



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH GmbH

Institut für Festkörperforschung

**Mikroskopische Theorie der Elektron Spin
Resonanz in Heisenberg Spingläsern**

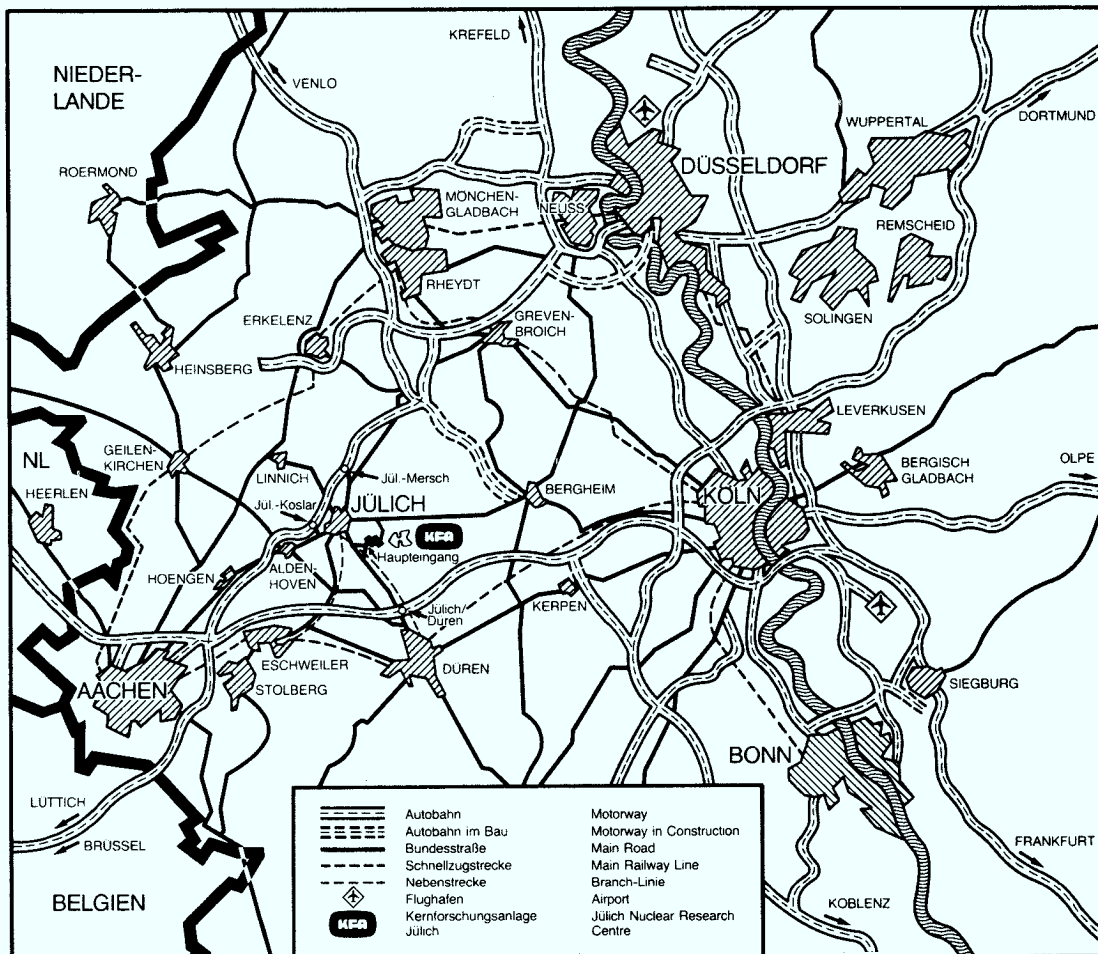
und

**Thermische Fluktuationen in klassischen
Spinmodellen mit Zufallsfeldern**

von

Ulrich Schulz

Jül-2227
August 1988
ISSN 0366-0885



Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 2227
 Institut für Festkörperforschung Jül-2227

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH
 Postfach 19 13 · D-5170 Jülich (Bundesrepublik Deutschland)
 Telefon: 02461/610 · Telex: 833556-0 kf d

**Mikroskopische Theorie der Elektron Spin
Resonanz in Heisenberg Spingläsern**

und

**Thermische Fluktuationen in klassischen
Spinmodellen mit Zufallsfeldern**

von

Ulrich Schulz

D 61 (Diss. Uni. Düsseldorf)



Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit besteht aus zwei Teilen: der erste Teil enthält eine mikroskopische Theorie der Elektron Spin Resonanz (ESR) in Heisenberg Spingläsern, der zweite Teil untersucht thermische Fluktuationen in einigen klassischen Spinmodellen mit Zufallsfeldern.

Nach der kurzen Darstellung einiger theoretischer Arbeiten über ESR Frequenzen und deren Linienbreiten gibt der erste Teil eine mikroskopische Begründung der phänomenologischen Theorie der ESR-Frequenz von Henley/Sompolinsky/Halperin. Danach wird eine Modenkopplungs Theorie der Dämpfung dieser Resonanzen entwickelt. Der letzte Abschnitt dieses Teils enthält numerische Resultate der Modenkopplungs Theorie.

Der zweite Teil stellt eine Gruppe klassischer Spin Modelle mit Zufallsfeldern vor und zeigt, daß es eine Hierarchie exakter Identitäten für die statischen Korrelationsfunktionen gibt, sowohl im Orts/Fourier- als auch im Replika Variablen Raum. Für tiefe Temperaturen und starke Unordnung wird streng gezeigt, daß das Imry/Ma Argument das richtige Skalenverhalten der Paarkorrelation im 1-d Random Field Ising Model (RFIM) liefert. Dieses Resultat wird benutzt, um das Skalenverhalten der Domänenwand Fluktuationen im höher dimensionalen RFIM zu diskutieren.

Abstract

This work consists of two parts: one that contains a microscopic theory of electron spin resonance (ESR) in Heisenberg spin glasses, the other one discusses thermal fluctuations in some classical spin models with random fields.

After a brief review of theoretical work concerning the ESR frequencies and its linewidths, part one gives a microscopic picture of the phenomenological theory of ESR frequencies of Henley /Sompolinsky/Halperin. A mode coupling approach to the damping of these frequencies is developed. The last section of this part contains numerical results of the mode coupling theory.

Part two describes a class of classical spin models with random fields and derives a hierarchy of exact identities for the static correlation functions. This is done in real and replica space. It is rigorously shown that for low temperatures and strong randomness the argument of Imry/Ma yields the right scaling behaviour of the pair correlation in the 1-d random field Ising model (RFIM). The result is used to discuss the scaling behaviour of domain wall fluctuations in the higher dimensional RFIM.

Gliederung

Kapitelübersicht

Abkürzungen

Häufig benutzte Symbole

Umrechnungsfaktoren

Teil 1

Kapitel I – VI

Teil 2

Kapitel I – III

Referenzen

Kapitelübersicht

1. Teil

Kurzreichweitige Heisenberg Spingläser: mikroskopische Theorie der Dämpfung von Elektron Spin Resonanzen

- I) Einleitung
- II) Formulierung der phänomenologischen Theorie von Henley, Sompolinsky und Halperin im Rahmen der Mori Theorie
- III) Mikroskopische Begründung der phänomenologischen Theorie von HSH
- IV) Modenkopplungstheorie der ESR-Dämpfung und die Dispersionsrelation der gedämpften HSH-Frequenzen
- V) Dämpfung der transversalen ESR-Resonanzen in der Spinglasphase
- VI) Schlußbetrachtung

2. Teil

Thermische Fluktuationen in klassischen Spinmodellen mit Zufallsfeldern

- I) Einleitung und Zusammenfassung
- II) Klassische Spinmodelle in Zufallsfeldern. Exakte Identitäten für Korrelationsfunktionen.
- III) Domänenwände im Random Field Ising Modell und das Imry-Ma Argument

Abkürzungen:

HSH	Henley-Sompolinsky-Halperin
ESR	Elektron Spin Resonanz
FDT	Fluktuations-Dissipations-Theorem
FC	field cooled
ZFC	zero field cooled
DM	Dzyaloshinsky-Moriya
EA	Edwards-Anderson
RFIM	Random Field Ising Modell
RRM	Random Rod Modell
RW	Random Walk
NMR	Nuclear Magnetic Resonance

Häufig benutzte Symbole :

χ	Suszeptibilität(smatrix)
Ω	Frequenzmatrix
Σ	Dämpfungs-, Memorymatrix
C	Korrelationsfunktion(smatrix)
K	Anisotropie
M, M_R	(remanente) Magnetisierung
H_R	$M_R \cdot \chi^{-1}$
H_i	$(K \cdot \chi^{-1})^{1/2}$
H	äußeres Magnetfeld
H_c	Kühlfeld
$\hat{v}$	Einheitsvektor in Richtung von $\vec{v}$
A^T	Transponierte der Matrix A
h	$h = H \cdot H_R + H_i^2$
$ \vec{v} $	$v = \vec{v} = (v^\alpha v^\alpha)^{1/2}$: Betrag des Vektors $\vec{v}$
$f(z)$	$f(z) = \int_0^\infty dt e^{izt} f(t)$: Laplace Transformierte von f
$\{A, B\}$	Poissonklammer von A und B
T	absolute Temperatur
a	$a = \sum_{\vec{q}, \vec{p}} (1 - K(\vec{q} - \vec{p}))$, dabei ist $K(\vec{k})$ die Fourier Transformierte der short-range Matrix K_{ij}
$\text{Prob}\{E\}$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E
S_ℓ	$S_\ell = \sum_{\mu=0}^\ell X_\mu, \quad X_\mu = \pm 1$

Umrechnungsfaktoren :

Gyromagnetisches Verhältnis γ für Elektronen

$$\gamma = g \frac{\mu_B}{\hbar} , \quad \mu_B : \text{Bohrsches Magneton}$$

$$\gamma = 1 \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 1 \text{ GHz}$$

$$\hat{=} H = 357.2 \text{ Gauss}$$

Plancksche Konstante h

$$E = hf , \quad h = 1 \quad \Rightarrow f = 1 \text{ GHz}$$

$$\hat{=} E = 6.626 \times 10^{-25} \text{ J}$$

$$\hat{=} E = 53.9 \text{ Gauss}$$

Boltzmannsche Konstante k_B

$$E = k_B T , \quad k_B = 1 \quad \Rightarrow T = 1 \text{ K}$$

$$\hat{=} E = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J}$$

$$\hat{=} E = 7.443 \times 10^3 \text{ Gauss}$$

Anisotropie pro Atom E_a

$$E_a = D^2/J \cong 10^{-18} - 10^{-20} \text{ erg}$$

$$\hat{=} 54 - 0.54 \text{ Gauss}$$

1. Teil

**Kurzreichweitige Heisenberg Spingläser:
mikroskopische Theorie der Dämpfung
von Elektron Spin Resonanzen**

K A P I T E L I

Einleitung

Ausgehend von den diese Arbeit motivierenden Experimenten werden die Ziele der Arbeit formuliert. Die mikroskopischen und makroskopischen Eigenschaften der metallischen Spingläser und die dazu relevanten Experimente werden vorgestellt. Die ESR-Theorie von Henley/Somplinsky/Halperin und deren weitgehende experimentelle Bestätigung werden referiert. Dabei wird auf die problematische Stellung der Anisotropie Konstanten in der Interpretation der ESR-Experimente durch die HSH-Theorie eingegangen. Der hydrodynamische Charakter der HSH-Theorie wird ausführlich diskutiert. Die Aussagen der mikroskopischen Theorien von Becker, Beton/Moore und Levy/Morgan-Pond/Rhagavan bzgl. der ESR-Dämpfung und Frequenzverschiebung werden vorgestellt. Eine kurze Übersicht über den 1. Teil der Arbeit wird gegeben.

I. Kapitel

Einleitung

Problemsituation :

Thema dieser Arbeit sind die kollektiven Anregungen eines Spinglases im Limes kleiner Anisotropie. Aufschluß über diese Anregungen erhält man aus ESR Experimenten, wie sie unter anderem von Mahdjour/Pappa/Wendler/Baberschke (1986) und Mahdjour (1987) durchgeführt wurden. Im folgenden sind zwei charakteristische Ergebnisse für AgMn ($c_{Mn} = 9.6\%$) für den Fall der Abkühlung im Feld unter die Einfriertemperatur $T_g = 31.2$ K wiedergegeben (der Anteil der Dämpfung, der auf die Spin-Gitter-Relaxation zurückzuführen und proportional zur Temperatur ist, ist bereits abgezogen).

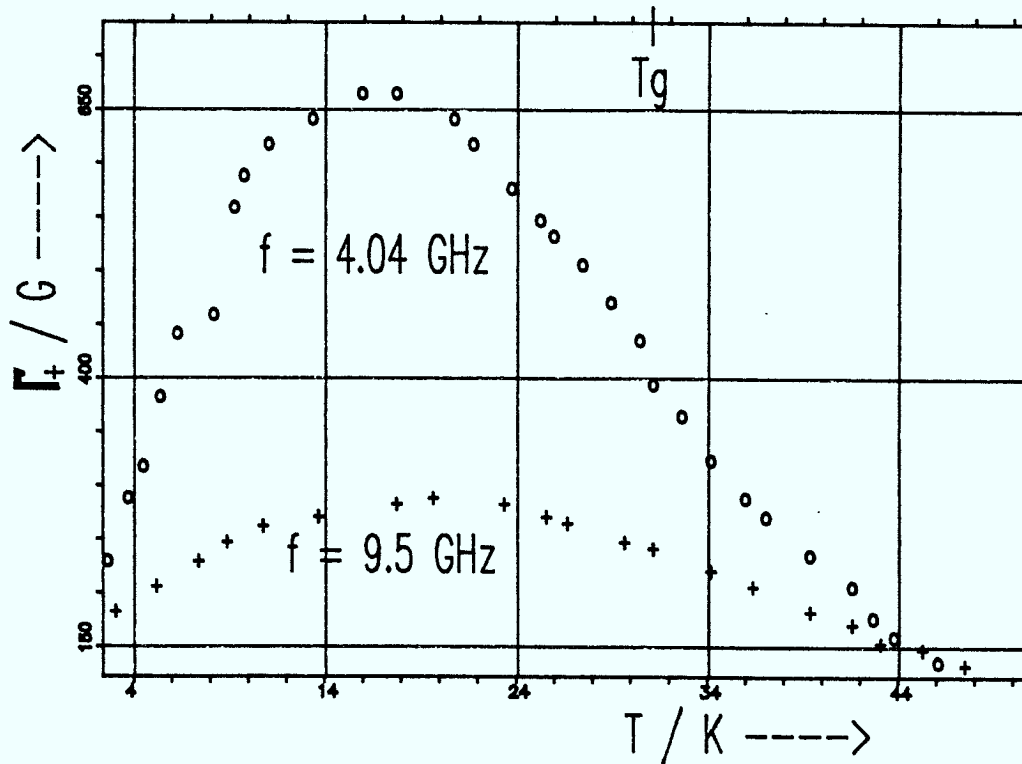


Abb. 1 Dämpfung Γ_+ für $\frac{\omega}{2\pi} = 4.04, 9.5$ GHz

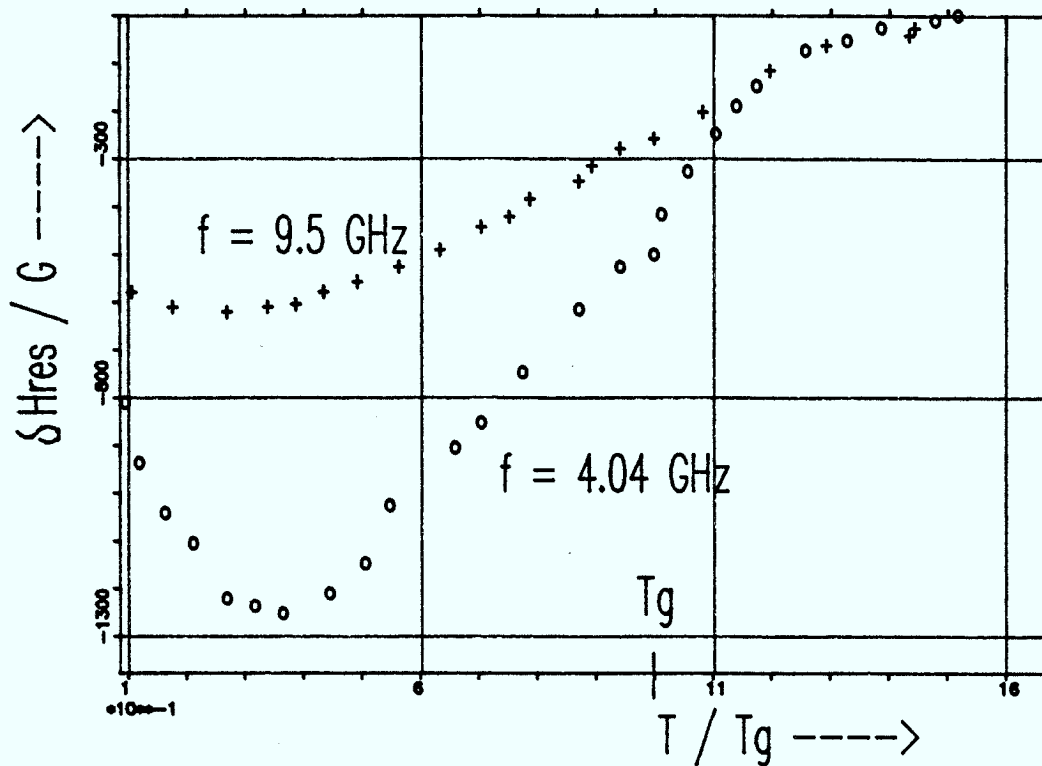


Abb. 2 Resonanzverschiebung δH_+ bezogen auf $H_{res}(T \gg T_g) = H$

Die Dämpfung der ω_+ -Resonanz (zur Benennung vgl. die Diskussion der phänomenologischen Theorie der ESR-Frequenzen von Henley/Sompolinsky/Halperin w.u.) zeigt im FC-Fall ein deutlich ausgeprägtes Maximum, dessen Wert bei kleinerer Frequenz größer ist. Bei $T = T_g$ hat Γ_+ einen endlichen Wert mit derselben Tendenz und für $T \rightarrow 0$ und $T > 1.5 T_g$ fällt die Dämpfung unabhängig von der äußeren Frequenz auf Werte $< 200 G$ ab. *Dieses Maximum der Dämpfung ist bisher nicht verstanden und theoretisch ungeklärt.*

Die Frequenzverschiebung δH_+ besitzt ein von der Frequenz abhängiges Minimum, hat bei $T = T_g$ einen endlichen Wert und verschwindet erst bei Temperaturen größer als $1.5 T_g$. *Der von Null verschiedene Wert von δH_+ bei T_g führte zu einer Diskrepanz in der Anisotropiekonstanten $K(T)$ zwischen statischen Messungen und ESR-Daten (vgl. die Diskussion der HSH-Theorie w.u.). In der vorliegen-*

den Arbeit wird eine mikroskopische Theorie der ESR von Heisenbergspingläsern in der Spinglasphase entwickelt. Wesentliche Ergebnisse dieser Arbeit sind:

- eine Rückführung der statischen Parameter der phänomenologischen Theorie von HSH auf mikroskopische Korrelationsfunktionen in niedrigster Ordnung in den Feldern $H_R = M_R \chi^{-1}$ (M_R : remanente Magnetisierung) und $H_i = (K \chi^{-1})^{1/2}$ (K: Anisotropiekonstante, χ : isotrope Suszeptibilität),
- eine Begründung der HSH-Theorie in dem Sinne, daß die mikroskopische Dynamik die *ungedämpften* Anregungen der hydrodynamischen Theorie reproduziert,
- eine Theorie der Resonanzverschiebung $\delta\omega_+$, die in guter *quantitativer* Übereinstimmung mit den Experimenten steht und den endlichen Wert von $\delta\omega_+$ bei T_g *im Einklang mit den statischen Daten* für $K(T)$ erklärt,
- ein Theorie der Dämpfung, die das Maximum von Γ_+ liefert und *qualitativ* mit den Experimenten übereinstimmt.

Mikroskopische Eigenschaften der ESR – Proben :

Die in den hier betrachteten ESR-Experimenten verwandten Materialien sind *metallische* Spingläser (Ag Mn, Cu Mn z.B.). Ihre mikroskopische Wechselwirkung enthält zwei Anteile: den (bzgl. des Spinraumes) isotropen RKKY Austausch (Ruderman/Kittel, 1954; Kasuya, 1956; Yosida, 1957) und die anisotrope DM-Wechselwirkung (Dzyaloshinsky, 1958; Moriya, 1960), deren Stärke Fert und Levy (1980/81) berechneten. Geht man von einem idealen Elektronengas aus, das mit lokalisierten Spins wechselwirkt, so erhält man in der zweiten Ordnung der Störungsrechnung einen indirekten Austausch zweier Spins an den Orten $\vec{r}_i$ und $\vec{r}_j$ von der Form (Ruderman/Kittel, 1954; s.a. Fert/Levy 1980/81)

$$J(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = J_o |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{-3} \cos(2k_F |\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (1)$$

$$J_o = \frac{9\pi}{32} \Gamma^2 E_F k_F^3$$

k_F, E_F : Fermi Impuls/Energie

Γ : Elektron – Spin Austausch .

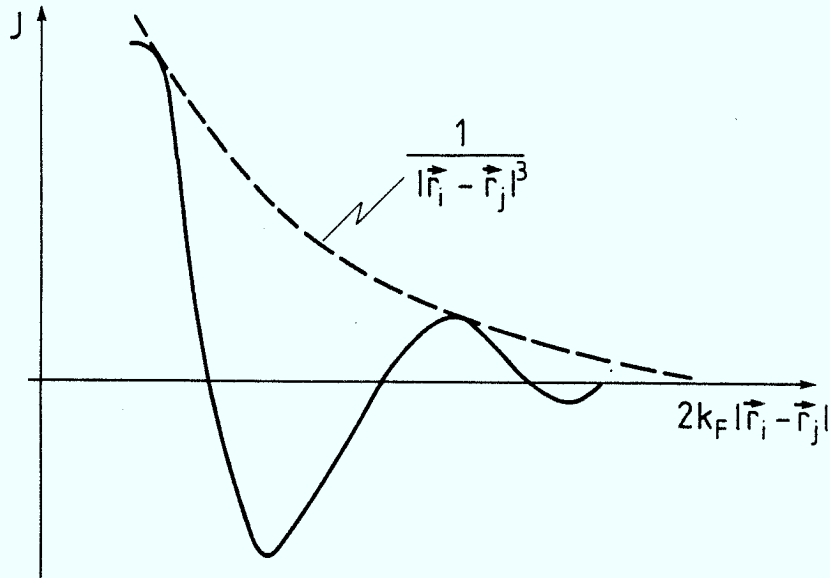


Abb. 3 Skizze des RKKY Austausches

Berücksichtigt man zusätzlich die Spin-Bahn Kopplung der Elektronen mit den nicht magnetischen Atomen, so liefert der Streuprozess der Elektronen in der dritten Ordnung der Störungstheorie (Fert/Levy, 1980/81) die Austauschenergie der Spins

$$\begin{aligned}
 E_{DM}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) &= \vec{D}_{ij} \cdot (\vec{S}_i \times \vec{S}_j) \\
 |\vec{D}_{ij}| &\sim \Gamma^2(r_i r_j |\vec{r}_i - \vec{r}_j|)^{-1} \sin(k_F [r_i + r_j + |\vec{r}_i - \vec{r}_j|]) \\
 \hat{D}_{ij} &= \hat{r}_i \times \hat{r}_j,
 \end{aligned} \tag{2}$$

d.h.: ihre Stärke ist umgekehrt proportional zum Abstand der beiden Spins und, wie der RKKY-Austausch, *oszillierend*. Die Isotropie der Wechselwirkung wird durch die Kopplung an die *lokale* Achse $\hat{r}_i \times \hat{r}_j$ zerstört. Da die Spins in den Legierungen zufällig verteilt sind, ist die lokale Achse $\hat{D}_{ij}$ ebenfalls zufällig orientiert, so daß sich *makroskopisch keine ausgezeichnete Richtung ergibt* ("isotrope" Anisotropie).

Edwards und Anderson schlugen 1975 ein Modell vor, das die stochastische und oszillierende Eigenschaft des RKKY-Austausches durch Gauß verteilte Zufallsgrößen J_{ij} nachbildet:

$$\mathcal{H}_{EA} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (3)$$

$$\overline{J_{ij}} = 0$$

$$\overline{J_{ij}, J_{kl}} = J^2 K_{ij} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

(Mittelungen der Form $\overline{}$ bezeichnen im folgenden Mittelungen über die Unordnung in der Wechselwirkung, $\langle \rangle$ stellen thermische Mittelwerte dar). K_{ij} ist die short-range Matrix, die nur für auf dem Gitter benachbarte Plätze $\vec{r}_i$ und $\vec{r}_j$ von Null verschieden ist.

Analog wird die DM-Wechselwirkung durch einen Gauß verteilten Zufallsvektor modelliert:

$$H_{DM} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \vec{D}_{ij} \cdot (\vec{S}_i \times \vec{S}_j) . \quad (4)$$

$$\vec{D}_{ij} = -\vec{D}_{ji}$$

$$\overline{D_{ij}^\alpha} = 0 , \quad \alpha = x, y, z$$

$$\overline{D_{ij}^\alpha D_{kl}^\beta} = D^2 K_{ij} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \delta_{\alpha\beta} .$$

Das Verhältnis von RKKY- und DM-Austausch liegt in der Größenordnung von $D/J \sim 0.1$ (Fert/Levy, 1980/81), d.h.: die Anisotropie ist *schwach*.

Wichtig für das Spinglasverhalten (auch z.B. bei Isolatoren wie EuSrS (Maletta, 1982)) ist Unordnung verbunden mit konkurrierenden Wechselwirkungen der magnetischen Momente.

Makroskopische Eigenschaften von Spingläsern :

Kühlt man ein Spinglas unter eine als T_g bezeichnete Temperatur ($T_g = 11 - 31.2$ K für Ag Mn, $c_{Mn} = 2.7 - 9.6$ %, Mahdjour, 1987), so frieren die einzelnen magnetischen Momente in zufällige Richtungen ein, ohne daß sich eine magnetische Fernordnung ausbildet. Dies wird zum einen durch ein scharfes Maximum bei T_g im Imaginärteil der Wechselfeld Suszeptibilität χ''_{ac} angezeigt, zum anderen durch das Fehlen magnetischer Bragg Reflexe in der Spinglasphase (Mulder/Duyneveldt/Mydosh, 1982; Maletta/Felsch, 1979).

Wird ein metallisches Spinglas (CuMn, AgMn) in einem äußeren Feld $\vec{H}_c$ unter T_g gekühlt, so erhält man eine remanente Magnetisierung $\vec{M}_R$. Die starke Asymmetrie des Hysteresesyklus' und die Messungen der transversalen Suszeptibilität $\chi_\perp$ (Préjean/Joliclerc/Monod, 1980; Hippert/Alloul, 1982; Alloul/Hippert, 1983; Hippert/Alloul/Fert, 1982) zeigen, daß für tiefe Temperaturen ($T \ll T_g$) und hinreichend kleine Drehwinkel ($\theta < 40^\circ$ bei CuMn z.B.) der *unidirektionale* Charakter der Anisotropie dominiert:

$$E_{an} = -K \cos \theta \quad \theta : \text{Drehwinkel} . \quad (5)$$

Für $T \ll T_g$ findet man Übereinstimmung der $\chi_\perp$, NMR und ESR Daten für das Anisotropiefeld $H_A = K/M_R$ (Hippert/Alloul, 1982).

Die Anisotropiekonstante K skalt linear mit der Mn-Konzentration in CuMn und AgMn und die zusätzliche Verunreinigung mit Au-Atomen (die die Spin-Bahn Wechselwirkung der Leitungselektronen mit *nicht magnetischen* Atomen verstärkt) erhöht die Anisotropie ebenfalls linear mit c_{Au} (Préjean/Joliclerc/Monod, 1980; Hippert/Alloul, 1982). Dies steht im Einklang mit einer durch mikroskopische DM-Wechselwirkung hervorgerufenen Anisotropie (vgl. die Diskussion im vorigen Abschnitt).

Betont sei, daß die Anisotropie eine *intrinsische* Eigenschaft der (metallischen) Spingläser unabhängig von der remanenten Magnetisierung ist (s. folgenden Abschnitt).

Phänomenologische ESR – Theorie von HSH (Henley/Sompolinsky/Halperin, 1982) :

Henley/Sompolinsky/Halperin schlugen 1982 eine phänomenologische Theorie der ESR-Frequenzen für Spingläser mit remanenter Magnetisierung und Anisotropie vor. Der Hauptteil der Arbeit setzt rein *unidirektionale* Anisotropie, wie sie z.B. durch den DM-Austausch hervorgerufen wird, voraus. Der letzte Abschnitt diskutiert kurz den Effekt einer Mischung aus unidirektionaler und uniaxialer Anisotropie auf die ESR-Frequenzen. Hierauf wird im folgenden nicht eingegangen.

Mithilfe einer makroskopischen freien Energie $\mathcal{F}$ berechnen HSH drei unabhängige Resonanzfrequenzen $\omega_\pm$ (transversal) und ω_L (longitudinal), die experi-

mentell nachgewiesen wurden (Gullikson/Dalichaouch/Schultz, 1985). Die sich aus $\mathcal{F}$ ergebende transversale Suszeptibilität $\chi_{\perp}$ befindet sich mit statischen Messungen (Alloul/Hippert, 1983) in Übereinstimmung. Die Voraussetzungen der Theorie lauten zusammengefaßt:

- die Spins sind unterhalb von T_g in einem Gleichgewichtszustand (bei Abwesenheit äußerer Felder) in zufällige Richtungen eingefroren,
- Drehungen aus diesem Zustand müssen (da die Rotationssymmetrie im Spinraum vollständig gebrochen ist) durch *drei* unabhängige Winkel θ^{α} und damit durch eine Rotationsmatrix (Triade) $\vec{R}(\vec{\theta})$ parametrisiert werden,
- es werden nur kleine Abweichungen um den Gleichgewichtszustand betrachtet: Übergänge *zwischen* den vielen im Spinglas existierenden Zuständen werden *nicht berücksichtigt* (s.a. Halperin/Saslow, 1977; Henley, 1983),
- das metallische Spinglas besitzt *unidirektionale* Anisotropie, die durch die mikroskopische DM-Wechselwirkung hervorgerufen wird: gleichförmige Rotation der Spins ($\hat{=}$ Rotation der lokalen Anisotropie Achsen $\vec{D}_{ij}$) erfordert eine Energie

$$\begin{aligned}\Delta E &\sim \frac{1}{J} \sum_{i,j} [\vec{D}_{ij} \cdot \mathbf{R}(\vec{\theta}) \vec{D}_{ij}] \\ &\sim \frac{D^2}{J} \text{Tr}(\mathbf{R}(\vec{\theta})) = \frac{D^2}{J} (1 + 2\cos\theta) \\ &\sim E_{an} ,\end{aligned}$$

- die Abweichungen vom Gleichgewicht (Rotation der Spins) können als *gleichförmig* angenommen werden.

Der Triaden Charakter der Anisotropie und die Annahme der gleichförmigen Rotationen der Spins wurden in Drehmoment Experimenten an CuMn Legierungen für Temperaturen $T \ll T_g$ und Drehwinkel $< 40^\circ$ bestätigt (Fert/Arvanitis/Hippert; Hippert/Alloul/Fert, 1982).

Die Theorie beschreibt folgende experimentelle Situation (FC-Fall):

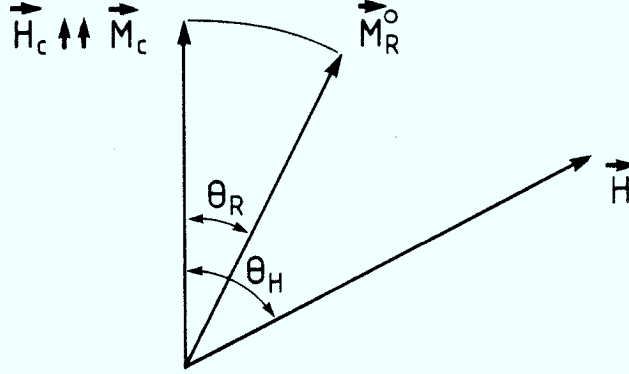


Abb. 4 Felder im FC-Fall bei ESR Experimenten

die Probe wird unter die Einfriertemperatur T_g im Kühlfeld H_c abgekühlt, das anschließend abgeschaltet wird. Zur remanenten Magnetisierung $\vec{M}_c \uparrow \uparrow \vec{H}_c$ wird im Winkel θ_H das externe Feld $\vec{H}$ angelegt, so daß $\vec{M}_c$ um den Winkel θ_R in die neue Gleichgewichtslage $\vec{M}_R^o$ gedreht wird (s. Abb. 4).

Die phänomenologische Energie der makroskopischen ($\vec{k} = \vec{0}$) Variablen lautet

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \chi^{-1} (\vec{M} - \vec{M}_R)^2 - \vec{H} \cdot \vec{M} - K \cos\theta \quad (6)$$

und enthält neben dem Austauschanteil

$\vec{H} \cdot \vec{M}$: Zeeman Energie

$K \cos\theta$: Anisotropie Energie,

$\theta = \theta_R$ in der neuen Gleichgewichtslage

$\vec{M}_R = \mathbf{R}(\vec{\theta}_R) \vec{M}_c$: gedrehte remanente Magnetisierung

$$\vec{\theta}_R = \begin{pmatrix} \theta_R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{Drehvektor um die x - Achse z.B.}$$

χ : isotrope Suszeptibilität .

Die Variation von $\mathcal{F}$ nach $\vec{M}$ und θ_R liefert

$$\vec{M}^o = \chi \vec{H} + \vec{M}_R^o \quad (7)$$

$$K \sin\theta_R = H M_R^o \sin(\theta_H - \theta_R) \quad (8)$$

als Bedingungen für die neue Gleichgewichtslage.

Für die transversale Suszeptibilität $\chi_{\perp}$

$$\chi_{\perp} = \frac{\delta M^{\perp}}{\delta H^{\perp}}$$

mit

$$\begin{aligned}\delta M^{\perp} &= H \sin \theta_H \\ \delta H^{\perp} &= |\vec{M}^o - \vec{M}_c|^{\perp} \\ &= \chi H \sin \theta_H + M_R^o \sin \theta_R ;\end{aligned}$$

und kleine Drehwinkel $\theta_H, \theta_R \ll 1$ folgt

$$\chi_{\perp} \cong \chi + \frac{M_R^o}{H} \cdot \frac{\theta_R}{\theta_H} ,$$

und aus Gl. (8)

$$\frac{\theta_R}{\theta_H} \cong \frac{H M_R^o}{K + H M_R^o} ;$$

damit gilt

$$\chi_{\perp} \cong \chi + \frac{M_R^o}{H + K/M_R^o} \quad (9)$$

eine experimentell sehr gut bestätigte Relation (Alloul/Hippert, 1983).

Homogene Fluktuationen um die neue Gleichgewichtslage (vgl. Diskussion Kap. II.b) liefern *drei* Resonanzfrequenzen: zwei transversale $\omega_{\pm}$ und eine longitudinale ω_L (Schultz/Gullikson/Fredkin/Tovar, 1980; Gullikson/Dalichaouch/Schultz, 1985). Sie haben für den Fall $\theta_H = \theta_R = 0$ die folgende Form ($H_R = M_R^o \chi^{-1}$, $H_i = (K \chi^{-1})^{1/2}$)

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2}(H - H_R) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(H + H_R)^2 + 4H_i^2} \quad (10)$$

$$\omega_L = H_i . \quad (11)$$

Vergleich der HSH – Theorie mit Experimenten :

Hier soll die Aussage von HSH über die ω_+ -Resonanz im FC-Fall mit den experimentellen Daten von Mahdjour (1987) verglichen werden. Die linearisierten Bewegungsgleichungen für $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$ liefern *ungedämpfte* Resonanzen, also $\Gamma_+ = 0$ (Γ_+ : Dämpfung der ω_+ -Mode; für Γ_+^{exp} s. Abb. 1).

Die Resonanzverschiebung δH_{res} für ω_+ ergibt sich aus Gl. (10) zu

$$\delta H_{res} = -\frac{K}{\omega\chi + M_R^o} . \quad (12)$$

(In ESR Experimenten wird bei *konstanter Frequenz* ω das äußere Feld H variiert. Für $T \gg T_g$ ergibt sich das Resonanzfeld H_{res} zu $H_{res} = H$. Die Resonanzverschiebung ist als $\delta H_{res}(\omega, T) = H_{res}(\omega, T) - H$ definiert.)

Da χ und M_R^o aus statischen Messungen bekannt sind, ergibt die Anpassung von δH_{res} an die experimentellen Daten (Abb. 2) eine bei T_g von Null verschiedene Anisotropiekonstante K ($K = 0$ für $T > 1.5 T_g$) (Mahdjour, 1987; Schultz/Gullikson/Fredkin/Tovar, 1981; Machado da Silva/Abe, 1983). *Dies steht im Widerspruch zu statischen Messungen, die $K(T) = K_o(1 - T/T_g)^\mu$, $\mu \cong 1$, voraussagen* (Mahdjour, priv. Mitteilung; Youm/Schultz, 1986).

Nimmt man die statischen Daten für $K(T)$ in Gl. (12) an, *so ergibt sich ein deutlicher Unterschied zwischen der Voraussage von HSH bzgl. der Frequenzverschiebung δH_{res} und den experimentellen ESR-Daten*. Dieser ist in den folgenden Abbildungen aufgetragen:

Abb. 5 $\delta H_{res}(\omega, T)$ als Funktion von T

$$f = 4.04 \text{ GHz}$$

$$K(T) = K_o(1 - T/T_g)$$

Daten für K_o , χ_{FC} und M_R^o aus Mahdjour (1987)

Abb. 6 wie Abb. 5 mit $f = 9.5 \text{ GHz}$.

Ein Ziel dieser Arbeit ist es, diese zusätzliche Frequenzverschiebung zur HSH-Theorie im Einklang mit den statischen Daten für $K(T)$ zu erklären.

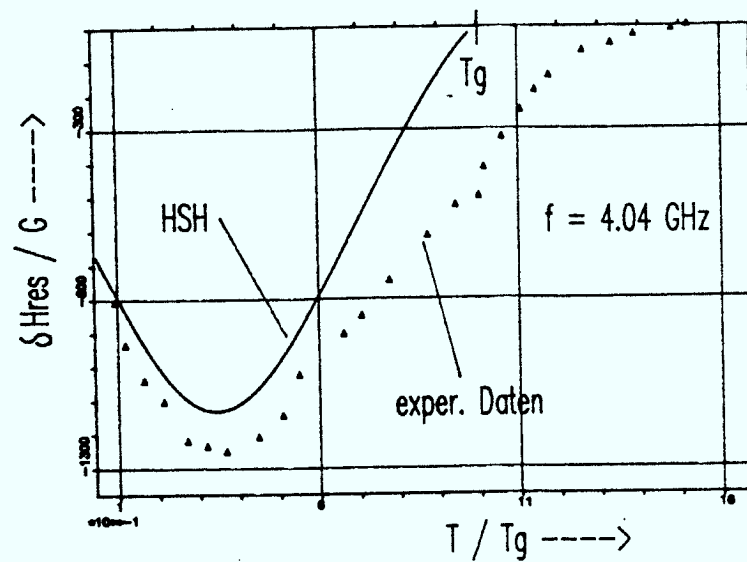


Abb. 5

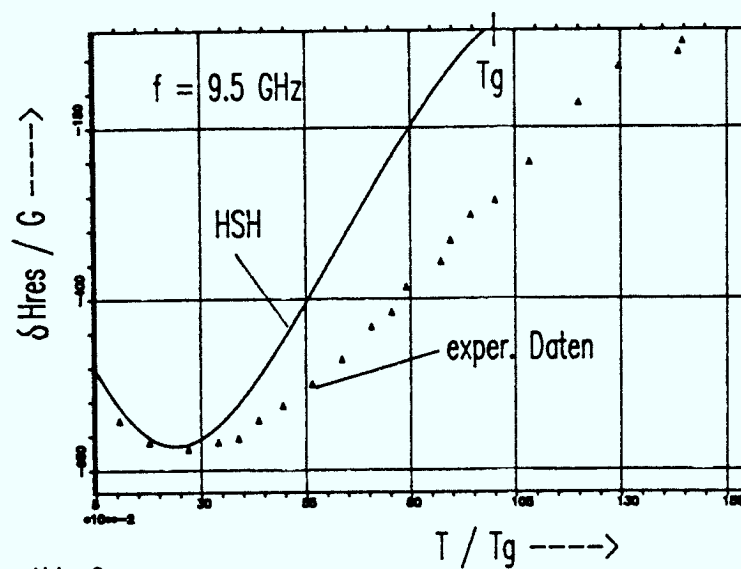


Abb. 6

Der hydrodynamische Charakter der HSH – Theorie :

Die Theorie von HSH ist sicher nicht eine hydrodynamische Theorie im direkten Sinne von Halperin/Hohenberg (1969). Dort werden langwellige Fluktuationen von Erhaltungsgrößen und der Orientierung der Ordnungsparameter betrachtet (der Ordnungsparameter für den planaren Antiferromagneten z.B. ist die Untergitter Magnetisierung $\vec{N}(\vec{r}) = n(\vec{r})e^{i\varphi(\vec{r})}$, die für die $T < T_N$ in der (komplexen) xy-Ebene liegt, Halperin/Hohenberg (1969); eine Erhaltungsgröße hier ist die z-Komponente der Gesamtmagnetisierung). So bestehen die niederenergetischen Anregungen beim Antiferromagneten *nicht* in der Fluktuation des Betrages der lokalen Untergitter Magnetisierung $n(\vec{r})$ sondern in der Fluktuation der Phase $\varphi(\vec{r})$ des Ordnungsparameters $\vec{N}(\vec{r})$, also der geringfügigen Verdrehung der lokalen magnetischen Momente gegeneinander (Spinwellen Anregungen).

Charakteristisch für die hydrodynamischen Anregungen ist, daß die Resonanzfrequenzen des Systems im Limes großer Wellenlängen verschwinden:

$$\begin{aligned}\omega_{AF} &= c_1 k + i\Gamma_1 k^2, & \text{Antiferromagnet} \\ \omega_{FM} &= c_2 k^2 + i\Gamma_2 k^4, & \text{Ferromagnet}\end{aligned}\tag{13}$$

(Halperin/Hohenberg, 1969; Forster, 1975). In c gehen statische Parameter (z.B. aus einer phänomenologischen freien Energie) ein, Γ enthält Transportkoeffizienten (die in einer phänomenologischen Theorie unbestimmt bleiben) und statische Suszeptibilitäten (s.a. weiter unten). Anisotropie, die zu einer endlichen Resonanzfrequenz bei $k = 0$ führt, liefert eine *untere* Grenze in der Wellenzahl k für die Gültigkeit der Aussagen der Hydrodynamik.

Die ESR-Theorie von HSH dagegen ist eine Theorie von $k = 0$ Fluktuationen in Systemen mit unidirektionaler Anisotropie. Im folgenden soll erläutert werden, warum

- die in der HSH-Theorie vorkommenden Variablen $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$ *hydrodynamische* Variablen im oben dargelegten Sinne sind,
- die Dynamik von $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$ für $k = 0$ in Anwesenheit der Anisotropie $K \cos\theta$ langsam gegen mikroskopische Zeitskalen ist.

Um den ersten Punkt zu illustrieren, muß die Dynamik von $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$ für endlich Wellenzahlen in einem System *ohne Anisotropien* betrachtet werden. Im

Fall der Spingläser reduziert sich die Hamiltonfunktion auf den EA-Austausch

$$\mathcal{H}_{EA} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

(s. Gl. (3)). Die hydrodynamische, phänomenologische Theorie hierzu stammt von Halperin/Saslow (1977). Dort wurde mithilfe der freien Energie

$$\mathcal{F}_{HS} = \frac{1}{2} \int d^3r \left(\chi^{-1} \vec{M}^2(\vec{r}) + \rho_s (\vec{\nabla} \vec{\theta})^2 \right) \quad (14)$$

das Spinwellenspektrum zu

$$\omega = ck - i D k^2, \quad (15)$$

mit

$$c = \sqrt{\rho_s \chi^{-1}}$$

$$D = K \chi^{-1} + \zeta \rho_s$$

ρ_s : Spinwellensteifigkeit

χ : isotrope Suszeptibilität

K, ζ : Transportkoeffizienten

berechnet.

Hier soll die mikroskopische Form von $\vec{M}(\vec{k})$ und $\vec{\theta}(\vec{k})$ verwendet werden, die auch der folgenden Theorie der gedämpften ESR-Frequenzen zugrunde liegt. Die Dynamik von $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$ beruht auf dem mikroskopischen EA-Austausch $\mathcal{H}_{EA}$.

Sowenig wie die klassische Theorie der Spinwellen Aussagen über die *Existenz* der (anti-)ferromagnetischen Phase macht, sondern als *Ansatz* ihr Vorhandensein voraussetzt, sowenig zeigen die folgenden Überlegungen die Existenz der Spinglasphase mit ihren vielen Gleichgewichtszuständen und dem zugehörigen breiten Spektrum an Relaxationszeiten. Aussagen hierzu machen die Replika Theorie des Spinglases (Kirkpatrick/Sherrington, 1975/78; Parisi, 1979) und die dynamische Theorie von Sompolinsky/Zippelius (1982).

In der hydrodynamischen Theorie setzt man die Existenz einer SG Phase voraus und diskutiert langwellige Fluktuationen um einen fest gewählten Gleichgewichtszustand. Die hydrodynamischen Variablen sind zum einen Fluktuationen der Magnetisierung, die eine Erhaltungsgröße ist, und zum anderen fast homogene

Drehungen, da die Hamiltonfunktion isotrop ist und im Spinglaszustand die Rotationssymmetrie spontan gebrochen ist. Dies soll im folgenden für die mikroskopischen Größen $\vec{M}(\vec{k})$ und $\vec{\theta}(\vec{k})$ gezeigt werden (s. Gl. (17,21)).

Die zur Drehmatrix gehörende Variable $\mathbf{R}$ lautet (s. Kap. III.a)

$$\begin{aligned} R_i^{\alpha\beta} &= S_i^\alpha < S_i^\beta >_G \\ &\cong q_{EA} (\delta_{\alpha\beta} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \theta_i^\gamma) ; \quad \theta_i^\alpha \ll 1 \end{aligned} \quad (16)$$

$< R_i^{\alpha\beta} >_G$, dreht das Moment $< S_i^\beta >_G$ aus seiner Gleichgewichtslage G in den Zustand G' . Die lokale Drehwinkelvariable ergibt sich zu

$$\theta_i^\alpha = \frac{1}{2q_{EA}} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_i^\beta < S_i^\gamma >_G \quad (17)$$

(die $< \vec{S}_i >_G$ bezeichnen die eingefrorenen Spins im Zustand G an Ort $\vec{r}_i$ und bilden das Analogon zur (globalen) Richtung der spontanen Magnetisierung beim Ferromagneten).

Die Spur der Drehmatrix

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \overline{Tr(R_i^{\alpha\beta})} >_G &= \frac{1}{3} \overline{< S_i^\alpha >_G < S_i^\alpha >_G} \\ &= q_{EA} , \end{aligned}$$

ist mit dem EA-Ordnungsparameter der Spinglasphase verknüpft, während die Phase $\vec{\theta}$ der *Orientierung* des Ordnungsparameters entspricht (analog zu $\varphi(\vec{r})$ beim planaren Antiferromagneten s.o.).

Die Spins werden klassisch durch Vektoren fester Länge beschrieben (dies ist für große Spinquantenzahlen eine gute Näherung). Ihre zeitliche Entwicklung ist durch die Poissonklammer mit $\mathcal{H}_{EA}$ in Form einer Liouville Gleichung gegeben

$$\partial_t S_i^\alpha = \{S_i^\alpha, \mathcal{H}_{EA}\} . \quad (18)$$

Die elementaren Poissonklammern der S_i^α werden in Analogie zu den algebraischen Eigenschaften von Drehimpulsen wie folgt spezifiziert

$$\{S_i^\alpha, S_j^\beta\} = \delta_{ij} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_i^\gamma \quad (19)$$

(Dzyaloshinsky/Volovick, 1979). Diese Art der Bewegungsgleichung ist der des im lokalen Feld präzedierenden Vektors äquivalent. Weiterhin wird die Linear-Response Theorie benutzt, die es erlaubt Fluktuationen um ein Zustand des

Systems durch Korrelation in diesem auszudrücken; im folgenden wird der Index "G" bei der thermischen Mittelung fortgelassen.

Wegen der *globalen* Rotationssymmetrie der Spinglasphase kann man sich auf die zwei Variablen $M^x(\vec{k})$ und $\theta^x(\vec{k})$ beschränken (der Spinindex wird im weiteren weggelassen).

Die Mori Theorie (s. Kap. II.a) liefert die Bedingung für die Resonanzen als

$$\det \left(z1 - i\omega\chi^{-1} + i\frac{1}{T} \sigma\chi^{-1} \right) = 0 \quad (20)$$

mit

$$\begin{aligned} \chi(\vec{k}) &= \frac{1}{T} \begin{pmatrix} (M(\vec{k})|M(-\vec{k})) & (M(\vec{k})|\theta(-\vec{k})) \\ (\theta(\vec{k})|M(-\vec{k})) & (\theta(\vec{k})|\theta(-\vec{k})) \end{pmatrix} \\ \omega(\vec{k}) &= \begin{pmatrix} \frac{\langle \{M(\vec{k}), M(-\vec{k})\} \rangle}{\langle \{\theta(\vec{k}), M(-\vec{k})\} \rangle} & \frac{\langle \{M(\vec{k}), \theta(-\vec{k})\} \rangle}{\langle \{\theta(\vec{k}), \theta(-\vec{k})\} \rangle} \\ \frac{\langle \{\theta(\vec{k}), M(-\vec{k})\} \rangle}{\langle \{\theta(\vec{k}), \theta(-\vec{k})\} \rangle} & \frac{\langle \{M(\vec{k}), \theta(-\vec{k})\} \rangle}{\langle \{\theta(\vec{k}), \theta(-\vec{k})\} \rangle} \end{pmatrix} \\ \sigma(\vec{k}) &= \begin{pmatrix} (\dot{M}(\vec{k})|\dot{M}(-\vec{k})) & (\dot{M}(\vec{k})|\dot{\theta}(-\vec{k})) \\ (\dot{\theta}(\vec{k})|\dot{M}(-\vec{k})) & (\dot{\theta}(\vec{k})|\dot{\theta}(-\vec{k})) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Die mikroskopische Definition der Variablen lautet

$$\begin{aligned} M^\alpha(\vec{k}) &= \sum_j e^{i\vec{k}\vec{r}_j} S_j^\alpha \\ \theta^\alpha(\vec{k}) &= \frac{1}{2q_{EA}} \epsilon_{\alpha\mu\nu} \sum_j e^{i\vec{k}\vec{r}_j} S_j^\mu \langle S_j^\nu \rangle . \end{aligned} \quad (21)$$

Für kleine Wellenzahlen gilt

$$\chi_{MM} \cong \chi \equiv const, \quad \text{für } k \rightarrow 0;$$

und

$$(M^x(\vec{k})|\theta^x(-\vec{k})) \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0, \text{ wegen der globalen Rotationssymmetrie;}$$

aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$(\dot{M}(\vec{k})|\dot{M}(-\vec{k})) (\theta(\vec{k})|\theta(-\vec{k})) \geq |(\dot{M}(\vec{k})|\dot{\theta}(-\vec{k}))|^2$$

folgt für $k \rightarrow 0$

$$\chi_{\theta\theta}(\vec{k}) \geq T \frac{\left(\langle \{M(\vec{k}), \theta(-\vec{k})\} \rangle \right)^2}{k^2 (j_{M^x}(\vec{0})|j_{M^x}(\vec{0}))} \quad (22)$$

unter Benutzung des FDTs und der Erhaltung der Magnetisierung (j_{M^α} : Strom der Magnetisierung M^α)

$$\partial_t M^\alpha + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{M^\alpha} = 0 .$$

Die Gleichungen (21) liefern mit (19) die gemittelten Poissonklammern

$$\begin{aligned} \overline{\langle \{M^\alpha(\vec{k}), M^\beta(-\vec{k})\} \rangle} &= 0 \\ \overline{\langle \{\theta^\alpha(\vec{k}), \theta^\beta(-\vec{k})\} \rangle} &= 0 \\ \overline{\langle \{M^\alpha(\vec{k}), \theta^\beta(-\vec{k})\} \rangle} &= \delta_{\alpha\beta} , \end{aligned} \quad (23)$$

so daß für $\chi_{\theta\theta}(\vec{k})$ gilt

$$\chi_{\theta\theta}(k) \geq \frac{T}{k^2(j_M|j_M)} , \quad k \rightarrow 0 .$$

Nimmt man die Divergenz als minimal an, so ergibt der Vergleich mit der Phänomenologie, Gl. (14), einen mikroskopischen Ausdruck für die Spinwellensteifigkeit:

$$\chi_{\theta\theta}(k) = \frac{1}{\rho_s k^2}$$

mit

$$\rho_s = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{4q_{EA}^2 T}{k^2 \epsilon_{x\mu\nu} \epsilon_{x\lambda\gamma} \sum_{i,j} \langle S_i^\mu S_j^\lambda \rangle \langle S_i^\nu \rangle \langle S_j^\gamma \rangle \exp[i\vec{k}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)]} \quad (25)$$

(vgl. Sompolinsky/Kotliar/Zippelius, 1984/87).

Die Suszeptibilitätsmatrix lautet

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\rho_s k^2} \end{pmatrix} ;$$

mit

$$\omega = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 \\ -1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{aligned} \Omega &= i\omega\chi^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & i\rho_s k^2 \\ -i\chi^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (26)$$

Die Matrix $\sigma(\vec{k})$ hat für $k \rightarrow 0$ die Form

$$\sigma(\vec{k}) = \begin{pmatrix} k^2 \sigma_M & k \sigma_{M\theta} \\ k \sigma_{M\theta} & \sigma_\theta \end{pmatrix} .$$

und somit

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{1}{T} \sigma \chi^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \frac{\sigma_M}{\chi} & 0(k^3) \\ 0(k) & \frac{1}{T} \sigma_\theta \rho_s k^2 \end{pmatrix} ; \end{aligned} \quad (27)$$

die Nebendiagonalelemente von Σ können gegen die von Ω vernachlässigt werden. In niedrigster Ordnung in k liefert Gl. (20) die 3-fach entarteten, gedämpften Anregungen von $\vec{M}(\vec{k})$ und $\vec{\theta}(\vec{k})$ zu

$$\omega = ck - i \Gamma k^2 \quad (28)$$

mit

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\rho_s \chi^{-1}} \\ \Gamma &= \frac{1}{2T} \left(\frac{\sigma_M}{\chi} + \sigma_\theta \rho_s \right) \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit der phänomenologischen Theorie von Halperin/Saslow. Gl. (28) zeigt damit den behaupteten hydrodynamischen Charakter von $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$, bei $\vec{M}$ aufgrund des Erhaltungssatzes und bei $\vec{\theta}$ wegen der spontanen, lokalen Brechung der Rotationssymmetrie in der Spinglasphase.

Der zweite Punkt, warum die $k = 0$ Fluktuationen der HSH-Theorie "hydrodynamisch" (d.h. langsam) sind, wird durch die mikroskopische Theorie der Dämpfung in Kap. V der Arbeit beantwortet: die Zeitskala τ von $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$ ist durch $\tau = \frac{J}{D^2}$ also den Kehrwert der Anisotropie pro Atom gegeben, die nach Voraussetzung klein gegen den EA-Austausch J ist. J legt die Skala $\tau_0 = J^{-1}$ fest, so daß gilt

$$\tau_0 = J^{-1} \ll f^{-1} \ll \tau = \frac{J}{D^2} \quad (29)$$

mit

$$\begin{aligned}
 f &\sim 10^3 G, \text{ experimentelle ESR - Frequenzen,} \\
 &\hat{=} 10^9 \text{ s}^{-1} \\
 J &\cong T_g = 31.2 \times 7.4 \cdot 10^3 G \\
 &\hat{=} 10^{11} \text{ s}^{-1} \\
 \frac{D^2}{J} &\sim 1 - 0.1 G, \text{ Frequenzskala der Anisotropie,} \\
 &\hat{=} 10^6 - 10^5 \text{ s}^{-1} .
 \end{aligned}$$

Daß die Zeitskala der Variablen $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$ durch die Anisotropie D^2/J und nicht durch den EA-Austausch J bestimmt wird, kann man wie folgt sehen: die Mori Theorie liefert den Zusammenhang

$$\tau_A^{-1} = \frac{\sigma_{AA}(z=0)}{T \cdot \chi_A}, \quad A = \vec{M}, \vec{\theta}, \quad (30)$$

vgl. Gl. (20) und (28). Für $\vec{M}$ ist $T\chi = O(1)$ und $\sigma_M(t) = (\dot{M}(t)|\dot{M}) \sim D^2$ in niedrigster Ordnung in D (s. Kap. IV Anh. a); $\sigma_M(z=0) = \int_0^\infty dt \sigma_M(t) \sim D^2/J$, da die Zeit mit $\tau_o = J^{-1}$ skaliert, woraus sich $\tau_M \sim J/D^2$ ergibt. Analog gilt für $\vec{\theta}$: $\chi_{\theta\theta}(H=0) = \frac{1}{K} \sim \frac{J}{D^2}$ (s.o. die Diskussion der HSH-Theorie oder via Cauchy-Schwarzscher Ungleichung $\chi_{\theta\theta} \cong \frac{T}{(\dot{M}|\dot{M})} \sim \frac{J}{D^2}$, s. Gl. (22)), $\sigma_\theta(t) = (\dot{\theta}(t)|\dot{\theta}) \sim J^2$, $\sigma_\theta(z=0) \sim J$ und mit $T \sim T_g \cong J$ gilt daher $\tau_\theta^{-1} \sim D^2/J$. Die Fluktuationen von $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$ selbst sind natürlich schneller als die (statische) Anisotropie und von der Ordnung $10^2 G \cong f/10 \hat{=} 10^8 \text{ s}^{-1}$, wie die zu entwickelnde Theorie der Dämpfung in Übereinstimmung mit den Experimenten zeigen wird. Wichtig festzuhalten ist, daß die Zeitskala der Fluktuationen von $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$ für $k=0$ von den *schwachen* Freiheitsgraden (hier: der Anisotropie) bestimmt wird.

Mikroskopische ESR – Theorie :

Becker (1982 a,b)

Eine Theorie der ESR-Frequenzen wurde 1982 von Becker unter Benutzung der Variablen $\vec{M}$ und $\vec{S}$ entwickelt; mithilfe der Hamiltonfunktion $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{EA} + \mathcal{H}_{DM} - \vec{H} \sum_i \vec{S}_i$ und der Projektor Methode von Mori/Kawasaki formulierte er folgende Resultate für Resonanzfrequenzen und deren Linienbreiten:

$H_R \gg H_i$ (remanente Magnetisierung $\gg$ Anisotropie)

$$\begin{aligned}\delta H_{res}^+ &\cong -\frac{1}{2} \frac{H_i^2}{H_R} \\ \omega_- &\cong 0 ;\end{aligned}\quad (31)$$

$H_R \ll H_i$

$$\begin{aligned}\delta H_{res}^+ &\cong -\frac{1}{\sqrt{2}} H_i \\ \delta H_{res}^- &\cong -2H + \frac{1}{\sqrt{2}} H_i .\end{aligned}\quad (32)$$

Diese Aussagen unterscheiden sich deutlich von der Voraussage der Theorie von HSH:

$$\begin{aligned}\delta H_{res}^+ &= -\frac{H_i^2}{H + H_R} \\ \delta H_{res}^- &= -2H + \frac{H_i^2}{H - H_R} .\end{aligned}\quad (33)$$

Die Zuordnung der mikroskopischen Parameter zu denen der phänomenologischen Theorie ist unklar: Becker identifiziert die *mikroskopische* Zeitableitung $\{M^\alpha, \mathcal{H}_{DM}\} = \dot{M}_A^\alpha$ mit der phänomenologischen Variablen $K \cdot \hat{n}^\alpha$; $\hat{n}$ ist die *makroskopische* Richtung der Magnetisierung. Da $\dot{M}_A^\alpha$ die *lokale fluktuierende* Anisotropie Achse $\vec{D}_{ij}$ der DM-Wechselwirkung enthält, erscheint diese Zuordnung zumindest problematisch. Über die longitudinale Resonanz wird keine Aussage gemacht.

Für den ZFC-Fall ($M_R = 0$) berechnet Becker Linienverschiebung δH und -breite ΔH der ω_+ -Resonanz:

$$\delta H = -\frac{\omega H_i^2}{\omega^2 + \alpha^2} \quad (34)$$

$$\Delta H = H_i^2 \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} \quad (35)$$

mit

$$\alpha = \frac{1}{T} \frac{M_2 \chi^{-1}}{H_i^2} , \quad M_2 \sim (\dot{M} | \dot{M})_{\omega=0} .$$

Wegen $H_i^2 = K \cdot \chi^{-1}$ sind sowohl δH als auch ΔH proportional zur *statischen* Anisotropie Konstanten K , die bei $T = T_g$ verschwindet (Youm/Schultz, 1986).

Damit liefert die Beckersche Theorie die (experimentell widerlegte) Aussage, daß die Dämpfung und die Frequenzverschiebung bei $T \geq T_g$ verschwinden.

Dagegen wird die Tendenz der ω -Abhängigkeit *im Anstieg* der Dämpfung als Funktion der Temperatur richtig wiedergegeben.

Beton/Moore (1984), Beton (1985)

Beton/Moore bestätigen die Aussagen der Triadentheorie von HSH für tiefe Temperaturen $T \ll T_g$. Ausgehend von einer eingefrorenen Spinkonfiguration $\vec{S}_i^0$, $i = 1, \dots, N$, bei $T = 0$ K betrachteten sie transversale Fluktuationen $\delta \vec{S}_i^0 = a_i \vec{e}_i^x + b_i \vec{e}_i^y$ der mikroskopischen Spins, wobei $\{\vec{S}_i^0, \vec{e}_i^x, \vec{e}_i^y\}$ ein lokales Dreibein am Gitterplatz $\vec{r}_i$ bilden. Mithilfe der (auch dieser Arbeit zugrunde liegenden) Hamiltonfunktion $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{EA} + \mathcal{H}_{DM} - \vec{H} \sum_j \vec{S}_j$ wurde die Energie dieser Fluktuationen in niedrigster Ordnung berechnet. Dies erlaubt z.B. die Anisotropie Konstante K mikroskopisch zu deuten:

$$K(T) = \frac{1}{3} \sum_{i,j} \vec{S}_i^0(H=0) \cdot (\vec{D}_{ij} \times \vec{S}_j^0(H=0)) , \quad T \ll T_g , \quad (36)$$

(Beton/Moore, 1984, Gl. (2.35), vgl. auch Henley 1983); $\vec{S}_i^0(H=0)$ ist die Orientierung des Spins in einem Gleichgewichtszustand *ohne äußeres Feld* ($H=0$). Dies zeigt, daß die Unabhängigkeit der eingefrorenen Spinrichtungen eine wesentliche Voraussetzung dafür ist, daß die *stochastische* DM-Wechselwirkung eine ("isotrope") *makroskopische* Anisotropie zur Folge haben kann.

Mithilfe einer Präzessionsdynamik der Spins im lokalen Feld reproduzieren Beton/Moore die drei Resonanzfrequenzen von HSH, $\omega_{\pm}$ und ω_L , und liefern somit eine mikroskopische Begründung der HSH-Theorie für $T \cong 0$.

Die Dämpfung der HSH-Theorie wird mit einer Bewegungsgleichung berechnet, die um den Relaxationsterm $-\eta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \vec{S}_i^0}$ (der die Magnetisierung *nicht* erhält) und die Langevinkraft $\xi_i(t)$ erweitert wird. Die Diskussion beschränkt sich auf den Temperaturbereich $T \gg T_g$, indem die Spin-Gitter-Relaxation ($\sim T$) dominierend ist, und liefert für den in dieser Arbeit untersuchten Bereich $0 < T \leq T_g$ keine Aussage.

Die Arbeit von Beton (1985) führt den Ansatz von Beton/Moore für die gedämpfte Dynamik fort und leitet einen *formalen* Ausdruck für die Dispersions-

relation ab. Dieser erweist sich als äußerst komplex und wird nicht weiter ausgewertet.

Die sich anschließende Berechnung der Dispersion mit *phänomenologischen* Dämpfungstermen (vgl. dazu Saslow, 1982, und Henley, 1983) ist analog zur Näherung der Memorymatrix $\Sigma(z=0) \equiv \text{const}$ (s. Kap. II.a) und liefert damit keine Aussagen über das Temperaturverhalten der Dämpfung. In dieser Näherung ergibt sich die Frequenzverschiebung zu Null.

Levy/Morgan-Pond/Rhagavan (1983/84)

Die Theorie von Levy/Morgan-Pond/Rhagavan (LMPR), Die sich auf den Temperaturbereich $T \geq T_g$ bezieht, ist eine mikroskopische Berechnung der Dämpfung und der Frequenzverschiebung der ω_+ -Resonanz. Die Relaxationsfunktion $(\dot{M}^x(t)|\dot{M}^x)$, $M^x = M^x(\vec{k} = \vec{0})$, wird mit der durch die stochastische DM-Wechselwirkung $\mathcal{H}_{DM}$ gegebene Zeitentwicklung berechnet. Die dabei auftretenden 4-Spin Korrelationen werden im Raum der Eigenvektoren $\langle \lambda | \vec{r}_i \rangle$ der isotropen stochastischen J_{ij} -Matrix mit *unendlicher Reichweite* entkoppelt. LMPR argumentieren, daß diese Näherung für hohe Temperaturen ($T \gg T_g$) und schwache Anisotropie akzeptabel ist. Die dynamischen Paarkorrelationen $(S_\lambda(t)|S_\lambda)$ werden mit einer reinen Relaxationsdynamik bestimmt, die der von Sherrington/Kirkpatrick (1978) äquivalent ist. Die analytischen Resultate lauten (Γ : Dämpfung, $\delta\omega$: Frequenzverschiebung, $\Delta \cong \frac{S(S+1)}{3\hbar}J$: Dämpfung der $S_\lambda(t)$ Moden, äußeres Feld $H = 0$):

$$\frac{\omega}{\Delta} \ll 1, T \gg T_g \quad \Gamma(\omega, T) \cong \frac{1}{2} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \delta\omega &\cong \frac{1}{4} \frac{\omega}{\Delta}, \\ T > T_g, \omega \rightarrow 0 \quad \Gamma(\omega, T_g) &\sim \ln \omega. \end{aligned} \quad (38)$$

$$\delta\omega \cong \begin{cases} 0, & \text{für } T > T_g \\ \text{endlich} & \text{für } T = T_g \end{cases}.$$

Der Vergleich der numerischen Resultate für die Dämpfung mit ESR-Experimenten an AgMn zeigt gute Übereinstimmung für $T \geq 1.5 T_g$ und Meßfrequenzen $f = 9.6$, 1 GHz. Für $f = 1$ GHz trifft dies auch noch bis $T \cong 1.1 T_g$ zu während sich bei $f = 9.6$ GHz ein Unterschied mit dem Faktor 2 ergibt. Insgesamt ist der

Gültigkeitsbereich auf hohe Temperaturen ($T \gg T_g$) und kleine Frequenzen, $f \cong 1\text{GHz}$, beschränkt.

Im ersten Teil dieser Arbeit wird eine mikroskopische Theorie der ESR-Frequenzen abgeleitet. Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert:

Kapitel 2 enthält die phänomenologische Theorie der ESR-Frequenzen von Henley/Sompolinsky/Halperin (HSH) in Morischer Formulierung. Die Matrix der statischen Suszeptibilität der HSH-Theorie und die dynamischen Korrelationsfunktionen werden berechnet.

Kapitel 3 gibt eine mikroskopische Begründung der Phänomenologie ausgehend von den Ideen von Halperin und Saslow. Die Dynamik beruht auf den Hamiltonfunktionen von Edwards/Anderson und Dzyaloshinsky/Moriya. Die Anisotropie Konstante K wird mikroskopisch gedeutet.

Kapitel 4 entwickelt eine Modenkopplungs Theorie der Dämpfung für die transversalen ESR-Frequenzen und leitet mit Hilfe der Mori Theorie deren Dispersionsrelation ab.

Kapitel 5 formuliert ein selbstkonsistentes Gleichungssystem für die transversalen Linienbreiten bei verschwindender äußerer Frequenz. Es enthält analytische Resultate für $T \rightarrow 0$ und $T \rightarrow T_g$ sowie numerische Ergebnisse für die Dämpfung und die Frequenzverschiebung für von Null verschiedene Frequenzen.

Kapitel 6 enthält die Schlußbetrachtung zum 1. Teil.

K A P I T E L II

Formulierung der Phänomonologischen Theorie von Henley, Sompolinsky und Halperin in Rahmen der Mori Theorie

Nach einer kurzen Darstellung der Mori Theorie für die Korrelationsfunktionen wird die freie Energie von HSH bis zur quadratischen Ordnung entwickelt: dies bestimmt die Matrix der statischen Suszeptibilität. Mit Hilfe der freien Energie werden die Bewegungsgleichungen von HSH hergeleitet und die Frequenzmatrix Ω der ungedämpften ESR-Anregungen sowie die zugehörigen Korrelationsfunktionen berechnet.

KAPITEL II

Seite

a) Mori Theorie der Korrelationsfunktionen	1
b) Freie Energie von HSH und statische Suszeptibilitätsmatrix	6
c) HSH-Bewegungsgleichungen, ungedämpfte ESR-Anregungen und zugehörige Korrelationsfunktionen	12

ANHANG ZU KAPITEL II

a) Berechnung der freien Energie von HSH bis zur quadratischen Ordnung in $M^\alpha(\vec{k} = \vec{0})$ und $\theta^\alpha(\vec{k} = \vec{0})$	16
b) Herleitung der Bewegungsgleichung von HSH und Test auf Konsistenz der Rechnung	20
c) Berechnung der HSH-Frequenzen und der zugehörigen Korrelationsfunktionen für den Fall $\theta_H = \theta_R = 0$	26

II. Kapitel

a) Mori Theorie der Korrelationsfunktionen

Ausgehend von einem Satz hydrodynamischer Variablen ($M^\alpha(\vec{k} = \vec{0})$, $\theta^\alpha(\vec{k} = 0)$, $\alpha = x, y, z$, im vorliegenden Fall) läßt sich die zeitliche Entwicklung einer Variablen in zwei Anteile aufspalten: einer, der im linearen Raum $\mu\vec{M} + \lambda\vec{\theta}$ verbleibt, ein anderer, der im dazu orthogonalen Raum liegt. Im Grenzfall kleiner Frequenzen und Wellenzahlen bestimmt erster das *reversible* Verhalten des Systems, also die *ungedämpften* Anregungsfrequenzen z.B., zweiter das *irreversible* Verhalten wie die Transportkoeffizienten und die Dämpfung (Forster, 1975; Mori/Kawasaki, 1962 a,b; Mori, 1965 a,b).

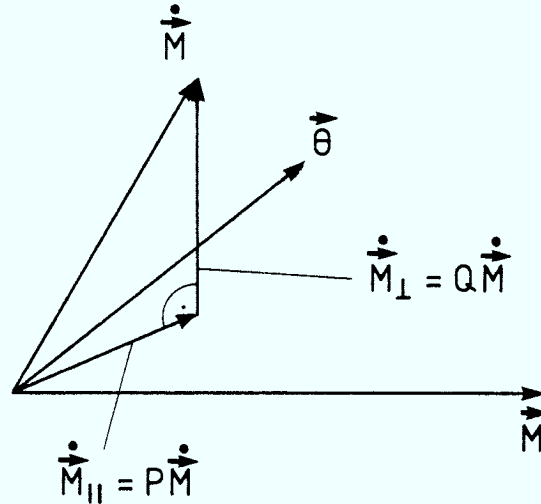


Abb. 1: Aufspaltung von $\dot{\vec{M}}$ bzgl. der hydrodynamischen Variablen.

P sei der Projektor in den linearen Raum von $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$, $Q = 1 - P$ der in den dazu orthogonalen Raum. Weiterhin stattet man den Raum der zeitlichen Entwicklung der Variablen mit einem geeigneten Skalarprodukt aus:

$$(M^\alpha(t)|\theta^\beta) = \overline{\langle M^\alpha(t)\theta^\beta \rangle} - \overline{\langle M^\alpha \rangle \langle \theta^\beta \rangle} \quad (1)$$

wobei

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \text{Tr} \left(\frac{A e^{-\beta \mathcal{H}}}{\text{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}}} \right) \quad : \text{ thermischer Mittelwert} \\ \overline{\langle A \rangle} &= \int dJ \, p(J) \langle A \rangle : \text{ Konfigurationsmittel über die} \\ &\quad \text{eingefrorene Unordnung in der Wechselwirkung} \\ &\quad \text{der Hamiltonfunktion } \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Dabei ist das Skalarprodukt so gewählt, daß unter der Annahme der Cluster-Eigenschaft

$$\langle M^\alpha(t) \theta^\beta \rangle \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \langle M^\alpha \rangle \langle \theta^\beta \rangle \quad (2)$$

für eine feste Konfiguration der Unordnung die zeitlichen Fluktuationen zerfallen:

$$C_{M^\alpha \theta^\beta}(t) = \langle M^\alpha(t) | \theta^\beta \rangle \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0. \quad (3)$$

Mithilfe des skalaren Produktes hat der Projektor P die folgende bra-ket Darstellung

$$P^{\alpha\beta} = |X^\alpha\rangle (\vec{X}|\vec{X})_{\alpha\beta}^{-1} \langle X^\beta|, \quad (4)$$

$X^\alpha = \delta M^x, \theta^y, \delta M^y, \theta^x, \delta M^z, \theta^z$ ($\alpha = 1, \dots, 6$) und dabei ist $(\vec{X}|\vec{X})$ die Matrix der statischen Korrelationsfunktionen.

Um eine (zumindest formale) Separation der Dynamik in eine reversible und irreversible zu erhalten, wird der Liouville Operators L eingeführt. Ausgehend von der Poissonschen Bewegungsgleichung

$$\partial_t X^\alpha = \{X^\alpha, \mathcal{H}\} \quad (5)$$

definiert sich L zu

$$\begin{aligned} \partial_t |X^\alpha\rangle &= iL |X^\alpha\rangle \\ &= \{X^\alpha, \mathcal{H}\} \end{aligned} \quad (6)$$

mit der formalen Lösung

$$|X^\alpha(t)\rangle = e^{iLt} |X(t=0)\rangle \quad (7)$$

bzw.

$$\langle X^\alpha(t) | = \langle X^\alpha | e^{-iLt}$$

und der Laplace-Transformierten

$$\begin{aligned} (X^\alpha(z)| &= \int_0^\infty dt e^{izt} (X^\alpha(t)| \\ &= (X^\alpha| \frac{i}{z-L}. \end{aligned} \quad (8)$$

Die Korrelationsfunktion $C(z)$ ist damit das Matrixelement des Operators $i(z-L)^{-1}$

$$C^{\alpha\beta}(z) = \left(X^\alpha | \frac{i}{z-L} | X^\beta \right). \quad (9)$$

Die Zerlegung in einen reversiblen und einen irreversiblen Anteil der Dynamik läßt sich für die Korrelationsfunktion $C(z)$ wie folgt vornehmen:

$$\begin{aligned} L &= LQ + LP \\ C(z) &= \left(X | \frac{i}{z-LQ-LP} | X \right) \end{aligned}$$

mit

$$\frac{1}{z-LQ-LP} = \frac{1}{z-LP} + \frac{1}{z-LQ} LP \frac{1}{z-LQ-LP} \quad (10)$$

folgt

$$C(z) = \left(X | \frac{i}{z-LQ} | X \right) + \left(X | \frac{1}{z-LQ} iLP \frac{1}{z-L} | X \right) \quad (11)$$

und mit $Q|\vec{X}\rangle = \vec{0}$ und $P = |\vec{X}\rangle(\vec{X}|\vec{X})^{-1}(\vec{X}|$

$$C(z) = \frac{i}{z}(\vec{X}|\vec{X}) - i(\vec{X}|\frac{1}{z-LQ}iL|\vec{X})(\vec{X}|\vec{X})^{-1} \cdot C(z). \quad (12)$$

Nochmalige Anwendung der Operatoridentität

$$\frac{1}{z-LQ} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z} LQ \frac{1}{z-LQ} \quad (13)$$

liefert mit $(X| iL = -(\dot{X}(t=0)|$

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{i}{z}(\vec{X}|\vec{X}) + \frac{i}{z}(\dot{\vec{X}}|\vec{X})(\vec{X}|\vec{X})^{-1} C(z) - \\ &\quad \frac{-i}{z}(\vec{X}|LQ\frac{1}{z-LQ}iL|\vec{X})(\vec{X}|\vec{X})^{-1} C(z). \end{aligned} \quad (14)$$

Da

$$LQ \frac{1}{z-LQ} iL = (-iL) Q \frac{i}{z-QLQ} Q(iL)$$

folgt

$$\left(z - i(\dot{\vec{X}}|\vec{X})(\vec{X}|\vec{X})^{-1} + i(\dot{\vec{X}}|Q \frac{i}{z - QLQ} Q|\dot{\vec{X}})(\vec{X}|\vec{X})^{-1} \right) C(z) = i(\vec{X}|\vec{X}), \quad (15)$$

bzw.

$$(z\mathbf{1} - \Omega + i\Sigma) C(z) = i(\vec{X}|\vec{X}) \quad (16)$$

mit

$$\begin{aligned} \Omega &= i(\dot{\vec{X}}|\vec{X})(\vec{X}|\vec{X})^{-1} : \text{Frequenzmatrix} \\ \Sigma &= (\dot{\vec{X}}|Q \frac{i}{z - QLQ} Q|\dot{\vec{X}})(\vec{X}|\vec{X})^{-1} : \text{Memory - oder Dämpfungsmatrix} \\ &(\vec{X}|\vec{X}) : \text{statische Korrelationsfunktionen.} \end{aligned}$$

Mit $\Sigma = 0$ liefert $\det(z - \Omega) = 0$ die ungedämpften Resonanzen; die Dämpfung wird durch den Realteil der Memorymatrix Σ bestimmt, die wiederum als Korrelationsfunktion der neuen Variablen $|Q\dot{X}\rangle$ aufgefaßt werden kann. Die Dynamik von $|Q\dot{X}\rangle$ ist durch die zum linearen X-Raum orthogonalen Zeitenwicklung $\bar{\partial}_t |Q\dot{X}\rangle = i QLQ |Q\dot{X}\rangle$, $\bar{\partial}_t X = 0$, festgelegt. Setzt man das FDT als anwendbar voraus, so ergibt sich die Suszeptibilität zu

$$\chi_{X^\alpha X^\beta} = \frac{1}{T} \cdot (X^\alpha | X^\beta) \quad (17)$$

und die zeitabhängige Responsefunktion

$$\chi_{X^\alpha X^\beta}(t) = \frac{1}{2T} i \partial_t C_{X^\alpha X^\beta}(t). \quad (18)$$

Mit (Forster, 1975, Kap. 3)

$$\chi_{X^\alpha X^\beta}(t) = \overline{< \frac{i}{2} \{X^\alpha(t), X^\beta\} >}$$

folgt

$$\Omega = i \overline{< \{\vec{X}, \vec{X}\} >} \cdot \chi^{-1}. \quad (19)$$

Gl. (17) impliziert auch

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sigma \cdot \chi^{-1} \\ &= \frac{1}{T} \left(\dot{\vec{X}} Q \frac{i}{z - QLQ} Q |\dot{\vec{X}} \right) \chi^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

$$(z \mathbf{1} - \Omega + i\Sigma(z)) \cdot \mathbf{C}(z) = iT \cdot \chi . \quad (21)$$

Die Gleichungen (19) – (21) stellen die Morische Formulierung der Korrelationsfunktionen dar.

Um die reversible Dynamik und damit die ungedämpften Anregungen zu bestimmen, reicht die Kenntnis der freien Energie und der Poissonklammern der Variablen aus (dies entspricht der phänomenologischen Theorie von HSH).

Will man die Dämpfung oder die Korrelationsfunktionen selbst berechnen, so ist auch die Kenntnis der Suszeptibilitätsmatrix χ vonnöten (vgl. Gl. (20, 21)).

Eine rein phänomenologische Theorie nimmt die Matrix Σ als konstant an. Dagegen ist der Ansatz für Σ in dieser Arbeit mikroskopisch: die Matrixelemente von Σ werden mit Hilfe der Hamiltonfunktion von Edwards und Anderson für Heisenbergspins mit zusätzlicher stochastischer DM-Wechselwirkung in Moden-Kopplungsnaheung bestimmt.

II. Kapitel

b) Freie Energie von HSH und statische Suszeptibilitätsmatrix

Die freie Energie von HSH (HSH, 1982, Gl. (2.2))

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} &= \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_A \\
 \mathcal{F}_1 &= \frac{1}{2} \chi^{-1} (\vec{M} - \vec{M}_R)^2 - \vec{H} \cdot \vec{M} \\
 \mathcal{F}_A &= -\frac{1}{2} K (\text{Tr}(R(\theta)) - 1) \\
 &= -K \cos \theta
 \end{aligned} \tag{22}$$

beschreibt die folgende experimentelle Situation: die Probe wird in einem Kühlfeld $\vec{H}_c$ unter die Spinglas Temperatur T_g abgekühlt, wobei sich die remanente Magnetisierung $\vec{M}_c \uparrow \uparrow \vec{H}_c$ bildet. Nach Abschalten von $\vec{H}_c$ wird das statische Feld $\vec{H}$ im Winkel θ_H zu $\vec{M}_c$ angelegt.

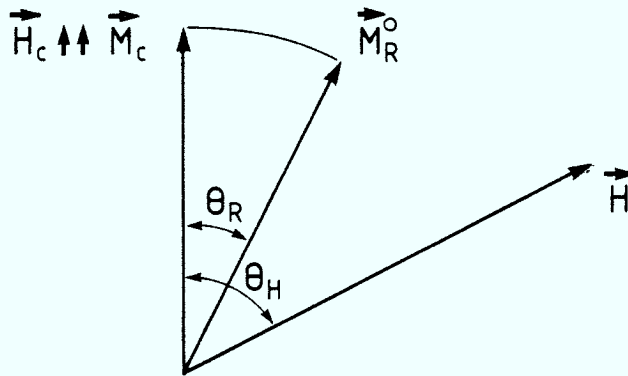


Abb. 2: Felder im FC-Fall unterhalb T_g

Dabei wird $\vec{M}_c$ um den Winkel θ_R gedreht ($|\vec{M}_c| = |\vec{M}_R^o|$) und es stellt sich die Gesamtmagnetisierung $\vec{M}_o$ ein:

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_o &= \chi \vec{H} + \vec{M}_R^o \\
 \vec{M}_R^o &= \mathbf{R}(\theta_R) \vec{M}_c,
 \end{aligned} \tag{23}$$

$\mathbf{R}(\theta_R)$ ist die zugehörige Rotationsmatrix. Legt man die Vektoren von Abb. 2 in

die y-z-Ebene, so lautet die Gleichgewichtsbedingung für θ_R

$$(\vec{H} \times \vec{H}_R)^z = H_i^2 \sin \theta_R, \quad M_R^o = M_c$$

bzw.

$$H M_R^o \sin(\theta_H - \theta_R) = K \cdot \sin \theta_R \quad (24)$$

mit

$$\begin{aligned} H_R &= \chi^{-1} \cdot M_R^o \\ &= \chi^{-1} \cdot M_c \\ H_i^2 &= \chi^{-1} K \end{aligned} \quad (25)$$

Nun werden homogene ($\vec{k} = \vec{0}$) Fluktuationen um diese Gleichgewichtslage betrachtet:

Fluktuationen der Magnetisierung

$$\vec{M} = \vec{M}_o + \delta \vec{M} \quad (26)$$

Fluktuationen der Rotation mit Winkel θ

$$\vec{M}_R = \mathbf{R}(\theta) \vec{M}_R^o$$

bzw.

$$\delta \vec{M}_R = (\mathbf{R}(\theta) - 1) \vec{M}_R^o. \quad (27)$$

Die freie Energie lautet (vgl. Anh. II.a)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \frac{1}{2} \chi H^2 - \vec{H} \cdot \vec{M}^o + \frac{1}{2} \chi^{-1} \delta \vec{M}^2 - \vec{H} \mathbf{R}(\theta) \vec{M}_R^o + \\ &\quad + \frac{1}{2} \chi^{-1} ((\mathbf{R}(\theta) - 1) \vec{M}_R^o)^2 - \\ &\quad - \chi^{-1} \delta \vec{M} (\mathbf{R}(\theta) - 1) \vec{M}_R^o - \\ &\quad - (\chi^{-1} (\vec{M}^o - \vec{M}_R^o) + \vec{H}) \delta \vec{M} \\ \mathcal{F}_A &= -\frac{1}{2} K (Tr (\mathbf{R}(\theta) \mathbf{R}(\theta_R)) - 1). \end{aligned} \quad (28)$$

Man beachte, daß in die Anisotropie Energie $\mathcal{F}_A$ die Matrix der *gesamten* Rotation $\mathbf{R}(\theta) \mathbf{R}(\theta_R)$ eingeht.

Zwecks Entwicklung von F nach Komponenten θ^α und M^α ($\alpha = x, y, z$) wird das folgende Koordinatensystem gewählt:

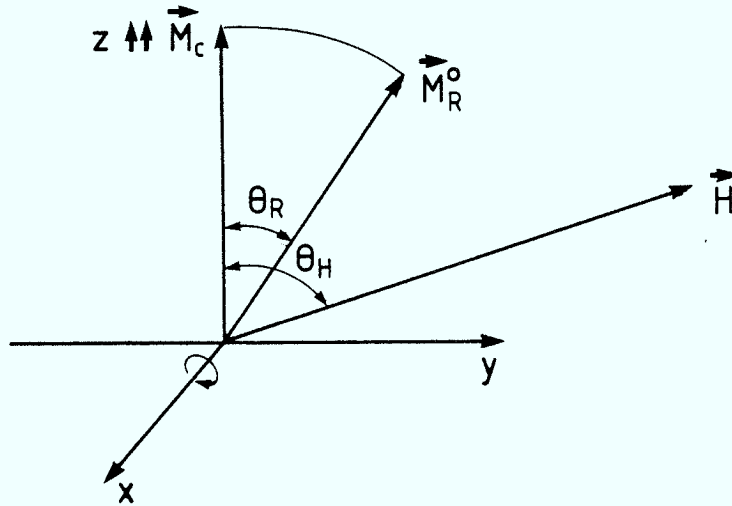


Abb. 3: Drehung um die x-Achse

d.h. daß die Rotationsmatrizen für die Drehungen ins Gleichgewicht die Form

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (28)$$

haben, mit den Drehvektoren

$$\vec{\theta}_R = \begin{pmatrix} \theta_R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\theta}_H = \begin{pmatrix} \theta_H \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt für $\vec{H}$ und $\vec{M}_R^o$

$$\begin{aligned} \vec{M}_R^o &= \mathbf{R}(\theta_R) \vec{M}_c \\ &= \mathbf{R}(\theta_R) M_R^o \cdot \hat{z}, \quad \text{da } M_R^o = M_c, \\ \vec{H} &= \mathbf{R}(\theta_H) H \hat{z}. \end{aligned} \quad (30)$$

Die Rotationsfluktuationen $\mathbf{R}(\theta)$, die in der Richtung durch $\hat{\theta}$ und im Betrag durch $\theta = |\vec{\theta}|$ festgelegt sind, haben die Form

$$R^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \cos\theta + \hat{\theta}^\alpha \hat{\theta}^\beta (1 - \cos\theta) + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\theta}^\gamma \sin\theta. \quad (31)$$

Mit diesen Ansätzen lautet die freie Energie bis zur quadratischen Ordnung in den Variablen $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = & \text{const} - \left(\chi^{-1}(\vec{M}_0 - \vec{M}_R^0) + \vec{H} \right) \cdot \delta \vec{M} + \\
& + (K \cdot \sin \theta_R - H M_R^0 \sin(\theta_H - \theta_R)) \cdot \theta^x + \\
& + \frac{1}{2} H M_R^0 \cdot \left(\cos(\theta_H - \theta_R)(\theta^x)^2 + \cos \theta_H \cdot \sin \theta_R \cdot (\theta^y)^2 + \right. \\
& \quad \left. + \sin \theta_H \cdot \sin \theta_R \cdot (\theta^z)^2 - \sin(\theta_H + \theta_R) \theta^y \cdot \theta^z \right) + \\
& + \frac{1}{2} \chi^{-1} M_R^{02} \left((\theta^x)^2 + \cos^2 \theta_R \cdot (\theta^y)^2 + \sin^2 \theta_R \cdot (\theta^z)^2 - \sin(2\theta_R) \cdot \theta^y \cdot \theta^z \right) - \\
& - \chi^{-1} M_R^0 \left(\sin \theta_R (\delta M^x \theta^z - \delta M^z \theta^x) + \cos \theta_R (\delta M^y \theta^x - \delta M^x \theta^y) \right) + \\
& + \frac{1}{2} K \left(\cos^2 \theta_R \cdot (\theta^x)^2 + \frac{1}{2} (1 + \cos \theta_R) ((\theta^y)^2 + (\theta^z)^2) \right).
\end{aligned} \tag{32}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (23) und (24) eliminieren die linearen Terme in $\mathcal{F}$, so daß $\mathcal{F}$ die Form hat

$$\mathcal{F} = \text{const} + \frac{1}{2} \vec{X} \chi^{-1} \vec{X}.$$

Daraus ergibt sich die Suszeptibilitätsmatrix zu,

$$\vec{X} = (\delta M^x, \theta^y, \delta M^y, \theta^x, \delta M^z, \theta^y),$$

$$\chi^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{B} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{B}^T & \mathbf{A}_3 \end{pmatrix} \tag{33}$$

$\delta M^x, \theta^y$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} \chi^{-1} & H_R^z \\ H_R^z & x_1 \end{pmatrix} \\
x_1 &= \chi \cdot \left(H^z \cdot H_R^z + (H_R^z)^2 + \frac{1}{2} H_i^2 (1 + \cos \theta_R) \right),
\end{aligned}$$

$\delta M^y, \theta^x$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_2 &= \begin{pmatrix} \chi^{-1} & -H_R^z \\ -H_R^z & x_2 \end{pmatrix} \\
x_2 &= \chi \cdot \left(H^z \cdot H_R^z + H^y + H_R^y + (H_R^z)^2 + (H_R^y)^2 + H_i^2 \cos \theta_R \right),
\end{aligned} \tag{34}$$

$\delta M^z, \theta^z$:

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} \chi^{-1} & 0 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \chi \cdot \left(H^y \cdot H_R^y + (H_R^y)^2 + \frac{1}{2} H_i^2 (1 + \cos \theta_R) \right),$$

$\delta M^x, \theta^y - \delta M^z, \theta^z$:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ 0 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = -H_R^z$$

$$x_4 = -\frac{1}{2}\chi \cdot \left(H^y H_R^z + H^z H_R^y + 2 \cdot H_R^y H_R^z \right), \quad (35)$$

$\delta M^y, \theta^x - \delta M^z, \theta^z$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -y_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gl. (32) enthält die inverse Matrix der Suszeptibilität für eine beliebige Anordnung von remanenter Magnetisierung $\vec{M}_R^0$, und äußerem Feld $\vec{H}$. Im folgendem wird auf den Fall

$$\theta_R = \theta_H = 0,$$

d.h.

$$\vec{H} \uparrow \uparrow \vec{M}_R^0 \quad (36)$$

spezialisiert, für den ESR-Experimente zur Dämpfung und Frequenzverschiebung in der *Spinglasphase* vorliegen.

Für $\theta_H = \theta_R = 0$ lautet die inverse Suszeptibilitätsmatrix

$$\chi^{-1} = \begin{pmatrix} \chi^{-1} & H_R & 0 & 0 \\ H_R & \chi \cdot (h + H_R^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi^{-1} & -H_R \\ 0 & 0 & -H_R & \chi(h + H_R^2) \\ 0 & 0 & 0 & \chi_0^{-1} & 0 \\ & & & 0 & \chi H_i^2 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

$h = H \cdot H_R + H_i^2$, und χ selbst

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi(1 + H_R^2 \cdot h^{-1}) & -H_R \cdot h^{-1} & 0 & 0 \\ -H_R \cdot h^{-1} & \chi^{-1} h^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi(1 + H_R^2 \cdot h^{-1}) & H_R \cdot h^{-1} \\ 0 & 0 & H_R \cdot h^{-1} & \chi^{-1} h^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_0^{-1} & 0 \\ & & & & 0 & \chi^{-1} \cdot H_i^{-2} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Die Gleichung (38) ermöglicht zudem die Anisotropiekonstante K durch eine Korrelationsfunktion auszudrücken:

FC – Fall :

$$\begin{aligned} (M_R^o > 0) \quad K &= \chi_{\theta^z \theta^z}^{-1} \\ &= \frac{T}{\left(\theta^z(\vec{k} = \vec{0}) | \theta^z(\vec{k} = \vec{0}) \right)} , \end{aligned} \quad (39)$$

ZFC – Fall :

$$(M_R^o = 0) \quad K = \frac{T}{\frac{1}{3} \left(\theta^\alpha(\vec{k} = \vec{0}) | \theta^\alpha(\vec{k} = \vec{0}) \right)} .$$

Dies ist mit Blick auf eine mikroskopische Berechnung von K wichtig (s. Kap. III.c).

II. Kapitel

c) HSH-Bewegungsgleichungen, ungedämpfte ESR-Anregungen und zugehörige Korrelationsfunktionen

Eine makroskopische Dynamik der hydrodynamischen Variablen $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$ ist mit Hilfe der freien Energie F durch

$$\begin{aligned}\dot{\vec{M}} &= \{\delta\vec{M}, \mathcal{F}\} \\ \dot{\vec{\theta}} &= \{\vec{\theta}, \mathcal{F}\}\end{aligned}\quad (40)$$

gegeben (Dzyaloshinsky/Volovick, 1980). Dabei müssen noch die Poissonklammern der Variablen untereinander spezifiziert werden:

$$\begin{aligned}\{\delta M^\alpha, \delta M^\beta\} &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (M_o^\gamma + \delta M^\gamma) \\ \{\delta M^\alpha, \theta^\beta\} &= \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \theta^\gamma \\ \{\theta^\alpha, \theta^\beta\} &= 0;\end{aligned}\quad (41)$$

sie sind zu den von HSH angegebenen äquivalent (HSH, 1982, Gl. (3.1)). Aus (40), (41) und der freien Energie $\mathcal{F}$ (Gl. (32) ff) folgen die Bewegungsgleichungen für $X^\alpha = \delta M^x, \theta^y, \delta M^y, \theta^x, \delta M^z, \theta^z$ (HSH, 1982, Gl. (3.4a/b) und Anhang II.b)

$$\partial_t \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 & H^z & \chi H_i^2 \cos \theta_R & -H^y & 0 \\ -\chi^{-1} & \frac{1}{2} \chi H_i^2 (1 + \cos \theta_R) & -H_R^z & 0 & 0 \\ -\chi^{-1} & -H_R^z & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \chi H_i^2 \sin \theta_R \\ H^y & \frac{1}{2} \chi H_i^2 \sin \theta_R & 0 & 0 & H_R^y \\ 0 & 0 & 0 & -H_R^y & \chi^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \chi H_i^2 (1 + \cos \theta_R) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \chi H_i^2 (1 + \cos \theta_R) \\ 0 \end{pmatrix} \vec{X}; \quad (42)$$

für den Fall $\theta_H = \theta_R = 0$ gilt speziell

$$\partial_t \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 & H & \chi H_i^2 & 0 \\ -\chi^{-1} & \chi H_i^2 & H_R & 0 \\ -\chi^{-1} & -H_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi H_i^2 \\ 0 & 0 & -\chi^{-1} & 0 \end{pmatrix} \vec{X}.$$

Aus Gl. (42) erhält man via Multiplikation mit $\vec{X}^T$ und anschließender Mittelung die Bewegungsgleichungen für die ungedämpften Korrelationsfunktion $C(t)$

$$\partial_t C(t) = \mathbf{A} C(t),$$

bzw. für deren Laplace Transformierte $\mathbf{C}(z)$

$$(z\mathbf{1} - i\mathbf{A})\mathbf{C}(z) = i\mathbf{C}(t=0) , \quad (43)$$

die ungedämpften Anregungen ergeben sich aus der Bedingung

$$\det(z\mathbf{1} - i\mathbf{A}) = 0 . \quad (44)$$

Vergleicht man mit der Mori Formulierung (Gl. (19) – (21)), so folgt der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \overline{\langle \{\vec{X}, \vec{X}\} \rangle} \cdot \chi^{-1} \\ &= -i\mathbf{\Omega} , \end{aligned} \quad (45)$$

der einen Test auf Konsistenz bisher ausgeführter Rechnungen darstellt. Er ist im Anhang II.b durchgeführt.

Für $\theta_H = \theta_R = 0$ werden im folgenden Anregungen und Korrelationsfunktionen bestimmt:

$$\det(z\mathbf{1} - \mathbf{\Omega}) = \det \begin{pmatrix} z\mathbf{1} & -i\mathbf{\Omega}_1 & 0 \\ -i\mathbf{\Omega}_2 & z\mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & z\mathbf{1} - i\mathbf{\Omega}_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (46)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}_1 &= \begin{pmatrix} H & \chi H_i^2 \\ -\chi^{-1} & H_R \end{pmatrix} \\ \mathbf{\Omega}_2 &= \begin{pmatrix} -H & \chi H_i^2 \\ -\chi^{-1} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{\Omega}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & \chi H_i^2 \\ -\chi^{-1} & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die longitudinalen Resonanzfrequenzen

$$\begin{aligned} \det(z\mathbf{1} - i\mathbf{\Omega}_3) &= 0 \\ z_{\pm}^{\parallel} &= \pm H_i , \end{aligned} \quad (47)$$

und die transversalen Resonanzfrequenzen

$$\det \begin{pmatrix} z\mathbf{1} & -i\mathbf{\Omega}_1 \\ -i\mathbf{\Omega}_2 & z\mathbf{1} \end{pmatrix} = 0$$

$$z_{\pm} = \frac{1}{2} (H - H_R) \pm \frac{1}{2} \left((H + H_R)^2 + 4H_i^2 \right)^{1/2} \quad (48)$$

und

$$-z_{\pm} \quad (\text{vgl. Anhang II.c und HSH, 1982, Gl. (3.6)}).$$

Zur Berechnung der Korrelationsfunktionen muß die Matrix $z - \Omega$ invertiert werden:

$$\mathbf{C}(z) = (z\mathbf{1} - \Omega)^{-1} \cdot iT\chi. \quad (49)$$

Aus der Struktur der Frequenzmatrix Ω folgt, daß (in der HSH Theorie) longitudinale und transversale Korrelationsfunktionen nicht gekoppelt sind. Die einzelnen Korrelationsfunktionen sind im folgenden zusammengestellt:

(vgl. Anhang II.c) $h = H H_R + H_i^2$, $d(z) = \det(z^2 \mathbf{1} + \Omega_2 \Omega_1)$

$$\begin{aligned} C_{M^x M^x}(z) &= \frac{iTz}{d(z)} \chi \cdot h^{-1} \left((z^2 - H_i^2 - H_R^2) (h + H_R^2) + H_R H_i^2 (H - H_R) \right) \\ &= C_{M^y M^y}(z) \\ C_{M^x \theta^y}(z) &= \frac{-iTz}{d(z)} h^{-1} \left((z^2 - H_i^2 - H_R^2) H_R + H_i^2 (H - H_R) \right) \\ &= C_{\theta^y M^x}(z) \\ C_{\theta^y \theta^y}(z) &= \frac{iTz}{d(z)} \chi^{-1} h^{-1} \left(z^2 - H^2 - H_i^2 + H_R (H - H_R) \right) \\ &= C_{\theta^x \theta^x}(z) \\ C_{M^x M^y}(z) &= \frac{-T\chi}{d(z)} \left((z^2 - H_R^2) (H + H_R) - 2H_i^2 H_R \right) \\ &= -C_{M^y M^x}(z) \\ C_{M^x \theta^z}(z) &= \frac{-T}{d(z)} \left(z^2 - H_i^2 - H_R^2 \right) \\ &= -C_{\theta^y M^y}(z) \\ C_{\theta^y \theta^x}(z) &= \frac{T}{d(z)} \chi^{-1} (H - H_R) \\ &= -C_{\theta^x \theta^y}(z) \\ C_{M^z M^z}(z) &= \frac{iz T \chi}{z^2 - H_i^2} \\ C_{M^z \theta^z}(z) &= \frac{-iT}{z^2 - H_i^2} \\ &= -C_{\theta^z M^z}(z) \\ C_{\theta^z \theta^z}(z) &= \frac{iz T \chi^{-1} H_i^2}{z^2 - H_i^2}. \end{aligned} \quad (50)$$

Damit liegt die phänomenologische Theorie der ESR-Resonanzen von HSH in Morischer Formulierung vor. Wesentliche Ergebnisse sind:

1. die Berechnung der Matrix der statischen Suszeptibilität χ ,
2. der Zusammenhang von Anisotropiekonstanter K und der Korrelationsfunktion $(\theta(\vec{k} = \vec{0})|\theta(\vec{k} = \vec{0}))$ und
3. die explizite Berechnung der dynamischen Korrelationsfunktionen für die ungedämpften Anregungen.

II. Anhang

a) Berechnung der freien Energie von HSH bis zur quadratischen Ordnung in $M^\alpha(\vec{k} = \vec{0})$ und $\theta^\alpha(\vec{k} = \vec{0})$

Die freie Energie lautet

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_A$$

mit

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \frac{1}{2}\chi^{-1}(\vec{M} = \vec{M}_R) - \vec{H} \cdot \vec{M} \\ \mathcal{F}_A &= -K \cos \theta\end{aligned}\tag{A1}$$

θ : Winkel der homogenen Drehung

(vgl. Abb. 3). Die unidirektionale Anisotropie Energie $\mathcal{F}_A$ hat ihren Ursprung in der stochastischen DM-Anisotropie (HSH, 1982, Abschnitt II):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_A &= -\frac{1}{2}K (\text{Tr } \mathbf{R}(\theta) - 1) \\ &= -K \cos \theta\end{aligned}\tag{A2}$$

dabei stellt $\mathbf{R}(\theta)$ eine gleichförmige Rotation aller Spins dar. Der Ansatz für die Fluktuation um die Gleichgewichtslage

$$\vec{M}_o = \chi H + \vec{M}_R^o\tag{A3.a}$$

$$H M_R^o \sin(\theta_H - \theta_R) = K \sin \theta_R\tag{A3.b}$$

lautet

$$\begin{aligned}\delta \vec{M} &= \vec{M} - \vec{M}_o \\ \delta \vec{M}_R &= (\mathbf{R}(\theta) - 1) \vec{M}_R^o.\end{aligned}\tag{A4}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \frac{1}{2}\chi^{-1} (\vec{M}_o + \delta \vec{M} - \vec{M}_R^o - \delta \vec{M}_R)^2 - \\ &\quad - \vec{H} \cdot \vec{M}_o - \vec{H} \cdot \delta \vec{M} \\ &= \frac{1}{2}\chi^{-1} (\vec{M}_o - \vec{M}_R^o)^2 + \frac{1}{2}\chi^{-1} (\delta \vec{M} - \delta \vec{M}_R)^2 + \\ &\quad + \chi^{-1} ((\vec{M}_o - \vec{M}_R^o)\delta \vec{M} - (\vec{M}_o - \vec{M}_R^o)) \delta \vec{M}_R \\ &\quad - \vec{H} \cdot \vec{M}_o - \vec{H} \cdot \delta \vec{M},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \frac{1}{2}\chi \cdot H^2 + \frac{1}{2}\chi^{-1} (\delta\vec{M} - \delta\vec{M}_R)^2 - \vec{H}\delta\vec{M}_R - \vec{H} \cdot \vec{M}^o + \delta\vec{M} \cdot (\chi^{-1}(\vec{M}_o - \vec{M}_R^o) - \vec{H}) \\
&= \frac{1}{2}\chi H^2 - \vec{H} \cdot \vec{M}^o + \delta\vec{M} \cdot (\chi^{-1}(\vec{M}_o - \vec{M}_R^o) - \vec{H}) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\chi^{-1} (\delta\vec{M} - (\mathbf{R}(\theta) - 1) \vec{M}_R^o)^2 - \vec{H}(\mathbf{R}(\theta) - 1) \vec{M}_R^o \\
&= \frac{1}{2}\chi\vec{H}^2 - \vec{H} \cdot \vec{M}^o + \frac{1}{2}\chi^{-1}\delta\vec{M}^2 + \frac{1}{2}\chi^{-1} ((\mathbf{R}(\theta) - 1) \vec{M}_R^o)^2 - \\
&\quad - \chi^{-1}\delta\vec{M} \cdot (\mathbf{R}(\theta) - 1)\vec{M}_R^o - \vec{H}(\mathbf{R}(\theta) - 1)\vec{M}_R^o + \delta\vec{M} \cdot (\chi^{-1}(\vec{M}_o - \vec{M}_R^o) - \vec{H}) \\
\mathcal{F}_1 &= -\frac{1}{2}\chi\vec{H}^2 - \vec{H}\mathbf{R}(\theta) \vec{M}_R^o + \frac{1}{2}\chi^{-1}\delta\vec{M}^2 + \delta\vec{M} \cdot (\chi^{-1}(\vec{M}_o - \vec{M}_R^o) - \vec{H}) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\chi^{-1} ((\mathbf{R}(\theta) - 1)\vec{M}_R^o)^2 - \chi^{-1} \delta\vec{M} (\mathbf{R}(\theta) - 1) \vec{M}_R^o. \tag{A5}
\end{aligned}$$

Mit der Geometrie von Abb. 3

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= \mathbf{R}(\theta_H) \cdot H \cdot \hat{z} \\
\vec{H}_R^o &= \mathbf{R}(\theta_R) \cdot M_R^o \hat{z}, \quad M_c = M_R^o \tag{A6}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & +\sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

und der koordinatenfreien Darstellung der Drehmatrix um die Achse $\vec{\theta}$ mit Winkel $\theta = (\theta^\alpha \theta^\alpha)^{1/2}$

$$R^{\alpha\beta}(\theta) = \delta_{\alpha\beta} \cos\theta + \hat{\theta}^\alpha \hat{\theta}^\beta (1 - \cos\theta) + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\theta}^\gamma \sin\theta, \tag{A7}$$

deren Entwicklung bis zur 2. Ordnung in θ^α

$$\begin{aligned}
R^{\alpha\beta}(\theta) &= \delta_{\alpha\beta} \left(1 - \frac{1}{2} \theta^\gamma \theta^\gamma\right) + \frac{1}{2} \hat{\theta}^\alpha \hat{\theta}^\beta \cdot \theta^2 + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\theta}^\gamma \cdot \theta \\
&= \delta_{\alpha\beta} \left(1 - \frac{1}{2} \theta^\gamma \theta^\gamma\right) + \frac{1}{2} \theta^\alpha \theta^\beta + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \theta^\gamma \tag{A8}
\end{aligned}$$

lautet, folgt dann für die einzelnen Terme von $\mathcal{F}_1$ (ebenfalls bis zur 2. Ordnung):

$$\begin{aligned}
\text{a) } -\vec{H}\mathbf{R}(\theta) \vec{M}_R^o &= -H M_R^o R^{\alpha z}(\theta_H) \times \\
&\quad \times \left(\delta_{\alpha\beta} \left(1 - \frac{1}{2} \theta^\gamma \theta^\gamma\right) + \frac{1}{2} \theta^\alpha \theta^\beta + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \theta^\gamma \right) R^{\beta z}(\theta_R)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\vec{H}\mathbf{R}(\theta)\vec{M}_R^o &= -H M_R^o \left(\cos(-\theta_H + \theta_R) \left(1 - \frac{1}{2} \theta^\gamma \theta^\gamma\right) + \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} (\sin\theta_H \cdot \theta^y + \cos\theta_H \cdot \theta^z) (\sin\theta_R \cdot \theta^y + \cos\theta_R \cdot \theta^z) \\
&\quad \left. + \sin\theta_H \cdot \cos\theta_R \cdot \theta^x - \cos\theta_H \cdot \sin\theta_R \cdot \theta^x \right) \\
&= -H M_R^o \cdot \left(\cos(\theta_H - \theta_R) \left(1 - \frac{1}{2} \theta^\gamma \theta^\gamma\right) + \frac{1}{2} \sin\theta_H \sin\theta_R (\theta^y)^2 + \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \cos\theta_H \cos\theta_R (\theta^z)^2 + \frac{1}{2} \sin(\theta_H + \theta_R) \cdot \theta^y \cdot \theta^z + \\
&\quad \left. + \sin(\theta_H - \theta_R) \theta^x \right) \tag{A9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \frac{1}{2} \chi^{-1} ((\mathbf{R}(\theta) - \mathbf{1}) \vec{M}_R^o)^2 &= \frac{1}{2} \chi^{-1} M_R^{o2} \cdot \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \theta^\gamma R^{\beta z}(\theta_R) \cdot \\
&\quad \epsilon_{\alpha\mu\sigma} \theta^\sigma R^{\mu z}(\theta_R) \\
&= \frac{1}{2} \chi^{-1} M_R^{o2} (\delta_{\beta\mu} \delta_{\sigma\gamma} - \delta_{\beta\sigma} \delta_{\gamma\mu}) \theta^\gamma \theta^\sigma \cdot \\
&\quad \cdot R^{\beta z}(\theta_R) R^{\mu z}(\theta_R) \\
&= \frac{1}{2} \chi^{-1} M_R^{o2} (\theta^\alpha \theta^\alpha - (R^{\beta z}(\theta_R) \theta^\beta)^2) \\
&= \frac{1}{2} \chi^{-1} M_R^{o2} (\theta^\alpha \theta^\alpha - (+ \sin\theta_R \cdot \theta^y + \cos\theta_R \cdot \theta^z)^2) \\
&= \frac{1}{2} \chi^{-1} M_R^{o2} \left((\theta^x)^2 + (\theta^y)^2 \cos^2\theta_R + \right. \\
&\quad \left. + (\theta^z)^2 \sin^2\theta_R - \theta^y \theta^z \sin(2\theta_R) \right) \tag{A10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } -\chi^{-1} \delta \vec{M}(\mathbf{R}(\theta) - \mathbf{1}) \vec{M}_R^o &= -\chi^{-1} \delta M^\alpha \left(+\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \theta^\gamma R^{\beta z}(\theta_R) M_R^o \right) \\
&= -\chi^{-1} M_R^o \left(\delta M^x \cdot \sin\theta_R \cdot \theta^z - \delta M^x \cos\theta_R \theta^y + \right. \\
&\quad \left. + \delta M^y \cos\theta_R \theta^x - \delta M^z \cdot \sin\theta_R \cdot \theta^x \right) \\
&= -\chi^{-1} M_R^o \cdot \left(\sin\theta_R \cdot (\delta M^x \theta^z - \delta M^z \cdot \theta^x) + \right. \\
&\quad \left. + \cos\theta_R (\delta M^y \theta^x - \delta M^x \cdot \theta^y) \right) . \tag{A11}
\end{aligned}$$

Entsprechend für $\mathcal{F}_A$ (Fluktuationen um $\vec{M}_R^o = \mathbf{R}(\theta_R)\vec{M}_c$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_A &= -\frac{1}{2} K (Tr(\mathbf{R}(\theta) \mathbf{R}(\theta_R)) - 1) \\
&= -\frac{1}{2} K (R^{\alpha\gamma}(\theta) R^{\gamma\alpha}(\theta_R) - 1) \\
&= -\frac{1}{2} K \left(R^{xx}(\theta) + R^{yy}(\theta) \cos\theta_R - R^{yz}(\theta) \cdot \sin\theta_R - \right. \\
&\quad \left. + R^{zy}(\theta) \sin\theta_R + R^{zz}(\theta) \cos\theta_R - 1 \right) \\
\mathcal{F}_A &= -\frac{1}{2} K \left(-\frac{1}{2} ((\theta^y)^2) + \right. \\
&\quad \left. - \sin\theta_R (R^{yz}(\theta) - R^{zy}(\theta)) + \right. \\
&\quad \left. + \cos\theta_R (2 - \frac{1}{2} ((\theta^x)^2 + (\theta^z)^2 + (\theta^y)^2) \right) \\
\mathcal{F}_A &= -\frac{1}{2} K \left(2\cos\theta_R - (\theta^x)^2 \cos\theta_R - \frac{1}{2} ((\theta^y)^2 + (\theta^z)^2) \cdot (1 + \cos\theta_R) - \right. \\
&\quad \left. - 2 \cdot \theta^x \sin\theta_R \right) . \tag{A12}
\end{aligned}$$

Insgesamt lautet die freie Energie (ohne konstante Beiträge) unter Berücksichtigung von Gl. (A3.a,b), die die linearen Terme eliminiert:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= -H M_R^o \left(-\frac{1}{2} \cos(\theta_H - \theta_R) \cdot \vec{\theta}^2 + \frac{1}{2} \sin\theta_H \sin\theta_R (\theta^y)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \cos\theta_H \cos\theta_R (\theta^z)^2 + \frac{1}{2} \sin(\theta_R + \theta_R) \theta^y \theta^z \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \chi^{-1} \delta \vec{M}^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} \chi^{-1} M_R^{o2} \left((\theta^x)^2 + \cos^2\theta_R (\theta^y)^2 + \sin^2\theta_R (\theta^z)^2 - \sin(2\theta_R) \theta^y \theta^z \right) - \\
&\quad - \chi^{-1} M_R^o (\sin\theta_R \cdot (\delta M^x \theta^z - \delta M^z \cdot \theta^x) + \cos\theta_R \cdot (\delta M^y \theta^x - \delta M^x \theta^y)) - \\
&\quad - \frac{1}{2} K \left(-\cos\theta_R \cdot (\theta^x)^2 - \frac{1}{2} (1 + \cos\theta_R) ((\theta^y)^2 + (\theta^z)^2) \right) \tag{A13}
\end{aligned}$$

und damit

$$\mathcal{F} = \text{const} + \frac{1}{2} \vec{X} \chi^{-1} \vec{X} ,$$

mit χ^{-1} wie in Gl. (33) ff.

II. Anhang

b) Herleitung der Bewegungsgleichung von HSH und Test auf Konsistenz der Rechnung

Die Poissonklammern der Variablen $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$ lauten

$$\begin{aligned}\{\delta M^\alpha, \delta M^\beta\} &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (M_o^\gamma + \delta M^\gamma) \\ \{\delta M^\alpha, \theta^\beta\} &= \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \theta^\gamma \\ \{\theta^\alpha, \theta^\beta\} &= 0.\end{aligned}\tag{A14}$$

Die freie Energie ist gleich (Gl. (32 ff))

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \text{const} + \frac{1}{2} \delta \vec{M} \chi_{MM}^{-1} \delta \vec{M} + \\ &+ \frac{1}{2} \vec{\theta} \chi_{\theta\theta}^{-1} \vec{\theta} + \delta \vec{M} \mathbf{A}_{M\theta} \vec{\theta}\end{aligned}\tag{A15}$$

mit

$$\begin{aligned}\chi_{MM}^{-1} &= \chi^{-1} \cdot \mathbf{1} \\ \chi_{\theta\theta}^{-1} &= \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_4 \\ 0 & x_4 & x_3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}_{M\theta} &= \begin{pmatrix} 0 & y_1 & y_2 \\ -y_1 & 0 & 0 \\ -y_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{A16}$$

$$y_1 = H_R \cos\theta_R = H_R^z \text{ (vgl. Abb. 3 Kap. II.b)}$$

$$y_2 = -H_R \sin\theta_R = -H_R^y$$

$$\begin{aligned}x_1 &= \chi \left(H H_R \cos\theta_H \cos\theta_R + H_R^2 \cos^2\theta_R + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} H_i^2 (1 + \cos\theta_R) \right) \\ &= \chi \left(H^z H_R^z + (H_R^z)^2 + \frac{1}{2} H_i^2 (1 + \cos\theta_R) \right) \\ x_2 &= \chi \left(H H_R \cos(\theta_H - \theta_R) + H_R^2 + H_i^2 \cos\theta_R \right) \\ &= \chi \left(H^y H_R^y + H^z H_R^z + (H_R^y)^2 + (H_R^z)^2 + H_i^2 \cos\theta_R \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3 &= \chi \left(H H_R \sin\theta_H \sin\theta_R + H_R^2 \sin^2\theta_R + \frac{1}{2} H_i^2 (1 + \cos\theta_R) \right) \\
&= \chi \left(H^y H_R^y + (H_R^y)^2 + \frac{1}{2} H_i^2 (1 + \cos\theta_R) \right) \\
x_4 &= -\frac{1}{2} \chi \left(H H_R \sin(\theta_H + \theta_R) + H_R^2 \sin\theta_R \cos\theta_R \cdot 2 \right) \\
&= -\frac{1}{2} \chi \left(H^y H_R^z + H^z H_R^y + 2 \cdot H_R^y H_R^z \right) .
\end{aligned} \tag{A17}$$

Die linearisierten Bewegungsgleichungen folgen aus

$$\begin{aligned}
\partial_t X^\alpha &= \{X^\alpha, \mathcal{F}\} \\
&= \frac{1}{2} \chi^{-1} \{X^\alpha, \delta M^\gamma \delta M^\gamma\} + \\
&\quad + \frac{1}{2} (\chi_{\theta\theta}^{-1})^{\mu\nu} \{X^\alpha, \theta^\mu \theta^\nu\} + \\
&\quad + A_{M\theta}^{\mu\nu} \{X^\alpha, \delta M^\mu \theta^\nu\},
\end{aligned} \tag{A18}$$

$\delta \vec{M}$:

$$\begin{aligned}
\{\delta M^\alpha, \delta M^\gamma \delta M^\gamma\} &= 2\epsilon_{\alpha\gamma\sigma} (M_o^\sigma + \delta M^\sigma) \delta M^\gamma \\
&= -2\epsilon_{\alpha\sigma\gamma} M_o^\sigma \delta M^\gamma \text{ (linearisiert)} \\
\{\delta M^\alpha, \theta^\mu \theta^\nu\} &= \delta_{\alpha\mu} \theta^\nu + \delta_{\alpha\nu} \theta^\mu \\
\{\delta M^\alpha, \delta M^\mu \theta^\nu\} &= \delta M^\mu \cdot \delta_{\alpha\nu} + \epsilon_{\alpha\mu\sigma} M_o^\sigma \theta^\nu
\end{aligned} \tag{A19}$$

$\vec{\theta}$:

$$\begin{aligned}
\{\theta^\alpha, \delta M^\gamma \delta M^\gamma\} &= -2\delta_{\alpha\gamma} \cdot \delta M^\gamma \\
\{\theta^\alpha, \theta^\mu \theta^\nu\} &= 0 \\
\{\theta^\alpha, \delta M^\mu \theta^\nu\} &= -\delta_{\alpha\mu} \theta^\nu .
\end{aligned} \tag{A20}$$

Damit folgt (das gyromagnetische Moment $\gamma = 1$ gesetzt)

$$\begin{aligned}
\delta \dot{M}^\alpha &= -\epsilon_{\alpha\sigma\gamma} \chi^{-1} \cdot M_o^\sigma \delta M^\gamma + (\chi_{\theta\theta}^{-1})^{\alpha\mu} \theta^\mu - \\
&\quad - \epsilon_{\alpha\sigma\mu} M_o^\sigma A^{\mu\nu} \theta^\nu + A^{\mu\alpha} \delta M^\mu \\
\dot{\theta}^\alpha &= -\chi^{-1} \delta M^\alpha - A^{\alpha\mu} \cdot \theta^\nu
\end{aligned} \tag{A21}$$

und komponentenweise ($H^x = H_R^x = 0$)

$$\begin{aligned}
\delta \dot{M}^x &= -\chi^{-1} (M_o^y \delta M^z - M_o^z \delta M^y) + x_2 \theta^x - \\
&\quad - (M_o^y A_{M\theta}^{z\nu} \theta^\nu - M_o^z A_{M\theta}^{y\nu} \theta^\nu) - y_1 \delta M^y - y_2 \delta M^z \\
&= -((H^y + H_R^y) \delta M^z - (H^z + H_R^z) \delta M^y) + \\
&\quad + \chi (H^y H_R^y + H^z H_R^z + (H_R^y)^2 + (H_R^z)^2 + H_i^2 \cos \theta_R) \cdot \theta^x - \\
&\quad - \chi ((H^y + H_R^y) \cdot H_R^y \theta^x + (H^z + H_R^z) H_R^z \theta^x) - \\
&\quad - H_R^z \delta M^y + H_R^y \delta M^z \\
\delta \dot{M}^x &= -(H^y \delta M^z - H^z \delta M^y) + \chi H_i^2 \cos \theta_R \cdot \theta^x \tag{A22} \\
\delta \dot{M}^y &= -(H^z + H_R^z) \delta M^x + x_1 \theta^y + x_4 \theta^z - \\
&\quad - \chi (H^z + H_R^z) A^{x\nu} \theta^\nu + y_1 \delta M^x \\
&= -(H^z + H_R^z) \delta M^x + \\
&\quad + \chi (H^z H_R^z + (H_R^z)^2 + \frac{1}{2} H_i^2 (1 + \cos \theta_R)) \theta^y - \\
&\quad - \frac{1}{2} (H^y H_R^y + H^z H_R^y + 2 H_R^y H_R^z) \theta^z - \\
&\quad - \chi (H^z + H_R^z) [H_R^z \theta^y - H_R^y \theta^z] - \\
&\quad + H_R^z \delta M^x \\
&= -H^z \delta M^x + \frac{1}{2} \chi H_i^2 (1 + \cos \theta_R) \theta^y - \\
&\quad - \frac{1}{2} \chi (H^y H_R^z - H^z H_R^y) \theta^z,
\end{aligned}$$

mit der Gleichgewichtsbedingung (24) Kap. II.b folgt

$$\begin{aligned}
\delta \dot{M}^y &= -H^z \delta M^x + \frac{1}{2} \chi H_i^2 (1 + \cos \theta_R) \theta^y - \\
&\quad - \frac{1}{2} \chi H_i^2 \sin \theta_R \cdot \theta^z, \tag{A23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \dot{M}^z &= (H^y + H_R^y) \delta M^x + x_4 \theta^y + x_3 \theta^z + \\
&\quad + \chi (H^y + H_R^y) [y_1 \theta^y + y_2 \theta^z] - \\
&\quad - H_R^z \delta M^x \\
&= H^y \delta M^x - \\
&\quad - \frac{1}{2} \chi (H^y H_R^z + H^z H_R^y + 2 H_R^y H_R^2) \theta^y + \\
&\quad + \chi (H^y H_R^y + (H_R^y)^2 + \frac{1}{2} H_i^2 (1 + \cos \theta_R)) \theta^z + \\
&\quad + \chi (H^y + H_R^y) [H_R^z \theta^y - H_R^y \theta^z] \\
&= H^y \delta M^x - \frac{1}{2} \chi (H^z H_R^y - H^y H_R^z) \theta^y + \\
&\quad + \frac{1}{2} \chi H_i^2 (1 + \cos \theta_R) \theta^z \\
\delta \dot{M}^z &= H^y \delta M^x + \frac{1}{2} \chi H_i^2 \sin \theta_R \cdot \theta^y + \frac{1}{2} \chi H_i^2 (1 + \cos \theta_R) \theta^z \quad (A24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}^x &= -\chi^{-1} \delta M^x - H_R^z \theta^y + H_R^y \theta^z \\
\dot{\theta}^y &= -\chi^{-1} \delta M^y + H_R^z \theta^x \\
\dot{\theta}^z &= -\chi^{-1} \delta M^z - H_R^y \theta^x. \quad (A25)
\end{aligned}$$

Aus den Gl. (A22) – (A25) ergeben sich die Bewegungsgleichungen von HSH zu $(X^\alpha = \delta M^x, \theta^y, \delta M^y, \theta^x, \delta M^z, \theta^z)$

$$\partial_t \vec{X} = \mathbf{A} \vec{X} \quad (A26)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \begin{matrix} H^z & \chi H_i^2 \cos \theta_R \\ -\chi^{-1} & H_R^z \end{matrix} & \begin{matrix} -H^y & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -H^z & \frac{1}{2} \chi H_i^2 (1 + \cos \theta_R) \\ -\chi^{-1} & -H_R^z \end{matrix} & \mathbf{O} & \begin{matrix} 0 & -\frac{1}{2} \chi H_i^2 \sin \theta_R \\ 0 & H_R^z \end{matrix} \\ \begin{matrix} H^y & \frac{1}{2} \chi H_i^2 \sin \theta_R \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & -H_R^y \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \frac{1}{2} \chi H_i^2 (1 + \cos \theta_R) \\ \chi^{-1} & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Die Beziehung (45) von Kap. II.c

$$\mathbf{A} = \overline{\langle \{\vec{X}, \vec{X}\} \rangle} \cdot \chi^{-1}$$

ergibt eine Möglichkeit zur "Probe" bisheriger Rechnungen: Die gemittelte Kommutatormatrix lautet (s. Gl. (A14))

$$\overline{\langle \{\vec{X}, \vec{X}\} \rangle} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \chi(H^z + H_R^z) & 1 & -\chi(H^y + H_R^y) & 0 \\ & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\chi(H^z + H_R^z) & & \mathbf{O} & & \\ & & & \mathbf{O} & \\ \chi(H^y + H_R^y) & 0 & & 0 & 1 \\ & 0 & & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (A27)$$

$$\chi^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{B} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{B}^T & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}, \quad \text{s. (33) Kap. II.b}$$

dies ergibt

$$\overline{\langle \{\vec{X}, \vec{X}\} \rangle} \cdot \chi^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{23} \\ \mathbf{M}_{31} & \mathbf{M}_{32} & \mathbf{M}_{33} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{11} &= \mathbf{O} \\ \mathbf{M}_{12} &= \begin{pmatrix} \chi(H^z + H_R^z) & 1 \\ & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{-1} & -H_R^z \\ -H_R^z & x_2 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} -\chi(H^y + H_R^y) & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} H_R^z & \chi H_i^2 \cos \theta_R \\ -\chi^{-1} & -H_R^z \end{pmatrix} \\ \mathbf{M}_{13} &= \begin{pmatrix} \chi(H^z + H_R^z) & 1 \\ & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -y_2 & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} -\chi(H^y + H_R^y) & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{-1} & 0 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -H^y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{M}_{21} &= \begin{pmatrix} -\chi(H^z + H_R^z) & 1 \\ & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{-1} & H_R^z \\ H_R^z & x_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -H^z & \frac{1}{2}\chi H_i^2(1 + \cos \theta_R) \\ -\chi^{-1} & -H_R^z \end{pmatrix} \\ \mathbf{M}_{22} &= \mathbf{O} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{23} &= \begin{pmatrix} -\chi(H^z + H_R^z) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -H_R^z \\ 0 & -\frac{1}{2}\chi(H^y H_R^z + H^z H_R^y + 2H_R^y H_R^z) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\chi H_i^2 \sin\theta_R \\ 0 & H_R^y \end{pmatrix}, \text{ wegen } H H_R \sin(\theta_H - \theta_R) = K \sin\theta_R, \\
\mathbf{M}_{31} &= \begin{pmatrix} \chi(H^y + H_R^y) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{-1} & H_R^z \\ H_R^z & x_1 \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -H_R^z & -\frac{1}{2}\chi(H^y H_R^z + H^z H_R^y + 2H_R^y H_R^z) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} H^y & \frac{1}{2}\chi H_i^2 \sin\theta_R \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ s.o.} \\
\mathbf{M}_{32} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -H_R^y \end{pmatrix} \\
\mathbf{M}_{33} &= \begin{pmatrix} \chi(H^y + H_R^y) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -H_R^y \\ 0 & x_4 \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{-1} & 0 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\chi H_i^2 (1 + \cos\theta_R) \\ -\chi^{-1} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Der Vergleich der Matrizen $\mathbf{M}_{ij}$ mit $\mathbf{A}$ ergibt Übereinstimmung.

II. Anhang

c) Berechnung der HSH-Frequenzen und der zugehörigen Korrelationsfunktionen für den Fall $\theta_H = \theta_R = 0$

Startpunkt ist die Mori Gleichung

$$(z\mathbf{1} - \mathbf{\Omega}) \mathbf{C}(z) = i T \chi, \quad (\text{A28})$$

Da longitudinale und transversale Variablen entkoppeln, können die entsprechenden Korrelationsmatrizen getrennt invertiert werden (vgl. (43) Kap. II.c und (33) ff Kap. II.b):

$$\mathbf{C}(z) = i T \begin{pmatrix} z\mathbf{1} & -i\mathbf{\Omega}_1 & \mathbf{0} \\ -i\mathbf{\Omega}_2 & z\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & z\mathbf{1} - i\mathbf{\Omega}_3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \chi$$

$\delta M^z, \theta^z$:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{\parallel}(z) &= iT(z\mathbf{1} - i\mathbf{\Omega}_3)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \chi & 0 \\ 0 & \chi^{-1}H_i^{-2} \end{pmatrix} \\ &= iT \begin{pmatrix} z & \chi H_i^2 \\ -\chi^{-1} & z \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \chi & 0 \\ 0 & \chi^{-1}H_i^2 \end{pmatrix} \\ &= iT \frac{1}{z^2 - H_i^2} \begin{pmatrix} z\chi & -1 \\ 1 & z\chi^{-1}H_i^{-2} \end{pmatrix} \\ C_{M^z M^z}(z) &= \frac{iT\chi}{z^2 - H_i^2} \cdot z \\ C_{M^z \theta^z}(z) &= \frac{-iT}{z^2 - H_i^2} = -C_{\theta^z M^z}(z) \\ C_{\theta^z \theta^z}(z) &= \frac{iT\chi^{-1}H_i^2}{z^2 - H_i^2} \cdot z \end{aligned} \quad (\text{A29})$$

mit den zugehörigen Resonanzfrequenzen

$$z_{\pm}^{\parallel} = \pm H_i. \quad (\text{A30})$$

Transversale Variablen:

$$\mathbf{C}^{\perp}(z) = iT \begin{pmatrix} z\mathbf{1} & -i\mathbf{\Omega}_1 \\ -i\mathbf{\Omega}_2 & z\mathbf{1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2^{-2} \end{pmatrix},$$

die Matrix

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} (z^2 \mathbf{1} + \Omega_1 \Omega_2)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (z^2 \mathbf{1} + \Omega_2 \Omega_1)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \mathbf{1} & i \Omega_1 \\ i \Omega_2 & z \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (\text{A31})$$

ist die gesuchte Inverse, denn

$$\mathbf{N} \cdot \begin{pmatrix} z \mathbf{1} & -i \Omega_1 \\ i \Omega_2 & z \mathbf{1} \end{pmatrix} = \mathbf{1} .$$

Also gilt

$$\mathbf{C}^\perp(z) = iT \begin{pmatrix} \omega_1^{-1} & 0 \\ 0 & \omega_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \mathbf{A}_1^{-1} & i \Omega_1 \mathbf{A}_2^{-1} \\ i \Omega_2 \mathbf{A}_1^{-1} & z \mathbf{A}_2^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A32})$$

mit

$$\begin{aligned} \omega_1 &= z^2 \mathbf{1} + \Omega_1 \Omega_2 \\ \omega_2 &= z^2 \mathbf{1} + \Omega_2 \Omega_1 . \end{aligned}$$

Berechnung der transversalen Resonanzen:

$$\begin{aligned} \Omega_1 \Omega_2 &= \begin{pmatrix} H & \chi H_i^2 \\ -\chi^{-1} & H_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -H & \chi H_i^2 \\ -\chi^{-1} & -H_R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(H^2 + H_i^2) & \chi H_i^2 (H - H_R) \\ \chi^{-1} (H - H_R) & -(H_i^2 + H_R^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \Omega_2 \Omega_1 &= \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} , \\ d(z) &= \det \begin{pmatrix} z^2 + a & d \\ c & z^2 + d \end{pmatrix} \\ &= (z^2 + a) (z^2 + d) - bc \\ &= z^4 + z^2 (a + d) + ad - bc . \end{aligned} \quad (\text{A33})$$

Da die Produkte $\Omega_1 \Omega_2$ und $\Omega_2 \Omega_1$ bis auf die Vorzeichen der Nebendiagonalen übereinstimmen, folgt

$$d(z) = \det(\omega_1) = \det(\omega_2) .$$

Vergleicht man mit den zu erwartenden Lösungen $\omega_\pm$, $-\omega_\pm$

$$\begin{aligned} (z + \omega_+)(z - \omega_+)(z + \omega_-)(z - \omega_-) &= (z^2 - \omega_+^2)(z^2 - \omega_-^2) \\ &= z^4 - z^2 (\omega_+^2 + \omega_-^2) + \omega_+^2 \omega_-^2 \end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} -(\omega_+^2 + \omega_-^2) &= a + d \\ \omega_+^2 \omega_-^2 &= ad - bc. \end{aligned} \quad (A34)$$

Daraus ergibt sich mit $x = \omega_+ + \omega_-$, $y = \omega_+ - \omega_-$

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 4\omega_+ \omega_- = \pm 4(ad - bc)^{1/2} \\ x^2 + y^2 &= 2(\omega_+^2 + \omega_-^2) = -2(a + d) \end{aligned}$$

bzw. (bei Wahl des "–"-Zeichens)

$$\begin{aligned} y^2 &= 2(ad - bc)^{1/2} - (a + d) \\ x^2 &= -2(ad - bc)^{1/2} - (a + d), \\ ad - bc &= \det(\Omega_1 \Omega_2) \\ &= (\det(\Omega_1))^2 \\ &= (H_i^2 + H H_R)^2, \\ a + d &= \text{Tr}(\Omega_1 \Omega_2) \\ &= -(2H_i^2 + H_R^2 + H^2), \\ y^2 &= 4H_i^2 + (H + H_R)^2 \quad y = \pm (4H_i^2 + (H + H_R)^2)^{1/2} \\ x^2 &= (H - H_R)^2 \quad , x = \pm (H - H_R) \end{aligned}$$

und mit $\omega_+ = \frac{1}{2}(x+y)$, $\omega_- = \frac{1}{2}(x-y)$ folgt (unter Beachtung der Randbedingung $\omega_+ = H$, $\omega_- = 0$ für $H_R = H_i = 0$):

$$\begin{aligned} \omega_+ &= \frac{1}{2}(H - H_R) + \frac{1}{2}((H + H_R)^2 + 4H_i^2)^{1/2} \\ \omega_- &= \frac{1}{2}(H - H_R) - \frac{1}{2}((H + H_R)^2 + 4H_i^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (A35)$$

(s. auch HSH, 1982, (3.6)).

Die Inversen zu ω_1 und ω_2 lauten

$$\begin{aligned} \omega_1^{-1} &= \frac{1}{d(z)} \begin{pmatrix} z^2 + d & -b \\ -c & z^2 + a \end{pmatrix} \\ \omega_2^{-1} &= \frac{1}{d(z)} \begin{pmatrix} z^2 + d & b \\ c & z^2 + a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit ergeben sich die Korrelationsmatrizen zu (s. Gl. (32) $h = H \cdot H_R + H_i^2$):

$\delta M^x, \theta^y$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_{M^x M^x}(z) & C_{M^x \theta^y}(z) \\ C_{\theta^y M^x}(z) & C_{\theta^y \theta^y}(z) \end{pmatrix} &= iT \omega_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_1^{-1} \cdot z \\ &= iT \frac{z}{d(z)} \begin{pmatrix} z^2 + d & -d \\ -c & z^2 + a \end{pmatrix} \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \chi(h + H_R^2) & -H_R \\ -H_R & \chi^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{iTz}{d(z)} \cdot h^{-1} \begin{pmatrix} \chi(h + H_R^2)(z^2 + d) + H_R b & -H_R(z^2 + d) - \chi^{-1} b \\ -\chi(h + H_R^2)c - H_R(z^2 + a) & H_R c + \chi^{-1}(z^2 + a) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$C_{M^x M^x}(z) = \frac{iT\chi z}{d(z) \cdot h} \left((z^2 - H_i^2 - H_R^2) (H_i^2 + H H_R + H_R^2) + H_i^2 \cdot H_R (H - H_R) \right)$$

$$C_{M^x \theta^y}(z) = \frac{-iTz}{d(z) \cdot h} \left((z^2 - H_i^2 - H_R^2) \cdot H_R + H_i^2 (H - H_R) \right)$$

$$C_{\theta^y M^x}(z) = \frac{-iTz}{d(z) \cdot h} \left(H_R \cdot (z^2 - H^2 - H_i^2) + (H - H_R) (H_i^2 + H H_R + H_R^2) \right)$$

$$= \frac{-iTz}{d(z) \cdot h} \left(H_R z^2 - H_R H^2 - H_R H_i^2 (H - H_R) + H_R (H^2 - H_R^2) \right)$$

$$= \frac{-iTz}{d(z) \cdot h} \left(H_R z^2 - H_R^3 - H_R H_i^2 + H_i^2 (H - H_R) \right)$$

$$= C_{M^x \theta^y}(z)$$

$$C_{\theta^y \theta^y}(z) = \frac{iT\chi^{-1} \cdot z}{d(z) \cdot h} \left(z^2 - H^2 - H_i^2 + H_R (H - H_R) \right) \quad (\text{A36})$$

$\delta M^x, \theta^y - \delta M^y, \theta^x$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_{M^x M^y}(z) & C_{M^x \theta^x}(z) \\ C_{\theta^y M^y}(z) & C_{\theta^y \theta^x}(z) \end{pmatrix} &= i T \cdot \omega_1^{-1} i \Omega_1 \mathbf{A}_2^{-1} \\ &= \frac{-T}{d(z)} \begin{pmatrix} z^2 + d & -b \\ -c & y^2 + a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & \chi H_i^2 \\ -\chi^{-1} & H_R \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \chi(h + H_R^2) & H_R \\ H_R & \chi^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{-T}{d(z) \cdot h} \begin{pmatrix} z^2 + d & -b \\ -c & z^2 + a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \cdot h(H + H_R) & h \\ -h & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-T}{d(z)} \begin{pmatrix} \chi(H + H_R)(z^2 + d) + b & z^2 + d \\ -(z^2 + a) - c\chi(H + H_R) & -c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$C_{M^x M^y}(z) = \frac{-T\chi}{d(z)} \left((z^2 - H_i^2 - H_R^2) \cdot (H + H_R) + H_i^2 (H - H_R) \right)$$

$$= \frac{-T\chi}{d(z)} \left((z^2 - H_R^2) (H + H_R) - 2H_i^2 H_R \right)$$

$$\begin{aligned}
C_{M^x\theta^x}(z) &= \frac{-T}{d(z)} (z^2 - H_i^2 - H_R^2) \\
C_{\theta^y M^y}(z) &= \frac{-T}{d(z)} (-(z^2 - H^2 - H_i^2) - (H^2 - H_R^2)) \\
&= -C_{M^x\theta^x}(z) \\
C_{\theta^y\theta^x}(z) &= \frac{T}{d(z)} \chi^{-1}(H - H_R) .
\end{aligned} \tag{A37}$$

$\delta M^y, \theta^x$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} C_{M^y M^y}(z) & C_{M^y\theta^x}(z) \\ C_{\theta^x M^y}(z) & C_{\theta^x\theta^x}(z) \end{pmatrix} &= iTz\omega_2^{-1} \mathbf{A}_2^{-1} \\
&= iT \frac{z}{d(z)} \begin{pmatrix} z^2 + d & b \\ c & z^2 + z \end{pmatrix} \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \chi(h + H_R^2) & H_R \\ H_R & \chi^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{iTz}{d(z) \cdot H} \begin{pmatrix} \chi(h + H_R^2)(z^2 + d) + H_R b & H_R(z^2 + d) + \chi^{-1} b \\ H_R(z^2 + a) + c\chi(h + H_R^2) & H_R c + \chi^{-1}(z^2 + a) \end{pmatrix} \\
C_{M^y M^y}(z) &= C_{M^x\theta^x}(z) \\
C_{M^y\theta^x}(z) &= -C_{M^x\theta^y}(z) \\
C_{\theta^x M^y}(z) &= -C_{\theta^y M^x}(z) \\
C_{\theta^x\theta^x}(z) &= C_{\theta^y\theta^y} ,
\end{aligned} \tag{A38}$$

$\delta M^y, \theta^x - \delta M^x, \theta^y$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} C_{M^x M^x}(z) & C_{M^y\theta^y}(z) \\ C_{\theta^x M^x}(z) & C_{\theta^x\theta^y}(z) \end{pmatrix} &= iT\omega_2 \mathbf{A}_1^{-1} \\
&= -\frac{T}{d(z)} \begin{pmatrix} z^2 + d & b \\ c & z^2 + a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -H & \chi H_i^2 \\ -\chi^{-1} & -H_R \end{pmatrix} \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \chi(h + H_R^2) & -H_R \\ -H_R & \chi^{-1} \end{pmatrix} \\
&= -\frac{T}{d(z) \cdot h} \begin{pmatrix} z^2 + d & b \\ c & z^2 + a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\chi \cdot h(H + H_R) & h \\ -h & 0 \end{pmatrix} \\
C_{M^y M^x}(z) &= -C_{M^x M^y}(z) \\
C_{M^y\theta^y}(z) &= C_{M^x\theta^x}(z) \\
C_{\theta^x M^x}(z) &= C_{\theta^y M^y}(z) \\
C_{\theta^x\theta^y}(z) &= -C_{\theta^y\theta^x}(z) .
\end{aligned} \tag{A39}$$

Insgesamt ergeben Gl. (A36) – (A39) und (A29) die folgende Struktur für $C(z)$:

$$C(z) = \begin{pmatrix} a & b & m & p & \mathbf{O} \\ b & c & -p & r & \mathbf{O} \\ -m & p & a & -b & \mathbf{O} \\ -p & -r & -b & c & t & u \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & & & -u & w \end{pmatrix}. \quad (A40)$$

K A P I T E L III

Mikroskopische Begründung der phänomenologischen Theorie von Henley/Sompolinsky/Halperin

Die hydrodynamischen Variablen $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$ werden mikroskopisch gedeutet.

Es wird nachgewiesen, daß im Fall kleiner Felder ($H \ll H_R \cdot \chi$, $H_i^2 \cdot \chi \ll 1$) die ungedämpften Anregungen der phänomenologischen Theorie mit denen der mikroskopischen Dynamik übereinstimmen.

Weiterhin wird ein mikroskopischer Ausdruck für die Anisotropiekonstante K angegeben.

Kapitel III

Seite

a) Mikroskopische Deutung von $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$	1
b) Nachweis der Konsistenz von mikroskopischer und phänomenologischer Theorie bzgl. der ungedämpften Anregungen	5
c) Mikroskopische Deutung der Anisotropie- konstante K	11

Anhang III

Die Resonanzverschiebung $\delta H_{res}(\omega, T)$: Vergleich der HSH-Theorie mit Experimenten	13
--	----

III. Kapitel

a) Mikroskopische Deutung von $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$

In diesem Abschnitt wird die mikroskopische Form der Variablen $\vec{\theta}$ hergeleitet.

Setzt man die Molekularfeldtheorie des Heisenberg Spinglases im Magnetfeld (Gabay/Toulouse) als *qualitativ* richtig voraus, so ergibt sich folgendes Bild:

in Anwesenheit eines äußeren Feldes ($\uparrow\uparrow \hat{z}$) ist der longitudinale Anteil des EA-Ordnungsparameters *auch in der ungeordneten Phase* von Null verschieden. Erst unterhalb der Temperatur T_g frieren die *transversalen* Spinkomponenten ein:

$$\langle S_j^\alpha(t) S_j^\alpha \rangle \xrightarrow{t \rightarrow \infty} q_t = \langle S_j^\alpha \rangle^2 > 0 \quad (1)$$

für $T \leq T_g$, $\alpha = x, y$.

Ihre Ausrichtung kann in einem Abstand, der größer ist als eine Kohärenzlänge ξ ($\xi \sim$ Gitterkonstante), als zufällig (unkorreliert) angesehen werden (Henley, 1984 a,b).

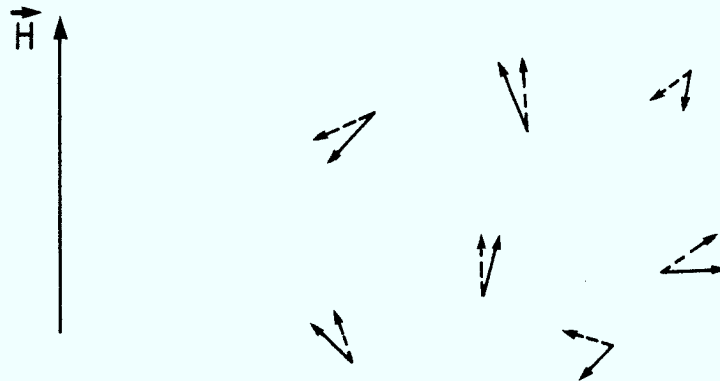


Abb. 1 lokale magnetische Momente mit Abstand $> \xi$ und die Wirkung eines äußeren Feldes $\vec{H}$

Von den vielen Zuständen, die die freie Energie für $T < T_g$ minimieren, sei ein mit "G" bezeichneter herausgegriffen. Die lokalen magnetischen Momente $\vec{m}_i$

können als thermodynamische Mittelwerte, die auf den Zustand G eingeschränkt sind, verstanden werden:

$$m_i^\alpha = \langle S_i^\alpha \rangle_G .$$

Die hydrodynamische Theorie ist eine Dynamik *kleiner Abweichungen* um diesen Referenzzustand G. Insbesondere wird die Dynamik *zwischen* verschiedenen eingefrorenen Zuständen G und $\tilde{G}$ *nicht* berücksichtigt (Halperin/Saslow, 1977).

Durch ein äußeres Magnetfeld werden die Spins aus ihrer eingefrorenen Lage $\langle \vec{S}_j \rangle_G$ herausgedreht (s. Abb. 1). Diese Drehungen können durch Vektoren $\vec{\theta}_j$ beschrieben werden, deren Richtung $\hat{\theta}_j$ den Drehsinn und deren Betrag $\theta_j = |\vec{\theta}_j|$ die Größe des lokalen Drehwinkels angeben.

Die zugehörige lokale Drehmatrix $D_j^{\alpha\beta}$ lautet

$$D_j^{\alpha\beta}(\vec{\theta}_j) = \delta_{\alpha\beta} \cos \theta_j + \hat{\theta}_j^\alpha \hat{\theta}_j^\beta (1 - \cos \theta_j) + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\theta}_j^\gamma \sin \theta_j. \quad (2)$$

Für kleine Abweichungen $\theta_j \ll 1$ folgt (in niedrigster Ordnung in θ_j)

$$\begin{aligned} D_j^{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \theta_j^\gamma \\ \theta_j^\alpha &= \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} D_j^{\beta\gamma} . \end{aligned} \quad (3)$$

Um die Abhängigkeit von $\mathbf{D}_j$ von den beteiligten Vektoren zu erhalten, betrachte man die Drehung des Vektors $\vec{a}$ auf $\vec{b}$:

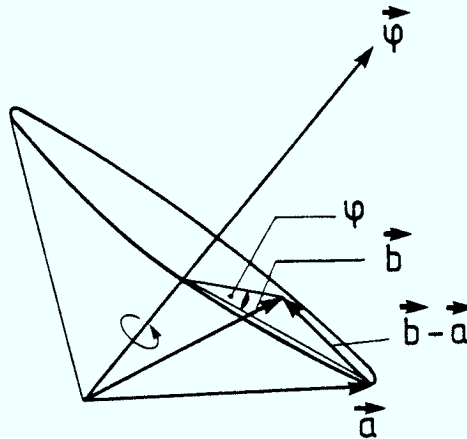


Abb. 2 Drehung von Vektor $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ um die Achse $\vec{\varphi}$ mit Winkel $|\vec{\varphi}| = \varphi$

es gilt

$$\vec{b} = \mathbf{D} \vec{a}$$

mit

$$D^{\alpha\beta} = \frac{1}{\vec{a}^2} \cdot b^\alpha a^\beta \quad (4)$$

Der zugehörige Drehvektor lautet ($\varphi \ll 1$)

$$\begin{aligned} \varphi^\alpha &= \frac{1}{2\vec{a}^2} \epsilon_{\alpha\mu\nu} b^\mu a^\nu, \\ \epsilon_{\mu\nu\gamma} \varphi^\gamma &= \frac{1}{\vec{a}^2} \frac{1}{2} (b^\mu a^\nu - b^\nu a^\mu) \\ &= D_{asym}^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (5)$$

d.h.: nur der asymmetrische Anteil der Drehmatrix $\mathbf{D}$ bestimmt den Drehvektor $\vec{\varphi}$.

Überträgt man dies auf die magnetischen Momente, so folgt (Halperin/Saslow, 1977):

$$\begin{aligned} \vec{a} &\longrightarrow \langle \vec{S}_j \rangle_G \\ \vec{b} &\longrightarrow \vec{S}_j = \langle \vec{S}_j \rangle_G + \delta \vec{S}_j, \end{aligned}$$

und man erhält den (nicht normierten) Drehooperator

$$\begin{aligned} R_j^{\alpha\beta} &= S_j^\alpha \langle S_j^\beta \rangle_G \\ &= q \cdot (\delta_{\alpha\beta} + \epsilon_{\alpha\beta\sigma} \theta_j^\sigma), \end{aligned} \quad (6)$$

mit

$$q = \frac{1}{3} \frac{\langle S_j^\alpha \rangle \langle S_j^\alpha \rangle_G}{\langle S_j^\alpha \rangle_G \langle S_j^\alpha \rangle_G},$$

den Operator des Drehvektors

$$\theta_j^\alpha = \frac{1}{2q} \epsilon_{\alpha\mu\nu} S_j^\mu \langle S_j^\nu \rangle_G \quad (7)$$

und die Fluktuation des Spins

$$\delta \vec{S}_j = q \cdot \langle \vec{S}_j \rangle_G \times \vec{\theta}_j. \quad (8)$$

Da die thermischen Mittelwerte mit zufälligen Austauschenergien (J_{ij} und $\vec{D}_{ij}$) gebildet werden, entsprechen den makroskopischen Größen erst die *konfigurationsgemittelten* thermischen Mittelwerte (s. Kap. II.a S.2), z.B.

$$\vec{M}_o = \overline{\langle \sum_j \vec{S}_j \rangle_G} \quad : \text{Gleichgewichtsmagnetisierung,}$$

$$q = \frac{1}{3} \overline{\langle S_j^\alpha \rangle_G \langle S_j^\alpha \rangle_G} : \text{EA - Ordnungsparameter.}$$

Im Rahmen der Linear-Response Theorie können die *Fluktuationen* um den Referenzzustand G durch *Korrelationen* in diesem Zustand ausgedrückt werden; im folgenden wird der Index "G" bei der thermischen Mittelung fortgelassen.

Für die Mittelwerte von $\mathbf{R}_j$ und $\vec{\theta}_j$ gilt

$$\begin{aligned} \overline{\langle R_j^{\alpha\beta} \rangle} &= q \cdot \left(\delta_{\alpha\beta} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \overline{\langle \theta_j^\gamma \rangle} \right) \\ q &= \frac{1}{3} \text{Tr} \overline{\langle \mathbf{R}_j \rangle} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \overline{\langle S_j^\alpha \rangle \langle S_j^\alpha \rangle} ; \end{aligned} \quad (9)$$

der Mittelwert von $\vec{\theta}_j$ verschwindet

$$\overline{\langle \theta_j^\gamma \rangle} = \frac{1}{2q} \epsilon_{\gamma\mu\nu} \cdot \overline{\langle S_j^\mu \rangle \langle S_j^\nu \rangle} = 0 , \quad (10)$$

da die Matrix $\overline{\langle S_j^\mu \rangle \langle S_j^\nu \rangle}$ symmetrisch in den Spinindizes ist. Weiterhin wird (wie auch weiter oben schon) q als näherungsweise isotrop angenommen (vgl. a. Toulouse/Gabay, 1981).

III. Kapitel

b) Nachweis der Konsistenz von mikroskopischer und phänomenologischer Theorie bzgl. der ungedämpften Anregungen

Mit Hilfe der mikroskopischen Form der hydrodynamischen Variablen werden nun die HSH-Frequenzen berechnet. Es zeigt sich für den Fall $H \cdot H_R \cdot \chi, H_i^2 \cdot \chi \ll 1$ Übereinstimmung mit der phänomenologischen Theorie von HSH.

Die Poissonklammern der Variablen ($\vec{k} = \vec{0}$)

Magnetisierung: $M^\gamma = \sum_j S_j^\gamma$

Phase des Ordnungs-

parameters: $\theta^\alpha = \frac{1}{2q} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_j S_j^\beta < S_j^\gamma >$ (11)

ergeben sich mit

$$\{S_j^\alpha, S_l^\beta\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \delta_{jl} S_j^\gamma \quad (12)$$

wie folgt:

$$\{M^\alpha, M^\beta\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} M^\gamma, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \{M^\alpha, \theta^\beta\} &= \frac{1}{2q} \epsilon_{\beta\mu\nu} \sum_{j,l} \{S_j^\alpha, S_l^\mu\} < S_l^\nu > \\ &= \frac{1}{2q} \sum_j \left(\delta_{\alpha\beta} S_j^\nu < S_j^\nu > - S_j^\beta < S_j^\alpha > \right) \\ \{M^\alpha, \theta^\beta\} &= \frac{1}{2q} \sum_j \left(\delta_{\alpha\beta} R_j^{\nu\nu} - R_j^{\beta\alpha} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \{\theta^\alpha, \theta^\beta\} &= \frac{1}{4q^2} \epsilon_{\alpha\nu\mu} \epsilon_{\beta\rho\lambda} \sum_{j,l} \{S_j^\mu, S_l^\rho\} < S_j^\nu > < S_l^\lambda > \\ &= \frac{-1}{4q^2} \sum_j \left(\epsilon_{\beta\alpha\lambda} S_j^\nu < S_j^\nu > < S_j^\lambda > - \right. \\ &\quad \left. - \epsilon_{\beta\nu\lambda} S_j^\alpha < S_j^\nu > < S_j^\lambda > \right) \\ &= \frac{1}{4q^2} \epsilon_{\alpha\beta\lambda} \sum_j R_j^{\nu\lambda} < S_j^\nu >. \end{aligned} \quad (15)$$

Mit den Gln. (6) – (8) folgt

$$\begin{aligned}
\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} &= \frac{1}{4q^2} \epsilon_{\alpha\beta\lambda} \sum_j q (\delta_{\nu\lambda} + \epsilon_{\nu\lambda\sigma} \theta^\sigma) \langle S_j^\nu \rangle \\
&= \frac{1}{4q} \epsilon_{\alpha\beta\nu} \sum_j \left(\langle S_j^\nu \rangle - \delta S_j^\nu \right) .
\end{aligned} \tag{16}$$

Die für die *ungedämpften* Anregungen wichtigen gemittelten Poissonklammern, die den Poissonklammern der hydrodynamischen Variablen $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$ entsprechen (vgl. Kap. II.c Gl. (41), (45)), lauten:

$$\begin{aligned}
\overline{\langle \{M^\alpha, M^\beta\} \rangle} &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \overline{\langle M^\gamma \rangle} \\
&= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \chi \cdot (H^\gamma + H_R^\gamma) , \\
\overline{\langle \{M^\alpha, \theta^\beta\} \rangle} &= \frac{1}{2q} \sum_j \left(\delta_{\alpha\beta} \cdot 3q - \delta_{\alpha\beta} \cdot q \right) \\
&= \delta_{\alpha\beta} \\
\overline{\langle \{\theta^\alpha, \theta^\beta\} \rangle} &= \frac{1}{4q} \epsilon_{\alpha\beta\lambda} \overline{\langle M^\lambda \rangle} .
\end{aligned} \tag{17}$$

Die Poissonklammer von θ^α und θ^β ergibt sich *im Gegensatz zu HSH* nicht zu Null sondern als Verhältnis von Gleichgewichtsmagnetisierung und EA-Ordnungsparameter (vgl. K. Fischer, 1983, Gl. (180); Saslow, 1983, Gl. (A34), 1986).

Für den Fall $\theta_H = \theta_R = 0$ erhält man

$$\begin{aligned}
\overline{\langle \{M^\alpha, M^\beta\} \rangle} &= \epsilon_{\alpha\beta z} \cdot \chi(H + H_R) \\
\overline{\langle \{M^\alpha, \theta^\beta\} \rangle} &= \delta_{\alpha\beta} \\
\overline{\langle \{\theta^\alpha, \theta^\beta\} \rangle} &= \epsilon_{\alpha\beta z} \frac{1}{4q} \chi(H + H_R) .
\end{aligned} \tag{18}$$

Entsprechend ändern sich auch die *transversalen* HSH Frequenzen, denn die Poissonklammer Matrix ist nun gegeben durch

$$\overline{\langle \{\vec{X}, \vec{X}\} \rangle} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \begin{smallmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix} -a & 1 \\ -1 & -b \end{smallmatrix} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$a = \chi(H + H_R)$$

$$b = \frac{1}{4q} \chi(H + H_R) \quad (b_{HSH} = 0),$$

$$X^\alpha = \delta M^x, \theta^y, \delta M^y, \theta^x .$$

Die Frequenzmatrix Ω ist

$$\Omega = i \overline{\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle} \cdot \chi^{-1} ,$$

wobei χ^{-1} nach wie vor die inverse Suszeptibilitätsmatrix von Gl. (37) Kap. II.b ist. Sie hat die Gestalt

$$\chi^{-1} = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ y & z & 0 \\ 0 & 0 & x & -y \\ & & -y & z \end{pmatrix} , \quad (20)$$

$$x = \chi^{-1}$$

$$y = H_R$$

$$z = \chi \cdot (H H_R + H_i^2 + H_R^2) ,$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & i\Omega_1 \\ i\Omega_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} , \Omega_2 = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\alpha = ax - y = H$$

$$\beta = -ay + z = \chi H_i^2 \quad (22)$$

$$\gamma = -x - by = -\chi^{-1} - \frac{1}{4q} \chi H_R (H + H_R)$$

$$\delta = y + bz = H_R + \frac{1}{4q} \chi^2 (H + H_R) (H H_R + H_i^2 + H_R^2) .$$

Die Resonanzen folgen aus der Bedingung

$$\det(z\mathbf{1} - \Omega) = 0$$

bzw.

$$\det(z^2\mathbf{1} + \Omega_1\Omega_2) = 0 ;$$

sie liefert die Gleichung für die vier Lösungen $\omega_{\pm}$, $-\omega_{\pm}$ (vgl. Anhang II.c Gl. (A33) ff):

$$\begin{aligned} -(\omega_+^2 + \omega_-^2) &= \text{Tr}(\Omega_1\Omega_2) \\ &= -\alpha^2 - \delta^2 + 2\beta\gamma \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
\omega_+^2 \cdot \omega_-^2 &= \det(\Omega_1 \cdot \Omega_2) \\
&= (\det(\Omega_1))^2 \\
&= (\alpha\delta - \beta\gamma)^2
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
\det(\Omega_1) &= \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & z \end{pmatrix} \\
&= (1 + ab)(xz - y^2) \\
&= \left(1 + \frac{1}{4q} \chi^2 (H + H_R)^2\right) (HH_R + H_i^2) \\
&\geq 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Mit $x = \omega_+ + \omega_-$, $y = \omega_+ - \omega_-$ folgt dann (vgl. Anhang II.c)

$$\begin{aligned}
y^2 &= 2 \cdot \det(\Omega_1) - \text{Tr}(\Omega_1 \Omega_2) \\
x^2 &= -2 \det(\Omega_1) - \text{Tr}(\Omega_1 \Omega_2),
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
y^2 &= 2(\alpha\delta - \beta\gamma) + \alpha^2 + \delta^2 - 2\beta\gamma \\
&= (\alpha + \delta)^2 - 4\beta\gamma
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
x^2 &= -2(\alpha\delta - \beta\gamma) + \alpha^2 + \delta^2 - 2\beta\gamma \\
&= (\alpha - \delta)^2, \\
\beta\gamma &= -H_i^2 - \frac{1}{4q} \chi^2 H_i^2 H_R (H + H_R) \\
&= -H_i^2 \left(1 + \frac{1}{4q} \chi^2 H_R (H + H_R)\right) \\
&\leq 0,
\end{aligned} \tag{28}$$

und für $\omega_{\pm}$ selbst ($\omega_+ = H$, $\omega_- = 0$ für $H_R = H_i = 0$)

$$\begin{aligned}
\omega_+ &= \frac{1}{2} (x + y) \\
&= \frac{1}{2}(\alpha - \delta) + \frac{1}{2} \left((\alpha + \delta)^2 - 4\beta\gamma\right)^{1/2} \\
\omega_- &= \frac{1}{2} (x - y) \\
&= \frac{1}{2}(\alpha - \delta) - \frac{1}{2} \left((\alpha + \delta)^2 - 4\beta\gamma\right)^{1/2}, \\
\omega_{\pm} &= \frac{1}{2} (H - H_R)(1 - g_1) + \\
&\quad \pm \frac{1}{2} \cdot \left((H + H_R)^2 (1 + g_2)^2 + 4H_i^2 (1 + g_3)\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{29}$$

mit

$$\begin{aligned}
g_1 &= \frac{1}{4q} \frac{H + H_R}{H - H_R} \chi^2 (H H_R + H_i^2 + H_R^2) \\
&= g_2 \cdot \frac{H + H_R}{H - H_R} \\
g_2 &= \frac{1}{4q} \chi^2 (H H_R + H_i^2 + H_R^2) \\
&= g_3 + \frac{1}{4q} (\chi H_i)^2 \\
g_3 &= \frac{1}{4q} \chi^2 H_R (H + H_R) .
\end{aligned} \tag{30}$$

Im FC-Fall ist

$$\chi \cong \frac{C}{T_g} \quad \text{für } T \leq T_g$$

C : Curiekonstante;

wegen

$$T_g = O(J), \quad J = \left(\overline{J_{ij}^2} \right)^{1/2} : \text{Austausch Energie}$$

lautet die freie Energie auch

$$\mathcal{F} \cong \frac{1}{2} C^{-1} \cdot J (\vec{M} - \vec{M}_R)^2 - \frac{C}{J} \vec{H} \cdot \vec{M} \chi^{-1} - \frac{C}{J} H_i^2 \cos \theta$$

mit $\vec{M}_0 \chi^{-1} = \vec{H} + \vec{H}_R$ im Gleichgewicht (vgl. Kap. I.b Gl. (23)).

Die g_μ ($\mu = 1, 2, 3$) enthalten somit die Verhältnisse

$$\begin{aligned}
\frac{H H_R}{J} &\hat{=} \frac{\text{Zeeman Energie}}{\text{Austausch Energie}} \\
\frac{H_i^2}{J} &\hat{=} \frac{\text{Anisotropie Energie}}{\text{Austausch Energie}} ,
\end{aligned}$$

und im Grenzfall kleiner Felder und schwacher Anisotropie (vgl. HSH, 1982, Abschnitt II) gilt

$$g_\mu \ll 1 \tag{31}$$

für $\mu = 1, 2, 3$ und $T < T_g$;

in diesem Fall ergeben sich aus (29) dann die phänomenologischen HSH-Frequenzen.

Für den ZFC-Fall ($H_R = 0$) gilt oben Gesagtes ebenfalls (mit $g_3 = 0$, $g_1 = g_2 = \frac{1}{4q}\chi^2 H_i^2$).

Das Verhalten der g_μ in der Nähe von T_g soll kurz betrachtet werden. Nimmt man das folgende asymptotische Verhalten für $T \rightarrow T_g$ an

$$\begin{aligned} H_i^2(T) &\sim (1 - T/T_g)^\mu, \quad \mu = 1.2 \pm 0.2 \\ T \leq T_g : \quad H_R(T) &\sim (1 - T/T_g)^\beta, \quad \beta \geq 1 \\ q(T) &\sim (1 - T/T_g)^{\beta_{EA}}, \end{aligned} \tag{32}$$

so folgt ($T \leq T_g$)

$$\begin{aligned} g_3 &\sim \frac{H \cdot H_R(T=0)}{J^2} (1 - T/T_g)^{\beta - \beta_{EA}} \\ g_1 &\cong g_2 \\ &\sim \frac{H H_R(T=0)}{J^2} (1 - T/T_g)^{\beta - \beta_{EA}} + \\ &\quad + \frac{H_i^2(T=0)}{J^2} (1 - T/T_g)^{\mu - \beta_{EA}}. \end{aligned} \tag{33}$$

Wie in Anhang III ersichtlich, liefern die g_μ nur kleine Korrekturen zu den Voraussagen von HSH bzgl. der Frequenzverschiebung.

III. Kapitel

c) Mikroskopische Deutung der Anisotropiekonstanten K

Aus der Suszeptibilitätsmatrix χ ergibt sich der Zusammenhang (vgl. Kap. II.b Gl. (39); s.a. Sompolinsky/Kotliar/Zippelius, 1984)

$$K(T) = T \cdot \begin{cases} (\theta^z|\theta^z)^{-1}, & \text{FC} \\ \left[\frac{1}{3}(\theta^\alpha|\theta^\alpha) \right]^{-1}, & \text{ZFC} \end{cases}, \quad \vec{k} = \vec{0}.$$

Durch die mikroskopische Deutung von $\vec{\theta}$ (s. Gl. (11)) kann nun die Anisotropiekonstante $K(T)$ durch die *mikroskopische* Korrelationsfunktion ausgedrückt werden (FC-Fall)

$$K(T) = \frac{4q^2 \cdot T}{\epsilon_{z\mu\nu}\epsilon_{z\rho\gamma} \sum_{j,l} \langle S_j^\mu S_l^\rho \rangle \langle S_j^\nu \rangle \langle S_l^\gamma \rangle} \quad (35)$$

$$= \frac{T}{\epsilon_{z\mu\nu}\epsilon_{z\rho\gamma} \sum_{j,l} \langle R_j^{\mu\nu} R_l^{\rho\gamma} \rangle}. \quad (36)$$

Hinweise dafür, daß die Anisotropie beim Heisenberg Spinglas *nicht* auf Kristallanisotropien beruht sondern durch die eingefrorenen, lokalen Spins verursacht wird, liefern folgende experimentelle Befunde:

- 1) die Anisotropie ist isotrop, sie hängt von keiner globalen Achse ab (Alloul/Hippert, 1983);
- 2) $K(T)$ verschwindet bei der Einfriertemperatur wie $(1 - T/T_g)^\mu$ ($\mu = 1.2 \pm 0.2$, Youm/Schultz, 1986; Mahdjour, priv. Mitteilung).

Neben der *unidirektionalen* Anisotropie, verursacht von stochastischer DM-Wechselwirkung (HSH, 1982, S. 5850), beobachtet man bei *großen* Winkelfluktuationen ($\theta \geq 40^\circ$ CuMn Hippert/Alloul/Fert, 1982) auch eine *uniaxiale* Anisotropie, die auf zufällige, lokale Achsenanisotropie der Form

$$\mu \sum_i (\hat{p}_i \cdot \vec{S}_i)$$

$\hat{p}_i$: Zufallsvektor auf der Einheitskugel

zurückgeführt werden kann (HSH ebenda). Letztere Art der Anisotropie wird in dieser Arbeit nicht berücksichtigt.

Die Ergebnisse dieses Kapitels sind:

1. die mikroskopische Deutung der Drehwinkelvariablen $\vec{\theta}$ und damit eine Begründung der phänomenologischen Theorie von HSH,
2. die Rückführung der Anisotropiekonstanten K auf eine mikroskopische Korrelationsfunktion.

III. Anhang

Die Resonanzverschiebung $\delta H_{\text{res}}(\omega, T)$: Vergleich der HSH-Theorie mit Experimenten

Die Dispersionsrelation der HSH-Frequenzen ergibt die Resonanz *bzgl. der Frequenz* $\omega = \omega(H, T)$ als Funktion des *konstanten* äußeren Magnetfeldes H und der Temperatur T . Experimentell wird die Resonanz genau umgekehrt realisiert: bei *konstanter Frequenz* $\omega = \text{const}$ und vorgegebener Temperatur T wird das Resonanzfeld $H_{\text{res}} = H_{\text{res}}(\omega, T)$ bestimmt.

Die Resonanzverschiebung ist definiert als

$$\delta H_{\text{res}}(\omega, T) = H_{\text{res}}(\omega, T) - H, \quad (\text{A1})$$

wobei $H_{\text{res}}(\omega, T > T_g) = H$ ist. Die Resonanzbedingung (vgl. S. III-7) lautet

$$\omega^4 + \omega^2 \text{Tr}(\Omega_1 \Omega_2) + \det^2(\Omega_1) = 0$$

bzw. mit

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\Omega_1 \Omega_2) &= -((\alpha - \delta)^2 + 2 \cdot \det(\Omega_1)) \\ \det(\Omega_1) &= \alpha\delta - \beta\gamma \end{aligned}$$

folgt (s. Gl. (22) ff)

$$\omega^2 - \det(\Omega_1) \pm \omega \cdot (\alpha - \delta) = 0. \quad (\text{A2})$$

Im Fall von HSH ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha &= H \\ \delta &= H_R \\ \det(\Omega_1) &= H H_R + H_i^2 \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

und damit für die ω_+ -Resonanz ("-" Zeichen in (A2))

$$\begin{aligned} \omega^2 - H H_R - H_i^2 - \omega(H - H_R) &= 0 \\ H_{\text{res}}(\omega, T) &= \frac{\omega^2 + \omega \cdot H_R - H_i^2}{\omega + H_R} \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

und

$$\delta H_{\text{res}}(\omega, T) = -\frac{H_i^2}{\omega + H_R}. \quad (\text{A5})$$

Die mikroskopische Rechnung des vorliegenden Kapitels ergibt

$$\begin{aligned}
\alpha &= H \\
\delta &= H_R + \frac{1}{4q}\chi^2(H + H_R)(H H_R + H_i^2 + H_R^2), \\
\det(\Omega_1) &= H \cdot H_R + \frac{1}{4q}\chi^2 \cdot H \cdot (H + H_R)(H H_R + H_i^2 + H_R^2) + \\
&\quad + H_i^2 \left(1 + \frac{1}{4q}\chi^2 H_R(H + H_R) \right),
\end{aligned} \tag{A6}$$

was eine Gleichung 3. Grades in H liefert. Es folgt

$$\begin{aligned}
\omega^2 - (\alpha\delta - \beta\gamma) - \omega(\alpha - \delta) &= 0 \\
H_{res}(\omega, T) &= \frac{\omega^2 + \omega\delta + \delta\gamma}{\omega + \delta},
\end{aligned} \tag{A7}$$

wobei δ und γ noch von $H_{res}(\omega, T)$ abhängen (s. Gl. (22)).

Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Resonanzverschiebung δH_{res} als Funktion von T bei $\omega = const.$

Abb. 3 $\delta H_{res}(\omega, T)$ für $\omega = 4.04$ GHz
durchgezogene Linie : Gl. (A5) HSH
punktierte Linie : Gl. (A7), $\beta_{EA} = 1.1$
 $\triangle$ -Symbol : experimentelle Daten

Abb. 4 wie Abb. 3 mit $\omega = 9.5$ GHz.

Die experimentellen Daten für δH_{res} wurde aus Mahdjour/Pappa/Wendler/Baberschke (1986) entnommen, die für χ , $M_R(T)$ und $K(T)$ in den Gln. (A5) und (A7) aus Mahdjour (1987).

Die Lösung von Gl. (A7) wurde via Iteration mit Startwert $H_{res} = H_{res}^{HSH}$ gewonnen. Wie erwartet, zeigt diese eine nur geringfügige Abweichung von der Lösung der HSH-Gleichung (A5). Weiterhin ergibt sich eine Differenz $\Delta(T)$ zwischen den experimentellen Daten und der Voraussage der HSH-Theorie mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}
\Delta(T) &\xrightarrow{T \rightarrow 0} 0 \\
\Delta(T) &\xrightarrow{T \rightarrow T_g} c(\omega) > 0,
\end{aligned} \tag{A8}$$

mit $c(4.04GHz) \cong 450$ G , $c(9.5GHz) \cong 250$ G.

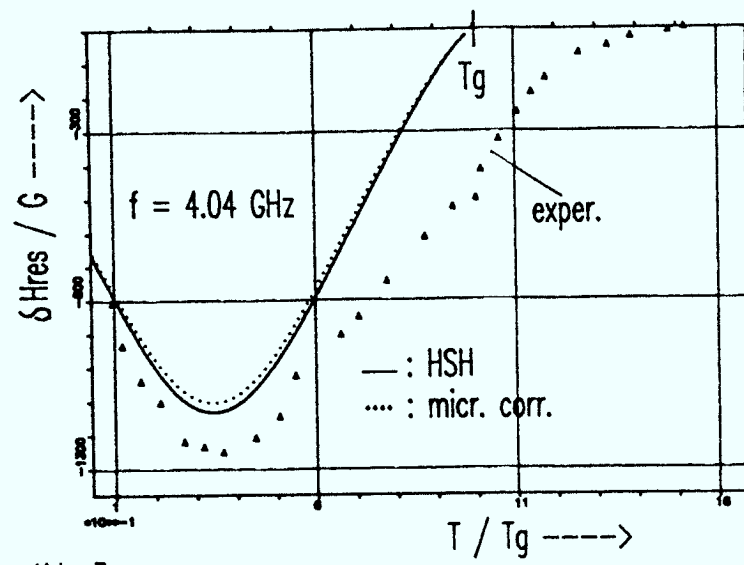


Abb. 3

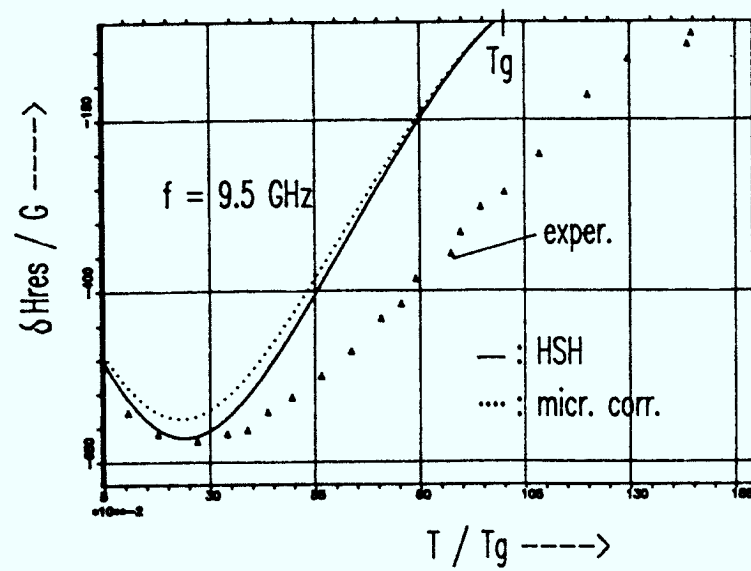


Abb. 4

K A P I T E L I V

Modenkopplungstheorie der ESR-Dämpfung und die Dispersionsrelation der gedämpften HSH-Frequenzen

Mit Hilfe der EA-DM Hamiltonfunktion wird eine *mikroskopische* Zeitableitung für die Variablen $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$ berechnet. Die resultierenden 4-Spin Korrelationsfunktionen in der Memorymatrix werden in Modenkopplungsnaherung behandelt. Die Dispersionsrelation für die *gedämpften* HSH Anregungen wird berechnet.

Kapitel IV

Seite

a) Zeitableitungen für $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$	1
b) Die Matrixelemente von σ und der Memorymatrix Σ in Modenkopplungsnaheerung	4
c) Dispersionsrelation für die gedämpften transversalen HSH-Frequenzen ($\theta_H = \theta_R = 0$)	10
d) Dämpfung und Resonanzverschiebung der HSH-Frequenzen	16

Anhang IV

a) Die mikroskopischen Zeitableitungen von $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$ bzgl. der Hamiltonfunktionen $\mathcal{H}_{\mathcal{EA}}$ und $\mathcal{H}_{\mathcal{DM}}$.	22
b) Berechnung der Matrixelemente von σ	24

IV. Kapitel

a) Zeitableitungen für $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$

Eine mikroskopische Dynamik ist durch

$$\partial_t X^\alpha = \{X^\alpha, \mathcal{H}\}$$

gegeben. Die Hamiltonfunktion hat drei Anteile

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{EA} + \mathcal{H}_{DM} + \vec{H} \cdot \vec{M}(\vec{k} = \vec{0}) \quad (1)$$

Edwards – Anderson Anteil:

$$\mathcal{H}_{EA} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (2)$$

Dzyaloshinsky – Moriya Anteil:

$$\mathcal{H}_{DM} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \vec{D}_{ij} \cdot (\vec{S}_i \times \vec{S}_j) \quad (3)$$

Zeeman Term:

$$\vec{H} \cdot \vec{M}(\vec{k} = \vec{0}) = \vec{H} \cdot \sum_j \vec{S}_j. \quad (4)$$

Die Wechselwirkungen $\vec{D}_{ij}$ und J_{ij} sind von kurzer Reichweite, hier auf nächste Nachbarn des als kubisch primitiv vorausgesetzten Gitters beschränkt. Weiterhin werden sie als stochastisch vorausgesetzt. Ihre Momente lauten

$$\begin{aligned} \overline{J_{ij}} &= 0, \quad \overline{J_{ij} J_{kl}} = J^2 \cdot K_{ij} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ \overline{D_{ij}^\alpha} &= 0, \quad \overline{D_{ij}^\alpha D_{kl}^\alpha} = D^2 \cdot K_{ij} \delta_{\alpha\beta} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \\ K_{ij} &= \begin{cases} z^{-1}, & \text{falls } \vec{r}_i \text{ und } \vec{r}_j \text{ benachbart} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{short – range Matrix} \\ z &: \text{Anzahl der nächsten Nachbarn.} \end{aligned} \quad (5)$$

Die Anisotropie soll klein gegen den EA-Austausch sein, d.h.: $J^2 \ll D^2$. Um die Memorymatrix (vgl. Kap. II.a (20) f)

$$\Sigma = \sigma \chi^{-1}$$

zu berechnen, ist es notwendig, die zeitlichen Ableitungen $|Q\dot{X})$ zu bestimmen. Dabei ist Q der Projektor senkrecht zu $\vec{\theta}$ und $\vec{M}$

$$Q |\vec{M}) = \dot{Q} |\vec{\theta}) = 0.$$

Auf Grund dieser Eigenschaft von Q spielt der Zeeman Term keine Rolle ($\vec{H} = H \cdot \hat{z}$):

$$\begin{aligned} \partial_t^H M^\alpha &= \{M^\alpha, H^z M^z\} \\ &= H^z \epsilon_{\alpha z \gamma} M^\gamma \\ Q \partial_t^H M^\alpha &= 0, \\ \partial_t^H \theta^\alpha &= \{\theta^\alpha, H^z M^z\} \\ &= -H^z \delta_{\alpha z} \\ Q \partial_t^H \theta^\alpha &= -(1-P) H^z \delta_{\alpha z} \\ &= -H^z \delta_{\alpha z} + |X^\alpha) (\vec{X}|\vec{X})_{\alpha\beta}^{-1} (X^\beta | H^z) \delta_{\alpha z} \\ &= -H^z \delta_{\alpha z}, \text{ da } (X^\beta | \text{const}) = 0, \quad \text{s. Gl. (1) Kap. II.a;} \end{aligned}$$

andere mit $Q \partial_t^H \theta^\alpha$ gebildete Matrixelemente $(\dot{X}^\alpha | Q \partial_t^H \theta^\alpha)$ verschwinden aus demselben Grund. Diese Eigenschaften von Q spiegeln den Sachverhalt wider, daß bei reiner Präzessionsdynamik der Spins das äußere (konstante) Magnetfeld *keinen* Beitrag zur Dämpfung liefert, sondern nur die Lage der *ungedämpften* Resonanzen mitbestimmt. Für die Beiträge von $\mathcal{H}_{EA}$ und $\mathcal{H}_{DM}$ zur Zeitableitung wird $Q \cong 1$ angenommen. Dies bedeutet, daß näherungsweise gilt:

$$\begin{aligned} (\partial_t^{EA} X^\alpha | X^\beta) &\cong 0 \\ (\partial_t^{DM} X^\alpha | X^\beta) &\cong 0. \end{aligned}$$

Die Beiträge von $\mathcal{H}_{EA}$ und $\mathcal{H}_{DM}$ zur Zeitableitung lauten wie folgt (vgl. Anh. IV.a)

$$\begin{aligned} \partial_t^{EA} M^\alpha(\vec{k}) &= \sum_m e^{i\vec{k}\vec{r}_m} \{S_m^\alpha, \mathcal{H}_{EA}\} \\ &= \sum_{m,j} e^{i\vec{k}\vec{r}_m} J_{mj} \epsilon_{\alpha\gamma\mu} S_m^\gamma S_j^\mu \\ \partial_t^{EA} M^\alpha(\vec{k} = \vec{0}) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t^{EA} \theta^\alpha(\vec{k}) &= \frac{1}{2q} \epsilon_{\alpha\mu\nu} \sum_m e^{i\vec{k}\vec{r}_m} \{S_m^\mu, \mathcal{H}_{EA}\} \langle S_m^\nu \rangle \\
&= \frac{1}{2q} \sum_{m,j} e^{i\vec{k}\vec{r}_m} J_{mj} (S_j^\alpha R_m^{\nu\nu} - S_j^\nu R_m^{\alpha\nu}) \\
\partial_t^{EA} \theta^\alpha(\vec{k} = \vec{0}) &= \frac{1}{2q} \sum_{m,j} J_{mj} (S_j^\alpha R_m^{\lambda\lambda} - S_j^\nu R_m^{\alpha\nu})
\end{aligned} \tag{7}$$

mit

$$R_m^{\alpha\beta} = S_m^\alpha \langle S_m^\beta \rangle .$$

$$\begin{aligned}
\partial_t^{DM} M^\alpha(\vec{k}) &= \sum_m e^{i\vec{k}\vec{r}_m} \{S_m^\alpha, \mathcal{H}_{DM}\} \\
&= - \sum_{m,l} e^{i\vec{k}\vec{r}_m} (D_{ml}^\alpha S_m^\nu S_l^\nu - D_{ml}^\nu S_m^\nu S_j^\alpha) \\
\partial_t^{DM} M^\alpha(\vec{k} = \vec{0}) &= \sum_{m,l} D_{ml}^\nu S_m^\nu S_l^\alpha
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t^{DM} \theta^\alpha(\vec{k}) &= \frac{1}{2q} \epsilon_{\alpha\mu\nu} \sum_m e^{i\vec{k}\vec{r}_m} \{S_m^\mu, \mathcal{H}_{DM}\} \langle S_m^\nu \rangle \\
&= - \frac{1}{2q} \epsilon_{\alpha\mu\nu} \sum_{m,j} e^{i\vec{k}\vec{r}_m} (D_{mj}^\mu S_m^\lambda S_j^\lambda - D_{mj}^\lambda S_m^\lambda S_j^\mu) \langle S_m^\nu \rangle \\
\partial_t^{DM} \theta^\alpha(\vec{k} = \vec{0}) &= \frac{1}{2q} \epsilon_{\alpha\mu\nu} \sum_{m,l} (D_{ml}^\lambda S_l^\mu - D_{ml}^\mu S_l^\lambda) R_m^{\lambda\nu} .
\end{aligned} \tag{9}$$

Die Gleichungen (6) – (9) stellen den Ausgangspunkt für die Berechnung der Matricelemente von σ im nächsten Abschnitt dar.

IV. Kapitel

b) Die Matrixelemente von σ und der Memorymatrix Σ in Modenkopplungs-näherung

Die Matrix σ besitzt die Elemente (s. Kap. II.a Gl. (20))

$$\sigma^{\alpha\beta}(z) = \frac{1}{T} \left(\dot{X}^\alpha \left| \frac{i}{z - QLQ} \right| Q \dot{X}^\beta \right), \quad (10)$$

$X^\alpha = \delta M^x, \theta^y, \delta M^y, \theta^x, \delta M^z, \theta^z$. Da es i.a. nicht möglich ist, die Dynamik des projizierten Liouville Operators QLQ exakt zu berücksichtigen, wird die Resolvente zu

$$\left(AQ \left| \frac{1}{z - QLQ} \right| QB \right) \cong \left(AQ \left| \frac{1}{z - L} \right| QB \right) \quad (11)$$

genähert. Auf Grund der Eigenschaft des Projektors

$$\|QLQ\| \leq \|L\|, \quad (12)$$

(wobei $\|\dots\|$ eine Operatorennorm darstellt) besteht der Effekt der Näherung von Gl. (11) in einer Überschätzung der Eigenwerte von QLQ und damit auch der Dämpfung (zu den Näherungen von $|QB\rangle$ vgl. Kapitel IV.a).

Damit hat $\sigma(z)$ dieselbe Struktur wie $C(z)$, mit dem Unterschied, daß nicht X^α sonder $\dot{X}^\alpha$ als Variablen auftreten:

$$\sigma(z) = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} \begin{matrix} r & s \\ s & t \end{matrix} & \begin{matrix} u & v \\ -v & w \end{matrix} & \dots \\ \begin{matrix} -u & v \\ -v & -w \end{matrix} & \begin{matrix} r & -s \\ -s & t \end{matrix} & \dots \\ \dots & \dots & \begin{matrix} x & y \\ -y & z \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

vgl. auch Anh. II.c Gl. (A40). Die mit '...' angedeuteten Matrizen ergeben sich im Rahmen der vorliegenden Theorie zu Null.

In den folgenden Rechnungen tauchen Matrixelemente der Form

$$(v_{ij} S_i S_j | v_{kl} S_k S_l) \quad (14)$$

auf, mit

$$\begin{aligned} v_{ij} &= J_{ij} \quad \text{bzw.} \\ v_{ij} &= D_{ij}^\alpha. \end{aligned}$$

Zunächst werden die hier vorgenommenen Näherungen am Beispiel des Terms von Gl. (14) erläutert. Die ausführlichen Rechnungen für die Matricelemente selbst sind im Anhang IV.b zusammengestellt.

Die Mittelung über die v_{ij} wird wie folgt ausgeführt:

$$(v_{ij} S_i S_j | v_{kl} S_k S_l) \cong \overline{v_{ij} v_{kl}} (S_i S_j | S_k S_l);$$

auf Grund dessen tragen nur Terme quadratisch im J_{ij} bzw. D_{ij}^α bei. Für J_{ij} ergibt dies (s. S. IV-1)

$$\begin{aligned} \overline{J_{ij} J_{kl}} &= J^2 \cdot K_{ij} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ A &= \sum_{i,j} K_{ij} (S_i S_j | S_i S_j), \end{aligned}$$

(die Spinvariablen sind noch mit Komponenten indiziert, die hier fortgelassen wurden),

$$A = \sum_{\vec{k}, \vec{q}, \vec{p}} K(\vec{k}) \left(M(\vec{q}) M(\vec{p}) | M(\vec{k} - \vec{q}) M(-\vec{k} - \vec{p}) \right). \quad (15)$$

Ziel der Entkopplung der 4er-Korrelationsfunktion ist es, sie auf die $\vec{k} = \vec{0}$ -Paar-Korrelationen der Variablen $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$ auszudrücken. Letztere sind für die *ungedämpften* Anregungen aus der HSH-Theorie bekannt (s. Kap. II.c).

In diesen Sinne ergibt sich z.B. für den Term von Gl. (15) mit einer Hartree-Fock ähnlichen Näherung

$$\begin{aligned} A &\cong \sum_{\vec{k}, \vec{q}, \vec{p}} K(\vec{k}) \left(\delta(\vec{k}) - \delta(\vec{q} - \vec{k} - \vec{p}) \right) C_{MM}(\vec{q}) C_{MM}(\vec{p}) \\ &= \sum_{\vec{q}, \vec{p}} \left(1 - K(\vec{q} - \vec{p}) \right) C_{MM}(\vec{q}) C_{MM}(\vec{p}) \\ &\cong a \cdot C_{MM}(\vec{q} = \vec{0}) \cdot C_{MM}(\vec{p} = \vec{0}) \end{aligned} \quad (16)$$

mit

$$a = \sum_{\vec{q}, \vec{p}} \left(1 - K(\vec{q} - \vec{p}) \right).$$

Im letzten Schritt wurde die Kopplung der makroskopischen Variablen an die *lokalen* Moden vernachlässigt: der obere Cutoff k_c für $\vec{q}$ und $\vec{p}$ wurde implizit

so gewählt, daß $C(\vec{k}) \cong C(\vec{k} = \vec{0})$ für $|\vec{k}| < k_c$ angenommen werden kann (d.h. $a = a(k_c)$).

Eine zusätzliche Näherung betrifft die Matrixelemente mit $\partial_t \theta^\alpha(\vec{k} = \vec{0})$: darin tritt nicht die Variable θ_j^α selbst auf sondern der Drehmatrixoperator $R_j^{\mu\nu} = S_j^\mu < S_j^\nu >$ (s. auch Kap. III.a).

Der symmetrische Anteil

$$R_{j,sym}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (R_j^{\mu\nu} + R_j^{\nu\mu})$$

bestimmt die *lokale* Größe $q = \overline{S_i^\alpha}^2$

$$\overline{R_{j,sym}^{\mu\nu}} = q \cdot \delta_{\mu\nu} , \quad (17)$$

während der antisymmetrische Anteil

$$R_{j,asym}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (R_j^{\mu\nu} - R_j^{\nu\mu})$$

an die Winkelvariable θ_j^γ und damit an die *makroskopische* Größe $\theta^\gamma = \sum_j \theta_j^\gamma$ koppelt:

$$\theta_j^\gamma = \frac{1}{2q} \epsilon_{\gamma\mu\nu} R_j^{\mu\nu}$$

bzw.

$$R_{j,asym}^{\mu\nu} = q \cdot \epsilon_{\mu\nu\gamma} \theta_j^\gamma \quad (18)$$

Da die Kopplung der makroskopischen Variablen an die lokalen Moden vernachlässigt wird, werden im weiteren nur die antisymmetrischen Anteile von $R_j^{\mu\nu}$ in σ berücksichtigt:

$$\begin{aligned} (R^{\alpha\beta}(t)|A) &\cong (R_{asym}^{\alpha\beta}(t)|A) \\ &= q \cdot \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (\theta^\gamma(t)|A) \end{aligned} \quad (19)$$

d.h.

$$(R_{sym}^{\alpha\beta}(t)|A) \cong 0 ;$$

mit anderen Worten: der Projektor Q filtert auch die symmetrischen Anteile des Drehmatrixoperators $R^{\alpha\beta}$ bei der Zeitableitung heraus.

Mit den oben vorgenommenen Näherungen ergeben sich die Matrixelemente von σ als Funktionen der Korrelationen $C_{X^\alpha X^\beta}(t)$. Insgesamt liefert dies mit der Mori Gleichung ein *selbstkonsistentes* System für die Korrelationsfunktionen $C_{X^\alpha X^\beta}(t)$. Dieses soll mit dem Ansatz (s. Kap. V)

$$C(t) = A_+ \cos(\omega_+ t) e^{-\Gamma_+ t} + A_- \cos(\omega_- t) e^{-\Gamma_- t} \quad (20)$$

gelöst werden ($\omega_\pm$ sind die HSH Frequenzen). Weiterhin ist zu erwarten, daß die Korrelationsfunktionen der *gedämpften* Anregungen in erster Näherung dieselbe Gestalt wie die der *ungedämpften* Resonanzen haben, d.h.:

1) die Amplituden stimmen überein,

$$A_{\pm, \text{gedämpft}} \cong A_{\pm, \text{ungedämpft}},$$

2) die Matrix $C_{X^\alpha X^\beta}$ hat dieselbe Gestalt wie im ungedämpften Fall (Anh. II.c (A40)).

In dieser Näherung sind die longitudinalen und transversalen Variablen unkorreliert. Daher kann man davon ausgehen, daß der größte Beitrag zur Dämpfung (via σ) von den *transversalen* Korrelationen $C^\perp(t)$ selbst kommt: $\sigma_{X^\alpha X^\beta}(t)$ hängt nur von $C_{X^\alpha X^\beta}^\perp(t)$ ab.

Für diesen Fall lauten die Matrixelemente von σ wie folgt (s. Anh. IV.b):

$\delta M^x, \theta^y$:

$$\begin{aligned} r &= T \cdot \sigma_{M^x M^x}(t) \\ &= a \cdot D^2 \cdot \left(\left(C_{M^x M^x}(t) \right)^2 + \left(C_{M^x M^y}(t) \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} s &= T \cdot \sigma_{M^x \theta^y}(t) \\ &= \frac{1}{2} \cdot a D^2 \cdot (C_{M^x M^y}(t) C_{M^x \theta^x}(t) + C_{M^y \theta^x}(t) C_{M^x M^x}(t)) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} t &= T \cdot \sigma_{\theta^y \theta^x}(t) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$\delta M^x, \theta^y - \delta M^y, \theta^x$:

$$\begin{aligned} u &= T \cdot \sigma_{M^x M^y}(t) \\ &= 0 \\ v &= T \cdot \sigma_{M^x \theta^x}(t) \end{aligned} \quad (24)$$

$$v = -\frac{1}{2} \alpha D^2 (C_{M^x M^y}(t) C_{M^x \theta y}(t) + C_{M^x M^x}(t) C_{M^x \theta x}(t)) \quad (25)$$

$$w = T \cdot \sigma_{\theta y \theta x}(t) \\ = 0 \quad (26)$$

Alle Matricelemente von σ , die eine longitudinale Größe enthalten (in Gl. (13) durch '...' bezeichnet) ergeben sich zu Null. Die reinen z-Korrelationen (x,y und z in (13)) werden für die *transversale* Dämpfung nicht benötigt, da die Gleichungssysteme für transversale und longitudinale Größen entkoppeln (χ ist Block-diagonal, s. Kap. II.b (37/38)):

$$(z1 - \Omega + i\Sigma)C(z) = iT\chi$$

mit

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega^\perp & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega^\parallel \end{pmatrix}, \text{ s. Kap. II.c(42) f,} \\ \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^\perp & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma^\parallel \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^\perp & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^\parallel \end{pmatrix} \cdot \chi^{-1} \quad (27) \\ \sigma^\perp = \begin{pmatrix} r & s & 0 & v \\ s & 0 & -v & 0 \\ 0 & v & r & -s \\ -v & 0 & -s & 0 \end{pmatrix}$$

Die Elemente der Memorymatrix $\Sigma^\perp$ lauten (für **A** und **B** vgl. Kap. II.b (37)):

$$\Sigma^\perp = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} r & s & 0 & v \\ s & 0 & -v & 0 \\ 0 & v & r & -s \\ -v & 0 & -s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (28)$$

$\delta M^x, \theta^y$:

$$\Sigma_{M^x M^x}(t) = \frac{1}{T} (r \cdot \chi^{-1} + H_R \cdot s) \\ \Sigma_{M^x \theta y}(t) = \frac{1}{T} (r \cdot H_R + \chi(H_i^2 + H H_R + H_R^2) \cdot s) \\ \Sigma_{\theta y M^x}(t) = \frac{1}{T} \cdot r \cdot \chi^{-1} \\ \Sigma_{\theta y \theta y}(t) = \frac{1}{T} s \cdot H_R \quad (29)$$

$$\underline{\delta M^x, \theta^y - \delta M^y, \theta^x} :$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{M^x M^y}(t) &= -\frac{1}{T} \cdot v H_R \\ \Sigma_{M^x \theta^x}(t) &= \frac{1}{T} v \cdot \chi (H H_R + H_i^2 + H_R^2) \\ \Sigma_{\theta^y M^y}(t) &= -\frac{1}{T} v \cdot \chi^{-1} \\ \Sigma_{\theta^y \theta^x}(t) &= \frac{1}{T} v H_R\end{aligned}\tag{30}$$

$$\underline{\delta M^y, \theta^x - \delta M^x, \theta^y} :$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{M^y M^x}(t) &= -\Sigma_{M^x M^y}(t) \\ \Sigma_{M^y \theta^y}(t) &= \Sigma_{M^x \theta^x}(t) \\ \Sigma_{\theta^x M^x}(t) &= \Sigma_{\theta^y M^y}(t) \\ \Sigma_{\theta^x \theta^y}(t) &= -\Sigma_{\theta^y \theta^x}(t)\end{aligned}\tag{31}$$

$$\underline{\delta M^y, \theta^x} :$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{M^y M^y}(t) &= \Sigma_{M^x M^x}(t) \\ \Sigma_{M^y \theta^x}(t) &= -\Sigma_{M^x \theta^y}(t) \\ \Sigma_{\theta^x M^y}(t) &= -\Sigma_{\theta^y M^x}(t) \\ \Sigma_{\theta^x \theta^x}(t) &= \Sigma_{\theta^y \theta^y}(t) .\end{aligned}\tag{32}$$

Damit hat $\Sigma^\perp$ die Gestalt:

$$\Sigma^\perp = \begin{pmatrix} a & b & e & f \\ c & d & g & m \\ -e & f & a & -b \\ g & -m & -c & d \end{pmatrix} .\tag{33}$$

IV. Kapitel

c) Dispersionsrelation für die gedämpften transversalen HSH-Frequenzen ($\theta_H = \theta_R = 0$)

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Dispersionsrelation *mit Dämpfung* zu berechnen, also den Fall $\Sigma \neq \mathbf{0}$ zu betrachten. Dabei soll die Struktur von Σ bzw. σ verwendet werden, die sich aus der Modenkopplungsnäherung für die Memorykerne im vorigen Abschnitt (Kap. IV.b Gl. (27)) ergab:

$$\begin{aligned} T \cdot \sigma^\perp &= \begin{pmatrix} r & s & 0 & v \\ s & 0 & -v & 0 \\ 0 & v & r & -s \\ -v & 0 & -s & 0 \end{pmatrix} \\ &= T \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & \sigma_4 \end{pmatrix} \\ \Sigma^\perp &= \frac{1}{T} \sigma^\perp \cdot \chi^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_3 & \Sigma_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{34}$$

mit

$$\begin{aligned} \chi^{-1} &= \begin{pmatrix} \chi^{-1} & H_R & \mathbf{0} \\ H_R & \chi(h+H_R^2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \chi^{-1} & -H_R \\ -H_R & \chi(h+H_R^2) & -H_R & \chi(h+H_R^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Bedingung für die Resonanzen lautet

$$\begin{aligned} \det(z\mathbf{1} - \Omega^\perp + i\Sigma^\perp) &= 0, \\ \Omega^\perp &= i \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \omega_1 \\ \omega_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \chi^{-1} \\ &= i \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \Omega_1 \\ \Omega_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{35}$$

mit

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -1 & -b \end{pmatrix} \\ a &= \chi(H + H_R) \\ b &= \frac{1}{4q} \cdot \chi(H + H_R) \quad (HSH : b = 0). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Zerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

folgt dann die Determinante

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} &= \det(\mathbf{D}) \cdot \det(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}) \\ &= \det(\mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{C}) \cdot \det(\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{1}) . \end{aligned} \quad (36)$$

Die Korrespondenz zu $z\mathbf{1} - \Omega^\perp + i\Sigma^\perp$ lautet:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= z\mathbf{1} + i\Sigma_1 \\ \mathbf{B} &= -i\Omega_1 + i\Sigma_2 \\ \mathbf{C} &= -i\Omega_2 + i\Sigma_3 \\ \mathbf{D} &= z\mathbf{1} + i\Sigma_4 . \end{aligned} \quad (37)$$

Es folgt

$$\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{C}) ,$$

da $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ sich nur im Vorzeichen der Nebendiagonalelemente unterscheiden (s. Gl. (21) Kap. III.b).

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \det^2(\mathbf{B}) &= \det^2(\Omega_1 - \Sigma_2) \\ &= \det^2\left(\left(\omega_1 - \frac{1}{T} \sigma_2\right) \mathbf{W}_2\right) \\ &= h^2 \det^2 \begin{pmatrix} a & 1 - \frac{1}{T}v \\ -1 + \frac{1}{T}v & b \end{pmatrix} \\ &= h^2 \cdot \left(\frac{1}{4q} \chi^2 (H + H_R)^2 + \left(1 - \frac{v}{T}\right)^2 \right)^2 . \end{aligned} \quad (38)$$

Damit ist die Resonanzbedingung äquivalent zu

$$\det(\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 - \mathbf{1}) = 0 , \quad (39)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1} \\ &= (z\mathbf{1} + i\Sigma_1) \cdot i \cdot (\Omega_2 - \Sigma_3)^{-1} \\ \mathbf{M}_2 &= \mathbf{D}\mathbf{B}^{-1} \\ &= (z\mathbf{1} + i\Sigma_4) \cdot i \cdot (\Omega_1 - \Sigma_3)^{-1} . \end{aligned}$$

Gl. (39) lautet

$$1 - \text{Tr}(\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2) + \det(\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2) = 0 . \quad (40)$$

Setzt man

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} z + i\lambda & \mu \\ \gamma & z + i\sigma \end{pmatrix} \\ \mathbf{B} &= -i \begin{pmatrix} x & y \\ p & w \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (41)$$

so ist

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= -i \begin{pmatrix} -x & y \\ p & -w \end{pmatrix} \\ \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} z + i\lambda & -\mu \\ -\gamma & z + i\sigma \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (42)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1} \\ &= \frac{i}{xw - yz} \begin{pmatrix} z + i\lambda & \gamma \\ \mu & z + i\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -w & -y \\ -p & -x \end{pmatrix} \\ &= \frac{-i}{xw - yz} \begin{pmatrix} w(z + i\lambda) + p\gamma & y(z + i\lambda) + xy \\ w\mu + p(z + i\sigma) & yM^y + x(z + i\sigma) \end{pmatrix} \\ &= \frac{-i}{xw - yz} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_2 &= \mathbf{D}\mathbf{B}^{-1} \\ &= \frac{i}{xw - py} \begin{pmatrix} z + i\lambda & -\gamma \\ -\mu & z + i\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & -y \\ -p & x \end{pmatrix} \\ \mathbf{M}_2 &= \frac{i}{xw - py} \begin{pmatrix} w(z + i\lambda) + p\gamma & -y(z + i\lambda) - x\gamma \\ -w\mu - p(z + i\sigma) & y\mu + x(z + i\sigma) \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{xw - py} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Es folgt mit $m = xw - py$

$$\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 = m^{-2} \cdot \begin{pmatrix} a^2 - bc & -b(a-d) \\ c(a-d) & d^2 - bc \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2) &= (a^2 + d^2 - 2bc) \cdot m^{-2} \\ &= \left((a-d)^2 + 2(ad-bc) \right) \cdot m^{-2} \\ &= \det^{-2}(\mathbf{C}) \cdot (a-d)^2 - 2 \det(\mathbf{M}_1), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\det(\mathbf{M}_1) = \det(\mathbf{M}_2). \quad (44)$$

Gl. (40) lässt sich nun in 2 Gleichungen 2. Grades aufspalten:

$$\begin{aligned} 1 + 2 \det(\mathbf{M}_1) - \det^{-2}(\mathbf{C})(a-d)^2 + \det^2(\mathbf{M}_1) &= 0 \\ (1 + \det(\mathbf{M}_1))^2 - (\det^{-1}(\mathbf{C})(a-d))^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$a) \quad 1 + \det(\mathbf{M}_1) + \det^{-1}(\mathbf{C})(a-d) = 0 \quad (45)$$

$$b) \quad 1 + \det(\mathbf{M}_1) - \det^{-1}(\mathbf{C})(a-d) = 0.$$

Ziel weiterer Rechnungen ist es, die Dämpfung direkt durch Matrixelemente von σ (*nicht* Σ) auszudrücken:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{M}_1) &= \det(\mathbf{A} \mathbf{C}^{-1}) \\ &= \det^{-1}(\mathbf{C}) \cdot \det \left(z \mathbf{1} + i \frac{\sigma_1}{T} W_1 \right) \\ &= \det^{-1}(\mathbf{C}) \det(W_1) \cdot \det \left(z W_1^{-1} + \frac{\sigma_1}{T} \right) \\ &= \det^{-1}(\mathbf{C}) \cdot h \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{z}{h} \chi (h + H_R^2) + i \frac{r}{T} & -\frac{z}{h} H_R + i \frac{s}{T} \\ -\frac{z}{h} H_R + i \frac{s}{T} & \frac{z}{h} \chi^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \det^{-1}(\mathbf{C}) \cdot h \cdot \left(\frac{z}{h} \chi^{-1} \left(\frac{z}{h} \chi (h + H_R^2) + i \frac{r}{T} \right) - \left(\frac{z}{h} H_R - i \frac{s}{T} \right)^2 \right); \end{aligned} \quad (46)$$

also lautet Gl. (45 a/b)

$$\det(\mathbf{C}) + h^{-1} \left\{ z \chi^{-1} \left(z \chi (h + H_R^2) + i \frac{h}{T} r \right) - \left(z H_R - i \frac{h}{T} s \right)^2 \right\} \pm (a-d) = 0. \quad (47)$$

Bleibt noch, den Term $a - d$ zu bestimmen:

$$a - d = i \cdot m \{ (\mathbf{M}_1)_{11} - (\mathbf{M}_1)_{22} \}, \quad (48)$$

vgl. S. IV-12, $m = xw - yz = -\det(\mathbf{C})$ (Gl. (42));

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_1 &= \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \\
&= i \left(z \mathbf{1} + i \frac{\sigma_1}{T} \mathbf{W}_1 \right) \left(\omega_2 \mathbf{W}_1 - \frac{\sigma_3}{T} \mathbf{W}_1 \right)^{-1} \\
&= i \left(z \mathbf{W}_1^{-1} - i \frac{\sigma_1}{T} \right) \left(\omega_2 - \frac{\sigma_3}{T} \right)^{-1} \\
&= i \cdot \begin{pmatrix} \frac{z}{h} \chi (h + H_R^2) + i \frac{r}{T} & -\frac{z}{h} H_R + i \frac{s}{T} \\ -\frac{z}{h} H_R + i \frac{s}{T} & \frac{z}{h} \chi^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a & 1 - \frac{v}{T} \\ -1 + \frac{v}{T} & -b \end{pmatrix}^{-1} \\
\mathbf{M}_1 &= i \left(ab + \left(1 - \frac{v}{T}\right)^2 \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{z}{h} \chi (h + H_R^2) + i \frac{r}{T} & -\frac{z}{h} H_R + i \frac{s}{T} \\ -\frac{z}{h} H_R + i \frac{s}{T} & \frac{z}{h} \chi^{-1} \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} -b & -1 + \frac{v}{T} \\ 1 - \frac{v}{T} & -a \end{pmatrix}. \tag{49}
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man noch (Gl. (35) f)

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M}_1)_{11} &= -i \cdot h \cdot \det^{-1}(\mathbf{C}) \left\{ -\frac{1}{4q} \chi(H + H_R) \cdot \left(\frac{z}{h} \chi (h + H_R^2) + i \frac{v}{T} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{z}{h} H_R + i \frac{s}{T} \right) \left(1 - \frac{v}{T} \right) \right\} \tag{50}
\end{aligned}$$

$$(\mathbf{M}_1)_{22} = -i \cdot h \det^{-1}(\mathbf{C}) \left\{ \left(-\frac{z}{h} H_R + i \frac{s}{T} \right) \left(-1 + \frac{v}{T} \right) - \frac{z}{h} (H + H_R) \right\}, \tag{51}$$

damit (vgl. Gl. (48))

$$\begin{aligned}
a - d &= \left(z H_R - i \frac{h}{T} s \right) \left(1 - \frac{v}{T} \right) - z(H + H_R) + \\
&\quad + \frac{1}{4q} \chi(H + H_R) \left(z \chi (h + H_R^2) + i \frac{h}{T} r \right) + \\
&\quad + \left(z H_R - i \frac{h}{T} s \right) \left(1 - \frac{v}{T} \right). \tag{52}
\end{aligned}$$

Die Dispersionsrelation der gedämpften HSH-Frequenzen ist damit bestimmt (Gl. (47) und (52)):

$$\begin{aligned}
& -h \left(\frac{1}{4q} \chi^2 (H + H_R)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{T}\right) \right) + \\
& + h^{-1} \left\{ z \chi^{-1} \left(z \chi (h + H_R^2) + i \frac{h}{T} r \right) - \left(z H_R - i \frac{h}{T} s \right)^2 \right\} \pm \quad (53) \\
& \pm \left\{ 2 \cdot \left(z H_R - i \frac{h}{T} s \right) \left(1 - \frac{v}{T}\right) - z (H + H_R) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{4q} \chi (H + H_R) \left(z \chi (h + H_R^2) + i \frac{h}{T} r \right) \right\} = 0 .
\end{aligned}$$

Setzt man die Memorykerne r , s und v gleich Null und vernachlässigt die Terme mit q , so erhält man wieder die ursprüngliche HSH-Dispersionsrelation $z^2 \pm z(H_R - H) - h = 0$.

IV. Kapitel

d) Dämpfung und Resonanzverschiebung der HSH-Frequenzen

Zunächst wird folgender Ansatz gewählt:

$$\begin{aligned}\delta\omega_{\pm}(z=0) &= 0 \\ \Gamma_{\pm}(z=0) &> 0 ,\end{aligned}\tag{54}$$

d.h., daß die Frequenzverschiebung erst bei *endlicher* äußerer Frequenz von Null verschieden ist:

$$\begin{aligned}z_{\pm} &= \omega_{\pm} - i\Gamma_{\pm} \\ -\bar{z}_{\pm} &= -\omega_{\pm} - i\Gamma_{\pm} ,\end{aligned}\tag{55}$$

und entspricht der Vernachlässigung des Memorykernes v in σ_2 und σ_3 (s. Gl. (34)), so daß σ jetzt lautet:

$$\sigma = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \sigma_4 \end{pmatrix} .\tag{56}$$

Die Dispersionsrelation von Gl. (53) reduziert sich auf (r, s sind reell)

$$\begin{aligned}& -h \left(1 + \frac{1}{4q} \chi^2 (H + H_R)^2 \right) + \\ & + z^2 + h \left(\frac{s}{T} \right)^2 + iz \left(\chi^{-1} \frac{r}{T} + 2H_R \frac{s}{T} \right) \pm \\ & \pm \left\{ z \cdot \left(H_R - H + \frac{1}{4q} \chi^2 (h + H_R^2) (H + H_R) \right) + \right. \\ & \left. + i \cdot h \cdot \left(\frac{r}{T} \cdot \frac{1}{4q} \chi (H + H_R) - 2 \frac{s}{T} \right) \right\} = 0 .\end{aligned}\tag{57}$$

Vergleicht man mit den zu erwartenden Resonanzfrequenzen

$$\begin{aligned}& (z - (\omega_+ - i\Gamma_+)) \cdot (z - (\omega_- - i\Gamma_-)) = \\ & = z^2 - z(\omega_+ + \omega_- - i(\Gamma_+ + \Gamma_-)) + \omega_+ \omega_- - \Gamma_+ \Gamma_- + \\ & - i(\Gamma_+ \omega_- + \Gamma_- \omega_+) ,\end{aligned}\tag{58}$$

so ergeben sich die Bestimmungsgleichungen zu (Vergleich mit der ”+”-Bedingung)

$$\begin{aligned}
\omega_+ + \omega_- &= H - H_R - \frac{1}{4q} \chi^2 (h + H_R^2)(H + H_R) \\
\Gamma_+ + \Gamma_- &= \chi^{-1} \frac{r}{T} + 2H_R \frac{s}{T} \\
\omega_+ \omega_- - \Gamma_+ \Gamma_- &= -h \left(1 + \frac{1}{4q} \chi^2 (H + H_R)^2 \right) + h \left(\frac{s}{T} \right)^2 \\
\Gamma_+ \omega_- + \Gamma_- \omega_+ &= -h \left(\frac{r}{T} \frac{1}{4q} \chi (H + H_R) - 2 \frac{s}{T} \right) ;
\end{aligned} \tag{59}$$

setzt man

$$\begin{aligned}
R_{\pm} &= \frac{1}{2} (\omega_+ \pm \omega_-) \\
D_{\pm} &= \frac{1}{2} (\Gamma_+ \pm \Gamma_-) ,
\end{aligned} \tag{60}$$

so folgt

$$\begin{aligned}
R_+ &= \frac{1}{2} (H - H_R) \left(1 - \frac{H + H_R}{H - H_R} \cdot \frac{1}{4q} \chi^2 (h + H_R^2) \right) \\
D_+ &= \frac{1}{2} \left(\chi^{-1} \frac{r}{T} + 2H_R \frac{s}{T} \right) \\
\frac{1}{2} (R_+^2 - R_-^2) - \frac{1}{2} (D_+^2 - D_-^2) &= -h \left(1 + \frac{1}{4q} \chi^2 (H + H_R)^2 \right) + h \left(\frac{s}{T} \right)^2 \\
2(R_+ D_+ - R_- D_-) &= -h \left(\frac{r}{T} \frac{1}{4q} \chi (H + H_R) - 2 \frac{s}{T} \right)
\end{aligned} \tag{61}$$

und

$$D_- = \frac{1}{R_-} \cdot \left(R_+ \cdot D_+ + \frac{1}{2} h \left(\frac{r}{T} \frac{1}{4q} \chi (H + H_R) - 2 \frac{s}{T} \right) \right) ;$$

damit ergibt sich für die Dämpfung

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\pm} &= D_+ \pm D_- \\
&= \frac{R_- \pm R_+}{R_-} D_+ \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{R_-} \left(\frac{r}{T} \frac{1}{4q} \chi (H + H_R) - 2 \frac{s}{T} \right) ,
\end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_+ &= \frac{\omega_+}{\omega_+ - \omega_-} \left(\chi^{-1} \frac{r}{T} + 2H_R \frac{s}{T} \right) - \\
&\quad + \frac{h}{\omega_+ - \omega_-} \left(\frac{r}{T} \cdot \frac{1}{4q} \chi (H + H_R) - 2 \frac{s}{T} \right) ,
\end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_- &= \frac{-\omega_-}{\omega_+ - \omega_-} \left(\chi^{-1} \frac{r}{T} + 2H_R \frac{s}{T} \right) - \\
&\quad - \frac{h}{\omega_+ - \omega_-} \left(\frac{r}{T} \cdot \frac{1}{4q} \chi (H + H_R) - 2 \frac{s}{T} \right) ,
\end{aligned} \tag{64}$$

mit $\omega_{\pm}$ als den ungedämpften HSH-Resonanzen (vgl. Kap. III.b Gln. (29/30)).

Der allgemeine Fall mit $v \neq 0$ soll nun behandelt werden. $v \neq 0$ (bei $z = 0$) hat i. Ggs. zur obigen Lösung zur Folge, daß die Resonanzverschiebung $\delta\omega_{\pm}$ auch bei $z = 0$ von Null verschieden ist. Der Ansatz für die Resonanzen lautet damit

$$\begin{cases} z_{\pm} &= \omega_{\pm} + \delta\omega_{\pm} - i\Gamma_{\pm} \\ -\bar{z}_{\pm} &= -(\omega_{\pm} + \delta\omega_{\pm}) - i\Gamma_{\pm} . \end{cases} \quad (65)$$

Der Vergleich von

$$\begin{aligned} & (z - (\omega_+ + \delta\omega_+ - i\Gamma_+)) (z - (\omega_- + \delta\omega_- - i\Gamma_-)) = \\ &= z^2 - z(\omega_+ + \delta\omega_+ + \omega_- + \delta\omega_- - i(\Gamma_+ + \Gamma_-)) + \\ &+ (\omega_+ + \delta\omega_+)(\omega_- + \delta\omega_-) - \Gamma_+\Gamma_- - \\ &- i(\Gamma_+(\omega_- + \delta\omega_-) + \Gamma_-(\omega_+ + \delta\omega_+)) \end{aligned}$$

mit Gl. (53) liefert dann

$$\begin{aligned} \omega_+ + \delta\omega_+ + \omega_- + \delta\omega_- &= H - H_R - \frac{1}{4q} \chi^2 (h + H_R^2)(H + H_R) + 2H_R \frac{v}{T} \\ \Gamma_+ + \Gamma_- &= \chi^{-1} \frac{r}{T} + 2H_R \frac{s}{T} \\ (\omega_+ + \delta\omega_+)(\omega_- + \delta\omega_-) - \Gamma_+\Gamma_- &= -h \left(\left(1 - \frac{v}{T}\right)^2 + \frac{1}{4q} \chi^2 (H + H_R)^2 + \left(\frac{s}{T}\right)^2 \right) \\ \Gamma_+(\omega_- + \delta\omega_-) + \Gamma_-(\omega_+ + \delta\omega_+) &= h \left(\frac{r}{T} \frac{1}{4q} \chi (H + H_R) - 2\frac{s}{T} \left(1 - \frac{v}{T}\right) \right) ; \end{aligned} \quad (66)$$

die Substitution lautet nun

$$\begin{aligned} R_{\pm} &= \frac{1}{2} (\omega_+ + \delta\omega_+ \pm (\omega_- + \delta\omega_-)) \\ D_{\pm} &= \frac{1}{2} (\Gamma_+ \pm \Gamma_-) , \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} R_+ &= \frac{1}{2} a \\ D_+ &= \frac{1}{2} b \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(R_+^2 - R_-^2) - \frac{1}{2}(D_+^2 - D_-^2) &= -c \\ 2(D_+R_+ - D_-R_-) &= e , \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
a &= (H - H_R)(1 - \hat{g}_1) + 2H_R \frac{v}{T} \\
b &= \chi^{-1} \frac{r}{T} + 2H_R \frac{s}{T} \\
c &= h \left(1 + 4q \cdot \hat{g}_2^2 + \left(\frac{s}{T} \right)^2 - \left(2 - \frac{v}{T} \right) \cdot \frac{v}{T} \right) \\
e &= -h \left(\frac{r}{T} \cdot \hat{g}_2 - 2 \frac{s}{T} \left(1 - \frac{v}{T} \right) \right) \\
\hat{g}_1 &= \frac{H + H_R}{H - H_R} \frac{1}{4q} \chi^2 (h + H_R^2) \\
\hat{g}_2 &= \frac{1}{4q} \chi \cdot (H + H_R) .
\end{aligned} \tag{69}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} (a^2 - b^2) + 2c &= R_-^2 - D_-^2 \\
\frac{1}{2} a \cdot b - e &= 2 \cdot D_- \cdot R_- ;
\end{aligned}$$

setzt man

$$\begin{aligned}
R_- &= \Delta ch(\varphi) \\
D_- &= \Delta sh(\varphi) ,
\end{aligned} \tag{70}$$

so folgt

$$\begin{aligned}
\Delta^2 &= \frac{1}{4} (a^2 - b^2) + 2c \\
sh(2\varphi) &= \Delta^{-2} \left(\frac{1}{2} ab - e \right)
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{1}{2} Arsh \left(\Delta^{-2} \left(\frac{1}{2} ab + e \right) \right) \\
\Delta &= \left(\frac{1}{4} (a^2 - b^2) + 2c \right)^{1/2} .
\end{aligned} \tag{71}$$

Falls $\Delta^2 < 0$, muß in Gl. (70) sh und ch vertauscht werden. Mit

$$\mu = \frac{1}{2} ab - e \tag{72}$$

und

$$\begin{aligned} Arsh(x) &= sign(x) Arch\left(\sqrt{x^2 + 1}\right) \\ sh\left(\frac{x}{2}\right) &= sign(x) \sqrt{\frac{1}{2}(ch(x) - 1)} \\ ch\left(\frac{x}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2}(ch(x) + 1)}, \end{aligned}$$

gilt dann

$$\begin{aligned} R_- &= \Delta \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\mu^2 \Delta^{-4} + 1} + 1 \right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\mu^2 + \Delta^4} + \Delta^2 \right)} \\ D_- &= \Delta \cdot sign(\mu) \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\mu^2 \Delta^{-4} + 1} - 1 \right)} \\ &= sign(\mu) \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\mu^2 + \Delta^4} - \Delta^2 \right)} \end{aligned} \tag{73}$$

und somit (vgl. (69) – (72))

$$\begin{aligned} \delta\omega_{\pm} &= (R_+ \pm R_-) - \omega_{\pm} \\ &= \frac{1}{2} (H - H_R)(1 - \hat{g}_1) + H_R \frac{v}{T} \pm \\ &\quad \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\mu^2 + \Delta^4} + \Delta^2 \right)} - \omega_{\pm} \end{aligned} \tag{74}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\pm} &= D_+ \pm D_- \\ &= \frac{1}{2} \left(\chi^{-1} \frac{r}{T} + 2H_R \frac{s}{T} \right) \pm \\ &\quad \pm sign(\mu) \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\mu^2 + \Delta^4} - \Delta^2 \right)} \end{aligned} \tag{75}$$

mit $\omega_{\pm}$ als ungedämpften HSH-Resonanzen (vgl. oben).

Die Ergebnisse dieses Kapitels sind:

- 1) eine *mikroskopische* Berechnung der Dämpfung der HSH-Resonanzen in Modenkopplungsnäherung,
- 2) die Bestimmung der Dispersionsrelation der gedämpften HSH-Frequenzen und damit die Berechnung der Resonanzverschiebung und Dämpfung bei verschwindender äußerer Frequenz,

- 3) die Formulierung eines *selbstkonsistenten* Systems (mit Hilfe von Punkt 1))
für die Dämpfung und Resonanzverschiebung (Gl. (21) – (26), (63/64) bzw.
(71) – (75)).

IV. Anhang

a) Die mikroskopischen Zeitableitungen von $\vec{M}$ und $\vec{\theta}$ bzgl. der Hamiltonfunktionen $\mathcal{H}_{EA}$ und $\mathcal{H}_{DM}$.

Die Poissonklammern von $\mathcal{H}_{EA}$ und $\mathcal{H}_{DM}$ mit der lokalen Spinvariablen $\vec{S}_m$ auf dem Gitterplatz $\vec{r}_m$ lauten

$$\begin{aligned}\{S_m^\alpha, \mathcal{H}_{EA}\} &= - \sum_{l,j} J_{lj} \{S_m^\alpha, S_l^\mu\} S_j^\mu \\ &= -\epsilon_{\alpha\mu\lambda} \sum_j J_{mj} S_m^\lambda S_j^\mu \\ &= \epsilon_{\alpha\lambda\mu} \sum_j J_{mj} S_m^\lambda S_j^\mu\end{aligned}\quad (A1)$$

$$\begin{aligned}\{S_m^\alpha, \mathcal{H}_{DM}\} &= -\frac{1}{2} \sum_{j,l} D_{lj}^\mu \epsilon_{\mu\nu\gamma} \{S_m^\alpha, S_l^\nu S_j^\gamma\} \\ &= - \sum_{l,j} D_{lj}^\mu \epsilon_{\mu\nu\gamma} \{S_m^\alpha, S_l^\nu\} S_j^\gamma \\ &= -\epsilon_{\mu\nu\gamma} \epsilon_{\alpha\nu\lambda} \sum_j D_{mj}^\mu S_m^\lambda S_j^\gamma \\ &= - \sum_j \left(D_{mj}^\alpha S_m^\lambda S_j^\lambda - D_{mj}^\lambda S_m^\lambda S_j^\alpha \right) .\end{aligned}\quad (A2)$$

Daraus ergibt sich für $M^\alpha(\vec{k})$ und $\theta^\alpha(\vec{k})$

$$\partial_t^{EA} M^\alpha(\vec{k}) = \epsilon_{\alpha\lambda\mu} \sum_{m,j} e^{i\vec{k}\vec{r}_m} J_{mj} S_m^\lambda S_j^\mu \quad (A3)$$

$$\begin{aligned}\partial_t^{EA} M^\alpha(\vec{k} = \vec{0}) &= \epsilon_{\alpha\lambda\mu} \sum_{m,j} J_{mj} S_m^\lambda S_j^\mu \\ &= 0, \text{ da die Summe symmetrisch} \\ &\quad \text{bzgl. } \lambda \text{ und } \mu \text{ ist;} \end{aligned}\quad (A4)$$

$$\partial_t^{DM} M^\alpha(\vec{k}) = - \sum_{m,j} e^{i\vec{k}\vec{r}_m} \left(D_{mj}^\alpha S_m^\lambda S_j^\lambda - D_{mj}^\lambda S_m^\lambda S_j^\alpha \right) \quad (A5)$$

$$\begin{aligned}\partial_t^{DM} M^\alpha(\vec{k} = \vec{0}) &= - \sum_{m,j} \left(D_{mj}^\alpha S_m^\lambda S_j^\lambda - D_{mj}^\lambda S_m^\lambda S_j^\alpha \right) \\ &= \sum_{m,j} D_{mj}^\lambda S_m^\lambda S_j^\alpha ,\end{aligned}\quad (A6)$$

da $\sum_\lambda S_m^\lambda S_j^\lambda$ symmetrisch in m und j ist und $D_{mj}^\lambda = -D_{jm}^\lambda$ gilt;

$$\begin{aligned}
\partial_t^{EA} \theta^\alpha(\vec{k}) &= \frac{1}{2a} \epsilon_{\alpha\mu\nu} \sum_m e^{i\vec{k}\vec{\tau}_m} \{S_m^\mu, \mathcal{H}_{DM}\} \langle S_m^\nu \rangle \\
&= \frac{1}{2q} \epsilon_{\alpha\mu\nu} \epsilon_{\mu\lambda\rho} \sum_{m,j} e^{i\vec{k}\vec{\tau}_m} J_{mj} S_m^\lambda S_j^\rho \langle S_m^\nu \rangle \\
&= -\frac{1}{2q} \sum_{m,j} e^{i\vec{k}\vec{\tau}_m} J_{mj} \left(S_m^\alpha S_j^\nu \langle S_m^\nu \rangle - S_m^\nu S_j^\alpha \langle S_m^\nu \rangle \right) \quad (A7)
\end{aligned}$$

$$\partial_t^{EA} \theta^\alpha(\vec{k} = \vec{0}) = \frac{1}{2q} \sum_{m,j} J_{mj} \left(S_j^\alpha R_m^{\nu\nu} - S_j^\nu R_m^{\alpha\nu} \right) \quad (A8)$$

$$\begin{aligned}
\partial_t^{DM} \theta^\alpha(\vec{k}) &= \frac{1}{2q} \epsilon_{\alpha\mu\nu} \sum_m e^{i\vec{k}\vec{\tau}_m} \{S_m^\mu, \mathcal{H}_{DM}\} \langle S_m^\nu \rangle \\
&= -\frac{1}{2q} \epsilon_{\alpha\mu\nu} \sum_{m,j} e^{i\vec{k}\vec{\tau}_m} \left(D_{mj}^\mu S_m^\lambda S_j^\lambda - D_{mj}^\lambda S_m^\lambda S_j^\mu \right) \langle S_m^\nu \rangle \quad (A9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t^{DM} \theta^\alpha(\vec{k} = \vec{0}) &= \frac{1}{2q} \epsilon_{\alpha\mu\nu} \sum_{m,j} \left(D_{mj}^\lambda S_j^\mu R_m^{\lambda\nu} - D_{mj}^\mu S_j^\lambda R_m^{\lambda\nu} \right) \\
&= \frac{1}{2q} \epsilon_{\alpha\mu\nu} \sum_{m,j} \left(D_{mj}^\lambda S_j^\mu - D_{mj}^\mu S_j^\lambda \right) R_m^{\lambda\nu} . \quad (A10)
\end{aligned}$$

IV. Anhang

b) Berechnung der Matrixelemente von σ

Es werden im folgenden die Größen $\sigma_{M^x M^x}$, $\sigma_{mx\theta y}$ und $\sigma_{\theta y\theta y}$ bestimmt. Die verbleibenden Matrixelemente erhält man durch entsprechende Wahl der äußeren Indizes.

$$\begin{aligned}
 T \cdot \sigma_{M^x M^x}(t) &= (\partial_t^{DM} M^x(t) | \partial_t^{DM} M^x) \\
 &= \sum_{\substack{m,j \\ k,\ell}} (D_{mj}^{My} S_m^\mu(t) S_j^x(t) | D_{kl}^\lambda S_k^\lambda S_\ell^x) \\
 &\cong \sum_{m,j} D^2 K_{mj} \cdot (S_m^\mu(t) S_j^x(t) | S_m^\mu S_j^x - S_j^\mu S_m^x) \\
 &= D^2 \sum_{\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}} K(\vec{k}) \\
 &\quad (M^\mu(\vec{q}, t) M^x(\vec{p}, t) | M^\mu(\vec{k} - \vec{q}) M^x(-\vec{k} - \vec{p}) - M^x(\vec{k} - \vec{p}) M^\mu(-\vec{k} - \vec{p})) \\
 &\cong D^2 \cdot a (C_{MM}^{\mu\mu}(\vec{0}, t) C_{MM}^{xx}(\vec{0}, t) - C_{MM}^{\mu x}(\vec{0}, t) C_{MM}^{x\mu}(\vec{0}, t)) \quad (A11)
 \end{aligned}$$

mit $a = \sum_{\vec{q}, \vec{p}} (1 - K(\vec{q} - \vec{p}))$;

$$\begin{aligned}
 T \cdot \sigma_{M^x\theta y}(t) &= (\partial_t^{DM} M^x(t) | \partial_t^{DM} \theta y) \\
 &= \sum_{\substack{m,j \\ k,\ell}} \epsilon_{y\mu\nu} \frac{1}{2q} (D_{mj}^\lambda S_m^\lambda(t) S_j^x(t) | (D_{kl}^\gamma S_l^\mu - D_{kl}^\mu S_l^\gamma) R_k^{\gamma\nu}) \\
 &\cong \epsilon_{y\mu\nu} \frac{1}{2q} D^2 \cdot a (C_{MM}^{\lambda\mu}(\vec{0}, t) C_{MR}^{x,\lambda\nu}(\vec{0}, t) - C_{MR}^{\lambda,\lambda\mu}(\vec{0}, t) C_{MM}^{x\mu}) - \\
 &\quad - \epsilon_{y\lambda\nu} \frac{1}{2q} D^2 \cdot a \cdot (C_{MM}^{\lambda\gamma}(\vec{0}, t) C_{MR}^{x,\gamma\nu}(\vec{0}, t) - C_{MR}^{\lambda,\gamma\nu}(\vec{0}, t) C_{MM}^{x\gamma}(\vec{0}, t)) \\
 &= \epsilon_{y\mu\nu} \frac{1}{2q} D^2 \cdot a \left([C_{MM}^{\lambda\mu}(\vec{0}, t) - C_{MM}^{\mu\lambda}(\vec{0}, t)] C_{MR}^{x,\lambda\nu}(\vec{0}, t) - \right. \\
 &\quad \left. - C_{MR}^{\lambda,\lambda\nu}(\vec{0}, t) + C_{MM}^{x\mu}(\vec{0}, t) C_{MM}^{\mu,\lambda\nu}(\vec{0}, t) C_{MM}^{x\lambda}(\vec{0}, t) \right),
 \end{aligned}$$

mit Vernachlässigung des symmetrischen Anteils von $R^{\lambda\nu}$ folgt dann

$$\begin{aligned}
T \cdot \sigma_{M^x \theta y}(t) &\cong \epsilon_{y\mu\nu} \frac{D^2}{2} a \epsilon_{\lambda\nu\sigma} \\
&\left(\left[C_{MM}^{\lambda\mu}(\vec{0}, t) - C_{MM}^{\mu\lambda}(\vec{0}, t) \right] C_{M\theta}^{x\sigma}(\vec{0}, t) - \right. \\
&\quad \left. - C_{M\theta}^{\lambda\sigma}(\vec{0}, t) C_{MM}^{x\mu}(\vec{0}, t) + C_{M\theta}^{\mu\sigma}(\vec{0}, t) C_{MM}^{x\lambda}(\vec{0}, t) \right) \\
&= -\frac{1}{2} D^2 a \left(\left[C_{MM}^{y\sigma}(\vec{0}, t) - C_{MM}^{\sigma y}(\vec{0}, t) \right] C_{M\theta}^{x\sigma}(\vec{0}, t) + \right. \\
&\quad \left. + C_{M\theta}^{\sigma\sigma}(\vec{0}, t) C_{MM}^{xy}(\vec{0}, t) - C_{M\theta}^{y\sigma}(\vec{0}, t) C_{MM}^{x\sigma}(\vec{0}, t) \right), \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T \cdot \sigma_{\theta y \theta y}(t) &\cong (\partial_t^{EA} \theta^y(t) | \partial_t^{EA} \theta^y), \text{ mit der Voraussetzung } J^2 \gg D^2, \\
&= \frac{1}{4q} \sum_{\substack{m,j \\ k,l}} \left(J_{mj} \left[S_j^y(t) R_m^{\lambda\lambda}(t) - S_j^\lambda(t) R_m^{\lambda\lambda}(t) \right] | \right. \\
&\quad \left. J_{kl} \left[S_l^y R_k^{\mu\mu} - S_l^\mu R_k^{y\mu} \right] \right), \\
&\cong \frac{1}{4q^2} \sum_{m,j} \left(J_{mj} S_j^\lambda(t) R_m^{y\lambda} | J_{kl} S_l^\mu R_R^{y\mu} \right), \text{ vgl. 0,} \\
&\cong \frac{1}{4q^2} J^2 \cdot a \cdot \left(C_{MM}^{\lambda\mu}(\vec{0}, t) C_{RR}^{y\lambda, y\mu}(\vec{0}, t) - C_{MR}^{\lambda, y\mu}(t) C_{RM}^{y\lambda, \mu}(\vec{0}, t) \right) \\
&\cong \frac{1}{4} J^2 a^2 \epsilon_{y\lambda\sigma} \left(C_{MM}^{\lambda\mu}(\vec{0}, t) C_{\theta\theta}^{\sigma\rho}(\vec{0}, t) - C_{M\theta}^{\lambda\rho}(\vec{0}, t) C_{\theta M}^{\sigma\mu}(\vec{0}, t) \right). \quad (13)
\end{aligned}$$

Kapitel V

Dämpfung der transversalen ESR-Resonanzen in der Spinglasphase

Mithilfe der Modenkopplungstheorie der ESR-Dämpfung und eines Ansatzes für die Korrelationsfunktionen wird ein geschlossenes Gleichungssystem für die transversalen Dämpfungen $\Gamma_{\pm}(z = 0, H, T)$ formuliert.

Analytische Ergebnisse werden für $\Gamma_{\pm}$ in den Grenzfällen $T \rightarrow 0$ und $T \rightarrow T_g$ angegeben. Für $0 < T < T_g$ wird $\Gamma_{\pm}(z)$ numerisch berechnet.

a) Formulierung der selbstkonsistenten Gleichungen für die Dämpfung $\Gamma_{\pm}(z=0, H, T)$	1
b) Die Dämpfung $\Gamma_{\pm}(z, H, T)$ im Grenzfall $T \rightarrow 0$ und $T \rightarrow T_g$	6
c) Dämpfung und Frequenzverschiebung $\Gamma_{+}(z)$ für $0 < T < T_g$	9

Anhang V

Amplituden der zeitabhängigen Korrelations- funktionen und die Matrixelemente von $\sigma(z)$	16
--	----

V. Kapitel

a) Formulierung der selbstkonsistenten Gleichungen für die Dämpfung $\Gamma_{\pm}$ ($z = 0, H, T$)

Es wird der Fall behandelt, daß $\delta\omega_{\pm}$ nur bei $\omega > 0$ von Null verschieden ist:

$$\delta\omega_{\pm}(\omega = 0, T, H) = 0.$$

Die Dispersionsrelation lautet dann

$$\begin{aligned} z &= \omega_{\pm} - i\Gamma_{\pm} \quad \text{bzw.} \\ &= -\omega_{\pm} - i\Gamma_{\pm}, \end{aligned} \quad (1)$$

$\omega_{\pm}$ sind die ungedämpften HSH-Resonanzen (Kap. III. Gln. (29,30)).

Die Mori-Theorie der Korrelationsfunktionen liefert die Dämpfung $\Gamma_{\pm}$ als Funktion der Matrixelemente der Memorymatrix Σ bzw. $\sigma = \Sigma \cdot \chi$ ($h = H \cdot H_R + H_i^2$, Gln. (63/64)):

$$\begin{aligned} \Gamma_+ &= \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \left(\omega_+ \chi^{-1} + \frac{h}{4q} \chi(H + H_R) \right) \cdot \frac{r}{T} + \\ &\quad + \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} 2 \cdot (H_R \cdot \omega_+ - h) \frac{s}{T} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_- &= \frac{-1}{\omega_+ - \omega_-} \left(\omega_- \cdot \chi^{-1} + \frac{h}{4q} \chi(H + H_R) \right) \frac{r}{T} - \\ &\quad - \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} 2 (\omega_- \cdot H_R - h) \cdot \frac{s}{T}, \end{aligned} \quad (3)$$

mit

$$\sigma^{\perp}(z = 0) = \begin{pmatrix} r & s & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & r & -s \\ 0 & -s & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{vgl. Kap. IV.d.}$$

Andererseits ermöglicht die Modenkopplungstheorie der Dämpfung die Matrixelemente von $\sigma^{\perp}$ durch die Korrelationsfunktionen auszudrücken (vgl. Kap. IV.b Gl. (21)–(23)):

$$\begin{aligned}
r(t) &= a \cdot D^2 \left(C_{M^x M^x}^2(t) + C_{M^x M^y}^2(t) \right) \\
s(t) &= \frac{1}{2} a \cdot D^2 \left(C_{M^x M^y}(t) \cdot C_{M^x \theta^x}(t) + C_{M^y \theta^x}(t) \cdot C_{M^x M^x}(t) \right) .
\end{aligned} \tag{4}$$

In die Gl. (2) und (3) gehen die Laplace Transformierten von Gl. (4) an der Stelle $z = 0$ ein.

Die Korrelationsfunktionen der ungedämpften Anregungen haben die Form

$$C(t) = A_+ \cos(\omega_+ t) + A_- \cos(\omega_- t) ,$$

d.h., sie werden durch $\omega_{\pm}$ und im allgemeinen Fall auch durch $\delta\omega_{\pm}$ und $\Gamma_{\pm}$ parametrisiert.

Um die Gln. (2) – (4) zu schließen, wird der folgende Ansatz gemacht:

$$\begin{aligned}
C(t) &= A_+ \cos(\omega_+ t) e^{-\Gamma_+ t} + \\
&\quad + A_- \cos(\omega_- t) e^{-\Gamma_- t}
\end{aligned} \tag{5}$$

mit ($z = \omega + i0^+$)

$$\delta\omega_{\pm}(z = 0, T, H) = 0$$

$$\Gamma_{\pm} = \Gamma_{\pm}(z = 0, T, H) .$$

Die Bestimmungsgleichungen für $\Gamma_{\pm}(z = 0)$ lauten (Gl. (2/3) und (A15/16), $h = H H_R + H_i^2$)

$$\begin{pmatrix} \Gamma_+ \\ \Gamma_- \end{pmatrix} = \frac{T^{-1}}{\omega_+ - \omega_-} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(z = 0) \\ s(z = 0) \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\alpha = \omega_+ \chi^{-1} + \frac{h}{4q} \chi(H + H_R)$$

$$\beta = 2 \cdot (\omega_+ H_R - h)$$

$$\gamma = - \left(\omega_- \chi^{-1} + \frac{h}{4q} \chi(H + H_R) \right)$$

$$\delta = -2(\omega_- \cdot H_R - h)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_+ &= \frac{T^{-1}}{\omega_+ - \omega_-} (\alpha \cdot r(z=0) + \beta \cdot s(z=0)) \\
&= \frac{a \cdot D^2 \cdot T^{-1}}{\omega_+ - \omega_-} \cdot \left(\left(\alpha \cdot A_+^2 + \frac{1}{2} \beta \cdot D_+ A_+ \right) \cdot I_1(\omega_+, \Gamma_+) + \right. \\
&\quad + \left(\alpha \cdot A_-^2 + \frac{1}{2} \beta \cdot D_- A_- \right) \cdot I_1(\omega_-, \Gamma_-) + \\
&\quad + \left(2\alpha \cdot A_+ A_- + \frac{1}{2} \beta (D_+ A_- + D_- A_+) \right) \cdot I_1(\omega_+, \omega_-, \Gamma_+, \Gamma_-) + \\
&\quad + \left(\alpha \cdot B_+^2 + \frac{1}{2} \beta \cdot B_+ C_+ \right) \cdot I_2(\omega_+, \Gamma_+) + \\
&\quad + \left(\alpha \cdot B_-^2 + \frac{1}{2} \beta \cdot B_- C_- \right) \cdot I_2(\omega_-, \Gamma_-) + \\
&\quad \left. + \left(2\alpha \cdot B_+ B_- + \frac{1}{2} \beta (B_+ C_- + B_- C_+) \right) \cdot I_2(\omega_+, \omega_-, \Gamma_+, \Gamma_-) \right), \tag{7}
\end{aligned}$$

$$\Gamma_- = \frac{T^{-1}}{\omega_+ - \omega_-} (\gamma \cdot r(z=0) + \delta \cdot s(z=0)) \tag{8}$$

(in den Termen von Gl. (7) ist zu ersetzen $\alpha \rightarrow \gamma$ und $\beta \rightarrow \delta$); für $z=0$ ergeben sich I_1 und I_2 zu (vgl. (A12/13))

$$I_1(\omega_{\pm}, \Gamma_{\pm}) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\Gamma_{\pm}}{\Gamma_{\pm}^2 + \omega_{\pm}^2} + \frac{1}{\Gamma_{\pm}} \right) \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
I_1(\omega_+, \omega_-, \Gamma_+, \Gamma_-) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Gamma_+ + \Gamma_-}{(\Gamma_+ + \Gamma_-)^2 + (\omega_+ - \omega_-)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{(\Gamma_+ + \Gamma_-)^2 + (\omega_+ - \omega_-)^2} \right) \tag{10}
\end{aligned}$$

$$I_2(\omega_{\pm}, \Gamma_{\pm}) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{\Gamma_{\pm}} - \frac{\Gamma_{\pm}}{\Gamma_{\pm}^2 + \omega_{\pm}^2} \right) \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
I_2(\omega_+, \omega_-, \Gamma_+, \Gamma_-) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Gamma_+ + \Gamma_-}{(\Gamma_+ + \Gamma_-)^2 + (\omega_+ - \omega_-)^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Gamma_+ + \Gamma_-}{(\Gamma_+ + \Gamma_-)^2 + (\omega_+ + \omega_-)^2} \right). \tag{12}
\end{aligned}$$

Faßt man noch die einzelnen Koeffizienten zusammen, so erhält man das Gleichungssystem für die Dämpfung $\Gamma_{\pm}(z=0, H, T)$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \Gamma_+ \\ \Gamma_- \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \frac{1}{\Gamma_+} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\Gamma_-} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \frac{\Gamma_+}{\Gamma_+^2 + \omega_+^2} + \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} \frac{\Gamma_-}{\Gamma_-^2 + \omega_-^2} + \\
&\quad + \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix} \frac{\Gamma_+ + \Gamma_-}{(\Gamma_+ + \Gamma_-)^2 + (\omega_+ + \omega_-)^2} + \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \end{pmatrix} \frac{\Gamma_+ + \Gamma_-}{(\Gamma_+ + \Gamma_-)^2 + (\omega_+ - \omega_-)^2} \tag{13}
\end{aligned}$$

mit (s.a. Gl. (6))

$$\lambda = \frac{a \cdot D^2 \cdot T^{-1}}{\omega_+ - \omega_-}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{4} \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} (A_+^2 + B_+^2) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} (D_+ A_+ + B_+ C_+) \right] \quad (14.a)$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{4} \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} (A_-^2 + B_-^2) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} (D_- A_- + B_- C_-) \right] \quad (14.b)$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{4} \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} (A_+^2 - B_+^2) - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} (D_+ A_+ - B_+ C_+) \right] \quad (14.c)$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{4} \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} (A_-^2 - B_-^2) - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} (D_- A_- - B_- C_-) \right] \quad (14.d)$$

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{2} \left[2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} (A_+ A_- - B_+ B_-) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} (D_+ A_- + D_- A_+ - B_+ C_- - B_- C_+) \right] \quad (14.e)$$

$$\begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{2} \left[2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} (A_+ A_- + B_+ B_-) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} (D_+ A_- + D_- A_+ + B_+ C_- + B_- C_+) \right] \quad (14.f)$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ wie in Gl. (6) f.

Die Parameter $K(T)$, χ und $M_R(T)$, die in die obigen Gleichungen eingehen werden aus den Experimenten von Mahdjour (1987) und Mahdjour et al. (1986) entnommen. Für die folgende numerische Auswertung im FC-Fall werden folgende Werte angenommen:

$$\text{Anisotropie : } K(T) = K_o(1 - T/T_g)^\mu$$

$$K_o = 1220 \text{ G}, \quad \mu = 1.2$$

remanente

$$\text{Magnetisierung : } M_R(T) = \sigma \exp(-6.5T/T_g), \quad T/T_g < 0.73$$

$$\sigma = 1.72$$

$$M_R(T) \sim (1 - T/T_g)^\beta, \quad 0.73 < T/T_g < 1$$

$$\beta = 1.1$$

$$\text{isotrope Suszeptibilität : } \chi = 3 \times 10^{-4} \text{ G}^{-1}$$

für AgMn, $c_{Mn} = 9.6\%$, mit $T_g = 31.2$ K. Der EA-Ordnungsparameter, der in den Korrekturen höherer Ordnung in $H_R^2\chi$ und $H_i\chi$ vorkommt, wird als $q_{EA}(T) = 1 - T/T_g$ angenommen. Diese Form ist eine einfache Interpolation zwischen $q_{EA}(T=0) = 1$ und der Formel der Molekularfeld Theorie in der Nähe von T_g .

Nachstehend abgebildet ist die Dämpfung $\Gamma_+(z=0)$ für den Resonanzfall $H = H_{res}(\omega, T)$ und $\frac{\omega}{2\pi} = 4.04, 0.56$ GHz im Bereich $0 < T < T_g$. Die Wahl des mikroskopischen Parameters $\lambda = a D^2/J$ ist durch experimentelle Vorgaben (Fert/Levy, 1980) eingeschränkt: typische Anisotropien pro Atom $E_a = D^2/J$ liegen bei $10^{-18} - 10^{-20} \text{ erg} \hat{=} 50 - 0.5 \text{ G}$. λ wird zu 0.085 G gewählt, d.h.: $E_a \cong 10^{-20} \text{ erg}$, da $a < 0.27$. Die Wahl von λ richtet sich nach der Anpassung der theoretischen Frequenzverschiebung $\delta\omega_+(z, T, H)$ an die experimentellen Daten (s. dazu den Abschnitt c).

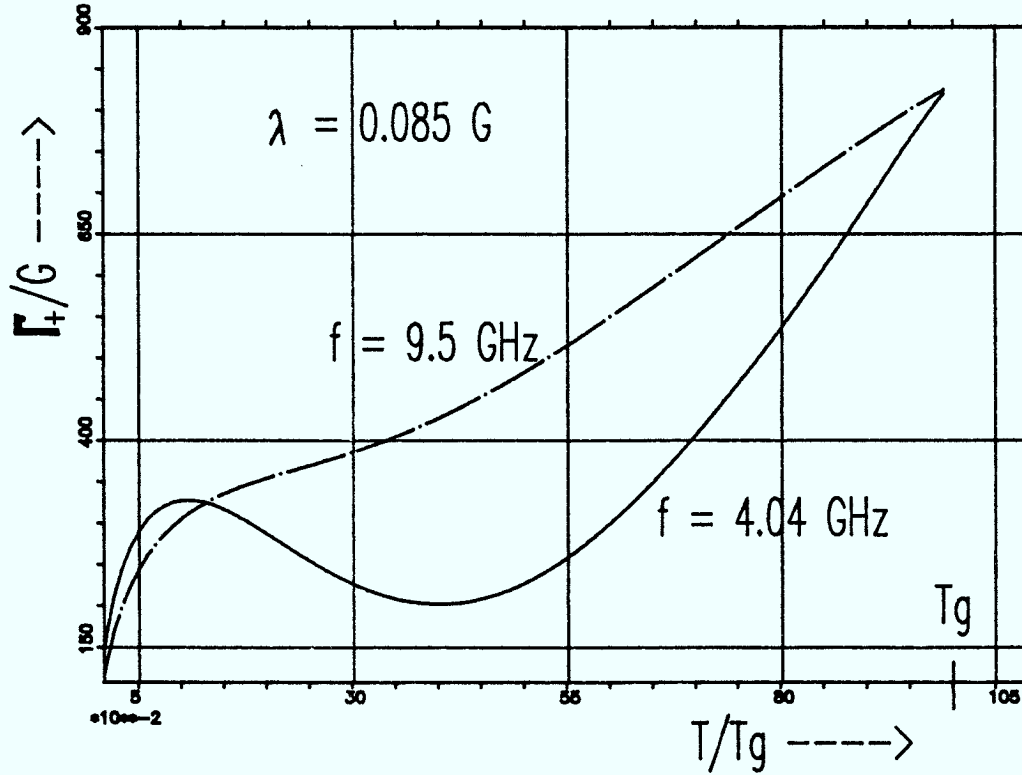


Abb. 1 $\Gamma_+(z=0)$ für $H = H_{res}(\omega, T)$; $\frac{\omega}{2\pi} = 4.04, 9.5$ GHz und $0 < T < T_g$

V. Kapitel

b) Die Dämpfung $\Gamma_{\pm}(z, H, T)$ im Grenzfall $T \rightarrow 0$ und $T \rightarrow T_g$

Für Temperaturen $T \rightarrow 0$ ergibt sich das Verhalten der Amplituden (s. Gln. (A8 - 11)) zu

$$A_{\pm}, B_{\pm}, C_{\pm}, D_{\pm} = O(T) \text{ für } T \rightarrow 0 ; \quad (15)$$

die Vorfaktoren $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gehen gegen einen konstanten Wert (s. Gl. (6)), so daß auf Grund von $\lambda = O(T^{-1})$ (s. Gl. (14)) für die Koeffizienten von Gl. (14) gilt

$$x_i, y_i = O(T) \text{ für } T \rightarrow 0 . \quad (16)$$

Daher folgt aus der Gleichung (13), daß die Dämpfung sich verhält wie

$$\Gamma_{\pm}(z=0) = O(T^{1/2}) \quad \text{für } T \rightarrow 0 . \quad (17)$$

Da die Terme mit den Koeffizienten x_i und y_i mit $i = 3 - 6$ von höherer Ordnung in T sind, hat man für $T \rightarrow 0$ das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \Gamma_+ \\ \Gamma_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Gamma_+^{-1} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Gamma_-^{-1} , \quad T \rightarrow 0 . \quad (18)$$

Substituiert man

$$\xi = \Gamma_- / \Gamma_+ , \quad \eta = \Gamma_+ \cdot \Gamma_- , \quad (19)$$

so folgt

$$\begin{aligned} \eta &= x_1 \xi + x_2 \\ \eta \xi &= y_1 \xi + y_2 \end{aligned} \quad (20)$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_-}{\Gamma_+} &= \frac{y_1 - x_2}{2x_1} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{y_1 - x_2}{x_1} \right)^2 + 4 \frac{y_2}{x_1} \right)^{1/2} \\ \Gamma_- \cdot \Gamma_+ &= \frac{1}{2} (y_1 + x_2) + \frac{1}{2} \left((y_1 - x_2)^2 + 4y_2x_1 \right)^{1/2} . \end{aligned} \quad (21)$$

Die Funktionen $\Gamma_+(z=0)$ und $\Gamma_-(z=0)$ sind in den folgenden Abbildungen für $\frac{D^2}{f} = 1$ doppelt logarithmisch gegen die Temperatur im Bereich $0 < T/T_g < 0.2$ aufgetragen.

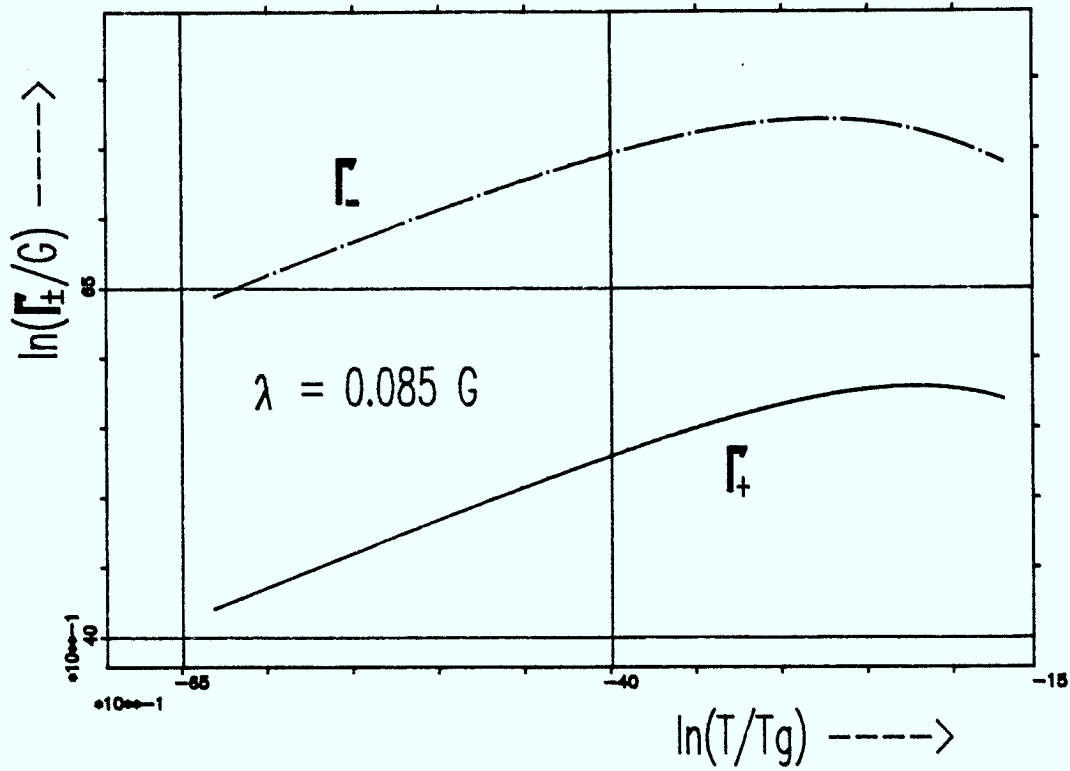


Abb. 2 $\ln \Gamma_{\pm}(z=0) - \ln(T/T_g)$ für $0 < T/T_g < 0.2$
und $H = H_{res}(T, f = 4.04 \text{ GHz})$

Aus Abb. 2 ersieht man, daß der Bereich des $T^{1/2}$ -Verhaltens bei $-\ln(T/T_g) = 3.0 - 3.5$ ($\hat{=} 1.6 - 1K$ bei $T_g = 31.2K$) beginnt.

Betrachtet man den anderen Grenzfall $T \rightarrow T_g$ so folgt unter der Annahme

$$\begin{aligned} \frac{H_R}{qEA} &\xrightarrow{T \rightarrow T_g} 0 \\ \frac{H_i^2}{qEA} &\xrightarrow{T \rightarrow T_g} 0, \end{aligned} \quad (22)$$

d.h. $\beta_{EA} < \beta, \mu$ (für $\beta = \beta_{EA} < \mu$ ergeben sich kleine Korrekturen in $H_R \cdot \chi$ und $H_i \cdot \chi$, vgl. a. Kap. III.b) für die Koeffizienten der Gln. (6/7):

$$\begin{aligned} T \rightarrow T_g : \quad \alpha &\rightarrow H \chi^{-1} \\ \beta, \gamma, \delta &\rightarrow 0 \\ A_+, B_+ &\rightarrow T_g \cdot \chi \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} C_+, D_+ &\rightarrow 0 \\ A_-, \dots, D_- &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Daher verschwinden alle Koeffizienten in Gl. (13) bis auf

$$x_1 \rightarrow \frac{1}{2} \lambda \propto (T_g \chi)^2, \quad (25)$$

also gilt ($z = 0$)

$$\begin{aligned} \Gamma_- &\xrightarrow{T \rightarrow T_g} 0 \\ \Gamma_+ &\xrightarrow{T \rightarrow T_g} \sqrt{\frac{a D^2}{2 J}} \chi \cdot T_g. \end{aligned} \quad (26)$$

Im Fall von Null verschiedener Frequenz ($\omega > 0$) ergeben sich die folgenden Grenzfälle für die Dämpfung und die Frequenzverschiebung ($z = \omega + i0^+$):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Gamma_{\pm}(z) &\cong x_1 \frac{2\Gamma_{\pm}(z=0)}{\omega^2 + 4\Gamma_{\pm}^2(z=0)}, \quad \text{für } T \rightarrow 0, T_g \\ \operatorname{Im} \Gamma_{\pm}(z) &\cong x_1 \frac{\omega}{\omega^2 + 4\Gamma_{\pm}^2(z=0)} \end{aligned} \quad (27)$$

impliziert mit Gl. (17) und (26)

$$\begin{aligned} \underline{T \rightarrow 0}: \quad \operatorname{Re} \Gamma_{\pm}(z) &\sim \frac{T^{3/2}}{\omega^2} \\ \operatorname{Im} \Gamma_{\pm}(z) &\sim \frac{T}{\omega}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\underline{T \rightarrow T_g}: \quad \operatorname{Re}, \operatorname{Im} \Gamma_{-}(z) \rightarrow 0 \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Gamma_{+}(z) &= \frac{\left(a \frac{D^2}{J} \chi\right)^{3/2} T_g^3 / \sqrt{2}}{\omega^2 + 2a \frac{D^2}{J} \chi T_g^2} \\ \operatorname{Im} \Gamma_{+}(z) &= \frac{a \frac{D^2}{J} \chi T_g^2 \omega / 2}{\omega^2 + 2a \frac{D^2}{J} \chi T_g^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Die Dämpfung der ω_+ -Resonanz ist demnach bei T_g von Null verschieden und um so größer, je kleiner die Frequenz ω ist. Dies steht im Einklang mit den Experimenten, s. Kap. 1 Abb. 1.

V. Kapitel

c) Dämpfung und Frequenzverschiebung $\Gamma_{\pm}(z)$, für $0 < T < T_g$

Der Ansatz für die dynamischen Korrelationsfunktionen der gedämpften HSH-Moden, Gl. (5), parametrisiert diese durch die Dämpfung $\Gamma_{\pm}$ bei $z = 0$. Andererseits liefert die Modenkopplungstheorie einen Ausdruck für die Dämpfung $\Gamma_{\pm}(z)$, der auch für $z > 0$ gültig ist (Gln. (2/3)) und einer 1. Näherung von $\Gamma_{\pm}(z > 0)$ mit Hilfe des Lorentz Ansatzes für $C(z)$ entspricht.

Die Gleichungen für $Re \Gamma_{\pm}(z) (\hat{=} \text{Dämpfung})$ und $Im \Gamma_{\pm}(z) (\hat{=} \text{Frequenzverschiebung})$ ergeben sich aus Gl. (13) mit den Ersetzungen ($z = \omega + i0^+$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_{\pm}} &\longrightarrow Re : 2 \frac{2\Gamma_{\pm}}{\omega^2 + 4\Gamma_{\pm}^2} \\ &Im : 2 \frac{\omega}{\omega^2 + 4\Gamma_{\pm}^2} \\ \frac{\Gamma_{\pm}}{\Gamma_{\pm}^2 + \omega_{\pm}^2} &\longrightarrow Re : 2 \times 2\Gamma_{\pm} \frac{\omega^2 + 4\Gamma_{\pm}^2 + 4\omega_{\pm}^2}{(\omega^2 + 4\Gamma_{\pm}^2)^2 + 16\omega_{\pm}^4 + 8\omega_{\pm}^2 (4\Gamma_{\pm}^2 - \omega^2)} \\ &Im : 2 \times \omega \frac{\omega^2 + 4\Gamma_{\pm}^2 - 4\omega_{\pm}^2}{(\omega^2 + 4\Gamma_{\pm}^2)^2 + 16\omega_{\pm}^4 + 8\omega_{\pm}^2 (4\Gamma_{\pm}^2 - \omega^2)} \\ \frac{\Gamma_+ + \Gamma_-}{(\Gamma_+ + \Gamma_-)^2 (\omega_+ \pm \omega_-)^2} &\longrightarrow Re : (\Gamma_+ + \Gamma_-) \times [\omega^2 + (\Gamma_+ + \Gamma_-)^2 + (\omega_+ \pm \omega_-)^2] / \\ &\quad \left\{ [\omega^2 + (\Gamma_+ + \Gamma_-)^2]^2 + (\omega_+ \pm \omega_-)^4 + \right. \\ &\quad \left. 2(\omega_+ \pm \omega_-)^2 \times [(\Gamma_+ + \Gamma_-)^2 - \omega^2] \right\} \\ &Im : \omega \times [\omega^2 + (\Gamma_+ + \Gamma_-)^2 - (\omega_+ - \omega_-)^2] / \\ &\quad \left\{ [\omega^2 + (\Gamma_+ + \Gamma_-)^2]^2 + (\omega_+ \pm \omega_-)^4 + \right. \\ &\quad \left. 2(\omega_+ \pm \omega_-)^2 \times [(\Gamma_+ + \Gamma_-)^2 - \omega^2] \right\} ; \end{aligned}$$

die Koeffizienten x_1 und y_1 , $i = 1, \dots, 6$, bleiben dabei ungeändert.

Nachstehend sind die Frequenzverschiebung $\delta\omega_+(\omega, T, H)$ gegen die HSH-Resonanz (mit Verschiebung Null) im Resonanzfall $H = H_{res}(\omega, T)$ für $\frac{\omega}{2\pi} = 4.04, 9.5$ GHz sowie die theoretisch berechneten Dämpfungen (unter denselben Bedingungen) aufgezeichnet. Der mikroskopische Parameter $\lambda = a \frac{D^2}{J}$ wurde zu 0.085 G ($\hat{=} E_n \cong 6 \cdot 10^{-21} \text{erg}$) gewählt.

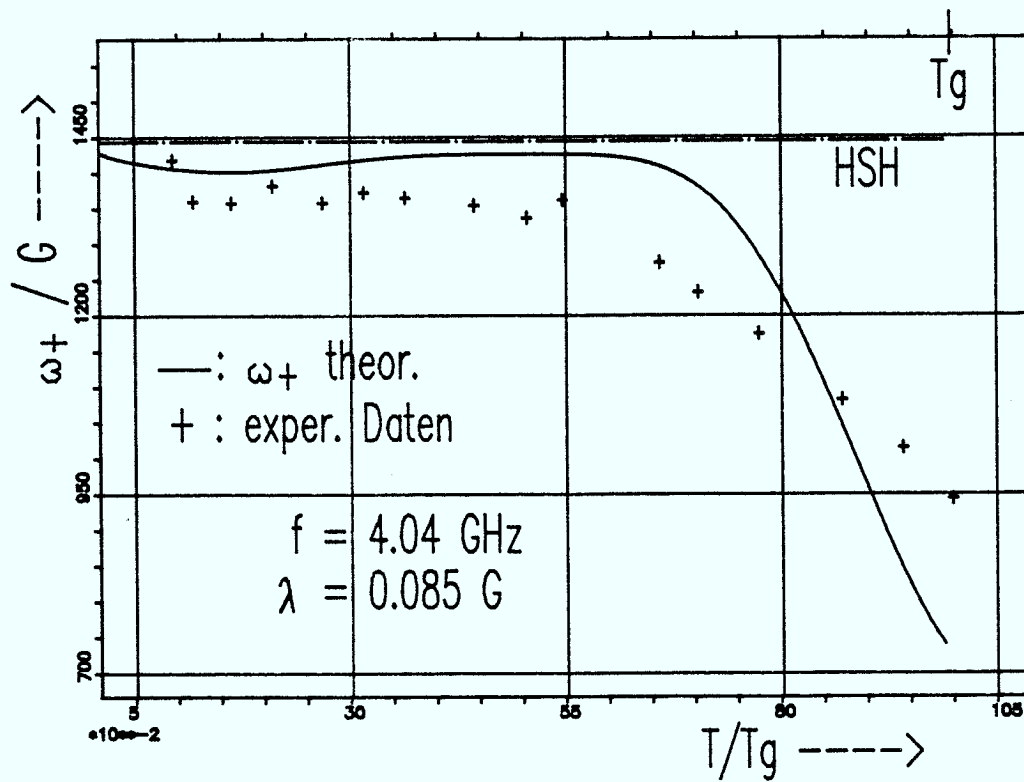


Abb. 3 $\delta\omega_+(f, T, H)$ im Resonanzfall $H = H_{res}(f, T)$ für $0 < T < T_g$,
 $f = 4.04 \text{ GHz}$

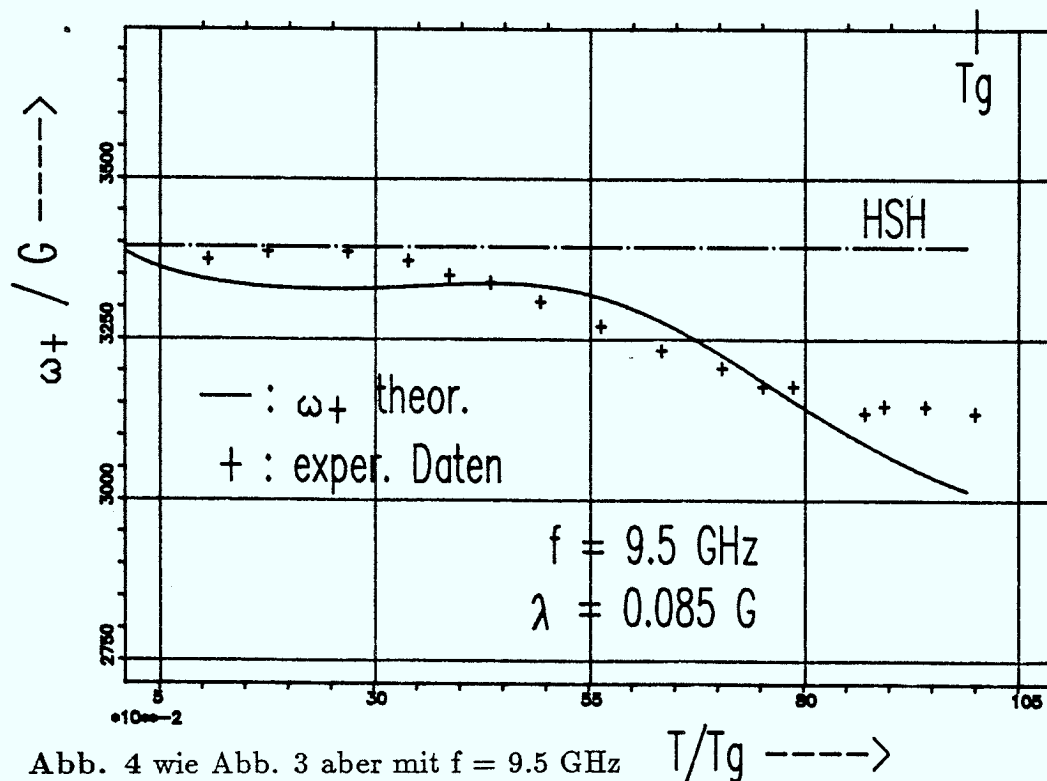


Abb. 4 wie Abb. 3 aber mit $f = 9.5 \text{ GHz}$

Hier zeigt sich eine befriedigende Übereinstimmung von theoretischen und experimentellen Daten.

Die folgende Abbildung zeigt die zugehörigen Dämpfungen $\Gamma_+(f)$; sie haben das qualitativ richtige Verhalten: die Dämpfung bei T_g ist um so größer je kleiner die Frequenz f ist, sie zeigt ein ausgeprägtes Maximum mit derselben Tendenz bzgl. f und sie verschwindet für $T \rightarrow 0$.

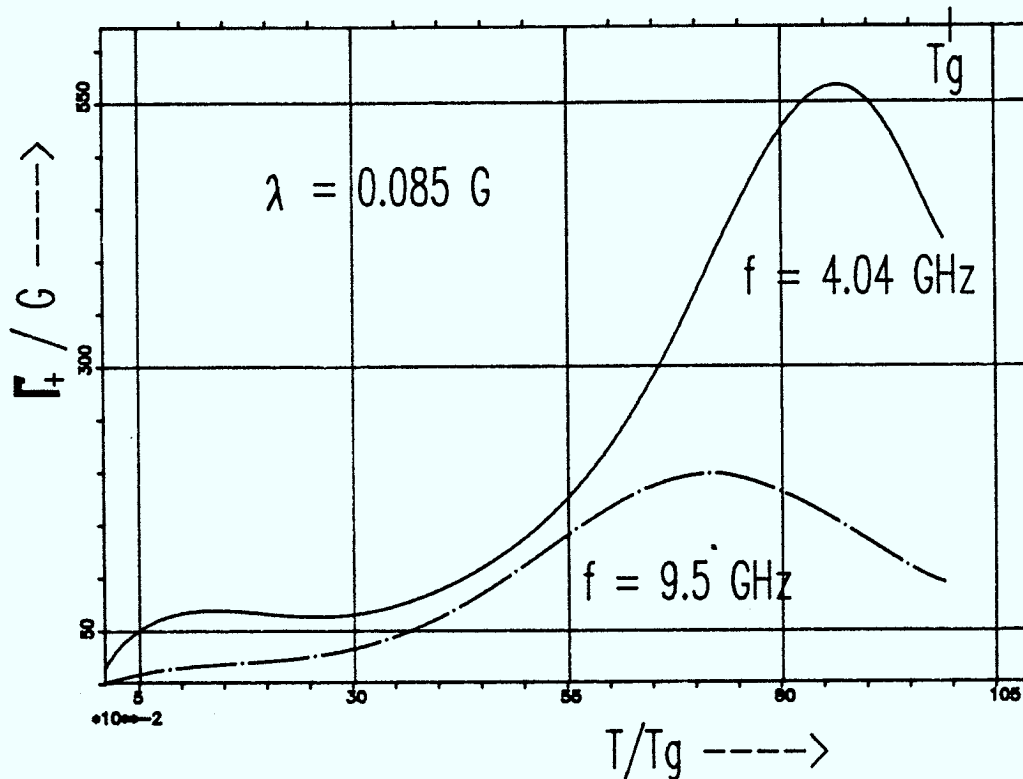


Abb. 5 theoretische Kurven für $\Gamma_+(f)$ ($f = 4.04, 9.5$ GHz) im Resonanzfall
 $H = H_{res}(f, T)$ für $0 < T < T_g$

Der Vergleich der Dämpfung Γ_+ mit den experimentellen Daten weist im Gegensatz zu $\delta\omega_+$ keine befriedigende quantitative Übereinstimmung auf, was aus den beiden nachfolgenden Abbildungen hervorgeht (zur Diskussion s. Kap. VI).

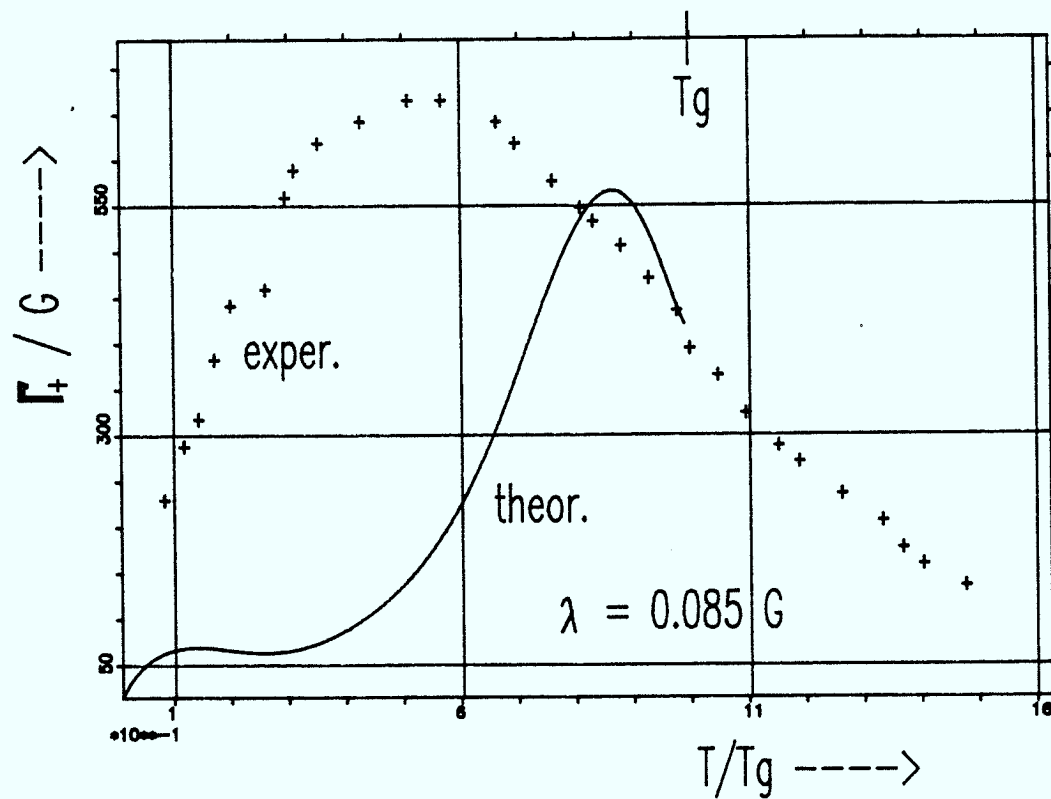


Abb. 6 Dämpfung Γ_+ , Vergleich Theorie-Experiment $f = 4.04$ GHz

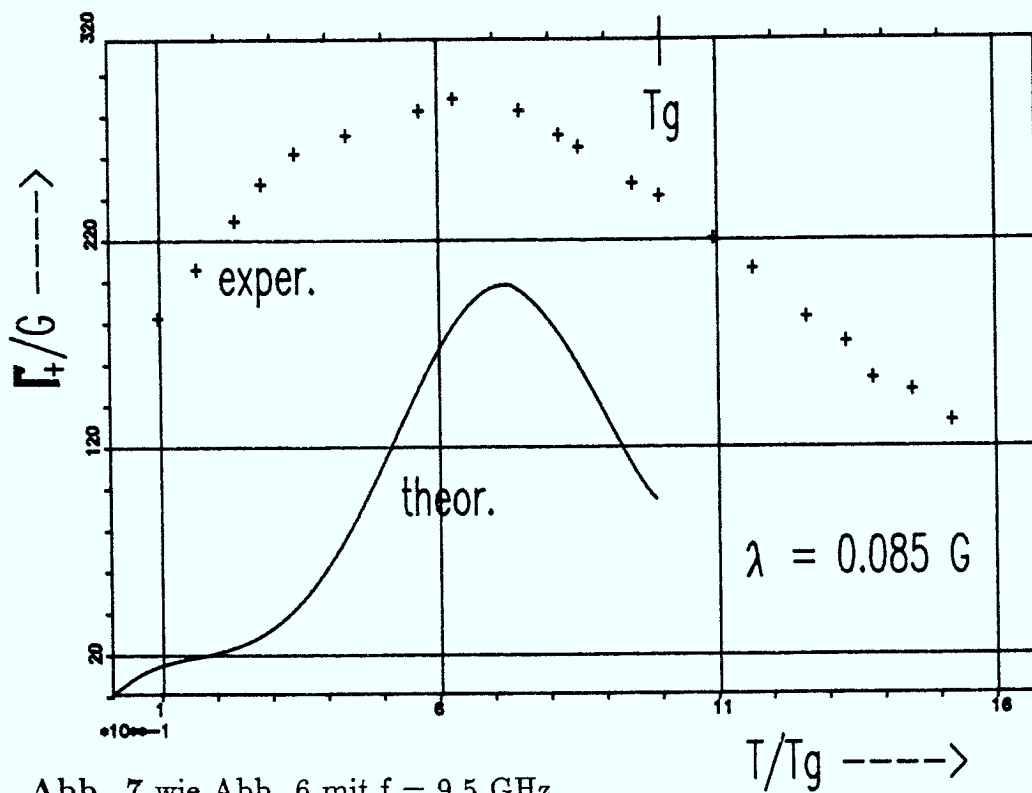


Abb. 7 wie Abb. 6 mit $f = 9.5$ GHz

Der definitive Nachweis der ω_- -Mode gelang erst 1985 (Gullikson/Dalichaouch/Schultz); für diese Resonanz liegen bisher keine ausführlichen Messungen der Dämpfung vor. Die folgende Abbildung zeigt das Verhältnis von Γ_- zu Γ_+ unter den oben genannten Bedingungen als Funktion der Temperatur.

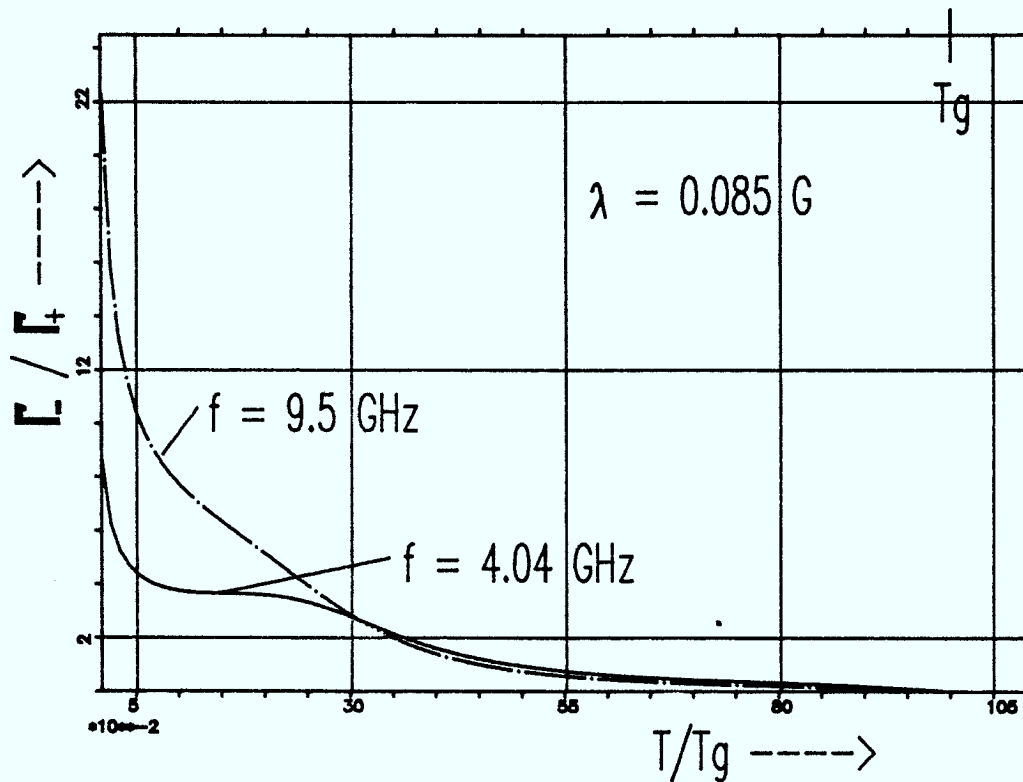


Abb. 8 Das Verhältnis Γ_-/Γ_+ für $f = 4.04, 9.5$ GHz im Bereich $0 < T < T_g$ unter Resonanzbedingungen

Die Dämpfung der ω_- -Resonanz ist nur in einem relativ kleinen Temperaturbereich ($T/T_g \cong 0.4 - 0.65 \hat{=} 13 - 20\text{ K}$ für $T_g = 31.2\text{ K}$) von derselben Größe wie die Dämpfung der ω_+ -Resonanz. Unterhalb dieses Bereiches ist Γ_- deutlich stärker gedämpft (Faktor 4 – 8 gegen Γ_+); dies um so mehr je größer die externe Frequenz f ist; oberhalb dieses Bereiches ist die ω_- -Resonanz schärfer gepeakt (Faktor < 0.5 gegen Γ_+).

V. Anhang

Amplituden der zeitabhängigen Korrelationsfunktionen und die Matrixelemente von $\sigma(z)$

In diesem Anhang werden die Amplituden der *zeitabhängigen* Korrelationsfunktionen berechnet sowie die Laplace Transformierten von r , s und v bestimmt.

Hierzu dient die folgende Tabelle:

$$\begin{array}{ll}
 f(t) & f(z) = \int_0^\infty dt e^{izt} f(t) \\
 e^{-\Gamma t} & \frac{1}{\Gamma - iz} \\
 \cos(at) e^{-\Gamma t} & \frac{\Gamma - iz}{(\Gamma - iz)^2 + a^2} \\
 \sin(at) e^{-\Gamma t} & \frac{a}{(\Gamma - iz)^2 + a^2} .
 \end{array} \tag{A1}$$

Verwendet man den Ansatz

$$\begin{aligned}
 C(t) = & A_+ \cos((\omega_+ + \delta\omega_+)t) e^{-\Gamma_+ t} + \\
 & + A_- \cos((\omega_- + \delta\omega_-)t) e^{-\Gamma_- t} ,
 \end{aligned} \tag{A2}$$

so ist

$$C(z) = A_+ \frac{iz - \Gamma_+}{(z + i\Gamma_+)^2 - (\omega_+ + \delta\omega_+)^2} + A_- \frac{iz - \Gamma_-}{(z + i\Gamma_-)^2 - (\omega_- + \delta\omega_-)^2} \tag{A3}$$

und für $\delta\omega_\pm = \Gamma_\pm = 0$ folgt

$$C(z) = \frac{iz}{(z - \omega_+^2)(z - \omega_-^2)} \left((A_+ + A_-)z^2 - (A_+\omega_-^2 + A_-\omega_+^2) \right) . \tag{A4}$$

Analog gilt für die ungeraden Funktionen

$$\begin{aligned}
 C(t) = & B_+ \sin((\omega_+ + \delta\omega_+)t) e^{-\Gamma_+ t} + \\
 & + B_- \sin((\omega_- + \delta\omega_-)t) e^{-\Gamma_- t} ,
 \end{aligned} \tag{A5}$$

daß

$$C(z) = B_+ \frac{-(\omega_+ + \delta\omega_+)}{(z + i\Gamma_+)^2 - (\omega_+ + \delta\omega_+)^2} + B_- \frac{-(\omega_- + \delta\omega_-)}{(z + i\Gamma_-)^2 - (\omega_- + \delta\omega_-)^2} , \tag{A6}$$

und im ungedämpften Fall

$$C(z) = \frac{1}{(z - \omega_+^2)(z - \omega_-^2)} \left(- (B_+ \omega_+ + B_- \omega_-) z^2 + \right. \\ \left. + \omega_+ \cdot \omega_- (B_+ \omega_- + B_- \omega_+) \right) . \quad (A7)$$

Durch Koeffizientenvergleich der ungedämpften Funktionen mit der Tabelle (50) Kap. II.c erhält man ($h = H H_R + H_i^2$)

$C_{M^x M^x}$:

$$C_{M^x M^x}(t) = A_+ \cos(\omega_+ t) e^{-\Gamma_+ t} + A_- \cos(\omega_- t) e^{-\Gamma_- t} \\ A_+ + A_- = T \cdot \chi \cdot \left(1 + \frac{H_R^2}{h} \right) \\ A_+ \omega_-^2 + A_- \omega_+^2 = T \cdot \chi \cdot h^{-1} \left(H_R^2 \cdot h + (H_R^2 + H_i^2)^2 \right) \\ A_+ = T \chi \left(1 + \frac{H_R^2}{h} \right) \frac{\omega_+^2}{\omega_+^2 - \omega_-^2} - \frac{T \chi \cdot h^{-1}}{\omega_+^2 - \omega_-^2} \left(h \cdot H_R^2 + (H_R^2 + H_i^2)^2 \right) \quad (A8) \\ A_- = -T \chi \left(1 + \frac{H_R^2}{h} \right) \frac{\omega_-^2}{\omega_+^2 - \omega_-^2} + \frac{T \chi \cdot h^{-1}}{\omega_+^2 - \omega_-^2} \left(h \cdot H_R^2 + (H_R^2 + H_i^2)^2 \right)$$

$C_{M^x M^y}$:

$$C_{M^x M^y}(t) = B_+ \sin(\omega_+ t) e^{-\Gamma_+ t} + B_- \sin(\omega_- t) e^{-\Gamma_- t} \\ B_+ \omega_+ + B_- \omega_- = T \chi (H + H_R) \\ \omega_+ \omega_- (B_+ \omega_- + B_- \omega_+) = T \chi H_R (h + H_R^2 + H_i^2) \\ \omega_+ \omega_- = -\det(\Omega_1) \\ = -h , \text{ s. Anh. II.c (A34) ff}$$

$$B_+ = \frac{T \chi}{\omega_+^2 - \omega_-^2} \left(\omega_+ (H + H_R) + \omega_- H_R \left(1 + \frac{H_i^2 + H_R^2}{h} \right) \right) \\ B_- = \frac{-T \chi}{\omega_+^2 - \omega_-^2} \left(\omega_- (H + H_R) + \omega_+ H_R \left(1 + \frac{H_i^2 + H_R^2}{h} \right) \right) \quad (A9)$$

$C_{M^x \theta^x}$:

$$C_{M^x \theta^x}(t) = C_+ \sin(\omega_+ t) e^{-\Gamma_+ t} + C_- \sin(\omega_- t) e^{-\Gamma_- t} \\ C_+ \omega_+ + C_- \omega_- = T \\ C_+ \omega_- + C_- \omega_+ = -h^{-1} \cdot (H_i^2 + H_R^2) \cdot T$$

$$\begin{aligned}
C_+ &= \frac{T}{\omega_+^2 - \omega_-^2} \times (\omega_+ + \omega_- \cdot h^{-1}(H_i^2 + H_R^2)) \\
C_- &= \frac{-T}{\omega_+^2 - \omega_-^2} \times (\omega_- + \omega_+ \cdot h^{-1}(H_i^2 + H_R^2))
\end{aligned} \tag{A10}$$

$C_{M^y\theta^z}$:

$$\begin{aligned}
C_{M^y\theta^z}(t) &= D_+ \cos(\omega_+ t) e^{-\Gamma_+ t} + D_- \cos(\omega_- t) e^{-\Gamma_- t} \\
\text{mit } C_{M^y\theta^z} &= -C_{M^x\theta^y} \text{ folgt} \\
D_+ + D_- &= T \cdot h^{-1} \cdot H_R \\
D_+ \omega_+^2 + D_- \omega_-^2 &= T \cdot h^{-1} (H_R(H_i^2 + H_R^2) - H_i^2(H - H_R)) \\
D_+ &= \frac{T \cdot h^{-1}}{\omega_+^2 - \omega_-^2} (\omega_+^2 H_R - H_R(H_i^2 + H_R^2) + H_i^2(H - H_R)) \\
D_- &= \frac{-T \cdot h^{-1}}{\omega_+^2 - \omega_-^2} (\omega_-^2 H_R - H_R(H_i^2 + H_R^2) + H_i^2(H - H_R)) .
\end{aligned} \tag{A11}$$

Im weiteren werden noch folgende Integrale benötigt:

$$\begin{aligned}
I_1(a_1, a_2, \Gamma_1, \Gamma_2) &= \int_0^\infty dt e^{izt} \cos(a_1 t) \cos(a_2 t) e^{-(\Gamma_1 + \Gamma_2)t} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{izt} \cdot e^{-(\Gamma_1 + \Gamma_2)t} \\
&\quad (\cos((a_1 + a_2)t) + \cos((a_1 - a_2)t)) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{iz - (\Gamma_1 + \Gamma_2)}{(z + i(\Gamma_1 + \Gamma_2))^2 - (a_1 + a_2)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{iz - (\Gamma_1 + \Gamma_2)}{(z + i(\Gamma_1 + \Gamma_2))^2 - (a_1 - a_2)^2} \right)
\end{aligned} \tag{A12}$$

$$\begin{aligned}
I_2(a_1, a_2, \Gamma_1, \Gamma_2) &= \int_0^\infty dt e^{izt} \sin(a_1 t) \sin(a_2 t) e^{-(\Gamma_1 + \Gamma_2)t} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{izt} \cdot e^{-(\Gamma_1 + \Gamma_2)t} \\
&\quad (\cos((a_1 - a_2)t) - \cos((a_1 + a_2)t)) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{iz - (\Gamma_1 + \Gamma_2)}{(z + i(\Gamma_1 + \Gamma_2))^2 - (a_1 - a_2)^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{iz - (\Gamma_1 + \Gamma_2)}{(z + i(\Gamma_1 + \Gamma_2))^2 - (a_1 + a_2)^2} \right)
\end{aligned} \tag{A13}$$

$$\begin{aligned}
I_3(a_1, a_2, \Gamma_1, \Gamma_2) &= \int_0^\infty dt e^{izt} \sin(a_1 t) \cos(a_2 t) e^{-(\Gamma_1 + \Gamma_2)t} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{izt} \cdot e^{-(\Gamma_1 + \Gamma_2)t} \\
&\quad (\sin((a_1 - a_2)t) + \sin((a_1 + a_2)t)) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{-(a_1 - a_2)}{(z + i(\Gamma_1 + \Gamma_2))^2 - (a_1 - a_2)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{-(a_1 + a_2)}{(z + i(\Gamma_1 + \Gamma_2))^2 - (a_1 + a_2)^2} \right) . \quad (A14)
\end{aligned}$$

Berechnung der Laplace Transformierten von r, s und v:

$$\begin{aligned}
r(t) &= a \cdot D^2 \cdot (C_{M^x M^x}^2(t) + C_{M^x M^y}^2(t)) \\
r(z) &= a \cdot D^2 \left(A_+^2 \cdot I_1(\omega_+, \Gamma_+) + A_-^2 \cdot I_1(\omega_-, \Gamma_-) + \right. \\
&\quad + 2A_+ A_- \cdot I_1(\omega_+, \omega_-, \Gamma_+, \Gamma_-) + \\
&\quad + B_+^2 \cdot I_2(\omega_+, \Gamma_+) + B_-^2 \cdot I_2(\omega_-, \Gamma_-) + \\
&\quad \left. + 2B_+ B_- \cdot I_2(\omega_+, \omega_-, \Gamma_+, \Gamma_-) \right) \quad (A15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s(t) &= \frac{1}{2} a D^2 \cdot (C_{M^x M^y}(t) C_{M^x \theta^x}(t) + C_{M^y \theta^x}(t) C_{M^x M^x}(t)) \\
s(z) &= \frac{1}{2} a D^2 \left(B_+ C_+ \cdot I_2(\omega_+, \Gamma_+) + B_- C_- \cdot I_2(\omega_-, \Gamma_-) + \right. \\
&\quad + (B_+ C_- + B_- C_+) \cdot I_2(\omega_+, \omega_-, \Gamma_+, \Gamma_-) + \\
&\quad + D_+ A_+ I_1(\omega_+, \Gamma_+) + D_- A_- I_1(\omega_-, \Gamma_-) + \\
&\quad \left. + (D_+ A_- + D_- A_+) \cdot I_1(\omega_+, \omega_-, \Gamma_+, \Gamma_-) \right) \quad (A16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(t) &= -\frac{1}{2} a D^2 \cdot (C_{M^x M^y}(t) C_{M^x \theta^y}(t) + C_{M^x M^x}(t) C_{M^x \theta^x}(t)) \\
v(z) &= \frac{1}{2} a D^2 \left(B_+ D_+ \cdot I_3(\omega_+, \Gamma_+) + B_- D_- \cdot I_3(\omega_-, \Gamma_-) + \right. \\
&\quad + B_+ D_- \cdot I_3(\omega_+, \omega_-, \Gamma_+, \Gamma_-) + B_- D_+ \cdot I_3(\omega_-, \omega_+, \Gamma_-, \Gamma_+) - \\
&\quad - A_+ C_+ I_3(\omega_+, \Gamma_+) - A_- C_- I_3(\omega_-, \Gamma_-) - \\
&\quad \left. - A_+ C_- I_3(\omega_-, \omega_+, \Gamma_-, \Gamma_+) - A_- C_+ I_3(\omega_+, \omega_-, \Gamma_+, \Gamma_-) \right) . \quad (A17)
\end{aligned}$$

VI. Kapitel

Schlußbetrachtung

Die hier entwickelte mikroskopische Theorie der Dämpfung und der Frequenzverschiebung beruht auf der die metallischen Spingläser charakterisierenden Hamiltonfunktion, die neben dem EA-Austausch und der Zeeman Energie auch die stochastische DM-Wechselwirkung enthält. Die Theorie berücksichtigt die Magnetisierung $\vec{M}$ als Erhaltungsgröße und die Phase $\vec{\theta}$ des EA-Ordnungsparameters.

Die HSH-Frequenzen wurden für $0 < T < T_g$ reproduziert und ihre phänomenologischen Parameter auf mikroskopische Korrelationsfunktionen zurückgeführt.

Die Modenkopplungstheorie der Dämpfung ist im FC-Fall mit dem Ansatz ausgewertet, daß die dynamischen ($\vec{k} = \vec{0}$) Korrelationsfunktionen der transversalen, gedämpften HSH-Anregungen den größten Beitrag zur Dämpfung liefern.

Dieser Ansatz zeigt eine befriedigende quantitative Übereinstimmung mit den experimentellen Daten bzgl. der Frequenzverschiebung der ω_+ -Mode. Wesentlich ist, daß diese Frequenzverschiebung im Einklang mit den statischen Daten für die Anisotropie Konstante $K(T)$ steht, die für Temperaturen $T \geq T_g$ verschwindet. Bei der Dämpfung ergibt sich dagegen eine deutliche Diskrepanz. Jedoch werden die qualitativen Eigenschaften (speziell das Maximum der Dämpfung als Funktion der Temperatur) richtig wiedergegeben.

Betont sei, daß die Auswertung ausschließlich mit zu den ESR-Messungen gehörenden experimentellen Daten für die Anisotropie K , die remanente Magnetisierung M_R und die isotrope Suszeptibilität χ vorgenommen wurde. Der einzige mikroskopische Parameter $E_a = \frac{D^2}{J}$, die Anisotropie pro Atom, ist durch unabhängige Experimente vorgegeben. Die vorliegende Theorie verknüpft in konsistenter Weise E_a mit den ESR-Daten der ω_+ -Resonanz.

Die quantitative Diskrepanz der Theorie mit den Daten der Dämpfung bei der gleichzeitigen guten Übereinstimmung im Fall der Frequenzverschiebung kann folgende Ursachen haben:

zum einen vernachlässigt die Theorie die Kopplung an lokale Moden ($k > 0$); dies ist sicher eine starke Einschränkung mit Hinsicht auf die Existenz des breiten Spektrums an Relaxationszeiten im Spinglas. Es kommen jedoch, wie die Ergeb-

nisse zeigen, nur schwach frequenzabhängige Einflüsse in Frage, die hauptsächlich die Dämpfung, nicht jedoch die Frequenzverschiebung ändern. Weiterhin wurde der Einfluß der longitudinalen Mode nicht berücksichtigt und die Theorie stellt insgesamt eine 1. Näherung der Dämpfung bei $\omega > 0$ dar. Eine volle, auch für von Null verschiedene Frequenzen ω selbstkonsistente Theorie muß von einem anderen Ansatz für die Korrelationsfunktionen als dem hier gemachten ausgehen: dort müßten die Korrelationsfunktionen durch eine frequenzabhängige Dämpfung $\Gamma(\omega)$ parametrisiert werden. Diese Auswertung kann vermutlich nur noch auf rein numerischem Weg ausgeführt werden.

Andererseits liegt der experimentellen Interpretation der ESR-Daten ein Lorentz Ansatz für die Dämpfung zugrunde, also die Annahme *einer* dominierenden Relaxationszeit (Mahdjour, priv. Mitteilung). Dies erscheint im Licht der vorliegenden Theorie eine zu starke Vereinfachung zu sein.

Insgesamt zeigt die vorliegende Arbeit die wesentliche Rolle, die hydrodynamische Fluktuationen im Spinglas spielen. Bei weiteren Überlegungen ist jedoch der Kopplung an die lokalen Freiheitsgrade auch bei den hier betrachteten niederenergetischen Anregungen Rechnung zu tragen.

2. Teil

Thermische Fluktuationen in klassischen Spinmodellen mit Zufallsfeldern

K A P I T E L I

Einleitung und Zusammenfassung

In diesem Kapitel wird das Imry/Ma Argument für den homogenen Ferromagneten und das Random Field Ising Modell dargestellt. Es wird erläutert, wie aus dem Skalenverhalten der Rauigkeit $w(L)$ der Domänenwand bzgl. ihrer Länge L sich die untere kritische Grenzdimension d_{cl} ergibt.

I. Kapitel

Einleitung und Zusammenfassung

Dieser Teil der Arbeit beruht auf einer Veröffentlichung von Schulz/ Villain/ Brézin/Orland (SVBO, 1988). Anlaß dieser Veröffentlichung ist eine Kontroverse zwischen den Aussagen der feldtheoretischen Störungsrechnung und phänomenologischen Energiebetrachtungen (Imry/Ma - Argumenten) bzgl. der unteren kritischen Dimension d_{cl} im Random Field Ising Modell (RFIM). Das Modell besteht aus ferromagnetisch wechselwirkenden Ising Spins, die auf jedem Gitterplatz lokalen, unabhängigen Zufallsfeldern $H(\vec{r})$ ausgesetzt sind; die Wechselwirkung ist auf nächste Nachbarn des Gitters beschränkt und der Mittelwert der Zufallsfelder verschwindet $\overline{H(\vec{r})} = 0$, so daß das System makroskopisch isotrop ist.

Eine wichtige Frage ist, ob die geordnete Phase des rein ferromagnetischen Systems für $T \leq T_c$ stabil ist gegen die Tendenz der Spins, sich lokal nach dem Zufallsfeld auszurichten und dabei ferromagnetische Bindungen aufzubrechen. Für hinreichend starke Felder $H_o \gg J$ (J : ferromagnetischer Austausch, $\overline{H(\vec{r}) H(\vec{r}')}) = H_o^2 \delta(\vec{r} - \vec{r}')$) wird dies sicher der Fall sein. Interessant ist, daß auch im Grenzfall schwacher Felder $H_o \ll J$ die Unordnung den ferromagnetischen Phasenübergang zerstören kann. Dies soll anhand der Argumente von Imry und Ma erläutert werden.

Um die untere kritische Grenzdimension d_{cl} zu ermitteln, unterhalb der Fluktuationen der Spins (thermische oder durch Unordnung induzierte) den Phasenübergang zerstören, betrachtet man die Energiedifferenz eines ferromagnetischen Clusters von "+"-Spins z.B. in einer Umgebung von "-"-Spins. Das System soll sich in der geordneten Phase ($T \leq T_c$) befinden.

In einem D-dimensionalen Ferromagneten kostet die Bildung solcher Cluster die (Oberflächen-) Energie $E_O \simeq J R^{D-1}$. D.h., daß für $D = 1$ sehr große Fluktuationen ($R \gg a$, a : Gitterkonstante) nur eine Energie von der Ordnung J kosten und damit die ferromagnetische Phase zerstören; daher ist beim rein ferromagnetischen Ising System $d_{cl} = 1$.

In Anwesenheit der Zufallsfelder $H(\vec{r})$ kann es einen Gewinn an (Zeeman) Energie E_Z bringen, daß sich ein Cluster mit Radius R bildet. Dieser Energiege-

winn ist aufgrund des Gesetzes der großen Zahlen von der Ordnung $E_Z \simeq H_o R^{D/2}$. Andererseits kostet dies die Oberflächen Energie E_O , so daß die Energiebilanz lautet:

$$\Delta E \sim -H_o R^{D/2} + J R^{D-1} .$$

Für $D > 2$ überwiegt die Oberflächenenergie: Clusterbildung ist energetisch ungünstig, während sie bei $D = 1$ auch für schwache Unordnung energetisch begünstigt ist. Daraus schließt man $d_{cl} = 2$.

Diese Argumentation läßt sich ergänzen, indem man eine Domänenwand der Höhe w und der Länge L betrachtet (s. Kap. III Abb. 5 mit der Ersetzung $z \rightarrow w$ und $b^I \rightarrow L$). Die Rauigkeit $w(L)$ bestimmt sich aus dem Minimum der Energiedifferenz $\Delta E \sim -H_o(L^{D-1}w)^{1/2} + J L^{D-3}w^2$ zu

$$w(L) \sim (H_o/J)^{2/3} L^{(5-D)/3} .$$

Setzt man $w(L) \sim L^\zeta$, so bestimmt $\zeta(D)$ das Verhalten von w auf der Längenskala L : $\zeta < 0$ bedeutet, daß die Domänenwand glatt, d.h.: wohl definiert ist; für $0 < \zeta < 1$ ist sie zwar rau, aber wegen $w/L \sim L^{-(1-\zeta)} \rightarrow 0$ für $L \rightarrow \infty$ hat sie keine *makroskopische* Ausdehnung. Erst $\zeta > 1$ heißt, daß die Rauigkeit $w(L)$ für große L divergiert, m.a.W. die Domänenwand sich über das gesamte System erstreckt und die (ferromagnetische) Phase zerstört; daher gilt $\zeta(d_{cl}) = 1$ und speziell für das RFIM $d_{cl} = 2$.

Die vorangegangenen Überlegungen berücksichtigen weder Entropie Effekte noch fraktale Strukturen der Domänen und stellen nur *eine* Längenskala in Rechnung.

Daß dies entscheidende Schwächen der Imry/Ma Argumentation sind, wurde aufgrund der feldtheoretischen Störungsrechnung vermutet. Brézin/ Orland (1986) berechneten den Exponenten der Rauigkeit zu $\zeta = (5-D)/2$, was zu einer unteren Grenzdimension $d_{cl} = 3$ führt (bei der auch die Störungsrechnung ungültig wird). Sie benutzten die Hamiltonfunktion für eine Domänenwand

$$H_{DW} = \int d^{D-1}\vec{r} (\vec{\nabla} z)^2 + \int dz' f(z - z') H(z', \vec{r}),$$

$f(z) = \tanh(z)$ als Profil der Domänenwand, $H(z, \vec{r})$ Zufallsfelder, z Höhe der Domänenwand senkrecht zu den $D - 1$ transversalen Richtungen $\vec{r}$.

Mit ihrem Ergebnis bestätigen sie frühere feldtheoretische Arbeiten von Aharony/Imry/Ma (1976), Young (1977) und Kogon/Wallace (1981), die die Äquivalenz des D-dim. RFIMs mit dem (D-2)-dim. homogenen System behaupten.

Für das D=1-dim. RFIM (s. Kap. II) kommt Brézin (priv. Mitteilung) zum Ergebnis, daß die Rauigkeit wie $\overline{w^2} \sim g^{-1}$ skalt (g : Stärke des harmonischen Potentials, das im 1-dim. Modell der Wechselwirkung J_i entspricht, vgl. Kap. II Gl.(1)ff) im Gegensatz zu $g^{-4/3}$ gemäß der Imry/Ma Argumentation.

Diese Kontroverse wurde zugunsten des Imry/Ma Argumentes entschieden, indem der Verfasser der vorliegenden Arbeit *mathematisch streng* die Richtigkeit des Verhaltens $\overline{w^2} \sim g^{-4/3}$ für endliche Temperaturen nachweisen konnte. Dies ist der zentrale Punkt des 2. Teils der vorliegenden Arbeit (Kap. III.a).

Brézin und Orland veröffentlichten ihre Arbeit nicht. Der Teil der Arbeit, der die Translationsinvarianz von H_{DW} in eine Hierarchie von Ward Identitäten für die Korrelationsfunktionen der Rauigkeit w übersetzt, bildet den ersten Teil der Veröffentlichung von SVBO (hier: Kap. II.b/c). Dieses Ergebnis ist nicht nur auf die Hamiltonfunktion der Domänenwand H_{DW} beschränkt, sondern gilt auch für eine größere Klasse von Systemen mit zufälligen 1-Teilchen Potentials (Kap. II.a). Das Kapitel III.b enthält Anwendungen der Ergebnisse des 1-dim. RFIMs auf höher dimensionale Modelle.

Zusammenfassend läßt sich sagen: durch den Nachweis der Richtigkeit des Imry/Ma Argumentes für das 1-dim. RFIM und die daraus gewonnenen Folgerungen für höher dimensionale Modelle werden die Aussagen der feldtheoretischen Störungstheorie für das RFIM bzgl. der Dimensionsverschiebung -2 und der Grenzdimension $d_{cl} = 3$ erschüttert.

K A P I T E L I I

Klassische Spinmodelle in Zufallsfeldern. Exakte Identitäten für Korrelationsfunktionen.

Für eine Gruppe klassischer Spinmodelle wird die Paarkorrelation exakt berechnet. Weiterhin wird gezeigt, daß eine Hierarchie von Identitäten für die höheren Korrelationen existiert. Dies wird am Beispiel der 4er Korrelationsfunktion illustriert.

Kapitel II

Seite

- | | |
|---|---|
| a) Einige klassische Spinmodelle mit Zufallspotentialen | 1 |
| b) Exakte Identitäten für Korrelationsfunktionen | 3 |
| c) Der Replikatrick im Ising Modell mit Zufallsfeldern | 6 |

II. Kapitel

a) Einige klassische Spinmodelle mit Zufallspotentialen

In den Abschnitten b und c dieses Kapitels werden klassische Spinsysteme mit der Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} \sum_{i,j} J_{ij} (z_i - z_j)^2 + \sum_i V(z_i) \quad (1)$$

betrachtet, mit

J_{ij} : short – range Matrix

z_i : kontinuierliche Variable $-\infty < z_i < +\infty$

V_i : unabhängig identisch verteilte Zufallspotentiale.

Je nach Wahl der V_i repräsentiert $\mathcal{H}$ z.B. eines der folgenden Systeme:

1) Efetov – Larkin Modell (Efetov/Larkin, 1977)

$$V_i(z) = A \cos(z - \varphi_i) ; \quad (2)$$

φ_i ist in $[0, 2\pi]$ gleichverteilt. Gl. (1) ist dann die Energie einer inkommensurablen Ladungsdichtewelle mit Verunreinigungen, bei der Vortices vernachlässigt werden.

2) $D = d + 1$ dimensionaler Ferromagnet mit schwacher Bindungsunordnung
(Huse/Henley, 1985)

$$V_i(z) = V_{in} \quad \text{für} \quad na \leq z < (n+1)a \quad (3)$$

mit

a : Gitterkonstante

V_{in} : unabhängig identisch verteilte Zufallsgrößen,

$$\overline{V_{in} V_{jm}} = V_o^2 \delta_{ij} \delta_{nm} .$$

z_i ist die Höhe einer Blochschen Wand (senkrecht zu den $d = D-1$ transversalen Richtungen). $V_{in} < 0$ entspricht dabei schwächeren Bindungen. $\mathcal{H}$ beschreibt die Konkurrenz zwischen Oberflächenenergie der Domänenwand und ihrer Tendenz, bevorzugt schwächere Bindungen miteinzubeziehen. Das Modell ist unterhalb von T_c und oberhalb der unteren kritischen Dimension $d_{lc} = 5/3$ definiert.

3) Ising Modell mit Zufallsfeldern (Imry, Ma, 1976)

$$V_i(z_i) = \sum_{n=-N_{\parallel}/a}^{N_{\parallel}/a} H_{in} S_{in} \quad (4)$$

mit $V_i(z_i)$ als Zeeman Energie der Spins im Zufallsfeld. z_i beschreibt wiederum die Auslenkung einer Domänenwand über dem Gitterplatz i in longitudinaler Richtung. Dabei ist (s. Kap. I.c)

$$\begin{aligned} S_{in} &= -1 \quad \text{für} \quad n \leq z_i/a \\ S_{in} &= +1 \quad \text{für} \quad n > z_i/a . \end{aligned}$$

Die Felder H_{in} sind unabhängig verteilt. Wiederum macht das Modell nur Sinn unterhalb von T_c und oberhalb von $d_{cl} + 1 = D_{cl} = 2$ Dimensionen.

4) Random – Rod – Modell (Nattermann, 1983)

$$\begin{aligned} V_i(z_i) &= K_i a \sum_{n=-L/a}^{L/a} S_{in} \\ &= K_i z_i ; \end{aligned} \quad (5)$$

das Modell entspricht dem RFIM mit dem Unterschied, daß die Zufallsfelder H_{in} *nur* von i abhängen ($H_{in} \rightarrow K_i$). In $D = 2$ Dimensionen z.B. bedeutet dies, daß die Felder sich nur in horizontaler Richtung ändern. Das Modell ist exakt lösbar.

II. Kapitel

b) Exakte Identitäten für Korrelationsfunktionen

Es werden Systeme klassischer Spins mit der folgenden Hamiltonfunktion (s.a. Kap. I.a) betrachtet:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} \sum_{i,j} J_{ij} (z_i - z_j)^2 + \sum_i V_i(z_i) \quad (6)$$

mit J_{ij} als (deterministischer) short-range Matrix und den V_i 's als unabhängig, identisch verteilten Zufallspotentialen. Es wird gezeigt, daß eine Hierarchie von exakten Beziehungen zwischen den Korrelationsfunktionen der Größen $\delta z_i = z_i - \langle z_i \rangle$ existiert.

Koppelt man Größen λ_i linear an die Variablen z_i

$$\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H} - T \sum_i \lambda_i z_i, \quad (7)$$

so erhält man die Korrelationsfunktionen in z_i via Differentiation nach λ_i

$$\begin{aligned} \overline{\langle z_i \rangle} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \overline{\ln Z_\lambda(\{V\})} \\ \overline{\langle \delta z_i \delta z_j \rangle} &= \overline{\langle z_i z_j \rangle} - \overline{\langle z_i \rangle \langle z_j \rangle} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \overline{\ln Z_\lambda(\{V\})} \end{aligned} \quad (8)$$

usf

mit

$$Z_\lambda(\{V\}) = \text{Tr} \left(\exp(-\beta \mathcal{H}_\lambda) \right).$$

Mit Hilfe der Fourier Transformaten

$$\begin{aligned} z(\vec{k}) &= N^{-1/2} \sum_j z_j \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}_j) \\ \lambda(\vec{k}) &= N^{-1/2} \sum_j \lambda_j \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}_j) \\ J_o(\vec{k}) &= \sum_j J_{lj} \left(1 - \exp[i\vec{k} \cdot (\vec{r}_l - \vec{r}_j)] \right) \end{aligned} \quad (9)$$

erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\lambda = & \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} J_o(\vec{k}) |z(\vec{k}) - T\lambda(\vec{k})/J_o(\vec{k})|^2 + \\ & + \sum_i V_i(z_i) - \frac{1}{2} T^2 \sum_{\vec{k}} |\lambda(\vec{k})|^2 / J_o(\vec{k}) .\end{aligned}\quad (10)$$

Durch die Setzung von

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{k}) &= T\lambda(\vec{k})/J_o(\vec{k}) \\ \zeta(\vec{k}) &= z(\vec{k}) - \varphi(\vec{k}) \\ U_j(\zeta_j) &= V_i(\zeta_j + \varphi_j)\end{aligned}\quad (11)$$

faktoriisiert der λ -abhängige Teil der Zustandssumme

$$Z_\lambda(\{V\}) = \exp\left(\frac{1}{2} T/J_o(\vec{k}) \sum_{\vec{k}} |\lambda(\vec{k})|^2\right) Z(\{U\}) .\quad (12)$$

bzw.

$$\overline{\ell n Z_\lambda} = \frac{1}{2} T/J_o(\vec{k}) \sum_{\vec{k}} |\lambda(\vec{k})|^2 + \overline{\ell n Z} .\quad (13)$$

Das exakte 2. Moment lautet damit

$$\overline{< |z(\vec{k}) - < z(\vec{k}) >|^2 >} = T/J_o(\vec{k})\quad (14)$$

und für kleine Wellenzahlen folgt

$$\overline{< |z(\vec{k}) - < z(\vec{k}) >|^2 >} \xrightarrow{k \rightarrow 0} \frac{T}{J \cdot k^2}\quad (15)$$

mit

$$J = \sum_j J_{ij} .$$

Die Gln. (14/15) besagen, daß die Paarkorrelation *nicht von der Unordnung abhängt*, sie ist mit der des *geordneten* Systems identisch – erst die höheren Korrelationsfunktionen werden durch die Unordnung modifiziert.

Da die freie Energie *quadratisch* von den λ_i 's abhängt (s. Gl. (13)), verschwinden alle Ableitungen bzgl. λ_i der Ordnung ≥ 3 . Dies liefert eine Hierarchie von Abhängigkeiten der höheren Korrelationsfunktionen, z.B.

$$\frac{\partial^4}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j \partial \lambda_l \partial \lambda_n} \overline{\ell^n Z_\lambda} = 0$$

d.h.

$$\begin{aligned} \overline{\langle \delta z_i \delta z_j \delta z_l \delta z_n \rangle} - \overline{\langle \delta z_i \delta z_j \rangle \langle \delta z_l \delta z_n \rangle} - \overline{\langle \delta z_i \delta z_l \rangle \langle \delta z_j \delta z_m \rangle} - \\ - \overline{\langle \delta z_i \delta z_m \rangle \langle \delta z_j \delta z_l \rangle} = 0 \end{aligned} \quad (16) .$$

II. Kapitel

c) Der Replika Trick im Ising Model mit Zufallsfeldern

Die Energie einer Domänenwand im RFIM z.B. wird durch das Zufallspotential

$$V_i(z_i) = \sum_{n=-N_{||}/a}^{N_{||}/a} H_{in} S_{in} \quad (17)$$

mit

$$S_{in} = \begin{cases} -1, & \text{für } n \leq z_i/a \\ 1, & \text{für } n > z_i/a \end{cases}$$

beschrieben.

$$\overline{H_{in} H_{jm}} = H_o^2 a \delta_{ij} \delta_{nm}$$

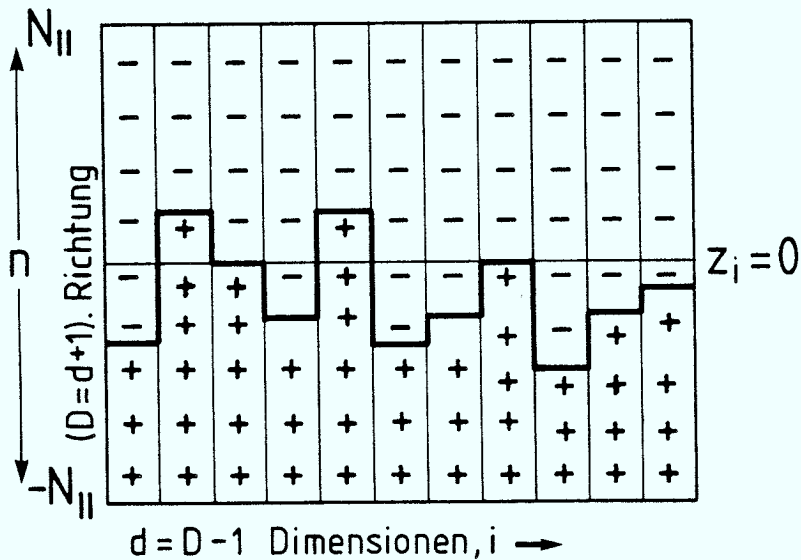


Abb. 1 Domänenwand im Ising Modell

Die Domänenwand besitzt bei kontinuierlichen Spins oder auf Längenskalen größer als die Gitterkonstante a betrachtet (Blockspintransformation und Längenskalierung) selbst eine endliche Ausdehnung und ist nicht so scharf definiert wie in Abbildung 1.

Der Replika Trick ermöglicht die Mittelung des Logarithmus der Zustandssumme in der Form

$$\overline{\ell n Z} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} (\overline{Z^n} - 1)$$

mit

$$\overline{Z^n} = \int D\{V\} P(\{V\}) \exp \left(-\beta \sum_{\alpha=1}^n \mathcal{H}[z_i^\alpha] \right) .$$

Z^n stellt dabei die Zustandssumme von n unabhängigen Systemen mit derselben Unordnung $\{V\}$ (und Replikaindex α) dar, deren Freiheitsgrade (hier die z_i^α) durch die Unordnungsmittelung nicht-linear gekoppelt werden.

Nach der Mittelung über die Unordnung ergibt sich die folgende, effektive Hamiltonfunktion

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{4} \sum_{i,j,\alpha} J_{ij} (z_i^\alpha - z_j^\alpha)^2 + \sum_{i,\alpha,\gamma} W (z_i^\alpha - z_i^\gamma) \quad (18)$$

mit

$$W(z) = \frac{H_o^2}{T} (z^2 + a^2)^{1/2} \quad RFIM \quad (19)$$

$$W(z) = \frac{1}{4} \frac{K_o^2}{T} z^2 \quad RRM \quad (20)$$

$$\text{und dem zusätzlichem Term} \\ - \frac{1}{2} \frac{K_o^2}{T} n^2 \sum_{i,\alpha} (z_i^\alpha)^2 .$$

Analog zu Kap. I.b. liefert die Einführung der Variablen $\{\lambda_i\}$, die jetzt an die Größe $\sum_\alpha z_i^\alpha$ koppeln,

$$\tilde{\mathcal{H}}_\lambda = \tilde{\mathcal{H}} - T \sum_i \lambda_i \sum_\alpha z_i^\alpha \quad (21)$$

$$\zeta^\alpha(\vec{k}) = z^\alpha(\vec{k}) = T \lambda(k) / J_o(\vec{k}) \\ \ell n \tilde{Z}_\lambda = n \cdot \frac{1}{2} T / J_o(\vec{k}) \sum_{\vec{k}} |\lambda(\vec{k})|^2 + \ell n \tilde{Z}_{\lambda=0}$$

wiederum die freie Energie als quadratische Funktion der λ_i . Die Paarkorrelation lautet

$$\sum_{\alpha,\gamma} \langle z^\alpha(\vec{k}) z^\gamma(-\vec{k}) \rangle = n \frac{T}{J_o(\vec{k})} \quad (22) \\ \cong n \frac{T}{J k^2} \quad \text{für } k \rightarrow 0 .$$

Ableitungen der Ordnung > 2 nach den λ_i 's verschwinden und liefern damit Gleichungen zwischen den Korrelationsfunktionen (thermische Mittelung mit $\tilde{\mathcal{H}}_{\lambda=0}$) z.B.

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \left[\langle z_i^\alpha z_j^\beta z_l^\gamma z_m^\delta \rangle - \langle z_i^\alpha z_j^\beta \rangle \langle z_l^\gamma z_m^\delta \rangle - \right. \\ \left. - \langle z_i^\alpha z_l^\beta \rangle \langle z_j^\gamma z_m^\delta \rangle - \langle z_i^\alpha z_m^\beta \rangle \langle z_j^\gamma z_l^\delta \rangle \right] = \\ = 0 ; \end{aligned} \quad (23)$$

mit Gl. (22) folgt ($k \rightarrow 0$)

$$\sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \langle z^\alpha(\vec{k}) z^\beta(-\vec{k}) z^\gamma(v\vec{k}') z^\delta(-\vec{k}') \rangle = \left(\frac{nT}{J \cdot k^2} \right)^2 (1 + \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}). \quad (24)$$

Eine replikasymmetrische Lösung mit dem Ansatz $A\delta_{\alpha\beta} + B$ von Gl. (22) ist

$$\langle z^\alpha(\vec{k}) z^\beta(-\vec{k}) \rangle = \frac{T}{J_o(\vec{k}) + n \cdot \Delta(\vec{k})} \delta_{\alpha\beta} + \frac{T \cdot \Delta(\vec{k})}{J_o(\vec{k})(J_o(\vec{k}) + n\Delta(\vec{k}))} \quad (25)$$

wobei die Größe $\Delta(\vec{k})$ bisher nur im RRM bekannt ist.

$$\Delta(\vec{k}) = \frac{1}{4} K_o^2 \quad (RRM). \quad (26)$$

In diesem Fall dominiert für $k \rightarrow 0$ (d.h. $J_o(\vec{k}) \cong J \cdot k^2$) der zweite Term ($\cong k^{-4}$) den ersten ($\cong k^{-2}$). D.h., daß die Divergenz der Korrelation der Replikavariablen $z^\alpha(\vec{k})$ stärker ist als die der physikalischen Größen $z(\vec{k})$:

$$\langle z^\alpha(\vec{k}) z^\beta(-\vec{k}) \rangle \xrightarrow[k \rightarrow 0]{n \rightarrow 0} k^{-4} \quad (27)$$

während

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{\alpha, \beta} \langle z^\alpha(\vec{k}) z^\beta(-\vec{k}) \rangle = \\ = \overline{\langle z(\vec{k}) z(-\vec{k}) \rangle} - \overline{\langle z(\vec{k}) \rangle \langle z(-\vec{k}) \rangle} \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} k^{-2}. \end{aligned}$$

Dieses Verhalten der Korrelationsfunktionen macht das Verfahren der Replikastörungsrechnung für die oben genannten Modelle problematisch.

K A P I T E L III

Domänenwände im Random Field Ising Model und das Imry-Ma Argument

Mit Hilfe des 1-d Random Field Ising Models werden die thermischen Fluktuationen von Domänenwänden im RFIM für $D \geq 2$ abgeschätzt. Die Rauigkeit $\overline{\langle z^2 \rangle}$ der Domänenwand des 1-d Modells wird für tiefe Temperaturen und starke Zufallsfelder exakt berechnet.

Kapitel III	Seite
-------------	-------

a) Exakte Bestimmungen der Domänenwand Fluktuationen im 1-d RFIM	1
b) Domänenwände im RFIM für $2 \leq D = d + 1 < 5$	20

Anhang III

a) Abschätzung der Wahrscheinlichkeit $Prob \left\{ \min_{0 \leq \ell \leq L_1} \sum_{\mu=0}^{\ell} X_{\mu} \leq -m \right\}$	22
b) Numerische Werte der Reihen, die in der Abschätzung von $\overline{< z^2 >}$ auftreten	27
c) Abschätzung der Wahrscheinlichkeit $Prob \left\{ \sum_{\mu=0}^{\ell} X_{\mu} \geq \alpha L^{1/2} \right\}$	29

III. Kapitel

a) Exakte Bestimmung der Domänenwand Fluktuation im 1-dimensionalen RFIM

Die Hamiltonfunktion des 1-dimensionalen RFIM lautet

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}gz^2 - 2 \sum_{\mu=0}^{z/a} H_{\mu} \quad (1)$$

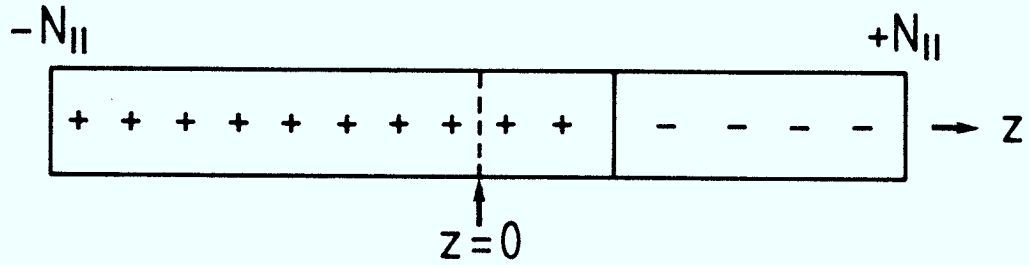


Abb. 1 Das 1-dimensionale RFIM

(der Term $\sum_{\mu=-N_{||}/a}^{+N_{||}/a} H_{\mu}$, vgl. Kap. I.c Gl. (17), fällt bei der Berechnung thermischer Mittelwerte heraus). Die Zufallsfelder sind z.B. Ising verteilt mit

$$\overline{H_{\mu}H_{\nu}} = a \cdot H_o^2 \delta_{\mu\nu} . \quad (2)$$

Mit Hilfe der diskreten Variable $\ell = \frac{z}{a}$ lautet $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}ga^2\ell^2 = 2H_o a^{1/2} \sum_{\mu=0}^{\ell} X_{\mu}$$

mit

$$X_{\mu} = \pm 1 , \quad \overline{X_{\mu}X_{\nu}} = \delta_{\mu\nu} .$$

Definiert man noch

$$\eta = \frac{1}{4} \frac{g}{H_o} a^{3/2} \quad (3)$$

so ist

$$\mathcal{H} = 2H_o a^{1/2} \left(\eta \ell^2 - \sum_{\mu=0}^{\ell} X_{\mu} \right) . \quad (4)$$

Die Hamiltonfunktion in Gl. (4) kann auch als Energie eines RWs in einem harmonischen Potential bei endlicher Temperatur interpretiert werden.

Im weiteren soll das zweite Moment von z *exakt* für tiefe Temperaturen und starke Zufallsfelder bestimmt werden ($T, g \ll H_o$):

$$c_1 r(g, H_o) \leq \overline{z^2} \leq c_2 r(g, H_o) \quad (5)$$

dabei sind c_1 und c_2 numerische Konstanten unabhängig von T , g und H_o . Die Funktion r hat die Gestalt

$$r(g, H_o) = \left(\frac{H_o}{g} \right)^{4/3} . \quad (6)$$

Nach Imry und Ma (Imry/Ma, 1976) erhält man das Verhalten von $\overline{z^2}$ aus der Bedingung, daß die Varianz beider Anteile in der Hamiltonfunktion von gleicher Ordnung ist

$$\left(g^2 \overline{z^4} \right)^{1/2} \sim \left(H_o^2 \overline{z} \right)^{1/2} . \quad (7)$$

Das zweite Moment von $\delta z \equiv z - \langle z \rangle$ ist exakt bekannt (s. Kap. I.b. Gl. (14); man ersetze $J_o(k)$ durch g)

$$\begin{aligned} \overline{(\delta z)^2} &= \overline{(z - \langle z \rangle)^2} \\ &= \frac{T}{g} . \end{aligned} \quad (8)$$

Dies bedeutet für tiefe Temperaturen, daß die Größe z mit Wahrscheinlichkeit $\cong 1$ identisch mit ihrem Mittelwert ist. Daher gilt näherungsweise

$$T \rightarrow 0 : \quad \frac{\overline{z^2}}{\overline{z^4}} \cong \frac{\overline{z}^2}{\overline{z^2}^2} , \quad (9)$$

so daß sich aus Gl. (7)

$$\overline{z^2} \sim \left(\frac{H_o}{g} \right)^{4/3} \quad (10)$$

ergibt. Dieses Verhalten soll im Sinne von Gl. (5) im folgenden mit Hilfe von RW Abschätzungen gezeigt werden.

Obere Schranke für $\overline{\langle z^2 \rangle}$:

Die Korrelationsfunktion der diskreten Schrittzahl $\ell = z/a$ ($\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) lautet

$$\overline{\langle \ell^2 \rangle} = \frac{\left[\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \ell^2 e^{-\beta \mathcal{H}(\ell)} \right]}{\left[\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \mathcal{H}(\ell)} \right]} \quad (11)$$

mit

$$\mathcal{H}(\ell) = 2 \cdot H_o a^{1/2} \left(\eta \ell^2 - \sum_{\mu=0}^{\ell} X_{\mu} \right)$$

(s. Gl. (1) ff). Der Faktor $2H_o a^{1/2}$ wird im folgenden in β hineindefiniert

$$\beta \leftarrow 2H_o a^{1/2} \beta. \quad (12)$$

Da die Variablen $\{X_{\mu}\}$ und $\{-X_{\mu}\}$ dieselbe gemeinsame Verteilungsfunktion besitzen, können die Erwartungswerte z.B. für $\overline{\langle \ell^2 \rangle}$ auch mit der Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H}(\ell) = 2H_o a^{1/2} \left(\eta \ell^2 + \sum_{\mu=0}^{\ell} X_{\mu} \right)$$

gebildet werden.

Spaltet man die Summen in Gl. (11) auf

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} + \sum_{\ell=-\infty}^{-1} \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^0 + \sum_{\ell=1}^{\infty}, \end{aligned}$$

vernachlässigt im Nenner entsprechende Teilsummen und bemerkt, daß

$$S_{\ell} = \sum_{\mu=0}^{\ell} X_{\mu} \quad (13)$$

und $S_{-\ell}$ dieselbe Verteilung besitzen, so folgt aus Gl. (11)

$$\overline{\langle \ell^2 \rangle} < 2 \left[\frac{\sum_{\ell=0}^{\infty} \ell^2 e^{-\beta \mathcal{H}(\ell)}}{\sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-\beta \mathcal{H}(\ell)}} \right]. \quad (14)$$

Nun führt man die Länge $L \gg 1$ ein und summiert wie folgt

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=mL}^{(m+1)L-1};$$

setzt man noch

$$Z_m = \sum_{\ell=mL}^{(m+1)L-1} e^{-\beta \mathcal{H}(\ell)} , \quad (15)$$

so gilt wegen $mL \leq \ell < (m+1)L$

$$\overline{\langle \ell^2 \rangle} < 2L^2 \left[\frac{\sum_{\ell=0}^{\infty} (m+1)^2 Z_m}{\sum_{m=0}^{\infty} Z_m} \right] . \quad (16)$$

Da $Z_m \geq 0$ ist, folgt durch Verkleinerung des Nenners

$$\overline{\langle \ell^2 \rangle} < 2L^2 \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)^2 \left[\frac{Z_m}{Z_0 + Z_m} \right] \right\} . \quad (17)$$

Ziel weiterer Überlegungen ist es, zu zeigen, daß bei einer speziellen Wahl von L , die Reihe in Gl. (17) konvergiert und das Verhalten $\overline{\langle z^2 \rangle} \sim \left(\frac{H_0}{g} \right)^{4/3}$ erreicht wird.

Zu diesem Zweck betrachte man für eine fest, gegebene Konfiguration der Zufallsgrößen X_μ das Minimum bzw. das Maximum von $\mathcal{H}(\ell)$ im m . Intervall:

$$\begin{aligned} \epsilon_m &= \min_{mL \leq \ell < (m+1)L} \{ \mathcal{H}(\ell) \} \\ E_m &= \max_{mL \leq \ell < (m+1)L} \{ \mathcal{H}(\ell) \} . \end{aligned} \quad (18)$$

Für eine fest Wahl der Zufallsfelder ergibt sich folgende Alternative

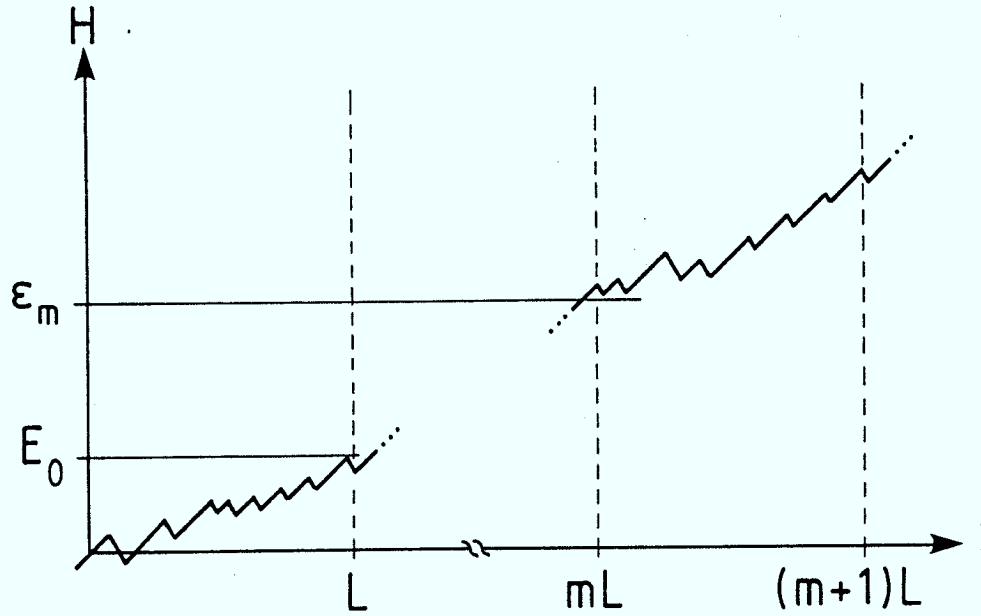


Abb. 2 Realisation von $\mathcal{H}(\ell)$ mit $E_0 < \epsilon_m$ (vgl. Text)

$$\begin{aligned} 1) \quad \epsilon_m > E_0 : \quad \frac{Z_m}{Z_0 + Z_m} &\leq e^{-\beta(\epsilon_m - E_0)} \\ 2) \quad \epsilon_m \leq E_0 : \quad \frac{Z_m}{Z_0 + Z_m} &\leq 1 \end{aligned} \quad (19)$$

für diese Fälle sind die zugehörigen Gewichte zu berechnen, d.h. die Wahrscheinlichkeit der angegebenen Fluktuation von $\mathcal{H}(\ell)$ zwischen den Intervallen $[0, L]$ und $[mL, (m+1)L]$.

Mit Hilfe der letzteren kann nun der Mittelwert in Gl. (17) abgeschätzt werden

$$\overline{\langle \ell^2 \rangle} < 2 \cdot L^2 \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)^2 (X_m + Y_m) \right\} \quad (20)$$

mit

$$\text{Fall 1)} : \quad X_m = \int_0^{\infty} dE_0 \, \rho(E_0) \int_0^{\infty} dE \, \mathcal{P}_m(E, E_0) e^{-\beta E} \quad (21)$$

$$\text{Fall 2)} : \quad Y_m = \int_0^{\infty} dE_0 \, \rho(E_0) \cdot p_m(E_0) , \quad (22)$$

dabei ist

$$E = \epsilon_m - E_o \quad .$$

$$\rho(E_o) : \text{Verteilung von } E_o \quad (23)$$

$$\mathcal{P}_m(E, E_o) = \text{Prob}\{E \leq \epsilon_m - E_o \leq E + dE, E_o \text{ fest}\} dE$$

$$\begin{aligned} p_m(E_o) &= \int_{-\infty}^0 dE \mathcal{P}_m(E, E_o) . \\ &= \text{Prob}\{\epsilon_m \leq E_o, E_o \text{ fest}\} \end{aligned}$$

Zunächst wird der 2. Fall behandelt: man spaltet die Integration über E_o in Gl. (22) auf

$$Y_m = Y_m^{(1)} + Y_m^{(2)}$$

mit

$$Y_m^{(1)} = \int_0^A dE_o \rho(E_o) p_m(E_o) \quad (24)$$

$$Y_m^{(2)} = \int_A^\infty dE_o \rho(E_o) p_m(E_o) \quad (25)$$

und setzt (für η s. Gl. (3))

$$A = \frac{1}{3} \eta m^2 L^2 . \quad (26)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} Y_m^{(1)} &= \text{Prob}\{\epsilon_m \leq E_o \leq A\} \\ &\leq \text{Prob}\{\epsilon_m \leq A\} . \end{aligned} \quad (27)$$

Die Ungleichung

$$\epsilon_m \leq A$$

d.h.

$$\min_{mL \leq \ell < (m+1)L} \{\eta \ell^2 + S_\ell\} \leq \frac{1}{3} \eta m^2 L^2$$

impliziert

$$\min_{mL \leq \ell \leq (m+1)L} \{S_\ell\} \leq -\frac{2}{3} \eta m^2 L^2$$

und

$$\min_{0 \leq \ell \leq (m+1)L} \{S_\ell\} \leq -\frac{2}{3} \eta m^2 L^2 \quad (28)$$

also

$$\begin{aligned} Y_m^{(1)} &\leq \text{Prob} \left\{ \min_{0 \leq \ell \leq (m+1)L} \{S_\ell\} \leq -\frac{2}{3}\eta m^2 L^2 \right\} \\ &\leq M \left((m+1)L; \frac{2}{3}\eta m^2 L^2 \right) \end{aligned} \quad (29)$$

(vgl. Anh. a).

Für $Y_m^{(2)}$ folgt aus Gl. (25), da $p_m(E_o) \leq 1$ ist,

$$Y_m^{(2)} \leq \text{Prob}\{E_o \geq A\} ;$$

aus

$$E_o \geq A$$

d.h.,

$$\max_{0 \leq \ell < L} \{ \eta \ell^2 + S_\ell \} \geq \frac{1}{3}\eta m^2 L^2$$

folgt

$$\max_{0 \leq \ell \leq L} \{S_\ell\} \geq \frac{1}{3}\eta L^2(m^2 - 3) .$$

Wegen der Spiegelungssymmetrie der RWs

$$\begin{aligned} &\text{Prob} \left\{ \max_{\ell \in I} \{S_\ell\} \geq x \right\} \\ &= \text{Prob} \left\{ \min_{\ell \in I} \{S_\ell\} \leq -x \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

folgt

$$\begin{aligned} Y_m^{(2)} &\leq \text{Prob} \left\{ \min_{0 \leq \ell \leq L} \{S_\ell\} \leq -\frac{1}{3}\eta L^2(m^2 - 3) \right\} \\ &\leq M \left(L; \frac{1}{3}\eta L^2(m^2 - 3) \right) . \end{aligned} \quad (31)$$

Nun zum 1. Fall: wiederum wird die E_o Integration in Gl. (21) aufgespalten

$$X_m = X_m^{(1)} + X_m^{(2)}$$

mit

$$X_m^{(1)} = \int_o^A dE_o \rho(E_o) \int_o^\infty dE \mathcal{P}_m(E, E_o) e^{-\beta E} \quad (32)$$

$$X_m^{(2)} = \int_A^\infty dE_o \rho(E_o) \int_o^\infty dE \mathcal{P}_m(E, E_o) e^{-\beta E} . \quad (33)$$

Da $e^{-\beta E} \leq 1$ für $E \geq 0$ und $\int_0^\infty dE \mathcal{P}_m(E, E_o) \leq 1$ folgt (vgl. mit $Y_m^{(2)}$ oben)

$$\begin{aligned} X_m^{(2)} &\leq \text{Prob} \left\{ \max_{0 \leq \ell \leq L} \{S_\ell\} \geq A - \eta L^2 \right\} \\ &\leq M \left(L; \frac{1}{3} \eta L^2 (m^2 - 3) \right) . \end{aligned} \quad (34)$$

$X_m^{(1)}$ wird noch einmal zerlegt

$$X_m^{(1)} = a_m + b_m$$

mit

$$a_m = \int_0^A dE_o \rho(E_o) \int_0^A dE \mathcal{P}_m(E, E_o) e^{-\beta E} \quad (35)$$

$$b_m = \int_0^A dE_o \rho(E_o) \int_A^\infty dE \mathcal{P}_m(E, E_o) e^{-\beta E} . \quad (36)$$

Nimmt man bei b_m die untere Grenze für $e^{-\beta E}$ im Intervall $[A, \infty]$ und schätzt die verbleibenden Wahrscheinlichkeiten gegen 1 ab, so erhält man

$$b_m \leq \exp \left(-\beta \frac{1}{3} \eta m^2 L^2 \right) . \quad (37)$$

Wegen $e^{-\beta E} \leq 1$ ist

$$a_m \leq \int_0^A dE_o \rho(E_o) \int_0^A dE \mathcal{P}_m(E, E_o) ;$$

da E und E_o im Intervall $[0, A]$ liegen, bedeutet dies für ϵ_m wegen

$$E \leq \epsilon_m - E_o \leq E + dE$$

bzw.

$$E + E_o \leq \epsilon_m \leq E + E_o + dE ,$$

daß

$$0 \leq \epsilon_m \leq 2A . \quad (38)$$

a_m wird demnach durch die Wahrscheinlichkeit

$$\text{Prob}\{\epsilon_m \leq 2A\}$$

dominiert:

$$\begin{aligned} a_m &\leq \text{Prob} \left\{ \min_{mL \leq \ell < (m+1)L} \{S_\ell\} \leq -\frac{1}{3}m^2\eta L^2 \right\} \\ &\leq M \left((m+1)L; \frac{1}{3}\eta m^2 L^2 \right) . \end{aligned} \quad (39)$$

Insgesamt liefern die Gln. (29), (31), (34), (37) und (39)

$$\begin{aligned} X_m &\leq M \left((m+1)L; \frac{1}{3}\eta m^2 L^2 \right) + \\ &\quad + \exp \left(-\frac{1}{T} \frac{2}{3} H_o a^{1/2} \eta m^2 L^2 \right) + \\ &\quad + M \left(L; \frac{1}{3}\eta (m^2 - 3) L^2 \right) . \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} Y_m &\leq M \left((m+1)L; \frac{2}{3}\eta m^2 L^2 \right) + \\ &\quad + M \left(L; \frac{1}{3}\eta L^2 (m^2 - 3) \right) . \end{aligned} \quad (41)$$

Damit folgt als obere Schranke für $\overline{\langle \ell^2 \rangle}$ (s. Gl. (20))

$$\begin{aligned} \overline{\langle \ell^2 \rangle} &< 2 \cdot L^2 \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)^2 \times \right. \\ &\quad \times \left[e^{-\frac{1}{T} \frac{2}{3} H_o a^{1/2} \eta m^2 L^2} + 2 \cdot M \left(L; \frac{1}{3}\eta L^2 (m^2 - 3) \right) + \right. \\ &\quad \left. \left. + M \left((m+1)L; \frac{1}{3}\eta m^2 L^2 \right) + M \left((m+1)L; \frac{2}{3}\eta m^2 L^2 \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (42)$$

(für $M(L;x)$ s. Anh. a Gl.(A 19) ff).

Die Wahl des Parameters L zu

$$\eta^2 L^3 = 1 , \quad (43)$$

was auch gleichbedeutend ist mit

$$\begin{aligned} (aL)^{1/2} &= \left(\frac{4H_o}{g} \right)^{1/3} \\ L^2 &= a^{-2} \left(\frac{4H_o}{g} \right)^{4/3} , \end{aligned} \quad (44)$$

ermöglicht die numerische Auswertung der in Gl. (42) auftretenden Reihen

$$S_1 = \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)^2 \exp \left(-\frac{H_o}{T} \frac{2}{3} \left(\frac{4H_o}{g} \right)^{1/3} \cdot m^2 \right) \quad (45)$$

$$S_2 = \sum_{m=2}^{\infty} (m+1)^2 M \left(L; \frac{1}{3} L^{1/2} (m^2 - 3) \right) \quad (46)$$

da $M(L;x) = 0$ für $x < 0$,

$$S_3 = \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)^2 M \left((m+1)L; \frac{1}{3} L^{1/2} m^2 \right) \quad (47)$$

und

$$S_4 = \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)^2 M \left((m+1)L; \frac{2}{3} L^{1/2} m^2 \right) . \quad (48)$$

Damit besitzt die obere Schranke von $\overline{\ell^2}$ die Form (s. Anh. b Gl. (A28) ff)

$$\overline{\ell^2} < a^{-2} \left(\frac{H_o}{g} \right)^{4/3} \left\{ c + f \left(\frac{H_o}{T}, \left(\frac{H_o}{g} \right)^{4/3} \right) \right\} \quad (49)$$

mit

$$c \cong 658.7 \text{ und } a < \frac{1}{100} \left(\frac{4H_o}{g} \right)^{2/3} .$$

und

$$f(x, y) = 12.7 \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)^2 \exp \left(-\frac{2}{3} 4^{1/3} x y^{1/4} m^2 \right) \quad (50)$$

Im Falle *starker* Zufallsfelder und *tiefer* Temperaturen wie z.B.

$$\begin{aligned} y^{1/4} &= \left(\frac{H_o}{g} \right)^{1/3} > 4^{-1/3} \\ x &= \frac{H_o}{T} > \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (51)$$

folgt

$$\begin{aligned} f(x, y) &< 54.8 \\ \overline{\ell^2} &< 713.5 a^{-2} \left(\frac{H_o}{g} \right)^{4/3} . \end{aligned} \quad (52)$$

Insgesamt erhält man unter den Bedingungen von Gl. (49) und (51)

$$\overline{\langle z^2 \rangle} < 713.5 \left(\frac{H_0}{g} \right)^{4/3}. \quad (53)$$

Untere Schranke für $\overline{\langle z^2 \rangle}$:

Mit Hilfe der beiden Längen L_1 und $L_2 > L_1$ definiere man

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \min_{|l| < L_1} \{ \mathcal{H}(\ell) \} \\ E_2 &= \max_{L_2 \leq l < L_2 + L_1} \{ \mathcal{H}(\ell) \} \end{aligned} \quad (54)$$

und betrachte die Wahrscheinlichkeit p_1 , daß $\mathcal{H}(\ell)$ auf dem Intervall $[-L_1, +L_1]$ größer als $-E$ und auf $[L_2; L_2 + L_1]$ kleiner als $-E$ ($E > 0$):

$$\begin{aligned} p_1 &= \text{Prob} \left\{ \min_{|l| < L_1} \{ \mathcal{H}(\ell) \} > -E \text{ und} \right. \\ &\quad \left. \max_{L_2 \leq l < L_2 + L_1} \{ \mathcal{H}(\ell) \} < -E \right\} \\ &= p_1(L_1, L_2, E). \end{aligned} \quad (55)$$

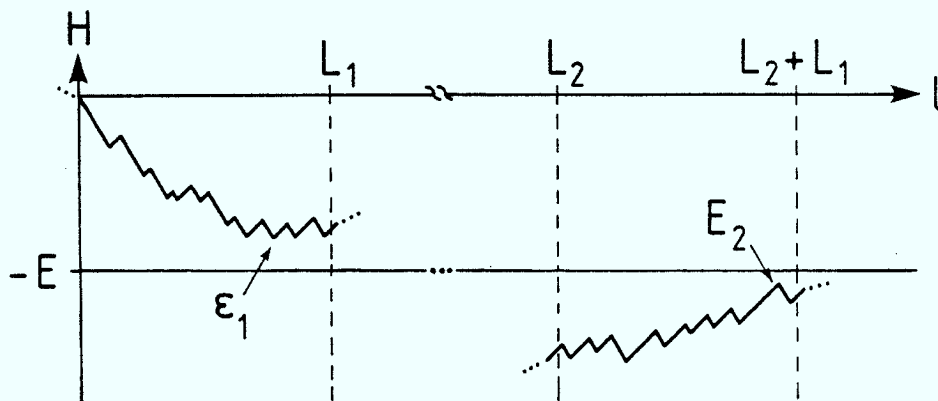


Abb. 3 Realisation von $\mathcal{H}(\ell)$ mit $\epsilon_1 > -E > E_2$ (vgl. Text)

p_1 ist somit ein Maß dafür, daß im Abstand $O(L_1)$ ein lokales Minimum von $\mathcal{H}(\ell)$ auftritt (es stellt sich weiterhin heraus, daß $L_2 = O(L_1)$ sein muß). Via p_1 erhält

man eine Abschätzung von $\overline{\langle \ell^2 \rangle}$ nach unten (vgl. Definition von $\overline{\langle \ell^2 \rangle}$, Gl. (11)):

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \ell^2 e^{-\beta \mathcal{H}(\ell)} &\geq \sum_{|\ell| \geq L_1} \ell^2 e^{-\beta \mathcal{H}(\ell)} \\
&\geq L_1^2 \sum_{|\ell| \geq L_1} e^{-\beta \mathcal{H}(\ell)}, \\
2 \cdot \sum_{|\ell| \geq L_1} e^{-\beta \mathcal{H}(\ell)} &\geq 2 \sum_{\ell=L_2}^{L_2+L_1} e^{-\beta \mathcal{H}(\ell)} \\
&\geq 2L_1 e^{-\beta E_2} \\
&\geq 2L_1 e^{-\beta \epsilon_2} \\
&\geq \sum_{|\ell| < L_1} e^{-\beta \mathcal{H}(\ell)} \tag{56}
\end{aligned}$$

da $\epsilon_1 > -E > E_2$ mit Wahrscheinlichkeit p_1 , und damit

$$\begin{aligned}
\overline{\langle \ell^2 \rangle} &\geq L_1^2 \left[\frac{\sum_{|\ell| \geq L_1} e^{-\beta \mathcal{H}(\ell)}}{\left(\sum_{|\ell| \geq L_1} + \sum_{|\ell| < L_1} \right) e^{-\beta \mathcal{H}(\ell)}} \right] \\
&\geq L_1^2 \cdot \frac{1}{3} p_1. \tag{57}
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, daß für eine spezielle Wahl der Parameter L_1, L_2 und E p_1 *nicht* Null ist und das gewünschte Verhalten $\overline{\langle \ell^2 \rangle} \sim \left(\frac{H_0}{g} \right)^{4/3}$ erzielt wird.

Zu diesem Zweck wird im folgenden ein Ereignis konstruiert, daß für Gl. (55) hinreichend ist und dessen Wahrscheinlichkeit somit eine untere Schranke für p_1 darstellt.

Das Ereignis lautet

- a) man konstruiere eine *hinreichende* Bedingung dafür, daß $E_2 < -E$,
- b) man fordere $\epsilon_1 > -E$ mit $\mathcal{H}(L_1)$ fest,
- c) man gebe die Bedingung an, daß a) und b) gleichzeitig erfüllt sind.

Bedingung a)

$$\mathcal{H}(L_2) = -2E - v, \quad v > 0 \tag{58}$$

und

$$\max_{0 \leq \ell < L_1} \{S_{\ell+L_2}\} < E + v - \eta \{(L_2 + L_1)^2 - L_2^2\}$$

d.h.: $\mathcal{H}(\ell)$ besitzt nach L_2 Schritten den Wert $-2E-v$ und der maximale Zuwachs des RWs S_ℓ in den nächsten L_1 Schritten ist kleiner als $E+v$ -(Potentialdifferenz zwischen $L_2 + L_1$ und L_1). Die zugehörige Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\begin{aligned} B(L_1; E + v - \eta(2L_1L_2 + L_1^2)) dv = \\ = Prob \left\{ \max_{0 \leq \ell < L_1} \{S_\ell\} < E + v - \eta(2L_1L_2 + L_2^2) \right\} . \end{aligned} \quad (59)$$

Bedingung b)

$$\min_{0 \leq \ell < L_1} \{\mathcal{H}(\ell)\} > -E \text{ und } \mathcal{H}(L_1) = u \quad (60)$$

mit

$$\begin{aligned} A(L_1; E, u) du = Prob \left\{ \min_{0 \leq \ell < L_1} \{\mathcal{H}(\ell)\} > -E \text{ und } \right. \\ \left. \mathcal{H}(L_1) = -u \right\} . \end{aligned} \quad (61)$$

Bedingung c)

Der RW S_ℓ muß von L_1 nach L_2 die Differenz

$$\mathcal{H}(L_2) - \mathcal{H}(L_1) = -2E - v + u$$

bzw.

$$S_{L_2-L_1} = -2E - v + u - \eta(L_2^2 - L_1^2) \quad (62)$$

zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit ist gleich

$$\begin{aligned} Y(L_2 - L_1; 2E + v - u + \eta(L_2^2 - L_1^2)) = \\ = Prob \{S_{L_2-L_1} = 2E + v - u + \eta(L_2^2 - L_1^2)\} . \end{aligned} \quad (63)$$

Insgesamt ergeben a) - c) die untere Schranke

$$\begin{aligned} p_1 \geq \int_{-\infty}^{+\infty} du A(L_1; E, u) \int_0^\infty dv Y(L_2 - L_1; 2E + v - u + \eta(L_2^2 - L_1^2)) \times \\ \times B(L_1; E + v - \eta(2L_2L_2 + L_1^2)) . \end{aligned} \quad (64)$$

Da

$$\min_{0 \leq \ell < L_1} \{S_\ell\} > -E \quad \text{und} \quad S_{L_1} = -u - \eta L_1^2$$

die Bedingung b) implizieren mit

$$\begin{aligned} A_o(L_1; E, u + \eta L_1^2) du = \\ = \text{Prob} \left\{ \min_{0 \leq \ell < L_1} \{S_\ell\} > -E \quad \text{und} \quad S_{L_1} = -u - \eta L_1^2 \right\} \end{aligned} \quad (65)$$

folgt

$$\begin{aligned} p_1 \geq \int_{-\infty}^{+\infty} du A_o(L_1; L, u + \eta L_1^2) \int_0^\infty dv Y(L_2 - L_1; 2E + v - u + \eta(L_2^2 - L_1^2)) \times \\ \times B(L_1; E + v - \eta(2L_1 L_2 + L_1^2)) . \end{aligned} \quad (66)$$

Die Variablentransformation $u \rightarrow u + \eta L_1^2$ und die Beschränkung auf $u \geq 0$ erlauben, im Argument von Y $u=0$ zu setzen. Letzteres bedeutet, daß der RW zwischen L_1 und L_2 eine größere Distanz zurücklegen muß. Weiterhin folgt aus $v = 0$ im Argument von B eine Verkleinerung, da nun $\mathcal{H}(\ell)$ im Intervall $[L_2, L_2 + L_1]$ höchstens $-E - v$ erreicht. Demnach gilt

$$\begin{aligned} p_1 \geq \int_0^\infty du A_o(L_1; E; u) \int_0^\infty dv Y(L_2 - L_1; 2E + v + \eta L_2^2) \times \\ \times B(L_1; E - \eta(2L_1 L_2 + L_1^2)) . \end{aligned} \quad (67)$$

Das Argument von B muß positiv und von der Ordnung $L^{1/2}$ sein;

$$E - \eta(2L_1 L_2 + L_1^2) = \lambda L_1^{1/2} \quad (68)$$

mit

$$\lambda > 0 \quad \text{und} \quad \lambda = O(1) .$$

Wählt man

$$E = \eta(1 + \gamma) L_1^2 , \quad (69)$$

so ist

$$\begin{aligned} p_1 \geq \int_0^\infty du A_o(L_1; \eta(1 + \gamma) L_1^2, u) \times \\ \times \int_0^\infty dv Y(L_2 - L_1; 2\eta(1 + \gamma) L_1^2 + \eta L_2^2 + v) \times \\ \times B(L_1; \lambda L_1^{1/2}) . \end{aligned} \quad (70)$$

und via Gl. (68)

$$\gamma\eta L_1^2 - 2\eta L_1 L_2 = \lambda L_1^{1/2} \quad (71)$$

Gl. (69) eliminiert den Parameter E und Gl. (71) liefert eine Beziehung zwischen L_1 und L_2 ($> L_1$)

$$L_2 = L_1 \frac{1}{2} (\gamma - \lambda\eta^{-1} L^{-3/2}) . \quad (72)$$

Die Wahl

$$\eta^{-1} L_1^{-3/2} = \sigma > 0 , \quad (73)$$

macht Gl. (72) unabhängig von den Systemparametern H_o , g und a. Man erhält

$$\begin{aligned} L_2 &= L_1 \frac{1}{2} (\gamma - \lambda\sigma), \quad \gamma > 2 + \lambda\sigma , \\ L_1^2 &= (\sigma \cdot \eta)^{-4/3} \\ &= \left(\frac{4H_o}{\sigma g} \right)^{4/3} a^{-2} \\ E &= \sigma^{-1} (1 + \gamma) L_1^{1/2} . \end{aligned} \quad (74)$$

Der Beitrag von B lautet (s. Anh. a Gl. (A19))

$$\begin{aligned} B(L_1; L_1^{1/2}\lambda) &= Prob \left\{ \max_{0 \leq \ell < L_1} \{S_\ell\} < \lambda L_1^{1/2} \right\} \\ &= 1 - Prob \left\{ \max_{0 \leq \ell < L_1} \{S_\ell\} \geq \lambda L_1^{1/2} \right\} \\ &> 1 - 1.17 e^{-0.49\lambda^2} . \end{aligned} \quad (75)$$

Da $B > 0$ ist, gilt die Einschränkung

$$\lambda^2 > \frac{\ln 1.17}{0.49}$$

bzw.

$$\lambda > 0.57 . \quad (76)$$

A_o liefert

$$\begin{aligned} \int_0^\infty du A_o(L_1; \eta(1 + \gamma)L_1^2, u) &= \\ &= Prob \left\{ \min_{0 \leq \ell < L_1} \{S_\ell\} > -\sigma^{-1}(1 + \gamma)L_1^{1/2} \text{ und } S_{L_1} \geq 0 \right\} \\ &\geq Prob\{S_{L_1} \geq 0\} - Prob \left\{ \min_{0 \leq \ell < L_1} \{S_\ell\} \leq -\sigma^{-1}(1 + \gamma)L_1^{1/2} \right\} \\ &> \frac{1}{2} - 1.17 \exp(-0.49 \cdot \sigma^{-2}(1 + \gamma)^2) \end{aligned} \quad (77)$$

mit der Bedingung

$$\sigma^{-1}(1 + \gamma) > \sqrt{\frac{\ell n \ 2.34}{0.49}} \cong 1.32 . \quad (78)$$

Zuletzt betrachte man Y:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dv \ Y \left(L_2 - L_1; 2\eta(1 + \gamma)L_1^2 + \eta L_2^2 + v \right) &= \\ &= Prob \left\{ S_{\frac{1}{2}(\gamma-2-\lambda\sigma)L_1} \geq \sigma^{-1} \left\{ 2(1 + \gamma) + \frac{1}{4}(\gamma - \lambda\sigma)^2 \right\} L_1^{1/2} \right\} \\ &= Prob \left\{ S_{\in L_1} \geq \rho L_1^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (79)$$

mit

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2}(\gamma - 2 - \lambda\sigma) \\ \rho &= \sigma^{-1} \left\{ 2(1 + \gamma) + \frac{1}{4}(\gamma - \lambda\sigma)^2 \right\} . \end{aligned}$$

Faßt man die Beiträge zusammen, so erhält man (für $L_1 \geq 100$)

$$p_1 > (1 - 1.17e^{-0.49\lambda^2}) \left(\frac{1}{2} - 1.17e^{0.49\frac{(1+\gamma)^2}{\sigma^2}} \right) \cdot Prob\{S_L \geq \alpha L^{1/2}\} \quad (80)$$

wobei

$$\alpha = \frac{4(1 + \gamma) + \frac{1}{2}(\gamma - \lambda\sigma)^2}{\sigma(\gamma - 2 - \lambda\sigma)} , \quad L = \in L_1 \quad (81)$$

(zum letzten Faktor in (80) s. Anh. c).

Die Bedingungen dafür, daß die in Gl. (80) auftretenden Faktoren positiv sind, lauten (Gl. (73) ff)

$$\begin{aligned} \lambda &> 0.57 \\ \gamma &> 2 + \lambda\sigma \\ \gamma &> 1.32\sigma - 1 \\ \alpha &\leq \frac{1}{2} . \end{aligned} \quad (82)$$

Wählt man $\alpha = \frac{1}{2}$, so gilt (s. Anh. c)

$$Prob\left\{S_L \geq \frac{1}{2}L^{1/2}\right\} > 0.1556 ; \quad (83)$$

$\lambda = 1$ liefert

$$(1 - 1.17e^{-0.49\lambda^2}) \cong 0.2832 , \quad (84)$$

so daß noch verbleibt

$$\begin{aligned}\gamma &> 2 + \sigma \\ \gamma &> 1.32\sigma - 1 \\ \frac{8(1 + \gamma) + (\gamma - \sigma)^2}{\sigma(\gamma - 2 - \sigma)} &= 1 .\end{aligned}\quad (85)$$

Die letzte Bedingung liefert γ als Funktion von σ

$$\gamma^2 - (3\sigma - 8)\gamma + 8 + 2\sigma + 2\sigma^2 = 0$$

bzw.

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{2}(3\sigma - 8) \pm \frac{1}{2}(\sigma^2 - 56\sigma + 32)^{1/2} ; \quad (86)$$

dies wiederum erfordert wegen $\gamma, \sigma > 0$

$$0 < \sigma < 0.577 \quad \text{oder} \quad 55.423 < \sigma . \quad (87)$$

Der erste Lösungsbereich scheidet wegen $\gamma > 0$ aus, so daß $\sigma = 60$ gewählt wird, woraus sich $\gamma_+ = 94.246$ oder $\gamma_- = 77.754$ ergibt. Letztere Lösung wird durch Gl. (82) ausgeschlossen, also gilt, daß

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2} , \quad \lambda = 1 \\ \sigma &= 60 , \quad \gamma = 94.246\end{aligned}\quad (88)$$

eine zulässige Parameterwahl ist. Der Beitrag von A_o liefert dann

$$\frac{1}{2} - 1.17e^{-0.49\frac{(1+\gamma)^2}{\sigma^2}} \cong 0.1597 \quad (89)$$

so daß insgesamt gilt

$$p_1 > 7.0 \cdot 10^{-3} . \quad (90)$$

Damit ist die untere Schranke von $\overline{\langle z^2 \rangle}$ gegeben

$$\overline{\langle \ell^2 \rangle} > \frac{1}{3}a^{-2} \left(\frac{4H_o}{\sigma g} \right)^{4/3} \cdot p_1$$

also

$$\overline{\langle z^2 \rangle} > 6.3 \cdot 10^{-5} \left(\frac{H_o}{g} \right)^{4/3} . \quad (91)$$

Gl. (53) und (91) implizieren damit das Skalenverhalten

$$\overline{\langle z^2 \rangle} \sim \left(\frac{H_o}{g} \right)^{4/3}.$$

Damit können jetzt auch thermische Fluktuationen abgeschätzt werden: die Energiedifferenz zweier Minima von $\mathcal{H}$ E_1 und E_2 für $z_2 < 0 < z_1$ (s. Abb. 4) seien von der Ordnung $T > |E_1 - E_2|$. Für E_1 bzw. E_2 selber gilt $E_1 \sim E_2 \sim \overline{\langle E \rangle} = -g \overline{\langle z^2 \rangle} \sim -H_o (H_o/g)^{1/3}$. Daher ist die Wahrscheinlichkeit für $|E_1 - E_2| < T$ von der Ordnung

$$P_T \sim \frac{T}{H_o} \cdot \left(\frac{H_o}{g} \right)^{-1/3}. \quad (92)$$

Die Differenz $\Delta z = z_1 - z_2$ hat das 2. Moment $\overline{\langle (\Delta z)^2 \rangle} \sim (H_o/g)^{4/3}$, so daß das Produkt $P_T \cdot (\Delta z)^2$ proportional zu T/g ist und dem exakten 2. Moment $\overline{\langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle} = T/g$ (Gl. (8)) entspricht. Dies bedeutet, daß große thermische Fluktuationen $z - \langle z \rangle \approx \langle z^2 \rangle^{1/2}$ einen endlichen Beitrag zum zweiten Moment liefern.

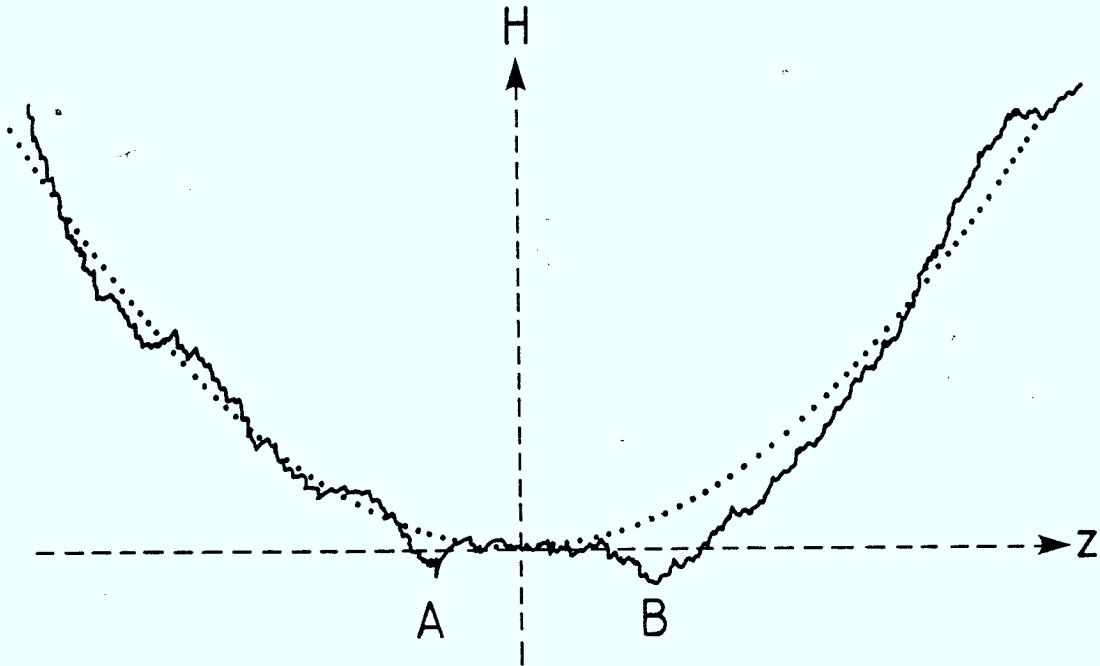


Abb. 4 Eine Realisation von $\mathcal{H}$. Bei endlicher Temperatur kann die Wahrscheinlichkeit, daß ein zweites Minimum B weit entfernt von A mit $\mathcal{H}(A) - \mathcal{H}(B) < T$ existiert, nicht vernachlässigt werden. Sein Beitrag zu höheren Momenten von z ist groß.

Höhere Momente können nun nach unten abgeschätzt werden ($p \geq 1$):

$$\begin{aligned} \overline{(z - \langle z \rangle)^{2p}} &> P_T \overline{(z_1 - z_2)^{2p}} \\ &> \frac{T}{H_o} \left(\frac{H_o}{g} \right)^{\frac{4p-1}{3}}, \end{aligned} \quad (93)$$

was für tiefe Temperaturen und $p > 1$ viel größer als $\left[\overline{(z - \langle z \rangle)^2} \right]^p \sim (T/g)^p$ ist. Daher haben die thermischen Fluktuationen eine ausgeprägte *nicht*-Gaußsche Form.

II. Kapitel

b) Domänenwände im RFIM für $2 \leq D = d + 1 < 5$

Für $D \geq 2$ soll die Fluktuation $\langle z^2 \rangle$ der Domänenwand berechnet werden. Dazu wird angenommen, daß die Wand aus mehreren Domänen mit der Ausdehnung b^ℓ und der Höhe z besteht.

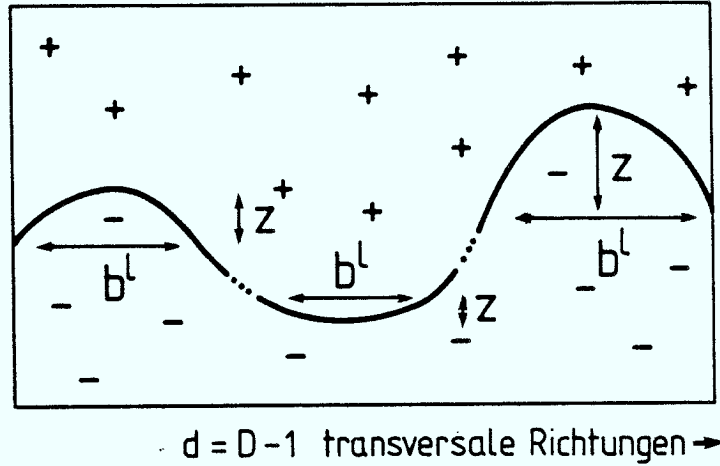


Abb. 5 Domänenwand im RFIM für $D \geq 2$

Wenn die Wechselwirkung der Domänen untereinander vernachlässigt wird, kann die Domänenwand durch die unabhängigen Höhen z der einzelnen Domänen beschrieben werden und als zugehörige Energie ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \text{ferromagnetischer Austausch} &: J \times \text{Oberfläche} \\
 &= J b^{\ell(D-3)} z^2 \\
 &= J b^{\ell(d-2)} z^2
 \end{aligned} \tag{94}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Zeeman Energie} &: H_o \times (\text{Volumen})^{1/2} \\
 &= H_o \left(b^{\ell(D-1)} z \right)^{1/2} \\
 &\cong H_o b^{\ell d/2} \sum_{\mu < z/a} X_\mu, \quad X_\mu = \pm 1
 \end{aligned} \tag{95}$$

d.h. jeder Freiheitsgrad der Domänenwand kann durch die Hamiltonfunktion des

1-d Modells von Kap. II.a beschrieben werden:

$$\begin{aligned} g &\rightarrow J_\ell = J \, b^{\ell(d-2)} , \\ H_o &\rightarrow H_\ell = H_o \, b^{\ell d/2} \end{aligned}$$

Mit dem Ergebnis des vorigen Abschnitts folgt

$$\begin{aligned} \langle z^2 \rangle &\sim \left(\frac{H_\ell}{g_\ell} \right)^{4/3} \\ &\sim \left(\frac{H_o}{J} \right)^{4/3} b^{\ell(4-d)2/3} \end{aligned} \quad (96)$$

als mittlere quadratische Höhe einer einzelnen Domäne der Länge b^ℓ (Villain, 1985).

Für die Funktion $T \cdot \Delta(k)$ (s. Kap. I.c Gl. (25)) gilt

$$T\Delta(k) \sim H_o^{4/3} J^{2/3} k^{(5-D)/3} , \quad (97)$$

was durch Einsetzen und Integrieren über k mit $k > b^{-\ell}$ in $D-1 = d$ Dimensionen folgt.

Die thermischen Fluktuationen auf der Länge b^ℓ sind von der Ordnung (s. Kap. II.a Gl. (92))

$$\begin{aligned} P_T(\ell) &\sim \frac{T}{H_\ell} \left(\frac{H_\ell}{J_\ell} \right)^{-1/3} \\ &\sim \frac{T}{H_o} \left(\frac{H_o}{J} \right)^{-1/3} b^{-\ell(d+2)/3} . \end{aligned} \quad (98)$$

Da das System für $T = 0$ einen nicht entarteten (ferromagnetischen) Grundzustand besitzt und für $T > 0$ Fluktuationen der Länge b^ℓ nur mit einer Wahrscheinlichkeit $\sim b^{-\ell(d+2)/3}$ angeregt werden, bleiben die (replikasymmetrischen) Identitäten von Kap. I.b/c trotz der starken Fluktuationen (s. S. 22) gültig.

II. Anhang

a) Abschätzung der Wahrscheinlichkeit $Prob\left\{\min_{0 \leq \ell \leq L} \sum_{\mu=0}^{\ell} X_{\mu} \leq -m\right\}$

Für einen symmetrischen RW, der bei $S_0 = 0$ startet,

$$S_{\ell} = \sum_{\mu=0}^{\ell} X_{\mu}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (A1)$$

$$Prob\{X_{\mu} = \pm 1\} = \frac{1}{2}$$

soll eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit gefunden werden, daß das Minimum von S_{ℓ} nach L Schritten den Wert $-m$ nicht unterschreitet.

Zunächst definiert man ($0 \leq r \leq L$)

$$P_o(L; r) = Prob\left\{\sum_{\mu=0}^L X_{\mu} = r\right\} \quad (A2)$$

$$\begin{aligned} &= P_o(L; -r) \\ &= 2^{-L} \frac{L!}{\left(\frac{L+r}{2}\right)! \left(\frac{L-r}{2}\right)!}; \end{aligned} \quad (A3)$$

$P_o(L; r)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß S_{ℓ} nach L Schritten genau den Wert r (oder auch $-r$) annimmt. Denn es sei

$$n_+ \hat{=} \text{Anzahl der Schritte mit } X_{\mu} = +1$$

$$n_- \hat{=} \text{Anzahl der Schritte mit } X_{\mu} = -1$$

so folgt

$$\begin{aligned} n_+ + n_- &= L \\ n_+ - n_- &= r \end{aligned} \quad (A4)$$

also

$$\begin{aligned} n_+ &= \frac{L+r}{2} \\ n_- &= \frac{L-r}{2}; \end{aligned} \quad (A5)$$

da jeder der L Schritte mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ gemacht wird, ergibt sich Gl. (A3).

Weiterhin setze man

$$Q_o(L; r, m) = \text{Prob} \left\{ \min_{0 \leq \ell \leq L} \{S_\ell\} \leq -m \text{ und } S_L = r \right\} \quad (A6)$$

und betrachte folgende Alternative

- a) $m < 0$ oder $r \leq -m$:
in diesem Fall gilt

$$Q_o(L; r, m) = P_o(L; r) , \quad (A7)$$

da die obigen Bedingungen keine Einschränkung für den RW darstellen.

- b) $m \geq 0$ und $r > -m$:

diese RWs treffen den Wert $-m$ mindestens einmal, z.B. bei Schritt ℓ_o zum ersten mal. Spiegelt man den ersten Teil des RW (s. Abb. 4), so erhält man einen RW, der bei $-2m$ startet und damit die Strecke $2m + r$ in L Schritten zurücklegt. Da der Startpunkt keine Rolle spielt, folgt

$$Q_o(L; r, m) = P_o(L; r + 2m) . \quad (A8)$$

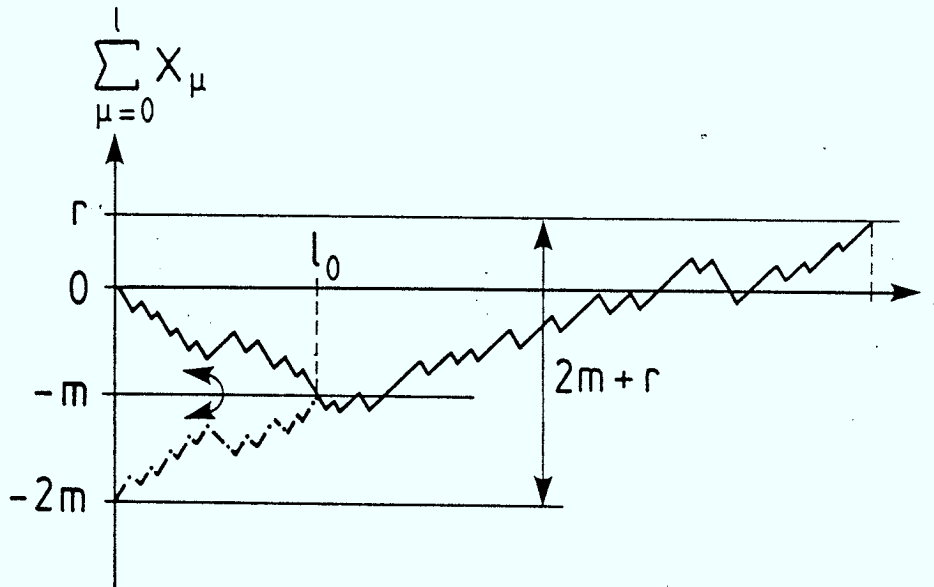


Abb. 6 Random Walk mit $\min_{0 \leq \ell \leq L} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\ell} X_{\mu} \right\} < -m$

Da die Fälle a) und b) disjunkte Ereignisse darstellen, gilt

$$\begin{aligned}
\text{Prob} \{ \min_{0 \leq \ell \leq L} \{S_\ell\} \leq -m \} &= \sum_{r=-L}^L Q_o(L; r, m) \\
&= \sum_{r=-m}^{-L} P_o(L; r) + \sum_{r=-m+1}^L P_o(L; r+m) \\
&= 2 \sum_{r=0}^L P_o(L; r+m) - P_o(L; m) . \\
&= 1 \quad \text{für } m \leq 0 ;
\end{aligned} \tag{A9}$$

Obere Schranke für $P_o(L; r)$:

Aus Gl. (A3) folgt

$$P_o(L; r) = g(L) \cdot \frac{\left[\left(\frac{L}{2}\right)!\right]^2}{\left(\frac{L+r}{2}\right)! \left(\frac{L-r}{2}\right)!} \tag{A10}$$

mit

$$g(L) = 2^{-L} \frac{L!}{\left[\left(\frac{L}{2}\right)!\right]^2} .$$

Mit Hilfe der Gammafunktion $\Gamma(z+1) = z!$ läßt sich P_o wie folgt darstellen

$$\begin{aligned}
P_o(L; r) &= g(L) \cdot \frac{\left[\Gamma\left(1 + \frac{L}{2}\right)\right]^2}{\Gamma\left(1 + \frac{L}{2} + \frac{r}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{L}{2} - \frac{r}{2}\right)} \\
&= g(L) \cdot \prod_{k=0}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{r/2}{k+1 + \frac{L}{2}}\right) \left(1 - \frac{r/2}{k+1 + \frac{L}{2}}\right) \right]
\end{aligned} \tag{A11}$$

(Gradhsteyn/Ryzhik, 1980, S. 936 Gl. (8.325 - 1))

$$\ell n P_o(L; r) = \ell n g(L) + \sum_{k=0}^{\infty} \ell n \left[1 - \frac{r^2}{(2k+L+2)^2} \right] .$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\frac{r^2}{(2k+L+2)^2} &< 1 \quad \text{für } k \geq 0 \\
&\text{und } 0 \leq r \leq L , \\
\ell n(1-x^2) &< -x^2 \quad \text{für } x^2 < 1
\end{aligned}$$

gilt

$$\ell n P_o(L; r) < \ell n g(L) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^2}{(2k+L+2)^2} . \tag{A12}$$

Da für eine Funktion f mit $f' < 0$ und $f > 0$ gilt

$$\int_0^\infty dk f(k) + f(0) - f(\infty) > \sum_{k=0}^\infty f(k) > \int_0^\infty dk f(k), \quad (A13)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \ln P_o(L; r) &< \ln g(L) - \int_0^\infty dk \frac{r^2}{(2k + L + 2)^2} \\ &< \ln g(L) - \frac{1}{2} \frac{r^2}{L + 2}. \end{aligned} \quad (A14)$$

Der Faktor $g(L)$ wird wie folgt abgeschätzt:

$$\sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{1}{12n}}$$

(Robbins, 1955, s.a. Feller, 1966, S. 52) dies liefert

$$\begin{aligned} g(L) &< \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2^{-L} \cdot L^{L+\frac{1}{2}} e^{-L+\frac{1}{12L}}}{\left[\left(\frac{L}{2} \right)^{\frac{L}{2}+\frac{1}{2}} e^{-\frac{L}{2}+\frac{1}{6L+1}} \right]^2} \\ &< \sqrt{\frac{2}{\pi L}} e^{\frac{1}{12L}-\frac{2}{6L+1}} \\ g(L) &< \sqrt{\frac{2}{\pi L}} \exp \left(-\frac{18L-1}{12L(6L+1)} \right). \end{aligned} \quad (A15)$$

Insgesamt liefern die Gln. (A14/15) die gewünschte Abschätzung

$$P_o(L; r) < \sqrt{\frac{2}{\pi L}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{r^2}{L+2} \right). \quad (A16)$$

Obere Schranke für $\text{Prob} \left\{ \min_{0 \leq \ell \leq L} \{S_\ell\} \leq -x \right\}$:

Aus Gl. (A9) und (A16) folgt

$$\begin{aligned} \text{Prob} \left\{ \min_{0 \leq \ell \leq L} \{S_\ell\} \leq -x \right\} &< 2 \left(\frac{2}{\pi L} \right)^{1/2} \sum_{r=0}^L e^{-\frac{1}{2} \frac{(x+r)^2}{L+2}} \\ &< 2 \left(\frac{2}{\pi L} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{L+2}} \sum_{r=0}^{L/2} e^{-2 \frac{r^2}{L+2}} \end{aligned} \quad (A17)$$

mit $r \rightarrow 2r'$ ($r' = 0, 1, 2, \dots$) da r gerade ist. Die Summe wird dominiert durch (vgl. (A13))

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{L/2} e^{-2\frac{r^2}{L+2}} &< \int_0^\infty dr e^{-2\frac{r^2}{L+2}} + 1 \\ &< \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (L+2) + 1 \end{aligned} \quad (A18)$$

damit gilt

$$Prob \left\{ \min_{0 \leq \ell \leq L} \{S_\ell\} \leq -x \right\} < M(L; x) \quad (A19)$$

mit

$$\begin{aligned} M(L; x) &= e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{L+2}} \left(\sqrt{\frac{L+2}{L}} + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} L^{-1/2} \right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{L+2}} \left(\sqrt{\frac{L+2}{L}} + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} a^{1/2} \left(\frac{4H_o}{g} \right)^{-1/3} \right) \end{aligned}$$

Bei *endlicher* Gitterkonstanten a und festgewählter Stärke der Zufallsfelder (H_o) und des Potentials (g) folgt aus der Bedingung $L \geq 100$ wegen (s. Gl. (44))

$$L = a^{-1} \left(\frac{4H_o}{g} \right)^{2/3}$$

eine obere Grenze für a :

$$a \leq \frac{1}{100} \cdot \left(\frac{4H_o}{g} \right)^{2/3} . \quad (A20)$$

Für $L \geq 100$ gilt

$$2\sqrt{\frac{2}{\pi}} L^{-1/2} \leq \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cong 0.16 , \quad (A21)$$

und daher

$$M(L; x) < 1.17 e^{-0.49 \cdot x^2/L} . \quad (A22)$$

II. Anhang

b) Numerische Werte der Reihen, die in der Abschätzung von $\overline{\langle z^2 \rangle}$ auftreten

Mit der Voraussetzung

$$\frac{4H_o}{g} > 1 \quad \text{und} \quad \frac{H_o}{T} > \frac{3}{2} \quad (\text{A23})$$

und unter Benutzung von Gl. (A19) ergeben sich folgende Werte für die Reihen von Gl. (45) – (48):

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)^2 \exp \left(-\frac{2}{3} \frac{H_o}{T} \left(\frac{4H_o}{g} \right)^{4/3} m^2 \right) \\ &\leq 1.6 \end{aligned} \quad (\text{A24})$$

$$\begin{aligned} s_2 &= \sum_{m=2}^{\infty} (m+1)^2 \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{L}{L+2} \frac{1}{9} (m^2 - 3)^2 \right) \\ &\leq 10.8 \end{aligned} \quad (\text{A25})$$

$$\begin{aligned} s_3 &= \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)^2 \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{L}{L+2} \frac{1}{9} \frac{m^4}{m+1} \right) \\ &\leq 17.6 \end{aligned} \quad (\text{A26})$$

$$\begin{aligned} s_4 &= \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)^2 \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{L}{L+2} \frac{4}{9} \frac{m^4}{m+1} \right) \\ &\leq 6.6 \end{aligned} \quad (\text{A27})$$

jeweils für $L \geq 100$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \overline{\langle \ell^2 \rangle} &< a^{-2} \left(\frac{H_o}{g} \right)^{4/3} \left\{ 1 + 1.17 (2s_2 + s_3 + s_4) + \right. \\ &\quad \left. + s_1 \left(\frac{H_o}{T}, \frac{4H_o}{g} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A28})$$

$$< a^{-2} \left(\frac{H_o}{g} \right)^{4/3} \left\{ c + f \left(\frac{H_o}{T}, \left(\frac{H_o}{g} \right)^{4/3} \right) \right\} \quad (\text{A29})$$

mit

$$c \cong 658.7$$

$$f(x, y) \cong 12.7 \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)^2 e^{-\frac{2}{3}4^{1/3}xy^{1/4}m^2}$$

Für $y^{1/4} > 4^{-1/3}$ ($\hat{=} \frac{4H_o}{g} > 1$) und $x > \frac{3}{2}$ ($\hat{=} \frac{H_o}{T^2} > \frac{3}{2}$) erhält man

$$f(x, y) < 54.8$$

und ($z = \ell a$)

$$\overline{\langle z^2 \rangle} < 713.5 \left(\frac{H_o}{g} \right)^{4/3} . \quad (A30)$$

II. Anhang

c) Abschätzung der Wahrscheinlichkeit $Prob\left\{\sum_{\mu=0}^L X_{\mu} \geq \alpha L^{1/2}\right\}$

Das Ereignis $S_L = \sum_{\mu=0}^L X_{\mu} \geq \alpha L^{1/2}$, $\alpha = O(1)$, stellt eine große Fluktuation des RWs um den Mittelwert 0 dar. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit soll nach unten abgeschätzt werden. Es gilt

$$\begin{aligned}
 Prob\{S_L \geq \alpha L^{1/2}\} &= 1 - Prob\{S_L < \alpha L^{1/2}\} \\
 &> \frac{1}{2} - \sum_{r=0}^{\alpha L^{1/2}} P_o(L; r), r \text{ gerade} \\
 \text{mit Anh. a folgt} \\
 &> \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{\pi L}\right)^{1/2} \sum_{r=0}^{\alpha L^{1/2}} e^{-2\frac{r^2}{L+2}} \\
 &> \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{\pi L}\right)^{1/2} \left\{ \int_0^{\alpha L^{1/2}} dr e^{-2\frac{r^2}{L+2}} + \frac{1}{2} \left(1 - e^{-2\alpha^2 \frac{L}{L+2}}\right) \right\} \\
 &> \frac{1}{2} - \left(\frac{L+2}{L}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\alpha\sqrt{\frac{L}{L+2}}} dr e^{-\frac{1}{2}r^2} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi L}\right)^{1/2} \left(1 - e^{-2\alpha^2 \frac{L}{L+2}}\right) \\
 &> \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{L+2}{L}\right)^{1/2}\right) - \left(\frac{L+2}{L}\right)^{1/2} \phi\left(2\alpha\sqrt{\frac{L}{L+2}}\right) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi L}\right)^{1/2} \left(1 - e^{-2\alpha^2 \frac{L}{L+2}}\right). \tag{A31}
 \end{aligned}$$

Die Differenz zwischen Summe und Integral kann hier mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ abgeschätzt werden, da die Gaußfunktion im Bereich von 0 bis $\sigma = \frac{\sqrt{L+2}}{2}$ konkav ist (es wird bis $\alpha L^{1/2}$ integriert und α wird zu $\frac{1}{2}$ gewählt, s. Kap. II.b S. 19 ff). Die Funktion ϕ ist definiert als

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x d\zeta e^{-\frac{1}{2}\zeta^2}.$$

Referenzen

- Aharony A./Imry Y./ Ma S.K., Phys. Rev. Lett. **37**, 1364 (1976)
- Alloul H./Hippert F., J. Magn. Magn. Mat. **31 - 34**, 1321 (1983)
- Becker K.W., Phys. Rev. **B26**, 2394 (1982a)
 Phys. Rev. **B26**, 2409 (1982b)
- Beton P.H., J. Phys. **C18**, 1225 (1985)
- Beton, P.H./Moore M.A., J. Phys. **C17**, 2157 (1984)
- Brézin E./Orland H., Preprint unveröffentlicht
- Dasgupta C./Jao K.-L., Phys. Rev. **B29**, 4071 (1984)
- Dzyaloshinsky I.E., J. Phys. Chem. Solids **4**, 241 (1958)
- Dzyaloshinsky I.E./Volovick G.E., Ann. Phys. **125**, 67 (1980)
- Edwards S.F./Anderson P.W., J. Phys. **F5**, 965 (1975)
- Efetov K.B./Larkin A.I., Sov. Phys. JETP **45**, 1236 (1977)
- Feller W., *An introduction to probability theory and its applications*,
 Vol. I 2. ed., Wiley ¹²1966
- Fert A./Arvanitis D./Hippert F., Preprint
- Fert A./Levy P.M., Phys. Rev. Lett. **44**, 1538 (1980);
 Phys. Rev. **B23**, 4667 (1981)
- Fischer K., Phys. Stat. Sol. (b) **116**, 357 (1983);
 Phys. Stat. Sol. (b) **130**, 13 (1985)
- Forster D., *Hydrodynamic fluctuations, broken symmetry and correlation functions*, W.A. Benjamin, Read. Mass., 1975
- Goldberg S.M./Levy P.M./Fert A., Phys. Rev. **B33**, 276 (1986a);
 Phys. Rev. **B33**, 291 (1986b)
- Gradshsteyn I.S./Ryzhik I.M., *Table of integrals, series and products*,
 Academic Press, 1980
- Gullikson E.M./Dalichaouch R./Schultz S., Phys. Rev. **B32**, 507 (1985)
- Gullikson E.M./Fredkin D.R./Schultz S., Phys. Rev. Lett. **50**, 537 (1983)
- Halperin B.I./Hohenberg P.C., Phys. Rev. **188**, 898 (1969)
- Halperin B.I./Saslow W.M., Phys. Rev. **B16**, 2154 (1977)

- Henley C.L., Thesis Harvard, unveröffentlicht (1983);
 Ann. Phys. **156**, 324 (1984a);
 Ann. Phys. **156**, 368 (1984b)
- Henley C.L./Sompolinsky H./Halperin B.I., Phys. Rev. **B25**, 5849 (1982)
- Hippert F./Alloul H., J. de Physique **43**, 691 (1982);
 J. Appl. Phys. **53**, 7702 (1982)
- Huse D.A./Henley C.L., Phys. Rev. Lett. **54**, 2708 (1985)
- Imry Y./Ma S.K., Phys. Rev. Lett. **35**, 1399 (1975)
- Kasuya, T., Progr. Theor. Phys. **16**, 45 (1956)
- Kirkpatrick S./Sherrington D., Phys. Rev. **B17**, 4384 (1978)
 Phys. Rev. Lett. **35**, 1792 (1975)
- Kogon H.S./Wallace D.J., J. Phys. **A14**, L527 (1981)
- Levy P.M./Morgan-Pond C./ Fert A., J. Appl. Phys. **53**, 2168 (1982)
- Levy P.M./Morgan-Pond C./Raghawan R., Phys. Rev. Lett. **50**, 1160 (1983);
 Phys. Rev. **B30**, 2358 (1984)
- Machado da Silva, J.M./Abe H., J. Magn. Magn. Mat. **31-34**, 1351 (1983)
- Mahdjour H., Dissertation FU Berlin, unveröffentlicht (1987)
- Mahdjour H./Pappa C./Wender R./Baberschke K., Z. Phys. **B63**, 351 (1986)
- Maletta H., J. Appl. Phys. **53**, 2185 (1982)
- Naketta H./Felsch W. Phys. Rev. **B 20**, 1245 (1979)
- Mori H., Progr. Theor. Phys. **33**, 423 (1965a);
 Progr. Theor. Phys. **34**, 399 (1965b)
- Mori H./Kawasaki K., Progr. Theor. Phys. **27**, 529, (1962a);
 Progr. Theor. Phys. **28**, 971 (1962b)
- Moriya T., Phys. Rev. Lett. **4**, 228 (1960)
- Mulder C.A.M./Duyneveldt van A.J./ Mydosh A.J. Phys. Rev. **B 25**, 515 (1982)
- Nattermann T., J. Phys. **C16**, 4113 (1983)
- Parisi G., Phys. Rev. Lett. **43**, 1754 (1979)
- Préjean J.J./Joliclerc M.J./Monod P., J. de Physique **41**, 427 (1980)

- Ruderman M.A./Kittel C., Phys. Rev. **96**, 99 (1954)
- Saslow W.M., Phys. Rev. **B27**, 6873 (1983);
 Phys. Rev. **B33**, 7845 (1986);
 Phys. Rev. Lett. **48**, 505 (1982)
- Schultz S./Gullikson E.M./Fredkin D.R./Tovar M., Phys.Rev.Lett.**45**, 1508(1980)
 J.Appl.Phys.**52**, 1776 (1981)
- Schulz U./Villain J./Brézin E./Orland H., J. Stat. Phys. zu veröffentlichen (1988)
- Sompolinsky H./Kotliar G./Zippelius A., Phys. Rev. Lett. **52**, 392 (1984)
 Phys. Rev. **B35**, 311 (1987)
- Sompolinsky H./Zippelius A., Phys. Rev. **B 25**, 6860 (1982)
- Toulouse G./Gabay M., J. de Physique Lett. **42**, L 103 (1981)
- Villain J., in: *Scaling phenomena in disordered systems*,
 eds.: Pynn R./Skjeltorp A., Plenum (1985)
- Yosida K., Phys. Rev. **106**, 893 (1957)
- Youm D./Schultz S., Phys. Rev. **B34**, 7958 (1986)
- Young A.P., J. Phys. **C10**, L257 (1977)

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Dissertation selbst und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt habe und sie weder in der vorliegenden noch einer ähnlichen Form bei einer anderen Institution eingereicht habe.

A handwritten signature in black ink, reading 'U. Schulz'. The script is cursive and fluid, with the first letter 'U' being particularly large and stylized.

Ulrich Schulz

Jülich, 19. Mai 1988

Dank

Ich danke

Prof. Annette Zippelius für die Anregung zu dieser Arbeit und für die stete Förderung und Unterstützung, die ich von ihr erhalten habe,

Prof. Jacques Villain, mit dessen Hilfe der zweite Teil der Arbeit entstanden ist,

Karola Schneider für die Arbeit und Mühe, die sie sich mit der Erstellung des Manuskripts gegeben hat,

der Kernforschungsanlage Jülich für die großzügige Förderung meiner Arbeit,

meinen Eltern.

Ulrich Schulz

Jülich, 16. Juni 1988

