

Fachhochschule Aachen
Abteilung Jülich

Fachbereich: Physikalische Technik
Studienrichtung: Technomathematik

**Stochastische Theorie zum Transport gelöster
Stoffe in porösen Medien**

Diplomarbeit

von

Jens Heidbüchel

Jülich im Juni 2002

Die vorliegende Diplomarbeit wurde in Zusammenarbeit mit der Forschungszentrum Jülich GmbH im Institut für Chemie und Dynamik der Geosphäre (ICG) IV: Agrosphäre angefertigt.

Diese Diplomarbeit wurde betreut von:

Referent: Prof. Dr. Gerhard Dikta

Korreferent: Prof. Dr. Harry Vereecken

Diese Arbeit ist selbstständig angefertigt und verfasst. Es sind keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt worden.

Jülich, Juni 2002

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Stochastische Differentialgleichungen	2
2.1	Einleitung	2
2.2	Stochastische Differentialgleichungen erster Ordnung	3
2.3	Stochastische Differentialgleichungen n -ter Ordnung	6
3	Schätztheorie	12
3.1	Einleitung	12
3.2	Allgemeine Prinzipien der Schätzung	12
3.3	Einige Beispiele optimaler Prognosen	15
4	Transport eines gelösten Teilchens in porösen Medien	17
4.1	Voraussetzungen	17
4.2	Der Positionsprozess	18
5	Zusammenfassung und Ausblick	36
A	Haarmaß	37
	Literaturverzeichnis	39

Kapitel 1

Einleitung

Die Qualität des Grundwassers ist besonders für unsere Trinkwasserversorgung bedeutsam. Daher ist an erster Stelle jeglicher Eintrag von Schadstoffen in das Grundwasser zu vermeiden. Findet dennoch eine Verunreinigung des Grundwassers, sei es durch flächenhaften Eintrag, wie zum Beispiel beim Einsatz von Düngemitteln und Pestiziden, oder punktuellen Eintrag, wie zum Beispiel bei Industrieunfällen, statt, ist die Vorhersage des Verhaltens dieser Schadstoffe im Grundwasser von großer Bedeutung, um Sanierungsmaßnahmen zu dimensionieren. Das Institut Agrosphäre (ICG IV) im Forschungszentrum in Jülich beschäftigt sich unter anderem mit der Schadstoffausbreitung im Grundwasser. Die Vorhersage des Weges der Teilchen des Schadstoffs erfolgt hier durch Simulation, wobei mathematische Modelle die Geschehnisse im Boden und im Grundwasser beschreiben. Die Simulation erfolgt häufig numerisch unter Nutzung der finite Elemente Methode.

Die vorliegende Arbeit orientiert sich an der Arbeit von (Bhattacharya und Gupta 1979). Hierbei ist das mathematische Modell stochastischer Natur und die Ausbreitung wird durch die Lösung einer stochastischen Differentialgleichung beschrieben. In diesem Fall liegt die Langevinsche Gleichung zugrunde. Das Ergebnis dieser stochastischen Differentialgleichung ist ein stochastischer Prozess, der die Geschwindigkeit des Teilchens zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten, bei denen das Teilchen mit fester Masse im Boden kollidiert, beschreibt. Durch Integration dieses Geschwindigkeitsprozesses erhält man den Positionsprozess. Die Form des Positionsprozesses ist jedoch ungeeignet für Simulationszwecke. Aus diesem Grund ist der Grenzprozess von Interesse. Zur Berechnung dieses Prozesses müssen weitere, physikalisch sinnvolle, Forderungen gestellt werden, um das Ergebnis zu erhalten. Hierfür wird ein Dichterwerden des Bodens, durch den sich die Teilchen bewegen, angenommen. Dies hat zur Folge dass sich ebenfalls die Reibungskraft und die externe Kraft erhöhen müssen. Unter diesen Annahmen ist der Grenzprozess ein zentrierter Wiener Prozess. Diese Prozesse sind gut dokumentiert und man kann viele Aussagen stochastischer Art über den Weg der Teilchen machen, der durch ihn beschrieben wird.

Einführend gibt es in dieser Arbeit einen allgemeinen Teil über stochastische Differentialgleichungen, der Methoden zu deren Lösungsfindung bereitstellt. Im darauf folgenden Kapitel geht es um die Grundlagen der Schätztheorie, die eine Basis für Schätzer in Prognoseproblemen geben. Das nächste Kapitel beschäftigt sich dann mit dem eigentlichen Problem. Zu dessen Lösung wird zunächst die Mittelwerts- und Kovarianzstruktur des Geschwindigkeitsprozesses berechnet. Mit diesen Strukturen kann man Aussagen über den Positionsprozess machen, den man durch Integration des Geschwindigkeitsprozesses erhält. Da der Geschwindigkeitsprozess zwischen zwei Kollisionszeitpunkten definiert ist, kann man im Positionsprozess eine Aufspaltung des Integrals vornehmen, dessen Einzelteile man als neue Zufallsgröße definiert. Auf diese kann dann unter obigen Annahmen Drogins Satz angewendet werden, der besagt, dass sich der Partialsummenprozess dieser Einzelteile wie ein Wiener Prozess verhält. Es stellt sich heraus, dass der Rest, der noch in die Darstellung des Positionsprozesses hineinspielt, zu vernachlässigen ist. Somit verhält sich der Grenzprozess im Ganzen wie ein Wiener Prozess.

Kapitel 2

Stochastische Differentialgleichungen

2.1 Einleitung

Es ist bekannt, dass sich mikroskopisch kleine Teilchen in einer Flüssigkeit sehr unregelmäßig und stark bewegen. Diese zufällige Bewegung als Funktion der Zeit $B \equiv B(t), t \in T$, nennt man Brownsche Bewegung. Hierbei handelt es sich um einen stochastischen Prozess zweiter Ordnung. Es ist nachweisbar, dass die Pfade einer Brownschen Bewegung als stetig angenommen werden können. In diesem Fall nennt man B einen Wiener Prozess (Def. 8.3.1 in (Dikta 2000)).

Einen Wiener Prozess kann man auch mit stochastischen Differentialgleichungen beschreiben, denen physikalische Vorgänge zugrunde liegen. Das soll hier anhand von zwei Beispielen erläutert werden.

Beispiel 2.1.1. $X(t)$ sei die eindimensionale Position eines Partikels zum Zeitpunkt t . $X'(t)$ und $X''(t)$ beschreiben die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Teilchens zur Zeit t . Es gibt nun verschiedene Kräfte, die auf das Teilchen einwirken. Da wäre zum einen die Kraft $F(t)$, die an der Masse m des Partikels angreift. Diese ist nach dem Gesetz von Newton gegeben durch:

$$F(t) = mX''(t). \quad (2.1)$$

Desweiteren wirken noch drei andere Kräfte auf das Teilchen:

- (i) Die Reibungskraft $-fX'(t)$, aufgrund der Viskosität des Mediums, proportional zur Geschwindigkeit, aber in die entgegengesetzte Richtung.
- (ii) Die Rückstellkraft $-kX(t)$, wie beim Pendel oder bei der Feder, proportional zur Distanz vom Ursprung aus, aber in die andere Richtung wirkend.
- (iii) Die externe Kraft $\xi(t)$, unabhängig von der Bewegung des Teilchens.

Zusammengefasst erhält man

$$F(t) = -fX'(t) - kX(t) + \xi(t), \quad (2.2)$$

in der f und k nicht-negative Konstanten sind. Durch Gleichsetzen von (2.1) und (2.2) erhält man die Differentialgleichung (DGL)

$$mX''(t) + fX'(t) + kX(t) = \xi(t). \quad (2.3)$$

Unterliegt nun die externe Kraft einigen zufälligen Schwankungen, dann ist $\xi(t)$ ein stochastischer Prozess. Durch die Anforderung von (2.3) muss somit auch $X(t)$ ein stochastischer Prozess sein. (2.3) stellt somit eine stochastische Differentialgleichung (DGL) bezüglich der beiden Prozesse dar.

Werden die Schwankungen der externen Kraft durch molekularen Beschuss verursacht, dann kann ξ als weißes Rauschen zum Parameter σ^2 angenommen werden.

Das weiße Rauschen symbolisiert die Ableitung des Wiener Prozesses. Da dieser aber an keiner Stelle differenzierbar ist, stellt man das weiße Rauschen mit Hilfe der partiellen Integration dar (Def. 9.4.1 auf Seite 149 in (Dikta 2000)).

Unter diesen Annahmen ist $X(t)$ ebenfalls ein stochastischer Prozess, der der Gleichung

$$mX''(t) + fX'(t) + kX(t) = W(t)$$

genügt, in der $W(t)$ das weiße Rauschen mit Parameter σ^2 repräsentiert.

Es gibt aber andere Gebiete in der Physik, in denen die Verbindung zu stochastischen DGLs mit weißem Rauschen direkt hergestellt werden kann.

Beispiel 2.1.2. Gegeben sei eine einfache Reihenschaltung mit Widerstand R , Induktivität L , Kapazität C und einer elektromotorischen Kraft ξ . Ferner bezeichne $X(t)$ den Spannungsabfall am Kondensator zur Zeit t . Mit Kirchhoffs zweitem Gesetz erfüllt $X(t)$ die folgende DGL:

$$LCX''(t) + RCX'(t) + X(t) = \xi(t).$$

Entfernt man die antreibende elektromotorische Kraft bleibt trotzdem eine kleine Spannungsquelle erhalten. Diese nennt man thermisches Rauschen. Sie entsteht durch thermische Bewegung der Elektronen im Widerstand. Durch physikalische Argumentation gelangt man zu dem Schluss, dass es sich beim thermischen Rauschen um ein weißes Rauschen handelt. In diesem Fall genügt der Spannungsabfall der stochastischen Differentialgleichung

$$LCX''(t) + RCX'(t) + X(t) = W(t).$$

Man kann höherrangige Differentialgleichungen erhalten, indem man sich größere und kompliziertere elektrische oder mechanische Systeme vorstellt. So erhält man stochastische Differentialgleichungen n -ter Ordnung der Form

$$a_0X^{(n)}(t) + a_1X^{(n-1)}(t) + \dots + a_nX(t) = W(t),$$

wobei $a_0, \dots, a_n$ reelle Konstanten mit $a_0 \neq 0$ und $W(t)$ das weiße Rauschen zum Parameter σ^2 sind.

2.2 Stochastische Differentialgleichungen erster Ordnung

Definition 2.2.1. Sei W das weiße Rauschen zum Parameter σ^2 und $X(t), t \in T \subset \mathbb{R}$, ein Prozess zweiter Ordnung. Dann nennt man

$$a_0X'(t) + a_1X(t) = W(t) \tag{2.4}$$

eine stochastische DGL erster Ordnung.

Bei der Lösungssuche zu dieser DGI stößt man auf das Problem, dass das weiße Rauschen kein stochastischer Prozess im herkömmlichen Sinne, sondern ein Funktional, ist. Ohne Berücksichtigung dessen, erhält man durch formales Integrieren beider Seiten in den Grenzen t_0 und t

$$a_0(X(t) - X(t_0)) + a_1 \int_{t_0}^t X(s) ds = B(t) - B(t_0).$$

Diese Gleichung ist nun definiert, da es sich bei X und B um stochastische Prozesse handelt. Die einzelnen Pfade des Wiener Prozesses B auf der rechten Seite sind wohldefinierte, stetige Funktionen.

Durch Auflösen (Seite 155 in (Hoel u. a. 1972)) dieser Gleichung mit $\alpha = -a_1/a_0$ nach $X(t)$ kommt man zu folgendem Ergebnis:

$$\begin{aligned} X(t) &= \left(X(t_0) - \frac{B(t_0)}{a_0} \right) e^{\alpha(t-t_0)} + \frac{B(t)}{a_0} + \frac{\alpha}{a_0} \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-s)} B(s) ds \\ &= X(t_0) e^{\alpha(t-t_0)} + \frac{1}{a_0} \left(B(t) e^{\alpha(t-t)} - B(t_0) e^{\alpha(t-t_0)} - \int_{t_0}^t \left(-\alpha e^{\alpha(t-s)} \right) B(s) ds \right). \end{aligned}$$

Nach Def. 9.4.1 in (Dikta 2000) kann man dieses Ergebnis umschreiben zu

$$X(t) = X(t_0) e^{\alpha(t-t_0)} + \frac{1}{a_0} \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-s)} B(ds). \quad (2.5)$$

Es kann nun gezeigt werden, dass jede Lösung zu (2.4) asymptotisch gleich dem Prozess im folgenden Satz ist (Hoel u. a. 1972).

Satz 2.2.2. Der Prozess $X(t), t \in \mathbb{R}$, mit

$$X(t) = \frac{1}{a_0} \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)} B(ds). \quad (2.6)$$

ist ein stationärer Gaußprozess und Lösung von (2.4). Darüber hinaus ist X der einzige stationäre Prozess zweiter Ordnung, der (2.4) erfüllt.

Korollar 2.2.3. $X(t), t \in \mathbb{R}$, definiert durch (2.5), hat die Mittelwertfunktion

$$\mu_X(t) = 0 \quad (2.7)$$

und die Kovarianzfunktion

$$r_X(s, t) = \frac{\sigma^2}{2a_0a_1} e^{\alpha|t-s|}. \quad (2.8)$$

Beweis. Seite 157 in (Hoel u. a. 1972). □

Beweis. Seite 154 ff. in (Hoel u. a. 1972). □

Zur Berechnung der Kovarianzfunktionen dieser Prozesse benötigt man folgenden

Hilfssatz 2.2.4. Für alle $f, g \in \mathcal{C}^2([a, d])$ mit $0 \leq a \leq b \leq c \leq d$ gilt:

$$\mathbb{E} \left(\int_a^b f(s) B(ds) \int_c^d g(t) B(dt) \right) = 0.$$

Beweis. Lemma 9.4.3(Dikta 2000) liefert

$$\int_a^b f(s)B(ds) = f(b)(B(b) - B(a)) - \int_a^b f'(s)(B(s) - B(a))ds$$

und

$$\int_c^d g(s)B(ds) = g(d)(B(d) - B(c)) - \int_c^d g'(t)(B(t) - B(c))dt.$$

Damit erhält man für

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_a^b f(s)B(ds) \int_c^d g(t)B(dt) \right) &= \mathbb{E} \left(\left(f(b)(B(b) - B(a)) - \int_a^b f'(s)(B(s) - B(a))ds \right) \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(g(d)(B(d) - B(c)) - \int_c^d g'(t)(B(t) - B(c))dt \right) \right) \\ &= f(b)g(d)\mathbb{E}((B(b) - B(a))(B(d) - B(c))) \\ &\quad - f(b) \int_c^d g'(t)\mathbb{E}((B(b) - B(a))(B(t) - B(c)))dt \\ &\quad - g(d) \int_a^b f'(s)\mathbb{E}((B(s) - B(a))(B(d) - B(c)))ds \\ &\quad + \int_a^b \int_c^d f'(s)g'(t)\mathbb{E}((B(s) - B(a))(B(t) - B(c)))dtds. \end{aligned}$$

Nach Definition 8.3.1(Dikta 2000) sind die Zuwächse $(B(s) - B(a))$ und $(B(t) - B(c))$ unabhängig für alle $a \leq s \leq b$ und $c \leq t \leq d$. Der Erwartungswert eines solchen Zuwachses ist 0. Damit ergibt sich für

$$\mathbb{E}((B(s) - B(a))(B(t) - B(c))) = \mathbb{E}(B(s) - B(a))\mathbb{E}(B(t) - B(c)) = 0.$$

Daraus folgt die Aussage des Satzes. □

Beispiel 2.2.5. Der Prozess $V(t), t \geq 0$, der als Lösung der stochastischen DGL

$$mV'(t) + fV(t) = W(t), \quad V(0) = v_0,$$

definiert ist, heißt Langevinscher Geschwindigkeitsprozess. Durch Umformung der DGL nach (2.5) erhält man

$$V(t) = V(t_0)e^{\alpha(t-t_0)} + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-s)} B(ds), \quad \alpha = -\frac{f}{m}.$$

Mit dem Einsetzen der Anfangswertbedingung $V(0) = v_0$ ergibt sich daraus der Langevinsche Geschwindigkeitsprozess

$$V(t) = v_0 e^{\alpha t} + \frac{1}{m} \int_0^t e^{\alpha(t-s)} B(ds), \quad \alpha = -\frac{f}{m}. \quad (2.9)$$

Dieser Prozess hat für $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Mittelwertsfunktion

$$\mu_V(t) = \mathbb{E}(V(t)) = v_0 e^{\alpha t} \quad (2.10)$$

und mit Hilfe von Lemma 9.4.3(Dikta 2000) erhält man für die Kovarianzfunktion mit $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned}
r_V(s, t) &= \mathbb{E}((V(s) - \mu_V(s))(V(t) - \mu_V(t))) \\
&= \frac{1}{m^2} \mathbb{E} \left(\int_0^s e^{\alpha(s-u)} B(du) \int_0^t \exp(\alpha(t-v)) B(dv) \right) \\
&= \frac{1}{m^2} \mathbb{E} \left(\int_0^{\min(s,t)} e^{\alpha(\min(s,t)-u)} B(du) \int_0^{\min(s,t)} e^{\alpha(\max(s,t)-v)} B(dv) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\min(s,t)} e^{\alpha(\min(s,t)-u)} B(du) \int_{\min(s,t)}^{\max(s,t)} e^{\alpha(\max(s,t)-v)} B(dv) \right) \\
&\stackrel{\text{HS 2.2.4}}{=} \frac{1}{m^2} \mathbb{E} \left(\int_0^{\min(s,t)} e^{\alpha(\min(s,t)-u)} B(du) \int_0^{\min(s,t)} e^{\alpha(\max(s,t)-v)} B(dv) \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{m^2} \int_0^{\min(s,t)} e^{\alpha(\min(s,t)-u)} e^{\alpha(\max(s,t)-u)} du \\
&= \frac{\sigma^2}{2mf} e^{\alpha(\min(s,t)+\max(s,t)-2u)} \Big|_0^{\min(s,t)} \\
&= \frac{\sigma^2}{2mf} \left(e^{\alpha|t-s|} - e^{\alpha(s+t)} \right). \tag{2.11}
\end{aligned}$$

2.3 Stochastische Differentialgleichungen n -ter Ordnung

Gegeben sei eine homogene DGI der Form

$$a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n x(t) = 0, \quad t \in T \subset \mathbb{R} \tag{2.12}$$

mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ und $x : \mathbb{R} \ni t \rightarrow W \subset \mathbb{R}$. Durch Gleichsetzen des charakteristischen Polynoms

$$p(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n$$

der DGI (2.12) mit 0 erhält man $j, 1 \leq j \leq n$, verschiedene Lösungen für r mit den Vielfachheiten $n_j \geq 1$. Zu jeder dieser j Nullstellen des charakteristischen Polynoms bilden

$$t^{k-1} e^{r_j t}, 1 \leq k \leq n_j$$

Lösungen zu (2.12). Linearkombinationen vom Typ

$$\Phi(t) = \sum_{l=1}^j \sum_{k=1}^{n_l} c_{l,k} t^{k-1} e^{r_j t}$$

bilden die Gesamtheit der Lösungen der homogenen DGI (2.12). Durch Lösen einer entsprechenden Anfangswertaufgabe lassen sich spezielle Lösungen $\Phi_i, 1 \leq i \leq n$, von (2.12) finden, die die Eigenschaft

$$\Phi_i^{(j)}(0) = \begin{cases} 1, & j = i - 1 \\ 0, & 1 \leq j \leq n - 1 \wedge j \neq i - 1. \end{cases}$$

besitzen, d.h. dass sie linear unabhängig sind und somit eine Basis für den Lösungsraum der homogenen DGI bilden. Diese Eigenschaft bewirkt, dass die Funktion

$$\Phi(t) := \sum_{i=1}^n c_i \Phi_i(t - t_0)$$

die eindeutige Lösung von (2.12) darstellt, die die Anfangswertbedingungen

$$\Phi^{(i-1)}(t_0) = c_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

erfüllt. Formal kann damit die Lösung auch durch

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^n \Phi^{(i-1)}(t_0) \Phi_i(t - t_0) \quad (2.13)$$

ausgedrückt werden.

Um die allgemeine Lösung einer inhomogenen DGI

$$a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n = y(t) \quad (2.14)$$

zu finden, braucht man zu der allgemeinen Lösung der homogenen DGI (2.12) nur eine spezielle inhomogene Lösung zu addieren. Eine solche spezielle Lösung auf $[t_0, \infty[$ ist

$$x(t) = \int_{t_0}^t h(t-s)y(s)ds,$$

mit den Anfangswertbedingungen

$$x(t_0) = \dots = x^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

Die Funktion $h(t), t \in \mathbb{R}$ in dieser Lösung nennt man Impulsantwortfunktion. Sie ist eine Lösung der homogenen DGI (2.12) und hat die Anfangswertbedingungen

$$h(0) = \dots = h^{(n-2)}(0) = 0 \quad \text{und} \quad h^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_0}.$$

Durch Einsetzen von h an der Stelle $t_0 = 0$ in (2.13) ergibt sich dann

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\Phi_n(t)}{a_0}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Nun bleibt zu überprüfen, ob das so konstruierte x auch wirklich eine Lösung der inhomogenen DGI (2.14) ist. Dazu bildet man zunächst die Ableitungen:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x(t+\epsilon) - x(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{t_0}^{t+\epsilon} \frac{h(t+\epsilon-s)y(s)}{\epsilon} ds - \int_{t_0}^t \frac{h(t-s)y(s)}{\epsilon} ds \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{t_0}^t \frac{h(t+\epsilon-s) - h(t-s)}{\epsilon} y(s) ds + \int_t^{t+\epsilon} \frac{h(t+\epsilon-s)}{\epsilon} y(s) ds \right) \\ &= \int_{t_0}^t h'(t-s)y(s) ds + h(0)y(t) \stackrel{h(0)=0}{=} \int_{t_0}^t h'(t-s)y(s) ds. \end{aligned}$$

Analog erfolgt die Bestimmung der höheren Ableitungen:

$$x^{(k)}(t) = \int_{t_0}^t h^{(k)}(t-s)y(s)ds + h^{(k-1)}(0)y(t), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Mit den Anfangswertbedingungen für h fällt für $1 \leq k \leq n-1$ der Restterm weg. Für $k = n$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x^{(n)}(t) &= \int_{t_0}^t h^{(n)}(t-s)y(s)ds + h^{(n-1)}(0)y(t) \\ &= \int_{t_0}^t h^{(n)}(t-s)y(s)ds + \frac{1}{a_0}y(t). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die linke Seite von (2.14) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 a_0 x^{(n)}(t) + \cdots + a_n x(t) &= \sum_{k=0}^n a_{n-k} \int_{t_0}^t h^{(k)}(t-s)y(s)ds + a_0 h^{(n-1)}(0)y(t) \\
 &= \int_{t_0}^t \sum_{k=0}^n a_{n-k} h^{(k)}(t-s)y(s)ds + a_0 h^{(n-1)}(0)y(t) \\
 &\stackrel{h \text{ Lsg. inhom. DGI}}{=} a_0 \frac{1}{a_0} y(t) \\
 &= y(t).
 \end{aligned}$$

Damit ist x eine spezielle Lösung von (2.14) auf $[t_0, \infty[$. Addiert man nun noch die allgemeine Lösung der homogenen DGI hinzu, dann erhält man als allgemeine Lösung zu (2.14) auf $[t_0, \infty[$

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i \Phi_i(t - t_0) + \int_{t_0}^t h(t-s)y(s)ds.$$

Definition 2.3.1 (Stabilität). Die Lösung $x(t) = \Phi(t)$ von (2.12) ist stabil, wenn jede Lösung $\Psi(t)$ von (2.12), die genügend nah bei $\Phi(0)$ startet, für alle folgenden $t > 0$ auch nah bei $\Phi(t)$ bleibt. Die Lösung von $\Phi(t)$ heißt instabil, wenn mindestens eine Lösung $\Psi(t)$ von (2.12), die nahe bei $\Phi(0)$ startet, aber für $t > 0$ nicht in deren Nähe bleibt. Mit anderen Worten ist die Lösung $\Phi(t)$ stabil, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon)$ existiert, so dass

$$|\Psi_j(t) - \Phi_j(t)| < \epsilon \quad \text{für} \quad |\Psi_j(0) - \Phi_j(0)| < \delta(\epsilon), \quad j = 1, \dots, n$$

für jede Lösung $\Psi(t)$ gilt. (Seite 378 in (Braun 1993))

Definition 2.3.2 (asymptotische Stabilität). Eine Lösung $x(t) = \Phi(t)$ von (2.12) ist asymptotisch stabil, wenn x stabil ist (Def. 2.3.1) und wenn jede Lösung $\Psi(t)$, die ausreichend nah bei $\Phi(t)$ liegt, $\Phi(t)$ für $t \rightarrow \infty$ erreicht. (Seite 381 in (Braun 1993))

Als Konsequenz dieser Definition, muss jede Lösung von (2.12) für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergieren, wenn sie stabil sein soll. Damit müssen alle Lösungen r_j , $1 \leq j \leq n$, des charakteristischen Polynoms negativ sein, da sie als Exponent einer Exponentialfunktion in die allgemeine Lösung mit eingehen.

Sei nun die linke Seite der inhomogenen DGI stabil, dann erfüllt h die folgenden Bedingungen (Seite 161 in (Hoel u. a. 1972))

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)dt < \infty,$$

weil es sich bei h um eine Exponentialfunktion mit negativem Exponenten handelt. Ist y nun stetig und wächst nicht zu schnell für $t \rightarrow -\infty$, z.B. wenn

$$\int_{-\infty}^0 e^{ct}|y(t)|dt < \infty, \quad \forall c > 0,$$

dann handelt es sich bei

$$x(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s)y(s)ds$$

ebenfalls um eine Lösung von (2.14) auf $]-\infty, \infty[$ (Seite 161 in (Hoel u. a. 1972)).

Definition 2.3.3. Sei W das weiße Rauschen zum Parameter σ^2 und $X(t), t \in T \subset \mathbb{R}$, ein Prozess zweiter Ordnung. Dann nennt man

$$a_0 X^{(n)}(t) + \cdots + a_{n-1} X'(t) + a_n X(t) = W(t) \tag{2.15}$$

eine stochastische DGI n -ter Ordnung.

Wiederum gestaltet sich das Lösen dieser DGI als problematisch, da das weiße Rauschen ein Funktional und kein stochastischer Prozess ist. Durch formale Integration in den Grenzen t_0 und t erhält man jedoch die Gleichung

$$a_0(X^{(n-1)}(t) - X^{(n-1)}(t_0)) + \dots + a_{n-1}(X'(t) - X'(t_0)) + a_n \int_{t_0}^t X(s)ds = B(t) - B(t_0),$$

die berechenbar ist, da B als auch X stochastische Prozesse wie im vorherigen Kapitel sind.

Satz 2.3.4. Der Prozess $X(t), t > t_0$, mit

$$X(t) = \int_{t_0}^t h(t-s)B(ds),$$

ist eine spezielle Lösung zu (2.15) auf dem Intervall $[t_0, \infty[$, der den Anfangswertbedingungen

$$X(t_0) = \dots = X^{(n-1)}(t_0) = 0$$

genügt.

Beweis. Seite 162 f. in (Hoel u. a. 1972). □

Damit ergibt sich für die allgemeine Lösung der DGI (2.15) auf $[0, \infty[$ der Prozess

$$X(t) = X(t_0)\Phi_1(t) + \dots + X^{(n-1)}(t)\Phi_n(t) + \int_0^t h(t-s)B(ds), \quad t \geq 0, \quad (2.16)$$

mit den Anfangswertbedingungen

$$X(0) = c_1, \dots, X^{(n-1)}(0) = c_n, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Korollar 2.3.5. Der Prozess $X(t), t \geq t_0$, gegeben durch (2.16), ist normalverteilt, hat die Mittelwertfunktion

$$\mu_X(t) = c_1\Phi_1(t) + \dots + c_n\Phi_n(t)$$

und die Kovarianzfunktion

$$r_X(s, t) = \sigma^2 \int_0^{\min(s, t)} h(s-u)h(t-u)B(du).$$

Beweis. Seite 164 in (Hoel u. a. 1972). □

Sei nun die Lösung zur stochastischen DGI (2.15) stabil, dann ist jede Lösung asymptotisch gleich dem Prozess im folgenden Satz.

Satz 2.3.6. Der Prozess $X(t), t \in \mathbb{R}$, mit

$$X(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s)B(ds), \quad (2.17)$$

ist ein stationärer Gaußprozess und Lösung zu (2.15). Darüber hinaus ist X der einzige stationäre Prozess zweiter Ordnung, der (2.15) erfüllt.

Beweis. Seite 164 f. in (Hoel u. a. 1972). □

Korollar 2.3.7. Der Prozess $X(t), t \geq t_0$, gegeben durch (2.17), hat die Mittelwertsfunktion

$$\mu_X(t) = 0$$

und die Kovarianzfunktion

$$r_X(s, t) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\min(s, t)} h(s-u)h(t-u)du.$$

Beweis. Seite 164 in (Hoel u. a. 1972). □

Analog lassen sich auch Überlegungen zu stochastischen Differentialgleichungen der Form

$$a_0 X^{(n)}(t) + \dots + a_{n-1} X'(t) + a_n X(t) = Y(t)$$

und

$$a_0 X^{(n)}(t) + \dots + a_{n-1} X'(t) + a_n X(t) = Y(t) + W(t)$$

machen (Seite 165 f. in (Hoel u. a. 1972))

Beispiel 2.3.8. Der Prozess $X(t), t \geq 0$, der als Lösung der stochastischen DGL

$$mX''(t) + fX'(t) = W(t), \quad X(0) = x_0, \quad X'(0) = v_0, \quad (2.18)$$

definiert ist, heißt Ornstein-Uhlenbeck Prozess. Das charakteristische Polynom dieser DGL ist

$$p(r) = mr^2 + fr.$$

Durch Gleichsetzen des Polynoms mit 0 erhält man als Lösungen für r

$$r_1 = 0 \quad \text{oder} \quad r_2 = -\frac{f}{m}.$$

Damit bildet

$$\Phi(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = c_1 + c_2 e^{-\frac{f}{m}t}$$

die Gesamtheit der Lösungen der DGL. Durch Einsetzen der Anfangswertbedingungen $\Phi_1(0) = \Phi_2'(0) = 1$ und $\Phi_1'(0) = \Phi_2(0) = 0$ in die speziellen Lösungen ergibt sich für diese

$$\Phi_1(t) = 1$$

und

$$\Phi_2(t) = \frac{m}{f} - \frac{m}{f} e^{-\frac{f}{m}t}.$$

Für die Impulsantwortsfunktion erhält man damit

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\Phi_2(t)}{m} = -\frac{1}{f} \left(e^{-\frac{f}{m}(t-s)} - 1 \right), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Da

$$X(t) = X(0)\Phi_1(t) + X'(0)\Phi_2(t) + \int_0^t h(t-s)B(ds)$$

gilt, erhält man für den gesuchten Ornstein-Uhlenbeck Prozess

$$X(t) = x_0 - \frac{m}{f} v_0 \left(e^{-\frac{f}{m}t} - 1 \right) - \frac{1}{f} \int_0^t \left(e^{-\frac{f}{m}(t-s)} - 1 \right) B(ds). \quad (2.19)$$

Für die Mittelwerts- und Kovarianzfunktion ergeben sich für $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}(X(t)) = x_0 - \frac{m}{f} v_0 \left(e^{-\frac{f}{m}t} - 1 \right) \quad (2.20)$$

und

$$\begin{aligned} r_X(s, t) &= \mathbb{E}((X(s) - \mu_X(s))(X(t) - \mu_X(t))) \\ &= \frac{1}{f^2} \mathbb{E} \left(\int_0^s \left(e^{-\frac{f}{m}(s-u)} - 1 \right) du \int_0^t \left(e^{-\frac{f}{m}(t-u)} - 1 \right) dv \right) \\ &= \frac{1}{f^2} \mathbb{E} \left(\int_0^{\min(s, t)} \left(e^{-\frac{f}{m}(\min(s, t)-u)} - 1 \right) du \int_0^{\min(s, t)} \left(e^{-\frac{f}{m}(\max(s, t)-u)} - 1 \right) dv \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{f^2} \int_0^{\min(s, t)} \left(e^{-\frac{f}{m}(\min(s, t)-u)} - 1 \right) \left(e^{-\frac{f}{m}(\max(s, t)-u)} - 1 \right) du \\ &= \frac{\sigma^2}{f^2} \left[\frac{m}{2f} e^{-\frac{f}{m}(\min(s, t)+\max(s, t)-2u)} - \frac{m}{f} e^{-\frac{f}{m}(\max(s, t)-u)} - \frac{m}{f} e^{-\frac{f}{m}(\min(s, t)-u)} + u \right]_0^{\min(s, t)} \\ &= \frac{\sigma^2}{2f^3} \left(2f \min(s, t) - 2m + 2me^{-\frac{f}{m}t} + 2me^{-\frac{f}{m}s} - me^{-\frac{f}{m}|s-t|} - me^{-\frac{f}{m}(s+t)} \right). \quad (2.21) \end{aligned}$$

Bemerkung 2.3.9. Man kann auch aufgrund der Tatsache, dass $X'(t) = V(t)$ ist, die DGL (2.18) wie eine DGL erster Ordnung behandeln und den Prozess $V(t)$ benutzen. Durch beidseitiges Integrieren über 0 bis t erhält man

$$X(t) - X(0) = \int_0^t V(t) dt.$$

Mit $X(0) = x_0$ und $\alpha = -f/m$ ergibt sich für den Ornstein-Uhlenbeck Prozess $X(t)$ eine Darstellung in Abhängigkeit vom Langevinschen Geschwindigkeitsprozess $V(t)$:

$$\begin{aligned} X(t) &= x_0 + \int_0^t V(s) ds = x_0 + \int_0^t v_0 e^{\alpha s} ds + \frac{1}{m} \int_0^t \int_0^s e^{\alpha(s-u)} B(du) ds \\ &= x_0 + \int_0^t v_0 e^{\alpha s} ds + \frac{1}{m} \int_0^t e^{-\alpha u} \int_u^t e^{\alpha s} ds B(du) \\ &= x_0 + \frac{1}{\alpha} v_0 (e^{\alpha t} - 1) + \frac{1}{m\alpha} \int_0^t e^{-\alpha u} (e^{\alpha t} - e^{\alpha u}) B(du) \\ &= x_0 + \frac{1}{\alpha} v_0 (e^{\alpha t} - 1) + \frac{1}{m\alpha} \int_0^t (e^{\alpha(t-u)} - 1) B(du). \end{aligned}$$

Auf diesem Weg gelangt man mit Lösen einer DGL erster Ordnung und darauf folgender Integration auch einfacher zu einer Darstellung des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses.

Kapitel 3

Schätztheorie

3.1 Einleitung

Hier werden Probleme der Art behandelt, dass eine Zufallsgröße Y durch eine Zufallsgröße $\hat{Y}$ abgeschätzt werden soll. $\hat{Y}$ wird hierbei durch einen stochastischen Prozess $X(t)$, $t \in T$, bestimmt. Aus Informationen, die der Prozess $X(t)$ liefert, wird der Schätzer $\hat{Y}$ von Y konstruiert. Die Schätztheorie beschäftigt sich mit Methoden zum Wählen guter Schätzer.

An dieser Stelle soll das Problem des Abschätzens erst einmal mit Beispielen klar gemacht werden.

Beispiel 3.1.1. Sei $X(t)$, $0 \leq t < \infty$, ein Prozess zweiter Ordnung und $0 < t_0 < t_1$. Das Problem $X(t_1)$ auf der Basis $X(t)$, $0 \leq t \leq t_0$, abzuschätzen, heißt Prognoseproblem. t_0 sei nun die Gegenwart, $t < t_0$ die Vergangenheit und $t > t_0$ die Zukunft. Dann ist ein Prognoseproblem der Versuch, die Zukunft anhand von Informationen aus der Vergangenheit und der Gegenwart vorherzusagen. Falls keine generelle Theorie zugrunde liegt, kann man es nur mit intuitiven Schätzungen probieren. Z.B. könnte man den Wert von $X(t_1)$ nur durch Informationen des Gegenwartswerts $X(t_0)$ schätzen. Wenn der Prozess $X(t)$ differenzierbar ist, wäre eine Schätzung von $X(t_1)$ durch $X(t_0) + (t_1 - t_0)X'(t_0)$ denkbar.

Beispiel 3.1.2. Sei $S(t)$, $0 \leq t \leq 1$, ein Prozess zweiter Ordnung. $N(t)$, $0 \leq t \leq 1$, sei ein weiterer Prozess zweiter Ordnung, der unabhängig von $S(t)$ ist und die Mittelwertfunktion 0 hat. Das Problem, bei dem eine Zufallsvariable durch $(S(t))_{0 \leq t \leq 1}$ definiert ist, auf der Basis des Prozesses $(X(t))_{0 \leq t \leq 1}$ mit $X(t) = S(t) + N(t)$ zu schätzen nennt man Filtrationsproblem. Wenn man bei $S(t)$ an ein Signal und bei $N(t)$ an ein Rauschen denkt, findet so der Versuch statt, das Rauschen herauszufiltern, um eine möglichst gute Schätzung für $S(t)$ zu erhalten. Sei $t = 1/2$ nun der Zeitpunkt, an dem $S(t)$ geschätzt werden soll. Wenn das Signal sich nur wenig verändert und das Rauschen um 0 oszilliert, könnte es sinnvoll sein $S(1/2)$ durch

$$\frac{1}{2\epsilon} \int_{\frac{1}{2}-\epsilon}^{\frac{1}{2}+\epsilon} X(t) dt$$

abzuschätzen, wobei ϵ einen Wert zwischen 0 und $1/2$ annimmt.

3.2 Allgemeine Prinzipien der Schätzung

Um nun Schätzprobleme mathematisch präzise formulieren zu können, braucht man ein Kriterium, um die Genauigkeit von möglichen Schätzern zu überprüfen. Man benutzt hierbei den mittleren qua-

dratischen Fehler als Maß der Genauigkeit. Die Zufallsgröße Y und ihr Schätzer Z müssen hierfür finite zweite Momente haben, damit der mittlere quadratische Fehler $\mathbb{E}((Z - Y)^2)$ existiert. Sind Z_1 und Z_2 Schätzer für Y und $\mathbb{E}((Z_1 - Y)^2) < \mathbb{E}((Z_2 - Y)^2)$, dann betrachtet man Z_1 als den besseren der beiden.

In jedem einzelnen Schätzproblem muss man eine Zufallsgröße Y mit einer Darstellung des Prozesses $X(t)$, $t \in T$, abschätzen. Eine Zufallsgröße Z ist nur dann ein erlaubter Schätzer, wenn er durch den Prozess $X(t)$ dargestellt werden kann. Weiterhin kann man die Anzahl der erlaubten Schätzer noch damit einschränken, indem man Restriktionen an diese Darstellung macht. Damit erhält man eine Menge $\mathcal{M}$ zulässiger Zufallsgrößen. Der optimaler Schätzer von Y ist eine Zufallsgröße $\hat{Y} \in \mathcal{M}$ mit

$$\mathbb{E}((\hat{Y} - Y)^2) = \min_{Z \in \mathcal{M}} \mathbb{E}((Z - Y)^2). \quad (3.1)$$

Sind die Schätzer aus $\mathcal{M}$ linear und haben finite zweite Momente, dann bildet $\mathcal{M}$ einen Vektorraum. Um dann noch sicher zu stellen, dass ein optimaler Schätzer existiert, ist es notwendig, dass $\mathcal{M}$ abgeschlossen bezüglich mittlerer quadratischer Konvergenz ist. Daraus ergeben sich folgende Anforderungen an $\mathcal{M}$:

- (i) $\forall Z \in \mathcal{M} : \quad \mathbb{E}(Z^2) < \infty$ (Finite zweite Momente)
- (ii) $\forall Z_1, Z_2 \in \mathcal{M} \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R} : \quad a_1 Z_1 + a_2 Z_2 \in \mathcal{M}$ (Linearität)
- (iii) $\forall Z_1, Z_2, \dots \in \mathcal{M} \quad \wedge \quad Z \text{ ist eine Zufallsgröße} : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n - Z)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Z \in \mathcal{M}$
(Abgeschlossenheit bzgl. mittlerer quadratischer Konvergenz)

Beispiel 3.2.1 (Lineare Schätzung). Sei $X(t)$, $t \in T$, ein Prozess zweiter Ordnung und $\mathcal{M}_0$ die Menge aller Zufallsgrößen mit finiten zweiten Momenten, die durch eine endliche Linearkombination von $X(t)$ addiert mit einer Konstanten dargestellt werden. Damit ist eine Zufallsgröße nur dann in $\mathcal{M}_0$, wenn sie die Form

$$a + b_1 X(s_1) + \dots + b_n X(s_n)$$

hat. Dabei ist n ganzzahlig, $s_1, \dots, s_n \in T$ und $a, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Die Menge $\mathcal{M}_0$ genügt den Bedingungen (i) und (ii), aber im allgemeinen ist (iii) nicht erfüllt. Konstruiert man eine Menge $\mathcal{M}$, die aus den Grenzwerten bezüglich L_2 von Folgen aus $\mathcal{M}_0$ besteht. Diese beinhaltet natürlich alle Elemente aus $\mathcal{M}_0$ und erfüllt die Bedingungen (i)-(iii). Schätzungen dieser Art nennt man lineare Schätzprobleme.

Beispiel 3.2.2 (Nicht-lineare Schätzungen). Sei $X(t)$, $t \in T$, ein Prozess zweiter Ordnung und $\mathcal{M}_0$ die Menge aller Zufallsgrößen mit finiten zweiten Momenten, die als Funktion von $X(t)$

$$f(X(s_1), \dots, X(s_n)),$$

dargestellt werden. Dabei ist $n \in \mathbb{N}$, $s_1, \dots, s_n \in T$ und f eine beliebige reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Wieder erfüllt $\mathcal{M}_0$ die Bedingungen (i) und (ii), aber nicht notwendiger Weise (iii). Die größere Menge $\mathcal{M}$, die aus allen mittleren quadratischen Grenzwerten von $\mathcal{M}_0$ besteht, erfüllt alle drei Bedingungen. Schätzprobleme dieser Art nennt man nicht-lineare Schätzprobleme.

Die Erweiterung von $\mathcal{M}_0$ auf $\mathcal{M}$ wie in den obigen Beispielen ist nur notwendig, wenn die Parametermenge T nicht endlich ist. Ist dies nicht der Fall, dann ist $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$.

Die meisten Methoden, einen optimalen Schätzer zu finden, basieren auf folgendem Satz.

Satz 3.2.3. Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Zufallsgrößen, die die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. $\hat{Y} \in \mathcal{M}$ ist genau dann ein optimaler Schätzer von Y , wenn

$$\mathbb{E}((\hat{Y} - Y)Z) = 0 \quad \forall Z \in \mathcal{M}. \quad (3.2)$$

$\hat{Y}$ ist eindeutig.

Beweis. Seite 173 f. in (Hoel u. a. 1972). $\square$

Zwei Zufallsgrößen, die beide finite zweite Momente haben, nennt man orthogonal zueinander genau dann, wenn $\mathbb{E}(Z_1 Z_2) = 0$. Satz 3.2.3 besagt, dass $\hat{Y} - Y$ orthogonal zu allen Zufallsgrößen aus $\mathcal{M}$ ist. D.h. $\hat{Y}$ ist die L_2 -Projektion von Y auf $\mathcal{M}$.

Es kann gezeigt werden, dass, wenn $\mathcal{M}$ die Bedingungen (i) - (iii) erfüllt, ein optimaler Schätzer von Y in $\mathcal{M}$ existiert.

Sei $X(t)$, $t \in T$, ein Prozess zweiter Ordnung und $\mathcal{M}$ wie in Beispiel 3.2.1 und $\hat{Y}$ der optimale lineare Schätzer einer Zufallsgröße Y . Da die konstante Zufallsgröße $Z = 1$ in $\mathcal{M}_0$ und damit auch in $\mathcal{M}$ ist, folgt mit 3.2, dass

$$\mathbb{E}(\hat{Y} - Y) = 0. \quad (3.3)$$

Da jede Zufallsgröße $X(t)$ in $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$ für alle $t \in T$ liegt, gilt:

$$\mathbb{E}((\hat{Y} - Y)X(t)) = 0 \quad \forall \quad t \in T. \quad (3.4)$$

Satz 3.2.4. $\hat{Y} \in \mathcal{M}$ ist ein optimaler linearer Schätzer, wenn $\hat{Y}$ (3.3) und (3.4) erfüllt.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass für alle $Z \in \mathcal{M}$, gilt:

$$\mathbb{E}((\hat{Y} - Y)Z) = 0.$$

Zuerst wählt man sich ein $Z \in \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$. Dadurch ergibt sich für Z die Darstellung

$$Z = a + b_1 X(s_1) + \cdots + b_n X(s_n).$$

Setzt man diese nun ein, so erhält man

$$\mathbb{E}((\hat{Y} - Y)Z) = a\mathbb{E}((\hat{Y} - Y)) + b_1\mathbb{E}((\hat{Y} - Y)X(s_1)) + \cdots + b_n\mathbb{E}((\hat{Y} - Y)X(s_n)).$$

Da (3.3) und (3.4) erfüllt sind, ergibt sich als Wert für diesen Erwartungswert 0.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass für alle $Z \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0$ die Gleichung erfüllt ist. Dazu wählt man zunächst eine Folge von Zufallsgrößen $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_0$. Da $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}_0}$ konvergiert $Z_n \rightarrow Z$ für $n \rightarrow \infty$. Somit lässt sich der Erwartungswert zerlegen in

$$\mathbb{E}((\hat{Y} - Y)Z) = \mathbb{E}((\hat{Y} - Y)Z_n) + \mathbb{E}((\hat{Y} - Y)(Z - Z_n)).$$

Der erste Summand ist wie oben gezeigt 0. Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhält man dann

$$\mathbb{E}((\hat{Y} - Y)(Z - Z_n)) \leq \mathbb{E}((\hat{Y} - Y)^2)\mathbb{E}((Z_n - Z)^2).$$

$\mathbb{E}((Z_n - Z)^2)$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ nach Voraussetzung gegen 0. Damit ist $\hat{Y}$ der optimale lineare Schätzer von Y . $\square$

Sei $X(t)$, $t \in T$, ein Prozess zweiter Ordnung und Y eine Zufallsgröße wie zuvor. Nimmt man nun an, dass für $n \in \mathbb{N}$ und $s_1, \dots, s_n \in T$, $(X(s_1), \dots, X(s_n), Y)$ mehrdimensional normalverteilt sind, dann stimmen der optimale lineare und der optimale nicht-lineare Schätzer von Y überein. Dies aus der linearen Darstellung der bedingten Erwartung $\mathbb{E}(Y|X(s_1), \dots, X(s_n))$, die gemäß Sektion 2.2 in (Dikta 2000) der L_2 -Projektion entspricht.

3.3 Einige Beispiele optimaler Prognosen

Zum Abschluss dieses Kapitels werden hier noch einige Beispiele zum Prognoseproblem behandelt, bei denen der optimale Schätzer eine einfache Form annimmt.

Beispiel 3.3.1. Sei $W(t)$ das Weiße Rauchen zum Parameter σ^2 und der beobachtete Prozess $X(t)$, $0 \leq t < \infty$, die Lösung zur DGI

$$a_0 X''(t) + a_1 X'(t) + a_2 X(t) = W(t), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (3.5)$$

die den deterministischen Anfangswertbedingungen

$$X(0) = x_0 \quad \text{und} \quad X'(0) = v_0$$

genügt. Sei $0 < t_1 < t_2$. Gesucht ist der optimale lineare Schätzer von $X(t_2)$ bezüglich $X(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, und der mittlere quadratische Fehler der Prognose.

Mit den Ergebnissen aus Kapitel 1 ist die Lösung zu (3.5)

$$X(t) = X(0)\Phi_1(t) + X'(0)\Phi_2(t) + \int_0^t h(t-s)B(ds), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (3.6)$$

wobei Φ_1, Φ_2 und h explizit in Sektion 1.3 definiert sind. Auf die gleiche Weise erhält man

$$X(t) = X(t_1)\Phi_1(t-t_1) + X'(t_1)\Phi_2(t-t_1) + \int_{t_1}^t h(t-s)B(ds) \quad t_1 \leq t < \infty.$$

Der Schätzer für $X(t_2)$ sei nun wie in Beispiel 3.1.1

$$\hat{X}(t_2) = X(t_1)\Phi_1(t_2-t_1) + X'(t_1)\Phi_2(t_2-t_1).$$

Die Differenz zwischen dem tatsächlichen und dem geschätzten Wert ist

$$\hat{X}(t_2) - X(t_2) = - \int_{t_1}^{t_2} h(t_2-s)B(ds).$$

Nun wird gezeigt, dass $\hat{X}(t_2)$ der optimale lineare Schätzer von $X(t_2)$ basierend auf $X(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, ist. Zur weiteren Untersuchung von $\hat{X}(t_2) - X(t_2)$ betrachtet man als erstes den Erwartungswert

$$\mathbb{E}(\hat{X}(t_2) - X(t_2)) = -\mathbb{E}\left(\int_{t_1}^{t_2} h(t_2-s)B(ds)\right) = 0.$$

Mit (3.6) und den Anfangswertbedingungen $X(0) = x_0, X'(0) = v_0$ erhält man für $0 \leq t \leq t_1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(t)(\hat{X}(t_2) - X(t_2))) &= -\mathbb{E}\left(\left(x_0\Phi_1(t) + v_0\Phi_2(t) + \int_0^t h(t-u)B(du)\right) \int_{t_1}^{t_2} h(t_2-v)B(dv)\right) \\ &= -\mathbb{E}\left(\int_0^t h(t-u)B(du) \int_{t_1}^{t_2} h(t_2-v)B(dv)\right) \\ &\stackrel{t \leq t_1}{=} 0. \end{aligned}$$

Um nun zu untersuchen, ob $\hat{X}(t_2)$ der optimale lineare Schätzer von $X(t_2)$ ist, reicht es zu zeigen, dass $\hat{X}(t_2)$ der Grenzwert im quadratischen Mittel aller Linearkombinationen von $X(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, ist. Es reicht also zu zeigen, dass $X'(t_1)$ solch ein Grenzwert im quadratischen Mittel ist. Durch die Darstellung von $X'(t_1)$ als Grenzwert des Differenzenquotienten

$$X'(t_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X(t_1) - X(t_1 - \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$$

sieht man leicht, dass die Ableitung $X'(t_1)$ so ein geforderter Grenzwert ist. Damit ist $\hat{X}(t_2)$ der optimale Schätzer von $X(t_2)$.

Mit Hilfe von Lemma 9.4.3 in (Dikta 2000) ist der mittlere quadratische Fehler dieses Schätzers

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((\hat{X}(t_2) - X(t_2))^2) &= \mathbb{E}\left(\int_{t_1}^{t_2} h(t_2 - s)B(ds)\right)^2 \\ &= \sigma^2 \int_{t_1}^{t_2} h^2(t_2 - s)ds\end{aligned}$$

bzw.

$$\mathbb{E}((\hat{X}(t_2) - X(t_2))^2) = \sigma^2 \int_0^{t_2-t_1} h^2(s)ds. \quad (3.7)$$

Es gibt noch weitere lohnende Beobachtungen, die man zu diesem Beispiel machen kann. Der Prozess $\hat{X}(t)$, $t \geq t_1$, ist die eindeutige Lösung der homogenen DGL

$$a_0 \hat{X}''(t) + a_1 \hat{X}'(t) + a_2 \hat{X}(t) = 0, \quad t \geq t_1$$

mit den Anfangswertbedingungen

$$\hat{X}(t_1) = X(t_1) \quad \text{und} \quad \hat{X}'(t_1) = X'(t_1).$$

Der mittlere quadratische Fehler dieser Prognose hängt nur von $t_2 - t_1$ ab und ist eine monoton wachsende Funktion dieser Distanz (siehe (3.7)). Sei ϵ eine positive reelle Zahl kleiner als t_1 . Der Schätzer $\hat{X}(t_2)$ ist der mittlere quadratische Grenzwert der Linearkombinationen von $X(t)$, $t_1 - \epsilon \leq t \leq t_1$. Somit braucht man für eine Schätzung von $X(t_2)$ nur $X(t)$, $t_1 - \epsilon \leq t \leq t_1$, für eine beliebig kleine positive Zahl ϵ zu beobachten. Da $X(t)$ ein Gaußprozess ist, ist der optimale lineare Schätzer auch der optimale nicht lineare Schätzer.

Die Ergebnisse von Beispiel 3.3.1 lassen sich auf DGLs n -ter Ordnung mit einem weißen Rauschen als Störfunktion übertragen. Der Prozess $X(t)$, $t \geq 0$, genügt nun der DGL

$$a_0 X^{(n)}(t) + \dots + a_n X(t) = W(t) \quad (3.8)$$

auf $0 \leq t < \infty$ mit den deterministischen Anfangswertbedingung $X(0) = x_0, \dots, X^{(n-1)}(0) = x_n$. Die Bestimmung der $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ und h ist analog der in Sektion 1.3. Für $0 < t_1 < t_2$ ist der optimale (lineare oder nicht lineare) Schätzer $\hat{X}(t_2)$ von $X(t_2)$, dargestellt durch $X(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, gegeben durch

$$\hat{X}(t_2) = X(t_1)\Phi_1(t_2 - t_1) + \dots + X^{(n-1)}(t_1)\Phi_n(t_2 - t_1). \quad (3.9)$$

Der zugehörige Prozess $\hat{X}(t)$, $t \geq t_1$, ist die eindeutige Lösung der homogenen DGL

$$a_0 \hat{X}^{(n)}(t) + \dots + a_n \hat{X}(t) = 0, \quad t \geq t_1, \quad (3.10)$$

mit den Anfangswertbedingungen

$$\hat{X}(t_1) = X(t_1), \dots, \hat{X}^{(n-1)}(t_1) = X^{(n-1)}(t_1). \quad (3.11)$$

Der mittlere quadratische Fehler der Prognose ist gegeben durch

$$\mathbb{E}(\hat{X}(t_2) - X(t_2))^2 = \sigma^2 \int_0^{t_2-t_1} h^2(s)ds. \quad (3.12)$$

Nun angenommen, die linke Seite von (3.8) sei stabil und $X(t)$, $-\infty < t < \infty$, ist die stationäre Lösung von (3.8) auf $] -\infty, \infty[$. Dann ist $\hat{X}(t_2)$ der (lineare oder nicht lineare) optimale Schätzer von $X(t_2)$ basierend $X(t)$, $-\infty \leq t \leq t_1$. Der mittlere quadratische Fehler bleibt derselbe.

Kapitel 4

Transport eines gelösten Teilchens in porösen Medien

4.1 Voraussetzungen

Im Folgenden sollen die Erkenntnisse aus den vorangegangenen beiden Kapiteln auf gelösten Stofftransport im Boden übertragen werden, wobei dies weitestgehend anhand der Arbeit von (Bhattacharya und Gupta 1979) erfolgt. Hierzu stellt man sich die Geschehnisse im Boden vereinfacht wie folgt vor:

Gelöste Moleküle werden durch eine reine Flüssigkeit (z.B. Grundwasser) mit einer makroskopischen Geschwindigkeit u_0 (Fluss geteilt durch Porosität) durch ein homogenes isotropisches poröses Medium befördert. Es wird angenommen, dass sich die einzelnen Moleküle nur schwach untereinander beeinflussen, so dass nicht lösliche Stoffe (wie z.B. Öl) oder sehr hohe Konzentrationen löslicher Stoffe nicht berücksichtigt werden. Das Medium sei mit der Flüssigkeit gesättigt, die Masse des gelösten Moleküls um einiges größer als die der Teilchen in der Flüssigkeit, und die Größe der makroskopischen Geschwindigkeit u_0 angemessen. Das gelöste Teilchen bewegt sich mit der Geschwindigkeit $V(s) = (V^{(1)}(s), V^{(2)}(s), V^{(3)}(s))^t, s \geq 0$, und kollidiert zu den Zeiten $(\tau_i)_{i \geq 1}$ mit der festen Phase. Durch die Kollision wird das Teilchen in eine zufällige Richtung geschleudert und erfährt eventuell einen konstanten Energieverlust.

Zur Beschreibung des Weges, den das gelöste Teilchen einschlägt, werden im folgenden drei unabhängige stochastische Prozesse auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\mu)$ definiert:

- (i) Eine standardisierte dreidimensionale Brownsche Bewegung $B(s) = (B^{(1)}(s), B^{(2)}(s), B^{(3)}(s))^t, s \geq 0$.
- (ii) Eine Folge unabhängiger und identisch verteilter nicht-negativer Zufallsgrößen $(\eta_i)_{i \geq 1}$ mit endlichen vierten Momenten und Erwartungswert μ . Die Verteilungsfunktion von η_i wird hier mit F_μ bezeichnet.
- (iii) Eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Orthogonalmatrizen $(O_i)_{i \geq 1}$, deren gemeinsame Verteilung das normalisierte Haarmaß (vergleiche Anhang A) auf der Gruppe aller reellwertiger 3×3 Orthogonalmatrizen ist.

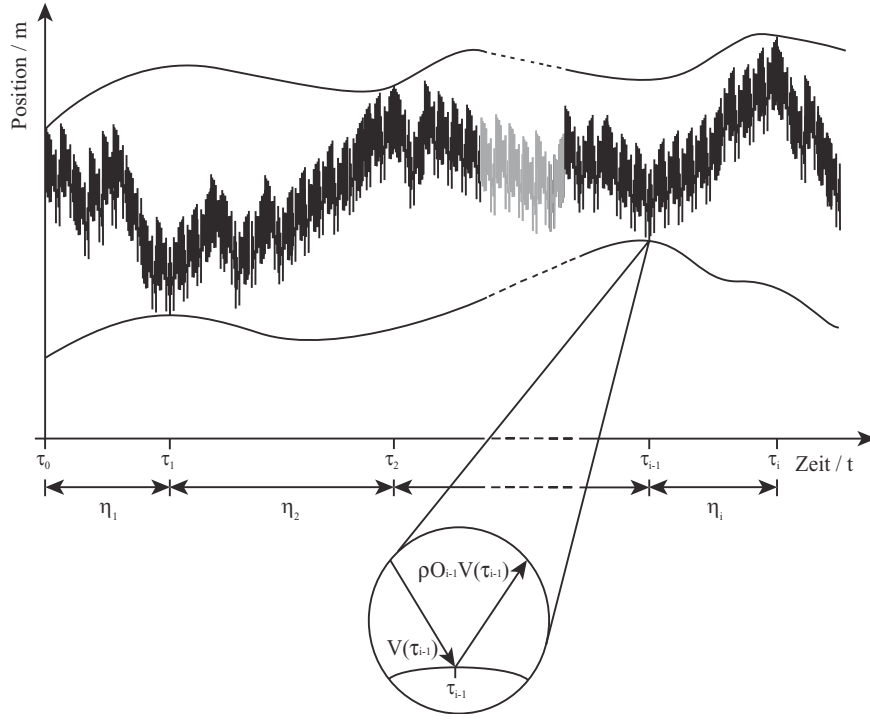


Abbildung 4.1: Darstellung der Bewegung eines Teilchens im Zweidimensionalen

Weiterhin seien die Kollisionszeitpunkte dargestellt als

$$\tau_i = \sum_{j=1}^i \eta_j, \quad i \geq 1, \quad \tau_0 = 0.$$

Damit sind die $(\eta_i)_{i \geq 1}$ die Zeiträume zwischen zwei aufeinander folgenden Kollisionen. Die Bewegung des zu betrachtenden Teilchens kann man sich vereinfacht wie in Abbildung 4.1 vorstellen.

Aus rechentechnischen Gründen werden hier noch folgende Bedingungen benötigt:

- (B1) $\mathbb{E}(\eta_i^k) = O(\mu^k)$, für $k = 1, \dots, 4$.
- (B2) Die Verteilung F_1 der η_i/μ stabilisiert sich für $\mu \downarrow 0$.

Des Weiteren gilt, dass sich der Geschwindigkeitsprozess $(V(t))_{t \geq 0}$ zwischen zwei aufeinander folgenden Kollisionen τ_i und τ_{i+1} bei gegebenen $(\tau_i)_{i \geq 1}$, $(O_i)_{i \geq 1}$ wie ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess verhält.

4.2 Der Positionsprozess

Die Ornstein-Uhlenbeck Theorie beschreibt die Bewegung eines Teilchens ohne äußere Krafteinflüsse mit Hilfe der Langevinschen Gleichung (vergleiche (Nelson 1967)). Diese weicht in diesem Fall etwas ab, da es sich um eine standardisierte Brownsche Bewegung handelt:

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\beta V(t) + \sigma W(t).$$

β ist die Reibungskraft, also ein reellwertiger Skalar, mit der Einheit s^{-1} . W ist ein, der Brown-schen Bewegung entsprechendes, weißes Rauschen und σ eine 3×3 Matrix, die die komponentenweise Abhängigkeit beschreibt.

Da sich das hier zu betrachtende Teilchen aber in einem Kraftfeld bewegt, muss noch eine Erweiterung vollzogen werden. Das externe Kraftfeld, dass auf das Teilchen wirkt, sei durch $K(X(t), t)$ mit der Einheit Kraft durch Masse (Beschleunigung) gegeben. Die Position sei gegeben durch $\frac{dX(t)}{dt} = V(t)$. Dadurch ergibt sich die neue Langevinsche Gleichung

$$\frac{dV(t)}{dt} = K(X(t), t) - \beta V(t) + \sigma W(t).$$

Nach (Bhattacharya und Gupta 1979) ist hier die Langevinschen Gleichung zwischen zwei Kollisionszeitpunkten

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\beta(V(t) - u_0) + g + \sigma W(t), \quad \tau_i < t \leq \tau_{i+1}, \quad (4.1)$$

also eine stochastischen DGL. Somit ist die einwirkenden Kraft auf das Teilchen

$$K(X(t), t) = \beta u_0 + g.$$

Hierauf aufbauend lässt sich nun der Geschwindigkeitsprozess $V(t), t \geq 0$ berechnen. σ ist hierbei eine konstante nicht-singuläre 3×3 Orthogonalmatrix und g die Erdbeschleunigung. Ferner nimmt man an, dass eine Konstante $\rho, 0 \leq \rho \leq 1$, existiert, mit der Eigenschaft, dass

$$V(\tau_i+) := \lim_{t \downarrow 0} V(\tau_i + t) = \rho O_i V(\tau_i), \quad i \geq 1, \quad (4.2)$$

und, für $\tau_0 \equiv 0$,

$$V(0) = V(0+) := \lim_{t \downarrow 0} V(t) = v_0. \quad (4.3)$$

v_0 ist hierbei ein zufälliger beschränkter Vektor, der unabhängig von den stochastischen Prozessen (i)-(iii) ist.

Gleichung (4.1) entspricht auf $[\tau_{i-1}, \tau_i], i \geq 2$, der aus dem ersten Kapitel bekannten Form

$$V'(t) + \beta V(t) = \beta u_0 + g + \sigma W(t)$$

Diese Gleichung ist aufgrund der Darstellung des weißen Rauschens $W(t), t \geq 0$, nicht definiert. Durch formale Integration über τ_{i-1} bis t erhält man komponentenweise für $1 \leq j \leq 3$

$$V^{(j)}(t) - V^{(j)}(\tau_{i-1}+) + \beta \int_{\tau_{i-1}}^t V^{(j)}(s) ds = (\beta u_0^{(j)} + g^{(j)})(t - \tau_{i-1}) + \sum_{k=1}^3 \sigma^{(j,k)} (B^{(k)}(t) - B^{(k)}(\tau_{i-1}+)).$$

$B^{(k)}$ ist ein eindimensionaler Wiener Prozess und aufgrund der Stetigkeit ist $B^{(k)}(\tau_{i-1}+) \equiv B^{(k)}(\tau_{i-1})$ und damit

$$V^{(j)}(t) + \beta \int_{\tau_{i-1}}^t V^{(j)}(s) ds = V^{(j)}(\tau_{i-1}+) - \sum_{k=1}^3 \sigma^{(j,k)} B^{(k)}(\tau_{i-1}) + (\beta u_0^{(j)} + g^{(j)})(t - \tau_{i-1}) + \sum_{k=1}^3 \sigma^{(j,k)} B^{(k)}(t).$$

Durch Multiplikation beider Seiten mit $e^{\beta t}$ erhält man

$$\begin{aligned} e^{\beta t} V^{(j)}(t) + \beta e^{\beta t} \int_{\tau_{i-1}}^t V^{(j)}(s) ds &= \left(V^{(j)}(\tau_{i-1}+) - \sum_{k=1}^3 \sigma^{(j,k)} B^{(k)}(\tau_{i-1}) \right) e^{\beta t} \\ &\quad + (\beta u_0^{(j)} + g^{(j)})(t - \tau_{i-1}) e^{\beta t} \\ &\quad + \sum_{k=1}^3 \sigma^{(j,k)} e^{\beta t} B^{(k)}(t). \end{aligned}$$

Die linke Seite obiger Gleichung entspricht gerade $\frac{d}{dt}(e^{\beta t} \int_{\tau_{i-1}}^t V^{(j)}(s) ds)$ und Integrieren liefert mit $w_0^{(j)} := u_0^{(j)} + \beta^{-1} g^{(j)}$

$$\begin{aligned} e^{\beta t} \int_{\tau_{i-1}}^t V^{(j)}(s) ds &= \beta^{-1} \left(V^{(j)}(\tau_{i-1}+) - \sum_{k=1}^3 \sigma^{(j,k)} B^{(k)}(\tau_{i-1}) \right) (e^{\beta t} - e^{\beta \tau_{i-1}}) \\ &\quad + w_0^{(j)} ((t - \tau_{i-1}) e^{-\beta t} - \beta^{-1} (e^{\beta t} - e^{\beta \tau_{i-1}})) \\ &\quad + \sum_{k=1}^3 \sigma^{(j,k)} \int_{\tau_{i-1}}^t e^{\beta s} B^{(k)}(s) ds \end{aligned}$$

und weiterhin

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{i-1}}^t V^{(j)}(s) ds &= \beta^{-1} \left(V^{(j)}(\tau_{i-1}+) - \sum_{k=1}^3 \sigma^{(j,k)} B^{(k)}(\tau_{i-1}) \right) (1 - e^{-\beta(t-\tau_{i-1})}) + w_0^{(j)} (t - \tau_{i-1}) \\ &\quad - \beta^{-1} (1 - e^{-\beta(t-\tau_{i-1})}) + \sum_{k=1}^3 \sigma^{(j,k)} e^{-\beta t} \int_{\tau_{i-1}}^t e^{\beta s} B^{(k)}(s) ds. \end{aligned}$$

Durch beidseitiges Differenzieren erhält man

$$\begin{aligned} V^{(j)}(t) &= V^{(j)}(\tau_{i-1}+) e^{-\beta(t-\tau_{i-1})} + w_0^{(j)} (1 - e^{-\beta(t-\tau_{i-1})}) + \sum_{k=1}^3 \sigma^{(j,k)} \left(B^{(k)}(t) \right. \\ &\quad \left. - B^{(k)}(\tau_{i-1}) e^{-\beta(t-\tau_{i-1})} - \int_{\tau_{i-1}}^t \beta e^{-\beta(t-s)} B^{(k)}(s) ds \right) \end{aligned}$$

und es ergibt sich letztendlich für den gesuchten Prozess $V(t), t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], i \geq 2$, in vektorieller Schreibweise mit der Anfangswertbedingung $V(\tau_{i-1}+) = \rho O_{i-1} V(\tau_{i-1})$

$$V(t) = \rho O_{i-1} V(\tau_{i-1}) e^{-\beta(t-\tau_{i-1})} + w_0(1 - e^{-\beta(t-\tau_{i-1})}) + \sigma \int_{\tau_{i-1}}^t e^{-\beta(t-s)} B(ds). \quad (4.4)$$

Analog erhält man das Ergebnis von $V(t)$ auf $]0 \equiv \tau_0, \tau_1 \equiv \eta_1]$:

$$V(t) = v_0 e^{-\beta t} + w_0(1 - e^{-\beta t}) + \sigma \int_0^t e^{-\beta(t-s)} B(ds).$$

Zur Berechnung der Mittelwertsfunktion von $V(t)$ seien $(O_i)_{i \geq 1}$ und $(\tau_i)_{i \geq 1}$ gegeben. Somit erhält man auf $\tau_{i-1} < t \leq \tau_i, i \geq 1$, komponentenweise für $1 \leq k \leq 3$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V^{(k)}(t) | (O_i)_{i \geq 1}, (\tau_i)_{i \geq 1}) &= \mathbb{E} \left(V^{(l)}(\tau_{i-1}+) e^{-\beta(t-\tau_{i-1})} + w_0^{(k)} (1 - e^{-\beta(t-\tau_{i-1})}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^3 \sigma^{(k,l)} \int_{\tau_{i-1}}^t e^{-\beta(t-s)} B^{(l)}(ds) \right) \Big| (O_i)_{i \geq 1}, (\tau_i)_{i \geq 1} \\ &= V^{(l)}(\tau_{i-1}+) e^{-\beta(t-\tau_{i-1})} + w_0^{(k)} (1 - e^{-\beta(t-\tau_{i-1})}) \\ &\quad + \sum_{l=1}^3 \sigma^{(k,l)} \mathbb{E} \left(\int_{\tau_{i-1}}^t e^{-\beta(t-s)} B^{(l)}(ds) \right) \Big| (O_i)_{i \geq 1}, (\tau_i)_{i \geq 1}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Betrachte nun

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\int_{\tau_{i-1}}^t e^{-\beta(t-s)} B^{(l)}(ds) \middle| (O_i = o_i)_{i \geq 1}, (\tau_i = t_i)_{i \geq 1} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_{t_{i-1}}^t e^{-\beta(t-s)} B^{(l)}(ds) \right) = 0 =: m(t_{i-1}). \end{aligned}$$

Der Erwartungswert aus dem dritten Summand aus (4.5) ist gerade $m(\tau_{i-1})$ und somit ebenfalls 0. Damit ergibt sich für den Mittelwertsvektor von $V(t)$, gegeben $(O_i)_{i \geq 1}, (\tau_i)_{i \geq 1}$,

$$\mu_{V|(O_i)_{i \geq 1}, (\tau_i)_{i \geq 1}}(t) = V(\tau_{i-1}+) + w_0 \left(1 - e^{-\beta(t-\tau_{i-1})} \right), \quad t \in]\tau_{i-1}, \tau_i], \quad i \geq 1. \quad (4.6)$$

Zur Berechnung der Kovarianzfunktion sei zunächst $\tau_{i-1} < s < t \leq \tau_i, i \geq 0$. Wiederum seien $(O_i)_{i \geq 1}$ und $(\tau_i)_{i \geq 1}$ gegeben. Schließlich erhält man

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\left(V^{(k)}(s) - \mu_{V|(O_i)_{i \geq 1}, (\tau_i)_{i \geq 1}}^{(k)}(s) \right) \left(V^{(l)}(t) - \mu_{V|(O_i)_{i \geq 1}, (\tau_i)_{i \geq 1}}^{(l)}(t) \right) \middle| (O_i)_{i \geq 1}, (\tau_i)_{i \geq 1} \right) \\ &= \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sigma^{(k,m)} \sigma^{(l,n)} \mathbb{E} \left(\int_{\tau_{i-1}}^s e^{-\beta(s-u)} B^{(m)}(du) \int_{\tau_{i-1}}^t e^{-\beta(t-v)} B^{(n)}(dv) \middle| (O_i)_{i \geq 1}, (\tau_i)_{i \geq 1} \right) \end{aligned}$$

Im Folgenden betrachtet man obigen Erwartungswert zunächst für $m = n$ und berechnet hierfür unter Anwendung von Lemma 9.4.3 (Dikta 2000) nun folgende bedingte Erwartung:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\int_{\tau_{i-1}}^s e^{-\beta(s-u)} B^{(m)}(du) \int_{\tau_{i-1}}^t e^{-\beta(t-v)} B^{(m)}(dv) \middle| (O_i = o_i)_{i \geq 1}, (\tau_i = t_i)_{i \geq 1} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_{t_{i-1}}^s e^{-\beta(s-u)} B^{(m)}(du) \int_{t_{i-1}}^t e^{-\beta(t-v)} B^{(m)}(dv) \right) \\ &= \int_{t_{i-1}}^s e^{-\beta(s+t-2u)} du = \frac{1}{2\beta} \left(e^{-\beta(t-s)} - e^{-\beta(t+s-2t_{i-1})} \right) =: m_1(t_{i-1}). \end{aligned}$$

Für $m \neq n$ erhält man

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\int_{\tau_{i-1}}^s e^{-\beta(s-u)} B^{(m)}(du) \int_{\tau_{i-1}}^t e^{-\beta(t-v)} B^{(n)}(dv) \middle| (O_i = o_i)_{i \geq 1}, (\tau_i = t_i)_{i \geq 1} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_{t_{i-1}}^s e^{-\beta(s-u)} B^{(m)}(du) \int_{t_{i-1}}^t e^{-\beta(t-v)} B^{(n)}(dv) \right) =: m_2(t_{i-1}). \end{aligned}$$

Da es sich hier um eine standardisierte Brownsche Bewegung handelt, sind beide Teile des Erwartungswertes voneinander unabhängig. Damit ist das Ergebnis für $m \neq n$ das Produkt der einzelnen Erwartungswerte, die, aufgrund des weißen Rauschens, jeweils 0 sind. Somit ist der komplette Erwartungswert gleich 0.

Damit erhält man mit $m_1(\tau_{i-1}), m_2(\tau_{i-1})$ und mit der Diffusionsmatrix $D = \sigma^2$ im Allgemeinen für die Kovarianzmatrix mit $s, t \in]\tau_{i-1}, \tau_i], i \geq 2$, gegeben $(O_i)_{i \geq 1}, (\tau_i)_{i \geq 1}$,

$$r_{V|(O_i)_{i \geq 1}, (\tau_i)_{i \geq 1}}(s, t) = \frac{1}{2\beta} D \left(e^{-\beta|t-s|} - e^{-\beta(t+s-2\tau_{i-1})} \right). \quad (4.7)$$

Definiere nun zunächst den Zählprozess

$$N(t) := \sup\{n \geq 0 : \tau_n \leq t\}, \quad t \geq 0,$$

der als Wert die Anzahl der Kollisionen bis zur Zeit t angibt.

Mit Darstellung (4.4) des Geschwindigkeitsprozesses lässt sich der zugehörige Positionsprozess $X(t), t \geq 0$, aufstellen:

$$X(t) = X(0) + \sum_{i=1}^{N(t)} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} V(t) dt + \int_{\tau_{N(t)}}^t V(s) ds. \quad (4.8)$$

$X(0)$ ist hierbei ein zufälliger beschränkter Vektor, der unabhängig von den anderen aufgeführten zufälligen Größen ist. Nun werden die beiden Integralterme berechnet. Für den ersten ergibt sich für $i \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} V(t) dt &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left[V(\tau_{i-1}+) e^{-\beta(t-\tau_{i-1})} + w_0 \left(1 - e^{-\beta(t-\tau_{i-1})} \right) + \sigma \int_{\tau_{i-1}}^t e^{-\beta(t-s)} B(ds) \right] dt \\ &= \frac{1}{\beta} (V(\tau_{i-1}+) - w_0) (1 - e^{-\beta\eta_i}) + w_0 \eta_i + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \sigma \int_{\tau_{i-1}}^t e^{-\beta(t-s)} B(ds) dt. \end{aligned}$$

Die Berechnung des Integrals aus dem letzten Summand erfolgt so:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \sigma \int_{\tau_{i-1}}^t e^{-\beta(t-s)} B(ds) dt &= \sigma \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \int_s^{\tau_i} e^{-\beta(t-s)} dt B(ds) \\ &= \sigma \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} -\frac{1}{\beta} e^{-\beta(t-s)} \Big|_s^{\tau_i} B(ds) \\ &= \frac{1}{\beta} \sigma \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left(1 - e^{-\beta(\tau_i-s)} \right) B(ds) \end{aligned}$$

Damit erhält man für den gesamten Ausdruck:

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} V(t) dt = \frac{1}{\beta} (V(\tau_{i-1}+) - w_0) (1 - e^{-\beta\eta_i}) + w_0 \eta_i + \frac{1}{\beta} \sigma \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left(1 - e^{-\beta(\tau_i-s)} \right) B(ds).$$

Analog berechnet sich das zweite Integral

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{N(t)}}^t V(s) ds &= \frac{1}{\beta} (V(\tau_{N(t)}+) - w_0) \left(1 - e^{-\beta(t-\tau_{N(t)})} \right) + w_0 (t - \tau_{N(t)}) \\ &\quad + \frac{1}{\beta} \sigma \int_{\tau_{N(t)}}^t \left(1 - e^{-\beta(t-s)} \right) B(ds). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich somit für den Positionsprozess für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} X(t) &= X(0) + \sum_{i=1}^{N(t)} \left[\frac{1}{\beta} (V(\tau_{i-1}+) - w_0) (1 - e^{-\beta\eta_i}) + w_0 \eta_i + \frac{1}{\beta} \sigma \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left(1 - e^{-\beta(\tau_i-s)} \right) B(ds) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\beta} (V(\tau_{N(t)}+) - w_0) \left(1 - e^{-\beta(t-\tau_{N(t)})} \right) + w_0 (t - \tau_{N(t)}) \\ &\quad + \frac{1}{\beta} \sigma \int_{\tau_{N(t)}}^t \left(1 - e^{-\beta(t-s)} \right) B(ds). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Nun definiert man die Zufallsgrößen

$$Y_i := \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} V(s) ds, \quad i \geq 1, \quad (4.10)$$

die den Integralen in der mittleren Summe aus (4.8) entsprechen. Darüber hinaus sei

$$S_\mu(t') := \mu^{1/2} \sum_{i=1}^{[t'/\mu^2]} (Y_i - \mathbb{E}(Y_i)), \quad 0 \leq t' \leq 1, \quad (4.11)$$

der zugehörige Partialsummenprozess, wobei $[a]$ der ganzzahlige Anteil von $a \in \mathbb{R}$ ist. Die $\mathbb{P}_\mu$ -Verteilung von S_μ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Skorokhodraum $D([0, 1])$. Dies ist der Raum aller rechtsseitig stetigen Funktionen von $[0, 1]$ in den $\mathbb{R}^3$, die linksseitige Grenzwerte besitzen.

Definition 4.2.1 (Stoppzeit). $\tau : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Stoppzeit bezüglich der Filtration $(\mathcal{E}_t)_{t \geq 0}$ genau dann, wenn $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ und

$$\forall \quad t \geq 0 : \quad \{\tau \leq t\} \in \mathcal{E}_t.$$

Zur Ermittlung des Erwartungswertes von Y_i benötigt man neben dem Erneuerungsprozess $N(t)$, $t \geq 0$, noch weitere Hilfsmittel. Bezeichne nun

$$\mathcal{E}_t := \sigma(B(s), N(s)) : \quad 0 < s \leq t$$

die kleinste σ -Algebra, die von $(B(s))_{0 < s \leq t}$ und $(N(s))_{0 < s \leq t}$ erzeugt wird.

Da $\{\tau_i \leq t\} = \{N(t) \geq i\} \in \mathcal{E}_t$, ist τ_i eine Stoppzeit, denn offensichtlich muss auch $\mathbb{P}(\tau_i < \infty) = 1$ sein, da andernfalls der Erwartungswert μ nicht mehr endlich wäre.

Setze nun

$$\mathcal{E}_{\tau_i} := \sigma\{A \in \mathcal{A} \mid A \cap \{\tau_i \leq t\} \in \mathcal{E}_t \quad \forall \quad t \geq 0\}.$$

Bekanntlich ist $\mathcal{E}_{\tau_i}$ eine σ -Algebra, bezüglich der τ_i messbar ist. Schließlich benötigt man noch

$$\mathcal{F}_i := \sigma(\mathcal{E}_{\tau_i}, \eta_{i+1}, O_0, O_1, \dots, O_{i-1}), \quad i \geq 1,$$

wobei O_0 die 3×3 Einheitsmatrix darstellt.

Da die Orthogonalmatrizen $O_i, i \geq 1$, nach dem normalisierten Haarmaß verteilt sind, gilt für deren Erwartungswerte (vergleiche (A.1) in Anhang A)

$$\mathbb{E}(O_i) = \mathbf{0}, \quad i \geq 1.$$

Da weiterhin die O_i noch unabhängig von $\mathcal{F}_i$, erhält man für den Erwartungswert zwischen zwei Kollisionen, gegeben $\mathcal{F}_{i-1}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(1_{\{\tau_{i-1} < s \leq \tau_i\}} V(s) | \mathcal{F}_{i-1}) &= 1_{\{\tau_{i-1} < s \leq \tau_i\}} \left(\mathbb{E}(\rho O_{i-1} V(\tau_{i-1}) e^{-\beta(s-\tau_{i-1})} | \mathcal{F}_{i-1}) \right. \\ &\quad + \mathbb{E}(w_0(1 - e^{-\beta(s-\tau_{i-1})}) | \mathcal{F}_{i-1}) \\ &\quad \left. + \mathbb{E}(\sigma \int_{\tau_{i-1}}^s e^{-\beta(s-u)} B(du) | \mathcal{F}_{i-1}) \right). \end{aligned}$$

Bis auf O_{i-1} ist im ersten Summand alles $\mathcal{F}_{i-1}$ -messbar. Im zweiten Term ist alles $\mathcal{F}_{i-1}$ -messbar und das weiße Rauschen im dritten Term ist unabhängig von $\mathcal{F}_{i-1}$, wodurch sich Folgendes ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(1_{\{\tau_{i-1} < s \leq \tau_i\}} V(s) | \mathcal{F}_{i-1}) &= 1_{\{\tau_{i-1} < s \leq \tau_i\}} \left(\rho \mathbb{E}(O_{i-1}) V(\tau_{i-1}) e^{-\beta(s-\tau_{i-1})} \right. \\ &\quad + w_0(1 - e^{-\beta(s-\tau_{i-1})}) \\ &\quad \left. + \sigma \mathbb{E}(\int_{\tau_{i-1}}^s e^{-\beta(s-u)} B(du) | \mathcal{F}_{i-1}) \right). \end{aligned}$$

Hiermit kommt man zum Ergebnis:

$$\mathbb{E}(1_{\{\tau_{i-1} < s \leq \tau_i\}} V(s) | \mathcal{F}_{i-1}) = 1_{\{\tau_{i-1} < s \leq \tau_i\}} w_0 (1 - e^{-\beta(s-\tau_{i-1})}). \quad (4.12)$$

Dieses Ergebnis geht in das Folgende mit ein.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_i | \mathcal{F}_{i-1}) &= \mathbb{E}\left(\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} V(s) ds | \mathcal{F}_{i-1}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} 1_{\{\tau_{i-1} < s \leq \tau_i\}} V(s) ds | \mathcal{F}_{i-1}\right) \\ &= \int \mathbb{E}(1_{\{\tau_{i-1} < s \leq \tau_i\}} V(s) | \mathcal{F}_{i-1}) ds \\ &\stackrel{(4.12)}{=} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} w_0 (1 - e^{-\beta(s-\tau_{i-1})}) ds \\ &= w_0 \left(\eta_i - \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta \eta_i}) \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Mit diesen beiden Zwischenergebnissen gelangt man nun zum gesuchten Erwartungswert von Y_i :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_i) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y_i | \mathcal{F}_{i-1})) \\ &= \mathbb{E}(w_0 (\eta_i - \beta^{-1} (1 - e^{-\beta \eta_i}))) \\ &= w_0 (\mu - \beta^{-1} (1 - \int_0^\infty e^{-\beta s} F_\mu(ds))). \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden im folgenden die Ausdrücke

$$f(z) := 1 - \frac{1}{z} \int_0^\infty (1 - e^{-zs}) F_1(ds),$$

mit F_1 als Verteilung von η_i/μ , und

$$\alpha := w_0 (1 - \frac{1}{\beta \mu} \int_0^\infty (1 - e^{-\beta s}) F_\mu(ds)) = f(\beta \mu) w_0$$

definiert, wodurch sich für den Erwartungswert der Y_i die anschließende Darstellung ergibt:

$$\mathbb{E}(Y_i) = \mu \alpha. \quad (4.14)$$

Zur Bestimmung der Kovarianzmatrix der Y_i geht man analog wie bei den oben berechneten bedingten Erwartungen vor.

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(1_{\{\tau_{i-1} < s < t \leq \tau_i\}} V^{(k)}(s) V^{(l)}(t) | \mathcal{F}_{i-1}) \\ &= 1_{\{\tau_{i-1} < s < t \leq \tau_i\}} \mathbb{E} \left(\left[\rho e^{-\beta(s-\tau_{i-1})} \langle O_{i-1}^{(k,*)}, V(\tau_{i-1}) \rangle + w_0^{(k)} (1 - e^{-\beta(s-\tau_{i-1})}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left\langle \sigma^{(k,*)}, \int_{\tau_{i-1}}^s e^{-\beta(s-u)} B(du) \right\rangle \right] \left[\rho e^{-\beta(t-\tau_{i-1})} \langle O_{i-1}^{(l,*)}, V(\tau_{i-1}) \rangle + w_0^{(l)} (1 - e^{-\beta(t-\tau_{i-1})}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left\langle \sigma^{(l,*)}, \int_{\tau_{i-1}}^t e^{-\beta(t-v)} B(dv) \right\rangle \right] \middle| \mathcal{F}_{i-1} \right) \\ &= 1_{\{\tau_{i-1} < s < t \leq \tau_i\}} \left[\rho^2 e^{-\beta(s-\tau_{i-1})} e^{-\beta(t-\tau_{i-1})} \mathbb{E} \left(\langle O_{i-1}^{(k,*)}, V(\tau_{i-1}) \rangle \langle O_{i-1}^{(l,*)}, V(\tau_{i-1}) \rangle \right) \right. \\ &\quad \left. + w_0^{(k)} w_0^{(l)} (1 - e^{-\beta(s-\tau_{i-1})}) (1 - e^{-\beta(t-\tau_{i-1})}) + \frac{D^{(k,l)}}{2\beta} (e^{-\beta(t-s)} - e^{-\beta(t+s-2\tau_{i-1})}) \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

Hier soll nun der Erwartungswert des Skalarproduktes aus dem letzten Schritt näher betrachtet werden. Da es sich bei den $(O_i)_{i \geq 1}$ um Orthogonalmatrizen handelt, verändert die Multiplikation mit einem Vektor dessen Länge nicht. Damit muss gelten, dass

$$\sum_{k=1}^3 \left\langle O_i^{(k,*)}, V(\tau_{i-1}) \right\rangle = \sum_{k=1}^3 \left(V^{(k)}(\tau_{i-1}) \right)^2.$$

Zur Berechnung der Erwartungswerte von Produkten solcher Skalarprodukte wie in (4.15) sei nun zuerst $k \neq l$. Hierfür gilt aufgrund der Orthogonalität:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\left\langle O_{i-1}^{(k,*)}, V(\tau_{i-1}) \right\rangle \left\langle O_{i-1}^{(l,*)}, V(\tau_{i-1}) \right\rangle \middle| \mathcal{F}_{i-1} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\left\langle O_{i-1}^{(k,*)}, V(\tau_{i-1}) \right\rangle \left\langle O_{i-1}^{(l,*)}, V(\tau_{i-1}) \right\rangle \middle| \left\langle O_{i-1}^{(l,*)}, V(\tau_{i-1}) \right\rangle \right) \middle| \mathcal{F}_{i-1} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\left\langle O_{i-1}^{(l,*)}, V(\tau_{i-1}) \right\rangle \mathbb{E} \left(\left\langle O_{i-1}^{(k,*)}, V(\tau_{i-1}) \right\rangle \middle| \left\langle O_{i-1}^{(l,*)}, V(\tau_{i-1}) \right\rangle \right) \middle| \mathcal{F}_{i-1} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\left\langle O_{i-1}^{(l,*)}, V(\tau_{i-1}) \right\rangle \mathbb{E} \left(\left\langle O_{i-1}^{(k,*)}, V(\tau_{i-1}) \right\rangle \right) \middle| \mathcal{F}_{i-1} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für $k = l$ ergibt sich mit den Matrizen Z_1 , Z_2 und Z_3 aus Anhang A

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left\langle O_{i-1}^{(k,*)}, V(\tau_{i-1}) \right\rangle^2 \middle| \mathcal{F}_{i-1} \right) &= \mathbb{E} \left(\sum_{m=1}^3 V^{(m)}(\tau_{i-1}) O_{i-1}^{(k,m)} \sum_{n=1}^3 V^{(n)}(\tau_{i-1}) O_{i-1}^{(k,n)} \middle| \mathcal{F}_{i-1} \right) \\ &= \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 V^{(m)}(\tau_{i-1}) V^{(n)}(\tau_{i-1}) \mathbb{E} \left(O_{i-1}^{(k,m)} O_{i-1}^{(k,n)} \right) \\ &= \sum_{m=1}^3 \left(V^{(m)}(\tau_{i-1}) \right)^2 Z_k^{(m,m)} \end{aligned}$$

und insgesamt

$$\mathbb{E} \left(\left\langle O_{i-1}^{(k,*)}, V(\tau_{i-1}) \right\rangle \left\langle O_{i-1}^{(l,*)}, V(\tau_{i-1}) \right\rangle \middle| \mathcal{F}_{i-1} \right) = 1_{k=l} \sum_{m=1}^3 \left(V^{(m)}(\tau_{i-1}) \right)^2 Z_k^{(m,m)} =: C_{i-1}^{(k,l)}.$$

Mit Ergebnis (4.15) und, da $C^{(k,l)}$ bezüglich $\mathcal{F}_{i-1}$ messbar ist, erhält man durch Integration

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_i^{(k)} Y_i^{(l)} | \mathcal{F}_{i-1}) &= 2 \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \int_{\tau_{i-1}}^t \mathbb{E}(V^{(k)}(s) V^{(l)}(t) | \mathcal{F}_{i-1}) ds dt \\ &= 2 \left[\rho^2 C_{i-1}^{(k,l)} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \int_{\tau_{i-1}}^t e^{-\beta(s+t-2\tau_{i-1})} ds dt \right. \\ &\quad + w_0^{(k)} w_0^{(l)} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \int_{\tau_{i-1}}^t \left(1 - e^{-\beta(s-\tau_{i-1})} - e^{-\beta(t-\tau_{i-1})} + e^{-\beta(s+t-2\tau_{i-1})} \right) ds dt \\ &\quad \left. + \frac{D^{(k,l)}}{2\beta} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \int_{\tau_{i-1}}^t \left(e^{-\beta(t-s)} - e^{-\beta(s+t-2\tau_{i-1})} \right) ds dt \right] \\ &=: 2[I_1 + I_2 + I_3]. \end{aligned}$$

Im Folgenden werden nun die drei Terme aus obigem Ergebnis berechnet.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -\frac{\rho^2}{\beta} C_{i-1}^{(k,l)} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left(e^{-\beta(t-\tau_{i-1})} - e^{-2\beta(t-\tau_{i-1})} \right) dt \\
 &= \frac{\rho^2}{2\beta^2} C_{i-1}^{(k,l)} (1 - 2e^{-\beta\eta_i} + e^{-2\beta\eta_i}) \\
 &= \frac{\rho^2}{2\beta^2} C_{i-1}^{(k,l)} (1 - e^{-\beta\eta_i})^2
 \end{aligned}$$

Der zweite beinhaltet das Ergebnis des Integrals von I_1 und berechnet sich wie folgt.

$$\begin{aligned}
 I_2 &= w_0^{(k)} w_0^{(l)} \left[\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left(t - \tau_{i-1} + \frac{1}{\beta} \left(e^{-\beta(t-\tau_{i-1})} - 1 \right) - (t - \tau_{i-1}) e^{-\beta(t-\tau_{i-1})} \right) dt \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2\beta^2} (1 - e^{-\beta\eta_i})^2 \right] \\
 &= w_0^{(k)} w_0^{(l)} \left[\frac{1}{2} \tau_i^2 - \frac{1}{2} \tau_{i-1}^2 - \tau_{i-1} \eta_i - \frac{1}{\beta} \eta_i + \frac{1}{\beta} \eta_i e^{-\beta\eta_i} + \frac{1}{2\beta^2} (1 - e^{-\beta\eta_i})^2 \right] \\
 &= w_0^{(k)} w_0^{(l)} \left[\frac{1}{2} \eta_i^2 - \frac{1}{\beta} \eta_i + \frac{1}{\beta} \eta_i e^{-\beta\eta_i} + \frac{1}{2\beta^2} (1 - e^{-\beta\eta_i})^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} w_0^{(k)} w_0^{(l)} \left[\eta_i^2 - \frac{2}{\beta} \eta_i (1 - e^{-\beta\eta_i}) + \frac{1}{\beta^2} (1 - e^{-\beta\eta_i})^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} w_0^{(k)} w_0^{(l)} \left(\eta_i - \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta\eta_i}) \right)^2
 \end{aligned}$$

Nun fehlt nur noch das Ergebnis des dritten Terms, in den wiederum das Ergebnis des Integrals von I_1 eingeht.

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \frac{D^{(k,l)}}{2\beta} \left[\frac{1}{\beta} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (1 - e^{-\beta(t-\tau_{i-1})}) dt - \frac{1}{2\beta^2} (1 - e^{-\beta\eta_i})^2 \right] \\
 &= \frac{D^{(k,l)}}{2\beta} \left[\frac{1}{\beta} \left(\eta_i + \frac{1}{\beta} (e^{-\beta\eta_i} - 1) \right) - \frac{1}{2\beta^2} (1 - e^{-\beta\eta_i})^2 \right] \\
 &= \frac{D^{(k,l)}}{2\beta} \left[\frac{\eta_i}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2} e^{-\beta\eta_i} - \frac{1}{2\beta^2} e^{-2\beta\eta_i} - \frac{1}{2\beta^2} + \frac{1}{\beta^2} e^{-\beta\eta_i} \right] \\
 &= \frac{D^{(k,l)}}{2\beta^2} \left[\eta_i - \frac{1}{2\beta} (3 - 4e^{-\beta\eta_i} + e^{-2\beta\eta_i}) \right]
 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y_i^{(k)} Y_i^{(l)} | \mathcal{F}_{i-1}) &= \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^2 C_{i-1}^{(k,l)} (1 - e^{-\beta\eta_i})^2 + w_0^{(k)} w_0^{(l)} \left(\eta_i - \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta\eta_i}) \right)^2 \\
 &\quad + \frac{D^{(k,l)}}{\beta^2} \left[\eta_i - \frac{1}{2\beta} (3 - 4e^{-\beta\eta_i} + e^{-2\beta\eta_i}) \right]
 \end{aligned}$$

Wiederum ist der Erwartungswert des letzten Ausdrucks die unbedingte Erwartung von $Y^{(k)}Y^{(l)}$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(Y_i^{(k)}Y_i^{(l)}) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y_i^{(k)}Y_i^{(l)}|\mathcal{F}_{i-1})) \\
&= \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^2 \mathbb{E}(C_{i-1}^{(k,l)}) \int_0^\infty (1-e^{-\beta s})^2 F_\mu(ds) + w_0^{(k)}w_0^{(l)} \int_0^\infty \left(s - \frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta s})\right)^2 F_\mu(ds) \\
&\quad + \frac{D^{(k,l)}}{\beta^2} \int_0^\infty \left(s - \frac{1}{2\beta}(3-4e^{-\beta s}+e^{-2\beta s})\right) F_\mu(ds)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Mit (4.14) und (4.16) erhält man für die Kovarianzmatrix von Y_i

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}((Y_i^{(k)} - \mathbb{E}(Y_i^{(k)}))(Y_i^{(l)} - \mathbb{E}(Y_i^{(l)}))) = \mathbb{E}(Y_i^{(k)}Y_i^{(l)}) - \mathbb{E}(Y_i^{(k)})\mathbb{E}(Y_i^{(l)}) \\
&= \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^2 \mathbb{E}(C_{i-1}^{(k,l)}) \int_0^\infty (1-e^{-\beta s})^2 F_\mu(ds) + w_0^{(k)}w_0^{(l)} \int_0^\infty \left(s - \frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta s})\right)^2 F_\mu(ds) \\
&\quad + \frac{D^{(k,l)}}{\beta^2} \int_0^\infty \left(s - \frac{1}{2\beta}(3-4e^{-\beta s}+e^{-2\beta s})\right) F_\mu(ds) - w_0^{(k)}w_0^{(l)}\mu^2 f^2(\beta\mu) \\
&= \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^2 \mathbb{E}(C_{i-1}^{(k,l)}) \int_0^\infty (1-e^{-\beta s})^2 F_\mu(ds) + w_0^{(k)}w_0^{(l)} \left[\int_0^\infty \left(s - \frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta s})\right)^2 F_\mu(ds) \right. \\
&\quad \left. - \left(\int_0^\infty \left(s - \frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta s})\right) F_\mu(ds) \right)^2 \right] + \frac{D^{(k,l)}}{\beta^2} \int_0^\infty \left(s - \frac{1}{2\beta}(3-4e^{-\beta s}+e^{-2\beta s})\right) F_\mu(ds) \\
&= \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^2 \mathbb{E}(C_{i-1}^{(k,l)}) \int_0^\infty (1-e^{-\beta s})^2 F_\mu(ds) + w_0^{(k)}w_0^{(l)} \text{Var} \left(\eta_i + \frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta\eta_i}) \right) \\
&\quad + \frac{D^{(k,l)}}{\beta^2} \int_0^\infty \left(s - \frac{1}{2\beta}(3-4e^{-\beta s}+e^{-2\beta s})\right) F_\mu(ds)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Zur vereinfachten Schreibweise dieses Ausdrucks sei nun (w'_0w_0) die Matrix, deren Elemente an der Stelle (k, l) die Werte $w_0^{(k)}w_0^{(l)}$ annehmen,

$$g(z) = \int_0^\infty \frac{\beta}{z} (e^{-zs} - 1)^2 F_1(ds),$$

$$h(z) = \int_0^\infty \left(s - \frac{1}{z}(1-e^{-zs})\right)^2 F_1(ds) - \left(\int_0^\infty \left(s - \frac{1}{z}(1-e^{-zs})\right) F_1(ds) \right)^2,$$

$$i(z) = \int_0^\infty \left(s - \frac{1}{2z}(3-4e^{-zs}+e^{-2zs})\right) F_1(ds)$$

und

$$\tilde{D} = \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^2 g(\beta\mu)\mathbb{E}(C_{i-1}) + \mu h(\beta\mu)(w'_0w_0) + \frac{1}{\beta^2}i(\beta\mu)D.$$

Kompakterweise erhält man so für die Kovarianzmatrix der $(Y_i)_{i \geq 1}$ die Schreibweise

$$\text{Cov}(Y_i) = \mu \tilde{D}. \tag{4.18}$$

Um eine Grenzwertaussage für den Positions- beziehungsweise für den Partialsummenprozess, der aus den Y_i gebildet wird, bei $\mu \downarrow 0$ machen zu können, muss sich die gerade berechnete Kovarianzstruktur für $\mu \downarrow 0$ stabilisieren. (Bhattacharya und Gupta 1979) machen aus diesem Grund in ihrer

Arbeit die Annahmen, dass

$$\beta\mu = \delta = \text{konst.} > 0, \quad D_1 = \frac{1}{\beta^2}D = \text{konst.} \quad (4.19)$$

Mit diesen beiden Annahmen erhält man für die Grenzkovarianzstruktur die Darstellung

$$\text{Cov}(Y_i) = O(\mu^2) + O(\mu^2) + \mu D_1 i(\delta), \quad \text{für } \mu \downarrow 0.$$

Das heißt, dass hier $Y_i/\mu^{1/2}$ betrachtet werden muss, denn dann gilt:

$$\text{Cov}(Y_i/\mu^{1/2}) = O(\mu) + D_1 i(\delta), \quad \text{für } \mu \downarrow 0. \quad (4.20)$$

In diesem Fall erhält man eine sinnvolle Kovarianzstruktur.

Definition 4.2.2 (Martingaldifferenzfolge). Eine Folge $(\xi_i)_{i \geq 1}$ von integrierbaren Zufallsgrößen heißt genau dann Martingaldifferenzfolge, wenn

$$\mathbb{E}(\xi_{i+1} | \xi_1, \dots, \xi_i) = 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \forall i \geq 1.$$

Definiere nun für $i \geq 1$ die Folge

$$X_i := \left\langle x, \mu^{-1/2} (Y_i - \mathbb{E}(Y_i)) \right\rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R} : \quad \|x\| = 1.$$

Mit

$$\mathcal{A}_m = \sigma(Y_1, \dots, Y_m)$$

ergibt sich für den Erwartungswert von X_{m+1} , gegeben $Y_1, \dots, Y_m$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{m+1} | \mathcal{A}_m) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{m+1} | \mathcal{F}_m) | \mathcal{A}_m) \\ &= \mu^{-1/2} \langle x, \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y_{m+1} | \mathcal{F}_m) | \mathcal{A}_m) - \mathbb{E}(Y_{m+1}) \rangle \\ &\stackrel{(4.13)}{=} \mu^{-1/2} \left\langle x, \mathbb{E} \left(w_0 \left(\eta_{m+1} - \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta \eta_{m+1}}) \right) \middle| \mathcal{A}_m \right) - \mathbb{E}(Y_{m+1}) \right\rangle \\ &\stackrel{\text{unabh.}}{=} \mu^{-1/2} \left\langle x, \mathbb{E} \left(w_0 \left(\eta_{m+1} - \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta \eta_{m+1}}) \right) \right) - \mathbb{E}(Y_{m+1}) \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nach Definition 4.2.2 ist somit die Folge $(X_i)_{i \geq 1}$ eine Martingaldifferenzfolge.

Mit Ergebnis (4.18) lässt sich das zweite Moment der X_i , gegeben $Y_1, \dots, Y_{i-1}$, berechnen. Dieses ist gleichzeitig das unbedingte zweite Moment.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_i^2 | Y_1, \dots, Y_{i-1}) &= \mu^{-1} \mathbb{E} \left(\sum_{k,l} x^{(k)} x^{(l)} (Y_i^{(k)} - \mathbb{E}(Y_i^{(k)})) (Y_i^{(l)} - \mathbb{E}(Y_i^{(l)})) \middle| Y_1, \dots, Y_{i-1} \right) \\ &= \mu^{-1} \sum_{k,l} x^{(k)} x^{(l)} \mathbb{E}((Y_i^{(k)} - \mathbb{E}(Y_i^{(k)})) (Y_i^{(l)} - \mathbb{E}(Y_i^{(l)}))) \\ &= \sum_{k,l} x^{(k)} x^{(l)} \tilde{D}_{k,l} \\ &= \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^2 g(\beta\mu) \sum_{k,l} \mathbb{E}(C_{i-1}^{(k,l)}) x^{(k)} x^{(l)} + \mu h(\beta\mu) \sum_{k,l} (w'_0 w_0)^{(k,l)} x^{(k)} x^{(l)} \\ &\quad + \frac{1}{\beta^2} i(\beta\mu) \sum_{k,l} D^{(k,l)} x^{(k)} x^{(l)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Da sich die X_i aufgrund der Linearität des Skalarprodukts auch als

$$X_i \equiv \mu^{-1/2} \langle x, Y_i - \mathbb{E}(Y_i) \rangle = \mu^{-1/2} \langle x, Y_i - \mathbb{E}(Y_i | \mathcal{F}_{i-1}) \rangle + \mu^{-1/2} \langle x, \mathbb{E}(Y_i | \mathcal{F}_{i-1}) - \mathbb{E}(Y_i) \rangle \quad (4.22)$$

darstellen lassen, gilt:

$$\begin{aligned} X_i^4 &= (\mu^{-1/2} \langle x, Y_i - \mathbb{E}(Y_i | \mathcal{F}_{i-1}) \rangle + \mu^{-1/2} \langle x, \mathbb{E}(Y_i | \mathcal{F}_{i-1}) - \mathbb{E}(Y_i) \rangle)^4 \\ &= \mu^{-2} \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \langle x, Y_i - \mathbb{E}(Y_i | \mathcal{F}_{i-1}) \rangle^k \langle x, \mathbb{E}(Y_i | \mathcal{F}_{i-1}) - \mathbb{E}(Y_i) \rangle^{4-k} \\ &\leq 2^4 \mu^{-2} \max(\langle x, Y_i - \mathbb{E}(Y_i | \mathcal{F}_{i-1}) \rangle^4, \langle x, \mathbb{E}(Y_i | \mathcal{F}_{i-1}) - \mathbb{E}(Y_i) \rangle^4) \\ &\leq 2^4 \mu^{-2} (\langle x, Y_i - \mathbb{E}(Y_i | \mathcal{F}_{i-1}) \rangle^4 + \langle x, \mathbb{E}(Y_i | \mathcal{F}_{i-1}) - \mathbb{E}(Y_i) \rangle^4). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Des Weiteren gilt mit der Hölderschen Ungleichung (Seite 70 in (Gänssler und Stute 1977))

$$\begin{aligned} \langle x, Y_i - \mathbb{E}(Y_i | \mathcal{F}_{i-1}) \rangle^4 &= (\tau_i - \tau_{i-1})^4 \left((\tau_i - \tau_{i-1})^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \langle x, V(s) - \mathbb{E}(V(s) | \mathcal{F}_{i-1}) \rangle ds \right)^4 \\ &= (\tau_i - \tau_{i-1})^4 \left((\tau_i - \tau_{i-1})^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} 1_{\tau_{i-1} < s \leq \tau_i} \langle x, V(s) - \mathbb{E}(V(s) | \mathcal{F}_{i-1}) \rangle ds \right)^4 \\ &\leq (\tau_i - \tau_{i-1})^4 \left((\tau_i - \tau_{i-1})^{-1} \left(\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} 1_{\tau_{i-1} < s \leq \tau_i}^{4/3} ds \right)^{3/4} \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \langle x, V(s) - \mathbb{E}(V(s) | \mathcal{F}_{i-1}) \rangle^4 ds \right)^{1/4} \right)^4 \\ &= \eta_i^3 \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \langle x, V(s) - \mathbb{E}(V(s) | \mathcal{F}_{i-1}) \rangle^4 ds \\ &\leq \eta_i^3 \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |V(s) - \mathbb{E}(V(s) | \mathcal{F}_{i-1})|^4 ds. \end{aligned}$$

Zur Abschätzung des vierten Momentes der X_i werden nun die Erwartungswerte der beiden Summanden aus (4.22) betrachtet. Hierzu wird die Ungleichung $(\sum_{i=1}^m a_i)^n \leq m^n \sum_{i=1}^m a_i^n$ verwendet. Eine analoge Abschätzung existiert für Potenzen von Normen.

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\langle x, Y_i - \mathbb{E}(Y_i | \mathcal{F}_{i-1}) \rangle^4) \\ &\leq \mathbb{E} \left(\eta_i^3 \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \|V(s) - \mathbb{E}(V(s) | \mathcal{F}_{i-1})\|^4 ds \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\eta_i^3 \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \|\rho O_{i-1} V(\tau_{i-1}) e^{-\beta(s-\tau_{i-1})} + \sigma \int_{\tau_{i-1}}^s e^{-\beta(s-u)} B(du)\|^4 ds \right) \\ &\leq 2^6 \mathbb{E} \left(\eta_i^3 \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \|\rho O_{i-1} V(\tau_{i-1}) e^{-\beta(s-\tau_{i-1})}\|^4 ds \right) + 2^6 \mathbb{E} \left(\eta_i^3 \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left\| \sigma \int_{\tau_{i-1}}^s e^{-\beta(s-u)} B(du) \right\|^4 ds \right) \\ &\leq 2^6 \rho^4 \mathbb{E} \left(\|V(\tau_{i-1})\|^4 \eta_i^3 \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{-4\beta(s-\tau_{i-1})} ds \right) + 2^6 \|\sigma\|^4 \mathbb{E} \left(\eta_i^3 \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left\| \int_{\tau_{i-1}}^s e^{-\beta(s-u)} B(du) \right\|^4 ds \right) \\ &=: 2^6 \rho^4 I_1 + 2^6 \|\sigma\|^4 I_2 \end{aligned}$$

Im Weiteren sollen nun I_1 und I_2 betrachtet werden. Hierzu wird die Ungleichung $1 - e^{-x} \leq x$, $\forall x \geq 0$ verwendet.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mathbb{E} \left(\left\| V(\tau_{i-1}) \right\|^4 \eta_i^3 \left(-\frac{1}{4\beta} \right) e^{-\beta(s-\tau_{i-1})} \Bigg|_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\frac{1}{4\beta} \left\| V(\tau_{i-1}) \right\|^4 \eta_i^3 (1 - e^{-4\beta\eta_i}) \right) \\
&\leq \mathbb{E}(\left\| V(\tau_{i-1}) \right\|^4 \eta_i^4) \stackrel{\text{unabh.}}{=} \mathbb{E}(\left\| V(\tau_{i-1}) \right\|^4) \mathbb{E}(\eta_i^4) \\
&\leq a \mathbb{E}(\eta_i^4).
\end{aligned}$$

a ist hierbei eine positive Konstante, die unabhängig von μ ist. Nun zum zweiten Term:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \mathbb{E} \left(\eta_i^3 \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left(\sum_{k=1}^3 \left(\int_{\tau_{i-1}}^s e^{-\beta(s-u)} B^{(k)}(du) \right)^2 \right)^2 ds \right) \\
&\leq 3^2 \mathbb{E} \left(\eta_i^3 \sum_{k=1}^3 \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left(\int_{\tau_{i-1}}^s e^{-\beta(s-u)} B^{(k)}(du) \right)^4 ds \right)
\end{aligned}$$

Dieser Erwartungswert ist mit Hilfe der Faktorisierung zu berechnen. Hierzu betrachte zunächst

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left(\eta_i^3 \sum_{k=1}^3 \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left(\int_{\tau_{i-1}}^s e^{-\beta(s-u)} B^{(k)}(du) \right)^4 ds \middle| \tau_{i-1} = x, \tau_i = y \right) \\
&= (y-x)^3 \sum_{k=1}^3 \int_x^y \mathbb{E} \left(\left(\int_x^s e^{-\beta(s-u)} B^{(k)}(du) \right)^4 \right) ds \\
&= 3(y-x)^3 \sum_{k=1}^3 \int_x^y \left(\int_x^s e^{-2\beta(s-u)} du \right)^2 ds \\
&= \frac{3}{4\beta^2} (y-x)^3 \sum_{k=1}^3 \int_x^y \left(1 - e^{-2\beta(s-x)} \right)^2 ds \\
&= \frac{9}{16\beta^3} (y-x)^3 \left(4e^{-2\beta(y-x)} + 4\beta(y-x) - e^{-4\beta(y-x)} - 3 \right) \\
&= \frac{9}{16\beta^3} (y-x)^3 \left(4e^{-2\beta(y-x)} - e^{-4\beta(y-x)} - 3 \right) + \frac{36}{16\beta^2} (y-x)^4 \\
&\leq \frac{9+36\beta}{16\beta^3} (y-x)^4 \\
&=: m(x, y).
\end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis kann jetzt I_2 abgeschätzt werden mit

$$I_2 \leq 2^6 \mathbb{E}(m(\tau_{i-1}, \tau_i)) = 2^6 \frac{9+36\beta}{16\beta^3} \mathbb{E}(\eta_i^4) \leq \frac{a' + \beta a''}{\beta^3} \mathbb{E}(\eta_i^4).$$

a' und a'' sind wiederum positive Konstanten, die unabhängig von μ sind. Durch die Abschätzungen von I_1 und I_2 folgt, dass

$$\mathbb{E}(\langle x, Y_i - \mathbb{E}(Y_i | \mathcal{F}_{i-1}) \rangle^4) \leq \left(a + \frac{a' + \beta a''}{\beta^3} \right) \mathbb{E}(\eta_i^4) \quad (4.24)$$

ist. Dieser Erwartungswert ist somit nach oben beschränkt.

Nun gilt es noch, den zweiten Term aus (4.23) abzuschätzen.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\langle x, \mathbb{E}(Y_i | \mathcal{F}_{i-1}) - \mathbb{E}(Y_i) \rangle^4) &= \mathbb{E} \left(\left\langle x, \left(\eta_i - \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta \eta_i}) \right) w_0 - \mathbb{E}(Y_i) \right\rangle^4 \right) \\
&\leq \mathbb{E} \left(\left\| \left(\eta_i - \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta \eta_i}) \right) w_0 - \mathbb{E}(Y_i) \right\|^4 \right) \\
&\leq 2^6 \mathbb{E} \left(\left\| \left(\eta_i - \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta \eta_i}) \right) w_0 \right\|^4 \right) + 2^6 \mathbb{E} (\|\mathbb{E}(Y_i)\|^4) \\
&= 2^6 \|w_0\|^4 \mathbb{E} \left(\left(\eta_i - \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta \eta_i}) \right)^4 \right) + 2^6 \|\alpha\|^4 \mu^4 \\
&\leq 2^{10} \|w_0\|^4 \left[\mathbb{E}(\eta_i^4) + \frac{1}{\beta^4} \mathbb{E}((1 - e^{-\beta \eta_i})^4) \right] + 2^6 \|\alpha\|^4 \mu^4 \\
&\leq 2^{11} \|w_0\|^4 \mathbb{E}(\eta_i^4) + 2^6 \|\alpha\|^4 \mu^4 \\
&=: b \mathbb{E}(\eta_i^4) + b' \mu^4,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

wobei b und b' unabhängig von μ sind. (4.23), (4.24) und (4.25) führen nun dazu, dass

$$\mathbb{E}(X_i^4) \leq 2^4 \mu^{-2} \left(\left(a + \frac{a' + \beta a''}{\beta^3} + b \right) \mathbb{E}(\eta_i^4) + b' \mu^4 \right), \quad i \geq 1.$$

Insgesamt kann man im Grenzfalle für $\mu \downarrow 0$ mit Hilfe der Annahmen aus (4.19) und der Bedingung aus (B1) folgende Aussage über die Ordnung des vierten Moments der X_i machen:

$$\mathbb{E}(X_i^4) = O(\mu^2). \tag{4.26}$$

Die Bedingungen unter (4.19) bedeuten, dass bei kleiner werdendem μ , β analog wachsen muss, und die von Null verschiedenen Einträge in $D = \sigma^2$ wachsen beziehungsweise fallen ebenfalls unbeschränkt. Da $\mu \downarrow 0$ ein Dichterwerden des Mediums bedeutet, muss also auch die Reibungskraft β zunehmen. Eine Erhöhung der Reibungskraft erfordert aber natürlich auch eine höhere externe Krafteinwirkung, die durch die Multiplikation von σ mit der Brownschen Bewegung entsteht. Damit erscheinen diese Annahmen als physikalisch sinnvoll.

Mit diesen Vorüberlegungen ist man nun in der Lage, den funktionalen zentralen Grenzwertsatz von (Drogin 1972) anzuwenden. Der Satz von Drogin benötigt die Definition und Aussagen zur Konvergenz in Verteilung. Diese findet man auf den Seiten 65 und 328 ff in (Gänssler und Stute 1977).

Satz 4.2.3 (Drogin). Sei $(X_i)_{i \geq 1}$ ein Folge von Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Weiterhin sei $(\mathcal{A}_i)_{i \geq 0}$ eine Folge wachsender Sub- σ -Algebren von $\mathcal{A}$ so, dass X_i $\mathcal{A}_i$ -messbar ist. Setze nun $s_m^2 = \sum_{i=1}^m \bar{X}_i^2$ und $v_m = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}(X_i^2 | \mathcal{A}_{i-1})$. Es wird nur angenommen, dass

$$\mathbb{E}(X_{m+1} | \mathcal{A}_m) = 0, \quad \mathbb{E}(X_m^2) < \infty \quad \text{und} \quad v_m \rightarrow \infty \text{ f.s.} \tag{4.27}$$

Definiere nun $T_n = \inf\{m : v_m \geq n\}$ und die stetige Zufallsfunktion S auf $[0, \infty[$ mit den Bedingungen $S(0) = 0$, $S(v_m) = X_1 + \dots + X_m$ und der Eigenschaft, dass S auf $[v_m, v_{m+1}]$ linear ist. Auf dieselbe Weise wird die Funktion $\hat{S}$ mit s_m^2 anstelle von v_m definiert. Mit diesen definiert man nun zwei weitere stetige Funktionen S^n und $\hat{S}^n$, die durch $S^n(t) = S(nt)/n^{1/2}$ bzw. $\hat{S}^n(t) = \hat{S}(nt)/n^{1/2}$ auf $[0, 1]$ gegeben sind.

Sei I ein Intervall auf der reellen Zahlengeraden und $\mathcal{C}(I)$ der Raum aller reellwertigen stetigen Funktion auf I mit der Supremumsmetrik d und der Borel- σ -Algebra $\Sigma(I)$, die durch die d -offenen Mengen aufgespannt wird. Für $t \in I$ sei $B(t)$ die Funktion auf $C(I)$, die für f den Wert $f(t)$ annimmt. Sei π_I die Wahrscheinlichkeit auf $(C(I), \Sigma(I))$, die aus $(B(t))_{t \in I}$ eine normalisierte Brownsche Bewegung macht, die in 0 auf I startet. Weiterhin seien hier die Abkürzungen π_1 für $\pi_{[0,1]}$ und π für $\pi_{[0,\infty[}$ gegeben. Bezeichne Φ die Menge aller reellwertigen Funktionen, die auf $C([0,1])$ π_1 -f.s. beschränkt und stetig sind.

Sei 1_A die Indikatorfunktion der Menge A und $\rightarrow_{L_1}$ Konvergenz in L_1 -Norm in Bezug auf die Verteilung der genutzten Zufallsgrößen.

Wenn (4.27) erfüllt ist, dann folgt aus (i) (ii).

$$(i) \quad 1/n \sum_{i=1}^{T_n} X_i^2 1_{[X_i^2 > n\epsilon]} \rightarrow_{L_1} 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \quad \forall \epsilon > 0$$

$$(ii) \quad \sup_{0 \leq t \leq 1} |S^n(t) - \hat{S}(t)| \rightarrow_{\mathbb{P}} 0 \quad \int_{\Omega} \phi(\hat{S}^n) d\mathbb{P} \rightarrow \int_{C([0,1])} \phi d\pi_1 \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \quad \forall \phi \in \Phi.$$

Nun gilt es, anhand der Vorüberlegungen, den Satz von Drogin mit $(X_i)_{1 \leq i \leq [\mu^{-2}]}$ zu überprüfen. Das Problem, dass man für ausreichend kleine μ jeweils einen neuen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_{\mu})$ benötigt, um die X_i zu definieren, verursacht keine Schwierigkeiten, da die bedingten zweiten Momente von X_i , gegeben $Y_1, \dots, Y_{i-1}$ (bzw. gegeben $X_1, \dots, X_{i-1}$), nicht zufällig sind und weil man nur an schwacher Konvergenz interessiert ist.

Man muss aber feststellen, und das wurde in der Arbeit von (Bhattacharya und Gupta 1979) nicht beachtet, dass ein Veränderung von $\mu = \mathbb{E}(\eta_i)$ auch ein Veränderung der Zufallsvariable η_i bedeutet. In Bhattacharyas und Guptas Arbeit wurde lediglich gefordert, dass $\mathbb{E}(\eta_i^4) < \infty$, das heißt es wurde der Zusammenhang zwischen η_i und μ vollständig ignoriert. Deshalb gilt hier zusätzlich die Forderung:

$$\mathbb{E}(\eta_i^k) = O(\mu^k), \quad \text{für } k = 1, \dots, 4.$$

Diese Bedingung wird zum Beispiel durch die Exponentialverteilung erfüllt.

Im folgenden werden die Bedingungen aus Drogins Satz überprüft. Wie schon im Anschluss an Definition 4.2.2 zu sehen war, kommt man mit

$$\mathcal{A}_m = \sigma(Y_1, \dots, Y_m)$$

zu dem Schluss, dass

$$\mathbb{E}(X_{m+1} | \mathcal{A}_m) = 0.$$

Ferner folgt aus $\mathbb{E}(X_i^4) \leq 2^4 \mu^{-2} \left(\left(a + \frac{a' + \beta a''}{\beta^3} + b \right) \mathbb{E}(\eta_i^4) + b' \mu^4 \right) = O(\mu)$, dass

$$\mathbb{E}(X_i^2) < \infty.$$

Aus (4.21) auf Seite 28 erhält man:

$$\begin{aligned} v_m &= \sum_{i=1}^m \mathbb{E}(X_i^2 | \mathcal{A}_{i-1}) = m \sum_{k,l} x^{(k)} x^{(l)} \tilde{D}^{(k,l)} \\ &\geq m \frac{1}{\beta^2} \sum_{k,l} D^{(k,l)} x^{(k)} x^{(l)} i(\beta\mu), \end{aligned}$$

wobei

$$i(\beta\mu) = i(\delta) = \int_0^\infty \left(s - \frac{1}{2\delta} (3 - 4e^{-\delta s} + e^{-2\delta s}) \right) F_1(ds)$$

und F_1 die Verteilungsfunktion von η_i/μ bezeichnet. Mit $\mu \downarrow 0$ folgt aus den gemachten Annahmen, dass

$$\frac{1}{\beta^2} \sum_{k,l} D^{(k,l)} x^{(k)} x^{(l)} = \sum_{k,l} D_1^{k,l} x^{(k)} x^{(l)} > 0$$

für $x \neq 0$, weil D_1 positiv definit ist. Bezeichne nun

$$\lambda(s) := \left(s - \frac{1}{2\delta} (3 - 4e^{-\delta s} + e^{-2\delta s}) \right).$$

Dann gilt $\lambda(0) = 0$ und für $s > 0$:

$$\begin{aligned} \lambda'(s) &= 1 - \frac{1}{2\delta} (4\delta e^{-\delta s} - 2\delta e^{-2\delta s}) \\ &= 1 - 2e^{-\delta s} + e^{-2\delta s} \\ &= (1 - e^{-\delta s})^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Also erhält man insgesamt für alle $s > 0$, dass $\lambda(s) < 0$. Damit aber auch, dass $i(\beta\mu) > 0$. Insgesamt folgt damit für $x \neq 0$, dass

$$\frac{1}{\beta^2} \sum_{k,l} D^{(k,l)} x^{(k)} x^{(l)} i(\beta\mu) > 0.$$

Daraus ergibt sich schließlich die dritte Voraussetzung aus dem Satz von Drogin:

$$v_m \geq m \frac{1}{\beta^2} \sum_{k,l} D^{(k,l)} x^{(k)} x^{(l)} i(\beta\mu) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty. \quad (4.28)$$

Um den Zusammenhang zum Satz von Drogin explizit herzustellen, sei nun $\mu = n^{-1/2}$, $v_m = m \sum_{k,l} \tilde{D}^{(k,l)} x^{(k)} x^{(l)}$ und T_n ersetzt durch

$$T_\mu = \inf \left\{ m : v_m \geq \left\lfloor \frac{1}{\mu^2} \right\rfloor \right\}.$$

In (4.28) sieht man, dass bei festem μ $v_m \uparrow \infty$, für $\mu \rightarrow \infty$. Aus diesem Grund ist T_μ zunächst wohldefiniert. Setze nun

$$\gamma = i(\delta) \sum_{k,l} D_1^{(k,l)} x^{(k)} x^{(l)}.$$

Aus $v_m \geq 1/\mu^2$ folgt mit $v_m = m \sum_{k,l} \tilde{D}^{(k,l)} x^{(k)} x^{(l)}$:

$$\begin{aligned} m &\geq \frac{1}{\mu^2 \gamma} \cdot \frac{\gamma}{\sum_{k,l} \tilde{D}^{(k,l)} x^{(k)} x^{(l)}} \\ &= \frac{1}{\gamma \mu^2} \left(\frac{\sum_{k,l} \tilde{D}^{(k,l)} x^{(k)} x^{(l)}}{\sum_{k,l} \tilde{D}^{(k,l)} x^{(k)} x^{(l)}} + \frac{\sum_{k,l} \tilde{D}^{(k,l)} x^{(k)} x^{(l)} - i(\delta) \sum_{k,l} D_1^{(k,l)} x^{(k)} x^{(l)}}{\sum_{k,l} \tilde{D}^{(k,l)} x^{(k)} x^{(l)}} \right) \\ &\stackrel{(4.20)}{=} \frac{1}{\delta \mu^2} \left(1 + \frac{O(\mu)}{O(\mu) + \gamma} \right) \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$T_\mu = \frac{1}{\gamma \mu^2} (1 + O(\mu)).$$

Bedingung (i) aus Drogins Satz wird nun mit Hilfe der Schwarzschen und der Tschebyscheffschen Ungleichung überprüft:

$$\begin{aligned}
\limsup_{\mu \downarrow 0} \mu^2 \sum_{i=1}^{[1/\mu^2]} \mathbb{E}(X_i^2 1_{\{X_i^2 > \epsilon/\mu^2\}}) &\leq \limsup_{\mu \downarrow 0} \mu^2 \sum_{i=1}^{[1/\mu^2]} \mathbb{E}_\mu(X_i^4)^{1/2} (\mathbb{P}(X_i^2 > \epsilon/\mu^2))^{1/2} \\
&\leq \limsup_{\mu \downarrow 0} \mu^2 \sum_{i=1}^{[1/\mu^2]} \mathbb{E}(X_i^4)^{1/2} \mathbb{E}(X_i^4)^{1/2} (\epsilon/\mu^2)^{-1} \\
&= \limsup_{\mu \downarrow 0} \mu^4 \sum_{i=1}^{[1/\mu^2]} \mathbb{E}(X_i^4) \epsilon^{-1} \\
&= \limsup_{\mu \downarrow 0} \mu^4 \sum_{i=1}^{[1/\mu^2]} 2^4 \mu^{-2} \left(\left(a + \frac{a' + \beta a''}{\beta^3} + b \right) \mathbb{E}(\eta_i^4) + b' \mu^4 \right) \\
&= 0, \quad \forall \epsilon > 0,
\end{aligned}$$

denn $\mathbb{E}(\eta_i^4) = O(\mu^4)$ und $\beta \uparrow \infty$.

Insgesamt hat man jetzt gesehen, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^3$ mit $\|x\| = 1$ der Prozess

$$(\langle x, S_\mu(t') \rangle)_{0 \leq t' \leq 1}$$

gegen einen zentrierten Wiener Prozess mit Diffusionsmatrix

$$\left(i(\delta) \sum_{k,l} D_1^{(k,l)} x^{(k)} x^{(l)} \right)_{1 \leq k,l \leq 3}$$

in Verteilung konvergiert. Aus diesem Grund konvergiert der dreidimensionale Prozess

$$(S_\mu(t'))_{0 \leq t' \leq 1}$$

gegen einen zentrierten dreidimensionalen Wiener Prozess mit Diffusionsmatrix

$$i(\delta) D_1$$

in Verteilung.

Nun untersucht man den Prozess $\mu^{1/2}(X(t'/\mu) - (t'/\mu)\alpha)$ auf sein Verhalten. Hierzu ist zunächst

$$X(t'/\mu) = \sum_{i=1}^{N(t'/\mu)} Y_i + \int_{\tau_{N(t'/\mu)}}^{t'/\mu} v(s) ds.$$

Der erste Term entspricht hier dem Integral des Geschwindigkeitsprozess vom Startzeitpunkt bis zur letzten Stoppzeit vor dem gefragten Zeitpunkt. Der Rest entspricht dem Integral über der verbleiben-

den Zeit. Der zu betrachtende Prozess ist somit

$$\begin{aligned}
\mu^{1/2}(X(t'/\mu) - (t'/\mu)\alpha) &= \mu^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{N(t'/\mu)} Y_i + \int_{\tau_{N(t'/\mu)}}^{t'/\mu} v(s)ds - (t'/\mu)\alpha \right) \\
&= \mu^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{N(t'/\mu)} (Y_i - \mu\alpha) + N(t'/\mu)\mu\alpha + \int_{\tau_{N(t'/\mu)}}^{t'/\mu} v(s)ds - (t'/\mu)\alpha \right) \\
&= \mu^{1/2} \sum_{i=1}^{N(t'/\mu)} (Y_i - \mu\alpha) + \mu^{1/2}(N(t'/\mu)\mu - (t'/\mu))\alpha \\
&\quad + \mu^{1/2} \int_{\tau_{N(t'/\mu)}}^{t'/\mu} v(s)ds \\
&=: Z_1(t') + \mu^{1/2}Z_2(t')\alpha + Z_3(t')
\end{aligned}$$

Mit Methoden der Erneuerungstheorie kann nun weiter gezeigt werden, dass die Anteile $\mu^{1/2}Z_2(t')\alpha$ und $Z_3(t')$ asymptotisch vernachlässigt werden können. Vergleiche hierzu Satz 17.3 in (Billingsley 1968). Das letzte Resultat liefert darüber hinaus, zusammen mit der gerade gezeigten Verteilungskonvergenz von $(S_\mu(t'))_{0 \leq t' \leq 1}$, dass der Prozess $(Z_1(t'))_{0 \leq t' \leq 1}$ gegen den gleichen Grenzprozess wie $(S_\mu(t'))_{0 \leq t' \leq 1}$ in Verteilung konvergiert. Zusammengefasst konvergiert der Positionsprozess

$$\left(\mu^{1/2} (X(t'/\mu) - (t'/\mu)\alpha) \right)_{0 \leq t' \leq 1}$$

gegen einen zentrierten dreidimensionalen Wiener Prozess mit Diffusionsmatrix $i(\delta)D_1$.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Diplomarbeit war es, die Verteilungskonvergenz des Positionsprozesses, der durch die Langevinsche Gleichung gegeben ist, zu zeigen. Der sich daraus ergebende Grenzprozess ist ein Wiener Prozess mit Drift α und Dispersionsmatrix $i(\delta)D_1$. Mit diesem Ergebnis kann man stochastische Aussagen über den Weg des Teilchens machen. Damit wären zum Beispiel stochastische Betrachtungen möglich, wann das Teilchen einen Kegel, abhängig von der Eintrittsposition, wieder verlässt, oder wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass das Teilchen diesen nicht mehr verlässt.

Nimmt man zusätzlich zu den bisherigen Forderungen noch an, dass die Kollisionszwischenzeiten η_i exponentialverteilt sind, dann ist der Geschwindigkeitsprozess ein Markovprozess mit homogenen Übergangswahrscheinlichkeiten (vergleiche hierzu Satz 2 in (Bhattacharya und Gupta 1979)).

Die Betrachtungen dieser Arbeit gingen nur auf eines der Teilchen einer Schadstoffwolke ein. Bhattacharyas und Guptas Arbeit schneidet noch kurz die makroskopische Betrachtungsweise an. Zur Bestimmung der makroskopischen Gleichung, die die gelöste Konzentration reguliert, nehmen sie an, dass die Geschwindigkeitsprozesse der einzelnen gelösten Teilchen voneinander unabhängig sind. Diese hängen allerdings in Wirklichkeit wegen der Verdünnung der Konzentration schwach voneinander ab, was jedoch zu vernachlässigen ist. Somit sind die Positionsprozesse mit einer Menge gegebener Startposition (zum Beispiel mit einer Initialkonzentration) voneinander unabhängig. Bhattacharya und Gupta kommen so zu dem Schluss, dass unter diesen Annahmen durch Anwendung des Gesetzes der großen Zahlen die Konzentration makroskopisch stabil ist und der Fokker-Planck-Gleichung, einer Vorwärtsgleichung, genügt.

Mit der in dieser Arbeit gezeigten Verteilungskonvergenz im Zusammenhang mit der makroskopischen Konzentrationsbeschreibung durch die Fokker-Planck-Gleichung ist man in der Lage rechnergestützte Simulationen zu realisieren. Zu dieser Simulation werden Zufallsgrößen benötigt, deren Verteilung durch Erfassung von Messwerte auf Testfeldern ermittelt werden kann.

Anhang A

Haarmaß

u und v seien zwei unabhängige Zufallsgrößen. Beide sind gleichverteilt, u auf $[0, 2\pi]$ und v auf $[0, \pi]$. Die Drehung um die z -Achse im Dreidimensionalen erfolgt durch den Winkel u . Hierbei ist eine vollständige 360° möglich. Die zugehörige Drehmatrix ist

$$O_1(u) = \begin{pmatrix} \cos(u) & -\sin(u) & 0 \\ \sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Drehung um die x -Achse im Bereich von 0° bis 180° erfolgt durch den Winkel v . Diese Drehmatrix ist

$$O_2(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(v) & -\sin(v) \\ 0 & \sin(v) & \cos(v) \end{pmatrix}.$$

Mit der Komposition dieser beiden Matrizen ist also jeder Punkt auf dem Rand der Einheitskugel zu erreichen. Darüber hinaus erhält man eine Gleichverteilung auf der Einheitskugel. Damit ergibt sich für die komplette Drehmatrix in Abhängigkeit von u und v

$$O(u, v) = O_2(v) \circ O_1(u) = \begin{pmatrix} \cos(u) & -\sin(u) & 0 \\ \sin(u) \cos(v) & \cos(u) \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(u) \sin(v) & \cos(u) \sin(v) & \cos(v) \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{O} := \{O(u, v) | 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi\}$ sind die hier betrachteten Matrizen. Das zugehörige Haarmaß kann damit auch angegeben werden, denn die Verteilung ist eindeutig durch u und v gegeben. Damit können alle entsprechenden stochastischen Größen direkt berechnet werden. Nähere Informationen zum Haarmaß sind auf den Seiten 297 ff. in (Cohn 1980) zu finden.

Im vorliegenden Text ist der Erwartungswert dieser Matrix von Interesse. Dieser berechnet sich so:

$$\mathbb{E}(O(u, v)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(u) du & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(u) du & 0 \\ \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin(u) \cos(v) dudv & \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos(u) \cos(v) dudv & -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(v) dv \\ \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin(u) \sin(v) dudv & \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos(u) \sin(v) dudv & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(v) dv \end{pmatrix}.$$

Alle Elemente dieser Matrix haben den Wert 0. Sei $\mathbf{0}$ die 3×3 Matrix, deren Elemente den Wert 0 annehmen, dann ist

$$\mathbb{E}(O(u, v)) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.1})$$

Weiterhin sind die Erwartungswerte von Produkten von Elementen einer Zeile mit den anderen aus dieser Zeile von Interesse. Hier werden nun diese Erwartungswerte für die erste Zeile mit $Z_1^{(i,j)} = \mathbb{E}(O^{(1,i)}O^{(1,j)})$ berechnet:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(u) du & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(u) \cos(u) du & 0 \\ -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(u) \cos(u) du & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(u) du & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analog erfolgt die Berechnung für

$$Z_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Z_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Literaturverzeichnis

- [Bhattacharya und Gupta 1979] BHATTACHARYA, R.N. ; GUPTA, V.K.: Statistical Theory Of Solute Transport In Pourous Media. In: *Siam Journal On Applied Mathematics* 37 (1979), Nr. 3, S. 485–498
- [Billingsley 1968] BILLINGSLEY, Patrick: *Convergence Of Probability Measures*. Wiley, New York, 1968
- [Braun 1993] BRAUN, Martin: *Differential Equations and Their Applications - An Introduction to Applied Mathematics*. 4. Springer-Verlag New York, Inc., 1993
- [Cohn 1980] COHN, Donald L.: *Measure Theory*. Birkhäuser, 1980
- [Dikta 2000] DIKTA, Gerhard: *Stochastik Vorlesungsskript*. FH-Jülich, 2000
- [Drogin 1972] DROGIN, Richard: An Invariance Principle For Martingales. In: *The Annals Of Mathematical Statistics* 43 (1972), Nr. 2, S. 602–620
- [Gänssler und Stute 1977] GÄNSSLER, Peter ; STUTE, Winfried: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer Verlag, 1977
- [Gupta u. a. 1981] GUPTA, V. K. ; BHATTACHARYA, R. N. ; SPOSITO, G.: A Molecular Approach To The Foundations Of The Theory Of Solute Transports In Porous Media. In: *Journal Of Hydrology* 50 (1981), Nr. 1-3, S. 355–370
- [Hoel u. a. 1972] HOEL, Paul G. ; PORT, Sidney C. ; STONE, Charles J.: *Introduction to Stochastic Processes*. Waveland Press, Inc., 1972
- [Nelson 1967] NELSON, Edward: *Dynamical Theories Of Brownian Motion*. Princeton University Press, Princeton, NJ., 1967