



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH
GESELLSCHAFT MIT BESCHRÄNKTER HAFTUNG
Institut für Angewandte Mathematik

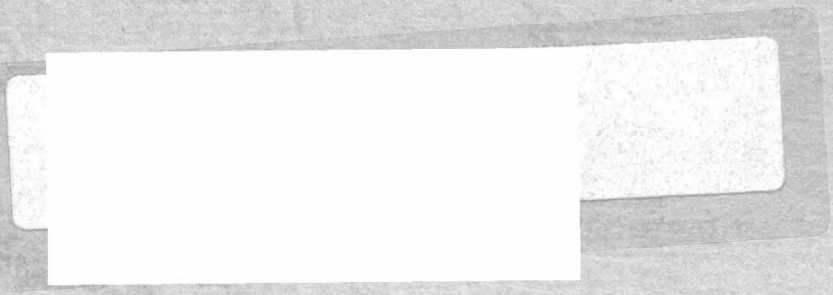
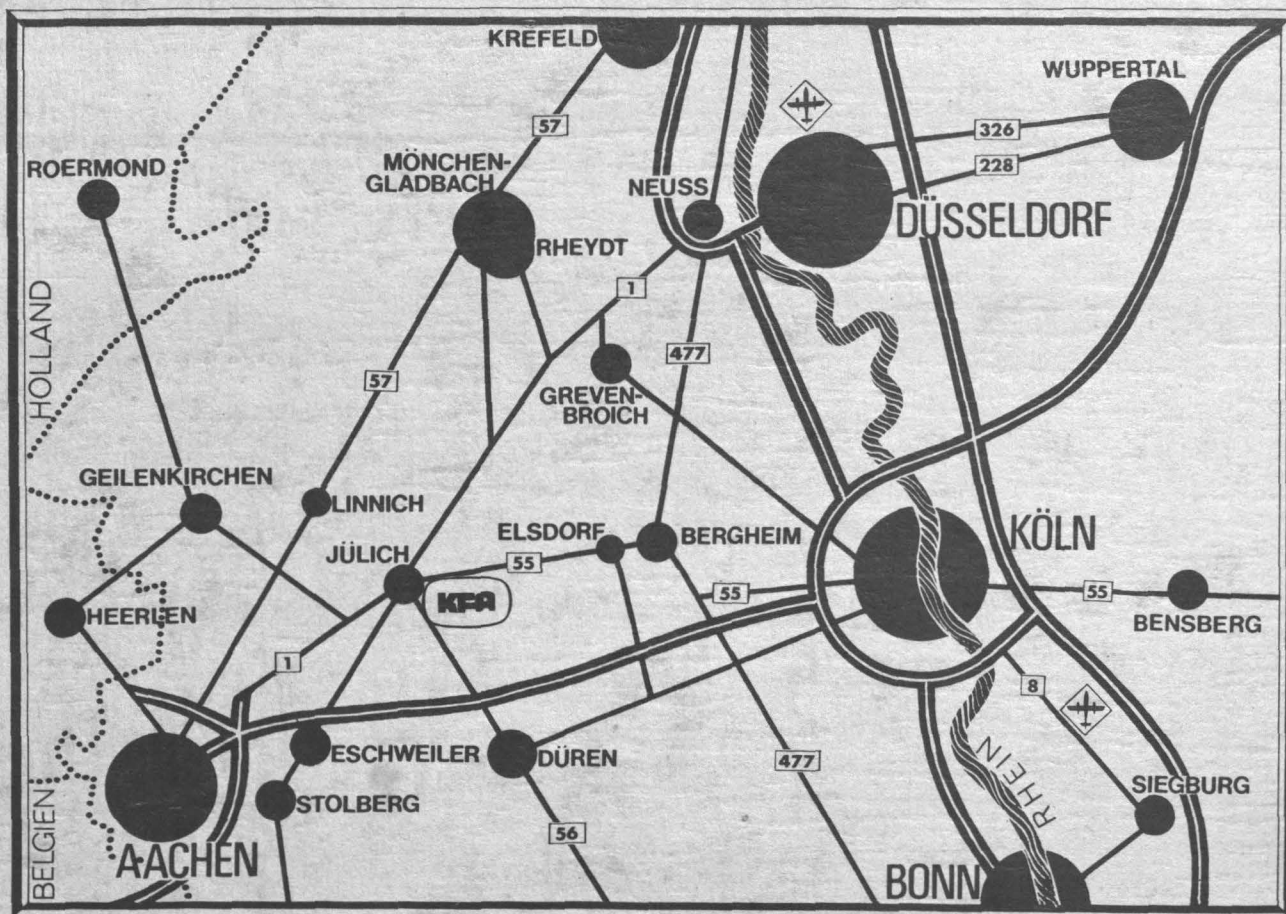
Das Galerkinsche Verfahren für die Diffusionsgleichung mit Drift - Term

von

M. Profant

JüI - 1110 - MA
September 1974

Als Manuskript gedruckt



Berichte der Kernforschungsanlage Jülich - Nr. 1110
 Zentralinstitut für Angewandte Mathematik Jül - 1110 - MA

Dok.: Elliptic Differential Equation - Numerical Solution
 Diffusion Equation - Computer Calculation
 Mixed Problem - Three-Dimensional Calculation
 Galerkin Method

Im Tausch zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH,
 Jülich, Bundesrepublik Deutschland

Das Galerkinsche Verfahren für die Diffusionsgleichung mit Drift - Term

von

M. Profant

Einleitung

Die stationäre Diffusionsgleichung mit Drift-Term ist eine elliptische Differentialgleichung, deren Lösung im Äußeren der Einheitskugel gesucht ist. Es handelt sich dabei um eine dreidimensionale Aufgabe mit gemischten Randbedingungen. Der Drift-Term ist durch eine Funktion $G(\theta, \phi)$ (s. (1), (4)) bestimmt, die nur näherungsweise bekannt ist. Mit G^a bzw. G^n wird hier die erste bzw. dritte Näherung der Funktion G bezeichnet. Aus der Lösung der gegebenen Gleichung (1) können wir das Flußintegral (13) berechnen, weiterhin den Einfluß der dritten Näherung für (13) und schließlich die Abhängigkeit des Integrals (13) von dem Parameter B -s. (1) untersuchen. Die Tabellen 1 bis 7 und die Abb. 3 zeigen, daß die Differenz zwischen dem Flußintegral (13) für G^a und G^n sehr klein ist; sie liegt für die meisten Fälle unter 1 %. Für den größten Wert des Parameters B ($B = 2468$) ist diese Differenz 3,27 %; in diesem Falle liefert das Verfahren aber nur eine so grobe Näherung, daß wir nur qualitative Schlüsse ziehen können. Die Abhängigkeit des Flußintegrals (13) von B ist in Abb. 3 gezeigt. Es ist ungefähr proportional der dritten Wurzel aus B .

Für die erste Näherung G^a wurde das Problem schon in [4] behandelt. Dort haben wir die ursprüngliche Gleichung durch eine Substitution in die Gl. $-\Delta u + \rho u = f$ (8) überführt und dann das Ritzsche Verfahren angewandt. Das Verfahren hat aber für die dritte Näherung G^n hoffnungslos versagt. Die Ursache liegt darin, daß die Koeffizientenfunktion ρ von $\left[\nabla\left(\frac{G}{3}\right)\right]^2$ abhängig ist (s. (8)). Obwohl die Funktionen G^a und G^n (s. Abb. 1) sich nicht viel unterscheiden ist die Differenz zwischen den Gradienten dieser Funktionen sehr groß (s. Abb. 2). In den für das Ritzsche Verfahren berechneten Integralen haben sich also die Integranden wesentlich geändert. Um diese Schwierigkeit zu umgehen müßte man die Gleichung (1) derart umformen, daß nur die Funktion G selbst, nicht aber deren Ableitungen in den Integralen auftreten. Diese Eigenschaft hat z.B. die Gl. (1) oder die Gl. $-\Delta u + \nabla G \nabla u = f$ (11) die der ursprünglichen equivalent ist. In diesen Fällen kann man mit den Greenschen Identitäten die auftretenden Integrale so umformen, daß keine Ableitungen von G in den Integranden erscheinen. Dafür müssen wir die Nichtsymmetrie der Operatoren und langsamere Konvergenz in Kauf nehmen. Alle drei Fälle sind im Anhang A für $G = 1$ getestet worden. In diesem Falle ist das Problem eindimensional und analytisch lösbar. Das Galerkinsche Verfahren für die Gleichung (11) konvergierte besser als für die Gleichung (1). Daher wird die Gleichung (11) auch im dreidimensionalen Falle ver-

wendet.

Wegen der langsameren Konvergenz brauchen wir ziemlich viele Koordinatenfunktionen (es wurden 210 genommen). Dabei entstehen Schwierigkeiten bei der Integration. Es handelt sich um die typischen Probleme, die bei der Integration der schnelloszillierenden Funktionen auftreten, deshalb wurden alle Integrale analytisch berechnet. Für die θ - und ϕ -Integration sind die benötigten Formeln im zweiten Kapitel angegeben, für die r -Integration wurden die Formeln aus [5] zur Integration von Produkten halbzahliger Besselfunktionen mit Potenzen von x benutzt.

Herrn R. Kaussen danke ich für seine Hilfe bei der Programmerstellung, den Herren R. v. Seggern und J. Wick für zahlreiche Diskussionen.

1. Formulierung des Problems und die Lösungsmöglichkeiten

Wir suchen die Lösung $c = c(r, \theta, \phi)$ der elliptischen Differentialgleichung

$$(1) \quad -\operatorname{div} \left[\operatorname{grad} c + c \operatorname{grad} \left(-\frac{BG(\theta, \phi)}{r^3} \right) \right] = 0$$

im Gebiet $1 \leq r < +\infty$; $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; $0 \leq \phi < \frac{\pi}{4}$ (mit r , θ und ϕ bezeichnen wir in der üblichen Art und Weise die sphärischen Koordinaten $x = r \cos \phi \sin \theta$, $y = r \sin \phi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$).

Die Randbedingungen für c lauten:

$$(2) \quad c(r=1) = 0, \quad c(r=+\infty) = 1, \\ \frac{\partial c}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial \phi} \Big|_{\phi=0} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\frac{\pi}{4}} = 0.$$

Weiterhin ist B ein Parameter mit $50 \leq B \leq 2468$. Die Funktion $G(\theta, \phi)$ ist näherungsweise gegeben; wir wollen die Gl (1) für die erste Näherung G^a und für die dritte Näherung G^n lösen. Bezeichnen wir mit ρ_i , $i = 1, 2, 3$ die kartesischen Koordinaten auf der Einheitskugel

$$(3) \quad \rho_1 = \cos \phi \sin \theta, \quad \rho_2 = \sin \phi \sin \theta, \quad \rho_3 = \cos \theta,$$

dann gilt

$$(4) \quad G^a = 5 \sum_{i=1}^3 \rho_i^4 - 3,$$

$$G^n = G^a - 5 \left[-0,0235 + 1,1553 \sum \rho_i^4 - 6,641 \sum \rho_i^6 - 4,756 \sum \rho_i^8 + 4,697 \left(\sum \rho_i^4 \right)^2 + 14,961 \left(\sum \rho_i^4 \right) \left(\sum \rho_i^6 \right) - 9,2782 \left(\sum \rho_i^4 \right)^3 \right].$$

Für Testzwecke ist im Anhang A auch der Fall $G^t = 1$ berechnet; in diesem Falle ist es möglich, die Gl (1) analytisch zu lösen.

Die Funktionen G^a und G^n können wir als Funktionen nur von $\cos^2 \theta$ und $\sin^2 \phi$ darstellen. Daher ergibt sich

$$(5) \quad G^a = \sum_{\alpha=0}^2 \cos^{2\alpha} \theta \sum_{\beta=0}^2 a_{h_{2\beta}}^{2\alpha} \sin^{2\beta} \phi, \quad G^n = \sum_{\alpha=0}^6 \cos^{2\alpha} \theta \sum_{\beta=0}^6 n_{h_{2\beta}}^{2\alpha} \sin^{2\beta} \phi,$$

wobei die Matrizen $a_{h_{2\beta}}^{2\alpha}$ und $n_{h_{2\beta}}^{2\alpha}$ in folgenden Tabellen definiert sind (a_h und n_h wurden mit FORMAC berechnet).

$$h_0^0 = 2, \quad h_2^0 = -10, \quad h_4^0 = 10$$

$$h_0^2 = -10, \quad h_2^2 = 20, \quad h_4^2 = -20$$

$$h_0^4 = 10, \quad h_2^4 = -10, \quad h_4^4 = 10$$

Tabelle für $a_{h_{2\beta}}^{2\alpha}$

α^B	0	2	4	6	8	10	12
0	1,427	-3,563	65,045	-494,092	1174,866	-1113,384	371,128
2	-3,563	100,41	-1010,892	4047,732	-7590,786	6680,304	-2226,768
4	65,045	-977,649	5118,141	-13847,904	20841,252	-16700,76	5566,92
6	-497,092	3446,258	-12133,046	24796,136	-30954,468	22267,68	-7422,56
8	1174,866	-5456,778	14856,78	-24366,924	26100,762	-16700,76	5566,92
10	-1113,384	4004,706	-9122,796	12462,948	-11798,394	6680,304	-2226,768
12	371,128	-1113,384	2226,768	-2597,896	2226,768	-1113,384	371,128

Tabelle für $n_{h28}^{2\alpha}$

Ich möchte noch zwei Besonderheiten von $G(\theta, \phi)$ betonen. Zuerst gilt

$$(6) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \, {}^a G(\theta, \phi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \, {}^n G(\theta, \phi) = 0 .$$

Diese Eigenschaft macht (wie wir später sehen) gewisse numerische Schwierigkeiten und zeigt gleichzeitig den qualitativen Unterschied zwischen $G^{a,n}$ und G^t .

Zweitens sind die Unterschiede zwischen $\frac{1}{4}(\nabla g)^2 - \frac{1}{2} \Delta g$ (mit g ist $-\frac{BG(\theta, \phi)}{r^3}$ bezeichnet) für G^a und G^n ziemlich groß, obwohl die Funktionen ${}^a G$ und ${}^n G$ selbst sich nicht viel unterscheiden (Abb 1. und 2.). Die Bedeutung dieser Eigenschaft werden wir später sehen.

In der Arbeit [4] (wo auch die Existenz- und Eindeutigkeitsfragen behandelt wurden) sind noch zwei andere Umformungen der Gl. (1) vorgeschlagen.

Erstens, durch die Substitution

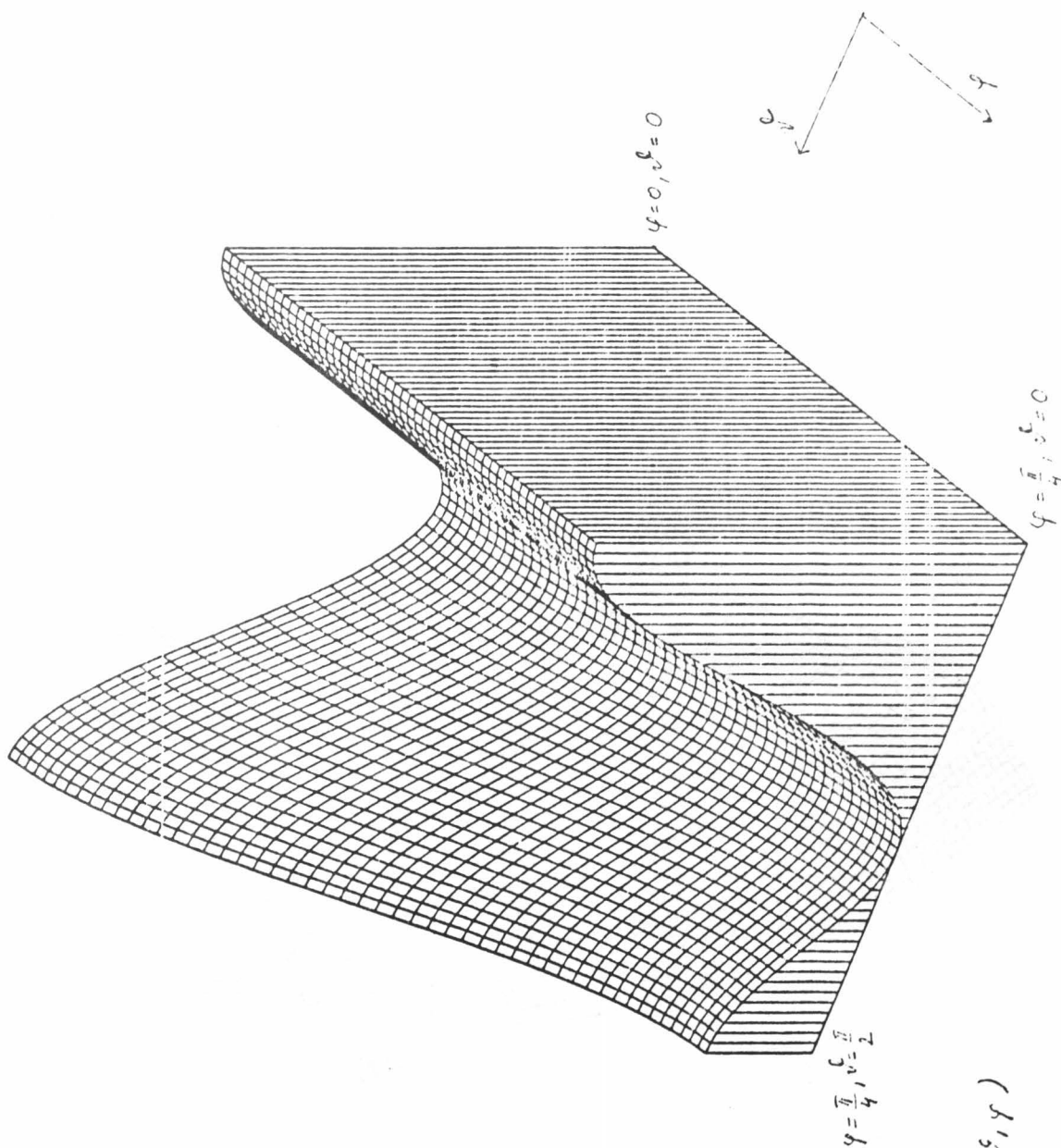
$$(7) \quad c = u(r, \theta, \phi) \cdot e^{-\frac{g}{2}}$$

ergibt sich

$$(8) \quad -\Delta u + \rho u = 0, \quad \rho = \frac{1}{4}(\nabla g)^2 - \frac{1}{2} \Delta g .$$

Für die Berechnung der Randbedingungen von u bemerken wir noch, daß

$$(9) \quad \left. \frac{\partial G}{\partial \theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \left. \frac{\partial G}{\partial \phi} \right|_{\substack{\phi=0 \\ \phi=\frac{\pi}{4}}} = 0 \text{ ist.}$$



$$G = G^a(\varepsilon, \gamma)$$

Abb. 1a

Q1ZAM008

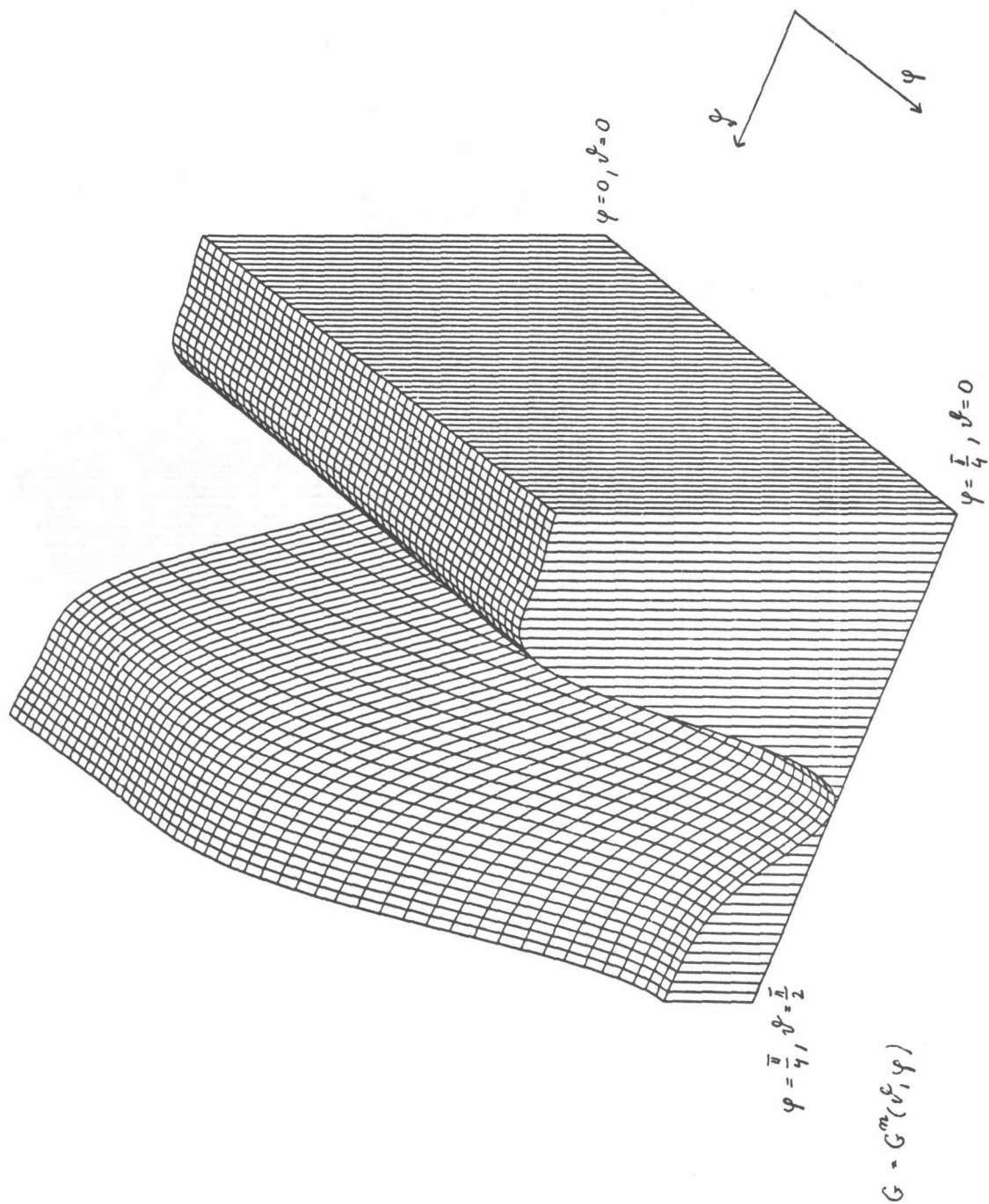


ABB. 16

Q2ZAM008

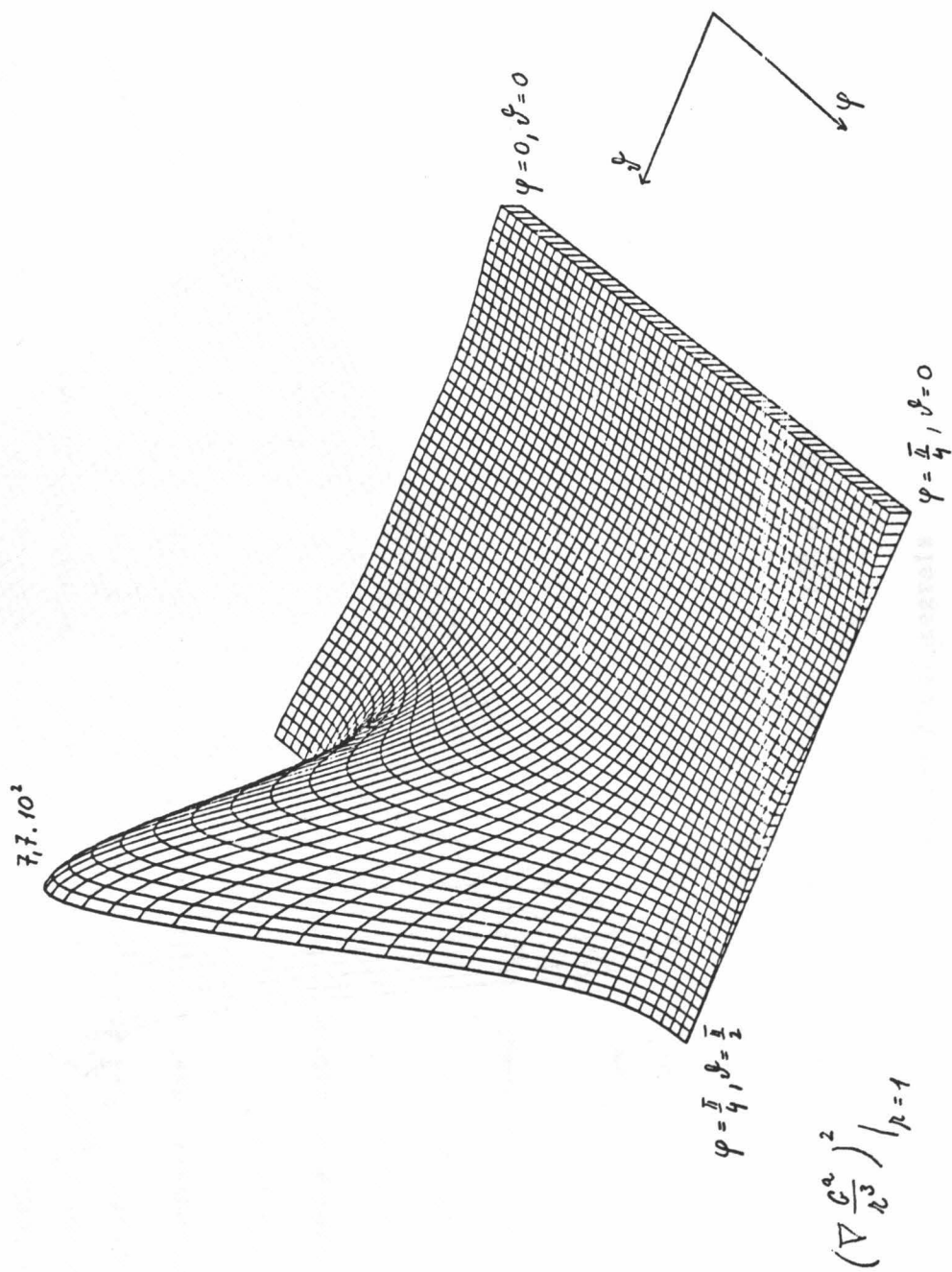


ABB. 2a

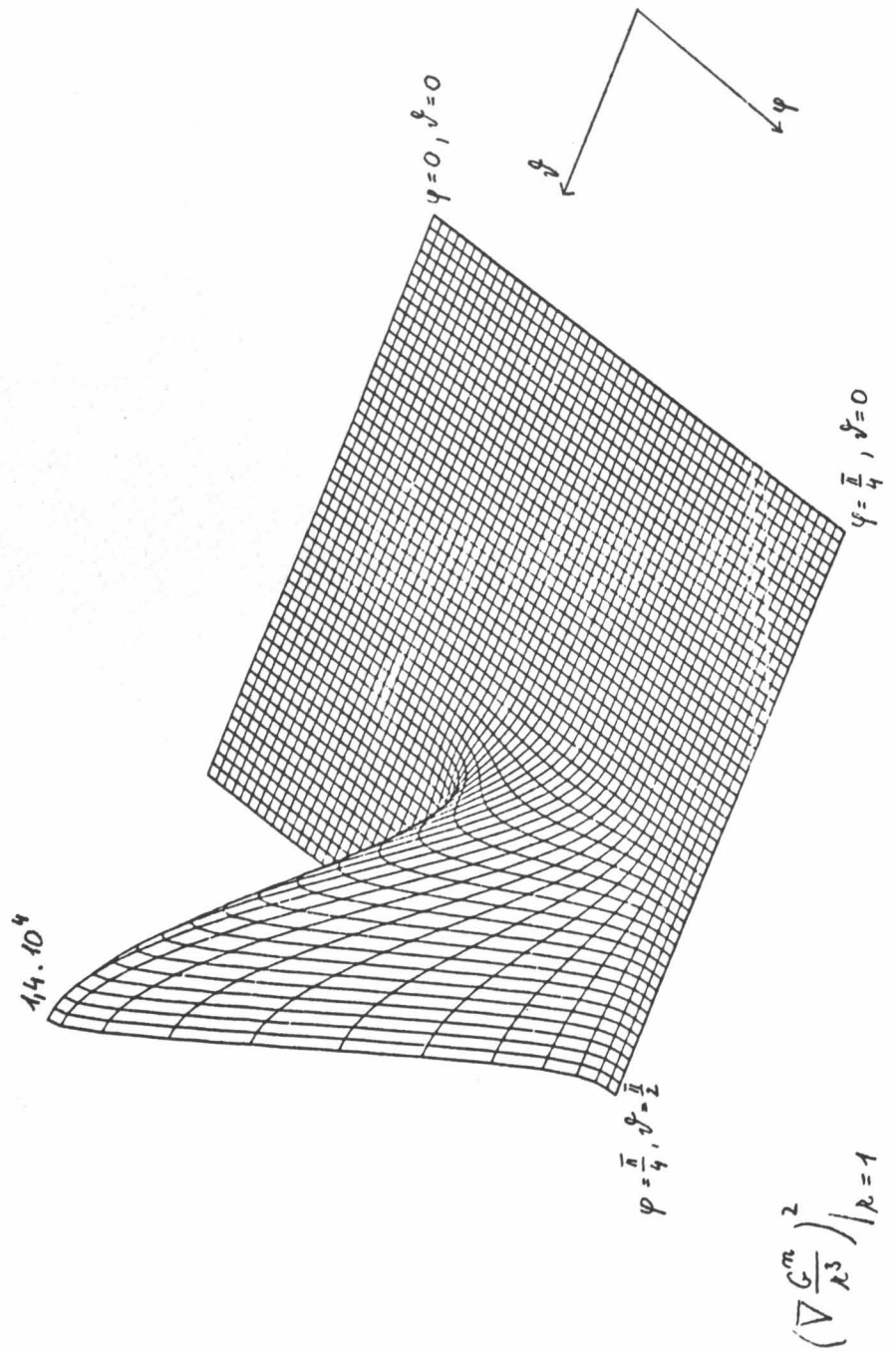


ABB. 26

P2ZAM008

Daraus folgt, daß wir für $u(r, \theta, \phi)$ gleiche Randbedingungen wie für $c(r, \theta, \phi)$ haben.

Weiter wurde in [4] für $G = G^a$ das Ritz'sche Verfahren auf die Gl. (8) angewandt. Für $G = G^n$ entstehen aber erhebliche numerische Schwierigkeiten.

Erstens ist die Funktion ρ^n (ρ für $G = G^n$) sehr kompliziert und zweitens hat das schon oben erwähnte unterschiedliche Verhalten von ρ^a und ρ^n zur Folge, daß die entsprechenden Integrale in der Ritz'schen Matrix große Differenzen zeigen. Deswegen ist das Ritz'sche Verfahren für $G = G^n$ sehr schwer anwendbar.

Die zweite Substitution (die in [4] vorgeschlagen wird) lautet

$$(10) \quad c = \bar{v}(r, \theta, \phi) e^{-g}$$

und die entsprechende Gleichung hat die Form

$$(11) \quad -\Delta \bar{v} + \nabla g \cdot \nabla \bar{v} = 0,$$

mit den Randbedingungen

$$(12) \quad \bar{v}(r=1) = 0, \quad \bar{v}(r \rightarrow \infty) = 1$$

$$\left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} \right|_{\substack{\phi=0 \\ \phi=\frac{\pi}{4}}} = 0.$$

Nach dem Gauß'schen Integralsatz gilt für alle $R > 1$

$$0 = \int_{V_R} \operatorname{div} [\nabla c + c \nabla g] dV = \int_{S_R} \left(\frac{\partial c}{\partial r} + c \frac{\partial g}{\partial r} \right) dS - \int_{S_1} \left(\frac{\partial c}{\partial r} + c \frac{\partial g}{\partial r} \right) dS$$

und die Berechnung des somit von R unabhängigen Flußintegrals

$$(13) \quad \int_{S_R} \left(\frac{\partial c}{\partial r} + c \frac{\partial g}{\partial r} \right) dS$$

ist die Hauptaufgabe dieser Arbeit.

Für $r \rightarrow +\infty$ gilt $\lim_{r \rightarrow \infty} \exp(-g) = 1$. Deshalb erhalten wir

$$(14) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \left(\frac{\partial c}{\partial r} + c \frac{\partial g}{\partial r} \right) dS = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} dS \quad .$$

Um die Inhomogenität der Randbedingungen (12) zu beseitigen, führen wir noch eine "Randfunktion" $v_0(r)$ ein, etwa

$$(15) \quad v_0(r) = 1 - \frac{1}{r^p}, \quad p > 1 \text{ und ganzzahlig,}$$

die die Randbedingungen erfüllt, und wir suchen die Lösung der Gl. (11) in der Form $\bar{v} = v_0(r) + v(r, \theta, \phi)$. Daraus ergibt sich

$$(16) \quad -\Delta v + \nabla g \nabla v = \Delta v_0 - \nabla g \nabla v_0$$

mit homogenen Randbedingungen für v .

Auf die Gl. (16) wenden wir dann das Galerksche Verfahren an.

2. Die Galerksche Matrix

Das Galerksche Verfahren besteht bekanntlich darin, daß wir die Lösung v einer Differentialgleichung $Av = f$ in sogenannte Koordinatenfunktionen zerlegen, d.h. $v^n = \sum_{i=1}^n \xi_i^n \phi_i$, wobei die Koeffizienten ξ_i^n durch die Lösung des Gleichungssystems

$$(17) \quad \sum_{j=1}^n \xi_j^n (A\phi_j, \phi_i) = (f, \phi_i) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n$$

bestimmt sind. Unter der Voraussetzung, daß v^n gegen die Lösung v konvergiert, betrachten wir v^n als Näherungslösung der entsprechenden Gleichung. In dieser Arbeit gehe ich auf die Konvergenzfragen nicht ein und beschäftige mich nur mit der praktischen Durchführung des Verfahrens.

Als Koordinatenfunktion ϕ_i wählen wir die Eigenfunktionen des Laplace-Operators mit homogenen Randbedingungen (siehe [1] und [4])

$$(18) \quad \phi_i = c_{k_i l_i m_i} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{k_i + \frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_{k_i l_i}}{r} \right) P_{k_i}^{m_i}(\cos \theta) \cdot \begin{matrix} \cos m_i \phi \\ \sin m_i \phi \end{matrix},$$

wobei $\gamma_{k,l}$ die l -te Nullstelle der Bessel-Funktion $J_{k+\frac{1}{2}}$ ist. c_{klm} ist der Normierungsfaktor und P_k^m ist die Legendre-Funktion.

Für die halbzahligen Bessel-Funktionen haben wir eine Darstellung in geschlossener Form:

$$(19) \quad J_{k+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\sin\left(z - \frac{\pi}{2}k\right) \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(-1)^j (k+2j)!}{(2j)!(k-2j)!(2z)^{2j}} + \cos\left(z - \frac{\pi}{2}k\right) \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{(-1)^j (k+2j+1)!}{(2j+1)!(k-2j-1)!(2z)^{2j+1}} \right].$$

Zur Darstellung (19) ist noch zu bemerken, daß sie für die Auswertung der Bessel-Funktionen für größere k praktisch

bedeutungslos ist, weil die starken Auslöschungseffekte einen großen Verlust an signifikanten Stellen verursachen. Um das deutlich zu sehen, schreiben wir (19) etwas um

$$J_{k+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\sin\left(z - \frac{\pi}{2} k\right) P_k(z) + \cos\left(z - \frac{\pi}{2} k\right) Q_k(z) \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sqrt{P_k^2 + Q_k^2} (A_k(z) \sin\left(z - \frac{\pi}{2} k\right) + B_k(z) \cos\left(z - \frac{\pi}{2} k\right)) ,$$

wobei $A_k = \frac{P_k}{\sqrt{P_k^2 + Q_k^2}}$, $B_k = \frac{Q_k}{\sqrt{P_k^2 + Q_k^2}}$ bedeutet. In der nächsten Tabelle sieht man die Übereinstimmung von A_k

und $\cos\left(z - \frac{\pi}{2} k\right)$ und B_k und $\sin\left(z - \frac{\pi}{2} k\right)$. Zum Beispiel stimmen für $k = 8$ schon die ersten dreizehn Stellen überein, so daß nur die letzte Stelle für die Genauigkeit maßgebend ist.

$$z = 1$$

K	A(K)	SIN(Z-K*PI/2)	B(K)	COS(Z-K*PI/2)
1	7.0710678118655E-01	-5.4030230586814E-01	7.0710678118655E-01	8.4147098480790E-01
2	-5.5470019622523E-01	-8.4147098480790E-01	8.3205029433784E-01	-5.4030230586814E-01
3	-8.4117847537655E-01	5.4030230586814E-01	-5.4075759131350E-01	-8.4147098480790E-01
4	5.4030984131282E-01	8.4147098480790E-01	-8.4146614630686E-01	5.4030230586814E-01
5	8.4147098476888E-01	-5.4030230586814E-01	5.4030238379928E-01	8.4147098480790E-01
6	-5.4030230642162E-01	-8.4147098480790E-01	8.4147098445251E-01	-5.4030230586814E-01
7	-8.4147098480605E-01	5.4030230586814E-01	-5.4030230587101E-01	-8.4147098480790E-01
8	5.4030230586815E-01	8.4147098480790E-01	-8.4147098480789E-01	5.4030230586814E-01
9	8.4147098480790E-01	-5.4030230586814E-01	5.4030230586814E-01	8.4147098480790E-01
10	-5.4030230586814E-01	-8.4147098480790E-01	8.4147098480790E-01	-5.4030230586814E-01
11	-8.4147098480790E-01	5.4030230586814E-01	-5.4030230586814E-01	-8.4147098480790E-01
12	5.4030230586814E-01	8.4147098480790E-01	-8.4147098480790E-01	5.4030230586814E-01
13	8.4147098480790E-01	-5.4030230586814E-01	5.4030230586814E-01	8.4147098480790E-01
14	-5.4030230586814E-01	-8.4147098480790E-01	8.4147098480790E-01	-5.4030230586814E-01
15	-8.4147098480790E-01	5.4030230586814E-01	-5.4030230586814E-01	-8.4147098480790E-01

Z = 8

K	A(K)	SIN(Z-K*PI/2)	B(K)	COS(Z-K*PI/2)
1	9.9227787671367E-01	1.4550003380861E-01	1.2403473458921E-01	9.8935824662338E-01
2	9.3056595169739E-01	-9.8935824662338E-01	3.6612430886455E-01	1.4550003380861E-01
3	7.2814545786887E-01	-1.4550003380861E-01	6.8542263763677E-01	-9.8935824662338E-01
4	2.9491720411041E-01	9.8935824662338E-01	9.5552281119799E-01	-1.4550003380861E-01
5	-3.5383853563795E-01	1.4550003380861E-01	9.3530652232174E-01	9.8935824662338E-01
6	-9.2450412523010E-01	-9.8935824662338E-01	3.8117203784188E-01	1.4550003380861E-01
7	-8.2601318570511E-01	-1.4550003380861E-01	-5.6365079352494E-01	-9.8935824662338E-01
8	1.9989615604536E-01	9.8935824662338E-01	-9.7981708843962E-01	-1.4550003380861E-01
9	9.9978058125549E-01	1.4550003380861E-01	-2.0947299215759E-02	9.8935824662338E-01
10	1.1270917571844E-01	-9.8935824662338E-01	9.9362801978853E-01	1.4550003380861E-01
11	-9.9027533055935E-01	-1.4550003380861E-01	1.3912142065678E-01	-9.8935824662338E-01
12	-1.4454501739352E-01	9.8935824662338E-01	-9.8949822533782E-01	-1.4550003380861E-01
13	9.8937511264136E-01	1.4550003380861E-01	-1.4538530354163E-01	9.8935824662338E-01
14	1.4548863358860E-01	-9.8935824662338E-01	9.8935392313037E-01	1.4550003380861E-01
15	-9.8935838739465E-01	-1.4550003380861E-01	1.4549907660137E-01	-9.8935824662338E-01

Die Legendre-Funktionen P_k^m sind durch (20) definiert ($x = \cos \theta$).

$$(20) \quad P_k^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{(m)} P_k(x)}{dx^m} = \frac{(-1)^m (2k-1)!!}{(k-m)!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-m}{2}\right]} (-1)^i a_{2i}^{(k,m)} x^{k-m-2i}; \quad k \geq m,$$

wobei die $a_{2i}^{(k,m)}$ rekursiv bestimmt werden;

$$(21) \quad a_0^{(k,m)} = 1, \quad a_{2(i+1)}^{(k,m)} = a_{2i}^{(k,m)} \frac{(k-m-2i-1)(k-m-2i)}{(2i+2)(2k-2i-1)}, \quad i = 0, 1, \dots, \left[\frac{k-m}{2}\right] - 1.$$

Weiter gilt

$$(22) \quad \frac{dP_k^m(x=0)}{dx} = \frac{2^{m+1} \sin \frac{\pi}{2}(m+k) \sqrt{\frac{m+k}{2} + 1}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{k-m+1}{2}}}.$$

Den Normierungsfaktor wählen wir als

$$(23) \quad c_{k_i, 1, m_i} = \frac{1}{\gamma_{k_i, 1, m_i}} \frac{(k_i - m_i)!}{(2k_i - 1)!!}.$$

Weiter verlangen wir von den Koordinatenfunktionen, daß sie die (homogenen) Randbedingungen erfüllen, was praktisch schon eine gewisse Auswahl bedeutet. Zuerst sieht man sofort, daß $\phi_i(r=1) = \phi_i(r=\infty) = 0$ für alle i gilt. Die Randbedingung $\left. \frac{\partial \phi_i}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} = 0$ bedeutet, daß wir in (18) nur die Koordinatenfunktionen mit $\cos m_i \phi$ (d.h. ohne $\sin m_i \phi$) nehmen müssen und $\left. \frac{\partial \phi_i}{\partial \phi} \right|_{\phi=\frac{\pi}{4}} = 0$ bestimmt m_i als ein Vielfaches von 4. Die θ -Randbedingung ist nach (22) nur er-

füllt, wenn $m+k$ gerade ist, also muß in unserem Falle k gerade sein. In diesem Abschnitt wollen wir jetzt die Skalarprodukte (für wie oben gewählte Funktionen ϕ_i) $(A\phi_j, \phi_i)$ und (f, ϕ_i) ausrechnen.

Mit (16) und (17) gilt

$$\Delta v = -\Delta v + \nabla g \nabla v$$

und daher (die Klammer $(.,.)$ bezeichnet das Skalarprodukt im $L^2(r \geq 1)$)

$$(24) \quad (\Delta \phi_j, \phi_i) = (-\Delta \phi_j + \nabla g \nabla \phi_j, \phi_i) = -(\Delta \phi_j, \phi_i) + (\nabla g \nabla \phi_j, \phi_i) .$$

Den letzten Ausdruck können wir noch umformen, wenn wir folgende Beziehungen berücksichtigen:

$$(25) \quad \Delta \phi_j = -\gamma_j^2 \frac{1}{r^4} \phi_j$$

und

$$\int_V \nabla g \nabla \phi_j \cdot \phi_i dV = \int_V \nabla \phi_j [\nabla(g \phi_i) - g \nabla \phi_i] dV = - \int_V g \phi_i \Delta \phi_j dV - \int_V g \nabla \phi_i \phi_j dV .$$

Daraus ergibt sich

$$(26) \quad (\Delta \phi_j, \phi_i) = \gamma_j^2 \int_V \frac{1}{r^4} \phi_i \phi_j dV - \int_V g \nabla \phi_i \nabla \phi_j dV + \gamma_j^2 \int_V g \phi_j \phi_i \frac{1}{r^4} dV .$$

Für das erste Integral in (26) erhalten wir

$$\int_V \frac{1}{r^4} \phi_i \phi_j dV = c_{k_i l_i m_i} c_{k_j l_j m_j} \int_1^{+\infty} \frac{1}{r^3} J_{k_i + \frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_i}{r} \right) J_{k_j + \frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_j}{r} \right) dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_{k_i}^{m_i} P_{k_j}^{m_j} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos m_i \phi \cos m_j \phi d\phi$$

(mit vorher erwähntem Vorbehalt k gerade und m Vielfaches von 4) und auf Grund der bekannten Orthogonalitätsbedingungen ist

$$c_i^2(\pi + \delta_{m_i, 0} \cdot \pi) \frac{(k_i + m_i)!}{(k_i - m_i)!} \frac{1}{2k+1} J_{k_i - \frac{1}{2}}^2(\gamma_{k_i, 1_i}) \quad \text{für } i = j$$

$$(27) \quad \int_V \frac{1}{r^4} \phi_i \phi_j dV = \begin{cases} \text{für } i = j \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Das zweite Integral (26) lautet ausführlich geschrieben:

$$(28) \quad - \int_V g \nabla \phi_i \nabla \phi_j dV =$$

$$= c_{k_i, 1_i, m_i} c_{k_j, 1_j, m_j} B \left\{ \int_1^\infty \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sqrt{r}} J_{k_i + \frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_i}{r} \right) \right]_{,r} \left[\frac{1}{\sqrt{r}} J_{k_j + \frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_j}{r} \right) \right]_{,r} dr \int_S G(\theta, \phi) P_{k_i}^{m_i} P_{k_j}^{m_j} \cos m_i \phi \cos m_j \phi \sin \theta d\theta d\phi + \right.$$

$$+ \int_1^{+\infty} \frac{1}{r^4} J_{k_i + \frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_i}{r} \right) J_{k_j + \frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_j}{r} \right) dr \left[\int_S G P_{k_i, \theta}^{m_i} P_{k_j, \theta}^{m_j} \cos m_i \phi \cos m_j \phi \sin \theta d\theta d\phi + \right.$$

$$\left. \left. + m_i m_j \int_S G P_{k_i}^{m_i} P_{k_j}^{m_j} \sin m_i \phi \sin m_j \phi \frac{d\theta d\phi}{\sin \theta} \right] \right\}$$

und das dritte

$$(29) \quad \int_V g \phi_i \phi_j \frac{dV}{r^4} = - c_{k_i, 1_i, m_i} c_{k_j, 1_j, m_j} B \int_1^\infty \frac{1}{r^6} J_{k_i + \frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_i}{r} \right) J_{k_j + \frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_j}{r} \right) dr \int_S G(\theta, \phi) P_{k_i}^{m_i} P_{k_j}^{m_j} \cos m_i \phi \cos m_j \phi \sin \theta d\theta d\phi ,$$

wobei S $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ bedeutet.

Dadurch haben wir die r-Integration und die Winkel-Integration separiert. Bei der r-Integration handelt es sich um die Integrale (mit Substitution $r = \frac{1}{x}$) der halbzahligen Bessel-Funktionen und Potenzen von x, die analytisch

(wie in [5] ausführlich gezeigt wurde) auswertbar sind.

Es bleiben daher nur die Winkelintegrationen zu berechnen. Aus Symmetriegründen dürfen wir das Integrationsgebiet S auf $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ ausdehnen und dann den entsprechenden Bruchteil (ein sechzehntel) des Integrals berücksichtigen. In unserem Falle (k gerade, m ein Vielfaches von 4) sind die auftretenden Integranden gewisse Polynome von trigonometrischen Funktionen und als solche geschlossen integrierbar.

Z. B. für

$$(30) \quad J = \int_S G(\theta, \phi) \tilde{P}_{k_i}^{m_i}(\cos \theta) \tilde{P}_{k_j}^{m_j}(\cos \theta) \cos m_i \phi \cos m_j \phi \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad \left(\tilde{P}_k^m = \frac{(k-m)!}{(2k-1)!!} P_k^m = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-m}{2} \rfloor} (-i)^i a_{2i} x^{k-m-2i} \right)$$

gilt (mit (5) und (20))

$$J = \int_S \left(\sum_{\alpha} \cos^{2\alpha} \theta \sum_{\beta} h_{2\beta}^{2\alpha} \sin^{2\beta} \phi \right) (1-\cos^2 \theta)^{\frac{m_i}{2}} (1-\cos^2 \theta)^{\frac{m_j}{2}} \sum_{s=0}^{\frac{k_i-m_i}{2}} (-1)^s a_{2s}^{(i)} (\cos \theta)^{k_i-m_i-2s} \cdot \sum_{r=0}^{\frac{k_j-m_j}{2}} (-1)^r a_{2r}^{(j)} (\cos \theta)^{k_j-m_j-2r} \cos m_i \phi \cos m_j \phi \sin \theta \, d\theta \, d\phi =$$

$$= \sum_{\alpha} \sum_{s=0}^{\frac{k_i-m_i}{2}} (-1)^s a_{2s}^{(i)} \sum_{r=0}^{\frac{k_j-m_j}{2}} (-1)^r a_{2r}^{(j)} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{m_i+m_j}{2}} x^{k_i+k_j-m_i-m_j+2(\alpha-s-r)} dx \cdot \sum_{\beta} h_{2\beta}^{2\alpha} \int_0^{2\pi} \sin^{2\beta} \phi \cos m_i \phi \cos m_j \phi \, d\phi,$$

wobei der Index i bzw. j bei $a_{2s}^{(i)}$ bzw. $a_{2r}^{(j)}$ bedeutet, daß wir in (21) für k und m die k_i, m_i bzw. k_j, m_j einsetzen.

Die Summierungsindizes α und β laufen (s. (5)) für G^a von 0 bis 2 und für G^n von 0 bis 6 (entsprechend müssen wir für h entweder a_h oder n_h einsetzen). Nach der Durchführung der x-Integration erhalten wir

$$(31) \quad J = \sum_{\alpha} \sum_{s=0}^{\frac{k_i - m_i}{2}} (-1)^s a_{2s}^{(i)} \sum_{r=0}^{\frac{k_j - m_j}{2}} (-1)^r a_{2r}^{(j)} \sum_{p=0}^{\frac{m_i + m_j}{2}} \binom{\frac{m_i + m_j}{2}}{p} (-1)^{\frac{m_i + m_j}{2} - p} \frac{2}{k_i + k_j + 2(\alpha - s - r - p) + 1} \\ \sum_{\beta} h_{2\beta}^{2\alpha} \int_0^{2\pi} \sin^{2\beta} \phi \cos m_i \phi \cos m_j \phi d\phi$$

und es bleibt die ϕ -Integration übrig.

Um sie durchzuführen, bemerken wir zuerst, daß (s. [6])

$$(31a) \quad \cos 2n\phi = \sum_{i=0}^n b_{2i}^{(n)} \sin^{2i} \phi; \quad b_0^{(n)} = 1, \quad b_{2(i+1)}^{(n)} = -b_{2i}^{(n)} \frac{4n^2 - (2i)^2}{(2i+1)(2i+2)}, \quad i = 0, \dots, n-1;$$

ist und daß weiter gilt

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2j} \phi \cos 2n\phi d\phi = \sum_{\alpha=0}^n b_{2\alpha}^{(n)} \int_0^{2\pi} \sin^{2(j+\alpha)} \phi d\phi = 2\pi \sum_{\alpha=0}^n b_{2\alpha}^{(n)} \frac{(2(\alpha+j)-1)!!}{2^{\alpha+j}(\alpha+j)!}.$$

Mit Hilfe dieser Formeln können wir jetzt die ϕ -Integration in (31) durchführen. Es gilt

$$(32) \quad \int_0^{2\pi} \sin^{2\beta} \phi \cos m_i \phi \cos m_j \phi d\phi = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} \sin^{2\beta} \phi \cos(m_i + m_j) \phi d\phi + \begin{cases} \int_0^{2\pi} \sin^{2\beta} \phi d\phi & \text{für } m_i = m_j \\ \int_0^{2\pi} \sin^{2\beta} \phi \cos(m_j - m_i) \phi d\phi & \text{für } m_i \neq m_j \end{cases} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 2\pi \quad (m_i = m_j = \beta = 0) \\ \pi \quad (m_i = m_j \neq 0, \beta = 0) \\ 0 \quad (m_i \neq m_j, \beta = 0) \\ \\ \pi \left\{ \sum_{\gamma=0}^{\frac{m_i+m_j}{2}} b_{2\gamma}^+ \frac{(2(\gamma+\beta)-1)!!}{2^{\gamma+\beta}(\gamma+\beta)!} + \frac{(2\beta-1)!!}{2^\beta \beta!} \right\} \quad (m_i = m_j, \beta \neq 0) \\ \\ \pi \left\{ \sum_{\gamma=0}^{\frac{m_i+m_j}{2}} b_{2\gamma}^+ \frac{(2(\gamma+\beta)-1)!!}{2^{\gamma+\beta}(\gamma+\beta)!} + \sum_{\gamma=0}^{\frac{m_i-m_j}{2}} b_{2\gamma}^- \frac{(2(\gamma+\beta)-1)!!}{2^{\gamma+\beta}(\gamma+\beta)!} \right\} \quad (m_i \neq m_j, \beta \neq 0), \end{array} \right.$$

dabei ist $b_{2\gamma}^+$ bzw. $b_{2\gamma}^-$ als $b_{2\gamma}^{(n)}$ für $n = \frac{m_i+m_j}{2}$ bzw. $n = \frac{m_i-m_j}{2}$ zu verstehen. Ganz analog gilt

$$(33) \quad \int_0^{2\pi} \sin^{2\beta} \phi \sin m_i \phi \sin m_j \phi d\phi = \left\{ \begin{array}{l} \pi \quad (m_i = m_j \neq 0, \beta = 0) \\ 0 \quad (m_i \neq m_j, \beta = 0) \\ \\ \pi \left\{ \sum_{\gamma=0}^{\frac{m_i+m_j}{2}} b_{2\gamma}^+ \frac{(2(\gamma+\beta)-1)!!}{2^{\gamma+\beta}(\gamma+\beta)!} + \frac{(2\beta-1)!!}{2^\beta \beta!} \right\} \quad (m_i = m_j, \beta \neq 0) \\ \\ \pi \left\{ \sum_{\gamma=0}^{\frac{m_i+m_j}{2}} b_{2\gamma}^+ \frac{(2(\gamma+\beta)-1)!!}{2^{\gamma+\beta}(\gamma+\beta)!} + \sum_{\gamma=0}^{\frac{m_i-m_j}{2}} b_{2\gamma}^- \frac{(2(\gamma+\beta)-1)!!}{2^{\gamma+\beta}(\gamma+\beta)!} \right\} \quad (m_i \neq m_j, \beta \neq 0). \end{array} \right.$$

Jetzt erhalten wir auch die Formeln für die restlichen Winkel-Integrationen in (26) (ähnliche Herleitung wie für (30)).

$$(34) \quad \int G \tilde{P}_{k_i}^{m_i} \tilde{P}_{k_j}^{m_j} \cos m_i \phi \cos m_j \phi \frac{1}{\sin \theta} d\theta d\phi =$$

$$= \sum_{\alpha} \sum_{s=0}^{\frac{k_i - m_i}{2}} (-1)^s a_{2s}^{(i)} \sum_{r=0}^{\frac{k_j - m_j}{2}} (-1)^r a_{2r}^{(j)} \sum_{\gamma=0}^{\frac{m_i + m_j}{2} - 1} \frac{m_i + m_j}{2} - 1 \quad (-1)^{\frac{m_i + m_j}{2} - 1} \frac{2}{k_i + k_j + 2(\alpha - s - r - \gamma) - 1} \\ \int_{\beta} h_{2\beta}^{2\alpha} \int_0^{2\pi} \sin^{2\beta} \phi \sin m_i \phi \sin m_j \phi d\phi ,$$

$$\int G \hat{P}_{k_i, \theta}^{m_i} \hat{P}_{k_j, \theta}^{m_j} \sin \theta \cos m_i \phi \cos m_j \phi d\theta d\phi =$$

$$= \sum_{\alpha} \sum_{\gamma_1=0}^{\frac{m_i}{2}} \left(\frac{\frac{m_i}{2}}{\gamma_1} \right) (-1)^{\frac{m_i}{2} - \gamma_1} \sum_{s=0}^{\frac{k_i - m_i}{2}} (-1)^s a_{2s}^{(i)} (k_i - 2s - 2\gamma_1) \sum_{\gamma_2=0}^{\frac{m_j}{2}} \left(\frac{\frac{m_j}{2}}{\gamma_2} \right) (-1)^{\frac{m_j}{2} - \gamma_2} \sum_{r=0}^{\frac{k_j - m_j}{2}} (-1)^r (k_j - 2r - 2\gamma_2) a_{2r}^{(j)} \cdot \\ \cdot \left(\frac{1}{k_i + k_j + 2(\alpha - \gamma_1 - \gamma_2 - s - r) - 1} - \frac{1}{k_i + k_j + 2(\alpha - \gamma_1 - \gamma_2 - s - r) + 1} \right) \sum_{\beta} h_{2\beta}^{2\alpha} \int_0^{2\pi} \sin^{2\beta} \phi \cos m_i \phi \cos m_j \phi d\phi .$$

Alle diese Formeln ermöglichen uns (für die r-Integration stehen die entsprechenden Formeln in [5]), die Galerkin-Matrix $(A\phi_j, \phi_i)$ analytisch auszurechnen, was erhebliche Vorteile für die Genauigkeit und Schnelligkeit des Verfahrens hat. Im nächsten Abschnitt berechnen wir noch die rechten Seiten des Gleichungssystems.

3. Die rechten Seiten

Unsere ursprüngliche Gleichung ist eine homogene Gleichung mit nichthomogenen Randbedingungen, die durch eine geeignete Wahl einer "Randfunktion" in die inhomogene Gleichung (16) mit homogenen Randbedingungen übergeht. Die rechte Seite der Gl. (16) hat die Gestalt

$$(35) \quad f = \Delta v_0 - \nabla g \nabla v_0, \text{ mit } v_0 = 1 - \frac{1}{r^p}, \quad p \geq 1 \text{ und ganzzahlig.}$$

Den aktuellen Wert des Parameters p bestimmen wir später.

Für die rechte Seite des Gleichungssystems (17) müssen wir

$$(36) \quad (f, \phi_i) = (\Delta v_0 - \nabla g \nabla v_0, \phi_i)$$

berechnen. Nach einigen Umformungen erhalten wir

$$\begin{aligned} (37) \quad (f, \phi_i) &= \int_V \Delta v_0 \phi_i dV + \int_V g \nabla v_0 \nabla \phi_i dV + \int_V g \phi_i \Delta v_0 dV = \\ &= c_i \left\{ -p(p-1) \int_1^\infty \frac{1}{r^p} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{k_i + \frac{1}{2}} \left(\frac{Y_i}{r} \right) dr \int_S P_{k_i}^{m_i} \cos m_i \phi \sin \theta d\theta d\phi - \right. \\ &\quad - Bp \int_1^\infty \frac{1}{r^{p+2}} \left[\frac{1}{\sqrt{r}} J_{k_i + \frac{1}{2}} \left(\frac{Y_i}{r} \right) \right]_{,r} dr \int_S G P_{k_i}^{m_i} \cos m_i \phi \sin \theta d\theta d\phi + \\ &\quad \left. + p(p-1) B \int_1^\infty \frac{1}{r^{p+3}} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{k_i + \frac{1}{2}} \left(\frac{Y_i}{r} \right) dr \int_S G P_{k_i}^{m_i} \cos m_i \phi \sin \theta d\theta d\phi \right\}, \end{aligned}$$

wobei S genauso wie früher $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ bedeutet. Die r -Integration ist wieder ausführlich in [5]

behandelt und wir benutzen die entsprechenden Formeln aus [5]. Für die Winkel-Integration können wir wegen Symmetrieeigenschaften das Integrationsgebiet auf die ganze Kugel ($0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$) ausdehnen und dann den entsprechenden Bruchteil des Gesamtintegrals berücksichtigen.

Für das erste Winkel-Integral aus (37) ergibt sich sofort

$$(38) \quad \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \tilde{P}_{k_i}^{m_i} \cos m_i \phi \sin \theta = \begin{cases} 0 & \text{für } m_i \neq 0 \\ 2\pi \int_{-1}^1 \tilde{P}_{k_i}^0(x) dx = 4\pi \sum_{\alpha=0}^{\frac{k_i}{2}} (-1)^\alpha a_{2\alpha}^{(i)} \frac{1}{k-2\alpha+1} & \text{für } m_i = 0, \end{cases}$$

wobei die $a_{2\alpha}^{(i)}$ in (21) definiert sind.

Für das zweite Winkel-Integral in (37) (Die beiden restlichen Winkel-Integrale sind gleich.) führen wir zuerst die θ -Integration durch. Wir erhalten

$$(39) \quad \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta G \tilde{P}_{k_i}^{m_i} \cos m_i \phi \sin \theta d\theta d\phi = \\ = 2 \sum_{\alpha} \sum_{\gamma=0}^{\frac{m_i}{2}} \left(\frac{\frac{m_i}{2}}{\gamma} \right) (-1)^{\frac{m_i}{2}-\gamma} \frac{\frac{k_i-m_i}{2}}{\sum_{s=0}^{\frac{k_i-m_i}{2}}} (-1)^s a_{2s}^{(i)} \frac{1}{k_i+2(\alpha-s-\gamma)+1} \int_0^{2\pi} \sum_{\beta} h_{2\beta}^{2\alpha} \sin^{2\beta} \phi \cos m_i \phi d\phi,$$

wobei α und β für G^a von 0 bis 2 laufen und für G^n von 0 bis 6.

Für die ϕ -Integration ergibt sich (ähnlich, wie früher)

$$(40) \quad \int_0^{2\pi} \sin^{2\beta} \phi \cos m_i \phi \, d\phi = \begin{cases} 2\pi & \text{für } \beta = 0, m_i = 0 \\ 2\pi \sum_{\gamma=0}^{\frac{m_i}{2}} b_{2\gamma}^{\left(\frac{m_i}{2}\right)} \frac{(2(\gamma+\beta)-1)!!}{2^{\gamma+\beta}(\gamma+\beta)!} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist $b_{2\gamma}^{\left(\frac{m_i}{2}\right)}$ in (31a) rekursiv definiert. Mit den Formeln (38), (39), (40) und mit den Formeln aus [5] für die r -Integration, können wir jetzt die Ausdrücke ausrechnen und dann das Gleichungssystem (17) lösen. Die Näherungslösung der Gl. (11) hat die Form

$$(41) \quad \bar{v} = 1 - \frac{1}{r^p} + \sum_{i=1}^N \xi_i^{(N)} \phi_i,$$

und für das Flußintegral (14) erhalten wir

$$(42) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \, dS = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} \frac{\partial}{\partial r} \left[1 - \frac{1}{r^p} + \sum_{i=1}^N \xi_i^{(N)} \phi_i \right] r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi =$$

$$= 4\pi p \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{p-1}} + \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \xi_i^{(N)} c_{k_i, l_i, m_i} \left[\frac{1}{\sqrt{r}} J_{k_i + \frac{1}{2}} \left(\frac{Y_i}{r} \right) \right]_r r^2 \int_S p_{k_i}^{m_i} \cos m_i \phi \sin \theta \, d\theta \, d\phi.$$

Nun ist aber

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{p-1}} = \delta_{p,1}$$

und

$$(43) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{r}} J_{k_i + \frac{1}{2}} \left(\frac{Y_i}{r} \right) \right]_r r^2 = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(-\frac{Y_i}{r} J_{k_i - \frac{1}{2}} \left(\frac{Y_i}{r} \right) + k_i \sqrt{r} J_{k_i + \frac{1}{2}} \left(\frac{Y_i}{r} \right) \right),$$

dabei bezeichnet $\gamma_i = \gamma_{k_i, l_i}$ die l_i -te Nullstelle von $J_{k_i + \frac{1}{2}}$. Dieser Grenzwert ist für $k_i > 0$ gleich Null, und für $k_i = 0$ (in diesem Falle ist $\gamma_{0, l_i} = l_i \pi$) gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{r}} J_{\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_i}{r} \right) \right]_{,r} r^2 = \lim_{r \rightarrow \infty} - \frac{\gamma_i}{r} J_{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_i}{r} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} - \sqrt{\frac{2\gamma_i}{\pi}} \cos \frac{\gamma_i}{r} = - \sqrt{\frac{2\gamma_i}{\pi}} = - \sqrt{2l_i} .$$

Insgesamt ergibt sich für (42) unter Berücksichtigung des Normierungsfaktors $c_{k_i l_i m_i}$ (wir wählen noch die Nummerierung der Koordinatenfunktion so, daß $l_i = i$)

$$(44) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} dS = 4\pi \delta_{p,1} - 4\sqrt{2} \sum_i \frac{\xi_i^{(N)}}{\sqrt{i}} .$$

Die Summe auf der rechten Seite der Gleichung erstreckt sich dabei über alle i mit $k_i = 0$.

4. Numerische Ergebnisse

Für die numerische Berechnung wählen wir eine Anzahl von Koordinatenfunktionen aus. Damit suchen wir eigentlich die Näherungslösung in einem endlichen Teilraum des Hilbertraumes $L^2(\Omega)$. Es ist schwierig, von vorneherein zu sagen, welcher Teilraum am besten die Approximation der Lösung ermöglicht. Als Maß für die Güte der Approximation wählen wir die aus diesen endlich vielen Koordinatenfunktionen berechnete Näherung für das Flußintegral: die Koordinatenfunktionen, die nur geringe Änderung des Flußintegrals bringen, werden vernachlässigt. In den Tabellen auf den nächsten Seiten ist der mit folgenden Koordinatenfunktionen gerechnete Näherungswert des Flußintegrals angegeben:

$$(45) \quad J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma_{0,i}}{r}\right), J_{4+\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma_{4,i}}{r}\right)P_4^0(\cos \theta), J_{4+\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma_{4,i}}{r}\right)P_4^4(\cos \theta)\cos 4\phi, J_{8+\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma_{8,i}}{r}\right)P_8^4(\cos \theta)\cos 4\phi, \\ i = 1, 2, \dots, 30 \\ J_{8+\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma_{8,i}}{r}\right)P_8^8(\cos \theta)\cos 8\phi, J_{10+\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma_{10,i}}{r}\right)P_{10}^8(\cos \theta)\cos 8\phi, J_{12+\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma_{12,i}}{r}\right)P_{12}^8(\cos \theta)\cos 8\phi.$$

Die Funktionen werden dann wie folgt fortlaufend nummeriert:

$$(46) \quad \phi_1 = J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma_{0,1}}{r}\right), \quad \phi_2 = J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma_{0,2}}{r}\right), \dots, \quad \phi_{31} = J_{4+\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma_{4,1}}{r}\right)P_4^0(\cos \theta), \dots, \quad \phi_{60} = J_{4+\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma_{4,30}}{r}\right)P_4^0(\cos \theta), \dots, \\ \phi_{200} = J_{12+\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma_{12,20}}{r}\right)P_{12}^8(\cos \theta)\cos 8\phi, \dots$$

Die Tabellen geben den Näherungswert des Flußintegrals an, den man erhält, wenn man die ersten N dieser Ansatzfunktion einsetzt.

Das Verfahren wurde zuerst mit verschiedenen Randfunktionen $1-r^{-p}$ getestet ($p \geq 1$ ganzzahlig). Es hat sich gezeigt, daß das günstigste Konvergenzverhalten für $p = 2$ auftritt, und daher sind die TAB. 1 bis TAB. 7 mit $v_0 = 1 - r^{-p}$ berechnet.

Um das Konvergenzverhalten besser zu erklären, gruppieren wir noch die Koordinatenfunktionen in folgende Weise

$$(47) \quad f_1(r), \quad f_2(r)P_4^0(\cos \theta), \quad (f_3(r)P_4^4 + f_4(r)P_8^4)\cos 4\phi, \quad (f_5(r)P_8^8 + f_6(r)P_{10}^8 + f_7(r)P_{12}^8)\cos 8\phi,$$

wobei $f_i(r)$ eine lineare Kombination der Bessel-Funktionen $J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{Y_{n,j}}{r}\right)$ mit festem n und verschiedenem j ist.

Z. B.

$$(48) \quad f_7(r) = \sum_{j=1}^N \xi_j^{(N)} J_{12+\frac{1}{2}}\left(\frac{Y_{12,j}}{r}\right)$$

dabei ist die Zahl der Bessel-Funktionen N in der Linearkombination, die die entsprechenden r -Funktion $f_i(r)$ darstellt, sehr wesentlich. So bekommen wir zum Beispiel in der TAB. 3 (jede Funktion $f_i(r)$ ist durch 30 Bessel-Funktionen erzeugt) mit 180 Koordinatenfunktionen das Ergebnis (bei G^n) 104,30. In dem Falle ist $f_7 = 0$.

$\sim$
 ∞

Mit 185 Koordinatenfunktionen erhalten wir 85,18; hier ist für f_7 (48) $N = 5$, für $N = 10$ haben wir 100,61 und so weiter bis für $N = 30$ (210 Koordinatenfunktionen) bekommen wir wieder 103,38. Noch stärker sehen wir dies in TAB. 4.

Diese Effekte werden wahrscheinlich verursacht durch die ungenaue Darstellung der "richtigen" Funktionen f_i , und verschwinden wenn wir eine "bessere" Darstellung, d.h. mehr Bessel-Funktionen in der Entwicklung der f_i nehmen.

Weiter zeigen die Tabellen, daß die Differenz zwischen den Flußintegralen für G^a und G^n sehr klein ist (Abb. 3).

G^a		G^m	
N	FLUSS-INTEGRAL	N	FLUSS-INTEGRAL
5	1.172511833067711E+01	5	1.204926844051151E+01
10	1.205874613843852E+01	10	1.2368889750608192E+01
15	1.224846964793237E+01	15	1.256311741092400E+01
20	1.231193085090589E+01	20	1.262433390101105E+01
25	1.237058065762165E+01	25	1.268433563761506E+01
30	1.239666477324620E+01	30	1.270951527773530E+01
35	3.881960093786143E+01	35	3.729697764520879E+01
40	3.926934188785665E+01	40	3.608606967638163E+01
45	3.930854286254955E+01	45	3.813659264592261E+01
50	3.931043018366506E+01	50	3.814096032435852E+01
55	3.931336064595606E+01	55	3.814538547752086E+01
60	3.931367904536167E+01	60	3.814662804460403E+01
65	4.269276381299484E+01	65	4.159193776070315E+01
70	4.317341531932204E+01	70	4.222649929842607E+01
75	4.319797526017112E+01	75	4.225260703553377E+01
80	4.319937558783501E+01	80	4.225523257993467E+01
85	4.320043454745322E+01	85	4.225652885567197E+01
90	4.320037355475795E+01	90	4.225672719697818E+01
95	4.153035558924178E+01	95	4.162623650985596E+01
100	4.155325430086786E+01	100	4.162350938306736E+01
105	4.155259155313766E+01	105	4.162392160502929E+01
110	4.155218990736555E+01	110	4.162377647871542E+01
115	4.155197733029970E+01	115	4.162386725942738E+01
120	4.154456192556543E+01	120	4.161940141222120E+01
125	4.106562403749693E+01	125	4.185123547174971E+01
130	4.096123049940279E+01	130	4.235223927332171E+01
135	4.096088701191823E+01	135	4.242380044134752E+01
140	4.096093440400040E+01	140	4.243601168375801E+01
145	4.096093750954944E+01	145	4.243942362611430E+01
150	4.096069413799078E+01	150	4.244034363039693E+01
155	4.177119227552972E+01	155	4.2096667072982891E+01
160	4.177192509525698E+01	160	4.203952632558282E+01
165	4.177193532726153E+01	165	4.203923120128605E+01
170	4.177193442807915E+01	170	4.203910391040761E+01
175	4.177186694359755E+01	175	4.203993141781949E+01
180	4.177305749165075E+01	180	4.204051968004946E+01
185	4.164665547295632E+01	185	4.213226485056466E+01
190	4.164606959135103E+01	190	4.213793507462836E+01
195	4.164513243525265E+01	195	4.213932617255759E+01
200	4.164053763359274E+01	200	4.214348764296140E+01

TAB. 1

$$B = 50, \quad v_0 = 1 - A^{-2}$$

G^a		G^m	
N	FLUSS-INTEGRAL	N	FLUSS-INTEGRAL
5	1.172511833067698E+01	5	1.378470239705376E+01
10	1.205874613843841E+01	10	1.406128274348844E+01
15	1.224846964793224E+01	15	1.426968266744945E+01
20	1.231193065090478E+01	20	1.432389723332126E+01
25	1.237056065762153E+01	25	1.438816560595399E+01
30	1.239666477324608E+01	30	1.441049242575051E+01
35	4.922198096366455E+01	35	4.811697245470614E+01
40	6.913155225833157E+01	40	6.654771134243183E+01
45	7.368793314369885E+01	45	7.129983662392288E+01
50	7.382455913191679E+01	50	7.159064199989204E+01
55	7.390109825605032E+01	55	7.169150869831645E+01
60	7.389524392052798E+01	60	7.168692321285518E+01
65	7.463610782308131E+01	65	7.270395569723870E+01
70	7.911420603397649E+01	70	7.712342298692500E+01
75	8.100869841063744E+01	75	7.909858869100078E+01
80	8.113441835659845E+01	80	7.932970870860020E+01
85	8.117511667693720E+01	85	7.938516042221492E+01
90	8.117646407173175E+01	90	7.938578404076642E+01
95	7.990210076916310E+01	95	7.901060574126559E+01
100	7.796092030443901E+01	100	7.825512263462071E+01
105	7.791045823901590E+01	105	7.817527517964358E+01
110	7.792448376206835E+01	110	7.817485928473404E+01
115	7.792433055347570E+01	115	7.817494150443963E+01
120	7.791066214732505E+01	120	7.817242973957755E+01
125	7.797667489031604E+01	125	7.816509507040858E+01
130	7.746312896048319E+01	130	7.825139133943506E+01
135	7.684686682955296E+01	135	7.898910393311513E+01
140	7.677592226396024E+01	140	7.942218345642533E+01
145	7.677482375796475E+01	145	7.960724960375779E+01
150	7.677352386136231E+01	150	7.966300579370040E+01

TAB. 2

 $B = 330, v_0 = 1 - \lambda^{-2}$

G^a G^m

N	FLUSS-INTEGRAL	N	FLUSS-INTEGRAL
5	1.172511833067675E+01	5	1.516799420707093E+01
10	1.205874613843824E+01	10	1.644418812209328E+01
15	1.224848964793206E+01	15	1.665368780048115E+01
20	1.231193095090560E+01	20	1.670743897875359E+01
25	1.237058065762135E+01	25	1.677210956253061E+01
30	1.239666477324590E+01	30	1.679416755690425E+01
35	4.950837862244472E+01	35	4.908907816193752E+01
40	7.605559035534328E+01	40	7.399202915169125E+01
45	9.414354194414290E+01	45	9.032702036759490E+01
50	9.699740849775104E+01	50	9.378105897165683E+01
55	9.744202808256468E+01	55	9.447575002653442E+01
60	9.747915342953155E+01	60	9.451653589291385E+01
65	9.771093000022921E+01	65	9.486103483726970E+01
70	1.004265062063097E+02	70	9.797225534162502E+01
75	1.052224135408036E+02	75	1.023970969569032E+02
80	1.068046940773404E+02	80	1.042306502897992E+02
85	1.070629235431140E+02	85	1.046213793047927E+02
90	1.071156014957831E+02	90	1.046547508307773E+02
95	1.068973483012121E+02	95	1.045140066184693E+02
100	1.040972303328360E+02	100	1.037205908893410E+02
105	1.028150262659038E+02	105	1.031278355475717E+02
110	1.027364133257675E+02	110	1.030624162795080E+02
115	1.028390118163252E+02	115	1.030626188394856E+02
120	1.027626995380416E+02	120	1.030569693723623E+02
125	1.027743953409144E+02	125	1.030519821273866E+02
130	1.027843553299606E+02	130	1.030715532531777E+02
135	1.020847990652052E+02	135	1.031287504710834E+02
140	1.014123799526300E+02	140	1.038550311556798E+02
145	1.012992368460533E+02	145	1.044965986756083E+02
150	1.012363585245612E+02	150	1.048280831358569E+02
155	1.017767996603477E+02	155	1.047096353650238E+02
160	1.027176620424944E+02	160	1.046654146061773E+02
165	1.034035553625532E+02	165	1.045232352202085E+02
170	1.035532347165477E+02	170	1.043705984233708E+02
175	1.035556498969063E+02	175	1.043222699742419E+02
180	1.035340706615912E+02	180	1.043013583215981E+02
185	1.036185564454340E+02	185	0.517763482587093E+01
190	1.032385784333377E+02	190	1.006068763281706E+02
195	1.030822729915257E+02	195	1.014463397829019E+02
200	1.030630202230465E+02	200	1.026962237409079E+02
205	1.030607892437941E+02	205	1.033589251666564E+02
210	1.031169532433407E+02	210	1.038221573029340E+02

TAB. 3

 $B = 75\%$, $r_0 = 1 - \kappa^2$

G^a		G^n	
N	FLUSS-INTEGRAL	N	FLUSS-INTEGRAL
5	1.172511833067653E+01	5	1.825724709551110E+01
10	1.205874613843307E+01	10	1.855672288823221E+01
15	1.224846964793188E+01	15	1.875935457908605E+01
20	1.231193085090542E+01	20	1.881650206219589E+01
25	1.237058065762117E+01	25	1.887920289909698E+01
30	1.239686477324572E+01	30	1.890256951746387E+01
35	4.952521769000370E+01	35	4.940744368131120E+01
40	7.734795830036633E+01	40	7.598210540604004E+01
45	1.024514124590563E+02	45	9.827033692057728E+01
50	1.109408954586921E+02	50	1.069031563293751E+02
55	1.130485226535160E+02	55	1.094351806810964E+02
60	1.132656342427608E+02	60	1.096676340345900E+02
65	1.133208421668459E+02	65	1.098469866177150E+02
70	1.149164279472440E+02	70	1.119379148740525E+02
75	1.199791304472104E+02	75	1.165788944418613E+02
80	1.234145366270492E+02	80	1.201155735926972E+02
85	1.243170343789467E+02	85	1.212095393422021E+02
90	1.244339765370401E+02	90	1.213165126760690E+02
95	1.242445040661474E+02	95	1.212423569865994E+02
100	1.221628662214967E+02	100	1.206432651872200E+02
105	1.198474769041831E+02	105	1.197878410491844E+02
110	1.193821374579335E+02	110	1.194840730661239E+02
115	1.194423900277523E+02	115	1.194474242185631E+02
120	1.193069300461773E+02	120	1.194596042279201E+02
125	1.192863566240706E+02	125	1.194563089734829E+02
130	1.193676823092037E+02	130	1.194737745487599E+02
135	1.190599289384109E+02	135	1.193953079023823E+02
140	1.181812466037412E+02	140	1.198787181660316E+02
145	1.177297563292110E+02	145	1.204521527795919E+02
150	1.174245775291934E+02	150	1.212326823317639E+02
155	1.178289616223158E+02	155	1.211435241973704E+02
160	1.186696003320861E+02	160	1.212191261489933E+02
165	1.195789298363541E+02	165	1.210885172190908E+02
170	1.200315447099651E+02	170	1.209480195335593E+02
175	1.201036805344886E+02	175	1.208618250469308E+02
180	1.200530478404618E+02	180	1.208519006350482E+02
185	1.201000613209981E+02	185	-2.019783932922675E+01
190	1.198435195749234E+02	190	1.167979875480311E+02
195	1.195598833482891E+02	195	1.173769219277132E+02
200	1.194671465240499E+02	200	1.196657157258776E+02
205	1.194873040021397E+02	205	1.200764445764064E+02
210	1.196243433615167E+02	210	1.195269170425754E+02

TAB. 4

$$B = 1185, \quad \psi_0 = 1 - \lambda^{-2}$$

G^a		G^n	
N	FLUSS-INTEGRAL	N	FLUSS-INTEGRAL
5	1.172511933067632E+01	5	2.008385972584734E+01
10	1.205874613843790E+01	10	2.040362425229769E+01
15	1.224846964793169E+01	15	2.059933821713138E+01
20	1.231193085090525E+01	20	2.065933684359564E+01
25	1.237058065762099E+01	25	2.072053151070481E+01
30	1.239666477324554E+01	30	2.074522399315535E+01
35	4.952332503403897E+01	35	4.961985750883883E+01
40	7.776473549714518E+01	40	7.690406050461985E+01
45	1.061011961990660E+02	45	1.021271192607409E+02
50	1.196917022290202E+02	50	1.151704231803438E+02
55	1.249808955954246E+02	55	1.206544708169383E+02
60	1.254907322402227E+02	60	1.212788588702546E+02
65	1.255301781626601E+02	65	1.213913140155320E+02
70	1.263277973049747E+02	70	1.228856361453954E+02
75	1.309657928809085E+02	75	1.271154624620734E+02
80	1.354159586569228E+02	80	1.315572269110949E+02
85	1.370562648652890E+02	85	1.333112308515617E+02
90	1.374027544609968E+02	90	1.336283701304211E+02
95	1.372964193262902E+02	95	1.335921678235211E+02
100	1.357416376009030E+02	100	1.331329503534157E+02
105	1.329955260233431E+02	105	1.322324944497217E+02
110	1.318828323969203E+02	110	1.316760603603766E+02
115	1.318083974585006E+02	115	1.315322992712731E+02
120	1.317372860047854E+02	120	1.316782151491505E+02
125	1.316754486526140E+02	125	1.316763690070039E+02
130	1.317408011591948E+02	130	1.316914741479115E+02
135	1.316803514111073E+02	135	1.315924822196956E+02
140	1.309223356391795E+02	140	1.319281089265028E+02
145	1.301719540784377E+02	145	1.322187049367098E+02
150	1.294190875520707E+02	150	1.332382703227000E+02
155	1.297266123402741E+02	155	1.328777248084594E+02
160	1.304661480527625E+02	160	1.329456621765422E+02
165	1.314214405607000E+02	165	1.328296930038882E+02
170	1.321012341563977E+02	170	1.327280289490131E+02
175	1.323516374700888E+02	175	1.326516353453602E+02
180	1.322522221346023E+02	180	1.328285534964136E+02
185	1.322544261619148E+02	185	1.275946653297026E+02
190	1.320848578776003E+02	190	1.307484991649931E+02
195	1.317685706062444E+02	195	1.305305397811289E+02
200	1.316152302366517E+02	200	1.325236869358468E+02

TAB.5

 $\beta = 1612$, $v_0 = 1 - h^{-2}$

G^a G^b

N	FLUSS-INTEGRAL	N	FLUSS-INTEGRAL
5	1.172511333067610E+01	5	2.170112131839595E+01
10	1.205874613843775E+01	10	2.203239903506811E+01
15	1.224846964793151E+01	15	2.222308541238868E+01
20	1.231193085090507E+01	20	2.228996197715714E+01
25	1.237058065762080E+01	25	2.234520603928858E+01
30	1.239646477324536E+01	30	2.237016429254247E+01
35	4.951933462836460E+01	35	4.980373897777506E+01
40	7.794344273877127E+01	40	7.746572513216305E+01
45	1.079243015163427E+02	45	1.042979818140543E+02
50	1.252823359572338E+02	50	1.206026251883565E+02
55	1.344128425511879E+02	55	1.293771620028064E+02
60	1.353733698797044E+02	60	1.305915436674680E+02
65	1.354000252050747E+02	65	1.306674423775370E+02
70	1.354763406443084E+02	70	1.317903409857104E+02
75	1.397391977251302E+02	75	1.354839173364143E+02
80	1.445064913600517E+02	80	1.402028193446712E+02
85	1.496383191713309E+02	85	1.424337307943474E+02
90	1.476749400708671E+02	90	1.452726393228729E+02
95	1.478080367981513E+02	95	1.432408490178354E+02
100	1.466503397359834E+02	100	1.423961236309373E+02
105	1.438382995772032E+02	105	1.420434196886726E+02
110	1.421434217126145E+02	110	1.413034081542591E+02
115	1.418053406821694E+02	115	1.41021843525217E+02
120	1.416263909251662E+02	120	1.41322850434119E+02
125	1.414754011892142E+02	125	1.41322153498314E+02
130	1.415014668201142E+02	130	1.413334325129487E+02
135	1.416058460653518E+02	135	1.412389735590104E+02
140	1.410071907538192E+02	140	1.413004183510806E+02
145	1.401513948556713E+02	145	1.415417193348857E+02
150	1.388189753150539E+02	150	1.424841586205315E+02
155	1.390446088656943E+02	155	1.416151497517619E+02
160	1.397009167276467E+02	160	1.414868774635442E+02
165	1.406395114604337E+02	165	1.414442349886206E+02
170	1.414477886665298E+02	170	1.413762043875939E+02
175	1.419183967021011E+02	175	1.413413174039023E+02
180	1.415777219618158E+02	180	1.418313316976717E+02
185	1.414167301350803E+02	185	1.473257522562902E+02
190	1.413267408656124E+02	190	1.462783473850454E+02
195	1.410534956990404E+02	195	1.472221105414595E+02
200	1.409256810198302E+02	200	1.476545784170265E+02
		205	1.452249497948664E+02
		210	1.393537339810325E+02

TAB.6

 $B = 2040, \nu_0 = 1 - \lambda^{-2}$

N FLUSS-INTEGRAL

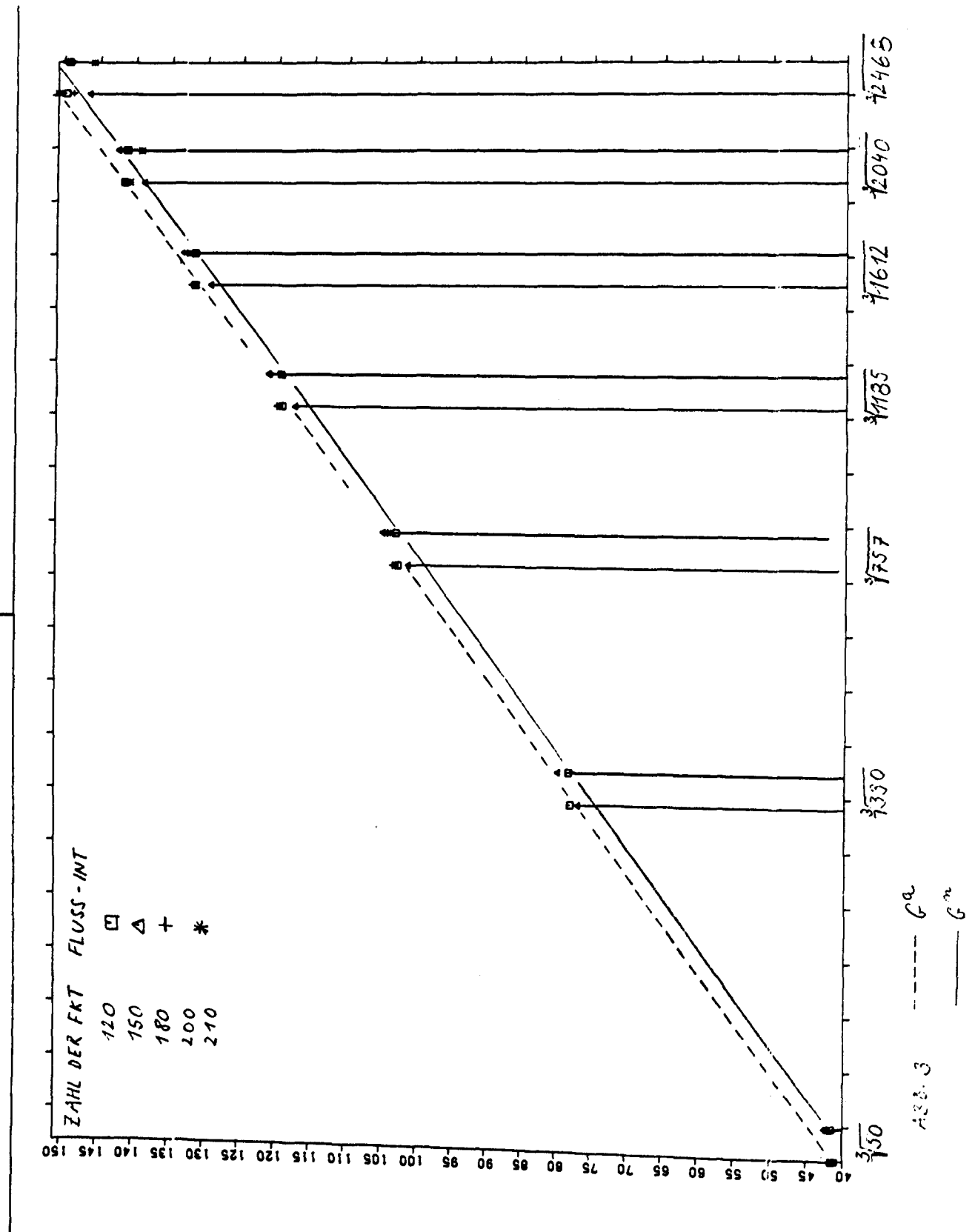
N

FLUSS-INTEGRAL

5	1.1723113360675498+01
10	1.2058746133437558+01
15	1.224846964793132F+01
20	1.2311930350904395+01
25	1.237053065762662F+01
30	1.2398664773249185+01
35	4.9515579160931495+01
40	7.803331262059634E+01
45	1.089325122907453F+02
50	1.289343147599635E+02
55	1.418397226476908F+02
60	1.436317347043365E+02
65	1.436505406366280E+02
70	1.433385429008582E+02
75	1.470980796042639E+02
80	1.518233552686766E+02
85	1.547797472939231E+02
90	1.569551086072895E+02
95	1.569050112121746E+02
100	1.560357617722049E+02
105	1.533272852242144E+02
110	1.511930832647079E+02
115	1.505042610979968E+02
120	1.497789087769230E+02
125	1.494848046329165F+02
130	1.494760846013402E+02
135	1.497131934839982E+02
140	1.492107581630517E+02
145	1.484345100449140E+02
150	1.464946655905573E+02
155	1.466517755836490E+02
160	1.472416817295325E+02
165	1.481417259090080E+02
170	1.490123505283624E+02
175	1.496892759324972E+02
180	1.487993216134379E+02
185	1.483327364868790E+02
190	1.483283571014184E+02
195	1.481364918042390E+02
200	1.481340303779061E+02
205	1.480821390904603E+02
210	1.508660108460746E+02

5	2.314423264812587+01
10	2.347397502130478+01
15	2.360737312955647+01
20	2.373179170043796+01
25	2.379003799744719+01
30	2.381633079628757+01
35	4.997997320365777+01
40	7.736350510743776+01
45	1.056527950779264+02
50	1.243180279758749+02
55	1.361937754034520+02
60	1.382301829744414+02
65	1.392377017767561+02
70	1.391600996386502E+02
75	1.423512122474528E+02
80	1.470034398441577E+02
85	1.495505420143064E+02
90	1.512400342072273E+02
95	1.512173340458100E+02
100	1.509453052404340E+02
105	1.501622588767580E+02
110	1.493264379898703E+02
115	1.488974558066323E+02
120	1.492360639145967E+02
125	1.492357313438175E+02
130	1.492480646440337E+02
135	1.491573359371076E+02
140	1.493309333254303E+02
145	1.492499815327193E+02
150	1.493124703577375E+02
155	1.493886364847127E+02
160	1.478223849941473E+02
165	1.479432715023581E+02
170	1.479082149076185E+02
175	1.479209789604659E+02
180	1.487367333326783E+02
185	2.663078195175694E+02
190	1.892420725660106E+02
195	1.85796344484846E+02
200	1.777866590763344E+02
205	1.656646628907535E+02
210	1.459212005176248E+02

TAB. 7 $B = 2468$, $v_0 = 1 - \lambda^{-2}$



IOZAM056 - NR. 1

20.09.74 - 09/46/29

T07AM056

A. Anhang

Im Falle $G(\theta, \phi) = G^L = 1$ hat Gl. (1) eine besonders einfache Gestalt, die es uns ermöglicht, diese Gleichung direkt zu lösen (s. [2]).

Es handelt sich um die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(A1) \quad -\operatorname{div}(\nabla c + c \nabla(-\frac{B}{r^3})) = 0, \quad \text{mit} \quad c(1) = 0, \quad c(\infty) = 1,$$

oder ausführlich geschrieben

$$(A2) \quad -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \left[\frac{dc}{dr} + \frac{3B}{r^4} c \right] \right) = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$(A3) \quad c(r) = \frac{e^{-\frac{B}{r^3}}}{\int_1^\infty e^{-\frac{B}{s^3}} \frac{1}{s^2} ds} \int_1^r e^{-\frac{B}{s^3}} \frac{1}{s^2} ds,$$

und für das Flußintegral (13) ergibt sich

$$(A4) \quad \int_{S_{K=\infty}} \left(\frac{dc}{dr} + c \frac{dg}{dr} \right)^2 dS = \frac{4\pi}{\int_1^\infty e^{-\frac{B}{s^3}} \frac{1}{s^2} ds} = \frac{4\pi \sqrt[3]{B}}{\int_0^\infty e^{-x^3} dx} = \frac{4\pi \sqrt[3]{B}}{0,892979577},$$

wobei das letzte näherungsweise für die größeren B-s gilt (was bei uns der Fall ist).

Um das Ritz-Galerkinsche Verfahren zu testen, und die Schnelligkeit des Verfahrens bei verschiedenen Formen der Gl. (1) zu vergleichen, wenden wir jetzt das Galerkin Verfahren auf die Gl. (1), (8) und (11) an, wobei die Koordinatenfunktionen sind:

$$\phi_j(r) = c_j \frac{1}{\sqrt{r}} J_{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{j} \right) = \frac{\sqrt{2}}{j^\pi} \sin \frac{j\pi}{r}, \quad (c_j = \frac{1}{\sqrt{j}}).$$

Als Randfunktion wählen wir $v_0 = 1 - \frac{1}{2r}$ für (I) und (II) und $v_0 = 1 - \frac{1}{r}$ für (8).

$-\Delta u + f u = 0$		$-\Delta u + \nabla g \nabla u = 0$		$-\operatorname{div}(\nabla u + u \nabla g) = 0$	
N	FLUSS-INTEGRAL	N	FLUSS-INTEGRAL	N	FLUSS-INTEGRAL
10	9.576890095418371E+01	10	1.011546474076120E+02	10	9.578479814253446E+01
20	9.706309627931770E+01	20	9.713495615924493E+01	20	1.002194092005381E+02
30	9.719667882360038E+01	30	9.711520856354608E+01	30	1.001607144601848E+02
40	9.722646990624153E+01	40	9.713424481941037E+01	40	9.985189952968463E+01
50	9.723673925581276E+01	50	9.715180699414163E+01	50	9.955247655915955E+01
60	9.724121265688775E+01	60	9.716545106697799E+01	60	9.929974317054529E+01
70	9.724347118180507E+01	70	9.717595382662351E+01	70	9.906278509221643E+01
80	9.724473410449410E+01	80	9.718417295021253E+01	80	9.886667407459530E+01
90	9.724549541918310E+01	90	9.719073715639142E+01	90	9.869654802632675E+01
100	9.724598161761121E+01	100	9.719608163633393E+01	100	9.854828863569443E+01
110	9.724630665754132E+01	110	9.720050816648246E+01	110	9.841851987857615E+01
120	9.724653219459975E+01	120	9.720422958994924E+01	120	9.830448317323661E+01
130	9.724669359380477E+01	130	9.720739914488161E+01	130	9.820391189639837E+01
140	9.724681213933832E+01	140	9.721012943944930E+01	140	9.811492880718803E+01
150	9.724690116772731E+01	150	9.721250482702174E+01	150	9.803596652639647E+01
160	9.724696932707195E+01	160	9.721458961364215E+01	160	9.796570657109248E+01
170	9.724702239341026E+01	170	9.721643360770504E+01	170	9.790303243185195E+01
180	9.724706432509158E+01	180	9.721807594637492E+01	180	9.784699310793509E+01
190	9.724709789684391E+01	190	9.721954778359898E+01	190	9.779677444026454E+01

$B = 330$, $FLUSS-INT = 97,24628$

Literatur

- (1) MICHLIN, S. G.:
Numerische Realisierung von Variationsmethoden.
Berlin 1969.
- (2) KRAUT, A., DWORSCHAK, F., WOLLENBERGER, H.:
Analysis of Point Defect in Copper.
Phys. stat. sol. (b) 44, 805 (1971).
- (3) DEDERICHS, P.H., POLLMANN, J.:
Elastisches Verschiebungsfeld und Wechselwirkungsenergie von
Punktdefekten in Anisotopen, kubischen Kristallen.
Jül-836-FF, März 1972.
- (4) PROFANT, M., WALTHER, H.:
Über die stationäre Lösung der Diffusionsgleichung mit Drift-Term.
Jül-1027-MA, Dezember 1973.
- (5) PÖPPE, Ch., PROFANT, M.:
Integration von Produkten halbzahliger Besselfunktionen mit
Potenzen von x .
Jül-1097-MA.
- (6) RYSHIK-GRADSTEIN:
Summen-, Produkt- und Integral-Tafeln.
Berlin 1957.