

Zentralinstitut für Angewandte Mathematik
KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH
des Landes Nordrhein-Westfalen - e. V.

Über eine Verallgemeinerung
der Abelschen Integralgleichung

von

Helmut Neunert und Joachim Wick

Jül - 442 - MA

Dezember 1966

Als Manuskript gedruckt



Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 442

Zentralinstitut für Angewandte Mathematik Jül – 442 – MA

Dok.: Integral Equations

DK: 517.81/.82

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich,
Jülich, Bundesrepublik Deutschland

Über eine Verallgemeinerung der Abelschen Integralgleichung

von

Helmut Neunzert und Joachim Wick

Inhaltsverzeichnis

§ 1	Einleitung	S. 1
§ 2	Der Polynomfall	S. 5
§ 3	Der Approximationssatz	S. 11
§ 4	Ein Beispiel	S. 17
	Literaturverzeichnis	S. 23

§ 1 Einleitung

Im folgenden soll eine Verallgemeinerung der Abelschen Integralgleichung

$$(1.1) \quad f(x) = \int_0^x \frac{g(t)}{\sqrt{x-t}} dt \quad ,$$

die sich unter Benutzung der Definition der Integration mit nichtganzzahliger Ordnung

$$I^\alpha h(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} h(t) dt \quad \alpha > 0$$

(vergl. (4)) in der Form

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) f(x) = I^{\frac{1}{2}} g(x)$$

schreiben läßt, behandelt werden.

Wie bekannt, läßt sich die Gleichung 1.1 neben der Methode der Laplace-Transformation unter Benutzung der Tatsache, daß

$$\frac{1}{\pi} \int_x^y \frac{dt}{\sqrt{t-x} \sqrt{y-t}} \equiv 1$$

gilt, lösen, indem man beide Seiten von 1.1 mit $\frac{1}{\sqrt{y-x}}$ multipliziert und anschließend über $(0, y)$ bezgl. x integriert. Nach Integralvertauschung folgt

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{f(x)}{\sqrt{y-x}} dx &= \int_0^y g(t) \left(\int_t^y \frac{dx}{\sqrt{y-x} \sqrt{x-t}} \right) dt \\ &= \pi \int_0^y g(t) dt \end{aligned}$$

Nachfolgende Differentiation nach y ergibt also die Lösung

$$g(y) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{f(x)}{\sqrt{y-x}} dx \quad .$$

In analoger Weise läßt sich die Lösung der Weylschen Integralgleichung

$$f(x) = \int_x^{\infty} \frac{g(t)}{\sqrt{t-x}} dt$$

angeben, wenn man mit $\frac{1}{\sqrt{x-y}}$ multipliziert und die Integration bzgl. x über (y, ∞) erstreckt. Nach Integralvertauschung erhält man nämlich

$$\int_y^{\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x-y}} dx = \int_y^{\infty} g(t) \left(\int_y^t \frac{dx}{\sqrt{t-x} \sqrt{x-y}} \right) dt .$$

Dieses Verfahren läßt sich auch dann anwenden, wenn der Kern der Gleichung 1.1 die Gestalt $x^{\nu}(x^{\mu}-t^{\mu})^{-\alpha}$ mit $0 < \alpha < 1$; $0 \leq \nu \leq \mu-1$; $\mu \geq 1$ hat, denn es gilt

$$\begin{aligned} \mu \cdot \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_t^y \frac{x^{\nu}}{(x^{\mu}-t^{\mu})^{\alpha}} \cdot \frac{x^{\mu-\nu-1}}{(y^{\mu}-x^{\mu})} dx \\ = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_{t^{\mu}}^{y^{\mu}} \frac{du}{(u-t^{\mu})^{\alpha} (y^{\mu}-u)^{1-\alpha}} \equiv 1 \end{aligned}$$

Zur Lösung einer Integralgleichung der Form

$$(1.2) \quad f(x) = \int_0^x K(x^{\mu}-t^{\mu}) g(t) dt$$

bzw.

$$f(x) = \int_x^{\infty} K(t^{\mu}-x^{\mu}) g(t) dt$$

genügt es also, eine Funktion $H(t)$ derart zu finden, daß

$$(1.3) \quad \int_0^x K(x^{\mu}-t^{\mu}) \cdot t^{\mu-1} H(t^{\mu}) dt \equiv 1$$

gilt. Dann folgt unter geeigneten Voraussetzungen an $f(x)$, daß die Lösung

von 1.2 durch

$$g(y) = \frac{d}{dy} \int_0^y x^{\mu-1} H(y^\mu - x^\mu) f(x) dx$$

gegeben ist.

Im folgenden soll nur der Fall $\mu=1$ betrachtet werden, da sich die Ergebnisse ohne Schwierigkeiten verallgemeinern lassen. Wir betrachten also die Gleichung

$$(1.4) \quad \int_0^x K(x-t) H(t) dt \equiv 1$$

Für die Lösbarkeit der Gleichung 1.4 ist notwendig, daß $K(x)$ im Nullpunkt eine (integrierbare) Singularität besitzt. Darüber hinaus ist auch die Lösung $H(x)$, falls sie existiert, für $x = 0$ singular.

Denn wäre $K(x)$ in einer Umgebung $|x| < 2\delta$ des Nullpunktes stetig, so folgt mit $M = \max_{|x| < \delta} |K(x)|$

$$\left| \int_0^x K(x-t) H(t) dt \right| \leq M \int_0^x |H(t)| dt \quad \text{für } |x| < \delta$$

Aus der Integrierbarkeit von $H(t)$ folgt bekanntlich, daß $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x |H(t)| dt = 0$,

d. h. zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\eta(\epsilon) < \delta$, so daß

$$\left| \int_0^\eta K(\eta-t) H(t) dt \right| < \epsilon$$

im Gegensatz zu 1.4 gilt.

Aus der Vertauschbarkeit von $K(x)$ und $H(x)$ in 1.4 folgt sofort, daß auch $H(x)$ im Nullpunkt nicht stetig sein kann.

Da $K(x)$ in einer Umgebung des Nullpunktes nicht verschwindet, liefert folgender Satz die Eindeutigkeit der Lösung von 1.4 (vergl. (7) S. 324):

Sind $K(x)$ und $H(x)$ für $0 \leq x \leq T$ absolut integrierbar und

$$\int_0^x K(x-t) H(t) dt \equiv 0 \quad \text{für } x \in (0, T)$$

so ist $K(x) \equiv 0$ für $x \in (0, T_1)$ und $H(x) \equiv 0$ für $x \in (0, T_2)$,

wobei $T_1 + T_2 = T$.

In unseren Betrachtungen ist $T_1 = 0$, und daher verschwindet die Differenz zweier Lösungen im ganzen Intervall $(0, T)$.

Wir werden uns weiterhin auf den Fall beschränken, daß $K(x)$ in der Gestalt $x^{-\alpha} k(x)$ mit stetigem $k(x)$ und $0 < \alpha < 1$ geschrieben werden kann. Zunächst werden wir eine Lösung $H(x)$ von 1.4 für den Fall konstruieren, daß $k(x)$ ein Polynom ist. Danach werden wir einen Approximationssatz beweisen, aus dem die Existenz einer Lösung von 1.4 für $K(x)$ aus einer gewissen Funktionenklasse unmittelbar folgt.

Die von uns verfolgte Methode zur Lösung der Gleichung 1.4 führt in der vorliegenden Form bezüglich des Existenzsatzes zwar nicht über die durch Laplace-Transformation erzielten Ergebnisse hinaus. Doch umgeht sie die Schwierigkeit der Frage nach der Existenz einer Urbildfunktion und liefert zur Bestimmung von $H(x)$ eine einfachere Gleichung als sie sich mittels Laplace-Transformation ergibt.

Als Abschluß werden wir die erhaltenen Ergebnisse an Hand eines Beispiels durchdiskutieren.

§ 2 Der Polynomfall

Sei $K(x) = x^{-\alpha} \sum_{v=0}^n a_v x^v$ mit $0 < \alpha < 1$ und $a_0 a_n \neq 0$.

Die Gleichung 1.4 hat dann die Gestalt

$$(2.1) \quad \sum_{v=0}^n a_v \int_0^x (x-t)^{v-\alpha} H(t) dt \equiv 1.$$

Unter Benutzung der nichtganzzahligen Integration erhält 2.1 die Form

$$(2.1a) \quad \sum_{v=0}^n \Gamma(v+1-\alpha) a_v I^{v+1-\alpha} H(t) \equiv 1$$

Wir wollen die Tatsache, daß sich 2.1a als Differentialgleichung mit gebrochener Differentiationsordnung auffassen läßt, nicht weiter benutzen, sondern aus 2.1 eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung herleiten.

Setzt man

$$J_v(x) = \int_0^x (x-t)^{v-\alpha} H(t) dt,$$

so erhält man mit

$$(n;d;v) = \frac{d^v \Gamma(\frac{n}{d}+v)}{\Gamma(\frac{n}{d})} = \begin{cases} 1 & \text{für } v = 0 \\ \prod_{k=0}^{v-1} (n+kd) & \text{für } v \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^v}{dx^v} J_n(x) &= \int_0^x \frac{d^v}{dx^v} (x-t)^{n-\alpha} H(t) dt = \\ &= (n-\alpha; -1; v) \int_0^x (x-t)^{n-v-\alpha} H(t) dt = (n-\alpha; -1; v) J_{n-v}(x) \end{aligned}$$

für $v = 0, 1, \dots, n$; da die auftretenden Integrale in jedem endlichen Intervall gleichmäßig konvergieren und die Differentiation nach der oberen Integralgrenze keinen Anteil liefert.

Damit erhält 2.1 die Gestalt

$$(2.2) \quad \sum_{v=0}^n \frac{a_{n-v}}{(n-\alpha; -1; v)} J_n^{(v)}(x) \equiv 1$$

wobei nach Definition der $J_n^{(v)}(x)$ wegen der Integrierbarkeit von $H(x)$ gilt:

$$(2.3) \quad J_n^{(v)}(0) = 0 \quad \text{für } v = 0, 1, \dots, n-1$$

Die Gleichung 2.2 stellt eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $J_n^{(v)}(x)$ dar; 2.3 liefert die zugehörigen Anfangsbedingungen.

Mit der Abkürzung

$$b_v = \frac{a_{n-v}}{(n-\alpha, -1, v)}$$

ist

$$J_n^{(v)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=K} \frac{e^{zx}}{z \cdot \sum_{v=0}^n b_v z^v} dz$$

die Lösung der Gleichung 2.2 mit den Anfangsbedingungen 2.3, wobei K so gewählt ist, daß alle Nullstellen von $\sum_{v=0}^n b_v z^v$ im Innern des Kreises $|z| = K$ liegen. (vergl. (6) Nr. 63) Denn es ist

$$\sum_{v=0}^n b_v J_n^{(v)}(x) = \sum_{v=0}^n b_v \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=K} \frac{z^v e^{zx}}{z \cdot \sum_{v=0}^n b_v z^v} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=K} \frac{e^{zx}}{z} dz \equiv 1$$

Zur Nachprüfung der Anfangsbedingungen benutzen wir den Satz, daß die Summe der Residuen einer Funktion, die in der kompakten Ebene mit Ausnahme isolierter Singularitäten holomorph ist, verschwindet. (2)

Bekanntlich ist das Residuum in z_∞ einer Funktion $f(z)$ der negative Entwicklungskoeffizient von z^1 der Laurentreihe von $f(\frac{1}{z})$ in einem Ringgebiet um $z = 0$. Nun ist aber

$$\frac{z^{-\nu} e^{\frac{x}{z}}}{\frac{1}{z} \cdot \sum_{\nu=0}^n b_{\nu} z^{-\nu}} = z^{n-\nu+1} \frac{e^{\frac{x}{z}}}{\sum_{\nu=0}^n b_{n-\nu} z^{\nu}}$$

und $\sum_{\nu=0}^n b_{n-\nu} z^{\nu-1}$ ist wegen $b_n \neq 0$ in $z = 0$ holomorph.

Daher verschwindet für $\nu = 0, 1, \dots, n-1$ und $x = 0$ das Residuum in z_{∞} , und wegen

$$0 = J_n^{(\nu)}(0) = J_{\nu}(0)$$

sind die Anfangsbedingungen erfüllt.

Beachten wir nun, daß

$$J_0(x) = \frac{1}{(n-\alpha; -1; n)} J_n^{(n)}(x),$$

so erhalten wir als Bestimmungsgleichung für $H(x)$

$$(2.6) \quad J_0(x) = \int_0^x (x-t)^{-\alpha} H(t) dt.$$

Aus 2.2 folgt für $x = 0$, daß $J_n^{(n)}(0) = \frac{(n-\alpha; -1; n)}{a_0}$ und daher $J_0(0) = \frac{1}{a_0}$ ist.

Daher ergibt die in der Einleitung beschriebene Auflösung der Abelschen Integralgleichung 2.6 :

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} J_0(t) dt = \\ &= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{a_0} \cdot \frac{x^{\alpha}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha} J_0'(t) dt \right\} = \\ &= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left\{ \frac{x^{\alpha-1}}{a_0} + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} J_0'(t) dt \right\} \end{aligned}$$

Beachten wir, daß

$$\begin{aligned} J'_0(x) &= \frac{1}{(n-\alpha; -1; n)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=K} \frac{z^n e^{xz}}{\sum_{v=0}^n b_v z^v} dz \\ &= \frac{1}{(n-\alpha; -1; n)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=K} \frac{e^{xz}}{\sum_{v=0}^n \frac{a_{n-v}}{(n-\alpha; -1; v)} z^{-(n-v)}} dz, \end{aligned}$$

so folgt aus

$$\frac{(n-\alpha; -1; n)}{(n-\alpha; -1; v)} = (1-\alpha; 1; n-v),$$

daß

$$J'_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=K} \frac{e^{xz}}{\sum_{\mu=0}^n (1-\alpha; 1; \mu) a_\mu z^{-\mu}} dz.$$

Durch Einsetzen erhalten wir folgenden

Satz 1: Sei $P(x) = \sum_{v=0}^n a_v x^v$ mit $a_0 a_n \neq 0$.

Setzen wir

$$Q(z) = \sum_{\mu=0}^n (1-\alpha; 1; \mu) a_\mu z^\mu,$$

dann hat die Integralgleichung

$$(2.7) \quad \int_0^x \frac{P(x-t)}{(x-t)^\alpha} \cdot H(t) dt \equiv 1 \quad \text{mit } 0 < \alpha < 1$$

die eindeutig bestimmte Lösung

$$H(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left\{ \frac{x^{\alpha-1}}{a_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\oint_{|z|=K} \frac{e^{tz}}{Q\left(\frac{1}{z}\right)} dz \right) dt \right\},$$

wobei K so gewählt ist, daß $\frac{1}{K}$ kleiner als die betragskleinste Nullstelle von $Q(z)$ ist.

Wir bemerken, daß zwischen $Q(z)$ und $P(x)$ folgender Zusammenhang besteht:

$$Q\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \int_0^{\infty} e^{-zx} \frac{P(x)}{x^{\alpha}} dx .$$

$Q\left(\frac{1}{z}\right)$ ist also das Produkt aus der Laplace-Transformierten des Kerns der Gleichung 2.7 und einer Funktion, die wegen $0 < \alpha < 1$ nicht die Laplace-Transformierte einer Funktion sein kann.

Zusatz: Hat $Q(z)$ nur einfache Nullstellen, so läßt sich die Lösung $H(x)$ auch leicht unmittelbar, d. h. ohne Benutzung des Residuenkalküls berechnen.

Wie bekannt, hat dann die Gleichung 2.2 bei Verwendung der partikulären Lösung $J_n(x) = \frac{1}{b_0}$ die allgemeine Lösung

$$J_n(x) = \frac{1}{b_0} + \sum_{v=1}^n c_v e^{\lambda_v x} ,$$

wobei die (komplexen) Zahlen λ_v die (einfachen) Nullstellen des Polynoms $R(z) = z^n Q\left(\frac{1}{z}\right)$ sind.

Die Randbedingungen ergeben als Bestimmungsgleichung für die c_v das System

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ n-1 & & n-1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{b_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt nach einfacher Rechnung, daß

$$c_j = \frac{1}{\lambda_j b_n} \cdot \frac{1}{\prod_{v \neq j} (\lambda_j - \lambda_v)},$$

wobei b_n wie oben definiert ist.

Berücksichtigt man weiter

$$\sum_{v=1}^n \frac{\lambda_v^{n-1}}{\prod_{\mu \neq v} (\lambda_v - \lambda_\mu)} = 1,$$

so erhält man ähnlich wie im allgemeinen Fall

$$H(t) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left\{ \frac{t^{\alpha-1}}{a_0} + \sum_{v=1}^n \frac{\lambda_v^n}{a_0 \prod_{\mu \neq v} (\lambda_v - \lambda_\mu)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} e^{\lambda_v x} dx \right\}$$

Da im Falle einfacher Nullstellen die Residuen von $\frac{e^{zx}}{Q(\frac{1}{z})} = \frac{z^n e^{zx}}{z^n Q(\frac{1}{z})}$

an den Polen $z = \lambda_v$ die Gestalt

$$\frac{\lambda_v^n e^{\lambda_v x}}{a_0 \prod_{\mu \neq v} (\lambda_v - \lambda_\mu)}$$

haben, erweist sich dieses Ergebnis als Spezialfall von Satz 1.

§ 3 Der Approximationssatz

Zur Vereinfachung vereinbaren wir folgende

Definition: Haben $P(x)$ und $H(x)$ dieselbe Bedeutung wie in Satz 1, so nennen wir $h(x) = x^{1-\alpha} H(x)$ die zu $P(x)$ duale Funktion.

Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, unter welchen Bedingungen die einer im abgeschlossenen Intervall $(0, T)$ konvergenten Folge von Polynomen $P_n(x)$ zugeordneten dualen Funktionen $h_n(x)$ in $(0, T)$ ebenfalls konvergieren und die jeweiligen Grenzfunktionen $k(x)$ und $h(x)$ in diesem Intervall die Integralgleichung

$$(3.1) \quad \int_0^x \frac{k(x-t)}{(x-t)^\alpha} \cdot \frac{h(t)}{t^{1-\alpha}} dt \equiv 1$$

erfüllen.

Definition: Sei $\{Q_n(z)\}$ eine Folge von komplexwertigen Funktionen. Existiert dann ein $\lambda > 0$ derart, daß die Folge $\{Q_n(z)\}$ für $|z| \leq \lambda$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $q(z)$ konvergiert, so nennen wir $\{Q_n(z)\}$ λ -konvergent.

Es gilt der folgende

Satz 2: Sei $k(x)$ eine in $(0, T)$ stetige Funktion mit $k(0) \neq 0$ und

$P_n(x) = \sum_{v=0}^n a_{v,n} x^v$ eine Folge von Polynomen, die in $(0, T)$ gleichmäßig

gegen $k(x)$ konvergiert.

Ist dann die durch

$$Q_n(z) = \sum_{v=0}^n (1-\alpha; 1; v) a_{v,n} z^v$$

definierte Polynomfolge λ -konvergent, so konvergiert auch die Folge der zu den $P_n(x)$ dualen Funktionen $h_n(x)$ in $(0, T)$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $h(x)$, und es gilt in diesem Intervall die Gleichung 3.1 .

Beweis: Aus der λ -Konvergenz von $Q_n(z)$ folgt bekanntlich (vergl. z. B. (1)), daß $q(z)$ in $|z| \leq \lambda$ analytisch ist. Wegen $(1-\alpha; 1; 0) = 1$ ist $P_n(0) = Q_n(0)$ und daher

$$q(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(0) = k(0) \neq 0$$

Es gibt daher einen Kreis $K_\eta = \{z: |z| \leq \eta\}$, $0 < \eta \leq \lambda$, so daß gilt:

$$|q(z)| \geq 2\beta > 0 \quad \text{für } z \in K_\eta$$

Da außerdem $\{Q_n(z)\}$ in K_η gleichmäßig konvergiert, existiert ein von z unabhängiges n_0 , so daß

$$|Q_n(z)| \geq \beta \quad \text{für } n \geq n_0 \text{ und } z \in K_\eta$$

gilt. Bezeichnen wir mit $z_0^{(n)}$ die betragskleinste Nullstelle von $Q_n(z)$, so folgt

$$|z_0^{(n)}| > \eta \quad \text{für } n \geq n_0$$

Wählt man daher $K > \frac{1}{\eta}$, so folgt nach Satz 1 die Darstellung

$$h_n(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{a_{0,n}} + \frac{x^{1-\alpha}}{2\pi i} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\oint_{|z|=K} \frac{e^{tz}}{Q_n\left(\frac{1}{z}\right)} dz \right) dt \right\}.$$

Das Entscheidende bei dieser Darstellung ist, daß der Kreis $|z|=K$ unabhängig von n fest gewählt werden kann.

Der Beweis der gleichmäßigen Konvergenz der $h_n(x)$ kann nun mittels Cauchy'schem Konvergenzkriterium erbracht werden, da die Funktionen $h_n(x)$ in diesem Intervall stetig sind, und der Raum der stetigen Funktionen vollständig ist.

Es ergibt sich, daß

$$\begin{aligned}
|h_{n+m}(x) - h_n(x)| &= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left| \frac{a_{0,n} - a_{0,n+m}}{a_{0,n+m} a_{0,n}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{x^{1-\alpha}}{2\pi i} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\oint_{|z|=K} e^{tz} \frac{Q_n(\frac{1}{z}) - Q_{n+m}(\frac{1}{z})}{Q_{n+m}(\frac{1}{z}) Q_n(\frac{1}{z})} dz \right) dt \right| \\
&\leq \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left\{ \frac{|a_{0,n} - a_{0,n+m}|}{\beta^2} + \frac{x^{1-\alpha}}{2\pi} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\oint_{|z|=K} |e^{tz}| \cdot \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \frac{Q_n(\frac{1}{z}) - Q_{n+m}(\frac{1}{z})}{\beta^2} dz \right) dt \right\}
\end{aligned}$$

für $n \geq n_0$, da nach Konstruktion $|Q(\frac{1}{z})| \geq \beta$ für $\frac{1}{z} \in K_n$ und daher insbesondere für $|\frac{1}{z}| \leq \frac{1}{K} < \eta$, d. h. für $|z| \geq K$.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der $Q_n(\zeta)$ in K_n existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_1 , so daß

$$|Q_{n+m}(\zeta) - Q_n(\zeta)| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_1, m \geq 0 \text{ und } \zeta \in K_n$$

Für $|z|=K$ folgt mit $\zeta = \frac{1}{z}$, daß $\zeta \in K_n$ und daher für $n \geq N = \max(n_0, n_1)$

$$\begin{aligned}
|h_{n+m}(x) - h_n(x)| &\leq \frac{\sin \alpha \pi}{\pi \beta^2} \left\{ \varepsilon + \frac{x^{1-\alpha} K}{2\pi} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\int_0^{2\pi} e^{tK} \varepsilon d\phi \right) dt \right\} \\
&= \varepsilon \cdot \frac{\sin \alpha \pi}{\pi \beta^2} \left\{ 1 + K x^{1-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} e^{tK} dt \right\} \\
&\leq \varepsilon \cdot \frac{\sin \alpha \pi}{\pi \beta^2} \left\{ 1 + K x^{1-\alpha} e^{TK} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt \right\} \\
&\leq \varepsilon \cdot \frac{\sin \alpha \pi}{\pi \beta^2} \left\{ 1 + \frac{1}{\alpha} KT e^{KT} \right\} \leq C\varepsilon \quad \text{für } n \geq N \text{ und } 0 \leq x \leq T.
\end{aligned}$$

Daher konvergiert $h_n(x)$ in $0 \leq x \leq T$ gleichmäßig gegen eine (stetige) Funktion $h(x)$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $h(x)$ die Gleichung 3.1 erfüllt.

Zunächst gilt nach Satz 1

$$(3.2) \quad \int_0^x \frac{h_n(x-t)}{(x-t)^\alpha} \frac{P_n(t)}{t^{1-\alpha}} dt \equiv 1 \quad \text{in } 0 \leq x \leq T$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $h_n(x)$ und $P_n(x)$ kann zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 angegeben werden, so daß

$$|h_n(x) - h(x)| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |P_n(x) - k(x)| < \varepsilon$$

für $n \geq n_0$ und $0 \leq x \leq T$.

Mit $M_n = \max_{0 \leq x \leq T} |P_n(x)|$ und $L = \max_{0 \leq x \leq T} |h(x)|$ ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^x \frac{h_n(x-t)}{(x-t)^\alpha} \cdot \frac{P_n(t)}{t^{1-\alpha}} dt - \int_0^x \frac{h(x-t)}{(x-t)^\alpha} \cdot \frac{k(t)}{t^{1-\alpha}} dt \right| \\ & \leq \left| \int_0^x \frac{h_n(x-t) - h(x-t)}{(x-t)^\alpha} \frac{P_n(t)}{t^{1-\alpha}} dt \right| + \left| \int_0^x \frac{h(x-t)}{(x-t)^\alpha} \frac{P_n(t) - k(t)}{t^{1-\alpha}} dt \right| \\ & \leq (\varepsilon M_n + \varepsilon L) \int_0^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha t^{1-\alpha}} = \varepsilon \cdot \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} (M_n + L) \end{aligned}$$

Wegen der Konvergenz der $P_n(x)$ gibt es ein $M < \infty$ mit $M_n \leq M$ für alle $n \geq n_0$, so daß unter Verwendung von 3.2 folgt

$$\left| \int_0^x \frac{h(x-t) k(t)}{(x-t)^\alpha t^{1-\alpha}} dt - 1 \right| \leq \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} (M + L) \varepsilon .$$

Da die linke Seite nicht von n abhängt, folgt 3.1.

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Eine einfache Folgerung von Satz 2 ist der folgende

Satz 3: Die Funktion $k(x)$ habe die Gestalt $\sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v$ mit

$$(3.3) \quad \sqrt[n]{|a_n|} = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad \text{und } a_0 \neq 0.$$

Dann gilt: Die zu den Partialsummen $P_n(x) = \sum_{v=0}^n a_v x^v$ zugehörigen dualen

Funktionen $h_n(x)$ konvergieren in jedem endlichen Intervall $(0, T)$ gleichmäßig gegen eine (stetige) Funktion $h(x)$. Die Funktionen $h(x)$ und $k(x)$ erfüllen 3.1 für jeden endlichen nichtnegativen Wert von x .

Wir bemerken, daß die Bedingung 3.3 bedeutet, daß der Kern von 3.1 Laplace-transformierbar ist (vergl. (3) S. 356); doch werden wir direkt nachweisen, daß die Bedingungen von Satz 2 erfüllt sind.

Beweis: 1. Aus 3.3 folgt, daß $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ und daher der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v$ unendlich ist. Die Partialsummen $P_n(x)$ konvergieren in $(0, T)$ also gleichmäßig gegen $k(x)$. Außerdem ist $k(0) = a_0 \neq 0$.

2. Wir wollen zeigen, daß aus 3.3 folgt, daß die Potenzreihe

$$Q(z) = \sum_{v=0}^{\infty} (1-\alpha; 1; v) a_v z^v$$

die Partialsummen $Q_n(z)$ λ -konvergent und Satz 3 ist bewiesen.

Wegen

$$(1-\alpha; 1; v) = \frac{\Gamma(v+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}$$

$$\text{ist } \sqrt[n]{(1-\alpha; 1; n)} \leq \sqrt[n]{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1-\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\Gamma(1-\alpha)}} \sqrt[n]{n!}. \quad \text{Da } n! \leq n^n \text{ ist und}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\Gamma(1-\alpha)} = 1, \quad \text{gibt es ein } n_0 \text{ derart, daß für } n \geq n_0$$

$$\sqrt[n]{(1-\alpha; 1; n)} \leq 2n$$

ist. Damit folgt wegen 3.3

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(1-\alpha, 1, n) |a_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 2n \sqrt[n]{|a_n|} < \infty ,$$

d. h. der Konvergenzradius der Reihe $Q(z)$ ist positiv.

§ 4 Ein Beispiel

Wir wählen

$$k(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{\Gamma(v+\frac{1}{2})} .$$

Setzt man

$$\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt ,$$

so kann man $k(x)$ geschlossen in der Form

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + e^x \sqrt{x} \phi(\sqrt{x})$$

schreiben, was man leicht einsieht, wenn man die Potenzreihen von e^x und $\sqrt{x} \phi(\sqrt{x})$ miteinander multipliziert und berücksichtigt, daß

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{v=0}^{n-1} \frac{(-1)^v}{2v+1} \frac{1}{v!(n-1-v)!} = \frac{1}{\Gamma(v+\frac{1}{2})}$$

ist.

Außerdem wählen wir $\alpha = \frac{1}{2}$.

Die aus den Partialsummen der Reihe für $k(x)$ gebildeten Polynome haben also die Gestalt

$$P_n(x) = \sum_{v=0}^n \frac{x^v}{\Gamma(v+\frac{1}{2})}$$

Nach Definition erhalten wir

$$Q_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{v=0}^n z^v .$$

Die Folge der $Q_n(z)$ konvergiert also für $|z| < 1$ und ist damit λ -konvergent.

(Die Voraussetzung von Satz 3 folgt wegen $\frac{1}{\sqrt[n]{\Gamma(n+1/2)}} < \frac{1}{\sqrt[n]{(n-1)!}} < \frac{e}{n}$ auch unmittelbar.)

Da nun $\sqrt{\pi} Q_n(z)$ das n -te Kreisteilungspolynom ist, sind die Nullstellen von $Q_n(z)$

$$\lambda_\nu = e^{\frac{2\pi i \nu}{n+1}} \quad \nu = 1, \dots, n$$

Wir wollen daher zunächst die im Zusatz zu Satz 1 gegebene Formel für die zu den $P_n(x)$ dualen Funktionen $h_n(x)$ benutzen.

Danach ist

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=1}^n \frac{\lambda_\nu^n}{\prod_{\mu \neq \nu} (\lambda_\nu - \lambda_\mu)} \int_0^x \frac{e^{\lambda_\nu t}}{\sqrt{x-t}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ 1 + \sqrt{x} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{\lambda_\nu^n e^{\lambda_\nu t}}{\prod_{\mu \neq \nu} (\lambda_\nu - \lambda_\mu)} \right) dt \right\} \end{aligned}$$

Beachtet man, daß $\lambda_\nu^{n+1} = 1$ und $\prod_{\mu \neq \nu} (\lambda_\nu - \lambda_\mu) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^n - 1}{x-1} \right) \Big|_{x=\lambda_\nu}$ gilt, so

erhält man

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ 1 + \sqrt{x} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^n (\lambda_\nu - 1) e^{\lambda_\nu t} \right) dt \right\}$$

Da mit jedem komplexen Summanden auch der konjugiert-komplexe auftritt, stellt $h_n(x)$ eine reelle Funktion dar. Nach Satz 3 konvergieren die $h_n(x)$ in jedem endlichen Intervall $(0, T)$ gleichmäßig.

Wir wollen hier direkt zeigen, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 - 2x)$$

gleichmäßig in jedem Intervall $(0, T)$ gilt.

Hierzu betrachten wir das Verhalten von

$$\begin{aligned} R_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n (\lambda_\nu - 1) e^{\lambda_\nu t} = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n \lambda_\nu e^{\lambda_\nu t} - \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n e^{\lambda_\nu t} \\ &= R_n^{(0)}(t) - R_n^{(1)}(t), \end{aligned}$$

wobei $\lambda_0 = 1$ gesetzt werde.

Da der Imaginärteil von $R_n(t)$ verschwindet, betrachten wir nur die Realteile $r_n^{(0)}(t)$ bzw. $r_n^{(1)}(t)$ von $R_n^{(0)}(t)$ bzw. $R_n^{(1)}(t)$.

Mit $\lambda_\nu = \cos \phi_\nu + i \sin \phi_\nu$, $\phi_\nu = \frac{2\pi\nu}{n+1}$, und $\Delta\phi = \frac{2\pi}{n+1}$ gilt

$$r_n^{(0)}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=0}^n \cos(t \sin \phi_\nu + \phi_\nu) e^{t \cos \phi_\nu} \Delta\phi \text{ und}$$

$$r_n^{(1)}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=0}^n \cos(t \sin \phi_\nu) e^{t \cos \phi_\nu} \Delta\phi$$

Definiert man also die Treppenfunktionen

$$\left. \begin{aligned} f_n^{(0)}(\phi, t) &= \cos(t \sin \phi_\nu + \phi_\nu) e^{t \cos \phi_\nu} \\ f_n^{(1)}(\phi, t) &= \cos(t \sin \phi_\nu) e^{t \cos \phi_\nu} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{für } \frac{2\pi\nu}{n+1} \leq \phi < \frac{2\pi(\nu+1)}{n+1} \\ \nu = 0, 1, \dots, n \end{array}$$

so erhält man

$$r_n^{(0)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n^{(0)}(\phi, t) d\phi,$$

$$r_n^{(1)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n^{(1)}(\phi, t) d\phi.$$

$r_n^{(0)}(t)$ bzw. $r_n^{(1)}(t)$ stellen also Riemannsche Näherungssummen für die

Integrale (vergl. (5), Nr. 337)

$$I_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^t \cos \phi \cos(t \sin \phi + \phi) d\phi \equiv 0,$$

$$I_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^t \cos \phi \cos(t \sin \phi) d\phi \equiv 1$$

dar, und wir erhalten unter Verwendung der üblichen Abschätzung mittels des Maximalbetrages der ersten Ableitung des Integranden

$$|r_n^{(0)}(t)| \leq \frac{4\pi^2}{n+1} (t+1)e^t \quad \text{und} \quad |r_n^{(1)}(t) - 1| \leq \frac{4\pi^2}{n+1} t e^t$$

Daraus folgt

$$|R_n(t) + 1| \leq \frac{4\pi^2}{n+1} (2T + 1) e^T \quad \text{für } 0 \leq t \leq T$$

d. h. $R_n(t)$ konvergiert in $(0, T)$ gleichmäßig gegen -1 .

Daher ist

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{x-t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 - 2x), \end{aligned}$$

wobei die Konvergenz wiederum in $(0, T)$ gleichmäßig ist, da

$$|h_n(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 - 2x)| \leq \frac{8\pi^2}{n+1} T \sqrt{T} \phi(\sqrt{T}) e^T + 1$$

ist. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Wir erhalten daher nach Satz 2, daß mit $k(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{\Gamma(v + \frac{1}{2})}$ die

Integralgleichung

$$\int_0^x \frac{k(x-t)}{\sqrt{x-t}} H(t) dt = 1$$

die Lösung $H(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} (1 - 2t)$ besitzt.

Wir wollen nun noch für dieses Beispiel zeigen, wie sich das oben gefundene Ergebnis aus der Darstellung durch das Residuenintegral von Satz 1 erbringen läßt.

Danach ist

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{x}}{\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=K} \frac{e^{tz}}{Q_n\left(\frac{1}{z}\right)} dz \right\} dt$$

Nun liegen nach Konstruktion alle endlichen Pole von $\frac{e^{tz}}{Q_n\left(\frac{1}{z}\right)}$ im Innern von

$|z|=K$, und die Voraussetzungen des im Beweis von Satz 1 zitierten Satzes sind erfüllt, so daß wir das Residuenintegral dadurch bestimmen können, daß wir das Residuum für z_∞ berechnen.

Durch Potenzreihenentwicklung von $\frac{e^{\frac{t}{z}}}{Q_n(z)} = \sqrt{\pi} \frac{e^{\frac{t}{z}}}{z^{n-1}}$ erhält man

daher sofort

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=K} \frac{e^{tz}}{Q_n\left(\frac{1}{z}\right)} dz = \sqrt{\pi} \left(- \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^{vn}}{(vn)!} + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{t^{vn-1}}{(vn-1)!} \right)$$

Der rechtsstehende Ausdruck stellt für alle $t \in (0, T)$ und alle $n > T$ eine alternierende Reihe mit dem Betrage nach monoton fallenden Summanden dar.

Daher ist

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=K} \frac{e^{tz}}{Q_n\left(\frac{1}{z}\right)} dz + 1 \right| \leq \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}$$

und es gilt gleichmäßig für $t \in (0, T)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=K} \frac{e^{tz}}{Q_n\left(\frac{1}{z}\right)} dz = -1$$

Die Behauptung folgt hieraus genau wie oben.

Literaturverzeichnis

- (1) Ahlfors, L. V. Complex Analysis
New York 1953
- (2) Behnke, H., Theorie der analytischen Funktionen
Sommer, F. einer komplexen Veränderlichen
Berlin 1955
- (3) Doetsch, G. Handbuch der Laplace-Transformation I
Basel 1950
- (4) Erdélyi, A., Fractional integration and dual
Sneddon, I. N. integral equations
Canad. J. of Math. 14 (1962) S.685-693
- (5) Gröbner, W., Integraltafeln II
Hofreiter, N. Wien 1961
- (6) Smirnow, W. I. Lehrgang der höheren Mathematik; III, 2
Berlin 1961
- (7) Titchmarch, E. C. Introduction to the Theory of
Fourier Integrals
Oxford 1948