

Fachhochschule Aachen Campus Jülich

Fachbereich 9: Medizintechnik und Technomathematik
Studiengang: Angewandte Mathematik und Informatik

Direkte Streuprobleme für kreis- und ellipsenförmige Gebiete

Bachelorarbeit

von

Pascal Lafarré

Erstprüfer: Prof. Dr. Andreas Kleefeld
Zweitprüfer: Oliver Bücker
Matrikelnummer: 3245441

Jülich, den 25. November 2024

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die Bachelorarbeit mit dem Thema

Direkte Streuprobleme für kreis- und ellipsenförmige Gebiete

selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, alle Ausführungen, die anderen Schriften wörtlich oder sinngemäß entnommen wurden, kenntlich gemacht sind und die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Fassung noch nicht Bestandteil einer Studien- oder Prüfungsleistung war.

Ich verpflichte mich, ein Exemplar der Bachelorarbeit fünf Jahre aufzubewahren und auf Verlangen dem Prüfungsamt des Fachbereiches Medizintechnik und Technomathematik auszuhändigen.



Pascal Lafarré

Jülich, den 25. November 2024

Abstract

Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung und die grafische Darstellung von direkten Streuproblemen für kreis- und ellipsenförmige Gebiete und deren numerische Auswertung. Es wird analysiert, wie akustische Wellen sich verhalten und reflektiert werden, nachdem sie auf kreis- oder ellipsenförmige Objekte treffen. Außerdem wird erklärt, welche Voraussetzungen gelten müssen und wie das gestreute Feld berechnet werden kann. Dafür wird erklärt, wie Streuprobleme allgemein durch die Helmholtz-Gleichung, die Sommerfeld-Ausstrahlungsbedingung und Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen mathematisch definiert werden. Ebenfalls wird gezeigt, wie mithilfe von Bessel-Funktionen kreisförmige und mit Mathieu-Funktionen ellipsenförmige Wellen dargestellt werden können. Darauf aufbauend wird gezeigt, wie die einfallenden planaren und die gestreuten Wellen durch die Jacobi-Anger-Erweiterung als Linearkombination solcher Wellen ermittelt werden können. Schließlich wird ein Programm vorgestellt, welches solche Wellen berechnen und grafisch darstellen kann.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	9
2	Streuprobleme	10
2.1	Helmholtz-Gleichung	11
2.2	Strahlung	12
2.3	Materialeigenschaften	13
2.4	Problemformulierung	14
2.5	Fernfeld	14
3	Wellen	15
3.1	Kreisförmige Wellen	15
3.2	Elliptische Wellen	22
3.3	Planare Wellen	28
4	Streuung an speziellen Körpern	32
4.1	Kreis	32
4.1.1	Schallweicher Kreis	33
4.1.2	Schallharter Kreis	35
4.2	Ellipse	37
4.2.1	Schallweiche Ellipse	37
4.3	Schallharte Ellipse	38
5	Numerische Ergebnisse	40
5.1	Womit wurde gearbeitet	40
5.2	Nutzung des Programms	43
6	Zusammenfassung & Ausblick	50
6.1	Zusammenfassung	50

6.2 Ausblick	51
Literatur	53

1 Einleitung

Diese Arbeit befasst sich mit direkten akustischen Streuproblemen für kreis- und ellipsenförmige Gebiete und deren numerische Auswertung. Genauer gesagt wird untersucht, wie sich akustische Wellen verhalten, bzw. zurückgeworfen werden, nachdem sie auf einen kreis- oder ellipsenförmigen Gegenstand getroffen sind. Akustische Streuprobleme spielen unter anderem eine wichtige Rolle in der Ultraschalltechnologie zur medizinischen Bildgebung [21].

Ziel dieser Arbeit ist es, die theoretischen Grundlagen dieser speziellen Streuprobleme zu erläutern und ihre praktischen Anwendungen zu demonstrieren. Dabei wird sowohl auf die mathematische Herleitung als auch auf die numerische Implementierung eingegangen. Ein besonderer Fokus liegt darauf, das Feld der zurückgeworfenen Welle eines Kreises als Linearkombination kreisförmiger Wellen und ebenso das Feld der zurückgeworfenen Welle einer Ellipse als Linearkombination ellipsenförmiger Wellen darzustellen, um es mit den Ergebnissen allgemeineren Methoden der Berechnung zu vergleichen.

Die Arbeit wie folgt gegliedert: Im zweiten Kapitel werden die grundlegenden Eigenschaften von Streuproblemen vorgestellt. Das dritte Kapitel widmet sich der verschiedenen Wellenarten, die genutzt werden, um das Feld der zurückgeworfenen Welle zu berechnen. Im vierten Kapitel werden Darstellungen des zurückgeworfenen Feldes detailliert hergeleitet. Abschließend werden im vierten Kapitel praktische Anwendungen und Beispiele mit der Programmiersprache Python diskutiert.

2 Streuprobleme

In diesem Kapitel werden die mathematischen Grundlagen beschrieben, welche allgemein bei solchen Streuproblemen vorliegen. Am wichtigsten sind dabei

1. die Helmholtz-Gleichung,
2. die Sommerfeld-Ausstrahlungsbedingung und
3. die Dirichlet- oder Neumann-Randbedingung.

Diese drei Formeln legen mathematisch fest, wie solche akustischen Felder sich verhalten. Ebenso wird hier das Fernfeld vorgestellt, was für die Berechnung der gestreuten Felder nicht benötigt wird, doch bei aufbauenden Themen, wie inversen Streuproblemen, eine wichtige Rolle spielt.

In der Streutheorie geht es um die Modellierung von Wellen im n -dimensionalen Raum und deren Verhalten, wenn sie auf ein Objekt treffen. Der Druck einer Welle an Ort $x \in \mathbb{R}^n$ zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ wird in dieser Arbeit mit p notiert und als zeitharmonisch angenommen.

Definition 2.0.1 (Zeitharmonische Welle). *Eine zeitharmonische Welle ist eine Welle, die sich mit einer konstanten Frequenz und Amplitude ausbreitet und durch eine komplexe Exponentialfunktion beschrieben werden kann. Die allgemeine Form einer solchen Welle kann als*

$$p(x) = \operatorname{Re}\{p_0 \cdot u(x) \cdot e^{i\omega t}\} \quad (2.1)$$

ausgedrückt werden ([26]), wobei p_0 die Amplitude, $u(x)$ eine ortsabhängige Funktion, ω die Wellenzahl und i die imaginäre Einheit darstellt¹.

¹ $\operatorname{Re}\{z\}$ beschreibt den Realteil der komplexen Zahl z .

2.1 Helmholtz-Gleichung

Eine wichtige Grundlage, um das solche Wellen zu modellieren, ist die Wellengleichung 2.2.

Definition 2.1.1 (Wellengleichung). *Die Wellengleichung, auch bekannt als D'Alembert-Gleichung, ist eine fundamentale partielle Differentialgleichung in der Physik. Sie beschreibt die Ausbreitung von Wellen, wie beispielsweise Schallwellen, Wasserwellen oder elektromagnetische Wellen.*

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

Dabei entspricht c der Geschwindigkeit der Welle, Δ dem Laplace-Operator und t der Zeit.

Da die betrachteten Wellen zeitharmonisch sind, lässt sich die Zeitabhängigkeit, sowie die Amplitude gänzlich aus der Wellengleichung kürzen, was zur reduzierten Wellengleichung oder auch Helmholtz-Gleichung führt, siehe 2.1.

Definition 2.1.2 (Helmholtz-Gleichung). *Die Helmholtz-Gleichung wurde nach Hermann von Helmholtz benannt. Die Gleichung beschreibt Schwingungsvorgänge und findet Anwendung in Bereichen wie Akustik und Elektromagnetik. In ihrer allgemeinen Form lautet sie*

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0 \quad (2.3)$$

, wobei Δ dem Laplace-Operator, u der Lösungsfunktion und k der Wellenzahl entspricht.

Beweis.

$$\begin{aligned}\Delta p &= \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\ \Leftrightarrow \Delta (p_0 \cdot u \cdot e^{i\omega t}) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 e^{i\omega t}}{\partial t^2} p_0 \cdot u \\ \Leftrightarrow \Delta p_0 \cdot u \cdot e^{i\omega t} &= \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 e^{i\omega t} p_0 \cdot u \\ \Leftrightarrow \Delta p_0 \cdot u \cdot e^{i\omega t} &= -\frac{\omega^2}{c^2} e^{i\omega t} p_0 \cdot u \\ \Leftrightarrow \Delta u &= -\frac{\omega^2}{c^2} u \\ \Leftrightarrow \Delta u + \frac{\omega^2}{c^2} u &= 0 \\ \Leftrightarrow \Delta u + \kappa^2 u &= 0\end{aligned}$$

□

Im Folgenden werden also die Amplitude, sowie der zeitabhängige Teil der Wellen nicht weiter berücksichtigt. Außerdem wird das Feld der einfallenden Welle mit u^{ein} bezeichnet. Das Gebiet D beschreibt das Objekt, auf welches die Welle trifft und ∂D dementsprechend den Rand dieses Gebiets. Gesucht werden an dieser Stelle also das ausgehende (bzw. gestreute) Feld u^{aus} und das gesamte resultierende Feld u^{tot} , welches sich aus der Summe des einfallenden und des gestreuten Felds bildet, siehe Gleichung (2.4).

$$u^{tot} = u^{ein} + u^{aus} \tag{2.4}$$

Diese Felder müssen jeweils die Helmholtzgleichung im Gebiet $\mathbb{R}^n \setminus D$ erfüllen. Die Ausgangssituation wird in Abbildung 2.1 dargestellt.

2.2 Strahlung

Wellen, die sich im Raum ausbreiten (wie zum Beispiel von einer Punktquelle), werden selbst ohne Reibung immer schwächer, je weiter sie sich von ihrer Quelle entfernen, da sie mit der gleichen Energie einen immer größeren Raum

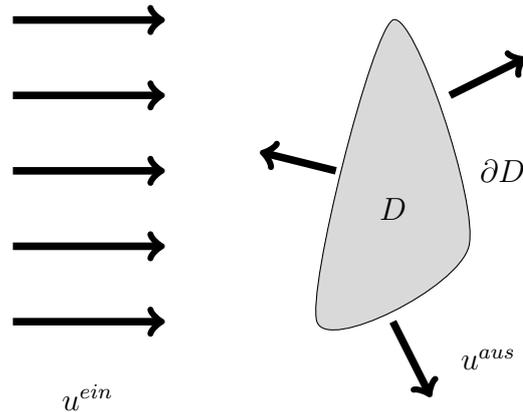


Abbildung 2.1: Skizze eines klassischen Streuproblems, einer zeitharmonischen Welle

abdecken müssen. Diese Eigenschaft wird als Strahlung bezeichnet und durch die Sommerfeld-Ausstrahlungsbedingung in 2.2.1 mathematisch ausgedrückt.

Definition 2.2.1 (Ausstrahlend). *Sei u eine Lösung der Helmholtz-Gleichung in \mathbb{R}^n , dann ist u strahlend, wenn sie die Sommerfeld-Ausstrahlungsbedingung*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial \|x\|} - i\kappa u \right) = 0 \quad (2.5)$$

erfüllt. Diese Bedingung stellt sicher, dass sich das Strahlungsfeld wie eine auslaufende Kugelwelle verhält und nur Energie von bekannten Quellen nach außen abstrahlt, anstatt unendlich einlaufende Wellen zuzulassen.

2.3 Materialeigenschaften

Wie eine einfallende Welle von einem Objekt reflektiert wird, hängt nicht allein von dessen Form ab. Auch das Material, aus dem es besteht, spielt eine Rolle. In dieser Arbeit werden für die Materialeigenschaften der Objekte nur die zwei speziellen Fälle „schallweich“ und „schallhart“ betrachtet.

Definition 2.3.1 (Schallweich). *Es liegt ein Dirichlet-Problem vor, welches besagt, dass die resultierende Welle auf dem Rand verschwindet.*

$$u^{tot} = u^{ein} + u^{aus} = 0 \text{ auf } \partial D \quad (2.6)$$

Und somit

$$u^{aus} = -u^{ein} \text{ auf } \partial D \quad (2.7)$$

Definition 2.3.2 (Schallhart). *Es liegt ein Neumann-Problem vor, welches besagt, dass die Normalableitung der resultierenden Welle auf dem Rand verschwindet.*

$$\frac{\partial u^{tot}}{\partial n} = \frac{\partial u^{ein}}{\partial n} + \frac{\partial u^{aus}}{\partial n} = 0 \text{ auf } \partial D \quad (2.8)$$

Und somit

$$\frac{\partial u^{ein}}{\partial n} = -\frac{\partial u^{aus}}{\partial n} \text{ auf } \partial D \quad (2.9)$$

2.4 Problemformulierung

Zusammenfassend wird bei einem Streuproblem zu einer gegebenen einfallenden Welle also eine Funktion gesucht, welche (i) die Helmholtz-Gleichung, (ii) die Sommerfeld-Ausstrahlungsbedingung und (iii) die durch das Material gegebene Randbedingung erfüllt.

2.5 Fernfeld

Das Fernfeld spielt ebenfalls eine wichtige Rolle in der Streutheorie. Es beschreibt das Feld einer ausstrahlenden Welle, wenn der Abstand zur Quelle gegen unendlich läuft.

Definition 2.5.1 (Fernfeld). *Jede Formel u , die die Helmholtz-Gleichung löst und die Sommerfeld-Strahlungsbedingung erfüllt, besitzt das asymptotische Verhalten einer sphärischen Welle*

$$u(x) \sim \frac{e^{i\kappa\|x\|}}{\|x\|} u_\infty \left(\frac{x}{\|x\|} \right), \quad \|x\| \rightarrow \infty, \quad (2.10)$$

wobei u_∞ das Fernfeld von u beschreibt.

3 Wellen

In diesem Kapitel werden verschiedene relevante Wellenarten beschrieben.

3.1 Kreisförmige Wellen

Um kreisförmige Wellen zu beschreiben, wird zunächst festgelegt, dass die Dimension des Raums $n = 2$ beträgt. Des Weiteren wird angenommen, dass für eine Welle u eine Darstellung in Polarkoordinaten existiert.

Definition 3.1.1 (Polarkoordinaten). *Sei $x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt in kartesischen Koordinaten. Dann sind*

$$r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \wedge \quad \theta = \text{atan2}(x_2, x_1) \in [0, 2\pi) \quad (3.1)$$

die zugehörigen Polarkoordinaten. Sie werden mit

$$x_1 = r \cdot \cos(\theta) \quad \wedge \quad x_2 = r \cdot \sin(\theta) \quad (3.2)$$

wieder in kartesische Koordinaten überführt.

Ebenfalls wird angenommen, dass eine Darstellung der Form (3.3) für u existiert.

$$u(r, \theta) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \quad (3.3)$$

Durch Anwendung des Laplace-Operators für Polarkoordinaten (siehe Definition 3.1.2) und Trennung der Variablen, lassen sich die zwei Differentialgleichungen (3.4) und (3.5) bilden, welche helfen werden, die jeweiligen Funktionen zu ermitteln.

$$\Theta'' + \nu^2 \Theta = 0 \quad (3.4)$$

$$r^2 R'' + rR' + (r^2 \kappa^2 - \nu^2) R = 0 \quad (3.5)$$

Definition 3.1.2 (Laplace-Operator in Polarkoordinaten). Sei

$$\Delta f(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$$

der Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten und

$$u(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

eine Funktion in Polarkoordinaten. Dann ist

$$\Delta u(r, \theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (3.6)$$

der Laplace-Operator in Polarkoordinaten.

Beweis. Ausgehend von der Helmholtz-Gleichung (2.3)

$$\begin{aligned} & \Delta u + \kappa^2 u = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \kappa^2 u = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \Theta + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \Theta + \frac{1}{r^2} R \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \kappa^2 R \Theta = 0 \\ \Leftrightarrow & R'' \Theta + \frac{1}{r} R' \Theta + \frac{1}{r^2} R \Theta'' + \kappa^2 R \Theta = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} + \kappa^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} + r^2 \kappa^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 \kappa^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} \end{aligned}$$

Wähle ν^2 als Ergebnis beider Seiten der Gleichung

$$\begin{aligned} r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 \kappa^2 = \nu^2 & \quad \wedge & \quad \nu^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} \\ r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 \kappa^2 - \nu^2 = 0 & \quad \wedge & \quad \frac{\Theta''}{\Theta} + \nu^2 = 0 \\ r^2 R'' + r R' + (r^2 \kappa^2 - \nu^2) R = 0 & \quad \wedge & \quad \Theta'' + \nu^2 \Theta = 0 \end{aligned}$$

□

Aus (3.4) geht hervor, dass Θ durch (3.7) dargestellt werden kann.

$$\Theta(\theta) = e^{i\nu\theta} \quad (3.7)$$

Wird für (3.5), $\kappa = 1$ gewählt, führt dies zur Bessel-Differentialgleichung.

Definition 3.1.3 (Bessel-Differentialgleichung). *Die Bessel-Differentialgleichung ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, die durch die Formel*

$$r^2 R'' + r R' + (r^2 - \nu^2) R = 0 \quad (3.8)$$

definiert wird.

Lösungen der Bessel-Differentialgleichung sind die Bessel- und Hankel-Funktionen erster und zweiter Art, siehe Definitionen (3.1.4), (3.1.5) und (3.1.8)

Definition 3.1.4 (Bessel-Funktionen erster Art). *Bessel-Funktionen erster Art, bezeichnet als $J_\nu(x)$, sind Lösungen der Bessel-Differentialgleichung mit Ordnung ν . Sie können durch*

$$J_\nu(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^{2j+\nu}}{\Gamma(\nu + j + 1) \cdot j!}, \quad r, \nu \geq 0 \quad (3.9)$$

und für $\nu < 0$ mit

$$J_{-\nu}(r) = (-1)^\nu J_\nu(r) \quad (3.10)$$

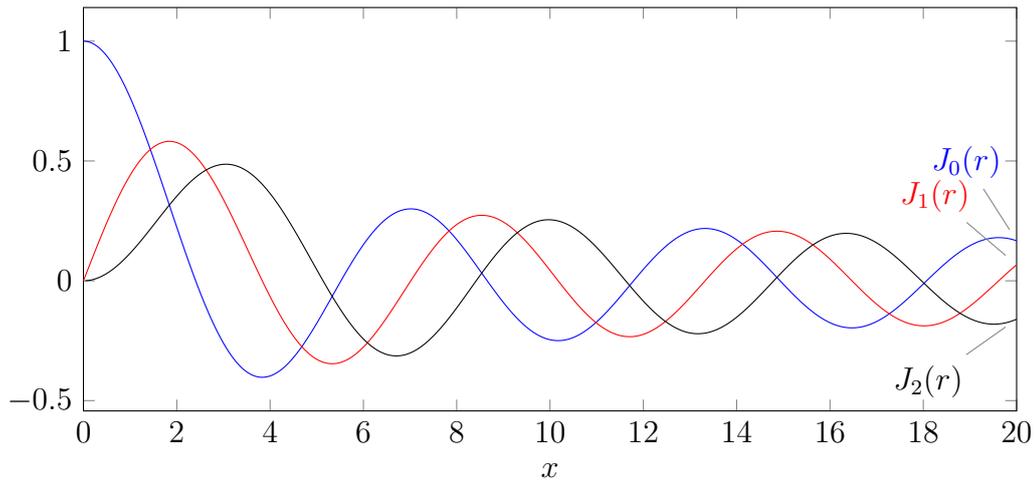


Abbildung 3.1: Besselfunktionen erster Art mit Ordnung 0, 1 und 2

berechnet werden, siehe [1]. Γ bezeichnet dabei die Gamma-Funktion. Für ganzzahlige Werte von ν können Bessel-Funktionen erster Art mit

$$J_\nu(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^{2j+\nu}}{(\nu+j)! \cdot j!}, \quad r, \nu \geq 0 \quad (3.11)$$

berechnet werden [26]. Sie sind in der gesamten Mathematik und ihren Anwendungen präsent, wie zum Beispiel bei der Untersuchung von Schwingungen einer kreisförmigen Membran, der Ausbreitung von Wellen in zylindrischen Strukturen oder bei der Wärmeleitung in Stäben. Sie sind auch bekannt als Zylinderfunktionen und spielen eine wichtige Rolle bei der Beschreibung von Phänomenen wie der Lichtbeugung und elektromagnetischen Streuung.

Definition 3.1.5 (Bessel-Funktionen zweiter Art). *Bessel-Funktionen zweiter Art, auch als Neumann-Funktionen oder Weber-Funktionen bekannt, sind Lösungen der Bessel-Differentialgleichung. Diese Funktionen werden durch $Y_\nu(x)$*

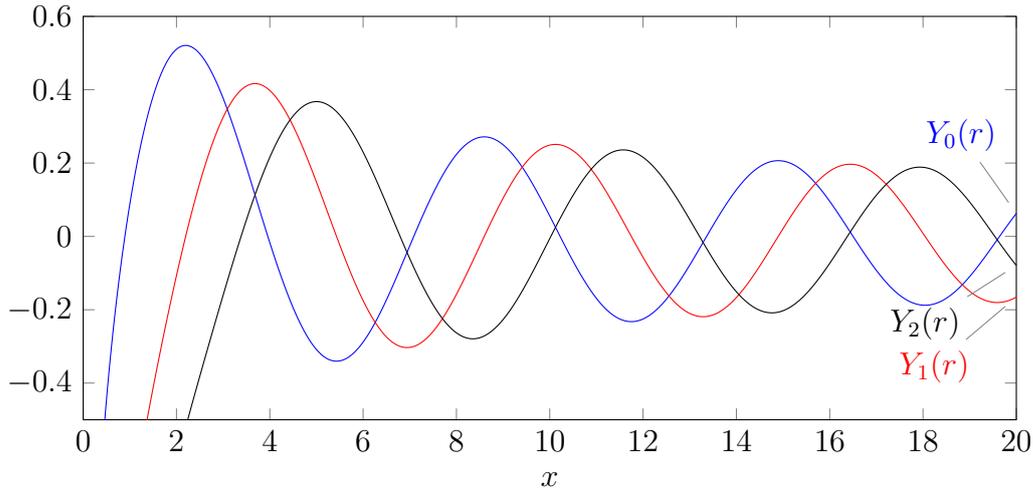


Abbildung 3.2: Besselfunktionen zweiter Art mit Ordnung 0, 1 und 2

dargestellt und können durch

$$Y_\nu(r) = -\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{-\nu}}{\pi} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-k-1)!}{k!} \left(\frac{r^2}{4}\right)^k + \frac{2}{\pi} J_\nu(r) \log\left(\frac{r}{2}\right) - \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^\nu}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (\Psi(k+1) + \Psi(\nu+k+1)) \frac{\left(-\frac{r^2}{4}\right)^k}{k!(\nu+k)!}, \quad x > 0 \quad (3.12)$$

berechnet werden [1], wobei $\Psi(n)$ die Digamma-Funktion 3.1.6 darstellt.

Definition 3.1.6 (Digamma-Funktion). Die Digamma-Funktion, auch als Psi-Funktion bekannt, ist definiert als die logarithmische Ableitung der Gamma-Funktion. Sie lässt sich durch

$$\Psi(1) = -\gamma, \quad \Psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}, \quad n \geq 2 \quad (3.13)$$

berechnen, wobei γ die Euler-Mascheroni-Konstante 3.1.7 ist [1].

Definition 3.1.7 (Euler-Mascheroni-Konstante). Die Euler-Mascheroni-Konstante, üblicherweise mit dem griechischen Buchstaben γ bezeichnet, ist eine mathematische Konstante, die als Grenzwert der Differenz zwischen der harmonischen Reihe und dem natürlichen Logarithmus definiert ist. Die Konstante hat einen

ungefähren Wert von 0,5772 und tritt in verschiedenen Bereichen der Analysis und Zahlentheorie auf. Sie kann durch

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n -\ln(k) \right) \approx 0,5772 \quad (3.14)$$

berechnet werden [1].

Definition 3.1.8 (Hankel-Funktionen erster und zweiter Art). *Hankel-Funktionen, auch als Bessel-Funktionen der dritten Art bekannt, sind komplexe Funktionen, die als lineare Kombinationen von Bessel-Funktionen erster und zweiter Art definiert sind. Hankel-Funktionen erster Art werden mit $H_\nu^{(1)}(r)$ und Hankel-Funktionen zweiter Art entsprechend mit $H_\nu^{(2)}(r)$ notiert. Sie werden durch*

$$H_\nu^{(1)}(r) = J_\nu(r) + Y_\nu(r) i \quad (3.15)$$

$$H_\nu^{(2)}(r) = J_\nu(r) - Y_\nu(r) i \quad (3.16)$$

berechnet.

Bemerkung 3.1.1. *Für große Argumente lässt sich das asymptotische Verhalten von Hankel-Funktionen erster und zweiter Art durch*

$$H_\nu^{(1,2)}(r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{\pm i(r - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}, \quad r \rightarrow \infty \quad (3.17)$$

beschreiben [12].

Bemerkung 3.1.2 (Ableitungen der Besselfunktionen). *Es gibt verschiedene Rekursionsabhängigkeiten, mit deren Hilfe sich die Ableitungen der Bessel- und Hankel-Funktionen bestimmen lassen. Eine davon lautet*

$$Z'_\nu(r) = \frac{Z_{\nu-1}(r) - Z_{\nu+1}(r)}{2}, \quad (3.18)$$

wobei $Z_\nu(r)$ eine beliebige ganzzahlige Bessel- oder Hankel-Funktion, sowie deren Linearkombinationen, darstellt. Diese, sowie weitere hilfreiche Rekursionsabhängigkeiten sind in [1] zu finden.

Um 3.5 für beliebiges κ zu lösen, können Bessel- und Hankel-Funktionen mit $\kappa \cdot r$ als Argument, sowie deren Linearkombinationen, genutzt werden.

$$R(r) \in \{J_\nu(\kappa r), Y_\nu(\kappa r), H_\nu^{(1)}(\kappa r), H_\nu^{(2)}(\kappa r) | \nu \in \mathbb{R}\} \quad (3.19)$$

Mit Lösungen für Θ und R lassen sich somit Lösungen der Helmholtz-Gleichung und somit Darstellungen für kreisförmige Wellen durch Fourier-Bessel-Funktionen 3.1.9 und Fourier-Hankel-Funktionen 3.1.10 bilden.

Definition 3.1.9 (Fourier-Bessel-Funktionen). *Fourier-Bessel-Funktionen sind Lösungen der Helmholtz-Gleichungen in Polarkoordinaten.*

$$J_\nu(\kappa r) \cdot e^{i\nu\theta} \quad (3.20)$$

$$Y_\nu(\kappa r) \cdot e^{i\nu\theta} \quad (3.21)$$

Dabei steht r für die radiale Variable, θ für die anguläre Variable und κ für die Wellenfrequenz.

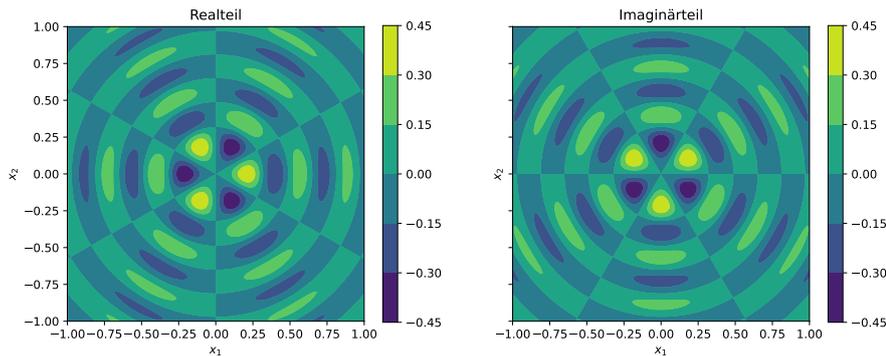


Abbildung 3.3: Kreisförmige Welle durch $J_3(20 \cdot r) e^{i \cdot 3 \cdot \theta}$ für $-1 \geq x_1 \geq 1$ und $-1 \geq x_2 \geq 1$, ausgewertet mit 200^2 äquidistanten Punkten

Definition 3.1.10 (Fourier-Hankel-Funktionen). *Fourier-Hankel-Funktionen sind Lösungen der Helmholtz-Gleichungen in Polarkoordinaten.*

$$H_\nu^{(1)}(\kappa r) \cdot e^{i\nu\theta} = J_\nu(\kappa r)e^{i\nu\theta} + Y_\nu(\kappa r)e^{i\nu\theta} \quad (3.22)$$

$$H_\nu^{(2)}(\kappa r) \cdot e^{i\nu\theta} = J_\nu(\kappa r)e^{i\nu\theta} - Y_\nu(\kappa r)e^{i\nu\theta} \quad (3.23)$$

Dabei steht r für die radiale Variable, θ für die anguläre Variable und κ für die Wellenzahl.

3.2 Elliptische Wellen

Das grundlegende Vorgehen zum Beschreiben von elliptischen Wellen ähnelt dem der kreisförmigen Wellen. Auch hier beträgt die Dimension des Raums $n = 2$ und für die Welle u soll nun eine Darstellung in elliptischen Koordinaten existieren.

Definition 3.2.1 (Elliptische Koordinaten). Sei $x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt in kartesischen Koordinaten und $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann sind

$$\xi = \operatorname{arcosh} \left(\frac{w_2}{\sqrt{c}} \right) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (3.24)$$

$$\eta = \operatorname{atan2}(x_2 \cdot w_2, x_1 \cdot w_1) \in [0, 2\pi) \quad (3.25)$$

die zugehörigen elliptischen Koordinaten mit

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{m_1 + \sqrt{m_1^2 + x_2^2}} & m_1 &= \frac{x_1^2 + x_2^2 - c^2}{2c} \\ w_2 &= \sqrt{m_2 + \sqrt{m_2^2 - x_1^2}} & m_2 &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + c^2}{2c} \end{aligned}$$

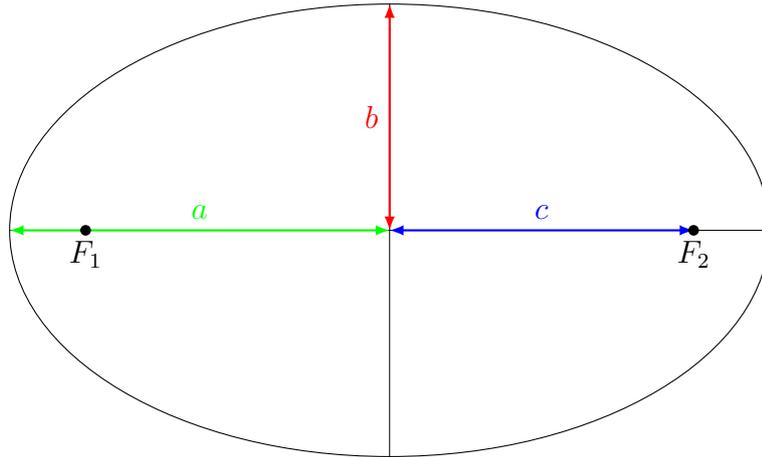
Sie werden mit

$$x_1 = c \cosh(\xi) \cos(\eta) \quad \wedge \quad x_2 = c \sinh(\xi) \sin(\eta) \quad (3.26)$$

wieder in kartesische Koordinaten überführt. Hierbei legt c den Abstand vom Mittelpunkt zu den Brennpunkten der Ellipse. Dieser lässt sich aus den beiden Halbachsen der Ellipsen mit

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (3.27)$$

berechnen.



Hier wird angenommen, dass eine Darstellung der Form (3.28) existiert.

$$u(\xi, \eta) = \Xi(\xi) \cdot \Phi(\eta) \tag{3.28}$$

Der Laplace-Operator für elliptische Koordinaten ?? wird genutzt, um die Mathieu-Differentialgleichung, sowie die modifizierte Mathieu-Differentialgleichung aufzustellen.

Definition 3.2.2 (Laplace-Operator in elliptischen Koordinaten). Sei

$$\Delta f(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$$

der Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten und

$$u(r, \theta) = f(c \cosh(\xi) \cos(\eta), c \sinh(\xi) \sin(\eta))$$

eine Funktion in elliptischen Koordinaten. Dann ist

$$\Delta u(\xi, \eta) = \frac{1}{c^2 (\cosh(\xi)^2 - \cos(\eta)^2)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \tag{3.29}$$

der Laplace-Operator in elliptischen Koordinaten [6].

Definition 3.2.3 (Mathieu-Differentialgleichung). Die Mathieu-Differentialgleichung

ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die in der Form

$$\Phi'' + (\lambda - 2q \cos(2\eta)) \Phi = 0 \quad (3.30)$$

geschrieben wird. Hierbei ist λ der sogenannte charakteristische Wert und q mit

$$q = \frac{\kappa^2 c^2}{4} \quad (3.31)$$

ein Faktor, der c und die Frequenz κ zusammenfasst.

Definition 3.2.4 (Modifizierte Mathieu-Differentialgleichung). *Die modifizierte Mathieu-Differentialgleichung ist eine Variation der Mathieu-Differentialgleichung und wird in der Form*

$$\Xi'' - (\lambda - 2q \cosh(2\xi)) \Xi = 0 \quad (3.32)$$

geschrieben. Lösungen der Mathieu-Differentialgleichung sind Lösungen der modifizierten Mathieu-Differentialgleichung, wenn der übergebene Parameter mit i multipliziert wird und umgekehrt.

$$\Xi(i\xi) = \Phi(\eta) \quad \Phi(i\eta) = \Xi(\xi) \quad (3.33)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
 & \Delta u + \kappa^2 u = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{c^2 (\cosh(\xi)^2 - \cos(\eta)^2)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + \kappa^2 u = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \kappa^2 c^2 (\cosh(\xi)^2 - \cos(\eta)^2) u = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \xi^2} \Phi + \Xi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \kappa^2 c^2 (\cosh(\xi)^2 - \cos(\eta)^2) \Xi \Phi = 0 \\
 \Leftrightarrow & \Xi'' \Phi + \Xi \Phi'' + \kappa^2 c^2 (\cosh(\xi)^2 - \cos(\eta)^2) \Xi \Phi = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{\Xi''}{\Xi} + \frac{\Phi''}{\Phi} + \kappa^2 c^2 (\cosh(\xi)^2 - \cos(\eta)^2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{\Xi''}{\Xi} + \kappa^2 c^2 \cosh(\xi)^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} + \kappa^2 c^2 \cos(\eta)^2
 \end{aligned}$$

Wähle $\frac{\kappa^2 c^2}{4} = q$ und λ als Ergebnis beider Seiten der Gleichung

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Xi''}{\Xi} + 4q \cosh(\xi)^2 = \lambda \quad \wedge \quad \lambda = -\frac{\Phi''}{\Phi} + 4q \cos(\eta)^2 \\
 \Leftrightarrow & \frac{\Xi''}{\Xi} + 4q \cosh(\xi)^2 - \lambda = 0 \quad \wedge \quad \frac{\Phi''}{\Phi} - 4q \cos(\eta)^2 + \lambda = 0 \\
 \Leftrightarrow & \Xi'' - (\lambda - 4q \cosh(\xi)^2) \Xi = 0 \quad \wedge \quad \Phi'' + (\lambda - 4q \cos(\eta)^2) \Phi = 0
 \end{aligned}$$

□

Lösungen der Mathieu-Differentialgleichung sind die sogenannten Mathieu-Funktionen 3.2.5.

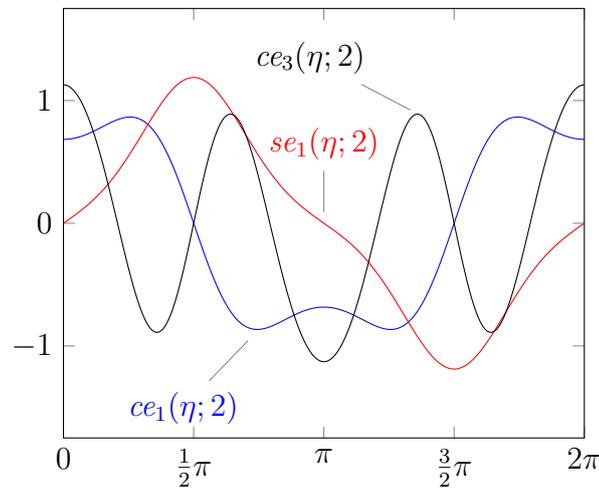
Definition 3.2.5 (Mathieu-Funktionen). *Mathieu-Funktionen sind spezielle Funktionen, die als Lösungen der Mathieu-Differentialgleichung auftreten. Sie werden in ihrer Parität und in ihrer Periodizität unterschieden. Die geraden Mathieu-Funktionen werden üblicherweise als Fourier-Reihe aus Kosinus- und die ungeraden als Fourier-Reihe aus Sinus-Funktionen dargestellt. Sie werden dementsprechend mit $ce_\nu(\eta; q)$ für „cosine-elliptic“ und $se_\nu(\eta; q)$ für „sine-elliptic“ mit Ordnung $\nu \in \mathbb{N}$ bezeichnet. Für die Ordnung $\nu = 0$ existiert nur eine gerade doch keine ungerade Mathieu-Funktion. Bei der Periodizität wird*

zwischen π - und 2π -periodischen Funktionen unterschieden. Die π -periodischen Mathieu-Funktionen enthalten in ihrer Fourier-Reihen-Darstellung ausschließlich Sinus- bzw. Kosinus-Funktionen mit ungeraden vielfachen von η , während die 2π -periodischen nur gerade vielfache von η beinhalten. Sie werden also mit

$$ce_{2m+p}(\eta; q) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+p}^{2m+p} \cos((2n+p)\eta), \quad m \in \mathbb{N}_0 \quad (3.34)$$

$$se_{2m+p}(\eta; q) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+p}^{2m+p} \sin((2n+p)\eta), \quad m \in \mathbb{N}_0 \quad (3.35)$$

berechnet, wobei A_{2n+p}^{2m+p} und B_{2n+p}^{2m+p} die jeweiligen Koeffizienten beschreiben und p die Periodizität festlegt, also $p = 0$ oder $p = 1$.



Durch Einsetzen dieser Formeln in die Mathieu-Differentialgleichung, ergeben sich Gleichungen, die rekursiv voneinander abhängig sind und ein unendliches lineares Gleichungssystem bilden, durch welches die Koeffizienten A_{2n+p}^{2m+p} und B_{2n+p}^{2m+p} bestimmt werden können.

Naheliegendermaßen heißen die Lösungen der modifizierten Mathieu-Gleichung, modifizierte Mathieu-Funktionen 3.2.6.

Definition 3.2.6 (Modifizierte Mathieu-Funktionen). *Modifizierte Mathieu-Funktionen sind spezielle Lösungen der modifizierten Mathieu-Differentialgleichung.*

Aufgrund der Eigenschaft (3.33), können diese durch

$$\begin{aligned} Ce_{2m+p}(i\eta; q) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+p}^{2m+p} \cos(i(2n+p)\eta), \quad m \in \mathbb{N}_0 \\ Se_{2m+p}(i\eta; q) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+p}^{2m+p} \sin(i(2n+p)\eta), \quad m \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} Ce_{2m+p}(\xi; q) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+p}^{2m+p} \cosh((2n+p)\xi), \quad m \in \mathbb{N}_0 \\ Se_{2m+p}(\xi; q) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+p}^{2m+p} \sinh((2n+p)\xi), \quad m \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

ermittelt werden. Diese modifizierten Mathieu-Funktionen werden mit $Ce_\nu(\xi; q)$ und $Se_\nu(\xi; q)$ bezeichnet. Da diese allerdings sehr große Werte annehmen, werden oft welche mit einem entsprechenden Skalierungsfaktor genutzt. Diese werden mit $Mc_\nu^{(j)}(\xi; q)$ und $Ms_\nu^{(j)}(\xi; q)$ der Art j notiert und können durch

$$\begin{aligned} Mc_{2m+p}^{(j)}(\xi; q) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{A_{2n+p}^{2m+p}}{\epsilon_{s+p} A_{2s+p}^{2m+p}} \left(J_{n-s}(\sqrt{q}e^{-\xi}) Z_{n+s+p}^{(j)}(\sqrt{q}e^\xi) \right. \\ &\quad \left. + J_{n+s+p}(\sqrt{q}e^{-\xi}) Z_{n-s}^{(j)}(\sqrt{q}e^\xi) \right) \quad (3.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ms_{2m+p}^{(j)}(\xi; q) &= \sum_{n=1-p}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{B_{2n+p}^{2m+p}}{B_{2s+p}^{2m+p}} \left(J_{n-s}(\sqrt{q}e^{-\xi}) Z_{n+s+p}^{(j)}(\sqrt{q}e^\xi) \right. \\ &\quad \left. - J_{n+s+p}(\sqrt{q}e^{-\xi}) Z_{n-s}^{(j)}(\sqrt{q}e^\xi) \right) \quad (3.37) \end{aligned}$$

berechnet werden, wobei der $p=0$ oder $p=1$, $\epsilon_0 = 2$, $\epsilon_s = 1$ für $s \in \mathbb{N}$ und $Z_\nu^{(j)}$ die Bessel- bzw. Hankel-Funktionen folgendermaßen beschreiben:

$$\begin{aligned} Z_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z) & Z_\nu^{(3)}(z) &= H_\nu^{(1)}(z) \\ Z_\nu^{(2)}(z) &= Y_\nu(z) & Z_\nu^{(4)}(z) &= H_\nu^{(2)}(z) \end{aligned}$$

Der Wert für s kann dabei beliebig gewählt werden.

Lösungen für (3.28) und somit Darstellungen elliptischer Wellen mit festem c und Frequenz κ können also durch die Gleichungen

$$\begin{array}{ll}
 Ce_\nu(\xi; q)ce_\nu(\eta; q) & Se_\nu(\xi)se_\nu(\eta; q) \quad \nu \in \mathbb{N}_0 \\
 Mc_\nu^{(j)}(\xi; q)ce_\nu(\eta; q) & Ms_\nu^{(j)}(\xi; q)se_\nu(\eta; q) \quad j = 1, 2, 3, 4
 \end{array}$$

sowie deren Linearkombinationen dargestellt werden.

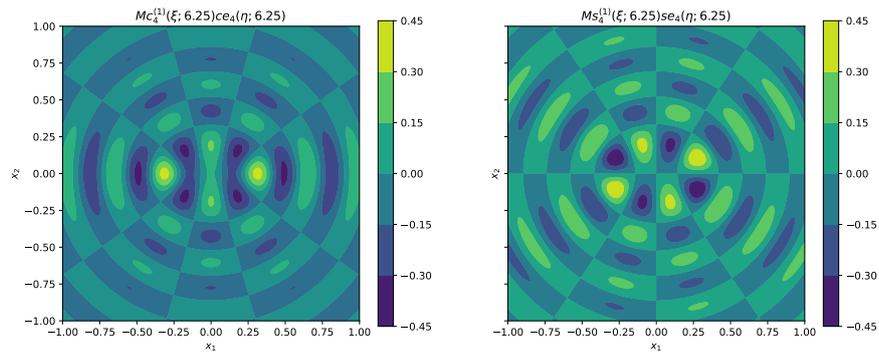
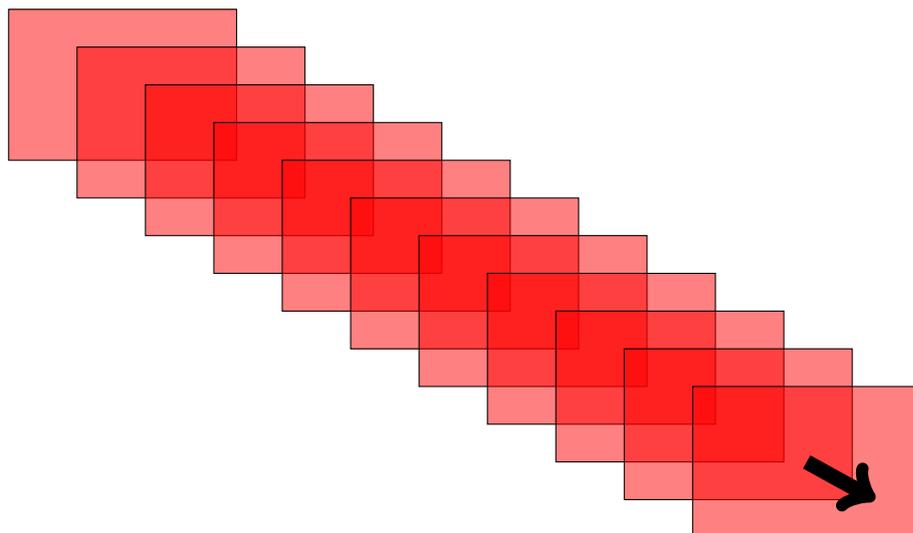


Abbildung 3.4: Zwei elliptische Wellen mit Wellenzahl $\kappa = 20$, $c = 0.25$ und Ordnung 4, ausgewertet an 200^2 äquidistanten Punkten für $-1 \leq x_1 \leq 1$ und $-1 \leq x_2 \leq 1$

3.3 Planare Wellen

Eine planare Welle ist eine Welle, die sich in gleichmäßigen Fronten ausbreitet.



In der Physik werden planare Wellen idealisiert, um die Ausbreitung von Wellen in einem homogenen Medium ohne Grenzen zu modellieren. Diese Wellen sind in der mathematischen Physik von Bedeutung, da sie einfache Lösungen der Wellengleichung darstellen und somit ein grundlegendes Verständnis für komplexere Wellenphänomene bieten. Das Feld einer einfallenden planaren Welle kann durch (3.38) beschrieben werden.

$$u(x; \kappa, d) = e^{i\kappa \langle x, d \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \kappa \in \mathbb{C}, \quad d \in \mathbb{S}^{n-1} \quad (3.38)$$

Dabei ist κ die Wellenzahl und d die Richtung der Welle. Die Menge \mathbb{S}^{n-1} beschreibt hierbei die Einheitssphäre 3.3.1

Definition 3.3.1 (Einheitssphäre). *Die Einheitssphäre im \mathbb{R}^n ist die Menge aller Punkte im n -dimensionalen Raum, die einen Abstand von genau 1 vom Ursprung haben. Mathematisch wird sie wie folgt definiert:*

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} \quad (3.39)$$

Hierbei ist $\|x\|$ die euklidische Norm von x , also der Abstand von x zum Ursprung.

Eine wichtige Reihenentwicklung der von planaren Wellen ist die Jacobi-Anger-Erweiterung 3.3.2.

Definition 3.3.2 (Jacobi-Anger-Erweiterung). *Die Jacobi-Anger-Erweiterung ist eine mathematische Reihe, die verwendet wird, um planare Wellen als Linearkombination von kreisförmigen Funktionen (Abschnitt 3.1) darzustellen. Sie lautet:*

$$e^{iz \cos(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta} \quad (3.40)$$

wobei $J_n(z)$ die Bessel-Funktionen erster Art sind.

Jacobi-Anger-Expansion.

$$\begin{aligned}
 e^{z\frac{t-t^{-1}}{2}} &= e^{\frac{zt}{2}-\frac{z}{2t}} \\
 &= e^{\frac{zt}{2}} \cdot e^{-\frac{z}{2t}} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{zt}{2}\right)^l}{l!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z}{2t}\right)^m}{m!}
 \end{aligned}$$

Um den nächsten Schritt zu verstehen, ist es hilfreich, die einzelnen Summanden zu betrachten.

$l \backslash m$	0	1	2	3	4	...
0	$t^0 \frac{(\frac{z}{2})^0}{0!0!}$	$t^{-1} \frac{-(\frac{z}{2})^1}{0!1!}$	$t^{-2} \frac{(\frac{z}{2})^2}{0!2!}$	$t^{-3} \frac{-(\frac{z}{2})^3}{0!3!}$	$t^{-4} \frac{(\frac{z}{2})^4}{0!4!}$...
1	$t^1 \frac{(\frac{z}{2})^1}{1!0!}$	$t^0 \frac{-(\frac{z}{2})^2}{1!1!}$	$t^{-1} \frac{(\frac{z}{2})^3}{1!2!}$	$t^{-2} \frac{-(\frac{z}{2})^4}{1!3!}$	$t^{-3} \frac{(\frac{z}{2})^5}{1!4!}$...
2	$t^2 \frac{(\frac{z}{2})^2}{2!0!}$	$t^1 \frac{-(\frac{z}{2})^3}{2!1!}$	$t^0 \frac{(\frac{z}{2})^4}{2!2!}$	$t^{-1} \frac{-(\frac{z}{2})^5}{2!3!}$	$t^{-2} \frac{(\frac{z}{2})^6}{2!4!}$...
3	$t^3 \frac{(\frac{z}{2})^3}{3!0!}$	$t^2 \frac{-(\frac{z}{2})^4}{3!1!}$	$t^1 \frac{(\frac{z}{2})^5}{3!2!}$	$t^0 \frac{-(\frac{z}{2})^6}{3!3!}$	$t^{-1} \frac{(\frac{z}{2})^7}{3!4!}$...
4	$t^4 \frac{(\frac{z}{2})^4}{4!0!}$	$t^3 \frac{-(\frac{z}{2})^5}{4!1!}$	$t^2 \frac{(\frac{z}{2})^6}{4!2!}$	$t^1 \frac{-(\frac{z}{2})^7}{4!3!}$	$t^0 \frac{(\frac{z}{2})^8}{4!4!}$...
...

Tabelle 3.1: Summanden der doppelten Summe

Hier kann festgestellt werden, dass die Summanden auf den Diagonalen der Tabelle jeweils der Definition der Bessel-Funktionen erster Art 3.1.4, mit Ordnung n und einem einheitlichen Vorfaktor t^n entsprechen.

$$e^{z\frac{t-t^{-1}}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z) \tag{3.41}$$

Wähle $t = ie^{i\theta}$:

$$e^{z\frac{ie^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2}} = e^{iz\cos(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta}$$

□

Mithilfe von $J_{-\nu}(z) = (-1)^\nu J_\nu(z)$, lässt sich (3.42) als eine Abwandlung der Jacobi-Anger-Erweiterung finden, welche numerische Vorteile in der Laufzeit liefert, da die Anzahl der benötigten Funktionsaufrufe halbiert wird und die

komplexe Exponentialfunktion zu einer einfachen Kosinus-Funktion reduziert wird.

$$e^{iz \cos(\theta)} = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) \cos \theta \quad (3.42)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} e^{iz \cos(\theta)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} i^n J_n(z) e^{in\theta} + J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} i^{-n} J_{-n}(z) e^{-in\theta} + J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n i^n (-1)^n J_n(z) e^{-in\theta} + J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) e^{-in\theta} + J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta} \\ &= J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) \\ &= J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) \cos(\theta) \end{aligned}$$

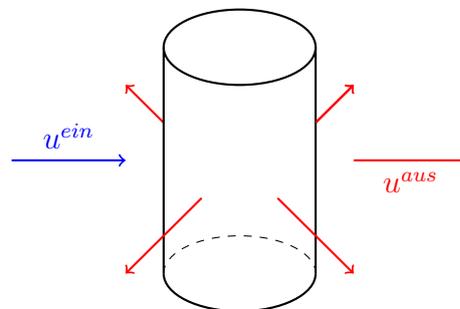
□

4 Streuung an speziellen Körpern

In diesem Kapitel wird erklärt, wie das gestreute Feld bestimmter geometrischer Formen berechnet werden kann. In allen betrachteten Fällen wird eine planare Welle als einfallende Welle gewählt. Des Weiteren werden nur zweidimensionale Streuprobleme untersucht, sodass das einfallende Feld durch (4.1), mit Richtung d und Wellenzahl κ , dargestellt wird.

$$u^{ein}(x; \kappa, d) = e^{i\kappa\langle x, d \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \kappa \in \mathbb{C}, \quad d \in \mathbb{S}^1 \quad (4.1)$$

Im dreidimensionalen Raum würde diese Ausgangssituation eine planare Welle beschreiben, die auf einen unendlich langen Zylinder treffen würde, dessen Querschnitt der zweidimensionalen Form entsprechen würde. Die Wellenfronten würden dabei parallel zum Zylinder verlaufen.



4.1 Kreis

Um das gestreute Feld eines Kreises im zweidimensionalen Raum zu bestimmen, werden zunächst die Eigenschaften aus Kapitel 2 betrachtet. Das gestreute Feld muss somit (i) die Helmholtz-Gleichung im \mathbb{R}^2 lösen, (ii) die Sommerfeld-Ausstrahlungsbedingung erfüllen und (iii) die Randbedingung erfüllen. Im

Folgenden bezeichnet r_0 den Radius des streuenden Kreises. Des Weiteren wird das Feld der einfallenden planaren Welle in diesem Abschnitt in Polarkoordinaten ausgedrückt. Wenn x und d mit ?? ausgedrückt werden, ergibt sich (4.2), wobei r der Radius von x , θ der Winkel von x und θ_0 der Winkel von d .

$$e^{i\kappa\langle x,d \rangle} = e^{i\kappa r(\cos(\theta)\cos(\theta_0) + \sin(\theta)\sin(\theta_0))} = e^{i\kappa r \cos(\theta - \theta_0)} \quad (4.2)$$

4.1.1 Schallweicher Kreis

Zunächst wird das gestreute Feld an einem schallweichen Kreis untersucht. Die Randbedingung ist somit eine Dirichlet-Randbedingung und das gestreute Feld kann durch 4.1.1 ermittelt werden.

Definition 4.1.1 (Streuung am schallweichen Kreis).

$$\begin{aligned} (\text{Wellenbedingung}) \quad & \Delta u^{aus}(r, \theta) + \kappa^2 u^{aus}(r, \theta) = 0 \quad \text{für } r > r_0 \\ (\text{Ausstrahlungsbedingung}) \quad & \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^{aus}}{\partial r}(r, \theta) - i\kappa u^{aus}(r, \theta) \right) = 0 \\ (\text{Randbedingung}) \quad & u^{ein}(r, \theta) + u^{aus}(r, \theta) = 0 \quad \text{für } r = r_0 \end{aligned}$$

Um die Helmholtz-Gleichung zu lösen, wird zunächst davon ausgegangen, dass für das gestreute Feld eine Darstellung als Linearkombination von Fourier-Bessel- und Fourier-Hankel-Funktionen existiert. Allerdings sind die Fourier-Hankel-Funktionen erster Art die einzigen davon, die ebenfalls die Sommerfeld-Ausstrahlungsbedingung erfüllen, weshalb die Anteile der anderen kreisförmigen Wellen ausgeschlossen werden können.

Die Randbedingung liefert genau diese Koeffizienten mithilfe der Jacobi-Anger-Erweiterung.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 u^{aus}(r_0, \varphi) &= -u^{ein}(r_0, \varphi) \\
 \Leftrightarrow \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu H_\nu^{(1)}(\kappa r_0) e^{i\nu\theta} &= -e^{i\kappa r_0 \cos(\theta)} \\
 \Leftrightarrow \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu H_\nu^{(1)}(\kappa r_0) e^{i\nu\theta} &= -\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} i^\nu J_\nu(\kappa r_0) e^{i\nu\theta} \\
 \Leftrightarrow c_\nu H_\nu^{(1)}(\kappa r_0) e^{i\nu\theta} &= -i^\nu J_\nu(\kappa r_0) e^{i\nu\theta} \\
 \Leftrightarrow c_\nu &= -i^\nu \frac{J_\nu(\kappa r_0)}{H_\nu^{(1)}(\kappa r_0)}
 \end{aligned}$$

□

Somit lässt sich das gestreute Feld eines schallweichen Kreises, bzw. eines unendlich langen Zylinders mit kreisförmigem Querschnitt durch (4.3) ermitteln.

$$u^{aus}(r, \theta; \kappa, r_0) = -\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} i^\nu \frac{J_\nu(\kappa r_0)}{H_\nu^{(1)}(\kappa r_0)} H_\nu^{(1)}(\kappa r) e^{i\nu\theta} \quad (4.3)$$

Fernfeld

Das Fernfeld vom gestreuten Feld eines schallweichen Kreises wird durch (4.4) beschrieben.

$$u_\infty(\theta; \kappa, r_0) = -e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa}} \left(\frac{J_0(\kappa r_0)}{H_0^{(1)}(\kappa r_0)} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_\nu(\kappa r_0)}{H_\nu^{(1)}(\kappa r_0)} \cos(\nu\theta) \right) \quad (4.4)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
H_\nu^{(0)}(r) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{i(r - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \\
\Rightarrow u^{aus} &= - \left(\frac{J_0(\kappa r_0)}{H_0^{(1)}(\kappa r_0)} H_0^{(1)}(\kappa r) + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} i^\nu \frac{J_\nu(\kappa r_0)}{H_\nu^{(1)}(\kappa r_0)} H_\nu^{(1)}(\kappa r) \cos(\nu\theta) \right) \\
&\sim - \left(\frac{J_0(\kappa r_0)}{H_0^{(1)}(\kappa r_0)} \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa r}} e^{i(\kappa r - \frac{\pi}{4})} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} i^\nu \frac{J_\nu(\kappa r_0)}{H_\nu^{(1)}(\kappa r_0)} \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa r}} e^{i(\kappa r - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \cos(\nu\theta) \right) \\
&= - \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa r}} e^{i(\kappa r - \frac{\pi}{4})} \left(\frac{J_0(\kappa r_0)}{H_0^{(1)}(\kappa r_0)} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} i^\nu \frac{J_\nu(\kappa r_0)}{H_\nu^{(1)}(\kappa r_0)} e^{-i\frac{\nu\pi}{2}} \cos(\nu\theta) \right) \\
&= - \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa r}} e^{i(\kappa r - \frac{\pi}{4})} \left(\frac{J_0(\kappa r_0)}{H_0^{(1)}(\kappa r_0)} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} i^\nu \frac{J_\nu(\kappa r_0)}{H_\nu^{(1)}(\kappa r_0)} i^{-\nu} \cos(\nu\theta) \right) \\
&= - \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa r}} e^{i(\kappa r - \frac{\pi}{4})} \left(\frac{J_0(\kappa r_0)}{H_0^{(1)}(\kappa r_0)} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_\nu(\kappa r_0)}{H_\nu^{(1)}(\kappa r_0)} \cos(\nu\theta) \right) \\
&= \frac{e^{i\kappa r}}{\sqrt{r}} u_\infty \\
\Leftrightarrow u_\infty &= -e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa}} \left(\frac{J_0(\kappa r_0)}{H_0^{(1)}(\kappa r_0)} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_\nu(\kappa r_0)}{H_\nu^{(1)}(\kappa r_0)} \cos(\nu\theta) \right)
\end{aligned}$$

□

4.1.2 Schallharter Kreis

Der Unterschied vom schallharten Kreis zum schallweichen Kreis ist, dass nun statt einer Dirichlet-Randbedingung, eine Neumann-Randbedingung vorliegt. Das Feld wird durch

Definition 4.1.2 (Streuung am schallharten Kreis).

$$(Wellenbedingung) \quad \Delta u^{aus}(r, \theta) + \kappa^2 u^{aus}(r, \theta) = 0 \quad \text{für } r > r_0$$

$$(Ausstrahlungsbedingung) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) - i\kappa u(r, \theta) \right) = 0$$

$$(Randbedingung) \quad \frac{\partial u^{ein}}{\partial r} + \frac{\partial u^{aus}}{\partial r} = 0 \quad \text{für } r = r_0$$

Auch hier wird das gestreute Feld als Linearkombination aus Fourier-Hankel-Funktionen erster Art dargestellt, um die Wellenbedingung und die Ausstrah-

lungsbedingung zu erfüllen. Die Randbedingung liefert wieder die Koeffizienten.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u^{aus}}{\partial r} = -\frac{\partial u^{ein}}{\partial r} \\
 \Leftrightarrow & \frac{\partial}{\partial r} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu} H_{\nu}^{(1)}(\kappa r) e^{i\nu\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} e^{i\kappa r \cos(\theta)} \\
 \Leftrightarrow & \frac{\partial}{\partial r} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu} H_{\nu}^{(1)}(\kappa r) e^{i\nu\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} i^{\nu} J_{\nu}(\kappa r) e^{i\nu\theta} \\
 \Leftrightarrow & \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu} \frac{\partial}{\partial r} H_{\nu}^{(1)}(\kappa r) e^{i\nu\theta} = -\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} i^{\nu} \frac{\partial}{\partial r} J_{\nu}(\kappa r) e^{i\nu\theta} \\
 \Leftrightarrow & \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu} \kappa H_{\nu}^{(1)'}(\kappa r) e^{i\nu\theta} = -\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} i^{\nu} \kappa J_{\nu}'(\kappa r) e^{i\nu\theta}
 \end{aligned}$$

Setze $r = r_0$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu} \kappa H_{\nu}^{(1)'}(\kappa r_0) e^{i\nu\theta} = -\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} i^{\nu} \kappa J_{\nu}'(\kappa r_0) e^{i\nu\theta} \\
 \Leftrightarrow & c_{\nu} \kappa H_{\nu}^{(1)'}(\kappa r_0) e^{i\nu\theta} = -i^{\nu} \kappa J_{\nu}'(\kappa r_0) e^{i\nu\theta} \\
 \Leftrightarrow & c_{\nu} = -i^{\nu} \frac{J_{\nu}'(\kappa r_0)}{H_{\nu}^{(1)'}(\kappa r_0)}
 \end{aligned}$$

□

Das gestreute Feld eines schallharten Kreises kann also durch 4.5 berechnet werden.

$$u^{aus}(r, \theta; \kappa, r_0) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} -i^{\nu} \frac{J_{\nu}'(\kappa r_0)}{H_{\nu}^{(1)'}(\kappa r_0)} H_{\nu}^{(1)}(\kappa r) e^{i\nu\theta} \quad (4.5)$$

Um die Ableitungen zu berechnen, kann die Rekursionsabhängigkeit (3.18) genutzt werden.

Fernfeld

Das Fernfeld vom gestreuten Feld eines schallharten Kreises wird durch (4.6) beschrieben.

$$u_\infty(\theta; \kappa, r_0) = -e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa}} \left(\frac{J'_0(\kappa r_0)}{H_0^{(1)'}(\kappa r_0)} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J'_\nu(\kappa r_0)}{H_\nu^{(1)'}(\kappa r_0)} \cos(\nu\theta) \right) \quad (4.6)$$

Da der Beweis äquivalent zu dem vom Fernfeld des schallweichen Kreises ist, wird er an dieser Stelle nicht aufgeführt.

4.2 Ellipse

Ebenso wie das gestreute Feld eines Kreises als Überlagerung unendlich vieler kreisförmiger Wellen dargestellt wurde, wird das gestreute Feld einer Ellipse in dieser Arbeit als Überlagerung unendlich vieler ellipsenförmiger Wellen dargestellt. Somit wäre die Helmholtz-Gleichung bereits erfüllt. Des Weiteren werden für das gestreute Feld nur die elliptischen Wellen genutzt, deren radialer Anteil die Mathieu-Funktionen dritter Art sind, da diese die Einzigen sind, die ebenfalls die Sommerfeld-Ausstrahlungsbedingung erfüllen [20]. Das gesuchte gestreute Feld hat also die Form (4.7).

$$u^{aus}(\xi, \eta; q, \xi_0, \eta_0) = c_0 c e_0(q; \eta) M c_0^{(3)}(q; \xi) + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu c e_\nu(q; \eta) M c_\nu^{(3)}(q; \xi) + s_\nu s e_\nu(q; \eta) M s_\nu^{(3)}(q; \xi) \quad (4.7)$$

4.2.1 Schallweiche Ellipse

Das gestreute Feld einer schallweichen Ellipse muss 4.2.1 erfüllen.

Definition 4.2.1 (Streuung an einer schallweichen Ellipse).

$$\begin{aligned} (\text{Wellenbedingung}) \quad & \Delta u^{aus}(\xi, \eta) + \kappa^2 u^{aus}(\xi, \eta) = 0 \quad \text{für } \xi > \xi_0 \\ (\text{Ausstrahlungsbedingung}) \quad & \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \sqrt{\|x\|} \left(\frac{\partial u^{aus}}{\partial \|x\|} - i\kappa u^{aus} \right) = 0 \\ (\text{Randbedingung}) \quad & u^{ein}(\xi, \eta) + u^{aus}(\xi, \eta) = 0 \quad \text{für } \xi = \xi_0 \end{aligned}$$

Die Wellenbedingung und die Ausstrahlungsbedingung werden durch (4.7) bereits erfüllt. Um das Vorgehen aus Abschnitt 4.1 auf diesen Fall anzuwenden,

muss zunächst das einfallende Feld als Linearkombination aus elliptischen Wellen ausgedrückt werden.

In elliptischen Koordinaten wird eine planare Welle durch (4.8) dargestellt.

$$e^{i\kappa\langle x,d \rangle} = e^{i\kappa(\cosh(\xi) \cos(\eta) \cos(\eta_0) + \sinh(\xi) \sin(\eta) \sin(\eta_0))} \quad (4.8)$$

Dabei kennzeichnet η_0 den Winkel zwischen der Richtung d und der x_1 -Achse.

Eine mögliche Summenschreibweise aus elliptischen Wellen wird durch (4.9) geliefert [27].

$$\begin{aligned} u^{ein}(\xi, \eta; q, \xi_0, \eta_0) = & 2 \left(ce_0(q; \eta_0) ce_0(q; \eta) Mc_0^{(1)}(q; \xi) \right. \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty} i^\nu \left(ce_\nu(q; \eta_0) ce_\nu(q; \eta) Mc_\nu^{(1)}(q; \xi) \right. \\ & \left. \left. + se_\nu(q; \eta_0) se_\nu(q; \eta) Ms_\nu^{(1)}(q; \xi) \right) \right) \quad (4.9) \end{aligned}$$

Mit dem gleichen Vorgehen, wie bei den Kreisen, ergibt sich (4.10) als gestreutes Feld für schallweiche Ellipsen.

$$\begin{aligned} u^{aus}(\xi, \eta; q, \xi_0, \eta_0) = & -2 \cdot \left(ce_0(\eta_0; q) ce_0(\eta; q) Mc_0^{(1)}(\xi_0; q) \frac{Mc_0^{(3)}(\xi; q)}{Mc_0^{(3)}(\xi_0; q)} \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} i^m \left(ce_m(\eta_0; q) ce_m(\eta; q) Mc_m^{(1)}(\xi_0; q) \frac{Mc_m^{(3)}(\xi; q)}{Mc_m^{(3)}(\xi_0; q)} \right. \\ & \left. \left. + se_m(\eta_0; q) se_m(\eta; q) Ms_m^{(1)}(\xi_0; q) \frac{Ms_m^{(3)}(\xi; q)}{Ms_m^{(3)}(\xi_0; q)} \right) \right) \quad (4.10) \end{aligned}$$

4.3 Schallharte Ellipse

Das gestreute Feld einer schallharten Ellipse muss 4.3.1 erfüllen.

Definition 4.3.1 (Streuung an einer schallharten Ellipse).

$$(Wellenbedingung) \quad \Delta u^{aus}(\xi, \eta) + \kappa^2 u^{aus}(\xi, \eta) = 0 \quad \text{für } \xi > \xi_0$$

$$(Ausstrahlungsbedingung) \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \sqrt{\|x\|} \left(\frac{\partial u^{aus}}{\partial \|x\|} - i\kappa u^{aus} \right) = 0$$

$$(Randbedingung) \quad \frac{\partial u^{ein}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{aus}}{\partial \xi} = 0 \quad \text{für } \xi = \xi_0$$

Das gestreute Feld einer schallharten Ellipse wird durch (5.3) ausgedrückt.

$$\begin{aligned} u^{aus}(\xi, \eta; q, \xi_0, \eta_0) = & -2 \cdot \left(ce_0(\eta_0, q) ce_0(\eta, q) Mc_0^{(1)'}(\xi_0, q) \frac{Mc_0^{(3)}(\xi, q)}{Mc_0^{(3)'}(\xi_0, q)} \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} i^m \left(ce_m(\eta_0, q) ce_m(\eta, q) Mc_m^{(1)'}(\xi_0, q) \frac{Mc_m^{(3)}(\xi, q)}{Mc_m^{(3)'}(\xi_0, q)} \right. \\ & \left. \left. + se_m(\eta_0, q) se_m(\eta, q) Ms_m^{(1)'}(\xi_0, q) \frac{Ms_m^{(3)}(\xi, q)}{Ms_m^{(3)'}(\xi_0, q)} \right) \right) \quad (4.11) \end{aligned}$$

5 Numerische Ergebnisse

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Programm in Python geschrieben, in welchem die einfallenden und gestreuten Wellen berechnet und grafisch dargestellt werden könne. In diesem Kapitel wird erklärt, wie akustische Felder numerisch berechnet und dargestellt werden, welche Bibliotheken und Funktionen dafür verwendet werden und wie das Programm genutzt werden kann, um beliebige solche Grafiken zu erstellen.

5.1 Womit wurde gearbeitet

Um viele Funktionsauswertungen schnell und geordnet auszuführen, wurde die Bibliothek „numpy“ verwendet, da es intern viele Zwischenschritte mit C++ ausführt und nahezu alle Funktionen direkt mit Arrays aufgerufen werden können, wodurch Schleifen vermieden werden können.

Beispiel 5.1.1. *Eine planare Welle kann durch*

```
1 import numpy as np
2 # Funktion der planaren Welle
3 # an der Stelle x mit Frequenz k und Richtung d
4 def planare_welle(x, k, d):
5     d = d / np.linalg.norm(d)
6     return np.exp(1j * k * x @ d)
7
```

Listing 5.1: Beispielcode einer planaren Welle

implementiert werden, wobei x und d numpy-Arrays gleicher Länge und k eine komplexe Zahl ist.

Um die verschiedenen Bessel- und Mathieu-Funktionen auszuwerten, wurde das Modul „special“ aus der Bibliothek „scipy“ genutzt. In Tabelle 5.1 werden die relevanten Funktionsaufrufe für „scipy“ aufgelistet.

Mathematische Funktion	Funktionsaufruf in Python
$J_\nu(x)$	<code>scipy.special.jv(v, x)</code>
$J'_\nu(x)$	<code>scipy.special.jvp(v, x)</code>
$Y_\nu(x)$	<code>scipy.special.yv(v, x)</code>
$Y'_\nu(x)$	<code>scipy.special.yvp(v, x)</code>
$H_\nu^{(1)}(x)$	<code>scipy.special.hankel1(v, x)</code>
$H_\nu^{(1)'}(x)$	<code>scipy.special.h1vp(v, x)</code>
$H_\nu^{(2)}(x)$	<code>scipy.special.hankel2(v, x)</code>
$H_\nu^{(2)'}(x)$	<code>scipy.special.h2vp(v, x)</code>
$ce_\nu(x; q)$	<code>scipy.special.mathieu_cem(v, q, x)[0]</code>
$ce'_\nu(x; q)$	<code>scipy.special.mathieu_cem(v, q, x)[1]</code>
$se_\nu(x; q)$	<code>scipy.special.mathieu_sem(v, q, x)[0]</code>
$se'_\nu(x; q)$	<code>scipy.special.mathieu_sem(v, q, x)[1]</code>
$Mc_\nu^{(1)}(x; q)$	<code>scipy.special.mathieu_modcem1(v, q, x)[0]</code>
$Mc_\nu^{(1)'}(x; q)$	<code>scipy.special.mathieu_modcem1(v, q, x)[1]</code>
$Ms_\nu^{(1)}(x; q)$	<code>scipy.special.mathieu_modsem1(v, q, x)[0]</code>
$Ms_\nu^{(1)'}(x; q)$	<code>scipy.special.mathieu_modsem1(v, q, x)[1]</code>
$Mc_\nu^{(2)}(x; q)$	<code>scipy.special.mathieu_modcem2(v, q, x)[0]</code>
$Mc_\nu^{(2)'}(x; q)$	<code>scipy.special.mathieu_modcem2(v, q, x)[1]</code>
$Ms_\nu^{(2)}(x; q)$	<code>scipy.special.mathieu_modsem2(v, q, x)[0]</code>
$Ms_\nu^{(2)'}(x; q)$	<code>scipy.special.mathieu_modsem2(v, q, x)[1]</code>

Tabelle 5.1: Funktionsaufrufe der Bessel- und Mathieu-Funktionen mit „scipy“.

Für modifizierte Mathieu-Funktionen dritter und vierter Art, die für das gestreute Feld der Ellipsen benötigt werden, bietet „scipy“ keine direkten Funktionen. Allerdings können diese, mit den Relationen (5.1) und (5.2) aus [1] sehr leicht implementiert werden, wobei $M_\nu^{(j)}(x; q)$ jeweils einheitlich $Mc_\nu^{(j)}(x; q)$ oder $Ms_\nu^{(j)}(x; q)$ kennzeichnet.

$$M_\nu^{(3)}(x; q) = M_\nu^{(1)}(x; q) + M_\nu^{(2)}(x; q)i \quad (5.1)$$

$$M_\nu^{(4)}(x; q) = M_\nu^{(1)}(x; q) - M_\nu^{(2)}(x; q)i \quad (5.2)$$

Um die einfallenden und gestreuten Felder schließlich grafisch darzustellen, wurde die Bibliothek „matplotlib“ genutzt. Die Funktion „pyplot.contourf“ bekommt drei Matrizen mit Werten und erstellt daraufhin einen gefüllten Kontur-Plot. Die ersten beiden Matrizen enthalten dabei die Koordinaten und die dritte Matrix beinhaltet die Funktionswerte, welche dann durch einen Farbwert dargestellt werden.

Beispiel 5.1.2. *Eine planare Welle wird durch*

$$e^{ik\langle x, d \rangle}$$

definiert und kann durch folgenden Code dargestellt werden:

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Erstellen eines Gitters von x1- und x2-Werten
5 x1 = np.linspace(-5, 5, 100)
6 x2 = np.linspace(-5, 5, 100)
7 X1, X2 = np.meshgrid(x1, x2)
8
9 # Festlegen der Wellenzahl und der Richtung
10 k = 4
11 d = np.array([1, 2])
12 d = d / np.linalg.norm(d)
13
14 # Auswertung der Welle
15 u = np.exp(1j * k * (X1 * d[0] + X2 * d[1]))
16
```

```

17 # Erstellen des Kontur-Plots
18 plt.contourf(X1, X2, u.real, cmap='viridis')
19 plt.colorbar() # Fuegt eine Farbskala hinzu
20 plt.show()

```

Listing 5.2: Erstellung der Grafik einer planaren Welle mit Wellenzahl 4 in Richtung $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)^\top$ für $-5 \leq x_1 \leq 5$ und $-5 \leq x_2 \leq 5$, ausgewertet an 100^2 äquidistanten Punkten.

Dieser Code generiert Abbildung 5.1.

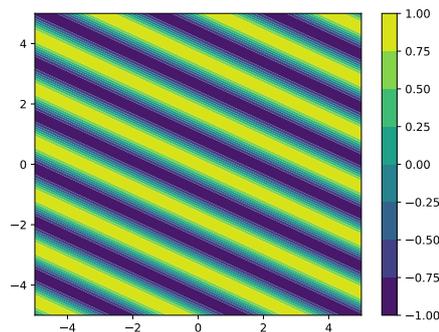


Abbildung 5.1: Grafik einer planaren Welle mit Wellenzahl 4 in Richtung $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)^\top$ für $-5 \leq x_1 \leq 5$ und $-5 \leq x_2 \leq 5$, ausgewertet an 100^2 äquidistanten Punkten.

5.2 Nutzung des Programms

Das Programm, welches im Rahmen dieser Arbeit erstellt wurde, bietet Möglichkeiten planare Wellen, gestreute Felder und die resultierenden Felder zu berechnen und grafisch darzustellen. Um dieses Programm zu nutzen, muss zunächst eine Python-Datei angelegt werden. In dieser muss dann aus der Datei „acoustic_fields.py“ eine der Klassen „PlaneField“, „ScatteredField“ oder „TotalField“ importiert werden. Ebenfalls muss aus den Dateien „sound_soft_obstacles“ oder „sound_hard_obstacles“ eine der Klassen „SoundSoftCircle“, „SoundSoftEllipse“, „SoundHardCircle“ oder „SoundHardEllipse“ importiert werden.

```

1 from acoustic_fields import PlaneField, ScatteredField,
   TotalField

```

```

2 from sound_soft_obstacles import SoundSoftCircle,
   SoundSoftEllipse
3 from sound_hard_obsacles import SoundHardCircle,
   SoundHardEllipse

```

Listing 5.3: Alle möglichen Imports

Um nun eine Grafik zu erstellen, muss zunächst ein Gegenstand (Obstacle) erstellt werden. Die Kreise müssen beim Erstellen einen Radius übergeben bekommen und die Ellipsen die Halbachsen a und b (Der Zusammenhang wurde in 3.2.1 dargestellt). Der Gegenstand wird dann beim Erstellen des akustischen Felds übergeben. Der Plot wird dann erstellt, indem die Methode „plot“ auf dem Objekt der akustischen Welle aufgerufen wird. Dabei werden die Koordinaten der Punkte, an denen das Feld ausgewertet und angezeigt werden soll, in Form von Matrizen übergeben. Zur Erstellung dieser Koordinaten eignen sich Funktionen aus „numpy“.

Beispiel 5.2.1. *Die Grafik des gestreuten Feldes mit einem schallweichen Kreis wird mit*

$$u^{aus}(r, \theta; \kappa, \theta_0) = -\frac{J_0(\kappa r_0)}{H_0^{(1)}(\kappa r_0)} H_0^{(1)}(\kappa r) - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} i^{\nu} \frac{J_{\nu}(\kappa r_0)}{H_{\nu}^{(1)}(\kappa r_0)} H_{\nu}^{(1)}(\kappa r) e^{i\nu(\theta-\theta_0)}$$

berechnet und kann durch folgenden Code umgesetzt werden:

```

1 import numpy as np
2 from acoustic_fields import TotalField
3 from sound_soft_obstacles import SoundSoftCircle
4
5 if __name__ == '__main__':
6     # Festlegen der Parameter
7     k = 4
8     d = np.array([2, 1])
9     radius = 1
10
11     # Erstellen der Kreises
12     obstacle = SoundSoftCircle(radius)
13
14     # Erstellen der Koordinaten
15     x1_values = np.linspace(-5, 5, 200)
16     x2_values = np.linspace(-5, 5, 200)

```

```

17 X1, X2 = np.meshgrid(x1_values, x2_values)
18
19 # Erstellen und Darstellen des gesamten akustischen Feldes
20 u_tot = TotalField(k, obstacle, direction=d)
21 u_tot.plot((X1, X2), res=200)
22

```

Listing 5.4: Erstellung der Grafik einer resultierenden Welle inklusive dem einfallenden und gestreuten Feld eines schallweichen Kreises mit Radius $r_0 = 1$ und Wellenzahl $\kappa = 4$ in Richtung $\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ und somit $\theta_0 = \text{atan2}(1, 2) \approx 0,463648$ für $-5 \leq x_1 \leq 5$ und $-5 \leq x_2 \leq 5$, ausgewertet an 200^2 äquidistanten Punkten. Von der unendlichen Summe wurden hier die ersten 200 Summanden genutzt.

Die Grafik, die durch diesen Code erstellt wird, wird in Abbildung 5.2 angezeigt.

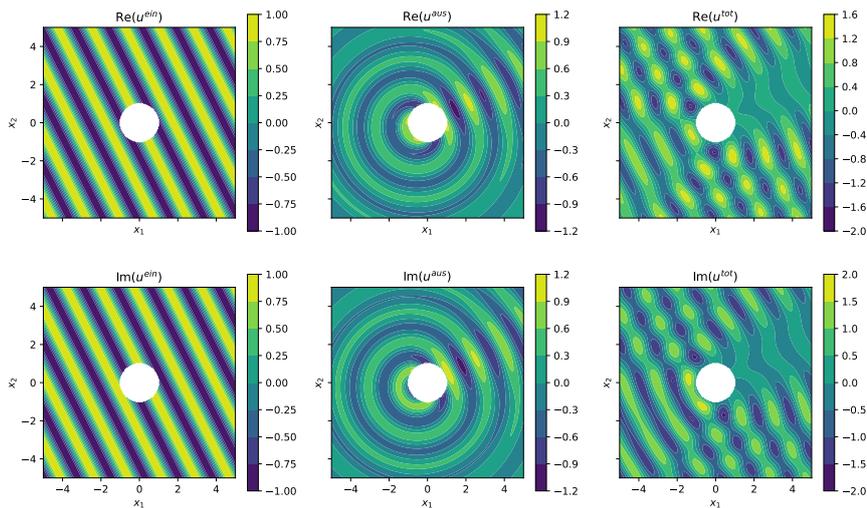


Abbildung 5.2: Grafik einer einfallenden, einer gestreuten und einer resultierenden Welle inklusive dem einfallenden und gestreuten Feld eines schallweichen Kreises mit Radius $r_0 = 1$ und Wellenzahl $\kappa = 4$ in Richtung $\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ und somit $\theta_0 = \text{atan2}(1, 2) \approx 0,463648$ für $-5 \leq x_1 \leq 5$ und $-5 \leq x_2 \leq 5$, ausgewertet an 200^2 äquidistanten Punkten. Von der unendlichen Summe wurden hier die ersten 200 Summanden genutzt.

Beispiel 5.2.2. Der Code zum Erstellen einer Grafik für einen schallharten

Kreis gleicht dem aus Beispiel 5.2.1, nur dass statt eines „SoundSoftCircle“-Objekts nun ein „SoundHardCircle“ verwendet wird. Das gestreute Feld des schallharten Kreises wird durch

$$u^{aus}(r, \theta; \kappa, \theta_0) = -\frac{J_0'(\kappa r_0)}{H_0^{(1)'}(\kappa r_0)} H_0^{(1)}(\kappa r) - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} i^\nu \frac{J_\nu'(\kappa r_0)}{H_\nu^{(1)'}(\kappa r_0)} H_\nu^{(1)}(\kappa r) e^{i\nu(\theta-\theta_0)}$$

berechnet. Die Grafik wird in Abbildung 5.3 angezeigt.

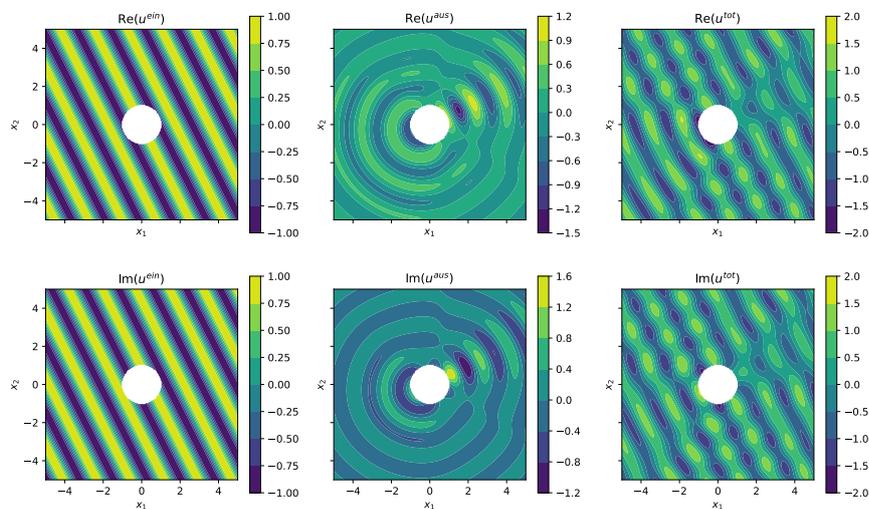


Abbildung 5.3: Grafik einer einfallenden, einer gestreuten und einer resultierenden Welle inklusive dem einfallenden und gestreuten Feld eines schallharten Kreises mit Radius $r_0 = 1$ und Wellenzahl $\kappa = 4$ in Richtung $\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ und somit $\theta_0 = \text{atan2}(1, 2) \approx 0,463648$ für $-5 \leq x_1 \leq 5$ und $-5 \leq x_2 \leq 5$, ausgewertet an 200^2 äquidistanten Punkten. Von der unendlichen Summe wurden hier die ersten 200 Summanden genutzt.

Beispiel 5.2.3. Im Fall einer schallweichen Ellipse wird das gestreute Feld

mit

$$\begin{aligned}
 u^{aus}(\xi, \eta; q, \xi_0, \eta_0) = & -2 \cdot \left(ce_0(\eta_0; q) ce_0(\eta; q) Mc_0^{(1)}(\xi_0; q) \frac{Mc_0^{(3)}(\xi; q)}{Mc_0^{(3)}(\xi_0; q)} \right. \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} i^m \left(ce_m(\eta_0; q) ce_m(\eta; q) Mc_m^{(1)}(\xi_0; q) \frac{Mc_m^{(3)}(\xi; q)}{Mc_m^{(3)}(\xi_0; q)} \right. \\
 & \left. \left. + se_m(\eta_0; q) se_m(\eta; q) Ms_m^{(1)}(\xi_0; q) \frac{Ms_m^{(3)}(\xi; q)}{Ms_m^{(3)}(\xi_0; q)} \right) \right)
 \end{aligned}$$

berechnet. Die Konstanten werden mit

$$\begin{aligned}
 c &= \sqrt{a^2 - b^2} & q &= \frac{c^2 \kappa^2}{4} \\
 \xi_0 &= \operatorname{atanh}\left(\frac{b}{a}\right) & \eta_0 &= \operatorname{atan2}(d_2, d_1)
 \end{aligned}$$

ermittelt. Die grafische Darstellung wird in Abbildung 5.4 dargestellt.

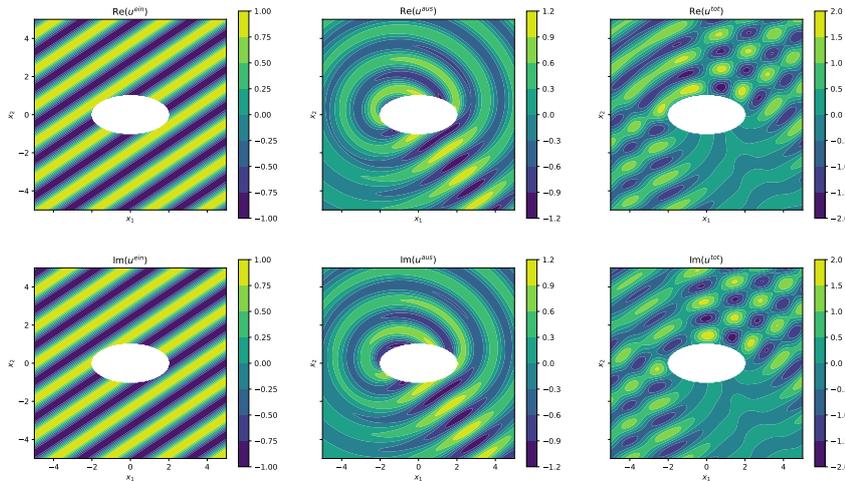


Abbildung 5.4: Grafik einer resultierenden Welle inklusive dem einfallenden und gestreuten Feld an einer schallweichen Ellipse mit den Halbachsen $a = 2$ und $b = 1$ und der Wellenzahl $\kappa = 4$ in Richtung $\frac{1}{\sqrt{13}}(2, -3)$ und somit $\eta_0 = \operatorname{atan2}(-3, 2) \approx -0.982794$ für $-5 \leq x_1 \leq 5$ und $-5 \leq x_2 \leq 5$ ausgewertet an 200^2 äquidistanten Punkten. Von der unendlichen Summe wurden hier die ersten 35 Summanden genutzt.

Beispiel 5.2.4. *Im Fall einer schallharten Ellipse wird das gestreute Feld mit*

$$\begin{aligned}
 u^{aus}(\xi, \eta; q, \xi_0, \eta_0) = & -2 \cdot \left(ce_0(\eta_0, q) ce_0(\eta, q) Mc_0^{(1)'}(\xi_0, q) \frac{Mc_0^{(3)}(\xi, q)}{Mc_0^{(3)'}(\xi_0, q)} \right. \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} i^m \left(ce_m(\eta_0, q) ce_m(\eta, q) Mc_m^{(1)'}(\xi_0, q) \frac{Mc_m^{(3)}(\xi, q)}{Mc_m^{(3)'}(\xi_0, q)} \right. \\
 & \left. \left. + se_m(\eta_0, q) se_m(\eta, q) Ms_m^{(1)'}(\xi_0, q) \frac{Ms_m^{(3)}(\xi, q)}{Ms_m^{(3)'}(\xi_0, q)} \right) \right) \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

berechnet. Die Konstanten werden mit

$$\begin{aligned}
 c &= \sqrt{a^2 - b^2} & q &= \frac{c^2 \kappa^2}{4} \\
 \xi_0 &= \operatorname{atanh}\left(\frac{b}{a}\right) & \eta_0 &= \operatorname{atan2}(d_2, d_1)
 \end{aligned}$$

ermittelt. Die grafische Darstellung wird in Abbildung 5.5 dargestellt.

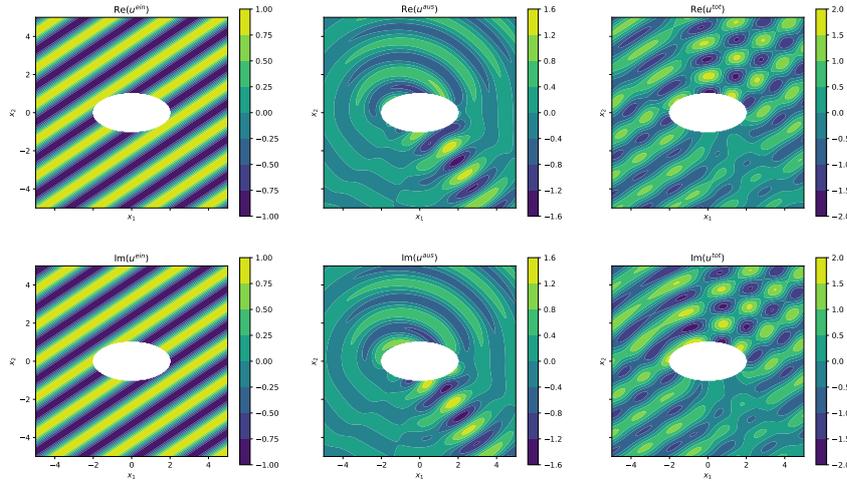


Abbildung 5.5: Grafik einer resultierenden Welle inklusive dem einfallenden und gestreuten Feld an einer schallharten Ellipse mit den Halbachsen $a = 2$ und $b = 1$ und der Wellenzahl $\kappa = 4$ in Richtung $\frac{1}{\sqrt{13}}(2, -3)$ und somit $\eta_0 = \operatorname{atan2}(-3, 2) \approx -0.982794$ für $-5 \leq x_1 \leq 5$ und $-5 \leq x_2 \leq 5$ ausgewertet an 200^2 äquidistanten Punkten. Von der unendlichen Summe wurden hier die ersten 35 Summanden genutzt.

Die Koordinaten, die sich innerhalb des streuenden Gegenstandes befinden, werden mit dem Modul „numpy.ma“ maskiert, damit dieser Bereich leer bleibt. Da die Summen der gestreuten Felder mit unendlicher Obergrenze offensichtlich nicht numerisch berechnet werden können und die Koeffizienten mit großer Ordnung sehr klein werden, muss eine geeignete Obergrenze gewählt werden. Die Funktionen wurden so implementiert, dass sie als Standard mit 100 Summanden rechnen. Dieser Wert kann allerdings mit dem parameter „res“ auch manuell gesetzt werden.

6 Zusammenfassung & Ausblick

6.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden direkte akustische Streuprobleme für kreisförmige- und ellipsenförmige Gebiete vorgestellt und untersucht. Es wurde erläutert, dass für akustische Streuprobleme im Allgemeinen drei Bedingungen gelten:

1. Die Helmholtz-Gleichung 2.1.2
2. Die Sommerfeld-Austrahlungsbedingung 2.2.1
3. Die materialabhängige Randbedingung Abschnitt 2.3

Außerdem wurde gezeigt, wie durch Trennung der Variablen, Lösungen der Helmholtz-Gleichung in Polarkoordinaten durch Bessel-Funktionen und in elliptischen Koordinaten durch Mathieu-Funktionen gebildet werden können. Weiterhin wurde gezeigt, was planare Wellen sind und wie diese mithilfe der Jacobi-Anger-Erweiterung als Linearkombination von Kreis- bzw. ellipsenförmige Wellen dargestellt werden. Diese Summendarstellung der einfallenden planaren Welle wurde verwendet, um durch Koeffizientenvergleich eine Summendarstellung der gestreuten Welle zu bilden. Dieser Vorgang wurde für schallweiche und schallharte, kreisförmige und ellipsenförmige Gebiete beschrieben. Außerdem wurde erklärt, was das Fernfeld ist und wie es für diese Fälle berechnet werden kann.

Schließlich wurde ein Programm zur grafischen Darstellung solcher Streuprobleme vorgestellt. Es wurde erklärt, wie dieses Programm „numpy“, „scipy“ und „matplotlib“ verwendet, um die verschiedenen akustischen Felder zu berechnen und darzustellen. Außerdem wurde anhand von Beispielen gezeigt, wie dieser Code aufgerufen werden muss, um solche Schallfelder für verschiedene Parameter zu erzeugen.

6.2 Ausblick

Offene Fragen für weitere Untersuchungen sind unter anderem, wie man die optimale Anzahl an Summanden für die Berechnung der gestreuten Felder wählt. Eine zu kleine Wahl, reicht offensichtlich nicht aus, um das gesamte gestreute Feld zu repräsentieren. Eine zu große Wahl hat neben der erhöhten Laufzeit das Problem, dass vor allem die numerische Auswertung der Mathieu-Funktionen, bei hoher Ordnung sehr ungenaue Werte liefert.

Eine weitere Frage, die noch offen bleibt, ist, wie solche gestreuten Felder für Gebiete mit anderen Formen aussehen würden. Für Dreiecke und Vierecke, wäre eine solche Untersuchung zum Beispiel denkbar, da für diese Formen ebenfalls eine Trennung der Variablen möglich ist.

In dieser Arbeit wurde die einfallende Welle immer als planare Welle angenommen. Offen bleibt jedoch, welchen Einfluss diese Gebiete auf andere Arten von Wellen, wie zum Beispiel Punktquellen. In [7] wird sich unter anderem genau damit befasst.

Ebenso könnte untersucht werden, was im dreidimensionalen Raum passieren würde, wenn statt einem Kreis, eine Kugel oder statt einer Ellipse ein Ellipsoid betrachtet werden würde.

Eine mögliche Fortführung dieser Arbeit könnte sich mit dem inversen Problem befassen. Wie man also aus dem gestreuten Feld, das streuende Objekt inklusive seiner Form, Größe und Position bestimmen kann.

Ein weiteres interessantes Thema, das auf dieser Arbeit aufbauen könnte, ist das Streuproblem, wenn es mehr als nur einen streuenden Gegenstand gibt. In [29] wird dieses Thema untersucht.

Literatur

- [1] M. Abramowitz und I. A. Stegun. „Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55. Tenth Printing.“ In: (1972).
- [2] T. R. Akylas und C. C. Mei. „Introduction to Two Dimensional Scattering“. In: *I-campus project, School-wide Program on Fluid Mechanics, Modules on Waves in Fluids* (2024). Available online.
- [3] S. Hasheminejad und M. Alibakhshi. „Two-dimensional scattering from an impenetrable cylindrical obstacle in an acoustic quarterspace“. In: *Forschung im Ingenieurwesen* 70 (2006), S. 179–186.
- [4] I. Andronov. *Problems of High Frequency Diffraction by Elongated Bodies*. Springer, 2023.
- [5] T. Arens. *Direkte und inverse Streuprobleme*. Vorlesungsausarbeitung, Karlsruher Institut für Technologie (KIT). 2011. URL: <https://www.math.kit.edu/ianmip/lehre/streuprobleme2011s/media/streuprobleme.pdf>.
- [6] G. B. Arfken, H. J. Weber und F. E. Harris. *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*. Academic press, 2011.
- [7] J. Bowman, T. Senior und P. Uslenghi. *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes*. North-Holland Publishing Company, 1969.
- [8] A. Broman. *Introduction to partial differential equations: from Fourier series to boundary-value problems*. Courier Corporation, 2012.
- [9] F. Cakoni und D. Colton. *Qualitative Methods in Inverse Scattering Theory*. Interaction of Mechanics and Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006.

- [10] L. Chaos-Cador und E. Ley-Koo. „Mathieu functions revisited: matrix evaluation and generating functions“. In: *Revista Mexicana de Física* 48 (2002), S. 67–75.
- [11] Y. D. Chong. „Appendix A: Circular and Spherical Waves“. In: *Graduate Quantum Mechanics* (2024). Appendix A.
- [12] D. L. Colton, R. Kress und R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*. Bd. 93. Springer, 1998.
- [13] D. Colton und R. Kress. „Looking back on inverse scattering theory“. In: *SIAM Review* 60 (2018), S. 779–807.
- [14] F. Léon, F. Chati und J.-M. Conoir. „Modal theory applied to the acoustic scattering by elastic cylinders of arbitrary cross section“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 116 (2004), S. 686–692.
- [15] S. L.-G. M.-G. DATTOLI und A. T.-D. TOCCI. „A note on generalized Bessel functions and Fourier series“. In: ().
- [16] J. Dölz, H. Harbrecht und M. Multerer. „Solving acoustic scattering problems by the isogeometric boundary element method“. In: *Engineering with Computers* (2024), S. 1–11.
- [17] M. Fowler. *More Scattering: the Partial Wave Expansion*. Charlottesville, VA: University of Virginia, 2008.
- [18] R. Kress. „Integral equation methods in inverse obstacle scattering with a generalized impedance boundary condition“. In: *Contemporary Computational Mathematics-A Celebration of the 80th Birthday of Ian Sloan* (2018), S. 721–740.
- [19] R. Kress. „Uniqueness in inverse obstacle scattering for electromagnetic waves“. In: *Proceedings of the URSI General Assembly*. 2002.
- [20] W.-M. Lee. „Acoustic scattering by multiple elliptical cylinders using collocation multipole method“. In: *Journal of Computational Physics* 231 (2012), S. 4597–4612.
- [21] R. Lerch, G. Sessler und D. Wolf. *Technische Akustik: Grundlagen und Anwendungen*. Springer-Verlag, 2009.

-
- [22] J. Yue, M. Li, P. Li und X. Yuan. „Numerical solution of an inverse obstacle scattering problem for elastic waves via the Helmholtz decomposition“. In: *Commun. Comput. Phys.* 26 (2019), S. 809–837.
- [23] C. Liu. „An inverse obstacle problem: A uniqueness theorem for spheres“. In: (1995).
- [24] H. Liu und J. Zou. „Zeros of the Bessel and spherical Bessel functions and their applications for uniqueness in inverse acoustic obstacle scattering“. In: *IMA journal of applied mathematics* 72 (2007), S. 817–831.
- [25] A. Mimani. *Acoustic analysis and design of short elliptical end-chamber mufflers*. Springer, 2015.
- [26] A. Moiola. *Scattering of time-harmonic acoustic waves: Helmholtz equation, boundary integral equations and BEM*. Lecture notes for the “Advanced numerical methods for PDEs” class, Department of Mathematics, University of Pavia. Preliminary version. 2022. URL: <https://euler.unipv.it/moiola/T/MNAPDE2022/MNAPDE2022.html>.
- [27] J. A. Stratton. *Electromagnetic theory*. Bd. 33. John Wiley & Sons, 2007.
- [28] X. Xu. „Uniqueness in inverse scattering with phaseless near-field data generated by superpositions of two incident plane waves“. In: *arXiv preprint arXiv:2307.11969* (2023).
- [29] K.-H. Yun. „The reflection of solutions of Helmholtz equation and an application“. In: *Communications of the Korean Mathematical Society* 16 (2001), S. 427–436.