{nn!} \right) J_0(kw) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \gamma + 2 \ln(a\tilde{w}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (a\tilde{w})^{2n}}{nn!} \right) J_0(k\tilde{w}) \right] \\
 &\quad + h_0^{(1)}\left(kw, \frac{k}{a}\right) - h_0^{(1)}\left(k\tilde{w}, \frac{k}{a}\right),
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

wobei  $h_0^{(1)}$  eine analytische Funktion bezüglich seiner zwei Argumente ist. Darüber hinaus gilt

$$|g_0(kw) - g_0(k\tilde{w})| \leq \frac{1}{a^2\pi} e^{\frac{|k|^2}{4a^2}} \left( \frac{e^{-w^2 a^2}}{w^2} + \frac{e^{-\tilde{w}^2 a^2}}{\tilde{w}^2} \right). \tag{4.34}$$

*Beweis.* Die erste Gleichung (4.33) lässt sich direkt durch Einsetzen der ersten Gleichung (4.9) des Satzes 4.1 erzeugen.

Bei der zweiten Gleichung (4.34) muss im Verhältnis zu der zweiten Gleichung (4.10) lediglich eine weitere Abschätzung nach oben mit Hilfe der Dreiecksungleichung erfolgen

$$\begin{aligned}
 |g_0(kw) - g_0(k\tilde{w})| &\leq |g_0(kw)| + |g_0(k\tilde{w})| \\
 &\leq \frac{1}{a^2\pi} e^{\frac{|k|^2}{4a^2}} \frac{e^{-w^2 a^2}}{w^2} + \frac{1}{a^2\pi} e^{\frac{|k|^2}{4a^2}} \frac{e^{-\tilde{w}^2 a^2}}{\tilde{w}^2} \\
 &= \frac{1}{a^2\pi} e^{\frac{|k|^2}{4a^2}} \left( \frac{e^{-w^2 a^2}}{w^2} + \frac{e^{-\tilde{w}^2 a^2}}{\tilde{w}^2} \right).
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Damit ist auch dieser Satz bewiesen.  $\square$

Genau wie in dem Fall mit Singulärstelle wird nun wieder die quasiperiodische Funktion definiert, die die gleiche Singulärstelle, wie (4.3) besitzt und zusätzlich, wie in Satz 4.2 gezeigt werden konnte, exponentiell schnell konvergiert. Mit Hilfe des Zwischenergebnisses (4.12) folgt damit die quasiperiodische Funktion

$$\begin{aligned}
 F_1^{(0)}(kw, k\tilde{w}) &:= \frac{i}{4} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha m d} \left[ \frac{1}{i\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left( \frac{k}{2a} \right)^{2j} \int_1^{\infty} s^{-j-1} e^{-w^2 a^2 s} ds \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{i\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left( \frac{k}{2a} \right)^{2j} \int_1^{\infty} s^{-j-1} e^{-\tilde{w}^2 a^2 s} ds \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha m d} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left( \frac{k}{2a} \right)^{2j} \left[ \int_1^{\infty} s^{-j-1} e^{-w^2 a^2 s} ds \right. \\
 &\quad \left. - \int_1^{\infty} s^{-j-1} e^{-\tilde{w}^2 a^2 s} ds \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha m d} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left( \frac{k}{2a} \right)^{2j} \int_1^{\infty} s^{-j-1} \left[ e^{-w^2 a^2 s} - e^{-\tilde{w}^2 a^2 s} \right] ds.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

## 4.2 Konvergenz des Anteils des Einfachschichtoperators ohne Singulärstelle

Nach dem im vorherigen Kapitel 4.1 die Teile der zwei quasiperiodischen Funktionen (4.1) und (4.2) analysiert wurden, welche jeweils Singulärstellen aufweisen, soll in diesem Kapitel jeweils der Anteil ohne Singulärstellen analysiert werden. Anschließend werden diese zwei Teile, wie in (4.3), wieder zusammengeführt. Da es sich wie bei der Betrachtung des Doppelschichtoperators (Abschnitt 3.3) um Darstellungsformen handelt, die nicht exponentiell schnell konvergieren, soll gleichermaßen eine Fouriertransformation durchgeführt werden. Wie sich später zeigen lässt, ist ein Vorteil der dabei entstehenden Darstellung, dass, anders als bei dem Doppelschichtoperator, das Integral, welches auf Grund der Fouriertransformation zu berechnen ist, analytisch lösbar ist und nicht numerisch approximiert werden muss.

Der Ausgangspunkt dieses Abschnittes sind die zwei Funktionen  $f_0^{(1)}$  (4.4) und  $f_0^{(2)}$  (4.5), welche den problematischen Anteil des Einfachschichtoperators beinhalten. Von diesen wird als erstes jeweils die Funktion  $g_0(kw)$  (4.7) beziehungsweise  $g_0(k\tilde{w})$  (4.12) subtrahiert. Dabei handelt es sich jeweils um die Funktionen, die die gleichen Singulärstellen besitzen, wie  $f_0^{(1)}$  und  $f_0^{(2)}$  (4.4), dafür aber exponentiell schnell konvergieren. Im Folgenden werden die Schritte für den Teil  $f_0^{(1)}$  durchgeführt, wobei

diese für  $f_0^{(2)}$  analog verlaufen. Für die so gebildete quasiperiodische Funktion gilt

$$\begin{aligned}
 F_2^{(0)}(kw) &= \frac{i}{4} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha m d} \left( f_0^{(1)}(kw) - g_0^{(1)}(kw) \right) \\
 &= \frac{i}{4} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha m d} \left[ \frac{2}{i\pi} \int_{\gamma_1} t^{-1} e^{-w^2 t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} dt - \frac{2}{i\pi} \int_a^\infty t^{-1} e^{-w^2 t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} dt \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha m d} \int_{\gamma_5} t^{-1} e^{-w^2 t^2 + \frac{k^2}{4t^2}} dt,
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

wobei  $\gamma_5$  wie in Kapitel 3.3 dem Integrationsweg  $\gamma_1$ , welcher nicht in dem Intervall  $(a, \infty)$  liegt, entspricht. Diese Funktion wird im späteren Verlauf Fourier-transformiert. Dafür wird zunächst ein Zwischenschritt durchgeführt und die Fourier-Transformierte  $\mathcal{F}\left(e^{-\eta^2 t^2}\right)(\xi)$  berechnet. Nach Definition der Fourier-Transformierten ist

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\left(e^{-\eta^2 t^2}\right)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2 t^2} e^{-i\xi \eta} d\eta \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\eta^2 t^2 + i\xi \eta)} d\eta.
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Der Exponent kann mit Hilfe von quadratischer Ergänzung durch  $(i\eta - \frac{\xi}{2t})^2 - \frac{\xi^2}{4t^2}$  ersetzt werden. Anschließend wird das neutrale Element durch  $(-1)(-1)$  in diesen eingesetzt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\left(e^{-\eta^2 t^2}\right)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(i\eta - \frac{\xi}{2t})^2 - \frac{\xi^2}{4t^2}} d\eta \\
 &= e^{-\frac{\xi^2}{4t^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{2i^2 t^2 \eta - i\xi}{2t}\right)^2} d\eta \\
 &= e^{-\frac{\xi^2}{4t^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{2t^2 \eta + i\xi}{2t}\right)^2} d\eta.
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Das Integral lässt sich im nächsten Schritt durch Substitution von  $y := \frac{2t^2 \eta + i\xi}{2t}$  lösen. Da  $\frac{dy}{d\eta} = t$  folgt daraus, dass  $d\eta = \frac{1}{t} dy$  und zusammen gilt

$$\mathcal{F}\left(e^{-\eta^2 t^2}\right)(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4t^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \frac{1}{t} dy. \tag{4.40}$$

Des Weiteren gilt nach Definition [1, 7.1.1]

$$\operatorname{erf}(y) := \int_0^y \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} dt. \tag{4.41}$$

Wird anschließend der Grenzwert betrachtet und zusätzlich die Eigenschaft der Error-Funktion  $\operatorname{erf}(-y) = -\operatorname{erf}(y)$  [1, 7.1.9] ausgenutzt, so resultiert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} dt = \lim_{y \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(y) - \operatorname{erf}(-y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(y) + \operatorname{erf}(y) = 2. \quad (4.42)$$

Damit können für die zu berechnende Fourier-Transformierte folgende Vereinfachungen durchgeführt werden

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(e^{-\eta^2 t^2}\right)(\xi) &= \frac{\sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4t^2}}}{2t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} dy \\ &= \frac{\sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4t^2}}}{t} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Dieses Ergebnis wird verwendet, um die Fourier-Transformierte von (4.37) zu berechnen. Dafür wird als erstes die Reihenfolge von Integration und Summation vertauscht und anschließend das neutrale Element durch  $1 = e^{i\alpha\tilde{u}} e^{-i\alpha\tilde{u}}$  eingesetzt, wobei  $\tilde{u} := x_1 - y_1$  genau wie in Kapitel 3.3 definiert ist. Das Einfügen des neutralen Elements ist notwendig, um im späteren Verlauf das Ergebnis (4.43) anwenden zu können. Damit gilt für  $F_2^{(0)}(kw)$

$$\begin{aligned} F_2^{(0)}(kw) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha m d} \int_{\gamma_5} t^{-1} e^{-u^2 t^2 - v^2 t^2} e^{\frac{k^2}{4t^2}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_5} t^{-1} e^{-v^2 t^2} e^{\frac{k^2}{4t^2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha m d} e^{-(\tilde{u} - md)^2 t^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_5} t^{-1} e^{-v^2 t^2} e^{\frac{k^2}{4t^2}} e^{i\alpha\tilde{u}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-i\alpha\tilde{u}} e^{i\alpha m d} e^{-(\tilde{u} - md)^2 t^2} dt. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Auf die Summe

$$s_d^{(0)}(\tilde{u}) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-i\alpha\tilde{u}} e^{i\alpha m d} e^{-(\tilde{u} - md)^2 t^2} \quad (4.45)$$

wird wieder die Poissonsche Summenformel angewendet. Dazu werden zunächst die Fourier-Koeffizienten berechnet

$$c_\ell^{(0)} = \frac{1}{d} \int_0^d s_d^{(0)}(\tilde{u}) e^{-i2\pi \frac{\ell}{d} \tilde{u}} d\tilde{u}. \quad (4.46)$$

Anschließend wird (3.90) eingesetzt und die Reihenfolge von Integration und Sum-

mation vertauscht

$$\begin{aligned}
 c_\ell^{(0)} &= \frac{1}{d} \int_0^d \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-i\alpha\tilde{u}} e^{i\alpha md} e^{-(\tilde{u}-md)^2 t^2} e^{-i2\pi \frac{\ell}{d} \tilde{u}} d\tilde{u} \\
 &= \frac{1}{d} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha md} \int_0^d e^{-i(\alpha+2\pi \frac{\ell}{d})\tilde{u}} e^{-(\tilde{u}-md)^2 t^2} d\tilde{u}.
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Im nächsten Schritt wird die Definition  $\alpha_\ell = \alpha + \ell \frac{2\pi}{d}$  ausgenutzt und zusätzlich das neutrale Element  $e^{-i\alpha_\ell md} e^{i\alpha_\ell md}$  eingefügt. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 c_\ell^{(0)} &= \frac{1}{d} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha md} e^{-i\alpha_\ell md} \int_0^d e^{-i\alpha_\ell \tilde{u}} e^{i\alpha_\ell md} e^{-(\tilde{u}-md)^2 t^2} d\tilde{u} \\
 &= \frac{1}{d} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i(\alpha-\alpha_\ell)md} \int_0^d e^{-i\alpha_\ell(\tilde{u}-md)} e^{-(\tilde{u}-md)^2 t^2} d\tilde{u} \\
 &= \frac{1}{d} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi \ell m} \int_0^d e^{-i\alpha_\ell(\tilde{u}-md)} e^{-(\tilde{u}-md)^2 t^2} d\tilde{u} \\
 &= \frac{1}{d} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^d e^{-i\alpha_\ell(\tilde{u}-md)} e^{-(\tilde{u}-md)^2 t^2} d\tilde{u}.
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Durch Substitution von  $s = \tilde{u} - md$ , wobei  $\frac{d\tilde{u}}{ds} = 1$ , kann (4.48) in

$$\begin{aligned}
 c_\ell^{(0)} &= \frac{1}{d} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-md}^{-md+d} e^{-s^2 t^2} e^{-i\alpha_\ell s} ds \\
 &= \frac{1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2 t^2} e^{-i\alpha_\ell s} ds
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

überführt werden. Dieses Integral konnte bereits in dem zuvor durchgeführten Zwischenschritt (4.38) berechnet werden. Das Ergebnis dieses Zwischenschritts (4.43) wird nun in (4.49) eingesetzt, wobei  $\eta := s$  und  $\xi := \alpha_\ell$  zu setzen sind. Daraus folgt, dass

$$c_\ell^{(0)} = \frac{\sqrt{\pi}}{td} e^{-\frac{\alpha_\ell^2}{4t^2}} \tag{4.50}$$

gilt. Durch das Einsetzen der Fourier-Koeffizienten (4.50) in (3.93) kann  $s_d(\tilde{u})$  durch

$$s_d(\tilde{u}) = \frac{\sqrt{\pi}}{td} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\alpha_\ell^2}{4t^2}} e^{i2\pi \frac{\ell}{d} \tilde{u}} \tag{4.51}$$

berechnet werden. Dieses Resultat der Poissonschen Summenformel wird nun in  $F_2^{(0)}$

(4.44) eingesetzt, sodass

$$\begin{aligned}
 F_2^{(0)}(kw) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_5} t^{-1} e^{-v^2 t^2} e^{\frac{k^2}{4t^2}} e^{i\alpha\tilde{u}} \frac{\sqrt{\pi}}{td} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\alpha_\ell^2}{4t^2}} e^{i2\pi \frac{\ell}{d} \tilde{u}} dt \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}d} \int_{\gamma_5} t^{-2} e^{-v^2 t^2} e^{\frac{k^2}{4t^2}} e^{i\alpha\tilde{u}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\alpha_\ell^2}{4t^2}} e^{i2\pi \frac{\ell}{d} \tilde{u}} dt \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha\tilde{u}} e^{i2\pi \frac{\ell}{d} \tilde{u}} \int_{\gamma_5} t^{-2} e^{-v^2 t^2} e^{\frac{k^2}{4t^2}} e^{-\frac{\alpha_\ell^2}{4t^2}} dt \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha_\ell \tilde{u}} \int_{\gamma_5} t^{-2} e^{-v^2 t^2} e^{\frac{\beta_\ell^2}{4t^2}} dt
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

resultiert. Anschließend wird eine Substitution mit  $t = \frac{1}{p}$ , wobei  $dt = -\frac{1}{p^2} dp$  gilt, durchgeführt

$$\begin{aligned}
 F_2^{(0)}(kw) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha_\ell \tilde{u}} \int_{\gamma_8} p^2 e^{-\frac{v^2}{p^2}} e^{\frac{\beta_\ell^2 p^2}{4}} \frac{1}{p^2} dp \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha_\ell \tilde{u}} \int_{\gamma_8} e^{-\frac{v^2}{p^2}} e^{\frac{\beta_\ell^2 p^2}{4}} dp.
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Der hier auftretende Integrationsweg ist anders als in Kapitel 3.3 durch  $\gamma_8 = \{z \in \mathbb{C} : p = \frac{1}{t}, t \in \gamma_5\}$  definiert. Demnach wird der Integrationsweg in das Intervall  $(\frac{1}{a}, \infty)$  verschoben, wobei sich wieder durch die Substitution die Richtung dieses Wegs geändert hat und so in negative reelle Richtung führt.

Das Integral aus (4.53) soll in diesem Abschnitt näher betrachtet werden. Zunächst wird der Fall,  $\text{Re}(\beta_\ell^2) < 0$  betrachtet. Die Grundlage für die nächste Umformung ist die Formel 7.4.33 aus [1]

$$\int e^{-a^2 p^2 - \frac{b^2}{p^2}} dp = \frac{\sqrt{\pi}}{4a} \left[ e^{2ab} \text{erf} \left( ap + \frac{b}{p} \right) + e^{-2ab} \text{erf} \left( ap - \frac{b}{p} \right) \right]. \tag{4.54}$$

Mit  $b = v$ ,  $a^2 = -\frac{\beta_\ell^2}{4}$  und somit  $a = i\frac{\beta_\ell}{2}$  folgt damit

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_8} e^{-\frac{v^2}{p^2}} e^{\frac{\beta_\ell^2 p^2}{4}} dp &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2i\beta_\ell} \left[ e^{i\beta_\ell v} \operatorname{erf} \left( i\frac{\beta_\ell \infty}{2} + \frac{v}{\infty} \right) + e^{-i\beta_\ell v} \operatorname{erf} \left( i\frac{\beta_\ell}{2} \infty - \frac{v}{\infty} \right) \right. \\
 &\quad \left. - e^{i\beta_\ell v} \operatorname{erf} \left( i\frac{\beta_\ell}{2a} + va \right) - e^{-i\beta_\ell v} \operatorname{erf} \left( i\frac{\beta_\ell}{2a} - va \right) \right] \\
 &= \frac{i\sqrt{\pi}}{2\beta_\ell} \left[ -e^{i\beta_\ell v} - e^{-i\beta_\ell v} - e^{i\beta_\ell v} \operatorname{erf} \left( i\frac{\beta_\ell}{2a} + va \right) \right. \\
 &\quad \left. - e^{-i\beta_\ell v} \operatorname{erf} \left( i\frac{\beta_\ell}{2a} - va \right) \right] \\
 &= -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\beta_\ell} \left\{ e^{i\beta_\ell v} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( i\frac{\beta_\ell}{2a} + va \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + e^{-i\beta_\ell v} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( i\frac{\beta_\ell}{2a} - va \right) \right] \right\} \\
 &= -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\beta_\ell} \left\{ e^{i\beta_\ell v} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( -i\frac{\beta_\ell}{2a} - va \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + e^{-i\beta_\ell v} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( -i\frac{\beta_\ell}{2a} + va \right) \right] \right\} \\
 &= -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\beta_\ell} \left[ e^{i\beta_\ell v} \operatorname{erfc} \left( -i\frac{\beta_\ell}{2a} - va \right) + e^{-i\beta_\ell v} \operatorname{erfc} \left( -i\frac{\beta_\ell}{2a} + va \right) \right].
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Dabei wurde zum einen ausgenutzt, dass  $\operatorname{erf} \left( i\frac{\beta_\ell \infty}{2} \right) = -1$  ist, da die Wellenzahl  $k$  nach Definition eine imaginäre Zahl ist und somit  $\operatorname{erf} \left( i\frac{k\infty}{2} \right) = \operatorname{erf}(-\infty) = -1$  gilt. Zum anderen wurden die Zusammenhänge  $\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z)$  und  $\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z)$ , bei welchen es sich um die Formeln 7.1.9 und 7.1.2 aus [1] handelt, verwendet. Das Einsetzen des Ergebnisses (4.55) in (4.53) führt zu

$$\begin{aligned}
 F_2^{(0)}(kw) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha_\ell \tilde{u}} \frac{i\sqrt{\pi}}{2\beta_\ell} \left[ e^{i\beta_\ell v} \operatorname{erfc} \left( -i\frac{\beta_\ell}{2a} - va \right) \right. \\
 &\quad \left. + e^{-i\beta_\ell v} \operatorname{erfc} \left( -i\frac{\beta_\ell}{2a} + va \right) \right] \\
 &= \frac{i}{4d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_\ell} e^{i\alpha_\ell \tilde{u}} \left[ e^{i\beta_\ell v} \operatorname{erfc} \left( -i\frac{\beta_\ell}{2a} - va \right) + e^{-i\beta_\ell v} \operatorname{erfc} \left( -i\frac{\beta_\ell}{2a} + va \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Im zweiten Schritt wird der Fall  $\operatorname{Re}(\beta_\ell^2) > 0$  betrachtet. Dafür wird zunächst wie in Kapitel 3.3  $p = -iq$  mit  $dp = -idq$  substituiert

$$\int_{\gamma_8} e^{-\frac{v^2}{p^2}} e^{\frac{\beta_\ell^2 p^2}{4}} dp = -i \int_{\gamma_9} e^{\frac{v^2}{q^2}} e^{-\frac{\beta_\ell^2 q^2}{4}} dq. \tag{4.57}$$

Der Integrationsweg ist durch  $\gamma_9 := \{z \in \mathbb{C} : q = ip, p \in \gamma_8\}$  definiert. Das bedeutet, der Integrationsweg wird in das Intervall  $(\frac{i}{a}, i\infty)$  verschoben, wobei die Richtung

des Weges in negative komplexe Richtung führt. Durch erneutes Einsetzen in (4.54), wobei  $b = iv$  und  $a = \frac{\beta_\ell}{2}$ , folgt

$$\int_{\gamma_9} e^{\frac{v^2}{2}} e^{-\frac{\beta_\ell^2 q^2}{4}} dq = \frac{i\sqrt{\pi}}{2\beta_\ell} \left[ e^{i\beta_\ell v} \operatorname{erf} \left( \frac{\beta_\ell}{2} i\infty + \frac{iv}{i\infty} \right) + e^{-i\beta_\ell v} \operatorname{erf} \left( \frac{\beta_\ell}{2} i\infty - \frac{iv}{i\infty} \right) - e^{i\beta_\ell v} \operatorname{erf} \left( \frac{i\beta_\ell}{2a} + \frac{iva}{i} \right) - e^{-i\beta_\ell v} \operatorname{erf} \left( \frac{i\beta_\ell}{2a} - \frac{iva}{i} \right) \right]. \quad (4.58)$$

Dieses Resultat stimmt genau mit dem ersten Zwischenergebnis von (4.55) überein. Aus diesem Grund ist auch in diesem Fall die Funktion  $F_2^{(0)}(kw)$  durch (4.56) definiert. Auf Grund der Kontinuität kann Gleiches auch für den Fall  $\operatorname{Re}(\beta_\ell^2) = 0$  ausgesagt werden. Zur Vereinfachung wird die Funktion  $F_2^{(0)}(kw)$  mit Hilfe von zwei separaten Reihen ausgeschrieben, wobei sich diese Reihen lediglich durch zwei Vorzeichen unterscheiden

$$F_2^{(0)(\pm)}(kw) = \frac{i}{4d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_\ell} e^{i\alpha_\ell \tilde{u}} e^{\mp i\beta_\ell v} \operatorname{erfc} \left( -i \frac{\beta_\ell}{2a} \pm va \right). \quad (4.59)$$

Nun muss lediglich gezeigt werden, dass (4.59) exponentiell schnell konvergiert. Da im nächsten Kapitel die Konvergenz der abgeschnittenen Reihen betrachtet wird, ist es darüber hinaus notwendig, einen geeigneten Startwert  $\ell_0$  der Reihe  $\sum_{\ell=\ell_0-M}^{\ell_0+M}$  zu finden. Dieser Startwert  $\ell_0$  ist so zu wählen, dass  $|\alpha_{\ell_0}| \leq |\alpha_\ell|$  gilt. Aus diesem Grund muss jetzt gezeigt werden, dass ein  $M$  existiert, so dass die Reihe (4.59) für alle  $\ell \geq M$  exponentiell schnell konvergiert. Für den Beweis wird zunächst die Definition der Faddeeva Funktion verwendet [1, S. 297], welche besagt, dass

$$w(z) := e^{-z^2} \operatorname{erfc}(-iz) = e^{-z^2} \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt \right). \quad (4.60)$$

Diese wird in (4.59) eingesetzt, indem zunächst künstlich das neutrale Element  $e^{z^2} e^{-z^2}$  eingefügt wird

$$\begin{aligned} F_2^{(0)(\pm)}(kw) &= \frac{i}{4d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_\ell} e^{i\alpha_\ell \tilde{u}} e^{\mp i\beta_\ell v} \operatorname{erfc} \left( -i \left( \frac{\beta_\ell}{2a} \pm iva \right) \right) \\ &= \frac{i}{4d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_\ell} e^{i\alpha_\ell \tilde{u}} e^{\mp i\beta_\ell v} e^{\frac{\beta_\ell^2}{4a^2} \pm iv\beta_\ell - v^2 a^2} e^{-\frac{\beta_\ell^2}{4a^2} \mp iv\beta_\ell + v^2 a^2} \operatorname{erfc} \left( -i \left( \frac{\beta_\ell}{2a} \pm iva \right) \right) \\ &= \frac{i}{4d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_\ell} e^{i\alpha_\ell \tilde{u}} e^{\mp i\beta_\ell v} e^{\frac{\beta_\ell^2}{4a^2} \pm iv\beta_\ell - v^2 a^2} w \left( \frac{\beta_\ell}{2a} \pm iva \right) \\ &= \frac{i}{4d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_\ell} e^{i\alpha_\ell \tilde{u}} e^{\frac{\beta_\ell^2}{4a^2} - v^2 a^2} w \left( \frac{\beta_\ell}{2a} \pm iva \right). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Für das Argument des Eingabewerts der Faddeeva-Funktion gilt  $\arg \left( \frac{\beta_\ell}{2a} \pm iva \right) \in [0, \frac{\pi}{2})$  unter der Voraussetzung, dass  $|\ell|$  groß genug ist. Dieses begründet sich auf

der Tatsache, dass die Voraussetzung  $\arg(k) \in (0, \frac{\pi}{2})$  gilt. Demnach ist

$$\arg\left(\sqrt{k^2 - \alpha_\ell^2}\right) = \arg\left(\sqrt{(k_R^2 - k_I^2 - \alpha_\ell^2) + 2ik_R k_I}\right) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

wobei  $k_R := \operatorname{Re}(k) > 0$  und  $k_I := \operatorname{Im}(k) > 0$  gilt. Anschließend muss lediglich  $\pm i\nu a$  hinzugefügt werden. In dem Fall  $+i\nu a$  müssen keine zusätzlichen Einschränkungen gemacht werden und es gilt direkt  $\arg\left(\frac{\beta_\ell}{2a} + i\nu a\right) \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Anders ist das in dem Fall  $-i\nu a$ . Damit  $\arg\left(\frac{\beta_\ell}{2a} - i\nu a\right) \in (0, \frac{\pi}{2})$  gilt, muss die zusätzliche Anforderung  $\operatorname{Im}\left(\sqrt{k^2 - \alpha_\ell^2}\right) > 2a^2\nu$  erfüllt sein, da genau dann  $\operatorname{Im}\left(\frac{\beta_\ell}{2a} - i\nu a\right) > 0$  zutrifft und somit für das Argument  $\arg\left(\frac{\beta_\ell}{2a} - i\nu a\right) \in [0, \frac{\pi}{2})$  gilt. Dieses tritt genau in dem Fall ein, wenn  $|\ell|$  und dadurch  $|\alpha_\ell|$  groß genug ist. Wie im nächsten Schritt gezeigt werden kann, ist der absolute Wert der Faddeeva-Funktion für solche Argumente durch eins begrenzt. Dafür wird unter anderem die Substitution mit  $t = s + y - ix$  und  $dt = ds$  durchgeführt

$$\begin{aligned} |w(x + iy)|^2 &= \left| e^{-(x+iy)^2} \operatorname{erfc}(-ix + y) \right|^2 \\ &= \left| e^{-(x+iy)^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y-ix}^{\infty} e^{-t^2} dt \right|^2 \\ &= \frac{4}{\pi} \left| e^{-(x+iy)^2} \right|^2 \left| \int_{y-ix}^{\infty} e^{-t^2} dt \right|^2 \\ &= \frac{4}{\pi} \left( e^{\operatorname{Re}(-x^2 - 2ixy + y^2)} \right)^2 \left| \int_0^{\infty} e^{-(s+y-ix)^2} ds \right|^2 \\ &= \frac{4}{\pi} e^{(-x^2 + y^2)^2} \left| \int_0^{\infty} e^{-s^2 - 2s(y-ix) - (y-ix)^2} ds \right|^2 \\ &= \frac{4}{\pi} \left| \int_0^{\infty} e^{-x^2 + y^2 - s^2 - 2s(y-ix) - y^2 + 2ixy + x^2} ds \right|^2 \\ &= \frac{4}{\pi} e^{\operatorname{Re}(4ixy)} \left| \int_0^{\infty} e^{-s^2 - 2s(y-ix)} ds \right|^2 \\ &= \frac{4}{\pi} \left| \int_0^{\infty} e^{-s^2 - 2s(y-ix)} ds \int_0^{\infty} e^{-t^2 - 2t(y-ix)} dt \right|^2 \\ &= \frac{4}{\pi} \left| \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s^2 - t^2 - 2(s+t)y + 2i(s+t)x} ds dt \right|. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Als nächstes können einige Abschätzungen nach oben vorgenommen werden, die

darauf begründet sind, dass  $s, t, y \geq 0$  sind

$$\begin{aligned}
 |w(x + iy)|^2 &\leq \frac{4}{\pi} \left| \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s^2-t^2+2i(s+t)x} ds dt \right| \\
 &\leq \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty |e^{-s^2-t^2}| |e^{2i(s+t)x}| ds dt \\
 &= \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s^2-t^2} ds dt \\
 &= \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-s^2} ds \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt \\
 &= 1.
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Abschließend kann durch die zusätzliche untere Grenze aus [4, S. 9]:

$$\left( \alpha + \frac{2\pi}{d} (\ell + \ell_0) \right)^2 \geq \frac{4\pi^2}{d^2} (|\ell| - 1)^2, \tag{4.64}$$

zusammen mit der Abschätzung der Faddeeva-Funktion (4.63) und (4.61) die folgende Beschränkung gefolgert werden

$$\begin{aligned}
 \left| e^{\mp i\beta\ell+\ell_0v} \operatorname{erfc} \left( -i \left( \frac{\beta\ell+\ell_0}{2a} \pm i va \right) \right) \right| &= \left| e^{\frac{\beta\ell+\ell_0}{4a^2} - v^2 a^2} w \left( \frac{\beta\ell+\ell_0}{2a} \pm i va \right) \right| \\
 &= \left| e^{\frac{\beta\ell+\ell_0}{4a^2} - v^2 a^2} \right| \left| w \left( \frac{\beta\ell+\ell_0}{2a} \pm i va \right) \right| \\
 &\leq \left| e^{\frac{k^2}{4a^2} - \frac{\alpha\ell+\ell_0}{4a^2} - v^2 a^2} \right| \\
 &\leq \left| e^{\frac{k^2}{4a^2} - \frac{\pi^2}{d^2} \frac{(|\ell|-1)^2}{a^2} - v^2 a^2} \right| \\
 &= e^{\frac{|k|^2}{4a^2} - \frac{4\pi^2(|\ell|-1)^2}{4(ad)^2} - v^2 a^2}.
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

Die identischen Schritte können auch für die Funktion  $f_0^{(2)}$  durchgeführt werden. Das Zusammensetzen der quasi-periodischen Funktionen beider Funktionen liefert

das Gesamtergebnis

$$\begin{aligned}
 F_{2,\text{ges}}^{(0)}(kw, k\tilde{w}) &= F_2^{(0)(\pm)}(kw) - F_2^{(0)(\pm)}(k\tilde{w}) \\
 &= \frac{i}{4d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_\ell} e^{i\alpha_\ell \tilde{u}} e^{\frac{\beta_\ell^2}{4a^2} - v^2 a^2} w\left(\frac{\beta_\ell}{2a} \pm i v a\right) \\
 &\quad - \frac{i}{4d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_\ell} e^{i\alpha_\ell \tilde{u}} e^{\frac{\beta_\ell^2}{4a^2} - \tilde{v}^2 a^2} w\left(\frac{\beta_\ell}{2a} \pm i \tilde{v} a\right) \\
 &= \frac{i}{4d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_\ell} e^{i\alpha_\ell \tilde{u}} e^{\frac{\beta_\ell^2}{4a^2}} \left[ e^{-v^2 a^2} w\left(\frac{\beta_\ell}{2a} \pm i v a\right) - e^{-\tilde{v}^2 a^2} w\left(\frac{\beta_\ell}{2a} \pm i \tilde{v} a\right) \right].
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

Durch die gleiche Argumentation wie zuvor kann der exponentielle Abfall der einzelnen Terme von (4.66) begründet werden

$$\begin{aligned}
 &\left| e^{\frac{\beta_{\ell+\ell_0}^2}{4a^2}} \left[ e^{-v^2 a^2} w\left(\frac{\beta_{\ell+\ell_0}}{2a} \pm i v a\right) - e^{-\tilde{v}^2 a^2} w\left(\frac{\beta_{\ell+\ell_0}}{2a} \pm i \tilde{v} a\right) \right] \right| \\
 &= \left| e^{\frac{\beta_{\ell+\ell_0}^2}{4a^2}} \left| e^{-v^2 a^2} w\left(\frac{\beta_{\ell+\ell_0}}{2a} \pm i v a\right) - e^{-\tilde{v}^2 a^2} w\left(\frac{\beta_{\ell+\ell_0}}{2a} \pm i \tilde{v} a\right) \right| \right| \\
 &\leq \left| e^{\frac{k^2}{4a^2} - \frac{\alpha_{\ell+\ell_0}^2}{4a^2}} \right| \left[ \left| e^{-v^2 a^2} w\left(\frac{\beta_{\ell+\ell_0}}{2a} \pm i v a\right) \right| + \left| e^{-\tilde{v}^2 a^2} w\left(\frac{\beta_{\ell+\ell_0}}{2a} \pm i \tilde{v} a\right) \right| \right] \\
 &\leq \left| e^{\frac{k^2}{4a^2} - \frac{4\pi^2(|\ell-1|)^2}{4(ad)^2}} \right| \left[ \left| e^{-v^2 a^2} \right| \left| w\left(\frac{\beta_{\ell+\ell_0}}{2a} \pm i v a\right) \right| + \left| e^{-\tilde{v}^2 a^2} \right| \left| w\left(\frac{\beta_{\ell+\ell_0}}{2a} \pm i \tilde{v} a\right) \right| \right] \\
 &\leq e^{\frac{|k|^2}{4a^2} - \frac{\pi^2(|\ell-1|)^2}{(ad)^2}} \left[ \left| e^{-v^2 a^2} \right| + \left| e^{-\tilde{v}^2 a^2} \right| \right].
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

Somit konnte gezeigt werden, dass sowohl  $F_1^{(0)}(kw, k\tilde{w})$  als auch  $F_{2,\text{ges}}^{(0)}(kw, k\tilde{w})$  exponentiell schnell konvergieren. Dieses kann auch in Abbildung 4.2 gesehen werden. Sowohl die für den Halbraum als auch für den ganzen Raum liegt eine exponentielle Konvergenz vor. Diese gilt sowohl in dem Fall, dass  $x_2 \neq y_2$  (siehe Abbildung 4.2(a))

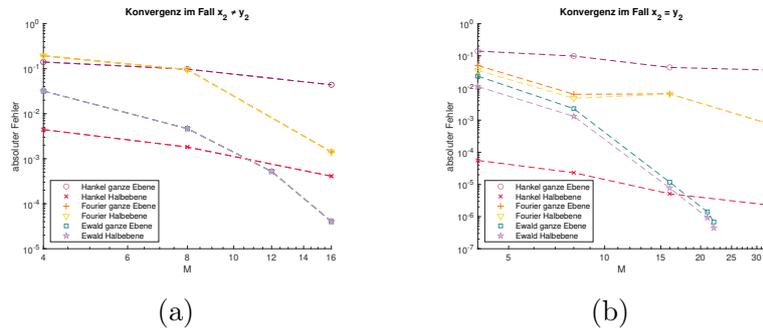


Abbildung 4.2: Konvergenz der Reihen mit der Hilfe der Hankelfunktion, ihrer Fourier-Reihendarstellung und der Darstellung über die Ewald'sche-Methode der ganzen Ebene und Halbebene für die Fundamentallösung. 4.2(a): Fall  $x_2 \neq y_2$ , 4.2(b): Fall  $x_2 = y_2$ .

als auch in dem Fall  $x_2 = y_2$  (siehe Abbildung 4.2(b)) gilt.

Des Weiteren kann durch die Ableitung  $\frac{dF_{2,\text{ges}}^{(0)}}{dy_2}$  der zweite Anteil des Doppelschicht-

operators berechnet werden (vergleiche Abschnitt 3.3). Bei diesem mussten bisher zwei Integrale gelöst werden, wobei das innere sich nicht analytisch berechnen ließ. Indem jetzt einfach die Ableitung berechnet wird, entsteht eine Darstellungsform, welche deutlich leichter zu berechnen ist. Dabei ist zu beachten, dass die Ableitung der Faddeeva-Funktion durch  $\frac{dw(z)}{dz} = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} - 2zw(z)$  definiert ist

$$\begin{aligned}
 F_2(kw, k\tilde{w}) &= \frac{d \frac{i}{4d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_\ell} e^{i\alpha_\ell \tilde{u}} e^{\frac{\beta_\ell^2}{4a^2}} \left[ e^{-v^2 a^2} w\left(\frac{\beta_\ell}{2a} \pm iva\right) - e^{-\tilde{v}^2 a^2} w\left(\frac{\beta_\ell}{2a} \pm i\tilde{v}a\right) \right]}{dy_2} \\
 &= \frac{i}{4d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_\ell} e^{i\alpha_\ell \tilde{u}} e^{\frac{\beta_\ell^2}{4a^2}} \left\{ 2a^2 v e^{-v^2 a^2} w\left(\frac{\beta_\ell}{2a} \pm iva\right) \right. \\
 &\quad + e^{-v^2 a^2} (\mp ia) \left[ \frac{2i}{\sqrt{\pi}} - 2\left(\frac{\beta_\ell}{2a} \pm iva\right) w\left(\frac{\beta_\ell}{2a} \pm iva\right) \right] \\
 &\quad + 2a^2 \tilde{v} e^{-\tilde{v}^2 a^2} w\left(\frac{\beta_\ell}{2a} \pm i\tilde{v}a\right) \\
 &\quad \left. - e^{-\tilde{v}^2 a^2} (\pm ia) \left[ \frac{2i}{\sqrt{\pi}} - 2\left(\frac{\beta_\ell}{2a} \pm i\tilde{v}a\right) w\left(\frac{\beta_\ell}{2a} \pm i\tilde{v}a\right) \right] \right\} \\
 &= \frac{i}{4d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_\ell} e^{i\alpha_\ell \tilde{u}} e^{\frac{\beta_\ell^2}{4a^2}} \left\{ \mp e^{-v^2 a^2} ia \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \right. \\
 &\quad + \left[ 2a^2 v e^{-v^2 a^2} \pm 2\left(\frac{\beta_\ell}{2a} \pm iva\right) ia e^{-v^2 a^2} \right] w\left(\frac{\beta_\ell}{2a} \pm iva\right) \\
 &\quad + \left[ 2a^2 \tilde{v} e^{-\tilde{v}^2 a^2} \pm 2\left(\frac{\beta_\ell}{2a} \pm i\tilde{v}a\right) ia e^{-\tilde{v}^2 a^2} \right] w\left(\frac{\beta_\ell}{2a} \pm i\tilde{v}a\right) \\
 &\quad \left. \mp e^{-\tilde{v}^2 a^2} ia \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \right\} \\
 &= \frac{i}{2d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_\ell} e^{i\alpha_\ell \tilde{u}} e^{\frac{\beta_\ell^2}{4a^2}} \left\{ \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left( \pm e^{-v^2 a^2} \pm e^{-\tilde{v}^2 a^2} \right) \right. \\
 &\quad + \left[ \left( a^2 v \pm \frac{i\beta_\ell}{2} - va^2 \right) e^{-v^2 a^2} \right] w\left(\frac{\beta_\ell}{2a} \pm iva\right) \\
 &\quad + \left[ \left( a^2 \tilde{v} \pm \frac{i\beta_\ell}{2} - \tilde{v}a^2 \right) e^{-\tilde{v}^2 a^2} \right] w\left(\frac{\beta_\ell}{2a} \pm i\tilde{v}a\right) \left. \right\} \\
 &= \frac{i}{4d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_\ell} e^{i\alpha_\ell \tilde{u}} e^{\frac{\beta_\ell^2}{4a^2}} \left[ \pm i\beta_\ell e^{-v^2 a^2} w\left(\frac{\beta_\ell}{2a} \pm iva\right) \right. \\
 &\quad \left. \pm i\beta_\ell e^{-\tilde{v}^2 a^2} w\left(\frac{\beta_\ell}{2a} \pm i\tilde{v}a\right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Für diese Reihe kann analog zu [4, S. 23] gezeigt werden, dass sie und ihre abgeschnittene Reihe exponentiell schnell konvergieren. Durch das Zusammenfügen von der in Abschnitt 3.2 hergeleiteten Reihe  $F_1(kw, k\tilde{w})$  (3.86) und der Reihe  $F_2(kw, k\tilde{w})$  (4.68) lässt sich eine exponentielle Konvergenz erkennen. Im Unterschied zu der Fourier-transformierten Reihe, ist es dabei unerheblich, ob  $x_2$  und  $y_2$  dicht beieinander liegen, oder weit entfernt voneinander sind.

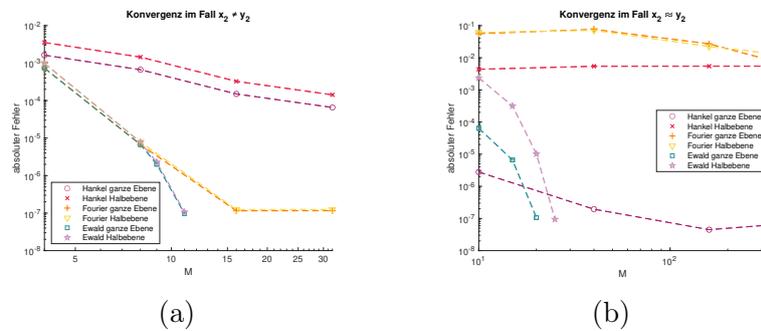


Abbildung 4.3: Konvergenz der Reihen mit der Hilfe der Hankelfunktion, ihrer Fourier-Reihendarstellung und der Darstellung über die Ewald'sche-Methode der ganzen Ebene und Halbebene für die Ableitung der Fundamentallösung nach  $y_2$ . 4.3(a): Fall  $x_2 \neq y_2$ , 4.3(b): Fall  $x_2 = y_2$ .

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Masterarbeit wurde ein geeignetes mathematisches Modell entwickelt, um das akustische Streuproblem des äußeren Dirichlet-Problems auf der oberen Halbebene zu simulieren. Dabei wurde die Randintegralgleichungsmethode verwendet, da diese, anders als die Finite-Differenzen-, die Finite-Volumen und die Finite-Elemente-Methode, in der Lage ist, Lösungen auf unbeschränkten Gebieten zu berechnen.

Bei der Randintegralgleichungsmethode wird mit Hilfe der Fundamentallösung der Helmholtzgleichung die Dichte auf dem Rand des periodischen Streuobjekts berechnet. Anschließend kann mit Hilfe dieser Dichtefunktion die Lösung des betrachteten Problems in der oberen Halbebene außerhalb des Streuobjekts berechnet werden. Die dazu verwendete Green'sche-Funktion und ihre Ableitungen sind Reihen. Wie in Abschnitt 2.4 gezeigt werden konnte, enthält die Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung und ihre für den Doppelschichtoperator benötigte Ableitung nach  $y_1$  keine nicht-hebbare Singularstelle. Im Gegensatz dazu existiert eine Singularstelle, wenn die Green'sche Funktion nach  $y_2$  abgeleitet wird. Es konnte ebenfalls in Kapitel 3 dargestellt werden, dass die so definierten Reihen lediglich mit der Konvergenzordnung  $p = 0,42$  konvergieren, wenn  $x_2$  und  $y_2$  dicht beieinander liegen.

Aus diesen Gründen wurde mit Hilfe einer alternativen Darstellungsform der Hankelfunktion und der Ewald'schen Methode die nach  $y_2$  abgeleitete Fundamentallösung zunächst in zwei Teile gesplittet. Ein Anteil, welcher die Singularität enthält, dafür jedoch exponentiell schnell konvergiert und einen Anteil, der keine Singularität enthält, dafür jedoch nicht exponentiell schnell konvergiert. In Abschnitt 3.2 konnte gezeigt werden, dass der Anteil mit Singularität tatsächlich exponentiell schnell konvergiert. Gleiches konnte für die Partialsumme dieser Reihe in Abschnitt 3.4 bewiesen werden. Der Anteil ohne Singularstelle wurde in Abschnitt 3.3 mit Hilfe einer Fouriertransformation in eine exponentiell schnell konvergierende Form gebracht. Der Nachteil an der Darstellungsform dieser Reihe ist jedoch, dass in dieser ein Integral enthalten ist, welches numerisch berechnet werden muss.

Aus diesem Grund wurde im Anschluss der Einfachschichtoperator betrachtet. Dieser wurde auf die gleiche Art und Weise mit der Ewald'schen Methode und der alternativen Darstellungsform der Hankelfunktion in zwei Teile aufgespalten. Der Term, welcher auftaucht, wenn der ganze Raum betrachtet wird, und der Term, welcher durch das Prinzip der Spiegelladungen dazukommt, wurden separat betrachtet. Der Grund dafür ist, dass die Fundamentallösung, welche zum Berechnen des Einfachschichtoperators notwendig ist, nur eine hebbare Singularstelle besitzt. Die zwei einzelnen Operatoren hingegen besitzen jeweils nicht-hebbare Singularstellen.

In Abschnitt 4.1 konnte die exponentielle Konvergenz des Anteils mit Singularstelle gezeigt werden. Der Anteil ohne Singularstelle wurde erneut Fourier-transformiert. Anders als bei der Betrachtung der Ableitung nach  $y_2$  konnte das Resultat mit Hilfe der Faddeeva-Funktion weiter vereinfacht werden. Dadurch ließ sich die exponentielle

Konvergenz des Anteils ohne Singulärstelle zeigen.

Zum Schluss wurde der Anteil der Green'schen-Funktion ohne Singulärstelle nach  $y_2$  abgeleitet und so eine leichter zu implementierende Darstellung, als in Abschnitt 3.3 hergeleitet wurde, gefunden. Auch diese konvergiert exponentiell schnell.

Damit konnte das Ziel dieser Masterarbeit, ein geeignetes mathematisches Modell zu definieren, welches das äußere Dirichlet-Problem der Helmholtz-Gleichung in der oberen Halbebene beschreibt, mit Hilfe der Randintegralgleichungsmethode erfüllt werden. Auch konnten unter Einsatz der Ewald'schen-Methode, die für dieses Problem zu berechnenden Reihen in Formen gebracht werden, die exponentiell schnell konvergieren.

Verglichen mit der aktuellen Methode, das verwendete Streuproblem im ganzen Raum zu betrachten, hat die hier erläuterte Vorgehensweise einige Vorteile. Zum einen enthält die Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung und ihre Ableitung nach  $y_1$  keine nicht-hebbaren Singulärstellen. Zum anderen konnte anhand der Konvergenzverläufe entdeckt werden, dass die Reihen, welche mittels der Ewald'schen-Methode in der oberen Halbebene berechnet wurden, am schnellsten konvergieren.

Aus diesem Grund kann in einer weiterführenden Forschung das betrachtete Streuproblem mit der Randelementmethode diskretisiert und anschließend für gegebene periodische Medien mit entsprechender Parameterwahl berechnet werden. Außerdem kann die geeignete Wahl des Parameters  $a$  mit Hilfe des in [4] beschriebenen Ansatzes untersucht werden. Ein weiteres aktuelles Problem ist, dass nicht-hebbare Singulärstellen bei dem Doppelschichtoperator vorliegen. Aus diesem Grund kann die Ableitung der Fundamentallösung an diesen Stellen derzeit nicht berechnet werden. Wie dieses Problem gelöst werden kann, ist eine zukünftige Forschungsfrage. Darüber hinaus könnte betrachtet werden, ob die Konvergenzordnungen der verschiedenen Reihen, welche in Kapitel 3 und 4 anhand der Abbildungen berechnet wurden, wie in [2, Lemma 6.1] bewiesen werden können. Im Hinblick auf die vielen zu berechnenden Reihen ist es sinnvoll, über eine geeignete Parallelisierung nachzudenken. Bisher wurde in dieser Masterarbeit das Streuproblem im zweidimensionalen Raum betrachtet. Zusätzlich könnte das Streuproblem im dreidimensionalen Raum untersucht werden. Des Weiteren könnte an diese Forschung angeknüpft werden und die gleiche Methodik auf andere Streuprobleme, wie das elektromagnetische und das elastische Streuproblem, übertragen werden.

## Literaturverzeichnis

- [1] ABRAMOWITZ, MILTON, IRENE A STEGUN et al.: *Handbook of mathematical functions*, Band 55. Dover New York, 1964.
- [2] ARENS, TILO: *The scattering of plane elastic waves by a one-dimensional periodic surface*. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 22(1):55–72, 1999.
- [3] ARENS, TILO: *Scattering by Biperiodic Layered Media: The Integral Equation Approach*, 2010. <https://www.doi.org/10.5445/IR/1000016241>, Habilitation.
- [4] ARENS, TILO, KAI SANDFORT, SUSANNE SCHMITT, und ARMIN LECHLEITER: *Analysing Ewald's Method for the Evaluation of Green's Functions for Periodic Media*. Karlsruhe Institut für Technologie, 2010.
- [5] BRAUN, RÜDIGER W.: *Vorlesungsskript: Spezielle Funktionen*, Juli 2017. [https://www.math.uni-duesseldorf.de/~braun/spez\\_17/vorlesung.pdf](https://www.math.uni-duesseldorf.de/~braun/spez_17/vorlesung.pdf) aufgerufen am 12.06.2023.
- [6] BRUNO, OSCAR P. und BÉRANGÈRE DELOURME: *Rapidly convergent two-dimensional quasi-periodic green function throughout the spectrum—including wood anomalies*. *Journal of Computational Physics*, 262:262–290, 2014.
- [7] BRUNO, OSCAR P. und AGUSTIN G. FERNANDEZ-LADO: *Rapidly convergent quasi-periodic green functions for scattering by arrays of cylinders—including wood anomalies*. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 473, 2017.
- [8] COLTON, DAVID L und RAINER KRESS: *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Band 93. Springer, 2 Auflage, 1998.
- [9] DRACH, VOLKER: *Beobachtungen mit Röntgen- und Elektronenstrahlen Orbitale sichtbar gemacht*. *Physik in unserer Zeit*, 30(6):263–263, 1999.
- [10] FRITZSCHE, KLAUS: *Grundkurs Funktionentheorie Eine Einführung in die komplexe Analysis und ihre Anwendungen*. Spektrum Akademischer Verlag, 1 Auflage, 2009.
- [11] HILGER, STEFEN: *Skript zur Vorlesung: Funktionentheorie 1 (Wintersemester 2018/19)*, 2019. [https://www.ku.de/fileadmin/150109/Hilger/FTH1\\_WS2018.pdf](https://www.ku.de/fileadmin/150109/Hilger/FTH1_WS2018.pdf) aufgerufen am 20.10.2023.
- [12] HOERNIG, RICARDO OLIVER HEIN: *Green's functions and integral equations for the Laplace and Helmholtz operators in impedance half-spaces*. Doktorarbeit, Ecole Polytechnique X, 2010.
- [13] HOPF, EBERHARD: *Mathematical Problems Of Radiative Equilibrium*. At The University Press, 1933.

- 
- [14] IVAN G. GRAHAM, ULRICH LANGER, JENS M. MELENK und MOURAD SINI (Herausgeber): *Direct and Inverse Problems in Wave Propagation and Applications*. De Gruyter, 2013.
- [15] KIRSCH, ANDREAS: *A scattering problem for a local perturbation of an open periodic waveguide*. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(10):5737–5773, 2022.
- [16] KONSCHIN, ALEXANDER: *Direkte und inverse elektromagnetische Streuprobleme für lokal gestörte periodische Medien*. Doktorarbeit, Universität Bremen, 2019.
- [17] LIEB, ELLIOTT H. und MICHAEL LOSS: *Analysis*. American Mathematical Society, 2001.
- [18] LINTON, CHRIS: *The Green's Function for the Two-Dimensional Helmholtz Equation in Periodic Domains*. *Journal of Engineering Mathematics*, 33:377–401, 1998.
- [19] LINTON, CHRIS und DAVID EVANS: *The Radiation and Scattering of Surface Waves by a Vertical Circular Cylinder in a Channel*. *Philosophical Transactions of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 338:325–357, 02 1992.
- [20] PAETZOLD, ULRICH W., STEPHAN LEHNEN, KARSTEN BITTKAU, UWE RAU, und REINHARD CARIUS: *Nanoscale observation of waveguide modes enhancing the efficiency of solar cells*. *Nano Letters*, 14(11):6599–6605, 2014.
- [21] PETIT, ROGER, MICHEL CADILHAC, DANIEL MAYSTRE, PASCAL VINCENT, MICHEL NEVIERE, ROSS MCPHEDRAN, GRAHAM DERRICK, und LINDSAY BOTTON: *Electromagnetic Theory of Gratings*. Springer, 1980.
- [22] SAUTER, STEFFAN A. und CHRISTOPH SCHWAB: *Boundary Element Methods*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, 2010.
- [23] WALTER, ROLF: *Einführung in die Analysis 1*. De Gruyter, 2007.
- [24] WESTERMANN, THOMAS: *Mathematik für Ingenieure: Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch*. Springer, 5. Auflage, 2008.
- [25] WILCOX, CALVIN H: *Scattering theory for diffraction gratings*, Band 46. Springer, 2012.