



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH GmbH

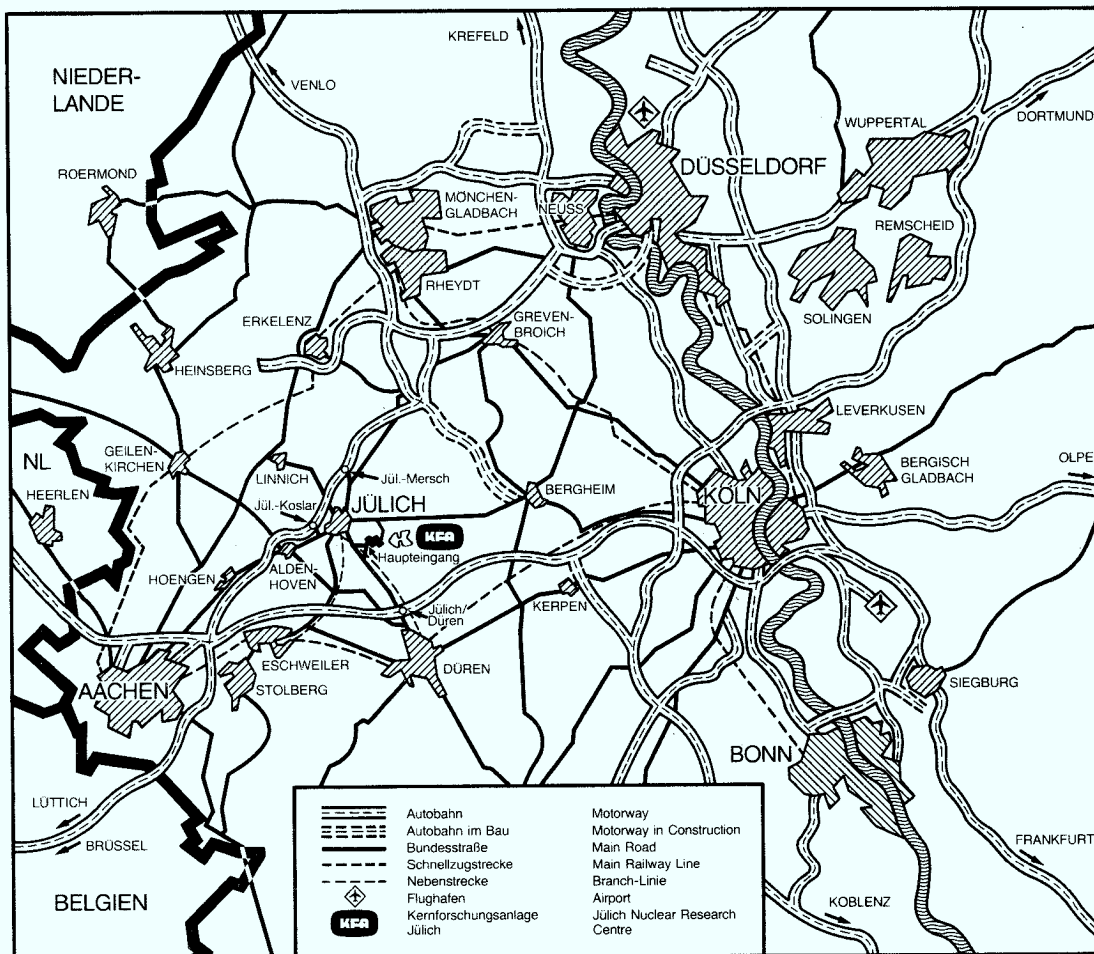
Institut für Reaktorbauelemente

**Berechnung des Wärmeüberganges
im Gebiet abgelöster Strömung hinter
einer Querschnittserweiterung**

von

E. Achenbach und D. Froning

Jül-2106
Dezember 1986
ISSN 0366-0885



Als Manuskript gedruckt

Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 2106
 Institut für Reaktorbauelemente JÜL-2106

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH
 Postfach 1913 · D-5170 Jülich (Bundesrepublik Deutschland)
 Telefon: 02461/610 · Telex: 833 556-0 kf d

Berechnung des Wärmeüberganges im Gebiet abgelöster Strömung hinter einer Querschnittserweiterung

von

E. Achenbach und D. Froning

Calculation of heat transfer in the region of separated flow downstream of a sudden expansion

by

E. Achenbach and D. Froning

Abstract

Foreced convective heat transfer from a two-dimensional channel with a sudden expansion on one side is computed. For this reason the vorticity equation and the energy equation as well must be solved. The numerical method applied is the Crank-Nicolson procedure.

The influence of the Reynolds number ($10 < Re < 2000$) and of the Prandtl-number ($0,7 < Pr < 2,5$) on the flow and heat transfer is considered. With increasing Reynolds number the length of the recirculation zone grows up levelling out to 11 ± 12 step heights for $Re > 1000$. The effect of the Prandtl-number on heat transfer can be approximated by the function $Pr^{1/3}$. The theoretical results agree well with those from other authors and from own experiments. The two methods applied to solving the equations of motion show that the implicate procedure is more appropriate for calculations at high Reynolds-numbers. Nevertheless, this advantage is associated with an increase of computing time by about 25 per cent.

Berechnung des Wärmeüberganges im Gebiet abgelöster Strömung hinter einer Querschnittserweiterung

von

E. Achenbach und D. Froning

Kurzfassung

Der konvektive Wärmeübergang in einem zweidimensionalen Kanal mit plötzlicher einseitiger Querschnittserweiterung wird berechnet. Zu diesem Zweck sind die Wirbeltransportgleichung sowie die Energiegleichung zu lösen. Als numerisches Verfahren wird das Crank-Nicolson-Verfahren angewendet.

Der Einfluß der Reynolds-Zahl ($10 < Re < 2000$) und der Prandtl-Zahl ($0,7 < Pr < 2,5$) auf die Strömung und den Wärmeübergang wird untersucht. Mit zunehmender Reynolds-Zahl wächst die Längenabmessung X_t des Rezirkulationsgebietes, wobei für $Re > 1000$ diese Größe etwa 11÷12 Stufenhöhen beträgt. Der Einfluß der Prandtl-Zahl auf den Wärmeübergang kann durch die Funktion $(Pr)^{1/3}$ angenähert werden.

Die theoretischen Resultate zeigen gute Übereinstimmung mit fremden und eigenen Experimenten. Bei den zwei untersuchten Verfahren zur Lösung der Bewegungsgleichungen zeigt sich, daß sich die implizite Methode für höhere Reynolds-Zahlen auf Kosten eines um etwa 25 % höheren Rechenzeitaufwandes eignet.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung
2. Berechnungsgrundlagen
3. Numerische Lösungsverfahren
4. Diskretisierung
 - 4.1 Schrittweiten
 - 4.2 Stromfunktion und Wirbelvektor (erstes Lösungsverfahren)
 - 4.3 Geschwindigkeit, Wandschubspannung und statischer Druck
 - 4.4 Temperaturfeld und lokaler Wärmeübergang
 - 4.5 Stromfunktion und Wirbelvektor (zweites Lösungsverfahren)
5. Durchführung der Rechnung
 - 5.1 Strömungsfeld
 - 5.2 Temperaturfeld
6. Vergleich der Rechenverfahren zu Lösung der Wirbeltransportgleichung
7. Versuchseinrichtung
8. Ergebnisse
 - 8.1 Stromfunktion, Wirbelvektor, Geschwindigkeit, Wandschubspannung, statischer Druck, Temperaturfeld und Wärmeübergang
 - 8.2 Einfluß der Prandtl-Zahl und Reynolds-Zahl
9. Vergleich mit den Ergebnissen anderer Autoren
10. Zusammenfassung
11. Nomenklatur
12. Literaturhinweise

1. Einleitung

Im Primärkühlgas eines Hochtemperaturreaktors werden Stäube mitgeführt, die durch Abrieb an dem graphitischen Inventar erzeugt werden. Es handelt sich hierbei zwar um geringe Mengen, es kann aber im Laufe der 30-jährigen Lebensdauer einer Anlage zu Ansammlungen an bevorzugten Stellen kommen. Als solche werden Gebiete abgelöster Strömung angesehen. Man versteht darunter Rückströmgebiete hinter Strömungsablösungen infolge plötzlicher Veränderung des Strömungsquerschnitts. Man beobachtet, daß hier die Wandreibungskräfte sehr klein sind und somit die Scherkräfte auf die an der Wand abgelagerten Staubpartikel nicht ausreichen, diese auszutragen /1/.

Da der Staub mit radioaktiven Spaltprodukten beladen ist, ergeben sich vom Sicherheitsaspekt zwei Fragestellungen:

- Kann es in konstruktiv bedingten Rezirkulationszonen zu einer vermehrten Staubablagerung kommen und welche Mengen kann das Gebiet enthalten?
- Kann bei einem Störfall infolge höherer Strömungsgeschwindigkeiten abgelagerter Staub aus einem Gebiet abgelöster Strömung ausgetragen werden?

Während in /1/ experimentelle Ergebnisse zur Ablagerung und zum Austrag von Stäuben aus Totwassergebieten mitgeteilt werden, soll in der vorliegenden Arbeit der erste Schritt zur Berechnung solcher Vorgänge getan werden. Als Geometrie wird, wie in /1/, die zurückspringende Stufe (Abb. 5) gewählt. Hierbei passiert das Fluid eine plötzliche Querschnittserweiterung unter Ausbildung einer Rezirkulationszone. Einige Stufenhöhen stromab der Ablöse-kante trifft die Hauptströmung wieder auf die untere Wand auf (Punkt A) und füllt somit den größeren Querschnitt gänzlich aus. Unter der Einwirkung von Reibungskräften verleichmäßigt sich das unsymmetrische Geschwindigkeitsprofil, bis es weit stromab in das der ausgebildeten Kanalströmung übergeht.

In der vorliegenden Arbeit werden die Strömung und der Wärme- bzw. Stoffübergang für den laminaren zweidimensionalen Fall berechnet. Zu diesem

Zweck sind die Bewegungsgleichungen zusammen mit der Kontinuitätsgleichung sowie die Energiegleichung (Diffusionsgleichung) zu integrieren. Als Ergebnis erhält man die Verteilungen der Stromfunktion ψ , des Wirbelvektors ω sowie der Temperatur T (bzw. Konzentration c). Bei Kenntnis dieser Größen lassen sich daraus die örtlichen Verteilungen der Geschwindigkeitskomponenten u und v , der Wandschubspannungen τ_0 , des statischen Wanddruckes p und des Wärme- bzw. Stoffübergangskoeffizienten α bzw. β bestimmen.

Bei der numerischen Lösung der Bewegungsgleichung werden zwei konkurrierende Verfahren hinsichtlich ihrer Konvergenz und Stabilität miteinander verglichen. Bei der ersten Methode wird ein implizites Verfahren zur Lösung der Wirbeltransportgleichung angewendet, während alternativ ein Verfahren mit halbversetztem Gitternetz für die Stromfunktion und den Wirbelvektor einerseits sowie für die Geschwindigkeitskomponenten andererseits zur Anwendung kommt. In beiden Fällen sind die Maschenweiten in x - und y -Richtung variabel gehalten.

Zur Bestätigung der theoretischen Ergebnisse wird der örtliche Stoffübergang an der überströmten Stufe gemessen. Der Stoffübergangskoeffizient wird mit Hilfe der Naphthalinsublimation in Luft bestimmt. Die Schmidt-Zahl dieses binären Systems beträgt $Sc = 2.5$.

2. Berechnungsgrundlagen

Ausgangspunkt für die Berechnung des Strömungs- und Temperaturfeldes sind die Navier-Stokes'schen Differential-Gleichungen, die Kontinuitätsgleichung und die Energiegleichung. Für die zweidimensionale inkompressible Strömung mit konstanten Stoffwerten lauten diese:

Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{a)}$$

(1)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad \text{b)}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Energiegleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

Bei den Gleichungen (1) bis (3) handelt es sich um vier Gleichungen für die vier Unbekannten u , v , p und T . Da die Stoffwerte als konstant und die Auftriebskräfte als vernachlässigbar klein angesehen werden sollen, sind Gleichung (1) und (3) entkoppelt; d.h. das Strömungsproblem kann unabhängig vom

Temperaturfeld zuerst gelöst werden.

Zur Lösung der Gleichungen (1) und (2) wird in Gleichung (1) der Druck eliminiert, indem Gleichung (1a) nach y , Gleichung (1b) nach x differenziert wird. Durch Subtraktion fällt der Druckterm wegen $\partial^2 p / (\partial x \partial y) = \partial^2 p / (\partial y \partial x)$ heraus. Führt man zusätzlich den Wirbelvektor ω ¹⁾, dessen Achse senkrecht auf der x - y -Ebene steht, ein,

$$\omega = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4)$$

so reduzieren sich die Gleichungen (1a) und (1b) zu:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

Für die spätere Anwendung eines zweiten numerischen Verfahrens werden in Gleichung (5) die Glieder des konvektiven Wirbeltransportes umgeformt:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\omega) + \frac{\partial}{\partial y}(v\omega) = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

Die Kontinuitätsgleichung (2) wird durch Einführen einer Stromfunktion identisch erfüllt:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

¹⁾ Die Definition des Wirbelvektors lautet:

$$\omega = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

Im zweidimensionalen Fall ist nur die k -Komponente senkrecht zur x - y -Ebene relevant.

Setzt man die Ansätze (7) in Gleichung (4) und (5) ein, so erhält man zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten ψ und ω .

$$\omega = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

Im reibungsfreien Fall ist $\omega = 0$, und man erhält aus Gleichung (8) die Gleichung für die Potentialströmung:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (10)$$

Gleichung (9) ist die sogenannte Wibeltransportgleichung. Sie stellt die Bilanz aus zeitlichem, konvektivem und diffusivem Transport von Wirbelstärke an einem Volumenelement dar.

Die Vernachlässigung des Terms $\partial^2 \omega / \partial x^2$, die bei Strömungen mit Grenzschichtcharakter häufig zulässig ist, ist im vorliegenden Fall der Überströmung einer Stufe nicht erlaubt.

Zur weiteren Behandlung werden die Gleichungen (7), (8) und (9) sowie die Energiegleichung (3) in eine dimensionslose Form gebracht. Mit

$$\begin{aligned} u &= \frac{u}{\bar{u}} ; \quad V = \frac{v}{\bar{u}} ; \quad X = \frac{x}{d} ; \quad Y = \frac{y}{d} ; \\ \tau &= \frac{t \bar{u}}{d} ; \quad \Omega = \frac{\omega d}{\bar{u}} ; \quad \psi = \frac{\psi}{\bar{u} d} ; \quad Re = \frac{2 d \bar{u}}{\nu} \\ Pe &= \frac{2 d \bar{u}}{\alpha} \equiv Re \cdot Pr ; \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad \Theta = \frac{T}{\Delta T} \end{aligned} \quad (11)$$

erhält man:

aus (9)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{2}{Re} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right] \quad (12)$$

aus (8)

$$\Omega = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] \quad (13)$$

aus (7)

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (14)$$

aus (3)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{2}{Pe} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right) \quad (15)$$

und aus (6)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (u \Omega) + \frac{\partial}{\partial y} (v \Omega) \right] + \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) \quad (16)$$

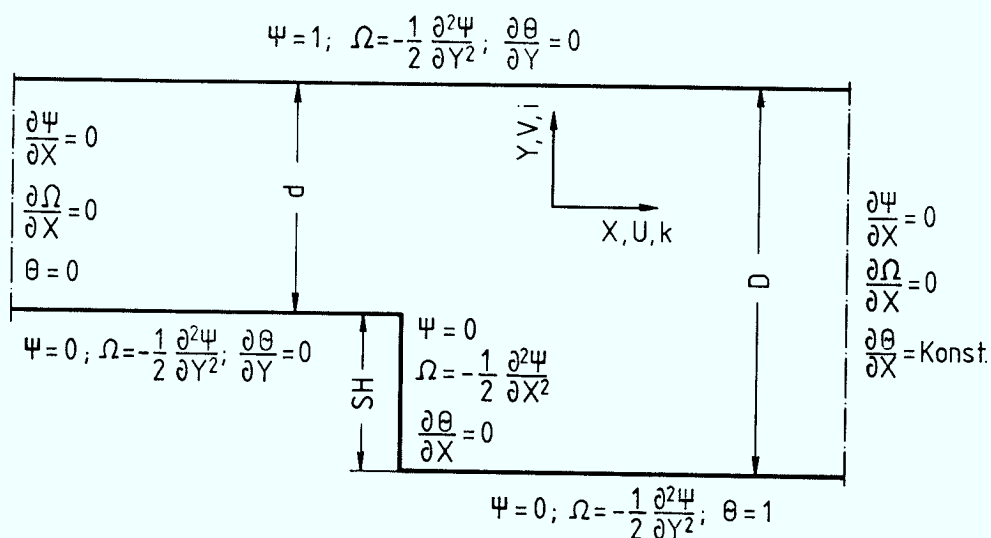


Abb. 1: Bezeichnungen und Randbedingungen an der überströmten Stufe

Randbedingungen

Das berechnete Gebiet ist in Abb. 1 dargestellt. Es erstreckt sich stromauf und stromab je nach Reynolds-Zahl bis zu $20d$, gemessen von der Stufenkante.

Die Randbedingungen für die Stromfunktion lauten:

- im Eintritts- und Austrittsquerschnitt wegen $v = 0$ bei ausgebildeter Kanalströmung

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_0 = 0 \quad (17)$$

- an der unteren Kontur:

$$\psi|_{y_{min}} = 0 \quad (18)$$

- an der oberen Kontur:

$$\psi|_{y_{max}} = 1 \quad (19)$$

Für den Wirbelvektor Ω gilt:

- im Ein- und Austrittsquerschnitt wegen $v = 0$, $\partial^2 \psi / \partial x^2 = 0$ aus Gleichung (13)

$$\Omega|_{x_{min}; x_{max}} = - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (20)$$

- an den waagerechten Konturen wegen $\partial^2 \psi / \partial x^2 = 0$

$$\Omega|_{y_{min}; y_{max}} = - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_0 \quad (21)$$

- an der senkrechten unteren Kontur wegen $\partial^2 \psi / \partial y^2 = 0$

$$\Omega|_{x_{stufe}} = - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_0 \quad (22)$$

- im Eckpunkt der Stufenkante

$$\Omega_{\text{Ecke}} = -\frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_0 + \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_0 \right) \quad (23)$$

Die später beschriebenen experimentellen Ergebnisse wurden aus einer Stoffübergangsmessung gewonnen. Zu diesem Zweck wird der Sublimationsstrom von Naphthalin an Luft an der unteren, stromab von der Stufe liegenden Kontur bestimmt. Auf die Verhältnisse für Wärmetransport übertragen lauten die entsprechenden Randbedingungen:

- Eintrittsquerschnitt:

$$\Theta_{x_{\min}} = 0 \quad (24)$$

- Austrittsquerschnitt: Der Temperaturgradient in Strömungsrichtung sei konstant

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right|_{x_{\max}} = \left. \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right|_{x_{\max}-1} \quad (25)$$

- untere Kontur stromauf der Stufe

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right|_{y_{\min}} = 0 \quad (26)$$

- senkrechte Kontur

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0 \quad (27)$$

- untere Kontur stromab der Stufe

$$\Theta|_{y_{\min}} = 1 \quad (28)$$

- obere Kontur

$$\Theta|_{y_{\max}} = 0 \quad (29)$$

3. Numerische Lösungsverfahren

Das Strömungs- und Temperaturfeld wird mit Hilfe der Methode der finiten Differenzen berechnet. Bei der Lösung der Bewegungsgleichung werden zwei Vorgehensweisen entsprechend den Gleichungen (12) bzw. (16) miteinander verglichen, wobei beide Lösungen nach dem Crank-Nicolson-Verfahren arbeiten. Hierbei wird die zeitliche Entwicklung der Strömung bei Anfahren aus der Ruhelage berechnet, weil die Anfangswerte dann bekannt sind. Die räumlichen ersten und zweiten Ableitungen werden als zentrale Differenzen geschrieben. Bezüglich des Zeitschrittes benutzt das erste Verfahren eine implizite Methode, wodurch ein Iterationsprozeß für den Wirbelvektor und die Stromfunktion zur Zeit $\tau + \Delta\tau$ notwendig ist. Das zweite Verfahren benutzt für den Zeitschritt Vorwärtsdifferenzen, wobei der neue Ω -Wert aus den Strömungsgrößen des aktuellen und vorangegangenen Zeitschrittes gebildet wird. Dieses Verfahren bezieht die rasche Konvergenz aus der Anwendung des weiter unten beschriebenen halbversetzten Gitternetzes.

Zur Berechnung des Temperaturfeldes wird Gleichung (15) ebenfalls mittels des Crank-Nicolson-Verfahrens gelöst, wobei die Geschwindigkeiten aus der vorangegangenen Strömungsberechnung als bekannt anzusehen sind. Physikalisch bedeutet dieser Lösungsweg, daß bei ausgebildeter stationärer Strömung zur Zeit $\tau = 0$ die Temperatur der beheizten Fläche auf $\Theta = 1$ gesetzt wird und die zeitliche Entwicklung des Temperaturfeldes berechnet wird. Die räumlichen ersten und zweiten Ableitungen werden als zentrale Differenzen geschrieben. Im Zeitschritt wird wiederum das implizite Verfahren angewendet.

Um in Gebieten, in denen die zu berechnenden Feldgrößen steile Gradienten aufweisen, numerische Stabilität zu gewährleisten, müssen die Schrittweiten kleiner als im übrigen Feld notwendig gewählt werden können. Daher sind nicht konstante Schrittweiten vorzusehen. Weiterhin besteht zwischen der zeitlichen und räumlichen Schrittweite in Y-Richtung, in der die steilsten Gradienten auftreten, folgender Zusammenhang:

$$\frac{\partial \Delta\tau}{Re \Delta Y_{min}^2} \leq 1 \quad (30)$$

Man erkennt, daß mit zunehmender Reynolds-Zahl der Gitterabstand verringert werden muß, um die Zeitschritte nicht zu groß werden zu lassen. Aus der Ungleichung (30) ergibt sich der maximale Zeitschritt zu

$$\Delta \tau = \frac{Re \cdot \Delta Y_{min}^2}{8} \quad (30a)$$

4. Diskretisierung

4.1 Schrittweiten

Zur punkweisen Berechnung des Geschwindigkeits- bzw. Temperaturfeldes wird das betrachtete Gebiet mit einem Gitternetz überspannt, dessen Gitterabstände aus o.g. Gründen in Wandnähe am geringsten sind (siehe Abb. 2).

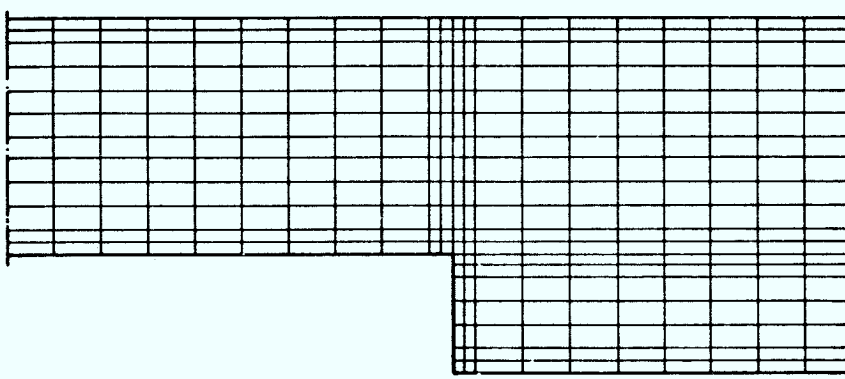


Abb. 2: Gitternetz mit unterschiedlichen Abständen der Stützstellen

Sind X_k und Y_i die Koordinaten eines betrachteten Knotenpunktes $P_{i,k}$, so werden für die räumlichen Schrittweiten folgende Abkürzungen gewählt:

$$\begin{aligned}\Delta 1X &= X_k - X_{k-1} & \Delta 1Y &= Y_i - Y_{i-1} \\ \Delta 2X &= X_{k+1} - X_k & \Delta 2Y &= Y_{i+1} - Y_i \\ \Delta X &= \Delta 1X + \Delta 2X & \Delta Y &= \Delta 1Y + \Delta 2Y\end{aligned}$$

4.2 Stromfunktion und Wirbelvektor (erstes Lösungsverfahren)

Der zeitliche Gradient des Wirbelvektors an der Stelle (X_k, Y_i) ergibt sich aus Gleichung (12) als arithmetisches Mittel der Glieder auf der rechten Seite zum Zeitpunkt $\tau = j$ und $\tau + \Delta\tau = j + 1$, wobei die Größen zur Zeit

$j + 1$ iterativ zu bestimmen sind. Der zugehörige Iterationsindex ist mit n bezeichnet.

$$\begin{aligned}
 \Omega_{i,K}^{n+1,j+1} = \Omega_{i,K}^j + \frac{\Delta\tau}{2} & \left\{ \frac{\psi_{i,K+1}^j - \psi_{i,K-1}^j}{\Delta X} \frac{\Omega_{i+1,K}^j - \Omega_{i-1,K}^j}{\Delta Y} + \right. \\
 & \frac{\psi_{i,K+1}^{n,j+1} - \psi_{i,K-1}^{n,j+1}}{\Delta X} \frac{\Omega_{i+1,K}^{n,j+1} - \Omega_{i-1,K}^{n,j+1}}{\Delta Y} - \frac{\psi_{i+1,K}^j - \psi_{i-1,K}^j}{\Delta Y} \frac{\Omega_{i,K+1}^j - \Omega_{i,K-1}^j}{\Delta X} \\
 & - \frac{\psi_{i+1,K}^{n,j+1} - \psi_{i-1,K}^{n,j+1}}{\Delta Y} \frac{\Omega_{i,K+1}^{n,j+1} - \Omega_{i,K-1}^{n,j+1}}{\Delta X} + \frac{2}{Re} \left[\frac{2}{\Delta 1X \cdot \Delta 2X} \right. \\
 & \left(\frac{\Delta 1X}{\Delta X} (\Omega_{i,K+1}^j + \psi_{i,K+1}^{n,j+1}) + \frac{\Delta 2X}{\Delta X} (\Omega_{i,K-1}^j + \psi_{i,K-1}^{n,j+1}) \right. \\
 & \left. - \Omega_{i,K}^j - \psi_{i,K}^{n,j+1}) + \frac{2}{\Delta 1Y \cdot \Delta 2Y} (\Omega_{i+1,K}^j + \psi_{i+1,K}^{n,j+1}) \right. \\
 & \left. + \frac{\Delta 2Y}{\Delta Y} (\Omega_{i-1,K}^j + \psi_{i-1,K}^{n,j+1}) - \Omega_{i,K}^j - \psi_{i,K}^{n,j+1}) \right] \left. \right\} \quad (32)
 \end{aligned}$$

Die neue Stromfunktionsverteilung erhält man unter Benutzung der Gleichung (13)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,K} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta 1X \cdot \Delta 2X}{\Delta 1Y \cdot \Delta 2Y}} & \left[\Delta 1X \cdot \Delta 2X \Omega_{i,K} + \frac{\Delta 1X}{\Delta X} \psi_{i,K+1} + \frac{\Delta 2X}{\Delta X} \psi_{i,K-1} \right. \\
 & \left. + \frac{\Delta 1X \cdot \Delta 2X}{\Delta 1Y \cdot \Delta 2Y} \left(\frac{\Delta 1Y}{\Delta Y} \psi_{i+1,K} + \frac{\Delta 2Y}{\Delta Y} \psi_{i-1,K} \right) \right] \quad (33)
 \end{aligned}$$

wobei ein Unterrelaxationsverfahren zur Absicherung der Konvergenz angewendet wird. Ist f_r der Relaxationskoeffizient, dessen Wert mit $f_r = 0.9$

eingesetzt wurde, so ergibt sich für die Stromfunktion des nächsten Iterationsschrittes

$$\psi_{i,k}^{n+1} = \psi_{i,k}^n + f_r \left(\psi_{i,k}^{n+1} - \psi_{i,k}^n \right) \quad (34)$$

Aus den Randbedingungen für das Strömungsfeld (Gleichung (17) bis (23)), ergeben sich die Werte der Stromfunktion und des Wirbelvektors auf den Berandungen:

- Stromfunktion am Eintrittsquerschnitt (Glg. (17)):

$$\psi_{i,1} = \frac{1}{3} \left[\frac{2(X_3 - X_1)}{X_3 - X_2} \psi_{i,2} - \frac{3X_2 - 2X_1 - X_3}{X_3 - X_2} \psi_{i,3} \right] \quad (35)$$

- Stromfunktion am Austrittsquerschnitt (Glg. (17)), wenn der Index m den zu $X_{\max}$ gehörigen Knotenpunkt bezeichnet:

$$\psi_{i,m} = \frac{1}{3} \left[\frac{2(X_m - X_{m-2})}{X_{m-1} - X_{m-2}} \psi_{i,m-1} - \frac{2X_m - 3X_{m-1} + X_{m-2}}{X_{m-1} - X_{m-2}} \psi_{i,m-2} \right] \quad (36)$$

Zur Bestimmung des Wirbelvektors am Rand benötigt man, wie die Gleichungen (20) bis (23) zeigen, die zweite Ableitung der Stromfunktion am Rand. Bezeichnet der Index 1 die Strömungsgrößen an der Wand und der Index 2 diejenigen im Abstand ΔY , so liefert die Reihenentwicklung für den Wirbelvektor:

$$\Omega_2 = \Omega_1 + \Delta Y \left. \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \right|_1 \quad (37)$$

Aus den Randbedingungen (z.B. Glg. (20)) entnimmt man

$$\Omega_1 = - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right|_1 \quad (38)$$

Nach Differentiation:

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \right|_1 = - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3} \right|_1 \quad (39)$$

Die Reihenentwicklung für die Stromfunktion lautet:

$$\psi_2 = \psi_1 + \Delta Y \left. \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right|_1 + \frac{\Delta Y^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right|_1 + \frac{\Delta Y^3}{6} \left. \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3} \right|_1 + \dots \quad (40)$$

Wegen $U = 0$ an der Wand verschwindet $\partial \psi / \partial Y|_1$ in Gleichung (40)

Durch Einführen der Glg. (37), (38) und (39) in (40) erhält man die Wirbelstärke am Rand:

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{3(\psi_1 - \psi_2)}{\Delta Y^2} - \Omega_2 \right] \quad (41)$$

Gleichung (41) ist sinngemäß für die Randbedingungen Gleichung (20) bis (23) anzuwenden.

4.3 Geschwindigkeit, Wandschubspannung und statischer Wanddruck

Die Lösung des Gleichungssystems Gleichung (32) und (33) liefert die Verteilungen der Stromfunktion und des Wirbelvektors. Hiermit können alle übrigen Strömungsgrößen berechnet werden.

Die Geschwindigkeitsverteilung erhält man aus der Stromfunktion gemäß Gleichung (14)

$$u = \frac{\psi_{i+1,k} - \psi_{i-1,k}}{\Delta y} \quad (42)$$

$$v = \frac{\psi_{i,k+1} - \psi_{i,k-1}}{\Delta x} \quad (43)$$

Der Wandschubspannungskoeffizient c_R ist definiert als

$$c_R = \frac{\tau_0}{\rho u^2/2} \quad (44)$$

wobei die Wandschubspannung τ_0 gegeben ist durch den Newtonschen Ansatz:

$$\tau_0 = -\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0 \quad (45)$$

Mit (44) und (45) folgt aus (4) unter Berücksichtigung von $\partial v / \partial x \big|_0 = 0$

$$c_R Re = 8 \Omega, \quad (46)$$

wobei in Gleichung (4) alternativ $\frac{\partial u}{\partial y}$ oder $\frac{\partial v}{\partial x}$ an den senkrechten bzw.

waagerechten Wänden wegen $u = v = 0$ verschwinden.

Der statische Druck an den Wänden ergibt sich für die waagerechten Konturen aus Gleichung (1a), für die senkrechten aus Gleichung (1b). Da der stationäre Fall interessiert, entfallen die zeitlichen Ableitungen. Ferner sind wegen der Wandhaftung $u = v = 0$, so daß die gesamte linke Seite der Gleichung (1) verschwindet. Außerdem ist in Gleichung (1a) $\partial^2 u / \partial x^2 = 0$ wegen $u = 0$ entlang der Wand und in Gleichung (1b) $\partial^2 v / \partial y^2 = 0$ wegen $v = 0$. Somit erhält man unter Berücksichtigung der Gleichung (4) die Verteilung des mit der Reynolds-Zahl normierten Druckes an den waagerechten Wänden zu

$$Re \frac{\partial P}{\partial x} = -8 \frac{\partial \Omega}{\partial y} \Big|_0 \quad (47)$$

und an der senkrechten Wand zu

$$Re \frac{\partial P}{\partial y} = -8 \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_0 \quad (48)$$

$$P = \frac{p}{\rho \bar{u}^2 / 2}$$

mit

Gleichung (47) lautet in Differenzschreibweise, wenn der Index 1 Werte an der Wand, 2 und 3 Werte im Abstand Y_2 und Y_3 von der Wand bedeuten:

$$Re \cdot P_{K+1} = Re P_K - \frac{2(Y_{K+1} - Y_K)}{Y_3 - Y_1} \left[3 \Omega_{1,K+1} - \frac{2(Y_3 - Y_1)}{Y_3 - Y_2} \Omega_{2,K+1} + \left(\frac{2(Y_2 - Y_1)}{Y_3 - Y_2} - 1 \right) \Omega_{3,K+1} \right] \quad (49)$$

Gleichung (49) ist entsprechend auf Gleichung (48) anzuwenden.

Bei der Berechnung der Druckverteilung beginnt man im Einlaufquerschnitt mit einem beliebigen Bezugswert, beispielsweise $P = 0$, und rechnet stromabwärts. An der unteren Kontur übernimmt man an der Stufe den Druck am Ende des Einlaufquerschnittes als Startwert für denjenigen zu Beginn des erweiterten Querschnitts. Diese Annahme ist zulässig, da die Nullstromlinie an der Ablösekante in Verlängerung der Wandkontur weiterläuft und somit kein Druckgradient quer zur Hauptströmungsrichtung auftreten kann.

4.4 Temperaturfeld und lokaler Wärmeübergang

Die Energiegleichung (15), liefert, in finiten Differenzen geschrieben, folgenden Ausdruck für die Temperatur $\Theta_{i,k}^{j+1}$ zum Zeitpunkt $\tau + \Delta\tau$:

$$\begin{aligned}
 \Theta_{i,k}^{j+1} = & \Theta_{i,k}^j + \frac{\Delta\tau}{2} \left\{ - \left[U \frac{\Theta_{i,k+1}^j - \Theta_{i,k-1}^j}{\Delta x} + V \frac{\Theta_{i+1,k}^j - \Theta_{i-1,k}^j}{\Delta y} \right. \right. \\
 & + U \frac{\Theta_{i,k+1}^n - \Theta_{i,k-1}^n}{\Delta x} + V \frac{\Theta_{i+1,k}^n - \Theta_{i-1,k}^n}{\Delta y} \left. \right] + \frac{2}{Re} \left[\frac{2}{\Delta x \cdot \Delta y} \right. \\
 & \left(\frac{\Delta x}{2} (\Theta_{i,k+1}^j + \Theta_{i,k+1}^n) + \frac{\Delta x}{2} (\Theta_{i,k-1}^j + \Theta_{i,k-1}^n) - \Theta_{i,k}^j - \Theta_{i,k}^n \right) \\
 & + \frac{2}{\Delta y} \left(\frac{\Delta y}{2} (\Theta_{i+1,k}^j + \Theta_{i+1,k}^n) + \frac{\Delta y}{2} (\Theta_{i-1,k}^j + \Theta_{i-1,k}^n) \right. \\
 & \left. \left. - \Theta_{i,k}^j - \Theta_{i,k}^n \right) \right] \left. \right\} \quad (50)
 \end{aligned}$$

Hierbei bedeuten wiederum i und k die räumlichen Indices in Y - bzw. X -Richtung, j den zeitlichen Index und n den Iterationsindex zur Bestimmung der impliziten Größe $\Theta_{i,k}^{j+1}$.

Mit Ausnahme der unteren wärmeübertragenden Kontur verschwinden an den Wänden die Temperaturgradienten (Gleichungen (26), (27) und (29)) wegen der Annahme der Adiabasie.

Bezeichnet der Index 1 die Temperatur an der Wand, 2 und 3 diejenigen im Abstand h_1 bzw. $h = h_1 + h_2$, so erhält man den Randwert Θ_1

$$\Theta_1 = \frac{1}{3} \left[\Theta_2 \frac{2h}{h_2} - \Theta_3 \left(\frac{2h_1}{h_2} - 1 \right) \right] \quad (51)$$

Im Austrittsquerschnitt liefert Gleichung (25), wenn der Index m den Knotenpunkt in der Austrittsebene bezeichnet:

$$\Theta_m = \Theta_{m-1} \frac{h}{h_2} - \Theta_{m-2} \frac{h_1}{h_2} \quad (52)$$

Die örtliche Nusselt-Zahl

$$Nu = \frac{\alpha 2d}{\lambda} \quad (53)$$

erhält man aus dem Temperaturgradienten an der beheizten Wand zu

$$Nu = - \frac{2}{\Delta\Theta} \left. \frac{\partial\Theta}{\partial Y} \right|_0 \quad (54)$$

Wenn man das treibende Temperaturgefälle entlang der beheizten Wand $\Delta\Theta = 1$ setzt, lautet Gleichung (54) in diskretisierter Form:

$$Nu = \frac{2}{Y_3 - Y_1} \left(3\Theta_1 - \frac{2(Y_3 - Y_1)}{Y_3 - Y_2} \Theta_2 + \frac{2(Y_2 - Y_1)}{Y_3 - Y_2} \Theta_3 \right) \quad (55)$$

4.5 Stromfunktion und Wirbelvektor (zweites Lösungsverfahren)

Das zweite hier untersuchte Verfahren zur Lösung der Wirbeltransportgleichung geht von der in Gleichung (16) dargestellten Form aus. Hier treten anstelle der Stromfunktion, die separat unter Benutzung der Gleichung (13) berechnet wird, die Geschwindigkeitskomponenten U und V als Produkte mit dem Wirbelvektor auf.

Während das Wirbelvektor- und Stromlinienfeld in den Knotenpunkten des Hauptmaschengitters (Abb. 3, durchgezogene Linien) berechnet wird, werden die Geschwindigkeiten in einem um eine halbe Maschenweite versetzten, gestrichelt gezeichneten Netz, bestimmt.

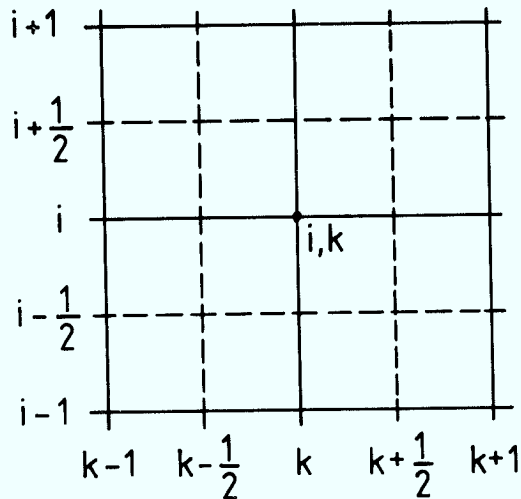


Abb. 3:
Versetzte Maschennetze
zur Lösung der Glg. (16)

Bei der Berechnung der konvektiven Glieder $\frac{\partial(u\Omega)}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial(v\Omega)}{\partial y}$ sind somit je sechs Geschwindigkeitsstützpunkte und drei Wirbelvektorstützpunkte beteiligt, wodurch bei der Iteration eine gute numerische Stabilität erreicht wird.

Die Diskretisierung der Gleichung (16) liefert:

$$\begin{aligned}
 \Omega_{i,k}^{j+1} = & \Omega_{i,k}^j + \frac{\Delta \tau}{\Delta 1Y \cdot \Delta 2Y} \left\{ \frac{4}{Re} \frac{\Delta 1Y \cdot \Delta 2Y}{\Delta 1X \cdot \Delta 2X} \left[\frac{\Delta 1X}{\Delta X} \Omega_{i,k+1}^j + \frac{\Delta 2X}{\Delta Y} \Omega_{i,k-1}^j - \Omega_{i,k}^j \right] \right. \\
 & + \frac{4}{Re} \left[\frac{\Delta 1Y}{\Delta Y} \Omega_{i+1,k}^j + \frac{\Delta 2Y}{\Delta Y} \Omega_{i-1,k}^j - \Omega_{i,k}^j \right] - \frac{2 \Delta 1Y \cdot \Delta 2Y}{\Delta Y} \cdot \\
 & \left. \left[\frac{\Delta Y}{\Delta X} \left((u\Omega)_{i,k+1/2}^j - (u\Omega)_{i,k-1/2}^j \right) + (v\Omega)_{i+1/2,k}^j - (v\Omega)_{i-1/2,k}^j \right] \right\}
 \end{aligned} \quad (56)$$

$$U_{i+1/2, K-1} = \frac{1}{\Delta 2Y} (\psi_{i+1, K-1} - \psi_{i, K-1})$$

$$U_{i-1/2, K+1} = \frac{1}{\Delta 1Y} (\psi_{i, K+1} - \psi_{i-1, K+1})$$

$$U_{i+1/2, K+1} = \frac{1}{\Delta 2Y} (\psi_{i+1, K+1} - \psi_{i, K+1})$$

$$V_{i, K-1/2} = -\frac{1}{\Delta 1X} (\psi_{i, K} - \psi_{i, K-1})$$

$$V_{i, K+1/2} = -\frac{1}{\Delta 2X} (\psi_{i, K+1} - \psi_{i, K})$$

$$V_{i-1, K-1/2} = -\frac{1}{\Delta 1X} (\psi_{i-1, K} - \psi_{i-1, K-1})$$

$$V_{i-1, K+1/2} = -\frac{1}{\Delta 2X} (\psi_{i-1, K+1} - \psi_{i-1, K}) \quad (58)$$

$$V_{i+1, K-1/2} = -\frac{1}{\Delta 1X} (\psi_{i+1, K} - \psi_{i+1, K-1})$$

$$V_{i+1, K+1/2} = -\frac{1}{\Delta 2X} (\psi_{i+1, K+1} - \psi_{i+1, K})$$

Anhand einiger Rechnungen wird bei unterschiedlichen Reynolds-Zahlen die Leistungsfähigkeit der Gleichung (32) gegenüber der Gleichungen (56) bis (58) getestet und weiter unten diskutiert.

wobei:

$$U_{i,K-1/2} = \frac{1}{4} (U_{i-1/2,K} + U_{i+1/2,K} + U_{i-1/2,K-1} + U_{i+1/2,K-1})$$

$$U_{i,K+1/2} = \frac{1}{4} (U_{i-1/2,K} + U_{i+1/2,K} + U_{i-1/2,K+1} + U_{i+1/2,K+1})$$

$$V_{i-1/2,K} = \frac{1}{4} (V_{i,K-1/2} + V_{i,K+1/2} + V_{i-1,K+1/2} + V_{i-1,K-1/2})$$

$$V_{i+1/2,K} = \frac{1}{4} (V_{i,K-1/2} + V_{i,K+1/2} + V_{i+1,K+1/2} + V_{i+1,K-1/2})$$

$$\Omega_{i,K-1/2} = \frac{1}{2} (\Omega_{i,K-1} + \Omega_{i,K})$$

$$\Omega_{i,K+1/2} = \frac{1}{2} (\Omega_{i,K+1} + \Omega_{i,K}) \quad (57)$$

$$\Omega_{i-1/2,K} = \frac{1}{2} (\Omega_{i-1,K} + \Omega_{i,K})$$

$$\Omega_{i+1/2,K} = \frac{1}{2} (\Omega_{i+1,K} + \Omega_{i,K})$$

Geschwindigkeitsverteilung in den Zwischenpunkten

$$U_{i-1/2,K} = \frac{1}{\Delta t Y} (\psi_{i,K} - \psi_{i-1,K})$$

$$U_{i+1/2,K} = \frac{1}{\Delta t Y} (\psi_{i+1,K} - \psi_{i,K}) \quad (58)$$

$$U_{i-1/2,K-1} = \frac{1}{\Delta t Y} (\psi_{i,K-1} - \psi_{i-1,K-1})$$

5. Durchführung der Rechnung

5.1 Strömungsfeld

Gleichung (12) (implizites Verfahren), bzw. Gleichung (16) (explizites Verfahren) beschreiben die zeitliche Entwicklung der Wirbelstärke im betrachteten Gebiet beim Anfahren der Strömung aus der Ruhelage. Zur Zeit $\tau = 0$ herrscht wie bei allen Anfahrvorgängen Potentialströmung. Die zugehörige Verteilung der Stromfunktion wird mit Hilfe von Gleichung (10) bestimmt und dient als Startwert für die weitere Berechnung. Im ersten Zeitschritt wird die Wirbelstärke aus der Geschwindigkeitsverteilung der Potentialstörung, in allen weiteren Zeitschritten mit der aktuellen ψ -Verteilung mit Hilfe der Gleichungen (32) bzw. (56 bis 58) berechnet. Beim expliziten Verfahren (Glg. 56 - 58) kann aus Glg. (33) jeweils die neue Stromfunktionsverteilung ermittelt werden. Für die notwendige Iteration wird gemäß Glg. (34) ein Unterrelaxationsverfahren angewandt, wobei sich der Relaxationskoeffizient $f_r = 0.9$ als günstig erwies. Die Iteration ist beendet, wenn in jedem Maschenpunkt die Differenz der Stromfunktionen zweier aufeinanderfolgender Iterationsschritte kleiner als die vorgegebene Schranke $\varepsilon_\psi \leq 10^{-4}$ ist.

$$|\psi_{i,K}^{n+1} - \psi_{i,K}^n| \leq \varepsilon_\psi \quad (59)$$

Beim impliziten Verfahren (diskretisierte Form Glg. (32)) werden zur Berechnung von $\Omega(\tau + \Delta\tau)$ sowohl die Stromfunktion ψ als auch der Wirbelvektor Ω zur Zeit $\tau + \Delta\tau$ benötigt. Beide Größen müssen innerhalb eines Zeitschrittes abwechselnd iterativ berechnet werden (Index n). Die Iteration beginnt, indem für $n = 1$ und $n = 2$ die Werte des vorangegangenen Zeitschrittes eingesetzt werden. Jeder Iterationsschritt in Ω zieht einen Iterationsprozeß für ψ nach Glg. (33) und (34) nach sich. Ein Zeitschritt ist abgeschlossen, wenn sowohl ψ als auch Ω die gesetzten Fehlerschranken unterschreitet. Für ε_ψ gilt wiederum Glg. (59). Da sich die Wirbelstärke Ω , wie Glg. (13) zeigt, aus den zweiten Ableitungen der Stromfunktion berechnet, muß die Fehlerschranke für Ω einen höheren Wert haben als ε_ψ . Gewählt wurde $\varepsilon_\Omega = 10^{-3}$.

$$|\Omega_{i,K}^{j+1} - \Omega_{i,K}^j| \leq \varepsilon_\Omega \quad (60)$$

5.2 Temperaturfeld

Der Berechnung des Temperaturfeldes liegt Gleichung (15) zugrunde. Die Geschwindigkeitskomponenten U und V sind aus der vorangegangenen Berechnung der Strömungsgrößen bekannt. Die Lösung des Temperaturfeldes wird analog zum impliziten Verfahren der Strömung durchgeführt. Bei höheren Prandtl-Zahlen ist gegebenenfalls an der Wand ein zusätzlicher Stützpunkt vorzusehen, um Konvergenz zu erreichen. Der Rechengang verfolgt die zeitliche Entwicklung des Temperaturfeldes, nachdem zum Zeitpunkt $\tau = 0$ die Kanalbodenwand auf die Temperatur $\Theta = 1$ angehoben wird. Die Berechnung ist abgeschlossen, wenn in allen Knotenpunkten die zeitliche Änderung der Temperatur kleiner als die vorgegebene Schranke ϵ_Θ ist.

$$\left| \Theta_{i,k}^{j+1} - \Theta_{i,k}^j \right| \leq \epsilon_\Theta = 10^{-4} \quad (61)$$

6. Vergleich der Rechenverfahren zur Lösung der Wirbeltransportgleichung

Im folgenden sollen die Erfahrungen im Umgang mit den zwei unterschiedlichen Rechenverfahren mitgeteilt werden. Als Modus I ist das implizite Verfahren Gl. (32), als Modus II das Verfahren mit halbversetztem Gitternetz Gl. (56) bezeichnet. Da Modus I zur Berechnung des neuen Ω -Wertes auch den neuen ψ -Wert, also beide Werte zur Zeit $\tau + \Delta\tau$, benötigt, ist zu jedem Iterationsschritt in Ω ein Iterationsprozeß für ψ nötig. Dies ist bei Modus II nicht der Fall, so daß Modus II kürzere Rechenzeiten, gleiche Zahl der Stützstellen vorausgesetzt, verlangt. Bei $Re = 100$ benötigt Modus II ca. 73% der Zeit von Modus I bei einer CPU-Zeit für den Strömungsteil von 1:35 min. auf der IBM 3081 D32. Diesem Vorteil steht allerdings entgegen, daß sich Modus II wesentlich restriktiver bezüglich der Schrittweiten verhält. Bei gleicher Stützweite können mit Modus I Strömungen mit mehr als zwei Mal höheren Reynolds-Zahlen berechnet werden als mit Modus II. Daher ist es möglich, mit Modus I bei Reynolds-Zahlen bis $Re = 2000$ zu rechnen, was mit Modus II nicht gelingt.

Da das Rechenprogramm vom Aufbau her geeignet für einen Vektorrechner ist, wurde insbesondere bei hohen Reynolds-Zahlen und Peclet-Zahlen die CRAY X-MP eingesetzt. Der erreichte Beschleunigungsfaktor im Vergleich zur IBM-Maschine betrug zwischen 20,5 und 23. Die CPU-Zeiten auf der Cray lagen bei Reynolds-Zahlen bis $Re = 1000$ unter einer Minute.

7. Versuchseinrichtung

Die theoretischen Ergebnisse des Wärmeüberganges sollen im Experiment überprüft werden. Zu diesem Zweck wurde die in Abb. 4 dargestellte Versuchseinrichtung erstellt.

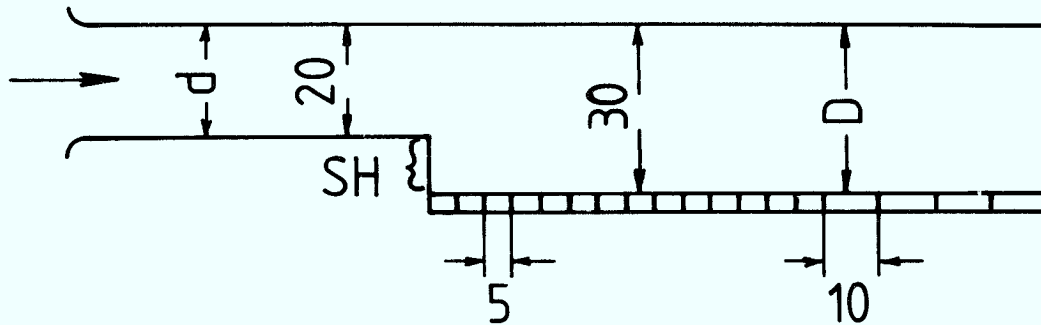


Abb. 4: Versuchseinrichtung zur Messung des Stoffüberganges

Luft von Umgebungsbedingungen tritt in den Rechteck-Kanal mit den Abmessungen $d \times b = 20 \times 50 \text{ mm}^2$ ein. Sie überströmt die Stufe der Höhe SH, durchläuft zur Messung des Volumenstroms eine Gasuhr und erreicht schließlich das Gebläse. Am Boden des Kanals können Naphthalin-beschichtete Elemente, deren Breite 5 oder 10 mm beträgt, eingebaut werden. Dadurch ist eine nahezu lokale Messung des Stoffüberganges möglich. Unter dem Einfluß der Luftströmung sublimiert ein Teil der Naphthalinbeschichtung. Aus der in der Zeit abgetragenen Masse läßt sich der Stoffübergangskoeffizient β bestimmen.

Die genannte Stoffübergangsmeßmethode wird seit vielen Jahren am Institut praktiziert. Einzelheiten der Versuchstechnik und Stoffdaten des Naphthalins finden sich u.a. in /4/. Wichtig für die vorliegenden Ergebnisse ist, daß die Schmidt-Zahl $Sc = 2.5$ beträgt.

8. Ergebnisse

8.1 Stromfunktion, Wirbelvektor, Wandschubspannung, statischer Druck,

Temperaturfeld und lokaler Wärmeübergang

Bei der Überströmung der Stufe löst die Strömung ab und bildet ein Rezirkulationsgebiet aus. (Abb. 5)

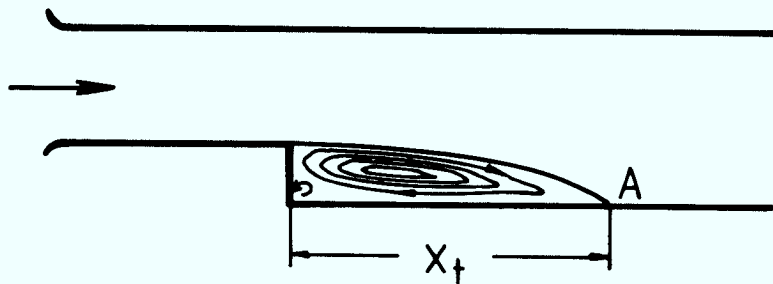


Abb. 5: Rezirkulationsgebiet hinter einer Stufe

Die Länge X_t dieses sogenannten Totwassergebietes hängt von der Reynolds-Zahl ab. Die Berechnungen ergeben den in Abb. 6 dargestellten Zusammenhang. Mit zunehmender Reynolds-Zahl, Re_{SH} , wobei hier die Reynolds-Zahl auf die Stufenhöhe SH und die mittlere Geschwindigkeit im Anströmquerschnitt bezogen ist, wächst die Ausdehnung des Totwassers und erreicht für $Re_{SH} > 250$ einen Endwert von 11 - 12 Stufenhöhen.

Das Totwasser wird durch die Nullstromlinie gegen die Außenströmung abgegrenzt. Es ist ein Gebiet, in dem das Fluidvolumen mit relativ geringen Geschwindigkeiten zirkuliert. In der unteren Ecke zwischen Kanalboden und Stufenstirnfläche existiert ein Sekundärwirbel kleiner Abmessungen.

In den vorliegenden Experimenten wird der Kanalboden stromab der Stufenkante mit Naphthalin beschichtet. Dies entspricht, auf Wärmeübergangsverhältnissen übertragen, einer Beheizung mit der Randbedingung $T = \text{Konst.}$ Entsprechend ist die Schmidt-Zahl Sc durch die Prandtl-Zahl $Pr = 2.5$ zu ersetzen.

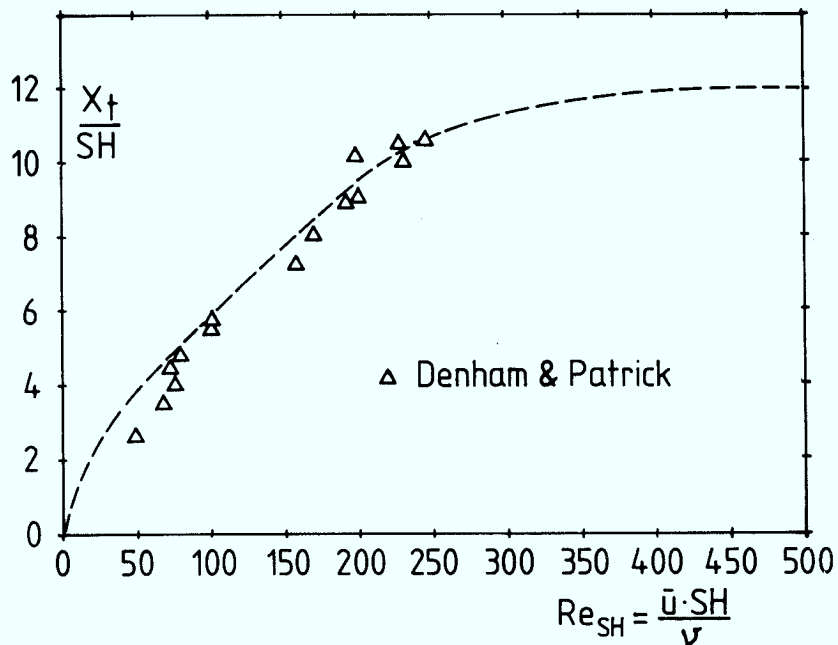


Abb. 6: Abhängigkeit der Totwasserlänge von der Reynolds-Zahl

--- diese Arbeit; Δ experimentell nach /13/

Die Abbildungen 7 bis 11 zeigen einige Strömungs- und Wärmeübergangsparameter bei verschiedenen Reynolds-Zahlen.

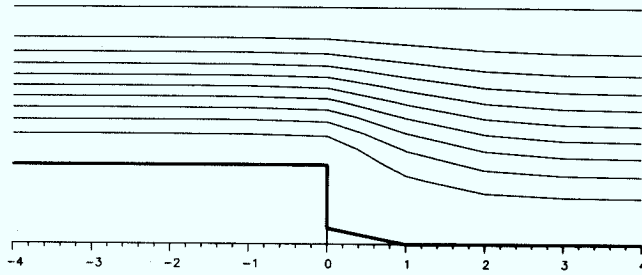
Die Abb. 7a - 11a lassen die Entwicklung des Rezirkulationsgebietes mit zunehmender Reynolds-Zahl erkennen. Bis $Re = 30$ ist dessen Erstreckung in Strömungsrichtung kleiner als eine Stufenhöhe. Darüber hinaus verschiebt sich, wie in Abb. 6 bereits dargestellt, der Auftreffpunkt der Strömung kontinuierlich stromab. Das Totwassergebiet zeigt durch die geschlossenen Stromlinien die Existenz eines im Uhrzeigersinn sich drehenden Wirbels an. Ebenfalls ist ein Gegenwirbel in der Stufenecke sichtbar.

Die Geschwindigkeitsverteilung (Abb. 7b bis 11b) wurde aus der Stromfunktion berechnet. Die im Rezirkulationsgebiet auftretenden Geschwindigkeiten sind so gering, daß sich bei der hier gewählten Skalierung die Rückströmungen nicht darstellen. Die Geschwindigkeitsverteilung im Eintritt differiert bei Reynolds-Zahlen $Re < 100$ etwa um 1 %, bei $Re > 100$ um 0,3 bis 1% im Vergleich mit dem Ergebnis der exakten Lösung.

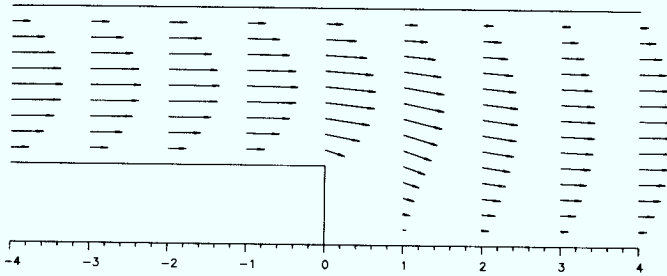
Die Abbildungen 7c bis 12c, bzw. 7d bis 11d zeigen die Verteilung des statischen Druckes und der Wandschubspannungen entlang der oberen oder der unteren Kanalkontur. Vergleicht man die Ergebnisse bei $Re = 7,8$ mit denen bei $Re = 359$, so erkennt man, daß bei der kleinen Reynolds-Zahl die Druck-

Abb. 7a-d

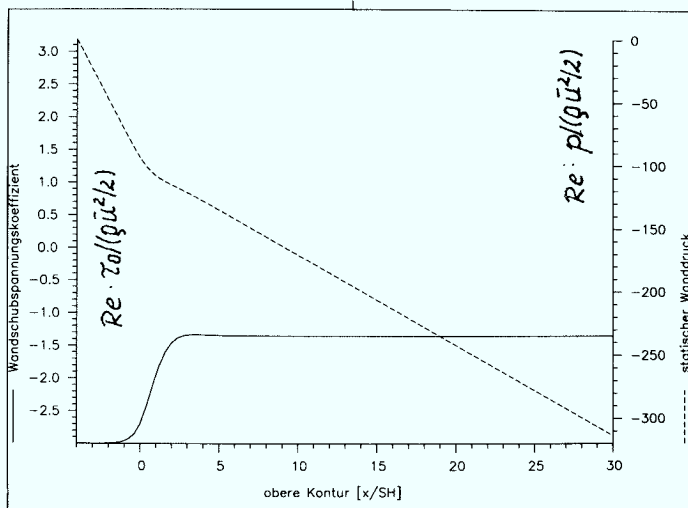
Re = 7,8 Pe = 19,5



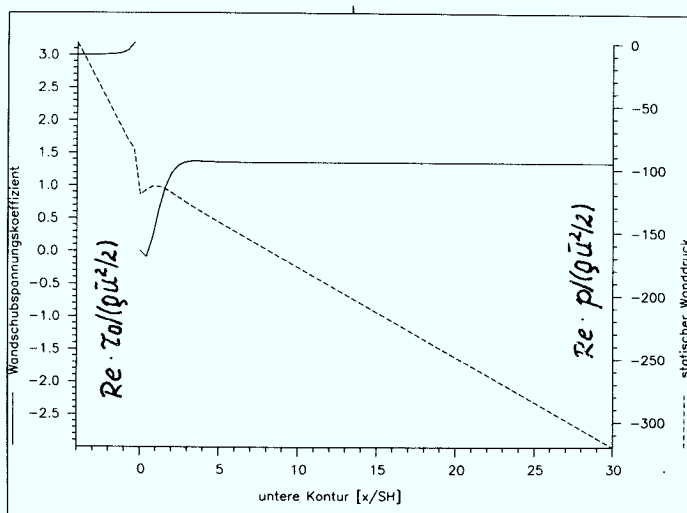
Stromfunktion



Geschwindigkeit

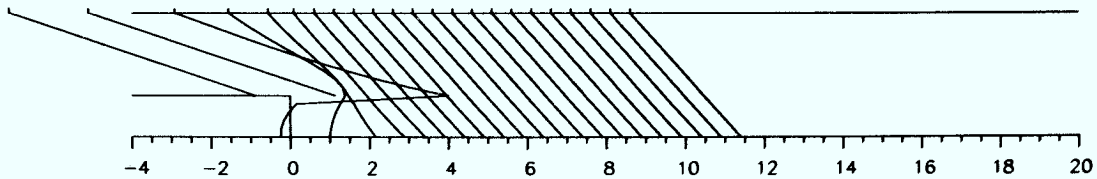


obere Kontur:
statischer Druck und
Wandschubspannung

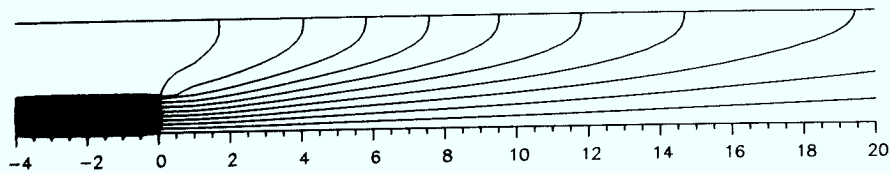


untere Kontur:
statischer Druck und
Wandschubspannung

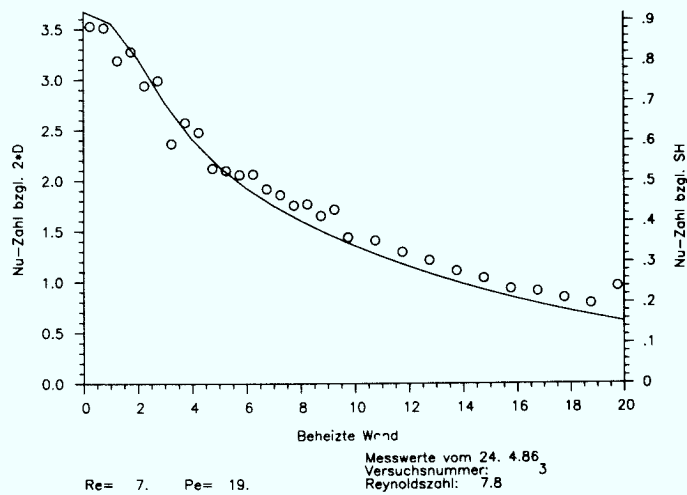
Abb. 7 e-g

 $Re = 7,8$ $Pe = 19,5$


Wirbelvektor



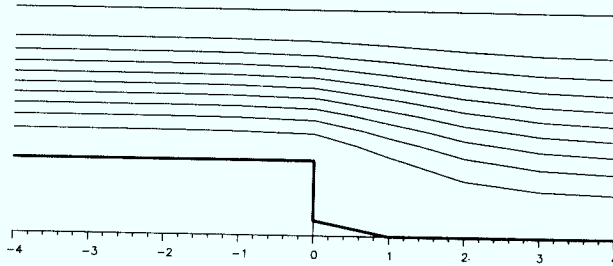
Temperatur



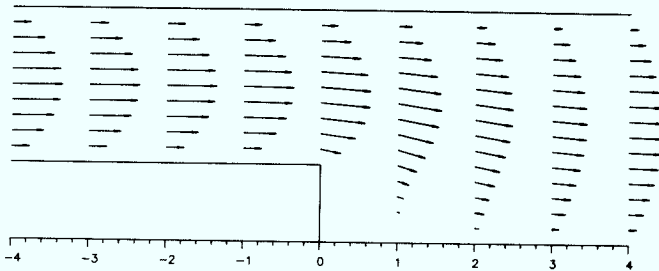
Wärmeübergang

Abb. 8 a-d

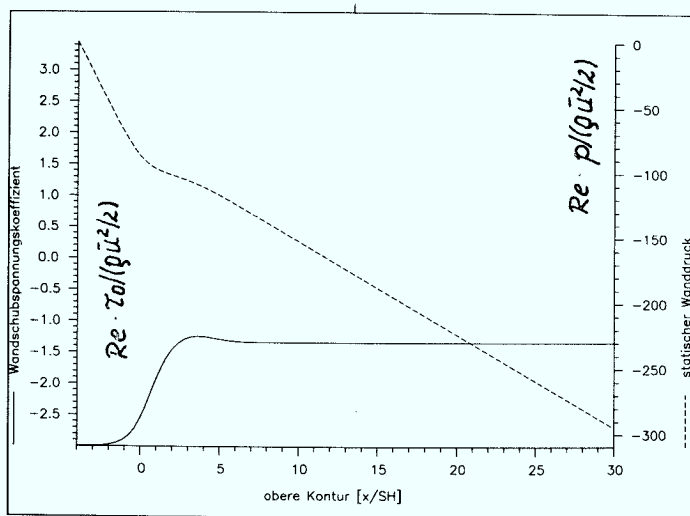
Re = 31 Pe = 77



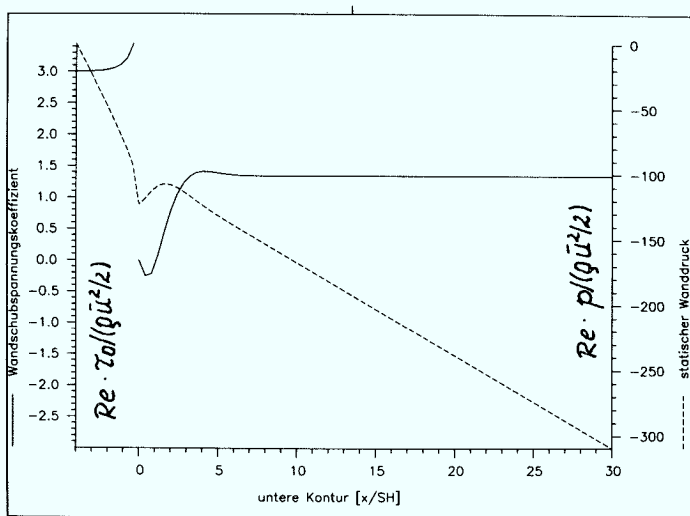
Stromfunktion



Geschwindigkeit



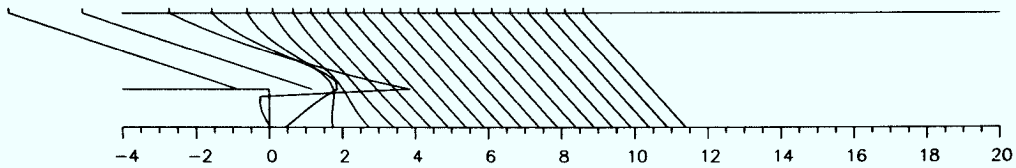
obere Kontur:
 statischer Druck und
 Wandschubspannung



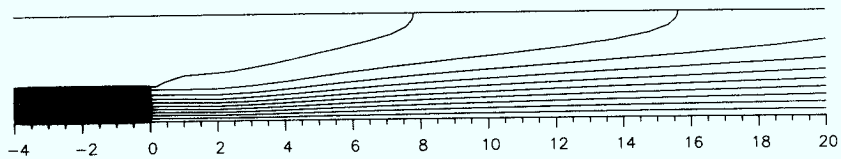
untere Kontur:
 statischer Druck und
 Wandschubspannung

Abb. 8 e-g

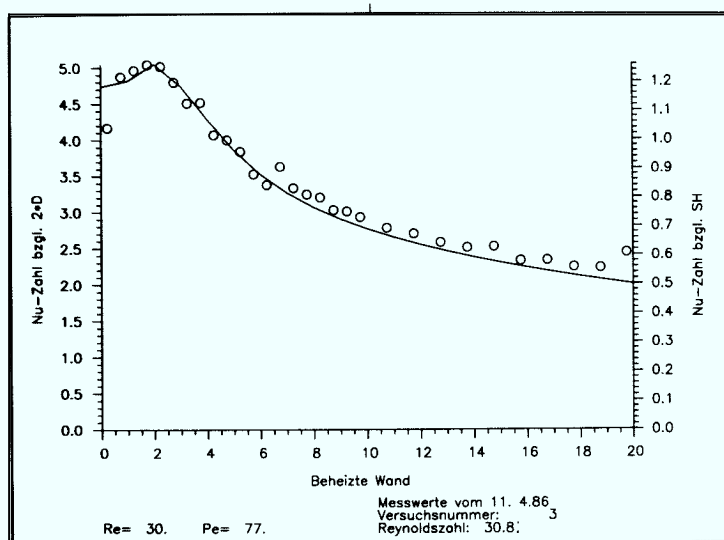
Re = 31 Pe = 77



Wirbelvektor



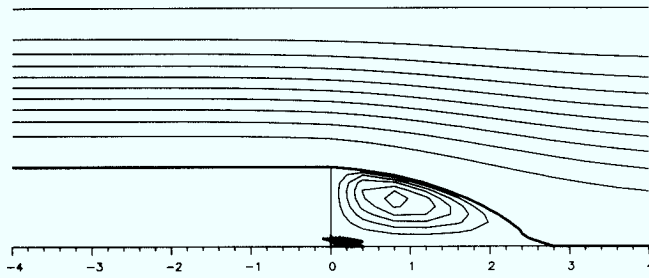
Temperatur



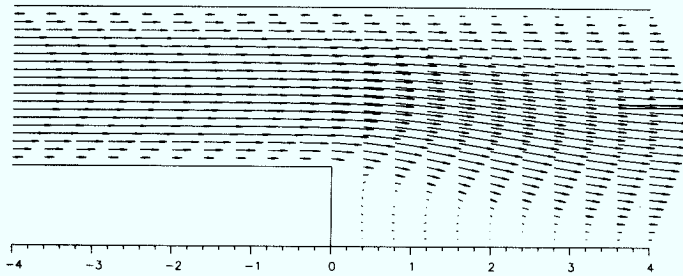
Wärmeübergang

Abb. 9a-d

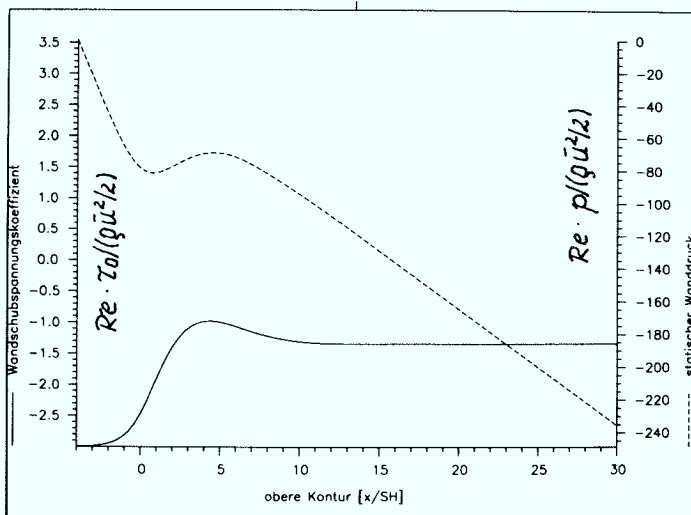
Re = 110 Pe = 275



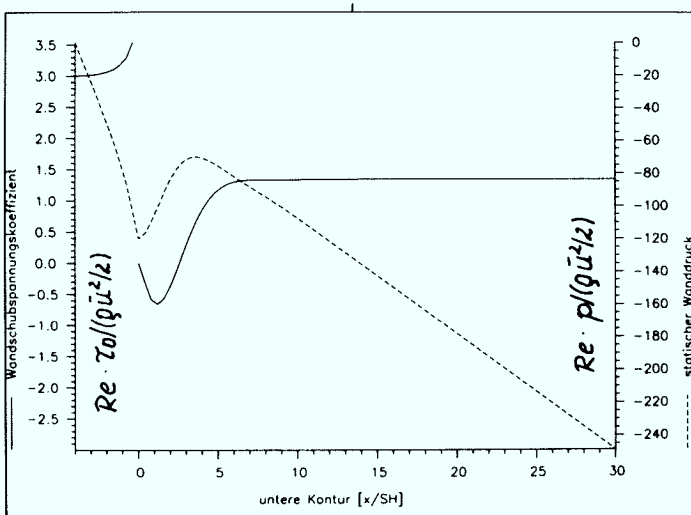
Stromfunktion



Geschwindigkeit

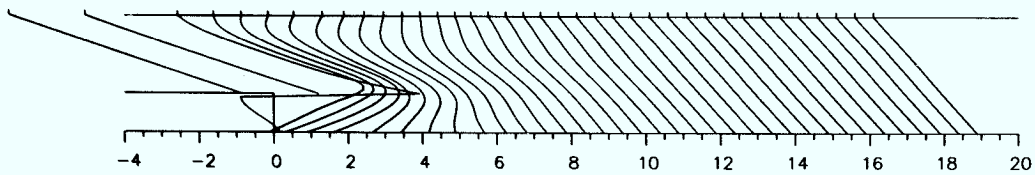


obere Kontur:
statischer Druck und
Wandschubspannung

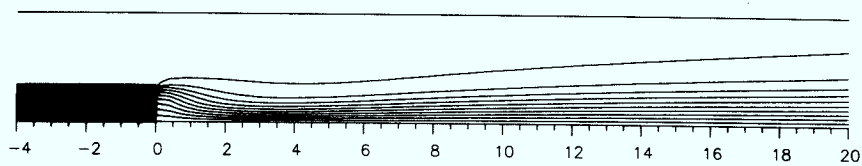


untere Kontur:
statischer Druck und
Wandschubspannung

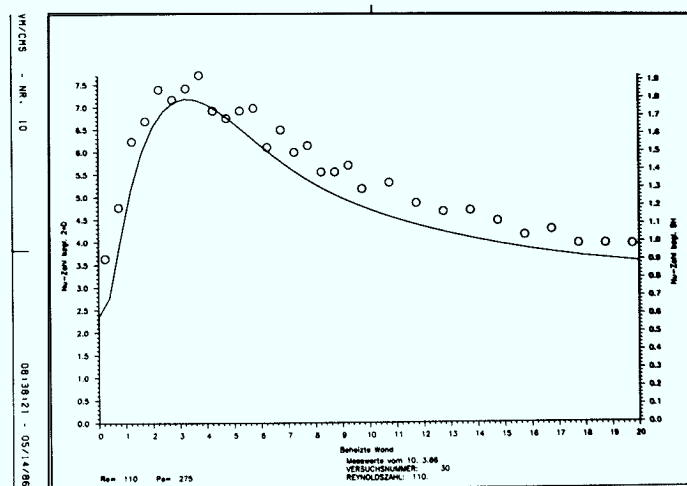
Abb. e-g

$$\text{Re} = 110 \quad \text{Pe} = 275$$


Wirbelvektor



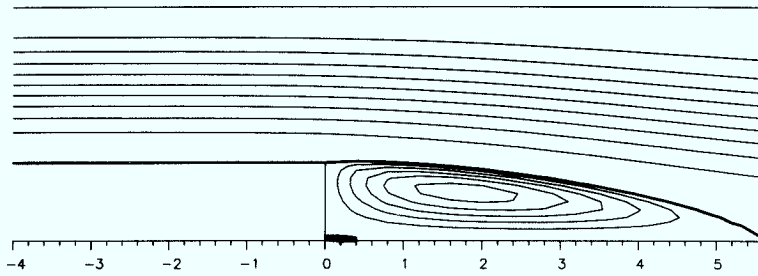
Temperatur



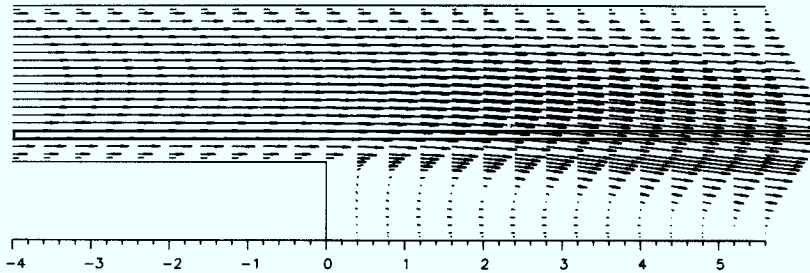
Wärmeübergang

Abb. 10a-d

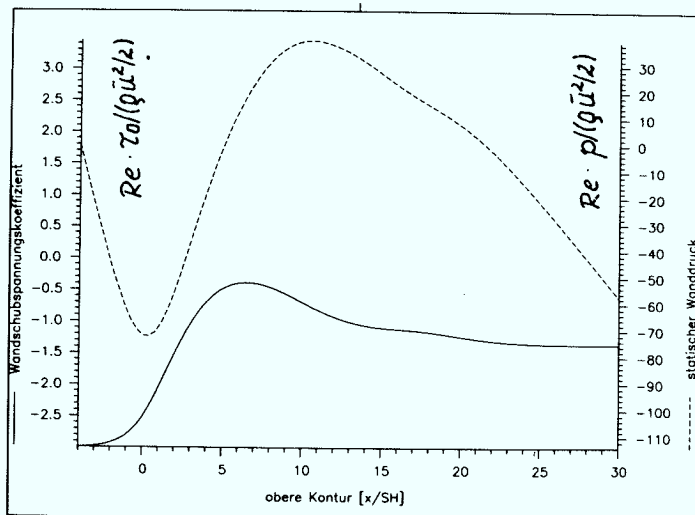
Re = 359 Pe = 898



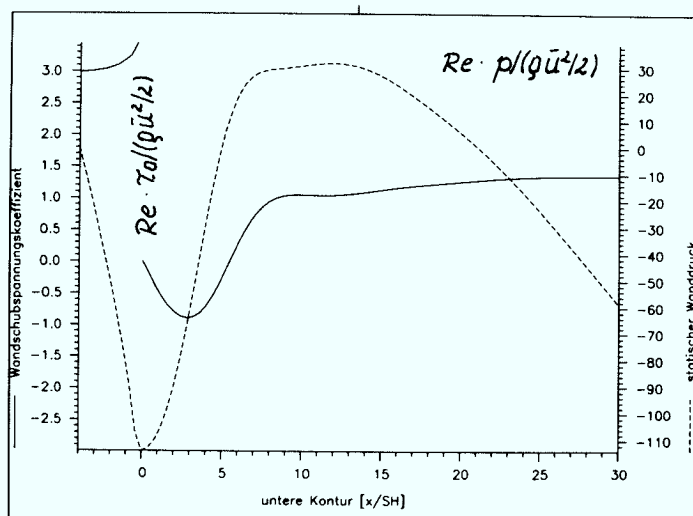
Stromfunktion



Geschwindigkeit



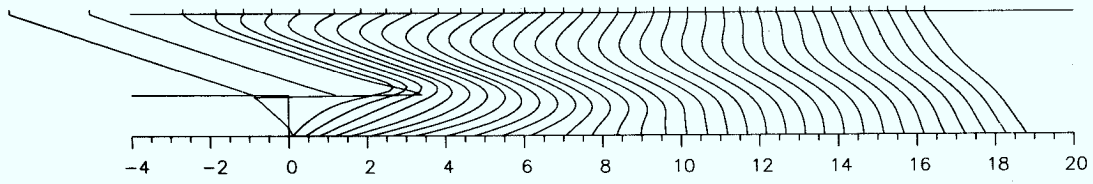
obere Kontur:
statischer Druck und
Wandschubspannung



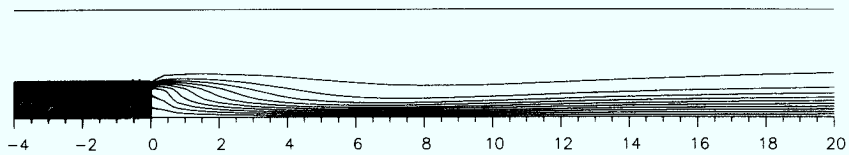
untere Kontur:
statischer Druck und
Wandschubspannung

Abb. 10 e-g

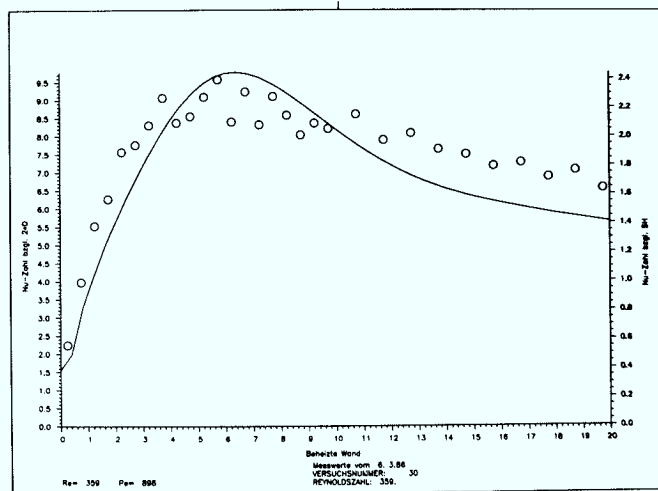
Re = 359 Pe = 898



Wirbelvektor



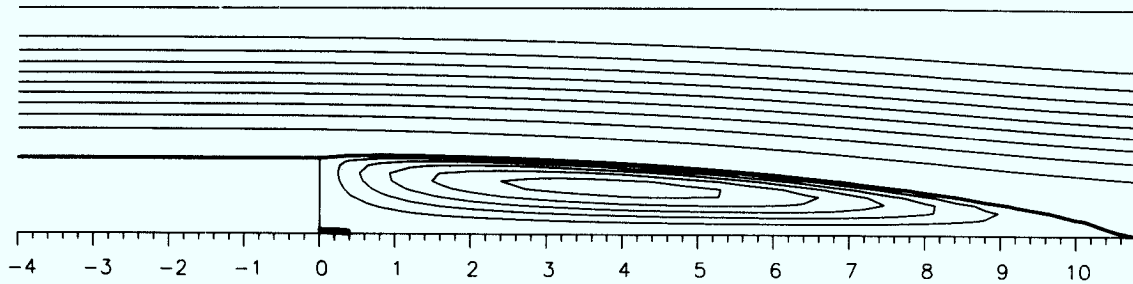
Temperatur



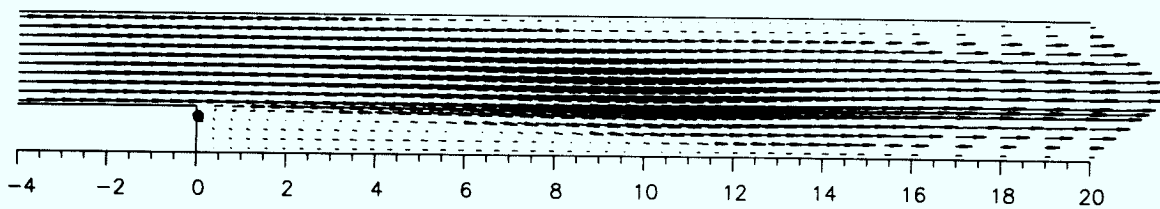
Wärmeübergang

Abb. 11a-d

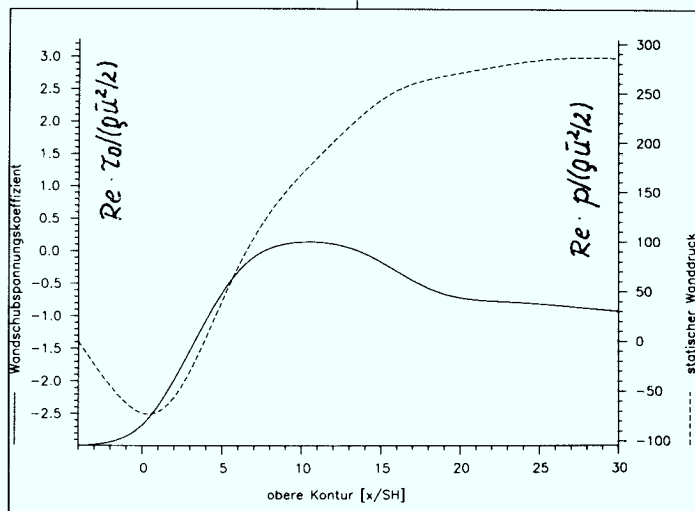
Re = 979 Pe = 2448



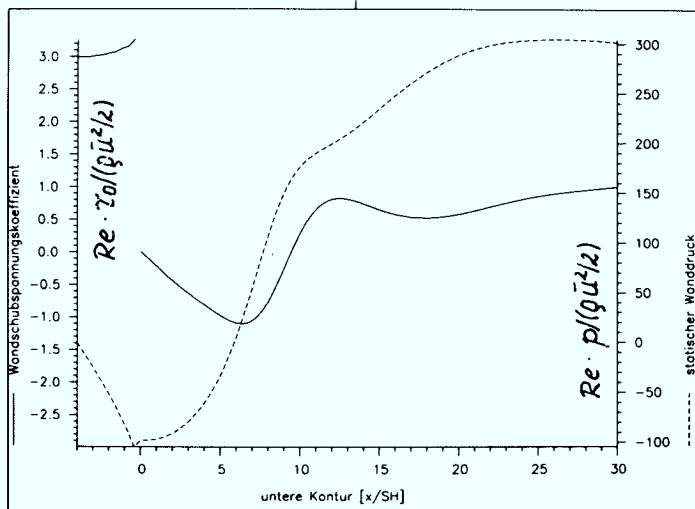
Stromfunktion



Geschwindigkeit



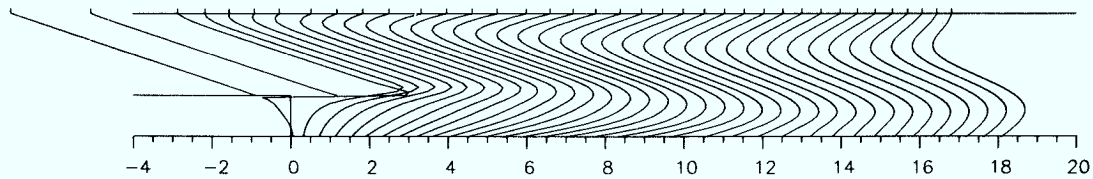
obere Kontur:
statischer Druck und
Wandschubspannung



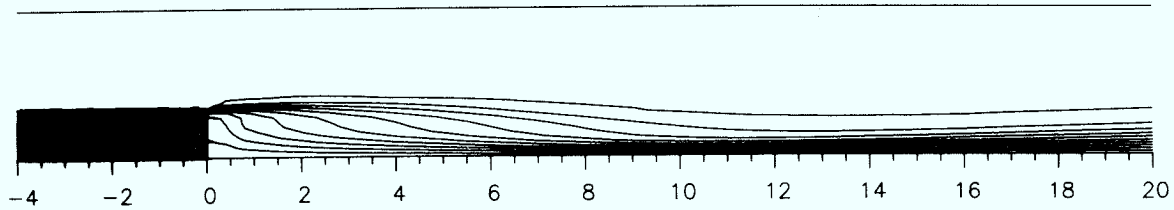
untere Kontur:
statischer Druck und
Wandschubspannung

Abb. 11 e-g

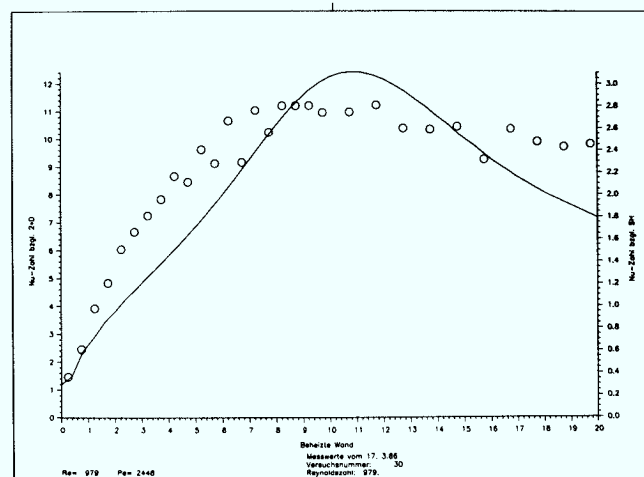
Re = 979 Pe = 2448



Wirbelvektor



Temperatur



Wärmeübergang

verteilung fast ausschließlich durch die Reibungskräfte bestimmt wird. Mit Ausnahme des unmittelbaren Stufenbereiches verläuft der Druck linear mit der Lauflänge, was charakteristisch für die ausgebildete Kanalströmung ist. Die Zunahme des statischen Druckes infolge der Querschnittserweiterung wird durch den Reibungsdruckverlust kompensiert. Die Wandschubspannungen entlang beiden Konturen fallen von $\tau_0/(g\bar{u}^2/2) \cdot Re = 3$ im Einlauf auf $\tau_0/(g\bar{u}^2/2) \cdot Re = 1,33$ im erweiterten Teil des Kanals. Diese Werte erhält man ebenfalls aus der exakten Lösung der Gleichung für den ebenen Kanal. Bemerkenswert ist noch, daß die Strömung unmittelbar vor Erreichen der Stufenkante beschleunigt wird. Dieses Phänomen wird bei allen Reynolds-Zahlen beobachtet. Es ist an der Zunahme der Wandschubspannungen zu erkennen. Das Fehlen der Wandreibung stromab der Stufenkante wirkt also stromauf.

Bei der höheren Reynolds-Zahl (Abb. 10c, 10d) zeigt sich bezüglich der Druckverteilung ein völlig anderes Bild. Die durch die Erweiterung des Querschnitts hervorgerufene Verzögerung der Strömung bewirkt einen Anstieg des Wanddruckes an beiden Kanalkonturen. Wegen der Unsymmetrie der Strömung liegt das Maximum an der oberen Kontur weiter stromab als an der unteren Kontur. Im Kanalauslauf fällt der Druck erneut unter dem Einfluß der Wandreibung ab. Die Wandschubspannungen sind im Totwassergebiet wegen der Rückströmung negativ und steigen stromab des Auftreffpunktes der Außenströmung auf den Wert der Kanalströmung an. An der oberen Kontur wird kein Vorzeichenwechsel der Scherspannung beobachtet. Dies zeigt an, daß die Strömung dort nicht ablöst (Gl. (4) bzw. (8)).

Die Verteilung der Wirbelstärke ist in Abb. 7e bis 11e dargestellt. Da bei der laminaren ebenen ausgebildeten Kanalströmung, die in großem Abstand stromauf und stromab der Stufe vorliegt, die Geschwindigkeitsverteilung über dem Querschnitt parabolisch ist

$$u \propto y^2$$

muß nach Gl. (4) wegen $V = 0$ und somit $dv/dx = 0$ der Wirbelvektor wegen

$$\omega \propto \frac{\partial u}{\partial y}$$

linear über dem Querschnitt verlaufen.

Die exakte Lösung liefert:

$$\Omega = -3\left(\frac{d}{D}\right)^2 \left[1 - 2 \frac{y}{D}\right] \quad (62)$$

Im kleineren Kanalquerschnitt ($D = d$) variiert Ω also zwischen -3 an der unteren und +3 an der oberen Kontur, im großen Kanalquerschnitt ($d/D = 2/3$) zwischen -1,33 und +1,33. Im Eintrittsquerschnitt erhält man im vorliegenden Fall für alle Reynolds-zahlen die lineare Verteilung der Wirbelstärke. Im Austrittsquerschnitt ist dies, wenn man die Länge des erweiterten Kanals mit 20 Stufenhöhen festlegt, nur für Reynolds-Zahlen $Re < 100$ der Fall. Wie die Abbildungen 10e und 11e zeigen, sind die Störungen durch die Ablösevorgänge an der Stufe nach 20 Stufenlängen noch nicht abgeklungen. Es ist eine bekannte Tatsache, daß die Abklingauflängen einer Störung mit zunehmender Reynolds-Zahl steigen, da die stabilisierenden Scherkräfte im Verhältnis zu den Beschleunigungskräften abnehmen.

Das Temperaturfeld erhält man aus der Lösung der Energiegleichung Gl. (15). Die Abbildungen 7f bis 11f zeigen das Ergebnis in der Form von Isothermen für unterschiedliche Peclet-Zahlen. Man erkennt, wie mit zunehmender Peclet-Zahl das Isothermenfeld zusammengedrängt wird. Je dichter die Isothermen verlaufen, desto höher ist die Wärmestromdichte.

Wertet man den Wandgradienten der Temperatur aus, so ergibt sich die lokale Nusselt-Zahl. Diese ist in den Abbildungen 7g - 11g zusammen mit den erwähnten Ergebnissen der Stoffübergangsmessungen aufgetragen. Während bei Reynolds-Zahlen $Re < 200$ die Übereinstimmung von Theorie und Experiment sehr gut ist, stellt man bei höheren Reynolds-Zahlen besonders hinter dem Punkt des Wiederaanlegens der Strömung größere Abweichungen fest. Da die experimentellen Ergebnisse systematisch höher liegen als die theoretischen, ist davon auszugehen, daß der Vorgang des Wiederaanlegens mit turbulenzähnlichem Queraustausch verbunden ist, der den Stoffaustausch verbessert.

Die Kurven für den örtlichen Wärmeübergang zeigen am Auftreffpunkt der Strömung auf die untere Kanalwand ein Maximum. Dieses wandert mit zunehmender Reynolds-Zahl von der Kante ausgehend stromab. Jenseits des Maximums nimmt der örtliche Wärmeübergang kontinuierlich ab und mündet je nach Größe der Peclet-Zahl und Reynolds-zahl nach unterschiedlichen Lauflängen in einen asymptotischen Wert ein. Dieser ist unterschiedlich, da bei der Berechnung der Nusselt-Zahl als treibendes Temperaturgefälle $\Delta\Theta = 1$ gesetzt

wurde. In Wirklichkeit heizt sich der Kanal in Strömungsrichtung auf, so daß $\Delta\vartheta < 1$ wird und die Nusselt-Zahl einen höheren asymptotischen Wert annehmen würde.

8.2 Einfluß der Prandtl-Zahl und Reynolds-zahl auf den lokalen

Wärmeübergang

Der Einfluß der Prandtl-Zahl auf den Wärmeübergang wurde bei Variation der Reynolds-Zahl von $10 < Re < 1000$ untersucht. Es wurden Rechenläufe mit $Pr = 0.7; 1,0$ und $2,5$ durchgeführt. Wie Abb. 12 zeigt, nimmt der Wärmeübergang mit steigender Prandtl-Zahl zu. Die Abhängigkeit kann mit $Pr^{1/3}$ gut approximiert werden. Dies verdeutlichen die Abb. 13, 14 und 15. Weiterhin lassen die Ergebnisse erkennen, daß am Wärmeübergang die Wärmeleitung sowie die Konvektion beteiligt sind. Während die Nu-Zahl bei der Wärmeleitung unabhängig von der Prandtl-Zahl ist, kann der Wärmeübergang bei Konvektion wie erwähnt mit $Pr^{1/3}$ angenähert werden. In Gebieten niedriger Geschwindigkeit, also in den Rezirkulationszonen, herrscht bei kleinen Reynolds-Zahlen die Wärmeleitung vor, so daß dort in der gewählten Auftragung $Nu/Pr^{1/3}$ die Werte für die höheren Prandtl-Zahlen unterhalb derjenigen für kleine Prandtl-Zahlen liegen. Mit zunehmender Reynolds-Zahl verschwindet auch im Rückströmgebiet der Einfluß der Wärmeleitung, so daß wie Abb. 15 zeigt, bei $Re = 1000$ die Normierung der Ergebnisse mit $Pr^{1/3}$ über die gesamte beheizte Fläche gelingt.

Die Abmessung des Rückströmgebietes wird von der Reynolds-Zahl beeinflusst, so daß an einem festen Ort der Wärmeübergang nicht nur von der Reynolds-Zahl, sondern auch von der Längsstrecke des Totwassers abhängt. Wie die Berechnungen jedoch zeigen, besteht für den maximalen Wärmeübergang unabhängig von der Lage des Auftreffpunktes der Strömung eine eindeutige Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl. Man erhält

$$Nu_{max} \equiv \frac{\alpha_{max} 2d}{\lambda} = 1,81 \cdot Re^{0,224} \cdot Pr^{1/3} \quad (63)$$

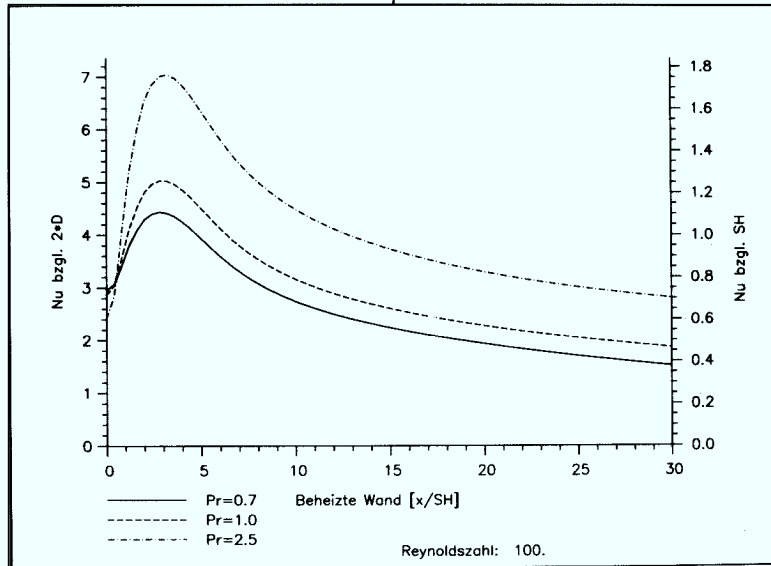
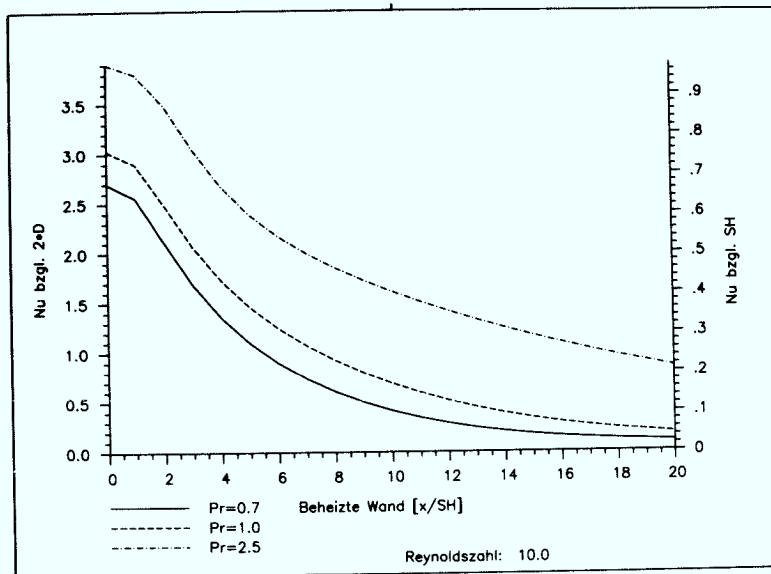


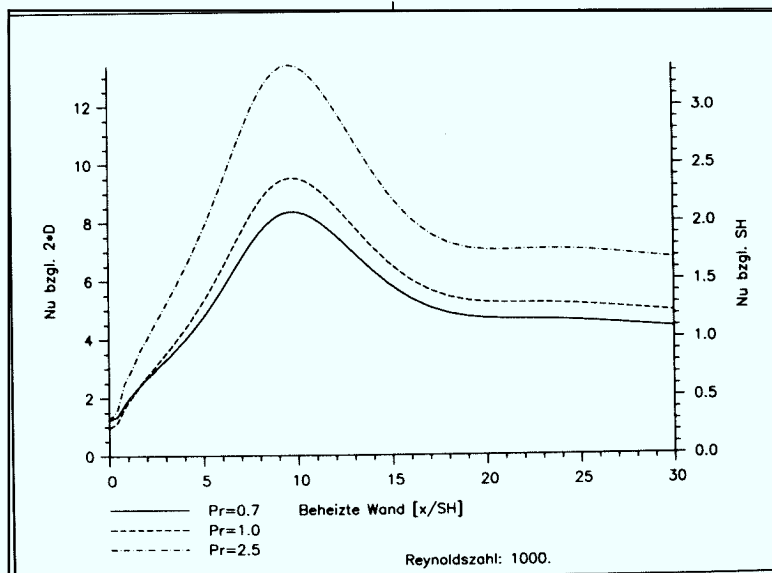
Abb. 12

Einfluß der Prandtl-Zahl
auf den örtlichen Wärme-
übergang am Boden des er-
weiterten Kanals

12a) $Re = 10$



12b) $Re = 100$



12c) $Re = 1000$

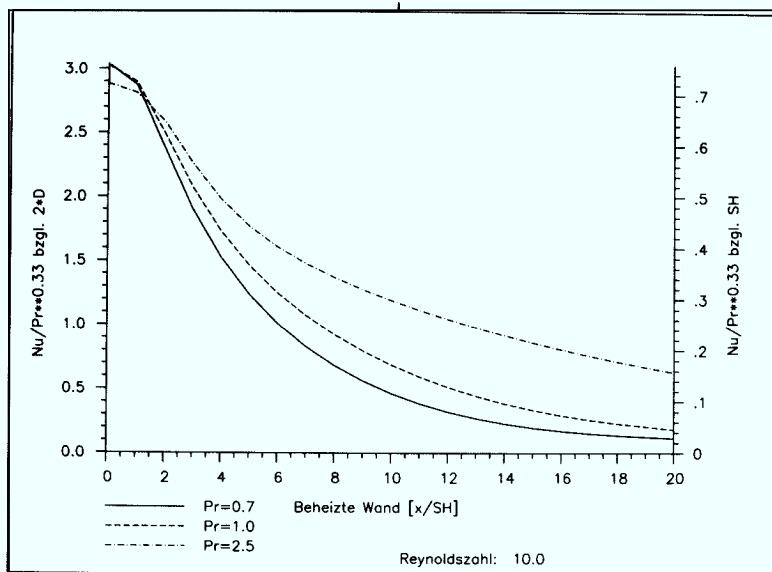


Abb. 13,14,15

Wärmeübergang am Boden
des erweiterten Kanals.
Normierung mit der
Funktion $Pr^{1/3}$

Abb. 13

$Re = 10$

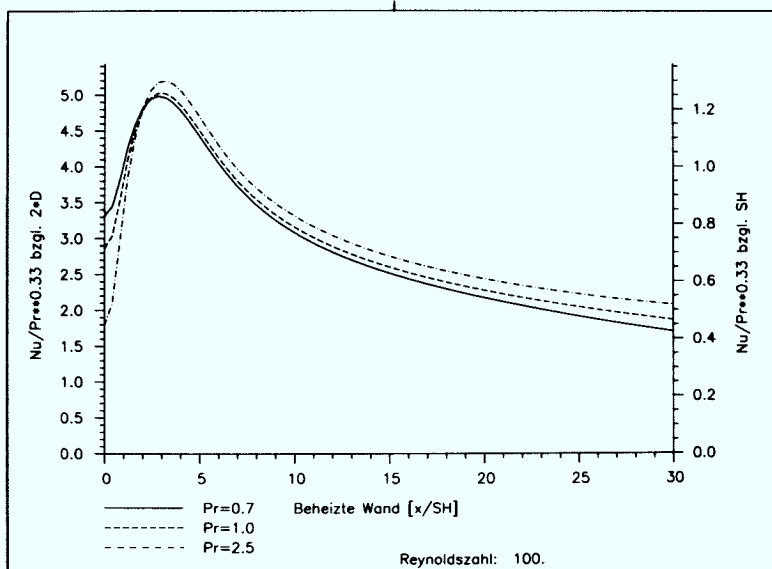


Abb. 14

$Re = 100$

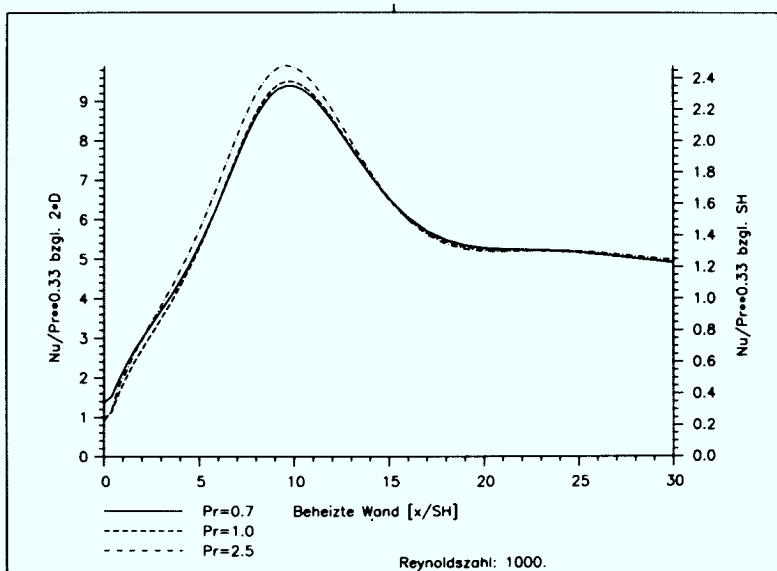


Abb. 15

$Re = 1000$

9. Vergleich mit den Ergebnissen anderer Autoren

Die Strömungsverhältnisse in Rezirkulationsgebieten wurden an zahlreichen Geometrien untersucht. Zum geringen Teil wurden auch Wärmeübergangs- bzw. Stoffübergangsmessungen durchgeführt. Kottke /4/ hat eine umfangreiche Zusammenstellung veröffentlicht, aus der zu entnehmen ist, daß die abgelöste Strömung an etwa vierzig verschiedenen Gebilden studiert wurde. Die einseitige Kanalerweiterung, die in der vorliegenden Arbeit behandelt wird, wurde von den Autoren /7/ bis /16/ untersucht, wobei /7/ bis /12/ den Fall der turbulenten Strömung betrachteten.

In /13/ wurden unter Verwendung eines Laservelocitymeters Geschwindigkeitsprofile bei Laminarströmung und unterschiedlichen Reynolds-Zahlen ausgemessen. Diese experimentellen Ergebnisse eignen sich besonders gut zum Testen des Rechenprogramms, da die eigenen Rechnungen zufällig für dieselbe Geometrie durchgeführt wurden. Die im Experiment vorhandene Vorlaufstrecke reicht nicht aus, an der Stufenkante ein ausgebildetes, laminares Geschwindigkeitsprofil zu erzeugen. Daher mußte dieser Effekt bei der Berechnung berücksichtigt werden.

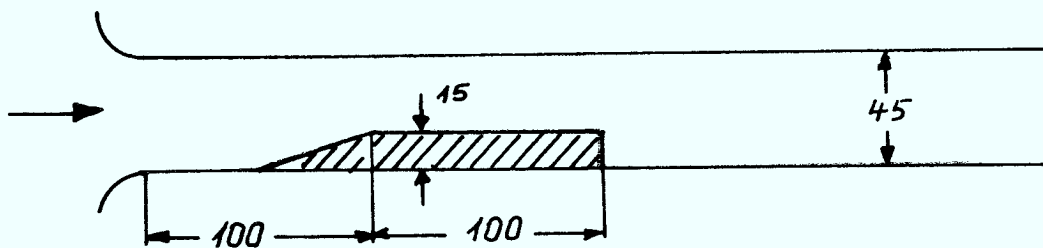


Abb. 16: Experimenteller Aufbau nach /13/, Maße in Millimetern

Auf Grund der geometrischen Verhältnisse, die in Abb. 16 dargestellt sind, wurde angenommen, daß die Vorlaufstrecke 150 mm entsprechend 10 Stufenhöhen beträgt. Das Ergebnis der Rechnung ist in den Abb. 17 dargestellt. Die Übereinstimmung von Theorie und Experiment kann als sehr gut bezeichnet werden. Chiu und Pletcher /14/ haben die genannten Experimente unter Vernachlässigung der Diffusionsterme in Strömungsrichtung ebenfalls nachgerechnet. Die Abweichungen zwischen theoretischen und experimentellen Ergebnissen erweisen sich als erheblicher im Vergleich zu den eigenen Resultaten.

Abb. 5 stellt die Ausdehnung des Rezirkulationsgebietes als Funktion der Reynolds-Zahl dar. Außer dem theoretischen Verlauf sind die experimentellen Ergebnisse von Denham /13/ eingezeichnet. Diese wurden durch Auswertung von Farbfadenversuchen und mittels Laservelocimetrie gewonnen. Auch die Länge des Rückströmgebietes wird durch das vorliegende Programm in guter Übereinstimmung mit den Messungen berechnet. (Abb. 6)

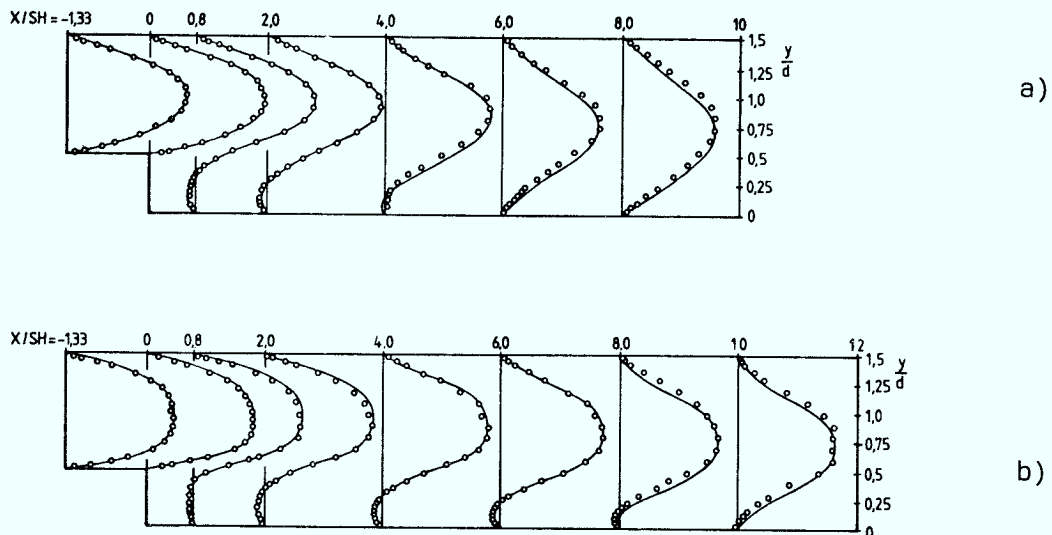


Abb. 17: Experimentelle Geschwindigkeitsverteilung nach /13/. Durchgezogene Linien: diese Arbeit. a) $Re = 292$ b) $Re = 916$

10. Zusammenfassung

Für einen laminar durchströmten beheizten Kanal mit einseitiger plötzlicher Erweiterung werden das Strömungs- und das Temperaturfeld berechnet. Wegen der auftretenden Strömungsablösung müssen die vollständigen Bewegungsgleichungen sowie die Energiegleichung ohne die bei Grenzschichtströmungen zulässigen Vereinfachungen gelöst werden. Durch Einführung des Wirbelvektors kann der Druckterm eliminiert werden. Weiterhin wird die Kontinuitätsgleichung durch einen geeigneten Ansatz für die Stromfunktion identisch erfüllt. Beide Maßnahmen reduzieren die vier partiellen Differentialgleichungen auf zwei partielle Differentialgleichungen zweiten Grades, zweiter Ordnung. Die Bewegungsgleichungen erscheinen somit in der als Wirbeltransportgleichung bekannten Form.

Das Gleichungssystem wird mittels der Methode der finiten-Differenzen numerisch gelöst. Hierbei wird das Crank-Nicolson-Verfahren angewendet, das, ausgehend vom bekannten Strömungs- und Temperaturfeld in der Ruhelage zum Zeitpunkt $\tau = 0$, die zeitliche Entwicklung der Strömung und des Wärmetransportes berechnet. Die Rechnung ist abgeschlossen, wenn sich die Strömungs- und Temperaturparameter zeitlich nicht mehr ändern.

Das Strömungsfeld wurde nach zwei unterschiedlichen Verfahren berechnet, um deren Leistungsfähigkeit zu testen. Es handelt sich um ein implizites Verfahren (Modus I) und ein explizites Verfahren mit halbversetztem Maschengitter (Modus II). Modus I benötigt zwar ca. 25 % mehr Rechenzeit als Modus II, erreicht aber bei gleichen Stützweiten numerische Konvergenz noch bei doppelt so hohen Reynolds-Zahlen.

So war es möglich, Rechnungen bis kurz unterhalb des Umschlages von der laminaren in die turbulente Strömung durchzuführen, wobei im Anströmkanal die maximale Reynolds-Zahl $Re_d = 2100$ betrug.

Die theoretischen Ergebnisse wurden mit fremden und eigenen experimentellen Resultaten verglichen. Die von Denham et al. /13/ gemessenen Geschwindigkeitsprofile stimmen mit den berechneten sehr gut überein. Das Rezirkulationsgebiet, das sich stromab der Stufe ausbildet, wird bezüglich seiner räumlichen Erstreckung ebenfalls gut wiedergegeben. Die eigenen Stoffübergangsmessungen lassen erkennen, daß bei Reynolds-Zahlen $Re > 200$ stromab des Auftreffpunktes der Strömung im Experiment größere örtliche Stoffübergangszahlen gemessen werden, als sie sich aus der Theorie ergeben. Dies läßt sich möglicherweise mit instationären Effekten in der Nähe des Auftreffpunktes erklären.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß sich die theoretischen und experimentellen Ergebnisse im guten Einklang befinden und somit das Berechnungsverfahren erfolgreich angewendet werden kann.

11. Nomenklatur

a	m^2/s	Temperaturleitfähigkeit
c	-	Wandschubspannungskoeffizient
d	m	Kanalhöhe: Eintrittsquerschnitt
D	m	Kanalhöhe: Austrittsquerschnitt
h	n	Schrittweite
i	-	Index in y-Richtung
j	-	Index für den Zeitschritt
k	-	Index in x-Richtung
n	-	Iterationsindex
Nu	$= 2 \alpha d / \lambda$	Nusselt-Zahl, auf doppelte Kanalhöhe bezogen
Nu _{SH}	$= \alpha \text{SH} / \lambda$	Nusselt-Zahl, auf Stufenhöhe bezogen
P	$= p / (\rho \bar{u}^2 / 2)$	Druckkoeffizient
p	N/m^2	Druck
Pe	$= \bar{u} 2d / a$	Peclet-Zahl
Pr	$= \nu / a$	Prandtl-Zahl
Re	$= 2\bar{u}d / \nu$	Reynolds-Zahl, auf doppelte Kanalhöhe bezogen
Re _{SH}	$= \bar{u} \text{SH} / \nu$	Reynolds-Zahl, auf Stufenhöhe bezogen
Sc	$= \delta / a$	Schmidt-Zahl
Sh	$= \text{Bd} / \delta$	Sherwood-Zahl
SH	m	Stufenhöhe
t	s	Zeit
T	K	Temperatur
u	m/s	Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung
u	m/s	mittelere Eintrittsgeschwindigkeit
U	$= u / \bar{u}$	dimensionslose Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung
v	m/s	Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung
V	$= v / \bar{u}$	dimensionslose Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung
x	m	Koordinate in Hauptrömungsrichtung
X	$= x / d$	dimensionslose Koordinate
y	m	Koordinate senkrecht zur Hauptrömungsrichtung
Y	$= y / d$	dimensionslose Koordinate

Griechische Symbole

α	$\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$	Wärmeübergangskoeffizient
β	m/s	Stoffübergangskoeffizient
δ	m^2/s	binärer Diffusionskoeffizient
ε	-	Fehlerschranke
Θ	$= T/\Delta T$	dimensionslose Temperatur
λ	$\text{W}/(\text{mK})$	Wärmeleitfähigkeit
ν	m^2/s	kinematische Zähigkeit
ϱ	kg/m^3	Dichte
τ	$= t \bar{u}/d$	dimensionslose Zeit
τ_0	N/m^2	Wandschubspannung
ψ	m^2/s	Stromfunktion
Ψ	$= \psi/(\bar{u}d)$	dimensionslose Stromfunktion
ω	$1/\text{s}$	Wirbelvektor
Ω	$= \omega d/\bar{u}$	dimensionsloser Wirbelvektor

12. Literaturhinweise

- /1/ Griemert, R.
 Staubablagerung in Gebieten abgelöster Strömung
 Jül-Bericht 1985 (März 1985)

- /2/ Rosenberg von, D.U.
 Methods for numerical solution of partial differential equations.
 New York, American Elsevier Publ. Company (1969)

- /3/ Adler, B.; Fernbach, S.; Rotenberg, M.
 Methods in Computational Physics, Vol 3
 New York and London, Academic Press (1964)

- /4/ Presser, K.H.
 Experimentelle Prüfung der Analogie zwischen konvektiver Wärme- und
 Stoffübertragung bei nicht abgelöster Strömung.
 Wärme- und Stoffübertragung 1 (1968), 224-236

- /5/ Seban, R.A.; Emery, A; Levy, A.
 Heat transfer to separated and reattached subsonic turbulent flows
 obtained downstream of a surface step
 J. Aero, Space Sci 26 (1959), 809-814

- /6/ Abbot, D.E.; Kline, S.J.
 Experimental investigation of subsonic turbulent flow over single
 and double backward facing steps
 Trans ASME Ser. D 84 (1962), 317-325

- /7/ Mohsen, A.M.
 Experimental investigation of the wall pressure fluctuations in
 subsonic separated flows.
 Boeing Co Rep,. D6-17094 AD 669214 (1967)

- /8/ Aung, W.; Goldstein, R.J.
 Heat transfer in turbulent separated flow downstream of a rearward-
 facing step
 Israel J. Techn. 10 (1972), 35-41

- /9/ Tayolor, C.; Thomas, C.E.; Morgan, K.
Modelling flow over a backward-facing step using the F.E.M. and the
two equation model of turbulence
Int. J. Numerical Methods in Fluids 1 (1981) 295-304

- /10/ Kottke, V.
Strömung, Stoff-, Wärme- und Impulsübertragung in lokalen Ablösege-
bieten
Fortschr.-Ber. VDI-Z. 7, Nr. 77 (1983)

- /11/ Goldstein, R.J.; Eriksen, V.L.; Olsen, R.M.; Eckert, E.R.G.
Laminar separation, reattachment and transition of flow over a
downstream-facing step
Trans. ASME, Ser D 92 (1970), 732-739

- /12/ Gaudet, L.; Winter K.G.
Measurement of the drag of some characteristic aircraft
excrescences immersed in turbulent boundary layers
ARGARD-CP-124 (1973), Aerodynamic drag 4-1/4-12

- /13/ Denham, M.K.; Patrick, M.A.
Laminar flow over a downstream-facing step in a two-dimensional flow
channel
Trans. Inst. Chem. Engrs. 52 (1974) 361/367

- /14/ Armaly, B.F.; Durst, F.
Reattachment length and circulation regions downstream of a two-
dimensional single backward-facing step
ASME Winter Annual Meeting: Flow and Heat Processes in Recirculating
Flows, Chicago, Nov. (1980)

- /15/ Ashurst, W.T.; Durst, F.; Tropea, C.;
Two dimensional searated flow; experiment and discrete vortex dynamics
simulation
SAND 79-8830 Oct. (1980), Sandia Nat. Lab. Albuquerque, NM, USA

/16/ Chiu I.-T.; Pletcher, R.H.

Prediction of heat transfer in a laminar flow over a rearward-facing step using the partially-parabolized Navier-Stokes equations.

Eighth Int. Heat Transfer Conf. San Francisco, CA, USA, Vol. 2
(1986), 415-420

Fließbild des Rechenprogrammes

