



FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH GmbH

Zentralinstitut für Angewandte Mathematik

**Lösungen von Randwertproblemen
zweiter Art für die Wärmeleitungs-
gleichung in geschichteten Materialien**

von

Rainer von Seggern

Jül-2410
November 1990
ISSN 0366-0885

**Lösungen von Randwertproblemen
zweiter Art für die Wärmeleitungs-
gleichung in geschichteten Materialien**

von

Rainer von Seggern

Abstract

Unique solutions are derived for the parabolic differential equation of heat conduction in composite slabs with perfect thermal contact. Boundary conditions of the second kind are assumed which are not compatible with the initial condition. By the method of Laplace transformation Green's functions are constructed in analogy to Jacobi's theta function for the slab. Certain convolutional solutions are used for testing software and investigating the asymptotic behaviour of solutions for small and large times.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1. Lösung der Laplace-transformierten Gleichung	2
2. Rücktransformation durch Residuenrechnung	4
3. Singuläre Lösungen	11
4. Finite Lösungen	15
5. Existenz und Eindeutigkeit	20
6. Numerische Ergebnisse	24
Literatur	27
Anhang 1: Die Einfachschicht	29
Anhang 2: Die halbumendliche geschichtete Platte	32

Einleitung

In den Anwendungen sind bei vielen parabolischen Differentialgleichungen Anfangs- und Randbedingungen gegeben, die unverträglich sind. Beispielsweise treten bei den in diesem Bericht behandelten Wärmeleitungsproblemen Randbedingungen zweiter Art (Flußrandbedingungen) auf, die von der (konstanten) Anfangstemperatur nicht erfüllt werden. Damit Probleme dieser Art sachgemäß gestellt sind - also insbesondere eindeutige Lösungen besitzen - dürfen die Lösungen nur in bestimmten Funktionenräumen gesucht werden, die unter anderem von der Art der Rand- und Übergangsbedingungen abhängen.

Bei unverträglichen Randbedingungen erster Art ist es nicht möglich, von Lösungen Stetigkeit bis einschließlich des Randes ihres Definitionsgebietes zu fordern, wie es notwendig ist, wenn Maximumprinzipien zum Beweis der Eindeutigkeit herangezogen werden sollen. (Siehe [9], 2.3 und [10], 2.9.) In diesem Fall muß von Lösungen zusätzlich beispielsweise Beschränktheit gefordert werden. (Siehe [18], 3.2, [4], 6.3. und [19], 7. und 8..)

Bei unverträglichen Randbedingungen zweiter und dritter Art ist die Forderung der Stetigkeit der Lösung bis einschließlich des Randes ihres Definitionsgebietes möglich, und das Maximumprinzip sichert die Eindeutigkeit. (Siehe [9], 2.5.) Bei Angabe von Lösungsdarstellungen mit Hilfe der Laplace-Transformation oder des Wärmepotentials der Einfachschicht erhält man Lösungen, die die obige Stetigkeitsforderung im allgemeinen nicht erfüllen. Wieder sichern erst zusätzliche Forderungen die Eindeutigkeit. (Siehe [9], 2.5, Theorem 2 und insbesondere Korollar 1, sowie [4], 6.4.) Bestimmte Lösungen, die diese Forderungen nicht erfüllen, heißen singuläre Lösungen. (Siehe [8], 18.2.)

In diesem Bericht werden Lösungen für Wärmeleitungsprobleme mit unverträglichen Randbedingungen zweiter Art in geschichteten Materialien hergeleitet, die die Übergangsbedingungen erfüllen. Mit Hilfe der Laplace-Transformation werden dazu in Analogie zu der Vorgehensweise für die Einfachschicht (Siehe Anhang 1) Lösungsdarstellungen in Form von Faltungen des vorgegebenen Flusses am Rande mit bestimmten singulären Lösungen gewonnen. Daraus werden dann eindeutige Lösungen, die bestimmte Zusatzbedingungen erfüllen, als finite Lösungen abgeleitet, wobei die Eindeutigkeit mit Hilfe der sogenannten Energiemethode sichergestellt wird. Diese Lösungen werden schließlich zum Testen von Software und zur Überprüfung gewisser asymptotischer Aussagen benutzt.

Die im Anhang 1 angegebene singuläre Lösung $\mathfrak{S}_2(x,t)$ für die Einfachschicht und die Lösung $w_0(x,t)$ für die halbbunendliche geschichtete Platte im Anhang 2 wurden für diesen Bericht hergeleitet.

1. Lösung der Laplace-transformierten Gleichung

Wir betrachten im folgenden eine Platte aus n Schichten mit den charakteristischen physikalischen Größen: Dicke, Temperaturleitzahl und Wärmeleitfähigkeit, die folgendermaßen bezeichnet werden: d_1, \dots, d_n ; $\kappa_1, \dots, \kappa_n$; K_1, \dots, K_n .

Im Inneren der einzelnen Schichten gelte die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \kappa_i u_{xx}$ für $i = 1, \dots, n$, wobei von einer Schicht zur anderen ein stetiger Übergang der Temperatur $u(x,t)$ und des Wärmeflusses $f(x,t) := -K_i u_x$ stattfinde. Auf der Vorderseite der Platte sei der Wärmefluß $q(t)$ als Funktion der Zeit gegeben, während auf der Rückseite entweder der Wärmefluß oder die Temperatur verschwinden soll. Im folgenden bezeichne $\kappa(x)$ und $K(x)$ die Treppenfunktionen, die in der i -ten Schicht den Wert κ_i beziehungsweise K_i haben.

Dieses System parabolischer Differentialgleichungen wird mit Hilfe der Laplace-Transformation auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen transformiert, wobei große Buchstaben die transformierten Größen bezeichnen, also $U(x,s) := \int_0^\infty e^{-st} u(x,t) dt$ und analog $F(x,s)$ und $Q(s)$.

Das transformierte System (bei verschwindender Anfangstemperatur) lautet:

$$(1) \quad sU(x,s) = \kappa_i U_{xx}(x,s) \text{ für } i = 1, \dots, n,$$

mit den transformierten Rand- und Übergangsbedingungen. Die Lösung dieses Differentialgleichungssystems läßt sich für den allgemeinen Fall von n Schichten leicht angeben. Nach Wahl der Lage l_0 der Vorderseite der Platte werden dazu folgende Abkürzungen benutzt:

$$q_i := \sqrt{s/\kappa_i}; \quad l_i = l_0 + \sum_{j=1}^i d_j; \quad a_i = \cosh d_i q_i; \quad b_i = \sinh d_i q_i.$$

In der i -ten Schicht der Platte lautet die Lösung von (1) für $l_{i-1} \leq x \leq l_i$ und gegebenen $U(l_i,s)$ und $F(l_i,s)$:

$$(2) \quad \begin{aligned} U(x,s) &:= U(l_i,s) \cosh q_i(l_i - x) + \frac{F(l_i,s)}{K_i q_i} \sinh q_i(l_i - x) \\ F(x,s) &:= K_i q_i U(l_i,s) \sinh q_i(l_i - x) + F(l_i,s) \cosh q_i(l_i - x). \end{aligned}$$

Führt man für $i = 1, \dots, n$ die folgenden nichtsingulären Matrizen ein:

$$M_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i/(K_i q_i) \\ K_i q_i b_i & a_i \end{bmatrix},$$

so erhält man für die transformierten Temperaturen und Flüsse an der Vorder- und Rückseite jeder Schicht jeweils ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} U(l_{i-1},s) \\ F(l_{i-1},s) \end{pmatrix} = M_i \begin{pmatrix} U(l_i,s) \\ F(l_i,s) \end{pmatrix}.$$

Insgesamt ergibt sich also ein lineares Gleichungssystem für die transformierten Temperaturen und Flüsse auf der Vorder- und Rückseite der Platte:

$$(3) \quad \begin{pmatrix} U(l_0,s) \\ Q(s) \end{pmatrix} = M_1 \cdots M_n \begin{pmatrix} U(l_n,s) \\ F(l_n,s) \end{pmatrix}.$$

Das so erhaltene Ergebnis wird im folgenden Satz zusammengefaßt:

Satz 1: Ist auf der Vorderseite einer Platte aus n Schichten der Fluß $q(t)$ gegeben und verschwinden auf der Rückseite entweder der Fluß (Fall 1) oder die Temperatur (Fall 2), so liefert (3) ein lineares Gleichungssystem für $U(l_0,s)$ und $U(l_n,s)$ oder $F(l_n,s)$. Durch (2) ist damit eine Lösung des Differentialgleichungssystems (1) gegeben, die die transformierten Rand- und Übergangsbedingungen erfüllt.

Für die schwierige Rücktransformation der Lösung dieses Differentialgleichungssystems, die nur für den Fall zweier Schichten ($n = 2$) durchgeführt wird, wählen wir die Vorder-

seite der Platte bei $l_0 = -d_1$, also $l_1 = 0$ und $l_2 = d_2$, und setzen $\gamma = \frac{K_1 \sqrt{\kappa_2}}{K_2 \sqrt{\kappa_1}}$.

Im Fall 1 erhält man folgende Lösung von (3):

$$(4) \quad \begin{aligned} U(-d_1,s) &= Q(s) \frac{\gamma a_1 a_2 + b_1 b_2}{K_1 q_1 (\gamma a_2 b_1 + a_1 b_2)} \\ U(d_2,s) &= Q(s) \frac{1}{K_2 q_2 (\gamma a_2 b_1 + a_1 b_2)}. \end{aligned}$$

Aus (2) und (4) erhält man damit eine Lösung des transformierten Systems (1):

$$(5) \quad U(x,s) = \begin{cases} Q(s) \frac{\gamma a_2 \cosh q_1 x - b_2 \sinh q_1 x}{K_1 q_1 (a_1 b_2 + \gamma a_2 b_1)}, & \text{für } -d_1 \leq x \leq 0 \\ Q(s) \frac{\cosh q_2 (d_2 - x)}{K_2 q_2 (a_1 b_2 + \gamma a_2 b_1)}, & \text{für } 0 \leq x \leq d_2. \end{cases}$$

Im Fall 2 erhält man folgende Lösung von (3):

$$(6) \quad \begin{aligned} U(-d_1, s) &= Q(s) \frac{a_2 b_1 + \gamma a_1 b_2}{K_1 q_1 (a_1 a_2 + \gamma b_1 b_2)} \\ F(d_2, s) &= Q(s) \frac{1}{a_1 a_2 + \gamma b_1 b_2} . \end{aligned}$$

Aus (2) und (6) erhält man damit eine Lösung des transformierten Systems (1), die mit $V(x, s)$ bezeichnet wird:

$$(7) \quad V(x, s) := \begin{cases} Q(s) \frac{\gamma b_2 \cosh q_1 x - a_2 \sinh q_1 x}{K_1 q_1 (a_1 a_2 + \gamma b_1 b_2)} , & \text{für } -d_1 \leq x \leq 0 \\ Q(s) \frac{\sinh q_2 (d_2 - x)}{K_2 q_2 (a_1 a_2 + \gamma b_1 b_2)} , & \text{für } 0 \leq x \leq d_2 . \end{cases}$$

2. Rücktransformation durch Residuenrechnung

Aus (5) und (7) lassen sich mit Hilfe der komplexen Umkehrformel der Laplace-Transformation die Temperaturen $u(x, t)$ und $v(x, t)$ bestimmen. Dazu müssen zunächst die Nullstellen der Funktionen:

$$\begin{aligned} &\sqrt{s} (\cosh c_1 \sqrt{s} \sinh c_2 \sqrt{s} + \gamma \sinh c_1 \sqrt{s} \cosh c_2 \sqrt{s}) \text{ und} \\ &\sqrt{s} (\cosh c_1 \sqrt{s} \cosh c_2 \sqrt{s} + \gamma \sinh c_1 \sqrt{s} \sinh c_2 \sqrt{s}) , \end{aligned}$$

also der Nenner von (5) und (7) für $Q(s) = 1$, berechnet werden. ($c_i = d_i / \sqrt{\kappa_i}$)

Satz 2: $U(x, s)$ und $V(x, s)$ sind für $Q(s) = 1$ meromorphe Funktionen von s . Sind ξ_k und η_k für $k = 1, 2, 3, \dots$ die positiven Nullstellen der reellen Funktionen $f(w) := \cos c_1 w \sin c_2 w + \gamma \sin c_1 w \cos c_2 w$ und $g(w) := \cos c_1 w \cos c_2 w - \gamma \sin c_1 w \sin c_2 w$, so hat $U(x, s)$ einfache Pole bei $s = 0$ und $s = -\xi_k^2$ sowie $V(x, s)$ bei $s = -\eta_k^2$.

Für die Nullstellen gelten folgende Abschätzungen:

$$\frac{(2k-1)\pi}{2(c_1+c_2)} < \xi_k < \frac{(2k+1)\pi}{2(c_1+c_2)} \quad \text{und} \quad \frac{(k-1)\pi}{(c_1+c_2)} < \eta_k < \frac{k\pi}{(c_1+c_2)} \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

Beweis: Die Funktionen $U(x, s)$ und $V(x, s)$ sind für Werte der komplexen Variablen s , für die die Nenner nicht verschwinden, analytische Funktionen, die insbesondere eindeutig sind. Die Nenner haben für $z := -i\sqrt{s}$ die Form $\text{const. } zf(z)$ beziehungsweise $\text{const. } zg(z)$. In [5], 12.8 wird gezeigt, daß $f(z)$ nur einfache reelle Nullstellen hat, die symmetrisch zu Null liegen, was analog auch für $g(z)$ bewiesen werden kann. Wegen $z^2 = -s$ können wir uns auf nicht negative Nullstellen beschränken. Also sind $U(x, s)$ und

$V(x,s)$ meromorphe Funktionen von s mit den einfachen Polen $s = 0$ und $s = -\xi_k^2$ beziehungsweise $s = -\eta_k^2$.

Um die behaupteten Abschätzungen für die Nullstellen zu beweisen, bringen wir die Funktionen $f(w)$ und $g(w)$ mit Hilfe der Produktformeln der Winkelfunktionen (Siehe [1], 4.3.31-33) auf folgende Form:

$$f(w) =: \tilde{f}(z) = \frac{1+\gamma}{2} (\sin z + a \sin bz) \quad \text{und} \quad g(w) =: \tilde{g}(z) = \frac{1+\gamma}{2} (\cos z + a \cos bz),$$

$$\text{wobei } \varepsilon = \min\left(\frac{c_1}{c_2}, \frac{c_2}{c_1}\right), \quad z = (c_1 + c_2)w, \quad a = \text{sign}(c_2 - c_1) \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \quad \text{und} \quad b = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

gesetzt wurden.

Wegen $|a| < 1$ haben $\tilde{f}(z)$ und $\sin z$ beziehungsweise $\tilde{g}(z)$ und $\cos z$ in den Extrempunkten von $\sin z$ beziehungsweise $\cos z$ das gleiche Vorzeichen, so daß also in den Intervallen $((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2)$ beziehungsweise $((k-1)\pi, k\pi)$ für $k = 1, 2, 3 \dots$ jeweils mindestens eine Nullstelle liegt.

Haben $\cos z$ und $-ab \cos bz$ in einem Intervall I gleiches Vorzeichen, so sind $\sin z$ und $-a \sin bz$ dort streng monoton, und in jedem Schnittpunkt $\zeta \in I$ mit $y = \sin \zeta = -a \sin b\zeta$ gilt für die Steigungen als Kehrwerte der Ableitungen der inversen Funktionen: $\pm \sqrt{1-y^2}$ beziehungsweise $\pm |a| b \sqrt{1-(y/a)^2}$.

In I kann es nicht mehrere Schnittpunkte geben, da nach dem Satz von Rolle $\tilde{f}'(z) = \frac{1+\gamma}{2} (\cos z + ab \cos bz)$ in benachbarten Schnittpunkten (d.h. Nullstellen von $\tilde{f}(z)$) das Vorzeichen wechseln müßte, was wegen $|a| b \sqrt{1-(y/a)^2} < \sqrt{1-y^2}$ aber nicht möglich ist.

Haben $\cos z$ und $-ab \cos bz$ in einem Intervall I verschiedenes Vorzeichen, so ist $\tilde{f}(z)$ dort streng monoton; in beiden Fällen liegt also nur dann eine Nullstelle in I , wenn $\tilde{f}(z)$ dort das Vorzeichen wechselt, und in diesem Fall gibt es dort genau eine.

Wegen $0 < b < 1$ liegt höchstens eine Extremstelle η von $a \sin bz$ in $((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2)$ und $a \sin bz$ ist in beiden durch η gegebenen Teilintervallen streng monoton. Eine Fallunterscheidung $\tilde{f}(\eta) > 0$ oder $\tilde{f}(\eta) \leq 0$ führt dann zur Eindeutigkeit der Nullstelle. Der Beweis für $\tilde{g}(z)$ verläuft analog. ■

Im folgenden werden die Residuen der Funktionen $\exp(ts)U(x,s)$ und $\exp(ts)V(x,s)$ in den einfachen Polen dieser Funktionen für $Q(s) = 1$ berechnet. Das Residuum einer meromorphen Funktion $F(s) =: \frac{Z(s)}{N(s)}$ in einem einfachen Pol $s = s_k$ ist durch $\frac{Z(s_k)}{N'(s_k)}$ gegeben, da

$$\lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k)F(s) = \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{Z(s)}{\left(\frac{N(s)}{s - s_k}\right)} \text{ gilt.}$$

Die Berechnung des Residuums der Funktion $\exp(ts)U(x,s)$ im Pol $s = 0$ für $x \geq 0$ wird ausführlicher durchgeführt; die anderen Residuen lassen sich dann analog berechnen.

Die Ableitung des Nenners der Funktion $\exp(ts)U(x,s)$ lautet:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \left(K_2 \sqrt{\frac{s}{\kappa_2}} (\cosh c_1 \sqrt{s} \sinh c_2 \sqrt{s} + \gamma \cosh c_2 \sqrt{s} \sinh c_1 \sqrt{s}) \right) = \\ & \frac{K_2}{2\sqrt{\kappa_2 s}} (\cosh c_1 \sqrt{s} \sinh c_2 \sqrt{s} + \gamma \cosh c_2 \sqrt{s} \sinh c_1 \sqrt{s}) + \\ & \frac{K_2}{2\sqrt{\kappa_2}} ((c_2 + \gamma c_1) \cosh c_1 \sqrt{s} \cosh c_2 \sqrt{s} + (c_1 + \gamma c_2) \sinh c_1 \sqrt{s} \sinh c_2 \sqrt{s}), \end{aligned}$$

also erhält man für $s = 0$: (L'Hospitalsche Regel)

$$\frac{K_2}{\sqrt{\kappa_2}} (c_2 + \gamma c_1) = \frac{K_2}{\sqrt{\kappa_2}} \left(\frac{d_2}{\sqrt{\kappa_2}} + \frac{K_1 d_1 \sqrt{\kappa_2}}{K_2 \sqrt{\kappa_1} \sqrt{\kappa_1}} \right) = \frac{\kappa_1 d_2 K_2 + \kappa_2 d_1 K_1}{\kappa_1 \kappa_2},$$

insgesamt also:

$$\operatorname{Res}_{s=0} (\exp(ts)U(x,s)) = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 d_2 K_2 + \kappa_2 d_1 K_1} =: \alpha,$$

wobei diese Formel für $-d_1 \leq x \leq d_2$ gültig ist.

Satz 3: Die Residuen der Funktionen $\exp(ts)U(x,s)$ und $\exp(ts)V(x,s)$ in den Polen $s = -\xi_k^2$ und $s = -\eta_k^2$ sind $a_k(x) \exp(-\xi_k^2 t)$ beziehungsweise $b_k(x) \exp(-\eta_k^2 t)$, wobei $a_k(x)$ und $b_k(x)$ folgendermaßen definiert sind:

$$a_k(x) := \left[\begin{array}{l} \frac{2\alpha \left(\cos c_2 \xi_k \cos \frac{x \xi_k}{\sqrt{\kappa_1}} + \frac{1}{\gamma} \sin c_2 \xi_k \sin \frac{x \xi_k}{\sqrt{\kappa_1}} \right)}{\cos c_1 \xi_k \cos c_2 \xi_k - \frac{c_1 + \gamma c_2}{c_2 + \gamma c_1} \sin c_1 \xi_k \sin c_2 \xi_k}, \text{ für } -d_1 \leq x \leq 0 \\ \frac{2\alpha \cos \frac{(d_2 - x) \xi_k}{\sqrt{\kappa_2}}}{\cos c_1 \xi_k \cos c_2 \xi_k - \frac{c_1 + \gamma c_2}{c_2 + \gamma c_1} \sin c_1 \xi_k \sin c_2 \xi_k}, \text{ für } 0 \leq x \leq d_2 \end{array} \right.$$

$$b_k(x) := \left[\begin{array}{l} \frac{2\alpha \left(\sin c_2 \eta_k \cos \frac{x \eta_k}{\sqrt{\kappa_1}} - \frac{1}{\gamma} \cos c_2 \eta_k \sin \frac{x \eta_k}{\sqrt{\kappa_1}} \right)}{\cos c_1 \eta_k \sin c_2 \eta_k + \frac{c_1 + \gamma c_2}{c_2 + \gamma c_1} \sin c_1 \eta_k \cos c_2 \eta_k}, \text{ für } -d_1 \leq x \leq 0 \\ \frac{2\alpha \sin \frac{(d_2 - x) \eta_k}{\sqrt{\kappa_2}}}{\cos c_1 \eta_k \sin c_2 \eta_k + \frac{c_1 + \gamma c_2}{c_2 + \gamma c_1} \sin c_1 \eta_k \cos c_2 \eta_k}, \text{ für } 0 \leq x \leq d_2 \end{array} \right.$$

Um im folgenden die komplexe Umkehrformel für die Laplace-Transformation anwenden zu können, müssen wir zeigen, daß die obigen Funktionen $U(x,s)$ und $V(x,s)$ Laplace-Transformierte sind. Im einzelnen wird dieser Beweis nur am Beispiel der Funktion $U(x,s)$ für $-d_1 \leq x \leq 0$ durchgeführt; die anderen Fälle lassen sich analog erledigen.

Lemma 1: Für $Q(s) = 1$ und $-d_1 \leq x \leq 0$ ist die Funktion $U(x,s)$ in (5) in jeder Halbebene $\operatorname{Re}(s) > 0$ analytisch und in der Gestalt $\frac{\text{const.}}{\sqrt{s}} + \frac{h(s)}{s^2}$ darstellbar, wobei $h(s)$ in jeder Halbebene $\operatorname{Re}(s) \geq \delta > 0$ beschränkt ist.

Beweis: Sei $z := c_2 \sqrt{s}$; $\varepsilon := \frac{c_1}{c_2}$ und $\sigma := \frac{|x|}{d_1}$. Mit diesen Abkürzungen gilt:

$$U(x,s) = \text{const.} \frac{\sinh \sigma \varepsilon z \sinh z + \gamma \cosh \sigma \varepsilon z \cosh z}{z (\cosh \varepsilon z \sinh z + \gamma \cosh z \sinh \varepsilon z)} \quad \text{für } 0 \leq \sigma \leq 1,$$

daraus folgt mit Hilfe der Additionstheoreme der Hyperbelfunktionen:

$$U(x,s) = \text{const.} \frac{(1 + \gamma) \cosh(1 + \sigma\varepsilon)z - (1 - \gamma) \cosh(1 - \sigma\varepsilon)z}{z((1 + \gamma) \sinh(1 + \varepsilon)z + (1 - \gamma) \sinh(1 - \varepsilon)z)},$$

also

$$|U(x,s)| \leq \text{const.} \frac{\exp(-(1 - \sigma)\varepsilon x_0)}{x_0} \quad \text{für } \text{Re}(z) \geq x_0 > 0.$$

Also gilt für $\text{Re}(s) \geq \delta > 0$ und $0 \leq \sigma < 1$ insbesondere $U(x,s) =: \frac{h(s)}{s^2}$ mit einer beschränkten Funktion $h(s)$.

Für $\text{Re}(z) \geq x_0 > 0$ und $\sigma = 1$ gilt

$$U(x,s) - \frac{1}{z} =$$

$$\text{const.} \frac{(1 + \gamma) \cosh(1 + \varepsilon)z - (1 - \gamma) \cosh(1 - \varepsilon)z - (1 + \gamma) \sinh(1 + \varepsilon)z - (1 - \gamma) \sinh(1 - \varepsilon)z}{z((1 + \gamma) \sinh(1 + \varepsilon)z + (1 - \gamma) \sinh(1 - \varepsilon)z)},$$

also

$$|U(x,s) - \frac{1}{z}| \leq \text{const.} \frac{\exp(-2\varepsilon x_0)}{x_0}.$$

In beiden Fällen läßt sich $U(x,s)$ also in der Form $U(x,s) = \frac{\text{const.}}{\sqrt{s}} + \frac{h(s)}{s^2}$ darstellen, wobei $h(s)$ in $\text{Re}(s) \geq \delta > 0$ beschränkt ist. ■

Folgerung: Aufgrund von [6], Kapitel 7.2, Satz 4 sind $U(x,s)$ und $V(x,s)$ für $t > 0$ die Laplace-Transformierten der folgenden Funktionen:

$$(8) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\omega}^{\delta + i\omega} e^{ts} U(x,s) ds$$

$$(9) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\omega}^{\delta + i\omega} e^{ts} V(x,s) ds.$$

(Diese Darstellungen gelten für alle $\delta > 0$ und sind von δ unabhängig.)

Um im folgenden die komplexen Integrale (8) und (9) mit Hilfe der im Satz 3 berechneten Residuen der Integranden ausrechnen zu können, müssen wir die Funktionen $U(x,s)$ und $V(x,s)$ auf geeigneten Kurven in der komplexen s -Ebene abschätzen, die in der linken Halbebene $\text{Re}(s) \leq \delta$ vom Punkt $\delta + i\omega$ zwischen den Polen hindurch zum Punkt $\delta - i\omega$ verlaufen. (Siehe [6], 7.3, Satz 3)

Lemma 2: Für $k = 1, 2, 3, \dots$ sei $p_k = \left(\frac{(2k-1)\pi}{2(c_1 + c_2)} \right)^2$ und $Q(s) = 1$ in (5).

Auf den in der komplexen s -Ebene gelegenen Parabeln C_k mit den Gleichungen in Polarkoordinaten

$$r = \frac{p_k}{\sin^2(\varphi/2)} \quad (0 < \varphi \leq 2\pi; \text{Scheitelpunkt bei } s = -p_k; \text{Brennpunkt bei } s = 0)$$

gilt $|U(x, s)| \leq \delta_k$ mit $\delta_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

Beweis: Sei $w = (c_1 + c_2)\sqrt{s}$ und a, b wie im Satz 2 gewählt. Mit Hilfe der Additionstheoreme für die Hyperbelfunktionen (Siehe [1], 4.5.38-40) läßt sich die Funktion $U(x, s)$ für $Q(s) = 1$ für alle $x \in [-d_1, d_2]$ auf folgende Form bringen:

$$U(x, s) = \text{const.} \frac{\cosh cw + \delta \cosh dw}{w(\sinh w + a \sinh bw)},$$

wobei $|c|, |d| \leq 1$ und δ eine geeignete Konstante ist. Also

$$U(x, s) = \text{const.} \frac{(\cosh cu \cos cv + \delta \cosh du \cos dv) + i(\sinh cu \sin cv + \delta \sinh du \sin dv)}{w((\sinh u \cos v + a \sinh bu \cos bv) + i(\cosh u \sin v + a \cosh bu \sin bv))},$$

mit $w = :u + iv$. Also

$$|U(x, s)| \leq \text{const.} \frac{|(\cosh cu \cos cv + \delta \cosh du \cos dv) + i(\sinh cu \sin cv + \delta \sinh du \sin dv)|}{|w| |\cosh u \sin v + a \cosh bu \sin bv|}.$$

Aus dieser Abschätzung folgt mit Hilfe der Monotonie der Funktion $\cosh u$:

$$|U(x, s)|^2 \leq \text{const.} \frac{(|\cos cv| + |\delta \cos dv|)^2 + (|\sin cv| + |\delta \sin dv|)^2}{|w|^2 |\sin v|^2 \left| 1 + \frac{a \cosh bu \sin bv}{\cosh u \sin v} \right|^2}.$$

Liegt s auf der Parabel C_k , so gilt $s = \frac{p_k}{\sin^2(\varphi/2)} e^{i\varphi}$, also $\sqrt{s} = \frac{\sqrt{p_k}}{\sin(\varphi/2)} e^{i\varphi/2}$.

($U(x, s)$ ist unabhängig von der Wahl des Zweiges der Wurzel \sqrt{s}), also $\sqrt{s} = \sqrt{p_k}(\text{ctg}(\varphi/2) + i)$, d.h. $u = \frac{(2k-1)\pi}{2} \text{ctg}(\varphi/2)$ und $v = \frac{(2k-1)\pi}{2}$, also

$$|U(x, s)|^2 \leq \frac{\text{const.}}{(2k-1)^2(1-|a|)^2} =: \delta_k \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

Der Beweis für $V(x, s)$ verläuft analog.

Bemerkung: In den Polen $s = -\xi_k^2$ ist $u = 0$ und $v = (c_1 + c_2)\xi_k$, also folgt:

$$\left| 1 + \frac{a \cosh bu \sin bv}{\cosh u \sin v} \right| = \left| 1 + \frac{a \sin bv}{\sin v} \right| = 0.$$

(Siehe Beweis von Satz 2).

Definition: Für integrierbare Funktionen $f(x)$ sei

$$W(f) := \int_{-d_1}^0 \frac{K_1}{\kappa_1} f(x) dx + \int_0^{d_2} \frac{K_2}{\kappa_2} f(x) dx.$$

Lemma 3: Die Funktionen $a_k(x)$ und $b_k(x)$ aus Satz 3 haben folgende Eigenschaften:

1.) Für $k \in \mathbb{N}$ und $-d_1 \leq x \leq d_2$ sind beide Funktionen stetig und es gilt:

$$|a_k(x)|, |b_k(x)| \leq \frac{2\alpha(1+\gamma)(\gamma c_1 + c_2)}{(c_1 + c_2)\gamma \min(1, \gamma)}.$$

2.) Es gilt $K_1 a_k'(0-) = K_2 a_k'(0+)$ und $K_1 b_k'(0-) = K_2 b_k'(0+)$.

3.) Für $-d_1 < x < 0$ und $0 < x < d_2$ gilt $\kappa(x) a_k''(x) = -\xi_k^2 a_k(x)$ und $\kappa(x) b_k''(x) = -\eta_k^2 b_k(x)$.

4.) Es gilt $a_k'(-d_1) = b_k'(-d_1) = a_k'(d_2) = b_k'(d_2) = 0$.

5.) Es gilt $W(a_k) = 0$.

Beweis: 1.) Wir benutzen die im Beweis von Satz 2 eingeführten Abkürzungen und setzen zusätzlich $\lambda := \frac{c_1 + \gamma c_2}{c_2 + \gamma c_1}$. Mit Hilfe der Produktformeln der Winkelfunktionen läßt sich der Nenner von $a_k(x)$ auf folgende Form bringen:

$$\text{Nenner} = \frac{1+\lambda}{2} (\cos(c_1 + c_2)\xi_k + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \cos(c_1 - c_2)\xi_k).$$

Setzen wir $z_k := (c_1 + c_2)\xi_k$ und benutzen die Beziehung $\sin z_k = -a \sin bz_k$, so folgt:

$$\begin{aligned} \text{Nenner} &= \frac{1+\lambda}{2} (\cos z_k + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \cos bz_k) \\ &= \frac{1+\lambda}{2} \left(\cos z_k \pm \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \frac{1}{|a|} \sqrt{\cos^2 z_k - (1-a^2)} \right), \end{aligned}$$

wobei $\cos^2 z_k \geq 1 - a^2$ gilt. Wegen $\frac{|1 - \lambda|}{|1 + \lambda||a|} = \frac{|c_2 - c_1|}{c_1 + c_2} < 1$ erhalten wir folgende Fallunterscheidung:

1. Fall: $\cos z_k \geq \sqrt{1 - a^2}$:

$$\text{Nenner} > \frac{1 + \lambda}{2} \left(\cos z_k - \sqrt{\cos^2 z_k - (1 - a^2)} \right) \geq \frac{1 + \lambda}{2} (1 - |a|).$$

2. Fall: $\cos z_k \leq -\sqrt{1 - a^2}$:

$$\text{Nenner} < \frac{1 + \lambda}{2} \left(\cos z_k + \sqrt{\cos^2 z_k - (1 - a^2)} \right) \leq \frac{1 + \lambda}{2} (-\sqrt{1 - a^2}),$$

insgesamt gilt also: $|\text{Nenner}| > \frac{1 + \lambda}{2} (1 - |a|)$, da $|a| < 1$.

Mit $\frac{1 + \lambda}{2} = \frac{(1 + \gamma)(c_1 + c_2)}{2(\gamma c_1 + c_2)}$ und $(1 - |a|) = \frac{2 \min(1, \gamma)}{1 + \gamma}$ folgt daraus die behauptete Abschätzung für $|a_k(x)|$. Der Beweis für $|b_k(x)|$ verläuft analog. Die Eigenschaften 2.)-5.) lassen sich leicht nachrechnen. ■

3. Singuläre Lösungen

Im Abschnitt 2 wurde gezeigt, daß sich die komplexen Integrale (8) und (9) für $Q(s) = 1$ mit Hilfe der im Satz 3 berechneten Residuen berechnen lassen. (Komplexe Umkehrformel der Laplace-Transformation.) Im folgenden Satz 4 werden die so erhaltenen Lösungen angegeben und es wird gezeigt, daß in beiden Fällen der Wärmefluß auf der Vorderseite der Platte ($x = -d_1$) für $t > 0$ verschwindet, während

$$-K_1 U_x(-d_1, s) = -K_1 V_x(-d_1, s) = i$$

gilt. Die Laplace-Transformation und die Ableitung nach x sind in diesem Fall also nicht vertauschbar. Lösungen mit diesen Eigenschaften werden singuläre Lösungen genannt. (Siehe Bemerkung 1 nach Satz 4.) Die hier eingeführten singulären Lösungen sind besonders wichtig, weil sich die allgemeinen Lösungen der in diesem Bericht behandelten Wärmeleitungsprobleme mit ihrer Hilfe als Faltungen mit dem vorgegebenen Wärmefluß auf der Vorderseite der Platte darstellen lassen. (Diese singulären Lösungen haben die Eigenschaften einer Greenschen Funktion.)

Satz 4: Sei $\Omega = \{(x, t) : -d_1 < x < d_2; x \neq 0; t > 0\}$ und $0 < t_0 < t_1$ beliebig. Für $Q(s) = 1$ sind die komplexen Integrale (8) und (9) durch die beiden für $0 < t_0 \leq t \leq t_1$ und $-d_1 \leq x \leq d_2$ gleichmäßig konvergenten Reihen:

$$(10) \quad \vartheta_1(x,t) = \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\xi_k^2 t} a_k(x) \quad \text{und}$$

$$(11) \quad \vartheta_2(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\eta_k^2 t} b_k(x) \quad \text{gegeben.}$$

$\vartheta_1(x,t)$ und $\vartheta_2(x,t)$ sind in dem Gebiet Ω Lösungen der Wärmeleitungsgleichungen für eine Platte aus zwei Schichten. Sie erfüllen die Übergangsbedingungen und folgende Anfangs- und Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x,0+) = \vartheta_2(x,0+) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_1(-d_1+,t) = \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_2(-d_1+,t) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_1(d_2-,t) = \vartheta_2(d_2-,t) = 0 \end{aligned}$$

für $-d_1 < x < d_2$ beziehungsweise $t > 0$.

Die Laplace-Transformierten (5) und (7) dieser beiden Funktionen sind in der ganzen komplexen s -Ebene durch folgende Reihen gegeben:

$$(12) \quad \Theta_1(x,s) = \frac{\alpha}{s} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(x)}{s + \xi_k^2}$$

$$(13) \quad \Theta_2(x,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k(x)}{s + \eta_k^2}.$$

Diese Reihen konvergieren gleichmäßig in jedem kompakten Teilgebiet der komplexen s -Ebene, das keinen der Pole der meromorphen Funktionen $\Theta_1(x,s)$ und $\Theta_2(x,s)$ enthält.

Bemerkungen: 1.) Mit Hilfe der Darstellungen (5) und (7) folgt für $\operatorname{Re}(s) \geq \delta > 0$ die Beziehung $\Theta_k(-d_1,s) - \sqrt{\kappa_1} / (K_1 \sqrt{s}) = o(|s|^{-\mu})$ für $s \rightarrow \infty$ und $\mu > 1$ beliebig. Also erhält man mit [6], 15.5, Satz 1 die asymptotische Beziehung $\vartheta_k(-d_1,t) \sim \sqrt{\kappa_1} / (K_1 \sqrt{\pi t})$ für $t \rightarrow 0+$ und $k=1,2$. Insbesondere sind die Funktionen $\vartheta_k(x,t)$ im Punkt $(-d_1,0)$ also nicht beschränkt. (Siehe die entsprechende Rechnung für die Jacobische Thetafunktion und ihre Ableitungen in [8], Kapitel 18) Die Funktionen $\vartheta_k(x,t)$ für $k=1,2$ werden als singuläre Lösungen der beiden hier behandelten Wärmeleitungsprobleme mit verschwindenden Anfangs- und Randbedingungen bezeichnet. (Siehe [8], Teil 4 und die Abbildungen 1 und 2.) Die Lösungen der beiden Wärmeleitungsprobleme mit vorgegebenem Fluß auf der Vorderseite der Platte können also nur dann eindeutig sein, wenn additive singuläre Lösungen durch geeignete Zusatzforderungen an die Lösungen von vornherein ausgeschlossen werden. (Siehe [4], Theorem 6.4.1 und [9], 5.3, Theorem 2 und Korollar 1.)

2.) Sind Temperaturleitzahl und Wärmeleitfähigkeit in beiden Schichten gleich, so stimmen die Lösungen der Wärmeleitungsprobleme mit denen für die Einfachschicht überein, die im Anhang 1 angegeben werden. Die oben eingeführten singulären Lösungen entsprechen also den singulären Lösungen für die Einfachschicht, insbesondere im ersten Fall also der Jacobischen Thetafunktion ϑ_3 . Für die geschichtete Platte konnten keine zur linearen Transformationsformel der Jacobischen Thetafunktion ϑ_3 analogen Darstellungen der singulären Lösungen hergeleitet werden. (Siehe [6], 8.3 und die Formeln (10') und (11') aus dem Anhang 1.)

Beweis von Satz 4: Nach Lemma 3 sind $a_k(x)$ und $b_k(x)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $-d_1 \leq x \leq d_2$ gleichmäßig beschränkt. Aufgrund der Abschätzungen für die Nullstellen ξ_k und η_k nach Satz 2 sind sowohl die Reihen (10) und (11) selbst, als auch alle beliebig oft gliedweise nach x oder t differenzierten Reihen gleichmäßig in $0 < t_0 \leq t \leq t_1$ und $-d_1 \leq x \leq d_2$ konvergent. Aufgrund von Lemma 3 folgen also die behaupteten Rand- und Übergangsbedingungen sowie das Erfülltsein der Wärmeleitungsgleichung durch gliedweises Einsetzen. Mit Hilfe der Darstellungen (5) und (7) folgt für $\operatorname{Re}(s) \geq \delta > 0$ und $-d_1 < x < d_2$ die Beziehung $\Theta_k(x,s) = o(|s|^{-\mu})$ für $s \rightarrow \infty$ und $\mu > 1$ beliebig. Also erhält man mit [6], 15.5, Satz 1 die Gültigkeit der Anfangsbedingung $\vartheta_k(x,0+) = 0$ für $k=1,2$. Aufgrund von [6], 7.3, Satz 3 und Lemma 2 sind (5) und (7) die Laplace-Transformierten der Funktionen (10) und (11) für $\Phi(s) = 1$. Da die beiden Reihen (10) und (11) gleichmäßig konvergieren und die Reihen (12) und (13) für $s = \delta > 0$ absolut konvergent sind, darf man die Laplace-Transformation gliedweise durchführen und erhält die beiden Reihen (12) und (13), die die meromorphen Funktionen (5) und (7) darstellen. (Siehe [6], 7.3 und Anhang 41.) ■

Bezeichnung:

Der zu $\vartheta_k(x,t)$ gehörende Wärmefluß wird mit $f_k(x,t)$ bezeichnet. ($k=1,2$).

In den folgenden Abbildungen 1-6 wird eine geschichtete Platte aus Borkarbit und Graphit mit den folgenden physikalischen Parametern zugrunde gelegt:

$d_1 = .03 \text{ cm}$, $\kappa_1 = .01 \text{ cm}^2/\text{s}$, $K_1 = .02 \text{ W/cmK}$ und

$d_2 = 1 \text{ cm}$, $\kappa_2 = .6 \text{ cm}^2/\text{s}$, $K_2 = .8 \text{ W/cmK}$ mit $[q(t)] = W/\text{cm}^2$. (Siehe [2].)

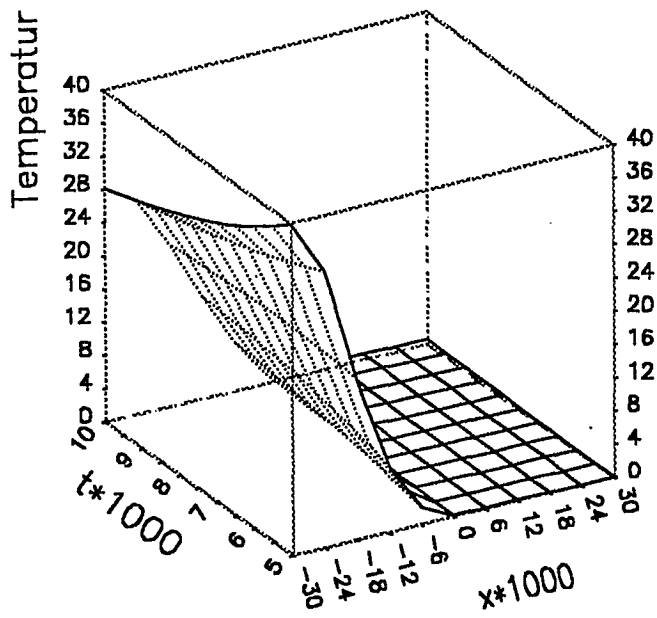


Abb. 1. Singuläre Lösung für die Temperatur: Partialsumme von $\vartheta_1(x,t)$ mit 100 Gliedern.

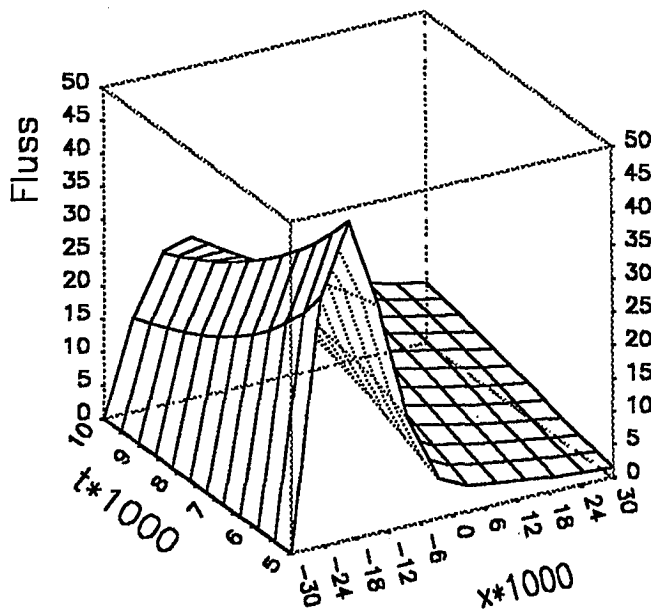


Abb. 2. Singuläre Lösung für den Wärmefluß: Partialsumme von $f_1(x,t)$ mit 100 Gliedern.

4. Finite Lösungen

In diesem Abschnitt werden Lösungen der in diesem Bericht behandelten Wärmeleitungsprobleme in Form von Faltungen der im Abschnitt 3 hergeleiteten singulären Lösungen mit dem vorgegebenen Fluß $q(t)$ auf der Vorderseite der Platte dargestellt, wobei die Rand- und Anfangsbedingungen unverträglich sein dürfen. ($q(0+) \neq 0$.) Aus diesen Faltungsintegralen werden dann unendliche Reihen gewonnen, die einerseits das asymptotische Verhalten für $t \rightarrow \infty$ berücksichtigen, andererseits für „kleine“ t noch hinreichend gut konvergieren. Mit Hilfe von [6], 13.1, Satz 3 läßt sich das asymptotische Verhalten der hier betrachteten Faltungsintegrale durch die folgende formale Rechnung gewinnen. Gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0} (\Theta_1(x,s) - \frac{\alpha}{s}) = \varphi(x) \quad \text{und} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \Theta_2(x,s) = \psi(x),$$

so folgt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t q(t-\tau) \mathfrak{G}_1(x, \tau) d\tau &= \lim_{s \rightarrow 0} (sQ(s) \Theta_1(x,s)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} (sQ(s) (\frac{\alpha}{s} + \varphi(x))) = \alpha Q(0) + \varphi(x) \lim_{s \rightarrow 0} (sQ(s)) \\ &= \alpha \int_0^\infty q(\tau) d\tau + \varphi(x) \lim_{t \rightarrow \infty} q(t), \end{aligned}$$

und analog

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t q(t-\tau) d\tau = \psi(x) \lim_{t \rightarrow \infty} q(t).$$

Im folgenden wird gezeigt, daß hierdurch tatsächlich das asymptotische Verhalten der Lösungen beschrieben wird.

Lemma 4: In $-d_1 < x < 0$ und in $0 < x < d_2$ sei $\varphi(x)$ Lösung der Differentialgleichung $\kappa(x)\varphi'' = \alpha$ und $\psi(x)$ Lösung von $\psi'' = 0$. Sind beide Funktionen in $-d_1 \leq x \leq d_2$ stetig und erfüllen sie die Randbedingungen $-K_1\varphi'(-d_1) = 1$, $\varphi'(d_2) = 0$ und $-K_1\psi'(-d_1) = 1$, $\psi(d_2) = 0$, die Übergangsbedingungen sowie die Integralbedingung $W(\varphi) = 0$, so sind sie eindeutig bestimmt und es gilt:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2}{2\kappa_1} - \frac{\alpha K_2 d_2 x}{\kappa_2 K_1} + B, & \text{für } -d_1 \leq x \leq 0 \\ \frac{\alpha x^2}{2\kappa_2} - \frac{\alpha d_2 x}{\kappa_2} + B, & \text{für } 0 \leq x \leq d_2, \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{d_2}{K_2} - \frac{x}{K_1}, & \text{für } -d_1 \leq x \leq 0 \\ \frac{d_2 - x}{K_2}, & \text{für } 0 \leq x \leq d_2, \end{cases}$$

$$\text{mit } B := \alpha^2 \left(\frac{K_2 d_2^3}{3\kappa_2^2} - \frac{K_1 d_1^3}{6\kappa_1^2} - \frac{K_2 d_2 d_1^2}{2\kappa_1 \kappa_2} \right).$$

Beweis: Da φ und ψ aus Parabel- beziehungsweise Geradenstücken bestehen muß, erhält man aus den Rand-, Übergangs- und der Integralbedingung jeweils ein nichtsinguläres Gleichungssystem für die Koeffizienten. ■

Lemma 5: Für $-d_1 \leq x \leq d_2$ gilt $\lim_{s \rightarrow 0} (\Theta_1(x,s) - \alpha/s) = \varphi(x)$ und $\lim_{s \rightarrow 0} (\Theta_2(x,s)) = \psi(x)$.

Beweis: Aufgrund der Darstellungen (12) und (13) und Lemma 3 sind $\Theta_1(x,s) - \alpha/s$ und $\Theta_2(x,s)$ im Punkt $s=0$ gleichmäßig stetig. Also sind $\lim_{s \rightarrow 0} (\Theta_1(x,s) - \alpha/s)$ und $\lim_{s \rightarrow 0} (\Theta_2(x,s))$ in $-d_1 \leq x \leq d_2$ stetig. Mit Hilfe der Darstellungen (5) und (7) folgt die Gültigkeit der Rand- und Übergangsbedingungen, die im Lemma 4 gefordert werden. Die Integralbedingung $W(\Theta_1(\cdot, s) - \alpha/s) = 0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von $s=0$ ergibt sich aus (12) mit Hilfe von Lemma 3. In $-d_1 < x < 0$ und $0 < x < d_2$ erfüllen Θ_1 und Θ_2 die Differentialgleichung (1), also gilt:

$$\lim_{s \rightarrow 0} (\kappa(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Theta_1(x,s)) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \Theta_1(x,s)) = \alpha \text{ und } \lim_{s \rightarrow 0} (\kappa(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Theta_2(x,s)) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \Theta_2(x,s)) = 0.$$

Mit Hilfe der Darstellungen (5) und (7) folgt die gleichmäßige Stetigkeit von $\partial/\partial x \Theta_k(x,s)$ und $\partial^2/\partial x^2 \Theta_k(x,s)$ im Punkt $s=0$, also gilt:

$$\frac{d^2}{dx^2} (\kappa(x) \lim_{s \rightarrow 0} (\Theta_1(x,s) - \frac{\alpha}{s})) = \lim_{s \rightarrow 0} (\kappa(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Theta_1(x,s)) = \alpha \text{ und}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} (\kappa(x) \lim_{s \rightarrow 0} (\Theta_2(x,s))) = \lim_{s \rightarrow 0} (\kappa(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Theta_2(x,s)) = 0.$$

Da die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ nach Lemma 4 eindeutig bestimmt sind, folgt daraus die Behauptung. ■

Folgerung:

Wegen (12) und (13) gilt $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(x)}{\xi_k^2}$ und $\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k(x)}{\eta_k^2}$ für $-d_1 \leq x \leq d_2$.

Lemma 6: Ist $q(t)$ für $t \geq 0$ absolutstetig und

$$p(a,t) := q(0)e^{-at} + \int_0^t q'(t-\tau)e^{-a\tau} d\tau,$$

so gelten für die Faltungsintegrale folgende Darstellungen:

$$(14) \quad u(x,t) := \int_0^t q(t-\tau)\vartheta_1(x,\tau)d\tau = \alpha \int_0^t q(\tau)d\tau + \varphi(x)q(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p(\xi_k^2,t)a_k(x)}{\xi_k^2} \quad \text{und}$$

$$(15) \quad v(x,t) := \int_0^t q(t-\tau)\vartheta_2(x,\tau)d\tau = \psi(x)q(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p(\eta_k^2,t)b_k(x)}{\eta_k^2}.$$

Beweis: Um mit Hilfe des Lebesgueschen Satzes (Siehe [3], 16.2) die Vertauschbarkeit der Integration und Summation in den Faltungsintegralen (14) und (15) nachzuweisen, müssen wir zeigen, daß die Folge

$$f_n(x,t,\tau) := q(t-\tau) \sum_{k=1}^n a_k(x) e^{-\xi_k^2 \tau}$$

eine integrierbare Majorante besitzt. Nach Lemma 3 sind die Koeffizienten $a_k(x)$ und $b_k(x)$ gleichmäßig beschränkt. Da q stetig ist, folgt also:

$$|f_n(x,t,\tau)| \leq M \sum_{k=1}^n e^{-\xi_k^2 \tau} \quad \text{für } 0 \leq \tau \leq t.$$

Nach dem Satz von Beppo Levi (Siehe [3], 16.2) folgt also:

$$|f_n(x,t,\tau)| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\xi_k^2 \tau} \quad \text{und} \quad \int_0^t \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\xi_k^2 \tau} \right) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\xi_k^2 t}}{\xi_k^2} < \infty.$$

Also dürfen wir in den Faltungsintegralen Integration und Summation vertauschen und erhalten:

$$u(x,t) = \int_0^t q(t-\tau)\vartheta_1(x,\tau)d\tau = \alpha \int_0^t q(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \int_0^t q(t-\tau)e^{-\xi_k^2 \tau} d\tau.$$

Durch partielle Integration folgt daraus die Behauptung mit Hilfe der Folgerung aus Lemma 5. Der Beweis für die Darstellung der zweiten Faltung verläuft analog. ■

Bemerkungen: Da die Funktionen $\vartheta_k(x,t)$ für $t \geq t_0 > 0$ beschränkt und nach obigem Lemma 6 für $t \geq 0$ lokal integrierbar sind, läßt sich der Faltungssatz für die Laplace-Transformation anwenden, wenn zusätzlich $\int_0^\infty |q(\tau)| d\tau < \infty$ gefordert wird. (Siehe [6], 2.15). Also gilt in diesem Fall $U(x,s) = Q(s)\Theta_1(x,s)$ und $V(x,s) = Q(s)\Theta_2(x,s)$, so daß $u(x,t)$ und $v(x,t)$ als Lösungen der hier betrachteten Wärmeleitungsprobleme in Frage kommen. (Siehe die Abbildungen 3 und 4.) Daß diese Funktionen tatsächlich Lösungen sind, muß im einzelnen verifiziert werden, da insbesondere die Gültigkeit der Randbedingungen nicht sichergestellt ist. (Siehe [8], 18.1). Da keine zur linearen Transformationsformel der Jacobischen Thetafunktion ([8], 18.1) analogen Formeln für die Funktionen $\vartheta_k(x,t)$ zur Verfügung stehen, wurden zusätzliche Bedingungen an $q(t)$ erforderlich.

Definition: Sei $\Omega_T := \{(x,t) : -d_1 < x < d_2; x \neq 0; 0 < t < T\}$. Eine Funktion $u(x,t)$ heißt finite Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t = \kappa(x)u_{xx}$ in Ω ($=\Omega_\infty$), wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

- 1.) u, u_t, u_x und u_{xx} sind stetig in Ω und erfüllen dort die Wärmeleitungsgleichung.
- 2.) Für $t > 0$ gelten die Übergangsbedingungen:
 $u(0-,t) = u(0+,t)$ und $K_1u_x(0-,t) = K_2u_x(0+,t)$.
- 3.) u ist in Ω_T beschränkt für alle $T > 0$.
- 4.) Es gilt $u_x \in L^2(\Omega_T)$ und $u_t, u_{xx} \in L^1(\Omega_T)$ für alle $T > 0$.

In den folgenden Abbildungen 3 und 4 werden die Temperatur $u(x,t)$ (14) und der zugehörige Fluß $-K(x)u_x(x,t)$ für $q(t) = e^{-t}$ dargestellt.

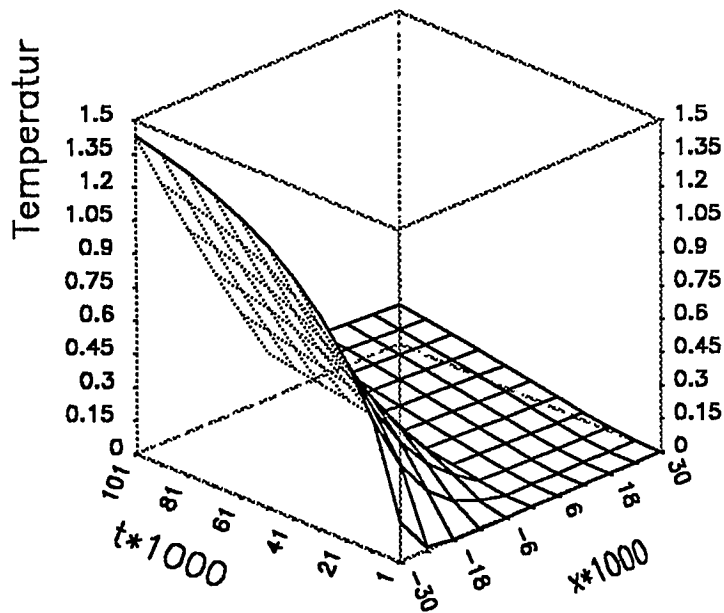


Abb. 3. Finite Lösung für die Temperatur: Partialsumme von $u(x,t)$ (14) mit 20 Gliedern für $q(t) = e^{-t}$

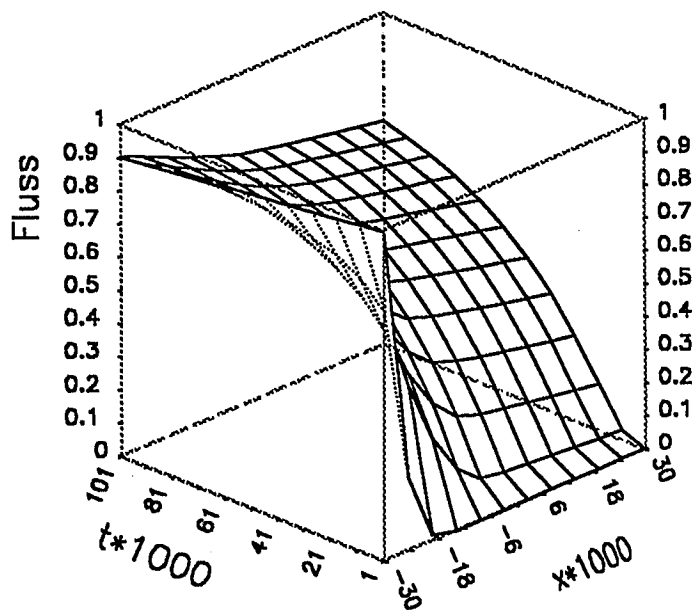


Abb. 4. Finite Lösung für den Wärmefluß: Partialsumme von $-K(x)u_x(x,t)$ (14) mit 30 Gliedern für $q(t) = e^{-t}$

5. Existenz und Eindeutigkeit

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die Funktionen (14) und (15) unter geeigneten Voraussetzungen an $q(t)$ eindeutige finite Lösungen der beiden hier betrachteten Wärmeleitungsprobleme sind.

Satz 5: (Eindeutigkeitssatz) Finite Lösungen der Wärmeleitungsgleichung $u_t = \kappa(x)u_{xx}$ in Ω , die die Anfangsbedingung:

$$(16) \quad u(x,0+) = 0 \quad \text{für } -d_1 < x < d_2,$$

und eine der folgenden Randbedingungen:

$$(17) \quad -K_1 u_x(-d_1+,t) = q(t), \quad u_x(d_2-,t) = 0 \quad \text{für } t > 0 \quad \text{oder}$$

$$(18) \quad -K_1 u_x(-d_1+,t) = q(t), \quad u(d_2-,t) = 0 \quad \text{für } t > 0$$

erfüllen, sind eindeutig bestimmt.

Beweis: Mit Hilfe der sogenannten Energiemethode wird gezeigt, daß finite Lösungen für $q(t) \equiv 0$ in Ω_T für alle $T > 0$ identisch verschwinden müssen. (Siehe [4], 6.4).

In Ω_T gilt $2uu_t = (u^2)_t$ und $uu_{xx} = (uu_x)_x - (u_x)^2$, also folgt für $T > 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \left(\int_{-d_1}^0 \frac{K_1}{\kappa_1} (uu_t - \kappa_1 uu_{xx}) dx + \int_0^{d_2} \frac{K_2}{\kappa_2} (uu_t - \kappa_2 uu_{xx}) dx \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-d_1}^0 \frac{K_1}{\kappa_1} u^2(x,T) dx + \frac{1}{2} \int_0^{d_2} \frac{K_2}{\kappa_2} u^2(x,T) dx - \int_0^T \left(\int_{-d_1}^0 (uK_1 u_x)_x dx + \int_0^{d_2} (uK_2 u_x)_x dx \right) dt \\ &\quad + \int_0^T \left(\int_{-d_1}^0 K_1 (u_x)^2 dx + \int_0^{d_2} K_2 (u_x)^2 dx \right) dt \\ &= \frac{K_1}{2\kappa_1} \int_{-d_1}^0 u(x,T)^2 dx + \frac{K_2}{2\kappa_2} \int_0^{d_2} u(x,T)^2 dx - \int_0^T ([uK_1 u_x]_{-d_1}^0 + [uK_2 u_x]_0^{d_2}) dt \\ &\quad + K_1 \int_0^T \int_{-d_1}^0 u_x^2 dx dt + K_2 \int_0^T \int_0^{d_2} u_x^2 dx dt, \end{aligned}$$

also muß $u(x,t)$ aufgrund der Rand- und Übergangsbedingungen identisch verschwinden.

■

Satz 6: (Existenzsatz)

Ist $q(t)$ absolutstetig und gilt $|q'(t)| \leq \text{const.} e^{-\beta t}$ für $t \geq 0$ mit $0 < \beta < \text{Min}(\xi_1, \eta_1)$, so sind die Funktionen $u(x,t)$ und $v(x,t)$ (14,15) finite Lösungen der Wärmeleitungsgleichung $u_t = \kappa(x)u_{xx}$ in Ω , die die Anfangsbedingungen (16) und die Randbedingungen (17) beziehungsweise (18) erfüllen.

Beweis: Sei $p(a,t)$ wie im Lemma 6 definiert und $u(x,t)$ und $v(x,t)$ durch (14,15) gegeben.

Dann gilt für $t \geq t_0 > 0$ und $a > 0$:

$$|p(a,t)| \leq |q(0)e^{-at_0}| + \text{const.} \int_0^t e^{-a\tau} d\tau \leq \frac{|q(0)|}{at_0} + \frac{\text{const.}}{a},$$

also dürfen die Reihen gliedweise einmal nach t und zweimal nach x differenziert werden, und man erhält mit Hilfe von Lemma 3:

$$\begin{aligned} u_t &= \kappa(x)u_{xx} = \alpha q(t) + \sum_{k=1}^{\infty} p(\xi_k^2, t) a_k(x) \\ v_t &= \kappa(x)v_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} p(\eta_k^2, t) b_k(x) \\ u_x &= \varphi'(x)q(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p(\xi_k^2, t) \tilde{a}_k(x)}{\xi_k} \quad \text{mit } \tilde{a}_k(x) := \frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{\sqrt{\kappa(x)}}{\xi_k} a_k(x) \right) \\ v_x &= \psi'(x)q(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p(\eta_k^2, t) \tilde{b}_k(x)}{\eta_k} \quad \text{mit } \tilde{b}_k(x) := \frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{\sqrt{\kappa(x)}}{\eta_k} b_k(x) \right). \end{aligned}$$

Die Stetigkeit der Funktionen $u(x,t)$ und $v(x,t)$ und ihrer ersten Ableitungen nach x und t , sowie der zweiten Ableitung nach x ergibt sich aus obiger Abschätzung für $p(a,t)$ und der Tatsache, daß $\tilde{a}_k(x)$ und $\tilde{b}_k(x)$ für $k \in N$ und $-d_1 \leq x \leq d_2$ gleichmäßig beschränkt sind.

Die Gültigkeit der Übergangs-, Anfangs- und Randbedingungen folgt durch gliedweises Einsetzen, was aufgrund der obigen Abschätzung für $p(a,t)$ erlaubt ist, und die Beschränktheit der beiden Funktionen $u(x,t)$ und $v(x,t)$ in Ω_T ergibt sich aus folgender Abschätzung für $p(a,t)$, wobei $a > \beta > 0$:

$$\begin{aligned}
|p(a,t)| &\leq |q(0)|e^{-at} + \text{const.} \cdot e^{-at} \int_0^t e^{(a-\beta)\tau} d\tau \\
&\leq |q(0)|e^{-at} + \text{const.} \cdot \frac{e^{-\beta t} - e^{-at}}{a - \beta} \leq \text{const.} \cdot e^{-\beta t},
\end{aligned}$$

die für $t \geq 0$ gültig ist.

Die gleiche Abschätzung dient auch zum Nachweis der quadratischen Integrierbarkeit von u_x und v_x in Ω_T für $T > 0$. Mit ihrer Hilfe erhält man insbesondere:

$$|u_x| \leq \text{const.} \cdot \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\xi_k^2 t}}{\xi_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_k(\xi_k^2 - \beta)} \right\}.$$

Da es nach Satz 2 eine positive Konstante λ gibt, so daß $\xi_k > \lambda k$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt, reicht es zu zeigen, daß

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2 k^2 t}}{k} \right)^2$$

eine integrierbare Majorante besitzt, da $L^2(\Omega_T) \subset L^1(\Omega_T)$. Mit Hilfe des Cauchyproduktes für absolutkonvergente Reihen erhält man:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2 k^2 t}}{k} \right)^2 < \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda^2 k^2 t/2},$$

also mit Hilfe des Satzes von Beppo Levi:

$$\int_0^T \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2 k^2 t}}{k} \right)^2 dt < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1 - e^{-\lambda^2 k^2 T/2})}{\lambda^2 k^2} \leq \frac{2}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3\lambda^2}.$$

Der Beweis für die Integrierbarkeit der anderen Funktionen verläuft analog. ■

Bemerkungen: 1.) Erfüllt $q(t)$ die Voraussetzungen aus Satz 6, so erhält man durch gliedweises Einsetzen in (14) und (15):

$$W(u(\cdot, t)) = \int_0^t q(\tau) d\tau \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} W(v(\cdot, t)) = 0,$$

da $W(\alpha) = 1$ gilt. Für $u(x, t)$ kann man das obige Ergebnis auch mit Hilfe der Wärmeleitungsgleichung herleiten:

$$\frac{d}{dt} W(u(\cdot, t)) = \int_{-d_1}^0 K_1 u_{xx} dx + \int_0^{d_2} K_2 u_{xx} dx = [K_1 u_x]_{-d_1}^0 + [K_2 u_x]_0^{d_2} = q(t),$$

also $W(u(\cdot, t)) = \int_0^t q(\tau) d\tau$.

Physikalisch bedeutet diese Bedingung, daß sich zur Zeit t in der Platte genausoviel Wärme befindet, wie bis dahin durch die Vorderseite in sie eingeflossen ist.

2.) Die Funktion:

$$w(x, t) := u(x, t) - \alpha \int_0^t q(\tau) d\tau - \varphi(x)q(t)$$

erfüllt die inhomogene Wärmeleitungsgleichung:

$$w_t = \kappa(x)w_{xx} - \varphi(x)q'(t)$$

mit der inhomogenen Anfangsbedingung $w(x, 0+) = -\varphi(x)q(0+)$, den obigen Übergangsbedingungen sowie den homogenen Randbedingungen zweiter Art $w_x(-d_1+, t) = w_x(d_2-, t) = 0$. Für Probleme diesen Typs gibt es sehr allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitssätze für verallgemeinerte Lösungen. (Siehe [13], Kapitel 3.4.)

3.) Für $q(t) \equiv 1$ läßt sich das erste Anfangs-Randwertproblem auch durch einen Separationsansatz für die obige Funktion $w(x, t)$ lösen. Die Koeffizienten $a_k(x)$ sind dabei die Eigenfunktionen und die Zahlen ξ_k^2 die Eigenwerte des zugehörigen Sturm-Liouvilleschen Problems. (Siehe Lemma 3.) Die Lösung für „beliebige“ $q(t)$ folgt daraus mit Hilfe des Duhamelschen Prinzips, also einer Anwendung des Faltungssatzes für die Laplace-Transformation. (Siehe [5], 1.14.) Die Vorgehensweise für das zweite Anfangs-Randwertproblem verläuft analog.

4.) Sind die Voraussetzungen von Satz 6 erfüllt, so sind die Funktionen $u(x, t)$ und $v(x, t)$ (14,15) in der abgeschlossenen Menge $\overline{\Omega_T}$ stetig. Insbesondere gilt also $u(-d_1, 0) = v(-d_1, 0) = 0$. (Vergleiche [9], 5.3, Theorem 2 und Korollar 1, das singuläre Lösungen beinhaltet.)

6. Numerische Ergebnisse

Die finiten Lösungen (14) und (15) der im Abschnitt 1 eingeführten Wärmeleitungsprobleme für eine geschichtete Platte wurden programmiert und zum Testen von Programmen zur numerischen Behandlung von parabolischen Differentialgleichungen benutzt. Die beiden Lösungen haben folgende Form:

$$u(x,t) = \alpha \int_0^t q(\tau) d\tau + \varphi(x)q(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q(0) \exp(-\xi_k^2 t) + \int_0^t q'(t-\tau) \exp(-\xi_k^2 \tau) d\tau}{\xi_k^2} a_k(x)$$

$$v(x,t) = \psi(x)q(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q(0) \exp(-\eta_k^2 t) + \int_0^t q'(t-\tau) \exp(-\eta_k^2 \tau) d\tau}{\eta_k^2} b_k(x) .$$

Durch gliedweises Differenzieren nach x erhält man aus diesen Reihendarstellungen für die Temperatur die entsprechenden Darstellungen für den Wärmefluß.

Die positiven Zahlen ξ_k und η_k sind die Nullstellen der im Beweis von Satz 2 eingeführten transzendenten Funktionen $f(w)$ und $g(w)$. In den dort angegebenen Intervallen liegt jeweils genau eine Nullstelle, die beispielsweise mit quadratischer Interpolation berechnet werden kann. Die obigen Faltungsintegrale müssen im allgemeinen numerisch berechnet werden.

Aufgrund der Abschätzungen für die Nullstellen nach Satz 2 konvergieren die obigen Reihen gleichmäßig für $t \geq 0$, während die Reihen für die Flüsse für $t > 0$ konvergieren (nicht gleichmäßig), so daß für „kleine“ t die Zahl der Reihenglieder zunimmt, die bei gleicher Genauigkeitsforderung berücksichtigt werden muß. Alle Partialsummen der hier benutzten Reihen erfüllen für $t \geq 0$ die Rand- und Übergangsbedingungen. (Siehe Lemma 3).

In den folgenden Abbildungen 5 und 6 ist der vorgegebene Fluß auf der Vorderseite der Platte $q(t) = e^{-t}$, und als relative Temperatur auf der Rückseite der Platte wird

$$\bar{u}(t) := \frac{u(d_2, t)}{\alpha \int_0^{\infty} q(\tau) d\tau} \rightarrow 1 \text{ für } t \rightarrow \infty$$

bezeichnet.

Bemerkung: Bei der sogenannten Flashmethode (Siehe [14] und [2]), wird beispielsweise κ_1 mit Hilfe der gemessenen „Halbwertzeit“ $t_{1/2}$, für die die relative Temperatur $\bar{u}(t_{1/2}) = 1/2$ ist, aus der obigen Reihendarstellung berechnet.

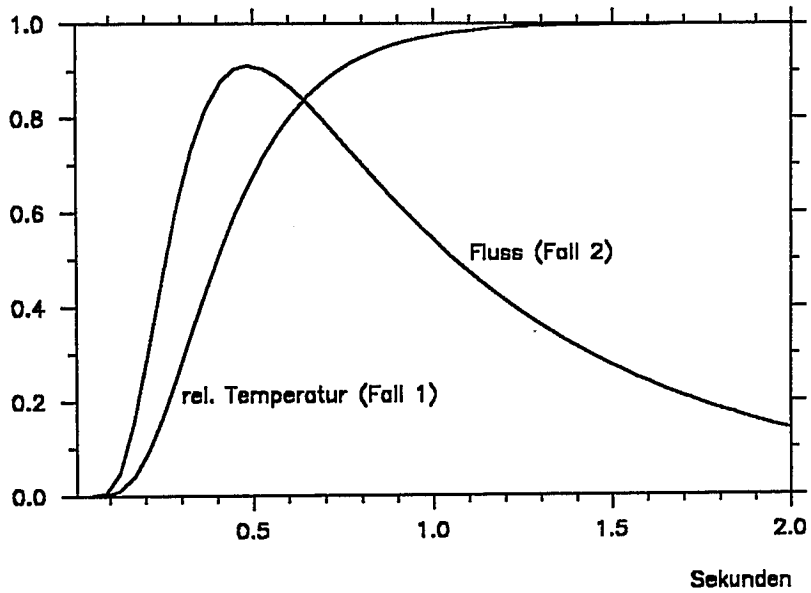


Abb. 5. Relative Temperatur und Wärmefluß auf der Rückseite der Platte: Partialsummen von $\bar{u}(t)$ und $-K_2 v_x(d_2, t)$ (15) mit 100 Gliedern.

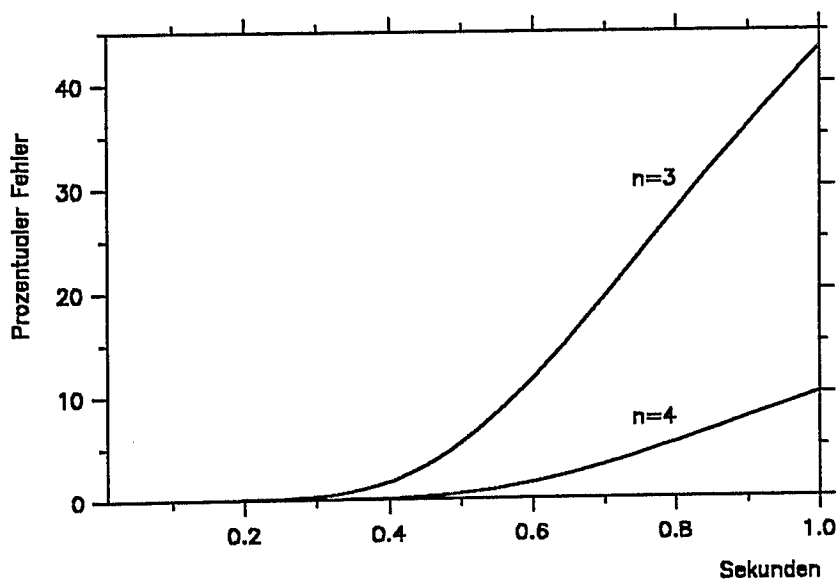


Abb. 6. Temperatur auf der Vorderseite der Platte: Partialsummen für $u(-d_1, t)$ (14) mit 100 Gliedern und für $w_q(-d_1, t)$ mit $n=3$ und $n=4$ Gliedern.

Im Anhang 2 wird die Temperatur $w_q(x,t)$ einer halbumendlichen Platte für die im Abschnitt 1 behandelten Rand- und Übergangsbedingungen angegeben. Im obigen Beispiel sieht man, daß $w_q(x,t)$ insbesondere auf der Vorderseite der Platte für „kleine“ t eine sehr gute Näherung darstellt. Eine genaue Analyse dieser Approximation wurde nicht durchgeführt.

Abschließend wurde der Einfluß der Unverträglichkeit der Randbedingung zweiter Art ($q(0) \neq 0$) auf den Fehler der numerischen Lösung von parabolischen Differentialgleichungen untersucht. Es stellte sich heraus, daß die Linienmethode ohne eine adaptive Ortsdiskretisierung in diesem Fall zur Berechnung der Lösung für „kleine“ Zeiten t sehr ineffektiv ist. (Siehe [17].) Beispielsweise erhält man mit dem Programm D03PBF aus der NAG im Fall 1 folgende Ergebnisse, wobei die Schichtgrenze $x = 0$ Stützpunkt ist. (Siehe [16].)

Zahl der Stützstellen	$t = 10^{-3}s$	$t = 10^{-2}s$	$t = 10^{-1}s$
k = 104	96,2%	7,6%	2,4%
k = 207	24,1%	1,6%	1,3%
k = 413	4,4%	0,4%	0,7%

Tab. 1. NAG-Programm D03PBF: Größter absoluter Fehler in Prozent für die Berechnung der Temperatur mit $q(t) = e^{-t}$. k ist die Zahl der äquidistanten Stützstellen für die Ortsdiskretisierung.

Bemerkung: Bei dem entsprechenden Programm MOLCH aus der IMSL werden unverträgliche Randbedingungen explizit ausgeschlossen. (Siehe [12], 5.2.1, Seite 683.)

Literatur

1. M. Abramowitz, I. A. Stegun: Pocketbook of Mathematical Functions.
Verlag Harri Deutsch - Thun - Frankfurt/Main, 1984
2. B. Brandt: Analytische Berechnung der transienten Proben­temperatur bei einem Xenon-Flash-Versuch unter Berücksichtigung der gemessenen Strahlungsintensität der Xenon-Gasentladungsröhre.
Spezielle Berichte der Kernforschungsanlage Jülich, Jül-Spez-504, 1989
3. M. Barner, F. Flohr: Analysis 2.
Walter de Gruyter, Berlin, 1989
4. J. R. Cannon: The One-Dimensional Heat Equation.
Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Volume 23
Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, California, 1984
5. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger: Conduction of Heat in Solids.
Clarendon Press, Oxford, Second Edition, 1984
- 6., 7., 8. G. Doetsch: Handbuch der Laplace-Transformation.
Band 1, Band 2 und Band 3
Verlag Birkhäuser Basel und Stuttgart, 1950, 1955 und 1956
9. A. Friedman: Partial Differential Equations of Parabolic Type.
Prentice-Hall, London, 1964
10. A. Friedman: Partial Differential Equations.
Holt, Rinehart and Winston, N.Y., 1969
11. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik: Table of Integrals, Series, and Products.
Academic Press, N.Y., 1980
12. IMSL, User's Manual, MATH/LIBRARY
Version 1.0, April 1987, MALB-USM-PERFECT-1.0
13. O. A. Ladyzhenskaya: The Boundary Value Problems of Mathematical Physics.
Applied Mathematical Sciences Vol. 49, Springer Verlag, 1985

14. W. J. Parker, R. J. Jenkins, C. P. Butler, and G. L. Abbot: Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity, and Thermal Conductivity.
J. of Appl. Phys., Vol. 32, Nr. 9, 1961, Seite 1679-1684
15. M. Matricon: Étude de la répartition de la chaleur dans l'anticathode d'un tube a rayons X.
Le Journal de Physique et le Radium, Tome 12, Janvier 1951, Page 15
16. The NAG Fortran Library - Mark 13
1st Edition, Oxford, July 1988
17. M. Profant, R. von Seggern: Die numerische Behandlung Volterrascher Integralgleichungen zur Lösung der Diffusionsgleichung.
Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Band 65, 1985, T 279-280
18. A. N. Tychonoff, A. A. Samarski: Differentialgleichungen der mathematischen Physik.
Hochschulbücher für Mathematik, Band 39
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959
19. D. V. Widder: The Heat Equation.
Academic Press, N.Y., 1975

Anhang 1: Die Einfachschicht

Sind Temperaturleitzahl und Wärmeleitfähigkeit in beiden Schichten gleich ($\kappa_1 = \kappa_2 = : \kappa$; $K_1 = K_2 = : K$; $\alpha = \frac{\kappa}{dK}$; $d = d_1 + d_2$), so erhält man folgende Lösungen des transformierten Systems (1):

$$(5') \quad U(x,s) = Q(s) \frac{\cosh \sqrt{s/\kappa} (d_2 - x)}{K\sqrt{s/\kappa} \sinh d\sqrt{s/\kappa}}$$

$$(6') \quad V(x,s) = Q(s) \frac{\sinh \sqrt{s/\kappa} (d_2 - x)}{K\sqrt{s/\kappa} \cosh d\sqrt{s/\kappa}} .$$

Die Rücktransformation dieser Laplace-Transformierten für $Q(s) = 1$ mit Hilfe der komplexen Umkehrformel und Residuenrechnung ist für (5') in [6], Kapitel 7.3 im einzelnen durchgeführt worden. Eine zweite Möglichkeit der Rücktransformation erhält man durch Reihenentwicklung und gliedweises Rückübersetzen. Für (5') ist diese Methode in [6], Kapitel 8.3 beschrieben. Die singuläre Lösung $\vartheta_1(x,t)$ ist durch die Jacobische Thetafunktion $\vartheta_3(v,t)$ gegeben und hat folgende Gestalt:

$$\vartheta_1(x,t) = \frac{\kappa}{dK} \vartheta_3\left(\frac{d + d_2 - x}{2d}, \frac{\kappa t}{d^2}\right) .$$

Mit Hilfe dieser beiden Möglichkeiten der Rücktransformation erhält man die sogenannte lineare Transformationsformel der Jacobischen Thetafunktion, die hier folgende Form hat:

$$(10') \quad \vartheta_1(x,t) = \left[\begin{array}{l} \frac{\kappa}{dK} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \frac{k\pi(d_2 - x)}{d} e^{-\frac{k^2\pi^2\kappa t}{d^2}} \right) \\ \frac{\sqrt{\kappa}}{K\sqrt{\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(2kd - (x + d_1))^2}{4\kappa t}} . \end{array} \right]$$

Für (6') erhält man durch eine analoge Vorgehensweise folgende zwei Darstellungen der singulären Lösung:

$$(11') \quad \vartheta_2(x,t) = \left[\begin{array}{l} \frac{2\kappa}{dK} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sin \frac{(2k+1)\pi(d_2 - x)}{2d} e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2\kappa t}{4d^2}} \\ \frac{\sqrt{\kappa}}{K\sqrt{\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-\frac{(2kd - (x + d_1))^2}{4\kappa t}} . \end{array} \right]$$

Die zweite Darstellung ist jeweils für „kleine“ Werte von t schnell konvergent. Außerdem kann man an ihr die Unbeschränktheit der singulären Lösungen im Punkt $(-d_1, 0)$ unmittelbar ablesen, da die Reihe in (10') nur positive Glieder hat und sie sich in (11') zu einer alternierenden Reihe zusammenfassen läßt.

(Für $k=0$ sind die entsprechenden Reihenglieder auf der Parabel $t = (x + d_1)^2$ für $x \rightarrow d_1+$ und $t \rightarrow 0+$ nicht beschränkt, während $\exp(-a/t)/\sqrt{t}$ für $a > 0$ durch \sqrt{t}/a beschränkt ist.)

Erfüllt $q(t)$ die Voraussetzungen aus Satz 6, so erhält man folgende finite Lösungen der beiden Wärmeleitungsprobleme $u_t = \kappa u_{xx}$ in Ω , die die Anfangsbedingung (16) und die Randbedingung (17) beziehungsweise (18) erfüllen. (Vergleiche [5], 3.8, Formel (3) und (4) beziehungsweise (5) und (6).):

$$(14') \quad u(x,t) = \frac{\kappa}{dK} \int_0^t q(\tau) d\tau + \varphi(x)q(t) - \frac{2d}{K\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p\left(\frac{k^2\pi^2\kappa}{d^2}, t\right)}{k^2} (-1)^k \cos \frac{k\pi(d_2-x)}{d}$$

$$(15') \quad v(x,t) = \psi(x)q(t) - \frac{8d}{K\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p\left(\frac{(2k+1)^2\pi^2\kappa}{4d^2}, t\right)}{(2k+1)^2} (-1)^k \sin \frac{(2k+1)\pi(d_2-x)}{2d}$$

wobei $p(a,t)$ wie im Lemma 6 definiert ist:

$$p(a,t) = q(0)e^{-at} + \int_0^t q'(t-\tau)e^{-a\tau} d\tau.$$

Aufgrund der Anfangsbedingungen sind die beiden Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ durch die folgenden Fourierreihen gegeben:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{2d}{K\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos \frac{k\pi(d_2-x)}{d}}{k^2} = \frac{2d}{K\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi(x+d_1)}{d}}{k^2} \\ &= \frac{2d}{K} \left(\frac{(x+d_1)^2}{4d^2} - \frac{x+d_1}{2d} + \frac{1}{6} \right) \end{aligned}$$

und

$$\psi(x) = \frac{8d}{K\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi(d_2-x)}{2d}}{(2k+1)^2} = \frac{d_2-x}{K} ,$$

die mit den beiden Darstellungen aus Lemma 4 übereinstimmen. (Siehe [11], 1.44)

Anhang 2: Die halbumendliche geschichtete Platte

Betrachtet man eine halbumendliche Platte ($-d_1 \leq x < d_2 = \infty$; $m = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$), so erhält man folgende Lösung des transformierten Systems (1):

$$U(x,s) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\kappa_1}}{K_1\sqrt{s}} \frac{e^{-(x+d_1)\sqrt{s/\kappa_1}} - me^{(x-d_1)\sqrt{s/\kappa_1}}}{1 + me^{-2d_1\sqrt{s/\kappa_1}}} & \text{für } -d_1 \leq x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{\kappa_1}}{K_1\sqrt{s}} (1-m) \frac{e^{-(d_1/\sqrt{\kappa_1} + x/\sqrt{\kappa_2})\sqrt{s}}}{1 + me^{-2d_1\sqrt{s/\kappa_1}}} & \text{für } 0 \leq x < \infty . \end{cases}$$

($U(x,s)$ erfüllt sowohl die Randbedingung (17) als auch (18).) Auf diese Funktionen läßt sich die im Anhang 1 erwähnte Methode der Reihenentwicklung zur Rücktransformation anwenden, und man erhält mit Hilfe einer geometrischen Reihe folgende Darstellung, die eine gliedweise Rücktransformation möglich macht:

$$U(x,s) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\kappa_1}}{K_1\sqrt{s}} \sum_{k=0}^{\infty} (-m)^k \left(e^{-(2kd_1 + (x+d_1))\sqrt{s/\kappa_1}} - me^{-(2kd_1 - (x-d_1))\sqrt{s/\kappa_1}} \right) & \text{für } -d_1 \leq x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{\kappa_1}}{K_1\sqrt{s}} (1-m) \sum_{k=0}^{\infty} (-m)^k e^{-((2k+1)d_1/\sqrt{\kappa_1} + x/\sqrt{\kappa_2})\sqrt{s}} & \text{für } 0 \leq x < \infty . \end{cases}$$

Durch gliedweise Rücktransformation erhält man daraus folgende formale singuläre Lösung, wobei benutzt wird, daß

$$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \text{ die Laplace-Transformierte von } \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} \text{ ist .}$$

$$\mathfrak{g}(x,t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\kappa_1}}{K_1\sqrt{\pi t}} \sum_{k=0}^{\infty} (-m)^k \left(e^{-\frac{(2kd_1 + (x+d_1))^2}{4\kappa_1 t}} - me^{-\frac{(2kd_1 - (x-d_1))^2}{4\kappa_1 t}} \right) & \text{für } -d_1 \leq x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{\kappa_1}}{K_1\sqrt{\pi t}} (1-m) \sum_{k=0}^{\infty} (-m)^k e^{-\frac{\left((2k+1)d_1 + x\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \right)^2}{4\kappa_1 t}} & \text{für } 0 \leq x < \infty . \end{cases}$$

Durch Umformen der ersten Reihe erhält man daraus die folgende Darstellung:

$$\vartheta(x,t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\kappa_1}}{K_1\sqrt{\pi t}} \left\{ e^{-\frac{(x+d_1)^2}{4\kappa_1 t}} + \sum_{k=1}^{\infty} (-m)^k \left(e^{-\frac{(2kd_1+(x+d_1))^2}{4\kappa_1 t}} + e^{-\frac{(2kd_1-(x+d_1))^2}{4\kappa_1 t}} \right) \right\} & \text{für } -d_1 \leq x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{\kappa_1}}{K_1\sqrt{\pi t}} (1-m) \sum_{k=0}^{\infty} (-m)^k e^{-\frac{\left((2k+1)d_1+x\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right)^2}{4\kappa_1 t}} & \text{für } 0 \leq x < \infty . \end{cases}$$

Ist $q(t) \in L^1(0, \infty)$ und für $t \geq t_0 > 0$ beschränkt, so erhält man daraus folgende formale Lösung des Wärmeleitungsproblems $u_t = \kappa(x)u_{xx}$ in Ω , die die Anfangsbedingung (16) und die Randbedingungen (17) und (18) erfüllt. ([6], Kapitel 2.15, Satz 4):

$$w_q(x,t) = \int_0^t q(t-\tau)\vartheta(x,\tau)d\tau.$$

$$\text{Wegen } \int_0^t \frac{e^{-\frac{a^2}{4\tau}}}{\sqrt{\pi\tau}} d\tau = 2\sqrt{t} \operatorname{ierfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) \quad ([1], 7.2)$$

folgt daraus die in [15], Formel (2) und (3) angegebene „Lösung“ für $q(t) \equiv 1$:

$$w_1(x,t) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{\kappa_1 t}}{K_1} \left\{ \operatorname{ierfc} \frac{x+d_1}{2\sqrt{\kappa_1 t}} + \sum_{k=1}^{\infty} (-m)^k \left(\operatorname{ierfc} \frac{2kd_1+(x+d_1)}{2\sqrt{\kappa_1 t}} + \operatorname{ierfc} \frac{2kd_1-(x+d_1)}{2\sqrt{\kappa_1 t}} \right) \right\} \\ \frac{2\sqrt{\kappa_1 t}}{K_1} (1-m) \sum_{k=0}^{\infty} (-m)^k \operatorname{ierfc} \frac{(2k+1)d_1+x\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}}{2\sqrt{\kappa_1 t}} . \end{cases}$$

Es wurde nicht untersucht, unter welchen Bedingungen das hier betrachtete Wärmeleitungsproblem eine eindeutige Lösung hat. Die obige Funktion $w_q(x,t)$ erscheint besonders geeignet - auch für beliebige $d_2 < \infty$ - das Verhalten der Temperatur insbesondere auf der Vorderseite der Platte für „kleine“ t zu bestimmen:

$$\begin{aligned} w_q(-d_1,t) &= \frac{\sqrt{\kappa_1}}{K_1\sqrt{\pi}} \int_0^t q(t-\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} + \frac{2\sqrt{\kappa_1}}{K_1\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-m)^k \int_0^t q(t-\tau) e^{-\frac{k^2 d_1^2}{\kappa_1 \tau}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \\ &= \frac{2\sqrt{\kappa_1}}{K_1\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} q(t-\tau^2) d\tau + \frac{4\sqrt{\kappa_1}}{K_1\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-m)^k \int_0^{\sqrt{t}} q(t-\tau^2) e^{-\left(\frac{kd_1}{\sqrt{\kappa_1 \tau}}\right)^2} d\tau . \end{aligned}$$

Bemerkung: Für den im Anhang 1 behandelten Fall gilt $m=0$, und man erhält die bekannte Lösung für die halbbeschränkte Platte. (Siehe [5], Kapitel 2.9, (6) und (9)).