



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH

GESELLSCHAFT MIT BESCHRÄNKTER HAFTUNG

Zentralinstitut für Angewandte Mathematik

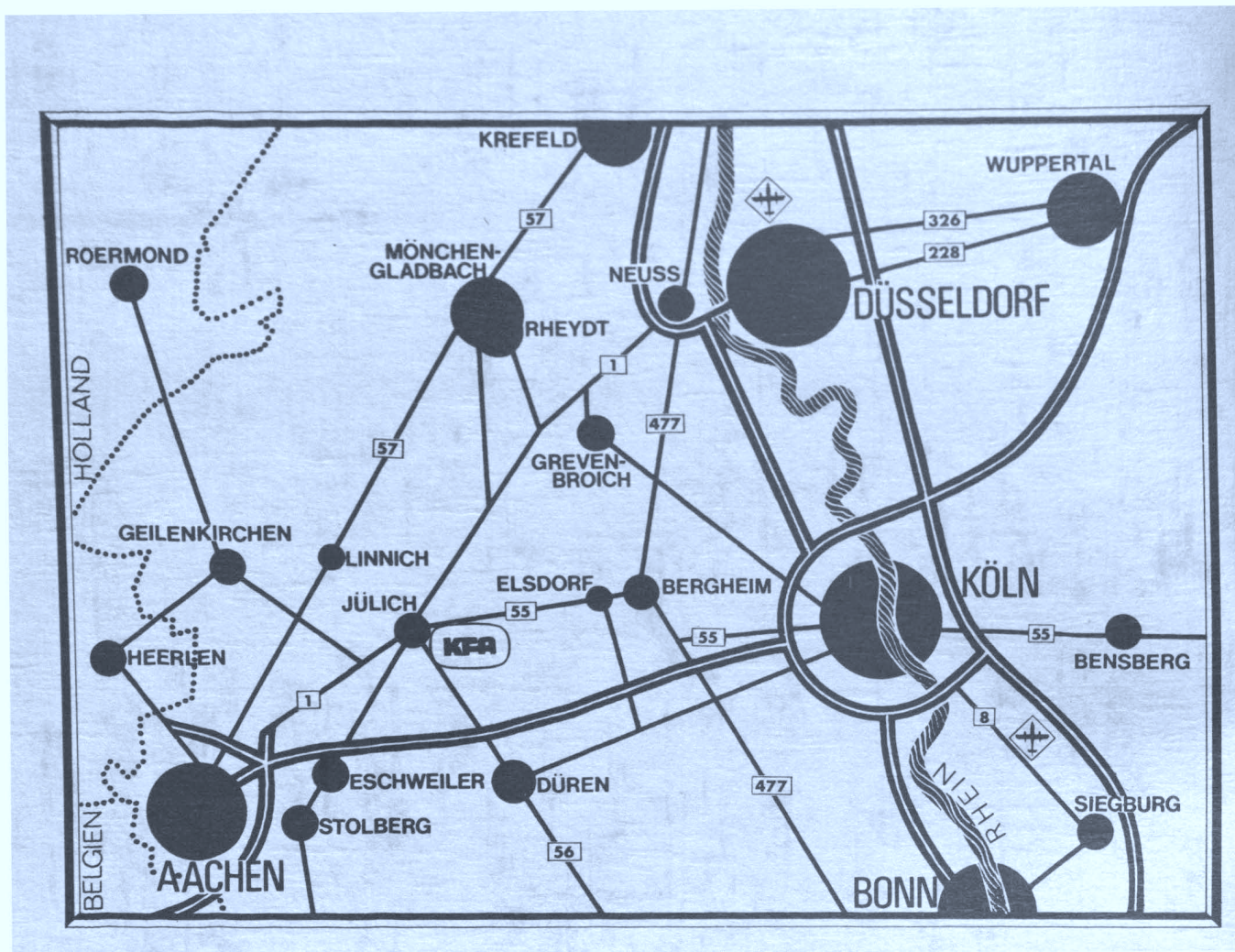
**Integration von Produkten halbzahliger
Besselfunktionen mit Potenzen von x**

von

M. Profant und Ch. Pöppe

**Jül - 1097 - MA
August 1974**

Als Manuskript gedruckt



Berichte der Kernforschungsanlage Jülich - Nr. 1097

Zentralinstitut für Angewandte Mathematik Jül - 1097 - MA

Dok.: Numerical Integration

Bessel Function

Computer Calculation

Im Tausch zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH,
Jülich, Bundesrepublik Deutschland

Integration von Produkten halbzahliger Besselfunktionen mit Potenzen von x

von

M. Profant und Ch. Pöppe

1. Einleitung

Bei der Anwendung des Ritz'schen oder Galerkin'schen Verfahrens für dreidimensionale elliptische Aufgaben benutzt man als Koordinatenfunktionen häufig die Funktionen

$$\phi_{klm} = c_{klm} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{k+\frac{1}{2}}(\gamma_{k,1} r) P_k^m(\cos \varphi) \begin{matrix} \cos m \varphi \\ \sin m \varphi \end{matrix} \quad \text{für } r \leq 1,$$

oder

$$\phi_{klm} = c_{klm} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma_{k,1}}{r}\right) P_k^m(\cos \varphi) \begin{matrix} \cos m \varphi \\ \sin m \varphi \end{matrix} \quad \text{für } r \geq 1,$$

wobei $\gamma_{k,1}$ die 1-te Nullstelle der Bessel-Funktion $J_{k+\frac{1}{2}}$ ist. Wenn wir noch

die vorgegebene Gleichung als $A u = f$ schreiben, tauchen in den oben erwähnten Verfahren die Skalarprodukte $(A \phi_{klm}, \phi_{\alpha\beta\gamma})$ auf. Dazu müssen wir oft (wenn der Operator A bezüglich r separabel ist) die Integrale der Form

$$(1.1) \quad \int x^n \sqrt{x} J_{m+\frac{1}{2}}(\gamma x) dx \quad \text{und} \quad \int x^k J_{m+\frac{1}{2}}(\gamma_1 x) J_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_2 x) dx$$

ausrechnen. Es handelt sich dabei um die Integration schnell oszillierenden Funktionen (bei größerem γ), die numerisch nur schwer erfaßbar ist und dadurch auch sehr viel Rechenzeit kostet. Die Genauigkeit ist (bei Gauß'scher Quadratur) im Abschnitt 5. gezeigt.

Andererseits sind gerade die halbzahligen Bessel-Funktionen geschlossen darstellbar, wie man an der Formel (2.1) sieht, und die Integrale (1.1) kann man analytisch ausrechnen. Die Methode ist in den Abschnitten 2. und 3. erklärt. Im Abschnitt 4. sind alle Formeln für (1.1) zusammengestellt; das sind die Formeln für die unbestimmten Integrale (1.1). Es kommt jetzt auf die Integrationsgrenzen an. Für die von Null verschiedenen Grenzen können wir die Formeln aus 4. direkt benutzen; aber im Nullpunkt erscheinen in einzelnen Gliedern die Potenz- und Logarithmus-Singularitäten, obwohl das Integral als Summe von diesen Gliedern im Nullpunkt regulär ist. Die Grenzwerte der Integrale für x gegen Null werden im Abschnitt 5. berechnet. Die Formeln aus 4. und 5. haben z.B. die Anwendung des Galerkinschen Verfahrens auf die Diffusionsgleichung mit Driftterm ermöglicht, d.h. auf Gleichungen vom Typ $-\Delta u + \nabla u \cdot \nabla \left(-\frac{c(\vartheta, \varphi)}{r}\right) = 0$ im Äußeren einer Kugel.

Die Autoren danken Fr1. Sahelangi für ihre Hilfe bei der Programmerstellung.

2. Integrale der Form $\int x^n \sqrt{x} J_{\frac{m+1}{2}}(\gamma x) dx$.

Wie bekannt, existiert für die halbzahlige Besselsche Funktion $J_{\frac{m+1}{2}}$ die explizite Darstellung

$$(2.1) \quad J_{\frac{m+1}{2}}(\gamma x) = \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma x}} \left[\sin\left(\gamma x - \frac{m\pi}{2}\right) \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^k (m+2k)!}{(2k)! (m-2k)! (2\gamma x)^{2k}} + \right. \\ \left. + \cos\left(\gamma x - \frac{m\pi}{2}\right) \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^k (m+2k+1)!}{(2k+1)! (m-2k-1)! (2\gamma x)^{2k+1}} \right].$$

Bezeichnen wir noch mit p_i

$$(2.2) \quad p_i = (-1)^{\left[\frac{i}{2}\right]} \frac{(m+i)!}{i! (m-i)! (2\gamma)^i}, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

dann ergibt sich für (2.1)

$$(2.3) \quad J_{\frac{m+1}{2}}(\gamma x) = \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma x}} \left[\sin\left(\gamma x - \frac{m\pi}{2}\right) P(x) + \cos\left(\gamma x - \frac{m\pi}{2}\right) Q(x) \right],$$

wobei

$$(2.4) \quad P(x) = p_0 + \frac{p_2}{x^2} + \dots \begin{cases} \frac{p_m}{x^m} \\ \frac{p_{m-1}}{x^{m-1}} \end{cases}, \quad Q(x) = \frac{p_1}{x} + \frac{p_3}{x^3} + \dots \begin{cases} \frac{p_{m-1}}{x^{m-1}} & m \text{ gerade} \\ \frac{p_m}{x^m} & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

Für den Integranden des gesuchten Integrals bekommen wir

$$(2.5) \quad x^n \sqrt{x} J_{\frac{m+1}{2}}(\gamma x) = \sqrt{\frac{2}{\gamma \pi}} \left[\sin\left(\gamma x - \frac{m\pi}{2}\right) x^n P(x) + \cos\left(\gamma x - \frac{m\pi}{2}\right) x^n Q(x) \right].$$

Wir sehen, daß (2.5) eine Linearkombination der Funktionen $\sin(\gamma x - \frac{m\pi}{2})$ und $\cos(\gamma x - \frac{m\pi}{2})$ ist. Dabei sind die Koeffizienten Polynome in x und $\frac{1}{x}$ mit der Eigenschaft, daß das eine nur gerade und das andere nur ungerade Potenzen enthält. Durch Anwendung der partiellen Integration findet man, daß auch das gesuchte Integral sich in ähnlicher Form schreiben läßt, nämlich:

$$(2.6) \quad \int x^n \sqrt{x} J_{m+\frac{1}{2}}(\gamma x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma}} \left[\sin(\gamma x - \frac{m\pi}{2}) S(x) + \cos(\gamma x - \frac{m\pi}{2}) R(x) + A \tilde{Si}(\gamma x) + B \tilde{Ci}(\gamma x) \right];$$

die Funktionen $S(x) = \sum s_j x^j$ und $R(x) = \sum r_j x^j$ sind wieder gewisse Polynome in x und $\frac{1}{x}$, und

$$(2.7) \quad \tilde{Si}(\gamma x) = \int \frac{\sin(\gamma x - \frac{m\pi}{2})}{x} dx = \cos \frac{m\pi}{2} Si(\gamma x) - \sin \frac{m\pi}{2} Ci(\gamma x),$$

$$\tilde{Ci}(\gamma x) = \int \frac{\cos(\gamma x - \frac{m\pi}{2})}{x} dx = \cos \frac{m\pi}{2} Ci(\gamma x) + \sin \frac{m\pi}{2} Si(\gamma x).$$

Daher läuft die Lösung der Integrationsaufgabe auf die Bestimmung der Koeffizienten der Polynome S und R sowie der Konstanten A und B hinaus. Zu diesem Zweck differenzieren wir (2.6) nach x und erhalten durch Vergleich der Koeffizienten von $\sin(\gamma x - \frac{m\pi}{2})$ und $\cos(\gamma x - \frac{m\pi}{2})$ die folgenden Gleichungen:

$$(2.8) \quad x^n P(x) = S'(x) - \gamma R(x) + \frac{A}{x}$$

$$x^n Q(x) = R'(x) + \gamma S(x) + \frac{B}{x}.$$

Im folgenden unterscheiden wir die drei Fälle $n \geq m$, $n < 0$, $0 \leq n < m$.

1. Fall: $n \geq m$

In diesem Fall sind A und $B=0$ und S und R Polynome nur in x vom Grade n . Ausführlich geschrieben:

$$(2.9) \quad p_0 x^n + p_2 x^{n-2} + \dots + \begin{cases} p_m x^{n-m} & m \text{ gerade} \\ p_{m-1} x^{n-m+1} & m \text{ ungerade} \end{cases} =$$

$$= (s_0 + s_1 x + \dots + s_n x^n)' - \gamma (r_0 + r_1 x + \dots + r_n x^n)$$

$$p_1 x^{n-1} + p_3 x^{n-3} + \dots + \begin{cases} p_{m-1} x^{n-m+1} & m \text{ gerade} \\ p_m x^{n-m} & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$= (r_0 + r_1 x + \dots + r_n x^n)' + \gamma (s_0 + s_1 x + \dots + s_n x^n)$$

Durch Koeffizientenvergleich bekommen wir folgende Beziehungen:

$$(2.10) \quad s_n = r_{n-1} = s_{n-2} = r_{n-3} = \dots = 0 ,$$

$$-\gamma r_n = p_0$$

$$n r_n + \gamma s_{n-1} = p_1$$

$$(n-1) s_{n-1} - \gamma r_{n-2} = p_2$$

$$(n-2) r_{n-2} + \gamma s_{n-3} = p_3$$

$$\dots \quad \text{usw} \quad \dots$$

für m gerade

$$(n-m+1) s_{n-m+1} - \gamma r_{n-m} = p_m$$

$$(n-m) r_{n-m} + \gamma s_{n-m-1} = 0$$

$$(n-m-1) s_{n-m-1} - \gamma r_{n-m-2} = 0$$

$$\dots \quad \text{usw.} \quad \dots$$

für m ungerade

$$(n-m+1) r_{n-m+1} + \gamma s_{n-m} = p_m$$

$$(n-m) s_{n-m} - \gamma r_{n-m-1} = 0$$

$$(n-m-1) r_{n-m-1} + \gamma s_{n-m} = 0$$

Um das System (2.10) in kompakter Form zu schreiben und γ aus den Gleichungen zu eliminieren, führen wir noch folgende Substitutionen ein:

$$(2.11) \quad P_i = p_i \gamma^i = (-1)^{\left[\frac{i}{2}\right]} \frac{(m+i)!}{i! (m-i)! 2^i}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad P_i = 0 \quad \text{für } i > m;$$

$$r_n = \frac{c_n}{\gamma}, \quad s_{n-1} = \frac{c_{n-1}}{\gamma^2}, \quad r_{n-2} = \frac{c_{n-2}}{\gamma^3}, \quad s_{n-3} = \frac{c_{n-3}}{\gamma^4}, \quad \dots$$

Dann bekommen wir für die c_i

$$(2.12) \quad c_n = -p_0 = -1, \quad (n-k) c_{n-k} + (-1)^k c_{n-k-1} = p_{k+1},$$

$$\text{oder} \quad c_{n-k-1} = (-1)^k (p_{k+1} - (n-k) c_{n-k}), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

und daraus

$$(2.12a) \quad c_{n-k} = (-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{1}{(n-k)!} \sum_{i=0}^I \frac{(n-i)! (m+i)!}{i! (m-i)! 2^i}, \quad \text{wobei } I = \min(m, k).$$

Zusammengefaßt, können wir schreiben (für $n \geq m$)

$$\begin{aligned}
 (2.13) \quad \int x^n \sqrt{x} J_{\frac{m+1}{2}}(\gamma x) dx &= \\
 &= \frac{1}{\gamma^{n+1}} \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma}} \left[\sin\left(\gamma x - \frac{m\pi}{2}\right) (c_{n-1}(\gamma x)^{n-1} + c_{n-3}(\gamma x)^{n-3} + \dots) \right. \\
 &\quad \left. + \cos\left(\gamma x - \frac{m\pi}{2}\right) (c_n(\gamma x)^n + c_{n-2}(\gamma x)^{n-2} + \dots) \right] ,
 \end{aligned}$$

wobei die c_i durch (2.12) oder (2.12a) gegeben sind. Die Punkte sollen (zur Vermeidung einer Fallunterscheidung) andeuten, daß die Summation, je nach dem, "wie es auskommt", bis zur ersten bzw. nullten Potenz von (γx) durchzuführen ist.

Als Beispiel berechnen wir

$$\int x^3 \sqrt{x} J_{\frac{3}{2}}(\gamma x) dx .$$

In diesem Falle ist $n = 3$, $m = 1$, und die c_i berechnen sich nach (12) oder (12a) zu $c_3 = -1$, $c_2 = 4$, $c_1 = 8$, $c_0 = -8$.

Es gilt also

$$\begin{aligned}
 \int x^3 \sqrt{x} J_{\frac{3}{2}}(\gamma x) dx &= \\
 &= \frac{1}{\gamma^4} \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma}} \left[\sin\left(\gamma x - \frac{\pi}{2}\right) (4(\gamma x)^2 - 8) + \cos\left(\gamma x - \frac{\pi}{2}\right) (-(\gamma x)^3 + 8 \gamma x) \right] .
 \end{aligned}$$

2. Fall: $n < 0$.

Wir gehen wieder von den Gleichungen (2.8) aus. Die Funktionen S und R sind jetzt Polynome in $\frac{1}{x}$ ohne absolutes Glied (da für die linken Seiten ein Gleiches gilt). Die höchste in diesen Polynomen vorkommende Potenz von $\frac{1}{x}$ ist $k + m$ (wobei $k = -n$ gesetzt wird). Man kann daher für S und R ansetzen

$$S = \sum_{i=1}^{k+m-1} \frac{s_{-i}}{x^i} , \quad R = \sum_{i=1}^{k+m-1} \frac{r_{-i}}{x^i} .$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

für m gerade

$$(2.14) \quad r_{-(m+k-1)} = s_{-(m+k-2)} = r_{-(m+k-3)} = \dots = 0 \quad s_{-(m+k-1)} = r_{-(m+k-2)} = s_{-(m+k-3)} = \dots = 0$$

$$(2.15) \quad -(m+k-1) s_{-(m+k-1)} = p_m \quad -(m+k-1) r_{-(m+k-1)} = p_m$$

$$-(m+k-2) r_{-(m+k-2)} + \gamma s_{-(m+k-1)} = p_{m-1} \quad -(m+k-2) s_{-(m+k-2)} - \gamma r_{-(m+k-1)} = p_{m-1}$$

$$-(m+k-3) s_{-(m+k-3)} - \gamma r_{-(m+k-2)} = p_{m-2} \quad -(m+k-3) r_{-(m+k-3)} + \gamma s_{-(m+k-2)} = p_{m-2}$$

usw.

usw.

Um (2.15) einheitlich zu schreiben, führen wir analoge Substitutionen zu (2.11) ein:

$$(2.16) \quad p_i = p_i^i \gamma, \quad i = 0, 1, \dots, m; \quad p_i = 0, \quad i < 0$$

$$\frac{c_{-(m+k-1)}}{\gamma^m} = \begin{array}{c} s_{-(m+k-1)} \\ \diagdown \quad \diagup \\ r_{-(m+k-1)} \end{array}, \quad \frac{c_{-(m+k-2)}}{\gamma^{m-1}} = \begin{array}{c} r_{-(m+k-2)} \\ \diagdown \quad \diagup \\ s_{-(m+k-2)} \end{array}, \quad \dots$$

m gerade m ungerade

Dann erhält man anstelle von (2.15) (aus (2.15) und (2.2))

$$(2.17) \quad c_{-(m+k-1)} = -\frac{p_m}{m+k-1} = -(-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(2m)!}{(m+k-1)m! 2^m},$$

$$c_{-(m+k-(i+1))} = -\frac{1}{m+k-(i+1)} ((-1)^{i+m} c_{-(m+k-i)} + p_{m-i}) = -\frac{1}{m+k-(i+1)} ((-1)^{i+m} c_{-(m+k-i)} + 0)$$

für $i \leq m$
für $i > m$

$i = 1, 2, \dots, m+k-2$

Dadurch sind die Koeffizienten c_{-i} (und damit auch r_{-i} und s_{-i}) rekursiv bestimmt. Es bleiben noch A und B zu berechnen. Den Gleichungen (2.8) entnimmt man (Koeffizient von $\frac{1}{x}$) nach wenigen Umformungen, daß

$$(2.18) \quad A = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ c_{-1} \frac{1}{1-k} + p_0 \delta_{k,1} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}, \quad B = \begin{cases} -\frac{c_{-1}}{\gamma} \frac{1}{1-k} & \text{für } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Aus (2.17) und (2.18) sind damit alle für das Integral maßgeblichen Zahlen bekannt, und wir haben nach (2.6)

$$(2.19) \quad \int \frac{\sqrt{x}}{x^k} J_{\frac{1}{m+2}}(\gamma x) dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma}} \left(\frac{1}{\gamma} \right)^{k-1} \left[\left(\frac{c_{-(m+k-1)}}{(\gamma x)^{m+k-1}} + \frac{c_{-(m+k-3)}}{(\gamma x)^{m+k-3}} + \dots \right) \cdot \begin{cases} \sin(\gamma x - \frac{m\pi}{2}) & \text{für } m \text{ gerade} \\ \cos(\gamma x - \frac{m\pi}{2}) & \text{für } m \text{ ungerade} \end{cases} \right.$$

$$+ \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} (A \operatorname{Si}(\gamma x) + B \operatorname{Ci}(\gamma x)) & \text{für } m \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}} (B \operatorname{Si}(\gamma x) - A \operatorname{Ci}(\gamma x)) & \text{für } m \text{ ungerade} \end{cases} \left. \right]$$

die Summation geht jeweils ("wie es auskommt") bis $\frac{c_{-2}}{(\gamma x)^2}$ bzw. $\frac{c_{-1}}{\gamma x}$.

Wie im ersten Fall, so kann man auch hier für die Koeffizienten c_i eine direkte Formel angeben (obwohl sie nur eine geringe praktische Bedeutung hat, weil die Rekursionsformeln programmtechnisch günstiger sind); sie lautet

$$(2.20) \quad c_{-(m+k-i)} = (-1)^{\left[\frac{i+\mu+1}{2} \right]} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{\left[\frac{j+\mu}{2} \right]} \frac{p_{m-j}}{(m+k-(j+1)) \dots (m+k-i)}, \quad \mu = \begin{cases} 0, & m \text{ gerade} \\ 1, & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

für $i = 1, 2, \dots, m+k-1$

Als Beispiel für den 2. Fall berechnen wir $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2} J_3(\gamma x) dx$.

Hier ist $m = 1$, $n = -2$, also $k = 2$. Aus (2.17) oder (2.20) sowie (2.18) erhält man $c_{-2} = -\frac{1}{2}$, $c_{-1} = -\frac{1}{2}$, $A = 0$, $B = \frac{1}{2} \gamma$. Damit ergibt sich

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x^2} J_3(\gamma x) dx = \gamma \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma}} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{(\gamma x)^2} \cos(\gamma x - \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2\gamma x} \sin(\gamma x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} \text{Si}(\gamma x) \right).$$

Es bleibt zu untersuchen der

3. Fall: $0 \leq n < m$

In diesem "gemischten" Fall enthalten die linken Seiten der Gleichungen (2.8) tatsächlich Potenzen sowohl von x als auch von $\frac{1}{x}$; das gleiche gilt dann auch für S und R . Es wird sich jedoch zeigen, daß das System (2.8) in zwei Systeme zerfällt, von denen das eine nur die negativen, das andere die übrigen Potenzen von x umfaßt. Um dies zu sehen, schreiben wir (2.8) in ausführlicher Form:

$$(2.21) \quad x^n p_0 + x^{n-2} p_2 + \dots + \begin{cases} x^2 p_{n-2} + p_n + \frac{p_{n+2}}{x^2} + \dots & (n \text{ gerade}) \\ x p_{n-1} + \frac{p_{n+1}}{x} + \dots & (n \text{ ungerade}) \end{cases} + \dots + \begin{cases} p_m x^{n-m} & (m \text{ gerade}) \\ p_{m-1} x^{n-m+1} & (m \text{ ungerade}) \end{cases} = S' - \gamma R + \frac{A}{x}$$

$$\begin{aligned}
& x^{n-1} p_1 + x^{n-3} p_3 + \dots + \left(x p_{n-1} + \frac{p_{n+1}}{x} + \dots \right) \quad (n \text{ gerade}) \quad \left(\begin{array}{c} p_{m-1} x^{n-m+1} \\ p_m x^{n-m} \end{array} \right) \quad (m \text{ gerade}) \\
& \quad \left(x^2 p_{n-2} + p_n + \frac{p_{n+2}}{x^2} + \dots \right) \quad (n \text{ ungerade}) \quad \quad \quad = R' + \gamma S + \frac{B}{x} \quad (m \text{ ungerade})
\end{aligned}$$

S und R haben die Form:

$$\begin{aligned}
(2.22) \quad S &= s_n x^n + s_{n-1} x^{n-1} + \dots + s_0 + s_{-1} x^{-1} + s_{-2} x^{-2} + \dots + s_{n-m+1} x^{n-m+1} \\
R &= r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \dots + r_0 + r_{-1} x^{-1} + r_{-2} x^{-2} + \dots + r_{n-m+1} x^{n-m+1}
\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert uns hier für die nichtgenativen Potenzen von x

$$(2.23) \quad -\gamma r_n = p_0$$

$$n r_n + \gamma s_{n-1} = p_1$$

$$(n-1) s_{n-1} - \gamma r_{n-2} = p_2$$

...

$$s_1 - \gamma r_0 = p_n \quad \text{für } n \text{ gerade}$$

$$r_1 + \gamma s_0 = p_n \quad \text{für } n \text{ ungerade ,}$$

sowie für die negativen Potenzen

$$(2.26) \quad \int_0^n x^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}}(\gamma x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma}} \left(\frac{1}{\gamma^{n+1}} \left[\sin(\gamma x - \frac{m\pi}{2}) \sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} c_{n-2i+1} (\gamma x)^{n-2i+1} + \cos(\gamma x - \frac{m\pi}{2}) \sum_{i=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} c_{n-2i} (\gamma x)^{n-2i} \right] \right. \\ \left. + \begin{cases} B \left(\cos \frac{m\pi}{2} \operatorname{Ci}(\gamma x) + \sin \frac{m\pi}{2} \operatorname{Si}(\gamma x) \right) & n \text{ gerade} \\ A \left(\cos \frac{m\pi}{2} \operatorname{Si}(\gamma x) - \sin \frac{m\pi}{2} \operatorname{Ci}(\gamma x) \right) & n \text{ ungerade} \end{cases} \right)$$

Dabei sind die c_i wie in (2.12) bzw. (2.17) definiert, und für A und B gilt

$$(2.27) \quad \left. \begin{aligned} A = 0, \quad B = p_{n+1} - \frac{c_{-1}}{\gamma} & \quad \text{für } n \text{ gerade} \\ B = 0, \quad A = p_{n+1} + \frac{c_{-1}}{\gamma} & \quad \text{für } n \text{ ungerade} \end{aligned} \right\}, \quad c_{-1} = 0 \text{ für } n = m-1, \text{ ansonsten wie in (2.17) definiert.}$$

Auch für diesen Fall berechnen wir ein Beispiel, und zwar $\int_0^n x \sqrt{x} J_7(\gamma x) dx$.

Dann erhalten wir ($n = 1, m = 3$)

$$c_1 = -1, \quad c_0 = 7 \quad (\text{nach 2.12}), \quad c_{-1} = 15 \quad (\text{nach 2.17}), \quad B = A = 0 \quad (\text{nach 2.27}).$$

Es ist also

$$\int_0^1 x \sqrt{x} J_7(\gamma x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma}} \frac{1}{\gamma^2} \left[7 \sin(\gamma x - \frac{3\pi}{2}) + \cos(\gamma x - \frac{3\pi}{2}) (-\gamma x + \frac{15}{\gamma x}) \right]$$

3. Integrale der Form $\int x^k J_{\frac{m+\frac{1}{2}}{n}}(\gamma_1 x) J_{\frac{n+\frac{1}{2}}{m}}(\gamma_2 x) dx$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$

Auch diese Integrale lassen sich, wie im folgenden gezeigt wird, durch einen Ansatz und einen Koeffizientenvergleich berechnen. Darüberhinaus kann man den Integranden in geeigneter Weise so umformen, daß das entstehende Gleichungssystem in zwei Systeme zerfällt, die nach dem Verfahren des 2. Abschnitts auflösbar sind.

Wie in (2.3) können wir wieder schreiben

$$(3.1) \quad J_{\frac{m+\frac{1}{2}}{n}}(\gamma_1 x) = \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma_1 x}} \left[\sin(\gamma_1 x - \frac{m\pi}{2}) P_m(\gamma_1 x) + \cos(\gamma_1 x - \frac{m\pi}{2}) Q_m(\gamma_1 x) \right]$$

$$J_{\frac{n+\frac{1}{2}}{m}}(\gamma_2 x) = \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma_2 x}} \left[\sin(\gamma_2 x - \frac{n\pi}{2}) P_n(\gamma_2 x) + \cos(\gamma_2 x - \frac{n\pi}{2}) Q_n(\gamma_2 x) \right];$$

dabei soll, analog zu (2.2) und (2.4) gelten:

$$(3.2) \quad P_m = p_0 + \frac{p_2}{x^2} + \dots + \frac{p_m}{x^m} + \frac{p_{m-1}}{x^{m-1}}, \quad Q_m = \frac{p_1}{x} + \frac{p_3}{x^3} + \dots + \frac{p_m}{x^m} + \frac{p_{m-1}}{x^{m-1}},$$

m gerade
m ungerade

$$P_n = q_0 + \frac{q_2}{x^2} + \dots + \frac{q_n}{x^n} + \frac{q_{n-1}}{x^{n-1}}, \quad Q_n = \frac{q_1}{x} + \frac{q_3}{x^3} + \dots + \frac{q_n}{x^n} + \frac{q_{n-1}}{x^{n-1}},$$

n gerade
n ungerade

mit

$$(3.3) \quad p_i = (-1)^{\left[\frac{i}{2}\right]} \frac{(m+i)!}{i!(m-i)!(2\gamma_1)^i} \quad \text{für } 0 \leq i \leq m, \quad p_i = 0 \quad \text{sonst}$$

$$q_i = (-1)^{\left[\frac{i}{2}\right]} \frac{(n+i)!}{i!(n-i)!(2\gamma_2)^i} \quad \text{für } 0 \leq i \leq n, \quad q_i = 0 \quad \text{sonst}$$

Daraus folgt nach einigen Umformungen

$$(3.4) \quad x^k J_{m+\frac{1}{2}}(\gamma_1 x) J_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_2 x) = \frac{x^{k-1}}{\pi \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \left[\sin(\gamma_1 x - \frac{\pi}{2} N) (P_{m,n}^Q + Q_{m,n}^P) + \cos(\gamma_1 x - \frac{\pi}{2} N) (Q_{m,n}^Q - P_{m,n}^P) + \right. \\ \left. + \sin(\gamma_2 x - \frac{\pi}{2} M) (P_{m,n}^Q - Q_{m,n}^P) + \cos(\gamma_2 x - \frac{\pi}{2} M) (P_{m,n}^P + Q_{m,n}^Q) \right],$$

$$\text{wobei } \gamma = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \bar{\gamma} = \gamma_1 - \gamma_2, \quad N = n+m, \quad M = m-n.$$

Wenn wir jetzt noch

$$(3.5) \quad T_1 = x^{k-1} (P_{m,n}^Q + Q_{m,n}^P), \quad U_1 = x^{k-1} (P_{m,n}^Q - Q_{m,n}^P), \\ U_2 = x^{k-1} (Q_{m,n}^Q - P_{m,n}^P), \quad T_2 = x^{k-1} (P_{m,n}^P + Q_{m,n}^Q)$$

setzen, dann nimmt der Integrand die folgende Form an:

$$(3.6) \quad x^k J_{m+\frac{1}{2}}(\gamma_1 x) J_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_2 x) = \frac{1}{\pi \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \left[T_1 \sin(\gamma_1 x - \frac{\pi}{2} N) + U_2 \cos(\gamma_1 x - \frac{\pi}{2} N) + U_1 \sin(\gamma_2 x - \frac{\pi}{2} M) + T_2 \cos(\gamma_2 x - \frac{\pi}{2} M) \right].$$

Die T_i und U_i kann man explizit ausrechnen; es ergibt sich

$$(3.7) \quad T_1 = x^{k-1} \sum_{i \geq 0} \frac{t_{2i+1}}{x^{2i+1}}, \quad T_2 = x^{k-1} \sum_{i \geq 0} \frac{t_{2i}}{x^{2i}}$$

$$\text{mit} \quad t_j = \sum_{s \geq 0} p_s q_{j-s}$$

$$\text{und} \quad U_1 = x^{k-1} \sum_{i \geq 0} \frac{u_{2i+1}}{x^{2i+1}}, \quad U_2 = x^{k-1} \sum_{i \geq 0} \frac{u_{2i}}{x^{2i}}$$

$$\text{mit} \quad u_j = \sum_{s \geq 0} (-1)^{j-s+1} p_s q_{j-s}$$

Die auftretenden Summen sind in Wirklichkeit alle endlich, da nur endlich viele p_j und q_j nicht verschwinden. Wir bemerken, daß die T_i und U_i Polynome in x und $\frac{1}{x}$ sind, während die Polynome ohne den Vorfaktor, also $\frac{1}{x^{k-1}} T_i$ und $\frac{1}{x^{k-1}} U_i$, nur $\frac{1}{x}$ enthalten. Für die Grade dieser Polynome findet man

$$(3.8) \quad \text{gr}\left(\frac{1}{x^{k-1}} T_1\right) = \text{gr}\left(\frac{1}{x^{k-1}} U_1\right) = \begin{cases} N-1 \\ N \end{cases}, \quad \text{gr}\left(\frac{1}{x^{k-1}} T_2\right) = \text{gr}\left(\frac{1}{x^{k-1}} U_2\right) = \begin{cases} N & \text{gerade} \\ N-1 & \text{ungerade} \end{cases}$$

Ähnliche Überlegungen wie im 2. Abschnitt führen auf den Ansatz für das Integral

$$(3.9) \quad \int x^k J_{\frac{m+\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}}(\gamma_1 x) J_{\frac{1}{n+\frac{1}{2}}}(\gamma_2 x) dx = \frac{1}{\pi \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \left[S \sin\left(\gamma x - \frac{\pi}{2} N\right) + R \cos\left(\gamma x - \frac{\pi}{2} N\right) + V \sin\left(\bar{\gamma} x - \frac{\pi}{2} M\right) + \right. \\ \left. + W \cos\left(\bar{\gamma} x - \frac{\pi}{2} M\right) + A \tilde{\text{Si}}(\gamma x) + B \tilde{\text{Ci}}(\gamma x) + C \tilde{\text{Si}}(\bar{\gamma} x) + D \tilde{\text{Ci}}(\bar{\gamma} x) \right]$$

Dabei sollen R , S , V und W Polynome in x und $\frac{1}{x}$ sein, $\tilde{S}_i$ und $\tilde{C}_i$ wie in (2.7) definiert werden.

Durch Differenzieren nach x und Koeffizientenvergleich mit (3.4) erhalten wir die folgenden 4 Gleichungen:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} T_1 &= S' - \bar{\gamma}R + \frac{A}{x} & U_1 &= V' - \bar{\gamma}W + \frac{C}{x} \\ U_2 &= R' + \bar{\gamma}S + \frac{B}{x} & T_2 &= W' + \bar{\gamma}V + \frac{D}{x} \end{aligned}$$

Dieses System zerfällt in einen "linken" Teil, aus dem man S , R , A und B ermittelt, und in einen "rechten", der V , W , C und D liefert. Außerdem zeigt jeder der beiden Teile die gleiche Struktur wie das System (2.8). Diese Tatsache erlaubt es uns, dasselbe Verfahren wie im 2. Abschnitt auf die beiden Systeme anzuwenden. Es erscheint daher sinnvoll, nur noch die Teile des Lösungsweges darzustellen, die sich von dem bereits bekannten unterscheiden, und im übrigen nur die Ergebnisse zu notieren.

Wir unterscheiden wieder die drei Fälle $k-1 \geq N$, $k-1 < 0$ und $0 \leq k-1 < N$.

1. Fall: $k-1 \geq N$

A und B sind $= 0$ und S und R Polynome in x vom Grade $k-1$,

$$S = s_{k-1} x^{k-1} + s_{k-2} x^{k-2} + \dots + s_0, \quad R = r_{k-1} x^{k-1} + r_{k-2} x^{k-2} + \dots + r_0.$$

Wir erhalten

$$(3.11) \quad r_{k-1} = s_{k-2} = r_{k-3} = s_{k-4} = \dots = 0,$$

$${}^+_Y s_{k-1} = u_0$$

$$(k-1)s_{k-1} - {}^+_Y r_{k-2} = t_1$$

$$(k-2)r_{k-2} + {}^+_Y s_{k-3} = u_2$$

usw.

Um die formale Ähnlichkeit mit (2.10) auszunutzen, setzen wir noch

$$u_0 = \bar{p}_0, \quad t_1 = \bar{p}_1, \quad u_2 = \bar{p}_2, \quad \text{usw.}, \quad \bar{p}_i = 0 \quad \text{für } i > N.$$

Dann erhalten wir wie in (2.12) die Rekursionsformel

$$(3.12) \quad c_{k-1} = \bar{p}_0 = u_0, \quad (k-i)c_{k-i} + (-1)^i c_{k-i-1} = \bar{p}_i \quad {}^+_Y^i, \quad i = 1, 2, \dots, k-1,$$

$$\text{wobei} \quad s_{k-1} = \frac{c_{k-1}}{+{}_Y}, \quad r_{k-2} = \frac{c_{k-2}}{+{}_Y}, \quad s_{k-3} = \frac{c_{k-3}}{+{}_Y} \quad \text{usw.}$$

Die analogen Ergebnisse erhalten wir für die "rechte Hälfte":

$$(3.13) \quad C = 0, \quad D = 0, \quad V = \sum_{i=0}^{k-1} v_i x^i, \quad W = \sum_{i=0}^{k-1} w_i x^i$$

$$w_{k-1} = v_{k-2} = w_{k-3} = \dots = 0$$

$$d_{k-1} = \bar{q}_0 = t_0, \quad (k-1)d_{k-i} + (-1)^i d_{k-i-1} = \bar{q}_i \quad {}^+_Y^i, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, \quad \bar{q}_i = \begin{matrix} t_i & i \text{ gerade} \\ u_i & i \text{ ungerade} \end{matrix}, \quad \bar{q}_i = 0 \quad \text{für } i > N$$

wobei $v_{k-1} = \frac{d_{k-1}}{\gamma}$, $w_{k-2} = \frac{d_{k-2}}{\gamma^2}$, $v_{k-3} = \frac{d_{k-3}}{\gamma^3}$ usw.

Damit lautet das gesuchte Integral

$$(3.14) \quad \int x^k J_{m+\frac{1}{2}}(\gamma_1 x) J_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_2 x) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \left\{ \frac{1}{k} \left[\sin(\gamma_1 x - \frac{\pi N}{2}) (c_{k-1}^+(\gamma_1 x)^{k-1} + c_{k-3}^+(\gamma_1 x)^{k-3} + \dots) + \cos(\gamma_1 x - \frac{\pi N}{2}) (c_{k-2}^+(\gamma_1 x)^{k-2} + c_{k-4}^+(\gamma_1 x)^{k-4} + \dots) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k} \left[\sin(\gamma_2 x - \frac{\pi M}{2}) (d_{k-1}^-(\gamma_2 x)^{k-1} + d_{k-3}^-(\gamma_2 x)^{k-3} + \dots) + \cos(\gamma_2 x - \frac{\pi M}{2}) (d_{k-2}^-(\gamma_2 x)^{k-2} + d_{k-4}^-(\gamma_2 x)^{k-4} + \dots) \right] \right\}$$

17

Die Punkte sollen wieder andeuten, daß jeweils bis zur ersten bzw. nullten Potenz von (γx) zu summieren ist.

Wie in (2.12a), so könnte man auch hier direkte Formeln für die c_i und d_i entwickeln. In Anbetracht des geringen Nutzens für die Programmierung soll jedoch hier darauf verzichtet werden.

2. Fall: $k-1 < 0$

Im folgenden setzen wir zur Vereinfachung $-h = k-1$; R , S , V und W sind Polynome in $\frac{1}{x}$, deren Grad $\leq h + N-1$ ist:

$$S = \sum_{i=1}^{h+N-1} \frac{s_{-i}}{x^i}, \quad R = \sum_{i=1}^{h+N-1} \frac{r_{-i}}{x^i}, \quad V = \sum_{i=1}^{h+N-1} \frac{v_{-i}}{x^i}, \quad W = \sum_{i=1}^{h+N-1} \frac{w_{-i}}{x^i}.$$

Das "linke" Gleichungssystem aus (3.10) liefert

$$(3.15) \quad s_{h+N-1} = r_{h+N-2} = s_{h+N-3} = \dots = 0 \quad N \text{ gerade}$$

$$r_{h+N-1} = s_{h+N-2} = r_{h+N-3} = \dots = 0 \quad N \text{ ungerade}$$

sowie mit den Definitionen

$$(3.16) \quad \frac{c_{-(h+N-1)} + \frac{N}{\gamma}}{\gamma} = \begin{matrix} r_{-(h+N-1)} \\ \swarrow \quad \searrow \\ s_{-(h+N-1)} \end{matrix}, \quad \frac{c_{-(h+N-2)} + \frac{N-1}{\gamma}}{\gamma} = \begin{matrix} s_{-(h+N-2)} \\ \swarrow \quad \searrow \\ r_{-(h+N-2)} \end{matrix}, \quad \frac{c_{-(h+N-3)} + \frac{N-2}{\gamma}}{\gamma} = \begin{matrix} r_{-(h+N-3)} \\ \swarrow \quad \searrow \\ s_{-(h+N-3)} \end{matrix} \begin{matrix} N \text{ gerade} \\ \text{usw.} \\ N \text{ ungerade} \end{matrix}$$

$$\frac{\bar{p}_N}{\gamma} = \begin{matrix} u_N \\ \swarrow \quad \searrow \\ t_N \end{matrix}, \quad \frac{\bar{p}_{N-1}}{\gamma} = \begin{matrix} t_{N-1} \\ \swarrow \quad \searrow \\ u_{N-1} \end{matrix}, \quad \frac{\bar{p}_{N-2}}{\gamma} = \begin{matrix} t_{N-2} \\ \swarrow \quad \searrow \\ u_{N-2} \end{matrix} \begin{matrix} N \text{ gerade} \\ \text{usw.} \\ N \text{ ungerade} \end{matrix}$$

die Rekursionsformel

$$(3.17) \quad c_{-(h+N-1)} = -\frac{\bar{p}_N}{h+N-1}, \quad c_{-(h+N-(i+1))} = (-1)^{i+N} \frac{c_{-(h+N-i)}}{h+N-(i+1)} - \frac{\bar{p}_{N-i}}{h+N-(i+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, h+N-2.$$

Ebenso erhalten wir für die "rechte Hälfte"

$$(3.18) \quad \frac{d_{-(h+N-1)} + \frac{N}{\gamma}}{\gamma} = \begin{matrix} w_{-(h+N-1)} \\ \swarrow \quad \searrow \\ v_{-(h+N-1)} \end{matrix}, \quad \frac{d_{-(h+N-2)} + \frac{N-1}{\gamma}}{\gamma} = \begin{matrix} v_{-(h+N-2)} \\ \swarrow \quad \searrow \\ w_{-(h+N-2)} \end{matrix} \begin{matrix} N \text{ gerade} \\ \text{usw.} \\ N \text{ ungerade} \end{matrix}$$

(die übrigen v_i und w_i verschwinden),

$$\frac{\bar{q}_N}{\gamma} = \begin{matrix} t_N \\ \swarrow \quad \searrow \\ u_N \end{matrix}, \quad \frac{\bar{q}_{N-1}}{\gamma} = \begin{matrix} u_{N-1} \\ \swarrow \quad \searrow \\ t_{N-1} \end{matrix}, \quad \dots \begin{matrix} N \text{ gerade} \\ N \text{ ungerade} \end{matrix}$$

$$(3.19) \quad d_{-(h+N-1)} = -\frac{\bar{q}_N}{h+N-1}, \quad d_{-(h+N-(i+1))} = (-1)^{i+N} \frac{d_{-(h+N-i)}}{h+N-(i+1)} - \frac{\bar{q}_{N-i}}{h+N-(i+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, h+N-2$$

Für die Koeffizienten A, B, C und D gilt

$$(3.20) \quad A = \frac{c_{-1}}{+l-h}, \quad C = \frac{d_{-1}}{-l-h}, \quad B = 0, \quad D = 0 \quad \text{für } h \text{ gerade}$$

$$A = 0, \quad C = 0, \quad B = -\frac{c_{-1}}{+l-h} + \delta_{h,1}^u, \quad D = -\frac{d_{-1}}{-l-h} + \delta_{h,1}^t \quad \text{für } h \text{ ungerade}$$

(Zur Berechnung von $\tilde{S}_i$ und $\tilde{C}_i$ vgl. 2.7)

Insgesamt ergibt sich

$$(3.21) \quad \int \frac{1}{x^{h-1}} J_{\frac{1}{m+\frac{1}{2}}}(\gamma_1 x) J_{\frac{1}{n+\frac{1}{2}}}(\gamma_2 x) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \left\{ \begin{aligned} & + \frac{h-1}{\gamma} \left[\left(\frac{c_{-(h+N-1)}}{(\gamma x)^{h+N-1}} + \frac{c_{-(h+N-3)}}{(\gamma x)^{h+N-3}} + \dots \right) \cdot \begin{cases} \cos(\gamma x - \frac{\pi N}{2}) \\ \sin(\gamma x - \frac{\pi N}{2}) \end{cases} \right. \\ & \left. + \frac{h-1}{\gamma} \left[\left(\frac{d_{-(h+N-1)}}{(\gamma x)^{h+N-1}} + \frac{d_{-(h+N-3)}}{(\gamma x)^{h+N-3}} + \dots \right) \cdot \begin{cases} \cos(\gamma x - \frac{\pi M}{2}) \\ \sin(\gamma x - \frac{\pi M}{2}) \end{cases} \right] \right. \\ & \left. + \begin{cases} A \tilde{S}_i(\gamma x) + C \tilde{S}_i(\bar{\gamma} x) \\ B \tilde{C}_i(\gamma x) + D \tilde{C}_i(\bar{\gamma} x) \end{cases} \right\} \quad \begin{matrix} \text{für } h \text{ gerade} \\ \text{für } h \text{ ungerade} \end{matrix}$$

[oben für N gerade, unten für N ungerade]

3. Fall: $0 \leq k-1 < N$

Das nur wenig geänderte Verfahren bringt das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned}
 (3.22) \quad & \int_{\mathbf{x}}^k J_1(\gamma_1 \mathbf{x}) J_1(\gamma_2 \mathbf{x}) \frac{dx}{n^{\frac{N-1}{2}}} = \\
 & = \frac{1}{\pi \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \left\{ \frac{1}{\gamma} \left[\sin^+(\gamma \mathbf{x} - \frac{\pi}{2} N) \sum_{i=0}^{\left[\frac{N-1}{2} \right]} c_{k-2i-1}^+(\gamma \mathbf{x})^{k-2i-1} + \cos^+(\gamma \mathbf{x} - \frac{\pi}{2} N) \sum_{i=0}^{\left[\frac{N-2}{2} \right]} c_{k-2i-2}^+(\gamma \mathbf{x})^{k-2i-2} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + (-1)^{\left[\frac{N}{2} \right]} \begin{cases} A \operatorname{Si}^+(\gamma \mathbf{x}) + B \operatorname{Ci}^+(\gamma \mathbf{x}) & \text{für } N \text{ gerade} \\ B \operatorname{Si}'^+(\gamma \mathbf{x}) - A \operatorname{Ci}^+(\gamma \mathbf{x}) & \text{für } N \text{ ungerade} \end{cases} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\bar{\gamma}} \left[\sin(\bar{\gamma} \mathbf{x} - \frac{\pi}{2} M) \sum_{i=0}^{\left[\frac{N-1}{2} \right]} d_{k-2i-1}(\bar{\gamma} \mathbf{x})^{k-2i-1} + \cos(\bar{\gamma} \mathbf{x} - \frac{\pi}{2} M) \sum_{i=0}^{\left[\frac{N-2}{2} \right]} d_{k-2i-2}(\bar{\gamma} \mathbf{x})^{k-2i-2} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + (-1)^{\left[\frac{N}{2} \right]} \begin{cases} C \operatorname{Si}(\bar{\gamma} \mathbf{x}) + D \operatorname{Ci}(\bar{\gamma} \mathbf{x}) & \text{für } N \text{ gerade} \\ D \operatorname{Si}(\bar{\gamma} \mathbf{x}) - C \operatorname{Ci}(\bar{\gamma} \mathbf{x}) & \text{für } N \text{ ungerade} \end{cases} \right\}
 \end{aligned}$$

mit den Rekursionsformeln

$$c_{k-1} = \bar{p}_0, \quad d_{k-1} = \bar{q}_0, \quad c_{k-i-1} = (-1)^i (\bar{p}_i + (k-i) c_{k-i}), \quad d_{k-i-1} = (-1)^i (\bar{q}_i + (k-i) d_{k-i}), \quad i = 1, 2, \dots, k-1;$$

$$c_{-(N-k)} = -\frac{\bar{p}_N}{N-k}, \quad d_{-(N-k)} = -\frac{\bar{q}_N}{N-k},$$

$$-(n-k-i)c_{-(N-k-i)} + (-1)^{N-i} c_{-(N-k-i+1)} = \bar{p}_{N-i}, \quad -(N-k-i)d_{-(N-k-i+1)} = \bar{p}_{N-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-k-1$$

alle anderen c_i und $d_i = 0$

und

$$\bar{p}_0 = u_0, \quad \bar{p}_1 = \gamma t_1, \quad \bar{p}_2 = \gamma^2 u_2, \quad \dots$$

$$\bar{q}_0 = t_0, \quad \bar{q}_1 = \gamma u_1, \quad \bar{q}_2 = \gamma^2 t_2, \quad \dots$$

$$A = 0, \quad B = \bar{p}_k - \frac{c_{-1}}{\gamma k}, \quad C = 0, \quad D = \bar{q}_k - \frac{d_{-1}}{\gamma k} \quad \text{für } k \text{ gerade}$$

$$A = \bar{p}_k + \frac{c_{-1}}{\gamma k}, \quad B = 0, \quad C = \bar{q}_k + \frac{d_{-1}}{\gamma k}, \quad D = 0 \quad \text{für } k \text{ ungerade.}$$

Bis jetzt haben wir vorausgesetzt, daß $\gamma_1 \neq \gamma_2$ ist. Im Falle $\gamma_1 = \gamma_2$ gewinnen wir noch gewisse Vereinfachungen. Der Integrand des gesuchten Integrals, ursprünglich durch (3.6) gegeben, nimmt jetzt die Form an

$$(3.23) \quad x^k J_{\frac{m+2}{2}}^{(\gamma x)} J_{\frac{n+2}{2}}^{(\gamma x)} = \frac{1}{\pi \gamma} T_1 \sin(2\gamma x - \frac{\pi}{2}N) + U_2 \cos(2\gamma x - \frac{\pi}{2}N) - U_1 \sin \frac{\pi}{2}M + T_2 \cos \frac{\pi}{2}M.$$

Für das Integral bekommen wir

$$(3.24) \quad \int x^k J_{\frac{m+2}{2}}^{(\gamma x)} J_{\frac{n+2}{2}}^{(\gamma x)} dx = \frac{1}{\pi \gamma} \left[(T_1 \sin(2\gamma x - \frac{\pi}{2}N) + U_2 \cos(2\gamma x - \frac{\pi}{2}N)) dx - \sin \frac{\pi}{2}M \int U_1 dx + \cos \frac{\pi}{2}M \int T_2 dx \right],$$

wobei wir das erste Integral auf der rechten Seite mit der Ansatzfunktion aus (3.9) ausrechnen.

$$\int (T_1 \sin(2\gamma x - \frac{\pi N}{2}) + U_2 \cos(2\gamma x - \frac{\pi N}{2})) dx = S \sin(2\gamma x - \frac{\pi N}{2}) + R \cos(2\gamma x - \frac{\pi N}{2}) + A \widetilde{\text{si}}(2\gamma x) + B \widetilde{\text{ci}}(2\gamma x)$$

und Integrale von U_1 und T_2 können wir direkt bestimmen. Nun sehen wir aus (3.10), daß für S , R , A und B die entsprechenden Gleichungen (der "linke" Teil) schon mit früheren übereinstimmen, so daß die "erste Hälfte" der Lösung (mit c_i) erhalten bleibt. Statt der "zweiten Hälfte" (mit d_i) nehmen wir die Integrale aus U_1 und T_2 .

So ergibt sich zum Beispiel für den dritten Fall (3.22) folgendes ($0 \leq k-1 < N$)

$$\begin{aligned} (3.25) \quad & \int_{\frac{n+\frac{1}{2}}{m+\frac{1}{2}}}^k J_1(\gamma x) J_1(\gamma x) dx = \\ & = \frac{1}{\pi \gamma} \left\{ \frac{1}{(2\gamma)^k} \left[\sin(2\gamma x - \frac{\pi N}{2}) \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} c_{k-2i-1}(2\gamma x)^{k-2i-1} + \cos(2\gamma x - \frac{\pi N}{2}) \sum_{i=0}^{\frac{N-2}{2}} c_{k-2i-2}(2\gamma x)^{k-2i-2} \right] + \right. \\ & \quad + (-1)^{\frac{N}{2}} \left\langle \begin{array}{l} A \text{ Si}(2\gamma x) + B \text{ Ci}(2\gamma x) \quad \text{für } N \text{ gerade} \\ B \text{ Si}(2\gamma x) - A \text{ Ci}(2\gamma x) \quad \text{für } N \text{ ungerade} \end{array} \right\rangle \cdot \\ & \quad \left. - \sin \frac{\pi}{2} M \left(\sum_{i>0} u_{2i+1} \frac{x^{k-2i-1}}{k-2i-1} + \left\langle \begin{array}{l} 0 \\ u_k \ln x \end{array} \right\rangle \right) + \cos \frac{\pi}{2} M \left(\sum_{i>0} t_{2ik-2i} \frac{x^{k-2i}}{2ik-2i} + \left\langle \begin{array}{l} t_k \ln x \quad \text{für } k \text{ gerade} \\ 0 \quad \text{für } k \text{ ungerade} \end{array} \right\rangle \right) \right\} \\ & \quad i \frac{k-1}{2} \quad i \frac{k}{2} \end{aligned}$$

4. Zusammenfassung der Formeln

Hier wollen wir alle Formeln noch einmal übersichtlich schreiben, wobei wir uns auf rekursive Berechnung der Koeffizienten beschränken.

Bezeichnen wir noch

$$I_{n,m} = \int x^n \sqrt{x} J_{\frac{m+1}{2}}(\gamma x) dx \quad \text{und} \quad I_{k,m,n} = \int x^k J_{\frac{m+1}{2}}(\gamma_1 x) J_{\frac{n+1}{2}}(\gamma_2 x) dx.$$

Zuerst bestimmen wir die Größen P_i

$$P_i = (-1)^{\left[\frac{i}{2}\right]} \frac{(m+i)!}{i!(m-i)! 2^i}, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad \text{mit Vereinbarung, daß } P_i = 0 \text{ für alle andere Indizes ist.}$$

Dann gilt:

$$a, \underline{n \geq m};$$

$$I_{n,m} = \frac{1}{\gamma^{\frac{n+1}{2}}} \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma}} \left[\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-(2i+1)} (\gamma x)^{n-(2i+1)} + \cos(\gamma x - \frac{m\pi}{2}) \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-2i} (\gamma x)^{n-2i} \right],$$

$$\text{wobei } C_n = -1, \quad C_{n-(k+1)} = (-1)^k (P_{k+1}^{-(n-k)} C_{n-k}), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

$$b, \underline{n < 0}; \quad m \neq 0;$$

$$I_{n,m} = \frac{1}{\gamma^{\frac{n+1}{2}}} \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma}} \left[\sum_{i=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{\left[\frac{m-2}{2}\right]} C_{n-(2i+1)} (\gamma x)^{n-(2i+1)} + \cos(\gamma x - \frac{m\pi}{2}) \sum_{i=\frac{n+2}{2}}^{\frac{m-1}{2}} C_{n-2i} (\gamma x)^{n-2i} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{-1} \left(\sin \frac{n-m}{2} \pi \operatorname{Si}(\gamma x) - \cos \frac{n-m}{2} \pi \operatorname{Ci}(\gamma x) \right) \right] +$$

$$+ \delta_{-n,1} \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma}} \sin \frac{n}{2} \pi \left(\cos \frac{m\pi}{2} \operatorname{Si}(\gamma x) - \sin \frac{m\pi}{2} \operatorname{Ci}(\gamma x) \right) (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]},$$

$$\text{wobei } c_{n-m+1} = \frac{P_m}{n-m+1}, c_{n-m+i+1} = \frac{1}{n-m+i+1} (-1)^{i+m} c_{n-m+i} + P_{m-i}, i = 1, 2, \dots, m-n-2.$$

$$c, 0 \leq n < m;$$

$$I_{n,m} = \frac{1}{\gamma^{n+1}} \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma}} \left[\sin(\gamma x - \frac{m\pi}{2}) \sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} c_{n-2i+1} (\gamma x)^{n-2i+1} + \cos(\gamma x - \frac{m\pi}{2}) \sum_{i=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} c_{n-2i} (\gamma x)^{n-2i} + \right. \\ \left. + (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} (P_{n+1} + (-1)^{n+1} c_{-1}) \left(\sin \frac{m+n}{2} \pi \operatorname{Si}(x) + \cos \frac{m+n}{2} \pi \operatorname{Ci}(\gamma x) \right) \right],$$

$$\text{wobei } c_n = -1, c_{n-(k+1)} = (-1)^k (P_{k+1} - (n-k)c_{n-k}), k = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$c_{n-m+1} = \frac{P_m}{n-m+1}, c_{n-m+i+1} = \frac{1}{n-m+i+1} (-1)^{i+m} c_{n-m+i} + P_{m-i}, i = 1, 2, \dots, m-n-2,$$

$$\text{für } n = m-1 \text{ ist } c_{-1} = 0.$$

Bezeichnen wir jetzt mit $m \gg n$

$$I_{k,m,n} = \int x^k J_{\frac{m}{2}}(\gamma_1 x) J_{\frac{n}{2}}(\gamma_2 x) dx; (\gamma_1 \neq \gamma_2)$$

Zuerst berechnen wir gewisse "Hilfsgrößen"

$$\bar{p}_j = (-1)^{\left[\frac{j-1}{2}\right]} \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)^j}{2^j} \sum_{i=\max(0, j-n)}^{\min(j, m)} \frac{(m+i)!(n+j-i)!}{i^{j-i} \gamma_1^i \gamma_2^{j-i} i!(j-i)!(m-i)!(n-j+1)!},$$

$$\bar{q}_j = (-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]} \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^j}{2^j} \sum_{i=\max(0, j-n)}^{\min(j, m)} (-1)^i \frac{(m+i)!(n+j-i)!}{\gamma_1^i \gamma_2^{j-i} i!(j-i)!(m-i)!(n-j+i)!},$$

für $j = 0, 1, \dots, m+n$; $\bar{p}_j = \bar{q}_j = 0$ für alle anderen j .

Unterscheiden wir wieder drei Fälle:

$d, \underline{k-1} \geq n+m$;

$$\begin{aligned} I_{k,m,n} = & \frac{1}{\pi \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \left\{ \frac{1}{(\gamma_1 + \gamma_2)^k} \left[\sin((\gamma_1 + \gamma_2)x - \frac{\pi}{2}(m+n)) \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} c_{k-(2i+1)} ((\gamma_1 + \gamma_2)x)^{k-(2i+1)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \cos((\gamma_1 + \gamma_2)x - \frac{\pi}{2}(m+n)) \sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} c_{k-2i} ((\gamma_1 + \gamma_2)x)^{k-2i} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(\gamma_1 - \gamma_2)^k} \left[\sin((\gamma_1 - \gamma_2)x - \frac{\pi}{2}(m-n)) \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} d_{k-(2i+1)} ((\gamma_1 - \gamma_2)x)^{k-(2i+1)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \cos((\gamma_1 - \gamma_2)x - \frac{\pi}{2}(m+n)) \sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} d_{k-2i} ((\gamma_1 - \gamma_2)x)^{k-2i} \right] \right\}, \end{aligned}$$

wobei $c_{k-1} = \bar{p}_0$, $c_{k-(i+1)} = (-1)^i (\bar{p}_i - (k-i)c_{k-i})$

$d_{k-1} = \bar{q}_0$, $d_{k-(i+1)} = (-1)^i (\bar{q}_i - (k-i)d_{k-i})$; $i = 1, 2, \dots, k-1$.

$$\begin{aligned}
e, \frac{k-1}{2} < 0, m+n \neq 0 \\
I_{k,m,n} = \frac{1}{\pi \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \left\{ \frac{1}{(\gamma_1 + \gamma_2)^k} \left[\sin((\gamma_1 + \gamma_2)x - \frac{\pi}{2}(m+n)) \sum_{i=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m+n-1}{2} \rfloor} c_{k-(2i+1)} ((\gamma_1 + \gamma_2)x)^{k-(2i+1)} \right. \right. \\
+ \cos((\gamma_1 + \gamma_2)x - \frac{\pi}{2}(m+n)) \sum_{i=\lfloor \frac{k+2}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor} c_{k-2i} ((\gamma_1 + \gamma_2)x)^{k-2i} + \\
+ (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} c_{-1} (\text{Si}((\gamma_1 + \gamma_2)x) \sin \frac{k-m-n}{2} \pi - \text{Ci}((\gamma_1 + \gamma_2)x) \cos \frac{k-m-n}{2} \pi) \left. \right] + \\
+ \frac{1}{(\gamma_1 - \gamma_2)^k} \left[\sin((\gamma_1 - \gamma_2)x - \frac{\pi}{2}(m-n)) \sum_{i=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m+n-1}{2} \rfloor} d_{k-(2i+1)} ((\gamma_1 - \gamma_2)x)^{k-(2i+1)} \right. \\
+ \cos((\gamma_1 - \gamma_2)x - \frac{\pi}{2}(m-n)) \sum_{i=\lfloor \frac{k+2}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor} c_{k-2i} ((\gamma_1 - \gamma_2)x)^{k-2i} + \\
+ (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_{-1} (\text{Si}((\gamma_1 - \gamma_2)x) \sin \frac{k-m+n}{2} \pi - \text{Ci}((\gamma_1 - \gamma_2)x) \cos \frac{k-m+n}{2} \pi) \left. \right] + \\
+ \delta_{k,0} \left[\bar{p}_0 (\text{Ci}((\gamma_1 + \gamma_2)x) \cos \frac{n+m}{2} \pi + \text{Si}((\gamma_1 + \gamma_2)x) \sin \frac{n+m}{2} \pi) + \right. \\
\left. + \bar{q}_0 (\text{Ci}((\gamma_1 - \gamma_2)x) \cos \frac{m-n}{2} \pi + \text{Si}((\gamma_1 - \gamma_2)x) \sin \frac{m-n}{2} \pi) \right] \left. \right\} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{wobei } c_{k-n-m} &= \frac{\bar{p}_{n+m}}{k-n-m}, & c_{k+i-n-m} &= (-1)^{i+n+m} \frac{c_{k+i-m-n-1}}{n+m-k-i} - \frac{\bar{p}_{m+n-i}}{n+m-k-i}, \\ d_{k-n-m} &= \frac{\bar{q}_{n+m}}{k-n-m}, & d_{k+i-n-m} &= (-1)^{i+n+m} \frac{d_{k+i-m-n-1}}{n+m-k-i} - \frac{\bar{q}_{m+n-i}}{n+m-k-i}, \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, n+m-k-1.$$

$$f, \quad 0 \leq k-1 < m+n$$

$$\begin{aligned} I_{k,m,n} &= \frac{1}{\pi \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \left\{ \frac{1}{(\gamma_1 + \gamma_2)^k} \left[\sin((\gamma_1 + \gamma_2)x - \frac{\pi}{2}(m+n)) \sum_{i=0}^{\left[\frac{m+n-1}{2}\right]} c_{k-(2i+1)} ((\gamma_1 + \gamma_2)x)^{k-(2i+1)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos((\gamma_1 + \gamma_2)x - \frac{\pi}{2}(m+n)) \sum_{i=1}^{\left[\frac{m+n}{2}\right]} c_{k-2i} ((\gamma_1 + \gamma_2)x)^{k-2i} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]} c_{-1} (\text{Si}((\gamma_1 + \gamma_2)x) \sin \frac{k-m-n}{2} \pi - \text{Ci}((\gamma_1 + \gamma_2)x) \cos \frac{k-m-n}{2} \pi) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]} \bar{p}_k (\text{Si}((\gamma_1 + \gamma_2)x) \sin \frac{k+m+n}{2} \pi + \text{Ci}((\gamma_1 + \gamma_2)x) \cos \frac{k+m+n}{2} \pi) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(\gamma_1 - \gamma_2)^k} \left[\sin((\gamma_1 - \gamma_2)x - \frac{\pi}{2}(m-n)) \sum_{i=0}^{\left[\frac{m+n-1}{2}\right]} d_{k-(2i+1)} ((\gamma_1 - \gamma_2)x)^{k-(2i+1)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos((\gamma_1 - \gamma_2)x - \frac{\pi}{2}(m-n)) \sum_{i=1}^{\left[\frac{m+n}{2}\right]} d_{k-2i} ((\gamma_1 - \gamma_2)x)^{k-2i} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& i, \quad 0 < k-1 < m+n; \\
I_{k,m,n} &= \frac{1}{\pi \gamma} \left\{ \frac{1}{(2\gamma)^k} \left[\sin(2\gamma x - \frac{\pi}{2}(m+n)) \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} c_{k-(2i+1)}(2\gamma x)^{k-(2i+1)} + \cos(2\gamma x - \frac{\pi}{2}(m+n)) \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor} c_{k-2i}(2\gamma x)^{k-2i} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} c_{-1}(\text{Si}(2\gamma x)) \sin \frac{k-m-n}{2} \pi - \text{Ci}(2\gamma x) \cos \frac{k-m-n}{2} \pi \right] + \right. \\
& \quad \left. + (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} p_k(\text{Si}(2\gamma x)) \sin \frac{k+m+n}{2} \pi + \text{Ci}(2\gamma x) \cos \frac{k+m+n}{2} \pi \right) - \\
& \quad - \sin \frac{\pi}{2}(m-n) \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m+n-1}{2} \rfloor} q_{2i+1} \frac{x^{k-2i-1}}{k-2i-1} + \cos \frac{\pi}{2}(m-n) \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor} q_{2i} \frac{x^{k-2i}}{k-2i} + (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} q_k \ln x \cos \frac{k+m+n}{2} \pi \quad . \\
& \quad i \neq \frac{k-1}{2}
\end{aligned}$$

Für Berechnung der Koeffizienten c_j benutzen wir die Rekursionsformeln aus den entsprechenden Fällen für $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

5. Bestimmte Integrale

In diesem Abschnitt wollen wir die Integrale aus 4. als bestimmte Integrale ausrechnen. Schwierigkeiten gibt es nur, wenn die untere Grenze Null ist, denn die durch Integration gewonnene Funktionen hat entweder bei Null eine Singularität oder ist dort zwar regulär, aber nicht gliedweise. Um den Wert des Integrals zu bestimmen, müssen wir die Grenzwerte von $I_{n,m}$ und $I_{k,n,m}$ (aus 4.) für $x \rightarrow 0$ berechnen.

Die Funktion $\sqrt{x} J_{\frac{m+1}{2}}(\gamma x)$ geht wie x^{m+1} gegen Null, wenn $x \rightarrow 0$ steht. Das bedeutet, daß für $n \geq -(m+1)$ der Inte-

grand von $I_{n,m}$ im Nullpunkt stetig ist (also das Integral existiert) und nur für diesen Fall untersuchen wir jetzt $I_{n,m}$. Aus den Formeln 4.b, und 4.c, ergibt sich die Art der möglichen Singularitäten. Einerseits handelt es sich um die Potenzen von $\frac{1}{x}$ (die Koeffizienten von $\sin$ und $\cos$), andererseits haben wir eine logarithmische Singularität von $\text{Ci}(x)$ ($\text{Ci}(t) = \ln t + \int_0^t \frac{\cos x-1}{x} dx + e$). Die Potenzsingularitäten und die logarithmischen Singularitäten können sich nicht gegenseitig annullieren und deswegen muß im regulären Falle ($n \geq -(m+1)$) der Koeffizient des Integralcosinus Null sein. Die Potenzsingularitäten heben sich gegenseitig auf und das Endergebnis ist dann regulär. Besonders einfach ist der Fall 4.a., denn hier tauchen keine "scheinbaren Singularitäten" auf und der Grenzwert ergibt sich direkt durch Einsetzen $x = 0$.

5.a, $n \geq m$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} I_{n,m} = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_0 \frac{1}{\gamma^{n+1}} \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma}} \cos \frac{m+n}{2} \pi.$$

Um die Fälle 4.b, und 4.c, zu erfassen ($n > -(m+1)$), entwickeln wir $\sin$ und $\cos$ in Potenzreihen; dann heben sich die Glieder mit negativen Potenzen auf und die Glieder mit positiven Potenzen liefern für den Grenzwert nur Nullbeiträge. Übrig bleiben die absoluten Terme und nach einigen Umformungen erhalten wir:

5.b, $-(m+1) \leq n < 0, m \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} I_{n,m} = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{\gamma^{n+1}} \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma}} \left(\cos \frac{m-n}{2} \pi \sum_{i=\left[\frac{n+2}{2}\right]}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} C_{n-2i} \frac{(-1)^{\left[\frac{2i-n}{2}\right]}}{(2i-n)!} + \cos \frac{m+n}{2} \pi \sum_{i=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{\left[\frac{m-2}{2}\right]} C_{n-(2i+1)} \frac{(-1)^{\left[\frac{2i-n+1}{2}\right]}}{(2i-n+1)!} \right);$$

Auch für 4.c, nach gleicher Überlegung ergibt sich

5.c, $0 \leq n < m \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} I_{n,m} = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{\gamma^{n+1}} \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma}} \left(\cos \frac{m-n}{2} \pi \sum_{i=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} (-1)^{\left[\frac{2i-n}{2}\right]} C_{n-2i} \frac{1}{(2i-n)!} + \cos \frac{m+n}{2} \pi \sum_{i=\left[\frac{n+2}{2}\right]}^{\left[\frac{m}{2}\right]} (-1)^{\left[\frac{2i-n-1}{2}\right]} C_{n-2i+1} \frac{1}{(2i-n-1)!} \right),$$

wobei die Koeffizienten c_i aus den früheren Formeln (4.a, 4.b, 4.c) bestimmt werden.

Für $I_{k,m,n}$ lautet die Regularitätsbedingung $k \geq -(m+n+1)$ und nur für diesen Fall suchen wir die Grenzwerte für $x \rightarrow 0$. ω
2

In den Fällen 4.e, und 4.f, haben wir noch eine zusätzliche Schwierigkeit: die logarithmischen Singularitäten von $\text{Ci}((\gamma_1 + \gamma_2)x)$ und $\text{Ci}((\gamma_1 - \gamma_2)x)$ können sich gegenseitig aufheben, so daß das Ergebnis regulär bleibt; aber im Gegensatz zu 5.b, und 5.c, tauchen gewisse zusätzliche Terme auf. Nehmen wir an, daß für 4.e, $k-m-n$ und $k-m+n$ gerade sind ($k \neq 0$), dann liefern die "Integralcosinus" Terme für den Grenzwert einen regulären Beitrag:

$$B_1 = -(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]} \left(\frac{c_{-1}}{(\gamma_1 + \gamma_2)^k} \cos \frac{k-m-n}{2} \pi \text{Ci}((\gamma_1 + \gamma_2)x) + \frac{d_{-1}}{(\gamma_1 - \gamma_2)^k} \cos \frac{k-m+n}{2} \pi \text{Ci}((\gamma_1 - \gamma_2)x) \right)$$

$$x \rightarrow 0 \rightarrow -(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]} \left(\frac{c_{-1}}{(\gamma_1 + \gamma_2)^k} \cos \frac{k-m-n}{2} \pi (e + \ln(\gamma_1 + \gamma_2)x) + \frac{d_{-1}}{(\gamma_1 - \gamma_2)^k} \cos \frac{k-m+n}{2} \pi (C + \ln(\gamma_1 - \gamma_2)x) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= - (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]} e \left(\frac{c_{-1}}{(\gamma_1 + \gamma_2)^k} \cos \frac{k-m-n}{2} \pi + \frac{d_{-1}}{(\gamma_1 - \gamma_2)^k} \cos \frac{k-m+n}{2} \pi \right) \\
&- (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]} \left(\frac{c_{-1}}{(\gamma_1 + \gamma_2)^k} \cos \frac{k-m-n}{2} \pi \ln(\gamma_1 + \gamma_2)x + \frac{d_{-1}}{(\gamma_1 - \gamma_2)^k} \cos \frac{k-m+n}{2} \pi \ln(\gamma_1 - \gamma_2)x \right).
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck kann aber nur dann regulär sein, wenn gilt

$$\frac{c_{-1}}{(\gamma_1 + \gamma_2)^k} \cos \frac{k-m-n}{2} \pi = - \frac{d_{-1}}{(\gamma_1 - \gamma_2)^k} \cos \frac{k-m+n}{2} \pi.$$

Hieraus ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow 0} B_1 = - (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{c_{-1}}{(\gamma_1 + \gamma_2)^k} \cos \frac{k-m-n}{2} \pi \ln \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} = (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{d_{-1}}{(\gamma_1 - \gamma_2)^k} \cos \frac{k-m+n}{2} \pi \ln \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2}.$$

Für $k = 0$ bekommen wir zusätzlich für $m+n$ und $m-n$ gerade

$$B_2 = \sigma_{k,0} \left(\bar{p}_0 \cos \frac{m+n}{2} \pi \operatorname{Ci}(\gamma_1 + \gamma_2)x + \bar{q}_0 \cos \frac{m-n}{2} \pi \operatorname{Ci}(\gamma_1 - \gamma_2)x \right)$$

$$\sim_{x \rightarrow 0} - \cos \frac{m+n}{2} \pi (e + \ln(\gamma_1 + \gamma_2)x) + \cos \frac{m-n}{2} \pi (c + \ln(\gamma_1 - \gamma_2)x).$$

Zusammen für (4.e.) $k = 0$ erhalten wir

$$B_1 + B_2 = e \left(- \cos \frac{m+n}{2} \pi (1+c_{-1}) + \cos \frac{m-n}{2} \pi (1-d_{-1}) \right) + \left(- \cos \frac{m+n}{2} \pi (1+c_{-1}) \ln(\gamma_1 + \gamma_2)x + \cos \frac{m-n}{2} \pi (1-d_{-1}) \ln(\gamma_1 - \gamma_2)x \right).$$

Die Regularitätsbedingung

$$\cos \frac{m+n}{2} \pi (1+c_{-1}) = \cos \frac{m-n}{2} \pi (1-d_{-1})$$

annuliert gleichzeitig die erste Klammer, so daß ($k = 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} B_1 + B_2 = -\cos \frac{m+n}{2} \pi (1+c_{-1}) \ln \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} = -\cos \frac{m-n}{2} \pi (1-d_{-1}) \ln \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2}.$$

5.d, $k-1 \geq m+n$

$$\lim_{x \rightarrow 0} I_{k,m,n} = \begin{pmatrix} (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{1}{\pi \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \left(\frac{c_0}{(\gamma_1 + \gamma_2)^k} \cos \frac{m+n+k}{2} \pi + \frac{d_0}{(\gamma_1 - \gamma_2)^k} \cos \frac{m-n+k}{2} \pi \right) \\ (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{c_0}{\pi 2^{\frac{k}{2}} \gamma_1} \cos \frac{m+n+k}{2} \pi \end{pmatrix} \quad \text{für } \gamma_1 \neq \gamma_2$$

$$\text{für } \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma.$$

5.f, $0 \leq k-1 < m+n$

$$\lim_{x \rightarrow 0} I_{k,m,n} = \begin{pmatrix} (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{1}{\pi \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \left[\frac{1}{(\gamma_1 + \gamma_2)^k} \left(\cos \frac{m+n-k}{2} \pi \sum_{i=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor} c_{k-2i} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{2i-k}{2} \rfloor}}{(2i-k)!} + \cos \frac{m+n+k}{2} \pi \sum_{i=\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m+n-1}{2} \rfloor} c_{k-(2i+1)} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{2i-k+1}{2} \rfloor}}{(2i-k+1)!} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{(\gamma_1 - \gamma_2)^k} \left(\cos \frac{m-n-k}{2} \pi \sum_{i=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor} d_{k-2i} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{2i-k}{2} \rfloor}}{(2i-k)!} + \cos \frac{m-n+k}{2} \pi \sum_{i=\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m+n-1}{2} \rfloor} d_{k-(2i+1)} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{2i-k+1}{2} \rfloor}}{(2i-k+1)!} \right) \right] \\ + (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{1}{(\gamma_1 + \gamma_2)^k} (\bar{p}_k \cos \frac{k+m+n}{2} \pi - c_{-1} \cos \frac{k-m-n}{2} \pi) \ln \left| \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \right| \end{pmatrix} \quad \text{für } \gamma_1 \neq \gamma_2$$

$$+ \begin{pmatrix} (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \bar{q}_k \cos \frac{k+m-n}{2} \pi (e + \ln 2\gamma) \\ (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \bar{q}_k \cos \frac{k+m-n}{2} \pi (e + \ln 2\gamma) \end{pmatrix} \quad \text{für } \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$$

wobei $e = 0,5772156649015325 \dots$ (Die Eulersche Konstante).

In den nächsten beiden Tabellen werden die analytisch (nach unseren Formeln) bzw. numerisch (Gauß'sche Quadraturformel) berechneten Integrale

$$\int_0^1 x \frac{J_1(j\pi x)}{2} \frac{J_1(j\pi x)}{2} dx, \quad j = 3, 6, 9, \dots, 90 \quad (\text{Tab. 1})$$

bzw.

$$\int_0^1 x^2 \frac{J_5(4j)}{2} \frac{J_7(5j)}{2} dx, \quad j = 1, 3, 5, \dots, 49 \quad (\text{Tab. 2})$$

angegeben. Dabei bedeutet GAI9 die Neunpunkteformel, GAI16 die Sechzehn-
punkteformel usw. Die Werte der Bessel-Funktionen für die numerische Inte-
gration wurden mit der Subroutine DBJRP aus SL-MATM berechnet. Dabei wird
die Ungenauigkeit der letzten zwei Stellen (in den ersten Zeilen) nicht
durch die numerische Integration, sondern durch die Ungenauigkeit der Sub-
routine DBJRP verursacht. Im ersten Beispiel ist das Ergebnis exakt $\frac{1}{j\pi^2}$;
und stimmt mit den analytisch berechneten Werten überein.

	ANALYTISCH	GAI9	GAI16	GAI40	GAI80
3*PI	3.3773728E-02	3.3777080E-02	3.3773703E-02	3.3773707E-02	3.3773706E-02
6*PI	1.6886864E-02	8.4542089E-03	1.6886922E-02	1.6886826E-02	1.6886828E-02
9*PI	1.1257909E-02	9.4894446E-03	1.0627978E-02	1.1257875E-02	1.1257875E-02
12*PI	8.4434320E-03	3.7331433E-03	1.1615603E-02	8.4434002E-03	8.4434022E-03
15*PI	6.7547456E-03	4.3348291E-03	4.8091313E-03	6.7547197E-03	6.7547189E-03
18*PI	5.6289546E-03	5.7322177E-03	5.9523059E-03	5.6289276E-03	5.6289298E-03
21*PI	4.8248183E-03	3.5590692E-03	7.2614654E-03	4.8234631E-03	4.8247935E-03
24*PI	4.2217160E-03	2.7130940E-03	5.4046959E-03	4.4608059E-03	4.2216927E-03
27*PI	3.7526364E-03	3.4666107E-03	3.7296995E-03	2.0182589E-03	3.7526134E-03
30*PI	3.3773728E-03	2.7213340E-03	3.2463179E-03	2.6267817E-03	3.3773502E-03
33*PI	3.0703389E-03	3.9933270E-03	1.2354281E-03	3.8129444E-03	3.0703162E-03
36*PI	2.8144773E-03	9.0528274E-04	2.4768905E-03	2.2515295E-03	2.8144551E-03
39*PI	2.5979791E-03	3.3252855E-03	3.1701570E-03	3.0094276E-03	2.5979574E-03
42*PI	2.4124091E-03	1.7836012E-03	1.1367988E-03	2.3478774E-03	2.4123895E-03
45*PI	2.2515819E-03	2.7982336E-03	2.5232629E-03	1.9805917E-03	2.2511761E-03
48*PI	2.1108580E-03	1.3648277E-03	1.5118579E-03	2.2018435E-03	2.1411273E-03
51*PI	1.9866899E-03	1.7037221E-03	1.9349653E-03	2.5602058E-03	1.5382550E-03
54*PI	1.8763182E-03	2.2092278E-03	3.2402226E-03	1.4146714E-03	2.1910299E-03
57*PI	1.7775646E-03	1.6701243E-03	1.9019104E-03	1.4131314E-03	1.8100120E-03
60*PI	1.6886864E-03	1.4434011E-03	2.0817487E-03	1.8199766E-03	1.3344601E-03
63*PI	1.6082728E-03	1.5266566E-03	1.6999475E-03	1.6836614E-03	1.6836497E-03
66*PI	1.5351694E-03	1.5233937E-03	1.3400909E-03	1.3626850E-03	1.6159485E-03
69*PI	1.4684230E-03	2.1399769E-03	1.5616431E-03	1.7724893E-03	1.3664207E-03
72*PI	1.4072387E-03	7.8144166E-04	1.5143598E-03	1.3177486E-03	1.4620915E-03
75*PI	1.3509491E-03	1.9705060E-03	8.3692447E-04	1.4433133E-03	1.3845772E-03
78*PI	1.2989895E-03	1.2129478E-03	9.6609580E-04	1.6878843E-03	1.1751997E-03
81*PI	1.2508788E-03	2.0662983E-03	1.1922134E-03	1.0828855E-03	1.3875980E-03
84*PI	1.2062046E-03	1.1470740E-03	8.4524864E-04	1.2922640E-03	1.1790451E-03
87*PI	1.1646113E-03	1.4474757E-03	1.7352426E-03	1.3085883E-03	1.0644596E-03
90*PI	1.1257909E-03	1.7010401E-03	1.2036581E-03	1.114747E-03	1.1933341E-03

Tab 1.

	ANALYTISCH	GAI9	GAI16	GAI40	GAI80
4 5	4.3053651E-02	4.3053651E-02	4.3053652E-02	4.3053651E-02	4.3053650E-02
12 15	7.6997746E-03	7.5750444E-03	7.6997693E-03	7.6997643E-03	7.6997638E-03
20 25	-1.5574818E-03	3.4526096E-03	-1.5577820E-03	-1.5574733E-03	-1.5574735E-03
28 35	-7.5421772E-04	-2.1214262E-03	-4.8394536E-04	-7.5421488E-04	-7.5421265E-04
36 45	9.4836694E-04	1.9194458E-03	3.0576913E-04	9.4836433E-04	9.4836214E-04
44 55	-6.5368094E-05	4.5148123E-04	5.6985912E-04	-6.5364854E-05	-6.5366642E-05
52 65	-3.9113712E-04	-1.8512025E-03	-8.9013443E-04	-3.9113294E-04	-3.9113321E-04
60 75	2.2514906E-04	-3.6271666E-04	1.4082759E-03	2.2334756E-04	2.2514747E-04
68 85	2.8838469E-05	-6.4200379E-04	8.6823846E-04	1.7615590E-04	2.8838431E-05
76 95	-1.9037136E-04	-1.5274872E-04	-1.7666204E-04	-8.9616310E-04	-1.9036952E-04
84 105	1.1253751E-04	-4.3321548E-05	-2.5338543E-04	-2.4212198E-04	1.1253595E-04
92 115	7.9005768E-05	5.1081529E-05	2.8701104E-04	3.4245211E-05	7.9004667E-05
100 125	-1.0816950E-04	3.5828203E-04	-6.3139042E-05	8.3038247E-05	-1.0816747E-04
108 135	2.9344088E-05	-3.1630911E-04	-1.5169057E-04	-1.6625409E-04	2.9343553E-05
116 145	5.1576265E-05	2.1042469E-04	3.1592940E-04	2.2106896E-04	5.1575253E-05
124 155	-7.6239469E-05	2.3825889E-04	-4.3009699E-04	-1.7129374E-04	-7.6181944E-05
132 165	2.4248277E-06	-4.3251830E-04	-2.6983439E-04	-1.4842676E-05	-8.1988920E-07
140 175	5.5497813E-05	-6.6694982E-04	3.0335861E-04	1.2551989E-04	9.0542490E-05
148 185	-3.5337122E-05	-1.6147889E-04	9.6235225E-05	-6.7894933E-05	-9.5359910E-05
156 195	-7.1989227E-06	1.6405642E-04	-7.0160070E-05	-1.2717562E-04	6.8409471E-05
164 205	4.1162542E-05	7.1005763E-04	1.8988114E-04	2.9738874E-06	7.7614756E-05
172 215	-2.5901527E-05	8.0535483E-04	2.1023736E-04	2.6630873E-05	-1.6123080E-04
180 225	-2.1314148E-05	-4.3451223E-04	-3.6443368E-04	3.7509942E-05	-5.6625881E-05
188 235	3.0382927E-05	-1.3690560E-05	-1.2734168E-04	-6.8028183E-05	1.3900796E-04
196 245	-8.6130461E-06	2.4279881E-04	4.1873472E-06	8.6301401E-05	-9.7458863E-05

TAB 2.