



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH
GESELLSCHAFT MIT BESCHRÄNKTER HAFTUNG
Institut für Reaktorbauelemente

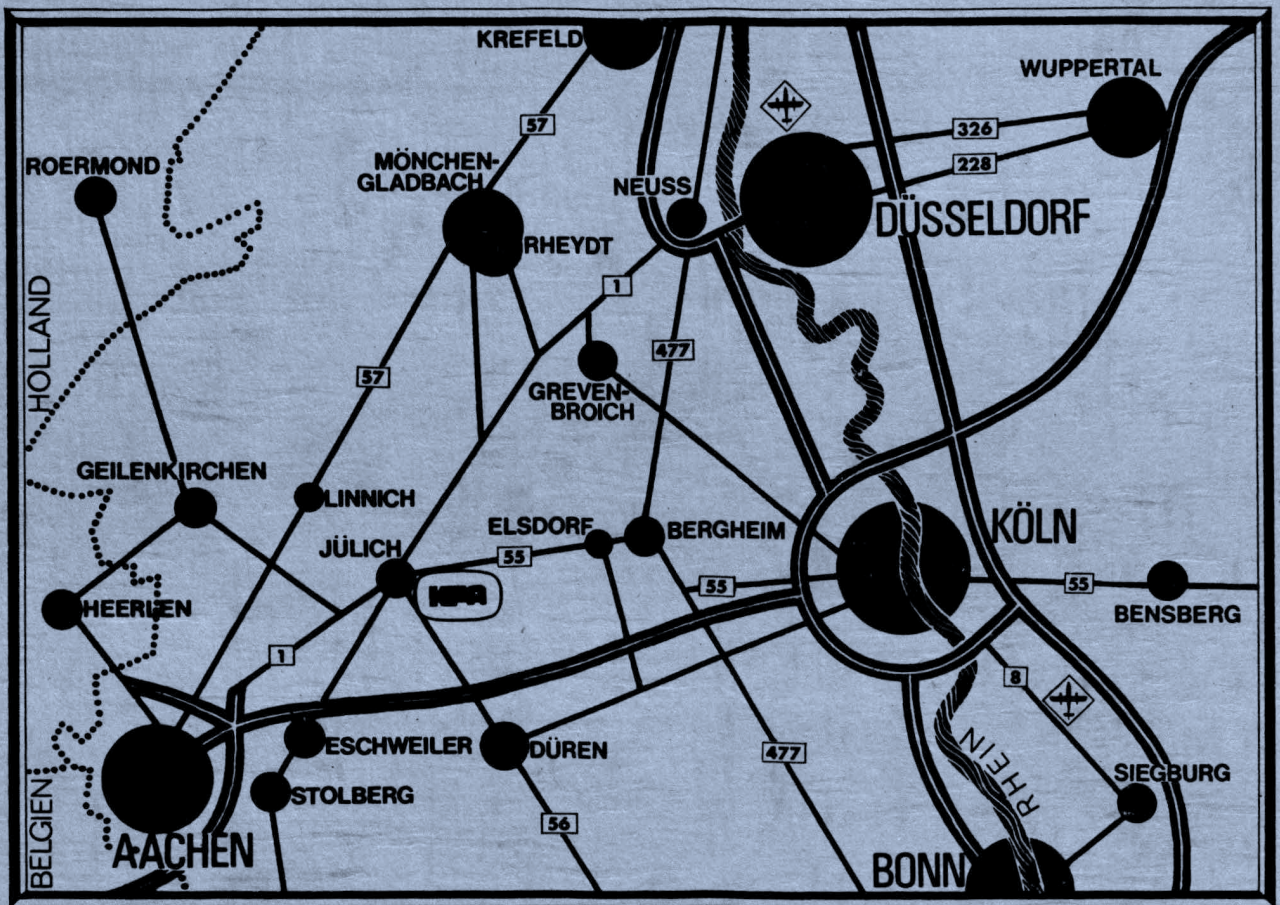
**Analytische Behandlung
der zweidimensionalen Wärmeleitung
in einem Rechteckquerschnitt
bei vorgegebenen Randbedingungen**

von

E. Achenbach und N. Iniotakis

**Jül - 1172
März 1975**

Als Manuskript gedruckt



Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 1172
 Institut für Reaktorbauelemente Jül - 1172

Dok.: Heat Conduction - Analysis

Im Tausch zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH,
 Jülich, Bundesrepublik Deutschland

**Analytische Behandlung
der zweidimensionalen Wärmeleitung
in einem Rechteckquerschnitt
bei vorgegebenen Randbedingungen**

von

E. Achenbach und N. Iniotakis

ANALYTISCHE BEHANDLUNG DER ZWEIDIMENSIONALEN WÄRMELEITUNG IN EINEM RECHTECKQUERSCHNITT BEI VORGEGEBENEN RANDBEDINGUNGEN

E. Achenbach, N. Iniotakis

Zusammenfassung

Die zweidimensionale Wärmeleitung in einem Rechteckquerschnitt wird für den Fall gelöst, daß drei Seiten auf konstanter Temperatur gehalten werden, während an der vierten Seite Wärme durch Wärmeübergang an ein Fluid übertragen wird. Es wird die analytische Lösung der Wärmeleitungsgleichung angegeben.

Das genannte Problem tritt auf, wenn der örtliche Wärmeübergang mit Hilfe eines in die Wand eingebauten, von der Umgebung isolierten Meßelementes experimentell bestimmt werden soll. Diese Methode wurde angewandt, um den örtlichen Wärmeübergang an glatten und rauhen Wärmeaustauschern für gasgekühlte Reaktoren zu messen.

Abstract

The analytical solution is given for the two-dimensional heat conduction in a rectangular cross section. The boundary conditions are as follows: three sides of the rectangle are kept at a constant temperature whereas heat is transferred from the fourth side to a fluid.

This problem arises when the local heat transfer is measured by means of a flush mounted plug thermally insulated from the surroundings. This method was applied to determine the local heat transfer coefficient of smooth and rough surfaced heat exchangers for gas-cooled nuclear reactors.

1. Einleitung

Die Messung der örtlichen Wärmeübergangszahl α an Oberflächen kann u. a. mit Hilfe eines in die Oberfläche eingebauten beheizten Meßelementes realisiert werden (Fig. 1). Das Element wird auf die gleiche Temperatur wie

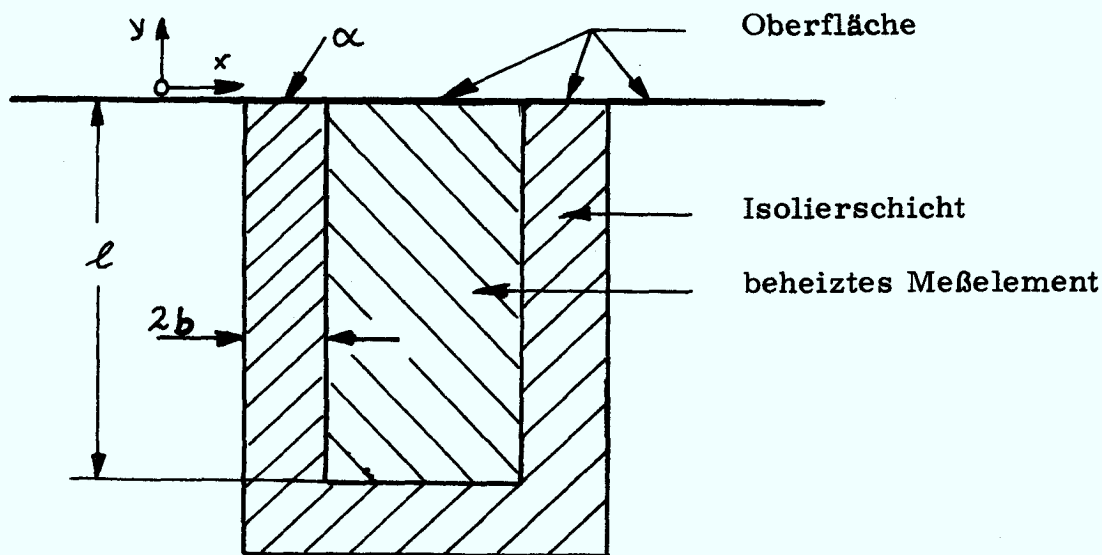


Abb. 1

Skizze einer Sonde zur Messung
der örtlichen Wärmeübergangszahl

die Umgebung geregelt und aus der Heizleistung der Wärmestrom q berechnet. Damit das Meßelement nicht durch Wärmeleitung Wärme aus der Umgebung aufnimmt, wird es thermisch isoliert. Diese Notwendigkeit führt namentlich bei großen Heizflächenbelastungen zu folgendem Problem: Die geringe Wärmeleitfähigkeit des Isoliermaterials, das von der Umgebung sowie vom Meßelement aufgeheizt wird, bewirkt eine mit steigender Heizflächenbelastung wachsende Abkühlung der Oberfläche der Isolierung gegenüber dem Meßelement und der Umgebung. Unter der Annahme, daß die Hälfte der Isolierdicke b bei der Bestimmung der wärmeübertragenden Fläche des Meßelementes zusätzlich zu berücksichtigen ist, ergibt sich bei der Berechnung der lokalen Wärmestromdichte ein Fehler, wenn ein merklicher Temperaturabfall in der Isolierschicht mit wachsendem Abstand vom Heißelement auftritt. Um den entstehenden Fehler abzuschätzen,

benötigt man die Oberflächentemperatur der Isolierschicht. Diese zu bestimmen, ist Gegenstand der folgenden Betrachtung.

2. Formulierung des Problems

Es wird angenommen, daß der Wärmeleitungsvorgang in der Isolierschicht zweidimensional sei. Somit genügt es, einen Querschnitt, nämlich ein Rechteck der Länge 1 und der Breite 2 b, zu betrachten. Die Wärmeübergangszahl sei α [W/m²K], die Wärmeleitfähigkeiten des Fluides λ_F [W/mK], die des Isoliermaterials λ_M , die Temperatur $T(x, y)$ [K], die Temperatur der Außenströmung T_∞ und die des Meßelementes sowie der Umgebung T_o .

Zur dimensionslosen Darstellung werden folgende Größen eingeführt:

$$\text{Temperatur} \quad \Theta(\xi, \eta) = \frac{T(x, y) - T_\infty}{T_o - T_\infty}$$

$$\text{Streckung} \quad \Lambda = l/b$$

$$\text{Abszisse} \quad \xi = x/b$$

$$\text{Ordinate} \quad \eta = y/b = \Lambda y/l$$

$$\text{Biot-Zahl} \quad Bi = \frac{\alpha b}{\lambda_M}$$

Somit lautet die Differentialgleichung für das Temperaturfeld (siehe auch Abb. 2)

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} = 0 \quad (1)$$

mit den Randbedingungen:

$$\Theta(\xi, 0) = 1 \quad (2)$$

$$\Theta(1, \eta) = 1 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}(0, \eta) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}(\xi, \Lambda) = -Bi \cdot \Theta(\xi, \Lambda) \quad (5)$$

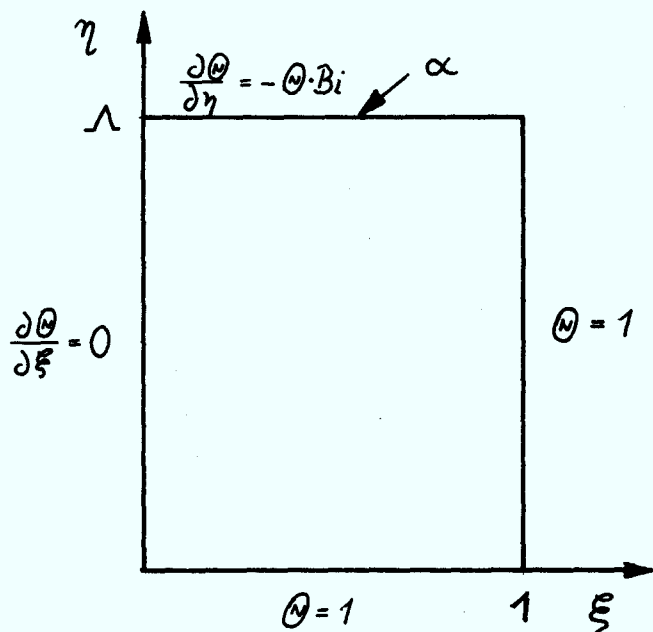


Abb. 2

Erläuterungsskizze zur Lage
des Koordinatensystems

3. Lösungsweg

Um die Bestimmung der Konstanten, die in der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung (1) auftreten, bei den gegebenen Randbedingungen zu erleichtern, wird der Ansatz

$$\Theta_{(\xi, \eta)} = 1 + \Theta_{(\xi, \eta)}^* \quad (6)$$

gemacht. Gleichung (1) und die Randbedingungen (2) bis (5) lauten dann:

$$\frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial \eta^2} = 0 \quad (7)$$

$$\Theta_{(\xi, 0)}^* = 0 \quad (8)$$

$$\Theta_{(1, \eta)}^* = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Theta^*}{\partial \xi}(0, \eta) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Theta^*}{\partial \eta}(\xi, 1) = -Bi(1 + \Theta_{(\xi, 1)}^*) \quad (11)$$

Zur Lösung der Gleichung (7) wird folgender Ansatz gemacht:

$$\Theta_{(\xi, \eta)}^* = \Psi(\xi) \Phi(\eta) \quad (12)$$

Durch partielle Differentiation von (12) und Einsetzen in (7) folgt:

$$\frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = 0 \quad (13)$$

Daraus

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + k^2 \psi = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - k^2 \phi = 0 \quad (15)$$

Mit den Ansätzen

$$\psi = e^{\beta \xi} \quad (16)$$

$$\phi = e^{\gamma \eta} \quad (17)$$

und durch Einsetzen von (16) und (17) in (14) bzw. (15) folgt

$$\beta = \pm i k \quad (18)$$

$$\gamma = \pm k \quad (19)$$

Somit lauten die partikulären Lösungen der Gleichungen (14) und (15)

$$\psi(\xi) = A_1 e^{i k \xi} + A_2 e^{-i k \xi} \quad (20)$$

$$\phi(\eta) = B_1 e^{k \eta} + B_2 e^{-k \eta} \quad (21)$$

Somit erhält man für

$$\mathcal{M}_{(\xi, \eta)}^* = (A_1 e^{ik\xi} + A_2 e^{-ik\xi}) (B_1 e^{k\eta} + B_2 e^{-k\eta}) \quad (22)$$

Durch Einsetzen der Randbedingung (8) bis (10) in (22) folgt:

$$\mathcal{M}_{(\xi, 0)}^* = 0 = (A_1 e^{ik\xi} + A_2 e^{-ik\xi}) (B_1 + B_2) \quad (23)$$

$$\mathcal{M}_{(1, \eta)}^* = 0 = (A_1 e^{ik} + A_2 e^{-ik}) (B_1 e^{k\eta} + B_2 e^{-k\eta}) \quad (24)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}^*}{\partial \xi}(0, \eta) = 0 = (A_1 - A_2) (B_1 e^{k\eta} + B_2 e^{-k\eta}) \quad (25)$$

Aus (23) folgt $B_1 = -B_2 = B$

Aus (25) folgt $A_1 = +A_2 = A$

Damit ergibt sich Gleichung (24) zu

$$\mathcal{M}_{(1, \eta)}^* = 0 = (e^{ik} + e^{-ik}) (e^{k\eta} - e^{-k\eta})$$

Daraus

$$0 = \cos k \cdot \sinh k\eta$$

Diese Gleichung ist erfüllt für

$$k = \frac{\pi}{2} (2n+1) \quad \text{mit } n = 0; 1; 2; 3; \dots$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (7) lautet also:

$$\mathcal{M}_{(\xi, \eta)}^* = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sinh \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} \eta \right] \cos \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} \xi \right] \quad (26)$$

Die Koeffizienten A_n lassen sich aus der Randbedingung Gleichung (11) bestimmen. Sie lautet nach Einsetzen der Gleichung (26)

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\xi\right] \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \cosh\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\Lambda\right] + Bi \cdot \sinh\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\Lambda\right] \right\} = -Bi \quad (27)$$

Um die Eigenschaften der Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen ausnutzen zu können, wird Gleichung (27) mit $\cos m\frac{\pi}{2}$ multipliziert und integriert.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 A_n \cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\xi\right] \cos m\frac{\pi}{2}\xi \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \cosh\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\Lambda\right] + Bi \cdot \sinh\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\Lambda\right] \right\} d\xi = \\ = \int_0^1 -Bi \cos m\frac{\pi}{2}\xi d\xi \end{aligned} \quad (28)$$

Für das Integral auf der linken Seite von Gleichung (28) gilt

$$\int_0^1 \cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\xi\right] \cos\left[m\frac{\pi}{2}\xi\right] d\xi = 0 \quad \text{für } m \neq (2n+1)$$

$$\int_0^1 \cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\xi\right] \cos\left[m\frac{\pi}{2}\xi\right] d\xi = 1 \quad \text{für } m = (2n+1)$$

Die Integration liefert

$$A_n \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \cosh\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\Lambda\right] + Bi \cdot \sinh\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\Lambda\right] \right\} = -\sin(2n+1)\frac{\pi}{2} \frac{Bi}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \quad (29)$$

Damit ergibt sich für A_n

$$A_n = - \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] \cdot Bi}{(2n+1)\frac{\pi}{2} \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \cosh\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\Lambda\right] + Bi \sinh\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\Lambda\right] \right\}} \quad (30)$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (6) sowie der Tatsache, daß

$$\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^n$$

ist, erhält man für die Temperaturverteilung

$$\Theta_{(\xi, \eta)} = 1 - Bi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sinh\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\eta\right] \cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\xi\right]}{(2n+1)\frac{\pi}{2} \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \cosh\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\Lambda\right] + Bi \cdot \sinh\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\Lambda\right] \right\}} \quad (31)$$

Für eingangs erwähnte Korrektur interessiert die Temperatur an der umströmten Oberfläche des Meßelementes ($\eta = \Lambda$). Gleichung (31) liefert:

$$\Theta_{(\xi, \Lambda)} = 1 - Bi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\xi\right]}{(2n+1)\frac{\pi}{2} \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \operatorname{ctgh}\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\Lambda\right] + Bi \right\}} \quad (32)$$

Für große Argumente (u) gehen $\cosh u \rightarrow \sinh u$ und $\operatorname{ctgh} u \rightarrow 1$. Damit ergibt sich für die Gleichungen (31) und (32)

$$\Theta_{(\xi, \eta)} = 1 - Bi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \exp\left[-(2n+1)\frac{\pi}{2}(\Lambda - \eta)\right] \cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\xi\right]}{(2n+1)\frac{\pi}{2} \left[(2n+1)\frac{\pi}{2} + Bi \right]} \quad (33)$$

bzw.

$$\Theta_{(\xi, \Lambda)} = 1 - Bi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\xi\right]}{(2n+1)\frac{\pi}{2} \left[(2n+1)\frac{\pi}{2} + Bi \right]} \quad (34)$$

Die Gleichungen (33) und (34) können für $(2n+1)\frac{\pi}{2} \gg 5$ angewendet werden, da sich für diese Argumente die $\cosh$ - und $\sinh$ -Funktionen nur noch um etwa 0,1 % unterscheiden und die ctgh -Funktion ebenfalls um etwa 0,1 % von 1 verschieden ist.

4. Ergebnisse

Gleichung (31) stellt die Temperaturverteilung in einem Rechteckquerschnitt der Breite b und der Länge $b \times \Lambda$ dar, wobei die Biot-Zahl als Parameter auftritt. Die Biot-Zahl enthält die Angaben über die Stoffeigenschaften der am Problem beteiligten Materialien sowie eine Aussage über den Wärmeübergang an der umströmten Kante des Rechtecks. Häufig ist es günstig, die Biot-Zahl wie folgt zu schreiben:

$$\text{Bio} \equiv \frac{\alpha b}{\lambda_M} = \frac{\alpha d}{\lambda_F} \frac{\lambda_F}{\lambda_M} \frac{b}{d}$$

oder

$$\text{Bio} = \text{Nu} \frac{\lambda_F}{\lambda_M} \frac{b}{d} \quad (35)$$

wobei Nu die Nusselt-Zahl und d die charakteristische Länge bedeuten.

Abb. 3 zeigt die Temperaturverteilung $\Theta(\xi, \Lambda)$ an der Stelle $\eta = \Lambda$ für verschiedene Biot-Zahlen. Λ wurde hier mit 20 angenommen. In Abb. 4 ist die Temperaturverteilung $\Theta(0, \eta)$ im Symmetriequerschnitt als Funktion von $(\Lambda - \eta)$ aufgetragen. Man erkennt, daß sich für $\text{Bi} \leq 10$ bereits bei einer Streckung von $\Lambda = 3$ ein Temperaturfeld einstellt, als wäre das Rechteck unendlich lang ($\Lambda \rightarrow \infty$). Dieser Fall ist in Gleichung (33) enthalten.

In den Abb. 5 und 6 ist ein Beispiel für die Wärmeleitung in einem Rechteck sehr kurzer Streckung angegeben, und zwar für den Fall, daß das Verhältnis von Breite zu Länge gleich zwei ist ($\Lambda = 1$). Abb. 5 zeigt die Temperaturverteilung im Symmetrielängsschnitt ($\xi = 0$) als Funktion der Rechtecklänge η mit der Biot-Zahl als Parameter. In Abb. 6 ist die Temperaturverteilung bei einer Biot-Zahl von $\text{Bi} = 10$ in Abhängigkeit von der Rechteckbreite ξ in verschiedenen Längsschnitten η dargestellt.

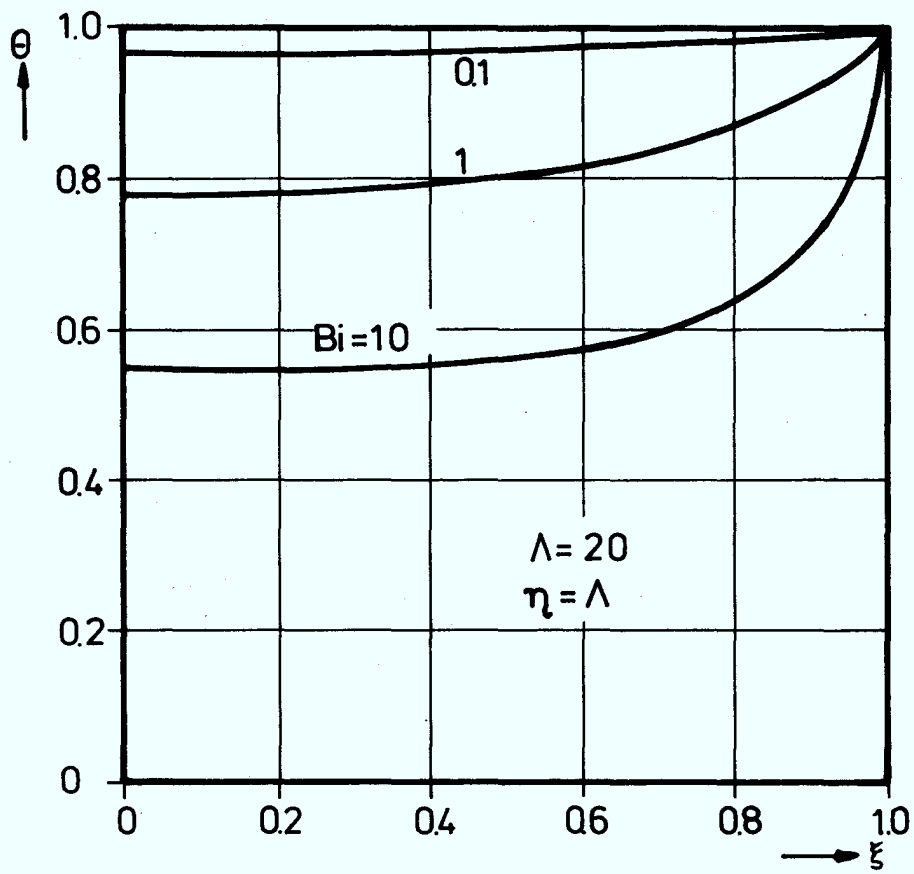


Abb. 3

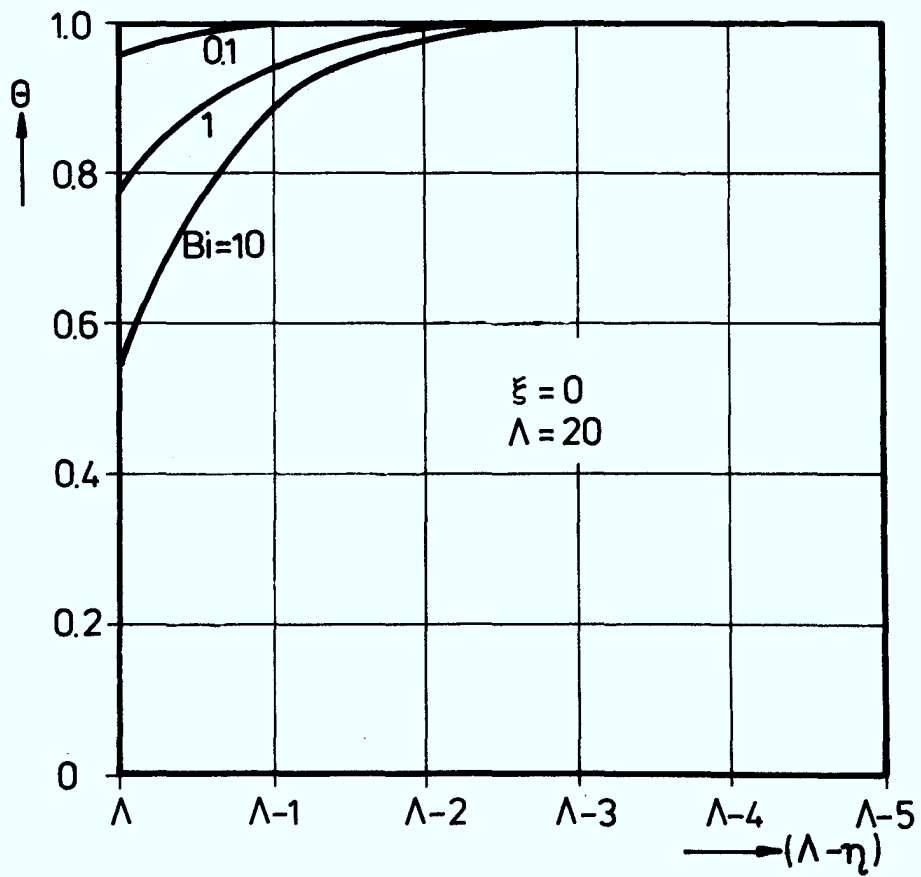


Abb. 4

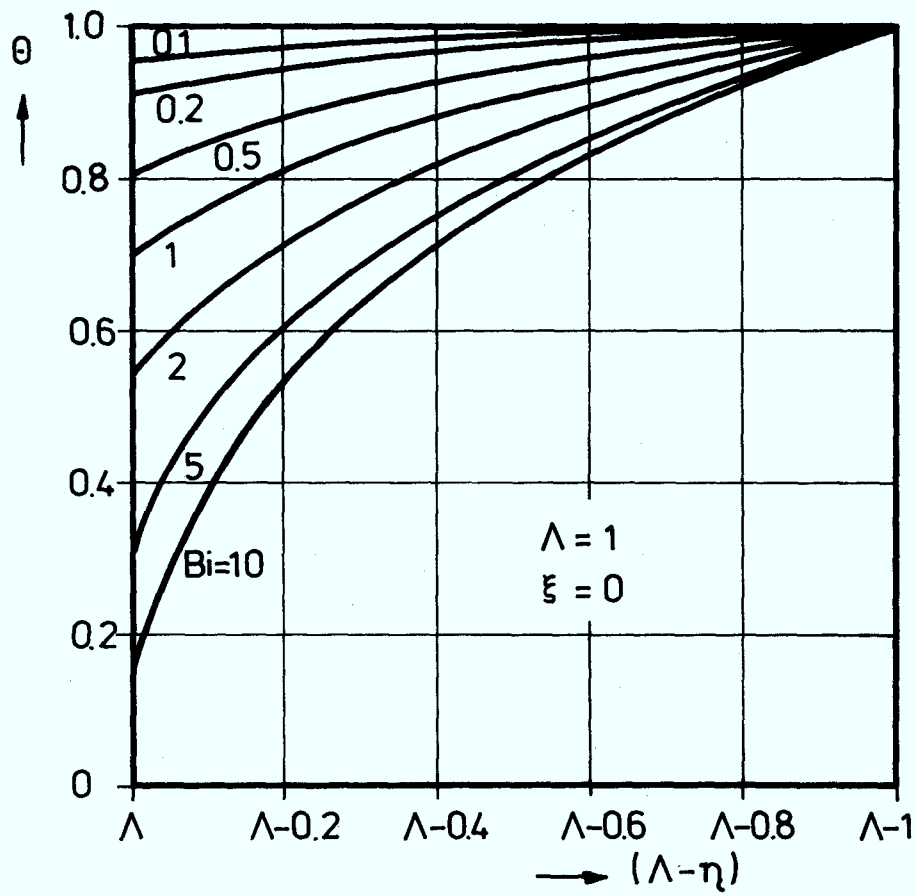


Abb. 5

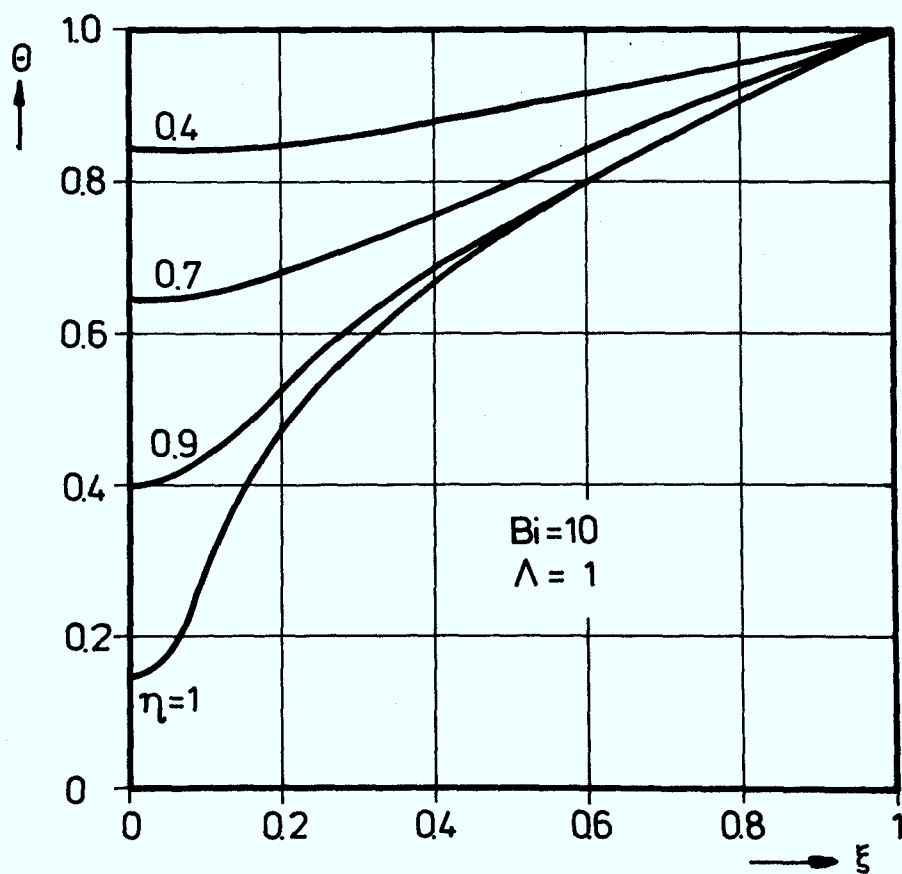


Abb. 6