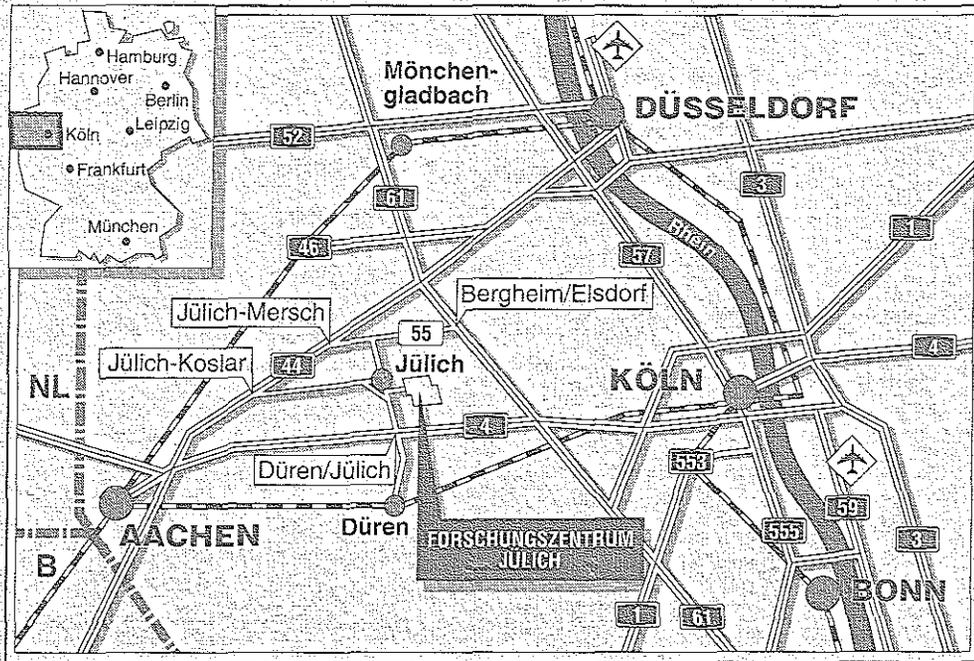


Institut für Plasmaphysik
Assoziation EURATOM-KFA

**Entwicklung eines Finite Elemente
Verfahrens zur Modellierung der
Plasmaströmung in der Randschicht
von TOKAMAKS**

Thomas Pütz





Berichte des Forschungszentrums Jülich ; 2942

ISSN 0944-2952

Institut für Plasmaphysik Jül-2942

Assoziation EURATOM-KFA

D 61 (Diss. Universität Düsseldorf)

Zu beziehen durch : Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek

D-52425 Jülich · Bundesrepublik Deutschland

Telefon : 024 61 / 61 - 61 02 · Telefax : 024 61 / 61 - 61 03 · Telex : 8 33 556-70 kfa d

Handwritten text, possibly a signature or initials, located in the upper left quadrant of the page.

Main body of handwritten text, appearing as a dense, somewhat illegible script covering the lower two-thirds of the page.

Entwicklung eines Finite Elemente Verfahrens zur Modellierung der Plasmaströmung in der Randschicht von TOKAMAKS

Thomas Pütz

Handwritten text, possibly bleed-through from the reverse side of the page. The text is illegible due to fading and blurring.

Handwritten text, possibly a signature or date, located in the lower right quadrant of the page.

Extensive handwritten text at the bottom of the page, appearing as a dense block of illegible script.

ABSTRACT

Over the last years effort is increasing to employ Finite Element Methods for plasma edge fluid-modelling. Compared with commonly applied procedures, this method has the advantage, that not-simply-connected domains with complex geometrical structure can be described in detail. The purpose of the presented work is to analyse these considerations and to develop a two-dimensional Finite-Element-Code. This code should be able to simulate the plasma flow pattern in the burning chamber of fusion devices by an exact and solution-dependent discretisation.

Firstly the generalized Navier-Stokes-equations are modified according to the special features of the edge plasma. From these equations fundamental conditions for the applicability of the method can be derived. They are consistent with criteria found at other laboratories. Based on this, a numerically stable solution procedure is formulated. It is capable to deal with the strong anisotropy in plasma transport and the large velocity gradients arising in front of the limiter. Reionisation and other collision processes of recycled neutral particles are described by coupling the fluid model to the kinetic Monte-Carlo neutral-gas-code EIRENE. For comparison and fundamental numerical studies a fast analytical description of recycling is also available. Such rather crude approximations are employed in other codes often as the only option.

By this, it is now possible to treat the flow of ions and neutral atoms/molecules near complex surface structures of fusion devices consistently. Because of the time step restriction in the special solution algorithm, up to now the electron temperature profile has to be provided from elsewhere. It can, for example be interpolated from experimental data or from results of other independent code calculations. The newly developed code is applied to a typical TOKAMAK-discharge (TEXTOR) and characteristic results are discussed.

Using stationary solutions, the validity of the fluid-approach can be checked a posteriori: It is shown that in the strict sense the fluid assumptions are violated at least in some parts of the boundary layer. This can be attributed to the large value of the classical transport coefficients ($\|\vec{B}\rangle$), generally used in plasma fluid models. This explains, why usually the influence of viscosity effects – relative to pressure-forces – on the plasma flow is overestimated. Therefore modifications to the commonly used transport equations are proposed, for instance implementation of a "flux reduction" both for the heat- and momentum-flux.

Nevertheless, for the case discussed in this work the classical transport coefficients are retained to compare the solution with results of other calculations and to isolate special features caused by the interaction of strong anisotropic transport with complex geometrical structures:

- On top of the limiter a fountain-like flow of ions is observed leading to a flow reversal back to the core-plasma.
- In the scoops underneath the limiter the plasma density increases along \vec{B} because of a "spatial focussing" of reionized neutral particles. Making consequent use of this effect would render the particle removal more efficient ("plasma plugging").

1. Introduction

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records and the role of the committee in overseeing these processes.

It is noted that the committee has been working closely with various departments to ensure that all necessary data is collected and analyzed.

The second part of the document provides a detailed overview of the current status of the project, including the progress made to date.

Key findings from the initial phase of the study are presented, highlighting the challenges faced and the potential solutions.

The committee has identified several areas where further research is needed to fully understand the implications of the findings.

It is recommended that the next phase of the project should focus on developing a comprehensive strategy to address these issues.

The final part of the document outlines the proposed timeline for the completion of the project and the expected outcomes.

The committee believes that the information provided here will be valuable in making informed decisions about the future of the organization.

We look forward to continuing our collaboration and to achieving the goals set out in this document.

Thank you for your attention and support. We are confident that together we can make a significant impact.

KURZFASSUNG

In den letzten Jahren wurden verstärkt Überlegungen angestellt, die Finite Elemente Methode zur Modellierung der Plasmarandschicht zu nutzen. Sie hat gegenüber den bisher verwendeten Verfahren den Vorteil, nicht einfach zusammenhängende Gebiete mit komplizierter geometrischer Form detailliert modellieren zu können. Die vorliegende Arbeit hat das Ziel, diese Überlegungen zu systematisieren und darauf aufbauend, ein zweidimensionales Finite Elemente Programm zu entwickeln, das die Strömungsverhältnisse in der Brennkammer von Fusionsapparaturen durch eine lösungsangepaßte Diskretisierung räumlich exakt beschreibt.

Dazu werden zunächst die verallgemeinerten Navier-Stokes-Gleichungen gemäß den in der Plasmarandschicht üblichen Modellannahmen modifiziert. Aus diesen Gleichungen können grundsätzliche Bedingungen für die Brauchbarkeit der Methode abgeleitet werden. Sie erweisen sich als konsistent mit auch anderenorts gefundenen Kriterien. Daran angepaßt wird ein Lösungsalgorithmus formuliert, der den stark anisotropen Transport und große Geschwindigkeitsgradienten, vor allem in Limiternähe, numerisch stabil beschreibt. Um die Reionisation von recycelten Neutralteilchen und die Physik ihrer Stoßprozesse möglichst vollständig beschreiben zu können, wird das Fluid-Modell an den Monte-Carlo Neutralgascode EIRENE gekoppelt. Zu Vergleichszwecken und für prinzipielle numerische Studien steht ein einfaches, analytisches Neutralteilchenmodell zur Verfügung, wie es in anderen Programmen oft als einzige Option verwendet wird.

Damit ist es jetzt möglich, die Strömung der Ionen und des Neutralgases in der Nähe komplizierter Brennkammerbauteile selbstkonsistent zu behandeln. Dazu muß das Elektronentemperaturprofil - aufgrund der Zeitschrittbeschränkung des numerischen Verfahrens - durch Anpassung an experimentelle Daten und über eine Interpolation der Ergebnisse unabhängiger numerischer Rechnungen vorgegeben werden. In ersten Beispielrechnungen wird das entwickelte Verfahren auf eine typische TOKAMAK-Entladung (TEXTOR) angewendet.

Ausgehend von stationären Lösungen kann a posteriori die Gültigkeit der Fluid-Näherung für die Ionen überprüft werden: Sie ist in poloidaler Richtung in Teilen der Randschicht verletzt. Dies ist auf die sehr großen, klassischen Transportkoeffizienten ($\parallel \vec{B}$) zurückzuführen, wie sie bisher in allen Plasma-Fluid Modellen verwendet werden. Damit wird verständlich, warum auch in anderen Rechnungen die Viskositätseffekte relativ zu den Druckkräften einen zu großen Einfluß auf das Strömungsverhalten haben. Es sind daher Modifikationen der derzeit üblichen Transportgleichungen notwendig, wie etwa die Einführung einer "Flußbegrenzung" sowohl für den Wärme-, als auch für den Impulsfluß.

In dem diskutierten Fallbeispiel werden allerdings die konventionellen Koeffizienten beibehalten, um die Lösung mit den Ergebnissen anderer Rechnungen vergleichen und Effekte extrahieren zu können, die sich speziell aus dem Zusammenwirken von stark anisotropem Transport und geometrischer Komplexität ergeben:

- Über dem Limiter wird eine springbrunnenartige Strömung der Ionen beobachtet, die zu einer Rückströmung der Ionen ins Kernplasma führen kann.
- In den unterhalb des Limiters liegenden Einlaufkanälen erhöht sich aufgrund der räumlich begrenzten Reionisation der Neutralteilchen die Plasmadichte beträchtlich und verstärkt somit die Teilchenabfuhr ("plasma plugging").

UNIT 10: THE HISTORY OF THE UNITED STATES

The history of the United States is a complex and fascinating story that spans centuries. It begins with the arrival of the first settlers in the early 17th century and continues through the present day.

The early years of the United States were marked by a period of exploration and settlement. The Pilgrims and Puritans sought a better life in the New World, and their struggles and triumphs shaped the early character of the nation. The American Revolution was a pivotal moment in the country's history, as the colonies fought for independence from British rule.

The 19th century was a time of rapid expansion and growth. The discovery of gold in California led to a massive influx of settlers, and the westward movement of the population was a defining feature of the era. The Civil War, which broke out in 1861, was a bloody and divisive conflict that ultimately resulted in the preservation of the Union and the abolition of slavery.

The 20th century was a period of significant social and political change. The United States emerged as a global superpower after World War II, and its influence was felt around the world. The civil rights movement of the 1950s and 1960s was a landmark struggle for equality and justice, and it led to the passage of landmark legislation such as the Civil Rights Act of 1964.

The 21st century has been a time of rapid technological advancement and globalization. The United States has continued to play a leading role in the world, and its values of freedom, democracy, and individualism remain central to its identity. The challenges of the 21st century, such as climate change and global terrorism, require a new approach to leadership and governance.

The history of the United States is a story of resilience and innovation. It is a story of a nation that has overcome adversity and emerged as a global leader. The values and principles that have guided the United States throughout its history continue to inspire and guide the people of the world today.

The United States is a country of many faces, and its history is a reflection of the diverse people who have called it home. From the early settlers to the modern-day citizens, the United States has always been a land of opportunity and hope. As we look to the future, we can be confident that the United States will continue to lead the world in the 21st century and beyond.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Allgemeine Einführung	1
1.2	Die Plasmarandschicht - Ein Überblick	6
1.2.1	Einzelprozesse in der Randschicht	6
1.2.2	Anforderungen an die Randschicht	8
1.2.3	Die Wandbeschichtung	9
1.2.4	Der Limiter	9
1.2.5	Der Divertor	9
1.2.6	Vergleich von Limiter und Divertor	11
1.2.7	Andere Methoden zur Kontrolle der Randschicht	11
2	Modellierung von Fusionsplasmen	13
2.1	Modellierung von Einzelbereichen im Tokamak	14
2.2	Modellierung des Plasmakerns	16
2.2.1	Die Berechnung des Plasmagleichgewichts im Tokamak	16
2.2.2	Die Bedingungen für stationäres Brennen in Tokamakplasmen	26
2.3	Die Modellierung der Plasmarandschicht	28
2.3.1	Die Hydrodynamische Beschreibung der Plasmarandschicht	29
2.3.2	Die Drift-kinetische Theorie	32
2.3.3	Das Bohm-Kriterium	33
2.3.4	Die Neutralteilchenmodellierung in der Plasmarandschicht	38
2.3.5	Der derzeitige Status der 2D - Randschichtmodellierung	42
2.3.6	Entwicklung von Finite-Elemente-Verfahren	43
3	Die Fluidgleichungen für Plasmaströmungen	45
3.1	Voraussetzungen des Fluidmodells	45
3.2	Die Fluidgleichungen in konservativer Form	48
3.3	Die Fluidgleichungen für ein Plasma	49
3.4	Die Plasmaströmung in der Tokamakrandschicht	55
3.4.1	Transformation der Plasmagleichungen von lokalen Magnetfeld- koordinaten in eine toroidale Geometrie	55
3.4.2	Die Beschreibung des radialen Transports	66
3.5	Modifikation der Plasmagleichungen	67
3.5.1	Einführung eines Diffusionsmodells für den radialen Teilchenstrom	67

3.5.2	Vereinfachung des physikalischen Modells	68
3.5.3	Beschränkung der Wärmeflüsse	69
3.6	Die Modellgleichungen in der Tokamakrandschicht	69
3.7	Charakteristiken des Randschichttransports	71
3.7.1	Betrachtung der Einzelprozesse	71
3.7.2	Vergleich der charakteristischen Transportzeiten in der Plasma- randschicht	74
3.7.3	Vergleich des Plasmafluids mit anderen Flüssigkeiten	75
3.7.4	Kritische Bemerkungen zur Fluidbeschreibung des Plasmas	77
4	Die Methode der finiten Elemente	79
4.1	Allgemeine Einführung	79
4.2	Mathematische Grundlagen	81
4.2.1	Variationsprinzipien	81
4.2.2	Methode der gewichteten Residuen	82
4.3	Die Anwendung der Methode der finiten Elemente	84
4.3.1	Generation von Dreiecksnetzen	84
4.3.2	Berechnung der Ansatzfunktionen	85
4.3.3	Anwendung der Methode des gewichteten Residuums	89
4.3.4	Das Taylor-Galerkin Zweischrittverfahren	94
4.3.5	Stabilität des expliziten Zweischrittverfahrens	99
4.3.6	Implementierung der Randbedingungen in der FEM	101
4.3.7	Lösungsabhängige Netzverfeinerung in Dreiecksnetzen	102
5	Das FEM-Modell in der Randschicht von TEXTOR	105
5.1	Das Rechengebiet	105
5.1.1	Die Berechnung der magnetischen Konfiguration	105
5.1.2	Die Generation eines Rechengitters	108
5.1.3	Die Untersuchung der numerischen Diffusion	109
5.2	Implementierung der Randbedingungen	113
5.2.1	Einströmrand - innere Flußfläche	114
5.2.2	Plasmarand - äußere Flußfläche	115
5.2.3	Ausströmrand - Limiter	115
5.3	Berücksichtigung von Quelltermen	116
5.3.1	Implementierung eines analytischen Neutralteilchenmodells	116
5.3.2	Die Neutralgasmodellierung mit EIRENE	116
5.4	Eine Beispielrechnung für TEXTOR	118
5.4.1	Charakteristische Zeiten in der TEXTOR-Randschicht	118
5.4.2	Das Elektronentemperaturprofil	118
5.4.3	Die Randbedingungen	120
5.4.4	Die Rechnung	120
5.5	Ergebnisse der TEXTOR-Beispielrechnung	123
5.5.1	Die Gültigkeit der Fluidnäherung in poloidaler Richtung	123
5.5.2	Die dominierenden Transportprozesse	125
5.5.3	Berechnete Randschichtprofile in TEXTOR	127

5.5.4	Die Plasmaströmung in der Umgebung des Limiters	131
5.5.5	Die globale Strömungsbilanz	135
5.5.6	Vergleich des analytischen Neutralteilchenmodells mit der MC-Simulation	136
6	Zusammenfassung und Ausblick	139
A	Vektorrelationen in allgemeinen Koordinaten	145
A.1	Die Darstellung in verschiedenen Koordinaten	145
A.2	Die Komponenten eines Vektorgradienten	145
A.3	Die Berechnung der Divergenz eines Tensors	147
A.4	Die physikalischen Komponenten eines Vektorproduktes	148

1. Einleitung
2. Zielsetzung
3. Methodik
4. Ergebnisse
5. Diskussion
6. Zusammenfassung

7. Literaturverzeichnis

8. Anhang

9. Danksagung
10. Impressum
11. Kontakt

12. Glossar
13. Index

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Allgemeine Einführung

Fernziel der Fusionsforschung ist die Entwicklung einer neuen Energiequelle mit vorteilhaften Eigenschaften:

- Die Ausgangsstoffe, Deuterium und Lithium, sind in großen Mengen und geographisch gleichmäßig verteilt verfügbar.
- Fusionsreaktoren produzieren keine Treibhausgase, im Gegensatz zu Kraftwerken, die mit fossiler Energie betrieben werden.
- Im Unterschied zu Spaltungsreaktoren ist das System weit unterkritisch, d.h. geriete das Plasma außer Kontrolle, würde es von selbst erlöschen.
- Von ihrem grundsätzlichen physikalischen Prozeß her ist die Fusionstechnologie nicht zwangsläufig mit radioaktiven Abfallprodukten verbunden: Die Reaktionsprodukte aus der Verschmelzung von Deuterium und Tritium sind Neutronen und Helium-Kerne.

Radioaktiver Abfall entsteht erst als Sekundärprozeß durch die Aktivierung der Brennkammer-Wand bei Bestrahlung mit den Reaktionsneutronen. Und hier besteht die Hoffnung, in den nächsten Jahrzehnten Materialien zu entwickeln, bei denen diese Radioaktivität so rasch wieder abklingt, daß eine Endlagerung nur geringe Probleme aufwirft. Kritischer ist das Containment und der Umgang mit der radioaktiven Ausgangssubstanz Tritium. Kann man den Brennstoff allerdings sicher beherrschen und die notwendigen Randbedingungen für die Fusionsreaktionen schaffen, so hat man eine langfristige Option zur Energiegewinnung.

Seit über 30 Jahren wird deshalb in vielen Industrienationen daran gearbeitet, kontrolliert Energie aus dem Fusionsprozeß zu gewinnen. Die technologisch ausgereifteste und experimentell erfolgreichste Anordnung ist der TOKAMAK, eine toroidale Konfiguration, in der ein Hochtemperaturplasma durch Magnetfelder eingeschlossen wird, die teilweise von außen aufgeprägt, teilweise durch im Plasma fließende Ströme erzeugt werden.

Die bisherigen Experimente an Tokamaks haben vor allem das Ziel, die Voraussetzungen für Fusionsreaktionen zu schaffen: Das Plasma muß für bestimmte Zeit unter einem ausreichend hohen Druck gehalten werden. Diesem Ziel ist man durch geeignete Plasmaheizung und Verbesserung des Plasmaeinschlusses in den letzten Jahren schon sehr nahe gekommen [3, 4]. Von den Experimenten am derzeit größten Tokamak JET (Joint European Torus) und an anderen großen Maschinen ausgehend, sind daraufhin verschiedene Operationsszenarien¹ entwickelt worden und es liegen Skalierungsgesetze für jedes dieser Plasmaregime vor, die eine Extrapolation zum brennenden Fusionsplasma möglich erscheinen lassen. Allerdings ergeben sich nach globalen, theoretischen Analysen [5, 27] unter Berücksichtigung von Energieabstrahlung durch Verunreinigungen und Brennstoffverdünnung durch das Fusionsendprodukt Helium von den "idealen Zündbedingungen" qualitativ verschiedene "Brennbedingungen", die den zulässigen Parameterbereich für eine Energiegewinnung durch Kernfusion deutlich einschränken. Zur experimentellen Untersuchung dieser Brennbedingungen ist der internationale Versuchsreaktor ITER (International Thermonuclear Experiment Reactor) geplant, der nach der Zündung ein brennendes Plasma für jeweils ca. 1000 Sekunden aufrecht erhalten soll.

Diese Pulsdauer ist im Vergleich zu den Verweilzeiten der Teilchen und der Energie im Kernplasma so groß, daß eine effektive Steuerung von Teilchen- und Energieströmen während der Entladung erforderlich ist. Eine solche Steuerung muß die gleichzeitige Wärme- und Teilchenauskopplung aus dem heißen Kernplasma regeln, und zwar unter Bedingungen, die sowohl mit den erforderlichen Plasmaeigenschaften verträglich sein müssen als auch mit der Standfestigkeit der Wandmaterialien und Wandkomponenten: Während der vom Plasma emittierte Teilchenstrom möglichst effektiv und gerichtet zu den Pumpöffnungen der Brennkammer geführt werden muß, um die anfallende Helium-Asche wirkungsvoll abzusaugen, sollte andererseits der vom Plasma emittierte Wärmestrom mehr gleichförmig abgeleitet werden, um eine örtliche Überhitzung der Wandelemente zu vermeiden. Weil aber die grundlegenden physikalischen Transportprozesse für Teilchen- und Energietransport sehr eng miteinander verknüpft sind, müssen Reaktorkonzepte daraufhin untersucht werden, ob sie diese gegensätzlichen Anforderungen gleichzeitig erfüllen.

Die Problematik der Plasma-Wand-Wechselwirkung, die neben der Tokamak- die Stellarator-konfiguration gleichermaßen betrifft, hat sich daher weltweit als Kernfrage der zukünftigen Fusionsforschung herauskristallisiert. Letztlich geht es dabei um das Verständnis der Zusammenhänge zwischen den Vorgängen im Plasmakern, in der Plasmarandschicht und an der Wand, sowie deren Synthese und Extrapolation zu einem funktionsfähigen Gesamtkonzept. In diesem Zusammenhang erlangt die experimentelle Untersuchung der Prozesse in der Plasmarandschicht und der Versuch, sie räumlich und zeitlich aufgelöst zu modellieren, in den letzten Jahren immer größere Bedeutung. Von besonderem Interesse ist dabei ein Vergleich der Randschichtkonzepte "Divertor" und "Limiter" im Hinblick auf ihre Eignung zur Lösung dieser Aufgaben.

¹L-Mode, H-Mode, ELMY-H-Mode etc.

Ausgangspunkt der theoretischen Untersuchungen sind einfache null-, bzw. eindimensionale Modelle, die versuchen, die Prozesse in der Randschicht auf unterschiedlichen Zeitskalen zu verstehen. Lokalisierte Kontakte mit materiellen Wänden und dadurch bewirkte starke Änderungen der Plasmaparameter machen zweidimensionale Modellierungen notwendig, die wegen der Komplexität der Zusammenhänge und der Vielzahl der zu berücksichtigenden Effekte nur mit numerischen Methoden behandelt werden können.

Grob vereinfacht lassen sich die heute benutzten Modelle und Verfahren auf einer Zeitskala in fünf Gruppen einordnen:

- Auf der Zeitskala der Einzelteilchenbewegung ($10^{-9}s$) beschäftigt man sich vor allem mit Effekten der Ladungstrennung in der Nähe von materiellen Oberflächen.
- Auf der Zeitskala der thermischen Driftbewegung ($10^{-6}s$) untersucht man verstärkt die Wechselwirkung der Plasmateilchen untereinander, ihren Impuls- und Energieaustausch durch Stöße.
- Auf der Zeitskala der mittleren Strömungsgeschwindigkeit ($10^{-3}s$) sind die Transportgleichgewichte in der Randschicht von Interesse und man versucht, den Einfluß der geometrischen und physikalischen Effekte möglichst vollständig zu berücksichtigen.
- Auf der Zeitskala des Teilchen- bzw. Energieaustauschs ($\sim 1s$) wird der globale Transport zwischen Plasmainterem und Plasmarand diskutiert und es lassen sich notwendige Bedingungen für eine positive Energiebilanz der Anordnung formulieren.
- Auf der Zeitskala der Entladung eines Tokamaks ($\geq 10s$) ist die Frage nach der Stationarität dieses Vorgangs entscheidend, besonders im Hinblick auf die Verwendbarkeit der Anordnung zur Energiegewinnung.

Diese Arbeit wird sich vor allem mit der Behandlung des Transportgleichgewichts und den daraus entstehenden Strömungen in der Randschicht beschäftigen.

Dabei wird zum einen auf die Herleitung der verwendeten Flüssigkeitsgleichungen eingegangen; es werden die Grenzen der Gültigkeit und die der Theorie zugrundeliegenden Annahmen näher diskutiert.

Der zweite Schwerpunkt wird die numerische Lösung dieser Gleichungen sein. Wie aus Abbildung 1.1 ersichtlich wird, ist man auf der Ebene des hier diskutierten Transportmodells (*typische Transportzeit* $\approx 10^{-3}$ Sekunden) relativ weit fortgeschritten. Bisher hatte man allerdings, bedingt durch die Beschränkung auf ein spezielles numerisches Verfahren, Probleme bei der Modellierung komplexer Geometrien. Daher wird in dieser Arbeit ein anderer numerischer Ansatz, die Finite-Elemente-Methode (FEM) vorgestellt, mit der eine Lösung der Plasmagleichungen auf nicht einfach zusammenhängenden Gebieten mit komplizierten Berandungen möglich ist.

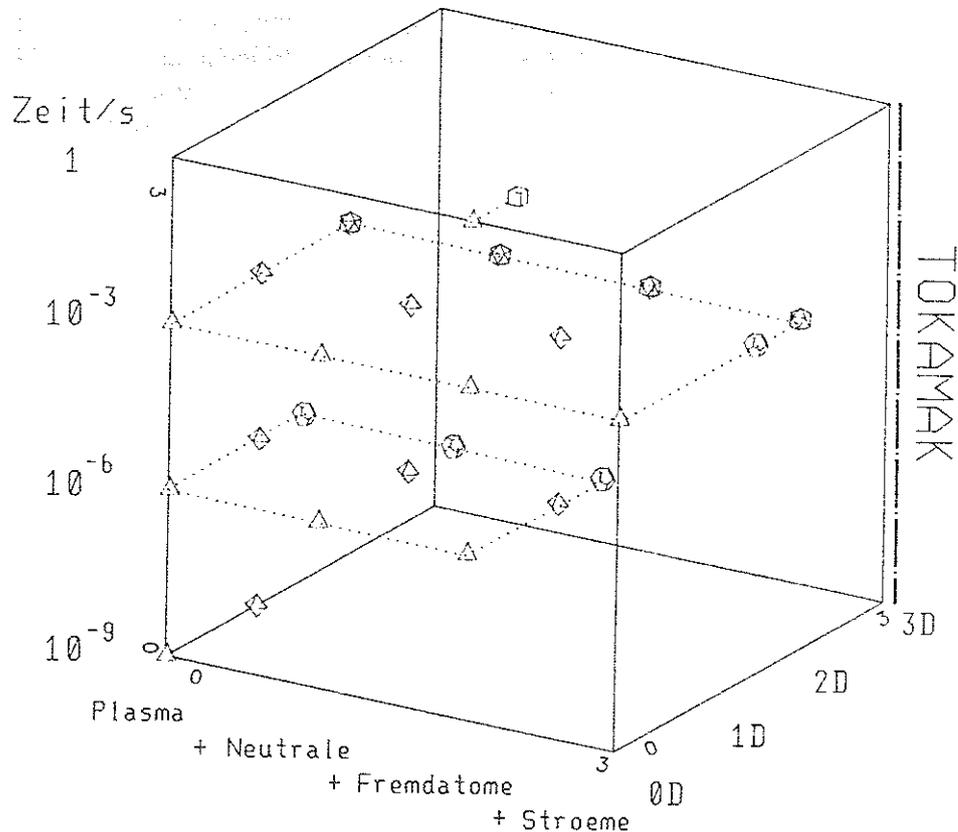


Abbildung 1.1: Status der Randschichtmodellierung bezüglich geometrischem, physikalischem und zeitlichem Umfang

Zuerst wurde diese Methode in den Ingenieurwissenschaften bei Festigkeitsberechnungen angewandt. Vor ca. 20 Jahren wurden die Anwendungen auf diffusive Transportprobleme ausgedehnt und seit etwa zehn Jahren werden Strömungssimulationen durchgeführt, wobei es vor allem um Problemstellungen geht, in denen die Konvektion der dominierende Transportprozeß ist.

Will man diese Methode in der Plasmaphysik einführen, begibt man sich in vielen Richtungen auf neues Terrain. Da ist zum ersten die numerische Theorie und Erfahrung, die bei dem bisher verwendeten Finite-Differenzen-Verfahren wesentlich weiter entwickelt ist.

Zum zweiten sind mit der FE-Methode bisher wenige Strömungssimulationen mit Konvektion und Konduktion durchgeführt worden; wobei die starke Anisotropie des Transports im Magnetfeld in keiner anderen Anwendung auftrat.

Als Drittes stößt man auch auf der Seite der Plasmaphysik an Grenzen, denn das Verhalten des Plasmas bei Aufströmung auf eine Wand bei schrägem Einfall ist sowohl theoretisch als auch experimentell wenig untersucht.

Da komplizierte Berandungen, wie etwa zur Plasmaströmung angewinkelte Targetober-

flächen, in fast allen Tokamaks auftreten und vermutlich einen signifikanten Einfluß auf die Gesamtströmung haben, sollte man sich bei der Modellierung der Vorgänge in der Plasmarandzone nicht nur auf die vollständige Beschreibung der "Physik" beschränken, sondern sich auch um eine exakte Darstellung der "Geometrie" bemühen.

Nur beide Aspekte zusammen ermöglichen ein umfassendes Verständnis der Vorgänge am Plasmarand und ein solches Verständnis ist sicherlich notwendige Voraussetzung bei Design und Betrieb eines Fusionsreaktors.

1.2 Die Plasmarandschicht - Ein Überblick

Während die Bedingungen, die im Plasmakern erreicht werden müssen, durch die mittlere Temperatur und eine Brennbedingung relativ gut definiert sind, gibt es in der Randschicht eine Vielzahl von Prozessen, deren Relevanz für den Transport wesentlich vom Wandmaterial, vom Design der Brennkammer und vom Verlauf der magnetischen Feldlinien innerhalb der Kammer abhängt. Das grundsätzliche Ziel ist die Optimierung der Konfiguration, sodaß die gewünschten Bedingungen im Plasmakern aufrecht erhalten werden können. Die Schwierigkeiten, dieses Ziel zu erreichen, resultieren aus dem eingeschränkten Verständnis des Zusammenhangs zwischen Randschicht und Kern, vor allem bedingt durch die Vielzahl der auftretenden Prozesse und ihre starke, nichtlineare Vernetzung miteinander. Zuerst soll deshalb auf die Einzelprozesse näher eingegangen werden. Hier kann eine direkte Beziehung zwischen Ausgangszustand und erzieltm Effekt hergestellt werden und Parameterstudien unterschiedlicher Szenarien sind möglich. Kombiniert man aber diese Einzelprozesse, um vorteilhafte Prozeßbedingungen zu erzielen, so zeigt sich, daß eine konsistente Wahl von Betriebsparametern schwierig ist. Die bisher entwickelten Methoden zur Randschichtkontrolle können die Randbedingungen aufgrund dieser komplizierten Zusammenhänge oft nur bezüglich einiger Einzelprozesse optimieren.

1.2.1 Einzelprozesse in der Randschicht

Es gibt keine einheitliche Definition der Randschicht. Die meisten Formulierungen beziehen sich auf die physikalische Ursache für diese Schicht, d.h. sie orientieren sich am jeweils dominierenden Prozess in dieser Zone. Da aber verschiedene Randschichtkonfigurationen auch durch unterschiedliche Prozesse bestimmt werden, soll in dieser Arbeit die Definition auf den Auswirkungen der Prozesse basieren:

Die Randschicht ist der Bereich des Plasmas, in dem Teilchen- und Energieflüsse stark ortsabhängig sind [11].

Diese Definition gilt für alle Konfigurationen. Welches die verursachenden Mechanismen für die starken Ortsabhängigkeiten sind, soll nun näher erläutert werden.

Plasmateilchen bewegen sich aufgrund ihrer elektrischen Ladung auf gyrierenden Bahnen entlang von Magnetfeldlinien. So werden sie im Tokamak eingeschlossen.

(→ *Die Berechnung des Plasmagleichgewichts im Tokamak*).

Durch Driften, Stöße und Störungen des Magnetfeldes ist dieser Einschluß jedoch nicht perfekt und langsame Diffusion transportiert die Teilchen nach außen, bis sie eine Magnetfeldlinie erreichen, die eine materielle Begrenzung schneidet. Verstärkt durch an dieser Begrenzung entstehende Potentiale und erleichtert durch den schnellen Transport entlang von Feldlinien, strömt das Plasma auf die Begrenzung auf. Hier finden zwei Reaktionen statt. Zum einen werden die Plasmaionen ihre kinetische und ihre innere Energie auf Wandatome übertragen, eine Erosion des Materials bewirken und das

Plasma mit diesen Fremdatomen verunreinigen. Zum anderen rekombinieren die Ionen mit den gleichzeitig ankommenden Elektronen in der Wand und strömen als neutrale Teilchen ins Plasma zurück. Dort reagieren sowohl die freigesetzten Verunreinigungen als auch die Wasserstoffatome, bzw. -moleküle mit den Plasmateilchen, hauptsächlich mit den leichten und schnellen Elektronen.

Dabei thermalisiert der neutrale Wasserstoff vor allem durch Ladungsaustauschreaktionen und erhöht nach seiner Ionisation die Dichte des Plasmas in der Randschicht. Die schwereren, neutralen Fremdatome wechselwirken hauptsächlich über Elektronenstoßprozesse, durch die sie in höhere Ladungszustände angeregt werden. Da sowohl der neutrale Wasserstoff als auch die Fremdatome von der Wand kommend im allgemeinen nur niedrigere Energien haben, wird das Plasma durch diese Prozesse gekühlt. Eine zusätzliche Kühlung wird dadurch bewirkt, daß zwischen den Stoßanregungen Energie über spontane Emission von Strahlung abgegeben wird. Die Strahlungsverluste wachsen mit der Kernladung nichtlinear an, wobei die Potenz zwischen Z^2 (Bremsstrahlung) und Z^6 (Linienstrahlung) variiert.

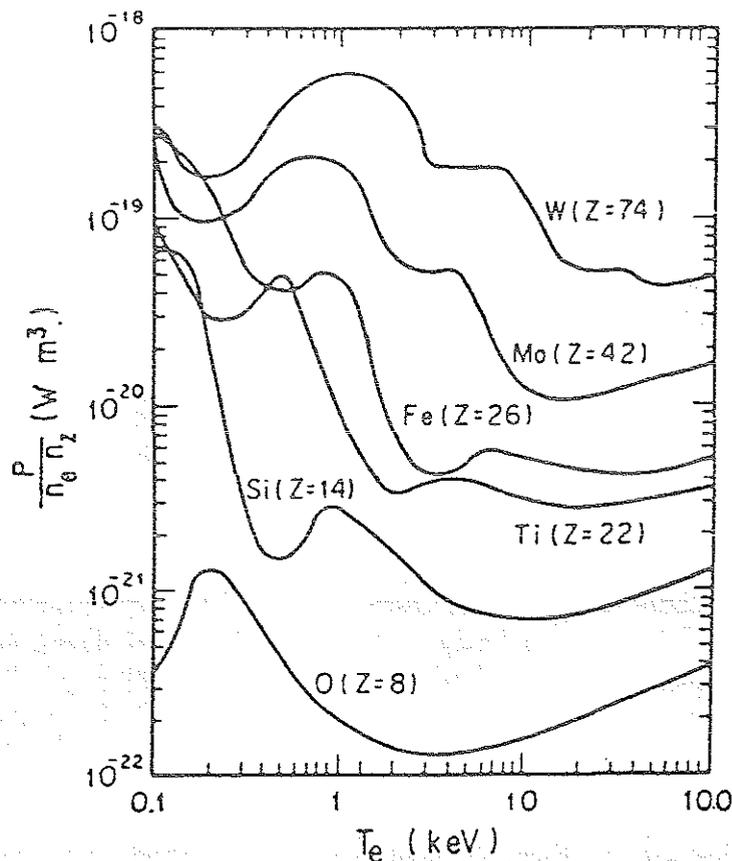


Abbildung 1.2: Abgestrahlte Leistung, normiert auf Elektronen- und Verunreinigungsdichte, in Abhängigkeit von der Elektronentemperatur T_e für Verunreinigungen mit verschiedenen Kernladungszahlen Z

Materialien mit hohem Z strahlen daher sehr viel mehr Energie ab als Niedrig- Z -Stoffe. Die Strahlungskühlung durch Atome und Ionen hoher Ladungszahl kann aber auch zu einer so starken Erniedrigung der Temperatur des Plasmakerns führen, daß der Wirkungsquerschnitt für die Fusionsreaktionen erheblich verringert wird. Daher sind schwere Verunreinigungen im Kern nur in sehr kleinen Konzentrationen (Bruchteile von %) tolerierbar.

Eine solche Kühlung ist also nur dann von Vorteil, wenn sie auf die Randzone des Plasmas beschränkt werden kann. Hier ist die Elektronentemperatur so niedrig, daß die Anregungsenergien nur Elektronen in äußeren Schalen anregen. Dadurch ist es möglich, die abgestrahlte Energiemenge und damit auch die Energieverluste im Kernplasma klein zu halten und doch gleichzeitig eine effektive Kühlung der Randzone und einen wirksamen Schutz der Wände vor Erosion zu erreichen.

Für Verunreinigungen mit niedriger Kernladungszahl ist die Strahlung eher schwach, sodaß die Brennbedingung noch bei Konzentrationen im Prozentbereich erfüllt ist. Sie verringern jedoch durch ihre zusätzlichen Elektronen die Plasmaionendichte und damit auch die Fusionsrate. Insofern sind auch die bei der Fusion entstehenden Helium-Kerne Verunreinigungen, deren Konzentration kritisch ist: Bei zu hoher Dichte der α -Teilchen erstickt die Fusionsflamme an ihrer eigenen Asche.

1.2.2 Anforderungen an die Randschicht

Nach den vorhergehenden Überlegungen muß die Randschicht daher so konzipiert sein, daß einerseits wenig Verunreinigungen von den Wänden ins Plasmaminnere gelangen, während andererseits die Helium-Asche aus dem Kern extrahiert und gezielt zur Wand transportiert werden muß.

Durch die starke Kopplung von Teilchen- und Energietransport ist es schwierig, die folgenden Bedingungen gleichzeitig zu erfüllen:

- Einerseits sollte der Wärmefluß auf die Wand über große Flächen verteilt werden, um eine örtliche Überhitzung des Wandmaterials vermeiden zu können, andererseits ist eine Fokussierung des Teilchenstroms wünschenswert, um die Helium-Asche effektiv in Pumpkanäle leiten zu können.
- Die Energieeinschlußzeit τ_E muß so groß sein, daß die Plasmatemperatur und damit auch die Fusionsrate für eine positive Energiebilanz hoch genug sind. Gleichzeitig muß aber die Teilcheneinschlußzeit τ_p so klein wie möglich gehalten werden, um die Verunreinigungen und das entstehende Helium so effektiv zu pumpen, daß die Verluste durch Strahlung bzw. Brennstoffverdünnung vernachlässigbar klein bleiben.

Aus diesen Beispielen wird deutlich, wie konträr die Anforderungen an Teilchen- bzw. Energieeinschluß in der Randschicht sind. Daher wurde in den letzten Jahren ein hoher Forschungsaufwand betrieben, neue Ideen und Methoden zu entwickeln, um dieses Problem, eines der kritischsten des Reaktordesigns, zu lösen. Einige dieser Ideen werden in den nächsten Abschnitten vorgestellt und kurz bewertet.

1.2.3 Die Wandbeschichtung

Eine mittlerweile weltweit eingesetzte Technologie zur allgemeinen Reduzierung der Energieverluste durch Verunreinigungen ist die Beschichtung der Wände mit Bor, Kohlenstoff oder Beryllium[7, 8, 9, 10]. Dies sind Stoffe mit erheblich niedrigerer Kernladungszahl gegenüber dem konventionellen Wandmaterial Stahl. Weiterhin haben die Bor-Kohlenstoff-Schichten die Eigenschaft, andere Stoffe zu pumpen. Sie reduzieren dadurch vor allem mittelschwere Fremdatome wie Sauerstoff und organische Verbindungen. Für den quasistationären Betrieb eines Reaktors ist die Saugleistung der Wände jedoch zu gering, insbesondere ist das Pumpvermögen für Helium annähernd null, so daß eine zusätzliche Teilchensenke geschaffen werden muß.

Eine solche Teilchensenke kann man durch die *Öffnung* von Magnetfeldlinien schaffen, d.h. Magnetfeldlinien schließen sich nicht mehr auf Flußflächen, sondern sie beginnen und enden an Prallplatten. Es gibt mehrere Möglichkeiten, solche Konfigurationen zu erzeugen; sie lassen sich vom physikalischen Prinzip her in zwei Gruppen einordnen: Limiterkonfigurationen und Divertorkonfigurationen.

1.2.4 Der Limiter

Bei einem Limitersystem wird der Plasmaquerschnitt durch Berührung der äußeren geschlossenen magnetischen Oberfläche (last closed flux surface = LCFS) mit einer materiellen Berandung (Limiter) definiert und begrenzt. Der Verlauf der Flußflächen bleibt in dieser Konfiguration nahezu unbeeinflusst. Ein solcher Limiter ist die plasmannächste Wand und die Wechselwirkungen konzentrieren sich auf seine Oberfläche. Da der Limiter Senke für geladene Teilchen und Energie ist, fallen Dichte und Temperatur außerhalb der LCFS stark ab. Durch eine geeignete Wahl der Oberflächenkontur des Limiters kann eine gleichmäßige Verteilung des Wärmeflusses erreicht werden. Eine Reduzierung der Wärmelast läßt sich durch streifenden Einfall der Magnetfeldlinien auf den Limiter erreichen, da hierdurch Teilchen- und Energiefluß auf eine größere Fläche verteilt werden. Das Abpumpen des Plasmas im Limiterschatten macht eine Kontrolle des Teilcheninventars und der Helium-Konzentration möglich, ist jedoch wegen der radial stark abfallenden Teilchenflüsse möglicherweise nicht effektiv genug. Der große Nachteil des Limiterkonzeptes ist der direkte Kontakt von materiellen Wänden mit dem Plasmaminnern. Durch die Form der Limiteroberfläche werden Verunreinigungen vor allem in Richtung des Kernplasmas gesputtert und gelangen sofort auf geschlossene magnetische Feldlinien. Sie werden nach ihrer Ionisation dort gehalten und entziehen dem Kernplasma Energie. Das Limiterkonzept ist daher für einen Fusionsreaktor nur dann verwendbar, wenn die Erosionsrate durch die Verunreinigungen klein gehalten werden kann. Dies wird beispielsweise durch Strahlungskühlung im Randplasma erreicht. (→ *Einblasen von Gas*)

1.2.5 Der Divertor

In der Divertoranordnung wird die magnetische Konfiguration durch zusätzliche Spulen geändert. Die magnetischen Oberflächen am Plasmarand werden aufgebrochen und

die Feldlinien aus dem Gebiet des heißen Plasmas herausgeführt. Die dort als Teilchen- und Energiesenken installierten Prallplatten sind relativ weit vom Kernplasma entfernt. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, daß Verunreinigungen zurückströmen, eher gering. Dies ist der große Vorteil des Divertorkonzeptes: Zum einen wird die Verunreinigungskonzentration im Plasmaminnern herabgesetzt, zum anderen die Konzentration vor den Platten soweit erhöht, daß durch Strahlungskühlung die Temperatur des Plasmas und damit auch der Wärmefluß auf die Platten erheblich reduziert werden kann. Ein wichtiger Zusatzeffekt ist die Erhöhung der Teilchendichte und des Neutralgasdruckes in Targetnähe. Hier ist effektives Pumpen möglich. Ein Nachteil des Konzeptes liegt in den zusätzlich zu erzeugenden Magnetfeldern. Sie müssen bei einem Reaktor außerhalb des Plasmagefäßes an einem Ort mit niedriger Neutronenbelastung angebracht werden, d.h. in einem größeren Abstand vom Plasma. Daher liegen die Ströme, die man zur Erzeugung der gewünschten Magnetfeldkonfiguration in der Randschicht benötigt, in der Größenordnung des Plasmastroms. Sie sind daher technologisch nicht einfach zu beherrschen und dürfen auch bei der Berechnung der Gesamtenergiebilanz eines Reaktors nicht vernachlässigt werden.

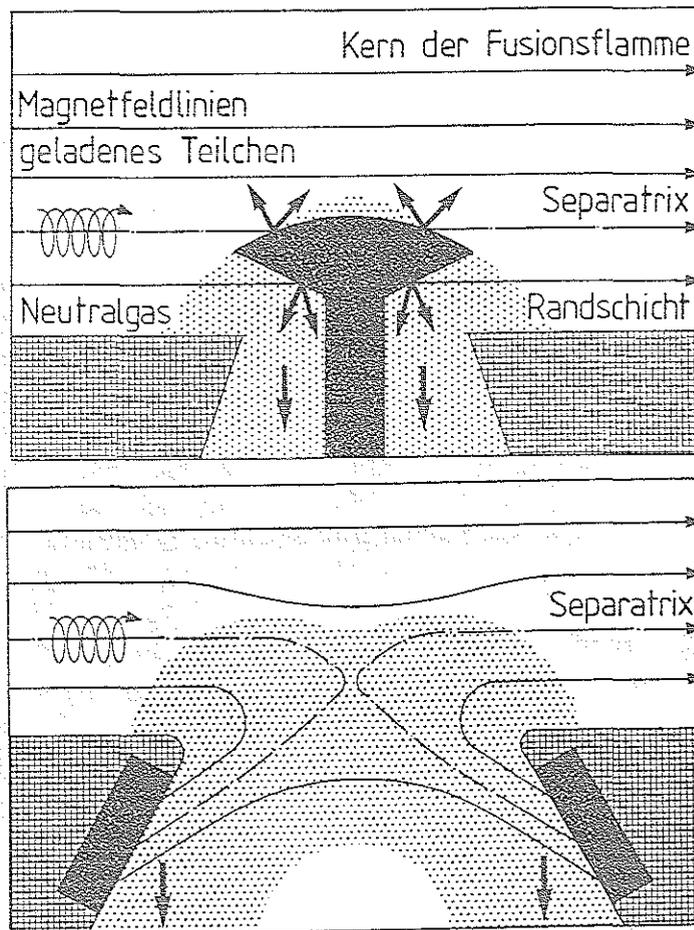


Abbildung 1.3: Schematische Darstellung einer Limiter-, bzw. Divertoranordnung mit den wesentlichen Unterschieden.

1.2.6 Vergleich von Limiter und Divertor

Im europäischen Forschungsprogramm werden derzeit sowohl gepumpte Divertoren als auch Pumplimiter als Instrumente der gleichzeitigen Wärme- und Teilchenauskopplung untersucht. Dabei hat sich gezeigt, daß eine Erhaltung der toroidalen Symmetrie auch in der Auskopplung von Vorteil ist, sodaß die erfolgreichsten Anordnungen toroidale Limiter und Poloidalfelddivertoren sind.

Im Jülicher Tokamak TEXTOR ist es mit dem Pumplimiter ALT II gelungen, die notwendige Menge Helium-Asche abzupumpen und dies mit tolerierbaren Wärmebelastungen der Limiteroberfläche in Einklang zu bringen. Im Garching Experiment ASDEX konnten die erwarteten Eigenschaften eines Divertors im Experiment bestätigt werden; die dabei gleichzeitig gefundene Verbesserung von Teilchen- und Energieeinschluß (H-Mode), die zum Zeitpunkt des Experimentes als großer Fortschritt gewertet wurde, muß heute vor dem Hintergrund notwendiger Ascheabfuhr kritischer betrachtet werden [14, 15].

Ein genauerer Vergleich der beiden Konzepte ist kaum möglich, da bisher nur wenige Parameterstudien in Bezug auf Form, Größe und Pumpverhalten gemacht werden konnten.

Zwei allgemeine Aussagen lassen sich aber treffen:

Der Limiter stört durch seine Nähe zum Plasmakern zwar die Entladung, erlaubt dadurch aber auch ein unmittelbares Einwirken auf Zustände im Plasmainternen.

Der Divertor verlegt die entscheidenden Wechselwirkungen weg vom Zentrum und reduziert dadurch die Störung des Plasmakerns. Will man jedoch vom Divertor aus gezielt Einfluß auf das Innere ausüben, muß man die (nichtlinearen) Reaktionen der Randschicht genau kennen. Von einem Verständnis der Wechselwirkungen ist man aber sowohl theoretisch als auch experimentell noch weit entfernt.

Sicherlich mitentscheidend für die Frage, welches Konzept in einem Reaktor benutzt werden wird, sind die geplanten Divertorexperimente in JET [13].

1.2.7 Andere Methoden zur Kontrolle der Randschicht

Durch Einblasen von Gas in die Randschicht kann gezielt die Plasmatemperatur über Strahlungsverluste geregelt werden. Dazu wird in TEXTOR das Edelgas Neon benutzt, da die Anregungsenergien für Neon unter 300 eV liegen und damit das Plasmazentrum nicht gekühlt wird [12]. Die im Zentrum auftretende Plasmaverdünnung von $n_{Ne}/n_e \approx 0.7\%$ und die Verschlechterung der Energieeinschlußzeit um etwa 30% sind nachteilig aber noch tolerierbar, vorteilhaft sind die stark verringerten Wärmeflüsse auf den Limiter.

Der Einfluß elektrischer Felder auf das Plasma ist Gegenstand intensiver Forschung sowohl an Divertor- als auch an Limitertokamaks. Es werden Felder unterschiedlicher Polarität zwischen Targetplatten und äußerer Wand angelegt. Die Potentialdifferenz kann Ströme im Plasma treiben, sodaß Elektronen und Ionen über räumlich getrennte Kanäle abströmen. Der Einfluß solcher Effekte auf Teilchen- und Energieeinschluß wird derzeit auch an TEXTOR studiert [16].

Die erste Aufgabe besteht darin, die Struktur der Daten zu verstehen. In diesem Fall handelt es sich um eine Liste von Zahlen, die in einer bestimmten Reihenfolge angeordnet sind. Die zweite Aufgabe ist es, die Eigenschaften dieser Zahlen zu analysieren, um zu sehen, ob es sich um eine arithmetische oder geometrische Folge handelt. Die dritte Aufgabe ist es, die Formel für die n-te Zahl der Folge zu finden.

Die vierte Aufgabe ist es, die Summe der ersten n Zahlen der Folge zu berechnen. Die fünfte Aufgabe ist es, die Summe der ersten n Quadratzahlen zu berechnen. Die sechste Aufgabe ist es, die Summe der ersten n Kubikzahlen zu berechnen. Die siebte Aufgabe ist es, die Summe der ersten n Potenzzahlen zu berechnen.

Die achte Aufgabe ist es, die Summe der ersten n Binomialkoeffizienten zu berechnen. Die neunte Aufgabe ist es, die Summe der ersten n Fibonacci-Zahlen zu berechnen. Die zehnte Aufgabe ist es, die Summe der ersten n Lucas-Zahlen zu berechnen. Die elfte Aufgabe ist es, die Summe der ersten n Fibonacci-Zahlen zu berechnen.

Die zwölfte Aufgabe ist es, die Summe der ersten n Fibonacci-Zahlen zu berechnen. Die dreizehnte Aufgabe ist es, die Summe der ersten n Fibonacci-Zahlen zu berechnen. Die vierzehnte Aufgabe ist es, die Summe der ersten n Fibonacci-Zahlen zu berechnen.

Kapitel 2

Modellierung von Fusionsplasmen

Das Ziel jeder Modellierung ist das Verständnis von Gesamtzusammenhängen in einer Versuchsanordnung, sodaß experimentelle Befunde reproduziert werden können und auch prädiktive Aussagen möglich sind. Oft geht man dabei so vor, daß man versucht, bestimmte physikalische Effekte aus der Vielzahl möglicher Wechselwirkungen zu separieren und dafür geeignete mathematische Formulierungen zu finden. Eine Kopplung von vielen dieser Einzeltheorien ermöglicht dann die Betrachtung der Gesamtanordnung. Deren Verhalten muß aufgrund starker Vernetzung und nichtlinearer Zusammenhänge mathematisch nicht eindeutig bestimmt sein. Es können mehrere stabile oder auch oszillierende Lösungen existieren und je nach mathematischer Formulierung sind unterschiedliche Verfahren erforderlich, um nähere Aussagen über das Gesamtsystem zu gewinnen.

Diese Problematik gilt auch für die Modellierung von Tokamakplasmen: Das komplexe Gesamtsystem wird durch Betrachtung unterschiedlicher Zeitskalen, Längenskalen und räumlicher Bereiche, in denen jeweils andere physikalische Effekte dominieren, separiert. Es werden verschiedene mathematisch-numerische Konzepte verwendet, um die einzelnen Probleme zu lösen. Durch Kopplung und Iteration dieser Einzellösungen wird dann versucht, zu einer konsistenten Gesamtlösung zu gelangen. Von dieser weiß man jedoch nicht, ob sie mathematisch eindeutig und physikalisch richtig ist. Erst durch Vergleich vieler Rechnungen untereinander und mit dem Experiment, kann man eine gewisse Sicherheit gewinnen.

Dieses Übersichtskapitel stellt in den einzelnen Abschnitten verschiedene Aspekte der Modellierung dar. Es erläutert, welche Möglichkeiten man zur Beschreibung des Plasmas hat, wie sie bisher genutzt werden und welchen Beschränkungen man unterliegt. Dies soll ermöglichen, die Modellierung der Randschicht durch Flüssigkeitsgleichungen, wie sie in dieser Arbeit benutzt werden, im Gesamtzusammenhang zu sehen und bezüglich der betrachteten Zeit- und Raumskalen im Vergleich zu anderen Modellen einzuordnen.

Im ersten Teil werden die im Plasma auftretenden Zeit- und Längenskalen durch zugrun-

deliegende physikalische Effekte erklärt und damit für verschiedene Zonen des Plasmas jeweils adäquate Modelle formuliert.

Gemäß dieser Analyse zerfällt das Plasma räumlich in zwei charakteristische Bereiche, in den Plasmakern und die Plasmarandschicht.

Im Abschnitt über den Plasmakern wird zuerst das Plasmagleichgewicht und die daraus resultierende Magnetfeldkonfiguration behandelt. Es wird ausführlich auf eine analytische Behandlung der Problematik eingegangen, denn zumindest in Tokamakplasmen mit annähernd kreisförmigen Flußflächen kann eine Darstellung gefunden werden, die die Ergebnisse numerischer Rechnungen sehr gut approximiert. Die analytische Formulierung hat den Vorteil, daß Richtung und Stärke des magnetischen Feldes an jedem beliebigen Ort im Plasma exakt berechnet werden können, unabhängig von der Wahl der Diskretisierung, die zur Lösung der Strömungsgleichungen notwendig ist.

In einem zweiten Teil werden Modelle für den Plasmakern diskutiert, die einzelne Transportprozesse vereinfacht durch charakteristische Längen und Zeiten beschreiben und daraus analytische Relationen zwischen gemittelten Werten für Plasmadichte und -temperatur ableiten.

Im Abschnitt über den Plasmarand geht es vor allem um die Beschreibung von Plasmaströmungen durch erweiterte Navier-Stokes Gleichungen mit speziellen, plasmaspezifischen Ansätzen. Hier gibt es eindimensionale, oft analytische Modelle und eine Reihe von zweidimensionalen numerischen Lösungsverfahren.

Ein anderer wichtiger Aspekt ist die Beschreibung der Prozesse bei Kontakt des Plasmas mit einer Oberfläche. Solche Rechnungen sind für die gesamte Randschicht eminent wichtig, da die hier gewonnenen Erkenntnisse als Randbedingungen in die Fluidmodelle eingehen.

Neben der Plasmaströmung sind auch die Neutralteilchen und ihre Wechselwirkungen mit den Plasmaionen und -elektronen von Bedeutung. analytischen Modellen stehen auch hier numerische Lösungsmethoden gegenüber, die eine Betrachtung komplexerer Zusammenhänge ermöglichen.

Zum Schluß soll ein Abschnitt stehen, der den derzeitigen Status der Modellierung und Anforderungen für die Zukunft diskutiert.

2.1 Modellierung von Einzelbereichen im Tokamak

Eine erste räumliche Unterteilung des Tokamakplasmas orientiert sich an typischen Zeitskalen: Das Kernplasma, im Gleichgewicht und ohne Strömungen für typische Zeiten von Millisekunden, und das Randschichtplasma, dessen Dynamik sich auf dieser Zeitskala entwickelt.

Entsprechend gibt es für den Plasmakern Verfahren zur Berechnung eines stationären Zustandes auf der Basis der Maxwellgleichungen und einer Gleichgewichtsbedingung zwischen inneren Plasmakräften und äußeren Magnetfeldkräften.

Man modelliert Strömungen in diesem Gebiet und damit verbundene Verluste nicht räumlich aufgelöst, sondern beschreibt den Transport durch globale Zeitparameter

(Teilchen- und Energieeinschlußzeit) und fest vorgegebene Profile von Dichte und Temperatur ("Punktmodelle"). Zusätzlich kann auch die Energieproduktion durch Fusionsprozesse miteinbezogen werden. Daraus lassen sich z.B. anhand von Parameterstudien Bedingungen für einen brennenden Fusionsreaktor formulieren.

Demgegenüber steht die Berechnung von Profilen in der Plasmarandschicht, dominiert durch nichtlineare Transportprozesse und stark beeinflusst durch Quellen und Senken für Teilchen und Energie. Da dieses System immer noch sehr komplex ist, werden weitere Unterteilungen vorgenommen. Man formuliert Gleichungen für die Bewegung von Elektronen und Ionen einerseits und für neutrale Atome und Moleküle andererseits. Diese Aufspaltung ist notwendig, da sich die Bahnen der geladenen Teilchen am Magnetfeld orientieren, während Neutralteilchen sich unbeeinflusst vom Feld bewegen.

Für die Plasmaionen und -elektronen gibt es mehrere Ansätze, die sich in ihrer physikalischen Vollständigkeit und in der räumlichen Komplexität unterscheiden.

Auf einer mesoskopischen Ebene arbeitet die Fluidnäherung, die die Teilchen- und Energieströme über Ansätze der Kontinuumsmechanik beschreibt. Dieses Modell ist nur für Gebiete im Plasma anwendbar, in denen der mittlere Teilchenabstand sowohl in Relation zu den geometrischen Abmessungen als auch im Vergleich zu den Gradientenlängen klein ist. Nur dann ist die Benutzung lokaler Transportkoeffizienten, die Ausdruck einer instantanen Informationsübertragung sind, sinnvoll.

Will man auch Gebiete beschreiben, in denen diese Bedingungen nicht erfüllt sind, erfordert das eine kinetische Theorie. Hier wird die Trajektorie geladener Teilchen in Gyration und Translation gelegt. Über die Gyration wird gemittelt und so ergeben sich Gleichungen für die Bewegung eines Massenpunktes entlang von Feldlinien und für Driften senkrecht zu ihnen. In dieser "driftkinetischen Beschreibung" können auch nichtlokale Transportkoeffizienten formuliert werden, da als Lösung Verteilungsfunktionen im Geschwindigkeitsraum vorliegen. Dies ist allerdings gleichzeitig der größte Nachteil der kinetischen Theorie. Die explizite Berücksichtigung der Verteilungsfunktionen erfordert mindestens zwei oder sogar drei zusätzliche Dimensionen im Geschwindigkeitsraum, so daß die Berechnungen höchstens in einer Raumdimension durchgeführt werden können. Ergebnisse mit besserer Ortsauflösung können durch Simulation der Einzelteilchenbewegung erzielt werden. Die Bewegungsgleichungen werden dazu für viele Plasmateilchen simultan numerisch gelöst. Man rechnet auf sehr kleinen Zeit- (Nanosekunden) und Längenskalen (Mikrometer), so daß die Methode nur in räumlich eng begrenzten Gebieten anwendbar ist. Ergebnisse solcher Rechnungen in stoßarmen Gebieten sind aber zur Formulierung exakter Randbedingungen im Fluidmodell unbedingt notwendig und beeinflussen in großem Maße Dichte- und Geschwindigkeitsprofile in der gesamten Randschicht.

Alle diese Ansätze sind auch zur Modellierung des Transports von Verunreinigungen möglich. Wird die Fluidnäherung verwendet, muß jedoch kontrolliert werden, ob nicht wegen der geringen Konzentration und der großen freien Weglänge zwischen zwei Stößen der Verunreinigungen untereinander der Geltungsbereich des Modells überschritten ist.

Durch die Neutralteilchenmodelle wird die Bewegung der rekombinierten Ionen von den Wänden zurück ins Plasma beschrieben und es werden die im Plasma stattfindenden Wechselwirkungen modelliert. Hier unterscheidet man, wie bei geladenen Teilchen, quasikontinuierliche und kinetische Ansätze. Sie werden entweder mit analytischen Methoden behandelt oder numerisch simuliert, letzteres meist mit linearen, statistischen Methoden (Monte-Carlo-Verfahren).

In den oft stark vereinfachten analytischen Modellen wird der auf die Wand treffende Ionenfluß als Neutralteilchenfluß mit einer bestimmten Winkelverteilung ins Plasma reemittiert. Entsprechend einem einfachen Ionisationsgesetz, nur abhängig von Elektrodendichte und -temperatur, wird ein gewisser Anteil dieses Flusses auf jedem Wegstück reionisiert.

Die statistischen Verfahren arbeiten mit Einzelteilchen, deren Verhalten durch Entscheidungen im Rahmen von Wahrscheinlichkeitsgesetzen simuliert wird. Dadurch kann eine Vielzahl von Wechselwirkungen berücksichtigt werden. Dazu gehört die Emission sowohl von Atomen als auch von Molekülen aus der Wand mit spezifischen Energie- und Winkelverteilungen und die Wechselwirkung mit dem Plasma in Form von Moleküldissoziations-, Ladungsaustausch- und Ionisationsreaktionen. Prinzipiell können solche Modelle die physikalischen Prozesse annähernd vollständig beschreiben, man muß jedoch ein großes Ensemble von Teilchen wählen, damit die Statistik für die Einzelprozesse gut genug ist. Daher beschränken die verfügbare Rechenleistung und die benötigte Rechenzeit die Möglichkeiten dieser Methode.¹

2.2 Modellierung des Plasmakerns

2.2.1 Die Berechnung des Plasmagleichgewichts im Tokamak

Dieser Abschnitt gibt eine Zusammenfassung der Grundgleichungen und einiger Lösungsmethoden zur Bestimmung von Gleichgewichtskonfigurationen für Tokamakplasmen. Sie sind für die Randschichtmodellierung von großem Interesse, weil hieraus Stärke und Richtung des Magnetfeldes - auch am Plasmarand - berechnet werden kann. Die hier entwickelte analytische Darstellung erweist sich als besonders nützlich, will man die Magnetfeldkonfiguration in ein beliebig diskretisiertes Rechengitter übertragen.

Grundgleichungen für Tokamakgleichgewichtskonfigurationen

Diese Gleichgewichte werden für den Grenzfall idealer Hydrodynamik, also ohne dissipative Effekte, berechnet. Man geht dabei von einigen wesentlichen Grundannahmen aus:

- Die größte Komponente des magnetischen Feldes im Tokamak ist das Vakuumtoroidalfeld $B_{\Phi, vac}$, erzeugt durch Spulen, die ringförmig um das Plasmagefäß angeordnet sind. Weil der toroidale Fluß eine Erhaltungsgröße ist, wird das Feld mit dem Abstand von der Torusachse schwächer.

¹Man beachte: Eine Verbesserung der statistischen Genauigkeit um einen Faktor 2 erfordert eine Erhöhung der Teilchenzahl um den Faktor 4

- Im Plasma wirken senkrecht zu $B_{\Phi, vac}$ aufgrund der Torusgeometrie Druckkräfte, die das Plasma nach außen treiben wollen. Dem wirkt ein überlagertes poloidales Magnetfeld B_{pol} entgegen. Erzeugt wird B_{pol} durch einen im Plasma fließenden toroidalen Strom, der im Allgemeinen über ein äußeres elektrisches Feld induziert wird.
- Es muß im Tokamak ein inneres Gleichgewicht zwischen dem Plasmadruck und den wirkenden magnetischen Drücken hergestellt werden. Im stationären Plasmakern ist eine einfache Druckbilanz ohne Berücksichtigung von Strömungen - weder konvektiv noch diffusiv - eine geeignete Beschreibung. Die Ausdehnung des Modells auf den Plasmarand ist gerechtfertigt, weil die dort herrschenden Drucke und Strömungen die äußeren Magnetfelder (Toroidalfeld, Poloidalfeld aus Plasmastrom) nur wenig beeinflussen. Die aus diesen Rechnungen hervorgehende Magnetfeldkonfiguration kann daher als fest vorgegeben in ein Randschichtmodell integriert werden.
- Der Plasmadruck berechnet sich nach dem idealen Gasgesetz als Produkt von Teilchendichte und thermischer Energie und er ist im stationären Fall über der toroidalen Koordinate konstant, da Gradienten entlang von Feldlinien sehr schnell ausgeglichen werden. In Einzelfällen kann diese Dimension zur zeitaufgelösten Berechnung von Transportprozessen berücksichtigt werden. (Pelletinjektion, etc.)
- Zur Kontrolle von Form und Position des Plasmas sind zusätzliche externe Felder notwendig, die vor allem für elongierte Divertorplasmen eine komplizierte Struktur haben können und daher nur numerisch berechenbar sind.

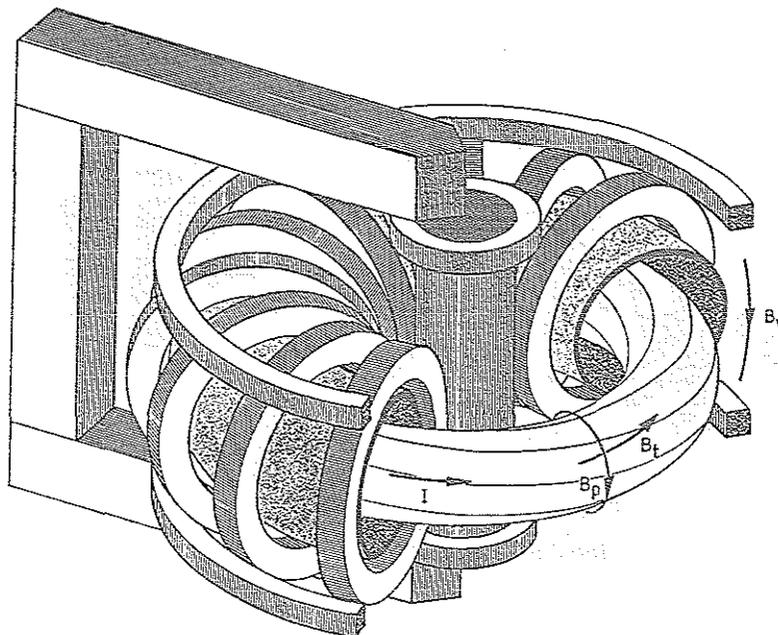


Abbildung 2.1: Typischer Tokamak mit kreisförmigen Flußflächen und angelegten Feldern (TEXTOR)

Die zur Modellierung benutzten Gleichungen wurden seit den ersten Gleichgewichtsrechnungen vom physikalischen Inhalt her nicht mehr erweitert. Lediglich die betrachteten Geometrien wurden komplizierter. Ausgehend von zylindrischen [17] über toroidale Plasmen mit kreisförmigen Querschnitten [18] können heute toroidale Plasmen mit komplizierten Querschnitten und zusätzlichen äußeren Spulen modelliert werden. Bisher nutzen jedoch fast alle Modellierungen die toroidale Symmetrie des Problems, reduzieren also die Gleichungen auf zwei Dimensionen und beschränken das Berechnungsgebiet auf einen poloidalen Schnitt [20, 22, 21, 19].

In koordinatenfreier Darstellung lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

Gleichung (2.1) ist die Kraftgleichung der idealen Hydrodynamik ohne Strömungen, (2.2) das Ampere'sche Gesetz mit der magnetischen Permeabilität μ . Für Vakuum und Plasma ist $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, für andere Materialien wie Eisen und Stahl eine nichtlineare Funktion des Magnetfeldes.

Gleichung (2.3) beschreibt die Quellfreiheit des Magnetfeldes.

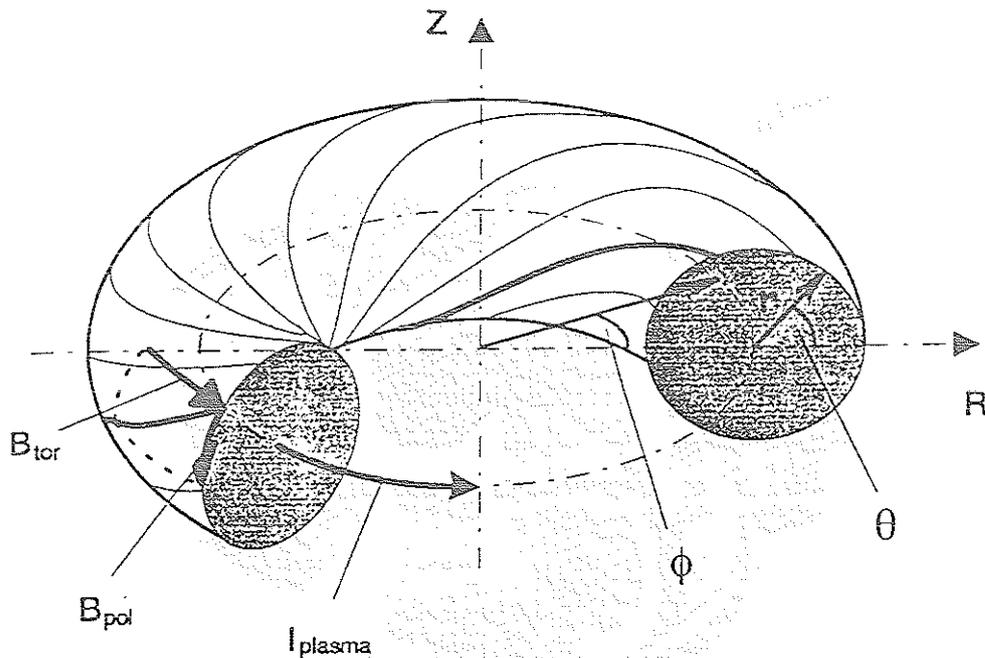


Abbildung 2.2: Flußfläche mit kleinem Radius r in Toruskordinaten (R, ϕ, z)

Aus (2.1) ergibt sich nach Bildung des Skalarproduktes mit Stromdichte und Magnetfeld:

$$\vec{B} \cdot \nabla p = 0 \quad (2.4)$$

$$\vec{j} \cdot \nabla p = 0 \quad (2.5)$$

Daraus folgt sofort, daß im stationären Plasmagleichgewicht Feldlinien und Stromlinien auf isobaren Flächen liegen. Man überlegt sich leicht, daß dies auch Flächen konstanten magnetischen Flusses sind. Wegen der Quellfreiheit des Magnetfeld dürfen sie sich nicht schneiden, sondern liegen ineinander geschachtelt. Die innerste Flußfläche degeneriert zu einer Linie, der magnetischen Achse.

Um zu weiteren Aussagen zu kommen, betrachtet man das System in Toruskoordinaten (R, Φ, z) unter Berücksichtigung toroidaler Symmetrie (siehe Abbildung 2.2). Das Toroidalfeld im Vakuum läßt sich in diesen Koordinaten einfach darstellen als:

$$B_{\Phi, vac}(R) = \frac{B_{\Phi, vac}^0 \cdot R_0}{R} \quad (2.6)$$

Das Gesetz der Quellfreiheit lautet:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(R B_R) + \frac{\partial}{\partial z}(B_z) = 0 \quad (2.7)$$

Führt man nun die Funktion Ψ ein als

$$\Psi(R, z) = \int_0^R R' B_z(R', z) dR' = \frac{1}{2\pi} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.8)$$

(Ψ entspricht bis auf den Faktor 2π dem poloidalen Fluß durch die toroidale Ebene S), so ermöglicht das die Darstellung der Magnetfeldkomponenten B_R und B_z als partielle Ableitungen einer Funktion:

$$B_R(R, z) = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (2.9)$$

$$B_z(R, z) = +\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad (2.10)$$

Das Gesamtmagnetfeld kann mit diesem Ansatz in einen poloidalen und toroidalen Anteil zerlegt werden:

$$\vec{B} = \vec{B}_p + \vec{B}_\Phi \quad (2.11)$$

$$\vec{B}_p = \frac{1}{R} \{ \nabla \Psi \times \vec{e}_\Phi \}$$

$$\vec{B}_\Phi = \frac{f}{R} \cdot \vec{e}_\Phi$$

Aufgrund der Symmetrie von \vec{B} und \vec{j} in den Gleichungen (2.4) und (2.5) läßt sich der Stromdichtevektor analog aufspalten.

Die Komponenten erhält man durch Einsetzen von (2.11) in das Ampere'sche Gesetz:

$$\begin{aligned}\vec{j} &= \vec{j}_p + \vec{j}_\Phi & (2.12) \\ \vec{j}_p &= \frac{1}{R} \left\{ \nabla \left(\frac{f}{\mu} \right) \times \vec{e}_\Phi \right\} \\ \vec{j}_\Phi &= (\mathcal{L} \Psi) \cdot \vec{e}_\Phi\end{aligned}$$

Der Operator \mathcal{L} hat die Form:

$$\mathcal{L} \dots = -\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{\mu R} \frac{\partial \dots}{\partial R} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu R} \frac{\partial \dots}{\partial z} \right) \quad (2.13)$$

Diese Gleichungen gelten im gesamten Raum, nur die Werte der Permeabilität müssen an die einzelnen Materialien angepaßt werden.

Im Bereich der Plasmaregion muß zusätzlich Kräftegleichgewicht zwischen Druck und Feld herrschen. Setzt man die gewonnenen Ausdrücke (2.11, 2.12) in die Gleichgewichtsbeziehung (2.1) ein, so erhält man:

$$\nabla p = \frac{1}{R} (\mathcal{L} \Psi) \nabla \Psi - \frac{f}{\mu_0 R^2} \nabla f \quad (2.14)$$

Nach Gleichung (2.4) ist ∇p kollinear zu $\nabla \Psi$ und nach (2.5) auch kollinear zu ∇f , sodaß sich sowohl der Druck als auch die Stromdichte als Funktionen des magnetischen Flusses darstellen lassen. Gleichung (2.14) kann daher in eine Differentialgleichung für den magnetischen Fluß umgeschrieben werden:

$$\mathcal{L} \Psi = R \frac{\partial p}{\partial \Psi} + \frac{1}{2\mu_0 R} \frac{\partial (f^2)}{\partial \Psi} = j_\Phi \quad (2.15)$$

Neben dem Plasmastrom können auch die toroidalen Ströme anderer Leiter zusätzliche Poloidalfelder generieren. Die Stromdichte dieser Spulen geht als additiver Term in Gleichung (2.15) ein ²:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \Psi &= j_\Phi^{coil} + j_\Phi^{plasma} & (2.16) \\ j_\Phi^{coil} &= \sum_{i=1}^k \frac{I_i}{A_i} \quad \text{mit } A_i : \text{ Poloidaler Querschnitt Spule } i\end{aligned}$$

Gleichung (2.15) ist die **Grad-Shafranov-Gleichung**, die auf Gleichung (2.16) erweitert werden muß, um zusätzliche Felder und Ströme zur Kontrolle von Form und Position des Plasmas in den Berechnungen zu berücksichtigen.

²Die rechte Seite ist nur in den Gebieten von Null verschieden, wo Ströme fließen

In beiden Fällen müssen geeignete Ansätze für die Funktionen $p(\Psi)$ und $f(\Psi)$ gewählt werden (aus Transportrechnungen oder Messungen), im zweiten Fall muß zusätzlich ortsabhängig und selbstkonsistent die magnetische Permeabilität $\mu \approx \mu(B^2)$ externer Spulen und Eisenkerne berücksichtigt werden.

Für ein kreisförmiges Plasmas ohne äußere Ströme und mit konstanter Permeabilität μ_0 läßt sich Gleichung (2.15) annähernd analytisch lösen.

Für alle anderen Konfigurationen wird man eine numerische Lösungsmethode verwenden, die das Gebiet in kleine Elemente mit jeweils konstantem μ zerlegt und die Gleichung auf diesen Elementen diskretisiert. Der Lösungsprozess wird dann iteriert, bis Magnetfeldwerte und Permeabilitäten im Berechnungsgebiet die Gleichungen konsistent erfüllen.

Die approximative analytische Lösung der Grad-Shafranov-Gleichung

Diese Methode soll hier erläutert werden, weil die abgeleiteten funktionalen Abhängigkeiten später benutzt werden, um die numerisch auf einem Rechengitter bestimmten Gleichgewichtskonfigurationen analytisch zu interpolieren. Diese analytische Darstellung hat den Vorteil, daß bei gleichem Kernplasma das Magnetfeld für unterschiedliche Randschichtmodelle und beliebige Gitterpunkte aus einer Gleichgewichtslösung berechenbar ist.

Die Näherungen zur analytischen Lösung von Gleichung (2.15) sind folgende:

1. Das allgemeine toroidale Koordinatensystem (R, z, Φ) wird ersetzt durch ein spezielles "Torussystem" (r, θ, Φ) mit großem Radius R_0 , kleinem Radius r , Poloidalwinkel θ und Toroidalwinkel Φ (siehe Abbildung 2.3.). Der poloidale Plasmaquerschnitt hat den Radius a . Ferner muß gelten, daß $R_0 \gg a$ ist, um eine Entwicklung nach dem Aspektverhältnis $\frac{a}{R_0}$ durchführen zu können.
2. Die allgemeine Kontur der Flußflächen wird reduziert auf nicht konzentrische Kreise mit Radius r . Der poloidale Fluß Ψ_{pol} setzt sich zusammen aus dem Fluß, der durch den toroidalen Gesamtstrom erzeugt wird (Ψ_0), und der Modifikation dieser Lösung durch Druckgradienten im Plasma (Ψ_1):

$$\Psi_{pol} = \Psi_0 + \Psi_1 \quad (2.17)$$

3. Die Flußfunktion wird als Taylor-Entwicklung um die Grundlösung Ψ_0 angesetzt und die Koordinaten θ und r werden separiert:

$$\Psi_{pol} = \Psi_0 - \Delta(r) \cos\theta \frac{d\Psi_0}{dr} \quad (2.18)$$

Die poloidale Abhängigkeit ist über die Kosinusfunktion explizit vorgegeben, während $\Delta(r)$ eine Funktion ist, die aus den gegebenen Plasmametern berechnet werden muß.

4. Die Flächen konstanten poloidalen Flusses lassen sich in dieser Näherung parametrisieren:

$$\begin{aligned} R &= R_0 + \Delta(r) + r \cos\theta \\ z &= r \sin\theta \end{aligned} \quad (2.19)$$

Es sind Kreise mit Radius r , deren Mittelpunkt jeweils um die Shafranov-Shift $\Delta(r)$ von R_0 verschoben ist. $\Delta(r)$ wird so gewählt, daß die Verschiebung am Plasmarand identisch Null ist.

5. Der Operator \mathcal{L} separiert bei der Anwendung auf Ψ_{pol} in einen Operator \mathcal{L}_{Vac} für die Vakuumlösung Ψ_0 und einen Operator im Plasmagebiet \mathcal{L}_{Plasma} für die Störung Ψ_1 :

$$\mathcal{L}\Psi_{pol} = \mathcal{L}_{Vac}\Psi_0 + \mathcal{L}_{Plasma}\Psi_1 \quad (2.20)$$

Damit erhält man jeweils eine Differentialgleichung zur Bestimmung der Flüsse Ψ_0 und Ψ_1 .

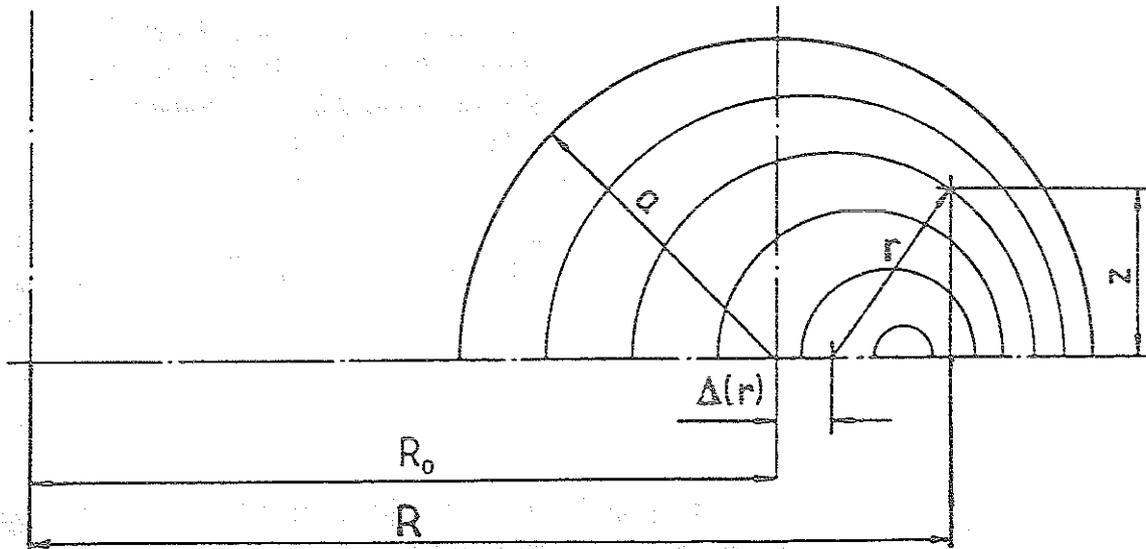


Abbildung 2.3: Koordinatensystem mit verschobenen Flußflächen

Die Differentialgleichung für die Vakuumlösung $\Psi_0(r)$ wird im Gebiet außerhalb des Plasmas ($r > a$) formuliert. Dort hat man keine Beiträge von Druck und Strom, sodaß Ψ_0 eine Eigenfunktion zum Operator \mathcal{L}_{Vac} ist:

$$\mathcal{L}_{Vac}\Psi_0 = 0 \quad (2.21)$$

Die Lösung dieser Gleichung im Außenraum erhält man durch Integration:

$$\Psi_0(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I_{ges}}{2\pi} \left\{ R_0 \left(\ln \frac{8R_0}{r} - 2 \right) + \left[\frac{r}{2} \left(\ln \frac{8R_0}{r} - 1 \right) + \frac{c_1}{r} + c_2 r \right] \cos\theta \right\} \quad (2.22)$$

Da \mathcal{L}_{Vac} ein Differentialoperator zweiter Ordnung ist, hat die Flußfunktion zwei freie Integrationskonstanten, die so gewählt werden müssen, daß das poloidale Magnetfeld für ($r \rightarrow a$) am Plasmarand ($r = a$) sich stetig an die Lösung im Plasmaintern anschließt und die radiale Komponente des Magnetfeldes dort identisch Null ist.

Das Poloidalfeld berechnet sich außerhalb des Plasmas durch Ableitung der Gleichung (2.22):

$$B_{\theta}^{au\beta en}(r, \theta) = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} = \frac{\mu_0 I_{ges}}{2\pi R} \cdot \left[\frac{R_0}{r} + \cos\theta \left(\frac{c_1}{r^2} - c_2 - \frac{1}{2} \ln \frac{8R_0}{r} + 1 \right) \right] \quad (2.23)$$

Am Plasmarand errechnet man den Wert:

$$B_{\theta}^{au\beta en}(a, \theta) = B_{\theta 0}(a) \cdot \left\{ 1 + \frac{a \cos\theta}{R_0} \left[1 - c_2 + \frac{c_1}{a^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{8R_0}{a} \right] \right\} \quad (2.24)$$

mit $B_{\theta 0}(a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$.

Plasmaseitig ergibt sich das Poloidalfeld durch Ableitung des speziellen Ansatzes (2.18):

$$B_{\theta}^{in n en}(a, \theta) = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_a = B_{\theta 0}(a) \cdot \left\{ 1 - \cos\theta \left[\frac{a}{R_0} + \left(\frac{d\Delta}{dr} \right)_a \right] \right\} \quad (2.25)$$

Um nun die beiden Felder vergleichen zu können, muß die Änderung der Shafranov-Shift am Plasmarand bekannt sein. Man kann hier Annahmen über den Verlauf von $\Delta(r)$ machen oder die Funktion aus anderen Plasmamparametern berechnen, die experimentell eher zugänglich sind. Dazu nutzt man die Gleichung für die Störung Ψ_1 , die das Druckgleichgewicht im Plasmaintern beschreibt.

Die Differentialgleichung für die Störung $\Psi_1(r, \theta)$ kann umgeformt werden in eine Differentialgleichung für die Verschiebung $\Delta(r)$:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r B_{\theta 0}^2 \frac{d\Delta}{dr} \right) = 2\mu_0 \frac{r}{R_0} \frac{dp_0}{dr} - \frac{B_{\theta 0}^2}{R_0} \quad (2.26)$$

Der in Gleichung (2.25) gesuchte Ausdruck $\frac{d\Delta}{dr} \Big|_a$ ergibt sich durch Integration der Gleichung (2.26) zwischen $r = 0$ und $r = a$ unter Berücksichtigung der Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{Magnetische Achse : } \frac{d\Delta}{dr}(r=0) &= 0 \\ \text{Äußerer Plasmaradius : } \Delta(r=a) &= 0 \end{aligned}$$

Er kann in die einfache Form

$$\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)_a = -\frac{a}{R_0} \left(\beta_p + \frac{l_i}{2}\right) \quad (2.27)$$

gebracht werden, wobei β_p und l_i Integralausdrücke sind, in die der Verlauf von Druck und poloidalem Magnetfeld über dem Plasmaradius eingeht.

Der *poloidale-beta-Wert* gibt das Verhältnis von gemitteltem Plasmadruck relativ zum Poloidaldruck am Plasmarand an:

$$\beta_p = \frac{\int_0^a p_0 2\pi r dr}{\left(\frac{B_{\theta 0}^2(a)}{2\mu_0}\right) \pi a^2} \quad (2.28)$$

Die zweite charakteristische Größe l_i wird als *innere Induktivität* bezeichnet. Berechnet wird sie aus dem mittleren Magnetfelddruck bezogen auf den Magnetfelddruck am Plasmarand:

$$l_i = \frac{\int_0^a \left(\frac{B_{\theta 0}^2}{2\mu_0}\right) 2\pi r dr}{\left(\frac{B_{\theta 0}^2(a)}{2\mu_0}\right) \pi a^2} \quad (2.29)$$

Die innere Induktivität beträgt 0.5 für ein Stromprofil mit konstanter Flußdichte. Sie erreicht Werte um eins für experimentell beobachtete Stromdichteverläufe. Beispielsweise ist l_i für eine linear zum Plasmarand abfallende Stromdichte einige Prozent über eins und bei parabolischem Verlauf errechnet man $l_i \approx 0.9$.

Einsetzen von Gleichung (2.27) in (2.25) ergibt die endgültige Form für das Poloidalfeld am Plasmarand:

$$B_{\theta}^{innen}(a, \theta) = B_{\theta 0}(a) \left(1 + \frac{a}{R_0} \left[\beta_p + \frac{l_i}{2} - 1\right] \cos\theta\right) \quad (2.30)$$

Die beiden Poloidalfelder im Außenraum (2.24) und im Plasmainternen (2.30) müssen am Plasmarand übereinstimmen. Damit hat man eine von zwei Bestimmungsgleichungen für c_1 und c_2 .

Die zweite Gleichung gewinnt man aus der Tatsache, daß die Normalkomponente des Magnetfeldes am Rand einer stromführenden Schicht verschwindet:

$$B_r(a) = -\frac{1}{R_0 r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \Big|_a = 0 \quad (2.31)$$

Das bedeutet, daß der Koeffizient von $\cos\theta$ in Gleichung (2.22) für $r = a$ Null werden muß.

Setzt man die aus diesen Bedingungen bestimmten Werte für c_1 und c_2 in Gleichung (2.23) ein, erhält man eine im Gesamtgebiet gültige Gleichung für das poloidale Magnetfeld:

$$B_\theta(r, \theta) = \frac{\mu_0 I_{ges}}{2\pi R} \left\{ \frac{R_0}{r} - \frac{\cos\theta}{2} \left[1 + \ln \frac{r}{a} + \left(\beta_p + \frac{l_i - 1}{2} \right) \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \right] \right\} \quad (2.32)$$

Die Näherung und Vereinfachung $R_0 \gg r$, die der analytischen Näherung zugrunde liegt, ist für die meisten Tokamaks keine gute Approximation, denn in einer Maschine, in der z.B. das Aspektverhältnis $\frac{R_0}{a} \approx 3.5$ (TEXTOR) beträgt, ändert sich der große Radius zwischen magnetischer Achse und Plasmarand um ca. 25%. Daher kann die Gleichung (2.32) nicht exakt angewendet werden. Die funktionalen Abhängigkeiten können jedoch genutzt werden, um existierende numerische Lösungen mit einem **nonlinear-least-square-Verfahren** analytisch zu approximieren.

Die Ausgangsformel für die Approximation hat dann folgende Struktur:

$$B_\theta(r, \theta) = \frac{\mu_0 I_{ges}}{2\pi R} \cdot f_1 \left(\frac{R_0}{r} - \frac{\cos\theta}{2} \frac{r}{a} \cdot f_2 \right) \quad (2.33)$$

- Der große Radius wird hier in der exakten Form unter Berücksichtigung der Shafranov-Shift benutzt: $R = R_0 + \Delta(r) + r \cos\theta$
- Die Shafranov-Shift Δ wird durch ein Polynom höherer Ordnung in r an die numerische Lösung angepaßt. Dabei geht man von der Annahme aus, daß die Flächen konstanten Flusses Kreise sind, die von R_0 um $\Delta(r)$ verschoben sind.
- f_1 ist eine quadratische Funktion in $\left(\frac{r}{a}\right)$ und berücksichtigt so für $(0 < r < a)$ die sich mit dem kleinen Radius ändernde Stromdichte.
- f_2 kann als kubische Funktion in der Variablen $\left(\frac{a}{r}\right)$ dargestellt werden, wenn man den Ausdruck $\ln\left(\frac{r}{a}\right)$ für $r \approx a$ entwickelt.

Beispielrechnungen zeigen, daß man mit dieser Methode die Gleichgewichtskonfiguration am Plasmarand sehr gut der numerischen Lösung anpassen kann. Es fällt auf, daß die radiale Abhängigkeit vom analytischen Modell gut wiedergegeben wird, während die Abhängigkeit vom Poloidalwinkel θ im Verlauf zwar richtig, in der Größenordnung jedoch um einen Faktor 2 – 3 zu niedrig berechnet wird. Ursache hierfür ist eine um diesen Faktor stärkere Asymmetrie zwischen dem Feld "innen" ($\theta = \pi$) und dem Feld "außen" ($\theta = 0$). Die Abweichung erklärt sich aus der Annahme des großen Aspektverhältnisses, die den Torus annähernd wie einen Zylinder behandelt und die beim Torus auftretende Verdichtung der Feldlinien für $R \rightarrow 0$ vernachlässigt.

Zur Berechnung des poloidalen Feldes in einem beliebigen Punkt $P(R, z)$ der Randschicht geht man so vor, daß zuerst die Realkoordinaten (R, z) in die Flußflächenkoordinaten (r, θ) transformiert werden:

$$\begin{aligned} R &= R_0 + \Delta(r) + r \cdot \cos\theta \\ z &= r \cdot \sin\theta \end{aligned} \quad (2.34)$$

Dies geschieht wegen der Mehrdeutigkeit der Winkelfunktionen und der nichtlinearen Abhängigkeit der Shafranov-Shift von r über eine numerische Prozedur.

Die entsprechenden Koordinaten r und θ werden dann in die Gleichung (2.33) eingesetzt und liefern mit den für jede Entladung spezifischen Funktionen f_1, f_2 den gesuchten Wert des poloidalen Magnetfeldes.

Durch die Grad-Shafranov-Gleichung wird ein idealer, stationärer Gleichgewichtszustand im Tokamak beschrieben. Tatsächlich hat man jedoch Verluste durch Stöße zwischen den Plasmateilchen, die zu Transportprozessen auch senkrecht zu den Feldlinien führen. Teilchen- und Energieströme fließen aus Gebieten hohen Plasmadruckes in die Plasmarandschicht. Um diesen Transport und seinen Einfluß auf die Funktion eines Tokamaks geht es in dieser Arbeit.

2.2.2 Die Bedingungen für stationäres Brennen in Tokamakplasmen

Interessant ist vor allem die Untersuchung der Brennbedingungen in Fusionsplasmen. Zur Beschreibung der Eigenschaften des Plasmas geht man von einfachen Voraussetzungen aus:

- Alle Plasmagrößen sind auf den Flußflächen konstant.
- Es existieren keine poloidalen Geschwindigkeiten oder ihr Einfluß auf das Plasma ist vernachlässigbar.
- Geometrische Effekte (Plasmaform und -größe) sind von untergeordneter Bedeutung.

Zu lösen sind Teilchen- und Energietransportgleichungen für die Plasmakomponenten. Gekoppelt sind diese beiden Gleichungen durch die Fusionsreaktionen, die in einer bestimmten Korrelation Teilchen und Energie erzeugen. Zusätzlich können Verunreinigungen in der Teilchenbilanz und durch sie bewirkte Strahlungsverluste in der Energiebilanz berücksichtigt werden. Die bisher entwickelten Modelle unterscheiden sich hauptsächlich in der Art und Weise, wie die Transportprozesse behandelt werden.

0 - dimensionale Modelle

Stellvertretend für diese Ansätze [24, 25, 5, 26] wird hier näher auf die Arbeit von D. Reiter, G.H. Wolf und H. Keuer eingegangen. Der Transport wird in diesem Modell durch charakteristische Einschlußzeiten beschrieben. Für die Teilchen wird eine Einschlußzeit τ_P angenommen, für die Energie die Zeit τ_E . Sie korrespondieren zu den Transportkoeffizienten einfacher Diffusionsansätze für den radialen Transport:

$$\tau_P \sim \frac{(\delta r)^2}{D} \quad (2.35)$$

$$\tau_E \sim \frac{(\delta r)^2}{\chi} \quad (2.36)$$

Hier ist D die Diffusionskonstante für den Teilchentransport, χ der Transportkoeffizient für die Wärmeleitung und δr die radiale Abfallänge von Dichte- und Temperaturprofil. Es wird vereinfachend angenommen, daß der Transport für alle Ionensorten, d.h. für Plasmaionen, α -Teilchen und Verunreinigungen, durch dieselben Koeffizienten beschrieben werden kann. Zusätzlich sollen alle Teilchen einschließlich der Elektronen die gleiche Plasmatemperatur T haben.

In der Energiebilanz muß Gleichgewicht herrschen zwischen der frei werdenden Reaktionsenergie ($E_\alpha = 3.52 \text{ MeV/Reaktion}$), die vollständig ans Plasma abgegeben wird, und den Verlusten durch radialen Transport und Strahlung. Die so formulierten Bilanzen können unter Ausnutzung der Quasineutralität in eine Bestimmungsgleichung für die relative Heliumkonzentration - relativ zur Elektronenkonzentration - umgeformt werden. Parameter dieser Gleichung sind die relative Verunreinigungskonzentration $f_Z = \frac{n_Z}{n_e}$ mit zugehöriger Ladungszahl Z , die Funktionen, die den Energieverlust durch Brems- und Linienstrahlung beschreiben, und das Verhältnis der charakteristischen Transportgrößen $\rho \equiv \frac{\tau_P}{\tau_E} = \frac{\chi}{D}$. Unter der Annahme eines einfachen Korona - Strahlungsmodells ($\text{Energieverlust} \propto \sqrt{T} \cdot Z^2$) lassen sich Bereiche für f_Z , f_{He} und ρ angeben, in denen eine Lösung der Gleichung existiert, d.h. in denen ein Plasma stationär brennt. Ein wichtiges Ergebnis dieser Rechnungen ist, daß bei vorgegebener Verunreinigungskonzentration ρ kleiner sein muß als ein Maximalwert ρ_{crit} .

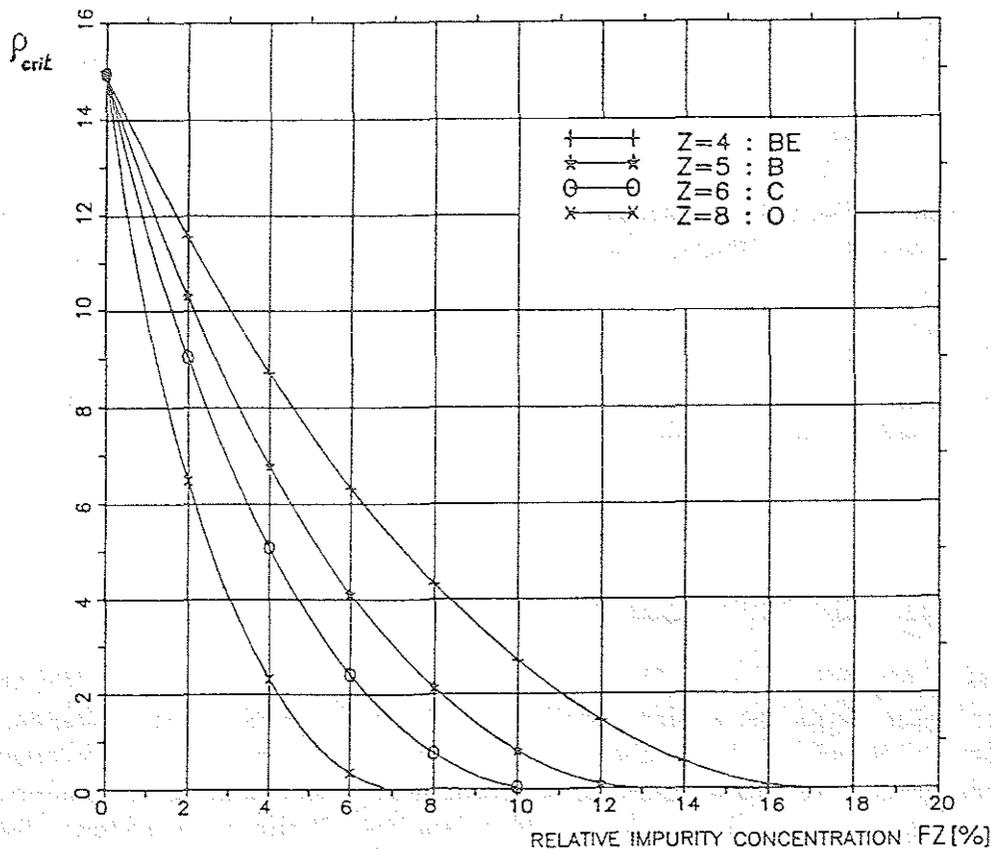


Abbildung 2.4: kritisches Verhältnis von Teilcheneinschluß- zu Energieeinschlußzeit in Abhängigkeit von der Verunreinigungskonzentration verschiedener Stoffe

Man erkennt, daß dieser Maximalwert ρ_{crit} für Verunreinigungen höherer Ladungszahl, bzw. höhere Verunreinigungskonzentrationen stark absinkt. Das bedeutet, daß mit größerer Verunreinigung des Plasmas eine Verbesserung des Energieeinschlusses relativ zum Teilcheneinschluß erreicht werden muß, damit die Reaktion sich selbst aufrecht erhalten kann. Die in diesem Modell global definierten Einschlußzeiten geben jedoch keine nähere Information, durch welche Einzelprozesse ρ gezielt verringert werden kann.

1 - dimensionale Modelle

Die eindimensionalen Modelle berücksichtigen durch explizite Modellierung des radialen Transports auch Profileffekte von Dichte und Temperatur in den Bilanzgleichungen [27, 28, 26].

Nimmt man auch hier ein festes Verhältnis zwischen D und χ an, so sind Heliumverteilung und Temperaturverteilung ähnlich. Hauptsächlich im Zentralbereich des Plasmas finden Fusionsreaktionen statt und hier konzentriert sich die Helium-Asche. Dies führt zu einer Verdünnung des Brennstoffes, die die Reaktionsrate herabsetzt. Man erhält allerdings mit dem Ansatz eines konstanten Verhältnisses zwischen Teilchen- und Energieeinschluß keine qualitativ neuen Informationen, da zwischen zwei Flußflächen stets dieselben Flüsse ausgetauscht werden.

Eine andere Überlegung geht von experimentell bestimmten oder für ITER zu erwartenden Elektronendichte- und Temperaturprofilen aus. Setzt man diese als gegeben in die Teilchen- und Energiebilanz ein [29, 30] und paßt dann die Transportkoeffizienten so an, daß die Bilanzgleichungen erfüllt sind, erhält man D und χ als Funktionen des Plasmaradius. Ein Ergebnis dieser Rechnungen ist, daß der Wert des Diffusionskoeffizienten etwa $0.2 \frac{m^2}{s}$ beträgt und zum Plasmazentrum, bzw. zum Plasmarand hin auf etwa $0.5 \frac{m^2}{s}$ ansteigt. Der radiale Wärmeleitungskoeffizient ist im Zentrum bis zu einem Faktor zwei höher als der Diffusionskoeffizient und erreicht am Plasmarand Werte um $2 \frac{m^2}{s}$. Der für die Brennbedingung entscheidende Parameter $\rho = \frac{\chi}{D}$ wächst entsprechend von Werten zwischen zwei und drei im Plasmazentrum auf zehn bis zwanzig in der Hälfte des Plasmaradius an und fällt zur Randschicht schwach ab.

In Anlehnung an solche Rechnungen, die sich auf experimentell bestimmte Profile stützen, werden auch die radialen Transportkoeffizienten in den zweidimensionalen Randschichtberechnungen gewählt.

2.3 Die Modellierung der Plasmarandschicht

In diesem Abschnitt sollen Methoden zur Beschreibung der Plasmarandschicht vorgestellt werden. Betrachtet werden vor allem die Anwendungsgebiete der Verfahren, ihre Stärken und ihre Schwächen. Dabei wird intensiver auf Rechnungen in Fluid-Näherung eingegangen, die Anwendung der Drift-kinetischen-Theorie wird nur kurz erläutert. Ein eigenes Unterkapitel wird den Berechnungen zum Bohm-Kriterium gewidmet, die sich mit dem Teilchen-, Impuls- und Energieaustausch bei Plasma-Wand-Kontakt beschäftigen. Dazu werden unterschiedliche Verfahren vorgestellt und die Ergebnisse der Rech-

nungen präsentiert. Diese Resultate sind deshalb so wichtig, weil sie als Randbedingungen in die Randschichtmodellierung eingehen und den Strömungsverlauf signifikant beeinflussen können. Zum Schluß wird das Verhalten der Neutralteilchen modelliert. Es werden einfache analytische Ansätze beschrieben, wie sie in den meisten Fluid-Näherungen benutzt werden, aber auch ein Monte-Carlo-Verfahren, das die Neutralteilchen in ihrer Einzelbewegung simuliert und globale Parameter wie Dichten und Flüsse durch Mittelung berechnet.

2.3.1 Die Hydrodynamische Beschreibung der Plasmarandschicht

Eine Übersicht zu Arbeiten auf diesem Gebiet geben die Artikel von D.E. Post und K. Lackner [33], E.L. Vold, F. Najmabadi und R.W. Conn [34] und von D. Reiter [35]. Der Schwerpunkt des ersten Artikels liegt dabei auf eindimensionalen analytischen Modellen, die zweite Arbeit konzentriert sich auf die zweidimensionalen Modelle und die dritte Übersicht geht näher auf die Kopplung an ein statistisches Neutralteilchenmodell ein.

1D - Fluidbeschreibung

Bei den eindimensionalen Modellen handelt es sich um Rechnungen, deren Ziel das qualitative Verständnis der Vorgänge in der Randschicht ist.

Dazu werden im Allgemeinen die Kontinuitätsgleichung für die Ionen und die Energiegleichung für die Elektronen unter Berücksichtigung der toroidalen Symmetrie des Problems aufgeschrieben und durch globale Ansätze für eine weitere Koordinate auf eine Dimension reduziert.

Möchte man beispielsweise den radialen Transport näher untersuchen, so wird für die poloidale Koordinate ein Relaxationszeitansatz mit einer charakteristischen Zeit τ_{pol} gemacht.

Sie berechnet sich aus dem Verhältnis von charakteristischer Länge $L_{||}$ und charakteristischer Geschwindigkeit $v_{||}$ in der Randschicht.

$$\tau_{pol} = \frac{L_{pol}}{v_{pol}} = \frac{L_{||}}{v_{||}} = \frac{\pi q R}{v_{||}} \quad (2.37)$$

Für $L_{||}$ wird die Verbindungslänge, d.h. der Abstand von Target zu Symmetrieebene entlang einer Magnetfeldlinie, benutzt, für $v_{||}$ die Ionenschallgeschwindigkeit. Diese Annahme ist lediglich eine Abschätzung der Größenordnung für die Verluste parallel des Feldes. Sie überschätzt den Transport im Vergleich zu gemittelten Werten aus zweidimensionalen Rechnungen um Faktoren drei bis zehn, weil die mittlere Transportgeschwindigkeit, abhängig vom Recyclingfaktor, nur Bruchteile der Ionenschallgeschwindigkeit erreicht.

Die unter diesen Annahmen hergeleiteten Gleichungen haben dieselbe Form wie die Diffusionsgleichungen für das Kernplasma [28, 27] und führen auf ähnliche Werte für die Transportkoeffizienten:

$$\begin{aligned} D_{\perp} &\sim 1.0 \pm 0.3 \frac{m^2}{s} \\ \chi_{\perp}^e &\sim 9.0 \pm 3.0 \frac{m^2}{s} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ein alternativer Ansatz, der vor allem für Divertoranwendungen oft benutzt wird, beschreibt den radialen Transport über einen globalen Relaxationszeitansatz, der poloidale Abhängigkeiten vernachlässigt: Die radial in die Randschicht eintretenden Teilchen werden wie eine äußere Quelle behandelt. Zusätzlich geht die Teilchen- und Energieauskopplung am Plasmarand als Senke in die Gleichungen ein [31, 32]. In der Arbeit von M. Kaufmann, K. Lackner, J. Neuhauser und H. Vernickel werden z.B. die am Plasmarand entstehenden Neutralteilchen nach einem einfachen Modell ionisiert und gehen als Quellterme in die Teilchenbilanz ein. Die Energiebilanz wird nur für die Elektronentemperatur aufgestellt. Man berechnet ein Gleichgewicht zwischen den Energiesenken, die sich aus der Ionisation der Neutralen ergeben, und den Energieflüssen aufgrund der Wärmeleitung. Für die Ionen wird nur eine Druckbilanz zwischen Separatrix und Target aufgestellt, indem man davon ausgeht, daß der Druck an der Separatrix am Target teilweise, entsprechend dem Bohm-Kriterium, in eine Plasmaströmung umgewandelt wird.

Gerechtfertigt ist diese Vereinfachung für den Fall, daß es eine globale Ionendruckbilanz gibt. Das setzt aber implizit voraus, daß die Ionengesamtenergie³ eine Erhaltungsgröße ist und die dissipativen Effekte durch Ionenwärmeleitung und Viskosität vernachlässigt werden können.

Nützlich sind die eindimensionalen Rechnungen, wenn man globale Größen wie Recycling-Faktoren oder effektive Pumpraten unter bestimmten Plasmabedingungen abschätzen will. Solche Rechnungen können Hilfestellung bieten bei der Diskussion um die Wichtigkeit verschiedener Effekte, da sie einfacher zu verstehen sind und viele charakteristische Merkmale der Plasmaströmung wiedergeben.

Eine schlechte Näherung ist allerdings die eindimensionale Modellierung der Neutralteilchen. In der Realität bewegen sie sich unabhängig vom Magnetfeld auf echt dreidimensionalen Bahnen. Dies führt zu einer radialen Umverteilung der durch Reionisation entstehenden "Plasmaquellen", die auch die Plasmaströmung in diesen Gebieten signifikant beeinflussen kann.

2D - Fluidbeschreibung

Die in den eindimensionalen Modellen gemachte Annahme der Homogenität von Plasmagrößen in poloidaler oder radialer Richtung ist nur in speziellen Konfigurationen und unter bestimmten Plasmabedingungen gerechtfertigt. In den meisten Fällen aber sind poloidale und radiale Abhängigkeiten so stark gekoppelt, daß nur eine zweidimensionale Behandlung angemessen ist. Aufgrund der komplexen Zusammenhänge sind solche Rechnungen nur noch mit numerischen Methoden durchführbar.

Auch in diesen Modellen wird die Unabhängigkeit von der toroidalen Koordinate vorausgesetzt. Die Gleichungen in den zwei anderen Dimensionen sind Teilchen-, Impuls- und Energiebilanz für Elektronen und Ionen. Sie entstehen aus der Boltzmann-Gleichung durch Momentenbildung nach Chapman und Enskog. Die Methode wurde von Braginskij [36] auf ein Zweikomponenten-Plasma mit langreichweitigen Coulomb-Kräften an-

³Hier sollte man aus thermodynamischer Sicht besser von der "freien Enthalpie der Ionen" sprechen.

gewendet. Es wurden Annahmen gemacht, die zu Abschlußbedingungen für das Gleichungssystem führen und es zusätzlich vereinfachen:

- Die Energiegleichung wird abgeschlossen durch einen Ansatz für die Energieflußdichte. Sie wird proportional dem lokalen Temperaturgradienten angenommen. Die Proportionalitätskonstante ist der Transportkoeffizient für die Energie. Dieser Koeffizient selbst hängt nichtlinear von der Temperatur ab.⁴
- Die Transportkoeffizienten werden in Hochfeldnäherung berechnet, d.h. man hat zwischen zwei Teilchenstößen eine große Zahl von Gyrationen.
- Das Plasma wird quasineutral vorausgesetzt, d.h. Ionen- und Elektronendichte stimmen überein.
- Der Druck wird als skalare, isotrope Größe angesetzt. Es gilt das ideale Gasgesetz und eine thermodynamische Zustandsgleichung.
- Das kleine Massenverhältnis $\frac{m_e}{m_i}$ wird benutzt, um einige Terme zu entwickeln.

Die so entstehenden klassischen Gleichungen werden für ihre Anwendung in der Tokamakrandschicht weiter modifiziert.

Zum ersten möchte man die Näherung auch in Gebieten verwenden können, wo Stöße relativ selten sind. Das ist vor allem bei niedriger Dichte und hoher Temperatur der Fall. Daher werden dort die Transportkoeffizienten gegenüber dem klassischen Wert empirisch so weit reduziert, daß die Fluid-Beschreibung noch sinnvoll bleibt.

(→ *Voraussetzungen für die Anwendung des Fluidmodells*)

Zum zweiten wird der Transport senkrecht zu den Flußflächen erhöht, da die bei Experimenten beobachteten Einschlußzeiten sehr viel kleiner sind als die theoretisch erwarteten. Es wird daher ad hoc ein einfaches Diffusionsmodell für Teilchen- und Energietransport aufgestellt. Die Transportkoeffizienten für diese "anomale" Diffusion werden zwar an die experimentell gemessenen Profile angepaßt, die Fehlergrenzen sind jedoch so groß, daß nur die Größenordnung, nicht aber funktionale Abhängigkeiten festgelegt werden können. So wählt man die Koeffizienten in den meisten Modellen entweder konstant oder proportional $\frac{T_e}{B}$ (Bohm-Diffusion).

Neben den Flüssen müssen in dieser Beschreibung auch die Quellterme zweidimensional dargestellt werden. In den analytischen Modellen läßt man den auf das Target auftretenden Ionenfluß entsprechend dem Recyclingfaktor als Neutralteilchenfluß entlang von Flußflächen ins Plasma zurückströmen und reionisiert ihn auf diesem Weg sukzessive. Die entstehenden Ionenquellen werden radial (künstlich) verbreitert. Dadurch versucht man der Tatsache Rechnung zu tragen, daß sich die Neutralteilchen nicht entlang von Feldlinien bewegen und man stark nichtlokale Wechselwirkungen berücksichtigen muß. Insgesamt sind alle analytischen Modelle nur grobe Approximationen der Wirklichkeit. Besser ist es, die Quellterme durch Kopplung mit einem statistischen Neutralgasmodell zu berechnen, entsprechend einer kinetischen Beschreibung. Hier hat man allerdings

⁴Insgesamt ist die Energieflußdichte eine nichtlineare Funktion der Temperatur und eine lineare Funktion des Temperaturgradienten.

das Problem, daß nur wenig darüber bekannt ist, wie man eine Kombination unterschiedlicher numerischer Methoden zu einer konvergenten und stabilen Lösung bringt.

Bisher wird zur Lösung der Plasmagleichungen fast ausschließlich die Methode der finiten Differenzen, bzw. finiten Volumen [37, 39, 40, 34, 42] benutzt. Aufgrund der Beschränkung dieses Verfahrens auf orthogonale Berechnungsnetze müssen alle Randschichtkonfigurationen in eine solche Geometrie transformiert werden und es ist bisher mit diesem Verfahren noch nicht gelungen, Wandflächen, die von Magnetfeldlinien in beliebigem Winkel geschnitten werden, exakt zu modellieren.

Die meisten Modelle behandeln ein reines Plasma mit Ionen und Elektronen, wie es auch die Theorie von Braginskij [36] beschreibt. Eine Erweiterung der Theorie auf Mehrkomponentenplasmen, vor allem zur Modellierung von Verunreinigungen, wurde von B.J. Braams [38] durchgeführt. Diese Theorie wurde unter der vereinfachenden Annahme abgeleitet, daß alle Ionensorten gleiche Temperatur haben; diese kann von der Elektronentemperatur verschieden sein. Die verschiedenen Ionensorten sind über Ionisation, Rekombination, Reibungskräfte und Thermokräfte miteinander gekoppelt. Dabei sind die Gleichungen so angelegt, daß bei Summation über alle Spezies die Bilanzgleichungen erfüllt sind und im Grenzfall einer einzigen Ionensorte das klassische Braginskij-Modell reproduziert wird. Man erreicht diese Eigenschaften durch die Einführung einer effektiven Kernladungszahl und einer effektiven Masse, mit der auch die Transportkoeffizienten in paralleler Richtung skaliert werden.

Eine solche Behandlung gibt in stark vereinfachter Weise wieder, was in einer Transporttheorie für verunreinigte Plasmen selbstkonsistent hergeleitet wurde [43]. Dieses Modell berücksichtigt das endliche Massenverhältnis zwischen Plasmaionen und Verunreinigungen und gilt im stoßdominierten Fall für beliebige Konzentrationen der Verunreinigung. Die Lösungsmethode verwendet den 21-Momenten-Ansatz von Grad; von der Genauigkeit her entspricht dieser Ansatz der Chapman-Enskog-Approximation, die von Braginskij zur Herleitung des Ausdrucks für eine Ionensorte verwendet wurde.

Bei beiden Modellen ist allerdings ein Plasma mit hohen Stoßraten Voraussetzung. Tatsächlich gibt es in der Randschicht aber auch stoßarme Bereiche mit niedrigen Dichten und hohen Temperaturen, in denen eine kinetische Beschreibung sinnvoll wäre.

2.3.2 Die Drift-kinetische Theorie

In stoßarmen Gebieten sind dann nur noch drift-kinetische Modelle oder rein kinetische Modelle anwendbar. Während rein kinetische Modelle die Einzelteilchenbewegung für eine große Anzahl von Teilchen simulieren und dies nur noch mit numerischen Methoden ("particle in cell") möglich ist, gibt es für die eindimensionale drift-kinetische Näherung analytische Lösungen. Das Verfahren wird vor allem zur Beschreibung des Verunreinigungstransports verwendet, weil für diese Teilchen die Voraussetzungen zur Anwendung eines Flüssigkeitsmodells in großen Bereichen der Randschicht verletzt sind. Die simulierten Prozesse sind radialer Transport und atomare Wechselwirkungen wie Ionisation und Rekombination. Sie gehen in die Bilanzgleichungen für jeden Ladungszustand ein [45, 44].

Um zu geschlossenen Lösungen zu gelangen, müssen allerdings die Profile des Hintergrundplasmas, in denen sich die aus der Wand erodierten Verunreinigungen bewegen, vorgegeben werden. Die Gleichungen berücksichtigen dann aber auch nichtlokale Transportprozesse.

Die Ergebnisse solcher Rechnungen könnten zu einer besseren Modellierung der Verunreinigungen in Fluid-Beschreibungen verwendet werden. Außerdem könnten "kinetische Korrekturen" in die Transportkoeffizienten eingehen. Eine Einbindung in die Flüssigkeitsgleichungen wäre leicht möglich, da die Lösungen analytisch formuliert sind. Es wurden bisher allerdings noch keine Anstrengungen unternommen, drift-kinetische und Fluidmodelle iterativ zu koppeln.

Benutzt man das *particle-in-cell-Verfahren*, hat man die Vorteile aber auch die Probleme, wie sie sich auch schon für die statistische Neutralteilchenmodellierung ergaben: Man ist geometrisch sehr flexibel und kann die physikalischen Vorgänge im Detail beschreiben, hat aber nur schwache Kriterien für Stabilität und Konvergenz der Lösung.

2.3.3 Das Bohm-Kriterium

Der stationäre Zustand in einem Plasma-Experiment wie dem Tokamak, wird wesentlich durch den Plasma-Wand Kontakt am Limiter oder Divertor bestimmt, denn hier findet der Teilchen- und Energieaustausch mit der Umgebung statt. Die Modellierung der sich bildenden Grenzschicht ist daher eines der ältesten und interessantesten Probleme der Plasmaphysik und trotz einer großen Anzahl von Arbeiten auf diesem Gebiet nicht vollständig gelöst.

Die Wechselwirkung des Plasmas mit einer mehr oder weniger stark absorbierenden Wand läßt sich in folgender Weise charakterisieren: Entsprechend der höheren Geschwindigkeit der Elektronen relativ zu den Ionen, werden erstere eine Wand eher erreichen und negativ laden. Das dadurch entstehende Potential wird Elektronen abstoßen und Ionen anziehen und sich so einstellen, daß die Flüsse der beiden Teilchensorten auf die Wand gleich sind und die Quasineutralität des Plasmas gewährleistet ist. Damit schirmt die Raumladungszone das neutrale Plasma von der negativ geladenen Wand ab. Ihre Wirkung ist daher ähnlich der Debye-Abschirmung und auch die typische Reichweite der Schicht ist von der Größenordnung der Debye-Länge λ_D .

Lediglich ist hier, wegen der absorbierenden Wand, die Geschwindigkeitsverteilung für die Ionen nicht bekannt, sondern sie muß zusammen mit dem elektrischen Potential selbstkonsistent berechnet werden. Die wichtigsten Fragen, die sich stellen, sind:

- Wie groß sind die Teilchen- und Energieflüsse aus dem Plasma auf die Wand und wie sind sie mit den Teilchendichten und Temperaturen im neutralen Plasma korreliert? Diese Flüsse sind von zentraler Bedeutung für die Einschlußzeiten und bestimmen die Wärmebelastung der Wand.
- Wie groß ist das Potential, das sich vor der Wand bildet? Dieses Potential beschleunigt die Ionen und führt bei Verunreinigungen zu einer erhöhten Wanderosion.

- Hat diese Raumladungszone und das erzeugte elektrische Feld einen Einfluß auf die Werte von Dichte und Temperatur weiter entfernt von der Wand?

Die bisher entwickelten Theorien können unterteilt werden in kinetische Ansätze und Flüssigkeitsnäherungen. Alle diese Modelle sind eindimensional und vernachlässigen den radialen Transport. Diese Näherung ist gerechtfertigt, denn die Geschwindigkeitskomponente parallel zum Feld ist -wie man später sieht- um etwa einen Faktor 1000 höher als der radiale Anteil.

Mit kinetischen Ansätze [46, 129, 49, 50] behandelt man den Bereich vom Rand der Raumladungszone bis zur Wand, denn auf dieser Längenskala kann das Plasma als stoßfrei angenommen werden. Die Flüssigkeitsnäherungen [51, 52, 53, 78, 55] werden angewendet für das Gebiet vom ungestörten Plasmainternen bis zur Raumladungszone, in denen die Stoßbestimmtheit gewährleistet ist.

Zwei weitere Arbeiten [57, 56] verbinden diese beiden Näherungen und fordern die Stetigkeit der Lösung am Übergang vom Plasma zur Raumladungsschicht. Ähnlich geht R. Chodura in einer numerischen Teilchensimulation [47] vor. Insbesondere wird hier zusätzlich der Einfluß des Winkels untersucht, unter dem die Magnetfeldlinien auf die Berandung treffen.

Die Ergebnisse einiger Arbeiten sind zusammengefaßt und verglichen worden in den Arbeiten von Bissel et al. [60], Stangeby [58] und Chodura [59], in der letzten Arbeit speziell unter dem Aspekt eines nicht orthogonalen Targets.

In den Fluidbeschreibungen sind die Profile, von der Symmetrieebene bis zum Beginn der Raumladungszone, zwar von den radialen Flüssen abhängig, aber am Beginn der Zone stellt sich in allen Modellen eine Grenzgeschwindigkeit ein. Die Strömung der Ionen kann an dieser Stelle die Schallgeschwindigkeit

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma k T_i + k T_e}{m_i}} \quad (2.39)$$

nicht überschreiten. Diese Lösung mußte auch erwartet werden, denn für Geschwindigkeiten $u_{\parallel} > c_s$ ist die Quasineutralität des Plasmas nicht aufrechtzuerhalten. Eine Diskrepanz besteht allerdings in der Größe der Schallgeschwindigkeit. Hier kommt es darauf an, ob die Strömung isotherm ($\gamma = 1$) oder adiabatisch ($\gamma = \frac{5}{3}$) behandelt wird. Allein aus dem Fluid-Modell heraus kann über den Wert des Adiabatenkoeffizienten γ keine Entscheidung getroffen werden.

Die kinetischen Modelle unterscheiden sich in den Verteilungsfunktionen, die für die Ionen beim Eintritt in die Raumladungszone vorausgesetzt werden, und in den zusätzlichen Effekten, wie Sekundärelektronenemission und äußere Potentiale, die modelliert werden. All diese Modifikationen haben jedoch keinen Einfluß auf den Ionenstrom beim Eintritt in die Schicht: Die Parallelgeschwindigkeit muß mindestens die isotherme Schallgeschwindigkeit erreichen, um eine elektrostatisch stabile Konfiguration aufzubauen⁵. Stabilitätsuntersuchungen [39] zeigen darüberhinaus, daß für $T_i > T_e$ die Geschwindigkeit um bis zu 25 % höher liegen muß.

⁵Das Potential muß zur Wand hin monoton fallen

Vergleicht man nun die Ergebnisse der Flüssigkeitsbeschreibung mit denen der kinetischen Behandlung, ergeben sich Zusammenhänge zwischen dem Adiabatenkoeffizienten und dem Verhältnis von Ionen- zu Elektronentemperatur am Beginn der Raumladungszone:

- Für die adiabatische Strömung ($\gamma = \frac{5}{3}$) liefert die kinetische Beschreibung nur eine stabile Lösung, wenn $\frac{T_i}{T_e} \approx 4.6$.
- Für die isotherme Strömung ($\gamma = 1$) existiert im kinetischen Modell eine Lösung bei $T_i \approx T_e$.

In Randschichtmessungen läßt sich aber kein Hinweis auf signifikante Unterschiede zwischen Elektronen- und Ionentemperatur finden, wie sie aus der ersten Lösung folgen würde. Daher wird im Allgemeinen die Strömung vor dem Limiter als isotherm angenommen.

Die Bedingung, daß die Parallelgeschwindigkeit am Rand der Raumladungszone der isothermen Schallgeschwindigkeit entsprechen muß, wird als **Bohm-Kriterium** bezeichnet:

$$u_{\parallel} = c_s = \sqrt{\frac{kT_i + kT_e}{m_i}} \quad (2.40)$$

Entsprechend dem Teilchenstrom $\Gamma = n \cdot u_{\parallel}$ liefern alle Modelle Wärmeflüsse in der Form

$$Q_i = \delta_i kT_i \Gamma \quad (2.41)$$

$$Q_e = \delta_e kT_e \Gamma \quad (2.42)$$

Die Koeffizienten δ_i und δ_e weichen in den unterschiedlichen Ansätzen deutlich voneinander ab [60]:

$$\begin{aligned} \delta_i &= 1.5 \rightarrow 2.93 \\ \delta_e &= 4.83 \rightarrow 5.12 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Die starken Schwankungen beim Ionenenergiefluß hängen mit den angenommenen Verteilungsfunktionen für die Ionen beim Eintritt in die Raumladungszone zusammen. Berücksichtigt man nur die Modelle [39, 47, 58], bei denen die Ionentemperatur von Null verschieden und die Verteilungsfunktion so gestaltet ist, daß es keine rückströmenden Ionen gibt (wie das bei einer absorbierenden Wand der Fall sein sollte), so stimmen die Koeffizienten δ_i exakt überein:

$$\delta_i = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \quad (2.44)$$

Die Unterschiede im Vorfaktor für den Elektronenenergiefluß ergeben sich aus den verschiedenen Potentialdifferenzen $\Delta\Phi$, die in der Raumladungszone aufgebaut werden. Allgemein läßt sich schreiben:

$$\delta_e = \frac{2}{1 - \gamma_e} - \frac{e\Delta\Phi}{kT_e} \quad (2.45)$$

(γ_e ist der Sekundärelektronenemissionskoeffizient, d.h. die Anzahl der Elektronen, die beim Auftreffen eines Elektron-Ion-Paares auf die Wand ins Plasma emittiert werden.)

Eine aus Gleichung (2.40) analytisch abgeleitete Beziehung für das Randschichtpotential ist:

$$\frac{e \Delta \Phi}{k T_e} = \ln \left(\sqrt{2\pi \frac{m_e}{m_i} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right)} \cdot \frac{1}{1 - \gamma_e} \right) \quad (2.46)$$

Dabei beschränkt man sich auf eine Ionensorte mit der Ladungszahl $Z = 1$ und nimmt für die Elektronen eine Boltzmannverteilung an.

Man erhält daraus für ein Deuteriumplasma mit $T_i \approx T_e$ und $\gamma_e = 0$ eine relative Potentialdifferenz von

$$\frac{e \Delta \Phi}{k T_e} = -2.8 \quad (2.47)$$

Die entsprechenden Werte für δ_i und δ_e sind:

$$\delta_i \approx 3.5 \quad (2.48)$$

$$\delta_e \approx 4.8 \quad (2.49)$$

Zum Vergleich ergibt sich im rein numerischen Modell von Chodura [59] die Potentialdifferenz bei orthogonalem Target ($\Psi = 0^\circ$) und ohne Sekundärelektronenemission zu:

$$\frac{e \Delta \Phi}{k T_e} \approx -2.3 \quad (2.50)$$

und entsprechend hat man

$$\delta_e \approx 4.3 \quad (2.51)$$

Chodura hat in seinen Arbeiten Berechnungen mit verschiedenen Parametern durchgeführt. Er hat dabei festgestellt [47], daß der Potentialsprung in der Raumladungszone nur schwach von der Stärke des Magnetfeldes abhängt, daß es aber starke Abhängigkeiten von Ψ (Winkel zwischen Magnetfeldrichtung und Oberflächennormaler) und γ_e (Sekundärelektronenemissionskoeffizient) gibt. In einer Randschichtmodellierung, in der es möglich ist, schräge Targetflächen zu behandeln, sollten die damit verbundenen Änderungen des Potentialsprungs und der veränderte Wert des extrahierten Elektronenenergieflusses nach diesem Modell berücksichtigt werden.

Wie aus den Kurven zu entnehmen ist, sind die Rechnungen nur bis zu Winkeln von $\Psi \approx 87^\circ$ durchgeführt worden. Bei streifendem Einfall ($\Psi > 87^\circ$) ist es schwierig, zu einer numerisch stabilen Lösung zu gelangen [61], sodaß es gerechtfertigt erscheint, die Targetflächen in solchen Fällen parallel zu den Feldlinien anzunehmen und nur radialen Transport zuzulassen.

Erwähnt werden soll noch ein Fluidmodell, in dem das Bohm-Kriterium auf Mehrkomponentenplasmen verallgemeinert wird [62]. Die verschiedenen Ionensorten wechselwirken über Coulombstöße miteinander und es resultieren Reibungskräfte, die der Relativgeschwindigkeit zwischen den Spezies proportional sind. Diese Kräfte führen vor der Raumladungszone zu einer langsameren Beschleunigung der leichten und zu einer besseren Beschleunigung der trägen Teilchensorten. Das Ergebnis der Rechnungen ist, daß wenn für das Gesamtsystem nur ein Bohm-Kriterium gefordert wird kann n , während die Einzelkomponenten "ihre" Schallgeschwindigkeit entweder über- (schwere Ionen) oder unterschreiten (leichte Ionen).

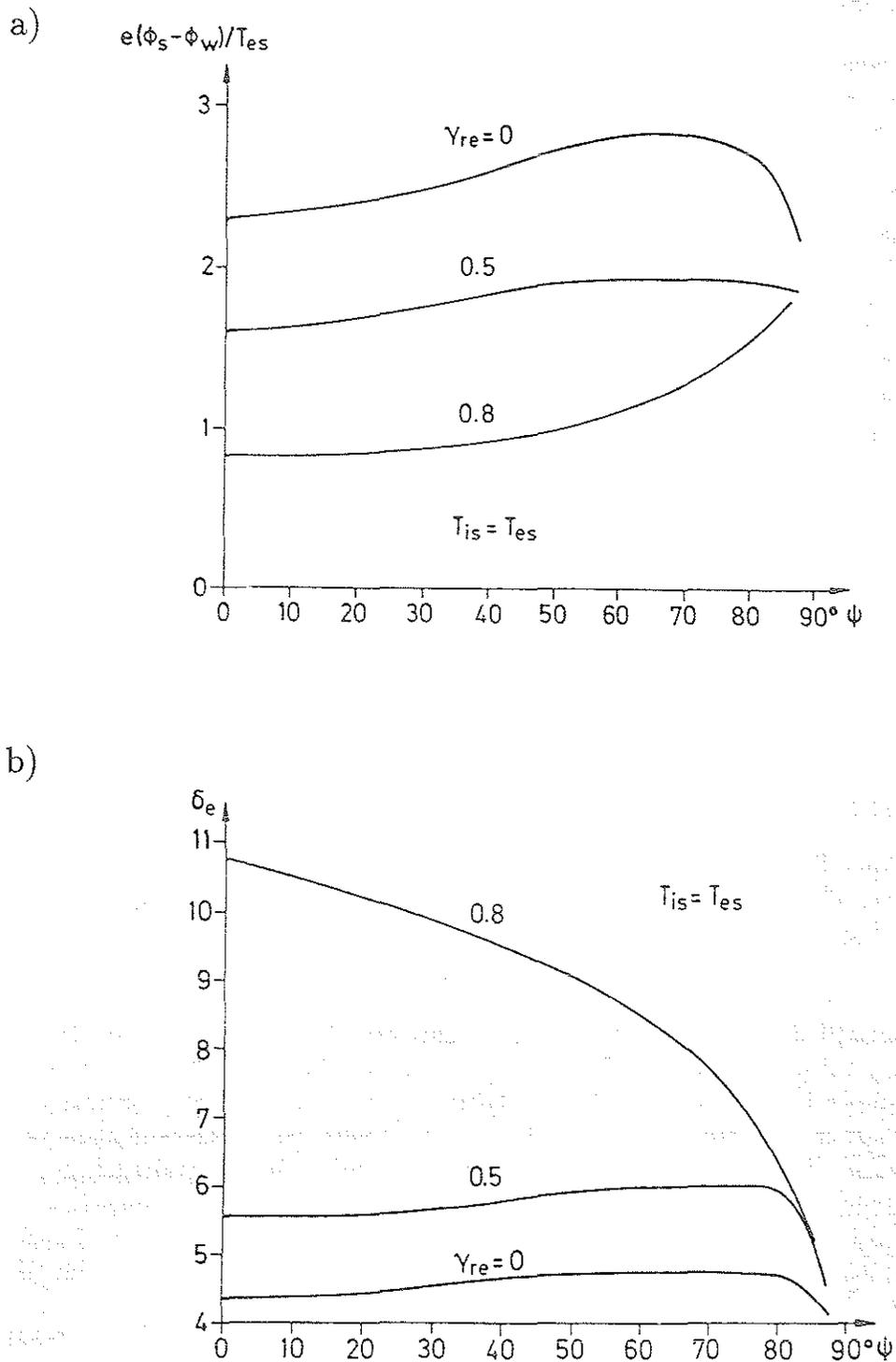


Abbildung 2.5: Potentialabfall (a) und Energietransmissionsfaktor der Elektronen (b) in der Randschicht für verschiedene Auftreffwinkel der Plasmaströmung und unterschiedliche Sekundärelektronenemissionskoeffizienten.

2.3.4 Die Neutralteilchenmodellierung in der Plasmarandschicht

In allen heutigen Tokamakexperimenten und viel mehr noch in den Experimenten der nächsten Generation spielt der Kontakt des Plasmas mit speziell geformten materiellen Strukturen am Plasmarand eine entscheidende Rolle. Wie schon an mehreren Stellen vorher betont, ist eine gewisse Teilchen- und Energieabfuhr zur Aufrechterhaltung des stationären Brennens notwendig, sodaß es auch Wandteile geben muß, die diesen Fluß aus dem Tokamakgefäß ableiten. Dabei werden die Plasmateilchen beim Auftreffen auf die Wand dort zuerst neutralisiert und dann von der Oberfläche reemittiert. Ein gewisser Anteil kann agepumpt werden, ein nicht vernachlässigbarer Anteil aber wird im Plasma durch Stöße wieder ionisiert und dem Teilchenkreislauf erneut zugeführt, dieser Anteil wird "recycled". In Konzepten für zukünftige Experimente werden diese recycelten Teilchen genutzt. Sie sollen bei ihrer Reionisation und allen anderen Prozessen, die damit zusammenhängen, dem Plasma soviel Energie entziehen, daß vor der Wand eine Zone mit dichtem, kaltem Gas entsteht, die einen direkten Kontakt der heißen Plasmateilchen mit der Wand stark reduziert.

Der Effekt, daß die hohe Energie weniger Teilchen auf viele Teilchen mit niedrigerer Energie verteilt wird, hat aber auch schon in heutigen Tokamakexperimenten einen entscheidenden Einfluß auf die Dichte- und Temperaturverteilung in der Nähe materieller Wände. Daher müssen diese Teilchen-, Impuls- und Energiequellen modelliert und in die Randschichtberechnungen eingebunden werden. Man benutzt zur Modellierung analytische, numerische und vor allem statistische Verfahren.

Die analytische Modellierung der Neutralteilchen

Zur analytischen Beschreibung gibt es verschiedene Ansätze. Es wurde ein Modell entwickelt, das vor allem diffusive Prozesse berücksichtigt [34] und Formulierungen, die den konvektiven Transport stärker betonen [37, 39]. Das erste Modell ist nicht genau dokumentiert,⁶ sodaß die Darstellung sich auf die konvektive Formulierung beschränken muß.

Hier wird speziell das einfachste Verfahren beschrieben [37]. Ausgehend von einem Ionenfluß Γ_{ion} auf eine bestimmte Targetfläche, fließt von dieser Fläche aus der recycelte Teil dieses Flusses $\Gamma_0 = R \cdot \Gamma_{ion}$ in Form von neutralen Atomen entlang von Flußflächen mit einer Temperatur von 5 eV , d.h. einer mittleren Geschwindigkeit von $v_{th} = \sqrt{5eV/m_i}$, ins Plasma zurück. Auf ihrem Weg stoßen die Neutralteilchen mit den Plasmateilchen zusammen und werden mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ionisiert. Die Größe der durch diesen Prozeß verursachten Teilchenquelle S_n ist jeweils proportional der Dichte der beiden Stoßpartner und dem Wirkungsquerschnitt für die Ionisierungsreaktion:

$$S_n = n_0 n_e \langle \sigma_{ion} u \rangle \quad (2.52)$$

⁶Eine Schwachstelle des Modells ist sicherlich die Verwendung von Fluidgleichungen, denn die charakteristischen physikalischen und geometrischen Längen sind im Vergleich zu den freien Weglängen der Neutralteilchen so klein, daß nur eine kinetische Beschreibung adäquat wäre.

Die Dichte der Neutralteilchen berechnet sich in jeder Zelle aus dem Gesamtfluß Γ_0 , der die Zelle mit Volumen V_{cell} in der mittleren Zeit τ_0 durchströmt oder anders formuliert, aus der Summe der Flüsse $\Gamma_{0,i}$, die über die Seiten i der Zelle (Fläche $A_{cell,i}$) mit der Geschwindigkeit v_{th} einströmen:

$$n_0 = \frac{\Gamma_0 \tau_0}{V_{cell}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\Gamma_{0,i}}{A_{cell,i} v_{th}} \quad (2.53)$$

Der Wirkungsquerschnitt für die Ionisierung hängt nur von der Elektronentemperatur ab:

$$\langle \sigma_{ion} u \rangle = 3 \cdot 10^{-14} \frac{\left(\frac{T_e}{10\text{eV}}\right)^2}{3 + \left(\frac{T_e}{10\text{eV}}\right)^2} \frac{m^3}{s} \quad (2.54)$$

Bei der Ionisation eines neutralen Atoms verlieren die Plasmaelektronen lokal eine Energie von 25 eV. Dieser Energieverlust setzt sich zusammen aus 13.6 eV für den Ionisationsprozeß und ca. 11 eV, die als Strahlung von angeregten neutralen Wasserstoffatomen am Ort der Ionisation abgegeben werden.

Jedes ionisierte Neutralteilchen hat eine Energie in der Größenordnung des wandnahen Plasmas (5 eV). Im Allgemeinen kühlen sie damit die Plasmaionen weiter weg von der Targetoberfläche.

Der Impuls, der auf das Plasma übertragen wird oder den das Plasma verliert, bestimmt sich aus der Geschwindigkeitsdifferenz zwischen Plasma- und Neutralteilchen. Er wird in diesem einfachen Modell allerdings vernachlässigt.

Damit hat man Ausdrücke für die Quellterme in Impuls-, Ionen- und Elektronenenergiebilanz gefunden:

$$\begin{aligned} S_I &= 0 \\ S_{Ei} &= 5 \text{ eV} \cdot S_n \\ S_{Ee} &= -25 \text{ eV} \cdot S_n \end{aligned} \quad (2.55)$$

Andere Prozesse, wie z.B. Ladungsaustausch oder Emission von Molekülen aus der Wand und die daran gekoppelten Folgereaktionen, werden nicht berücksichtigt, obwohl sie unter bestimmten Bedingungen zentrale Bedeutung haben.

Eine im Grundprinzip ähnliche, aber etwas genauere Beschreibung verwenden H. Gerhauser und H.A. Claaßen [39]. In ihrem Modell ist die Bewegung der Neutralteilchen auch konvektiv und entlang von Feldlinien. Sie berücksichtigen aber zusätzlich eine kleine Radialgeschwindigkeit. Außerdem betrachten sie neben den neutralen Atomen auch Moleküle, die aber aufgrund ihrer geringen Weglänge innerhalb der ersten Zelle vollständig ionisiert werden und nicht weiter zu den Bilanzen beitragen. Für die neutralen Atome werden sowohl Ladungsaustausch- als auch Ionisierungsprozesse berücksichtigt, deren Wirkungsquerschnitte nach analytischen Formeln [63] berechnet werden. Neben den Energieflüssen werden in diesem Modell auch die Impulsflüsse berücksichtigt.

Zwei große Nachteile haben die analytischen Beschreibungen. Zum einen werden die Neutralteilchen sehr gerichtet ins Plasma injiziert, obwohl man eher von einer leicht modifizierten Kosinusverteilung ausgehen sollte, zum zweiten haben die Teilchen nur eine diskrete Energie und den dazugehörigen Impuls, obwohl in der Realität ein breiteres Spektrum erwartet werden kann. Ihr großer Vorteil ist, daß die Quellterme leicht in eine Fluidbeschreibung eingebunden werden können und ihre Adaption an den Plasmazustand instantan erfolgen kann.

Die statistische Modellierung der Neutralteilchen

Je höher das Recycling an den Targetplatten wird und je mehr die Randschichtkonfiguration zu einer Flußerhöhung entlang des Magnetfeldes führt, umso wichtiger wird die Bedeutung nichtlinearer, nichtlokaler Wechselwirkungen zwischen neutralen und geladenen Teilchen. Diese Wechselwirkungen, die empfindlich von den physikalischen Modellen und geometrischen Einzelheiten abhängen, können nur noch mit numerischen Methoden behandelt werden.

Das am häufigsten verwendete und sicherlich auch am weitesten entwickelte Verfahren greift auf die Erfahrungen aus der linearen Neutronen-Transporttheorie zurück. Durch Anpassung und Umstellung der atomaren Daten bei den Wechselwirkungen entstanden Neutralgasmodelle für Plasmaanwendungen, deren Unsicherheiten nicht mehr im Verfahren, sondern in der Genauigkeit der Stoßquerschnitte und Austauschraten von Impuls und Energie mit dem Plasma liegen. Zusätzliche Unsicherheiten schaffen die mikroskopischen Randbedingungen wie Reflexion und Erosion an Oberflächen in Abhängigkeit von Teilchenenergie und Auftreffwinkel.

Die Methoden zur Lösung der Neutralgastransportgleichungen und ihre mathematische Grundlagen sind in Übersichtsartikeln zusammengefaßt [35, 65, 66, 67], und sollen hier nicht näher behandelt werden. Es soll mehr um die physikalischen Effekte und ihre Einbindung in die Strömungssimulation gehen.

Allgemein wird davon ausgegangen, daß die charakteristische Zeitkonstante für den Neutralteilchentransport klein und damit das Plasma auf dieser Zeitskala stationär ist, sodaß eine explizit zeitabhängige Berechnung der Transportgleichungen für die Neutralteilchen überflüssig ist. Außerdem werden durch die Linearisierung der Gleichungen die Wechselwirkungen der Neutralteilchen untereinander vernachlässigt. Während der letzte Punkt in Plasmen mit hohen Neutralteilchendichten berücksichtigt werden kann [68], ist die Zeitunabhängigkeit fest vorgegeben. In den Simulationsrechnungen werden sowohl Atome als auch Moleküle berücksichtigt.

Die Modellierung der Stöße im Plasma Das Monte Carlo Verfahren modelliert die Wechselwirkungen durch eine Kombination von binären Stößen und ungestörtem Flug über eine freie Weglänge. Ausgangspunkt sind die Wechselwirkungspotentiale, aus denen Teilchenablenkung, differentieller Wirkungsquerschnitt und freie Weglänge folgen. Hieraus können dann durch Lösung der kinetischen Transportgleichungen die Verteilungsfunktionen für die Neutralteilchen in Abhängigkeit vom Ort berechnet werden.

Der Quellterm für die Transportgröße A der Spezies p in den Flüssigkeitsgleichungen aufgrund einer Plasma-Neutralteilchen- Wechselwirkung mit dem Wirkungsquerschnitt σ_k berechnet sich aus dem Produkt von Neutralteilchenfluß Γ und Stoßintegral:

$$S_{A_p,k} = \Gamma \cdot \int d^3\vec{v} f(\vec{v}) \cdot \langle \sigma_k(v_{rel} \cdot v_{rel} \cdot \Delta A_p) \rangle \quad (2.56)$$

wobei ΔA_p die Änderung der Größe A_p durch den Stoß beschreibt und $v_{rel} = |\vec{v} - \vec{v}_p|$ die Relativgeschwindigkeit der Stoßpartner angibt. Damit könnten bei bekanntem Wirkungsquerschnitt nach Mittelung über eine Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung grundsätzlich alle Stoßintegrale berechnet werden. In modernen Algorithmen benutzt man allerdings externe Datenbanken und übernimmt von dort die Stoßintegrale für bestimmte Prozesse [70, 71]. Durch Summation über alle Wechselwirkungen "k" ergibt sich dann der nicht-lokale Quellterm in den Fluidgleichungen.

Die wichtigsten Prozesse, die modelliert werden, sind Ladungsaustausch, elastische Plasma-Neutralteilchen Wechselwirkung, Ionisation durch Elektronenstoß und Rekombination. Für Ionisation und Rekombination verwendet man "multi-step" Modelle, die verschiedene schnelle Prozesse in einem effektiven Prozeß zusammenfassen.

Die Modellierung der Stöße an Oberflächen Auch in diesem Modell werden die Einzelprozesse in der Oberfläche vernachlässigt. Es wird lediglich eine effektive Wahrscheinlichkeit angegeben, mit der ein Teilchenfluß bestimmter Energie und mit bestimmtem Einfallswinkel unter verändertem Winkel und mit anderer Energie wieder ins Plasma reemittiert wird. Dabei wird nicht unterschieden zwischen dem Ein- und Austrittsort der Teilchen. Zur Implementierung in das Transportmodell werden die Wahrscheinlichkeitsverteilungen aus externen Datenbanken eingelesen, in denen die Reflexionskoeffizienten in Abhängigkeit von Oberflächenmaterial, Einfallswinkel und -energie tabelliert sind [69]. In diesen Datenbanken kann auch die Rauigkeit der Targetoberfläche berücksichtigt werden, die zu einer signifikanten Erniedrigung der Reflexion vor allem bei kleinen Energien ($E < 10eV$) führt, was natürlich entscheidenden Einfluß auf die mittlere Eindringtiefe der recycelten Neutralteilchen ins Plasma hat [72].

2.3.5 Der derzeitige Status der 2D - Randschichtmodellierung

Ein Überblick über die derzeit verwendeten Modelle zur Beschreibung der Plasmarandschicht geben die Arbeiten von E.L. Vold et al. [34] und D. Reiter [35]. Alle Verfahren lösen die modifizierten Braginskij-Gleichungen mit anomalem, diffusivem Transport in radialer Richtung. Sie unterscheiden sich in der Vollständigkeit der physikalischen Effekte, die berücksichtigt werden und in der Komplexität der Geometrie, die behandelt werden kann. In dieser Arbeit soll nur auf einige Arbeiten exemplarisch eingegangen werden, um unter besonderer Berücksichtigung der verwendeten numerischen Verfahren die Möglichkeiten und Beschränkungen der Methode aufzuzeigen.

Das bekannteste und sicherlich am häufigsten benutzte Programm ist der Braams-Code [37]. Es verwendet zur Lösung ein finite Volumen Verfahren, ist also auf ein rechteckiges Rechenggebiet festgelegt. Durch konforme Transformationen können aber auch noch relativ komplizierte Geometrien auf ein solches Rechteck abgebildet werden, sodaß das Programm in der Lage ist, auch Divertoranordnungen zu simulieren. In der ursprünglichen Version sind die Bilanzgleichungen ohne Berücksichtigung von Strömen und mit dem oben erläuterten analytischen Neutralteilchenmodell implementiert.

Das numerische Verfahren ist dabei so ausgelegt, daß die stationären Bilanzgleichungen iterativ gelöst werden, wobei die einzelnen Iterationen als eine zeitliche Abfolge interpretiert werden können. Zur Lösung wird ein spezielles Schema benutzt, um Konvektion und Diffusion gleichermaßen gut zu modellieren. Die resultierenden neuen Werte der Variablen erfüllen allerdings nur die Einzelbilanzen. Daher werden unter Beachtung der Impulsbilanz die Dichte, die Geschwindigkeit und der Druck so verändert, daß die Kontinuitätsgleichung erfüllt und die Energiegleichungen möglichst wenig verändert werden. Mit den modifizierten Werten wird der Algorithmus wiederholt. Nach einer gewissen Anzahl von Iterationen sollten alle Gleichungen konsistent erfüllt sein und die Abweichungen von einer zur nächsten Iteration so klein werden, daß man die gefundenen Variablen als stationäre Lösung des Problems definieren kann.

Diese erste Version des Programms wurde in den nächsten Jahren sukzessive erweitert und verbessert. Ein wichtiger Schritt war die Implementierung des stochastischen Neutralgasmodells EIRENE. Ein Lauf dieses Monte-Carlo-Programms ist jedoch zu zeitaufwendig, um es nach jedem Iterationsschritt aufzurufen und die Quellterme neu zu bestimmen. Daher werden die Quellen einmal mit dem vollständigen Programm berechnet und dann nach jeder Iteration nur durch bestimmte Skalierungen an die veränderte Plasmalösung angepaßt. Dieser "short cycle" wird angewandt, bis die Plasmalösung sich so stark geändert hat, daß ein neuer kompletter EIRENE-Lauf durchgeführt werden muß. Mit dem Programmsystem BRAAMS-EIRENE wurden nach dem erläuterten Schema Berechnungen der Randschichtkonfigurationen von TEXTOR, ASDEX, ASDEX-UPGRADE, JET und Studien für ITER durchgeführt [73, 78, 35].

In den Simulationsrechnungen zu ASDEX-UPGRADE [78] wurde zum ersten Mal versucht, die Neigung der Targetplatten zum Magnetfeld zu berücksichtigen. Dazu wurde in der Nähe der Platten das orthogonale Netz verzerrt. Da das Lösungsverfahren aber

nur rechtwinklige Gitterzellen behandeln kann, sind die auf dieser Geometrie berechneten radialen Flüsse mit Fehlern behaftet. Folgt man der Argumentation der Autoren, so sind die Fehler jedoch vernachlässigbar, da der Transport in Targetnähe durch das Neutralgas dominiert wird; und das Neutralgas wird durch EIRENE korrekt behandelt. Ein anderer Ansatz zur Modellierung realistischer Geometrien wurde von M.W. Wuttke [75] implementiert. Darin werden die Zellen nicht verändert, sondern das Gitter wird größer gewählt als die Geometrie und Zellen die über das Modellierungsgebiet hinausreichen werden in der Rechnung "stillgelegt" und die Randbedingungen in den neuen Randzellen definiert. Diese Methode ist sicherlich eine gute Alternative zur Gitterverzerrung. Bisher wurde sie jedoch nur auf eine TEXTOR-Konfiguration angewendet.

Parallel zu den geometrischen Erweiterungen wurde das physikalische Modell ergänzt. In der Ursprungsversion wurden die Strömungsgeschwindigkeiten von Elektronen und Ionen als gleich angenommen. M. Baelmans implementierte eine zusätzliche Elektronenimpulsbilanz, sodaß jetzt auch unterschiedliche Strömungsgeschwindigkeiten und daraus entstehende elektrische Ströme und Potentiale berechnet werden können [64].

Bisher wurden diese Effekte nur von H. Gerhauser [39] selbstkonsistent berücksichtigt.⁷ Da dessen Programm aber speziell für die Randschicht von TEXTOR entwickelt wurde und geometrisch nicht flexibel konzipiert ist, sind die Anwendungen auf Limiterplasmen mit kreisförmigem Querschnitt beschränkt.

2.3.6 Entwicklung von Finite-Elemente-Verfahren

Seit einigen Jahren wird neben den finite Differenzen/ Volumen Verfahren in einigen Gruppen an der Entwicklung von Finite-Elemente Verfahren gearbeitet. [76, 77, 35] Dieses Verfahren verwendet kein regelmäßig durchnummeriertes $n \times m$ Gitter, sondern ein unstrukturiertes Netz mit folgenden Vorteilen:

- Die Abbildung des Rechengebietes auf ein Rechtecknetz entfällt, sodaß die Bestimmung von metrischen Koeffizienten für die Bilanzgleichungen überflüssig wird.
- Ein nicht einfach zusammenhängendes Gebiet, wie es die Randschicht im Allgemeinen ist, muß nicht mehr "auseinandergerissen" werden, um daraus eine einfach zusammenhängende Geometrie zu erzeugen. Dementsprechend entfällt auch die Definition von zusätzlichen Randbedingungen an den künstlichen Berandungen.
- Eine Verfeinerung des Berechnungsgitters in einer Richtung muß nicht mehr über die ganze Länge der dazu senkrechten Koordinate beibehalten werden, sondern kann lokal an das physikalische Problem angepaßt werden.
- Man ist durch die Verwendung von Dreiecken statt Rechtecken nicht mehr an orthogonale Ränder gebunden, sondern kann Berechnungsgitter für beliebig geformte Berandungen erzeugen.

⁷Im Programm von E.L. Vold [34] gehen die Ströme und Potentiale nicht direkt in die Rechnung ein, sondern werden erst im Nachhinein bestimmt

In allen Ansätzen wird das gleiche Diskretisierungsprinzip (Taylor-Galerkin mit linearen Interpolationsfunktionen) verwendet, so wie es in dieser Arbeit beschrieben ist. (→ *Methode der gewichteten Residuen*)

Ein weitergehender Vergleich ist allerdings kaum möglich, da alle drei Verfahren noch in der Testphase sind. Es soll aber auf die unterschiedlichen Schwerpunkte hingewiesen werden, auf die sich die Arbeiten konzentrieren.

R. Zanino [76] arbeitet vor allem an impliziten Lösungsalgorithmen und an der Optimierung der numerischen Behandlung der Bilanzgleichungen. Er verwendet die Gleichungen der ersten Version des BRAAMS-Codes und ein einfaches analytisches Neutralteilchenmodell. Vergleichsrechnungen mit dem BRAAMS-Code zeigen gute Übereinstimmung der beiden Verfahren [96]. Allerdings wurden diese Rechnungen bisher nur auf einfachen, strukturierten Gittern durchgeführt, sodaß die speziellen Vorteile des Finite-Elemente-Verfahrens nicht genutzt wurden.

Die Arbeiten in der Gruppe um R. Marchand wurden erst im letzten Jahr begonnen. Sie beziehen sich im Augenblick auf grundsätzliche Fragestellungen, die vor allem die Form des Gitters und die damit verbundene Wahl des Diskretisierungsprinzips betreffen. Neben Dreiecken mit geraden Seiten sollen Dreiecke und Vierecke mit gekrümmten Seiten untersucht werden.

In der vorliegenden Arbeit wurde großer Wert darauf gelegt, die Vorteile der flexibleren Gittereinteilung auszunutzen. Daher wurde ein Basisprogramm von der Technischen Hochschule Aachen übernommen, bei dem eine lösungsabhängige Netzverfeinerung möglich ist. Damit ist es gelungen, gezielt an den physikalisch interessanten Stellen eine hohe Netzdichte zu erzeugen. Neben der Verwendung eines analytischen Neutralteilchenmodells wurde auch eine Schnittstelle zur Ankopplung des FEM-Programms an den Neutralgascode EIRENE geschaffen. Es bleibt eine Aufgabe für die nächste Zeit, den bisher vollständig explizit arbeitenden Algorithmus in gewissen Teilen implizit umzuformulieren. Damit müßte es nach den bisherigen Erfahrungen und auch nach den Berechnungen für die charakteristischen Transportzeiten möglich sein, die Anzahl der Iterationen bis zur konvergenten Lösung um etwa einen Faktor hundert zu senken.

Aufgrund der mehr oder weniger zufälligen Arbeitsteilung, die sich bei der Entwicklung von Finite-Elemente-Verfahren ergeben hat, würde sich eine intensive Zusammenarbeit auf diesem Gebiet in den nächsten Jahren anbieten. Sie wird auch sicher notwendig sein, soll in absehbarer Zeit ein Programm zur Verfügung stehen, daß den bisher verwendeten Codes vom physikalischen Inhalt her vergleichbar ist.

Kapitel 3

Die Fluidgleichungen für Plasmaströmungen

In diesem Kapitel werden die Flüssigkeitsgleichungen für ein Zweikomponentenplasma hergeleitet, das in einer toroidalen Konfiguration durch Magnetfelder eingeschlossen ist. Speziell wird es um das Verhalten des Plasmas in der Randschicht gehen, denn die abgeleiteten Gleichungen bilden die theoretische Grundlage für ein Programm zur Beschreibung des Transports in dieser Zone.

Im ersten Abschnitt werden die Voraussetzungen zur Anwendung eines Fluid-Modells erläutert und diskutiert. In den folgenden Abschnitten werden die Flüssigkeitsgleichungen hergeleitet. Ausgangspunkt ist eine allgemeine Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen, die dann auf ein Zweikomponentenplasma angewandt wird. Danach werden in diesen Gleichungen die speziellen geometrischen und physikalischen Eigenschaften in der Tokamakrandschicht berücksichtigt und Vereinfachungen gemacht, die die numerische Behandlung erleichtern. Aus den so entstandenen Beziehungen werden charakteristische Prozesse extrahiert und ihr Einfluß auf das Strömungsverhalten in der Randschicht diskutiert. Am Schluß soll ein Abschnitt stehen, der helfen soll, die "Flüssigkeit" Plasma relativ zu anderen bekannten Fluiden einordnen zu können.

3.1 Voraussetzungen des Fluidmodells

Will man ein Modell zur Beschreibung eines bestimmten Problems anwenden, so ist es zuerst einmal notwendig, die allgemeinen Voraussetzungen des Modells zu diskutieren und dann zu überprüfen, ob diese Voraussetzungen in dem speziellen Problem erfüllt sind.

Eine sinnvolle Flüssigkeitsbeschreibung ist an die Bedingung geknüpft, daß die Einzelteilchen der Flüssigkeit häufig und intensiv miteinander wechselwirken, sodaß der Informationsaustausch auf einer Wegstrecke stattfindet, die wesentlich kleiner ist als die charakteristischen Abfallängen der integralen Größen Dichte, Impuls und Energie.

Um zu einer quantitativen Formulierung dieser Bedingung zu gelangen, müssen zwei spezielle Eigenschaften der Plasmaströmung unter Einfluß eines Magnetfeldes benutzt werden:

- Die Bewegung der Plasmateilchen ist stark anisotrop. Die typische Weglänge für den Informationsaustausch parallel zum Magnetfeld errechnet sich aus dem Produkt der Einzelteilchengeschwindigkeit v_{th} und der mittleren Stoßzeit τ . Senkrecht zum Magnetfeld ist die freie Weglänge von der Größenordnung des Gyroradius r_G .
- Die beiden Teilchensorten (Elektronen, Ionen) können getrennt voneinander behandelt werden, denn Elektronen- und Ionengas erreichen intern in sehr kurzer Zeit einen Gleichgewichtszustand, während es etwa um einen Faktor $\frac{m_{ion}}{m_{el}}$ länger dauert, bis sich zwischen den beiden Gasen Gleichgewicht einstellt.
(\rightarrow *Charakteristiken des Plasmatransports in der Randschicht*)

Mit diesen Bedingungen lassen sich folgende Ungleichungen formulieren:
(Für Ψ sind die globalen Plasmagrößen Dichte, Impuls oder Energie einzusetzen.)

- Für die Ionenbewegung parallel zum Magnetfeld:

$$\left(\frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\parallel}} \right)^{-1} \gg v_{th}^{ion} \cdot \tau_{ii} \quad (3.1)$$

- Für die Ionenbewegung senkrecht zum Magnetfeld:

$$\left(\frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\perp}} \right)^{-1} \gg r_G^{ion} \quad (3.2)$$

- Für die Elektronenbewegung parallel zum Magnetfeld:

$$\left(\frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\parallel}} \right)^{-1} \gg v_{th}^{el} \cdot \tau_{ee} \quad (3.3)$$

- Für die Elektronenbewegung senkrecht zum Magnetfeld:

$$\left(\frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\perp}} \right)^{-1} \gg r_G^{el} \quad (3.4)$$

Anzumerken ist, daß aufgrund der Quasineutralität die Dichte für Elektronen und Ionen identisch ist, der Impuls der Elektronen wegen ihrer kleinen Masse in keine Fluidgleichung eingeht und daß die Energie der Elektronen aus demselben Grund nur aus dem thermischen Anteil besteht.

Die thermische Geschwindigkeit der Spezies α berechnet sich nach der Formel:

$$v_{th}^{\alpha} = \sqrt{\frac{kT_{\alpha}}{m_{\alpha}}} \quad (3.5)$$

Die mittleren Stoßzeiten stimmen bis auf Faktoren in der Größenordnung eins mit den Relaxationszeiten für Impuls- und Energieaustausch überein [79]:

$$\tau_{ii} = 2.09 \cdot 10^{13} \frac{T_i^{3/2}}{n\lambda} \sqrt{\mu} \text{ sec} \quad (3.6)$$

$$\tau_{ee} = 3.44 \cdot 10^{11} \frac{T_e^{3/2}}{n\lambda} \text{ sec} \quad (3.7)$$

In diesen Gleichungen sind die Temperaturen in eV und die Dichte in $\frac{1}{m^3}$ anzugeben. λ ist der Coulomblogarithmus und μ ist das Verhältnis von Ionenmasse zu Protonenmasse. Der Gyroradius für Spezies α beträgt:

$$r_G^\alpha = \frac{m_\alpha v_{th}^\alpha}{eB} \quad (3.8)$$

In der TEXTOR-Randschicht hat man typische Werte von

$$n \approx 10^{18} m^{-3},$$

$$T_{el} \approx T_{ion} \approx 20 \text{ eV},$$

$$\lambda \approx 10 \text{ und}$$

$$B \approx 2 \text{ Tesla}.$$

Für Deuterium-Ionen ergibt sich daraus:

$$v_{th}^{ion} \approx 30000 \frac{m}{s} \quad (3.9)$$

$$\tau_{ii} \approx 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad (3.10)$$

$$r_G^{ion} \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (3.11)$$

und für die Elektronen:

$$v_{th}^{el} \approx 2 \cdot 10^6 \frac{m}{s} \quad (3.12)$$

$$\tau_{ee} \approx 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ s} \quad (3.13)$$

$$r_G^{el} \approx 5 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad (3.14)$$

Das bedeutet, daß die Abfallängen von Dichte und Temperatur für Ionen und Elektronen in paralleler Richtung wesentlich größer sein müssen als:

$$\left(\frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x_{||}} \right)^{-1} \gg v_{th}^{ion} \cdot \tau_{ii} \approx v_{th}^{el} \cdot \tau_{ee} \approx (5 - 7) \text{ m} \quad (3.15)$$

In der radialen Richtung ist das Verhältnis von Dichteabfall zu Ionengyroradius entscheidend, bzw. das Verhältnis des Temperaturabfalls jeweils zum Gyroradius der entsprechenden Spezies.

Da man in TEXTOR radiale Profile mit einer typischen Abfallänge von ca. 1 cm für die Dichte und ca. 3 cm für die Temperatur mißt, darf das Fluidmodell in dieser Koordinate sicher angewendet werden.

Für die Richtung parallel zum Feld ist die Diskussion schwieriger. Durch das Einbringen eines Limiters wird aufgrund des Bohm-Kriteriums eine Strömung zum Limiter hin induziert. In einer einfachen Näherung kann man die Annahme machen, daß diese Strömung sich symmetrisch teilt, sodaß das Plasma von einer Geschwindigkeit Null innerhalb einer halben Verbindungslänge auf Schallgeschwindigkeit beschleunigt wird. Nimmt man weiterhin an, daß dissipative Effekte einen vernachlässigbaren Einfluß auf die Strömung haben (Euler-Strömung), so stellen sich für die Dichte und Temperatur parabolische Profile mit einer typischen Abfalllänge von etwa einem sechstel der Verbindungslänge L_{\parallel} ein.

In der TEXTOR-Randschicht bedeutet das:

$$\left(\frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\parallel}} \right)^{-1} \approx \frac{1}{6} L_{\parallel} \sim \frac{2\pi a}{6} \sqrt{\left(1 + \frac{B_{tor}}{B_{pol}} \right)^2} \sim 5 \text{ m} \quad (3.16)$$

In dieser Abschätzung sind die Voraussetzungen für eine Fluidbeschreibung nur noch marginal erfüllt und es wurden sogar Effekte vernachlässigt, die zu steileren Profilen, d.h. kürzeren Abfalllängen, vor allem in der Nähe des Limiters, führen können. Daher geht man bei der Rechnung am besten so vor, daß man das Flüssigkeitsmodell erst einmal anwendet und von der gefundenen Lösung ausgehend a posteriori die Berechtigung der Modellannahmen überprüft.

Zum Schluß soll noch angemerkt werden, daß Fluidbeschreibungen oft auch dann noch zu sinnvollen Ergebnissen führen können, wenn die oben geforderten Bedingungen nicht mehr oder nur marginal erfüllt sind. Selbst in nahezu stoßfreien Gebieten wurde eine befriedigende Übereinstimmung mit kinetischen Berechnungen gefunden. [80]

3.2 Die Fluidgleichungen in konservativer Form

Das Strömungsverhalten des Plasmas in der Tokamakrandschicht wird bestimmt durch Zu- und Abströmen von Teilchen und Energie sowohl an den Berandungen als auch im Inneren des Gebietes (Reionisation von Neutralteilchen). Eine solche Anordnung kann durch die verallgemeinerten Navier-Stokes-Gleichungen in einem thermodynamisch offenen System beschrieben werden. Sie lassen sich in einfacher Weise in vektorieller Schreibweise formulieren:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{U}) = \vec{S} \quad (3.17)$$

Die Komponenten von \vec{U} sind die bei der Integration der Boltzmann-Gleichung entstehenden Momente: Teilchendichte, Flußdichte (Vektor) und Energiedichte.

Im Tensor $\vec{F}(\vec{U})$ beschreibt das Element F_{ij} den Fluß in Richtung der Koordinate x_i in der Gleichung für U_j . Die Tensorkomponenten sind von den Variablen abhängig. Diese Abhängigkeit läßt sich für jedes Tensorelement allgemein darstellen als eine Summe von zwei Termen:

$$F_{ij} = v_i \cdot U_j - D_{ij} \quad (3.18)$$

Der erste Teil ist der **konvektive Fluß** der Variable U_j , der durch die Geschwindigkeit v_i in Richtung x_i transportiert wird. Im zweiten Teil werden alle Verlustprozesse für die Variable U_j in einem **dissipativen Fluß** zusammengefaßt.

Auf der rechten Seite von Gleichung (3.17) stehen die äußeren Quellen S_j , die zu einer Veränderung der Variablen U_j führen.

Diese Schreibweise wird als **konservative Form der Navier-Stokes-Gleichungen** bezeichnet. Faßt man nämlich die partielle Zeitableitung mit den räumlichen Ableitungen der konvektiven Flüsse zusammen, ergibt sich der Operator der totalen Zeitableitung:

$$\frac{d \dots}{dt} = \frac{\partial \dots}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \dots) \quad (3.19)$$

und man erkennt, daß die Variablen in der Strömung zeitlich konstant bleiben, bis auf den Anteil, der durch Dissipation verloren geht oder durch Quellen erzeugt oder vernichtet wird:

$$\frac{d \vec{U}}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} + \vec{S} \quad (3.20)$$

Daher ist es von Vorteil, die Gleichungen numerisch in ähnlicher Form zu behandeln: Wenn die Dissipation und die äußeren Quellen relativ klein sind, kann die zeitliche Konstanz der Variablen getestet werden, im anderen Fall können Aussagen darüber gemacht werden, welcher Anteil transportiert, dissipiert, erzeugt oder vernichtet wird. Damit kann gleichzeitig die Frage beantwortet werden, welches der dominierende Prozeß in einem bestimmten Teil des Rechengebietes ist.

3.3 Die Fluidgleichungen für ein Plasma

Das in diesen Abschnitten formulierte zweidimensionale Plasmarandschichtmodell basiert, wie fast alle Flüssigkeitsnäherungen, auf den klassischen, von Braginskij hergeleiteten Transportgleichungen für Elektronen und eine Ionensorte [36]. Erweitert wurden diese Gleichungen lediglich durch die Einführung von Quelltermen, die durch die Wechselwirkung des Plasmas mit Neutralteilchen entstehen. Es wird bei der Herleitung auf eine Verallgemeinerung für mehrere Ionenspezies verzichtet, vielmehr wird der Schwerpunkt der Betrachtung auf die Transformation der Gleichungen in eine toroidale Geometrie gelegt.

Die Bilanzgleichungen für Dichte, Teilchenfluß und Energiedichte basieren auf der Annahme, das Zweikomponentensystem verhalte sich quasineutral, d.h. zu jedem Zeitpunkt sollten die Ladungsdichten von Elektronen und Ionen in einem für die Fluidnäherung interessanten Raumgebiet identisch sein.

Das ist sicher erfüllt, denn die für die Abschirmung von elektrischen Feldern im Plasma charakteristische Debye-Länge λ_D ist mit

$$\lambda_D \approx 7500 \sqrt{\frac{T(\text{eV})}{n(\text{m}^{-3})}} m \approx 30 \mu\text{m} \quad (3.21)$$

sehr viel kleiner sein als die typischen Abfallängen von Dichte und Temperatur.

(→ *Voraussetzungen des Fluidmodells*)

Das Koordinatensystem, in dem Braginskij sein Flüssigkeitsmodell entwickelt hat und in dem auch alle Transportkoeffizienten formuliert sind, ist das Eigensystem der Plasmateilchen: Eine Koordinate ist parallel zum Feld gewählt und die anderen beiden Richtungen senkrecht zum Feld orientiert. In einem Tokamak laufen die Magnetfeldlinien durch die Überlagerung von poloidalem und toroidalem Feld helikal verschraubt um die Torusachse um. Daher muß bei der Anwendung der Flüssigkeitsgleichungen auf eine toroidale Konfiguration besonderer Wert auf die Berechnung der Operatoren in diesem krummlinigen Koordinatensystem gelegt werden. Es soll dabei so vorgegangen werden, daß die Fluid-Gleichungen zuerst in einer allgemeinen Vektordarstellung formuliert werden, wobei aber implizit vorausgesetzt ist, daß eine Koordinate parallel zum Magnetfeld orientiert ist, um für die stark anisotropen Transportkoeffizienten die in [36] abgeleiteten Größen benutzen zu können.

In dieser Weise sollen die jetzt folgenden, allgemein formulierten Flüssigkeitsgleichungen verstanden werden:

Die Kontinuitätsgleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} n_i + \vec{\nabla} \cdot (n_i \vec{V}_i) = S_{n_i} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n_e + \vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{V}_e) = S_{n_e} \quad (3.23)$$

Aufgrund der Quasineutralität des Plasmas sind die Elektronen- und die Ionendichte identisch. Beide Gleichungen enthalten auf der rechten Seite eine Teilchenquelle S_{n_i}, S_{n_e} , die die im Plasma reionisierten Neutralteilchen beschreibt. Auch diese Quellterme sind identisch, wenn man von einfach geladenen Ionen ausgeht und keine Sekundärelektronenemission an der Wand berücksichtigt.

Subtrahiert man die Gleichungen voneinander unter Ausnutzung der Quasineutralität, erhält man eine Bilanzgleichung für elektrische Stromdichten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (3.24)$$

Wollte man mehrere Ionensorten berücksichtigen, müßte für jede Spezies, d.h. für alle Ladungszustände jeder Ionensorte jeweils eine Kontinuitätsgleichung erfüllt werden. Die Quasineutralität kann dann genutzt werden, um die Elektronenbilanz als Summe der Einzelbilanzen der Ionen zu berechnen.

Die Impulsbilanz für die Ionen:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_i n_i \vec{v}_i) + \vec{\nabla} \cdot (m_i n_i \vec{v}_i \vec{v}_i) = -\vec{\nabla} p_i - \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_i + Z_i e n_i (\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) + \vec{R}_i + \vec{S}_{m_i \vec{v}_i} \quad (3.25)$$

Die Ionen werden durch Druckgradienten, Zähigkeitseffekte, elektromagnetische Felder und Reibung beschleunigt. Die Reibung wirkt zwischen Elektronen und Ionen und in Mehrkomponentenplasmen auch zwischen verschiedenen Ionensorten. Sie ergibt sich durch unterschiedliche Strömungsgeschwindigkeiten, deren Ursache die verschiedenen Massen der Teilchen sind.

Eine gesonderte Betrachtung verdient der Viskositätstensor. In den Gleichungen von Braginskij besteht jedes Tensorelement aus mehreren Termen mit unterschiedlichen Viskositätskoeffizienten η_k , je nach Richtung zum Magnetfeld. Diese Koeffizienten sind geordnet nach Potenzen von $(\omega_i \tau_{ii})$, wobei ω_i die Winkelfrequenz der Gyration ist und τ_{ii} die mittlere Stoßzeit.¹ Der Wert dieser dimensionslosen Größe hängt vom Magnetfeld, der Dichte und der Temperatur im Plasma ab:

$$\omega_i \tau_{ii} = 2 \cdot 10^{21} \frac{B(\text{Tesla}) \cdot (T_i(\text{eV}))^{3/2}}{\lambda n(1/m^3) \sqrt{\mu}} \quad (3.26)$$

Im Allgemeinen ist er in allen Randschichtplasmen in der Größenordnung von tausend oder höher.

Für die Viskositätskoeffizienten gilt:

$$\eta_0 \sim (\omega_i \tau_{ii}) \cdot \eta_3 \sim (\omega_i \tau_{ii}) \cdot \eta_4 \sim (\omega_i \tau_{ii})^2 \cdot \eta_1 \sim (\omega_i \tau_{ii})^2 \cdot \eta_2 \quad (3.27)$$

Daher werden in allen Randschichtberechnungen, aufgrund der Tatsache, daß $\eta_0 \gg \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ nur noch Viskositätseffekte in η_0 berücksichtigt. Diese Annahme erscheint plausibel, berücksichtigt aber nicht, daß die Geschwindigkeitsgradienten, mit denen die Koeffizienten multipliziert werden, in verschiedene Richtungen so stark unterschiedlich sein können, daß auch Viskositätseffekte höherer Ordnung eine Rolle spielen. Setzt man beispielsweise in grober Näherung die parallelen und radialen Abfallängen in Relation zueinander, so beträgt das Verhältnis ca. 1500 und ein Vergleich zeigt, daß in diesem Fall die Viskosität parallel zum Feld annähernd gleich groß ist wie die senkrecht zum Feld.

Diese Überlegungen werden allerdings sinnlos, wenn ad hoc senkrecht zum Feld eine anomale Viskosität angenommen wird, denn dann ist die konsistent abgeleitete Transporttheorie nicht mehr gültig und der daraus berechnete Viskositätstensors muß auch nicht zwingend übernommen werden.

Die Impulsbilanzen von Elektronen und Ionen unterscheiden sich dadurch, daß die Trägheit der Elektronen vernachlässigt wird und sich daher ein Kraftgleichgewicht instantan ohne Austausch von Flüssen einstellen kann.

¹ Teilt man diese Zahl durch 2π , erhält man die Anzahl der Gyrationen zwischen zwei Stößen.

Die Impulsbilanz für die Elektronen:

$$-\vec{\nabla} p_e - en_e(\vec{E} + \vec{V}_e \times \vec{B}) + \vec{R}_e = 0 \quad (3.28)$$

Im stationären Zustand müssen wegen der Impulserhaltung die von Elektronen auf die Ionen ausgeübten Kräfte und die Kraft der Ionen auf die Elektronen entgegengesetzt gleich sein. Zu diesen "inneren" Kräften zählen die elektromagnetischen Kräfte und die Reibungskräfte, die sich in verschiedene Teilkräfte aufspalten lassen:

- Verluste durch "Ohmsche-Heizung", die aber aufgrund der sehr hohen Leitfähigkeiten sowohl parallel zum Feld σ_{\parallel} als auch senkrecht zum Feld $\sigma_{\perp} = 0.5 \cdot \sigma_{\parallel}$ nur gering sind.
- Verluste durch verschieden starke Ablenkung von Elektronen bei Temperaturgradienten senkrecht zum Magnetfeld. Dieser Effekt ist relativ klein, da der zugehörige Transportkoeffizient um einen Faktor $\omega\tau \geq 1000$ kleiner ist als der für die Ohmschen Verluste.
- Verluste durch Reibung der Elektronen aufgrund unterschiedlicher Temperatur und damit unterschiedlicher thermischer Geschwindigkeit entlang von Feldlinien. Für gleiche Gradientenlängen von Geschwindigkeit und Temperatur ist dieser Verlustterm um ca. einen Faktor 2000 größer als die Ohmsche Heizung.

Diese drei Terme lauten, in dieser Reihenfolge:

$$\vec{R}_e = -\vec{R}_i = en \left(\frac{\vec{j}_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}} + \frac{\vec{j}_{\perp}}{\sigma_{\perp}} \right) - \frac{3}{2} \frac{en^2}{\sigma_{\perp} B^2} \vec{B} \times \vec{\nabla} T_e - 0.71 n_e \vec{\nabla}_{\parallel} T_e \quad (3.29)$$

Neben den hier erwähnten Verlusten, treten weitere Effekte auf, deren Wirkung allerdings vernachlässigbar klein ist. Eine vollständige und sehr anschauliche Erklärung der Prozesse findet sich in einer Monographie [81] über das Verhalten des Elektronengas im Festkörper unter Einfluß eines magnetischen Feldes.

Durch Addition der Bilanzgleichungen für Ionen (3.25) und Elektronen (3.28) erhält man die Gesamtimpulsbilanz des Plasmas:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_i n_i \vec{V}_i) + \vec{\nabla} \cdot (m_i n_i \vec{V}_i \vec{V}_i) = -\vec{\nabla} p - \sum_i \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_i + \vec{j} \times \vec{B} + \vec{S}_{m_i \vec{v}_i} \quad (3.30)$$

wobei der Druck p sich zusammensetzt aus den Einzeldrücken der Komponenten p_i und p_e und in den Term $\vec{j} \times \vec{B}$ alle Plasmadriften eingehen. Auch die Impulsbilanzen lassen sich durch Einführung einer effektiven Kernladungszahl auf ein Mehrkomponentenplasma erweitern [37].

Die Energiebilanz für die Ionen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} n_i T_i + \frac{m_i n_i}{2} \vec{V}_i^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{V}_i \left(\frac{3}{2} n_i T_i + \frac{m_i n_i}{2} \vec{V}_i^2 \right) \right] = \\ - \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{V}_i \cdot p_i + \vec{V}_i \cdot \vec{\Pi}_i + \vec{q}_i \right] + \left(\epsilon n_i \vec{E} - \vec{R} \right) \cdot \vec{V}_i - \vec{Q}_{ei} + \vec{S}_E^i \end{aligned} \quad (3.31)$$

Die Ionenenergiedichte setzt sich zusammen aus der Dichte der thermischen Energie und der kinetischen Energiedichte. Die Wärmekapazität (Vorfaktor bei der thermischen Energie) wird wie für ein Gas mit 3 Freiheitsgraden zu $\frac{3}{2}$ angenommen, obwohl das Plasma sich lediglich parallel zum Magnetfeld frei bewegen kann, während der Energieaustausch senkrecht zum Feld stark eingeschränkt ist. Eine Alternative wäre die Annahme von zwei verschiedenen Temperaturen T_{\parallel} und T_{\perp} (parallel und senkrecht zum Magnetfeld) mit entsprechenden Wärmekapazitäten und einer Kopplung zwischen diesen beiden Temperaturen über Transportprozesse [82]. Bisher wird jedoch in allen Simulationsrechnungen mit nur einer Temperatur gerechnet, weil einerseits der radiale Transportprozess noch nicht verstanden ist und andererseits auch die mathematische Behandlung durch diese Annahme erheblich vereinfacht wird.

Der Transport der Energie geschieht konvektiv, konduktiv und über Austausch zwischen verschiedenen Spezies. Die Konduktion beschreibt die Verlustprozesse innerhalb der Spezies: Wärmeleitung und Viskositätseffekte. Hierbei setzt sich der Wärmeleitungsvektor aus Anteilen zusammen, in die der Temperaturgradient parallel zum Feld und in den beiden Richtungen senkrecht zum Feld eingeht:

$$\vec{q}_i = -\kappa_{\parallel}^i \nabla_{\parallel} T_i - \kappa_{\perp}^i \nabla_{\perp} T_i - \kappa_{\wedge}^i \frac{\vec{B}}{B} \times \vec{\nabla} T_i \quad (3.32)$$

Energie wird mit den Elektronen über Reibung, elektrische Felder und durch Temperaturengleich ausgetauscht, mit den Neutralteilchen durch Wechselwirkungen wie Ladungsaustausch, Anregungsvorgänge und Ionisation.

Die Energiebilanz für die Elektronen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} n_e T_e \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{V}_e \frac{3}{2} n_e T_e \right) = - \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{V}_e p_e + \vec{q}_e \right] - \epsilon n_e \vec{E} \cdot \vec{V}_e + \vec{R} \cdot \vec{V}_e + \vec{Q}_{ei} + \vec{S}_E^e \quad (3.33)$$

Die Energiedichte besteht wegen der vernachlässigbar kleinen Masse der Elektronen nur aus dem Anteil der thermischen Energie. Die konduktiv transportierte Energiedichte wird bestimmt durch Temperaturgradienten und die dadurch hervorgerufenen Flüsse sowie durch Ströme parallel und senkrecht zum Feld:

$$\vec{q}_e = -\kappa_{\parallel}^e \nabla_{\parallel} T_e - \kappa_{\perp}^e \nabla_{\perp} T_e - \kappa_{\wedge}^e \frac{\vec{B}}{B} \times \vec{\nabla} T_e - 0.71 \frac{T_e}{e} \vec{j}_{\parallel} - \frac{3}{2} \frac{T_e}{e \omega_e \tau_e B} \vec{B} \times \vec{j} \quad (3.34)$$

Die Terme für Energieaustausch mit den Ionen haben aus Gründen der Energieerhaltung den gleichen Betrag aber das entgegengesetzte Vorzeichen wie in der Ionenenergiegleichung; der Temperaturengleich kann über die Formel

$$Q_{ei} = \frac{3m_e}{m_i} \frac{nk}{\tau_e} (T_i - T_e) \quad (3.35)$$

beschrieben werden.

In dem Multifluidmodell von B.J. Braams [38] wird für alle Ionensorten die gleiche Temperatur angenommen, sodaß nur eine Gesamtenergiebilanz aufgestellt werden muß, zu der man durch Summation über die Einzelgleichungen kommt.

Anzumerken bleibt, daß zwar mehrere Ionensorten beschrieben werden können, daß aber überprüft werden muß, ob die Fluidbeschreibung noch sinnvoll ist. Ist die mittlere freie Weglänge zu groß, kann man sich nur auf den Standpunkt zurückziehen, daß die globalen Bilanzen durch diese Behandlung auf jeden Fall erfüllt werden.

3.4 Die Plasmaströmung in der Tokamakrandschicht

3.4.1 Transformation der Plasmagleichungen von lokalen Magnetfeldkoordinaten in eine toroidale Geometrie

Die allgemeinen Plasmagleichungen sind in einem orthogonalen Koordinatensystem mit den Richtungen parallel zum Magnetfeld \vec{B} (\parallel), senkrecht zum Feld aber in der magnetischen Flußfläche (\perp) und normal zur Flußfläche (r) formuliert. Um die Randschicht im Tokamak beschreiben zu können, ist es aber günstiger, auf ein orthogonales "Torussystem" mit den Einheitsvektoren in toroidaler, poloidaler und radialer Richtung (ϕ, θ, r) überzugehen, vor allem auch, um die Symmetrie des Systems in toroidaler Richtung ausnutzen zu können. Daher ist eine Koordinatentransformation und damit auch eine Transformation der Gleichungen notwendig, bei der insbesondere die Krümmung der Flußflächen berücksichtigt werden muß.

Transformation der Koordinaten

Für allgemeine Koordinatentransformationen in krummlinigen Systemen benutzt man die ko- bzw. kontravariante Darstellung von Vektoren. Diese ist in der Literatur theoretisch ausführlich erläutert [83, 84]. Das Verfahren basiert dabei auf einer bijektiven linearen Abbildung zwischen verschiedenen Sätzen von Einheitsvektoren mithilfe eines sogenannten "metrischen Tensors" \vec{g} . Dieser Tensor mit den Komponenten g_{ij} stellt Beziehungen her zwischen den "kontravarianten Einheitsvektoren" \vec{e}_i und den "kovarianten Einheitsvektoren" \vec{e}^i .

$$\vec{e}_i = g_{ij} \cdot \vec{e}^j \quad (3.36)$$

Durch Anwendung dieses Formalismus' gelangt man zu einer Darstellung, in der sich die "physikalischen" Einheitsvektoren – deren Länge eine Funktion des Ortes ist – als Produkt von Einheitsvektoren konstanter Länge und von räumlich variierenden Vorfaktoren ausdrücken lassen. Die Vorfaktoren werden so gewählt, daß die Transformation gewisse Symmetrieeigenschaften erfüllt.

In einem orthogonalen Koordinatensystem – wie es in unseren Anwendungen ausschließlich verwendet wird – hat der metrische Tensor Diagonalf orm und die verbleibenden Koeffizienten sind reine "Skalenfaktoren": $h_i = \sqrt{g_{ii}}$. Sie setzen die reale Länge der "physikalischen Einheitsvektoren" \vec{e}_i in Relation zur Länge der "kontravarianten" \vec{e}_i und "kovarianten Einheitsvektoren" \vec{e}^i . Für jede Richtung i gilt:

$$\vec{e}_i = h_i \cdot \vec{e}^i = \frac{1}{h_i} \cdot \vec{e}_i \quad (3.37)$$

Die mathematische Behandlung wird durch die Benutzung kovarianter bzw. kontravarianter Einheitsvektoren erleichtert, für physikalische Anwendungen sind jedoch die physikalischen Variablen von größerem Interesse. Daher benötigt man die Gleichung (3.37) zur Darstellung und Transformation von Operatoren, Vektoren und Skalaren in den zu betrachtenden Gleichungen.

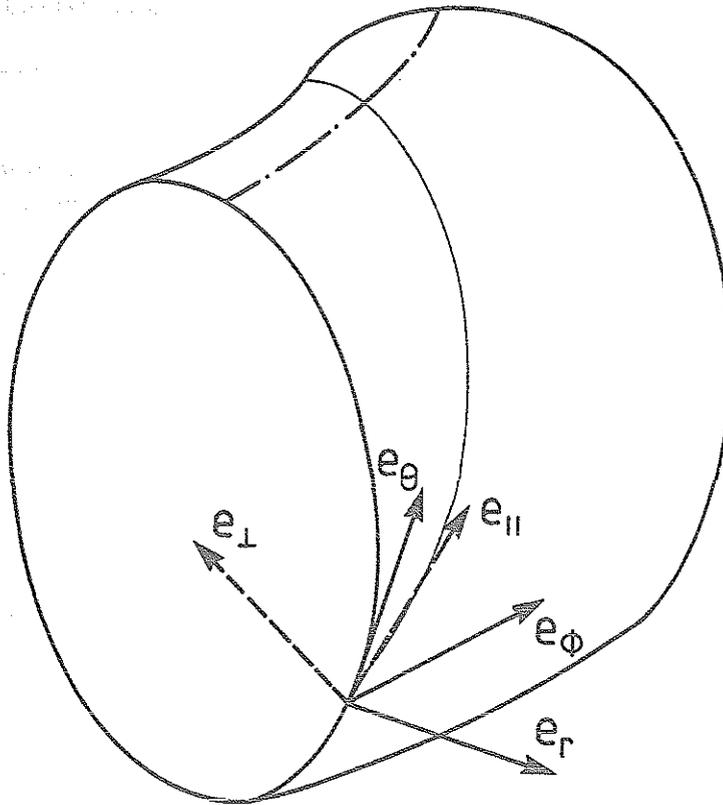


Abbildung 3.1: Die lokalen Einheitsvektoren des Magnetfeldsystems, bzw. des Torussytems

Darüberhinaus gibt es in der Tokamakrandschicht zwei charakteristische Systeme von orthogonalen Basisvektoren. Das eine System orientiert sich an der geometrischen Anordnung ("Toruskordinaten"), das andere am Magnetfeldverlauf ("Magnetfeldsystem"). Sie lassen sich über eine Drehung in der Flußflächenebene aufeinander abbilden, wobei Sinus bzw. Cosinus des Drehwinkels gegeben sind durch: (siehe auch Abbildung 3.1)

$$b_\phi = \frac{\tilde{B}_\phi}{\tilde{B}} \quad (3.38)$$

$$b_\theta = \frac{\tilde{B}_\theta}{\tilde{B}} \quad (3.39)$$

Wie es für eine Drehmatrix gefordert wird, erfüllen die Matrixelemente die Eigenschaft:

$$b_\phi^2 + b_\theta^2 = 1 \quad (3.40)$$

Die radiale Koordinate stimmt in beiden Systemen überein.

In **physikalischen Einheitsvektoren** ausgedrückt, findet man zwischen den beiden Basissystemen den Zusammenhang:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_{\phi} \\ \vec{e}_{\theta} \\ \vec{e}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{\phi} & -b_{\theta} & 0 \\ b_{\theta} & b_{\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_{\parallel} \\ \vec{e}_{\perp} \\ \vec{e}_r \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Mit Gleichung (3.37) ergibt sich für die **kovarianten Einheitsvektoren**:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}^{\phi} \\ \vec{e}^{\theta} \\ \vec{e}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h_{\parallel}}{h_{\phi}} b_{\phi} & -\frac{h_{\perp}}{h_{\phi}} b_{\theta} & 0 \\ \frac{h_{\parallel}}{h_{\theta}} b_{\theta} & \frac{h_{\perp}}{h_{\theta}} b_{\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}^{\parallel} \\ \vec{e}^{\perp} \\ \vec{e}^r \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Analog erhält man für die **kontravarianten Einheitsvektoren**:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_{\phi} \\ \vec{e}_{\theta} \\ \vec{e}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h_{\phi}}{h_{\parallel}} b_{\phi} & -\frac{h_{\phi}}{h_{\perp}} b_{\theta} & 0 \\ \frac{h_{\phi}}{h_{\parallel}} b_{\theta} & \frac{h_{\phi}}{h_{\perp}} b_{\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_{\parallel} \\ \vec{e}_{\perp} \\ \vec{e}_r \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Transformation der Komponenten/Koordinaten von Vektoren

Die Komponenten eines Vektors \vec{A} bestimmen sich aus der Invarianz der linearen Form: $\sum_i \tilde{A}_i \cdot \vec{e}_i = \sum_i A^i \cdot \vec{e}_i = \sum_i A_i \cdot \vec{e}^i$.

In **physikalischen Koordinaten** gilt:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{\phi} \\ \tilde{A}_{\theta} \\ \tilde{A}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{\phi} & -b_{\theta} & 0 \\ b_{\theta} & b_{\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{\parallel} \\ \tilde{A}_{\perp} \\ \tilde{A}_r \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Für die Komponenten des **kovarianten Vektors** erhält man:

$$\begin{pmatrix} A^{\phi} \\ A^{\theta} \\ A^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h_{\parallel}}{h_{\phi}} b_{\phi} & -\frac{h_{\perp}}{h_{\phi}} b_{\theta} & 0 \\ \frac{h_{\parallel}}{h_{\theta}} b_{\theta} & \frac{h_{\perp}}{h_{\theta}} b_{\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{\parallel} \\ A^{\perp} \\ A^r \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Die Komponenten in **kontravarianter Darstellung** ergeben sich zu:

$$\begin{pmatrix} A_{\phi} \\ A_{\theta} \\ A_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h_{\phi}}{h_{\parallel}} b_{\phi} & -\frac{h_{\phi}}{h_{\perp}} b_{\theta} & 0 \\ \frac{h_{\phi}}{h_{\parallel}} b_{\theta} & \frac{h_{\phi}}{h_{\perp}} b_{\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{\parallel} \\ A_{\perp} \\ A_r \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Die Transformation von Differentialausdrücken

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Transformationseigenschaften von Differentialausdrücken wie die Ableitung einer skalaren Funktion, die Divergenz eines Vektors und die Divergenz eines Tensors. Dabei wird von der Annahme toroidaler Symmetrie im Torussystem ausgegangen, sodaß alle Ableitungen nach der toroidalen Koordinate verschwinden.

Gradient einer skalaren Funktion Mit $\Phi(u^\theta, u^r, u^\phi) = \Phi(u^\parallel, u^\perp, u^r)$ sei eine skalare Funktion in beiden Koordinatensystemen definiert. Der Gradient dieser Funktion ist dann ein Vektor, dessen kovariante Komponenten den Ableitungen nach den kontravarianten Koordinaten entsprechen:

$$A_i = \frac{\partial \Phi}{\partial u^i} \quad (3.47)$$

Durch Einsetzen in die Transformationsgleichung (3.44) und unter Berücksichtigung der Beziehung zwischen der physikalischen und kovarianten Komponenten eines Vektors $\tilde{A}_i = \frac{A_i}{h_i}$ kommt man zu dem Ergebnis:

$$\frac{\partial \Phi}{h_\parallel \partial u^\parallel} = \frac{b_\theta}{h_\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u^\theta} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \Phi}{h_\perp \partial u^\perp} = \frac{b_\phi}{h_\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u^\theta} \quad (3.49)$$

In dieser Gleichung wurde die toroidale Symmetrie berücksichtigt, indem die Terme mit $A_\phi = \frac{\partial \Phi}{\partial u^\phi}$ zu Null gesetzt wurde.

Divergenz eines Vektors Bei der Bildung der Divergenz eines Vektors ist darauf zu achten, daß nicht nur die Koordinate abgeleitet wird, sondern daß auch der ortsabhängige Einheitsvektor differenziert wird. Man erhält:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \sqrt{g} A^i \quad (3.50)$$

oder in physikalischen Koordinaten ausgedrückt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\sqrt{g}}{h_i} \tilde{A}_i \quad (3.51)$$

Die Größe \sqrt{g} ist die Jakobi-Determinante und für eine orthogonale Transformation das Produkt aus den Skalenfaktoren h_i :

$$\sqrt{g} = \sqrt{g_{\parallel\parallel}} \cdot g_{\perp\perp} \cdot g_{rr} = \prod_{i=1}^3 h_i = h_\parallel \cdot h_\perp \cdot h_r = h_\phi \cdot h_\theta \cdot h_r \quad (3.52)$$

Anzumerken ist, daß die Divergenz eines Vektors in allen Koordinatensystemen gleich sein muß. Diese Tatsache wird in einem der folgenden Abschnitte ausgenutzt werden, um Beziehungen zwischen den Skalenfaktoren der beiden Koordinatensysteme herzuleiten.

Gradient eines Vektors und Divergenz eines Tensors Um diese Größen zu berechnen, wird die Definition des Differentialoperators benutzt: $\vec{\nabla} = \vec{e}^j \frac{\partial}{\partial w^j}$. Er transformiert sich wie ein Vektor mit kovarianten Komponenten, und kann in dieser Form auch auf Vektoren und Tensoren angewendet werden. Die in den Flüssigkeitsgleichungen benötigten Ausdrücke sind im Anhang hergeleitet und zusammengestellt.

Die Transformation der Kontinuitätsgleichungen

Bei der Transformation der Kontinuitätsgleichungen nutzt man aus, daß die Divergenz eines Vektors in jedem Koordinatensystem auf denselben Wert führen muß. Damit wird auch der Operator der totalen Zeitableitung in den betrachteten Koordinatensystemen identisch:

$$\begin{aligned} \frac{d\dots}{dt} &= \frac{\partial\dots}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^{\parallel}} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_{\parallel}} \tilde{V}_{\parallel} \dots \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^{\perp}} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_{\perp}} \tilde{V}_{\perp} \dots \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^r} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_r} \tilde{V}_r \dots \right) \\ &= \frac{\partial\dots}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^{\theta}} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_{\theta}} \tilde{V}_{\theta} \dots \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^r} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_r} \tilde{V}_r \dots \right) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Im Torussystem ist die Symmetrie entlang der toroidalen Richtung ausgenutzt worden. Nach Durchführung der Transformation von einem System in das andere und anschließendem Vergleich mit dem in diesen Koordinaten hergeleiteten Operator gewinnt man konsistente Bedingungsgleichungen für die Skalenfaktoren:

- Aufgrund der Orthogonalität und der in beiden Systemen übereinstimmend gewählten radialen Richtung, muß die Jacobi-Determinante gleich sein. Diese "lokale" Aussage "global" interpretiert, bedeutet nichts anderes, als daß das Gesamtvolumen der beschriebenen Geometrie in beiden Koordinatensystemen gleich sein muß.
- Aufgrund der Symmetrie in toroidaler Richtung erhält man Beziehungen zwischen den Skalenfaktoren für die in der Flußfläche liegenden Koordinaten:

$$\begin{aligned} h_{\perp} &= c^* h_{\phi} b_{\theta} \\ h_{\parallel} &= c^* h_{\phi} b_{\phi} \end{aligned} \quad (3.54)$$

wobei die Funktion c^* so gewählt werden muß, daß gilt:

$$h_{\parallel} \cdot h_{\perp} = h_{\phi} \cdot h_{\theta}$$

Somit erhält man bei Benutzung der Schreibweise aus Gleichung (3.53) die Kontinuitätsgleichungen für Ionen und Elektronen:

$$\left(\frac{dn_i}{dt} \right)_{ion} = S_{n_i} \quad (3.55)$$

$$\left(\frac{dn_e}{dt} \right)_{el} = S_{n_e} \quad (3.56)$$

Die Subtraktion der Gleichungen (ohne Berücksichtigung von Sekundärelektronenemission) führt zur Stromdichtebilanz:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^{\theta}} \frac{\sqrt{g}}{h_{\theta}} \tilde{j}_{\theta} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^r} \frac{\sqrt{g}}{h_r} \tilde{j}_r = 0 \quad (3.57)$$

Die Transformation der Impulsbilanzen

Die Ableitung der Impulsbilanzen ist etwas aufwendiger. Der konvektive Anteil und die partielle Zeitableitung werden zu einem Operator der totalen Zeitableitung zusammengefaßt, wie es für die Kontinuitätsgleichungen schon durchgeführt wurde. Der Druckgradient und die Vektoren (Reibung, elektrisches Feld, Quellterme) transformieren sich wie oben hergeleitet. Die Komponenten der diamagnetischen Driften werden berechnet, wie es im Anhang für ein Vektorprodukt allgemein beschrieben wird. Der einzig verbleibende Term ist die Divergenz des Viskositätstensors, auf den nun näher eingegangen werden soll.

Die Komponenten von $\nabla \cdot \vec{\Pi}_i$ Ausgangspunkt der Betrachtung ist der Viskositätstensor in Magnetfeldkoordinaten [36], der sich durch eine lineare Abbildung – wie sie von Stacey und Sigmar [85] aufgestellt wird – auch in jedem anderen System beschreiben läßt:

$$\begin{aligned}\vec{\Pi} &= -\eta_0 \vec{W}_0 \\ \vec{W}_0 &= 3 \left(\vec{b}\vec{b} - \frac{1}{3} \vec{I} \right) (\vec{b} \cdot \vec{W} \cdot \vec{b}) \\ \vec{W} &= \frac{1}{2} \vec{\nabla} \vec{V} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{V})^T - \frac{1}{3} \vec{I} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})\end{aligned}\quad (3.58)$$

wobei \vec{b} den Einheitsvektor in Magnetfeldrichtung beschreibt.

Der Ausdruck für die physikalischen Komponenten $(\vec{W})_{\alpha\beta}$ ergibt sich gemäß der Formulierung im Anhang zu:

$$(\vec{W})_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{V}_\beta}{h_\alpha \partial u^\alpha} + \sum_k \tilde{V}_k \Gamma_{\beta k}^\alpha + \frac{\partial \tilde{V}_\alpha}{h_\beta \partial u^\beta} + \sum_k \tilde{V}_k \Gamma_{\alpha k}^\beta \right] - \frac{1}{3} \delta_\alpha^\beta \sum_i \frac{h_i}{\sqrt{g}} h_i \tilde{V}_i \quad (3.59)$$

mit den Christoffel-Symbolen

$$\Gamma_{\beta k}^\alpha = \delta_\beta^\alpha \frac{\partial \ln h_\beta}{h_k \partial u^k} - \delta_k^\alpha \frac{\partial \ln h_k}{h_\beta \partial u^\beta} \quad (3.60)$$

Durch Multiplikation mit dem Magnetfeldeinheitsvektor im Torussystem wird die Größe $\vec{b} \cdot \vec{W} \cdot \vec{b}$ berechnet:

$$\vec{b} \cdot \vec{W} \cdot \vec{b} = \frac{2 \tilde{B}_\theta}{3 \tilde{B}} \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \tilde{V}_\parallel}{\partial u^\theta} - \frac{1 \tilde{B}_\phi}{3 \tilde{B}} \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \tilde{V}_\perp}{\partial u^\theta} - \frac{1}{3 h_r} \frac{\partial \tilde{V}_r}{\partial u^r} + \beta^* + \chi^* = \tilde{W}_{\parallel\parallel} \quad (3.61)$$

mit

$$\beta^* = \left(-\tilde{V}_\parallel + \frac{2 \tilde{V}_\phi}{3 b_\phi} \right) \cdot \frac{\partial b_\theta}{h_\theta \partial u^\theta} \quad (3.62)$$

und

$$\begin{aligned} \chi^* &= -\frac{1}{3}\tilde{V}_\theta \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\theta} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_\theta} \right) - \frac{1}{3}\tilde{V}_r \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^r} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_r} \right) + b_\phi \tilde{V}_\perp \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \ln h_\phi}{\partial u^\theta} \\ &\quad + \tilde{V}_r \left(b_\theta^2 \frac{1}{h_r} \frac{\partial \ln h_\theta}{\partial u^r} + b_\phi^2 \frac{1}{h_r} \frac{\partial \ln h_\phi}{\partial u^r} \right) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Nach Gleichung (3.58) hat man damit die Komponenten des Viskositätstensors in Toruskoordinaten:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\theta\theta} &= -3\eta_0 \left(b_\theta^2 - \frac{1}{3} \right) \tilde{W}_{|||} \\ \tilde{\Pi}_{\phi\phi} &= -3\eta_0 \left(b_\phi^2 - \frac{1}{3} \right) \tilde{W}_{|||} \\ \tilde{\Pi}_{\phi\theta} &= \tilde{\Pi}_{\theta\phi} = -3\eta_0 b_\theta b_\phi \tilde{W}_{|||} \\ \tilde{\Pi}_{rr} &= \eta_0 \tilde{W}_{|||} \\ \tilde{\Pi}_{r\theta} &= \tilde{\Pi}_{r\phi} = \tilde{\Pi}_{\theta r} = \tilde{\Pi}_{\phi r} = 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

und man erhält unter Berücksichtigung der Christoffel-Symbole die Komponenten von $\nabla \cdot \tilde{\Pi}_i$:

$$\left(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\Pi} \right)_\theta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\theta} \frac{\sqrt{g}}{h_\theta} \tilde{\Pi}_{\theta\theta} + \tilde{A}_\theta \quad (3.65)$$

mit dem Geometriefaktor

$$\tilde{A}_\theta = \eta_0 \tilde{W}_{|||} \left[\left(3b_\phi^2 - 1 \right) \cdot \frac{\partial \ln h_\phi}{h_\theta \partial u^\theta} - \frac{\partial \ln h_r}{h_\theta \partial u^\theta} \right] \quad (3.66)$$

$$\left(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\Pi} \right)_\phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\theta} \frac{\sqrt{g}}{h_\theta} \tilde{\Pi}_{\theta\phi} + \tilde{A}_\phi \quad (3.67)$$

mit dem Geometriefaktor

$$\tilde{A}_\phi = -3\eta_0 \tilde{W}_{|||} b_\theta b_\phi \frac{\partial \ln h_\phi}{h_\theta \partial u^\theta} \quad (3.68)$$

$$\left(\widetilde{\nabla} \cdot \widetilde{\Pi}\right)_r = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^r} \frac{\sqrt{g}}{h_r} \tilde{\Pi}_{rr} + \tilde{A}_r \quad (3.69)$$

mit dem Geometriefaktor

$$\begin{aligned} \tilde{A}_r &= \tilde{\Pi}_{\theta\theta} \Gamma_{r\theta}^\theta + \tilde{\Pi}_{\phi\phi} \Gamma_{r\phi}^\phi \\ &= 3\eta_0 \tilde{W}_{|||} \left[(3b_\phi^2 - 1) \cdot \frac{\partial \ln h_\phi}{h_r \partial u^r} + (3b_\theta^2 - 1) \cdot \frac{\partial \ln h_\theta}{h_r \partial u^r} \right] \end{aligned} \quad (3.70)$$

Die physikalischen Komponenten der Tensordivergenz im Magnetfeldsystem können durch Anwendung der Vektortransformation aus Gleichung (3.44) berechnet werden:

$$\left(\widetilde{\nabla} \cdot \widetilde{\Pi}\right)_{||} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\theta} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_\theta} 2\eta_0 b_\theta \tilde{W}_{|||} \right] \quad (3.71)$$

$$-\eta_0 b_\theta \tilde{W}_{|||} \left[\frac{1}{b_\theta h_\theta} \frac{\partial b_\theta}{\partial u^\theta} + \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \ln h_\phi}{\partial u^\theta} + \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \ln h_r}{\partial u^\theta} \right] \quad (3.72)$$

$$(3.73)$$

$$\left(\widetilde{\nabla} \cdot \widetilde{\Pi}\right)_\perp = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\theta} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_\theta} \eta_0 b_\phi \tilde{W}_{|||} \right] \quad (3.74)$$

$$+ 2\eta_0 b_\phi \tilde{W}_{|||} \left[\frac{1}{b_\phi h_\theta} \frac{\partial b_\phi}{\partial u^\theta} + \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \ln h_\phi}{\partial u^\theta} - \frac{1}{2h_\theta} \frac{\partial \ln h_r}{\partial u^\theta} \right] \quad (3.75)$$

$$(3.76)$$

$$\left(\widetilde{\nabla} \cdot \widetilde{\Pi}\right)_r = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^r} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_r} \eta_0 \tilde{W}_{|||} \right] \quad (3.77)$$

$$+ 3\eta_0 \tilde{W}_{|||} \left[\left(b_\theta^2 - \frac{1}{3}\right) \frac{\partial \ln h_\theta}{h_r \partial u^r} + \left(b_\phi^2 - \frac{1}{3}\right) \frac{\partial \ln h_\phi}{h_r \partial u^r} \right] \quad (3.78)$$

$$(3.79)$$

mit $\tilde{W}_{|||}$ aus Gleichung (3.61).

Setzt man die gefundenen Beziehungen in die allgemeine Vektorgleichung für den Ionenimpuls (3.25) ein, so erhält man die einzelnen Komponenten.

parallele Komponente der Ionenimpulsbilanz in Toruskoordinaten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m_i n_i \tilde{V}_{i,\parallel}) &= -\frac{b_\theta}{h_\theta} \left(\frac{\partial p_i}{\partial u^\theta} + \frac{Z_i n_i}{n_e} \frac{\partial p_e}{\partial u^\theta} \right) - \left(\widetilde{\vec{\nabla}} \cdot \vec{\Pi} \right)_\parallel \\ &\quad + \tilde{S}_{mi,\parallel} + \frac{Z_i n_i}{n_e} \tilde{S}_{me,\parallel} \end{aligned} \quad (3.80)$$

senkrechte Komponente der Ionenimpulsbilanz in Toruskoordinaten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m_i n_i \tilde{V}_{i,\perp}) &= -\frac{b_\phi}{h_\theta} \left(\frac{\partial p_i}{\partial u^\theta} + \frac{Z_i n_i}{n_e} \frac{\partial p_e}{\partial u^\theta} \right) - \left(\widetilde{\vec{\nabla}} \cdot \vec{\Pi} \right)_\perp \\ &\quad + e Z_i n_i (\tilde{v}_{ir} - \tilde{v}_{er}) \cdot B + \tilde{S}_{mi,\parallel} + \frac{Z_i n_i}{n_e} \tilde{S}_{me,\parallel} \end{aligned} \quad (3.81)$$

radiale Komponente der Ionenimpulsbilanz in Toruskoordinaten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m_i n_i \tilde{V}_{i,r}) &= -\frac{\partial p_i}{h_r \partial u^r} - \frac{Z_i n_i}{n_e} \frac{\partial p_e}{h_r \partial u^r} - \left(\widetilde{\vec{\nabla}} \cdot \vec{\Pi} \right)_r \\ &\quad + e Z_i n_i (\tilde{V}_{i,\perp} - \tilde{V}_{e,\perp}) \cdot B + \tilde{S}_{mi,\parallel} + \frac{Z_i n_i}{n_e} \tilde{S}_{me,\parallel} \end{aligned} \quad (3.82)$$

Will man die Gültigkeit der Gleichungen auf mehrere Ionensorten ausdehnen, müssen zusätzliche Reibungskräfte zwischen den Ionen verschiedener Spezies berücksichtigt werden.

Die elektrischen Felder und die Reibungsterme sind in allen Impulsgleichungen durch den Druckgradienten aus der Impulsbilanz der Elektronen ersetzt worden. Diese Ersetzung ist sinnvoll, weil dadurch die Kopplung der Gleichungen der physikalischen Realität angepaßt ist: Aufgrund der schnellen Bewegung der Elektronen wird sich unter dem Einfluß von elektrischen Feldern und Reibungskräften zuerst ein Elektronendruckgleichgewicht einstellen. Auf dieses "äußere" Gleichgewicht reagieren dann die sehr viel trägeren Ionen.

parallele Komponente der Elektronenimpulsbilanz in Toruskoordinaten

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{b_\theta}{h_\theta} \left(\frac{\partial p_e}{\partial u^\theta} - e n_e \frac{\partial \Phi}{\partial u^\theta} \right) + \tilde{S}_{me,\parallel} \\ &\quad + e n_e \frac{\tilde{j}_\parallel}{\sigma_\parallel} - 0.71 n_e \frac{b_\theta}{h_\theta} \frac{\partial T_e}{\partial u^\theta} \end{aligned} \quad (3.83)$$

senkrechte Komponente der Elektronenimpulsbilanz in Toruskoordinaten

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{b_\phi}{h_\theta} \left(\frac{\partial p_e}{\partial u^\theta} - e n_e \frac{\partial \Phi}{\partial u^\theta} \right) + \tilde{S}_{me,\perp} \\ &\quad + e n_e \frac{\tilde{j}_\perp}{\sigma_\perp} - 0.71 n_e \frac{b_\phi}{h_\theta} \frac{\partial T_e}{\partial u^\theta} - e n_e \tilde{V}_{e,r} \cdot B \end{aligned} \quad (3.84)$$

radiale Komponente der Elektronenimpulsbilanz in Toruskoordinaten

$$0 = -\frac{1}{h_r} \left(\frac{\partial p_e}{\partial u^r} - en_e \frac{\partial \Phi}{\partial u^r} \right) + \tilde{S}_{me,\perp} + en_e \tilde{V}_{e,\perp} \cdot B \quad (3.85)$$

Die Transformation der Energiebilanzen

Alle zur Transformation der Energiegleichungen nötigen Ausdrücke wurden in den vorhergehenden Abschnitten bereitgestellt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird der Spannungstensor $\tilde{W}_{\parallel\parallel}$ nicht explizit ausgeschrieben. Ein Einsetzen der Lösung aus Gleichung (3.61) führt außerdem nicht zur Vereinfachung der Bilanzen.

Die Ionenenergiebilanz

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} n_i T_i + \frac{m_i n_i}{2} \tilde{v}_i^2 \right) + \\ & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\theta} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_\theta} \left(-3\eta_0 \left(b_\theta \tilde{V}_\parallel - \frac{1}{3} \tilde{V}_\theta \right) \tilde{W}_{\parallel\parallel} \right) + \left(b_\theta^2 \kappa_\parallel^i + b_\phi^2 \kappa_\perp^i \right) \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial T_i}{\partial u^\theta} + b_\phi \kappa_\perp^i \frac{1}{h_r} \frac{\partial T_i}{\partial u^r} \right] + \\ & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^r} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_r} \left(\eta_0 \tilde{V}_r \tilde{W}_{\parallel\parallel} \right) + \kappa_\perp^i \frac{1}{h_r} \frac{\partial T_i}{\partial u^r} + b_\phi \kappa_\perp^i \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial T_i}{\partial u^\theta} \right] = \\ & - \left[\tilde{V}_\theta \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial p_i}{\partial u^\theta} + \tilde{V}_r \frac{1}{h_r} \frac{\partial p_i}{\partial u^r} + \frac{Z_i n_i}{n_e} \left(\tilde{V}_\theta \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial p_e}{\partial u^\theta} + \tilde{V}_r \frac{1}{h_r} \frac{\partial p_e}{\partial u^r} \right) \right] \\ & - \tilde{j}_\perp \tilde{V}_r \tilde{B} + \tilde{j}_r \tilde{V}_\perp \tilde{B} - Q_{ei} + S_E^i \end{aligned} \quad (3.86)$$

Die Elektronenenergiebilanz

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} n T_e \right) + \\ & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\theta} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_\theta} \left(b_\theta^2 \kappa_\parallel^e + b_\phi^2 \kappa_\perp^e \right) \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial T_e}{\partial u^\theta} + b_\phi \kappa_\perp^e \frac{1}{h_r} \frac{\partial T_e}{\partial u^r} + 0.71 b_\theta \frac{T_e}{e} \tilde{j}_\parallel + \frac{3}{2} b_\phi \frac{T_e}{e \omega_e \tau_e} \tilde{j}_r \right] + \\ & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^r} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_r} \left(\kappa_\perp^e \frac{1}{h_r} \frac{\partial T_e}{\partial u^r} - b_\phi \kappa_\perp^e \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial T_e}{\partial u^\theta} - \frac{3}{2} \frac{T_e}{e \omega_e \tau_e} j_\perp \right) \right] = \\ & \tilde{j}_\theta \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial p_e}{\partial u^\theta} + \tilde{j}_r \frac{1}{h_r} \frac{\partial p_e}{\partial u^r} - \tilde{j}_\theta \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u^\theta} - \tilde{j}_r \frac{1}{h_r} \frac{\partial \Phi}{\partial u^r} \\ & - \tilde{j}_\perp \tilde{V}_r \tilde{B} + \tilde{j}_r \tilde{V}_\perp \tilde{B} + Q_{ei} + S_E^e \end{aligned} \quad (3.87)$$

Obwohl sich die Herleitung der Fluidgleichungen sehr eng an die Theorie von Braginskij anlehnt, hat sie doch durch die Betrachtung allgemeiner gekrümmter Koordinatensysteme eine Erweiterung erfahren. Während die "klassischen" Gleichungen auf eine

Zylindergeometrie beschränkt waren, kann jetzt eine beliebige Flußflächenkonfiguration modelliert werden. Implizit beschreibt dieses Verfahren die durch die toroidale Geometrie induzierten Effekte, wie Gradient-B- und Krümmungsdrift und insofern ist es eine "neoklassische" Beschreibung für stoßbestimmte Plasmen. Nicht berücksichtigt sind allerdings die neoklassischen Diffusionseffekte. Hierzu ist eine kinetische Formulierung der Teilchenbewegung notwendig, die nach Flußflächenmittelung zu nichtlokalem Transport führt.

Obwohl die bisherige Herleitung exakt und konsistent ist, kann sie in Randschichtberechnungen nur mit Modifikationen verwendet werden. Der Grund dafür sind die experimentell gefundenen, gegenüber der Theorie viel zu großen, radialen Flüsse.

3.4.2 Die Beschreibung des radialen Transports

Wie bereits erwähnt, findet man in der Tokamakrandschicht radiale Flüsse, die sich weder mit klassischer noch neoklassischer Transporttheorie erklären lassen. Die meisten theoretischen Ansätze zur Beschreibung dieses Effektes gehen von Fluktuationen in den elektrischen - und magnetischen Feldern im Plasma aus, was nach vielen Messungen in der Randschicht gerechtfertigt erscheint [30, 87]. Aber obwohl Turbulenzphänomene im Plasma in den vergangenen Jahren sehr intensiv untersucht worden sind, gibt es bisher noch keine allgemein anerkannte Theorie, die den erhöhten Transport befriedigend erklärt. Daher können in den Randschichtrechnungen nur Annahmen über das Strömungsverhalten in radialer Richtung gemacht werden. Wie es dem Charakter von Fluktuationen entspricht, wird der Transport am ehesten durch einen Diffusionsansatz beschrieben. Zur Bestimmung der Diffusionskonstanten orientiert man sich an experimentell bestimmten Randschichtprofilen und findet aus eindimensionalen Rechnungen Werte in der Größenordnung von $1 \frac{m^2}{s}$.

Weil aber die Messungen in der Randschicht große Fehlerschranken haben, sind funktionale Abhängigkeiten von Plasmaparametern nicht zu bestimmen, sodaß die Koeffizienten in den meisten Fällen konstant oder entsprechend einem "Bohm-Ansatz" proportional (T_e/B) gewählt werden. Aber auch wenn die Messungen eine genügend hohe Auflösung hätten, sodaß die radialen Teilchen- und Energieflüsse genau beschrieben werden könnten, ist der Diffusionsansatz ein "künstlich" in das System eingeführter Prozeß. Dieser verletzt die allgemeinen Beziehungen und Symmetrien zwischen den Gleichungen und zwischen den Transportkoeffizienten, die sich aufgrund der Momentenbildung aus der Boltzmann-Gleichung ergeben [86].

Daher ist es notwendig, den Einfluß eines solchen anomalen "Diffusionsgesetzes" auf die Flüssigkeitsgleichungen zu untersuchen. Erste Ansätze [88, 89, 90] gehen von Feldschwankungen als Ursache des Transports aus:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E} + \delta\vec{E} \\ \vec{B} &= \vec{B} + \delta\vec{B}\end{aligned}$$

Diese Schwankungen induzieren Fluktuationen in den makroskopischen Plasmagrößen, die analog aufgespalten werden können:

$$\vec{n} = \vec{n} + \delta\vec{n}$$

$$\vec{T} = \bar{\vec{T}} + \delta\vec{T}$$

Aus der senkrechten Impulsgleichung läßt sich mit diesen Ansätzen der radiale Fluß herleiten [88]:

$$\Gamma_r = \Gamma_{r,classical} + \bar{\Gamma}_{r,turbulent} \quad (3.88)$$

mit einem turbulenten Anteil

$$\bar{\Gamma}_{r,turbulent} = -\frac{1}{B} \cdot \left(\overline{\delta n_e \delta E} \right)_\perp \quad (3.89)$$

Aus dieser Formulierung wird klar, daß es bei der Definition einer radialen Geschwindigkeit zwei Alternativen gibt, nämlich

$$V_r = V_{r,classical} \quad (3.90)$$

und

$$V_r = \frac{\Gamma_r}{n} \quad (3.91)$$

mit

$$\Gamma_r = \bar{n}\bar{V}_r + \overline{\delta n \delta V_r} \quad (3.92)$$

Auch die Energiegleichung für die Ionen kann unter Berücksichtigung von Turbulenzen abgeleitet werden und man erhält von den fluktuierenden Feldern induzierte Energieflüsse [89]. Um die Größenordnung dieser Flüsse bestimmen zu können, müssen allerdings Phasenbeziehungen zwischen den verursachenden und induzierten Fluktuationen bekannt sein.

Auf theoretischer Ebene und beschränkt auf elektrostatische Turbulenzen kommt man zu der Aussage [90], daß die zusätzlichen radialen Flüsse zu einer Heizung der Ionen und Kühlung der Elektronen führen, ein Effekt, der aber vernachlässigbar klein ist. Experimentelle Untersuchungen an Entladungen in TFTR [91] zeigen nur eine geringe Korrelation in der Transportmatrix, sodaß ein linearer Zusammenhang zwischen Fluktuationen und radialen Flüssen unwahrscheinlich ist.

Wie aus diesem Abschnitt deutlich wird, ist bisher nicht nur der mikroskopische Mechanismus des erhöhten radialen Transports unbekannt, sondern es fehlt auch eine konsistente Implementierung des Effekts in die Fluidgleichungen. Es müssen daher in den nächsten Jahren gezielte Anstrengungen unternommen werden, um zu einer befriedigenderen theoretischen Modellierung der Randschicht zu gelangen.

3.5 Modifikation der Plasmagleichungen

3.5.1 Einführung eines Diffusionsmodells für den radialen Teilchenstrom

Eine entscheidende Modifikation der Plasmagleichungen ist die oben diskutierte Einführung eines Diffusionsmodells für die radiale Impulsgleichung:

$$\Gamma_r = n\tilde{V}_r = -\frac{D}{h_r} \frac{\partial n}{\partial r} \quad (3.93)$$

Eng angelehnt an diesen Ansatz ist die Anpassung der anderen Transportkoeffizienten in radialer Richtung. Für eindimensionalen diffusiven Transport gilt der allgemeine Zusammenhang zwischen Teilchendiffusion, Wärmeleitung und Dehnviskosität:²

$$\kappa_r^{el} = D \cdot n_e \quad (3.94)$$

$$\kappa_r^{ion} = D \cdot n_i \quad (3.95)$$

$$\eta_{rr}^{ion} = D \cdot m_i n_i \quad (3.96)$$

$$(3.97)$$

Entsprechend der entkoppelten Betrachtung von parallelem und radialem Transport werden alle gemischten Terme im Viskositätstensor vernachlässigt und es tragen ausschließlich radiale Geschwindigkeitsgradienten zum Transport in radiale Richtung bei. Für Viskositätseffekte in paralleler Richtung ist alleine der Geschwindigkeitsgradient entlang der Feldlinie verantwortlich.

Diese Veränderungen werden in allen zweidimensionalen Randschichtrechnungen eingeführt und sind durch die experimentellen Beobachtungen motiviert und gerechtfertigt.

3.5.2 Vereinfachung des physikalischen Modells

Neben der ad hoc aufgestellten radialen Impulsbilanz werden weitere Annahmen gemacht, die die Komplexität des physikalischen Modells reduzieren und damit auch die numerische Behandlung des Problems erleichtern:

1. Gradienten im Magnetfeld und Ableitungen der Skalenfaktoren (Christoffel-Symbole) werden in dieser Arbeit weggelassen, um die Ergebnisse mit Resultaten anderer Codes vergleichen zu können. Sie sollten jedoch grundsätzlich berücksichtigt werden.
2. Der Transport in der Flußfläche wird durch Flüsse parallel zur Feldlinie bestimmt. Die senkrechten Flüsse sind so klein, daß sie zur Poloidalgeschwindigkeit kaum beitragen:

$$v_{\perp} \approx 0 \quad (3.98)$$

$$v_{\parallel} = \frac{\tilde{V}_{\theta}}{b_{\theta}} \quad (3.99)$$

3. Die Elektronen- und Ionenflüsse werden ambipolar angenommen, sodaß keine elektrischen Ströme fließen. Dadurch wird die Lösung der Elektronenimpulsbilanz vereinfacht und Reibungsterme sowie Kräfte aufgrund von elektrischen Feldern fallen in den Gleichungen weg.

Fast alle bisher entwickelten Modelle übernehmen auch diese Annahmen. Eine Ausnahme bildet das Modell von H. Gerhauser [39], das alle Geschwindigkeitskomponenten, elektrische Felder und daraus resultierende Ströme in der Konzeption des Programms berücksichtigt. Darauf aufbauend konnte erst in jüngster Zeit das Programm von B.J. Braams in ähnlicher Weise erweitert werden [64].

²englisch: bulk viscosity

3.5.3 Beschränkung der Wärmeflüsse

Eine weitere, sinnvolle Modifikation, die aber nur in einigen Randschichtmodellen berücksichtigt wird, ist die Beschränkung des Wärmeflusses auf den physikalisch maximal möglichen Wert. Dieser ist dadurch gegeben, daß Information höchstens mit der thermischen Teilchengeschwindigkeit $V_{th}^e = \sqrt{T_e/m_e}$ übertragen werden kann.

(→ *Voraussetzungen des Fluidmodells*)

Daher wird der klassische Spitzer-Härm Wärmeleitungskoeffizient für die Elektronen in folgender Weise reduziert:

$$\kappa_{\parallel}^e = \kappa_{\parallel,cl}^e \cdot \left(1 + \left| F \cdot \frac{\kappa_{\parallel,cl}^e \frac{\partial T_e}{\partial u_{\parallel}}}{n V_{th}^e T_e} \right| \right)^{-1} \quad (3.100)$$

Den Anpaßparameter F kann man dadurch bestimmen, daß man die mittlere freie Weglänge mit einer aus kinetischen Berechnungen [92] gewonnenen Abfalllänge für die Temperatur vergleicht. Nach diesem Verfahren wurde ein Wert von $F \approx 3.70$ [59] bestimmt.

Nach einer groben Abschätzung, wie sie auch schon in einem der vorhergehenden Abschnitte gemacht wurde (→ *Voraussetzungen des Fluidmodells*), halbiert sich in der Randschicht von TEXTOR der Transportkoeffizient, denn es gilt:

$$\left| F \cdot \frac{\kappa_{\parallel,cl}^e \frac{\partial T}{\partial u_{\parallel}}}{n V_{th} T} \right| \approx \frac{0.18}{a} \cdot \lambda_{mfp} \approx 1.07 \quad (3.101)$$

Wegen der gleichen freien Weglängen von Elektronen und Ionen wirkt eine solche Flußbegrenzung auf beide Teilchensorten etwa gleich stark und hat, wie aus der Abschätzung schon deutlich wird, einen signifikanten Einfluß auf das Strömungsverhalten.

3.6 Die Modellgleichungen in der Tokamakrandschicht

Die hier aufgestellten Gleichungen beschreiben ein Zweikomponentenplasma aus einfach geladenen Ionen und Elektronen mit den Einschränkungen, die im letzten Abschnitt diskutiert wurden. Da man in der Finite-Elemente Formulierung auf eine Benutzung von Skalenfaktoren h_i verzichten kann, werden die kovarianten Komponenten des Differentialoperators durch physikalische Komponenten ersetzt:

$$\frac{1}{h_i} \frac{\partial \dots}{\partial u^i} = \frac{\partial \dots}{\partial \tilde{x}_i} \quad (3.102)$$

Die Ausdrücke \sqrt{g} bzw. \sqrt{g}/h_i ergeben bei der Integration der Gleichungen, wie sie in der FEM durchgeführt wird, Elementvolumen bzw. Elementflächen.

(→ *Die Methode der gewichteten Residuen*)

Unter Berücksichtigung der toroidalen Symmetrie berechnet sich das Elementvolumen aus der Elementfläche und dem Skalenfaktor in toroidaler Richtung:

$$h_{\phi} = 2\pi R.$$

Die Kontinuitätsgleichung

$$\left(\frac{dn_i}{dt}\right) = S_{n_i} \quad (3.103)$$

Die poloidale Komponente der Ionenimpulsbilanz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(m_i n_i \frac{\tilde{V}_\theta}{b_\theta} \right) &= -b_\theta \left(\frac{\partial p_i}{\partial \tilde{x}_\theta} + \frac{\partial p_e}{\partial \tilde{x}_\theta} \right) + \frac{h_\theta}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_\theta} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_\theta} \frac{4}{3} \eta_0 b_\theta \frac{\partial \tilde{V}_\theta}{\partial \tilde{x}_\theta} \right) \\ &+ \frac{h_r}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_r} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_r} \eta_r \frac{\partial \tilde{V}_\theta}{\partial \tilde{x}_r} \right) + \tilde{S}_{mi,||} + \tilde{S}_{me,||} \end{aligned} \quad (3.104)$$

Die radiale Komponente der Ionenimpulsbilanz

$$\Gamma_r = n_i \tilde{v}_r = -D \frac{\partial n_i}{\partial \tilde{x}_r} \quad (3.105)$$

Die Ionenenergiebilanz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} n_i T_i + \frac{m_i n_i}{2} \tilde{V}^2 \right) &= \frac{h_\theta}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_\theta} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_\theta} \left(\frac{4}{3} \eta_0 \tilde{V}_\theta \frac{\partial \tilde{V}_\theta}{\partial \tilde{x}_\theta} + b_\theta^2 \kappa_{||}^i \frac{\partial T_i}{\partial \tilde{x}_\theta} - V_\theta p_i \right) \right] \\ &+ \frac{h_r}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_r} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_r} \left(\eta_r \tilde{V}_\theta \frac{\partial \tilde{V}_\theta}{\partial \tilde{x}_r} + \kappa_r^i \frac{\partial T_i}{\partial \tilde{x}_r} - V_r p_i \right) \right] \\ &- \tilde{V}_\theta \frac{\partial p_e}{\partial \tilde{x}_\theta} - \tilde{V}_r \frac{\partial p_e}{\partial \tilde{x}_r} - c_{equi} (T_i - T_e) + S_E^i \end{aligned} \quad (3.106)$$

Die Elektronenenergiebilanz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} n T_e \right) &= \frac{h_\theta}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_\theta} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_\theta} b_\theta^2 \kappa_{||}^e \frac{\partial T_e}{\partial \tilde{x}_\theta} \right] + \frac{h_r}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_r} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_r} \kappa_r^e \frac{\partial T_e}{\partial \tilde{x}_r} \right] \\ &+ \tilde{V}_\theta \frac{\partial p_e}{\partial \tilde{x}_\theta} + \tilde{V}_r \frac{\partial p_e}{\partial \tilde{x}_r} + c_{equi} (T_i - T_e) + S_E^e \end{aligned} \quad (3.107)$$

Definitionen

S_{n_i}	:	Ionenteilchenquelle	in	$1/m^3 s$
$S_{mi, }$:	Ionenimpulsquelle in paralleler Richtung	in	$kg/m^2 s^2$
$S_{me, }$:	Elektronenimpulsquelle in paralleler Richtung	in	$kg/m^2 s^2$
D	:	Diffusionskoeffizient in radialer Richtung	in	m^2/s
S_E^i	:	Ionenenergiequelle	in	kg/ms^3
S_E^e	:	Elektronenenergiequelle	in	kg/ms^3
b_θ	=	$\tilde{B}_\theta / \tilde{B}$		
b_ϕ	=	$\tilde{B}_\phi / \tilde{B}$		

(3.108)

Die Transportkoeffizienten

$$\begin{aligned}
 \eta_0 &= 0.96 n_i \cdot T_i \cdot \tau_i \\
 \eta_r &= m_i \cdot n_i \cdot D \\
 \kappa_{||} &= 3.9 n_i \cdot T_i \cdot \tau_i / m_i \\
 \kappa_r &= n_i \cdot D \\
 c_{equi} &= 3 m_e \cdot n_i / (m_i \cdot \tau_e)
 \end{aligned}
 \tag{3.109}$$

3.7 Charakteristiken des Randschichttransports

Nachdem in den letzten Abschnitten die Flüssigkeitsgleichungen rein theoretisch behandelt wurden, soll in diesem Teil eine Charakterisierung der "Flüssigkeit" Plasma folgen. Dazu gibt es zwei Ansätze. Im ersten Ansatz werden die Einzelprozesse und ihre Bedeutung beim Transport in der Randschicht diskutiert. Der zweite Ansatz zieht einen Vergleich mit anderen Flüssigkeiten, um auch intuitiv ein Bild der Plasmaströmung zu vermitteln.

3.7.1 Betrachtung der Einzelprozesse

Um zu einem Verständnis des Transports in einer Flüssigkeit zu kommen, müssen neben den Transportkoeffizienten und den typischen Werten der Variablen die Transportgeschwindigkeiten bekannt sein. Bei gegebener Geometrie ist das gleichbedeutend mit der Kenntnis einer charakteristischen Zeit für den Transport einer charakteristischen Variable über eine bestimmte Distanz. Da die Strömungsvariablen in den Gleichungen aber gekoppelt sind, versucht man in linearer Näherung das Gleichungssystem zu entkoppeln.

Mathematisch entspricht dieses Vorgehen der Suche nach Eigenwerten und Eigenvektoren eines linearisierten Gleichungssystems durch Diagonalisierung der charakteristischen Matrix. Das Ergebnis sind die Eigenwerte und die dazugehörigen, linear unabhängigen Eigenvektoren.

In unserem Fall entsprechen die gesuchten Eigenwerte den charakteristischen Transportgeschwindigkeiten, die Eigenvektoren wären zusammengesetzt aus den einfachen Variablen Dichte, Geschwindigkeit und Temperatur oder auch eine Linearkombination der konservativen Größen Dichte, Impuls und Energie.

Für eine eindimensionale Konvektions-Diffusionsgleichung mit konstantem Transportkoeffizienten und mit nur einer Variablen ist diese Rechnung leicht nachzuvollziehen [124].

Leider wird eine solche Behandlung für mehrere Variablen und nichtlineare, gekoppelte Gleichungen sehr unübersichtlich. Die Eigenwerte der Gleichungen, d.h. die Transportgeschwindigkeiten, werden aufgrund der Dissipation komplex und die Eigenvektoren sind komplizierte Konstruktionen aus den einfachen Variablen.

Hier wollen wir daher die Gleichungen als unabhängig voneinander betrachten und zusätzlich in jeder Gleichung auch die Einzelprozesse voneinander separieren, um ein Gefühl für die Größenordnung jedes Prozesses zu bekommen. Der Parameter, der zur Bestimmung der "Größenordnung" herangezogen wird, ist τ_{transp}^i . Das ist die Zeit, die

eine Störung benötigt, um durch den Prozess i über eine typische Länge in der Geometrie transportiert zu werden. Man gewinnt diese Zeit durch eine einfache Zerlegung der Differentiale in Differenzenquotienten:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\Delta f}{\tau_{transp}} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2\Delta f}{(\Delta x)^2} \quad (3.110)$$

Diffusive Prozesse

Die radiale Teilchendiffusion hat eine Transportzeit, die sich aus radialer Gradientenlänge Δr und Diffusionskoeffizient D berechnet:

$$\tau_{transp}^D = \frac{(\Delta r)_n^2}{2D} \quad (3.111)$$

In der Randschicht von TEXTOR ergibt sich mit $\Delta r \approx 1.5\text{cm}$ und $D \approx 0.6\text{m}^2/\text{s}$ eine charakteristische Transportzeit von

$$\tau_{transp}^D \approx 2 \cdot 10^{-4}\text{s} \quad (3.112)$$

Die radiale Impulsdiffusion hat eine charakteristische Transportzeit von derselben Größenordnung wie die Diffusionszeit, da die Teilchenbewegung als rein diffusiv angenommen wird.³

$$\tau_{transp}^{\eta,r} = \frac{(\Delta r)_V^2 m_i n_i}{2\eta_r} = \frac{(\Delta r)_V^2}{2D} \quad (3.113)$$

Die radiale Wärmeleitung stimmt bis auf einen Vorfaktor ebenfalls überein:

$$\tau_{transp}^{\kappa,r} = \frac{3(\Delta r)_T^2 n_i}{4\kappa_r} = \frac{3(\Delta r)_T^2}{4D} \quad (3.114)$$

Die Gradientenlänge für die Temperatur ist größer als die für die Dichte. Sie beträgt in TEXTOR etwa 3cm und es ergibt sich eine Transportzeit von:

$$\tau_{transp}^{\kappa,r} \approx 1 \cdot 10^{-3}\text{s} \quad (3.115)$$

Aufgrund des Bohm-Kriteriums und der damit verbundenen direkten Kopplung von Geschwindigkeitsprofil und Temperaturprofil kann die Gradientenlänge für die Geschwindigkeit auf ca. 1.75cm und die Transportzeit auf etwa

$$\tau_{transp}^{\eta,r} \approx 5 \cdot 10^{-4}\text{s} \quad (3.116)$$

abgeschätzt werden.

³Die Transportkoeffizienten in radialer Richtung wurden speziell so gewählt, daß diese Bedingung erfüllt ist.

Der poloidale Impulstransport kann stellvertretend für den parallelen Impulstransport ausgewertet werden, denn zwischen den beiden Koordinatensystem kann transformiert werden, ohne daß sich die charakteristischen Zeiten ändern. Als Abfalllänge in poloidaler Richtung wird der auch schon in anderen Kapiteln benutzte Wert von $(\Delta\theta)_V \approx \frac{\pi a}{5} \approx 0.3m$ angenommen. Die Dehnviskosität berechnet sich in der TEXTOR-Randschicht zu $\eta_0 \approx 5 \cdot 10^{-5}$. Damit hat man eine typische Transportzeit von

$$\tau_{transp}^{\eta, pol} = \tau_{transp}^{\eta, ||} \approx \frac{3n_i m_i (\Delta\theta)_V^2}{8\eta_0 b_\theta^2} \approx 5 \cdot 10^{-5} s \quad (3.117)$$

Die poloidale Wärmeleitung der Ionen hängt über die Beziehungen

$$\kappa_{||} = \frac{4.06 \cdot \eta_0}{m_i} \quad (3.118)$$

und

$$(\Delta\theta)_T \approx 0.5 \cdot (\Delta\theta)_V \quad (3.119)$$

eng mit dem poloidalen Impulstransport zusammen:

$$\tau_{transp}^{\kappa, ||} = \frac{3n_i (\Delta\theta)_T^2}{4\kappa_{||} b_\theta^2} \approx \frac{1}{8} \tau_{transp}^{\eta, ||} \approx 6 \cdot 10^{-6} s \quad (3.120)$$

Die poloidale Wärmeleitung der Elektronen ist mit dem höchsten Transportkoeffizienten auch der schnellste Prozeß. Im Vergleich zur Ionenwärmeleitung ist die Relaxationszeit um den Faktor $\sqrt{m_p/m_e}$ kleiner, d.h.

$$\tau_{transp}^{\kappa, el} \approx \frac{1}{43} \tau_{transp}^{\kappa, ion} \approx 1.4 \cdot 10^{-7} s \quad (3.121)$$

Der konvektive Prozess - Schallausbreitung im Plasma

Die konvektive Transportgeschwindigkeit in poloidaler Richtung erhält man als Lösung der dissipationsfreien poloidalen Impulsbilanz gekoppelt mit der eindimensionalen Kontinuitätsgleichung (Euler-Gleichung). Da sowohl Elektronen als auch Ionen durch Druckgradienten Kräfte ausüben können, hat man im Unterschied zum Bohm-Kriterium eine Schallgeschwindigkeit von

$$C_{S, ||} = \sqrt{\frac{5(T_i + T_e)}{3 m_i}} \quad (3.122)$$

Damit erhält man eine Transportzeit von

$$\tau_{transp}^{conv} = \frac{1}{V_{||} + C_S} \cdot \frac{(\Delta\theta)_V}{b_\theta} \quad (3.123)$$

Sie schwankt zwischen $4 \cdot 10^{-5} s$ in der Nähe des Targets und einer langsameren Relaxation in der Nähe der Symmetrieebene von etwa $10^{-4} s$.

Quellterme

Durch Ionisation von Neutralteilchen werden in jeder Zelle neue Ionen erzeugt, sodaß sich eine charakteristische Anwachsrate der Dichte pro Zeiteinheit ergibt. Die zu dieser Anwachsrate korrespondierende charakteristische Zeit berechnet sich als Quotient aus Ionendichte und Quellstärke.

Sie ist in Bereichen ohne Quellen, weit weg von einer materiellen Oberfläche sehr groß und daher ohne Einfluß auf den Transport. In der Nähe des Targets läßt sich folgende grobe Abschätzung machen:

Der Teilchenfluß auf das Target hat z.B. in der ALT-Konfiguration eine Größenordnung von 10^{22} Ionen/s. Mit einem Recyclingfaktor von etwa 0.75 werden diese Ionen als Neutralteilchen wieder in die Randschicht injiziert und dort in einem Volumen von ca. $0.15m^3$ reionisiert. Das entspricht einer Quellstärke von etwa $5 \cdot 10^{22}/(m^3s)$. Die charakteristische Zeitkonstante berechnet sich damit zu

$$\tau_{transp}^{source} \approx \frac{10^{18}}{5 \cdot 10^{22}} = 2 \cdot 10^{-5} \quad (3.124)$$

Die Division der Energiedichte durch die Energieflußdichte der reionisierten Teilchen liefert eine Eigenzeit vergleichbar mit der Relaxationszeit der Teilchenquellen, denn im Mittel hat jedes Quellteilchen die Energie eines Ions in der Randschicht.

In der Energiegleichung tritt zusätzlich der Prozess des Temperatenausgleichs zwischen Elektronen und Ionen auf. Geht man von Temperaturen bei Elektronen und Ionen aus, die in derselben Größenordnung liegen, so kann die charakteristische Zeit für den Temperatenausgleich angegeben werden:

$$\tau_{transp}^{equi} \approx \frac{m_i}{m_e} \tau_e \approx 4 \cdot 10^{-3} s \quad (3.125)$$

Diese Zeit ist sehr viel größer als die Zeiten für die Wärmeleitungsprozesse, d.h. der Energietransport geschieht in erster Linie innerhalb der Spezies und nur zu einem geringen Teil durch Energieaustausch zwischen Elektronen und Ionen. Damit ist auch die Einführung einer Flußbegrenzung für die Ionen begründet.

3.7.2 Vergleich der charakteristischen Transportzeiten in der Plasmarandschicht

Wir lernen aus den vorhergehenden Betrachtungen, daß die Relaxationszeiten auf einer weiten Zeitskala verteilt sind. Durch den starken Einfluß der Quellen und des konvektiven Transports in der Nähe eines Limiters oder Divertors variieren sie auch räumlich um Größenordnungen. Das bedeutet, daß sich in der Nähe einer materiellen Oberfläche ein Gleichgewicht sehr schnell einstellt aber auch empfindlich von den Plasmaparametern abhängt, während in der Nähe der Symmetrieebene die Konfiguration nur langsam einen stationären Zustand erreicht und kaum auf Veränderungen des Strömungsverhaltens in anderen Bereichen der Randschicht reagiert.

Vergleicht man die Relaxation in poloidaler und radialer Richtung, so stellt man fest, daß der radiale Transport sehr viel langsamer ist als der poloidale. Implizit ist damit auch ausgedrückt, daß die Strömungsgeschwindigkeiten sich stark voneinander unterscheiden. Die numerische Behandlung der Strömungsgleichungen wird durch diesen großen Unterschied und zusätzlich durch die lange und schmale Form der Randschicht erschwert, denn eine kleine Ungenauigkeit in der Behandlung des radialen Transports bewirkt signifikante Änderungen des Strömungsverhaltens in poloidaler Richtung. (→ *Numerische Diffusion*)

Die Transportprozesse entlang der Magnetfeldlinien, können nach ihren charakteristischen Relaxationszeiten geordnet werden:

$$\tau_{transp}^{\kappa,el} \sim \frac{1}{40} \cdot \tau_{transp}^{\kappa,ion} \sim \frac{1}{320} \cdot \tau_{transp}^{\eta,ion} \sim \frac{1}{320} \cdot \tau_{transp}^{conv,ion} \quad (3.126)$$

Die Quellterme wurden in dieser Abschätzung nicht berücksichtigt, da sie über dem Berechnungsgebiet um mehrere Größenordnungen variieren und daher nur lokal eingeordnet werden können. Außerdem ist ihr Transport stark von den Recyclingfaktoren und der geometrischen Anordnung (Flußverstärkung) abhängig. Für Limiteranordnungen liegt die charakteristische Zeit im Bereich des Schalltransportes, in einer Divertorkonfiguration kann sie kleiner werden als die Zeit für den Elektronenwärmtransport.

3.7.3 Vergleich des Plasmafluids mit anderen Flüssigkeiten

Um das Plasma mit anderen Flüssigkeiten vergleichen zu können, müssen wir eine Skalierung der Fluidgleichungen auf dimensionslose Größen durchführen, wie es in der Analogielehre beschrieben wird [93, 94]. Bei dieser Transformation erhält man für jede Gleichung einen charakteristischen Skalierungsfaktor. Und zwei Flüssigkeiten sind in ihrem Strömungsverhalten dann ähnlich, wenn diese Skalierungsfaktoren ungefähr gleich sind.

Der charakteristische Faktor in der Impulsbilanz ist die Reynolds-Zahl, in der Energiebilanz ist es die Péclet-Zahl. Man berechnet diese Kennzahlen, indem man den Quotienten aus konvektiver Relaxationszeit (dissipationsfreier Transport) und diffusiver Relaxationszeit (rein dissipativer Transport) bildet. In der allgemeinen Formulierung für Gase ist der Transport isotrop und Reynolds- und Péclet-Zahl hängen nicht von der Richtung der Strömung ab. Im Falle des stark anisotropen Verhaltens des Plasmaflusses ist jedoch eine Analyse in verschiedenen Richtungen notwendig.

In **radialer Richtung** ist der Transport rein diffusiv und enthält keinerlei konvektiven Anteil (Stokes-Gleichung), sodaß weder die Reynolds- noch die Péclet-Zahl definiert sind.

In **poloidaler Richtung** gibt es sowohl dissipationsfreien Transport (Schallausbreitung, Konvektion) als auch diffusive Anteile (Viskosität, Wärmeleitung). Damit lassen sich die Kennzahlen in poloidaler Richtung nach folgenden Formeln berechnen:

Die **Reynoldszahl** vergleicht den dissipationsfreien Schalltransport mit dem viskosen Diffusionstransport:

$$Re = \frac{L_V \cdot m_i n_i \cdot C_S}{\frac{4}{3} \eta_0} \quad (3.127)$$

Die Pécletzahl setzt den konvektiven Transport in Beziehung zur Wärmeleitung:

$$Pe = \frac{L_T \cdot n_i \cdot V_{\parallel}}{\kappa_{\parallel}} \quad (3.128)$$

mit den Abfallängen

$$L_v = (\Delta\theta/b_{\theta})_v \text{ und } L_T = (\Delta\theta/b_{\theta})_T$$

und der Schallgeschwindigkeit C_S für das Gesamtsystem Elektronen und Ionen aus Gleichung (3.122).

Die Reynoldszahl läßt sich für ein Deuterium Randschichtplasma in Zahlenwerten darstellen als:

$$Re \approx 10^{-16} \cdot \frac{L_v \cdot n}{(T/eV)^2} \approx 1 \quad (3.129)$$

Das bedeutet, daß der viskose Transport ebenso wichtig ist wie der konvektive Transport. Bisher wird jedoch in vielen Arbeiten die Impulsgleichung immer noch so behandelt, als sei sie nahezu dissipationsfrei.

Die Pécletzahl wird in guter Näherung allein durch den dissipativen Transport der Elektronen bestimmt, sodaß sich nach Gleichung (3.126) ergibt:

$$Pe = \frac{1}{320} \cdot Re \approx \frac{1}{320} \quad (3.130)$$

Der poloidale Energietransport wird also ausschließlich durch dissipative Effekte bewirkt.

Sucht man vom Strömungsverhalten vergleichbare Flüssigkeiten, so wird man sie sicher nicht bei den Gasen finden, denn dort sind die Reynolds-Zahlen sehr groß, z.B. bei Luft (300 K, 1 bar) in der Größenordnung von 10^7 . Außerdem verringert sich die Dehnviskosität mit steigender Temperatur wegen der höheren thermischen Geschwindigkeit, während im Plasma aufgrund der dominierenden elektrischen Wechselwirkungen die Viskosität mit der Temperatur ansteigt.

Dem Plasma ähnliche Fluide sind Polymerlösungen. Hierbei handelt es sich um polymere Kunststoffe, die in organischen Flüssigkeiten gelöst sind. Als Beispiel diene eine Lösung von Polystyrol in Toluol, vom Fließverhalten vergleichbar einem Haushaltskleber. Diese Lösung hat eine Dehnviskosität von etwa $100 Pa \cdot s$, eine Dichte von $10^3 kg/m^3$, typische Gradientenlängen im Zentimeterbereich und konvektive Geschwindigkeiten um $50 m/s$ ($\rightarrow Re \approx 5$). [95, 96, 97]

Aber nicht nur das Fließverhalten ist ähnlich, sondern auch der Grund für diese hohe Viskosität ist derselbe. Wie das Plasma hat diese Lösung zwei Komponenten, die elektrostatisch miteinander gekoppelt sind: Die großen Kunststoffpartikel sind positiv geladen, während in den kleinen Molekülen des Lösungsmittels negative Ladungen induziert werden. Und auch hier ist es so, daß wie im Plasma die Energie fast ausschließlich über das Lösungsmittel transportiert wird. [98]

Daher kann man sich die Plasmarandströmung wie einen zähflüssigen Kleber vorstellen, der nur schwach auf äußeren Druck reagiert, weil die Viskosität das Fließverhalten bestimmt. Und so wird das Plasma nur sehr langsam dem durch das Bohm-Kriterium aufgeprägten Druckgradienten folgen, d.h. es "strömt" nicht aus der Randschicht aus, sondern es wird vielmehr entlang der Feldlinien "herausgezogen".

3.7.4 Kritische Bemerkungen zur Fluidbeschreibung des Plasmas

In diesem letzten Abschnitt soll eine Brücke geschlagen werden zwischen den Aussagen über die Voraussetzungen des Flüssigkeitsmodells zu Anfang des Kapitels und den Ergebnissen, die sich bei der Berechnung der Strömungskennzahlen ergeben haben; denn wie man durch Einsetzen leicht nachprüfen kann, sind der Wert der Reynolds-Zahl und das Verhältnis von poloidaler Abfalllänge zu freier Weglänge nahezu identisch:

$$Re = \frac{L_V \cdot m_i n_i \cdot C_S}{\frac{4}{3} \eta_0} = \frac{3}{2} \frac{L_V}{0.96 \cdot C_S \cdot \tau_i} = 1.1 \cdot \frac{L_V}{V_{th} \cdot \tau_i} \quad (3.131)$$

Eine Voraussetzung der Fluidnäherung im Plasma aber ist, daß $L_V \gg V_{th} \cdot \tau_i$, d.h. die Reynolds-Zahl müßte wesentlich größer als eins sein. Wie im vorigen Abschnitt nachgewiesen, ist dies wenn überhaupt, dann nur in relativ kleinen Bereichen der Randschicht der Fall.

Umgekehrt drückt Gleichung (3.131) aus, daß im Falle kleiner Reynolds-Zahlen auch die Gültigkeit der Flüssigkeitsgleichungen in Frage gestellt werden muß.

Es gibt mehrere mehr oder weniger befriedigende Auswege aus diesem Dilemma:

1. Man ersetzt in der Fluid-Näherung die klassischen durch nichtlokale Transportkoeffizienten, die man aus einer kinetischen Beschreibung gewinnt.
2. Man benutzt die unveränderten Gleichungen mit den klassischen Transportkoeffizienten entlang des Magnetfeldes und den anomalen Koeffizienten senkrecht zum Feld. Eine Anwendung in Bereichen, in denen die Flüssigkeitsnäherung verletzt ist, kann damit begründet werden, daß das Transportmodell nicht konsistent hergeleitet wurde.
3. Man führt analog zur Wärmeleitung auch für den Viskositätskoeffizienten eine Flußbegrenzung ein, die nur Gradientenlängen in der Größenordnung der freien Weglänge zuläßt.

Es wurde schon in der Einleitung darauf hingewiesen, daß die erste Möglichkeit wohl die eleganteste und beste Lösung wäre, daß aber in den letzten Jahrzehnten nur kleine Fortschritte auf dem Gebiet der kinetischen Beschreibung erzielt wurden und man noch keineswegs von einem Standardverfahren sprechen kann. Aber auf dem Hintergrund der hier dargestellten Problematik sollten weitere Anstrengungen unternommen werden, zu einem numerisch robusten Lösungsverfahren zu kommen, über das auch vom physikalischen Inhalt her Konsens besteht.

Den zweiten Weg haben wir bis zu diesem Zeitpunkt verfolgt, um konsistent mit den bisher verwendeten Programmen zu arbeiten, die bis auf kleinere konstante Korrekturfaktoren zur Stabilisierung der Lösung [46] alle die klassischen Transportkoeffizienten benutzen.

Für die Zukunft soll analog zur Wärmeleitung eine Flußbegrenzung eingeführt werden, die physikalisch unmöglichen Transport unterbindet:

$$\eta_{||}^i = \eta_{||,cl}^i \cdot \left(1 + \left| \frac{\eta_{||,cl}^i \frac{\partial v_{||}}{\partial u_{||}}}{n T_i} \right| \right)^{-1} \quad (3.132)$$

Kapitel 4

Die Methode der finiten Elemente

4.1 Allgemeine Einführung

Um ein physikalisches Phänomen quantitativ zu beschreiben, stellt man häufig ein System von Differentialgleichungen für die unbekanntenen Größen auf. Man legt das Gebiet fest, in dem Lösungen der Gleichungen gesucht sind und definiert passende Rand- und/oder Anfangswerte. Das mathematische Modell ist damit exakt und vollständig festgelegt. Die meisten analytischen Verfahren sind aber nur zur Lösung spezieller linearer Differentialgleichungen auf unkomplizierten Geometrien geeignet. Erst durch Anwendung numerischer Methoden und unter Ausnutzung der zur Verfügung stehenden Computertechnik, ist es möglich, auch gekoppelte, nichtlineare Differentialgleichungssysteme auf komplizierten Geometrien zu lösen. Dazu ist es jedoch notwendig, die Gleichungen aus ihrer mathematischen Darstellung in eine algebraische Form zu bringen, sodaß zur Lösung nur einfache arithmetische Operationen benutzt werden müssen. Ein erster Schritt auf dem Weg ist die Einteilung des Rechengebietes in diskrete Teile. Damit wird auch die Lösungsfunktion durch eine endliche Anzahl von Parametern beschrieben. Diese Parameter können durch ein geeignetes numerisches Verfahren berechnet werden und man erhält eine Näherungslösung des Problems.

Die Methode der finiten Elemente ist ein solches Verfahren und die Diskretisierung geschieht durch Aufteilung des Rechengebietes in disjunkte Teilgebiete bestimmter Form, z.B. Dreiecke, Vierecke in zwei Dimensionen oder auch Tetraeder, Quader etc. für dreidimensionale Anwendungen. In jedem dieser Elemente werden charakteristische Punkte, die Knoten des Elementes, festgelegt und zu jedem Knoten wird eine spezifische Funktion definiert, die die zu berechnenden Parameter enthält. Spezifisch sind diese Funktionen deshalb, weil sie nur in den Elementen von Null verschieden sind, zu denen sie gehören. Im restlichen Gebiet sind sie identisch Null. Beispielsweise benutzt man für die Funktionen oft Polynomansätze und hat als unbekannte Parameter die Vorfaktoren der einzelnen Polynome. Bildet man nun ein Skalarprodukt dieser Knotenfunktionen mit der gegebenen Differentialgleichung, so zerfällt die eine Gleichung für das Gesamt-

gebiet in einen Satz von Gleichungen für jedes Element; jeder Satz besteht aus soviel Gleichungen, wie die Zelle Knoten besitzt. Das Skalarprodukt ist für die finite Elemente Methode eine Integration über das Gebiet der Zelle, also von der sogenannten L_2 -Norm induziert.

In dieser Weise kann für jedes Element eine Lösung gefunden werden. Die Lösungen benachbarter Elemente sind aber nicht unabhängig voneinander, weil sie gemeinsame Knoten haben. Daher müssen alle Elementgleichungen simultan und konsistent gelöst werden. Als Ergebnis erhält man die Werte der Parameter für jede Knotenfunktion und die Lösung für das gesamte Gebiet setzt sich aus der Summe aller Knotenfunktionen zusammeng.

Die finite Elemente Methode (FEM) wurde von Ingenieuren zur Untersuchung von Problemen in der Strukturmechanik entwickelt. Die erste Arbeit erschien im Jahr 1956 [99], weitere in den Jahren 1960 und 1963 [100, 101]. Die Ausdehnung auf die Strömungsmechanik wurde von Zienkiewicz 1965 [102] angeregt, aber erst in den Jahren nach 1970 intensiver betrieben [106]. Verglichen mit dem weit verbreiteten und numerisch ausgereiften Verfahren der finiten Differenzen (FD) [110, 111] ist diese Methode zur Strömungsberechnung ca. 20 Jahre jünger und ein Bereich intensiver Forschung [103]. Neben der Entwicklung neuer numerischer Konzepte [128, 112, 107, 114, 104] wird vor allem auf dem Gebiet der mathematischen Theorie (Funktionalanalysis) gearbeitet.

Die den finiten Elementen zugrunde liegende Mathematik ist die des klassischen Variationsprinzips [108] oder die Methode der gewichteten Residuen [109]. Im Gegensatz zum finite Differenzen Verfahren wird nicht die punktweise Approximation der Differentialgleichung durch Differenzenquotienten gesucht, sondern eine integrale Approximation über dem Rechengebiet.

Ein Vorteil dieser Behandlung ist die Erhaltung integraler Größen der gesuchten Variablen – wie etwa Teilchenzahl oder Energieinhalt – durch den verwendeten Formalismus und nicht erst durch zusätzliche Überlegungen oder Rechnungen. Der entscheidende Unterschied zu den finiten Differenzen aber ist das flexible Rechengitter, basierend auf der elementweisen Betrachtung. Während das Basisgebiet (2D) für ein FD-Verfahren stets ein Rechteck mit äquidistanter Netzeinteilung sein muß und alle zu modellierenden Gebiete durch geeignete, oft komplizierte Transformationen auf ein solches abgebildet werden müssen, kann mit der FEM auf unstrukturierten Netzen gerechnet werden. Unstrukturiert bedeutet, daß es keine feste Anzahl von Zellen in bestimmte Richtungen gibt, sondern daß die Gittereinteilung der Problemstellung folgen kann. Das Netz braucht nur dort eine hohe Punktdichte, wo die Lösung große Gradienten hat.

Dieser Vorteil gegenüber den Finite Differenzen Verfahren gilt uneingeschränkt nur für "explizit im Ort" arbeitende Methoden, die zur Berechnung der Lösung an einem Knoten nur die Werte der Variablen in den Nachbarknoten benötigen. Algorithmen, bei denen jeder Punkt mit jedem anderen kommunizieren kann und deshalb ein Gleichungssystem von der Ordnung der Punktzahl gelöst werden muß, sind in der FEM-Formulierung rechenzeitintensiver; denn die Unstrukturiertheit des Netzes, die sich in einer unregelmäßigen Besetzung der zu lösenden Matrixgleichung widerspiegelt, ver-

langsam die numerischen Lösungsverfahren.

Motiviert durch dieses Problem, sind in den letzten Jahren spezielle Programme entwickelt worden, die durch eine Knotenumnummerierung die Struktur der Matrix so verbessern, daß die benötigte Rechenzeit nur unwesentlich höher liegt als bei den regelmäßig besetzten Matrizen, wie sie sich aus der FD-Formulierung ergeben.

Der in diesem Kapitel beschriebene finite Elemente Algorithmus wurde am Institut für Strahlantriebe der RWTH Aachen entwickelt [115]. Er basiert auf Arbeiten von R. Löhner [116] und wurde auch unter seiner Beratung erstellt. An dieser Stelle sollen nur kurz die grundlegenden Ideen skizziert werden, nähere Erläuterungen dazu finden sich in den anschließenden Abschnitten.

Ein gegebenes zweidimensionales Grundgebiet, auf dem die Strömung berechnet werden soll, wird in Dreiecke unterteilt. Die Ansatzfunktionen über diesen Dreiecken sind Polynome 1. Ordnung (also linear) in den Koordinaten (x,y) .

Zur Lösung der auf dieser Basis integrierten Fluidgleichungen wird ein in der Zeit expliziter Zwei-Schritt-Algorithmus angewendet. Dieses Prädiktor-Korrektor-Verfahren verbindet die Vorteile hoher Stabilität, wie sie bei finiten Differenzen durch ein "upwinding scheme" erreicht werden kann, mit geringer numerischer Diffusion, wie sie nur durch ein Verfahren zweiter Ordnung gewährleistet ist.

Die resultierenden Gleichungen benötigen keinerlei Matrixlöser, sind einfach strukturiert und lassen sich damit numerisch sehr effektiv und schnell auswerten. Stationäre Lösungen erhält man wegen einer Zeitschrittbeschränkung jedoch erst nach vielen Iterationen.

Eine lösungsabhängige Netzverfeinerung führt gegenüber finite Differenzen Verfahren zu einer bis um einen Faktor zwei niedrigeren Knotenanzahl bei gleicher Auflösung in physikalisch interessanten Gebieten.

4.2 Mathematische Grundlagen

4.2.1 Variationsprinzipien

Im Allgemeinen ist man bei der theoretische Beschreibung eines Problems in der Physik nicht auf eine bestimmte mathematische Formulierung festgelegt. Neben der weit verbreiteten Anwendung von Differentialgleichungen zur lokalen Charakterisierung physikalischer Systeme gibt es eine andere Methode, die darauf beruht, daß die Summe aller lokalen Wechselwirkungen eine globale Größe wie z.B. Energie oder Teilchenzahl unverändert läßt. Man sucht also einen Integralausdruck, der stationär in Zeit und/oder Raum ist. Welcher Ausdruck bei einer gegebenen Differentialgleichung stationär wird, kann allerdings nicht direkt hergeleitet werden. Es können lediglich Aussagen über die Eigenschaften eines solchen Funktionals gemacht werden:

- Die Lösungsfunktion der Differentialgleichung macht das Funktional stationär oder in gewissen Fällen sogar extremal.

- Die Funktion, bei der die 1. Variation des Funktionals verschwindet, ist Lösung der zugrundeliegenden Differentialgleichung.

Diese notwendigen Bedingungen für das Verschwinden der 1. Variation eines Funktionals helfen aber nur in wenigen Fällen, von der Differentialgleichung ausgehend, auf das Funktional zurückzuschließen. Eine Problemgruppe, bei der dies möglich ist, sind räumlich integrable Kraftgleichungen, deren zeitlich stationäre Integrale die Gesamtenergie des Systems repräsentieren. Hier existieren auch hinreichende Bedingungen, aus den Kraftgleichungen diese Funktionale herzuleiten und so die Lösungsfunktion zu finden (d'Alembert'sches Prinzip; Euler-Lagrange-Formalismus). Diese Variationsprinzipien sind jedoch nur dann anwendbar, wenn der die Gleichung beschreibende Operator symmetrisch (selbstadjungiert) und positiv definit ist, d.h. wenn Operator und Integration vertauscht werden können. Es kann zwar auch stationäre Funktionale für nicht symmetrische Operatoren geben, aber einen allgemeinen Formalismus, sie aus den Differentialgleichungen herzuleiten, gibt es nicht.

Gekoppelte Differentialgleichungen mit nichtlinearen Transportkoeffizienten, wie sie in den meisten Strömungsproblemen vorkommen, sind Beispiele, bei denen eine systematische Suche nach stationären Funktionalen nicht möglich ist. Denn in diesem Fall vertauschen Operator (hier: *Transportkoeffizient* · *Ortsableitung*) und Integral nicht. Erschwert wird das Problem zudem durch die Mehrdimensionalität in den Orts- und Lösungsvariablen.

4.2.2 Methode der gewichteten Residuen

Ein alternatives Verfahren, das zwar keine analytisch exakte Lösung liefert, aber auch auf das Integralprinzip zurückgreift, ist die Methode der gewichteten Residuen.

Die grundsätzliche Idee, eine Lösung der Differentialgleichung

$$Au + f = 0 \quad \text{im Gebiet } \Omega \quad (4.1)$$

(A: Operator; u: Variable; f: Funktion von Ort und/oder Zeit) mit den Randbedingungen

$$A_R u = f_R \quad \text{auf dem Rand } \Gamma \quad (4.2)$$

zu finden, besteht darin, die Lösungsfunktion \hat{u} als Linearkombination von n linear unabhängigen Interpolationsfunktionen Φ_i zu approximieren:

$$u \sim \hat{u} = \sum_{i=1}^n C_i \Phi_i \quad (4.3)$$

Zur Vereinfachung der Diskussion sei dieser Ansatz so gewählt, daß er die Randbedingungen (4.2) automatisch erfüllt ("starke Formulierung der Randbedingungen"). Die im übrigen Gebiet approximative Lösung \hat{u} wird die Differentialgleichung allerdings nur bis auf einen Fehler (Residuum) ε erfüllen:

$$A\hat{u} + f = \varepsilon \quad (4.4)$$

Führt man nun einen Satz unabhängiger Wichtungsfunktionen W_i ein, so läßt sich das Skalarprodukt (ε, W_i) bilden. Anstelle der Forderung: $\varepsilon = 0$ (exakte Lösung), verlangt man nur noch:

$$(\varepsilon, W_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \dots N) \quad (4.5)$$

Aus Formel (4.4) ergeben sich Bestimmungsgleichungen für \hat{u} :

$$(\{A\hat{u} + f\}, W_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \dots N) \quad (4.6)$$

Dies ist die allgemeine Formulierung der **Methode der gewichteten Residuen**. Diese Schreibweise läßt noch offen, welche Wichtungsfunktionen man benutzt und von welcher Art das Skalarprodukt ist.

Ein wohlbekanntes Beispiel möge zeigen, daß das formal hergeleitete Integralprinzip eine sehr allgemeine, in der Numerik oft benutzte Lösungsmethode ist:

Setzt man beispielsweise die Wichtungsfunktionen gleich dem Fehler selbst (eindimensionaler Funktionenraum), so führt die Minimierung des Produktes $\varepsilon \cdot \varepsilon$ zur Interpolation mit kleinstem quadratischen Fehler.

Das gebräuchlichste finite Elemente Verfahren, das auch die notwendigen Bedingungen eines Extremalprinzips erfüllt, ist die

Methode von Galerkin [109]:

Für die Wichtungs- und Interpolationsfunktionen wird der gleiche Satz von Funktionen verwendet, das Skalarprodukt ist durch die Integration über die räumlichen Variablen definiert:

$$\int_{\Omega} [A \left(\sum_{j=1}^n C_j \Phi_j \right) + f] \Phi_i d\Omega = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \dots N) \quad (4.7)$$

Dies ist bei gegebenen Ansatzfunktionen Φ_i ein algebraisches Gleichungssystem in den Koeffizienten C_i . Hat man einen Satz von C_i gefunden, der das Gleichungssystem löst, so ergibt sich durch Einsetzen in Gleichung (4.3) die Approximation \hat{u} .

Der schwierigste Schritt in der Anwendung der Methode auf ein physikalisches Problem ist die **günstigste Wahl der Ansatzfunktionen**.

Man könnte sich *eine* Funktion vorstellen, die die Lösung im gesamten Gebiet repräsentiert. Sie müßte sehr viele Koeffizienten C_i haben, um eine genügend hohe Auflösung zu erreichen. Beispiele hierfür sind Potenz- oder Fourierreihenansätze. Praktisch unmöglich ist eine solche Näherung für nichtlineare Operatoren, in denen z.B. ortsabhängige Transportkoeffizienten auftreten. Das entstehende Gleichungssystem wäre ebenfalls nichtlinear und kaum lösbar. Daher teilt man das Gebiet in viele kleine Teilgebiete ein, in denen die Transportkoeffizienten als konstant angenommen werden können. Und auch die Ansatzfunktionen werden so definiert, daß sie nur auf diesen Teilgebieten von Null verschieden sind, außerhalb aber identisch verschwinden. Wählt man die entstehenden Elemente klein genug, sind Ansatzfunktionen mit 3 (linearer Ansatz im Dreieck) bis 8 (parabolischer Ansatz im Quadrat) zu bestimmenden Koeffizienten je Element für eine gute Approximation der Lösung ausreichend.

Es bleibt anzumerken, daß es vom numerischen Aufwand her oft sehr viel günstiger ist, einen linearen Ansatz auf vielen kleinen Teilgebieten zu benutzen, statt etwa einen parabolischen Ansatz auf entsprechend weniger Elementen zu verwenden [105].

4.3 Die Anwendung der Methode der finiten Elemente

In diesem Abschnitt soll erklärt werden, wie man analytische Gleichungen, die zur Beschreibung kompressibler, viskoser und wärmeleitender Flüssigkeiten geeignet sind, in eine FEM-Formulierung transformiert.

Im ersten Teil wird kurz auf die im vorigen Abschnitt motivierte Unterteilung des Rechengebietes in Dreiecke eingegangen. Eine genauere Betrachtung hierzu findet man in Abschnitt (5.1.2).

Im zweiten Teil werden die linearen Ansatzfunktionen über einem allgemeinen Dreieck berechnet. Für diese Funktionen wird im dritten Teil am Beispiel einer eindimensionalen Transportgleichung die Methode des gewichteten Residuums erläutert und es werden Ausdrücke berechnet, die auch bei der Integration der Fluidgleichungen gebraucht werden.

Der vierte Teil wird die numerische Lösungsmethode erklären und es werden Vor- und Nachteile des expliziten Verfahrens gegenüber impliziten Formulierungen aufgezeigt. Dies soll sich allerdings auf numerisch-programmtechnische Problemstellungen beschränken. Fragen, die die physikalischen Besonderheiten von Plasmaströmungen und deren Konsequenzen für die Numerik betreffen, werden unter dem Aspekt der Gitteranpassung in Abschnitt (5.1.3) näher untersucht.

Darauf aufbauend wird die numerische Stabilität des verwendeten Algorithmus untersucht und Kriterien formuliert, diese zu gewährleisten. Im dann folgenden Unterkapitel wird die Einbeziehung allgemeiner Randbedingungen in den Formalismus diskutiert. Abschließend soll kurz die Funktionsweise der adaptiven Netzverfeinerung erläutert werden.

4.3.1 Generation von Dreiecksnetzen

Die Anwendung der finite Elemente Methode erfordert als vorbereitenden Schritt die Generation eines Gitters aus Knoten und Elementen auf dem Grundgebiet der Rechnung. Für zweidimensionale Geometrien existieren Algorithmen, die ein solches Gitter halbautomatisch erzeugen [117, 118]. Notwendig ist dafür eine Vorzerlegung in Unterregionen von elementarer Geometrie: Dreiecke, Vierecke, Kreisausschnitte. Dabei können die Seiten der Drei- und Vierecke auch gekrümmt sein oder in Form von Polygonzügen vorliegen. Die gewünschten Eigenschaften des Gitters in diesen Unterregionen werden in der Eingabedatei näher spezifiziert; es können Angaben über Elementform (Dreieck, Viereck,...), Elementtyp (Anzahl Knoten pro Seite), über die Elementanzahl pro Seite, die Längenverhältnisse zwischen den Elementen und die Krümmungsradien von Seiten der Unterregion gemacht werden. Ausgegeben werden die generierten Elemente, gekennzeichnet durch die Nummern der Randknoten und die Koordinaten dieser Knoten. Die Ausgabe erfolgt in einer Datenstruktur, die eine einfache Zuordnung von Elementen und zugehörigen Knoten oder auch Knoten und zugehörigen Dreiecken ermöglicht. Diese Struktur ist notwendig, da die Numerierung der Knoten nicht regelmäßig ist. Es wird lediglich in jedem Dreieck eine interne Numerierung der Knoten (i.a. gegen den Uhrzeigersinn) vorgenommen, um auf den Seiten eine nach außen gerichtete Normale definieren zu können (\rightarrow *Randintegrale*).

Zusätzlich werden in dem benutzten Programm [118] die Seiten aller Elemente und auch die Knoten entsprechend der für sie geltenden Randbedingungen gekennzeichnet. Durch einen sogenannten "back-tracking"-Algorithmus wird die Knotennummerierung so optimiert, daß Knoten mit benachbarten Nummern räumlich möglichst nahe beieinander liegen. Diese Änderung spiegelt sich in einer Minimalisierung der Bandbreite der Lösungsmatrix wieder, was ein implizites Lösen aufgrund besserer Konditionierung erheblich vereinfacht. (→ *Das Taylor – Galerkin Zweischrittverfahren*)

4.3.2 Berechnung der Ansatzfunktionen

Als Elementtyp zur Erzeugung eines Gitternetzes über zweidimensionalen Gebieten sind Dreiecke sehr vorteilhaft. Sie zeichnen sich durch große geometrische Flexibilität aus und eignen sich besonders für die automatische, lösungsabhängige Verfeinerung unstrukturierter Netze. Der Verlauf der gesuchten Variable U im Rechengebiet wird zusammengesetzt aus den Elementfunktionen U^e aller Dreiecke:

$$U(x, y) = \sum_{e=1}^{N_{El}} U^e \quad (4.8)$$

U^e wird in jedem Element, abhängig von den Funktionswerten U_i^e an den Knoten des Dreiecks e , mit Hilfe der Ansatzfunktionen N_i^e approximiert. Der angenäherte Funktionsverlauf im Element e mit drei Knoten ist dann:

$$U^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i^e U_i^e \quad (4.9)$$

Damit läßt sich die Gesamtfunktion darstellen als:

$$U(x, y) = \sum_{e=1}^{N_{El}} \sum_{i=1}^3 N_i^e U_i^e \quad (4.10)$$

Die eingeführten Ansatzfunktionen N_i^e gelten nur für Element e und werden für alle anderen Dreiecke zu Null gesetzt. Im Folgenden soll nur ein einzelnes Dreieck betrachtet werden, daher wird in allen Größen auf die Elementindizierung verzichtet. Die drei Ansatzfunktionen N_1, N_2, N_3 werden linear in den räumlichen Variablen x, y angenommen:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= a_1 + b_1 x + c_1 y \\ N_2(x, y) &= a_2 + b_2 x + c_2 y \\ N_3(x, y) &= a_3 + b_3 x + c_3 y \end{aligned} \quad (4.11)$$

Die Koeffizienten a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$) werden durch zusätzliche Forderungen an die Ansatzfunktionen bestimmt:

Am Punkt i muß $U(x_i, y_i) = U_i$ sein. Dies kann durch die spezielle Wahl

$$\begin{aligned} N_j &= 1 \quad \text{für} \quad x = x_j \text{ und } y = y_j \\ N_j &= 0 \quad \text{für} \quad x = x_j \text{ und } y = y_j \quad i \neq j \end{aligned}$$

erfüllt werden.

Die Koeffizienten errechnen sich damit aus dem Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Man erhält als Lösung:

$$\begin{aligned} a_1 &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) / 2\Delta & a_2 &= (x_3 y_1 - x_1 y_3) / 2\Delta & a_3 &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) / 2\Delta \\ b_1 &= (y_2 - y_3) / 2\Delta & b_2 &= (y_3 - y_1) / 2\Delta & b_3 &= (y_1 - y_2) / 2\Delta \\ c_1 &= (x_3 - x_2) / 2\Delta & c_2 &= (x_1 - x_3) / 2\Delta & c_3 &= (x_2 - x_1) / 2\Delta \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\text{mit } \Delta = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (\text{Fläche des Dreiecks 1,2 und 3}) \quad (4.14)$$

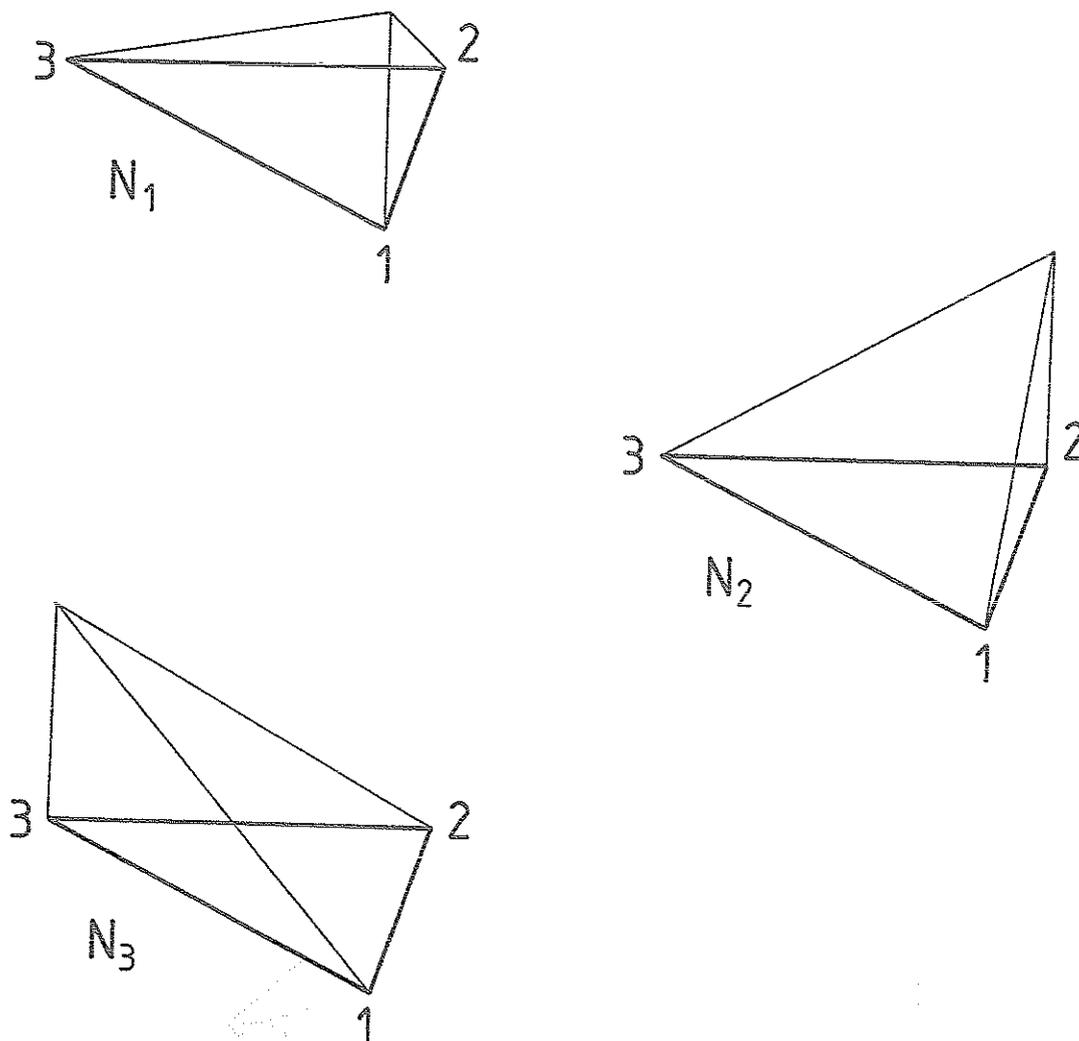


Abbildung 4.1: Die drei Ansatzfunktionen N_1, N_2, N_3 , für die gilt: $N_i = 1$ am Knoten i und $N_i = 0$ an den Knoten j, k .

Wie man aus einfachen geometrischen Überlegungen herleiten kann, lassen sich die so gefundenen Ansatzfunktionen auch als sogenannte *Flächenfunktionen* interpretieren.

Flächenfunktionen haben die Eigenschaften:

- Der Wert der Ansatzfunktion N_i an einem beliebigen Punkt P entspricht dem Quotienten aus dem Flächeninhalt F_i eines Teildreiecks und der Gesamtfläche des Dreiecks. Dabei wird das Teildreieck beschrieben durch die Seite i (gegenüber Punkt i) und Punkt P (siehe Abbildung 4.2).

$$N_i = F_i / F_{Ges} \quad (4.15)$$

- Für einen Punkt Q außerhalb des Elementes wird die Flächenfunktion rechnerisch negativ. Da sie aber nur für Punkte innerhalb des Dreiecks sinnvoll ist, wird sie außerhalb per definitionem auf Null gesetzt.
- Die Summe der Ansatzfunktionen in jedem beliebigen Punkt P des Dreiecks ist eins:

$$N_1(x_p, y_p) + N_2(x_p, y_p) + N_3(x_p, y_p) = 1 \quad (4.16)$$

- Die Integration der Flächenfunktionen über Elementen kann aufgrund ihrer einfachen Struktur analytisch exakt durchgeführt werden.

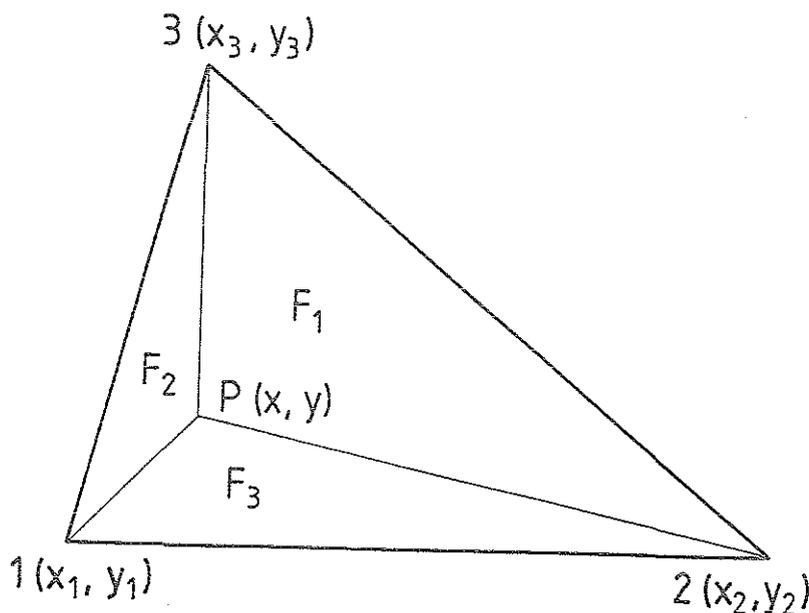


Abbildung 4.2: Interpretation der Ansatzfunktionen als Flächen im Dreieck

4.3.3 Anwendung der Methode des gewichteten Residuums

Am Beispiel einer einfachen, räumlich eindimensionalen Transportgleichung soll demonstriert werden, wie das "gewichtete Residuum" formal berechnet wird:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad a = \text{Konstante} \quad (4.17)$$

Sie beschreibt z.B. den eindimensionalen, rein konvektiven Transport der Größe U mit der Geschwindigkeit a .

Um das Transportproblem mit der Methode der finiten Elemente lösen zu können, wird die Gleichung (4.17) in eine äquivalente Integralformulierung überführt. Dies geschieht durch Multiplikation mit Wichtungsfunktionen W_j und Integration über den Ort. Da die W_j nur von den Ortsvariablen, nicht aber von der Zeit abhängen, bleibt die Zeitableitung von der Integration unberührt. Sie wird nicht mit dem FEM-Formalismus behandelt, sondern gesondert diskretisiert. Man erhält die Integralgleichungen

$$\int_{\Omega} W_j \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + a \int_{\Omega} W_j \frac{\partial U}{\partial x} d\Omega = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (4.18)$$

Ist die Integralgleichung für jede der Funktionen W_j erfüllt, so hat man eine Näherungslösung der Differentialgleichung (4.17) gefunden. Die Gleichungen (4.18) lassen sich mit Hilfe des Green'schen Satzes in Gebiets- und Randintegrale zerlegen:

$$\int_{\Omega} W_j \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega = a \int_{\Omega} \frac{\partial W_j}{\partial x} U d\Omega - a \int_{\Gamma} W_j U n_x d\Gamma \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (4.19)$$

mit Γ = Gebietsrand von Gebiet Ω
und n_x = x - Komponente der Außennormalen auf Γ .

Da die Ortsableitung der Variablen U in (4.19) nicht mehr vorkommt, sind die Anforderungen an die Glattheit von U geringer als in der Gleichung (4.18). Die Formulierung (4.19) wird daher auch als **schwache Form** der Differentialgleichung (4.18) bezeichnet. Führt man für U die in Gleichung (4.10) gegebene Approximation ein, so erhält man die **Integrale der gewichteten Residuen**:

$$\int_{\Omega} W_j \sum_{e=1}^{N_{El}} \sum_{i=1}^3 N_i^e \frac{\partial U_i^e}{\partial t} d\Omega = a \int_{\Omega} \frac{\partial W_j}{\partial x} \sum_{e=1}^{N_{El}} \sum_{i=1}^3 N_i^e U_i^e d\Omega - a \int_{\Gamma} W_j \sum_{e=1}^{N_{El}} \sum_{i=1}^3 N_i^e U_i^e n_x d\Gamma \quad (4.20)$$

Als Gewichtsfunktionen $\{W_j\}$ läßt sich jedes System unabhängiger Funktionen verwenden. Setzt man speziell die Gewichtsfunktionen mit den Ansatzfunktionen gleich, erhält man die **Methode von Galerkin** [109]:

$$\{W_j\} = \{N_1, N_2, N_3\}.$$

Dies ist das meistbenutzte und auch hier verwendete Verfahren, weil die Integrale in dieser Formulierung eine so einfache Form annehmen, daß sie sich exakt analytisch berechnen lassen. Die Gleichungen (4.20) vereinfachen sich durch die spezielle Form der Ansatzfunktionen in folgender Weise:

- Die Funktionswerte U_i an den Knoten sind keine Funktionen des Ortes und können aus den Integralen herausgezogen werden.
- Aus jedem der Integrale über das Gesamtgebiet wird eine Summe von Elementintegralen, denn die Integranden sind Produkte von Ansatzfunktionen und nur dann von Null verschieden, wenn beide Ansatzfunktionen zum gleichen Dreieck gehören.
- Die in der Matrix R auftauchenden Randintegrale addieren sich für die inneren Elemente mit den Randintegralen der Nachbarelemente zu Null auf, denn bei gleichem Umlaufsinn des Randes sind die Normalenvektoren zweier aneinandergrenzender Elemente auf der gemeinsamen Seite entgegengesetzt orientiert. Lediglich die am Gebietsrand liegenden Elemente liefern einen Beitrag, der konsistent in die Gleichung miteinbezogen wird.

Das Gleichungssystem (4.20) läßt sich formal auch in folgender Weise schreiben:

$$\sum_{e=1}^{N_{El}} M_{El}^e \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}^e = a \sum_{e=1}^{N_{El}} \left\{ K_{El,x}^e \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}^e + R_{El,x}^e \begin{pmatrix} U_{R,1} \\ U_{R,2} \\ U_{R,3} \end{pmatrix}^e \right\} \quad (4.21)$$

Dabei sind 1, 2 und 3 die internen Knotennummern des Elementes e und M_{El}^e , $K_{El,x}^e$, $R_{El,x}^e$ die zugehörigen Elementmatrizen:

$$M_{El}^e = \begin{pmatrix} \iint N_1^e N_1^e & \iint N_2^e N_1^e & \iint N_3^e N_1^e \\ \iint N_1^e N_2^e & \iint N_2^e N_2^e & \iint N_3^e N_2^e \\ \iint N_1^e N_3^e & \iint N_2^e N_3^e & \iint N_3^e N_3^e \end{pmatrix} d\Omega \quad (4.22)$$

$$K_{El,x}^e = \begin{pmatrix} \iint N_1^e \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \iint N_2^e \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \iint N_3^e \frac{\partial N_1^e}{\partial x} \\ \iint N_1^e \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \iint N_2^e \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \iint N_3^e \frac{\partial N_2^e}{\partial x} \\ \iint N_1^e \frac{\partial N_3^e}{\partial x} & \iint N_2^e \frac{\partial N_3^e}{\partial x} & \iint N_3^e \frac{\partial N_3^e}{\partial x} \end{pmatrix} d\Omega \quad (4.23)$$

$$R_{El,x}^e = \begin{pmatrix} \int N_1^e N_1^e & \int N_2^e N_1^e & \int N_3^e N_1^e \\ \int N_1^e N_2^e & \int N_2^e N_2^e & \int N_3^e N_2^e \\ \int N_1^e N_3^e & \int N_2^e N_3^e & \int N_3^e N_3^e \end{pmatrix} n_x^e d\Gamma \quad (4.24)$$

Die Summation ist dabei so zu verstehen, daß das Gesamtintegral für einen bestimmten Knoten sich aus den Teilbeiträgen aller Elemente zusammensetzt, zu denen der Knoten gehört. Eine Aufsummierung der Matrizenelemente aller Elementmatrizen für einen bestimmten Knoten führt entsprechend zu einer Gesamtmatrix für den Variablenvektor $\mathbf{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_{K_n}\}$

$$M \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = a \{K_x \mathbf{U} + R_x \mathbf{U}_R\} \quad (4.25)$$

Durch Invertierung der Matrix M läßt sich die Zeitentwicklung von \mathbf{U} berechnen.

Zur Auswertung der Gleichung (4.25) ist nun noch die Bestimmung der Integrale in den Elementen nötig. Die Auswertung der Matrizen M, K, R erfolgt durch **Integration über lineare Dreieckselemente**. Dazu wird die Integration nicht über die echten Koordinaten x, y ausgeführt, sondern nach einer Variablentransformation über die Ansatzfunktionen selbst.

Wie man durch Einsetzen der Koeffizienten (4.13) in den linearen Ansatz (4.11) sieht, lassen sich x und y als Linearkombination der Funktionen N_i ausdrücken:

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Außerdem addieren sich die Ansatzfunktionen in jedem Punkt des Dreiecks zu 1:

$$1 = N_1 + N_2 + N_3 \quad (4.27)$$

Benutzt man die Gleichung (4.27) so hat man ein Gleichungssystem für x, y als Funktion von N_1, N_2 :

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + (1 - N_1 - N_2) x_3 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + (1 - N_1 - N_2) y_3 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Die Jakobimatrix zu dieser Transformation ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial N_1} & \frac{\partial y}{\partial N_1} \\ \frac{\partial x}{\partial N_2} & \frac{\partial y}{\partial N_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Die für die Transformation nötige Determinante liefert:

$$\det J = 2 \Delta_{El} = 2 \cdot \text{Dreiecksfläche} \quad (4.30)$$

Nach Bestimmung der transformierten Integralgrenzen ergeben sich die Integrale der Matrix M_{El} zu:

$$\iint N_i N_j d\Omega = \iint N_i N_j dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-N_2} N_i N_j \det J dN_1 \right) dN_2 \quad (4.31)$$

Das gleiche Verfahren wird auf die Integrale der Matrix K angewendet. Dabei wird bei der Ableitung der Flächenfunktionen Gleichung (4.11) benutzt:

$$\iint N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega = \iint N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} dx dy = \frac{b_j}{2\Delta_{El}} \int_0^1 \left(\int_0^{1-N_2} N_i \det J dN_1 \right) dN_2 \quad (4.32)$$

In zweidimensionalen Strömungsproblemen gibt es analoge Matrizen $K_{El,y}$, die Integrale mit Ableitungen in y-Richtung enthalten $\int N_i \frac{\partial N_j}{\partial y}$:

$$\iint N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega = \iint N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} dx dy = \frac{c_j}{2\Delta_{El}} \int_0^1 \left(\int_0^{1-N_2} N_i \det J dN_1 \right) dN_2 \quad (4.33)$$

Die Auswertung der Integrale ergibt die Matrizen:

$$M_{El} = \frac{\Delta_{El}}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

$$K_{El,x} = \frac{\Delta_{El}}{6} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_2 - y_3 & y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 & y_3 - y_1 & y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 & y_1 - y_2 & y_1 - y_2 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

$$K_{El,y} = \frac{\Delta_{El}}{6} \begin{pmatrix} x_3 - x_2 & x_3 - x_2 & x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 & x_1 - x_3 & x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Jetzt sollen die aus den Randintegralen bestehenden Matrizen $R_{El,x}$, $R_{El,y}$ betrachtet werden. Die Integrale haben die Form $\int N_i N_j n_{x/y} d\Gamma$. Sie sind nur für Elementseiten auf dem Gebietsrand zu lösen; daher soll die Berechnung exemplarisch für ein Randelement mit den Knoten o, p, q durchgeführt werden, wobei o und p auf dem Rand liegen, während q der Knoten im Inneren des Gebietes ist.

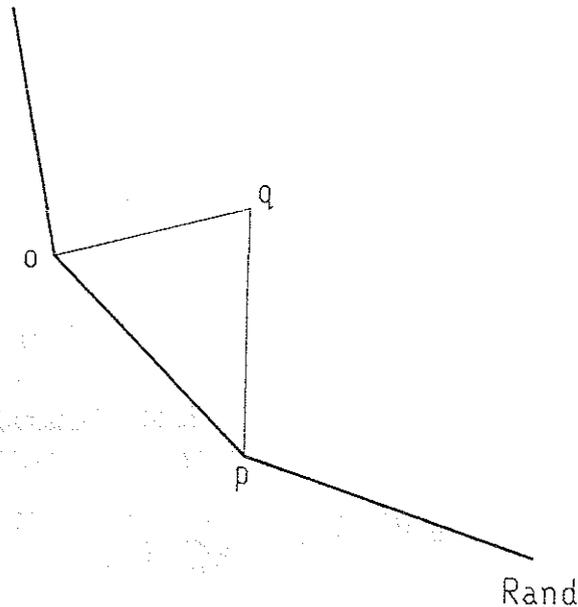


Abbildung 4.3: Das Randelement mit den Knoten o, p, q

Der in den Integralen benötigte äußere Normaleneinheitsvektor auf die Seite ($o \rightarrow p$) hat die Komponenten:

$$\mathbf{n}_{o \rightarrow p} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} y_p - y_o \\ x_o - x_p \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Er wird durch die Länge l der Seite $o \rightarrow p$ normiert. Wie in den Gebietsintegralen wird auch hier eine Transformation der Integrationsvariablen vorgenommen:

$$d\Gamma = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial N_o}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial N_o}\right)^2} dN_o = l \cdot dN_o \quad (4.38)$$

Damit lassen sich die Randintegrale für Punkt o umformen:

$$R_{El,x}^o = \int N_o N_j \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} d\Gamma = \begin{pmatrix} y_p - y_o \\ x_o - x_p \end{pmatrix} \cdot \int N_o N_j dN_o = \frac{\Delta_{El}}{3} \begin{pmatrix} b_q \\ c_q \end{pmatrix} \cdot \begin{cases} 2 : j = o \\ 1 : j = p \\ 0 : j = q \end{cases} \quad (4.39)$$

In diesem Demonstrationsbeispiel wurde nur eine Transportgleichung mit einfacher Ortsableitung behandelt. In den Fluidgleichungen treten jedoch in den konduktiven Transporttermen auch Ortsableitungen zweiter Ordnung auf. Deren Behandlung soll nun am Beispiel der Wärmeleitung ($\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$) erklärt werden. Für den Viskositätstensor gibt es Transportterme gleicher Struktur, lediglich der Wärmeleitungskoeffizient κ muß durch den Viskositätskoeffizienten η und die Temperatur durch die Strömungsgeschwindigkeit ersetzt werden. Für Gradienten in y -Richtung ist x durch y zu ersetzen. Die zu berechnenden Integrale sind von der Form

$$\iint N_j \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) d\Omega = \sum_{e=1}^{N_{El}} \left\{ \iint N_j \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial (\sum_{i=1}^3 N_i T_i)}{\partial x} \right) d\Omega \right\}_e \quad (4.40)$$

Man zerlegt die Gleichung wieder in Integrale auf Elementebene und durch partielle Integration erreicht man eine schwache Formulierung mit Aufteilung in Gebiets- und Randintegral:

$$- \iint \frac{\partial N_j}{\partial x} \left(\kappa_{El} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial x} T_i \right) d\Omega + \int N_j \left(\kappa_{o \rightarrow p} \sum_{i=o,p} \frac{\partial N_i}{\partial x} T_{i,R} \right) n_x d\Gamma \quad (4.41)$$

Die Auswertung des Gebietsintegrals ergibt:

$$- \kappa_{El} \frac{\partial N_j}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial x} T_i \right) \cdot \iint d\Omega = - \Delta \kappa_{El} b_j \left(\sum_{i=1}^3 b_i T_i \right) \quad (4.42)$$

Für das Randintegral erhält man:

$$\kappa_{o \rightarrow p} \left(\sum_{i=o,p} \frac{\partial N_i}{\partial x} T_{i,R} \right) \cdot \int N_j n_x d\Gamma = \Delta_{El} \cdot \kappa_{o \rightarrow p} b_q \left(\sum_{i=o,p} b_i T_{i,R} \right) \quad (4.43)$$

Damit sind alle Matrizen, die man zur räumlichen Integration der Navier-Stokes Gleichungen benötigt, berechnet und man muß nun ein Verfahren zur Diskretisierung der Zeitableitung angeben.

4.3.4 Das Taylor-Galerkin Zweischrittverfahren

Die im vorigen Kapitel vorgestellte FEM-Methode beschränkt sich nur auf die Diskretisierung der Ortsvariablen und die anschließende Integration mit zeitunabhängigen Ansatzfunktionen. Die Zeitvariable geht in dieses Konzept nicht ein, sondern muß in einem getrennten Schritt über eine "konventionelle" finite-Differenzen-Diskretisierung behandelt werden.

Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten, die sich formal anhand des Gesamtgleichungssystems (4.25) verdeutlichen lassen. Nach der räumlichen Diskretisierung und der Integration mit der FEM erhält man:

$$M \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = a \{ K_x \mathbf{U} + R_x \mathbf{U}_R \} = A(\mathbf{U})$$

In dieser Gleichung kann die linke Seite durch einen Differenzenquotienten zu den Zeitpunkten t^{n+1} und t^n angenähert werden, während die rechte Seite sich aus einer Kombination der nichtlinearen Transportterme zu diesen Zeiten zusammensetzen läßt (Theta-Methode).

$$M \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{t^{n+1} - t^n} = (1 - \Theta) \cdot A(\mathbf{U}^n) + \Theta \cdot A(\mathbf{U}^{n+1})$$

Je nach Wert des Parameters Θ hat man numerisch unterschiedliche Problemstellungen [124]:

- $\Theta = 0$: **Explizites, Vorwärts-Zeitschritt-Schema**

In diesem Fall berechnet sich die Lösung zum Zeitpunkt t^{n+1} aus dem Ergebnis zum Zeitpunkt t^n sehr einfach durch Inversion der Matrix M :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t M^{-1} A(\mathbf{U}^n) \quad (4.44)$$

- $\Theta \neq 0$: **Implizites Zeitschritt-Schema** Die Lösung muß selbstkonsistent zum Zeitpunkt t^{n+1} als Lösung eines linearen Gleichungssystems gesucht werden, was eine approximative Linearisierung des in den Variablen \mathbf{U} nichtlinearen Operators A erfordert:

$A(\mathbf{U}) \sim A_L \mathbf{U}$ (Jacobi-Matrix).

Das resultierende Gleichungssystem hat dann die Form:

$$\left\{ \frac{M}{\Delta t} - \Theta A_L \right\} \mathbf{U}^{n+1} = \left\{ \frac{M}{\Delta t} - \Theta A_L \right\} \mathbf{U}^n + A(\mathbf{U}^n)$$

und kann durch Inversion der zusammengesetzten Matrix gelöst werden. Die größte Schwierigkeit dieser Methode liegt in der Linearisierung der Transport- oder Quellterme. Versucht man diese Linearisierung in einer analytischen Näherung, so ist eine genaue Kenntnis der Abhängigkeiten vom Variablenvektor \mathbf{U} Voraussetzung, die vor allem für die Quellterme oft nicht gegeben ist. Es bleibt also nur die Alternative, die Jacobi-Matrix für jeden Zeitschritt numerisch zu bestimmen, was mit hohem Speicheraufwand verbunden und im Verlauf der Rechnung nur schwer auf seine Richtigkeit hin überprüfbar ist.

Wie man schon aus dieser kurzen Darstellung sieht, ist die implizite Methode sehr viel schwieriger zu handhaben als das explizite Verfahren. Sie hat allerdings den Vorteil für $\Theta > \frac{1}{2}$ unabhängig von der Wahl des Zeitschrittes stabil zu sein.

Das explizite Schema hingegen ist labil, d.h. der maximal mögliche Zeitschritt Δt ist durch das Courant-Friedrich-Lewy-Kriterium beschränkt. Die Transportkoeffizienten und Quellterme müssen nach jedem Zeitschritt neu berechnet und angepaßt werden. Daher ist die obere Grenze für den Zeitschritt ungefähr die Zeit, die der schnellste Transportprozeß braucht, um Veränderungen der Variablen von einem Knoten zum anderen zu übertragen (\rightarrow *Stabilität des expliziten Zweischrittverfahrens*).

Trotz dieser drastischen Einschränkung wurde das explizite Verfahren gewählt, weil es durch seine einfache Struktur eine Einsicht in die Dynamik der Gleichungen ermöglicht, und dadurch zu einem verbesserten Verständnis der physikalischen Vorgänge in der Plasmarandschicht führt. Außerdem sind die durchzuführenden Operationen sehr viel weniger kompliziert als in der impliziten Formulierung und kommen so der Architektur vieler Computer entgegen, sodaß höhere Rechengeschwindigkeiten erzielt werden können.

Hat man sich nun für eine explizite Zeitentwicklung entschieden, so läßt sich zeigen, daß das resultierende Gleichungssystem zu einem zeitlich vorwärts und räumlich zentral diskretisierten Finite Differenzen Schema äquivalent ist [119]. Von diesem Verfahren ist bekannt, daß es in konvektiv dominierten Problemen oft nicht zu stabilen Lösungen führt [120].

Daher wurde von Donea [121] aus dem klassischen Lax-Wendroff Schema [123] ein Zweischrittverfahren für finite Elemente hergeleitet, das im Rahmen der Zeitschrittsbeschränkung stabile Lösungen liefert. Dies wird bewirkt durch ein Prädiktor-Korrektor Verfahren, das einem "hybrid scheme" in finite Differenzen Algorithmen vergleichbar ist [110, 121]:

Im Prädiktorschritt wird die Entwicklung des Systems für einen halben Zeitschritt im Voraus berechnet. Die so gefundenen Werte sind Grundlage für die im Korrektorschritt durchgeführten Operationen. So werden vorhandene Gradienten im ersten Teilschritt soweit abgeschwächt, daß im zweiten Schritt die resultierenden Diffusionsströme im richtigen Verhältnis zu den konvektiven Strömen stehen. Für eindimensionale Konvektions-Diffusions Probleme läßt sich durch Vergleich mit analytischen Rechnungen zeigen, daß man mit dieser Methode stabile und exakte Lösungen der Gleichungen erhält [110, 121].

Außerdem erzeugt das Donea-Verfahren, wie alle Verfahren höherer Ordnung, nur wenig "numerische" Diffusion [121, 122], d.h. Strömungen werden räumlich kaum verschmiert, auch wenn die Richtung der Strömungsgeschwindigkeit nicht parallel zum Rechengitter orientiert ist (\rightarrow *numerische Diffusion*).

Am Beispiel der allgemeinen Form der Navier-Stokes-Gleichungen wird das Zweischrittverfahren erläutert. Die Gleichungen werden dazu in der konservativen Form aufgeschrieben, wie es in einem früheren Kapitel erläutert wurde.

(\rightarrow *Die allgemeinen Fluidgleichungen in konservativer Form*)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = S_U \quad (4.45)$$

Für die Strömungsvariable wird eine Taylorreihenentwicklung bis zur zweiten Ordnung nach der Zeit durchgeführt:

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \frac{\partial U^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 U^n}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \quad (4.46)$$

Die Gleichung (4.46) läßt sich auch in folgender Form schreiben:

$$U^{n+1} - U^n = \Delta U = \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \left(U^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial U^n}{\partial t} \right) + O(\Delta t^3) \quad (4.47)$$

Der Klammerausdruck in Gleichung (4.47) kann als $U^{n+\frac{1}{2}}$ aufgefaßt werden:

$$U^{n+\frac{1}{2}} = U^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial U^n}{\partial t} \quad (4.48)$$

Damit wird (4.47) unter Vernachlässigung des Restgliedes zu:

$$\Delta U = U^{n+1} - U^n = \Delta t \frac{\partial}{\partial t} U^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.49)$$

Nach Umstellung der Gleichung (4.45) können in (4.48) und (4.49) die Zeitableitungen durch Ortsableitungen ersetzt werden. Es ergibt sich der **Prädiktorsschritt** :

$$U^{n+\frac{1}{2}} = U^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial F^n}{\partial x} + \frac{\partial G^n}{\partial y} - S^n \right) \quad (4.50)$$

Durch Einsetzen der Lösung $U^{n+\frac{1}{2}}$ in F, G, und S erhält man den **Korrektorsschritt**:

$$\Delta U = -\Delta t \left(\frac{\partial F^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + \frac{\partial G^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} - S^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (4.51)$$

Zur Berechnung der Ortsableitungen in (4.50) und (4.51) wird das im vorigen Abschnitt beschriebene Finite Elemente Verfahren verwendet.

Es wird zunächst der **Prädiktorsschritt** betrachtet. Man integriert die Gleichung (4.50) elementweise ohne Berücksichtigung der Randintegrale, d.h. ohne partielle Integration und erhält das Gleichungssystem:

$$M_{El} \begin{pmatrix} U_1^{n+\frac{1}{2}} \\ U_2^{n+\frac{1}{2}} \\ U_3^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \quad (4.52)$$

$$M_{El} \begin{pmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \end{pmatrix} - \frac{\Delta t}{2} \left\{ K_{El,x}^T \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} + K_{El,y}^T \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} - M_{El} \begin{pmatrix} S_1^n \\ S_2^n \\ S_3^n \end{pmatrix} \right\}$$

Dabei sind M_{El} , $K_{El,x}^T$ und $K_{El,y}^T$ die in (4.34), (4.35) und (4.36) berechneten Matrizen, bzw. ihre Transponierten. Die Transponierung von $K_{El,x}$ und $K_{El,y}$ ist notwendig, da der Wegfall der partiellen Integration nach Gleichung (4.7) zu einem Indexwechsel in diesen Matrizen führt.

Eine exakte Berechnung der Knotenwerte ist im Prädiktorschritt nicht notwendig, da im Korrektorschritt nur Elementmittelwerte U_e von Bedeutung sind. Sie ergeben sich durch Summation der drei Vektorgleichungen (4.52).

Die Gleichung hat dann die einfache Gestalt:

$$\begin{aligned} U_e^{n+\frac{1}{2}} &= U_e^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial F^n}{\partial x} + \frac{\partial G^n}{\partial y} - S^n \right)_e \\ U_e^n &= \sum_{i=1}^3 \frac{U_i^n}{3} \\ \left(\frac{\partial F^n}{\partial x} + \frac{\partial G^n}{\partial y} - S^n \right)_e &= \sum_{i=1}^3 \left(b_i \cdot F_i^n + c_i \cdot G_i^n - \frac{S_i^n}{3} \right) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Hierbei sind b_i und c_i die in Gleichung (4.13) hergeleiteten Ausdrücke.

Im Prädiktorschritt enthalten die Flußvektoren F und G nur die konvektiven Anteile. Diese Näherung stabilisiert das numerische Verfahren sowohl für konvektiv dominierten als auch für diffusionsbestimmten Transport. Der Prädiktorschritt entspricht anschaulich einer Bilanzierung der konvektiven Flüsse an den Knoten jedes Elementes.

Einige abhängige Größen, wie z.B. der Druck und die Transportkoeffizienten, werden mit den Variablenwerten nach dem Prädiktorschritt neu bestimmt.

Mit diesen Werten und den Elementmittelwerten der Variablen $U_e^{n+\frac{1}{2}}$ lassen sich alle diffusiven Terme neu berechnen. Sie werden zu den konvektiven Flüssen aus dem Prädiktorschritt addiert und ergeben so die Gesamtflüsse $F_e^{n+\frac{1}{2}}$ und $G_e^{n+\frac{1}{2}}$. Die Quellterme S^n werden nicht neu berechnet, da sie nicht in einfacher Form von den Strömungsvariablen abhängen.

Die Gleichung (4.51) wird mit dem Galerkin-Verfahren integriert und unter Nutzung des Green'schen Satzes umgeformt.

Man erhält den **Korrektorschritt**:

$$\begin{aligned} \sum_e^{N_{El}} M_e \begin{pmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \end{pmatrix} &= \Delta t \sum_e^{N_{El}} \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} F_e^{n+\frac{1}{2}} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} G_e^{n+\frac{1}{2}} + M_e \begin{pmatrix} S_1^n \\ S_2^n \\ S_3^n \end{pmatrix} \right] \\ &+ \Delta t \sum_{re}^{N_{RandEl}} \left[R_{re,x} F_{re}^{n+\frac{1}{2}} + R_{re,y} G_{re}^{n+\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \quad (4.54)$$

Anschaulich bedeutet der Korrektorschritt für jeden Knoten eine Bilanzierung der Flüsse aus den umliegenden Elementen. Die Randintegrale im Gleichungssystem (4.54) vervollständigen die Bilanzen für die Randknoten.

Das aufgestellte Gleichungssystem läßt sich in einfacher Form schreiben als

$$\sum_e^{N_{El}} M_{El} \Delta U_e = \sum_e^{N_{El}} \Delta t R S_e \quad \text{mit} \quad R S_e = R S_e(U^n) \quad (4.55)$$

Führt man die formale Summation über die Elemente aus und summiert alle Teilintegrale, die Beiträge zu einem bestimmten Knoten liefern, erhält man das Gesamtgleichungssystem für die Knoten:

$$M \Delta U = \Delta t R S \quad \text{mit} \quad R S = R S(U^n) \quad (4.56)$$

Die Lösung erhält man durch Invertierung der Gesamtmassenmatrix M . Diese Matrix ist von der hohen Dimension $N_{Kn} \times N_{Kn}$ und ist bei unstrukturierten Netzen unregelmäßig besetzt.

Grundsätzlich wird daher bei der numerischen Behandlung zu unterscheiden sein zwischen direkten Lösungsmethoden, die auf der sukzessiven Elimination der Unbekannten nach dem Prinzip von Gauß beruhen und den iterativen Prozessen, die die gesuchte Lösung als Grenzwert einer Folge von Näherungen bestimmen. Die Eliminationsverfahren erfordern die Speicherung der Massenmatrix und der rechten Seite, weil im Verlauf des Algorithmus mehrmals auf diese Werte zugegriffen werden muß. Die Iterationsverfahren sind wenig speicherintensiv, durch geschickte Programmierung kann man sogar die Operationen für jeden Knoten unabhängig von allen anderen Knoten durchführen. Man benötigt jedoch mehrere Iterationen $\sim (3-10)$ pro Zeitschritt, um zu einer konvergierten Lösung zu gelangen. Das bedeutet jedoch nicht unbedingt einen höheren Bedarf an Rechenzeit, da iterative Löser sehr gut vektorisieren, während selbst optimierte direkte Solver aufwendige Matrixoperationen durchführen müssen.

Die Auswahl des günstigsten Verfahrens ist daher sowohl von der Struktur der betrachteten Gleichungen abhängig, als auch von der Komplexität des Berechnungsgebietes, die die Besetzung der "Massenmatrix" M direkt beeinflusst.

Wählt man einen direkten Löser, so sollte die Numerierung der Knoten so optimiert werden, daß in jedem Element der Abstand der Knotennummern so klein wie möglich gemacht wird. Gehören nämlich Knoten i und j zu einem Element, so ist in der Matrix M Element $\{i, j\}$ besetzt. Den maximalen Abstand zwischen i und j unter den besetzten Matrixelementen M_{ij} nennt man die Bandbreite der Matrix. Bei geringer Bandbreite ist sowohl die Speicherung der Matrix als auch ihre Invertierung rationeller.

Zur Umnummerierung der Knoten wird eine rekursive Methode, ein **back tracking Algorithmus** benutzt, der iterativ die günstigste Konfiguration sucht. Eine so strukturierte Matrix läßt sich sehr effektiv durch eine unvollständige LU-Zerlegung invertieren, wie sie in vielen Programmbibliotheken angeboten wird.

Es hat sich gezeigt, daß eine iterative Inversion der Massenmatrix in den meisten Fällen sehr viel effektiver arbeitet; sie wird daher im Programm verwendet. Für dieses Verfahren muß keine Gesamtmassenmatrix aufgestellt werden, sondern alle Operationen können mit Vektoren durchgeführt werden. Dadurch ist auch die Bandbreitenoptimierung nicht mehr notwendig, und zusätzlich wird durch geringeren Speicherplatzbedarf und vektorisierende Operationen die Recheneffektivität erhöht.

Dieses Iterationsverfahren wird in Grundzügen in der Arbeit von Donea [121] erklärt, eine explizite Anwendung auf die Elementmatrixgleichung (4.55) führt zu folgendem Berechnungsschema für ΔU_{K_n} :

1. Die Elementmassenmatrix wird in eine Diagonalmatrix transformiert
Die Diagonalelemente dieser "Lumped" Matrix M_L berechnen sich durch Summation aller Zeilenelemente der Elementmatrix:

$$M = \frac{\Delta E l}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M_L = \frac{\Delta E l}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

2. Es wird mit der Matrix M_L eine erste Näherungslösung für jeden Knoten bestimmt

$$\Delta U_{K_n}^1 = \sum_e^{N_{El}} \frac{\Delta t R S_e}{M_L} = \sum_e^{N_{El}} \frac{\Delta t R S_e}{\left(\frac{\Delta E l}{3}\right)} \quad (4.58)$$

3. Aus jeder Näherungslösung kann durch Einsetzen in eine Matrixgleichung die Näherung nächster Ordnung berechnet werden.

$$\begin{aligned} \Delta U^{n+1} &= \Delta U^n + \sum_e^{N_{El}} \frac{\Delta t R S_e - M_{El} \Delta U^n}{M_L} \\ &= \Delta U^n + \sum_e^{N_{El}} \left\{ \frac{\Delta t R S_e}{\left(\frac{\Delta E l}{3}\right)} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Delta U^n \right\} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Dieses Schema führt nach drei bis vier Iterationen zu genügend genauen Werten für ΔU_{K_n} , sodaß damit $U_{K_n}^{n+1}$ berechnet werden kann.

Verzichtet man auf die Zeitgenauigkeit des Verfahrens und sucht nur die stationäre Lösung eines Problems, kann man sich auf den ersten Schritt der Iteration beschränken und berechnet aus ΔU^1 die neue Lösung U^{n+1} . Diese Methode ist numerisch sehr einfach und schnell und wird daher in der Entwicklungsphase des Programms benutzt, um Fehler im Lösungsalgorithmus eliminieren zu können. Der Zeitschritt Δt hat zwar dann nur noch die Bedeutung einer Iterationsvariablen, seine Größe ist aber für die Stabilität des Algorithmus von enormer Bedeutung.

4.3.5 Stabilität des expliziten Zweischrittverfahrens

Da für die zeitliche Diskretisierung ein explizites Schema verwendet wird, ist der maximal mögliche Zeitschritt Δt durch das Courant-Friedrich-Lewy-Kriterium beschränkt. Dieses Kriterium ergibt sich aus einer Stabilitätsanalyse des Algorithmus, die am Beispiel der eindimensionalen linearisierten Konvektions-Diffusionsgleichung (Burgers-Gleichung) durchgeführt wird:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} = D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (4.60)$$

Hierbei ist a die konvektive Transportgeschwindigkeit der Größe U und D der Diffusionskoeffizient mit der Dimension $\frac{(\text{Länge})^2}{\text{Zeit}}$. Die Anwendung des in den vorigen Abschnitten erläuterten Verfahrens liefert für einen beliebigen aber festen Punkt j eine analytische Beziehung zwischen der zeitlichen Änderung ΔU_j und dem Funktionswert U_j . Numerisch stabil und physikalisch sinnvoll ist die Lösung nur dann, wenn in jedem Zeitschritt die Änderung der Variable U_j kleiner ist als der Wert von U_j selbst:

$$\left| \frac{\Delta U_j}{U_j} \right| \leq 1 \quad (4.61)$$

Der maximale Zeitschritt Δt bei einer räumlichen Gitterweite δx zwischen den Knoten j und k ergibt sich für die Burgers-Gleichung (4.60):

- bei Anwendung eines exakten Matrixlösers:

$$\frac{\delta x}{2}(\Delta U_j - \Delta U_k) \approx \frac{\Delta t}{\delta x} \left(D + \frac{a^2 \Delta t}{2} \right) \cdot 3(U_k - U_j) \quad (4.62)$$

Das ergibt nach Anwendung des Stabilitätskriteriums (4.61) eine Zeitschrittbeschränkung:

$$\Delta t \leq \frac{D}{a^2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{P^2}{3}} \right) \quad \text{mit} \quad P = \frac{a \delta x}{D} \quad (4.63)$$

P definiert in dieser Gleichung die Péclet-Zahl des Gitters, d.h. das Verhältnis von konvektivem zu diffusivem Fluß in einer Zelle.

- bei Anwendung einer näherungsweisen Matrixlösung:
("lumped" Matrix)

$$\frac{\delta x}{2}(\Delta U_j) = -\frac{\Delta t}{\delta x} \left(D + \frac{a^2 \Delta t}{2} \right) \cdot 2 U_j \quad (4.64)$$

gleichbedeutend mit

$$\Delta t \leq \frac{D}{a^2} \left(-1 + \sqrt{1 + P^2} \right) \quad (4.65)$$

In den Fällen, in denen nur stationäre Lösungen gesucht sind, wird im Allgemeinen diese Formel gelten.

Durch Betrachtung von Grenzfällen läßt sich der physikalische Hintergrund dieser Zeitschrittbeschränkung näher beleuchten.

Im Falle von konvektionsbestimmtem Transport ist die Péclet-Zahl sehr groß und alle anderen Terme können vernachlässigt werden:

$$P \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta t \leq \frac{\delta x}{a} \quad (4.66)$$

Das gefundene Δt muß also kleiner sein als die Zeit, die der konvektive Transport über die Zellausdehnung δx benötigt.

Für diffusionsbestimmten Transport ist die Péclet-Zahl sehr klein und der Wurzelausdruck kann entwickelt werden:

$$P \ll 1 \implies \Delta t \leq \frac{(\delta x)^2}{2D} \quad (4.67)$$

Dies ist die charakteristische Zeit für einen diffusiven Transport über die Länge δx . Der Zeitschritt muß also so klein gemacht werden, daß der numerische Informationstransport von einem Knoten zum anderen schneller oder zumindest genauso schnell ist wie der physikalische Transport. Instabil wird das System, wenn die numerische Methode nur Informationen von Nachbarknoten verarbeitet, obwohl der physikalische Prozeß in der Zeit Δt auch Beiträge von weiter entfernten Knoten liefert.

4.3.6 Implementierung der Randbedingungen in der FEM

Sucht man eine zeitabhängige Lösung der Strömungsgleichungen, so sind zur vollständigen Beschreibung des Problems sowohl Randbedingungen als auch geeignete Anfangsbedingungen notwendig.

Die Wahl der Anfangsbedingungen richtet sich danach, ob eine Zeitentwicklung berechnet werden soll oder nur eine stationäre Lösung gesucht wird.

Für zeitabhängige Rechnungen muß eine physikalisch sinnvolle Anfangslösung gewählt werden, da nicht nur das Endergebnis, sondern vor allem der Relaxationsprozeß selbst von Interesse ist.

Sucht man nur eine stationäre Lösung, wird man eine Anfangsverteilung wählen, von der man glaubt, daß sie der Lösung sehr nahe kommt. Dadurch läßt sich die für eine konvergierte Lösung benötigte Rechenzeit klein halten.

Wichtiger als die Anfangsbedingungen sind die Randbedingungen an den Grenzen des Rechengebietes. Diese Grenzen unterscheidet man nach Ein- und Ausströmrändern und strömungsführenden Berandungen. Darüber hinaus kann durch die Definition von periodischen Rändern die Symmetrie eines Problems ausgenutzt werden und exemplarisch nur ein Teilgebiet herausgegriffen werden, das die Gesamtlösung vollständig charakterisiert.

Je nach Art der Berandung werden auch die Randbedingungen unterschiedlich gewählt. Man ist jedoch durch den Typ der Differentialgleichung auf eine bestimmte Anzahl in jeder Richtung beschränkt. Welche Größen man am günstigsten festlegt, läßt sich für lineare Gleichungssysteme aus der Charakteristikentheorie [125, 126] bestimmen. Hier versucht man die elementaren Transportprozesse und die zugehörigen transportierten Größen durch Diagonalisierung der gekoppelten Gleichungen zu finden. Für nichtlineare Gleichungssysteme sind solche Eigenwerte und Eigenvektoren nur in linearer Näherung zu finden und die Eigenvektoren können imaginär werden. [127, 128] Man wendet daher das einfachere Verfahren an, Variablen nach ihren charakteristischen Transportprozessen und -zeiten zu entkoppeln.

(→ *Vergleich der charakteristischen Transportzeiten in der Randschicht*)

Daraus ergeben sich dann die Größen, die man zur eindeutigen Lösung des Problems auf den Rändern festlegen muß.

Freiheit hat man noch insofern, daß man

- die Größen selbst im Randpunkt fixiert
(Dirichlet-Randbedingung, Randbedingung 1.Art),
- ihre Ableitung auf dem Rand definiert
(v. Neumann-Randbedingung, Randbedingung 2.Art),
- oder aber eine Kombination beider Typen wählt
(Cauchy-Randbedingung, Randbedingung 3.Art) [129].

Dirichlet-Randbedingungen sind sehr einfach dadurch zu realisieren, daß nach jedem Iterationsschritt die Knotenwerte am Rand auf den gewünschten Wert für die Variable zurückgesetzt werden.

Von-Neumann-Randbedingungen werden im Finite-Elemente-Verfahren konsistent mit einbezogen. Durch die Anwendung des Green'schen Satzes im Integralformalismus ergeben sich in den Gleichungen Randintegrale, die die Ableitungen der Größen, die man vorgeben will, enthalten. In Finite Differenzen/Volumen Verfahren sind für die Implementierung dieser zusätzlichen Beiträge zu den Randknoten externe Zellen notwendig. Cauchy-Randbedingungen zu formulieren ist numerisch nur iterativ möglich. Man berechnet den Startwert der Variablen so, daß unter Berücksichtigung der Funktionswerte in den Nachbarknoten die Linearkombination aus Funktionswert und Ableitung die Randbedingung erfüllen. Im nächsten Iterationsschritt werden die Variablen der inneren Knoten auf diese Randbedingung reagieren und die Ableitungen werden sich verändern. Deshalb ist eine neue Berechnung nach jeder Iteration notwendig und muß so lange durchgeführt werden, bis eine stationäre Lösung erreicht ist.

4.3.7 Lösungsabhängige Netzverfeinerung in Dreiecksnetzen

Da die effektivste Gittereinteilung auf einem Integrationsgebiet stark von der Lösung selbst abhängt, ist es wünschenswert, die lokale Knotendichte lösungsabhängig steuern zu können.

Die Netzverfeinerung geschieht dabei auf folgende Weise: Zunächst wird auf einem groben Gitter eine Strömungsberechnung durchgeführt. Bedingt durch die großen Elemente des Startnetzes kann auch der Zeitschritt relativ groß gewählt werden.

(→ *Stabilität des expliziten Zweischrittverfahrens*)

Darüber hinaus ist auch die Knoten- und Elementanzahl gering, sodaß eine stationäre Lösung mit geringem Rechenaufwand gefunden werden kann. Diese Lösung liefert bereits für das Strömungsfeld den Gesamtmassenstrom und erfüllt die gewünschten Randbedingungen. Lediglich in Bereichen, wo Gradienten der Strömungsvariablen sich stark ändern - die Funktion also nicht "glatt" verläuft -, wird die Auflösung der Startlösung nicht ausreichend sein.

Nach solchen Bereichen wird durch Festlegung eines Indikators gesucht und die Dreiecke in diesen Zonen werden in je zwei oder vier kleinere Elemente aufgeteilt. Die neu erzeugten Dreiecke und Knoten erhalten Nummern und die Werte der Strömungsvariablen an diesen Punkten werden aus der Startlösung linear interpoliert. Die dann auf dem verfeinerten Gitter durchgeführte Rechnung muß rasch konvergieren, da nur

noch in den verfeinerten Elementen eine exakte Lösung zu berechnen ist. Bei schlechter Konvergenz ist das ein Hinweis darauf, daß die Ausgangslösung nicht nahe genug am stationären Zustand lag. Insofern ist die Verfeinerung auch eine empfindliche Methode, die Qualität der Startlösung zu kontrollieren.

Ein geeigneter Indikator für die Netzverfeinerung läßt sich aus folgenden Forderungen ableiten [130]:

- Der Indikator sollte aus den Variablenwerten leicht und schnell berechenbar sein
- Der Indikator sollte dimensionslos sein, da mehrere Strömungsgleichungen mit entsprechend vielen Variablen gelöst werden und eine Verfeinerung nach jeder Variable möglich sein sollte.
- Der Indikator sollte normierbar sein, sodaß er auf eine möglichst große Anzahl von Problemen angewendet werden kann, unabhängig vom speziellen Aussehen der Lösung.

Eine mögliche Wahl des Indikators ist der lokale Fehler, der sich aus der Differenz zwischen der exakten Lösung U und der Approximation \hat{U} berechnet. Dieser Fehler $\|U - \hat{U}\|$ läßt sich über eine Sobolev Norm [132] abschätzen:

$$\|U - \hat{U}\| \leq C h^2 |U|_2 \quad (4.68)$$

C ist eine Konstante, die weder von der Geometrie noch von der Lösung abhängt, h eine charakteristische Länge im Element. Für $|U|_2$ wurde speziell die H^2 -Seminorm gewählt, da sie bei Verwendung von linearen Ansatzfunktionen nach partieller Integration noch berechenbar ist [133]:

$$\begin{aligned} |U|_2 &= \sqrt{\int_{\Omega} \sum_{k=0}^2 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^k \partial y^{(2-k)}} \right]^2 d\Omega} \\ &= \sqrt{\sum_{k=0}^2 \left[\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x^k} \frac{\partial N_j}{\partial y^{(2-k)}} \right) d\Omega U_j \right]^2} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Normiert und gleichzeitig dimensionslos wird dieser Ausdruck, indem man ihn auf den Absolutwert des Integrals in der Seminorm bezieht. Es ergibt sich also für den Interpolationsfehler Err_i an jedem Knoten i :

$$Err_i = \sqrt{\frac{\left[\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x^k} \frac{\partial N_j}{\partial y^{(2-k)}} \right) d\Omega U_j \right]^2}{\sum_{k=0}^2 \left[\int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial N_i}{\partial x^k \partial y^{(2-k)}} \right| \left| \frac{\partial N_j}{\partial x^{(2-k)} \partial y^k} U_j \right| \right) d\Omega \right]^2}} \quad (4.70)$$

Diese Fehlergröße erfüllt nun alle Forderungen; sie ist mit den gespeicherten Werten der Ansatzfunktionen, bzw. ihrer Ableitungen einfach zu berechnen, kann für jede Strömungsvariable aus einer Zwischenlösung erzeugt werden und ist beschränkt ($0 \leq Err_i \leq 1$).

Programmtechnisch wird die Netzverfeinerung so realisiert, daß auf jeder Elementseite der Mittelwert aus den berechneten Fehlern der beiden Knoten gebildet wird. Liegt dieser Fehler über einer vorher festgelegten Schranke, so wird die Seite durch einen neuen Knoten halbiert. Diese Prozedur wird für alle Seiten wiederholt und die neu entstandenen Elemente und Knoten anschließend durchnummeriert.

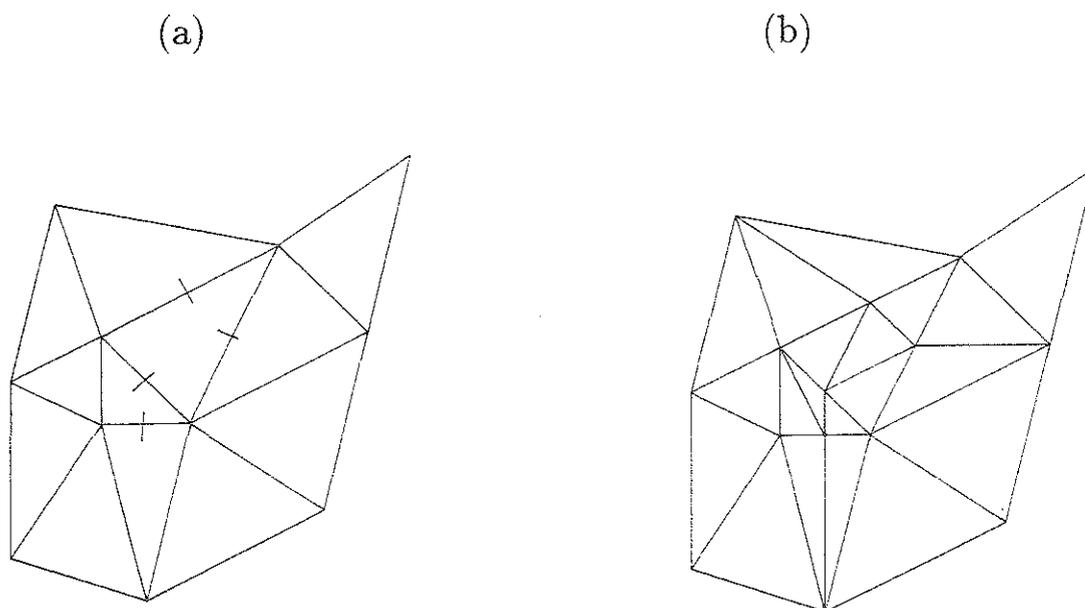


Abbildung 4.4: Ausgangsnetz mit markierten Seiten, die verfeinert werden sollen (a) und Netz nach der Verfeinerung (b)

Um eine gute Auflösung aller Gradienten zu erreichen, muß der Verfeinerungszyklus zwei- bis dreimal durchlaufen werden. Man hat zusätzlich in jedem Zyklus die Optionen, entweder eine bestimmte Fehlerschranke vorzugeben oder eine Elementanzahl anzugeben, auf die verfeinert werden soll. Der Algorithmus benötigt etwa die Rechenzeit von einigen Zeitschritten des Navier-Stokes-Programms, sodaß der Einfluß auf die Gesamtrechenzeit vernachlässigbar ist.

Anzumerken ist allerdings, daß die neuen Elemente und Knoten fortlaufend vom alten Gitter ausgehend weiternummeriert werden. Daher sollte bei Benutzung eines direkten Matrixlösers jedem Verfeinerungsschritt eine Optimierung der Matrixbandbreite folgen. Diese Umnnummerierung kann bei Anwendung eines iterativen Verfahrens eingespart werden, da alle Operationen nacheinander für jedes Element durchgeführt werden, und die Elementnumerierung auf die Rechnungen keinen Einfluß hat.

Kapitel 5

Das FEM-Modell in der Randschicht von TEXTOR

5.1 Das Rechengebiet

5.1.1 Die Berechnung der magnetischen Konfiguration

Zur Berechnung der magnetischen Konfiguration einer Ohm'schen Entladung in TEXTOR wurde das Plasmagleichgewichtsprogramm CATI benutzt [20, 21]. Es löst die Grad-Shafranov Gleichung numerisch und liefert als Ergebnis Stärke und Richtung des Magnetfeldes entlang bestimmter Geraden und die Kontur der Flußflächen.

Vorgegeben wurden typische Profile für Strom, Dichte und Temperatur [134]:

$$\begin{aligned}j(r) &= j_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^3 \\n(r) &= n_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^3 \\T(r) &= T_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^2\end{aligned}$$

und die Parameter:

$$\begin{aligned}\text{Flußflächenradius außen} &: a = 0.462m \\ \beta_{pol} \text{ außen} &: \beta_{pol} = 0.2 \\ \text{Plasmagesamtstrom} &: I = 400kA\end{aligned}\tag{5.1}$$

Das Toroidalfeld wird mit dem reziproken großen Radius abfallend angenommen:

$$B_{tor} = \frac{B_0 R_0}{R} = \frac{3.5}{(R/m)} \text{Tesla}\tag{5.2}$$

Ein Resultat dieser Rechnung sind annähernd kreisförmige Flußflächen. Die relative Änderung des Radius für unterschiedliche poloidale Winkel ist kleiner als 2% und damit in der Größenordnung der Diskretisierung des Rechengebietes. Man erhält eine

Shafranov-Shift von:

$$\Delta_{Sh}(r) = -2.051r^3 + 1.991r^2 - 0.756r + 0.126 \quad (5.3)$$

wobei alle Größen in der Einheit m anzugeben sind.

Die Konfiguration ist so gewählt, daß die Flußfläche zu $r = a$ den Mittelpunkt $(R, z) = (1.750m, 0.000m)$ hat.

Für die magnetische Achse findet man die Koordinaten $(R, z) = (1.7865m, 0.000m)$.

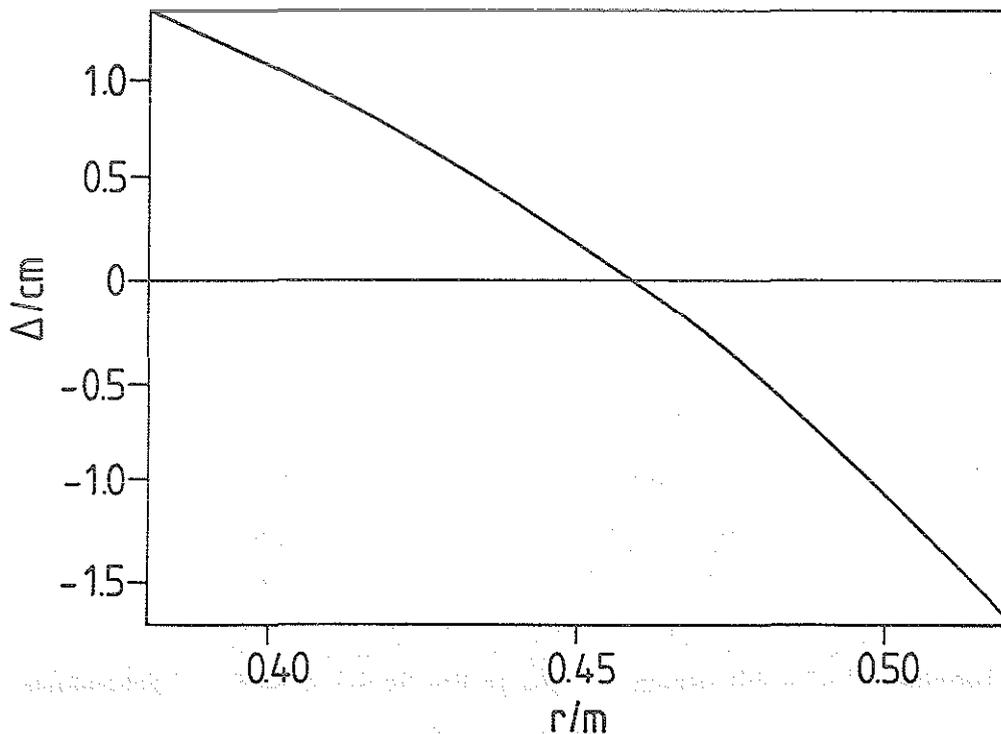


Abbildung 5.1: Shafranov-Shift Δ in Abhängigkeit vom Flußflächenradius r

Über eine nichtlineare Interpolation wird das numerisch berechnete Poloidalfeld mit kleinstem quadratischem Fehler an die analytische Formel aus Gleichung (2.33) angepaßt:

$$B_{\theta}(r, \theta) = \frac{\mu_0 I_{ges}}{2\pi R} \cdot f_1 \left(\frac{R_0}{r} - \frac{\cos\theta}{2} \frac{r}{a} \cdot f_2 \right) \quad (5.4)$$

Für die Interpolationsfunktionen erhält man die Abhängigkeiten:

$$f_1(r) = -5.4551r^2 + 5.4287r - 0.3540 \quad (5.5)$$

$$f_2\left(\frac{a}{r}\right) = 55.22 - 120.48\frac{a}{r} + 117.43\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 40.23\left(\frac{a}{r}\right)^3 \quad (5.6)$$

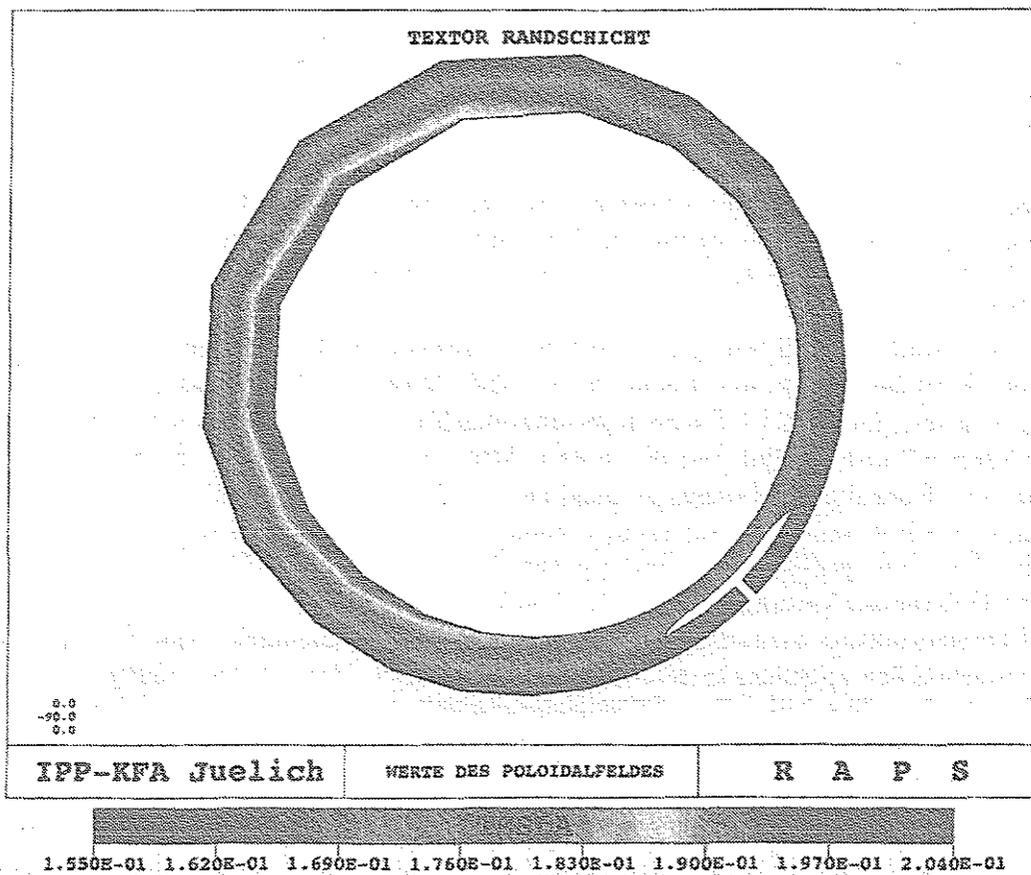


Abbildung 5.2: Das poloidale Magnetfeld in der Randschicht von TEXTOR

5.1.2 Die Generation eines Rechengitters

Das Rechengitter wird in seiner Struktur an die Flußflächen angepaßt. Die radiale Unterteilung basiert auf verschobenen Kreisen. Beginnend bei einer Flußfläche mit $r = 0.4m$ wird der Radius um jeweils einen Zentimeter erhöht und der Mittelpunkt entsprechend der Shafranov-Shift berechnet. Die äußere Flußfläche hat einen Radius von $r = 0.5m$.

Die Kontur des toroidalen Pumplimiters wird nach den Auslegungsrechnungen [135] modelliert. Der "Limiterboden" verläuft exakt auf einer Flußfläche mit dem Radius $r = 0.462m$ (Für diese Fläche verschwindet die Shafranov-Shift). Die innere Kontur liegt bei etwa $0.445m$, wird aber, durch die Shafranov-Shift bedingt, von Flußflächen geschnitten.

In poloidaler Richtung verkürzt man die Seitenlängen der Elemente zum Limiter hin, sodaß die Dreiecke in der Symmetrieebene viermal so lang sind wie an der Limiterspitze. Dies trägt dem erwarteten Verlauf der Profile aller Variablen Rechnung, die sich am Limiter stark ändern, während sie weit weg davon entlang der poloidalen Koordinate nahezu konstant sind. Um den Limiter herum wird die Länge der Elementseiten noch einmal um einen Faktor zwei verkleinert. Dies ist die Ausgangsgeometrie, auf der die Strömungssimulation beginnt.

Durch die Bestimmung des Flußflächenradius und der Shafranov-Shift kann jedem Punkt die Stärke von toroidalem und poloidalem Magnetfeld zugeordnet werden. Damit können die Größen b_θ , b_ϕ und der Einheitsrichtungsvektor des Feldes berechnet werden.

Um die Strömungsberechnung durchführen zu können, werden die allgemeinen Koordinaten (R, z) der Knoten und Elemente auf lokale Magnetfeldkoordinaten transformiert, d.h. in jedem Element wird eine Koordinatenachse entlang der poloidalen Projektion des Magnetfeldes gewählt und die andere Achse orthogonal hierzu. Eine solche lokale Wahl des Koordinatensystems ist möglich, da die Lösung der Differentialgleichungen nach dem FEM-Verfahren auf Elementebene geschieht. Damit wird die globale Transformation einer gegebenen Geometrie auf ein orthogonales Rechtecknetz, wie es für finite Differenzen Verfahren nötig ist, überflüssig.

Die Transformation wird so durchgeführt, daß man im Elementschwerpunkt den Winkel θ_S zwischen den allgemeinen Koordinaten (R_S, z_S) und den lokalen Magnetfeldkoordinaten (x_S, y_S) berechnet und anschließend die Zelle um diesen Winkel dreht.

Die neuen Koordinaten des Punktes i lauten damit:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta_S & \sin\theta_S \\ -\sin\theta_S & -\cos\theta_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_i - R_s \\ z_i - z_S \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Die lokale Koordinate x wird entlang des Magnetfeldes im Uhrzeigersinn gewählt und die Koordinate y weist nach außen. Damit sind poloidale Vektoren positiv, wenn sie im Uhrzeigersinn gerichtet sind und radiale Vektoren, wenn sie von kleinen nach großen Flußflächenradien orientiert sind.

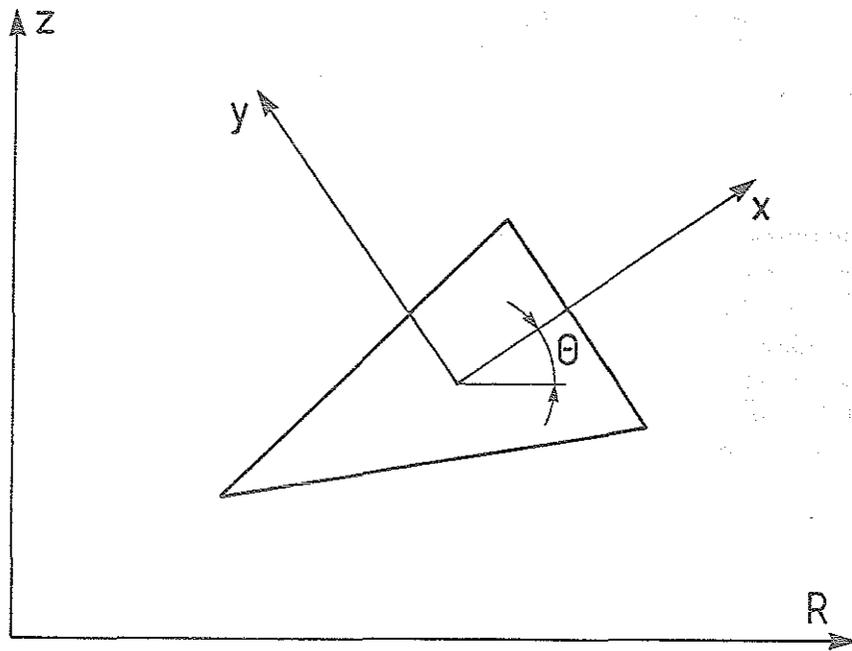


Abbildung 5.3: Transformation der allgemeinen Koordinaten (R, z) in die lokalen Magnetfeldkoordinaten (x, y)

Wenn auf dem Ausgangsgitter eine konvergente Lösung gefunden worden ist, können zur Auflösung starker Gradienten zusätzliche Elemente automatisch generiert werden. Dabei kann man die Variable, deren Gradient ein Maß für die Netzverfeinerung sein soll, frei wählen.

5.1.3 Die Untersuchung der numerischen Diffusion

Die Anpassung des Gitters an die "Struktur" der Flußflächen bedeutet nichts anderes, als daß eine Dreieckseite parallel zur Magnetfeldrichtung gewählt wird. Dadurch hat man auf dieser Seite rein parallelen Transport, während die radialen Flüsse sich auf die zwei anderen Seiten verteilen. Einer unphysikalischen, rein numerisch bedingten Vermischung¹ der beiden Flußkomponenten wird mit solch einer Orientierung des Gitters vorgebeugt. Wie diese "numerische Diffusion" bei einem Rechengitter entsteht, das in einem bestimmten Winkel zur Strömungsrichtung gekippt ist, soll kurz erklärt werden [110].

¹englisch: False Diffusion

Dazu stellt man sich eine rein eindimensionale Strömung in einem zweidimensionalen Gebiet vor, d.h. es existiert in die zweite Richtung keinerlei Bewegungsmöglichkeit. Diese Strömung habe in einem Teilgebiet die Temperatur T_1 und im anderen Gebiet die Temperatur T_2 . In diesem idealisierten Modell dürfte in der Richtung senkrecht zur Strömung kein Ausgleich der Temperaturen stattfinden, da keinerlei Transport erlaubt ist.

Solange das Gitter entlang der freien Bewegung orientiert ist, wird es keinen Austausch mit Nachbarpunkten in senkrechter Richtung geben, denn die Information kann allein über die Knoten entlang der Strömungsrichtung weitergegeben werden.

Kippt man das Gitter jedoch relativ zur Strömungsrichtung, so gibt es auch nächste-Nachbar-Punkte, die nicht mehr auf der Stromlinie liegen. Da aber die Information nur von Knoten zu Knoten weitergegeben werden kann, ergibt sich in diesem Gitter ein rein numerisch bedingter Transport in senkrechter Richtung. Wie groß dieser "künstliche" Transport ist, hängt nicht zuletzt vom numerischen Lösungsverfahren ab. Günstig ist ein Zwei-Schritt-Verfahren, wie es auch in dieser Arbeit angewendet wird, das in einem ersten Schritt eine Testlösung vorausberechnet, auf die dann die alten Variablen mit den entsprechenden Flüssen reagieren. Diese Methoden reduzieren die numerische Diffusion erheblich.[110]

Da auch die Plasmaströmung quasi eindimensional ist - die Transportkoeffizienten unterscheiden sich um einen Faktor $5 \cdot 10^4$ - war es interessant zu untersuchen, welchen Einfluß der Winkel zwischen dem Magnetfeld und einer Elementseite auf das Verhältnis von realer zu numerischer Diffusion hat.

Zur Kontrolle wurden Rechnungen mit einer einfachen Wärmeleitungsgleichung auf strukturierten Dreiecksnetzen durchgeführt. Strukturiert soll hier heißen, daß man von einem Rechtecknetz ausgeht und dann jedes der Rechtecke in zwei Dreiecke unterteilt. Dadurch ist eine exakte Orientierung des Gitters an einer vorgegebenen Richtung leicht möglich.

Es wurden verschiedene Rechnungen mit einer punktförmigen Energiequelle auf der Berandung durchgeführt:

1. Gitter exakt parallel zur Magnetfeldrichtung orientiert und kein Transport senkrecht zum Magnetfeld.
2. Gitter exakt parallel zur Magnetfeldrichtung orientiert und plasmatisches Transportkoeffizienten:

$$\kappa_{\parallel} = 3.9 \frac{nT\tau}{m} \quad (5.8)$$

$$\kappa_{\perp} = 0.6 \frac{m^2}{s} \quad (5.9)$$

wobei $\kappa_{\parallel} \gg \kappa_{\perp}$ ist.

3. Gitter zur Magnetfeldrichtung verkippt mit plasmatischem parallelem Transportkoeffizienten und ohne Transport in senkrechter Richtung

Diese Fälle wurden mit unterschiedlichen Verhältnissen zwischen Elementlänge und -breite wiederholt (1:1; 4:1; 10:1).

Physikalisch sollte von der - bei $t = 0$ eingeschalteten - Punktquelle am Rand ausgehend ein großer Energiestrom parallel zum Feld fließen, sodaß sich nach kurzer Zeit eine nahezu konstante Temperatur in dieser Richtung einstellt. Für die verschiedenen Transportstudien wurde die Änderung dieser Temperatur entlang der senkrechten Richtung für eine feste parallele Koordinate untersucht und jeweils eine charakteristische Abfalllänge berechnet.

Ergebnis der ersten Rechnungen (Fall 1) ist, daß das Verfahren völlig exakt arbeitet, wenn die Richtung des Transportprozesses mit einer Achse des Rechteckgitters übereinstimmt. Es tritt keinerlei numerische Diffusion auf.

Aus den Rechnungen zu Fall 2 ergibt sich nach einer für die Randschicht typischen Zeit von 10^{-2} Sekunden in der Richtung des langsamen Transports eine Gaußverteilung, die als Referenz im Vergleich zu anderen Lösungen benutzt werden kann. Die charakteristische Diffusionslänge variiert dabei um $\pm 5\%$, je nach Wahl von Elementlänge zu -breite. Im Vergleich dazu zeigt die numerische Diffusion bei verkipptem Gitter (Fall 3) ein lineares Profil in Richtung des langsamen Transports, das sich mit zunehmendem Kippwinkel verbreitert.

Untersucht man die Zeitabhängigkeit dieses Prozesses, so erkennt man, daß noch bevor die "echte" physikalische Diffusion zu merklichen Flüssen führt, ein Transport aufgrund rein numerischer Diffusion stattfindet. Die Transportweite wächst in erster Näherung linear mit dem Logarithmus der Rechenzeit. Sie verändert sich damit nur wenig, während die reale Diffusionslänge mit der Wurzel der Rechenzeit ansteigt. Für Zeiten um 10^{-3} Sekunden haben reale und numerische Diffusion die gleiche Größenordnung und erst bei 10^{-2} Sekunden ist der echte physikalische Prozeß dominierend.

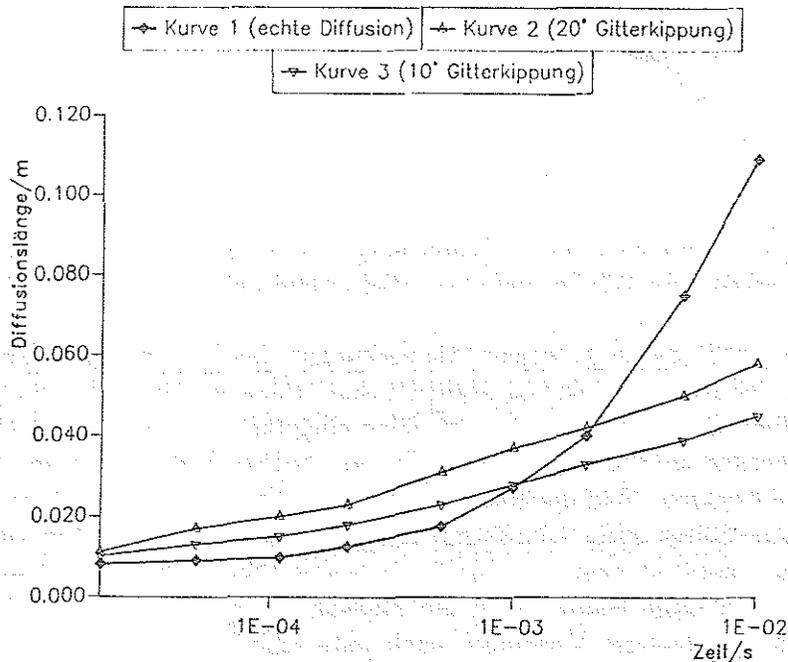


Abbildung 5.4: Vergleich der Diffusionslänge von echtem und numerischem Transport in Abhängigkeit von der Zeit

Weiterhin wurde analysiert, wie stark die numerische Diffusion vom Kippwinkel der Elemente zur Magnetfeldrichtung abhängt. Die Profile wurden für die typische Transportzeit von 0.01 Sekunden ausgewertet. In der Abbildung ist bei einer Diffusionslänge von etwa 0.11m der Wert der realen Diffusion eingetragen. Im Vergleich dazu sind für unterschiedliche Winkel die Transportweiten der rein numerischen Diffusion eingezeichnet. Die Bandbreite der Ergebnisse ist durch die unterschiedlichen Elementformen bedingt. Für in paralleler Richtung langgezogene Elemente ist die numerische Diffusion kleiner, während sie bei Elementen mit gleicher Länge und Breite größer wird. Die allgemeine Tendenz ist ein mit dem Kippwinkel zunehmender numerischer Transport: In erster Näherung steigt die Transportweite mit der Wurzel des Winkels und wächst von Effekten um 10 % bei kleinen Abweichungen von der Magnetfeldrichtung auf Werte um 50 % bei Kippwinkeln von 20°.

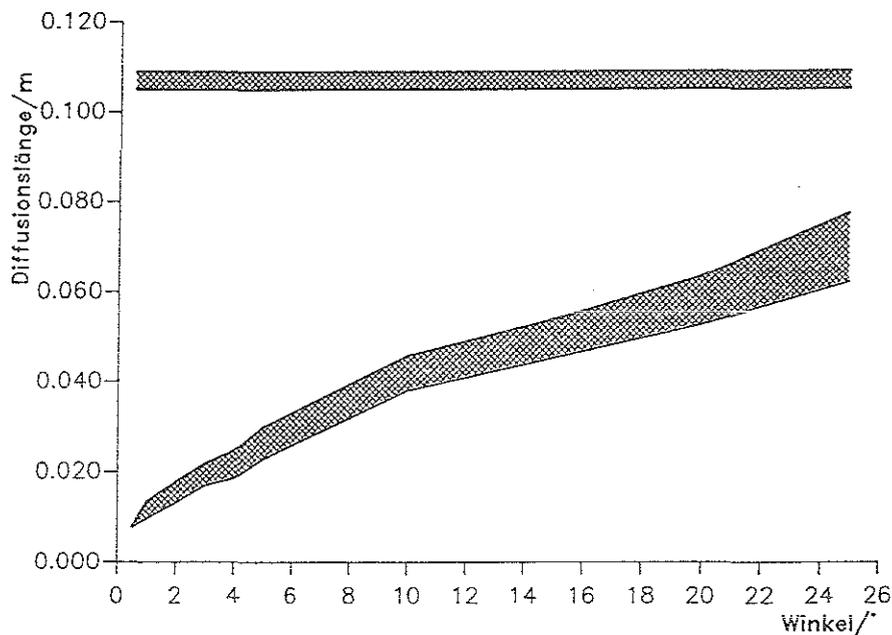


Abbildung 5.5: Vergleich der Diffusionslänge von echtem und numerischem Transport in Abhängigkeit vom Winkel zwischen Magnetfeld und einer Dreiecksseite

Außerdem wurde getestet, welche Auswirkungen das Einfügen zusätzlicher Elemente, wie es bei der Netzverfeinerung nötig ist, hat. Dazu wurde in das unverkippte strukturierte Dreiecksnetz eine verfeinerte Zone eingefügt. In dieser Zone entstehen durch die Verfeinerung auch Elemente, die keine zur Richtung des schnellen Transports parallele Seite besitzen. Wie die Rechnung zeigt, wird der Fluß in diesen Elementen auf die gekippten Seiten aufgeteilt. Damit erreicht man in poloidaler Richtung eine größere Genauigkeit, gewinnt aber in radialer Richtung keine höhere Auflösung. Man macht allerdings auch keine Fehler, denn die Flußerhaltung ist auf jeden Fall gewährleistet. Erst durch mehrmaliges Verfeinern nach unterschiedlichen Strömungsvariablen, kann man in beiden Richtungen eine exaktere Lösung erwarten.

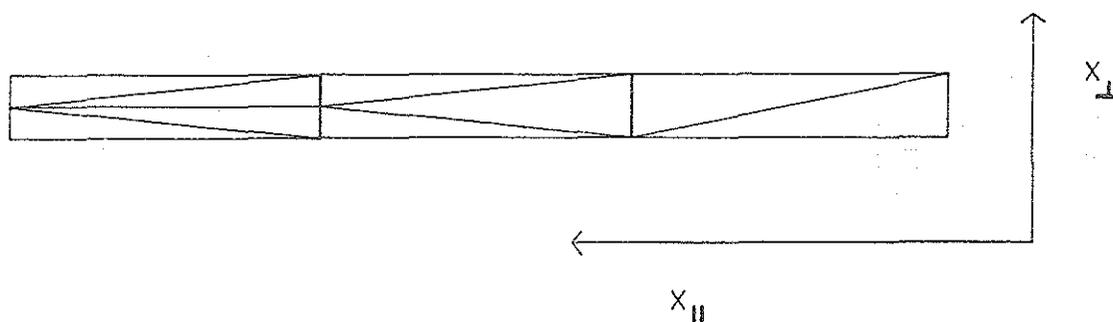


Abbildung 5.6: Physikalisch sinnvolle Netzverfeinerung durch Einfügung einer neuen Flußfläche in senkrechter Richtung zum Feld

Zusammenfassend läßt sich feststellen:

1. Die numerische Diffusion ist aufgrund der starken Anisotropie im Transportverhalten ein sehr starker Effekt und erst nach ausreichend langer Rechenzeit dominiert der physikalisch richtige Transport.
2. Nur durch Anpassung des Gitters an die Flußflächen kann eine größere Verfälschung der "echten" Lösung vermieden werden. Abweichungen der Elementseiten von der Magnetfeldrichtung bis zu 5° sind tolerierbar.
3. Netzverfeinerungen sind nur dann physikalisch sinnvoll, wenn kleinere Elemente generiert werden, die mit einer Seite wiederum an den Verlauf der Flußflächen angepaßt sind.

5.2 Implementierung der Randbedingungen

Ist die Lösung einer allgemeinen Differentialgleichung auf einem zweidimensionalen Gebiet gesucht, so benötigt man Bedingungen für die Variablen auf dem Rand des Gebietes. In den meisten Fällen werden die Berandungen so gewählt, daß eine der Koordinaten entlang des jeweiligen Randes konstant ist. Dann ergeben sich die Randbedingungen für die verschiedenen Richtungen einfach durch Abzählen der Ableitungen, die in der Differentialgleichung auftreten.

Für kompliziertere Geometrien oder nicht einfach zusammenhängende Gebiete können durch Berechnung der charakteristischen Variablen (Eigenwerte) und der Charakteristiken (Eigenvektoren) dieses Gleichungssystems die Gleichungen entkoppelt werden. Man erhält neue Richtungsvektoren und neue Variablen, die aber oft sehr kompliziert aus den einfachen Variablen und Einheitsvektoren aufgebaut sind. Vor allem für nichtlineare Gleichungen ist eine solche (lineare) Charakteristikenmethode nicht sinnvoll, weil die starke Kopplung der Gleichungen zu komplexen Eigenwerten und Eigenvektoren führt, die die numerische Behandlung eher erschweren.

Daher bezieht man sich bei der Definition der Randbedingungen auf die Finite-Differenzen-Rechnungen, in denen der Definitionsbereich auf ein Rechteck mit orthogonalen Rändern transformiert werden muß und übernimmt aus diesen Modellen die Randbedingungen.

Unklarheiten ergeben sich allerdings an den "künstlichen" Rändern, die beim FD-Verfahren durch die Transformation entstehen. Dort werden in der Realität zusammenhängende Zellen auseinandergerissen und jeweils als Gebietsberandung behandelt. Über eine Kontinuitätsbeziehung werden diese Gebiete wieder miteinander verbunden. Im FEM-Formalismus entstehen diese "Schnitte" nicht, da das Gleichungssystem geometrisch lokal behandelt wird. Daher müssen an diesen Punkten auch keine Zusatzbedingungen definiert werden und das Gleichungssystem hat größere Freiheiten, eine Lösung zu finden. Diese Aussagen basieren nur auf dem Vergleich von Ergebnissen, die mit den verschiedenen Methoden gewonnen wurden. Mathematisch wurde noch keine exakte Formulierung des Randwertproblems gefunden. Dieser Aufgabe sollte man sich allerdings in den nächsten Jahren zuwenden, denn wie die Rechnungen zeigen, sind die stationären Zustände stark von der Wahl der Randbedingungen abhängig.

Für die Variablen Dichte, Poloidalgeschwindigkeit, Radialgeschwindigkeit, Elektronen- und Iontemperatur lassen sich durch einfaches Abzählen der Ableitungen in verschiedenen Richtungen folgende Randbedingungen festlegen:

Kontinuitätsgleichung (radiale Impulsbilanz eingesetzt)

poloidale Koordinate: 1 Randbedingung für Dichte oder poloidalen Fluß

radiale Koordinate: 2 Randbedingungen für Dichte oder radialen Fluß

Impulsgleichung in poloidaler Richtung

poloidale Koordinate:

2 Randbedingungen für poloidale Geschwindigkeit oder poloidalen Fluß

radiale Koordinate:

2 Randbedingungen für radiale Geschwindigkeit oder radialen Fluß

Energiegleichungen (Elektronen, Ionen)

poloidale Koordinate:

2 Randbedingungen für jede Temperatur oder den poloidalen Energiefluß von Elektronen/Ionen.

radiale Koordinate:

2 Randbedingungen für jede Temperatur oder den radialen Energiefluß von Elektronen/Ionen.

5.2.1 Einströmrand - innere Flußfläche

Der Einströmrand ist eine Flußfläche, die so weit im Inneren liegen soll, daß man von poloidal homogenen Plasmaparametern und damit auch von verschwindenden Gradienten entlang des Feldes ausgehen kann.

Für die Kontinuitätsgleichung kann daher eine konstante Dichte, radiale Flußdichte oder ein konstanter Gesamtfluß vorgegeben werden. Bei Festlegung der Flüsse muß aber die Konstanz der Dichte auf dem Rand zusätzlich gewährleistet sein. Dazu muß eine Reskalierung des Dichtewertes nach jedem Iterationsschritt erfolgen, was mit einer langsameren Konvergenz verbunden ist. Man kann also den Wert der Dichte fest

vorgeben oder die Flüsse über die Randintegrale in der schwachen Formulierung berücksichtigen. (\rightarrow *Implementierung der Randbedingungen in der FEM*)

Wegen der verschwindenden Gradienten wird die poloidale Geschwindigkeit zu null angenommen. In den Energiegleichungen können, analog zur Kontinuitätsgleichung entweder die Temperaturen oder die Flüsse vorgeschrieben werden. Auch hier konvergiert das Verfahren schneller, wenn die Temperaturen festgelegt sind, was als "starke Form der Randbedingungen" bezeichnet wird.

5.2.2 Plasmarand - äußere Flußfläche

Der Plasmarand wird in den Rechnungen so weit nach außen gelegt, daß das Plasma als ideal strömend (ohne Reibung) in radialer Richtung angenommen werden kann und die Dichten so gering sind, daß radiale Flüsse vernachlässigbar sind.

Für die Kontinuitätsgleichung wird demnach $\Gamma_{rad} = 0$ vorausgesetzt.

Die poloidale Geschwindigkeit hat bei idealer Strömung keinen radialen Gradienten, d.h. es treten keine Scherkräfte auf.

Für die Energiegleichungen werden entweder die Temperaturen für Elektronen und Ionen vorgegeben oder auch hier werden die Energieströme zu Null gesetzt oder konstant vorgegeben.

5.2.3 Ausströmrand - Limiter

Der Ausströmrand muß in mehrere Teilbereiche untergliedert werden, je nach dem Winkel, den Oberflächennormale und Magnetfeldrichtung einschließen.

Für Winkel bis zu 85° wird in der Impulsbilanz das Bohm-Kriterium für die Geschwindigkeit parallel zum Feld gefordert.

In den Energiegleichungen werden die Energieflüsse für Elektronen und Ionen durch die aus Randschichtrechnungen folgenden "sheath-transmission" Faktoren festgelegt. Sie werden nach den numerischen Berechnungen von R. Chodura [59] abhängig vom Auftreffwinkel der Strömung gewählt, wie es in Abschnitt (2.3.3) erläutert wurde.

Die Berandungen des Limiters, die nahezu parallel zur Magnetfeldrichtung verlaufen, werden wie ideale Wände behandelt, d.h. die radialen Teilchenflüsse werden zu null gesetzt und die Poloidalgeschwindigkeit soll keinen radialen Gradienten haben. Auch die radialen Energieflüsse und damit auch der radiale Temperaturgradient sollen verschwinden. Diese Randbedingungen sind nur eine Näherung und resultieren aus den Unsicherheiten in den Berechnungen zur elektrostatischen Schicht. In Zukunft sollten größere Anstrengungen unternommen werden, auch im Fall streifenden Einfalls exakte Randbedingungen aus numerischen Berechnungen der Raumladungzone abzuleiten.

5.3 Berücksichtigung von Quelltermen

Die Berücksichtigung der Quellterme in den Plasmagleichungen spielt eine entscheidende Rolle für die Transportvorgänge in der Plasmarandschicht und damit auch für die Konzepte zur Teilchen- und Energieauskopplung in einem Fusionsreaktor. In allen heutigen Experimenten hat das Plasma eine genau definierte Kontaktfläche mit einer speziell ausgelegten Wandstruktur (Limiter- oder Divertorplatten). Dort wird das Plasma neutralisiert und als Neutralgas "recycled". Für zukünftige Tokamakkonzepte ist sogar vorgesehen, die Neutralgaswolke so undurchlässig zu machen, daß keinerlei Plasma-Wand-Kontakt stattfindet. In beiden Fällen ist eine Berücksichtigung der Wechselwirkungen zwischen neutralen und geladenen Teilchen wichtig zum Verständnis der physikalischen Vorgänge in der Randschicht. Dabei tragen analytische Modelle mehr zum qualitativen Verständnis bei, während für quantitative Aussagen numerisch-statistische Modelle zur Verfügung stehen.

5.3.1 Implementierung eines analytischen Neutralteilchenmodells

Es wird zur Berechnung der Teilchen- und Energiequellen das in Abschnitt (2.3.4) eingeführte analytische Modell benutzt. Programmtechnisch geht man dabei so vor, daß der Ionenfluß auf die einzelnen Seiten der Berandung berechnet und gemäß einem Recyclingkoeffizienten als neutraler Fluß senkrecht zur Wand in die Randschicht reemittiert wird. Entsprechend dem Volumen der zu durchquerenden Zelle und einer mittleren freien Weglänge wird er durch Wechselwirkungen mit dem Hintergrundplasma verändert: Es werden neutrale Atome reionisiert, die einerseits die Plasmadichte erhöhen und andererseits durch ihre niedrige Energie das Plasma abkühlen. Bei jeder Ionisation bringen sie nur eine Energie von 5eV ins Plasma ein. Die Elektronen verlieren durch den Ionisationsprozeß jeweils 25eV pro Neutralteilchen.

Gleichzeitig wird durch jede Reionisation die Flußdichte des Neutralstrahls reduziert. Der verbleibende Fluß wird gemäß der Länge und der Normalenrichtung der beiden anderen Dreieckseiten aufgeteilt und an die Nachbarelemente weitergegeben.

Ein großer Nachteil dieses einfachen Modells besteht darin, daß die Winkelverteilung der Neutralteilchen beim Eintreten ins Plasma nicht vorgegeben wird, sondern von der Netzeinteilung vor der Wand bestimmt wird. Für zukünftige Anwendungen ist geplant, das Programm in diese Richtung zu erweitern.

Wechselwirkungen wie Ladungsaustausch und atomare Anregungsprozesse bleiben als Energiequellen, bzw. -senken unberücksichtigt. Der Vergleich mit statistischen Methoden zur Neutralteilchensimulation zeigt einen deutlichen Unterschied.

5.3.2 Die Neutralgasmodellierung mit EIRENE

Je höher das Recycling an den Targetplatten wird und je mehr die Randschichtkonfiguration zu einer Flußerhöhung entlang des Magnetfeldes führt, umso wichtiger wird die Bedeutung nichtlinearer, nichtlokaler Wechselwirkungen zwischen neutralen und geladenen Teilchen. Diese Wechselwirkungen, die empfindlich von den physikalischen Modellen und geometrischen Einzelheiten abhängen, können nur noch mit numerischen Methoden behandelt werden.

Man kann dazu ein Monte-Carlo Verfahren zur Lösung der kinetischen Gleichungen verwenden, wie den in dieser Arbeit benutzten linearen Transportcode EIRENE. Die physikalischen Effekte, die ein solches Programm modellieren kann, wurden schon in Abschnitt (2.3.4) behandelt. Es soll jetzt mehr um die Einbindung des Verfahrens in die Strömungssimulation gehen.

Die Einbindung in die Strömungssimulation

Allgemein wird davon ausgegangen, daß die charakteristische Zeitkonstante für den Neutralteilchentransport wesentlich kleiner ist als für den Plasmatransport, sodaß die Berechnung der Neutralteilchenbewegung auf einem stationären Plasmahintergrund geschehen kann. Fluidmodell und Monte-Carlo Verfahren können aus diesem Grund durch sukzessiven Austausch von Flüssen und Plasmaparametern miteinander gekoppelt werden.

Weil ein kompletter Lauf des EIRENE-Programms aber sehr viel Zeit kostet, ist eine Ankopplung an den Fluid-Code nach jedem Iterationsschritt nicht sinnvoll. Zur Berechnung der neuen Quellterme geht man daher folgendermaßen vor:

Die Aufteilung der Targetflächen wird so vorgenommen, daß Randelemente mit gleichen Randbedingungen zu einer Teiloberfläche zusammengefaßt werden. Die Plasmaparameter auf den Randflächen und der Recyclingkoeffizient $R = \Gamma_{neutral}/\Gamma_{ion}$ für jede Zone werden an EIRENE übergeben. Der Recyclingkoeffizient ist an den Targetoberflächen ohne Pumpleistung (Limiteroberfläche) eins und reduziert sich um die Pumpeffektivität an den Ausströmkanälen.

Der EIRENE-Lauf für die Teiloberflächen liefert für jedes Element eine Quellstärke in Dichte, Impuls, Elektronen- und Ionenenergie. Die Elektronen werden aufgrund des Stoß-Strahlungsmodells stark gekühlt. Die mittlere Energie der Ionen nimmt ab, da die durch Reionisation neu entstehenden Plasmateilchen jeweils nur eine Energie in der Größenordnung des Wandplasmas mitbringen. Durch Dissoziation von neutralen Molekülen kommt es in Teilbereichen zu einem echten Energieverlust. Diese Bereiche liegen aufgrund der kurzen freien Weglängen der Moleküle nahe an den Targetoberflächen.

Durch Summation über die Beiträge aller Teiloberflächen erhält man die Gesamtquellstärke in jedem Element.

Die Skalierung der Quellterme im Fluidmodell Nach jeder Iteration in der Fluidrechnung wird der Ionenfluß auf die Berandungen neu berechnet, getrennt nach den Teilbereichen. Mit den so berechneten Flüssen können die alten Quellterme skaliert und eine weitere Iteration durchgeführt werden.

Ein neuer Aufruf von EIRENE erfolgt dann, wenn die Temperaturen an den Targetoberflächen sich signifikant geändert haben. Das Verfahren wird so oft wiederholt, bis sich die Temperaturen und Flüsse nur noch marginal ändern, sodaß man von einer stationären Lösung der Fluid-Gleichungen ausgehen kann.

5.4 Eine Beispielrechnung für TEXTOR

5.4.1 Charakteristische Zeiten in der TEXTOR-Randschicht

Ausgehend von den Betrachtungen über die charakteristischen Transportzeiten und über die Zeitschrittbeschränkung des expliziten Lösungsalgorithmus' können jetzt in grober Näherung Aussagen über die Anzahl der Iterationen gemacht werden, die nötig sind, eine stationäre Lösung für die TEXTOR Randschicht zu finden.

Wie in Abschnitt 3.7.2 schon festgestellt, ist der Prozeß mit der langsamsten Relaxation die radiale Diffusion. Geht man von einer Randschichtdicke von etwa $0.1m$ aus, so erreicht man eine stationäre Lösung nach ungefähr 10^{-2} Sekunden. Dies ist die Zeit, die man also auf jeden Fall "rechnen" muß.

Aufgrund des CFL-Kriteriums, das in jedem Element erfüllt werden muß (siehe Abschnitt 4.3.5), ist aber die Schrittweite, vor allem in poloidaler Richtung, eingeschränkt. Die poloidale Ausdehnung der Elemente in Limiternähe beträgt ca. $3.5cm$, sodaß der typische Zeitschritt für die Elektronenwärmeleitung 10^{-9} Sekunden wäre. Man bräuhete damit etwa 10^7 Zeitschritte, um eine stationäre Lösung zu berechnen. Selbst bei einem hoch vektorisierten Programm, wie dem vorliegenden FEM-Algorithmus, würde das eine immense Rechenzeit beanspruchen.

Auch aus mathematischer Sicht erscheint es nicht sinnvoll, das Problem auf diese Art zu behandeln, denn bei sehr steifen Gleichungssystemen (Eigenwerte unterscheiden sich um mehrere Größenordnungen) besteht bei Anwendung ein und desselben Lösungsalgorithmus auf allen Zeitskalen die Gefahr, keine oder aber eine völlig falsche Lösung zu finden.

Daher entschieden wir uns dafür, das Elektronentemperaturprofil vorzugeben. Der schnellste Transportprozeß ist dann die Ionenwärmeleitung mit einem charakteristischen Zeitschritt von etwa $5 \cdot 10^{-8}s$ (vgl. Gleichung (3.126)). Vergleicht man diesen Zeitschritt mit der Zeit für den radialen Transport von $10^{-2}s$, so benötigt man etwa $2 \cdot 10^5$ Zeitschritte, um einen stationären Zustand zu erreichen.

Natürlich ist diese Lösung auf längere Sicht nicht befriedigend. Es soll aber darauf hingewiesen werden, daß dieses Problem kein spezielles Problem der FEM ist, sondern durch den gezielt ausgewählten expliziten Löser zur Modellierung konvektiver Probleme bedingt ist. Für die Zukunft ist geplant, alle konduktiven Phänomene mit einem impliziten Löser zu behandeln, der keine Zeitschrittbegrenzung hat. Da in dieser Prozedur bei diffusiven Prozessen keine Stabilitätsprobleme auftreten, dürfte die Erweiterung relativ schnell und einfach durchzuführen sein. In dieser Arbeit wurde diese Modifikation noch nicht durchgeführt.

5.4.2 Das Elektronentemperaturprofil

Wie im vorigen Abschnitt begründet, wird das Elektronentemperaturprofil vorgegeben. Um eine möglichst konsistente Behandlung aller Gleichungen zu gewährleisten, wurde eine Interpolation der Lösungen aus den Rechnungen von H. Gerhauser [46] und M. Baelmans [64] vorgenommen, die den TEXTOR-Fall mit denselben Transportkoeffizienten behandelt haben.

Es wurde allerdings nur der Verlauf der Lösung nachgebildet, die Randbedingungen basieren auf über viele Entladungen gemittelten Messungen in der Randschicht von TEXTOR [136].

Demnach hat man in der Äquatorialebene bei einem Flußflächenradius $r = 0.4m$ eine Elektronentemperatur von $70eV$ und bei $r = 0.5m$ einen Wert von $14eV$. Zum Vergleich: Die Elektronentemperatur am Plasmarand ist bei H. Gerhauser [46] etwa $12eV$.

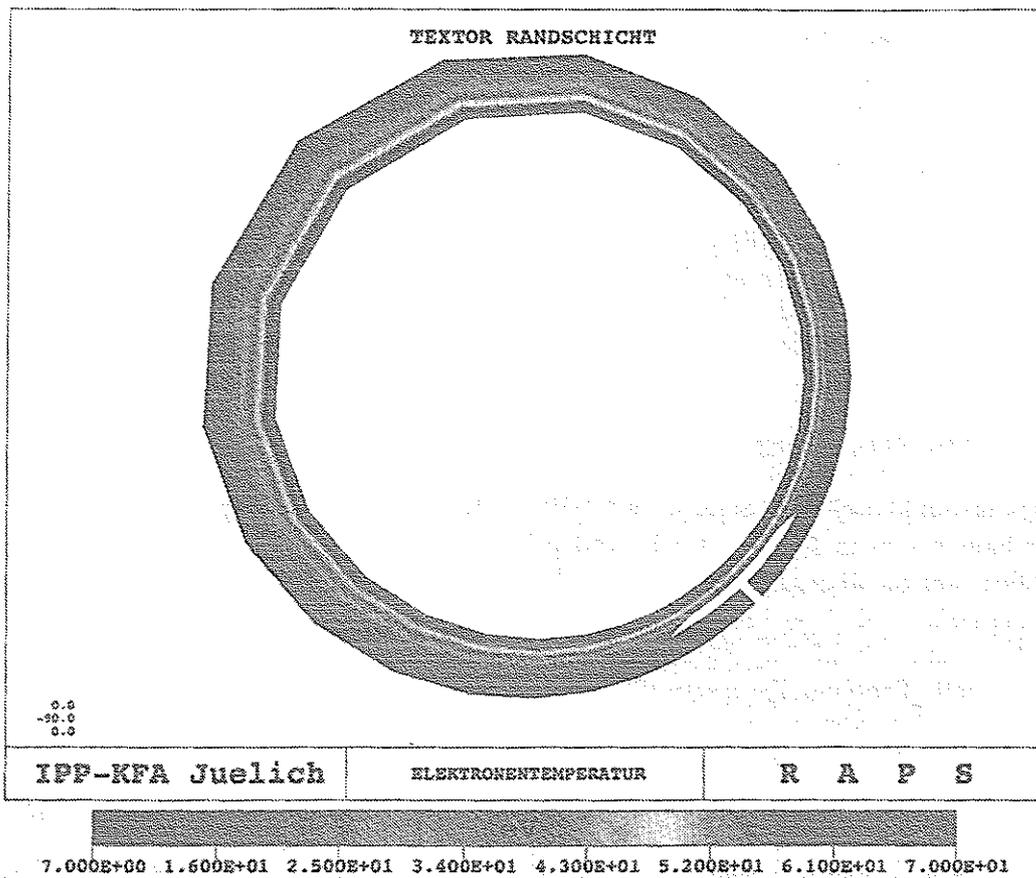


Abbildung 5.7: Die Elektronentemperatur in der Randschicht von TEXTOR.

5.4.3 Die Randbedingungen

Gemäß den Vorgaben aus Abschnitt 5.2 wurden die Randbedingungen gewählt.

Einströmrاند - innere Flußfläche:

$$\begin{aligned}
 \text{Kontinuitätsgleichung} & : n = 7 \cdot 10^{18} \text{ 1/m}^3 \\
 \text{Poloidale Impulsgleichung} & : U = 0 \text{ m/s} \\
 \text{Ionenenergiebilanz} & : T_i = 70 \text{ eV} \\
 \text{Elektronenenergiebilanz} & : T_e = 70 \text{ eV}
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Plasmarand - äußere Flußfläche:

$$\begin{aligned}
 \text{Kontinuitätsgleichung} & : \Gamma_r = 0 \text{ kg/(m}^2\text{s)} \\
 \text{Poloidale Impulsgleichung} & : \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \text{ 1/s} \\
 \text{Ionenenergiebilanz} & : T_i = 8 \text{ eV} \\
 \text{Elektronenenergiebilanz} & : T_e \text{ gegeben}
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Auströmrاند - Limiter

$$\begin{aligned}
 \text{Kontinuitätsgleichung} & : \text{---} \\
 \text{Poloidale Impulsgleichung} & : U = b_\theta \cdot C_s \\
 \text{Ionenenergiebilanz} & : Q_i = \delta_i \cdot n u T_i \\
 \text{Elektronenenergiebilanz} & : T_e \text{ gegeben}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

5.4.4 Die Rechnung

Ausgangspunkt der Rechnung ist ein Gitternetz mit 326 Knoten und 566 Elementen, aufgebaut wie es in Abschnitt 5.1.2 erläutert wurde. Es wurden zwei Anfangslösungen gewählt, um zu überprüfen, ob die Rechnung in beiden Fällen die gleiche stationäre Lösung liefert. Die Stationarität kann überprüft werden, indem man die relative zeitliche Änderung der Lösung \mathcal{T}_Ψ berechnet und mit der charakteristischen Gesamtzeit für das spezielle Problem $\mathcal{T}_{\text{TEXTOR}}$ vergleicht.

Für eine stabile Lösung muß gelten:

$$\left(\frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^{-1} = \mathcal{T}_\Psi \gg \mathcal{T}_{\text{TEXTOR}} \approx 10^{-2} \text{ Sekunden} \tag{5.13}$$

Anfangslösung 1 gibt radial linear abfallende und poloidal homogene Profile für Dichte und Iontemperatur vor. Sowohl die Radial- als auch die Poloidalgeschwindigkeiten werden überall zu Null gewählt. Ausgehend von diesem Anfangszustand wurden $5 \cdot 10^5$ Iterationen mit dem analytischen Neutralteilchenmodell durchgeführt. Aufgrund der vom Gleichgewicht weit entfernten Geschwindigkeitverteilung mußte mit kleinen Zeitschritten begonnen werden. Der Zeitschritt wurde aber nach ca. $2 \cdot 10^5$ Iterationen größer und nach einer Realzeit von $1.35 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ war eine stationäre Lösung mit einer Relaxationszeit für die Dichte von $\mathcal{T}_n = 2.72 \text{ s}$ erreicht.

Anfangslösung 2 setzt dieselben Profile für Dichte und Ionentemperatur voraus. Hingegen wird die Radialgeschwindigkeit konstant vorgegeben, wie es für einen exponentiellen Dichteabfall zu erwarten wäre, und die Poloidalgeschwindigkeit steigt von der Symmetrieebene bis zum Limiter linear auf Schallgeschwindigkeit an. Die näher an der stationären Lösung liegende Anfangsverteilung konvergierte schneller und nach $2.4 \cdot 10^5$ Iterationen, d.h. einer Realzeit von $1.05 \cdot 10^{-2}$ wurde eine stationäre Lösung mit $T_n = 4.76s$ gefunden.

Die aus den beiden Anfangszuständen berechneten Lösungen zeigen eine sehr gute Übereinstimmung. Gemittelt liegen die relativen Abweichungen der Plasmamaparameter unter 0.1 % und der maximale Unterschied an einzelnen Knoten ist kleiner als 2.4 %.

Die erste **EIRENE-Rechnung** wurde mit dieser Grundlösung durchgeführt. Die von EIRENE gelieferten Quellterme waren allerdings so verschieden von den Quellen des analytischen Neutralteilchenmodells, daß sich eine neue Lösung einstellen mußte. Um den neuen stationären Zustand schneller zu finden, wurde der Plasmacode nicht bis zur Konvergenz iteriert, sondern EIRENE schon dann aufgerufen, wenn der Fluß auf die Targetoberflächen sich um einen vorher festgelegten Faktor geändert hatte. In diesem Sinne wurde dann auch eine neue Bedingung für die Stationarität einer Lösung formuliert:

Stationär ist die Plasmalösung dann, wenn die Flüsse auf den Limiter sich innerhalb charakteristischer Transportzeiten nur noch wenig ändern.

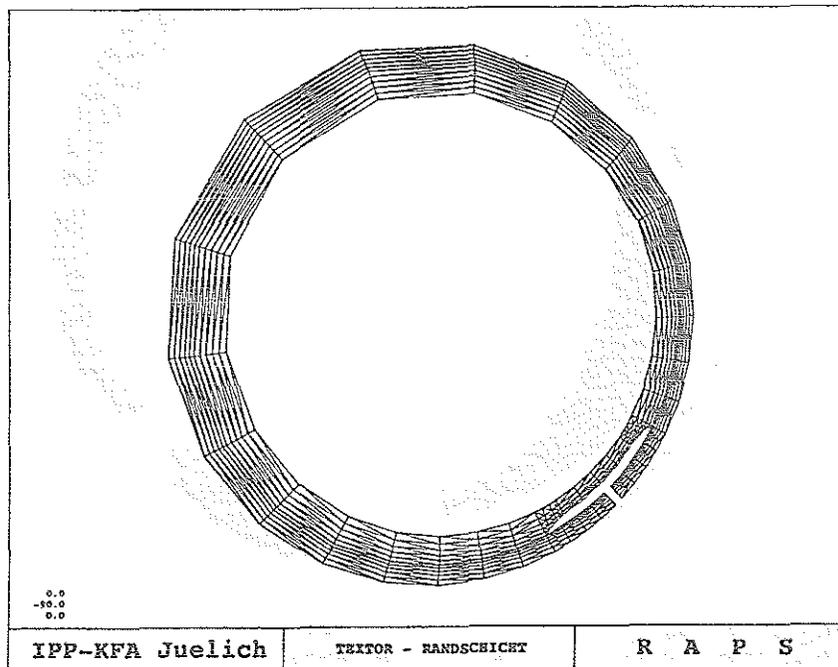


Abbildung 5.8: Das Ausgangsnetz für die TEXTOR Rechnung mit 326 Knoten und 566 Elementen

Nach dem ersten EIRENE-Aufruf und 700 Iterationen des Plasmacodes hatten sich die Flüsse auf die einzelnen Targetteile um bis zu 30 % verändert. Daher wurden an diesem Punkt die Iterationen gestoppt und die aktuelle Lösung an EIRENE übergeben.

Der zweite EIRENE-Lauf lieferte Quellen, die immer noch weit weg von einer stationären Lösung waren, denn nach 900 Iterationen hatten sich die Ströme am Austrittsrand erneut um 30 % verändert.

Der dritte EIRENE-Lauf erst zeigte bessere Konvergenz. Es konnten bereits mehr als 1900 Iterationen durchgeführt werden, bevor die Flußänderung auf den Randelementen 20 % betrug.

Die vierte EIRENE-Kopplung war dann so stabil, daß nach 3000 Schritten in keinem Randelement der Fluß sich um mehr als 5% verändert hatte.

Diese Lösung wurde abgespeichert und nach dem in Abschnitt 4.3.7 erläuterten Verfahren eine erste Netzverfeinerung durchgeführt. Der Verfeinerungsparameter, dessen Gradienten maßgeblich sind, war die poloidale Impulsdichte. Das Gitter wurde erweitert auf 750 Elemente und 427 Knoten.

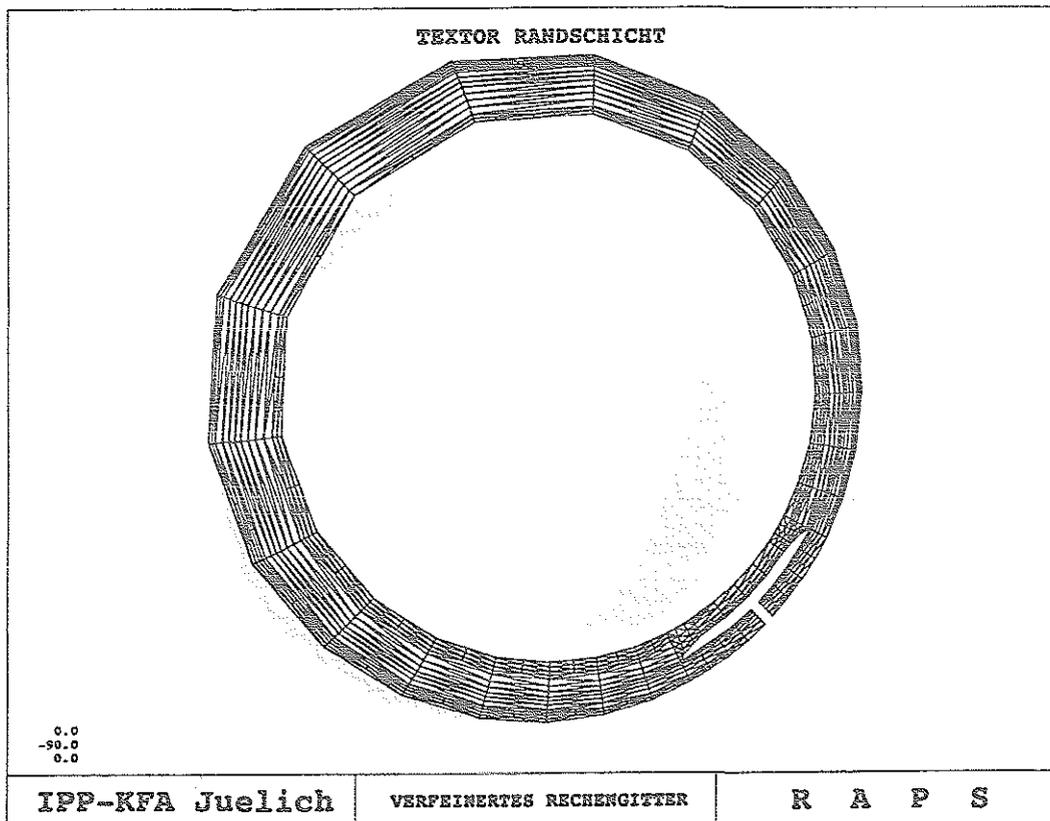


Abbildung 5.9: Das nach zweimaliger Verfeinerung entstandene Rechengitter mit 557 Knoten und 1000 Elementen

Nach weiteren 6000 Iterationen und einer zwischengeschalteten EIRENE-Kopplung wurde eine

zweite Netzverfeinerung vorgenommen. Es wurde jetzt nach der radialen Impulsdichte verfeinert und ein Netz mit 1000 Elementen und 557 Knoten erzeugt.

Nach dem sechsten EIRENE-Lauf und anschließenden 9000 Iterationen konnte ein stationärer Zustand mit $T_n = 3.74s$ gefunden werden. Die Flüsse auf die Targetoberflächen änderten sich innerhalb dieser 9000 Zeitschritte um weniger als 4%. Die nachfolgende Diskussion der Ergebnisse bezieht sich auf diese Lösung.

5.5 Ergebnisse der TEXTOR-Beispielrechnung

5.5.1 Die Gültigkeit der Fluidnäherung in poloidaler Richtung

Wie in Kapitel 3.1 schon näher ausgeführt, soll an dieser Stelle a posteriori die Gültigkeit des Fluidmodells überprüft werden. Dazu wird für die Ionen in jedem Punkt des Gitters die kleinste poloidale Abfallänge der einfachen Variablen Dichte, Poloidalgeschwindigkeit und Ionentemperatur bestimmt, für die Elektronen ist die charakteristische Länge durch den Verlauf der Elektronentemperatur gegeben. Diese Längen werden jeweils ins Verhältnis gesetzt zur mittleren freien Weglänge für den entsprechenden Transportprozeß.

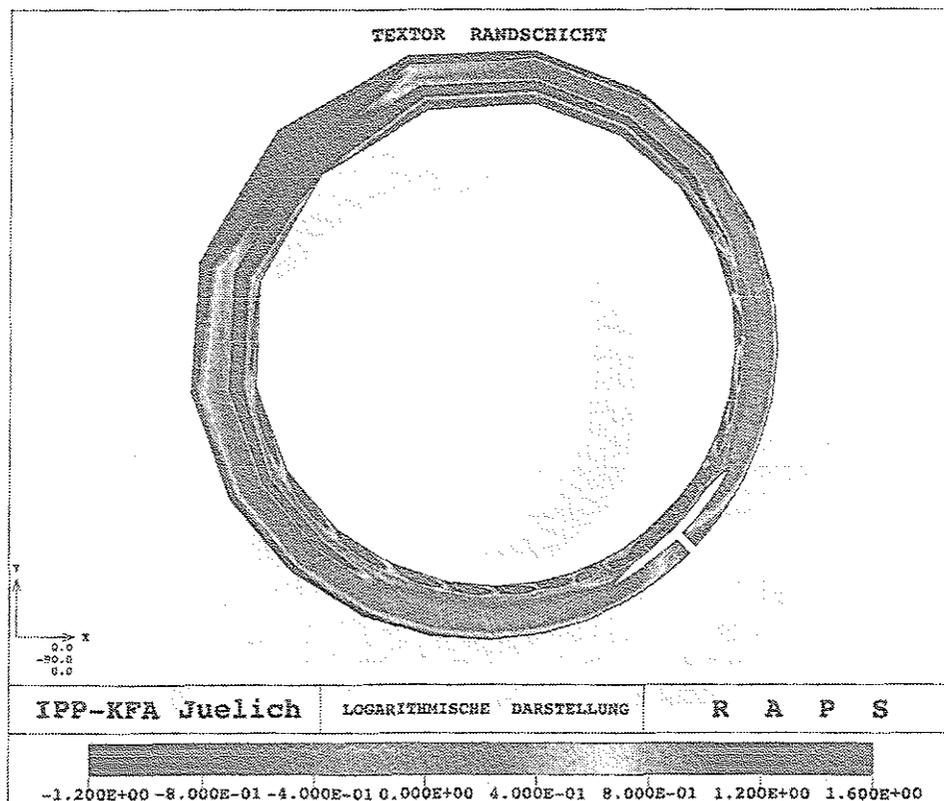


Abbildung 5.10: Das Verhältnis von poloidaler Abfallänge zu freier Weglänge in logarithmischer Darstellung für die Ionen

Damit die Voraussetzungen für eine Flüssigkeitsnäherung erfüllt sind, sollte dieses Verhältnis für beide Teilchensorten wesentlich größer als eins sein. Wie man aus der Abbildung 5.10 erkennt, sind die Voraussetzungen für eine Fluid-Beschreibung der Ionen nur in den Außenbereichen ($r \geq 0.48m$) und in der Nähe der Symmetrieebene erfüllt, wobei die poloidale Abfallänge maximal einen Faktor vier größer ist als die freie Weglänge der Ionen. Im Außenbereich und in der Nähe des Targets ist das Plasma trotz starker Gradienten stoßbestimmt, weil die Temperaturen niedrig, bzw. die Dichten sehr hoch sind. In der Symmetrieebene sind es die kleinen Gradienten der Plasmagrößen, die das Verhältnis zwischen Abfallänge und freier Weglänge auf Werte um eins ansteigen lassen. In vielen anderen Bereichen der Randschicht jedoch, ist das Flüssigkeitsmodell keine gute Beschreibung. Wie schon vorher angedeutet kann man sich in diesen Zonen nur auf den Standpunkt zurückziehen, daß die Ergebnisse des Fluidmodells oft besser sind, als es die Näherung erwarten läßt.

Für die Elektronen ist die Flüssigkeitsnäherung in der ganzen Randschicht zumindest marginal erfüllt. Im Vergleich zu den Ionen konnte dieses Ergebnis erwartet werden, denn bei gleicher freier Weglänge von Elektronen und Ionen sind die Gradienten der Elektronentemperatur aufgrund der höheren Wärmeleitfähigkeit sehr viel kleiner.

Da aber die Elektronentemperatur in dieser Rechnung eine fest vorgegebene Größe ist, scheint eine eingehendere Analyse nicht sinnvoll.

Abschließend soll darauf hingewiesen werden, daß die Oszillationen, die am Rand des Plasmakerns auftreten, rein numerisch bedingt sind. Sie werden durch in diesem Gebiet auftretende, entgegengesetzt gerichtete Strömungen verursacht, die eine exakte Berechnung der Gradientenlängen erschweren.

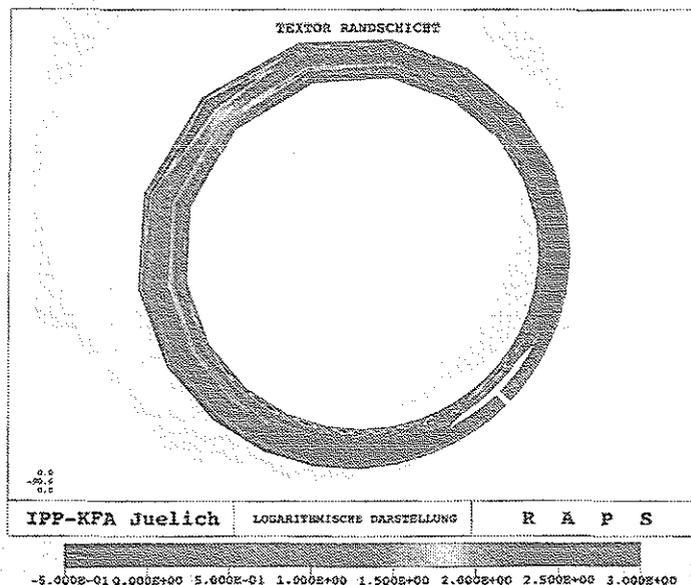


Abbildung 5.11: Das Verhältnis von poloidaler Abfallänge zu freier Weglänge in logarithmischer Darstellung für die Elektronen

5.5.2 Die dominierenden Transportprozesse

Transportprozesse in der Impulsbilanz

Zur Analyse des dominierenden Transports in der poloidalen Impulsbilanz wird auf die in Abschnitt 3.7.3 definierte Reynolds-Zahl zurückgegriffen.

$$Re = \frac{L_V \cdot m_i n_i \cdot C_S}{\frac{4}{3} \eta_0} \quad (5.14)$$

Drückt man die charakteristische Länge L_V durch den relativen Geschwindigkeitsgradienten aus:

$$L_V = \frac{1}{C_S} \frac{\partial v_{\parallel}}{\partial x_{\parallel}} = \frac{1}{C_S} \frac{\partial \tilde{u}_{\theta}}{\partial \tilde{x}_{\theta}} \quad (5.15)$$

so ergibt sich:

$$Re = \frac{m_i n_i \cdot C_S^2}{\frac{4}{3} \eta_0} \frac{\partial \tilde{u}_{\theta}}{\partial \tilde{x}_{\theta}} = \frac{5(p_i + p_e)}{4 \eta_0} \frac{\partial \tilde{u}_{\theta}}{\partial \tilde{x}_{\theta}} \quad (5.16)$$

In der konservativen Formulierung der Flüssigkeitsgleichungen (vgl. Abschnitt 3.2 oder Gleichung (3.99)) wird besonders deutlich, daß die Reynolds-Zahl angibt, zu welchem Anteil die Impulsänderung einer Teilchenströmung durch Druckgradienten und zu welchem Anteil durch Viskositätseffekte verursacht wird.

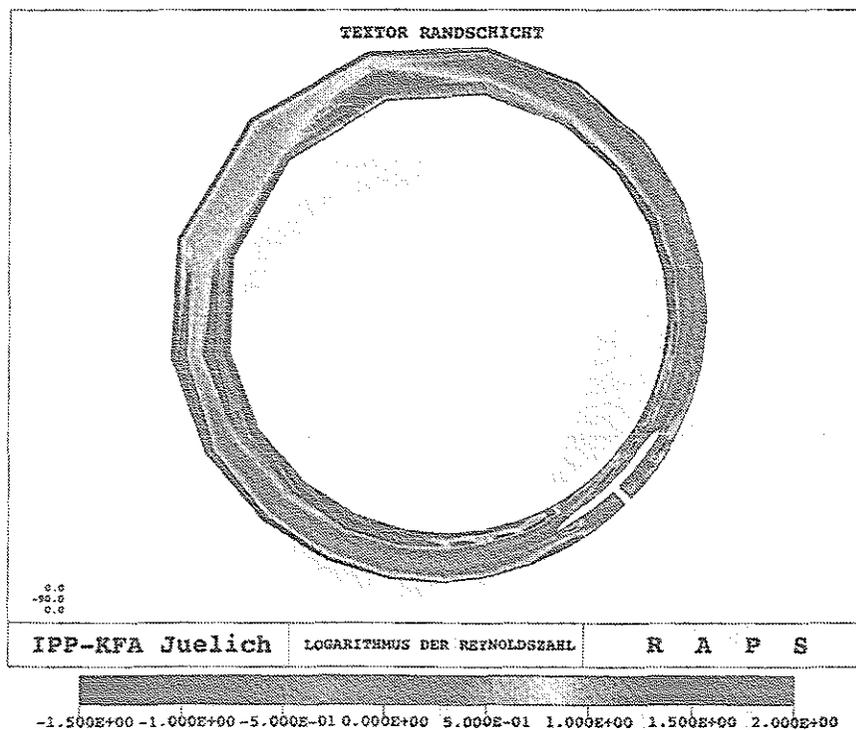


Abbildung 5.12: Die lokale Reynolds-Zahl für die Ionenimpulsbilanz in logarithmischer Darstellung

In vielen theoretischen Ansätzen [33] wird der viskose Transport gegenüber dem Transport durch Druckgradienten vernachlässigt und eine dissipationsfreie, globale Impulsbilanz zwischen Separatrix und Targetoberfläche angenommen. Nach dem Ergebnis der numerischen Berechnung ist diese Annahme nicht gerechtfertigt, denn außer vor den Limiterspitzen ist der viskose Transport von derselben Größenordnung oder eher größer als der Transport durch Druckgradienten.

Vor allem im Bereich hoher Plasmadichten, besonders in der Nähe von Targetoberflächen sind die viskosen Effekte wichtig. Das könnte auch erklären, warum in JET-Divertor Rechnungen (durchgeführt mit Braams-B2 und EIRENE) die nach einfachen theoretischen Überlegungen erwartete globale Druckbilanz zwischen Separatrix und Targetoberfläche [137] nicht erfüllt ist.

Transportprozesse in der Ionenergiebilanz

Analog zur Reynolds-Zahl kann auch die Péclet-Zahl umgeformt werden:

$$Pe = \frac{L_T \cdot n_i \cdot V_{\parallel}}{\kappa_{\parallel}} = \frac{n_i \cdot V_{\parallel}}{\kappa_{\parallel} \frac{1}{T_i} b_{\theta} \frac{\partial T_i}{\partial \bar{x}_{\theta}}} = \frac{p_i V_{\theta}}{b_{\theta}^2 \kappa_{\parallel} \frac{\partial T_i}{\partial \bar{x}_{\theta}}} \quad (5.17)$$

Ähnlich wie vorher in der Impulsbilanz wird hier nun der konvektive und der konduktive Energiefluß miteinander verglichen (siehe Gleichung (3.101)).

Man erkennt deutlich, daß die Péclet-Zahl im gesamten Gebiet kleiner ist als eins, d.h. der Ionentransport wird durch die dissipativen Effekte dominiert. Nur in der Nähe des Ausströmkanals unter dem Limiter sind Diffusion und Konvektion von derselben Größenordnung.

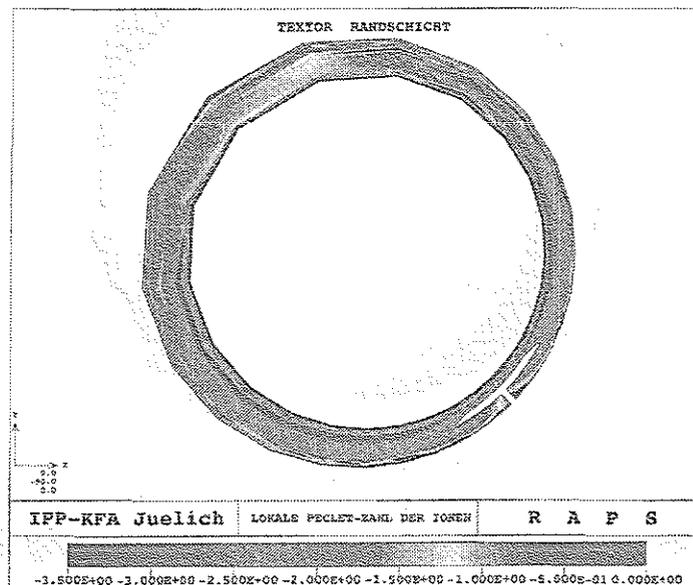


Abbildung 5.13: Die lokale Péclet-Zahl für die Ionenergiebilanz in logarithmischer Darstellung

Eine Péclet-Zahl in der Größenordnung eins unter dem Limiter bedeutet aber nichts anderes, als daß der aus den Randbedingungen folgende Energiefluß sich zu etwa gleichen Teilen durch konvektiven und konduktiven Transport geliefert wird. Diesen Effekt beobachtet man an der Oberseite des Limiters nicht, da dort neben Dissipation und Konvektion die Wechselwirkung der Neutralteilchen mit dem Plasma einen entscheidenden Einfluß auf die Energiebilanz hat.

5.5.3 Berechnete Randschichtprofile in TEXTOR

Das Dichteprofil

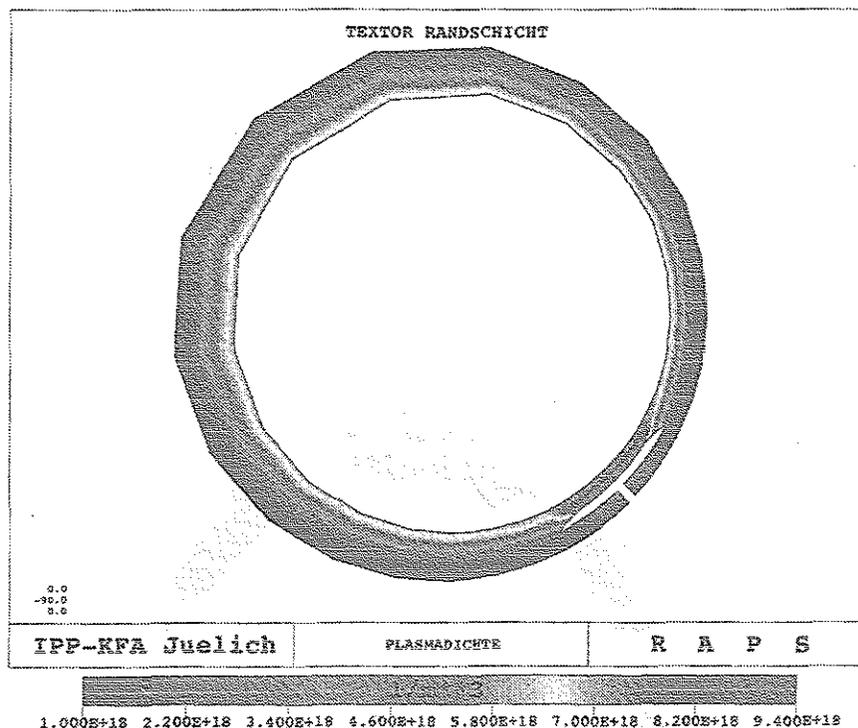


Abbildung 5.14: Die Plasmadichte in der Randschicht von TEXTOR

Die Merkmale des Dichteprofiles sind folgende:

1. Der radiale Dichteabfall ist für größere Torusradien stärker, was wegen der im Torus nach außen größer werdenden Flächen und den damit zusammenhängenden stärkeren radialen Flüssen auch erwartet werden konnte.
2. Die radiale Abfalllänge beträgt in der Rechnung etwa 5cm , d.h. sie ist im Vergleich zum Experiment um einen Faktor 3-4 zu groß. Diese Diskrepanz ist dadurch zu erklären, daß zur Auswertung der Messungen lediglich ein globales radiales Diffusionsmodell benutzt wird. Im Gegensatz zu den Rechnungen geht keinerlei poloidaler Transport ein. Da dieser aber, vor allem aufgrund von Recycling-Effekten,

einen großen Einfluß auf die radialen Gradienten und Flüsse hat, bestimmt er zu einem großen Teil auch die radialen Abfallängen. Es läßt sich also feststellen, daß der gemessene, globale Diffusionskoeffizient nicht mit dem in die Randschichtmodellierung eingehenden lokalen Koeffizienten gleichgesetzt werden darf. Vielmehr müßte man in den Rechnungen die Diffusion so lange modifizieren, bis das Gesamtsystem aus poloidalem und radialem Transport die gemessenen radialen Profile reproduziert.

3. Sowohl vor den Limiterspitzen, als auch unter dem Limiter ergibt sich eine Dichteerhöhung, vor allem bedingt durch reionisierte Neutralteilchen. Auf der Limiteroberseite hat man eine zusätzlichen Dichteerhöhung, bedingt durch poloidalen und radialen Transport von den Limiterspitzen in diese Zone.

Das Profil der Poloidalgeschwindigkeit

Auf dieses Profil soll hier nur kurz eingegangen werden, da es in Abschnitt 5.5.4 intensiver behandelt wird. Man erkennt eine Beschleunigung des Plasmas zu den Limiterspitzen und den Ausströmkanälen wegen des dort als Randbedingung formulierten Bohm-Kriteriums $V_{||} = \sqrt{(T_e + T_i)/m_i}$. Die Geschwindigkeit an den unterschiedlichen Flächen des Limiters variiert etwa um den Faktor 2.5, was einer Temperaturänderung um den Faktor 6 entspricht.

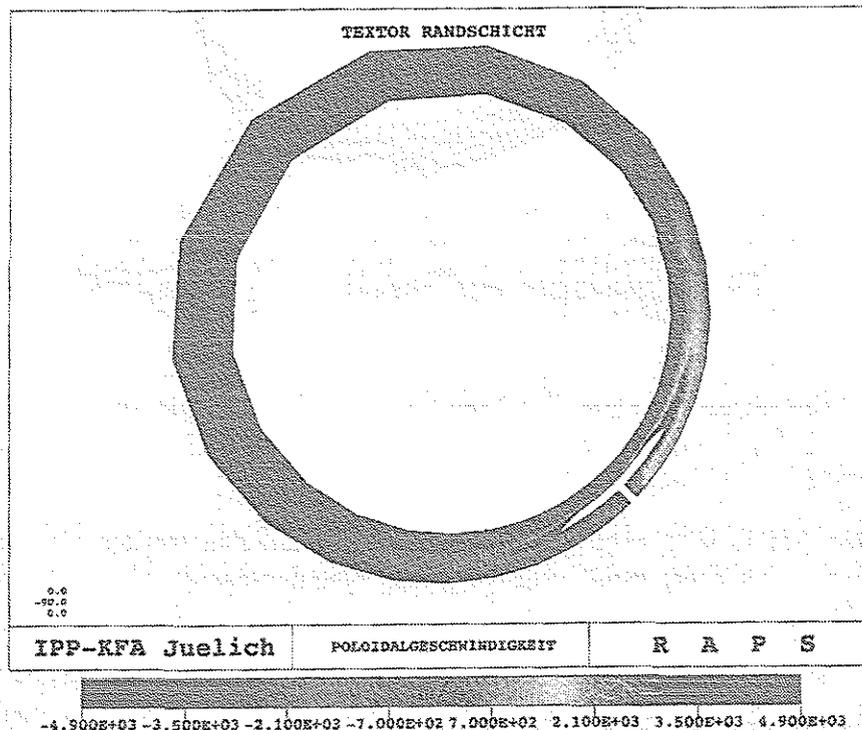


Abbildung 5.15: Die Poloidalgeschwindigkeit in der Randschicht von TEXTOR.

Das Profil der Radialgeschwindigkeit

In diesem Profil findet man indirekt alle wichtigen Prozesse der Randschicht wieder. Der erste Effekt ist die symmetrische Teilung des Plasmaflusses, die sich in der Konfiguration aufgrund der Störung durch den Limiter aufbaut. Das zweite Merkmal ist der größere Fluß an der Außenseite des Torus, der zu der beobachteten radialen Erhöhung der Plasmadichte in diesem Bereich führt. Zum dritten erkennt man eine mit dem Flußflächenradius anwachsende radiale Strömungsgeschwindigkeit, die nötig ist, um den poloidalen Fluß auf den Limiter erzeugen zu können.

Ein zusätzlicher Effekt, der sich aus der endlichen poloidalen Ausdehnung des Limiters ergibt, ist die sich auf der Limiteroberseite entwickelnde, nach innen gerichtete Diffusion. Sie wird verursacht durch eine lokale Dichteerhöhung in diesem Bereich, auf die in einem späteren Abschnitt genauer eingegangen wird.

Es gibt ein weiteres Detail, auf das hingewiesen werden soll:

Vor den Limiterspitzen hat man eine Aufteilung der Strömung. Ein Teil der Strömung trifft den Limiterkopf, während der andere Teil in die Scoops geleitet wird. Die Aufteilung orientiert sich am Verlauf der Magnetfeldlinien. Wegen der Shafranov-Shift treffen an der Außenseite des Torus mehr Plasmateilchen die Limiterspitze, während die von der Innenseite kommenden Ionen eher in die Scoops gelangen.

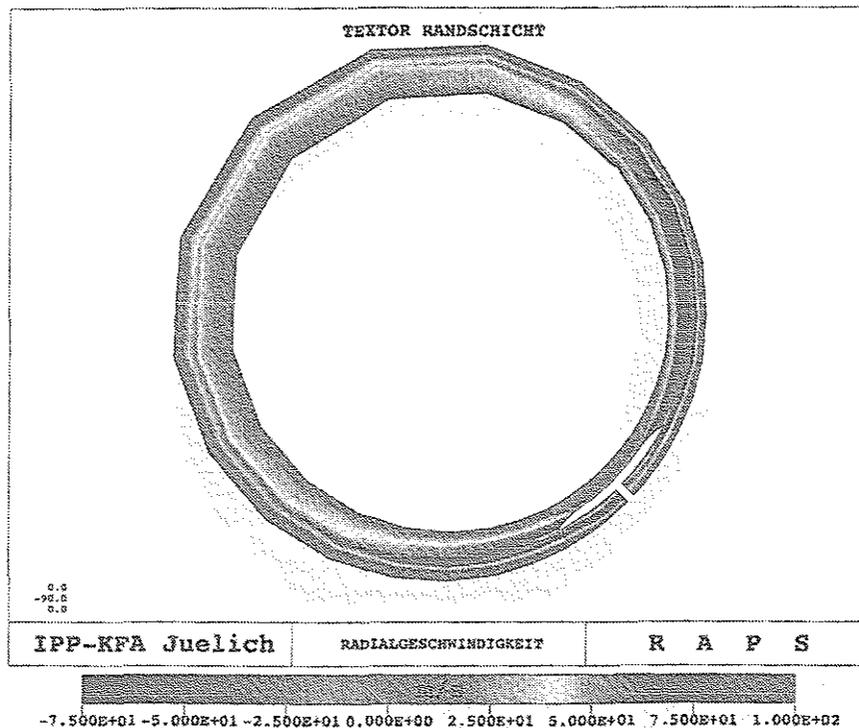


Abbildung 5.16: Die Radialgeschwindigkeit in der Randschicht von TEXTOR

Die Ionentemperatur

Man kann sich aufgrund des gleichmäßigen Verlaufs des Profils bei der Diskussion auf zwei poloidale Winkel beschränken:

Der Verlauf in der Symmetrieebene Die Temperatur bleibt hier innerhalb der Separatrix nahezu konstant, was durch die Wahl des konstanten radialen Wärmeleitungskoeffizienten bedingt ist. Erst in der Nähe des Limiterradius fällt sie dann nahezu exponentiell mit einer typischen Länge von 1.8cm ab.

Der Verlauf am Limiter Aufgrund der Wechselwirkung mit den Neutralteilchen zeigt die Rechnung in dieser Zone einen signifikanten Abfall der Ionentemperatur. Gegenüber der Symmetrieebene sind die Temperaturen auf derselben Flußfläche um einen Faktor 2 – 3 geringer. An den Einströmkämen der Scoops erhält man zwischen 5eV und 10eV . Diese Werte sind verglichen mit dem Experiment um etwa einen Faktor 1.5 zu klein [138]. Da aber die Elektronentemperatur in diesen Berechnungen vorgegeben war und nicht relaxieren konnte, damit also auch nicht auf Änderungen in den Neutralteilchenquellen reagierte, überfordert ein Vergleich mit dem Experiment im Augenblick auch die Methode. Im qualitativen Verlauf sind die Temperaturen aber vergleichbar mit der Lösung von H. Gerhauser [46] berechnet mit SOLXY und M. Baelmans [64] berechnet mit B2. Damit ist auch im Nachhinein die Modellierung der Elektronentemperatur nach den o.g. Modellen gerechtfertigt.

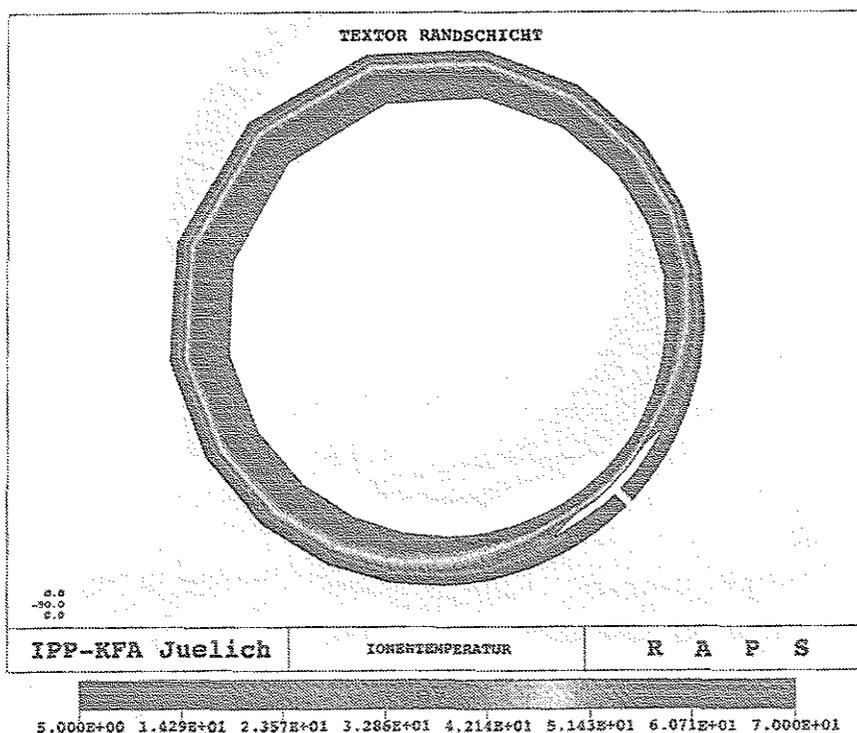


Abbildung 5.17: Die Ionentemperatur in der Randschicht von TEXTOR

5.5.4 Die Plasmaströmung in der Umgebung des Limiters

In diesem Abschnitt werden die Geschwindigkeitsprofile in der Nähe des Limiters genauer untersucht. Durch die exakte Modellierung der Limiterform ergeben sich hier interessante Effekte, die sich deutlich von den Ergebnissen der Finite-Differenzen Rechnungen unterscheiden, bei denen die poloidale Ausdehnung des Limiters nicht berücksichtigt wird.

Die Strömung der Teilchen über dem Limiter

Der Strömungsverlauf über der Oberfläche des Limiters wird durch das Zusammenwirken von zwei physikalischen Prozessen bestimmt. Der erste Prozeß ist die Entstehung von Neutralteilchen an den Limiterspitzen und ihre Reionisation im Plasma. Dies führt zu einer lokalen Dichteerhöhung auf den Flußflächen mit $r < 0.445m$. Im zweiten Prozeß werden die Teilchen in dieser Zone durch poloidale Geschwindigkeiten, die durch die radiale Viskosität erzeugt werden, vom Limiterkopf weg in den Bereich transportiert, in dem die Flußflächen parallel zur Limiteroberfläche verlaufen. Hier "stoßen" die Strömungen, von den beiden Limiterspitzen mit entgegengesetzter Poloidalgeschwindigkeit kommend, aufeinander. Im stationären Fall müssen sie nach der Kontinuitätsgleichung von dort auch wieder abtransportiert werden. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten, die beide in den numerischen Simulationen auftreten:

- Die Dichte erhöht sich so lange, bis sie lokal größer ist als am Einströmrand. Dann ist eine radiale Diffusion zurück ins Kernplasma möglich. Dieser Prozeß ist, wie wir in Abschnitt 3.7.2 gesehen haben, sehr langsam.

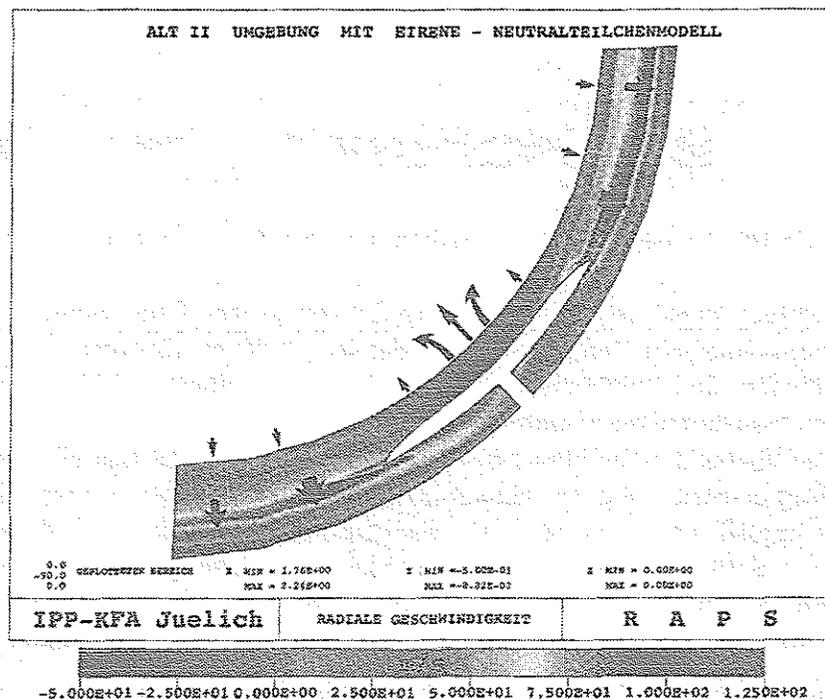


Abbildung 5.18: Die radiale Strömung in der Umgebung des Limiters ALT II

- Es findet eine Rückströmung in poloidaler Richtung statt. Sie bildet sich auf dem räumlich engen Bereich zwischen Limiteroberfläche und Einströmrand aus. Dieser Transport ist aufgrund der höheren Transportkoeffizienten parallel zu den Flußflächen leichter zu realisieren².

Um diesen Effekt besser auflösen zu können, wird nur ein Ausschnitt der Geschwindigkeitsverteilung dargestellt. Die in den anderen Bereichen auftretenden, sehr viel höheren Poloidalgeschwindigkeiten werden ausgeblendet und nur durch Strömungspfeile angedeutet.

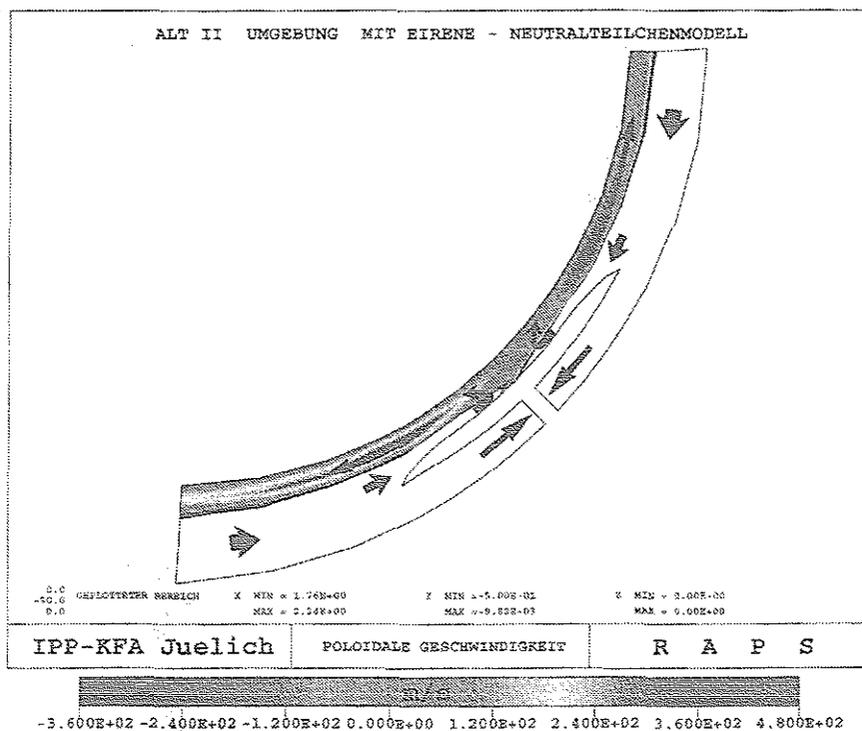


Abbildung 5.19: Die poloidale Rückströmung in der Umgebung des Limiters ALT II

Der beobachtete Effekt ist vor allem deshalb von großer Bedeutung, da die radiale Rückströmung einerseits den effektiv aus der Randschicht abtransportierten Fluß erheblich reduziert und andererseits die vom Limiter erodierten Verunreinigungen ins Kernplasma transportieren könnte.

Anzumerken bleibt, daß die berechnete Rückströmung physikalisch plausibel und qualitativ richtig erscheint, daß sie jedoch stark vom verwendeten Neutralteilchenmodell und damit implizit auch von der Elektronentemperatur abhängt. Da diese jedoch aus Lösungen von finite Differenzen Verfahren abgeleitet wurde und deshalb vor allem über der Limiteroberfläche nur eine grobe Näherung sein kann, sind quantitative Aussagen erst nach selbstkonsistenter Berücksichtigung der Elektronenenergiebilanz möglich.

²Man beachte: Am Einströmrand muß die Poloidalgeschwindigkeit aufgrund der Randbedingung verschwinden.

Die Komprimierung der Teilchen unter dem Limiter

Durch die Reionisation der aus den Scoops emittierten Neutralteilchen ergibt sich auch unter dem Limiter eine signifikante Dichteerhöhung. Sie wird vor allem dadurch bewirkt, daß von den recycelten Teilchen etwa 82 % noch innerhalb des Kanals unter den Limiterplatten reionisiert werden. Nur etwas mehr als 17 % erreichen das "freie Plasma", in dem die umgebenden Wände keine so wesentliche Rolle mehr spielen. Sie werden zu einem großen Teil (83 %, d.h. 14 % der gesamten Neutralteilchen) auf innere Flußflächen transportiert und dort über Stöße reionisiert.

Die an den Limiterspitzen entstehenden Neutralteilchen werden durch die Form der Oberfläche ausschließlich in Richtung weiter innen liegender Flußflächen emittiert. Erst durch Stöße im Plasma gelangen etwa 3 % auf äußere Flußflächen und insgesamt nur knapp 1 % in den Limiterkanal, sodaß deren Beitrag zur Dichteerhöhung vernachlässigbar ist.

Die folgende Abbildung zeigt den Dichteverlauf in der Nähe des Limiters. Zur besseren Auflösung der Gradienten ist nur das Gebiet bis zur Separatrix dargestellt. Im Mittel steigt die Plasmadichte vom unbeeinflussten Gebiet vor dem Limiterkanal bis zur Targetplatte um einen Faktor zwei, während sich die Flüsse aufgrund des Bohm-Kriteriums je nach Flußfläche um Faktoren 2.5 bis 3.5 verstärken.

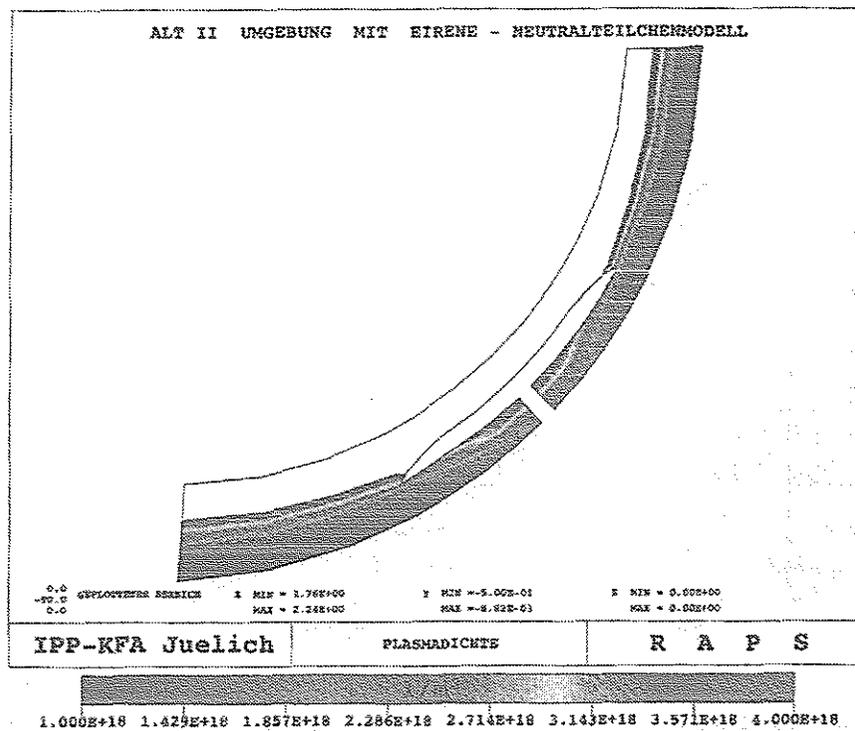


Abbildung 5.20: Die Dichteerhöhung des Plasmas unterhalb des Limiters ALT II, verursacht durch reionisierte Neutralteilchen

Die Iontemperatur sinkt unter dem Limiter auf sehr niedrige Werte – etwa 7 eV – ab. Dafür sind vor allem die Neutralteilchen verantwortlich, deren Temperatur sehr viel geringer ist als die Plasmatemperatur und die durch Stöße mit den Ionen dem Plasma Energie entziehen.

Auch an dieser Stelle muß darauf hingewiesen werden, daß die Ergebnisse nur unter dem Vorbehalt diskutiert werden können, daß die Elektronentemperatur in jedem Punkt gegeben ist. Das könnte ein Grund für die sehr niedrige Iontemperatur an den Scoops sein, denn bei konsistenter Berücksichtigung der Elektronenenergiebilanz würde man folgende Effekte erwarten:

- Die Elektronentemperatur würde aufgrund der Stöße mit den kalten Neutralteilchen ebenso absinken wie die Iontemperatur und der Wirkungsquerschnitt für die Reionisation wäre kleiner.
- Damit wäre auch die freie Weglänge der Neutralteilchen bis zur Reionisation länger, sodaß sie weiter ins Plasma eindringen könnten und sich nicht so stark unter dem Limiter verdichteten.
- Rückwirkend fiel dann die Iontemperatur weniger stark ab, weil der Fluß der kalten reionisierten Neutralteilchen auf einen größeren Raumbereich verteilt würde.

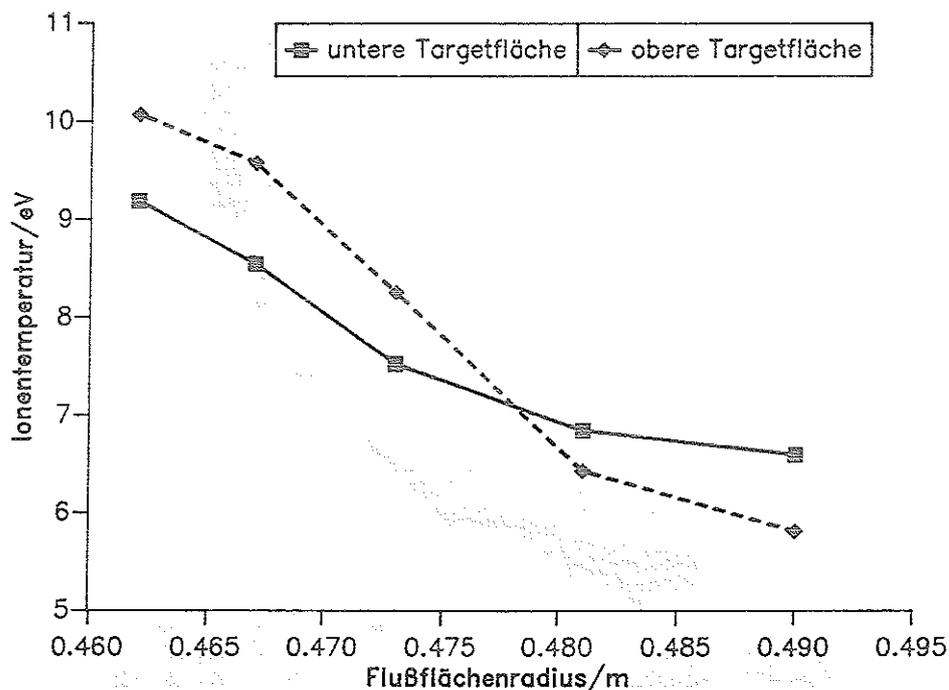


Abbildung 5.21: Der Verlauf der Iontemperatur unter dem Limiter ALT II, verursacht durch Wechselwirkungen mit Neutralteilchen

5.5.5 Die globale Strömungsbilanz

Im stationären Fall muß eine globale Strömungsbilanz gelten, d.h. die ins Gebiet pro Zeiteinheit einfließenden Teilchen müssen auch aus dem Gebiet ausströmen. Der Fluß der einströmenden Teilchen setzt sich in unserem speziellen Fall zusammen aus Teilchen, die aus dem Plasmakern in die Randschicht diffundieren und aus Ionen, die durch Reionisation von Neutralteilchen im Randschichtvolumen entstehen. Die Ionen strömen über die Limiterspitzen, die Scoops und -wie schon oben erwähnt- oberhalb der Limiteroberfläche ins Kernplasma aus.

Berechnet man die einzelnen Komponenten dieser Bilanz, so ergibt sich:

- **Der aus dem Kernplasma in die Randschicht einströmende Fluß Γ_{core}^{in}** beträgt $1.91 \cdot 10^{21}$ /Sekunde. Dieser Strom durchsetzt eine Oberfläche von exakt $25m^2$, sodaß sich daraus bei einer Dichte von $7 \cdot 10^{18}$ eine mittlere Diffusionsgeschwindigkeit von $11m/s$ bestimmen läßt. Dies ist konsistent mit den am Plasmarand berechneten Radialgeschwindigkeiten. Im Vergleich zur Rechnung von H. Gerhauser [46] liegt dieser Wert um 5 % höher, was bei den gravierenden Unterschieden im verwendeten Rechnernetz und im Neutralteilchenmodell eine erstaunlich geringe Abweichung ist.
- **Die Rückströmung ins Kernplasma Γ_{core}^{out}** ist mit $0.48 \cdot 10^{21}$ /Sekunde nur einen Faktor vier geringer als der einströmende Fluß. Aufgrund der etwa $2.5m^2$ großen Fläche, in der sich die Strömung lokal umkehrt, beträgt die radiale Diffusionsgeschwindigkeit hier im Mittel $(-25)m/s$. Der aus dem Plasmainternen effektiv austretende Teilchenstrom Γ_{core}^{eff} wird durch diesen Effekt auf $1.43 \cdot 10^{21}$ /Sekunde reduziert.
- **Zu den Berandungen ohne radiale Flüsse** gehört der äußere Plasmarand und die zu den Flußflächen parallel angenommenen Teile der Limiteroberfläche. Die auf diesen Flächen berechneten Flüsse resultieren aus numerischen Fehlern, die sich vor allem durch numerische Diffusion ergeben. Mit $1.67 \cdot 10^{19}$ auf der äußeren Flußfläche, bzw. $2.3 \cdot 10^{19}$ auf der Ober- und Unterseite des Limiters sind sie um zwei Größenordnungen geringer als die relevanten radialen Flüsse und damit vernachlässigbar.
- **Der Teilchenfluß in die Scoops Γ_{Scoops}^{out}** hat einen Wert von $1.07 \cdot 10^{21}$ /Sekunde und ist damit um einen Faktor 1.8 niedriger als der Fluß auf die Limiterspitzen Γ_{Lim}^{out} , der $1.93 \cdot 10^{21}$ /Sekunde beträgt. Aufgrund der höheren Plasmadichte und Poloidalgeschwindigkeit konnte dieses Ergebnis trotz einer nur halb so großen effektiven Austrittsfläche erwartet werden.
- **Die Teilchenquellen durch Reionisation von Neutralen** lassen sich in zwei Anteile Γ_{Lim}^{in} und Γ_{Scoops}^{in} zerlegen. Die erste Komponente resultiert aus dem reionisierten Fluß von Neutralteilchen, die von den Limiterköpfen emittiert werden, die zweite Komponente ergibt sich durch Reionisation der in den Scoops recycelten Neutralen. Diese Unterscheidung ist notwendig, weil die Pumpwahrscheinlichkeit der Targets verschieden ist: An der Limiteroberfläche hat man im stationären

Zustand ein vollständiges Recycling, während in den Scoops eine Wahrscheinlichkeit von 25 % dafür angenommen wird, daß ein Teilchen beim Auftreffen auf die Wand gepumpt wird. Führt man unter diesen Annahmen Rechnungen mit dem Neutralgascodem EIRENE durch, so ergeben sich effektive Recyclingkoeffizienten von $R_{Lim} = 0.5$ für die Limiterquelle und $R_{Scoops} = 0.49$ für die Quellen in den Scoops.

Das bedeutet einerseits, daß nur 50 % der von der Oberfläche des Limiters startenden Neutralen im Plasma reionisiert werden können, während die restlichen Teilchen ins Kernplasma eindringen.

Andererseits weist die Erhöhung der effektiven Pumpeffektivität in den Scoops darauf hin, daß die Neutralteilchen im Mittel mehr als einmal auf die Targetplatten reflektiert werden, was durch die hohe Plasmadichte unter dem Limiter zu erklären ist.

Das Verhältnis aus Quellen und Senken berechnet sich damit zu:

$$\frac{\Gamma_{in}}{\Gamma_{out}} = \frac{\Gamma_{core}^{in} + R_{Lim} \cdot \Gamma_{Lim}^{in} + R_{Scoops} \cdot \Gamma_{Scoops}^{in}}{\Gamma_{core}^{out} + \Gamma_{Lim}^{out} + \Gamma_{Scoops}^{out}} = \frac{3.39 \cdot 10^{21}}{3.48 \cdot 10^{21}} = 0.975 \quad (5.18)$$

Die Flußbilanz ist damit bis auf einen Fehler von 2.5 % erfüllt, sodaß man im Rahmen der Rechengenauigkeit ("numerische Diffusion" über ideal leitende Berandungen) die Lösung als stationär betrachten kann.

5.5.6 Vergleich des analytischen Neutralteilchenmodells mit der MC-Simulation

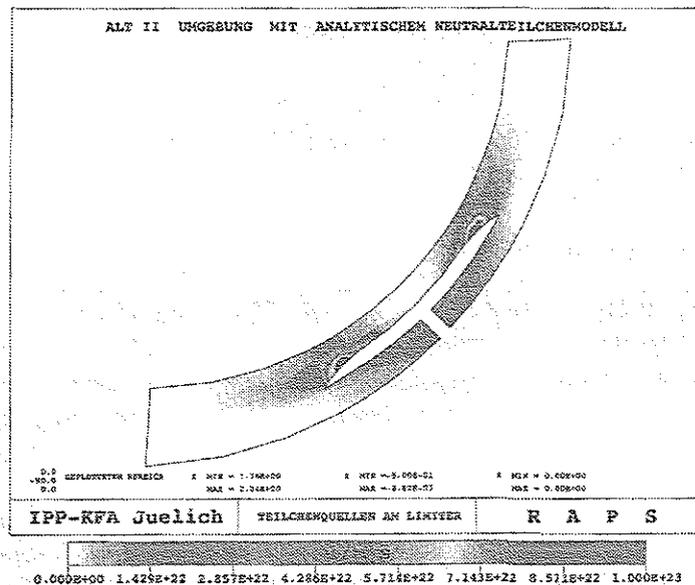


Abbildung 5.22: Das Profil der Teilchenquellen in der Umgebung von ALT II, berechnet mit einem analytischen Neutralteilchenmodell

Zum Vergleich der beiden Modelle werden die Teilchen- bzw. Energiequellen herangezogen. Da die Quellterme im analytischen Modell analog zum stochastischen Modell jeweils in einen Anteil von den Limiterköpfen und den Scoops zerlegt werden, können die Flüsse der reionisierten Neutralteilchen mit den effektiven Recyclingfaktoren R_{Scoops} bzw. R_{Lim} aus der EIRENE-Berechnung skaliert werden.

Der Vergleich der Teilchenquellen zeigt eine qualitativ sehr gute Übereinstimmung zwischen analytischem und stochastischem Neutralteilchenmodell. Quantitativ unterscheiden sie sich allerdings stark; die Quellstärke ist im stochastischen Modell etwa doppelt so hoch wie in der analytischen Näherung. Diese Diskrepanz ist darauf zurückzuführen, daß die Teilchenflüsse auf die Targetflächen sich ebenfalls um einen Faktor zwei in den beiden Modellen unterscheiden. Wichtig sind in diesem Zusammenhang die Moleküle, die im analytischen Modell unberücksichtigt bleiben, während sie in der stochastischen Beschreibung zu einer deutlichen Flußverstärkung in Targetnähe und damit auch zu einem größeren Neutralteilchenfluß zurück in die Randschicht führen. Ein erster Schritt zur Verbesserung des analytischen Modells wäre daher die Implementierung einer einfachen Formel zur Beschreibung der Molekülverteilung. Dabei könnte man sich in einem ersten Modell darauf beschränken, einen bestimmten Anteil des Ionenflusses als Moleküle mit geringerer freier Weglänge ins Plasma zu emittieren. Werte für den relativen Anteil und die freie Weglänge könnten aus der näheren Untersuchung der Molekülverteilung im stochastischen Modell gewonnen werden.

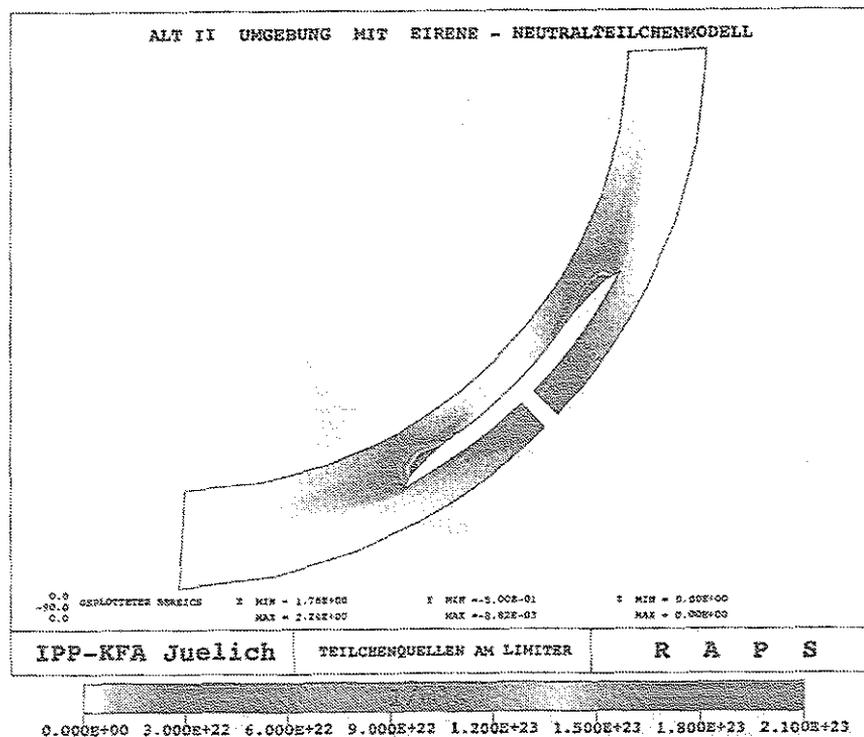


Abbildung 5.23: Das Profil der Teilchenquellen in der Umgebung von ALT II, berechnet mit einem stochastischen Neutralteilchenmodell

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde ein numerisches Verfahren zur Beschreibung des Plasmatransports in der Randschicht von TOKAMAK-Experimenten entwickelt.

Ausgehend von einem allgemeinen Flüssigkeitsmodell konnten spezielle zweidimensionale Gleichungen zur Beschreibung des Transportverhaltens von Elektronen und Ionen in einer toroidal symmetrischen Konfiguration hergeleitet werden. Sie unterscheiden sich von den bisher dokumentierten Gleichungen dadurch, daß auch die lokale Krümmung des Koordinatensystems berücksichtigt wird. Es wurde gezeigt, wie durch Vernachlässigung der Koordinatenkrümmung und Einführung von tokamakspezifischen, stark anisotropen Transportkoeffizienten die üblicherweise benutzten Randschichtgleichungen aus den allgemeineren Beziehungen abgeleitet werden können.

Durch zusätzliche Einschränkungen, vor allem durch die Forderung, daß keine elektrischen Ströme in der Randschicht fließen sollen, wurden die Gleichungen in eine einfache Form gebracht, die zum Studium der prinzipiellen Eigenschaften einer Plasmaströmung gut geeignet ist und daher sowohl in dieser Arbeit als auch in den meisten anderen Randschichtcodes verwendet wird.

An diesem vereinfachten Modell wurden in einer eindimensionalen analytischen Näherung die charakteristischen Transportzeiten für unterschiedliche Prozesse studiert. Neben der Dominanz der Wärmeleitung entlang der Feldlinien für Elektronen und Ionen konnte abgeschätzt werden, daß die Viskositätseffekte in der Impulsbilanz einen entscheidenden Einfluß auf den Strömungsverlauf haben.

Gleichzeitig wurde damit auch die Gültigkeit der Flüssigkeitsgleichungen in der bisherigen Form in Frage gestellt. Denn nur unter der Voraussetzung, daß der dissipative Transport im Vergleich zum konvektiven Transport klein ist, ist die Herleitung von Flüssigkeitsgleichungen und die Anwendung eines Fluidmodells sinnvoll.

Diese Ergebnisse wurden allerdings mit einfachen Dichte-, Geschwindigkeits- und Temperaturprofilen abgeleitet. Sie lassen sich daher nicht verallgemeinern und müssen bei numerischen Rechnungen räumlich aufgelöst überprüft werden.

Zur numerischen Lösung der Gleichungen wurde ein Finite-Elemente-Verfahren in zwei Dimensionen gewählt. Es unterscheidet sich von den bisher benutzten Verfahren

(Finite Differenzen/ Volumen) in zwei wesentlichen Punkten:

- Das Grundgebiet wird statt in Rechtecke in geometrisch flexiblere Dreiecke zerlegt, sodaß auch die Modellierung von Targetoberflächen, die nicht orthogonal zum Magnetfeld orientiert sind, möglich ist.
- Durch die Verwendung eines Integralprinzips können die Variablen auf einem unstrukturierten Gitternetz berechnet werden. D.h. der Abstand der Stützstellen ist nicht regelmäßig und fest vorgegeben, sondern kann lokal an die Problemstellung angepaßt werden. Dadurch reduziert sich bei gleicher räumlicher Auflösung die Anzahl der Gitterpunkte gegenüber den bisher verwendeten Methoden erheblich.

Als Lösungsverfahren für die diskretisierten Gleichungen kommt ein zeitgenauer, expliziter Prädiktor-Korrektor-Algorithmus zur Anwendung, der speziell entwickelt wurde, um neben diffusivem Transport auch starke konvektive Strömungen, wie sie in der Nähe der Limiteroberflächen aufgrund des Bohm-Kriteriums erwartet werden, behandeln zu können.

Während diese explizite Methode zur Simulation von Strömungen in Turbinen und Düsen ideal geeignet und daher weit verbreitet ist, zeigen sich bei der Beschreibung von Plasmaströmungen allerdings entscheidende Nachteile, die damit zusammenhängen, daß pro Iterationsschritt nur ein Informationsaustausch mit den Nachbarknoten möglich ist. Dies führt für jede Iteration zu einer Begrenzung des Zeitschritts, der sich aus dem Quotienten der Entfernung zwischen zwei benachbarten Knoten und der maximalen charakteristischen Geschwindigkeit für den Transport berechnet. Entscheidend ist dieser Nachteil, weil in der Plasmarandschicht die Prozesse mit so unterschiedlichen Geschwindigkeiten verlaufen, daß die Zeitschrittbeschränkung eine zu hohe Anzahl ($\approx 10^7$) von Iterationen erfordern würde, um zu einer konvergierten Lösung zu gelangen.

Daher wurde in der vorliegenden Arbeit der mit Abstand "schnellste" Transportmechanismus, die Elektronenwärmeleitung, nicht in die Rechnungen miteinbezogen, sondern die Elektronentemperatur von außen vorgegeben. Durch diese Maßnahme konnte der Zeitschritt um einen Faktor 40 vergrößert werden und es war möglich, auch mit dem expliziten Verfahren stationäre Lösungen zu berechnen.

Angewendet wurde das Verfahren zur Strömungsberechnung in der Randschicht von TEXTOR. Dazu wurde mit dem Gleichgewichtscode CATI die Flußflächenkonfiguration für eine typische Ohm'sche Entladung mit 400 kA Plasmastrom berechnet. Der Verlauf der Flußflächen am Plasmarand ($r > 0.4m$) diente als Grundstruktur zur Erzeugung eines Ausgangsrechnernetzes. In dieses Netz integriert wurde die Kontur des Pumplimiters ALT II.

Die Randbedingungen wurden so gewählt, daß sich von der inneren Flußfläche ($r = 0.4m$) mit einer vorgegebenen Plasmadichte von $7 \cdot 10^{18}$ ein Diffusionsstrom nach außen entwickelt, der aufgrund des Bohm-Kriteriums am Limiterkopf und in den Scoops poloidal abgeführt wird.

Die Rekombination des Plasmas an den Targetoberflächen und das Eindringen der so entstehenden Neutralteilchen in die Randschicht wird durch die Definition von Recyclingfaktoren beschrieben. Dabei wird an den Limiterspitzen ein vollständiges Recycling

angenommen, während 25 % des in die Scoops fließenden Plasmastroms abgepumpt werden soll.

Zur Implementierung der Teilchen-, Impuls- und Energiequellen, die durch die Wechselwirkungen der Neutralen mit den Plasmateilchen in der Randzone entstehen, wurden zwei Modelle benutzt.

Ein einfaches, analytisches Modell simuliert nur den Ionisationsprozess und definiert pro ionisiertem Neutralteilchen lokal einen Energiegewinn bzw. -verlust für Ionen bzw. Elektronen. Die Stärke der Teilchenquelle wird iterativ in aufeinanderfolgenden Zellen nach folgendem Schema berechnet: Von der Targetoberfläche fließt ein bestimmter Neutralteilchenstrom in die angrenzenden Elemente des Rechengitters. Dort wird aus dem Strom, der zugehörigen thermischen Geschwindigkeit und geometrischen Faktoren die Neutralteilchendichte bestimmt. Durch Multiplikation mit der Plasmadichte und einem Ionisierungsquerschnitt, der nur von der Elektronentemperatur abhängt, ergibt sich daraus die Quellstärke in dem betrachteten Element. Der über eine Seite einströmende Fluß wird um diese Quellstärke reduziert und wird gemäß der Seitenlänge und dem Winkelverhältnis im Dreieck auf die beiden anderen Seiten aufgeteilt.

Das zweite Modell, der Monte-Carlo-Code EIRENE, beschreibt den Neutralgastransport stochastisch als Markoff-Prozess. Dazu werden die Wechselwirkungen sowohl mit den Plasmateilchen als auch mit den Wänden mittels Zufallszahlen am Rechner simuliert. Die wichtigsten Prozesse, die im Plasma modelliert werden, sind Ladungsaustausch, elastische Stöße zwischen Plasma und Neutralen, Ionisation und Rekombination. Ein zusätzlicher Effekt, der großen Einfluß in Gebieten niedriger Temperatur haben kann, ist die Dissoziation von Molekülen. Diese können aufgrund der sehr komplexen Stoßvorgänge beim Plasma-Wand Kontakt entstehen. Um dieses Modell nutzen zu können, wurde eine geeignete Umgebung geschaffen, die einen Austausch von Information zwischen dem Fluid-Code und EIRENE ermöglicht. Damit kann durch Kopplung und mehrmalige Iteration der beiden Programme eine konsistente Lösung für Plasma und Neutralteilchen berechnet werden.

Anzumerken ist, daß in dieser und soweit veröffentlicht auch in allen anderen Anwendungen die Neutralteilchenmodelle die Zeitgenauigkeit der Rechnungen aufheben, da die Quelltermberechnung instantan geschieht und die Flugzeit der Neutralteilchen bis zum Ort der Wechselwirkung vernachlässigt wird. Das üblicherweise verwendete Argument, diese Zeit sei sehr klein im Vergleich zu den charakteristischen Zeiten für den Plasmatransport, ist bei expliziter Behandlung des parallelen Transports, also in den hier diskutierten zweidimensionalen Ansätzen, nicht mehr haltbar. Im Mittel liegt sie in der Größenordnung der typischen Zeiten für die Schallausbreitung und damit um mehr als zwei Größenordnungen über der charakteristischen Zeit der parallelen Elektronenwärmeleitung.

Für die Interpretation der Rechnungen bedeutet dies, daß lediglich der stationäre Zustand eine physikalische Relevanz hat, nicht jedoch die zeitliche Entwicklung der Lösung.

Bei der TEXTOR-Rechnung wurde so vorgegangen, daß zuerst eine Lösung mit dem analytischen Neutralteilchenmodell gesucht wurde, da die Berechnung der Quellterme hier sehr einfach und schnell geschehen kann. Auf diese Lösung aufbauend, wurde der

Fluid-Code an das physikalisch wesentlich umfangreichere und exaktere stochastische Modell aus EIRENE gekoppelt. Durch zweimalige, lösungsabhängige Verfeinerung des Rechnernetzes konnten starke Gradienten, vor allem im Bereich der Limiteroberfläche besser, aufgelöst werden.

Die wichtigsten Ergebnisse aus diesen Beispielrechnungen waren folgende:

- Die Fluidnäherung ist für die Ionen in weiten Teilen der betrachteten Geometrie nicht erfüllt. Gründe dafür sind die großen Transportkoeffizienten der Ionenwärmeleitung und Viskosität in paralleler Richtung.
- Durch die endliche poloidale Ausdehnung der Limiteroberfläche sind die Strömungen über und unter dem Limiter voneinander getrennt, und von unterschiedlichen physikalischen Prozessen geprägt:
 1. Auf dem Limiterblatt entwickelt sich eine Flußumkehr in poloidaler Richtung und eine radiale Rückströmung ins Kernplasma. Dieser Effekt kann auf die Nachbarschaft der Limiterspitzen zurückgeführt werden: Durch das Bohm-Kriterium und die radiale Viskosität entstehen auf den Flußflächen über dem Limiter poloidal entgegengesetzt gerichtete Strömungen, die durch die in diesem Bereich reionisierten Neutralteilchen verstärkt werden. Sie treffen aufeinander und es kommt zu einer Dichteerhöhung, die die Plasmateilchen durch poloidale bzw. radiale Rückströmung auszugleichen versuchen.
 2. In der Nähe der Scoops kommt es unter dem Limiter zu einer Komprimierung der recycelten Neutralteilchen und dadurch bedingt zu einer Erhöhung der Plasmadichte durch Reionisation. Dies führt zu einer deutlichen Absenkung der Iontemperatur in der Nähe der Prallplatten, ein im Hinblick auf das Problem der Erosion durch Ionenbeschuss sehr positives Ergebnis.
- Die Verteilung der recycelten Neutralteilchen, bzw. der Teilchen- und Energiequellen aufgrund der Wechselwirkung des Plasmas mit den Neutralen kommt der Realität sehr nahe, einerseits weil die exakte Oberflächenkontur des Limiters berücksichtigt werden kann, andererseits weil durch die Kopplung an den Neutralgascode EIRENE auch die physikalischen Effekte nahezu vollständig implementiert sind.

Anzumerken bleibt, daß die berechneten Profile und der Strömungsverlauf zwar plausibel und auch qualitativ richtig erscheinen, daß die Ergebnisse aber nicht überinterpretiert werden dürfen, da die Elektronentemperatur aus Finite-Differenzen Rechnungen vorgegeben war und nicht auf die veränderten Bedingungen (veränderte Geometrie und veränderter Plasmazustand) reagieren konnte.

Trotz dieser Einschränkung ist die Aussage wohl gerechtfertigt, daß man durch die Behandlung der Gleichungen mit dem neuen numerischen Verfahren zu Ergebnissen gelangt ist, die mit den bisherigen Methoden aufgrund der geometrischen Restriktionen nicht zu erreichen waren.

Gleichzeitig wurden bei der Bewertung und Entwicklung der Methode Erkenntnisse über die Bedeutung der verschiedenen Transportprozesse gewonnen. In den bisherigen Arbeiten zur Fluid-Modellierung in der Plasmarandschicht bleiben solche Überlegungen unerwähnt, obwohl die hier beobachteten Effekte entsprechend den Plasmaparametern auch dort hätten auftreten müssen.

Daher werden zwei wichtige Fragestellungen für die zukünftige Arbeit sein:

Wie verändern sich die Profile der Plasmaparameter bei selbstkonsistenter Berechnung der Elektronentemperatur?

Um eine Antwort auf diese Frage zu erhalten, soll folgendes Konzept verfolgt werden. In einer ersten Phase wird für die reine Wärmeleitungsgleichung mit nichtlinearen Transportkoeffizienten ein zeitlich und räumlich implizites und möglichst effektives Lösungsverfahren gesucht. Hat man ein solches gefunden, sollen alle konduktiven Prozesse nach diesem Schema berechnet werden. Um jedoch die numerische Stabilität des Algorithmus garantieren zu können, wird der dissipationsfreie Transport wie bisher mit dem expliziten Zwei-Schritt Algorithmus behandelt. Inwieweit die Viskositätseffekte explizit oder implizit formuliert werden, hängt von näheren Untersuchungen zur Stabilität und Zeitschrittweite der verschiedenen Verfahren ab.

Wie behandelt man den Transport in Bereichen höherer Plasmatemperatur ($T > 10eV$), in denen das Fluid-Modell nicht mehr streng gilt?

Eine erste, leicht zu realisierende Maßnahme, ist der Einbau von Flußbegrenzungen für Ionenwärmeleitung und Viskosität parallel zum Feld.¹ Darüberhinaus wird man anhand von Vergleichsrechnungen mit eindimensionalen drift-kinetischen Modellen überprüfen müssen, ob eine Formulierung der Fluid-Gleichungen mit nichtlokalen Transportkoeffizienten möglich ist.

Neben diesen Arbeitsschwerpunkten, die speziell die Entwicklung des Finite-Elemente-Fluid-Codes betreffen, wird man sich eingehender mit der numerischen Diffusion beschäftigen müssen und an diese Problematik anschließend mit der Frage, wie ein Rechengitter mit einer optimalen Knotenverteilung -auch bei komplizierten Flußflächenkonturen - automatisch und lösungsangepaßt erzeugt werden kann ?

Verbessert werden muß auch die Kopplung des FEM-Programms an den Neutralgascode EIRENE, um durch eine physikalisch exaktere Reskalierung der Quellterme die Konvergenz zu beschleunigen. Dies ist vor allem in Fällen hohen Recyclings, wie es in Divertoranordnungen der Fall ist, von großer Bedeutung.

Sicherlich sind die gestellten Aufgaben nicht in einem kürzeren Zeitraum zu bearbeiten, die bisherigen Ergebnisse geben jedoch Anlaß zu der Hoffnung, daß in den nächsten Jahren durch internationale Zusammenarbeit und intensiven Erfahrungsaustausch das Potential des Finite-Elemente Verfahrens zur Verbesserung der Modellierung genutzt werden kann und einen Beitrag zum Verständnis der Vorgänge in der Randschicht liefert.

¹Dies ist für die parallele Elektronenwärmeleitung in der Plasmaphysik bereits üblich.

The first part of the paper discusses the theoretical background of the research. It starts with a general introduction to the topic, followed by a detailed review of the existing literature. The authors identify the gaps in the current research and justify the need for their study. The theoretical framework is then presented, outlining the key concepts and models that will be used to guide the research.

The second part of the paper describes the methodology used in the study. It details the research design, the data collection methods, and the analytical techniques employed. The authors provide a clear and concise explanation of how the research was conducted, ensuring that the process is transparent and replicable. The results of the study are then presented, showing the findings and their implications for the field.

The final part of the paper discusses the conclusions and future research. The authors summarize the key findings of the study and discuss their implications for practice and theory. They also identify areas for further research and provide recommendations for future studies. The paper concludes with a final statement on the importance of the research and its contribution to the field.

Anhang A

Vektorrelationen in allgemeinen Koordinaten

A.1 Die Darstellung in verschiedenen Koordinaten

Es soll der Vektor \vec{A} betrachtet werden. Er läßt sich darstellen in physikalischen, kontravarianten und kovarianten Koordinaten:

$$\vec{A} = \tilde{A}_\alpha \tilde{e}_\alpha = A^\alpha \vec{e}_\alpha = A_\alpha \vec{e}^\alpha \quad (\text{A.1})$$

wobei für die Komponenten gilt:

$$\tilde{A}_\alpha = h_\alpha \cdot A^\alpha = \frac{A_\alpha}{h_\alpha} \quad (\text{A.2})$$

Auch der Ortsvektor \vec{u} wird in dieser Weise zerlegt:

$$\vec{u} = \tilde{u}_\alpha \tilde{e}_\alpha = u^\alpha \vec{e}_\alpha = u_\alpha \vec{e}^\alpha \quad (\text{A.3})$$

A.2 Die Komponenten eines Vektorgradienten

Bildet man den Gradienten eines Vektors in einem krummlinigen Koordinatensystem, so müssen nicht nur die Komponenten des Vektors nach dem Ort abgeleitet werden, sondern auch die Basisvektoren, denn sie ändern sich ebenfalls im Raum. Für die kontravariante Komponente von $\text{grad}(\vec{A})$ erhält man:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \vec{A})^{\alpha\beta} &= \vec{e}^\alpha \cdot (\vec{\nabla} \vec{A}) \cdot \vec{e}^\beta \\ &= \vec{e}^\alpha \cdot \left(\vec{e}^j \frac{\partial}{\partial u^j} A^i \vec{e}_i \right) \cdot \vec{e}^\beta \\ &= g^{\alpha j} \left(\vec{e}_i \frac{\partial}{\partial u^j} A^i + A^i \frac{\partial}{\partial u^j} \vec{e}_i \right) \cdot \vec{e}^\beta \\ &= g^{\alpha j} \left(\delta_i^\beta \frac{\partial}{\partial u^j} A^i + A^i \left\{ \frac{\partial}{\partial u^j} \vec{e}_i \cdot \vec{e}^\beta \right\} \right) \\ &= g^{\alpha j} \left(\frac{\partial}{\partial u^j} A^\beta + A^i \left\{ \begin{matrix} \beta \\ ij \end{matrix} \right\} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

wobei die Klammersymbole als **Christoffelsymbole zweiter Art** bezeichnet werden. Sie drücken die Ortsabhängigkeit der Einheitsvektoren in krummlinigen Systemen aus. Hier wird der Sinn der kontravarianten Formulierung sichtbar: Diese Ortsabhängigkeit läßt sich vollständig durch Ableitungen von Skalenfaktoren beschreiben. In einem orthogonalen Koordinatensystem gilt:

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ ki \end{matrix} \right\} = 0 \quad \text{falls} \quad l \neq k \neq i \neq l \quad (\text{A.5})$$

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ li \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} l \\ il \end{matrix} \right\} = \frac{1}{h_l} \frac{\partial h_l}{\partial u^i} \quad (\text{A.6})$$

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ kk \end{matrix} \right\} = -\frac{h_k}{h_l^2} \frac{\partial h_k}{\partial u^l} \quad (\text{A.7})$$

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ ll \end{matrix} \right\} = \frac{1}{h_l} \frac{\partial h_l}{\partial u^l} \quad (\text{A.8})$$

sodaß sich für $\alpha \neq \beta$ ergibt:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \vec{A})^{\alpha\beta} &= \frac{1}{h_\alpha^2} \left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha} A^\beta + A^\alpha \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\alpha \end{matrix} \right\} + A^\beta \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \beta\alpha \end{matrix} \right\} \right) \\ &= \frac{1}{h_\alpha^2} \left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha} A^\beta - A^\alpha \frac{h_\alpha}{h_\beta^2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u^\beta} + A^\beta \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial h_\beta}{\partial u^\alpha} \right) \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

Für die physikalischen Komponenten findet man durch Einsetzen der Beziehung (A.1) den Ausdruck:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \vec{A})_{\alpha\beta} &= h_\alpha h_\beta (\vec{\nabla} \vec{A})^{\alpha\beta} \\ &= \frac{h_\beta}{h_\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \frac{\tilde{A}_\beta}{h_\beta} - \frac{\tilde{A}_\alpha h_\alpha}{h_\alpha h_\beta^2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u^\beta} + \frac{\tilde{A}_\beta}{h_\beta^2} \frac{\partial h_\beta}{\partial u^\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tilde{A}_\beta + \frac{h_\beta}{h_\alpha} \frac{\tilde{A}_\beta}{h_\beta} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \frac{1}{h_\beta} - \frac{\tilde{A}_\alpha}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u^\beta} + \frac{\tilde{A}_\beta}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial h_\beta}{\partial u^\alpha} \\ &= \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tilde{A}_\beta - \frac{\tilde{A}_\alpha}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u^\beta} \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

Für die Diagonalelemente des Tensors erhält man die kontravarianten Komponenten:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \vec{A})^{\alpha\alpha} &= \frac{1}{h_\alpha^2} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} A^\alpha + \frac{A^\alpha}{h_\alpha^2} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k\alpha \end{matrix} \right\} \quad (\text{A.11}) \\ &= \frac{1}{h_\alpha^2} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} A^\alpha + \frac{A^\alpha}{h_\alpha^2} \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u^\alpha} + \frac{A^\beta}{h_\alpha^2} \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u^\beta} + \frac{A^\gamma}{h_\alpha^2} \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u^\gamma} \end{aligned}$$

und die entsprechenden physikalischen Komponenten:

$$\begin{aligned}
 \left(\widetilde{\nabla} A\right)_{\alpha\alpha} &= h_\alpha^2 \left(\widetilde{\nabla} \vec{A}\right)^{\alpha\alpha} \\
 &= \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \frac{\vec{A}_\alpha}{h_\alpha} + \frac{\vec{A}_\alpha}{h_\alpha^2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u^\alpha} + \frac{\vec{A}_\beta}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u^\beta} + \frac{\vec{A}_\gamma}{h_\alpha h_\gamma} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u^\gamma} \\
 &= \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \vec{A}_\alpha}{\partial u^\alpha} + \vec{A}_\alpha \frac{\partial \ln h_\alpha}{\partial u^\alpha} + \frac{\vec{A}_\beta}{h_\alpha^2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u^\beta} + \frac{\vec{A}_\beta}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u^\beta} + \frac{\vec{A}_\gamma}{h_\alpha h_\gamma} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u^\gamma} \\
 &= \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \vec{A}_\alpha}{\partial u^\alpha} + \frac{\vec{A}_\beta}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u^\beta} + \frac{\vec{A}_\gamma}{h_\alpha h_\gamma} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u^\gamma} \quad (A.12)
 \end{aligned}$$

Stacey [1] hat durch die Definition eines erweiterten Christoffel-Symbols $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ die beiden Ausdrücke (A.9) und (A.12) zusammenfassen können:

$$\left(\widetilde{\nabla} \vec{A}\right)_{\alpha\beta} = \frac{\partial \vec{A}_\beta}{h_\alpha \partial u^\alpha} + \sum_k \vec{A}_k \Gamma_{\beta k}^\alpha \quad (A.13)$$

mit

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \delta_\beta^\alpha \cdot \frac{\partial \ln h_\alpha}{h_\gamma \partial u^\gamma} - \delta_\gamma^\alpha \cdot \frac{\partial \ln h_\alpha}{h_\beta \partial u^\beta} \quad (A.14)$$

A.3 Die Berechnung der Divergenz eines Tensors

Auch die Berechnung der Divergenz eines Tensors erfolgt über den Umweg der kontravarianten Formulierung:

$$\begin{aligned}
 \left[\widetilde{\nabla} \cdot (\vec{A}\vec{B})\right]_l &= h_l \left[\widetilde{\nabla} \cdot (\vec{A}\vec{B})\right]^l \\
 &= h_l \left[(\vec{A} \cdot \widetilde{\nabla} \vec{B})^l + ((\widetilde{\nabla} \cdot \vec{A}) \cdot \vec{B})^l \right] \quad (A.15)
 \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt das Assoziativgesetz verwendet wurde.

Durch Ausnutzung von Orthogonalitätsbeziehungen und der vorher abgeleiteten Gleichung für die Divergenz eines Vektors findet man:

$$\begin{aligned}
 \left[\widetilde{\nabla} \cdot (\vec{A}\vec{B})\right]_l &= h_l \left[A^i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_\alpha (\widetilde{\nabla} \vec{B})^{\alpha\beta} \vec{e}_\beta \cdot \vec{e}^l \right] + (\widetilde{\nabla} \cdot \vec{A}) \cdot \vec{B}_l \\
 &= h_l A^i g_{ii} (\widetilde{\nabla} \vec{B})^{il} + (\widetilde{\nabla} \cdot \vec{A}) \cdot \vec{B}_l \\
 &= \vec{A}_i (\widetilde{\nabla} \vec{B})_{il} + (\widetilde{\nabla} \cdot \vec{A}) \cdot \vec{B}_l \\
 &= \vec{A}_i \left(\frac{\partial \vec{B}_l}{h_i \partial u^i} + \sum_k \vec{B}_l \Gamma_{ik}^i \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\sqrt{g}}{h_i} \vec{A}_i \right) \vec{B}_l
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\sqrt{g}}{h_i} \tilde{A}_i \tilde{B}_l + \sum_i \sum_k \tilde{A}_i \tilde{B}_k \Gamma_{lk}^i \\
&= \sum_i \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\sqrt{g}}{h_i} \tilde{A}_i \tilde{B}_l \\
&\quad + \tilde{B}_\beta \left(\tilde{A}_\alpha \frac{\partial \ln h_\alpha}{h_\beta \partial u^\beta} - \tilde{A}_\beta \frac{\partial \ln h_\beta}{h_\alpha \partial u^\alpha} \right) \\
&\quad + \tilde{B}_\gamma \left(\tilde{A}_\alpha \frac{\partial \ln h_\alpha}{h_\gamma \partial u^\gamma} - \tilde{A}_\gamma \frac{\partial \ln h_\gamma}{h_\alpha \partial u^\alpha} \right) \tag{A.16}
\end{aligned}$$

A.4 Die physikalischen Komponenten eines Vektorproduktes

Das Vektorprodukt zweier Vektoren \vec{A} und \vec{B} in kontravarianter Form ist:

$$(A \times B)^k = \frac{1}{J} (A_i B_j - A_j B_i) \tag{A.17}$$

wobei J die Jacobi-Determinante des metrischen Tensors ist. Damit folgt für die physikalische Komponente:

$$\left(\widetilde{A \times B} \right)_k = \frac{h_k}{\sqrt{g}} \left(\tilde{A}_i \tilde{B}_j h_i h_j - \tilde{A}_j \tilde{B}_i h_i h_j \right) = \tilde{A}_i \tilde{B}_j - \tilde{A}_j \tilde{B}_i \tag{A.18}$$

Auf die hier abgeleiteten Gleichungen wird bei der Herleitung und Transformation der Flüssigkeitsgleichungen zurückgegriffen.

Literaturverzeichnis

- [1] W.M. STACEY JR.: *Fusion Plasma Analysis*,
John Wiley & Sons, New York (1981)
- [2] J.D. LAWSON: *Proceedings of the Physical Society* bf B 70 (1957), 6
- [3] J. WESSON: *Tokamaks*,
Clarendon Press, Oxford (1989)
- [4] THE JET TEAM:
Fusion Energy Production from a D-T Plasma in the JET Tokamak
JET-P(91)66
- [5] D. REITER, G.H. WOLF, H. KEVER:
Nuclear Fusion 30 (1990), 2141
- [6] R. WILHELM : Persönliche Mitteilung
- [7] P.K. MIODUSZEWSKI, P.H. EDMONDS, C.E. BUSH, ET AL.:
Nuclear Fusion 26 (1986), 1171
- [8] J. WINTER:
Journal of Nuclear Materials 145-147 (1987), 131
- [9] J. WINTER, H.G. ESSER, L. KÖNEN, ET AL.:
Journal of Nuclear Materials 162-164 (1989), 713
- [10] M. KEILHACKER AND THE NET TEAM:
Physics of Fluids B 2 (1990), 1291
- [11] P.C. STANGEBY, G.M. MCCracken:
Nuclear Fusion 30 (1990), 1225
- [12] U. SAMM, G. BERTSCHINGER, P. BOGEN, ET AL.:
14. International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion
Research IAEA-CN-56/ A-5-3, Würzburg (1992)
- [13] *Workshop on the New Phase of JET*
JET-R(89)16, JET Joint Undertaking, Abingdon, Oxfordshire (1989)

- [14] F. WAGNER, AND THE ASDEX TEAM:
Physical Review Letters **49** (1982), 1408
- [15] J. NEUHAUSER, M. BESSENRODT-WEBERPALS, B.J. BRAAMS, ET AL.:
Plasma Physics and Controlled Fusion **31** (1989), 1551
- [16] R.R. WEYNANTS, G. v. OOST, G. BERTSCHINGER, ET AL.:
Nuclear Fusion **32** (1992), 837
- [17] R. LÜST, A. SCHLÜTER:
Zeitschrift für Naturforschung **12a** (1957), 850
- [18] V.S. MUKHOVATOV, V.D. SHAFRANOV:
Nuclear Fusion **11** (1971), 605
- [19] K. LACKNER:
Computer Physics Communications **12** (1976), 33
- [20] F. CASCI, A. KALECK, H.P. ZEHRFELD:
Proceedings of the 11. European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics **7D/II** (1983), 139
- [21] P. BÖRNER, A. KALECK:
Proceedings of the 12. European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics **9F/I** (1985), 187
- [22] R. ALBANESE, J. BLUM, O. DE BARBIERI:
Proceedings of the 8. Europhysics Conference on Computational Physics **10 D** (1986)
- [23] M.N. BUSSAC, R. PELLAT, D. EDERY, J.L. SOULE:
Physical Review Letters **35** (1975), 1638
- [24] D.M. MEADE:
Nuclear Fusion **14** (1974), 289
- [25] O. MITARI, A. HIROSE, H.M. SKARSGARD:
Nuclear Fusion, **28**(1988), 2141
- [26] R.J. BICKERTON:
Dynamics of a Steady-State D-T Burning Tokamak Plasma **JET-R(92)03**
- [27] R. WILHELM: Persönliche Mitteilung
- [28] S. GOERS:
Untersuchung der Brennbedingungen eines Fusionsreaktors- Bewertung und Erweiterung bisheriger Kriterien (to be published)

- [29] O. GRUBER, W. SCHNEIDER, K. LACKNER:
Proceedings of 17. EPS-Conference on Controlled Fusion and Plasma Heating I,
841
Amsterdam, NL (1990)
- [30] O. LIEWER:
Nuclear Fusion 25 (1985), 543
- [31] M. KAUFMANN, K. LACKNER, J. NEUHAUSER, H. VERNICKEL:
Nuclear Fusion 25 (1985), 89
- [32] V.A. ABRAMOV, P. BACHMANN, D. MOROZOV, D. SÜNDER:
20. EPS-Conference on Controlled Fusion and Plasma Heating, Lissabon, Por-
tugal (1993), to be published
- [33] D.E. POST, K. LACKNER:
Plasma models for impurity control experiments
in **Physics of Plasma Wall Interactions in Controlled Fusion**,
Eds. E.D. Post, K. Behrisch, Plenum Press, New York (1984)
- [34] E.L. VOLD, F. NAJMABADI, R.W. CONN:
Physics of Fluids B 3 (1991), 3132
- [35] D. REITER:
Journal of Nuclear Materials 196-198 (1992), 80
- [36] S.I. BRAGINSKIJ:
Review of Plasma Physics 1, 205
Ed. M.A. Leontovich, Consultants Bureau, New York (1965)
- [37] B.J. BRAAMS:
Dissertation, The State University at Utrecht,
The Netherlands (1986)
- [38] B.J. BRAAMS:
A multi-fluid code for simulation of the edge plasma in tokamaks
in **NET-REPORT EUR-FU IXII-80-87-68**,
Comm. of the European Communities (1987)
- [39] H. GERHAUSER, H.A. CLAASSEN:
Journal of Nuclear Materials 176-177 (1990), 721
- [40] T.D. ROGLIEN, J.L. MILOVICH, M.E. RENSINK, AND G.D. PORTER:
Journal of Nuclear Materials 196-198 (1992), 347
- [41] N. UEDA, M. KASAI, M. TANAKA, M. SUGIHARA, AND S. SENGOKU:
Nuclear Fusion 28 (1988), 1183
- [42] M. KEILHACKER, R. SIMONINI, A. TARONI, AND M.L. WATKINS:
Nuclear Fusion 31 (1991), 535

- [43] H.A. CLAASSEN, H. GERHAUSER, R.N. EL-SHARIF:
Berichte des Forschungszentrums Jülich, Jül - 2423 (1991)
- [44] H.A. CLAASSEN, H. GERHAUSER:
Berichte des Forschungszentrums Jülich Jül - 1971 (1985)
- [45] H.A. CLAASSEN, H. REPP:
Nuclear Fusion **23** (1983), 597
- [46] H. GERHAUSER, H.A. CLAASSEN:
Calculation of Poloidal Rotation in the Edge Plasma
Jül - 2125 (1987)
- [47] R. CHODURA:
Physics of Fluids **25** (1982), 1628
- [48] J.T. SCHEUER, G.A. EMMERT:
Physics of Fluids **31** (1988), 1748
- [49] R.C. BISSELL, P.C. JOHNSON:
Physics of Fluids **30** (1987), 779
- [50] G.S. KINO, E.K. SHAW:
Physics of Fluids **9** (1966), 587
- [51] V.A. GODYAK, N. STERNBERG:
IEEE Transactions on plasma science **18** (1990), 159
- [52] S.A. SELF, H.N. EWALD:
Physics of Fluids **9** (1966), 2486
- [53] P.C. STANGEBY:
Physics of Fluids **27** (1984), 2699
- [54] J.T. SCHEUER, G.A. EMMERT:
Physics of Fluids B **2** (1990), 445
- [55] E. ZAWAIDEH, F. NAJMABADI, R.W. CONN:
Physics of Fluids **29** (1986), 463
- [56] G.A. EMMERT, R.M. WIELAND, A.T. MENSE, J.N. DAVIDSON:
Physics of Fluids **23** (1980), 803
- [57] K.U. RIEMANN:
Journal of Physics D **24** (1991), 493
- [58] P.C. STANGEBY:
The Plasma Sheath
in *Physics of Plasma Wall Interactions in Controlled Fusion*,
Eds. E.D. Post, K. Behrisch, Plenum Press, New York (1984)

- [59] R. CHODURA:
Plasma flow in the sheath and the presheath of a SOL
in **Physics of Plasma Wall Interactions in Controlled Fusion**,
Eds. E.D. Post, K. Behrisch, Plenum Press, New York (1984)
- [60] R.C. BISSELL, P.C. JOHNSON, P.C. STANGEBY:
Physics of Fluids B 1 (1989), 1133
- [61] R. CHODURA: Persönliche Mitteilung
- [62] M.Z. TOKAR:
20. EPS-Conference on Controlled Fusion and Plasma Heating, Lissabon, Portugal (1993), to be published
- [63] R.L. FREEMAN, E.M. JONES:
Report CLM - R 137 (1974)
- [64] M. BAELMANS:
Dissertation, KU Leuven, Belgium (1993)
- [65] M. TENDLER, D.B. HEIFETZ:
Fusion Technology 11 (1987), 289
- [66] K.M. CASE, P.F. ZWEIFEL:
Linear transport theory
Addison Wesley Publication Company (1967)
- [67] J. SPANIER, E.M. GELBARD:
Monte Carlo Principles and neutron transport problems
Addison Wesley Publication Company (1969)
- [68] T. BEHRINGER:
Nonlinear effects on neutral gas transport in tokamaks
Jül-2637 (1992)
- [69] D. REITER, W. ECKSTEIN, G. GIESEN, H.J. BELITZ:
Database for recycling and penetration of neutral helium atoms in the boundary of a fusion plasma
Jül-2605 (1991)
- [70] R.K. JANEV ET AL.:
Springer Series on Atoms and Plasmas 4 (1987)
- [71] R.K. JANEV, D.E. POST, W.D. LANGER:
Journal of Nuclear Materials 121 (1984), 10
- [72] D.N. RUZIC:
Nuclear Inst. and Methods B 47 (1990), 118
- [73] M. BAELMANS ET AL.: *Journal of Nuclear Materials* 196-198 (1992), 466

- [74] R. SCHNEIDER ET AL.: *Journal of Nuclear Materials* **196-198** (1992), 810
- [75] M.W. WUTTKE: Persönliche Mitteilung
- [76] R. ZANINO: *Journal of Nuclear Fusion* **196-198** (1992), 326
- [77] R. MARCHAND: Persönliche Mitteilung
- [78] R. SCHNEIDER: Persönliche Mitteilung
- [79] *NRL Plasma Formulary*
Ed. D.L. Book, NRL Publication, Washington (1987)
- [80] D.E. POST:
Journal of Nuclear Materials **128& 129** (1984), 78
- [81] E.H. PUTLEY:
The Hall Effect and Related Phenomena
Butterworth, London, UK (1960)
- [82] D.C. MONTGOMERY, D.A. TIDMAN:
Plasma Kinetic Theory
McGraw Hill, New York, US (1964)
- [83] W.D. D'HAESELEER, W.N.G. HITCHON, S.D. CALLEN, J.L. SOHET:
Flux Coordinates and Magnetic Field Structure
Springer-Verlag, Berlin (1991)
- [84] G.A. KORN, T.M. KORN:
Mathematical Handbook
McGraw Hill, New York, US (1968)
- [85] W.M. STACEY, D.J. SIGMAR:
Physics of Fluids **28** (1985), 2800
- [86] R. BALESCU:
Physics of Fluids B **3** (1991), 564
- [87] A.J. WOOTTON, B.A. CARRERAS, H. MATSUMOTO, K. MCGUIRE, ET AL.:
Physics of Fluids B **2** (1990), 2879
- [88] D.W. ROSS:
Comments Plasma Physics and Controlled Fusion **12** (1989), 155
- [89] D.W. ROSS:
Plasma Physics and Controlled Fusion **34** (1992), 137
- [90] W.M. MANHEIMER, E. OTT, W.M. TANG:
Physics of Fluids **20** (1977), 806

- [91] G. REWOLDT:
PPPL - 2650 (1989)
- [92] J.F. LUCIANI, P. MORA, J. VIRMONT:
Physical Review Letters 51 (1983), 1664
- [93] W. MOOG:
Ähnlichkeits- und Analogielehre
VDI-Verlag, Düsseldorf, Germany (1985)
- [94] M. HACKESCHMIDT:
Ähnlichkeit - Analogie - Modell
Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, Germany (1972)
- [95] *Handbook of Chemistry and Physics*
Ed. D.R. Lide, CRC press, (1992)
- [96] F.R. SCHWARZL:
Polymermechanik
Springer, Berlin (1990)
- [97] R. BIRD, R. ARMSTRONG, O. HASSAGER:
Dynamics of Polymeric Solutions 2
(2nd Edn.), John Wiley & Sons, New York (1987)
- [98] K. KREMER: Persönliche Mitteilung
- [99] M.J. TURNER, R. CLOUGH, H.C. MARTIN, ET AL.:
Journal of Aeronautical Science 23 (1956), 805
- [100] R.W. CLOUGH:
Proceedings of 2nd Conference on Electronic Computation, American Society of Civil Engineers, Pittsburgh, Pennsylvania, 345ff.
- [101] J.H. ARGYRIS:
Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis,
Pergamon Press, New York (1963)
- [102] O.C. ZIENKIEWICZ:
The Finite Element Method in Engineering Science
(2nd Edn.), McGraw-Hill, London (1971)
- [103] O.C. ZIENKIEWICZ, R. LÖHNER, K. MORGAN:
Finite Elements in Fluid Mechanics - A Decade of Progress,
Finite Elements in Fluids - Vol.5, John Wiley & Sons (1984)
- [104] O.C. ZIENKIEWICZ, J. SZMELTER, J. PERAIRE:
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 78 (1990), 105
- [105] O.C. ZIENKIEWICZ: Persönliche Mitteilung

- [106] J.T. ODEN:
Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, New York (1972)
- [107] J.T. ODEN, T. STROUBOULIS, PH. DEVLOO:
International Journal for Numerical Methods in Fluids 7 (1987), 1211
- [108] W. RITZ:
Journal für reine und angewandte Mathematik 135 (1909), 1
- [109] B.G. GALERKIN:
Rods and Plates, Series occurring in various questions concerning the elastic equilibrium of Rods and Plates (in Russian),
Vestn. Inghenevov 19 (1915), 897
- [110] S.V. PATANKAR:
Numerical Heat Transfer and Fluid Flow
Hemisphere Publishing Corporation, New York (1980)
- [111] A. JAMESON:
Journal of Applied Mechanics 50 (1983), 1052
- [112] L. DEMKOWICZ, J.T. ODEN, W. RACHOWICZ:
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 84 (1990), 275
- [113] L.C. DUTTO:
Application of GMRES Algorithm to solve the compressible Navier-Stokes equations, INRIA - 1234, (1990)
- [114] G.S. IANELLI, A.J. BAKER:
An efficient solution-adaptive Implicit Finite Element CFD Navier-Stokes Algorithm, AIAA-90-0400, (1990)
- [115] A. VORNBERGER:
Strömungsberechnung auf unstrukturierten Netzen mit der Methode der finiten Elemente, Dissertation RWTH Aachen, Fakultät für Maschinenwesen (1989)
- [116] R. LÖHNER, K. MORGAN, O.C. ZIENKIEWICZ:
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 51 (1985), 441
- [117] GESELLSCHAFT FÜR STRUKTURANALYSE, INSTITUT FÜR REAKTORSICHERHEIT (KFA JÜLICH):
Der Preprozessor DIAMOS, Aachen (1992)
- [118] G. CENACCHI, A. TARONI:
RETE: A Two-Dimensional Mesh Generation Program for the Finite Element Method, CNEN - RT/FIMA(79)4 (1984)
- [119] K. MORGAN, J. PERAIRE:
Finite Element Methods for Compressible Flows, Institute for Numerical Methods in Engineering, Swansea, Wales

- [120] P.R. ROACHE:
Computational Fluid Dynamics
Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico (1976)
- [121] J. DONEA:
International Journal for Numerical Methods in Engineering **20** (1984), 101
- [122] A.J. BAKER, J.W. KIM:
International Journal for Numerical Methods in Fluids **7** (1987), 489
- [123] P. LAX, B. WENDROFF:
Communications on Pure and Applied Mathematics **13** (1960), 217
- [124] R.F. WARMING, R.M. BEAM:
On the Construction and Application of Implicit factored Schemes for Conservation Laws
in **SIAM-AMS PROCEEDINGS VOL XI**, (Ed. Herbert B. Keller),
Providence, Rhode Island (1978)
- [125] P. MEINHOLD, E. WAGNER:
Partielle Differentialgleichungen, Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und sonstige anwendungsorientierte Berufe (Band 8),
Verlag Harri Deutsch, Thun (1979)
- [126] R. VON MISES:
Mathematical theory of compressible fluid flow, Applied mathematics and mechanics (Vol. 3)
Academic press, New York (1958)
- [127] T.J. POINSOT, S.K. LELE:
Journal of Computational Physics **101** (1992), 104
- [128] P. DUTT:
SIAM Journal of Numerical Analysis **25** (1988), 245
- [129] H.R. SCHWARZ:
Methode der finiten Elemente, Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik (Band 47)
Verlag Teubner, Stuttgart (1984)
- [130] R. LÖHNER:
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **61** (1987), 323
- [131] J.T. ODEN, T. STROUBOULIS, P. DEVLOO:
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **59** (1986), 327
- [132] J.T. ODEN, G.F. CAREY:
Finite Elements: Mathematical Aspects (Vol.4),
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1981)

- [133] O.C. ZIENKIEWICZ, K. MORGAN:
Finite Elements and Approximation,
John Wiley & Sons, New York (1983)
- [134] H. SOLTWISCH:
Messung der internen Magnetfeld-Struktur von Tokamak-Plasmen,
Jül-2339 (1990)
- [135] R.T. McGRATH:
Surface Profiles for ALT-II Tiles
SANDIA Nat. Laboratories Report, SAND86-0615 (1986)
- [136] U. SAMM: Persönliche Mitteilung
- [137] G. MADDISON: Persönliche Mitteilung
- [138] G. MANK: Persönliche Mitteilung

DANKSAGUNG

Die vorliegende Arbeit wurde am Institut für Plasmaphysik des Forschungszentrums Jülich angefertigt. An erster Stelle danke ich Herrn Prof. Dr. G.H. Wolf, der diese Arbeit angeregt, ermöglicht und stets gefördert hat. Für die Übernahme des Koreferates und sein Engagement bei der Durchführung des Promotionsverfahrens möchte ich mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr. J. Uhlenbusch bedanken.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. D. Reiter, der mich fachlich intensiv betreute und vor allem in schwierigen Phasen auch persönlich unterstützte. Er gab wichtige Anregungen und Hilfestellungen, die mir den Weg von der allgemeinen Einarbeitung in die Plasmaphysik bis zur endgültigen Fertigstellung dieser Arbeit sehr erleichterten.

Ebenso herzlich möchte ich allen Mitgliedern der Theorie-Gruppe danken, die stets zu intensiven Diskussionen bereit waren und darüberhinaus mit vielen aufmunternden Worten zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Besonders erwähnen möchte ich Herrn Dr. H. Kever, Herrn Dr. T. Behringer, Herrn A. Kaleck und Frau Dr. M. Baelmans.

Für die Beratung in programmtechnischen Fragen bedanke ich mich bei Frau P. Börner, Frau B. Küppers, Herrn D. Koschmieder und nicht zuletzt bei Herrn Prof. Dr. Koschl und Herrn Dr. W. Rick aus dem Institut für Strahlantriebe der RWTH Aachen.

Allen anderen Mitarbeitern des Institutes und des Forschungszentrums Jülich danke ich auf diesem Wege für ihr Entgegenkommen und ihre Hilfe.

Last but not least sei meinen Eltern und Freunden gedankt, die mir in meiner Freizeit geholfen haben, Abstand von der Arbeit zu gewinnen, um schwierige Probleme mit neuem Mut und neuen Ideen lösen zu können.

Mathematical Induction

Let $P(n)$ be a statement involving the natural number n . To prove that $P(n)$ is true for all natural numbers n , we use the principle of mathematical induction. The principle consists of two steps: the base case and the inductive step.

Base Case: We first verify that $P(n)$ is true for the smallest natural number, usually $n=1$. If $P(1)$ is true, we have established the base case.

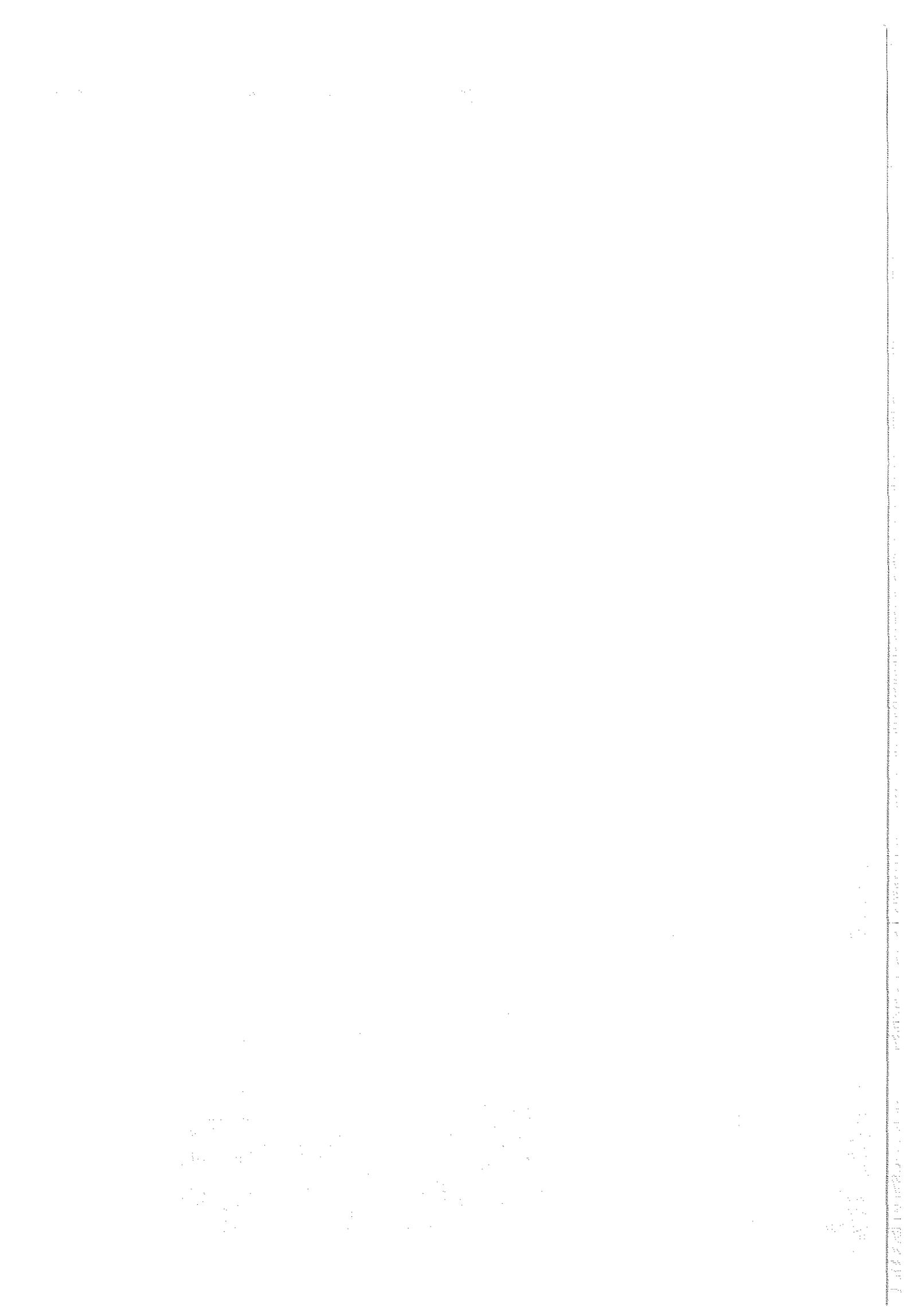
Inductive Step: We then assume that $P(k)$ is true for some arbitrary natural number k . This assumption is called the inductive hypothesis. We must then prove that $P(k+1)$ is also true. If we can show that $P(k) \implies P(k+1)$, then the inductive step is complete.

Once both the base case and the inductive step are proven, we can conclude that $P(n)$ is true for all natural numbers n . This is because the truth of $P(1)$ implies the truth of $P(2)$, which implies the truth of $P(3)$, and so on, covering all natural numbers.

Mathematical induction is a powerful tool for proving statements about the natural numbers. It is particularly useful for proving properties of sequences, divisibility, and combinatorial identities.

For example, to prove that the sum of the first n natural numbers is $\frac{n(n+1)}{2}$, we would use mathematical induction. We would first verify the base case for $n=1$, and then assume the formula is true for $n=k$ and prove it for $n=k+1$.

Mathematical induction is a powerful tool for proving statements about the natural numbers. It is particularly useful for proving properties of sequences, divisibility, and combinatorial identities. For example, to prove that the sum of the first n natural numbers is $\frac{n(n+1)}{2}$, we would use mathematical induction. We would first verify the base case for $n=1$, and then assume the formula is true for $n=k$ and prove it for $n=k+1$.



Jüli-2942

Juli 1994

ISSN 0944-2952