



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH GmbH

Institut für Festkörperforschung

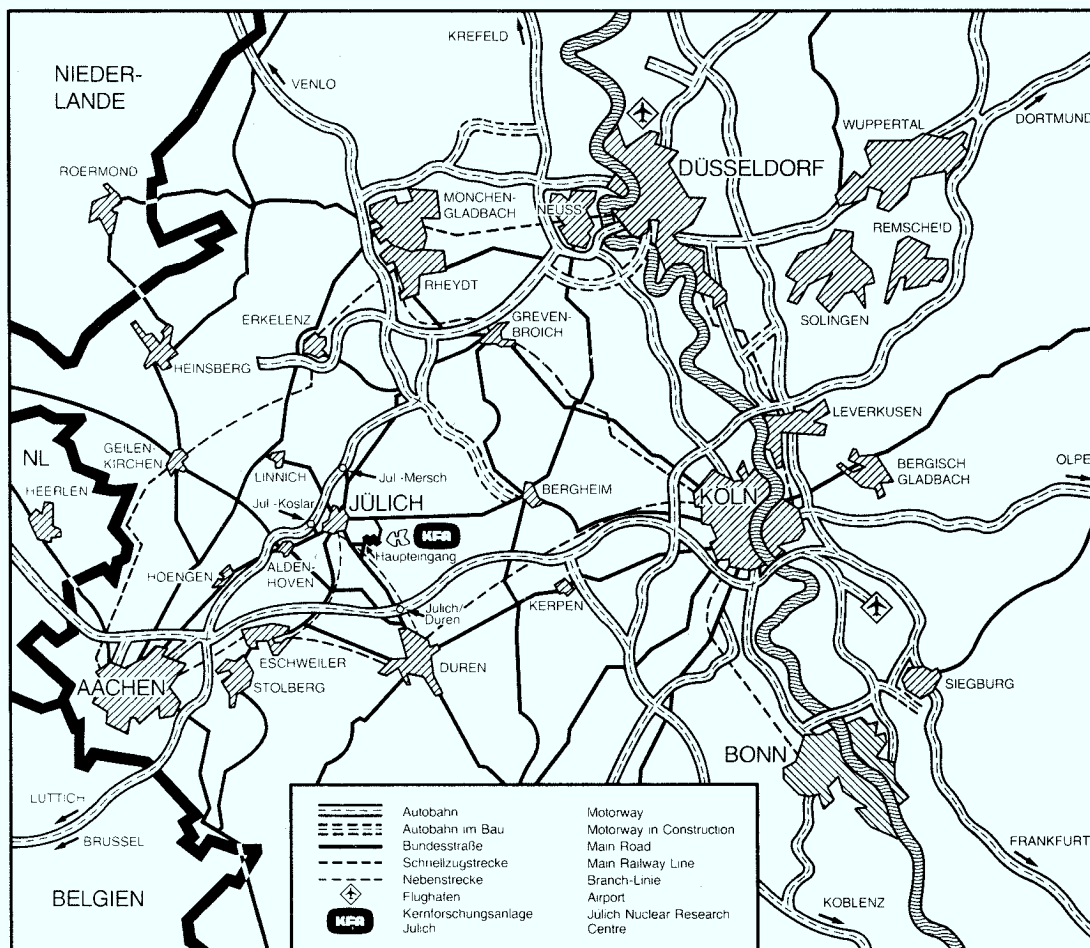
**Elektronen auf der
Kugeloberfläche im
magnetischen Monopolfeld**

**Eine Untersuchung der Greensfunktion
im white noise Potential**

von

Ralf Günther

**Jül – 2279
Mai 1989
ISSN 0366-0885**



Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 2279

Institut für Festkörperforschung Jül – 2279

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH

Postfach 1913 · D-5170 Jülich (Bundesrepublik Deutschland)

Telefon: 02461/610 · Telex: 833556-0 kf d

Elektronen auf der Kugeloberfläche im magnetischen Monopolfeld

**Eine Untersuchung der Greensfunktion
im white noise Potential**

von

Ralf Günther

D 38 (Diss. Uni. Köln)

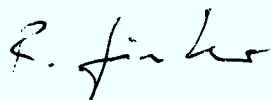
Abstract

The disorder averaged Greensfunction of non-interacting electrons in a strong magnetic field is investigated. First the known results for the plane are presented. Reduction to a zero- dimensional system enables to find the exact Greensfunction. The second part generalizes the plane to the surface of a sphere. The unperturbed problem gives representations of $SU(2)$ for the states of the electrons. Using the symmetries of these functions it is possible to construct the exact solution for up to 4 particles; the density of states shows very good agreement with the result for $N = \infty$. Perturbative expansion is investigated for arbitrary particle numbers. Each diagram corresponds to a scalar , composed of Clebsch-Gordan-coefficients. In the limit of high energy the leading behavior of the Greensfunction can be isolated. Finally a perturbative expansion of the leading corrections to the result in the plane is given.

Zusammenfassung

Die unordnungsgemittelte Greensfunktion wechselwirkungsfreier Elektronen im starken Magnetfeld in zwei Dimensionen wird untersucht. Im ersten Teil werden die bekannten Ergebnisse für den Fall der Ebene dargestellt. Die Angabe der exakten Greensfunktion gelingt aufgrund einer Reduktion auf ein nulldimensionales System. Im zweiten Teil wird die Ebene zur Kugeloberfläche verallgemeinert. Das ungestörte Problem liefert Darstellungen der $SU(2)$ für die Zustände der Elektronen. Die hohe Symmetrie dieser Funktionen erlaubt eine exakte Lösung für bis zu 4 Teilchen; die Zustandsdichten zeigen sehr gute Übereinstimmung mit dem Resultat für $N = \infty$. Die störungstheoretische Entwicklung wird für beliebige Teilchenzahlen untersucht. Jedem Diagramm kann ein aus Clebsch-Gordan-Koeffizienten gebildeter Skalar zugeordnet werden. Für hohe Energien kann mit Instantonmethoden der führende Anteil der Greensfunktion isoliert werden. Schließlich wird die führende Korrektur zum ebenen Ergebnis in störungstheoretischer Entwicklung angegeben.

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Dissertation selbst und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt habe und sie weder in der vorliegenden noch einer ähnlichen Form bei einer anderen Institution eingereicht habe.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'R. Günther', written in a cursive style.

Ralf Günther

Jülich, den 5. Mai 1989

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung

I UNENDLICHES SYSTEM

1. Wegners Resultat	10
1.1. Freie Elektronen im Magnetfeld	10
1.1.1. Zweidimensionale Dirac-Gleichung	11
1.1.2. Der Grundzustand für beliebige Magnetfelder	12
1.1.3. Grundzustandsprojektor	15
1.2. Greensfunktion mit Störstellen	16
1.2.1. perturbative Darstellung	17
1.2.2. Einführung der "Adjacency ³⁹ "-Matrix	18
1.2.3. die Ortsabhängigkeit der Greensfunktion	19
1.2.4. Eine Eigenschaft der Matrix A	21
1.2.5. Elemente der Graphentheorie	22
1.2.6. Abbildung auf 0-dimensionale Theorie	27
1.3. Die Verallgemeinerung von Brezin et. al.	29
1.3.1. Unordnungsmittelung	29
1.3.2. Graßmannvariablen	30
1.3.3. Projektion auf den Grundzustand	31
1.3.4. 'Superfelder'	32
1.3.5. Störungstheorie	34
1.3.6. 0-dimensionale Theorie	37

II ENDLICHES SYSTEM

1. Differentialgeometrischer Abriß	39
1.1. Differentialgeometrie von Fermionen	39
1.1.1. Beispiel Kugeloberfläche	42
1.2. Differentialgeometrie von Monopolen	43
2. Die Lösungen der Dirac-Gleichung	46
2.1. Grundzustandslösung	46
2.2. Spektrum des Dirac-Operators	48
3. Die unordnungsgemittelte Greensfunktion im Monopolfeld	50
3.1. Formale Darstellung der Greensfunktion	50
3.1.1. Die Eigenschaften der Monopolharmonischen	52
3.1.2. Die Ortsabhängigkeit der gemittelten Greensfunktion	53
3.1.3. Die Darstellung des ortsunabhängigen Anteils	55
3.1.4. Die Eigenschaften der Matrizen Λ	57
3.2. Näherungen	58
3.2.1. 'p-Wellen'	59
3.2.2. Restriktion auf axialsymmetrische Potentiale	61
3.2.3. $SO(n)$ -invariante Anteile	62
3.2.4. Der Grenzfall $n \rightarrow \infty$ der Näherungen	66
3.3. . Störungstheoretische Entwicklung der Greensfunktion	69
3.3.1. Die erzeugende Funktion der Störungstheorie	69
3.3.2. Abbildung der Diagramme auf C-G-Koeffizienten	72

3.4. Exakte Lösungen	80
3.4.1. Die exakten Greensfunktionen	88
3.5. ‘Instantonen’	94
3.6. $\frac{1}{n}$ -Entwicklung	101
Schluß	
Anhang A. Spektrum des Dirac-Operators in der Ebene	110
Anhang B. Stereographische Projektion	112
Anhang C. Spektrum des Dirac-Operators auf der Kugel	114
Anhang D. $\lim_{n \rightarrow \infty}$ der Lösungen auf der Kugel	117
Anhang E. Winkelintegration beim $SO(n)$ -invarianten Anteil	119
Anhang F. Berechnung von S_n	119
Anhang G. Zur Berechnung von $\mathcal{G}_4$	121
Anhang H. Umformung von ρ_4	124
Anhang I. Lloyd-Modell	126

EINLEITUNG

Obwohl die reale Welt (mindestens !) vierdimensional ist, erfreuen sich zweidimensionale Modelle in der theoretischen Physik großer Beliebtheit. Zum einen nur als ‘toy models’ von mathematischen Strukturen und physikalischen Effekten, wie in der Quantenfeldtheorie (z. B. confinement, spontane Massengeneration im Schwinger-Modell¹); oder im Rahmen der Festkörperphysik, wo der Bezug zur Realität natürlich näher ist. Dort werden zweidimensionale Systeme etwa im Zusammenhang mit kritischen Phänomenen² oder in der Lokalisierungstheorie behandelt³.

Andererseits erlaubten die Fortschritte der Halbleitertechnologie etwa seit den sechziger Jahren⁴ die Erzeugung effektiv zweidimensionaler Systeme. Zunächst nur in Metal-Oxide-Semiconductor Field-Effekt-Transistoren auf Siliziumbasis, später auch in sogenannten Heterostrukturen⁵, aufgebaut auf Galliumarsenid und Aluminium-Galliumarsenid. Den Vorteilen hoher Beweglichkeit ($10^6 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$) im zweiten Fall stehen dabei einfache Kontrolle der Ladungsträgerdichte beim MOSFET gegenüber. Diese unterschiedlichen Materialeigenschaften erlauben, neben den technologischen Anwendungen (schnellere Schaltelemente), u.a. einen Test bezüglich der Relevanz der Störstellenstreuung für einen physikalischen Effekt.

Die Zweidimensionalität dieser Systeme beruht auf einem Quanteneffekt: das elektrische Feld im nur wenige Atomlagen breiten Leitungskanal des MOSFET oder in der Grenzsicht GaAs-AlGaAs führt zur Quantisierung einer Impulskomponente der Elektronen im dort entstandenen Potentialwall. Die Energiedifferenz zwischen den niedrigsten Niveaus dieses elektrischen Unterbandes beträgt ungefähr⁶ 10 meV; d.h. bei tiefen Temperaturen ist der Impulsfreiheitsgrad senkrecht zum Wall eingefroren, und es verbleibt ein zweidimensionales Elektronengas.

Das Anlegen eines Magnetfeldes, das zusätzlich die Energieniveaus quantisiert (‘Landaubänder’), nutzt man etwa um Aufschlüsse über Ladungsträgerdichte, Bandstruktur oder Beweglichkeit zu gewinnen⁴. Abgesehen von diesen Standardanwendungen erlaubt ein magnetisches Feld allerdings noch die Untersuchung fundamentaler makroskopischer Quantenphänomene: Das Auftreten eines solchen Effektes sollte man erwarten, wenn der Zyklotronradius vergleichbar wird mit der mittleren freien Weglänge der Elektronen. Das ist bei Halbleitern ab etwa 10

Tesla der Fall. Ein Beispiel eines Quanteneffektes sind die Shubnikov-de Haas Oszillationen der Leitfähigkeit im Magnetfeld. Bei reinen Proben und unter großen Feldstärken (etwa um 10 Tesla) fanden Klitzing, Dorda und Pepper⁷ 1980 den **Quanten-Hall-Effekt**⁸: die Hall-Leitfähigkeit ist unabhängig von der Geometrie der Probe, und anderen äußeren Einflüssen (z. B. Variation der Temperatur, spezifische Art der Probe) in ganzzahlige Vielfache einer elementaren Einheit ($\frac{e^2}{h}$) gequantelt. Dabei verschwindet die longitudinale Leitfähigkeit jeweils bei solchen Magnetfeldstärken, bei denen der Hall-Widerstand unter Variation konstant bleibt ('Hall-Plateaus'). Kurze Zeit später fanden Tsui, Störmer und Gossard⁹ das Auftreten rationaler Brüche für die Werte der Hall-Leitfähigkeit: den **Fraktionierten QHE**. Die allgemeine Natur, sowie die (gerade in der Festkörperphysik) erstaunliche Präzision des Wertes des Hallwiderstands (eine relative Genauigkeit von 10^{-6} schon bei der ersten Messung) stellte für die intensive Suche nach Erklärungen von theoretischer Seite in den folgenden Jahren dabei die größte Herausforderung dar.

Frühere Rechnungen¹⁰ ergaben zwar den richtigen Wert der Leitfähigkeit für volle Besetzung eines Landauniveaus, zeigten jedoch keinen Hinweis auf die Existenz von Plateaus. Ausgehend von der weitgehenden Unabhängigkeit des Effektes von speziellen Systemparametern entwickelte Laughlin¹¹ als erster die Vorstellung einer topologischen Ursache der Quantisierung. Dieses Modell , das das planare experimentelle Hallsystem auf Zylindergeometrie abbildet, (entsprechend periodischen Randbedingungen) , wurde von Avron und Seiler¹² (' Löcher-Geometrie ') bzw von Niu,Thouless und Wu¹³(Torusgeometrie) verfeinert. Die Idee Laughlins die angelegte Spannung im Sinne der Linear Response Theorie¹⁴ durch adiabatische Flußvariation eines Hilfsmagnetfeldes zu erzeugen, wird in diesen beiden Theorien aufgenommen und mit dem kurz zuvor von Berry¹⁵ entdeckten ' geometrischen Phasenfaktor ' in Verbindung gebracht. Es wird dazu ein zweiter magnetischer Hilfsfluß eingeführt, der der Hallspannung entspricht. Man betrachtet jetzt die Änderung des Mehrteilchen-Hamiltonians des Systems unter Variation der beiden Flüsse; da die Addition eines Flußquantums eine Eichtransformation darstellt , die den Hamiltonian invariant läßt, kehrt das System nach Durchlaufen eines geschlossenen Weges im Parameterraum in den Anfangszustand zurück (unter der Voraussetzung der Nichtentartung der Niveaus). Wie Berry nun gezeigt hat, unterscheidet sich dieser Endzustand jedoch um einen Phasenfaktor von der ur-

sprünglichen Ausgangslage. Eine analoge Situation findet sich beim gewöhnlichen elektromagnetischen Eichfeld: ein geladenes Teilchen erhält nach Durchlaufen eines geschlossenen Weges im Feld einen Phasenfaktor, der identisch ist mit dem magnetischen Fluß durch die vom Weg umgrenzte Fläche (d.i. der sogenannte Bohm-Aharonov Effekt¹⁶). Der ‘ Raum ’, in dem in diesem Fall die entsprechende ‘ Wellenfunktion ’ definiert ist, ist der Torus, den der Parameterraum bildet. (Dies gilt aufgrund der Periodizität des Systems unter Variation der beiden Hilfsmagnetfelder). Der Fluß dagegen erweist sich als die Hall-Leitfähigkeit selbst. Aus der Differentialgeometrie ist bekannt, daß der Fluß durch ein Kompaktum ganzzahlig sein muß (und der Torus ist ein Kompaktum); die Hall-Leitfähigkeit ist daher quantisiert.

Diese Erklärung gilt natürlich nicht, schon wegen der Voraussetzung der Nichtentartung, für freie Systeme. Ohne Wechselwirkung, die die Translationsinvarianz bricht, genügte eine Lorentztransformation, um das Magnetfeld zu kompensieren (s. z. B. Jackson¹⁷). D.h. die Brechung der Translationsinvarianz, und damit die Einführung einer Unordnung im System, ist eine wesentliche Voraussetzung des **QHE**. Andererseits zeigt die Lokalisierungstheorie³ (1979 also kurz vor der Entdeckung von Klitzing) das Verschwinden der metallischen Leitfähigkeit in zwei Dimensionen bei beliebig kleiner Unordnung; dann sollten alle Elektronen lokalisiert sein und können daher keinen Strom tragen. Das topologische Modell des **QHE** setzt offenbar die Existenz delokalisierten Zustände voraus. Eine echte mikroskopische Theorie des Effektes sollte diesen Fakt freilich erklären.

Einen Ansatz dazu bildet die Theorie von Pruisken, Levine und Libby¹⁸. Analog zum magnetfeldfreien Fall wird hier zur Berechnung der Leitfähigkeit eine Abbildung auf ein nichtlineares σ -Modell vorgenommen. Dazu geht man von einer Funktionalintegraldarstellung des Betragsquadrates der Greensfunktionen aus. Die Ausführung der Unordnungsmittelung liefert dann eine effektiv selbstwechselwirkende Theorie, die nach Einführung von Matrixvariablen in Sattelpunktsnäherung ausgewertet wird. Es zeigt sich, daß bei korrektem Vorgehen dabei ein Zusatzterm (eine topologische Invariante, ähnlich etwa dem Ausdruck¹⁹ $F\tilde{F}$ in der **QCD**) in der effektiven Wirkung auftaucht. Dieser Term scheint für die Delokalisierung im Magnetfeld verantwortlich zu sein.

Abgesehen also von den ungelösten Problemen der Lokalisierungstheorie im Magnetfeld liegt insgesamt heute für die Grundzüge des integralen Hall-Effektes eine befriedigende Erklärung vor. Die Tatsache, daß **IQHE** und **FQHE** in ähnlichen Systemen auftreten, legte die Vermutung ähnlicher Ursachen nahe. Genauere Inspektion zeigt jedoch, daß beide Effekte in Wahrheit konkurrieren: in Proben mit hoher Beweglichkeit (entsprechend geringer Störstellendichte) treten bei hohen Feldern (um 15 Tesla) gebrochene Werte der Leitfähigkeit (in Einheiten von $\frac{e^2}{h}$) auf, während in Proben mit relativ hoher Störstellenkonzentration die Hall-Plateaus des integralen Effektes mit wachsendem Magnetfeld ausgeprägter werden. Die Elektron-Elektron Wechselwirkung, die in reinem Material dominiert, scheint daher im fraktionierten Effekt eine Rolle zu spielen. Das Standardbild des **FQHE**, das ebenfalls auf Laughlin²⁰ zurückgeht, trägt diesem Umstand Rechnung: Der Grundzustand des **FQHE**-Systems ist danach eine Mehrteilchenwellenfunktion, die bei bestimmten rationalen Brüchen des Besetzungsfaktors der Landauniveaus die Energie minimiert (als Besetzungsfaktor wird das Verhältnis der Anzahl der tatsächlich vorhandenen Elektronen zu der des vollen Niveaus bezeichnet). Die Existenz der Hall-Plateaus bei fraktionierten Werten folgt dann aus dem Gap in den elementaren Anregungen über diesem Grundzustand.

Zur Untersuchung der Eigenschaften der Laughlinfunktion hat es sich dabei als nützlich erwiesen²¹, das ebene System auf die Oberfläche einer Kugel abzubilden. Es sollte darauf hingewiesen werden, daß diese Arbeiten in einem anderen Zusammenhang als die vorliegende die Kugeloberfläche einsetzen: dort wird die Elektron-Elektron Wechselwirkung in ihrer Auswirkung auf eine bestimmte Mehrteilchenwellenfunktion studiert, während hier im Einteilchenbild die Eigenschaften einer unordnungsgemittelten Greensfunktion untersucht werden.

Die Berechnung von Zweiteilchengreensfunktionen wie sie für Transportgrößen benötigt werden, ist, wie am Beispiel der Lokalisierungstheorie im Magnetfeld angedeutet, bislang eine sehr schwer zu lösende Aufgabe. In experimenteller wie in theoretischer Hinsicht zum grundlegenden Verständnis eines Systems außerordentlich wichtig ist jedoch auch die Zustandsdichte. Sie ist überdies als Einteilchengröße leichter zugänglich. Der Vergleich theoretischer Vorhersagen mit experimentellen Befunden erlaubt die Überprüfung zahlreicher Modellannahmen über die Reichweite, Konzentration und Art der Störstellen, sowie über ihre sta-

tistische Verteilung. Darüber hinaus ergibt sich ein Hinweis auf die Güte von Näherungen, mithilfe derer Aufschluß auch über andere Systemeigenschaften zu gewinnen ist.

Experimentell läßt sich die Zustandsdichte etwa aus Messungen der spezifischen Wärme, der thermischen Abhängigkeit des elektrischen Widerstands oder aus Zyklotronresonanzexperimenten ableiten²². Die Ergebnisse legen eine gauß'sche Form mit flachem Hintergrund zwischen den Landaubändern nahe. Die Breite der Verteilung wächst dabei mit der Wurzel des angelegten Magnetfeldes. Erste theoretische Berechnungen der Zustandsdichte im Magnetfeld ergaben eine semielliptische Form. In der selbstkonsistenten Bornapproximation⁴ werden dabei Beiträge bis zur zweiten Ordnung im Potential bei der Störungsentwicklung der Selbstenergie mitgenommen. Die quadratische Gleichung für die Greensfunktion, die sich daraus ergibt, liefert die angegebene Halbelipse. Aufgrund allgemeiner Überlegungen²³ sollte sich die Zustandsdichte allerdings für große Energien gauß'sch verhalten. Erste Ergebnisse in dieser Hinsicht brachte die Benutzung eines Pfadintegralformalismus²⁴.

Für den Grenzfall starken Magnetfeldes gelang Wegner²⁵ unter Benutzung graphentheoretischer Methoden die Berechnung der exakten Greensfunktion im 'white noise Potential' (d.i. bei gauß'scher Verteilung der Potentiale). Dies wird im ersten Teil der Arbeit im Einzelnen dargestellt werden. Das ursprünglich zweidimensionale System kann in diesem Fall auf ein 0-dimensionales reduziert werden.

Eine solche 'dimensionale Reduktion' war schon vorher an anderen Beispielen unter Benutzung eines 'supersymmetrischen' Formalismus demonstriert worden²⁶. Die Einführung von Graßmannvariablen²⁷ bei der Definition der Greensfunktion über ein Funktionalintegral erlaubt eine elegante Durchführung der Integration über die Potentialvariablen, d. h. der Mittelung über die Potentialverteilung. Diese Methode ist außerdem frei von mathematischen Schwierigkeiten, wie sie sich bei Benutzung des 'Replica-Tricks' ergeben: die im Nenner auftretende Determinante (vom Operator im quadratischen Anteil der Wirkung) wird nicht durch einen 'Replica-limes' (d. h. die Anzahl der Felder verschwindet) sondern durch die Integration über die Graßmannvariablen gekürzt (genauere Erläuterungen dazu werden ebenfalls im ersten Teil der Arbeit gegeben).

Es lag daher nahe eine supersymmetrische Formulierung des Wegner'schen Problems zu studieren. Tatsächlich gelang Brézin, Itzykson und Gross²⁸ aber nicht nur die Reproduktion des exakten Resultats, sondern sogar die Verallgemeinerung auf beliebige polynomiale Verteilungsfunktionale (das entspricht dem Auftreten von Produkten höherer als zweiter Ordnung in den Potentialen beim Bilden des Mittelwerts, die bei gauß'scher Mittelung verschwinden). Eine Erweiterung dieser Resultate auf höhere Landauniveaus²⁹ scheiterte ebenso, wie die Berechnung der Leitfähigkeit mithilfe derselben Methode. In beiden Fällen treten Terme auf, die die Symmetrie zwischen kommutierenden und antikommutierenden Variablen zerstören. Die vorher beobachtete Kürzung innerhalb der diagrammatischen Entwicklung wird dadurch verhindert. Die Greensfunktion im 0.ten Landauniveau unter Berücksichtigung eines schwachen elektrischen Feldes läßt sich dagegen im selben Formalismus noch berechnen³⁰. Die daraus abgeleitete statische Hall-Leitfähigkeit zeigt jedoch keinen Hinweis auf die Existenz von Plateaus. Durch Ausnutzen der Vereinfachungen, die sich aus der Wegner'schen Arbeit für die in der Störungstheorie zu behandelnden Terme ergeben, konnte die numerische Aufsummation der perturbativen Entwicklung, der Leitfähigkeit schließlich bis zu hohen Ordnungen (ca 10^8 Feynmangraphen wurden berücksichtigt) durchgeführt werden³¹.

Wie schon angedeutet ist der erste Teil der Arbeit der Darstellung der Wegner'schen Ergebnisse, sowie der Erweiterung von Brézin et. al. gewidmet. Dabei werden die benutzten graphentheoretischen bzw. supersymmetrischen Methoden etwas ausführlicher behandelt, als in den zitierten Arbeiten. Als Voraussetzung muß dazu natürlich zunächst das freie Problem von Elektronen im Magnetfeld gelöst werden. Da sich die Herleitung der Lösungen im homogenen Magnetfeld in jedem Lehrbuch der Quantenmechanik findet, gibt uns das die Gelegenheit eine bemerkenswerte und trotzdem nicht allgemein bekannte (vgl die beiden Arbeiten von Casher und Aharonov³² bzw von Jackiw³³) Verallgemeinerung auf beliebige statische, ebene Magnetfeldkonfigurationen zu erläutern. (Es handelt sich übrigens um ein, im zitierten Schwinger-Modell benutztes Verfahren ein Eichfeld durch Transformation der Wellenfunktion zu kompensieren). Dazu ist außerdem die Mitnahme des Spinfreiheitsgrades notwendig. Es zeigt sich, daß in gewissem Sinn das Problem mit Spin einfacher als das spinlose ist. Oben wurde festgestellt, daß Ver-

allgemeinerungen des Wegner'schen Ergebnisses auf höhere Landauniveaus nicht gelungen sind. Als bisher nicht untersuchte Erweiterung bietet sich die Ersetzung der Ebene durch die Kugeloberfläche an. Sie weist mehrere Vorteile auf:

- a.) die endliche Fläche bedeutet endliche Teilchenzahlen, statt der unendlichen Entartung des ebenen Systems.
- b.) sie ist homogen, sodaß keine Komplikationen durch Ränder entstehen(im Vergleich zum ebenen Problem mit endlicher Fläche).
- c.) Symmetrie unter Translationen und Rotationen die in der Ebene getrennt realisiert sind, äussern sich auf der Kugel vereinheitlicht zur $SU(2)$ -Symmetrie.

Im zweiten Teil werden wir also das System auf der Kugeloberfläche betrachten. Da wir auch hier den Spin mitnehmen, damit eine zweidimensionale Dirac-Gleichung zu Grunde legen, sind dazu einige Voraussetzungen differentialgeometrischer Art zu schaffen: die Beschreibung von Teilchen mit halbzahligen Spin auf gekrümmten Mannigfaltigkeiten muß ebenso geklärt werden, wie die Behandlung der Komplikationen, die ein magnetischer Monopol hervorruft.

Haldane²¹ und andere³⁴ verwenden zur Beschreibung ihres Systems auf der Kugeloberfläche den Winkelanteil des Schrödinger-Hamiltonians:

$$H_S = \frac{1}{2m}(\vec{r} \times (\vec{p} - \vec{A}))^2 \quad (0.1)$$

Das ist aus zwei Gründen unserer Ansicht nach nicht die korrekte Analogie zum ebenen System: Die Lösungen der Pauligleichung im homogenen Magnetfeld zerfallen in der Ebene in Eigenzustände zu τ_3 ; dies entspricht auf der Kugel offenbar $\vec{n}\vec{\tau}$. D.h. in der Ebene ist in der effektiven Massennäherung, unter der Annahme $m_{eff} \ll m$ die Spinaufspaltung $\gg$ als Landauniveauabstand, sodaß die Schrödingertheorie ausreicht. Es ist klar, daß man auf der Kugel letzten Endes ebenfalls eine 'Schrödingertheorie' haben sollte. Die Frage ist nur welche, und ist (0.1) korrekt? H_S vertauscht nicht mit $\vec{n}\vec{\tau}$; also sind die Lösungen zu H_S keine Eigenzustände dieses Spinoperators. Verwendet man dagegen den 'Pauli-Hamiltonian': $\frac{1}{2m}D^2$ (d. i. *nicht* der Winkelanteil eines ebenen Pauli-Hamiltonian, sondern das Quadrat eines auf der Kugel definierten 'Dirac-Operators', in Analogie zur Schreibweise von H_P als Quadrat $:\frac{1}{2m}(\vec{r}\vec{\pi})^2$) kann man die Lösungen als

Eigenzustände von $\vec{n}\vec{\tau}$ darstellen. Das Analogon zur Ebene sollten also die letzteren sein. Die äquivalente Schrödingertheorie ist demnach die eindimensionale Form (Restriktion auf eine Spinkomponente), die sich bei Auswahl eines simultanen Eigenzustands zu D^2 und $\vec{n}\vec{\tau}$ ergibt. (Nach Übergang zu einem Koordinatensystem in dem $\vec{n}\vec{\tau}$ diagonal ist, bleibt nur eine Komponente; diese Form ist im zweiten Teil der Arbeit gewählt.) Ein zweiter Grund für unsere Entscheidung betrifft die Entartung des Landauniveaus. Für die Anzahl der Zustände pro Flächeneinheit hat man in der Ebene: $\frac{eB}{h}$. Bei Benutzung des Schrödingerhamiltonians gehören zum Monopol der Ladung N (Dirac-Einheiten s.u.) $N + 1$ Zustände im untersten Niveau. Wir finden in unserem Bild dagegen, daß die Anzahl der Zustände gleich der Monopolladung ist. Nun erzeugt ein magnetischer Monopol einen Gesamtfluß von N Flußquanten $\frac{h}{e}$. D. h. auf der Kugel herrscht ein Magnetfeld von $B = \frac{N}{4\pi a^2} \frac{h}{e}$ (a ist der Kugelradius). Demnach ist

$$\frac{eB}{h} = \frac{N}{4\pi a^2}$$

In dieser Gleichung bedeutet N die Monopolladung; nur wenn diese also mit der Anzahl der Zustände übereinstimmt, ist auch auf der Kugel $\frac{eB}{h}$ der Entartungsgrad des Niveaus.

Nachdem diese Komplikationen geklärt sind, wird das Spektrum des Dirac-Operators auf der Kugeloberfläche im Monopolfeld konstruiert. Die Darstellung der unordnungsgemittelten Greensfunktion erfolgt dann durch ein Funktionalintegral. Die Eigenschaften der verallgemeinerten Kugelfunktionen, die die Eigenzustände des Dirac-Operators bilden, werden bei der Vereinfachung eine entscheidende Rolle spielen. Nachdem der für die weitere Berechnung allein interessante Anteil der Greensfunktion abgespalten ist, werden zunächst einige Näherungslösungen untersucht. Diese erlauben gleichzeitig die Angabe der exakten Lösung für $N = 2, 3$. Die Untersuchung der perturbativen Entwicklung zeigt im Anschluß eine Beziehung zwischen den Graphen der Störungstheorie und den Skalaren, die aus bestimmten Clebsch-Gordan-Koeffizienten gebildet werden können. Die Entwicklung in $\frac{1}{e}$ kann in diesem Fall jedoch nicht aufsummiert werden; erst im Grenzfall unendlich hoher Monopolladung und unendlichen Kugelradius tritt der von Wegner bemerkte Kürzungseffekt auf. Die Angabe der exakten Greensfunktion gelingt mithilfe der Eigenschaften der genannten Monopolfunktionen mit

einigem rechnerischen Aufwand noch für $N = 4$. Lösungen zu höherer Monopolladung konnten im Rahmen der Arbeit nicht gefunden werden. Bemerkenswert ist jedoch die Güte der Näherung zur Wegner'schen Lösung, die man mit geringen Teilchenzahlen erreicht. Sowohl die analytische Form, als auch das quantitative Verhalten stimmen prinzipiell mit dem Grenzfall $N \rightarrow \infty$ überein: man erhält Gaußfunktionen bzw Errorfunktionen als Darstellung der Zustandsdichte; in der Nähe des Bandzentrums liegt die relative Abweichung bei ungefähr einem Prozent; im unendlichen wird der Abfall durch einen Exponenten $\frac{2N}{2N-1}\epsilon^2$ gegenüber ϵ^2 bestimmt. Die Sattelpunktmethode erlaubt eine Auswertung des Integrals im Grenzfall großer Energien (s. dazu die Arbeit von Affleck³⁵). Dabei zeigt sich u.a., daß die Zustandsdichte im Gegensatz zum ebenen Grenzfall für endliche N nicht normiert ist. Als letztes untersuchen wir noch das Verhalten der Greensfunktion für große N , d.h. da der führende Term dieser Entwicklung durch das ebene Ergebnis repräsentiert wird, wir suchen die erste Korrektur der Ordnung $\frac{1}{N}$. Der formale Ausdruck dieses Koeffizienten in der Entwicklung nach $\frac{1}{N}$ kann in allgemeiner Form angegeben werden; die N -Abhängigkeit steckt dabei allein in einem Vorfaktor und ist für alle Ordnungen der Störungstheorie gleich. Als Konsequenz sollte die Form von $\rho_N - \rho_{N-1}$ für große N unabhängig von N sein, d.h. nur mit einem Faktor $\frac{1}{N}$ skalieren. Dieses Verhalten zeigt sich tatsächlich schon bei der graphischen Darstellung der Lösungen mit $N=2,3,4$.

I UNENDLICHES SYSTEM

1. Wegners Resultat

Da die Motivation die unordnungsgemittelte Greensfunktion für Elektronen im Magnetfeld zu untersuchen, auf ein bemerkenswertes Ergebnis von Wegner²⁵ zurückgeht, soll im ersten Kapitel dessen Herleitung etwas ausführlicher als in der zitierten Arbeit dargestellt werden. Außerdem dient dies als Einführung in einige der weiter unten benutzten Begriffe und Formalismen .

Der erste Teil wird zunächst dem wohlbekannten freien Problem gewidmet sein. Einen kleinen Vorgeschmack auf die Eigentümlichkeiten zweidimensionaler Elektronen im Magnetfeld wird die Darstellung der Grundzustandslösung für beliebige (statische) Feldkonfigurationen geben. Im zweiten Teil beschäftigen wir uns mit der Einführung von Störpotentialen und der Definition der Unordnungsmittelung, sowie der Projektion auf den Grundzustand. Die Analyse der Diagrammbeiträge, die sich bei perturbativer Entwicklung der Greensfunktion ergeben bildet den Gegenstand des dritten Teils. Zum Beweis der Beziehung, die zur entscheidenden Kürzung von Diagrammbeiträgen führt, wird schließlich ein kleiner Exkurs in die Graphentheorie vonnöten sein. Als Resultat wird im letzten Abschnitt die Reduktion auf ein nulldimensionales System möglich.

1.1. FREIE ELEKTRONEN IM MAGNETFELD

Betrachten wir zunächst als Vorbereitung und zur Festlegung der Notation den einfachen Fall der Bewegung freier Elektronen im Magnetfeld. Da die Mitnahme des Spinfreiheitsgrades das Problem keineswegs komplizierter macht, vielmehr , wie sich zeigt, die Berechnung vereinfacht, untersuchen wir also die Lösungen des Pauli-Hamiltonians. Die geeignete Schreibweise dafür ergibt sich direkt, wenn man die Pauli-Gleichung als nichtrelativistischen Grenzfall aus der Dirac-Gleichung herleitet.

1.1.1. ZWEIDIMENSIONALE DIRAC-GLEICHUNG

Die Dirac-Gleichung lautet in Kurzschreibweise:

$$\gamma^\mu(p_\mu - eA_\mu - m)\Psi = 0 \quad (1.1)$$

wobei die Gammamatrizen wie üblich definiert sind (σ_i sind die Pauli-matrizen.):

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

sodaß

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = g_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

Mit dem Ansatz für die Viererspinoren:

$$\tilde{\Psi} = \exp\{-i\hat{E}t\}\Psi = \exp\{-i(E+m)t\}\Psi \quad (1.4)$$

erhält man mit $\vec{\pi} = (\vec{p} - e\vec{A})$

$$\{\gamma_0(i\partial_t - eA_0) + \vec{\gamma} \cdot \vec{\pi} - m\}\tilde{\Psi} \Rightarrow \{\gamma_0(\hat{E} - eA_0) + \vec{\gamma} \cdot \vec{\pi} - m\}\Psi = 0 \quad (1.5)$$

oder in Komponentenschreibweise: $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$ wo Ψ_i jeweils Zweispinoren sind:

$$\begin{aligned} (\hat{E} - eA_0)\Psi_1 - m\Psi_1 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\Psi_2 &= 0 \\ (-\hat{E} + eA_0)\Psi_2 - m\Psi_2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\Psi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Mit dem nichtrelativistischen Grenzübergang $E \ll m$ (m ist dabei die Ruheenergie des Elektrons) findet man:

$$\Psi_2 = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m}\Psi_1 \Rightarrow (E - eA_0)\Psi_1 = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m}\Psi_1 \quad (1.7)$$

Also für die stationäre Pauligleichung:

$$(H_p + V)\Psi = E\Psi \quad \text{wo} \quad H_p = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} \quad \text{und} \quad V = eA_0 \quad (1.8)$$

Im folgenden beschränken wir uns auf den zweidimensionalen Fall, es soll also: $\vec{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_x \\ \pi_y \end{pmatrix}$ und $\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix}$ sein. Das Magnetfeld steht jetzt senkrecht auf der x-y-Ebene, d.h. es gilt: $\vec{B} = \vec{e}_z B(x, y)$ und

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & \pi_+ \\ \pi_- & 0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

wo

$$\pi_{\pm} = \pi_x \pm i\pi_y \quad (1.10)$$

Der Pauli-Hamiltonian ist dann:

$$H_p = \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} \pi_+ \pi_- & 0 \\ 0 & \pi_- \pi_+ \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

wobei die π 's die Vertauschungsrelationen:

$$[\pi_+, \pi_-]_- = -2i[\pi_x, \pi_y]_- = 2eB_z \quad (1.12)$$

und

$$[\pi_+, \pi_-]_+ = \vec{\pi}^2 \quad (1.13)$$

erfüllen.

Verschwindet das skalare Potential kann man das Spektrum des Pauli-Hamiltonian* wegen der Struktur (1.8) als Quadrat eines zweidimensionalen Dirac Operators durch Lösen des Differentialgleichungssystems erster Ordnung, nämlich der 'Dirac'-Gleichung

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Psi = \lambda \Psi$$

einfacher gewinnen³⁶. Diese Vereinfachung werden wir im zweiten Teil, wenn wir das System auf der Kugeloberfläche betrachten benutzen.

1.1.2. DER GRUNDZUSTAND FÜR BELIEBIGE MAGNETFELDER

Wie die Vertauschungsrelationen (1.12) und (1.13) schon anzeigen(zusammen mit der Struktur des Hamiltonoperators (1.11)),kann das Spektrum im Fall des homogenen B-Feldes i.w. durch die Anwendung der Leiteroperatoren (1.10) auf den Grundzustand konstruiert werden.** Der Grundzustand weist nun aber eine Besonderheit auf, die sehr bemerkenswert und trotzdes nicht allgemein bekannt ist

*für $B=\text{const}$ bilden die Gleichungen (1.12),(1.13) die Vertauschungsrelationen eines harmonischen Oszillators; die Eigenwerte sind daher sofort bekannt. Die Eigenzustände zum 'Dirac'-Operator werden im Anhang A konstruiert

**die Drehimpulsentartung (in symmetrischer Eichung) erzeugt freilich einen etwas größeren Aufwand bei der Herleitung der Eigenzustände als beim harmonischen Oszillator

(vgl Aharonov³² und Jackiw³³). Da das Ergebnis für den homogenen Fall verwendet werden kann und kaum ein Mehraufwand bei der Herleitung der allgemeinen Lösung vorliegt, sei also der Fall $B=B(x,y)$ angenommen.

Die Bedingung für den Grundzustand lautet:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})\Psi = 0 \quad (1.14)$$

nun gilt:

$$\sigma_i \sigma_3 = -i\epsilon_{ij}\sigma_j \quad (1.15)$$

also ist mit:

$$\Psi = \exp\{\sigma_3 \alpha\} \chi \quad (1.16)$$

(d.i. im Fall des Schwinger-Modells als ‘ chirale ’ Transformation bekannt s. z. B. Nielsen, Schroer³⁷)

$$\vec{\sigma} \cdot (-i\vec{\partial} - e\vec{A})\Psi = 0 \Leftrightarrow \{-i\vec{\sigma}\sigma_3\vec{\partial}\alpha - e\vec{\sigma} \cdot \vec{A} - i\vec{\sigma} \cdot \vec{\partial}\}\chi = 0 \quad (1.17)$$

Einsetzen von (15) liefert dann:

$$\{-\epsilon_{ij}\sigma_j\partial_i\alpha - e\sigma_i A_i - i\sigma_i\partial_i\}\chi = 0 \quad (1.18)$$

Wählt man nun:

$$\epsilon_{ij}\partial_j\alpha = eA_i \quad \Rightarrow \quad \Delta\alpha = -eB \quad (1.19)$$

denn nach Definition des Feldstärketensors gilt ja: $\epsilon_{ij}\partial_i A_j = B$

Zu Lösen bleibt also nur:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\partial}\chi = \begin{pmatrix} 0 & 2\partial_z \\ 2\partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} \chi = 0 \quad (1.20)$$

Das liefert sofort die gesuchten Grundzustandslösungen , denn offenbar ist (20) mit:

$$\chi_2 = \chi_2(\bar{z}) \quad \chi_1 = \chi_1(z) \quad (1.21)$$

erfüllt. Wir haben daher zunächst die formale Lösung:

$$\psi = \exp\{\sigma_3 \alpha\} \begin{pmatrix} \chi(z) \\ \chi(\bar{z}) \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

Allerdings sollte die Wellenfunktion um physikalisch sinnvoll zu sein eine endliche Norm aufweisen. Um zu zeigen, daß das nur der Fall ist, wenn eine der beiden Komponenten des Zweierspinors verschwindet, betrachten wir das Verhalten des Vorfaktors $e^{\sigma_3 \alpha}$ für große Werte von $|\vec{x}|$. Mithilfe des inversen Laplace-Operators in zwei Raumdimensionen

$$\Delta^{-1}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{2\pi} \ln\{\mu |\vec{x} - \vec{x}'|\} \quad (1.23)$$

Läßt sich Gleichung (1.19) nach α auflösen und man findet mit der Definition des magnetischen Flußes durch die Ebene:

$$\phi = e \int d^2 x B(\vec{x}) \quad (1.24)$$

(Wobei wir o. B.d. A. annehmen wollen, daß $\phi \geq 0$)

$$\exp\{\pm\alpha(\vec{x})\} \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \exp\{\mp e \int d^2 x' B(\vec{x}') \frac{1}{2\pi} \ln\{\mu \vec{x}^2\}\} = |\vec{x}|^{\mp \frac{\phi}{2\pi}} \quad (1.25)$$

Damit Ψ normierbar ist, sollte daher $\exp\{\pm\alpha(\vec{x})\}$ für $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ stärker als $\frac{1}{|\vec{x}|}$ abfallen. Setzt man $\phi = 2\pi(n - \delta)$ (wobei: $1 > \delta \geq 0$), so gilt :

$$\exp\{\pm\alpha(\vec{x})\} \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}|^{\mp(n-\delta)} \quad (1.26)$$

Da weiter die allgemeine Form einer holomorphen Funktion χ gegeben ist durch:

$$\chi(z) = \sum_{k=0}^l a_k z^k$$

wo z^k die zueinander orthogonalen Basislösungen darstellen, kann der Index k höchstens bis $n-2$ laufen, wenn Ψ normierbar sein soll. Unter der oben gemachten Annahme positiven Flußes lauten die endgültigen Grundzustandslösungen also:

$$\Psi_k = N_k \exp\{\alpha(\vec{x})\} z^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

(N_k sind dabei Normierungskonstanten.)

Wir fassen das Ergebnis kurz zusammen:

Die Lösung der Pauli-Gleichung in zwei Raumdimensionen läßt sich für $E=0$ für beliebige Feldkonfigurationen (statische Magnetfelder) angeben. Die Anzahl

der Lösungen ist direkt durch den gesamten magnetischen Fluß durch die Ebene gegeben.

Für ganzzahligen Fluß

$$\phi = 2\pi N$$

erhält man genau $N-1$ normierbare Grundzustandslösungen.

(Für die topologischen Hintergründe dieser Tatsache s. Nielsen, Schroer³⁷). Im Zusammenhang mit der Kugeloberfläche werden uns Flußquantisierung und Dimension des Kerns des Dirac-Operators noch einmal begegnen.

1.1.3. GRUNDZUSTANDSPROJEKTOR

Bisher wurde keine Eichung gewählt, da sowohl der Hamiltonoperator wie die Vertauschungsrelationen, die das Spektrum festlegen, eichinvariant sind. Für die explizite Form der Grundzustandslösungen, sowie für den Projektor muß dagegen eine Wahl getroffen werden (Die Eichfreiheit steckt bei der oben angegebenen allgemeinen Lösung natürlich in der Willkür bei der Wahl der Funktionen α .)

Da die Operatoren $\pi_{\pm}$ in den Ableitungen nach x, y symmetrisch sind (bzw nur die Kombinationen z und $\bar{z}$ vorkommen) liegt für die Wahl des Vektorpotentials dieselbe Symmetrie nahe. Demnach wird im folgenden die sogenannte symmetrische Eichung verwendet werden. D.h. es ist:

$$\vec{A} = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

Dann wird aus den Leiteroperatoren ($\kappa = eB$):

$$\begin{aligned} \pi_+ &= -2i(\partial_z - \frac{\kappa}{4}\bar{z}) \\ \pi_- &= -2i(\partial_{\bar{z}} + \frac{\kappa}{4}z) \end{aligned} \quad (1.29)$$

und die Grundzustandslösungen, die sich aus:

$$\pi_- u_{0m} = 0 \Rightarrow u_{0m} = N_m z^m \exp -\frac{\kappa}{4} z \bar{z} \quad (1.30)$$

ergeben, wobei:

$$\begin{aligned} N_m^{-2} &= \int d^2 x \bar{x}^{2m} \exp \frac{-\kappa}{2} z \bar{z} = \pi \int d^2 x x^m \exp \frac{-\kappa}{2} x \\ &= \left(\frac{2\pi}{\kappa}\right) \left(\frac{2}{\kappa}\right)^m \int dx x^m \exp -x = \pi m! \left(\frac{2}{\kappa}\right)^{m+1} \\ &\Rightarrow N_m = \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{\frac{m+1}{2}} \left(\frac{1}{\pi m!}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.31)$$

liefern für den Projektor* demnach:

$$\begin{aligned}
 P(\vec{x}, \vec{x}') &= \sum_{m=0}^{\infty} u_m(\vec{x}) u_m^*(\vec{x}') = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\kappa/2}{m!} \right)^{m+1} (z \bar{z}')^m \exp \frac{-\kappa}{4} (z \bar{z} + z' \bar{z}') \\
 &= \frac{\kappa}{2\pi} \exp -\frac{\kappa}{4} (z \bar{z} + z' \bar{z}' - 2z \bar{z}')
 \end{aligned}
 \tag{1.32}$$

Für die Zustandsdichte findet man dann:

$$P(\vec{x}, \vec{x}) = \frac{\kappa}{2\pi} \tag{1.33}$$

Die gauss'sche Struktur des Projektors wird im folgenden von fundamentaler Bedeutung sein.

1.2. GREENSFUNKTION MIT STÖRSTELLEN

Gesucht ist die Greensfunktion für wechselwirkungsfreie Elektronen unter dem Einfluß

- a) eines starken Magnetfeldes, homogen und senkrecht zur Ebene der Elektronen
- b) einer Potentialverteilung $V(x,y)$, über die
- c) anschliessend eine geeignete Mittelung durchzuführen ist.

Als entscheidende Näherung werden wir, wegen der Stärke des Magnetfeldes, den Einfluß aller höheren Landauniveaus vernachlässigen. wird. Greensfunktion und Projektor sind dann proportional zueinander.

* Könnten die Normierungsintegrale für beliebige Feldkonfigurationen berechnet werden, ließe sich der Projektor sogar allgemein darstellen. Das inverse des 'Dirac'-Operators (1.9) D kann übrigens mit der chiralen Transformation (1.16) für beliebige Felder, deren Gesamtflußintegral kleiner als 1 ist sofort hingeschrieben werden. Im allgemeinen läßt sich nur ein Pseudoinverses definieren: $D\tilde{D}^{-1} = 1 - P$, wo P genau der Grundzustandsprojektor ist.

1.2.1. PERTURBATIVE DARSTELLUNG

Der zu betrachtende Hamiltonoperator lautet: $H = H_p + V$ Bezeichnet man wie oben mit $P(\vec{x}, \vec{x}')$ den Projektor auf das nullte Landauniveau so ist die Projektion der Greensfunktion ($\epsilon = E + i\eta$):

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \langle \vec{x} | P(\epsilon - H_p - V)^{-1} P | \vec{x}' \rangle \quad (1.34)$$

gesucht.

Wie schon angedeutet sind unter vernachlässigung höherer Landauniveaus Greensfunktion und Projektor proportional. Offenbar gilt dann:

$$G_0(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{P(\vec{x}, \vec{x}')}{\epsilon} \quad (1.35)$$

Die übliche störungstheoretische 'geometrische Reihe' liefert :

$$\frac{1}{\epsilon - H_p - V} = \frac{1}{\epsilon - H_p} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{V}{\epsilon - H_p} \right)^k$$

d.h.nach Projektion auf den Grundzustand:

$$G_0(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{L=0}^{\infty} \int \prod_{K=0}^L d^2 x_K \prod_{j=0}^L G_0(\vec{x}_{j+1}, \vec{x}_j) V(\vec{x}_j) \quad \vec{x}_0 = \vec{x}' \quad \vec{x}_{L+1} = \vec{x} \quad (1.36)$$

Die oben unter a) gemachte Annahme erlaubte die Projektion auf den Grundzustand. Unter b) setzten wir voraus, daß das Potential V zufällig verteilt sein sollte. Wir werden im folgenden eine spezielle Form dieser Verteilung benutzen, die die real vorliegenden Störstellen, etwa in MOSFETs³⁸ recht gut wiedergibt. (Und uns hier vor allem die exakte Lösung des Problems erlaubt ...)

Die Korrelation der Potentiale $V(\vec{x})$ soll also folgendermaßen definiert sein:

$$\langle V(\vec{x}_1) V(\vec{x}_2) \rangle = w \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \quad (1.37)$$

Dabei bedeuten die eckigen Klammern die Mittelung des Ausdrucks. Alle linearen Terme sollen dagegen bei Mittelung verschwinden. Man bezeichnet diese Form der Zufallsverteilung als gauss'sche oder 'white noise'-Verteilung. Warum man von gauss'scher Mittelung spricht wird im nächsten Kapitel klarwerden.

Führt man diese Mittelung nun an der Entwicklung der Greensfunktion durch, so bleiben offenbar nur die geraden Anteile in V , d.h. wir können L durch $2L$

ersetzen. Nach der Mittelung werden alle inneren Punkte $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_{2L})$ zunächst L-Integrationen über die Deltafunktionen $\delta(\vec{x}_l - \vec{x}_m)$ unterworfen, d.h. nach Ausführen der Integrationen bleiben L Punkte $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_L$ (nach Umnummerierung), die jeweils 4-mal vorkommen:

2-mal als Ausgangspunkt $G(\vec{x}_k, \cdot)$

2-mal als Endpunkt $G(\cdot, \vec{x}_k)$

einer Greensfunktion.

Aufgrund der Form $\exp -\kappa/4(\bar{z}z + \bar{z}'z' - 2z\bar{z}')$ wird jedes $\vec{x}_k$ im Exponenten also in dieser Weise erscheinen:

$$\exp \{-\kappa/2(2\bar{z}_k z_k - z_l \bar{z}_k - z_l \bar{z}_k - z_k \bar{z}_j - z_k \bar{z}_j)\} \quad (1.38)$$

Interpretiert man die Produkte der Greensfunktionen durch die Identifikation:

$$G(\vec{x}_k, \vec{x}_l) \equiv$$

als Graph, so hat jeder innere Vertex $\vec{x}_k$ 2 einlaufende und 2 auslaufende Linien. Die äußeren Linien des Graphen sind durch $G_0(\vec{x}, \vec{x}_i)$ sowie $G_0(\vec{x}_f, \vec{x}')$ gegeben.

1.2.2. EINFÜHRUNG DER "ADJACENCY"³⁹-MATRIX

Ordnet man jedem Graphen eine Matrix A zu, gemäß:

A_{ij} = Anzahl der Linien von i nach j falls das Diagramm geschlossen ist

so läßt sich das Produkt der Greensfunktionen nach Ausführen der Mittelung als:

$$\langle G(\vec{x}, \vec{x}') \rangle = \sum_L \left(\frac{\kappa}{2\pi\epsilon} \right)^{2L+1} w^L \int \prod_{l=1}^L d^2 x_l e^{-(\kappa/2)(\hat{z}M\hat{z} + 1/2(z\bar{z} + z'\bar{z}') - z\bar{z}_i - z_f\bar{z}')} \quad (1.39)$$

schreiben, wo $\hat{z} = (z_1, z_2, \dots, z_L)$ und $S_{kl} = \delta_{ki}\delta_{lf}$ sowie $M = 2 - A + S$

Denn die Einheitsmatrix mit dem Faktor 2 liefert gerade für alle $\vec{x}_k$ den ersten Term im Exponenten(1.38) , während die Matrix A den zweiten Anteil, ergibt, wobei allerdings, da das Diagramm nicht geschlossen ist die Linie von $\vec{x}_i \longrightarrow \vec{x}_f$ durch S wieder abgezogen wird.

Die restlichen Terme stellen gerade $G_0(\vec{x}, \vec{x}_i)$ bzw $G_0(\vec{x}_f, \vec{x}')$ dar. ($\vec{x}_i, \vec{x}_f$ sind willkürlich gewählte Punkte und in $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_L\}$ enthalten.)

1.2.3. DIE ORTSABHÄNGIGKEIT DER GREENSFUNKTION

Da jeder Vertex zwei einlaufende und zwei auslaufende Linien hat, gilt mit der Definition von A , daß die Summe aller Zeilen und Spalten der Matrix $2 - A$ verschwindet:

$$\sum_j A_{ij} = \sum_i A_{ij} = 2 \quad \Rightarrow \quad \sum_j (2 - A)_{ij} = \sum_i (2 - A)_{ij} = 0 \quad (1.40)$$

Zur Umformung des Integranden führt man daher eine Substitution aus, die sich diese Tatsache zunutze macht. Offenbar legt die Eigenschaft (1.40) sofort einen Eigenwert und den zugehörigen Eigenvektor fest. Denn wendet man die Matrix $(2 - A)$ auf den Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

an, gilt sicher:

$$(2 - A)\vec{x} = 0$$

D.h. mit der Substitution:

$$\hat{z} \longrightarrow \hat{\xi} = \hat{z} - z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \hat{\bar{z}} \longrightarrow \hat{\bar{\xi}} = \hat{\bar{z}} - \bar{z}'(1, 1, \dots, 1) \quad (1.41)$$

läßt sich der Exponent vereinfachen. Die quadratische Form liefert demnach

$$\begin{aligned} \hat{\bar{z}}(2 - A + S)\hat{z} &= [\hat{\bar{\xi}} + \bar{z}'(1, 1, \dots, 1)](2 - A + S)[z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \hat{\xi}] \\ &= \hat{\bar{\xi}}(2 - A + S)\hat{\xi} + \bar{z}'\xi_f + \hat{\xi}_i + \bar{z}'z \end{aligned} \quad (1.42)$$

und Ausführen der Substitution für $z\bar{z}_i + z_f\bar{z}'$ ergibt:

$$z(\bar{\xi}_i + \bar{z}') + (\xi_f + z)\bar{z}'$$

Die Greensfunktion erhält dann folgende Gestalt:

$$\langle G(\vec{x}, \vec{x}') \rangle = \sum_L \left(\frac{\kappa}{2\pi E} \right)^{2L+1} w^L \int \prod_{l=1}^L d^2 x_l e^{-(\kappa/2)(\hat{\xi} M \hat{\xi} + 1/2(z\bar{z} + z'\bar{z}' - 2z\bar{z}'))}$$

der Exponent zerfällt also in zwei Anteile:

- a) einen Faktor mit einer einfachen quadratischen Form im Exponenten, der nach Ausführen der Integrationen, ortsunabhängig ist.
- b) die freie Greensfunktion selbst, die allein die Raumabhängigkeit enthält:

$$\langle G(\vec{x}, \vec{x}') \rangle = G_o(\vec{x}, \vec{x}') \sum_L \left(\frac{\kappa}{2\pi\epsilon} \right)^{2L} w^L \int \prod_{l=1}^L d^2 x_l e^{-(\kappa/2)(\hat{\xi} M \hat{\xi})} \quad (1.43)$$

Die Integrationen lassen sich jetzt ausführen, denn bekanntlich ist das komplexe Integral:

$$\int [d^2 x] \exp \{ -\hat{z} M \hat{z} \} = \frac{\pi^L}{\text{Det} M} \quad [d^2 x] = \prod_{l=1}^L d^2 x_l \quad (1.44)$$

Für die gemittelte Greensfunktion hat man also nach Integration:

$$\langle G(\vec{x}, \vec{x}') \rangle = G_o(\vec{x}, \vec{x}') \sum_L \left(\frac{2\pi}{\kappa} \right)^L \left(\frac{\kappa}{2\pi\epsilon} \right)^{2L} w^L \left[\sum_{\text{Diagr.}} \frac{1}{\text{Det}(2 - A + S)} \right] \quad (1.45)$$

Dabei läuft die zweite Summe über alle Diagramme in L-ter Ordnung der Störungstheorie.

Bis jetzt haben wir zwar eine bedeutende Vereinfachung des Ausdrucks für die unordnungsgemittelte Greensfunktion erreicht, aber trotzdem sind wir noch weit davon entfernt die Summen die in der letzten Gleichung auftauchen, ausführen zu können. Die Schritte die dazu nötig sind werden in den nächsten Unterabschnitten beschrieben. Wir werden nämlich zeigen, daß:

- 1) $\text{Det}(2 - A + S) = \text{cof}(2 - A)$
- 2) $\# \text{ Diagramme pro Graph} = \frac{\text{Eulertrails}}{\text{Permut. die Graph invar. lassen}}$
- 3) $\# \text{ Eulertrails} = \text{cof}(2 - a)$

Wir beginnen mit dem einfachsten, und das ist die erste Beziehung, die eine Eigenschaft der Determinante von $(2 - A + S)$ behauptet.

1.2.4. EINE EIGENSCHAFT DER MATRIX A

Bei der Auflistung oben wurde nicht spezifiziert welcher Kofaktor der Matrix $(2 - A)$ gemeint ist. Tatsächlich ist das auch gar nicht notwendig, denn wir werden gerade zeigen, daß alle Kofaktoren gleich sind. Betrachte dazu zunächst die Streichungsmatrix $(2 - A)^{ik}$ d.h. die Matrix die aus $(2 - A)$ durch Streichen der i-ten Zeile und k-ten Spalte hervorgeht. Faßt man die Spalten als Vektoren auf, so kann man $(2 - A)$ schreiben als:

$$\begin{aligned}(2 - A) &= (a_1, a_2, \dots, a_L) \\ \rightarrow (2 - A)^{ik} &= (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_{k-1}, \hat{a}_{k+1}, \dots, \hat{a}_L)\end{aligned}$$

Das "Dach" über dem Vektor $\vec{a}$ bedeutet dabei das Weglassen der i-ten Zeile.

Jetzt ist aber

$$\sum_{l=1}^L \hat{a}_l = 0, \text{ also z.B. } \hat{a}_1 = - \sum_{l=2}^L \hat{a}_l$$

Der Kofaktor ist nun gerade die Determinante der oben eingeführten Streichungsmatrix, oder genauer:

$$cof_{ik}(2 - A) = (-)^{i+k} Det(2 - A)^{ik}$$

diese Determinante schreibt man jetzt:

$$\begin{aligned}Det(2 - A)^{ik} &= |(- \sum_{l=2}^L \hat{a}_l), \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_{k-1}, \hat{a}_{k+1}, \dots, \hat{a}_L| \\ &= -|\hat{a}_k, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_{k-1}, \hat{a}_{k+1}, \dots, \hat{a}_L| \\ &= (-)^{k-1} |\hat{a}_2, \dots, \hat{a}_L|\end{aligned}$$

d.h. es gilt:

$$(-)^{i+k} Det(2 - A)^{ik} = (-)^{i+1} |\hat{a}_2, \dots, \hat{a}_L| = cof_{ik}(2 - A) \quad \forall k = 1, \dots, L$$

Die Kofaktoren der Matrix $(2 - A)$ bzgl. der Zeile i sind demnach alle gleich. Ganz analog gilt das dann, aufgrund der Zeilen-Spalten-Symmetrie auch für die Kofaktoren bzgl. irgendeiner Spalte. Damit haben wir gezeigt, daß alle Kofaktoren gleich sind, denn:

$$cof_{ik}(2 - A) = cof_{kk}(2 - A) = cof_{lk}(2 - A) = cof_{lm}(2 - A) \quad \forall i, k, l, m$$

Zum Beweis der nächsten beiden Punkte müssen wir allerdings etwas abschweifen und einen kleinen Ausflug in die Graphentheorie unternehmen. Da ein strenger Beweis uns zu weit vom Thema wegführen würde, begnügen wir uns mit Beweisskizzen, die aber dennoch den Sachverhalt einsichtig machen sollen.

1.2.5. ELEMENTE DER GRAPHENTHEORIE

Ausführlichere Information zu diesem Abschnitt findet sich im Beitrag von Kasteleyn des von Harary³⁹ herausgegebenen Buches 'Graph theory and theoretical physics'. wir haben uns hier auf den Spezialfall von Graphen mit zwei ein- und auslaufenden Linien beschränkt, der uns allein interessiert.

Die Begriffe die oben bei der Auflistung dessen was zu zeigen bleibt, benutzt wurden bedürfen einiger Erläuterung. Dazu wird noch ein weiterer Terminus, der des 'rooted tree' gehören. Im einzelnen bleibt also genauer zu erklären was

- a) ein Digraph
- b) ein 'Eulertrail'
- c) ein 'rooted tree'

sind.

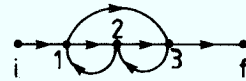
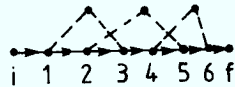
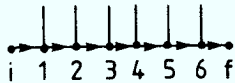
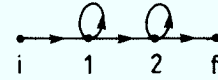
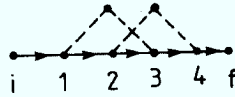
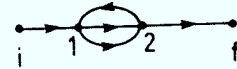
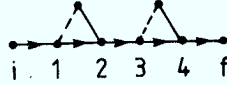
Betrachten wir noch einmal unseren Ausgangspunkt: die störungstheoretische Entwicklung der Greensfunktion.

Mit der angegebenen Identifikation $G_0(\vec{x}_k, \vec{x}_l)$ als gerichtete Linie von k nach l läßt sich jedem Beitrag der Störungstheorie offenbar ein Diagramm zuordnen, wobei die Punkte $\vec{x}_k$ die Vertices darstellen an denen die Wechselwirkung mit dem Potential V stattfindet. Die gauss'sche Mittelung erlaubt nun nach Ausführen der Integrationen über die δ -Funktionen die Identifikation jeweils zweier Punkte. Da bei diesen Kontraktionen die Auswahl der Paare vollkommen beliebig ist, liefert jede Ordnung der Störungstheorie eine Vielzahl neuer Diagramme anderer Art. Am besten läßt sich das an einer graphischen Darstellung für einige Beispiele aus zweiter und dritter Ordnung der resultierenden Störungstheorie klarmachen:

vor d. Mittelung

"Kontraktion"

nach der Mittelung



Bei den ersten beiden Beispielen gehört zu jeder Kontraktion ein Digraph; das letzte zeigt, daß das nicht immer der Fall sein muß.

Nun also zurück zur Erläuterung der Begriffe die weiter unten zum Beweis der beiden letzten Punkte gebraucht werden. Ein Graph ist zunächst eine Menge von Punkten, die durch Linien verbunden sind. Ordnet man jeder dieser Linien einen Richtungssinn zu, so bezeichnet man den so entstandenen, gerichteten Graphen als 'Digraphen' (directed graph). Durchläuft man einen solchen Digraphen jeweils in der durch die Zuordnung angegebenen Richtung so, daß jede Linie einmal benutzt wird, definiert man dadurch einen Eulertrail.

Eine Beweisskizze:

$$\# \text{ Diagramme pro Digraph} = \# \text{ Eulertrails} / \# \text{ Permutationen}$$

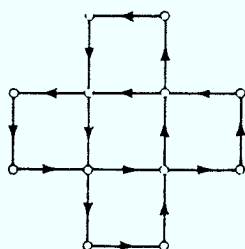
Betrachten wir die durch die Störungstheorie definierten Diagramme. Mit der Vorschrift jeweils von x_1 nach x_2 usw zu gehen erhält man genau einen Eulertrail eines Graphen solange jedenfalls eindeutig gesagt ist welchen Weg man zu nehmen hat. Das wird für die oben angegebene Vorschrift nicht immer der Fall sein: hat man einen Digraphen der unter Permutationen zweier Linien invariant ist, kann nicht eindeutig nur durch Angabe der Anfangs- und Endpunkte einer Linie $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}_l$ ein Eulertrail festgelegt werden, denn etwa mit dem ersten der oben angegebenen Beispiele (d.h. dem Digraphen mit zwei Vertices ohne Loop) existieren 2 Eulertrails, beide entsprechen derselben Vorschrift von 2 nach 1 dann nach 2 und anschließend wieder nach 1 zu laufen. Da vom Diagramm (der Angabe der Kontraktionen) zwischen beiden verschiedenen Eulertrails (nämlich zunächst etwa die untere der

dargestellten Linien und dann die obere ,oder aber umgekehrt zu durchlaufen) nicht unterschieden wird, hat man also im allgemeinen die # der Eulertrails durch die # der nicht eindeutig festgelegten Wege zu dividieren, um die Anzahl der Diagramme pro Digraph zu erhalten. Solche Wege haben aber die Eigenschaft , daß ihre Permutation den Digraphen invariant läßt , weil zwischen ihnen nicht allein durch Angabe des Anfangs und Endpunktes eine Präferenz vorgeschrieben werden kann.(man müßte etwa in der Weise spezifizieren: gehe von i zunächst nach j ,kommst du zum zweiten mal nach i gehe nach k etc.)

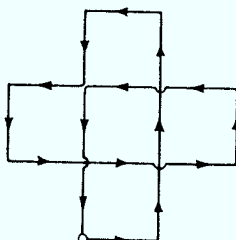
Eine Beweisskizze: $\# \text{ Eulertrails} = \text{cof}(2-A)$

- a) für einen Graphen mit je zwei einlaufenden Linien an jedem Vertex, entspricht jedem Eulertrail eines geschlossenen Graphen genau ein 'rooted tree'.
- b) die Anzahl der rooted trees ist gerade gegeben ist durch den Kofaktor einer Matrix, die genau unsere oben definierte Matrix $M = (2 - A)$ ist.

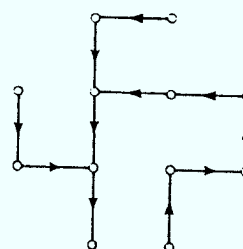
Zur Definition des rooted tree : Bezeichnet man mit Subgraph den Teil eines Graphen , so ist ein rooted tree ein Subgraph der alle Vertices des ursprünglichen Graphen enthält ,jedoch keine geschlossenen Wege, und der einen ausgezeichneten Punkt(etwa einen Eingangs-oder Ausgangspunkt) besitzt. Ein weiteres Beispiel mag das verdeutlichen:



Digraph



Eulertrail



rooted tree

Beweisskizze a): geht man vom Eulertrail aus und bezeichnet die Linie auf der ein Punkt zum letzten Mal verlassen wird, als Ausgangslinie, so bilden die Punkte zusammen mit den Ausgangslinien einen rooted tree (oder genauer einen reversed rooted tree).

Geht man umgekehrt vom rooted tree aus, so benutzt man an jedem Verzweigungspunkt zunächst eben nicht die Ausgangslinie, sondern erst beim zweiten Verlassen des Punktes.

Beweisskizze b) zur Anzahl der rooted trees.

Ordnet man jedem Graphen eine Matrix $B(G)$ zu gemäß:

$B_{ij} = -\text{Anzahl der Linien von } i \text{ nach } j$

$B_{ii} = \text{Anzahl der einlaufenden Linien am Vertex } i$

zu, kann man zeigen, daß mit p_j als 'root' des tree:

$\# \text{ rooted trees} = \text{Det } B^{jj}(G)$, wo B^{jj} die entsprechende Streichungsmatrix ist.

Das läßt sich so einsehen:

Betrachte einen rooted tree, der in p_j keine einlaufende Linie hat, d.h. p_j ist root des trees; bezeichnet man diesen Subgraphen in G als $\tilde{G}$, so hat die j -te Spalte der Matrix $B(\tilde{G})$ offenbar nur die Elemente 0 (denn p_j hat keine einlaufende Linie, d.h. es existiert keine Linie nach p_j). Alle anderen Spalten enthalten eine 1 (Zahl der einlaufenden Linien) und eine -1 (Zahl der Linien nach i); enthielte $\tilde{G}$ nun einen geschlossenen Weg, so wäre, wählt man den Weg durch die Punkte $p_i, p_j, p_k \dots$ die Summe der entsprechenden Spalten 0, denn in der i -ten Zeile z. B. tritt eine 1 in der j -ten Spalte für die einlaufende Linie nach p_j und eine -1 von der Linie $p_j \rightarrow p_i$ auf. Das gilt für alle Zeilen der am geschlossenen Weg beteiligten Punkte; also sind die Spaltenvektoren linear abhängig und $\text{Det } B^{jj}(\tilde{G})$ verschwindet für einen Graphen $\tilde{G}$ der geschlossene Wege enthält. D.h. ist $\tilde{G}$ kein rooted tree, der ja keine geschlossenen Wege enthalten darf, so folgt:

$$\text{Det } B^{jj}(\tilde{G}) = 0$$

Ist dagegen kein geschlossener Weg in $\tilde{G}$ enthalten kann man durch Umnummierung immer erreichen, daß $B_{ij} = 0 \quad i \geq j$: Wie man an folgendem Beispiel sieht:

Man geht von der root p_j aus, bezeichnet diese als p_1 ; alle Punkte die von p_1 in einem Schritt erreicht werden können heißen $p_2 \dots p_r$, die in zwei Schritten erreicht werden können $p_{r+1}, \dots$ etc: dann sind alle Linien die vorkommen können, von der Form $p_l \rightarrow p_k$ wo $l \leq k$, also $B_{ij} = 0 \quad i \geq j$. Die Determinante einer solchen oberen Dreiecksmatrix, bei der erste Zeile und Spalte gestrichen sind, ist 1. Andererseits werden in der ursprünglichen Matrix (vor der Umnummerierung) durch die Redefinition nur gleichzeitig Zeilen und Spalten vertauscht (die j-te wird zur ersten usw.), sodaß kein Vorzeichenwechsel stattfindet. Die Determinante der Streichungsmatrix ist also ebenfalls 1, genau dann wenn ein rooted tree vorliegt.

Den Graphen G erhält man nun indem jeweils so viele Basisspalten j addiert werden, wie der Punkt p_j in G einlaufende Linien besitzt (wobei die Basisspalten in der k -ten Zeile -1 tragen, wenn p_j von p_k erreicht wird). Aufgrund der Multilinearität der Determinante also:

$$Det B^{jj}(G) = \sum_{\tilde{G} \in G} Det B^{jj}(\tilde{G})$$

da

$$Det B^{jj}(\tilde{G}) = \begin{cases} 1 & \tilde{G} \text{ ist rooted tree} \\ 0 & \tilde{G} \text{ ist kein rooted tree} \end{cases}$$

Wir finden also insgesamt:

$$Det B^{jj}(G) = \text{Anzahl der rooted trees mit root } p_j$$

Da die Determinante der Streichungsmatrix B^{jj} gerade der Kofaktor der j -ten Zeile und Spalte ist, da außerdem die Matrix B dieselbe wie die oben definierte Matrix $(2 - A)$, ist der Ausflug in die Graphentheorie damit beendet: wir haben gezeigt (oder bescheidener: skizziert), daß die Anzahl λ der Diagramme pro Graph gegeben ist durch:

$$\lambda = \frac{cof(2 - A)}{m}$$

wo m die Anzahl der Permutationen ist, die den Graph invariant lassen.

Kehren wir jetzt zurück zum Ausdruck (1.45) für die gemittelte Greensfunktion und spalten die Summe über die Diagramme in L -ter Ordnung der Störungstheorie auf in die Summe über alle Graphen und die Summe der Diagramme, die zu einem

Graphen gehören:

$$\langle G(\vec{x}, \vec{x}') \rangle = G_0(\vec{x}, \vec{x}') \sum_L \left(\frac{2\pi}{\kappa} \right)^L \left(\frac{\kappa}{2\pi\epsilon} \right)^{2L} w^L \sum_{G_L} \left[\frac{1}{\text{Det}(2 - A + S)} \right] \sum_{\text{Diagr.}(G_L)} \quad (1.46)$$

so ergibt die dritte Summe gerade den Faktor $\frac{\text{cof}(2-A)}{m}$, d.h. der Nenner wird gekürzt und es bleibt, nach kurzer Umformung:

$$\begin{aligned} \langle G(\vec{x}, \vec{x}') \rangle &= P_0(\vec{x}, \vec{x}') \sum_L \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\kappa w}{2\pi} \right)^L \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^{2L} \sum_{G_L} \frac{1}{m} \\ &= P_0(\vec{x}, \vec{x}') \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa w}} \sum_L \frac{1}{\nu^{2L+1}} \sum_{G_L} \frac{1}{m} \\ &= P_0(\vec{x}, \vec{x}') \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa w}} \mathcal{G}_\infty \end{aligned} \quad (1.47)$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß dieser Ausdruck genauso durch eine 0-dimensionale Feldtheorie, also ein einfaches Integral geliefert wird.

1.2.6. ABBILDUNG AUF 0-DIMENSIONALE THEORIE

Die effektiven Graphenregeln für den ortsunabhängigen Anteil der Greensfunktion seien anhand der Gleichung (1.47) noch einmal zusammengefaßt:

- a) Jeder Vertex liefert effektiv den Faktor 1
- b) Jede Linie liefert einen Faktor $\frac{\pm i}{\nu}$ wenn wir zur Abkürzung $\nu = \epsilon \sqrt{\frac{2\pi}{w\kappa}}$ setzen.
- c) an jedem inneren Vertex laufen zwei Linien ein und zwei Linien aus.
- d) es wird die Summe über alle verbundenen Graphen betrachtet.
- e) jeder Graph trägt einen Symmetriefaktor, gegeben durch die Anzahl der Permutationen von Linien unter denen er invariant ist.

Vergleicht man diese Regeln mit den aus der Funktionalintegraldarstellung einer Greensfunktion sich ergebenden, so muß die Wirkung offenbar lauten:

$$S = i\nu \bar{\phi}\phi - \frac{1}{4}(\bar{\phi}\phi)^2 \quad (1.48)$$

denn der 'Propagator' liefert gerade $\frac{1}{\nu}$, während der Wechselwirkungsterm mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ bei der Differentiation nach Einführung von Stromtermen den Faktor 1 pro Vertex beiträgt. Daß es sich um eine ' ϕ^4 '-Theorie handelt folgt sofort aus

Punkt c). Da weiter nur die verbundenen Graphen betrachtet werden, müssen die Vakuumgraphen durch einen Nenner der Form:

$$Z = \int d\phi d\bar{\phi} e^S \quad (1.49)$$

gekürzt werden. Das Vorzeichen von $i\nu$ im Exponenten schließlich wird durch die Konvergenzforderung des Integrals bei perturbativer Entwicklung des Wechselwirkungsterms festgelegt (es war ja $\epsilon = E + i\eta$ mit $\eta > 0$). Als Darstellung für den ortsunabhängigen Anteil der Greensfunktion findet man demnach:

$$\mathcal{G}_\infty = \sum_L \frac{1}{\nu^{2L+1}} \sum_{G_L} \frac{1}{m} = \frac{i}{Z} \int d\phi d\bar{\phi} \phi \bar{\phi} e^S \quad (1.50)$$

oder, wenn man die Winkel ausintegriert und die Definition der w -Funktion beachtet:

$$\mathcal{G}_\infty = \frac{w'(\nu)}{w(\nu)} \quad (1.51)$$

Für die Greensfunktion findet man also insgesamt unter Einbeziehung des abgespaltenen ortsabhängigen Faktors:

$$\langle G(\vec{x}, \vec{x}') \rangle = P_0(\vec{x}, \vec{x}') \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa w}} \frac{w'(\nu)}{w(\nu)} \quad (1.52)$$

Das ist das von Wegner gefundene Ergebnis.

1.3. DIE VERALLGEMEINERUNG VON BREZIN ET. AL.

Da im folgenden u.a. der Formalismus von Brézin, Gross, Itzykson⁴⁰, d.h. die Einführung von Graßmannvariablen, benutzt wird, soll kurz deren Verallgemeinerung des Resultats von Wegner²⁵ auf eine größere Klasse von Potentialverteilungen vorgestellt werden. (Außerdem zeigt sich die von Wegner gefundene Symmetrie aus einer andern Perspektive: statt graphentheoretisch betrachtet man das Problem sozusagen 'supersymmetrisch'⁴¹). Man geht zunächst von der Darstellung der Greensfunktion über ein Funktionalintegral aus:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{-i}{Z} \int D\bar{\phi} D\phi \phi(\vec{x}) \bar{\phi}(\vec{x}') \exp \{i \int d^2x \bar{\phi}(E - H)\phi\} \quad (1.53)$$

wo

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \langle \vec{x} | \frac{1}{E - H} | \vec{x}' \rangle \quad Z = \int D\bar{\phi} D\phi \exp \{i \int d^2x \bar{\phi}(E - H)\phi\} \quad (1.54)$$

H ist wie schon oben definiert :

$$H = H_0 + V \quad H_0 = \frac{1}{2m}(p - eA)^2 - 1/2\hbar\omega$$

1.3.1. UNORDNUNGSMITTELUNG

Im ersten Abschnitt, bei der Darstellung des Resultats von Wegner, hatten wir die Mittelung als Korrelation der Potentiale geschrieben:

$$\langle V(\vec{x}), V(\vec{x}') \rangle = \text{const} \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

im Funktionalintegralformalismus ist eine andere Definition besser geeignet. Hat man im allgemeinen ein Verteilungsfunktional $P(V)$ für die Potentiale $V(\vec{x})$ so wird die Mittelung irgendeines Funktionals $F(V)$ über V offenbar in Analogie zum endlichdimensionalen Fall folgende Form annehmen:

$$\langle F(V) \rangle = \int DV P(V) F(V) \quad (1.55)$$

wobei das Funktionalmaß DV so gewählt ist, daß:

$$\int DV P(V) = 1$$

für den oben betrachteten Gauß'schen Fall gilt z. B.

$$P(V) = e^{-\text{const} \int d^2x V^2(\vec{x})}$$

ist $F(V)$ nun von der Form:

$$F(V) = e^{\int d^2x \alpha(\vec{x}) V(\vec{x})}$$

kann man nach quadratischer Ergänzung im Exponenten aufgrund der Translationsinvarianz des Funktionalmaßes schreiben:

$$\begin{aligned} \int DV P(V) e^{-i \int d^2x \alpha(\vec{x}) V(\vec{x})} &= \int DV e^{-\int d^2x c V^2(\vec{x}) + i \alpha(\vec{x})} \\ &= \int D\tilde{V} e^{-\int d^2x (c \tilde{V}^2 + \frac{1}{4c^2} \alpha^2(\vec{x}))} \end{aligned}$$

d.h. die Mittelung ist äquivalent zur Einführung eines Funktionals $g[\alpha(\vec{x})]$ mit $g(\alpha) = \frac{-\alpha^2}{4c^2}$. Für allgemeinere, nichtgauss'sche Verteilungen verfährt man analog. (Weitere Beispiele finden sich bei Brézin et. al.⁴¹)

1.3.2. GRASSMANNVARIABLEN

Da das Potential im Zähler wie im Nenner vorkommt, kann die Mittelung in dieser Form nicht durchgeführt werden. An dieser Stelle ist die Einführung von Grassmannvariablen (s z. B. Becher¹⁹) von großem Nutzen.

Beachtet man, daß bei geeigneter Definition des Maßes:

$$\int D\bar{\phi} D\phi \exp \left\{ i \int d^2x \bar{\phi}(Op)\phi \right\} = [DetOp]^{-1} \quad (1.56)$$

so heißt das:

$$\frac{1}{Z} = DetOp$$

Dagegen gilt für Grassmannfelder:

$$\int D\bar{\psi} D\psi \exp \left\{ i \int d^2x \bar{\psi}(Op)\psi \right\} = DetOp = \frac{1}{Z} \quad (1.57)$$

Die Einführung von Grassmannfeldern erlaubt also (vgl die analoge Benutzung sogenannter 'Fadeev-Popov-Ghosts' in der QCD z.B. in Becher, Böhm¹⁹) die Elimination des störenden Nenners in (2.1) und damit die Ausführung der Unordnungsmittelung. Statt (2.1) hat man :

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = -i \int D\bar{\psi} D\psi D\bar{\phi} D\phi \phi(\vec{x}) \bar{\phi}(\vec{x}') \exp \left\{ i \int d^2x (\bar{\psi}(E-H)\psi + \bar{\phi}(E-H)\phi) \right\} \quad (1.58)$$

Der Vergleich zeigt, daß hier $\alpha = \bar{\phi}\phi + \bar{\psi}\psi$. Nach Ausführen der Mittelung also für $G(\vec{x}, \vec{x}')$:

$$\langle G(\vec{x}, \vec{x}') \rangle = -i \int D\bar{\psi} D\psi D\bar{\phi} D\phi \phi(\vec{x}) \bar{\phi}(\vec{x}') e^S \quad (1.59)$$

dabei ist S:

$$S = i \int d^2x \{ (\bar{\psi}(E - H_0)\psi + \bar{\phi}(E - H_0)\phi) \} + \int d^2x g [\bar{\phi}\phi + \bar{\psi}\psi] \quad (1.60)$$

1.3.3. PROJEKTION AUF DEN GRUNDZUSTAND

Die Einschränkung sehr großen Magnetfeldes haben wir bisher noch nicht benutzt: wie schon bei der Herleitung von Wegners Resultat, wollen wir nur den Grundzustand des freien Problems berücksichtigen. Im Fall der Definition der Greensfunktion über ein Funktionalintegral heißt das, es wird nur über Funktionen ϕ, ψ aus dem 0-ten Landauniveau integriert.

Man setzt daher:

$$\phi(\vec{x}) = u(z) e^{-\kappa/4|z|^2} \quad \psi(\vec{x}) = v(z) e^{-\kappa/4|z|^2}$$

Dabei sind die $u(z)$ resp. $v(z)$, kommutierende resp. antikommutierende Variablen.

Aufgrund der Eigenschaften der Ableitungen von Graßmannvariablen kürzt sich die Jacobi Determinante beider Substitutionen und man erhält für die Projektion der unordnungsgemittelten Greensfunktion auf das 0-te Landauniveau:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = -i \int Du D\bar{u} Dv D\bar{v} u(z) \bar{u}(\bar{z}') e^{-\kappa/4[|z|^2 + |z'|^2]} e^{S_{eff}} \quad (1.61)$$

wo

$$S_{eff} = i\epsilon \int dz d\bar{z} e^{-\frac{\kappa|z|^2}{4}} (\bar{u}u + \bar{v}v) + \int dz d\bar{z} g [e^{-\frac{\kappa|z|^2}{4}} (\bar{u}u + \bar{v}v)]$$

dabei nutzten wir aus daß:

$$(\epsilon - H)u(z) e^{-\frac{\kappa|z|^2}{4}} = \epsilon u(z) e^{-\frac{\kappa|z|^2}{4}}$$

Die Einführung der Graßmannfelder hat zwar die explizite Ausführung der Mittelung, und damit die Transformation auf ein effektiv über die in $g[\alpha(\vec{x})]$ enthaltenen Terme selbstwechselwirkendes System erlaubt, doch in dieser Form bleibt die Symmetrie, die im vorangehenden Paragraphen zwischen Diagrammbeiträgen und

der Anzahl der Diagramme pro Graph festgestellt wurde, genauso versteckt. Die entscheidende Umformung besteht in der Einführung sogenannter 'Superfelder': Felder die sowohl 'bosonische' als auch 'fermionische' Freiheitsgrade besitzen⁴² (bosonisch bzw fermionisch wird im folgenden synonym für kommutierend bzw antikommutierend gebraucht werden, auch wenn selbstverständlich keine ganz-oder halbzahligen Spins damit verbunden sind)

1.3.4. 'SUPERFELDER'

Gemäß der Definition der Integrale über Graßmannvariablen

$$\int d\theta d\bar{\theta} = \int d\theta d\bar{\theta} \theta = \int d\theta d\bar{\theta} \bar{\theta} = 0 \quad \int d\theta d\bar{\theta} = \frac{1}{\pi}$$

läßt sich die Wirkung vereinfachen wenn man auf folgende Weise 'Superfelder' definiert:

$$\begin{aligned} \Phi(z, \theta) &= u(z) + \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \theta v(z) \\ \bar{\Phi}(\bar{z}, \bar{\theta}) &= \bar{u}(\bar{z}) + \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \bar{\theta} \bar{v}(\bar{z}) \end{aligned}$$

für Graßmannvariable gilt die Konjugationsregel: $\overline{\theta_1 \theta_2} = \bar{\theta}_2 \bar{\theta}_1$ Im quadratischen Anteil der Wirkung wird nämlich :

$$\bar{u}u + \bar{v}v = \int d\theta d\bar{\theta} \left(\frac{2}{\kappa} \right) e^{-1/2 \kappa \theta \bar{\theta}} \bar{\Phi} \Phi \quad (1.62)$$

Die effektive Wirkung kann also durch Superfelder ausgedrückt werden: wo

$$S_{eff} = i\epsilon \frac{2\pi}{\kappa} \int dz d\bar{z} d\theta d\bar{\theta} e^{-\frac{\kappa}{2}(\theta\bar{\theta} + z\bar{z})} (\bar{\Phi} \Phi) + \int dz d\bar{z} g \left[\frac{2\pi}{\kappa} \int d\theta d\bar{\theta} e^{-\frac{\kappa}{2}(\theta\bar{\theta} + z\bar{z})} (\bar{\Phi} \Phi) \right]$$

Der erste Term ist nun manifest supersymmetrisch in θ, z ; für den zweiten Term läßt sich das ebenfalls zeigen:

Jede Funktion die Graßmann-und kommutierende Variable enthält, kann wegen des Verschwindens aller höheren Potenzen der antikommutierenden Variablen offenbar in eine Taylorreihe der Form:

$$\Phi(\alpha + \beta) = \Phi(\alpha) + \Phi'(\alpha)\beta + \frac{\Phi''(\alpha)}{2!}\beta^2 + \dots + \frac{\Phi^n(\alpha)}{n!}\beta^n$$

entwickelt werden. Wo α den rein bosonischen β den gemischt fermionisch-bosonischen Anteil enthält. Die Reihe muß aufgrund der Antikommutativität der

in β enthaltenen Glieder abbrechen. Betrachtet man jetzt den Ausdruck in der Wirkung:

$$e^{\kappa/2\theta\bar{\theta}}\Phi(z, \theta)\bar{\Phi}(\bar{z}, \bar{\theta}) = \bar{u}(\bar{z})u(z) + \frac{\kappa}{2}\bar{\theta}\theta(\bar{u}u + \bar{v}v) + \sqrt{\frac{\kappa}{2}}(\bar{v}u\bar{\theta}v + \theta\bar{u}v) \quad (1.63)$$

und vergleicht, so ist in unserem Fall:

$$\alpha = \bar{u}u \quad \beta = \frac{\kappa}{2}\bar{\theta}\theta(\bar{u}u + \bar{v}v) + \sqrt{\frac{\kappa}{2}}(\bar{v}u\bar{\theta}v + \theta\bar{u}v)$$

also

$$\begin{aligned} \int d\theta d\bar{\theta} [e^{\kappa/2\theta\bar{\theta}}\bar{\Phi}\Phi]^n &= \int d\theta d\bar{\theta} [(\bar{u}u)^n + n(\bar{u}u)^{n-1}\beta + n(n-1)(\bar{u}u)^{n-2}\frac{\beta^2}{2}] \\ &= \int d\theta d\bar{\theta} [n(\bar{u}u)^{n-1}\beta + n(n-1)(\bar{u}u)^{n-2}\frac{\beta^2}{2}] \end{aligned}$$

Wo der erste Term nach Integration, die höheren Potenzen wegen $\theta^2 = \bar{\theta}^2 = 0$ verschwinden.

Allgemein gilt also mit:

$$\begin{aligned} \int d\theta d\bar{\theta} \beta &= \frac{\kappa}{2\pi}(\bar{u}u\bar{v}v) \\ \int d\theta d\bar{\theta} \frac{\beta^2}{2} &= \frac{\kappa}{2\pi}\bar{u}u\bar{v}v \end{aligned}$$

für eine beliebige Funktion h :

$$\frac{2\pi}{\kappa} \int d\theta d\bar{\theta} h(e^{-\kappa/2\theta\bar{\theta}}\bar{\Phi}\Phi) = h'(\bar{u}u)(\bar{u}u + \bar{v}v) + h''(\bar{u}u)\bar{u}u\bar{v}v$$

Andererseits ist

$$g(\bar{u}u + \bar{v}v) = g(\bar{u}u) + g'(\bar{u}u)\bar{v}v$$

Definiert man jetzt

$$g(\beta) = \beta h'(\beta) \Rightarrow g'(\beta) = h'(\beta) + h''(\beta)$$

so folgt

$$\begin{aligned} g(\bar{u}u) + g'(\bar{u}u)\bar{v}v &= \bar{u}u h'(\bar{u}u) + \bar{v}v(h'(\bar{u}u) + \bar{u}u h''(\bar{u}u)) \\ &= h'(\bar{u}u)(\bar{u}u + \bar{v}v) + h''(\bar{u}u)(\bar{u}u + \bar{v}v) \end{aligned}$$

d.h. es ist:

$$g(\bar{u}u + \bar{v}v) = \frac{2\pi}{\kappa} \int d\theta d\bar{\theta} h(\bar{\Phi}\Phi e^{\kappa/2\theta\bar{\theta}})$$

der Wechselwirkungsterm läßt sich also manifest supersymmetrisch schreiben:

$$S_{ww} = \int dz d\bar{z} d\theta d\bar{\theta} \frac{2\pi}{\kappa} h(e^{-\kappa/2(z\bar{z} + \theta\bar{\theta})}) \bar{\Phi}\Phi \quad (1.64)$$

Zur weiteren Auswertung stellt man die gesamte Greensfunktion noch durch Superfelder dar :

Man bemerkt dazu, daß die äußeren Felder im Integranden ebenfalls durch Superfelder ersetzt werden können , denn wie man etwa durch Einführen von Stromtermen erkennt, ist der Raumanteil für bosonische und fermionische Felder gleich:

$$\langle u(z)\bar{u}(\bar{z}') \rangle = \langle v(z)\bar{v}(\bar{z}') \rangle$$

d.h. man hat nur den Erwartungswert :

$$\langle \Phi(z, \theta) \bar{\Phi}(\bar{z}', \bar{\theta}') \rangle$$

zu berechnen.

Auszuwerten bleibt also:

$$\langle G(\vec{x}, \vec{x}', \theta, \bar{\theta}') \rangle = -i \int D\Phi D\bar{\Phi} \Phi(z, \theta) \bar{\Phi}(\bar{z}', \bar{\theta}') e^{S_{eff}}$$

Die effektive Wirkung ist dabei gegeben durch:

$$S_{eff} = i\epsilon \frac{2\pi}{\kappa} \int d\theta d\bar{\theta} dz d\bar{z} [e^{\frac{\kappa}{2}(\theta\bar{\theta} + z\bar{z})} \bar{\Phi}\Phi + \frac{-i}{\epsilon} h(e^{-\frac{\kappa}{2}(z\bar{z} + \theta\bar{\theta})}) \bar{\Phi}\Phi] \quad (1.65)$$

1.3.5. STÖRUNGSTHEORIE

Die störungstheoretische Berechnung des Erwartungswertes erfolgt nun in der üblichen Weise :Einführung von Stromtermen, Ersetzung der äußeren Felder, sowie der Wechselwirkungsterme durch funktionale Differentiation nach den Strömen und Variablenshift im quadratischen Anteil der Wirkung mithilfe des Inversen des Operators im freien Teil.

Man sucht demnach einen Integralkern mit der Eigenschaft:

$$\int dz' d\bar{z}' d\theta' d\bar{\theta}' e^{\frac{\kappa}{2}(|z'|^2 + |\theta'|^2)} f(z', \theta') (Op)^{-1}(z, \bar{z}', \theta, \bar{\theta}') = f(z, \theta) \quad (1.66)$$

Wie wir aus dem ersten Paragraphen wissen ist der Projektor auf den Grundzustand gegeben durch:

$$P(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{\kappa}{2\pi} \exp -\frac{\kappa}{4}(|z|^2 + |z'|^2 - z\bar{z}') \quad (1.67)$$

für Funktionen aus dem Grundzustand hat man dann offenbar

$$\int dz' d\bar{z}' P(\vec{x}, \vec{x}') e^{\frac{\kappa}{4}|z'|^2} u(z') = u(z) e^{\frac{\kappa}{4}|z|^2} \quad (1.68)$$

Denn mit $u(z') = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z'^k$ folgt

$$\begin{aligned} \int dz' d\bar{z}' \frac{\kappa}{2\pi} e^{\frac{\kappa}{2}|z'|^2} \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(\frac{\kappa}{2} z \bar{z}')^n}{n!} a_k z'^k e^{\frac{\kappa}{4}|z|^2} &= \int_0^{\infty} dx' e^{\frac{\kappa}{2}x'} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(zx')^k}{k!} \\ &= u(z) e^{\frac{\kappa}{4}|z|^2} \end{aligned} \quad (1.69)$$

Der Raumanteil des gesuchten Kerns ist also :

$$Op^{-1}(z, \bar{z}') = \exp \frac{\kappa}{2} z \bar{z}'$$

(multipliziere dazu die Gleichung (2.16) mit $e^{\frac{\kappa}{4}|z|^2}$). Aufgrund der Symmetrie zwischen z und θ setzt man also für den gewünschten Operator $e^{\frac{\kappa}{2}(z\bar{z}'+\theta\bar{\theta}')}$ an. Explizites Nachrechnen bestätigt dann leicht die geforderte Beziehung (2.14).

Damit können die Graphenregeln der supersymmetrischen Theorie angegeben werden:

Der Wechselwirkungsterm $h(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n$ mit $\alpha = e^{\frac{\kappa}{2}(z\bar{z}+\theta\bar{\theta})}$ liefert:

- a) für jeden n -Vertex den Faktor $a_n e^{\frac{\kappa}{2}(z\bar{z}+\theta\bar{\theta})}$
- b) für jede Linie den Faktor $e^{\frac{\kappa}{2}(z\bar{z}'+\theta\bar{\theta}')}$

hat man in einem Graphen k_n n -Vertices, so ist

1. die Anzahl der inneren Linien des geschlossenen Graphen $N_L = \sum_{n=0}^{\infty} n k_n$
2. die Anzahl der Vertices $N_V = \sum_{n=0}^{\infty} k_n$

Für einen geschlossenen Graphen muß die Anzahl der einlaufenden und auslaufenden Linien gleich sein. Definieren wir nun wie im vorigen Abschnitt eine Matrix A mit:

$$A_{ij} = \text{Zahl der Linien von } i \text{ nach } j$$

so ist für einen geschlossenen Graphen L -ter Ordnung, der Beitrag offenbar durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\int \prod_n dz_n d\bar{z}_n d\theta_n d\bar{\theta}_n \prod_n a_n \left\{ \exp \frac{-\kappa}{2} [\hat{z}(B-A)\hat{z} + \hat{\theta}(B-A)\hat{\theta}] \right\} \quad (1.70)$$

wobei

$$\sum_i (B - A)_{ij} = \sum_j (B - A)_{ij} = 0 \quad (1.71)$$

da der j-te Vertex in der Diagonalen denselben Faktor n liefert wie die Zahl der Linien von bzw nach j.

Da der Graph nicht geschlossen ist, zieht man die Linien von f nach i wie im vorigen Abschnitt ab und hat je eine Linie von $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_i$ und $\vec{x}_f \rightarrow \vec{x}'$ zu addieren.

Insgesamt also :

$$\int [d\hat{z}d\hat{z}d\hat{\theta}d\hat{\theta}] \prod_n a_n \exp \frac{-\kappa}{2} [\hat{z}(B - A)\hat{z} + \hat{\theta}(B - A)\hat{\theta} - z\bar{z}_i - \theta\bar{\theta}_i - z_f\bar{z}' - \theta_f\bar{\theta}'] \quad (1.72)$$

wegen(2.19) und der Invarianz des Graßmannmaßes unter Translationen kann der Variablenshift

$$\hat{z} = \hat{\xi} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

und für θ analog genau wie oben und mit gleichem Ergebnis,nämlich der Abspaltung des ortsabhängigen Anteils , ausgeführt werden. Es bleibt:

$$\int [d\hat{z}d\hat{z}d\hat{\theta}d\hat{\theta}] \prod_n a_n \exp \frac{-\kappa}{2} [\hat{z}(B - A + S)\hat{z} + \hat{\theta}(B - A + S)\hat{\theta} \cdot \exp \frac{\kappa}{2} (z\bar{z}' + \theta\bar{\theta}')] \quad (1.73)$$

und das supersymmetrische Integral ergibt den Quotienten

$$\frac{Det(B - A + S)}{Det(B - A + S)} = 1$$

Damit liefert ein beliebiger Graph abgesehen von den Symmetriefaktoren und dem $\prod a_n$, die jeweils genauso durch eine 0-dimensionale Theorie erzeugt werden, den Faktor 1. Die Raumabhängigkeit ist dieselbe wie die der freien Greensfunktion, was wir ja schon bei der Wegnerschen Herleitung vermerkt hatten.

1.3.6. 0-DIMENSIONALE THEORIE

Die unordnungsgemittelte Greensfunktion läßt sich also schreiben:

$$\langle G(\vec{x}, \vec{x}') \rangle = P(\vec{x}, \vec{x}') C(\epsilon) \quad (1.74)$$

wobei $C(\epsilon)$ durch eine 0-dimensionale Theorie, d.h. ein einfaches Integral der Form:

$$C(\epsilon) = \frac{-i}{Z} \int D\phi D\bar{\phi} \phi \bar{\phi} \exp \left\{ i\epsilon \frac{2\pi}{\kappa} \bar{\phi} \phi + \frac{2\pi}{\kappa} h(\bar{\phi} \phi) \right\} \quad (1.75)$$

gegeben ist. Z ist wieder :

$$Z = \int D\phi D\bar{\phi} \exp \left\{ i\epsilon \frac{2\pi}{\kappa} \bar{\phi} \phi + \frac{2\pi}{\kappa} h(\bar{\phi} \phi) \right\} \quad (1.76)$$

Noch einfacher als logarithmische Ableitung ausgedrückt:

$$\begin{aligned} C(\epsilon) &= \frac{-\kappa}{2\pi} \partial_\epsilon \ln \left\{ \int D\phi D\bar{\phi} \exp \left\{ i\epsilon \frac{2\pi}{\kappa} \bar{\phi} \phi + \frac{2\pi}{\kappa} h(\bar{\phi} \phi) \right\} \right\} \\ &= \frac{-\kappa}{2\pi} \partial_\epsilon \ln \left\{ \int_0^\infty dx \exp \left\{ \frac{2\pi}{\kappa} (i\epsilon x + h(x)) \right\} \right\} \end{aligned}$$

Damit haben wir die unordnungsgemittelte Greensfunktion für eine große Klasse von Potentialverteilungen durch ein eindimensionales Integral ausgedrückt.

II ENDLICHES SYSTEM

Die wesentlichen Aspekte des im ersten Teil betrachteten Systems lassen sich in drei Punkte gliedern.

- 1) es ist homogen, woraus wegen Translationsinvarianz die Abspaltung des ortsabhängigen Faktors der Greensfunktion folgte.
- 2) die freien Zustände sind im wesentlichen holomorphe Funktionen (bis auf einen Dämpfungsfaktor), was die Beschreibung durch 'holomorphe Superfelder' ermöglichte.
- 3) die Struktur des Projektors des freien Systems reduzierte die Berechnung eines Graphenbeitrags auf ein Gauss-Integral.

Es fragt sich nun ob die Möglichkeit die Greensfunktion durch ein elementares, eindimensionales Integral auszudrücken eine singuläre Eigenschaft des betrachteten Systems ist, in dem Sinn, daß es keine Verallgemeinerung des Problems mit ähnlich lösbarer Struktur gibt. Eine Erweiterung etwa auf beliebige Landauniveaus scheitert (s. z. B. Perez , Klein²⁹).

Hält man an der Forderung des homogenen Systems fest, liegt es nahe folgende Verallgemeinerung zu untersuchen:

Die Oberfläche einer Kugel in deren Zentrum ein magnetischer Monopol der Ladung n sitzt*.

Um eine geeignete Basis zur Behandlung des Problems zu finden, ist es nötig zunächst das freie System, d.h. ohne die Wechselwirkung mit Störpotentialen zu behandeln. Dazu sind einige grundlegende Bemerkungen zur Differentialgeometrie bei Anwesenheit halbzahlicher Spins** (denn wir betrachten wieder die Pauli-Gleichung) angebracht. Außerdem bringen Monopole ihre eigenen Komplikationen mit sich.

* an dieser Stelle sollte noch einmal darauf hingewiesen werden, daß das hier untersuchte System nicht mit dem in den Arbeiten von Haldane²¹ oder Neudecker und Hoffmann³⁴, im Zusammenhang mit dem fraktionierten Hall-Effekt behandelten, zu verwechseln ist. Dort wird eine Vielteilchen-Wellenfunktion (vgl. Laughlin's²⁰ Ansatz zur Erklärung des FQHE) auf der Kugeloberfläche konstruiert.

** das ist im wie bereits in der Einleitung beschrieben ein weiterer Unterschied zu den erwähnten Arbeiten, die von Lösungen der Schrödingergleichung ausgehen.

Zur Vorbereitung also ein kurzer Abriß über Differentialgeometrie von Fermionen und Monopolen.(in zwei Raumdimensionen)

1. Differentialgeometrischer Abriß

1.1. DIFFERENTIALGEOMETRIE VON FERMIONEN

Im einleitenden Kapitel wurde schon festgestellt, daß die Mitnahme des Elektronspins bemerkenswerterweise die Beschreibung zweidimensionaler Systeme in gewissem Sinn vereinfacht. Außerdem hatten wir Argumente angeführt, die ein solches Vorgehen, gegenüber der Benutzung des Schrödingerhamiltonians, nahelegen. Statt dieses quadratischen Hamiltonians reicht hier die lineare Dirac-Gleichung (wie schon oben verwenden wir diesen Ausdruck aufgrund der formalen Analogie, obwohl wir nur eine Theorie in zwei Dimensionen betrachten) zur Bestimmung der Eigenfunktionen, da $H_p = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2$. Der Einfachheit halber ist der Faktor $\frac{1}{2m}$ durch Redefinition von $\vec{\pi}$ absorbiert. Auf gekrümmten Oberflächen führt der Spin nun zu einem Zusatzterm im Dirac-Operator: Wohlbekannt ist das Auftreten der Zusammenhangskoeffizienten bei der kovarianten Ableitung eines Vektorfeldes aufgrund der Ortsabhängigkeit des Basissystems, das nur lokal im Tangentialraum definiert werden kann.

Ist die Tangentialraumbasis durch :

$$e_\mu \quad \text{mit} \quad e^\mu \cdot e_\nu = \delta^\mu{}_\nu, \quad e_\mu \cdot e_\nu = g_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

($g_{\mu\nu}$ ist der metrische Tensor)

gegeben, so erhält man für die Ableitung eines Vektorfeldes A^μ :

$$\partial_\mu(A^\nu e_\nu) = (\partial_\mu A^\nu) e_\nu + (\partial_\mu e_\nu) A^\nu \quad (1.2)$$

woraus :

$$e^\lambda \partial_\mu(A^\nu e_\nu) = \partial_\mu A^\lambda + (e^\lambda \partial_\mu e_\nu) A^\nu = \nabla_\mu A^\lambda \quad (1.3)$$

und mit der Definition:

$$e^\lambda \partial_\mu e_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \quad \nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \quad (1.4)$$

Wie sieht nun die kovariante Ableitung von Spinorfeldern⁴³ auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten aus? Zur Beantwortung der Frage gehen wir zurück zur Definition der Gammamatrizen:

Allgemein gilt

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}_+ = 2g_{\mu\nu} \quad (1.5)$$

Unter unitären Transformationen der Gammamatrizen bleibt diese Gleichung invariant, d.h. γ_μ sind nur bis auf unitäre Äquivalenz durch die Antivertauschungsrelation(1.5) definiert.

Unter Transformationen der γ_μ :

$$\gamma_\mu \longrightarrow \tilde{\gamma}_\mu = U \gamma_\mu U^\dagger$$

sollte die Dirac-Gleichung kovariant sein:

$$\tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu \tilde{\psi} = U \gamma^\mu U^\dagger \partial_\mu U \psi \stackrel{!}{=} U \gamma^\mu \partial_\mu \psi$$

Für *lokale* Spinortransformationen⁴⁴ wird die Einführung (vgl das analoge Vorgehen in der Eichtheorie⁴⁵) einer Konnektion nötig, sodaß:

$$\tilde{D}_\mu = \partial_\mu - \tilde{\Gamma}_\mu = U D_\mu U^\dagger \quad (1.6)$$

denn

$$U U^\dagger = U^\dagger U = 1 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu (U U^\dagger) = (\partial_\mu U) U^\dagger + U \partial_\mu U^\dagger = 0$$

mit dem üblichen Transformationsverhalten der Zusammenhangskoeffizienten:

$$\tilde{\Gamma}_\mu = U \Gamma_\mu U^\dagger - U \partial_\mu U^\dagger \quad (1.7)$$

das man auch vom Vektorpotential in der Elektrodynamik kennt. Die Dirac-Gleichung ist jetzt kovariant unter Spinortransformationen:

$$\tilde{\gamma}_\mu \tilde{D}_\mu \tilde{\psi} = U \gamma^\mu U^\dagger U D_\mu U^\dagger U \psi = U \gamma^\mu D_\mu \psi$$

wie oben gefordert. Zur Definition der Zusammenhangskoeffizienten betrachtet man die Forderung der Hermitizität des Dirac-Operators:

$$-i \gamma^\mu D_\mu = -i \gamma^\mu (\partial_\mu - \Gamma_\mu) = (-i \gamma^\mu D_\mu)^\dagger$$

d.h. es soll gelten:

$$\int d^2x \sqrt{g} \psi^\dagger (-i\gamma^\mu D_\mu) \psi = \int d^2x \sqrt{g} \left((-i\gamma^\mu D_\mu)^\dagger \psi \right)^\dagger \psi \stackrel{!}{=} \int d^2x \sqrt{g} \left((-i\gamma^\mu D_\mu) \psi \right)^\dagger \psi$$

Einsetzen der Definitionen in diese Gleichung liefert:

$$\int d^2x \sqrt{g} \left[\{-i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{1}{\sqrt{g}} i(\partial_\mu \sqrt{g} \gamma^\mu) - i\Gamma_\mu^\dagger \gamma^\mu\} \psi \right]^\dagger \psi \quad (1.8)$$

d.h.

$$(-i\gamma^\mu D_\mu)^\dagger = (-i\gamma^\mu D_\mu) - i\left\{ \frac{1}{\sqrt{g}} \partial - \mu(\sqrt{g} \gamma^\mu) + \Gamma_\mu^\dagger \gamma^\mu + \gamma^\mu \Gamma_\mu \right\}$$

mit

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} \gamma^\mu) = \nabla_\mu \gamma^\mu = (\partial_\mu - \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) \gamma^\mu$$

also die Forderung:

$$\nabla_\mu \gamma^\mu + \Gamma_\mu^\dagger \gamma^\mu + \gamma^\mu \Gamma_\mu \stackrel{!}{=} 0$$

oder

$$\partial_\mu \gamma_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \gamma_\lambda = -\Gamma_\mu^\dagger \gamma_\nu - \gamma_\nu \Gamma_\mu \quad (1.9)$$

Zur Bestimmung der Beziehung von $\Gamma_\mu^\dagger$ zu Γ_μ nehmen wir die "reine Eichung":

$$\Gamma_\mu = -U \partial_\mu U^\dagger \quad \Rightarrow \quad \Gamma_\mu^\dagger = -\Gamma_\mu$$

d.h. wir setzen Γ_μ *antihermitesch* an und demnach mit (1.9)

$$\nabla_\mu \gamma_\mu = [\Gamma_\mu, \gamma_\mu] \quad \text{als Definition der } \Gamma_\mu \quad (1.10)$$

Diese trockenen Definitionen sollten am folgenden Beispiel der Kugeloberfläche deutlich werden.

1.1.1. BEISPIEL KUGELOBERFLÄCHE

In Kugelkoordinaten sind die Einheitsvektoren gegeben durch:

$$\begin{aligned} e_r &= (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \\ e_\theta &= (\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, -\sin \theta) \\ e_\phi &= (-\sin \phi \sin \theta, \cos \phi \sin \theta, 0) \end{aligned}$$

sodaß :

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, \sin^2 \theta) \quad \mu = 1 : \theta \quad \mu = 2 : \phi$$

Zum Einsetzen in die Definitionen(1.10)werden die Ableitungen benötigt:

$$\begin{aligned} \partial_\theta e_\theta &= -e_r & \partial_\theta e_\phi &= \cot \theta e_\phi \\ \partial_\phi e_\theta &= \cot \theta e_\phi & \partial_\phi e_\phi &= -\sin \theta (\sin \theta e_r + \cos \theta e_\theta) \end{aligned}$$

außerdem ist:

$$\begin{aligned} e_r \times e_\theta &= \frac{1}{\sin \theta} e_\phi & e_\phi \times e_r &= \sin \theta e_\theta \\ e_\theta \times e_\phi &= \sin \theta e_r \end{aligned}$$

Nach (1.5) hat man die γ_μ nun so zu wählen, daß:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}_+ = 2g_{\mu\nu}$$

Wie schon betont sind die Matrizen dadurch nur bis auf unitäre Äquivalenz festgelegt, und wir wählen z. B.

$$\text{a) } \gamma_\mu = \vec{e}_\mu \cdot \tau_\mu \quad \tau_\mu = \text{Pauli - Matrizen}$$

$$\text{b) } \tilde{\gamma}_\mu = (g_{\mu\nu})^{1/2} \tau_\nu$$

(Bemerkung: es muß gelten $\gamma_\mu = U_1 \tilde{\gamma}_\mu U_1^\dagger$ hier ist:

$$U_1 = D^{1/2}(0, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} & e^{i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

wie man durch nachrechnen bestätigt) Explizit wird daher aus (1.10):

$$\begin{aligned} \partial_\theta \gamma_\theta &= -\gamma_r = [\Gamma_\theta, \gamma_\theta] \\ \partial_\phi \gamma_\theta - \cot \theta \gamma_\phi &= 0 = [\Gamma_\phi, \gamma_\theta] \\ \partial_\theta \gamma_\phi - \cot \theta \gamma_\theta &= 0 = [\Gamma_\theta, \gamma_\phi] \\ \partial_\phi \gamma_\phi - \sin \theta \cos \theta \gamma_r &= \sin^2 \theta \gamma_r = [\Gamma_\phi, \gamma_\phi] \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu &= e_\mu \cdot e_\nu + i(\vec{e}_\mu \times \vec{e}_\nu) \cdot \vec{\tau} \\ &= g_{\mu\nu} + i\sqrt{g}\gamma_r\epsilon_{\mu\nu}\end{aligned}$$

gilt demnach :

$$\Gamma_\phi = i/2 \sin \theta \gamma_\theta \quad \Gamma_\theta = -i/2 \frac{1}{\sin \theta} \gamma_\phi$$

oder kürzer:

$$\Gamma_\mu = i/2 \epsilon_{\mu\nu} \sqrt{g} \gamma^\nu$$

Der Dirac-Operator auf der Kugeloberfläche ist also in Kugelkoordinaten mit der Wahl a) für die Gammamatrizen gegeben durch:

$$a) -i\gamma^\mu(\partial_\mu - \Gamma_\mu) = -i(\gamma_\theta \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \gamma_\phi \partial_\phi - \gamma_r)$$

Für die Wahl b) findet man nach analoger Rechnung für die Spinorzusammenhangskoeffizienten:

$$\begin{aligned}b) \tilde{\gamma}_\mu &= \sqrt{g_{\mu\nu}} \tau_\nu \\ \Gamma_1 &= 0 \quad \Gamma_2 = -i/2 \cos \theta \tau_3 \\ -i\gamma^\mu D_\mu &= -i(\tau_1 \partial_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \tau_2 \partial_\phi + 1/2 \cot \theta \tau_1)\end{aligned}$$

Damit ist die Beschreibung freier Elektronen mit Spin auf gekrümmten zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten geklärt. Welche Konsequenzen hat nun die Hinzufügung eines magnetischen Monopols? Diese Frage wird im nächsten Unterabschnitt beantwortet.

1.2. DIFFERENTIALGEOMETRIE VON MONOPOLEN

Die "Dirac"-Gleichung wird sicher lauten:

$$-i\gamma^\mu(\partial_\mu - \Gamma_\mu - iA_\mu)\psi = \lambda\psi \quad (1.11)$$

Die Definition des Magnetfeldes über ein Vektorpotential verbietet nun zwar bekanntlich aufgrund des Poincaré -Lemmas die Existenz magnetischer Monopole; allerdings gilt das nur für 'sternförmige' Gebiete. Dirac führte deshalb in seiner ursprünglichen Arbeit⁴⁶ einen 'String' ein, der aus dem gewöhnlichen R^3 einen

dreidimensionalen Raum ohne z. B. die negative z-Achse macht. Mathematisch korrekter ist die Darstellung des Monopolvektorpotentials als 'nichttriviales Faserbündel'* , wobei der Monopol sozusagen durch eine 'topologische Verdrillung' hervorgerufen wird, wie wir weiter unten sehen werden. Zur Bestimmung des Monopolvektorpotentials geht man von der Definition eines Monopolfeldes aus: Der Fluß durch ein Flächenelement einer Kugel in deren Zentrum ein magnetischer Monopol der Ladung q sitzt, sollte:

$$d\Omega q = F_{\theta\phi} d\theta d\phi = \Phi \quad (1.12)$$

sein.

$F_{\theta\phi}$ ist der Feldstärketensor in zwei Dimensionen, mit der üblichen Definition:

$$F_{\theta\phi} = \partial_\theta A_\phi - \partial_\phi A_\theta$$

Da die Wahl einer Eichung freisteht, vereinfachen wir das Auffinden einer Lösung von (1.12) durch Festlegen einer Komponente des Vektorpotentials. Dazu wählen wir:

$$A_\theta = 0$$

Damit hat man :

$$q d\Omega = q \sin \theta d\theta d\phi = \partial_\theta A_\phi d\theta d\phi$$

$$\text{also} \quad A_\phi = -q \cos \theta + \text{const}$$

Die Konstante wählt man nun so, daß die 1-Form $A_\phi d\phi$ nicht singulär am Nordpol (oder Südpol je nachdem welche Karte betrachtet wird) ist. (Eine Kugel muß bekanntlich durch einen Atlas aus mindestens zwei Karten beschrieben werden**). Unter dieser Voraussetzung existieren zwei Möglichkeiten die Konstante zu wählen; es wird also:

$$A_\phi^{N,S} = q(\pm 1 - \cos \theta)$$

* wir geben hier eine kurze Herleitung im Rahmen dieses Formalismus, genaueres dazu findet sich in einigen Lehrbüchern über Eichtheorien, in der zitierten Arbeit von Coleman⁴⁷ oder dem Review Artikel von Eguchi et. al.⁴⁸

** Daß wir uns weiter unten trotzdem nur auf eine Karte beschränken können liegt daran, daß nur Integrale über die Funktionen, korrekter 'sections', auf der Kugeloberfläche betrachtet werden, ein Punkt der Oberfläche also ohne Folgen für das Gesamtintegral weggelassen werden kann

hier in Kugelkoordinaten. $A^{N,S}$ bezieht sich dabei auf $S^2 \setminus \text{Nordpol}$ resp. Südpol . Am Überlapp der beiden Karten müssen die Feldverteilungen eichäquivalent sein, d.h. mit der Übergangsfunktion $g \in SU(2)$ gilt:

$$\begin{aligned} A_\mu^I &= A_\mu^{II} + \partial_\mu \chi = A_\mu^{II} - \frac{i}{e} g \partial_\mu g^{-1} \\ \Rightarrow \quad A_\phi^N - A_\phi^S &= 2 \frac{q}{e} = \partial_\phi \chi \end{aligned}$$

Demnach :

$$g = e^{-i2q\phi}$$

und die Forderung der Eindeutigkeit für die Übergangsfunktion führt zur Beziehung:

$$2q = \frac{n}{e}$$

Das ist die sogenannte Dirac'sche Quantisierungsbedingung (hier ohne das Auftreten der 'Dirac-Strings' hergeleitet) Die Ladung des Monopols kann also nur ganzzahlige Vielfache der Dirac-Einheit $q_D = \frac{1}{2e}$ annehmen.

2. Die Lösungen der Dirac-Gleichung

Die Kenntnis der Spinorzusammenhangskoeffizienten sowie des Monopolvektorpotentials, erlaubt die explizite Angabe des Dirac-Operators auf der Kugeloberfläche. Wir wählen im folgenden als Koordinatensystem die stereographische Projektion der Kugel auf eine Ebene (s. Anhang für die Gammamatrizen, Zusammenhangskoeffizienten und Vektorpotential)

Wir betrachten also:

$$-i\gamma^\mu D_\mu \Psi = \lambda \Psi \quad -i\gamma_\mu D_\mu = g^{-\frac{1}{2}} \gamma^\mu (-i\partial_\mu - i\Gamma_\mu - A_\mu)$$

oder anders geschrieben:

$$-i\gamma^\mu D_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \pi_+ \\ \pi_- & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

einen analogen Ausdruck hatten wir im ersten Kapitel, für das ebene System gefunden. Die gegenwärtigen 'Leiteroperatoren' stellen die Verallgemeinerung der dort benutzten auf die Kugeloberfläche dar und gehen im Grenzfall in diese über. Der Ausdruck ist jedoch gerechtfertigt: es sind in diesem Fall Drehimpulsleiteroperatoren. Explizit lauten sie:

$$\begin{aligned} \pi_+ &= \frac{1+r^2}{2i} (2\partial_z - \frac{1+n}{1+r^2} \bar{z}) \\ \pi_- &= \frac{1+r^2}{2i} (2\partial_{\bar{z}} - \frac{1-n}{1+r^2} z) \end{aligned} \quad (2.2)$$

dabei benutzen wir die folgenden Konventionen: $z = x + iy = re^{i\phi}$ x, y sind dimensionslose Variable und auf den Kugelradius normiert

2.1. GRUNDZUSTANDSLÖSUNG

Analog zum eingangs diskutierten Problem in der Ebene ist auch auf der Kugel die Grundzustandslösung besonders einfach anzugeben: für $\lambda=0$ entkoppeln die beiden Gleichungen (2.2); man hat daher zwei separate Differentialgleichungen erster Ordnung zu lösen:

$$\begin{aligned} \pi_+ \psi_2 &= 0 & \pi_- \psi_1 &= 0 \\ \Rightarrow (\partial_z - 1/2 \frac{1+n}{1+r^2} \bar{z}) \psi_2 &= 0 & (\partial_{\bar{z}} - 1/2 \frac{1-n}{1+r^2} z) \psi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Genau wie im ersten Kapitel führen wir jetzt die "chirale" Transformation aus d.h.

$$\begin{aligned}\psi &= u \exp \{ \sigma_3 \alpha \} \\ \Rightarrow (-\partial_z \alpha - 1/2 \frac{1+n}{1+r^2}) u_2 + \partial_z u_2 &= 0 \\ (\partial_{\bar{z}} \alpha - 1/2 \frac{1-n}{1+r^2}) u_1 + \partial_{\bar{z}} u_1 &= 0\end{aligned}\quad (2.4)$$

mit

$$\alpha = \frac{n}{2} \ln(1+r^2)$$

wird daraus:

$$\begin{aligned}(\partial_z - 1/2 \frac{1}{1+r^2} \bar{z}) u_2 &= 0 \\ (\partial_{\bar{z}} - 1/2 \frac{1}{1+r^2} z) u_1 &= 0\end{aligned}\quad (2.5)$$

Mit den selben Überlegungen wie im ersten Kapitel (Normierbarkeit der Lösungen etc) ist unter der Annahme $n > 0$ die normierbare Wellenfunktion :

$$\Psi_k = N_k u_{1k}(z) \exp \left\{ \frac{1-n}{2} \ln(1+r^2) \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_{1k}(z) = z^k \quad (2.6)$$

Für die Normierungskonstante N_k findet man nach Auswertung des Integrals:

$$N_k^2 = \frac{n}{4\pi a^2} \binom{n-1}{k} \quad \text{a ist der Kugelradius}$$

Der Grundzustandsprojektor läßt sich damit sofort in geschlossener Form angeben:

$$P_0^n(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{n}{4\pi a^2} \frac{\left(\frac{1+z\bar{z}'}{a^2} \right)^{n-1}}{\left(1 + \frac{|z|^2}{a^2} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 + \frac{|z'|^2}{a^2} \right)^{\frac{n-1}{2}}} \quad (2.7)$$

Dabei ist die Abhängigkeit vom Kugelradius wieder explizit aufgeführt.

Die Zustandsdichte ist aufgrund der Homogenität des Systems wie im Fall der Ebene ortsunabhängig:

$$\rho(\vec{x}) = P_0^n(\vec{x}, \vec{x}) = \frac{n}{4\pi a^2}$$

der Grenzfall $n \rightarrow \infty$ liefert , wenn zugleich $a \rightarrow \infty$ aber so , daß:

$$\lim_{n, a \rightarrow \infty} \frac{n}{4\pi a^2} = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (2.8)$$

(d.h. Monopolladung und Kugelradius streben nach Unendlich wobei das Feld auf der Kugeloberfläche konstant bleibt) genau den im ersten Kapitel gefundenen Grundzustandsprojektor:

$$P_0^\infty(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{\kappa}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{\kappa}{4} [|z|^2 + |z'|^2 - 2z\bar{z}'] \right\} \quad (2.9)$$

2.2. SPEKTRUM DES DIRAC-OPERATORS

Da wir uns im folgenden auf die Grundzustandsprojektion der unordnungsgemittelten Greensfunktion konzentrieren wollen, reichte die jetzt angegebene Form der Lösung eigentlich aus. Es wird sich jedoch als äußerst nützlich herausstellen die allgemeine Struktur des Spektrums des Dirac-Operators (2.1) genauer zu betrachten. Tatsächlich wäre die Ausführung fast aller Summationen und Integrationen ohne die Benutzung der weiter unten hergeleiteten Symmetrien eine hoffnungslose Aufgabe. Der Schlüssel zu den später anzugebenden exakten Ergebnissen für einige Werte der Monopolladung liegt in den Eigenschaften der Funktionen, die die Lösung der Differentialgleichung (2.2) bilden.

Wir schreiben zunächst noch einmal die Dirac-Gleichung diesmal in Koordinaten der stereographischen Projektion*:

$$\begin{aligned}\pi_+ \psi_2 &= \lambda \psi_1 & \pi_+ &= \frac{1+r^2}{2i} (2\partial_z - \frac{1+n}{1+r} \bar{z}) \\ \pi_- \psi_1 &= \lambda \psi_2 & \pi_- &= \frac{1+r^2}{2i} (2\partial_{\bar{z}} - \frac{1-n}{1+r} z)\end{aligned}\quad (2.10)$$

Die Substitution :

$$z = e^{i\phi} \tan \theta/2 \quad (2.11)$$

führt auf die Form:

$$\begin{aligned}\pi_+ &= -ie^{-i\phi} \left\{ \partial_\theta - \left(\frac{1+n}{2} \right) \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \right) - i \frac{\partial_\phi}{\sin\theta} \right\} \\ \pi_- &= -ie^{i\phi} \left\{ \partial_\theta - \left(\frac{1-n}{2} \right) \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \right) + i \frac{\partial_\phi}{\sin\theta} \right\}\end{aligned}\quad (2.12)$$

Für die Spinoren ψ machen wir den Ansatz:

$$\psi = \begin{pmatrix} e^{ik\phi} \chi_1 \\ ie^{i(k+1)\phi} \chi_2 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Einsetzen liefert dann:

$$\begin{aligned}\left\{ \partial_\theta + \frac{(k+1/2 - n/2) + (\frac{1+n}{2}) \cos\theta}{\sin\theta} \right\} \chi_2 &= \lambda \chi_1 \\ \left\{ -\partial_\theta + \frac{(k+1/2 - n/2) - (\frac{1-n}{2}) \cos\theta}{\sin\theta} \right\} \chi_1 &= \lambda \chi_2\end{aligned}\quad (2.14)$$

* eine alternative Herleitung, bei der die Funktionen explizit über die Differentialgleichung der Jacobi-Polynome⁴⁹ konstruiert werden, findet sich im Anhang

ein Vergleich mit der Anwendung der Leiteroperatoren $J_{\pm}$ auf die Kreiselfunktionen (s.z. B. Lindner⁵⁰ p.84) zeigt, daß mit :

$$\begin{aligned} m &= k + 1/2 - n/2 & m' &= -1/2(n + 1) \\ \chi_2 &= d_{m',m}^j & \chi_1 &= d_{m'+1,m}^j \end{aligned} \quad (2.15)$$

oder insgesamt mit den vollständigen Kreiselfunktionen:

$$D_{m',m}^j(\alpha, \beta, \gamma) = e^{im'\alpha} d_{m',m}^j e^{im\gamma}$$

daraus

$$\psi_{j,m,m'} = N_j \begin{pmatrix} D_{m'+1,m}^j(-\phi, \theta, \phi) \\ iD_{m',m}^j(-\phi, \theta, \phi) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

wird, wo die Normierungskonstante: $N_j = \sqrt{\frac{2j+1}{8\pi a^2}}$. Die Eigenwerte sind:

$$\lambda = \sqrt{(j(j+1) - m'(m'+1))} \quad (2.17)$$

Wir werden im folgenden eine dem Problem etwas besser angepaßte Schreibweise benutzen (drei Argumente wie bei den Kreiselfunktionen sind ja offenbar in unserem Fall nicht notwendig).

Führt man die sogenannten "Monopolharmonischen" Wu und Yang⁵¹ bzw die verallgemeinerten Kugelflächenfunktionen von Moses⁵² ein, kann man die Lösung einfacher schreiben:

$$\psi_{j,m,m'}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Y_{jm'}(\theta, \phi) \\ iY_{m+1jm'}(\theta, \phi) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

wo jetzt : $m = \frac{n-1}{2}$ $m' = k - \frac{n-1}{2}$ und j nimmt die Werte : $j = |m|, |m| + 1, \dots$ an. Im Grundzustand hat man daher als alternative Darstellung zu (2.13) :

$$\psi_{q,q,m'}(\theta, \phi) = Y_{qqm'}(\theta, \phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q = \frac{n-1}{2} \quad (2.19)$$

Die Lösungen der 'Dirac'-Gleichung auf der Kugeloberfläche im magnetischen Monopolfeld sind also Verallgemeinerungen der Kugelfunktionen.

Diese Feststellung erlaubt für die Verknüpfung dieser Funktionen, wie sie ja bei Wechselwirkungstermen auftauchen, den Apparat der Drehimpulsalgebra einzusetzen. Wie das zustandekommt und wie man bei der Auswertung der so entstehenden Terme vorzugehen hat, bildet den Gegenstand des nächsten Kapitels.

3. Die unordnungsgemittelte Greensfunktion im Monopolfeld

Die Grundzustandslösungen auf der Kugeloberfläche im Feld eines magnetischen Monopols mit N Dirac-Einheiten Ladung, waren nach dem letzten Abschnitt gegeben durch:

$$\psi_{q,m} = Y_{q,m} \quad q = \frac{n-1}{2}, m = -q, \dots, q$$

wobei n die Monopolladung in Dirac-Einheiten ($= \frac{1}{2c}$)

Das vom Monopol auf der Kugeloberfläche erzeugte Magnetfeld ist:

$$B = \frac{n}{2a^2} \frac{1}{e} \quad a = \text{Kugelradius} \quad (3.1)$$

Damit sind zunächst zwei unabhängig voneinander variierende Parameter, nämlich Monopolladung und Kugelradius gegeben. Interessant ist jedoch nur (insbesondere für den Grenzfall der Ebene) das Magnetfeld in dem sich die Elektronen bewegen. Daher soll im folgenden $B = \text{const}$ gewählt werden, d.h. Ladung und Kugelradius sind verknüpft über

$$\text{Def. } \kappa = eB = \text{const} \Rightarrow \frac{1}{4\pi a^2} = \frac{\kappa}{2\pi n} \quad (3.2)$$

Sodaß als einzige relevante Variable noch die Anzahl der Zustände auf der Kugel, die ja gleichzeitig die Ladung des Monopols darstellt, bleibt.

3.1. FORMALE DARSTELLUNG DER GREENSFUNKTION

Die Darstellung der unordnungsgemittelten Greensfunktion erfolgt formal wie schon im zweiten Kapitel, bei der Betrachtung der Verallgemeinerung von Brézin et.al., erläutert, über ein Funktionalintegral, das sich hier jedoch, wegen der endlichen Dimension des Grundzustandsraums auf ein 'gewöhnliches' Integral (bis auf die Einführung antikommutierender Variablen) reduziert.

Wie schon oben hat man zunächst den formalen Ausdruck:

$$\begin{aligned} \langle G(\vec{x}, \vec{x}') \rangle &= -i \int D\bar{\phi} D\phi D\psi D\bar{\psi} \phi(\vec{x}) \bar{\phi}(\vec{x}') e^{S_{eff}} \\ S_{eff} &= i\epsilon \int d^2x \sqrt{g} [\bar{\phi}\phi + \bar{\psi}\psi] - \frac{w}{2} \int d^2x \sqrt{g} (\bar{\phi}\phi + \bar{\psi}\psi)^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dabei sind wir wieder zur gauss'schen Mittelung zurückgekehrt, denn vergleicht man (3.3) mit der formalen Darstellung die wir bei verallgemeinerter Mittelung

angegeben hatten, so ist hier offenbar $g(\alpha) = -\frac{w\alpha^2}{2}$. Abgesehen von einer kleinen Abschweifung zum Lloyd-Modell werden wir hier nur diesen Fall betrachten, der, wie sich zeigen wird, für die Ausnutzung der Eigenschaften der Monopolharmonischen (d.i. die Drehimpulskopplung) am geeignetsten ist.* Das Integrationsmaß wurde in (3.3) auf gekrümmte Mannigfaltigkeiten erweitert, daher der Faktor $\sqrt{g}$ im Integranden. Zur Projektion auf den Grundzustand entwickelt man ϕ, ψ nach den oben hergeleiteten Eigenzuständen, den Monopolharmonischen :

$$\phi = \frac{1}{a} = \sum_{-q}^q a_k Y_{q,q,k} \quad \psi = \frac{1}{a} \sum_{-q}^q b_k Y_{q,q,k} \quad (3.4)$$

wo die a_k, a_k^* 'bosonische' Variable sind, während die $b_k, b_k^\dagger$ die Vertauschungsrelationen:

$$[b_k, b_{k'}^\dagger]_+ = \delta_{k,k'} \quad \text{sonst } 0 \quad (3.5)$$

erfüllen. im übrigen gilt die Orthogonalitätsrelation:

$$\frac{1}{a^2} \int d^2x Y_{q,q,k'}^* Y_{q,q,k} = \int d\theta d\phi \sin\theta Y_{q,q,k'}^*(\theta, \phi) Y_{q,q,k}(\theta, \phi) = \delta_{k',k} \quad (3.6)$$

sodaß ,nach Variablensubstitution im Integral auf die Entwicklungskoeffizienten a_k, b_k die gemittelte, auf den Grundzustand projizierte Greensfunktion geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} \langle G(\vec{x}, \vec{x}') \rangle &= \frac{1}{i} \int \prod_{k=1}^n da_k^* da_k \prod_{k'=1}^n db_{k'}^\dagger db_{k'} \frac{1}{a^2} \sum_{l,l'} a_l a_{l'}^* Y_{qq,l}(\theta, \phi) Y_{qq,l'}^*(\theta', \phi') e^{S_{eff}} \\ S_{eff} &= i\epsilon(\vec{a}^* \vec{a} + \vec{b}^\dagger \vec{b}) - \frac{w}{2a^4} \int d^2x \sqrt{g} \left(\sum_{k,k'} (a_k^* a_{k'} + b_k^\dagger b_{k'}) Y_{qq,k}^* Y_{qq,k'} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

wo die Notation $\vec{a}^* \vec{a} = \sum_k a_k^* a_k$ eingeführt ist.

* eine allgemeinere Wahl für das Funktional $g[\alpha(\vec{x})]$ wäre zwar möglich, würde den Formalismus aber sehr unhandlich machen.

3.1.1. DIE EIGENSCHAFTEN DER MONOPOLHARMONISCHEN

Im Wechselwirkungsterm der Wirkung taucht ein Integral über vier Monopolharmonische auf. Im allgemeinen läßt sich ein ϕ^4 -Glieder sicher nicht ausintegrieren; in diesem Fall hat man jedoch über die Eigenschaften der Eigenzustände als Darstellungen der Drehgruppe den ganzen Apparat der Drehimpulsalgebra zur Verfügung. Produkte von Darstellungen lassen sich bekanntlich ausreduzieren, d.h. als Summen über gewisse Darstellungen ausdrücken⁵³. Symbolisch schreibt man:

$$D^{J_1} \otimes D^{J_2} = \bigoplus_{J=|J_1-J_2|}^{|J_1+J_2|} D^J$$

Konkret heißt das für die Monopolharmonischen⁵²

$$\begin{aligned} Y_{qjm} Y_{q'j'm'} &= \sum_{J,M,Q} A_{j,j'}^J \begin{pmatrix} j & j' & | & J \\ q & q' & | & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j' & | & J \\ m & m' & | & M \end{pmatrix} (-)^p Y_{QJM} \\ Y_{qjm}^* Y_{q'j'm'} &= \sum_{J,M,Q'} A_{j,j'}^J \begin{pmatrix} j & j' & | & J \\ -q & q' & | & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j' & | & J \\ -m & m' & | & M \end{pmatrix} (-)^{p'} Y_{QJM} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dabei ist $A_{j,j'}^J = \sqrt{\frac{(2j+1)(2j'+1)}{4\pi(2J+1)}}$ gesetzt, $p = j + j' - J$ $p' = p + q + m$. Die Summationsgrenzen sind durch die Eigenschaften der Clebsch-Gordan-Koeffizienten bestimmt.

Für das Integral über vier Monopolharmonische erhält man daher nach Ausintegration zwei mögliche Darstellungen:

$$\int d\theta d\phi \sin \theta Y_{qqm} Y_{qqm'} Y_{qqk}^* Y_{qqk'}^*$$

wird zu

$$\sum_{J,M} \frac{(2q+1)^2}{4\pi(2J+1)} \begin{pmatrix} q & q & | & J \\ q & q & | & M \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} q & q & | & J \\ m & m' & | & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & q & | & J \\ k & k' & | & M \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

bzw

$$\sum_{J,M} \frac{(2q+1)^2}{4\pi(2J+1)} \begin{pmatrix} q & q & | & J \\ -q & q & | & M \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} q & q & | & J \\ -k & m & | & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & q & | & J \\ -m' & k' & | & M \end{pmatrix} (-)^{k-m'} \quad (3.10)$$

Dabei haben wir gleich den speziellen Fall $j = j' = q$ angeführt, der uns von nun an beschäftigen wird. Weitere Eigenschaften der Monopolharmonischen, insbesondere ihr Verhalten unter Anwendung von Elementen der $SU(2)$ (unter denen sie wie eine Strahldarstellung transformieren, eine Verallgemeinerung der Darstellung der magnetischen Translationsgruppe in der Ebene) werden weiter unten benutzt. Eine genauere Untersuchung dieser Funktionen findet sich in den zitierten Arbeiten von Moses⁵² und später bei Wu und Yang⁵¹ auf die die Bezeichnung Monopolharmonische zurückgeht. (Dort werden allerdings nur die Lösungen der Schrödingergleichung im magnetischen Monopolfeld diskutiert.)

3.1.2. DIE ORTSABHÄNGIGKEIT DER GEMITTELTEN GREENSFUNKTION

Die effektive Wirkung (3.7) ist invariant unter $SU(2)$ Transformationen: mit $U \in SU(2)$ folgt nämlich:

$$U_{LL'}^q U_{KK'}^q \Lambda_{L'K'}^{2Q,K} = U_{KK'}^{2q} \Lambda_{lk}^{2q,K'} = U^q \Lambda^{2q,K} U^{qT}$$

sodaß:

$$\begin{aligned} \sum_K |\vec{a}^\dagger \Lambda^{2q,K} \vec{a}^*|^2 &= \sum_K |(\vec{a}^\dagger U^q) \Lambda^{2q,K} (U^q \vec{a}')^*|^2 \\ &= \sum_K |\vec{a}^\dagger U^q \Lambda^{2q,K} U^{qT} \vec{a}'^*|^2 \\ &= \sum_{KK'K''} \vec{a}'^\dagger U_{qKK'}^2 \Lambda^{2q,K'} \vec{a}'^* \vec{a}'^T (U_{KK''}^{2q} \Lambda^{2q,K''})^\dagger \vec{a}' \quad (3.11) \\ &= \sum_{KK'K''} \vec{a}'^\dagger U_{KK'}^{2q} \Lambda^{2q,K'} \vec{a}'^* \vec{a}'^T \Lambda^{2q,K''} (U_{KK''}^{2q})^\dagger \vec{a}' \\ &= \sum_K |\vec{a}'^\dagger \Lambda^{2q,K} \vec{a}'^*|^2 \end{aligned}$$

Führt man demnach eine Drehung des Koordinatensystems $U^{-1} \vec{x} = \tilde{\vec{x}}$ aus, so wird nur die Ortsabhängigkeit der äußeren Felder $\phi(\vec{x}) \phi^*(\vec{x}')$ unter $SU(2)$ -Transformationen $\phi(U \tilde{\vec{x}}) \phi^*(U \tilde{\vec{x}}')$ mit

$$\phi(\vec{x}) \phi^*(\vec{x}') = \sum_{kk'} a_k a_{k'}^\dagger Y_{qqk}(\theta, \phi) Y_{qqk'}^*(\theta', \phi')$$

zu untersuchen sein.

Unter Transformationen des Koordinatensystems verhalten sich die Monopolharmonischen:(s. Moses⁵²)

$$Y_{nqk}(\theta', \phi') = e^{-2i\lambda(\vec{x})n} \sum_{k'} U_{kk'}^q Y_{nqk'}(\theta, \phi)$$

d.h. wie eine Strahldarstellung der SU(2).

Die Ortsabhängigkeit der transformierten Greensfunktion ist demnach, nach Übergang zu $\tilde{a}_k = U_{kk'}^q a_{k'}$ wegen der Invarianz des Integrationsmaßes und der Wirkung gegeben durch:

$$\langle G(\vec{x}, \vec{x}') \rangle = e^{-2iq(\lambda(\vec{x}) - \lambda(\vec{x}'))} \langle G(\vec{x}, \vec{x}') \rangle \quad (3.12)$$

d.h. die Ortsabhängigkeit kann durch :

$$\langle G(\vec{x}, \vec{x}') \rangle = \frac{4\pi}{n} \sum_k Y_{qqk}(\theta, \phi) Y_{qqk}^*(\theta', \phi') \langle G(\vec{x}, \vec{x}) \rangle \quad (3.13)$$

wiedergegeben werden, wobei $G(\vec{x}, \vec{x})$ ortsunabhängig ist wie man aus (3.12) sieht. Genau wie in den beiden vorher in der Ebene betrachteten Fällen, separiert die gemittelte Greensfunktion also wieder in zwei Anteile:

- a) Einen ortsabhängigen Faktor der durch die freie Greensfunktion gegeben ist.
- b) einen ortsunabhängigen Faktor, der uns im folgenden allein interessieren wird.

Die Raumabhängigkeit kann daher zur Vereinfachung des Integranden ausintegriert werden; anschliessend normieren wir auf ein Kugeloberflächenelement, sodaß insgesamt:

$$\langle G(\vec{x}, \vec{x}') \rangle = \frac{2\pi}{\kappa} P(\vec{x}, \vec{x}') (-i) \int d\vec{a} d\vec{a}^* d\vec{b} d\vec{b}^* \frac{\vec{a}^\dagger \vec{a}}{4\pi a^2} e^{S_{eff}} \quad (3.14)$$

Bemerkung: Die Phasen die in (3.12) auftauchen bzw. die Tatsache, daß die Monopolharmonischen eine Strahldarstellung der SU(2) bilden, ist wie angedeutet eine Verallgemeinerung der magnetischen Translationsgruppe in der Ebene: Das Magnetfeld selbst ist zwar homogen, aber die notwendige Wahl einer Eichung bei der Konstruktion der Eigenzustände zeichnet einen Koordinatenursprung aus, sodaß die Projektoren und Greensfunktionen wie Strahldarstellungen transformieren; der Phasenfaktor rührt von der Anpassung der Eichung an die translatierten Koordinaten.

3.1.3. DIE DARSTELLUNG DES ORTSUNABHÄNGIGEN ANTEILS

Nutzt man die im Abschnitt 'Eigenschaften der Monopolharmonischen' gefundenen Vereinfachungen in der effektiven Wirkung aus, so wird aus (3.14):

$$\langle G(\vec{x}, \vec{x}') \rangle = -i \frac{1}{2\kappa a^2} P(\vec{x}, \vec{x}') \int d\vec{a}^\dagger d\vec{a} d\vec{b}^\dagger d\vec{b} (\vec{a}^\dagger \vec{a}) e^{S_{eff}} \quad (3.15)$$

wo :

$$S_{eff} = S_0 + S_{ww}$$

und:

$$S_{ww} = -\frac{(2q+1)w}{8\pi a^2} \sum_{J,M} |(a_k^* a_{k'} + b_k^\dagger b_{k'}) c_J^q \begin{pmatrix} q & q & | & J \\ -q & q & | & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & q & | & J \\ -k & k' & | & M \end{pmatrix} (-)^k|^2 \quad (3.16)$$

Dabei ist $c_J^q = \sqrt{\frac{2q+1}{2J+1}}$

Der Übersichtlichkeit halber nimmt man jetzt noch eine Variablentransformation vor; es war:

$$q = \frac{n-1}{2} \Rightarrow n = 2q + 1$$

Also mit:

$$\frac{w}{a^2} \frac{n}{4\pi} = \frac{w\kappa}{2\pi}$$

wird der Vorfaktor des Wechselwirkungsterms in die Entwicklungskoeffizienten absorbiert:

$$\tilde{a}_k = \left(\frac{wn}{4\pi a^2} \right)^{\frac{1}{4}} a_k = \left(\frac{w\kappa}{2\pi} \right)^{\frac{1}{4}} a_k \quad (3.17)$$

Diese Substitution wird genauso mit den Graßmannvariablen ausgeführt, sodaß das Integralmaß aufgrund der Eigenschaften antikommutierender Größen invariant bleibt. Geändert werden dagegen der quadratische Anteil der Wirkung und das Skalarprodukt $\vec{a}^\dagger \vec{a}$ im Integranden, daß von den äußeren Feldern herrührt. Für den quadratischen Anteil der Wirkung hat man jetzt:

$$S_0 = i\epsilon \sqrt{\frac{2\pi}{w\kappa}} (\vec{a}^\dagger \vec{a} + \vec{b}^\dagger \vec{b}) \quad (3.18)$$

(Dabei sind wir der Einfachheit halber wieder zur Schreibweise ohne Tilde zurückgekehrt.)

Im Exponenten treten alle Parameter nur noch in einer Kombination auf, was zu einer letzten Definition Anlaß gibt:

$$\nu^2 = \frac{2\pi}{w\kappa} \epsilon^2 \quad (3.19)$$

Der ortsunabhängige Teil der Greensfunktion kann nun sehr kompakt ausgedrückt werden:

$$\mathcal{G}_n = \int d\vec{a}^\dagger d\vec{a} d\vec{b}^\dagger d\vec{b} (\vec{a}^\dagger \vec{a}) e^{i\nu S_0 + S_{ww}} \quad (3.20)$$

wo

$$\begin{aligned} S_0 &= (\vec{a}^\dagger \vec{a} + \vec{b}^\dagger \vec{b}) \\ S_{ww} &= -\frac{1}{2} \sum_{J,M} A_J |\vec{a}^\dagger \Lambda^{J,M} \vec{a} + \vec{b}^\dagger \Lambda^{J,M} \vec{b}|^2 \\ &= -\frac{1}{2} \frac{n}{2n-1} \sum_K \{ |\vec{a}^\dagger \Gamma^{2qK} \vec{a}^*|^2 + 2\vec{b}^\dagger \Gamma^{2qK} \vec{a}^* \vec{a} \Gamma^{2qK} \vec{b} \} \end{aligned} \quad (3.21)$$

dabei sind die Symbole:

$$\begin{aligned} A_J &= \frac{n}{2J+1} \left(\begin{array}{cc|c} q & q & J \\ -q & q & 0 \end{array} \right)^2 \\ \Lambda_{kk'}^{J,K} &= (-)^k \left(\begin{array}{cc|c} q & q & J \\ -k & k' & K \end{array} \right) \\ \Gamma_{kk'}^{2qK} &= \left(\begin{array}{cc|c} q & q & 2q \\ k & k' & K \end{array} \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

benutzt.

Die Auswertung dieses Integrals wird von nun an den Gegenstand der Arbeit bilden. Wir geben daher noch einmal den Zusammenhang mit der unordnungsgemittelten Greensfunktion und dem ortsunabhängigen Faktor $\mathcal{G}_n$ an:

$$\langle G(\vec{x}, \vec{x}') \rangle = P_n^0(\vec{x}, \vec{x}') \sqrt{\frac{2\pi}{w\kappa}} \mathcal{G}_n \quad (3.23)$$

3.1.4. DIE EIGENSCHAFTEN DER MATRIZEN Λ

Bei der Auswertung des im letzten Abschnitt hergeleiteten Integrals werden wir extensiven Gebrauch von den Eigenschaften der im Wechselwirkungsterm auftretenden Matrizen Γ und Λ machen. Es handelt sich dabei wie wir sahen um Clebsch-Gordan-Koeffizienten, die bei der Ausreduktion des Produkts zweier q -dimensionaler Darstellungen der $SU(2)$ auftauchen. Die C-G-Koeffizienten stellen bekanntlich eine unitäre Transformation in einem n^2 -dimensionalen Hilbertraum dar, der aus Drehimpulseigenzuständen besteht. Mit der üblichen Wahl der Phasenkonvention sind sie reelle Matrizen. Die explizite Form dieser Matrizen läßt sich zwar allgemein angeben, erweist sich jedoch als äusserst unhandlich. (Sie kann etwa als Doppelsumme über eine Vielzahl von Fakultäten geschrieben werden, vgl z. B. Edmonds⁵⁴ oder Lindner⁵⁰.) Dieser Unhandlichkeit steht allerdings eine Fülle von Symmetrierelationen gegenüber, die für uns bei der Umformung des Wechselwirkungsterms von Bedeutung sein wird. Ein Beispiel solcher Relationen ist uns bereits begegnet: Der Wechselwirkungsterm ließ sich sowohl mithilfe der Γ als auch durch die Λ Matrizen schreiben. Die Koeffizienten A_J , die dabei auftraten stellen sich bei genauerer Betrachtung als 6-J-Symbole heraus, die bei der Umkopplung von Drehimpulsen eine Rolle spielen. Ein weiteres einfacheres Beispiel ist die Vollständigkeitsrelation, die aus der Unitarität folgt:

$$\sum_{kk'} C_{kk'M}^{qqJ} C_{kk'M'}^{qqJ'} = \delta_{JJ'} \delta_{MM'}$$

$$\sum_{JM} C_{kk'M}^{qqJ} C_{ll'M}^{qqJ} = \delta_{kl} \delta_{k'l'}$$

Wie schon bemerkt sind die C-G-Koeffizienten reell. Sie zerfallen in symmetrische und antisymmetrische Matrizen. Für die oben eingeführten Λ können wir durch Linearkombination nun hermitesche Matrizen konstruieren:

$$M_+^{JK} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Lambda^{JK} + (\Lambda^{JK})^\dagger)$$

$$M_-^{JK} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\Lambda^{JK} - (\Lambda^{JK})^\dagger)$$

$$M^{J0} = \Lambda^{J0}$$
(3.24)

Die Matrizen M bilden eine orthonormale Basis im n^2 -dimensionalen Vektorraum der $n \times n$ Matrizen, der mit dem Skalarprodukt:

$$\langle M^{JK} M^{J'K'} \rangle = \text{Tr}(M^{JK} M^{J'K'}) = \delta_{KK'} \delta_{JJ'} \quad (3.25)$$

ausgestattet ist. Außerdem gilt:

$$\text{Tr}(M^{JK}) = \sqrt{n} \delta_{J0} \delta_{K0} \quad (3.26)$$

Für $J=1$ sind die hermiteschen Matrizen M gerade die Drehimpulsgeneratoren in q -dimensionaler Darstellung. (Bis auf einen Faktor versteht sich, da $\vec{J}^2$ ja $J(J+1)$ für die gewöhnlichen Drehimpulsmatrizen.)

3.2. NÄHERUNGEN

In diesem Paragraphen wollen wir den Ausdruck für den ortsunabhängigen Anteil der unordnungsgemittelten Greensfunktion unter der Annahme einiger Vereinfachungen und Näherungen betrachten. Zur Vorbereitung formen wir den Wechselwirkungsterm der Wirkung durch Einführung einer quadratischen Ergänzung etwas um. Es war :

$$S_{ww} = \frac{1}{2} \sum_{J=0}^{2q} \sum_{K=-J}^J A_J [\vec{a}^\dagger \Lambda^{J,K} \vec{a} + \vec{b}^\dagger \Lambda^{J,K} \vec{b}]^2$$

Um den Ausdruck linear zu machen führen wir jetzt n^2 neue Variable λ_K^J ein, wobei gelten soll:

$$\lambda_K^{J*} = (-)^K \lambda_{-K}^J$$

Nach quadratischer Ergänzung im Exponenten hat man dann ;

$$S_{ww} = \sum_{J=0}^{2q} \sum_{K=-J}^J \{ |\lambda_K^J|^2 - i\sqrt{2} A_J \lambda_K^J [\vec{a}^\dagger \Lambda^{J,K} \vec{a} + \vec{b}^\dagger \Lambda^{J,K} \vec{b}] \} \quad (3.27)$$

Zwei Bemerkungen dazu:

- Der Ausdruck ist reell, wie man durch Ausnutzen der Definition der λ sowie der Eigenschaften der C-G-Koeffizienten nachprüft.
- Die Einführung der Variablen λ entspricht der Entwicklung des Potentials V nach Kugelfunktionen in der Form :

$$V(\theta, \phi) = \sum_{J,K} \lambda_K^J Y_K^J(\theta, \phi) \quad (3.28)$$

(die Forderung für das komplex konjugierte der Entwicklungskoeffizienten, die oben gestellt wurde, ist also einfach Ausdruck der Tatsache, daß das Potential reell sein muß.)

3.2.1. 'P-WELLEN'

Wie aus der zweiten Bemerkung hervorgeht, hätte man vor Ausführen der Mittelung als Integral über V ebensogut zunächst das Potential nach Kugelfunktionen entwickeln können, um gleich, nach Ausnutzen der Kopplung von Monopolharmonischen (und Kugelfunktionen sind ja wie gesehen nur ein Spezialfall dieser allgemeineren Klasse von Funktionen) die lineare Form des Wechselwirkungsterms der Wirkung zu erhalten. Läßt man also, wie wir es im folgenden tun werden, alle Glieder mit $J > 1$ weg, so kann man von einer Restriktion auf p-Wellen Streuung bei der Wechselwirkung der Elektronen mit dem Potential sprechen. Betrachten wir den Exponenten in dieser Näherung:

$$S = S_0 - \sum_{J=0}^1 \sum_{K=-J}^J \{ |\lambda_K^J|^2 - i\sqrt{2} A_J \lambda_K^J [\vec{a}^\dagger \Lambda^{J,K} \vec{a} + \vec{b}^\dagger \Lambda^{J,K} \vec{b}] \} \quad (3.29)$$

Statt der Matrizen Λ_K^J setzen wir die im letzten Abschnitt eingeführten hermiteschen M_K^J ein, die proportional zu den Drehimpulsmatrizen in q-dimensionaler Darstellung sind. Die Variablen λ werden analog zu reellen. Die Integration über die bosonischen und fermionischen Variablen liefert nun die Spur des Inversen der folgenden Matrix:

$$A = [\nu 1 - \sqrt{\frac{2}{2q+1}} \lambda_0 - \sqrt{2A_1} \vec{M} \cdot \vec{\lambda}] \quad (3.30)$$

Es gilt nun :

$$\vec{M} = c_n \vec{J} \quad c_n = \sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}} \quad (3.31)$$

wo $\vec{J}$ Drehimpuls in q-dimensionaler Darstellung, d.h. eine $n \times n$ Matrix. Die Konstanten c_n lassen sich aus der Kenntnis von $Tr \vec{M}^2$ und der Tatsache, daß $\vec{J}^2 = J(J+1)$ ermitteln. Die Spur des Inversen ergibt sich wegen :

$$\int d\vec{a}^\dagger d\vec{a} d\vec{a}^\dagger d\vec{e}^{-\vec{a}^\dagger A \vec{a}} = \frac{\sum_k cof_{kk} A}{Det A^2} \quad (3.32)$$

sowie:

$$\frac{\sum_k cof_{kk} A}{Det A} = Tr A^{-1} \quad (3.33)$$

und der schon erwähnten Eigenschaft der Graßmannvariablen:

$$\int d\vec{b}^\dagger d\vec{b} e^{-\vec{b}^\dagger A \vec{b}} = Det A \quad (3.34)$$

bei geeignet gewählten Integrationsmaßen.

Die Konstanten A_J hatten wir als Abkürzung für:

$$\sqrt{A_J} = \sqrt{\frac{n}{2J+1}} \begin{pmatrix} q & q & | & J \\ -q & q & | & 0 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

So daß nach Einsetzen zusammen mit der Konstanten c_n die Matrix A folgende Form annimmt:

$$A = [\nu 1 - \sqrt{\frac{2}{n}} \lambda_0 1 - a_n \vec{J} \vec{\lambda}] \quad (3.36)$$

Dabei ist $a_n = \sqrt{\frac{(n-1)24}{(n+1)n(n^2-1)}}$. Durch eine geeignete SU(2)-Transformation, die J_z in Richtung $\vec{\lambda}$ dreht läßt sich A diagonalisieren. Da im Exponenten nur $\vec{\lambda}^2$ vorkommt, bleiben nur zwei Variable: $\lambda_0, |\vec{\lambda}|$ in der Diagonalmatrix :

$$\tilde{A} = \text{diag}(\nu - \sqrt{\frac{2}{n}} \lambda_0 - a_n m |\vec{\lambda}|) \quad m = -q \dots q \quad (3.37)$$

Wobei m die Eigenwerte der z-Komponente des Drehimpulsoperators sind. Das Inverse der Diagonalmatrix kann man sofort angeben:

$$\text{Tr} A^{-1} = \sum_{m=-q}^q \frac{1}{\nu - \sqrt{\frac{2}{n}} \lambda_0 - a_n |\vec{\lambda}| m} \quad (3.38)$$

Die Mittelung hatten wir durch die quadratische Ergänzung ja sozusagen rückgängig gemacht (sie entsprach der Entwicklung des Potentials V nach Kugelfunktionen, und das Integral über die Entwicklungskoeffizienten ist dann nichts anderes als die Mittelung die wir als Integral über V definiert hatten). D. h. der ortsunabhängige Anteil der unordnungsgemittelten Greensfunktion ist :

$$\mathcal{G}_n = \frac{1}{\pi^2} \int d\lambda_0 d\vec{\lambda} \text{Tr} A^{-1} e^{-\lambda_0^2 - |\vec{\lambda}|^2} \quad (3.39)$$

Dieses Integral läßt sich leicht auswerten, und ergibt im wesentlichen eine Summe von w-Funktionen :

$$\mathcal{G}_n = \sum_{m=-q}^q \left\{ -i \frac{b_m}{4a_m^2} \nu + \sqrt{\frac{\pi}{4a_m}} \left(1 - \frac{b_m}{2a_m} + \frac{b_m}{a_m} \left(\frac{\nu^2}{4a_m} \right) \right) w\left(\frac{\nu}{\sqrt{4a_m}}\right) \right\} \quad (3.40)$$

wo:

$$a_m = \frac{1}{2n} + \frac{6m^2}{n(n+1)^2}$$

$$b_m = \frac{12}{n} \frac{m^2}{(n+1)^2}$$

Die w-Funktion ist definiert als (s.z. B. Abramovicz⁵⁵):

$$w(z) = e^{-z^2} \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dt e^{t^2} \right)$$

Für $n=2$ ist dieses Ergebnis exakt und weiter unten werden wir die Form der Zustandsdichte, die sich daraus ergibt genauer betrachten und zusammen mit den Fällen $n = 3, 4$ mit dem Grenzfall der Ebene vergleichen.

3.2.2. RESTRIKTION AUF AXIALSYMMETRISCHE POTENTIALE

Im letzten Abschnitt hatten wir gesehen, daß die Berechnung von $\mathcal{G}_n$ auf die Angabe der Spur des Inversen einer Matrix, die aus Summen über C-G-Koeffizienten besteht hinausläuft. Die Invertierung einer Matrix ist nun im allgemeinen ein hochgradig nichttriviales Problem. Eine Ausnahme bildet freilich der Spezialfall in dem die Matrix diagonal ist. Diesen Sonderfall wollen wir jetzt erzwingen, indem sämtliche Nichtdiagonalglieder der Matrix A vernachlässigt werden. Physikalisch bedeutet das, daß nur axialsymmetrische Potentiale zugelassen sind: Die Abhängigkeit vom Polarwinkel ϕ tritt nach der Entwicklung des Potentials nur durch die Kugelfunktionen Y_K^J mit $K \neq 0$ auf, d. h. verschwinden alle Glieder dieser Art ist das Potential nur noch vom Azimuthwinkel θ abhängig.

Die Matrix A lautet unter dieser Annahme:

$$A = \nu 1 - \sqrt{2} \sum_{J=0}^{2q} A_J \lambda_0^J \Lambda_0^J$$

Für die Spur des Inversen findet man in der gleichen Weise wie oben nach ausführen der λ Integrationen

$$\mathcal{G}_n = \int_0^\infty d\mu \sum_{j=-q}^q \frac{1}{A_j^n} e^{\{-\frac{1}{4}(\mu - \frac{2i\nu}{A_j^n})^2\}} e^{\{-(\frac{\nu}{A_j^n})^2\}} \quad (3.41)$$

wo:

$$\begin{aligned} A_j^n &= \sum_J A_J (\Lambda_{jj}^J)^2 \\ &= \frac{2n}{2n-1} (\Gamma_{jj}^{2j})^2 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Unter der Annahme axialer Symmetrie nimmt die gemittelte Greensfunktion also die Form einer Summe über w-Funktionen an, deren Argumente durch C-G-Koeffizienten gegeben sind.

3.2.3. SO(n)-INVARIANTE ANTEILE

Betrachtet man noch einmal den Wechselwirkungsterm der Wirkung:

$$S_{ww} = \frac{n}{2(2n-1)} \sum_{JK} A_J |\vec{a}^\dagger \Lambda^{JK} \vec{a} + \vec{b}^\dagger \Lambda^{JK} \vec{b}|^2$$

Wären sämtliche Konstanten A_J gleich, so könnte unter Ausnutzen der Unitarität der C-G-Koeffizienten die Summe ausgeführt werden, und die Wirkung wäre invariant unter SU(n)-Transformationen der Entwicklungskoeffizienten $\vec{a}, \vec{b}$. Die Gewichtungsfaktoren der einzelnen Multipletterme brechen diese Symmetrie zu einer verbleibenden SU(2)-Invarianz. Für den exakten Wechselwirkungsterm bleiben daher $2n-3$ unabhängig voneinander variierende Parameter. Wie Brézin²⁸ gezeigt hat läßt sich die Spur des Inversen einer Zufallsmatrix bei voller SU(n)-Invarianz in unserem Formalismus, d. h. mit der Einführung von Graßmannvariablen, explizit auf relativ einfache Weise angeben. Wir wollen hier zeigen, daß selbst unter der Einschränkung auf eine SO(n)-Symmetrie das Integral über die bosonischen und fermionischen Freiheitsgrade exakt ausgeführt werden kann. Um den SO(n) symmetrischen Anteil der Wirkung abzuspalten benutzen wir die alternative Darstellung der Wirkung mithilfe der Γ -Matrizen:

$$S_{ww} = \frac{n}{2(2n-1)} \sum_K \{ |\vec{a}^\dagger \Gamma^{2qK} \vec{a}^*|^2 + 2\vec{b}^\dagger \Gamma^{2qK} \vec{a}^* \vec{a} \Gamma^{2qK} \vec{b} \}$$

Mithilfe der Vollständigkeitsrelation der Γ :

$$\sum_{JK} \Gamma_{kk'}^{JK} \Gamma_{ll'}^{JK} = \delta_{kl} \delta_{k'l'} \quad (3.43)$$

formen wir das um zu:

$$S_{ww} = a_n [(\vec{a}^\dagger \vec{a})^2 + \vec{b}^\dagger (\vec{a}^\dagger \vec{a} 1 + \vec{a} \vec{a}^\dagger) \vec{b} - \sum_{J=n-3}^{\sigma} \sum_K \{ |\vec{a}^\dagger \Gamma^{JK} \vec{a}^*|^2 + 2\vec{b}^\dagger \Gamma^{JK} \vec{a}^* \vec{a} \Gamma^{JK} \vec{b} \}] \quad (3.44)$$

wo $a_n = \frac{n}{2(2n-1)}$

Dabei gilt

$$\sigma = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

D.h. J läuft über alle geraden bzw ungeraden Zahlen je nachdem ob n ungerade oder gerade ist (die Eigenzustände auf der Kugeloberfläche bilden dann jeweils ganz- oder halbzahlige Darstellungen der Drehgruppe).

In der zweiten Summe lassen wir nun alle Terme außer dem niedrigsten J (also 0 oder 1) weg. Für n ungerade erhält man dann im wesentlichen den oben angesprochenen $SU(n)$ -invarianten Fall. Ist n dagegen gerade hat man den $SO(n)$ symmetrischen Faktor abgespalten. Das sieht man auf folgende Weise ein : Der Wechselwirkungsterm lautet jetzt

$$S_{ww} = a_n [(\vec{a}^\dagger \vec{a})^2 - |\vec{a}^\dagger \Gamma^{00} \vec{a}^*|^2 + \vec{b}^\dagger (\vec{a}^\dagger \vec{a} 1 + \vec{a} \vec{a}^\dagger) \vec{b} - 2 \vec{b}^\dagger \Gamma^{00} \vec{a}^* \vec{a}^T \Gamma^{00} \vec{b}] \quad (3.45)$$

Nach einer unitären Transformation der Entwicklungskoeffizienten mit:

$$\tilde{\vec{a}} = U \vec{a} \quad U = -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 0 & \dots & 0 & i \\ 0 & i & \dots & i & 0 \\ \vdots & \vdots & \sqrt{2} & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

ist

$$U \Gamma^{00} U^T = 1 \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Der Wechselwirkungsterm ist dann:

$$S_{ww} = a_n [(\vec{a}^\dagger \vec{a})^2 - \frac{1}{n} (\vec{a}^\dagger)^2 (\vec{a})^2 + \vec{b}^\dagger M \vec{b}] \quad (3.47)$$

Die Matrix M hängt von den bosonischen Variablen ab :

$$M = \vec{a}^\dagger \vec{a} 1 + \vec{a} \vec{a}^\dagger - \frac{2}{n} (\vec{a} \vec{a}^\dagger)^* \quad (3.48)$$

Die Ausintegration der fermionischen Variablen liefert also die Determinante :

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \text{Det}(i\nu - a_n M) \quad (3.49)$$

Es ist nun entscheidend, daß diese Determinante exakt ausgewertet werden kann, und daß sie genau wie der verbleibende Exponent invariant unter $SO(n)$ -Transformationen der bosonischen Entwicklungskoeffizienten ist. Die Entwicklung der Determinante nach Spuren von M liefert nämlich :

$$\text{Det}(i\nu - a_n M) = \hat{\lambda}^n - \hat{\lambda}^{n-1} \text{Tr} \hat{A} - \frac{1}{2} \hat{\lambda}^{n-2} (\text{Tr} \hat{A}^2 - (\text{Tr} \hat{A})^2) \quad (3.50)$$

alle weiteren Glieder der Entwicklung verschwinden, da $\hat{A}$ nur aus zwei linear unabhängigen Vektoren aufgebaut ist. Zur Abkürzung haben wir dabei die Konventionen:

$$\hat{\lambda} = (i\nu - a_n \vec{a}^\dagger \vec{a}) \quad \hat{A}_{ij} = a_n (a_i a_j^* - \frac{2}{n} a_j a_i^*) \quad (3.51)$$

verwendet. Die Spuren sind explizit gegeben durch:

$$\begin{aligned} Tr \hat{A} &= a_n \vec{a}^\dagger \vec{a} (1 - \frac{2}{n}) \\ Tr \hat{A}^2 &= a_n^2 [(\vec{a}^\dagger \vec{a})^2 (1 + \frac{4}{n^2} - \frac{4}{n} (\vec{a}^\dagger)^2 (\vec{a})^2)] \end{aligned} \quad (3.52)$$

Trennt man jetzt die komplexen Koeffizienten a_j in Real- und Imaginärteil:

$$\vec{a} = \vec{x} + i\vec{y} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}^\dagger \vec{a} = \vec{x}^2 + \vec{y}^2$$

und insbesondere:

$$\begin{aligned} (\vec{a}^\dagger)^2 (\vec{a})^2 &= (\vec{x}^2 - \vec{y}^2)^2 + 4(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \\ &= (\vec{x}^2 + \vec{y}^2)^2 + 4((\vec{x} \cdot \vec{y})^2 - \vec{x}^2 \vec{y}^2) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Mit Einführung des Zwischenwinkels θ erhält man dann in Polarkoordinaten :

$$\begin{aligned} (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 &= \vec{x}^2 \vec{y}^2 \cos^2 \theta \\ \Rightarrow (\vec{a}^\dagger)^2 (\vec{a})^2 &= (r_1^2 + r_2^2)^2 - 4r_1 r_2 \sin^2 \theta \quad |\vec{x}| = r_1 \quad |\vec{y}| = r_2 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Zur weiteren Auswertung führen wir Kugelkoordinaten in n Dimensionen ein, aus dem verbleibenden Integral wird dann:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_n &= C_n \int_0^\infty dx x^3 \int_0^\pi d\theta d\vartheta (x^2 \sin^2 \theta)^{\frac{n-3}{2}} (\sin^2 \vartheta)^{\frac{n-3}{2}} \sin \theta \sin^2 \vartheta Det(i\nu - a_n M) e^S \\ S &= i\nu x - a_n x^2 (1 - \frac{1}{n}) - \frac{a_n}{n} x^2 \sin^2 \theta \sin^2 \vartheta \\ Det(i\nu - a_n M) &= (i\nu - a_n x)^{n-2} \{ (i\nu - a_n x)^2 - (i\nu - a_n x) a_n x (1 - \frac{2}{n}) - \\ &\quad - (a_n x \sin \theta \sin \vartheta)^2 \frac{2}{n} \} \end{aligned} \quad (3.55)$$

dabei steht x für $r_1^2 + r_2^2$. Die Konstante C_n enthält den Rest des Integrationsmaßes für Kugelkoordinaten in n Dimensionen:

$$C_n = \frac{1}{n 2^{n-1} \Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{n-1}{2}) \sqrt{\pi}} \quad (3.56)$$

Definiert man:

$$\begin{aligned} A_0 &= \hat{\lambda}^n - \hat{\lambda}^{n-1} a_n x \left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ A_1 &= 2\hat{\lambda}^{n-2} a_n \\ \xi &= \frac{a_n}{n} (x^2 \sin^2 \theta \sin^2 \vartheta) \end{aligned} \quad (3.57)$$

läßt sich das schreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_n &= C_n \left(\frac{n}{a_n}\right)^{\frac{n-3}{2}} \int_0^\infty dx x^3 \int_0^\pi d\theta d\vartheta \sin \theta \sin^2 \vartheta (A_0 - A_1 \xi) e^S \\ S &= i\nu x - a_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 - \xi^2 \end{aligned} \quad (3.58)$$

Eine bemerkenswerte Kürzungseigenschaft erlaubt nun die Ausführung der Winkelintegration. Es gilt nämlich mit den bestimmten Integralen über Potenzen der trigonometrischen Funktionen, die im Anhang angegeben sind :

$$\int_0^\pi d\theta d\vartheta \sin \theta \sin^2 \vartheta f(\xi) = \frac{\pi}{a^2} \int_0^\infty d\xi f(\xi) \quad (3.59)$$

Wo $a^2 = \frac{a_n}{n} x^2$ abgekürzt wurde. (Den Beweis dieser Beziehung haben wir in den Anhang verbannt, es sei hier nur gesagt, daß die Γ -Funktionen, die durch die Winkelintegrationen geliefert werden sich kürzen, sodaß ein effektives Integral über eine neue Variable entsteht.) Nach weiteren, zwar trivialen aber langwierigen algebraischen Umformungen findet man schließlich für den ortsunabhängigen Anteil in der $SO(n)$ -invarianten Näherung:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_n &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty dx x (i\nu - a_n x^2)^{n-1} \partial_x e^{i\nu x - a_n x^2} - \\ &\quad \left(\frac{n}{4a_n}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty dx (i\nu - a_n x)^{n-1} e^{i\nu x - a_n x^2} \left[e^{\frac{a_n}{n} x^2} - \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{a_n}{n} x^2\right)^m \frac{1}{m!} \right] \end{aligned} \quad (3.60)$$

Der erste Term dieses Ausdrucks stellt das vollständige Ergebnis *der* Rechnung dar, die nur den $SU(n)$ -invarianten Anteil der Wirkung mitgenommen hätte. Da dieser für sich normiert sein muß (das Integral über die Zustandsdichte ergibt die Anzahl der Elektronen auf der Kugeloberfläche, d. h. n), trägt der zweite Anteil, als Korrektur dazu, zur Normierung nichts bei.

Wie man durch Rückgriff auf die Gleichung (3.44) erkennt (denn für $n=3$ ist σ d. h. die untere Summationsgrenze gleich der oberen, es treten also außer dem $SO(3)$ -invarianten Glied keine weiteren mehr auf), ist das Ergebnis für drei Elektronen

auf der Kugeloberfläche exakt. In etwas handlicherer Form werden wir in einem späteren Abschnitt, in dem alle exakten Lösungen und insbesondere die entsprechenden Zustandsdichten zusammengestellt und analysiert werden, ausführlicher darauf zurückkommen. Im nächsten Abschnitt soll uns aber die Frage beschäftigen, wie sich die ersten beiden gefundenen Greensfunktionen im Grenzfall großer n verhalten.

3.2.4. DER GRENZFALL $n \rightarrow \infty$ DER NÄHERUNGEN

Nach unserer Konvention das Magnetfeld auf der Kugeloberfläche unabhängig von Variationen der Parameter Monopolladung und Kugelradius, konstant zu halten, durch die Beziehung:

$$\frac{n}{2a^2} = \kappa$$

entspricht der $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n$ offenbar dem ebenen System. Freilich im Falle der genäherten Greensfunktion einem ebenen System bei dem die Wechselwirkung der Elektronen mit dem Potential und die Verteilung des Potentials nicht von vornherein klar ist, und wahrscheinlich nicht dem Fall der gauß'schen Mittelung entsprechen wird. Es fragt sich also ob die 'überlebenden' Terme der Greensfunktion physikalisch überhaupt sinnvoll sind, d. h. noch mit irgendeiner Wechselwirkung korrespondieren, oder ob sich der Einfluß der Potentiale für große n verliert, sodaß man zum freien System in der Ebene zurückkehrt. Das muß sich an der Zustandsdichte nachweisen lassen, die wir aus diesem Grund jetzt für die einzelnen Näherungen die im letzten Abschnitt gemacht wurden, studieren wollen.

Die erste Näherung die wir betrachteten, war die 'p-Wellen'-Streuung. Für die Zustandsdichte findet man aus dem ortsunabhängigen Faktor, den wir oben angegeben hatten, mit der bekannten Beziehung:

$$\rho(\vec{x}) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G(\vec{x}, \vec{x})$$

den Ausdruck(hier als Funktion von ν):

$$\rho_n(\nu) = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi^2 w}} \frac{1}{n} \sum_{-q}^q \frac{1}{a_m} \frac{12}{1 + 12(\frac{m}{n+1})^2} \left\{ 1 + \frac{24(\frac{m\nu}{n+1})^2 n}{1 + 12(\frac{m}{n+1})^2} \right\} e^{-\frac{2n\nu^2}{1 + 12(\frac{m}{n+1})^2}} \quad (3.61)$$

im $\lim_{n \rightarrow \infty}$ wird mit $x = \frac{m}{n+1}$ die Summe zum Integral:

$$\rho_n(\nu) = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi^2 w}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \sqrt{n} \frac{1}{6} \left(\frac{2}{1 + 12x^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{2n\nu^2 x^2}{1 + 12x^2} \right] e^{-\frac{2n\nu^2}{1 + 12x^2}} \quad (3.62)$$

nach geeigneter Substitution erhält man:

$$\rho_n(\nu) = \sqrt{\frac{2\kappa}{2\pi 3w}} 12 \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \sqrt{n} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} [1 + (1-x^2)2n\nu^2] e^{-2n\nu^2 x^2} \quad (3.63)$$

Für große n gilt nun für den Ausdruck der die Exponentialfunktion enthält :

$$\sqrt{n\pi} e^{-nx^2} \longrightarrow \delta(x)$$

sodaß der Grenzwert der Zustandsdichte :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(\nu) = 0 \quad \forall \nu \neq 0 \quad (3.64)$$

Andererseits ist aber das Integral über die Zustandsdichte wie man leicht nachprüft unabhängig von n (wir haben sie hier auf eins normiert) :

$$\int d\nu \rho_n(\nu) = const$$

Wir schließen demnach, daß beide Forderungen nur durch die Form:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(\nu) = \delta(\nu)$$

zu erfüllen sind. Die Zustandsdichte konvergiert also gegen die des freien Problems. Betrachten wir als nächstes die axialsymmetrische Näherung im Grenzfall großer n. Für die Zustandsdichte sind die im Exponenten auftretenden C-G-Koeffizienten relevant. Sie lassen sich in diesem Spezialfall einfach darstellen: es gilt:

$$(\Gamma_{jj}^{2q2j})^2 = \frac{\binom{n-1-2j}{\frac{n-1}{2}-j} \binom{n-1+j}{\frac{n-1}{2}+j}}{\binom{2(n-1)}{n-1}} \quad (3.65)$$

Setzt man jetzt

$$q - j = k \quad k = 0, 1 \dots (n-1)$$

ergibt sich für den Koeffizienten im Exponenten:

$$\left(\frac{1}{A_k^n}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \frac{(2(n-1))!}{(n-1)!^2} \frac{k!^2}{2k!} \frac{(n-1-k)!^2}{(2(n-1)-2k)!} \quad (3.66)$$

Aufgrund der Symmetrie zwischen k und (n-1-k) reicht es aus k = 0, 1 ... $\frac{n-1}{2}$ zu betrachten: mit der Stirling'schen Näherung für x!

$$\Rightarrow \frac{1}{(A_k^n)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} 2^{2k-\frac{1}{2}} \frac{k!(k-1)!}{(2k-1)!} \sqrt{2q-k} \quad (3.67)$$

und mit der Relation für die Gammafunktion:

$$\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k + \frac{1}{2})} \sqrt{k} \sim (1 + \frac{1}{8k}) \quad (k \gg 1)$$

läßt sich das vereinfachen zu:

$$\frac{1}{(A_k^n)^2} \sim \frac{\pi}{2} \sqrt{k(n-1)}$$

Für die Zustandsdichte erhält man dann:

$$\rho_n(\nu) \sim \frac{2}{n\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{4w}} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k(n-1)} e^{-\nu^2 (\frac{\pi}{2} \sqrt{k(n-1)})} \quad (3.68)$$

Die Summe wird im Grenzfalle zum Integral über die Variable $x = \frac{k}{n}$, das gegeben ist durch:

$$\rho_n(\nu) \sim 4 \sqrt{\frac{\kappa}{\pi^2 w}} \int_0^{\frac{1}{2}} dx x^4 \sqrt{n} e^{-\nu^2 x^2 \frac{n\pi}{2}}$$

Unter Benutzung derselben Relation wie oben für den Grenzübergang der Exponentialfunktion zur δ -Funktion hat man wieder:

$$\rho_n(\nu) = 0 \quad \forall \nu \neq 0 \quad \int d\nu \rho(\nu) = 1$$

D.h. genau wie im Fall der p-Wellen Näherung konvergiert die Zustandsdichte gegen eine Delta-Funktion; Die Mittelung über ein axialsymmetrisches Potential reicht also nicht aus um im ebenen Grenzfalle eine Wechselwirkung hervorzurufen, die zur Aufweichung der Zustandsdichte, und zur Abweichung vom trivialen freien System führt.

3.3. . STÖRUNGSTHEORETISCHE ENTWICKLUNG DER GREENSFUNKTION

In diesem Abschnitt wollen wir versuchen durch Untersuchung der störungstheoretischen Entwicklung der unordnungsgemittelten Greensfunktion die Struktur des Problems und die Verbindung zum ebenen Grenzfall unter einem anderen Aspekt zu betrachten. Die exakten Lösungen in der Ebene, die durch Wegner und Brézin et. al. angegeben wurden, beruhten im Gegensatz zu unserem bisherigen Vorgehen auf der perturbativen Entwicklung der Greensfunktion, und es waren gerade die Eigenschaften der einzelnen Diagrammbeiträge, die, wie wir gesehen haben, die Aufsummation der Störungsreihe erlaubten. Unsere Darstellung der Greensfunktion als ein Integral über die komplexen bosonischen und die antikommutierenden Entwicklungskoeffizienten der Grundzustandsfunktionen auf der Kugeloberfläche, legte dagegen zunächst ein nichtperturbatives Verfahren nahe : Die Ausführung der Integrationen unter geeigneten Näherungsannahmen, oder , wie weiter unten , die exakte Lösung in einigen Spezialfällen, d.h.für kleine Monopolladungen.

Wenn die Greensfunktion auf der Kugeloberfläche im Grenzfall unendlich großen Kugelradius in die Greensfunktion der Ebene übergeht, dann werden das sicher auch die Diagrammbeiträge tun. Wir wollen also jetzt genauer betrachten wie *dieser* Grenzübergang aussieht.

3.3.1. DIE ERZEUGENDE FUNKTION DER STÖRUNGSTHEORIE

Als Ausgangspunkt dient wieder der Wechselwirkungsanteil der Wirkung. Nach quadratischer Ergänzung hatten wir die Darstellung:

$$S_{ww} = \sum_{JK} \left(|\lambda_K^J|^2 - i\sqrt{2}\lambda_K^J \sqrt{A_J} (\vec{a}^\dagger \Lambda^{JK} \vec{a} + \vec{b}^\dagger \Lambda^{JK} \vec{b}) \right)$$

Mit der Variablensubstitution:

$$\tilde{\lambda}_K^J = \lambda_K^J \sqrt{A_J} \quad (3.69)$$

und anschliessend:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_K^J &= \sum_{mm'} \Lambda_{mm'}^{JK} c_{mm'} \\ &= \Lambda^{JK} \hat{c} \end{aligned} \quad (3.70)$$

verschwinden die störenden Gewichtungsfaktoren vor den einzelnen Multiplettermen, und die Integration über die bosonischen und fermionischen Freiheitsgrade

kann ausgeführt werden:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_n &= K_n \int d\vec{a}^\dagger d\vec{a} d\vec{b}^\dagger d\vec{b} [d\hat{c}] \vec{a}^\dagger \vec{a} e^{S_0 - S_{ww}} \\
S_0 &= i\nu(\vec{a}^\dagger \vec{a} + \vec{b}^\dagger \vec{b}) \\
S_{ww} &= \frac{1}{2} \sum_{JK} \frac{1}{A_J} |\Lambda^{JK} \hat{c}|^2 - i(\vec{a}^\dagger \hat{c} \vec{a} + \vec{b}^\dagger \hat{c} \vec{b})
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Dabei haben wir wie schon oben die Bezeichnung $\hat{c}$ für die Matrixkoeffizienten $c_{mm'}$ eingeführt. Die Konstante K enthält den durch die erste Substitution hervorgerufenen Vorfaktor. Die zweite Variablentransformation ist aufgrund der Eigenschaften der C-G-Koeffizienten unitär, und liefert die Jacobideterminante 1. Die Integrationen über die fermionischen und bosonischen Entwicklungskoeffizienten liefern das Ergebnis:

$$\mathcal{G}_n = K_n \int d\hat{c} \text{Tr}(\nu - \hat{c})^{-1} e^{\left(-\frac{1}{2} \sum_{JK} \frac{1}{A_J} |\Lambda^{JK} \hat{c}|^2\right)} \tag{3.72}$$

Im Exponenten addieren wir nun Stromterme und ersetzen die auftretenden Matrixvariablen durch Differentiation nach den Strömen; dazu brauchen wir wie üblich das Inverse des Operators im quadratischen Anteil der Wirkung. Dies kann nun wegen der Eigenschaften der C-G-Koeffizienten explizit angegeben werden. Auszunutzen hat man

- a) die Unitarität der Λ -Matrizen, aufgefaßt als $n^2 \times n^2$ Matrizen bezüglich der beiden Indexsätze JK und kk'
- b) die alternative Darstellung durch die Γ -Matrizen die wir gleich zu Beginn dieses Kapitels anhand der Eigenschaften der Monopolharmonischen hergeleitet hatten. (oder anders betrachtet, wegen der Natur der Gewichtungsfaktoren A_J als 6-J-Symbole.)

D.h. erstens gilt:

$$\sum_{JK} \frac{1}{A_J} \Lambda_{ij}^{JK} \overline{\Lambda_{kl}^{JK}} \sum_{J'K'} A_{J'} \Lambda_{kl}^{J'K'} \overline{\Lambda_{mn}^{J'K'}} = \delta_{ij,mn} \tag{3.73}$$

Sodaß der gesuchte 'Propagator' :

$$P_{ij,kl} = \sum_{JK} A_J \Lambda_{ij}^{JK} \overline{\Lambda_{kl}^{JK}} \tag{3.74}$$

Man hat dabei zu beachten, daß mit den Variablen auch die Ströme Matrizen sind also Paare von Indices, entsprechend den n^2 Elementen auftreten. Bezeichnen wir sie mit Q_{ij} hat der Stromterm im Exponenten folgende Form:

$$\sum_{JK} A_J \Lambda^{JK} \hat{Q} \overline{\Lambda^{JK}} \hat{Q} = \sum_{JK} A_J \Lambda_{k_1 k_2}^{JK} Q_{k_1 k_2} (-)^K \Lambda_{k_3 k_4}^{JK} Q_{k_3 k_4}$$

wegen $\overline{Q_{ij}} = Q_{ji}$ d.h. die Ströme sind hermitesch.

Im zweiten Schritt benutzen wir die Umkopplungseigenschaft :

$$\sum_{JK} A_J \Lambda^{JK} \hat{Q} \overline{\Lambda^{JK}} \hat{Q} = \sum_K Q_{k_1 k_3} \Gamma_{k_1 k_2}^{2qK} Q_{k_2 k_4} \Gamma_{k_3 k_4}^{2qK} \quad (3.75)$$

Nach Ersetzung der Matrixvariablen $\hat{c}$ durch Differentiation nach den Strömen $\hat{Q}$ kann das Integral ausgeführt werden; dabei kürzt sich die Jacobi-Determinante K_n wieder (die zweite Transformation die wir oben ausgeführt hatten war ja unitär). Entwickelt man jetzt die Spur des Inversen der Matrix $\nu - \hat{c}$ oder vielmehr da die Variablen durch Differentiation nach den Strömen dargestellt werden; der Matrix $\nu - \partial_{\hat{Q}}$ formal in eine geometrische Reihe können wir die erzeugende Funktion der Störungstheorie explizit angeben:

$$\mathcal{G}_n = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu)^{2m+1}} \left(\frac{n}{2(2n-1)} \right)^m \text{Tr} \left(\partial_{\hat{Q}} \right)^{2m} \frac{(\Gamma \hat{Q} \Gamma \hat{Q})^m}{m!} \quad (3.76)$$

Dabei haben wir die formale Matrixschreibweise die durch die Gleichung (3.75) definiert ist, eingeführt und die oberen Indices der Gamma-Matrizen weggelassen. (über alle implizit doppelt vorkommenden Indices wird , wie oben schon bei den unteren Indices praktiziert, summiert) Die Darstellung der Störungstheorie, die wir jetzt hergeleitet haben, ist sehr kompakt aber hochsymbolisch. Ihre Struktur ist jedoch durchsichtig genug um, bevor eine explizite Auswertung der einzelnen Terme angegeben wird, ohne große Mühe die wesentlichen Punkte zusammenzufassen:

I. die m-te Ordnung der Störungstheorie liefert zunächst einen Faktor

$$\left(\frac{n}{2(2n-1)} \right)^m \frac{1}{(\nu)^{2m+1}}$$

II. der zweite Faktor der Gleichung oben enthält für jede Ordnung die Summe aller möglichen Kontraktionen der $2m$ Gammamatrizen.

III. jeder Kontraktion entspricht dabei einerseits ein Diagrammbeitrag der störungstheoretischen Entwicklung , andererseits eine der Invarianten, die sich aus 2m solcher C-G-Koeffizienten bilden läßt.

IV. aus der Darstellung des Wegnerschen Ergebnisses im ersten Kapitel wissen wir, daß jedem Diagramm die Determinante einer Matrix entspricht; als Verallgemeinerung hierzu haben wir auf der Kugeloberfläche also jeweils Invarianten die durch C-G-Koeffizienten gebildet werden können.

3.3.2. ABBILDUNG DER DIAGRAMME AUF C-G-KOEFFIZIENTEN

Beginnen wir nun mit der expliziten Zuordnung von Diagrammbeiträgen und C-G-Koeffizienten. In 0.ter Ordnung ist $m=0$ und wir haben keine Rechnung auszuführen. Man hat offenbar:

$$\mathcal{G}_n^0 = \frac{1}{\nu}$$

Dabei ist nur zu bemerken, daß die Spur über die n-dimensionale Einheitsmatrix n liefert und sich gegen den Nenner n kürzt. Die nächste Ordnung lautet ausführlich geschrieben :

$$\mathcal{G}_n^1 = \frac{1}{2n(2n-1)} \partial_{Q_{ij}} \partial_{Q_{ji}} \Gamma_{ij}^K \Gamma_{ji}^K \quad (3.77)$$

unter Beachtung der Symmetrie der Γ bezüglich der unteren Indices (was einen Faktor zwei bei der ersten Differentiation liefert, da es gleichgültig ist ob nach dem ersten oder zweiten Q differenziert wird), erhält man:

$$\mathcal{G}_n^1 = \frac{1}{n(2n-1)} \Gamma_{ij}^K \Gamma_{ji}^K \quad (3.78)$$

Die Summation über die unteren Indices ergibt :

$$\Gamma_{ij}^{2qK} \Gamma_{ji}^{2qK} = \delta_{KK}$$

Die Summationsgrenzen werden durch die Eigenschaften der C-G-Koeffizienten diktiert (erinnern wir uns, daß der Index K von -2q bis +2q läuft und daß $2q = n-1$ war) D. h. die Summe

$$\sum_{K=-2q}^{2q} \delta_{KK} = 4q + 1 = 2n - 1$$

Der Beitrag erster Ordnung ist also nach Kürzung des Faktors $\frac{1}{2n-1}$ im Nenner ebenfalls 1. Die weiteren Rechnungen laufen vollkommen analog, wenn auch die Anzahl der Terme steigt, da alle Differentiationen die möglich sind bedacht werden müssen.

Es sind dabei die Symmetrie der Gammamatrizen bezüglich der beiden unteren Indices sowie die anschliessende Summation über alle doppelt vorkommenden Indices, die der Spur bei der Darstellung durch die ursprünglichen Matrizen $\hat{c}$ entspricht, zu beachten. Wir geben noch die Ergebnisse der zweiten Ordnung zusammen mit dem bereits gefundenen in einer Tabelle an und werden dann die so erzeugten Graphenregeln diskutieren.

Diagramme	C-G-Koeffizienten	Beiträge
	$\frac{1}{n} \frac{n}{2n-1} \Gamma_{k_1 k_1'}^K \Gamma_{k_1 k_1'}^K$	1
	$\frac{1}{n} \left(\frac{n}{2n-1} \right)^2 \Gamma_{k_{21} k_{11}}^{K_1} \Gamma_{k_{11} k_{12}}^{K_1} \Gamma_{k_{12} k_{22}}^{K_2} \Gamma_{k_{21} k_{22}}^{K_2}$	1
	$\frac{1}{n} \left(\frac{n}{2n-1} \right)^2 \Gamma_{k'_{21} k_{21}}^{K_1} \Gamma_{k_{12} k'_{12}}^{K_1} \Gamma_{k_{12} k'_{12}}^{K_2} \Gamma_{k'_{21} k_{21}}^{K_2}$	$\frac{n}{2n-1}$
	$\frac{1}{n} \left(\frac{n}{2n-1} \right)^2 \Gamma_{k_{21} k_{11}}^{K_1} \Gamma_{k_{11} k_{12}}^{K_1} \Gamma_{k_{12} k_{22}}^{K_2} \Gamma_{k_{21} k_{22}}^{K_2}$	1

Nun also zur Erläuterung der Zuordnungsregeln: Zunächst bemerkt man, daß im Gegensatz zum ebenen Fall die Diagramme hier geschlossen sind. Sie wären offen, wenn wir statt der Spur des Inversen ein bestimmtes Diagonalelement der Inversen Matrix betrachtet hätten. Um der Geschlossenheit des Ausdrucks und der Symmetrie willen, haben wir jedoch diese Darstellung gewählt. Aus diesem Grund

mußte auch der Normierungsfaktor $\frac{1}{n}$ eingeführt werden. Die Endlichkeit des Systems erlaubt übrigens erst dieses Vorgehen, denn in der Ebene ist die Anzahl der Zustände unendlich, d. h. es ist kein Parameter n verfügbar und es müssen offene Diagramme betrachtet werden*. Aber geben wir jetzt die Zuordnungsregeln an:

- a) Jedem Vertex i entspricht ein oberer Summationsindex des C-G-Koeffizienten Γ^{K_i} der jeweils zweimal auftreten muß.
- b) Jeder Linie von i nach j entsprechen zwei untere Summationsindices der C-G-Koeffizienten $\Gamma^{K_i}_{k_{ij}k_{ij}} \Gamma^{K_j}_{k_{ji}k_{ji}}$
- c) falls eine Linie zweimal in derselben Richtung durchlaufen wird bezeichnen wir den zweiten Satz von Summationsindices k_{ij} zur Unterscheidung als k'_{ij} .

Wie man aus der Tabelle oben entnimmt sind die Beiträge bis zur zweiten Ordnung durch einfaches Ausnutzen der Unitarität der C-G-Koeffizienten zu berechnen. Außerdem liest man die Graphenregeln ab :

- a) Jeder Loop liefert einen Faktor eins und kann anschliessend entfernt werden.
- b) Jede 2mal in gleicher Richtung durchlaufene Linie liefert den Faktor $\frac{n}{2n-1}$ und kann ebenfalls entfernt werden.

Nichttriviale Beiträge liefert erst die dritte Ordnung der Störungstheorie, mit der wir uns jetzt beschäftigen wollen.

Insgesamt erhält man in L -ter Ordnung der Störungstheorie $(2L-1)!!$ Diagramme, denn hält man den ersten Wechselwirkungspunkt fest, bleiben $(2L-1)$ Glieder: d.h. $(2L-1)!$ für die Anzahl der Permutationen, dividiert durch 2^{L-1} , da die Reihenfolge innerhalb eines Paares und durch $(L-1)!$, da die Reihenfolge der Paare beliebig ist. Also

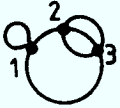
$$\frac{(2L-1)!}{2^{L-1}(L-1)!} = (2L-1)!!$$

Im Übrigen reicht es zur Berechnung aller Beiträge aus die Hälfte zu kennen, denn die Kontraktionen die mit 1- M beginnen liefern offenbar identische Resultate

* wir werden darauf im Zusammenhang mit den $\frac{1}{n}$ Korrekturen zum Wegnerschen Ergebnis noch einmal zurückkommen.

wie die $1 - (2(L+1) - M)$ -Diagramme (wegen der zyklischen Invarianz der Spur). Außerdem stellt die Gruppe, die mit der Kontraktion $1 - 2$ beginnt, da das einfach der Anfügung eines Loops entspricht, in der L -ten Ordnung denselben Beitrag wie die gesamte $(L - 1)$ te Ordnung dar.

Die Anzahl der Diagramme, die wir in dritter Ordnung also zu betrachten haben ist $5!! = 15$. Zum Überblick geben wir auf den nächsten beiden Seiten eine Liste die die Zuordnung von Kontraktionen über Digraphen bis zu den numerischen Beiträgen deutlich macht.

Kontraktionen	Digraphen	Beiträge	n=2	n=3	n=4	n=∞
1-2 3-4 5-6		1	1	1	1	1
3-5 4-6		$\frac{n}{2n-1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
3-6 4-5		1	1	1	1	1
1-3 2-4 5-6		$\frac{n}{2n-1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
2-5 4-6		S_n	$\frac{5}{9}$	$\frac{23}{50}$	$\frac{517}{49 \cdot 25}$	$\frac{1}{3}$
2-6 4-5		$\frac{n}{2n-1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
1-4 2-3 5-6		1	1	1	1	1

2-5 3-6		$(\frac{n}{2n-1})^2$	$\frac{4}{9}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{16}{49}$	$\frac{1}{4}$
2-6 3-5		S_n	$\frac{5}{9}$	$\frac{23}{50}$	$\frac{517}{49 \cdot 25}$	$\frac{1}{3}$
1-5 2-3 4-6		$\frac{n}{2n-1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
2-4 3-6		S_n	$\frac{5}{9}$	$\frac{23}{50}$	$\frac{517}{49 \cdot 25}$	$\frac{1}{3}$
2-6 3-4		$\frac{n}{2n-1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
1-6 2-3 4-5		1	1	1	1	1
2-4 3-5		$\frac{n}{2n-1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
2-5 3-4		1	1	1	1	1

Dabei haben wir von den angegebenen Graphenregeln Gebrauch gemacht. Die

drei Diagramme die sich dadurch allein nicht auswerten ließen, sind uns im ersten Kapitel, im Zusammenhang der Zuordnung der Anzahl der Diagramme pro Digraph schon einmal begegnet. Wir haben den numerischen Wert einstweilen mit S_n abgekürzt, denn die Berechnung verlangt genauere Erläuterung.

Die C-G-Koeffizienten die den einzelnen Einträgen der Tabelle oben entsprechen sind nicht angegeben worden. Für die zwölf Diagramme deren Wert sich aus den einfachen Regeln ergab war das auch nicht notwendig. Bei den restlichen drei müssen wir allerdings darauf zurückgreifen. Nach den Zuordnungsregeln kann man offenbar schreiben :

$$S_n = \left(\frac{n}{2n-1} \right)^3 \Gamma_{k_{12}k_{13}}^{K_1} \Gamma_{k_{21}k_{31}}^{K_1} \Gamma_{k_{23}k_{21}}^{K_2} \Gamma_{k_{13}k_{32}}^{K_2} \Gamma_{k_{32}k_{31}}^{K_3} \Gamma_{k_{23}k_{13}}^{K_3} \quad (3.79)$$

Diese Summen sind nicht allein durch Ausnutzen der Unitarität der C-G-Koeffizienten auszuführen. Um etwas mehr über sie aussagen zu können müssen wir noch einmal von der Umkopplung Gebrauch machen. Es war :

$$\sum_{JK} A_J \Lambda_{k_3 k_2}^{JK} \Lambda_{k_1 k_4}^{JK} = \sum_K \frac{n}{2n-1} \Gamma_{k_1 k_2}^K \Gamma_{k_3 k_4}^K$$

Diese Relation erlaubt nun die Vollständigkeit der *Lambda*Matrizen auszunutzen. Entscheidend ist, daß die unteren Indices k_1 und k_2 in der Schreibweise links zu einer *Lambda*-Matrix gehören. Mit dem noch verbleibenden Glied verfährt man genauso und findet anschliessend :

$$S_n = \sum_J (A_J)^2 (\Lambda^{J0})^2 \quad (3.80)$$

Nochmaliges Umformen mithilfe der Umkopplung (s. Anhang*) liefert endgültig für den nichttrivialen Beitrag :

$$S_n = \left(\frac{n}{2n-1} \right)^2 \left(\frac{(n-1)!^2}{(2(n-1))!} \right)^2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1+k}{k}^2 \quad (3.81)$$

Wo wir Gebrauch von der Darstellung der C-G-Koeffizienten Γ durch Binomialkoeffizienten gemacht haben. Zieht man den Faktor $\left(\frac{(2(n-1))!}{(n-1)!^2} \right)^2$ aus der Summe

* wo die Rechnung auch auf alternative Weise , unter Beachtung der Tatsache, daß (3.79) als 9-J-Symbol aufgefaßt werden kann, durchgeführt wird.

lassen sich leicht die uns interessierenden Spezialfälle kleiner n und $n \Rightarrow \infty$ angeben:

$$S_n = \left(\frac{n}{2n-1}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{n-1}{2(n-1)}\right)^2 + \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2(n-1)(2n-3)}\right)^2 \dots \right. \\ \left. \dots \left(\frac{(n-1)!}{2(n-1)(2n-3)\dots n}\right)^2\right) \quad (3.82)$$

Insbesondere den Grenzfall $n \rightarrow \infty$ wollen wir betrachten. Aus dem ersten Kapitel wissen wir, daß sich $\frac{1}{3}$, ergeben sollte, denn 3 ist ja gerade die Anzahl der Diagramme pro Digraph in diesem Fall (man überzeugt sich durch Inspektion des Digraphen oben, daß tatsächlich 3 Eulertrails existieren und keine Invarianz unter Permutationen vorliegt) Geht man also zur Grenze über, ergibt sich:

$$S_\infty = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(1 - \frac{1}{4})} \right) = \frac{1}{3} \quad (3.83)$$

Fassen wir die Beziehung zwischen Diagrammbeiträgen und C-G-Koeffizienten kurz zusammen :

Die Koeffizienten der Entwicklung von $\mathcal{G}_n$ nach $\frac{1}{\nu}$ sind jeweils die Summen der Skalare , die sich aus der Kontraktion von $2L$ C-G-Koeffizienten ergeben. Jedem Graph entspricht dabei eine bestimmte Möglichkeit aus diesen C-G-Koeffizienten eine Invariante zu bilden; alle Diagramme, die zu einem Graph gehören sind äquivalente Darstellungen dieses Skalars. Die Summe der Invarianten ist im Grenzfall nach Wegner gerade das Inverse der Anzahl der Eulertrails, die Determinante der Matrix die die Verknüpfung der Punkte in den Diagrammen bzw der Summationsindices der C-G-Koeffizienten festlegt.

3.4. EXAKTE LÖSUNGEN

Die Antwort auf die eingangs des Kapitels gestellte Frage, ob die exakte Lösbarkeit, der von Wegner und Brézin et.al untersuchten Systeme, eine Verallgemeinerung (jedenfalls in dem hier beschriebenen Rahmen) zulasse, scheint sich nach den vorhergehenden Ergebnissen abzuzeichnen. Wir hatten gesehen, daß die Lösung nur unter der erleichternden Bedingung bestimmter Näherungen, ob physikalisch (wie im Fall der 'p-Wellen'-Streuung und der axialen Symmetrie der Potentiale) oder eher mathematisch (die Mitnahme nur der $SO(n)$ -invarianten Terme) motiviert, möglich war, und insbesondere der Grenzfall großer Monopolladung kein physikalisch sinnvolles Ergebnis lieferte.

Die störungstheoretische Entwicklung für beliebige n schließlich zeigte zwar eine interessante Verbindung zwischen den aus bestimmten C-G-Koeffizienten zu bildenden Invarianten und den Graphen der Störungstheorie, doch war eine Aufsummation, aufgrund der fehlenden Kürzungseigenschaft nicht möglich. Überdies stellte schon die Berechnung eines einzigen nichttrivialen Beitrags, der einem 9-J-Symbol entsprach, eine aufwendige Aufgabe dar (die Summe über Binomialkoeffizienten in dritter Ordnung war i. a. nicht geschlossen ausführbar).

Die einzigen exakten Lösungen, die wir bis jetzt angeben konnten waren die Spezialfälle der Näherungen, die für kleine n schon der vollständigen Auswertung des Integrals entsprachen : So für $n=2$ in der p-Wellen Näherung, und für $n = 3$ bei der Mitnahme nur des $SO(n)$ invarianten Teils der Wirkung. In diesem Abschnitt wollen wir eine weitere exakte Lösung herleiten, um dann die analytische Struktur sowie die Form der sich daraus ergebenden Zustandsdichten zu diskutieren und mit dem Wegnerschen Grenzfall zu vergleichen. Dabei wird sich zeigen, daß der Aufwand der Rechnung mit zunehmender Monopolladung sehr stark ansteigt.

1.6.1. Die Lösung für $n = 4$

Die eigentliche Rechnung werden wir in diesem Abschnitt nur skizzieren (und verbannen die explizite Angabe aller algebraischen Umformungen in den Anhang, um nicht allzu ermüdend zu sein..). Um der besseren Übersicht willen geben wir zunächst einen 'Fahrplan' der Berechnung, so daß der Leser bei der Motivation der einzelnen Schritte eine Orientierungshilfe findet.

Vorgehensweise bei der Berechnung von $\mathcal{G}_4$

1. Umformung des WW-Anteils der Wirkung, unter Benutzung der Unitarität und Symmetrie der C-G-Koeffizienten auf J=0,1-Anteile.
2. Ausführung der Graßmannintegrationen
3. Entwicklung der Determinante nach Spuren.
4. quadratische Ergänzung im bosonischen Teil der Wirkung, wie im Fall der p-Wellen-Steuerung
5. Ersetzung der J-enthaltenden Terme in der Determinante durch Ableitungen des Exponenten nach den unter 4. eingeführten Parametern.
6. Transformation der bosonischen Variablen, sodaß: $\vec{\lambda} \cdot \vec{J} \rightarrow |\vec{\lambda}| J_0$
7. Ersetzung der J_0 -Terme durch Differentiation nach x_j nach Variablensubstitution $a_k = \sqrt{x_k} e^{i\phi_k}$
8. partielle Integrationen.
9. Entwicklung der Determinante der Matrix im Exponenten nach Spuren.
10. Darstellung der Graßmanndeterminante durch Ableitungen der 'bosonischen' Determinante.
11. Ausintegration der bosonischen Variablen.
12. Partialbruchzerlegung der Inversen bosonischen Determinante.
13. Integraldarstellung der verbleibenden einfachen Brüche.
14. Ausführen der Integrationen über die unter 4. eingeführten Parameter.
15. Addition aller Beiträge und Überprüfung anhand der Koeffizienten der störungstheoretischen Entwicklung.

Gemäß dieses 'Fahrplans' geben wir nun also eine Skizze der Berechnung von $\mathcal{G}_4$.

1. Umformung der Wirkung

Der abgespaltene ortsunabhängige Anteil der Greensfunktion lautete:

$$\mathcal{G}_4 = \int d\vec{a}^\dagger d\vec{a} d\vec{b}^\dagger d\vec{b} \vec{a}^\dagger \vec{a} e^{S_{eff}}$$

$$S_{eff} = i\nu(\vec{a}^\dagger \vec{a} + \vec{b}^\dagger \vec{b}) - \frac{1}{2} \sum_{J=0}^{n-1} \sum_{K=-J}^J A_J \left| \vec{a}^\dagger \Lambda^{JK} \vec{a} + \vec{b}^\dagger \Lambda^{JK} \vec{b} \right|^2 \quad (3.84)$$

Zur Umformung nutzt man die Unitarität, und eine Relation, die sich aufgrund der Symmetrie der C-G-Koeffizienten unter Transponierung herleiten läßt:

$$\Gamma_{m_3 m_4}^{JM} = (-)^{n-1-J} \Gamma_{m_4 m_3}^{JM} \quad (3.85)$$

Daraus findet man nämlich:

$$\begin{aligned} \sum_{J \text{ gerade}} \sum_M \Gamma_{m_1 m_2}^{JM} \Gamma_{m_3 m_4}^{JM} &= \frac{1}{2} (\delta_{m_1 m_3} \delta_{m_2 m_4} + (-)^{n-1} \delta_{m_1 m_4} \delta_{m_2 m_3}) \\ \sum_{J \text{ ungerade}} \sum_M \Gamma_{m_1 m_2}^{JM} \Gamma_{m_3 m_4}^{JM} &= \frac{1}{2} (\delta_{m_1 m_3} \delta_{m_2 m_4} - (-)^{n-1} \delta_{m_1 m_4} \delta_{m_2 m_3}) \end{aligned} \quad (3.86)$$

In analoger Weise wie oben bei der Berechnung des SO(n)invarianten Anteils, läßt sich jetzt die Wirkung i.w. durch die J=0,1 -Anteile ausdrücken. Von entscheidender Bedeutung dabei ist, daß das Skalarprodukt $a_k (-)^k a_{-k} = \tilde{a} \tilde{a}$ zweier Spinoren verschwindet (d.h. für halbzahlige Darstellungen der Drehgruppe, und mit n=4 ist ja $q = \frac{n-1}{2} = \frac{3}{2}$). Führen wir noch statt der Matrizen Λ , die dazu proportionalen Drehimpulsmatrizen $\vec{J}$, wie schon bei der p-Wellen Näherung ein, lautet der WW-Anteil der effektiven Wirkung:

$$\begin{aligned} S_{ww} = & - \left(\frac{11}{70} (\vec{a}^\dagger \vec{a} + \vec{b}^\dagger \vec{b})^2 + \frac{4}{70} (\vec{a}^\dagger \vec{J} \vec{a} + \vec{b}^\dagger \vec{J} \vec{b})^2 \right) \\ & + \frac{8}{70} ((\vec{b}^\dagger \vec{b})^2 - \vec{b}^\dagger \cdot \vec{a} \vec{a}^\dagger \cdot \vec{b} + \vec{b}^\dagger \cdot \vec{b} \vec{a}^\dagger \cdot \vec{a}) \\ & - \frac{3}{70} (\vec{b}^\dagger \cdot \vec{b} \tilde{\vec{b}} \cdot \vec{b} + 2 \vec{b}^\dagger \cdot \tilde{\vec{a}} \tilde{\vec{a}} \cdot \vec{b}) \end{aligned} \quad (3.87)$$

Die b-Terme vierter Ordnung müssen sich zu Null addieren, was man durch explizites Nachrechnen überprüft. Demnach kann man schreiben:

$$\begin{aligned} S_{ww} = & - \frac{11}{70} (\vec{a}^\dagger \vec{a})^2 - \frac{4}{70} (\vec{a}^\dagger \vec{J} \vec{a})^2 - \vec{b}^\dagger M \vec{b} \\ M = & \frac{14}{70} \vec{a}^\dagger \vec{a} 1 + \frac{8}{70} \left(\vec{a} \vec{a}^\dagger + \frac{3}{4} \tilde{\vec{a}}^\dagger \tilde{\vec{a}} + \vec{a}^\dagger \vec{J} \vec{a} \vec{J} \right) \end{aligned} \quad (3.88)$$

wo wir die Konventionen, wie teilweise schon oben, benutzten:

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{a}} : \tilde{a}_k &= (-)^k a_{-k} \\ \vec{a}^\dagger \vec{J} \vec{a} \vec{J} &= \sum_K \vec{a}^\dagger J_K \vec{a} J_K \end{aligned} \quad (3.89)$$

(analog ist der quadratische Anteil in $\vec{a}^\dagger \vec{J} \vec{a}$ zu verstehen.)

Bemerkung:

Die Koeffizienten oben lassen sich durch Vergleich mit der ursprünglichen Form der Wirkung (3.84) nachprüfen.

2. Graßmannintegral

Die Graßmannintegration liefert $\text{Det}(i\nu - M)$. Weniger Arbeitsaufwand erreicht man allerdings, wenn als äußerer Term statt $\vec{a}^\dagger \vec{a}$ der entsprechende Ausdruck mithilfe der Graßmannvariablen $\vec{b}^\dagger \vec{b}$ gewählt wird: $\partial_{i\nu} \text{Det}(i\nu - M)$. Daß das möglich ist und außerdem ein anderes Vorzeichen für $\mathcal{G}_n$ ergibt, sieht man mit:

$$\partial_{i\nu} e^{S_{eff}} = (\vec{a}^\dagger \vec{a} + \vec{b}^\dagger \vec{b}) e^{S_{eff}}$$

und der Tatsache, daß das Integral ohne 'äußere Felder' auf 1 normiert ist, sowie an den Eigenschaften antikommutierender Variablen:

$$\int d\vec{b}^\dagger d\vec{b} e^{\vec{b}^\dagger (i\nu - M) \vec{b}} = \text{Det}(i\nu - M)$$

3. Zur Entwicklung der Determinante

Das charakteristische Polynom einer Matrix, läßt sich bekanntlich durch Spuren ausdrücken:

$$\begin{aligned} \text{Det}(i\nu - M) &= (i\nu)^4 - p_1(i\nu)^3 - p_2(i\nu)^2 - p_3(i\nu) - p_4 \\ p_1 &= \text{Tr} M \quad p_2 = \frac{1}{2} (\text{Tr} M^2 - (\text{Tr} M)^2) \quad p_3 = \frac{1}{3} (\text{Tr} M^3 - \text{Tr} M \text{Tr} M^2 - p_2) \\ &\hspace{15em} (3.90) \end{aligned}$$

Den letzten Koeffizienten $p_4 = -\text{Det} M$ brauchen wir nicht, da uns nur die Ableitung des charakteristischen Polynoms interessiert. Das Ergebnis der Rechnung geben wir direkt an, bemerken nur, daß der Term dritter Potenz in $\vec{J}$ keinen Beitrag liefert: Nach Benutzung der Umkopplungsregeln für C-G-Koeffizienten bemerkt man daß:

$$\text{Tr} \Lambda^{1M} \Lambda^{1M'} \Lambda^{1M''} \sim C_{MM'M''}^{111}$$

antisymmetrisch in den M-Indices ist, sodaß:

$$\sum B_M B_{M'} B_{M''} C_{MM'M''}^{111} = 0$$

Die Ableitung der Determinante liefert dann:

$$\begin{aligned}\partial_{i\nu} \text{Det}(i\nu - M) &= 4(i\nu)^3 - 3\vec{a}^\dagger \vec{a} (i\nu)^2 - 2(i\nu) \left(\frac{16 \cdot 11}{70^2} (\vec{a}^\dagger \vec{J} \vec{a})^2 - \frac{1812}{70^2} (\vec{a}^\dagger \vec{a})^2 \right) \\ &\quad - \left(\frac{7 \cdot 8 \cdot 367}{70^3} (\vec{a}^\dagger \vec{a})^3 - \frac{7 \cdot 64 \cdot 16}{70^3} \vec{a}^\dagger \vec{a} (\vec{a}^\dagger \vec{J} \vec{a})^2 \right) \\ &\quad + \left(\frac{8}{70} \right)^3 \text{Tr} \left((\vec{a} \vec{a}^\dagger + \frac{3}{4} \tilde{\vec{a}}^\dagger \tilde{\vec{a}}) (\vec{a}^\dagger \vec{J} \vec{a} \vec{J})^2 \right)\end{aligned}\tag{3.91}$$

4. quadratische Ergänzung

Der rein bosonische Anteil der effektiven Wirkung, der jetzt verbleibt lautet:

$$S_B = i\nu - \frac{11}{70} (\vec{a}^\dagger \vec{a})^2 - \frac{4}{70} (\vec{a}^\dagger \vec{J} \vec{a})^2$$

Zur Linearisierung führen wir 4 neue reelle Parameter $\lambda_0, \vec{\lambda}$ ein, und erhalten:

$$\tilde{S}_B = i\nu \vec{a}^\dagger \vec{a} - \lambda_0^2 - (\vec{\lambda})^2 - 2i \left(\sqrt{\frac{11}{70}} \vec{a}^\dagger \vec{a} \lambda_0 + \sqrt{\frac{4}{70}} \vec{\lambda} \cdot \vec{a}^\dagger \vec{J} \vec{a} \right)\tag{3.92}$$

5. Umformung der Graßmanndeterminante

Die Terme der Form $\vec{a}^\dagger \vec{J} \vec{a}$, die in der Graßmanndeterminante auftreten, können nach der Linearisierung der Wirkung (die Tilde wird weggelassen) durch Ableitungen der Parameter $\vec{\lambda}$ ausgedrückt werden:

$$\vec{a}^\dagger J_K \vec{a} e^{S_B} = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{70}{4}} \partial_{\lambda_K} e^{S_B}$$

Nach Ausführen der partiellen Integrationen bzgl der λ_K bleibt noch ein J -abhängiger Term, den wir im nächsten Schritt vereinfachen.

6. Transformation der bosonischen Variablen

Durch eine $SU(2)$ -Transformation läßt sich

$$\vec{\lambda} \cdot \vec{J} = |\vec{\lambda}| J_0$$

erreichen. Die restlichen Terme bleiben davon unberührt, da $\tilde{\vec{a}}$ wie $\vec{a}^\dagger$ transformiert, d.h. der Rest der Determinante bzgl $SU(2)$ invariant ist. Die Entwicklungs-

koeffizienten lauten jetzt:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \vec{a}^\dagger \vec{a} \\
p_2 &= -\frac{1812}{70^2} (\vec{a}^\dagger \vec{a})^2 + \frac{176}{70^2} \left(-\frac{70}{16} (4\vec{\lambda}^2 - 6) \right) \\
p_3 &= \frac{56 \cdot 367}{70^3} (\vec{a}^\dagger \vec{a})^3 - \frac{56 \cdot 128}{70^3} (\vec{a}^\dagger \vec{a}) \left(-\frac{70}{16} (4\vec{\lambda}^2 - 6) \right) \\
&\quad \frac{6}{70} \vec{a}^\dagger \vec{a} - \frac{32}{700} \lambda^2 \vec{a}^\dagger J_0^2 \vec{a}
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Wo zur Abkürzung $|\vec{\lambda}| = \lambda$ eingeführt wurde.

7. Ersetzung aller bosonischen Terme durch Differentiation

Die $\vec{a}^\dagger \vec{a}$ Terme können nun durch Differentiation nach λ_0 , die J_0 enthaltenden nach Variablensubstitution

$$a_k = \sqrt{x_k} e^{i\phi_k}$$

als Ableitungen nach x_k dargestellt werden.

8. partielle Integrationen

Statt aller Umformungen geben wir unter diesem Punkt nur das Ergebnis an. Die Entwicklungskoeffizienten der Determinante lauten:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \left(3 + \frac{1}{5}\right) i \sqrt{\frac{70}{11}} \lambda_0 \\
p_2 &= \frac{2}{5} - \frac{36}{77} - \frac{88}{70} \lambda^2 + \frac{4}{5} \lambda_0^2 + \frac{3624}{770} \lambda_0^2 \\
p_3 &= i \left(\frac{84 \cdot 367}{70 \cdot 121} - \frac{4}{5} \right) \sqrt{\frac{11}{70}} \lambda_0 - i \left(\frac{56 \cdot 367}{70 \cdot 121} + \frac{4}{5} \right) \sqrt{\frac{11}{70}} \lambda_0^3 \\
&\quad + i \frac{28 \cdot 64}{77} \sqrt{\frac{11}{70}} \lambda_0 \lambda^2 \\
&\quad - i \frac{28 \cdot 81}{70^2} \sqrt{\frac{70}{11}} \lambda_0
\end{aligned} \tag{3.94}$$

9. Entwicklung der Determinante der 'bosonischen' Matrix

Die Matrix im Exponenten ist, wie wir gesehen haben, nach Einführung der quadratischen Ergänzung und $SU(2)$ -Transformation diagonal. Da im folgenden die Ableitungen der Determinante nach $i\nu$ benötigt werden, entwickeln wir sie nach Spuren. Die expliziten Terme finden sich im Anhang.

10. Darstellung der Graßmanndeterminante durch die 'bosonische' Determinante
Die Integration über die bosonischen Variablen wird das Inverse der Determinante im Exponenten liefern. Stellt man daher die Graßmanndeterminante durch die Ableitungen der bosonischen dar, erhält man Brüche der Form:

$$\frac{\partial_{i\nu}^k \text{Det} \tilde{M}}{\text{Det} \tilde{M}}$$

wobei $\tilde{M}$ außer von ν nur noch von λ_0 und λ abhängt, und $k = 1, 2, 3$ ist.

11. Ausintegration der bosonischen Variablen

Dieser Punkt steht hier nur der Vollständigkeit halber, er bedarf keiner weiteren Erläuterung.

12. Partialbruchzerlegung

Die Matrix auf die die gesamte Darstellung des Integrals jetzt aufgebaut wurde ist diagonal, d.h. die Determinante bzw die oben beschriebenen Brüche haben die Form:

$$\frac{1}{A_1 A_2} \quad \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \quad \frac{1}{A_1 A_2 A_3 A_4}$$

wo A_k für die Diagonalelemente stehen. Nach der Partialbruchzerlegung erhält man typischerweise solche Terme:

$$\frac{1}{i\nu - 2i\sqrt{\frac{11}{70}}\lambda_0 - 3i\sqrt{\frac{4}{70}}\lambda}$$

13. Integraldarstellung

Die verbleibenden einfachen Brüche lassen sich nach Einführung eines neuen Parameters μ als Integral schreiben. Für das obige Beispiel:

$$\frac{1}{i\nu - 2i\sqrt{\frac{11}{70}}\lambda_0 - 3i\sqrt{\frac{4}{70}}\lambda} = - \int_0^\infty d\mu e^{\mu \left(i\nu - 2i\sqrt{\frac{11}{70}}\lambda_0 - 3i\sqrt{\frac{4}{70}}\lambda \right)}$$

Es bleibt die der Mittelung entsprechende Integration über die λ -Parameter.

14. 'Mittelung'

Zur Ausführung der λ -Integrationen, die sich i.w. auf Gaußintegrale reduzieren, sind Variablenshifts notwendig. Beim Parameter λ_0 ergeben sich dabei keine Schwierigkeiten, da der Integrationsbereich sich von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt. Die

restlichen Parameter $\vec{\lambda}$ dagegen führen, nach der Einführung von Kugelkoordinaten, die wir vorgenommen haben, allerdings zu Integralen der Form:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{\lambda} e^{-\lambda^2} = 4\pi \int_0^{+\infty} \lambda^2 d\lambda e^{-\lambda^2}$$

sodaß ein Variablenshift scheinbar zur Verschiebung der Integrationsgrenzen führt. Tatsächlich erweisen sich die Integranden, nimmt man alle Terme der Partialbruchzerlegung zusammen als effektiv symmetrisch in λ . Die Integrale können daher von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt werden, und die Gaußintegration ist geschlossen ausführbar. Komplikationen ergeben sich nur bei einem Term, der von der Form:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \frac{1}{\lambda} e^{-(\lambda+ia)^2}$$

ist. Der Hauptwert läßt sich nur als Errorfunktion darstellen und ist im Anhang aufgeführt.

15. Addition aller Beiträge

Damit ist unser Ziel erreicht: die Addition der einzelnen Terme liefert in geeigneter Darstellung als Summe über w-Funktionen, wie schon mehrfach benutzt, das Ergebnis:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_4 = & -\nu \frac{973}{45 \cdot 32} + \sqrt{\frac{7\pi}{8}} \left(-\frac{1}{40} + \frac{21}{20} \left(\frac{7}{8} \nu^2 \right) \right) w \left(\sqrt{\frac{7}{8}} \nu \right) \\ & + \sqrt{\frac{35\pi}{24}} \left(\frac{7}{12} - \frac{1}{6} \left(\frac{35}{24} \nu^2 \right) \right) w \left(\sqrt{\frac{35}{24}} \nu \right) \\ & + \int_0^\infty d\mu \frac{1}{70} \left(\frac{21}{8} \mu + \frac{2}{70} \mu^3 \right) \int_0^\mu dx \left(e^{-\frac{9}{70} x^2} - e^{-\frac{1}{70} x^2} \right) e^{(i\mu\nu - \frac{11}{70} \mu^2)} \end{aligned} \quad (3.95)$$

Eine Überprüfung dieses Ergebnisses ermöglicht der Vergleich der Koeffizienten, die sich bei Entwicklung der Terme nach $\frac{1}{\nu}$ ergeben, mit den im letzten Abschnitt hergeleiteten Beiträgen der störungstheoretischen Entwicklung bis zur dritten Ordnung. Die 0-te sowie erste Ordnung ergibt jeweils den Faktor 1. Die zweite Ordnung konnte allgemein mit:

$$1 + \frac{n}{2n-1} + 1 \stackrel{n \equiv 4}{=} \frac{18}{7}$$

angegeben werden. Die Summe aller 15 Beiträge dritter Ordnung, mithilfe der in der Tabelle aufgeführten numerischen Werte schließlich, ergibt : $\frac{341 \cdot 36}{49 \cdot 25}$ Dasselbe findet man nach Entwicklung des exakten Resultats für $n = 4$.

Damit sind die in dieser Arbeit berechneten exakten Lösungen für die unordnungsgemittelte Greensfunktion im Monopolfeld vorgestellt. Im nächsten Abschnitt werden wir analytische Struktur und die Form der Zustandsdichten diskutieren und mit dem Wegnerschen Grenzfall vergleichen.

3.4.1. DIE EXAKTEN GREENSFUNKTIONEN

In die Liste der exakten Greensfunktionen nehmen wir den Fall $n = 1$ noch mit auf. Das Ergebnis kann sofort angegeben werden, denn das zu berechnende Integral ist schon eindimensional: der einzige beitragende Term des Potentials ist der erste Entwicklungskoeffizient nach den Kugelfunktionen. Effektiv ist hier also:

$$V(\vec{x}) = \lambda_0$$

D.h. für die Greensfunktion hat man das Integral:

$$\mathcal{G}_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int d\lambda_0 \frac{1}{\nu - \lambda_0} e^{-\lambda_0^2} \quad (3.96)$$

(Wir erinnern uns, daß über die Spur des Inversen der Matrix $\nu - V$ mit der gauss'schen Verteilung $e^{-\int DV V^2}$ zu mitteln ist) Die $n = 2, 3$ Lösungen gewinnt man als Spezialfälle der p-Wellen bzw SO(n)-invarianten Greensfunktionen. Den Grenzfall $n \rightarrow \infty$ schließlich haben wir bereits im ersten Kapitel angegeben.

Auf der nächsten Seite findet sich eine Liste der exakten Greensfunktionen und Zustandsdichten. Dabei haben wir wie schon mehrfach die w -Funktion benutzt:

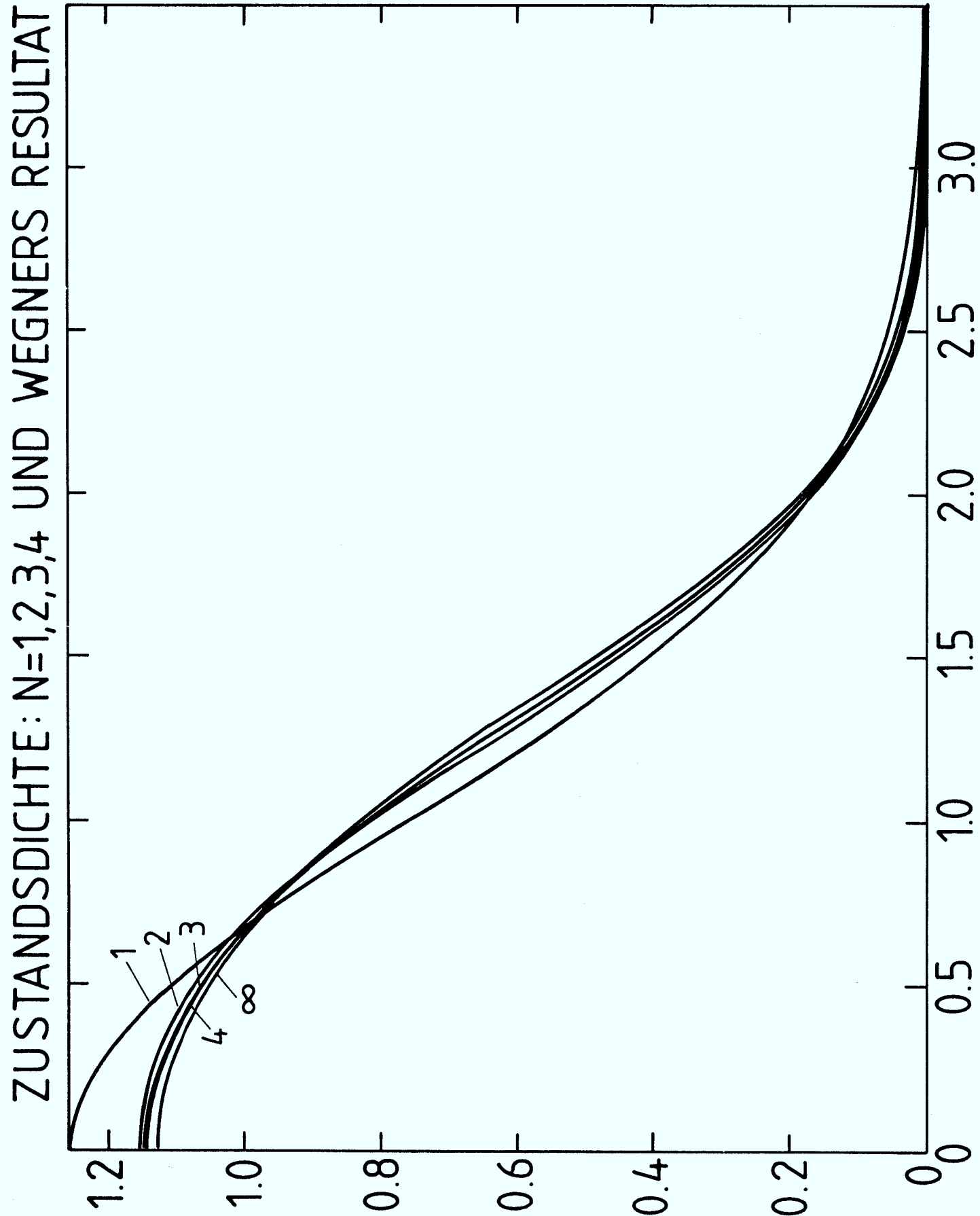
$$\begin{aligned} w(\nu) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx e^{i\nu x - \frac{1}{4}x^2} \\ &= e^{-\nu^2} \left(1 - \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^\nu dx e^{x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.97)$$

Die Zustandsdichten sind dabei zum besseren Vergleich sämtlich mit gleicher Norm definiert:

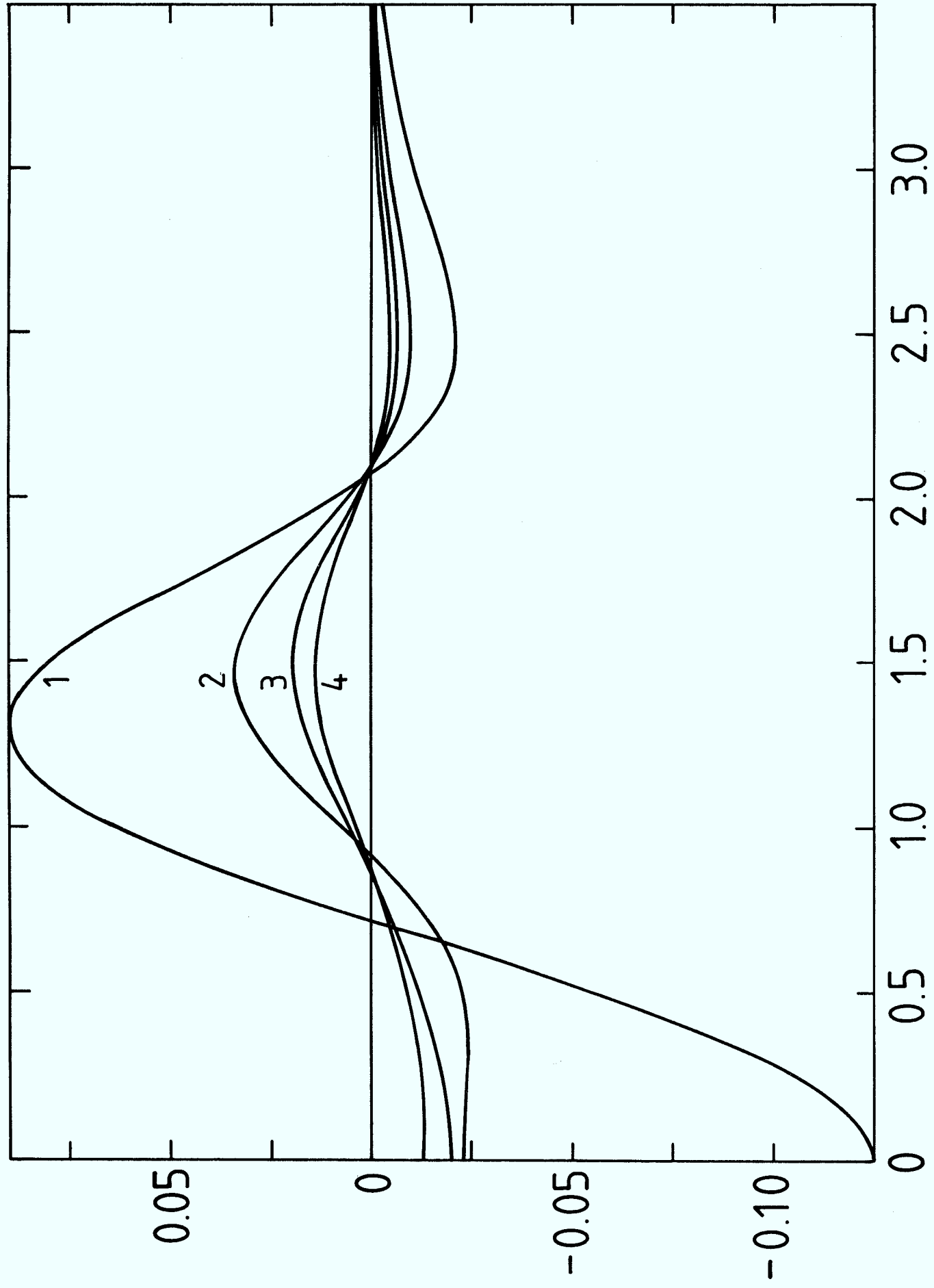
$$\int_{-\infty}^{\infty} d\nu \rho_n(\nu) = \pi$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1 &= -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}w\left(\frac{\nu}{\sqrt{2}}\right) \\
\mathcal{G}_2 &= -i\left(\sqrt{\frac{3\pi}{4}}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{3\nu^2}{4}\right)\right)w\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\nu\right) - i\frac{3}{8}\nu\right) \\
\mathcal{G}_3 &= -i\sqrt{\frac{5\pi}{6}}\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{6}\left(\frac{5\nu^2}{6}\right)\right)w\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\nu\right) \\
&\quad - i\sqrt{\frac{5\pi}{4}}\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{12}\left(\frac{5\nu^2}{4}\right)\right)w\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\nu\right) - \frac{85}{144}\nu \\
\mathcal{G}_4 &= -\nu\frac{973}{45 \cdot 32} + \sqrt{\frac{7\pi}{8}}\left(-\frac{1}{40} + \frac{21}{20}\left(\frac{7\nu^2}{8}\right)\right)w\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\nu\right) \\
&\quad + \sqrt{\frac{35\pi}{24}}\left(\frac{7}{12} - \frac{1}{6}\left(\frac{35\nu^2}{24}\right)\right)w\left(\sqrt{\frac{35}{24}}\nu\right) \\
&\quad + \int_0^\infty d\mu\frac{1}{70}\left(\frac{21}{8}\mu + \frac{2}{70}\mu^3\right)\int_0^\mu dx\left(e^{-\frac{9}{70}x^2} - e^{-\frac{1}{70}x^2}\right)e^{(i\mu\nu - \frac{11}{70}\mu^2)} \\
\mathcal{G}_\infty &= -i\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{w(\nu)} - 2i\nu\right) \\
\rho_1 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\nu^2}{2}} \\
\rho_2 &= \sqrt{\frac{3\pi}{4}}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{3\nu^2}{4}\right)\right)e^{-\frac{3}{4}\nu^2} \\
\rho_3 &= \sqrt{\frac{5\pi}{6}}\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{6}\left(\frac{5\nu^2}{6}\right)\right)e^{-\frac{5}{6}\nu^2} \\
&\quad + \sqrt{\frac{5\pi}{4}}\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{12}\left(\frac{5\nu^2}{4}\right)\right)e^{-\frac{5}{4}\nu^2} \\
\rho_4 &= \sqrt{\frac{7\pi}{8}}\left(-\frac{1}{40} + \frac{21}{20}\left(\frac{7\nu^2}{8}\right)\right)e^{-\frac{7}{8}\nu^2} \\
&\quad + \sqrt{\frac{35\pi}{24}}\left(\frac{7}{12} - \frac{1}{6}\left(\frac{35\nu^2}{24}\right)\right)e^{-\frac{35}{24}\nu^2} \\
&\quad + \int_0^\infty d\mu\frac{1}{70}\left(\frac{21}{8}\mu + \frac{2}{70}\mu^3\right)\int_0^\mu dx\left(e^{-\frac{9}{70}x^2} - e^{-\frac{1}{70}x^2}\right) \\
&\quad \cdot \cos(\mu\nu)e^{-\frac{11}{70}\mu^2} \\
\rho_\infty &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{\nu^2}}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\nu dx e^{x^2}\right)^2}
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Graphische Darstellung der Zustandsdichten



Differenz der Zustandsdichten $N=1,2,3,4-\infty$



Zur Diskussion: Als erstes bemerkt man, daß alle Greensfunktionen i.w. w -Funktionen sind, d.h. die Zustandsdichten ergeben gauss'sches Verhalten, im Gegensatz etwa zur Halbkreis bzw Ellipsen-Struktur bei der gebräuchlichen 'SCBA-Näherung'(s.z. B. Ando⁴) Diese Form der Zustandsdichte hätten wir erhalten wenn die Gewichtungsfaktoren, der einzelnen Multipletts alle gleich gewesen wären, d.h. im $SU(n)$ -symmetrischen Fall. (Vgl dazu die bereits erwähnte Arbeit von Brézin²⁸).

Des weiteren fällt die Multiplettstruktur der Greensfunktionen auf. Wir hätten die ersten drei Lösungen mit jeweils n Termen angeben können: die einzelnen verschiedenen Exponentialfaktoren gehören zu den $n = 2q + 1$ 'magnetischen Quantenzahlen der q -dimensionalen Darstellung der $SU(2)$. Aufgrund der Symmetrie zwischen m und $-m$ treten dann für halbzahliges q nur $\frac{2q+1}{2} = \frac{n}{2}$ für ganzzahliges q dagegen $\frac{2q+1-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$ verschiedene Terme auf. Prinzipiell lassen sich alle Terme in dieser Weise schreiben, auch wenn für $n = 4$ hier die Errorfunktionsanteile zusammengefaßt wurden.

Überdies sind die einzelnen Multipletts für sich normiert. Jedes trägt dabei dasselbe Gewicht zum Gesamtintegral über die Zustandsdichte bei, also bei Normierung auf π , wie sie hier vorliegt, jedes Multiplett den Anteil $\frac{\pi}{n}$. Das gilt auch für die $n = 4$ Zustandsdichte, da der letzte Term zum Integral keinen Beitrag liefert.

Vergleicht man die Exponenten der exakten Lösungen mit den unter der Annahme der axialen Symmetrie des Potentials gewonnenen, bemerkt man, daß die Koeffizienten von ν^2 der Exponentialfunktionen genau die C-G-Koeffizienten sind die wir dort gefunden hatten. Der Errorfunktionsanteil der $n = 4$ Lösung interpoliert sozusagen zwischen diesen beiden Exponentialfunktionen, die zum $m = \frac{3}{2}$ bzw $m = \frac{1}{2}$ Multipletterm gehören.

Da es uns nicht gelungen ist weitere exakte Lösungen anzugeben, können wir an dieser Stelle nur spekulieren, daß die allgemeine Form der Greensfunktion für beliebige n eine Summe von w -Funktionen mit gewissen geraden Polynomen in ν^2 als Vorfaktor, sowie 'interpolierenden' Errorfunktionen sein wird. Die Struktur der gefundenen Lösung legt eine solche Vermutung immerhin sehr nahe. (Bemerkenswert dabei, daß die Exponentialfaktoren der Zustandsdichten schon aus der sehr groben Näherung axialsymmetrischer Potentiale zu berechnen sind. Im nächsten

Abschnitt wird anhand einer Sattelpunktsnäherung dafür eine mögliche Erklärung gegeben werden.)

Der Grenzfall $n \rightarrow \infty$ stellte demnach den Limes einer Summe über w -Funktionen dar der i.w. gegen $\frac{1}{w(\nu)}$ konvergiert, wie man aus der Tabelle oben entnimmt.

Wenden wir uns jetzt der Form der Zustandsdichten zu. Wie die graphischen Darstellungen zeigen ist die Güte der Näherung für die Fälle $n = 2, 3, 4$ erstaunlich. Obwohl die analytische Struktur der Lösungen also verschieden von Wegners Ergebnis ist zeigt sich eine *globale* Übereinstimmung im Prozentbereich! Für die sich abzeichnenden Schnittpunkte aller Zustandsdichten in der Nähe von 1 bzw 2 werden wir im Zusammenhang der $\frac{1}{n}$ -Korrektur zum ebenen System ein Argument angeben: die Differenz der Zustandsdichten hängt für große n nur von n selbst ab. D.h. die Form der Differenzfunktion wird jeweils dieselbe sein, nur die Amplituden skalieren mit $\frac{1}{n^2}$.

3.5. 'INSTANTONEN'

Im Grenzfall großer Energien gelang es Affleck³⁵ durch Sattelpunktsentwicklung um ein nichttriviales Minimum der Wirkung das Wegner'sche Resultat zu reproduzieren. (Eine allgemeine Einführung in die hier benutzte Instantontechnik findet sich z.B. bei Vainshtein⁵⁶). Wir wollen in diesem Teil der Arbeit dieses Vorgehen auf den Fall der Greensfunktion auf der Kugeloberfläche übertragen. Dazu gehen wir zur Definition (3.3) der Greensfunktion über ein Funktionalintegral zurück

$$\langle G(\vec{x}, \vec{x}) \rangle = -i \int D\Phi D\bar{\Phi} D\Psi D\bar{\Psi} \Psi(\vec{x}) \bar{\Psi}(\vec{x}) e^{S_{eff}}$$

wo

$$S_{eff} = i\epsilon \int d^2x \sqrt{g} [\bar{\Phi}\Phi + \bar{\Psi}\Psi] - \frac{w}{2} \int d^2x \sqrt{g} [\bar{\Phi}\Phi + \bar{\Psi}\Psi]^2$$

Man stellt die Wirkung zunächst rein reell dar: mit

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum a_k Y_k & \bar{\Phi} &= \sum a_k^\dagger \bar{Y}_k \\ \Phi &= \Phi_1 + i\Phi_2 & a_k &= a_{1k} + ia_{2k} \\ \Rightarrow \Phi_1 &= \sum a_{1k} \operatorname{Re} Y_k - a_{2k} \operatorname{Im} Y_k \\ \Phi_2 &= \sum a_{1k} \operatorname{Im} Y_k + a_{2k} \operatorname{Re} Y_k \end{aligned}$$

es gilt:

$$Y_k = Y_k^R(\theta) e^{i(q+k)\phi} \quad Y_k^R \in R$$

d.h. der Vektor Φ kann mithilfe von Einheitsvektoren geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \vec{\Phi} &= \sum_{k,i} Y_k^R a_{ik} e_k^i \\ e_k^1 &= \begin{pmatrix} \cos(k+q)\phi \\ \sin(k+q)\phi \end{pmatrix} \\ e_k^2 &= \begin{pmatrix} -\sin(k+q)\phi \\ \cos(k+q)\phi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.99}$$

Nach Einsetzen ergibt sich ein nichttriviales Extremum in der Wirkung nach Drehung der Felder in der komplexen Ebene:

$$\Phi_i \longrightarrow e^{i \operatorname{sign}(\epsilon) \frac{\pi}{4}} \Phi_i$$

Eine analoge Rotation führt man auch mit den Graßmannvariablen durch. (Wir werden im folgendender Einfachheit halber $\epsilon > 0$ voraussetzen, aufgrund der Symmetrie folgt die gesamte Lösung) Die 'Feldgleichungen' die sich aus der Wirkung nach Variation ergeben lauten dann:

$$\begin{aligned}\epsilon\Phi_i - w(\vec{\Phi}^2 + \bar{\Psi}\Psi)\Phi_i &= 0 \\ \epsilon\Psi - w\vec{\Phi}^2\Psi &= 0\end{aligned}\tag{3.100}$$

Die Graßmannfelder sollten wie gewöhnlich im 'klassischen limes' verschwinden, für die bosonischen Felder wählen wir den Ansatz mithilfe der Monopolharmonischen:

$$\Phi_{cl} = A_k Y_k^R e_k^i \tag{3.101}$$

Dabei soll A_k von ϵ abhängen und für $\epsilon \rightarrow 0$ in die triviale Lösung 0 übergehen. Das Minimum der Wirkung findet man durch Variation der A_k . An der Stelle dieser 'klassischen Lösung' erhält man:

$$S_{cl} = \epsilon A_k^2 - \frac{w}{2} A_k^4 \frac{N}{4\pi a^2(2N-1)} \Gamma_{kk}^K \Gamma_{kk}^K \tag{3.102}$$

Dabei haben wir die Umkopplungseigenschaften der Monopolharmonischen ausgenutzt. Das Minimum ergibt sich offenbar, wenn Γ_{kk}^K maximal wird, also für $k = q$ und $\Gamma_{qq}^{2q} = 1$. Demnach muß :

$$\begin{aligned}A_k^2 &= \frac{\epsilon}{w\lambda_k} \\ \lambda_k &= \frac{N^2}{4\pi a^2(2N-1)}\end{aligned}\tag{3.103}$$

Der Faktor $\frac{1}{a^2}$ kommt von der Normierung der Y_k . Dabei ist a wieder der Kugelradius. (Nach unserer Konvention war $\frac{N}{4\pi a^2} = \frac{\kappa}{2\pi}$) Wählt man an dieser Stelle nicht das absolute Minimum der Wirkung, sondern eins der relativen, ergeben sich gerade die Exponenten der restlichen Multipletterme für die exakten Lösungen des letzten Abschnitts. Die axialsymmetrische Näherung enthält gerade die Glieder, die zu relativen Extrema führen; das scheint der Grund für die Übereinstimmung der Exponenten dieser groben Näherung mit den exakten Resultaten.

Eine symmetrische Lösung geht aus der angegebenen durch die Transformation:

$$Y_{qjm}(\theta, \phi) = e^{2im\phi} (-)^{q+j} Y_{qj-m}(\pi - \theta, \phi) \tag{3.104}$$

hervor. Die Wirkung ist invariant unter solchen Transformationen, was weiter unten die Einführung sogenannter ‘kollektiver Variablen’⁵⁶⁾ veranlassen wird. Die Instanton-Lösung lautet damit:

$$\Phi_{cl} = \sqrt{\frac{\epsilon}{w\lambda_q}} Y_q^R e_q^1 \quad (3.105)$$

Die willkürliche Auswahl des Einheitsvektors (e_q^2 wäre genauso gut möglich) wird weiter unten ebenfalls zu Modifikationen führen.

Fluktuationen um diese Lösung werden bis zur quadratischen Ordnung mitgenommen. Es wird also:

$$S = S_{cl} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} (\Phi_{cl}) \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{2} \bar{\Psi} \frac{\partial^2 S}{\partial \Psi \partial \bar{\Psi}} (\Phi_{cl}) \Psi \quad (3.106)$$

die Operatoren im quadratischen Anteil der Wirkung haben explizit folgende Form:

$$Op_\Phi = \epsilon 1 - w \begin{pmatrix} 3\Phi_{1cl}^2 + \Phi_{2cl}^2 & 2\Phi_{1cl}\Phi_{2cl} \\ 2\Phi_{1cl}\Phi_{2cl} & \Phi_{1cl}^2 + \Phi_{2cl}^2 \end{pmatrix} \quad (3.107)$$

und

$$Op_\Psi = \epsilon - w \vec{\Phi}_{cl}^2 \quad (3.108)$$

Der ϕ -abhängige Anteil im ersten Operator läßt sich abspalten; er lautet explizit:

$$B_\phi = \begin{pmatrix} 3\cos^2(2q\phi) + \sin^2(2q\phi) & 2\sin 2q\phi \cos 2q\phi \\ 2\sin 2q\phi \cos 2q\phi & 3\sin^2(2q\phi) + \cos^2(2q\phi) \end{pmatrix} \quad (3.109)$$

Die Eigenvektoren dieses Operators sind die Einheitsvektoren e_q^i . Die restlichen Einheitsvektoren entwickelt man nach diesen beiden:

$$\begin{pmatrix} \cos(2q - k)\phi \\ \sin(2q - k)\phi \end{pmatrix} = \cos k\phi e_q^1 - \sin k\phi e_q^2 \quad (3.110)$$

und für den zweiten analog:

$$\begin{pmatrix} -\sin(2q - k)\phi \\ \cos(2q - k)\phi \end{pmatrix} = \sin k\phi e_q^2 + \cos k\phi e_q^1 \quad (3.111)$$

Damit findet man die Matrixelemente bezüglich des Operators B_ϕ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi (e_k^i)^T B_\phi e_{k'}^j = 2\delta_{kk'} \delta_{ij} \quad (3.112)$$

Für $k \neq q$ und:

$$(e_q^i)^T B_\phi e_q^j = \delta_{ij}(3\delta_{i1} + \delta_{i2}) \quad (3.113)$$

Die Eigenwerte der fermionischen Matrix sind :

$$k \neq q \quad \eta_k = \epsilon - w A_q^2 \lambda_k \quad (3.114)$$

Nach Einsetzen der Definitionen vereinfacht sich das zu:

$$\zeta_k = \epsilon(1 - (\Gamma_{qk}^K)^2) \quad (3.115)$$

Die Eigenwerte der bosonischen Matrix sind:

$$k \neq q, q-1 \quad \eta_k = \epsilon - w A_q^2 \lambda_k \quad (3.116)$$

Dabei hat man die zweifache Entartung zu beachten, die wegen der beiden Felder Φ_i auftritt. Setzt man λ_k und A_q ein reduziert sich das auf die Form:

$$\eta_k = \epsilon(1 - 2(\Gamma_{kq}^K)^2) \quad (3.117)$$

die Eigenwerte zu $k = q, q-1$ dagegen sind:

$$\begin{aligned} \eta_q^1 &= -2\epsilon & \eta_q^2 &= 0 \\ \eta_{q-1}^{1,2} &= 0 & \text{Da} \quad \Gamma_{q-1,q}^K &= \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.118)$$

Die 'zero-moden' treten aufgrund der Invarianz der Wirkung unter $SU(2)$ - Transformationen auf, die durch die Instantonlösung gebrochen wird. Der Mode zum Eigenwert η_q^2 ist dabei proportional zum Instanton selbst, wenn e_q^1 durch e_q^2 ersetzt wird, d.h. nach einer Rotation im von den Einheitsvektoren aufgespannten zweidimensionalen Raum. Die Moden zu den Eigenwerten η_{q-1} dagegen sind proportional zu Y_{q-1} und gehören zur Invarianz unter Drehungen um x bzw y -Achse. Man bemerkt, daß :

$$\begin{aligned} J_+ Y_k &= \sqrt{q(q+1) - k(k+1)} Y_{k+1} \\ J_- Y_k &= \sqrt{q(q+1) - k(k-1)} Y_{k-1} \end{aligned} \quad (3.119)$$

Die Drehungen J_x, J_y ergeben sich durch Addition bzw Subtraktion. Für die Anwendung hier hat man noch darauf zu achten, daß die Differentialoperatoren (vgl

p. 46 Gln 2.2) vom Faktor $g^{-\frac{1}{4}}$ her mit $\frac{1}{a}$ multipliziert sind. (a ist der Kugelradius und geht über die Einheitsvektoren in den metrischen Tensor g ein). Wegen des Phasenfaktors i bei der Definition von J_y relativ zu J_x , der in reeller Darstellung dem Übergang $e_q^1 \rightarrow e_q^2$ entspricht, tritt ein Translations-zero-mode bei $Y_{q-1}e_q^1$ und der zweite bei $Y_{q-1}e_q^2$ auf. Die Divergenz im Zusammenhang mit den zero-moden rührt also von der Tatsache, daß in den Richtungen dieser Moden sozusagen Täler liegen, im Gegensatz zu den positiven Moden in deren Richtung ein parabolischer Anstieg erfolgt. Diese Täler sind jedoch einfacher Ausdruck der Tatsache, daß die Instantonlösung die ursprünglichen Symmetrien der Wirkung verletzt. Intuitiv erwartet man daher, daß über alle Lokalisierungen des Instantons integriert wird. Die Integration über ϕ_o, θ_o ist aber bis auf einen Faktor identisch mit der Integration über die Entwicklungskoeffizienten, die zu den zero moden gehören. Die Proportionalitätskonstanten findet man aus dem Vergleich der infinitesimalen Änderung unter Variation der Integrationsvariablen: Für den η_q^2 -zero-mode:

$$\begin{aligned}\delta\Xi_q &= \delta a_{2q} Y_q^R e_q^2 \\ \delta\Phi_{1cl}(\phi_o) &= \delta\phi_o \Phi_{2cl}\end{aligned}\tag{3.120}$$

Der gesuchte Faktor ist also der Betrag von Φ_{cl} .

$$\Delta_\phi = A_q\tag{3.121}$$

Auf dieselbe Weise findet man unter Benutzung von (3.119) die Jacobideterminante für beide θ -Moden:

$$\Delta_\theta^2 = \frac{N-1}{4a^2} A_q^2\tag{3.122}$$

Im fermionischen Teil tritt ebenfalls ein zero-mode auf, der von der Symmetrie unter $\Phi \rightarrow \Phi + \gamma\Psi$ herrührt. Die äußeren Felder $\Psi\bar\Psi$ werden nach Eigenvektoren zu Op_Ψ entwickelt. In führender Ordnung in der Energie bleibt dann nur die normierte Instantonlösung. Da die Gauss-Integration über die zero-moden wegfällt, bleibt von der Normierung ein Faktor $\sqrt{\frac{1}{\pi^3}}$. Die Integration über die Instantonlokalisierung liefert noch einen Faktor 2π vom $O(2)$ -Freiheitsgrad; die x_0, y_0 -Integrale ergeben 1, da die normierte Instantonlösung im Zähler steht. (In Koordinaten der stereographischen Projektion hat man x, y statt θ, ϕ ; der $O(2)$ -Winkel ist nicht mit ϕ zu verwechseln.) Eine Bemerkung ist bei Behandlung des

negativen η_q^1 -modes angebracht: Offenbar hat dieser Term das 'falsche' Vorzeichen; d.h. die Rotation in der komplexen Ebene, die wir zu Beginn ausgeführt haben, kann nicht für $\Phi_1 \rightarrow \infty$ fortgesetzt werden; der Integrationskontur muß nach Erreichen der Minima (man hat zwei, da das Vorzeichen beliebig ist) zur reellen Achse zurückführen. Nach dem Variablenshift $\Phi - \Phi_{cl}$, liegt eins der beiden bei 0, das andere weiterhin in der komplexen Ebene. Der Integrationsweg kann also nur vom Ursprung ab so gedreht werden, daß das Integral konvergiert, und den erwarteten Imaginärteil liefert. Da bei der Behandlung des $O(2)$ -modes vorausgesetzt wurde, daß das zweite (Vorzeichen) Minimum durch eine Symmetrietransformation aus dem ersten hervorgeht, darf in diesem Bereich konsistenterweise keine 'Verbiegung' des Konturs vorgenommen werden. Da das Gauss-Integral also nur über die Halbachse führt erhält man vom negativen mode einen Faktor $\frac{1}{2}$. Unter Berücksichtigung aller Terme, hat man schließlich für die Zustandsdichte:

$$\begin{aligned} \rho(\epsilon) &= \sqrt{\frac{1}{\pi}} \Delta_\phi \Delta_\theta^2 \frac{Det' Op_\Psi}{Det' Op_\Phi} \\ &= \sqrt{\frac{(2N-1)\pi}{2N}} \left(\frac{2N-1}{2N}\right)^\nu \sqrt{\frac{2\pi\kappa}{w}} \frac{\kappa}{\pi} \frac{N-1}{N} \frac{Det' Op_\Psi}{Det' Op_\Phi} \end{aligned} \quad (3.123)$$

Dabei sind wir zur Konvention ϵ, κ, w in ν aufzunehmen zurückgegangen. Es war $\nu = \sqrt{\frac{2\pi}{w\kappa}}\epsilon$. Den Faktor der freien Zustandsdichte $\frac{\kappa}{2\pi}$, sowie $\sqrt{\frac{2\pi}{\kappa w}}$ ziehen wir noch, wie in der Definition von $\mathcal{G}_N$ heraus. Insgesamt hat man dann:

$$\rho_N(\nu) = \sqrt{\frac{(2N-1)\pi}{2N}} \left(\frac{2N-1}{2N}\right)^\nu \frac{2(N-1)}{N} \frac{\prod_{k \neq q} (1 - \Gamma_{kq}^2)}{\prod_{k \neq q, q-1} (1 - 2\Gamma_{kq}^2)} \quad (3.124)$$

Die Determinanten sind explizit angegeben, sodaß das Ergebnis direkt an den bekannten exakten Lösungen überprüft werden kann. Im Anhang ist die zum Vergleich notwendige Umformung von ρ_4 vorgenommen. Für die Fälle $N = 2, 3, 4$ erhält man mit

$$(\Gamma_{kk'}^K)^2 = \binom{4q}{2q}^{-1} \binom{2q - (k + k')}{q - k} \binom{2q + (k + k')}{q + k'} \quad (3.125)$$

das führende Verhalten im Grenzfall großer Energien:

$$\begin{aligned}
N = 2 : \rho_2 &= \sqrt{\frac{3\pi}{4} \frac{1}{2} \frac{3}{4}} \nu^2 e^{-\frac{3}{4}\nu^2} \\
N = 3 : \rho_3 &= \sqrt{\frac{5\pi}{6} \frac{5}{6} \frac{5}{6}} \nu^2 e^{-\frac{5}{6}\nu^2} \\
N = 4 : \rho_4 &= \sqrt{\frac{7\pi}{8} \frac{19}{18} \frac{7}{8}} \nu^2 e^{-\frac{7}{8}\nu^2} \\
N = \infty : \rho_\infty &= \sqrt{\pi} 2\nu^2 e^{-\nu^2}
\end{aligned} \tag{3.126}$$

Die Lösungen sind für endliche Werte der Monopolladung nicht normiert, während im ebenen Grenzfall die Sattelpunktslösung auf π normiert ist. Die vom Instantonbeitrag gewonnenen Zustandsdichten stimmen also mit den exakten Resultaten für $\nu \rightarrow \infty$ überein.

3.6. $\frac{1}{n}$ -ENTWICKLUNG

Die allgemeine Lösung für beliebige n konnten wir leider nicht herleiten. Ein etwas bescheidenerer Ansatz soll den Abschluß der Arbeit bilden: Wie sehen die ersten Korrekturen zur exakten Greensfunktion in der Ebene, die, wie wir gesehen haben, dem Grenzfall $n \rightarrow \infty$ entspricht, bezüglich $\frac{1}{n}$ aus? Die Zustandsdichten für sehr kleine Teilchenzahlen stellten erstaunlich gute Approximationen des ebenen Ergebnisses dar. Die Konvergenz scheint demnach sehr stark zu sein. Die Mitnahme der ersten Korrekturterme könnte eine Antwort auf die Frage nach dem Grund dieser schnellen Konvergenz ermöglichen.

Zur Berechnung der Korrekturen gehen wir zurück zur störungstheoretischen Entwicklung der Greensfunktion; im ersten Kapitel des zweiten Teils dieser Arbeit, hatten wir die Grundzustandslösung des freien Systems in stereographischer Projektion hergeleitet. In diesen Koordinaten war die Beziehung zwischen dem Projektor des ebenen Systems:

$$P_0^\infty(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{\kappa}{2\pi} e^{-\frac{\kappa}{4}(z\bar{z} + z'\bar{z}' - 2z\bar{z}')}$$

und dem entsprechenden des endlichen Systems:

$$P_0^n(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{n}{4\pi a^2} \frac{\left(1 + \frac{z\bar{z}'}{a^2}\right)^{n-1}}{\left(1 + \frac{|z|^2}{a^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 + \frac{|z'|^2}{a^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \quad (3.127)$$

besonders deutlich. (Im Gegensatz zur Darstellung mithilfe der Monopolharmonischen) Im wesentlichen werden wir die Korrekturen dieses Projektors im Vergleich zum ebenen beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ zu untersuchen haben. D.h. welche Folgen die Abweichung von der gauss'schen Struktur durch die Korrekturen mit sich bringen. Gemäß unserer Festlegung:

$$\frac{1}{4\pi a^2} = \frac{\kappa}{2\pi n}$$

wird die explizite Abhängigkeit vom Kugelradius a im Projektor eliminiert. Die Entwicklung nach Potenzen von $\frac{1}{n}$ eines typischen Terms im Projektor wird fol-

gende Form haben:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} &= e^{(n-1) \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)} \\
&\sim e^{(n-1) \left(\frac{x}{n} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{n^2}\right)} \\
&\sim e^{x - \frac{x^2}{2n}} \sim e^x - \frac{1}{n} \left(x + \frac{1}{2} x^2\right)
\end{aligned} \tag{3.128}$$

Wenn man alle höheren Potenzen in $\frac{1}{n}$ vernachlässigt. Der n -unabhängige Term liefert gerade den ebenen Projektor, d.h. entwickelt man den Exponenten werden lineare und quadratische Korrekturen im Integranden auftauchen. Damit die Entwicklung Sinn macht muß gelten :

$$1 \ll R \ll n \tag{3.129}$$

Wobei R die Integrationsgrenze für x darstellt. (Die Variablen sind dimensionslos gewählt, d.h. wir haben κ in $z, \bar{z}$ absorbiert.)

Der Beitrag L -ter Ordnung zur störungstheoretischen Entwicklung der Greensfunktion zur Monopolladung n ist:

$$G_n^L(\vec{x}, \vec{x}') = \prod_{K=1}^L \int d^2 x_K \sqrt{g} \prod_{j=0}^L \frac{P_n(\vec{x}_{j+1}, \vec{x}_j)}{\epsilon} V(\vec{x}_j) \quad \vec{x}_0 = \vec{x}' \quad \vec{x}_{L+1} = \vec{x} \tag{3.130}$$

Dabei sind wir zur Darstellung, die die äußeren Linien enthält zurückgekehrt, im Einklang mit der Tatsache, daß die Integration über die unendliche Kugeloberfläche divergieren würde. Bei der Mittelung hat man nun das Integrationsmaß auf der Kugeloberfläche zu beachten, es ist also:

$$\langle V(\vec{x}_1), V(\vec{x}_2) \rangle = w \frac{1}{\sqrt{g}} \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \tag{3.131}$$

Setzt man den Ausdruck (7.1) für den Projektor ein, erhält man unter Benutzung der wiederholt gebrauchten Matrix $(A - S)_{ij}$ einen typischen Beitrag :

$$\begin{aligned}
\langle G_n^L(\vec{x}, \vec{x}') \rangle &= \left(\frac{\kappa}{2\pi\epsilon}\right)^{2L} w^L \prod_{K=1}^L \int d^2 x_K \frac{\prod_{k,l=1}^L \left(1 + \frac{z_k \bar{z}_l}{n}\right)^{(A-S)_{kl}(n-1)}}{\prod_{m=1}^L \left(1 + \frac{|z_m|^2}{n}\right)^{2n}} \\
&\quad \frac{\left(1 + \frac{z \bar{z}_1}{n}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{z_1 \bar{z}'}{n}\right)^{n-1}}{\left(1 + \frac{|z|^2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 + \frac{|z'|^2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}}
\end{aligned} \tag{3.132}$$

Hier sind einige Erläuterungen angebracht:

Zunächst kommt jedes $|z_i|^2$ im Nenner 2mal vor (einmal als Anfangs- und einmal als Endpunkt, wie schon im ersten Kapitel dargestellt), d.h. aus dem Exponenten im Nenner $\frac{n-1}{2}$ wird $n-1$; von $\sqrt{g}$ hat man einen zusätzlichen Faktor 2, es wird also aus $n-1, n+1$. Die Mittelung identifiziert zwei Punkte, sodaß, da ein Faktor $\sqrt{g}$ sich aufgrund der Definition von g kürzt: $2(n+1) - 2 = 2n$ bleibt. Die Matrix A_{kl} im Exponenten besorgt die Linien von k nach l und außerdem bleiben von den äußeren Greensfunktionen ($G(\vec{x}, \vec{x}_i), G(\vec{x}_f, \vec{x}')$) nur die $\vec{x}$ und $\vec{x}'$ entsprechenden Nenner, da die Punkte $\vec{x}_i$ und $\vec{x}_f$ schon im Produkt im Nenner vertreten sind (im ersten Kapitel hatten wir schon vermerkt, daß i, f willkürlich gewählte Indices und in der Menge $\{1, 2, \dots, L\}$ enthalten sind.)

Nach Einsetzen der Näherung oben und Subtraktion des n -unabhängigen Terms erhält man für die Koeffizienten der Entwicklung nach $\frac{1}{\nu^{2L+1}}$: (ab jetzt ist $\vec{x} = \vec{x}'$, denn wie wir gesehen haben ist der ortsabhängige Anteil für beliebige n durch die freie Greensfunktion gegeben)

$$\begin{aligned} \Delta a_L = & -\frac{1}{n} \int_0^R [d\hat{z} d\hat{z}] \{ \hat{z}(A-S)\hat{z} - \frac{1}{2} \hat{z}^2(2-A+S)\hat{z}^2 \\ & + (\bar{z}z_i + \bar{z}_f z) + \frac{1}{2}(\bar{z}^2 z_i^2 + \bar{z}_f^2 z^2) + (\bar{z}z) + \frac{1}{2}(\bar{z}z)^2 \} \cdot \\ & \cdot e^{\{-\hat{z}(2-A+S)\hat{z} - \bar{z}z + \bar{z}z_i + \bar{z}_f z\}} \end{aligned} \quad (3.133)$$

Die Integrationsgrenze bezieht sich dabei natürlich auf den Radialanteil, der nach Ausführung der Winkelintegration bleibt. Zunächst zur Auswertung der 'äußeren' Terme. Nach Entwicklung des Exponenten in den $\bar{z}z_i, \bar{z}_f z$ -abhängigen Anteilen bleibt, läßt man die restlichen Glieder zunächst weg:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\bar{z}z_i + \bar{z}_f z)^{k+1}}{k!} + \frac{1}{2} \frac{(\bar{z}z_i + \bar{z}_f z)^{k+2}}{k!} - (\bar{z}z)\bar{z}_f z_i \frac{(\bar{z}z_i + \bar{z}_f z)^k}{k!} \right) e^{-\bar{z}z} \quad (3.134)$$

Nach Entwicklung der Binome und Ausführung der äußeren Winkelintegration, bleiben nur $(\bar{z}_f z_i)^l$ -Terme übrig, die man durch Differentiation des Exponenten gewinnen kann:

$$(\bar{z}_f z_i)^l e^{-\hat{z}(2-A+S)\hat{z}} = \partial_{-\lambda}^l e^{-\hat{z}(2-A+\lambda S)\hat{z}} \Big|_{\lambda=1} \quad (3.135)$$

Die Integration über die quadratische Form kann dann ausgeführt werden, und liefert: $\frac{1}{\lambda \text{cof}(2-A)}$ sowie den Randterm, der aber im $\lim_{R \rightarrow \infty}$ verschwindet. Die

Differentiationen ergeben dann, nach Ausführung der Summen:

$$e^{-x}(xe^x + 2x\partial_x(xe^x - \frac{1}{2}xe^x)) = 2x + x^2 \quad (3.136)$$

Die restlichen Terme lassen sich analog berechnen, denn mit:

$$\begin{aligned} & \int [dzd\bar{z}](\bar{z}_k z_l)^{1,2} e^{-\bar{z}(2-A+S)\dot{z}} e^{-\bar{z}z + \bar{z}z_i + \bar{z}_f z} \\ &= \int [dzd\bar{z}] \partial_{-\epsilon}^{1,2} \sum_k \frac{\partial_{-\lambda}^k}{k!^2} x^k e^{(-\bar{z}(2-A+\lambda S+\epsilon T)\dot{z})} e^{-x} |_{\lambda=1, \epsilon=0} \\ &= \int dx \partial_{-\epsilon}^{1,2} \frac{1}{(a+b)} e^{\frac{a}{(a+b)}x} e^{-x} |_{\epsilon=0} \end{aligned} \quad (3.137)$$

wo:

$$\begin{aligned} a &= cof(2-A) + \epsilon cof_{kl}(2-A)^{if} \\ b &= \epsilon cof(2-A) \end{aligned} \quad (3.138)$$

und die Matrizen S und T sind definiert:

$$S_{nm} = \delta_{in} \delta_{fm} \quad T_{nm} = \delta_{kn} \delta_{lm} \quad (3.139)$$

Vom linearen Anteil, d.h. der ersten Ableitung in ϵ erhält man dann:

$$\left(\frac{1}{cof(2-A)} + \frac{cof_{kl}(2-A)^{if}}{cof^2(2-A)} + x \frac{1}{cof(2-A)} \right) \quad (3.140)$$

vom quadratischen Anteil:

$$\left(\frac{2}{cof} + \frac{4x}{cof} + 4(1+x) \frac{cof_{kl}}{cof^2} + \frac{2cof_{kl}^2}{cof^3} + \frac{x^2}{cof} \right) \quad (3.141)$$

dabei haben wir die Abkürzungen:

$$cof = cof(2-A) \quad cof_{kl} = cof_{kl}(2-A)^{if} \quad (3.142)$$

verwendet.

Fassen wir jetzt alle Beiträge zusammen:

a) Von den äußeren Variablen hat man

$$\left((2x + x^2) - \frac{1}{2}x^2 - x \right) \frac{1}{cof}$$

b) von den linearen Termen

$$\sum_{kl} \left((A - S)_{kl} \left(\frac{\delta_{kl}}{\text{cof}} + \frac{x\delta_{kl}}{\text{cof}} + \frac{\text{cof}_{kl}}{\text{cof}^2} \right) \right)$$

c) von den quadratischen schließlich

$$-\frac{1}{2} \sum_{kl} \left((2 - A + S)_{kl} \left(\frac{2\delta_{kl}}{\text{cof}} + 4(1 + x) \frac{\text{cof}_{kl}}{\text{cof}^2} + \frac{2\text{cof}_{kl}^2}{\text{cof}^3} + \frac{4x + x^2}{\text{cof}} \right) \right)$$

daher ist

mit:

$$\sum_{kl} (A - S)_{kl} = 2L - 1 \quad \sum_{kl} (2 - A + S)_{kl} = 1$$

sowie:

$$\frac{\text{cof}_{kl}(2 - A)^{if}}{\text{cof}(2 - A)} \equiv ((2 - A)^{if})_{lk}^{-1}$$

Mit der Abkürzung $(2 - A)^{if} = (2 - A)$ wobei in der f -ten Spalte der Einheitsvektor e_i gesetzt wird. da die Beiträge, $\sum_{kl} (2 - A + S)_{kl} \frac{\text{cof}_{kl}(2 - A)^{if}}{\text{cof}(2 - A)}$ bei denen $k = i$ oder $l = f$ ist wegen der Spur nicht auftreten, d.h. die effektive Matrix mit der multipliziert wird ist gerade $(2 - A)^{if}$. So folgt:

$$\sum_{kl} (2 - A + S)_{kl} \frac{\text{cof}_{kl}(2 - A)^{if}}{\text{cof}^2(2 - A)} = \frac{L - 1}{\text{cof}(2 - A)}$$

Die x -abhängigen Terme heben sich wie es sein muß weg, und es bleibt:

$$\Delta a_L = -\frac{1}{n} \frac{1}{\text{cof}(2 - A)} \tilde{C}(A)$$

wo

$$\tilde{C}(A) = 2 \sum_k \frac{\text{cof}_{kk}(2 - A)^{if}}{\text{cof}(2 - A)} - \sum_{kl} (2 - A + S)_{kl} \frac{\text{cof}_{kl}^2(2 - A)^{if}}{\text{cof}^2(2 - A)} - \frac{L - 1}{\text{cof}(2 - A)} \quad (3.143)$$

Die Näherung kann für die Beispiele zweiter und dritter Ordnung der Störungstheorie, bei denen die n -Abhängigkeit explizit angegeben wurde, durch Entwicklung nach Potenzen von $\frac{1}{n}$ überprüft werden.

Störend an dem jetzt hergeleiteten Ergebnis ist noch das explizite Auftauchen der willkürlich gewählten Punkte i, f . Beseitigt man sie durch Summation über alle möglichen Ein- und Ausgangspunkte erhält man endgültig:

$$\Delta a_L = \frac{1}{n} \frac{1}{\text{cof}(2-A)} C(A)$$

wo

$$C(A) = L+1 - \left(\frac{1}{L} \partial_\lambda \ln \partial_\lambda \text{Det}(\lambda + 2 - A)|_{\lambda=0} - \frac{1}{2L} \sum_{if,kl} (2-A)_{kl} \frac{\text{cof}_{kl}^2(2-A)^{if}}{\text{cof}^2(2-A)} \right) \quad (3.144)$$

Damit haben wir die Koeffizienten a_L der Entwicklung der Greensfunktion nach $(\frac{1}{\nu})^{2L+1}$ in erster Ordnung in $\frac{1}{n}$ angegeben.

In dieser Form kürzt sich zwar einmal der Faktor $\frac{1}{\text{cof}(2-A)}$, doch die restlichen Terme verhindern eine Aufsummation der Störungsreihe. Da jedoch außer n selbst in den Korrekturen nur Ausdrücke auftreten, die für alle Greensfunktionen dieselben sind, nämlich nur die Matrizen $(2-A)$, die die Struktur der betrachteten Graphen festlegen, wird für große n (d.h. wenn der $\frac{1}{n}$ -Term der Entwicklung dominiert) die Form der Differenz $G_n - G_{n-1}$ bzw der entsprechenden Zustandsdichte, jeweils dieselbe sein, und nur die Amplitude der Funktion wird mit einem Skalenfaktor $\frac{1}{n^2}$ kleiner. Genau dieses Verhalten beobachtet man an den angegebenen graphischen Darstellungen, insbesondere folgt daraus auch die Konvergenz der Schnittpunkte der Zustandsdichten bei den Werten $\nu \sim 1$ bzw $\nu \sim 2$.

SCHLUSS

Fassen wir die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit nocheinmal zusammen. Wir haben die unordnungsgemittelte Greensfunktion auf der Kugeloberfläche im Grenzfall starken Magnetfeldes untersucht. Das Feld wurde dabei von einem magnetischen Monopol erzeugt. Die Berücksichtigung des Spinfreiheitsgrades ergab pro Dirac-Einheit Ladung einen Zustand im 0.ten Landauniveau. Die zugehörigen Lösungen waren Verallgemeinerungen der Kugelfunktionen, und daher Darstellungen der Drehgruppe. Aus den Symmetrieeigenschaften, der Möglichkeit der Ausreduktion von Produkten von $SU(2)$ Darstellungen, gewannen wir eine einfache Form für die effektive Wirkung, mithilfe derer im Funktionalintegralformalismus die Greensfunktion berechnet werden kann. Unter Benutzung von Näherungsannahmen wurde dieses $2N$ -dimensionale ($N = \text{Monopolldung}$) Integral ausgeführt. Diese Lösungen waren gleichzeitig exakt für 2 resp. 3 Teilchen auf der Kugel. Im Grenzfall großer Teilchenzahlen und großen Monopolradius, der dem ebenen Problem entspricht, verschwand dabei allerdings der Einfluß der Wechselwirkung, d. h. die Zustandsdichte nahm den freien Wert, eine Deltafunktion an. In störungstheoretischer Entwicklung zeigten wir, daß jedem auftretenden Graphen, ein aus Vektorkopplungskoeffizienten zu bildender Skalar entsprach. Für die ersten drei Ordnungen konnten die jedem Diagramm korrespondierenden Terme angegeben und ausgewertet werden. Allgemein wurde eine erzeugende Funktion der Störungstheorie konstruiert. Als Korrolar ergab sich, daß die, aus den vorkommenden Clebsch- Gordan- Koeffizienten gebildeten Skalare, im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ von der Form $\frac{1}{L}$ $L \in N$ sein müssen. Dies folgt aus der Tatsache, daß die Skalare gegen die Determinante der 'Adjacency'- Matrix konvergieren, deren Wert, wie gezeigt wurde, der Anzahl der Euler-Trails eines Graphen entspricht. Demnach sind z. B. auch alle $3-n-J$ - Symbole, die auf den Koeffizienten aufbauen, das Inverse natürlicher Zahlen. Als höchste exakte Lösung konnten wir die Greensfunktion für vier Teilchen auf der Kugel explizit berechnen. Die damit gefundenen Ergebnisse für 1,2,3 und 4 Zustände zeigten bereits gute qualitative, und im Falle $N = 4$ sogar gute quantitative Übereinstimmung mit der Zustandsdichte des ebenen Systems. Im Bandzentrum lag die Abweichung hier bei einem Prozent; zu großen Energien hin fallen alle Lösungen wie erwartet exponentiell ab. Bemerkenswert dabei ist die Multipllettstruktur der Greensfunktionen und Zustandsdichte für endliche

Monopolladung. Die Exponenten der w-Funktionen zeigen eine Abhängigkeit der Form $\frac{2N-1}{2N\Gamma_{kk}^2}\nu^2$ ($\Gamma_{kk'}$ sind gewisse Clebsch-Gordan-Koeffizienten s. dazu den Abschnitt: Eigenschaften d. Monopolharmonischen) vom Betrag der 'magnetischen Quantenzahl' k . Die Beiträge solcher Exponenten verschwinden erst im Grenzfall unendlicher Teilchenzahlen. Instantonmethoden³⁵ (s. auch Benedict⁵⁷) erlaubten schließlich die Auswertung der Integraldarstellung der Zustandsdichte im Grenzfall hoher Energie für beliebige Monopolladung. Dabei zeigte sich, daß das führende Verhalten aller Lösungen durch:

$$\rho_N(\epsilon) \rightarrow \nu^2 e^{-\frac{2N-1}{2N}\nu^2} \quad \nu = \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa w}} \epsilon$$

gegeben ist. Im Gegensatz zum Fall $N = \infty$ sind die restlichen Zustandsdichten in dieser Näherung nicht normiert. Die Koeffizienten der führenden Terme stimmten mit den exakten Resultaten für kleine Teilchenzahl, sowie für die Ebene überein. Als letztes wurden die Korrekturen zur ebenen Greensfunktion in $\frac{1}{N}$ untersucht. Die Differenz $G_N - G_{N-1}$ hängt in dieser Ordnung nur über einen Skalierungsfaktor $\frac{1}{N}$ von N selbst ab. Daraus ergibt sich, daß die Form der Differenzfunktion für hohe N die gleiche bleibt, und jeweils nur die Amplitude um einen gemeinsamen Faktor zu größeren N hin abnimmt. Dieses Verhalten deutet sich bei den graphischen Darstellungen der exakten Lösungen an.

Abschliessend noch einige Bemerkungen zu möglichen Erweiterungen des hier beschriebenen Ansatzes. Wie bemerkt spalten die exakten Lösungen in Multipletts zu verschiedenen Exponenten auf. Diese Exponenten stimmen mit der 'klassischen' Wirkung an der Stelle der relativen Extrema überein. (Der hier berechnete führende Anteil entspricht dem absoluten Minimum.) Eine Sattelpunktsentwicklung um diese relativen Minima liegt daher nahe. Führt man die Rechnung analog zum beschriebenen Fall durch zeigen sich weitere negative moden, d.h. Terme mit dem 'falschen' Vorzeichen für die Gauß- Funktion. Die Behandlung dieser moden in derselben Weise wie oben, durch Drehung des Integrationsweges in der komplexen Ebene führt auf wechselnde Vorzeichen der Koeffizienten. (Jede Integration liefert einen Faktor i ; die Anzahl der negativen moden ist jeweils gerade.) Dies stimmt mit den an den exakten Lösungen beobachteten Vorzeichen überein. Der Beitrag der zero-moden hängt in diesem Fall vom 'Multiplettindex' k ab. Der so berechnete Vorfaktor entspricht dem exakten Ergebnis für $N = 4$. Im Grenzfall

$N \rightarrow \infty$ verschwindet der Beitrag, wie es nach Wegners Resultat sein sollte. Allerdings ergibt sich im Fall $N = 3$ eine Differenz des Koeffizienten um einen Faktor $\frac{1}{2}$ relativ zum exakten Ergebnis. Womit diese Differenz zusammenhängt konnte nicht geklärt werden. Eine Möglichkeit wäre die Tatsache, daß die Anwendung der Leiteroperatoren auf die klassische Lösung hier nicht nur die zero-moden, sondern bis auf einen Faktor i auch die negativen moden liefert. Dadurch könnten sich Komplikationen bei der Behandlung dieser moden ergeben.

Als weitere Anwendung kommt die Berechnung von Zweiteilchen- Greensfunktionen in Frage. Leider führen die auftretende Kopplungen zwischen den beiden Feldern in der Wirkung, die dazu eingeführt werden müssen, zu Zusatztermen, die eine Berechnung für $N = 2$ zwar noch erlauben sollten; höhere Teilchenzahlen dürften dagegen einer exakten Lösung nicht zugänglich sein. Außerdem ist die Definition einer Leitfähigkeit auf der Kugeloberfläche mit Schwierigkeiten verbunden: Einmal läßt sich dort global kein Vektorfeld definieren; daher ist ein homogenes Feld, wie in der Ebene nicht darstellbar. Die notwendige Singularität am Pol könnte demnach zu nichtphysikalischen Effekten führen. Außerdem wird eine θ bzw. ϕ -Abhängigkeit der Leitfähigkeit auftreten (am Pol muß der Strom verschwinden). Die Interpretation des Ergebnisses für die Ebene wäre daher problematisch. Schließlich liegen gerade für den Fall endlicher Teilchenzahlen in der Ebene ausgedehnte numerische Berechnungen vor⁵⁸.

Anhang A. Spektrum des Dirac-Operators in der Ebene

Mit den Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} [\pi_+, \pi_-]_- &= 2\kappa \\ [H_p, \pi_\pm]_- &= \mp \omega \pi_\pm \end{aligned} \quad (A.1)$$

erhält man die Eigenwerte eines harmonischen Oszillators. Der Pauli-Hamiltonian läßt sich nun schreiben:

$$H_p = H_s 1 - \tau_3 \frac{\omega}{2} \quad (A.2)$$

wo H_s der entsprechende Schrödinger-Hamiltonian und $\omega = \frac{\kappa}{m}$

Setzt man die Lösungen des Schrödinger-Hamiltonian voraus, die sich in jedem Quantenmechanik Lehrbuch (z. B. Landau III) finden, so lassen sich mit:

$$H_s \Psi_{Lm} = \lambda_L \Psi \quad (A.3)$$

sofort mehrere verschiedene Formen des Spektrums von H_p angeben.

Da nämlich :

$$[H_p, L_z]_- = [H_p, \tau_3]_- = 0 \quad (A.4)$$

Können die Lösungen wahlweise simultane Eigenzustände zu $L_z, \tau_3, J_z = L_z + \frac{\tau_3}{2}$ sein.

Der Dirac-Operator dagegen vertauscht nur mit J_z , außerdem gilt:

$$[\tau_3, \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}]_+ = 0 \quad (A.5)$$

d.h. mit

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Psi = \lambda \Psi \\ \text{gilt} \quad & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \tau_3 \Psi = -\tau_3 \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Psi = -\lambda \tau_3 \Psi \end{aligned} \quad (A.6)$$

Die 'chirale' Entartung des Spektrum des Pauli-Hamiltonians ist also beim Dirac-Operator aufgehoben. Es gilt :(in der gewählten symmetrischen Eichung)

$$H_s \left(\frac{\kappa}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{ik\phi} \omega_L^{|k|} \left(\frac{\kappa}{2} r^2 \right) = \left(L + \frac{1}{2} \right) \omega \left(\frac{\kappa}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{ik\phi} \omega_L^{|k|} \left(\frac{\kappa}{2} r^2 \right) \quad (A.7)$$

wobei die Funktionen Eigenzustände zu L_z zum Eigenwert k sind. Mithilfe dieser Lösungen und der oben gemachten Bemerkungen kann das gesamte Spektrum des Dirac-Operators sofort angegeben werden. Man findet:

$$\Psi_{Lk} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\kappa}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{ik\phi} \begin{pmatrix} \omega_L^{|k|} \left(\frac{\kappa}{2} r^2 \right) \\ i e^{i\phi} \omega_{L-1}^{|k|+1} \left(\frac{\kappa}{2} r^2 \right) \end{pmatrix}$$

wo $\omega_L^k(x)$ die normierten Laguerrefunktionen sind. D.h.

$$\omega_L^k = \frac{1}{(L!(L+k)!)^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_L^k(x)$$

und $L_L^k(x)$ sind die verallgemeinerten Laguerrepolynome.

Anhang B. Stereographische Projektion

Man hat zwei mögliche Karten zur Überdeckung der Kugel: Nordpol-oder Südpolprojektion. Wir beschränken uns auf die Südpolprojektion, denn da nur Integrale über die entsprechenden Funktionen betrachtet werden, reicht die Kugel ohne diesen einen Punkt zur Beschreibung aus. (Wichtig wird der Übergang zwischen den Karten allerdings wie gesehen, bei der Herleitung der Quantisierungsbedingung für die Monopolladung.)

Die Südpolprojektion ist eine Abbildung (r ist der Kugelradius):

$$U(x, y, z) : S^2 - \{0, 0, -r\} \longrightarrow R^2$$

mit

$$U(x, y, z) = (\xi, \eta) = \left(\frac{rx}{r+z}, \frac{ry}{r+z} \right) \quad (B.1)$$

sodaß

$$x = \frac{2r^2\xi}{r^2 + \xi^2 + \eta^2} \quad y = \frac{2r^2\eta}{r^2 + \xi^2 + \eta^2} \quad z = \frac{r(r^2 - \eta^2 - \xi^2)}{r^2 + \xi^2 + \eta^2} \quad (B.2)$$

Im folgenden sind die Koordinaten auf den Kugelradius normiert. Die Einheitsvektoren sind dann:

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{1}{1+x} (2\xi, 2\eta, 1-x) & e_\xi &= \frac{2}{(1+x)^2} (1 - \xi^2 + \eta^2, -2\xi\eta, -2\xi) \\ e_\eta &= \frac{2}{(1+x)^2} (-2\xi\eta, 1 + \xi^2 - \eta^2, -2\eta) & \text{wo} \quad x &= \xi^2 + \eta^2 \end{aligned} \quad (B.3)$$

Der metrische Tensor:

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \left(\frac{2}{1+x} \right)^2 \quad \text{Det} g_{\mu\nu} = g = \left(\frac{2}{1+x} \right)^4 \quad (B.4)$$

Die Zusammenhangskoeffizienten oder Christoffelsymbole sind:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= -\Gamma_{12}^1 = \frac{2\eta}{1+x} & \Gamma_{12}^2 &= -\frac{2\xi}{1+x} = -\Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{kk}^k &= -\frac{2x^k}{1+x} & \text{wo} \quad x^1 &= \xi \quad x^2 = \eta \end{aligned} \quad (B.5)$$

Gammamatrizen und Spinkonnektion:

$$\gamma_\mu = g^{\frac{1}{4}} \tau_\mu \quad \Rightarrow \quad \Gamma_\mu = i \frac{\epsilon_{\mu\nu}}{1+x} x^\nu \tau_3 \quad \Rightarrow \quad \gamma^\mu \Gamma_\mu = \frac{1}{g^{\frac{1}{4}}} \frac{\tau_\lambda x^\lambda}{1+x} \quad (B.6)$$

Vektorpotential:

$$A_\mu = q\epsilon_{\mu\nu} \frac{x^\nu}{1+x} \quad (B.7)$$

Im zweiten Kapitel des zweiten Teils der Arbeit verwenden wir für x^1, x^2 die Schreibweise x, y bzw die komplexe Darstellung, $z, \bar{z}$ um die Analogie zum ebenen System deutlicher zu machen.

Anhang C. Spektrum des Dirac-Operators auf der Kugel

Die Dirac-Gleichung lautet:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Psi = \lambda \Psi \quad (C.1)$$

(i.f. verwenden wir dimensionslose Variable, die auf den Kugelradius normiert sind) Die Operatoren $\pi_{\pm}$ hatten wir schon angegeben:

$$\begin{aligned} \pi_+ &= \frac{1+r^2}{2i} \left(2\partial_z - \frac{1+n}{1+r^2} \bar{z} \right) \\ \pi_- &= \frac{1+r^2}{2i} \left(2\partial_{\bar{z}} - \frac{1-n}{1+r^2} z \right) \end{aligned} \quad (C.2)$$

mit

$$\begin{aligned} \partial_z &= \frac{1}{2} e^{-i\phi} \left(\partial_r + \frac{L_z}{r} \right) \\ \partial_{\bar{z}} &= \frac{1}{2} e^{i\phi} \left(\partial_r - \frac{L_z}{r} \right) \end{aligned} \quad (C.3)$$

ist

$$J_z = L_z + \frac{1}{2} \tau_3$$

erhaltener Drehimpuls. Wir machen den Ansatz:

$$\Psi = e^{ik\phi} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ ie^{i\phi} \psi_2 \end{pmatrix} \quad (C.4)$$

Die Eigenwertgleichung wird dann:

$$\begin{aligned} \frac{1+r^2}{2} \left(\partial_r + \frac{k+1}{r} - \frac{1+n}{1+r^2} r \right) \psi_2 &= \lambda \psi_1 \\ \frac{1+r^2}{2} \left(\partial_r - \frac{k}{r} - \frac{1-n}{1+r^2} r \right) \psi_1 &= -\lambda \psi_2 \end{aligned} \quad (C.5)$$

Zur Elimination der WW-Terme Substitution:

$$\psi_1 = r^k (1+r^2)^{\frac{1-n}{2}} \chi_1 \quad \psi_2 = r^{-k+1} (1+r^2)^{\frac{1+n}{2}} \chi_2 \quad (C.6)$$

woraus:

$$\begin{aligned} \frac{1+r^2}{2} \left(r^{-(k+1)} (1+r^2)^{\frac{1+n}{2}} \partial_r \chi_2 \right) &= \lambda r^k (1+r^2)^{\frac{1-n}{2}} \chi_1 \\ \frac{1+r^2}{2} \left(r^k (1+r^2)^{\frac{1-n}{2}} \partial_r \chi_1 \right) &= -\lambda r^{-(k+1)} (1+r^2)^{\frac{1+n}{2}} \chi_2 \end{aligned} \quad (C.7)$$

neue Variable:

$$\begin{aligned} r^2 = x & \Rightarrow \partial_r = 2r \partial_x \\ \Rightarrow \partial_x \chi_2 &= \lambda x^k (1+x)^{-(n+1)} \chi_1 \\ x^{k+1} (1+x)^{1-n} \partial_x \chi_1 &= -\lambda \chi_2 \end{aligned} \quad (C.8)$$

Einsetzen liefert für χ_1 :

$$\partial_x \left(\frac{x^{k+1}}{(1+x)^{n-1}} \partial_x \chi_1 \right) = -\lambda^2 \frac{x^k}{(1+x)^{n+1}} \chi_1$$

oder:

$$x(1+x^2)\chi_1'' + ((k+1)(1+x)^2 - (n-1)x(1+x))\chi_1' + \lambda^2 \chi_1 = 0 \quad (C.9)$$

neue Variable die $[0, \infty]$ auf $[0, 1]$ abbildet:

$$\tilde{x} = \frac{x}{1+x} \Rightarrow \partial_x = \frac{1}{(1+x)^2} \partial_{\tilde{x}} \quad \partial_x^2 = \frac{-2}{(1+x)^3} \partial_{\tilde{x}} + \frac{1}{(1+x)^4} \partial_{\tilde{x}}^2 \quad (C.10)$$

ergeben eine hypergeometrische Differentialgleichung :

$$\tilde{x}(1-\tilde{x})\chi_1'' + ((k+1) - (1+n)\tilde{x})\chi_1' + \lambda^2 \chi_1 = 0 \quad (C.11)$$

Zur konventionellen Definition (s. z. B. Courant⁴⁹) gelangt man durch Substitution:

$$\hat{x} = 2\tilde{x} - 1 \quad \text{das entspricht} \quad \tilde{x} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad \text{und} \quad \hat{x} = \cos \theta$$

Das führt auf:

$$(1-\hat{x}^2)\chi_1'' + (2k+1-n-(n+1)\hat{x})\chi_1' + \lambda^2 \chi_1 = 0$$

Vergleich mit der Differentialgleichung der Jacobi Polynome:

$$(1-\hat{x})\chi_1'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)\hat{x})\chi_1' + \tilde{n}(\alpha + \beta + \tilde{n} + 1)\chi_1 = 0 \quad (C.12)$$

also:

$$\beta = k \quad \alpha = n - k - 1 \quad \lambda^2 = \tilde{n}(\tilde{n} + n) \quad (C.13)$$

d.h.

$$\begin{aligned} \chi_1 &= P_{\tilde{n}}^{\alpha, \beta}(\hat{x}) \quad \text{und damit} \quad \psi_1 = r^k (1+r^2)^{\frac{1-n}{2}} \chi_1 \\ &= \left(\frac{1+\hat{x}}{2} \right)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{1-\hat{x}}{2} \right)^{\frac{n-k-1}{2}} \chi_1 \end{aligned} \quad (C.14)$$

insgesamt:

$$\psi_1 = 2^{\frac{1-n}{2}} (1 - \hat{x})^{\frac{\alpha}{2}} (1 + \hat{x})^{\frac{\beta}{2}} P_n^{\alpha, \beta}(\hat{x}) \quad (C.15)$$

Die untere Komponente ergibt sich aus Gleichung (8):

$$\psi_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{n + \tilde{n}}{\tilde{n}}} 2^{\frac{1-n}{2}} (1 - \hat{x})^{\frac{\alpha+1}{2}} (1 + \hat{x})^{\frac{\beta+1}{2}} P_{\tilde{n}-1}^{\alpha+1, \beta+1}(\hat{x}) \quad (C.16)$$

Wir geben noch den Zusammenhang dieser Form der Lösung mit den Kreiselfunktionen und den Monopolharmonischen an. Es gilt:

$$\begin{aligned} d_{m, m'}^j &= \left(\frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+m')!(j-m')!} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+\hat{x}}{2} \right)^{\frac{m+m'}{2}} \left(\frac{1-\hat{x}}{2} \right)^{\frac{m-m'}{2}} P_{j-m}^{m-m', m+m'}(\hat{x}) \\ Y_{qlm} &= 2^m \left(\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!(l+m)!}{(l-q)!(l+q)!} \right)^{\frac{1}{2}} (1 - \hat{x})^{\frac{\alpha}{2}} (1 + \hat{x})^{\frac{\beta}{2}} P_{l+m}^{\alpha, \beta}(\hat{x}) e^{i(m+q)\phi} \end{aligned} \quad (C.17)$$

wobei:

$$\alpha = -q - m \quad \beta = q - m \quad \hat{x} = \cos \theta \quad (C.18)$$

Die alternative Herleitung die im zweiten Kapitel des zweiten Teils der Arbeit zitiert wurde findet sich bei Lindner⁵⁰

Anhang D. $\lim_{n \rightarrow \infty}$ der Lösungen auf der Kugel

Im Grenzfall $\lim_{n, a^2 \rightarrow \infty} \frac{n}{a^2} = \frac{\kappa}{2}$ erwartet man, daß die Lösungen auf der Kugeloberfläche in die der Ebene übergehen.

Betrachte die Definition der Jacobi Polynome:

$$P_{\tilde{n}}^{\alpha, \beta} = \frac{(-)^{\tilde{n}}}{2^{\tilde{n}} \tilde{n}!} (1 - \hat{x})^{-\alpha} (1 + \hat{x})^{-\beta} \partial_{\hat{x}}^{\tilde{n}} \left((1 - \hat{x})^{\alpha + \tilde{n}} (1 + \hat{x})^{\beta + \tilde{n}} \right) \quad (D.1)$$

hier ist:

$$\alpha = m - m' = n - 1 - k \quad \beta = m + m' = k \quad j = \tilde{n} + m$$

nach Rücksubstitution: ($x = \frac{r^2}{a^2}$) findet man:

$$1 + \hat{x} = 2 \frac{x}{a^2 + x^2} \quad 1 - \hat{x} = \frac{2a^2}{a^2 + x^2} \quad (D.2)$$

also gilt mit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

für die in den Jacobi Polynomen auftretenden Terme:

$$\begin{aligned} (1 - \hat{x})^{\tilde{n} + n - (1 + k)} &\longrightarrow 2^{\tilde{n} + n - (1 + k)} e^{-\frac{\kappa x}{2}} & ; (1 - \hat{x})^{k + 1 - n} &\longrightarrow 2^{k + 1 - n} e^{\frac{\kappa x}{2}} \\ (1 + \hat{x})^{k + \tilde{n}} &\longrightarrow 2^{k + \tilde{n}} n^{-\tilde{n} - k} \left(\frac{\kappa x}{2}\right)^{k + \tilde{n}} & ; (1 + \hat{x})^{-k} &\longrightarrow 2^{-k} n^k \left(\frac{\kappa x}{2}\right)^{-k} \end{aligned} \quad (D.3)$$

und:

$$\partial_{\hat{x}}^{\tilde{n}} \longrightarrow 2^{-\tilde{n}} n^{\tilde{n}} \partial_{\frac{\kappa x}{2}}^{\tilde{n}} \quad (D.4)$$

sodaß:

$$\begin{aligned} P_{\tilde{n}}^{n-1-k, k}(\hat{x}) &= \frac{(-)^{\tilde{n}}}{\tilde{n}!} \left(\frac{\kappa x}{2}\right)^{-k} e^{\frac{\kappa x}{2}} \partial_{\frac{\kappa x}{2}}^{\tilde{n}} \left(\left(\frac{\kappa x}{2}\right)^{k + \tilde{n}} e^{-\frac{\kappa x}{2}} \right) \\ &= \frac{(-)^{\tilde{n}}}{\tilde{n}!} L_{\tilde{n}}^k \left(\frac{\kappa x}{2}\right) \end{aligned} \quad (D.5)$$

wo $L_{\tilde{n}}^k$ = verallgemeinertes Laguerrepolynom. insgesamt war die untere Komponente der Lösung auf der Kugeloberfläche:

$$\begin{aligned} \psi_{j, m, m'} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2j+1}}{a} \sqrt{\frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+m')!(j-m')!}} \left(\frac{1+\hat{x}}{2}\right)^{\frac{m+m'}{2}} \\ &\quad \left(\frac{1-\hat{x}}{2}\right)^{\frac{m-m'}{2}} e^{ik\phi} P_{j-m}^{m-m', m+m'}(\hat{x}) \end{aligned} \quad (D.6)$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} j + m &= \tilde{n} + n - 1 & j + m' &= \tilde{n} + k \\ j - m &= \tilde{n} & j - m' &= \tilde{n} + n - 1 - k \end{aligned} \quad (D.7)$$

und

$$\left(\frac{1+\hat{x}}{2}\right)^{\frac{m+m'}{2}} = \left(\frac{\kappa x}{2}\right)^{\frac{k}{2}} n^{\frac{k}{2}} \quad \left(\frac{1-\hat{x}}{2}\right)^{\frac{m-m'}{2}} = e^{\frac{-\kappa x}{4}} \quad (D.8)$$

Mit der Stirlingschen Formel für $x!$ gilt noch:

$$\begin{aligned} (j+m)! &\sim e^{-n} e^{(n+\tilde{n}-1)\ln n} & (j-m)! &\sim \tilde{n}! \\ (j-m')! &\sim e^{-n} e^{(n+\tilde{n}-1-k)\ln n} & (j+m')! &= (\tilde{n}+k)! \end{aligned} \quad (D.9)$$

sodaß:

$$\left(\frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+m')!(j-m')!}\right)^{\frac{1}{2}} \sim \left(\frac{\tilde{n}!}{(\tilde{n}+k)!}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{k}{2}\ln n} = \sqrt{\frac{\tilde{n}!n^k}{(\tilde{n}+k)!}} \quad (D.10)$$

also:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{e^{ik\phi}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \frac{1}{(\tilde{n}!(\tilde{n}+k)!)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\kappa x}{2}\right)^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{\kappa x}{4}} L_{\tilde{n}}^k\left(\frac{\kappa x}{2}\right) \\ &= \frac{e^{ik\phi}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \omega_{\tilde{n}}^k\left(\frac{\kappa r^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (D.11)$$

Dabei ist $\omega_{\tilde{n}}^k$ die normierte Laguerrefunktion. Die untere Komponente der Lösung findet man analog.

Anhang E. Winkelintegration beim SO(n)-invarianten Anteil

es gilt:

$$\int_0^\pi d\theta \sin^K \theta = \frac{\Gamma(\frac{K+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{K+2}{2})} \quad (E.1)$$

sodaß:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\vartheta \sin \theta \sin^2 \vartheta \sum_{K=0}^{\infty} c_K a^{2K} (\sin^2 \theta \sin^2 \vartheta)^K \\ &= \sum_{K=0}^{\infty} c_K a^{2K} \frac{\Gamma(K+1)\Gamma(K+\frac{3}{2})}{\Gamma(K+\frac{3}{2})\Gamma(K+2)} \pi \\ &= \frac{\pi}{a^2} \sum_{K=0}^{\infty} c_K \frac{(a^2)^{K+1}}{K+1} = \frac{\pi}{a^2} \int_0^{a^2} d\xi f(\xi) \end{aligned} \quad (E.2)$$

wenn:

$$f(\xi) = \sum_{K=0}^{\infty} c_K \xi^K \quad (E.3)$$

Anhang F. Berechnung von S_n

Der nichttriviale Diagrammbeitrag dritter Ordnung S_n war nach (3.79)

$$S_n = \left(\frac{n}{2n-1} \right)^3 \Gamma_{k_{12}k_{13}}^{K_1} \Gamma_{k_{21}k_{31}}^{K_1} \Gamma_{k_{23}k_{21}}^{K_2} \Gamma_{k_{13}k_{32}}^{K_2} \Gamma_{k_{32}k_{31}}^{K_3} \Gamma_{k_{23}k_{13}}^{K_3}$$

Durch Vergleich mit Lindner⁵⁰ p.53 erkennt man, daß es sich bis auf den Vorfaktor, um ein 9-J-Symbol handelt, und zwar:

$$\left\{ \begin{array}{c} 2q \ q \ q \\ q \ 2q \ q \\ q \ q \ 2q \end{array} \right\} \quad (F.1)$$

Dieses 9-J-Symbol kann entweder durch 6-J-Symbole ausgedrückt werden, deren Auswertung:

$$\sum_J \frac{(n-1)!^2}{(2n-1)(2n-1)!} \frac{(\Lambda_0^J)^4}{(C_{-2q2q0}^{2q2qJ})^2} \quad (F.2)$$

liefert, oder direkt mit Lindner p.65 als 9-J-Symbol berechnet werden:

$$\sum_J \frac{(n-1)!^3}{(2n-1)!} \frac{(2n-2-J)!}{(n-1-J)!^2(n+J)!} \quad (F.3)$$

Unter Benutzung der Umkopplung ergab sich:

$$S_n = \sum_J (A_J)^2 (\Lambda^{J0})^3 \quad (F.4)$$

Das erhält man aber auch mit:

$$\begin{aligned} & \sum_K \left(\frac{n}{2n-1} \right)^2 \Gamma_{k_1 q}^{K_1} \Gamma_{q k_2}^{K_1} \Gamma_{k_1 q}^{K_2} \Gamma_{q k_2}^{K_2} \\ &= \left(\frac{n}{2n-1} \right)^2 \sum_{Kk} (\Gamma_{kq}^K)^4 \end{aligned} \quad (F.5)$$

Setzt man die Darstellung der Gammamatrizen durch Binomialkoeffizienten ein so ergibt sich direkt (3.81).

Anhang G. Zur Berechnung von $\mathcal{G}_4$

Wir stellen hier die wesentlichen Umformungsschritte, die im Text nicht angegeben wurden zusammen. Bis zum Punkt 7, d.h. der Ersetzung aller bosonischen Terme durch Differentiation, bedarf die Darstellung keiner weiteren Erläuterung. Explizit lautet die bosonische Wirkung nach der Variablensubstitution $a_k = \sqrt{x_k} e^{i\phi_k}$:

$$S_B = i\nu \sum_k x_k - \lambda_0^2 - \lambda^2 - 2i \left[\left(\sqrt{\frac{11}{70}} \lambda_0 \sum_k x_k + \sqrt{\frac{4}{70}} \lambda \right) \sum_k x_k (J_0)_{kk} \right] \quad (G.1)$$

da

$$\lambda^2 \vec{a}^\dagger J_0^2 \vec{a} = \lambda^2 \sum_k x_k (J_0^2)_{kk} \quad (G.2)$$

kann man schreiben:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty [dx] \lambda^2 \sum_k x_k (J_0)_{kk}^2 e^{S_B} &= \int_0^\infty [dx] \lambda^2 \sum_k x_k \left(\left(-\frac{70}{16} \partial_{x_k}^2 \right) e^{-2i \left(\sqrt{\frac{4}{70}} \lambda \sum_l x_l (J_0)_{ll} \right)} \right) \\ &\quad e^{(i\nu - 2i \sqrt{\frac{11}{70}} \lambda_0) \sum_k x_k - \lambda_0^2 - \lambda^2} \end{aligned} \quad (G.3)$$

Betrachte nun:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty [dx] e^{\sum_j x_j^a} \left(- \sum_k x_k \partial_k^2 \right) e^A &= \int_0^\infty [dx] \left(- \sum_k x_k \partial_k \right) e^{\sum_j x_j^a} \partial_k e^A \\ &= \int_0^\infty [dx] \sum_k (1 + a x_k) e^{\sum_j x_j^a} \partial_k e^A \\ &= \int_0^\infty [dx] \sum_k \partial_k e^{\sum_j x_j^a + A} \\ &\quad - \int_0^\infty [dx] \sum_k (2a + a^2 x_k) e^{\sum_j x_j^a + A} \\ &= - \int_0^\infty [dx] \sum_k (a + a^2 x_k) e^{\sum_j x_j^a + A} \end{aligned} \quad (G.4)$$

wo:

$$\begin{aligned} a &= i\nu - 2i \sqrt{\frac{11}{70}} \lambda_0 \\ A &= -2i \sqrt{\frac{4}{70}} \lambda \sum_l x_l (J_0)_{ll} \end{aligned} \quad (G.5)$$

Damit ist die J_0 -Abhängigkeit des Entwicklungskoeffizienten p_3 beseitigt. Alle verbleibenden x_k können noch durch Differentiation nach λ_0 ersetzt werden:

$$(\sum_j x_j)^k \equiv (-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{70}{11}})^k \partial_{\lambda_0}^k \quad (G.6)$$

Die Ableitungen werden dann durch partielle Integration auf den in λ quadratischen Exponenten gewälzt. Das Ergebnis ist als (3.92) im Text angegeben.

Zu Punkt 9:

Im Exponenten steht die Diagonalmatrix:

$$\tilde{M} = (i\nu - 2i\lambda_0\sqrt{\frac{11}{70}})1 - 2i\sqrt{\frac{4}{70}}\lambda J_0 = i\nu 1 - A \quad (G.7)$$

Dann ist:

$$Det\tilde{M} = (i\nu)^4 - p_1(i\nu)^3 - p_2(i\nu)^2 - p_3(i\nu) + DetA \quad (G.8)$$

(die Definition der p_k ist im Text gegeben. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} p_1 &= 8i\sqrt{\frac{11}{70}}\lambda_0 \\ p_2 &= \frac{24 \cdot 11}{70}\lambda_0^2 - \frac{4}{7}\lambda^2 \\ p_3 &= -i\frac{32 \cdot 11}{70}\sqrt{\frac{11}{70}}\lambda_0^3 + i\frac{16}{7}\sqrt{\frac{11}{70}}\lambda_0\lambda^2 \end{aligned} \quad (G.9)$$

Zu Punkt 10:

Die Integration über die Graßmannvariablen lieferte die Ableitung einer Matrix M nach $i\nu$, die wir inzwischen soweit umgeformt haben, daß sie nur noch von den Variablen λ, λ_0 abhängt. Sie kann nun mithilfe der Ableitungen der Determinante von $\tilde{M}$ geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \partial_{i\nu} DetM &= \partial_{i\nu} Det\tilde{M} + i\frac{10}{33}\sqrt{\frac{11}{70}}\lambda_0\partial_{i\nu}^2 Det\tilde{M} \\ &\quad - (\frac{8}{11 \cdot 70}\lambda_0^2 - \frac{1}{3 \cdot 70}\lambda^2 - \frac{26}{35 \cdot 11 \cdot 24})\partial_{i\nu}^3 Det\tilde{M} \\ &\quad - i\frac{128}{11^2 \cdot 70}\sqrt{\frac{11}{70}}\lambda_0^3 - i\frac{184}{15 \cdot 11 \cdot 7}\sqrt{\frac{11}{70}}\lambda_0\lambda^2 + i\frac{204}{11^2 \cdot 7}\sqrt{\frac{11}{70}}\lambda_0 \end{aligned} \quad (G.10)$$

Zu Punkt 12:

Die Quotienten lauten explizit nach Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_{i\nu} \text{Det} \tilde{M}}{\text{Det} \tilde{M}} &= \text{Tr} \tilde{M}^{-1} \\
\frac{\partial_{i\nu}^2 \text{Det} \tilde{M}}{\text{Det} \tilde{M}} &= \frac{1}{i\sqrt{\frac{4}{70}}\lambda} \left[\frac{11}{6} \left(\frac{1}{a-b_{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{a+b_{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a-b_{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{a+b_{\frac{1}{2}}} \right) \right] \\
\frac{\partial_{i\nu}^3 \text{Det} \tilde{M}}{\text{Det} \tilde{M}} &= -\frac{3 \cdot 70}{8} \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{1}{a-b_{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{a+b_{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{a-b_{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{a+b_{\frac{1}{2}}} \right] \\
\frac{1}{\text{Det} \tilde{M}} &= i \frac{70}{64} \sqrt{\frac{70}{4}} \frac{1}{\lambda^3} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{a-b_{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{a+b_{\frac{3}{2}}} \right) - \left(\frac{1}{a-b_{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{a+b_{\frac{1}{2}}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{G.11}$$

Dabei haben wir die Konventionen:

$$\tilde{M}_{jj} = a - b_{\frac{j}{2}} \text{ wo } a = i\nu - 2i\sqrt{\frac{11}{70}}\lambda_0 \quad b_{\frac{j}{2}} = -ji\sqrt{\frac{4}{70}}\lambda \tag{G.12}$$

benutzt. (j läuft von $-\frac{3}{2}$ bis $\frac{3}{2}$) Zu Punkt 14:

die Auswertung des nichttrivialen Integrals:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{1}{\lambda} e^{-(\lambda+ia)^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda^2} \sum_k \frac{(-2i\lambda a)^k}{k!} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-\lambda^2} \sum_k \frac{(-2ia)^{2k+1}}{(2k+1)!} \lambda^{2k} \\
&= \sum_k \frac{(-2ia)^{2k+1}}{(2k+1)!} \Gamma(k + \frac{1}{2})
\end{aligned} \tag{G.13}$$

Für die Gammafunktion gilt nun:

$$\Gamma(k + \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(k)} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1}} = \frac{(2k-1)!}{(k-1)!} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1}} \tag{G.14}$$

sodaß:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2ia)^{2k+1}}{(2k+1)k!2^{2k}} &= (-2i) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k a^{2k+1}}{(2k+1)k!} \\
&= (-2i) \int_0^a dx \sum_k \frac{(-)^k x^{2k}}{k!} \\
&= -2i \int_0^a dx e^{-x^2}
\end{aligned} \tag{G.15}$$

Einsetzen der Werte für a liefert dann die in $\mathcal{G}_4$ auftretenden Integrale.

Anhang H. Umformung von ρ_4

Zum Vergleich mit der Sattelpunktsnäherung wird das Verhalten von ρ_4 für $\nu \rightarrow \infty$ benötigt. Nach Gleichung (3.98) hat man für den Mischanteil:

$$\Delta\rho_4 = \text{Re} \int_0^\infty d\mu \left(\frac{21}{8}\mu + \frac{2}{70}\mu^3 \right) e^{i\mu\nu - \frac{11}{70}\mu^2} \int_0^\mu dx \left(e^{-\frac{9}{70}x^2} - e^{-\frac{1}{70}x^2} \right)$$

nun lassen sich die μ -Terme im Integranden durch Differentiation nach μ ersetzen:

$$\mu e^{i\mu\nu - \frac{11}{70}\mu^2} = \frac{70}{22} (i\nu - \partial_\mu) e^{i\mu\nu - \frac{11}{70}\mu^2} \quad (H.1)$$

Das führt nach Einsetzen auf 3 Anteile:

$$\begin{aligned} A &= \frac{70 \cdot 21}{22 \cdot 8} i\nu e^{i\mu\nu - \frac{11}{70}\mu^2} F(\mu) \\ &+ \frac{\mu}{11} (i\nu\mu + 2) e^{i\mu\nu - \frac{11}{70}\mu^2} F(\mu) \\ &+ \frac{70}{22} \left(\frac{21}{8} + \frac{2}{70}\mu^2 \right) e^{i\mu\nu} \left(e^{-\frac{2}{7}\mu^2} - e^{-\frac{12}{70}\mu^2} \right) \end{aligned} \quad (H.2)$$

Nach Elimination der verbleibenden μ -Abhängigkeit im Zähler erhält man daraus:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \left(\frac{70 \cdot 255}{22 \cdot 88} \right) i\nu - \left(\frac{70^2}{4 \cdot 11^3} \right) i\nu^3 \right\} e^{i\mu\nu - \frac{11}{70}\mu^2} F(\mu) \\ &+ \left\{ \left(\frac{21 \cdot 419}{8 \cdot 11^2} \right) - \left(\frac{7 \cdot 741}{2 \cdot 11^3} \right) \left(\frac{7}{8} \nu^2 \right) \right\} e^{-\frac{7}{8}\nu^2} \\ &- \left\{ \left(\frac{70 \cdot 763}{48 \cdot 11^2} \right) - \left(\frac{70 \cdot 397}{12 \cdot 11^3} \right) \left(\frac{35}{24} \nu^2 \right) \right\} e^{-\frac{35}{24}\nu^2} \end{aligned} \quad (H.3)$$

(Die auftretenden beiden Errorfunktionen sind durch $F(\mu)$ abgekürzt). Dabei haben die letzten beiden Terme schon die gewünschte Form. Der erste enthält den Error-Funktionsanteil, den wir im nächsten Schritt analysieren. Nach Variablenshift der Exponentialfunktion ergibt sich :

$$\text{Im} \int_{\frac{-i\nu}{2a^2}}^\infty d\mu e^{-a^2\mu^2} \int_0^\mu dx e^{-b^2x^2} e^{-\frac{1}{4a^2}\nu^2} \quad (H.4)$$

Nach Aufspalten bleiben für den Imaginärteil drei Kandidaten:

$$\begin{aligned} &\text{Im} \int_{\frac{-i\nu}{2a^2}}^0 d\mu e^{-a^2\mu^2} \int_0^\mu dx e^{-b^2x^2} \\ &+ \int_0^\infty d\mu e^{-(a^2+b^2)\mu^2} \int_{\frac{i\nu}{2a^2}}^\infty dx e^{-b^2(x^2+2x\mu)} \\ &+ \int_{\frac{-i\nu}{2a^2}}^0 d\mu e^{-(a^2+b^2)\mu^2} \int_0^{\frac{i\nu}{2a^2}} dx e^{-b^2(x^2+2x\mu)} \end{aligned} \quad (H.5)$$

Als einziger Term trägt der zweite bei:

$$i\sqrt{\frac{\pi}{4(a^2+b^2)}}\frac{1}{2a^2}\int_0^\nu dx e^{\frac{b^2}{4a^2(a^2+b^2)}x^2}$$

Das Verhalten dieses Anteils für $\nu \rightarrow \infty$ läßt sich folgendermaßen einsehen:

$$\begin{aligned}\int^a dx e^{b^2 x^2} &= \int^a dx \frac{1}{x} x e^{b^2 x^2} \\ &= \frac{1}{2b^2 a} e^{b^2 a} + \int^a dx \frac{1}{x^2} \frac{1}{2b^2} e^{b^2 x^2}\end{aligned}$$

Der letzte Term trägt zum führenden Verhalten nichts bei. Einsetzen dieser Umformungen in ρ_4 liefert dann insgesamt im Grenzfall ν gegen Unendlich :

$$\rho_4 = \sqrt{\frac{7\pi}{8}}\left(\frac{7}{8}\nu^2\right)\frac{19}{18}e^{-\frac{7}{8}\nu^2} - \sqrt{\frac{35\pi}{24}}\left(\frac{35}{24}\nu^2\right)\frac{1}{4}e^{-\frac{35}{24}\nu^2} \quad (H.6)$$

Das stimmt mit dem aus der Sattelpunktmethode erhaltenen Ergebnis überein.

Anhang I. Lloyd-Modell

Die Verteilung der Potentiale im Lloyd-Modell ist definiert:

$$P(V) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{V^2 + \lambda^2} \quad (I.1)$$

Gemäß der Definition des Funktional $g(\alpha)$:

$$\langle e^{-i \int d^2x \sqrt{g} \alpha(\vec{x}) V(\vec{x})} \rangle = e^{-\int d^2x \sqrt{g} g(\alpha(\vec{x}))} \quad (I.2)$$

ist hier offenbar:

$$g(\alpha) = \lambda |\alpha| \quad (I.3)$$

In unserem Fall war α :

$$\alpha = \bar{\phi}\phi + \bar{\psi}\psi = |\bar{\phi}\phi + \bar{\psi}\psi| \quad (I.4)$$

d.h. es wird:

$$\int DV P(V) e^{-i \int d^2x \sqrt{g} V(\bar{\phi}\phi + \bar{\psi}\psi)} = e^{-\lambda \int d^2x \sqrt{g} (\bar{\phi}\phi + \bar{\psi}\psi)} \quad (I.5)$$

Der Wechselwirkungsterm der Wirkung ist demnach linear und die gemittelte Greensfunktion kann durch einen trivialen Energieshift gewonnen werden: ersetze

$$i\epsilon \text{ durch } i\epsilon - \lambda = -\Lambda \quad (I.6)$$

Setzt man jetzt die Grundzustandslösungen und ersetzt das Integral über alle Funktionen aus dem 0-ten Niveau durch das über die Entwicklungskoeffizienten, wie im dritten Kapitel des zweiten Teilerläutert, erhält man nach Ausintegration der Ortsvariable in der Wirkung:

$$S = -(\vec{a}^\dagger \Lambda \vec{a} + \vec{b}^\dagger \Lambda \vec{b}) \quad (I.7)$$

Die Integration über die fermionischen Freiheitsgrade liefert die Determinante der Matrix Λ und die Integration über die bosonischen Freiheitsgrade kann nach Übergang zu Kugelkoordinaten als eindimensionales Integral geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \langle G(\vec{x}, \vec{x}') \rangle &= -i \frac{\kappa}{2\pi} \frac{1}{n!} \int_0^\infty dx \Lambda^n x^n e^{-\Lambda x} \\ &= -i \frac{\kappa}{2\pi} \frac{1}{n!} \frac{1}{\Lambda} \int dx x^n e^{-x} \\ &= -i \frac{\kappa}{2\pi} \frac{1}{\Lambda} \end{aligned} \quad (I.8)$$

Für die Zustandsdichte erhält man also:

$$\rho(E) = \frac{\kappa}{2\pi^2} \frac{\lambda}{E^2 + \lambda^2} \quad (I.9)$$

Die Zustandsdichte ist unabhängig von n . Tatsächlich stimmt dieses Ergebnis mit dem von Brézin Itzykson und Gross⁴⁰ im ebenen Grenzfall gefundenen überein.

Danksagung

Ich danke Dr Nils Schopohl für viele hilfreiche Diskussionen im Laufe der Arbeit, sowie für Einladungen an das Institut Laue-Langevin Grenoble.

Dem Institut für Festkörperforschung danke ich für Unterstützung während der Arbeit an dieser Dissertation und insbesondere Professor Eilenberger für die Ermöglichung mehrerer Auslandsaufenthalte.

LITERATURVERZEICHNIS

1. d.h. masselose Elektrodynamik in 2 Dimensionen, erste Arbeit: J. Schwinger Phys. Rev. **128**, 2425, (1962), s. z. B. auch: K. D. Rothe, J. A. Swieca Ann. Phys. **117**, 782,(1979).
2. D. J. Amit: field theory, renormalization group, critical phenomena; Singapore, World scientific Publ. (1984)
3. E. Abrahams, P. W. Anderson,D. C. Licciardello, T. V. Ramakrishnan Phys. Rev. Lett. **42**, 673, (1979).
4. T. Ando,A. B. Fowler,F. Stern Rev. mod. phys. **54**, 437 (1982).
5. M. J. Kelly, R. J. Nicholas Rep. Prog. Phys. **48**,1699 (1985).
6. High magnetic fields in semiconductor physics (Springer series in solid state science Vol. 71) (Springer1987) (ed. G. Landwehr)
7. K. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494, (1980).
8. the Quantum Hall Effect (Springer1987)(ed. R. E. Prange, S. M. Girvin)
9. D. C. Tsui, H. L. Stormer, A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559, (1982).
10. T. Ando,Y. Matsumoto,Y. Uemura J. Phys. Soc. Jap. **39** , 279, (1975).
11. R. Laughlin Phys. Rev. **B 23**, 5632, (1981).
12. J. E. Avron,R. Seiler Phys. Rev. Lett. **54**, 259, (1985).
13. Q. Niu, D. J. Thouless J. Phys. **A 17**, 2453, (1984).
14. Fetter, Walecka Quantum theory of many particle systems; McGraw Hill (1971)
15. M. V. Berry Proc. Roy. Soc. **A 392**, 45, (1984).
16. Y. Aharonov, D. Bohm Phys. Rev. **115**, 485, (1959).

17. J. D. Jackson: Classical electrodynamics; Wiley & Sons (scnd ed. 1975)
18. H. Levine, S. B. Libby, A. M. M. Pruisken Nucl. Phys. **B 240**, 30, (1984).
19. P. Becher, M. Böhm, H. Joos : Eichtheorien (Teubner Stuttgart 1983)
20. R. Laughlin Phys. Rev. Lett. **50**, 1395, (1983).
21. F. D. M. Haldane Phys. Rev. Lett. **51**, 605, (1983), s. auch Haldanes Artikel in Ref.8
22. E. Gornik in Physics of the 2 dimensional electron gas, NATO ASI series B, Phys. Vol 157 (ed. J. T. Devreese, F. M. Peters) (1987)
23. I. M. Lifshitz Adv. Phys. **13**, 483, (1964).
24. R. Gerhards Z. Phys. **B 21**, 275, (1975).
25. F. Wegner Z. Phys. **B 51**, 279, (1983).
26. G. Parisi, N. Sourlas Phys. Rev. Lett **43**, 744, (1979).
27. A. McKane Phys. Lett. **76 A**, 22, (1980).
28. E. Brézin in Appl. of field theory to stat. mech.; Lecture notes in phys. Vol 216 (Springer 1985) (ed. L. Garrido) p115ff
29. A. Klein, J. F. Perez Nucl. Phys. **B251**, 199, (1985).
30. A. H. Kunz, G. Zumbach Nucl. Phys. **B270**, 347, (1986).
31. S. Hikami Phys. Rev. **B29**, 3726, (1984). s. auch: R. R. P . Singh, S. Chakravarty Nucl. Phys. **B265**, 265, (1986).
32. Y. Aharonov, A. Casher, Phys. Rev. **A19**, 2461, (1979).
33. R. Jackiw Phys. Rev. **D29**, 2375, (1984).
34. Hoffmann , Neudecker Z. Phys. **B**
35. I. Affleck J. Phys **C 17**, 2323, (1984).

36. E. D'Hoker, L. Vinet Phys. Lett. **B 137**, 72, (1984).
37. N. K. Nielsen, B. Schroer Nucl. Phys. **B127**, 493, (1977).
38. J. Haidu, G. Landwehr in Phys. at high magn. fields (Top. appl. phys. Vol 57) (Springer 1985) (ed. F. Herlach) p17ff
39. Graph theory a. theoret. phys. (Acad. press London 1987) (ed F. Harary)
40. E. Brézin, D. J. Gross, C. Itzykson Nucl. Phys. Phys. **B235**, 24 **B 235** 24, (1984).
41. Eine kurze Darstellung der Benutzung supersymmetrischer Methoden in der Festkörperphysik findet sich etwa in: N. Surlas Physica **D 15**, 115, (1985).
42. K. B. Efetov Adv. Phys. **32**, 53, (1983).
43. Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, A. Dillard-Bleick; Analysis, manifolds and physics ; North Holl. (1981)
44. D. R. Brill, J. A. Wheeler Rev. mod. Phys. **29**, 465, (1957).
45. W. Drechsler, M. E. Mayer Fibre bundle techniques in gauge theories (Lecture notes in physics Vol 67) (Springer 1977)
46. P. A. M. Dirac Proc. Roy. Soc. **A133**, 60, (1931)., Phys. Rev. **74**, 814, (1948).
47. S. Coleman; Erice Lectures 1981 (ed. Zichichi) p21ff
48. Eguchi, Gilkey, Hanson Phys. Rep. **66**, 213, (1980).
49. R. Courant, D. Hilbert Methoden der mathematischen Physik (Springer 1968, 3. te Auflage)
50. A. Lindner : Drehimpulse i.d. Quantenmechanik (Teubner Stuttgart 1984).
51. T. T. Wu, C. N. Yang, Nucl. Phys. **B 107**, 365, (1976).

- 52. H. E. Moses Ann. Phys. **41**,166, (1967). ebd **60**, 296, (1970).
- 53. M. Hamermesh: Group theory; Addison-Wesley (1962)
- 54. A. R. Edmonds: Angular momentum in quantum mechanics (Princeton university press 1960)
- 55. M. Abramovitz, J. A. Stegun (ed.) Handbook of mathematical functions; New York, Dover (1965).
- 56. A. J. Vainshtein, V. A. Zakharov, V. A. Novikov, M. A. Shifman Sov. Phys. Usp. **25**, 125, (1982). geben eine Einführung in Instantontechniken
- 57. K. A. Benedict Nucl. Phys. **B 280**, 549, (1987).
- 58. H. Aoki Rep. Prog. Phys. 50, 655, (1987).

