



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH GmbH

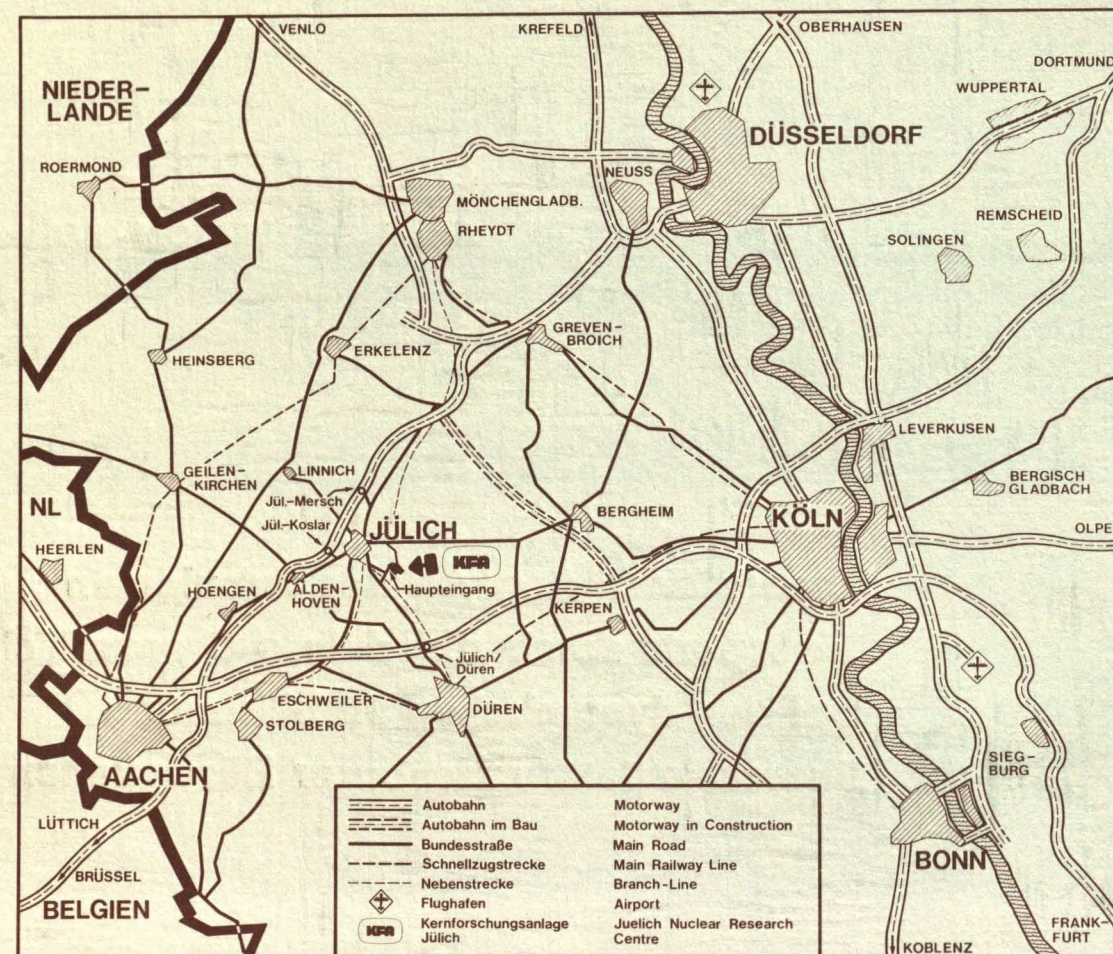
**Institut für Plasmaphysik
Association EURATOM - KFA**

**Theoretische Analyse des turbulenten
Transports durch die diffuse Grenzschicht
bei der dynamischen Stabilisierung
überschichteter mischbarer Flüssigkeiten**

von

H. Gerhauser

**Jül - 1645
Februar 1980
ISSN 0366-0885**



Als Manuskript gedruckt

Berichte der Kernforschungsanlage Jülich - Nr. 1645

Institut für Plasmaphysik Jül - 1645

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH

Postfach 1913 · D-5170 Jülich (Bundesrepublik Deutschland)

Telefon: 02461/611 · Telex: 833556 kfa d

**Theoretische Analyse des turbulenten
Transports durch die diffuse Grenzschicht
bei der dynamischen Stabilisierung
überschichteter mischbarer Flüssigkeiten**

von

H. Gerhauser

Theoretical Analysis of Turbulent Transport through the Diffuse
Boundary Layer in the Dynamic Stabilization of Superimposed
Miscible Liquids

Abstract

Two superimposed miscible liquids are separated by a diffuse boundary layer providing a steady transition of density. If the heavy fluid is on top of the light one, Rayleigh-Taylor-instabilities develop and cause a rapid interchange and eventually an intermixing. This process can be subjected to dynamic stabilization by enforcing vertical oscillations upon the whole system. However, since only part of the unstable mode spectrum is completely stabilized, the remaining weakly unstable modes lead to turbulent transport processes through the boundary layer ("anomalous diffusion"), so that only a quasistationary equilibrium is achieved. In the present paper, previous experimental results on the dynamic stabilization of water superimposed by an aqueous ZnJ-solution are theoretically interpreted, and the observed spatial structure as well as the time development of the density profiles are explained. There exists an analogy between these phenomena and turbulent transport processes in tokamak discharges such as the sawtooth oscillations of internal disruptions.

Theoretische Analyse des turbulenten Transports durch die diffuse
Grenzschicht bei der dynamischen Stabilisierung überschichteter
mischbarer Flüssigkeiten

H. Gerhauser

Institut für Plasmaphysik der Kernforschungsanlage Jülich GmbH,
D-5170 Jülich, Postfach 1913, Ass. EURATOM-KFA

Zusammenfassung

Zwischen zwei einander überschichteten mischbaren Flüssigkeiten bildet sich eine diffuse Grenzschicht aus, in der ein stetiger Dichteübergang erfolgt. Liegt die schwere Flüssigkeit über der leichten, so entstehen Rayleigh-Taylor-Instabilitäten, die einen raschen Austausch und schließlich eine Durchmischung herbeiführen. Dieser Vorgang läßt sich durch aufgezwungene vertikale Schwingungen des gesamten Systems dynamisch stabilisieren. Dabei wird jedoch nur ein Teil des instabilen Modenspektrums vollständig stabilisiert, die verbleibenden schwach instabilen Moden führen zu turbulenten Transportvorgängen durch die Grenzschicht ("anomale Diffusion"), so daß sich nur ein quasistationäres Gleichgewicht einstellt. Frühere experimentelle Ergebnisse über die dynamische Stabilisierung von Wasser überschichtet mit wässriger ZnJ-Lösung werden in der vorliegenden Arbeit theoretisch gedeutet, und die beobachtete räumliche Struktur sowie die zeitliche Entwicklung der Dichteprofile erklärt. Es besteht eine Analogie zwischen diesen Erscheinungen und turbulenten Transportvorgängen in Tokamakentladungen wie den Sägezahnschwingungen innerer Disruptionen.

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
1. Einführung	1
2. Experimentelle Beobachtungen	3
3. Theoretische Grundlagen	5
3.1 Rayleigh-Taylor-Instabilitäten in diffusen Grenzschichten	5
3.1.1 Grenzschicht zwischen festen Wänden	7
3.1.2 Grenzschicht zwischen homogenen Flüssig- keiten	9
3.2 Dynamische Stabilisierung	14
3.2.1 Zurückführung auf Mathieugleichung	14
3.2.2 Stabilitätsbedingung und Anwachsrate	16
4. Folgerungen aus der Theorie zur Deutung des Experiments	20
4.1 Phase I : Ausbildung von Treppenstufen	22
4.2 Phase II: Periodische Schichtenablösung	25
4.3 Vergleich der anomalen Diffusion mit den Sägezahnschwingungen in Tokamaks	31
Quellenverzeichnis	34
Anhang: Näherungsformeln für die auftretenden Stabilitätsgrenzen und Anwachsrate der Mathieukarte	35

1. Einführung

Vertauschungsinstabilitäten in übereinander geschichteten Flüssigkeiten, bekannt unter dem Namen Rayleigh-Taylor-Instabilitäten, treten bei einem invertierten Dichteprofil auf, wenn also die Richtung der Dichtezunahme und die Richtung der Schwerkraft entgegengesetzt sind. Solche Instabilitäten wurden erstmals von Lord Rayleigh /1/ im Jahre 1883 genauer untersucht. Wenn die Grenzschicht scharf ist und die Dichte von ρ_1 unten auf ρ_2 oben springt, dann verhalten sich Störungen wie $e^{i(\Omega t - k z)}$ mit

$$\Omega^2 = -gk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}, \quad k = |k| \quad (1.1)$$

Der Ausbreitungs- oder Wellenzahlvektor $k = k_{||}$ liegt dabei in der Grenzschicht. g ist die Schwerebeschleunigung. Offensichtlich folgt aus $\rho_2 > \rho_1$ Instabilität, und die Anwachsrate $\sigma^2 = -\Omega^2$ wächst unbeschränkt mit der Wellenzahl $k = k_{||}$. Da Flüssigkeiten jedoch immer in einem Gefäß mit endlichen Abmessungen enthalten sein müssen, gibt es eine kleinstmögliche Wellenzahl $k_{\min}$ und damit auch eine kleinstmögliche Anwachsrate $\sigma_{\min}^2 = -\Omega^2(k_{\min})$. Völlig anders verhält es sich bei einer diffusen Grenzschicht zwischen mischbaren Flüssigkeiten mit dem Dichtegradienten $\rho' = |\nabla \rho|$. In diesem Fall strebt die Anwachsrate für Wellenlängen $\lambda_{||} = \frac{2\pi}{k_{||}}$, die viel kleiner als die Grenzschichtdicke h sind, einem Grenzwert zu. Es ist dann nämlich

$$\sigma_{\max}^2 = g \frac{\rho'}{\rho} \approx g \frac{2}{h} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \quad (1.2)$$

letzteres wenn der Dichtesprung klein ist im Vergleich zur Dichte selbst. In einer diffusen Grenzschicht können sich aber auch Moden mit einer vertikalen Wellenzahl $k_{\perp}$ ausbilden, und deren Anwachsrate kann für große $k_{\perp}$ beliebig klein werden. Daher sind die Anwachsrate zwar nach oben beschränkt, aber nicht nach unten.

Bei der dynamischen Stabilisierung zwingt man nun die Flüssigkeit zu Schwingungen mit einer bestimmten Frequenz ω senkrecht zur Grenzschicht. Dadurch werden alle Moden, deren Anwachsrate σ in einem bestimmten Intervall $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ liegen, stabilisiert. Moden mit $\sigma_2 < \sigma$ werden nicht nur nicht stabilisiert, sondern sogar noch zusätzlich destabilisiert, man spricht von der Anregung parametrischer Resonanzen. Hat man also anfänglich eine scharfe Grenzschicht, so sorgen die schnwellwachsenden kurzwelligen Moden mit kleinem $\lambda_{\parallel}$ für eine schnelle turbulente Verschmierung und Durchmischung der Grenzschicht, so lange bis die Grenzschicht diffus geworden ist mit einer Dicke h , zu der eine maximale Anwachsrate $\sigma_{\max} < \sigma_2$ gehört. Damit sind zwar die parametrischen Resonanzen unterdrückt, es gibt aber kein $\sigma_{\min}$ mehr, d.h., man kann nicht verhindern, daß die kurzwelligen Moden mit kleinem $\lambda_{\perp}$ und $0 < \sigma < \sigma_1$ weiterwachsen, wenn auch mit stark herabgeminderten Anwachsrate. Die nicht stabilisierten Moden kleiner Anwachsrate verursachen nun eine "anomale Diffusion", d.h. turbulente Transportvorgänge durch die Grenzschicht, welche die der "normalen Diffusion" erheblich übertreffen. Diese wurden von Wolf /2/ experimentell erzeugt und untersucht. Die zugrundeliegenden Mechanismen sollen in der vorliegenden Arbeit unter Heranziehung der Theorien von Rayleigh /1/ und Wesson /3/ in ihrem Zusammenspiel identifiziert und teilweise auch quantitativ beschrieben werden. Hierzu werden mit Hilfe des Mathieuschen Stabilitätsdiagramms /4, 5/ die Anwachsrate der einzelnen Moden berechnet und die Struktur jener mit der größten Anwachsrate untersucht. Im Anschluß daran soll gezeigt werden, wie die experimentell beobachtete zeitliche Entwicklung des Dichteprofiles und der Massentransport durch die Grenzschicht theoretisch verständlich gemacht werden können. Dabei wird sich herausstellen, daß eine Analogie zu den Sägezahnschwingungen innerer Disruptionen in Tokamak-Entladungen besteht.

2. Experimentelle Beobachtungen

Rayleigh-Taylor-Instabilitäten werden meist nur an scharfen Grenzschichten betrachtet. Wolf /2/ hat jedoch erstmals auch diffuse Grenzschichten experimentell genau untersucht. Seine wesentlichen experimentellen Daten, Beobachtungen und Ergebnisse sollen hier noch einmal kurz zusammengestellt werden. Als mischbare Flüssigkeiten dienten Wasser mit $\rho_1 = 1 \text{ g/cm}^3$ und wässrige Zinkjodidlösung mit $\rho_2 = 1.8 \text{ g/cm}^3$. Es wurden darüber hinaus Versuche durchgeführt, bei denen sowohl das Wasser als auch die ZnJ-Lösung mit Glyzerin versetzt waren, so daß die Viskosität beider Flüssigkeiten etwa 50 mal so hoch war wie die von reinem Wasser. Das zylindrische Glasgefäß hatte eine Länge von $L = 6 \text{ cm}$ und einen Durchmesser $D = 0.78 \text{ cm}$. Für $t < 0$ war die untere Hälfte mit der schweren ZnJ-Lösung gefüllt, die obere mit Wasser. Die diffuse Grenzschicht war also in einem stabilen Gleichgewicht. Das Gefäß wurde parallel zur Achse und senkrecht zur Grenzschicht geschüttelt mit einer Frequenz $\nu = 100 \text{ Hz}$ oder $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 10^2 \text{ sec}^{-1}$. Die Amplitude der Schüttelbeschleunigung war $b_0 = 60 \text{ g}$. Für $t = 0$ wurde das vibrierende Gefäß auf den Kopf gestellt und für $t > 0$ die zeitliche Entwicklung des Dichteprofiles mit Hilfe photometrischer Lichtabsorptionsmessungen beobachtet unter Ausnutzung der gelblichen Färbung von ZnJ. Besonders auffällig war, daß die Grenzschicht, die ursprünglich einen stetigen Dichteabfall gezeigt hatte, in vier Treppenstufen von etwa gleicher Höhe zerfiel, d.h. statt einer Grenzschicht mit einem Dichtesprung von $\rho_2 - \rho_1 = 0.8 \text{ g/cm}^3$ beobachtete man vier aufeinanderfolgende Grenzschichten, jede mit einem Dichtesprung von etwa 0.2 g/cm^3 . Die unterste Stufe bildete sich allerdings erst gar nicht richtig aus, sondern war schon nach einer Minute verschwunden. Die oberste Stufe brach nach etwa 6 min. zusammen. Nach 8 min. waren noch zwei Stufen übrig.

Die weitere Entwicklung konnte nicht mehr verfolgt werden, weil der Vibrator wegen Überhitzung abschaltete. In Fig. 1 sind die experimentellen Dichteprofile zusammengestellt. Das durch die dynamische Stabilisierung bewirkte beinahe stabile oder im

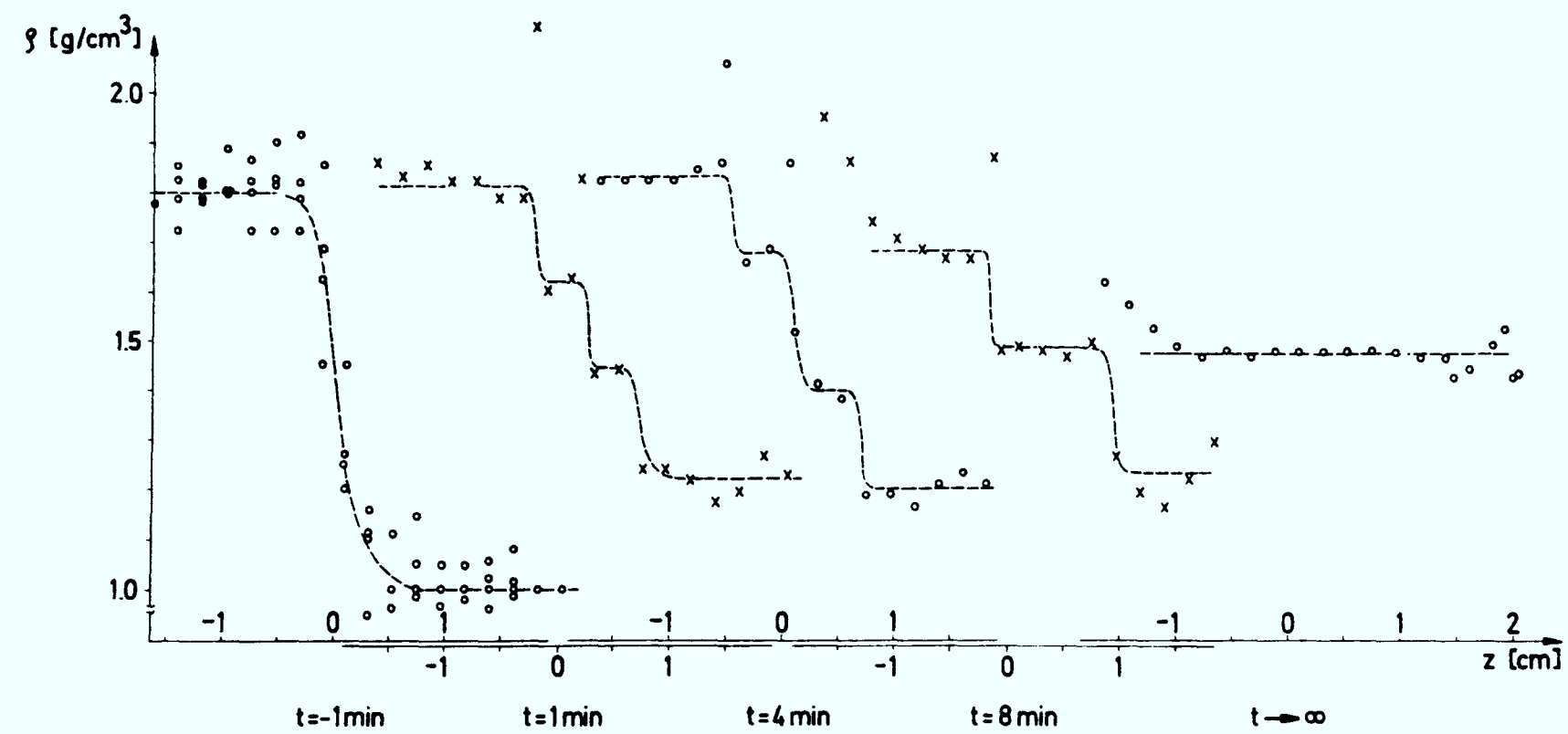


Fig. 1: Entwicklung der Dichteprofile zwischen einer wässrigen ZnJ-Lösung ($\rho_2 = 1.8 \text{ g/cm}^3$, obere Schicht) und Wasser ($\rho_1 = 1.0 \text{ g/cm}^3$), nach Wolf /2/. $D = 0.78 \text{ cm}$, $\Lambda = 6 \text{ cm}$, $b_0/g = 60$, $\omega/2\pi = 100 \text{ Hz}$

großen stabile Diffusionsgleichgewicht war durch die folgende merkwürdige Erscheinung gekennzeichnet. Von den diffusen Grenzschichten schälten sich ständig dünne Scheiben relativ hoher und relativ niedriger Dichte ab; erstere nach unten absinkend und letztere nach oben aufsteigend. Durch die kräftigere Färbung der dichteren Flüssigkeitsschichten war dieser Effekt optisch und auch mit dem freien Auge deutlich beobachtbar. Dadurch nahm der Dichteunterschied $\Delta\rho$ an den Grenzschichten nach und nach ab, und für $\Delta\rho \leq 0.13 \text{ g/cm}^3$ neigte der Dichtesprung zum plötzlichen Zusammenbruch. Natürlich ist die Zerfallszeit τ des gesamten Dichteprofiles der Gefäßlänge Δ proportional. Sie ist etwa zwei bis drei Größenordnungen kürzer als die Zeit, nach der ein Dichteausgleich durch normale Diffusion zustande gekommen wäre. Die unstabilisierten Moden mit kurzer vertikaler Wellenlänge verursachten also eine Art anomal schnelle Diffusion. Diese Ergebnisse änderten sich auch nicht wesentlich durch den Zusatz von Glyzerin zur Erhöhung der Viskosität, d.h. auch durch starke Viskosität war keine vollständige Stabilisierung zu erreichen.

3. Theoretische Grundlagen

3.1 Rayleigh-Taylor-Instabilitäten in diffusen Grenzschichten

Lord Rayleigh /1/ betrachtete das Gleichgewicht einer inkompressiblen schweren Flüssigkeit veränderlicher Dichte sehr ausführlich. Im folgenden sollen die wesentlichen Voraussetzungen und Ergebnisse kurz dargestellt werden, in modernisierter Schreibweise und modifizierter Form und mit wichtigen Ergänzungen. Die Grundgleichungen sind nach Linearisierung

$$\text{Bewegungsgleichung: } \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \delta p - \delta \rho \cdot \mathbf{g} \mathbf{e}_z \quad (3.1)$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung: } \frac{\partial}{\partial t} \delta \rho + \delta \mathbf{v}_z \frac{d\rho}{dz} = 0 \quad (3.2)$$

$$\text{Inkompressibilität: } \nabla \cdot \delta \mathbf{v} = 0 \quad (3.3)$$

Dabei sind Dichtegradient und Schwerebeschleunigung parallel bzw. antiparallel zur z-Richtung angekommen: $\nabla \rho = \frac{d\rho}{dz} \mathbf{z}$, $\mathbf{g} = -g \mathbf{z}$. Wenn sich alle durch δ gekennzeichneten Störgrößen verhalten wie $e^{i(\Omega t - k_x x - k_y y)}$, bleibt die folgende Differentialgleichung übrig:

$$\left[\frac{d}{dz} \left(\rho \frac{d}{dz} \right) - k^2 \left(\frac{g}{\Omega^2} \rho' + \rho \right) \right] \delta v_{\mathbf{z}} = 0 \quad (3.4)$$

oder

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - k^2 + \frac{\rho'}{\rho} \left(\frac{d}{dz} - \frac{gk^2}{\Omega^2} \right) \right] \delta v_{\mathbf{z}} = 0 \quad (3.5)$$

$$\text{mit } k^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad \rho' = \frac{d\rho}{dz}$$

Wenn die Grenzfläche $z = 0$ scharf ist, verschwindet ρ' überall außer an der Grenzfläche selbst, und es folgt

$$\delta v_{\mathbf{z}} = \delta v_{\mathbf{z}}(0) e^{-\sqrt{k^2} z} \quad \text{für } z \geq 0 \quad (3.6)$$

Kurzwellige Störungen sind also auf die unmittelbare Nachbarschaft der Grenzfläche beschränkt. Die Ableitung $\delta v'_{\mathbf{z}} = \frac{d\delta v_{\mathbf{z}}}{dz}$ ist an der Grenzfläche unstetig. Integration $\int_{-\infty}^{\infty} \dots dz$ von (3.4) durch die Grenzfläche liefert

$$\left[\rho \delta v'_{\mathbf{z}} \right]_2 - \left[\rho \delta v'_{\mathbf{z}} \right]_1 - \frac{gk^2}{\Omega^2} (\rho_2 - \rho_1) \delta v_{\mathbf{z}}(0) = 0$$

und hieraus folgt die eingangs zitierte Formel (1.1) für Ω^2 .

Wenn die Grenzfläche diffus ist, können analytische Formeln nur für exponentielle Dichtezunahme gewonnen werden, also für

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1 e^{\beta z}, \quad \frac{\rho'}{\rho} = \beta & \text{für } 0 \leq z \leq h \\ \rho_2 &= \rho_1 e^{\beta h} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dann hat die Differentialgleichung konstante Koeffizienten:

$$\delta v''_{\mathbf{z}} + \beta \delta v'_{\mathbf{z}} - k^2 \left(1 + \frac{g\beta}{\Omega^2}\right) \delta v_{\mathbf{z}} = 0 \quad (3.8)$$

Die Lösungen sind alle von der Gestalt $e^{\alpha z}$, und die komplexen α folgen aus der charakteristischen Gleichung:

$$\alpha^2 + \beta \alpha - k^2 \left(1 + \frac{g\beta}{\Omega^2}\right) = 0 \quad (3.9)$$

Lösungen und Anwachsraten werden durch die Randbedingungen erheblich beeinflusst. Wir betrachten zwei Fälle.

3.1.1 Grenzschicht zwischen festen Wänden

Wenn die Grenzschicht oben und unten an feste Wände stößt, sind die Randbedingungen einfach:

$$\delta v_{\mathbf{z}}(0) = \delta v_{\mathbf{z}}(h) = 0 \quad (3.10)$$

mit der Lösung

$$\delta v_{\mathbf{z}} = A e^{-\frac{1}{2}\beta z} \sin \frac{n\pi}{h} z, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.11)$$

n ist die vertikale Modenzahl. Wir erhalten Ω durch Differenzieren und Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \delta v'_{\mathbf{z}} &= \left(-\frac{1}{2}\beta + \frac{n\pi}{h} \cot \frac{n\pi}{h} z\right) \delta v_{\mathbf{z}} \\ \delta v''_{\mathbf{z}} &= \left(-\frac{1}{2}\beta + \frac{n\pi}{h} \cot \frac{n\pi}{h} z\right) \delta v'_{\mathbf{z}} - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \frac{\delta v_{\mathbf{z}}}{\sin^2 \frac{n\pi z}{h}} \\ \delta v''_{\mathbf{z}} + \beta \delta v'_{\mathbf{z}} &= \left(\frac{1}{2}\beta + \frac{n\pi}{h} \cot \frac{n\pi}{h} z\right) \delta v'_{\mathbf{z}} - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \frac{\delta v_{\mathbf{z}}}{\sin^2 \frac{n\pi z}{h}} \\ &= \left[\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \cot^2 \frac{n\pi}{h} z - \frac{1}{4}\beta^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 \frac{n\pi z}{h}} \right] \delta v_{\mathbf{z}} \\ &= \left[-\frac{n^2 \pi^2}{h^2} - \frac{1}{4}\beta^2 \right] \delta v_{\mathbf{z}} = k^2 \left(1 + \frac{g\beta}{\Omega^2}\right) \delta v_{\mathbf{z}} \\ \hookrightarrow \frac{g\beta}{\Omega^2} &= -\beta 1 = -\frac{\frac{1}{4}\beta^2 h^2 + n^2 \pi^2 + k^2 h^2}{k^2 h^2} \quad (3.12) \end{aligned}$$

Die Dispersionsrelation ist also

$$\sigma^2 = -\Omega^2 = \frac{g}{l} \text{ mit } l = \frac{1}{\beta} \frac{\frac{1}{4}\beta^2 h^2 + n^2 \pi^2 + k^2 h^2}{k^2 h^2} \quad (3.13)$$

l ist die Länge eines Pendels mit der gleichen Schwingungsfrequenz Ω bzw. Anwachsrate σ . Moden mit kleinem n und großem k haben die größten Anwachsrate. Es ist in Übereinstimmung mit Formel (1.2)

$$\sigma_{\max}^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g}{l} = g\beta = g \frac{\rho}{\rho'} \quad (3.14)$$

Moden mit kleinem k und großem n hingegen haben beliebig kleine Anwachsrate. Der Term

$$\frac{1}{4}\beta^2 h^2 \approx \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)^2 \lesssim \frac{1}{4} \quad (3.15)$$

ist gegenüber $n^2 \pi^2 \gg \pi^2$ immer zu vernachlässigen. Die Wellenzahl k kann nur diskrete Werte annehmen, wir können schreiben

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2m\pi}{\lambda_{\max}} = \frac{m\pi}{D} \quad (3.16)$$

Dies gilt in Strenge nur für Gefäße mit rechteckigem Querschnitt, für $m \geq 2$ gilt es aber näherungsweise auch für Gefäße mit kreisförmigem Querschnitt. Die Grundmode im kreiszylindrischen Gefäß mit Durchmesser D , der $m = 1$ entspricht, ist durch $k_{\min} = \frac{3.68}{D}$ gegeben, wobei $J_1'(k_{\min} D/2) = J_1'(1.84) = 0$ ist. n und m bestimmen die Anzahl der waagerechten und senkrechten Knotenebenen des Geschwindigkeitsfeldes und damit die Einteilung der Grenzschicht in ein System von Konvektionszellen. Für $n = 2$ und $m = 3$ z.B. ergibt sich das Bild von Fig. 2. Der Betrag der Geschwindigkeit in jeder Konvektionszelle wächst $\sim e^{\sigma t}$. Der Richtungssinn der miteinander verketteten Wirbel ist natürlich dem Zufall überlassen.

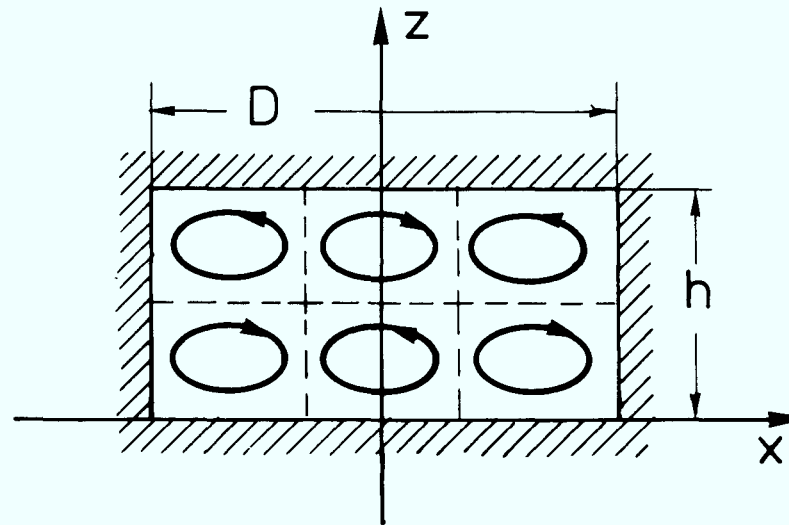


Fig. 2: Geschwindigkeitsfeld für $(m,n) = (3,2)$

3.1.2 Grenzschicht zwischen homogenen Flüssigkeiten

$$\begin{aligned} \text{Sei } \rho &= \rho_1 \text{ und } \delta v_z \sim e^{kz} \text{ für } z < 0 \\ \rho &= \rho_1 e^{\beta z} \text{ für } 0 \leq z \leq h \\ \rho &= \rho_2 = \rho_1 e^{\beta h} \text{ und } \delta v_z \sim e^{-kz} \text{ für } z > h \end{aligned} \quad (3.17)$$

Die Randbedingungen oder besser gesagt die Übergangsbedingungen an den Grenzflächen zwischen der Grenzschicht und den Gebieten homogener Dichte sind jetzt

$$\delta v_z'(0)/\delta v_z(0) = k, \quad \delta v_z'(h)/\delta v_z(h) = -k \quad (3.18)$$

Dieser Fall ist der praktisch interessante, denn wir wollen ja eine echte Grenzschicht zwischen zwei verschiedenen Flüssigkeiten betrachten. Wir machen den Ansatz

$$\delta v_z = A e^{-\frac{1}{2}\beta z} \sin\left(\frac{\phi}{h}z - \epsilon\right) \text{ für } 0 \leq z \leq h \quad (3.19)$$

und erhalten zunächst die folgende zu (3.13) analoge Formel für die äquivalente Pendellänge

$$l = \frac{1}{\beta} \frac{\frac{1}{4}\beta^2 h^2 + \phi^2 + k^2 h^2}{k^2 h^2} \quad (3.20)$$

Zur Berechnung von ϕ benutzen wir

$$\delta v_{\mathbf{z}}' = \left[-\frac{1}{2}\beta + \frac{\phi}{h} \cot \left(\frac{\phi}{h} z - \varepsilon \right) \right] \delta v_{\mathbf{z}} \quad (3.21)$$

und die Randbedingungen (3.18):

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{2}\beta - \frac{\phi}{h} \cot \varepsilon &= k \\ -\frac{1}{2}\beta + \frac{\phi}{h} \cot (\phi - \varepsilon) &= -k \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\phi}{h} \cot \varepsilon &= -k - \frac{1}{2}\beta \\ \frac{\frac{\phi}{h} \cot \phi \cdot \frac{\phi}{h} \cot \varepsilon + \frac{\phi^2}{h^2}}{\frac{\phi}{h} \cot \varepsilon - \frac{\phi}{h} \cot \phi} &= -k + \frac{1}{2}\beta \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\phi}{h} \cot \phi \left(-k - \frac{1}{2}\beta \right) + \frac{\phi^2}{h^2} = \left(-k + \frac{1}{2}\beta \right) \left(-k - \frac{1}{2}\beta - \frac{\phi}{h} \cot \phi \right)$$

$$-2k \frac{\phi}{h} \cot \phi + \frac{\phi^2}{h^2} = k^2 - \frac{1}{4}\beta^2$$

$$\begin{aligned} 2\phi \cot \phi = f(\phi) &= \frac{\frac{1}{4}\beta^2 h^2 + \phi^2 - k^2 h^2}{kh} \\ &= \frac{\frac{1}{4}\beta^2 h^2 + \phi^2}{kh} - kh \end{aligned}$$

(3.23)

Es gibt abzählbar unendlich viele Lösungen ϕ_n dieser transzendenten Gleichung. Das kleinste ϕ^2 ist immer am wichtigsten, denn es erzeugt die größte Anwachsrate. Im Grenzfall scharfer Grenzschicht $kh \rightarrow 0$ (**a**ber βh endlich) wird (3.23) asymptotisch

$$\frac{1}{4}\beta^2 h^2 + \phi^2 \xrightarrow{kh \rightarrow 0} 2 kh \phi \cot \phi \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{4}\beta^2 h^2 + \phi_{\min}^2 \approx 2 kh \quad (3.25)$$

$$l_{\min} \approx \frac{1}{\beta} \frac{2kh}{k^2 h^2} = \frac{1}{k} \frac{2}{\beta h} \approx \frac{1}{k} \frac{\rho 2^{+\rho} 1}{\rho 2^{-\rho} 1}$$

$$\sigma^2 \approx gk \frac{\rho 2^{-\rho} 1}{\rho 2^{+\rho} 1} \quad (3.26)$$

in Übereinstimmung mit (1.1). Bei allmählichem Verkleinern von kh passiert für

$$\frac{\frac{1}{4\beta} 2h^2}{kh} - kh = 2 \quad (3.27)$$

ein bemerkenswerter Übergang. Es ist dann

$$k^2 h^2 + 2 kh - \frac{1}{4} \beta^2 h^2 = 0$$

$$kh_c = -1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \beta^2 h^2} \approx \frac{1}{8} \beta^2 h^2 \left(1 - \frac{1}{16} \beta^2 h^2\right) \lesssim \frac{1}{8} \quad (3.28)$$

und aus $2\phi \cot\phi = 2 + \frac{\phi^2}{kh_c}$ folgt $\phi_{\min}^2 = 0$ und damit auch $\varepsilon = 0$. Für dieses kritische kh_c existiert also überhaupt keine Lösung δv_z der oben angegebenen Form (3.19). Wir können aber einen geeigneten Grenzübergang durchführen. Sei

$$\frac{\frac{1}{4\beta} 2h^2}{kh} - kh = 2 - \delta^2 \quad (3.29)$$

d.h. kh geringfügig größer als kh_c . Dann ist

$$2 \left(1 - \frac{\phi_{\min}^2}{3}\right) \approx 2\phi_{\min} \cot \phi_{\min} = 2 - \delta^2 + \frac{\phi_{\min}^2}{kh}$$

$$\delta^2 \approx \left(\frac{1}{kh} + \frac{2}{3}\right) \phi_{\min}^2 \quad (3.30)$$

$$\phi_{\min} \frac{1}{\varepsilon} \approx \phi_{\min} \cot \varepsilon = -kh - \frac{1}{2} \beta h$$

$$\varepsilon \approx -\frac{1}{kh + \frac{1}{2}\beta h} \phi_{\min} \quad (3.31)$$

$$\delta v_z \xrightarrow{kh \rightarrow kh_c} A e^{-\frac{1}{2}\beta z} \sin \left[\phi_{\min} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{kh + \frac{1}{2}\beta h} \right) \right]$$

$$\delta v_z \xrightarrow{kh \rightarrow kh_c} A \phi_{\min} e^{-\frac{1}{2}\beta z} \left(\frac{z}{h_c} + \frac{1}{kh_c + \frac{1}{2}\beta h_c} \right)$$

$$= A^* e^{-\frac{1}{2}\beta z} \left(\frac{z}{h_c} + \frac{1}{kh_c + \frac{1}{2}\beta h_c} \right) \quad (3.32)$$

Für $kh < kh_c$ ist $\phi_{\min}^2 < 0$, also $\phi_{\min} = i\theta$ und $\varepsilon = i\eta$.

$$\curvearrowright \phi_{\min} \cot \phi_{\min} = i\theta \cot i\theta = \theta \cot \theta$$

$$\phi_{\min} \cot \varepsilon = i\theta \cot i\eta = \theta \cot \eta \quad (3.33)$$

$$\delta v_z = A e^{-\frac{1}{2}\beta z} \sin i\left(\frac{\theta}{h} z - \eta\right) = A^* e^{-\frac{1}{2}\beta z} \sin \left(\frac{\theta}{h} z - \eta\right) \quad (3.34)$$

Der gewöhnliche Sinus (3.19) geht also für $kh = kh_c$ in eine Gerade (3.32) und für $kh < kh_c$ in den hyperbolischen Sinus (3.34) über. $kh = kh_c$ definiert sozusagen den Übergang von der diffusen zur scharfen Grenzschicht. Im Grenzfall sehr großer kh wird $2\phi \cot \phi \approx -kh + \phi^2/kh$, und die Lösungen sind $\phi_n \approx n\pi$. Wir kommen damit auf den Fall 3.1.1 zurück, d.h. es ist egal, ob die Grenzschicht oben und unten an feste Wände stößt oder nicht, Lösungen und Anwachsraten werden davon nicht wesentlich beeinflusst. Eine graphische Veranschaulichung und Lösung der transzendenten Gleichung (3.23) für ϕ erhält man, indem man die verschiedenen Zweige der $2\phi \cot \phi$ -Kurve mit der Parabel $f(\phi)$ zum Schnitt bringt (Fig. 3). Für $kh \gg kh_c$ verläuft die Parabel sehr weit unten und sehr flach ($\phi_n \approx n\pi$), für $kh \searrow kh_c$ rutscht sie immer weiter nach oben, und für $kh = kh_c$ wird der erste Schnittpunkt $\phi_1 = 0$, um schließlich für $kh < kh_c$ imaginär zu werden, weil dann die Parabel keinen reellen Schnittpunkt mehr mit dem ersten Zweig der $2\phi \cot \phi$ -Kurve hat. Diese Betrachtungen stellen eine erhebliche Modifizierung und auch Erweiterung der ursprünglichen Überlegungen von Lord Rayleigh dar. Die nach den hydrodynamischen Gleichungen an einer diffusen Grenzschicht zu erwartenden Anwachsraten und Eigenfunktionen sind damit hergeleitet und das Problem bei Abwesenheit von dynamischer Stabilisierung vollständig abgehandelt.

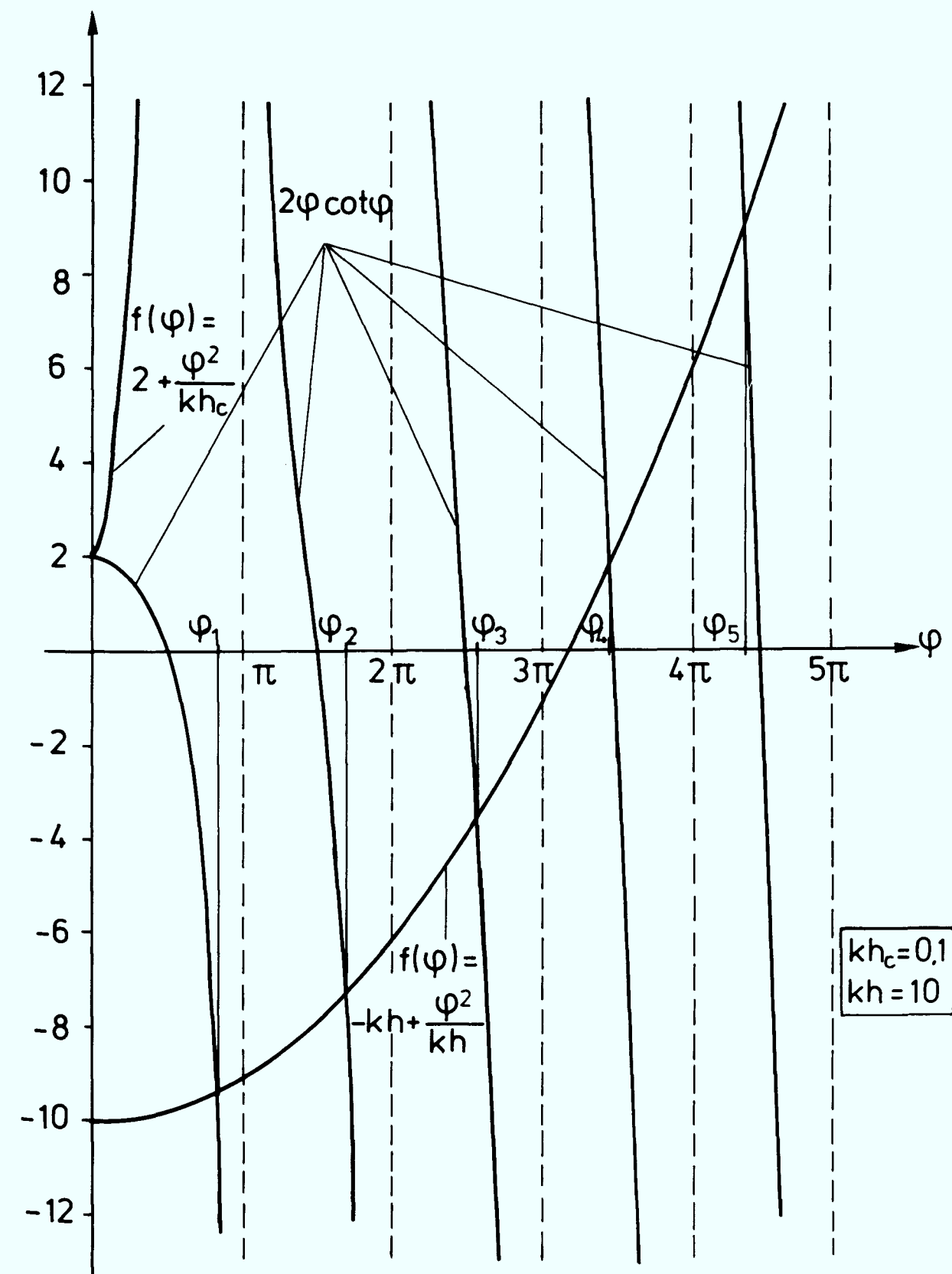


Fig. 3: Graphische Lösung der transzendenten Gleichung für die vertikalen Eigenmoden

3.2 Dynamische Stabilisierung

3.2.1 Zurückführung auf Mathieugleichung

Das betrachtete System soll jetzt erzwungenen Schwingungen parallel zur Richtung der Schwerebeschleunigung g unterworfen werden. Die Stabilität dieses dynamischen Systems wurde von Wesson /3/ theoretisch untersucht. Wir geben im folgenden eine daran anknüpfende Darstellung der wesentlichen Gedanken und Aussagen. Sei

$$g(t) = g + b(t) = g + b_0 \cos \omega t \quad (3.35)$$

die Beschleunigung im mit der Flüssigkeit mitbewegten Bezugssystem. Dann muß in der Bewegungsgleichung g durch $g(t)$ ersetzt werden, so daß ein Fourieransatz $e^{i\Omega t}$ nicht mehr möglich ist. Man muß bei der Elimination der Störgrößen aus (3.1) bis (3.3) die Ableitung $\partial/\partial t$ stehen lassen und erhält zunächst die folgenden Gleichungen für $\delta\rho$ und δv_z :

$$\frac{k^2 g(t)}{\rho} \delta\rho - \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial}{\partial z} \right) - k^2 \right] \frac{\partial}{\partial t} \delta v_z = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\rho + \rho' \delta v_z = 0 \quad (3.37)$$

Hieraus können wir δv_z leichter eliminieren als $\delta\rho$:

$$\frac{\rho'}{\rho} k^2 g(t) \delta\rho + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial}{\partial z} \right) - k^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta\rho = 0 \quad (3.38)$$

Mit dem Separationsansatz

$$\delta\rho(z, t) = \delta\rho(z) \cdot r(t) \quad (3.39)$$

folgt weiter

$$\frac{\rho'}{\rho} \frac{\left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \left(\rho \frac{d}{dz} \right) - k^2 \right] \delta\rho(z)}{\delta\rho(z)} = -k^2 g(t) \frac{r(t)}{\frac{d^2}{dt^2} r(t)} \quad (3.40)$$

Die linke Seite hängt nur von z ab, die rechte nur von t . Beide sind also gleich derselben Separationskonstanten. Wir nennen sie $\frac{k^2 g}{\Omega^2}$ und erhalten:

$$\left[\frac{d}{dz} \left(\rho \frac{d}{dz} \right) - k^2 \rho \right] \frac{\delta \rho(z)}{\rho} = \frac{k^2 g \rho'}{\Omega^2} \frac{\delta \rho(z)}{\rho} \quad (3.41)$$

$$-g(t) r(t) = \frac{g}{\Omega^2} \frac{d^2}{dt^2} r(t) \quad (3.42)$$

Gleichung (3.41) hat dieselbe Gestalt wie (3.4) und führt auf ein Randwertproblem in z , (3.42) auf ein Anfangswertproblem in t . Wegen

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \rho(z, t) + \rho' \delta v_z(z, t) = \delta \rho(z) \frac{d}{dt} r(t) + \rho' \delta v_z(z) w(t) = 0$$

oder

$$\frac{\delta \rho(z)}{\rho} = - \frac{\rho'}{\rho} \frac{w(t)}{\frac{d}{dt} r(t)} \delta v_z(z) \quad (3.43)$$

ist $\frac{\delta \rho(z)}{\rho}$ zu jedem beliebigen festen Zeitpunkt t bezüglich z proportional zu $\delta v_z(z)$. Die Randbedingungen (3.18) für δv_z übertragen sich also auf $\delta \rho/\rho$. Dieses Randwertproblem haben wir aber schon gelöst. Die Separationskonstante ist der Eigenwertparameter und hat für $\frac{\rho'}{\rho} = \beta$ die Form

$$\frac{g}{\Omega^2} = -1 = -\frac{1}{\beta} \frac{\frac{1}{4} \beta^2 h^2 + \phi_n^2 + k_m^2 h^2}{k_m^2 h^2}, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.44)$$

und die Differentialgleichung für $r(t)$ wird

$$1 \frac{d^2}{dt^2} r(t) = g(t) r(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} r(t) - \frac{g + b_0 \cos \omega t}{1} r(t) = 0 \quad (3.45)$$

Sei $\omega t = 2\tau$, $r(t) = y(\tau)$. Dann folgt

$$\frac{d^2}{d\tau^2} y(\tau) - \frac{4}{\omega^2} \frac{g + b_0 \cos 2\tau}{1} y(\tau) = 0 \quad (3.46)$$

oder $\ddot{y}(\tau) + (a - 2q \cos 2\tau) y(\tau) = 0$ (3.47)

mit $a = -\frac{4}{\omega^2} \frac{g}{l} = \frac{4\Omega^2}{\omega^2} = -\frac{4\sigma^2}{\omega^2}$
 $q = \frac{2}{\omega^2} \frac{b_0}{l} = \frac{b_0}{2g} \frac{4}{\omega^2} \frac{g}{l} = -\frac{b_0}{2g} a$

Die Differentialgleichung für $y(\tau)$ ist die Mathieusche Differentialgleichung. Wir suchen Lösungen dieser Differentialgleichung im 4. Quadranten der (q, a) -Ebene, und zwar längs Geraden

$$a = -cq = -\frac{2g}{b_0} q, \quad q > 0 \quad (3.48)$$

$\sqrt{-a}$ beschreibt die Anwachsrate im statischen System ($b_0 = 0 = q$), gemessen in Einheiten der aufgezwungenen Schwingungsfrequenz im dynamischen System. Der Proportionalitätsfaktor c zwischen a und q ist durch das Verhältnis der Schwerebeschleunigung zur Amplitude der aufgezwungenen Beschleunigung gegeben. Formal-mathematisch ist das vorliegende Problem identisch mit dem Problem der dynamischen Stabilisierung eines invertierten Pendels der Länge l durch vertikales Schütteln des Unterstützungspunkts. Der einzige, aber entscheidende Unterschied besteht darin, daß in der Flüssigkeit die Länge l unendlich viele diskrete Werte annehmen kann, entsprechend den Modenzahlkombinationen m, n .

3.2.2 Stabilitätsbedingung und Anwachsrate

Eine vollständige Stabilisierung wäre nur dann möglich, wenn alle zulässigen l gleichzeitig stabilisiert werden könnten. Das läßt sich jedoch grundsätzlich nicht erreichen, wie das Mathieusche Stabilitätsdiagramm (Fig. 4) deutlich zeigt. Stabilität gibt es nur für Parametersätze (q, a) im schraffierten Gebiet zwischen der Kurve $a_0(q)$, die in der Nähe des Ursprungs Parabelgestalt hat, und der Kurve $b_1(q)$, welche die q -Achse bei q_s schneidet. Der Kurvenparameter der Geraden $a = -cq$ ist die reziproke Pendellänge l , und der Endpunkt wird durch die kleinstmögliche Länge $l_{\min}$ gekennzeichnet. Gemäß (3.44) ist

$$l_{\min} = \lim_{k_m \rightarrow \infty} l = \frac{1}{\beta} \quad (3.49)$$

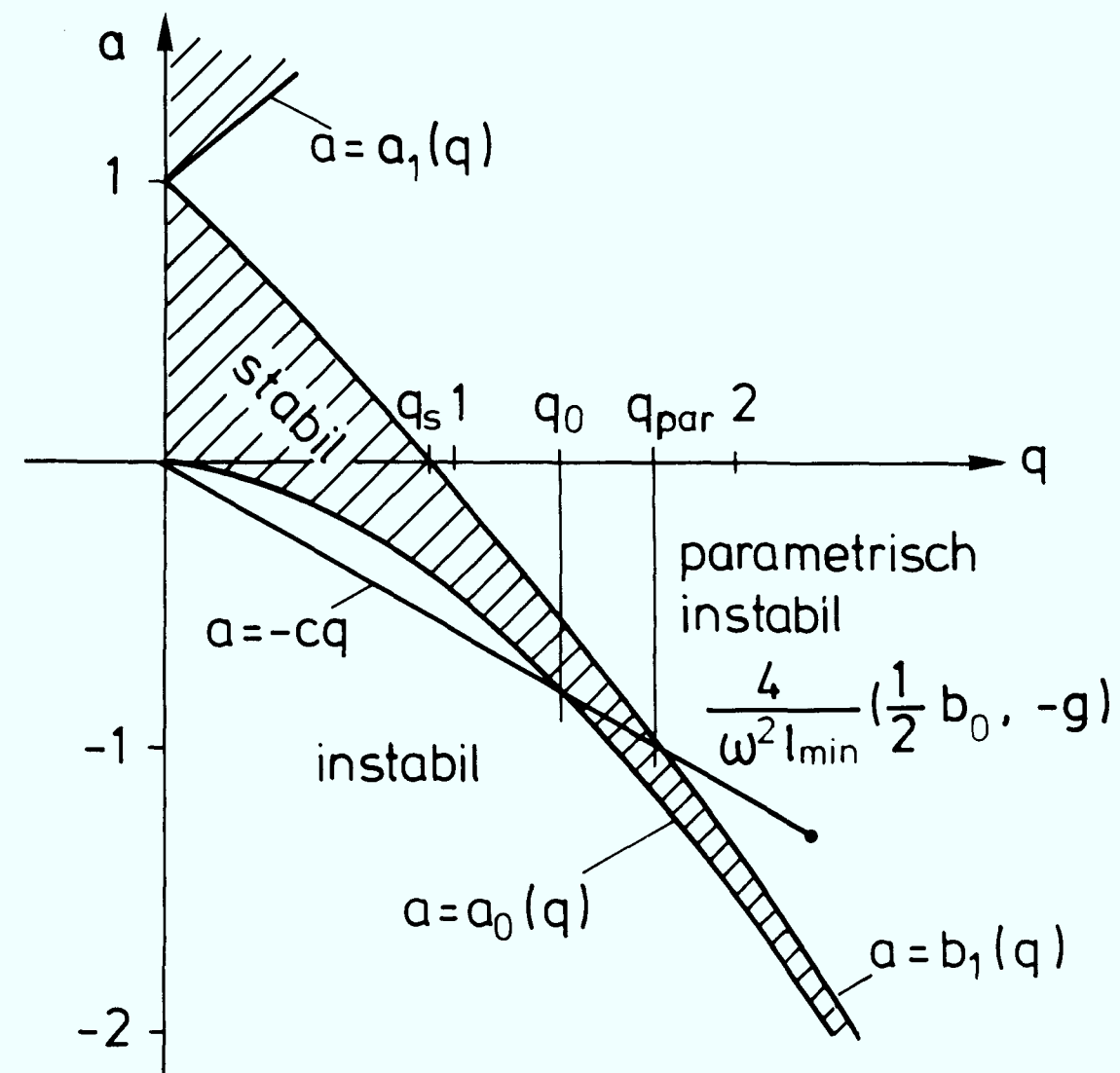
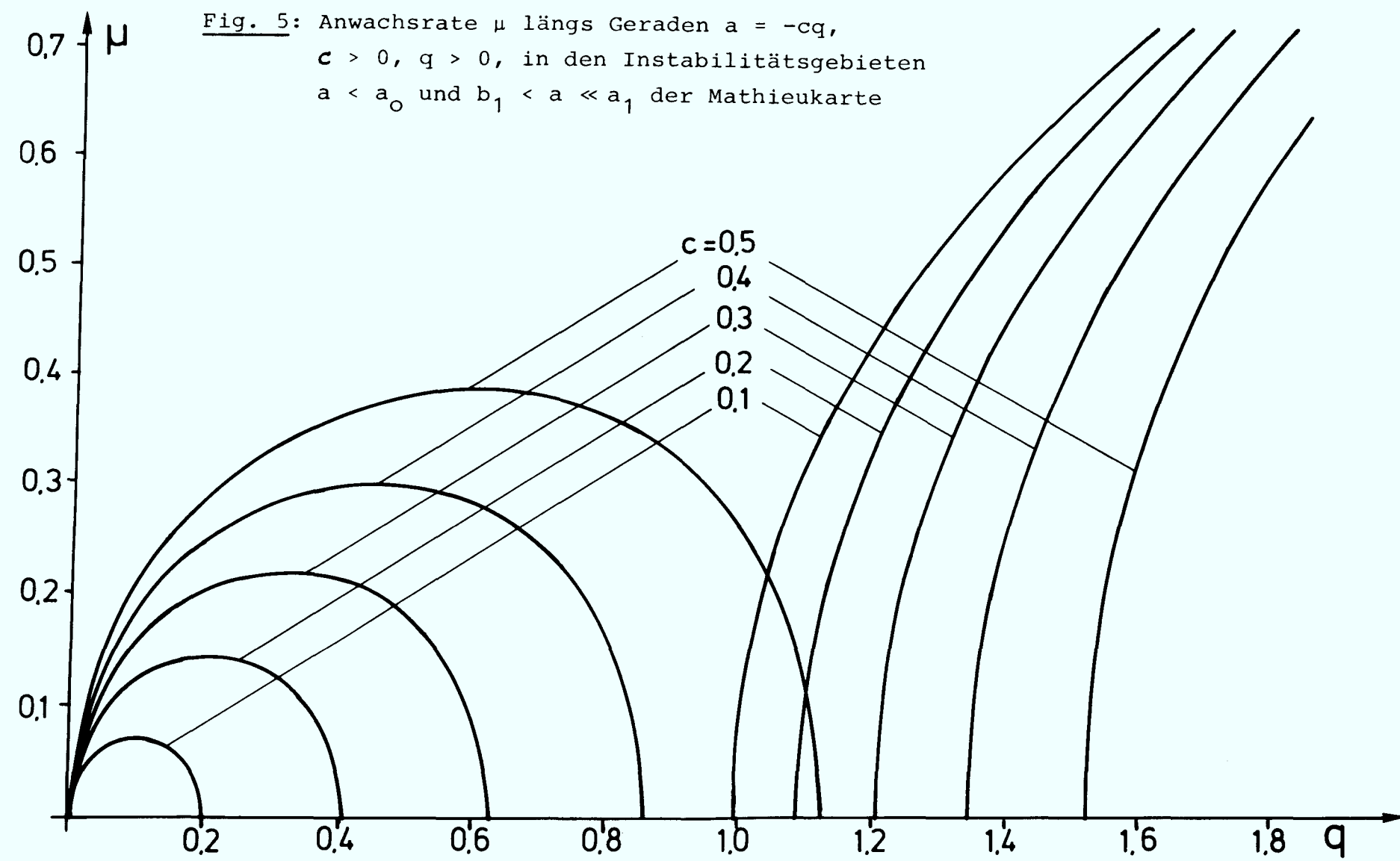


Fig. 4: Mathieusche Stabilitätskarte

Durch Wahl einer entsprechend hohen Schüttelfrequenz ω kann man zwar den Endpunkt der Geraden immer in das Stabilitätsgebiet verschieben und damit das Gebiet der parametrischen Instabilitäten oberhalb von $b_1(q)$ vermeiden, das Instabilitätsgebiet unterhalb von $a_0(q)$ wird jedoch von der Geraden $-cq$ immer durchschnitten, wie klein c auch immer sein mag. Große vertikale Modenzahlen n , d.h. kurze vertikale Wellenlängen $\lambda_{\perp}$, bleiben daher auch bei dynamischer Stabilisierung immer instabil. Die instabilen Lösungen der Mathieugleichung haben die Gestalt $e^{\mu\tau} f(\tau)$, wobei $f(\tau)$



durch eine Reihenentwicklung nach sin- und cos-Funktionen verschiedener Periodenlänge dargestellt werden kann. Im Anhang werden Näherungsformeln zur Berechnung der Anwachsrate $\mu(a, q) > 0$ in den beiden interessierenden Instabilitätsgebieten angegeben. Die Funktionen $\mu(-cq, q)$ sind für $c = 0.1, 0.2, \dots, 0.5$ berechnet worden und die Ergebnisse in Fig. 5 dargestellt. Der Instabilitätsbereich bei kleinen q , ebenso wie die maximale Anwachsrate in diesem Bereich werden mit abnehmendem c proportional kleiner. Beim Eintreten in das Gebiet der parametrischen Instabilitäten jedoch genügt ein geringfügiges Überschreiten der Stabilitätsgrenze $b_1(q)$, um sofort sehr hohe Anwachsrate μ zu erzeugen. Wir werden nur die kleinen Anwachsrate im ersten Instabilitätsbereich benötigen und entnehmen dem Anhang die folgenden Näherungsformeln für kleine q und kleine c :

$$a_0(q) \approx -\frac{1}{2}q^2, \quad \mu^2(a, q) \approx -a - \frac{1}{2}q^2 \quad (3.50)$$

Für den Schnittpunkt q_0 von $a = -cq$ mit $a = a_0(q)$ folgt hieraus

$$-cq_0 = -\frac{1}{2}q_0^2, \quad q_0 = 2c \quad (3.51)$$

und für die maximale Anwachsrate $\mu_{\max}$ ergibt sich

$$\mu^2(-cq, q) = cq - \frac{1}{2}q^2, \quad \frac{d}{dq} \mu^2 = c - q = 0 \quad (3.52)$$

$$q_{\max} = c, \quad \mu_{\max}^2 = c^2 - \frac{1}{2}c^2, \quad \mu_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{2}c \quad (3.53)$$

Außerdem gilt für $b_1(q)$ in der Nachbarschaft von q_s

$$b_1(q) = \left. \frac{db_1}{dq} \right|_{q_s} \cdot (q - q_s) = -1.191 (q - 0.908) \quad (3.54)$$

Für den Schnittpunkt q_{par} von $a = -cq$ mit $a = b_1(q)$ folgt hieraus

$$cq_{\text{par}} = 1.191 (q_{\text{par}} - 0.908), \quad q_{\text{par}} = \frac{0.908}{1 - \frac{c}{1.191}} \quad (3.55)$$

und die Stabilitätsbedingung schreibt sich in Kurzform als

$$q_0 < q < q_{\text{par}}$$

Eine kleine Umformung bringt die erste der beiden Ungleichungen in die von Wolf /2/ angegebene Gestalt:

$$2 \frac{4g^2}{b_o^2} = 2c^2 = c q_o < cq = -a = \frac{4\sigma^2}{\omega^2} \quad (3.57)$$

$$\frac{b_o^2}{g^2} > \frac{2\omega^2}{\sigma^2}$$

Wir haben damit eine handliche Stabilitätstheorie für alle dynamisch stabilisierten diffusen Grenzschichten mit exponentiellem Dichteanstieg.

4. Folgerungen aus der Theorie zur Deutung des Experiments

Wir haben von den folgenden experimentellen Parametern auszugehen:

Dichte der leichteren Flüssigkeit	$\rho_1 = 1.0 \text{ g/cm}^3$
Dichte der schwereren Flüssigkeit	$\rho_2 = 1.8 \text{ g/cm}^3$
Durchmesser des zylindrischen Gefäßes	$D = 0.78 \text{ cm}$
Länge des zylindrischen Gefäßes	$\Lambda = 6.0 \text{ cm}$
Schüttelfrequenz	$\omega = 2\pi \cdot 10^2/\text{sec}$
Amplitude der Schüttelbeschleunigung	$b_o = 60 \text{ g}$

Aus der Schüttelbeschleunigung können wir sofort die Neigung der Geraden $a = -cq$ in der Mathieukarte berechnen. Es ist

$$c = \frac{2g}{b_o} = \frac{1}{30} \quad (4.1)$$

Die verschiedenen das Stabilitätsverhalten kennzeichnenden q -Werte sind daher

$$q_{\max} = c = \frac{1}{30}, \quad q_o = 2c = \frac{1}{15}, \quad q_{\text{par}} = \frac{0.908}{1 - \frac{c}{1.191}} = 0.934 \quad (4.2)$$

und die maximale Anwachsrate im ersten Instabilitätsbereich ist

$$\mu_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{2}c = \frac{\sqrt{2}}{60} = 0.02357 \quad (4.3)$$

Wegen $e^{\mu\tau} = e^{\mu\omega t/2} = e^{t/T}$ ergibt sich die minimale Anwachszeit, in der eine Störamplitude auf das e -fache anwächst, zu

$$T_{\min} = \frac{2}{\mu_{\max} \omega} = \frac{2 \cdot 60}{\sqrt{2} \cdot 2\pi} 10^{-2} \text{ sec} = 0.135 \text{ sec} \quad (4.4)$$

Wenn die Grenzschrift anfangs ganz scharf ist, können kurzwellige Moden mit großem k nach (1.1) beliebig schnell wachsen. Dadurch werden die angrenzenden Flüssigkeitsschichten verschiedener Dichte durchmischt, und der Dichtesprung geht über in ein stetiges Dichteprofil zunächst mit lokal, sehr steilem Dichteanstieg. Die relative Dichteänderung $\beta = \frac{\rho}{\rho}$ bestimmt das kleinstmögliche $l_{\min} = \frac{1}{\beta}$ und damit den Endpunkt der Geraden $a = -cq$ in Fig. 4. Solange dieser Endpunkt noch im Bereich der parametrischen Instabilitäten liegt, können Störungen mit hinreichend großem k oder hinreichend kurzer Wellenlänge zwar nicht mehr beliebig schnell wachsen, aber doch mit Anwachsrate μ , die nach Fig. 5 etwa 10 bis 20 mal größer sind als das nach (4.3) berechnete $\mu_{\max}$, sofern q nur geringfügig größer ist als die Stabilitätsgrenze q_{par} . Die entsprechenden Anwachszeiten T liegen in der Größenordnung von einer Hundertstelsekunde, d.h. der Dichtegradient muß sich fast augenblicklich weiter abflachen, und zwar solange, bis der Endpunkt der Geraden $a = -cq$ genau auf der Stabilitätsgrenze $b_1(q)$ angekommen ist. Die parametrischen Instabilitäten äußern sich also darin, daß sie eine obere Schranke β_{par} für den zulässigen Dichtegradienten festlegen, ansonsten treten sie im Experiment nicht weiter sichtbar in Erscheinung. Wir finden

$$\begin{aligned} q &= \frac{2}{\omega^2} \frac{b_0}{l_{\min}} = \frac{2}{\omega^2} b_0 \beta_{\text{par}} = q_{\text{par}} \\ \beta_{\text{par}} &= \frac{\omega^2 q_{\text{par}}}{2b_0} = \frac{4\pi^2 \cdot 10^4 \cdot 0.934}{2 \cdot 60 \cdot 981} \text{ cm}^{-1} = \frac{\pi^2}{3} \frac{0.934}{0.981} \text{ cm}^{-1} \\ \beta_{\text{par}} &= 3.13 \text{ cm}^{-1} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Im folgenden sind Dichteprofile mit $\beta \leq \beta_{\text{par}}$ näher zu untersuchen.

4.1 Phase I: Ausbildung von Treppenstufen

Aus β_{par} folgt eine minimale Grenzschichtdicke h_{par} . Es ist

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = e^{\beta h}, \quad h_{\text{par}} = \frac{1}{\beta_{\text{par}}} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$h_{\text{par}} = \frac{\ln 1.8}{3.13} = 0.188 \text{ cm} \approx 2 \text{ mm} \quad (4.6)$$

Bei der Behandlung der Rayleigh-Taylor-Instabilitäten war die Größe kh von großer Bedeutung. kh kann im Experiment nicht kleiner werden als $k_{\text{min}} h_{\text{par}}$, und es ist

$$k_{\text{min}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{max}}} = \frac{3.68}{D} = \frac{3.68}{0.78} = 4.72 \text{ cm}^{-1} \quad (4.7)$$

$$\curvearrowright k_{\text{min}} h_{\text{par}} = 0.887 \quad (4.8)$$

Demgegenüber ist das durch (3.28) definierte

$$kh_c \approx \frac{1}{8} \beta^2 h^2 = \frac{1}{8} \left(\ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 = 0.0432 \quad (4.9)$$

Wir sind also immer im Grenzfall $kh \gg kh_c$ und berechnen die ϕ_n aus der Gleichung

$$2\phi \cot \phi = f(\phi) = -kh + \frac{\phi^2}{kh} \quad (4.10)$$

Für $kh = k_{\text{min}} h_{\text{par}} \approx 1$ kann man sich eine entsprechende $f(\phi)$ -Kurve in Fig.3 eingezeichnet denken und sieht, daß $\phi_1 < \pi/2$ und

$$\phi_n \approx (n-1)\pi \quad \text{für} \quad n \geq 2 \quad (4.11)$$

ist. Iteration liefert für die erste Lösung der transzendenten Gleichung

$$\phi_1 \approx 1.241 \quad (4.12)$$

Wir betrachten jetzt die äquivalente Pendellänge

$$1 \sim \frac{1}{\beta_{\text{par}}} \frac{\phi^2 + k_{\text{min}}^2 h_{\text{par}}^2}{k_{\text{min}}^2 h_{\text{par}}^2} \quad (4.13)$$

und berechnen q - und μ -Werte für die verschiedenen vertikalen Modenzahlen n .

$$q = \frac{2b_o}{\omega^2 l} = \frac{2b_o \beta_{\text{par}}}{\omega^2} \frac{k_{\text{min}}^2 h_{\text{par}}^2}{\phi^2 + k_{\text{min}}^2 h_{\text{par}}^2} = q_{\text{par}} \frac{k_{\text{min}}^2 h_{\text{par}}^2}{\phi^2 + k_{\text{min}}^2 h_{\text{par}}^2}$$

$$q = 0.934 \frac{0.887^2}{\phi^2 + 0.887^2}$$

$$q_n = \frac{0.735}{\phi_n^2 + 0.787} \quad (4.14)$$

$$\mu^2 = cq - \frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{30}q - \frac{1}{2}q^2$$

$$\mu_n = \sqrt{\frac{1}{2}q_n \left(\frac{1}{15} - q_n \right)} \quad (4.15)$$

Tabelle 1

n	ϕ_n	q_n	μ_n
1	1.241	0.3158	0.0
2	π	0.0690	0.0
0	-	$\frac{1}{15} = 0.0667$	0.0
max	-	$\frac{1}{30} = 0.0333$	0.0236
3	2π	0.0183	0.0210
4	3π	0.0082	0.0155

Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 zusammengestellt, in die auch die Indizes $n=0$ und $n=\text{max}$ mit eingefügt sind. Die Moden $n=1$ und $n=2$ werden also dynamisch stabilisiert, nicht aber alle höheren Moden. Die größte Anwachsrate hat die Mode $n=3$. Wenn ihre Amplitude groß genug geworden ist, verändert ihr Geschwindigkeitsfeld das Dichteprofil. Dadurch gehen aber die Voraussetzungen für ein weiteres Anwachsen dieser Mode verloren, sie

muß schließlich durch nichtlineare Effekte gesättigt werden und erlöschen. Wir können aus dem linearen Geschwindigkeitsfeld auf den nichtlinearen Endzustand schließen. Nach (3.19) ist

$$\delta v_z = A e^{-\frac{1}{2}\beta_{\text{par}} z} \sin\left(\frac{\phi_3}{h_{\text{par}}} z - \varepsilon_3\right) \quad (4.16)$$

mit $\phi_3 \approx 2\pi$ und ε_3 nach (3.22) Lösung der folgenden Gleichung:

$$\phi_3 \cot \varepsilon_3 = -k_{\text{min}} h_{\text{par}} - \frac{1}{2} \beta_{\text{par}} h_{\text{par}}$$

$$2\pi \cot \varepsilon_3 = -0.887 - \frac{1}{2} \ln 1.8$$

$$\text{tg } \varepsilon_3 = -\frac{2\pi}{1.181} = -5.32$$

$$\varepsilon_3 = -1.385 \approx -\frac{\pi}{2} \quad (4.17)$$

Näherungsweise ist also

$$\begin{aligned} \delta v_z &\approx A e^{-\frac{1}{2}\beta_{\text{par}} z} \sin\left(2\pi \frac{z}{h_{\text{par}}} + \frac{\pi}{2}\right) \\ \delta v_z &= A e^{-\frac{1}{2}\beta_{\text{par}} z} \cos 2\pi \frac{z}{h_{\text{par}}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Der Cosinus entsteht dadurch, daß die beiden Randflächen der Grenzschicht wegen des Fehlens fester Wände frei schwingen können. Der Vorfaktor $e^{-1/2 \beta_{\text{par}} z}$ weicht nur wenig von 1 ab und ist unerheblich. Für $z > h_{\text{par}}$ klingt δv_z wie $e^{-k_{\text{min}} z} = e^{-0.877 z/h_{\text{par}}}$ ab, d.h. die Amplitude fällt bei Fortschreiten in z-Richtung um $\Delta_z \approx h_{\text{par}}$ auf ungefähr $\frac{1}{e}$ ab. Entsprechendes gilt für $z < 0$. Es werden also oberhalb und unterhalb der Grenzschicht Flüssigkeitsschichten etwa von der Dicke der Grenzschicht selbst mitbewegt. Schematisch ergibt sich damit das Bild von Fig. 6a. Man beachte dabei, daß die z-Richtung etwa im Verhältnis 2:1 gedehnt ist, $h_{\text{par}} \approx 2$ mm gegenüber $D \approx 8$ mm. Das Geschwindigkeitsfeld zeigt drei verkettete Wirbel, und jeder Wirbel hat das Bestreben, in seinem Einzugsgebiet das Dichteprofil einzuebnen. Daher müssen drei Zwischenplateaus entstehen, und der nichtlineare Endzustand muß etwa wie in Fig. 6b

die Form eines abgetreppten Dichteprofils mit vier Stufen haben. Die Steilheit der vier einzelnen Stufenanstiege bleibt dabei wegen der parametrischen Instabilitäten auf β_{par} beschränkt. Die Stufenhöhe und auch die Steilheit der untersten und der obersten Stufe sollten etwas kleiner sein als die der beiden mittleren Stufen, was dazu führen kann, daß eine Randstufe (im Experiment die unterste) sofort ausgeglättet wird und erst gar nicht sichtbar auftritt. Der Zeitbedarf $t_2 - t_1$ für die Ausbildung der Treppenstruktur sollte ein Vielfaches von T_{min} nach (4.4) betragen, also sicherlich einige Sekunden. Alle diese Ergebnisse sind in guter Übereinstimmung mit dem Experiment.

4.2 Phase II: Periodische Schichtenablösung

Die vier Treppenstufen können nach ihrer Ausbildung ein Eigenleben aufnehmen, und wir müssen jetzt die zeitliche Entwicklung einer solchen Stufe verfolgen. Ab sofort sei

$$\tilde{\rho}_1 = 1.4 \text{ g cm}^{-3}, \quad \tilde{\rho}_2 = 1.6 \text{ g cm}^{-3} \quad (4.19)$$

Das Symbol Schlange soll sich immer auf die charakteristischen Größen beziehen, die den Diffusionsprozess an der einzelnen Stufe kennzeichnen. Für die minimale Grenzschichtdicke folgt jetzt

$$\tilde{h}_{\text{par}} = \frac{1}{\beta_{\text{par}}} \ln \frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}_1} = \frac{1}{3.13} \ln \frac{1.6}{1.4} = 0.0427 \text{ cm} \approx \frac{1}{2} \text{ mm} \quad (4.20)$$

und weiter

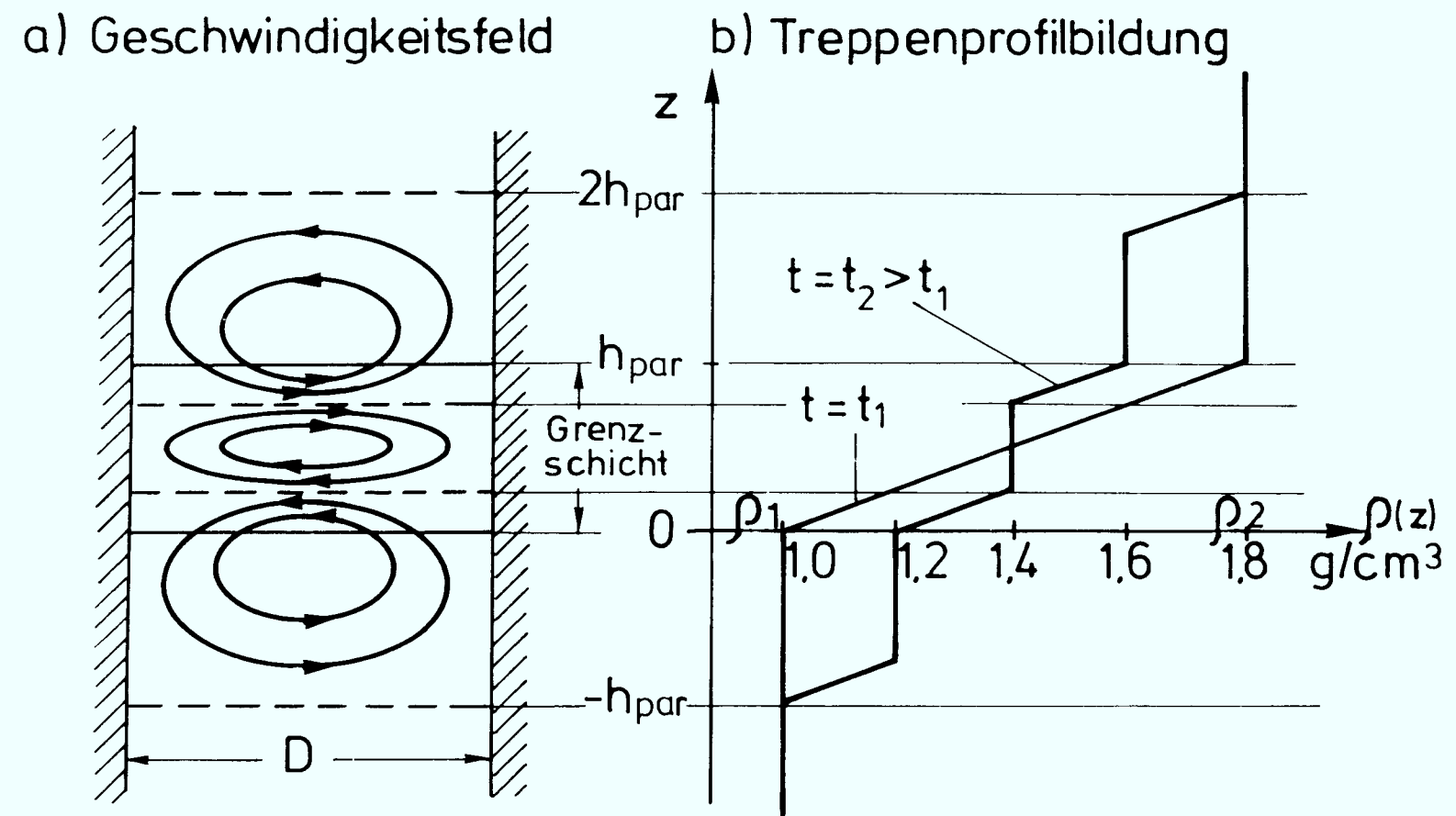
$$k_{\text{min}} \tilde{h}_{\text{par}} = 4.72 \cdot 0.0427 = 0.202 \quad (4.21)$$

$$k \tilde{h}_c \approx \frac{1}{8} \beta^2 \tilde{h}^2 = \frac{1}{8} \left(\ln \frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}_1} \right)^2 = 0.00223 \ll k_{\text{min}} \tilde{h}_{\text{par}} \quad (4.22)$$

Für $kh = k_{\text{min}} \tilde{h}_{\text{par}}$ hat Gleichung (4.10) die Lösungen

$$\phi_1 \approx 0.625, \quad \phi_n \approx (n-1)\pi \text{ für } n \geq 2 \quad (4.23)$$

Fig. 6: Phase I, Ausbildung von Treppenstufen



Wir betrachten jetzt neben den vertikalen Modenzahlen n auch noch die horizontalen Modenzahlen m und rechnen der Einfachheit halber wie bei rechteckigem Gefäßquerschnitt mit $k = m \cdot k_{\min}$. Der Fehler für $m > 1$ spielt für unsere Zwecke keine Rolle. Es ist dann

$$q_{nm} = q_{\text{par}} \frac{m^2 k_{\min}^2 h_{\text{par}}^2}{\phi_{nm}^2 + m^2 k_{\min}^2 h_{\text{par}}^2}$$

$$q_{nm} = \frac{0.0381}{\phi_{nm}^2 + 0.0408} \frac{m^2}{m^2}, \quad \mu_{nm} = \sqrt{\frac{1}{2} q_{nm} \left(\frac{1}{15} - q_{nm} \right)} \quad (4.24)$$

Die folgenden Zahlenwerte sind genau genug:

$$\phi_{11} = 0.63, \phi_{12} = 0.87, \phi_{13} = 1.05, \phi_{14} = 1.19$$

$$\phi_{nm} = (n-1)\pi \quad \text{für } n \geq 2, \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (4.25)$$

Aus (4.24) und (4.25) ergibt sich für die Zahlenpaare q_{nm}/μ_{nm} die

Tabelle 2

n	q_{n1}	μ_{n1}	q_{n2}	μ_{n2}	q_{n3}	μ_{n3}	q_{n4}	μ_{n4}
1	0.087	0.0	0.166	0.0	0.233	0.0	0.295	0.0
2	0.0038	0.0110	0.0152	0.0198	0.0335	0.0236	0.0579	0.0159
3	0.0010	0.0056	0.0038	0.0110	0.0086	0.0158	0.0152	0.0198
4	0.0004	0.0038	0.0017	0.0075	0.0038	0.0110	0.0068	0.0143

Moden mit $n=1$ werden also immer dynamisch stabilisiert. Grundmode ist damit die Mode $n=2, m=1$. Deren Anwachsrate ist aber klein im Vergleich zu den Anwachsrate von zahlreichen höheren Moden. Daher kann sie zunächst nicht in Erscheinung treten. Die miteinander wetteifernden und sich gegenseitig behindernden höheren Moden führen indessen zu einer langsamen turbulenten Diffusion und damit zu einer allmählichen Vergrößerung der Grenz-

schichtdicke $\tilde{h}$ ebenso wie zu einer Verkleinerung des relativen Dichteanstiegs $\tilde{\beta}$. Das Produkt $\tilde{\beta}(t)\tilde{h}(t) = \beta_{\text{par}}\tilde{h}_{\text{par}}$ bleibt dabei konstant. Für kleine m und $n \geq 2$ ist aber

$$q_{nm} \approx q_{\text{par}} \frac{m^2 k_{\text{min}}^2 \tilde{h}_{\text{par}}^2}{(n-1)^2 \pi^2} = \frac{2b_0}{\omega^2} \beta_{\text{par}} \tilde{h}_{\text{par}}^2 \frac{m^2 k_{\text{min}}^2}{(n-1)^2 \pi^2}$$

also

$$q_{nm}(t) \approx \frac{2b_0}{\omega^2} \frac{\beta_{\text{par}} \tilde{h}_{\text{par}}^2 m^2 k_{\text{min}}^2}{(n-1)^2 \pi^2} \tilde{h}(t) \quad (4.26)$$

In dem Maße wie $\tilde{h}$ größer wird, verschieben sich die q_{nm} und damit auch die zugehörigen μ_{nm} . Während in der Tabelle 2, zu einer Zeit $t=t_0$, die Mode $n=2$, $m=3$ die größte Anwachsrate hat, muß diese Mode mit wachsendem $\tilde{h}$ zunächst von der Mode $n=2$, $m=2$ abgelöst werden, bis schließlich die Grundmode $n=2$, $m=1$ die Oberhand gewinnt. Hierzu ist es nicht erforderlich, daß $q_{21} = q_{\text{max}}$ wird, das Maximum der $\mu(q)$ -Kurve ist so flach, daß bereits q_{21} -Werte ausreichen, welche einer Vergrößerung der Schichtdicke von $\tilde{h}_{\text{par}}$ auf etwa h_{par} entsprechen, d.h. von etwa 1/2 mm auf die ursprünglichen 2 mm. Wir nennen diesen Zeitpunkt $t=t_1$ und haben

$$q_{21}(t_1) = q_{21}(t_0) \frac{h_{\text{par}}}{\tilde{h}_{\text{par}}} = 0.00384 \frac{0.188}{0.0427} = 0.0169$$

$$\mu_{21}(t_1) = 0.0205 \quad (4.27)$$

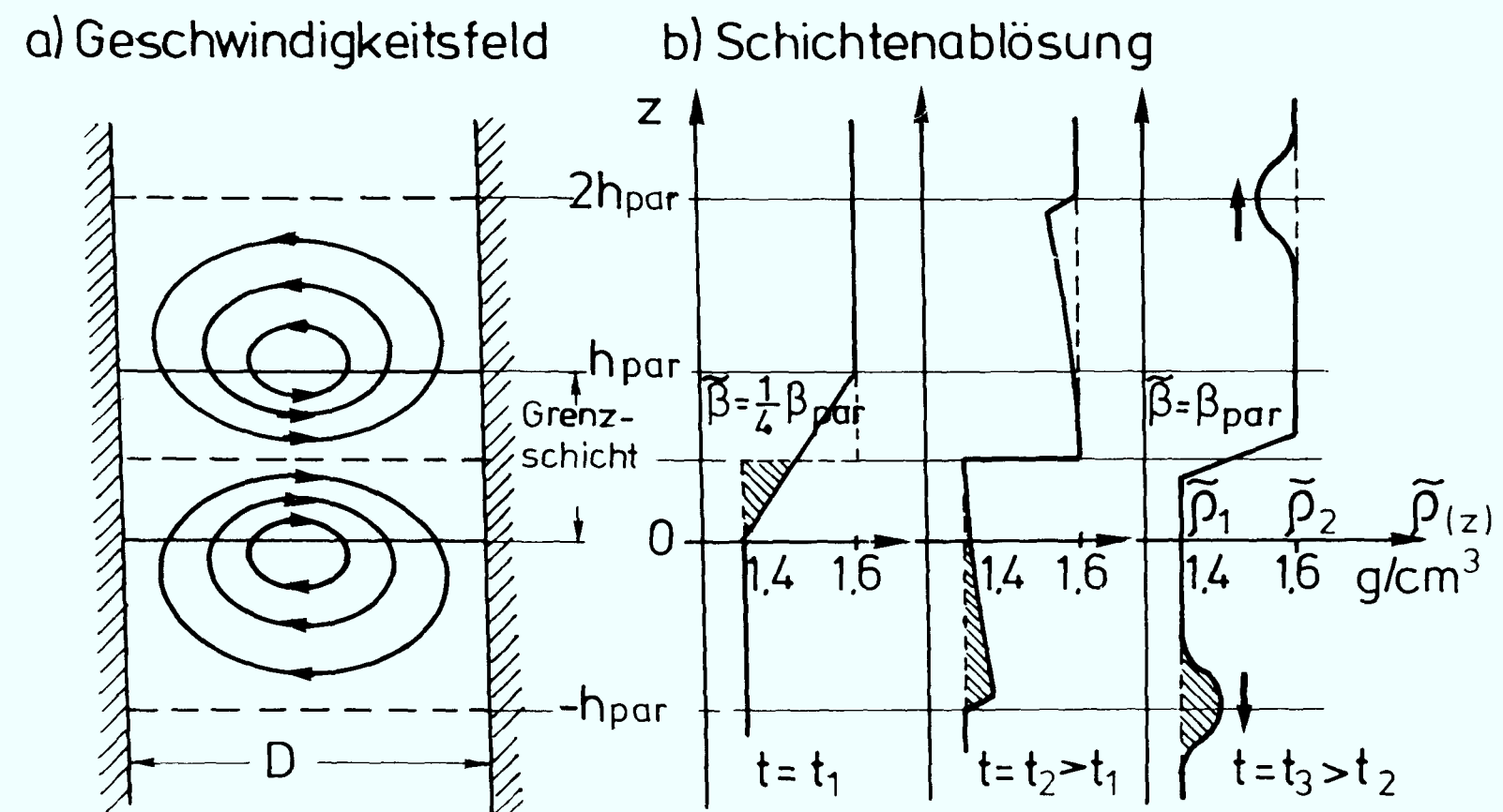
Dagegen ist $q_{2m}(t_1) \geq q_0$ für $m \geq 2$, d.h. diese Moden sind dann dynamisch stabilisiert. Weiter ist

$$\delta v_z(z, t_1) = A e^{-\frac{1}{2}\tilde{\beta}(t_1)z} \sin\left(\frac{\phi_{21}}{h_{\text{par}}} z - \epsilon_{21}\right) \quad (4.28)$$

mit $\phi_{21} \approx \pi$ und ϵ_{21} Lösung der folgenden Gleichung:

$$\begin{aligned} \phi_{21} \cot \epsilon_{21} &= -k_{\text{min}} h_{\text{par}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1.6}{1.4} \\ &= -0.887 - 0.007 = -0.954 \\ \text{tg } \epsilon_{21} &= -\frac{\pi}{0.954} = -3.29 \\ \epsilon_{21} &= -1.276 \approx -\pi/2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Fig. 7: Phase II, Periodische Schichtenablösung



Mit ausreichender Genauigkeit gilt also ähnlich zu (4.18)

$$\delta v_z \approx A e^{-\frac{1}{2}\tilde{\beta}z} \cos \pi \frac{z}{h_{\text{par}}} \quad (4.30)$$

Schematisch ergibt sich damit das Bild von Fig. 7a. Das Geschwindigkeitsfeld zeigt diesmal zwei Wirbel. Der untere transportiert leichtere Flüssigkeit in die Grenzschicht hinein, der obere schwerere Flüssigkeit. Dadurch stellt sich die Stufe wieder auf, wobei der Anstieg durch β_{par} beschränkt bleibt. Gleichzeitig verliert die vom oberen Wirbel nach oben beförderte leichtere Flüssigkeit den Kontakt zur Grenzschicht, ebenso die vom unteren Wirbel nach unten beförderte schwerere Flüssigkeit. Die Stufe hat ja diesmal einen viel flacheren Anstieg, zum Zeitpunkt t_1 ist $\tilde{\beta} \approx \frac{1}{4}\beta_{\text{par}}$. Daher kommt es innerhalb der Wirbel nicht nur zu einem Dichteaussgleich, sondern sogar zu einer Dichteumkehr. Zum Zeitpunkt t_2 löst sich eine Schicht relativ hoher Dichte nach unten ab und eine Schicht relativ niedriger Dichte nach oben. Diese können jetzt der Schwerkraft bzw. dem Auftrieb folgend weiterwandern als selbständige Verdichtungs- und Verdünnungsblätter. Zum Zeitpunkt t_3 beginnt schon wieder eine erneute langsame Abflachung des Dichteprofiles durch die von den höheren Moden herrührende Diffusion. $t_3 - t_0$ ($\gg t_3 - t_1$) definiert die Periodenlänge. Der makroskopisch sichtbare Effekt des Abschälens dünner Schichten wird jedesmal durch die großräumige Konvektion der Grundmode hervorgerufen. Die an den Nachbarstufen ankommenden Verdichtungs- und Verdünnungsblätter führen dort zu einer Aufsteilung der Dichteprofile. Außerdem vergrößert sich der Abstand der Stufen voneinander. Zwei einander entgegenkommende Verdichtungs- und Verdünnungsblätter vernichten sich gegenseitig. In diesem Fall ändert sich der Abstand der Nachbarstufen nicht.

4.3 Vergleich der anomalen Diffusion mit den Sägezahnschwingungen in Tokamaks

Wir haben das experimentelle Erscheinungsbild der anomalen Diffusion theoretisch gedeutet. In Phase I bildet sich sehr schnell eine Treppenstruktur heraus, bestehend aus vier Einzelstufen, und in Phase II erfolgt an jeder Einzelstufe eine periodische Schichtenablösung. Nicht berechnen können wir mit der vorliegenden linearen Theorie die Periodenlänge $t_3 - t_0 \approx t_1 - t_0$ des Vorgangs, also die Schnelligkeit der Abflachung des Dichteprofiles und die daraus folgende Häufigkeit der Schichtenablösung. Dennoch mag die folgende Überlegung nützlich sein. Der Massentransport ΔM pro Periode ist etwa durch die schraffierte Fläche in Fig. 7b gegeben, d.h.

$$\Delta M = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\rho}_2 - \tilde{\rho}_1}{2} \frac{h_{\text{par}}}{2} \approx \frac{1}{2} \frac{0.1 \text{ g}}{\text{cm}^3} 0.1 \text{ cm} = 0.005 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2} \quad (4.31)$$

Bei einer Gefäßlänge von $\Lambda = 6 \text{ cm}$ dauert es etwa 60 Perioden, bis sich die Dichten $\tilde{\rho}_2$ und $\tilde{\rho}_1$ aneinander angeglichen haben. Tatsächlich muß der Zusammenbruch einer Stufe schon viel früher erfolgen. Man überlegt sich mit Hilfe von (4.26) leicht, daß bei einem Dichteunterschied von $\tilde{\rho}_2 - \tilde{\rho}_1 \approx 0.1 \text{ g/cm}^3$ die Schichtenablösung bei einer Grenzschichtdicke von $\tilde{h} \approx 2 h_{\text{par}}$ erfolgen muß, das sind ungefähr 4 mm. Zusammen mit den oben und unten mitbewegten Flüssigkeitsschichten wird dann fast 1 cm Flüssigkeitssäule von der (2, 1)-Mode erfaßt. Viel mehr Platz steht beispielsweise der obersten von 4 Treppenstufen überhaupt nicht zur Verfügung, so daß es bei dem schon sehr geringen Dichteunterschied leicht zu einer völligen Durchmischung und damit einem Verschwinden der Stufe kommen kann. Ausgehend von einer experimentellen Stufenzerfallszeit von etwa 6 min und bei Annahme von 30 Perioden bis zum Stufenzerfall ergibt sich eine Periodenlänge von etwa 12 sec, so daß bei drei experimentell sichtbaren Stufen etwa alle 2 sec irgendwo ein Verdichtungsblatt nach unten oder ein Verdünnungsblatt nach oben wandern muß, das an der jeweils benachbarten Stufe angehalten wird. Diese Abschätzung deckt sich recht gut mit den experimentellen Beobachtungen.

Eine gewisse Analogie zwischen der periodischen Schichtenablösung in unserem hydrodynamischen Modellversuch und den Sägezahnschwingungen bei inneren Disruptionen in Tokamaks ist unverkennbar. Das Dichteprofil und die Grenzschrift im Modell entsprechen dem q-Profil und der singulären Fläche $q=1$ bei $r=r_s$ im Tokamak (q = Sicherheitsfaktor). Das Profil muß stabil sein gegen sehr schnelle Moden; im Modell muß der Dichteanstieg hinreichend flach sein, um parametrische Resonanzen mit Anwachszeiten τ_p von einigen msec zu unterdrücken, im Tokamak muß q am Plasmarand $r=a$ groß gegen 1 sein, um schnelle Kinkmoden zu verhindern (poloidale Alfvénzeit $\tau_A^{-1} = \frac{B_\theta}{a\sqrt{\rho\mu_0}}$). Das Profil ist einer langsamen zeitlichen Veränderung unterworfen, im Modell durch die von den kurzwelligen Instabilitäten der höheren Moden herrührende Diffusion, im Tokamak durch die Ohmsche Aufheizung des Plasmakerns bis zur Erzeugung von q-Werten kleiner als 1 für $r < r_s$. Es kommt darauf an, daß eine Mode besonders kleiner Modenzahl, die Grundmode, an die Geometrie besonders gut angepaßt ist, im Modell $m=1/n=2$, bei der Tearingmode $m=1/n=1$. Sobald die Bedingungen für ein kräftiges Anwachsen dieser Mode gegeben sind, treten nichtlineare Erscheinungen auf, und es kommt ganz plötzlich zu makroskopisch bedeutsamen Umwälzungen, im Modell mit Anwachszeiten T von einigen Zehntelsekunden, bei der Tearingmode nach Waddell et al. /4/ mit

$$\gamma^{-1} = \left(a \frac{dq}{dr} \right)_{r=r_s}^{-\frac{2}{3}} s \tau_R = \left(a \frac{dq}{dr} \right)_{r=r_s}^{-\frac{2}{3}} s^{\frac{1}{3}} \tau_A$$

Dabei ist $s = \tau_R/\tau_A$ und $\tau_R = a^2/\eta$ die magnetische Diffusions- oder Skinzeit. Ein typischer Wert ist $s \approx 10^6$. Wegen der mit den Gefäßdimensionen vergleichbaren Wellenlänge spielt im Modell die Viskosität und im Tokamak die Gyroviskosität keine nennenswerte Rolle für den dynamischen Prozess. Im Modell beobachten wir das Entstehen von Konvektionszellen und das Abrupfen von Flüssigkeitsschichten mit Wiederherstellung des steilen Dichteprofiles, im Tokamak die Bildung von magnetischen Inseln und das Ausstoßen des heißen Plasmakerns mit Abflachung des zentralen Temperatur- und Stromdichteprofiles, so daß wieder $q \approx 1$ für

$r < r_g$ ist. Das Ergebnis ist ein Transport durch anomale Diffusion, im Modell der Masse, im Tokamak der Energie. Charakteristisch ist die periodische Abfolge von längeren ruhigen Wachstumsphasen mit plötzlichen Abbrüchen, eben die Sägezähne. Auch im Tokamak ist es schwierig, theoretische Vorhersagen für die genaue Periodenlänge zu machen. Die Dauer des ganzen periodischen Vorgangs oder die Zerfallszeit der Konfiguration hängt ausschließlich davon ab, wie lange der Vorrat reicht, im Modell die der Gefäßlänge Λ proportionale Masse, im Tokamak die V_s des Ohmschen Heiztransformators. Die Anwachszeiten für die zur anomalen Diffusion führenden Instabilitäten liegen in ihrer Größenordnung zwischen den Anwachszeiten der als unterdrückt vorausgesetzten sehr schnellen Moden und den normalen Diffusionszeiten. Im Modell würde die normale Diffusionszeit τ_D vermutlich nach Minuten oder gar nach Stunden zählen. Überschlägig ist also

$$\tau_A : \gamma^{-1} : \tau_R \approx \tau_P : T : \tau_D \approx 1 : 10^2 : 10^6$$

Das hydrodynamische Modell bietet sozusagen die Möglichkeit, Sägezahnschwingungen mit bloßem Auge in Zeitlupe zu verfolgen.

Quellenverzeichnis

- /1/ Lord J.W. Rayleigh, "... Equilibrium of an Incompressible Heavy Fluid of Variable Density", Proc. London Math. Soc. XIV, p. 170 (1883)
- /2/ G.H. Wolf, "Dynamic Stabilization of Hydrodynamic Interchange Instabilities - a Model for Plasma Physics", AIP Conference Proceedings No. 1, p. 293, New York (1970)
- /3/ J. Wesson, "Dynamic Stabilization and the Rayleigh-Taylor Instability", Phys. Fluids 13, p. 761 (1970)
- /4/ J. Meixner und F.W. Schäfer, "Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen", Springer Berlin-Göttingen-Heidelberg (1954)
- /5/ N.W. McLachlan, "Theory and Application of Mathieu Functions", Clarendon Press Oxford (1947)
- /6/ B.V. Waddell et al., "Non-Linear Growth of the m=1 Tearing Mode", Nucl. Fusion 16.3-Letters, p. 528 (1976)

Anhang: Näherungsformeln für die auftretenden Stabilitäts-
grenzen und Anwachsraten der Mathieukarte

Die im folgenden zusammengestellten Formeln sind den Büchern von Meixner-Schärfke /4/ und McLachlan /5/ entnommen und für unsere Zwecke aufbereitet. Die Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (a - 2q \cos 2z) y = 0 \quad (\text{A.1})$$

sind von der Gestalt

$$me_\nu(z) = e^{i\nu z} \sum_{\rho=-\infty}^{+\infty} C_{2\rho}^\nu e^{i2\rho z} \quad (\text{A.2})$$

Wenn der charakteristische Exponent ν nicht ganz ist, kann als zweite linear unabhängige Lösung $me_{-\nu}(z) = me_\nu(-z)$ genommen werden. Reelles ν bedeutet Stabilität, komplexes ν Instabilität. Die Menge aller Wertetripel (q, a, ν) , also die kartierte (q, a) -Ebene, heißt Mathieukarte. In der Mathieukarte gibt es Kurven marginaler Stabilität mit (für $q > 0$)

$$a_0(q) < b_1(q) < a_1(q) < b_2(q) < a_2(q) < \dots \quad (\text{A.3})$$

durch welche die Ebene in stabile und instabile Gebiete zerlegt wird. Dabei ist $a_m(0) = b_m(0) = m^2$. Für irgendein $q > 0$ haben $\cos \pi \nu$ und der charakteristische Exponent ν selbst Werte gemäß der Übersicht in

Tabelle 3

a	$-\infty \nearrow a_0$	$a_0 \nearrow b_1$	$b_1 \nearrow a_1$	$a_1 \nearrow b_2$	$b_2 \nearrow a_2$	$a_2 \nearrow b_3$	...
$\cos \pi \nu$	$+\infty \searrow 1$	$1 \searrow -1$	< -1	$-1 \nearrow 1$	> 1	$1 \searrow -1$	...
ν	$i\mu$	$0 \nearrow 1$	$1 + i\mu$	$1 \nearrow 2$	$2 + i\mu$	$2 \nearrow 3$	...
$me_\nu(z)$	instab	stab	instab	stab	instab	stab	...

μ ist die Anwachsrate der instabilen Lösung. Im Inneren der stabilen Gebiete sowie im Inneren des ersten instabilen Gebiets $a < a_0$ haben die ersten Reihenglieder der Fourierentwicklung (A.2) von $me_\nu(z)$ die Gestalt ($c_0^\nu = 1$ gesetzt)

$$me_\nu(z) = e^{i\nu z} \left[1 - \frac{q}{4} \left(\frac{e^{2iz}}{\nu+1} - \frac{e^{-2iz}}{\nu-1} \right) + \frac{q^2}{32} \left(\frac{e^{4iz}}{(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{e^{-4iz}}{(\nu-1)(\nu-2)} \right) + \sigma(q^3) \right] \quad (A.5)$$

Wir interessieren uns nur für die ersten beiden Instabilitätsgebiete $a < a_0$ und $b_1 < a < a_1$ (Fig. 4). Für die Grenzkurven gelten die Reihenentwicklungen

$$a_0(q) = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{7}{128}q^4 - \frac{29}{2304}q^6 + \frac{68687}{18874368}q^8 + \dots \quad (A.6)$$

konvergent für $q < 1.46876852 \dots$

$$a_1(q) = a_{-1}(-q) = b_1(-q) =$$

$$= 1 + q - \frac{1}{8}q^2 - \frac{1}{64}q^3 - \frac{1}{1536}q^4 + \frac{11}{36864}q^5 + \frac{49}{589824}q^6 + \frac{55}{9437184}q^7 - \frac{83}{35389440}q^8 + \dots \quad (A.7)$$

konvergent mindestens für $q < 2$

Die Nullstelle q_s von $b_1(q)$ findet man durch Iteration gemäß $q_s^{(n)} = q_s^{(n-1)} - b_1(q_s^{(n-1)})/b_1'(q_s^{(n-1)})$, die Ableitung $b_1'(q)$ durch gliedweise Differentiation nach q . Es ergeben sich die Werte von Formel (3.54). Im ersten Instabilitätsgebiet interessieren wir uns nur für Parametersätze mit $\mu^2 < -a < q < 1$. Dort werden die Lösungen $me_\nu(z)$, wie (A.5) zeigt, vor allem durch den Vorfaktor $e^{-i\nu z} = e^{\mu z}$ bestimmt, das ist ein rein exponentieller Anstieg (oder Abfall für die zweite linear unabhängige Lösung). Dieser Exponentialfunktion sind nur eine kleine Welligkeit mit der Periode π sowie höhere Harmonische überlagert. Entsprechend ist das Anwachsen der Wirbelgeschwindigkeit in den Konvektionszellen der diffusen Grenzschicht nahezu rein exponentiell. Zur Berechnung der Anwachsrate μ im ersten Instabilitätsgebiet stehen zwei Näherungsformeln zur Verfügung. Nach /5/ ist $\mu = \mu_1$ mit

$$\begin{aligned}\mu_1^2 = -v_1^2 = -a + \frac{a-1}{2(a-1)^2 - q^2} q^2 + \frac{5a+7}{32(a-1)^3(a-4)} q^4 \\ + \frac{9a^2+58a+29}{64(a-1)^5(a-4)(a-9)} q^6 + \dots\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

Die ersten beiden Glieder sind in Formel (3.50) verwertet worden. Nach /4/ ist $\mu = \mu_2$ mit

$$\cos \pi \mu_2 = \cos i\pi \mu_2 = \cos \pi v_2 = R_2(a, q) \quad \text{oder}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\pi} \operatorname{Ar} \cos R_2 = \frac{1}{\pi} \ln (R_2 + \sqrt{R_2^2 - 1}) \quad \text{mit} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned}R_2(a, q) = \cos \pi \sqrt{a} + q^2 \frac{\pi}{4\sqrt{a(a-1)}} \sin \pi \sqrt{a} \\ + q^4 \left\{ f(a) \frac{\pi}{4\sqrt{a(a-1)}} \sin \pi \sqrt{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4\sqrt{a(a-1)}} \right)^2 \cos \pi \sqrt{a} \right\} \\ + q^6 \left\{ \left[g(a) - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{4\sqrt{a(a-1)}} \right)^2 \right] \frac{\pi}{4\sqrt{a(a-1)}} \sin \pi \sqrt{a} \right. \\ \left. - f(a) \left(\frac{\pi}{4\sqrt{a(a-1)}} \right)^2 \cos \pi \sqrt{a} \right\} + \dots\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

$$f(a) = \frac{15a^2 - 35a + 8}{16(a-1)^2(a-4)a} \quad (\text{A.11})$$

$$g(a) = \frac{105a^5 - 1155a^4 + 3815a^3 - 4705a^2 + 1652a - 288}{64(a-1)^4(a-4)^2(a-9)a^2}$$

Wegen $a < 0$ ist also

$$\begin{aligned}R_2(a, q) = \cos \pi \sqrt{|a|} + q^2 \frac{\pi}{4\sqrt{|a|}(a-1)} \sin \pi \sqrt{|a|} \\ + q^4 \left\{ f(a) \frac{\pi}{4\sqrt{|a|}(a-1)} \sin \pi \sqrt{|a|} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4\sqrt{|a|}(a-1)} \right)^2 \cos \pi \sqrt{|a|} \right. \\ + q^6 \left\{ \left[g(a) + \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{4\sqrt{|a|}(a-1)} \right)^2 \right] \frac{\pi}{4\sqrt{|a|}(a-1)} \sin \pi \sqrt{|a|} \right. \\ \left. + f(a) \left(\frac{\pi}{4\sqrt{|a|}(a-1)} \right)^2 \cos \pi \sqrt{|a|} \right\} + \dots\end{aligned}\quad (\text{A.12})$$

Im Gebiet der parametrischen Instabilitäten $b_1 < a < a_1$ und in den höheren Instabilitätsgebieten hängen die Koeffizienten $c_{2\rho}^v$ der Reihendarstellung (A.2) nicht nur von q und v ab, sondern auch von a , dann es gibt dort zu jedem q genau zwei verschiedene Werte a mit dem gleichen v . Für uns genügt es festzustellen, daß die Mathieufunktionen eine erheblich stärker ausgeprägte Welligkeit als im ersten Instabilitätsgebiet besitzen, so daß Schwingungsinstabilität oder Überstabilität auftritt (parametrische Resonanz!). Zur Berechnung der Anwachsrate μ können wir drei einfache Näherungsformeln herleiten. Nach /5/ ist in $b_m < a < a_m$

$$4\mu^2 m^2 + (a - a_m + \mu^2)(a - b_m + \mu^2) = 0 \quad \text{oder}$$

$$\mu = \sqrt{-\left[2m^2 + a - \frac{a_m + b_m}{2}\right] + \sqrt{\left[\right]^2 + (a_m - a)(a - b_m)}}$$

In $b_1 < a < a_1$ ist also $\mu = \mu_3$ mit

$$\mu_3 = \sqrt{-\left[2 + a - \frac{a_1 + b_1}{2}\right] + \sqrt{\left[\right]^2 + (a_1 - a)(a - b_1)}} \quad (\text{A.13})$$

Diese Formel ist brauchbar höchstens für $q < 2.138 \dots$. Für größere q wechselt nämlich die Klammer $\left[\right]$ ihr Vorzeichen, und μ_3 verschwindet nicht mehr wie vorgeschrieben für $a = b_1$. Nach /4/ gilt für v in der Nachbarschaft von v_0 die schnell konvergente Produktformel

$$\frac{\cos \pi v - \cos \pi v_0}{\cos \pi \sqrt{a} - \cos \pi v_0} = \prod_{\rho=-\infty}^{+\infty} \frac{a - a_{v_0+2\rho}(q)}{a - (v_0 + 2\rho)^2} \quad (\text{A.14})$$

Wir wählen $v_0 = 1$ und $v = 1 + i\mu$. Dann ist

$$\cos \pi v_0 = \cos \pi = -1$$

$$\cos \pi v = \cos (\pi + i\pi\mu) = -\cos i\pi\mu = -\cos \pi\mu \quad \text{also}$$

$$\frac{-\cos \pi\mu + 1}{\cos \pi \sqrt{a} + 1} = \frac{a - a_1(q)}{a - 1} \frac{a - a_1(q)}{a - 1} (1+r) \quad (\text{A.15})$$

$$\cos \pi\mu = 1 + (1 + \cos \pi \sqrt{a}) \frac{(a_1 - a)(a - b_1)}{(a - 1)^2} (1+r)$$

Zur Abschätzung von r betrachten wir die nächsten beiden Faktoren des unendlichen Produkts:

$$\frac{a-a_3}{a-9} \frac{a-b_3}{a-9} = \left(1 - \frac{a_3-9}{a-9}\right) \left(1 - \frac{b_3-9}{a-9}\right) \\ \approx \left(1 - \frac{q^2}{16(a-9)}\right)^2 \approx 1 + \frac{q^2}{8(9-a)}$$

$$\curvearrowright \quad r \lesssim \frac{1}{72} q^2 \quad \text{für } a < 0 \quad (\text{A.16})$$

Für $q \approx 1$ ist also der Fehler r höchstens 1 bis 2 %. Mit dieser Genauigkeit ist $\mu = \mu_4$ mit

$$\mu_4 = \frac{1}{\pi} \text{Ar Cos } R_4 = \frac{1}{\pi} \ln (R_4 + \sqrt{R_4^2 - 1}) \quad \text{mit} \quad (\text{A.17})$$

$$R_4(a, q) = 1 + (1 + \cos \pi \sqrt{|a|}) \frac{(a_1(q) - a)(a - b_1(q))}{(a-1)^2} \quad (\text{A.18})$$

Zur Herleitung der dritten Näherungsformel benutzen wir zwei Reihenentwicklungen, die eine Hilfsgröße $\sigma = \sigma(a, q)$ enthalten mit $0 > \sigma > -\pi/2$ für $b_1 < a < a_1$. Nach /5/ gilt

$$a = 1 - q \cos 2\sigma + \frac{1}{4} q^2 (-1 + \frac{1}{2} \cos 4\sigma) \quad (\text{A.19})$$

$$+ \frac{1}{64} q^3 \cos 2\sigma + \frac{1}{16} q^4 \left(\frac{1}{3} - \frac{11}{32} \cos 4\sigma\right) + \mathcal{O}(q^5)$$

$$\mu = -\frac{1}{2} q \sin 2\sigma + \frac{3}{128} q^3 \sin 2\sigma - \frac{3}{1024} q^4 \sin 4\sigma + \mathcal{O}(q^5) \quad (\text{A.20})$$

Wir schreiben in (A.19) $\cos 4\sigma = 2 \cos^2 2\sigma - 1$ und erhalten eine quadratische Gleichung für $\cos 2\sigma$:

$$\left(\frac{q}{2} \cos 2\sigma\right)^2 - 2B \left(\frac{q}{2} \cos 2\sigma\right) + A = 0 \quad \text{mit} \quad (\text{A.21})$$

$$B = \frac{1 - \frac{1}{64} q^2}{1 - \frac{11}{64} q^2}, \quad A = \frac{1 - \frac{3}{8} q^2 + \frac{65}{1536} q^4 - a}{1 - \frac{11}{64} q^2} \quad (\text{A.22})$$

Unter Berücksichtigung der zulässigen Werte für σ folgt

$$\frac{q}{2} \cos 2\sigma = B - \sqrt{B^2 - A} \quad (\text{A.23})$$

In (A.20) schreiben wir $\sin 4\sigma = 2 \sqrt{1 - \cos^2 2\sigma} \cos 2\sigma$ und erhalten

$$\mu = \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{q}{2} \cos 2\sigma\right)^2} \left[1 - \frac{3q^2}{64} \left(1 - \frac{q}{4} \cos 2\sigma\right) \right] \quad (\text{A.24})$$

Zusammen mit (A.22) und (A.23) ist dies eine Funktion $\mu = \mu_5(a, q)$. In Tabelle 4 sind die Anwachsrate $\mu_i(a, q)$, $i = 1$ bis 5 längs der Geraden $a = -0.1 q$ aufgelistet. Die Übereinstimmung zwischen μ_3 und μ_4 im ersten Instabilitätsbereich ist ersichtlich ausgezeichnet, die Übereinstimmung zwischen μ_3 , μ_4 und μ_5 im zweiten Instabilitätsbereich ist weniger gut, die drei Werte wachsen aber mit q etwa proportional zueinander, und es ist stets $\mu_3 > \mu_4 > \mu_5$, wobei μ_3 und μ_5 am Rande der Fehlerschranken von μ_4 liegen. Wir wählen daher als beste Näherungsformeln $\mu_2(a, q)$ und $\mu_4(a, q)$, welche die gemeinsame Eigenschaft haben, μ auf dem Wege über $\cos \pi v$ zu ermitteln. Mit diesen Formeln sind die Anwachsrate μ längs $a = -cq$ für $c = 0.1, 0.2, \dots 0.5$ in Fig. 5 berechnet worden.

Tabelle 4: Anwachsraten μ_i längs Geraden $a = -0.1 q$ Vergleich zwischen verschiedenen Näherungsformeln ($i = 1$ bis 5)Das Intervall $0.2 \leq q \leq 1.0$ ist der Stabilitätsbereich $\mu = 0$.

q	μ_1	μ_2		
0.01	0.30822850-01	0.30822850-01		
0.02	0.42430740-01	0.42430740-01		
0.03	0.50509300-01	0.50509300-01		
0.04	0.56592330-01	0.56592330-01		
0.05	0.61278160-01	0.61278160-01		
0.06	0.64870940-01	0.64870950-01		
0.07	0.67545640-01	0.67545650-01		
0.08	0.69408460-01	0.69408480-01		
0.09	0.70523400-01	0.70523430-01		
0.10	0.70925070-01	0.70925140-01		
0.11	0.70624640-01	0.70624750-01		
0.12	0.69611670-01	0.69611850-01		
0.13	0.67852520-01	0.67852810-01		
0.14	0.65284730-01	0.65285200-01		
0.15	0.61804950-01	0.61805680-01		
0.16	0.57243800-01	0.57244930-01		
0.17	0.51309570-01	0.51311310-01		
0.18	0.43437680-01	0.43440400-01		
0.19	0.32230510-01	0.32235570-01		
0.20	0.93816590-02	0.94043700-02		
q	μ_3	μ_4	μ_5	
1.00	0.98708500-01	0.92017010-01	0.89759500-01	
1.01	0.14220590 00	0.13253580 00	0.12996340 00	
1.02	0.17511630 00	0.16317210 00	0.16023850 00	
1.03	0.20266480 00	0.18880050 00	0.18551170 00	
1.04	0.22681370 00	0.21125220 00	0.20761790 00	
1.05	0.24855590 00	0.23145420 00	0.22748260 00	
1.06	0.26847690 00	0.24995310 00	0.24565030 00	
1.07	0.28695630 00	0.26710350 00	0.26247400 00	
1.08	0.30425690 00	0.28315110 00	0.27819770 00	
1.09	0.32056970 00	0.29827430 00	0.29299870 00	
1.10	0.33603850 00	0.31260780 00	0.30701060 00	
1.11	0.35077510 00	0.32625600 00	0.32033720 00	
1.12	0.36486830 00	0.33930210 00	0.33306070 00	
1.13	0.37838980 00	0.35181340 00	0.34524810 00	
1.14	0.39139910 00	0.36384530 00	0.35695420 00	
1.15	0.40394560 00	0.37544440 00	0.36822520 00	
1.16	0.41607120 00	0.38664980 00	0.37909980 00	
1.17	0.42781160 00	0.39749520 00	0.38961130 00	
1.18	0.43919780 00	0.40800950 00	0.39978850 00	
1.19	0.45025670 00	0.41821800 00	0.40965620 00	
1.20	0.46101170 00	0.42814280 00	0.41923650 00	
1.21	0.47148370 00	0.43780350 00	0.42854860 00	
1.22	0.48169120 00	0.44721740 00	0.43760970 00	
1.23	0.49165060 00	0.45640000 00	0.44643500 00	
1.24	0.50137660 00	0.46536530 00	0.45503840 00	
1.25	0.51088270 00	0.47412570 00	0.46343230 00	