



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH
GESELLSCHAFT MIT BESCHRÄNKTER HAFTUNG
Institut für Kernphysik

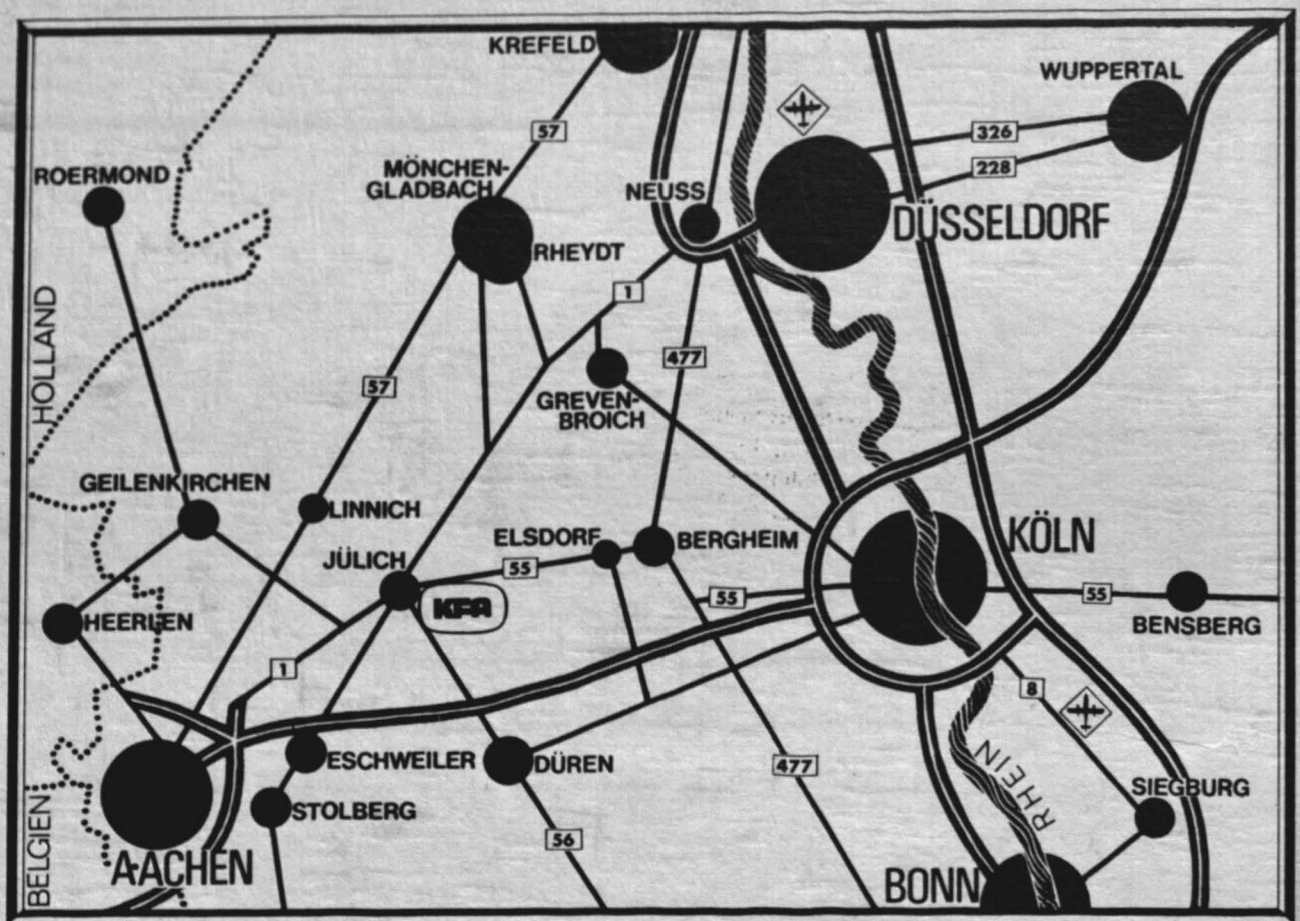
**Die Generatorkoordinatenmethode und
ihre Anwendung auf kollektive
Anregungszustände in Atomkernen**

von

F. Grümmer

Jül - 1207
Juni 1975

Als Manuskript gedruckt



Berichte der Kernforschungsanlage Jülich - Nr. 1207

Institut für Kernphysik Jül - 1207

Dok.: Nucleus Model - Generator-Coordinates-Method
 Generator-Coordinates-Method - Hill-Wheller Equation
 Generator-Coordinates-Method - Spherical Nucleus
 Generator-Coordinates-Method - Deformed Nucleus

Im Tausch zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH,
 Jülich, Bundesrepublik Deutschland

**Die Generatorkoordinatenmethode und
ihre Anwendung auf kollektive
Anregungszustände in Atomkernen**

von

F. Grümmer

V O R W O R T

Für die Anregung zum Thema dieser Arbeit wie für die wohlwollende Unterstützung bei ihrer Durchführung bin ich Herrn Prof. Dr. A. Fäßler zu besonderem Dank verpflichtet. Eine große Hilfe war mir außerdem die Zusammenarbeit mit Prof. Dr. A. Plastino, Dr. J. Urbano, Dr. K.W. Schmid und F. Osterfeld. Ihnen und allen anderen Mitarbeitern des Instituts für Kernphysik der Kernforschungsanlage Jülich möchte ich für viele hilfreiche Diskussionen und Hinweise danken. Die umfangreichen numerischen Rechnungen wurden mir durch die hervorragende Arbeit des Rechenzentrums der Kernforschungsanlage Jülich wesentlich erleichtert. Mein herzlicher Dank gilt außerdem Frau Kämmerer für Ihre freundliche Hilfe beim Abfassen des Manuskripts.

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

1.	Einleitung	1
2.	Die Generatorkoordinatenmethode (GCM)	4
	2.1. Allgemeine Theorie	4
	2.2. Numerische Lösung der Hill-Wheller-Gleichung	6
3.	Sphärische Kerne	9
	3.1. Paarvibrationen	9
	3.2. Das Modell	11
	3.3. Zwei-Nukleonen-Transfer	14
	3.4. Ungerade Kerne	16
	3.5. Resultate und Diskussion	17
4.	Deformierte Kerne	22
	4.1. Experimentelle und theoretische Grundlagen	22
	4.2. Das Pairing + Quadrupol Modell	26
	4.3. Drehimpulsprojektion	29
	4.4. Numerische Durchführungen der Rechnungen	31
	4.5. Ergebnisse und Diskussion	35
5.	Zusammenfassung	42
	Anhang A. Teilchenzahlprojektion	43
	Anhang B. BCS-Matrixelemente	45
	Anhang C. Überlappfunktionen	47
	Literaturverzeichnis	49
	Tabellenbeschreibung	
	Figurenbeschreibung	

1. EINLEITUNG

Mit der Einführung des Schalenmodells für Atomkerne konnte man viele Grundzustandseigenschaften von Kernen befriedigend beschreiben. Es zeigte sich jedoch, daß viele Anregungszustände auf Grund ihrer Energien und Übergangswahrscheinlichkeiten nicht als Schalenmodellanregungen gedeutet werden können. Diese Zustände können vielmehr nur durch die Annahme erklärt werden, daß viele Nukleonen im Kern gleichermaßen an der Anregung beteiligt sind. Aus diesem Grund nennt man solche Zustände kollektiv. Die wichtigsten Anregungstypen dieser Art sind Rotationen, Vibrationen und die sogenannten Riesenresonanzen, eine spezielle Art von Vibrationen.

Zur Beschreibung dieser Phänomene wurden verschiedene Modelle benutzt, die man in phänomenologische und mikroskopische unterteilen kann. Die phänomenologische Beschreibungsweise der kollektiven Bewegung von Kernen geht auf Bohr und Mottelson zurück^{1,2)}. Man führt geeignete kollektive Variable ein und stellt einen Hamiltonoperator in diesen Variablen auf. Auf diese Weise behält man ein anschauliches Bild der zu beschreibenden Zustände. Die Nachteile dieses Modells liegen hauptsächlich darin, daß die Berechnung der Massenparameter und der Energieflächen Schwierigkeiten bereitet und außerdem die kollektive Bewegung total von der Einteilchenbewegung getrennt wird.

Von den mikroskopischen Modellen sind in erster Linie die Tamm-Dancoff-Approximation (TDA) und die Random-Phase-Approximation (RPA) zu nennen^{3,4)}. Ausgehend vom Schalenmodellgrundzustand wird in diesen Modellen der Kollektive Zustand als Überlagerung von

Teilchen-Loch-Anregungen beschrieben. Der Vorteil der RPA gegenüber der TDA liegt im wesentlichen darin, daß Grundzustandskorrelationen eingeschlossen sind und außerdem die sogenannten "Geisterzustände" verschwinden. Die Nachteile dieser beiden Modelle sind die Unanschaulichkeit der Wellenfunktionen und die numerischen Schwierigkeiten bei großen Konfigurationsräumen.

Als Alternative zu den oben beschriebenen Methoden bietet sich die Generatorkoordinatenmethode (GCM) von Hill und Wheeler an⁵⁾. Dieses Modell beschreibt die Kernzustände mikroskopisch, ausgehend von einem Vielteilchenhamiltonoperator, behält aber auch für kollektive Zustände die Anschaulichkeit des Bohr-Mottelson Modells. Der größte Vorteil der Generatorkoordinatenmethode liegt sicherlich in der Vielfalt der Anwendungsmöglichkeiten. Neben der Beschreibung von Rotationen^{6,7)} und Vibrationen⁸⁾ kann man auch Kernreaktionen im Rahmen dieses Modells beschreiben⁹⁾. In verschiedenen Arbeiten wurden außerdem Verbindungen hergestellt zwischen der GCM und dem Bohr-Mottelson Modell^{10,11)} und der RPA^{12,13)}.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Anwendung der Generatorkoordinatenmethode auf Probleme der Kernstruktur. Dabei werden besonders zwei physikalische Phänomene im Vordergrund stehen. Zunächst sollen Paarvibrationen untersucht werden, die besonders ausgeprägt in Kernen nahe abgeschlossener Schalen gefunden werden¹⁴⁾. Bei diesem Phänomen ist die Paarung der einzige wesentliche Freiheitsgrad. Als nächstes soll mit der Quadrupoldeformation eine weitere wichtige kollektive Eigenschaft von Kernen mit einbezogen werden. Ein besonders interessantes und untersuchenswertes Phänomen, das damit zusammenhängt ist die Anomalie von Rotationsspektren bei

hohen Drehimpulsen, wie sie in einigen Kernen der seltenen Erden entdeckt wurden¹⁵⁾. In dieser Arbeit soll untersucht werden, inwieweit diese Anomalie kollektiver Natur ist, und welchen Einfluß die kollektiven Freiheitsgrade überhaupt auf Rotationsspektren haben.

2. DIE GENERATOR-KOORDINATEN-METHODE (GCM)

2.1. ALLGEMEINE THEORIE

Die Aufgabe von Kernstrukturmodellen ist es, zu einem gegebenen Vielteilchenhamiltonoperator H die Eigenzustände möglichst gut anzunähern. In der Generatorkoordinatenmethode setzt man die approximative Eigenfunktion in der Form

$$\psi(x) = \int \phi(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha \quad (2.1)$$

an. Hier steht x anstelle aller Einteilchenkoordinaten und α sei ein Satz von beliebig vielen Parametern $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Die Wellenfunktionen $\phi(x, \alpha)$ spannen somit einen Unterraum des Hilbertraumes auf. Innerhalb dieses Unterraumes soll die Gesamtlösung ψ die "beste" sein. Das erreicht man durch das Variationsprinzip

$$\delta \left[\frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \right] = 0 \quad (2.2)$$

Die Gleichungen (2.1) und (2.2) führen zu der bekannten Hill-Wheller-Integralgleichung

$$\int [H(\alpha, \beta) - E N(\alpha, \beta)] f(\alpha) d\alpha = 0 \quad (2.3)$$

mit

$$\begin{Bmatrix} H(\alpha, \beta) \\ N(\alpha, \beta) \end{Bmatrix} = \langle \phi(x, \alpha) \left| \begin{array}{c} H \\ I \end{array} \right| \phi(x, \beta) \rangle \quad (2.4)$$

Die Lösung von 2.3 liefert die Eigenwerte E und dazugehörige Gewichtsfunktionen $f(\alpha)$. Diese Gewichtsfunktionen haben selbst keine physikalische Bedeutung, sie können sogar singulär sein. Deshalb benutzt man besser

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \int N_{\alpha\beta} f(\beta) d\beta & (2.5) \\ &= \langle \phi(x, \alpha) | \psi(x) \rangle \end{aligned}$$

als die Wahrscheinlichkeit mit der die Komponente $\phi(x, \alpha)$ in der Gesamtwellenfunktion enthalten ist. Ein Nachteil dieser Größe ist, daß die Summe aller Wahrscheinlichkeiten $g(\alpha)$ wegen der Nichtorthogonalität der Basis nicht 1 ist. Die Nichtorthogonalität bringt noch andere Schwierigkeiten numerischer Natur mit sich, die später noch zu behandeln sein werden.

Das entscheidende Problem bei der Anwendung der Generatorkoordinatenmethode ist die Wahl der kollektiven Koordinaten. Durch sie wird nämlich der Unterraum definiert, innerhalb dessen die exakte Lösung approximiert wird. In den meisten Fällen wird man jedoch durch physikalische Überlegungen die Parameter bestimmen können, die zur Beschreibung gewisser physikalischer Phänomene am entscheidenden sind, so zum Beispiel in dieser Arbeit die Paarung und die Deformation.

Dabei ist es oft möglich, durch geeignete Parametrisierung der kollektiven Koordinaten die Anzahl der Generatorkoordinaten $\alpha_1 \dots, \alpha_m$ auf einige wenige zu reduzieren, ohne den berücksichtigten Unterraum entscheidend einzuschränken. Im Falle der Paarung ist zum Beispiel der Gapparameter Δ wahrscheinlich eine geeignete kollektive

Koordinate.

Ein Spezialfall der Generatorkoordinatenmethode ist die Behebung von Symmetrieverletzungen, auch Projektion genannt. Von besonderem Interesse sind dabei in dieser Arbeit die Drehimpulsprojektion nach Peierls und Thouless⁷⁾ und die Teilchenzahlprojektion. Als Generatorkoordinaten führt man hier die Eulerwinkel, bzw. einen Winkel im Eichraum ein. Man benötigt für diese Projektionen im Endeffekt kein Variationsverfahren, da sich die Gewichtsfunktionen aus der Symmetrie des Problems ergeben. Im einzelnen werden die Projektionen in den nächsten Kapiteln diskutiert.

2.2. NUMERISCHE LÖSUNG DER HILL-WHEELER GLEICHUNG

In dieser Arbeit soll die Hill-Wheeler Gleichung (2.3) benutzt werden, ohne irgendwelche einschränkenden Annahmen über die Kerne $H(\alpha, \beta)$ und $N(\alpha, \beta)$ zu machen. Das heißt, daß die letzteren Größen mikroskopisch berechnet werden und die Hill-Wheeler Gleichung direkt gelöst werden soll. Die Berechnung der Kerne ist natürlich modellabhängig und wird in den nachfolgenden Kapiteln eingehend behandelt.

Die Lösung von Gleichung (2.3.) kann man dann durch Diskretisierung erhalten. Die Einführung von N Parametersätzen α_i ($i = 1, \dots, N$) führt dann auf ein Gleichungssystem bzw. auf ein verallgemeinertes Eigenwertproblem.

$$\sum_{j=1}^n \left[H(\alpha_i, \alpha_j) - E \cdot N(\alpha_i, \alpha_j) \right] f(\alpha_j) = 0 \quad (2.6)$$

Diese Gleichung hat dieselben Lösungen wie (2.3), wenn wir es

mit endlichdimensionalen Räumen zu tun haben und somit eine zu große Basis auf jeden Fall linear abhängig ist. Diese mögliche lineare Abhängigkeit führt auf ein weiteres Problem bei der Lösung von (2.6), das gleich zu erörtern ist.

Eine der numerisch stabilsten Methoden zur Lösung von verallgemeinerten Eigenwertproblemen wie (2.6) verläuft folgendermaßen¹⁶⁾:

Da die Überlappmatrix $N_{ij} = N(\alpha_i, \alpha_j)$ hermitesch und positiv definit ist, gibt es eine orthogonale Transformation g ($gg^+ = 1$), die N diagonalisiert.

$$g^+ N g = n^2 = \text{diag} (\epsilon_i^2) \quad (2.7)$$

Mit g kann man (2.6) transformieren in

$$(g^+ H g - E \cdot n^2) (g^+ f) = 0 \quad (2.8)$$

Wegen der oben erwähnten Übervollständigkeit der Basis können nun einzelne Diagonalelemente ϵ_i^2 von n^2 sehr klein oder gleich null werden. Es zeigt sich jedoch in allen Fällen, daß man diesen Teil der Basis vernachlässigen kann, wenn man nur an den niedrigsten Eigenwerten E interessiert ist. Deshalb reduziert man in (2.8) die Dimension von n auf n' , so daß alle kleinen Eigenwerte von N weggelassen werden. Dadurch kann auch die weitere Diagonalisierung numerisch sauber durchgeführt werden. Man erhält schließlich aus (2.8) ein normales Eigenwertproblem der Form

$$(n^{-1} g^+ H g n^{-1} - E \cdot I) (ng^+ f) = 0 \quad (2.9)$$

oder

$$\sum_{j=1}^{n'} \left[H_{ij} - E \cdot \delta_{ij} \right] \tilde{f}_j = 0 \quad (2.10)$$

Die gesuchten Eigenwerte erhält man direkt aus dieser Gleichung und die Amplitude f kann man mit Hilfe der Relation

$$f = g n^{-1} \tilde{f} \quad (2.11)$$

ausrechnen.

3. SPHÄRISCHE KERNE

3.1. PAARVIBRATIONEN

Die bekanntesten kollektiven Anregungszustände von Kernen sind mit Änderungen des selbstkonsistenten Feldes verknüpft, nämlich die Monopol-, Quadrupol-, Oktupol-Vibrationen usw. Da aber seit langem bekannt ist, daß viele Kerneigenschaften nicht allein auf dem mittleren Kernfeld beruhen, sondern entscheidend vom Paarfeld beeinflusst werden, liegt es nahe, nach kollektiven Anregungen zu suchen, die hauptsächlich mit dem letzteren Feld verknüpft sind. Dieser Vorschlag wurde erstmals 1964 von Bohr und Mottelson¹⁷⁾ unterbreitet und anschließend von mehreren Autoren mit verschiedenen Methoden weiterentwickelt¹⁸⁻²¹⁾. Ein sehr anschauliches und einfaches Modell der Paarvibrationen wurde von Bohr¹⁹⁾ vorgeschlagen. Darin wird als kollektive Variable die komplexe Größe

$$\Delta = G \cdot \left\langle \sum_{k>0} c_k c_{\bar{k}} \right\rangle \quad (3.1.)$$

benutzt, deren Betrag mit dem Gapparameter in den BCS-Gleichungen identisch ist. Die Phase ist der Eichwinkel ϕ , die kanonisch konjugierte Variable zum Teilchenzahloperator. In diesem Bild sind die kollektiven Bewegungen dann Rotationen und Vibrationen in zwei Dimensionen. Da der zugrundeliegende Operator des Paarungsfeldes die Teilchenzahl nicht erhält, sind bezüglich eines gegebenen Kernes Zustände in Nachbarkernen Anregungszustände des Ausgangskernes. Geht man von einem ungepaarten ($|\Delta| \neq 0$) Kern wie zum Beispiel ^{208}Pb aus, erhält man durch die Tatsache, daß $|\Delta|$ um 0 oszilliert, ein

Vibrationsspektrum (Fig. 1). Die Grundquanten dieser Vibrationen sind die Erzeugung eines Paares und die Vernichtung eines Paares. Jeder Anregungszustand läßt sich daher in der Form (n_r, n_a) darstellen, wobei n_r die Anzahl der weggenommenen Paare und n_a die Anzahl der hinzugefügten Paare ist. Im Falle eines gepaarten Kernes (z.B. ^{114}Sn) sind die Fluktuationen von $|\Delta|$ klein im Vergleich zu dessen Mittelwert. Dann hat das Anregungsspektrum überwiegend Rotationscharakter (Fig. 2).

Da die oben beschriebenen Anregungszustände direkt mit der Übertragung zweier Nukleonen verknüpft sind, sollten Zwei-Nukleonen-Transfer Reaktionen ein gutes Mittel sein, um diese Zustände experimentell zu untersuchen (Transfer eines Paares mit $L=0$, $S=0$, $T=1$). Besonders geeignet sind zum Beispiel (t,p) - oder (p,t) -Reaktionen. Mit Hilfe einer (t,p) -Reaktion kann man zum Beispiel von ^{206}Pb aus sowohl den Grundzustand als auch Paarvibrationszustände in ^{208}Pb erreichen. Dabei sollte nach dem harmonischen Modell von Bohr der Wirkungsquerschnitt der Reaktion zum ersten angeregten Zustand genauso groß sein wie der zum Grundzustand. Paarvibrationszustände wurden zuerst von Broglia und Riedel experimentell identifiziert²²⁾. Eine Menge weiterer Resultate¹⁴⁾ ließ ein starkes Interesse daran entstehen, Paarvibrationszustände theoretisch auf einer mikroskopischen Grundlage zu beschreiben. Dazu sind in erster Linie die Schalenmodellrechnungen von Bès, Maqueda und Perazzo²³⁾ in den Nickelisotopen zu nennen und die Bosonenentwicklungsmethode von B. Sorensen²⁴⁻²⁶⁾.

In dieser Arbeit soll die Generatorkoordinatenmethode zur Be-

schreibung von Paarvibrationen benutzt werden. Dazu benötigt man ein Modell, das die Versuchswellenfunktionen mit einem geeigneten Satz von Parametern liefert und einen Hamiltonoperator. Im nächsten Kapitel werden diese beiden Fragen und der sich daraus ergebende Formalismus behandelt.

3.2. DAS MODELL

Beim Aufstellen unseres Modells gehen wir von zwei Voraussetzungen aus.

- 1) Da wir uns nur für Kerne nahe abgeschlossener Schalen interessieren und der Paarungsfreiheitsgrad für die zu beschreibenden Phänomene am wichtigsten ist, setzen wir sphärische Kerne voraus, d.h. wir vernachlässigen Deformationsfreiheitsgrade.
- 2) Die Kopplung zwischen Neutronen und Protonen wird vernachlässigt, d.h. wir können beide Fälle separat behandeln.

Unter diesen Voraussetzungen ist eine sphärische BCS-Wellenfunktion für unser Modell geeignet²⁷⁾.

$$|BCS\rangle = \prod_{i>0} (u_i(\Delta, \lambda) + v_i(\Delta, \lambda) c_i^+ c_{\bar{i}}^+) |0\rangle \quad (3.2)$$

$$v_i^2(\Delta, \lambda) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_i - \lambda}{\sqrt{(\epsilon_i - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right) \quad (3.3)$$

$$u_i^2(\Delta, \lambda) = 1 - v_i^2(\Delta, \lambda)$$

In (3.2) und (3.3) sind ϵ_i die Einteilchenenergien der sphärischen

Basis und c_i^+ , c_i^- Erzeugungsoperatoren für ein Teilchen im Zustand i , bzw. im zeitumgekehrten Zustand $\bar{i}$.

Δ ist der Gapparameter, der mit der Aufbruchenergie eines Paares zusammenhängt und λ ist die Fermienergie, die sich aus der mittleren Teilchenzahlerhaltung ergibt.

$$2 \cdot \sum_{i>0} v_i^2(\Delta, \lambda) = N \quad (3.4)$$

Der größte Nachteil der BCS-Wellenfunktionen ist die Tatsache, daß sie keine Eigenfunktionen zum Teilchenzahloperator sind, d.h. sie sind Mischungen von Wellenfunktionen mit verschiedenen Teilchenzahlen.

$$|BCS\rangle = \sum_n a_n |n\rangle \quad (3.5)$$

Mit Hilfe des Projektionsoperators

$$\hat{Q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{+i(\hat{N}-N)\varphi} \quad (3.6)$$

kann man jedoch die gewünschte Komponente aus der Wellenfunktion herausprojizieren, so daß

$$\begin{aligned} |QBCS\rangle &= \hat{Q} |BCS\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{\frac{-iN\varphi}{2}} \sum_{i>0} (u_i + e^{i\varphi} v_i c_i^+ c_{\bar{i}}^+) |0\rangle \end{aligned} \quad (3.7)$$

eine Eigenfunktion zum Teilchenzahloperator ist (siehe Anhang A). In unserem Fall verwenden wir wegen der mit der Teilchenzahlprojektion verbundenen numerischen Schwierigkeiten eine Näherung für den

Projektionsoperator.

$$\hat{Q}^K = \frac{1}{K} \sum_{v=0}^{K-1} e^{-i(\hat{N}-N) \frac{v}{K} 2\pi} \quad (3.8)$$

Bei Anwendung dieses Projektionsoperators enthält die projizierte Wellenfunktion (3.7) noch kleine Beimischungen von Komponenten mit anderer Teilchenzahl, doch es zeigt sich, daß die Ergebnisse sehr schnell mit wachsendem K konvergieren²⁷⁾. Der Hamiltonoperator unseres Modells hat die Gestalt

$$H = \sum_i \epsilon_i c_i^\dagger c_i - \frac{1}{4} G \sum_{i,k} c_i^\dagger c_i^\dagger c_k^\dagger c_k \quad (3.9)$$

Dabei sind die ϵ_i und $c_i^\dagger$ dieselben Größen wie in der Wellenfunktion (3.2) und G ist die Stärke der Paarkraft, die in den verschiedenen Massenbereichen so angepaßt wurde, daß die experimentell ermittelten Bindungsenergiedifferenzen zwischen geraden und ungeraden Kernen im Rahmen des BCS-Modells reproduziert werden können.

Die Wellenfunktionen (3.7) benutzen wir nun als Modellwellenfunktionen in unserem Generatorkoordinatenansatz. Sie hängen nur von einem Parameter, dem Gapparameter Δ ab.

$$\Psi = \sum_i f(\Delta_i) \cdot |QBCS, \Delta_i\rangle \quad (3.10)$$

Damit ergibt sich in diesem speziellen Fall die Hill-Wheeler-Gleichung in der Form

$$\sum_i \{ \langle QBCS, \Delta_j | H | QBCS, \Delta_i \rangle - E \langle QBCS, \Delta_j | QBCS, \Delta_i \rangle \} f(\Delta_i) = 0 \quad (3.11)$$

Die in diese Gleichung eingehenden Matrixelemente sind in Anhang B zu finden.

3.3. ZWEI-NUKLEONEN-TRANSFER

Die Lösung von (3.11) liefert uns die Wellenfunktionen für den Grundzustand und die angeregten Zustände in einem Kern mit der Teilchenzahl N_0 , sowie auch in den Nachbarkernen mit N_0+2 bzw. N_0-2 Teilchen. Diese Wellenfunktionen wollen wir benutzen, um die Wirkungsquerschnitte von Zwei-Nukleonen-Transfer Reaktionen von dem Grundzustand eines Kernes zum Grundzustand oder angeregtem Zustand eines Nachbarkernes zu berechnen. Nach Glendenning²⁹⁾ kann man den differentiellen Wirkungsquerschnitt folgendermaßen schreiben:

$$\sigma_{i \rightarrow f}(\theta) = \left| \sum_s G_s(i,f) \sigma_s^{DWBA}(\theta) \right|^2 \quad (3.12)$$

Dabei ist G_s ein Strukturfaktor, in den die Wellenfunktionen des Ausgangskernes i und des Endzustandes F eingehen.

$$G_s(i;f) = \sum_{\substack{n,l,j \\ N=2n+1-s}} \langle f | \hat{T}_j | i \rangle (-1)^l n_N \cdot \quad (3.13)$$

$$\left| \frac{2i+1}{2(2l+1)} \right|^{1/2} \langle N0, S0, 0 | n1, n1, 0 \rangle$$

Dabei ist N die Radialquantenzahl der relativen Bewegung des übertragenen Paares und S die Radialquantenzahl der Schwerpunktsbewegung der beiden Teilchen. Die Transformation von Schwerpunktsystem zum Relativsystem führt zu der Moshinsky-Klammer $\langle N0, S0, 0 | n1, n1, 0 \rangle$.

Die Größe Ω_N ist der Überlapp der Relativbewegung der beiden Nukleonen im Projektil und im Kern. Im Falle einer (t,p)- oder (p,t)-Reaktion erhält man unter der Annahme einer Gaußwellenfunktion für das Triton und einer Oszillatorwellenfunktion für den Kern

$$\Omega_N = \frac{\sqrt{(2N+1)!}}{2^N (N+1)!} \left(1 - \frac{2\rho}{6\eta^2 + \rho}\right)^N \left(\frac{\rho}{6}\right)^{3/4} \left(\frac{2\eta}{\eta^2 + \frac{1}{6}\rho}\right)^{3/2}$$

$$\rho = A^{-1/3} \text{ fm}^{-2} \quad (3.14)$$

$$\eta = 0.242 \text{ fm}^{-1}$$

Schließlich bleibt noch das Matrixelement $S_j = \langle f | \hat{T}_j | i \rangle$, die einzige Größe, die unser Modell zum Wirkungsquerschnitt beisteuert. Der Operator T_j ist

$$\hat{T}_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ c_j^\dagger c_j^\dagger \}_{J=0} ; (t,p) \quad (3.15)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ c_j c_j \}_{J=0} ; (p,t)$$

Im Falle der Reaktion $^{206}\text{Pb} (t,p) ^{208}\text{Pb}$ zum Beispiel ist S_j der Überlapp zwischen der Grundzustandswellenfunktion von ^{206}Pb mit zwei zusätzlichen Neutronen im Einteilchenzustand j und der Grundzustandswellenfunktion von ^{208}Pb . S_j wird spektroskopische Amplitude genannt. Mit Hilfe von G_s kann man zwei Ausdrücke für eine grobe qualitative Abschätzung des totalen Wirkungsquerschnittes erhalten²⁶⁾.

$$\bar{\sigma}_{i \rightarrow f}^{(1)} = \sum_s G_s(i;f)^2 \quad (3.16a)$$

$$\bar{\sigma}_{i \rightarrow f}^{(2)} = \left| \sum_s (-)^s G_s(i;f) \right|^2 \quad (3.16b)$$

Ein Vergleich dieser so berechneten Wirkungsquerschnitte mit DWBA-Rechnungen zeigt, daß $\sigma_{i \rightarrow f}^{(2)}$ in der Regel die besseren Resultate liefert. (Private Mitteilung von Prof. Boeker, Amsterdam).

3.4. UNGERADE KERNE

Im Rahmen der BCS-Theorie kann man einen Kern mit ungerader Nukleonenzahl als Einquasiteilchenzustand beschreiben. Befindet sich das ungerade Teilchen im Einteilchenzustand t , so ist

$$|\psi_t\rangle = c_{t, i>0}^+ \prod_{i \neq t} (u_i + v_i c_i^+ c_{\bar{i}}^+) |0\rangle \quad (3.17)$$

Sei N_0 die ungerade Teilchenzahl des Kerns, so gilt für die teilchenzahlprojizierte Wellenfunktion

$$\hat{Q}|\psi_t\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\varphi \cdot e^{-i \frac{(N_0-1)\varphi}{2}} \cdot c_{t, i>0}^+ \prod_{i \neq t} (u_i + v_i e^{i\varphi} c_i^+ c_{\bar{i}}^+) |0\rangle \quad (3.18)$$

Die $v_i(\Delta, \lambda)$ und $u_i(\Delta, \lambda)$ sind jetzt so zu bestimmen, daß

$$2 \sum_{\substack{i>0 \\ i \neq t}} v_i^2(\Delta, \lambda) = N_0 - 1 \quad (3.19)$$

gilt. Der Überlapp der projizierten Wellenfunktion (3.18) mit sich

selbst ist derselbe wie im Fall des geraden Systems, wobei das Niveau t geblockt ist. Auch der Energieüberlapp berechnet sich wie im Falle eines geraden Kernes, wenn man den "Blocking"-Effekt berücksichtigt³⁰. Wählt man von allen möglichen t dasjenige, für das die Energie am niedrigsten wird, so erhält man den Grundzustand des ungeraden Kernes. Alle anderen t ergeben angeregte Zustände.

3.5. RESULTATE UND DISKUSSION

Zunächst wurde das oben beschriebene Modell auf einfache Probleme angewandt, wo die Ergebnisse mit exakten Resultaten verglichen werden können. Exakt heißt hier das Ergebnis einer Diagonalisierung im Raum der Seniority-Null-Zustände. In Referenz 31 wurde gezeigt, daß die Generatorkoordinatenmethode (GCM) bei geeigneter Parametrisierung einer Schalenmodellrechnung äquivalent ist. Wir wollen hier den Einfluß der Teilchenzahlprojektion und der GCM prüfen. In Tabelle 1 sind die Ergebnisse im Falle des Modells von Pawlikowski-Rybarska^{32,33} angegeben. Dabei sind die Einteilchenenergien $\epsilon_i = 1, 2, 3, 4, 5$ MeV ($i=1, \dots, 5$), die Teilchenzahl ist $N=6$ und die Paarkraft wird mit $G = 1$ MeV angesetzt. Die oberste Reihe gibt die Grundzustandsenergie wieder in Abhängigkeit von der Zahl K der Punkte, die nach (3.8) zur Teilchenzahlprojektion benutzt wurden. Die zweite Reihe zeigt die Ergebnisse für eine GCM-Rechnung mit 3 Punkten für den Parameter Δ . Die dritte Reihe enthält die Energien des ersten angeregten Zustandes und die vierte Reihe den Erwartungswert des Teilchenzahloperators im Falle der GCM-Rechnung. Man erkennt aus dieser Tabelle, daß im Falle dieses sehr einfachen

Modells vier Punkte zur Teilchenzahlprojektion genügen, was nicht unbedingt auf komplizierte Fälle zu verallgemeinern ist. Eine reine BCS-Rechnung liefert nicht den exakten Wert $E_0 = 6.83$ für die Grundzustandsenergie, was jedoch die GCM-Rechnung behebt. In Tabelle 2 sehen wir die Grundzustandsenergien und Teilchenzahlerwartungswerte in verschiedenen Nickelisotopen wieder in Abhängigkeit von der Genauigkeit der Teilchenzahlprojektion. Hier kann man eine Sechs-Punkte-Projektion als exakt aber auch schon eine Vier-Punkte-Projektion als zufriedenstellend bezeichnen. Teilweise erhält man aber selbst bei bester Teilchenzahlprojektion beträchtliche Abweichungen der Grundzustandsenergie vom exakten Wert²⁷. Um das zu korrigieren, muß man wieder eine GCM-Rechnung durchführen, wie man in Tabelle 3 sieht. In dieser Tabelle sind die angegebenen experimentellen Anregungsenergien diejenigen der niedrigsten 0^+ - Zustände, die sicherlich nicht in jedem Fall mit dem Paarvibrationszustand identifiziert werden können. Die Rechnungen, die den Tabellen 2 und 3 zugrundeliegen, wurden innerhalb einer verhältnismäßig kleinen Basis nach Ref. 34 durchgeführt. Die folgenden Resultate basieren jedoch auf anderen Parametersätzen, die in Tabelle 4 zusammengefaßt sind. Um ganz sicher zu gehen, daß die Teilchenzahlprojektion praktisch exakt durchgeführt wird, werden im folgenden immer $K = 8$ Punkte benutzt.

In den Tabellen 5 und 6 sind die Grundzustandsenergien für die Ni- und Sn-Isotope angegeben. Es wurde jeweils ein linearer Term proportional zu $N - N_0$ addiert ($N_0 = 28$ in Nickel, $N_0 = 50$ in Zinn), so daß die mit einem Stern gekennzeichneten Zahlen übereinstimmen. Die Ergebnisse der GCM-Rechnung werden mit den experimentellen Wer-

ten und den Ergebnissen von Sorensen²⁶⁾ verglichen. In den Tabellen 7 und 8 finden wir die Stärken der Wirkungsquerschnitte von (p,t)-Reaktionen in Nickel- und Zinn-Isotopen. Die Wirkungsquerschnitte wurden nach Gleichung (3.16) berechnet. In den Tabellen sind immer die relativen Größen bezüglich eines ausgewählten Überganges angegeben.

An diesen Ergebnissen erkennt man, daß die Generatorkoordinatenmethode in diesen supraleitenden Kernen in der Lage ist, sowohl die Grundzustandsenergien, als auch die Stärke von (p,t)-Reaktionen in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen zu beschreiben.

Zum Schluß dieses Abschnittes sollen noch die Bleiisotope als Beispiel von normalleitenden Kernen behandelt werden. Ausgehend von ^{208}Pb wurden auch Protonenpaarvibrationen behandelt. Die dazu benötigten Einteilchenenergien sind in Tabelle 9 wiedergegeben.

Wie bereits Siegal und Sorensen³⁵⁾ zeigten, ist die bisher benutzte Form der Generatorkoordinatenmethode nicht geeignet, Paarvibrationen im Falle eines normalleitenden Grundzustandes wie bei ^{208}Pb zu beschreiben. Der Grund dafür liegt darin, daß im Falle verschwindender Paarung der Paarvibrationszustand in den niedrigsten Zweiteilchen-Zweiloch-Zustand übergeht. Ein derartiger Zustand kann jedoch in dem von Δ aufgespannten Modellraum nicht beschrieben werden. Deshalb wurde im Falle der Blei-Isotope und -Isotone eine allgemeinere Versuchswellenfunktion verwendet.

$$\psi = \int f_1(\Delta) \phi(\Delta, \lambda) d\Delta + \int f_2(\Delta) \phi(\Delta, \lambda^+, \lambda^-) d\Delta \quad (3.20)$$

Dabei ist λ nach Gleichung (3.4.) bestimmt, während λ^+ und λ^- die Bedingung

$$2 \cdot \sum_{i>0} v_i^2(\Delta, \lambda^\pm) = N \pm 2 \quad (3.21)$$

erfüllen. Im zweiten Term von Gleichung (3.20.) wird λ^+ für alle Zustände oberhalb der Fermikante λ und λ^- für alle Zustände unterhalb der Fermikante benutzt. Im Falle $G \rightarrow 0$ geht dieser Term also in den niedrigsten Zweiteilchen-Zweiloch-Zustand über, was unseren Modellraum in der gewünschten Weise erweitert.

In den Tabellen 10 und 11 findet man die relativen Grundzustandsenergien der Blei-Isotope, bzw. der $N=126$ -Isotone. Die oben beschriebene 2- λ -Methode beeinflusst diese Werte nicht, da die Grundzustandswellenfunktionen keine Beimischungen vom zweiten Term in Gleichung (3.20) enthalten. Der Effekt der 2- λ -Methode wird erst in den angeregten Zuständen deutlich. Als Anregungsenergie des Neutronenpaarvibrationszustandes erhält man mit der 1- λ -Methode 5.86 MeV, mit der 2- λ -Methode 5.37 MeV, während der experimentell ermittelte Wert 4.87 MeV ist. Im Falle des Protonenpaarvibrationszustandes ergibt die 1- λ -Methode 7.8 MeV, die 2- λ -Methode 6.98 MeV. Einen experimentellen Wert kann man in diesem Fall nicht angeben, da die Meinungen über dessen Identifizierung noch auseinandergehen³⁶.

Berücksichtigt man ausgehend von dem von uns gefundenen Wert 6.98 MeV noch zusätzlich den Effekt der darin nicht enthaltenen Teilchen-Loch-Wechselwirkung³⁷⁾, so kommt man zu einer Energie von etwa 5.5 MeV. In dieser Gegend müßte der Protonenpaarvibrationszustand lie-

gen.

Die Tabellen 12 und 13 enthalten die Ergebnisse für die relativen Wirkungsquerschnitte von (p,t)-, (t,p)- und (^3He ,n)-Reaktionen. Die Figuren 3 - 7 zeigen einige differentielle Wirkungsquerschnitte, die ausgehend von unseren Wellenfunktionen mit Hilfe des Programmes DWUCK³⁸⁾ berechnet wurden.

Zum Abschluß dieses Kapitels soll noch ein Beispiel einer Anwendung auf ungerade Kerne angefügt werden. In Fig. 8 sind die "even-odd"-Massendifferenzen dargestellt. Die Ergebnisse der Generatorkoordinatenmethode werden mit BCS-Resultaten und den experimentellen Werten verglichen. Besonders im Fall der Zinn-Isotope wird deutlich, daß die GCM-Resultate das Experiment bedeutend besser beschreiben als die BCS-Rechnung.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Generatorkoordinatenmethode mit teilchenzahlprojizierten BCS-Wellenfunktionen sowohl im Falle von normalleitenden als auch supraleitenden Grundzuständen alle Phänomene, die hauptsächlich mit dem Paarungsfreiheitsgrad zusammenhängen, zufriedenstellend beschreibt. Ein Vergleich mit der Bosonenentwicklungsmethode von B. Sorensen²⁶⁾, der in verschiedenen Tabellen durchgeführt wird, zeigt, daß diese beiden Methoden mindestens ebenbürtig sind. Wegen ihrer größeren Flexibilität (z.B. Einschließen anderer Freiheitsgrade) dürfte die Generatorkoordinatenmethode sogar vorzuziehen sein. Im folgenden Kapitel findet man mit der Beschreibung von deformierten Kernen ein Beispiel für diese Flexibilität.

4. DEFORMIERTE KERNE

4.1. EXPERIMENTELLE UND THEORETISCHE GRUNDLAGEN

Es ist seit langem bekannt, daß Atomkerne deformiert sein können³⁹⁾. Besonders in Massenbereichen weit entfernt von abgeschlossenen Schalen haben viele Kerne eine stabile Grundzustandsdeformation. Im allgemeinen (wenn man nicht gerade Kernspaltung beschreiben will) ist in diesen Fällen eine Multipolentwicklung der Gestalt des Kernes nach Kugelflächenfunktionen sinnvoll. Um den Grundzustand eines solchen Kernes zu beschreiben, benötigt man ein Schalenmodell für deformierte Kerne. Ein solches Modell wurde von S.G. Nilsson entwickelt⁴⁰⁾. Es geht von der Annahme aus, daß das selbstkonsistente mittlere Feld eines deformierten Kernes eine stabile Deformation aufweist. Im ursprünglichen Nilsson-Modell setzt man als mittleres Feld ein deformiertes Oszillatorpotential an, wobei man sich auf eine reine Quadrupoldeformation beschränkt. Besser ist natürlich die Beschreibung von deformierten Kernen im Rahmen des Hartree-Fock-Modells (HF), das das mittlere Feld direkt aus der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung bestimmt⁴¹⁾. In schweren Kernen, die im wesentlichen eine reine Quadrupoldeformation aufweisen, zeigt es sich jedoch, daß schon das Nilsson-Modell eine zufriedenstellende Beschreibung liefert.

Mit der Deformation von Kernen sind verschiedene kollektive Anregungsmöglichkeiten verbunden, nämlich Schwingungen um die Gleichgewichtslage (z.B. Quadrupolschwingungen) und kollektive Rotationen. Kollektive Rotationszustände wurden zuerst von Bohr und Mottelson⁴²⁾ vorgeschlagen. Betrachtet man den Kern als rotationssymmetrischen Kreis, so erhält man Energiezustände zu verschiedenen Drehimpulsen I

$$E_I = E_0 + \frac{\hbar^2}{2\theta} I(I+1) \quad (4.1)$$

Diese Gleichung gilt nur für $K = 0$ - Banden, d.h. die z-Projektion des Drehimpulses im intrinsischen System muß null sein. Für g-g-Kerne erhält man auf Grund der Symmetrien nur geradzahlige Drehimpulse, d.h. $I = 0^+, 2^+, 4^+, \dots$. Schon bald nach der Messung der ersten Rotationsspektren bis zu 4^+ - oder 6^+ - Zuständen erkannte man, daß das $I(I+1)$ -Gesetz in (4.1) nur annähernd erfüllt ist, oder anders gesagt, das Trägheitsmoment θ des Kernes ist nicht unabhängig vom Drehimpuls I . Diese Abweichungen können zum Beispiel durch eine Rotations-Vibrations-Wechselwirkung erklärt werden⁴³.

In mikroskopischen Modellen wird eine Änderung der intrinsischen Struktur des Kernes mit dem Drehimpuls angenommen, z.B. eine Änderung der Deformation (Stretching) oder ein Abnehmen der Paarung (Antipairing). Solange Rotationsbanden in g-g-Kernen nur bis zu Drehimpulsen $I \sim 12^+$ gemessen waren, war das VMI-Modell sehr erfolgreich in der Beschreibung dieser Spektren⁴⁴). Dabei wird wie im Harris-Modell⁴⁵) die Energie nach dem Quadrat der Rotationsfrequenz ω entwickelt und beim Term mit ω^4 abgebrochen. Daraus ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen dem Trägheitsmoment θ und ω^2 . In Fig. 9 ist das Trägheitsmoment gegen das Quadrat der Rotationsfrequenz aufgetragen. Eine solche Darstellungsweise von Rotationsspektren ist in letzter Zeit üblich geworden und soll im folgenden immer als θ - ω^2 -Plot bezeichnet werden. Man sieht in Fig. 9, daß der eine Rotator durch eine Gerade, parallel zur ω^2 -Achse dargestellt wird, und daß auch das VMI-Modell eine Gerade ergibt. Vor wenigen Jahren wurden zum ersten Mal Messungen durchgeführt, in denen Rotationszustände bis zu Drehimpulsen um 20 gemessen wurden⁴⁶⁻⁴⁸.

In diesen Experimenten wurden die γ -Kaskaden im Anschluß an eine (α ,Xn)- oder (HI,Xn)-Reaktion unter Ausnutzung von Koinzidenz-Meßmethoden untersucht. Überraschenderweise fand man in einigen Kernen im Bereich der Seltenen Erden und inzwischen auch in anderen Kernen drastische Abweichungen vom VMI-Verhalten. In Fig. 9 ist ein solcher Fall schematisch dargestellt. Dieses Phänomen wird "Backbending" genannt und ist gekennzeichnet durch ein starkes Anwachsen des Trägheitsmomentes innerhalb weniger Drehimpulseinheiten und ein gleichzeitiges Abnehmen der Rotationsfrequenz. "Backbending" kann nicht mehr durch das Harris-Modell erklärt werden, da in dieser Theorie das Trägheitsmoment Θ eine einwertige Funktion von ω^2 sein muß.

Seit der Entdeckung von "Backbending" wurden viele Versuche unternommen, dieses Phänomen theoretisch zu begründen. Dabei sind besonders drei Erklärungsmöglichkeiten zu nennen, die jeweils auf verschiedenen physikalischen Prinzipien beruhen. Zunächst wurde bereits zehn Jahre vor der Entdeckung des "Backbending" ein derartiges Phänomen von Mottelson und Valatin⁴⁹⁾ vorausgesagt auf Grund des Coriolis-Antipairing-Effektes (CAP). Dieses Modell basiert auf der Tatsache, daß die Coriolis-Kraft der Paarkraft entgegenwirkt und bei genügend hohem Drehimpuls in der Lage ist, die Paarung zu zerstören. Wenn der Kern nun mit wachsendem Drehimpuls schnell genug vom supraleitenden in den normalleitenden Zustand übergeht, kann "Backbending" auftreten. Eine andere Erklärungsmöglichkeit wäre ein zweites Minimum in der Deformationsenergiefläche, das der Kern bei hohen Drehimpulsen wegen des Stretching-Effektes bevorzugt⁵⁰. Thieberger⁵¹⁾ zeigte, daß bereits Anharmonizitäten in der Deformationsenergiefläche den "Backbending"-Effekt reproduzieren können. Ein weiterer Vorschlag,

der auch in diesen Bereich einzuordnen ist, stammt von Smith und Volkov⁵²⁾, die eine bei hohen Drehimpulszuständen auftretende γ -Deformation für das "Backbending" verantwortlich machen.

In allen diesen Modellen sind kollektive Größen wie Deformation und Paarung entscheidend. Im Modell von Stephens und Simon⁵³⁾ dagegen sind nicht alle Nukleonen gleichermaßen am Effekt beteiligt. "Backbending" wird in diesem Modell durch den Aufbruch eines Paares von Neutronen und deren Ausrichtung in Richtung des kollektiven Gesamtdrehimpulses beschrieben. Es wird also ein Zweiquasiteilchenzustand gebildet. Der grundlegende Gedanke hierbei ist, daß die Corioliskraft, deren Potential für das Teilchen i durch

$$V_c(i) = -\frac{\hbar^2}{2} \vec{I} \cdot \vec{j}(i) \quad (4.2)$$

gegeben ist, verschieden stark auf die einzelnen Paare wirkt.

Alle bisher aufgeführten Modelle (mit Ausnahme des Modells von Smith und Vokor sind in der sogenannten Zweibandenhypothese zu vereinen⁵⁴⁾). Fig. 10 zeigt schematisch, wie das Kreuzen zweier Rotationsbanden mit verschiedenen Trägheitsmomenten für "Backbending" verantwortlich gemacht werden kann. Da einige Zustände dieser zweiten Bande auch unterhalb des kritischen Drehimpulses I_c bereits gemessen wurden^{55,56)}, kann das Modell von Smith und Volkov auf jeden Fall nicht alle Phänomene erklären, da nach dieser Hypothese nur oberhalb von I_c zwei Banden auftreten dürften. Die anderen Möglichkeiten konkurrieren jedoch weiterhin nebeneinander. Im Falle des CAP-Effektes wäre die schneidende zweite Bande die ungepaarte Rotationsbande oder physikalischer die Paarvibrationsbande. Im Falle

von Deformationseffekten wäre es eine Bande mit unterschiedlicher Deformation und im Falle des Stephens-Simon-Modells (SS) eine Zweiquasiteilchenbande.

In der vorliegenden Arbeit soll der Einfluß kollektiver Größen wie Paarung und Deformation auf die hohen Drehimpulszustände untersucht werden. Unter anderem soll die Frage, inwieweit die Hypothese, daß die Paarvibrationsbande die zweite Bande ist, die experimentellen Ergebnisse im Rahmen einer mikroskopischen Rechnung bestätigen kann, näher beleuchtet werden.

4.2. DAS PAIRING + QUADRUPOLE MODELL

Im dritten Kapitel wurde bereits das Paarungsmodell beschrieben, in dem teilchenzahlprojizierte BCS-Wellenfunktionen und ein Vielteilchen-Hamiltonoperator mit einer zustandsunabhängigen Paarungskraft benutzt wurden. Um deformierte Kerne beschreiben zu können, muß man außer den kurzreichweitigen Paarkorrelationen auch langreichweitige Korrelationen in das Modell einschließen. Eine gebräuchliche Methode dafür ist die Benutzung einer Quadrupol-Kraft⁵⁷⁾. In dieser Arbeit wird die Pairing + Quadrupol-Kraft von Kumar und Baranger^{57,58)} benutzt werden. Der Vielteilchen-Hamiltonoperator hat somit die Gestalt

$$\hat{H} = \sum_a \epsilon_a c_a^\dagger c_a - \frac{1}{4} \sum_\tau G_\tau \sum_{a,b}^{(\tau)} c_a^\dagger c_a^\dagger c_b c_b$$

$$- \frac{1}{2} \chi \sum_{\tau, \tau'} \alpha_\tau \alpha_{\tau'} \sum_{a,c}^{(\tau)} \sum_{b,d}^{(\tau')} \sum_\mu (-)^{\mu} \quad (4.3)$$

$$\langle a | q_{\mu} | c \rangle \langle b | q_{-\mu} | d \rangle c_a^{\dagger} c_b^{\dagger} c_d c_c$$

Dabei sind $c_a^{\dagger}$, c_b ... die Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren der sphärischen Basis, und $q_{\mu} = r^2 Y_{2\mu}$. Die $\alpha_{\tau} = (\frac{2N_{\tau}}{A})^{1/3}$ bewirken, daß die rms-Radien für Protonen und Neutronen gleich sind⁵⁷⁾. Die Parameter der Kraft sind die sphärischen Einteilchenenergien ϵ_a , die Paarkraftstärken G_p und G_n und die Quadrupolstärke χ . Eine voll selbstkonsistente Hartree-Fock-Bogoliubov Rechnung ausgehend vom Hamiltonoperator (4.3) wäre nur mit großem numerischem Aufwand durchzuführen. Deshalb werden an Stelle der selbstkonsistenten Wellenfunktionen andere benutzt, die aus einer Nilsson- und BCS-Rechnung hervorgehen. Diese Näherung ist in diesem Falle sicherlich nicht sehr schwerwiegend⁵⁹⁾.

Ausgehend von dem Einteilchenhamiltonoperator

$$h = \sum_a \epsilon_a c_a^{\dagger} c_a - \pi_{\omega_0} \beta \sum_{\tau} \alpha_{\tau} \sum_{a,b}^{(\tau)} \langle a | q_0 | b \rangle c_a^{\dagger} c_b \quad (4.4)$$

mit $\pi_{\omega_0} = 41.2 A^{1/3}$ MeV erhält man durch Diagonalisierung in der gegebenen sphärischen Basis Wellenfunktionen und Einteilchenenergien η_i in Abhängigkeit von der Quadrupoldeformation β . Die deformierten Wellenfunktionen sind dann durch Operatoren

$$a_i^{\dagger} = \sum_a A_{ai} c_a^{\dagger} \quad (4.5)$$

bestimmt. In dieser deformierten Basis definiert man dann in üblicher Weise die BCS-Wellenfunktion durch die Quasiteilchen-Trans-

formation

$$a_i^+ = u_i a_i^+ - v_i a_{\bar{i}} \quad (4.6)$$

Die u_i und v_i sind dabei gegeben durch

$$v_{i,\tau}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\eta_i - \lambda_\tau}{\sqrt{(\eta_i - \lambda_\tau)^2 + \Delta_\tau^2}} \right) \quad (4.7)$$

$$u_{i,\tau}^2 = 1 - v_{i,\tau}^2$$

Dabei sind Δ_p und Δ_n neben β Parameter der Wellenfunktion

$$|BCS\rangle = |\Delta_p \Delta_n \beta\rangle = i \prod_0 (u_i + v_i a_i^+ a_{\bar{i}}^+) |0\rangle \quad (4.8)$$

Die Fermienergien λ_τ ($\tau=p,n$) sind durch die Bedingung der mittleren Teilchenzahlerhaltung

$$\langle BCS | \hat{N}_\tau | BCS \rangle = N_\tau \quad (4.9)$$

festgelegt.

Die Wellenfunktion (4.8) ist weder eine Eigenfunktion zum Teilchenzahloperator noch zum Drehimpulsoperator. Um das Rotationspektrum eines bestimmten Kernes beschreiben zu können, muß man die Komponenten mit der gewünschten Teilchenzahl und Drehimpuls herausprojizieren. Die Methode zur Teilchenzahlprojektion wurde bereits in Kapitel 3 beschrieben. Im nächsten Abschnitt soll auf

die Drehimpulsprojektion eingegangen werden.

4.3. DREHIMPULSPROJEKTION

Die Wellenfunktion (4.8) ist als deformierte BCS-Wellenfunktion weder Eigenfunktion zum Teilchenzahl- noch zum Drehimpulsoperator. Eine Methode zur Teilchenzahlprojektion wurde bereits im letzten Kapitel behandelt. Sie ist in diesem Fall genauso anwendbar. Um Wellenfunktionen mit gutem Drehimpuls zu erhalten, muß man eine Drehimpulsprojektion durchführen. Nach Peierls und Yoccoz⁷⁾ verwendet man dazu den Projektionsoperator

$$\hat{P}_{IM} = \frac{2I+1}{8\pi^2} \int_K d\Omega D_{MK}^{I*}(\Omega) \hat{R}(\Omega) \quad (4.10)$$

Dabei stellt Ω die drei Eulerschen Winkel (α, θ, γ) dar, $\hat{R}(\Omega)$ ist der Operator einer Drehung entsprechend dieser drei Winkel

$$\hat{R}(\Omega) = e^{i\alpha\hat{J}_z} e^{i\theta\hat{J}_y} e^{i\gamma\hat{J}_z} \quad (4.11)$$

und $D_{MK}^I(\Omega)$ sind die Wignerschen D-Funktionen

$$D_{MK}^I(\Omega) = \langle IM | \hat{R}(\Omega) | IK \rangle \quad (4.12)$$

Der Projektionsoperator (4.10) projiziert eine HFB-Wellenfunktion auf eine Eigenfunktion zu $\hat{J}^2$ und $\hat{J}_z$ mit den Eigenwerten $I(I+1)$ und M .

In dieser Arbeit sollen nur gg-Kerne mit Axial- und Zeitumkehrsymmetrie behandelt werden. In diesem Fall läßt es sich leicht

zeigen⁶⁰⁾, daß sich der Projektionsoperator auf

$$\hat{P}_I = (2I+1) \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta d_{00}^I(\theta) R(\theta) \quad (4.13)$$

reduziert, falls man nur $K=0$ -Zustände betrachtet, d.h. Zustände, deren intrinsische Wellenfunktion eine verschwindende z -Komponente des Gesamtdrehimpulses hat. Außerdem erhält man nur geradzahlige Drehimpulse mit positiver Parität, also $I^\pi = 0^+, 2^+, 4^+, 6^+ \dots$.

Sei $|\phi\rangle$ eine Wellenfunktion mit unscharfem Drehimpuls, so erhält man den Erwartungswert eines skalaren Operators $\hat{W}$ im Drehimpulszustand I als

$$W_I = \frac{\langle \phi | \hat{W} \hat{P}_I | \phi \rangle}{\langle \phi | \hat{P}_I | \phi \rangle} = \frac{\int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta d_{00}^I(\theta) w(\theta)}{\int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta d_{00}^I(\theta) n(\theta)} \quad (4.14)$$

Die Überlappfunktionen $w(\theta)$ und $n(\theta)$ sind dabei gegeben durch

$$w(\theta) = \langle \phi | \hat{W} \hat{R}(\theta) | \phi \rangle \quad (4.15a)$$

$$n(\theta) = \langle \phi | \hat{R}(\theta) | \phi \rangle \quad (4.15b)$$

Geht man nun von der Wellenfunktion (4.8) aus und projiziert diese auf gute Teilchenzahl und Drehimpuls, so kann man den Erwartungswert des Hamiltonoperators (4.3) berechnen.

$$E_{N,Z}^I(\Delta_p, \Delta_n, \beta) = \frac{\langle \Delta_p \Delta_n \beta | \hat{H} \hat{P}_I \hat{Q}_N \hat{Q}_Z | \Delta_p \Delta_n \beta \rangle}{\langle \Delta_p \Delta_n \beta | \hat{P}_I \hat{Q}_N \hat{Q}_Z | \Delta_p \Delta_n \beta \rangle} \quad (4.16)$$

$$= \frac{\int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta d_{00}^I(\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i\frac{N}{2}\varphi} h^I(\theta, \varphi)}{\int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta d_{00}^I(\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i\frac{N}{2}\varphi} n^I(\theta, \varphi)}$$

Minimisiert man diesen Energieerwartungswert für jeden Drehimpuls I bezüglich der Parameter Δ_p , Δ_n und β , so erhält man eine Grundzustandsrotationsbande. Um jedoch auch kollektive Vibrationen und deren Einfluß auf die Grundzustandsbande zu erfassen, wollen wir auch die Generatorkoordinatenmethode benutzen. Dazu benötigt man auch nichtdiagonale Matrixelemente der Form

$$H_{N,Z}^I(A, A') = \langle A | \hat{H} \hat{P}_I \hat{Q}_N \hat{Q}_Z | A' \rangle \quad (4.17a)$$

und

$$N_{N,Z}^I(A, A') = \langle A | \hat{P}_I \hat{Q}_N \hat{Q}_Z | A' \rangle \quad (4.17b)$$

mit $A = (\Delta_p \Delta_n \beta)$. Detaillierte Ausdrücke für die Überlappfunktionen $h(\theta, \varphi)$ und $n(\theta, \varphi)$ werden in Anhang C angegeben.

4.4. NUMERISCHE DURCHFÜHRUNG DER RECHNUNGEN

Die sphärische Einteilchenbasis, die unseren Rechnungen zugrundeliegt, besteht aus je zwei Schalen ($N=4,5$) für Protonen und ($N=5,6$) für Neutronen. Die dazugehörigen Einteilchenenergien sind dieselben wie bei Kumar und Baranger⁵⁸⁾. Die Kraftparameter G_n , G_p und χ konnten nicht direkt von Kumar und Baranger übernommen werden,

da in jener Arbeit keine Teilchenzahlprojektion durchgeführt wurde. Wegen der Teilchenzahlprojektion würden wir zu große Gapparameter erhalten und müssen deshalb die Paarkraftstärken reduzieren. Die Quadrupolstärke χ wird jeweils um den von Kumar und Barranger angegebenen Wert von Kern zu Kern um bis zu 4% variiert, um den Einfluß dieser Größe auf das Rotationsspektrum zu untersuchen und schließlich so festgelegt, daß einerseits die Gleichgewichtsdeformation einen vernünftigen Wert annimmt und andererseits die niedrigen Rotationszustände gut wiedergegeben werden. Einzelheiten zur numerischen Durchführung der Teilchenzahlprojektion wurden bereits im vorhergehenden Kapitel angegeben. Zum Zwecke der numerischen Behandlung der Drehimpulsprojektion muß man den Operator (4.13) bzw. Integrale wie in (4.14) diskretisieren. Da jedoch für hohe Drehimpulse I die d -Funktion $d_{00}^I(\theta)$ eine stark oszillierende Funktion ist, müssen die Überlappfunktionen $n(\theta)$ und $h(\theta)$ mit einer großen Genauigkeit berechnet werden. Das kann man durch eine große Anzahl von Stützstellen erreichen, was jedoch die Rechenzeit enorm vergrößert. Im Falle von stark deformierten Kernen, die in dieser Arbeit behandelt werden sollen, kann man jedoch die Überlappfunktionen wie folgt entwickeln⁶¹⁾.

$$\begin{aligned} n(\theta) &= A \cdot e^{-\alpha \sin^2 \theta} (1 + a_1 P_1(\sin^2 \theta) \\ h(\theta) &+ a_2 P_2(\sin^4 \theta) + a_3 P_3(\sin^6 \theta) + \dots) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Dabei sind die P_n im Intervall $0 \leq \sin^2 \theta \leq 1$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) orthogonalierte Polynome. Es zeigt sich, daß man das Rotationsspektrum bis

$I=24$ praktisch exakt beschreibt, wenn man ausgehend von 5 Stützstellen für θ die Parameter A, a und a_n bestimmt und die auf diese Weise erhaltenen Überlappfunktionen benutzt⁶²⁾.

Minimisiert man nun den Energieerwartungswert (4.16), so liefert das Modell Energien E^I , bzw. Energiedifferenzen $\Delta E^I = E^I - E^{I-2}$, die direkt mit dem Experiment verglichen werden können. Wie bereits in der Einleitung zu diesem Kapitel erwähnt wurde, hat es sich jedoch durchgesetzt, die Rotationsbanden in einem sogenannten " θ - ω^2 -Plot" darzustellen. Der Zusammenhang zwischen den gemessenen oder berechneten Energiedifferenzen und dem Trägheitsmoment bzw. der Rotationsfrequenz ist dabei gegeben durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{2\theta_I}{\hbar^2} &= \left| \frac{dE_I}{dI(I+1)} \right|^{-1} \\ &= \frac{2(2I-1)}{\Delta E^I} \end{aligned} \quad (4.19)$$

und

$$\hbar\omega_I = \frac{dE_I}{d\sqrt{I(I+1)}} \quad (4.20)$$

Als Näherung für (4.20) benutzen wir den Ausdruck

$$(\hbar\omega_I)^2 = (I^2 - I + 1) \frac{(\Delta E^I)^2}{(2I-1)^2} \quad (4.21)$$

Aufgrund des in unserem Modell angenommenen "Core's" ($N_c=70; Z_c=40$) werden die berechneten Trägheitsmomente zu klein sein im Vergleich zu den experimentellen Werten. Deshalb führen wir ein Core-Trägheits-

moment ein, das an die experimentelle Energiedifferenz zwischen den 2^+ - und 0^+ -Zuständen angepasst wird. Die Annahme, daß dieses Trägheitsmoment in der gesamten Rotationsbande konstant ist, führt zu den Gleichungen

$$\frac{2\theta_c}{h^2} = 6 \left[\frac{\Delta E^{2^+} - \Delta E_{\text{exp}}^{2^+}}{\Delta E^{2^+} \cdot \Delta E_{\text{exp}}^{2^+}} \right] \quad (4.22)$$

und

$$\Delta E_{\text{kor.}}^I = \left[\frac{1}{\Delta E^I} + \frac{2\theta_c}{h^2} \frac{1}{4I-2} \right]^{-1} \quad (4.23)$$

Da in dieser Arbeit besonders der Einfluß der Teilchenzahlprojektion auf die Rotationsspektren untersucht werden soll, ist es wichtig, die Genauigkeit der Teilchenzahlprojektion zu testen. Da die Fermienergien λ_p und λ_N so festgelegt sind (Gl. 4.9), daß die Teilchenzahl im intrinsischen System richtig ist, wird im allgemeinen bei näherungsweise Teilchenzahlprojektion der Teilchenzahlerwartungswert für die einzelnen Drehimpulszustände mehr oder weniger von diesem Mittelwert abweichen. Da das zu entscheidenden Störungen des Spektrums führen kann, wurde eine Korrektur angebracht, die diese Abweichungen näherungsweise behebt⁶³⁾. Anstelle des berechneten Energieerwartungswertes $E_{\langle \hat{Z} \rangle, \langle \hat{N} \rangle}^I$ minimisiert man die korrigierte Energie

$$E_{Z,N}^I = E_{\langle \hat{Z} \rangle, \langle \hat{N} \rangle}^I - \lambda_p \left(\frac{\langle \hat{Z} \hat{P}_I \rangle}{\langle \hat{P}_I \rangle} - Z \right) - \lambda_N \left(\frac{\langle \hat{N} \hat{P}_I \rangle}{\langle \hat{P}_I \rangle} - N \right) \quad (4.24)$$

Diese Korrektur (λ -Korrektur) sollte vernachlässigbar sein, wenn die Teilchenzahlprojektion gut genug ist.

4.5. ERGEBNISSE UND DISKUSSION

Um das in den vorhergehenden Abschnitten beschriebene Modell zu testen, wurden zunächst mit der Variation der Parameter die Grundzustandsrotationsbanden der Ytterbium-Isotope ^{166}Yb , ^{168}Yb und ^{170}Yb berechnet. Diese Kerne sind deshalb besonders interessant, da sie sich bei hohen Rotationszuständen sehr verschieden verhalten, obwohl sie sich nur durch jeweils ein Neutronenpaar unterscheiden. ^{166}Yb zeigt ausgeprägtes "Backbending", in ^{168}Yb steigt das Trägheitsmoment gleichmäßig an, während in ^{170}Yb wieder das "Backbending"-Phänomen auftritt⁶⁴⁻⁶⁵). Es ist deshalb ganz offensichtlich, daß die Teilchenzahlprojektion sehr wichtig sein wird, da man mit der BCS-Methode ohne Teilchenzahlprojektion eine Grundzustandsrotationsbande erhalten würde, die eine Mischung der Rotationsbanden aller benachbarten Kerne darstellte.

In Fig. 11 sind die Ergebnisse von Rechnungen in ^{166}Yb dargestellt und mit dem Experiment verglichen. Im oberen Teil des Bildes ist das Ergebnis ohne Teilchenzahlprojektion dargestellt. Man findet bei hohen Drehimpulsen eine ziemlich starke Korrektur durch den Term in (4.24) (λ -Korrektur). Das Trägheitsmoment wächst ziemlich stark an bei hohen Drehimpulsen, "Backbending" wird jedoch nicht reproduziert. Die in der Rechnung benutzten Parameter sind jeweils rechts im Bild angegeben. In der Mitte finden wir das Resultat einer 2-Punkte-Projektion mit $Q^{K=2}$. Ohne λ -Korrektur kann man hier das "Backbending"-Verhalten beim richtigen Drehimpulswert

sehr gut reproduzieren. Führt man jedoch die λ -Korrektur vor der Variation durch, so verschwindet dieses Verhalten. Im unteren Teil des Bildes sieht man, daß eine 4-Punkte-Teilchenzahlprojektion ($K=4$) bereits so gut ist, daß die λ -Korrektur das Ergebnis kaum noch ändert. Der Anstieg des Trägheitsmomentes ist jedoch gleichmäßig wie im VMI-Modell. In Fig. 12 findet man die zu diesen Rechnungen gehörenden Variationen der Parameter Δ_N , Δ_p und β mit dem Drehimpuls. Man sieht, daß die Teilchenzahlprojektion vor allen Dingen das Verhalten von Δ_N stark beeinflusst. Wie erwartet⁶⁶⁾ erhält man ein gleichmäßigeres Antipairing-Verhalten, wenn man die Teilchenzahlprojektion korrekt durchführt. Das qualitative Verhalten des Deformationsparameters β wird dagegen nur wenig von der Teilchenzahlprojektion beeinflusst. Das Ergebnis dieser Rechnung ist also, daß in unserem Modell auf jeden Fall die 4-Punkte-Teilchenzahlprojektion verwendet werden muß, um verlässliche Ergebnisse zu erhalten. Alle weiteren Rechnungen wurden deshalb unter Benutzung des Operators $Q^{K=4}$ durchgeführt. Wie man in Fig. 1 sieht, wurden in den Rechnungen mit verschiedenen Näherungen für die Teilchenzahlprojektion verschiedene Kraftparameter benutzt. Eine Reduktion von G_N und G_p , den Paarkraftstärken, im Falle der 4-Punkte-Projektion ist notwendig, da sonst unrealistisch hohe Gapparameter bevorzugt werden. Im folgenden wollen wir uns besonders dem Einfluß der Quadrupolstärke χ zuwenden. Benutzt man im Falle des Kerns ^{166}Yb anstelle der Kraft ($\chi=73 \text{ A}^{-1.4}$, $G_N=18/A$, $G_p=23/A$) die leicht veränderte Kraft ($\chi=74 \text{ A}^{-1.4}$, $G_N=20/A$, $G_p=23/A$), so erhält man ein Ergebnis, das im unteren Teil von Fig. 13 dargestellt ist. Nach einer kleinen Änderung von χ erhält man ein qualitativ völlig anderes Verhalten des Rotationsspektrums (G_N wurde nur geändert, um

beide Kurven für niedrige Drehimpulse wieder in Übereinstimmung zu bringen). Der Grund dafür wird aus Fig. 14 ersichtlich. In diesem Bild sieht man die Abhängigkeit der Parameter vom Drehimpuls. Es fällt auf, daß die Deformation β zwischen $I=12$ und $I=14$ einen großen Sprung macht. Dieser Sprung induziert natürlich auch Unstetigkeiten in das Verhalten der Gapparameter. Eine Erklärung für dieses Verhalten kann anhand von Fig. 15 gegeben werden, in der die wichtigen Ausschnitte der Nilsson-Spektren für Neutronen und Protonen dargestellt sind. Wie man sieht, kreuzen sich bei $\beta \sim 0.36$ zwei Neutronenniveaus ($5/2^-$ und $11/2^-$) und zwei Protonenniveaus ($1/2^-$ und $1/2^+$) an der Fermikante. Dadurch entsteht eine Anharmonizität in der Deformationsenergiefläche, die mit abnehmender Paarung immer ausgeprägter wird. Ist nun die Quadrupolstärke χ genügend groß, so wird ab einem genügend hohem Drehimpuls ein Deformationsminimum mit $\beta > 0.36$ bevorzugt. Ein weiteres Beispiel für diesen Effekt sieht man in der Mitte von Fig. 13 anhand des Kernes ^{178}Hf . Auch hier wird der "Backbending"-Effekt durch einen Deformationssprung erzeugt. Man sieht, daß in einem solchen Fall bereits geringe Änderungen von χ drastische Änderungen in der Rotationsbande ergeben. Da man weiß, daß ^{178}Hf eine verhältnismäßig große Hexadekapoldeformation $\beta_4 = -0.07$ aufweist⁶⁷⁾, wurde das Spektrum dieses Kernes auch noch unter der Benutzung von Wellenfunktionen berechnet, die eine solche Hexadekapoldeformation enthalten. Dazu wurde in (4.4) der zusätzliche Term $-\beta_4 r^2 Y_{40}$ verwendet. Das Ergebnis dieser Rechnung ist im oberen Teil von Fig. 13 wiedergegeben. Der β_4 -Term beeinflusst das Nilsson-Einteilchenspektrum so, daß im entscheidenden Deformationsbereich keine Kreuzungspunkte an der Fermikante auftreten. In diesem Fall erhält man kein "Backbending"

und die Abhängigkeit des Spektrums von der Quadrupolstärke χ ist nicht mehr so drastisch. Der Einfluß der Kraftkonstanten auf die Rotationsniveaus läßt sich somit wie folgt zusammenfassen. Kleine Änderungen von χ , G_p oder G_N ändern im allgemeinen nicht viel am qualitativen Verhalten des Spektrums. Treten jedoch Deformationssprünge in unserem Modell auf, so reagieren die Spektren sehr empfindlich auf Änderungen von χ . Als sinnvoll hat es sich erwiesen, $G_p = 23/A$ MeV und $G_N = 18/A$ MeV als Paarkraftstärken zu benutzen, da hiermit die Massendifferenzen befriedigend reproduziert werden können. Die Quadrupolstärke χ haben wir im Bereich der Seltenen Erden zwischen den Werten $70A^{-1.4}$ MeV und $74A^{-1.4}$ MeV variieren lassen. In Fig. 16 sind in " $\theta - \omega^2$ -Plots" die Ergebnisse unserer Rechnungen mit dem Experiment verglichen für die Kerne ^{158}Dy , ^{162}Er , ^{168}Hf , ^{168}Yb , ^{170}Yb , ^{182}Os . Dazu ist zu erwähnen, daß unser Modell in ^{158}Dy einen Deformationssprung liefert und somit "Backbending" auftritt. In ^{182}Os haben wir ein Hexadekapolmoment $\beta_4 = -0.06$ verwendet, da es Anzeichen dafür gibt, daß in der Massengegend $A \approx 180$ Hexadekapoldeformationen wichtig sind^{68,69}). In den meisten Kernen gibt unser Modell das "Backbending"-Verhalten nicht wieder (^{162}Er , ^{168}Hf , ^{182}Os). Für niedrige Rotationszustände kann die Theorie den gleichmäßigen Anstieg des Trägheitsmomentes wie im VMI-Modell befriedigend erklären. Bei höheren Drehimpulsen erhält man oft einen noch stärkeren Anstieg des Trägheitsmomentes, jedoch ist der damit verbundene Übergang zu geringerer Paarung so gleichmäßig, daß man nicht von einem Phasenübergang reden kann und somit auch kein "Backbending" wiedergegeben wird. Die einzige Ausnahme in unseren Rechnungen ist der Kern ^{170}Yb . Hier nimmt die Neutronenpaarung mit wach-

sendem Drehimpuls so schnell ab, daß man "Backbending" erhält. Da im Falle dieses Kernes auch die Deformationsenergiefläche ziemlich glatt ist, wurde er gewählt für eine genauere Untersuchung im Rahmen der Generatorkoordinatenmethode. Die Rechnungen wurden zunächst für die einzelnen Freiheitsgrade Neutronenpaarung, Protonenpaarung und Deformation getrennt durchgeführt. In Tabelle 14 sind die Grundzustandsenergien und die Energien der angeregten 0^+ -Neutronenpaarvibrationszustände angegeben für verschiedene Netze der Koordinate Δ_N (siehe 2.6). Man sieht, daß für eine befriedigende Beschreibung auch der angeregten Zustände ein Netz von mindestens 5 Punkten notwendig ist, die im Bereich kleiner Gapparameter genügend dicht liegen müssen. Den Grund dafür erkennt man in Fig. 17. Hier ist die Größe $g(\Delta_N)$ (Gl. 2.5) gegen Δ_N aufgetragen und zwar für den Grundzustand und den ersten angeregten Zustand. Offensichtlich muß das Netz so dicht sein, daß die Struktur dieser "Wellenfunktionen" überall erfaßt werden kann. Das ist im Falle des relativ strukturlosen Grundzustandes schon mit wenigen Stützpunkten möglich, die Beschreibung des ersten angeregten 0^+ -Zustandes hängt jedoch stark von der Anzahl und Dichte der Stützstellen ab. In Tabelle 15 findet man die Ergebnisse für reine Protonenpaarvibrationen und β -Vibrationen. In allen diesen Rechnungen wurden die nicht als Generatorkoordinaten benutzten Parameter jeweils den Gleichgewichtswerten aus der Minimisierung gleichgesetzt. Tabelle 16 zeigt den Einfluß einer Mischung der verschiedenen Vibrationsfreiheitsgrade auf die Energien der 0^+ -Zustände. Es wurden Rechnungen mit den Parametern Δ_N und Δ_p gleichzeitig und mit Δ_N und β gleichzeitig als Generatorkoordinaten durchgeführt. Man sieht, daß die

Kopplung zweier Freiheitsgrade den Grundzustand jeweils am stärksten beeinflusst. Die Grundzustandsenergie wird dadurch etwas gesenkt, die Struktur der angeregten Zustände wird jedoch nur wenig beeinflusst, das heißt man kann mehr oder weniger von reinen Neutronen- oder Protonenpaarvibrationen oder von reinen β -Vibrationen sprechen. In Fig. 18 sind die auf den in Tabelle 16 angegebenen 0^+ -Zuständen basierenden Rotationsbanden dargestellt. Man sieht, daß die Grundzustandsrotationsbande im Gegensatz zur Minimierungsrechnung kein "Backbending"-Verhalten mehr zeigt, und daß offensichtlich kein Übergang von angeregten Banden in die Grundzustandsbande stattfindet. In Fig. 19 sind die "Wellenfunktionen" für verschiedene Drehimpulse dargestellt. Die "Wellenfunktionen" $g(\Delta_N)$ des Grundzustandes und der Neutronenpaarvibrationszustände behalten auch bei hohen Drehimpulsen ihre allgemeine Struktur, wobei sich nur die Gewichte der Gapparameter innerhalb der Grundzustandswellenfunktion zu kleineren Werten und innerhalb des ersten angeregten Zustandes zu größeren Werten verschieben.

Die Ergebnisse unserer Rechnungen lassen sich wie folgt zusammenfassen. Zunächst hat sich gezeigt, daß zu einer Beschreibung von Rotationsspektren im Rahmen unseres Modells eine möglichst exakt durchgeführte Teilchenzahlprojektion notwendig ist, da man sonst zu irreführenden Resultaten gelangen kann⁷⁰⁾. Das Benutzen der phänomenologischen Pairing + Quadrupol-Kraft scheint gerechtfertigt zu sein, da die Ergebnisse im allgemeinen nicht wesentlich auf kleine Änderungen der Parameter reagieren. Treten wie in einigen Fällen Deformationssprünge auf, ist das Ergebnis jedoch sehr stark von den Parametern abhängig. Deshalb ist man auch nicht in der Lage zu

klären, ob solche Deformationssprünge im Bereich der Seltenen Erden wirklich auftreten oder ob sie nur eine Erscheinung in unserem Modell sind. Vernachlässigt werden darf der Deformationsfreiheitsgrad auf jeden Fall nicht, da er die Struktur der Rotationsbanden stark beeinflusst. Im Rahmen unseres kollektiven Modells ist es offensichtlich nicht möglich, "Backbending" in verschiedenen Kernen zu erklären, während die niedrigen Drehimpulszustände grundsätzlich befriedigend wiedergegeben werden. Es ist deshalb wahrscheinlich notwendig, außer den in dieser Arbeit betrachteten kollektiven Freiheitsgraden auch andere Freiheitsgrade wie zum Beispiel den "Alignment"-Effekt einzuschließen. Das würde jedoch eine erhebliche Erweiterung des Modells bedeuten.

5. ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wurden kollektive Phänomene in Atomkernen im Rahmen der Generatorkoordinatenmethode beschrieben. Bis auf die Verwendung phänomenologischer Kräfte wie der Paarkraft und der Pairing + Quadrupol-Kraft ist diese Beschreibungsweise voll mikroskopisch. Es bereitet keine übermäßigen Schwierigkeiten, verschiedene kollektive Freiheitsgrade zu koppeln, oder Projektionen wie Teilchenzahl- und Drehimpulsprojektion in das Modell einzubauen. Das ist besonders wichtig, da diese Projektionen gewisse Eigenschaften der Kerne wesentlich beeinflussen, wie in dieser Arbeit gezeigt wurde. Die meisten kollektiven Kerneigenschaften können, auch im Vergleich zu anderen Modellen, befriedigend beschrieben werden. Die Tatsache, daß zum Beispiel das "Backbending" in den Rotationsbanden einiger Seltener Erden nicht befriedigend erklärt werden kann, ist wahrscheinlich auf einige Vernachlässigungen wichtiger Freiheitsgrade zurückzuführen (möglicherweise Einteilchenanregungen). Der Einschluß von Einteilchenfreiheitsgraden, wie zum Beispiel Quasiteilchenanregungen, in das Modell ist zwar prinzipiell möglich, scheitert aber an den numerischen Schwierigkeiten.

ANHANG A

TEILCHENZAHLPROJEKTION

Sei $|\phi\rangle$ eine Wellenfunktion, die keine Eigenfunktion zum Teilchenzahloperator ist, so gilt

$$|\phi\rangle = \sum_n a_n |\phi_n\rangle \quad (\text{A.1})$$

wobei $|\phi_n\rangle$ Eigenfunktionen zur Teilchenzahl n sind. Mit dem exakten Teilchenzahlprojektionsoperator

$$\hat{Q}_N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\hat{N}-N)\varphi} d\varphi \quad (\text{A.2})$$

gilt dann

$$\begin{aligned} \hat{Q}_N |\phi\rangle &= \frac{1}{2\pi} \sum_n a_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-N)\varphi} |\phi_n\rangle d\varphi \\ &= a_N |\phi_N\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Führt man den diskretisierten Projektionsoperator

$$Q_N^K = \frac{1}{K} \sum_{v=0}^{K-1} e^{i(\hat{N}-N)\frac{v}{K}2\pi} \quad (\text{A.4})$$

ein, so erhält man

$$\hat{Q}_N^K |\phi\rangle = \frac{1}{K} \sum_n a_n \sum_{v=1}^{n-1} e^{i(n-N)\frac{v}{K}2\pi} |\phi_n\rangle \quad (A.5)$$

$$\begin{aligned} &= a_N |\phi_N\rangle + a_{N+K} |\phi_{N+K}\rangle \\ &+ a_{N-K} |\phi_{N-K}\rangle + a_{N+2K} |\phi_{N+2K}\rangle \\ &+ a_{N-2K} |\phi_{N-2K}\rangle + \dots \end{aligned}$$

Im Falle einer Wellenfunktion $|\phi\rangle$, die nur geradzahlige Teilchenzahlkomponenten enthält, kann man in A.2 und A.4 2π durch π ersetzen. Dann gilt zum Beispiel für eine Projektion mit $K=2$, daß die projizierte Wellenfunktion nur noch die Komponenten mit Teilchenzahlen $N, N\pm 4, N\pm 8$, etc. enthält. Für $K=4$ blieben nur noch Komponenten mit $N, N\pm 8, N\pm 16$, etc. übrig.

ANHANG B

BCS-MATRIXELEMENTE

In Gleichung 3.11 benötigt man Matrixelemente der Form

$$H_{\Delta\Delta'} = \langle \text{QBCS}, \Delta | \hat{H} | \text{QBCS}, \Delta' \rangle \quad (\text{B.1a})$$

$$N_{\Delta\Delta'} = \langle \text{QBCS}, \Delta | \text{QBCS}, \Delta' \rangle \quad (\text{B.1b})$$

mit den Wellenfunktionen

$$|\text{QBCS}, \Delta\rangle = \sum_{v=0}^{K-1} e^{-iN_0 \frac{v}{K}\pi} \prod_{i>0} (u_i(\Delta) + e^{i\frac{v}{K}\pi} v_i(\Delta) c_i^+ c_{-i}^+) |0\rangle \quad (\text{B.2})$$

Es ist

$$\begin{aligned} N_{\Delta\Delta'} &= \sum_{v, v'=0}^{K-1} e^{iN_0 \frac{v-v'}{K}\pi} \prod_{i>0} \left[u_i(\Delta) \cdot u_i(\Delta') + e^{i\frac{v-v'}{K}\pi} v_i(\Delta) v_i(\Delta') \right] \\ &= \sum_{\Delta v=0}^{K-1} f_{\Delta v} \prod_{i>0} \left[(u_i(\Delta) u_i(\Delta'))^2 + (v_i(\Delta) \cdot v_i(\Delta'))^2 \right. \\ &\quad \left. + 2u_i(\Delta) \cdot u_i(\Delta') \cdot v_i(\Delta) \cdot v_i(\Delta') \cos\left(\frac{\Delta v}{K} 2\pi\right) \right]^{1/2} \\ &\quad \cdot \cos \left[\sum_{i>0} \arctan \left(\frac{\sin\left(\frac{\Delta v}{K} 2\pi\right)}{\frac{u_i(\Delta) u_i(\Delta')}{v_i(\Delta) v_i(\Delta')} + \cos\left(\frac{\Delta v}{K} 2\pi\right)} \right) - N_0 \frac{\Delta v}{K} \pi \right] \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

mit

$$f_{\Delta v} = \begin{cases} K & \Delta v = 0 \\ 2(K - \Delta v) & \Delta v \neq 0 \end{cases}$$

Für einen Hamiltonoperator der Form (3.9) erhält man

$$H_{\Delta\Delta'} = \sum_{\Delta v=0}^{K-1} f_{\Delta v} \left\{ \sum_{i>0} (2\varepsilon_i - G) v_i(\Delta) v_i(\Delta') P_i \right. \\ \left. - G \sum_{i \neq k > 0} u_i(\Delta) u_i(\Delta') v_i(\Delta) v_i(\Delta') P_{ik} \right\} \quad (B.4)$$

mit

$$P = \prod_{i>0} \left[(u_i(\Delta) \cdot u_i(\Delta'))^2 + (v_i(\Delta) \cdot v_i(\Delta'))^2 + \right. \\ \left. 2u_i(\Delta) \cdot u_i(\Delta') \cdot v_i(\Delta) v_i(\Delta') \cos \left(\frac{\Delta v}{K} 2\pi \right) \right]^{1/2} \\ \cdot \cos \left[\sum_{i>0} \arctan \left(\frac{\sin \left(\frac{\Delta v}{K} 2\pi \right)}{\frac{u_i(\Delta) u_i(\Delta')}{v_i(\Delta) \cdot v_i(\Delta')} + \cos \left(\frac{\Delta v}{K} 2\pi \right)} \right) \right] \\ - (N_0 - 2) \frac{\Delta v}{K} \pi \quad (B.5)$$

In den Ausdrücken P_i (P_{ik}) sind im Produkt und in der Summe in (B.5) die Terme mit i (bzw. i und k) wegzulassen.

ANHANG C

ÜBERLAPPFUNKTIONEN

In Gl. 4.16 werden die Überlappfunktionen $n(\theta, \varphi)$ und $h(\theta, \varphi)$ benötigt. Diese sind folgendermaßen definiert:

$$n(\theta, \varphi) = \langle \phi | \hat{R}(\theta) \hat{S}(\varphi) | \phi \rangle \quad (\text{C.1a})$$

$$h(\theta, \varphi) = \langle \phi | \hat{H} \hat{R}(\theta) \hat{S}(\varphi) | \phi \rangle \quad (\text{C.1b})$$

Dabei sind $|\phi\rangle$ Wellenfunktionen der Gestalt (4.8) $\hat{H}$ ist der Pairing + Quadrupol-Hamiltonoperator und $\hat{S}(\varphi) = \exp(\frac{1}{2}i\hat{N}\varphi)$. Definiert man die Matrix

$$X_{ij}(\theta, \varphi) = \tilde{R}_{ij}(\theta) \cdot (u_i u_j - e^{i\varphi} v_i \cdot v_j) \quad (\text{C.2})$$

$$\tilde{R}_{ij}(\theta) = \sum_{ab} A_{ai}^* R_{ab}(\theta) A_{bj} \quad (\text{C.3})$$

wobei A die Nilsson-Transformationsmatrix (4.5) ist, so gilt

$$n(\theta, \varphi) = \{ \det X(\theta, \varphi) \}^{1/2} \quad (\text{C.4})$$

Das Vorzeichen der Wurzel in C.3 ist für $\theta=0$ eindeutig definiert. Für $\theta \neq 0$ muß das Vorzeichen so gewählt werden, daß sich die komplexe Zahl $n(\theta, \varphi)$ stetig mit θ ändert. Die Größe C.1b berechnet man ebenfalls in der kanonischen Basis. Dazu muß man die Matrixelemente des Hamiltonoperators entsprechend C.3 transformieren und erhält

$$\begin{aligned}
 \frac{h(\theta, \varphi)}{n(\theta, \varphi)} &= \sum_{i,j} \tilde{\epsilon}_{ij} \rho_{ji}(\theta, \varphi) \\
 &- \frac{1}{4} \sum_{\tau} G_{\tau} \sum_{ij} \sigma_{i\bar{i}}(\theta, \varphi) \kappa_{j\bar{j}}(\theta, \varphi) \\
 &- \frac{1}{2} \times \sum_{\mu=-2}^{+2} (-)^{\mu} \sum_{ijkl} \tilde{q}_{\mu}(ik) \tilde{q}_{-\mu}(jl) \rho_{ki}(\theta, \varphi) \rho_{lj}(\theta, \varphi)
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

mit

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \sum_a A_{ai}^* \epsilon_a A_{aj} \tag{C.6}$$

$$\text{und } \tilde{q}_{\mu}(ik) = \sum_{ab} A_{ai}^* \langle a | r^2 Y_{2\mu} | b \rangle A_{bj} \tag{C.7}$$

Dabei werden wie üblich⁵⁷⁾ der Beitrag der Quadrupolkraft zur Paarungsenergie und der Austauschterm der Quadrupolenergie vernachlässigt. Die Dichtematrizen ρ , κ und σ sind gegeben durch

$$\rho_{ij}(\theta, \varphi) = \sum_k \tilde{R}_{ik}(\theta) e^{i\varphi} v_k X_{kj}^{-1}(\theta, \varphi) v_j \tag{C.8}$$

$$\kappa_{ij}(\theta, \varphi) = \sum_k \tilde{R}_{jk}(\theta) e^{i\varphi} v_k X_{ki}^{-1}(\theta, \varphi) u_i \tag{C.9}$$

$$\sigma_{ij}(\theta, \varphi) = \sum_k \tilde{R}_{ik}(\theta) u_k X_{kj}^{-1}(\theta, \varphi) v_j \tag{C.10}$$

LITERATURVERZEICHNIS

- 1) A. Bohr, Dan. Mat.-Fys. Medd. 26, No. 14 (1952)
- 2) A. Bohr, B. Mottelson, Dan. Mat.-Fys. Medd. 27, No. 16 (1953)
- 3) G.E. Brown, Unified theory of nuclear models, (North-Holland, 1967)
- 4) M. Baranger, Theory of finite nuclei, Cargèse lectures in theoretical physics (W.A. Benjamin and Comp., 1963)
- 5) D.L. Hill, J.A. Wheeler, Phys. Rev. 89 (1953) 1102
- 6) R.E. Peierls, J. Yoccoz, Proc. Phys. Soc. A70 (1957) 381
- 7) R.E. Peierls, D.J. Thouless, Nucl. Phys. 38 (1962) 154
- 8) J.J. Griffin, J.A. Wheeler, Phys. Rev. 108 (1957) 311
- 9) M.V. Mihailović et al., Fizika Vol. 5, Suppl. (1973)
- 10) B. Banarjee, D.M. Brink, Z. Phys. 258 (1973) 46
- 11) D.M. Brink, A. Weiguny, Phys. Lett. 26B (1968) 497
- 12) D.M. Brink, A. Weiguny, Nucl. Phys. A120 (1968) 59
- 13) B. Jancovici, D.H. Schiff, Nucl. Phys. 58 (1964) 678
- 14) R.A. Broglia, O. Hansen, C. Riedel, to be published in Advances in Nuclear Physics, ed. by M. Baranger and E. Vogt
- 15) R.A. Sorensen, Rev. Mod. Phys. 45 (1973) 353
- 16) J.H. Wilkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, Oxford, (1965)
- 17) A. Bohr, Comptes Rendus du Congrès International de Physique Nucléaire, Paris 1964, Vol. I, Ed. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris (1964) p. 487
- 18) D.R. Bès, R.A. Broglia, Nucl. Phys. 80 (1966) 289
- 19) A. Bohr, International Symposium on Nuclear Structure, Dubna; I.A.E.A., Vienna, Austria, 1969

- 20) D.R. Bès, R.A. Broglia, R.A.P. Perazzo, K. Kumar, Nucl. Phys. A143 (1970) 1
- 21) G.G. Dussel, R.P.J. Perazzo, D.R. Bès, R.A. Broglia, Nucl. Phys. A175 (1971) 513
- 22) R.A. Broglia, C. Riedel, Nucl. Phys. A92 (1967) 145
- 23) D.R. Bès, E.E. Maqueda, R.P.J. Perazzo, preprint
- 24) B. Sorensen, Nucl. Phys. A97 (1967) 1
- 25) B. Sorensen, Nucl. Phys. A119 (1968) 65
- 26) B. Sorensen, Nucl. Phys. A134 (1969) 1
- 27) A. Faessler, F. Grümmer, A. Plastino, Z. Phys. 260 (1973) 305
- 28) B.F. Bayman, Nucl. Phys. 15 (1960) 33
- 29) N. Glendenning, Phys. Rev. 137 (1965) B 102
- 30) A. Faessler, F. Grümmer, A. Plastino, Z. Phys. 266 (1973) 405
- 31) D. Justin, M.V. Mihailović, M. Rosina, Nucl. Phys. A182 (1972) 54
- 32) A. Pawlikowski, R. Rybarska, Sov. Phys. - JETP 16 (1963) 388
- 33) M. Jean, X. Campi, H. Vucetich, Fund. in Nucl. Theory, (1967) 807
- 34) A.K. Kerman, R.D. Lawson, M.H. MacFarlane, Phys. Rev. 124 (1961) 162
- 35) C.D. Siegal, R.A. Sorensen, Nucl. Phys. A184 (1972) 81
- 36) J. Blomqvist, Phys. Lett. 33B (1970) 541
- 37) E.A. McClatchie, C. Glashauser, D.L. Hendrie, Phys. Rev. C1 (1970) 1828
- 38) D.P. Kunz, DWUCK program, unpublished
- 39) H. Schüller, T. Schmidt, Z. Phys. 98 (1935) 239, 430
- 40) S.G. Nilsson, K. Dan. Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd. 29 (1955)

- 41) G. Ripka, Advances in Nucl. Phys. Vol. 1, Ed. M. Baranger, E. Vogt, Plenum Press New York, (1968)
- 42) A. Bohr, B.R. Mottelson, Kgl. Dan. Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd. 27 (1953) No. 19
- 43) A. Faessler, W. Greiner, R.K. Sheline, Nucl. Phys. 70 (1965) 33
- 44) M.A.J. Mariscotti, G. Scharff-Goldhaber, B. Buck, Phys. Rev. 178 (1969), 1864
- 45) S.H. Harris, Phys. Rev. 138 (1965) B509
- 46) A. Johnson, H. Ryde, J. Sztarkier, Phys. Lett. 34B (1971) 605
- 47) H.W. Beuscher, W.F. Davidson, R.M. Lieder, C. Mayer-Böricke, Phys. Lett. 40B (1972) 449
- 48) P. Thieberger, A.W. Sunyar, P.C. Roger, N. Lark, O.C. Kistner, E. der Mateasian, S.C. Cochari, E.A. Auerbach, Phys. Rev. Lett. 28 (1972) 972
- 49) B.R. Mottelson, J.G. Valatin, Phys. Lett. 5 (1960) 511
- 50) H. Weigmann, J.P. Theobald, Geel preprint (1972)
- 51) P. Thieberger, Phys. Lett. 45B (1973) 417
- 52) B.C. Smith, A.B. Vokov, Phys. Lett. 47B (1973) 193
- 53) F.S. Stephens, R.S. Simon, Nucl. Phys. A183 (1972) 257
- 54) A. Faessler, Lectures given at the Seventh Polish Summer School on Nuclear Physics in Nikolajki, 1974
- 55) T.L. Khoo, F.M. Bernthal, J.S. Boyno, R.A. Warner, Phys. Rev. Lett. 31 (1973) 1146
- 56) R.M. Lieder, H. Beuscher, W.F. Davidson, A. Neskakis, C. Mayer-Böricke, Y. El Masri, P. Monser, J. Steyaert, J. Vervier, Phys. Lett. 49B (1973) 161
- 57) M. Baranger, K. Kumar, Nucl. Phys. A110 (1968) 490

- 58) K. Kumar, M. Baranger, Nucl. Phys. A110 (1968) 529
- 59) I. Morrison, A. Faessler, F. Grümmer, K.W. Schmid, K. Goeke,
to be published
- 60) K. Goeke, Dissertation, Jül-817-KP (1971)
- 61) N. Onishi, R.K. Sheline, S. Yoshida, Phys. Rev. C2 (1970) 1304
- 62) I. Morrison, Annual Report 1973, IKP, KFA Jülich
- 63) K. Allaart, K. Goeke, A. Faessler, Z. Phys. 263 (1973) 407
- 64) J.N. Mo et al., Particles and Nuclei 4 (1972) 126
- 65) A.J. Hartley et al., J. Phys. A6 (1973) L60
- 66) F. Grümmer, K. Goeke, K. Allaart, A. Faessler, Nucl. Phys.
A225 (1974) 443
- 67) D.L. Hendrie, N.K. Glendenning, B.G. Harvey, O.N. Jarvis,
H.H. Duhm, J. Sandinos, J. Mahoney, Phys. Lett. 26B (1968) 127
- 68) P. Kleinheinz, R.F. Casten, B. Nilsson. Nucl. Phys. A203
(1973) 539
- 69) P. Möller, Nucl. Phys. A142 (1970) 1
- 70) F. Grümmer, K.W. Schmid, A. Faessler, Nucl. Phys. A239 (1975) 289
- 71) W. Davies et al., PLA progress report, (1967), Rutherford
Laboratory
- 72) Bassani et al., Phys. Rev. 136 (1964) B 1006
- 73) C. Hoot et al., Nucl. Phys. 71 (1965) 449
- 74) R.J. Ascuato, B. Sørensen, Nucl. Phys. A186 (1972) 641
- 75) F.R. Flynn, J.G. Berry, A.G. Blain, Nucl. Phys. A154 (1970) 225
- 76) F.D. Bechetti, G.W. Greenless, Phys. Rev. 182 (1969) 1190
- 77) R.J. Lombard, X. Campi-Benet, Nucl. Phys. 83 (1966) 303
- 78) J.H.E. Mattauch, W. Thiele, A.H. Wapstra, Nucl. Phys. 67
(1965) 1

TABELLENBESCHREIBUNG

Tabelle 1: Die Grundzustandsenergien, Anregungsenergien und Teilchenzahlerwartungswerte im Grundzustand sind für verschiedene Werte von K (3.8) im Modell von Pawlikowski-Rybarska angegeben. ND ist die Zahl der Stützstellen der Generatorkoordinate Δ .

Tabelle 2: Die Grundzustandsenergien und Teilchenzahlerwartungswerte für Teilchenzahlprojektionen mit verschiedenen K sind in dieser Tabelle dargestellt. Es wurde keine Diagonalisierung durchgeführt.

Tabelle 3: Für verschiedene Werte von K sind die berechneten Grundzustands- und Anregungsenergien in einigen Ni-Isotopen angegeben und mit exakten Schalenmodellresultaten bzw. mit den experimentellen Energien der niedrigsten 0^+ -Zustände verglichen.

Tabelle 4: G ist die in unseren Rechnungen jeweils benutzte Paar-kraftstärke. Außerdem sind die Basis und die dazugehörenden Einteilchenenergien angegeben.

Tabelle 5: Relative Grundzustandsenergien der Ni-Isotope. Die experimentellen Energien sind um die Coulomb-Energie und einen Term proportional $N-N_0$ ($N_0=28$) korrigiert. Der lineare Term dient dazu, die Energien der Isotope mit

mit $N_0 \pm 2$ gleichzusetzen²⁶⁾. Er wurde auch benutzt, um die theoretischen Ergebnisse zu normieren (*).

Tabelle 6: Wie Tabelle 5 für die Sn-Isotope.

Tabelle 7: Die Verhältnisse R der (p,t)-Wirkungsquerschnitte zu dem $^{58}\text{Ni}(p,t) \rightarrow ^{56}\text{Ni}$ -Übergang sind für die Grundzustandsübergänge in den Ni-Isotopen angegeben. Die untere Hälfte zeigt die Stärken der (p,t)-Übergänge zu den niedrigsten Paarvibrationszuständen in Prozenten des dazugehörigen Grundzustandsüberganges. Die experimentellen Werte stammen von a) Davies et al.⁷¹⁾ b) Bassani et al.⁷²⁾ c) Hoot⁷³⁾.

Tabelle 8: Die Grundzustandsübergänge der (p,t)-Reaktionen in den Sn-Isotopen sind relativ zum $^{118}\text{Sn}(p,t) \rightarrow ^{116}\text{Sn}$ -Übergang angegeben. Hinweise auf die Quellen der experimentellen Zahlen können Ref. 26 entnommen werden.

Tabelle 9: Protonen-Basis auf Einteilchenenergien für Kerne der Pb-Gegend.

Tabelle 10: Relative Grundzustandsenergien (MeV) in den Pb-Isotopen. Die experimentellen Werte sind mit den Ergebnissen von Sorensen²⁶⁾ und unserer GCM-Rechnung verglichen.

Tabelle 11: Relative Grundzustandsenergien der N=126 Isotone. Die experimentellen Werte sind mit den Ergebnissen unseres

Modells und den harmonischen Werten verglichen.

Tabelle 12: Für verschiedene (p,t)-bzw. (t,p)-Übergänge in den Pb-Isotopen sind die relativen Übergangsstärken angegeben. Die Referenzübergänge sind mit einem * gekennzeichnet.

Tabelle 13: Relative Stärken der ($^3\text{He},n$)-Übergänge in den N=126 Isotonen. Die Referenzübergänge sind mit einem * gekennzeichnet.

Tabelle 14: Die Ergebnisse von Generatorkoordinatenrechnungen mit A_N als Parameter sind dargestellt. K ist die Anzahl der Stützstellen. Die Werte der Stützstellen sind im unteren Teil angegeben. Angeführt sind die berechneten Grundzustandsenergien E_0 , die 0^+ -Anregungsenergien E_1-E_0 und E_2-E_0 , sowohl wie die 2^+ -Anregungsenergien der Grundzustandsbande und die Core-Trägheitsmomente, die benötigt werden, um die experimentelle 0^+-2^+ -Energiedifferenz von 84 keV zu reproduzieren.

Tabelle 15: Die Grundzustands- und Anregungsenergien der 0^+ -Zustände sind angegeben für Generatorkoordinatenrechnungen mit jeweils einem Parameter. Die anderen Parameter wurden jeweils festgehalten. In allen Fällen wurden fünf Stützstellen benutzt.

Tabelle 16: Ergebnisse von Rechnungen, die mit jeweils zwei Parametern als Generatorkoordinaten gleichzeitig durchgeführt wurden.

FIGURENBESCHREIBUNG

Fig. 1: Für die Bleisotope sind die Grundzustandsenergien und Paarvibrationszustände dargestellt. Die experimentellen Grundzustandsenergien (durchgezogene Linien) sind auf ^{208}Pb bezogen und entsprechend der Gleichung im Bild normiert. Die gestrichelten Linien geben die Vorhersagen des harmonischen Modells wieder (siehe Ref. 14).

Fig. 2: Paarrotationsbande in den Sn-Isotopen. Die Energien sind auf ^{114}Sn bezogen und so normiert, daß $E(^{112}\text{Sn}) = E(^{116}\text{Sn})$ ist. Die waagerechten Balken geben experimentelle Energien wieder (siehe Ref. 14).

Fig. 3: Differentieller Wirkungsquerschnitt der Reaktion $^{210}\text{Pb}(p,t) ^{208}\text{Pb}(\text{g.s.})$. Die experimentellen Daten stammen aus Ref. 74. Die gestrichelte Linie gibt das Ergebnis einer einfachen GCM-Rechnung wieder, während die durchgezogene Kurve das Ergebnis einer Rechnung mit Wellenfunktionen der Gestalt (3.20) zeigt. Die in die DWBA-Rechnung eingehenden optischen Parameter für das Triton stammen von Flynn et al.⁷⁵⁾, während die für das Proton einer Arbeit von Bechetti und Greenless⁷⁶⁾ entnommen sind.

Fig. 4: Wie Fig. 3 für die Reaktion $^{210}\text{Pb}(p,t) ^{208}\text{Pb}(\text{p.v.})$.

Fig. 5: Wie Fig. 3 für die Reaktion $^{206}\text{Pb}(t,p) ^{208}\text{Pb}(\text{g.s.})$.

Fig. 6: Wie Fig. 3 für die Reaktion $^{206}\text{Pb}(t,p) ^{208}\text{Pb}(p.v.)$

Fig. 7: Wirkungsquerschnitte der Reaktionen $^{204}\text{Hg} (^3\text{He},n) ^{206}\text{Pb}(g.s.)$ und $^{204}\text{Hg} (^3\text{He},n) ^{206}\text{Pb}(p.v.)$ (gestrichelt). Es wurden Wellenfunktionen nach (3.20) zur Bestimmung der spektroskopischen Amplituden benutzt. Die optischen Parameter für ^3He stammen aus Ref. 77, die für das Neutron aus Ref. 76.

Fig. 8: Die Massendifferenzen zwischen geraden und ungeraden Kernen wurden mit Hilfe der GCM-Methode berechnet und werden hier mit BCS-Ergebnissen von Lombard und Campi-Benet⁷⁷⁾ und den experimentellen Werten verglichen⁷⁸⁾.

Fig. 9: Das Trägheitsmoment ist als Funktion des Quadrates der Rotationsfrequenz dargestellt ($\theta-\omega^2$ -Plot) für den Fall eines starren Rotators, im Falle des VMI-Modells und schematisch im Falle von "Backbending".

Fig. 10: Zwei sich schneidende Rotationsbanden sind oben dargestellt durch die Energie in Abhängigkeit von $I(I+1)$ und unten im $\theta-\omega^2$ -Plot. Die gestrichelten Kurven zeigen den Fall, in dem die beiden Banden mischen.

Fig. 11: Das Trägheitsmoment $2\theta/\hbar^2$ ist gegen $(\hbar\omega)^2$ aufgetragen. Die drei Teile des Bildes zeigen Ergebnisse für ^{166}Yb , die mit verschiedenen Approximationen für die Teilchenzahlprojektion erhalten wurden. In allen Fällen sind die Ergebnisse mit und ohne λ -Korrektur mit dem Experiment verglichen.

- Fig. 12: Für dieselben Fälle wie in Fig. 1 sind die Drehimpulsabhängigkeit der Gapparameter Δ_N , Δ_p , und der Deformation β dargestellt.
- Fig. 13: Das Trägheitsmoment $2\theta/\hbar^2$ ist gegen $(\hbar\omega)^2$ aufgetragen. Das Bild zeigt Ergebnisse von Rechnungen in ^{178}Hf mit und ohne Einführung einer Hexadekapol-Deformation β_4 und für ^{166}Yb . Resultate von Rechnungen mit verschiedenen Quadrupolstärken χ werden untereinander und mit dem Experiment verglichen.
- Fig. 14: Für die beiden Rechnungen in ^{166}Yb , deren Ergebnis in Fig. 13 dargestellt ist, sind die Drehimpulsabhängigkeiten der Parameter Δ_N , Δ_p und β dargestellt.
- Fig. 15: Ausschnitt des Nilsson-Spektrums in der Nähe der Fermikante für die Yb-Isotope. Die gestrichelten Linien sind die Fermienergien der ungepaarten Lösungen.
- Fig. 16: Das Trägheitsmoment $2\theta/\hbar^2$ ist gegen $(\hbar\omega)^2$ aufgetragen für verschiedene Kerne der Seltenen Erden. Die theoretischen Ergebnisse sind jeweils mit dem Experiment verglichen.
- Fig. 17: Für verschiedene Sätze von Stützstellen Δ_N der GCM-Rechnung in ^{170}Yb sind die resultierenden "Wellenfunktionen" $\langle \Delta_N | \psi \rangle$ in Abhängigkeit von Δ_N dargestellt. Der obere Teil zeigt das Ergebnis für den 0^+ -Zustand der Grundzustands-

bande, der untere Teil zeigt den ersten angeregten 0^+ -Zustand (Neutronenpaarvibration).

Fig. 18: Die Anregungsenergien der niedrigstliegenden kollektiven Banden in ^{170}Yb sind gegen $I(I+1)$ aufgetragen. Die Experimentellen Energien der Grundzustandsrotationsbande sind durch Kreise gekennzeichnet. Die berechneten Banden, die mit g.s., n.p.v und p.p.v gekennzeichnet sind, sind Ergebnisse eine GCM-Rechnung mit Δ_N und Δ_p als Parameter. Die β -Vibrationsbande ($\beta.v.$) ist Ergebnis einer Rechnung mit Δ_N und β als Parameter.

Fig. 19: Für die Drehimpulse 0^+ , 4^+ , 8^+ und 16^+ sind die "Wellenfunktionen" der drei tiefstliegenden Zustände in Abhängigkeit von Δ_N dargestellt.

Tabelle 1

K	0	2	4	6	8	exakt
$E_0\{ND=1\}$	8.08	7.76	6.85	6.85	6.85	6.83
$E_0\{ND=3\}$	8.00	7.57	6.83	6.83	6.83	6.83
$E_1 - E_0$	3.91	4.27	4.74	4.74	4.74	-
$\langle N \rangle$	6.018	5.975	6.000	6.000	6.000	6

Tabelle 2

K		^{58}Ni	^{60}Ni	^{62}Ni	^{64}Ni	^{66}Ni
0	E_0	-1.14	-1.51	-1.06	0.26	2.49
	$\langle N \rangle$	2.000	4.000	6.000	8.000	10.000
2	E_0	-1.50	-1.53	-1.06	0.24	2.17
	$\langle N \rangle$	2.405	4.018	6.007	7.976	9.815
4	E_0	-1.48	-2.06	-1.68	-0.42	1.83
	$\langle N \rangle$	2.007	4.023	6.022	7.990	9.992
6	E_0	-1.48	-2.08	-1.72	-0.44	1.83
	$\langle N \rangle$	2.000	4.000	6.000	8.000	10.000
8	E_0	-1.48	-2.08	-1.72	-0.44	1.83
	$\langle N \rangle$	2.000	4.000	6.000	8.000	10.000
exact	E_0	-1.49	-2.11	-1.75	-0.51	1.70
	$\langle N \rangle$	2	4	6	8	10

Tabelle 3

K		^{58}Ni	^{60}Ni	^{62}Ni	^{64}Ni	^{66}Ni
0	E_0	-1.18	-1.56	-0.97	0.16	2.44
	E_1-E_0	1.94	1.89	2.71	2.78	2.31
2	E_0	-1.48	-1.61	-0.94	0.08	2.17
	E_1-E_0	2.19	1.72	2.65	2.78	2.31
4	E_0	-1.49	-2.07	-1.69	-0.45	1.73
	E_1-E_0	2.39	2.19	3.17	3.48	2.56
8	E_0	-1.49	-2.10	-1.75	-0.50	1.70
	E_1-E_0	2.36	2.19	3.18	3.50	2.58
	E_0 (exakt)	-1.49	-2.11	-1.75	-0.51	1.70
	E_1-E_0 (exp.)	2.94	2.29	2.89	2.86	2.44

Tabelle 4

^{56}Ni	$G = 0.411 \text{ [MeV]}$	$0d_{3/2}$	$1s_{1/2}$	$0d_{3/2}$	$0f_{7/2}$	$1p_{3/2}$	$0f_{5/2}$	$1p_{1/2}$	$0g_{9/2}$		
$\epsilon_i \text{ [MeV]}$		-5.9	-5.7	-4.9	-2.4	2.4	4.15	4.3	7.35		
^{116}Sn	$G = 0.178 \text{ [MeV]}$	$1p_{1/2}$	$0g_{7/2}$	$1d_{5/2}$	$2s_{1/2}$	$0g_{7/2}$	$1d_{3/2}$	$0h_{11/2}$	$1f_{7/2}$	$2p_{3/2}$	$2p_{1/2}$
$\epsilon_i \text{ [MeV]}$		-8.6	-6.5	-2.0	-0.8	-0.6	0.6	2.0	6.4	6.5	8.6
^{208}Pb	$G = 0.086 \text{ [MeV]}$	$0h_{9/2}$	$1f_{7/2}$	$0i_{13/2}$	$2p_{3/2}$	$1f_{5/2}$	$2p_{1/2}$	$1g_{9/2}$	$0i_{11/2}$		
$\epsilon_i \text{ [MeV]}$		-4.65	-3.55	-3.05	-2.15	-2.0	-1.716	+1.716	2.74		
^{208}Pb		$0j_{15/2}$	$2d_{5/2}$	$3s_{1/2}$	$1g_{7/2}$	$2d_{3/2}$					
$\epsilon_i \text{ [MeV]}$		3.28	3.5	4.2	4.8	4.9					

Tabelle 5

A	ΔE (exp) [MeV]	ΔE (Sorensen)	ΔE (GCM)
56	0.0	0.0	
58	5.0*	5.0*	5.0*
60	15.3	11.0	11.75
62	26.0	18.0	20.19
64	38.0	27.0	30.10
66	51.0	36.0	42.22

Tabelle 6

A (Mass)	ΔE (exp) [MeV]	ΔE (Sorensen)	ΔE (GCM)
108	5.3	4.6	6.2
110	3.9	3.8	3.7
112	1.79	1.2	1.8
114	0.414*	0.4*	0.5
116	0.0	0.0	0.0
118	0.414*	0.4*	0.4*
120	1.51	1.5	1.6
122	3.21	2.8	3.8
124	5.46	5.0	6.7
126	8.21	7.4	10.2
128	11.38	10.4	14.2

Tabelle 7

(A_i, A_f)	R (exp)	R (Sorensen)	R (GCM)
(58, 56)	1.0*	1.0*	1.0*
(60, 58)	(1.19 ^a ; 1.35 ^b ; 1.70 ^c)	1.24	1.56
(62, 60)	(1.13 ^a ; 1.38 ^b ; 2.5 ^c)	1.17	1.47
(64, 62)	-	0.93	1.43
(66, 64)	-	-	1.22
	P (exp)	P (Sorensen)	P (GCM)
(58, 56)	-	26	44
(60, 58)	-	16	17
(62, 60)	-	16	25
(64, 62)	-	20	40
(66, 64)	-	31	39

Tabelle 8

$(A_i; A_f)$	R (exp)	R (Sorensen)	R (GCM)
(124, 122)	1.01	0.40	0.69
(122, 120)	1.08	0.65	0.88
(120, 118)	0.94	0.84	0.96
(118, 116)	1.0*	1.0*	1.0*
(116, 114)	1.14	1.09	1.15
(114, 112)	1.33	1.21	1.27
(112, 110)	1.33	1.21	1.33

Tabelle 9

n	ℓ	2j	E (MeV)
0	4	7	-11.508
1	2	5	- 9.708
0	5	11	- 9.375
1	2	3	- 8.385
2	0	1	- 8.034
0	5	9	- 3.802
1	3	7	- 2.905
0	6	13	- 2.193
1	3	5	- 0.980
2	1	3	- 0.686
2	1	1	- 0.162

Tabelle 10

A (Mass)	ΔE (exp) [MeV]	ΔE (harmonic)	ΔE (Sorensen)	ΔE (GCM)
196	24.48	24.90	27.0	23.1
198	18.67	19.92	15.7	18.3
200	13.73	14.94	11.8	13.9
202	9.24	9.96	8.8	9.9
204	5.69	4.98	5.0	6.2
206	2.49*	2.49*	2.49*	3.0
208	0.0	0.0	0.0	0.0
210	2.49*	2.49*	2.49*	2.2
212	5.16	4.98	5.16	4.8
214	7.96	9.96	7.8	7.7

Tabelle 11

Z	ΔE (exp)	ΔE (2λ GCM)	Harmonic
78		7.14	6.60
80	3.30	3.27	3.30
82	0.0	0.0	0.0
84	3.30	3.27	3.30
86	8.10	7.11	6.60
88	14.23	11.30	9.90
90	21.95	15.94	13.20

Tabelle 12

$[A_i(\text{state}); A_f(\text{state})]$		Harmonic	Sørensen ¹³⁾	GCM	
				one λ	two λ
$[210(\text{g.s.}), 212(\text{g.s.})]$	$(2.3 \pm 0.76)x^1$	2x	1.74 x	1.68 x	1.68 x
$[208(\text{g.s.}), 210(\text{g.s.})]$	x^*	x^*	x^*	x^*	x^*
$[210(\text{g.s.}), 208(\text{p.v.})]$	$0.9 y^1$	y		0.69 y	0.82 y
$[206(\text{g.s.}), 208(\text{g.s.})]$	y^*	y^*	y^*	y^*	y^*
$[206(\text{g.s.}), 208(\text{p.v.})]$	$0.9 x^1$	x		0.73 x	0.67 x
$[206(\text{g.s.}), 204(\text{g.s.})]$	$(1.0 \pm 0.22)y^1$	2y	1.69 y	1.67 y	1.67 y
$[204(\text{g.s.}), 202(\text{g.s.})]$	$2.33 y^{13)}$	3y	2.12 y	2.13 y	2.13 y
$[202(\text{g.s.}), 200(\text{g.s.})]$		4y	2.36 y	2.41 y	2.41 y
$[200(\text{g.s.}), 198(\text{g.s.})]$		5y	2.43 y	2.49 y	2.49 y
$[198(\text{g.s.}), 196(\text{g.s.})]$		6y	2.35 y	2.39 y	2.39 y

Tabelle 13

$[Z_i(\text{state}); Z_f(\text{state})]$	Harmonic	2λ -GCM
$[78(\text{g.s.}); 80(\text{g.s.})]$	$2y$	$1.24 y$
$[80(\text{g.s.}); 82(\text{g.s.})]$	y^*	y^*
$[80(\text{g.s.}); 82(\text{DPV})]$	x	$0.75 x$
$[82(\text{g.s.}); 84(\text{g.s.})]$	x^*	x^*
$[84(\text{g.s.}); 82(\text{DPV})]^t$	y	$0.95 y$
$[84(\text{g.s.}); 86(\text{g.s.})]$	$2x$	1.90

Tabelle 14

GCM mit Δ_n ($\Delta_p = 0.7$ MeV, $\beta = 0.31$)					
K	E_0 [MeV]	$E_1 - E_0$ [MeV]	$E_2 - E_0$ [MeV]	$E_0^{2+} - E_0$ [keV]	θ_{core} [MeV ⁻¹]
2	-303.72	2.32	-	102	6.38
3	-303.77	2.09	5.28	105	7.01
4	-303.82	1.64	4.46	107	7.75
5,a	-303.82	1.38	3.58	107	7.61
5,b	-303.82	1.42	3.64	107	7.75
5,c	-303.82	1.46	3.73	107	7.78
6	-303.82	1.40	3.63	107	7.74
7	-303.83	1.38	3.62	108	7.96
8	-303.83	1.39	3.64	108	7.95
9	-303.83	1.40	3.67	108	7.94
2	$\Delta_n = 0.01, 1.0$				
3	$\Delta_n = 0.01, 0.7, 1.4$				
4	$\Delta_n = 0.01, 0.5, 1.0, 1.5$				
5,a	$\Delta_n = 0.01, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2$				
5,b	$\Delta_n = 0.01, 0.35, 0.7, 1.05, 1.4$				
5,c	$\Delta_n = 0.01, 0.4, 0.8, 1.2, 1.6$				
6	$\Delta_n = 0.01, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.5$				
7	$\Delta_n = 0.01, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, 1.8$				
8	$\Delta_n = 0.01, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, 1.8, 2.1$				
9	$\Delta_n = 0.01, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, 1.8, 2.1, 2.4$				

Tabelle 15

	GCM mit		
	Δ_N	Δ_P	β
E_0 [MeV]	-303.843	-303.845	-303.645
$E_1 - E_0$ [MeV]	1.39	2.67	2.34
$E_2 - E_0$ [MeV]	3.60	6.38	3.54

Tabelle 16

	GCM mit	
	$\Delta_N + \Delta_P$	$\Delta_N + \beta$
E_0 [MeV]	-304.072	-303.877
$E_1 - E_0$ [MeV]	1.51	1.52
$E_2 - E_0$ [MeV]	2.71	2.38
$E_3 - E_0$ [MeV]	4.04	3.31

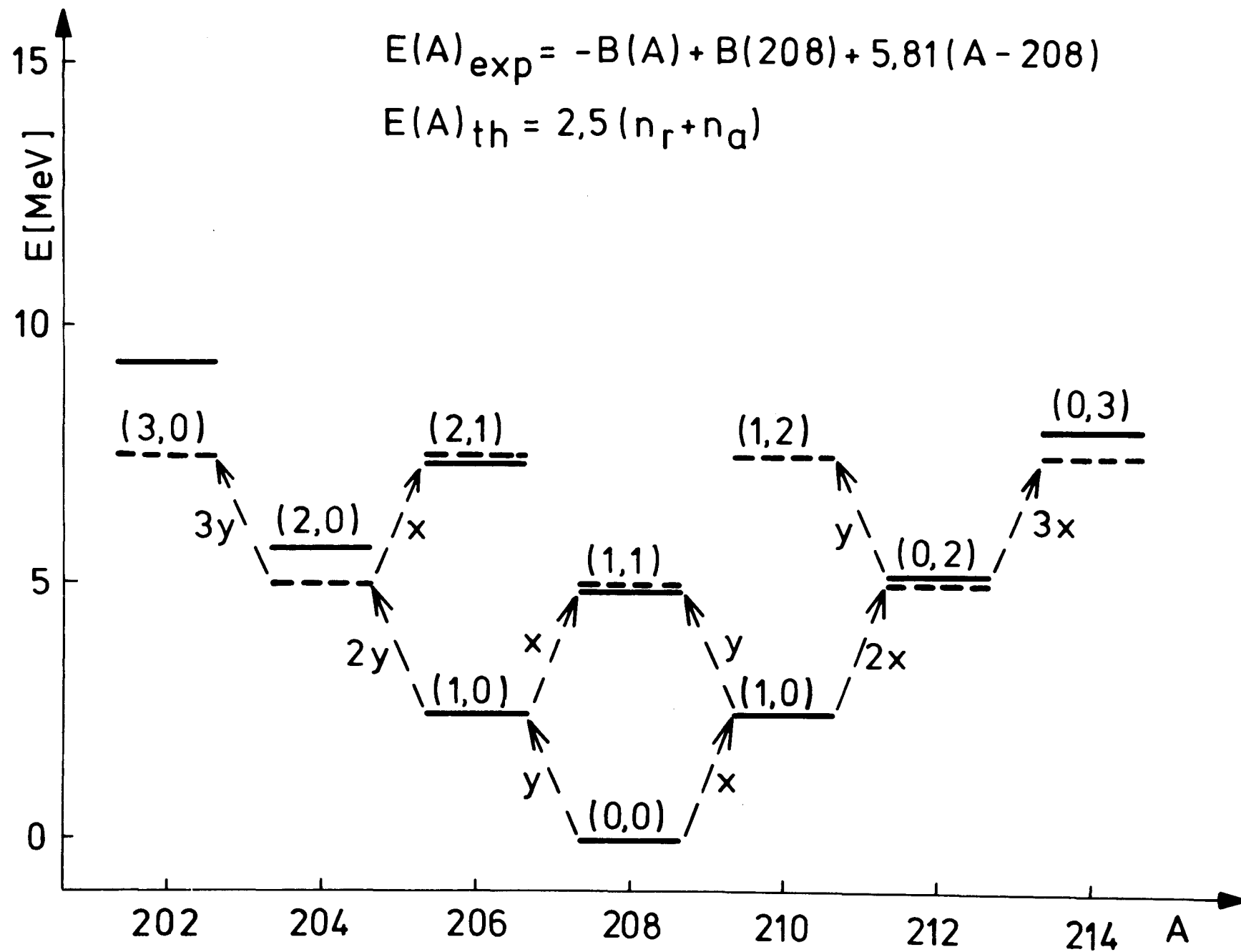


Fig. 1

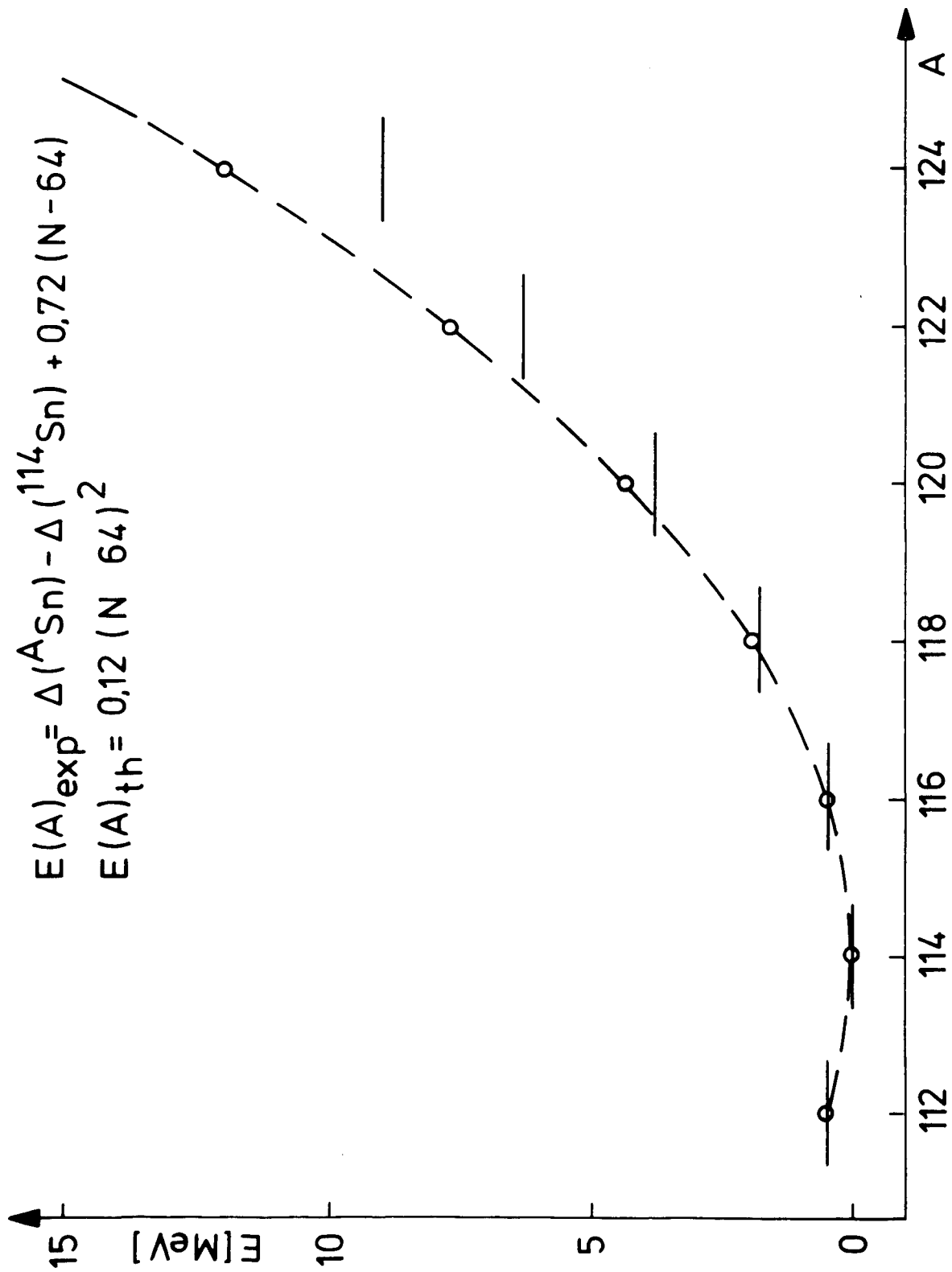


Fig. 2

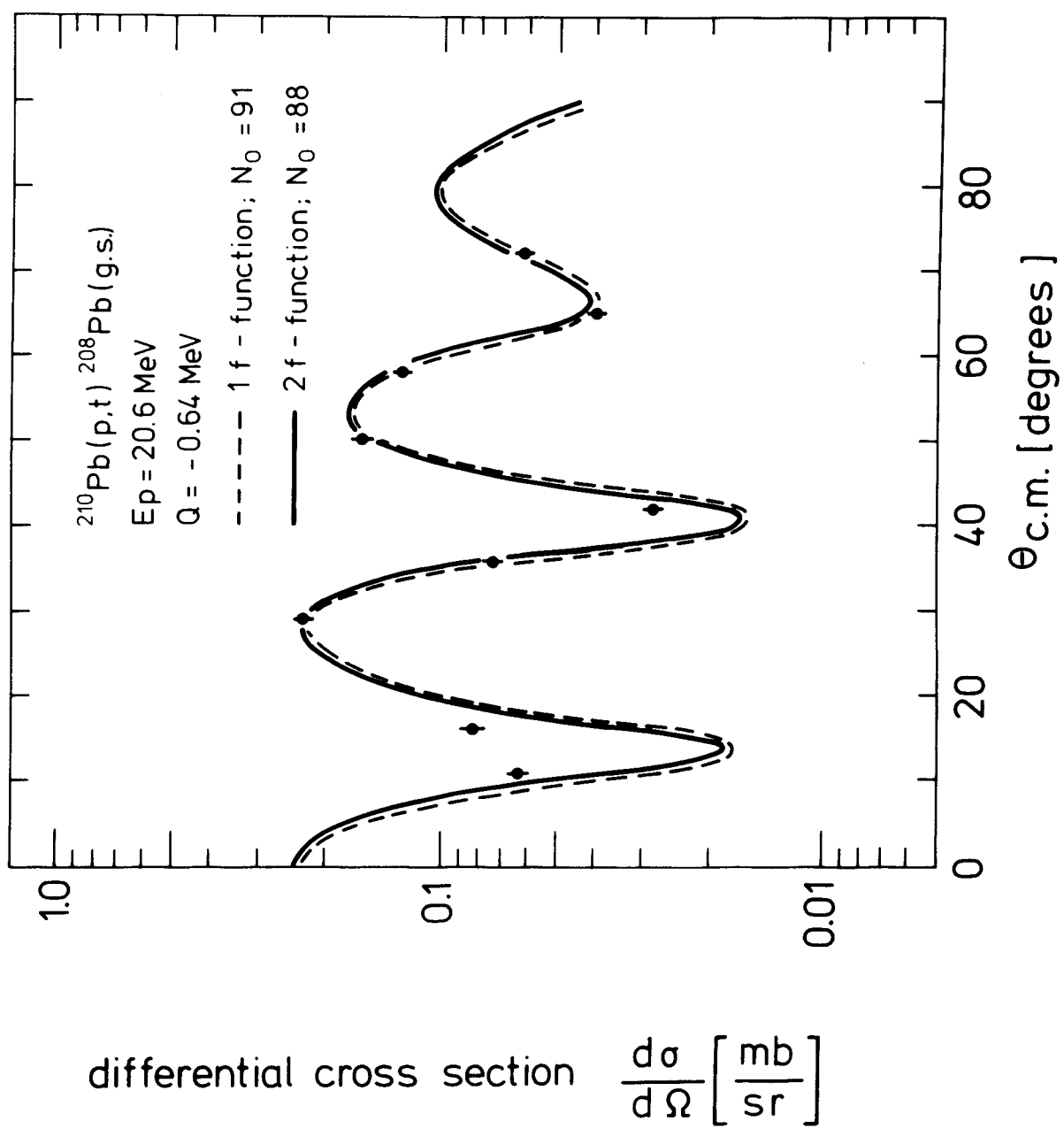


Fig. 3

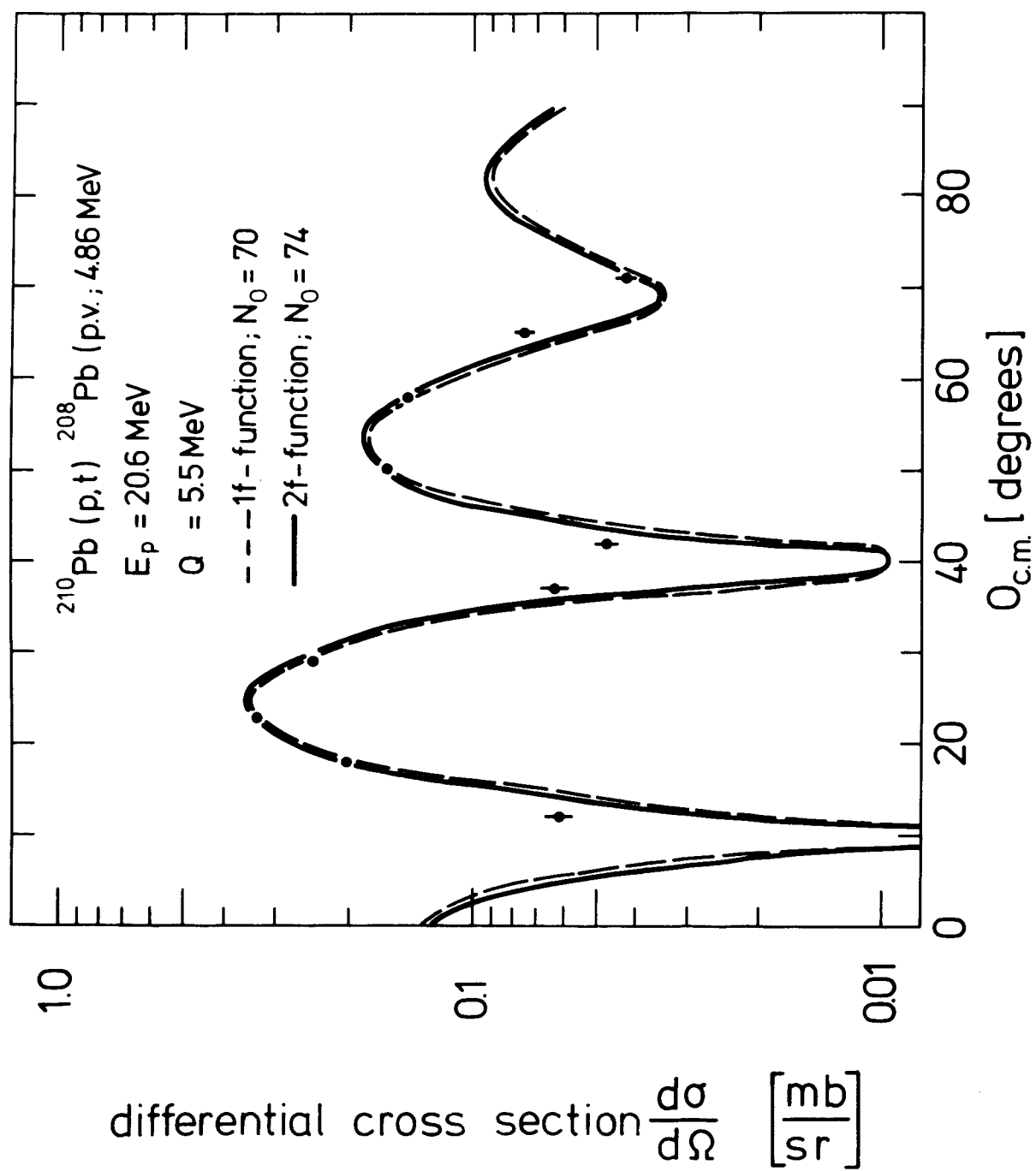


Fig. 4

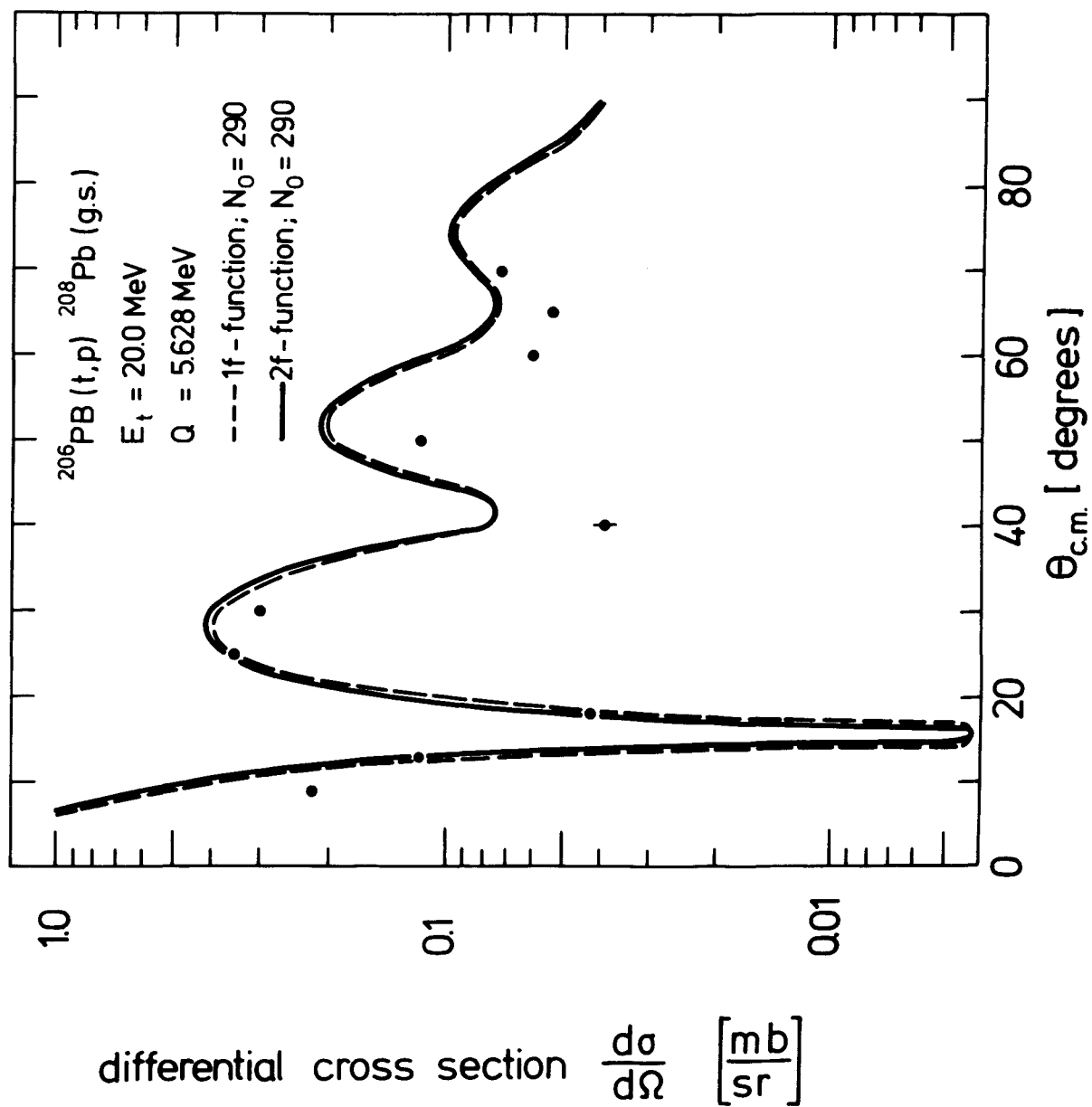


Fig. 5

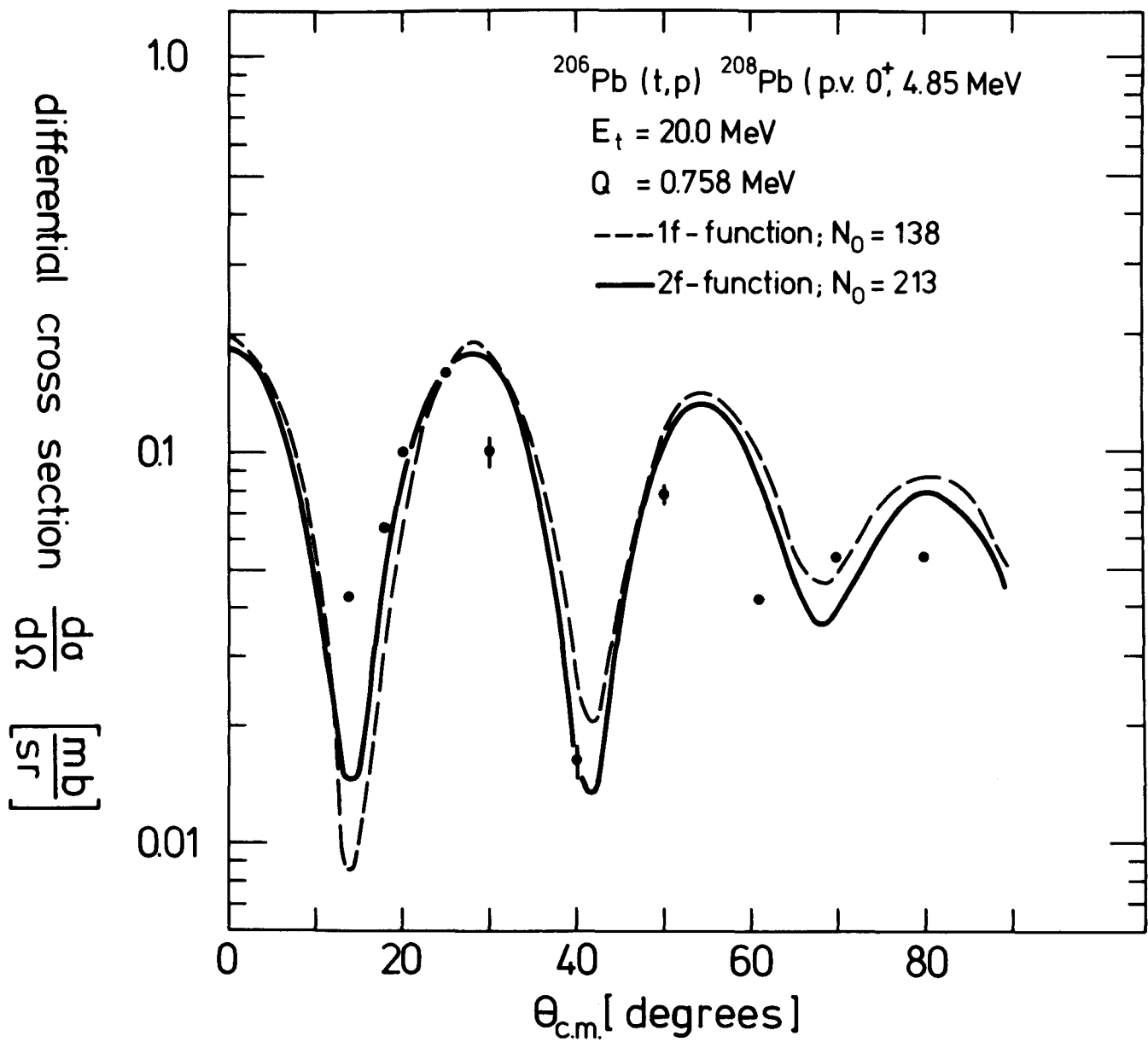


Fig. 6

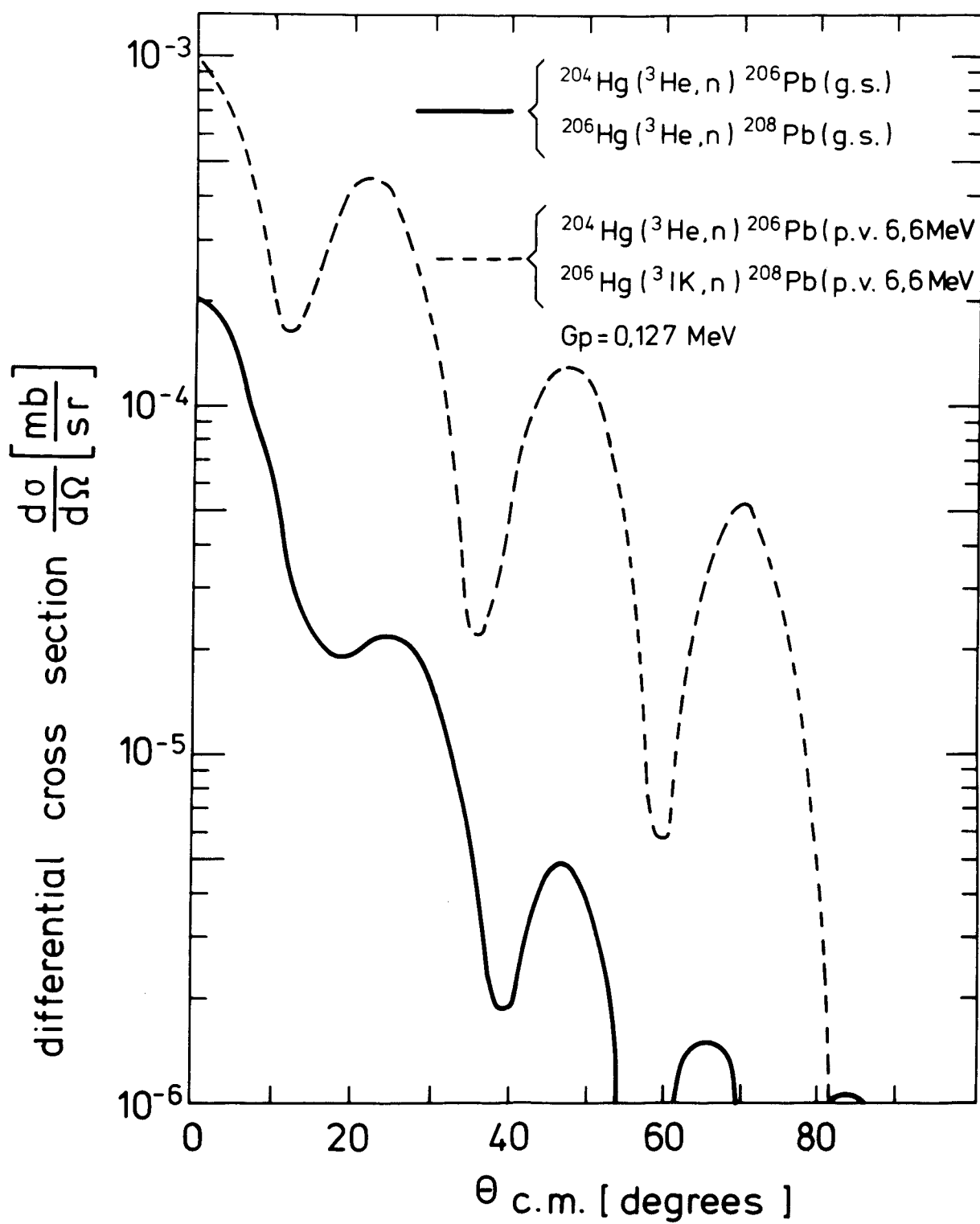
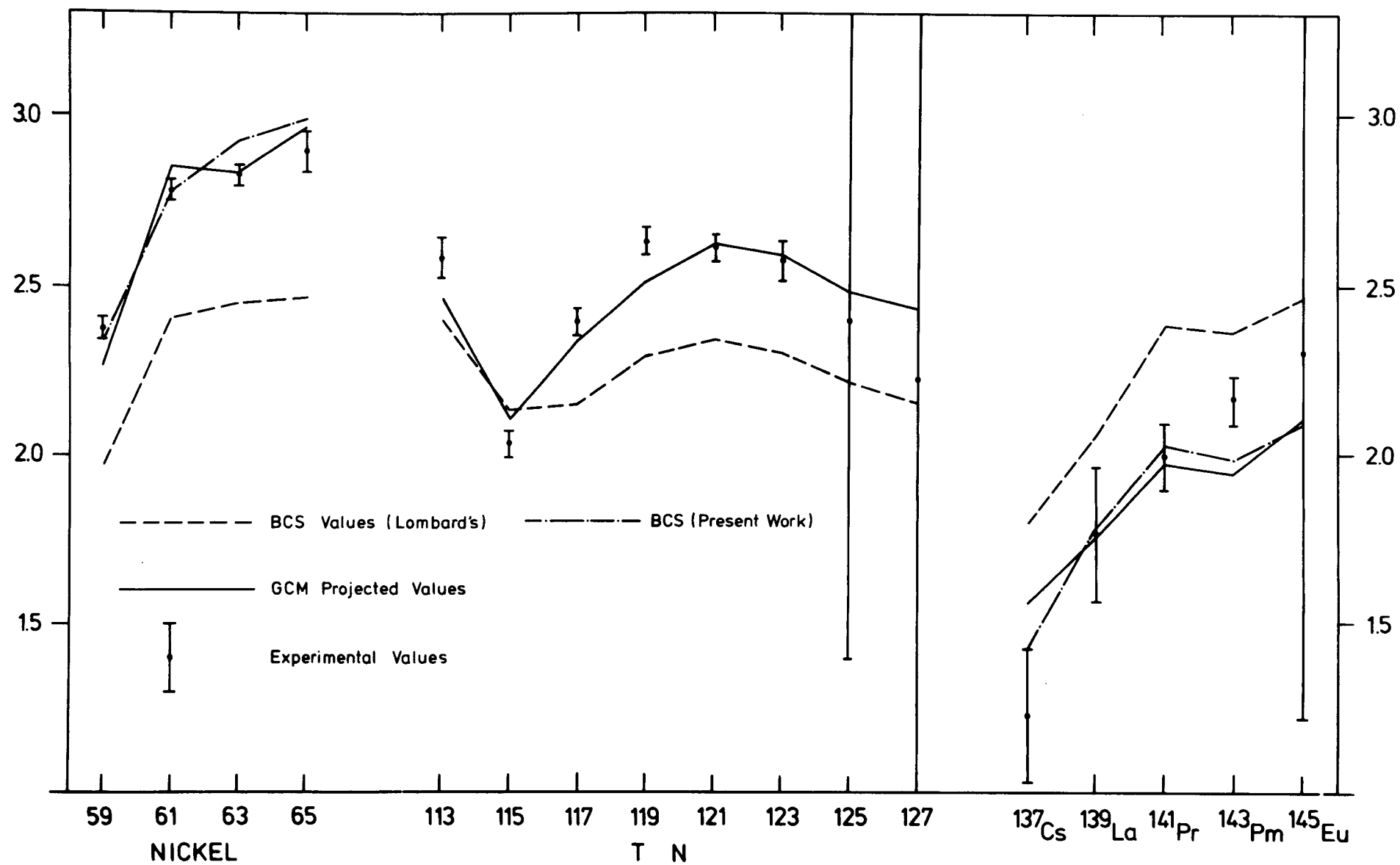


Fig. 7

Fig. 8

EVEN - ODD - MASS - DIFFERENCES [MeV]



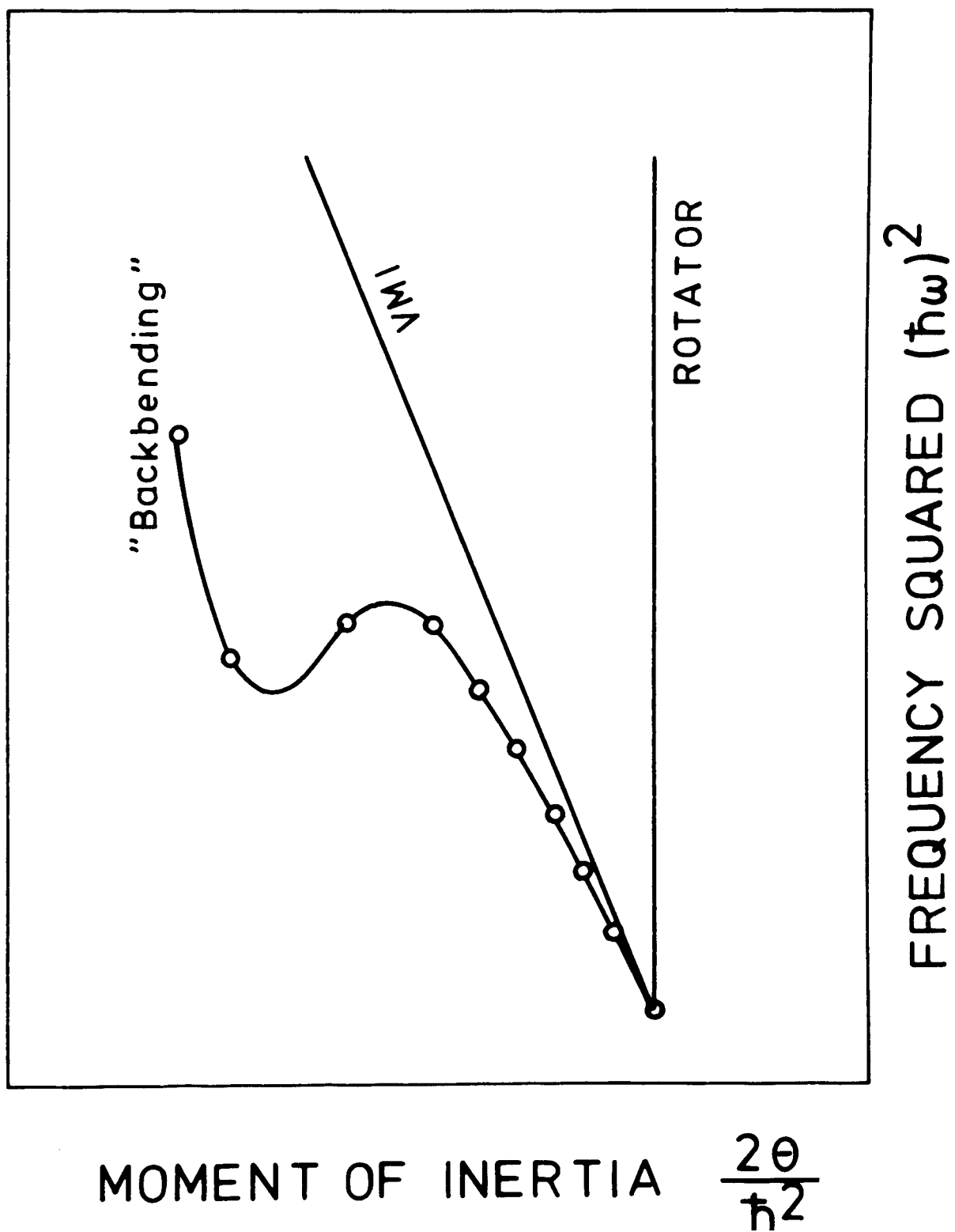


Fig. 9

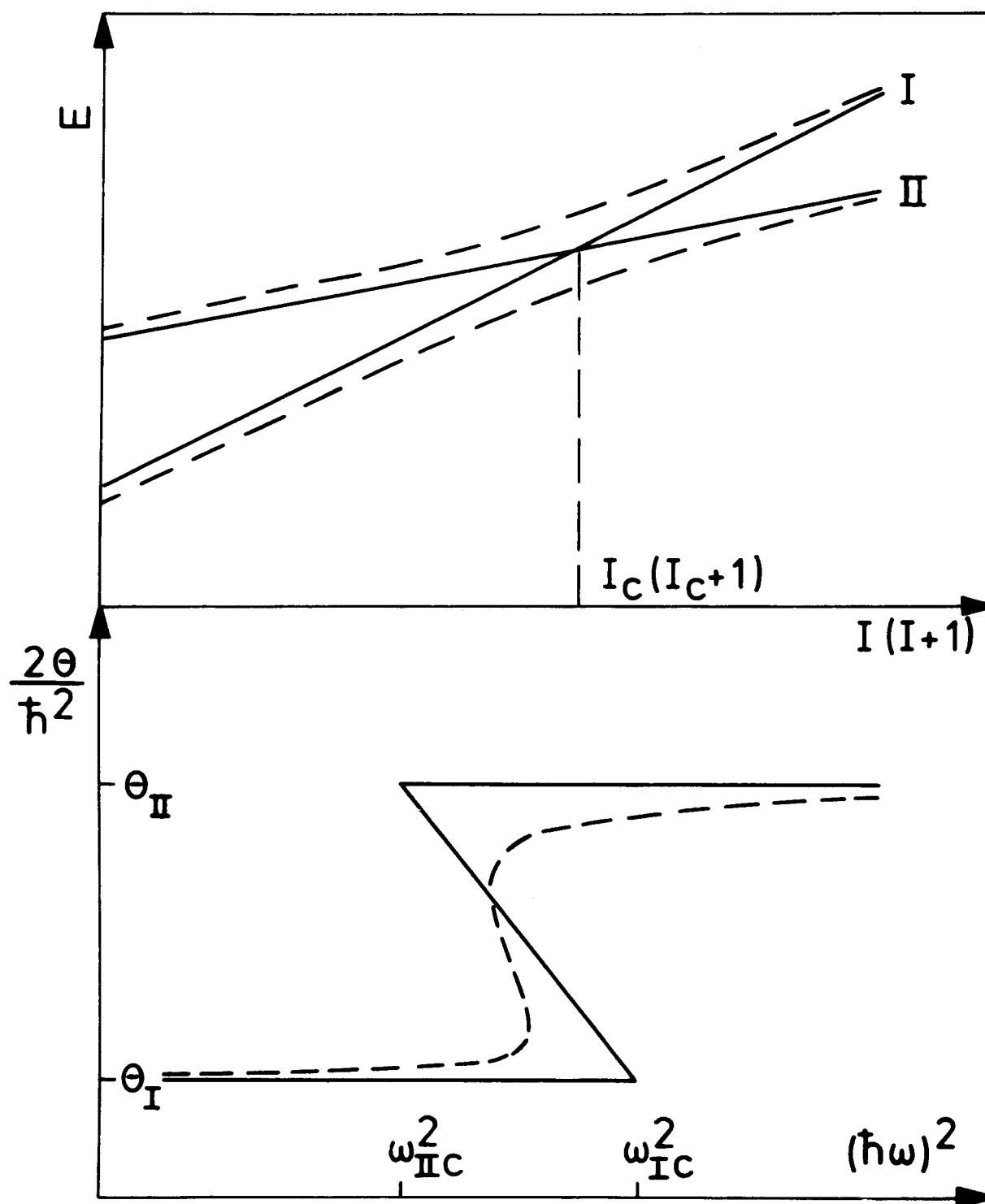


Fig. 10

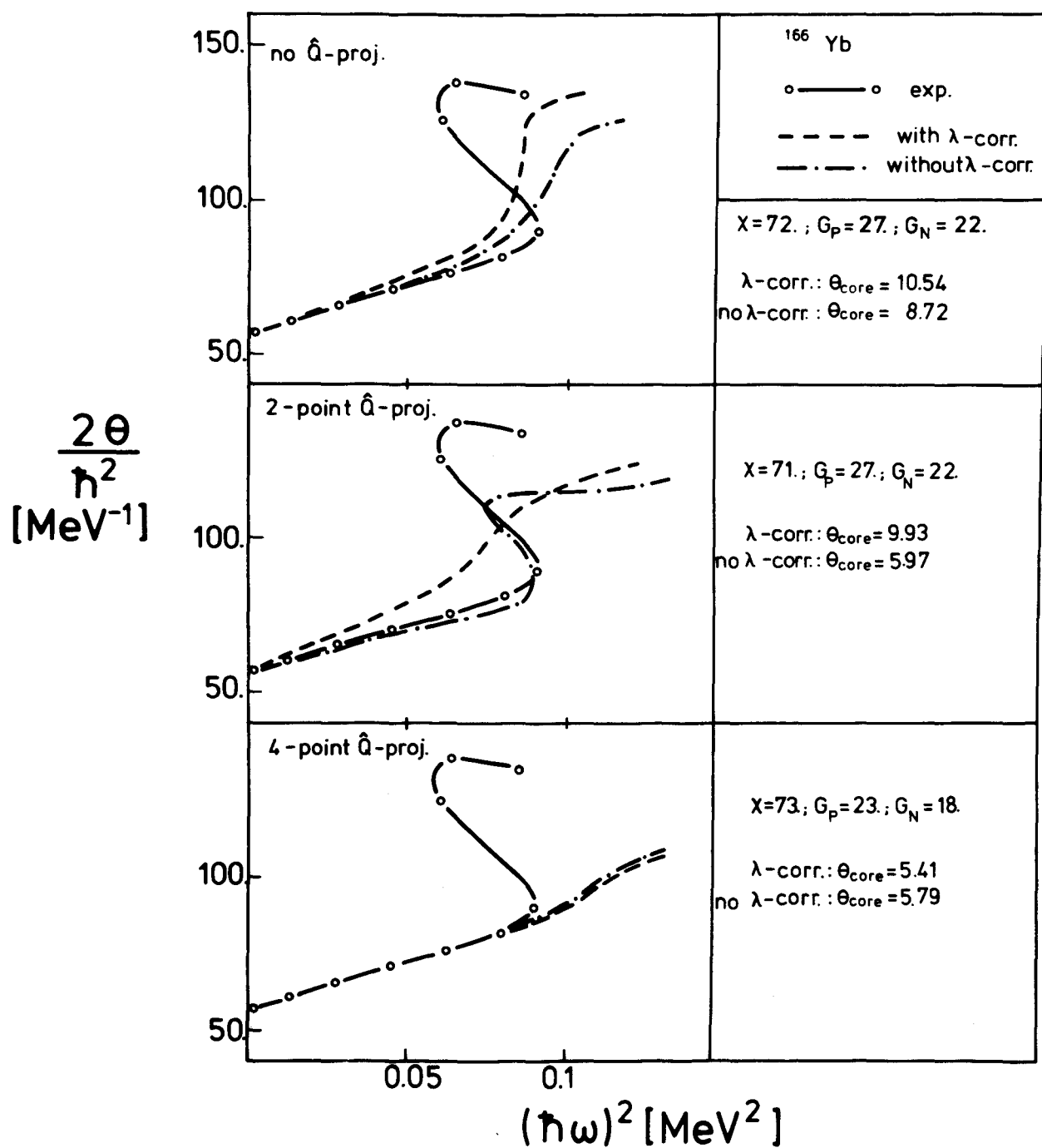
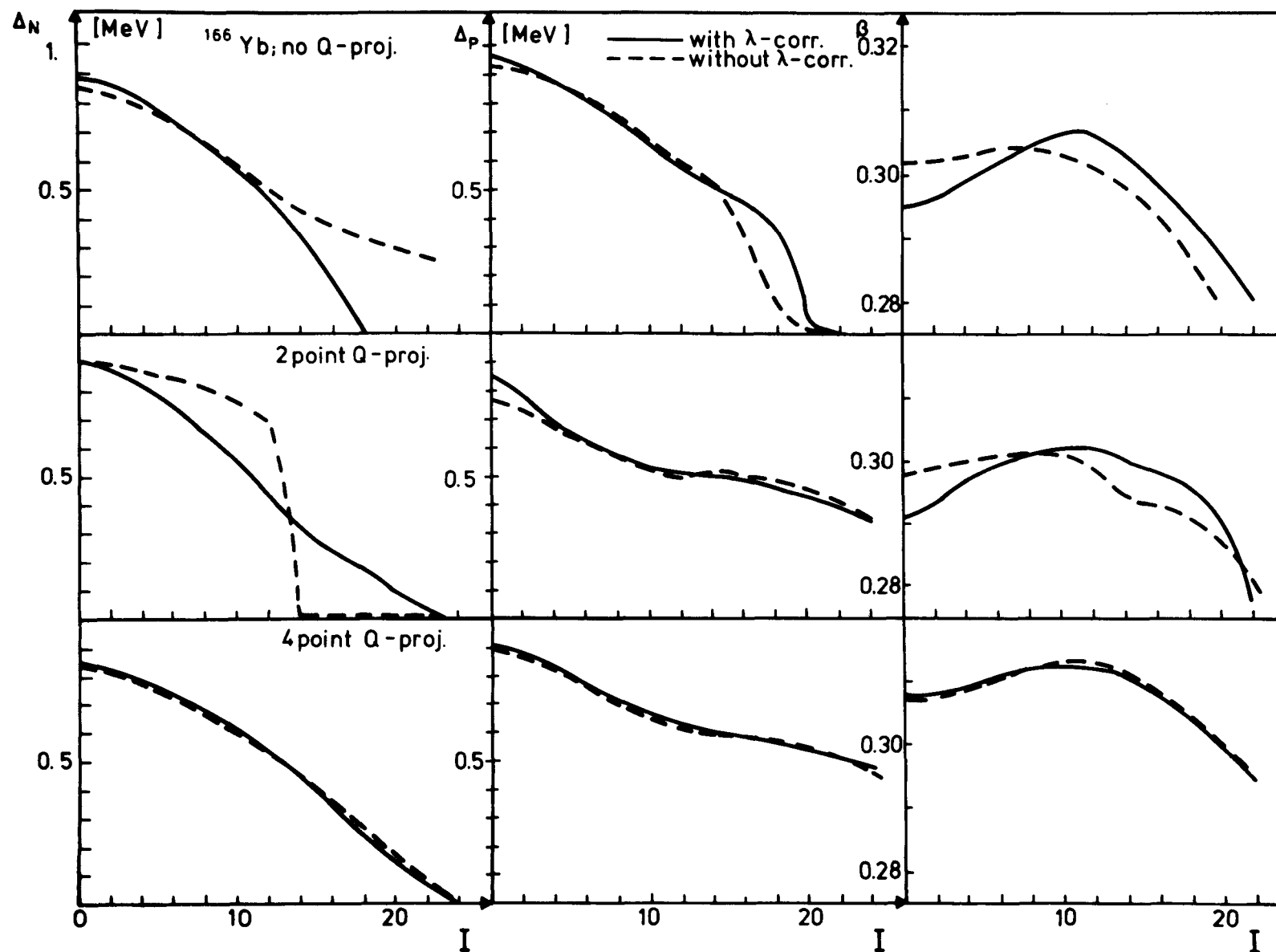


Fig. 11

Fig. 12



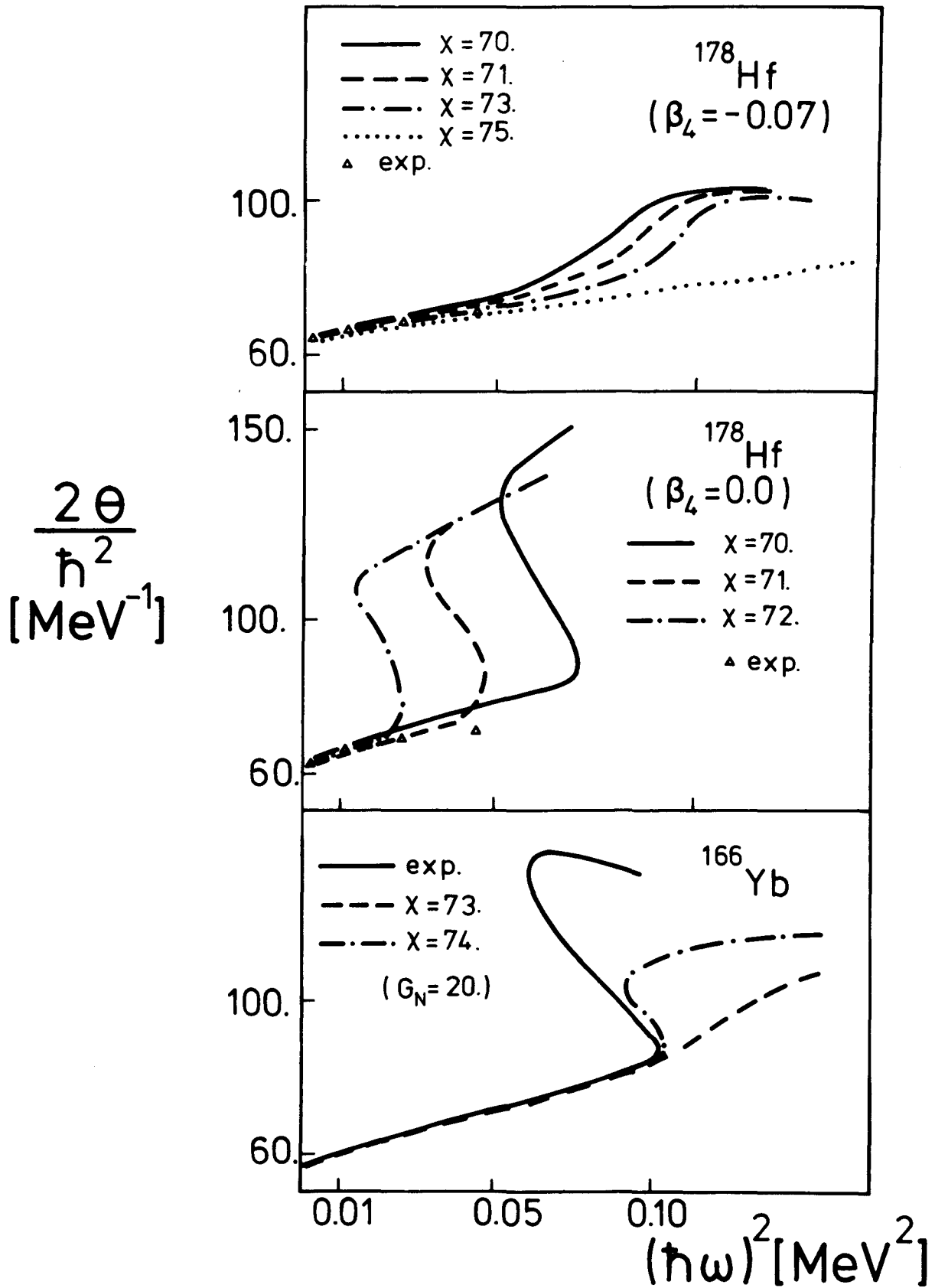


Fig. 13

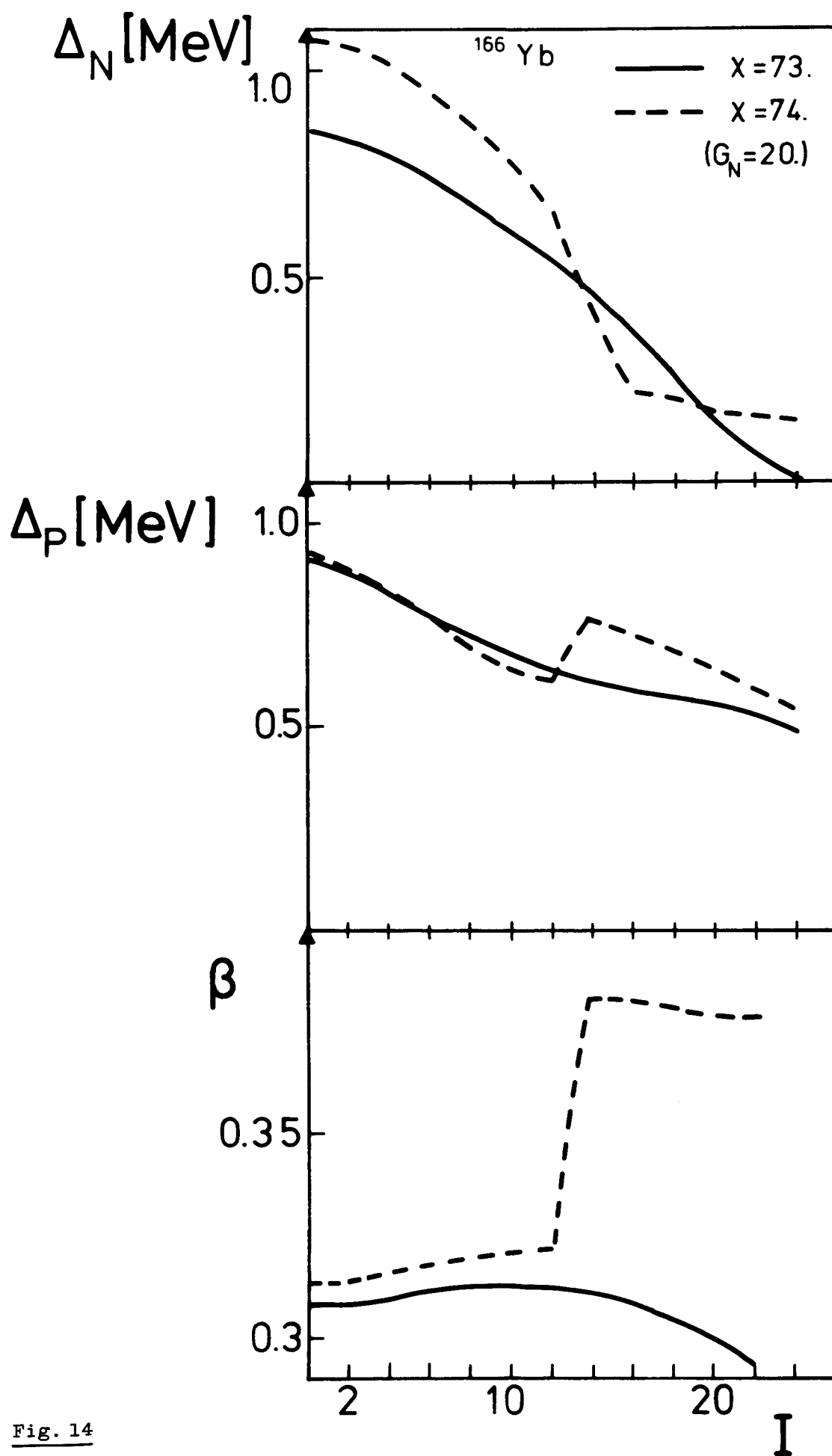


Fig. 14

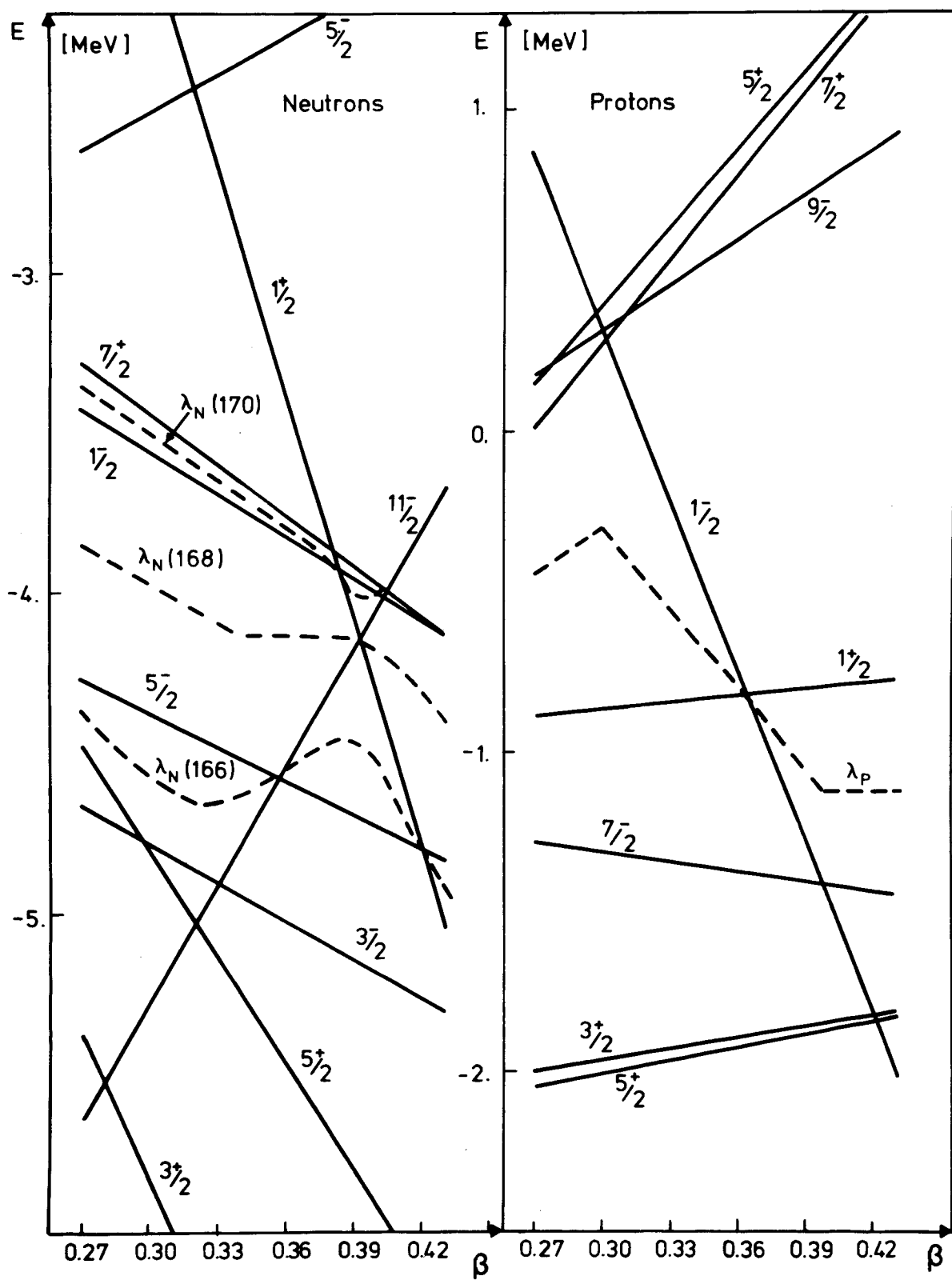


Fig. 15

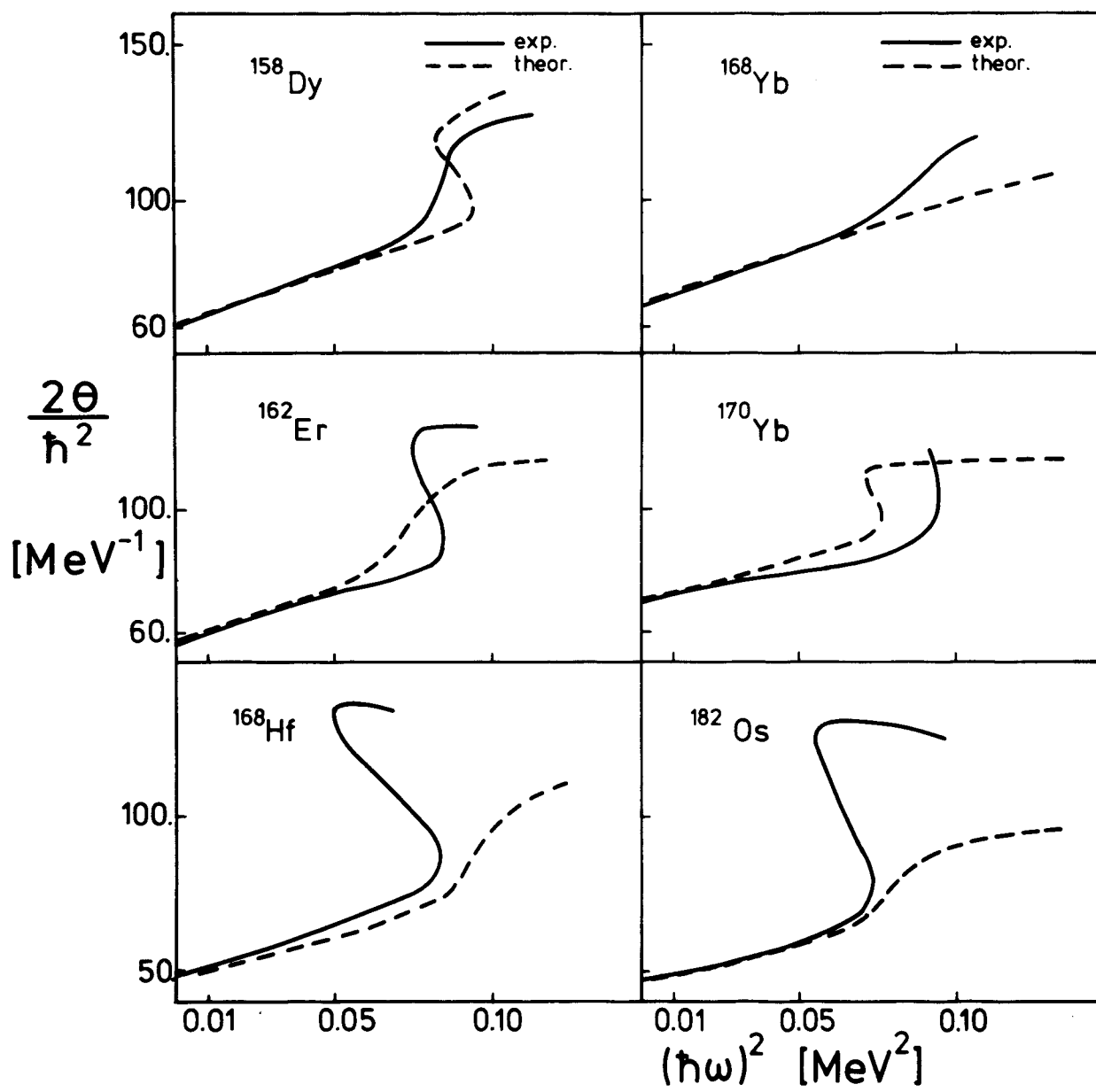


Fig. 16

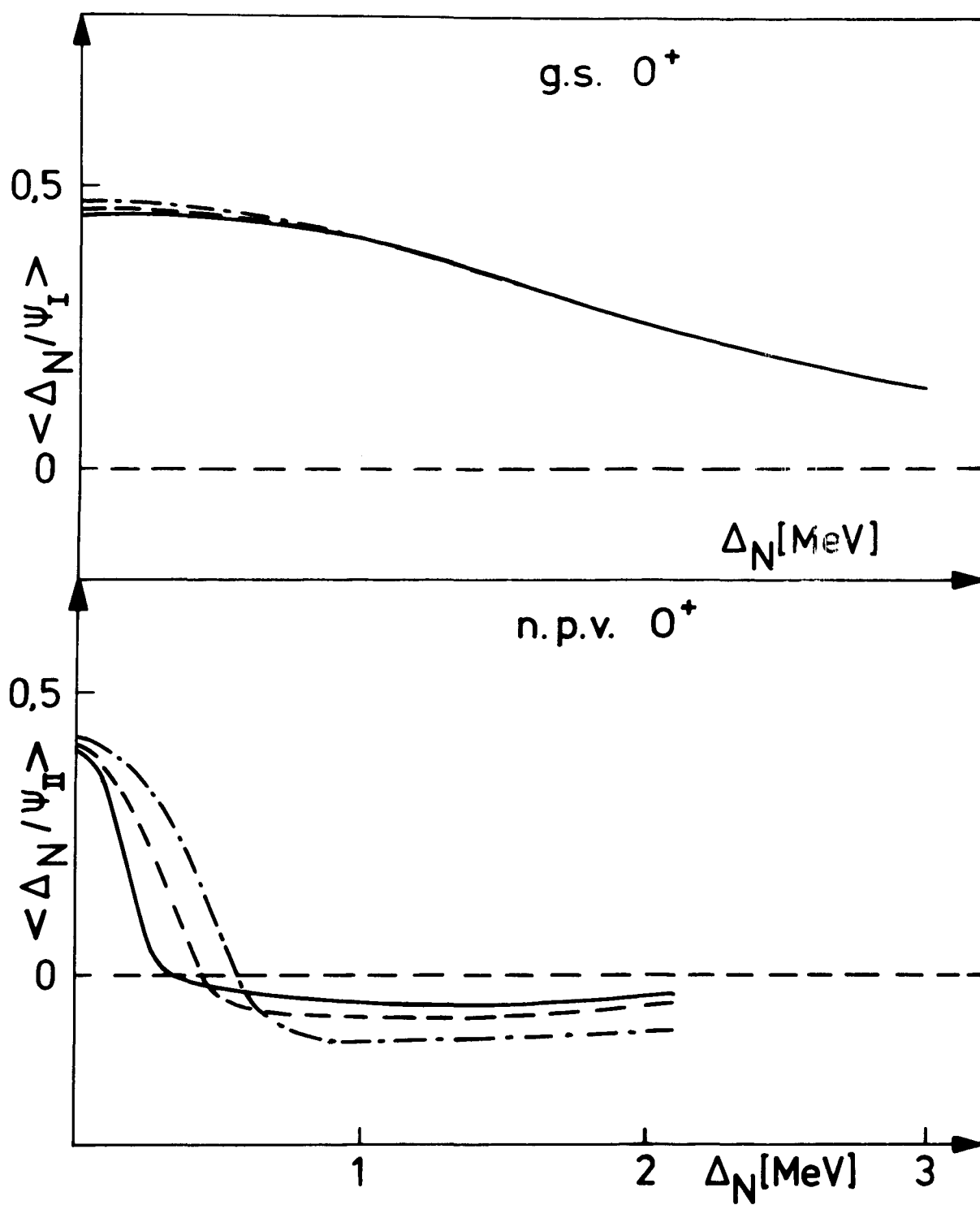
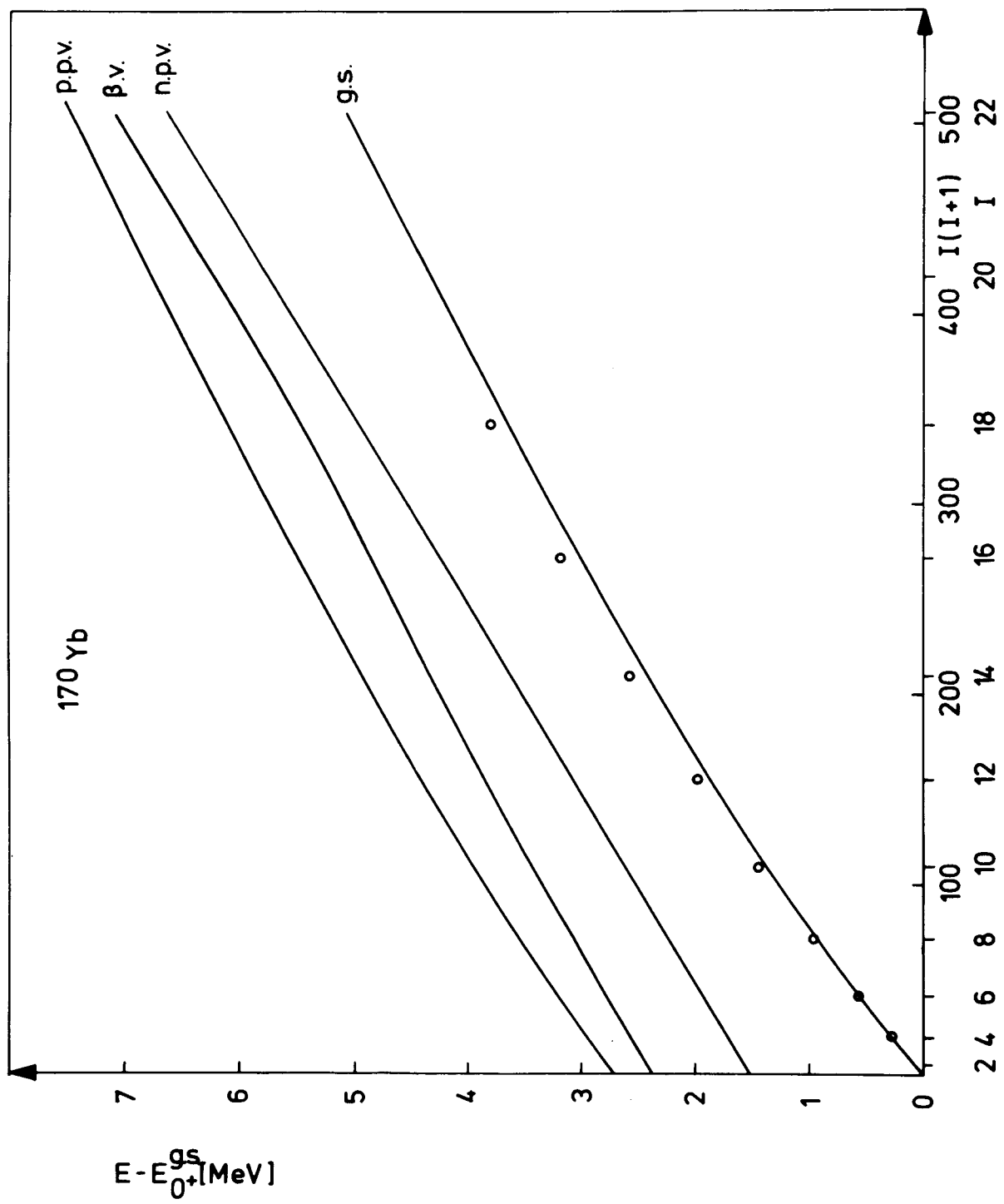


Fig. 17



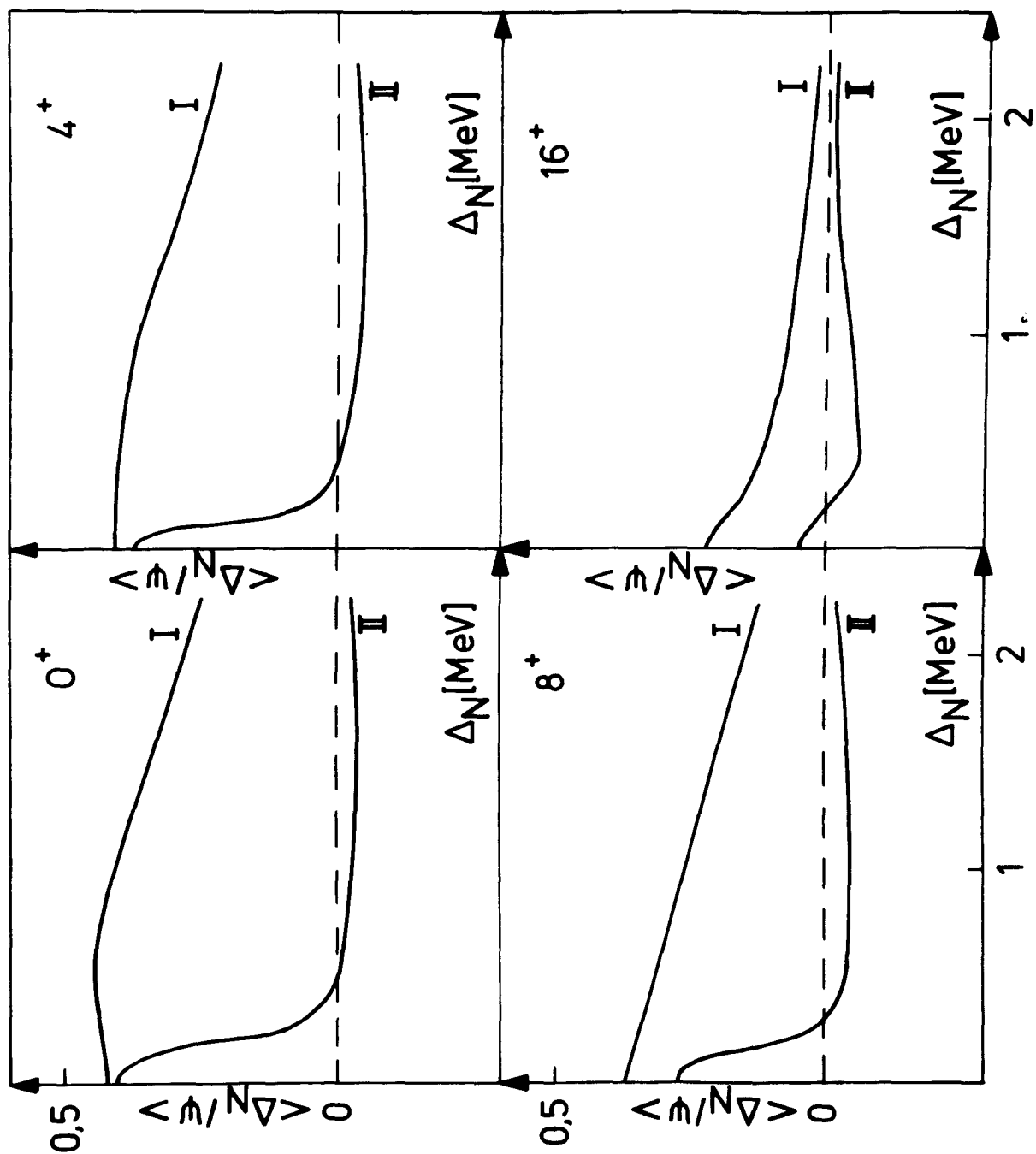


Fig. 19