

Institut für Plasmaphysik

KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH

des Landes Nordrhein-Westfalen - e. V.

ASSOCIATION EURATOM-KFA

Adiabatische Invarianz im Mittel bei räumlicher Feldumkehr

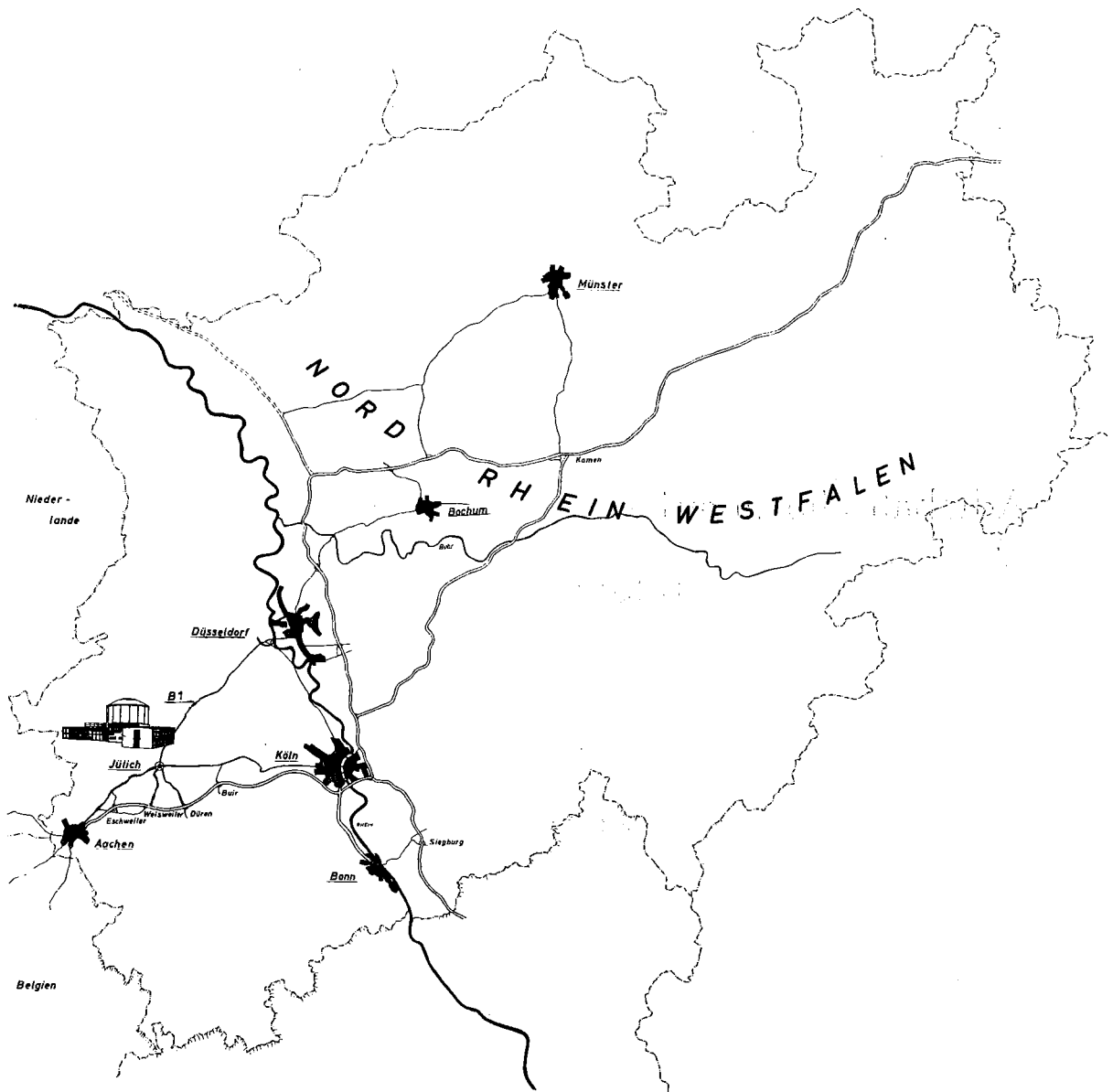
von

Lutz Janicke

Jül - 384 - PP

Juli 1966

Als Manuskript gedruckt



Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 384
Institut für Plasmaphysik Jülich – 384 – PP

Dok.: Charged Particles - Adiabatic Invariance
Magnetic Fields
Theta Pinch

DK: 533.922 : 530.1
538.6
533.952 : 621.039.624

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich,
Jülich, Bundesrepublik Deutschland

**Adiabatische Invarianz im Mittel bei räumlicher
Feldumkehr**

von

Lutz Janicke

Zusammenfassung

Es werden die adiabatischen Invarianzeigenschaften geladener Teilchen in zeitlich schwach aber räumlich stark veränderlichen elektromagnetischen Feldern untersucht. Speziell werden solche Felder betrachtet, die auf das Problem des eindimensionalen Oszillators führen, dessen Potential zwei Minima aufweist. Diese Potentialform tritt i.a. bei Feldern mit räumlicher Richtungsumkehr auf, z.B. beim θ -Pinch mit antiparallelem innerem Magnetfeld. Für Teilchen mit Energiewerten in der Nähe des Zwischenmaximums braucht die in den Bereichen oberhalb und unterhalb nachgewiesene adiabatische Invarianz des Wirkungsintegrals $J = \oint p dq$ nicht mehr zu gelten. J ist auch keine stetige Funktion der Energie mehr, doch kann diese Schwierigkeit durch eine Modifizierung der Definition, welche die Invarianz in den übrigen Bereichen unverändert läßt, behoben werden. Für die modifizierte Größe K kann unter Benutzung der Flächenerhaltung in der Phasenebene gezeigt werden, daß für eine beliebige Teilchengruppe in der Phasenebene des eindimensionalen Oszillators K im Mittel adiabatisch invariant in der Ordnung $\epsilon \ln^4 \epsilon$ ist.

Inhaltsverzeichnis

I	Einleitung	3
II	1. Definitionen und Voraussetzungen	6
	2. Eine Ungleichung für das Wirkungsintegral	11
	3. Konstruktion der Majorante	16
	4. Eigenschaften der Majorante	19
	5. Invarianz im Mittel	26
	6. Diskussion des Ergebnisses	29
III	Anhang	31
IV	Literaturverzeichnis	37
V	Abbildungen	39

I Einleitung

Beim Studium der Bewegung geladener Teilchen in elektromagnetischen Feldern ist die Kenntnis von adiabatischen Invarianten von großer Bedeutung (Northrop /1/), z.B. für Energieabschätzungen. Lange bekannt ist die adiabatische Invarianz des magnetischen Momentes μ der Stromschleife, die durch die Gyration des Teilchens entsteht:

$$\mu = \frac{m v_{\perp}^2}{2B} ;$$

v_{\perp} ist die Geschwindigkeit des Teilchens senkrecht zu den magnetischen Feldlinien. Alfvén /2/ zeigte als erster, daß μ fast konstant bleibt (eine genaue Definition der adiabatischen Invarianz folgt später), wenn sich das Teilchen in einem nahezu homogenen, zeitlich schwach veränderlichen Magnetfeld bewegt, d.h. in einem Feld, das sich während einer Gyration vom Teilchen aus gesehen nur wenig ändert:

$$\left| \frac{1}{B} \frac{dB}{dt} \right| \ll \omega_g = \frac{eB}{mc}$$

Außerdem muß die Komponente der elektrischen Feldstärke in Richtung des Magnetfeldes klein sein.

Mathematisch befriedigende Nachweise stammen von Gardner /3/ und Kruskal /4/, welche für homogenen und zeitunabhängigen Anfangs- und Endzustand sogar Invarianz in jeder Ordnung eines charakteristischen Parameters zeigen, der die Abweichung von der Homogenität und die Stärke der zeitlichen Veränderlichkeit mißt.

Wenn die obige Bedingung verletzt ist, sind besondere Untersuchungen notwendig, wobei man sich durchweg auf solche Spezialfälle beschränkt, die auf das Problem des eindimensionalen Oszillators führen. Bei gewissen ebenen Magnetfeldern und bei der θ -Pinch Geometrie ist dies der Fall, auf die sich auch die vorliegende Arbeit beschränkt.

Folgende Fälle dieser Art sind bereits diskutiert worden.

1. Räumlich homogene aber zeitlich stark veränderliche Felder. Bei homogenen Magnetfeldern (harmonischer Oszillator) mit $B(t) \sim t^\alpha$, $\alpha > -1$, lassen sich die Bahnkurven in Besselfunktionen exakt angeben, und man prüft nach, daß μ eine endliche Variation erfährt beim Übergang von $t = -\infty$ nach $t = +\infty$ (Tamor /5/).

Tamor gelingt es, für Felder mit gleicher Singularität im Nullpunkt und im Unendlichen ebenfalls den Sprung von μ zu berechnen, wobei er von einer Art Phasenmittelung Gebrauch macht. Cavaliere et al. /6/ behandeln allgemeinere Fälle eines homogenen Magnetfeldes mit zeitlichen Nulldurchgängen, wobei sie die asymptotischen Entwicklungen in den einzelnen adiabatischen Zeitintervallen in der komplexen t -Ebene miteinander verbinden.

Wenn die Felder nicht fast homogen sind, ist der Begriff des magnetischen Momentes μ nicht mehr brauchbar. Die passende adiabatische Invariante ist hier für den eindimensionalen Oszillator das Wirkungsintegral J , das in der alten Quantenmechanik bei der Diskussion um die Brauchbarkeit der damaligen Quantisierungsmethode eine bedeutende Rolle spielte. Bei einem homogenen Magnetfeld ohne elektrostatisches Feld sind J und μ bis auf einen Faktor gleich.

2. Aus der Theorie des eindimensionalen Oszillators nach Gardner /3/ oder Lenard /7/ folgt für einen einfachen glatten Potentialtopf, bei dem eine endliche Änderung des Magnetfeldes über einen Gyrationradius zugelassen ist, daß bei zeitunabhängigem Anfangs- und Endzustand J in jeder Ordnung (s. Abschnitt II, 1.) adiabatisch invariant ist. Lenard setzt für die Lösung der Liouville-Gleichung in der Phasenebene des eindimensionalen Oszillators eine asymptotische Entwicklung an und benutzt dann die bekannte Äquivalenz zwischen Bewegungsgleichung und Liouville-Gleichung zum Nachweis der adiabatischen Invarianz von J . Gardner gelingt dieser Nachweis auf weniger explizitem Weg durch eine Folge kanonischer Transformationen in der Phasenebene.

3. Bei stark inhomogenen Feldern, z.B. bei einem unstetigen Magnetfeld oder starken räumlichen Oszillationen gilt unter gewissen Bedingungen ebenfalls die adiabatische Invarianz von J , wie Schindler /8/,/9/ unter Modifizierung der Methode von Lenard gezeigt hat.

Zu den Voraussetzungen von 2. und 3. gehörte es, daß das Magnetfeld überall im Raum dieselbe Richtung besitzt. Es entsteht nun die Frage, ob sich die Teilchen auch noch adiabatisch verhalten in Feldern, die insofern stark inhomogen sind, als sie eine räumliche Richtungsumkehr und damit einen räumlichen Nulldurchgang besitzen. Dies zu untersuchen ist das Programm der vorliegenden Arbeit. Ein typisches Beispiel für eine solche Konfiguration ist der θ -Pinch mit eingeschlossenem antiparallelem Magnetfeld.

Ein grundsätzlicher Unterschied gegenüber den unter 3. betrachteten, ebenfalls stark inhomogenen Feldern ist der, daß adiabatische Invarianz im Sinne der früheren Arbeiten nicht für alle Bahnen vorliegt, wie man sich schnell an Hand einfacher Beispiele überlegen kann. Daher wird man fragen, ob es nicht möglich ist, durch irgendein Mittelungsverfahren zu einer adiabatischen Invarianten zu gelangen und damit eine adiabatische Energieabschätzung im θ -Pinch für eine Teilchengruppe zu erhalten.

Da sich bei den stark inhomogenen Feldern unter 3. Lenard's Methode als brauchbar erwiesen hat, soll hier zunächst nach diesem Verfahren das Wirkungsintegral eines einzelnen Teilchens untersucht werden - Lenards Umweg über die Liouville-Gleichung wird sich dabei als vermeidbar herausstellen -, und erst nach der Ausschöpfung des Einteilchenbildes mit einer Gruppenmittelung begonnen werden.

II 1. Definitionen und Voraussetzungen

Eine präzise Formulierung der adiabatischen Invarianz in einem Hamiltonsystem mit einem Freiheitsgrad

$$H = H(p, q, t)$$

kann folgendermaßen getroffen werden: Man führt einen Zeitmaßstab $1/\epsilon$ ein, so daß der Übergang $\epsilon \rightarrow 0$ eine unendlich langsame Änderung des Systems bedeutet, und schreibt

$$H = H(p, q, \epsilon t) = H(p, q, \tau), \quad \tau = \epsilon t.$$

Sei (τ_1, τ_2) ein festes Zeitintervall in der τ -Skala, dann benötigt das System für den Übergang

$$H(p, q, \tau_1) \rightarrow H(p, q, \tau_2)$$

in der t -Skala eine Zeit von der Ordnung $1/\epsilon$ und die Änderung einer im System definierten Größe Q innerhalb dieses Zeitintervalls wird i.a. von ϵ abhängen, also

$$(1) \quad \Delta Q = Q(\tau_2) - Q(\tau_1) = \Delta Q(\epsilon)$$

Wenn es eine natürliche Zahl n gibt und eine Konstante M_n , so daß für alle hinreichend kleinen ϵ ($\epsilon < \epsilon_n$) gilt

$$(2) \quad |\Delta Q| < \epsilon^n M_n,$$

dann sagt man, Q ist eine adiabatische Invariante n -ter Ordnung. Gibt es zu jedem n eine solche Konstante M_n , dann ist Q adiabatisch invariant in jeder Ordnung. Dies bedeutet nicht, daß Q konstant ist; das wäre der Fall, wenn sich ϵ_n und M_n unabhängig von n wählen lassen.

Angenommen, Q hängt noch von weiteren Parametern außer ϵ ab. Lassen sich ϵ_n und M_n unabhängig von ihnen wählen, dann ist Q adiabatisch invariant gleichmäßig in diesen Parametern.

Wenn in der pq -Ebene die Linien $H(p,q,\tau) = \text{const}$ zu jedem Zeitpunkt τ mit $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ in sich geschlossene Kurven bilden, dann kann man das Wirkungsintegral J folgendermaßen definieren: Die Linie $H(p,q,\tau) = E$ schließt eine Fläche F ein, die gegeben ist durch

$$(3) \quad F(H,\tau) = \oint pdq = \oint p(E,q,\tau) dq \quad ,$$

$$H=E$$

Das Wirkungsintegral J ist dann für Punkte aus der Phasenebene definiert als

$$(4) \quad J(p,q,\tau) = F(H(p,q,\tau),\tau) \quad ,$$

d.h. es ist die Fläche unter derjenigen Linie $H = \text{const}$, auf der sich der Punkt (p,q) zur Zeit τ befindet.

Unter der Voraussetzung, daß die Linien $H = \text{const}$ topologisch ein System konzentrischer Kreise bilden und die Hamiltonfunktion hinreichend glatt ist, haben Lenard /7/ und Gardner /3/ auf zwei verschiedenen Wegen gezeigt, daß für einen Punkt, der sich entsprechend den Bewegungsgleichungen in der Phasenebene bewegt, J adiabatisch invariant in jeder Ordnung ist, wenn Anfangs- und Endzustand exakt zeitlich konstant sind. Diese Aussage läßt sich auf die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld anwenden, wenn sich seine Hamiltonfunktion in der oben angegebenen Form schreiben läßt, also

$$(5) \quad H(\mathbf{y}, \mathbf{r}, \tau) = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{y} - \frac{e}{c} \mathcal{A}(\mathbf{r}, \tau) \right)^2 + e\phi(\mathbf{r}, \tau) = H(p, q, \tau)$$

mit passend gewählten kanonisch konjugierten Variablen p und q . Das ist bei vielen eindimensionalen Feldern der Fall, z.B. bei der θ -Pinch-Konfiguration, jedoch ist die Bedingung an die topologischen Eigenschaften der Phasenebene i.a. nicht mehr erfüllt, wenn das Magnetfeld einen räumlichen Nulldurchgang besitzt. Ein einfaches Beispiel soll dies erläutern:

Ein ebenes Magnetfeld in z-Richtung nehme linear in x-Richtung zu, also

$$(6) \quad \mathcal{A} = (0, 0, x f(\tau)) .$$

Das zugehörige Vektorpotential ist

$$(7) \quad \mathcal{U} = (0, \frac{x^2}{2} f(\tau), 0) ,$$

so daß man mit $\phi \equiv 0$ als Hamiltonfunktion erhält:

$$(8) \quad H(y, x, \tau) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2m} (p_y - \frac{e}{2c} f(\tau) x^2)^2 .$$

Dies ist genau die gewünschte Form, denn p_y und p_z sind konstant. Für $p_y > 0$, $\frac{e}{2c} f(\tau) = F(\tau) > 0$ hat jedoch das Potential ψ

$$(9) \quad \psi(x, \tau) = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2m} (p_y - F(\tau)x^2)^2$$

nicht die Form eines einfachen Topfes, sondern an der Stelle $x = 0$ besitzt es ein Maximum H_S und für $x = \pm (\frac{p_y}{F})^{1/2}$ je ein Minimum (Abb. 2). Daher liegt in der Phasenebene bei $x = 0$, $p_x = 0$ ein Sattelpunkt, und die Niveaulinie durch den Sattelpunkt teilt die Ebene in drei Bereiche, welche jeweils die Topologie eines Systems konzentrischer Kreise besitzen (Abb. 3). Solange ein Teilchen mit seiner Energie der Schwellenenergie H_S nicht zu nahe kommt, bilden die Linien $H = \text{const}$ in seiner Umgebung topologisch ein System konzentrischer Kreise; die adiabatische Invarianz von J gilt also auch für Teilchen mit $H > H_S$, obwohl diese bei jeder Gyration zweimal die Ebene $\mathcal{A} = 0$ schneiden. Nichtadiabatische Effekte sind nur zu erwarten, wenn die Energie des Teilchens in die Nähe von H_S kommt.

Für den Fall, daß die Feldstärke linear mit der Zeit zunimmt ($F(\tau) \sim \tau$), ist eine typische Teilchenbahn in der Phasenebene in Abb. 4 wiedergegeben (die räumliche Bahn zeigt Abb. 1): Die Fläche der beiden Potentialtöpfe, das ist die Fläche unter

der Sattelpunktlinie, nimmt mit der Zeit ab, daher wird das Teilchen die Begrenzungslinie des linken Topfes erreichen, überschreitet sie und umläuft dann auch den rechten Topf. Beim Überschreiten der Sattelpunktlinie springt sein Wirkungsintegral um den Betrag, den die Fläche des rechten Potentialtopfes ausmacht.

Diesen Sprung darf man aber noch nicht als echten nichtadiabatischen Effekt ansehen; er liegt mehr in der Definition von J begründet und wird auch später durch eine Modifizierung der Definition behoben werden. Ein wesentlich nichtadiabatisches Verhalten zeigt dagegen dasjenige Teilchen, das auf dem Sattelpunkt im labilen Gleichgewicht verharret; sein Wirkungsintegral nimmt mit der Zeit ab. Räumlich verläuft seine Bahn in der Ebene $\mathcal{L} = 0$, es führt keine Gyration aus.

Nach der Diskussion dieses Beispiels soll der allgemeine Fall behandelt werden und zwar mit folgenden Voraussetzungen:

Die Hamiltonfunktion besitzt die Form

$$(10) \quad H = p^2/2 + \psi(q, \tau) ,$$

das Potential ψ genügt im Zeitintervall $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ den Bedingungen:

- a) Es ist zweimal stetig differenzierbar,
- b) es besitzt eine Energieschwelle $H_S(\tau)$, die sich in einer genügend kleinen Umgebung des Maximums durch einen Parabelbogen approximieren läßt,
- c) die Fläche des linken und des rechten Potentialtopfes in der pq -Ebene, $F_L(\tau)$ und $F_R(\tau)$, nehmen streng monoton ab.

Die Lage der beiden Minima werde mit $q_L(\tau)$ bzw. $q_R(\tau)$ bezeichnet, die des Maximums mit $q_S(\tau)$. Die Flächen der beiden Potentialtöpfe sind dann gegeben durch

$$(11) \quad F_L(\tau) = \int_{H=H_S}^{\delta} \int_{q \leq q_S} p dq, \quad F_R(\tau) = \int_{H=H_S}^{\delta} \int_{q > q_S} p dq$$

Ein Magnetfeld mit räumlicher Richtungsumkehr braucht nicht für jedes Teilchen auf ein Potential mit einer Energieschwelle zu führen, denn die Form des Potentials hängt auch noch von den Bewegungskonstanten des betreffenden Teilchens ab. Man kann jedoch sich hier auf diese Potentialform beschränken, weil ein Potential in der Form eines einfachen Topfes mit den bekannten Verfahren behandelt werden kann. Die Bedeutung von Bedingung c) wird später noch diskutiert werden.

Der wichtigste Effekt eines solchen Potentials ist, wie schon oben erwähnt, daß die Schwingungsdauer für Teilchen mit einer Energie in der Nähe von H_S divergiert. Um den Typ der Singularität im "eingefrorenen" Hamiltonsystem, d.h. τ ist in ψ konstant zu halten, in Abhängigkeit von $\delta = |H - H_S|$ festzustellen, approximiert man am einfachsten die Schwelle durch einen Parabelbogen und untersucht das Verhalten der Teilchen in der Nähe des Scheitelpunktes.

Das Potential (Abb. 5) habe also die Gestalt

$$(12) \quad \psi(x) = H_S - \frac{a^2}{2} x^2$$

Ein Teilchen starte zur Zeit $t = 0$ mit einer Energie $H < H_S$ von der Stelle x_0 in Richtung auf den Scheitelpunkt. Der Umkehrpunkt \tilde{x} ist durch $\frac{a^2}{2} \tilde{x}^2 = \delta$ gegeben, die Geschwindigkeit an der Stelle x beträgt $v = -\sqrt{2(H-\psi)} = -a(x^2 - \tilde{x}^2)^{1/2}$.

Damit wird die Zeit, die das Teilchen benötigt, um von x_0 bis zum Umkehrpunkt \tilde{x} zu gelangen:

$$\begin{aligned}
 (13) \quad \int dt &= \int_{x_0}^{\tilde{x}} \frac{dx}{\dot{x}} = -\frac{1}{a} \int_{x_0}^{\tilde{x}} \frac{dx}{(x^2 - \tilde{x}^2)^{1/2}} \\
 &= -\frac{1}{a} \{ \ln \tilde{x} - \ln(x_0 + (x_0^2 - \tilde{x}^2)^{1/2}) \}
 \end{aligned}$$

Die Schwingungsdauer θ divergiert also im zeitunabhängigen System für kleine δ wie $-\ln \tilde{x}$, oder

$$(14) \quad \theta \sim -\ln \delta .$$

Das gleiche Resultat liefert die entsprechende Rechnung auch für $H > H_s$.

2. Eine Ungleichung für das Wirkungsintegral

Für die Untersuchung, wie die Invarianz für Energien in der Nähe von H_s verloren geht, bzw. was sich von ihr noch retten läßt, ist die explizitere Methode von Lenard geeigneter als die vielleicht elegantere von Gardner. Die ersten Teile der folgenden Rechnung lehnen sich daher an Lenard's Methode an. Es stellt sich jedoch heraus, daß der dort beschrittene Umweg über die Liouville-Gleichung vermieden werden kann.

Es ist zweckmäßig, statt p und q neue Koordinaten J und s einzuführen, wobei $J(p, q, \tau)$ das schon oben definierte Wirkungsintegral und s die Bogenlänge entlang der Linie $H(p, q, \tau) = \text{const}$ ist. Um zu eindeutigen Definitionen zu kommen, sei die Rechnung zunächst auf den linken Potentialtopf beschränkt, d.h. $q \leq q_s(\tau)$, $J(p, q, \tau) \leq F_1(\tau)$. s werde im Uhrzeigersinn von $p = 0$, $q \leq q_1(\tau)$ aus gemessen (Abb. 7). Die Umrechnung der zeitlichen Änderung einer beliebigen Größe $f(p, q, \tau)$:

$$(15) \quad \frac{df}{dt} = \epsilon \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p}$$

auf die neuen Koordinaten erfolgt am einfachsten an Hand geometrischer Begriffe:

Erweitert man die pq -Ebene zu einem dreidimensionalen Raum durch Einführung einer dritten Koordinate in Richtung $\mathcal{R} = \dot{i} \times \dot{j}$ (\dot{i} = Einheitsvektor in p -Richtung, \dot{j} = Einheitsvektor in q -Richtung), dann gilt $\dot{j} \times \mathcal{N} = \mathcal{R}$ mit $\dot{j} = \nabla H / |\nabla H|$, \mathcal{N} = Einheitsvektor in Richtung wachsender s , und man kann für die Poisson-Klammer schreiben:

$$(16) \quad \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p} = \mathcal{R} \cdot (\nabla H \times \nabla f) = \dot{j} \cdot (\mathcal{N} \times (\nabla H \times \nabla f)) \\ = |\nabla H| \frac{\partial f}{\partial s} .$$

Es gilt also in den Koordinaten J und s :

$$(17) \quad \frac{df}{dt} = \epsilon \frac{\partial f}{\partial \tau} + |\nabla H| \frac{\partial f}{\partial s} ,$$

wobei die partielle Abteilung nach τ weiterhin bei festem p und q zu verstehen ist. Dies soll auch im folgenden immer der Fall sein, sofern es nicht ausdrücklich anders erwähnt ist.* Insbesondere gilt für J selbst:

$$(18) \quad \frac{dJ}{dt} = \epsilon \frac{\partial J}{\partial \tau} .$$

$W(t)$ sei das Wirkungsintegral speziell des Teilchens, das sich zur Zeit t_1 an der Stelle J_1, s_1 befindet. Dann gilt

$$(19) \quad W(t_1) = W_1 = J_1, \quad \frac{dW}{dt} = \epsilon \frac{\partial J}{\partial \tau}$$

* Lenard setzt jetzt für eine spezielle Lösung der Liouville-Gleichung

$$\epsilon \frac{\partial f}{\partial \tau} + |\nabla H| \frac{\partial f}{\partial s} = 0$$

eine asymptotische Entwicklung nach ϵ an, diskutiert deren Eigenschaften, und schließt dann später über die Charakteristiken dieser Gleichung auf das einzelne Teilchen zurück.

Man kann dies als Differentialgleichung für W auffassen und formal eine Lösung angeben (vgl. Schindler /8/):

$$(20) \quad W(t) = J_1 + \varepsilon(f_1 + R),$$

$$(21) \quad f_1 = \int_{s_1}^s \frac{1}{|\nabla H|} \frac{\partial J}{\partial \tau} ds,$$

$$R = - \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{\partial f_1}{\partial \tau} d\tau,$$

wobei das Integral über s längs derjenigen Linie $H = \text{const}$ (bei festem τ !) zu erstrecken ist, auf welcher sich das Teilchen zur Zeit τ befindet, und das Integral über τ längs der richtigen Teilchenbahn.

Man wird auf Gleichung (20) geführt, wenn man für W eine asymptotische Entwicklung nach ε ansetzt, nur bis zur ersten Ordnung entwickelt und das Restglied explizit bestimmt. Daß (20) eine Lösung der Differentialgleichung (19) ist, sieht man sofort, wenn man in

$$(22) \quad \frac{dW}{dt} = \varepsilon^2 \frac{\partial f_1}{\partial \tau} + \varepsilon |\nabla H| \frac{\partial f_1}{\partial s} + \varepsilon^2 \frac{dR}{d\tau}.$$

die Beziehung (21) einsetzt; auch die Anfangsbedingung ist erfüllt. Es muß noch gezeigt werden, daß f_1 eine eindeutige Funktion von s ist, also $\oint \frac{1}{|\nabla H|} \frac{\partial J}{\partial \tau} ds = 0$ gilt (s. Lenard /7/). Hierbei ist zu betrachten, daß die Integration im eingefrorenen Hamiltonsystem durchzuführen ist, τ ist also als zeitunabhängiger Parameter zu behandeln. Dem unmittelbaren geometrischen Beweis aus der Tatsache, daß J eine Fläche ist, sei hier der etwas umständlichere analytische Beweis vorgezogen, da einige der benutzten Begriffe auch später noch benötigt werden.

Wenn man die Zeitvariable im eingefrorenen System mit θ bezeichnet, ist

$$\begin{aligned}
 (23) \quad ds &= (d^2p + d^2q)^{1/2} = \left\{ 1 + \left(\frac{\partial p}{\partial q} \right)_H^2 \right\}^{1/2} |dq| \\
 &= \left\{ 1 + \left(\frac{\partial H}{\partial q} \right)^2 / \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)^2 \right\}^{1/2} |dq| \\
 &= |\nabla H| \frac{dq}{q} = |\nabla H| d\theta .
 \end{aligned}$$

Wegen $J = F(H, \tau)$ ist

$$(24) \quad \frac{\partial J}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial F}{\partial \tau} \right)_H + \frac{\partial F}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \tau} .$$

Mit $F = \oint pdq = \sqrt{2} \oint \sqrt{H-\psi} dq$ wird

$$(25) \quad \frac{\partial F}{\partial H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \oint \frac{dq}{\sqrt{H-\psi}} = \oint \frac{dq}{q} = \oint d\theta = \theta ,$$

$$(26) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \tau} \right)_H = - \frac{1}{\sqrt{2}} \oint \frac{\psi_\tau}{\sqrt{H-\psi}} dq = - \oint \psi_\tau d\theta .$$

Da $\left(\frac{\partial F}{\partial \tau} \right)_H$ nur eine Funktion von H ist und nicht von s abhängt, erhält man mit $\frac{\partial H}{\partial \tau} = \psi_\tau$:

$$\begin{aligned}
 (27) \quad \oint \frac{1}{|\nabla H|} \frac{\partial J}{\partial \tau} ds &= \oint \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial \tau} \right)_H + \theta \psi_\tau \right\} d\theta \\
 &= \theta \left(\frac{\partial F}{\partial \tau} \right)_H + \theta \oint \psi_\tau d\theta = 0
 \end{aligned}$$

Man erhält also für das Wirkungsintegral des Teilchens

$$(28) \quad W(\tau) = W(\tau_1) + \varepsilon \left\{ f_1(J, s, \tau) - \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{\partial f_1}{\partial \tau} d\tau \right\}$$

Auch für den rechten Potentialtopf und für $H > H_s$ lassen sich J und s als neue Koordinaten einführen, und man kann die Rechnung wieder genauso und mit demselben Ergebnis durchführen,

solange das Teilchen nicht den Rand dieser Gebiete, d.h. die Linie $H=H_s$ berührt.

Gleichung (28) ist für die exakte Berechnung von W ohne Bedeutung, da sie die Kenntnis der gesamten Bahnkurve voraussetzt; wichtig ist sie jedoch für Abschätzungen, denn man kann leicht zeigen, daß im Falle eines einfachen, glatten Potentialtopfes der Klammerausdruck beschränkt ist, aus Gleichung (28) folgt dann also unmittelbar die adiabatische Invarianz des Wirkungsintegrals.

Bei dem hier zu untersuchenden doppelten Potentialtopf divergiert der Klammerausdruck, wenn sich das betrachtete Teilchen der Schwellenenergie nähert, es ist jedoch nützlich, die Art der Divergenz zu kennen. Da die Abschätzung der Terme ziemlich langwierig ist, wird die ausführliche Rechnung im Anhang wiedergegeben; das Ergebnis lautet:

Es gibt Konstanten A und B , so daß

$$(29) \quad |f_1| \leq A \ln^2 \delta(\tau), \quad \left| \frac{\partial f_1}{\partial \tau} \right| \leq B \frac{\ln^2 \delta(\tau)}{\delta(\tau)},$$

mit $\delta(\tau) = |H(\tau) - H_s(\tau)|$.

Daher gilt für W :

$$(30) \quad |W(\tau) - W(\tau_1)| \leq \varepsilon \left\{ A \ln^2 \delta(\tau) + B \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{\ln^2 \delta(\tau')}{\delta(\tau')} d\tau' \right\}.$$

Eigentlich gilt die Abschätzung (29) nur für kleine δ ; da f_1 und $\frac{\partial f_1}{\partial \tau}$ für große δ beschränkt sind, müßte in (30) daher $|\ln \delta|$ durch $|\ln \delta| + C$ ersetzt werden mit einer geeigneten positiven Konstanten C . Zur Vereinfachung der Schreibweise wird jedoch die Form (30) beibehalten, da kaum Mißverständnisse entstehen können.

3. Konstruktion der Majorante

Ein streng adiabatisches Teilchen, das sich zur Zeit τ_1 mit dem Wirkungsintegral W_1 , $F_1(\tau_2) \leq W_1 \leq F_1(\tau_1)$, im linken Potentialtopf befindet, bleibt bei konstantem $W = W_1$ so lange darinnen, bis die Fläche dieses Potentialtopfes auf den Wert W_1 abgesunken ist (Abb. 6); das Wirkungsintegral springt jetzt um den Betrag ΔW , den die Fläche des anderen Potentialtopfes ausmacht, und bleibt dann wieder konstant. Ein extrem nichtadiabatisches Teilchen verweilt in der Nähe des Sattelpunktes und sein Wirkungsintegral nimmt daher ab. Zwischen diesen beiden Extremen wird das tatsächliche Verhalten der Teilchen liegen, d.h. es ist, abgesehen von dem Sprung ΔW , keine nichtadiabatische Zunahme des Wirkungsintegrals zu erwarten; es wird zur Zeit τ_2 also gelten:

$$(31) \quad W_2 \leq W_1 + \Delta W + O(\epsilon).$$

Um dies zu zeigen, wird eine Funktion $W^+(W_1, \tau)$ konstruiert, die immer größer ist als das Wirkungsintegral eines Teilchens, das zur Zeit τ_1 den Wert $W(\tau_1) = W_1$ besitzt, aber nur um einen Betrag der Ordnung $\epsilon \ln^4 \epsilon$ vom Wirkungsintegral des streng adiabatischen Teilchens abweicht.

Aus Gleichung (30) folgt:

$$(32) \quad W(\tau) \leq W_1 + \epsilon \left\{ A \ln^2 \delta + B \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{\ln^2 \delta}{\delta} d\tau' \right\},$$

wobei δ jetzt als Funktion von W und τ angesehen wird:

$\delta(W, \tau)$ ist die Differenz zwischen der Schwellenenergie $H_S(\tau)$ und der Energie eines Teilchens, das zur Zeit τ das Wirkungsintegral W besitzt, also

$$\delta(W, \tau) = |H_S(\tau) - H(W, \tau)|,$$

wobei $H(W, \tau)$ gegeben ist durch

$$(33) \quad F(H, \tau) = W.$$

Angenommen, es gibt eine stetige Funktion $W^+(\varepsilon, W_1; \tau)$, welche der Gleichung genügt:

$$(34) \quad W^+(\tau) = W_1 + \varepsilon \{ A \ln^2 \delta(W^+(\tau), \tau) + B \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{\ln^2 \delta(W^+(\tau'), \tau')}{\delta(W^+(\tau'), \tau')} d\tau' \}.$$

In dem τ -Bereich, in welchem W^+ existiert, gilt dann $W^+(\tau) > W(\tau)$. Das sieht man folgendermaßen:

Es ist $W^+(\tau_1) > W(\tau_1) = W_1$; wenn es einen Zeitpunkt $\tilde{\tau}$ gibt, an dem zum ersten Mal $W^+(\tilde{\tau}) = W(\tilde{\tau})$ gilt, dann ist $W^+(\tau) > W(\tau)$ für $\tau_1 \leq \tau < \tilde{\tau}$ und damit auch

$$(35) \quad H(W^+(\tau), \tau) > H(W(\tau), \tau),$$

$$\delta(W^+(\tau), \tau) = H_S(\tau) - H(W^+(\tau), \tau)$$

$$\tau_1 \leq \tau < \tilde{\tau}$$

$$(36) \quad < H_S(\tau) - H(W(\tau), \tau)$$

$$= \delta(W(\tau), \tau)$$

Gleichung (32) kann dann folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$(37) \quad \begin{aligned} W(\tilde{\tau}) &\leq W_1 + \varepsilon \{ \ln^2 \delta(W, \tilde{\tau}) + B \int_{\tau_1}^{\tilde{\tau}} \frac{\ln^2 \delta(W, \tau')}{\delta(W, \tau')} d\tau' \} \\ &< W_1 + \varepsilon \{ \ln^2 \delta(W^+, \tilde{\tau}) + B \int_{\tau_1}^{\tilde{\tau}} \frac{\ln^2 \delta(W^+, \tau')}{\delta(W^+, \tau')} d\tau' \} \\ &= W^+(\tilde{\tau}), \end{aligned}$$

was aber im Widerspruch zur Voraussetzung $W(\tilde{\tau}) = W^+(\tilde{\tau})$ steht. Es gilt also für alle τ , für die $W^+(\tau)$ existiert:

$$(38) \quad W^+(\tau) > W(\tau).$$

Um zu untersuchen, ob und für welche τ eine solche Funktion $W^+(\tau)$ existiert, wird Gleichung (34) differenziert:

$$(39) \quad \frac{dW^+}{d\tau} = 2\epsilon A \frac{\ln\delta}{\delta} \frac{d}{d\tau} \{H_S(\tau) - H(W^+, \tau)\} + \epsilon B \frac{\ln^2\delta}{\delta} .$$

Mit $\frac{d}{d\tau} \{H_S(\tau) - H(W^+, \tau)\} = \frac{dH_S}{d\tau} - \frac{\partial H}{\partial W} \frac{dW^+}{d\tau} - \left(\frac{\partial H}{\partial \tau}\right)_W$ erhält man:

$$(40) \quad \frac{dW^+}{d\tau} \left\{1 + \epsilon \frac{2A \ln\delta}{\delta} \frac{\partial H}{\partial W}\right\} = \epsilon \frac{\ln\delta}{\delta} \left\{2A \left(\frac{dH_S}{d\tau} - \left(\frac{\partial H}{\partial \tau}\right)_W\right) + B \ln\delta\right\}$$

Dies ist eine Differentialgleichung vom Typ $x'(\tau) = F(x, \tau)$ mit

$$F(x, \tau) = \epsilon \frac{f_\tau + g}{1 - \epsilon f_x} ,$$

$$(41) \quad f = A \ln^2 \delta(x, \tau) ,$$

$$g = B \frac{\ln^2 \delta(x, \tau)}{\delta(x, \tau)} .$$

Durch jeden Punkt der (x, τ) -Ebene, in dessen Umgebung F stetig und beschränkt ist und einer Lipschitzbedingung genügt, geht genau eine Lösungskurve (z.B. Kamke /10/, S. 104). Da

$$\frac{\partial H}{\partial W} \sim \frac{1}{|\ln\delta|} ,$$

gibt es eine Konstante C_1 , so daß

$$(42) \quad 1 - \epsilon f_x > 0 \quad \text{für} \quad \delta(x, \tau) \geq \bar{\delta} = \epsilon C_1 ,$$

in diesem Gebiet ist also die Differentialgleichung eindeutig lösbar.

Wenn ϵ hinreichend klein ist, gibt es ein $x_1 > F_1(\tau_2)$, so daß $\delta(x_1, \tau_1) > \bar{\delta}$; es existiert dann also in einer Umgebung von τ_1 eine Funktion $x(\tau)$ mit $x(\tau_1) = x_1$, welche die Beziehung

$$(43) \quad x'(1 - \epsilon f_x) = \epsilon f_\tau + \epsilon g$$

oder

$$(44) \quad x' = \epsilon \frac{df}{d\tau} + \epsilon g$$

erfüllt. Die Integration dieser Gleichung liefert

$$(45) \quad x(\tau) = x_1 + \epsilon \left\{ f(x, \tau) - f(x_1, \tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau} g(x, \tau') d\tau' \right\}$$

Erfüllt x_1 die Beziehung

$$(46) \quad W_1 = x_1 - \epsilon f(x_1, \tau_1),$$

dann ist $x(\tau)$ genau die gesuchte Majorante $W^+(\tau)$. Für beliebige W_1 wird sich Gleichung (46) sicher nicht befriedigen lassen, zumindest muß $\delta(W_1, \tau_1) > \bar{\delta} = \epsilon C_1$ erfüllt sein. Eine genauere Betrachtung liefert schnell das Ergebnis, daß es eine Konstante C_2 gibt, so daß Gleichung (46) immer eine Lösung hat, wenn

$$(47) \quad \delta(W_1, \tau_1) > C_2 \epsilon |\ln \epsilon|.$$

Damit erhält man insgesamt:

Wenn Gleichung (47) erfüllt ist, definiert Gleichung (34) eine Funktion $W^+(\tau)$, die immer größer ist als $W(\tau)$ und solange existiert, wie $\delta(W^+, \tau) > \bar{\delta} = \epsilon C_1$ gilt.

$\bar{\tau}$ bezeichne den Zeitpunkt, an dem $\delta(W^+(\tau), \tau) = \bar{\delta}$ gilt.

4. Eigenschaften der Majorante

Im folgenden soll also ein Teilchen im linken Topf betrachtet werden, welches zur Zeit τ_1 mit einem solchen W_1 startet, daß in einem Intervall $(\tau_1, \bar{\tau}) \subset (\tau_1, \tau_2)$ die Majorante W^+ existiert, und daß es ein $\tau^* \in (\tau_1, \tau_2)$ gibt mit $W_1 = F_1(\tau^*)$ (Abb. 8). Bei hinreichend klein gewähltem $\epsilon = \epsilon_0$ gibt es sicher ein solches

Teilchen. Für $\epsilon < \epsilon_0$ ist $\bar{\tau}$ eine Funktion von ϵ , und man kann sich leicht davon überzeugen, daß

$$(48) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{\tau}(\epsilon) = \tau^* .$$

Um eine Aussage über die Größe von $W^+(\bar{\tau})$ machen zu können, muß man das Integral in Gleichung (34) abschätzen:

$$(49) \quad \int_{\tau_1}^{\bar{\tau}} \frac{\ln^2 \delta(W^+, \tau')}{\delta(W^+, \tau')} d\tau' = \int_{\delta_1}^{\bar{\delta}} \frac{\ln^2 \delta}{\delta} \left\{ \frac{d\delta}{d\tau} \right\}^{-1} d\delta$$

Hierzu muß zunächst der Ausdruck

$$(50) \quad \frac{d\delta}{d\tau} = \frac{dH_S}{d\tau} - \frac{\partial H}{\partial W} \frac{dW^+}{d\tau} - \left(\frac{\partial H}{\partial \tau} \right)_W$$

als Funktion von δ abgeschätzt werden, wobei nur das Verhalten für kleine δ interessiert.

Es war vorausgesetzt worden, daß die Fläche der beiden Potentialtöpfe im Zeitintervall $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ streng monoton abnimmt, es gibt also eine positive Zahl α , so daß

$$(51) \quad \frac{dF_1(\tau)}{d\tau} < -\alpha \quad \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 .$$

Bei vernünftigem Verhalten des Potentials darf man erwarten, daß auch

$$(52) \quad \frac{d}{d\tau} F(H_S(\tau) - d, \tau) < -\frac{\alpha}{2}$$

gilt für $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ und hinreichend kleines d , d.h. wenn die Fläche unter der Linie $H = H_S$ mit der Zeit abnimmt, dann nimmt auch die Fläche unter der in der Nachbarschaft liegenden Linie $H = H_S - d$ ab.

$$\text{Wegen } \frac{d}{d\tau} F(H_S - d, \tau) = \frac{\partial F}{\partial H} \frac{dH_S}{d\tau} + \left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)_H = \frac{\partial F}{\partial H} \left\{ \frac{dH_S}{d\tau} - \left(\frac{\partial H}{\partial \tau}\right)_W \right\}$$

gilt für kleine δ :

$$(53) \quad \frac{dH_S}{d\tau} - \left(\frac{\partial H}{\partial \tau}\right)_W < -\frac{\alpha}{2\theta}$$

Aus Gleichung (40) sieht man dann, daß für kleine δ $\frac{dW^+}{d\tau}$ immer positiv ist, es gilt daher

$$(54) \quad \frac{d\delta}{d\tau} = \frac{1}{\theta} \left\{ \frac{\partial F}{\partial H} \left(\frac{dH_S}{d\tau} - \left(\frac{\partial H}{\partial \tau}\right)_W \right) - \frac{dW^+}{d\tau} \right\} < -\frac{\alpha}{2\theta}$$

Damit erhält man als Abschätzung für das Integral

$$(55) \quad \left| \int_{\delta_1}^{\bar{\delta}} \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{d\tau} \left\{ \frac{d\delta}{d\tau} \right\}^{-1} d\delta \right| < C_6 \ln^4 \bar{\delta} = O(\ln^4 \epsilon)$$

und aus Gleichung (34) folgt für $W^+(\bar{\tau})$ die Abschätzung:

$$(56) \quad W^+(\bar{\tau}) = W_1 + O(\epsilon \ln^4 \epsilon) .$$

Die Konstante C_6 kann, wie auch alle anderen Konstanten in Abschätzungen, unabhängig von der Anfangsposition des Teilchens gewählt werden, sie enthält also nur die Eigenschaften des Potentials, und daher darf auch gefahrlos zur Vereinfachung der Schreibweise das 0-Symbol verwendet werden (zum Begriff des 0-Symbols z.B. de Bruijn /11/).

Von großer Wichtigkeit ist noch die Abhängigkeit der Differenz $\tau^* - \bar{\tau}(\epsilon)$ von ϵ . Mit der Abkürzung $W^+(\bar{\tau}(\epsilon)) = \bar{W}(\epsilon)$ liefert das Differenzieren der Identität $\delta(\bar{W}(\epsilon), \bar{\tau}(\epsilon)) = \bar{\delta} = \epsilon C'_1$ nach ϵ :

$$(57) \quad \frac{\partial \delta}{\partial W} \frac{d\bar{W}}{d\epsilon} + \left(\frac{\partial \delta}{\partial \tau}\right)_W \frac{d\bar{\tau}}{d\epsilon} = C_1 ,$$

$$(58) \quad \frac{d\bar{\tau}}{d\epsilon} = \left\{ C_1 - \frac{\partial \delta}{\partial W} \frac{d\bar{W}}{d\epsilon} \right\} / \left(\frac{\partial \delta}{\partial \tau}\right)_W$$

Für kleine δ gilt

$$(59) \quad \left\{ \left(\frac{\partial \delta}{\partial \tau} \right)_W \right\}^{-1} > - \frac{2\theta}{\alpha}, \quad \frac{\partial \delta}{\partial W} = - \frac{\partial H}{\partial W} = - \frac{1}{\theta}$$

Setzt man dies in Gleichung (58) ein, dann erhält man mit passenden positiven Konstanten C_7 und C_8 :

$$(60) \quad \frac{d\bar{\tau}}{d\varepsilon} > C_7 \ln \bar{\delta} - C_8 \frac{d\bar{W}}{d\varepsilon}$$

Die Integration liefert unter Berücksichtigung von $\bar{\tau}(0) = \tau^*$ und $\bar{W}(0) = W_1$:

$$(61) \quad \tau^* - \bar{\tau}(\varepsilon) < O(\varepsilon \ln \varepsilon) + C_8 (\bar{W}(\varepsilon) - W_1) = O(\varepsilon \ln^4 \varepsilon)$$

Als Zwischenergebnis kann man zusammenfassen:

Für ein Teilchen, das zur Zeit τ_1 mit dem Wirkungsintegral W_1 startet, gilt zu einer Zeit $\bar{\tau}$ mit $\tau^* - \bar{\tau} = O(\varepsilon \ln^4 \varepsilon)$:

$$W(\bar{\tau}) < W_1 + O(\varepsilon \ln^4 \varepsilon).$$

Da Gleichung (32) auch im Bereich $H > H_S$ gilt, kann man auch hier, genau wie oben beschrieben, Majoranten konstruieren. Da sich das oben betrachtete Teilchen zur Zeit $\bar{\tau}$ noch im linken Potentialtopf befand, wird es im oberen Bereich, wenn es überhaupt dorthin gelangt, sicher durch eine Funktion majorisiert, die eine Majorante zu dem Teilchen ist, das zur Zeit $\bar{\tau}$ das Wirkungsintegral $F(H_S(\bar{\tau}) + \bar{\delta}, \bar{\tau})$ besitzt.

Für $\tau > \bar{\tau}$ wird also $W^+(\tau)$ durch

$$(62) \quad W^+(\tau) = F(H_S + \bar{\delta}, \bar{\tau}) + \varepsilon \left\{ A \ln^2 \delta(W^+, \tau) + B \int_{\bar{\tau}}^{\tau} \frac{\ln^2 \delta(W^+, \tau')}{\delta(W^+, \tau')} d\tau' \right\}$$

definiert, und man erhält mit Hilfe der gleichen Abschätzungen wie oben das Ergebnis:

$$(63) \quad W^+(\tau_2) = F(H_S + \bar{\delta}, \bar{\tau}) + O(\epsilon \ln^4 \epsilon)$$

Bezeichnet man die Fläche der beiden Potentialtöpfe zusammen mit $F_S(\tau)$, also

$$(64) \quad F_S(\tau) = F_L(\tau) + F_R(\tau) = \lim_{d \rightarrow +0} F(H_S + d, \tau),$$

dann kann man sich leicht die Abschätzung überlegen:

$$(65) \quad F(H_S + \bar{\delta}, \bar{\tau}) = F_S(\tau^*) + O(\epsilon \ln^4 \epsilon)$$

und erhält für das Wirkungsintegral $W(\tau)$ die Aussage:

Sei τ^* so gewählt, daß $\tau_1 \leq \tau^* \leq \tau_2$ und $F_L(\tau^*) = W(\tau_1)$.
Dann gilt $W(\tau_2) < F_S(\tau^*) + O(\epsilon \ln^4 \epsilon)$ für $\epsilon \leq \epsilon_0$.

Diese Ungleichung erhält genau die gewünschte Form (31), wenn man $F_S(\tau^*) = W(\tau_1) + F_R(\tau^*)$ setzt, allerdings gilt sie nur für solche Teilchen, die den folgenden Bedingungen genügen:

- 1.) $F_L(\tau_2) < W(\tau_1) \leq F_L(\tau_1)$
- 2.) Es existiert eine Majorante für alle $\epsilon \leq \epsilon_0$.

Für alle Teilchen, welche 1.) erfüllen, kann man eine Majorante konstruieren, wenn man ϵ hinreichend klein wählt, also

$$(66) \quad W(\tau_2) \leq W_1 + F_R(\tau^*) + O(\epsilon \ln^4 \epsilon) \quad \text{für } \epsilon \leq \epsilon_1(W_1) < \epsilon_0.$$

Von der Beschränkung auf $\epsilon \leq \epsilon_1$, welche verhindert, daß die Aussage gleichmäßig für alle Teilchen gilt, kann man sich aber folgendermaßen freimachen:

Für $\epsilon > \epsilon_1$ beginnt man sofort mit der Majorisierung im oberen Bereich und erhält

$$(67) \quad W(\tau_2) < F_S(\tau_1) + O(\epsilon \ln^4 \epsilon) \quad \text{für } \epsilon_1 < \epsilon \leq \epsilon_0$$

Für $\epsilon = \epsilon_1$ ist gerade $\bar{\tau} = \tau_1$, es gilt also für $\epsilon > \epsilon_1$

$$(68) \quad \tau^* - \tau_1 < C \epsilon_1 \ln^4 \epsilon_1 < C \epsilon \ln^4 \epsilon$$

und damit auch

$$(69) \quad W(\tau_2) < F_S(\tau^*) + O(\epsilon \ln^4 \epsilon) \quad \text{für } \epsilon_1 < \epsilon \leq \epsilon_0$$

Zusammen mit (66) erhält man

$$(70) \quad W(\tau_2) < F_S(\tau^*) + O(\epsilon \ln^4 \epsilon) \quad \text{für } \epsilon \leq \epsilon_0, \quad F_1(\tau_2) \leq W(\tau_1) \leq F_1(\tau_1)$$

Es bleiben jetzt noch die Teilchen zu untersuchen, welche nicht 1.) genügen; bei streng adiabatischem Verhalten würden sie gar nicht die Schwelle überschreiten, und solange sie nicht in die Nähe der Schwelle kommen, gilt bei ihnen die normale adiabatische Invarianz von W . Für die Teilchen, die mit einem W_1 kurz oberhalb von $F_S(\tau_1)$ starten, kann man wieder wie oben beschrieben eine Majorante konstruieren, bei großem ϵ notfalls so, daß man zuerst die Majorante betrachtet, die zu dem Teilchen mit $W_1 = F(H_S + \bar{\delta}, \tau_1)$ gehört, und erst bei hinreichend kleinem ϵ das Teilchen selbst majorisiert, und erhält dann mit demselben Argument wie oben

$$(71) \quad W(\tau_2) < W(\tau_1) + O(\epsilon \ln^4 \epsilon) \quad \text{für } \epsilon \leq \epsilon_0, \quad W(\tau_1) \geq F_S(\tau_1) .$$

Anders ist es dagegen bei den Teilchen, welche mit einem W_1 starten, das nur wenig kleiner als $F_1(\tau_2)$ ist. Hier kann man die Bedeutung der Formel "für hinreichend kleines ϵ " nicht unabhängig von der Ausgangsposition des Teilchens machen, denn je näher W_1 bei $F_1(\tau_2)$ liegt, desto kleiner muß man ϵ wählen, um den endlichen Sprung in der Majorante zu vermeiden. Diese Schwierigkeit läßt sich nur beheben, wenn man den Begriff des Wirkungsintegrals so modifiziert, daß es wieder eine stetige Funktion der Energie wird. Dazu dienen folgende Überlegungen,

bei denen eine Zuordnung zwischen den Niveaus im linken und im rechten Topf getroffen werden soll.

Für jedes J mit $F_1(\tau_2) \leq J \leq F_1(\tau_1)$ gibt es genau ein $\tau^*(J)$, $\tau_1 \leq \tau^* \leq \tau_2$, so daß $F_1(\tau^*) = J$.

Die Funktion $J_r(J)$ sei definiert durch

$$(72) \quad J_r(J) = F_r(\tau^*(J)) .$$

$J_r(J)$ ist dann der Sprung, den das Wirkungsintegral eines streng adiabatischen Teilchens erleidet, das mit $W(\tau_1) = J$ im linken Topf startet.

Entsprechend wird für Werte $F_r(\tau_2) \leq J \leq F_r(\tau_1)$ die Funktion $J_l(J)$ definiert, welche die Umkehrfunktion zu $J_r(J)$ bildet. Nun wird für Teilchen aus dem linken Topf eine Größe K definiert:

$$(73) \quad K^{(1)}(J, \tau) = \begin{cases} J & \text{für } J \geq F_S(\tau) \\ J + J_r(J) & \text{für } F_1(\tau_2) \leq J < F_1(\tau) \\ J + F_r(\tau_2) & \text{für } J < F_1(\tau_2) \end{cases}$$

Entsprechend lautet die Definition für den rechten Topf. $K(F(H, \tau), \tau)$ ist zu jedem Zeitpunkt τ eine monotone, stetige Funktion von H . Für streng adiabatische Teilchen ist $K(\tau) = K(W(\tau), \tau)$ eine Bewegungskonstante: $K(\tau_2) = K(\tau_1)$. Man kann jetzt (70) und (71) zusammenfassen zu

$$(74) \quad K(\tau_2) < K(\tau_1) + O(\epsilon \ln^4 \epsilon) \text{ für } \epsilon \leq \epsilon_0, \quad K(\tau_1) \geq F_S(\tau_2) .$$

Diese Gleichung gilt auch für Teilchen aus dem rechten Topf, denn da kein Topf vor dem andern in seinen Eigenschaften ausgezeichnet ist, gelten alle vorher abgeleiteten Beziehungen in entsprechender Weise auch für den rechten Topf, und man kann die Bezeichnung "l" oder "r" fortlassen. Man darf nicht erwarten, daß Gleichung (74) gleichmäßig für alle Teilchen gilt,

wenn man Teilchen mit beliebig hohen Anfangsenergien zuläßt; es sei daher im folgenden für alle Teilchen $H(\tau_1) \leq H_0$, wobei H_0 eine willkürliche aber fest gewählte obere Grenzenergie ist.

Für die stetige Größe K läßt sich Gleichung (74) mit demselben Argument wie schon früher jetzt auch auf den unteren Bereich, $K(\tau_1) < F_S(\tau_2)$, erweitern, und man erhält mit $\lambda = \epsilon \ln^4 \epsilon$ als Ergebnis aller bisherigen Bemühungen:

Für alle Teilchen mit $H(\tau_1) \leq H_0$ gilt mit denselben Konstanten C und λ_0

$$(75) \quad K(\tau_2) < K(\tau_1) + C\lambda, \quad \lambda \leq \lambda_0.$$

5. Invarianz im Mittel

Da es in einer Gruppe von Teilchen nur sehr wenige geben wird, die beim Auflaufen auf die Energieschwelle sehr lange dort verweilen, entsprechend der Tatsache, daß in der Phasenebene in der Nähe des Sattelpunktes nur wenige Teilchen Platz haben, wird man vermuten, daß bei der Mittelung über eine Teilchengruppe (ohne gegenseitige Wechselwirkung) die nichtadiabatischen Effekte verschwinden. Die Aussage, die man bei der Betrachtung einer Teilchengruppe gegenüber dem einzelnen Teilchen zusätzlich in der Hand hat, ist die Flächenerhaltung in der Phasenebene, und allein mit diesem Argument soll im folgenden die Umkehrung von Gleichung (75) für den Mittelwert von K , damit also die adiabatische Invarianz von K im Mittel, gezeigt werden.

Wenn für jedes Teilchen mit $H(\tau_1) \leq H_0$ gleichmäßig gilt

$$(76) \quad K(\tau_2) \leq K(\tau_1) + O(\lambda),$$

dann gilt dies auch für den Mittelwert von K bei einer beliebigen Teilchengruppe, die durch eine Verteilungsfunktion $f(p, q, \tau)$ beschrieben werde:

$$(77) \quad \langle K(\tau_2) \rangle_f \leq \langle K(\tau_1) \rangle_f + O(\lambda),$$

wobei f den Bedingungen genügen soll

$$(78) \quad \begin{aligned} f(p, q, \tau_1) &\leq A \quad \text{für alle } p, q, \\ f(p, q, \tau_1) &= 0 \quad \text{für } H(p, q, \tau_1) > H_0. \end{aligned}$$

Notwendig ist für Gleichung (77) nur die zweite Bedingung, die andere wird später gebraucht werden. Ferner sei H_0 so groß gewählt, daß $K_0 = F(H_0, \tau_1) > F_S(\tau_1)$.

Von praktischem Interesse ist nur der Fall, wo f die selbst-konsistente Verteilungsfunktion ist; äußerst wichtig für die folgende Rechnung ist aber die Tatsache, daß Gleichung (77) für alle Funktionen gilt, die der Bedingung (78) genügen. Sie gilt daher auch für die Verteilungsfunktion σ einer vollkommen fiktiven Teilchengruppe, für die σ durch folgende Anfangswerte gegeben ist:

$$(79) \quad \sigma(p, q, \tau_1) = \begin{cases} 1 & \text{für } K(p, q, \tau_1) \leq K_0 \\ 0 & \text{für } K(p, q, \tau_1) > K_0 \end{cases}$$

Die Fläche G_1 , welche diese Teilchengruppe zur Zeit τ_1 einnimmt, verformt sich mit der Zeit in eine Fläche G_2 , die zwar i.a. eine andere Form, aber denselben Flächeninhalt K_0 besitzt (Abb. 8). Die Fläche, die von der Linie $K(p, q, \tau_2) = K_0$ umrandet wird, sei G_0 , und zwar ist das die Fläche, welche die Teilchengruppe zur Zeit τ_2 einnehmen würde, wenn sich alle Teilchen streng adiabatisch verhielten. Der Flächenteil von G_2 , der über G_0 hinausragt, sei g^+ , dafür ragt der gleich große Teil g^- von G_0 über G_2 hinaus.

Der Mittelwert von K zur Zeit τ_1 ist

$$(80) \quad \langle K(\tau_1) \rangle_\sigma = \frac{1}{K_0} \int_{G_1} K dF.$$

Zur Zeit τ_2 ist der Mittelwert

$$(81) \quad \langle K(\tau_2) \rangle_\sigma = \frac{1}{K_0} \int_{G_2} K dF = \frac{1}{K_0} \left\{ \int_{G_0} K dF + \int_{g^+} K dF - \int_{g^-} K dF \right\}$$

Da in jedem Punkt von g^+ der Wert von K größer oder gleich dem Maximalwert von K in g^- ist, gilt

$$(82) \quad \int_{g^+} K dF - \int_{g^-} K dF \geq 0$$

und damit

$$(83) \quad \langle K(\tau_2) \rangle_\sigma \geq \frac{1}{K_0} \int_{G_0} K dF$$

Das rechte Integral ist gerade gleich dem Mittelwert von K zur Zeit τ_2 , wenn sich alle Teilchen streng adiabatisch verhalten, also K und damit auch $\langle K \rangle$ konstant bleibt, und daher gleich dem Mittelwert von K zur Zeit τ_1 :

$$(84) \quad \frac{1}{K_0} \int_{G_0} K dF = \langle K(\tau_1) \rangle_\sigma$$

Die explizite Nachrechnung bestätigt dies auch sofort, jedoch ist sie etwas umständlich, da über die fünf verschiedenen Definitionsgebiete von K getrennt zu integrieren ist.

Damit wird aus Gleichung (83):

$$(85) \quad \langle K(\tau_2) \rangle_\sigma \geq \langle K(\tau_1) \rangle_\sigma$$

Wichtig ist, daß hier das Ungleichheitszeichen genau in der umgekehrten Richtung steht wie in Gleichung (77). Da diese aber für jede beliebige Verteilungsfunktion galt, die den beiden angegebenen Bedingungen genügt, also auch für

$$(86) \quad g(p, q, \tau) = A\sigma(p, q, \tau) - f(p, q, \tau)$$

- um g bilden zu können, ist es notwendig, daß f beiden Bedingungen (78) genügt -, erhält man, wenn man f durch g ersetzt:

$$\begin{aligned}
 (87) \quad A\langle K(\tau_2) \rangle_{\sigma} - \langle K(\tau_2) \rangle_f &= \langle K(\tau_2) \rangle_g \\
 &\leq \langle K(\tau_1) \rangle_g + O(\lambda) \\
 &= A\langle K(\tau_1) \rangle_{\sigma} - \langle K(\tau_1) \rangle_f + O(\lambda) \\
 &\leq A\langle K(\tau_2) \rangle_{\sigma} - \langle K(\tau_1) \rangle_f + O(\lambda)
 \end{aligned}$$

und die Umkehrung des Vorzeichens liefert die Ungleichung

$$(88) \quad \langle K(\tau_2) \rangle_f \geq \langle K(\tau_1) \rangle_f + O(\lambda)$$

Zusammen mit Gleichung (77) folgt die adiabatische Invarianz des (modifizierten) Wirkungsintegrals im Mittel:

$$(89) \quad |\langle K(\tau_2) \rangle_f - \langle K(\tau_1) \rangle_f| = O(\epsilon \ln^4 \epsilon)$$

6. Diskussion des Ergebnisses

Es ist eine Größe K , eine Modifizierung des Wirkungsintegrals J , gefunden worden, die zwar nicht mikroskopisch (bei der Betrachtung eines Teilchens) wohl aber noch makroskopisch (bei der Mittelung über eine Teilchengruppe) adiabatisch invariant ist. K kann bei der Kenntnis des zeitlichen Verlaufs von für das Potential charakteristischen Größen, den Flächen der beiden Potentialtöpfe, genauso berechnet werden wie das Wirkungsintegral J .

Die Gleichungen (77), (83), (84) gelten auch für jede monoton steigende Funktion von K , $G(K)$, die gleichmäßig einer Lipschitzbedingung genügt, aus Gleichung (89) wird dann:

$$(90) \quad |\langle G(K(\tau_2)) \rangle_f - \langle G(K(\tau_1)) \rangle_f| = O(\epsilon \ln^4 \epsilon)$$

Wenn man für G z.B. einsetzt $H(K, \tau_2)$, dann liefert Gleichung(90) eine Abschätzung für die mittlere Teilchenenergie der Gruppe zur Zeit τ_2 .

Für das Potential war vorausgesetzt worden, daß die Fläche der beiden Potentialtöpfe streng monoton abnimmt; auch bei streng monotoner Zunahme gilt die Invarianz von K im Mittel, denn durch Zeitumkehr, die im Bilde des eindimensionalen Oszillators möglich ist, wird daraus wieder das vorher betrachtete Problem. Es tritt jedoch das neue Phänomen auf, daß eine Teilchengruppe aufgespalten und auf die beiden Töpfe aufgeteilt wird, und da $H(K, \tau_2)$ in den beiden Töpfen eine verschiedene Funktion ist, muß man bei Anwendung von Gleichung (90) erst wissen, wie sich die Teilchen auf die beiden Töpfe verteilen. Bei hinreichend glatter Verteilungsfunktion wird dies genau entsprechend der Flächenzunahme der einzelnen Potentialtöpfe geschehen, jedoch soll diese Frage hier nicht weiter untersucht werden. Die Voraussetzung, daß sich die Energieschwelle durch einen einfachen Parabelbogen approximieren läßt, ist dagegen nicht so wesentlich. Bei der Approximation durch eine Parabel höherer Ordnung ändern sich zwar die Abschätzungen, aber die Invarianz im Mittel bleibt erhalten, wenn auch in geringerer Ordnung.

Bei dem beschriebenen Mittelungsverfahren war eine Teilchengruppe in der pq -Ebene betrachtet worden. Hat man dagegen eine makroskopische Teilchengruppe, dann ist zu beachten, daß die Bewegungskonstanten, welche die Form des Potentials beeinflussen (im Beispiel am Anfang p_y), für die einzelnen Teilchen verschieden sein können, daher ist i.a. für jedes Teilchen K anders definiert.

III Anhang

Abschätzung von f_1 und $\frac{\partial f_1}{\partial \tau}$.

Es ist $J(p, q, \tau) = 2\sqrt{2} \int_{q_1}^{q_2} \{H(p, q, \tau) - \psi(\xi, \tau)\}^{1/2} d\xi$, wobei die

Umkehrpunkte $q_i(p, q, \tau)$ gegeben sind durch

$$(A1) \quad \psi(q_i, \tau) = H(p, q, \tau)$$

Bezeichnet man wieder die Zeitvariable im eingefrorenen Hamiltonsystem mit θ , dann ist

$$(A2) \quad \left| \frac{\partial J}{\partial \tau} \right| = \sqrt{2} \left| \int_{q_1}^{q_2} \frac{\psi_\tau(q, \tau) - \psi_\tau(\xi, \tau)}{\{H(p, q, \tau) - \psi(\xi, \tau)\}^{1/2}} d\xi \right|$$

$$\leq M\sqrt{2} \int_{q_1}^{q_2} \{H - \psi\}^{-1/2} d\xi = M \oint d\theta' = M\theta$$

$$\text{Für } f_1(J, s, \tau) = \int_0^s \frac{\partial J}{\partial \tau} \frac{ds}{|\nabla H|} = \int_0^\theta \frac{\partial J}{\partial \tau} d\theta'$$

erhält man damit

$$(A3) \quad |f_1| \leq \int_0^\theta \left| \frac{\partial J}{\partial \tau} \right| d\theta' \leq M\theta \oint d\theta' = M\theta^2$$

Hier wurde $s_1 = 0$ gesetzt, was keine Einschränkung der Allgemeingültigkeit bedeutet, denn es ist

$$(A4) \quad \int_{s_1}^s \frac{\partial J}{\partial \tau} \frac{ds}{|\nabla H|} = \int_0^s \frac{\partial J}{\partial \tau} \frac{ds}{|\nabla H|} - \int_0^{s_1} \frac{\partial J}{\partial \tau} \frac{ds}{|\nabla H|},$$

und für das zweite Integral gilt dieselbe Abschätzung wie für das erste.

Die Abschätzung von

$$(A5) \quad \frac{\partial f_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial J}{\partial \tau} + \int_0^{\theta} \frac{\partial^2 J}{\partial \tau^2} d\theta'$$

ist etwas komplizierter. Der hier auftretende Term $\frac{\partial \theta}{\partial \tau}$ hat folgende Bedeutung (Abb. 9): In dem zur Zeit $\tau + \delta\tau$ eingefrorenen System hat die Linie $H = \text{const}$, die durch den Punkt (p, q) geht, i.a. eine andere Gestalt (II) als die entsprechende Linie (I) in dem zur Zeit τ eingefrorenen System, daher benötigt ein Teilchen in den beiden Systemen auch i.a. eine verschiedene Zeit, um von $s = 0$ zum Punkt (p, q) zu gelangen (die Ableitung nach τ ist ja bei festem p und q gemeint).

Das Integral $\theta = \int_0^{\theta} d\theta'$ kann man schreiben

$$(A6) \quad \theta = \int_0^{p_1} \frac{dp'}{p} + \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq'}{q} + \int_{p_1}^{-p_1} \frac{dq'}{q} + \int_{q_2}^q \frac{dq'}{q}$$

Wenn p_1 festgehalten wird, sind q_1 und q_2 Funktionen von τ :

$$(A7) \quad H(p_1, q_i, \tau) = H(p, q, \tau)$$

Differenzieren nach τ liefert

$$(A8) \quad \frac{\partial q_i}{\partial \tau} = \frac{\psi_{\tau}(q, \tau) - \psi_{\tau}(q_i, \tau)}{\psi_q(q_i, \tau)}$$

Da p_1 so gewählt ist, daß $\psi_q(q_i, \tau) \neq 0$, ist $\frac{\partial q_i}{\partial \tau}$ gleichmäßig beschränkt für Energien in der Nähe von H_S . Das ist nicht mehr der Fall für beliebig kleine Energien, so daß die hieraus resultierenden Abschätzungen nicht mehr gleichmäßig für beliebig kleine Energien gelten.

Jetzt kann man dazu übergehen, die Ableitungen der einzelnen Integrale von (A6) abzuschätzen

$$(A9) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{p_1} \frac{dp'}{p} = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{p_1} \frac{dp'}{-\psi_q} = \int_0^{p_1} \psi_q^{-2} \{ \psi_{q\tau} + \psi_{qq} \frac{\partial q'}{\partial \tau} \} dp'$$

$q' = q'(p', p, q, \tau)$ ist wieder gegeben durch

$$(A10) \quad H(p', q', \tau) = H(p, q, \tau) ;$$

Differenzieren und Einsetzen in Gleichung (A9) liefert

$$(A11) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{p_1} \frac{dp'}{p} = \int_0^{p_1} \left[\frac{\psi_{q\tau}(q', \tau) \psi_q(q', \tau)}{\psi_q^2(q', \tau)} + \frac{\psi_{qq}(q', \tau) (\psi_\tau(q, \tau) - \psi_\tau(q', \tau))}{\psi_q^2(q', \tau)} \right] \frac{dp'}{\psi_q(q', \tau)}$$

Da in dem betrachteten Bereich ψ_q^2 nach unten beschränkt ist und alle anderen Terme nach oben beschränkt sind, ist

$$(A12) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{p_1} \frac{dp'}{p} \right| \leq M_1 \int_0^{p_1} \frac{dp'}{p} \leq M_2$$

Anders ist es bei dem dritten Integral, das vom gleichen Typ ist, aber die Integrationsgrenzen p_1 und $-p_1$ besitzt. Hier führt der Integrationsweg in der Nähe des Sattelpunktes vorbei, wo $|\psi_q| \sim |q' - q_s|$, also $\min\{\psi_q^2\} \sim \delta$ ist.

Da alle anderen auftretenden Ableitungen beschränkt sind, ist

$$(A13) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{p_1}^{-p_1} \frac{dp'}{p} \right| \leq \frac{M_3}{\delta} \int_{-p_1}^{p_1} \frac{dp'}{|p|} \leq M_3 \frac{\theta}{\delta}$$

Diese Abschätzung gilt auch, wenn (p, q) auf diesem Stück des Integrationsweges liegt, also $-p_1$ durch p ersetzt ist.

Die Ableitung des zweiten Integrals von (A6) lautet

$$(A14) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq'}{q} = - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{q_1}^{q_2} \frac{\psi_\tau(q, \tau) - \psi_\tau(q', \tau)}{\{H(p, q, \tau) - \psi(q', \tau)\}^{3/2}} dq' + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial q_2}{\partial \tau} \{H - \psi(q_2, \tau)\}^{-1/2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial q_1}{\partial \tau} \{H - \psi(q_1, \tau)\}^{-1/2}$$

Da $|H-\psi|$ in diesem Bereich nach unten beschränkt ist und die Ableitungen der Integrationsgrenzen nach oben beschränkt sind, ist

$$(A15) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{q_1}^{q_2} \int \frac{dq'}{q} \leq M_4$$

Vom gleichen Typ ist das vierte Integral, nur daß hier die obere Integrationsgrenze nicht von τ abhängt, es gilt also dieselbe Abschätzung und man erhält insgesamt

$$(A16) \quad \left| \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right| \leq M_6 \frac{\theta}{\delta} .$$

Auch für $H > H_s$ kann man diese Abschätzungen mit Hilfe der Unterteilung des Integrationsweges (Abb. 10) durchführen; es ergibt sich lediglich dadurch eine Modifizierung, daß im zweiten und vierten Integral $|H-\psi|$ nicht mehr gleichmäßig nach unten beschränkt ist, sondern es gilt nur $|H-\psi| \geq \delta$, also

$$(A17) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{q_1}^{q_2} \int \frac{dq'}{q} \leq \frac{1}{\delta \sqrt{2}} \int_{q_1}^{q_2} \left| \frac{\psi_\tau(q, \tau) - \psi_\tau(q', \tau)}{\{H - \psi(q', \tau)\}^{1/2}} \right| dq' + M_7$$

$$\leq \frac{M_8}{\delta} \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq'}{q} \leq M_8 \frac{\theta}{\delta}$$

Damit erhält man auch für $H > H_s$ wieder Gleichung (A16).

Nach derselben Methode wird

$$(A18) \quad \frac{\partial^2 J}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \oint (\psi_\tau(q, \tau) - \psi_\tau(q', \tau)) d\theta' \right\}$$

abgeschätzt. Der Integrationsbereich wird wieder unterteilt:

$$(A19) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial \tau} = \int_0^{p_1} \frac{\phi}{p} dp' + \int_{q_1}^{q_2} \frac{\phi}{q} dq' + \int_{p_1}^0 \frac{\phi}{p} dp'$$

mit $\phi = \psi_\tau(q, \tau) - \psi_\tau(q', \tau)$. p_1 sei wieder festgehalten, so daß q_1 und q_2 Funktionen von τ sind. Für die Ableitung des ersten Integrals erhält man:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{p_1} \frac{\phi}{p} dp' &= \int_0^{p_1} \psi_q^{-2}(q', \tau) \{ \psi_q(q', \tau) (\psi_{\tau\tau}(q', \tau) + \psi_{q\tau}(q', \tau)) \\
 (A20) \quad &\cdot \left(\frac{\partial q'}{\partial \tau} - \psi_{\tau\tau}(q, \tau) \right) + (\psi_\tau(q, \tau) - \psi_\tau(q', \tau)) \\
 &\cdot (\psi_{q\tau}(q', \tau) + \psi_{qq}(q', \tau) \frac{\partial q'}{\partial \tau}) \} dp'
 \end{aligned}$$

Nach Einsetzen von $\frac{\partial q'}{\partial \tau}$ entsprechend Gleichung (A8) kann man abschätzen

$$(A21) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{p_1} \frac{\phi}{p} dp' \right| \leq M_{10} \int_0^{p_1} \psi_q^{-2}(q', \tau) \frac{dp'}{p} \leq M_{11}$$

Für das dritte Integral in Gleichung (A10) ergibt sich entsprechend:

$$(A22) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{p_1}^0 \frac{\phi}{p} dp' \right| \leq M_{12} \frac{\theta}{\delta}$$

Für das zweite Integral erhält man

$$\begin{aligned}
 (A23) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{q_1}^{q_2} \frac{\phi}{q} dq' &= \int_{q_1}^{q_2} \left\{ \frac{\psi_{\tau\tau}(q, \tau) - \psi_{\tau\tau}(q', \tau)}{\sqrt{2} \{H - \psi(q', \tau)\}^{1/2}} \right. \\
 &- \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{(\psi_\tau(q, \tau) - \psi_\tau(q', \tau))^2}{\{H - \psi(q', \tau)\}^{3/2}} \left. \right\} dq' \\
 &+ \frac{\partial q_2}{\partial \tau} \frac{\psi_\tau(q, \tau) - \psi_\tau(q_2, \tau)}{\sqrt{2} \{H - \psi(q_2, \tau)\}^{1/2}} \\
 &- \frac{\partial q_1}{\partial \tau} \frac{\psi_\tau(q, \tau) - \psi_\tau(q_1, \tau)}{\sqrt{2} \{H - \psi(q_1, \tau)\}^{1/2}}
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist, genau wie der entsprechende vorher, gleichmäßig beschränkt, und man erhält insgesamt

$$(A24) \quad \left| \frac{\partial^2 J}{\partial \tau^2} \right| \leq M_{13} \frac{\theta}{\delta} .$$

Genauso wie vorher gilt Gleichung (A24) auch für $H > H_S$.

$$\text{Für } \frac{\partial f_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial J}{\partial \tau} + \int_0^\theta \frac{\partial^2 J}{\partial \tau^2} d\theta'$$

erhält man dann mit (A2), (A16) und (A24) die Abschätzung

$$(A25) \quad \left| \frac{\partial f_1}{\partial \tau} \right| \leq M_{14} \frac{\theta^2}{\delta}$$

Beschränkt man sich auf Energien in der Nähe von H_S , dann wird mit $\theta \sim |\ln \delta|$ aus (A3), (A25):

$$(A26) \quad \begin{aligned} |f_1| &< A \ln^2 \delta , \\ \left| \frac{\partial f_1}{\partial \tau} \right| &< B \frac{\ln^2 \delta}{\delta} . \end{aligned}$$

IV Literaturverzeichnis

- /1/ T. Northrop
The Adiabatic Motion of Charged Particles
Interscience Publishers, New York 1963
- /2/ H. Alfvén
Cosmical Electrodynamics
Oxford Univ. Press 1950
- /3/ C.S. Gardner
Adiabatic Invariants of Periodic Classical Systems
Phys. Rev. 115, 791 (1959)
- /4/ M. Kruskal
The Spiraling of a Charged Particle
Proc. Intern. Conf. Ionization Phenomena Gases, 3rd,
Venice, 1957, p. 562
- /5/ S. Tamor
An Extended Adiabatic Invariant
J. of Nuclear Energy, Pt. C, 1, 199 (1960)
- /6/ A. Cavaliere, B. Crosignani, F. Gratton
Motion of a Charge in Changing Magnetic Fields with
Nonadiabatic Intervalls
Nuovo Cimento 33, 1338 (1964)
- /7/ A. Lenard
Adiabatic Invariance to All Orders
Annals of Physics 6, 261 (1959)
- /8/ K. Schindler
Adiabatic Particle Orbits in Discontinuous Fields
J. Math. Phys. 6, 313 (1965)

/9/ K. Schindler

Adiabatische Teilchenbahnen in räumlich stark veränderlichen Feldern

Zeitsch. f. Physik 183, 100 (1965)

/10/ E. Kamke

Differentialgleichungen I.

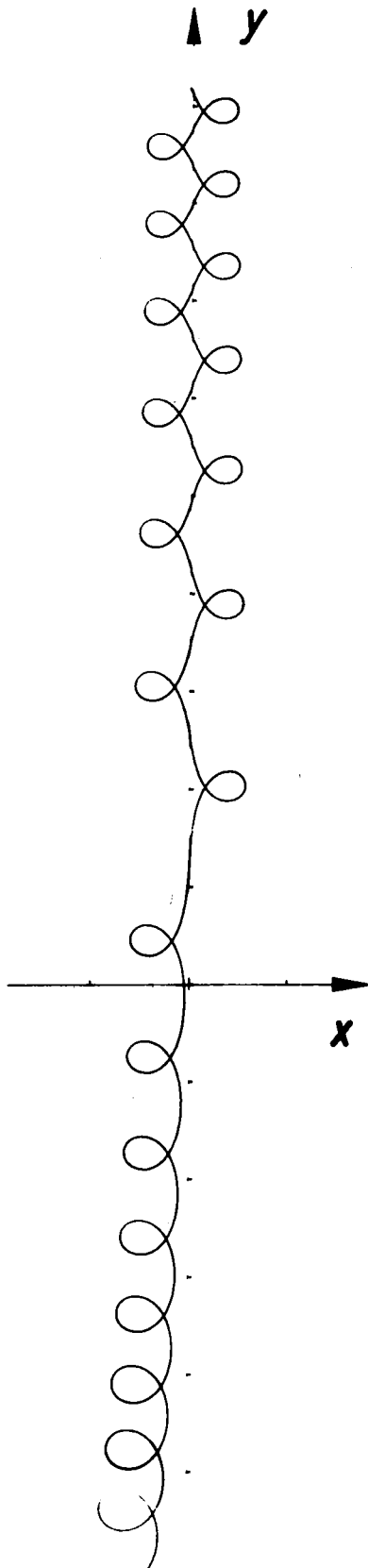
Akad. Verlagsgesellschaft Leipzig 1962 (4. Auflage)

/11/ N.G. de Bruijn

Asymptotic Methods in Analysis

North-Holland Publishing Co., 1958

V. Abbildungen



$$\mathcal{L} = (0, 0, x f(\tau))$$

Abb. 1: Teilchenbahn im Magnetfeld

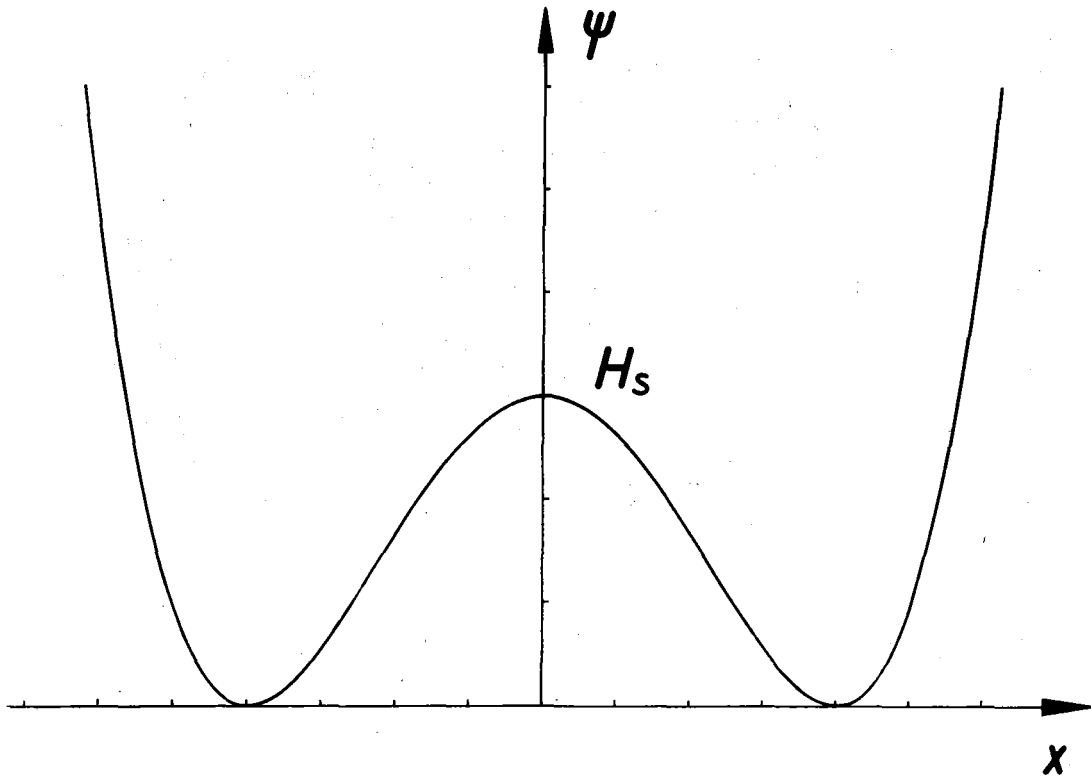
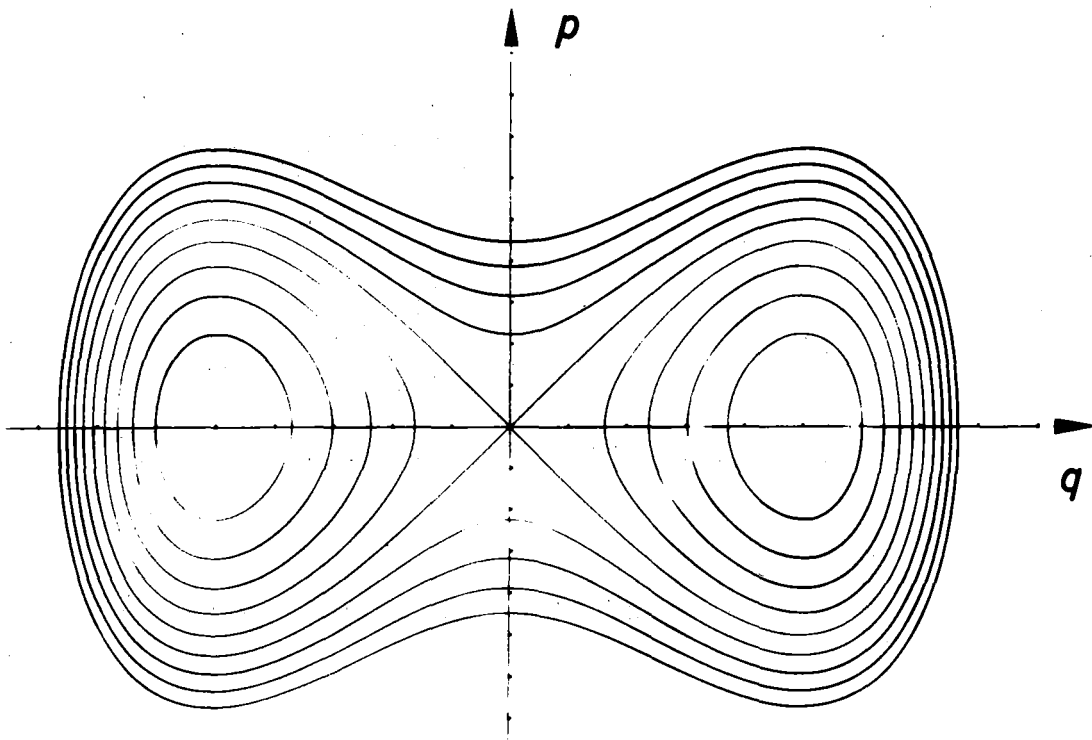


Abb. 2: Potentialverlauf

Abb. 3: Linien $H = \text{const}$

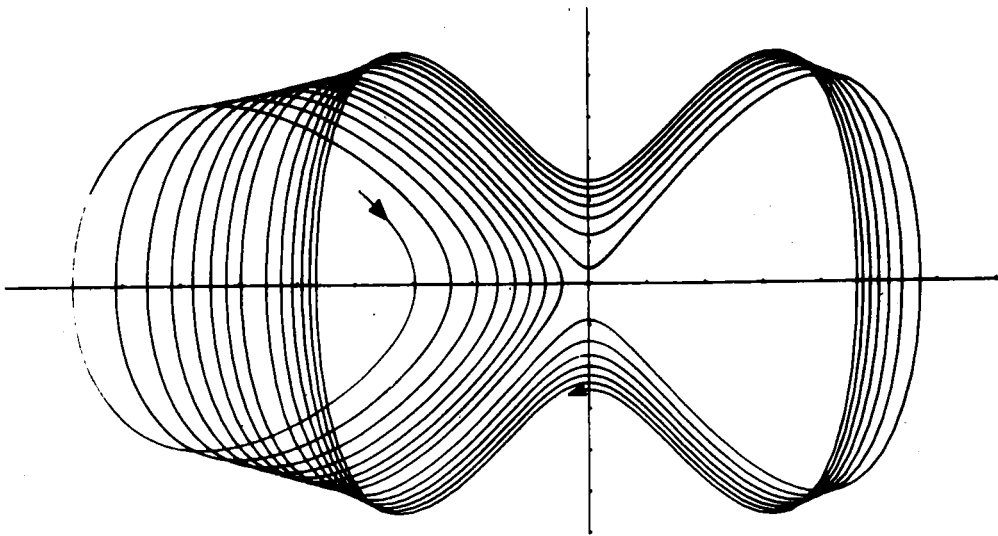


Abb. 4: Teilchenbahn in der Phasenebene

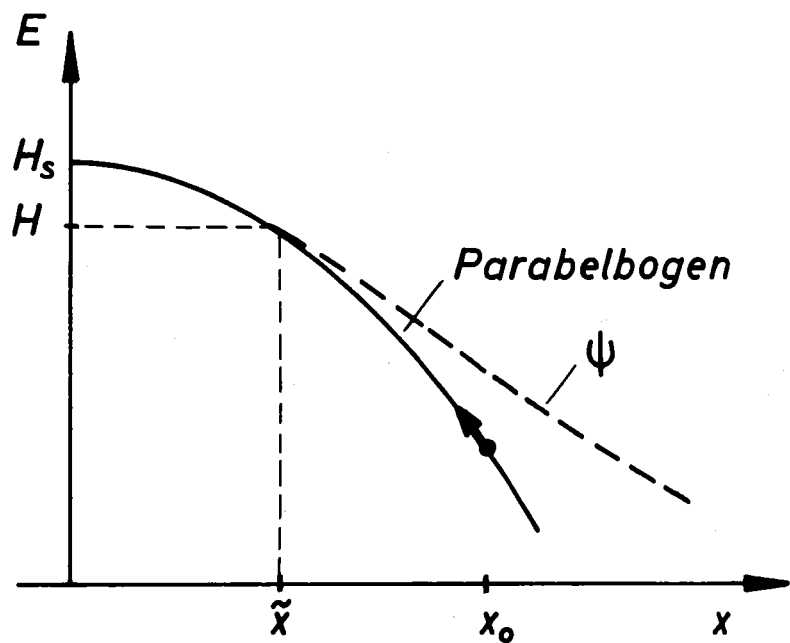
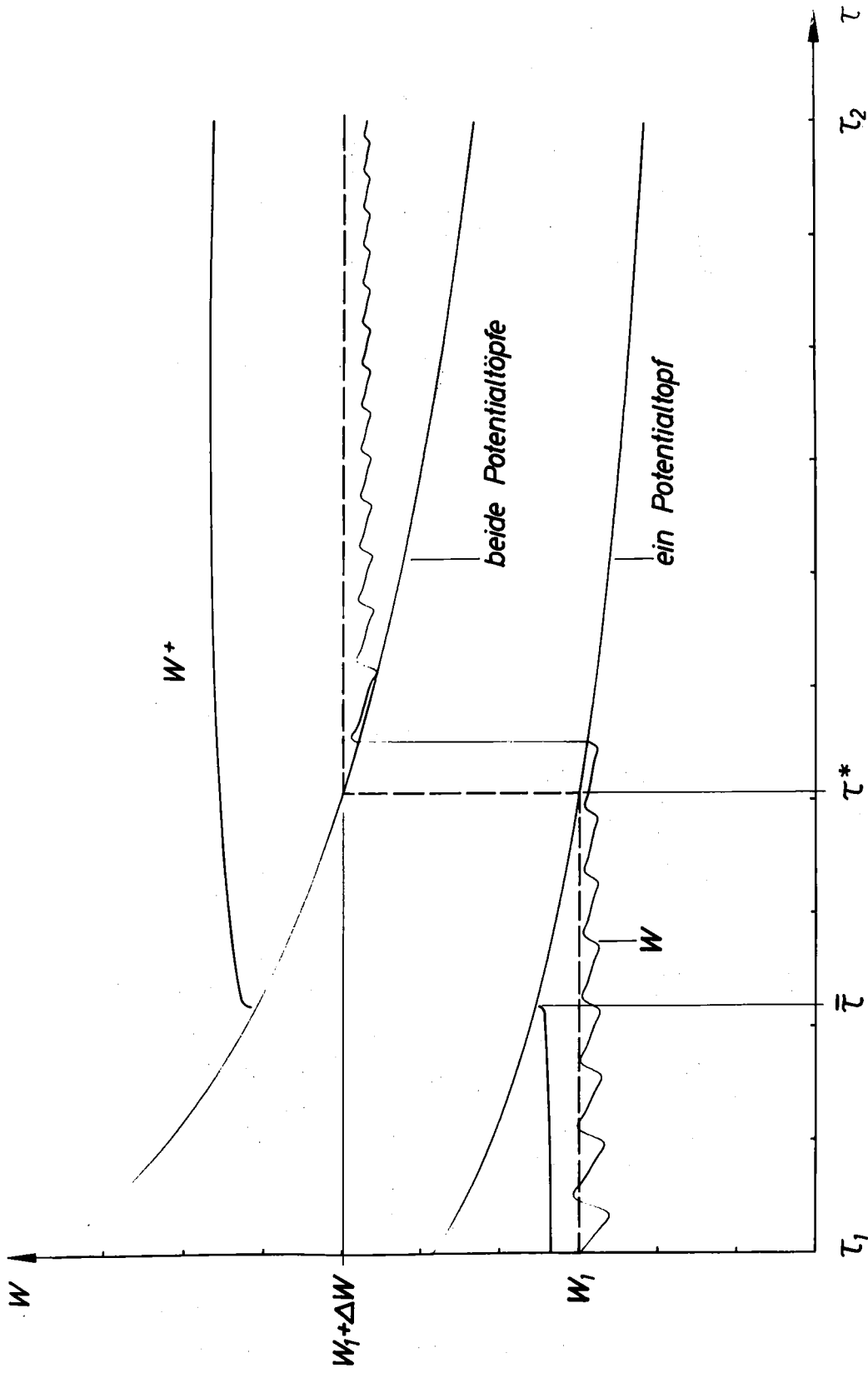


Abb. 5: Approximation der Potentialschwelle

Abb. 6: Zeitliche Änderung des Wirkungsintegrals W

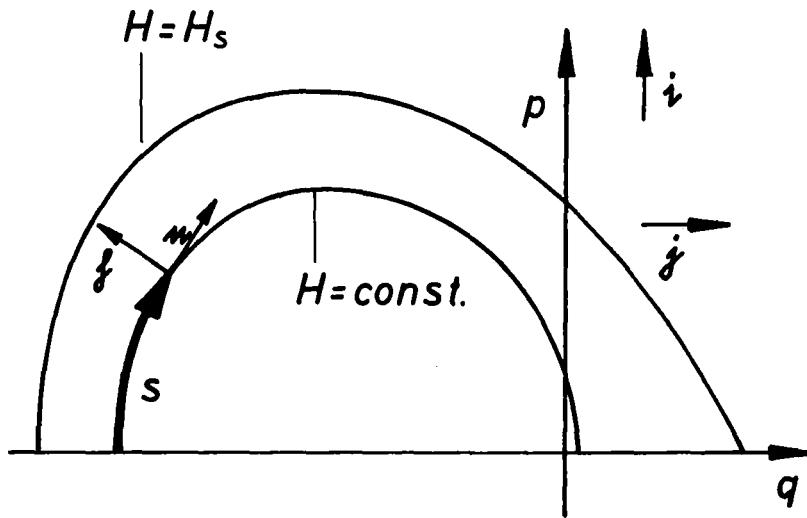


Abb. 7: Zur Definition von s

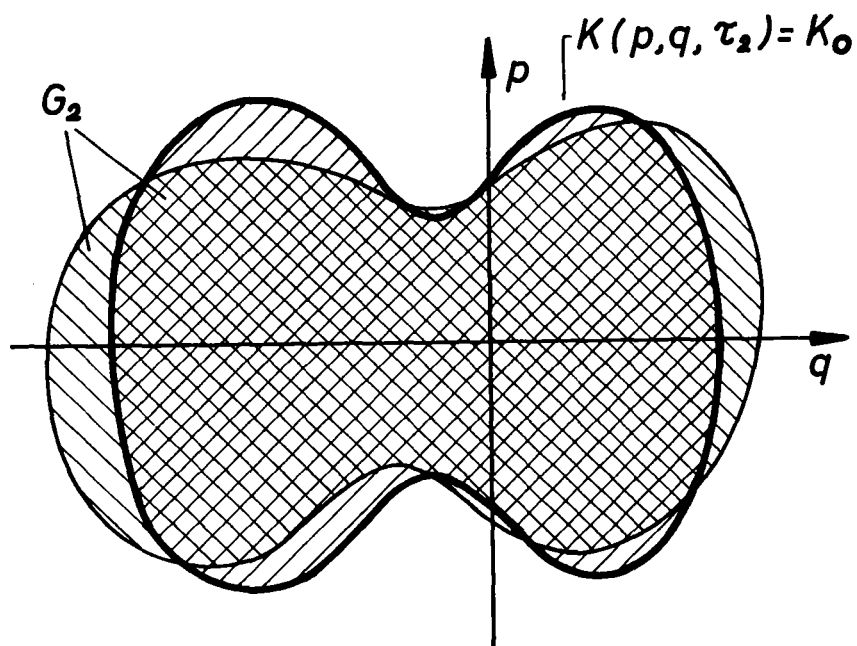


Abb. 8: Bild der Phasenebene zur Zeit τ_2

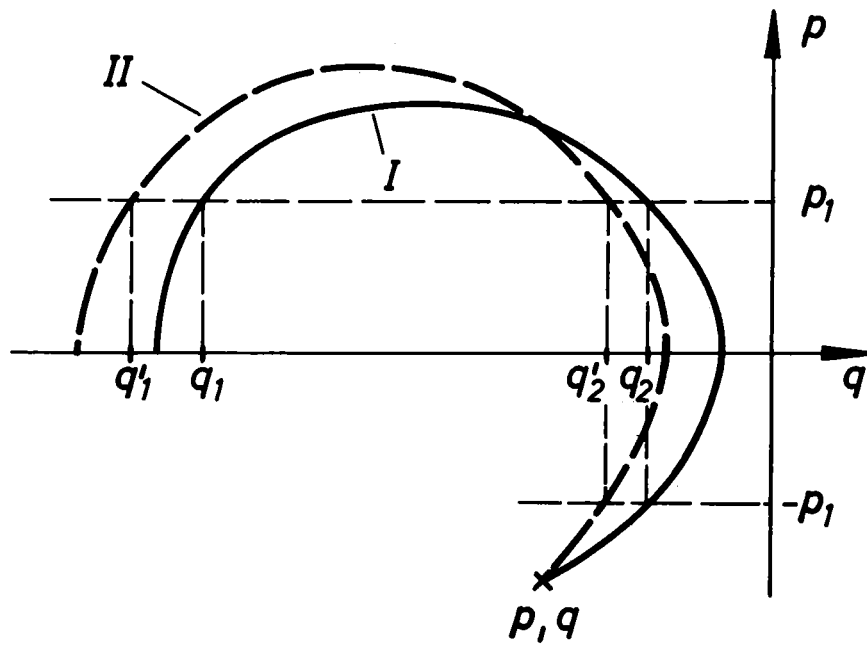


Abb. 9: Zur Aufspaltung des Integrals $\int d\theta$

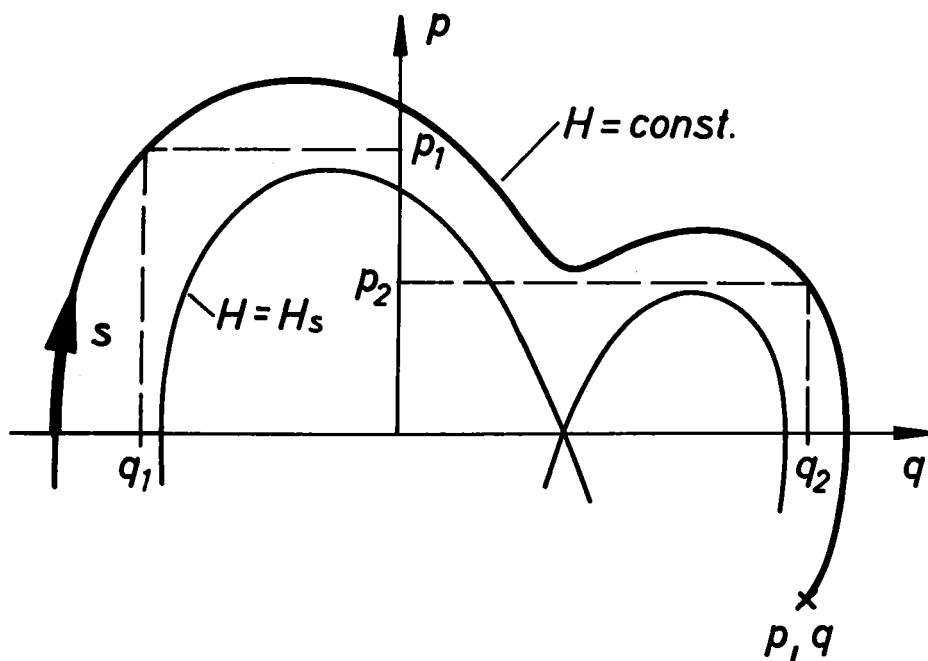


Abb. 10: Zur Aufspaltung von $\int d\theta$ für $H > H_s$

Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Fucks und Herrn Dr. H.L. Jordan danke ich, daß sie mir die Möglichkeit gegeben haben, am Institut für Plasmaphysik der Kernforschungsanlage Jülich diese Arbeit anzufertigen.

Ganz besonderen Dank schulde ich Herrn Dr. K. Schindler und Herrn Dr. H. Kever für viele wertvolle Diskussionen und Ratschläge.