



KERNFORSCHUNGSAVLAGE JÜLICH GmbH

**Institut für Plasmaphysik
ASSOZIATION EURATOM - KFA**

MHD-Gleichgewicht und -Stabilität in Rennbahngometrie

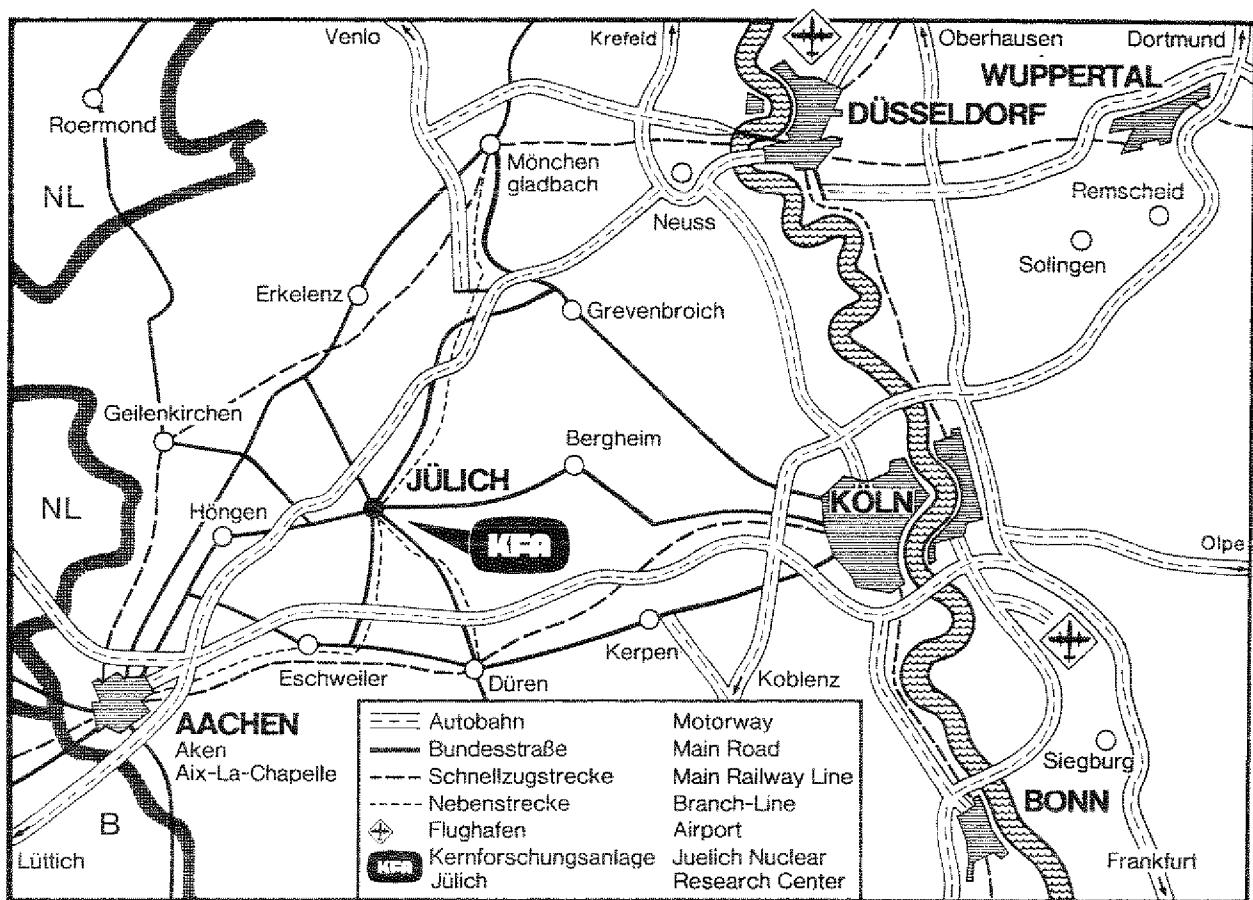
von

H. Gerhäuser

JÜL - 1289

April 1976

Als Manuskript gedruckt



Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 1289

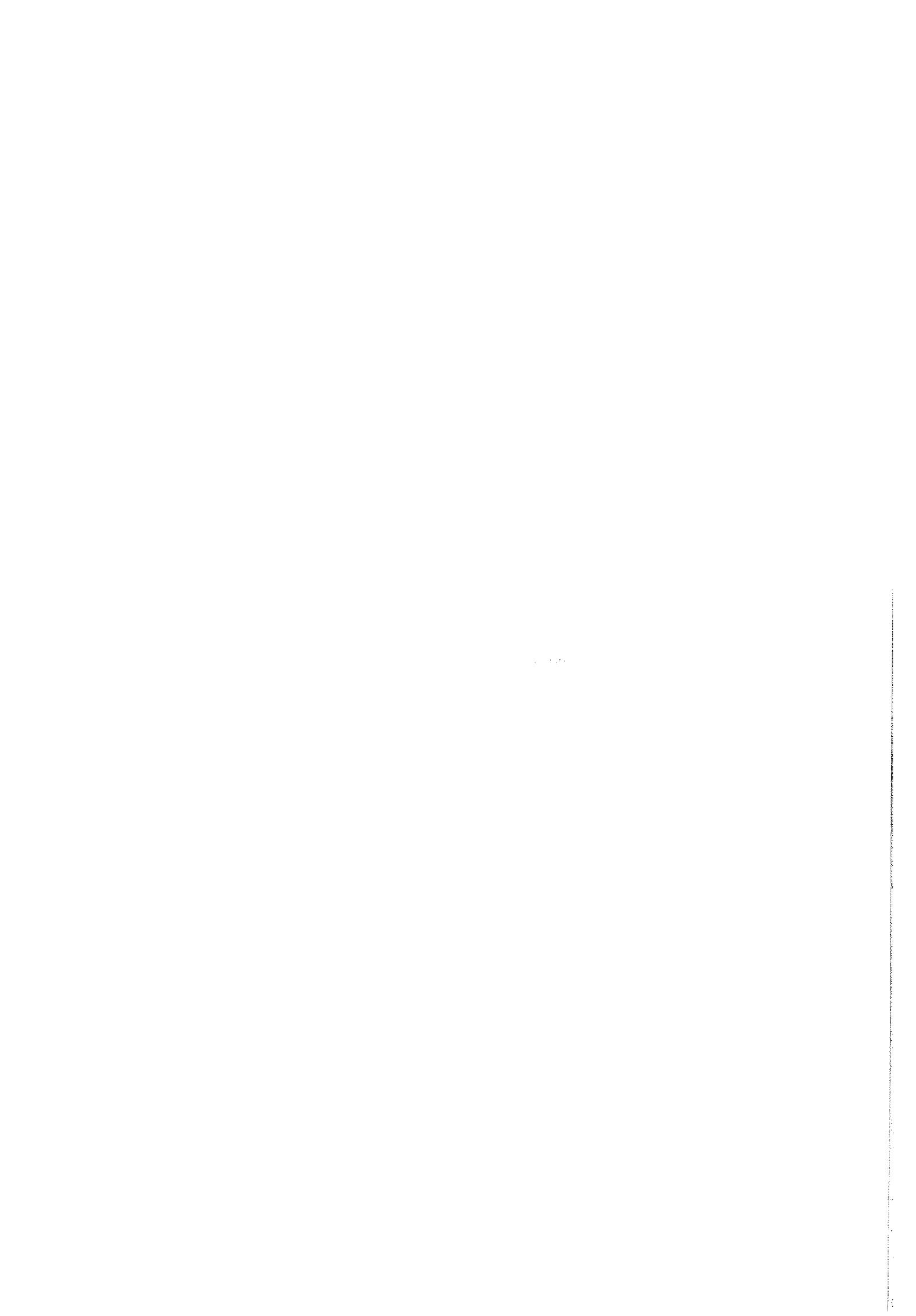
Institut für Plasmaphysik Jülich – 1289

Im Tausch zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH,
Jülich, Bundesrepublik Deutschland

MHD-Gleichgewicht und -Stabilität in Rennbahngometrie

von

H. Gerhauser



MHD-GLEICHGEWICHT UND -STABILITÄT IN RENNBAHNGEOMETRIE

Hartmut Gerhauser

Institut für Plasmaphysik der Kernforschungsanlage Jülich GmbH
Association EURATOM-KFA

Zusammenfassung

Das Transversalfeld eines Rennbahntokamaks im Gleichgewicht wird für Oberflächenströme und großes Aspektverhältnis über das Biot-Savart'sche Gesetz berechnet und seine Zusammensetzung diskutiert. Die Sprungstellen der Krümmung lassen auch die Vertikalkomponente springen und eine Horizontalkomponente entstehen. Das Mercier-Kriterium für lokalisierte Vertauschungsinstabilitäten wird in Rennbahnachsennähe und für kreisförmigen Plasmaquerschnitt ausgewertet und die destabilisierende Wirkung der geraden Abschnitte sowie eines zusätzlichen Toroidalfelddivertors untersucht. Der Tokamakstabilitätsbereich schrumpft zugunsten der höheren Stabilitätsbereiche, die jedoch praktisch nicht verwendbar sind.

MHD-Equilibrium and -Stability in Racetrack Geometry

Abstract

The transverse field of a racetrack Tokamak in equilibrium is calculated for surface currents and large aspect ratio via the law of Biot-Savart, and its structure is discussed. The discontinuities of the curvature lead to jumps in the vertical component and to the appearance of a horizontal component. The Mercier criterion for localized interchange instabilities is evaluated near the racetrack axis and for a circular plasma cross section, and the destabilizing effect of the straight sections and of an additional toroidal field divertor is investigated. The Tokamak stability region shrinks for the benefit of the higher stability regions, but these are of no practical use.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. <u>Transversalfeld eines Rennbahntokamaks im Gleichgewicht</u>	3
1.1 Auswirkungen der Rennbahngometrie	3
1.2 Modell und asymptotische Entwicklung des Transversalfeldes	5
1.3 Diskussion der analytischen und numerischen Ergebnisse	12
2. <u>Einfluß der Rennbahnkonfiguration auf das Stabilitätsverhalten</u>	16
2.1 Kriterien für lokalisierte Instabilitäten	16
2.2 Stand der Theorie für nichtaxialsymmetrische ebene Konfigurationen mit kreisförmigem Querschnitt	17
2.3 Einschränkung des Tokamakstabilitätsbereiches durch die Rennbahngeraden	21
2.4 Berücksichtigung eines Toroidalfelddivertors	24
2.5 Abschätzung für das kritische β	30
 <u>ANHANG</u>	 32
A. <u>Herleitung des Transversalfeldes erster Ordnung mit Biot-Savart</u>	32
B. <u>Verwendbarkeit der höheren Stabilitätsbereiche einer Rennbahn verglichen mit Harmonica II</u>	42
B.1 Ergebnisse des Experiments Harmonica II	42
B.2 Folgerungen aus der Theorie und der Methode der helischen Bilder	44
 <u>QUELLENVERZEICHNIS</u>	 51

1. Transversalfeld eines Rennbahntokamaks im Gleichgewicht

1.1 Auswirkungen der Rennbahngeometrie

Bei einem gewöhnlichen Kreisbahntokamak kann man bekanntlich Gleichgewicht auf zwei verschiedene Arten erzeugen. Ist die Plasmasäule von einer leitenden Hülle eingeschlossen, dann kann sie in einer gegenüber der Hüllenseele nach außen verschobenen Lage im Gleichgewicht sein, wofür die in der leitenden Hülle induzierten Spiegelströme maßgebend sind. Wünscht man jedoch ein unverschobenes Gleichgewicht oder steht keine leitende Hülle zur Verfügung, dann muß man ein zusätzliches Vertikalfeld geeigneter Stärke und Richtung von außen anwenden. Und zwar ist asymptotisch für großes Aspektverhältnis $A = \frac{R}{a}$ das benötigte Vertikalfeld durch die häufig zitierte Formel von Shafranov /1/ gegeben:

$$|\mathcal{B}_1| = \frac{a B_w^0(a)}{2R} \left(\ln \frac{8R}{a} - \frac{3}{2} + \frac{l_i}{2} + \bar{\beta} \right) \quad (1.1)$$

Hierbei ist $B_w^0(a)$ das poloidale Feld nullter Ordnung am Plasmarrand, $l_i = \frac{B_w^2}{B_w^0(a)}$ die innere Selbstinduktion und

$\bar{\beta} = \frac{2\bar{p}}{B_w^2(a)}$ das mittlere poloidale β . Die Abhängigkeit von der Stromdichteverteilung über den Querschnitt steckt nur in l_i . Für Oberflächenströme ist $l_i = 0$, für eine über den Querschnitt konstante Stromdichte ist $l_i = \frac{1}{2}$.

Bei einem Rennbahntokamak sieht es grundsätzlich ähnlich aus, nur sind die Verhältnisse wesentlich verwickelter. Die Verschiebung der Plasmasäule innerhalb einer leitenden Hülle hängt dann nicht nur vom Aspektverhältnis A und vom Längenverhältnis $x = \frac{s}{L}$ ab, sie ändert sich auch als Funktion der Bogenlänge längs^o der Rennbahn, und sie hat auch eine Komponente nach oben oder unten, d.h. die Plasmasäule verschiebt sich aus der Rennbahnebene heraus. Schematisch qualitativ ergibt sich das in Fig. 1 skizzierte Bild. Die Verschiebung nach außen ist sowohl auf den geraden als auch auf den gekrümmten Abschnitten ungefähr konstant, auf den geraden Abschnitten jedoch um \mathcal{S} größer. Und zwar gilt in einem Oberflächenstrommodell nach Shafranov /2/

$$\mathcal{S} = \frac{3}{8} \frac{b^2}{R_0} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (1.2)$$

Dieselbe Formel mit $a = 0$ gilt nach Mercier /3/ in einem Volumenstrommodell für die Verschiebung der magnetischen Achse innerhalb einer Plasmasäule von Rennbahnform mit Radius R_o und Durchmesser $2b$. Es handelt sich hier um

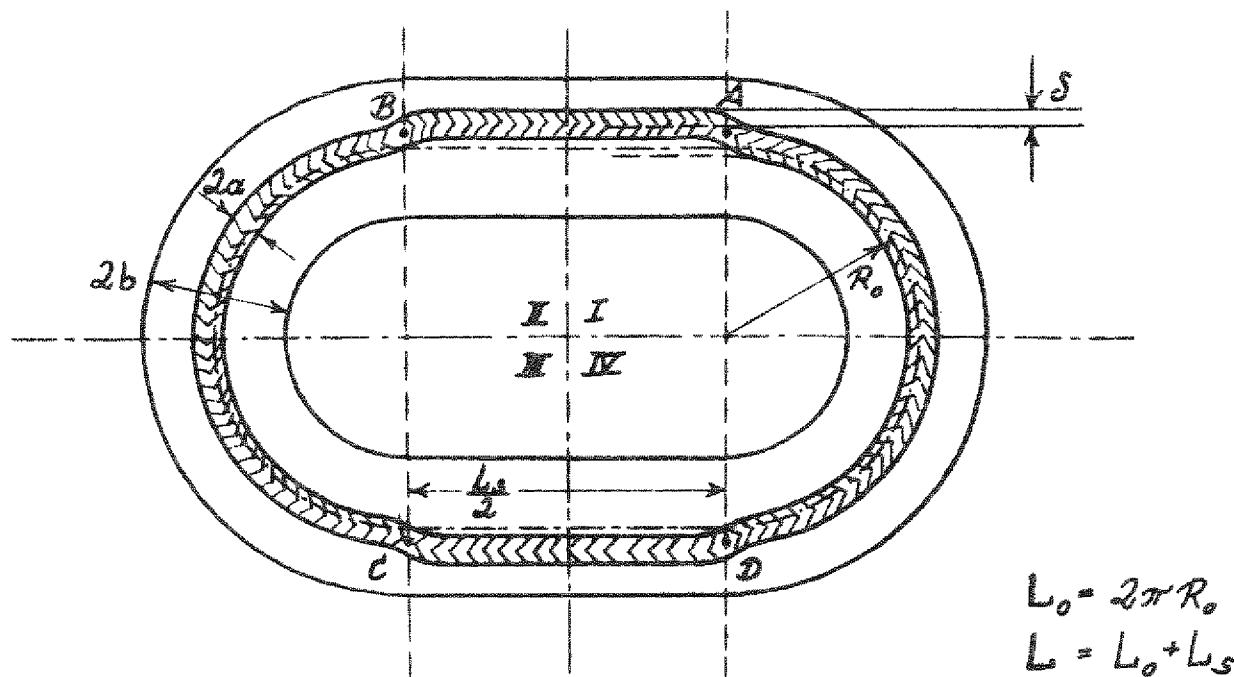


Fig. 1

einen rein geometrischen Effekt, der dadurch bedingt ist, daß die toroidalen Feldlinien auf der Innenseite der gekrümmten Abschnitte dichter liegen als auf der Außenseite, während sie in den geraden Abschnitten überall gleich dicht liegen. Eine in der Nähe der Torusseele verlaufende Feldlinie muß daher wegen der Flußkonstanz beim Übergang von einem gekrümmten zu einem geraden Abschnitt einen Sprung nach außen machen. Um δ zum Verschwinden zu bringen genügt es, den Sprung in den Feldlinien des Vakuumfeldes dadurch zu beseitigen, daß man die Feldspulen, welche das toroidale Feld längs der geraden Abschnitte erzeugen, um δ nach innen schiebt. Die Verschiebung aus der Rennbahnebene heraus ist in den Quadranten I und III nach oben, in den Quadranten II und IV nach unten und betragsmäßig am größten jeweils an den Unstetigkeitsstellen der Krümmung A, B, C und D. Dies wird auch durch die gepfeilte Schraffierung der Plasmasäule angedeutet. Von der Seite gesehen zeigt die Plasmasäule also das Bild einer liegenden Acht ∞ .

Die genauen und nicht ganz einfachen Formeln für die Verschiebungen im Oberflächenstrommodell findet man bei Schafranov /2/. Eine Verallgemeinerung dieses Modells auf Volumenströme ebenfalls durch Schafranov /4/ setzt eine stetig veränderliche Krümmung voraus und ist daher nicht ohne weiteres auf eine Rennbahn anwendbar. Eine drastische Änderung in den Verschiebungen ist jedoch unwahrscheinlich.

Was nun eigentlich wieder viel mehr interessiert als die Verschiebung der Plasmasäule innerhalb einer leitenden Hülle ist eine Antwort auf die Frage, welche äußeren Felder zusätzlich anzuwenden sind, um ein unverschobenes Gleichgewicht ohne Zuhilfenahme einer leitenden Hülle zu erzeugen. Das benötigte Feld wird nicht nur eine vertikale Komponente haben, die in den gekrümmten und geraden Abschnitten verschieden ist, es muß auch eine horizontale Komponente auftreten, also in der Rennbahnebene, welche die Verschiebungen aus der Ebene heraus kompensieren kann. Im folgenden soll skizziert werden, wie man im einfachsten Fall Formeln für dieses zusätzliche äußere Transversalfeld herleiten und numerisch auswerten kann.

1.2 Modell und asymptotische Entwicklung des Transversalfeldes

Vorausgesetzt wird wieder großes Aspektverhältnis, d.h. Glieder höherer Ordnung in $\frac{1}{A} = \frac{a}{R_0}$ sind zu vernachlässigen. Die Plasmasäule ist also sehr dünn, in Fig. 2a ist sie der Einfachheit halber sogar nur als Faden gezeichnet. Außerdem beschränken wir uns auf Oberflächenströme j^* . Innerhalb (Index i) und außerhalb (Index e) der Plasmaoberfläche ist also mit Vakuumfeldern zu rechnen, der Plasmadruck p ist innen konstant und verschwindet außen. Einen Querschnitt zeigt Fig. 2b. Das Vakuumfeld auf der Achse oder Seele der Plasmasäule sei $\mathcal{E}_i|_{s=0}$, das von den Oberflächenströmen dort erzeugte Eigenfeld sei $\mathcal{E}_{\text{eig}}|_{s=0}$. Dann beschreibt die Differenz $\mathcal{E}_{\text{ext}}|_{s=0} = \mathcal{E}_i|_{s=0} - \mathcal{E}_{\text{eig}}|_{s=0}$ die im Gleichgewicht benötigten äußeren Felder. Bis auf Korrekturen höherer Ordnung ist damit \mathcal{E}_{ext} auch über den ganzen Plasmaquerschnitt bekannt. Kennt man also die Felder und Ströme im Gleichgewicht, so erhält man durch Anwendung des Biot-Savart'schen Gesetzes

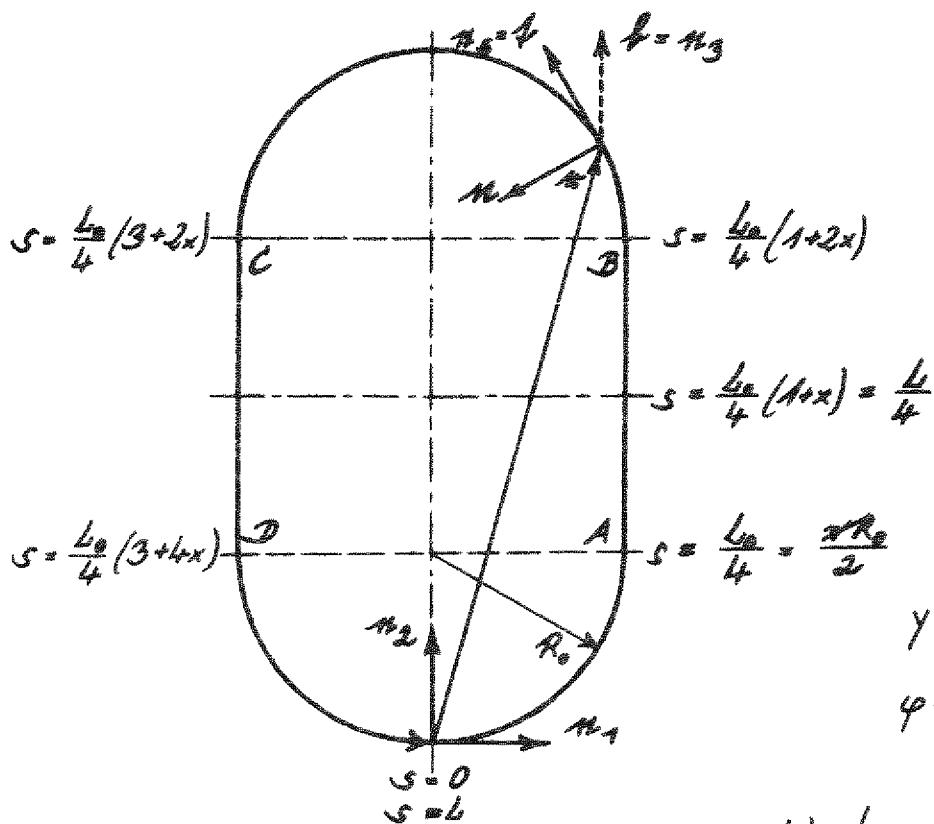


Fig. 2a

$$T = T(s) = \begin{pmatrix} -y + \frac{\pi}{2} \\ -\pi x \\ y - (3+4x)\frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } s \in \begin{cases} [A, B] \\ [B, C] \\ [C, D] \\ [D, A] \end{cases}$$

$$y = y(s) = \frac{2\pi s}{L_0} = \frac{s}{R_0}$$

$$\varphi = \varphi(s) = \chi(n_1, T(s)) - \chi(n_2, T(s))$$

Fig. 2b

$$\mathcal{L}_{\text{eig}} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{j^*(\omega') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}' \quad (1.3)$$

und daraus \mathcal{L}_{ext} . Dabei bezeichnet \mathbf{r} den Aufpunkt, für $\mathbf{r} = 0$ also einen Punkt auf der Achse, und \mathbf{r}' bezeichnet den Integrationspunkt auf dem Plasmarand. In nullter Ordnung hat man einfach ein zylindrisches Plasma, und die Felder sind

$$\mathcal{L}_i^0 = B_{si}^0 n_s, \quad \mathcal{L}_e^0 = B_{se}^0 n_s + B_w^0(a) \frac{a}{s} n_w$$

$$\mathcal{L}_{\text{eig}}^0 \Big|_{s \leq a} = (B_{si}^0 - B_{se}^0) n_s, \quad \mathcal{L}_{\text{ext}}^0 = B_{se}^0 n_s \quad (1.4)$$

Ein Transversalfeld \mathbf{B}_{\perp} existiert hier nicht. Die Gleichgewichtsbedingung ist

$$p + \frac{\mathbf{B}_{\perp}^2}{2} = \frac{\mathbf{B}_{\text{se}}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}_{\omega}^2(a)}{2} \quad \text{oder} \quad \beta = \frac{\mathbf{B}_{\text{se}}^2 - \mathbf{B}_{\perp}^2}{\mathbf{B}_{\omega}^2(a)} + 1 \quad (1.5)$$

wobei $\beta = 2 p / \mathbf{B}_{\omega}^2(a)$ das poloidale β ist.

In erster Ordnung werden die Zylinderflächen des Koordinatensystems (ξ, ω, s) gekrümmmt. Die Krümmung der Achse ist $k(s) = \frac{1}{R_0}$ auf den gekrümmten Abschnitten und $k(s) = 0$ auf den geraden Abschnitten. Fourierreihenentwicklung bezüglich der Bogenlänge s liefert

$$k(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_n e^{i 2\pi n \frac{s}{L}} \quad (1.6)$$

$$\text{mit } k_0 = \frac{2\pi}{L}, \quad k_n = k_{-n} = \frac{2}{mL_0} \sin \frac{\pi m L_0}{L} \quad \begin{aligned} &\text{für gerades } n = 2m \\ &k_n = 0 \quad \text{für ungerades } n \end{aligned}$$

Das Längenelement im gekrümmten Koordinatensystem ist

$$ds^2 = d\xi^2 + \xi^2 d\omega^2 + (1 - k(s) \xi \cos \omega)^2 ds^2 \quad (1.7)$$

das Flächenelement also $d\mathcal{F} = a(1 - k(s) \xi \cos \omega) d\omega ds$.

Die Felder lassen sich als Vakuumfelder aus einem Potential ableiten, d.h. $\mathbf{B} = -\nabla\phi$ mit $\Delta\phi = 0$. Schafranov /2/ löst die Potentialgleichung und das Gleichgewichtsproblem im gekrümmten Koordinatensystem in erster Ordnung in ξ , wobei als Grenzbedingungen an der Plasmaoberfläche wie üblich Druckgleichgewicht und Verschwinden der Normalkomponente des Feldes benutzt werden. Mit einem Fourieransatz für das Potential erster Gleichung wird

$$\phi_{i,e} = \phi_{i,e}^0 + \phi_{i,e}^1 = \phi_{i,e}^0 + \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,i,e} e^{i(\omega + 2\pi n \frac{s}{L})} \quad (1.8)$$

wobei die $\varphi_{n,i,e}$ über modifizierte Besselfunktionen von ξ abhängen und proportional k_n sind. Hieraus folgen durch Gradientbildung die Felder $\mathbf{B}_{i,e}$, die Oberflächenstromdichte $j^* = \mathbf{n}_s \times (\mathbf{B}_e - \mathbf{B}_i) \Big|_s$ und das Eigenfeld \mathbf{B}_{eig} gemäß (1.3).

Die Zwischenrechnungen sind in Anhang A näher ausgeführt.

Wir betrachten zunächst den Fall eines Kreisbahntorus mit

$$k(s) = \frac{1}{R_0} = \text{konst.} \quad \text{Dann ist } x = 0, \varphi = y, T = 0, k_{n \neq 0} = 0, \text{ und}$$

das Vertikalfeld schreibt sich - durch Vereinfachung aus (1.16), (1.17), (1.18), (1.27) - bis auf Glieder höherer Ordnung in $\frac{a}{R_0}$ in folgender Form:

$$\mathcal{L}_1' \Big|_{g=0} = - \mathcal{L}_{\text{dig}}' \Big|_{g=0} = \frac{B_w^0(a) a}{2 R_0} \left(\frac{1}{2} - \beta - J \right) \mathbf{b} \quad (1.9)$$

Dabei ist $\mathbf{b} = \mathbf{f} \times \mathbf{n}$ die Binormale, in Fig. 2a gestrichelt, und J ist das Integral

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - \cos y') dy'}{[A^{-2} + 2(1 - \cos y')]^{3/2}} \quad (1.10)$$

Wir betrachten dieses Integral asymptotisch für große A . Man könnte es für $\epsilon = \frac{1}{2A} \ll 1$ mit Hilfe der asymptotischen Entwicklungen von elliptischen Integralen berechnen. Dieses Verfahren lässt sich aber nicht auf den Fall einer Rennbahn verallgemeinern. Daher wählen wir einen direkten Weg. Sei $\epsilon \ll \eta \ll 1$, $\epsilon \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$, $\frac{\eta}{\epsilon} \rightarrow \infty$. Wir zerlegen das Integral in einen Anteil, der von der Wirkung der Plasmaoberflächenströme in unmittelbarer Nähe des Aufpunktes $y = 0$ herrührt, und in einen Anteil, der zur restlichen und weiter entfernt liegenden Plasmaoberfläche gehört.

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{4 \sin^2 \frac{y'}{2} dy'}{[A^{-2} + 4 \sin^2 \frac{y'}{2}]^{3/2}} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u du}{(\epsilon^2 + \sin^2 u)^{3/2}}$$

$$J = J_1 + J_2 = \int_0^{\eta} \frac{\sin^2 u du}{(\epsilon^2 + \sin^2 u)^{3/2}} + \int_{\eta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u du}{(\epsilon^2 + \sin^2 u)^{3/2}} \quad (1.11)$$

Asymptotisch wird also

$$J_1 = \int_0^{\eta} \frac{u^2 du}{(\epsilon^2 + u^2)^{3/2}} = \int_0^{\frac{\eta}{\epsilon}} \frac{t^2 dt}{(1 + t^2)^{3/2}}$$

$$= \left[-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \ln \left(t + \sqrt{1+t^2} \right) \right]_0^{\frac{\eta}{\epsilon}}$$

$$J_1 = -1 + \ln \frac{2\eta}{\epsilon} = -1 + \ln \frac{\eta}{2} - \ln \frac{\epsilon}{4} \quad (1.12)$$

$$\text{und } J_2 = \int_{\eta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \tan \frac{u}{2} \right| \Big|_{\eta}^{\frac{\pi}{2}} = -\ln \frac{\eta}{2} \quad (1.13)$$

$$\text{Damit haben wir } J = -1 + \ln \frac{4}{\epsilon} = -1 + \ln 8A \quad (1.14)$$

und aus (1.9) folgt

$$\mathcal{L}_1^1 \Big|_{s=0} = \frac{\mathcal{B}_0^\circ(\alpha)\alpha}{2R_0} \left(\frac{3}{2} - \beta - \ln \frac{\beta R_0}{\alpha} \right) \ell \quad (1.15)$$

Dies stimmt mit der Shafranov-Formel (1.1) überein, wenn man dort $l_i = 0$ berücksichtigt. Der logarithmische Term hängt offenbar mit der toroidalen Krümmung der Plasmaoberfläche in der Nähe des Aufpunktes zusammen.

Nunmehr können wir zum Transversalfeld des Rennbahntorus übergehen. Für den Aufpunkt genügt es aus Symmetriegründen, sich auf den ersten Quadranten zu beschränken, also $0 \leq s \leq \frac{L}{4}$. oder $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}(1+x)$. Der Integrationspunkt dagegen läuft selbstverständlich über die ganze Torusoberfläche, also $0 \leq s' \leq L$ oder $0 \leq y' \leq 2\pi(1+x)$. Für das Transversalfeld \mathcal{L}_1^1 ergibt sich aus Anhang A zunächst (gedacht ist immer an die Torusachse $\xi = 0$):

$$\mathcal{L}_1^1 = \frac{\mathcal{B}_0^\circ(\alpha)\alpha}{2R_0} \left(\tilde{f}_1(y) + \tilde{f}_2(y, x, A) + \tilde{f}_3(y, x, A, \beta, q) \right) \quad (1.16)$$

Die einzelnen Summanden werden im folgenden etwas näher betrachtet. Es ist

$$\tilde{f}_1(y) = -\ell \frac{R_0}{2R(y)} = -\ell \frac{1}{2} R_0 k(y) = -\ell \frac{1}{2} S(y)$$

$$\text{mit } S(y) = 1, \frac{1}{2}, 0 \quad \text{für } y <, =, > \frac{\pi}{2} \quad (1.17)$$

Für die Krümmung an der Unstetigkeitsstelle nimmt man zweckmäßigerweise das arithmetische Mittel des rechts- und linksseitigen Grenzwertes an. Weiter ist

$$\tilde{f}_2(y, x, A) = -\ell \int_{-\pi(1+x)}^{+\pi(1+x)} dy' \frac{1 - \cos(\varphi' - \varphi) + \cos \varphi' (T' - T)}{[A^{-2} + 2\{1 - \cos(\varphi' - \varphi) + (\cos \varphi' - \cos \varphi)(T' - T)\} + (T' - T)^2]^{3/2}} \quad (1.18)$$

Dabei sind φ und T in Fig. 2 erklärt, und gestrichene Größen beziehen sich auf die Integrationsvariable. Analog dem Kreisbahnhall betrachten wir die Nachbarschaft des Aufpunktes y wieder gesondert und zerlegen das Integral gemäß

$$\tilde{f}_2 = -\ell (J_0 + J_1 + J_2) = -\ell \left(\int_{-\pi(1+x)}^{y-\Delta y} + \int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} + \int_{y+\Delta y}^{\pi(1+x)} \right) \quad (1.19)$$

Wir nehmen an, daß entweder $y \leq \frac{\pi}{2} - \Delta y$, $y = \frac{\pi}{2}$ oder $y \geq \frac{\pi}{2} + \Delta y$ ist. Hierzu wählen wir Δy einfach als die Schrittweite, mit der y bei der numerischen Rechnung verändert wird. Dann gilt

$$J_1 = S(y) \int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} dy \frac{1 - \cos(\varphi' - y)}{[A^2 + 2(1 - \cos(\varphi' - y))]^{3/2}} = S(y) \int_0^{\Delta y} \frac{\sin^2 \varphi' dy}{[\frac{1}{4}A^2 + \sin^2 \varphi']^{3/2}} \quad (1.20)$$

Das Auftauchen der Sprungfunktion $S(y)$ weist wieder auf die Abhängigkeit von der toroidalen Krümmung in der Nähe des Aufpunktes hin. Falls nämlich das Integrationsintervall ganz im gekrümmten Teil der Rennbahn liegt, verschwinden T und T' . Falls es ganz im geraden Teil liegt, ist $\varphi = \varphi' = \frac{\pi}{2}$ und der Zähler des Integranden verschwindet. Und falls y auf die Unstetigkeitsstelle fällt, bleibt aus den gleichen Gründen nur das halbe Integral übrig. Gegenüber J_1 in (1.11) ist also η durch $\Delta y/2$ zu ersetzen, und asymptotisch folgt entsprechend wie früher

$$J_1 = \left(-1 + \ln 8A + \ln \frac{\Delta y}{4} \right) S(y) \quad (1.21)$$

In den beiden anderen Integralen J_0 und J_2 ist wieder A^{-2} zu vernachlässigen, im Unterschied zu früher ist aber die Integration nicht mehr analytisch, sondern nur noch numerisch durchführbar. Wir haben also

$$\tilde{f}_2(y, x, A) = -\frac{1}{8} \left\{ \left(-1 + \ln 8A + \ln \frac{\Delta y}{4} \right) S(y) + \right. \\ \left. + \int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} dy \frac{1 - \cos(\varphi' - y) + \cos \varphi' / (T' - T)}{[2 \{1 - \cos(\varphi' - y) + (\cos \varphi' - \cos \varphi) / (T' - T)\} + (T' - T)^2]^{3/2}} + \int_{y+\Delta y}^{\pi/2} \dots \right\} \quad (1.22)$$

Da Δy im Gegensatz zu η nicht wirklich gegen null gehen kann, entsteht bei der numerischen Auswertung ein unbedeutender Fehler, im Falle der Kreisbahn z.B. ist die Abweichung von der Schafranov-Formel nur

$$- \ln \frac{\Delta y}{4} + \ln \tan \frac{\Delta y}{4} \approx 5 \cdot 10^{-6} \quad \text{für } \Delta y = \frac{\pi}{200} \quad (1.23)$$

was einer Aufteilung des Viertelkreisbogens in 100 gleiche Abschnitte entspricht. Für den dritten Summanden in (1.16) ergibt sich zunächst

$$\tilde{f}_3(\gamma, x, A, \beta, q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_n R_0 \left[\frac{B_{si}^*}{B_w^*(\alpha) x_n a} \left(1 + \frac{I_1 - x_n a}{x_n a I_1'} \right) - \frac{B_{se}^{*2} - B_{si}^{*2} \frac{I_1}{x_n a I_1'}}{B_w^*(\alpha) (B_w^*(\alpha) - x_n a B_{se}^*)} \right] (b \cos x_n s - n \sin x_n s) \quad (1.24)$$

Dieser Term röhrt unmittelbar von den Gleichgewichtsfeldern erster Ordnung in (1.8) her und hängt über die Fourierkoeffizienten k_n wesentlich vom globalen Verlauf der Krümmung ab. Das Argument der modifizierten Besselfunktion I_1 ist dabei

$$x_n a = -\frac{2\pi n a}{L} = -\frac{n a}{R_0(1+x)} = -\frac{n}{A(1+x)} \quad (1.25)$$

und I_1' bezeichnet die Ableitung nach dem Argument. Für $n = 0$ erhält man das zugehörige Reihenglied durch formalen Grenzübergang $n \rightarrow 0$. Um die Abhängigkeit von den verschiedenen Parametern, insbesondere dem Sicherheitsfaktor

$$q = \frac{2\pi a B_{se}^*}{L B_w^*(\alpha)} = \frac{a B_{se}^*}{R_0(1+x) B_w^*(\alpha)} = \frac{B_{se}^*}{A(1+x) B_w^*(\alpha)} \quad (1.26)$$

besser hervortreten zu lassen, formen wir (1.24) mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung (1.5) um, wodurch B_{si}^* eliminiert wird, und erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{f}_3 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_n R_0 & \left[\frac{1-\beta}{1+nq} - \sqrt{1-\beta + q^2 A^2 (1+x)^2} \frac{A(1+x)}{n} \left(1 + \frac{A(1+x) I_1 - 1}{I_1'} \right) \right. \\ & \left. - (1-\beta + q^2 A^2 (1+x)^2) \frac{1 - \frac{A(1+x) I_1}{n I_1'}}{1+nq} \right] (b \cos \frac{ny}{1+x} + n \sin \frac{ny}{1+x}) \end{aligned}$$

$$\text{mit } I_1 = I_1 \left(\frac{n}{A(1+x)} \right) \quad (1.27)$$

Asymptotisch für große A ist aber $1-\beta$ gegenüber $q^2 A^2 (1+x)^2$ zu vernachlässigen. Dann läßt sich offenbar eine Reihe abspalten mit $1-\beta$ als Faktor, während die übrigbleibende Reihe kein β mehr enthält. Sollte sich also β während der Entladung ändern, genügt es, den abgespaltenen Teil des Transversalfeldes nach Maßgabe des Faktors $1-\beta$ anzupassen. Weiterhin ist es zweckmäßig, die Reihensummationen dahingehend zu ändern, daß man die

Glieder mit positiven und negativen n paarweise zusammenfaßt, so daß nur noch über positive n zu summieren ist. Da nur die geraden Koeffizienten $k_n = k_{2m} = \frac{1}{\pi m R} \sin \frac{\pi m}{1+x}$ von null verschieden sind, genügt schon eine Summation über m . Schließlich läßt sich I_1' noch durch I_0 und I_1 ausdrücken. Wir können dann die so abgeänderte Reihe (1.27) zusammen mit (1.22) und (1.17) in (1.16) einsetzen und erhalten das endgültige \mathcal{L}_1^1 .

1.3 Diskussion der analytischen und numerischen Ergebnisse

Für das gesamte Transversalfeld ergibt sich die folgende übersichtliche Zerlegung:

$$\mathcal{L}_1^1 = \frac{B_0^0(a) \alpha}{2 R_0} (f_1(y, A) + f_2(y, x) + f_3(y, x, \beta, q) + f_4(y, x, A, q))$$

mit $f_1 = b \left(\frac{1}{2} - \ln 8A \right) S(y)$

$$f_2 = -b \left[\int_{-\pi/(1+x)}^{y-\Delta y} dy' \frac{1 - \cos(\varphi' - \varphi) + \cos \varphi' (T' - T)}{[2 \{1 - \cos(\varphi' - \varphi) + (\cos \varphi' - \cos \varphi)(T' - T)\} + (T' - T)^2]^{3/2}} \right. \\ \left. + \int_{y+\Delta y}^{\dots} S(y) \ln \frac{\Delta y}{4} \right]$$

$$f_3 = (1-\beta) \left[b \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{1-4m^2q^2} \sin \frac{\pi m}{1+x} \cos \frac{2\pi my}{1+x} \right) \right. \\ \left. + n \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-4m^2q^2} \sin \frac{\pi m}{1+x} \sin \frac{2\pi my}{1+x} \right]$$

$$f_4 = -\frac{2}{\pi} \left\{ b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{q^2 A^2 (1+x)^2}{1-4m^2q^2} \frac{\frac{2\pi m}{A(1+x)} I_0 - 2I_1}{\frac{2\pi m}{A(1+x)} I_0 - I_1} \sin \frac{\pi m}{1+x} \cos \frac{2\pi my}{1+x} \right. \\ \left. + n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{q A (1+x)}{\frac{2\pi m}{A(1+x)} I_0 - I_1} \left[I_0 - 1 + \frac{4m^2q^2}{1-4m^2q^2} \left(I_0 - \frac{A(1+x)}{m} I_1 \right) \right] \sin \frac{\pi m}{1+x} \sin \frac{2\pi my}{1+x} \right\}$$

wobei $I_{0,1} = I_{0,1} \left(\frac{2m}{A(1+x)} \right)$ (1.28)

Für $x = 0$ bleiben von $\mathcal{L} = \sum_{n=1}^4 f_n$ nur f_1 und der erste ($m = 0$) Term von f_3 übrig, d.h. das Rennbahnenfeld reduziert sich wieder auf das Kreisbahnenfeld (1.15). f_1 hängt offensichtlich von der lokalen toroidalen Krümmung ab und f_2 beschreibt Korrekturen zu f_1 , die durch die wechselseitige Beeinflussung der gekrümm-

ten und geraden Abschnitte erzeugt werden. Dagegen ist der erste Term mit $\frac{1-\beta}{1+x}$ von f_3 mit der mittleren toroidalen Krümmung verknüpft und die Reihen in f_3 und f_4 stellen die zugehörigen Rennbahnkorrekturen dar. Hier tritt auch die vorhergesagte Horizontalkomponente des Transversalfeldes auf. Sie verschwindet in der Mitte der geraden und gekrümmten Abschnitte bei $y = 0$ bzw. $y = \frac{\pi}{2}(1+x)$ und sie ist am größten in der Nachbarschaft der Unstetigkeitsstelle $y = \frac{\pi}{2}$, ganz entsprechend wie die Vertikalverschiebung in Fig. 1. Man sieht, daß man die geraden und gekrümmten Abschnitte niemals für sich allein betrachten darf, sondern wegen der starken Wechselwirkung immer nur die Rennbahn als ganzes.

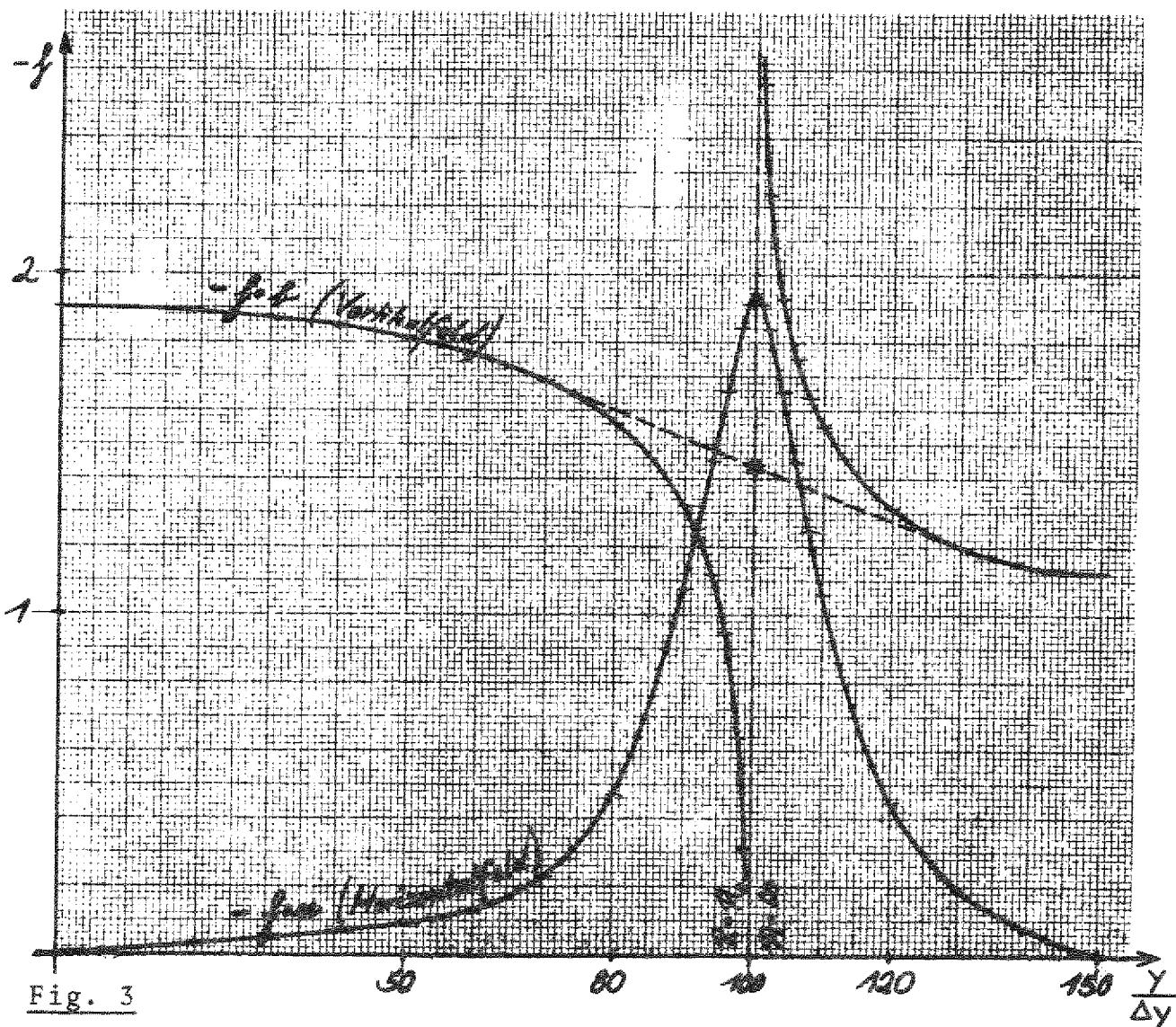


Fig. 3

$\beta = 0, q = 2, A = 3.5, f_1 \cdot b = \left(\frac{1}{2} - \ln 8A\right) S(y) = -2.832 S(y), x = 0.5$

$\frac{y}{\Delta y}$	$f_2 \cdot b$	$f_3 \cdot b$	$f_3 \cdot n$	$f_4 \cdot b$	$f_4 \cdot n$	$f \cdot b$	$f \cdot n$
0	0.207	0.634	0	0.091	0	-1.900	0
10	0.210	0.634	-0.019	0.091	0.005	-1.897	-0.015
20	0.217	0.636	-0.038	0.091	0.009	-1.888	-0.030
30	0.232	0.638	-0.057	0.090	0.012	-1.872	-0.045
40	0.254	0.642	-0.076	0.089	0.013	-1.848	-0.064
50	0.287	0.646	-0.095	0.087	0.006	-1.812	-0.089
60	0.335	0.652	-0.113	0.085	-0.020	-1.760	-0.133
70	0.410	0.658	-0.131	0.079	-0.101	-1.685	-0.232
80	0.538	0.666	-0.149	0.067	-0.327	-1.561	-0.476
90	0.802	0.674	-0.166	0.037	-0.908	-1.320	-1.074
91	0.845	0.675	-0.168	0.032	-0.995	-1.280	-1.163
92	0.896	0.676	-0.170	0.026	-1.087	-1.235	-1.256
93	0.953	0.677	-0.171	0.020	-1.183	-1.182	-1.354
94	1.021	0.677	-0.173	0.013	-1.282	-1.120	-1.455
95	1.103	0.678	-0.175	0.006	-1.383	-1.045	-1.558
96	1.206	0.679	-0.176	-0.003	-1.483	-0.950	-1.659
97	1.340	0.680	-0.178	-0.012	-1.578	-0.824	-1.756
98	1.534	0.681	-0.180	-0.022	-1.662	-0.639	-1.842
99	1.870	0.682	-0.182	-0.033	-1.730	-0.313	-1.911
100	-0.659	0.683	-0.183	-0.046	-1.759	-1.438	-1.942
101	-3.189	0.684	-0.180	-0.058	-1.730	-2.563	-1.910
102	-2.851	0.685	-0.176	-0.069	-1.663	-2.236	-1.839
103	-2.658	0.686	-0.172	-0.080	-1.579	-2.052	-1.751
104	-2.523	0.687	-0.169	-0.089	-1.485	-1.925	-1.653
105	-2.420	0.688	-0.165	-0.097	-1.386	-1.830	-1.551
106	-2.338	0.688	-0.161	-0.104	-1.285	-1.754	-1.447
107	-2.270	0.689	-0.158	-0.111	-1.186	-1.691	-1.344
108	-2.212	0.690	-0.154	-0.117	-1.090	-1.639	-1.245
109	-2.161	0.691	-0.151	-0.123	-0.999	-1.593	-1.150
110	-2.117	0.692	-0.147	-0.128	-0.912	-1.553	-1.059
120	-1.853	0.698	-0.111	-0.158	-0.336	-1.312	-0.446
130	-1.731	0.703	-0.074	-0.169	-0.113	-1.197	-0.187
140	-1.673	0.706	-0.037	-0.174	-0.033	-1.141	-0.070
150	-1.657	0.707	0	-0.175	0	-1.124	0

Die Formeln (1.28) sind zunächst für $\beta = 0$, $q = 2$, $A = 3.5$ und verschiedene x numerisch ausgewertet worden. Selbstverständlich können bei Bedarf auch andere Parameter für die Rechnung benutzt werden. Die Ergebnisse für $x = 0.5$, wofür also die geraden Abschnitte halb so lang sind wie die gekrümmten, zeigt die Tabelle auf Seite 14. Als unabhängige Variable wird $\frac{y}{\Delta y} = \frac{200}{\pi}$ verwandt, so daß die Unstetigkeitsstelle dem Wert $\frac{y}{\Delta y} = 100$ entspricht. Das in der letzten Spalte stehende Gesamtfeld f ist in Fig. 3 noch einmal graphisch dargestellt. Die Orientierung der Feldkomponenten in Richtung von $-f_x$ und $-f_y$ ist zu erwarten, wenn die Verschiebungen der Plasmasäule von Fig. 1 nach außen und nach oben kompensiert werden sollen. Auffällig ist, daß das Horizontalfeld in der Nähe der Unstetigkeit der Krümmung überraschend groß wird und daß das Vertikalfeld dort einen gewaltigen Sprung macht. Dieser Sprung ist jedoch unrealistisch und hängt damit zusammen, daß die nur für sehr große A asymptotisch gültigen Formeln für ein relativ kleines A ausgewertet werden. In Wirklichkeit muß der Feldsprung ausgeglättet werden, so daß Abweichungen etwa in einem s -Intervall von der Größenordnung des Plasmadurchmessers $2a$ zu beiden Seiten der Unstetigkeitsstelle der Krümmung auftreten, oder für $A = 3.5$ umgerechnet etwa im Intervall $80 \leq \frac{y}{\Delta y} \leq 120$. Dieser Glättungseffekt ließe sich grundsätzlich bei der Ausführung aller im Laufe der Rechnung vorkommenden Integrationen entsprechend berücksichtigen und würde auch $S(y)$ in f_1 (1.17) stetig machen. Es müßte sich dann für das Vertikalfeld etwa die gestrichelte Tangente in Fig. 3 ergeben, die bemerkenswerterweise genau durch den berechneten Funktionswert an der Unstetigkeitsstelle geht. Solche Änderungen wären jedoch mit beträchtlichem Aufwand verbunden und liefern überdies auf die Berücksichtigung von Termen höherer Ordnung hinaus, die ja ansonsten wie auch in der Schafranov-Formel stets vernachlässigt werden. Insofern ist die Berechnung des Transversalfeldes für einen Rennbahntorus wegen der Unstetigkeit in der Krümmung noch nicht voll befriedigend. Für die praktische Erzeugung des berechneten Transversalfeldes könnte man evtl. die Dipolfelder von zwei helisch gewundenen Leiterpaaren einsetzen, die einander in Abhängigkeit von der Bogenlänge verstärken oder schwächen, um auf der Rennbahnseele ein Feld der gewünschten Stärke und

Richtung hervorzurufen. Zwei weitere Leiterpaare wären vermutlich für den β -abhängigen Anteil f_3 erforderlich.

2. Einfluß der Rennbahnkonfiguration auf das Stabilitätsverhalten

2.1 Kriterien für lokale Instabilitäten

Wir betrachten im folgenden nur lokale MHD-Instabilitäten in der Nähe der magnetischen Achse und für einen kreisförmigen Querschnitt der magnetischen Flächen. Lokale Vertauschungs- oder "Flute"-Instabilitäten werden im Falle eines zylindrischen Plasmas oder eines sehr schlanken Torus durch das Suydamkriterium /5/ beschrieben, d.h.

$$\frac{1}{4} \frac{\mu'^2}{\mu^2} + \frac{2p'}{rB_z^2} > 0 \quad (2.1)$$

ist notwendig und hinreichend für Stabilität gegen lokale Störungen. Im Kreisbahntorus mit Umfang $\oint ds = L_0 = 2\pi R_0$ verwendet man anstelle von $\mu = \frac{B_\theta}{rB_z}$ die Rotationstransformation $\zeta = \frac{L_0 B_\theta}{rB_s}$ oder auch $\tau = \frac{\zeta}{2\pi} = \frac{R_0 B_\theta}{rB_s}$. Da sich der erste Term im Kriterium (2.1), welcher die stabilisierende Wirkung der Verscherung ausdrückt, bei Annäherung an die magnetische Achse wie r^2 verhält, der zweite Term hingegen wie r^0 (nicht r^1 wie bei Schafraov /6/ angegeben), ist ein zylindrisches Plasma in der Nähe der magnetischen Achse immer instabil, wenn $p' < 0$. In einem Tokamak hat man $\zeta \ll 1$ oder der Sicherheitsfaktor $q = \frac{1}{\tau} \gtrsim 1$. Das Suydamkriterium ist dann durch das Mercierkriterium /7/ zu ersetzen, welches für kreisförmigen Plasmaquerschnitt und Axialsymmetrie die einfache Gestalt /6/:

$$\frac{1}{4} \frac{q'^2}{q^2} + \frac{2p'}{rB_s^2} (1-q^2) > 0 \quad (2.2)$$

annimmt. Jetzt ist $q > 1$ hinreichend für Stabilität gegen lokale Störungen, und diese Bedingung fällt formal mit dem Kruskal-Schafraov-Kriterium für helische "Kink"-Instabilitäten zusammen. Wir sehen dabei von dem Sonderfall ab, daß der Druck auf der Achse ausnahmsweise kein Maximum, sondern ein Minimum hat, was die Rolle der stabilen und instabilen Bereiche in

(2.2) vertauscht. Man beobachtet also, daß erstens die Umgebung der magnetischen Achse am schwersten zu stabilisieren ist, weil dort die Verscherung keine Rolle spielt, und daß zweitens eine Stabilisierung dieser Umgebung im Sinne des Mercierkriteriums sogar auf Stabilität des Plasmas gegen Kink-Instabilitäten schließen läßt. Der Zusatzfaktor $1 - q^2$ kommt dadurch zustande, daß sich die magnetische Achse nach außen in Gebiete schwächeren toroidalen Feldes verschiebt, was einen magnetischen "well" (Topf, Mulde) entstehen läßt. Es ist nicht klar, ob das Zusammenfallen der Stabilitätsgrenzen für lokalisierte und Kink-Moden auch noch für von der einfachen Kreisbahn abweichende Formen der magnetischen Achse richtig bleibt. Jedenfalls ist das Mercierkriterium, vor allem in der Umgebung der magnetischen Achse, eine ziemlich strenge Bedingung, und es ergibt einen Sinn, beliebig geformte magnetische Achsen mit Hilfe des lokalen Kriteriums zu untersuchen. Wir fragen also nach einer geeigneten Verallgemeinerung der für gewöhnliche Tokamaks geltenden Stabilitätsbedingung $q^2 > 1$, wenn die Krümmung der magnetischen Achse nicht mehr konstant, sondern beliebig variabel ist. Das Gleichgewicht ist dann nicht mehr axialsymmetrisch, sondern kann z.B. Rennbahnform haben. Denkbar wäre auch eine räumliche Krümmung oder Torsion, z.B. ein Figur-8-Stellarator, wir wollen uns aber im folgenden nur auf ebene Konfigurationen beschränken.

2.2 Stand der Theorie für nichtaxialsymmetrische ebene Konfigurationen mit kreisförmigem Querschnitt

Eine sehr allgemeine Theorie für beliebig gekrümmte toroidale Plasmen mit elliptischem Querschnitt stammt von Mercier /3,8/. Vorausgesetzt wird, daß der Plasmaradius a klein ist gegen den Krümmungsradius $R(s)$, sagen wir von der Ordnung ϵ . Dann muß auch die Verschiebung $\delta(s)$ der magnetischen Achse gegenüber der geometrischen Achse der Plasmasäule verglichen mit a von der gleichen Ordnung ϵ klein bleiben, und es wird möglich, das Stabilitätskriterium statt auf die magnetische Achse auf die geometrische Achse (Seele) zu beziehen, deren Gestalt leichter beschreibbar und von außen vorgebbar ist. Unter diesen Umständen hat das Mercierkriterium gemäß /3/ auf

der Torusseele und für kreisförmigen Plasmaquerschnitt die folgende Gestalt

$$\dot{p} \left\{ \frac{1}{4} \oint \frac{ds}{B^2(s)} \left[\frac{j^2}{B^2} + \frac{3B'^2(s)}{B^2(s)} \right] + \oint \frac{B(s) ds}{R^2(s)} \right. \\ \left. - Re \oint \left[\frac{B'(s)}{2R(s)} - i \frac{j}{B} \frac{B(s)}{R(s)} \right] Z(s) ds \right\} > 0 \quad (2.3)$$

Alle Größen beziehen sich auf die Seele $r = 0$. Insbesondere spielt der Faktor

$$\dot{p} = \dot{p}_0 = \frac{dp}{dV_0} \Big| \sim \frac{d^2 p}{dr^2} \Big|_0 = p''_0 = \frac{p'}{r} \Big|_0 \quad (2.4)$$

dieselbe Rolle wie in (2.1) oder (2.2), wir setzen ihn wieder als negativ voraus, so daß auch die geschweifte Klammer in (2.3) negativ sein muß. $j = j_{so}(s)$ ist die Stromdichte auf der Seele, $B = B_{so}(s)$ das toroidale Hauptfeld, während der Quotient $\frac{j}{B}$ nicht von der Bogenlänge s abhängt. Weiter ist

$$R(s) = R(s) B^{3/2}(s) \quad (2.5)$$

$$Z(s) = - \frac{1}{1 - e^{-i \oint K(u) du}} \int_s^{s+L} \frac{d\zeta}{R(\zeta)} e^{-i \int_s^\zeta K(u) du} \quad (2.6)$$

und $K(s)$ ist im torsionsfreien Fall sogar eine Konstante, nämlich

$$\oint K(s) ds = \oint \frac{j}{2B} ds = \frac{jL}{2B} = \frac{B_0 L}{B_0 r} = L = L_0 = 2\pi r_0 = \frac{2\pi}{q} \quad (2.7)$$

Auffällig ist der Resonanznenner in (2.6). Er führt zu einer Singularität für $\frac{L}{r_0} = n$, also für eine ganzzahlige Rotationstransformation auf der Achse. Das Auftreten dieser Singularität hängt mit einer geometrischen Resonanz zusammen, bei der die n -te Harmonische der periodischen Krümmung immer in Phase mit der nach Maßgabe von $\frac{L}{r_0}$ rotierenden Feldlinie ist. Bei Annäherung von $\frac{L}{r_0}$ an ein ganzzahliges n bleibt die Verschiebung $\delta(s)$ der magnetischen Achse gegenüber der Seele nicht mehr von der Ordnung ϵ klein, sondern wird immer größer und nimmt die Gestalt einer Helix mit der Periodenlänge $\frac{L}{n}$ an. Für $\frac{L}{r_0}$, die zu nahe

bei n liegen, ist der Durchmesser der Schraube so groß, daß sie nicht mehr in die Plasmasäule hineinpaßt, d.h. es ist kein Gleichgewicht mehr möglich, jedenfalls keines mit einer einzigen magnetischen Achse, welche die innerste von lauter ineinander geschachtelten toroidalen magnetischen Flächen darstellt. Die ganze Gleichgewichts- und Stabilitätstheorie, die auf einer Entwicklung der MHD-Gleichungen in der Nachbarschaft der magnetischen Achse beruht, ist daher an den Resonanzstellen nicht mehr gültig. Die Singularitäten von $\zeta(s)$ führen aber zu einem Vorzeichenwechsel im Stabilitätskriterium (2.3), d.h. es muß jeweils auf einer Seite der Resonanzstelle einen Stabilitätsbereich geben, wobei jedoch die Stabilitätsgrenze $\zeta_0 = n$ einem Ungleichgewicht entspricht und daher nicht erreicht werden kann. Das schränkt die Stabilitätsbereiche etwas ein, und wenn sie zu schmal sind, können sie durch den dort fehlenden Plasmaeinschluß sogar völlig unterdrückt werden. Die Gleichgewichts- und Stabilitätseigenschaften sind also untrennbar miteinander verknüpft.

Wir betrachten jetzt zunächst den Spezialfall, daß das Magnetfeld von der Bogenlänge unabhängig ist, also $B(s) = \text{konst.}$ Dann ist auch der Durchmesser der magnetischen Flächen in der Nachbarschaft der magnetischen Achse konstant, und (2.3) reduziert sich auf

$$\frac{j^2}{4B^2} + \left\langle \frac{1}{R^2(s)} \right\rangle + \frac{j}{BL} \operatorname{Re} \oint \frac{U(s)}{R(s)} ds < 0 \quad (2.8)$$

mit $U(s) = -\frac{i}{1-e^{-i2\pi s}} \int_s^{s+L} \frac{d\zeta}{R(\zeta)} e^{-i2\pi \zeta \frac{L-s}{L}}$ (2.9)

In der Fourierentwicklung

$$\frac{1}{R(s)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n \frac{s}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^* e^{-2\pi i n s/L} \quad (2.10)$$

setzen wir von vornherein voraus, daß nur Fourierkoeffizienten a_n mit geradzahligem $n = 2m$ auftreten. Das gewährleistet automatisch, daß die Kurve, welche die Torusseele darstellt, auch wirklich geschlossen ist /9/. Das Verschwinden der Fourierkoeffizienten a_{2m+1} bedeutet natürlich, daß die ungeraden Harmonischen ausfallen und damit auch die zu den entsprechenden Resonanzstellen gehörigen Ungleichgewichte und Stabilitäts-

bereiche. Weiter ist die mittlere Krümmung

$$\left\langle \frac{1}{R(s)} \right\rangle = \frac{1}{L} \oint \frac{ds}{R(s)} = a_0 = \frac{2\pi}{L} \quad (2.11)$$

und das mittlere Krümmungsquadrat

$$\left\langle \frac{1}{R^2(s)} \right\rangle = \frac{1}{L} \oint \frac{ds}{R^2(s)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^* a_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 \quad (2.12)$$

Einsetzen von (2.10) in (2.9) ergibt

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{-i}{1 - e^{-2\pi i t}} \int_s^{s+L} d\zeta e^{-2\pi i t \frac{\zeta - s}{L}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^* e^{-2\pi i n \frac{\zeta}{L}} \\ &= \frac{L e^{2\pi i t \frac{s}{L}}}{1 - e^{-2\pi i t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n^*}{2\pi i (t+n)} \left[e^{-2\pi i (t+n) \frac{s+L}{L}} - e^{-2\pi i (t+n) \frac{s}{L}} \right] \\ U(s) &= -L \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n^*}{2\pi i (t+n)} e^{-2\pi i n \frac{s}{L}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \nabla \oint \frac{U(s)}{R(s)} ds &= -L \oint \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n^*}{2\pi i (t+n)} e^{-2\pi i n \frac{s}{L}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{2\pi i k \frac{s}{L}} \\ \oint \frac{U(s)}{R(s)} ds &= -L^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n^* a_n}{2\pi i (t+n)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Damit schreibt sich das Stabilitätskriterium (2.8) in der Form

$$\frac{1}{L^2} \frac{j^2 L^2}{4B^2} + \left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle - 2 \frac{jL}{2B} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|a_n|^2}{2\pi i (t+n)} < 0 \quad (2.15)$$

oder mit Hilfe von (2.7)

$$\frac{4\pi^2}{L^2 q^2} + \left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle - 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|a_n|^2}{1+nq} < 0 \quad (2.16)$$

$$F = q^2 \frac{L^2}{4\pi^2} \left(-\left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle + 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|a_n|^2}{1+nq} \right) > 1 \quad (2.17)$$

Die Theorie von Schafranov /6/ setzt von vornherein kreisförmigen und konstanten Plasmaquerschnitt voraus und kann daher das Mercierkriterium nicht nur auf der Achse selbst, sondern auch in ihrer Nachbarschaft auswerten. Eine beliebige Stromdichte- und Druckverteilung über den Querschnitt der Plasmasäule ist

zugelassen. Der Plasmaradius muß wieder klein gegen den Krümmungsradius sein. Das Schafranov'sche Stabilitätskriterium verallgemeinert das Kriterium (2.2) und lautet

$$\frac{1}{4} \frac{q'^2}{q^2} + \frac{2p'}{rB_s^2} (1-F) > 0 \quad (2.18)$$

$$\text{mit } F = q^2 \frac{4}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1-nq}{1+nq} |\alpha_n|^2 \quad (2.19)$$

Addiert und subtrahiert man hinter dem Summenzeichen $|\alpha_n|^2$, so kann man (2.12) benutzen und (2.19) in (2.17) überführen. Die lokalen Kriterien von Mercier und Schafranov sind daher in dem gemeinsamen Spezialfall, daß ein Plasma mit kreisförmigem und konstantem Querschnitt auf der Achse betrachtet wird, identisch. $F > 1$ ist jetzt die Bedingung für Stabilisierung durch den Einfluß des magnetischen Topfes. Diese Bedingung ist hinreichend für Stabilität der Plasmasäule gegen lokale Vertauschungsinstabilitäten. Zwar kann auch die Verscherung mit zur Stabilisierung beitragen, aber nicht auf der Achse selbst.

2.3 Einschränkung des Tokamakstabilitätsbereiches durch die Rennbahngeraden

Im einfachsten Fall enthält die Krümmung neben dem konstanten Glied nur eine höhere Harmonische mit $\alpha_{-n} = \alpha_n^* = \alpha_n$, d.h. es gibt eine harmonische Modulation der Krümmung gemäß

$$\frac{1}{R(s)} = \alpha_0 + 2\alpha_n \cos \frac{2\pi ns}{L} \quad (2.20)$$

Eine toroidale Maschine mit einem solcherart gekrümmten Plasma nennt man "Harmonika n". Die Funktion F in (2.17) hat in diesem Fall die Gestalt

$$\begin{aligned} F &= \frac{q^2}{\alpha_0^2} \left[-\alpha_0^2 - 2\alpha_n^2 + 2 \left(\alpha_0^2 + \frac{\alpha_n^2}{1+nq} + \frac{\alpha_n^2}{1-nq} \right) \right] \\ F &= q^2 \left(1 + \frac{2\alpha_n^2}{\alpha_0^2} \frac{1+n^2q^2}{1-n^2q^2} \right) > 1 \\ \text{oder } t^2 &< 1 + \frac{2\alpha_n^2}{\alpha_0^2} \frac{t^2+n^2}{t^2-n^2} \end{aligned} \quad \} \quad (2.21)$$

Für $\alpha_n = 0$ haben wir wieder einen gewöhnlichen axialsymmetri-

schen Tokamak mit der Kruskal-Schafranov-Bedingung $q^2 > 1$ oder $t^2 < 1$. Dabei scheidet jedoch die unmittelbare Umgebung von $t^2 = 0$ aus, denn ohne Plasmastrom ist bekanntlich in Axialsymmetrie kein Gleichgewicht und kein Einschluß möglich. Der bekannte Tokamakstabilitätsbereich liegt also ebenfalls in der Nachbarschaft eines Ungleichgewichts. Für $\alpha_n^2 > 0$ lassen die Abweichungen von der Axialsymmetrie einen neuen Stabilitätsbereich oberhalb der geometrischen Resonanz $t^2 = n^2$ entstehen, sagen wir $n^2 < t^2 < n^2 + \Delta n^2$, dessen Breite Δn^2 mit dem Quadrat der Modulationsamplitude α_n^2 zunimmt. Andererseits wird der Tokamakstabilitätsbereich verkleinert, man schreibt $q^2 > q_T^2 > 1$. Die untere Schranke q_T für den Sicherheitsfaktor q wird mit α_n^2 immer größer. Für $\alpha_n^2 \geq \frac{1}{2} a_0^2$ ist sie unendlich groß und der Tokamakstabilitätsbereich somit ganz verschwunden. Es bleibt dann nur noch der zweite Stabilitätsbereich übrig, der an das Ungleichgewicht bei der höheren Harmonischen anschließt. Variable Krümmung kann also nach Überschreiten eines bestimmten Grenzwertes dazu führen, daß selbst für beliebig große q oder kleine t der Einfluß des magnetischen Topfes für die Stabilisierung nicht mehr ausreicht.

Betrachten wir nunmehr eine Rennbahn mit der Gesamtlänge

$L = L_0 + L_s = 2\pi R_0 + L_s$, dann sind die Fourierkoeffizienten

$$\alpha_n = \alpha_{2m} = \alpha_{-2m} = \frac{2}{m L_0} \sin \frac{m \pi L_0}{L} \quad (2.22)$$

Eine Rennbahn ist also nichts weiter als eine spezielle Überlagerung von lauter verschiedenen Harmonikas, wobei zu jedem der unendlich vielen α_n^2 ein entsprechender schmaler Stabilitätsbereich gehört. Das mittlere Krümmungsquadrat ist für eine Rennbahn einfach

$$\left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle = \frac{L_0}{L} \frac{1}{R_0^2} = \frac{4\pi^2}{L L_0}, \quad \text{und die Funktion } F \text{ wird}$$

$$F = q^2 \frac{L^2}{4\pi^2} \left(-\frac{4\pi^2}{L L_0} + 2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_{2m}^2}{1+2mq} \right)$$

$$F = q^2 \left(2 - \frac{L}{L_0} + \frac{4}{\pi^3} \frac{L^2}{L_0^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{m \pi L_0}{L}}{m^2 (1-4m^2 q^2)} \right) > 1 \quad (2.23)$$

Führen wir noch das Längenverhältnis $\frac{L_s}{L_0} = x$ ein, dann ist

$$\frac{L}{L_0} = \frac{L_0 + L_S}{L_0} = 1+x, \text{ und } F \text{ schreibt sich in der Form}$$

$$F(q, x) = q^2 \left(1 - x + \frac{4}{\pi^2} (1+x)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{1+x}}{m^2 (1-4m^2 q^2)} \right) > 1 \quad (2.24)$$

Die untere Grenze q_T des Sicherheitsfaktors im Tokamakstabilitätsbereich ist jetzt eine Funktion von x und lässt sich numerisch aus der Gleichung

$$F(q_T(x), x) - 1 = 0 \quad (2.25)$$

berechnen. Bis auf einen Fehler von höchstens 1% wird $q_T(x)$ durch die folgende Näherungsformel beschrieben:

$$q_T(x) = \frac{1 + 0.185x + 0.008x^2}{\sqrt{1-x}} \quad (2.26)$$

Eine graphische Darstellung zeigt die unten Kurve von Fig. 4. Bei Schafraanov /6/ fehlt in der Formel (2.23) der Faktor $\frac{1}{\pi^2}$ vor dem Summenzeichen. Dadurch wird auch die (2.26) entsprechende Näherungsformel falsch ($1.3x$ statt $0.185x$). Außerdem liegen die höheren Stabilitätsbereiche nicht wie von Schafraanov angegeben bei $q^2 = \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \dots$ sondern bei $q^2 = \frac{1}{4m^2} = \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{36}, \dots$

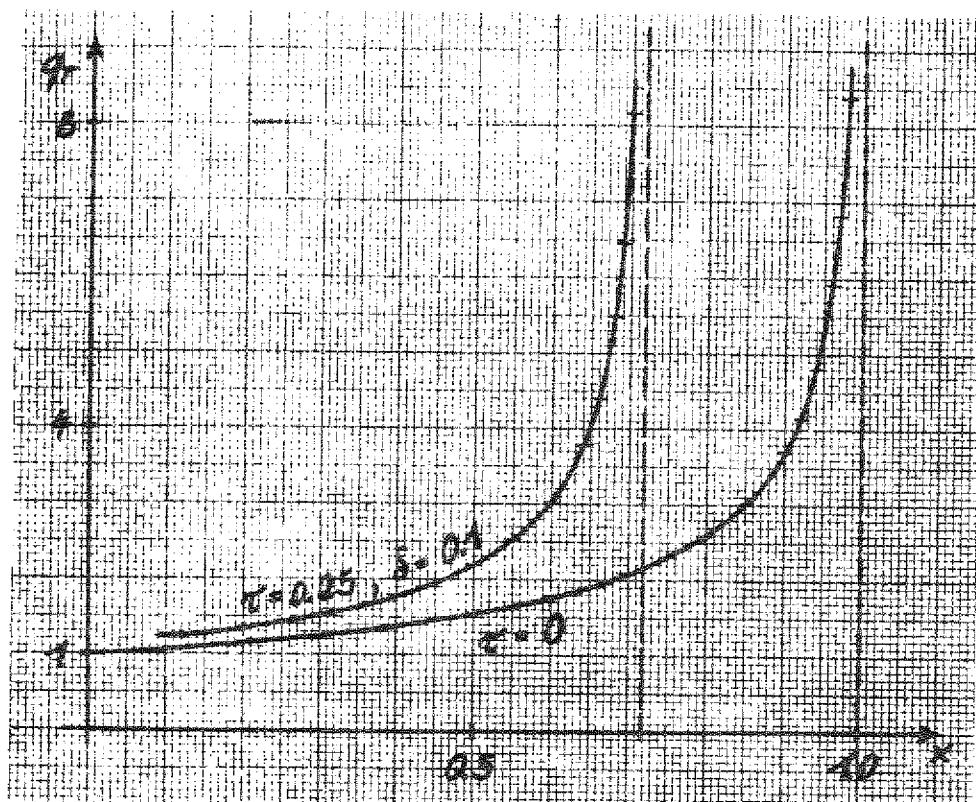


Fig. 4

Das ändert jedoch nichts an der Aussage, daß der Tokamakinstabilitätsbereich mit wachsendem x zugunsten der höheren Stabilitätsbereiche zusammenschrumpft, $q \xrightarrow{x \rightarrow 1} \infty$. Der Tokamakinstabilitätsbereich verschwindet also vollkommen, wenn die geraden Abschnitte ebenso lang sind wie die gekrümmten. Eine Rennbahn kann nur dann im Tokamakbetrieb arbeiten, wenn die geraden Zwischenstücke beschränkt bleiben, sonst wird der Stabilitätsbereich auf die höheren Harmonischen verstreut. In diesem Zusammenhang ist es vielleicht interessant, darauf hinzuweisen, daß der einzige bisher gebaute Rennbahntokamak, das russische Experiment TUMAN /10/, bezüglich der Stabilität besonders ungünstig dimensioniert war, und zwar mit einem Längenverhältnis $x \approx 1$. Das erklärt möglicherweise einige der Schwierigkeiten, mit diesem Experiment einen stabilen Einschluß zu erreichen, wie insbesondere die gemessene Bohmdiffusion. Inwieweit die höheren Stabilitätsbereiche einer Rennbahn von praktischer Bedeutung sein könnten, wird in Anhang B untersucht.

Zu bemerken ist noch, daß die Herleitung des Stabilitätskriteriums eigentlich eine stetig veränderliche Krümmung voraussetzt. Die magnetische Achse müßte sonst an den Unstetigkeitsstellen einen Sprung machen, d.h. solche Gleichgewichte können streng genommen gar nicht existieren. Trotzdem darf man auch die unstetige Rennbahnkrümmung in das Stabilitätskriterium einsetzen und erhält vernünftige Aussagen. Man kann nämlich eine Folge von Gleichgewichten mit stetig veränderlicher Krümmung konstruieren, welche sich der Rennbahnform immer mehr annähern. Dann konvergieren die zu dieser Folge gehörigen Stabilitätsbereiche sehr rasch gegen die aus dem Rennbahnkriterium errechneten Stabilitätsbereiche. Dies wird von Tasso und Mercier /9/ im einzelnen gezeigt und rechtfertigt die Vorgehensweise.

2.4 Berücksichtigung eines Toroidalfelddivertors

Wir betrachten nunmehr den Fall, daß das Magnetfeld auf eine ganz spezielle Weise von der Bogenlänge s abhängt. Auf einer der beiden geraden Strecken der Rennbahn sei genau in der Mitte ($s = 0$) ein zylindersymmetrischer Toroidalfelddivertor angebracht, der zu einer Schwächung des Magnetfeldes $\mathcal{B}(s)$

auf der Achse führt und damit wegen der Flußkonstanz zu einer entsprechenden Vergrößerung des Querschnittes der magnetischen Flächen. Wir denken uns die Wirkung dieses Divertors auf den Feldverlauf durch ein Modellfeld dargestellt, das von einer einwindigen Spule mit dem Radius R_d erzeugt wird, deren (kleines) Feld dem Hauptfeld entgegengerichtet ist. Ein schematisches perspektivisches Bild der Konfiguration zeigt Fig. 5a. Die Plasmasäule muß man sich noch zu einem Torus ergänzt denken. Für das Feld eines Kreisstroms J_d mit dem Radius R_d gilt auf der Achse

$$B_d(s) = \frac{J_d}{2R_d} \frac{1}{(1 + \frac{s^2}{R_d^2})^{3/2}} = \frac{B_d(0)}{(1 + \frac{s^2}{R_d^2})^{3/2}} = B_d(0) \cdot f(s) \quad (2.27)$$

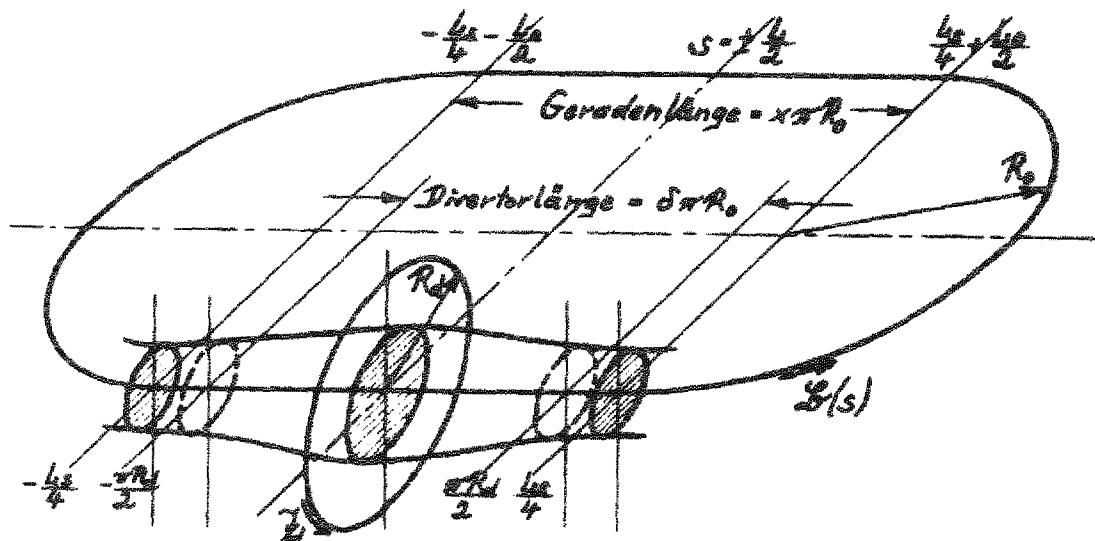


Fig. 5a

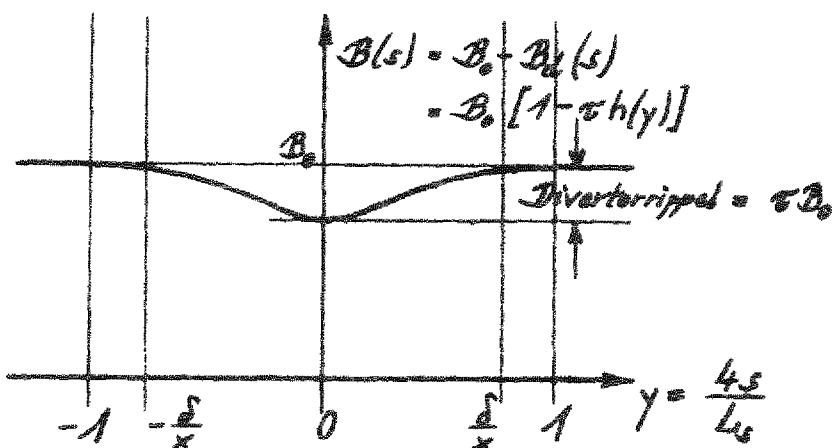


Fig. 5b

Das Divertorfeld B_d nimmt also mit wachsendem Abstand $|s|$ von der Divertorebene rasch ab und wird schließlich gegenüber dem Hauptfeld B_o vernachlässigbar klein. Wir können die Ausdehnung der durch den Divertor auf dem Geradenstück der Rennbahnseele gestörten Zone durch eine willkürlich festgesetzte "Divertorlänge" πR_d kennzeichnen. Das Feld an den Enden des Divertors ist dann

$$\frac{B_d\left(\pm \frac{\pi R_d}{2}\right)}{B_d(0)} = f\left(\pm \frac{\pi R_d}{2}\right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)^{3/2}} \approx 15.5\% \quad (2.28)$$

Selbstverständlich muß der Divertor auf seinem Geradenstück Platz haben, d.h. die Divertorlänge muß in die Geradenlänge hineinpassen. Definieren wir einen dimensionslosen Parameter durch $\delta = \frac{R_d}{R_o}$, so ist zu fordern

$$\delta \pi R_o = \pi R_d \leq \frac{L_s}{2} = \frac{x R_o}{2} = x \pi R_o \quad (2.29)$$

oder kurz

$$\delta \leq x$$

Ein weiterer dimensionsloser Parameter wird zur Beschreibung der Divertorstärke benötigt. Das Gesamtfeld ist

$$B(s) = B_o - B_d(s) = B_o - B_d(0)f(s) = B_o[1 - \tau f(s)] \quad (2.30)$$

mit $\tau = \frac{B_d(0)}{B_o} < 1$

τ kennzeichnet die durch den Divertor auf der Rennbahnseele verursachte Welligkeit im Magnetfeld oder kurz den "Divertorrippel". Nun gewährleisten zwar (2.28) bis (2.30), daß die Feldstörung an den Enden $s = \pm \frac{L_s}{4}$ der vom Divertor beeinflußten geraden Strecke sehr klein ist, wünschenswert wäre aber ein Modellfeld, welches das Magnetfeld $B(s) = B_o$ auf den gekrümmten Abschnitten der Rennbahn überhaupt nicht stört und sich trotzdem überall physikalisch vernünftig verhält, also stetig und stetig differenzierbar ist. Da sowohl das Divertorfeld $B_d(s)$ als auch dessen Ableitung $B_d'(s)$ für $s = \pm \frac{L_s}{4}$ von null verschieden sind, addieren wir zu $f(s)$ einen kleinen Korrekturterm $g(s)$, der gerade in s ist und zwei freie Parameter enthält. Am einfachsten ist ein biquadratischer Ausdruck:

$$h(s) = f(s) + g(s) = f(s) + as^2 + bs^4 \quad (2.31)$$

so daß

$$h\left(\pm \frac{L_s}{4}\right) = h'\left(\pm \frac{L_s}{4}\right) = 0$$

Nach Bestimmung der Koeffizienten a und b der Biparabel erweist es sich als zweckmäßig, die Rennbahngeradenlänge auf 2 zu normieren (Fig. 5b), d.h. wir schreiben das endgültige Divertormodellfeld als Funktion der dimensionslosen Variablen $y = \frac{4s}{L_s}$ und verwenden statt $h(s)$ eine neue Funktion $h(y)$. Damit wird das Gesamtfeld für $|y| \leq 1$:

$$B(s) = B_0 [1 - \tau h(y)] \quad (2.32)$$

mit $h(y) = \frac{1}{(1+k^2y^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1+k^2)^{5/2}} \left[-(2+3.5k^2)y^2 + (1+2.5k^2)y^4 \right]$

und $\frac{L_s}{4} h'(s) = h'(y) = \frac{-3k^2 y}{(1+k^2y^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1+k^2)^{5/2}} \left[-(4+7k^2)y + (4+10k^2)y^3 \right]$

wo $k = \frac{\pi}{2} \frac{x}{s} \geq \frac{\pi}{2}$

Das Gesamtfeld für $|y| \geq 1$ oder $|s| \geq \frac{L_s}{4}$ ist wie bisher konstant gleich B_0 . Wir können nunmehr das Mercierkriterium (2.3) auf unser Divertormodellfeld anwenden. Eine wesentliche Vereinfachung ergibt sich dadurch, daß alle Integrale, die $1/R(s)$ enthalten, von der Anwesenheit des Divertors unbeeinflußt bleiben. Denn entweder liegt s in einem der U-Bögen, dann ist zwar $R(s)$ endlich, aber $B(s)$ konstant wie im Fall ohne Divertor, oder s liegt in einem Geradenstück, dann kann sich zwar $B(s)$ ändern, aber $1/R(s)$ verschwindet und macht das Integral sowieso zu null. Nur das erste Integral in (2.3) liefert einen geänderten Beitrag. Wir benutzen wieder (2.7) und erhalten:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \oint \frac{ds}{B^2(s)} \left[\frac{j^2}{B^2} + \frac{3B'^2(s)}{B^2(s)} \right] = \\ & = \frac{4\pi^2}{q^2 L^2} \left[\frac{L - \frac{L_s}{2}}{B_0^2} + \frac{1}{B_0^2} \int_{-L_s/4}^{L_s/4} \frac{ds}{B^2(s)/B_0^2} \right] + \frac{3}{4} \frac{L}{LB_0^2} \int_{-L_s/4}^{L_s/4} \frac{B'^2(s) ds}{B^4(s)/B_0^2} \\ & = \frac{4\pi^2}{q^2 L B_0^2} \left\{ 1 - \frac{L_s}{2L} + \frac{L_s}{4L} \int_{-L_s/4}^{L_s/4} \frac{4ds/L_s}{B^2(s)/B_0^2} + \frac{3q^2}{16\pi^2} \frac{4L}{L_s} \int_{-L_s/4}^{L_s/4} \frac{\left[\frac{L_s}{4} B'(s) \right]^2 4ds/L_s}{B^4(s)/B_0^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Gehen wir jetzt entsprechend wie bei der Herleitung des Kriteriums (2.17) vor, so stellen wir fest, daß die Eins in $F > 1$ durch die geschweifte Klammer von (2.33) zu ersetzen ist. Mit $h(y)$, $\tilde{h}(y)$ aus (2.32) und $\frac{L_s}{L} = \frac{L_s}{L_0 + L_s} = \frac{x}{1+x}$ sowie $\int_1^2 = 2 \int_0^1$ ergibt sich für das neue Kriterium:

$$F > 1 + \frac{1}{2} \frac{x}{1+x} \left(-1 + \int_0^1 \frac{dy}{[1-\tau h(y)]^2} \right) + \frac{3q_T^2 y^2}{2\pi^2} \frac{1+x}{x} \int_0^1 \frac{\tilde{h}^2(y) dy}{[1-\tau h(y)]^4} \quad (2.34)$$

Für F ist dabei der Ausdruck in (2.24) zu verwenden. Da die rechte Seite von (2.34) immer größer als eins ist, wird das Stabilitätskriterium durch den Einfluß des Divertorrippels verschärft, und wir haben $q_T(x, \tau > 0) > q_T(x, \tau = 0)$. Die Tabelle auf Seite 29 zeigt für verschiedene Werte der Divertorlänge $\delta \pi R_0$ und des Divertorrippels τB_0 in Abhängigkeit von der Geradenlänge $x \pi R_0$ die untere Grenze des Sicherheitsfaktors q_T im Tokamakstabilitätsbereich. Diejenigen Felder in der Tabelle, welche die Bedingung $\delta \ll x$ verletzen würden, sind leer, ebenso die Felder, für welche q_T unendlich groß wird und damit nicht mehr existiert. Offenbar wächst q_T für konstantes x umso mehr, je größer τ und je kleiner δ ist. Ein tiefer Rippel ist also am gefährlichsten, wenn er auch noch kurz ist. Das hängt mit dem Vorkommen eines Integrals über $B'^2(s)$ in (2.3) zusammen, welches der Divertorlänge umgekehrt proportional ist, was zu dem Faktor $\frac{1}{x}$ vor dem letzten Integral von (2.34) führt. Der ungünstigste gerechnete Fall, $\delta = 0.1$ und $\tau = 0.25$, ist in der oberen Kurve von Fig. 4 graphisch dargestellt. Alle anderen gerechneten Parameterwerte liegen in dem Bereich zwischen den beiden dargestellten Kurven. Die Ergebnisse sind in zweifacher Hinsicht relativ erfreulich. Erstens wächst q_T wesentlich langsamer mit x als von Schafranov ursprünglich ausgerechnet, und zweitens ist der zusätzliche ungünstige Einfluß eines Divertors fast zu vernachlässigen, sofern nur der Rippel in vernünftigen Grenzen bleibt. Für realistische Parameter wie etwa $x = 0.3$ und $\tau = 10\%$ wächst q_T höchstens von 1 auf 1.28. Das wirkliche Divertorfeld wird natürlich nicht genau die angenommene Form des Modellfeldes haben. Das beeinträchtigt aber die Brauchbarkeit der Ergebnisse nicht, denn da im Stabilitätskriterium nur über den Feldverlauf integriert wird, kommt es auf die lokale Feldverteilung im einzelnen gar nicht an, sondern nur auf globale Parameter wie δ und τ .

Untere Grenze q_{min} des Sicherheitsfaktors q im Tokamakstabilitätsbereich einer Reinstabahn mit Divertor

$q =$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$x = 0.1$	1.07	1.08	1.11	1.16	1.25	-
$x = 0.2$	1.15	1.17	1.19	1.24	1.34	-
$x = 0.3$	1.26	1.28	1.31	1.38	1.52	-
$x = 0.4$	1.39	1.42	1.47	1.56	1.77	-
$x = 0.5$	1.56	1.59	1.67	1.82	2.19	-
$x = 0.6$	1.78	1.83	1.95	2.21	3.03	-
$x = 0.7$	2.10	2.19	2.40	2.98	8.15	-
$x = 0.8$	2.63	2.81	3.33	5.98	-	-
$x = 0.9$	3.85	4.51	9.11	-	-	-

Untere Grenze q_{min} des Sicherheitsfaktors q im Tokamakstabilitätsbereich einer Reinstabahn mit Divertor

$g =$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$x = 0.1$	1.06	1.07	1.08	1.11	1.16	1.25
$x = 0.2$	1.15	1.16	1.18	1.21	1.27	-
$x = 0.3$	1.26	1.27	1.29	1.33	1.39	-
$x = 0.4$	1.39	1.41	1.43	1.48	1.56	-
$x = 0.5$	1.56	1.58	1.61	1.68	1.81	-
$x = 0.6$	1.78	1.83	1.95	2.21	3.03	-
$x = 0.7$	2.10	2.19	2.40	2.98	8.15	-
$x = 0.8$	2.63	2.81	3.33	5.98	-	-
$x = 0.9$	3.85	4.51	9.11	-	-	-

Fig. 1

Gezeichnete Kurven in

$\epsilon = \text{Divertorlänge}/R_0$

$\epsilon = \text{Divertortrüppel}/B_0$

$x = L_s/L_0 = \text{Gradientlänge}/RP_0$

2.5 Abschätzung für das kritische β

Zum Abschluß wollen wir noch eine grobe Abschätzung für das mit einer Rennbahnkonfiguration maximal erreichbare Plasma- β angeben im Vergleich zu einem axialsymmetrischen Tokamak. Wir gehen hierzu nach einem Vorschlag von Nührenberg ganz ähnlich vor wie in einer Arbeit von Lortz und Nührenberg /11/, die den Einfluß einer elliptischen oder dreieckigen Querschnittsform auf das kritische q und das kritische β in axialer Symmetrie untersucht, und zwar ebenfalls mit Hilfe einer Entwicklung in der Nachbarschaft der magnetischen Achse. Wir haben statt dessen Rennbahngeometrie, andererseits aber die Vereinfachung eines kreisförmigen Plasmaquerschnitts, und wir können die Rechnung für das kritische β ohne Schwierigkeiten auf unseren Fall übertragen. Wie schon von Lortz und Nührenberg hervorgehoben wurde, gestattet es die Beschränkung der Rechnung auf eine Umgebung der magnetischen Achse nur, einen rohen Schätzwert für β zu ermitteln. Das wahre kritische β für Gleichgewicht wird erreicht, sobald eine Separatrix die Plasmaoberfläche mit Radius $r = a$ berührt, und das wahre kritische β für Stabilität wird spätestens dann erreicht, sobald für irgendein $r \leq a$ das Mercierkriterium verletzt wird. Zur Bestimmung dieser β -Werte müßte man jedoch den Gleichgewichtszustand des Plasmas über den gesamten Querschnitt im einzelnen beschreiben und die radialen Profile von Druck und Magnetfeld angeben. Wir begnügen uns daher mit der groben Abschätzung und können aus diesem Grunde auch von den Modifikationen durch einen Divertor absehen, da dieser ja, wie oben gezeigt, im allgemeinen nur zu kleinen Korrekturen führt. Die von Lortz und Nührenberg zur Darstellung physikalischer Größen benutzten Hamakoordinaten (V, θ, ζ) lassen sich im Falle einer Rennbahn mit Umfang L ausdrücken durch $(V = L\pi r^2, \theta, \zeta = \frac{S}{L})$, und wir können das kritische β wie folgt abschätzen:

$$p = p(0) (V - V_{max}) \quad , \quad V_{max} = L\pi a^2 \quad (2.35)$$

$$\beta = \frac{\int_0^{V_{max}} p dV}{\int_0^{V_{max}} \frac{1}{2} B^2 dV} \approx \frac{4\pi^2 a^2 (1-Q)}{q^2 L^2} \cdot \frac{4\pi^2 a^2 (1-Q)}{q^2 4\pi^2 R_0^2 (1+x)^2} = \frac{1-Q}{A^2} \frac{1}{q^2 (1+x)^2} \quad (2.36)$$

Hierbei ist

$$Q = \frac{t_j}{t_B} = \frac{q_B}{q_j} = \frac{\beta_s j_s}{\beta_{\theta} j_s} \quad (r=0) \quad (2.37)$$

das Verhältnis des gewöhnlichen mit der magnetischen Feldstärke (Flußdichte) ~~ß~~ gebildeten q -Werts zu dem entsprechenden mit der elektrischen Stromdichte j gebildeten q -Wert. Für abnehmendes Druckprofil muß $Q < 1$ sein, und es beschreibt $Q > 0$ einen paramagnetischen, $Q < 0$ einen diamagnetischen poloidalen Strom. Das größtmögliche β in (2.36) wird für das kleinstmögliche erlaubte q erreicht, also für $q_T(x)$ gemäß (2.26). Damit haben wir

$$\frac{\beta(x)}{\beta_0} \approx \frac{1-x}{(1+x)^2(1+0.185x+0.008x^2)^2} \quad (2.38)$$

mit $\beta_0 = \frac{1-Q}{A^2}$

Bei festgehaltenem q -Verhältnis Q und Aspektverhältnis $A = \frac{R_0}{\alpha}$ sollte das Verhalten von $\beta(x)$ eine gute Vorstellung von dem Einfluß der eingeschobenen Geradenstücke auf das maximal erreichbare β vermitteln. Speziell für $x \approx \frac{1}{3}$ ist auch $\frac{\beta(x)}{\beta_0} \approx \frac{1}{3}$. Wachsendes L und q können also β drastisch herabsetzen.

A N H A N GA. Herleitung des Transversalfeldes erster Ordnung mit Biot-Savart

Während die Felder nullter Ordnung durch (1.4) gegeben sind, gilt nach Schafranov /2/ für die Felder erster Ordnung:

$$\mathcal{B}_s^1 = \frac{\partial}{\partial s} \phi^1 \quad , \quad \mathcal{B}_w^1 = \frac{\partial}{\partial w} \phi^1$$

$$\mathcal{B}_s^1 = \mathcal{B}_s^0 k_s \cos w + \frac{\partial}{\partial s} \phi^1 \quad (A.1)$$

Die Fourierreihen für das Potential erster Ordnung sind außen und innen verschieden:

$$\phi^1 = \phi_{i,e}^1 = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_{ni,e} e^{i(w - \kappa_n s)}$$

$$\varphi_{ne} = -i \frac{k_n}{\kappa_n^2} \left[\mathcal{B}_w^0(a) \frac{a}{s} + \mathcal{B}_{se}^0 \kappa_n s \right] + \frac{1}{\kappa_n} \left[A_n I_1(\kappa_n s) + B_n K_1(\kappa_n s) \right]$$

$$\varphi_{ni} = -i \frac{k_n}{\kappa_n} \mathcal{B}_{si}^0 s + \frac{1}{\kappa_n} C_n I_1(\kappa_n s)$$

$$\kappa_n = -\frac{2\pi n}{L} \quad (A.2)$$

Die Konstanten A_n , B_n , C_n stehen dabei für folgende Ausdrücke:

$$A_n = -i \frac{k_n}{\kappa_n} \left\{ \left[\mathcal{B}_w^0(a) - \kappa_n a \mathcal{B}_{se}^0 \right] K_1 + \frac{\mathcal{B}_w^{0,2}(a) - \kappa_n a \mathcal{B}_{si}^{0,2} \frac{I_1}{I_1'}}{\mathcal{B}_w^0(a) - \kappa_n a \mathcal{B}_{se}^0} \kappa_n a K_1' \right\}$$

$$B_n = i \frac{k_n}{\kappa_n} \left\{ \left[\mathcal{B}_w^0(a) - \kappa_n a \mathcal{B}_{se}^0 \right] I_1 + \frac{\mathcal{B}_w^{0,2}(a) - \kappa_n a \mathcal{B}_{si}^{0,2} \frac{I_1}{I_1'}}{\mathcal{B}_w^0(a) - \kappa_n a \mathcal{B}_{se}^0} \kappa_n a I_1' \right\}$$

$$C_n = i \frac{k_n}{\kappa_n} \frac{\mathcal{B}_{si}^0}{I_1'} \quad (A.3)$$

Hierin sind alle modifizierten Besselfunktionen an der Stelle $\kappa_n a$ zu nehmen. Besondere Formeln muß man für $n = 0$ herleiten. Es ergibt sich:

$$\varphi_{0e} = \frac{i}{2} k_0 \alpha B_w^0(a) \left\{ S \ln \frac{S}{a} + \left[-\frac{1}{2} + \frac{B_{se}^{*2} - B_{si}^{*2}}{B_w^{*2}(a)} \right] S + \left[\frac{1}{2} + \frac{B_{se}^{*2} - B_{si}^{*2}}{B_w^{*2}(a)} \right] \frac{a^2}{S} \right\}$$

und $\varphi_{0i} \equiv 0$ (A.4)

Zur Berechnung der Stromdichte j^* an der Plasmaoberfläche benötigen wir nur $B_w^1(a)$, $B_s^1(a)$ und damit $\varphi_n(a)$. Durch Einsetzen von (A.3) in (A.2) folgt:

$$\begin{aligned} \varphi_{ne}(a) &= ik_n a^2 \frac{B_{se}^{*2} - B_{si}^{*2} \frac{I_1}{\alpha_n a I_1}}{B_w^0(a) - \alpha_n a B_{se}^0} \\ \varphi_{ni}(a) &= -ik_n a^2 \frac{B_{si}^0}{\alpha_n a} \left(1 - \frac{I_1}{\alpha_n a I_1} \right) = -ik_n a^2 \frac{B_{si}^0 \alpha_n a}{4} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Diese Ausdrücke haben auch für $n = 0$ einen Sinn, wenn man sie durch den formalen Grenzübergang $\alpha_n a \rightarrow 0$ definiert. Dann wird nämlich

$$\varphi_{0e}(a) = ik_0 a^2 \frac{B_{se}^{*2} - B_{si}^{*2}}{B_w^0(a)} \quad (\text{A.6})$$

und

$$\varphi_{0i}(a) = 0$$

Dieselben Ausdrücke folgen aber auch aus (A.4), wenn man dort $S = a$ setzt. Wir brauchen daher im folgenden den Fall $n = 0$ nicht mehr gesondert zu behandeln, der Term für $n = 0$ folgt aus den Termen für $n \neq 0$ einfach durch $\lim_{\alpha_n a \rightarrow 0}$ oder $\lim_{n \rightarrow 0}$. Für die Felder an der Plasmaoberfläche ergibt sich, wenn man $\cos \omega$ durch $\text{Re } e^{i\omega}$ ersetzt und für $k(s)$ die Fourierreihe (1.6) einsetzt, die Darstellung

$$\begin{aligned} \tilde{B}_w(a) &= \text{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{i}{a} \varphi_n(a) e^{i(\omega - \alpha_n s)} \\ \tilde{B}_s(a) &= \text{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{ k_n a B_s^0 - i \alpha_n \varphi_n(a) \} e^{i(\omega - \alpha_n s)} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Hieraus berechnet sich der Feldstärkensprung an der Grenzfläche zu

$$\Delta \mathcal{L}^1 = [\mathcal{L}_e^1 - \mathcal{L}_i^1]_{g=a} = \Delta B_w^1 n_w + \Delta B_s^1 n_s$$

$$\text{mit } \Delta B_w^1 = [B_{we}^1 - B_{wi}^1]_{g=a} = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{i}{\alpha} [\varphi_{ne}(\alpha) - \varphi_{ni}(\alpha)] e^{i(w - \chi_n s)}$$

$$\begin{aligned} \Delta B_s^1 = [B_{se}^1 - B_{si}^1]_{g=a} = & \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ k_n \alpha (B_{se}^0 - B_{si}^0) \right. \\ & \left. - i \chi_n [\varphi_{ne}(\alpha) - \varphi_{ni}(\alpha)] \right\} e^{i(w - \chi_n s)} \end{aligned} \quad (A.8)$$

und durch Einsetzen von (A.5) folgt

$$\Delta B_w^1 = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_n \alpha \alpha_n \cos(w - \chi_n s)$$

$$\Delta B_s^1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_n \alpha \beta_n \cos(w - \chi_n s)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{B_{se}^{02} - B_{si}^{02} \frac{I_1}{\chi_n \alpha I_1'}}{B_w^0(\alpha) - \chi_n \alpha B_{se}^0} + \frac{B_{si}^0}{\chi_n \alpha} \left(1 - \frac{I_1}{\chi_n \alpha I_1'} \right) \\ \beta_n &= \frac{B_{se}^0 B_w^0(\alpha) - B_{si}^{02} \frac{I_1}{I_1'}}{B_w^0(\alpha) - \chi_n \alpha B_{se}^0} - \frac{B_{si}^0}{\chi_n \alpha} \frac{I_1}{I_1'} \end{aligned} \quad (A.9)$$

Diese Formeln sind für die Oberflächenstromdichte zu verwenden:

$$\begin{aligned} j^* &= n_g \times \Delta \mathcal{L} = n_g \times (\Delta B_w n_w + \Delta B_s n_s) = \Delta B_w n_s - \Delta B_s n_w \\ - j^{*0} + j^{*1} &= [B_w^0(\alpha) + \Delta B_w^1] n_s - [B_{se}^0 - B_{si}^0 + \Delta B_s^1] n_w \end{aligned} \quad (A.10)$$

Es empfiehlt sich, alle Vektoren auf das feste Dreibein ($\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$) zu beziehen (Fig. 2). Offenbar ist

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_s &= \mathbf{l} = n_1 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi \\ \mathbf{n} &= -n_1 \sin \varphi + n_2 \cos \varphi \\ \mathbf{n}_w &= -n_1 \sin \omega + n_3 \cos \omega \\ &= n_1 \sin \varphi \sin \omega - n_2 \cos \varphi \sin \omega + n_3 \cos \omega \\ \mathbf{n}_g &= \mathbf{m} \cos \omega + \mathbf{n} \sin \omega \\ &= -n_1 \sin \varphi \cos \omega + n_2 \cos \varphi \cos \omega + n_3 \sin \omega \end{aligned} \quad (A.11)$$

Damit schreibt sich j^* in der Form

$$\begin{aligned}
 j^* &= n_1 j_1 + n_2 j_2 + n_3 j_3 \\
 &= n_1 (\Delta B_w \cos \varphi - \Delta B_s \sin \varphi \sin \omega) \\
 &\quad + n_2 (\Delta B_w \sin \varphi + \Delta B_s \cos \varphi \sin \omega) \\
 &\quad + n_3 (-\Delta B_s \cos \omega)
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Für $j^{*1} = j^*(\varphi')$ ist $\varphi' = \varphi(s')$ und $\Delta B_{s,w}' = \Delta B_{s,w}(s')$ einzusetzen. Wir kommen nunmehr zur Darstellung des Differenzvektors $w - w'$ zwischen Aufpunkt (Torusseele) und Integrationspunkt (Plasmaoberfläche) und schreiben:

$$\begin{aligned}
 w &= n_1 r_1 + n_2 r_2 \\
 w' &= n_1 r_1' + n_2 r_2' + n_3' a
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

Mit $n_3' = n_3(\varphi')$ aus (A.11) folgt also

$$\begin{aligned}
 w - w' &= n_1 (r_1 - r_1' + a \sin \varphi' \cos \omega) \\
 &\quad + n_2 (r_2 - r_2' - a \cos \varphi' \cos \omega) \\
 &\quad + n_3 (-a \sin \omega)
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

und $|w - w'|^2 = (r_1 - r_1')^2 + (r_2 - r_2')^2 + a^2$

$$\begin{aligned}
 &\quad + 2a \cos \omega [(r_1 - r_1') \sin \varphi' - (r_2 - r_2') \cos \varphi']
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

Zur Berechnung von $r_{1,2}$ gehen wir aus von

$$\begin{aligned}
 dr_1 &= ds \cos \varphi(s) , \quad dr_2 = ds \sin \varphi(s) , \quad d\varphi = \frac{ds}{R(s)} \\
 r_1(s) &= \int_0^s ds \cos \varphi(s) , \quad r_2(s) = \int_0^s ds \sin \varphi(s) , \quad \varphi(s) = \int_0^s \frac{ds}{R(s)}
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Bei der Integration erweist sich die in Fig. 2 definierte Hilfsfunktion $T(s)$ als nützlich. Sie ist stetig, auf den gekrümmten Abschnitten konstant und auf den geraden Abschnitten linear mit dem Anstieg

$$\frac{dT}{ds} = \begin{cases} -\frac{1}{R_0} & \text{in } (A, B) \\ +\frac{1}{R_0} & \text{in } (C, D) \end{cases} \tag{A.17}$$

Eine allgemeingültige geschlossene Darstellung ist daher

$$\frac{dT}{ds} = \frac{\sin \varphi(s)}{R_0} \left(\frac{R_0}{R(s)} - 1 \right) \quad (\text{A.18})$$

Damit wird

$$\frac{d}{ds} \sin \varphi(s) = \frac{d\varphi}{ds} \cos \varphi(s) = \frac{\cos \varphi(s)}{R(s)} = \frac{\cos \varphi(s)}{R_0}$$

$$\frac{d}{ds} [\cos \varphi(s) + T(s)] = - \frac{d\varphi}{ds} \sin \varphi(s) + \frac{dT}{ds}$$

$$= - \frac{\sin \varphi(s)}{R(s)} + \frac{\sin \varphi(s)}{R_0} \left(\frac{R_0}{R(s)} - 1 \right) = - \frac{\sin \varphi(s)}{R_0} \quad (\text{A.19})$$

und die gesuchten Stammfunktionen sind

$$\begin{aligned} \int \cos \varphi(s) ds &= R_0 \sin \varphi(s) \\ \int \sin \varphi(s) ds &= -R_0 [\cos \varphi(s) + T(s)] \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

also $r_1 - r_1' = R_0 (\sin \varphi - \sin \varphi')$

$$r_2 - r_2' = -R_0 (\cos \varphi - \cos \varphi' + T - T') \quad (\text{A.21})$$

Für den Abstandsvektor $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ergibt dies die endgültige Form

$$\begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{r}' &= n_1 \mathbf{d}_1 + n_2 \mathbf{d}_2 + n_3 \mathbf{d}_3 \\ &= n_1 R_0 \left(\sin \varphi - \sin \varphi' + \frac{\alpha}{R_0} \sin \varphi' \cos \omega \right) \\ &\quad + n_2 R_0 \left(-\cos \varphi + \cos \varphi' - T + T' - \frac{\alpha}{R_0} \cos \varphi' \cos \omega \right) \\ &\quad + n_3 (-\alpha \sin \omega) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

und $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = R_0^2 \left(D_0 + \frac{2\alpha \cos \omega}{R_0} D_1 \right) + \alpha^2$

mit $D_0 = 2 \left[1 - \cos(\varphi - \varphi') + (\cos \varphi - \cos \varphi')(T - T') \right] + (T - T')^2$

$$D_1 = -1 + \cos(\varphi - \varphi') + \cos \varphi'(T - T') \quad (\text{A.23})$$

In einem Kreisbahntokamak ist speziell $T = 0$, und es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varphi = 0$ angenommen werden. Daraus folgt

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = 2 R_0^2 \left(1 - \cos \varphi' \right) \left(1 - \frac{\alpha}{R_0} \cos \omega \right) + \alpha^2 \quad (\text{A.24})$$

Für kleine $\varphi' = \frac{s'}{R_0}$ ist der dominante Term der Reihenentwicklung

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 = s'^2 \left(1 - \frac{a}{R_0} \cos \omega\right) + a^2 \quad (\text{A.25})$$

Ahnlich können wir auch im Falle der Rennbahn verfahren. Falls s und s' auf demselben gekrümmten Abschnitt der Rennbahn liegen, verschwindet die Differenz $T-T'$, und für kleine $|s-s'|$ folgt

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 = (s-s')^2 \left(1 - \frac{a}{R_0} \cos \omega\right) + a^2 \quad (\text{A.26})$$

Falls jedoch s und s' auf demselben geraden Abschnitt der Rennbahn liegen, verschwinden $\cos \varphi$ und $\cos \varphi'$, während $|T-T'| = \left|\frac{s-s'}{R_0}\right|$ ist, und für kleine $|s-s'|$ folgt

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 = (s-s')^2 + a^2 \quad (\text{A.27})$$

Daher gilt allgemein außer an den Unstetigkeitsstellen der Krümmung für kleine $|s-s'|$ die Schreibweise

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 = (s-s')^2 \left(1 - \frac{a}{R(s)} \cos \omega\right) + a^2 \quad (\text{A.28})$$

Wir können jetzt die einzelnen Faktoren im Integranden des Biot-Savart'schen Gesetzes angeben und nach Potenzen von $\frac{a}{R_0}$ entwickeln. Für das Vektorprodukt folgt aus (A.12), (A.21) und (A.22):

$$\begin{aligned} j^* \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}') &= \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ j'_1 & j'_2 & j'_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \\ &= n_1 [\Delta B'_s (r_2 - r'_2) \cos \omega - \Delta B'_s a \cos \varphi' - \Delta B'_w a \sin \varphi' \sin \omega] \\ &\quad + n_2 [-\Delta B'_s (r_1 - r'_1) \cos \omega - \Delta B'_s a \sin \varphi' + \Delta B'_w a \cos \varphi' \sin \omega] \\ &\quad + n_3 [\Delta B'_s R_0 D_2 \sin \omega - \Delta B'_w R_0 D_1 - \Delta B'_w a \cos \omega] \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Hierbei ist D_1 durch (A.23) erklärt und D_2 durch

$$D_2 = -\sin(\varphi - \varphi') + \sin \varphi' (T - T') \quad (\text{A.30})$$

Die Terme $\Delta B'_{s, \omega}$ schreibt man, ausgehend von (A.9), am zweckmäßigsten in der Form

$$\begin{aligned}
 \Delta B_w' &= B_w' - \sum_{\alpha c}^{\prime} \cos \omega - \sum_{\alpha s}^{\prime} \sin \omega \\
 \Delta B_s' &= \Delta B_s^{\circ} + \sum_{\beta c}^{\prime} \cos \omega + \sum_{\beta s}^{\prime} \sin \omega \\
 \text{mit} \quad \sum_{\alpha c, s}^{\prime} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_n \alpha \alpha_n \{ \cos, \sin \} x_n s' \\
 \sum_{\beta c, s}^{\prime} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_n \alpha \beta_n \{ \cos, \sin \} x_n s' \tag{A.31}
 \end{aligned}$$

Im Nenner $|w-w'|^3$ folgt aus (A.23) und (A.28), daß der Term mit $\cos \omega$ sowohl für $s-s' \sim R_0$ als auch für $s-s' \sim a$ jeweils um eine Ordnung kleiner ist als die übrigen Terme. Daher gilt die Entwicklung

$$|w-w'|^2 = (R_0^2 D_0 + a^2) \left(1 + \frac{2a R_0 \cos \omega D_1}{R_0^2 D_0 + a^2} \right)$$

$$\frac{1}{|w-w'|^3} = \frac{1}{(R_0^2 D_0 + a^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{3a R_0 \cos \omega D_1}{R_0^2 D_0 + a^2} + \dots \right) \tag{A.32}$$

Für das Flächenelement schließlich folgt aus (1.7)

$$df' = \left(1 - \frac{a \cos \omega}{R(s')} \right) \alpha dw ds' \tag{A.33}$$

das heißt bis auf die Terme höherer Ordnung in $\frac{a}{R_0}$ ist

$$\frac{df'}{|w-w'|^3} = \frac{a dw ds'}{(R_0^2 D_0 + a^2)^{3/2}} \left[1 - a \cos \omega \left(\frac{3 R_0 D_1}{R_0^2 D_0 + a^2} + \frac{1}{R(s')} \right) \right] \tag{A.34}$$

Wir können jetzt das Integral

$$\vec{\Omega} = \int_0^{2\pi} j^{*} \times (w-w') \left[1 - a \cos \omega \left(\frac{3 R_0 D_1}{R_0^2 D_0 + a^2} + \frac{1}{R(s')} \right) \right] dw \tag{A.35}$$

nach Einsetzen von (A.29) ausführen, wobei alle Integrale über ungerade Potenzen von $\sin \omega$ oder $\cos \omega$ verschwinden, nehmen höchstens Terme $\sim \frac{a}{R_0^2}$, also zweiter Ordnung mit und erhalten:

$$\begin{aligned}
 \vec{\Omega} &= n_1 \pi \left[\sum_{\beta c}^{\prime} (r_2 - r_2') - \Delta B_s^{\circ} a \cos \varphi' \cdot 2 + \sum_{\alpha s}^{\prime} a \sin \varphi' \right. \\
 &\quad \left. - a \left(\frac{3 R_0 D_1}{R_0^2 D_0 + a^2} + \frac{1}{R(s')} \right) \Delta B_s^{\circ} (r_2 - r_2') \right] \\
 &\quad + n_2 \pi \left[- \sum_{\beta c}^{\prime} (r_2 - r_2') - \Delta B_s^{\circ} a \sin \varphi' \cdot 2 - \sum_{\alpha s}^{\prime} a \cos \varphi' + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha \left(\frac{3R_o D_1}{R_o^2 D_0 + \alpha^2} + \frac{1}{R(s)} \right) \Delta B_s^* (r_s - r_s') \Big] \\
& + n_3 \pi \left[\sum_{\beta s}^1 R_o D_2 - B_w^* R_o D_1 \cdot 2 + \sum_{\alpha s}^1 \alpha \right. \\
& \quad \left. - \alpha \left(\frac{3R_o D_1}{R_o^2 D_0 + \alpha^2} + \frac{1}{R(s)} \right) \left(\sum_{\alpha s}^1 R_o D_1 - B_w^* \alpha \right) \right] \quad (A.36)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt das gesuchte Eigenfeld durch Integration über s' :

$$\left. \mathcal{E}_{\text{eig}} \right|_{s=0} = \frac{a}{4\pi} \oint \frac{\vec{\Omega} ds'}{(R_o^2 D_0 + \alpha^2)^{3/2}} = \frac{a}{4\pi} \int_{s-\frac{a}{2}}^{s+\frac{a}{2}} \frac{\vec{\Omega} ds'}{(R_o^2 D_0 + \alpha^2)^{3/2}} \quad (A.37)$$

Wir nutzen jetzt die Tatsache aus, daß der Nenner des Integranden von (A.37) stark singulär ist. Der Hauptbeitrag zum Integral stammt aus einer Umgebung des Aufpunktes s , für kleine $|s'-s|$ gilt ja nach Vergleich von (A.23) mit (A.28):

$$\frac{1}{[R_o^2 D_0 + \alpha^2]^{3/2}} = \frac{1}{[(s'-s)^2 + \alpha^2]^{3/2}} = \frac{1}{\alpha^3} \frac{1}{[1 + (\frac{s'-s}{\alpha})^2]^{3/2}} \quad (A.38)$$

Die Halbwertsbreite dieser Funktion ist etwa $\frac{3}{2} a$, und für große $|s'-s|$ verhält sie sich wie $\frac{1}{|s'-s|^3}$. Wir können daher im Zähler des Integranden nach Potenzen von $s'-s$ entwickeln und $s'-s \sim a$ annehmen. Mit Hilfe von (A.16) bis (A.19) sowie aus (A.21), (A.23) und (A.30) ergibt sich für die Taylorreihen:

$$\begin{aligned}
\sin \varphi' &= \sin \varphi + \cos \varphi \frac{s'-s}{R_o} + \dots \\
\cos \varphi' &= \cos \varphi - \sin \varphi \frac{s'-s}{R(s)} + \dots \\
r_1 - r_1' &= -\cos \varphi \cdot (s'-s) + \dots \quad , \quad r_2 - r_2' = \sin \varphi (s'-s) + \dots \\
D_1 &= -\frac{(s'-s)^2}{2R_o R(s)} + \dots \quad , \quad D_2 = \frac{s'-s}{R_o} + \dots \quad (A.39)
\end{aligned}$$

Es genügt, in $\vec{\Omega}$ Ausdrücke der Form $a^{\mu}(s'-s)^\nu$ mit $\mu+\nu \leq 2$ zu berücksichtigen. Dann bleibt folgendes übrig:

$$\begin{aligned}
\vec{\Omega} &= n_1 \pi \left[\sum_{\beta s} \sin \varphi (s'-s) - 2 \Delta B_s^* \alpha \left(\cos \varphi - \sin \varphi \frac{s'-s}{R(s)} \right) + \sum_{\alpha s} \alpha \sin \varphi \right. \\
& \quad \left. - \frac{\alpha}{R(s)} \left(-\frac{3}{2} \frac{(s'-s)^2}{(s'-s)^2 + \alpha^2} + 1 \right) \Delta B_s^* \sin \varphi (s'-s) \right] \\
& + n_2 \pi \left[\sum_{\beta s} \cos \varphi (s'-s) - 2 \Delta B_s^* \alpha \left(\sin \varphi + \cos \varphi \frac{s'-s}{R_o} \right) - \sum_{\alpha s} \alpha \cos \varphi \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\alpha}{R(s)} \left(-\frac{3}{2} \frac{(s'-s)^2}{(s'-s)^2 + \alpha^2} + 1 \right) \Delta B_s^* \cos \varphi(s'-s) \Big] \\
& + n_3 \pi \left[\sum_{\beta} R_0 \frac{s'-s}{R_0} - 2 B_w^* R_0 D_1 + \sum_{\alpha} \alpha \right. \\
& \quad \left. + \frac{\alpha}{R(s)} \left(-\frac{3}{2} \frac{(s'-s)^2}{(s'-s)^2 + \alpha^2} + 1 \right) B_w^* \alpha \right] \quad (A.40)
\end{aligned}$$

Die durch (A.31) definierten Reihen $\sum'_{\alpha, \beta, c, s}$ brauchen also nur noch an der Stelle s ausgewertet zu werden, $\sum' \rightarrow \sum$. Es fällt auf, daß in $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_3$ im zweiten Term D_1 nicht entwickelt wurde. Das hat folgenden Grund. Wir können asymptotisch für kleine $\frac{a}{R_0}$ die vorkommenden Integrale wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\int_{s-4/2}^{s+4/2} \frac{ds'}{[R_0^2 D_0 + \alpha^2]^{3/2}} & \rightarrow \int_{s-\infty}^{s+\infty} \frac{ds'}{[(s'-s)^2 + \alpha^2]^{3/2}} = \frac{1}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}} = \frac{2}{\alpha^2} \\
\int_{s-4/2}^{s+4/2} \frac{(s'-s)ds'}{[R_0^2 D_0 + \alpha^2]^{3/2}} & \rightarrow \int_{s-\infty}^{s+\infty} \frac{(s'-s)ds'}{[(s'-s)^2 + \alpha^2]^{3/2}} = 0
\end{aligned} \quad (A.41)$$

Für $\oint \frac{(s'-s)^2 ds'}{[R_0^2 D_0 + \alpha^2]^{3/2}}$ ist eine solche Vereinfachung jedoch nicht möglich, das vereinfachte Integral würde gar nicht konvergieren. Hier muß der korrekte Ausdruck zunächst vollständig stehen bleiben und die Asymptotik etwas sorgfältiger durchgeführt werden, was im Anschluß an Gleichung (1.10) bzw. (1.18) geschieht. Die Integration bezüglich s' ergibt also bis auf Terme höherer Ordnung in $\frac{a}{R_0}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{eig}} \Big|_{a=0} & = \frac{a}{4} n_1 \left[-2 \Delta B_s^* \alpha \cos \varphi + \sum_{\alpha} \alpha \sin \varphi \right] \cdot \frac{2}{\alpha^2} \\
& + \frac{a}{4} n_2 \left[-2 \Delta B_s^* \alpha \sin \varphi - \sum_{\alpha} \alpha \cos \varphi \right] \cdot \frac{2}{\alpha^2} \\
& + \frac{a}{4} n_3 \left[-2 B_w^* R_0 \int_{-4/2}^{+4/2} \frac{D_1 ds'}{[R_0^2 D_0 + \alpha^2]^{3/2}} + \sum_{\alpha} \alpha \cdot \frac{2}{\alpha^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{B_w^* \alpha^2}{R(s)} \left(-\frac{1}{2} \frac{2}{\alpha^2} + \frac{3}{2} \int_{s-\infty}^{s+\infty} \frac{\alpha^2 ds'}{[(s'-s)^2 + \alpha^2]^{3/2}} \right) \right] \quad (A.42)
\end{aligned}$$

Und mit (A.11), (A.31) und

$$\int_{s-\infty}^{s+\infty} \frac{\alpha^2 ds'}{[(s'-s)^2 + \alpha^2]^{3/2}} = \frac{1}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}} = \frac{u}{\alpha^2 \sqrt{1+u^2}} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{u^2}{1+u^2} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{4}{3} \quad (A.43)$$

erhalten wir für das Eigenfeld den folgenden Ausdruck:

$$\mathcal{L}_{\text{eig}} \Big|_{\xi=0} = -\frac{1}{2} \Delta B_s^0 + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_n a \alpha_n (-n \sin x_n s + b \cos x_n s) \\ + b \left[-\frac{B_{si}^0 a}{2 R_0} \int_{-\pi/(1+x)}^{+\pi/(1+x)} \frac{D_1 dy'}{[D_0 + a^2/R_0^2]^{3/2}} + \frac{B_{si}^0 a}{4 R(s)} \right] \quad (\text{A.44})$$

Offensichtlich ist $-\frac{1}{2} \Delta B_s^0 = \frac{1}{2} (B_{si}^0 - B_{se}^0)$ das in (1.4) angegebene $\mathcal{L}_{\text{eig}}^0$. Die restlichen Terme stellen somit das gesuchte $\mathcal{L}_{\text{eig}}^1$ dar, welches rein transversal ist. Uns fehlt jetzt nur noch das im Gleichgewicht auf der Seele des Plasmatorus tatsächlich vorhandene Magnetfeld \mathcal{B}_i^1 , und wir finden, ausgehend von (A.1) bis (A.3):

$$\mathcal{B}_{si}^1 = \frac{\partial}{\partial \xi} \phi_i^1 = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-i \frac{k_n}{x_n} B_{si}^0 + C_n I_1'(x_n s) \right) e^{i(w-x_n s)} \\ \mathcal{B}_{wi}^1 = \frac{\partial}{\partial \omega} \phi_i^1 = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{k_n}{x_n} B_{si}^0 + \frac{i}{x_n \xi} C_n I_1(x_n s) \right) e^{i(w-x_n s)} \\ \mathcal{B}_{si}^1 = \mathcal{B}_{si}^0 \frac{e \cos \omega}{R(s)} + \frac{\partial}{\partial s} \phi_i^1 = \mathcal{B}_{si}^0 \frac{e \cos \omega}{R(s)} + \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -i x_n q_n e^{i(w-x_n s)} \quad (\text{A.45})$$

Hieraus folgt für $\xi \rightarrow 0$:

$$\mathcal{B}_{si}^1 \Big|_{\xi=0} = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-i \frac{k_n}{x_n} B_{si}^0 + \frac{1}{2} C_n \right) e^{i(w-x_n s)} \\ \mathcal{B}_{wi}^1 \Big|_{\xi=0} = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{k_n}{x_n} B_{si}^0 + \frac{i}{2} C_n \right) e^{i(w-x_n s)}, \quad \mathcal{B}_{si}^1 \Big|_{\xi=0} = 0 \quad (\text{A.46})$$

Einsetzen von C_n und Verwendung von (A.11) ergibt daher:

$$\mathcal{L}_i^1 \Big|_{\xi=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{k_n}{x_n} B_{si}^0 \left(1 - \frac{1}{2 I_1'(x_n a)} \right) (n_0 \sin(w-x_n s) + n_\omega \cos(w-x_n s)) \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{k_n}{x_n} B_{si}^0 \left(1 - \frac{1}{2 I_1'(x_n a)} \right) (-n \sin x_n s + b \cos x_n s) \quad (\text{A.47})$$

\mathcal{L}_i^1 ist also ebenfalls rein transversal. Durch formalen Grenzübergang $x_n a \rightarrow 0$ folgt, daß das Reihenglied für $n = 0$ verschwindet, in Übereinstimmung mit (A.4). Das bedeutet, daß es in einem Kreisbahntorus aufgrund der Symmetrie überhaupt kein \mathcal{L}_i^1 gibt. Durch Zusammenfassen von (A.44) und (A.47) und Einsetzen von α_n aus (A.9) erhalten wir nunmehr das im Gleichgewicht benötigte äußere Transversalfeld:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_1^1 \Big|_{s=0} &= \mathcal{L}_{\text{ext}}^1 \Big|_{s=0} = \mathcal{L}_i^1 \Big|_{s=0} - \mathcal{L}_{\text{eig}}^1 \Big|_{s=0} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_n a \left[\frac{B_{se}^0}{k_n a} \left(1 + \frac{I_i - k_n a}{k_n a I_i} \right) - \frac{B_{se}^{0^2} - B_{si}^{0^2} \frac{I_i}{k_n a I_i}}{B_w^0(a) - k_n a B_{se}^0} \right] \cdot \\
 &\quad \cdot (-m \sin k_n s + b \cos k_n s) \\
 &- b \frac{B_w^0(a) a}{2 R_0} \left(\frac{R_0}{2 R(s)} + \int_{-\pi/4\pi a}^{\pi/4\pi a} dy' \frac{1 - \cos(\varphi' - \varphi) + \cos \varphi' (T' - T)}{[2 \{1 - \cos(\varphi' - \varphi) + (\cos \varphi' - \cos \varphi)(T' - T)\} + (T' - T)^2 + \frac{a^2}{R_0^2}]^{3/2}} \right) \quad (A.48)
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird für Gleichung (1.16) verwandt und im Anschluß daran noch weiter umgeformt.

B. Verwendbarkeit der höheren Stabilitätsbereiche einer Rennbahn verglichen mit Harmonica II

B.1 Ergebnisse des Experimentes Harmonica II

Der erste der höheren Stabilitätsbereiche einer Rennbahn liegt oberhalb von $|t| = 2$. Es wäre ein Vorteil, wenn man dieses Stabilitätsfenster ausnutzen könnte, denn ein größeres t lässt einen höheren Plasmastrom und damit auch eine bessere Ohm'sche Heizung zu, zumal dann auch die Abschätzung (2.36) für das kritische β wesentlich günstiger ausfällt. Tatsächlich gab es schon einmal ein Experiment, das sozusagen eigens zur Untersuchung des Stabilitätsfensters bei der ersten höheren Harmonischen gezüchtet war, nämlich das Experiment Harmonica II im französischen Fontenay-aux-Roses /14-16/. Es hatte eine geometrische Achse mit der charakteristischen Gleichung

$$\frac{1}{R(s)} = \frac{1}{R_0} \left(1 + 2 \cos \frac{4\pi s}{L} \right) \quad (B.1)$$

Für diese spezielle Harmonika war also $\frac{a_2}{a_0} = 1$, d.h. es trat überhaupt kein Tokamakstabilitätsbereich auf, sondern einzig und allein der Stabilitätsbereich bei $|t| \geq 2$. Durch die gewählte Abhängigkeit der Krümmung von der Bogenlänge hatte die Plasmasäule die Form einer Acht mit dicker Taille oder einer Gitarre

 . Der Umfang war 270 cm, der Innendurchmesser des Pyrexgefäßes 5,5 cm und der Durchmesser des Limiters 2,8 cm. Das Experiment war von März 1966 bis Februar 1971 in Betrieb und wurde in dieser Zeit viermal umgebaut, d.h. es liefen insgesamt 5 verschiedene Versionen. Hauptzweck des Experimentes war es, die MHD-Theorie von Mercier /3,8,12,13/ zu testen, der zufolge bei $|t|=2$ kein Gleichgewicht bestehen kann und sich oberhalb ein Stabilitätsbereich anschließt. Nach Mercier ist in der Nachbarschaft von $|t|=2$ eine schraubenförmige Verschiebung der Plasmasäule zu erwarten gemäß

$$\xi \sim \frac{\cos \varphi}{|t|-2} \quad \text{mit } \varphi = m(\theta - \theta_0) + 2k\pi \frac{\xi}{L} \\ \text{und } m=1, k=\pm 2, \theta_0=0 \quad (\text{B.2})$$

Die Verschiebung an den Stellen stärkster Krümmung ist jeweils vom Krümmungsmittelpunkt aus gesehen nach außen, d.h. vom Torusmittelpunkt aus gesehen ist die Verschiebung an den stark gekrümmten Enden nach außen, an der Taille nach innen. Daher war ein Netz von helisch gewundenen Leiterpaaren zur Erzeugung eines Transversalfeldes $B_\perp \sim \sin \varphi$ vorgesehen, und zwar sogar mit $k = 0, \pm 2$ und $\theta_0 = 0, \frac{\pi}{2}$. Ein zweites ähnliches, aber unabhängiges Netz von verschraubten Leitern wurde als Flußmeßschleifen zur harmonischen Analyse des transversalen Flusses eingesetzt, der bei einer Verschiebung der Plasmasäule durch das Gefäß hindurchtreten muß. Hier wurden auch $m = 2$ und höhere k berücksichtigt.

In den ersten beiden Versionen der Maschine Harmonica II ergaben sich makroskopische Verformungen der Plasmasäule nicht in der Nähe von $|t|=2$, wo man sie theoretisch erwartet hätte, sondern in der Nähe von $|t|=1$. Und zwar zeigten die Signale der Flußmeßschleifen für Plasmaströme mit $|t| \gtrsim 1$ ein unregelmäßiges Zacken- und Spitzenmuster im Oszillogramm. Möglicherweise war hier einfach die Kruskal-Shafranov-Grenze beobachtet worden, aber über die Stabilität von nichtaxialsymmetrischen Anordnungen gegen Kinkmoden ist theoretisch nichts bekannt. In den letzten beiden Versionen der Maschine wurden die experimentellen Randbedingungen besser definiert durch Einbau einer stabilisierenden Kupferschale sowie Vergoldung der Innenseite des Pyrexgefäßes. Jetzt traten die singulären Flußschwankungen tatsächlich für

$|t| \geq 2$ auf, und zwar je nach der Plasmastromrichtung ($I_s > 0$) ganz überwiegend auf einer $k = -2$ oder $k = +2$ Schleife. Nicht nur der Drehsinn der helischen Plasmasäulenverschiebung folgte der Rotationstransformation, auch die Phase stimmte mit der theoretischen Erwartung überein. Außerdem hatten die aus magnetischen Sondenmessungen gewonnenen Verschiebungen der magnetischen Achse für $2 < |t| < 4$ die theoretisch vorausgesagte Größenordnung von etwa 5 mm. Mit dieser Modenanalyse sind aber die Erfolge des Experimentes bereits erschöpfend behandelt. Es war unter den gegebenen experimentellen Bedingungen nicht möglich, die Existenz des höheren Stabilitätsbereiches nachzuweisen. Vielmehr beobachtete man eine starke Plasmawandwechselwirkung, welche alle Erscheinungen überdeckte. Schmierbilder zeigten ein von Anfang an über den ganzen Gefäßquerschnitt leuchtendes Plasma. Die Strahlung rührte von Verunreinigungen her, und das Plasma erreichte höchstens eine Elektronentemperatur von 10 eV. Der Limiter spielte praktisch überhaupt keine Rolle, und auch das Anlegen von Transversalfeldern hatte keinerlei Einfluß auf Gleichgewicht oder Stabilität des Plasmas. Die Kupferschale trug hierzu ohnehin nur wenig bei, da die durch $k \geq 2$ Verschiebungen hervorgerufenen Spiegelströme zu stark gedämpft werden. Offenbar war es nicht möglich, die äußeren Transversalfelder so genau wie nötig einzustellen, um das Gleichgewicht zu beherrschen. Die Plasmasäule hatte immer Wandkontakt, und das Gleichgewicht kam überhaupt nur durch die Wechselwirkung mit der Wand zustande. Solche Gleichgewichte sind theoretisch schwer zu beschreiben und praktisch uninteressant. Durch die Plasmawandwechselwirkung änderte sich im Laufe der Entladungen auch die Oberflächenbeschaffenheit der inneren Gefäßwand, sie "alterte", und nach 3000 bis 5000 Schüssen konnte man trotz Vergoldung überhaupt keine vernünftigen Messungen mehr machen, die Flußsingularitäten für $|t| \geq 2$ waren nicht mehr identifizierbar.

B.2 Folgerungen aus der Theorie und der Methode der helischen Bilder

In Harmonica II ist es nach B.1 zwar gelungen, das Ungleichgewicht bei $|t| = 2$ nachzuweisen, nicht aber das oberhalb daran

anschließende Stabilitätsfenster, und daher konnte man dieses auch nicht nutzbringend verwerten. Mit einer Rennbahn ginge das noch schwieriger, wie ein zahlenmäßiger Vergleich der Breite der Stabilitätsbereiche zeigt. Aus (2.21) folgt für $\frac{a_n}{a_0} = \frac{a_2}{a_0} = 1$:

$$F = q^2 \left(1 + 2 \frac{1+4q^2}{1-4q^2} \right) > 1 \quad (B.3)$$

Der Rand des Stabilitätsbereiches ergibt sich also aus der Gleichung

$$q^4 + \frac{7}{4} q^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$q^2 = -\frac{7}{8} \left(-\sqrt{\frac{49}{64} + \frac{1}{4}} \right) = -\frac{7}{8} + \sqrt{1 + \frac{1}{64}} \approx \frac{1}{8} + \frac{1}{128}$$

$$t^2 = \frac{128}{17} , |t| = 2.74 \quad (B.4)$$

Der für die Breite des bei $|t| = 2$ liegenden Stabilitätsbereiches einer Rennbahn maßgebende Fourierkoeffizient a_2 ist gemäß (2.22) am größten für $L = 2 L_0$ oder $x = 1$, d.h. genau dann, wenn der gewöhnliche Tokamakstabilitätsbereich gerade verschwunden ist. Für diesen Fall folgt aus (2.24):

$$F = q^2 \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{2}}{m^2 (1-4m^2 q^2)} \approx q^2 \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{1-4q^2} > 1 \quad (B.5)$$

Für den Rand des Stabilitätsbereiches haben wir also jetzt die Gleichung

$$q^2 \left(\frac{16}{\pi^2} + 4 \right) = 1$$

$$t^2 = 4 \left(1 + \frac{4}{\pi^2} \right) , |t| = 2.37 \quad (B.6)$$

Die Zahlenwerte (B.4) und (B.6) für $|t|$ decken sich mit den Angaben von Tasso und Mercier /9/. In einer Rennbahn ist also der erste der höheren Stabilitätsbereiche höchstens halb so breit wie in Harmonica II, nämlich 0.37 statt 0.74.

In Wirklichkeit liegen die Verhältnisse noch ungünstiger, denn in einer gewissen Nachbarschaft der Resonanz $|t| = 2$ ist ja gar kein Gleichgewicht möglich. Eine Theorie von Mercier /12,13/

gestattet es, mit Hilfe eines besonders angepaßten Modells, quantitative Aussagen hierüber zu machen. Wenn t in der Nähe einer ganzen Zahl k liegt und der zugehörige Fourierkoeffizient $a_k \neq 0$ ist, dann kann man nach Mercier alle Reihenglieder mit Ausnahme von a_k außer Acht lassen und statt des wirklichen toroidalen Plasmas (als eben vorausgesetzt) ein Bildplasma betrachten, welches die Gestalt einer Helix mit der Krümmung $\frac{1}{R} = a_k$ und der Torsion $\frac{1}{T} = \frac{2k\pi}{L}$ hat. Mit Hilfe dieser Methode der "helischen Bilder" (images hélicoïdales) und durch Ausnutzung der helischen Symmetrie kann man spezielle diffuse Profile zugrunde legen und analytisch durchrechnen. Auf diese Weise gewinnt man eine vollständige Beschreibung des Gleichgewichts in der Nähe der Singularitäten und im Anschluß daran auch eine verbesserte Stabilitätsrechnung. Je nach der studierten Resonanz hat man ein anderes helisches Bild. Der Übergang vom wirklichen toroidalen Plasma zum helischen Bildplasma ist insbesondere gekennzeichnet durch

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow \eta = t - k \\ \theta &\longrightarrow \vartheta = \theta - \frac{2k\pi s}{L} \end{aligned} \quad (B.7)$$

$\vartheta = 0$ bezeichnet die der Helixachse zugewandten Innenseite der helischen Plasmasäule, $\vartheta = \pi$ die Außenseite. Mit abnehmendem η verschiebt sich die magnetische Achse immer weiter nach außen in Richtung $\vartheta = \pi$, solange bis schließlich kein Gleichgewicht mehr möglich ist. Die magnetische Achse beschreibt also eine ebensolche Helix wie die geometrische Achse, nur mit größerem Radius, so daß die magnetischen Flächen exzentrisch werden. Für das eigentliche toroidale "Urbild"-Plasma bedeutet dies $\theta - \pi = 2k\pi s/L$, d.h. die magnetische Achse dreht sich bei einem Umlauf um den Torus k -mal um die geometrische Achse, und der Schraubenradius nimmt mit Annäherung von t an k zu. Mercier untersuchte eine spezielle Klasse von Konfigurationen mit parabolischem Druckprofil (linear in der Flußfunktion), kreisförmigem Plasmaquerschnitt (Plasmaradius $r_p = a$) und großem Aspektverhältnis. Angenommen wurde insbesondere

$$a_0 \alpha = \frac{2\pi a}{L} \sim a_k \alpha \sim \epsilon \quad , \quad \bar{\beta} = \frac{2\bar{p}}{\beta^2} \sim \epsilon^2 \quad (B.8)$$

Das Magnetfeld ist konstant bis auf $O(\epsilon^2)$, t in (B.7) bezeichnet die mittlere Rotationstransformation bis auf $O(\epsilon^2)$, und als Randbedingung muß die Flußfunktion auf der Plasmaoberfläche konstant sein und der Druck dort verschwinden. Selbstverständlich muß auch $\eta < 1$ sein, sonst hat es keinen Sinn, Krümmungseffekte in nullter Ordnung über das helische Bild zu berücksichtigen. Die nullte Ordnung ist außer in der Nachbarschaft der Singularitäten einfach ein zylindrisches Plasma, etwa wie bei Shafranov [6]. η darf aber auch nicht zu klein werden, sonst ist kein Gleichgewicht mit nur einer magnetischen Achse mehr möglich. Die analytischen Ausdrücke vereinfachen sich beträchtlich, wenn man eine Stromdichteverteilung betrachtet, die bis auf einen Term $\sim \cos \vartheta$ konstant ist. Dann gilt nach Mercier

$$\frac{p}{2\bar{p}} = (1-x^2)(1-\nu x \cos \vartheta) \quad , \quad x = \frac{\xi}{a} \quad (B.9)$$

mit

$$\nu = a_2 \alpha \left(\frac{1}{4} + \frac{k}{\eta} + \left(\frac{L}{2\pi a} \right)^2 \frac{\bar{p}}{\eta^2} \right) \quad (B.10)$$

Offenbar muß $\nu \leq 1$ sein, der Plasmadruck kann ja niemals negativ werden. ν ist eine Art Plasmaverformungsparameter, denn für $\nu > 0$ verschiebt sich das Maximum der Druckverteilung und damit die magnetische Achse nach außen in Richtung $\vartheta = \pi$. Ist die Gleichgewichtsbedingung $\nu \leq 1$ nicht erfüllt, dann wird die Topologie der Konfiguration komplizierter, und es treten mehrere magnetische Achsen auf. Die Berechnung der Nullstellen von

$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{\vartheta=\pi}$ ergibt für die Lage der magnetischen Achse

$$x_m = \frac{-1 + \sqrt{1 + 3\nu^2}}{3\nu} \quad (B.11)$$

$$\text{also } x_m \approx \frac{\nu}{2} \quad \text{für } \nu \ll 1$$

$$\text{und } x_m = \frac{1}{3} \quad \text{für } \nu = 1$$

Die maximale Verschiebung der magnetischen Achse gegenüber der geometrischen Achse ist also $\frac{1}{3} a$. Wir wollen einmal für $\beta = 0$ und $k = 2$ ausrechnen, wie klein $\eta = t-2$ höchstens werden darf, bevor $\nu \leq 1$ verletzt wird. Aus (B.10) folgt

$$\nu = a_2 \alpha \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{\eta} \right) = 1$$

$$\eta = \frac{2}{\frac{1}{a_2 \alpha} - \frac{1}{4}} \quad (B.12)$$

Für Harmonica II ist $a_2 = a_0 = \frac{2\pi}{L}$, $L = 270$ cm, $a = 2.75$ cm.

$$\leadsto \gamma = \frac{2}{\frac{4}{2\pi a} - \frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{270}{3.5\pi} - \frac{1}{4}} = 0.13 \quad (B.13)$$

Für eine Rennbahn mit $L = 2 L_0$ ist $a_2 = \frac{\sin \pi L_0 / L}{\pi R_0} = \frac{1}{\pi R_0}$.
Das Aspektverhältnis sei $A = \frac{R_0}{a} = 3.5$.

$$\leadsto \gamma = \frac{2}{\frac{\pi R_0}{a} - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3.5\pi - \frac{1}{4}} = 0.19 \quad (B.14)$$

Der tatsächlich verfügbare Stabilitätsbereich von Harmonica II ist also gemäß (B.4) und (B.13) gleich $2,74 - 2,13 = 0,61$, der entsprechende Bereich der ins Auge gefaßten Rennbahn bei der ersten höheren Harmonischen dagegen ist gemäß (B.6) und (B.14) gleich $2,37 - 2,19 = 0,18$, d.h. gegenüber Harmonica II beträgt die Breite des Stabilitätsfensters der Rennbahn etwa 30%.

Auch dieses Ergebnis dürfte noch zu optimistisch sein, wie eine genaue numerische Auswertung des Mercierkriteriums auf achsennahen magnetischen Flächen im Modell der helischen Bilder zeigt /12,13/. Für kleine ν und kleine β ist das Stabilitätskriterium in der Nähe der k -ten Resonanz durch das dominante Reihenglied von (2.19) gegeben:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{t-n}{t+n} a_n^2 &> \frac{4\pi^2}{L^2} t^2, \quad t = k + \gamma, \quad n = -k \\ \leadsto \frac{k+\gamma+k}{\gamma} a_k^2 &> \frac{4\pi^2}{L^2} (k+\gamma)^2 \\ \frac{4\pi^2}{L^2} (k+\gamma)^2 - \frac{2k}{\gamma} a_k^2 - a_k^2 &< 0 \end{aligned} \quad (B.15)$$

Für $\nu \uparrow 1$ dagegen ist dieses Kriterium nicht mehr anwendbar. Die Rotationstransformation ist dann nicht mehr nahezu konstant über den Plasmaquerschnitt, sondern ist auf der magnetischen Achse wesentlich größer als am Rande, wo $t \downarrow k$ geht und die kritische Resonanz zuerst eintritt. Das bewirkt eine starke Verscherung. Außerdem wird die mittlere magnetische Senke wesentlich vertieft. Die damit verbundenen stabilisierenden Effekte nützen natürlich nach Überschreiten der Gleichgewichtsgrenze $\nu = 1$ nichts mehr. Auch für große β gilt (B.15) nicht mehr.

Die magnetische Achse verschiebt sich dann so weit, daß die achsennahen magnetischen Flächen nicht mehr kreisförmig bleiben, wodurch β in das Stabilitätskriterium eingeht. Die von Mercier berechneten Stabilitätsbereiche im ersten Quadranten einer (η, β) -Ebene zeigen, daß β im Tokamakstabilitätsbereich oberhalb von $\tau = 0$ einige Prozent erreichen kann, im ersten der höheren Stabilitätsbereiche oberhalb von $|\tau| = 2$ dagegen nur noch einige Promille. Nicht nur die "Breite" des Stabilitätsfensters (auf der η - bzw. τ -Achse) ist also kleiner, auch die "Höhe" (bezüglich β) ist erheblich eingeschränkt, sogar um eine Größenordnung. Die Abschätzung (2.38) für das maximal erreichbare Rennbahn- β ist daher für das höhere Stabilitätsfenster unbrauchbar, und somit scheinen Hoffnungen auf höhere β durch Ausnutzung des höheren Stabilitätsbereiches nicht gerechtfertigt. Hinzu kommt nun noch, daß die Auswertung des Mercierkriteriums über den ganzen Plasmaquerschnitt auch eine starke Abhängigkeit von der Stromdichteverteilung ergibt. Je nachdem, ob das Stromdichteprofil konvex oder konkav ist, d.h. ein Maximum oder ein Minimum auf der magnetischen Achse hat, wird die Fläche des Stabilitätsgebietes in der (η, β) -Ebene kleiner oder größer. Für Stromdichteverteilungen, die in Achsennähe konzentriert sind, kann das Stabilitätsfenster sehr klein werden, und zwar sowohl der Breite als auch der Höhe nach, und nach Abzug der gemäß (B.13) oder (B.14) wegen Ungleichgewichts verbotenen Zonen bleibt schließlich überhaupt nichts mehr übrig. Es gibt dann keine Konfiguration mehr, die zugleich stabil und von einfacher Topologie ist. Ein solches "Zuwachsen" des Stabilitätsfensters wie für $k \geq 2$ ist im Tokamakstabilitätsbereich nicht möglich, denn nach (B.10) ist für $k = \beta = 0$ die Bedingung $\nu < 1$ immer erfüllt, d.h. die Nachbarschaft des Ungleichgewichts bei $\tau = 0$ ist nicht so gefährlich. Im Falle einer Rennbahn ist der höhere Stabilitätsbereich auch noch aus einem anderen Grunde variabel. Die Größe des Fourierkoeffizienten a_2 (oder eines beliebigen höheren Koeffizienten) hängt nämlich sehr empfindlich von der exakten Geometrie der Kurvenform ab, welche die Achse der Plasmasäule darstellt. Nach Tasso und Mercier /9/ gibt es der Rennbahn eng benachbarte Kurven, für die a_2 und der damit verknüpfte Stabilitätsbereich wesentlich kleiner sind als für eine exakte Rennbahnkurve. Die Form der

Kurve kommt eben durch das Zusammenwirken aller Fourierkoeffizienten zustande, während ein Stabilitätsfenster nur von einem Koeffizienten abhängt. Geringfügige Abweichungen von der Rennbahngeometrie können daher das $k = 2$ Fenster zusätzlich verkleinern.

Es ist nicht auszuschließen, daß es gelungen wäre, mit einem noch weiter verbesserten Harmonica-II-Experiment den Stabilitätsbereich oberhalb von $|t| = 2$ nachzuweisen. Die Experimentiertechnik ist inzwischen weiter fortgeschritten, und vor allem lassen sich die experimentellen Ergebnisse nicht ohne weiteres auf ein Plasma mit größerem Durchmesser übertragen. Falls man jedoch der MHD-Theorie glaubt und die Größe des Stabilitätsfensters als Maß für die Stabilität des Plasmas nimmt, sind nach dem vorher gesagten die Aussichten gering, daß der Nachweis des $t = 2$ Stabilitätsbereiches auch in einer Rennbahn gelingen könnte. Sofern das experimentell erreichbare Rennbahnplasma überhaupt ein Stabilitätsfenster endlicher Breite theoretisch erwarten läßt, ist es in der Übergangsphase bei der Erzeugung des Plasmas und während des Aufbaus der Entladung schwierig, mit der Rotationstransformation in diesem Fenster zu bleiben und das Durchqueren von Gebieten des Ungleichgewichtes und der Instabilität zu vermeiden. Nach Adam und Mercier /13/ neigt das Plasma beim Durchschreiten der singulären t -Werte im Bereich der Konfiguration mit komplizierter Topologie zu starker Turbulenz, und eine solche ist ja in Harmonica II auch beobachtet worden. Ungeklärt sind noch die Auswirkungen von Korrekturen zur MHD-Theorie, insbesondere der Einfluß eines endlichen Larmorradius. Dieser kann das Stabilitätsfenster merklich vergrößern. Außerdem kommt es auch auf die Größe der unbekannten Anwachsraten an. Wenn man gewisse kleine Anwachsraten als unschädlich zuläßt, ist das praktisch verfügbare Stabilitätsfenster noch größer. Es könnte daher reizvoll sein, den Tokamakstabilitätsbereich versuchsweise zu verlassen, um experimentell die Frage nach der Brauchbarkeit der höheren Stabilitätsbereiche endgültig zu beantworten.

QUELLENVERZEICHNIS

- / 1/ V.D. Shafranov, Plasma Physics 5, 251 (1963)
- / 2/ V.D. Shafranov, Nuclear Fusion 4, 114 (1964)
- / 3/ C. Mercier, Nuclear Fusion 3, 89 (1963)
- / 4/ V.D. Shafranov, Nuclear Fusion 4, 232 (1964)
- / 5/ B.R. Suydam, Proc. 2nd Internat. Conf. Peaceful Uses
Atomic Energy, Geneva, 1958, Vol. 31, 157 (1959)
- / 6/ V.D. Shafranov, Nucl. Fusion 8, 253 (1968)
- / 7/ C. Mercier, Nucl. Fusion Suppl. Part 2, 801 (1962)
- / 8/ C. Mercier, Nucl. Fusion 4, 213 (1964)
- / 9/ C. Mercier, H. Tasso, Rapport C.E.A. 2319 (1963)
- /10/ Nucl. Fusion Special Suppl., 194 (1970)
- /11/ D. Lortz, J. Nührenberg, Nucl. Fusion 13, 821 (1973)
- /12/ C. Mercier, Plasma Physics and Contr. Nucl. Fus. Res.
(Proc. Conf. Culham, 1965) Vol. 1, 417, IAEA, Vienna (1966)
- /13/ J.C. Adam, C. Mercier, Plasma Physics and Contr. Nucl.
Fus. Res. (Proc. Conf. Novosibirsk, 1968), Vol. I, 199,
IAEA, Vienna (1969)
- /14/ E.P. Butt et al., Journal de Physique, Colloque C 3 -
Suppl. au N° 4 - Tome 29, 173 (1968)
- /15/ P. Ginot, H. Kuus, P. Plinate, Proc. 3. Eur. Conf. on
Contr. Fusion and Plasma Physics, Utrecht, 89 (1969)
- /16/ P. Ginot, P. Plinate, EUR-CEA-FC-660 (1973)

