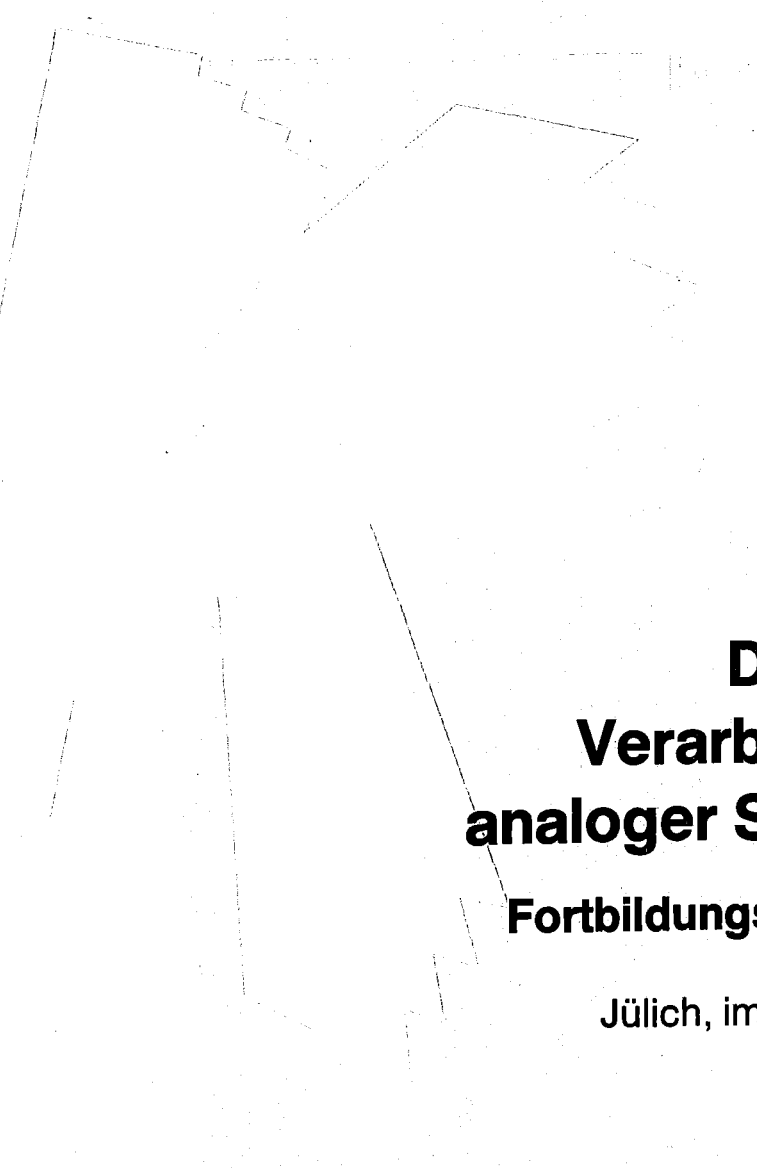




Digitale Verarbeitung analoger Signale

Fortbildungsseminar

Jülich, im April 1989

Forschungszentrum Jülich GmbH
Zentrallabor für Elektronik

Die digitale Verarbeitung analoger Signale in Theorie und Praxis

KFA-Fortbildungsseminar
Jülich, im April 1989

U. Eckhardt¹⁾
H. Eulenberg²⁾
F. Janßen³⁾
W. Jansen³⁾
H. Larue⁴⁾

¹⁾ Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hamburg

²⁾ Zentrallabor für Elektronik, Forschungszentrum Jülich (KFA)

³⁾ Institut für Grenzflächenforschung und Vakuumphysik, Forschungszentrum Jülich (KFA)

⁴⁾ Fachhochschule Aachen, Abteilung Jülich

Herausgeber: Forschungszentrum Jülich GmbH
und Vertrieb: ZENTRALBIBLIOTHEK
Postfach 1913 · D-5170 Jülich
Telefon (02461) 61-5368 · Telefax (02461) 61-6103

Druck: WEKA-Druck, Linnich

Copyright: Forschungszentrum Jülich 1990

Konferenzen des Forschungszentrums Jülich, Band 3

ISSN 0938-6521

ISBN 3-89336-052-2

CS1-4

Vorwort:

Mit dem Digitalen Signalprozessor, einem Kind jüngerer Entwicklungen auf dem Gebiet der Mikroelektronik, ist den Entwicklern und Anwendern analog arbeitender elektronischer Schaltungen die Möglichkeit gegeben worden, diese durch numerisch, in Echtzeit arbeitende Anordnungen mit sehr interessanten Eigenschaften zu ersetzen und durch solche mit bis jetzt noch nicht realisierbaren Eigenschaften zu ergänzen.

Im Zentrallabor für Elektronik (ZEL) der KFA wurde im Frühjahr 1989 zu diesem Thema ein Fortbildungsseminar mit dem Titel "Die digitale Verarbeitung analoger Signale" veranstaltet, in dem Wissenschaftler und Ingenieure der KFA in zehn halbtägigen Vortragsveranstaltungen mit den theoretischen Grundlagen der Systemauslegung und in einem anschließenden Praktikum mit der praktischen Umsetzung der Erkenntnisse vertraut gemacht wurden. Die große Zahl von über 30 Teilnehmern dokumentiert ein breites Interesse an diesen neueren Methoden.

Für die Unterstützung und die tatkräftige Mitwirkung bei diesem Seminar ist das ZEL Herrn Prof. Dr. U. Eckhart, Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg, Herrn Prof. W. Jansen von der Fachhochschule Aachen, Abteilung Jülich, und Herrn Dipl.-Ing. F. Janssen vom Institut für Grenzflächenforschung und Vakuumphysik (IGV) der KFA sehr dankbar.

Die vier Vortragenden des Seminars haben, ausgehend von der an sich allgemein bekannten Theorie der analogen Systeme, die in vertiefter Form geschlossen dargestellt wurde, über die seit mehreren Jahrzehnten ausgearbeitete Theorie für abgetastete Systeme, die in Praktikerkreisen aber allgemein noch nicht bekannt ist, die theoretischen Grundlagen dargestellt, die für den effektiven Umgang mit den neuen Methoden und der neuen Technik benötigt werden.

Besonders interessant ist dabei nicht nur die Möglichkeit, bekannte analoge elektronische Schaltungen durch solche in numerischer Arbeitsweise zu ersetzen, sondern vor allem auch die, sogenannte mehrdimensionale Signale, wie sie beispielsweise in der Bildverarbeitung auftreten, optimal und in Echtzeit zu verarbeiten.

Analog arbeitende elektronische Schaltungen enthalten passive Bauelemente, deren Eigenschaften durch die Natur in der Art ihrer Funktionsweise und der Stabilität der Bauelementeparameter bezüglich ihres Temperatur- und Zeitverhaltens festgelegt sind. Bei numerisch arbeitenden Signalverarbeitungssystemen gibt es diese Beschränkung nicht.

Neue Schaltungen können entworfen werden, die aus "synthetischen Bauelementen" aufgebaut sind. Ihre Eigenschaften sind mathematisch formuliert und nicht von der Natur vorgegeben. Stabilitätsprobleme in solchen Schaltungen sind vorwiegend mathematischer Natur und erfordern bei ihrer Auslegung gute Kenntnisse der numerischen Mathematik.

Die in den Seminarvorträgen verwendeten Transparente, die in diesem Band veröffentlicht werden, sind so überarbeitet und durch Zusatzinformation so angereichert worden, daß auch der Leser, der nicht am Seminar teilgenommen hat, diese Veröffentlichung zur Einarbeitung in dieses neue und interessante Thema verwenden kann. Dazu dient auch die umfangreiche Literaturliste.

Besonderer Wert wurde nicht nur auf die Darstellung der theoretischen Grundlagen gelegt, sondern auch auf die Beschreibung der im ZEL zur digitalen Hochgeschwindigkeitsverarbeitung (300 kHz spektral) analoger Signale verwendeten sogenannten systolischen Mehrprozessor-Systeme. Das bei der praktischen Entwicklungsarbeit im ZEL eingesetzte KFA-Entwicklungssystem MB 8764 wird in seiner Funktion beschrieben.

Im Praktikum, das von Herrn Horst Larue, ZEL/AE, durchgeführt wurde, ist dieses Entwicklungssystem auch von den Teilnehmern zu Entwicklungsarbeiten benutzt worden. Drei Anwendungsbeispiele sind am Ende der vorgelegten Arbeit beschrieben.

Für ihre Mühe bei den organisatorischen Vorbereitungen des Seminars sei insbesondere Frau M. Klein, Herrn J. Hotfilter, Herrn K. Dilling, Herrn H.-P. Wegener sowie Herrn H. Roeder recht herzlich gedankt.

Jülich, den 7. August 1990

Hp. Eulenberg

1. **Einleitung**
2. **Signaltheoretische Grundlagen analoger Signale**
 - 2.1 Stochastischer Charakter informationstragender Signale
 - Determinierte und stochastische Signale -
 - 2.2 Sinusvorgang
 - Komplexe Amplitude -
 - 2.3 Periodische Vorgänge
 - Approximation durch Grundfunktionen -
 - 2.4 Fourier-Reihe
 - Amplituden-Phasenspektrum -
 - 2.5 Aufbaufunktionen
 - Orthogonale Funktionssysteme -
 - 2.6 Nichtperiodische Signale
 - Fourierintegrale Spektraldichtefunktion -
 - 2.7 Fourier-Transformation
 - Hilfssätze, Beispiele -
 - 2.8 Dirac-Impuls
 - Integraldarstellung, Fourierdarstellung -
 - 2.9 Laplace-Transformation
 - Kausale Signalfunktion, Laplace-Integrale -
 - 2.10 Pol-Nulstellenplan
 - Betragsgebirge -
 - 2.11 Statistische Signalbeschreibung
 - Wahrscheinlichkeitsfunktionen, Ergodensätze -
3. **Netzwerktheoretische Grundlagen analoger, linearer Schaltungen**
 - 3.1 Systemfunktion
 - LTI-System, Übertragungsfunktion -
 - 3.2 Zweipolsystemfunktion
 - Impedanz-Admittanzfunktion -
 - 3.3 Übertragungsfunktion II
 - Stoßantwort, Gewichtsfunktion, Faltung -
 - 3.4 Beispielhafte Berechnung von Übertragungsfunktionen
 - Tiefpaß -
 - 3.5 Übertragungs- und Dämpfungsfunktion
 - Dämpfungs- u. Phasenmaß, Phasen- u. Gruppenlaufzeit -
 - 3.6 Kausalität und Stabilität von Systemen
 - Schwingungserzeugung -
 - 3.7 Verschaltung von Zweitoren (Vierpolen)
 - Reihenschaltung, Parallelschaltung... -
 - 3.8 Analogrechnerschaltungen
4. **Signaltheoretische Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung**
 - 4.1 Quantisierung von analogen Signalen im Zeitbereich
 - 4.1.1 Abtasttheorem

- 4.1.2 Transformation
 - Z-Transformationen
 - Diskrete Fouriertransformation
- 4.2 Digitalisierung analoger Signale im Wertebereich
 - 4.2.1 Analoge und digitale Signalverarbeitung
 - 4.2.2 Wertquantisierung
 - 4.2.3 Analog-Digital-Umsetzung
 - 4.2.4 Festkomma-Gleitkomma-Darstellung
- 5. **Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke**
 - 5.1 Schaltungssynthese im Originalbereich
 - Quasi-Analogrechner Schaltung -
 - 5.2 Schaltungssynthese im Bildbereich
 - 5.2.1 Synthese über den Umweg der Laplace Transformation
 - 5.2.2 Direkte Synthese mit der Z-Transformation
 - 5.2.3 Direkte Synthese mit der Bilinearen Transformation
 - 5.2.4 Synthese aus der Übertragungsfunktion mit vorgegebenen Schaltungsstrukturen
 - 5.2.5 Nichtrekursive (FIR) Filter
 - 5.3 Ausführungsformen mit Signalprozessoren
 - 5.3.1 Einprozessorausführung
 - 5.3.2 Multi-Signalprozessorstrukturen
 - 5.3.2.1 Nichtrekursive (FIR) Filter
 - 5.3.2.2 Rekursive (IIR) Filter
 - 5.3.2.3 Binärer Baum
 - 5.4 Ausführungsbeispiele
 - 5.4.1 Feldstruktursimulator als Beispiel einer Quasi-Analogrechner-Struktur
 - 5.4.2 Butterworth-Tiefpaß zweiter Ordnung
 - 5.4.3 Entwurf eines Tiefpasses dritter Ordnung mit dem Filterkatalog von Rudolf Saal
 - 5.4.4 Oszillator
 - 5.4.5 PI-Glied
 - 5.4.6 PID-Glied
 - 5.4.7 PDT-Glied
 - 5.4.8 Globalsystolischer IIR-Tiefpaß C031
 - 5.5 Einfluß der Quantisierung
- 6. **Mehrdimensionale digitale Signalverarbeitung**
 - 6.1 Einführung
 - 6.2 Die zweidimensionale Fourier-Transformation
 - 6.2.1 Definition der zweidimensionalen Fourier-Transformation
 - 6.2.2 Eigenschaften der Fourier-Transformation
 - 6.3 Das zweidimensionale Abtasttheorem
 - 6.4 Zweidimensionale Systeme
 - 6.4.1 LSI-System
 - 6.4.2 Separable Systeme
 - 6.4.3 Die Frequenzantwort eines Systems

- 6.4.4 Die zweidimensionale Faltung
 - 6.4.5 Stabilität von zweidimensionalen Systemen
 - 6.4.6 Beispiele
- 6.5 Die diskrete Fourier-Transformation
 - 6.5.1 Definition
 - 6.5.2 Anwendung
 - 6.5.3 Verwandte Transformationen
- 6.6 Entwurf von FIR-Filtern
 - 6.6.1 Entwurf vermittelt 1D-Fensterfunktionen
 - 6.6.2 Beispiele
 - 6.6.3 Grundsätzliche Probleme beim Entwurf von 2D-Filter
 - 6.6.4 Optimaler Filter
 - 6.6.5 Die McClellan-Transformation
- 6.7 Die zweidimensionale Z-Transformation
- 6.8 Einige einfache Aufgaben der Bildverarbeitung
- 7. **KFA-Entwicklungssystem MB 8764**
 - 7.1 Hard- und Software des Signalprozessors MB 8764
 - 7.2 DSP-Programm Aufbau und Verarbeitung
 - 7.3 Label-Adressierung
 - 7.4 Anlegen von Koeffizientenfeldern
 - 7.4.1 Koeffizientenfeld im Programmspeicher
 - 7.4.2 Koeffizientenfeld im A-RAM des DSP
 - 7.4.3 Koeffizientenfeld im B-RAM des DSP
 - 7.5 Datentransfer-Befehle für Signalprozessor-Arrays
- 8. **Praktische Übungen**
 - 8.1 Integration mit Untersummenbildung
 - 8.2 Integration mit linearer Interpolation
 - 8.3 Tiefpaß mit Butterworthverhalten
- 9. **Literaturverzeichnis**

1. Einleitung

Bildverarbeitung

- Mehrdimensionale Abtastratenumsetzung -

Elektronische Vergrößerung oder Verkleinerung von Bildvorlagen :

Veränderung der Abtastraten bei unverändertem Abtastmuster

Bildübertragung mit reduzierter Abtastrate :

Empfängerseitige Interpolation von Zwischenbildern

Umwandlung von Bildern unterschiedlicher Fernsehnormen :

*Beispiel : HDTV nach TV
unterschiedliche Zeilenzahl
und Bildwechselfrequenz*

Umsetzung von Kinofilm auf das HDTV- oder TV-System :

Zweidimensionale Abtastratenänderung bei gleichzeitiger Änderung des Abtastmusters (Vollbildabtastung → Zeilensprungabtastung)

KEA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK

- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Einsatzgebiete der digitalen Signalverarbeitung

- *Telecom - Technik*
- *ISDN (Integrated Services Digital Network)*
- *Fernsehtechnik (Video)*
- *Regelungstechnik*
- *Robotik (Bildverarbeitung)*
- *Messtechnik*
- *Filtertechnik*
- *Korrelationselektronik*
- *Simulation (z.B. Plasma-Modensimulation)*
- *Echtzeitverarbeitung von :*
 - * *Vektoren*
 - * *Polynomen*
 - * *Interpolationsfiltern*
- *Militärtechnik*

KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Vorteile der digitalen Signalverarbeitung

Unempfindlich gegen:

- Bauteiltoleranzen
- Alterung von Bauteilen
- Temperatureinflüsse
- Störungen
- Filter-Grenzfrequenz mit Taktfrequenz variabel einstellbar

Weitere Vorteile:

- monolithisch integrierbar
- in VLSI-Technik kostengünstig
- Programmierbarkeit
- Simulation möglich
- beliebig tiefe Signalfrequenzen
- linearer Phasengang möglich
- Zeitmultiplex-Betrieb möglich



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK

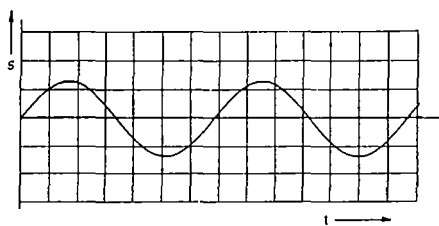
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

2. Signaltheoretische Grundlagen analoger Signale

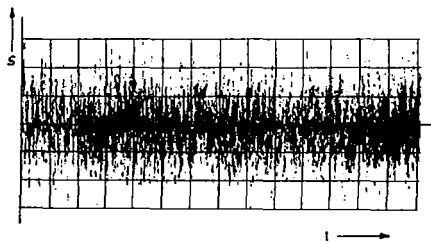
2.1 Stochastischer Charakter informationstragender Signale Determinierte und stochastische Signale

Signale machen es möglich, Information bzw. Nachricht physikalisch abzubilden. Sie sind i.a. Zeit- und/oder Ortsfunktionen elektrischer Größen. Die Kenngröße eines Signals (z.B. Amplitude, Frequenz, Dauer usw.), die unmittelbar die Nachricht abbildet, ist der Signalparameter.

Zur Darstellung der Zeitabhängigkeit eines Signals dient das Oszilloskop. Die Oszillogramme einer Sinusschwingung und eines Rauschvorganges lassen erkennen, daß zwischen **determinierten** und **stochastischen** Signalen erhebliche Unterschiede bestehen.



Sinussignal – Beispiel eines determinierten Signals



Rauschsignal – Beispiel eines stochastischen Signals

Oszillogramme einer Sinusschwingung und eines Rauschvorganges

Jedes determinierte Signal - wie z.B. das Sinussignal - kann zumindest in einem begrenzten Zeitintervall mathematisch (formelmäßig) beschrieben werden. Sein Augenblickswert $s(t)$ ist für jeden beliebigen Zeitpunkt innerhalb des Zeitintervalls berechenbar. Determinierte Signale tragen jedoch keine Nachricht.

Die Unvorhersagbarkeit einer Nachricht und damit ihre zeitliche Regellosigkeit machen Signale, die wirklich Nachricht abbilden, ebenfalls zeitlich regellos, d.i. stochastisch. Bei stochastischen Signalen läßt sich der Momentanwert $s(t)$ der Zeitfunktion zu einem vorgegebenen Zeitpunkt nicht berechnen. Unter bestimmten Voraussetzungen kann ein stochastischer Vorgang jedoch mittels statistischer Kenngrößen und Kennfunktionen (z.B. Mittelwerte, Korrelationsfunktionen) beschrieben werden.

2. Signaltheoretische Grundlagen analoger Signale

2.2 Sinusvorgang Komplexe Amplitude

$$\begin{aligned}s_1(t) &= \hat{s}_0 \cdot \sin \omega_0 \cdot (t + \varphi_0/\omega_0) \\ &= \hat{s}_0 \cdot \sin (\omega_0 \cdot t + \varphi_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_2(t) &= \hat{s}_0 \cdot \cos \omega_0 \cdot (t + \varphi_0/\omega_0) \\ &= \hat{s}_0 \cdot \cos (\omega_0 \cdot t + \varphi_0)\end{aligned}$$

$$\text{mit } \omega_0 = 2\pi \cdot f_0 = 2\pi/T_0$$

(Bild 1)

Einführung der komplexen Amplitude $\underline{\hat{s}}_0$

$$\begin{aligned}s_1(t) &= \hat{s}_0 \cdot \sin \psi(t) \\ &= \text{Im} [\hat{s}_0 \cdot e^{j\psi(t)}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_2(t) &= \hat{s}_0 \cdot \cos \psi(t) \\ &= \text{Re} [\hat{s}_0 \cdot e^{j\psi(t)}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{mit } \psi(t) &= \omega_0 \cdot t + \varphi_0 \\ \text{folgt } \underline{s}(t) &= \hat{s}_0 \cdot e^{j\psi(t)} \\ &= \hat{s}_0 \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} \\ &= \hat{s}_0 \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega_0 t} \\ &= \underline{\hat{s}}_0 \cdot e^{j\omega_0 t}\end{aligned}$$

$$\text{wobei } \underline{\hat{s}}_0 = \hat{s}_0 \cdot e^{j\varphi_0}$$

Darstellung der phasenverschobenen, harmonischen (Sinus- bzw. Kosinus-) Schwingung durch Überlagerung von elementaren Grundfunktionen

Grundfunktionen sind hier: $a_v \cdot \cos \omega_0 t$ und $b_v \cdot \cos \omega_0 t$

$$\begin{aligned}s_1(t) &= \hat{s}_0 \cdot \sin (\omega_0 \cdot t + \varphi_0) \\ &= a_1 \cdot \cos \omega_0 \cdot t + b_1 \cdot \sin \omega_0 \cdot t\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{s}_0 = + \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

$$\varphi_0 = \arctan a_1/b_1$$

$$\begin{aligned}s_2(t) &= \hat{s}_0 \cdot \cos (\omega_0 \cdot t + \varphi_0) \\ &= a_2 \cdot \cos \omega_0 \cdot t + b_2 \cdot \sin \omega_0 \cdot t\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{s}_0 = + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\varphi_0 = -\arctan b_2/a_2$$

(Bilder 2 und 3)

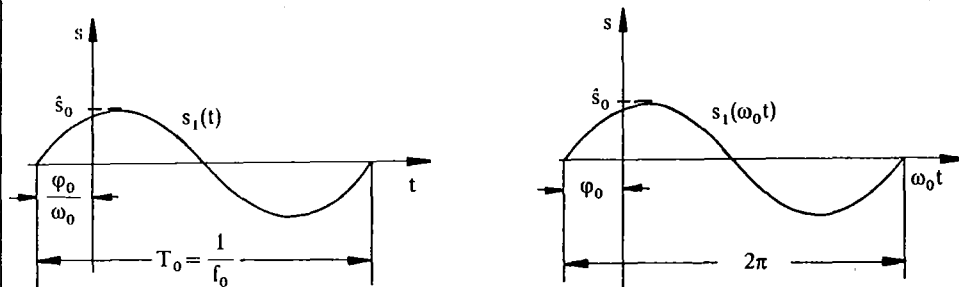


Bild 1 Die harmonische Schwingung als Zeitfunktion bzw. als Winkelfunktion

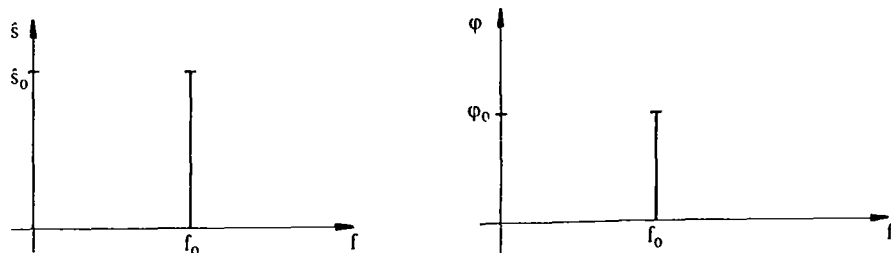


Bild 2 Die Sinusschwingung als Frequenzfunktion (Fourierspektrum)

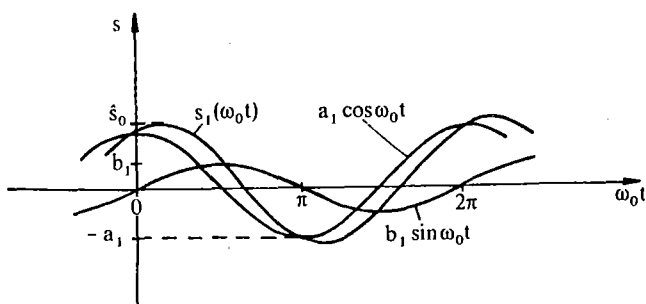


Bild 3 Die Sinusschwingung als Überlagerung von zwei harmonischen Grundfunktionen

2. Signaltheoretische Grundlagen analoger Signale

2.3 Periodische Vorgänge Approximation durch Grundfunktionen

Bevorzugter Ansatz für eine Approximation:

$$s(t) = \sum_{n=0}^N x_n \cdot g_n(t) + r(t) \quad ; \quad t \in (t_1 ; t_2)$$

Bedeutung: x_n Koeffizienten, g_n Grundfunktionen, $r(t)$ Restfehlerfunktion

Grundfunktionen $g_n(t)$ (d.h. Aufbausignale) sollen

- ☐ mathematisch möglichst einfach sein,
- ☐ technisch leicht zu erzeugen und zu messen,
- ☐ folgende Bedingung erfüllen:

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} r^2(t) dt = \bar{r}^2(t) \Rightarrow 0 \quad t \in (t_1 ; t_2)$$

sog. Approximation im Mittel; mittleres Fehlerquadrat soll gegen Null gehen.

Für **periodische** Signale mit $s(t) = s(t \pm kT_0)$ (k = natürliche Zahl, T_0 = r., r., p. außer 0 und ∞) ist die Bedingung erfüllbar durch Systeme orthogonaler Funktionen mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t) \cdot g_m(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{für } n=m \\ 0 & \text{für } n \neq m \end{cases}$$

und

$$x_n = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s(t) \cdot g_n(t) dt$$

Integrationsintervall ist für periodische Funktionen gleich der Periodendauer, d.h., $t_2 - t_1 = T_0$. Dies liefert

$$x_n = \frac{1}{T_0} \int_{-qT_0}^{(1-q)T_0} s(t) \cdot g_n(t) dt \quad (0 \leq q \leq 1)$$

2. Signaltheoretische Grundlagen analoger Signale

2.4 Fourier - Reihe Amplituden - Phasenspektrum

Gemäß Ansatz beim Sinusvorgang Annäherung periodischer Signale durch Summen von Grundfunktionen in:

1.) Normalform (1. reelle Form)

$$s(t) = \sum_{n=0}^N (a_n \cdot \cos (n \cdot \omega_0 \cdot t) + b_n \cdot \sin (n \cdot \omega_0 \cdot t))$$

$$\text{mit } a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot \cos (n \cdot \omega_0 \cdot t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot \sin (n \cdot \omega_0 \cdot t) dt$$

2.) Sinus - Form (2. reelle Form)

$$s(t) = \sum_{n=0}^N \hat{s}_n \cdot \sin (n \cdot \omega_0 \cdot t + \varphi_n)$$

$$\text{mit } \hat{s}_n = +\sqrt{a_n^2 + b_n^2} ; \quad \varphi_n = \arctan \frac{a_n}{b_n}$$

Amplituden-
spektrum (Bild 4)

Phasen-
spektrum (Bild 5)

Amplituden sind meßbare Größen (Ermittlung des Betragsspektrums durch Spektralanalysator bzw. selektiven Spannungsmesser); wichtig für die Signalanalyse.

Bei Signalsynthese Fehler durch Gibbs'sches Phänomen (Überschwingen von 18% an Unstetigkeitsstellen der anzunähernden Funktion); bedingt durch Approximation "nur" im Mittel.

(Bild 6)

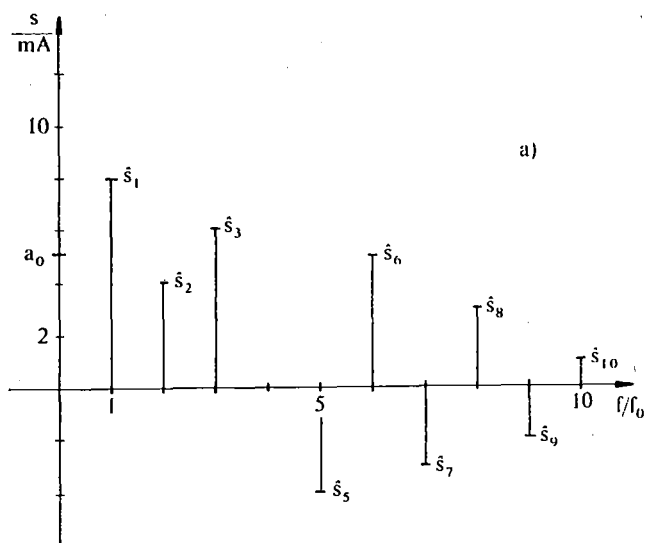


Bild 4 Amplitudenspektrum einer periodischen Schwingung mit 10 diskreten Teilschwingungen (periodischer Strom)

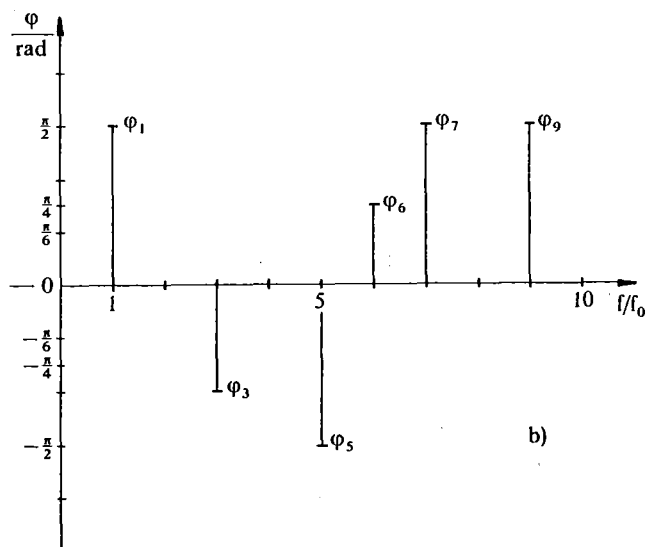


Bild 5 Phasenspektrum des periodischen Stromes aus Bild 4.

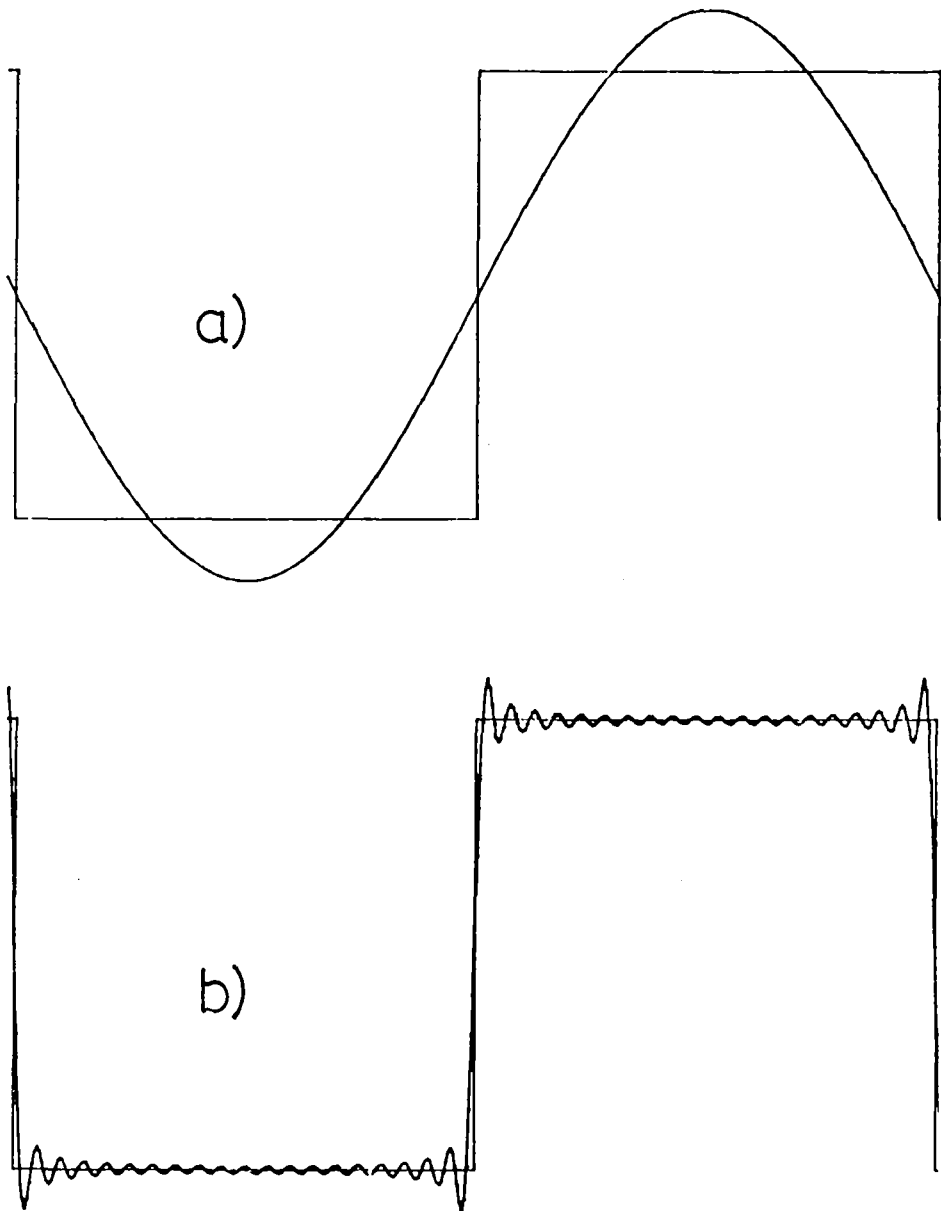


Bild 6 Approximation eines Rechteckpulses mit dem Tastgrad 0,5 durch die Grundschiwingung (Teilbild a) sowie durch die Grundschiwingung und zwanzig (ungeradzahlige) Oberschiwingungen (Teilbild b)

3.) Komplexe Form

$$s(t) = \sum_{n=-N}^N \underline{c}_n e^{jn\omega_0 t} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

mit

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Umrechnungsformeln :

$$\underline{c}_n = \frac{1}{2} (a_n + j b_n) \quad ; \quad \underline{c}_{-n} = \frac{1}{2} (a_n - j b_n)$$

Darstellung der komplexen Fourier-Koeffizienten durch das symmetrische Spektrum.

(Bild 7)

Resumee

Periodische Signale besitzen sowohl ein Amplituden- als auch ein Phasenspektrum mit diskreten Werten (Linienspektrum). Dessen Frequenzen sind ganzzahlige Vielfache einer kleinsten Frequenz f_0 ($f_0 = 0$ und $f_0 = \infty$ ausgenommen) mit $f_0 = \frac{1}{T_0}$.

f_0 legt den kleinstmöglichen Abstand zweier Spektrallinien fest.

f_0 ist g. g. T. aller im Spektrum vorkommenden Frequenzwerte.

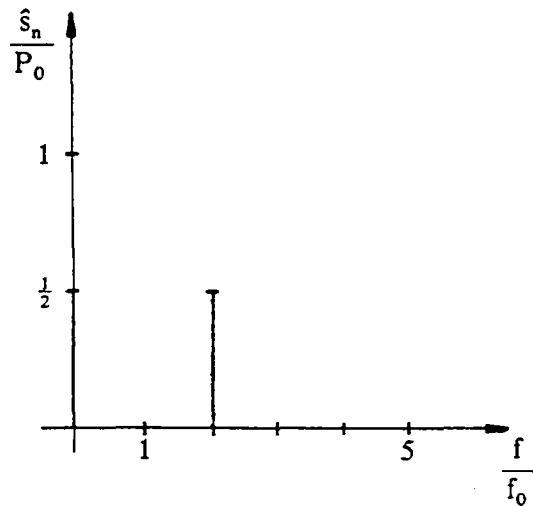


Bild 7a ~~Reelles~~ Amplitudenspektrum
 der Funktion $p(t) = P_0 \sin^2 \omega_0 t$

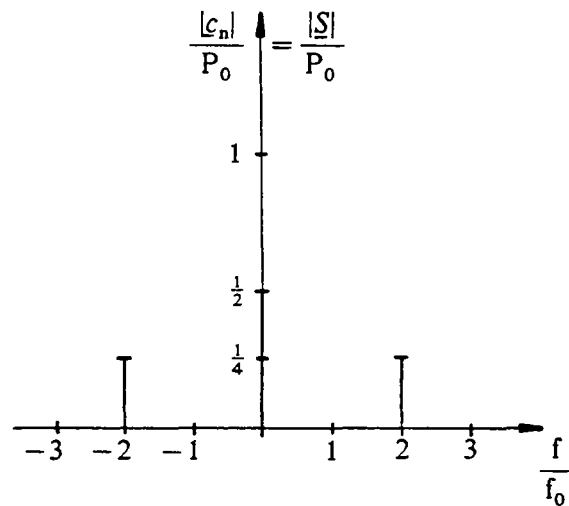


Bild 7 b Symmetrisches (komplexes) Amplituden-
 spektrum der Funktion $p(t) = P_0 \sin^2 \omega_0 t$

2. Signaltheoretische Grundlagen analoger Signale

2.5 Aufbaufunktionen Orthogonale Funktionssysteme

Prof. Dipl.-Ing. W. JANSEN Fachhochschule Aachen, Abt. Jülich	A u f b a u f u n k t i o n e n (Auswahl)	Bl 4
Als Aufbausignale eignen sich orthogonale Funktionensysteme. Man unterscheidet zwei Kategorien nach 1.) Frequenztheorie z.B. — harmonische Funktionen — Exponentialfunktionen — Dirac - Stöße (δ - Funktionen, vgl. Blatt 7) — Einheitssprungfunktionen — si - Funktionen (si $x = \frac{\sin x}{x}$) 2.) Sequenztheorie z.B. — Rademacherfunktionen — Walshfunktionen — Hadamardfunktionen — Slantfunktionen		

2. Signaltheoretische Grundlagen analoger Signale

2.6 Nichtperiodische Signale Fourierintegrale Spektraldichtefunktion

Grundgedanke: Aufbau (Approximation) ebenfalls durch Summe (im Grenzübergang $\Rightarrow$ Integral) von elementaren Grundfunktionen.

Dies führt zu :

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}(f) \cdot e^{j2\pi f t} df \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{inverse} \\ \text{Fourier - Integrale} \end{array}$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ \underline{S}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Fourier -} \\ \text{Integrale} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= A(f) + jB(f) \\ &= S(f) \cdot e^{j \arctan \frac{B(f)}{A(f)}} \end{aligned}$$

$$[\underline{S}(f)] = \frac{[s(t)]}{\text{Hz}} \quad (\text{z.B. } \frac{\text{V}}{\text{Hz}})$$

$S(f)$ heißt deshalb: Spektraldichtefunktion

Hinweis auf :

$$|\underline{S}(f)|^2 = S^2(f) \quad \text{spektrale Energiedichte}$$

Parseval'scher Satz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}(f) \cdot S^*(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} S^2(f) df$$

d.h., Energie eines Signals ist identisch angebar im Zeit- wie im Frequenzbereich.

2. Signaltheoretische Grundlagen analoger Signale

2.7 Fourier - Transformation Hilfssätze, Beispiele

1.) Symbolik

$$F[s(t)] = \underline{S}(\omega)$$

$$F^{-1}[\underline{S}(\omega)] = s(t)$$

$$\mathfrak{F}\{s(t)\} = \underline{S}(\omega)$$

$$\mathfrak{F}^{-1}[\underline{S}(\omega)] = s(t)$$

$$s(t) \circ \longrightarrow \bullet \underline{S}(\omega)$$

$$\underline{S}(\omega) \bullet \longrightarrow \circ s(t)$$

2.) Rechenregeln

- Linearitätssatz
- Ähnlichkeitssatz
- Verschiebungssatz
- Dämpfungssatz
- Faltungssätze
- Differentiations- und
- Integrationssatz

z.B. Faltungssätze

$$\mathfrak{F}\{s(t) \cdot f(t)\} = \underline{S}(f) * \underline{F}(f)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}(\nu) \cdot \underline{F}(f-\nu) d\nu$$

(Anwendung z.B. bei Modulation)

$$\mathfrak{F}^{-1}\{\underline{S}(f) \cdot \underline{F}(f)\} = s(t) * f(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) \cdot f(t-\tau) d\tau$$

(Anwendung z.B. bei Übertragungsfunktionen)

Integrationssatz

$$\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{j2\pi f} S(f) + \frac{1}{2} S(0) \cdot \delta(f)$$

2. Signaltheoretische Grundlagen analoger Signale

2.8 Dirac - Impuls Integraldarstellung, Fourierdarstellung....

Die δ -Funktion ist keine Funktion im üblichen Sinne, sondern nur als Distribution definiert. Das bedeutet, daß $\delta(t)$ nicht durch die Funktionswerte bei gegebenen Werten t erklärt ist, sondern durch die Werte, die das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau \quad \text{für beliebige Werte } t$$

annimmt, wenn $s(\tau)$ eine stetige Funktion ist.

Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau = s(t)$$

Insbesondere gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) d\tau = 1 \quad (\text{vgl. Normierungsbedingungen für } w(s), \text{ Blatt 10.1})$$

Darstellung durch Grenzprozesse:

$$\delta(t - \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sqrt{\sigma}} e^{-\frac{(t-\tau)^2}{\sigma}} \right]$$

$$\delta(t - \tau) = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin n(t - \tau)}{t - \tau} \right]$$

Fourier - Darstellung:

$$\delta(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega$$

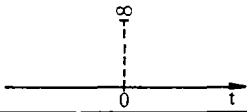
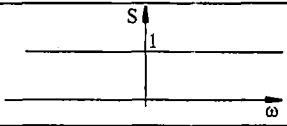
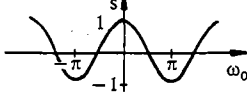
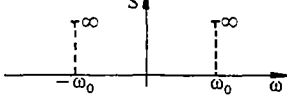
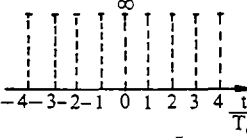
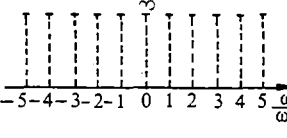
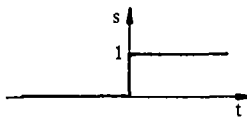
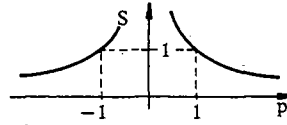
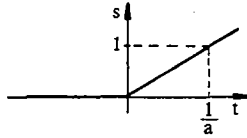
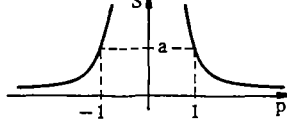
Zusammenhang mit Einheitssprung und Rampenfunktion

$$s(t) = \int_{-\infty}^t \delta(x) dx = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$$= \varepsilon(t) \quad (\text{Einheitssprung})$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(x) dx = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ a \cdot t, & t > 0 \end{cases}$$

$$= r(t) \quad (\text{Rampenfunktion})$$

Nr.	Zeitfunktion	Frequenzfunktion
1	 $s(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	 $\underline{S}(\omega) = \underline{S}(p) = 1$
2	 $s(t) = \cos \omega_0 t$	 $\underline{S}(\omega) = \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
3	 $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$	 $\underline{S}(\omega) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$
4	 $s(t) = \int_{-\infty}^t \delta(x) dx = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} = \epsilon(t) \text{ (Einheitssprung)}$	 $\underline{S}(p) = \frac{1}{p}$
5	 $s(t) = \int_{-\infty}^t \epsilon(x) dx = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ at, & t > 0 \end{cases} = r(t) \text{ (Rampenfunktion)}$	 $\underline{S}(p) = \frac{a}{p^2}$

Die Darstellung von einigen ausgewählten Signalen im Zeit- und Frequenzbereich mittels der δ -Funktion

2. Signaltheoretische Grundlagen analoger Signale

2.9 Laplace - Transformation Kausale Signalfunktion, Laplace - Integrale

Voraussetzung: "Kausale" Signalfunktion $s(t)$

$$\text{mit } \int_0^{+\infty} s(t) e^{-\sigma t} dt < \infty \quad (t \geq 0)$$

$$\underline{S}(\underline{p}) = \int_0^{+\infty} s(t) e^{-\underline{p}t} dt = \mathfrak{L}\{s(t)\}$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \underline{S}(\underline{p}) e^{\underline{p}t} d\underline{p} = \mathfrak{L}^{-1}\{\underline{S}(\underline{p})\}$$

$\sigma_0 > \sigma_0 \quad \sigma_0$ Konvergenzabszisse

} Laplace-
Integrale

$$\underline{p} = \sigma + j\omega \quad (\text{komplexer Anklingkoeffizient})$$

Andere Schreibweisen wie bei Fouriertransformation. (vgl. Blatt 6, Symbolik)

Für Signale $s(t)$ mit $\int_0^{+\infty} |s(t)| dt < \infty$ (absolute Integrierbarkeit) unmittelbarer Übergang von $\mathfrak{L}\{s(t)\}$ nach $\mathfrak{F}\{s(t)\}$ möglich durch Substitution $\underline{p} = j\omega$ ($\sigma = 0$).

Beispiel:

$$s(t) = e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t ; \quad t \geq 0$$

$$\underline{S}(\underline{p}) = \frac{\omega_0}{(\underline{p} + \alpha)^2 + \omega_0^2}$$

$$\underline{S}(\omega) = \frac{\omega_0}{(j\omega + \alpha)^2 + \omega_0^2}$$

2. Signaltheoretische Grundlagen analoger Signale

2.10 Pol - Nullstellenplan Betragsgebirge

Laplace - Transformierte technisch relevanter Signale $s(t)$ lassen sich auf die Form bringen:

$$\underline{S}(\underline{p}) = \frac{f(\underline{p})}{g(\underline{p})} = \frac{a_m \underline{p}^m + \dots a_1 \underline{p} + a_0}{b_n \underline{p}^n + \dots b_1 \underline{p} + b_0}; \quad m \leq n$$

d.h. $\underline{S}(\underline{p})$ = reelle , rationale Funktion von $\underline{p} = \sigma + j\omega$.

Werden die Koeffizienten der jeweiligen Hauptglieder vor den Bruch gezogen, dann folgt

$$\underline{S}(\underline{p}) = K \frac{\underline{p}^m + a'_{m-1} \underline{p}^{m-1} + \dots a'_1 \underline{p} + a'_0}{\underline{p}^n + b'_{n-1} \underline{p}^{n-1} + \dots b'_1 \underline{p} + b'_0}$$

Werden Zählerpolynom und Nennerpolynom durch ihre Wurzeln (Lösungen) ausgedrückt, dann läßt sich schreiben

$$\underline{S}(\underline{p}) = K \frac{(\underline{p} - \underline{p}_{0,1})(\underline{p} - \underline{p}_{0,2}) \dots (\underline{p} - \underline{p}_{0,m})}{(\underline{p} - \underline{p}_{\infty,1})(\underline{p} - \underline{p}_{\infty,2}) \dots (\underline{p} - \underline{p}_{\infty,n})}$$

Als komplexe Funktion läßt sich $\underline{S}(\underline{p})$ auch in der Exponentialform (Betrag und Winkel) angeben.

$$\underline{S}(\underline{p}) = K \frac{|\underline{p} - \underline{p}_{0,1}| |\underline{p} - \underline{p}_{0,2}| \dots |\underline{p} - \underline{p}_{0,m}|}{|\underline{p} - \underline{p}_{\infty,1}| |\underline{p} - \underline{p}_{\infty,2}| \dots |\underline{p} - \underline{p}_{\infty,n}|} \cdot e^{-j(\psi_{0,1} + \psi_{0,2} + \dots - \psi_{\infty,1} - \psi_{\infty,2} - \dots)}$$

Zusammenfassung:

Die Spektralfunktion $\underline{S}(\underline{p})$ ist bis auf eine Konstante K vollständig durch die Lage der Pole und Nullstellen bestimmt. (Pol- Nullstellenplan, s. Bild 8)

Darstellung von $|\underline{S}(\underline{p})|$ im sog. Betragsgebirge (Bild 9).

Den Einfluß der Lage der Pole auf das Zeitverhalten des Signals $s(t)$ zeigt Bild 10.

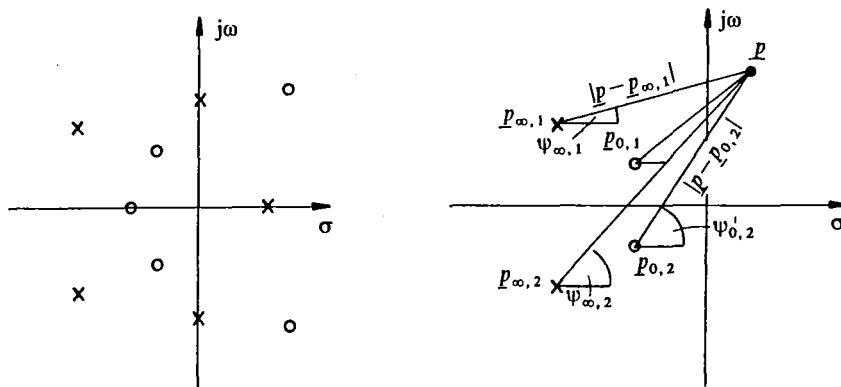


Bild 8 Pol-Nullstellen-Plan, o = Nullstelle, x = Pol
linkes Bild: allgemeine Darstellung,
rechtes Bild: Darstellung der Exponentialform (Betrag und Winkel) für einen beliebigen Aufpunkt p

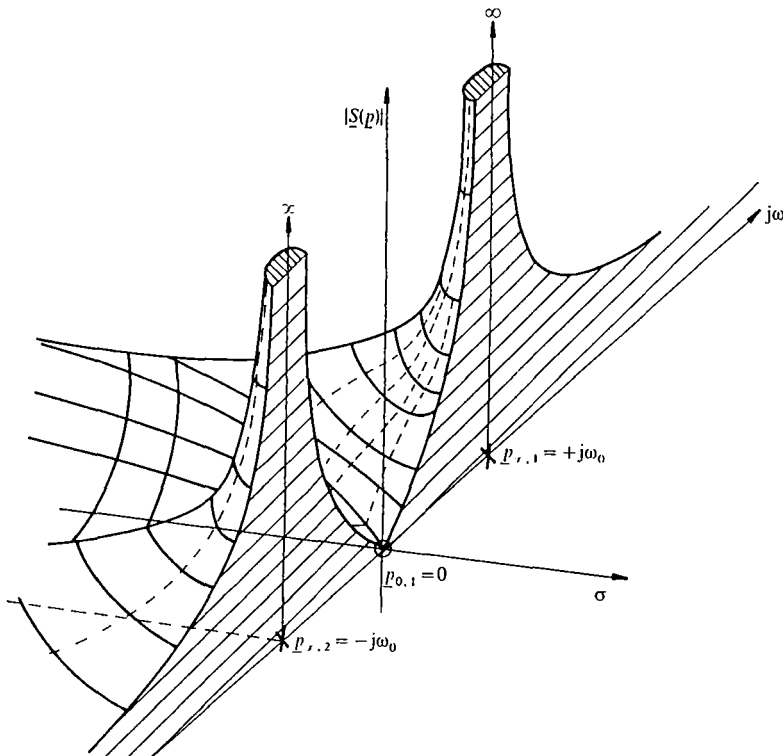


Bild 9 Beispiel für ein Betragsgebirge, nur die linke, abgeschlossene Halbebene ist dargestellt

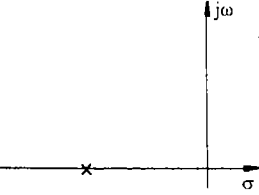
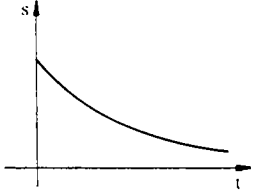
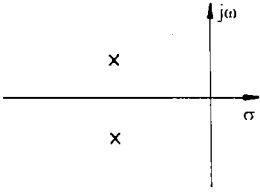
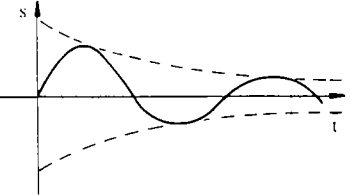
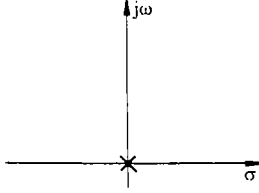
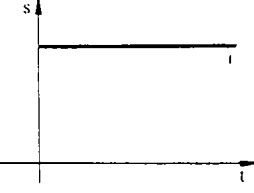
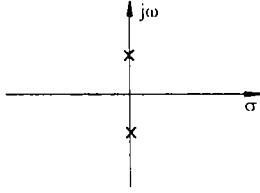
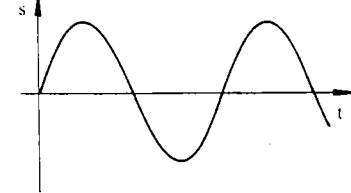
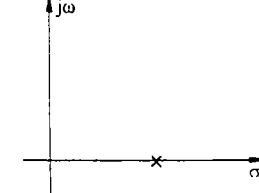
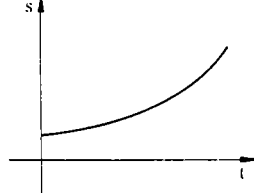
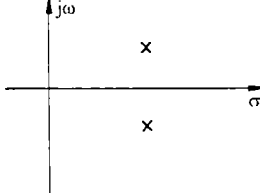
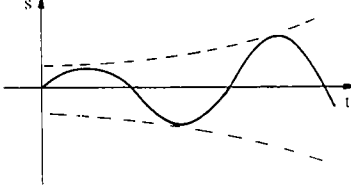
reeller Pol (einfach)	prinzipieller Verlauf der Zeitfunktion $s(t) = k_1 e^{\sigma_1 t}$	konjugiert komplexes Polpaar	prinzipieller Verlauf der Zeitfunktion $s(t) = k_1 e^{\sigma_1 t} + k_2 e^{\sigma_2 t}$
			
			
			

Bild 10 Der Einfluß der Lage der Pole der Bildfunktion auf den Verlauf der Zeitfunktion

2. Signaltheoretische Grundlagen analoger Signale

2.11 Statistische Signalbeschreibung Wahrscheinlichkeitsfkt., Ergodensätze....

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $w(s)$

$$w(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{\sum \Delta t_i}{\Delta s}$$

mit Δt_i Verweildauerintervalle im Wertebereich Δs . (vgl. Bild 11)

Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion $W(s)$

$$\int_{-\infty}^s w(x) dx = W(s) \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{ds} W(s) = w(s)$$

Insbesondere gilt: $\int_{-\infty}^{+\infty} w(s) ds = 1$ (sog. Normierungsbedingung)

Ergodensätze

$$\bar{s} = E(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s \cdot w(s) ds$$

$$\overline{s^2} = E(s^2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 \cdot w(s) ds$$

für ergodische Prozesse gilt: $\downarrow$ Zeitmittel $=$ $\downarrow$ Scharmittel

Varianz σ^2 (Streuung)

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (s - \bar{s})^2 w(s) ds = \overline{s^2} - \bar{s}^2$$

Sonderfall mit $\bar{s} = 0$: $\sigma = S_{\text{eff}} = +\sqrt{\overline{s^2}}$

d.h., im Fall gleichanteilfreier Signale ist deren Effektivwert die Wurzel aus der Varianz. Beispiel: weißes Rauschen mit Gauß'scher Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Zur Definition eines "natürlichen Schwankungsbereichs" für eine regelloses Signal ist beim Rauschen (und sinngemäß bei anderen regellosen Signalen) der Bereich $\pm 3\sigma$ sinnvoll. Daraus folgt die Möglichkeit der Angabe eines Scheitelwertes zu $\hat{s}_n = 3\sigma$ für das Rauschsignal. Die Wahrscheinlichkeit für Momentanwerte des Rauschens, diesen Wert zu überschreiten, ist kleiner als 0,3%.

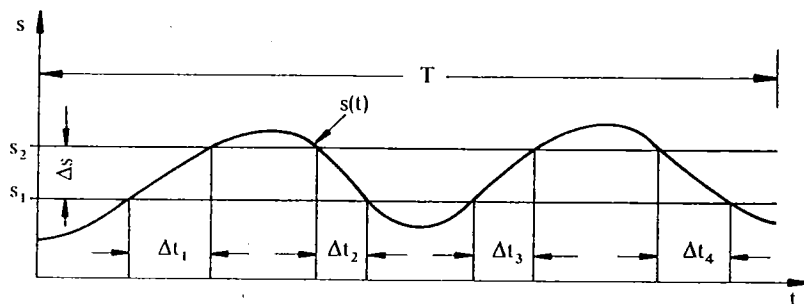


Bild 11 Definition der aufsummierten Verweildauer $\sum \Delta t$ des Signals $s(t)$ im Wertebereich Δs

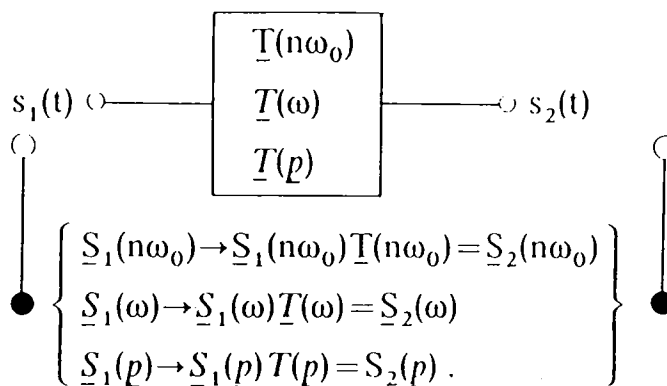


Bild 12 Schematische Beschreibung des Zusammenwirkens von Systemen und determinierten Signalen

Korrelationsfunktionen stationärer Signale

1.) Kreuzkorrelationsfunktionen $KKF(\tau) = \overline{s_{12}}(\tau)$

$$\overline{s_{12}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s_1(t) \cdot s_2(t \pm \tau) dt$$

2.) Autokorrelationsfunktion $AKF(\tau) = \overline{s_{11}}(\tau)$

$$\overline{s_{11}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s_1(t) \cdot s_1(t \pm \tau) dt$$

Für den Anfangswert der AKF gilt:

$$\overline{s_{11}}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s_1^2(t) dt = \overline{s_1^2} = S_{\text{eff}}^2,$$

d.h., der Anfangswert der AKF liefert das Quadrat des Signaleffektivwertes.

In der Praxis ist $T \rightarrow \infty$ nicht erfüllbar, daher sinnvolle Wahl: $T \gg \tau$ (sog. Kurzzeitkorrelation).

Spektrale Leistungsdichte $S_P(f)$

$$\begin{aligned} S_P(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S(f) \cdot S^*(f)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S^2(f)}{T} \\ &= \lim_{\Delta f \rightarrow 0} k \cdot \frac{\Delta P(f)}{\Delta f} \end{aligned}$$

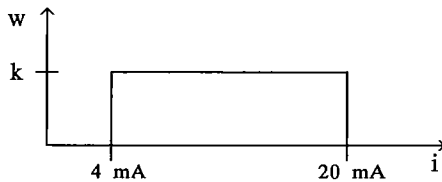
Zusammenhang zwischen der spektralen Leistungsdichte $S_P(f)$ und der AKF(τ)

$$S_P(f) = \mathfrak{F} \left\{ \overline{s_{11}}(\tau) \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{s_{11}}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$\overline{s_{11}}(\tau) = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ S_P(f) \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_P(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

(Theorem von Wiener und Chintchin: Die spektrale Leistungsdichte und die Autokorrelationsfunktion eines Signals bilden ein Paar von Fourier-Transformierten.)

Ein einer Meßgröße proportionaler Strom nimmt Werte im Bereich 4 ... 20 mA an. Alle Werte sind in diesem Intervall gleichwahrscheinlich, d.h., die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $w(i)$ hat einen stromunabhängig konstanten Wert k .



Es interessieren:

die Größe k , der Mittelwert $\bar{i}$, das quadratische Mittel $\overline{i^2}$, die Varianz σ^2 , der Stromeffektivwert I und der Effektivwert des Wechselanteils, mit dem der Strom i um den Mittelwert $\bar{i}$ schwankt.

Zur Bestimmung von k :

Es gilt: $\int_{-\infty}^{+\infty} w(i) di = 1$

$$\int_{4 \text{ mA}}^{20 \text{ mA}} k di = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{16 \text{ mA}}$$

Berechnung von $\bar{i}$:

$$\bar{i} = \int_{4 \text{ mA}}^{20 \text{ mA}} i \cdot w(i) di = \frac{1}{16 \text{ mA}} \cdot \frac{i^2}{2} \Big|_{4 \text{ mA}}^{20 \text{ mA}} = 12 \text{ mA}$$

Dieser Wert ist unmittelbar einsichtig und kann damit als Beleg für die Richtigkeit des Ansatzes genommen werden.

Berechnung von $\overline{i^2}$:

$$\overline{i^2} = \int_{4 \text{ mA}}^{20 \text{ mA}} i^2 \cdot w(i) di = \frac{1}{16 \text{ mA}} \cdot \frac{i^3}{3} \Big|_{4 \text{ mA}}^{20 \text{ mA}} \approx 165,33 (\text{mA})^2$$

Dies liefert für den Effektivwert $I = \sqrt{\overline{i^2}} : I \approx 12,86 \text{ mA}$

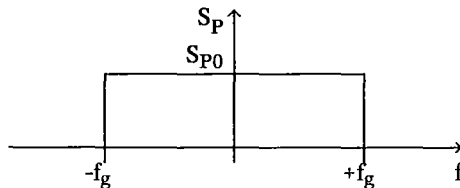
Berechnung von σ^2 :

$$\sigma^2 = \overline{i^2} - \bar{i}^2 \approx 21,33 (\text{mA})^2$$

Daraus folgt $\sigma \approx 4,63 \text{ mA}$ als Effektivwert des Wechselanteils, mit dem i regellos um den Mittelwert $\bar{i} = 12 \text{ mA}$ schwankt.

Autokorrelationsfunktion eines bandbegrenzten Rauschsignals

Viele Rauschquellen wie Verstärker, Transistoren, Widerstände u.a. haben bis zu einer Grenzfrequenz f_g ein annähernd konstantes Leistungsdichtespektrum mit dem Wert S_{P0} . Es stellt damit gleichsam einen Ausschnitt aus dem Leistungsdichtespektrum des idealen weißen, gauß'schen Rauschens dar. Das nachstehende Bild zeigt den Sachverhalt als symmetrisches Spektrum, das für die Berechnung der Autokorrelationsfunktion insofern vorteilhaft ist, als die Integration in symmetrischen Grenzen eine reelle Lösung des Fourier-Integrals liefert.



Es gilt:

$$\begin{aligned}\overline{s_{11}}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_P(f) e^{j2\pi\tau f} df = \text{AKF}(\tau) \\ &= S_{P0} \int_{-f_g}^{+f_g} e^{j2\pi\tau f} df = S_{P0} \frac{1}{j2\pi\tau} (e^{+j2\pi\tau f_g} - e^{-j2\pi\tau f_g}) \\ &= \frac{S_{P0}}{\pi\tau} \sin 2\pi f_g \tau \\ &= S_{P0} \cdot 2f_g \cdot \text{si}(2\pi f_g \tau)\end{aligned}$$

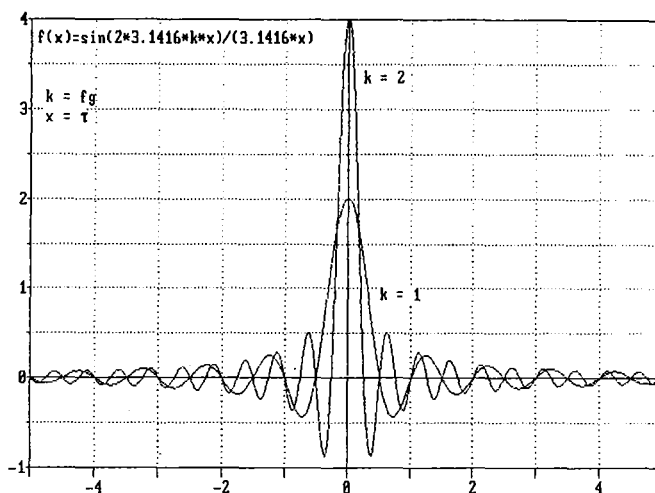
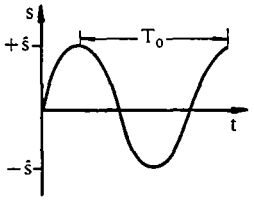
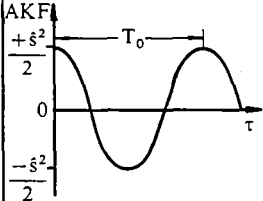
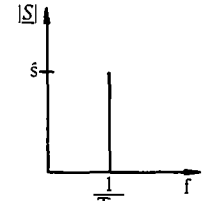
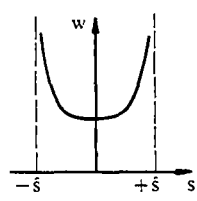
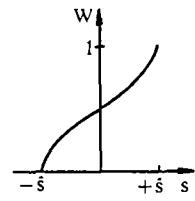
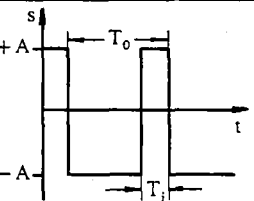
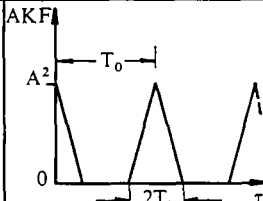
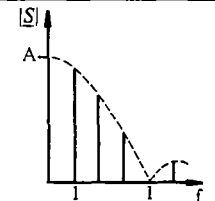
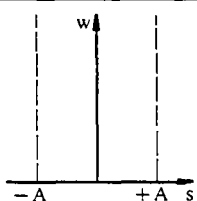
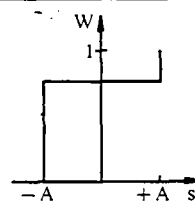
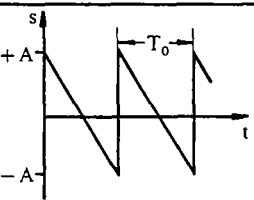
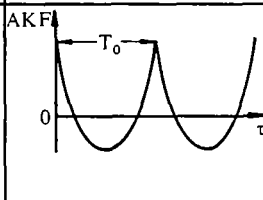
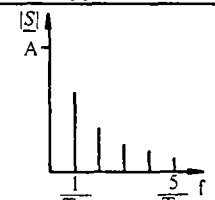
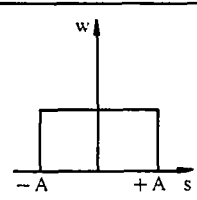
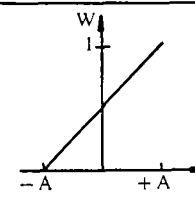
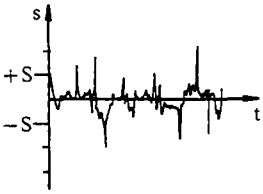
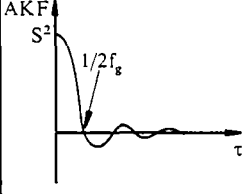
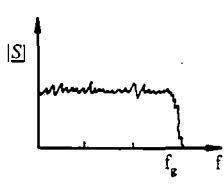
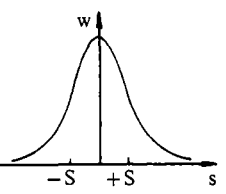
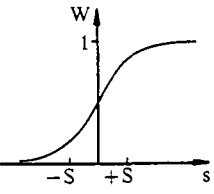
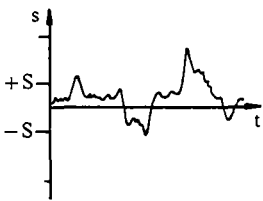
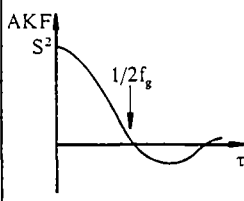
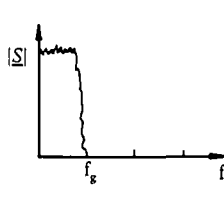
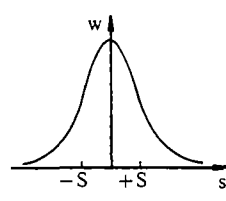
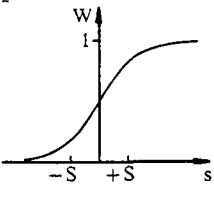
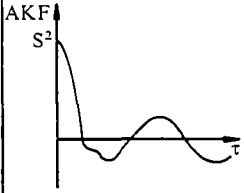
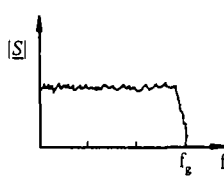
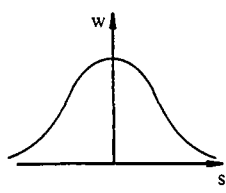
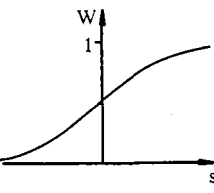


Bild: Verlauf der normierten Autokorrelationsfunktion eines bandbegrenzten Rauschsignals als Funktion der Korrelationsdauer τ mit f_g als Parameter ($f_g = 1, 2$)

	Zeitfunktion $s(t)$	Autokorrelationsfunktion AKF(τ)	Amplitudenspektrum $ S(f) $	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $w(s)$	Wahrscheinlichkeitsverteilung $W(s)$
Sinusförmiges Signal					
Rechteckförmiges Signal					
Dreieckförmiges Signal					

Verschiedene Kennfunktionen determinierter Signale

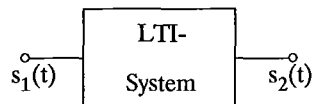
	Zeitfunktion $s(t)$	Autokorrelationsfunktion $AKF(\tau)$	Amplitudenspektrum $ \underline{S}(f) $	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $w(s)$	Wahrscheinlichkeitsverteilung $W(s)$
Normalverteiltes Breitband- Rauschsignal					
Normalverteiltes Schmalband- Rauschsignal					
Sinussignal mit Rauschsignal					

Verschiedene Kennfunktionen regelloser Signale

3. Netzwerktheoretische Grundlagen analoger, linearer Schaltungen

3.1 Systemfunktion LTI-System, Übertragungsfunktion

An einem System (vgl. DIN 19 226) wirke am Eingang ein Signal $s_1(t)$ als Erregungsfunktion. Aufgrund dieser Erregung reagiert das System mit einer Antwortfunktion $s_2(t)$ am Ausgang. Das Verhältnis von Wirkung zu Ursache ist von K $\ddot{u}$ pfm $\ddot{u}$ ller als **Systemfunktion** bezeichnet worden.



Voraussetzungen

Das zu betrachtende elektrische System sei nur aus linearen Bauelementen (R,L,C,M) aufgebaut und damit selbst linear. Desweiteren sollen alle signalrelevanten Parameter zeitunabhängig sein (sog. LTI-System, LTI = linear, time invariant).

Damit ist folgende Erweiterung möglich:

Das Eingangssignal $s_1(t)$ besitze eine Transformierte (Bildfunktion) $\underline{S}_1(\omega)$ bzw. $\underline{S}_1(p)$. Dann besitzt auch $s_2(t)$ eine Transformierte $\underline{S}_2(\omega)$ bzw. $\underline{S}_2(p)$. Das Verhältnis der beiden Transformaten im Sinne der K $\ddot{u}$ pfm $\ddot{u}$ ller'schen Systemfunktion hei $\ddot{u}$ t dann (komplexe) **Übertragungsfunktion** $\underline{H}(\omega)$ bzw. $\underline{H}(p)$ des Systems.

$$\underline{H}(p) = \frac{\underline{S}_2(p)}{\underline{S}_1(p)} \quad ; \quad \underline{H}(\omega) = \frac{\underline{S}_2(\omega)}{\underline{S}_1(\omega)} .$$

(Statt des Formelzeichens $\underline{H}$ wird auch das Formelzeichen $\underline{T}$ (transmission function) benutzt)

Umkehrung: Bei bekannter Übertragungsfunktion $\underline{H}$ ist $\underline{S}_2$ als Produkt von $\underline{S}_1$ und $\underline{H}$ zu berechnen, und es gilt z.B.

$$\underline{S}_2(p) = \underline{H}(p) \cdot \underline{S}_1(p).$$

Hiermit ergibt sich die Ausgangszeitfunktion $s_2(t)$ durch Rücktransformation der Ausgangsfrequenzfunktion $\underline{S}_2(p)$. Dies gilt gleicherma $\ddot{u}$ en auch, wenn die spektrale Darstellung des Eingangssignals durch eine Fourier-Reihe oder durch ein Fourier-Integral erfolgt. (vgl. Bild 12)

F $\ddot{u}$ r die erforderlichen Transformationsoperationen stehen umfangreiche "Korrespondenztabellen" zur Verf $\ddot{u}$ gung (s. mathemat. Tabellen, Formelsammlungen, u.ä.).

Der "Umweg" $\ddot{u}$ ber den Bildbereich ist in der Regel einfacher als der direkte Weg von $s_1(t)$ nach $s_2(t)$, weil hierf $\ddot{u}$ r eine Faltung (vgl. Blatt 15) durchzuf $\ddot{u}$ hren w $\ddot{a}$ re. Hinzu kommt, da $\ddot{u}$ sich $\underline{H}(\omega)$ bzw. $\underline{H}(p)$ f $\ddot{u}$ r einfache Strukturen nach den Regeln der Netzwerkberechnung leicht ermitteln l $\ddot{a}$ st. Desweiteren ist der Betrag der $\ddot{U}$ bertragungsfunktion elektrisch anschaulich zu deuten und gut zu messen (Frequenzgang).

3. Netzwerktheoretische Grundlagen analoger, linearer Schaltungen

3.2 Zweipolssystemfunktion Impedanz - Admittanzfunktion

Durch einen Zweipol, z.B. eine Spule der Induktivität L , fließt als Ursache ein zeitabhängiger Strom $i(t)$. Dieser hat als Wirkung eine zeitabhängige Spannung $u(t)$ zur Folge. Beide Zeitfunktionen besitzen Laplace-Transformierte, d.h., $i(t) \longrightarrow \underline{I(p)}$ und $u(t) \longrightarrow \underline{U(p)}$. Dann liefert das Verhältnis

$$\frac{\underline{U(p)}}{\underline{I(p)}} = \underline{Z(p)} = pL$$

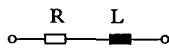
die Impedanzfunktion $\underline{Z(p)}$ des Zweipols, in diesem Fall der Spule, als Funktion der Variablen der Laplace-Transformation p . $p = \sigma + j\omega$ heißt "komplexer Anklingkoeffizient" oder auch (nicht ganz korrekt, aber anschaulicher) "komplexe Kreisfrequenz".

Der Quotient $\frac{\underline{I(p)}}{\underline{U(p)}} = \underline{Y(p)}$ heißt sinngemäß Admittanzfunktion.

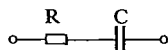
Die Beschreibung von Grundzweipolen mittels der komplexen Kreisfrequenz p zeigt die anliegende Tabelle 3.1-1.

Die Impedanz- und Admittanzfunktionen von Zweipolkombinationen lassen sich in bekannter Weise aus den Impedanz- und Admittanzfunktionen der Grundzweipole angeben. Nachfolgend sind einige Beispiele gezeigt.

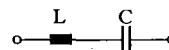
1. Reihenschaltungen



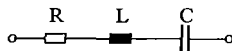
$$\underline{Z(p)} = R + pL$$



$$\underline{Z(p)} = R + \frac{1}{pC}$$

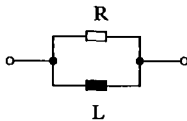


$$\underline{Z(p)} = pL + \frac{1}{pC}$$

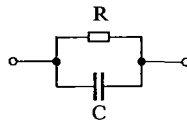


$$\underline{Z(p)} = R + pL + \frac{1}{pC}$$

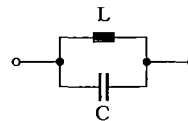
2. Parallelschaltungen



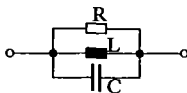
$$\underline{Y(p)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{pL}$$



$$\underline{Y(p)} = \frac{1}{R} + pC$$

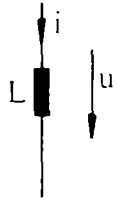
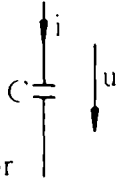


$$\underline{Y(p)} = \frac{1}{pL} + pC$$



$$\underline{Y(p)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{pL} + pC$$

Tabelle 3.1-1. Beschreibung von Grundzweipolen mittels der komplexen Kreisfrequenz p

Grundzweipol	Grundgleichung	Erregungsfunktion
 Widerstand	$u(t) = R \, i(t)$	$\underline{\hat{u}} e^{pt} = R \, \underline{\hat{i}} e^{pt}$ $\underline{\hat{u}} = R \, \underline{\hat{i}}$ $\underline{U} = R \, \underline{I}$
 Spule	$d\Phi(t) = L \, di(t)$ $\frac{d\Phi(t)}{dt} = u(t)$ $= L \, \frac{di(t)}{dt}$	$\underline{\hat{u}} e^{pt} = L \, p \, \underline{\hat{i}} e^{pt}$ $\underline{\hat{u}} = p \, L \, \underline{\hat{i}}$ $\underline{U} = p \, L \, \underline{I}$ $\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = Z(p) = p \, L$
 Kondensator	$dq(t) = C \, du(t)$ $\frac{dq(t)}{dt} = i(t)$ $= C \, \frac{du(t)}{dt}$	$\underline{\hat{i}} e^{pt} = C \, p \, \underline{\hat{u}} e^{pt}$ $\underline{\hat{i}} = p \, C \, \underline{\hat{u}}$ $\underline{I} = p \, C \, \underline{U}$ $\frac{\underline{I}}{\underline{U}} = Y(p) = p \, C$

3. Netzwerktheoretische Grundlagen analoger, linearer Schaltungen

3.3 Übertragungsfunktion II Stoßantwort, Gewichtsfunktion, Faltung

Die Übertragungsfunktion $\underline{H}(\omega)$ bzw. $\underline{H}(p)$ beschreibt ein LTI-System vollständig im Frequenzbereich. Sie besitzt als Bildfunktion eine Originalfunktion, z.B.

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \underline{S}(p) \} = g(t),$$

die sog. Gewichtsfunktion. Sie ist identisch mit der Ausgangszeitfunktion $s_2(t)$, wenn als Eingangszeitfunktion $s_1(t)$ der Dirac-Impuls gewählt wird. Deshalb heißt $g(t)$ auch Stoßantwort des Systems. Die Stoßantwort $g(t)$ kennzeichnet das LTI-System im Zeitbereich ebenso vollständig wie die Übertragungsfunktion im Frequenzbereich. Mit Hilfe der Stoßantwort $g(t)$ läßt sich der direkte Zusammenhang zwischen Eingangssignal $s_1(t)$ und Ausgangssignal $s_2(t)$ als Faltungsoperation angeben:

$$s_2(t) = \int_0^t g(t - \tau) s_1(\tau) d\tau = g(t) * s_1(t).$$

Die bisher gemachten Angaben gelten für alle Fälle, für die $s(t)$ determiniert angebbar ist. Für regellose Signale ist die AKF eine zur Beschreibung geeignete Zeitfunktion, die als Fourier-Transformierte die spektrale Leistungsdichtefunktion besitzt (vgl. Blatt 10.2). Daraus folgt für regellose Signale (vgl. Bild 13)

$$S_{P2}(\omega) = | \underline{H}(\omega) |^2 S_{P1}(\omega) = \underline{H}(\omega) \cdot \underline{H}^*(\omega) \cdot S_{P1}(\omega) = H^2(\omega) \cdot S_{P1}(\omega).$$

mit $\underline{H}(\omega) = H(\omega) \cdot e^{+j\varphi(\omega)}$ und $\underline{H}^*(\omega) = H(\omega) \cdot e^{-j\varphi(\omega)}$

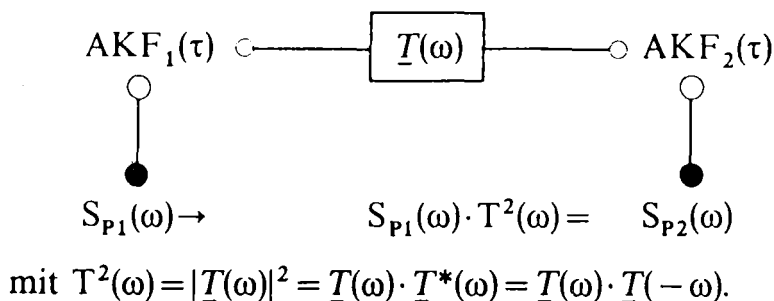
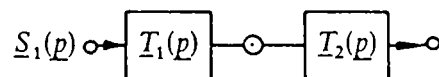


Bild 13 Schematische Beschreibung des Zusammenwirkens von Systemen und stochastischen Signalen

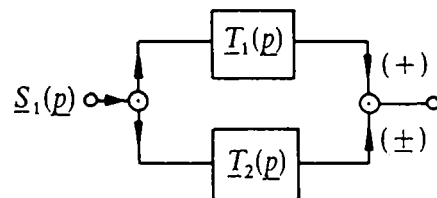
Tabelle 3.1-2. Beschreibung von zusammenschalteten Übertragungssystemen mittels der einzelnen Übertragungsfunktionen

Ketten-
schaltung



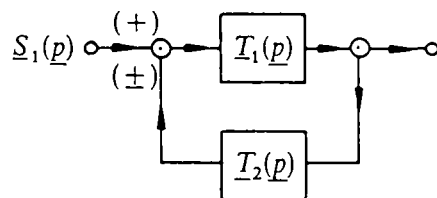
$$\underline{S}_2(p) = \underline{T}_1(p) \cdot \underline{T}_2(p) \cdot \underline{S}_1(p)$$

Parallel-
schaltung



$$\underline{S}_2(p) = [\underline{T}_1(p) \pm \underline{T}_2(p)] \cdot \underline{S}_1(p)$$

Rück-
kopplung



$$\underline{S}_2(p) = \underline{S}_1(p) \cdot \frac{\underline{T}_1(p)}{1 \mp \underline{T}_1(p) \underline{T}_2(p)}$$

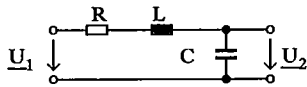
⊙ rückwirkungsfreier Koppelpunkt

3. Netzwerktheoretische Grundlagen analoger, linearer Schaltungen

3.4 Beispielhafte Berechnung von Übertragungsfunktionen Tiefpaß

Beispiel 1 (RLC-Tiefpaß)

Gegeben ist ein Netzwerk mit der gezeichneten Struktur



$$\underline{Z}_1(p) = R + pL$$

$$\underline{Y}_2(p) = pC$$

Dessen Übertragungsfunktion berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \underline{H}(p) &= \frac{\underline{U}_2(p)}{\underline{U}_1(p)} = \frac{\underline{Z}_2(p)}{\underline{Z}_1(p) + \underline{Z}_2(p)} = \frac{1}{\underline{Z}_1(p) \underline{Y}_2(p) + 1} \\ &= \frac{1}{(R + pL) pC + 1} = \frac{1}{p^2 LC + pRC + 1} \\ &= \frac{1}{LC} \frac{1}{p^2 + p \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} \\ &= \frac{\omega_r^2}{p^2 + p \frac{1}{\tau} + \omega_r^2} \quad \text{mit } \omega_r^2 = \frac{1}{LC} \text{ und } \tau = \frac{L}{R} \end{aligned}$$

Interpretation im PN-Plan (vgl. Blatt 9)

Nullstelle: nicht vorhanden

Pole: Aus dem Ansatz $p^2 + p \frac{1}{\tau} + \omega_r^2 = 0$ folgt

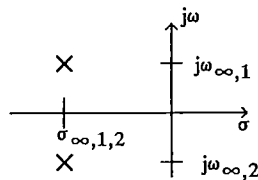
$$p_{\infty,1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm j \sqrt{\omega_r^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2} = \sigma_{\infty,1,2} + j\omega_{\infty,1,2}$$

Das bedeutet

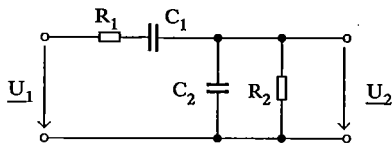
$$\sigma_{\infty,1,2} = -\frac{1}{2\tau},$$

und $j\omega_{\infty,1} = +j \sqrt{\omega_r^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2}$

$$j\omega_{\infty,2} = -j \sqrt{\omega_r^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2}.$$



Beispiel 2 (RC-Bandpaß)



$$\underline{H}(p) = \frac{\underline{U}_2(p)}{\underline{U}_1(p)} = \frac{\underline{Z}_2(p)}{\underline{Z}_1(p) + \underline{Z}_2(p)}$$

$$\text{mit } \underline{Z}_1(p) = R_1 + \frac{1}{pC_1}$$

$$\text{und } \underline{Y}_2(p) = \frac{1}{\underline{Z}_2(p)} = \frac{1}{R_2} + pC_2$$

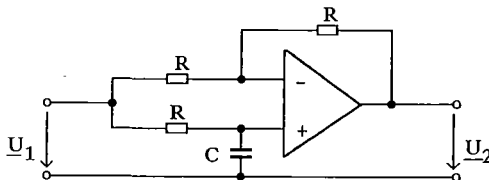
$$\underline{H}(p) = \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{pR_2C_1} + pR_1C_2 + \frac{C_2}{C_1} + 1}$$

Praktische Auslegung meistens: $R_1 = R_2 = R$ und $C_1 = C_2 = C$

$$\text{Damit: } \underline{H}(p) = \frac{pRC}{p^2R^2C^2 + 3pRC + 1}$$

$$\text{bzw. } \underline{H}(\omega) = \frac{j\omega RC}{1 - \omega^2R^2C^2 + j 3\omega RC}$$

Beispiel 3 (aktiver Allpaß)



Voraussetzung:
idealer Operationsverstärker
mit $U_+ = U_-$ (verschwindende
Eingangsgrößen!)

$$\frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_-}{R} = \frac{\underline{U}_- - \underline{U}_2}{R} \quad (i) \quad \underline{U}_+ = \underline{U}_1 \frac{1}{pRC + 1} \quad (ii)$$

$$\text{aus (i) } \underline{U}_2 = 2\underline{U}_- - \underline{U}_1 = 2\underline{U}_+ - \underline{U}_1$$

$$\text{mit (ii) } \underline{U}_2 = 2 \underline{U}_1 \frac{1}{pRC + 1} - \underline{U}_1 = \underline{U}_1 \left[\frac{2}{pRC + 1} - 1 \right]$$

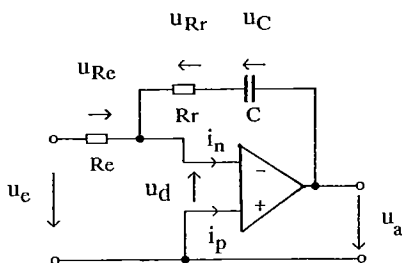
$$\underline{H}(p) = \frac{\underline{U}_2(p)}{\underline{U}_1(p)} = \frac{1 - pRC}{1 + pRC}$$

$$\text{bzw. } \underline{H}(j\omega) = \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC} = 1 \cdot e^{-j2\arctan(\omega RC)},$$

d.h., das Netzwerk beeinflußt nicht die Amplitude (Allpaß), sondern nur die Phase (Phasenschieber, Laufzeitglied)

Beispiel für System- und Übertragungsfunktion eines PI-Gliedes (PI-Reglers)

Originalfunktion : (Zeitbereich)



Annahme : Operationsverstärker sei ideal

$$v \rightarrow \infty \Rightarrow u_d \rightarrow 0$$

$$i_n = i_p = 0$$

$$u(t) = u \text{ usw.}$$

$$\sum_k u_k = 0 = u_e + u_d - u_{R_e} ; \quad \sum_k i_k = 0 = \frac{u_{R_e}}{R_e} + C \frac{du_C}{dt} - i_n$$

$$\frac{u_e}{R_e} = - C \frac{du_C}{dt} ; \quad u_C(t) = - \frac{1}{R_e C} \int u_e(t) dt + C'$$

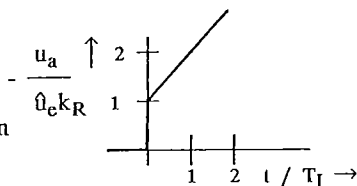
$$\sum_k u_k = 0 = u_C + u_{R_r} - u_d - u_a$$

$$u_a(t) = - u_C(t) \frac{R_r}{R_e} - \frac{1}{R_e C} \int u_e(t) dt + C'$$

$$u_e(t) \stackrel{!}{=} \hat{u}_e \varepsilon(t) : \text{Sprungfunktion} ; C' \stackrel{!}{=} 0 ;$$

$$u_a(t) = - \hat{u}_e \frac{R_r}{R_e} \left\{ 1 + \frac{1}{R_r C} t \right\} \varepsilon(t) = - \hat{u}_e k_R \left\{ 1 + \frac{t}{T_I} \right\} \varepsilon(t)$$

$u_a(t)$: Sprungantwort
= Übergangsfunktion



Beispiel für System- und Übertragungsfunktion eines PI-Gliedes (PI-Reglers)

Faltungsintegral

$$u_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_e(\tau) g(t-\tau) d\tau = u_e(t) * g(t)$$

$$g(t) = -k_R \delta(t) - \frac{k_R}{T_I} \varepsilon(t) = \text{Stoßantwort (} = h(t) \text{)} \quad \text{mit } T_I = \left\{ T_I \right\} \left[T_I \right]$$

$$u_a(t) = u_e(t) * \left[-k_R \delta(t) - \frac{k_R}{T_I} \varepsilon(t) \right]$$

$$= -k_R \delta(t) * \hat{u}_e \varepsilon(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_e \varepsilon(\tau) \frac{k_R}{T_I} \varepsilon(t-\tau) d\tau ; \quad \varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & (t-\tau) \geq 0 \\ 0 & (t-\tau) < 0 \end{cases} \text{ für}$$

$$= -k_R u_e(t) - \hat{u}_e \frac{k_R}{T_I} \int_0^t d\tau = -\hat{u}_e k_R \left[1 + \frac{t}{T_I} \right] \varepsilon(t)$$

Bildfunktion : (Frequenzbereich)

Übertragungsfunktion

$$\text{Rückkopplungszweigpol : } \underline{Z}_r(p) = R_r + \frac{1}{pC}$$

$$\text{Eingangszweigpol : } \underline{Z}_e(p) = R_e$$

$$\underline{H}_{PI}(p) = \frac{\underline{Z}_r(p)}{\underline{Z}_e(p)} = - \frac{R_e}{R_r} \frac{1 + p R_r C}{p R_r C}$$

KFA

Institut für Grenzflächenforschung und Vakuumphysik

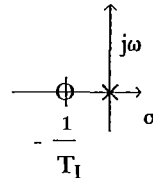
Beispiel für System- und Übertragungsfunktion eines PI-Gliedes (PI-Reglers)

$$\underline{H}_{PI}(\underline{p}) = -k_R \frac{1 + \underline{p} T_I}{\underline{p} T_I}$$

p -- Ebene (s - Ebene)

$$\text{Nullstelle : } 1 + (\sigma + j\omega) T_I = 0 ; \quad \omega = 0 ; \sigma = -\frac{1}{T_I}$$

$$\text{Polstelle : } \frac{1 + (\sigma + j\omega) T_I}{(\sigma + j\omega) T_I} \rightarrow \infty ; \quad \omega \rightarrow 0 ; \sigma = 0$$

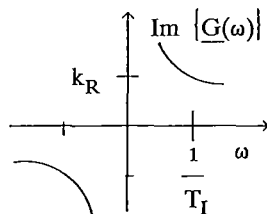
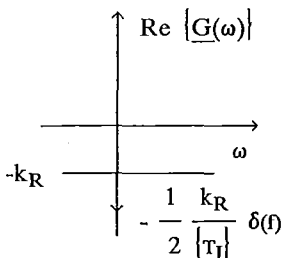


Fourier-Transformation

$$g(t) = -k_R \delta(t) - \frac{k_R}{T_I} \varepsilon(t)$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ | & | & | \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\underline{G}(\omega) = -k_R \cdot 1 - \frac{1}{2} \frac{k_R}{T_I} \delta(f) + j \frac{k_R}{\omega T_I} = -k_R \left[1 + \frac{1}{2} \frac{1}{T_I} \delta(f) - j \frac{1}{\omega T_I} \right]$$



$$|\underline{G}(\omega)| = k_R \sqrt{\left[1 + \frac{1}{2} \frac{1}{T_I} \delta(f) \right]^2 + \left[\frac{1}{\omega T_I} \right]^2} ; \quad \omega = 2\pi f$$

$$\phi(\omega) = \pm n \pi + \arctan \left[\frac{\text{Im} \{ \underline{H}_{PI}(\omega) \}}{\text{Re} \{ \underline{H}_{PI}(\omega) \}} \right]$$

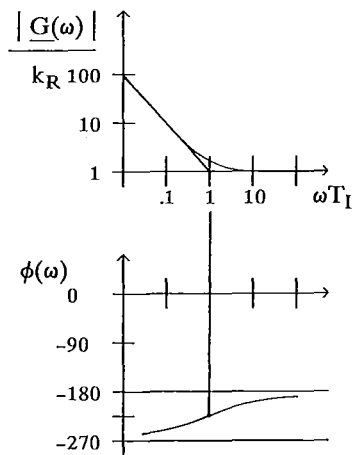
KFA

Institut für Grenzflächenforschung und Vakuumphysik

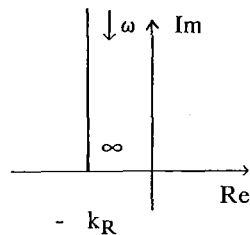
Beispiel für System- und Übertragungsfunktion eines PI-Gliedes (PI-Reglers)

$$\begin{aligned} |G(\omega)| &= k_R \sqrt{\frac{1 + (\omega T_I)^2}{(\omega T_I)^2}} ; n = -1 ; \phi(\omega) = -\pi + \arctan\left(-\frac{1}{\omega T_I}\right) \\ &| \quad \omega > 0 \end{aligned}$$

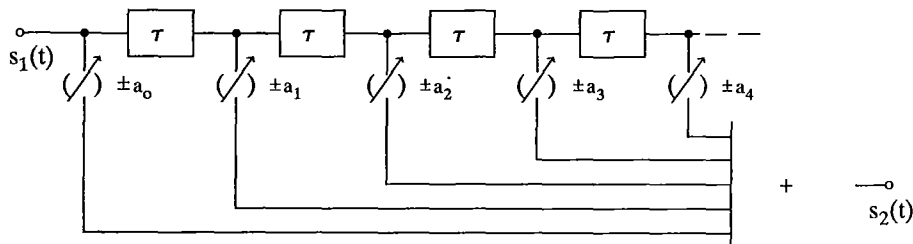
Bodediagramm



Ortskurve



Beispiel 4 (Laufzeitfilter, analoges Transversalfilter)



$$\begin{aligned} s_1(t) &\longleftrightarrow \underline{S}_1(\omega) \\ s_1(t - \tau) &\longleftrightarrow \underline{S}_1(\omega) \cdot e^{-j\omega\tau} \\ s_1(t - 2\tau) &\longleftrightarrow \underline{S}_1(\omega) \cdot e^{-j\omega 2\tau} \\ s_1(t - 3\tau) &\longleftrightarrow \underline{S}_1(\omega) \cdot e^{-j\omega 3\tau} \\ &\vdots \\ s_1(t - n\tau) &\longleftrightarrow \underline{S}_1(\omega) \cdot e^{-j\omega n\tau} \end{aligned}$$

τ Verzögerungsglied,
z.B. Allpass aus
Beispiel 3

$\diagup \pm a_v$ Koeffizientensteller

$$\begin{aligned} \underline{S}_2(\omega) &= \pm a_0 \underline{S}_1(\omega) \pm a_1 \underline{S}_1(\omega) \pm a_2 \underline{S}_1(\omega) \dots \pm a_n \underline{S}_1(\omega) \\ &= \underline{S}_1(\omega) [\pm a_0 \pm a_1 \cdot e^{-j\omega\tau} \pm a_2 \cdot e^{-j\omega 2\tau} \dots \pm a_n \cdot e^{-j\omega n\tau}] \\ &= \underline{S}_1(\omega) \sum_{v=0}^n \pm a_v \cdot e^{-j\omega(v\tau)} \end{aligned}$$

Dies liefert für die Übertragungsfunktion des Laufzeitfilters den Ausdruck

$$\underline{H}(\omega) = \sum_{v=0}^n \pm a_v \cdot e^{-j\omega(v\tau)}$$

Dieser Ausdruck gleicht im Aufbau der Übertragungsfunktion eines nicht rekursiven Digitalfilters, bei dem die Verzögerungen durch Registerstufen realisiert werden.

3. Netzwerktheoretische Grundlagen analoger, linearer Schaltungen

3.5 Übertragungs- und Dämpfungsfunktion

Dämpfungs- u. Phasenmaß, Phasen- u. Gruppenlaufzeit

Definition: $\underline{D}(\omega) = \frac{\underline{U}_1(\omega)}{\underline{U}_2(\omega)} = \frac{1}{\underline{H}(\omega)}$ bzw. $\underline{D}(p) = \frac{\underline{U}_1(p)}{\underline{U}_2(p)} = \frac{1}{\underline{H}(p)}$.

mit $\underline{D} = D \cdot e^{j\varphi_D}$ (1) und $\underline{H} = H \cdot e^{j\varphi_H}$

alternativer Ansatz: $\underline{D} = e^{\underline{g}}$ mit $\underline{g} = a + jb$.

$$\underline{D} = e^{(a + jb)} = e^a \cdot e^{jb} \quad (2)$$

Der Vergleich von (1) und (2) liefert

$$D = e^a \quad \text{und} \quad e^{j\varphi_D} = e^{jb}.$$

Unter Beachtung der Frequenzabhängigkeit von $\underline{D}(\omega)$ folgt z.B.

$$a = a(\omega) = \ln D(\omega) \text{ Np} = - \ln H(\omega) \text{ Np} \quad (> 0 \text{ für } U_1 > U_2)$$

(Dämpfungsmaß in der Pseudoeinheit Neper)

$$b = b(\omega) = \varphi_D(\omega) = - \varphi_H(\omega)$$

(Dämpfungswinkel oder Phasenmaß).

Es ist üblich, das Dämpfungsmaß durch den dekadischen Logarithmus zu beschreiben

$$a(\omega) = 20 \lg D(\omega) \text{ dB} = 20 \lg \frac{U_1(\omega)}{U_2(\omega)} \text{ dB} \quad (\text{Pseudoeinheit Dezibel})$$

Für ideale Übertragungssysteme ist das Dämpfungsmaß a frequenzunabhängig konstant, das Phasenmaß wächst proportional mit der Frequenz:

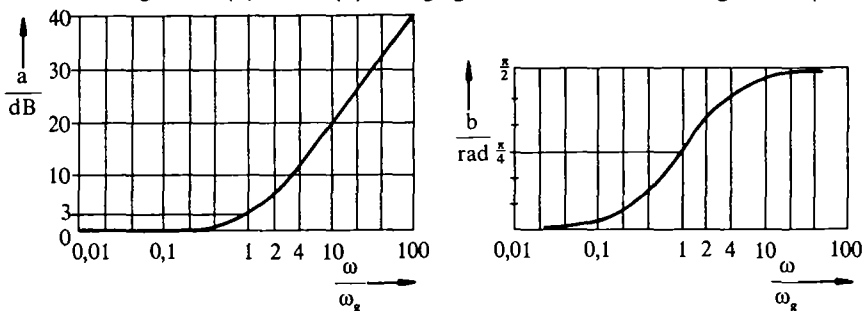
$$a = f(\omega) = \text{const. und } b(\omega) = t_\varphi \cdot \omega \text{ bzw. } t_\varphi = \frac{b}{\omega} = \text{const.} \quad (t_\varphi = \text{Phasenlaufzeit})$$

In realen Systemen ist das Dämpfungsmaß a frequenzabhängig und ebenso die Phasenlaufzeit t_φ . Die Phasenlaufzeit ist eine reine Rechengröße. Eine Aussage über die Laufzeit von nachrichtentragenden Signalen über ein System, deren Spektrum stets ein Frequenzband belegt bzw. eine Frequenzgruppe bildet, liefert die Gruppenlaufzeit t_g

$$t_g = \frac{db}{d\omega}.$$

Für reale Systeme genügen zur Übertragung ohne Dämpfungs- und Phasenverzerrungen die beiden Forderungen, daß das Übertragungssystem im Frequenzband der zu übertragenden Signale sowohl 1. ein konstantes Dämpfungsmaß als auch 2. ein konstantes Phasenmaß aufweisen muß.

Die Darstellung von $a(\omega)$ und $b(\omega)$ erfolgt gewöhnlich im Bode-Diagramm. (s. Beispiel)

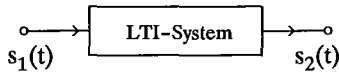


3. Netzwerktheoretische Grundlagen analoger, linearer Schaltungen

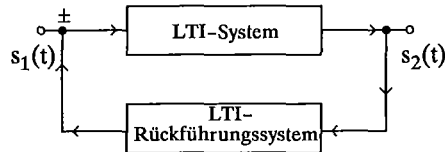
3.6 Kausalität und Stabilität von Systemen Schwingungserzeugung

Systemmodelle

Offenes System



Geschlossenes System



1.) Kausalität

$s_1(t) = 0$ für $t \leq t_0$ liefert unter allen Umständen $s_2(t) = 0$ für $t \leq t_0$, wobei $s_2(t)$ Antwort (Reaktion) auf $s_1(t)$ als Ursache ist.

2.) Stabilität

$|s_1(t)| \leq k_1$ liefert unter allen Umständen $|s_2(t)| \leq k_2$

mit k_1, k_2 beliebige reelle und endliche Konstanten.

Dies bedingt: (vgl. Bild 10)

Ein stabiles System besitzt eine Übertragungsfunktion $\underline{H}(p)$, deren Pole in der linken (abgeschlossenen) Halbebene liegen müssen.

Alle stationären Zeitvorgänge klingen dann beim Durchlaufen des Systems mehr oder weniger ab, sie werden gedämpft.

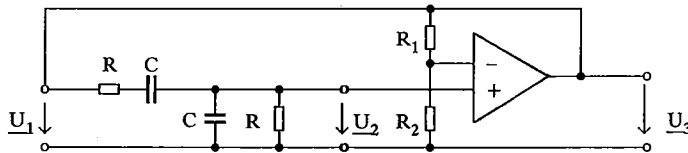
Stabilität läßt sich durch Gegenkopplung (Minuszeichen im Rückführungsweg) verbessern; Mitkopplung kann zur Instabilität führen, d.h., es gibt eine Wirkung ohne Ursache.

Das Prinzip der Mitkopplung wird zur Schwingungserzeugung (Oszillator) ausgenutzt. Das mitgekoppelte System bewirkt eine Entdämpfung dahingehend, daß die Gesamtübertragungsfunktion Pole auf der imaginären ($j\omega$ -) Achse aufweist. Die erforderliche Entdämpfung wird durch Einfügen eines Verstärkers erreicht.

In diesem Fall gilt:

Es gibt ein $|s_2(t)| \leq k$ ohne $s_1(t)$. Um diese Bedingung einzuhalten, ist eine Amplitudenregelung erforderlich, damit $s_2(t)$ nicht über alle Grenzen ansteigt bzw. auf den Wert Null abklingt. Dies ist gleichbedeutend mit einer Stabilisierung (Fixierung) der Pole der Übertragungsfunktion auf die imaginäre Achse

Beispiel RC-Oszillator (Wien-Brücken-Oszillator)



Mit $\underline{U}_3 = \underline{U}_1$ wird die Gesamtübertragungsfunktion $\underline{H}_1(j\omega) \cdot \underline{H}_2(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2} = 1$

Beispiel 2, Blatt 16.2, liefert für

$$\underline{H}_1(\omega) = \frac{j\omega RC}{1 - \omega^2 R^2 C^2 + j 3\omega RC}$$

Für den Verstärker gilt (nichtinvertierende Grundsaltung)

$$\underline{H}_2(j\omega) = \underline{v}(j\omega) = 1 + \frac{R_1}{R_2} = v$$

Die Forderung

$$\underline{H}_1(j\omega) \cdot \underline{H}_2(j\omega) = 1 = \frac{j\omega RC \cdot v}{1 - \omega^2 R^2 C^2 + j 3\omega RC}$$

liefert

$$j\omega RC \cdot v = 1 - \omega^2 R^2 C^2 + j 3\omega RC.$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil dieser komplexen Gleichung erhält man schließlich den erforderlichen Verstärkungsfaktor v des nichtinvertierenden Verstärkers sowie die Schwingfrequenz f_{osc} zu

$$\text{Im.-Teil: } v = 3 \quad \Rightarrow \quad R_1 = 2 R_2$$

$$\text{Re.-Teil: } \omega = \frac{1}{RC} \quad \Rightarrow \quad f_{osc} = \frac{1}{2\pi RC}.$$

Die erforderliche Amplitudenstabilisierung wird in der Praxis ohne großen Aufwand häufig dadurch erreicht, daß z. B. der Widerstand R_2 als Kaltleiter (Glühlämpchen) ausgelegt wird.

3. Netzwerktheoretische Grundlagen analoger, linearer Schaltungen

3.7 Verschaltung von Zweitoren (Vierpolen) Reihenschaltung, Parallelschaltung

Reihenschaltung von Vierpolen

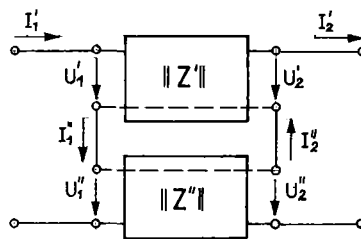
Vierpolgleichung in der Z-Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Matrizenelemente:

$$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad Z_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad Z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad Z_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

Reihenschaltung:



$$I_1 = I_1' = I_1'' \quad I_2 = I_2' = I_2''$$

$$U_1 = U_1' + U_1'' \quad U_2 = U_2' + U_2''$$

$$\begin{pmatrix} U_1' + U_1'' \\ U_2' + U_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11}' + Z_{11}'' & Z_{12}' + Z_{12}'' \\ Z_{21}' + Z_{21}'' & Z_{22}' + Z_{22}'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\|Z\| = \|Z'\| + \|Z''\|}$$

KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Parallelschaltung von Vierpolen

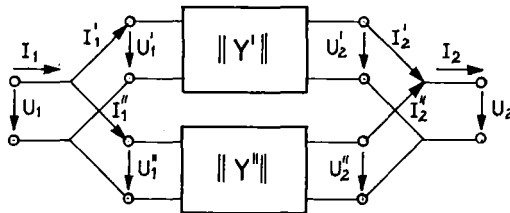
Vierpolgleichung in der y-Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Matrizenelemente:

$$Y_{11} = \frac{I_1}{U_1} \Big|_{U_2=0} \quad Y_{12} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{U_1=0} \quad Y_{21} = \frac{I_2}{U_1} \Big|_{U_2=0} \quad Y_{22} = \frac{I_2}{U_2} \Big|_{U_1=0}$$

Parallelschaltung:



$$\begin{aligned} U_1 &= U_1' = U_1'' & I_1 &= I_1' + I_1'' \\ U_2 &= U_2' + U_2'' & I_2 &= I_2' + I_2'' \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} I_1' + I_1'' \\ I_2' + I_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11}' + Y_{11}'' & Y_{12}' + Y_{12}'' \\ Y_{21}' + Y_{21}'' & Y_{22}' + Y_{22}'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\|Y\| = \|Y'\| + \|Y''\|}$$

KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Kettenschaltung von Vierpolen

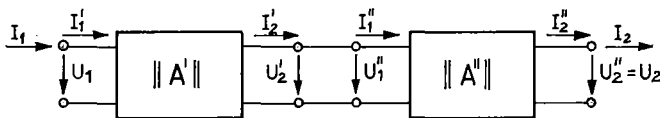
Vierpolgleichung in der A-Matrizenform

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Matrizenelemente:

$$A_{11} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0} \quad A_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{U_2=0} \quad A_{21} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{I_2=0} \quad A_{22} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{U_2=0}$$

Kettenschaltung:



$$\begin{aligned} U_1 &= U_1' & I_1 &= I_1' \\ U_1 &= U_2' & I_1'' &= I_2' \\ U_2 &= U_2'' & I_2 &= I_2'' \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}' & A_{12}' \\ A_{21}' & A_{22}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2' \\ I_2' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} U_2' \\ I_1'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}'' & A_{12}'' \\ A_{21}'' & A_{22}'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

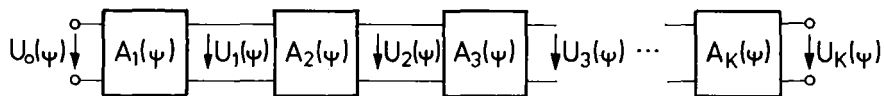
$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}' & A_{12}' \\ A_{21}' & A_{22}' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}'' & A_{12}'' \\ A_{21}'' & A_{22}'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\|A\| = \|A'\| \cdot \|A''\|}$$

KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Kaskadenschaltung gegeneinander
entkoppelter Vierpole



$$U_K(\psi) = A_K(\psi) \cdot U_{K-1}(\psi)$$

$$U_3(\psi) = A_3(\psi) \cdot U_2(\psi)$$

$$U_2(\psi) = A_2(\psi) \cdot U_1(\psi)$$

$$U_1(\psi) = A_1(\psi) \cdot U_0(\psi)$$

$$U_K(\psi) = \prod_{k=1}^K A_k(\psi) \cdot U_0(\psi)$$

$A_K(\psi)$ = Übertragungsfunktion
des Vierpols k

$\psi = j\omega$ im Komplexen

$\psi = p$ bei Laplace Transformation

$\psi = z$ bei z -oder Bilineare
Transformation

KEA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK

–Abteilung Allgemeine Elektronik–

3. Netzwerktheoretische Grundlagen analoger, linearer Schaltungen

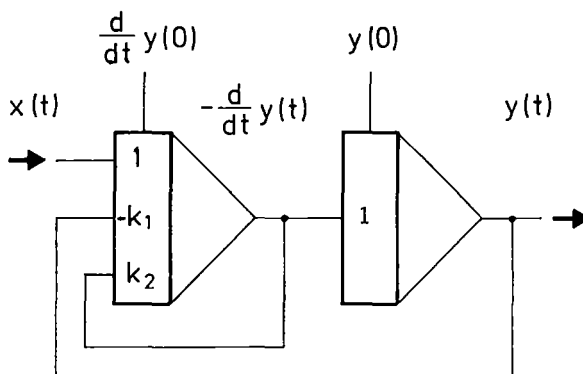
3.8 Analogrechnerschaltungen

Analogrechner
- Programmierbeispiel -

Anfangswertproblem:

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + k_2 \frac{d}{dt} y(t) + k_1 y(t) = x(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) = x(t) - k_2 \frac{d}{dt} y(t) - k_1 y(t)$$



Bei der Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen
ist diese Methode ebenfalls problemlos anwendbar !



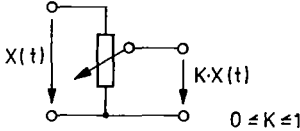
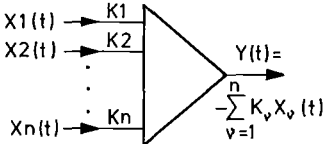
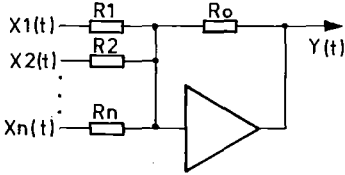
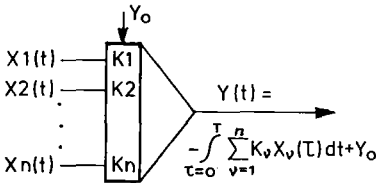
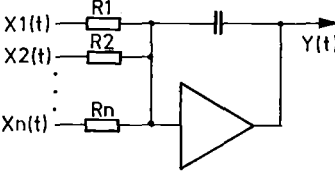
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Analogrechner

Grundprinzip:

Nachbildung mathematischer Probleme durch ein elektrisches Analogon in kontinuierlicher Arbeitsweise.

Rechenelemente des elektronischen Analogrechners:

<u>Potentiometer</u> 	
<u>Summierer</u> 	
<u>Integrierer</u> 	
<u>Nichtlineare Rechenelemente:</u> Parabelmultiplizierer, Funktionsgeneratoren	



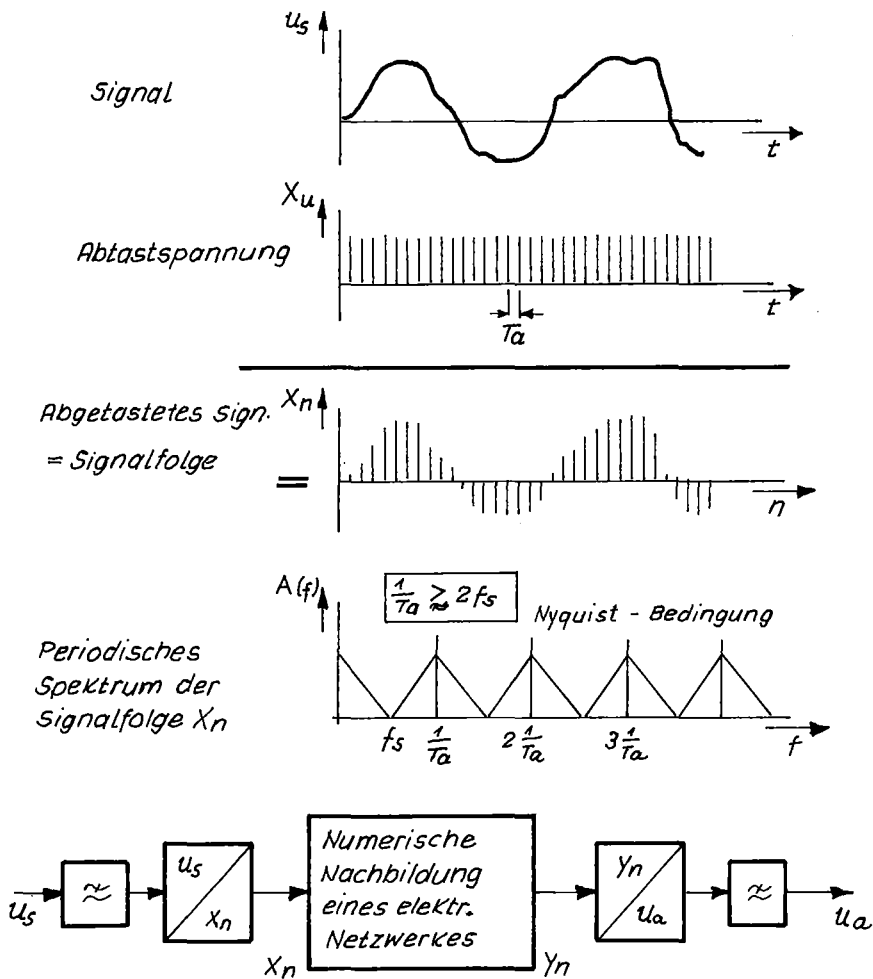
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

4. Signaltheoretische Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung

4.1 Quantisierung von analogen Signalen im Zeitbereich

4.1.1 Abtasttheorem

Digitale (numerische) Verarbeitung analoger Signale



Prinzipieller Aufbau einer Einrichtung zur digitalen Verarbeitung analoger Signale

KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

*Abtasttheorem
eindimensionaler bandbegrenzter Signale*

1915 Whittaker

1928 Nyquist

1933 Kotel'nikov

1949 Shannon

*Jede reale fouriertransformierbare
Zeitfunktion*

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

*mit absolut integriertem $F(\omega)$
kann mit jeder gewünschten Genauigkeit
durch eine Zeitfunktion*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{+\omega_1} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

*mit bandbegrenztem Spektrum $\pm \omega_1$
approximiert werden!*

KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK

- Abteilung Allgemeine Elektronik -

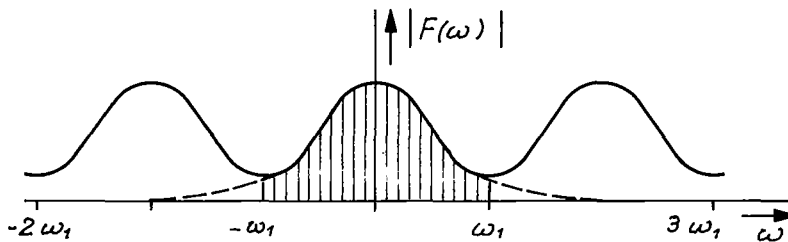
1

Zum Abtosttheorem

eindimensionaler bandbegrenzter Signale

- Periodische Fortsetzung des Spektrums -

Die periodische Fortsetzung der Spektralfunktion außerhalb des Integrationsbereiches $\pm \omega_1$ ist ohne Einfluß auf das Integral



und ermöglicht die Darstellung der periodischen Spektralfunktion durch die Fourierreihe

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \cdot e^{-jn\pi \frac{\omega}{\omega_1}} \quad \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^2 < \infty \right)$$

KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

2

*Zum Abtasttheorem
eindimensionaler bandbegrenzter Signale
— Koeffiziententestierung —*

Die Koeffizienten F_n können unter Ausnutzung der Orthogonalität für $m=n$ bestimmt werden zu :

$$\begin{aligned} \int_{-\omega_1}^{+\omega_1} F(\omega) \cdot e^{jm\pi \frac{\omega}{\omega_1}} d\omega &= \int_{-\omega_1}^{+\omega_1} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{-jn\pi \frac{\omega}{\omega_1}} \right) d\omega \\ &= F_m \int_{-\omega_1}^{+\omega_1} d\omega = 2\omega_1 \cdot F_m \end{aligned}$$

Die linke Seite des Integrals stellt aber auch bis auf den Faktor $\frac{1}{2\pi}$ die Approximationsgleichung für die Zeitpunkte $t = m \frac{\pi}{\omega_1}$ dar, d. h.

$$f\left(t = m \frac{\pi}{\omega_1}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{+\omega_1} F(\omega) \cdot e^{j\omega \left(m \frac{\pi}{\omega_1}\right)} d\omega$$



$$F_m = \frac{\pi}{\omega_1} f\left(m \cdot \frac{\pi}{\omega_1}\right)$$

KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
— Abteilung Allgemeine Elektronik —

Zum Abtasttheorem eindimensionaler bandbegrenzter Signale

Nunmehr ist :

$$F(\omega) = \frac{\pi}{\omega_1} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n \frac{\pi}{\omega_1}\right) \cdot e^{-jn\pi \frac{\omega}{\omega_1}}$$

Die approximierte Zeitgleichung :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} \left[\frac{\pi}{\omega_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n \frac{\pi}{\omega_1}\right) e^{-jn\pi \frac{\omega}{\omega_1}} \right] e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

Nach Vertauschen von Integration und Summation ergibt sich die Formel zur Rekonstruktion der kontinuierlichen Zeitfunktion :

Sampling - Reihe

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n \cdot T_a) \cdot \frac{\sin \pi \left(\frac{t}{T_a} - n \right)}{\pi \left(\frac{t}{T_a} - n \right)}$$

$T_a = \frac{\pi}{\omega_1}$ ist die Abtastzeit

Das Signal ist damit auch zwischen den Abtastwerten eindeutig festgelegt!

4. Signaltheoretische Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung

4.1 Quantisierung von analogen Signalen im Zeitbereich

4.1.2 Transformationen

Funktionaltransformation von Folgen
-Ihre Verwandtschaft mit der Laplace-Transformation-

Begriffsfestlegungen:

- *Abtastung (sampling) ist der Vorgang zur Bestimmung der Folge f_n aus der Funktion $F(t)$*
- *$F^*(t)$ ist die Bildfunktion od. Z-Transformierte der Folge - auch Originalfolge - f_n .*

Einseitige Laplace - Transformation:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

*Diskrete Laplace - Transformation,
Laplace - Transformation von Abtastfolgen,
Dirichlet - Transformation:*

$$F^*(e^p) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-pn}$$

Z - Transformation:

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^{-n}$$

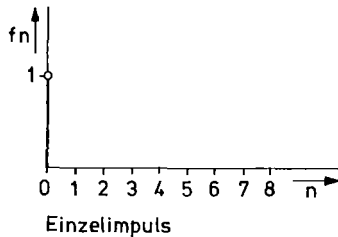
4. Signaltheoretische Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung

4.1 Quantisierung von analogen Signalen im Zeitbereich

4.1.2 Transformationen

* Z - Transformation

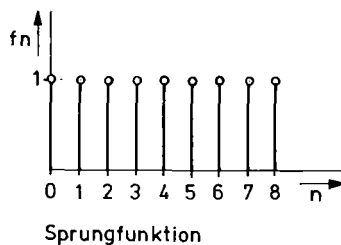
Ausgewählte Beispiele von z-Transformierten



$$\begin{aligned} f_n &= 1 & n &= 0 \\ f_n &= 0 & n &\neq 0 \end{aligned}$$

$$Z\{f_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n}$$

$$Z\{f_n\} = 1$$

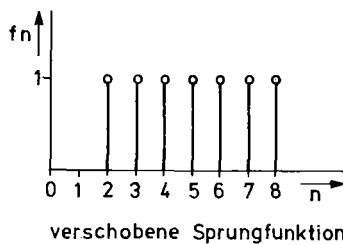


$$\begin{aligned} f_n &= 1 & n &\geq 0 \\ f_n &= 0 & n &< 0 \end{aligned}$$

$$Z\{f_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - z^{-(n+1)})$$

geometrische Reihe

$$Z\{f_n\} = \frac{z}{z-1}$$



$$\begin{aligned} f_n &= 1 & n &> 1 \\ f_n &= 0 & n &< 2 \end{aligned}$$

$$Z\{f_n\} = \sum_{n=2}^{\infty} z^{-n} = -(1 + z^{-1}) + \frac{z}{z-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - z^{-(n+1)})$$

geometrische Reihe

$$Z\{f_n\} = \frac{z^{-1}}{z-1}$$

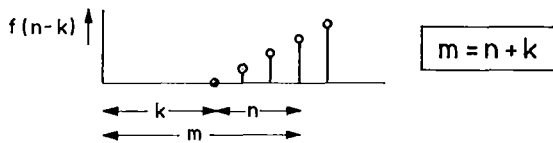


ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
– Abteilung Allgemeine Elektronik –

Eigenschaften der Z-Transformation

- Verschiebung der Originalfolge -

Erster Verschiebungssatz:



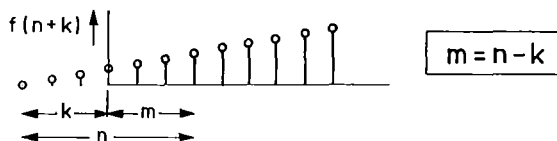
$$Z\{f(m-k)\} = \sum_{m=k}^{\infty} f(m)Z^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)Z^{-(n+k)} = Z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} f(n)Z^{-n}$$

Wird zwischen n und m nicht mehr unterschieden:

$$Z\{f(n-k)\} = z^{-k} \cdot Z\{f(n)\}$$

$f(n)$ ist damit die um k -Abtastwerte nach links verschobene Folge $f(n-k)$!

Zweiter Verschiebungssatz:



$$\begin{aligned} Z\{f(m+k)\} &= \sum_{m=0}^{\infty} f(m)Z^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)Z^{-(n-k)} - \underbrace{\sum_{n=0}^{k-1} f(n)Z^{-(n-k)}}_{\text{Summenanteil, der bei } m < 0 \text{ nicht existiert!}} \\ &= z^k \sum_{n=0}^{\infty} f(n)Z^{-n} - z^k \sum_{n=0}^{k-1} f(n)Z^{-n} \end{aligned}$$

$$Z\{f(n+k)\} = z^k \left[Z\{f(n)\} - \sum_{n=0}^{k-1} f(n) \cdot z^{-n} \right]$$

KFA

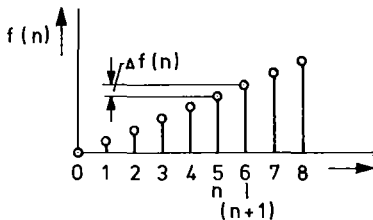
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK

-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Eigenschaften der Z-Transformation

- Transformierte der ersten Differenz -

Definition einer Vorwärtsdifferenz:



$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$$

Z-Transformierte:

$$Z\{\Delta f(n)\} = Z\{f(n+1) - f(n)\} = Z\{f(n+1)\} - Z\{f(n)\}$$

Bestimmung von $Z\{f(n+1)\}$:

$$Z\{f(n+1)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1) Z^{-n} = f(1) + f(2) Z^{-1} + f(3) Z^{-2} + \dots$$

$$Z^{-1} Z\{f(n+1)\} = \underbrace{f(0)}_{\text{Ergänzung}} + [f(1) Z^{-1} + f(2) Z^{-2} + \dots] - \underbrace{f(0)}_{\text{Ergänzung}}$$

$$Z^{-1} Z\{f(n+1)\} = Z\{f(n)\} - f(0)$$

$$Z\{f(n+1)\} = z Z\{f(n)\} - z f(0)$$

$$Z\{\Delta f(n)\} = (z-1) Z\{f(n)\} - z f(0)$$



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Eigenschaften der Z-Transformation
- Transformierte von Differenzen der Ordnung K -

Differenz zweiter Ordnung:

$$\Delta^2 f(n) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n)$$

Differenzen der Ordnung k:

$$\Delta^k f(n) = \Delta f^{k-1}(n+1) - \Delta f^{k-1}(n)$$

$$K = |N$$

Für die Z-Transformierte gilt:

$$Z \{ \Delta^k f(n) \} = (z-1)^k Z \{ f(n) \} - z \sum_{i=0}^{k-1} (z-1)^{k-i-1} \Delta^i f(0)$$



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Eigenschaften der Z-Transformation

- Linearität -

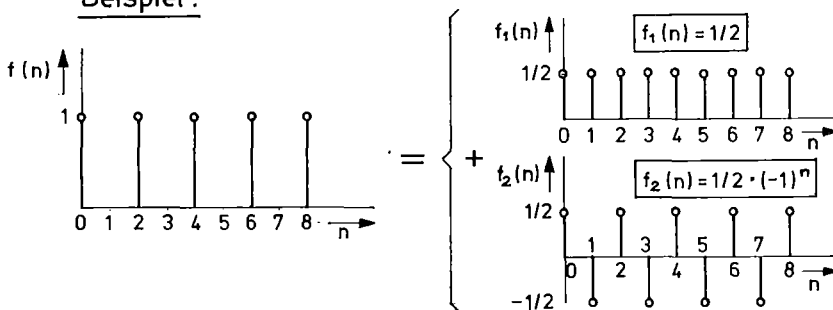
Gibt es die Z-Transformierten $Z\{f_i(n)\}$ für $i = \{0; 1; 2; \dots; I\}$, so kann die Summe der mit komplexen Koeffizienten c_i gewichteten Folgen f_i, n durch die Relation

$$Z\left\{\sum_{i=0}^I c_i f_i(n)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^I c_i f_i(n)\right) Z^{-n} = \sum_{i=0}^I c_i \sum_{n=0}^{\infty} f_i(n) Z^{-n}$$

$$Z\left\{\sum_{i=0}^I c_i f_i(n)\right\} = \sum_{i=0}^I c_i \cdot Z\{f_i(n)\}$$

transformiert werden.

Beispiel :



$$\begin{aligned} Z\{f(n)\} &= Z\{f_1(n)\} + Z\{f_2(n)\} = \frac{1}{2} [Z\{1\} + Z\{(-1)^n\}] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{Z}{Z-1} + \frac{Z}{Z+1} \right] \end{aligned}$$

$$Z\{f(n)\} = \frac{Z^2}{Z^2-1}$$

KFA

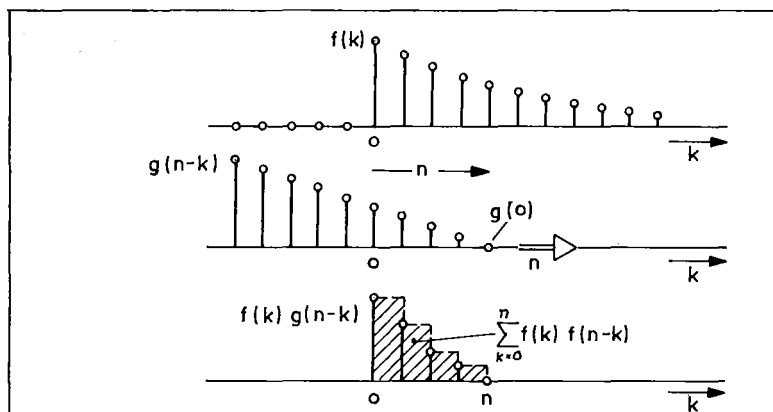
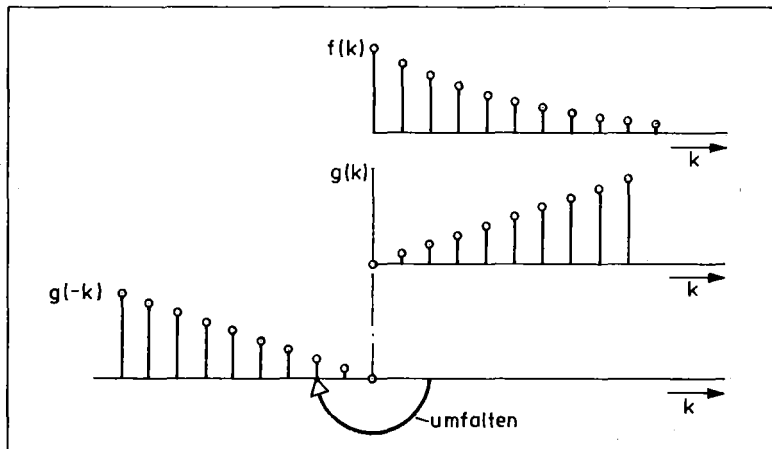
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Faltung der Folgen $f(n)$ und $g(n)$

Definition:

$$h(n) = \sum_{k=0}^n f(k) \cdot g(n-k)$$

$$h(n) = f(0)g(n) + f(1)g(n-1) + f(2)g(n-2) + \dots + f(n)g(0)$$



KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Eigenschaften der Z-Transformation

- Multiplikation von Z-Transformierten -

$$Z\{f(n)\} \cdot Z\{g(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot z^{-n} \sum_{n=0}^{\infty} g(n) \cdot z^{-n}$$

$$\begin{aligned} & [f(0) + f(1) \cdot z^{-1} + f(2) \cdot z^{-2} + f(3) \cdot z^{-3} + \dots] \\ & \cdot [g(0) + g(1) \cdot z^{-1} + g(2) \cdot z^{-2} + g(3) \cdot z^{-3} + \dots] = \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} f(0) \cdot g(0) & + f(1) g(0) \cdot z^{-1} & + f(2) g(0) \cdot z^{-2} & + f(3) g(0) \cdot z^{-3} & + \dots \\ & f(0) g(1) \cdot z^{-1} & + f(1) g(1) \cdot z^{-2} & + f(2) g(1) \cdot z^{-3} & + \dots \\ & & f(0) g(2) \cdot z^{-2} & + f(1) g(2) \cdot z^{-3} & + \dots \\ & & & f(0) g(3) \cdot z^{-3} & + \dots \end{array}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^n f(n-k) \cdot g(k)}_{\text{Summe einer Spalte für } n=\text{const}} \cdot z^{-n}$$

$$Z\{f(n)\} \cdot Z\{g(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n f(n-k) \cdot g(k) \cdot z^{-n}$$

Multiplikation im Bildbereich $\rightarrow$ Faltung im Originalbereich

KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

4. Signaltheoretische Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung

4.1 Quantisierung von analogen Signalen im Zeitbereich

4.1.2 Transformationen

* Diskrete Fouriertransformation

Diskrete Fourier-Transformation

Fourier-Transformation :

Fourierintegral

$$\underline{S}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < \infty ;$$

inverse Fourier-Transformation

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}(f) e^{j2\pi ft} df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Diskrete Fourier-Transformation

$$\underline{S}\left(\frac{m}{NT}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) e^{-j(2\pi nm)/N} ; m = 0, 1, \dots, N-1 ; f_m = \frac{m}{NT}$$

$$\underline{S}\left(\frac{m}{NT}\right) \stackrel{!}{=} \underline{S}_m ; s(nT) \stackrel{!}{=} s_n$$

Inverse diskrete Fourier-Transformation

$$s(nT) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \underline{S}\left(\frac{m}{NT}\right) e^{+j(2\pi nm)/N} ; n = 0, 1, \dots, N-1$$

Beispiel Fourier-Transformation : $s(t) = \frac{1}{2} e^{-at} ; 0 \leq |a| \leq 1 ;$

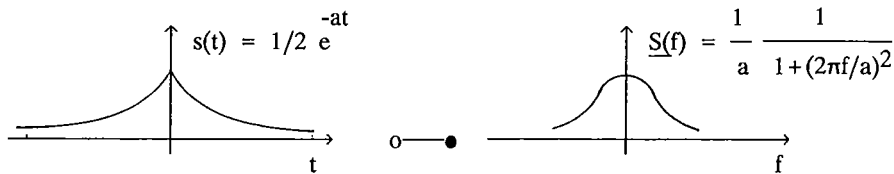
$$\underline{S}(f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} \cos(2\pi ft) dt - \frac{j}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} \sin(2\pi ft) dt$$

$$\underline{S}(f) = \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(2\pi ft) dt = \frac{1}{a} \frac{1}{1 + (2\pi f/a)^2}$$

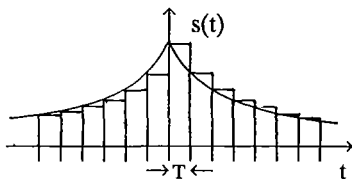
KFA

Institut für Grenzflächenforschung und Vakuumphysik

Diskrete Fourier-Transformation



Berechnung des Fourierintegrals durch Rechteckintegration (Näherung !!)



$t \rightarrow nT, dt \rightarrow T, T = \text{Abtastzeitintervall}$

$$\int \rightarrow \sum$$

$$\underline{S}(f) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) e^{-j2\pi f nT} T; \quad \underline{\tilde{S}}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) e^{-j2\pi f nT} \approx \frac{\underline{S}(f)}{T}$$

$$\underline{\tilde{S}}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cos(2\pi f nT) - j \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \sin(2\pi f nT);$$

1. $\underline{\tilde{S}}(f)$ ist reell und gerade, wenn $s(t)$ an den Abtastpunkten gerade ist ; ($s_n = s_{-n}$)
2. $\underline{\tilde{S}}(f)$ ist imaginär und ungerade, wenn $s(t)$ an den Abtastpunkten ungerade ist ; ($s_n = -s_{-n}$)
3. $\underline{\tilde{S}}(f)$ und $\underline{\tilde{S}}(-f)$ sind konjugiert komplex ;
4. $\underline{\tilde{S}}(f)$ ist über f periodisch mit der Periode $1/T$, d.h. $\underline{\tilde{S}}(f) = \underline{\tilde{S}}(f + m/T)$

Reale, diskrete Fourier-Transformation
(endliche Anzahl Abtastwerte)

$$\underline{\tilde{S}}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) e^{-j(2\pi f nT)}$$

N Abtastwerte - N Teile (reelle und imaginäre) von $\underline{\tilde{S}}(f)$ sind unabhängig

$\Rightarrow f$ ist in $\underline{\tilde{S}}(f)$ kontinuierlich und kann natürlich nur diskret sein $f_m = m/(NT)$;

$$\underline{S}_m = \underline{S}\left(\frac{m}{NT}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) e^{-j(2\pi \frac{m}{NT} nT)}; \quad m = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

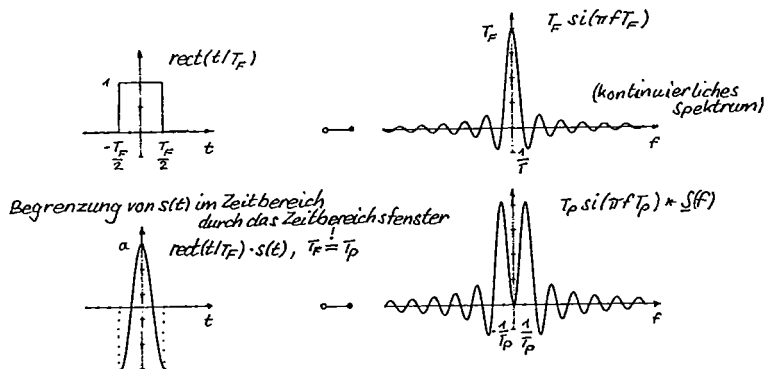
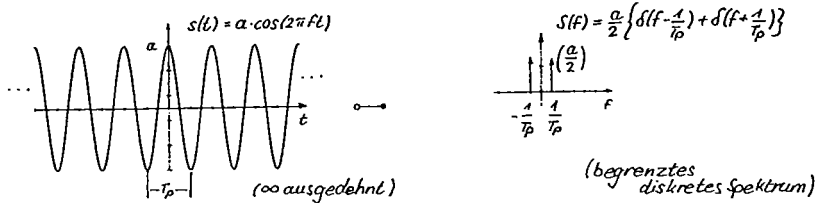
KFA

Institut für Grenzflächenforschung und Vakuumphysik

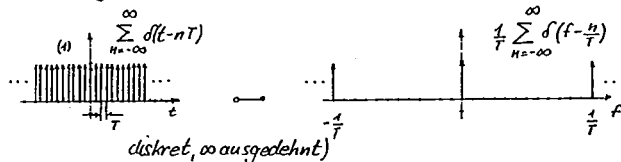
Diskrete Fourier-Transformation

Bisher einfacher, plausibler Übergang vom Fourierintegral (= FT) zur diskreten Fourier-Transformation (= DFT)

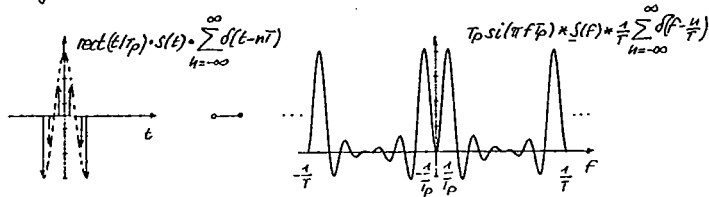
Im folgenden Ableitung der DFT mit Hilfe der verallgemeinerten Funktion $\delta(t)$



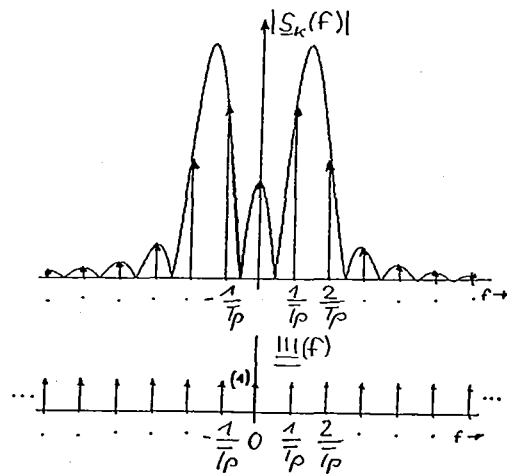
Diracstoßfolge: $T = \text{Abtastzeit}$



Abtastung der im Zeitbereich begrenzten Zeitfunktion mit einer Diracstoßfolge

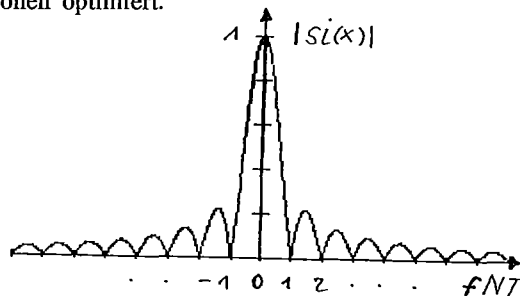


Diskrete Fourier-Transformation



Die obige Abbildung zeigt den realen Fall $T_F \neq T_P$. Es treten nicht nur zwei Frequenzlinien bei der Multiplikation von kontinuierlichen Spektrum $S_k(f)$ mit der Diracstoßfolge auf, sondern mehrere, obwohl die Fourier-Transformierte der Cosinusfunktion nur aus zwei Frequenzlinien besteht. Dieses Phänomen wird Leckeffekt (leakage) genannt und haftet der diskreten Fourier-Transformation wegen der erforderlichen Zeitbegrenzung (Zeitfenster) an.

Da die Fensterfunktion Einfluß auf die Selektivität der DFT ausübt, wurden verschiedene Zeitfensterfunktionen optimiert.



An Hand der Abbildung des Betragsspektrum der Si-Funktion (Fouriertransformierte des Rechteckzeitfensters) lassen sich Beurteilungskriterien für ein Fensterspektrum ablesen.

Sie sind :

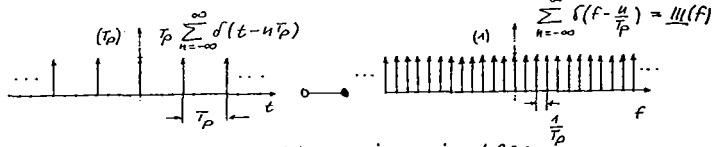
- Breite des Hauptfrequenzbandes
- Genauigkeit der Amplituden
- Form der Spitze des Hauptfrequenzbandes
- Abnahmerate der Seitenbänder
- Relative Größe der Seitenbänder

KFA

Institut für Grenzflächenforschung und Vakuumphysik

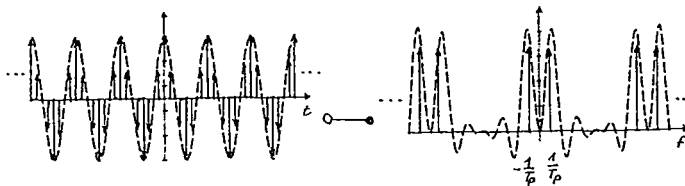
Diskrete Fourier-Transformation

Diracstoßfolge:



Abtastung im Frequenzbereich mit einer Diracstoßfolge

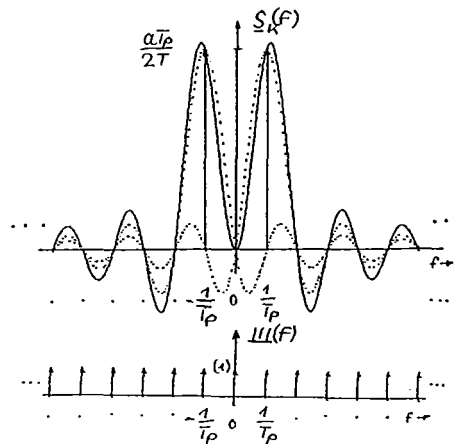
$$\left[\text{rect}(t/T_p) \cdot s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_p) \right] \times T_p \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_p) \quad \left[T_p \text{sinc}(\pi f T_p) \right] \times S(f) \times \frac{1}{T_p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T_p}) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T_p}) = \underline{S}_K(f)$$



Die skizzierte Herleitung läßt erkennen, daß die Fourier-Transformation mit der diskreten Fourier-Transformation identisch ist (bis auf einen Faktor), wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

- 1) Die Zeitfunktion ist bandbegrenzt und periodisch.
- 2) Die Abtastfrequenz ist mindestens zweimal so groß wie die höchste vorkommende Frequenz.
- 3) Das Zeitfenster (hier $\text{rect}(t/T_F)$) ist nur über eine volle Periode ($T_F = T_p$) der Zeitfunktion $s(t)$ oder über ein ganzzahliges Vielfaches von Null verschieden.

Die nebenstehende Abbildung zeigt noch einmal vergrößert den Zusammenhang für den Fall $T_F = T_p$. Die Nullstellen des kontinuierlichen Frequenzspektrum koinzidieren mit den Diracstoßen und nur an den Stellen, wo die Frequenzlinien im Fourierspektrum der Cosinusfunktion auftreten, sieben die Diracstöße mit Hilfe ihrer Siebeigenschaft aus dem kontinuierlichen Spektrum die Spektrallinien aus (FT = DFT).



KFA

Institut für Grenzflächenforschung und Vakuumphysik

Diskrete Fourier-Transformation

Die folgende Tabelle stellt einige Daten von Zeitfenstern im Spektralbereich gegenüber.

Fensterfunktion	3-dB-Grenze	maximaler Abtastfehler in dB	Höchster Nebenzipfel in dB	Abfallrate der Nebenzipfel in dB	äquivalente Rauschbandbreite
Rechteck	$0,89 \cdot \Delta f$	3,92	-13	6	$1,00 \cdot \Delta f$
Dreieck	$1,28 \cdot \Delta f$	1,82	-27	12	$1,33 \cdot \Delta f$
Hann	$1,44 \cdot \Delta f$	1,42	-32	18	$1,50 \cdot \Delta f$
Hamming	$1,30 \cdot \Delta f$	1,78	-43	6	$1,30 \cdot \Delta f$
Blackman	$1,68 \cdot \Delta f$	1,10	-58	18	$1,73 \cdot \Delta f$
exakt. Blackmann	$1,52 \cdot \Delta f$	1,33	-51	6	$1,57 \cdot \Delta f$
Kaiser-Bessel					
a= 2,0	$1,43 \cdot \Delta f$	1,46	-46	6	$1,50 \cdot \Delta f$
a= 3,5	$1,83 \cdot \Delta f$	0,89	-82	6	$1,93 \cdot \Delta f$
Gauß					
a=2,5	$1,33 \cdot \Delta f$	1,69	-42	6	$1,39 \cdot \Delta f$
a=3,5	$1,79 \cdot \Delta f$	0,94	-69	6	$1,90 \cdot \Delta f$

Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, daß z.B. das Rechteckfenster einen hohen Abtastfehler und geringe Nebenzipfeldämpfung aufweist aber eine gute Frequenzseparierung. Das Hannfenster dagegen besitzt einen mittleren Abtastfehler und eine hohe Nebenzipfeldämpfung und wird aus diesem Grund für die Analyse periodischer Signale mit Spektralkomponenten mit geringer Amplitude benutzt (und andere mit hoher Nebenzipfeldämpfung). Für die Zeitfensterauswahl existiert keine allgemeingültige Regel. Für die Analyse transientser Signale kann natürlich nur das Rechteckfenster verwendet werden, wobei die Zeitfensterdauer von Null verschiedene Signalanteile abdecken muß.

Schnelle Fourier-Transformation

Die Schnelle Fourier-Transformation (Abkürzung : FFT = Fast-Fourier-Transformation) stellt keine neue Transformationsart dar. Sie ist einfach ein Algorithmus zur Berechnung der diskreten Fouriertransformation. Die FFT ist deshalb von Bedeutung, weil durch Eliminierung von Wiederholungen in der diskreten Fouriertransformation eine schnellere und im allgemeinen auch eine genauere Berechnung erreicht wird, da Rundungsfehler vermindert werden. Im folgenden soll die FFT für Abtastwerte $N=2^q$, $q \in \mathbb{N}$ dargestellt werden.

KFA

Institut für Grenzflächenforschung und Vakuumphysik

Diskrete Fourier-Transformation

Diskrete Fourier-Transformation

$$\underline{S}\left(\frac{m}{NT}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) e^{-j(2\pi nm)/N} ; m = 0, 1, \dots, N-1 ; f_m = \frac{m}{NT}$$

$$e^{-j(2\pi/N)} = W_N \Rightarrow \underline{S}_m(f_m) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n W_N^{mn} = \underline{S}_m$$

$$\underline{N=2} ; W_2 = e^{-j\pi} : \underline{S}_0 = s_0 W_2^0 + s_1 W_2^0 \quad N^2 \text{ komplexe Multiplikationen}$$

$$\underline{S}_1 = s_0 W_2^0 + s_1 W_2^1 \quad N \text{ komplexe Additionen}$$

Signalflußdiagramm für $N = 2$:

$$\underline{S}_0 = s_0 \cdot 1 + s_1 W_2^0$$

$$\underline{S}_1 = s_0 \cdot 1 + s_1 W_2^1 \quad (\text{Gl.0})$$

Der Signalfluß ist von links nach rechts. Eine durchgehende Verbindung zwischen zwei Punkten (Startpunkt, Summationspunkt) stellt eine Multiplikation des am linken Punkt anliegenden Signalwertes (Rechenwertes) mit 1 dar. Eine unterbrochene Verbindung repräsentiert ein Produkt des am Beginn der Verbindung anliegenden Signalwertes mit der Potenz W^n , wobei n der Exponent der Potenz ist, durch die die Verbindung unterbrochen wird.

$$\underline{N=2^q} ; q \in \mathbb{N} ; -W_2^1 = W_2^0 ; -W_2^n = W_2^{n-N/2} ; n \geq N/2$$

$$\Rightarrow 1/2 N q = 1 \text{ komplexe Multiplikationen ;}$$

(siehe Signalflußdiagramm und Gleichungen Gl.0)

Eine einfache Abschätzung für den Rechenaufwand ist die Anzahl der komplexen Multiplikationen.

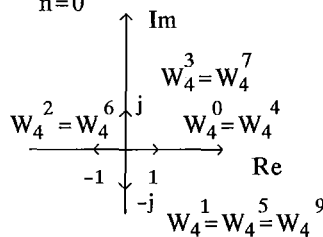
$$\underline{N=4=2^q} ; q=2 ; W_4 = e^{-j(2\pi/4)} = e^{-j\pi/2} ; \underline{S}_m = \sum_{n=0}^3 s_n W_4^{nm} ; m = 0,1,2,3$$

$$s_0 \cdot 1 + s_1 W_4^0 + s_2 W_4^0 + s_3 W_4^0 = \underline{S}_0$$

$$s_0 \cdot 1 + s_1 W_4^1 + s_2 W_4^2 + s_3 W_4^3 = \underline{S}_1$$

$$s_0 \cdot 1 + s_1 W_4^2 + s_2 W_4^4 + s_3 W_4^6 = \underline{S}_2$$

$$s_0 \cdot 1 + s_1 W_4^3 + s_2 W_4^6 + s_3 W_4^9 = \underline{S}_3$$



KFA

Institut für Grenzflächenforschung und Vakuumphysik

Diskrete Fourier-Transformation

Die zyklische Eigenschaft der komplexen Exponentialfunktion liefert die Redundanz der Produkte z. B. :

$$W_4^1 = e^{-j\pi/2} = \left(e^{-j\pi/2} \right)^5 = W_4^5$$

$$s_0 \cdot 1 + s_2 \cdot W_4 + s_1 \cdot 1 + s_3 \cdot W_4 = \underline{S}_0$$

$$s_0 \cdot 1 + s_2 \cdot W_4^2 + s_1 \cdot W_4^1 + s_3 \cdot W_4^3 = \underline{S}_1$$

$$s_0 \cdot 1 + s_2 \cdot W_4^0 + s_1 \cdot W_4^2 + s_3 \cdot W_4^6 = \underline{S}_2$$

$$s_0 \cdot 1 + s_2 \cdot W_4^2 + s_1 \cdot W_4^3 + s_3 \cdot W_4^9 = \underline{S}_3$$

$$\left[\begin{array}{c} (s_0 \cdot 1 + s_2 \cdot W_4^0) \\ (s_0 \cdot 1 + s_2 \cdot W_4^2) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} (s_1 \cdot 1 + s_3 \cdot W_4^0) \\ (s_1 \cdot 1 + s_3 \cdot W_4^2) \end{array} \right] \cdot W_4^0 = \underline{S}_0$$

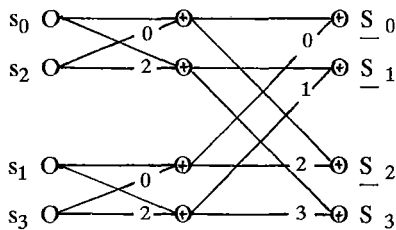
$$\left[\begin{array}{c} (s_0 \cdot 1 + s_2 \cdot W_4^0) \\ (s_0 \cdot 1 + s_2 \cdot W_4^2) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} (s_1 \cdot 1 + s_3 \cdot W_4^0) \\ (s_1 \cdot 1 + s_3 \cdot W_4^2) \end{array} \right] \cdot W_4^1 = \underline{S}_1$$

(Gl.1)

$$\left[\begin{array}{c} (s_0 \cdot 1 + s_2 \cdot W_4^0) \\ (s_0 \cdot 1 + s_2 \cdot W_4^2) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} (s_1 \cdot 1 + s_3 \cdot W_4^0) \\ (s_1 \cdot 1 + s_3 \cdot W_4^2) \end{array} \right] \cdot W_4^2 = \underline{S}_2$$

$$\left[\begin{array}{c} (s_0 \cdot 1 + s_2 \cdot W_4^0) \\ (s_0 \cdot 1 + s_2 \cdot W_4^2) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} (s_1 \cdot 1 + s_3 \cdot W_4^0) \\ (s_1 \cdot 1 + s_3 \cdot W_4^2) \end{array} \right] \cdot W_4^3 = \underline{S}_3$$

Signalflußdiagramm für $N = 4$:



$$-W_N^n = W_N^{n-N/2} ; n \geq N/2$$

$$\Rightarrow 1/2 N q = 4 ; (\text{siehe Signalflußdiagramm})$$

Bitumkehr der Indices der Eingangswerte :

s_0	s_1	s_2	s_3
00	01	10	11
$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$
00	10	01	11
s_0	s_2	s_1	s_3

Der linke Teil des Signalflußdiagramms besteht aus zwei untereinander angeordneten Signalflußdarstellungen für $N=2$. Der Unterschied der Teildigramme zum Signalflußdiagramm $N=2$ (siehe weiter oben) liegt in der durch Bitumkehr ermittelten Vertauschung der Eingangssignale sowie in den Exponenten für $N=2$: 0,1 und hier $N=4$: 0,2. Beim Übergang vom Signalflußdiagramm $N=2$ zu $N=4$ werden die Exponenten einfach mit 2 multipliziert.

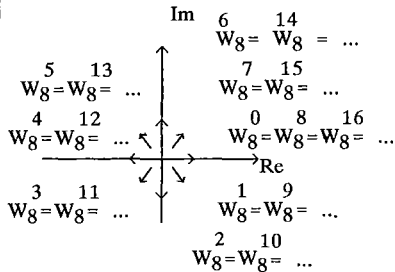
In den Gleichungen (Gl.1) sind durch geschweifte Klammern die Teildigramme ($N=2$) hervorgehoben. Sie werden wie die obigen Gleichungen (Gl.1) für $N=4$ es fordern miteinander verbunden, wobei die Exponenten der Potenzen in der letzten Spalte vor dem Gleichheitszeichen leicht im Signalflußdiagramm zu erkennen sind.

KFA

Institut für Grenzflächenforschung und Vakuumphysik

Diskrete Fouriertransformation

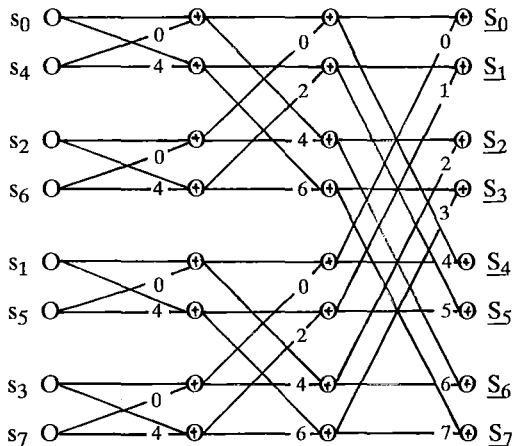
! $N=8=2^3$; $q=3$; $W_8 = e^{-j(2\pi/8)}$



s	0	1	2	3	4	5	6	7
	000	001	010	011	100	101	110	111
	←	←	←	←	←	←	←	←
	000	100	010	110	001	101	011	111
s	0	4	2	6	1	5	3	7

Wie oben für das Signalflußdiagramm $N=4$ gezeigt, setzt sich das Diagramm für $N=8$ aus zwei Teildigrammen $N=4$ zusammen. Die Verbindung der Teildigramme erfolgt analog zu $N=4$. Alle Exponenten im Signalflußdiagramm $N=4$ werden mit 2 multipliziert.

Signalflußdiagramm für $N=8$:



$$-W_N^n = W_N^{n-N/2}; \quad n \geq N/2$$

$$\Rightarrow 1/2 N q = 12;$$

komplexe Multiplikationen

$$\frac{\text{Zahl der FFT-Produkte}}{\text{Zahl der DFT-Produkte}} = \frac{1/2 N q}{N^2} = 1/(2N) \log_2 N$$

! $N=512$; $1/(2 \cdot 512) \log_2 (512) = 9/1024$

KFA

Institut für Grenzflächenforschung und Vakuumphysik

Diskrete Fourier-Transformation

Weitere Verringerung der Anzahl der komplexen Produkte :

- $W_N^0 = 1$ (bisher der Einfachheit halber als komplexes Produkt gerechnet)
- $f(t)$ ist reell : $\underline{S}_m = \underline{S}_{-m}^*$; $\underline{S}_{-m} = \underline{S}_{-m+N}$
 $\Rightarrow \underline{S}_m = \underline{S}_{N-m}^* \Rightarrow \underline{S}_m \quad m = 0, 1, \dots N/2$
- $f(t)$ reell und gerade $s_n = s_{-n}$
- $f(t)$ reell und ungerade $s_n = -s_{-n}$
- großer Prozentsatz der Abtastwerte sind 0

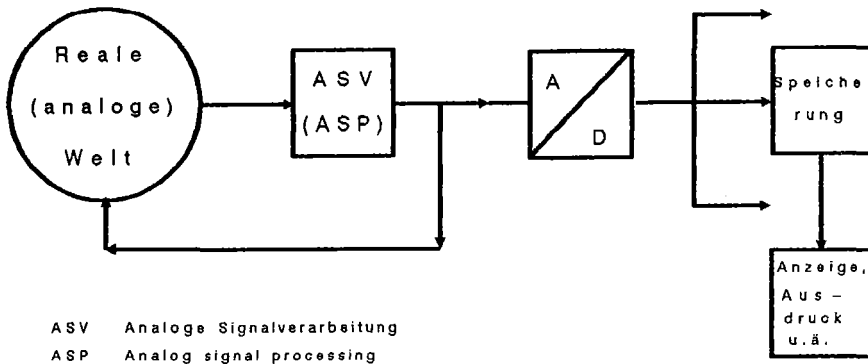
KFA

Institut für Grenzflächenforschung und Vakuumphysik

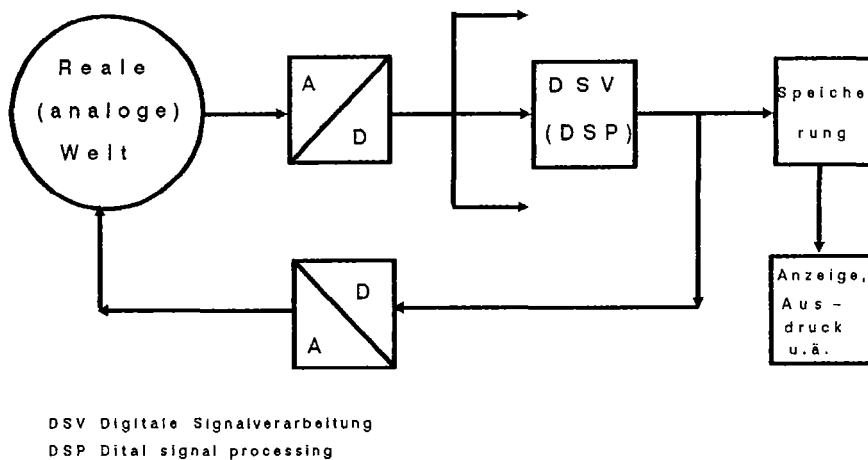
4. Signaltheoretische Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung

4.2 Digitalisierung analoger Signale im Wertebereich

4.2.1 Analoge und digitale Signalverarbeitung



a) vor der DSV



b) DSV - Ära

Grundsätzliche Unterschiede in der Vorgehensweise vor Einführung der digitalen Signalverarbeitung (Teilbild a) und nach Einführung der digitalen Signalverarbeitung (Teilbild b) am Beispiel einer Prozeßregelung

4. Signaltheoretische Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung

4.2 Digitalisierung analoger Signale im Wertebereich

4.2.2 Wertquantisierung

Die Digitalisierung analoger Signale vollzieht sich in drei Schritten (s. Bild 14)

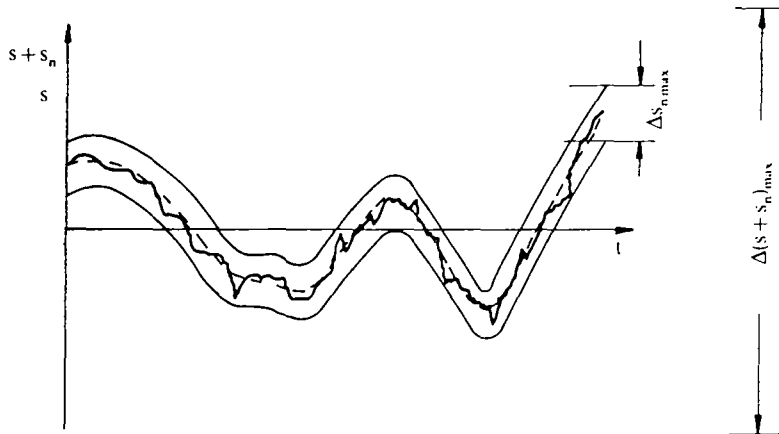
- Zeitquantisierung oder Abtastung (vgl. Kapitel 4.1)
- Wertquantisierung oder Rundung
- Codierung.

Bei der Wertquantisierung wird der Bereich, in dem Werte eines Signals vorkommen (Existenzbereich), in eine endliche Anzahl n_q von Wertestufen bzw. Wertintervallen eingeteilt. Jedem Intervall wird ein diskreter Wert, z.B. der Mittelwert des Intervalls, als Kennwert zugeordnet. Alle Werte eines Signals, die in ein solches Intervall fallen, werden durch diesen Kennwert repräsentiert. Er rundet somit den wahren Signalwert mit einem Fehler, der maximal einer halben Wertestufenweite entspricht.

Der so eingeteilte Existenzbereich des ursprünglich zeit- und wertkontinuierlichen Signals (vgl. Bild Signalarten) heißt Quantisierungsbereich. Das Signal ist nun wertdiskret und zeitkontinuierlich mit n_q Quantisierungsstufen.

Um den Quantisierungsfehler gering zu halten, liegt es nahe, die Anzahl n_q der Quantisierungsstufen möglichst hoch zu wählen. Es gibt jedoch hierfür eine obere Grenze, die durch das analoge Signal am Eingang des Quantisierers bestimmt wird.

Reale analoge Signale, die ein Nutzsignal durch einen ihrer Signalparameter abbilden, sind stets überlagert von einem Störsignal, das im Grenzfall durch das Wärmehauschen hervorgerufen wird. Zur Darstellung dieses Sachverhaltes wird ein Nutzsignal $s(t)$ mit dem Existenzbereich $\Delta s_{\max}$ angenommen, das von einem Störsignal $s_n(t)$ ($n = \text{noise}$) mit dem größten Schwankungsbereich $\Delta s_{n \max}$ überlagert ist. Nur wenn der Schwankungsbereich $\Delta s_{\max}$ erheblich größer als der Schwankungsbereich $\Delta s_{n \max}$ ist, kann das Nutzsignal s im Summensignal $s + s_n$ erkannt werden. Dies kann nur mit der Unsicherheit $\Delta s_{n \max}$ geschehen.



Zeitverlauf eines Summensignals $s + s_n$ (ausgezogene Linie) aus dem Nutzsignal s (gestrichelte Linie) und dem Störsignal s_n

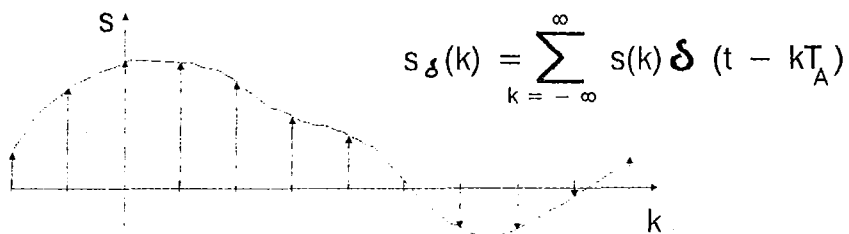
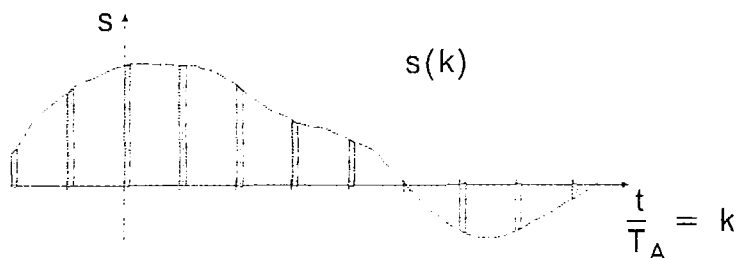
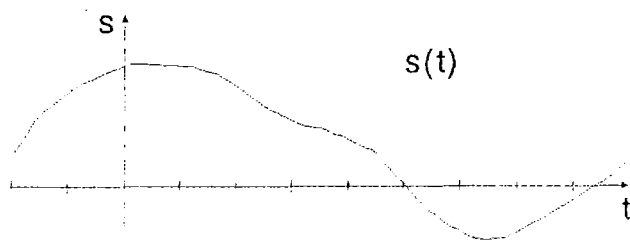
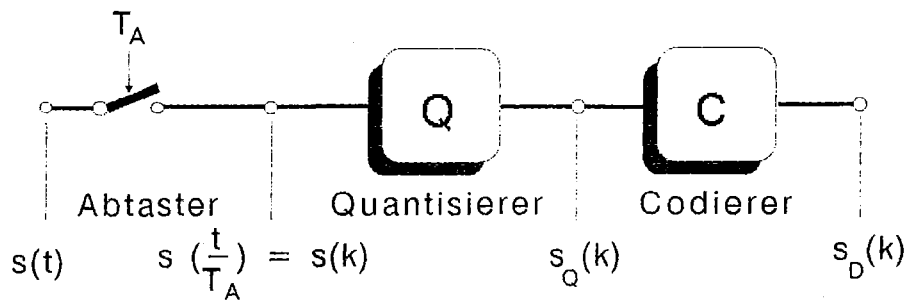


Bild 14 Vom analogen zum digitalen Signal

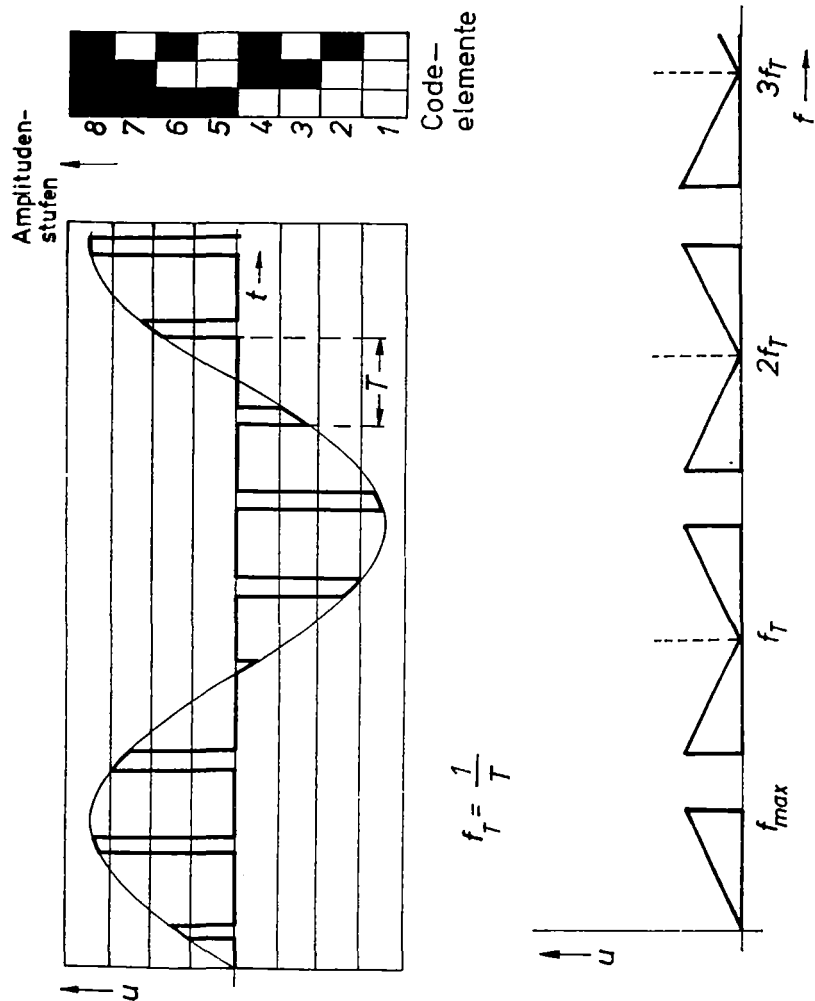


Bild 14.1 Abtastung, Quantisierung und Codierung des Analogsignals

SIEMENS

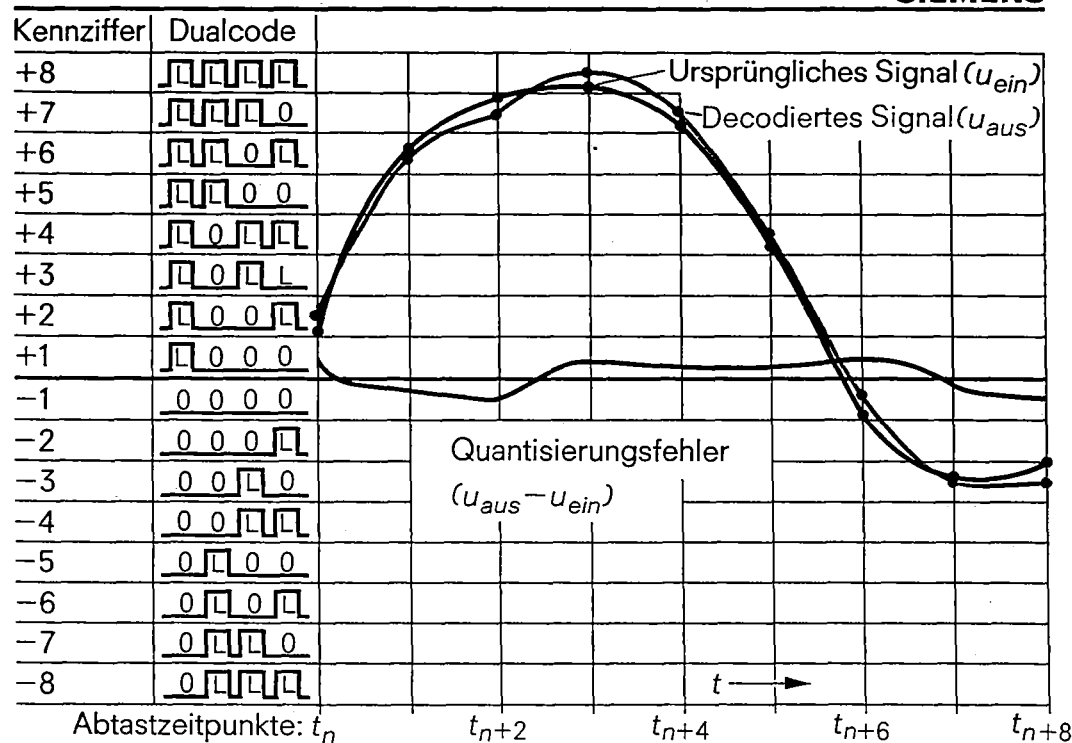
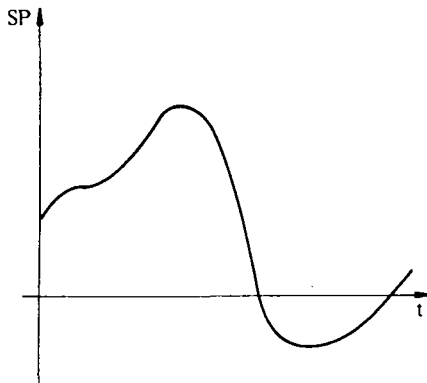
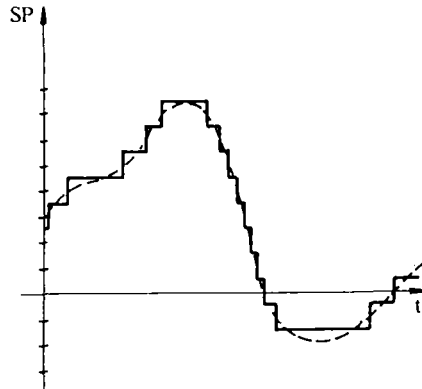


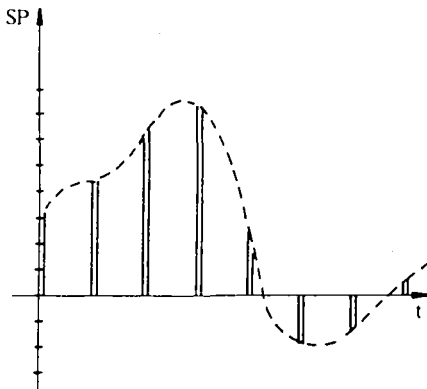
Bild 14.2 Quantisierung und Codierung von Signalen



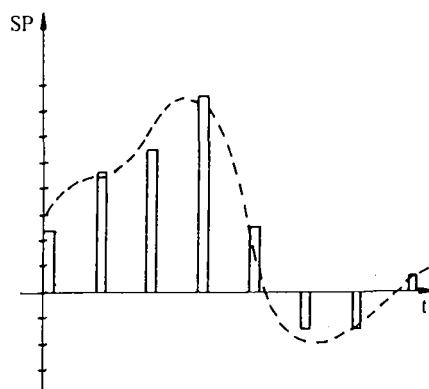
Wert- und zeitkontinuierliches Signal
z.B. Sprachsignal, analoger Meßwert



Wertdiskretes, zeitkontinuierliches Signal
z.B. quantisierte Sprach- und Musiksinnale, Ausgangsspannung eines Digital-Analog-Umsetzers



Zeitdiskretes, wertkontinuierliches Signal
z.B. zyklisch abgefragte Meßwerte, Pulsamplitudenmodulation



Wert- und zeitdiskretes Signal
z.B. quantisierte Pulsamplitudenmodulation

Bild 16 Signalarten - Signalparameter SP (z.B. Spannung, Frequenz, Impulsdauer etc.) als Funktion der Zeit t

Prof. Dipl.-Ing. W. JANSEN Fachhochschule Aachen, Abt. Jülich	Digitalisierung analoger Signale Wertquantisierung	Bl 20.2
Auf Blatt 20.1 ist das Oszillogramm des allein wahrnehmbaren Summensignals $s + s_n$ mit dem Existenzbereich $\Delta(s + s_n)_{\max}$ nachskizziert. Wird dieser Bereich in einander nichtüberlappende Wertintervalle aufgeteilt, deren Größe sinnvollerweise nicht kleiner als $\Delta s_{n \max}$ sein sollte, so gibt deren Anzahl $n_{\max}$ die größte Anzahl gerade noch unterscheidbarer Wertestufen des Nutzsignals s im Summensignal $s + s_n$ an $n_{\max} = \frac{\Delta(s + s_n)_{\max}}{\Delta s_{n \max}}.$ Dieser durch die Signaleigenschaften am Eingang des Quantisierers bestimmte Grenzwert liefert die technisch sinnvolle obere Schranke für die Auflösung des Quantisierungsreiches in eine Anzahl n_q Quantisierungsintervalle. Es gilt $n_q \leq n_{\max}.$ Bei näherer Kenntnis der Signale s und s_n lassen sich über deren Effektivwerte die Leistung des Nutzsignals P_s oder die des Störsignals P_n angeben. Hiermit läßt sich eine Beziehung angeben zum sog. Störabstand analoger, gestörter Signale, der als Dämpfungsmaß definiert ist, in dem die Leistung des Nutzsignals P_s im Verhältnis zur Leistung des Störsignals P_n (n = noise) betrachtet wird. Es gilt $a_{st} = 10 \lg \frac{P_s}{P_n} \text{ dB}.$ Für den Fall, daß Nutzsignal s und Störsignal s_n ergodisch, regellos und normalverteilt sind, ein Modell, das für viele Vorgänge in der Praxis paßt, liefert dieser Zusammenhang für die angestrebte Situation mit $P_s \gg P_n$ die Näherung $n_{\max} \approx 10^{\frac{a_{st}}{20 \text{ dB}}}.$ Bei einem Störabstand von $a_{st} = 80 \text{ dB}$ folgt daraus die Anzahl der sinnvoll noch zu unterscheidenden Wertestufen zu $n_{\max} \approx 10^4$. Für die Anzahl der Quantisierungsstufen ergibt sich bei binärer Codierung der Wertestufen durch 13 Bit des Analog-Digital-Umsetzers wegen $n_q \leq n_{\max}$ der Zahlenwert $n_q = 8192$. Der durch die Quantisierung mit der endlichen Anzahl n_q Quantisierungsstufen (Rundung) hervorgerufene unvermeidliche Quantisierungsfehler wirkt sich wie ein dem Nutzsignal überlagertes regellooses Störsignal, das Quantisierungsrauschen, aus. Hierfür kann ähnlich wie der Störabstand auf der Analogseite auf der digitalen Seite ein Geräuschabstand angegeben werden, der sog. Quantisierungsgeräuschabstand $a_q = 10 \lg (n_q^2 - 1) \text{ dB} \approx 20 \lg n_q \text{ dB}.$		

4. Signaltheoretische Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung

4.2 Digitalisierung analoger Signale im Wertebereich

4.2.3 Analog - Digital- Umsetzung

Für die digitale Signalverarbeitung sind grundsätzlich drei Verfahren der Analog-Digital-Umsetzung (Wertquantisierung) anwendbar: (vgl. Bild 17)

- ☐ Zählverfahren
- ☐ Iterationsverfahren oder Sukzessive Approximation
- ☐ Parallelverfahren oder Direktes Verfahren (Flash-ADC)

Praktisch scheidet das Zählverfahren jedoch aus, weil es auf dem Prinzip beruht, daß ein Zählquant, das der kleinsten Quantisierungsstufe entspricht, so lange aufgezählt wird, bis der zu digitalisierende Wert erreicht ist. Dieser Vorgang dauert in der Regel für Aufgaben in der digitalen Signalverarbeitung, vor allem dann, wenn mit dem Prozeß (Meß-, Steuer-, Regelprozeß) schritthaltende Verarbeitung verlangt wird, zu lange. Für eine solche sog. Echtzeitverarbeitung sind das Iterationsverfahren und das Parallelverfahren geeignet. Hierbei stellt das erstere einen Kompromiß zwischen Aufwand und Schnelligkeit dar. Mit dieser Schaltungstechnik lassen sich z.Zt. Umsetzungszeiten von einigen μs bei 4096 Quantisierungsstufen ($\cong 12$ Bit) und einigen $10 \mu\text{s}$ bei 65536 Stufen ($\cong 16$ Bit) erreichen.

Werden jedoch Umsetzungszeiten von deutlich weniger als $1 \mu\text{s}$ gefordert, so muß das Parallelverfahren angewendet werden. Hiermit lassen sich auch Videosignale mit Bandbreiten im Bereich von einigen MHz digitalisieren. Dieser Geschwindigkeitsgewinn muß jedoch mit hohem Aufwand erkaufte werden, der nicht nur vom ADU selbst bestimmt ist. Die Schaltungstechnik des ADU erfordert zum Beispiel, daß ihm ein Breitbandoperationsverstärker mit extrem niedrigem Innenwiderstand vorgeschaltet wird, der auch bei einer Last mit hohem kapazitivem Anteil noch stabil bleibt.

Die Grundkonzepte bzw. der Schaltungsaufbau für die beiden Verfahren sind aus den beigefügten Bildern zu entnehmen, die auf Angaben der Firmen Siemens und Analog Devices beruhen. (Bild 17 bis Bild 21)

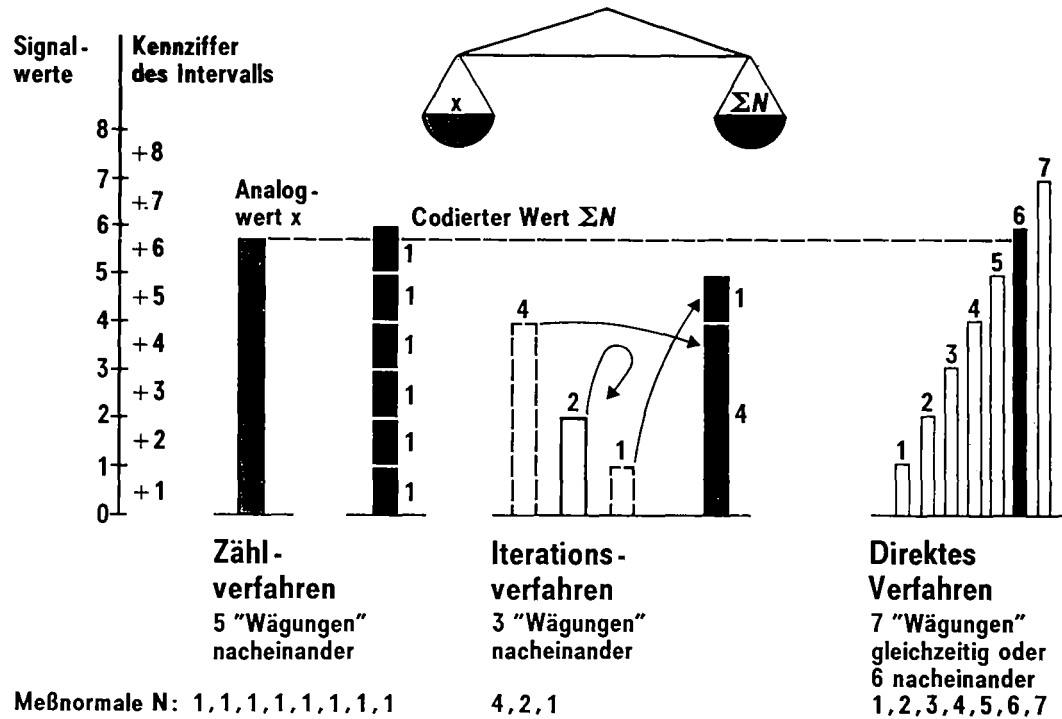
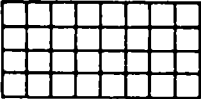
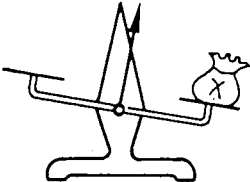


Bild 17 Drei Grundverfahren der Quantisierung

Test				
	$X \geq 32?$		Ja $\Rightarrow$ setzen $\Rightarrow$	1
			32	
	$X \geq (32+16)?$		Nein $\Rightarrow$ nicht $\Rightarrow$	0
			16	
	$X \geq (32+8)?$		Ja $\Rightarrow$ setzen $\Rightarrow$	1
			8	
	$X \geq (32+8+4)?$		Ja $\Rightarrow$ setzen $\Rightarrow$	1
			4	
	$X \geq (32+8+4+2)?$		Nein $\Rightarrow$ nicht $\Rightarrow$	0
			2	
	$X \geq (32+8+4+1)?$		Ja $\Rightarrow$ setzen $\Rightarrow$	1
			1	

Summe

$$X = 32 + 8 + 4 + 1 = 45$$

$$101101_2 = 45_{10}$$

Bild 18 Analogie der sukzessiven Approximation mit der Balkenwaage

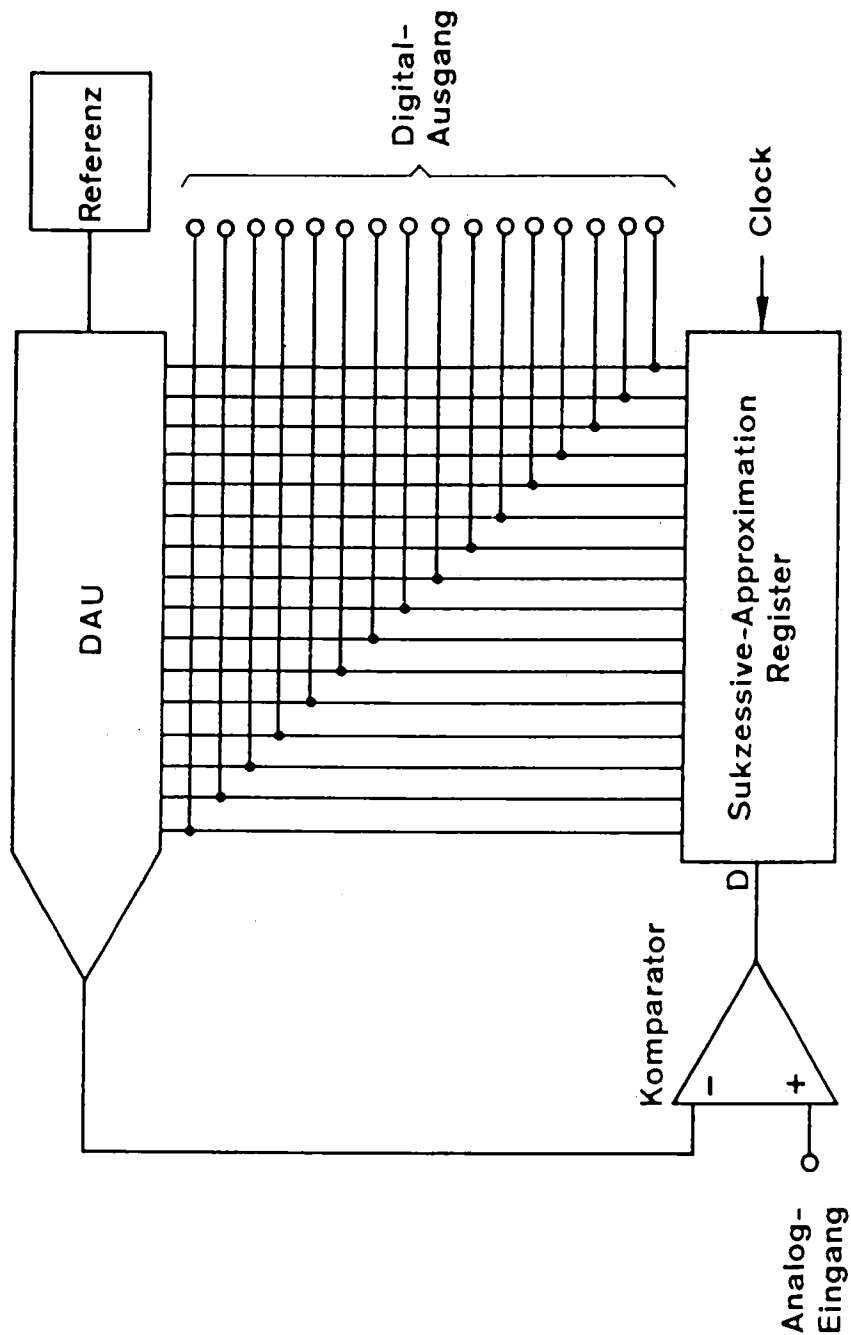


Bild 19 Prinzipschaltbild eines ADU nach dem Verfahren der sukzessiven Approximation

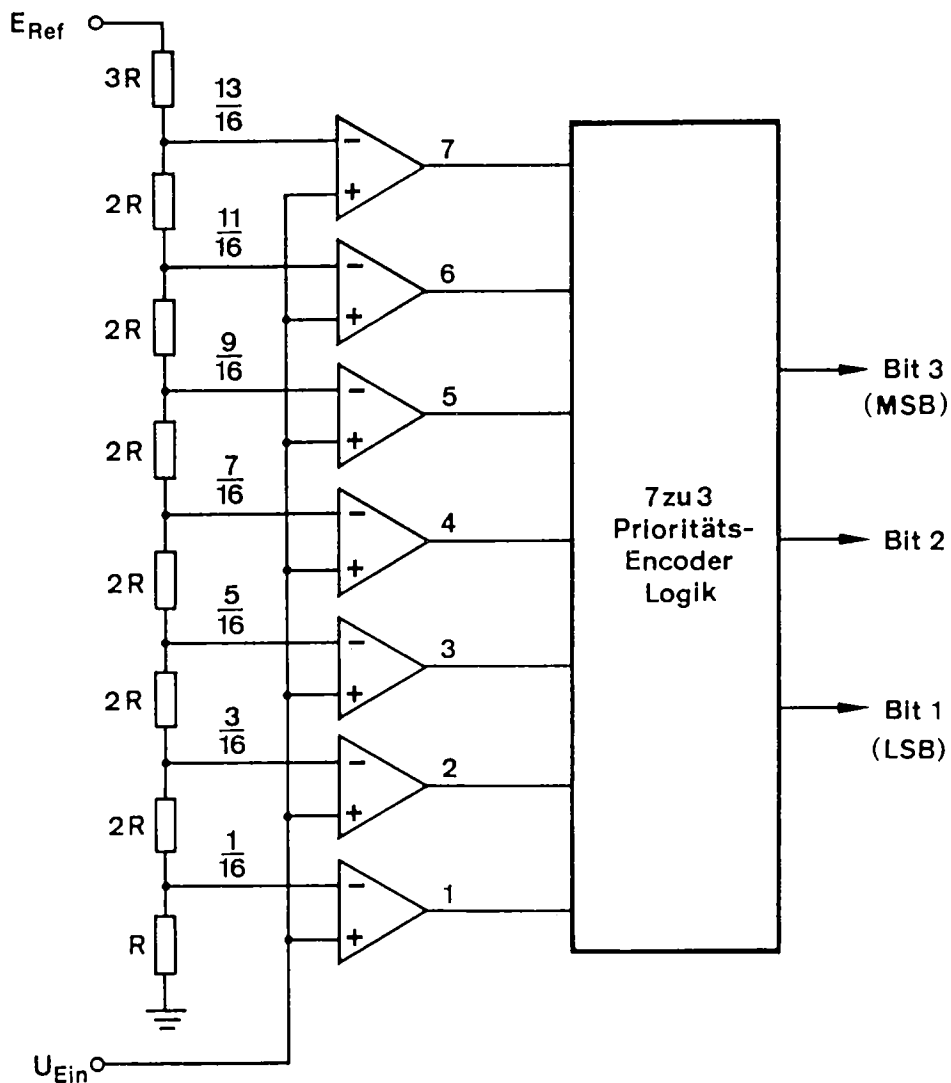


Bild 20 Schematische Darstellung eines 3-Bit-Parallel-Umsetzers

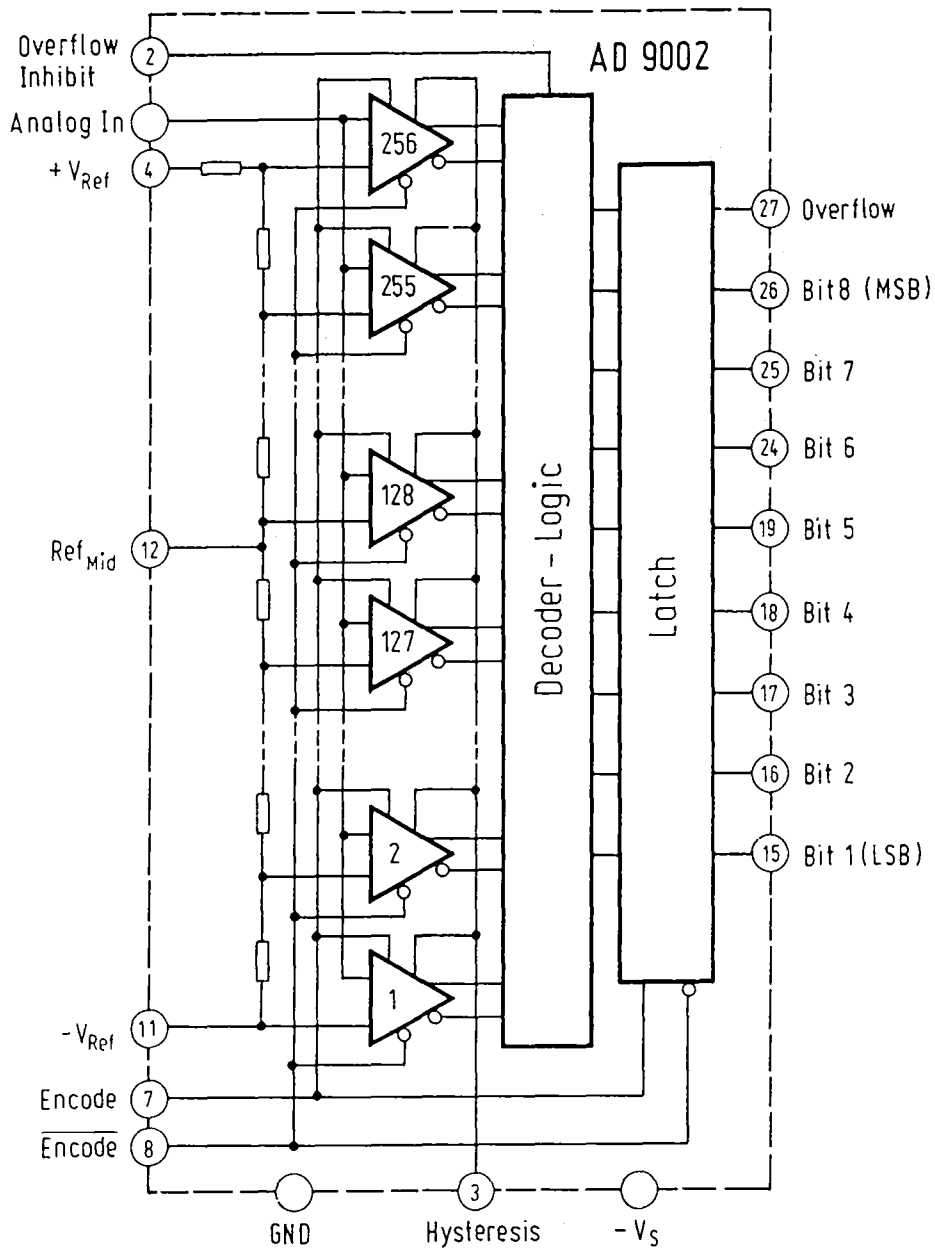


Bild 21 Innenschaltung eines modernen Flash-ADU für eine Umsetzungsrate von $1,5 \cdot 10^8$ Umsetz./s und eine Fehlerrate von 10^{-9} (nach Analog Devices)

4. Signaltheoretische Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung

4.2 Digitalisierung analoger Signale im Wertebereich

4.2.4 Festkomma - Gleitkommadarstellung

Festkomma-Gleitkommadarstellung

Festkommadarstellung

$$x = \pm \sum_{k=n}^m a_k b^k ; m \geq -1, n = m - w + 2 ,$$

w : Stellenanzahl mit Vorzeichen ($\pm$ zweiwertig),

$b \in \{ 2, 3, \dots, 8, \dots, 10, \dots, 16 \dots \}$ (Basis des Zahlensystems),

$a_k \in \{ 0, \dots, b-1 \}$ (Ziffernvorrat des Zahlensystems)

Eine Zahl x wird in einem Zahlensystem zur Basis b durch eine Ziffernfolge von Zahlen dargestellt, wobei jede Stelle in der $w-1$ stelligen Ziffernreihe von links nach rechts eine abfallende, ganzzahlige Potenz zur Basis b zugeordnet wird, die man als Stellenwertigkeit bezeichnet. Jeder Ziffer in der Zahlenfolge (auch Stellenwert genannt) kann nur die Werte a_k des Ziffernvorrats annehmen.

Da das Komma stets auf einer festen Position (zwischen den Stellen mit der gleichen Stellenwertigkeit, z.B. bei einer Dezimalzahl zwischen $10^0=1$ und $10^{-1}=0.1$) steht und jede Stelle deshalb dieselbe Stellenwertigkeit besitzt, (siehe im Gegensatz hierzu Gleitkommadarstellung) wird diese Darstellung als Festkommadarstellung bezeichnet.

Beispiele : a) $b=10, w=6, m=4, n = 4-6+2, a_k = 9$ für alle k ,

$$x = + \sum_{k=0}^4 9 \cdot 10^k = +(9 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0) \\ = +9999 = +9999,0$$

ganzzahlige Festkommazahl (das Komma steht implizit rechts 9999)

b) $b=2, w=6, m=-1, n = -1-6+2, a_k = 1$ für alle k ,

$$x = - \sum_{k=-5}^{-1} 1 \cdot 2^k = - (1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5}) \\ = -,11111(2) = - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \right) = - \frac{15}{16} = -,9375$$

gebrochene Festkommazahl (das Komma steht implizit links)

Gleitkommadarstellung

Jede Zahl dargestellt zur Basis b kann als Produkt einer gebrochenen Zahl zur Basis b mit einer Potenz zur Basis b geschrieben werden.

$$x = \pm \sum_{k=n}^m a_k b^k = \pm \left(\sum_{k=n}^m a_k b^{k-(m+1)} \right) b^{(m+1)} = \pm M b^{(m+1)} ; m \geq n$$

$w = w_M + w_E$: gesamte Stellenanzahl

KFA

Institut für Grenzflächenforschung und Vakuumphysik

Festkomma-Gleitkommadarstellung

Die gebrochene Zahl zur Basis b wird Mantisse genannt

w_M : Stellenanzahl der Mantisse mit Vorzeichen

Der Exponent der Potenz zur Basis b klar mit Exponent bezeichnet

w_E : Stellenanzahl des Exponenten mit Vorzeichen

$$M = \pm \sum_{k=1-w_M}^{-1} a_k b^k ; E = (m+1);$$

Beispiel : $b=10, w=6, w_M=4, w_E=2, m=4, a_k=9$ für alle k ,

$$\begin{aligned} x &= + \left(\sum_{k=1-4}^{-1} 1 \cdot 10^k \right) 10^E = + (9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3}) \cdot 10^5 \\ &= +,999 \cdot 10^5 = +,999 E+5 \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur Festkommadarstellung besitzt hier die Gleitkommadarstellung vor und hinter dem Komma (Mantisse) nicht mehr die gleiche Stellenwertigkeit.

Gegenüberstellung von Festkomma- und Gleitkommadarstellung

$b=10, w=6$

Festkommadarstellung : $m=-1$, Zahlenbereich : $-,99999 \leq x \leq +,99999$
 Begrenzung des Darstellungsbereiches und Auflösung hängen direkt von der Stellenanzahl w ab. Alle Zahlen treten in gleichen Abständen auf.
 Skalierungsprobleme treten auf, wenn eine Zahl in die eine oder andere Richtung zur Vermeidung von Überlauf oder Genauigkeit verschoben werden muß.

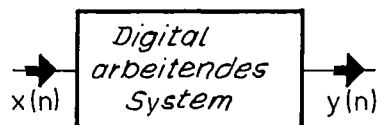
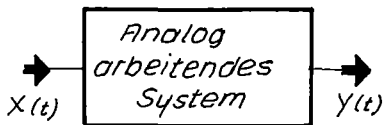
Gleitkommadarstellung : $w_M=4, w_E=2$, Zahlenbereich : $-,999 E+9 \leq x \leq +,999 E+9$
 Der darstellbare Zahlenbereich ist bei dieser Aufteilung von $w = w_M + w_E$ wesentlich vergrößert gegenüber der Festkommadarstellung.
 Die Auflösung ist hier $0,999 E-9$ ebenfalls wesentlich größer, aber die darstellbaren Zahlen treten nicht mehr in gleichen Abständen auf (Nachteil!).
 Keine Skalierungsprobleme

KFA

Institut für Grenzflächenforschung und Vakuumphysik

5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke



Originalbereich :

Differentialgleichungen :

$$\sum_{\nu=0}^m \delta_{\nu} y^{(\nu)} = \sum_{\mu=0}^m \beta_{\mu} x^{(\mu)}$$

$\beta_{\mu}; \delta_{\nu}$ sind reelle Koeffizienten

Differenzengleichungen :

$$\sum_{\nu=0}^m C_{\nu} y[(k+\nu)T_a] = \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} x[(k+\mu)T_a]$$

$b_{\mu}; C_{\nu}$ sind reelle Koeffizienten

Bildbereich:

Übertragungsfunktionen
mit Laplace-Transformation:

$$A(p) = \frac{\mathcal{L}\{y\}}{\mathcal{L}\{x\}} = \frac{\sum_{\mu=0}^m \beta_{\mu} p^{\mu}}{\sum_{\nu=0}^n \delta_{\nu} \cdot p^{\nu}}$$

$$p = \sigma + j\omega$$

Übertragungsfunktionen
mit Z-Transformation :

$$A^*(z) = \frac{Z\{y(n)\}}{Z\{x(n)\}} = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} \cdot z^{\mu}}{\sum_{\nu=0}^n C_{\nu} \cdot z^{\nu}}$$

$$z = e^{pT_a} = e^{(\sigma + j\omega)T_a}$$



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Bauelemente in linearen, analogen und digitalen Netzwerken

Analog arbeitende Netzwerke:

a) passive Netzwerke

1  Widerstände

2  Kondensatoren

3  Spulen

b) aktive Netzwerke

1  Widerstände

2  Kondensatoren

3  Operationsverstärker

Digital arbeitende Netzwerke :

1  Multiplizierer

2  Schieberegister

3  Addierer

Immer 3 mögliche Bauelementarten



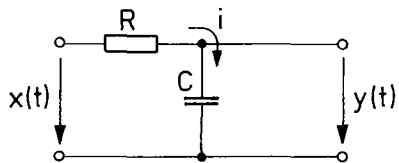
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

5.1 Schaltungssynthese im Orginalbereich - Quasi-Analogrechner Schaltung -

Schaltungssynthese im Originalbereich

- Quasi Analogrechner Schaltung -



Differentialgleichungen:

$$x(t) = R \cdot i(t) + y(t)$$

$$i(t) = C \frac{dy(t)}{dt}$$

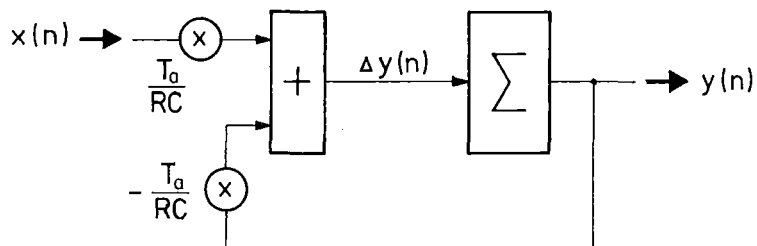
Differenzengleichungen:

$$x(n) = R \cdot i(n) + y(n)$$

$$i(n) = C \frac{\Delta y(n)}{T_a}$$

$$\frac{RC}{T_a} \Delta y(n) + y(n) = x(n)$$

$$\Delta y(n) = \frac{T_a}{RC} \cdot x(n) - \frac{T_a}{RC} \cdot y(n)$$



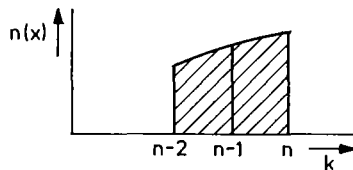
KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK

- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Integrator
- Quadratische Interpolation -

Eingangssignalfolge



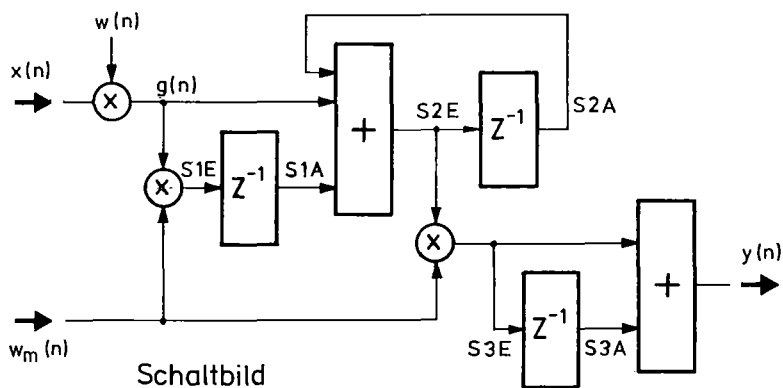
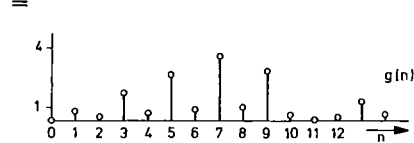
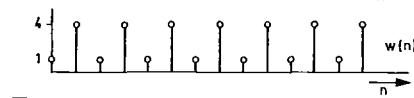
Ausgangssignalfolge

Nach Kepler

$$\Delta y(n) = \frac{T_a}{3T_o} [x(n-2) + 4x(n-1) + x(n)]$$

T_a : Abtastzeit

T_o : Integratorkonstante



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Integrator

- Simulation des Simpson-Integrators -

```

\c      simpson integration
c      =====
c
      m=10
      xm=float(m)
      s1a=0.
      s2a=0.
      s3a=0.
      do 1 n=0,m
      xn=float(n)
      x=(xn/xm)**2
      e=(xn/xm)**3
      w=1/xm
      if(mod(xn,2.).eq.1) w=4.*w
      g=w*x
      wm=0.
      if(mod(xn,2.).eq.0) wm=1.

c
c      aktuelle werte:
c      -----
      s1e=wm*g
      s2e=g+s1a+s2a
      s3e=wm*s2e
      y=s3e+s3a
      write(0,100) n,x,e,y

c
c      schieben:
c      -----
      s1a=s1e
      s2a=s2e
      s3a=s3e

1      continue
      stop
100    format(1x,i4,2x,f7.4,2x,f7.4,2x,f7.4)
      end

```

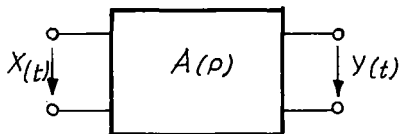
KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

5.2 Schaltungssynthese im Bildbereich

Analog arbeitende Schaltungen:



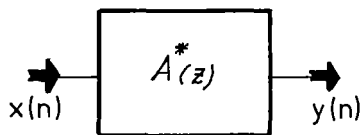
Übertragungsfunktion:

$$A(p) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{x(t)\}}$$

x : Eingangssignal

y : Ausgangssignal

Digital arbeitende Schaltungen:



Übertragungsfunktion:

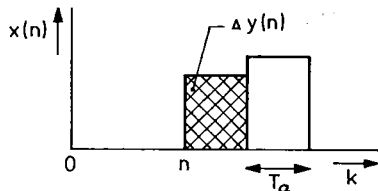
$$A^*(z) = \frac{Z\{y(n)\}}{Z\{x(n)\}}$$

$x(n)$: Eingangs - Signalfolge

$y(n)$: Ausgangs - Signalfolge

Integrator
- Untersommenbildung -

Eingangssignalfolge



Ausgangssignalfolge

$$y(n) = \frac{T_a}{T_o} \sum_{k=0}^n x(k)$$

T_a : Abtastzeit
 T_o : Integratorkonstante

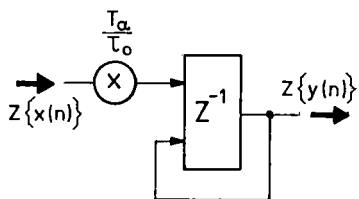
$$\Delta y(n) = \frac{T_a}{T_o} x(n)$$

$$Z\{\Delta y(n)\} = (z-1) \cdot Z\{y(n)\} + z \cdot y(0)$$

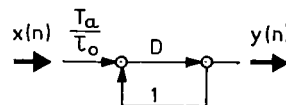
Integration im z-Bereich:

$$Z\{y(n)\} = \frac{T_a}{T_o} \frac{1}{z-1} Z\{x(n)\}$$

$$Z\{y(n)\} = z^{-1} \left[Z\{y(n)\} + \frac{T_a}{T_o} \cdot Z\{x(n)\} \right]$$



Schaltbild



SFG



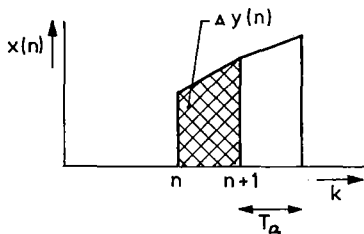
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Integrator

- Lineare Interpolation -

Eingangssignalfolge:

Ausgangssignalfolge:



$$y(n) = \frac{1}{2} \frac{T_a}{T_0} \sum_{k=0}^n [x(k) + x(k+1)]$$

T_a : Abtastzeit
 T_0 : Integratorkonstante

$$\Delta y(n) = \frac{1}{2} \frac{T_a}{T_0} [x(n) + x(n+1)]$$

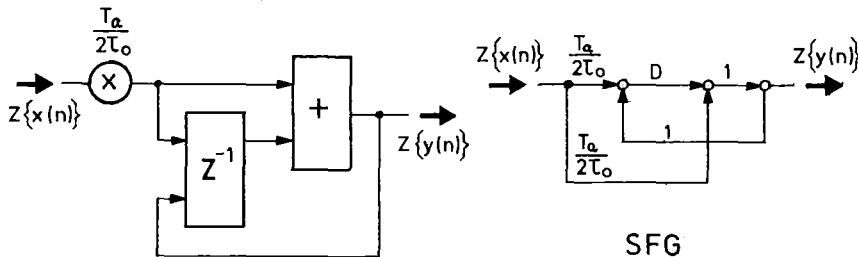
$$Z \{ \Delta y(n) \} = \frac{1}{2} \frac{T_a}{T_0} Z \{ x(n) + x(n+1) \} = \frac{1}{2} \frac{T_a}{T_0} [Z \{ x(n) \} + Z \{ x(n+1) \}]$$

$$(Z-1) Z \{ y(n) \} = \frac{1}{2} \frac{T_a}{T_0} [Z \{ x(n) \} + Z \{ x(n+1) \}] = \frac{1}{2} \frac{T_a}{T_0} (Z+1) Z \{ x(n) \}$$

$$Z \{ y(n) \} = \frac{T_a}{2T_0} \frac{Z+1}{Z-1} \cdot Z \{ x(n) \}$$

entspricht der bilinearen Transformation:

$$Z \{ y(n) \} = \frac{T_a}{2T_0} Z \{ x(n) \} + Z^{-1} \frac{T_a}{2T_0} Z \{ x(n) \} + z^{-1} Z \{ y(n) \}$$



Schaltbild



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK

-Abteilung Allgemeine Elektronik-

5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

5.2 Schaltungssynthese im Bildbereich

5.2.1 Synthese über den Umweg der Laplace Transformation

Bestimmung der Übertragungsfunktion
im Z-Bereich aus der Laplace-Transformation

Die Übertragungsfunktionen von Integratoren enthalten die Vorschriften zur Umwandlung der durch die Laplace-Transformation formulierten Übertragungsfunktion in die für die Z- oder Bilineare Transformation gültige.

Laplace	Z-Transformation	Bilineare Transformation
$A(p) = C_1 \frac{1}{p}$	$A(z) = C_2 \frac{1}{\frac{1}{T_a}(Z-1)}$	$A(z) = C_3 \frac{1}{\frac{2}{T_a} \frac{Z-1}{Z+1}}$

Durch Vergleich erhält man die algebraischen Transformationsanweisungen.

Für Z-Transformation: $p = \frac{1}{T_a} (Z-1)$

Für Bilineare Transformation: $p = \frac{2}{T_a} \frac{Z-1}{Z+1}$

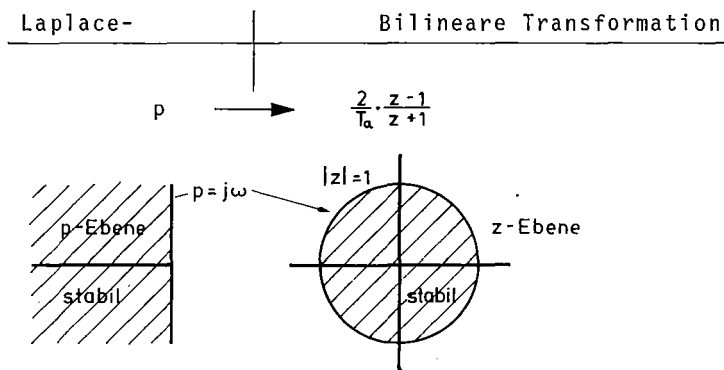


ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Die bilineare Transformation

Wird insbesondere für den Entwurf von Dämpfungsfiltern verwendet.

Transformationsvorschrift:



Frequenzteilung auf dem Kreisumfang verzerrt, da unendliche Strecke in der p-Ebene auf eine endliche in der Z-Ebene abgebildet wird.

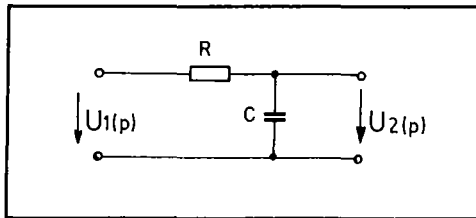
$$p \Big|_{p=j2\pi f^p} \longrightarrow \frac{2}{T_a} \frac{z-1}{z+1} \Big|_{z=e^{j2\pi \frac{f^z}{f_a}}} = j2\pi \frac{f^z}{f_a} = jfg\pi \frac{f^z}{f_a}$$

$$f^p = \frac{f_a}{\pi} fg\pi \frac{f^z}{f_a}$$



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Methode
Laplace $\rightarrow$ Bilineare Transformation



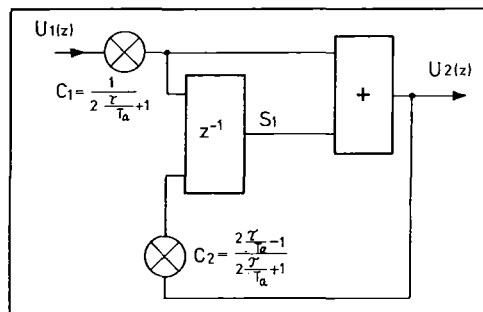
$$A(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{1+p\tau} \quad \tau = R \cdot C$$

Bilineare Transformation:

$$p = \frac{2}{T_a} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

$$A(z) = \frac{1+z^{-1}}{(2 \cdot \frac{T}{T_a} + 1) - (2 \cdot \frac{T}{T_a} - 1) z^{-1}}$$

$$U_2(z) = \frac{2 \cdot \frac{T}{T_a} - 1}{2 \cdot \frac{T}{T_a} + 1} \cdot z^{-1} \cdot U_2(z) + \frac{1}{2 \cdot \frac{T}{T_a} + 1} \cdot z^{-1} \cdot U_1(z) + \frac{1}{2 \cdot \frac{T}{T_a} + 1} U_1(z)$$



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

5.2 Schaltungssynthese im Bildbereich

5.2.2 Direkte Synthese mit der Z-Transformation

Darstellung der Spannungs- u. Stromabhängigkeit passiver linearer Schaltelemente mit der Z-Transformation

	Spannungsabhängigkeit		Stromabhängigkeit	
	Orig. Bereich	Bildbereich	Orig. Bereich	Bildbereich
	$R i_n$	$R \cdot I$	$\frac{1}{R} u_n$	$\frac{1}{R} U$
	$L \cdot \frac{\Delta i_n}{T_a}$	$\frac{L}{T_a} (Z-1) I$ $i_0 \approx 0$	$\frac{T_a}{L} \sum_{m=0}^{n-1} u_m$	$\frac{T_a}{L} \frac{U}{Z-1}$
	$\frac{T_a}{C} \sum_{m=0}^{n-1} i'_m$	$\frac{T_a}{C} \frac{I}{Z-1}$	$C \frac{\Delta u_n}{T_a}$	$\frac{C}{T_a} (Z-1) U$

Abkürzungen:

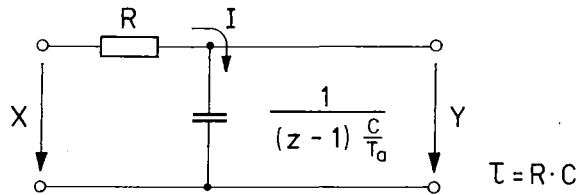
$$U = Z\{u_n\}$$

$$I = Z\{i'_n\}$$

KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Direkte Synthese mit der
Z-Transformation

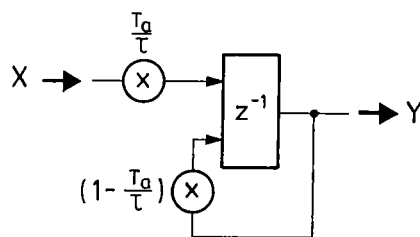


$$Y = \frac{1}{(z-1) \frac{C}{T_d}} \cdot I$$

$$X = \left[R + \frac{1}{(z-1) \frac{C}{T_d}} \right] \cdot I$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{\frac{1}{(z-1) \frac{C}{T_d}}}{R + \frac{1}{(z-1) \frac{C}{T_d}}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{T_d}{T}\right) + \frac{T_d}{T} \cdot z}$$

$$Y(z^{-1}) = \frac{T_d}{T} z^{-1} \cdot X + \left(1 - \frac{T_d}{T}\right) z^{-1} \cdot Y$$



KFA

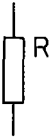
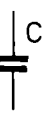
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

5.2 Schaltungssynthese im Bildbereich

5.2.3 Direkte Synthese mit der Bilinearen Transformation

*Darstellung der Spannungs- u. Stromabhängigkeit
passiver linearer Schaltelemente mit der
bilinearen - Transformation*

	Spannungsabhängigkeit		Stromabhängigkeit	
	Orig. Bereich	Bildbereich	Orig. Bereich	Bildbereich
	$R i_n$	$R \cdot I$	$\frac{1}{R} u_n$	$\frac{1}{R} U$
	$L \frac{\Delta i_n}{T_a}$	$\frac{2L}{T_a} \frac{Z-1}{Z+1} I$	$\frac{T_a}{L} \sum_{m=0}^{n-1} u_m$	$\frac{T_a}{2L} \frac{Z+1}{Z-1} U$
	$\frac{T_a}{C} \sum_{m=0}^{n-1} i_m$	$\frac{T_a}{2C} \frac{Z+1}{Z-1} I$	$C \frac{\Delta u_n}{T_a}$	$\frac{2C}{T_a} \frac{Z-1}{Z+1} U$

Abkürzungen :

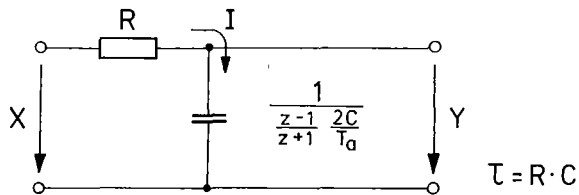
$$U = B\{u_n\}$$

$$I = B\{i_n\}$$

KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Direkte Synthese mit der
Bilinearen Transformation

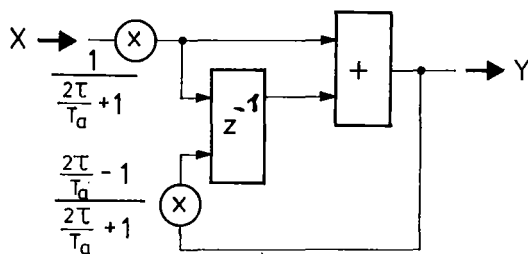


$$Y = \frac{1}{\frac{z-1}{z+1} \frac{2C}{T_a}} \cdot I$$

$$X = \left(R + \frac{1}{\frac{z-1}{z+1} \frac{2C}{T_a}} \right) \cdot I$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{\frac{1}{\frac{z-1}{z+1} \frac{2C}{T_a}}}{R + \frac{1}{\frac{z-1}{z+1} \frac{2C}{T_a}}} = \frac{1+z}{\left(1 - \frac{2T}{T_a}\right) + \left(1 + \frac{2T}{T_a}\right)z}$$

$$Y(z^{-1}) = \frac{1}{\frac{2T}{T_a} + 1} \cdot X + \frac{1}{\frac{2T}{T_a} + 1} \cdot z^{-1} \cdot X + \frac{\frac{2T}{T_a} - 1}{\frac{2T}{T_a} + 1} \cdot z^{-1} \cdot Y$$



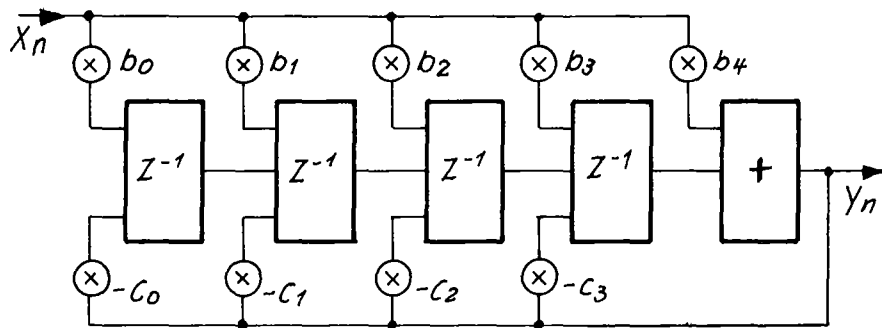
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

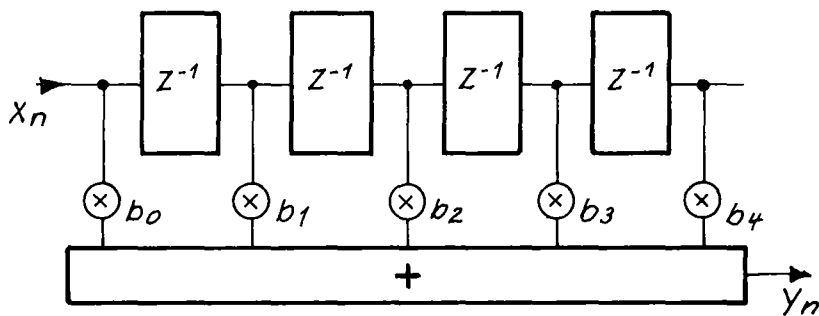
5.2 Schaltungssynthese im Bildbereich

5.2.4 Synthese aus der Übertragungsfunktion mit vorgegebenen Schaltungsstrukturen

*Zwei prinzipielle Realisierungsmöglichkeiten
digital arbeitender Nachbildungen linearer Netzwerke*



*rekursiv arbeitende digitale Nachbildung
eines linearen Netzwerkes*

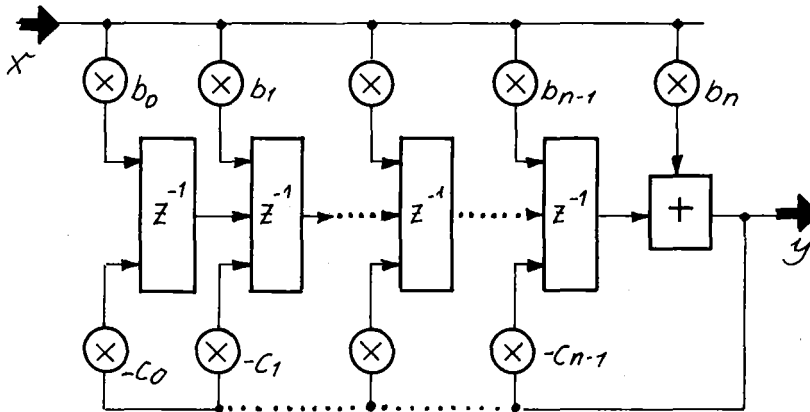


*nichtrekursiv arbeitende digitale Nachbildung
eines linearen Netzwerkes*

KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Erste Kanonische Form eines rekursiven Digitalfilters
IIR-Filter



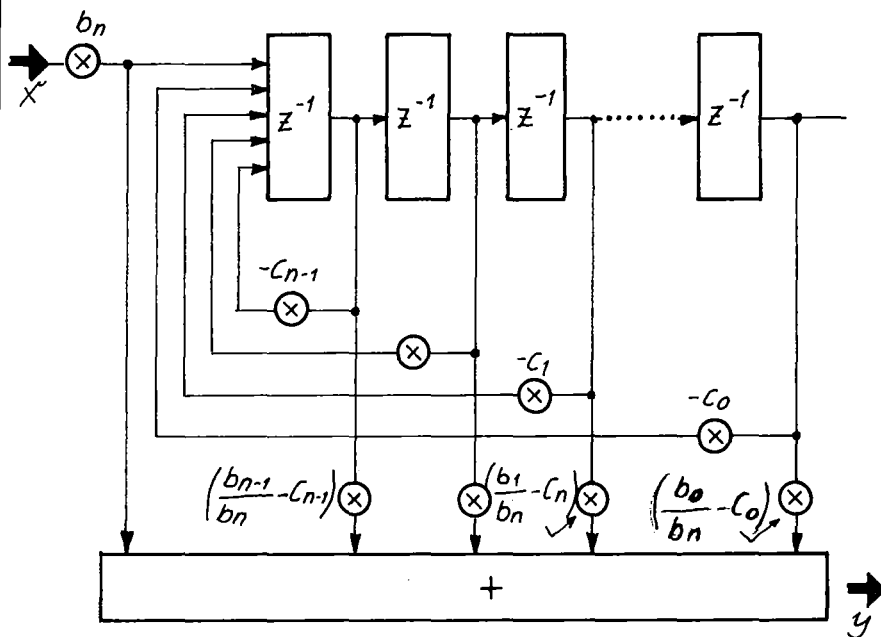
Übertragungsfunktion :

$$A^*(z) = \frac{y}{x} = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots + b_n z^n}{c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots + z^n}$$

KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
 - Abteilung Allgemeine Elektronik -

Zweite Kanonische Form eines rekursiven Digitalfilters
IIR-Filter



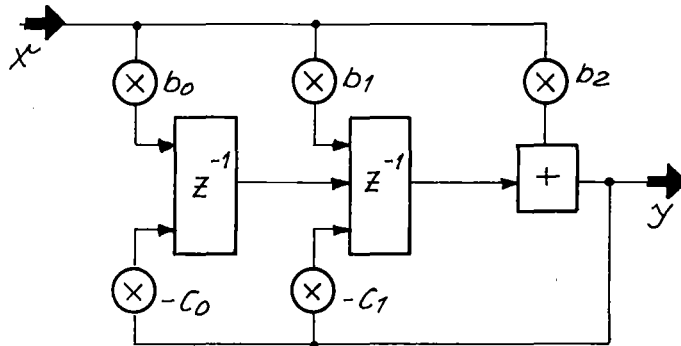
Übertragungsfunktion :

$$A_{(z)}^* = \frac{y}{x} = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n}{c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + z^n}$$

KFA

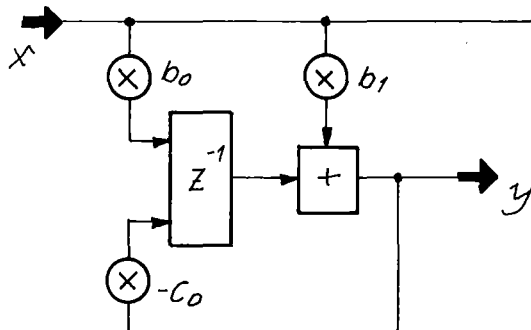
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Dritte kanonische Form eines rekursiven Digital-
filters - Kaskadierung von Grundgliedern -
IIR-Filter



Grundglied 2. Ordnung

$$A(z) = \frac{y}{x} = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2}{c_0 + c_1 z + z^2}$$



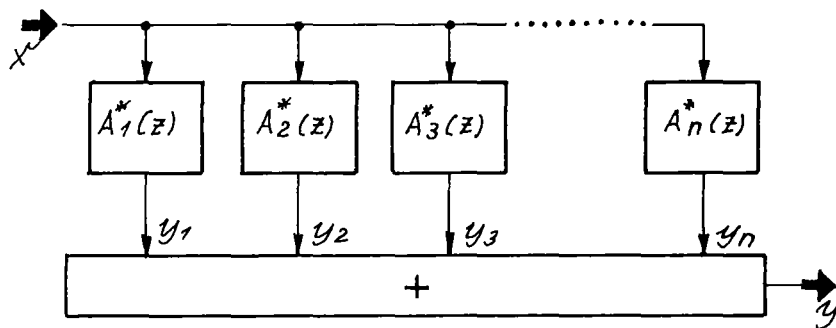
Grundglied 1. Ordnung

$$A(z) = \frac{y}{x} = \frac{b_0 + b_1 z}{c_0 + z}$$



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

*Vierte Kanonische Form eines rekursiven Digitalfilters
- Parallelschaltung von Grundgliedern -
IIR Filter*



Übertragungsfunktion :

$$A^*(z) = \frac{y}{x} = \sum_{\mu=1}^m A_{\mu}^*(z) \cdot x$$

KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

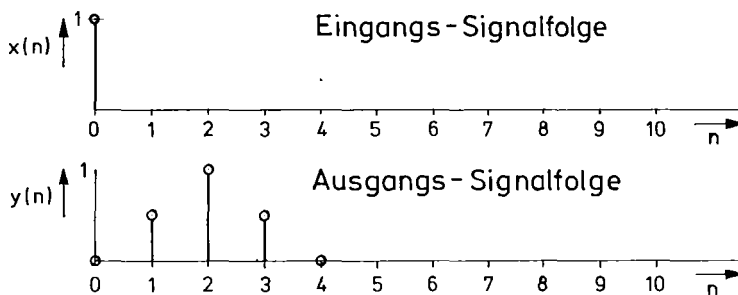
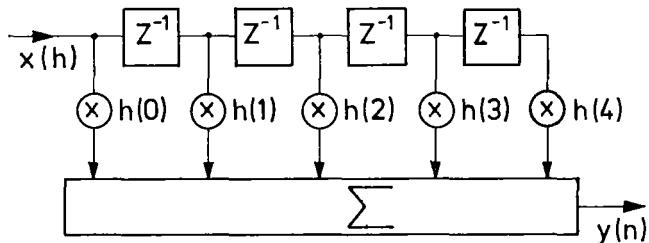
5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

5.2 Schaltungssynthese im Bildbereich

5.2.5 Nichtrekursive (FIR) Filter

Dimensionierung von FIR-Filtern

- Ein-Impuls-Erregung -



Betrachtung im Zeitbereich:

Der Einzelimpuls wird von Verzögerungsglied zu Verzögerungsglied geschoben.

Nur der Multiplikator, an dessen Eingang der Einzelimpuls der Folge $x(n)$ im Verlauf seiner Wanderung durch die Kette von Laufzeitgliedern liegt, liefert am Addierungsausgang einen mit dem jeweiligen Multiplikanten $h(n)$ gewichteten Anteil der Ausgangssignalfolge $y(n)$.



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Dimensionierung von FIR-Filtern
- Ein-Impuls-Erregung -

Betrachtung im Bildbereich der Z-Transformation:

Die Z-Transformation eines Einzelimpulses ist

$$Z \{ x(n) \} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n} = 1 \cdot z^0 = 1 .$$

Die Z-Transformierte der Ausgangssignalfolge ist demnach

$$Z \{ y(n) \} = H(z) \cdot Z \{ x_n \}$$

$$Z \{ y(n) \} = H(z)$$

Die Multiplikatoren $h(n)$ repräsentieren also nicht nur die Impulsantwort eines Einzelimpulses, sondern sind auch Polynomkoeffizienten der Übertragungsfunktion des FIR-Filters

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h(n) \cdot z^{-n}$$



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Dimensionierung von FIR-Filtern

- auf konstante Gruppen- und Phasenlaufzeit -

Periodischer Frequenzgang eines FIR-Filters

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot e^{-j\omega \cdot n}$$

Der Frequenzgang kann auch durch Betrag und Phase dargestellt werden.

$$H(e^{j\omega}) = \pm |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

Bedingung für frequenzunabhängige Gruppen- und Phasenlaufzeit:

$$\varphi(\omega) = -\alpha \cdot \omega = T_{\varphi} \omega$$

α : Propor.-Faktor

$$-\pi \leq \omega \leq \pi$$

Erfüllt: $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = T_{\varphi} \text{ const.}$ Gruppenlaufzeit

$$\frac{\varphi(\omega)}{\omega} = T_{\varphi} \text{ const.} \quad \text{Phasenlaufzeit}$$

Mit diesem Ansatz:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \cdot e^{-j\omega n} = \pm |H(e^{j\omega})| e^{-j\alpha \omega}$$



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Dimensionierung von FIR-Filtern

- auf konstante Gruppen- und Phasenlaufzeit -

$$\pm |H(e^{j\omega})| \cdot \sin(\alpha\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot \sin(\omega n)$$

$$\pm |H(e^{j\omega})| \cdot \cos(\alpha\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot \cos(\omega n)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\omega) = \frac{\sin(\alpha\omega)}{\cos(\alpha\omega)} = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} h(n) \cdot \sin(\omega n)}{h(0) + \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \cdot \cos(\omega n)}$$

1. Lösung:

$\alpha = 0$ ist nur möglich, wenn

$$\begin{aligned} h(n) &\neq 0 & n &= 0 \\ h(n) &= 0 & n &= \{1; 2; \dots (N-1)\} \end{aligned}$$

Triviale Lösung, da der Puls unverformt und ohne Zeitverzögerung durchgegeben wird !

2. Lösung:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot \cos(\omega n) \cdot \sin(\alpha\omega) - \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega n) \cdot \cos(\alpha\omega) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot [\cos(\omega n) \cdot \sin(\alpha\omega) - \sin(\omega n) \cdot \cos(\alpha\omega)] = 0$$



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Dimensionierung von FIR-Filtern

- auf konstante Gruppen- und Phasenlaufzeit -

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot \sin[(\alpha - n)\omega] = 0$$

Mit der Bedingung

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

erhält man paarweise Sinuswerte mit gleichem Argument und entgegengesetztem Vorzeichen !

$$\begin{aligned} & h(0)\sin\left(\frac{N-1}{2}\omega\right) + h(1)\sin\left(\frac{N-3}{2}\omega\right) + \dots \\ & - h(N-1)\sin\left(\frac{N-1}{2}\omega\right) - h(N-2)\sin\left(\frac{N-3}{2}\omega\right) - \dots = 0 \end{aligned}$$

Diese Bedingung ist vollständig erfüllt, wenn:

$$h(0) = h(N-1); h(1) = h(N-2); h(2) = h(N-3) \quad \text{etc.}$$

gemacht wird, d.h. wenn um die Filtermitte die Koeffizienten $h(n)$ symmetrisch angeordnet sind.

Symmetriebedingung:

$$h(n) = h(N-1-n)$$



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Dimensionierung von FIR-Filtern

- auf konstante Gruppen- und Phasenlaufzeit -

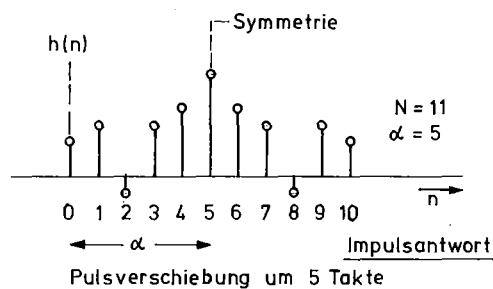
Fazit:

Bei vorgegebener Multiplizierzahl gibt es nur eine Phasenverzögerung $= (N-1)/2$, bei der der Phasengang streng linear ist !

Beispiel 1:

$N=11$ ungerades N

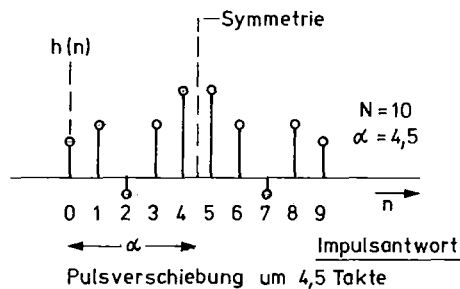
$$\alpha = (11-1)/2 = 5$$



Beispiel 2:

$N=10$ gerades N

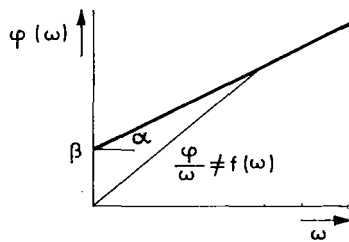
$$\alpha = (10-1)/2 = 4,5$$



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Dimensionierung von FIR-Filtern
- auf konstante Gruppenlaufzeit -

wird gefordert, daß nur die Gruppenlaufzeit
konstant ist



$$\varphi(\omega) = \beta - \alpha \cdot \omega$$

geforderter Phasenverlauf

Ansatz:

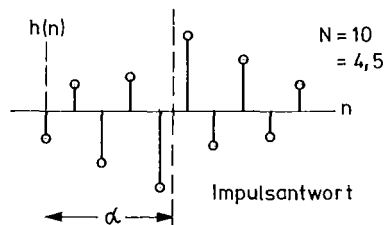
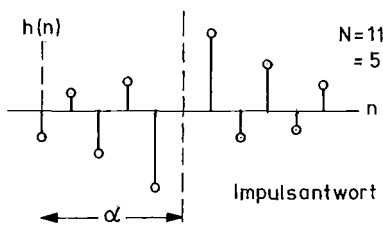
$$H(e^{j\omega}) = \pm |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j(\beta - \alpha\omega)}$$

Zu erfüllende Bedingungen:

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \quad \beta = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$h(n) = -h(N-1-n)$$

Antisymmetrie



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Dimensionierung von FIR-Filtern

- Entwurfsmethoden -

Amplitudengang ist unabhängig vom Phasengang und kann noch vorgegeben werden.

Periodischer Übertragungsfrequenzgang:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega \cdot n}$$

mit

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Frequenzgang kann exakt nicht realisiert werden, da immer nur eine endliche Anzahl $h(n)$ vorhanden ist !

Einfache Methode besteht in der Frequenzbandbeschneidung, führt aber zum Gibbs-Effekt !



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK

-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Dimensionierung von FIR-Filtern

- Entwurfsmethoden -

Approximation des Übertragungs-
frequenzganges mit:

- * Fensterfunktionen

- Rechteck-Fenster
- Verallgemeinertes Hamming-Fenster
- Kaiser-Fenster

- * Abtastung des Frequenzganges

- * Polynom in $\cos \omega$ bzw.
gleichwertig $(\cos \omega)^m$



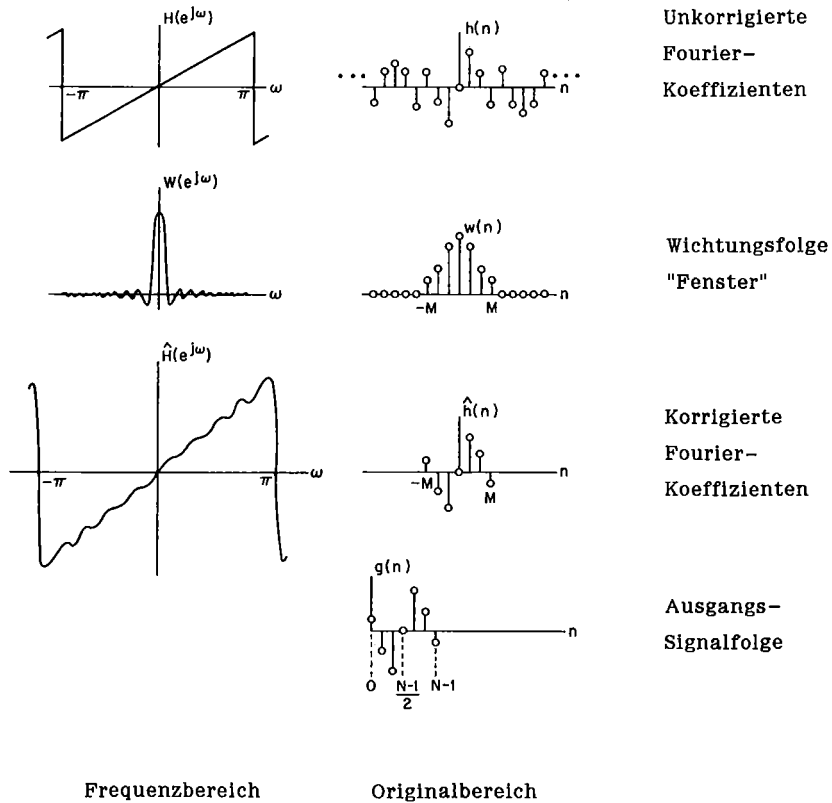
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK

- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Dimensionierung von FIR-Filtern

- Entwurfsmethoden -

Fenster-Methode:



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Dimensionierung von FIR-Filtern
- Entwurfsmethode Rechteck-Fenster -

Rechteck-Fenster:

$$w_R(n) = 1 \quad - \frac{N-1}{2} \leq n \leq + \frac{N-1}{2}$$

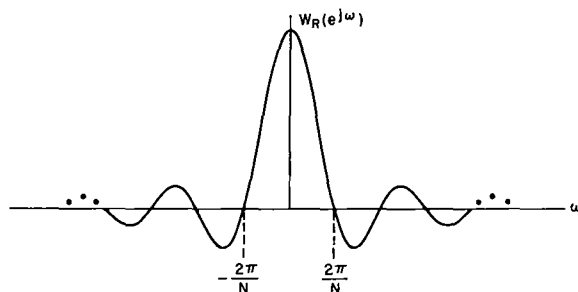
$$w_R(n) = 0 \quad \text{sonst}$$

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{-j\omega \cdot n}$$

$$= \frac{e^{j\omega (N-1)/2} (1 - e^{-j\omega N})}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{e^{j\omega (N/2)} - e^{-j\omega (N/2)}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}$$

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

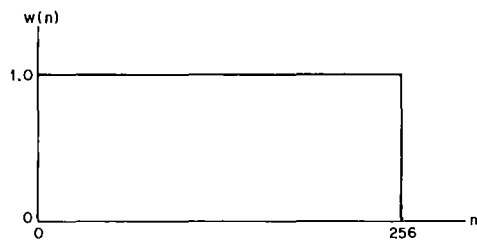


Frequenzgang

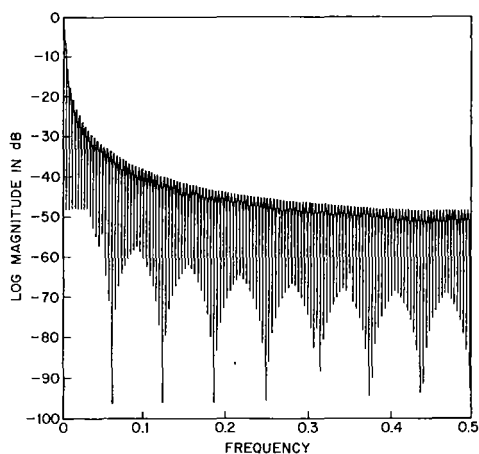


ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Dimensionierung von FIR-Filtern
- Entwurfsmethode Rechteck-Fenster -



257-Punkte Rechteck-Fenster



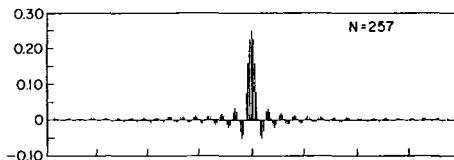
Spektrum des 257-Punkte Rechteck-Fensters



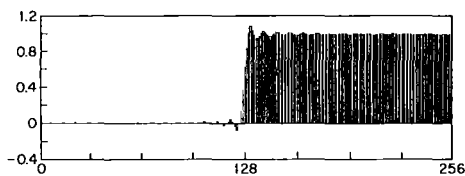
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Dimensionierung von FIR-Filtern
- Entwurfsmethode Rechteck-Fenster -

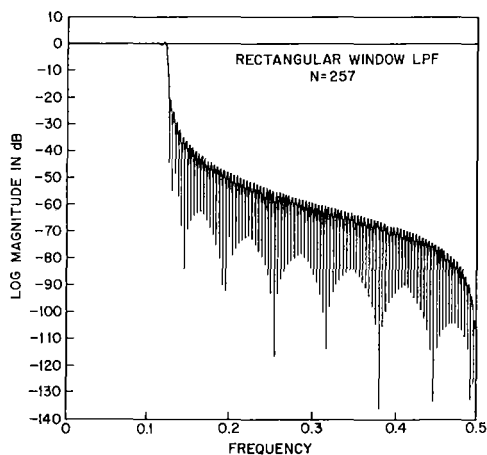
Beispiel für einen Tiefpaß mit Rechteck-Fenster:



Impulsantwort
eines Tiefpasses



Antwort auf
Sprungfunktionen



Frequenzgang



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Dimensionierung von FIR-Filtern
- Entwurfsmethode Hamming-Fenster -

Verallgemeinertes Hamming-Fenster:

$$W_H(n) = \alpha + (1-\alpha) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \quad - \quad \frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}$$

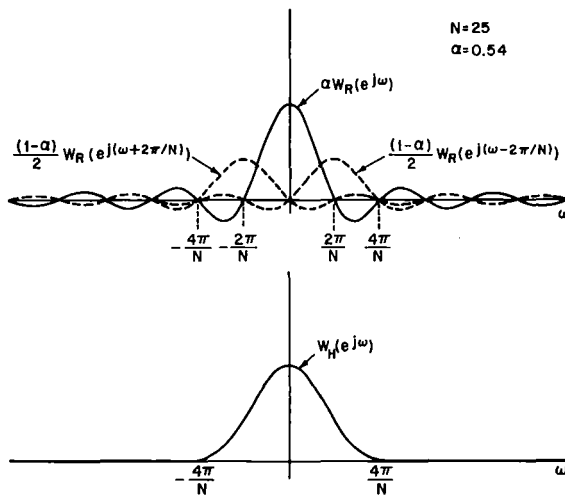
$$W_H(n) = 0 \quad \text{sonst}$$

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad = 0,54 \quad \text{Hamming-Fenster}$$

$$= 0,5 \quad \text{Hann-Fenster}$$

$$W_H(n) = W_R(n) \left[\alpha + (1-\alpha) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right]$$

$$W_H(e^{j\omega}) = \alpha W_R(e^{j\omega}) + \frac{1-\alpha}{2} \left\{ W_R[e^{j(\omega-2\pi/N)}] + W_R[e^{j(\omega+2\pi/N)}] \right\}$$

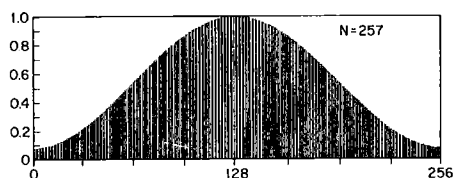


Frequenzgang
des Hamming-
Fensters

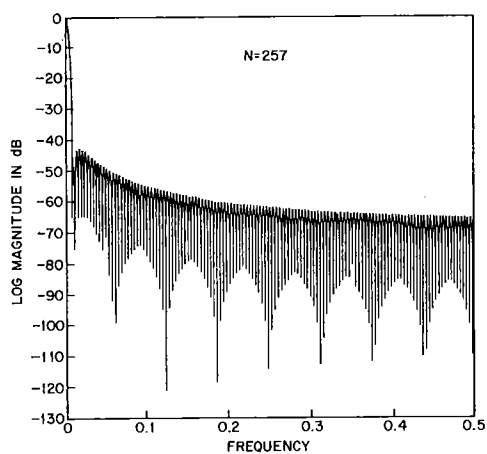


ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Dimensionierung von FIR-Filtern
- Entwurfsmethode Hamming-Fenster -



257-Punkte Hamming-Fenster



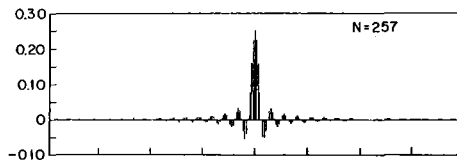
Spektrum des 257-Punkte
Hamming-Fensters



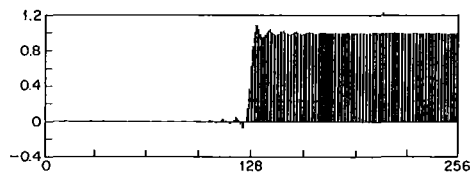
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Dimensionierung von FIR-Filtern
- Entwurfsmethode Hamming-Fenster -

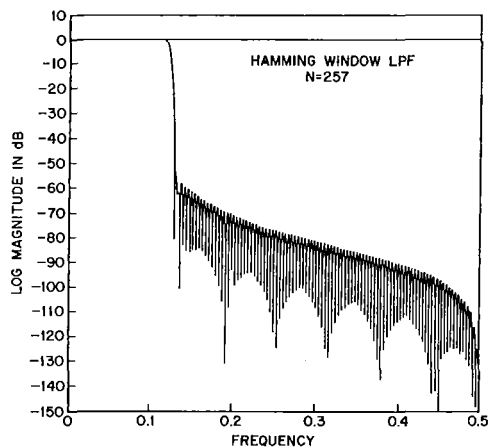
Beispiel für einen Tiefpaß mit Hamming-Fenster:



Impulsantwort
eines Tiefpasses



Antwort auf
Sprungfunktionen



Frequenzgang



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

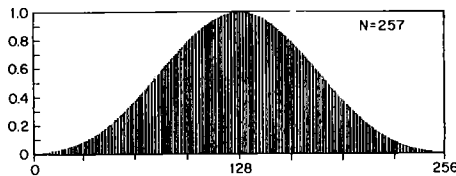
Dimensionierung von FIR-Filtern
- Entwurfsmethode Kaiser-Fenster -

Kaiser-Fenster:

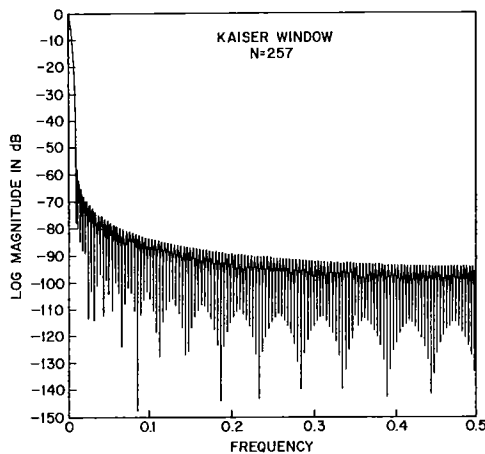
$$w_k(n) = \frac{I_0(\beta \cdot \sqrt{1 - [2n/(N-1)]^2})}{I_0(\beta)} \quad - \frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}$$

I_0 : Besselfunktion 0. Ordnung

Eine funktionale Darstellung des Spektrums
gibt es nicht !



257-Punkte
Kaiser-Fenster



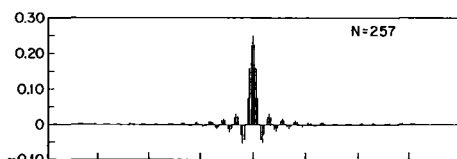
Spektrum des
257-Punkte
Kaiser-Fensters



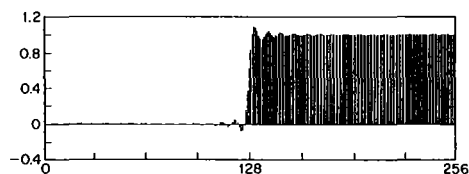
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Dimensionierung von FIR-Filtern - Entwurfsmethode Kaiser-Fenster -

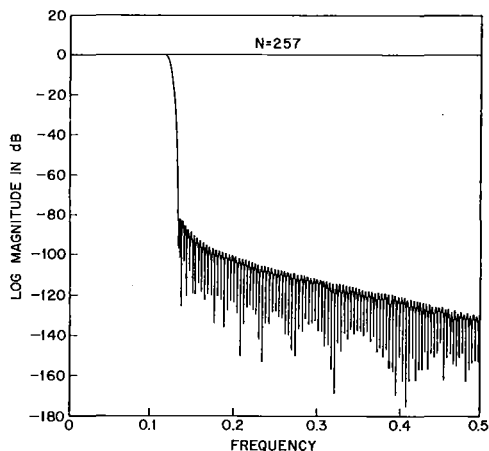
Beispiel für einen Tiefpaß mit Kaiser Fenster:



Impulsantwort
eines Tiefpasses



Antwort auf
Sprungfunktionen



Frequenzgang

Abhängigkeit der
Welligkeit von den
Dimensionierungs-
parametern β und D

β	D	Passband ripple (dB)	Stopband ripple (dB)
2.120	1.50	± 0.27	-30
3.384	2.23	± 0.0864	-40
4.538	2.93	± 0.0274	-50
5.658	3.62	± 0.00868	-60
6.764	4.32	± 0.00275	-70
7.865	5.0	± 0.000868	-80
8.960	5.7	± 0.000275	-90
10.056	6.4	± 0.000087	-100

(Courtesy of J. Kaiser, Bell Laboratories.)



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Dimensionierung von FIR -Filtern

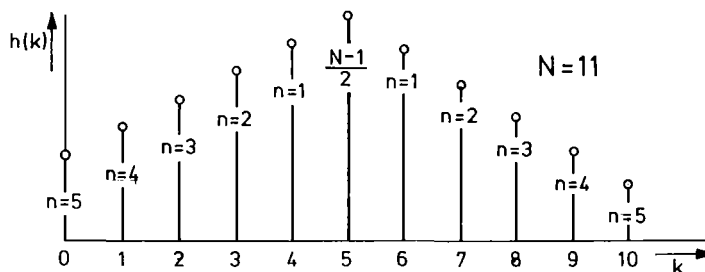
- Entwurfsmethode Polynom $\cos n\omega$ -

Ein vorgegebener Amplitudengang kann mit

$$|H(e^{j\omega})| = h\left(\frac{N-1}{2}\right) + 2 \cdot \sum_{n=1}^{(N-1)/2} h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \cos n\omega$$

experimentell durch paarweises Verändern der h-Koeffizienten ausgeführt werden, da zu jeder Harmonischen n der Cosinus-Funktion nur ein Wichtungsfaktor $h(\frac{N-1}{2} - n)$ gehört. Aus der für phasenlineare Filter gültigen Filtersymmetrie ergibt sich der zweite zu einem Koeffizienten-paar gehörende gleich große Koeffizient.

Beispiel:



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Dimensionierung von FIR-Filtern

- Entwurfsmethode Polynom in $\cos n\omega$ -

Filter mit gerader Anzahl Multiplizierer:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \\
 &= h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \dots + h(N-1)z^{-(N-1)} \\
 H(z) &= z^{-\frac{N-1}{2}} \left\{ h(0) z^{\frac{N-1}{2}} + h(1) z^{\frac{N-3}{2}} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + h(N-1) z^{-\frac{N-1}{2}} + h(N-2) z^{-\frac{N-3}{2}} + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

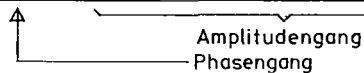
Mit der Bedingung für linearen Phasengang

$$h(n) = h(N-1-n) :$$

$$H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=1}^{N/2} h\left(\frac{N}{2} - n\right) \left[z^{(n-\frac{1}{2})} + z^{-(n-\frac{1}{2})} \right]$$

DFT:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \cdot 2 \cdot \sum_{n=1}^{N/2} h\left(\frac{N}{2} - n\right) \cos(2n-1) \frac{\omega}{2}$$





ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Dimensionierung von FIR-Filtern

- Entwurfsmethode Polynom in $\cos n\omega$ -

Filter mit ungerader Anzahl Multiplizierer:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

$$= h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \dots + h(N-1)z^{-(N-1)}$$

$$H(z) = z^{-(N-1)/2} \left\{ h(0) z^{(N-1)/2} + h(1) z^{(N-3)/2} + \dots \right. \\ \left. + h(N-1) z^{-(N-1)/2} + h(N-2) z^{-(N-3)/2} + \dots \right. \\ \left. + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right\}$$

Mit der Bedingung für linearen Phasengang

$$h(n) = h(N-1-n) :$$

$$H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} \left\{ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) (z^n + z^{-n}) \right\}$$

DFT:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j \frac{N-1}{2} \omega} \cdot \left\{ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + 2 \cdot \sum_{n=1}^{(N-1)/2} h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \cos \omega \right\}$$

$\uparrow$
 Amplitudengang
 linearer Phasengang



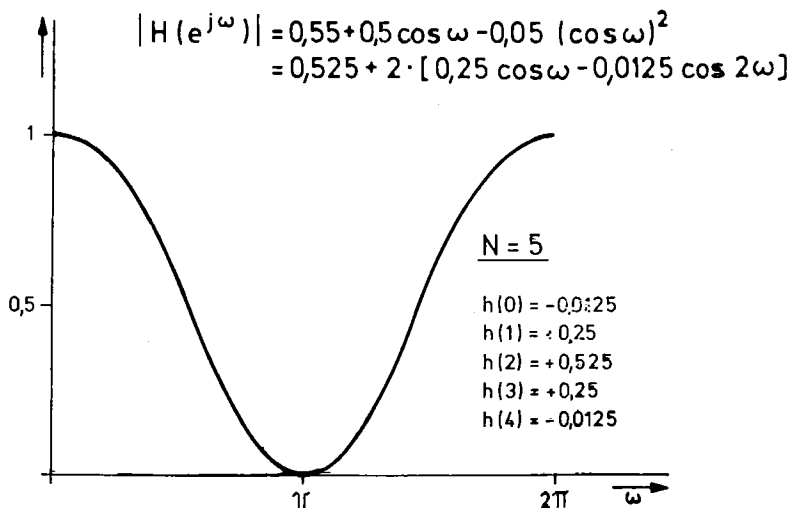
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Dimensionierung von FIR-Filtern
- Entwurfsmethode Polynom $(\cos \omega)^m$ -

Oft ist es vorteilhafter, bei der Approximation eines vorgegebenen Frequenzganges die gleichwertige Formel

$$|H(e^{j\omega})| = \sum_{m=0}^{(N-1)/2} b(m) (\cos \omega)^m$$

zu verwenden und aus den b-Koeffizienten die h-Koeffizienten entweder durch trigonometrische Umformung oder Fourieranalyse zu bestimmen.



KFA

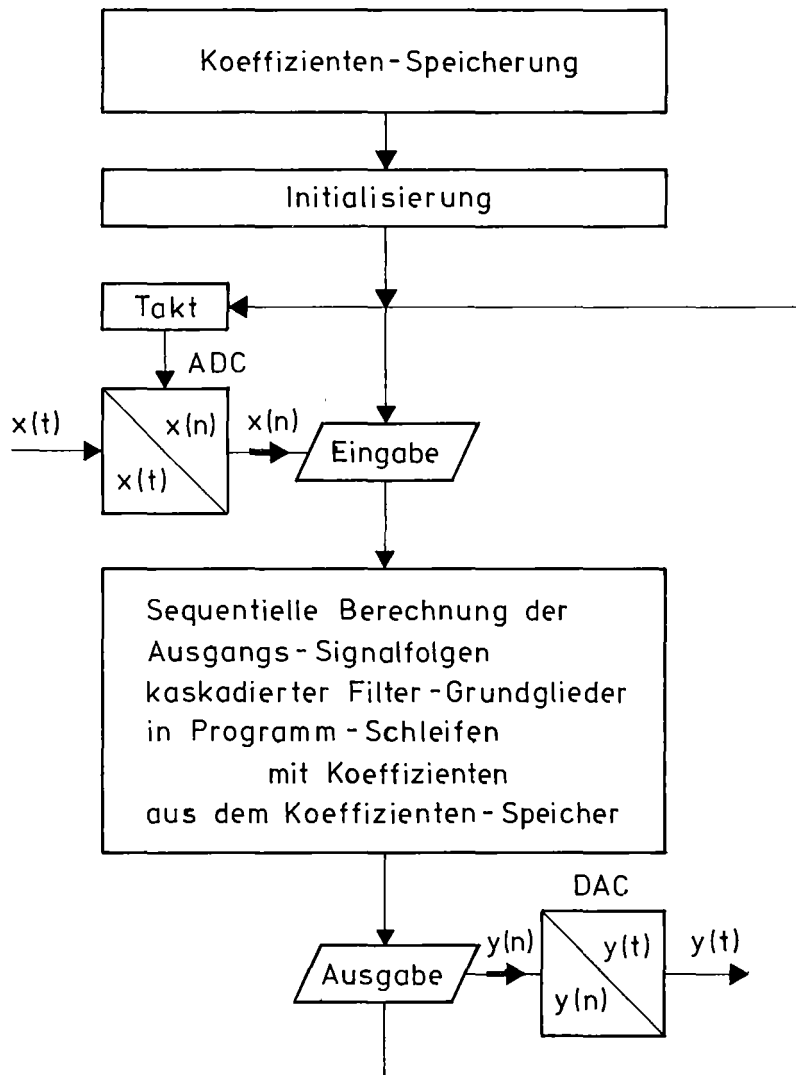
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

5.3 Ausführungsformen mit Signalprozessoren

5.3.1 Einprozessorausführung

Einprozessor - Signalverarbeitung



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
– Abteilung Allgemeine Elektronik –

5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

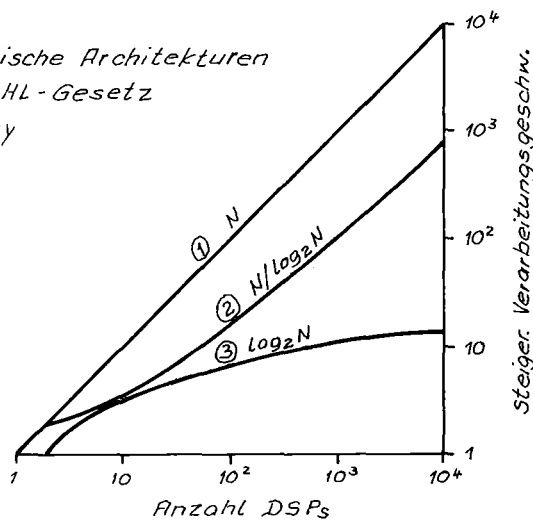
5.3 Ausführungsformen mit Signalprozessoren

5.3.2 Multi-Signalprozessorstrukturen

Steigerung der Verarbeitungsgeschwindigkeit von Signalen durch Multi-Prozessorbetrieb

- Multi-Prozessorbetrieb über einen gemeinsamen Bus wegen Bus-Verbindungsproblemen nur bei kleinen Multi-Prozessorsystemen.
- Die Steigerung der Verarbeitungsgeschwindigkeit hängt auch von den zuverarbeitenden Algorithmen ab.
- maximale Steigerung der Verarbeitungsgeschwindigkeit mit systolischen Systemen (Kung, Leiereson)

- ① systolische Architekturen
- ② ANDAHL-Gesetz
- ③ Minsky



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK

-Abteilung Allgemeine Elektronik-

5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

5.3 Ausführungsformen mit Signalprozessoren

5.3.2 Multi - Signalprozessorstrukturen

5.3.2.1 Nichtrekursive (FIR) Filter

Semisystolische
nicht rekursive Filter (FIR)

Eigenschaften:

- 1) Alle Signalprozessoren erhalten gleichzeitig denselben Signal-Abtastwert.
- 2) Die Regularitätsforderung ist durch den gleichartigen Aufbau einer aus dem DSP und seinen Daten-Links bestehenden Prozessorzelle und durch die Gleichheit aller DSP-Programme zu erfüllen.

Suche nach der Topologie der Schaltung:

allgemein

$$y = (c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + \dots + c_{M-1} z^{-(M-1)}) \cdot x$$

Erfüllung der 1. Forderung

$$y = (c_0 x) + z^{-1} \cdot (c_1 x) + z^{-2} \cdot (c_2 x) + \dots + z^{-(M-1)} \cdot (c_{M-1} x)$$

Ein Abtastwert wird gleichzeitig im jeweiligen DSP mit dem entsprechenden Filterkoeffizienten $c_{(m-1)}$ gewichtet.

Erfüllung der 2. Forderung

durch Aufbau der Funktion $Y(X)$ in gleichartige Klammerausdrücke.

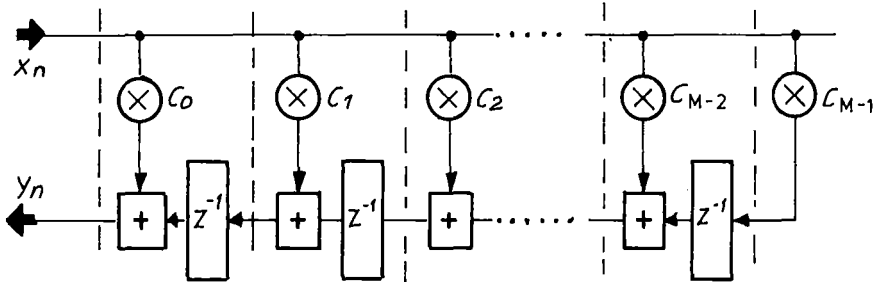
$$y = (c_0 x) + z^{-1} \left[(c_1 x) + z^{-1} \left[(c_2 x) + z^{-1} \left[(c_3 x) + \dots \right] \right] \right]$$



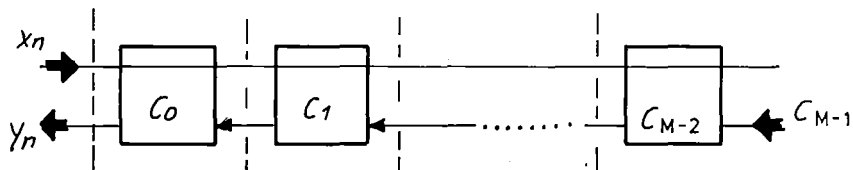
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Semisystolische Ausführung eines nichtrekursiven Filters (FIR)

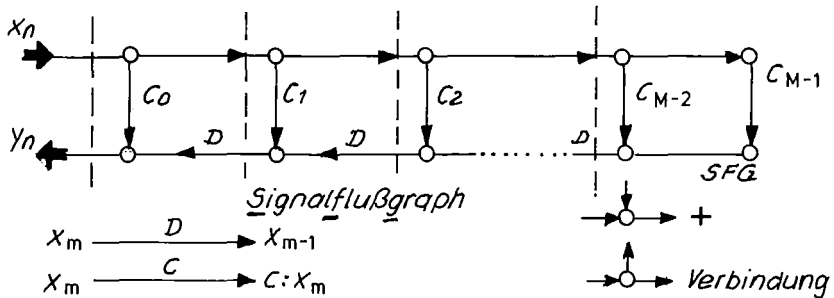
M : Anzahl der Zellen oder DSPs



Schaltung eines FIR Filters



Schematische Darstellung der Zellen eines semisystolischen FIR-Filters



KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Globalsystolisches
nicht rekursives Filter (FIR)

Eigenschaften

Wie semisystolische Filter, jedoch mit getakteter Eingabe der Signal-Abtastwerte zur elektrischen Entkopplung der Prozessorzellen.

Suche nach der Topologie der Schaltung:

Für das semisystolische FIR-Filter galt:

$$y = (c_0 x) + z^{-1} \left[(c_1 x) + z^{-1} \left[(c_2 x) + z^{-1} \left[(c_3 x) + \dots \right] \right] \right]$$

wird verallgemeinert statt z^{-1} , z^{-K}
für $k = 1, 2, 3, \dots$ gesetzt, so ist als Spezialfall der erste enthalten. Wegen

$$z^{-K} = (e^{pT_a})^{-K} = (e^{pK T_a})^{-1}$$

↑
diskrete Laplace-Transformierte



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
– Abteilung Allgemeine Elektronik –

Globalsystolisches
nicht rekursives Filter (FIR)

K vervielfacht die für das semisystolische FIR-Filter gültige Taktzeit. Die Filterkoeffizienten C_{m-1} hängen von dieser ebenfalls ab, so daß sie für das globalsystolische FIR-Filter gleichen Zeitverhaltens neu bestimmt werden müssen.

$$y = a_0 x + z^{-K} \cdot \left[(a_1 x) + z^{-K} \cdot \left[(a_2 x) + z^{-K} \cdot \left[(a_3 x) + \dots \right] \right] \right]$$

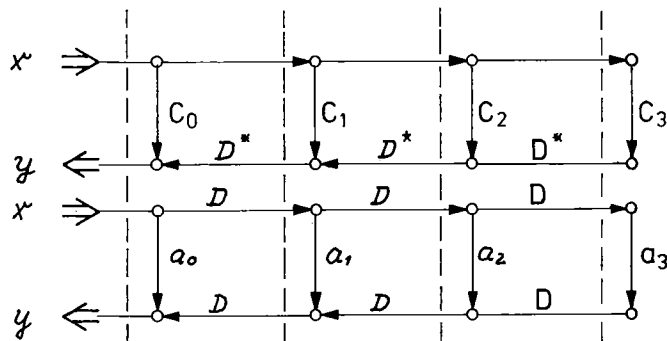
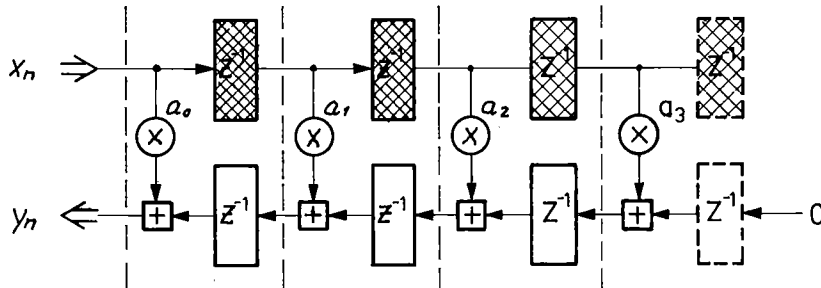
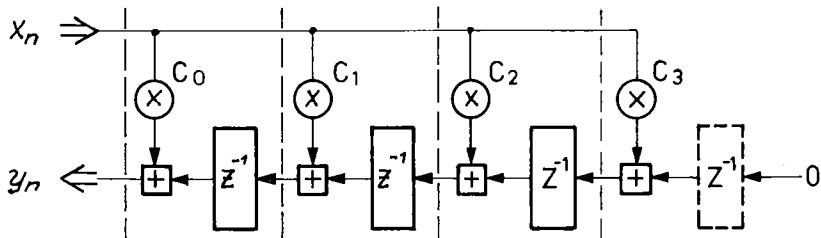
Für $K = 2$ gilt für das globalsystolische Filter unter Berücksichtigung seiner Topologie:

$$y = a_0 x + z^{-1} \cdot \left[a_1 (z^{-1} x) + z^{-1} \cdot \left[a_2 (z^{-2} x) + z^{-1} \cdot \left[a_3 (z^{-3} x) + \dots \right] \right] \right]$$



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

*Umwandeln eines semisystolischen in ein
globalsystolisches FIR-Filter 2. Ordnung*



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

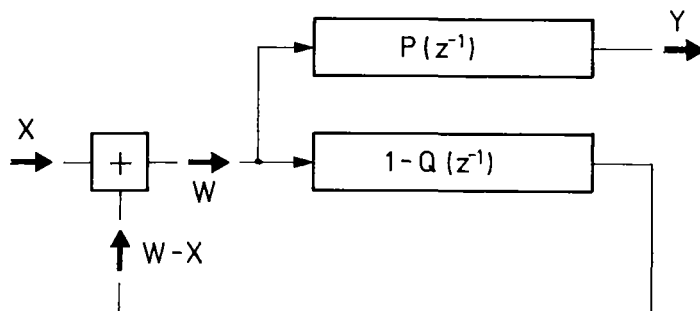
5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

5.3 Ausführungsformen mit Signalprozessoren

5.3.2 Multi - Signalprozessorstrukturen

5.3.2.2 Rekursive (IIR) Filter

Systolische rekursive Filter



$P(z^{-1})$ und $1-Q(z^{-1})$ sind die Übertragungsfunktionen zweier nicht rekursiver Filter.

$$\begin{aligned} W-X &= [1-Q(z^{-1})] \cdot W \\ Y &= P(z^{-1}) \cdot W \end{aligned}$$

$$\frac{Y}{P(z^{-1})} - X = [1-Q(z^{-1})] \frac{Y}{P(z^{-1})}$$

$$\boxed{\frac{Y}{X} = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}}$$

KFA

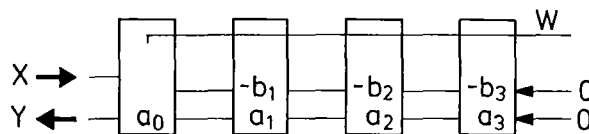
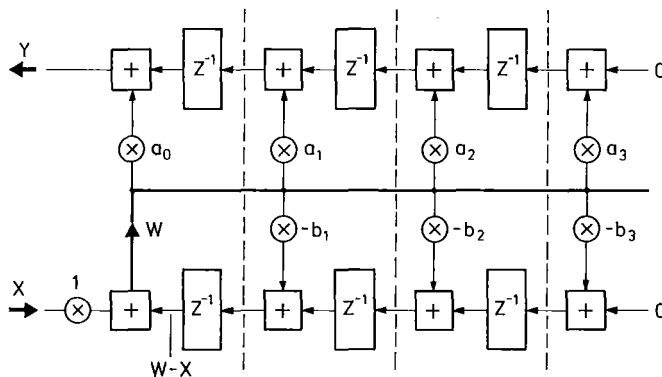
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Semisystolisches
rekursives Filter

Mit: $P(z^{-1}) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots$
 $Q(z^{-1}) = 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots$

$$Y = (a_0 W) + z^{-1} \left[(a_1 W) + z^{-1} \left[(a_2 W) + \dots \right] \right]$$

$$W - X = 0 \cdot W - z^{-1} \left[(b_1 W) - z^{-1} \left[(b_2 W) - \dots \right] \right]$$



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
 -Abteilung Allgemeine Elektronik-

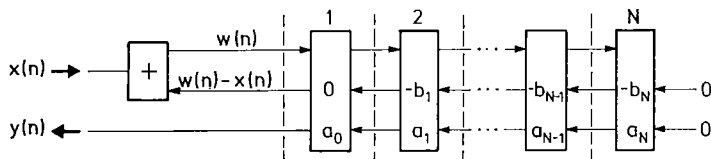
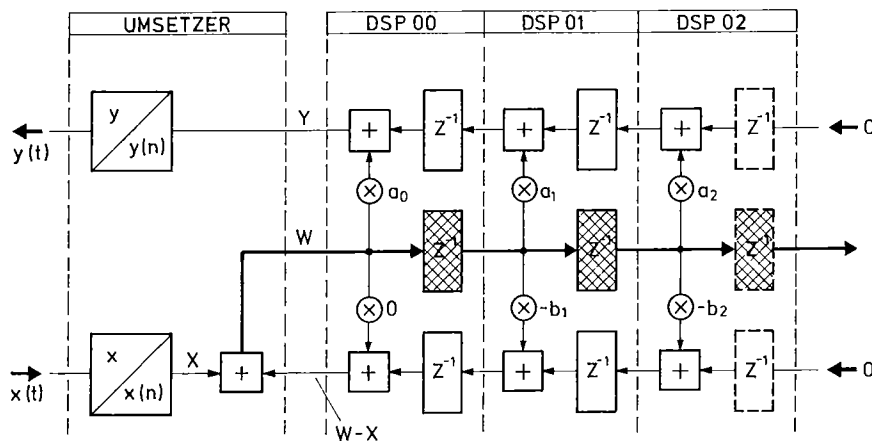
Globalsystolisches
rekursives Filter (IIR)

$$Y = P(z^{-1}) \cdot W$$

$$W - X = [1 - Q(z^{-1})] \cdot W$$

$$Y = a_0 W + z^{-1} \left[a_1 (z^{-1} W) + z^{-1} \left[a_2 (z^{-2} W) + z^{-1} \left[a_3 (z^{-3} W) + \dots \right] \right] \right]$$

$$W - X = 0 \cdot W + z^{-1} \left[-b_1 (z^{-1} W) + z^{-1} \left[-b_2 (z^{-2} W) + z^{-1} \left[-b_3 (z^{-3} W) + \dots \right] \right] \right]$$



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

5.3 Ausführungsformen mit Signalprozessoren

5.3.2 Multi - Signalprozessorstrukturen

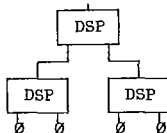
5.3.2.3 Binärer Baum

Terminal-Eingabe Globalsystolischer Baum

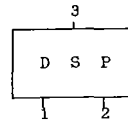
ARCHITEKTUR-VORGABE :

PROGRAMMNAME : name
ARCHITECTURE : tree

Character-Symbol :



Single-Symbol :



which Installation do you want ?

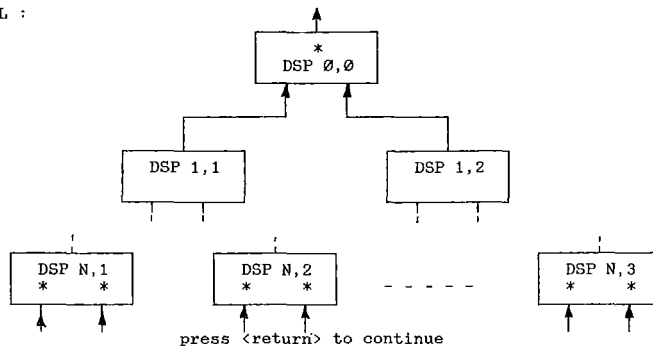
- DAC / ADC on the top [dac/adc] ?
- how many output/input parameters [1..ms] ?
- contra data flow between the DSPs [y/n] ?

Correction [Y/N] ?

PROGRAMMEINGABE :

PROGRAMMNAME : name
ARCHITECTURE : tree
DSP-NUMBERS : 25

DETAIL :



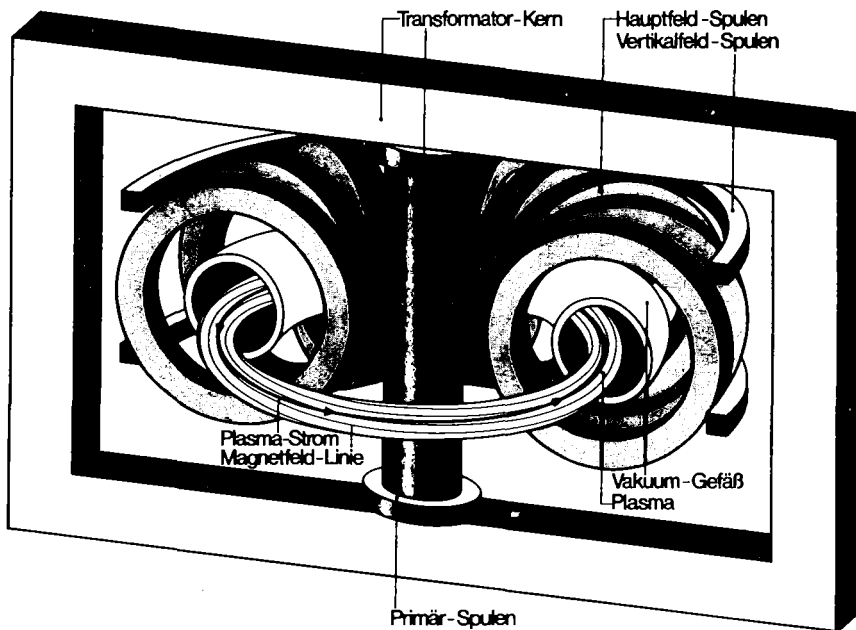
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

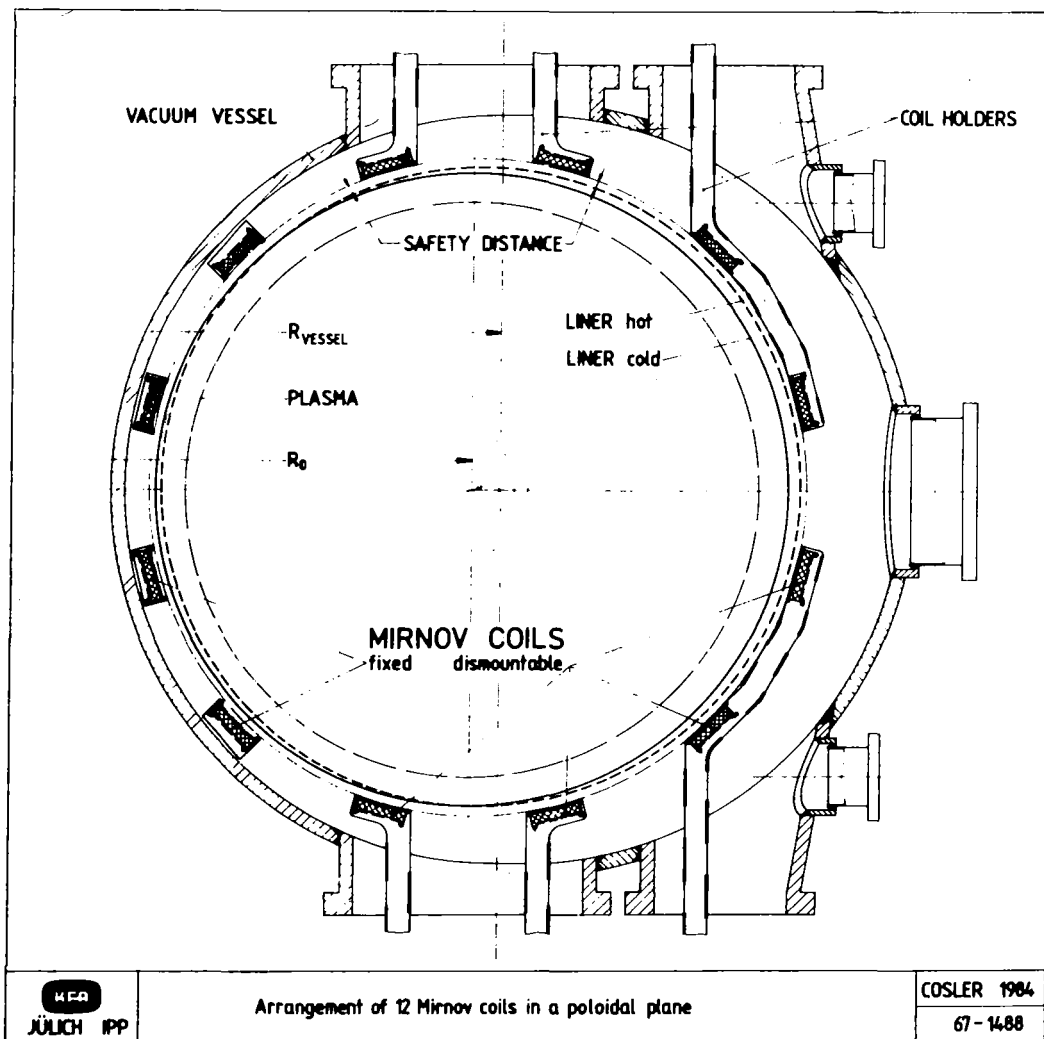
5.4 Ausführungsbeispiele

5.4.1 Feldstruktursimulator als Beispiel einer Quasi - Analogrechnerstruktur

Feldstruktursimulator
für TEXTOR

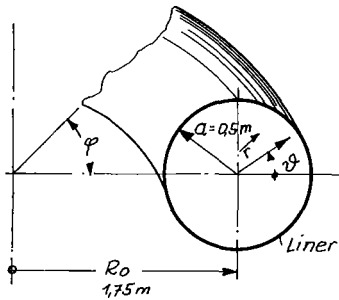


ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-



Feldstruktursimulator TEXTOR

- Modellbeschreibung -



$$f_{\vartheta} = \frac{a}{R_0} \cdot \cos(2\pi \cdot \vartheta)$$

Plasmastromprofil:

$$f_r = \frac{1}{1 + (k_0 \cdot r)^2}$$

$$S = \frac{a}{b} \pi \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin 2\pi (\bar{m} \vartheta - \bar{n} \varphi)$$

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi} = (1 + r \cdot f_{\vartheta})^2 \cdot f_r \cdot l_0$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = (1 + r \cdot f_{\vartheta})^2 \cdot 2 \cdot S$$

Elektrische Analogie

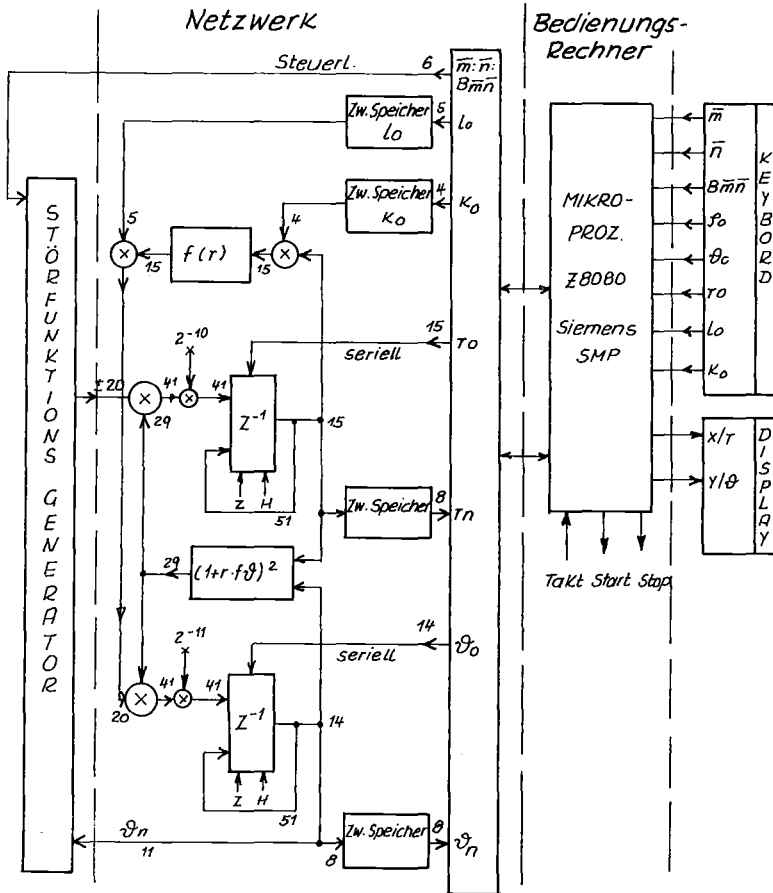
Zu simulierende Größen	Analog- Netzwerk ANALOG-Rechner	Digital- Netzwerk HARDWARE- Rechner
φ	$\longrightarrow t$	$\longrightarrow n \cdot \Delta T$
$\vartheta(\varphi)$	$\longrightarrow U_{\vartheta}(t)$	$\longrightarrow \vartheta_n$
$r(\varphi)$	$\longrightarrow U_r(t)$	$\longrightarrow r_n$



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Feldstruktursimulator TEXTOR

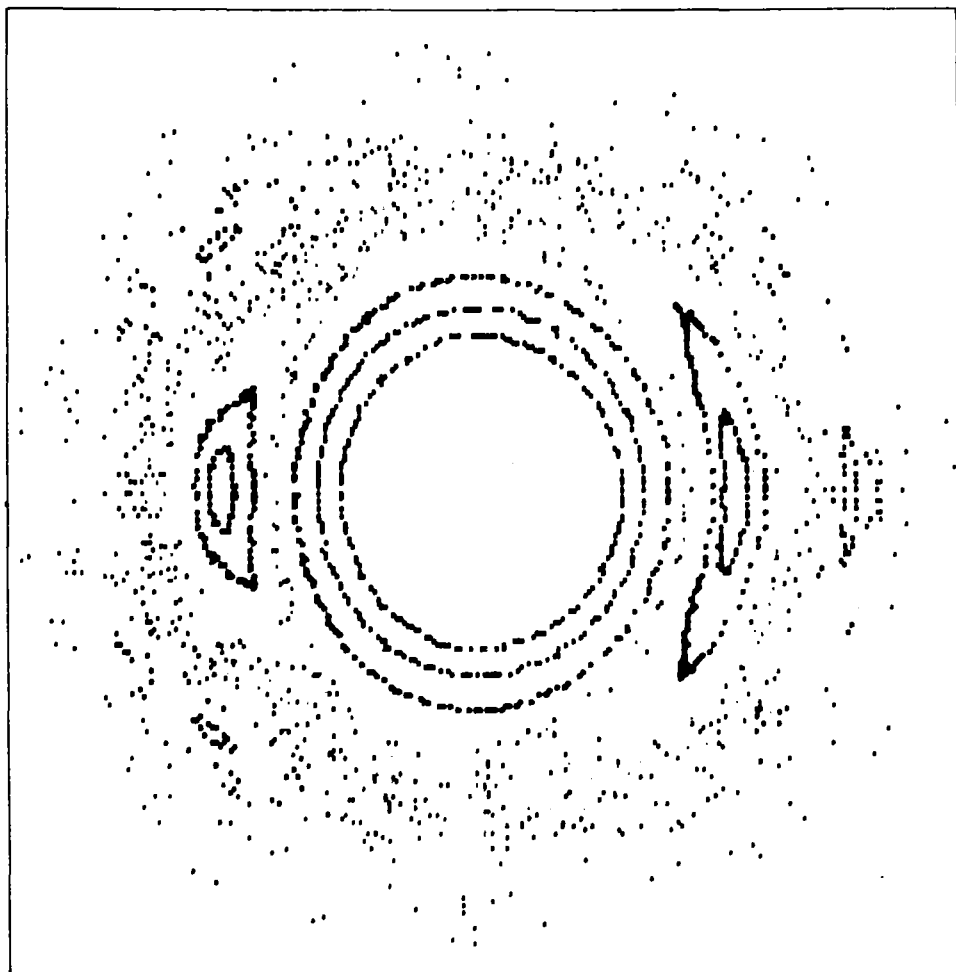
- Aufbau -



KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Plasma-Moden Plot-Nr.: 011



5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

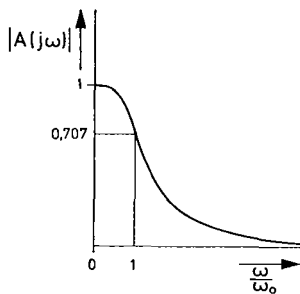
5.4 Ausführungsbeispiele

5.4.2 Butterworth-Tiefpaß zweiter Ordnung

Direkte Dimensionierungsmethode mit der
bilinearen Transformation

Beispiel:

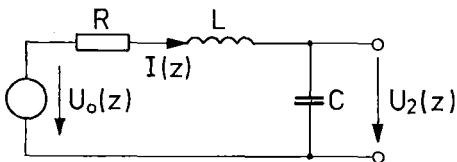
Butterworth-Tiefpaß



$$|A(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 + \left(\tau^2 - \frac{2}{\omega_0^2}\right)\omega^2 + 1}}$$

$$|A(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 + 1}}$$

Butterworthbedingung: $\omega_0 \tau = \sqrt{2}$



$$U_2(z) = \frac{T_a}{2C} \frac{z+1}{z-1} \cdot I(z)$$

$$U_0(z) = \left(R + \frac{2L}{T_a} \frac{z-1}{z+1} + \frac{T_a}{2C} \frac{z+1}{z-1} \right) \cdot I(z)$$

$$A(z) = \frac{U_2(z)}{U_0(z)} = C_0 \cdot \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 + 2 \frac{1 - \left(\frac{2}{\omega_0 T_a}\right)^2}{1 + \left(\frac{2}{\omega_0 T_a}\right)^2 + \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0 T_a}} \cdot z + \frac{1 + \left(\frac{2}{\omega_0 T_a}\right)^2 - \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0 T_a}}{1 + \left(\frac{2}{\omega_0 T_a}\right)^2 + \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0 T_a}}}$$

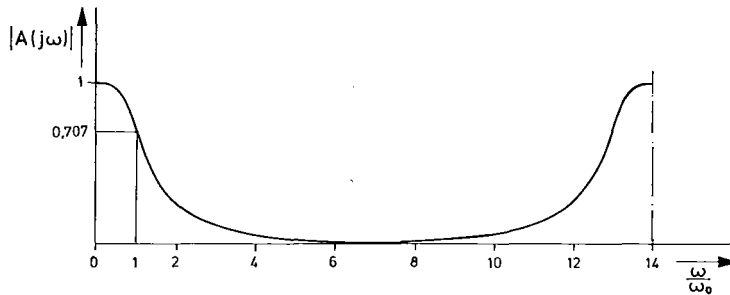
$$C_0 = \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\omega_0 T_a}\right)^2 + \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0 T_a}}$$



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Direkte Dimensionierungsmethode mit der bilinearen Transformation

Bestimmung der Abtastfrequenz:

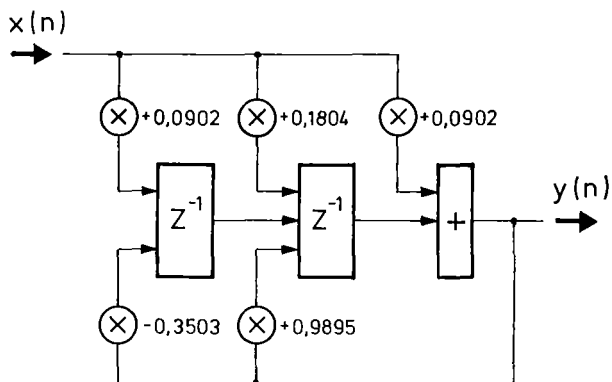


Mit Abtasttheorem:

$$\frac{1}{T_a} = 2 \cdot (4 \cdot f_o) = 8 \cdot f_o$$

$$\rightarrow f_o T_a = \frac{1}{8} \rightarrow \omega_o T_a = \frac{2\pi}{8} = 0,7854$$

$$A(z) = \frac{0,0902 \cdot z^2 + 0,1804 \cdot z + 0,0902}{z^2 - 0,9895 \cdot z + 0,3503}$$



KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

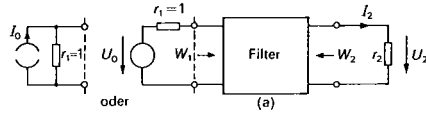
5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

5.4 Ausführungsbeispiele

5.4.3 Entwurf eines Tiefpasses dritter Ordnung mit dem Filterkatalog von Rudolf Saal

Filterentwurf

mit Filterkatalog von Rudolf Saal



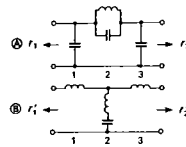
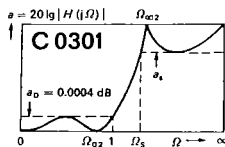
$$A(p) = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}}{H(p)}$$

$H(p)$ = Betriebsdämpfungs-
funktion
 $A(p)$ = Übertragungsfunktion

Normierung:

$$r_1 = \frac{R_1}{R_B} \quad r_2 = \frac{R_2}{R_B} = \frac{R_2}{R_1} \quad \Omega = \frac{f/\text{Hz}}{f_B/\text{Hz}}$$

C 0301



$$H(p) = C \frac{(p^2 - \alpha_1)(p^2 - 2\alpha_2 p + \gamma_2)}{p^2 + \Omega_{c2}^2}$$

$$\gamma_2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2$$

Θ	Ω_c	a_n dB	r	$r_1 = 1$ c_{2r-1}	$r_2 = 1$ c_{2r}	$r_1 = \infty$ c_{2r-1}	$r_2 = 1$ c_{2r}	Ω_{c2r}	Ω_{c2r}	$-\alpha_r$	$\pm \beta_r$	C
P			1	0.215447	0.430834	0.323171	0.187763		0.000000000	4.8415114708	0.000000000	0.010000560
			2	0.215447		0.107724			0.000000000	2.3207157853	4.0186688435	
T			1	0.352206	0.944508	0.448448	0.455598		0.000000000	2.8184388508	0.000000000	0.040002000
			2	0.352206		0.176150			0.000000000	1.4195469302	2.0462972783	
8	9.586772351	42.9	1	0.343535	0.827272	0.497358	0.432286	0.018938	0.000000000	2.9107329726	0.000000000	4.814785535
			2	0.343535		0.159325			0.000000000	1.3523789750	2.0957114334	
7	8.205890648	38.8	1	0.340400	0.821032	0.497103	0.425786	0.035243	0.000000000	2.9371163604	0.000000000	3.384408978
			2	0.340400		0.153859			0.000000000	1.3285827705	2.0681881810	
8	7.182296325	35.3	1	0.338183	0.813815	0.495910	0.415591	0.035096	0.000000000	2.9644221256	0.000000000	2.726915506
			2	0.338183		0.146780			0.000000000	1.3013678488	2.0557783388	
9	6.292453222	32.3	1	0.332845	0.805857	0.488244	0.405513	0.045401	0.000000000	3.0652088188	0.000000000	2.162732500
			2	0.332845		0.138450			0.000000000	1.2705814508	2.0438011198	
10	5.759770483	29.5	1	0.327603	0.798552	0.480602	0.393538	0.057642	0.000000000	3.0482218878	0.000000000	1.748202228
			2	0.327603		0.128424			0.000000000	1.2377128109	2.008118270	
11	5.248843084	27.0	1	0.322881	0.792543	0.472719	0.385987	0.072003	0.000000000	3.0948147110	0.000000000	1.438143756
			2	0.322881		0.119023			0.000000000	1.2004101042	2.0972892200	
12	4.809734345	24.7	1	0.317444	0.785643	0.463759	0.376192	0.088827	0.000000000	3.1501185144	0.000000000	1.207017019
			2	0.317444		0.107379			0.000000000	1.1600358911	2.1523187115	
13	4.415411432	22.8	1	0.311448	0.778865	0.454887	0.365184	0.108548	0.000000000	3.2104050350	0.000000000	1.027714841
			2	0.311448		0.094402			0.000000000	1.1186189973	2.2618888834	
14	4.135854584	20.7	1	0.305003	0.772030	0.445847	0.353750	0.131776	0.000000000	3.2748581701	0.000000000	0.884424844
			2	0.305003		0.080084			0.000000000	1.0753884486	2.3772214924	
15	3.883703595	18.9	1	0.298122	0.765287	0.436841	0.341833	0.159023	0.000000000	3.3431790559	0.000000000	0.789282845
			2	0.298122		0.068076			0.000000000	1.0721232385	2.4870713187	
16	3.637955279	17.2	1	0.290821	0.758206	0.428741	0.330624	0.191398	0.000000000	3.4182445105	0.000000000	0.675047314
			2	0.290821		0.049182			0.000000000	0.9787879581	2.5551510418	
17	3.420303620	15.7	1	0.282122	0.751559	0.420816	0.318858	0.223959	0.000000000	3.5022048773	0.000000000	0.586504908
			2	0.282122		0.027389			0.000000000	0.9284283802	2.6406374431	
18	3.238867978	14.2	1	0.272851	0.745158	0.413173	0.307824		0.000000000	3.5888935244	0.000000000	0.511497555
			2	0.272851		0.005716			0.000000000	0.8771388184	2.7234483542	



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Filterentwurf

- Beispiel C031 -

Bilineare Transformation:

$$p = \frac{\frac{2\pi}{T_a}}{\omega_B} \frac{z-1}{z+1} \quad \begin{array}{l} \omega_B = \text{Bezugs-Kreisfrequenz} \\ T_a = \text{Abtastzeit} \end{array}$$

$p = k \frac{z-1}{z+1}$	$k = \frac{2}{T_a \omega_B}$
-------------------------	------------------------------

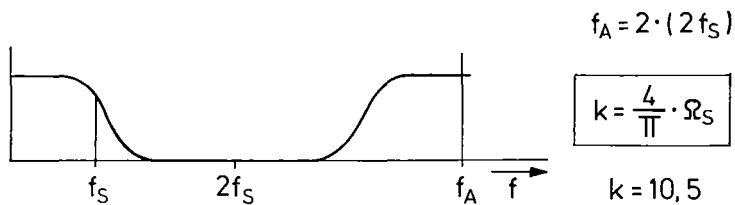
Dimensionierungsbeispiel C0301:

$$\begin{array}{ll} \alpha_S = 42,9 \text{ dB} & \Omega_S = 9,566772234 \\ \alpha_D = 0,0004 \text{ dB} & \Omega_{\infty 2} = 11,039187451 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = -2,9107397976 & \beta_1 = \pm 0,0000000000 \\ \alpha_2 = -1,3523783769 & \beta_2 = \pm 2,6067114834 \end{array}$$

$c = 4,854768535$	$\gamma_2 = 8,6238$
-------------------	---------------------

$$k = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{f_A}{f_B} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{f_A/\text{Hz}}{f_S/\text{Hz}} \cdot \Omega_S$$



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

Filterentwurf

- Bilineare Transformation von $A(p)$ -

Nach Filterkatalog R. Saal für C031:

$$A(p) = \frac{1}{2c} \frac{p^2 + \Omega_{\infty 2}^2}{(p - \alpha_1)(p^2 - 2\alpha_2 p + \gamma_2)}$$

Mit bilinearer Transformation:

$$p = k \frac{z-1}{z+1}$$

$$A(z) = \frac{1}{2c} \frac{\left(k \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \Omega_{\infty 2}^2}{\left[\left(k \frac{z-1}{z+1}\right) - \alpha_1\right] \cdot \left[\left(k \frac{z-1}{z+1}\right)^2 - 2\alpha_2 \left(k \frac{z-1}{z+1}\right) + \gamma_2\right]}$$

$$A(z) = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{z+1}{z-b_{11}} \cdot \frac{a_{20}z^2 + a_{21}z + a_{20}}{z^2 - b_{21}z + b_{20}}$$

$A(z)$ ist die Übertragungsfunktion eines Filtergliedes 1. Ordnung und eines Filtergliedes 2. Ordnung.

Für das Filter C031 gilt:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c(k - \alpha_1)(k^2 - 2\alpha_2 k + \gamma_2) &= 130,2125 \cdot 147,2742 \\ b_{11} &= (k + \alpha_1)(k - \alpha_1) &= + 0,5659 \\ a_{20} &= k^2 + \Omega_{\infty 2}^2 &= +232,1139 \\ a_{21} &= 2 \cdot (\Omega_{\infty 2}^2 - k^2) &= + 23,2278 \\ b_{21} &= 2 \cdot (k^2 - \gamma_2) / (k^2 - 2\alpha_2 k + \gamma_2) &= + 1,3801 \\ b_{20} &= (k^2 + 2\alpha_2 k + \gamma_2) / (k^2 - 2\alpha_2 k + \gamma_2) &= + 0,6143 \end{aligned}$$

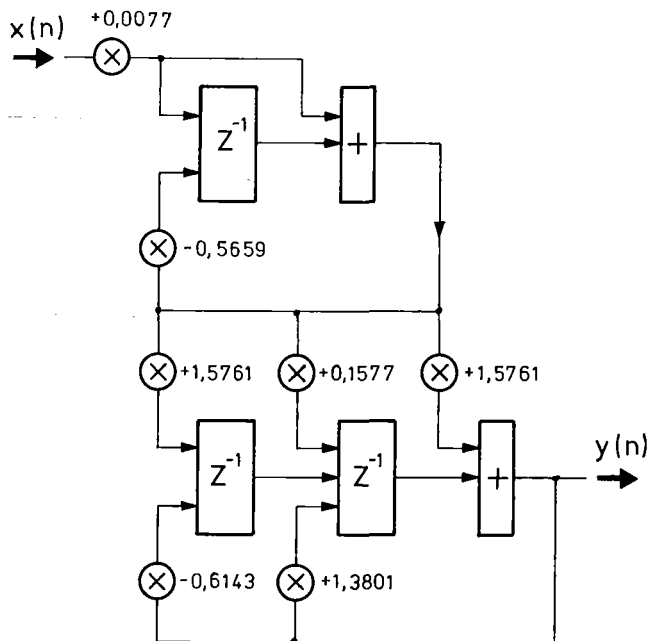


ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Filterentwurf

- Schaltung des Tiefpasses C031 -

$$A(Z) = 0,0077 \cdot \frac{Z+1}{Z-0,5659} \cdot \frac{1,5761 Z^2 + 0,1577 Z + 1,5761}{Z^2 - 1,3801 Z + 0,6143}$$



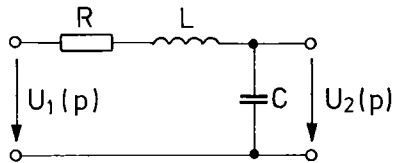
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

5.4 Ausführungsbeispiele

5.4.4 Oszillator

Oszillator



$$\tau = RC$$

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$$

$$A(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{1 + p\tau + \frac{1}{\omega_o^2} p^2}$$

Bilineare Transformation:

$$A(z) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2}{\omega_o T_a}\right)^2\right] + \frac{2L}{T_a}} \cdot \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 + 2 \frac{1 - \left(\frac{2}{\omega_o T_a}\right)^2 \cdot z}{\left[1 + \left(\frac{2}{\omega_o T_a}\right)^2\right] + \frac{2L}{T_a}} + \frac{\left[1 + \left(\frac{2}{\omega_o T_a}\right)^2\right] - \frac{2L}{T_a}}{\left[1 + \left(\frac{2}{\omega_o T_a}\right)^2\right] + \frac{2L}{T_a}}}$$

$$\frac{2}{\omega_o T_a} = \frac{1}{\pi} \frac{f_a}{f_o} \geq \frac{2}{\pi}$$

$$\Delta = \frac{2L}{T_a}$$

Beim idealen Oszillator ist $\Delta = 0$!

Durch Rundungsfehler bedingt ist er instabil. Durch ein experimentell zu ermittelndes $\Delta \neq 0$ wird die Stabilität erreicht.

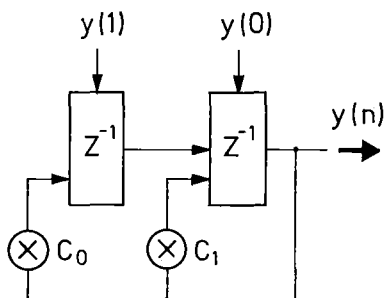


ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
– Abteilung Allgemeine Elektronik –

Oszillator

$$A(z) = \frac{\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1}{\pi} \frac{f_a}{f_o}\right)^2\right] + \Delta} z^2 + \frac{2}{\left[1 + \left(\frac{1}{\pi} \frac{f_a}{f_o}\right)^2\right] + \Delta} z + \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1}{\pi} \frac{f_a}{f_o}\right)^2\right] + \Delta}}{z^2 + 2 \frac{1 - \left(\frac{1}{\pi} \frac{f_a}{f_o}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{1}{\pi} \frac{f_a}{f_o}\right)^2\right] + \Delta} \cdot z + \frac{\left[1 + \left(\frac{1}{\pi} \frac{f_a}{f_o}\right)^2\right] - \Delta}{\left[1 + \left(\frac{1}{\pi} \frac{f_a}{f_o}\right)^2\right] + \Delta}}$$

Da der Oszillator freier schwingt, bekommt er kein Eingangssignal. Deshalb sind nur die Koeffizienten des Nennerpolynoms wichtig !



$$C_0 = - \frac{\left[1 + \left(\frac{1}{\pi} \frac{f_a}{f_o}\right)^2\right] - \Delta}{\left[1 + \left(\frac{1}{\pi} \frac{f_a}{f_o}\right)^2\right] + \Delta} \approx -1$$

Anfangsbedingung
für Sinusgenerator :

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = \sin(\omega_o T_a) = \sin\left(2\pi \frac{f_o}{f_a}\right)$$

$$C_1 = -2 \frac{1 - \left(\frac{1}{\pi} \frac{f_a}{f_o}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{1}{\pi} \frac{f_a}{f_o}\right)^2\right] + \Delta}$$



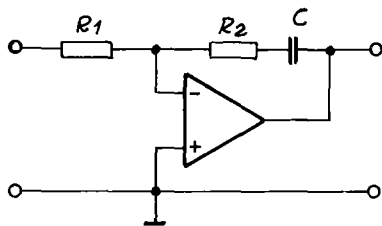
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

5.4 Ausführungsbeispiele

5.4.5 PI-Glied

Digitale Signalverarbeitung in der Regelungstechnik PI-Glied

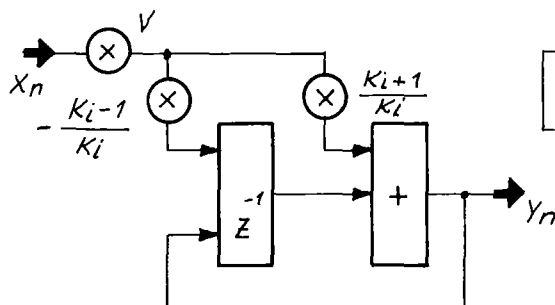


$$V = \frac{R_2}{R_1}$$

$$T_i = R_2 C$$

$$A(p) = V \frac{1 + p T_i}{p T_i}$$

Laplace
Transformierte



$$K_i = \frac{2 T_i}{T_a} > 1$$

$$A^*(z^{-1}) = V \frac{\frac{K_i + 1}{K_i} - \frac{K_i - 1}{K_i} \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Biliniare
Transformierte

KFA

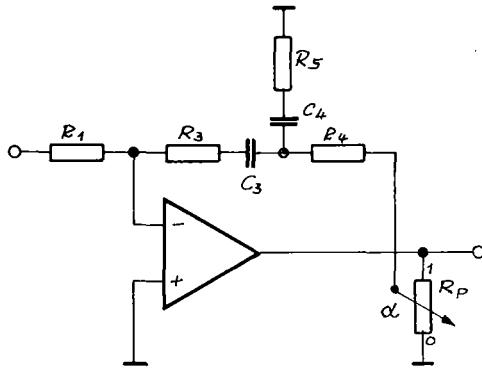
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

5.4 Ausführungsbeispiele

5.4.6 PID - Glied

*Digitale Signalverarbeitung in der
Regelungstechnik
PID - Glied*



Nebenbedingungen

$$R_p, R_5 \ll R_4 \ll R_3$$

$$C_3 \ll C_4$$

$$V \approx \frac{R_3}{\alpha R_2}$$

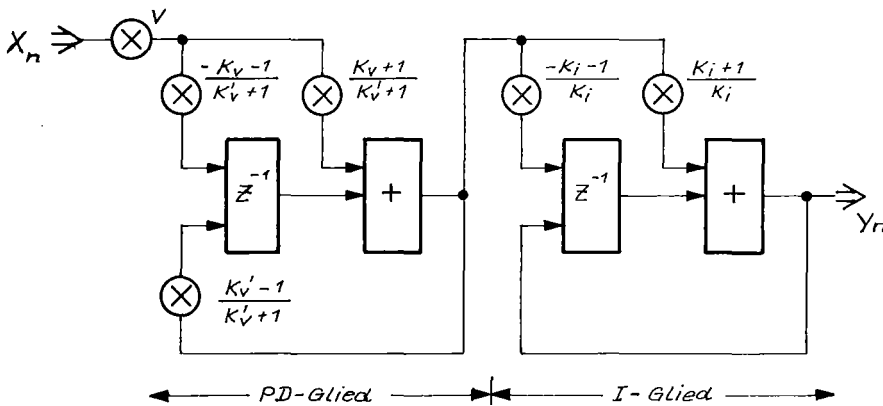
$$T_i \approx R_3 C_3$$

$$T_v \approx R_4 C_4$$

$$T_v' \approx R_5 C_4$$

$$A(p) = V \frac{T_i p + 1}{T_i p} \cdot \frac{T_v p + 1}{T_v' p + 1}$$

Laplace Transformierte



KFA

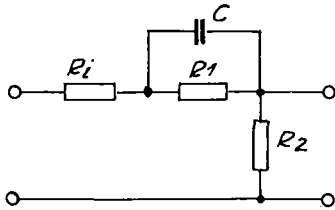
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

5.4 Ausführungsbeispiele

5.4.7 PDT - Glied

Digitale Signalverarbeitung in der Regelungstechnik
PDT-Glied

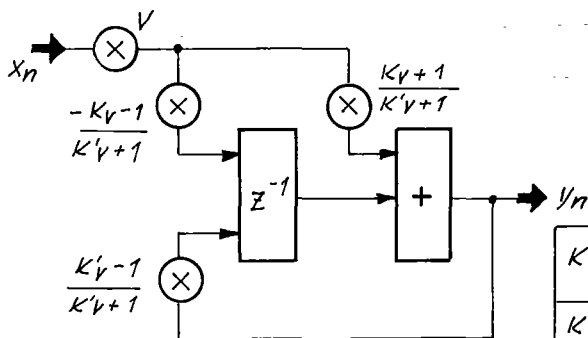


$$\frac{R_2}{R_i + R_1 + R_2} = V < 1$$

$$R_1 C = T_V$$

$$\frac{R_1 (R_i + R_2)}{R_i + R_1 + R_2} \cdot C = T'_V$$

$$A(p) = V \frac{T_V \cdot p + 1}{T'_V \cdot p + 1} \quad \begin{array}{l} \text{Laplace} \\ \text{Transformierte} \end{array}$$



$$K_V = \frac{2T_V}{T_a} > 1$$

$$K'_V = \frac{2T'_V}{T_a} > 1$$

$$A^*(z^{-1}) = V \cdot \frac{\frac{K_V - 1}{K'_V + 1} - \frac{K_V - 1}{K'_V + 1} \cdot z^{-1}}{1 - \frac{K'_V - 1}{K'_V + 1} \cdot z^{-1}} \quad \begin{array}{l} \text{Bilineare} \\ \text{Transformierte} \end{array}$$

KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
 - Abteilung Allgemeine Elektronik -

5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

5.4 Ausführungsbeispiele

5.4.8 Globalsystolischer IIR-Tiefpaß C031

Systolisierung des Tiefpasses C031

Übertragungsfunktion des nichtsystemischen Tiefpasses:

$$A(z) = 0,0077 \frac{z+1}{z-0,5659} \frac{1,5761 z^2 + 0,1577 z + 1,5761}{z^2 - 1,3801 z + 0,6143}$$

Systolisierung:

- Ausmultiplizieren der Übertragungsfunktion
- Zähler und Nenner durch z mit der höchsten Potenz teilen.

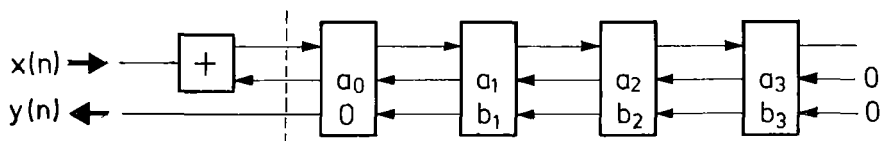
$$A(z) = \frac{0,0121 + 0,0134 z^{-1} + 0,0134 z^{-2} + 0,0121 z^{-3}}{1 - 1,9460 z^{-1} + 1,3953 z^{-2} - 0,3476 z^{-3}}$$

Anzahl DSPs:

Die Anzahl der Polynomglieder entspricht der Anzahl DSPs.

Filterkoeffizienten:

sind identisch mit den Polynomkonstanten.



Zählerpolynom:	+ 0,0121	+ 0,0134	+ 0,0134	+ 0,0121
Nennerpolynom:	0,0000	- 1,9460	+ 1,3953	- 0,3476



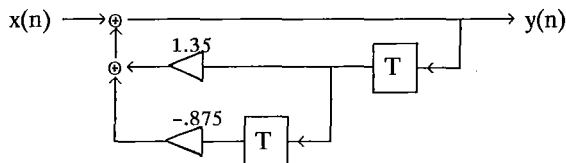
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

5. Netzwerktheorie digital (numerisch) arbeitender Netzwerke

5.5 Einfluß der Quantisierung

Einfluß der Quantisierung

Ein digitales System besteht im wesentlichen aus Koeffizientenspeicher, Zustandsspeicher Addierer und Multiplizierer (siehe Beispiel digitales, rekursives Netzwerk).



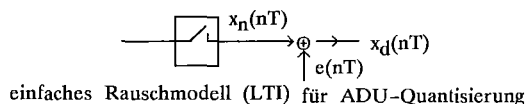
Beispiel digitales, rekursives Netzwerk

Für Echtzeitverarbeitung kontinuierlicher Signale sind zusätzlich von der Anwendung abhängig ADU (Analog-Digital-Umsetzer) und/oder DAU (Digital-Analog-Umsetzer) notwendig. Die bei der Realisierung notwendige Maßnahme der Wortlängenbegrenzung (binäre Zahlen endlicher Wortlänge) führt zur Abweichung des Systemverhaltens vom Idealfall (∞ Wortlänge) und wird verursacht durch :

- Quantisierung der Abtastwerte (Eingangssignal) durch ADU (Quantisierungsrauschen)
- Quantisierung der bearbeiteten Abtastwerte durch DAU (Ausgangssignal)
- Reduktion der Wortlänge bei den Koeffizienten (Abweichung von der Übertragungsfunktion)
- Reduktion der Wortlänge bei der Multiplikation (Rundungsrauschen, Grenzyklen)
- Überschreitung des Zahlenbereichs (Überlaufschwingungen)

Quantisierung des Eingangssignals durch ADU

Die analoge Eingangsgröße des ADU mit einer w -stelligen Wortlänge unterteilt den Aussteuerbereich $2A$ in $N=2^w$ Quantisierungsstufen. Alle kontinuierlichen Eingangssignale, die innerhalb einer Umsetzungsstufe q liegen werden in einer Binärzahl umgesetzt, die ein Ausgangswert der N Ausgangswerte ist. Die aus der Eingangsgröße x und der vom ADU umgesetzten Ausgangsgröße x_d gebildeten Differenz $e = x - x_d$ stellt den Quantisierungsfehler dar. Er beträgt, da sich x um den Quantisierungsstufenmittelwert ändern kann, $-0,5q \leq e \leq 0,5q$. Die Unsicherheit der Ausgangsgröße des ADU ist $\pm 0,5q$. Die Einbeziehung der eben beschriebenen starken Nichtlinearität des ADU's in eine mathematisch exakte Systemanalyse zur Untersuchung des quantisierten Signales, ist für die praktische Anwendung zu aufwendig. Mit Hilfe eines einfachen Rauschmodells können die Auswirkung der Quantisierung für viele in der Praxis vorkommenden Signale näherungsweise beschrieben werden. (siehe Abbildung einfaches Rauschmodell)



Voraussetzung für das Rauschmodell :

Abtastsignal $x_n(nT)$ und Quantisierungsfehlersignal sind unkorreliert.

Rauschquelle (Quantisierungsfehlersignal) hat die statistischen Eigenschaften :

gleichmäßige Verteilung, konstantes Leistungsspektrum und stationäres Verhalten.

Die Antwort des LTI-Systems (siehe einfaches Rauschmodell) auf ein stochastisches Signal

Einfluß der Quantisierung

können einfach, wie bei deterministischen Signalen mit Hilfe der diskreten Faltung oder im Frequenzbereich berechnet werden.

Quantisierung der bearbeiteten Abtastwerte

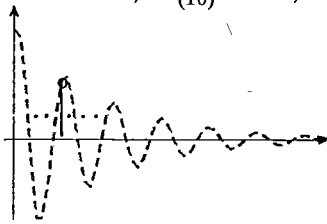
Faßt man die bearbeitete Zahlenfolge näherungsweise als "analoge Größe" auf (reelle Zahlen folgen natürlich nicht unendlich dicht aufeinander), die sich über den zur Verfügung stehenden Zahlenbereich ändern, so ist die Ganzzahlwandlung zur Anpassung an den DAU eine Wertquantisierung, die sich näherungsweise mit dem oben beschriebenen einfachen Rauschmodell beschreiben läßt.

Reduktion der Wortlängen bei Koeffizienten

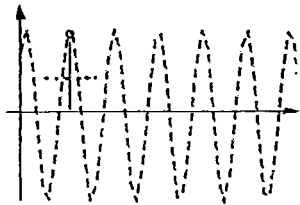
In der Regel liegen die Koeffizienten für einen digitalen Algorithmus nach Lösung einer Approximationsaufgabe als gebrochene Dezimalzahl (doppelte Genauigkeit) vor. Für die hardwaremäßige Realisierung eines digitalen Systems müssen diese vorliegenden, großen Wortlängen durch Abscheiden oder Runden reduziert werden.

Beispiel : $y(n) = x(n) + 1,25y(n-1) - 0,875y(n-2)$ (siehe Beispiel digitale, rekursives System)

$$\begin{aligned} 1,25_{(10)} &= 01,010000_{(2)} & \text{Rundung auf 4 Bit : } 01,01_{(2)} \\ -0,875_{(10)} &= -00,111000_{(2)} & \text{Rundung auf 4 Bit : } -01,00_{(2)} \end{aligned}$$



Stoßantwort eines rekursiven Systems
ohne Rundung



Stoßantwort eines rekursiven Systems
mit Rundung

Reduktion der Wortlängen bei der Multiplikation

Wie im obigen Beispiel digitales, rekursives Netzwerk zu sehen, besteht die Ausgangsgröße eines digitalen Netzwerkes aus einer Summe von Produkten aus Koeffizienten und Zustandsvariablen.

Die Wortlänge der Multiplikation zweier binärer Zahlen ist $w = w_1 + w_2 - 1$ (incl. $\pm$). Man muß deshalb eine Wortlängenreduzierung vornehmen durch Runden oder Abschneiden. Dies führt zu einer Genauigkeitsverringering, die bei rekursiven Systemalgorithmen zu oszillierenden Schwingungen (Grenzyklen) führen können. Dieses Runden, Abschneiden der niederwertigen binären Datenbits wirken sich unterschiedlich aus und sind eine stark nichtlineare Operation. Insbesondere wird dadurch die Anzahl der Filterkoeffizienten bei einem rekursiven Filter eingeschränkt und der rekursive Algorithmus stellt im Prinzip eine nichtlineare Differenzengleichung dar. Bisher existiert keine vollständige Theorie über derartige Differenzen. Rauschmodelle, die weiter oben bei der Quantisierung der Abtastwerte kurz skizziert wurden, können Beiträge zur Analyse der Wortlängenreduktion durch die Multiplikation liefern.

Einfluß der Quantisierung

Instabilität

Rekursive, digitale Systeme werden mit Hilfe von Stabilitätskriterien für LTI entworfen unter der Annahme einer unendlichen Wortlänge. Bei der Realisierung mit endlichen Wortlängen können Instabilitätsprobleme auftreten, die Grenzzyklen und Überlaufschwingung genannt werden.

Grenzzyklen sind Ausgangssignale periodischer Art. Sie treten bei rekursiven Systemen bei konstantem Eingangssignal auf.

Überlaufschwingungen nennt man Schwingungen, die bei Überschreitung des endlichen Zahlenbereichs auftreten (endliche Wortlänge). Diese Schwingungen treten bei der Festkommadarstellung auf und lassen sich durch eine Gleitkommadarstellung bei gleicher Wortlänge vermeiden.

Die beschriebenen Effekte, der Reduktion der Wortlänge bei Multiplikation und Koeffizienten, die ihre Ursache in der endlichen Wortlänge haben, können durch Vergrößerung der Wortlängen oder durch Änderung der Zahlendarstellung (Gleitkomma- statt Festkommadarstellung) herabsetzen bzw vermeiden.

Simulation und Untersuchung von digitalen Systemen können mit Hilfe eines Universalrechners und dessen Umgebung mit der erforderlichen Wortlänge durchgeführt werden, insbesondere im Hinblick auf die von der Wortlängenreduktion verursachten Effekte, indem schrittweise die Wortlänge im Simulationsprogramm herabgesetzt wird. Ebenfalls können die Quantisierungseffekte von ADU und DAW durch Einführen einer entsprechenden Nichtlinearität simuliert und somit ihr Einfluß für die in der Praxis auftretende Anwendung abgeschätzt werden.

6. Mehrdimensionale digitale Signalverarbeitung

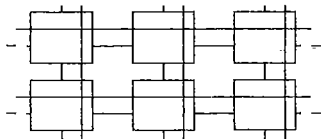
6.1 Einführung

Terminal-Eingabe Semisystolische DSP-Matrix

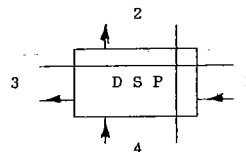
ARCHITEKTUR-VORGABE :

PROGRAMNAME : name
ARCHITECTURE : semisystolic DSP-matrix

Character-Symbol :



Single-Symbol :



Which installation do you want ?

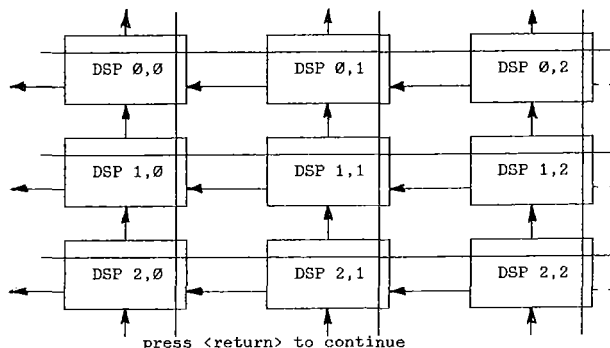
- how many columns [1..8] ?
- how many lines [1..8] ?
- contra data flow in the lines [1/2] ?
- contra data flow in the column [1/2] ?
- DAC or ADC or both in the 1. line [d/a/ad] ?
- DAC or ADC or both in the 1. column [d/a/ad] ?

Correction [Y/N] ?

PROGRAMMEINGABE :

PROGRAMNAME : name
ARCHITECTURE : semisystolic DSP-matrix
ARRAY-SIZE : 5 x 6

DETAIL :



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

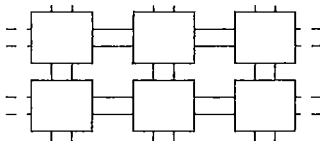
Terminal - Eingabe

Globalsystolische DSP-Matrix

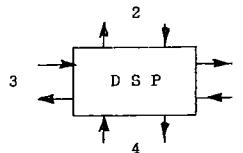
ARCHITEKTUR-VORGABE :

PROGRAMNAME : name
ARCHITECTURE : globalsystolic DSP-matrix

Character-Symbol :



Single-Symbol :



Which installation do you want ?

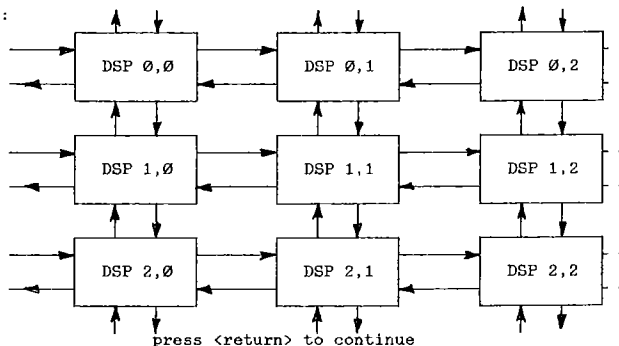
- how many columns [1..8] ?
- how many lines [1..8] ?
- one or two direction(s) in the lines [1/2] ?
- one or two direction(s) in the column [1/2] ?
- DAC or ADC or both in the 1. line [d/a/ad] ?
- DAC or ADC or both in the 1. column [d/a/ad] ?

Correction [Y/N] ?

PROGRAMMEINGABE :

PROGRAMNAME : name
ARCHITECTURE : globalsystolic DSP-matrix
ARRAY-SIZE : 5 x 6

DETAIL :



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

6. Mehrdimensionale digitale Signalverarbeitung

6.1. Einführung

Unter "mehrdimensionaler" Signalverarbeitung soll hier durchweg zweidimensionale Signalverarbeitung verstanden werden. Die Gründe hierfür sind:

- Die begrifflichen Schwierigkeiten treten beim Übergang von einer zu zwei Dimensionen auf, die Verallgemeinerung von zwei auf mehr Dimensionen ist dann nicht weiter schwierig,
- Das Hauptanwendungsgebiet der mehrdimensionalen Signalverarbeitung ist die Bildverarbeitung. Hierbei hat man in natürlicher Weise zwei Dimensionen,
- Zweidimensionale Signalverarbeitung hat den Vorteil, daß alle Begriffsbildungen visualisiert werden können,
- Der technische Aufwand bei der Verarbeitung und auch der Darstellung steigt exponentiell mit der Dimension.

Es gibt eine große Anzahl von Erscheinungen in der zweidimensionalen Signalverarbeitung, die sich problemlos aus dem Eindimensionalen übertragen lassen. Beispielsweise wird ein Fernsehsignal, das ja "von Hause aus" zweidimensional ist, zeilenweise abgetastet und danach auf dem gesamten Wege vom Fernsehstudio bis zu Bildröhre des Empfängers wie ein eindimensionales Signal verarbeitet, wobei man auf die Korrelation der Bildpunkte orthogonal zur Abtastrichtung verzichtet. Allgemein haben Systeme, die von Natur aus zeilen- und spaltenweise strukturiert sind, die Eigenschaft, daß sie sich besonders einfach auf eindimensionale Systeme zurückführen lassen. Solche Systeme nennt man *separabel*. Das wichtigste Beispiel einer separablen Begriffsbildung ist die mehrdimensionale Fouriertransformation, die sich durch Hintereinanderausführung von eindimensionalen Fouriertransformationen realisieren läßt (vgl. Abschnitt 6.2).

Beim Übergang von der ein- auf die zwei- (oder gar mehr-) dimensi-

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

onale Signalverarbeitung treten einige Phänomene auf, die zu besonderen Problemen führen. Zunächst einmal sind für die zweidimensionale Signalverarbeitung wesentlich höhere Datenraten typisch, als für die eindimensionale Signalverarbeitung. Ein nicht besonders großes Bild kann etwa $512 \times 512 = 262\,144$ Bildpunkte haben. Schon bei mäßiger Auflösung und geringer Bildrate gelangt man sehr rasch zu enormen Anforderungen an die Verarbeitungskapazität.

Ein weiterer grundsätzlicher Unterschied ist, daß im Eindimensionalen die Trägermengen (Fenster) im wesentlichen nur Intervalle, also mathematisch recht einfache Gebilde sein können. Schon im Zweidimensionalen können die Fenster beliebig kompliziert sein, es gibt also Probleme, die durch die Behandlung von Gebieten entstehen und man muß sich unter Umständen mit Fragen der "Form" auseinandersetzen.

Zu beachten ist, daß bei zweidimensionaler Signalverarbeitung die auftretenden Variablen nicht immer Zeitvariable sein müssen. Bei der Analyse eines einzelnen Bildes hat man zwei Ortsvariable. Betrachtet man ein Fernsehbild, dann hat man zwei Orts- und eine Zeitvariable.

Eine typische Schwierigkeit, die die Anwendung der Z-Transformation (s. Abschnitt 6.7) im Zweidimensionalen einschränkt, ist die Tatsache, daß zweidimensionale Polynome im allgemeinen nicht faktorisiert werden können. Das Polynom $1 - x \cdot y$ in zwei Veränderlichen hat als Nullstellengebilde die Hyperbel $y = 1/x$. Es gibt keine Darstellung der Form

$$1 - x \cdot y = (x - x_1) \cdot (y - y_1) \cdot (x - x_2) \cdot (y - y_2) \cdots$$

Damit sind alle Begriffe, die auf Faktorisierung von Polynomen beruhen, nicht (oder doch zumindest nicht ohne weiteres) ins Zweidimensionale übertragbar.

Wie schon angedeutet, spielt in der zweidimensionalen Signalverarbeitung im Unterschied zur eindimensionalen die Geometrie eine besondere Rolle. Man kann in einem Bild "Objekte" isolieren und etwa für diese typische Kenngrößen ermitteln, wie zum Beispiel

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

6. Mehrdimensionale digitale Signalverarbeitung

6.2 Die zweidimensionale Fouriertransformation

6.2.1 Definition der zweidimensionalen Fouriertransformation

die Fläche, den Umfang, den Schwerpunkt, den Durchmesser, Hauptachsen, Formmaße usw. Innerhalb eines Bildes spielen etwa Kanten für den Erkennungs- und Interpretationsprozeß eine wichtige Rolle, das heißt, Unstetigkeiten der Grauwertfunktion, die entweder linear oder aber längs komplizierter Kurven verlaufen können. Man denke etwa an den "fraktalen" Verlauf einer Küstenlinie auf einem Satellitenbild. Zu erwähnen ist auch, daß im Zweidimensionalen die Nachbarschaftsstruktur wesentlich komplizierter ist als im Eindimensionalen.

Am Ende des Kapitels ist Literatur angegeben. Die vorliegende Darstellung stützt sich im wesentlichen auf das Buch von Dudgeon und Mersereau (1984), soweit es um Signalverarbeitung geht. Für Fragen der Bildverarbeitung sei auf das Buch von Jaroslavskij (1985) oder das von Zamperoni (1985) verwiesen. In dem Buch von Börner (1985) findet man zahlreiche Bildbeispiele.

6.2. Die zweidimensionale Fouriertransformation

6.2.1. Definition der zweidimensionalen Fouriertransformation

Die zweidimensionale Fouriertransformation ist ein gutes Beispiel für die separable Übertragung eines Begriffes aus dem Eindimensionalen. Wir betrachten ein zweidimensionales Signal, also eine Funktion, die zwei (reelle) Argumente t_1 und t_2 hat. In der Regel werden diese beiden Argumente Ortsvariablen sein. Die Funktion $f(t_1, t_2)$ soll komplexwertig sein. Wir definieren die Fouriertransformation in naheliegender Verallgemeinerung der eindimensionalen Transformation wie folgt:

$$\begin{aligned} F(\omega_1, \omega_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2) \cdot \exp(-j\omega_1 t_1 - j\omega_2 t_2) dt_1 dt_2 = \\ &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f(n_1, n_2) \cdot \exp(-j\omega_1 n_1 - j\omega_2 n_2). \end{aligned}$$

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

Hierbei ist wie üblich j die imaginäre Einheit. In der Integraldarstellung wird das Signal f als kontinuierlich betrachtet, bei der Summendarstellung wird vorausgesetzt, daß das Signal abgetastet vorliegt. In der letztgenannten Form können wir schreiben

$$\begin{aligned} F(\omega_1, \omega_2) &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f(n_1, n_2) \cdot e^{-j\omega_2 n_2} \right\} \cdot e^{-j\omega_1 n_1} = \\ &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} g(\omega_2, n_1) \cdot e^{-j\omega_1 n_1}, \end{aligned}$$

wobei

$$g(\omega_2, n_1) = \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f(n_1, n_2) \cdot e^{-j\omega_2 n_2}$$

eine Funktion ist, die nicht von n_2 abhängt und in der ω_2 als Parameter auftritt. Die Ausführung der zweidimensionalen Fouriertransformation ist also hier zurückgeführt worden auf die Hintereinanderausführung einer mit ω_2 parametrisierten Schar von eindimensionalen Fouriertransformationen, auf deren Resultat dann wieder die eindimensionale Fouriertransformation angewandt wurde. Man kann also mit einem Algorithmus, der die eindimensionale Transformation realisiert, die zweidimensionale Transformation ausführen. Eine solche Zerlegung eines Problems in zwei Veränderlichen in eine Schar von Problemen einer Veränderlichen nennt man *separable* Zerlegung.

Für die zweidimensionale Fouriertransformation existiert eine Umkehrformel, deren Herleitung aus der eindimensionalen Form durch Anwendung der Separabilität ausgeführt werden kann. Es ist für ein 2π -periodisches $F(\omega_1, \omega_2)$

$$f(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega_1, \omega_2) \cdot e^{j\omega_1 t_1 + j\omega_2 t_2} d\omega_1 d\omega_2.$$

Für mehr als zwei Dimensionen hat man ganz analoge Formeln, es muß nur jeweils die Anzahl der Summen bzw. Integrale vergrößert

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

6. Mehrdimensionale digitale Signalverarbeitung

6.2 Die zweidimensionale Fouriertransformation

6.2.2 Eigenschaften der Fouriertransformation

werden.

Die zweidimensionale Fouriertransformation wird angewandt zur Analyse von zweidimensionalen Signalen, für den Entwurf von Filtern sowie für die "schnelle" Ausführung von Faltungen etc. Im Gegensatz zum Eindimensionalen ist allerdings die erstgenannte Anwendung vergleichsweise von geringer Bedeutung. Die Transformierte eines zweidimensionalen Signals ist wieder ein zweidimensionales Bild, dessen Analyse in der Regel nicht einfacher ist, als die Untersuchung des Ausgangssignals. Zudem sind, wie in der Einleitung erwähnt wurde, die bei der Analyse von Bildinformationen auftretenden Probleme meist derart, daß die Fourieranalyse nicht besonders hilfreich ist.

6.2.2. Eigenschaften der Fouriertransformation

Die von der eindimensionalen Fouriertransformation bekannten Eigenschaften übertragen sich sinngemäß. Wir listen die wichtigsten auf:

Linearität	$a \cdot f_1 + b \cdot f_2$	$\longleftrightarrow$	$a \cdot F_1 + b \cdot F_2$
Translation	$f(t_1 - s_1, t_2 - s_2)$	$\longleftrightarrow$	$e^{-j\omega_1 s_1 - j\omega_2 s_2} \cdot F(\omega_1, \omega_2)$
Modulation	$f(t_1, t_2) \cdot e^{j\theta_1 t_1 + j\theta_2 t_2}$	$\longleftrightarrow$	$F(\omega_1 - \theta_1, \omega_2 - \theta_2)$
Multiplikation	$f(t_1, t_2) \cdot g(t_1, t_2)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta_1, \theta_2) G(\omega_1 - \theta_1, \omega_2 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$
Differentiation	$-jt_1 \cdot f(t_1, t_2)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{\partial F(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1}$
	$-jt_2 \cdot f(t_1, t_2)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{\partial F(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2}$
Transposition	$f(t_2, t_1)$	$\longleftrightarrow$	$F(\omega_2, \omega_1)$

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

6. Mehrdimensionale digitale Signalverarbeitung

6.3 Das zweidimensionale Abtasttheorem

Reflektion	$f(-t_1, t_2)$	$\longleftrightarrow$	$F(-\omega_1, \omega_2)$
	$f(t_1, -t_2)$	$\longleftrightarrow$	$F(\omega_1, -\omega_2)$.

Für Details der praktischen Realisierung (diskrete Fouriertransformation, "schnelle" Fouriertransformation) wird auf den Abschnitt 6.5 verwiesen.

6.3. Das zweidimensionale Abtasttheorem

Wir setzen rechteckige (das heißt: separable) Abtastgeometrie voraus. Die Herleitung des zweidimensionalen Abtasttheorems ist dann vollständig analog zu der eindimensionalen Vorgehensweise.

Wir approximieren zunächst die Funktion

$$f(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1, \omega_2) \cdot e^{j\omega_1 t_1 + j\omega_2 t_2} d\omega_1 d\omega_2$$

durch die bandbegrenzte Funktion

$$\tilde{f}(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_{-\omega_1^0}^{\omega_1^0} \int_{-\omega_2^0}^{\omega_2^0} F(\omega_1, \omega_2) \cdot e^{j\omega_1 t_1 + j\omega_2 t_2} d\omega_1 d\omega_2$$

mit den Abschneidefrequenzen ω_1^0 und ω_2^0 . Die (periodisch fortgesetzte) Funktion $F(\omega_1, \omega_2)$ hat eine Darstellung als Fourierreihe

$$F(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} F_{n_1 n_2} \cdot \exp(-jn_1 \pi \frac{\omega_1}{\omega_1^0} - jn_2 \pi \frac{\omega_2}{\omega_2^0})$$

mit den Fourierkoeffizienten $F_{n_1 n_2}$. Einsetzen in die Darstellung für $\tilde{f}(t_1, t_2)$ liefert

$$\begin{aligned} & \int_{-\omega_1^0}^{\omega_1^0} \int_{-\omega_2^0}^{\omega_2^0} F(\omega_1, \omega_2) \cdot \exp(jm_1 \pi \frac{\omega_1}{\omega_1^0} + jm_2 \pi \frac{\omega_2}{\omega_2^0}) d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= \int_{-\omega_1^0}^{\omega_1^0} \int_{-\omega_2^0}^{\omega_2^0} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} F_{n_1 n_2} \cdot e^{-j\pi(n_1 - m_1) \frac{\omega_1}{\omega_1^0} - j\pi(n_2 - m_2) \frac{\omega_2}{\omega_2^0}} d\omega_1 d\omega_2 \\ &= 4 \cdot \omega_1^0 \cdot \omega_2^0 \cdot F_{m_1 m_2} \end{aligned}$$

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

wobei von der Orthogonalität der Exponentialfunktionen Gebrauch gemacht wurde.

Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t_1 = m_1 \cdot \frac{\pi}{\omega_1^0}, t_2 = m_2 \cdot \frac{\pi}{\omega_2^0}) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_{-\omega_1^0}^{\omega_1^0} \int_{-\omega_2^0}^{\omega_2^0} F(\omega_1, \omega_2) \cdot e^{j\omega_1 m_1 \cdot \frac{\pi}{\omega_1^0} + j\omega_2 m_2 \cdot \frac{\pi}{\omega_2^0}} d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \cdot \omega_1^0 \cdot \omega_2^0 \cdot F_{m_1 m_2}. \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$F(\omega_1, \omega_2) = \frac{\pi^2}{\omega_1^0 \cdot \omega_2^0} \cdot \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(n_1 \cdot \frac{\pi}{\omega_1^0}, n_2 \cdot \frac{\pi}{\omega_2^0}) \cdot e^{-jn_1 \pi \frac{\omega_1}{\omega_1^0} - jn_2 \pi \frac{\omega_2}{\omega_2^0}}$$

und damit schließlich, wenn man $T_i^a = \frac{\pi}{\omega_i^0}$ für $i = 1, 2$ setzt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t_1, t_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_{-\omega_1^0}^{\omega_1^0} \int_{-\omega_2^0}^{\omega_2^0} \left\{ \frac{\pi^2}{\omega_1^0 \omega_2^0} \cdot \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f(n_1 \cdot \frac{\pi}{\omega_1^0}, n_2 \cdot \frac{\pi}{\omega_2^0}) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot e^{-jn_1 \pi \frac{\omega_1}{\omega_1^0} - jn_2 \pi \frac{\omega_2}{\omega_2^0}} \right\} \cdot e^{j\omega_1 t_1 + j\omega_2 t_2} d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(n_1 \cdot T_1^a, n_2 \cdot T_2^a) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{4\omega_1^0 \omega_2^0} \cdot \int_{-\omega_1^0}^{\omega_1^0} \int_{-\omega_2^0}^{\omega_2^0} e^{-jn_1 \pi \frac{\omega_1}{\omega_1^0} + j\omega_1 t_1 - jn_2 \pi \frac{\omega_2}{\omega_2^0} + j\omega_2 t_2} d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f(n_1 T_1^a, n_2 T_2^a) \cdot \frac{\sin \pi (\frac{t_1}{T_1^a} - n_1)}{\pi (\frac{t_1}{T_1^a} - n_1)} \cdot \frac{\sin \pi (\frac{t_2}{T_2^a} - n_2)}{\pi (\frac{t_2}{T_2^a} - n_2)} \end{aligned}$$

wieder in voller Analogie zum eindimensionalen Fall.

Wir hatten angenommen, daß separabel abgetastet wird. Offensicht-

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

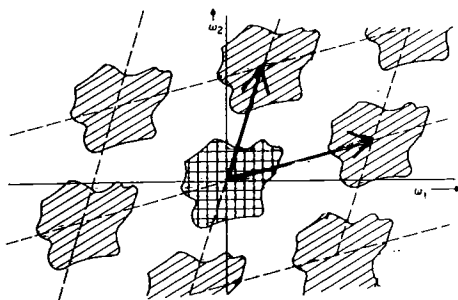
2 D SAMPLING THEOREM

The sampling theorem for frequency-bandlimited functions of time can be extended to functions of multidimensional arguments.

For 2 D arguments:

$$f(t_1, t_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f(n_1 T_1^a, n_2 T_2^a) \cdot \frac{\sin \pi \cdot (\frac{t_1}{T_1^a} - n_1)}{\pi \cdot (\frac{t_1}{T_1^a} - n_1)} \cdot \frac{\sin \pi \cdot (\frac{t_2}{T_2^a} - n_2)}{\pi \cdot (\frac{t_2}{T_2^a} - n_2)}$$

This formula shows that a function whose spectrum is restricted to a finite region of wave-number space may be reconstructed from its samples taken over a periodic lattice having small repetition vectors.



Two-dimensional spectrum periodicity

KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

6. Mehrdimensionale digitale Signalverarbeitung

6.4 Zweidimensionale Systeme

6.4.1 LSI - System

lich ist diese Abtastgeometrie nicht optimal, man würde eine bessere "Effizienz" von einer hexagonalen Anordnung der Abtastpunkte erwarten, bei der die letzteren Mittelpunkte dichtest gepackter Kreise in der Ebene sind. Die folgende Tabelle (vgl. Dudgeon und Mersereau 1984, S. 47) zeigt, daß bei höheren Dimensionen der Effizienzgewinn der "hypersphärischen" gegenüber der separablen Abtastung beträchtlich wird:

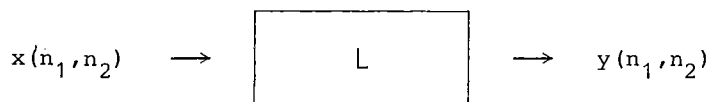
Dimension	relative Effizienz
1	1.000
2	0.866
3	0.705
4	0.499
5	0.353
6	0.217
7	0.125
8	0.062

Für die präzise Definition der relativen Effizienz wird auf das angegebene Buch von Dudgeon und Mersereau verwiesen.

6.4. Zweidimensionale Systeme

6.4.1. LSI-Systeme

Grundsätzlich sollen hier nur diskrete Systeme betrachtet werden. Anstelle einer Signalfunktion $f(t_1, t_2)$ haben wir demgemäß diskret abgetastete Werte $x(n_1, n_2)$, wobei n_1 und n_2 ganze Zahlen sind. Dabei können wir uns vorstellen, daß n_1 und n_2 Koordinaten von Punkten der Ebene sind und x ein reelles oder komplexes Signal. Das zweidimensionale System ordnet dem Signal $x(n_1, n_2)$ das Ausgangssignal $y(n_1, n_2)$ zu:



Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

Ein System heißt *linear*, wenn für je zwei Signale x_1 und x_2 und für reelle oder komplexe Zahlen a und b stets gilt

$$L\{ax_1 + bx_2\} = a \cdot L\{x_1\} + b \cdot L\{x_2\}.$$

Ein System heißt *shift-invariant*, wenn für eine Verschiebung um die ganzzahligen Beträge m_1 und m_2 gilt

$$L\{x(n_1 - m_1, n_2 - m_2)\} = y(n_1 - m_1, n_2 - m_2),$$

wobei $L\{x\} = y$ ist. Ein lineares System, das zudem shift-invariant ist, nennt man auch ein *LSI-System*.

Für irgendein beliebiges System kann man die *Impulsantwort* gemäß

$$h_{k_1 k_2}(n_1, n_2) := L\{\delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2)\}$$

definieren, wobei

$$\delta(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{für } n_1 = n_2 = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

der Dirac'sche Einheitsimpuls ist. Im Falle eines LSI-Systems hat man die besonders einfache Darstellung der Impulsantwort als einer Funktion von zwei Variablen, das heißt also, als diskretes Signal

$$h_{k_1 k_2}(n_1, n_2) = h(n_1 - k_1, n_2 - k_2).$$

Die besondere Bedeutung der LSI-Systeme wird damit transparent: Die Systemgleichungen vereinfachen sich erheblich und das Verhalten des Systems ist durch seine Impulsantwort vollständig beschrieben:

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \cdot h(k_1, k_2) = \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(k_1, k_2) \cdot h(n_1 - k_1, n_2 - k_2) = \\ &=: x ** h. \end{aligned}$$

Wie im eindimensionalen Falle gewinnt man die Systemantwort durch *Faltung* des Eingangssignals mit der Impulsantwort des Systems.

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

6. Mehrdimensionale digitale Signalverarbeitung

6.4 Zweidimensionale Systeme

6.4.2 Separable Systeme

Um den Unterschied zu eindimensionalen Faltung deutlich zu machen, bezeichnen wir die so definierte zweidimensionale Faltung mit dem Symbol $x ** h$. In Abschnitt 6.4.4 werden wir uns eingehender mit der zweidimensionalen Faltung beschäftigen.

6.4.2. Separable Systeme

Auch für zweidimensionale Systeme hat man besonders einfache Verhältnisse im separablen Fall. Ein zweidimensionales LSI-System heißt *separabel*, wenn für seine Impulsantwort h gilt

$$h(n_1, n_2) = h_1(n_1) \cdot h_2(n_2).$$

Im separablen Falle gilt

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(n_1-k_1, n_2-k_2) \cdot h(k_1) \cdot h(k_2) = \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} h_1(k_1) \cdot \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(n_1-k_1, n_2-k_2) \cdot h_2(k_2). \end{aligned}$$

Ähnlich wie bei der zweidimensionalen Fouriertransformation (Abschnitt 6.2.1) führt man die Funktion

$$g(\ell_1, n_2) := \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(\ell_1, n_2-k_2) \cdot h_2(k_2)$$

ein, die n_2 als Parameter enthält und nicht explizit von n_1 abhängt. Hiermit wird

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} h_1(k_1) \cdot g(n_1-k_1, n_2).$$

Man kann also ein zweidimensionales System realisieren durch Hintereinanderausführung von eindimensionalen Faltungen. Man benötigt zur Berechnung von g aus x und h_2 insgesamt N Faltungen, wenn x auf einem Quadrat der Seitenlänge N von Null verschieden ist ("zeilenweise" Faltung). Danach berechnet man y aus g und h_1 durch ebenfalls N Faltungen ("spaltenweise" Faltung). Somit hat man im separablen Fall die zweidimensionale Faltung auf $2 \cdot N$ eindimensionale Faltungen (mit Zwischenspeicherung von g) zurückgeführt. Ähnlich kann man im m -dimensionalen Fall ein Signal x , das auf ei-

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

6. Mehrdimensionale digitale Signalverarbeitung

6.4 Zweidimensionale Systeme

6.4.3 Die Frequenzantwort eines Systems

6.4.4 Die zweidimensionale Faltung

nem Hyperwürfel der Kantenlänge N definiert ist, auf $m \cdot N^{m-1}$ eindimensionale Faltungen zurückführen.

6.4.3. Die Frequenzantwort eines Systems

Neben der in Abschnitt 6.4.1 definierten Impulsantwort eines Systems kann man die *Frequenzantwort* definieren als den Ausgang für das Eingangssignal $x(n_1, n_2) = \exp(j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2)$. Für ein LSI-System ist dann

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h(k_1, k_2) \cdot e^{j\omega_1 (n_1 - k_1) + j\omega_2 (n_2 - k_2)} = \\ &= e^{j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h(k_1, k_2) \cdot e^{-j\omega_1 k_1 - j\omega_2 k_2} = \\ &=: e^{j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2} \cdot H(\omega_1, \omega_2). \end{aligned}$$

Die Frequenzantwort

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h(k_1, k_2) \cdot e^{-j\omega_1 k_1 - j\omega_2 k_2}$$

des Systems ist eine in beiden Argumenten 2π -periodische Funktion.

Kennt man die Frequenzantwort, dann ist es möglich, daraus die Impulsantwort des Systems zu berechnen:

$$h(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega_1, \omega_2) \cdot e^{j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2} d\omega_1 d\omega_2.$$

Impulsantwort und Frequenzantwort sind somit zwei zueinander völlig äquivalente Funktionen zur Charakterisierung eines LSI-Systems.

6.4.4. Die zweidimensionale Faltung

Die in 6.4.1 definierte zweidimensionale Faltung hat die gleichen Eigenschaften, die man schon von der eindimensionalen Faltung kennt. So ist zum Beispiel stets $x ** h = h ** x$. Bezeichnet man mit X bzw. H die zweidimensionalen Fouriertransformierten von x bzw. h , dann entspricht dem Signal $x ** h$ die Fouriertransformierte $X \cdot H$.

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

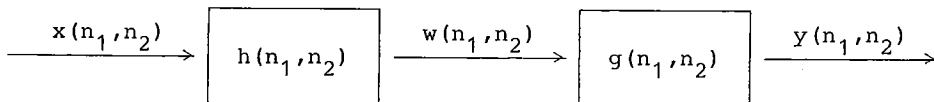
Für die zweidimensionale Faltung gilt das *Assoziativgesetz*

$$(x ** h) ** g = x ** (h ** g).$$

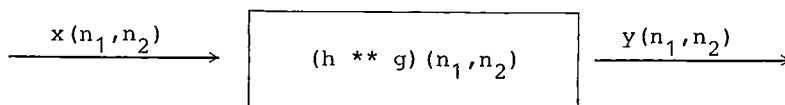
Setzt man

$$w := x ** h,$$

dann hat man für das kaskadierte System



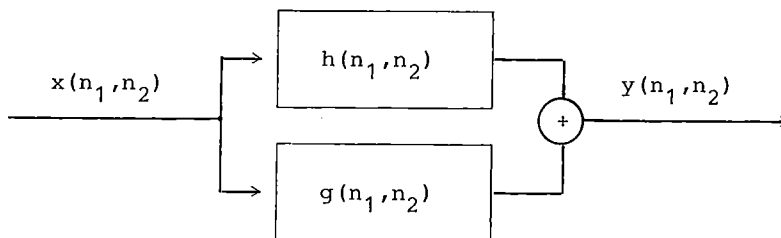
die äquivalente Realisierung



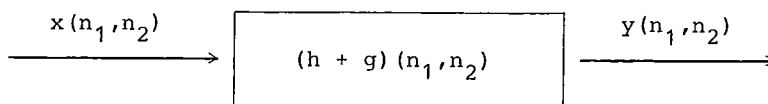
Eine analoge Betrachtung kann man für das *Distributivgesetz* der Faltung anstellen

$$x ** (h + g) = (x ** h) + (x ** g).$$

Das bedeutet, daß sich die Parallelschaltung



durch das äquivalente System



darstellen läßt.

Prof. Dr. U. Eckhardt
 Universität Hamburg
 Institut für Angewandte Mathematik

6. Mehrdimensionale digitale Signalverarbeitung

6.4 Zweidimensionale Systeme

6.4.5 Stabilität von zweidimensionalen Systemen

6.4.6 Beispiele

6.4.5. Stabilität von zweidimensionalen Systemen

Auf das Problem der Stabilität eines zweidimensionalen Systems kann hier nicht weiter eingegangen werden. Man nennt ein LSI-System *stabil*, wenn für seine Impulsantwortfunktion gilt

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} |h(n_1, n_2)| < \infty$$

(Bounded Input - Bounded Output oder BIBO-Stabilität) oder auch

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} |h(n_1, n_2)|^2 < \infty$$

(Mean Square - Stabilität). Da wir uns hier nur auf FIR-Systeme (Finite Impulse Response) beschränken, bei denen die Impulsantwort außerhalb eines gewissen festen Rechtecks der n_1, n_2 -Ebene verschwindet, spielen Stabilitätsprobleme keine Rolle.

6.4.6. Beispiele

Beispiel 1: Es sei ein Signal $x(n_1, n_2)$ gegeben mit

$$x(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq n_1 \leq N_1, 0 \leq n_2 \leq N_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

x ist also ein Signal, das genau innerhalb des Rechtecks $\{(n_1, n_2) \mid 0 \leq n_1 \leq N_1, 0 \leq n_2 \leq N_2\}$ den Wert 1 hat und sonst verschwindet. Die Impulsantwort eines LSI-Systems sei

$$h(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq n_1 < \infty, 0 \leq n_2 < \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man rechnet dann durch Untersuchung der möglichen Fälle aus

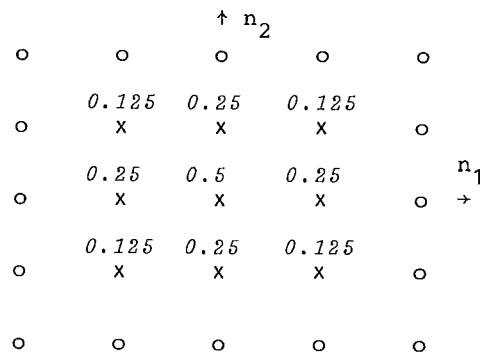
$$(x ** h)(n_1, n_2) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n_1 \leq 0 \text{ oder } n_2 \leq 0 \\ \min(n_1, N_1) \cdot \min(n_2, N_2) & \text{falls } n_1 > 0 \\ & \text{und } n_2 > 0. \end{cases}$$

(vgl. Dudgeon und Mersereau 1984, Seite 17 f.).

Beispiel 2: Die Impulsantwort eines einfachen Tiefpaßfilters sei wie folgt gegeben: Ein Einheitsimpuls im Punkte (n_1, n_2) bewirke

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

bewirke in den Nachbarpunkten eine Antwort $h(k_1, k_2)$ gemäß folgender Skizze:



Die Frequenzantwort berechnet sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned}
 H(\omega_1, \omega_2) &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h(k_1, k_2) \cdot e^{-j\omega_1 k_1 - j\omega_2 k_2} = \\
 &= 0.5 + 0.25 \cdot (e^{-j\omega_1} + e^{j\omega_1} + e^{-j\omega_2} + e^{j\omega_2}) + \\
 &\quad + 0.125 \cdot (e^{-j\omega_1 - j\omega_2} + e^{-j\omega_1 + j\omega_2} + \\
 &\quad + e^{j\omega_1 - j\omega_2} + e^{j\omega_1 + j\omega_2}) = \\
 &= 0.5 \cdot (1 + \cos \omega_1) \cdot (1 + \cos \omega_2).
 \end{aligned}$$

(vgl. Didgeon und Mersereau 1984, S. 28).

Beispiel 3: Wir untersuchen jetzt das umgekehrte Problem. Die Frequenzantwort eines Filters sei gegeben, gesucht ist die Impulsantwort. Wir betrachten dazu ein ideales Tiefpaßfilter mit der Frequenzantwort

$$H(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega_1| \leq a < \pi, \quad |\omega_2| \leq b < \pi, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

Nach der im Abschnitt 6.4.3 hergeleiteten Formel wird

$$\begin{aligned} h(n_1, n_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2} d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-a}^a e^{j\omega_1 n_1} d\omega_1 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-b}^b e^{j\omega_2 n_2} d\omega_2 = \\ &= \frac{\sin a \cdot n_1}{\pi \cdot n_1} \cdot \frac{\sin b \cdot n_2}{\pi \cdot n_2}. \end{aligned}$$

Es sei darauf hingewiesen, daß wir an dieser Stelle von der Separabilität des Systems Gebrauch gemacht haben.

(vgl. Dudgeon und Mersereau 1984, Seite 30).

Beispiel 4: In diesem Beispiel untersuchen wir ein ideales Tiefpaßfilter, das nicht separabel ist. Seine Frequenzantwort sei gegeben durch

$$H(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq R^2 < \pi^2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist dann nach der Formel aus Abschnitt 6.4.3:

$$h(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_{\text{Kreis}} e^{j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2} d\omega_1 d\omega_2.$$

Mit den Substitutionen

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}, \quad \tan \phi = \omega_2 / \omega_1, \quad \tan \theta = n_2 / n_1$$

erhält man

$$\begin{aligned} h(n_1, n_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_0^R \int_0^{2\pi} \omega \cdot e^{j\omega \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \cdot \cos(\theta - \phi)} d\phi d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^R \omega \cdot J_0(\omega \sqrt{n_1^2 + n_2^2}) d\omega = \frac{R}{2\pi} \cdot \frac{J_1(R \sqrt{n_1^2 + n_2^2})}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}. \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet $J_p(x)$ die p-te Bessel- (Zylinder-) Funktion erster

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

6. Mehrdimensionale digitale Signalverarbeitung

6.5 Die diskrete Fouriertransformation

6.5.1 Definition

Art.

(vgl. Dudgeon und Mersereau 1984, Seite 30).

6.5. Die diskrete Fouriertransformation

6.5.1. Definition

Gegeben sei ein zweidimensionales (diskretes) Signal $x(n_1, n_2)$ mit endlichem Träger, das heißt, außerhalb des Rechtecks

$$0 \leq n_1 \leq N_1 - 1, \quad 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$$

soll $x(n_1, n_2)$ verschwinden. In Analogie zur kontinuierlichen Fouriertransformation (vgl. Abschnitt 6.2.1) setzt man

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N_1}n_1k_1 - j\frac{2\pi}{N_2}n_2k_2},$$

$$0 \leq k_1 \leq N_1 - 1,$$

$$0 \leq k_2 \leq N_2 - 1.$$

X heißt die (diskrete) Fouriertransformierte von x .

Auch für die diskrete Fouriertransformierte gibt es eine Umkehrformel. Man rechnet aus

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \cdot \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} X(k_1, k_2) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N_1}n_1k_1 + j\frac{2\pi}{N_2}n_2k_2},$$

$$0 \leq n_1 \leq N_1 - 1,$$

$$0 \leq n_2 \leq N_2 - 1.$$

Bei der praktischen Realisierung der diskreten Fouriertransformation macht man wieder von der Separabilität Gebrauch (vgl. Abschnitt 6.2.1). Man schreibt die Transformationsformel auf die folgende Weise:

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \left\{ \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N_2}n_2k_2} \right\} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N_1}n_1k_1}.$$

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

6. Mehrdimensionale digitale Signalverarbeitung

6.5 Die diskrete Fouriertransformation

6.5.2 Anwendung

Nennt man den Ausdruck in der geschweiften Klammer $g(n_1, k_2)$, dann erhält man

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} g(n_1, k_2) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N_1} n_1 k_1}.$$

Hiermit kann man den Aufwand abschätzen, den eine zweidimensionale Fouriertransformation im Vergleich zur eindimensionalen erfordert. Um für ein festes n_1 und k_2 die Funktion $g(n_1, k_2)$ auszuwerten, muß man eine eindimensionale Fouriertransformation ausführen. Man benötigt somit insgesamt $N_1 \cdot N_2$ eindimensionale Fouriertransformationen zur Berechnung von $X(k_1, k_2)$.

Es gibt effizientere Varianten zur Durchführung der diskreten Fouriertransformation als die "naive" separable Zurückführung auf eindimensionale Transformationen. Bei gelegentlicher Anwendung lohnt der Mehraufwand für diese komplizierteren Varianten nicht, nur bei häufiger Ausführung und bei höherdimensionalen Signalen sollte man ein solches Verfahren benutzen. Eine verbreitete Variante ist die "Vector-Radix Fast Fourier Transform" (vgl. Dudgeon und Mersereau 1984, Abschnitt 2.3.3). Das Aufwandsverhältnis, gemessen in Anzahl der komplexen Multiplikationen für den Vector-Radix Algorithmus zur separablen Methode ist nach Dudgeon und Mersereau 1984, Seite 82:

Dimension	Aufwand $\frac{\text{Vector-Radix-Algorithmus}}{\text{Separable Methode}}$
2	0.75
3	0.58
4	0.47
5	0.39

6.5.2. Anwendung

Die wichtigste Anwendung der mehrdimensionalen Fouriertransformation ist die Realisierung von Filtern beziehungsweise die digitale Realisierung eines Systems oder die schnelle Berechnung einer Fal-

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

6. Mehrdimensionale digitale Signalverarbeitung

6.5 Die diskrete Fouriertransformation

6.5.3 Verwandte Transformationen

tung.

Die Impulsantwort eines Systems habe endlichen Träger, das heißt, es sei $h(n_1, n_2) = 0$ außerhalb des Rechtecks $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$ und $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$. Rechnet man die Faltung nach der im Abschnitt 6.4.1 gegebenen Formel direkt aus, dann benötigt zur Berechnung eines Funktionswertes $(h ** x)(n_1, n_2)$ insgesamt $N_1 \cdot N_2$ Multiplikationen und $N_1 \cdot N_2 - 1$ Additionen.

Man kann auch die beiden diskreten Fouriertransformierten X und H ausrechnen und das Produkt $X \cdot H$ zurücktransformieren (wobei hier nicht gezeigt wurde, daß man auf diese Weise tatsächlich die Faltung erhält; auch die Rücktransformationsformel für die diskrete Fouriertransformation wurde nicht hergeleitet. Einzelheiten sind in dem Buch von Dudgeon und Mersereau 1984, Chapter 2, zu finden). Der Aufwand bei dieser Vorgehensweise beläuft sich auf insgesamt $2 \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot \log_2(N_1 \cdot N_2) + 2 \cdot N_1 \cdot N_2$ Multiplikationen, wenn man unterstellt, daß H bereits gespeichert vorliegt. Da man hierdurch alle Funktionswerte von $h ** x$ erhält, ist der Rechenaufwand wesentlich geringer als bei der direkten Vorgehensweise.

6.5.3. Verwandte Transformationen

Für die Verarbeitung von digitalen Signalen wurde eine Vielzahl von Transformationen entwickelt, die der Fouriertransformation verwandt sind und die gegenüber dieser besonders vorteilhafte Eigenschaften besitzen. Insbesondere sind hier die Walsh-Funktionen zu erwähnen, mit deren Hilfe man die Walsh-Transformation definieren kann. Die Walshfunktionen nehmen nur die Werte 0 oder 1 an, daher sind sie für die digitale Verarbeitung geeigneter als die reell- (oder komplex-) wertigen Exponentialfunktionen, die der Fouriertransformation zugrunde liegen. Es existiert eine große Anzahl solcher Funktionensysteme, die auf verschiedene Anwendungen zugeschnitten sind. Eine Übersicht mit Hinweisen auf Anwendungen findet man in dem Buch von Jaroslavskij (1985).

Zur schnellen Ausführung der Faltung kann man auch sogenannte zahlentheoretische Transformationen benutzen. Auch diese haben den

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

6. Mehrdimensionale digitale Signalverarbeitung

6.6 Entwurf von FIR-Filtern

6.6.1 Entwurf mittels 1D-Fensterfunktionen

Vorteil, daß sie nur INTEGER-Arithmetik benutzen und daher schneller und vor allem Rundungsfehlerfrei sind im Vergleich mit der Fouriertransformation. Die Transformatierten haben bei diesen Transformationen keine anschaulich-physikalische Bedeutung. Die Theorie dazu ist sehr schwierig, man vergleiche etwa das Buch von Creutzburg (1986).

6.6. Entwurf von FIR-Filtern

FIR-Filter (Finite-extent Impulse Response) zeichnen sich dadurch aus, daß ihre Impulsantwort beschränkten Träger hat, das heißt, außerhalb eines endlichen Rechtecks in der Ebene verschwindet. Man nennt solche Filter auch *nichtrekursiv*. Gegenüber den IIR-Filtern (Infinite-extent Impulse Response) haben diese Filter den Vorteil einer sehr viel einfacheren Theorie. Insbesondere gibt es für FIR-Filter keine Stabilitätsprobleme. Auch der Entwurf der IIR-Filter ist ungleich schwieriger als der der FIR-Filter. Demgegenüber sind IIR-Filter unter Umständen wegen ihrer rekursiven Natur leichter zu realisieren. Wir werden hier nicht auf IIR-Filter eingehen, eine ausführliche Darstellung findet man in dem schon mehrfach erwähnten Buch von Dudgeon und Mersereau 1984, Chapters 4 und 5.

Man kann bei der Untersuchung von FIR-Filtern generell voraussetzen, daß die Frequenzantwort rein reell ist. Solche Filter nennt man *Nullphasenfilter* (zero-phase filter). Sie sind charakterisiert durch die Bedingung

$$H(\omega_1, \omega_2) = H^*(\omega_1, \omega_2) \quad \text{bzw.} \quad h(n_1, n_2) = h^*(-n_1, -n_2)$$

wobei das Symbol "*" den Übergang zum konjugiert Komplexen bedeutet. Die Nullphasenbedingung bedeutet eine Aufwandsreduktion beim Entwurf eines Filters, da man Symmetrien ausnutzen kann. Da bei einem solchen Filter die Phasen erhalten bleiben, werden zum Beispiel Kanten in Bildern nicht zerstört. Wir nehmen durchweg an, daß die Nullphasenbedingung erfüllt ist.

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

6. Mehrdimensionale digitale Signalverarbeitung

6.6 Entwurf von FIR-Filtern

6.6.2 Beispiele

6.6.1. Entwurf vermittelt 1D-Fensterfunktionen

Die einfachste Möglichkeit, ein zweidimensionales Filter zu entwerfen, besteht darin, diese Aufgabe auf eine eindimensionale Aufgabe zurückzuführen. Es sei $i(n_1, n_2)$ mit der Frequenzantwort $I(\omega_1, \omega_2)$ ein ideales Filter. Vermittels einer geeigneten Fensterfunktion $w(n_1, n_2) \leftrightarrow W(\omega_1, \omega_2)$ ermittelt man eine Approximation $h(n_1, n_2) \leftrightarrow H(\omega_1, \omega_2)$ für das ideale Filter $i(n_1, n_2)$, indem man setzt

$$h(n_1, n_2) = i(n_1, n_2) \cdot w(n_1, n_2)$$

beziehungsweise

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(\theta_1, \theta_2) \cdot W(\omega_1 - \theta_1, \omega_2 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2.$$

Die Fensterfunktion $w(n_1, n_2)$ konstruiert man sich vermittelt einer der zahlreichen bekannten eindimensionalen Fensterfunktionen durch einen separablen Ansatz

$$w_R(n_1, n_2) = w_1(n_1) \cdot w_2(n_2)$$

(zweidimensionales Rechtecksfenster) oder aber gemäß

$$w_C(n_1, n_2) = w_1(\sqrt{n_1^2 + n_2^2})$$

(kreisförmiges Fenster).

Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, daß man die Kenntnisse, die man über eindimensionale Fensterfunktionen hat, hierbei gut ausnutzen kann. Dem steht der Nachteil gegenüber, daß die Entwurfsmöglichkeiten durch die Beschränkung auf eindimensional erzeugbare Fensterfunktionen naturgemäß sehr begrenzt sind.

6.6.2. Beispiele

Beispiel 1: Wir betrachten das ideale Tiefpaßfilter mit kreisförmigem Träger aus Beispiel 4 von Abschnitt 6.4.6. Es sei also

$$I(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq (0.4\pi)^2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

Wie wir gesehen hatten, ist dann

$$i(n_1, n_2) = \frac{0.2 \cdot J_1(0.4\pi \cdot \sqrt{n_1^2 + n_2^2})}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}.$$

Da I reell ist (Nullphasenbedingung), wählen wir den Träger von $h(n_1, n_2)$ symmetrisch zum Ursprung: $-5 \leq n_1, n_2 \leq 5$. Mit dem *Kaiser-Fenster*

$$w(t) = \begin{cases} \frac{I_0(\alpha \cdot \sqrt{1 - (t/\tau)^2})}{I_0(\alpha)} & \text{für } |t| \leq \alpha, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erhält man mit $\tau = 5$ das Filter mit rechteckigem Träger

$$w_R(n_1, n_2) = \begin{cases} \frac{I_0(\alpha \cdot \sqrt{1 - (n_1/5)^2}) \cdot I_0(\alpha \cdot \sqrt{1 - (n_2/5)^2})}{I_0^2(\alpha)} & \text{für } |n_1| \leq 5 \text{ und } |n_2| \leq 5, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das entsprechende kreisförmige Filter hat dann die Form

$$w_C(n_1, n_2) = \begin{cases} \frac{I_0(\alpha \cdot \sqrt{1 - (n_1^2 + n_2^2)/25})}{I_0(\alpha)} & \text{für } n_1^2 + n_2^2 \leq 25, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die entsprechenden approximativen Filter sind dann

$i(n_1, n_2) \cdot w_R(n_1, n_2)$ beziehungsweise $i(n_1, n_2) \cdot w_C(n_1, n_2)$.

Für $\alpha = 0$ geht das Kaiser-Fenster in das Rechtecksfenster mit Träger $|t| \leq \tau$ über. In diesem Falle ist der maximale Fehler des approximierenden Filters gegenüber dem idealen Filter

	im Paßband	im Stopband
w_R	0.2914	0.1314
w_C	0.1468	0.1105

(vgl. Dudgeon und Mersereau 1984, Seite 120 f.).

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

6. Mehrdimensionale digitale Signalverarbeitung

6.6 Entwurf von FIR-Filtern

6.6.3 Grundsätzliche Probleme beim Entwurf von 2D-Filtern

6.6.4 Optimaler Filter

6.6.3. Grundsätzliche Probleme beim Entwurf von 2D-Filtern

Im eindimensionalen Falle ist die Frequenzantwort

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

ein Polynom in $z = e^{-j\omega}$. Jedes Polynom einer Veränderlichen ist aber faktorisiertbar, d. h. es ist

$$H(\omega) = F(\omega) \cdot G(\omega),$$

wobei F und G Polynome vom niedrigeren Grad als H sind. Wie wir in 6.4.4 gesehen hatten, läßt sich damit das durch H beschriebene System als Kaskade realisieren. Leider bringt dies im Eindimensionalen keinen Vorteil.

Im Falle eines mehrdimensionalen Systems ist die Faktorisiertbarkeit die Ausnahme, jedoch läßt sich ein faktorisiertes System als Kaskade wirtschaftlicher realisieren, als das Ausgangssystem. Ist beispielsweise

$$H(\omega_1, \omega_2) = F(\omega_1, \omega_2) \cdot G(\omega_1, \omega_2),$$

wobei die Impulsantworten je auf einem endlichen Träger definiert sind, etwa $h(n_1, n_2)$ auf einem $N \times N$ - Rechteck, f auf einem $M \times M$ - Rechteck und folglich g auf einem $(N - M + 1) \times (N - M + 1)$ - Rechteck, dann benötigt man für die Ausführung der direkten Faltung zur Berechnung eines Funktionswertes $h(n_1, n_2)$ insgesamt N^2 Multiplikationen. Bei der Realisierung als Kaskade hätte man eine Anzahl von $M^2 + (N - M + 1)^2$ Multiplikationen. Im Falle $N = 10$ und $M = 5$ hätte man beispielsweise ein Verhältnis

$$\frac{\text{Kaskade}}{\text{Direkte Faltung}} = \frac{61}{100} = 0.61.$$

6.6.4. Optimale Filter

Die mathematisch befriedigendste Methode ist es, den Fehler in der Frequenzantwort durch Anpassung der Filterparameter zu minimieren. In der Darstellung im Frequenzbereich

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

6. Mehrdimensionale digitale Signalverarbeitung

6.6 Entwurf von FIR - Filtern

6.6.5 Die Mc Clellan - Transformation

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} h(n_1, n_2) \cdot e^{-j\omega_1 n_1 - j\omega_2 n_2}$$

sind die Filterparameter $h(n_1, n_2)$ so zu wählen, daß die Fehlerfunktion

$$E(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1, \omega_2) - I(\omega_1, \omega_2),$$

das heißt die Abweichung von approximiertem zu idealem Filter, minimal wird. Dabei benutzt man verschiedene Fehlermaße, etwa

$$\frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2,$$

das L^2 -Kriterium oder die mittlere quadratische Abweichung oder

$$\frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(\omega_1, \omega_2)| d\omega_1 d\omega_2,$$

das L^1 -Kriterium oder die mittlere Abweichung. Weiterhin hat man das Fehlermaß

$$\max_{\omega_1, \omega_2} |E(\omega_1, \omega_2)|,$$

das Tschebyschew-Kriterium oder die maximale Abweichung (bzw. L^∞ -Kriterium). Besonders das letztgenannte Kriterium ist in der Signalverarbeitung von Interesse (sog. "*Equiripple Filter*" oder *Minimax Filter*). Im Eindimensionalen sind derartige Filter noch einigermaßen berechenbar, etwa durch Entwicklung der Funktion $H(\omega)$ nach Tschebyschew-Polynomen, im Falle mehrerer Veränderlicher sind dagegen die theoretischen und praktischen Probleme außerordentlich groß und noch längst nicht befriedigend gelöst.

6.6.5. Die McClellan-Transformation

Die McClellan-Transformation ist ein sehr elegantes Hilfsmittel zum Entwurf von mehrdimensionalen Filtern. Sie zeichnet sich durch hohe Qualität der konstruierten Filter, durch flexible Anpassungsfähigkeit an vorgegebene Anforderungen und durch besonders einfache Implementierbarkeit aus. Bei der McClellan-Transformation spielen

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

zwei Tricks eine besondere Rolle.

Der erste dieser Tricks besteht darin, daß man sich ein eindimensionales Filter $h(n)$ konstruiert, das in einem noch zu präzisierenden Sinne die "Form" des gewünschten zweidimensionalen Filter beschreibt. Dieses eindimensionale Filter soll der Nullphasenbedingung genügen, also $h(n) = h^*(-n)$ beziehungsweise: alle $h(n)$ seien reell. Der Träger des Filters h sei die Menge aller n mit $-N \leq n \leq N$. Dann hat man für die Frequenzantwort des durch h beschriebenen Systems

$$H(\omega) = h(0) + \sum_{j=1}^N h(n) \cdot (e^{-j\omega n} + e^{j\omega n}) = \sum_{j=0}^N a(n) \cdot \cos \omega n,$$

wobei $a(0) = h(0)$ und $a(n) = 2 \cdot h(n)$ gesetzt wurde.

Man kann ausrechnen, daß der Ausdruck $\cos \omega n$ sich als ein Polynom in $\cos \omega$ schreiben läßt, das sogenannte Tschebyschew-Polynom der Ordnung n :

$$\cos \omega n = T_n(\cos \omega).$$

Die Tschebyschew-Polynome sind gut bekannt (vgl. dazu den Abschnitt 3.5.3 des Buches von Dudgeon und Mersereau 1984). Insbesondere weiß man, daß man durch eine Entwicklung eines idealen Filters nach den Tschebyschew-Polynomen eine recht gute Approximation eines im Tschebyschew'schen Sinne optimalen approximierenden Filters erhält (vgl. Abschnitt 6.6.4). Wir haben also jetzt die Entwicklung

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^N a(n) \cdot T_n(\cos \omega).$$

Nun folgt der zweite Trick, die eigentliche Transformation. Anstelle von $\cos \omega$ setzen wir in die Tschebyschew-Entwicklung eine Funktion $F(\omega_1, \omega_2)$ ein und erhalten aus dem eindimensionalen Filter H ein zweidimensionales Filter

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n=0}^N a(n) \cdot T_n\{F(\omega_1, \omega_2)\}.$$

Eine häufig benutzte Funktion zur Transformation hat eine Impuls-

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

antwort $f(n_1, n_2)$, die auf einer (diskreten) 3×3 - Umgebung des Nullpunktes definiert ist und dort Funktionswerte hat, die aus dem folgenden Schema hervorgehen:

$$\begin{array}{ccc} \frac{D}{2} & \frac{C}{2} & \frac{E}{2} \\ \frac{B}{2} & A & \frac{B}{2} \\ \frac{E}{2} & \frac{C}{2} & \frac{E}{2} \end{array}$$

Es ist dann

$$F(\omega_1, \omega_2) = A + B \cdot \cos \omega_1 + C \cdot \cos \omega_2 + \\ + D \cdot \cos(\omega_1 - \omega_2) + E \cdot \cos(\omega_1 + \omega_2).$$

Das Prinzip der McClellan-Transformation läßt sich wie folgt formulieren: Die Funktion $F(\omega_1, \omega_2)$ legt die Höhenlinien des zu entwerfenden Filters gemäß $F(\omega_1, \omega_2) = \text{const}$ fest. Vermittels der Funktion H kann man die Funktionswerte auf diesen Höhenlinien vorschreiben.

Wählt man etwa

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = C = \frac{1}{2}, \quad D = E = \frac{1}{4},$$

dann ist

$$F(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2} \cdot (-1 + \cos \omega_1 + \cos \omega_2 + \cos \omega_1 \cdot \cos \omega_2).$$

Die Höhenlinien dieser Funktion sind in der Nähe des Nullpunktes der $\omega_1 - \omega_2$ -Ebene nahezu kreisförmig. Die durch die Punkte $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(-\pi, 0)$ bzw. $(0, -\pi)$ gehende Höhenlinie ist ein Quadrat.

Für $\omega_2 = 0$ erhält man

$$F(\omega_1, 0) = \cos \omega_1.$$

Beschafft man sich ein eindimensionales Filter $H(\omega_1)$ (Tiefpaß, Hochpaß, Bandpaß, ...), dann ist das mit $F(\omega_1, \omega_2)$ und $H(\omega_1)$ transformierte zweidimensionale Filter $H(\omega_1, \omega_2)$ ein Filter mit kreisförmigem Träger und entsprechenden Eigenschaften (Tiefpaß, Hochpaß, Bandpaß, ...). Beispiele findet man in dem Buch von Dudgeon und Mersereau

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

6. Mehrdimensionale digitale Signalverarbeitung

6.7 Die zweidimensionale Z-Transformation

1984, Abschnitt 3.5.3.

Offen ist noch die Frage der Realisierung eines durch die McClellan Transformation entworfenen Filters. Dies kann auf besonders elegante Weise durch Ausnutzung der Rekursionsbeziehung für die Tschebyschew-Polynome geschehen. Es gilt nämlich

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

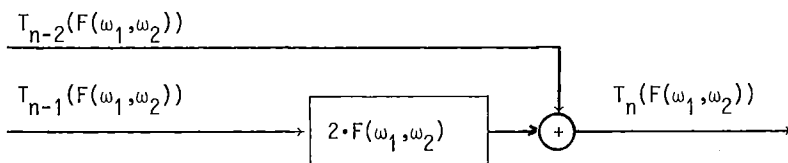
und

$$T_n(x) = 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

also

$$T_n(F(\omega_1, \omega_2)) = 2 \cdot F(\omega_1, \omega_2) \cdot T_{n-1}(F(\omega_1, \omega_2)) - T_{n-2}(F(\omega_1, \omega_2)).$$

Diese Beziehung läßt sich auf die folgende Weise realisieren:



Durch Hintereinanderschaltung von solchen Elementen läßt sich dann vermöge der obigen Rekursionsbeziehung ein McClellan-Filter realisieren.

6.7. Die zweidimensionale Z-Transformation

Die Definition der zweidimensionalen Z-Transformation ist völlig analog zum eindimensionalen Falle. Für ein System mit der Impulsantwort $h(n_1, n_2)$ betrachtet man die spezielle Eingabefolge

$$x(n_1, n_2) = z_1^{n_1} \cdot z_2^{n_2},$$

wobei z_1 und z_2 irgendwelche komplexen Zahlen sind. Die Systemantwort ist dann

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} z_1^{n_1-k_1} \cdot z_2^{n_2-k_2} \cdot h(k_1, k_2) =$$

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

$$\begin{aligned}
&= z_1^{n_1} \cdot z_2^{n_2} \cdot \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} z_1^{-k_1} \cdot z_2^{-k_2} \cdot h(k_1, k_2) = \\
&= z_1^{n_1} \cdot z_2^{n_2} \cdot H_Z(z_1, z_2).
\end{aligned}$$

Hierbei ist

$$H_Z(z_1, z_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h(k_1, k_2) \cdot z_1^{-k_1} \cdot z_2^{-k_2}$$

die *Z-Transformierte* von $h(n_1, n_2)$. Man kann $H_Z(z_1, z_2)$ als Eigenwert des Systems zur Eigenfunktion $z_1^{n_1} \cdot z_2^{n_2}$ auffassen. Es ist

$$H_Z(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = H(\omega_1, \omega_2).$$

Die sich hierbei ergebenden Fragen der Konvergenz der definierenden unendlichen Reihe, der Stabilität, der Inversion der Transformation und ihrer Eigenschaften sollen hier nicht weiter untersucht werden. Wir skizzieren lediglich die Anwendung der Z-Transformation auf den Entwurf rekursiver zweidimensionaler Filter.

Dazu sei ein LSI-System durch eine lineare Differenzengleichung dargestellt, das heißt, die Systemantwort $y(n_1, n_2)$ ergebe sich aus der Eingabe $x(n_1, n_2)$ gemäß

$$\begin{aligned}
\sum_{k_1} \sum_{k_2} b(k_1, k_2) \cdot y(n_1 - k_1, n_2 - k_2) &= \\
= \sum_{r_1} \sum_{r_2} a(r_1, r_2) \cdot x(n_1 - r_1, n_2 - r_2)
\end{aligned}$$

mit gegebenen systemabhängigen Funktionen $a(n_1, n_2)$ und $b(n_1, n_2)$. Setzen wir wieder $x(n_1, n_2) = z_1^{n_1} \cdot z_2^{n_2}$, dann erhalten wir mit der oben eingeführten Funktion $H_Z(z_1, z_2)$, die den Zusammenhang zwischen $y(n_1, n_2)$ und der speziellen Testfunktion $x(n_1, n_2)$ beschreibt:

$$\begin{aligned}
H_Z(z_1, z_2) \cdot \sum_{k_1} \sum_{k_2} b(k_1, k_2) \cdot z_1^{-k_1} \cdot z_2^{-k_2} &= \\
= \sum_{r_1} \sum_{r_2} a(r_1, r_2) \cdot z_1^{-r_1} \cdot z_2^{-r_2}
\end{aligned}$$

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

6. Mehrdimensionale digitale Signalverarbeitung

6.8 Einige einfache Aufgaben der Bildverarbeitung

oder

$$H_z(z_1, z_2) = \frac{A_z(z_1, z_2)}{B_z(z_1, z_2)}.$$

Die Entwurfsaufgabe besteht nun darin, eine ideale Funktion $H_z(z_1, z_2)$ durch geeignete Wahl der Koeffizienten $a(r_1, r_2)$ und $b(k_1, k_2)$ der beiden Funktionen $A_z(z_1, z_2)$ und $B_z(z_1, z_2)$ zu approximieren. Dabei wird man realistischerweise annehmen, daß die beiden Funktionen endliche Träger haben, also Polynome sind. Bei dieser Approximation sind gewisse Vorgaben zu beachten, die Implementierbarkeit und insbesondere Stabilität garantieren sollen. Die zweidimensionale rationale Approximation ist weder theoretisch noch praktisch eine einfache Aufgabe. Da Separabilität nur in Ausnahmefällen gegeben ist, kann man sich diese Aufgabe auch nicht erleichtern. Man kann also feststellen, daß der Entwurf von zweidimensionalen IIR-Filtern als außerordentlich schwierig bezeichnet werden kann.

6.8. Einige einfache Aufgaben der Bildverarbeitung

Zum Abschluß sollen einige einfache Aufgaben aus der Bildverarbeitung vorgestellt werden. Hierbei wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben. In den Büchern von Haberäcker (1987), Jaroslavskij (1985) oder Zamperoni (1989) kann man sich tiefergehend informieren. In dem Buch von Börner (1988) sind besonders schöne Anwendungsbeispiele gegeben, das Buch von Pose (1981) geht insbesondere auf Anwendungen in der Hochenergiephysik ein.

In der Bildverarbeitung ist das Signal eine Funktion $x(n_1, n_2)$, die den "Farbwert" an der Stelle (n_1, n_2) im (zeilen- und spaltenweise diskretisierten) Bild angibt. Dabei unterscheidet man zwischen *Farbbildern* (x besteht aus drei Komponenten, die jeweils die Intensität in einem geeigneten Spektralbereich angeben) beziehungsweise *Mehrkanalbildern*, *Grauwertbildern* (x gibt eine Intensität an, ist also nichtnegativ und beschränkt) oder *Binärbildern* (x ist nur zweier Werte fähig, die die "Farben" schwarz und weiß codieren sol-

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

len). Solche Bilder treten in zahlreichen Anwendungen auf, etwa als Ergebnis bildgebender Meßverfahren in Physik oder Medizin, als Satellitenaufnahmen, in der Qualitätskontrolle oder aber bei der automatischen Analyse von Dokumenten. Das Ziel der automatischen Bildverarbeitung ist letztendlich die Erkennung von bestimmten Merkmalen im Bild, die zu einem Verständnis des Bildinhalts führen sollen. Diese Aufgabe ist naturgemäß sehr komplex und nicht allgemein algorithmisch formulierbar. Ein wichtiger Vorverarbeitungsschritt ist die Filterung eines Bildes. Wir wollen hier einige der am häufigsten benutzten Filter vorstellen.

Das *Mittelwertfilter* (mit rechteckigem Fenster) hat die Form

$$y(n_1, n_2) = \frac{1}{(2N_1+1) \cdot (2N_2+1)} \cdot \sum_{k_1=-N_1}^{N_1} \sum_{k_2=-N_2}^{N_2} x(n_1-k_1, n_2-k_2).$$

Hierbei ist die Größe des Mittelungsfensters durch N_1 und N_2 beschrieben. Das Mittelwertfilter wird benutzt, um in Grauwertbildern, die verrauscht sind, die Grauwerte zu glätten. Das Filter ist einfach zu berechnen und zu realisieren, jedoch ist es sensitiv gegen "Ausreißer".

Ein sehr häufig verwendetes Filter, das jedoch nicht linear ist, ist das *Medianfilter*. Um den Ausgang des Filters zu berechnen, sortiert man die Werte $x(n_1-k_1, n_2-k_2)$ in einem rechteckigen Fenster, das durch $-N_1 \leq k_1 \leq N_1$, $-N_2 \leq k_2 \leq N_2$ gegeben ist, der Größe nach. $y(n_1, n_2)$ ist dann der Wert, der genau in der Mitte der geordneten Folge steht. Das Medianfilter hat zunächst den formalen Vorteil, daß der Typ des Bildes erhalten bleibt, das heißt, Binär-, Grauwert- oder Farbbilder gehen in Binär-, Grauwert- oder Farbbilder über. Man benutzt das Filter zur Reparatur von Punktfehlern, wobei es sich im allgemeinen "robuster" gegen große Abweichungen verhält, als das Mittelwertfilter. Von Nachteil ist, daß das Medianfilter rechenaufwendiger ist als das Mittelwertfilter. Zudem macht die Nichtlinearität unter Umständen Probleme.

Wir betrachten ein einfaches eindimensionales Beispiel, das den Un-

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

terschied zwischen Mittelwert- und Medianfilter illustrieren soll.
Die Signalfolge

..., 11, 11, 12, 11, 9, 13, 15, 14, 14, ...

sei je nach links und rechts konstant fortgesetzt gedacht. Mittelwertbildung mit der Fenstergröße 7 (das heißt $N = 3$) liefert die Folge

..., 10.86, 11.14, 11.71, 12.14, 12.57, 12.86, 13.29, ...

Medianfilterung mit der Fenstergröße 7 liefert

..., 11, 11, 11, 11, 12, 13, 14, 14, 14, ...

Der mittlere Wert der Ausgangssignalfolge (9) werde nun durch den Wert 100 ersetzt. Dann liefert das Mittelwertfilter die Folge

..., 23.86, 24.14, 24.71, 25.14, 25.57, 25.86, 26.29, ...

Durch Änderung eines Wertes ändern sich also alle betrachteten Folgenglieder sehr drastisch. Anders ist es bei dem Medianfilter. Wir erhalten die gefilterte Folge

..., 11, 11, 11, 12, 13, 14, 14, 14, 14, ...

Die recht dramatische Änderung eines Wertes hat also kaum einen Einfluß auf die gefilterte Folge. Es sollte angemerkt werden, daß nicht in jedem Falle die Herausfilterung extremer Abweichungen sinnvoll ist, unter Umständen wird signifikante Information dabei "weggefiltert".

Eine weitere Klasse von Filtern, die in einem gewissen Sinne das Gegenteil bewirken sollen, wie Mittelwert- und Medianfilter, sind die *Gradientenfilter*. Diese Filter dienen dazu, geringe Kontraste in einem Bild anzuheben, um beispielsweise Gebiete unterschiedlichen Grauwerts durch Konturen abzugrenzen. Diese Filter modellieren den (kontinuierlichen) Gradientenbetrag durch Differenzenquotienten.

Beim *Kompaßgradienten* ermittelt man zunächst Näherungen für die Ableitungswerte der Grauwertfunktion in die "Haupt- und Nebenhimmelsrichtungen", also

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

$$H_O = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad H_{NO} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad H_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H_{NW} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad H_W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad H_{SW} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad H_{SO} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Beim *Sobel-Gradienten* hat man vier Filter, nämlich

$$S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad S_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Aus den Ausgängen dieser Einzelfilter ermittelt man dann den eigentlichen Filterausgang gemäß

$$y_H(n_1, n_2) = \max \{ |H_O ** x|, |H_{NO} ** x|, |H_N ** x|, |H_{NW} ** x|, \\ |H_W ** x|, |H_{SW} ** x|, |H_S ** x|, |H_{SO} ** x| \},$$

beziehungsweise

$$y_S(n_1, n_2) = \max_{i=1,2,3,4} |(S_i ** x)(n_1, n_2)|.$$

Ganz analog kennt man Filter zur Berechnung der zweiten Ableitungen in einem Grauwertbild, so zum Beispiel das *Laplace-Filter*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

beziehungsweise die Filter

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Filter kann man zur Bestimmung von Konturlinien anwenden. Eindrucksvolle Beispiele hierfür findet man in dem Buch von Börner (1988).

Als ein typisches Anwendungsbeispiel für den Einsatz von Filtern in der Bildverarbeitung betrachten wir noch die logarithmische Filterung. Hierbei geht man davon aus, daß sich der in einem Bild beobachtete Grauwert multiplikativ zusammensetzt aus einem Beleuchtungsanteil $x_B(n_1, n_2)$, der langsam veränderlich ist und einen Reflexionsanteil $x_R(n_1, n_2)$, der sich rasch verändert. Man hat also insgesamt das Bildsignal

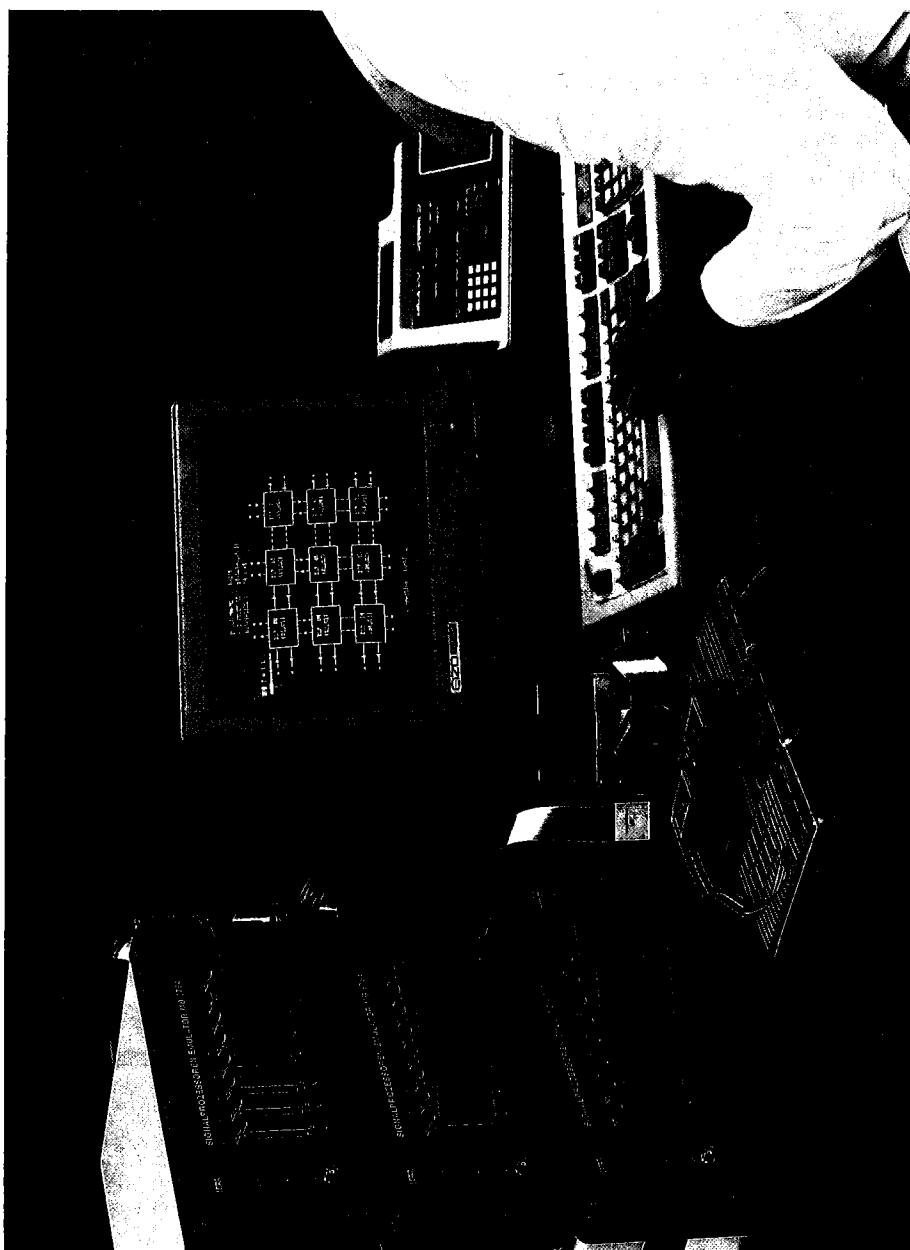
$$x(n_1, n_2) = x_B(n_1, n_2) \cdot x_R(n_1, n_2).$$

Logarithmiert man das Bildsignal, dann setzt es sich additiv zusammen aus einem rasch veränderlichen Teil und einem langsam veränderlichen Anteil. Vermittels einer Hochpaßfilterung kann man den Beleuchtungsanteil unterdrücken, ohne daß der Reflexionsanteil davon beeinflußt wird. Eine nichtlineare Rücktransformation (Exponentiation) liefert ein Bild, das nur noch den von der Oberflächenbeschaffenheit der dargestellten Gegenstände abhängigen Reflexionsanteil zeigt.

Für weitere Beispiele und eine tiefergehende Behandlung des Gegenstandes sei auf die angeführte Literatur verwiesen.

Prof. Dr. U. Eckhardt
Universität Hamburg
Institut für Angewandte Mathematik

7. KFA - Entwicklungssystem MB8764



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
 –Abteilung Allgemeine Elektronik–

In Circuit Entwicklungssystem MB 8764 zur Entwicklung von systolischen Multi-Signal- prozessoranordnungen zur digitalen Hochgeschwindigkeits-Signalverarbeitung

Neue Entwicklungen auf dem Gebiet der Mikroelektronik bieten die Möglichkeit, mit programmierbaren, extrem schnellen Prozessoren, den Signalprozessoren, abgetastete analoge Signale in Echtzeit numerisch zu verarbeiten. Diese als „Digitale Signalverarbeitung“ bezeichnete Methode gewinnt wegen ihrer wirtschaftlichen und technischen Vorteile in der elektronischen Nachrichtentechnik, Regelungstechnik und Meßtechnik immer mehr an Bedeutung.

Nicht nur die bis jetzt mit Analogschaltungen gelösten, sondern auch viele für unlösbar gehaltene Signalverarbeitungsprobleme können mit den heute preiswerten Signalprozessoren kostengünstig gelöst werden.

Die Verwirklichung komplexer Signalverarbeitungsaufgaben in nur einem Signalprozessor führt zu einer überproportionalen Zunahme der Länge der vom Signalprozessor abzuarbeitenden Programme und damit zu einer entsprechend unerwünschten Herabsetzung der Signal-Verarbeitungsgeschwindigkeit. Abhilfe schaffen in diesen Fällen die systolischen Multi-Signalprozessoranordnungen. Das auf der INTERKAMA 1989 ausgestellte In-Circuit-Entwicklungssystem MB 8764 ist ein unentbehrliches Hilfsmittel bei der Entwicklung von solchen Mehrprozessorschaltungen, die bei ihrer Fertigstellung als selbständig arbeitende Platineinheiten Teilfunktionen in einem sonst analog arbeitenden elektronischen Gerät übernehmen. Das an sich multivalent konzipierte Entwicklungssystem erleichtert Entwicklungsarbeiten an Schaltungen, die mit Fujitsu Signalprozessoren MB 8764 oder MB 87064 bestückt sind.

Wegen der Bedeutung der noch nicht sehr bekannten systolischen Multi-Signalprozessoranordnungen zur digitalen Hochgeschwindigkeitsverarbeitung analoger Signale hier noch einige Bemerkungen über ihre Eigenschaften und ihre Arbeitsweise.

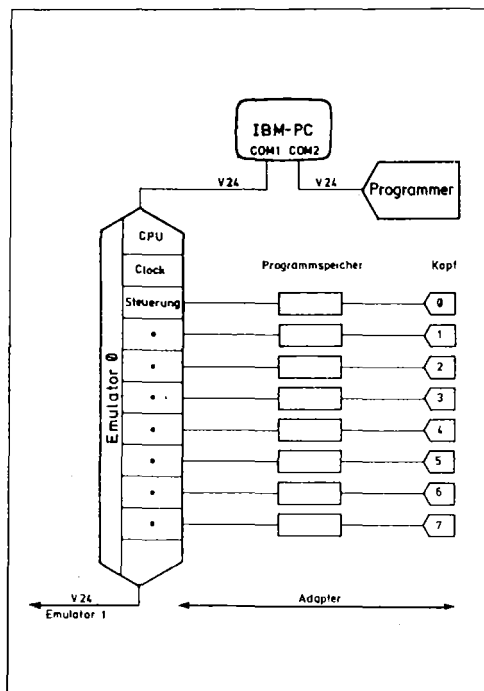
Ein systolisches Mehrprozessorsystem führt eine parallele Datenverarbeitung aus. Ein Berechnungsvorgang wird in eine vorgegebene Anzahl gleichartiger Teilberechnungsvorgänge zerlegt. Die in jedem Prozessor berechneten Zwischenergebnisse werden mit einem für alle Prozessoren gleichen Takt, dem systolischen Takt, solange in vorgegebener Richtung über Daten-Links in die Nachbarprozessoren geschoben, bis das Endergebnis einer Berechnung den letzten Prozessor verläßt. Es entstehen in der Multi-Signalprozessoranordnung Datenströme, die sich mit der Geschwindigkeit des systolischen Taktes durch die Anordnung bis zu ihrem Ausgang bewegen. Mit dem Signalprozessor MB 8764 können in dieser Weise Signale mit spektralen Frequenzen bis zu etwa 300 kHz verarbeitet werden. Wegen der voraussetzungsgemäß gleichen Teilberechnungsvorgänge müssen die Signalprozessorprogramme, die diese Berechnungen ausführen, natürlich alle gleich sein. Koeffizienten unterschiedlicher Größe, die mit entsprechenden Programmbeehlen von jedem Signalprozessor gleichzeitig übernommen werden, bestimmen ausschließlich daß Zeitverhalten der Zahlenfolge (Signalausgangsfolge), die das System verläßt.

Systolische Multi-Signalprozessoranordnungen haben folgende Vorteile:

- lineare Signalgeschwindigkeitserhöhung bei Vergrößerung der Anzahl der Prozessoren
- modularer, beliebig erweiterbarer Aufbau
- ein Programm für alle Signalprozessoren
- ein getrennt eingebbarer Satz von Koeffizienten
- hohe Signalverarbeitungsgeschwindigkeit.

Aufbau und Eigenschaften:

Die zentrale Steuerung des In-Circuit-Entwicklungssystems MB 8764 wird über ein IBM-PC vom Typ XT, AT oder PS2 ausgeführt. Über serielle Schnittstellen wird ein Programmierer (laden der Programm-PROMs), ein Line-Printer und eine Einheit mit bis zu acht Emulatoren angeschlossen. Mit jedem Emulator können bis zu acht Signalprozessor-Adapter betrieben werden. Das Entwicklungssystem kann also für die Entwicklung von systolischen Multi-Signalprozessoranordnungen mit bis zu 64 DSPs verwendet werden. Ein Signal-Prozessoradapter besteht seinerseits aus einem Adapterkopf, in den ein Signalprozessor eingebaut ist und aus einem in ein Kleingehäuse eingebauten Programmspeicher. Über ein 30 cm langes Bandkabel gelangt der Maschinencode der Signalprozessorbefehle aus dem Programmspeicher in den Signalprozessor. Die Datenübertragung zwischen dem Signalprozessor im Adapterkopf und dem Programmspeicher wird im 10 MHz-Takt ausgeführt. Über ein 1 m langes Kabel, das den Programmspeicher mit dem Emulator verbindet, wird dieser geladen. Die Übertragung und Organisation der Daten zwischen dem PC und den Emulatoren übernimmt ein in jeden Emulator eingebauter Mikroprozessor 8085.



Blockschaltbild des Entwicklungssystems

Das im IBM-PC installierte und unter MS-DOS laufende Programmpaket ermöglicht eine menügesteuerte komfortable

- Signalprozessor-Programmbearbeitung im Programm-Handler,
- die Steuerung des Emulators,
- und das Laden der Signalprozessor-Programmspeicher.

Mit dem **Programm-Handler** werden das Signalprozessorprogramm geschrieben, Korrekturen am Programm, an der Multiprozessorarchitektur oder am Koeffizientensatz ausgeführt und das Programm bei Fehlerfreiheit in Maschinenbefehle umgesetzt. Es können auch fertige Programme aus einer Programmbibliothek aufgerufen werden, für die dann nur noch die Signalverarbeitungseigenschaften der zu entwickelnden Anordnung und der Koeffizientensatz eingegeben werden müssen. Der Koeffizientensatz enthält die jedem Signalprozessor zugeordneten Koeffizienten, die in einem Datenfile auf der Festplatte des Steuerrechners abgelegt sind. Selbst geschriebene Programme, nicht die aus der Programmbibliothek, können gelöscht und die ausgewählten Multi-Prozessoranordnungen grafisch dargestellt werden. Nach Bedarf können auch Programmlisten oder Listen mit den für den Betrieb der Signalprozessoren bestimmten Maschinenbefehlen und ihren Hexadezimaladressen auf dem Schirm des Steuerrechners oder auf einem Line-Printer ausgegeben werden.

Beim Neuaufbau eines Programms wird der Anwender zunächst gefragt, ob er ein externes Unterprogramm, ein Signalprozessorprogramm für eine Einprozessorschaltung, für einen binären Baum, für eine semisystolische oder für eine globalsystolische Matrix schreiben will oder ob er ein Bibliotheksprogramm verwenden will. Fällt die Wahl auf eine systolische Multi-Prozessoranordnung, wird diese zunächst auf dem Bildschirm grafisch dargestellt. Nach Beantwortung der Fragen nach ihrer Größe, den Datenflußrichtungen, nach der Art der Eingangs- und Ausgangssignale wird ein direkter Sprung in den Editor ausgeführt.

In eine Programmzeile wird die Zeilennummer automatisch eingetragen. Hinter ihr ist Platz für eine sechsstellige Labelmarkierung, danach für einen Signalprozessor-Doppelbefehl und einen durch ein Semikolon zu markierenden Kommentar. Bei der Befehlseingabe gemachte Syntaxfehler, aber auch logische Fehler, die schon festgestellt werden können, werden direkt gemeldet. Sie können durch Auswechseln der fehlerhaften Strings direkt behoben werden. Nachträglich kann aber auch durch Löschen einzelner Befehle oder Programmteile, durch Einsetzen von Befehlen oder Detailänderungen an den Befehlen, ein Signalprozessorprogramm abgeändert werden.

Es gibt Anweisungen für Koeffizientenfelder, deren Koeffizienten während des Programmablaufs mit einem Adressenzähler in das Programm eingelesen werden. Diese Koeffizientenfelder werden entweder im A-RAM, B-RAM oder im unteren Bereich des Programmspeichers der Signalprozessoren abgelegt. Bei der Befehlseingabe wird geprüft, ob die Koeffizientenfeldanweisungen am vorgeschriebenen Programmmanfang stehen und ob sie fehlerhaft sind. Geprüft wird auch, ob der eingegebene Befehl zu den bei jeder Speicherart zugelassenen Befehlen gehört. Bei Befehlen, die einen durch eine Ordnungszahl gekennzeichneten Koeffizienten ins Programm einlesen sollen, wird überprüft, ob er im Koeffizienten-File vorhanden ist.

Für den Datentransfer zwischen den Signalprozessoren der Multi-Prozessoranordnung sind Spezialbefehle zum Senden und Empfangen der auszutauschenden Daten geschaffen worden. Für sie sind die untersten, sechzehn Adressen des Externen Datenspeichers reserviert. Wird bei der Programmerstellung irrtümlich ein Befehl angegeben, der einen oder mehrere dieser Adressen ansprechen würde, wird dies schon bei der Befehlseingabe bemerkt und der Anwender mit einer entsprechenden Fehlerdiagnose zur Fehlerbeseitigung aufgefordert. Zu den Spezialbefehlen gehören neben den Sprungbefehlen, deren Sprungziel statt mit einer Sprungadresse jetzt mit einer Label-Angabe versehen ist, ein START- und ein END-Befehl. Der START-sehnel markiert den Beginn der Programmschleife, in der, nach der Initialisierung der Programmdaten, die Werte des abgetasteten Ausgangssignals berechnet werden, der END-Befehl ihr Ende. Mit dem START-Befehl wird gleichzeitig auch der Systemtakt des Multiprozessorsystems ausgelöst, mit dem der Datenaustausch zwischen den Signalprozessoren beginnt. Sollen die Eingangssignale mit einem AnalogDigital-Wandler umgesetzt werden, wird während des END-Befehls auf eine Flag gewartet, die das Ende der Wandlung signalisiert. Anschließend wird ein Sprung zu dem den Schleifenbeginn kennzeichnenden START-Befehl ausgeführt.

Nach dem Aufruf des **Emulators** werden automatisch alle jedem Signalprozessor zugeordneten Programmspeicher geladen, nachdem die im Koeffizientenfile den einzelnen DSPs zugeordneten Koeffizienten in den Maschinencode eingesetzt worden sind. Das Betriebsprogramm der Emulator-Mikroprozessoren organisiert diesen Ladevorgang.

Die wesentlichste Zweckbestimmung eines Entwicklungssystems ist es, die Möglichkeit zu schaffen, im Echtzeitbetrieb die Inhalte aller direkt oder indirekt zugänglichen Register eines Prozessors bei einem im Programm markierbaren Befehl – dem „Break Point“ dem Anwender zugänglich zu machen. Die Anzahl der auslesbaren Register ist relativ klein und hängt vom inneren Aufbau eines Signalprozessors ab. Beim Fujitsu MB 8764 sind es sieben Register. Die Registerinhalte bei Einprozessoranordnungen können deshalb bei jedem Break-Point-Durchlauf direkt auf dem PC-Schirm dargestellt werden: Bei Multi-Signalprozessoranordnungen ist das nicht mehr möglich. Die während einer vorgegebenen Sequenz in einem Speicher gesammelten Daten werden in vielfältiger Weise dargestellt. Eine davon ist die tabellarische Darstellung der Datenflüsse zwischen den Signalprozessoren, eine Darstellung, die gerade in systolischen Multi-Signalprozessoranordnungen sehr informativ ist.

Literatur:

Hp. Eulenberg

Ein Entwicklungssystem für Multiprozessorsysteme mit Signalprozessoren FUJITSU MB 8764 und MB 87064
Informatik-Fachberichte 153
ASST'87, 6. Aachener Symposium für Signaltheorie
Springer, September 1987, Seiten 282-285
ISBN 3-540-18401-5, ISBN 0-387-18401-5

Hp. Eulenberg

DSP-Entwicklungssystem für Multiprozessorkonfigurationen
Elektronik Informationen Nr. 1-1989, Seiten 88-90

Leistungsmerkmale:

Modularer, erweiterbarer Aufbau

- bis zu 8 Signalprozessoren MB 8764 pro Emulator
- bis zu 8 Emulatoren (max. 64 Signalprozessoren)

Komfortables auf dem IBM-PC lauffähiges Programmpaket

● Bearbeitung der Signalprozessorprogramme

- Programmaufbau und Eingabe
 - Syntaxprüfung der Signalprozessorbefehle bei ihrer Eingabe
 - Koeffizienzfelder (Zugriff während des Programmablaufs)
 - Datentransferbefehle (Erzeugung der Datenströme in der systolischen Multiprozessorordnung)
 - Befehle zur Erzeugung des Systemtakts und zur Steuerung der zur Digitalisierung der analogen Signale notwendigen Analog-Digital-Wandler
- Prüfen der Programmlogik
- Übersetzen der Programme in den Maschinencode
- Grafische Adrstellung der gewählten Multi-Signalprozessorarchitektur
- Eingabe und Korrektur der Kenndaten der Multi-Signalprozessorarchitektur

● Programmbibliothek zum Aufbau von Standard-Programmen

● Emulation

- Laden der Programmspeicher der max. 64 Signalprozessoren
- Vorgabe des Signalprozessor-Taktes mit Taktzeiten von 100 ns, 200 ns, 400 ns
- Umschaltung auf externe Takteinspeisung

● Laden der Programmspeicher (PROM) mit einem Programmer

Breakpoint-Bearbeitung

● Vorgabe von Breakpoints in vorgebbarem Increment

● Darstellung der Inhalte der Register D, A, B, X, Y, C0, C1 bei vorgegebenen Breakpoints

- Datenflußdarstellung der Multi-Signalprozessoranordnung für ein ausgewähltes Register
- Darstellung der Registerinhalte einer Einprozessor-Applikation im Betrieb
- Darstellung der Registerinhalte von Multi-Signalprozessorarchitekturen nach unterschiedlichen Gesichtspunkten.

Für weitere Informationen wenden Sie sich bitte an:

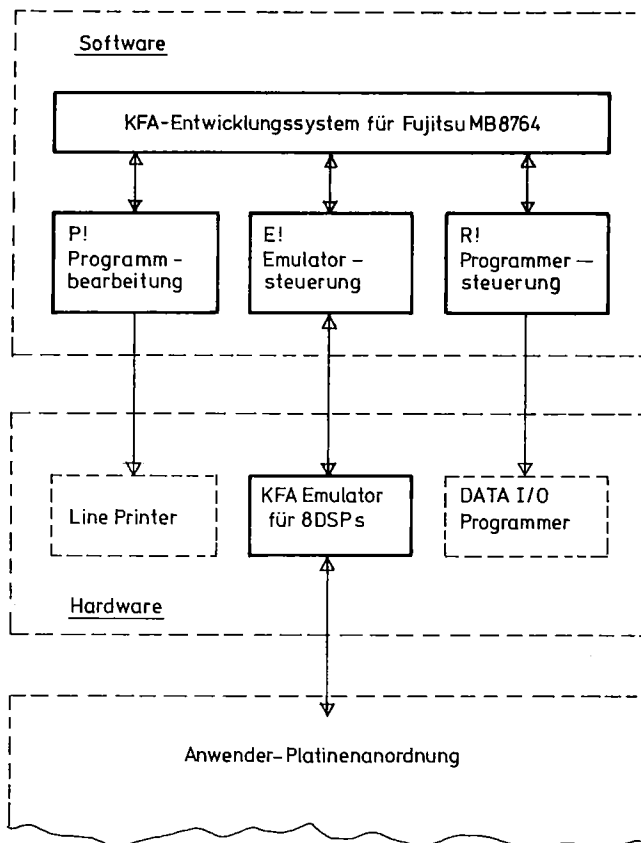
**Technologie-Transfer-Büro
der Kernforschungsanlage Jülich GmbH**

Postfach 1913 · D-5170 Jülich 1
Telefon: 02461/614320 · Telex: 833556-0 kfa d
Telefax: 02461/613718

**Zentrallabor für Elektronik
der Kernforschungsanlage Jülich GmbH**

Postfach 1913 · D-5170 Jülich 1
Telefon: 02461/616521 · Telex: 833556-0 kfa d
Telefax: 02461/613990

Struktur des KFA-Entwicklungssystems MB8764



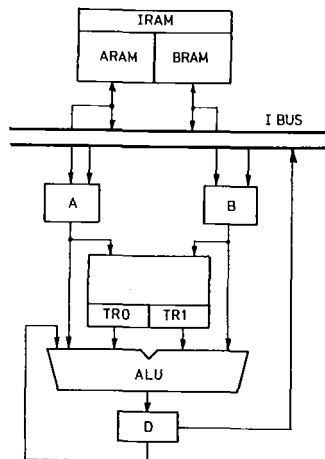
KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

7. KFA - Entwicklungssystem MB8764

7.1 Hard- und Software des Signalprozessors MB8764

SIGNALPROZESSOR MB8764



ZYKLUSZEIT: 100 nsec

EINE MULTIPLIKATION UND ADDITION IN 100 nsec

MULTIPLIKATION: 16 bit x 16 bit > 26 bit

PROZESSORARCHITEKTUR: HARVARD

DOPPEL-BEFEHL:

MOV: ADD #A2CD, X: Y: C0: DMC: PGM: PGT

1. BEFEHL: KONTROLLBEFEHL

2. BEFEHL: ARITHMETISCH-LOGISCHER BEFEHL

BEFEHLSVERARBEITUNG: PIPELINING METHODE

PROGRAMMSPEICHER: 1024 x 24 bit

DATENSPEICHER:

1. A-RAM: 128 x 16 bit

2. B-RAM: 128 x 16 bit

3. EXTERNES RAM: 1024 x 16 bit

MULTIPROZESSORBETRIEB:

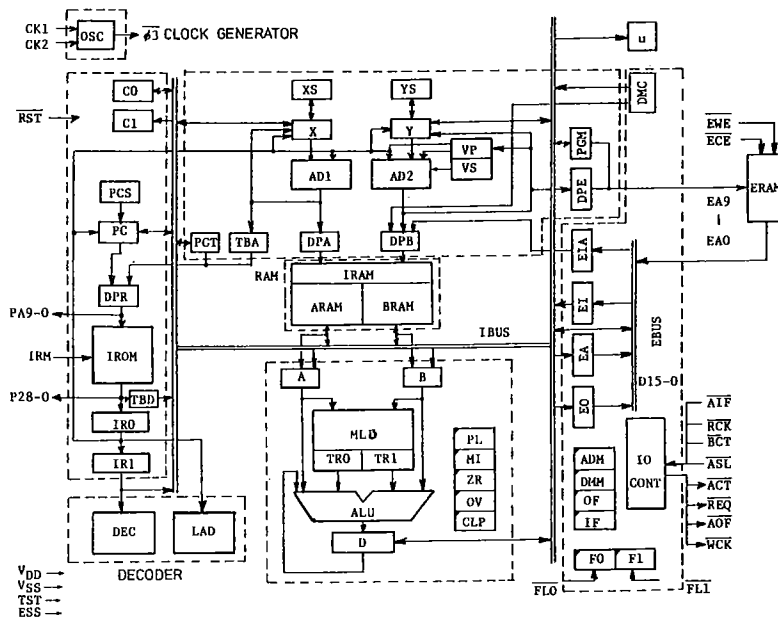
MIT MAXIMAL 8 BUSGEKOPPELTEN PROZESSOREN MOEGLICH



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK

- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Aufbau des Signalprozessors Fujitsu MB 8764



MB 8764



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Befehlssatz des Fujitsu DSP MB 8764

Instruction set

Types of instructions

The instructions are classified as follows.

Type	Mnemonic	Operation
Arithmetic and logic instructions	ADD	$A + B \rightarrow D$
	MLT	$A \times B \rightarrow D$
	SUB	$B - A \rightarrow D$
	MSM	$D + A \times B \rightarrow D$
	MRD	$D - A \times B \rightarrow D$
	SUM	$D + A \rightarrow D$
	RED	$D - A \rightarrow D$
	ABS	$1 \text{ D } 1 \rightarrow D$
	NEG	$- D \rightarrow D$
	SRA	Shift D right arithmetic $\rightarrow D$
	SLA	Shift D left arithmetic $\rightarrow D$
	AND	$D \cap A \rightarrow D$
	ORA	$D \cup A \rightarrow D$
	DIV	$D \div A \rightarrow D$
	COM	$\bar{D} \rightarrow D$
Move instructions	LTB	$ROMT \rightarrow A, \text{BRAM/ERAM} \rightarrow B$
	LAB	$ARAM \rightarrow A, \text{BRAM/ERAM} \rightarrow B$
	MAB	$ARAM \rightarrow \text{BRAM/ERAM}$
	MBA	$\text{BRAM/ERAM} \rightarrow ARAM$
	MOV	$IRAM/ERAM \rightarrow \text{registers}$
	MOV	Immediate data $\rightarrow \text{registers}$
	MOV	Registers $\rightarrow \text{registers/IRAM/ERAM}$
	LDI	Immediate data $\rightarrow A$
Jump instructions	LJB	Immediate data $\rightarrow A, \text{BRAM} \rightarrow B$
	JMP	Unconditional jump
	JOC	Jump on condition
	JSR	Jump to subroutine
Other instructions	RTS	Return from subroutine
	CLR	Clear register or flag
	SET	Set flag
	MXY	$X + \Delta X \rightarrow X, Y + \Delta Y \rightarrow Y$
	LIY	Immediate data $\rightarrow A, \text{BRAM} \rightarrow B, Y + 1 \rightarrow Y$
	AVP	$VP + d \rightarrow VP$
	LVP	$d \rightarrow VP$
	ADY	$Y + YS \rightarrow Y$
	GXY	$XS \rightarrow X, YS \rightarrow Y$
	SXY	$d + C1, X \rightarrow XS, Y \rightarrow YS, X = Y = 0$
	NOP	No operation



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Befehlsstruktur des DSP MB8764

Assembler expression	Object code	Operation	Cycles																																																						
LAB [:arith- metic/ logic operation] %a7[(X)], %b7[(Y), [E]]	o Machine code 23 0 0 0 1 C X a Y IE b 0 o Effective address <table><tr><th>X</th><th>ea</th></tr><tr><td>0</td><td>a</td></tr><tr><td>1</td><td>a + X</td></tr></table><table><tr><th>Y</th><th>IE</th><th>VS</th><th>eb</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1/0</td><td>b</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1/0</td><td>PGH 0 b</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>b+Y</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>Imm b+Y</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>PGH 0 b+Y</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>PGH 0 Imm b+Y</td></tr></table> Imm: High-order 3 bits of b Arithmetic/logic operation <table><tr><th>C</th><th>Operation</th><th>C</th><th>Operation</th></tr><tr><td>0 0 0</td><td>NOP</td><td>1 0 0</td><td>MSH</td></tr><tr><td>0 0 1</td><td>ADD</td><td>1 0 1</td><td>MRD</td></tr><tr><td>0 1 0</td><td>HLT</td><td>1 1 0</td><td>SUM</td></tr><tr><td>0 1 1</td><td>SUB</td><td>1 1 1</td><td>RED</td></tr></table>	X	ea	0	a	1	a + X	Y	IE	VS	eb	0	1	1/0	b	0	0	1/0	PGH 0 b	1	1	0	b+Y	1	1	1	Imm b+Y	1	0	0	PGH 0 b+Y	1	0	1	PGH 0 Imm b+Y	C	Operation	C	Operation	0 0 0	NOP	1 0 0	MSH	0 0 1	ADD	1 0 1	MRD	0 1 0	HLT	1 1 0	SUM	0 1 1	SUB	1 1 1	RED	When IE = 1 ARAM(ea)→A BRAM(eb)→B When IE = 0 ARAM(ea)→A ERAM(eb)→B The arithmetic/ logic operation determined by the C field is per- formed simulta- neously, regard- less of whether IE = 0 or IE = 1.	1
X	ea																																																								
0	a																																																								
1	a + X																																																								
Y	IE	VS	eb																																																						
0	1	1/0	b																																																						
0	0	1/0	PGH 0 b																																																						
1	1	0	b+Y																																																						
1	1	1	Imm b+Y																																																						
1	0	0	PGH 0 b+Y																																																						
1	0	1	PGH 0 Imm b+Y																																																						
C	Operation	C	Operation																																																						
0 0 0	NOP	1 0 0	MSH																																																						
0 0 1	ADD	1 0 1	MRD																																																						
0 1 0	HLT	1 1 0	SUM																																																						
0 1 1	SUB	1 1 1	RED																																																						

Beispiel :

LAB: RED \$4φ(x), \$4φ(YE)

ARAM → A

ERAM → B

KFA

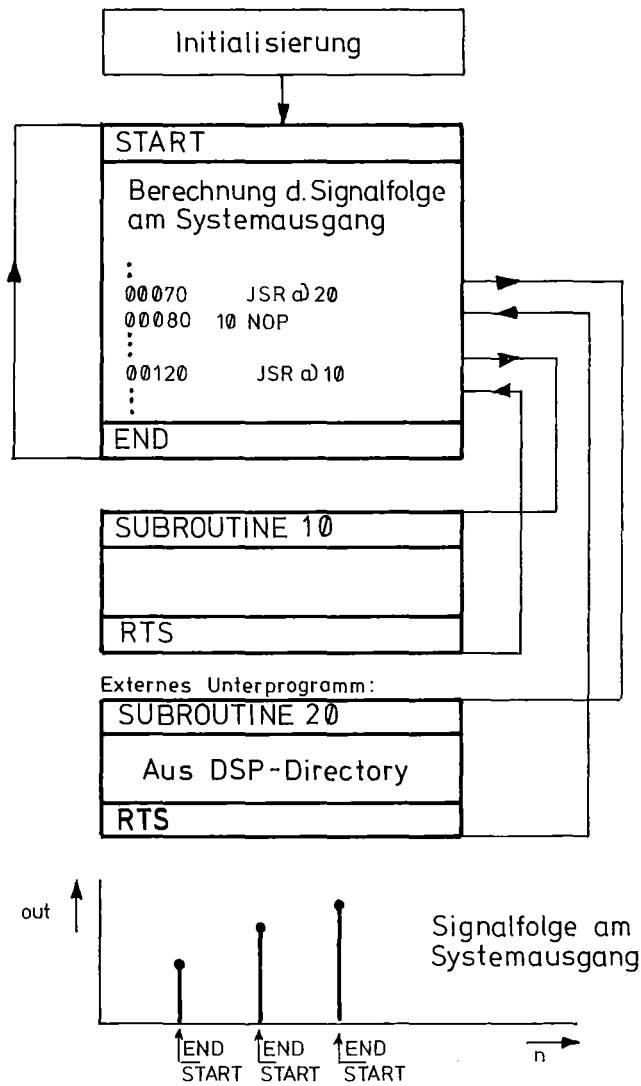
ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK

- Abteilung Allgemeine Elektronik -

7. KFA - Entwicklungssystem MB8764

7.2 DSP - Programm Aufbau und Verarbeitung

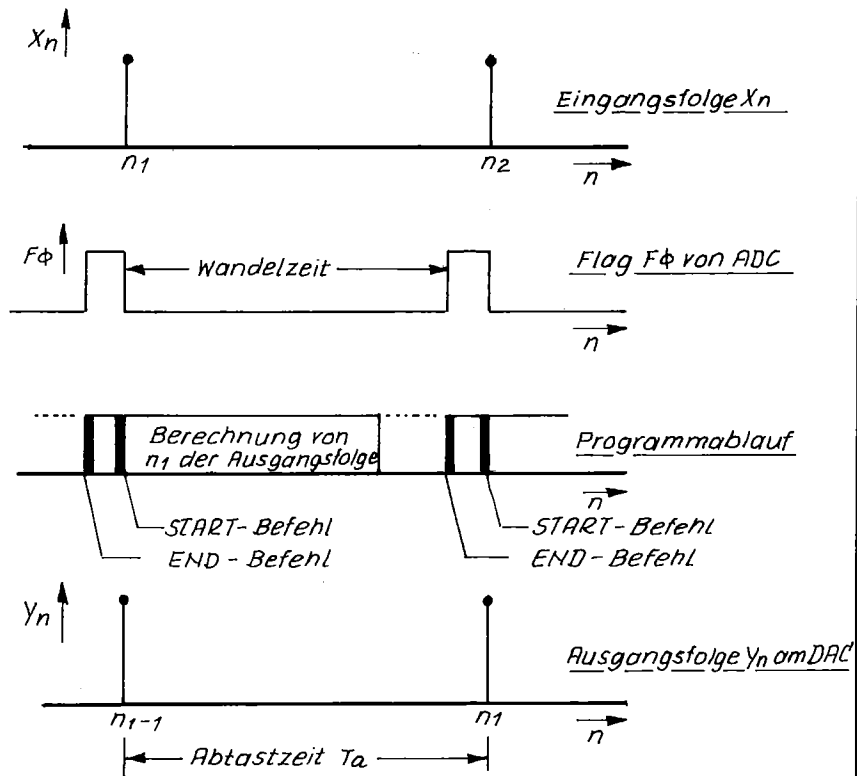
PROGRAMMAUFBAU



KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

Abtastung und Datenverarbeitung in einem Abtastzyklus



START ; Auslösen des Systemtaktes

*END ; Warten auf Flag $F\phi$ und
Sprung nach Start*

KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK

- Abteilung Allgemeine Elektronik -

7. KFA - Entwicklungssystem MB8764

7.3 Label-Adressierung

L A B E L - A D R E S S I E R U N G

00005		START
00030	10	NOP
00040		NOP
00050		JMP:ADD @10
00100		JSR:SUB @UPROGR
00130	20	NOP
00140		JOC @20,C0:F0:MI
00300	30	NOP
00310		JOC:RED @30,C1:OF:IF:ZR:OV
00700		END
00710		SUBROUTINE UPROG
00720		NOP:MLT
00770		RTS



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

7. KFA - Entwicklungssystem MB8764

7.4 Anlegen von Koeffizientenfeldern....

7.4.1 Koeffizientenfeld im Programmspeicher

Speicherung des Koeffizientenfeldes im Programmspeicher

KOF INS(x, 02-09)
...
START : SUM
...
LTB: RED KOF(x), \$3B(YE)
LTB: RED KOF(00), \$3B(YE)
...
LDI: SUM KOF(00)
LIB: SUM KOF(10)
LIY: SUM KOF(03)
...
END : RED

Feldanweisung

mit Feldanweisung:

KOF(x) → A ERAM(y) → B
KOF(00) → A ERAM(y) → B

ohne Feldanweisung:

KOF(00) → A
KOF(10) → A BRAM(y) → B
KOF(03) → A BRAM(y) → B
y+1 → y

A, B : Register
KOF() : Koeffizienten
x : Zähler

KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

7. KFA - Entwicklungssystem MB8764

7.4 Anlegen von Koeffizientenfeldern....

7.4.2 Koeffizientenfeld im A-RAM des DSP

Speicherung des Koeffizientenfeldes im ARAM

KOF $\$ \phi 3 (x, \phi 2 - \phi 9)$: :
START : SUM
: : LAB : RED KOF(x), \$3A(YE) MAB : RED KOF(x), \$2A(YE) LAB : RED KOF(00), \$3A(YE) MAB : RED KOF(00), \$2A(YE) : : LDI : SUM KOF ($\phi \phi$) LIB : SUM KOF (1 ϕ) LIY : SUM KOF ($\phi 3$) : END : RED

Feldanweisung
ARAM-Anfangadresse $\phi 3H$

mit Feldanweisung:

KOF(x) $\rightarrow$ A ERAM(y) $\rightarrow$ B
KOF(x) $\rightarrow$ ERAM(y)

ohne Feldanweisung:

KOF($\phi \phi$) $\rightarrow$ A
KOF(1 ϕ) $\rightarrow$ A BRAM(y) $\rightarrow$ B
KOF($\phi 3$) $\rightarrow$ A BRAM(y) $\rightarrow$ B
y+1 $\rightarrow$ y

A, B : Register
KOF() : Koeffizienten
x, y : Zähler

KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

7. KFA - Entwicklungssystem MB8764

7.4 Anlegen von Koeffizientenfeldern....

7.4.3 Koeffizientenfeld im B-RAM des DSP

Speicherung des Koeffizientenfeldes im BRAM

KOF \$ ϕ 7 (y, ϕ 2- ϕ 9)
...
START : SUM
...
LAB: RED \$3A(x), KOF(y)
MBA: RED \$1C(x), KOF(y)
LAB: RED \$3A(x), KOF(00)
MBA: RED \$1C(x), KOF(00)
...
LDI: SUM KOF($\phi\phi$)
LIB: SUM KOF(1 ϕ)
LIY: SUM KOF(ϕ 3)
...
END : RED

Feldanweisung
BRAM-Anfangadresse ϕ 7H

mit Feldanweisung:

ARAM $\rightarrow$ A KOF(y) $\rightarrow$ B
KOF(y) $\rightarrow$ ARAM

ohne Feldanweisung:

KOF($\phi\phi$) $\rightarrow$ A
KOF(1 ϕ) $\rightarrow$ A BRAM(y) $\rightarrow$ B
KOF(ϕ 3) $\rightarrow$ A BRAM(y) $\rightarrow$ B
y+1 $\rightarrow$ y

A, B : Register
KOF() : Koeffizient
x, y : Zähler



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK

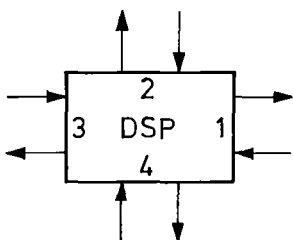
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

7. KFA - Entwicklungssystem MB8764

7.5 Datentransfer - Befehle für Signalprozessor - Arrays

Befehle für den Datenverkehr
zwischen den Signalprozessoren

VORSPANN	
START : SUM	
:	
:	
MD0: SUM R1, Pm	[R1] → Pm
MD0: RED \$3F(X), Pm	[\$3F(X)] → Pm
:	
:	
MDI: COM Pm, R2	[Pm] → R2
MDI: RED Pm, \$3F(X)	[Pm] → \$3F(X)
:	
:	
MDI: RED Pm, KOF(X)	KOF(X) → A [Pm] → B
MDI: RED Pm, KOF(00)	KOF(00) → A [Pm] → B
:	
END : RED	



REGISTER:

R1=DvAvEIvXvYvC0vDMCvPC

R2=E0:A:B:D

PORT-MARKING:

Pm m = {1; 2; 3; 4}



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK

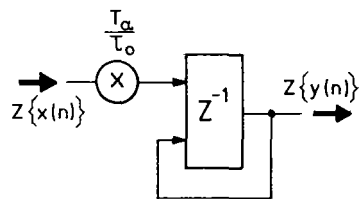
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

8. Praktische Übungen

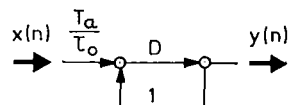
8.1 Integration mit Untersummenbildung

Programmbeispiel für Integrator

- Untersummenbildung -



Schaltbild



SFG

```

KOF      S00(x,00-00) ; 1/16 = Ta/Tau => A-RAM[0]
CLR      A:B:D:X:Y    ; KOF(00) = 100 hex
START    ; Integration durch Untersummenbildung
MDI      KOF(00),P3    ; A-RAM[0]=> A Reg.  ADC-Wert => B Reg.
MOO      D,P4          ; D Reg.=> DAC Analogausgabe Y-Wert
NOP:MSM   ; { A Reg. * B Reg. } + D Reg. => D Reg.
END
    
```

KFA

ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK

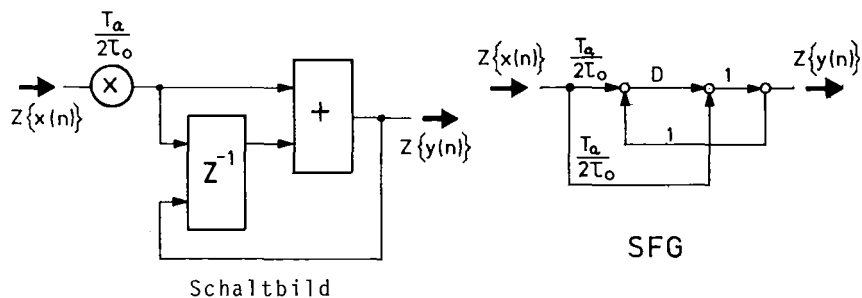
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

8. Praktische Übungen

8.2 Integration mit lineare Interpolation

Programmbeispiel für Integrator

- Lineare Interpolation -



```

KOF      S00(x,00-00) ; 1/32 = Ta/2*Tau => A-RAM[0]
CLR      A:B:D:X:Y    ; KOF(00) = 80 hex
START    ; --- Lineare Interpolation ---
MDI      KOF(00),P3    ; A-RAM[0] => A Reg.  ADC-Wert => B Reg.
MOV      S0D,D         ; Z-1 => D Reg.
NOP:MSM  ; 1/32 * Xn + Z-1 => D Reg.
MDO      D,P4          ; D Reg. => DAC Analogausgabe  Yn - Wert
NOP:MSM  ; 1/32 * Xn + Yn => D Reg.
MOV      D,$0D         ; D Reg. => A-RAM[D] = Z-1
END
    
```

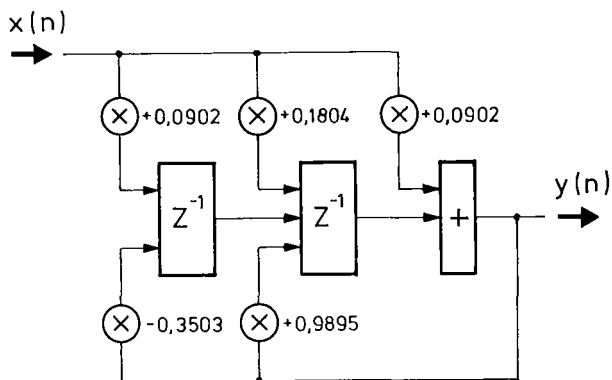


ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
-Abteilung Allgemeine Elektronik-

8. Praktische Übungen

8.3 Tiefpaß mit Butterworthverhalten

Programmbeispiel
Butterworth-Tiefpaß



CLR	A: B: D: X: Y	
MOV	D, \$10	; AUSGANG 1. VERZ. (N-2) = 0
MOV	D, \$20	; AUSGANG 2. VERZ. (N-1) = 0
MOV	D, \$30	; AUSGANGSSPEICHER YN = 0
MOV	D, \$00	; EINGANGSSPEICHER XN = 0
START		; START ADU [ADR.\$08]
MOV	\$05(E), D	; LESEN DES ADU'S => D
MOV	D, \$00	; XN VON D=>A-RAM [ADR.\$00]
LAB	\$00, \$03	; XN => A B-RAM [\$03] => B
MOV	\$20, D	; AUSGANG 2. VERZ. (N-1) => D
NOP:MSH		; XN * KOF03. + 2. VERZ. (N-1) => D
MOV	D, \$30	; D => A-RAM [\$20] SPEICHER YN
MOV	D, \$05(E)	; AUSGABE VON YN AN DAU
LAB	\$00, \$02	; XN => A KOF02 => B
MOV	\$10, D	; AUSG. DER 1. VERZ. => D
NOP:MSH		; XN * KOF02 + 1. VERZ. => D
LAB	\$30, \$05	; YN => A KOF05 => B
NOP		; YN * KOF05 + (XN * KOF02
NOP:MSH		; + 1. VERZ.) => D = 2. VERZ.
LAB	\$00, \$01	; YN => A KOF01 => B
MOV	D, \$20	; D => A-RAM [\$20] 2. VERZ.
NOP:MLT		; XN * KOF01 => D
LAB	\$30, \$04	; YN => A KOF04 => B
NOP		; YN * KOF04 + (XN * KOF01)
NOP:MSH		; => D = AUSGANG 1. VERZ.
MOV	D, \$10	; D => A-RAM [\$10] 1. VERZ.
END		; RUECKSPRUNG



ZENTRALLABOR FÜR ELEKTRONIK
- Abteilung Allgemeine Elektronik -

9. Literaturverzeichnis

K. Kroschel, K.-D. Kammeyer;
Digitale Signalverarbeitung - Filterung und Spektralanalyse
ISBN 3-519-06122-8, Teubner Studienbücher, 1989

R. Saal;
Handbuch zum Filterentwurf
ISBN 3-87087-070-2, 1979

U. Schendel;
Einführung in die parallele Numerik
ISBN 3-486-25331-X, 1981

E.O. Brigham;
FFT - Schnelle Fourier-Transformation
ISBN 3-486-20347-9, 1987

P. Martin;
Mathematische Verfahren der Regelungstechnik
Numerische Verfahren, gezeigt mit dem HP 41
ISBN 3-486-28081-3, 1984

G.A. Korn, J.V. Wait;
Digitale Simulation kontinuierlicher Systeme
ISBN 3-486-26771-X, 1983

D.J. Quarmby;
Signalprozessoren: 2920, 7720 und 320
ISBN 3-486-29821-6, 1986

S.D. Stearns;
Digitale Verarbeitung analoger Signale
ISBN 3-486-20329-0, 1987

Signalprozessoren 2: ADSP2100/MB8765/HSP/NEC77230
ISBN 3-486-20564-1, 1988

Signalprozessoren 3
ISBN 4-486-20626-5, 1988

F.-Th. Mellert;
Rechnergestützter Entwurf elektrischer Schaltungen
ISBN 3-486-25471-5, 1981

A. Finger;
Digitale Signalstrukturen in der Informationstechnik
ISBN 3-486-29851-8, 1985

- H.-W. Bodmann;
Aspekte der Informationsverarbeitung
 Funktion des Sehsystems und technische Bilddarbietung
 Fachberichte Messen-Steuern-Regeln, Bd. 13, ISBN 3-540-15725-5, 1985
- W. Barth;
Visualisierungstechniken und Algorithmen
 Informatik-Fachberichte, Bd. 182, ISBN 3-540-50323-4, 1988
- W. Benn;
Dynamische nicht-normalisierte Relationen und symbolische Bildbeschreibung
 Informatik-Fachberichte, Bd. 128, ISBN 3-540-16823-0, 1986
- W. Brauer, W. Wahlster;
Wissensbasierte Systeme
 Informatik-Fachberichte, Bd. 155, ISBN 3-540-18494-5, 1987
- H. Niemann;
Klassifikation von Mustern
 ISBN 3-540-12642-2, 1983
- H.-J. Novak;
Textgenerierung aus visuellen Daten: Beschreibungen von Straßenszenen
 Informatik-Fachberichte, Bd. 142, ISBN 3-540-18026-5, 1987
- G. Pfeiffer;
Erzeugung interaktiver Bildverarbeitungssysteme im Dialog
 Konzepte, Entwurf und Implementierung eines Dialogsystems für die Bildverarbeitung in der Medizin
 Informatik-Fachberichte, Bd. 51, ISBN 3-540-11181-6, 1982
- E. Triendl;
Bildverarbeitung und Mustererkennung
 Informatik-Fachberichte, Bd. 17, ISBN 3-540-09058-4, 1978
- H. Babovsky, Th. Beth, H. Neunzert, M. Schulz-Reese;
Mathematische Methoden der Systemanalyse: Fourieranalysis
 Mathematische Methoden in der Technik, Bd. 5, Stuttgart, B.G. Teubner 1987
- R. Bamler;
Mehrdimensionale lineare Systeme
 Nachrichtentechnik, Bd. 20, Springer-Verlag Berlin, 1989
- Th. Beth;
Verfahren der schnellen Fourier-Transformation
 Die allgemeine diskrete Fourier-Transformation - Ihre algebraische Beschreibung, Komplexität und Implementierung
 Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, Bd. 61, Stuttgart, Teubner 1984

H. Börner;
Computer bearbeiten Bilder
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1988

V. Cizek;
Discrete Fourier Transforms and their Applications
Adam Hilger Ltd., Bristol, Boston, 1986

R. Creutzberg;
Finite Signalfaltungen und -transformationen
ZKI-Informationen, Zentralinstitut für Kybernetik und Informationsprozesse der Akademie der Wissenschaften in Berlin, Sonderheft 2/1986

D.E. Dudgeon, R.M. Mersereau;
Multidimensional Digital Signal Processing
Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall Inc., 1984

P. Haberäcker;
Digitale Bildverarbeitung, Grundlagen und Anwendungen
2. Auflage, Carl Hanser Verlag München und Wien, 1987

T.S. Huang;
Two-Dimensional Digital Signal Processing
I. Linear Filters
Topics in Applied Physics, Vol. 42, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1981

T.S. Huang;
Picture Processing and Digital Filtering
Topics in Applied Physics, Vol. 6, 2nd corrected and updated edition, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1979

L.P. Jaroslavskij;
Einführung in die digitale Bildverarbeitung
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1985

Harry Y.-F. Lam;
Analog and Digital Filters
Design and Realization
Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall Inc., 1979

H. Löffler;
Information - Signal - Nachrichtenverkehr
Elektronisches Rechnen und Regeln, Bd. 15, Akademie-Verlag Berlin, 1980

K. Niederdrenk;
Die endliche Fourier- und Walsh-Transformation mit einer Einführung in die Bildverarbeitung
Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig-Wiesbaden, 1982

H.J. Whitehouse, J.M. Speiser, K. Bromley;
Signal Processing Applications of Concurrent Array Processor Technology
VLSI and Modern Signalprocessing
Prentice-Hall INC Englewood, ISBN D-13-942699-X

H.T. Kung, C.E. Leieron;
Sytolic Arrays for VLSI
Sparse Matrix Proceedings, 1978

H.T. Kung;
Why Systolic Architectures?
IEEE Computer, Vol. 15, No. 1, Jan. 1982, pp. 37-46

Fujitsu;
MB 8764 Programming Manual
Fujitsu Limited Communications and Electronics 6-1,
Marunouchi 2-chome, Chiyoda-Ku, Tokyo 100

Fujitsu;
MB 87064 Digital Signal Processor
Advance Information, Nov. 1986, Fujitsu Mikroelektronik GmbH

G. Meyer;
Digitale Signalverarbeitung
VEB-Verlag Technik, Berlin
ISBN 3-211-95809-6, 1982

F. Wahl;
Digitale Bildsignalverarbeitung
Grundlagen, Verfahren, Beispiele
ISBN 3-540-13586-3, 1984

R. Lückner;
Grundlagen digitaler Filter
Einführung in die Theorie linearer zeitdiskreter Systeme und Netzwerke
ISBN 3-540-15064-1, 1985

D. Achilles;
Die Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung
Kontinuierliche und diskrete Verfahren der Praxis
Hochschultext

R.W. Hamming;
Digitale Filter
ISBN 3-527-26463-9, 1987

H. Thone;
Entwicklung von Methoden zur systematischen Programmierung eines
Pipeline/Data-Flow-Prozessors

G. Doetsch;
Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation
5. Auflage 1985
ISBN 3-486-29845-3
ISBN 3-486-30735-5

H. Spiro;
Simulation integrierter Schaltungen durch universelle Rechnerprogramme
Verfahren und Praxis der rechnergestützten Simulation nichtlinearer Schaltungen
ISBN 3-486-20042-9, 1985

W. Hilberg;
Grundprobleme der Mikroelektronik
Einführung in die technischen und wirtschaftlichen Entwicklungsgesetze der Großintegration (VLSI)
ISBN 3-486-26961-5, 1982

R. Hölzl;
Filterentwurf/Filteranalyse/Plotten mit dem TI-59
ISBN 3-486-23351-3, 1982

S. Ali Azizi;
Entwurf und Realisierung digitaler Filter
ISBN 3-486-24562-7, 1983

S. Ali Azizi;
Nichtrekursive digitale Filter in Beispielen
ISBN 3-486-27651-4, 1986

S. Ali Azizi;
Rekursive digitale Filter in Beispielen
ISBN 3-486-27711-1, 1986

O. Föllinger;
Lineare Abtastsysteme
ISBN 3-486-34432-3, 1982

O. Föllinger, D. Franke;
Einführung in die Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme
mit einer Anleitung zur Matrizenrechnung
ISBN 3-486-26551-2, 1982

M. Bellanger;
Digital Processing of Signals
Theory and Practice, Second Edition
Wiley-Teubner, Copublishing
ISBN 3-519-06640-5, 1989

H. Götz;
Einführung in die digitale Signalverarbeitung
Teubner Studienskripten, Band 117, ISBN 3-519-00117-9, 1989

W. Leonhard;
Digitale Signalverarbeitung in der Meß- und Regelungstechnik
Teubner Studienbücher, ISBN 3-519-06120-1, 1989

W. Hess;
Digitale Filter
Eine Einführung
Teubner Studienbücher, ISBN 3-519-06121-X, 1989

B. Jähne;
Digitale Bildverarbeitung
ISBN 3-540-50664-0, 1989

H. Bässmann, P.W. Besslich;
Konturorientierte Verfahren in der digitalen Bildverarbeitung
ISBN 3-540-50772-8, 1989

C.-E. Liedtke, M. Ender;
Wissensbasierte Bildverarbeitung
ISBN 3-540641-1, 1989

F.M. Wahl
Digitale Bildsignalverarbeitung
Grundlagen, Verfahren, Beispiele
Nachrichtentechnik, Bd. 13, ISBN 3-540-13586-3, korr. Nachdruck 1989

G. Söder, K. Tröndle;
Digitale Übertragungssysteme
Theorie, Optimierung und Dimensionierung der Basisbandsysteme
Nachrichtentechnik, Bd. 14, ISBN 3-540-13812-9, 1985

H.-J. Wünsche;
Bewegungssteuerung durch Rechnersehen
Ein Verfahren zur Erfassung und Steuerung räumlicher Bewegungsvorgänge in Echtzeit
Fachberichte Messen-Steuern-Regeln, Bd. 20, ISBN 3-540-50140-1, 1988

J.P. Foith;
Intelligente Bildsensoren zum Sichten, Handhaben, Steuern und Regeln
Fachberichte Messen-Steuern-Regeln, Bd. 7, ISBN 3-540-11750-4, 1982

A. Korn;
Bildverarbeitung durch das visuelle System
Fachberichte Messen-Steuern-Regeln, Bd. 8, ISBN 3-540-11837-3, 1982

R.A. Pose;
Rechnergestützte Bildverarbeitung - Erkenntnisse und Erfahrungen aus der Hochenergiephysik
Beiträge zur Forschungstechnologie, Bd. 8, Akademie-Verlag Berlin, 1981

Chr. Posthoff, E.-G. Woschni;
Funktionaltransformationen der Informationstechnik
Akademie-Verlag Berlin, 1984

L.R. Rabiner, B. Gould;
Theory and Applications of Digital Signal Processing
Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall Inc., 1975

R. Vich;
Z Transform Theory and Applications
Dordrecht etc.: D. Reidel Publishing Company, 1987

P. Zamperoni;
Methoden der digitalen Bildsignalverarbeitung
Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig-Wiesbaden, 1989

1 **Technik und Gesellschaft**

Vorträge eines Seminars veranstaltet von der
Programmgruppe Mensch, Umwelt, Technik
des Forschungszentrums Jülich GmbH
W. Fischer, L. Hennen, W. Kirstein, G. Schleser, G. Stein, Ch. Wandrey,
P.M. Wiedemann (1990)

2 **Analytische Glimmentladungs-Spektroskopie**

Jülich, 25. - 26. April 1990, Tagungsbericht
herausgegeben von J. Rottmann (1990)

3 **Die digitale Verarbeitung analoger Signale in Theorie und Praxis**

KFA-Fortbildungsseminar; Jülich, im April 1989
U. Eckhardt, H. Eulenberg, F. Janßen, W. Jansen und H. Larue

ISBN 3-89336-052-2

051-4