



KFA

KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH
GESELLSCHAFT MIT BESCHRÄNKTER HAFTUNG
Zentralinstitut für Angewandte Mathematik

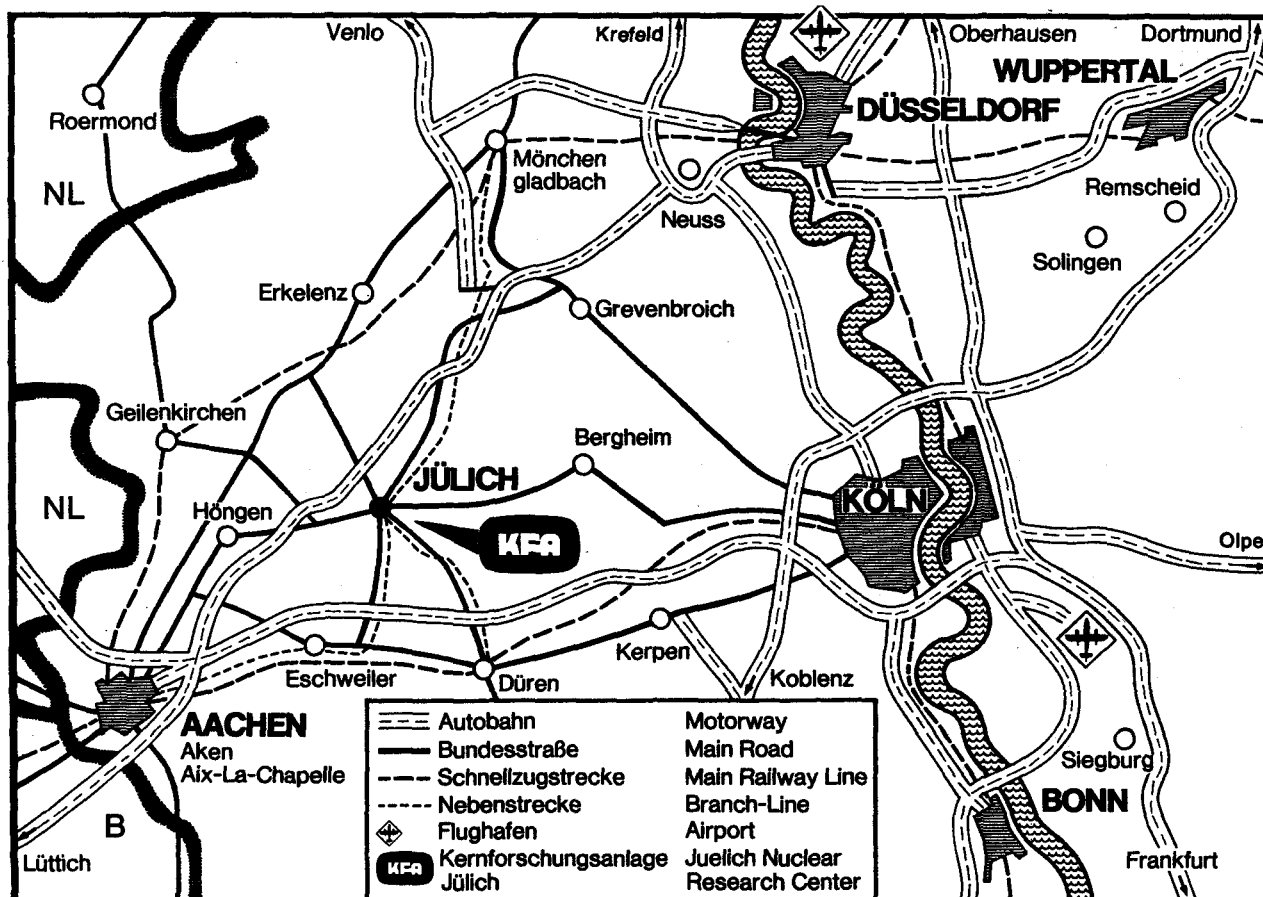
**Ein Differenzverfahren zur Behandlung der
Navier-Stokes-Gleichungen im
inkompressiblen, zylindersymmetrischen Fall**

von

H. Schlüsener, H. Gerlach und K. Vyska

Jül - 1267
Januar 1976

Als Manuskript gedruckt



Berichte der Kernforschungsanlage Jülich - Nr. 1267

Zentralinstitut für Angewandte Mathematik Jülich - 1267

Im Tausch zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH,
Jülich, Bundesrepublik Deutschland

Ein Differenzverfahren zur Behandlung der Navier-Stokes-Gleichungen im inkompressiblen, zylindersymmetrischen Fall

von

***H. Schlüsener, H. Gerlach und **K. Vyska**

* jetzt: Fachhochschule Aachen,
51 Aachen, Kurbrunnenstraße 22

** Institut für Medizin der Kernforschungsanlage Jülich GmbH
(Direktor: Prof. Dr. med. L. E. Feinendegen)
517 Jülich, Postfach 1913

1. Einleitung

Bei der Untersuchung der Strömungsverhältnisse im menschlichen Herzen ist es von großem Interesse, unter der Annahme, daß die Bewegungen des Blutes durch die Navier-Stokes-Gleichungen zuverlässig beschrieben werden, eine Lösung dieses nichtlinearen partiellen Differentialgleichungssystems zu vorgegebenen Anfangs- und Randbedingungen bestimmen zu können.

In erster Näherung wird für die Approximation der Strömung des Blutes im Vorhof des Herzens ein vereinfachtes rotationssymmetrisches Modell gewählt. Und zwar ist in diesem Modell der Vorhof durch ein erweitertes Rohr simuliert, wie es in Abb. 1 angegeben ist. Wegen der Zylindersymmetrie des Problems haben wir die Navier-Stokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten r, φ, z gewählt. Für den instationären Fall lauten diese Gleichungen (vgl. etwa [4]):

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right) \quad (1.1)$$

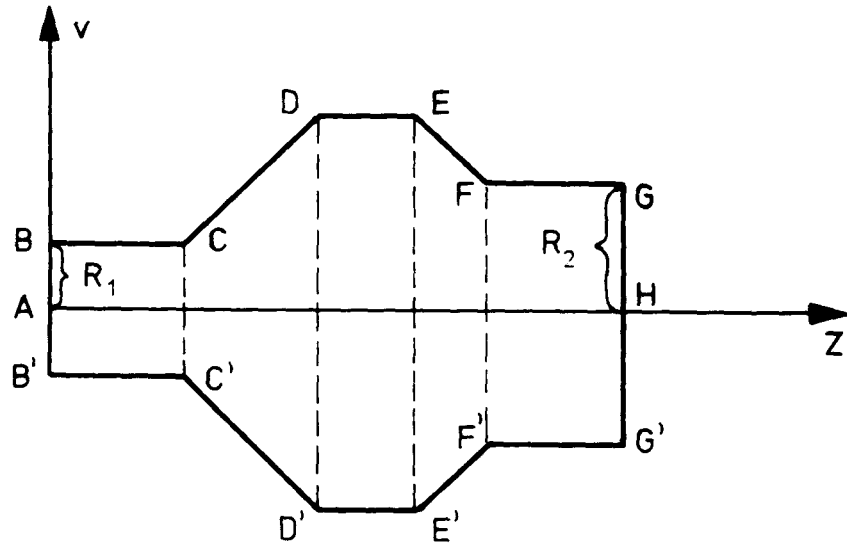
$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (1.2)$$

Dabei sind v_r, v_z die Geschwindigkeitskomponenten in r - und z -Richtung, p der Druck, t die Zeit und ρ bzw. ν Dichte bzw. kinematische Viskosität der Flüssigkeit, die als konstant angenommen werden. Die dritte Gleichung, der die Funktionen $v_r(r, z, t), v_z(r, z, t), p(r, z, t)$, von denen wir voraussetzen, daß sie mindestens dreimal stetig differenzierbar sind, genügen sollen, ist durch die Kontinuitätsgleichung gegeben:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (1.3)$$

Gesucht ist eine Lösung des Systems (1.1) bis (1.3) im Inneren des Gebietes, das durch die Abbildung 1 bestimmt ist. Die Zeichnung

Abb. 1



stellt eine Parallelprojektion des räumlichen Gebildes dar, in dem das Strömungsverhalten untersucht werden soll. Es sind $B'C'CD$, $D'E'ED$, $F'G'GF$ Grundrisse von Kreiszylindern und $C'D'DC$, $E'E'FE$ Projektionen von Kegelstümpfen. Der Rand, der als unbeweglich angenommen wird, gliedert sich in den oberen (B bis G) und unteren (B' bis G') sowie die Einfluß- und Ausflußöffnung (BB' und GG'). Es wird vorausgesetzt, daß über den unteren und oberen Rand weder Flüssigkeit in das Gebiet ein- noch austritt, d.h. es ist dort $v_r = 0$ und $v_z = 0$. Für die Eintritts- und Ausflußöffnung wird unterstellt, daß das Hagen-Poiseuille-Gesetz für Rohrströmung gilt, d.h., es ist auf BB' bzw. GG' $v_r = 0$ und (vgl. [4])

$$v_z = - \frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dz} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (1.4)$$

zu setzen. Dabei bedeuten $\mu = \nu \cdot \rho$ die dynamische Viskosität und dp/dz die konstante Druckableitung, während R den Radius der Grundfläche des linken oder rechten Abschlußzylinders darstellt.

Da die Randwerte für v_r und v_z von der Zeit t unabhängig sind, handelt es sich um ein stationäres Integrationsproblem. Zu seiner Lösung ist in der vorliegenden Arbeit ein Differenzverfahren angegeben.

2. Umformung des Randwertproblems.

2.1 Einführung von Strom- und Wirbelfunktion.

Zur Aufstellung von Differenzengleichungen für das in der Einleitung geschilderte Randwertproblem gehen wir den entsprechenden Weg wie J. FROMM (vgl.[3]) im Falle der Navier-Stokes-Gleichungen in kartesischen Koordinaten. Wir führen durch

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.1)$$

die Stromfunktion ψ und durch

$$\omega = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (2.2)$$

die Wirbelfunktion ω ein. Dabei stellt (2.2) die in Richtung wachsender φ weisende Komponente des Rotationsvektors in Zylinderkoordinaten dar.

Durch Umformung erhalten wir mit (2.1) und (2.2) aus dem System (1.1) bis (1.3) zwei Gleichungen für die Funktionen ψ und ω . Setzen wir nämlich (2.1) in (2.2) ein, so ergibt sich

$$\omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.3)$$

und damit die erste der beiden Gleichungen für ψ und ω . Die zweite erhalten wir, indem wir (1.1) nach z ableiten, (1.2) nach r differenzieren und dann die gewonnenen Gleichungen voneinander subtrahieren. Dadurch fällt der Druck p heraus, und es ergibt sich nach kurzer Rechnung:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(v_r \omega)}{\partial r} + \frac{\partial(v_z \omega)}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - \frac{\omega}{r^2} \right) \quad (2.4)$$

In [3] werden die (2.1), (2.3) und (2.4) entsprechenden Gleichungen in kartesischen Koordinaten benutzt, um zu Differenzengleichungen zu gelangen. Wir gehen noch einen Schritt weiter und erhalten unter Berücksichtigung von (1.3) aus (2.4) die Gleichung

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\omega}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - \frac{\omega}{r^2} \right) \quad (2.5)$$

Damit haben wir aus den ursprünglich drei Gleichungen für die unbekannten Funktionen $v_r(r,z,t)$, $v_z(r,z,t)$ und $p(r,z,t)$ durch die Umformung also die beiden Differentialgleichungen (2.3) und (2.5) für die unbekannten Funktionen $\psi(r,z,t)$, $\omega(r,z,t)$ gewonnen.

Bevor wir nun mit ihrer Hilfe Differenzengleichungen für das Innere unseres Integrationsgebietes aufstellen, wollen wir auch die Randbedingungen umformen.

2.2 Randbedingungen für Strom- und Wirbelfunktion.

Auf den Geradenstücken BB' und GG' der Abbildung 1 gilt $v_r = 0$ und die Gleichung (1.4). Daraus ergibt sich mit (2.1)

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -r \cdot v_z = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 r - r^3); \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

Durch Integration erhalten wir

$$\psi = \frac{1}{8\mu} \frac{dp}{dz} r^2 \left(R^2 - \frac{r^2}{2} \right) + C, \quad (2.6)$$

wobei C eine Konstante ist. Da aber die Lösung des Systems (2.3) und (2.5) bezüglich ψ sowieso nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, können wir C beliebig wählen. In der Folge wird C gleich Null gesetzt.

Um nun noch ψ auf dem oberen bzw. unteren Rand unseres Gebietes zu bestimmen, beachten wir, daß dort $v_r = 0$ und $v_z = 0$ gilt. Daraus folgt, daß die partiellen Ableitungen von ψ nach z und r verschwinden. Die Ableitung von ψ in Richtung des Randes ist daher gleich Null. Mit (2.6) können wir deshalb ψ auf dem oberen und unteren Rand zu

$$\psi = \frac{1}{16\mu} \frac{dp}{dz} \bigg|_{z=0} R_1^4 \quad (2.7)$$

setzen. Da die Stromlinien dadurch definiert sind, daß auf ihnen die Stromfunktion ψ gleich einer Konstanten ist, stellen der obere und der untere Rand also Stromlinien unseres Problems dar.

Aufgrund der Symmetrie des Randwertproblems können wir uns auf das Integrationsgebiet oberhalb der z-Achse beschränken. Dadurch wird aber die z-Achse zum Rand, und es sind Bedingungen für ψ und ω auf ihr erforderlich. Um diese Bedingungen aufstellen zu können, berücksichtigen wir die Gleichungen

$$v_r(-r, z, t') = -v_r(r, z, t); \quad v_z(-r, z, t') = v_z(r, z, t') \quad (2.8)$$

zu einem festen Zeitpunkt t' .

Daraus folgt, wenn wir die Stetigkeit von v_r beachten,

$$v_r(0, z, t') = 0$$

und damit

$$\frac{\partial v_r(0, z, t')}{\partial z} = 0.$$

Mit Hilfe der zweiten Gleichung von (2.8) ergibt sich

$$\frac{\partial v_z(0, z, t')}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial v_z(0, z, t')}{\partial r} = 0$$

Wegen (2.2) erhalten wir daher

$$\omega(0, z, t') = 0. \quad (2.9)$$

Diese Beziehung folgt auch daraus, daß die Wirbelfunktion ω bezüglich r eine ungerade Funktion darstellt; es ist nämlich

$$\begin{aligned} \omega(-r, z, t') &= \frac{\partial v_r(-r, z, t')}{\partial z} - \frac{\partial v_z(-r, z, t')}{\partial r} \\ &= -\frac{\partial v_r(r, z, t')}{\partial z} + \frac{\partial v_z(r, z, t')}{\partial r} \end{aligned}$$

und mithin

$$\omega(-r, z, t') = -\omega(r, z, t'). \quad (2.10)$$

Eine Stromlinie ist durch $\psi = \text{const.}$ charakterisiert. Bilden wir das totale Differential

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0$$

und berücksichtigen (2.1), so ergibt sich

$$-r v_z dr + r v_r dz = 0$$

und daraus für $r \neq 0$

$$\frac{dr}{dz} = \frac{v_r}{v_z}$$

D.h., die Richtung der Tangente an eine Stromlinie ist gleich der Strömungsrichtung in dem Berührungspunkt der Tangente. Daraus folgt nun mit (2.8) und unter Beachtung der Symmetrie der ψ -Werte auf dem Rand (vgl. (2.6)), daß die Stromlinien bezüglich der z -Achse symmetrisch liegen. Mithin muß die z -Achse selbst Stromlinie und ihr Funktionswert

$$\psi(0, z, t') = 0 \quad (2.11)$$

sein; außerdem erhalten wir für die Stromfunktion die Beziehung

$$\psi(-r, z, t') = \psi(r, z, t'). \quad (2.12)$$

3. Aufstellung von Differenzengleichungen.

Da es sich bei dem vorliegenden Randwertproblem um ein stationäres handelt, müssen wir zur Lösung des Systems (2.3), (2.5) in der Gleichung (2.5)

$\partial \omega / \partial t = 0$ setzen. Überzieht man das Integrationsgebiet der Abbildung 1 mit einem rechtwinkligen Gitternetz aus äquidistanten Linien, die parallel zur z- bzw. r-Achse verlaufen, so erhält man Näherungswerte für die unbekannten ψ - und ω -Werte in den Gitterpunkten des Netzes, wenn man die Differentialquotienten in (2.3) und (2.5) durch Differenzenquotienten ersetzt und das entstehende Differenzengleichungssystem löst.

Für den Fall einer Rohrströmung, für den ja die exakte Lösung mit dem Hagen-Poiseuille-Gesetz bekannt ist, wurde ein Differenzengleichungssystem unter Berücksichtigung der entsprechenden Randbedingungen aufgestellt und iterativ gelöst. Das Ergebnis stimmte näherungsweise mit der exakten Lösung überein. - Das benutzte Differenzengleichungssystem wird hier nicht angegeben, da es als Spezialfall aus einem später aufzuführenden folgt. - Das numerische Verfahren konvergierte auch noch, wenn man eine minimale Erweiterung des Kreiszylinders im Sinne der Abbildung 1 vornahm. Waren die Maße der Erweiterung durch Kegelstümpfe jedoch in der Größenordnung des Radius des ursprünglichen Rohres, so versagte das angewandte Iterationsverfahren. Offenbar war für diesen Fall das Strömungsverhalten nicht laminar, sondern turbulent, und der Startvektor der Iteration lag dann zu weit vom Lösungsvektor entfernt, so daß das Verfahren nicht konvergierte.

Um nun für das interessierende Gebiet der Abbildung 1 eine Näherungslösung angeben zu können, wird folgendermaßen verfahren: Wir unterstellen laminares Verhalten der Strömung zum Zeitpunkt Null, wobei der Verlauf der Strömung im Mittelteil des Integrationsgebietes als proportionale Erweiterung der Hagen-Poiseuille-Strömung in den Abschlußzylindern angenommen wird. - Die Berechnung dieser Ausgangslösung für ψ und ω wird im Abschnitt 3.3 gegeben. - Auf diese Startlösung wenden wir nun ein dem Differentialgleichungssystem (2.3), (2.5) für den instationären Fall entsprechendes Differenzengleichungssystem an. Die Startlösung wird also mit wachsender Zeit verändert, dabei kann angenommen werden, daß nach einer Reihe von Zeitschriften stationäres Verhalten eintritt.

3.1 Differenzengleichungen in den inneren Gitterpunkten.

Das Integrationsgebiet der Abbildung 1 wird mit einem rechteckigen Gitter der Maschenweiten h_1, h_2 überzogen; die Gitterpunkte besitzen die Koordinaten

$$z_i = i h_1; r_j = j h_2 \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots).$$

Das Gitter wird so gelegt, daß die von Gitterlinien aus dem gradlinigen Rand ausgeschnittenen Punkte - wegen des dann einfacher aufzustellenden Differenzengleichungssystems - mit Gitterpunkten zusammenfallen (vgl. Abbildung 2). Die Näherungswerte für ψ und ω an einer Gitterstelle

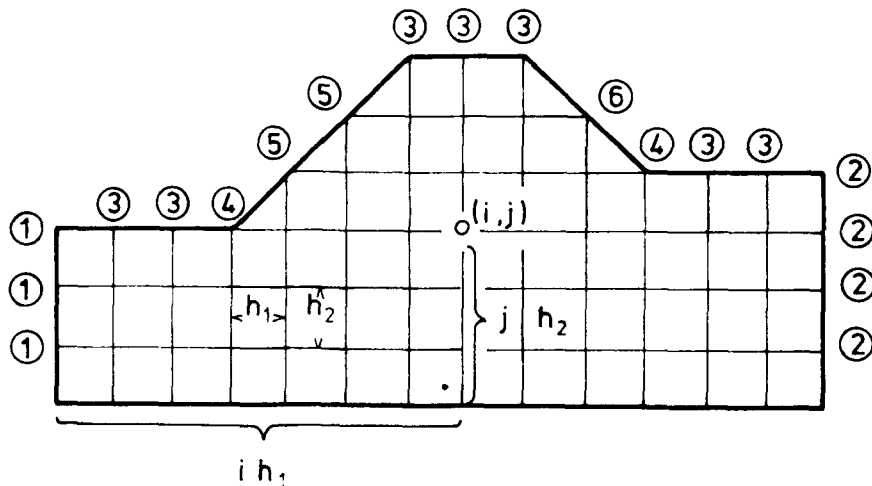


Abb.2

(z_i, r_j) werden durch Anhängen von Indizes i, j bezeichnet; z.B. bedeutet $\psi_{i,j}$ den Näherungswert der gesuchten Funktion ψ an der Stelle $z = z_i, r = r_j$. Da wir die Näherungslösung in Abhängigkeit von der Zeit berechnen wollen, müssen wir einen dritten Index k anhängen, der uns die Zahl der zurückgelegten Zeitschritte h_3 vom Zeitpunkt 0 angibt:

$$t_k = k \cdot h_3 \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Dann bedeuten also $\psi_{i,j,k}$ und $\omega_{i,j,k}$ Näherungswerte der unbekannten Funktionen $\psi(z, r, t)$ und $\omega(z, r, t)$ in den Gitterpunkten (z_i, r_j) zum Zeitpunkt t_k .

Ersetzen wir nun nach den bekannten Formeln die Ableitungen in der Differentialgleichung (2.5) durch Differenzenquotienten (vgl. z.B.[2] oder [5]), so ergibt sich mit

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2h_1} (\psi_{i+1,j,k+1} - \psi_{i-1,j,k+1}) \\ \beta &= \frac{1}{2h_2} (\psi_{i,j+1,k+1} - \psi_{i,j-1,k+1})\end{aligned}\tag{3.1}$$

die Differenzengleichung

$$\begin{aligned}& \frac{1}{h_3} (\omega_{i,j,k+1} - \omega_{i,j,k}) + \frac{\alpha}{2 h_2 r_j} (\omega_{i,j+1,k+1} - \omega_{i,j-1,k+1}) \\& - \frac{\beta}{2 h_1 r_j} (\omega_{i+1,j,k+1} - \omega_{i-1,j,k+1}) - \frac{\alpha}{r_j^2} \omega_{i,j,k+1} \\& = v \left[\frac{1}{h_2^2} (\omega_{i,j+1,k+1} - 2\omega_{i,j,k+1} + \omega_{i,j-1,k+1}) \right. \\& + \frac{1}{2h_2 r_j} (\omega_{i,j+1,k+1} - \omega_{i,j-1,k+1}) \\& \left. + \frac{1}{h_1^2} (\omega_{i+1,j,k+1} - 2\omega_{i,j,k+1} + \omega_{i-1,j,k+1}) - \frac{1}{r_j^2} \omega_{i,j,k+1} \right]\end{aligned}\tag{3.2}$$

Anstelle der Differentialgleichung (2.3) erhalten wir

$$\begin{aligned}\omega_{i,j,k+1} &= \frac{1}{h_1^2 r_j} (\psi_{i+1,j,k+1} - 2\psi_{i,j,k+1} + \psi_{i-1,j,k+1}) \\& + \frac{1}{h_2^2 r_j} (\psi_{i,j+1,k+1} - 2\psi_{i,j,k+1} + \psi_{i,j-1,k+1}) \\& - \frac{1}{2 h_2 r_j^2} (\psi_{i,j+1,k+1} - \psi_{i,j-1,k+1}).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Die Gleichungen (3.2) und (3.3) gelten für jeden Gitterpunkt im Inneren des Integrationsgebietes; wir erhalten daher ein nichtlineares Gleichungssystem mit den Unbekannten $\psi_{i,j,k+1}$ und $\omega_{i,j,k+1}$. Der Wert $\omega_{i,j,k}$ ist natürlich aus dem k-ten Zeitschritt bzw. aus der Startlösung bekannt. Das genannte Gleichungssystem lösen wir iterativ entsprechend dem Gauß-Seidel-Verfahren bei linearen Systemen (vgl. z.B. [5]). Dazu wird angenommen, daß eine erste Näherung für die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems vorliegt, nämlich

$$\psi_{i,j,k+1}^{(1)} = \psi_{i,j,k}, \quad \omega_{i,j,k+1}^{(1)} = \omega_{i,j,k}.$$

Daraus berechnen wir eine zweite $\psi_{i,j,k+1}^{(2)}, \omega_{i,j,k+1}^{(2)}$, usw. Wir nehmen an, wir hätten die n-te Näherung bestimmt, dann berechnet sich die (n+1)-te mit Hilfe der folgenden Gleichungen (3.4), (3.5), die wir aus (3.2) und (3.3) durch Auflösung nach $\omega_{i,j,k+1}$ bzw. $\psi_{i,j,k+1}$ erhalten:

$$\omega_{i,j,k+1}^{(n+1)} = \frac{D}{C} \quad (3.4)$$

mit

$$C = \frac{1}{h_3} - \frac{\alpha}{r_j^2} + \frac{2}{h_2^2} \frac{v}{r_j} + \frac{2}{h_1^2} \frac{v}{r_j} + \frac{v}{r_j^2} \quad ;$$

$$D = \left(\frac{v}{h_1^2} - \frac{\beta}{2h_1 r_j} \right) \omega_{i-1,j,k+1}^{(n+1)} + \left(-\frac{\alpha}{2h_2 r_j} + \frac{v}{h_2^2} - \frac{v}{2h_2 r_j} \right) \omega_{i,j-1,k+1}^{(n+1)}$$

$$+ \left(\frac{v}{h_1^2} + \frac{\beta}{2h_1 r_j} \right) \omega_{i+1,j,k+1}^{(n)} + \left(-\frac{\alpha}{2h_2 r_j} + \frac{v}{h_2^2} + \frac{v}{2h_2 r_j} \right) \omega_{i,j+1,k+1}^{(n)} \quad ;$$

$$\alpha = \frac{1}{2h_1} \left(\psi_{i+1,j,k+1}^{(n)} - \psi_{i-1,j,k+1}^{(n+1)} \right) \quad ;$$

$$\beta = \frac{1}{2h_2} \left(\psi_{i,j+1,k+1}^{(n)} - \psi_{i,j-1,k+1}^{(n+1)} \right) \quad ;$$

und

$$\psi_{i,j,k+1}^{(n+1)} = \frac{h_1^2 h_2^2}{2(h_1^2 + h_2^2)} \left\{ \frac{1}{h_1^2} \psi_{i-1,j,k+1}^{(n+1)} + \left(\frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{2h_2 r_j} \right) \psi_{i,j-1,k+1}^{(n+1)} \right. \\ \left. + \frac{1}{h_1^2} \psi_{i+1,j,k+1}^{(n)} + \left(-\frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{2h_2 r_j} \right) \psi_{i,j+1,k+1}^{(n)} - r_j \cdot \omega_{i,j,k+1}^{(n+1)} \right\} \quad (3.5)$$

Dabei gehen wir unter Anwendung von (3.4) und (3.5) zeilenweise - bei $z_1 = h_1$, $r_1 = h_2$ beginnend - sämtliche inneren Gitterpunkte durch. Aus (3.4) und (3.5) liest man ab, daß die schon verbesserten Werte in den linken und unteren Nachbargitterpunkten sofort weiterverwendet werden und daß nach Berechnung von $\omega_{i,j,k+1}^{(n+1)}$ der Wert $\psi_{i,j,k+1}^{(n+1)}$ bestimmt wird, bevor man zum nächsten Gitterpunkt übergeht.

Bei der Iteration müssen in den dem Rand benachbarten Gitterpunkten natürlich die auf dem Rand vorgegebenen Bedingungen berücksichtigt werden; dem wenden wir uns jetzt zu.

3.2 Einarbeitung der Randbedingungen in das Iterationsverfahren.

Für die der z-Achse benachbarten Gitterpunkte hat man zu berücksichtigen, daß auf der z-Achse nach (2.9) und (2.11) sowohl ω als auch ψ verschwindet. Ebenso unproblematisch ist das Vorgehen bezüglich der ψ -Werte in allen anderen Gitterpunkten, die dem Rand benachbart sind. Es ist nämlich in den Gitterpunkten auf dem Rand, die in Abbildung 2 mit ① bezeichnet wurden, nach (2.6)

$$\psi(r_j) = \frac{1}{8\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right)_1 r_j^2 \left(R_1^2 - \frac{r_j^2}{2} \right) \quad (3.6)$$

und in den Rand-Gitterpunkten ②

$$\psi(r_j) = \frac{1}{8\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right)_2 r_j^2 \left(R_2^2 - \frac{r_j^2}{2} \right). \quad (3.7)$$

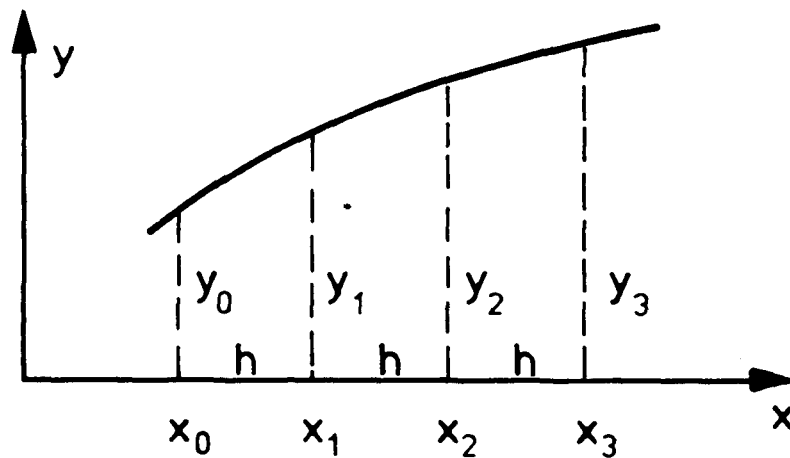
Für die übrigen Rand-Gitterpunkte, also längs des ganzen oberen Randes des Gebietes, gilt nach (2.7)

$$\psi = \frac{1}{16\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right)_1 R_1^4. \quad (3.8)$$

Für die Rand-Gitterpunkte ① bis ⑥ ist dagegen nichts über die Werte der Funktion ω bekannt. Wir können jedoch annehmen, daß für die Wirbel-funktion ω auch auf dem Rand die Gleichung (2.2) und damit (2.3) gilt. Wir verwenden daher auf dem Rand unter Berücksichtigung der dort vorgegebenen Geschwindigkeiten der Strömung die (2.3) entsprechende Differenzgleichung, in der wir allerdings nur einseitige Differenzenquotienten benutzen können.

Selbstverständlich benötigen wir lediglich Differenzenausdrücke für die Differentialquotienten zweiter Ordnung, da die erste Ableitung von ψ nach r in (2.3) durch die vorgegebene Geschwindigkeit ersetzt werden kann.

Abb. 3



Zu ihrer Bestimmung machen wir für $y''(x_0)$ den Ansatz (siehe Abb. 3)

$$y_0'' = c_0 y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_0', \quad (3.9)$$

mit den zu berechnenden Konstanten $c_0, \dots, c_4$. Durch Einsetzen der abgebrochenen Taylorentwicklungen

$$y_1 = y_0 + ih y_0' + \frac{(ih)^2}{2} y_0'' + \frac{(ih)^3}{3!} y_0''' + \frac{(ih)^4}{4!} y_0^{IV} \quad (3.10)$$

für y_1 , y_2 und y_3 in (3.9) und Seitenvergleich erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}c_0 + c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\c_1 + 2c_2 + 3c_3 + c_4 &= 0 \\c_1 + 4c_2 + 9c_3 &= \frac{2}{h^2} \\c_1 + 8c_2 + 27c_3 &= 0 \\c_1 + 16c_2 + 81c_3 &= 0\end{aligned}\tag{3.11}$$

Durch Einsetzen der Lösungen dieses Systems ergibt sich die gesuchte Näherungsformel

$$y_0'' = \frac{1}{18h^2} (-85y_0 + 108y_1 - 27y_2 + 4y_3 - 66y_0')\tag{3.12}$$

Entsprechend erhält man, wenn die linken Nachbarwerte y_{-1} , y_{-2} , y_{-3} benutzt werden,

$$y_0'' = \frac{1}{18h^2} (-85y_0 + 108y_{-1} - 27y_{-2} + 4y_{-3} + 66y_0')\tag{3.13}$$

Für die Randpunkte ① und ② können wir für die in (2.3) auftretende zweite Ableitung nach r noch eine Beziehung aus (2.6) herleiten; es gilt nämlich dort

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 - 3r^2).\tag{3.14}$$

Mit (3.12), (3.13) und (3.14) ergeben sich dann für die ω -Werte der Randpunkte ① bis ⑥ die folgenden Iterationsgleichungen:

Randpunkte ①

$$\omega_{i,j,k+1}^{(n+1)} = \frac{1}{r_j} \left[\frac{1}{18h_1^2} \left\{ -85 \psi_{i,j}^{(n)} + 108 \psi_{i+1,j,k+1}^{(n)} - 27 \psi_{i+2,j,k+1}^{(n)} + 4 \psi_{i+3,j,k+1}^{(n)} \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{4\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right)_1 (R_1^2 - 3 r_j^2) + (v_z)_{i,j} \right]$$

Randpunkte ②

$$\omega_{i,j,k+1}^{(n+1)} = \frac{1}{r_j} \left[\frac{1}{18h_1^2} \left\{ -85 \psi_{i,j}^{(n+1)} + 108 \psi_{i-1,j,k+1}^{(n+1)} - 27 \psi_{i-2,j,k+1}^{(n+1)} + 4 \psi_{i-3,j,k+1}^{(n+1)} \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{4\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right)_2 (R_2^2 - 3 r_j^2) + (v_z)_{i,j} \right]$$

Randpunkte ③

$$\omega_{i,j,k+1}^{(n+1)} = \frac{1}{r_j} \left[\frac{1}{18h_2^2} (-85 \psi_{i,j}^{(n+1)} + 108 \psi_{i,j-1,k+1}^{(n+1)} \right. \\ \left. - 27 \psi_{i,j-2,k+1}^{(n+1)} + 4 \psi_{i,j-3,k+1}^{(n+1)}) \right]$$

Randpunkte ④

$$\omega_{i,j,k+1}^{(n+1)} = \frac{1}{r_j} \left[\frac{1}{h_1^2} (\psi_{i+1,j,k+1}^{(n)} - 2 \psi_{i,j}^{(n)} + \psi_{i-1,j,k+1}^{(n+1)}) + \frac{1}{18h_2^2} (-85 \psi_{i,j}^{(n+1)} \right. \\ \left. + 108 \psi_{i,j-1,k+1}^{(n+1)} - 27 \psi_{i,j-2,k+1}^{(n+1)} + 4 \psi_{i,j-3,k+1}^{(n+1)}) \right]$$

Randpunkte ⑤

$$\omega_{i,j,k+1}^{(n+1)} = \frac{1}{r_j} \left[\frac{1}{18h_1^2} (-85 \psi_{i,j}^{(n)} + 108 \psi_{i+1,j,k+1}^{(n)} - 27 \psi_{i+2,j,k+1}^{(n)} + 4 \psi_{i+3,j,k+1}^{(n)}) \right. \\ \left. + \frac{1}{18h_2^2} (-85 \psi_{i,j}^{(n+1)} + 108 \psi_{i,j-1,k+1}^{(n+1)} - 27 \psi_{i,j-2,k+1}^{(n+1)} + 4 \psi_{i,j-3,k+1}^{(n+1)}) \right]$$

Randpunkte ⑥

$$\omega_{i,j,k+1}^{(n+1)} = \frac{1}{r_j} \left[\frac{1}{18h_1^2} (-85 \psi_{i,j}^{(n+1)} + 108 \psi_{i-1,j,k+1}^{(n+1)} - 27 \psi_{i-2,j,k+1}^{(n+1)} + 4 \psi_{i-3,j,k+1}^{(n+1)}) \right. \\ \left. + \frac{1}{18h_2^2} (-85 \psi_{i,j}^{(n+1)} + 108 \psi_{i,j-1,k+1}^{(n+1)} - 27 \psi_{i,j-2,k+1}^{(n+1)} + 4 \psi_{i,j-3,k+1}^{(n+1)}) \right]$$

Dabei bedeuten die in den Formeln auftretenden $\psi_{i,j}$ die nach (3.6) bis (3.8) berechneten Werte für die Stromfunktion ψ in dem jeweiligen Randpunkt, während $(v_z)_{i,j}$ die in diesem Punkt vorgegebene Geschwindigkeit darstellt.

3.3 Startwerte für das Differenzenverfahren.

Zu Beginn des Abschnitts 3 hatten wir bemerkt, daß wir zur Berechnung der Startwerte (also der ψ - und ω -Werte zum Zeitpunkt 0) laminares Strömungsverhalten voraussetzen wollen. Wir präzisieren diese Aussage: Wir nehmen an, die Stromfunktion (2.6), die ja allgemein nur für eine laminare Strömung in einem Kreiszylinder richtig ist, gelte unter entsprechender Anpassung auch für unser Integrationsgebiet. Dazu haben wir die Stromfunktion

$$\psi(r) = \frac{d_1}{8\mu} r^2 \left(R_1^2 - \frac{r^2}{2} \right) \quad ; \quad d_1 = \left(\frac{dp}{dz} \right)_1 \quad (3.15)$$

derart einer linearen Transformation zu unterwerfen, daß ψ den Wert (man vgl. (27))

$$\frac{d_1}{16\mu} R_1^4$$

erst an der Stelle $r = B$ annimmt, wobei B in Abhängigkeit von z die Höhe des Randes des Integrationsgebietes über der z -Achse angibt. Mithin müssen wir r in (3.15) durch $R r/B$ ersetzen und erhalten

$$\psi(r, z) = \frac{d_1}{8\mu} \frac{R_1^4}{B(z)^4} r^2 \left(B(z)^2 - \frac{r^2}{2} \right) \quad (3.16)$$

Diese fiktive Stromfunktion besitzt natürlich ein anderes Wirbelverhalten als die Laminarströmung im Kreiszylinder. Die aus (1.4) und (2.2) folgende Wirbelfunktion

$$\omega = - \frac{d_1}{2\mu} r$$

für die Hagen-Poiseuille-Strömung gilt daher nur für die Randpunkte ① und (unter Änderung der Druckableitung) für die Randpunkte ②. Für die übrigen Gitterpunkte des Randes und für sämtliche inneren Gitterpunkte verschaffen wir uns Startwerte für ω , indem wir die Differentialgleichung (2.3) durch die Differenzengleichung ersetzen. D.h., wir berechnen $\omega_{i,j}$ für die Randpunkte ③ bis ⑥ nach den im Abschnitt 3.2 angegebenen Formeln, in denen natürlich der Zeitindex k und der Iterationsindex n zu streichen ist. Für die inneren Gitterpunkte verwenden wir die Formel

$$\omega_{i,j} = \frac{1}{r_j} \left[\frac{1}{h_1^2} (\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}) + \frac{1}{h_2^2} (\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}) - \frac{1}{2h_2 r_j} (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) \right] .$$

4. Beispiele zum Differenzenverfahren.

Nach Abschnitt 1 soll für unser Problem die Geschwindigkeit auf dem Rand des Integrationsgebietes vorgegeben sein. Da auf dem oberen und unteren Rand sowohl v_r als auch v_z verschwindet, bleibt nur die Geschwindigkeit v_z für die Eintritts- und Ausflußöffnung nach (1.4) festzulegen. Wir geben neben der maximalen Geschwindigkeit v_{zmax} beim Eintritt in das Integrationsgebiet noch die kinematische Viskosität ν und die Dichte ρ vor. Die dynamische Viskosität erhält man dann aus $\mu = \nu \cdot \rho$. Nun fehlt nur noch die konstante Druckableitung $(dp/dz)_1 = d_1$ für die Einfluß- und der entsprechende Wert d_2 für die Ausflußöffnung.

Für d_1 ergibt sich aus (1.4)

$$d_1 = - \frac{4\mu}{R_1^2} v_{zmax} \quad . \quad (4.1)$$

Zur Berechnung von d_2 beachten wir, daß die ins Integrationsgebiet eintretende Flüssigkeitsmenge je Zeiteinheit gleich der austretenden sein muß.

Daraus folgt wegen

$$2\pi R_i \int_0^{R_i} \int_0^{2\pi} \frac{-d_i}{4\mu} (R_i^2 - r^2) r dr d\varphi = - \frac{\pi d_i}{8\mu} R_i^4$$

für d_2 die Beziehung

$$d_2 = \frac{d_1 R_1^4}{R_2^4} \quad . \quad (4.2)$$

Mithin liegt auch die Geschwindigkeitsverteilung für die Ausflußöffnung fest.

Zur Beurteilung einer Strömung wird häufig eine dimensionslose Größe herangezogen: die Reynoldssche Zahl, die durch

$$Re = \frac{2 R v_z}{\nu} \quad (4.3)$$

definiert ist. Da diese Zahl im allgemeinen in jedem Punkt des Strömungsfeldes einen anderen Wert aufweist, ist es zweckmäßig, zur Charakterisierung die für einen Querschnitt mittlere Reynoldszahl

$$\overline{Re} = \frac{2 R \bar{v}}{v}$$

zu benutzen. Mit

$$\bar{v} = \frac{1}{\pi R_1^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} \frac{-d_1}{4\mu} (R_1^2 - r^2) r dr d\varphi = -\frac{1}{2} \frac{d_1}{4\mu} R_1^2$$

und (4.1) ergibt sich für die Eintrittsöffnung

$$\overline{Re} = \frac{R_1 \cdot v_{zmax}}{v} . \quad (4.4)$$

Die Bilder des Anhangs zeigen für zwei Beispiele die Entwicklung der Strömung - gekennzeichnet durch ihre Stromlinien - von der Startlösung bis zur zeitlich konstanten, gesuchten Näherungslösung. Die zwei Fälle unterscheiden sich lediglich in der Geschwindigkeit beim Eintritt; die Abmessungen (Angaben in Abb. 4 in cm) sind dieselben, v bzw. ρ sind durch $0,24 \text{ cm}^2/\text{s}$ bzw. $1,0595 \text{ g/cm}^3$ und die Schrittweiten durch $h_1 = 0,2 \text{ cm}$, $h_2 = 0,1 \text{ cm}$ sowie $h_3 = 0,1 \text{ cm}$ gegeben.

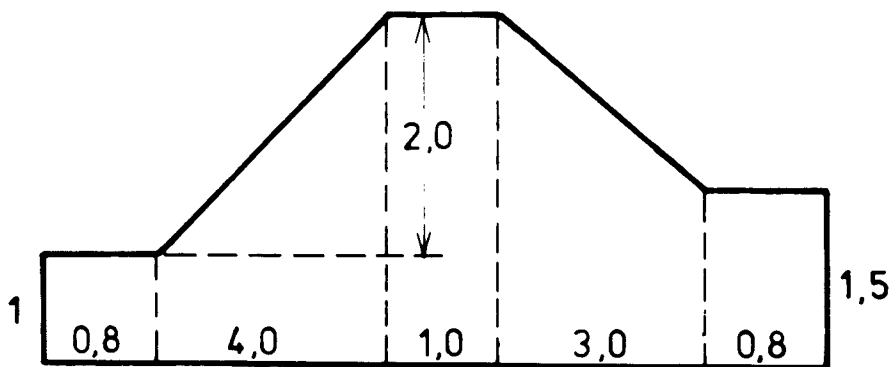


Abb. 4

Für das Beispiel 1 wurde die Geschwindigkeit $v_{z\max} = 5,625 \text{ cm/s}$ gewählt. Dem entspricht bezüglich der Eintrittsöffnung eine mittlere Reynoldszahl von $\overline{Re} = 23,4$. Die Bilder 1 bis 3 des Anhangs zeigen, daß bei der vorgegebenen Geschwindigkeit keine Wirbel auftraten, jedoch unterscheidet sich die nach 76 Sekunden erreichte Näherungslösung des Problems von der zum Zeitpunkt Null gewählten Startlösung. Da h_3 zu 0,1 Sekunden festgelegt wurde, waren also 76 Zeitschritte notwendig, um stationäres Verhalten zu erreichen. Die Zahl der Iterationsschritte innerhalb eines Zeitschritts schwankte beträchtlich: der Durchschnittswert aller 76 Zeitschritte betrug 215, während im Maximalfall 409 Iterationen nötig waren, bis sich die ψ - und ω -Werte im Rahmen der geforderten Genauigkeit nicht mehr veränderten. Bei ungefähr 1000 Gitterpunkten, d.h. bei etwa 2000 Unbekannten in dem zu lösenden nichtlinearen Gleichungssystem, sind diese Zahlen allerdings nicht überraschend, und das gilt auch für die Rechenzeit: für die Lösung dieses Beispiels wurden auf der Rechenanlage des Zentralinstituts für Angewandte Mathematik 46 Minuten benötigt. Dabei wurde das Iterationsverfahren innerhalb eines Zeitschritts abgebrochen, wenn der absolute Betrag der relativen Abweichung der ψ - und ω -Werte zweier aufeinanderfolgender Iterationsschritte für alle Gitterpunkte unterhalb der Schranke von 10^{-4} blieb. Die Näherungslösung des stationären Randwertproblems wurde als erreicht angesehen, wenn die Zahl der Iterationsschritte innerhalb eines Zeitschritts auf eins abgesunken war, weil dann die obige Genauigkeitsforderung auch hinsichtlich der Zeitschritte erfüllt ist.

Beim Beispiel 2 wurde die Geschwindigkeit $v_{z\max}$ zu $7,5 \text{ cm/s}$ festgelegt. Die mittlere Reynoldszahl für die Eintrittsöffnung ergibt sich zu 31,2. Die Bilder 4 bis 11 des Anhangs zeigen, daß die ursprünglich als laminar angenommene Strömung mit wachsender Zeit in den turbulenten Zustand übergeht. Zwischen dem 7-ten und 16-ten Zeitschritt tritt eine Ablösung der Strömung ein, und aus dieser Ablösung bildet sich ein Wirbel in der Erweiterung des Kreiszylinders. Nach 73 Zeitschritten war die Genauigkeitsforderung an die ψ - und ω -Werte zweier aufeinanderfolgender Zeitschritte erfüllt. Im Durchschnitt wurden 220 Iterationsschritte je Zeitschritt benötigt, während im Maximalfall die Schrittzahl bei 511 lag. Die Rechenzeit betrug 44 Minuten CPU-Zeit.

3. Programmübersicht und Programmliste

Das Programm zur Berechnung der Stromlinien wurde in PL/1 (Optimizer Compiler) geschrieben. Der Kernspeicherbedarf beträgt 420 K.

Da oft nicht vorausschaubar ist, wieviel Zeitschritte und Iterationen notwendig sind, wurde ein einfacher Mechanismus eingebaut. Wenn nur noch ein Rest an CPU-Zeit vorhanden ist, dann wird die zuletzt berechnete Iteration auf ein Magnetband geschrieben. Bei einem nachfolgenden Lauf wird an dieser Stelle wieder aufgesetzt. Das Programm berechnet dann nicht die Anfangswerte neu, sondern liest die schon berechneten Werte von Band ein.

Die Berechnung der verschiedenen Gitterpunkte erfolgt in internen Prozeduren.

Zur Auswertung der berechneten Daten wurde ein Plotprogramm angeschlossen.

Nach jedem Zeitschritt erstellt das Plotprogramm ein 35 mm Mikrofilmbild. Die Stromlinien werden mit Hilfe eines Höhenlinienprogrammes auf dem Calcomp 1670 Mikrofilmplotter gezeichnet.

Eingabedaten:

Es wurden 3 Datenkarten formatfrei eingelesen:

- | | | |
|----------|-----|--|
| 1. Karte | H1 | Schrittweite z-Achse |
| | H2 | Schrittweite r-Achse |
| | H3 | Zeitschritt in Sekunden |
| | R1 | Radius der Einflussöffnung |
| | R2 | Radius der Ausflussöffnung |
| 2. Karte | EPS | Genauigkeitsforderung |
| | NUE | Kinematische Viskosität der Flüssigkeit |
| | MUE | dynamische " " " |
| 3. Karte | | Die Variablen M1, M2, M3, M4, M enthalten die Anzahl der Gitterpunkte in z-Richtung. N, N1 und NM stellen die Anzahl der Gitterpunkte in r-Richtung dar. |

SOURCE LISTING

STMT LEV NT

```

1      0  NZEIT: PROC OPTIONS(MAIN);
      /* EIN DIFFERENZENVERFAHREN ZUR BEHANDLUNG DER NAVIER-STOKES-
      GLEICHUNGEN IM INKOMPRESSIBLEN,ZYLINDRISCHEN FALL */
2      1  0  OPEN FILE(SYSPRINT) LINESIZE(130);
3      1  0  DCL PLTSTRT ENTRY(CHAR(2),CHAR(7)),
      PLTSCLC ENTRY(FLOAT,FLOAT,FLOAT,FLOAT),
      PLTHANL ENTRY(.,.)FLOAT,(.)FLOAT,(.)FLOAT,(.)BIN FIXED(31),
      CHAR(5)),
      PLTJMP ENTRY(FLOAT,FLOAT),
      PLTORW ENTRY(FLOAT,FLOAT),
      PLTNXTF ENTRY,
      PLTEND ENTRY;
4      1  0  DCL A CHAR(1);
5      1  0  DCL BAND RECORD;
6      1  0  DCL RESID RETURNS(FLOAT(6));
7      1  0  DCL (EPS,H10,H20,ZH10,ALPHA,BETA,C,D,OT,PT) FLOAT(16),
      (H1,H2,H3,R1,R2,D1,D2,MUE,MUE,ZH1,ZH2) FLOAT(16),
      (I,J,M,N,N1,M1,M2,M3,M4,I1,I2,L,NZAHL) BIN FIXED(31);
8      1  0  DCL (VZ,DCON) FLOAT(16);
9      1  0  DCL ZEIGE CHAR(1);
      /* ZEIGE='R' BEI ENDE DER CPU-ZEIT WIRD DIE LETZTE ITERATION AUF BAND
      GESCHRIEBEN */
      /* ZEIGE='F' DIE ANFANGSWERTE WERDEN NICHT BERECHNET,SONDERN ES WIRD
      BEI DER LETZTEN ITERATION,DIE VON BAND GELESEN WIRD,
      AUFGESETZT. */
10     1  0  ZEIGE='R';
11     1  0  GET LIST(H1,H2,H3,R1,R2) COPY;
12     1  0  GET LIST(EPS,MUE,MUE) COPY;
13     1  0  GET LIST(M1,M2,M3,M4,M,N,N1,NM) COPY;
14     1  0  IWERX=M2+1;
15     1  0  CALL PLTSTRT('35','PLOTTER');
      /* D1 = KONSTANTE DRUCKABLEITUNG FUER DIE EINFLUSSOEFFNUNG */
      /* D2 = KONSTANTE DRUCKABLEITUNG FUER DIE AUSFLUSSOEFFNUNG */
16     1  0  D1=4E0*MUE/(R1*R1)*5.625;
17     1  0  D2=4E0*MUE/R2**4*R1*R1*5.625;
18     1  0  LZA=20;
19     1  0  IPLO=1;
20     1  0  BEGIN;
21     2  0  DCL (P,OA,ON,GZ,GR) (0:M,0:N1) FLOAT(16),
      R(N1) FLOAT(16);
22     2  0  DCL SCH(0:M) FLOAT(16);
23     2  0  DCL (XX(0:M),YY(-N1:N1),WERT(-N1:N1)) FLOAT(6),
      INTI(-N1:N1) BIN FIXED(31),OPTION CHAR(5);
24     2  0  DCL PP(0:M,-N1:N1) FLOAT(6);
25     2  0  DCL RHO(0:M) FLOAT(16);
26     2  0  GZ,GR=OE0;
      /* KONSTANTEN */
27     2  0  DO I=0 TO N1;
28     2  1  R(I)=I*H2;
29     2  1  END;
30     2  0  H10=H1*H1;
31     2  0  H20=H2*H2;
32     2  0  ZH1=2E0*H1;
33     2  0  ZH2=2E0*H2;
34     2  0  ZH10=2E0*H10;
35     2  0  ZH20=2E0*H20;

```

STMT LEV NT

```

36 2 0      DO I=0 TO M; /* BERECHNUNG RHO */
37 2 1      IF I<=M1 THEN RHO(I)=R1;
38 2 1      ELSE IF I<M2 THEN RHO(I)=(I-M1)*H2+R1;
39 2 1      ELSE IF I<=M3 THEN RHO(I)=(M2-M1)*H2+R1;
40 2 1      ELSE IF I<M4 THEN RHO(I)=-(I-M3)*H2+(M2-M1)*H2+R1;
41 2 1      ELSE RHO(I)=R2;
42 2 1      END;
43 2 0      PUT DATA(RHO);
44 2 0      DCON=-D1/(BEO*MUE);
45 2 0      IF ZEIGE='F' THEN DO;
46 2 1          OPEN FILE(BAND) INPUT;
47 2 1          DO IIJ=0 TO N1;
48 2 2              READ FILE(BAND) INTO(SCH);
49 2 2              P(IIJ)=SCH;
50 2 2              READ FILE(BAND) INTO(SCH);
51 2 2              OA(IIJ)=SCH;
52 2 2              READ FILE(BAND) INTO(SCH);
53 2 2              ON(IIJ)=SCH;
54 2 2              END; /* IIJ */
55 2 1          CLOSE FILE(BAND);
56 2 1          END; /* DO */
57 2 0      ELSE DO;
58 2 1          ON.P=OEO;
/* STARTWERTE PSI */
59 2 1          I1=0;
60 2 1          I2=M;
61 2 1          DO J=1 TO N1;
62 2 2              IF J>NM THEN DO;
63 2 3                  I2=M4-(J-NM);
64 2 3                  DO I=I2+1 TO M;
65 2 4                      P(I,J)=P(M4,NM); END;
66 2 3                  END;
67 2 3              IF J>N THEN DO;
68 2 4                  I1=M1+(J-N);
69 2 4                  DO I=0 TO I1-1; P(I,J)=P(0,N); END;
70 2 4                  END;
71 2 2              DO I=I1 TO I2;
72 2 3                  P(I,J)=DCON*(R1**4*R(J)**2*(RHO(I)**2-R(J)**2/2E0)/RHO(I)**4;
73 2 3                  END; END;
74 2 1          A='F';
/* STARTWERTE ON */
75 2 1          I1=0; I2=M;
76 2 1          DO J=1 TO N1;
77 2 2              IF J > NM THEN I2=M4-(J-NM);
78 2 2              IF J > N THEN I1=M1+(J-N);
79 2 2              DO I=I1 TO I2;
80 2 3                  IF I=0 THEN ON(I,J)=D1/(2E0*MUE)*R(J); /* 3 */
81 2 3                  ELSE IF I=M THEN ON(I,J)=D2/(2E0*MUE)*R(J); /* 4 */
82 2 3                  ELSE IF J=N & I=M1 THEN CALL SUB6;
83 2 3                  ELSE IF J=NM & I=M4 THEN CALL SUB6;
84 2 3                  ELSE IF J=N & I<M1 THEN CALL SUB5;
85 2 3                  ELSE IF J=NM & I>M4 THEN CALL SUB5;
86 2 3                  ELSE IF J=N1 THEN CALL SUB5;
87 2 3                  ELSE IF J>N & I=I1 THEN CALL SUB7;
88 2 3                  ELSE IF J>NM & I=I2 THEN CALL SUB8;
89 2 3                  ELSE ON(I,J)=1E0/R(J)*(1E0/H10*(P(I+1,J)-2E0*P(I,J)+P(I-1,J))
90 2 3                      +1E0/H20*(P(I,J+1)-2E0*P(I,J)+P(I,J-1))
91 2 3                      -1E0/(2H2*R(J))*(P(I,J+1)-P(I,J-1)));
92 2 3                  END; END;
93 2 3      END; END;

```

STMT LEV NT

```

97  2  1      OR=ON;
98  2  1          END; /* ELSE */
99  2  0      PUT LIST(' ANFANGSWERTE :');
100 2  0      PUT SKIP(5) LIST(' OMEGA(I,J)');
101 2  0      CALL PRINTO;
102 2  0      PUT SKIP(14) LIST(' PSI(I,J)');
103 2  0      CALL PRINTP;
    /* ITERATION */
104 2  0      L=0;
105 2  0      *W: L=L+1;
106 2  0      NZAHL=0;
107 2  0      CONT:NZAHL=NZAHL+1;
108 2  0      A='T';
109 2  0      DO J=1 TO N;
110 2  1      DO I=0 TO M;
111 2  2      IF I=0 THEN CALL SUB3;
112 2  2      ELSE IF I=M THEN CALL SUB4;
113 2  2      ELSE IF J=N & I=M1 THEN CALL SUB6;
114 2  2      ELSE IF J=N & I<M1 THEN CALL SUB5;
115 2  2      ELSE CALL SUB1;
116 2  2      END; END;
117 2  0      I1=M1;
118 2  0      I2=M;
119 2  0      DO J=N+1 TO N1;
120 2  0      I1=I1+1;
121 2  1      IF J>NM THEN I2=M4-(J-NM);
122 2  1      DO I=I1 TO I2;
123 2  2      IF I=M THEN CALL SUB4;
124 2  2      ELSE IF J=NM & I>M4-IJ=N1 THEN CALL SUB5;
125 2  2      ELSE IF J=NM&I=M4 THEN CALL SUB6;
126 2  2      ELSE IF I=I1 THEN CALL SUB7;
127 2  2      ELSE IF I=I2 THEN CALL SUB8;
128 2  2      ELSE CALL SUB1;
129 2  2      END; END;
130 2  2      END; END;
131 2  0      IF RESID < 240E0 THEN DO;
132 2  1      OPEN FILE(BAND) OUTPUT;
133 2  1      DO IJ=0 TO N1;
134 2  2      SCH=P(W,IJ);
135 2  2      WRITE FILE(BAND) FROM(SCH);
136 2  2      SCH=OR(W,IJ);
137 2  2      WRITE FILE(BAND) FROM(SCH);
138 2  2      SCH=ON(W,IJ);
139 2  2      WRITE FILE(BAND) FROM(SCH);
140 2  2      END;
141 2  2      END;
142 2  1      GO TO FINI;
143 2  1      END;
144 2  0      IF A='F' THEN GO TO CONT;
    /* ZEITSCHRITT BEENDET */
145 2  0      OR=ON;
146 2  0      PUT SKIP DATA(L,NZAHL);
147 2  0      CALL PLOTTE;
148 2  0      IF L/LZA=LZA-L=0 THEN DO;
149 2  1      PUT PAGE LIST(' ZEITSCHRITT:',L);
150 2  1      PUT DATA(NZAHL);
151 2  1      PUT SKIP(5) LIST(' OMEGA(I,J)');
152 2  1      CALL PRINTO;
153 2  1      PUT SKIP(14) LIST(' PSI(I,J)');
154 2  1      CALL PRINTP;
155 2  1      END;

```

STAT LEV NT

```

156 2 0      IF NZAHL>1 THEN GO TO *W;
157 2 0      IF LZA>2 THEN DO; PUT PAGE LIST('ZEITSCHRITT:'.L);
159 2 1          PUT DATAINZAHL; PUT SKIP(5) LIST(' OMEGA(I,J)');
161 2 1          CALL PRINTO; PUT SKIP(14) LIST(' PS(I,J)');
163 2 1          CALL PRINTP; END;
165 2 0      DO J=1 TO N-1;
166 2 1          DO I=1 TO M-1;
167 2 2              GZ(I,J)=-1E0/(2E0*H2*R(I,J))*(P(I,J+1)-P(I,J-1));
168 2 2              GR(I,J)=1E0/(2E0*H1*R(I,J))*(P(I+1,J)-P(I-1,J));
169 2 2          END; END;
171 2 0          I1=M1;
172 2 0          I2=M-1;
173 2 0      DO J=N TO N1-1;
174 2 1          I1=I1+1;
175 2 1          IF J>= NM THEN I2=M4-IJ-NM1-1;
176 2 1          DO I=I1 TO I2;
177 2 2              GZ(I,J)=-1E0/(2E0*H2*R(I,J))*(P(I,J+1)-P(I,J-1));
178 2 2              GR(I,J)=1E0/(2E0*H1*R(I,J))*(P(I+1,J)-P(I-1,J));
179 2 2          END; END;
/* LINKER RAND */
181 2 0      DO J=0 TO N-1;
182 2 1          GZ(0,J)=D1/(4E0*MUE)*(R1=R1-R(J)*M2);
183 2 1          END;
/* RECHTER RAND */
184 2 0      DO J=0 TO NM-1;
185 2 1          GZ(M,J)=D2/(4E0*MUE)*(R2=R2-R(J)*M2);
186 2 1          END;
/* UNTERER RAND */
187 2 0      DO I=1 TO M-1;
188 2 1          GZ(I,0)=-2E0*P(I,1)/(H2*H2);
189 2 1          END;
190 2 0      ON=GZ; P=GR;
192 2 0      PUT PAGE LIST(' AUFLISTEN VZ(I,J) UND VR(I,J) ');
193 2 0      PUT SKIP(5) LIST(' VZ(I,J)');
194 2 0      CALL PRINTO;
195 2 0      PUT SKIP(14) LIST(' VR(I,J)');
196 2 0      CALL PRINTP;
/* UNTERPROGRAMME */
/* SUB1 BERECHNET DIE GITTERPUNKTE IM INNERN DES INTEGRATIONS-
GEBIETES */
197 2 0      SUB1: PROC;
198 3 0          QT=ON(I,J); PT=P(I,J);
200 3 0          ALPHA=1E0/ZH1*(P(I+1,J)-P(I-1,J));
201 3 0          BETA=1E0/ZH2*(P(I,J+1)-P(I,J-1));
202 3 0          C=1E0/H3*(NUE-ALPHA/R(J)*M2+2E0*NUE/H2D+2E0*NUE/H1D;
203 3 0          D=(NUE/H1D-BETA/(ZH1*R(J))*M2)*ON(I-1,J)
+((ALPHA-NUE)/(ZH2*R(J))+NUE/H2D)*ON(I,J-1)
+(NUE/H1D+BETA/(ZH1*R(J))*M2)*ON(I+1,J)
+((NUE-ALPHA)/(ZH2*R(J))+NUE/H2D)*ON(I,J+1)
+1E0/H3*OR(I,J);
204 3 0          ON(I,J)=D/C;
205 3 0          P(I,J)=H1D*H2D/(2E0*(H1D+H2D))*((1E0/H1D*P(I-1,J)
+((1E0/H2D+1E0/(ZH2*R(J))*M2)*P(I,J-1)
+1E0/H1D*P(I+1,J)+(1E0/H2D-1E0/(ZH2*R(J))*M2)*P(I,J+1)
-R(J)*ON(I,J));
206 3 0          IF A='F' THEN RETURN;
207 3 0          CALL ALTO;
208 3 0          RETURN;
209 3 0          END SUB1;

```

STMT LEV NT

```

      /* SUB3 BERECHNET DIE RANDPUNKTE 1 */
210  2  0  SUB3: PROC;
211  3  0      OT=ON(I,J); PT=P(I,J);
213  3  0      VZ=D1/(4EO*MUE)*(R1*R1-R(J)**2);
214  3  0      P(I,J)=-D1/(8EO*MUE)*R(J)**2*(R1*R1-R(J)**2/2EO);
215  3  0      ON(I,J)=1EO/R(J)*(1EO/(18EO*H10)*(-85EO*P(I,J)+108EO*P(I+1,J)
      -27EO*P(I+2,J)+4EO*P(I+3,J))
      -D1/(4EO*MUE)*(R1*R1-3EO*R(J)**2)+VZ);
216  3  0      IF A='F' THEN RETURN;
217  3  0      CALL ALTO;
218  3  0      RETURN;
219  3  0      END SUB3;

      /* SUB4 BERECHNET DIE RANDPUNKTE 2 */
220  2  0  SUB4: PROC;
221  3  0      OT=ON(I,J); PT=P(I,J);
223  3  0      VZ=D2/(4EO*MUE)*(R2*R2-R(J)**2);
224  3  0      P(I,J)=-D2/(8EO*MUE)*R(J)**2*(R2*R2-R(J)**2/2EO);
225  3  0      ON(I,J)=1EO/R(J)*(1EO/(18EO*H10)*(-85EO*P(I,J)+108EO*P(I-1,J)
      -27EO*P(I-2,J)+4EO*P(I-3,J))
      -D2/(4EO*MUE)*(R2*R2-3EO*R(J)**2)+VZ);
226  3  0      IF A='F' THEN RETURN;
227  3  0      CALL ALTO;
228  3  0      RETURN;
229  3  0      END SUB4;

      /* SUB5 BERECHNET DIE RANDPUNKTE 3 */
230  2  0  SUB5: PROC;
231  3  0      OT=ON(I,J); PT=P(I,J);
233  3  0      ON(I,J)=1EO/R(J)*(1EO/(18EO*H20)*(-85EO*P(I,J)+108EO*P(I,J-1)
      -27EO*P(I,J-2)+4EO*P(I,J-3));
234  3  0      IF A='F' THEN RETURN;
235  3  0      CALL ALTO;
236  3  0      RETURN;
237  3  0      END SUB5;

      /* SUB6 BERECHNET DIE RANDPUNKTE 4 */
238  2  0  SUB6: PROC;
239  3  0      OT=ON(I,J);
240  3  0      PT=P(I,J);
241  3  0      ON(I,J)=1EO/R(J)*(1EO/H10*(P(I+1,J)-2EO*P(I,J)+P(I-1,J))
      +1EO/(18EO*H20)*(-85EO*P(I,J)+108EO*P(I,J-1)
      -27EO*P(I,J-2)+4EO*P(I,J-3));
242  3  0      IF A='F' THEN RETURN;
243  3  0      CALL ALTO;
244  3  0      RETURN;
245  3  0      END SUB6;

      /* SUB7 BERECHNET DIE RANDPUNKTE 5 */
246  2  0  SUB7: PROC;
247  3  0      OT=ON(I,J); PT=P(I,J);
249  3  0      ON(I,J)=1EO/R(J)*(1EO/(18EO*H10)*(-85EO*P(I,J)
      +108EO*P(I+1,J)-27EO*P(I+2,J)+4EO*P(I+3,J))
      +1EO/(18EO*H20)*(-85EO*P(I,J)+108EO*P(I,J-1)
      -27EO*P(I,J-2)+4EO*P(I,J-3));
250  3  0      IF A='F' THEN RETURN;
251  3  0      CALL ALTO;
252  3  0      RETURN;
253  3  0      END SUB7;

      /* SUB8 BERECHNET DIE RANDPUNKTE 6 */
254  2  0  SUB8: PROC;
255  3  0      OT=ON(I,J);
256  3  0      PT=P(I,J);

```

STMT LEV NT

```

257 3 0      ON(I,J)=1E0/R(I,J)=1E0/(18E0*H10)*(1-85E0*P(I,J)
          +108E0*P(I-1,J)-27E0*P(I-2,J)+4E0*P(I-3,J))
          +1E0/(18E0*H20)*(1-85E0*P(I,J)+108E0*P(I,J-1)
          -27E0*P(I,J-2)+4E0*P(I,J-3));
258 3 0      IF A='F' THEN RETURN;
259 3 0      CALL ALTO;
260 3 0      RETURN;
261 3 0      END SUB8;
262 2 0      ALTO: PROC;
263 3 0      IF ABS(OT) < 0.1E-8 I ABS(PT) < 0.1E-8 THEN RETURN;
264 3 0      IF ABS(ON(I,J)-OT)/ABS(OT) > EPS I
          ABS(P(I,J)-PT)/ABS(PT) > EPS THEN A='F';
265 3 0      RETURN;
266 3 0      END ALTO;
/* PRINTPROGRAMM */
267 2 0      PRINTO: PROC;
268 3 0      I11=0;
269 3 0      I12=7;
270 3 0      TT4: PUT EDIT(III DO I1=I11 TO I12) (COL(6),(8)(X(6),F(3),X(6)));
271 3 0      PUT SKIP(2);
272 3 0      DO JJ=N1 TO 0 BY -1;
273 3 1      PUT EDIT(IJ,(ON(I1,JJ) DO I1=I11 TO I12)
          (COL(3),F(2),(8)(X(2),E(13,6))));
274 3 1      END;
275 3 0      I11=I11+8;
276 3 0      IF I11 > M THEN RETURN;
277 3 0      I12=I12+8;
278 3 0      IF I12 > M THEN I12=M;
279 3 0      PUT SKIP(4);
280 3 0      GO TO TT4;
281 3 0      END PRINTO;
/* PRINTPROGRAMM */
282 2 0      PRINTP: PROC;
283 3 0      I11=0;
284 3 0      I12=7;
285 3 0      TTS: PUT EDIT(III DO I1=I11 TO I12) (COL(6),(8)(X(6),F(3),X(6)));
286 3 0      PUT SKIP(2);
287 3 0      DO JJ=N1 TO 0 BY -1;
288 3 1      PUT EDIT(IJ,(P(I1,JJ) DO I1=I11 TO I12)
          (COL(3),F(2),(8)(X(2),E(13,6))));
289 3 1      END;
290 3 0      I11=I11+8;
291 3 0      IF I11 > M THEN RETURN;
292 3 0      I12=I12+8;
293 3 0      IF I12 > M THEN I12=M;
294 3 0      PUT SKIP(4);
295 3 0      GO TO TTS;
296 3 0      END PRINTP;
/* PLOTTER DER STROMLINIEN */
297 2 0      PLOTTE: PROC;
298 3 0      DO I$=0 TO M;
299 3 1      DO J$=0 TO N1;
300 3 2      IF J$ =0 THEN PP(I$,J$)=P(I$,J$);
301 3 2      ELSE DO;
302 3 3          PP(I$,J$)=P(I$,J$);
303 3 3          PP(I$,-J$)=P(I$,J$);
304 3 3      END;
305 3 2      END;
306 3 1      END;

```

STMT LEV NT

```

307 3 0      DO IPL=0 TO M;
308 3 1      XX(IPL)=IPL*M1;
309 3 1      END;
310 3 0      DO IPL=-N1 TO N1;
311 3 1      YY(IPL)=IPL*M2;
312 3 1      END;
313 3 0      OPTION='H      ';
314 3 0      INT=16;
315 3 0      DO ILP=-N1 TO N1;
316 3 1      WERT(ILP)=PPI(WERX,ILP);
317 3 1      END;
318 3 0      CALL PLTSCLC(1,3,38,5,25,7);
319 3 0      CALL PLTHHNL(PP,XX,YY,WERT,INT,OPTION);
320 3 0      CALL PLTJMP(0,YY(-N1));
321 3 0      CALL PLTORW(0,YY(N1));
322 3 0      CALL PLTORW(XX(M1),YY(N1));
323 3 0      CALL PLTORW(XX(M2),YY(N1));
324 3 0      CALL PLTORW(XX(M3),YY(N1));
325 3 0      CALL PLTORW(XX(M4),YY(NM));
326 3 0      CALL PLTORW(XX(M1),YY(NM));
327 3 0      CALL PLTORW(XX(M1),YY(-NM));
328 3 0      CALL PLTORW(XX(M4),YY(-NM));
329 3 0      CALL PLTORW(XX(M3),YY(-N1));
330 3 0      CALL PLTORW(XX(M2),YY(-N1));
331 3 0      CALL PLTORW(XX(M1),YY(-N1));
332 3 0      CALL PLTORW(0,YY(-N1));
333 3 0      CALL PLTJMP(0,YY(0));
334 3 0      CALL PLTORW(XX(M1),YY(0));
335 3 0      CALL PLTNXTF;
336 3 0      RETURN;
337 3 0      END PLOTTE;
338 2 0      END; /* ENDE BEGINN */
339 1 0      FINI: CALL PLTEND;
340 1 0      END NZEIT;

```

6. Anhang: Stromlinienbilder zweier Beispiele

Legenden zu den Abbildungen

- Bild 1: Stromlinienverlauf für Beispiel 1
(max. Einströmgeschwindigkeit 5,625 cm/s; mittlere Reynoldszahl 23,4) zum Zeitpunkt $t = 0,1$ s.
- Bild 2: Beispiel 1 nach $t = 3,8$ s.
- Bild 3: Lösung für Beispiel 1 nach $t = 7,6$ s.
- Bild 4: Stromlinienverlauf für Beispiel 2
(max. Einströmgeschwindigkeit 7,5? cm/s; mittlere Reynoldszahl 31,2) zum Zeitpunkt $t = 0,1$ s.
- Bild 5: Eintreten der Ablösung bei Beispiel 2 nach $t = 0,7$ s.
- Bild 6/10: Beispiel 2 nach $t = 2,0; 2,5; 3,5; 4,5; 6,5$ s.
- Bild 11: Lösung für Beispiel 2 nach $t = 7,3$ s.

Bild 1

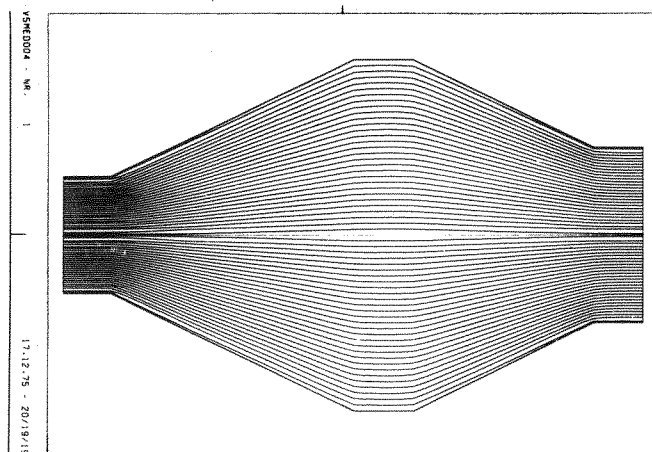


Bild 2

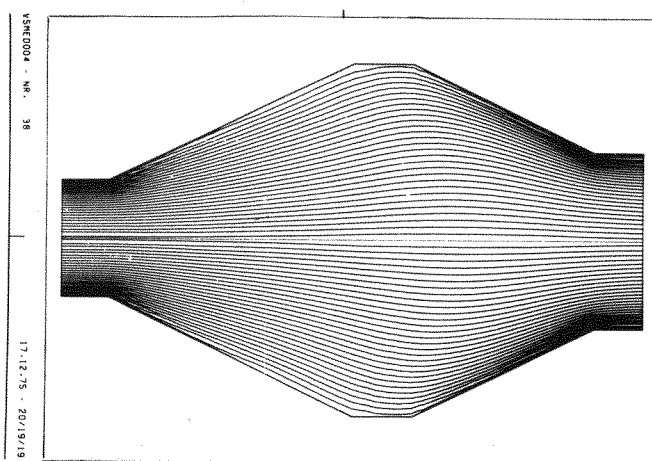


Bild 3

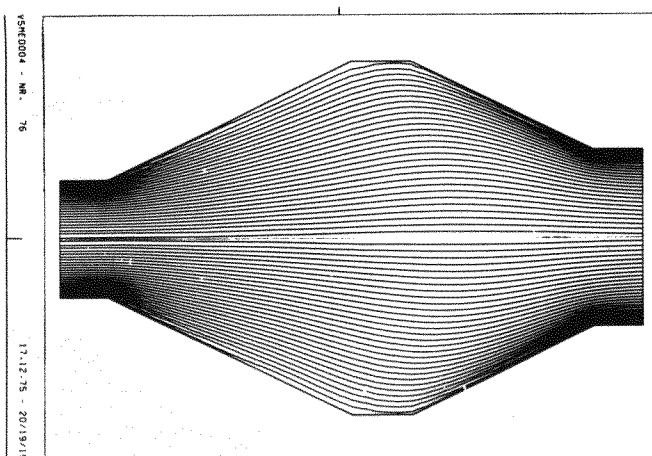


Bild 4

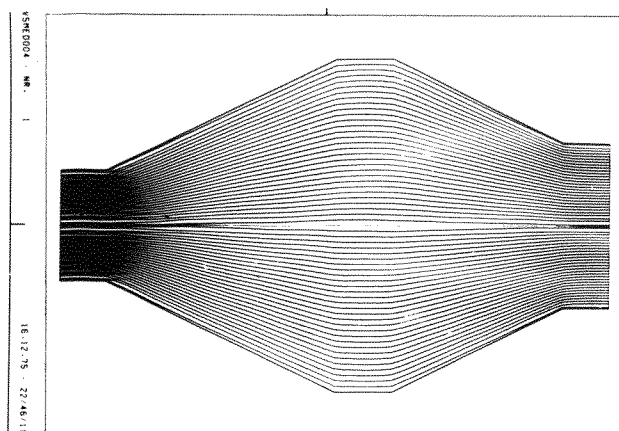


Bild 8

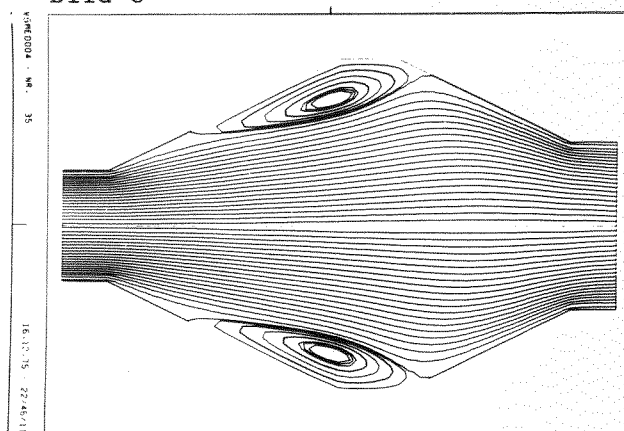


Bild 5

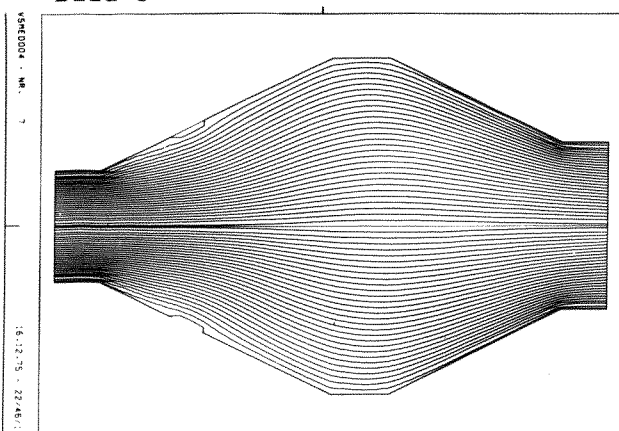


Bild 9

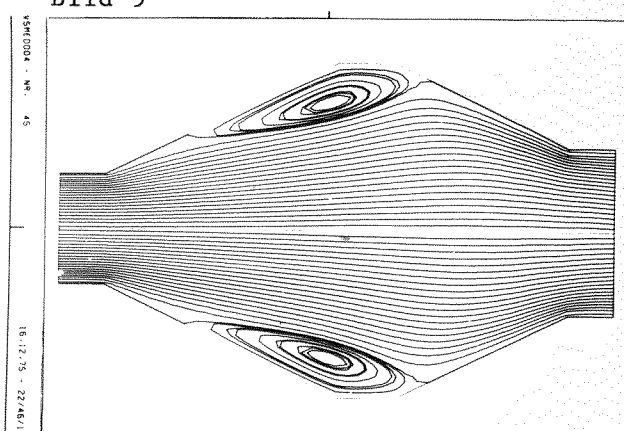


Bild 6

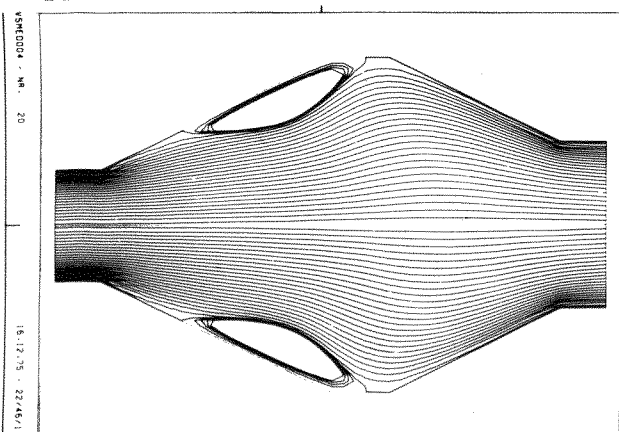


Bild 10

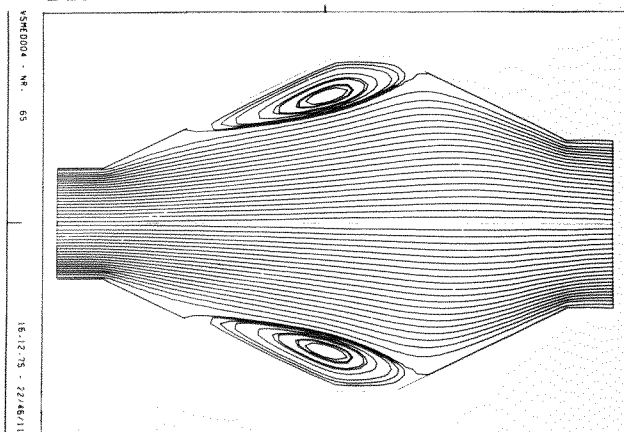


Bild 7

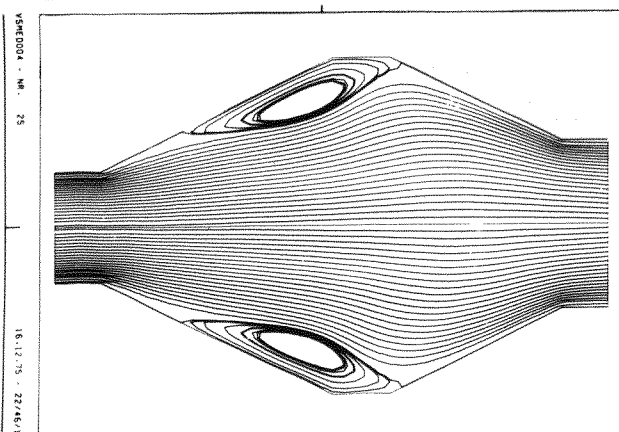
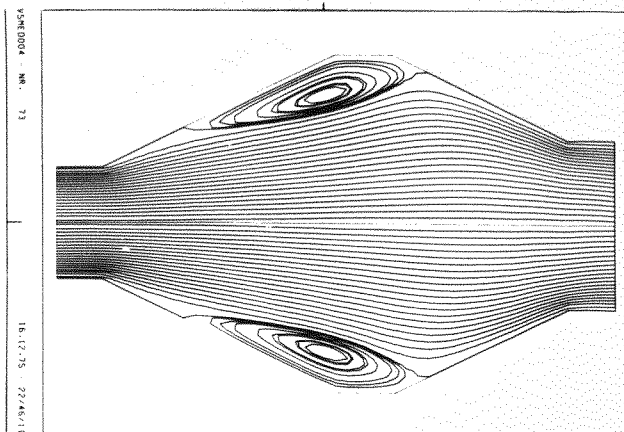


Bild 11



7. Literaturverzeichnis.

- [1] Campbell, N.G.: Stability analysis of a difference scheme for the Navier Stokes equations.
Numer. Math. 14 (1969/70), 435-447

- [2] Collatz, L.: Numerical treatment of the differential equations.
Springer, Berlin 1966.

- [3] Fromm, J.E.: The time dependent flow of an incompressible viscous fluid.
Methods of computational physics: V. 3, pp. 346-382, Academic Press, New York 1964

- [4] Landau, L.D., Lifschitz, E.M.:
Lehrbuch der Theoretischen Physik (VI)
Hydrodynamik.
Akademie-Verlag-Berlin 1971

- [5] Smith, G.D.: Numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen.
Vieweg, Braunschweig 1971.