

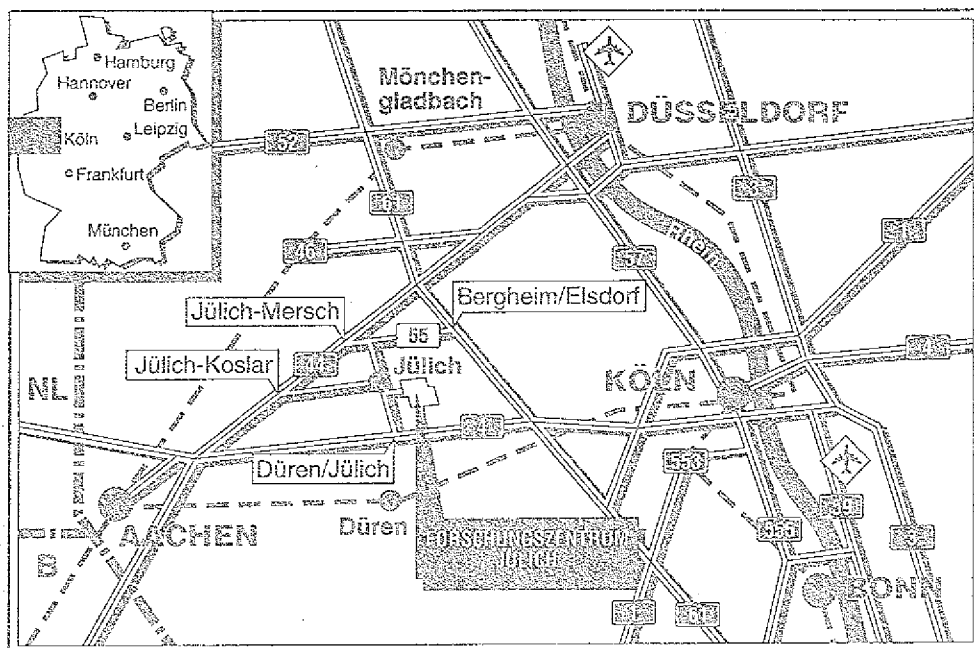
Institut für Kernphysik

**Das Nukleon als Soliton in einer
effektiven chiralen Theorie
mit polarisiertem Diracsee**

Thomas Meißner

Berichte des Forschungszentrums Jülich ; 2501

ISSN 0366-0885

Institut für Kernphysik Jül-2501

D 294 (Diss. Universität Bochum)

Zu beziehen durch: Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek

Postfach 1913 · D-5170 Jülich · Bundesrepublik Deutschland

Telefon: 02461/61-6102 · Telefax: 02461/61-6103 · Telex: 833556-70 kfa d

1. The first part of the paper is devoted to the study of the properties of the function $f(x)$ defined by the equation

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

for $x \in \mathbb{R}$. It is shown that $f(x)$ is an odd function and that it is strictly increasing on $\mathbb{R}$. Moreover, it is proved that $f(x)$ is concave down on $\mathbb{R}$ and that it has a horizontal asymptote at $y = \frac{\pi}{2}$ as $x \rightarrow \infty$ and $y = -\frac{\pi}{2}$ as $x \rightarrow -\infty$.

2. The second part of the paper is devoted to the study of the function $g(x)$ defined by the equation

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^4} dt$$

for $x \in \mathbb{R}$. It is shown that $g(x)$ is an even function and that it is strictly increasing on $\mathbb{R}$. Moreover, it is proved that $g(x)$ is concave up on $\mathbb{R}$ and that it has a horizontal asymptote at $y = \frac{\pi}{4}$ as $x \rightarrow \infty$ and $y = -\frac{\pi}{4}$ as $x \rightarrow -\infty$.

3. The third part of the paper is devoted to the study of the function $h(x)$ defined by the equation

$$h(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^6} dt$$

for $x \in \mathbb{R}$. It is shown that $h(x)$ is an even function and that it is strictly increasing on $\mathbb{R}$. Moreover, it is proved that $h(x)$ is concave up on $\mathbb{R}$ and that it has a horizontal asymptote at $y = \frac{\pi}{6}$ as $x \rightarrow \infty$ and $y = -\frac{\pi}{6}$ as $x \rightarrow -\infty$.

Das Nukleon als Soliton in einer effektiven chiralen Theorie mit polarisiertem Diracsee

Thomas Meißner

INHALTSVERZEICHNIS

1. EINLEITUNG	6
2. DAS NAMBU-JONA-LASINIO-MODELL: 4-QUARK-WECHSELWIRKUNG	15
3. BOSONISIERUNG – EFFEKTIVE CHIRALE WIRKUNG	29
4. SYSTEME MIT ENDLICHER BARYONENZAHL – SOLITONISCHE LÖSUNGEN	48
5. SPIN-ISOSPIN-QUANTISIERUNG – CRANKING	84
6. NUKLEONISCHE OBSERVABLE	98
7. DISKUSSION UND SCHLUSSBEMERKUNGEN	126
Anhang A. MINKOWSKI-RAUM UND EUKLIDISCHER RAUM	130
Anhang B. AXIALE WARD-IDENTITÄT	133
Anhang C. HEAT-KERNEL-ENTWICKLUNG	140
Anhang D. CHIRALE ANOMALIE	147
Anhang E. DIAGONALISIERUNG DES HAMILTONOPERATORS	154
Anhang F. MATRIXELEMENTE WICHTIGER OPERATOREN	163
Anhang G. GRADIENTENENTWICKLUNG DES BARYONENSTROMS	166
Anhang H. ERWARTUNGSWERT EINER ZWEI-TEILCHEN-OBSERVABLE	169
Anhang I. BERECHNUNG DES TRÄGHEITSMOMENTES	171
Anhang J. KOLLEKTIVE KOORDINATEN AUF DER S^3	176

1. The first part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 1, 1861. It is a very important document, as it sets out the President's policy for the new year. The President states that he is pleased to see the Congress assembled, and that he is confident that the country is in a good position to meet the challenges of the future. He also mentions the recent election of Abraham Lincoln as President, and expresses his confidence in Lincoln's ability to lead the country.

2. The second part of the document is a report from the Secretary of the Treasury, dated January 1, 1861. It provides a detailed account of the financial state of the country at the beginning of the year. The report states that the country is in a sound financial position, with a strong treasury and a healthy economy. It also mentions the recent election of Abraham Lincoln as President, and expresses confidence in Lincoln's ability to lead the country.

3. The third part of the document is a report from the Secretary of the Interior, dated January 1, 1861. It provides a detailed account of the state of the interior of the country at the beginning of the year. The report states that the country is in a good position to meet the challenges of the future, with a strong interior and a healthy economy. It also mentions the recent election of Abraham Lincoln as President, and expresses confidence in Lincoln's ability to lead the country.

4. The fourth part of the document is a report from the Secretary of the War, dated January 1, 1861. It provides a detailed account of the state of the war at the beginning of the year. The report states that the country is in a good position to meet the challenges of the future, with a strong war effort and a healthy economy. It also mentions the recent election of Abraham Lincoln as President, and expresses confidence in Lincoln's ability to lead the country.

5. The fifth part of the document is a report from the Secretary of the Navy, dated January 1, 1861. It provides a detailed account of the state of the navy at the beginning of the year. The report states that the country is in a good position to meet the challenges of the future, with a strong navy and a healthy economy. It also mentions the recent election of Abraham Lincoln as President, and expresses confidence in Lincoln's ability to lead the country.

6. The sixth part of the document is a report from the Secretary of the State, dated January 1, 1861. It provides a detailed account of the state of the state at the beginning of the year. The report states that the country is in a good position to meet the challenges of the future, with a strong state and a healthy economy. It also mentions the recent election of Abraham Lincoln as President, and expresses confidence in Lincoln's ability to lead the country.

7. The seventh part of the document is a report from the Secretary of the Education, dated January 1, 1861. It provides a detailed account of the state of the education at the beginning of the year. The report states that the country is in a good position to meet the challenges of the future, with a strong education system and a healthy economy. It also mentions the recent election of Abraham Lincoln as President, and expresses confidence in Lincoln's ability to lead the country.

8. The eighth part of the document is a report from the Secretary of the Agriculture, dated January 1, 1861. It provides a detailed account of the state of the agriculture at the beginning of the year. The report states that the country is in a good position to meet the challenges of the future, with a strong agriculture and a healthy economy. It also mentions the recent election of Abraham Lincoln as President, and expresses confidence in Lincoln's ability to lead the country.

9. The ninth part of the document is a report from the Secretary of the Commerce, dated January 1, 1861. It provides a detailed account of the state of the commerce at the beginning of the year. The report states that the country is in a good position to meet the challenges of the future, with a strong commerce and a healthy economy. It also mentions the recent election of Abraham Lincoln as President, and expresses confidence in Lincoln's ability to lead the country.

10. The tenth part of the document is a report from the Secretary of the Finance, dated January 1, 1861. It provides a detailed account of the state of the finance at the beginning of the year. The report states that the country is in a good position to meet the challenges of the future, with a strong finance and a healthy economy. It also mentions the recent election of Abraham Lincoln as President, and expresses confidence in Lincoln's ability to lead the country.

ZUSAMMENFASSUNG

Wir betrachten das Nambu–Jona-Lasinio–Modell (NJL) für $SU(2)$ -Flavour (u und d Quarks) mit $N_F = 3$ Farbfreiheitsgraden und einer Strommasse $m_0 = m_u = m_d$, die über eine skalar-isoskalare und pseudoskalar-isovektorielle 4-Punkt Kopplung der Stärke G wechselwirken. Die Theorie ist nicht renormierbar und muß mit einem endlichen UV-Abschneideparameter Λ in einem festgelegten Regularisierungsschema versehen werden. Für $m_0 = 0$ ist das Modell invariant unter der chiralen $SU(2)_V \otimes SU(2)_A$ Transformation, welche im Vakuum dynamisch zu $SU(2)_V$ gebrochen ist, falls der Abschneideparameter Λ und die Kopplungskonstante G in einem bestimmten Wertebereich liegen, der durch die Schwinger-Dyson-Gleichung in der Hartree-Fock-Approximation (HFA) (der sog. Gap-Gleichung) gegeben ist. Die dynamische chirale Symmetriebrechung (DCSB) verschafft den Quarks eine Konstituentenmasse M , die in der HFA impulsunabhängig ist und wesentlich größer als die Strommasse ($m_0 \approx 10\text{MeV}$) sein kann. Das Pion erscheint dabei zunächst als Lösung der Bethe-Salpeter-Gleichung (BSG) in der Leiterapproximation für die pseudoskalare, isovektorielle Quark-Antiquark-Vertexfunktion $\Gamma_5^i(q^2)$ am Punkt $q^2 = m_\pi^2$. Für $m_0 = 0$ ist $m_\pi^2 = 0$ und das Pion wird zum masselosen Goldstone-Boson der DCSB.

Durch Einführen kollektiver Mesonfelder (σ und $\vec{\pi}$) kann die 4-Quark Kopplung zu einer Yukawa-artigen Quark-Meson Wechselwirkung bosonisiert werden, was in der vollständig quantisierten Theorie einer Umsummation der Graphen entspricht. Integriert man im euklidischen Raum formal die Quarks heraus, gelangt man zur effektiven Wirkung $S_{eff}(\sigma, \vec{\pi})$, die sich aus der Determinante des Quark-Diracoperators, einer quadratischen Meson selbstwechselwirkung und einem chiralen brechenden Anteil zusammensetzt. Auf diese Weise hat man eine effektive chirale Wirkung (ECW) konstruiert, in der der Diracsee vollständig berücksichtigt ist. In S_{eff} sind insgesamt nur mehr ein quadratisch divergentes und zwei logarithmisch divergente Integrale enthalten, die in kompakter Weise durch Angabe eines Regularisierungsschemas für S_{eff} mit einem einzigen Abschneideparameter Λ regularisiert werden. Durch Polarisation der Seequarks kann man aus $S_{eff}(\sigma, \vec{\pi})$ die dynamischen Terme für die Mesonen, wie sie im linearen chiralen Sigma-Modell (CSM) enthalten sind, erzeugen. Durch Ankopplung an einen äußeren axialen Strom ergibt sich die schwache Pionzerfallskonstante f_π . Wir zeigen, daß es für den Soft-Pion-Limes ($m_\pi^2 \ll M^2$) im wesentlichen äquivalent ist, die 4-Quark Theorie in der HFA+BSG und die bosonisierte Theorie mit klassischen Mesonfeldern zu behandeln, wenn man das kollektive Feld $\vec{\pi}$ mit dem physikalischen Pion identifiziert. Durch die Forderung, daß im Vakuum die experimentellen Werte für die Pionmasse $m_\pi = 139\text{MeV}$ und die schwache Pionzerfallskonstante $f_\pi = 93\text{MeV}$ reproduziert werden, bleibt letztlich nur ein freier Parameter übrig, welcher in unserem Fall die Konstituentenquarkmasse M ist. Alle anderen Parameter und Vakuumgrößen können als Funktion von M berechnet werden. Wir tun dies für den UV-Abschneideparameter Λ , die 4-Quark Kopplungsstärke G , die Quarkstrommasse m_0 sowie das Vakuumquarkcondensat $\langle \bar{q}q \rangle_V$, welches neben M ein Maß für die DCSB ist. Dabei wird insbesondere der Einfluß des Regularisierungsschemas auf m_0 und $\langle \bar{q}q \rangle_V$ untersucht. Dazu verwenden wir die Eigenzeit-Regularisierung nach Schwinger, $O(4)$ - und $O(3)$ -invariante scharfe Abschnitte im Impulsraum sowie die Pauli-Villars Methode. Es zeigt sich, daß

beide Größen einzeln sehr stark von der speziellen Wahl eines Schemas abhängen, während jeweils das Produkt unabhängig davon die Gell-Mann-Oakes-Renner-Summenformel $m_0 \langle \bar{q}q \rangle_V = -m_\pi^2 f_\pi^2$ erfüllt.

Falls die Mesonfelder σ und $\vec{\pi}$ zeitunabhängig sind, stellt S_{eff} bis auf ein triviales euklidisches Zeitintervall T die statische Gesamtenergie des Systems E dar. Deren fermionische Anteil setzt sich als regularisierte Summe aus den Eigenwerten ϵ_λ des 1-Quark-Hamilton-Operators h zusammen. Die ϵ_λ werden numerisch durch Lösen der Dirac-Gleichung $h|\phi_\lambda\rangle = \epsilon_\lambda|\phi_\lambda\rangle$ in einem großen, aber endlichen Kasten berechnet. Nimmt man für die Mesonfelder ein Hedgehog-Profil $\sigma(\vec{r}) = \sigma(r)$, $\vec{\pi}(\vec{r}) = \hat{r}\pi(r)$ an, so können die Eigenzustände $|\phi_\lambda\rangle$ durch den Grand-Spin $G = J + T$ (Summe aus Spin und Isospin), dessen z-Komponente M und die Parität Π als gute Quantenzahlen charakterisiert werden.

Um Systeme mit einer definierten Baryonenzahl B zu erhalten, führt man diese über ein thermochemisches Potential μ als Lagrangemultiplikator in die effektive Wirkung $S_{eff}(\sigma, \vec{\pi})$ ein, welche dadurch in die großkanonische Wirkung $S_{eff}(\sigma, \vec{\pi}, \mu)$ übergeht. Deren fermionischer Anteil kann in einen unregularisierten, endlichen Valenz- und einen regularisierten Diracseebeitrag, der durch die Anwesenheit der Valenzquarks polarisiert ist, zerlegt werden. Für ein Nukleon ($B = 1$) werden die Bewegungsgleichungen aus der Stationaritätsbedingung von $S_{eff}(\sigma, \vec{\pi}, \mu)$ aufgestellt und numerisch durch ein Selbstkonsistenzverfahren, wie es aus der Hartree-Fock-Methode in der Atomphysik bekannt ist, gelöst. Wir zeigen, daß der Hedgehog-Ansatz eine selbstkonsistente Symmetrie ist. Falls die Konstituentenquarkmasse M einen kritischen Wert von $M_{kr} \approx 350\text{MeV}$ überschreitet, existieren Lösungen mit solitonischem Charakter, die einem Minimum der Energie $E_{B=1}$ entsprechen. Wir untersuchen Unterschied zwischen dem nichtlinearen Modell, in welchem σ und $\vec{\pi}$ auf den chiralen Zirkel $\sigma^2 + \vec{\pi}^2 = f_\pi^2$ eingeschränkt werden und dem vollen linearen Modell, welches σ und $\vec{\pi}$ als unabhängige Freiheitsgrade enthält. Beide Versionen erweisen sich für kleine Konstituentenmassen $M \approx M_{kr}$ als gleichwertig. Die explizite Brechung der chiralen Symmetrie durch eine endliche, kleine Strommasse $m_0 \approx 10\text{MeV}$ hat praktisch keinen Einfluß auf die solitonischen Lösungen.

Ferner studieren wir die Abhängigkeit des Systems vom Parameter M . Für $M > 700\text{MeV}$ haben die Valenzquarks negative Energie. Diese treten dann in der Gesamtenergie nicht mehr explizit auf, sondern sind Bestandteile des Diracsees geworden, was einer vollständig bosonisierten Theorie entspricht. Die Forderung, daß der isoskalare, elektromagnetische Radius des Nukleons seinen experimentellen Wert $\langle R^2 \rangle \approx 0.63\text{fm}^2$ annimmt, schränkt M jedoch auf einen Bereich von $M \approx 400\text{MeV}$ ein. Die Mean-Field-Energie $E^{B=1}$ des Systems liegt etwa bei 1200MeV .

Zur Konstruktion von Zuständen mit guten Spin- und Isospinquantenzahlen (Nukleon N , Delta Δ) wenden wir das semiklassische Cranking-Verfahren an. Hierbei läßt man die statischen Felder der Solitonlösung um eine intrinsische Achse im Isospinraum mit der Winkelfrequenz Ω rotieren und entwickelt alle Ausdrücke bis zur ersten nicht verschwindenden Ordnung Ω . Damit können nun verschiedene statische, nukleonische Größen berechnet werden. Wir tun dies für den isoskalaren, elektrischen Formfaktor $G_E^{T=0}(q^2)$, das Trägheitsmoment Θ des Nukleons sowie die

Energie des Nukleons E_N und des Δ -Isobars: E_Δ , die Pion-Nukleon-Kopplungskonstante $g_{\pi NN}$ sowie den Pion-Nukleon-Formfaktor $g_{\pi NN}(q^2)$, die axiale Vektorkopplungskonstante g_A sowie den axialen Formfaktor $g_A(q^2)$ und den nukleonischen σ -Term Σ . In dem oben angegebenen Bereich für die Konstituentenmassen M , sind alle berechneten Größen konsistent mit den empirischen Daten, nur g_A ist mit 0.8 (exp. 1.23) zu klein. Sämtliche Observable werden eindeutig vom Valenzbeitrag dominiert, was ein klares Valenzquarkbild des Nukleons bestätigt. Dies erklärt auch die relative Unempfindlichkeit der solitonischen Lösungen vom Regularisierungsschema, da nur der Seebeitrag regularisiert wird. Abschließend vergleichen wir das NJL mit dem chiralen Sigma-Modell von Gell-Mann und Levi (CSM), welches mit dem NJL durch die Gradienten- bzw. Heat-Kernel-Entwicklung verknüpft ist. Während im Vakuum- und mesonischen Sektor die Feldgradienten $\partial\sigma$ und $\partial\pi$ in jedem Falle klein sind und die Heat-Kernel bzw. Gradientenentwicklung daher geeignet ist, eine effektive Mesentheorie zu beschreiben, hängt deren Güte im solitonischen Sektor von der betrachteten Observable ab. Insbesondere im Fall der der axialen Vektorkopplungskonstante g_A ist sie völlig unbrauchbar und das CSM keine vernünftige Approximation zum NJL.

1. EINLEITUNG

Quantenchromodynamik

Die Quantenchromodynamik (QCD) wird heute als fundamentale Theorie zur Beschreibung der starken Wechselwirkung angesehen [MP78, BB83, CL84]. Ihr Erfolg stützt sich dabei hauptsächlich auf folgende Tatsachen:

- Sie trägt der allgemeinen Auffassung der modernen, theoretischen Physik Rechnung, daß jede der fundamentalen Wechselwirkung (abgesehen von der Gravitation) durch eine quantisierte, renormierbare Eichfeldtheorie beschrieben wird.
- Die Renormierungsgruppengleichung liefert aufgrund der nichtabelschen Struktur der Eichgruppe ($SU(N_F = 3)$) eine asymptotisch freie Theorie. Das bedeutet, daß für hohe Impulse die effektive Kopplungskonstante $\alpha_S(q^2)$ gegen Null geht und in diesem Bereich perturbative Methoden angewandt werden können. Deren Ergebnisse stehen mit der Phänomenologie in gutem Einklang.

Unglücklicherweise versagt jedoch die Störungstheorie bei der Energieskala, die physikalisch für die Beschreibung der hadronischen Grundzustände relevant ist ($\approx 0,1 - 1 \text{ GeV}$), wegen des Anwachsens von α_S in diesem Bereich. Zusätzlich sieht man sich dem Problem gegenübergestellt, daß im Quark-Gluonspektrum nur Farbsingulets beobachtet werden (Confinement), was sogar auf eine unendlich starke Kopplung im Niederenergiebereich schließen läßt (Infrarot-Sklaventum).

Mit Hilfe aufwendiger numerischer Simulationsrechnungen innerhalb von Gittereichtheorien versucht man Informationen über die QCD bei niederen Energien zu erhalten [Cre83]. Eine heute weit verbreitete Auffassung ist, daß die QCD bei einer Energieskala von $\Lambda_{QCD} \approx 100 \text{ MeV} \cdot 2^{\pm 1}$ Confinement zeigt,¹⁾ während für Impulse $p^2 > 1 - 10 \text{ GeV}^2$ die Störungstheorie gilt [Shu86]. Allerdings ist es bisher noch nicht gelungen, irgendwelche verlässliche quantitative Aussagen über die Eigenschaften der hadronischen Grundzustände oder deren niederenergetischen Anregungen zu treffen, und wegen der immens langen Rechenzeiten, die dafür nötig sind, ist man davon vermutlich auch noch weit entfernt.

Chirale Symmetrie – Spontane Symmetriebrechung (SCSB)

Aus diesem Grund wurde in den letzten Jahren verstärkt auf effektive Quark-Meson-Modelle zurückgegriffen, von denen man glaubt, daß sie die starke Wechselwirkung in dem relevanten Energiebereich von $0,1 - 1 \text{ GeV}$ ausreichend gut beschreiben. Die meisten dieser Modelle wurden bereits lange vor der QCD (~ 1960) entwickelt²⁾ und basieren auf einer weiteren wichtigen Eigenschaft der starken Wechselwirkung, der chiralen Symmetrie ([Lee72, CL84] und darin enth. Ref.) Hierbei handelt es sich um eine Invarianz der klassischen Lagrangedichten unter der globalen $SU(n)_L \otimes SU(n)_R \cong SU(2)_V \otimes SU(n)_A$ -Symmetrietransformation (n : Anzahl der Flavour), falls

¹⁾Der aktuelle Wert hängt vom Renormierungsschema ab.

²⁾In ihren ursprünglichen Fassungen war noch nicht von Quarks, sondern von Nukleonen als fundamentalen fermionischen Bausteinen die Rede.

die Strommasse m_0 der Quarks verschwindet. Letzteres ist für die beiden leichten u - und d -Quarks mit einer Masse von 4–10 MeV gut, für das seltsame Quark s ($m_s \approx 150$ MeV) nur mehr annähernd und für die schweren Quarks c, b, t nicht erfüllt. Im folgenden wollen wir uns auf den Sektor $n = 2$ (u, d -Quarks) beschränken.

Das Noether-Theorem liefert die Existenz zweier erhaltener Ströme $V_\mu^a(x)$ (Vektorstrom) und $A_\mu^a(x)$ (axialer Vektorstrom) ($a = 1, 2, 3$ bezeichnet die Komponenten im Isektorraum).

Um das Fehlen von entarteten Zuständen entgegengesetzter Parität im hadronischen Spektrum zu erklären, nimmt man an, daß die chirale Symmetrie im Vakuum spontan zu $SU(2)_V$ gebrochen ist (SCSB). Dies hat zur Folge, daß im Mesonspektrum 3 masselose Goldstone-Bosonen mit den Quantenzahlen des Pions (π) auftreten (Goldstone-Theorem), während die Quarks eine Konstituentenmasse M erhalten, die wesentlich größere Werte als die Strommasse m_0 annehmen kann. Ferner existiert ein endlicher Vakuumerwartungswert $\langle \bar{q}q \rangle_V$ (das sogenannte Quarkkondensat), dessen Größe neben M die Stärke der SCSB charakterisiert.

Der Mechanismus der SCSB eröffnet somit die einfache Möglichkeit, aus 3 Quarks ein schweres Nukleon der Masse $M_N = 938$ MeV aufzubauen, während das aus einem Quark und einem Anti-quark bestehende Pion ausgesprochen leicht ($m_\pi = 139$ MeV) ist. Der endliche Wert für m_π läßt sich auf die kleine, aber endliche Strommasse $m_0 \approx 4 - 10$ MeV der Quarks zurückführen. Dadurch wird die axiale Symmetrie $SU(2)_A$ explizit gebrochen und der entsprechende Noether-Strom A_μ^a erhält eine nichtverschwindende Divergenz. Der phänomenologische Erfolg der effektiven chiralen Modelle (ECM) liegt nun in der Annahme, daß die Ströme der chiralen $V_\mu^a(x)$ und $A_\mu^a(x)$ identisch mit den physikalischen Strömen der elektroschwachen Wechselwirkung sind. Insbesondere verschwindet die Divergenz des Vektorstroms:

CVC-Hypothese:

$$\partial^\mu V_\mu^a(x) = 0 \quad (1.1)$$

während die Divergenz des axialen Vektorstromes durch den schwachen, leptonischen Zerfall des Pions $\pi \rightarrow l + \bar{\nu}_l$ ($l = e, \mu$) mit der Zerfallsamplitude $f_\pi = 93$ MeV gegeben ist:

PCAC-Hypothese:

$$\partial^\mu A_\mu^a(x) = -m_\pi^2 f_\pi \pi^a(x) \quad (1.2)$$

Unter Verwendung der $SU(2)_V \otimes SU(2)_A$ -Kommulatoralgebra der Stromoperatoren $V_\mu^a(x)$ und $A_\mu^a(x)$ lassen sich die Ward-Identitäten für sämtliche zeitgeordnete Produkte der Form

$T\{V_{\mu_1}(x_1) \dots V_{\mu_n}(x_n) A_{\nu_1}(y_1) \dots A_{\nu_m}(y_m)\}$ ableiten, die auch als Stromalgebra-Identitäten bezeichnet werden. Betrachtet man die Erwartungswerte dieser Operatorgleichungen zwischen geeigneten hadronischen Zuständen (z.B.: Vakuum $|0\rangle$, Nukleon-Zustände $|N(p)\rangle$, Pion-Nukleon-Zustände $|N(p)\pi(p')\rangle$ etc.) ein und betrachtet den Grenzfall niederenergetischer Pionen (Soft-Pion-Limes), so ergeben sich Beziehungen zwischen den hadronischen Amplituden der Pion-Nukleon-Wechselwirkung und der schwachen Pionzerfallskonstanten f_π . Letztere bildet somit eine natürliche

Energieskala der SCSB. Diese sogenannten Niederenergiethoreme (Soft-Pion-Theoreme, Stromalgebra-Summenregeln) stimmen mit den experimentellen Ergebnissen im Rahmen von etwa 10–20%-Abweichung überein. Das einfachste und bekannteste Beispiel davon ist die Goldberger-Treiman-Relation, die man durch Einklemmen der PCAC-Relation (1.2) (das ist die einfachste Stromalgebra-Ward-Identität) zwischen zwei 1-Nukleon-Zustände $|N(p_1)\rangle$ und $|N(p_2)\rangle$ erhält. Sie liefert eine einfache Beziehung zwischen der axialen Vektorkopplungskonstanten $g_A = 1.23$ und der Pion-Nukleon-Kopplungskonstanten $g_{\pi NN} = 13.6$:

$$f_\pi \cdot g_{\pi NN} = M_N \cdot g_A \quad (1.3)$$

Der wesentliche Punkt an all diesen Niederenergiethoren ist, daß sie ausschließlich auf der $SU(2)_V \otimes SU(2)_A$ -Kommutatoralgebra sowie der CVC- bzw. PCAC-Hypothese basieren und unabhängig von der speziellen Dynamik des Modells sind. Letztere wird natürlich dann bedeutend, wenn man versucht mit Hilfe einer solchen Theorie explizit einzelne nukleonische Observable (z.B.: Energiespektrum, elektromagnetische und axiale Formfaktoren und Momente, $\pi - N$ -Streudaten etc.) zu berechnen. Dies wurde innerhalb verschiedener ECM durchgeführt. Ohne dabei einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben, möchten wir die wichtigsten hier explizit anführen:

Effektive chirale Modelle (ECM):

1. Chirale Bag-Modelle (CBM) ([Tho83] und dort enth. Ref.)

Hierbei handelt es sich um eine Erweiterung des MIT-Bag-Modells, in welchem die 3 Quarks als masselose Fermionen in einen relativistischen, unendlich hohen Potentialtopf (*Bag*) gesetzt werden, in dem sie sich frei bewegen. Dem Confinement wird dadurch Rechnung getragen, daß als Randbedingung die Normalenkomponente des Quark-Viererstroms an der Oberfläche des Potentialtopfes verschwinden soll. Die chirale Invarianz läßt sich durch Ankoppeln von elementaren Pionen an die Quarks erreichen. Diese Modelle waren bei der Reproduktion von Spektren und anderer wichtiger Eigenschaften (z.B.: magnetischer Momente) der leichten Baryonen recht erfolgreich.

2. Skyrme-Modell [Sky62, AN83]

Das Skyrme-Modell ist ein sog. topologisches Modell, bei dem die Quarkfreiheitsgrade herausintegriert wurden, so daß eine effektive mesonische ($\vec{\pi}$) Theorie übrigbleibt. Sie setzt sich aus einem kinetischen Term für die Pionen und einer stabilisierenden mesonischen Selbstkopplung, dem Skyrme-Term zusammen. Letzterer garantiert die Existenz von stabilen, räumlich konzentrierten Lösungen der Feldgleichungen (Solitonen), die als Baryonen interpretiert werden. Die Baryonzahl erscheint dabei als topologische Windungszahl des Pionfeldes.

3. Chirales Sigma-Modell (Gell-Mann-Levi [GL60])

Hier sind die Quarks explizit enthalten und koppeln chiral invariant über eine Yukawa-Wechselwirkung an die Mesonfelder. Diese bestehen aus einem skalar-isoskalaren (σ) und einem pseudeoskalar-isovektoriellen ($\vec{\pi}$) Anteil. Zusätzlich ist eine mesonische Selbstwechselwirkung in Form des mexikanischen Hut-Potentials $V(\sigma, \vec{\pi}) = \text{const} \cdot (\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - f_\pi^2)^2$ enthalten. Das σ -Feld, welches den chiralen Partner zum $\vec{\pi}$ bildet, kann als Freiheitsgrad

eliminiert werden, wenn man die Mesonfelder einer zusätzlichen Zwangsbedingung (chiraler Zirkel): $\sigma^2 + \vec{\pi}^2 = (\sigma^2 + \vec{\pi}^2)_V$ unterwirft. Man spricht dann von der nichtlinearen Version, im Gegensatz zur linearen Version, in der das σ -Feld noch explizit auftritt.

Auch in diesem Modell findet man Nukleonen als solitonische Lösungen, die aus 3 Valenzquarks bestehen. Im Rahmen von Projektionstechniken, wie sie aus der nichtrelativistischen Kernphysik bekannt sind, ist es gelungen, nukleonische Größen (Nukleonenergie, $N - \Delta$ -Aufspaltung, magnetische Momente, elektromagnetische und axiale Formfaktoren) sehr erfolgreich zu reproduzieren [BB84a, Bir85, CB86, FN87, FG88, AR90a]. Mit Hilfe der Generatorkoordinatenmethode (GCM) konnte auch die Roper-Resonanz als Monopolresonanz des Nukleons identifiziert werden [MeiDA, MG89a]. Ferner war es möglich, die Rechnungen auf den Vektormesonensektor $(\omega, \vec{\rho}, \vec{A})$ auszudehnen [RADA, RA90, AR90b]. Allerdings wurden dabei nur die Valenzquarks betrachtet, und die Einflüsse der Polarisation des Diracsees blieben unberücksichtigt. Versuche, diesen in das Modell durch eine Renormierungsvorschrift einzubeziehen, scheiterten am Auftreten einer Vakuuminstabilität, die sich in der Existenz eines nicht-translationsinvarianten, energietiefsten Zustandes äußert [RK87]. Weiter besteht das Problem, daß keine direkte Verknüpfung zwischen dem chiralen Sigma-Modell (und auch allen anderen oben beschriebenen effektiven Modellen) und der QCD besteht.

Grundsätzlich lassen sich die effektiven Modelle grob in zwei Klassen einteilen. Das Bag-Modell und das chirale Sigma-Modell gehen von expliziten Valenzquarks aus, das Skyrme-Modell hingegen ist eine rein bosonisierte Theorie, bei der die Baryonenzahl durch topologische Bedingungen festgelegt ist.

Nambu-Jona-Lasinio-Modell (NJL)

In diesem Zusammenhang fand in letzter Zeit das Modell von Nambu und Jona-Lasinio, welches ebenfalls aus den frühen 60er Jahren resultiert, starke Beachtung. Es ist das einfachste Modell für Quark-Felder, welches chirale Symmetrie mit spontaner Brechung aufweist. Seine Wechselwirkung ist eine 4-Quark Punktwechselwirkung, die Analogien zur BCS-Theorie der Supraleitung aufweist [NJ61]. Das Modell legt sich im Gegensatz zu den anderen effektiven Modellen bei der Frage nicht fest, ob Valenzquarks existieren oder nicht. Im Gegenteil, es wird sich zeigen, daß man einen kontinuierlichen Übergang vom Valenzbild zum bosonisierten Bild allein durch Änderung der Quark-Quark-Kopplungskonstante vollziehen kann. Dies macht das Modell besonders interessant. Die Theorie ist UV-divergent und nicht renormierbar, so daß sie nur in einer bestimmten feldtheoretischen Approximation (z.B.: Schleifenordnung) definiert und mit einem endlichen UV-Abschneideparameter Λ innerhalb eines bestimmten Regularisierungsschemas zu versehen ist. Nambu und Jona-Lasinio haben gezeigt, daß in der einfachsten nichttrivialen Approximation (Hartree-Fock-Approximation HFA), in der das effektive Potential bis zur ersten Ordnung in der Kopplungskonstanten G entwickelt wird, eine Phase mit dynamisch gebrochener chiraler Symmetrie (DCSB)³⁾ existiert, falls das Produkt GA^2 einen kritischen Wert überschreitet. Die Quarks erhalten dadurch ihre Konstituentenmasse M , die sich als Lösung der Hartree-Fock-Gleichung (Gap-

³⁾Hierunter versteht man DCSB durch Quantenkorrekturen.

Gleichung) ergibt. Dadurch tritt im Dirac-Spektrum eine Lücke (*Gap*) auf, und der Grundzustand (aufgefüllter Diracsee) liegt energetisch tiefer. Das Pion wird als Lösung der Bethe-Salpeter-Gleichung (BSG) zum gebundenen Quark-Antiquark-Zustand im pseudoskalaren, isovektoriellen Kanal, dessen Masse m_π für $m_0 = 0$ (chiraler Limes) verschwindet (Goldstone-Theorem).

Nach Eguchi kann die 4-Fermion Punktwechselwirkung durch geschickte Umordnung aller Graphen in eine Yukawa-Wechselwirkung der Fermionen mit kollektiven, nicht-dynamischen Mesonfeldern σ und π umgeformt werden (Bosonisierung) [Egu76]. Für den mesonischen- und den Vakuumsektor ist es im Soft-Pion-Limes im wesentlichen äquivalent, die 4-Fermion Wechselwirkung in der HFA und die bosonisierte Theorie in der stationären Phasenapproximation, d.h. mit klassischen Mesonfeldern σ und $\vec{\pi}$ zu behandeln.⁴⁾ Durch Funktionalintegration über die Quarkfelder erhält man eine effektive mesonische Wirkung $S_{eff}(\sigma, \vec{\pi})$, welche als Fermiondeterminante eine regularisierte Summe über die Eigenzustände des durch σ und π polarisierten Fermionspektrums darstellt. Die Polarisierung der Seequarks erzeugt aus $S_{eff}(\sigma, \vec{\pi})$ in niedrigster Ordnung in den Gradienten der Mesonfelder $\partial\sigma$, $\partial\vec{\pi}$ sowie deren Amplituden selbst genau die dynamischen Terme für die Mesonen, die auch im chiralen Sigma-Modell enthalten sind. Dies sind zum einen der kinetische Term für die Mesonen $(\partial^\mu\sigma)(\partial_\mu\sigma) + (\partial^\mu\vec{\pi})(\partial_\mu\vec{\pi})$ welcher korrekt normiert ist, falls man fordert, daß die Pionzerfallsamplitude f_π reproduziert wird, zum anderen die Mexikanerhut-Selbstwechselwirkung der Mesonen. Systematisch kann eine solche Entwicklung mit Hilfe der Gradienten- oder Heat-Kernel-Methode durchgeführt werden [GL84, DS85, AF84, AF85, ER86].

Das NJL-Modell wurde in den letzten Jahren erfolgreich zur Berechnung von mesonischen Eigenschaften [EV83, BW83, YO84, BB84b, DW84, DS85, HK85, FS86, ER86, Ber86, HK87, PR87, BJ87, BJ88, HK88, LutDA, KL90] und von Mediumeffekten (d.h. von Systemen mit endlicher Dichte und Temperatur) [BM86, BM87, Mei89, RC89, CR90] eingesetzt. Ferner ist es gelungen, Wechselwirkungen vom NJL-Typ mit Hilfe verschiedener Approximationen aus der QCD bei niederen Energien abzuleiten. Am weitesten ist dies im Rahmen von Instanton-Theorien [tHo76, CD78, CD79, CC79, SV80, Shu80, Shu82, DP84, Shu86, DP86] und neuerdings auch durch einen Feldstärkezugang zur QCD [SR90] geschehen, in welchen Aussagen über das nichtperturbative QCD-Vakuum gemacht werden. Setzt man leichte Quarks in ein solches Vakuum, so zeigt sich, daß SCSB auftritt und die Wechselwirkung der Quarks kann durch eine effektive NJL-artige Kopplung beschrieben werden. Innerhalb gewisser Näherungen ist es sogar möglich Werte für das Quark-kondensat $\langle\bar{q}q\rangle_V$ und die Konstituentenmasse M zu berechnen, die mit den phänomenologisch ermittelten [SV79, GL82] relativ gut übereinstimmen. Allerdings muß gesagt werden, daß trotz dieser ermutigenden Ansätze eine klare, eindeutige Ableitung aus der QCD bisher noch fehlt.

Bild 1.1 zeigt noch einmal schematisch, wie die verschiedenen effektiven chiralen Modellen und insbesondere das NJL-Modell untereinander und untereinander und mit der Niederenergie-QCD verknüpft sind.

⁴⁾Dies gilt im Soft-Pion-Limes und bei Vernachlässigung den Hartree-Fock Austauschterms, der für $n \cdot N_F \rightarrow \infty$ verschwindet.

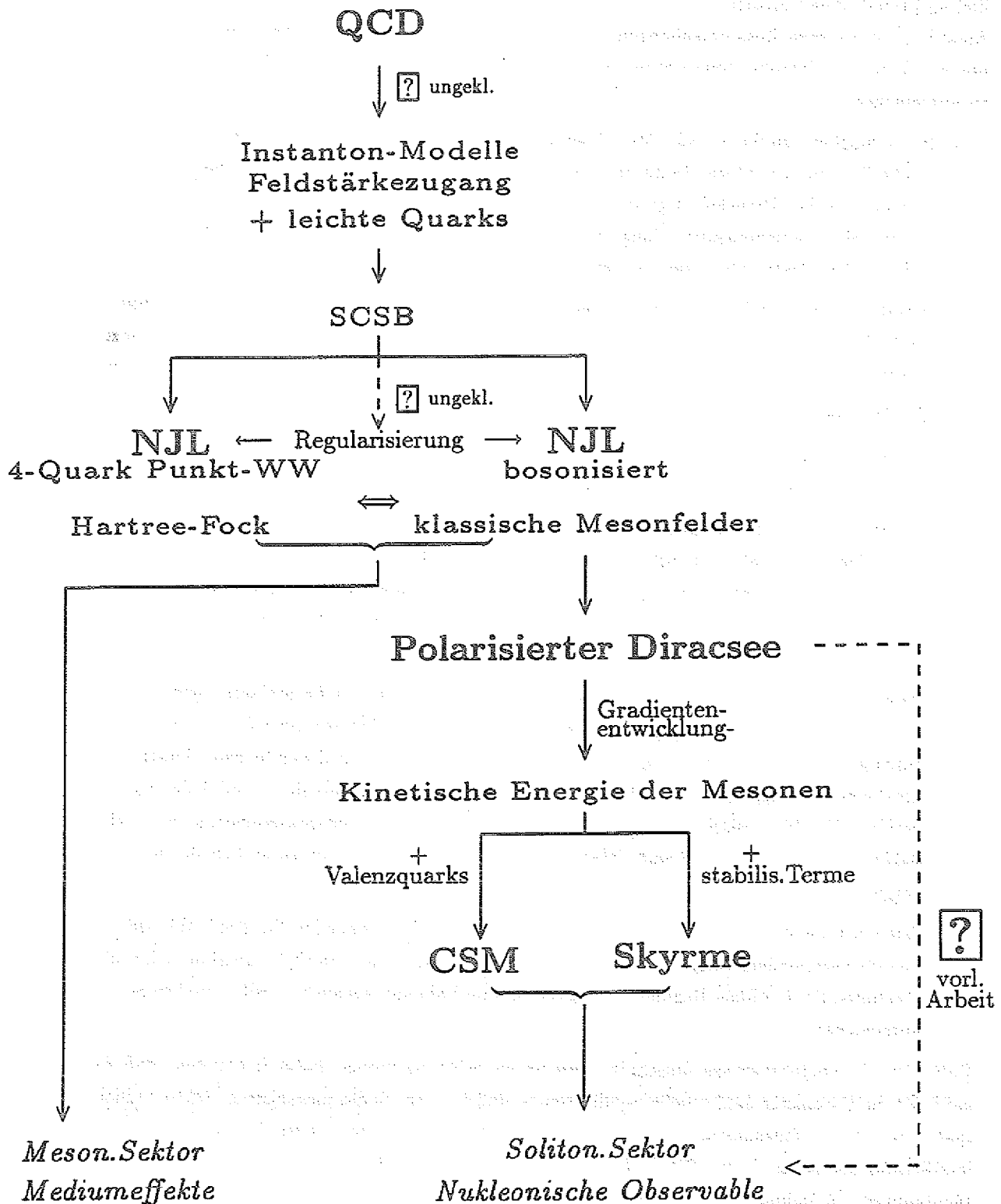


Bild 1.1: Niederenergie-QCD, effektive Modelle und hadronische Observable

Ziel und Inhalt dieser Arbeit

Ausgehend von diesen Zusammenhängen erschien es uns als sinnvoll und notwendig im Rahmen unserer Arbeit am Nambu–Jona-Lasinio-Modell (NJL) für das Nukleon folgende Fragestellungen zu untersuchen.

1. Ist es möglich, direkt im NJL-Modell solitonische Lösungen zu erhalten, aus denen baryonische Systeme (Nukleon, Delta etc.) konstruiert werden können? Wichtig dabei ist, daß dies unter voller Berücksichtigung des polarisierten Diracsees geschehen soll, ohne daß dabei auf die Gradientenentwicklung zurückgegriffen wird, von der niemand weiß, ob sie im solitonischen Sektor überhaupt anwendbar ist.
2. Aus diesen solitonischen Lösungen sollen unter Verwendung einer geeigneten Quantisierungsmethode verschiedene nukleonische Größen berechnet werden. Hierbei ist es interessant zu fragen:
 - (a) Wie hängen diese Größen von den Parametern des Modells ab?
 - (b) Wie stark sind die jeweiligen Beiträge von See- und Valenzquarks? Entspricht das Nukleon der allgemeinen Vorstellung, daß es hauptsächlich aus 3 Valenzquarks besteht?
 - (c) Wie gut ist die Gradientenentwicklung wirklich? Kann das chirale Sigma-Modell mit Valenzquarks als vernünftige Näherung zum NJL betrachtet werden, wenn man beide Modelle in der gleichen Approximation behandelt, und die kinetische Energie der Mesonen im chiralen Sigma-Modell durch Polarisation der Seequarks in NJL mittels Gradientenentwicklung erzeugt wird?

Da wie bereits angedeutet eine klare Ableitung des NJL mit seinen Parametern, insbesondere der speziellen Form der Regularisierung, bisher noch fehlt, sind wir gezwungen deren Wahl durch gewisse Ad-hoc- Annahmen zu treffen. Wir werden uns auf die einfachste nichttriviale feldtheoretische Approximation beschränken, in der wir die Mesonfelder σ und $\vec{\pi}$ des bosonisierten NJL als klassisch annehmen, was einer stationären Phasenapproximation entspricht. Bezüglich der Wahl des Regularisierungsschemas ergibt sich dann zusätzlich die wichtige Frage:

3. Wie stark beeinflusst das Regularisierungsschema die zu berechnenden Größen? Wir werden dies für verschiedene Schemata (Eigenzeitregularisierung, $O(3)$ und $O(4)$ -invarianter Impulsabschnitt, Pauli-Villars-Regularisierung) sowohl im Vakuum- als auch im solitonischen Sektor untersuchen.

Dabei ist die Vorgehensweise innerhalb eines festen Schemas immer dadurch gegeben, daß wir zunächst die Parameter des Modells so adjustieren, daß die Größen des mesonischen Sektors (Pionmasse m_π , Pionzerfallskonstante f_π) auf klassischem Niveau reproduziert werden. Dadurch bleibt letztlich für den solitonischen Sektor nur 1 freier Parameter übrig. Wir werden dafür die Konstituentenmasse M nehmen.

Im Einzelnen gliedert sich die Arbeit in folgende Schritte:

Kapitel 2 enthält eine kurze Zusammenfassung der Eigenschaften der 4-Quark Punktwechselwir-

kung nach Nambu und Jona-Lasinio. Wir zeigen zunächst das Auftreten einer Phase mit DCSB als Lösung der Gap-Gleichung in der HFA. Anschließend wird das Pion als Goldstone-Boson durch Lösen der BSG im $q - \bar{q}$ -Kanal identifiziert. Die Ausdrücke für die schwache Pionzerfallsamplitude f_π und die Pionmasse m_π werden abgeleitet.

In *Kapitel 3* beschreiben wir die Idee der Bosonisierung nach Eguchi und leiten den Ausdruck für die effektive Wirkung S_{eff} her. Wir diskutieren verschiedene Regularisierungsschemata für S_{eff} . Anschließend werden die 1-Fermion-Schleifenbeiträge (Polarisation des Diracsees) in niedrigster Ordnung berechnet. Wir zeigen, daß die Annahme klassischer Mesonfelder äquivalent zur HFA der 4-Quark Wechselwirkung ist. Die Bedingungen für die Adjustierung von f_π und m_π werden abgeleitet. Abschließend untersuchen wir den Einfluß des Regularisierungsschemas auf verschiedene Vakuumgrößen, insbesondere die Strommasse m_0 und das Quarkkondensat $\langle \bar{q}q \rangle_V$.

Kapitel 4 enthält die Konstruktion statischer, solitonischer Lösungen mit endlicher Baryonenzahl. Für die Mesonfelder nehmen wir das Hedgehog-Profil $\sigma(\vec{r}) = \sigma(r)$ und $\vec{\pi}(\vec{r}) = \hat{r}\pi(r)$ an. Zunächst stellen wir den Ausdruck für die statische Energie E_0 als regularisierte Summe über die 1-Teilchen-Quarkorbitale auf und beschreiben das numerische Verfahren zur Lösung der entsprechenden Eigenwertgleichung. Das Quarkspektrum für verschiedene Mesonfelder wird diskutiert. Durch Ankoppeln eines chemischen Potentials an die effektive Wirkung können Systeme mit einer endlichen Baryonenzahl, insbesondere für den uns interessierenden Fall $B = 1$, konstruiert werden. Physikalisch entspricht dies dem Hinzufügen von 3 Valenzquarks zur Gesamtenergie. Wir diskutieren den Zusammenhang zwischen Baryonenzahl B und der topologischen Windungszahl n des Mesonprofils mit Hilfe der Goldstone-Wilczek-Entwicklung, die einen Spezialfall der allgemeinen Gradientenentwicklung darstellt. Der Unterschied zwischen chemischem Potential μ und physikalischem Vektormeson ω im euklidischen Raum wird kurz diskutiert. Anschließend leiten wir die Bewegungsgleichungen für ein $B = 1$ -System her und lösen diese numerisch durch ein Selbstkonsistenzverfahren. Wir zeigen, daß die Hedgehog-Form für die Mesonen eine selbstkonsistente Symmetrie ist. Die Unterschiede zwischen linearem und nicht-linearem Modell (Einschränken der Mesonfelder auf den chiralen Zirkel $\sigma^2 + \vec{\pi}^2 = f_\pi^2$) sowie die Effekte einer endlichen Quarkstrommasse werden diskutiert. Abschließend vergleichen wir die selbstkonsistenten Lösungen unseres effektiven chiralen Modells mit Seequarks mit den selbstkonsistenten Mean-Field-Lösungen des chiralen Sigma-Modells von Gell-Mann und Levi [GL60], welches nur Valenzquarks enthält und den Quark-Schleifen-Beitrag durch die erste nichtverschwindende Ordnung Heat-Kernel bzw. Gradienten-Entwicklung (das sind die kinetischen Terme für σ und $\vec{\pi}$) ersetzt.

In *Kapitel 5* beschreiben wir das semiklassische Cranking-Verfahren, das zum Ziel hat, Systeme mit guten Spin- und Isospinquantenzahlen zu konstruieren. Dabei diskutieren wir insbesondere die Probleme, die bei der Ankopplung der Cranking-Frequenz an die regularisierte effektive Wirkung im euklidischen Raum entstehen.

Damit berechnen wir in *Kapitel 6* eine Reihe nukleonischer Größen:

a) Die Mean-Field-Energie E

b) Den isoskalaren elektrischen Radius $\langle R^2 \rangle_E^{T=0}$ und den entsprechenden Formfaktor $G_E^{T=0}(q^2)$

- c) Das Trägheitsmoment Θ und die Energien von Nukleon E_N und Δ : E_Δ
- d) Die axiale Vektorkopplungskonstante g_A und den axialen Formfaktor $g_A(q^2)$
- e) Den Pion-Nukleon-Formfaktor $g_{\pi NN}(q^2)$
- f) Den Nukleonischen σ -Term Σ .

Hierbei werden insbesondere die Abhängigkeit von M , die relativen Beiträge von See- und Valenzquarks und der Einfluß des Regularisierungsschemas untersucht. Abschließend erfolgt eine Gegenüberstellung mit den Gradienten- bzw. Heat-Kernel-entwickelten Größen und denjenigen die im chiralen Sigma-Modell mit dem gleichen Quantisierungsverfahren (Cranking) berechnet wurden.

Kapitel 7 beschließt die Arbeit mit einer zusammenfassenden Diskussion.

2. DAS NAMBU-JONA-LASINIO-MODELL: 4-QUARK-WECHSELWIRKUNG

Das folgende Kapitel enthält einen kurzen Überblick über die 4-Fermion-Punktwechselwirkung für $SU(2)$ -Isospin Fermionen, wie sie Nambu und Jona-Lasinio 1961 vorschlugen, um zu demonstrieren, daß Fermionmassen durch dynamische Brechung der chiralen Symmetrie (DCSB) erzeugt werden können. Im Gegensatz zur Originalversion betrachten wir die Fermionen nicht als Nukleonen (p, n) sondern als Quarks mit (u, d)-Flavour, aus denen wir später das Nukleon aufbauen werden. Zunächst diskutieren wir die Lagrange-Funktion und die klassischen Symmetrien mit den zugehörigen Noetherströmen. Anschließend betrachten wir die quantisierte Theorie. Das allgemeine nichtperturbative Quantenvakuum wird in kompakter Schreibweise mit dem Formalismus des verallgemeinerten effektiven Potentials nach Cornwall, Jackiw und Tomboulis (CJT) dargestellt und in der Hartree-Fock-Approximation (HFA) behandelt. Die Stationaritätsbedingung für das effektive Potential (Schwinger-Dyson-Gleichung) liefert eine Selbstkonsistenzgleichung für die Vakuumselbstenergie, die sog. Gap-Gleichung. Deren nichttriviale Lösung kennzeichnet das Auftreten einer Phase mit dynamisch gebrochener chiraler Symmetrie (DCSB). Da das Modell nicht renormierbar ist, müssen wir dieses mit einem endlichen ultravioletten Abschneideparameter Λ versehen und für jede divergente Quarkschleife ein Regularisierungsschema spezifizieren. Das Pion erscheint in dieser Theorie als gebundener Quark-Antiquark-Zustand, was formal einer Lösung der Bethe-Salpeter-Gleichung (BSG) für den pseudoskalaren, isovektoriellen Vertex entspricht. Falls die Quarks keine endliche Strommasse m_0 besitzen (chiraler Limes), können wir aus der Gap-Gleichung unter Ausnutzung der chiralen Invarianz die BSG herleiten und zeigen, daß diese eine Lösung am Punkt $q^2 = 0$ besitzt. Das Pion wird damit zum masselosen Goldstone-Boson der DCSB. Durch eine endliche Quarkstrommasse erhalten auch die Pionen ihre physikalische Masse m_π . Die Ankopplung an ein äußeres axiales Feld beschreibt den schwachen Zerfall des Pions $\pi \rightarrow l + \bar{\nu}_l$ in ein Lepton l (e, μ): mit der Zerfallskonstanten f_π .

Abschließend zeigen wir, daß alle Parameter des Modells durch die verschiedenen Bedingungen und die Adjustierung von f_π und m_π an ihre experimentellen Werte so eingeschränkt sind, daß letztlich nur einer frei gewählt werden kann.

2.1. LAGRANGE-FUNKTION UND KLASSISCHE SYMMETRIEN

Unser Ausgangspunkt ist die 4-Quark-Punktwechselwirkung nach Nambu und Jona-Lasinio [NJ61]:

$$S_{NJL}(q, \bar{q}) = \int d^4x \mathcal{L}_{NJL}$$

mit

$$\mathcal{L}_{NJL} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$$

wobei

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= \bar{q}(i\partial - m_0)q \\ \mathcal{L}_{int} &= \frac{G}{2} [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau}q)^2]\end{aligned}\quad (2.1)$$

Dabei bezeichnet der Dirac-Spinor q ein Quark mit $SU(n=2)$ -Flavour (Isospin: (u,d)) und $SU(N_F=3)$ -Farbe.

Die Quarks besitzen eine Strommasse m_0 , die als isospininvariant angenommen wird: $m_0 = m_u = m_d$. $\vec{\tau}$ notiert die Isospin-Pauli Matrizen. Die Kopplungskonstante G ist von der Dimension $[Masse^{-2}]$ und greift mit gleicher Stärke am skalaren, isoskalaren $(\bar{q}q)^2$ und pseodoskalaren, isovektoriellen $(\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau}q)^2$ Teil der Wechselwirkung $\mathcal{L}_{int}$ an.

Neben der unmittelbar evidenten Poincare-Invarianz ist $\mathcal{L}_{NJL}$ symmetrisch unter einer globalen $U(1) \otimes SU(2)_V \otimes SU(2)_A$ -Eichtransformation:

$$q \rightarrow q' = \exp(i\delta)q \quad (2.2)$$

$$q \rightarrow q' = \exp(i\vec{\tau} \cdot \vec{\alpha})q \quad (2.3)$$

$$q \rightarrow q' = \exp(i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\beta})q \quad \text{falls } m_0 = 0 \quad (2.4)$$

Die zugehörigen Noether-Ströme:

$$\begin{aligned}B_\mu &= \bar{q}\gamma_\mu q, & (Baryon - Strom) \\ \vec{V}_\mu &= \bar{q}\gamma_\mu \frac{\vec{\tau}}{2} q, & (Vektor - Strom) \\ \vec{A}_\mu &= \bar{q}\gamma_\mu \gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} q, & (Axial - Vektor - Strom)\end{aligned}\quad (2.5)$$

besitzen auf klassischem Niveau die Divergenzen:

$$\begin{aligned}\partial^\mu B_\mu &= 0 \\ \partial^\mu \vec{V}_\mu &= 0 \\ \partial^\mu \vec{A}_\mu &= -m_0 \bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau}q\end{aligned}\quad (2.6)$$

was die Erhaltung der Baryonenzahl, des Isospins und die partielle Erhaltung des axialen Vektorstroms (PCAC) ausdrückt.

Es sei noch bemerkt, daß die Lagrange-Dichte Gl. (2.1) einen einfachen Sonderfall im $SU(2)$ -Flavour-Sektor einer allgemeinen Theorie mit n Flavourfreiheitsgraden darstellt, welche für verschwindende Quarkstrommassen invariant unter der vollständigen $U(1) \otimes U(1)_A \otimes SU(n)_V \otimes SU(n)_A$ -Gruppe ist. Die einfachste Form eines solchen lautet [DW84, DS85, ER86]:

$$\mathcal{L}_{NJL}^{(n)} = \mathcal{L}_0^{(n)} + \mathcal{L}_{int}^{(n)}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0^{(n)} &= \bar{q}(i\partial - \tilde{m}_0)q \\ \mathcal{L}_{int}^{(n)} &= \frac{G_1}{2} \sum_{a=0}^{n^2-1} [(\bar{q}\lambda^a q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \lambda^a q)^2] - \frac{G_2}{2} \sum_{a=0}^{n^2-1} [(\bar{q}\gamma^\mu \lambda^a q)^2 + (\bar{q}\gamma^\mu \gamma_5 \lambda^a q)^2]\end{aligned}\quad (2.7)$$

Hierbei bezeichnet $\bar{m}_0$ eine $n \times n$ Quarkstrommatrix und die λ^a ($a = 0 \dots n^2 - 1$) die Generatoren der $U(n)$ ($\lambda^0 = \sqrt{\frac{2}{n}} \mathcal{I}$ ($\mathcal{I}$: Einheitsmatrix), $\text{Tr}_\lambda(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}$). In (2.1) werden zum einen die gesamten Vektor-Kopplungen aus dem G_2 -Term von Gl. (2.7) unterdrückt. Außerdem sind keine skalar-isovektoriellen und keine pseudoskalar-isoskalaren Terme in Gl. (2.1) enthalten. Letzteres ist nur im Fall von 2 Flavourfreiheitsgraden möglich, ohne die chirale Symmetrie zu verletzen, was an der besonders einfachen Kommutatoralgebra der Pauli-Isospinmatrizen liegt.

2.2. QUANTISIERTE THEORIE

Erzeugendes Funktional:

Die Quantisierung der Wechselwirkung (2.1) kann formal durch das erzeugende Funktional für die n-Punkt Greensfunktionen $Z[\eta, \bar{\eta}]$ bzw. deren zusammenhängenden Anteil $W[\eta, \bar{\eta}]$:

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = e^{iW[\eta, \bar{\eta}]} = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} e^{i\left[\mathcal{S}_{NJL}(q, \bar{q}) + \int d^4x [\bar{\eta}(x)q(x) + \bar{q}(x)\eta(x)]\right]} \quad (2.8)$$

dargestellt werden.

Da die Kopplungskonstante G die Dimension $[Masse^{-2}]$ hat, ist die Theorie nicht renormierbar. Das bedeutet, daß eine unendliche Anzahl UV-divergenter Fermionschleifen auftritt. Das quantisierte Modell kann daher nur sinnvoll definiert werden, wenn man zusammen mit $Z[\eta, \bar{\eta}]$:

- A) *spezifiziert, in welcher Approximation die Theorie behandelt werden soll, d.h.: welche Graphen in einer bestimmten Entwicklung (Störungsreihe in G , Schleifenentwicklung etc.) mitgenommen werden und welche nicht.*
- B) *für alle divergenten Ausdrücke, die dabei auftreten, ein Regularisierungsschema mit einem UV-Abschneideparameter Λ angibt.*

Selbstverständlich sind dann alle Ergebnisse wie in jeder nicht renormierbaren Theorie zunächst einmal von (A) und (B) abhängig. Man braucht dies nicht weiter als störend empfinden, da ja das NJL als effektive Approximation zur QCD bei niederen Energien aufgefaßt wird und daher nur innerhalb einer gewissen Energieskala, die in diesem Fall durch Λ bestimmt wird, sinnvoll ist. Prinzipiell sollte die spezielle Form von A) und B) zusammen mit der Wechselwirkung (2.1) aus der QCD abgeleitet werden. Wie in Kapitel 1 bereits angedeutet wurde, gibt es dazu entsprechende Ansätze, doch ist man bis jetzt von einer befriedigenden Lösung noch weit entfernt. Wir sind daher gezwungen, über A) und B) gewisse Ad-hoc-Annahmen zu machen, insbesondere was die Wahl des Regularisierungsschemas angeht. Wir werden im Laufe dieser Arbeit noch untersuchen, wie stark dies die zu berechnenden Größen beeinflußt.

Verallgemeinerte Effektive Wirkung:

Um die DCSB durch Quanteneffekte im Vakuum zu demonstrieren, verwenden wir den Formalismus des verallgemeinerten effektiven Potentials von Cornwall, Jackiw und Tomboulis (CJT) [CJ74], der es erlaubt, die quantisierte Theorie in kompakter Form darzustellen, so daß sie zur Behandlung nichtperturbativer Effekte geeignet ist. Dazu betrachten wir das erzeugende Funktional $Z[K]$ für

die nichtlokalen 2-n-Punkt-Greensfunktionen zusammengesetzter Teilchen:⁵⁾

$$Z[K] = e^{iW[K]} = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} e^{\left\{ i \left[\mathcal{S}_{NJL}(q, \bar{q}) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \bar{q}(x) K(x, y) q(y) \right] \right\}} \quad (2.9)$$

Die verallgemeinerte effektive Wirkung $\Gamma[S]$ nach CJT ergibt sich durch Legendre-Transformation von $W[K]$ nach der vollen 2-Punkt-Greensfunktion (Propagator) der wechselwirkenden Theorie $S(x, y)$

$$\Gamma[S] = W[K] - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y S(x, y) K(y, x) \quad (2.10)$$

wobei S und K mit W und Γ über

$$\frac{\delta W[K]}{\delta K(x, y)} = \frac{1}{2} S(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\delta \Gamma[S]}{\delta S(x, y)} = -\frac{1}{2} K(x, y) \quad (2.11)$$

verknüpft sind.

Quantenvakuum: Verallgemeinertes effektives Potential; Selbstenergie:

Da wir an translationsinvarianten Vakuumlösungen interessiert sind, nehmen wir $S(x, y)$ als Funktion von $x - y$ an, was von $\Gamma[S]$ zum ortsunabhängigen verallgemeinerten effektiven Potential $V[S]$ führt:

$$\Gamma[S] =: \int d^4x V[S] \quad (2.12)$$

Die Schleifenentwicklung von $V[S]$ kann nach CJT [CJ74] aus der entsprechenden Entwicklung des gewöhnlichen effektiven Potentials gewonnen werden und lautet:

$$V[S] = (-i) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}_{\gamma, \tau, F} [\ln(S_0^{-1}(p)S(p)) - S_0^{-1}(p)S(p) + 1] + V_2[S] \quad (2.13)$$

wobei $S_0^{-1}(p) = (\not{p} - m_0) \cdot \mathcal{I}_\tau \cdot \mathcal{I}_F$ den inversen Propagator der freien Theorie und $\text{Tr}_{\gamma, \tau, F}$ die Spur im Spin, Isospin und Farbraum bezeichnen. Der erste Summand auf der r.S. von Gl. (2.13) ist der triviale Anteil von $V[S]$, während $V_2[S]$ die Wechselwirkung in Form der irreduziblen 2-Teilchen-Vakuumblasen enthält, die im Falle des NJL-Modells graphisch als:

$$V_2[S] = (-\frac{G}{2}) \begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ | \\ \text{---} \bigcirc \text{---} \end{array} + \mathcal{O}(G^2) \quad (2.14)$$

dargestellt werden können.

⁵⁾Im Gegensatz zu $Z[\eta, \bar{\eta}]$ aus Gl. (2.8) ist $Z[K]$ bilinear und nicht-lokal in q und $\bar{q}$

Die Lösungen der Theorie für das Vakuum sind durch die stationären Punkte von $V[S]$, die sog.

Schwinger-Dyson-Gleichung:

$$\frac{\delta V[S]}{\delta S} = 0 \quad (2.15)$$

gegeben, was gemäß Gl. (2.13) zu

$$S^{-1}(p) - S_0^{-1}(p) = (-i)(2\pi)^4 \cdot \frac{\delta V_2[S]}{\delta S(p)} =: (-)\Sigma(p) \quad (2.16)$$

oder

$$S^{-1}(p) = \not{p} - M(p) \quad (2.17)$$

mit:

$$M(p) := \Sigma(p) + m_0 \quad (2.18)$$

führt. $\Sigma(p)$ wird als Selbstenergie des Vakuums bezeichnet, da es die Änderung der Masse m_0 durch Quanteneffekte zur Masse $M(p)$ beschreibt.

Da der freie Propagator S_0 diagonal im Flavour- und Farbraum ist und die Wechselwirkung flavour- und farbinvariant sind, können auch S und Σ als flavour- und farbdagonal angenommen werden [BJ88].

Hartree-Fock-Approximation (HFA):

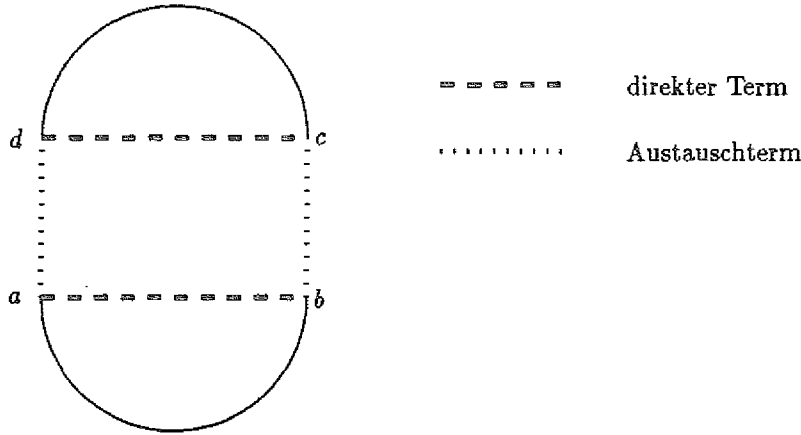
An dieser Stelle müssen wir nun laut Forderung A) spezifizieren, welche Graphen in der Entwicklung (2.14) mitgenommen werden. Wir beschränken uns auf die einfachste, nichttriviale Möglichkeit und verwenden nur den ersten Term in Gl. (2.14), der linear in der Kopplungskonstanten G ist. Das entspricht der bekannten Hartree-Fock-Approximation (HFA) in der nichtrelativistischen Vielteilchenphysik.

Diese Vakuumblase in $V_2[S]$ setzt sich aus einem direkten Term und einem Austauschterm:

$$V_2[S] = (-)\frac{G}{2} \int d^4x \sum_{i=\{S,[1]_r,[1]_F\};\{P,[3]_r,[1]_F\}} [S_{ab}(x,x)\mathcal{V}_{ba}^{(i)} S_{cd}(x,x)\mathcal{V}_{dc}^{(i)} + S_{ab}(x,x)\mathcal{V}_{bc}^{(i)} S_{cd}(x,x)\mathcal{V}_{da}^{(i)}] \quad (2.19)$$

zusammen. Hierbei wurde abkürzend $\mathcal{V}^{(S,[1]_r,[1]_F)} = \mathcal{I}_\gamma \mathcal{I}_\tau \mathcal{I}_F$ für den skalar-isoskalaren und $\mathcal{V}^{(P,[3]_r,[1]_F)} = i\gamma_5 \vec{\tau} \mathcal{I}_F$ für den pseudoskalar-isovektoriellen Vertex⁶⁾ gesetzt. a, b, c, d sind Mehrfachindizes im Tensorraum $\gamma \otimes \tau \otimes F$, über die summiert wird, wenn sie doppelt auftreten.

⁶⁾Beide sind Singulets $[1]_F$ im Farbraum



Die (ab) -Komponente der Selbstenergie Σ_{ab} ergibt sich damit im Ortsraum zu:

$$\Sigma_{ab}(x, y) = (+i) \frac{\delta V_2[S]}{\delta S_{ab}(x, y)} = -2i \frac{G}{2} \delta(x - y) S_{cd}(x, x) \sum_{i=\{S, [1]_\tau, [1]_F\}; \{P, [3]_\tau, [1]_F\}} [\nu_{ba}^{(i)} \nu_{dc}^{(i)} + \nu_{bc}^{(i)} \nu_{da}^{(i)}] \quad (2.20)$$

Es ist vorteilhaft, den Austauschterm $\nu_{bc}^{(i)} \nu_{da}^{(i)}$ mittels Fierz-Transformation in einen direkten Term $\nu_{ba}^{(i)} \nu_{dc}^{(i)}$ zu verwandeln.⁷⁾

$$\sum_{i=\{S, [1]_\tau, [1]_F\}; \{P, [3]_\tau, [1]_F\}} [\nu_{ba}^{(i)} \nu_{dc}^{(i)} + \nu_{bc}^{(i)} \nu_{da}^{(i)}] = \sum_k 2g(k) \nu_{ba}^{(k)} \nu_{dc}^{(k)} \quad (2.21)$$

wobei k über alle Elemente der Basis des Tensorraums $\gamma \otimes \tau \otimes F$ läuft und $g(k)$ den entsprechenden Fierz-Koeffizienten bezeichnet [NJ61, BJ87, BJ88, Lut89, KL90]. Nach Fouriertransformation

$$\Sigma_{ab}(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \Sigma_{ab}(p)$$

erhält man im Impulsraum:

$$\Sigma_{ab}(p) = -2iG \sum_k g(k) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \nu_{ba}^{(k)} [\text{Tr}_{\gamma, \tau, F} S(q) \nu^{(k)}] \quad (2.22)$$

Man sieht, daß in der HFA die Selbstenergie $\Sigma(p)$ und damit auch die dynamische Masse $M(p)$ impulsunabhängig sind. In der Spurbildung in Gl. (2.22) trägt nur der skalar-isoskalare Anteil $k = (S, [1]_\tau, [1]_F)$ mit $\nu^{(k)} = \mathcal{I}_\gamma \mathcal{I}_\tau \mathcal{I}_F$ bei. Dessen Fierzkoeffizient $g(k)$ liefert zusammen mit der Spurbildung über die Matrizen den Faktor $(2nN_F + 1) = 13$ [Ber86], der nichts anderes als die Summe der relativen statistischen Gewichte von direktem Term und Austauschterm darstellt, was man auch anschaulich erwartet (Freiheitsgrade: Spin 2, Isospin: $n = 2$, Farbe: N_F). Damit erhalten wir schließlich:

$$\Sigma_{ab} = \delta_{ab} \Sigma$$

⁷⁾Wir gehen hier zur Summe aus $\mathcal{L}_{int}$ und seiner Fierz-Transformierten über.

wobei Σ die sog.

Gap-Gleichung:

$$\begin{aligned}\Sigma &= M - m_0 = (-i)2Gg[k = (S, [1]_\tau, [1]_F)] \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Tr}_{\gamma, \tau, F} S(q) \\ &= (-i)G' \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Tr}_{\gamma, \tau, F} S(q) \\ &= (-i)(8N_F)G' \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{M}{q^2 - M^2 + i\epsilon}\end{aligned}\quad (2.23)$$

mit

$$G' = \frac{2(4N_F + 1)}{8N_F} G \quad (2.24)$$

erfüllt.

Das Impulsintegral ist quadratisch divergent und muß gemäß Forderung B) mit einem Regularisierungsschema und einem endlichen UV-Abschneideparameter Λ versehen werden. Wir werden später spezielle Formen von verschiedenen Regularisierungsmethoden und deren quantitative Effekte diskutieren. Da wir hier nur qualitativ den Mechanismus der DCSB demonstrieren wollen, schneiden wir einfach das Integral nach Transformation in den euklidischen Raum (Wick-Rotation $k_M^0 = (-i)k_E^4$) (siehe Anhang A)) $O(4)$ -invariant scharf ab, das heißt wir setzen:

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} f(p_E^2) \rightarrow \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} f(p_E^2) \theta(\Lambda^2 - p_E^2) \quad (2.25)$$

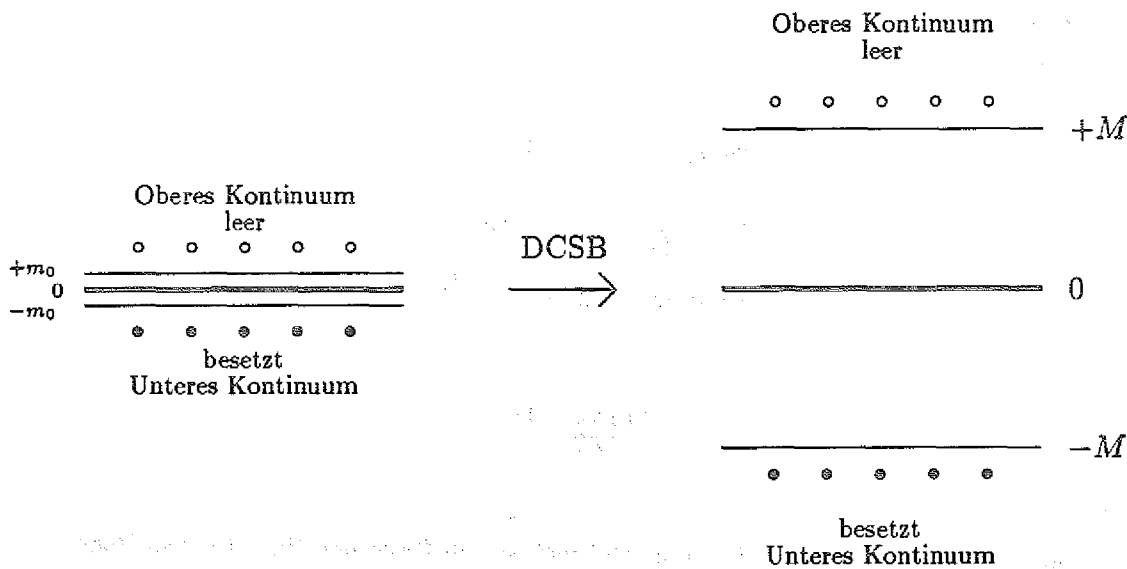
Dies liefert:

$$M - m_0 = (8N_F)G' \int \frac{d^4q_E}{(2\pi)^4} \frac{M}{q_E^2 + M^2} \theta(\Lambda^2 - q_E^2) = (8N_F)G' \frac{1}{16\pi^2} M \left[\Lambda^2 - M^2 \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}\right) \right] \quad (2.26)$$

Obige Gleichung, die eine selbstkonsistente Bestimmung für die Masse M darstellt, hat immer die triviale Lösung $M = 0$. Existiert nur diese, so ist die chirale Symmetrie auch im Vakuum (abgesehen von der kleinen endlichen Strommasse m_0) nicht gebrochen (Wigner-Weyl-Phase). Falls $G'\Lambda^2$ jedoch einen kritischen Wert

$$G'\Lambda^2 > (G'\Lambda^2)_{\text{krit}} = \frac{16\pi^2}{(8N_F)} \quad (\text{falls } m_0 = 0) \quad (2.27)$$

überschreitet, können die Quarks eine endliche, dynamische Masse M als Lösung von Gl. (2.23) erhalten, welche die chirale Symmetrie im Vakuum bricht (Nambu-Goldstone-Phase) (DCSB). Im Diracspektrum tritt dadurch eine Lücke (Gap) der Größe $2M$ auf und der Grundzustand (aufgefüllter Diracsee) erscheint um den Betrag $-M$ abgesenkt. Er liegt somit energetisch niedriger als im Falle $M = 0$ und stellt daher tatsächlich das Vakuum dar. M wird als Konstituentenmasse bezeichnet und kann je nach den Werten von $G\Lambda^2$ wesentlich größer als die Strommasse m_0 sein. Dadurch eröffnet sich die Möglichkeit aus $N_F = 3$ Quarks ein Elementarteilchen mit der Masse des Nukleons aufzubauen.



2.3. DAS PION ALS GEBUNDENER QUARK-ANTIQUARK-ZUSTAND

Die BSG im chiralen Limes: Das Pion als Goldstone-Boson

Die zweite wichtige Eigenschaft des NJL-Modells, die im Zusammenhang mit der DCSB steht, ist das Auftreten eines gebundenen $q - \bar{q}$ -Zustands mit den Quantenzahlen eines Pions π ($S = 0^-$, $T = 1$), dessen Masse im chiralen Limes $m_0 = 0$ verschwindet.

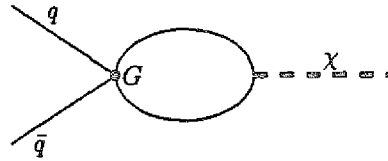
Allgemein erfüllt die Wellenfunktion χ eines relativistischen gebundenen mesonischen Zustandes m im $q - \bar{q}$ -Kanal am Vertex $\mathcal{V}$, der die invariante Masse μ besitzt, die entsprechende homogene Bethe-Salpeter-Gleichung (BSG) am Punkte $k^2 = \mu^2$ [Lur68]:

$$\chi(k) = G\mathcal{V}(-i) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [K(p, k) \mathcal{V} S \chi(p)] \Big|_{k^2 = \mu^2} \quad (2.28)$$

Der Bethe-Salpeter-Kern $K(p, k)$ lautet in der sogenannten Leiterapproximation:

$$K(p, k) = X(k) = G + G^2 + G^3 + \dots \quad (2.29)$$

Wie in der Schleifenentwicklung des effektiven Potentials sind auch hier die auftretenden Ausdrücke divergent, und es muß spezifiziert werden, welche Graphen mitgenommen werden, und wie diese zu regularisieren sind. Analog zur HFA in $V[S]$ brechen wir auch hier nach dem ersten Term



welcher linear in G ist ab (Leiterapproximation in 1.Stufe) und setzen für $S^{-1}(p)$ den Propagator der HFA mit der durch die Gap-Gleichung (2.23) bestimmten Masse M : $S^{-1}(p) = \not{p} - M$ ein. Die BSG nimmt dann die Form:

$$\chi(k) = G \mathcal{V}(-i) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[S \left(p - \frac{k}{2} \right) \mathcal{V} S \left(p + \frac{k}{2} \right) \chi(p) \right] \Big|_{k^2 = \mu^2} \quad (2.30)$$

an.

Die wichtige Beobachtung von Nambu und Jona-Lasinio ist nun die Folgende:

Falls die Quarkstrommasse $m_0 = 0$, d.h.: $\mathcal{L}_{NJL}$ voll chiral invariant ist (sog. chiraler Limes), folgt die BSG für $m = \bar{\pi}$ und $\mathcal{V} = i\vec{\tau}\gamma_5$ aus der Gap-Gleichung unter Verwendung der chiralen Symmetrie und hat eine Lösung am Punkte $k^2 = m_\pi^2 = 0$.

Das $\bar{\pi}$ erscheint also als masseloses Goldstone-Boson der DCSB (vgl Kapitel 1).

Um dies zu zeigen, müssen wir von der Manifestation der chiralen Symmetrie in der quantisierten Theorie ausgehen. Dies geschieht in den sog. Ward-Identitäten, welche eine Verallgemeinerung des klassischen Noether-Theorems auf Quantenniveau darstellen. Für den axialen Vertex lautet diese (siehe Anhang B):

$$k_\lambda \bar{\Gamma}_5^\lambda(p, k) = S^{-1} \left(p + \frac{k}{2} \right) \frac{\vec{\tau}}{2} \gamma_5 + \frac{\vec{\tau}}{2} \gamma_5 S^{-1} \left(p - \frac{k}{2} \right) \quad (2.31)$$

wobei S^{-1} den inversen Quarkpropagator und $\bar{\Gamma}_5^\lambda(p, k)$ die irreduzible axiale 1-Teilchen-Vertexfunktion bezeichnen. Setzt man für S^{-1} den Ausdruck (2.17) ein, so wird die Ward-Identität (2.31) zu:

$$k_\lambda \bar{\Gamma}_5^\lambda(p, k) = \not{k} \gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} - \left[\Sigma \left(p + \frac{k}{2} \right) \frac{\vec{\tau}}{2} \gamma_5 + \frac{\vec{\tau}}{2} \gamma_5 \Sigma \left(p - \frac{k}{2} \right) \right] \quad (2.32)$$

An dieser Stelle wird nun die Gap-Gleichung (2.23) für Σ (was hier als Diagonalmatrix aufzufassen ist) eingesetzt. Man erhält:

$$\begin{aligned} k_\lambda \bar{\Gamma}_5^{\lambda a}(q, k) &= \not{k} \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} + iG' \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ \left[\text{Tr} S(p) \right] \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 + \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \left[\text{Tr} S(p) \right] \right\} \\ &= \not{k} \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} + iG' \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ \left[\text{Tr} S \left(p - \frac{k}{2} \right) \right] + \left[\text{Tr} S \left(p + \frac{k}{2} \right) \right] \right\} \\ &= \not{k} \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} + \\ &\quad + iG' \frac{\vec{\tau}}{2} \gamma_5 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ S \left(p - \frac{k}{2} \right) \vec{\tau} \gamma_5 S \left(p + \frac{k}{2} \right) \cdot \left[S^{-1} \left(p + \frac{k}{2} \right) \gamma_5 \tau^a + \gamma_5 \tau^a S^{-1} \left(p - \frac{k}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Hierbei ist $\text{Tr} = \text{Tr}_{\gamma\tau F}$. Außerdem wurde von der Flavourediagonalität von Σ und S sowie der Identität $[\text{Tr}_\tau \tau^a \tau^b]_{\tau^b} = \tau^a [\text{Tr}_\tau \mathcal{I}_\tau]$ Gebrauch gemacht. Setzt man erneut Gl. (2.31) ein, so ergibt sich die inhomogene Integralgleichung:

$$k_\lambda \Gamma_5^{\lambda a}(q, k) = k_\lambda \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} + 4iG' \frac{\vec{\tau}}{2} \gamma_5 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ S\left(p - \frac{k}{2}\right) \frac{\vec{\tau}}{2} \gamma_5 S\left(p + \frac{k}{2}\right) k_\lambda \Gamma_5^{\lambda a}(p, k) \right\} \quad (2.33)$$

Sei zunächst $k_\mu = 0 \quad \forall \mu$. Aus Gl. (2.33) und Gl. (2.32) folgt dann, daß

$$k_\lambda \Gamma_5^{\lambda a}(p, k)|_{k=0} = \frac{1}{N} \cdot \left\{ \gamma_5 \frac{\tau^a}{2}, \Sigma(p) \right\} = \frac{1}{N} M \gamma_5 \tau^a \quad (2.34)$$

($\{, \}$: Antikommutator) die homogene Gleichung

$$k_\lambda \Gamma_5^{\lambda a}(q, k)|_{k=0} = 4iG' \frac{\vec{\tau}}{2} \gamma_5 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ S\left(p - \frac{k}{2}\right) \frac{\vec{\tau}}{2} \gamma_5 S\left(p + \frac{k}{2}\right) k_\lambda \Gamma_5^{\lambda a}(p, k) \Big|_{k=0} \right\} \quad (2.35)$$

erfüllt. $\Gamma_5^{\lambda a}(p, k)$ muß demnach an der Stelle $k = 0$ einen einfachen Pol haben und aus Gründen der Lorentzinvarianz die Form

$$\Gamma_5^{\lambda a}(p, k) = \frac{k^\lambda}{k^2} I^a(p, k^2)$$

annehmen, wobei I regulär ist. Daher ist $k_\lambda \Gamma_5^{\lambda a}(p, k)$ eine Funktion von k^2 und die Behauptung gilt auch für $k^2 = 0$. Damit ist gezeigt, daß

$$\vec{\Pi} := k_\lambda \vec{\Gamma}_5^\lambda(p, k)|_{k^2=0} = \frac{1}{N} \cdot \left\{ \gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2}, \Sigma(p) \right\} = \frac{1}{N} M \gamma_5 \vec{\tau} \quad (2.36)$$

die allgemeine Lösung der

Bethe-Salpeter-Gleichung:

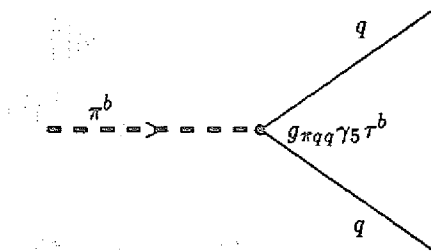
$$\Pi^a = \vec{\tau} \gamma_5 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ S\left(p - \frac{k}{2}\right) iG' \vec{\tau} \gamma_5 S\left(p + \frac{k}{2}\right) \Pi^a \right\} \quad (2.37)$$

am Punkte $k^2 = 0$ darstellt, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Die Normierungskonstante N in Gl. (2.36) wird üblicherweise so festgelegt, daß für die Kopplungsstärke $g_{\pi qq}$ der Wellenfunktion $\vec{\Pi}$ des Pions an die Quarks:

$$g_{\pi qq} = \frac{M}{f_\pi} \quad (2.38)$$

(f_π : Pionzerfallskonstante) gilt.



Dies ist ein einfaches Resultat der Stromalgebra (PCAC) und kann auf folgende Weise hergeleitet werden:

Das Matrixelement des axialen Vektorstroms $A_\mu^a(x) = \bar{q}(x)\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^a}{2}q(x)$ (siehe Anhang B) zwischen zwei 1-Quarkzuständen ist:

$$\langle q(p_1)|A_\mu^a(x)|q(p_2)\rangle = e^{ikx}\bar{u}(p_1)\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^a}{2}u(p_2) \quad (2.39)$$

mit: $k = p_1 - p_2$

Hierbei symbolisiert $u(p)$ den Dirac-Spinor eines freien Teilchens mit Masse M und 4-er Impuls p . Die Divergenz von $A_\mu^a(x)$ lautet damit:

$$\langle q(p_1)|\partial^\mu A_\mu^a(x)|q(p_2)\rangle = ik^\mu e^{ikx}\bar{u}(p_1)\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^a}{2}u(p_2) = iM e^{ikx}\bar{u}(p_1)\gamma_5\frac{\tau^a}{2}u(p_2) \quad (2.40)$$

wobei für die letzte Identität die freie Dirac-Gleichung $\not{p} - M = 0$ verwendet wurde.

Andererseits ist aber wegen der PCAC-Relation $\partial^\mu A_\mu^a(x) = -m_\pi^2 f_\pi \pi^a(x)$:

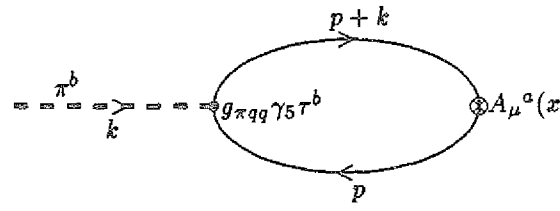
$$\langle q(p_1)|\partial^\mu A_\mu^a(x)|q(p_2)\rangle = -m_\pi^2 f_\pi \langle q(p_1)|\pi^a(x)|q(p_2)\rangle = -m_\pi^2 f_\pi \bar{u}(p_1)\gamma_5\frac{\tau^a}{2}u(p_2)e^{ikx}\frac{1}{k^2 - m_\pi^2}ig_{\pi qq} \quad (2.41)$$

nach den Feynman-Regeln für die effektive Quark-Pion Yukawa-Wechselwirkung $\mathcal{L}_{\pi qq} = -g_{\pi qq}\bar{q}(x)i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5 q(x)$.

Für $k = 0$ ($p_1 = p_2$) ergibt sich durch Vergleich der beiden Ausdrücke Gl. (2.40, 2.41) die Behauptung Gl. (2.38).

Aus Gl. (2.36) liest man unmittelbar $N = f_\pi$ ab.

Schwacher Pionzerfall Wir können nun die Feynman-Amplitude $F_\pi(k)$ für den schwachen axialen Zerfall des Pions $\pi^\pm \rightarrow l^\pm + \bar{\nu}_l$ in ein Lepton l (e, μ) in unserer Approximation (HFA bzw. BS-Leiterapproximation) berechnen.



$$= \pi^b = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \text{Tr}_{\gamma\tau F} \left\{ \frac{\tau^a}{2} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{\not{p} - M} \tau^b \gamma_5 \frac{1}{\not{p} + \not{k} - M} \right\} \quad (2.42)$$

A_μ^a symbolisiert dabei den äußeren, axialen Strom der schwachen Wechselwirkung,⁸⁾ welcher nach der PCAC-Hypothese identisch mit dem axialen Strom aus Gl. (2.5) $\bar{q}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^a}{2}q$ ist.

Die Amplitude $F_\pi(k)$ ist durch:

$$\langle 0|A_\mu^a(x)|\pi^b(k)\rangle = iF_\pi(k)k_\mu\delta^{ab}e^{-ikx} \quad (2.43)$$

mit $F_\pi(0) = f_\pi = 93\text{MeV}$ definiert. Anwendung der Feynman-Regeln auf den Graphen Gl. (2.42) ergibt:

$$\begin{aligned} \langle 0|A_\mu^a(x)|\pi^b(k)\rangle &= \langle 0|\bar{q}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^a}{2}q|\pi^b(k)\rangle = g_{\pi qq} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \text{Tr}_{\gamma\tau F} \left\{ \frac{\tau^a}{2} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{\not{p} - M} \tau^b \gamma_5 \frac{1}{\not{p} + \not{k} - M} \right\} \\ &= 4N_F g_{\pi qq} M \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 - M^2][(p+k)^2 - M^2] + i\epsilon} k_\mu \delta^{ab} e^{-ikx} \end{aligned} \quad (2.44)$$

⁸⁾Dieser besteht aus geladenen W -Bosonen, die nach der Theorie der schwachen Wechselwirkung an die Quarks $q, \bar{q}$ sowie das Lepton l mit dem entsprechenden Neutrino $\bar{\nu}_l$ koppeln.

Vergleich mit Gl. (2.43) liefert schließlich:

$$\begin{aligned} F_\pi(k) &= 4N_F \frac{M^2}{f_\pi} (-i) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 - M^2][(p+k)^2 - M^2] + i\epsilon} \\ &= 4N_F \frac{M^2}{f_\pi} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p_E^2 + M^2][(p_E + k_E)^2 + M^2]} \end{aligned} \quad (2.45)$$

und speziell für $k = 0$:

$$f_\pi^2 = 4N_F M^2 \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p_E^2 + M^2]^2} \quad (2.46)$$

Die Integrale in Gl. (2.45) bzw. Gl. (2.46) sind logarithmisch divergent und müssen ebenfalls regularisiert werden. Für das Integral in Gl. (2.46) kann man direkt die Vorschrift aus Gl. (2.25) verwenden, da dieses nur von p_E^2 abhängt. Die Regularisierungsvorschrift für Gl. (2.45) ist zunächst noch offen. Sie wird sich aber gleich aus den folgenden Überlegungen ergeben.

Endliche Quarkstrommasse; Massive Pionen

Falls $m_0 \neq 0$ ist die chirale Symmetrie explizit gebrochen, und die BSG ist nicht mehr äquivalent zur Gap-Gleichung. Die Existenz eines Pions der Masse $m_\pi = 139\text{MeV}$ als Lösung der BSG liefert daher als neue Bedingung einen Zusammenhang zwischen m_0 und m_π^2 :

Soll

$$\tilde{\Pi} := k_\lambda \tilde{\Gamma}_5^\lambda(p, k)|_{k^2=m_\pi^2} = \frac{1}{N} \cdot \{\gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2}, \Sigma(p)\} = \frac{M}{f_\pi} \gamma_5 \vec{\tau} \quad (2.47)$$

die BSG

$$\Pi^a = \vec{\tau} \gamma_5 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ S\left(p - \frac{k}{2}\right) iG' \vec{\tau} \gamma_5 S\left(p + \frac{k}{2}\right) \Pi^a \right\} \Big|_{k^2=m_\pi^2} \quad (2.48)$$

erfüllen, so ergibt sich nach Einsetzen von Gl. (2.47) in Gl. (2.48), Bildung der Matrixspuren und Transformation in den euklidischen Raum nach simpler Rechnung:

$$1 = 8N_F G' \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^2 - \frac{k_E^2}{4} + M^2}{[(p_E - \frac{1}{2}k_E)^2 + M^2][(p_E + \frac{1}{2}k_E)^2 + M^2]} \Big|_{k_E^2 = -m_\pi^2} =: 8N_F G' J(k_E^2) \Big|_{k_E^2 = -m_\pi^2} \quad (2.49)$$

Für die Regularisierung von $J(k_E^2)$ ⁹⁾ fordern wir, daß im chiralen Limes ($m_0 \rightarrow 0$) die Gap-Gleichung und damit wieder die BSG für $m_\pi = 0$ folgt. Dies kann erreicht werden, wenn man zunächst im unregularisierten Integral eine Verschiebung der Integrationsvariablen

⁹⁾Explizites Ausrechnen des Nenners zeigt, daß der Integrand in J nur von k_E^2 und p_E^2 abhängt.

$p'_E = p_E - \frac{1}{2}k_E$ durchführt und anschließend das Resultat geeignet aufspaltet:

$$\begin{aligned}
 J(k_E^2) &= \int \frac{d^4 p'_E}{(2\pi)^4} \frac{(p'_E + \frac{1}{2}k_E)^2 - \frac{k_E^2}{4} + M^2}{[p_E'^2 + M^2][(p'_E + k_E)^2 + M^2]} \\
 &= \int \frac{d^4 p'_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p'_E + k_E)^2 + M^2} + \int \frac{d^4 p'_E}{(2\pi)^4} \frac{p'_E k_E}{[p_E'^2 + M^2][(p'_E + k_E)^2 + M^2]} \\
 &= \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_E^2 + M^2} - \\
 &\quad - \frac{1}{2}k_E^2 \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p_E - \frac{1}{2}k_E)^2 + M^2][(p_E + \frac{1}{2}k_E)^2 + M^2]} \\
 &= J_1(k_E^2) - \frac{1}{2}k_E^2 J_2(k_E^2)
 \end{aligned}$$

Dabei haben in der vorletzten Zeile im 2.Summanden $p'_E = p_E - \frac{1}{2}k_E$ zurücks substituiert und anschließend $\int \frac{d^4 y}{(2\pi)^4} y^\mu f(y^2) = 0$ verwendet. J_1 und $J_2(k_E^2)$ sind abkürzend als:

$$J_1 := \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_E^2 + M^2} \quad (2.50)$$

und

$$J_2(k_E^2) := \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p_E - \frac{1}{2}k_E)^2 + M^2][(p_E + \frac{1}{2}k_E)^2 + M^2]} \quad J_2 := J_2(0) \quad (2.51)$$

definiert. Auf die gleiche Weise können wir auch das divergente Integral in Gl. (2.45) regularisieren, was dadurch identisch mit $J_2(k_E^2)$ ist.

Zusammenfassend ergibt sich:

$$1 = (8N_F G') [J_1 - \frac{1}{2}k_E^2 J_2(k_E^2)]|_{k_E^2 = -m_\pi^2} \quad (2.52)$$

Für $k_E^2 = -m_\pi^2 = 0$ geht Gl. (2.52) wie gefordert in die Gap-Gleichung (2.23) mit $m_0 = 0$ über. Im sogenannten Soft-Pion-Limes ($m_\pi^2 \ll M^2$), in dem alle Terme linear in m_π^2 mitgenommen werden, dürfen wir in Gl. (2.52) $J_2(k_E^2)$ durch $J_2 = J_2(0)$ ersetzen. Dieses Integral trat bereits schon in der Pionzerfallsamplitude Gl. (2.46) auf, und wir erhalten unter Verwendung der Gap-Gleichung (2.23) für endliches m_0 die Relation:

$$m_0 M = G' m_\pi^2 f_\pi^2 \quad (2.53)$$

2.4. ZUSAMMENFASSUNG: ADJUSTIERUNG DER PARAMETER

Abschließend wollen wir noch einmal kurz alle Parameter des Modells in dieser Approximation, sowie die Bedingungen, welche diese untereinander verknüpfen, zusammenstellen.

Wir haben insgesamt 5 Parameter:

- (a) Die 4-Quark-Kopplungskonstante G
- (b) Der UV-Abschneideparameter Λ
- (c) Die Quark-Strommasse m_0
- (d) Die Quark-Konstituentenmasse M bzw. die Vakuumselbstenergie Σ
- (e) Die Normierungskonstante N der BS-Vertexfunktion in Gln. (2.36, 2.47)

Diese unterliegen den 4 Bedingungen:

1. Gap-Gleichung Gl. (2.23):

$$\begin{aligned}\Sigma = M - m_0 &= (-i)G' \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr}_{\gamma, \tau, F} S(q) \\ &= (-i)(8N_F)G' \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{M}{q^2 - M^2 + i\epsilon}\end{aligned}$$

2. Adjustierung von F_π auf seinen experimentellen Wert $F_\pi(m_\pi^2) = 93\text{MeV}$ Gl. (2.45):

$$\begin{aligned}F_\pi(k^2) &= 4N_F \frac{M^2}{f_\pi} (-i) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 - M^2][(p+k)^2 - M^2] + i\epsilon} \\ &= 4N_F \frac{M^2}{f_\pi} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p_E^2 + M^2][(p_E + k_E)^2 + M^2]}\end{aligned}$$

oder im chiralen Limes ($k^2 = m_\pi^2 = 0$) Gl. (2.46):

$$f_\pi^2 = 4N_F M^2 \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p_E^2 + M^2]^2}$$

3. Nach einem Resultat der Stromalgebra (PCAC) soll der Quark-Pion-Vertex auf $\frac{M}{f_\pi} \vec{\tau} \gamma_5$ normiert sein, was die Konstante N auf $N = f_\pi$ festlegt.

4. Adjustierung von m_π auf seinen experimentellen Wert 139MeV Gl. (2.52):

$$1 = (8N_F G') \left[J_1 - \frac{1}{2} k_E^2 J_2(k_E^2) \right] \Big|_{k_E^2 = -m_\pi^2}$$

oder im Soft-Pion-Limes ($m_\pi^2 \ll M^2$) Gl. (2.53):

$$m_0 M = G' m_\pi^2 f_\pi^2$$

Die Integrale J_1 und J_2 sind quadratisch bzw. logarithmisch divergent und werden in einem spezifizierten Regularisierungsschema mit dem Abschneideparameter Λ regularisiert. Man überzeugt sich leicht, daß einer der Parameter G, Λ, M frei gewählt und alle anderen mit Hilfe obiger Gleichungen berechnet werden können.

3. BOSONISIERUNG – EFFEKTIVE CHIRALE WIRKUNG

3.1. DAS BOSONIERTE NAMBU–JONA-LASINIO-MODELL

Das NJL-Modell ist aufgrund der 4-Fermion Punktwechselwirkung eine hochgradig divergente Theorie. Mit jeder zunehmenden Ordnung in der Kopplungskonstanten G erhält man einen Graphen mit höherem Divergenzgrad, so daß es sehr problematisch ist, über die HFA hinauszugehen. Die Idee der Bosonisierung besteht darin, die hochgradig divergente 4-Quark Punktwechselwirkung durch Umsummation der Graphen in eine Quark-Meson-Wechselwirkung vom Yukawa-Typ umzuformen, die nur mehr eine endliche Anzahl von Divergenzen enthält [Egu76]. Formal kann dies sehr schön mit Hilfe des Pfadintegralformalismus bewerkstelligt werden.

Dazu setzen wir die Funktionalidentität¹⁰⁾

$$1 = \int D\sigma D\vec{\pi} \exp \left\{ -i \int d^4x \frac{\mu^2}{2} \left[\left(\sigma + \frac{g}{\mu^2} (\bar{q}q - \frac{M_0}{G}) \right)^2 + \left(\vec{\pi} + \frac{g}{\mu^2} \bar{q} i \vec{\tau} \gamma_5 q \right)^2 \right] \right\} \quad (3.1)$$

in den Ausdruck für das erzeugende Funktional Z_{NJL} (2.8)

$$Z_{NJL} = \int Dq D\bar{q} e^{i \int d^4x \left\{ \bar{q} (i \not{D} - m_0) q + \frac{G}{2} [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q} i \gamma_5 \vec{\tau} q)^2] \right\}} \quad (3.2)$$

ein und erhalten:

$$Z'_{NJL} = \int D\bar{q} Dq D\sigma D\vec{\pi} e^{i \int d^4x \mathcal{L}'_{NJL}(x)} \quad (3.3)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{NJL} &= \bar{q} i D q - \frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{m_0 \mu^2}{g} \sigma \\ iD &= i \not{D} - g(\sigma + i \vec{\pi} \cdot \vec{\tau} \gamma_5) \end{aligned} \quad (3.4)$$

und:

$$G = g^2 / \mu^2 \quad (3.5)$$

Bei den Bosonfeldern σ und $\vec{\pi}$ handelt es sich um nicht-dynamische Hintergrundfelder, die aus kollektiven Quark-Antiquark-Zuständen im skalar-isoskalaren (σ) bzw. pseodoskalar-isovektoriellen ($\vec{\pi}$) Kanal bestehen.

$\mathcal{L}'_{NJL}$ bleibt invariant unter der chiralen $SU(2)_V \otimes SU(2)_A$ -Transformation Gln. (2.3, 2.4), falls sich σ und $\vec{\pi}$ gleichzeitig wie:

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow \sigma + 2\vec{\beta} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\pi} &\rightarrow \vec{\pi} - 2\vec{\beta} \sigma + 2\vec{\alpha} \times \vec{\pi} \end{aligned} \quad (3.6)$$

transformieren. Entsprechend ergeben sich wieder zunächst auf klassischem Niveau (d.h.: für klassische $q, \bar{q}, \sigma, \vec{\pi}$) die Noetherströme $\vec{V}_\mu$ und $\vec{A}_\mu$, die die gleiche Form wie in Gl. (2.5) annehmen.

¹⁰⁾Feldunabhängige unendliche Konstanten werden im folgenden unterdrückt.

Natürlich macht eine solche Umordnung nur Sinn, wenn spezifiziert wird, in welcher Approximation die neue Theorie behandelt werden soll. Wir werden uns im folgenden auf klassische Felder σ und $\vec{\pi}$ (Hartree-Approximation) beschränken oder anders ausgedrückt, wir führen eine stationäre Phasenapproximation (SPA) nullter Ordnung bezüglich σ und $\vec{\pi}$ durch. Das bedeutet, daß die Funktionalintegration $\int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\vec{\pi}$ wegfällt. Demgegenüber werden die Quark-1-Schleifen-Beiträge voll in Betracht gezogen, das heißt das Integral $\int \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q}$ wird exakt ausgeführt und alle damit verbundenen Effekte werden berücksichtigt.

Wir werden zeigen, daß diese Behandlung äquivalent zur HFA des 4-Quark NJL ist, falls der Austauschterm vernachlässigt (d.h.: $G' \rightarrow G$ ersetzt) wird und der Soft-Pion-Limes gilt. Dazu müssen wir erklären, wie sich die Eigenschaften des mesonischen Sektors (z.B.: m_π , f_π) innerhalb des bosonisierten Modells beschreiben lassen. Hierbei liegt es nahe das kollektive Hintergrundfeld $\vec{\pi}$ mit dem physikalischen Pion (im klassischen Grenzfall) zu identifizieren. Dies erfordert die Zuordnung dynamischer Eigenschaften zu σ und $\vec{\pi}$ durch Polarisierung des Diracsees.

Die Korrespondenz:

$$\begin{array}{ccc} 4\text{-Punkt NJL} & \Longleftrightarrow & \text{bosonisiertes NJL} \\ \text{HFA} & & \text{SPA } (\sigma, \vec{\pi} \text{ klass.}) \end{array}$$

impliziert, daß sich die SCSB, die im 4-Punkt NJL dynamisch durch Quanteneffekte in der HFA erfolgte, in der bosonisierten Version bereits auf klassischem Niveau (in σ und $\vec{\pi}$) äußert. So erkennt man aus Gl. (3.4) sofort, daß jeder endliche Vakuumerwartungswert für das klassische σ -Feld, σ_V , den Quarks eine endliche Konstituentenmasse

$$M = g\sigma_V \quad (3.7)$$

verschafft. Die Werte für σ_V und $\vec{\pi}_V$ sind dabei zunächst noch offen, sie werden sich aber durch die Bestimmung der mesonischen Eigenschaften innerhalb des Vakuumsektors ergeben. Da das Vakuum auf jeden Fall translations- und paritätsinvariant sein soll, sieht man bereits hier, daß σ_V konstant ist und

$$\vec{\pi}_V = 0 \quad (3.8)$$

gilt.

3.2. INTEGRATION ÜBER DIE QUARKFELDER – EFFEKTIVE CHIRALE WIRKUNG

Der Quarkanteil $\bar{q}iDq$ in Gl. (3.4) ist bilinear in q und $\bar{q}$, so daß das Funktionalintegral darüber analytisch ausgeführt werden kann. Nach Transformation in den euklidischen Raum (siehe Anhang A) erhält man:

$$Z_{NJL}'' = \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\vec{\pi} e^{-S_{eff}(\sigma, \vec{\pi})} \quad (3.9)$$

Wie bereits erwähnt wurde, entfällt die Integration $\int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\vec{\pi}$, wenn wir uns auf klassische σ und $\vec{\pi}$ beschränken.

Die effektive chirale Wirkung (ECW) $S_{eff}(\sigma, \vec{\pi})$ setzt sich aus der Fermiondeterminante $S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi})$ und einem trivialen mesonischen Anteil $S_{eff}^M(\sigma, \vec{\pi})$ sowie dem chiral brechenden Term $S_{eff}^{br}(\sigma, \vec{\pi})$ zusammen:

$$\begin{aligned} S_{eff}(\sigma, \vec{\pi}) &= S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}) + S_{eff}^M(\sigma, \vec{\pi}) + S_{eff}^{br}(\sigma, \vec{\pi}) \\ S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}) &= (-) \ln \det(-iD) = (-) \text{Spln}(-iD) \\ S_{eff}^M(\sigma, \vec{\pi}) &= \frac{\mu^2}{2} \int d^4x_E (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \\ S_{eff}^{br}(\sigma, \vec{\pi}) &= -\frac{m_0 \mu^2}{g} \int d^4x_E \sigma \end{aligned} \quad (3.10)$$

Sp bezeichnet die Spur im Funktional- und Matrixraum:

$$\text{Sp} A = \int d^4x \text{Tr}_{\gamma\tau F} \langle x | A | x \rangle = \int d^4k \text{Tr}_{\gamma\tau F} \langle k | A | k \rangle \quad (3.11)$$

Durch Abziehen des Vakuumwertes $S_{eff}(\sigma, \vec{\pi})|_V$ erreicht man Normalordnung bezüglich des Vakuums der SCSB.

In 0-ter Ordnung SPA erfüllen σ und $\vec{\pi}$ die

Schwinger-Dyson-Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{eff}(\sigma, \vec{\pi})}{\delta \sigma} &= 0 \\ \frac{\delta S_{eff}(\sigma, \vec{\pi})}{\delta \vec{\pi}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

das heißt, σ und $\vec{\pi}$ sind stationäre Punkte der ECW.

Die Fermiondeterminante besteht im euklidischen Raum im allgemeinen aus einem Realteil:¹¹⁾

$$\Re S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}) = (-) \frac{1}{2} \text{Spln}(D^\dagger D) = (-) \ln |\det(-iD)| \quad (3.13)$$

und einem Imaginärteil:

$$\Im S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}) = (-) \text{arc}(-iD) \quad (3.14)$$

Wir werden uns im folgenden auf den Realteil $\Re S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi})$ beschränken, was für unsere Zwecke ausreichend ist, da wir im solitonischen Sektor statische Mesonfelder betrachten werden und der entsprechende 1-Teilchen-Hamiltonoperator $\hbar$ hermitesch ist. In diesem Fall verschwindet der Imaginärteil der ECW exakt (vgl. Anhang D):

$$\begin{aligned} \Im S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}) &= 0 \\ S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}) &= \Re S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dies gilt nicht mehr, bei der expliziten Ankopplung von zeitartigen Vektormesononen (Z.B.: ω -Mesonen), da dann $\hbar$ nicht mehr hermitesch ist. Eine kurze Diskussion des Imaginärteils einer allgemeinen ECW wird in Anhang D im Zusammenhang mit der chiralen Anomalie durchgeführt.

¹¹⁾ Die Polardarstellung einer komplexen Zahl z ist: $z = |z| e^{i \text{arc}(z)}$

Mit Hilfe der ECW läßt sich der Erwartungswert einer beliebigen bilinearen Dichte im Dirac-Isospin-Raum $\bar{q}(x)\mathcal{K}q(x)$ folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned}\langle \bar{q}(x)\mathcal{K}q(x) \rangle &= \frac{\int \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} e^{-\int d^4x_E \bar{q}(x)(-iD)q(x)} [\bar{q}(x)\mathcal{K}q(x)]}{\int \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} e^{-\int d^4x_E \bar{q}(x)(-iD)q(x)}} \\ &= \frac{\delta}{\delta \kappa(x)} \ln \int \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} e^{-\int d^4x_E \bar{q}(x)(-iD - \kappa(x)\mathcal{K})q(x)} \Big|_{\kappa(x)=0} \\ &= \frac{\delta}{\delta \kappa(x)} \text{Sp} \ln(-iD - \kappa(x)\mathcal{K}) \Big|_{\kappa(x)=0} \\ &= \langle x_E | \text{Tr}_{\gamma\tau F} [(iD)^{-1} \mathcal{K}] | x_E \rangle\end{aligned}\quad (3.16)$$

3.3. DIVERGENZEN

Wie bereits angedeutet wurde, hat die Bosonisierung die Eigenschaft, daß nur mehr eine endliche Anzahl von UV-Divergenzen auftritt. Um diese in explizit zu bestimmen, schreiben wir $S_{eff}(\sigma, \vec{\pi})$ unter Verwendung von Gl. (3.7) in der Form:

$$\begin{aligned}S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}) &= (-)^{\frac{1}{2}} \text{Sp} \ln D^\dagger D \\ &= (-)^{\frac{1}{2}} \text{Sp} \ln [-\partial_E^2 + M^2 + ig(\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5) + g^2(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \sigma_V^2)]\end{aligned}\quad (3.17)$$

Setzt man abkürzend:

$$\begin{aligned}G &= (-\partial_E^2 + M^2)^{-1} \\ V &= ig\vec{\phi}(\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5) + g^2(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \sigma_V^2)\end{aligned}\quad (3.18)$$

so ergibt sich:

$$S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{1}{2} \text{Sp} \ln G - \frac{1}{2} \text{Sp} \ln(1 + GV) \quad (3.19)$$

Der erste Term $\frac{1}{2} \text{Sp} \ln G$ ist eine unendliche Konstante, die nicht mehr von σ und $\vec{\pi}$ abhängt und daher nach Normalordnung verschwindet. Der zweite Term kann nach Potenzen von (GV)

$$\ln(1 + GV) = \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n+1} \frac{1}{n} (GV)^n \quad (3.20)$$

entwickelt werden. Im Impulsraum liefert die Bildung der Funktionalspur Sp ein Integral $\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4}$. Daraus schließt man, daß alle Terme mit $n \geq 3$ konvergent sind. Die Beiträge $n = 1$ und $n = 2$ lassen sich leicht explizit ausrechnen:

$n = 1$:

$$\begin{aligned}(-)^{\frac{1}{2}} \text{Sp}(GV) &= (-)^{\frac{1}{2}} \text{Tr}_{\gamma\tau F} \int d^4 k_E d^4 x_E d^4 x'_E \langle k_E | G | k_E \rangle \langle k_E | x_E \rangle \langle x_E | V | x'_E \rangle \langle x'_E | k_E \rangle = \\ &= (-) 4 N_F I_1(M) g^2 \int d^4 x_E (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \text{const.}\end{aligned}\quad (3.21)$$

mit dem quadratisch divergenten Integral:

$$I_1(M) = \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_E^2 + M^2} \quad (3.22)$$

$n = 2$:

$$\frac{1}{4}\text{Sp}(GV)^2 = \frac{1}{4}\text{Sp}(G^2V^2) + \frac{1}{4}\text{Sp}(G[V, G]V) \quad (3.23)$$

Der zweite Summand:

$$\frac{1}{4}\text{Sp}(G[V, G]V) = \frac{1}{8}\text{Sp}(G[G^{-1}, V]G)^2 = (-)\frac{1}{8}\text{Sp}(G[\partial^2, V]G)^2 \quad (3.24)$$

ist UV-konvergent.

Für den ersten Summanden benötigen wir zunächst:

$$\begin{aligned} V^2 &= g^4(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \sigma_V^2)^2 \\ &\quad - g^2[(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) + (\partial^\mu \vec{\pi})(\partial_\mu \vec{\pi})] \\ &\quad + \text{Terme die nach Tr - Bildung verschwinden} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\text{Sp}(G^2V^2) &= 2N_F g^4 I_2(M) \int d^4 x_E (\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \sigma_V^2)^2 - \\ &\quad 4N_F g^2 I_2(M) \int d^4 x_E \frac{1}{2} [(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) + (\partial^\mu \vec{\pi})(\partial_\mu \vec{\pi})] \end{aligned} \quad (3.26)$$

mit dem logarithmisch divergenten Integral:

$$I_2(M) = \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{k_E^2 + M^2} \right)^2 \quad (3.27)$$

Zusammenfassend lautet der Ausdruck für den fermionischen Anteil der ECW:

$$\begin{aligned} S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}) &= [(-)4N_F I_1(M)] g^2 \int d^4 x_E (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \\ &\quad + [2N_F g^4 I_2(M)] \int d^4 x_E (\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \sigma_V^2)^2 \\ &\quad + [(-)4N_F g^2 I_2(M)] \int d^4 x_E \frac{1}{2} [(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) + (\partial^\mu \vec{\pi})(\partial_\mu \vec{\pi})] \\ &\quad + \tilde{S}_{eff}(\sigma, \vec{\pi}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

wobei $\tilde{S}_{eff}(\sigma, \vec{\pi})$ UV-konvergent ist und aus Termen besteht, die von höherer Ordnung in den Gradienten ∂V oder in den Feldamplituden V als die divergenten Anteile sind. Eine systematische Entwicklung nach solchen Termen $(\partial V, V)$ kann im Rahmen der Heat-Kernel-Methode erfolgen und wird in Anhang C diskutiert.

Wie man sieht, enthält $S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi})$ zwei logarithmische Divergenzen $I_2(M)$ und eine quadratische Divergenz $I_1(M)$, welche innerhalb eines Regularisierungsschemas mit einem UV-Abschneideparameter Λ zu regularisieren sind. Wir werden verschiedene Möglichkeiten dazu im übernächsten Abschnitt untersuchen.

Die logarithmisch divergenten Terme sind proportional zur kinetischen Energie $[(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) + (\partial^\mu \vec{\pi})(\partial_\mu \vec{\pi})]$ sowie der Mexikanerhut-Selbstwechselwirkung $(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \sigma_V^2)^2$ der Mesonen. Dies sind

gerade die dynamischen Meson-Terme wie sie im linearen chiralen Sigma-Modell (CSM) [GL60] auftreten. Es ist uns also gelungen, aus den Quark-1-Schleifen Beiträgen den Feldern σ und $\vec{\pi}$, die zunächst als kollektive Hintergrundfelder agierten, dynamische Eigenschaften zuzuordnen und sie mit den physikalischen Mesonfeldern auf klassischem Niveau zu identifizieren. Die vor den Termen stehenden Proportionalitätsfaktoren werden sich im folgenden zusammen mit σ_V aus der Physik des mesonischen Sektors ergeben.

3.4. VAKUUMSEKTOR UND MESONISCHE EIGENSCHAFTEN - ADJUSTIERUNG DER PARAMETER

Der vollständige Ausdruck für die ECW $S_{eff}(\sigma, \vec{\pi})$ lautet unter Verwendung von Gl. (3.28) nach Normalordnung:

$$\begin{aligned} S_{eff}(\sigma, \vec{\pi}) - S_{eff}(\sigma, \vec{\pi})|_V = & \left[\frac{\mu^2}{2} - 4N_F g^2 I_1(M) \right] \int d^4 x_E (\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \sigma_V^2) \\ & + [2N_F g^4 I_2(M)] \int d^4 x_E (\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \sigma_V^2)^2 \\ & + [(-)4N_F g^2 I_2(M)] \int d^4 x_E \frac{1}{2} [(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) + (\partial^\mu \vec{\pi})(\partial_\mu \vec{\pi})] \\ & + \left(-\frac{m_0 \mu^2}{g} \right) \int d^4 x_E (\sigma - \sigma_V) \\ & + \tilde{S}_{eff}(\sigma, \vec{\pi}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

mit:

$$\begin{aligned} M &= g\sigma_V \\ I_k^\Lambda(M) &= \int^\Lambda \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p_E^2 + M^2} \right)^k, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Die Rücktransformation in den Minkowski-Raum erfolgt über:

$$\begin{aligned} S_{eff} &= \int d^4 x_E \mathcal{L}_E \\ S_M &= \int d^4 x_M \mathcal{L}_M \\ \mathcal{L}_M &= -\mathcal{L}_E \end{aligned} \quad (3.31)$$

Auch das bosonisierte Modell weist zunächst 5 Parameter auf:

- (a) μ^2
- (b) Die Quark-Meson-Kopplungskonstante g bzw. die Konstituentenquarkmasse M
- (c) Den UV-Abschneideparameter Λ
- (d) Die Quark-Strommasse m_0
- (e) Den Vakuumerwartungswert σ_V

Identifiziert man σ und $\vec{\pi}$ auf klassischem Niveau mit den Mesonfeldern des CSM, so ergeben sich für das Vakuum folgende Bedingungen:

1. Die Schwinger-Dyson-Gleichung Gl. (3.12) für das Vakuum liefert:

$$\mu^2 = 8N_F g^2 I_1(M) + \frac{m_0 \mu^2}{g\sigma_V} \quad (3.32)$$

Wie man durch Einsetzen von Gl. (3.5) sofort erkennt, ist dies nichts anderes als die Gap-Gleichung Gl. (2.23) falls der Austauschterm vernachlässigt wurde, was einer Ersetzung: $G' \rightarrow G$ entspricht.

Die Schwinger-Dyson-Gleichung für $\vec{\pi}_V$ ist wegen $\vec{\pi}_V = 0$ trivial erfüllt.

2. Die Divergenz des axialen Vektorstroms $A_\mu^a = \bar{q}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^a}{2}q$ beträgt:

$$\partial^\mu A_\mu^a = -\frac{m_0\mu^2}{g}\pi^a \quad (3.33)$$

Wie in Anhang B gezeigt wird, gilt dies nicht nur für klassische Felder $q, \bar{q}$, sondern auch für den quantenmechanischen Erwartungswert $\langle A_\mu^a \rangle$.

Ein Vergleich mit der PCAC-Relation Gl. (1.2) ergibt:

$$\frac{m_0\mu^2}{g} = m_\pi^2 f_\pi \quad (3.34)$$

3. Das Quadrat der Pionmasse m_π^2 ist klassisch durch die Krümmung der ECW in $\vec{\pi}_V$ gegeben. Anwendung von Gln. (3.29, 3.32, 3.34) liefert:

$$m_\pi^2 = \left. \frac{\delta^2 S_{eff}(\sigma, \vec{\pi})}{\delta \vec{\pi}^2} \right|_{\vec{\pi}_V} = \frac{m_0\mu^2}{g\sigma_V} = \frac{f_\pi}{\sigma_V} m_\pi^2 \quad (3.35)$$

woraus der Vakuumerwartungswert des σ -Feldes zu:

$$\sigma_V = f_\pi \quad (3.36)$$

folgt.

Weiter ist:

$$M = g f_\pi \quad (3.37)$$

und wegen Gl. (3.5) und Gl. (3.34):

$$\frac{m_0 M}{G} = m_\pi^2 f_\pi^2 \quad (3.38)$$

was man als die Beziehung Gl. (2.53) zwischen m_0 und m_π^2 im Soft-Pion-Limes für $G' \rightarrow G$ wiedererkennt.

Die entsprechende Massenbedingung für das σ -Feld lautet:

$$m_\sigma^2 = \left. \frac{\delta^2 S_{eff}(\sigma, \vec{\pi})}{\delta \sigma^2} \right|_{\sigma_V} = m_\pi^2 + 4[4N_F g^2 I_2^A(M)] M^2 \quad (3.39)$$

4. Der schwache Pionzerfall wird durch Ankopplung an ein äußeres axiales Feld beschrieben. Wie in Anhang B dargestellt ist, geschieht dies formal, indem man den Dirac-Operator $i\cancel{D}$ durch die kovariante Ableitung $i\cancel{D}(v, a)$ ersetzt:

$$\begin{aligned} i\cancel{D} &\rightarrow i\cancel{D}(v, a) = i\cancel{D} + i\cancel{D}(x) + i\cancel{D}(x)\gamma_5 \\ iD &\rightarrow i\Delta(v, a) = i\cancel{D}(v, a) - g(\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5) \\ v_\mu(x) &= (-i)v_\mu^a(x)\frac{\tau^a}{2} \\ a_\mu(x) &= (-i)a_\mu^a(x)\frac{\tau^a}{2} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$v_\mu^a(x)$ und $a_\mu^a(x)$ sind äußere Felder und rellwertig.

Damit berechnen wir wie im letzten Abschnitt die Polarisierung der Seequarks in niedrigster Ordnung $\partial\vec{\pi}$ und a_μ , was zu einer effektiven $\pi - a$ -Kopplung führt. Zunächst erhalten wir:

$$\Delta^\dagger \Delta = d_\mu d^\mu + M^2 + w(x) \quad (3.41)$$

mit:

$$\begin{aligned} d_\mu &= \partial_\mu + v_\mu + a_\mu \gamma_5 \\ w(x) &= ig\cancel{D}(\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}) + g^2(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \sigma_V^2) + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\Gamma_{\mu\nu} \\ \nabla_\mu \sigma &= \partial_\mu \sigma + [v_\mu, \sigma] - i\{a_\mu, (\vec{\tau}\vec{\pi})\} \\ \nabla_\mu (\vec{\tau}\vec{\pi}) &= \partial_\mu (\vec{\tau}\vec{\pi}) + [v_\mu, (\vec{\tau}\vec{\pi})] + i\{a_\mu, \sigma\} \\ \Gamma_{\mu\nu} &= [d_\mu, d_\nu] = F_{\mu\nu}^V + \gamma_5 F_{\mu\nu}^A \\ F_{\mu\nu}^V &= \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu + [v_\mu, v_\nu] + [a_\mu, a_\nu] \\ F_{\mu\nu}^A &= \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu + [v_\mu, a_\nu] + [a_\mu, v_\nu] \end{aligned} \quad (3.42)$$

Die effektive $\pi - a$ -Wechselwirkung liest man aus Gl. (3.28) ab, wenn man dort $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$, $v_\mu = 0$ und $\sigma = \sigma_V = f_\pi$ setzt. Das Ergebnis lautet:

$$\mathcal{L}_{\pi a} = [4N_F g^2 f_\pi I_2^\Lambda(M)] a_\mu^a(x) (\partial^\mu \pi^a(x)) + \dots \quad (3.43)$$

Die Pionzerfallskonstante $f_\pi = F_\pi(0)$ ist durch :

$$\mathcal{L}_{\pi a} = f_\pi a_\mu^a(x) (\partial^\mu \pi^a(x)) + \dots \quad (3.44)$$

definiert. Vergleich von (3.43) und (3.44) ergibt schließlich:

$$4N_F g^2 I_2^\Lambda(M) = 1 \quad (3.45)$$

was mit Bedingung Gl. (2.46) aus Kapitel 2 identisch ist.

Eine unmittelbare Folge davon ist, daß der kinetische Term der Mesonen in Gl. (3.28) die korrekte Normierung aufweist.

Die σ -Masse in Gl. (3.39) errechnet sich damit zu:

$$m_\sigma^2 = 4M^2 + m_\pi^2 \quad (3.46)$$

Einsetzen von Gln. (3.32, 3.34, 3.36, 3.45) in Gl. (3.29) ergibt schließlich für die ECW:

$$S_{eff}(\sigma, \vec{\pi}) - S_{eff}(\sigma, \vec{\pi})|_V \\ \int d^4x_E \left\{ (-)\frac{1}{2}[(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) + (\partial_\mu \vec{\pi})(\partial^\mu \vec{\pi})] + \frac{\lambda^2}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \nu^2)^2 - m_\pi^2 f_\pi \sigma \right\} \\ + \tilde{S}_{eff}(\sigma, \vec{\pi}) \quad (3.47)$$

mit:

$$\lambda^2 = \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{2f_\pi^2} \\ \nu^2 = f_\pi^2 - \frac{m_\pi^2}{\lambda^2} \\ m_\sigma^2 = 4(gf_\pi)^2 + m_\pi^2 \quad (3.48)$$

Zusammenfassend stellen wir fest, daß das bosonisierte NJL die gleiche Anzahl von Parametern wie die 4-Quark Wechselwirkung aufweist. Beide Parametersätze sind äquivalent und durch äquivalente Bedingungen miteinander verknüpft, sofern der Soft-Pion-Limes ($m_\pi^2 \ll M^2$) gilt und der Austauschterm der HFA vernachlässigt wird. Letzterer äußert sich nur in einer Renormierung der 4-Quark-Kopplungskonstanten G und wirkt sich daher nur auf die Bedingung Gl. (2.27), die das Auftreten einer DCSB-Phase bestimmt, aus. Da wir im folgenden grundsätzlich durch Wahl eines Wertes für die Konstituentenmasse M als freien Parameter bereits von einer Phase mit SCSB starten, sind derartige Feinheiten uninteressant, da sie ausschließlich die Zuordnung $G = G(M)$ betreffen. Außerdem sei bemerkt, daß wegen Gl. (2.24) $\frac{G'}{G} = \frac{13}{12}$ folgt, so daß der numerische Beitrag des Austauschterms im $SU(2)$ -Flavour-Sektor numerisch sehr klein ist. Er verschwindet exakt für $nN_F \rightarrow \infty$.

Der Vorteil der Bosonisierung liegt neben dem Auftreten nur mehr endlich vieler Divergenzen auch darin, daß zum einen der Ordnungsparameter M der SCSB unmittelbar aus der Lagrange-Funktion abgelesen werden kann und durch Angabe eines Regularisierungsschemas für $S_{eff}(\sigma, \vec{\pi})$ die Divergenzen in kompakter Weise behandelt werden können. Der Nachteil der Bosonisierung in dieser Näherung ist, daß es nicht möglich ist, Aussagen über die innere Struktur der Pionen zu treffen. Dazu ist es nötig über die klassische Approximation für σ und $\vec{\pi}$ hinauszugehen. Allerdings entfällt dabei dann die klare 1:1-Abbildung zwischen bosonisiertem und 4-Quark-NJL.

Unsere Vorgehensweise im Rahmen der bosonierten Theorie ist nun die Folgende [MR90, MG89b, MG91a]: Wir wählen einen Wert für die Konstituentenquarkmasse $M = gf_\pi$. Gl. (3.45) bestimmt zunächst für ein gegebenes Regularisierungsschema den UV-Abschneideparameter Λ . Über Gln. (3.32, 3.34, 3.5) sind dann auch μ^2 , m_0 und G festgelegt.

Quarkkondensat:

Neben der Konstituentenmasse M bildet auch der Vakuumerwartungswert $\langle \bar{q}q \rangle_V$, das sogenannte Quarkkondensat, einen Ordnungsparameter, der die Stärke der SCSB charakterisiert. Anwendung von Gl. (3.16) für $\mathcal{K} = \mathcal{I}$ im Vakuum sowie der entsprechenden Schwinger-Dyson-Gleichung (3.12) ergibt:

$$\langle \bar{q}q \rangle_V = \langle x_E | \text{Tr}[iD_V]^{-1} | x_E \rangle = (-)\frac{\mu^2}{g}(\sigma_V - m_0) \quad (3.49)$$

Setzt man hierin die Gln. (3.34, 3.36) ein, so erhält man die

Gell-Mann-Oakes-Renner Summenformel:

$$m_0 \langle \bar{q}q \rangle_V = -m_\pi^2 f_\pi^2 + \mathcal{O}(m_\pi^4) \quad (3.50)$$

welche eine der in Kapitel 1 erwähnten Stromalgebrasummenregeln darstellt [GO68, CL84]. Sie ist neben der Beziehung Gl. (3.46) für die σ -Masse eine Relation im bosonierten NJL, die unabhängig vom verwendeten Regularisierungsschema gilt.

Im Rahmen von QCD-Summenregeln sowie verschiedener Modellrechnungen für das QCD-Vakuum wurden phänomenologische Werte für $\langle \bar{q}q \rangle_V$ und m_0 extrahiert [SV79, GL82, Shu86]:

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}q \rangle_V &= \langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle_V = -(283 \pm 31 \text{ MeV})^3 \\ m_0 &= \frac{m_u + m_d}{2} = 7 \pm 3 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Allerdings ist zu bemerken, daß diese Werte innerhalb eines bestimmten Renormierungsschemas für die QCD gewonnen wurden und auch selbst vom Renormierungspunkt abhängen, so daß die numerischen Werte nicht allzu wörtlich genommen werden sollten. Wir werden daher auch nicht den häufig beschrittenen Weg gehen und unseren freien Parameter M an diese Daten anpassen oder gar weitere Parameter für das Regularisierungsschema einführen, um dies zu erreichen [JR89, DP89], sondern innerhalb verschiedener Schemata die entsprechenden Größen als Funktion von M ausrechnen [MR90].

3.5. REGULARISIERUNGSSCHEMATA

Wie bereits angedeutet wurde, kann das bosonisierte NJL in kompakter Weise durch die Angabe eines Regularisierungsschemas für die Fermiondeterminante der ECW regularisiert werden. Dies hat den Vorteil, daß wir daraus alle regularisierten Ausdrücke für bestimmte Observablen ableiten können und diese automatisch mit der entsprechenden Schwinger-Dyson-Gleichung konsistent sind. Im folgenden beschreiben wir vier Methoden, die alle von einem einzigen Abschneideparameter Λ abhängen, so daß die gesamte Theorie nur noch die Konstituentenmasse M als freien Parameter enthält:

(1) Eigenzeit-Regularisierung (EZR):

Hierbei wird der Logarithmus $\ln \alpha$ einer positiven reellen Zahl oder eines positiv definiten Operators α durch eine Integraldarstellung ausgedrückt [Sch51]:

$$\ln \alpha = - \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty} d\tau \frac{e^{-\tau \alpha}}{\tau} + C_\infty \quad (3.52)$$

während man die Spur Sp voll ausführt. C_∞ ist eine unendliche von α unabhängige Konstante, welche durch:

$$C_\infty = \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty} d\tau \frac{e^{-\tau}}{\tau} \quad (3.53)$$

gegeben ist. Differenziert man Gl. (3.52) n -mal nach α , so ergibt sich:

$$\alpha^{-n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty} d\tau e^{-\tau\alpha} \tau^{n-1} \quad (3.54)$$

Die Gln. (3.52, 3.54) gelten exakt im Grenzfall $\Lambda \rightarrow \infty$. Um die UV-Divergenzen zu beseitigen, muß natürlich Λ einen endlichen Wert annehmen. In unserem Fall ist $\alpha = D^\dagger D$. C_∞ hängt daher nicht mehr von σ und $\bar{\pi}$ ab und verschwindet nach Normalordnung. Die Heat-Kernel-Entwicklung (Anhang C) erlaubt es, die regularisierten Ausdrücke für die Integrale I_1 und I_2 aus der regularisierten ECW zu bestimmen. Man erhält:

$$I_k^\Lambda(M) = \frac{1}{\Gamma(k)} \frac{1}{16\pi^2} (M^2)^{2-k} \int_{\frac{M^2}{\Lambda^2}}^{\infty} dt e^{-t} t^{k-3} \quad (3.55)$$

(2) $O(4)$ -invarianter scharfer Abschnitt im Impulsraum:

Diese Methode wurde schon in Kapitel 2 verwendet. Ein 4-er-Impulsintegral im euklidischen Raum wird gemäß:

$$\int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \theta(\Lambda^2 - p_E^2) \quad (3.56)$$

scharf abgeschnitten, während der Logarithmus $\ln$ unbehelligt bleibt. θ steht dabei für die Stufenfunktion. Aus den Überlegungen in Abschnitt 3.4 liest man sofort:

$$I_k^\Lambda(M) = \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p_E^2 + M^2} \right)^k \theta(\Lambda^2 - p_E^2) \quad (3.57)$$

ab, was zu den analytischen Ausdrücken:

$$\begin{aligned} I_1^\Lambda(M) &= \frac{1}{16\pi^2} \left[\Lambda^2 - M^2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right) \right] \\ I_2^\Lambda(M) &= \frac{1}{16\pi^2} \left[\ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + M^2} \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

führt.

(3) $O(3)$ -invarianter scharfer Abschnitt im Impulsraum:

Hier wird in dem Integral $\int d^4 p_E$ zunächst über p_4 unbeschränkt integriert und anschließend die Ersetzung:

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \rightarrow \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \theta(\Lambda^2 - \vec{p}^2) \quad (3.59)$$

vorgenommen. Dies ergibt:

$$I_k^\Lambda(M) = \frac{\Gamma(k - \frac{1}{2})}{2(k-1)! \Gamma(\frac{1}{2})} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{\vec{p}^2 + M^2} \right)^{k-\frac{1}{2}} \theta(\Lambda^2 - \vec{p}^2) \quad (3.60)$$

und insbesondere:

$$\begin{aligned} I_1^\Lambda(M) &= \frac{1}{8\pi^2} \left[\Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - M^2 \ln \left(\frac{\Lambda}{M} + \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}} \right) \right] \\ I_2^\Lambda(M) &= \frac{1}{8\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\Lambda}{M} + \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}} \right) - \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + M^2}} \right] \end{aligned} \quad (3.61)$$

(4) Pauli-Villars-Regularisierung:

Die Pauli-Villars-Methode [PV49, CL84] besteht in der Substitution eines divergenten Integrals durch eine Linearkombination von Integralen der gleichen Art mit verschiedenen Massen. Diese Massen sind als Abschneideparameter Λ_i zu interpretieren und die Integrationen werden unbeschränkt ausgeführt. Die Integrale müssen dabei mit geeigneten Koeffizienten C_i gewichtet werden, welche so zu bestimmen sind, daß die gesamte Summe konvergiert.

$$\int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p_E^2 + M^2} \right)^k \rightarrow \sum_{i=0}^N C_i \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p_E^2 + \Lambda_i^2} \right)^k \quad (3.62)$$

wobei $C_0 = 1$, $\Lambda_0 = M$ ist. Es stellt sich heraus, daß für das logarithmisch divergente Integral I_2 eine Subtraktion genügt, während man für die quadratische Divergenz I_2 zwei Subtraktionen benötigt. Im ersten Fall erhält man:

$$I_2^\Lambda(M) = \left[\int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p_E^2 + M^2} \right)^2 - C \left(\frac{1}{p_E^2 + \Lambda^2} \right)^2 \right] \quad (3.63)$$

Dieser Ausdruck ist endlich, falls $C = 1$ ist, was auf:

$$I_2^\Lambda(M) = \frac{1}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{M^2} \quad (3.64)$$

führt. Für I_1 ergibt sich:

$$\begin{aligned} I_1(M; C_1, \Lambda_1; C_2, \Lambda_2) &= \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_E^2 + M^2} - C_1 \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_E^2 + \Lambda_1^2} \\ &\quad - C_2 \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_E^2 + \Lambda_2^2} \end{aligned} \quad (3.65)$$

was nach einfacher Rechnung:

$$I_1(M; C_1, \Lambda_1; C_2, \Lambda_2) = \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{Z(p_E)}{N(p_E)} \quad (3.66)$$

mit

$$\begin{aligned} Z(p_E) &= p_E^4 (1 - C_1 - C_2)^2 \\ &\quad + p_E^2 (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 - C_1(M^2 + \Lambda_2^2) - C_2(M^2 + \Lambda_1^2)) \\ &\quad + (\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 - C_1 M^2 \Lambda_2^2 - C_2 M^2 \Lambda_1^2) \end{aligned} \quad (3.67)$$

und

$$N(p_E) = (p_E^2 + M^2)(p_E^2 + \Lambda_1^2)(p_E^2 + \Lambda_2^2) \quad (3.68)$$

ergibt. Um die dabei auftretenden quadratischen und logarithmischen Divergenzen zu liquidieren, müssen C_1 und C_2 den Bedingungen:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\Lambda_2^2 - M^2}{\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2} \\ C_2 &= \frac{\Lambda_1^2 - M^2}{\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2} \end{aligned} \quad (3.69)$$

genügen. In diesem Ausdruck führen wir den Grenzübergang $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2 \equiv \Lambda$ aus, da wir das Schema mit nur einem Abschneideparameter parametrisieren wollen. Naiv würde man erwarten, daß C_1 und C_2 divergieren, jedoch ist der gesamte Ausdruck für I_1 wohldefiniert. Man erhält:

$$I_1^\Lambda(M) = \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{(\Lambda^2 - M^2)^2}{[p_E^2 + M^2][p_E^2 + \Lambda^2]^2} = \frac{1}{16\pi^2} \left[\Lambda^2 - M^2 - M^2 \ln \frac{\Lambda^2}{M^2} \right] \quad (3.70)$$

Diese Regularisierungsvorschrift kann formal aus der (partiell renormierten) ECW:

$$\begin{aligned} S_{eff}(\sigma, \vec{\pi}) - S_{eff}(\sigma, \vec{\pi})|_V &= (-) \text{Spln}[-i\rlap{\not{D}} + g(\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5)] + \frac{M^2}{\Lambda^2} \text{Spln}[-i\rlap{\not{D}} + g'(\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5)] \\ &+ \frac{1}{2} [8N_F g^2 (\Lambda^2 - M^2) I_2(\Lambda) + \mu^2] \int d^4 x_E (\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - f_\pi^2) \\ &- \frac{1}{2} 4N_F g^2 (g^2 - g'^2) I_2(\Lambda) \int d^4 x_E (\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - f_\pi^2)^2 \\ &- m_\pi^2 f_\pi \int d^4 x_E (\sigma - f_\pi) \end{aligned} \quad (3.71)$$

mit $\Lambda = g' f_\pi$ abgeleitet werden [BloDA].

Es sei noch bemerkt, daß die Methoden (1) und (2) grundsätzlich nur im euklidischen Raum definiert sind. Bei der EZR (1) ist es außerdem nötig, von $\text{Spln}(-iD)$ zu $\frac{1}{2} \text{Spln}(D^\dagger D)$ überzugehen, da der zu regularisierende Operator positiv definit sein muß. Im Falle des $O(4)$ -invarianten scharfen Abschnitts führen beide Ausdrücke zum gleichen Ergebnis, falls der Imaginärteil der ECW verschwindet. Die Schemata (3) und (4) hingegen können auch direkt im Minkowski-Raum auf $\text{Spln}(iD)$ angewandt werden.

3.6. NUMERISCHE ERGEBNISSE FÜR DEN VAKUUMSEKTOR

Bild 3.1 zeigt den UV-Abschneideparameter Λ als Funktion der Konstituentenmasse M , wie er sich aus Gl. (3.45) ergibt. Man sieht, daß in allen vier Schemata Λ sowohl für $M \rightarrow 0$ als auch für $M \rightarrow \infty$ unendlich wird, allerdings gilt für den Quotienten $\frac{\Lambda}{M}$:

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow 0} \frac{\Lambda}{M} &= \infty \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\Lambda}{M} &= 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

Die aktuellen Werte für Λ in einem bestimmten Schema sind jedoch stark verschieden, so daß es keinen Sinn macht Λ anzugeben, ohne gleichzeitig das Regularisierungsschema zu spezifizieren. Dieses Verhalten schlägt auch auf die anderen dargestellten Vakuumgrößen durch. Bild 3.2 und Bild 3.3 zeigen den μ^2 -Parameter bzw. die 4-Quark Kopplungskonstante G . Das Quarkkondensat $\langle \bar{q}q \rangle_V$ und die Quarkstrommasse m_0 sind in Bild 3.4 und Bild 3.5 dargestellt. Die Größenordnung stimmt in allen vier Schemata mit der der phänomenologischen Werte überein. Die stärkste Abweichung tritt bei der Pauli-Villars-Methode auf. Insbesondere ist das Vorzeichen von m_0 und $\langle \bar{q}q \rangle_V$ korrekt, was keineswegs für alle möglichen Regularisierungsmethoden gilt [BloDA].

Da wir im solitonischen Sektor die Werte von Λ , $\frac{\Lambda}{M}$ und $\frac{\mu^2}{M^2}$ für einige g bzw. M im EZ-Schema benötigen, haben wir diese in der folgenden Tabelle noch einmal explizit aufgelistet:

g	M [MeV]	Λ [MeV]	$\frac{\Lambda}{M}$	$\frac{\mu^2}{M^2} _{m_\pi=0}$
3.6	334	649	1.943	3.743
3.9	363	639	1.760	3.234
4.0	372	637	1.712	3.098
4.25	395	633	1.602	2.798
4.5	418	632	1.511	2.562
5.0	465	637	1.369	2.197
6.0	558	660	1.182	1.751
7.0	651	691	1.061	1.471
7.8	725	721	0.994	1.334
8.0	744	728	0.978	1.292
10.0	930	808	0.868	1.063

Tab. 3.1: Die Parameter Λ , $\frac{\Lambda}{M}$ und $\frac{\mu^2}{M^2}$ in Abhängigkeit der Quark-Meson Kopplungskonstanten g bzw. der Konstituentenmasse $M = g f_\pi$ bei Eigenzeitregularisierung.

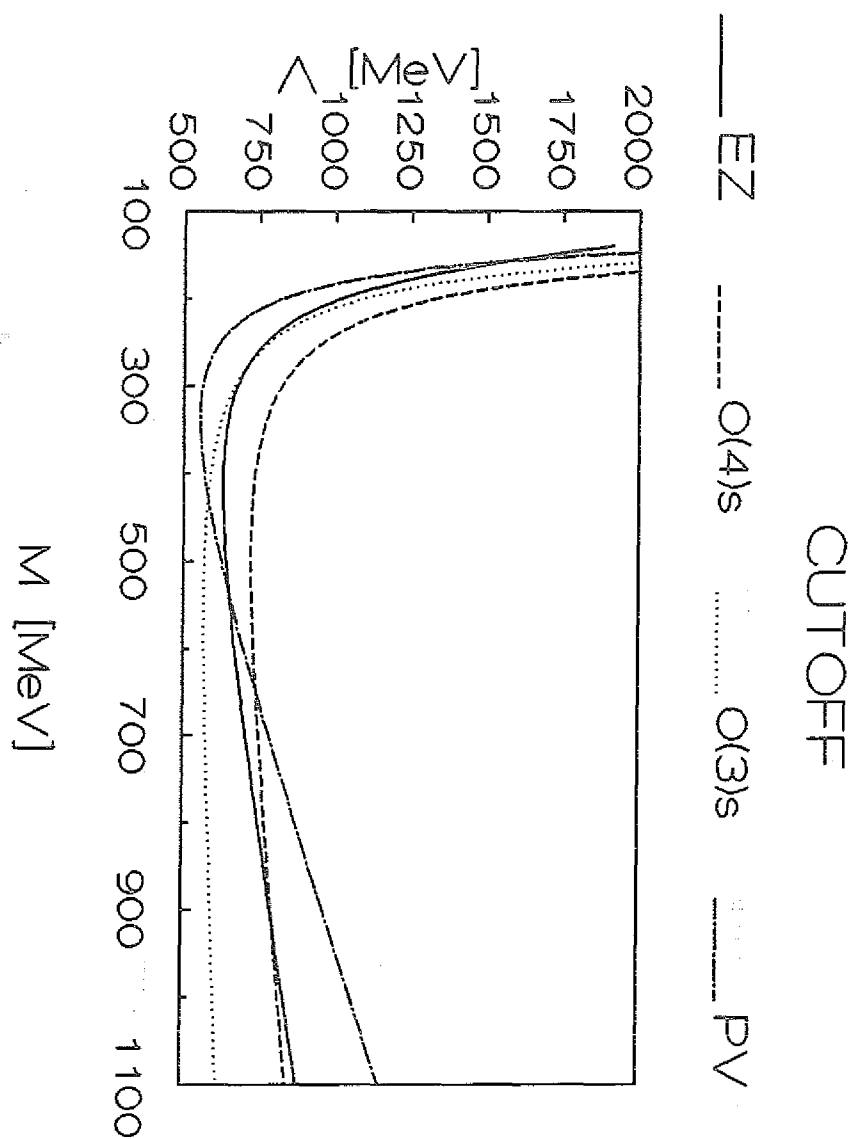


Bild 3.1: Der UV-Abschneideparameter (Cutoff) Λ als Funktion der Konstituentenquarkmasse $M = gf_\pi$.

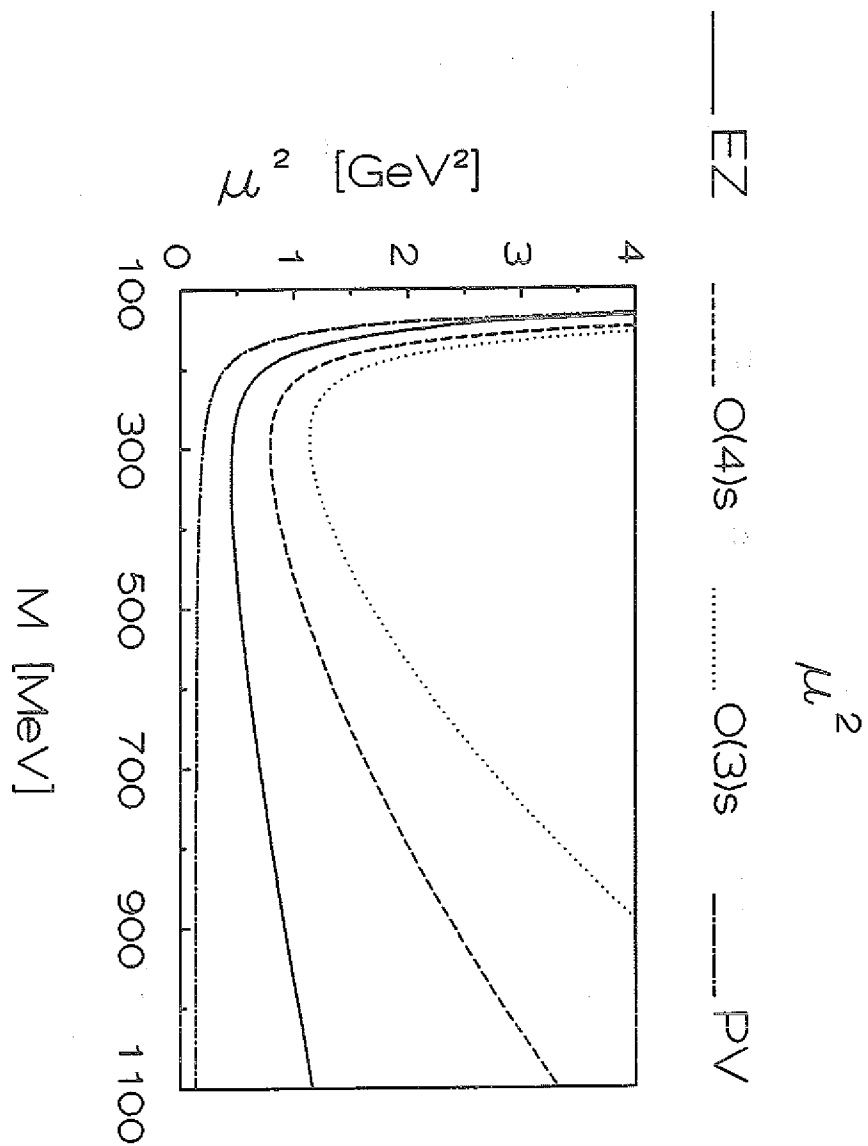


Bild 3.2: Der Parameter μ^2 als Funktion der Konstituentenquarkmasse $M = gf_\pi$.

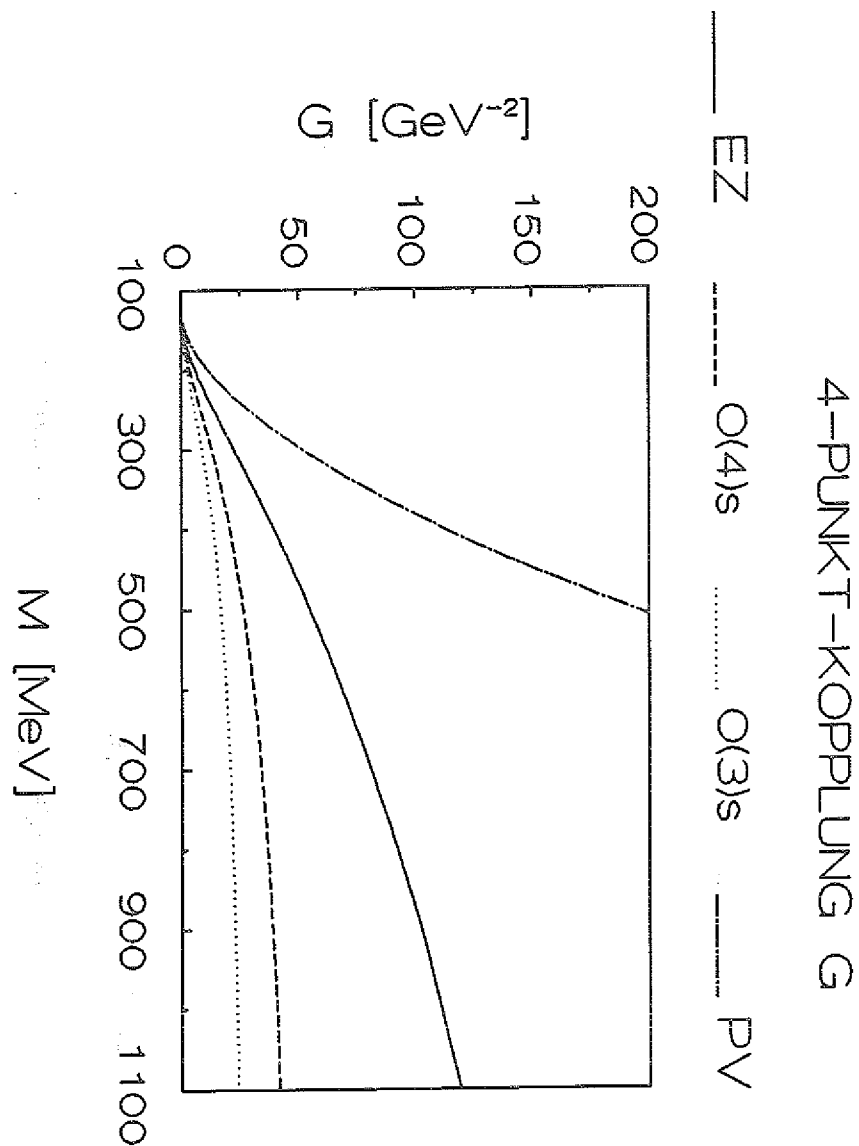


Bild 3.3: Die 4-Quark Kopplungskonstante $G = \frac{g^2}{\mu^2}$ als Funktion der Konstituentenquarkmasse $M = gf_\pi$.

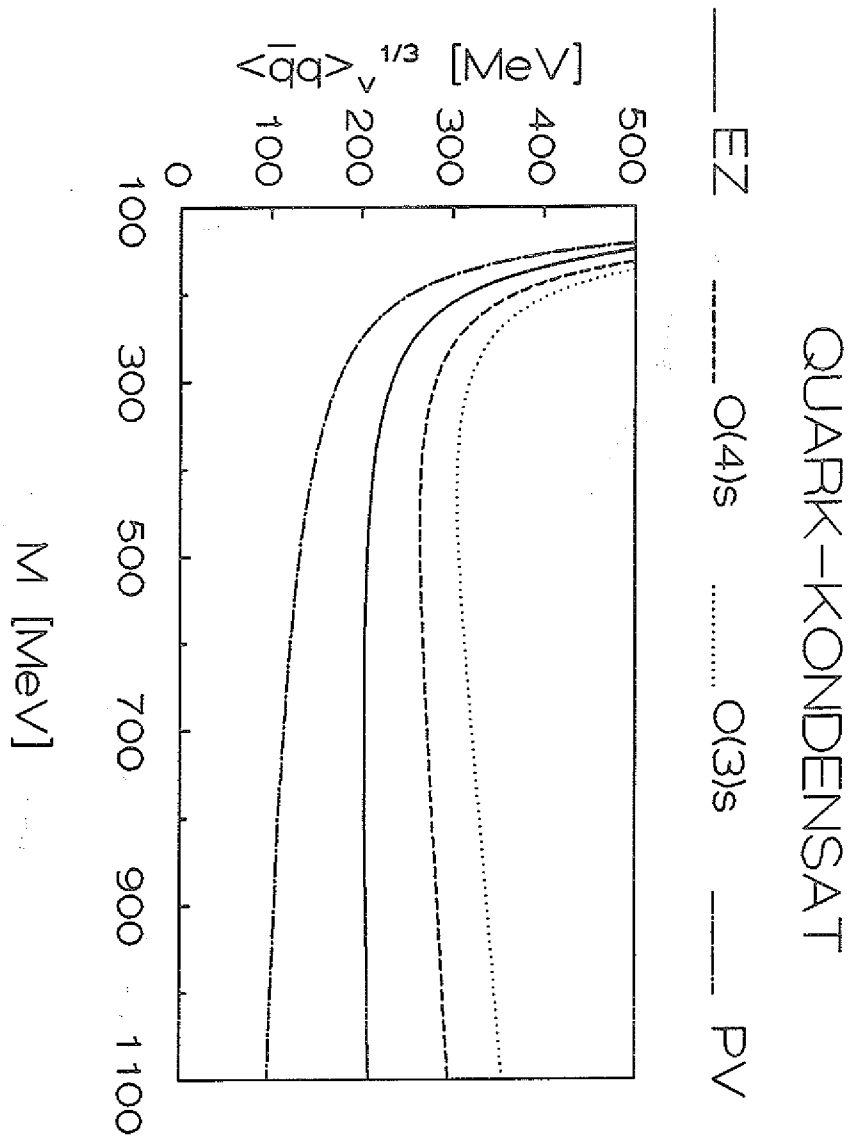


Bild 3.4: Das Quarkkondensat $|\langle \bar{q}q \rangle_V|^{1/3} = |(\bar{u}u + \bar{d}d)_V|^{1/3}$ als Funktion der Konstituentenquarkmasse $M = gf_\pi$. Der 'phänomenologische Wert' beträgt $|\langle \bar{q}q \rangle_V|^{1/3} = 283 \pm 31 \text{ MeV}$ [SV79, Shu86].

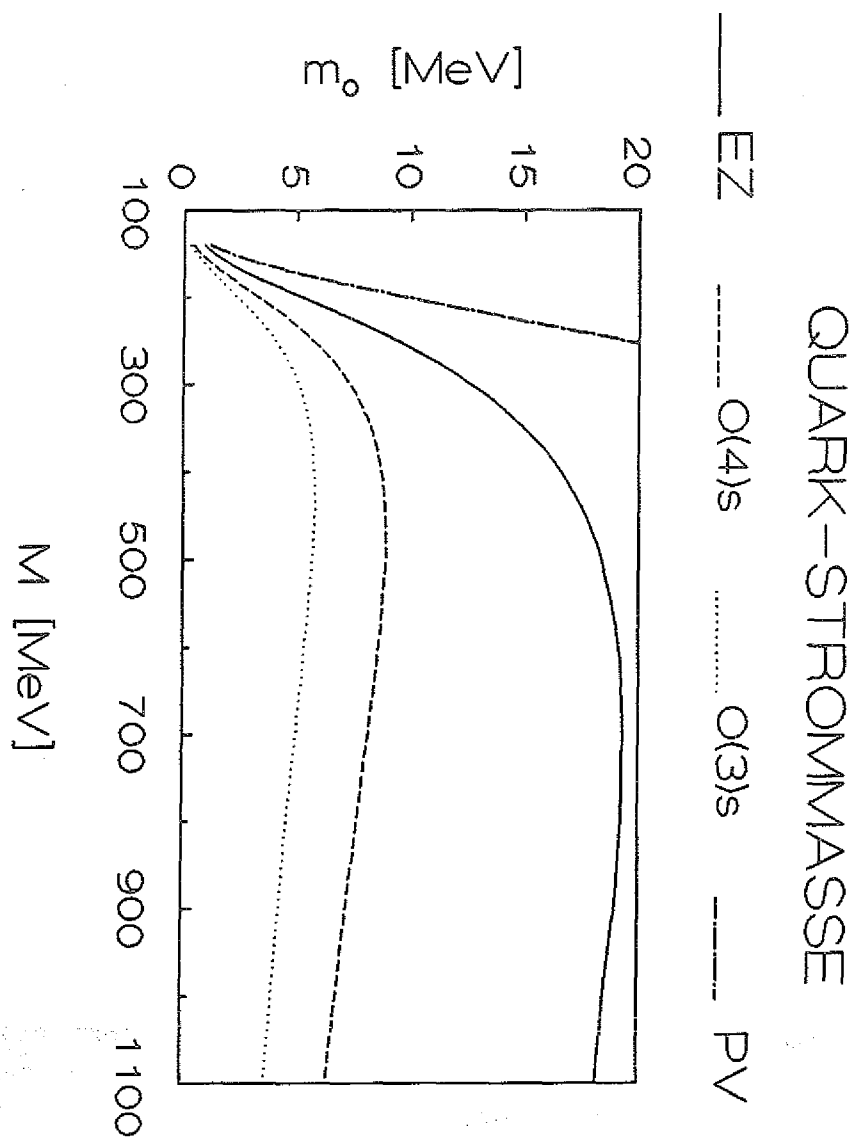


Bild 3.5: Die Quark-Strommasse $m_0 = \frac{1}{2}(m_u + m_d)$ als Funktion der Konstituentenquarkmasse $M = gf_\pi$. Der 'phänomenologische Wert' beträgt $m_0 = 7 \pm 3 \text{ MeV}$ [GL82].

4. SYSTEME MIT ENDLICHER BARYONENZAH – SOLITONISCHE LÖSUNGEN

4.1. STATISCHE MESONFELDER - ENERGIE

Da wir an statischen Eigenschaften des Nukleons interessiert sind, wollen wir uns im folgenden auf zeitunabhängige Mesonfelder σ und $\vec{\pi}$ beschränken. Der euklidische Dirac-Operator iD zerfällt dann in eine triviale Zeitableitung und den zeitunabhängigen 1-Teilchen-Hamiltonoperator h (zur Notation vgl. Anhang A):

$$-i\beta D = \frac{\partial}{\partial \tau} + h \quad (4.1)$$

mit:

$$h = \frac{\vec{\alpha} \vec{\nabla}}{i} + g\beta(\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5) \quad (4.2)$$

und im Vakuum:

$$h_V = \frac{\vec{\alpha} \vec{\nabla}}{i} + \beta M \quad (4.3)$$

h ist hermitesch und spurlos ($\text{Tr}_{\gamma\tau} h = 0$). Falls wir für σ und $\vec{\pi}$ den Hedgehog-Ansatz

$$\begin{aligned} \sigma(\vec{r}) &= \sigma(r) \\ \vec{\pi}(\vec{r}) &= \hat{r}\pi(r) \end{aligned} \quad (4.4)$$

machen, was wir im folgenden immer tun werden, bilden h , der Grand-Spin G^2 , dessen z -Komponente G_z sowie die Parität Π einen vollständigen Satz kommutierender Operatoren. Die numerische Prozedur zur Lösung des Eigenwertproblems:

$$\begin{aligned} h|\lambda\rangle &= \epsilon_\lambda|\lambda\rangle \\ h_V|\lambda_V\rangle &= \epsilon_{\lambda_V}|\lambda_V\rangle \end{aligned} \quad (4.5)$$

$\phi_\lambda := \langle \vec{r} | \lambda \rangle$ in einem endlichen Kasten wird in Anhang E detailliert beschrieben. ϕ_λ ist durch die Angabe der Quantenzahlen ϵ_λ , G , M und $(-)^I$ bestimmt, wobei bezüglich M Entartung vorliegt. In der Ortsdarstellung notieren wir die Eigenvektoren mit $\phi_\lambda(\vec{r}) := \langle \vec{r} | \lambda \rangle$ Bild 4.1 zeigt das Spektrum von h für ein Mesonprofil auf dem chiralen Zirkel (nichtlineares Modell):

$$\begin{aligned} \sigma^2 + \pi^2 &= \sigma_V^2 + \pi_V^2 = f_\pi^2 \\ \sigma(r) &= f_\pi \cos \theta(r) \\ \pi(r) &= f_\pi \sin \theta(r) \end{aligned} \quad (4.6)$$

bei welchem der chirale Winkel θ durch:

$$\theta(r) = -n\pi e^{-\frac{r}{R}} \quad (4.7)$$

mit Windungszahl $n = 1$ parametrisiert ist. R charakterisiert dabei die Ausdehnung des Profils.

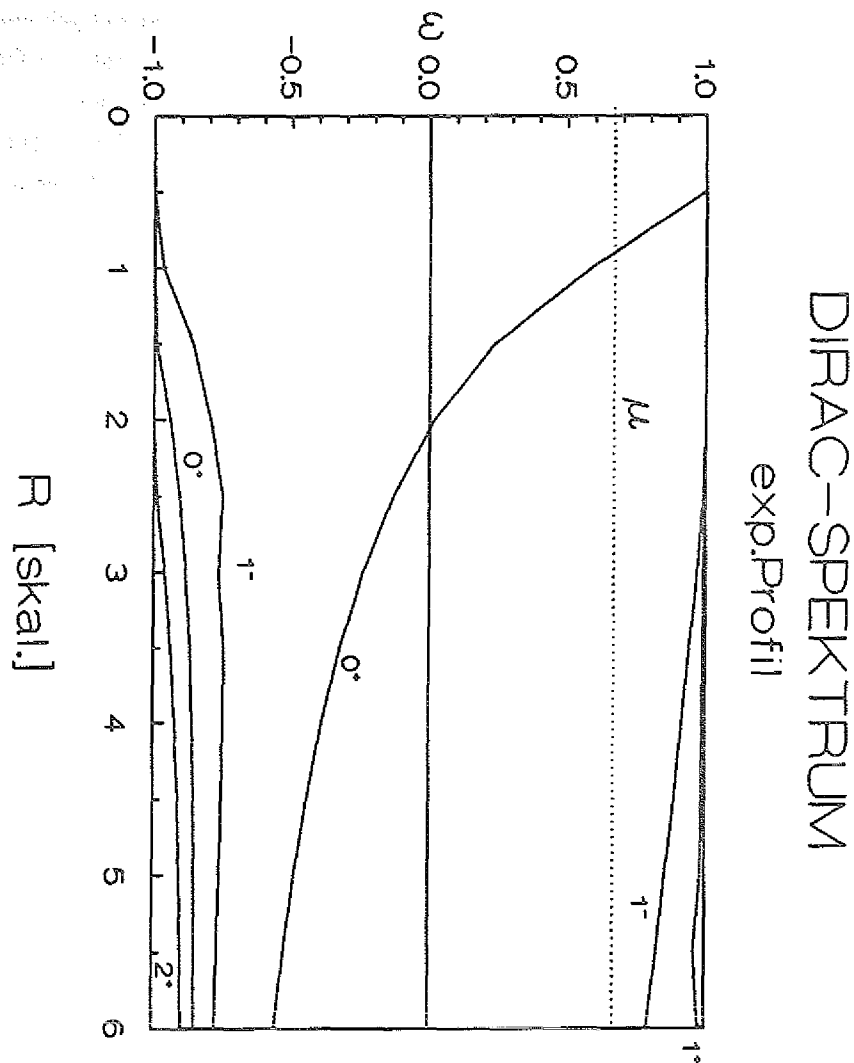


Bild 4.1: Die gebundenen Zustände des 1-Teilchen-Diracspektrums in Abhängigkeit des Ausdehnungsparameters R für ein exponentielles Mesonprofil $\theta(r) = -n\kappa e^{-\frac{r}{R}}$ mit $n = 1$. ϵ_λ und R sind in den skalierten Einheiten von Anhang E ($\frac{\epsilon_\lambda}{M}$ bzw. $R \cdot M$) angegeben, so daß die Figur unabhängig von M ist. Das Valenzorbital (0^+) wandert vom positiven in den negativen Energiebereich. Die anderen gebundenen Zustände kreuzen die Nulllinie nicht. Ferner ist ein Wert für das thermochemische Potential μ eingezeichnet. Es ist $B = 1$, für $\epsilon_{\text{val}} < \mu$ und $B = 0$ für $\epsilon_{\text{val}} > \mu$.

Ab einem gewissen R treten gebundene Zustände auf und zwar sowohl aus dem positiven als auch aus dem negativen Kontinuum. Das energieniedrigste Orbital mit positivem ϵ_λ , welches die Quantenzahlen 0^+ besitzt und im folgenden als Valenzorbital $\lambda = val$ bezeichnet wird, sinkt mit zunehmendem R aus dem positiven in den negativen Energiebereich und legt sich schließlich an die negativen gebundenen Zustände. Es wird sich bald herausstellen, daß die Anzahl der Orbitale mit dieser Eigenschaft identisch mit der topologischen Windungszahl n des Profils, also in diesem Falle $n = 1$ ist. Letztere stimmt wiederum mit der Baryonenzahl B für hohe R überein (vgl. Anhang G). Wie in Anhang E dargelegt, haben wir ϵ_{val} zusätzlich durch direktes Lösen der entsprechenden Eigenwertgleichung $h\phi_{val} = \epsilon_{val}\phi_{val}$ im Kontinuumsmites berechnet und durch Vergleich mit dem Ergebnis der Diagonalisierung in einem endlichen Kasten die Güte dieses Verfahrens getestet und bestätigt.

Die Eigenwertgleichung des Zeitgradienten im euklidischen Zeitintervall $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$ mit antiperiodischen Randbedingungen hat die Lösung:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} e^{-iu_n \tau} = (-i)u_n e^{-iu_n \tau} \quad (4.8)$$

mit:

$$u_n = \frac{(2n+1)\pi}{T} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.9)$$

Daher vereinfacht sich der Ausdruck für ein Funktional der Form $F\left(\frac{\partial}{\partial \tau}, R(\vec{r})\right)$ im Null-Temperatur-Limes ($T \rightarrow \infty$, $\Delta u_n \rightarrow 0$) durch welchen der Grundzustand des Systems beschrieben wird, zu:

$$\begin{aligned} \text{Sp} F\left(\frac{\partial}{\partial \tau}, R(\vec{r})\right) &= \sum_n F(-iu_n, R) = \frac{1}{\Delta u_n} \sum_n F(-iu_n, R) \Delta u_n = \\ &= \frac{T}{2\pi} \sum_n F(-iu_n, R) \Delta u_n \xrightarrow{\Delta u_n \rightarrow 0} T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} F(-iu, R) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Für den Spezialfall der ECW erhält man:

$$S_{eff} = T \cdot E \quad (4.11)$$

wobei E die statische Gesamtenergie des Systems ist. Es ist nicht schwer, die expliziten Ausdrücke für E in Termen der Energieeigenfunktionen ϵ_λ für unsere regularisierten effektiven Wirkungen aus Kapitel 3 zu berechnen. Sie lauten [MG89b, MG90, MG91a]

$$E = E_0 + E_M + E_{br} \quad (4.12)$$

mit

$$E_0 = \left(-\frac{N_F}{2}\right) \left[\sum_\lambda \mathcal{R}_1(\epsilon_\lambda, \Lambda) - \sum_{\lambda_V} \mathcal{R}_1(\epsilon_{\lambda_V}, \Lambda) \right] \quad (4.13)$$

$$E_M = \frac{\mu^2}{2} \int d^3r (\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - f_\pi^2) \quad (4.14)$$

$$E_{br} = -m_\pi^2 f_\pi \int d^3x (\sigma - f_\pi) \quad (4.15)$$

Die expliziten Formen für die Regularisierungsfunktionen $\mathcal{R}_1$ sind dabei in den einzelnen Fällen durch:

(1)

$$\mathcal{R}_1(\epsilon_\lambda, \Lambda) = (-) \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi}} \int_1^\infty ds s^{-\frac{3}{2}} e^{-s(\frac{\epsilon_\lambda}{\Lambda})^2} \quad (4.16)$$

für die Eigenzeitregularisierung (EZR) [MR88, MG89b, MG90, MG91a]

(2)

$$\mathcal{R}_1(\epsilon_\lambda, \Lambda) = \frac{1}{\pi} \int d^3k |\langle \vec{k} | \lambda \rangle|^2 \theta(\Lambda^2 - \vec{k}^2) \cdot \left\{ \sqrt{\Lambda^2 - \vec{k}^2} \ln \left(1 + \frac{\epsilon_\lambda^2}{\Lambda^2 - \vec{k}^2} \right) + 2|\epsilon_\lambda| \arctan \left(\frac{\sqrt{\Lambda^2 - \vec{k}^2}}{|\epsilon_\lambda|} \right) \right\} \quad (4.17)$$

für den $O(4)$ -invarianten scharfen Abschnitt im Impulsraum [BD90, DörDA] und

(3)

$$\mathcal{R}_1(\epsilon_\lambda, \Lambda) = |\epsilon_\lambda| \int d^3k |\langle \vec{k} | \lambda \rangle|^2 \theta(\Lambda^2 - \vec{k}^2) \quad (4.18)$$

für den $O(3)$ -invarianten scharfen Abschnitt im Impulsraum [BD90, BloDA] gegeben.

Zur numerischen Berechnung wird die kontinuierliche Basis im Impulsraum $|\vec{k}\rangle$, wie in Anhang E dargelegt, diskretisiert:

$$\int d^3k \rightarrow \sum_{n,I} \quad |\vec{k}\rangle \rightarrow |I, k_n, G, M, \Pi\rangle \quad k_n = 1 \dots N \quad I = 1, 2, 3, 4 \quad (4.19)$$

so daß wir zur expliziten Auswertung von (2) und (3) direkt die Eigenvektoren $V_{\epsilon_\lambda, G, \Pi}^{k_n, I} = \langle I, k_n, G, M, \Pi | \lambda \rangle$ aus Gl.(F.1) verwenden können.

Dabei erhielten wir die EZ-regularisierte Energie (1) direkt durch Einschreiben von $|\lambda\rangle$ in Gl. (3.52) und Integration über u mit:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du e^{-us^2} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \quad (4.20)$$

Bei der Herleitung von (2) und (3) haben wir zunächst über u integriert und dabei die Identitäten:

$$\int d^4k_E \theta(\Lambda^2 - k_E^2) = \int_{-\sqrt{\Lambda^2 - \vec{k}^2}}^{\sqrt{\Lambda^2 - \vec{k}^2}} du \int d^3\vec{k} \theta(\Lambda^2 - \vec{k}^2) \quad (4.21)$$

$$\int du \ln(u^2 + a^2) = u \ln(u^2 + a^2) - 2u + 2a \arctan \frac{u}{a}$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \ln(u^2 + a^2) = \frac{1}{2} |a| + \text{const.}$$

verwendet. Anschließend wurde der vollständige Satz $|\lambda\rangle$ von Eigenzuständen zu h eingeschoben. Man überzeugt sich leicht, daß in allen 3 Fällen formal:

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \mathcal{R}_1(\epsilon_\lambda, \Lambda) = |\epsilon_\lambda| \quad (4.22)$$

gilt (evtl. auftretende von ϵ_λ unabhängige unendliche Konstanten fallen nach Abziehen des Vakuumbeitrages weg) und daher wegen $\text{Sp}h = \sum_\lambda \epsilon_\lambda = 0$ der Ausdruck für die unregulisierte Seeenergie:

$$E_0 = -\frac{N_F}{2} \left(\sum_\lambda |\epsilon_\lambda| - \sum_{\lambda_V} |\epsilon_{\lambda_V}| \right) = N_F \sum_{\substack{\lambda, \lambda_V \\ \epsilon_\lambda < 0}} (\epsilon_\lambda - \epsilon_{\lambda_V}) \quad (4.23)$$

lautet. Dies entspricht dem naiven Bild des von unten aufgefüllten Diracsees. Wir möchten jedoch ausdrücklich darauf hinweisen, daß dies im allgemeinen für ein endliches Λ nicht mehr möglich ist, da dann die Identität $\text{Sp}h = 0$ nicht mehr anwendbar ist, so daß tatsächlich über alle ϵ_λ summiert werden muß.

Im Falle der Pauli-Villars-Regularisierung auf dem chiralen Zirkel ($\sigma^2 + \pi^2 = f_\pi^2$) lautet die regulisierte Energie nach (3.71) dann einfach [BloDA]:

$$E_0 = N_F \left\{ \sum_{\substack{\lambda, \lambda_V \\ \epsilon_\lambda < 0}} (\epsilon_\lambda - \epsilon_{\lambda_V}) - \frac{M^2}{\Lambda^2} \sum_{\substack{\lambda, \lambda_V \\ \epsilon'_\lambda < 0}} (\epsilon'_\lambda - \epsilon'_{\lambda_V}) \right\} \quad (4.24)$$

wobei die gestrichenen Größen zum Hamiltonoperator mit der Kopplungskonstanten g' , wie sie in Gl. (3.71) definiert wurde, gehören.

Es ist instruktiv, E_0 für ein durch den Ausdehnungsparameter R parametrisiertes Mesonprofil $\theta = \theta(\frac{r}{R})$ in Abhängigkeit von R zu betrachten und mit den entsprechenden Termen aus der führenden Ordnung der Heat-Kernel-Entwicklung (HKE) (oder Gradientenentwicklung) (siehe Anhang C) zu vergleichen [DP88, MR88, MG90]. Dazu schreiben wir diese schematisch in der Form:

$$E_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \int d^3r (\partial_r \theta)^{2n} \quad (4.25)$$

Da θ eine Funktion von $x = \frac{r}{R}$ ist folgt wegen $\partial_r \theta = \frac{1}{R} \partial_x \theta$ und $\int d^3r = R^3 \int d^3x$:

$$E_0(R) = b_2 R + \frac{b_4}{R} + \frac{b_6}{R^3} + \dots \quad (4.26)$$

wobei die Koeffizienten b_{2n} von der speziellen Form von θ abhängen und analytisch berechnet werden können. Wir betrachten exemplarisch den Fall der EZR und wählen ein lineares Mesonprofil mit Windungszahl $n = 1$:

$$\theta(r) = \begin{cases} -n\pi(1 - \frac{r}{R}) & \text{falls } r < R \\ 0 & \text{falls } r \geq R \end{cases} \quad (4.27)$$

Die Kurven für $g = 5, 0$, $M = 465 \text{ MeV}$ sind in Bild 4.2 dargestellt.

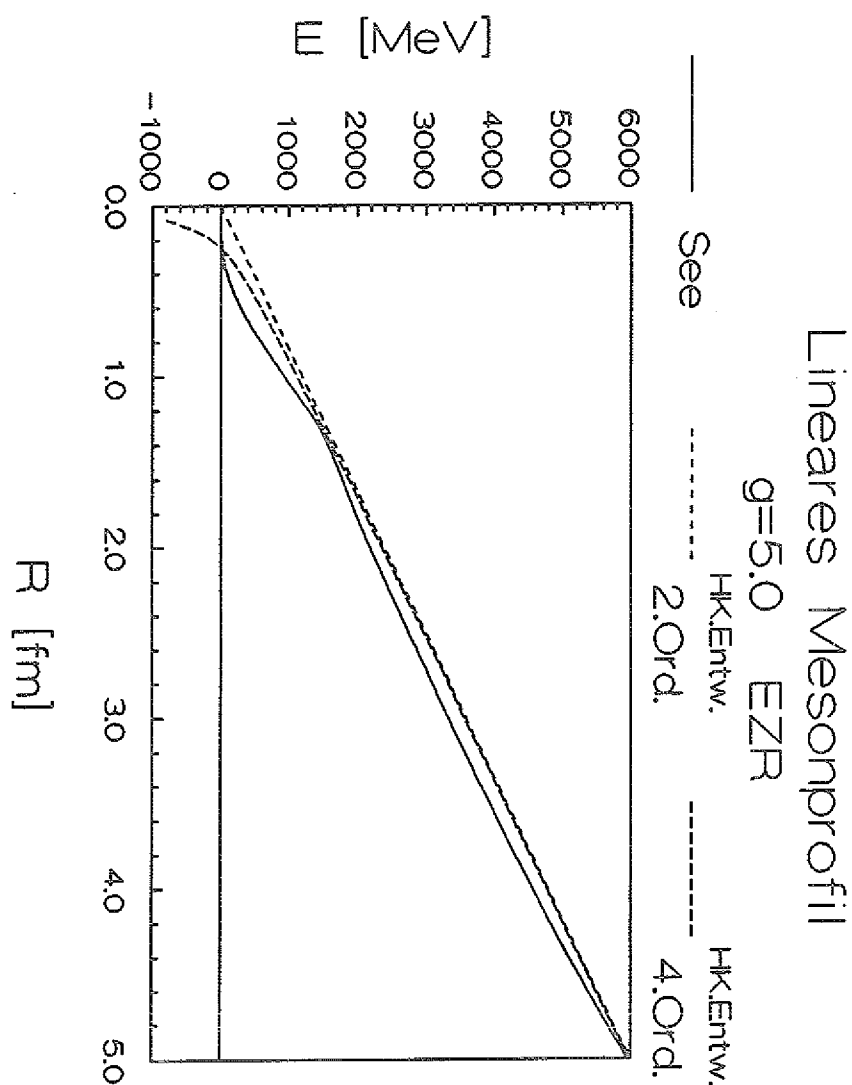


Bild 4.2: Die Seeenergie E_0 bei EZR in Abhängigkeit des Ausdehnungsparameters R für ein lineares Mesonprofil (4.27) mit einer Konstituentenquarkmasse von $M = 465 \text{ MeV}$ (Kopplungskonstante $g = 5,0$). Zum Vergleich dazu sind die Resultate der Heat-Kernel-Entwicklung 2. (kinetische Energie der Mesonen) und 4. Ordnung dargestellt.

Für $R \rightarrow \infty$ konvergiert E_0 gegen die kinetische Energie der Mesonen $\frac{1}{2} \int d^3r [(\vec{\nabla}\sigma)^2 + (\vec{\nabla}\vec{\pi})^2] = b_2 R$ welche linear in R ist. Tatsächlich sind in diesem Bereich die Gradienten der Mesonfelder klein, wie man aus der Bedingung $|\partial_r \theta| \ll g \iff \left| \frac{n\pi}{R} \right| \ll g$ abliest. Ferner ist aus Bild 4.2 ersichtlich, daß die nächst höhere Ordnung $E_0(R) = b_2 R + \frac{b_4}{R}$ für $R \rightarrow \infty$ eine verbesserte Approximation darstellt. Allerdings konvergiert die Entwicklung für endliche $R \approx 1\text{fm}$, die im Bereich der physikalischen nukleonischen Radien liegen, relativ langsam.

Die Tatsache, daß

$$\lim_{R \rightarrow \infty} E_0(R) = \frac{1}{2} \int d^3r [(\vec{\nabla}\sigma)^2 + (\vec{\nabla}\vec{\pi})^2] = b_2 R \quad (4.28)$$

numerisch erfüllt ist, stellt einen guten Konsistenztest für das Verfahren dar. Er ist auch für die anderen untersuchten Regularisierungsschemata erfüllt.

Abschließend betrachten wir den Erwartungswert der Observablen $K := \int d^3r \bar{q}(x) \mathcal{K} q(x)$, wobei $\mathcal{K}$ ein beliebiger Operator im Dirac-Isospinraum ist (vgl. Gl. (3.16)). Wir wollen uns dazu und auch im folgenden auf die EZR und die Pauli-Villars-Methode beschränken. Die etwas aufwendigeren Impulsabschnittsverfahren sind detailliert in den Ref. [BD90, BloDA, DörDA] behandelt worden.

Wegen $K = \frac{1}{T} \int d^4x_E \bar{q}(x) \mathcal{K} q(x)$ gilt zunächst im unregularisierten Fall:

$$\begin{aligned} \langle K \rangle_0 &= \frac{1}{T} \frac{\mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} \int d^4x_E \bar{q}(x) \mathcal{K} q(x) e^{-\int d^4x_E \bar{q}(-iD)q}}{\mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} e^{-\int d^4x_E \bar{q}(-iD)q}} \\ &= \frac{1}{T} \frac{\delta}{\delta \kappa} \text{Spln}(-iD - \kappa K) \Big|_{\kappa=0} \\ &= (-) \frac{1}{T} \text{Sp} [(-i\beta D)^{-1} (\beta K)] \\ &= (-) N_F \sum_{\lambda} \langle \lambda | (\beta K) | \lambda \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \frac{1}{-iu + \epsilon_{\lambda}} \\ &= (-) N_F \sum_{\lambda} K_{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \frac{\epsilon_{\lambda}}{\epsilon_{\lambda}^2 + u^2} \\ &= (+N_F)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda} (-\text{sign} \epsilon_{\lambda}) K_{\lambda} \end{aligned} \quad (4.29)$$

mit:

$$K_{\lambda} := \int d^3r \bar{\phi}_{\lambda}(\vec{r}) \mathcal{K} \phi_{\lambda}(\vec{r}) \quad (4.30)$$

und nach Normalordnung:

$$\langle K \rangle_0 = (+N_F)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\lambda} (-\text{sign} \epsilon_{\lambda}) K_{\lambda} - \sum_{\lambda_V} (-\text{sign} \epsilon_{\lambda_V}) K_{\lambda_V} \right) \quad (4.31)$$

Im regularisierten Fall läuft die Rechnung analog, mit der Ausnahme, daß $\{\text{Spln}\} \rightarrow \{\text{Spln}\}_{reg}$ für die jeweiligen Schemata gesetzt wird. Man erhält:

$$\langle K \rangle_0 = (+N_F)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\lambda} \mathcal{R}_2(\epsilon_{\lambda}, \Lambda) K_{\lambda} - \sum_{\lambda_V} \mathcal{R}_2(\epsilon_{\lambda_V}, \Lambda) K_{\lambda_V} \right) \quad (4.32)$$

wobei die Regularisierungsfunktion $\mathcal{R}_2$ im Eigenzeitschema durch:

$$\mathcal{R}_2(\epsilon_\lambda, \Lambda) = (-) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_1^\infty ds s^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\epsilon_\lambda}{\Lambda} \right) e^{-s \left(\frac{\epsilon_\lambda}{\Lambda} \right)^2} \quad (4.33)$$

gegeben ist [MG91b]. In der Pauli-Villars-Methode wird wieder die entsprechende Subtraktion durchgeführt.

Analog ergeben sich die Ausdrücke für die Erwartungswerte der ortsabhängigen Dichten $\langle \bar{q}(x) \mathcal{K} q(x) \rangle$, wenn man in Gl. (4.30) die $\int d^3r$ -Integration unterdrückt.

Zur numerischen Berechnung verwenden wir die diskrete Basis der freien sphärischen Wellen, in der wir auch h diagonalisiert haben. Die Details sowie die expliziten Ergebnisse für die im Rahmen unserer Arbeit auftretenden Observablen sind in Anhang F zusammengestellt.

4.2. BARYONENZAHLE - CHEMISCHES POTENTIAL - VALENZQUARKS

Unser Ziel ist es, mit Hilfe der ECW nukleonische Systeme, die eine endliche Baryonenzahl ($B = 1$) besitzen, zu beschreiben. Allgemein sind Baryonendichte ρ^μ und Baryonenzahl B durch:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &:= \frac{1}{N_F} \bar{q}(\vec{r}) \gamma^0 q(\vec{r}) \\ B &= \int d^3r \rho(x) \end{aligned} \quad (4.34)$$

definiert. Um die Baryonenzahl eines Systems auf einen beliebigen Wert festzulegen, müssen wir Gl. (4.34) als Zwangsbedingung an die ECW koppeln. Dies soll in einer Weise geschehen, die es erlaubt, so weit wie möglich eine klare Trennung zwischen den Valenzquarks, welche die endliche Baryonenzahl bilden, und den Seequarks (1-Quark-Schleifen Beiträge) mit $B = 0$, vorzunehmen. Dazu beschreiten wir den aus der statistischen Mechanik bekannten Weg und führen das thermochemische Potential μ als Lagrangemultiplikator zur Adjustierung von B im euklidischen Raum in das erzeugende Funktional ein und gehen dadurch zur großkanonischen Zustandssumme $Z(\mu)$

$$Z(\mu) = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} e^{-\int d^4x \bar{q}(-iD - \mu\beta)q} \quad (4.35)$$

über [WC83, MG90]. Analog zu Gl. (3.10) erhält man nach Integration über q und $\bar{q}$ den fermionischen Anteil der großkanonischen effektiven chiralen Wirkung (GKECW)¹²⁾

$$S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}, \mu) = (-) \text{Spln}(-iD - \mu\beta) \quad (4.36)$$

Die gewünschte Trennung von Valenz- und Seeanteil geschieht durch Einschieben des Ausdruckes $S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}, \mu = 0)$ in die normalgeordnete GKECW (4.36):

$$\begin{aligned} & S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}, \mu) - S_{eff}^F(\sigma_V, \vec{\pi}_V, \mu = 0) \\ &= [S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}, \mu) - S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}, \mu = 0)] + [S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}, \mu = 0) - S_{eff}^F(\sigma_V, \vec{\pi}_V, \mu = 0)] \\ &= S_{eff}^{val}(\sigma, \vec{\pi}, \mu) + S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}) \end{aligned} \quad (4.37)$$

¹²⁾ Am mesonischen Anteil ändert sich nichts.

mit:

$$\begin{aligned} S_{eff}^{val}(\sigma, \vec{\pi}, \mu) &= [S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}, \mu) - S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}, \mu = 0)] \\ S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}) &= [S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}, \mu = 0) - S_{eff}^F(\sigma_V, \vec{\pi}_V, \mu = 0)] \end{aligned} \quad (4.38)$$

$S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi})$ ist exakt der im letzten Abschnitt behandelte Seeanteil $S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}) = TE_0$. Um den Valenzanteil $S_{eff}^{val}(\sigma, \vec{\pi}, \mu)$ durch die 1-Teilchen-Orbitale ϵ_λ auszudrücken, verwenden wir:

$$\begin{aligned} S_{eff}^{val}(\sigma, \vec{\pi}, \mu) &= (-N_F)T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \sum_{\lambda} [\ln(-iu + \epsilon_{\lambda} - \mu) - \ln(-iu + \epsilon_{\lambda})] \\ &= (-N_F)T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \sum_{\lambda} \int_{\epsilon_{\lambda}}^{\epsilon_{\lambda} - \mu} dx \frac{1}{-iu + x} \\ &= (-N_F T) \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \int_{\epsilon_{\lambda}}^{\epsilon_{\lambda} - \mu} dx \operatorname{sign} x \\ &= (-N_F T) \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \{|\epsilon_{\lambda} - \mu| - |\epsilon_{\lambda}|\} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Hierbei haben wir von der Identität :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^{+k} \frac{du}{2\pi i} \frac{1}{u - ix} = \frac{1}{2} \operatorname{sign} x \quad (4.40)$$

Gebrauch gemacht. Für $\mu > 0$ vereinfacht sich Gl. (4.39) zu:

$$S_{eff}^{val}(\sigma, \vec{\pi}, \mu) = TN_F \sum_{0 < \epsilon_{\lambda} < \mu} (\epsilon_{\lambda} - \mu) \quad (4.41)$$

Die aus der GKECW abgeleitete Baryonenzahl beträgt:¹³⁾

$$\begin{aligned} B(\mu) &= \frac{1}{N_F T} \frac{d}{d\mu'} \ln Z(\mu')|_{\mu'=\mu} = -\frac{1}{N_F T} \frac{d}{d\mu'} S_{eff}^F(\sigma, \vec{\pi}, \mu')|_{\mu'=\mu} \\ &= -\frac{1}{N_F T} \operatorname{Sp} \frac{\beta}{-iD - \mu\beta} = -\frac{1}{N_F T} \operatorname{Sp} \frac{1}{-i\beta D - \mu} \\ &= -\frac{1}{N_F} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \sum_{\lambda} \frac{1}{-iu + \epsilon_{\lambda} - \mu} = \frac{1}{N_F} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \frac{1}{i} \sum_{\lambda} \frac{1}{u + i(\epsilon_{\lambda} - \mu)} \end{aligned} \quad (4.42)$$

und mit Gl. (4.40):

$$B(\mu) = \left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{\lambda} \operatorname{sign}(\epsilon_{\lambda} - \mu) \quad (4.43)$$

¹³⁾ Da der 1-Schleifen Beitrag endlich ist, arbeiten wir unregulärisiert. Mehr darüber wird in den Bemerkungen am Ende dieses Abschnitts gesagt.

Separiert man wieder Valenz- und Seebeitrag, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} B(\mu) &= B_{val}(\mu) + B_0 \quad \text{mit:} \\ B_{val}(\mu) &= \sum_{0 < \epsilon_\lambda < \mu} 1 \\ B_0 &= \left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{\lambda} \text{sign} \epsilon_\lambda \end{aligned} \quad (4.44)$$

und entsprechend für die Baryondichte:

$$\begin{aligned} \rho(\mu) &= \rho_{val}(\mu) + \rho_0 \quad \text{mit:} \\ \rho_{val}(\mu) &= \sum_{0 < \epsilon_\lambda < \mu} \phi_\lambda^\dagger(\vec{r}) \phi_\lambda(\vec{r}) \\ \rho_0 &= \left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{\lambda} \text{sign} \epsilon_\lambda \phi_\lambda^\dagger(\vec{r}) \phi_\lambda(\vec{r}) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Analog zu dieser Methode, kann man den großkanonischen Erwartungswert einer beliebigen Dirac-Isospin-Observablen $K := \int d^3r \bar{q} K q$ in seinen Valenzanteil und den aus Gln. (4.31, 4.32) bekannten Seeanteil $\langle K \rangle_0$ zerlegen:

$$\langle K \rangle(\mu) = \langle K \rangle_{val}(\mu) + \langle K \rangle_0 \quad (4.46)$$

mit:

$$\begin{aligned} \langle K \rangle_{val}(\mu) &= \langle K \rangle(\mu) - \langle K \rangle(\mu = 0) \\ &= \frac{1}{T} \frac{\delta}{\delta \kappa} [\text{Spln}(-iD - \mu\beta - \kappa K) - \text{Spln}(-iD - \kappa K)] \Big|_{\kappa=0} \\ &= N_F \left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{\lambda} K_\lambda [\text{sign}(\epsilon_\lambda - \mu) - \text{sign}(\epsilon_\lambda)] \\ &= N_F \sum_{0 < \epsilon_\lambda < \mu} K_\lambda \end{aligned} \quad (4.47)$$

Wir können nun den Valenzanteil der GKECW nach Gln. (4.41, 4.44) durch

$$\frac{1}{T} S_{eff}^{val}(\mu) = N_F \left[\sum_{0 < \epsilon_\lambda < \mu} \epsilon_\lambda - \mu B_{val}(\mu) \right] \quad (4.48)$$

ausdrücken. Wie aus der statistischen Mechanik bekannt, hängt die Energie $E(\mu)$ eines Systems mit der großkanonischen Wirkung über:

$$E(\mu) = \frac{1}{T} S(\mu) + N_F \mu B(\mu) \quad (4.49)$$

zusammen. Daher lautet schließlich der Ausdruck für die Gesamtenergie $E(\mu)$:

$$E(\mu) = E_{val}(\mu) + E_0 + E_M + E_{br} \quad (4.50)$$

mit:

$$\begin{aligned} E_{val} &= N_F \sum_{0 < \epsilon_\lambda < \mu} \epsilon_\lambda \\ E_F(\mu) &:= E_{val}(\mu) + E_0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Betrachtet man das chemische Potential μ in Bild 4.1, so lassen sich drei relevante Bereiche, was das Verhalten von B und E_F betrifft, unterscheiden:

(A)

$$\begin{aligned} \epsilon_{val} &> \mu > 0 \\ B(\mu) &= 0 \\ E_{val}(\mu) &= 0 \\ E_F(\mu) &= E_0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

(B)

$$\begin{aligned} \mu &> \epsilon_{val} > 0 \\ B(\mu) &= B_{val}(\mu) = 1 \\ E_{val}(\mu) &= N_F \sum_{0 < \epsilon_\lambda < \mu} \epsilon_\lambda \\ E_F(\mu) &= N_F \sum_{0 < \epsilon_\lambda < \mu} \epsilon_\lambda + E_0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

(C)

$$\begin{aligned} \epsilon_{val} &< 0 \\ B(\mu) &= B_0 = 1 \\ E_{val}(\mu) &= 0 \\ E_F(\mu) &= E_0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Falls das Valenzquark im Kontinuum liegt (A), ist die Baryonenzahl $B = 0$ und der Fall für uns uninteressant. In den Bereichen (B) und (C) erhalten wir die gewünschte Baryonenzahl $B = 1$. Dabei tritt das Valenzquark nur explizit in Erscheinung, falls es positive Energie besitzt (B). Die Baryonenzahl des Diracsees ist dann $B_0 = 0$. Wenn $\epsilon_{val} < 0$ (C) ist das Valenzquark Bestandteil des Diracsees geworden, welcher selbst bereits $B_0 = 1$ trägt.

Im folgenden werden wir allgemein die Notation:

$$\eta_{val} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \epsilon_{val} > 0 \\ 0, & \text{falls } \epsilon_{val} < 0 \end{cases} \quad (4.55)$$

verwenden, so daß die Gesamtenergie für ein $B = 1$ -System:

$$E^{B=1} = N_F \eta_{val} \epsilon_{val} + E_0 + E_M + E_{br} \quad (4.56)$$

lautet. Entsprechendes gilt für die Erwartungswerte $\langle K \rangle^{B=1}$:

$$\langle K \rangle^{B=1} = N_F \eta_{val} \langle K \rangle_{val} + \langle K \rangle_0 \quad (4.57)$$

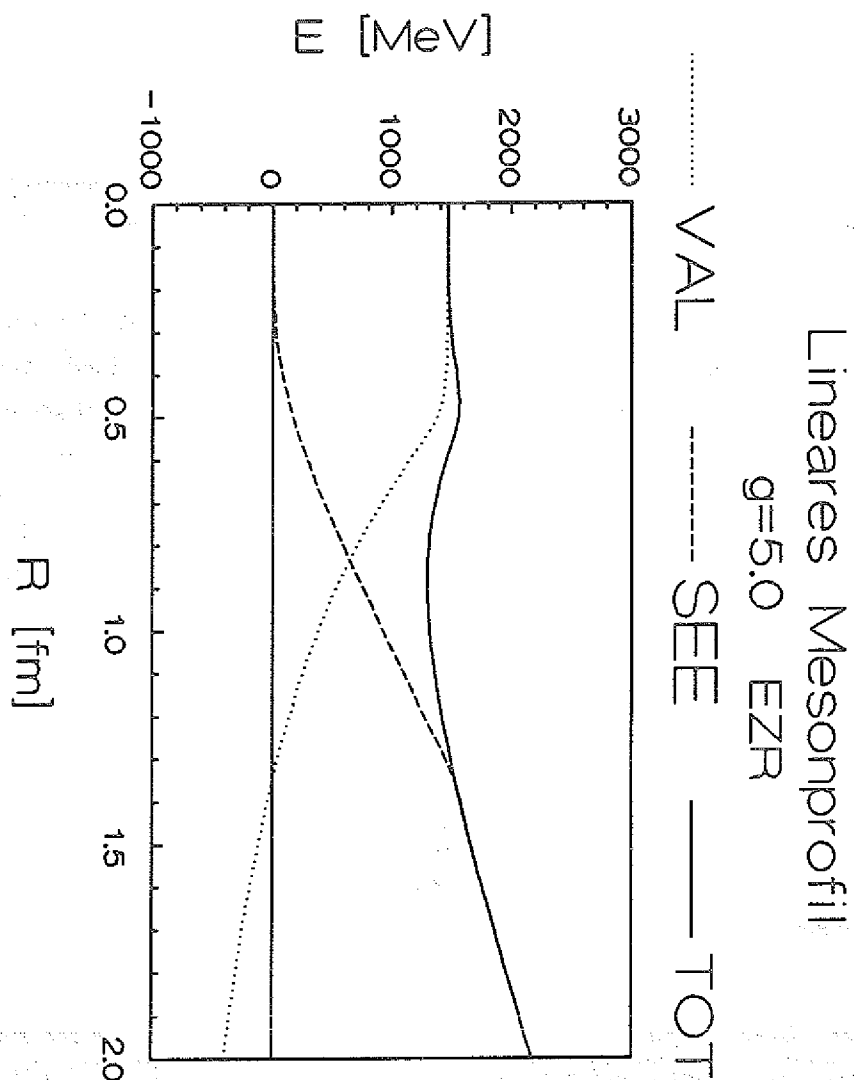


Bild 4.3: Seeenergie E_0 , Valenzenergie E_{val} und Gesamtenergie $E = E_F = E_{val} + E_0$ in Abhängigkeit des Ausdehnungsparameters R für ein lineares Mesonprofil (4.27) auf dem chiralen Zirkel mit einer Konstituentenquarkmasse von $M = 465 \text{ MeV}$ (Kopplungskonstante $g = 5.0$). Bei $R \approx 0.8 \text{ fm}$ hat $E(R)$ ein lokales Minimum.

Bild 4.3 zeigt E_{val} , E_0 und $E = E_F$ ($E_M = E_{b\pi} = 0$) für ein lineares Mesonprofil (4.27) auf dem chiralen Zirkel bei $g = 5.0$, $M = 465\text{MeV}$, $m_\pi = 0$ in Abhängigkeit von R . Man erkennt deutlich, daß $E(R)$ bei $R \approx 0.8\text{fm}$ ein lokales Minimum aufweist, was einer solitonischen Lösung mit $B = 1$ entspricht. Es ist unser Ziel, diese Lösungen selbstkonsistent durch Variation nach allen Freiheitsgraden (σ, π) zu bestimmen.

Bemerkungen:

Bevor wir dies tun, wollen wir noch einige Anmerkungen zu Problemen im Zusammenhang mit der Regularisierung der GKECW und der Hermitizität des chemischen Potentials μ machen, sowie die Gradientenentwicklung von B untersuchen.

(1) Zunächst stellen wir fest, daß für $B = 1$ der Valenzanteil der GKECW (4.41) bzw. die Valenzenergie E_{val} im Gegensatz zu E_0 endlich sind. Es besteht daher keinerlei Grund, sie zu regularisieren. Dies hat zur Folge, daß auch B_{val} nicht regularisiert wird und gemäß Gl. (4.44) einfach die Orbitale zwischen 0 und μ zählt, so daß es ganzzahlige Werte annimmt. Die Frage, die sich nun stellt, ist, ob auch die Seeanteile der Baryonenzahl B_0 bzw. der Baryondichte ρ_0 , welche selbst ebenfalls endlich sind, regularisiert werden sollen oder nicht, wie in Gln. (4.44, 4.45) geschehen. Da wir ganzzahlige $B(\mu)$ erhalten möchten, haben wir uns entschlossen, dies nicht zu tun. Wir können uns explizit davon überzeugen, daß der numerische Einfluß der Regularisierung von ρ_0 in den physikalisch relevanten Fällen außerordentlich gering ist. Dazu betrachten wir eine selbstkonsistente Lösung der Bewegungsgleichungen eines $B = 1$ -Systems bei EZR für eine Konstituentenmasse $M = 363\text{MeV}$, $g = 3.9$, $m_\pi = 139\text{MeV}$.¹⁴⁾

	Valenz	See (unreg.)	See (reg.)
B	1.00	0.00	-0.02
$\langle R^2 \rangle$	0.6091	0.0178	0.0175

Tab. 4.1: Numerischer Einfluß der Regularisierung der Baryondichte. Angegeben sind Valenzanteil, unregularisierter Seeanteil und regularisierter Seeanteil von $B = 4\pi \int dr r^2 \rho(r)$ (1. Moment von r^2 bzgl. ρ) sowie $\langle R^2 \rangle = 4\pi \int dr r^4 \rho(r)$ (2. Moment von ρ bzgl. r^2) im Falle der Eigenzeitregularisierung (nicht-linear, $M = 363\text{MeV}$, $g = 3.9$, $m_\pi = 139\text{MeV}$).

Tab. 4.1 zeigt die entsprechende Baryonenzahl B sowie den mittleren quadratischen Radius

¹⁴⁾Die Bestimmung der selbstkonsistenten Lösung wird zwar erst im nächsten Abschnitt behandelt, ist aber hier für diese Untersuchung irrelevant. Man kann im Prinzip auch ein beliebiges festes Mesonprofil betrachten. Der Grund für die Verwendung selbstkonsistenter Profile liegt darin, daß wir den numerischen Effekt an einem physikalisch relevanten Fall demonstrieren wollen. Es wird sich zeigen, daß sich nur mit Werten von M in dieser Größenordnung nukleonische Radien ergeben, die im experimentell gemessenen Bereich liegen.

$\langle R^2 \rangle$, welche die 1. bzw. 2. Momente von r^2 bzgl. $\rho(r)$ sind:

$$\begin{aligned} B &= 4\pi \int dr r^2 \rho(r) \\ \langle R^2 \rangle &= 4\pi \int dr r^4 \rho(r) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Die regularisierte Baryonendichte ρ wurde dabei wie in Gl. (4.32) angegeben mit $\mathcal{K} = \gamma^0$ berechnet. Ein entsprechendes Verhalten stellt man auch bei allen anderen Regularisierungsschemata fest.

(2) Ein weiterer interessanter Punkt ist die Frage, wie die analytische Fortsetzung des chemischen Potentials μ vom Minkowski- in den euklidischen Raum und zurück durchgeführt wird, oder anders ausgedrückt, ob μ in den jeweiligen Metriken reell oder imaginär ist. Wir fassen in Anlehnung an die statistische Mechanik μ als Lagrangemultiplikator auf, der sowohl im euklidischen als auch im Minkowski-Raum eine reelle Zahl ist. Dies hat in beiden Fällen eine simple Verschiebung der Energieniveaus $\epsilon_\lambda \rightarrow \epsilon_\lambda - \mu$ zur Folge, so daß je nach der Größe von μ eine gewisse Anzahl von positiven Niveaus ϵ_λ unter die Nulllinie rutscht und damit die Integrationskonturlinie in der komplexen Frequenzebene kreuzt (vgl. Anhang A). Die Differenz zum Fall $\mu = 0$ sind dann genau die gewünschten Valenzorbitale (in unserem Falle 1), die für die endliche Baryonenzahl $B(\mu)$ des Systems verantwortlich sind. Eine andere Vorgehensweise wäre, μ wirklich wie die 0-te bzw. 4-te Komponente eines 4-er Vektors analytisch fortzusetzen, was der Behandlung eines in Raum und Zeit konstanten ω -Mesonfeldes (vgl. Anhänge C und D: Vektorfeld $v_{\mu=0}^{i=0}$) entspricht. In diesem Fall tritt explizit ein Imaginärteil in der GKECW auf. Setzt man $\mu = i\omega$, (ω reell), so erhält man:

$$\begin{aligned} \Re S_{eff}^F(\omega) &= (-)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \text{Spln}[(-iu + i\omega + h)(+iu - i\omega - h)] \\ &= (-N_F)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \ln[\epsilon_{\lambda}^2 + (u - \omega)^2] \\ &= (-N_F)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \ln[\epsilon_{\lambda}^2 + u^2] \\ &= \Re S_{eff}^F(\omega = 0) \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \Im S_{eff}^F(\omega) &= (-N_F) \sum_{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \Im \ln[\epsilon_{\lambda} - i(u - \omega)] = N_F \sum_{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \arctan \frac{u - \omega}{\epsilon_{\lambda}} \\ &= N_F \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\lambda} \int_{-k}^{+k} \frac{du}{2\pi} \arctan \frac{u - \omega}{\epsilon_{\lambda}} = N_F \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\lambda} \int_{-k-\omega}^{+k-\omega} \frac{du}{2\pi} \arctan \frac{u}{\epsilon_{\lambda}} \\ &= \frac{N_F}{2\pi} \sum_{\lambda} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[u \arctan \frac{u}{\epsilon_{\lambda}} - \frac{\epsilon_{\lambda}}{2} \ln(u^2 + \epsilon_{\lambda}^2) \right]_{-k-\omega}^{+k-\omega} \\ &= N_F \omega \sum_{\lambda} \left(-\frac{1}{2} \right) \text{sign} \epsilon_{\lambda} \end{aligned}$$

Falls $\epsilon_{val} > 0$ ist $\sum_{\lambda} \text{sign} \epsilon_{\lambda} = 0$ und daher $\Im S_{eff}^F(\mu) = 0$. Dies bedeutet, daß $S_{eff}^F(\mu)$ nicht mehr von μ abhängt und $B(\mu)$ verschwindet. Folglich kann μ in diesem Falle nicht als Lagrangemultiplikator zur Adjustierung der Baryonenzahl dienen und auch $S_{eff}^F(\mu)$ nicht in Valenz- und Seeanteil zerlegt werden. Die endliche Baryonenzahl muß dann durch explizite Addition von Valenzquarks per Hand zu E_0 erreicht werden [Rei89].

(3) In Anhang G wird gezeigt, daß die Gradientenentwicklung des Seeanteils der Baryonenzahl B_0 auf die topologische Windungszahl n aus dem anomalen Baryonenstrom führt. Liegt das Mesonprofil in der Parametrisierung:

$$\theta(r) = -n\pi f\left(\frac{r}{R}\right) \quad (4.60)$$

mit natürlichem n und $f(0) = 1$, $f(\infty) = 0$ vor, so ist:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} B_0(R) = n \quad (4.61)$$

Für genügend große R ist $\epsilon_{val} < 0$ und es gilt $B_0 = n$ exakt. Das n ist also identisch mit der Anzahl der Orbitale, die aus dem positiven in das negative Spektrum wandern. Wenn alle diese (Valenz-) Orbitale in den See eingetaucht sind, treten sie, sofern $\mu > 0$ ist, in dem Ausdruck für die gesamte fermionische Energie E_F nicht mehr explizit auf, und wir haben es dann formal mit einer vollständig bosonisierten Theorie zu tun, deren Baryonenzahl durch die topologische Windungszahl gegeben ist. Dies entspricht der Philosophie der sogenannten topologischen Modelle wie z. B. dem Skyrme-Modell [Sky62, AN83]. Allerdings wird sich bald herausstellen, daß in selbstkonsistenten Rechnungen dieser Fall bei Werten von M auftritt, die einen viel zu kleinen nukleonischen Radius zur Folge haben und daher unphysikalisch sind.

4.3. BEWEGUNGSGLEICHUNGEN FÜR EIN $B = 1$ -SYSTEM - SELBSTKONSISTENTE LÖSUNGEN

Die Bewegungsgleichungen für ein $B = 1$ -System sind durch die stationären Punkte der GKECW (Schwinger-Dyson-Gleichung):

$$\frac{\delta S_{eff}^{B=1}(\mu)}{\delta \sigma} = 0 \quad \frac{\delta S_{eff}^{B=1}(\mu)}{\delta \vec{\pi}} = 0 \quad (4.62)$$

gegeben, was sich für zeitunabhängige σ und $\vec{\pi}$ auf

$$\frac{\delta E^{B=1}}{\delta \sigma} = 0 \quad \frac{\delta E^{B=1}}{\delta \vec{\pi}} = 0 \quad (4.63)$$

reduziert. Zur Durchführung der Variation, startet man von Gl. (4.56) mit der Spektdarstellung Gl. (4.13) sowie Gln. (4.14, 4.15), und verwendet:

$$\begin{aligned} \epsilon_\lambda &= \int d^3r \phi_\lambda^\dagger(\vec{r}) h \phi_\lambda(\vec{r}) \\ \frac{\delta \epsilon_\lambda}{\delta \sigma(\vec{r})} &= s_\lambda(\vec{r}) \\ \frac{\delta \epsilon_\lambda}{\delta \pi^a(\vec{r})} &= p_\lambda^a(\vec{r}) \end{aligned} \quad (4.64)$$

mit den skalar-isoskalaren und pseudoskalar-isovektoriellen 1-Teilchen-Dichten:

$$\begin{aligned} s_\lambda(\vec{r}) &= \bar{\phi}_\lambda(r, \Omega) \phi_\lambda(r, \Omega) \\ p_\lambda^a(\vec{r}) &= \bar{\phi}_\lambda(r, \Omega) i \gamma_5 \tau^a \phi_\lambda(r, \Omega) \end{aligned} \quad (4.65)$$

Da in der Wirkung explizit keine kinetischen Terme für die Mesonen enthalten sind, lauten die Bewegungsgleichungen einfach:

$$\sigma(\vec{r}) = -\frac{g}{\mu^2} N_F (S_0(\vec{r}) + \eta_{val} s_{val}(\vec{r})) + \frac{1}{\mu^2} f_\pi m_\pi^2 \quad (4.66)$$

$$\pi^a(\vec{r}) = -\frac{g}{\mu^2} N_F (P_0^a(\vec{r}) + \eta_{val} p_{val}^a(\vec{r})) \quad (4.67)$$

Die regularisierten Dichten S_0 und P_0^a setzen sich aus den entsprechenden 1-Teilchen Dichten gemäß

$$\begin{aligned} S_0(\vec{r}) &= \sum_\lambda \mathcal{R}_2(\epsilon_\lambda, \Lambda) s_\lambda(\vec{r}) \\ P_0^a(\vec{r}) &= \sum_\lambda \mathcal{R}_2(\epsilon_\lambda, \Lambda) p_\lambda^a(\vec{r}) \end{aligned} \quad (4.68)$$

zusammen. Wichtig ist zu bemerken, daß die Vakuumanteile nicht abgezogen werden, da $\frac{\delta E_V}{\delta \sigma} = \frac{\delta E_V}{\delta \vec{\pi}} = 0$ ist. Für σ und $\vec{\pi}$ wird die statische Hedgehog-Form (4.4) angenommen.

Dieser Ansatz stellt eine selbstkonsistente Symmetrie des Problems dar, das heißt, wenn man von Hedgehog-Feldern σ_{alt} und $\vec{\pi}_{alt}$ startet, so haben die aus den durch Diagonalisierung von

$h(\sigma_{alt}, \vec{\pi}_{alt})$ erhaltenen Eigenzuständen ϕ_λ und Eigenwerten ϵ_λ gemäß Gln. (4.66, 4.67) berechneten neuen Felder σ_{neu} und $\vec{\pi}_{neu}$ wieder Hedgehog-Form [MG91b].

Beweis:

- (1) Wie wir wissen, können wegen $[h_{alt}, G] = [h_{alt}, \Pi] = [G, \Pi] = 0$ die Eigenzustände ϕ_λ durch den Grand-Spin G , dessen z -Komponente M und die Parität Π charakterisiert werden (Anhänge E und F). Es liegt Entartung bezüglich M vor.
- (2) Ein beliebiger Eigenzustand mit den Quantenzahlen $|G; M; \Pi\rangle$ kann durch simple Clebsch-Gordan-Algebra in Zustände mit guten Quantenzahlen $|l, j, G, M, \Pi\rangle$ (freie sphärische Wellen) zerlegt werden.
- (3) Der Ausdruck:

$$\sum_M \langle l_1, j_1, G, M, \Pi | \Omega \rangle \langle \Omega | l_2, j_2, G, M, \Pi \rangle = \delta_{j_1 j_2} \delta_{l_1 l_2} \frac{2G+1}{4\pi} \quad (4.69)$$

ist unabhängig vom Raumwinkel Ω . Daher ist auch: $\sum_M s_{\lambda(M)}(\vec{r}) := \frac{2G+1}{4\pi} s_{\lambda(M)}(r)$ nur von r abhängig.

- (4) Das dreidimensionale Skalarprodukt $(\ ; \)$ zwischen p_λ^a und $\vec{r}^b$ ist:

$$(p_{\lambda(M)}^a(\vec{r}); \vec{r}^b) = \sum_{l_1 l_2 j_1 j_2} c_{l_1 l_2 j_1 j_2}(r) (-)^b \langle l_1 j_1 G M \Pi | \Omega \rangle (\tau^a \sigma^{-b}) \langle \Omega | l_2 j_2 G M \Pi \rangle \quad (4.70)$$

(σ^a bezeichnet hierbei die Pauli-Spin-Matrix). Anwendung des Wigner-Eckart-Theorems [VM88] liefert:

$$\begin{aligned} \sum_M \langle l_1 j_1 G M \Pi | \Omega \rangle (\tau^a \sigma^{-b}) \langle \Omega | l_2 j_2 G M \Pi \rangle (-)^b = \\ \text{const} \cdot \sum_{M \gamma c} C(GcG | M \gamma M) C(l_1 c | a - b) (-)^b = K \cdot \delta_{ab} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Hierbei ist K unabhängig von a , und da der Operator $\sum_a (-)^a \sigma^{-a} \tau^a = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\tau})$ ein Skalar ist, auch unabhängig von Ω (vgl. (3)). Somit folgt, daß auch $\sum_M (p_{\lambda(M)}^a(\vec{r}); \vec{r}^b) := \delta_{ab} \frac{2G+1}{4\pi} p_{\lambda(M)}(r)$ nur von r abhängt. (q.e.d.)

Die Bewegungsgleichungen vereinfachen sich damit zu [MG91a]:

$$\sigma(r) = -\frac{g}{\mu^2} \frac{N_F}{4\pi} (S_0(r) + s_{val}(r) \eta_{val}) + \frac{1}{\mu^2} f_\pi m_\pi^2 \quad (4.72)$$

$$\pi(r) = -\frac{g}{\mu^2} \frac{N_F}{4\pi} (P_0(r) + p_{val}(r) \eta_{val}) \quad (4.73)$$

mit:

$$\begin{aligned} S_0(r) &= \sum_\lambda \mathcal{R}_2(\epsilon_\lambda, \Lambda) s_\lambda(r) & s_\lambda(r) &= \frac{4\pi}{2G+1} \sum_M s_{\lambda(M)}(\vec{r}) = \int d\Omega \bar{\phi}_\lambda(r, \Omega) \phi_\lambda(r, \Omega) \\ P_0(r) &= \sum_\lambda \mathcal{R}_2(\epsilon_\lambda, \Lambda) p_\lambda(r) & p_\lambda(r) &= \frac{4\pi}{2G+1} \sum_M (\vec{p}_{\lambda(M)}(\vec{r}); \vec{r}) = \int d\Omega \bar{\phi}_\lambda(r, \Omega) i\gamma_5(\vec{\tau}\vec{r}) \phi_\lambda(r, \Omega) \end{aligned} \quad (4.74)$$

Die numerische Berechnung der r -abhängigen 1-Teilchen-Dichten ist in Anhang F ausgeführt.

In der nichtlinearen Version wird die Anzahl der mesonischen Freiheitsgrade um 1 reduziert, indem man σ und π auf den chiralen Zirkel $\sigma^2 + \pi^2 = \sigma_V^2 + \pi_V^2 = f_\pi^2$ einschränkt (Gl. (4.6)), so daß der chirale Winkel θ als einziger mesonischer Freiheitsgrad übrigbleibt. Die restringierten Bewegungsgleichungen sind dann die stationären Punkte bezüglich θ :

$$\frac{\delta E^{B=1}}{\delta \theta} = 0 \quad (4.75)$$

Dies liefert [RW88, MG89b, MG91a]:

$$\begin{aligned} & (-\sin \theta(r)) \left[N_c g (S_0(r) + \eta_{val} s_{val}(r)) - 4\pi f_\pi m_\pi^2 \right] \\ & + \cos \theta(r) \left[N_c g (P_0(r) + \eta_{val} p_{val}(r)) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.76)$$

Es sei noch bemerkt, daß a priori keinerlei Einschränkung für die Windungszahl n von θ , welche durch $\theta(0) = -n\pi$ bestimmt ist, gemacht werden kann. Im Gegensatz zu den topologischen Modellen (z.B.: Skyrme-Modell [AN83]), in denen n von vorneherein ganzzahlig sein muß, um überhaupt eine endliche Energie zu erreichen, ist in unserem Modell E in jedem Falle endlich. Abgesehen von mathematisch-ästhetischen Gründen, die die Stetigkeit des Pionfeldes im Ursprung oder die Konvergenz der Gradientenentwicklung von B (siehe Anhang G) betreffen, spricht zunächst nichts dagegen, daß n auch nichtganzzahlige Werte annimmt. Man kann sich jedoch davon überzeugen, daß die Minima der Energie tatsächlich bei Profilen mit ganzzahligen n liegen und in unserem speziellen Fall das Energieminimum für ein $B = 1$ -System auch bei einem Profil mit $n = 1$ auftritt [BerDA]. Wir werden daher im folgenden stets $n = 1$ annehmen.

Die Bewegungsgleichungen werden numerisch durch ein einfaches iteratives Verfahren, wie es aus der Hartree-Theorie in der Atomphysik bekannt ist, gelöst. Zunächst wählen wir vernünftige Startprofile für σ und π . Damit diagonalisieren wir, wie beschrieben, den Hamiltonoperator h . Mit dem daraus erhaltenen Spektrum $(\epsilon_\lambda, \phi_\lambda)$ können wir nun nach Gln. (4.72, 4.73) neue Felder σ und π berechnen. Auf dem chiralen Zirkel verwenden wir stattdessen Gl. (4.76) und erhalten σ und π aus Gl. (4.6). Dabei achten wir darauf, daß die Lösung θ von Gl. (4.76) unter der Randbedingung $n = 1$ erfolgt.¹⁵⁾ Das Verfahren wird so lange wiederholt, bis Selbstkonsistenz erreicht ist. Praktisch geschieht dies durch Testen eines geeigneten Maßes $\| \frac{\sigma_{alt} - \sigma_{neu}}{\sigma_{neu}} + \frac{\pi_{alt} - \pi_{neu}}{\pi_{neu}} \| < \epsilon$ bzw. $\| \frac{\theta_{alt} - \theta_{neu}}{\theta_{neu}} \| < \epsilon$ mit einer vernünftigen Schranke ϵ . Die Güte der Selbstkonsistenz kann ferner durch Wahl verschiedener Startprofile (z.B.: lineare (4.27) oder exponentielle (4.7) Form) getestet werden. Wir haben uns außerdem davon überzeugt, daß unsere numerischen Lösungen tatsächlich einem lokalen Minimum der Energie im Parameterraum $\{\sigma(r), \pi(r)\}$ bzw. $\{\theta(r)\}$ entsprechen.

Wir haben diese selbstkonsistente Prozedur für die 4 verschiedenen Regularisierungsschemata in den Fällen $m_\pi = 0$ und $m_\pi = 139 \text{ MeV}$ mit M als Parameter ausgeführt [MG89b, MG91a,

¹⁵⁾ Auch im linearen Modell (mit σ und π als unabhängigen Freiheitsgraden) starten wir von einem Profil auf dem chiralen Zirkel mit $n = 1$, lassen dann aber das System sich während der Selbstkonsistenzprozedur frei entwickeln.

BD90]. In allen Fällen existiert unterhalb eines kritischen Wertes M_{kr} der Konstituentenmasse, so daß für $M < M_{kr}$ keine Lösung mit Baryonenzahl $B = 1$.

Die Werte für M_{kr} in den verschiedenen Fällen sind in Tab. 4.2 zusammengestellt. Sie wurden auf die Weise gewonnen, daß bei $M < M_{kr}$ die selbstkonsistente Prozedur unabhängig von dem gewählten Startprofil in die Vakuumlösung ($B = 0$) rutscht.

			M_{cr}	g_{cr}	Λ_{cr}	$\frac{\Lambda_{cr}}{M_{cr}}$
EZR	linear	$m_\pi = 0$	363	3.9	639	1.760
EZR	linear	$m_\pi = 139 MeV$	372	4.0	637	1.712
EZR	nicht-linear	$m_\pi = 0$	335	3.6	649	1.943
EZR	nicht-linear	$m_\pi = 139 MeV$	344	3.7	646	1.878
$O(4)s$	nicht-linear	$m_\pi = 139 MeV$	363	3.9	758	2.088
$O(3)s$	nicht-linear	$m_\pi = 139 MeV$	372	4.0	605	1.626
PV	nicht-linear	$m_\pi = 139 MeV$	307	3.3	562	1.829

Tab. 4.2: Die kritischen Werte von M , g , Λ , $\frac{\Lambda}{M}$ für die Existenz von solitonischen Lösungen mit $B = 1$. Zu gegebenem M_{kr} wurden die anderen Parameter wie in Kapitel 3 angegeben berechnet. Für: $M < M_{kr}$ bzw. $g < g_{kr}$ bzw. $\frac{\Lambda}{M} > \frac{\Lambda_{kr}}{M_{kr}}$ existieren keine solitonischen Lösungen.

Wir betrachten zunächst den Fall der EZR. In Bild 4.4, 4.5, 4.6 sind die selbstkonsistenten σ und π -Felder sowie die Baryondichte ρ für das lineare Modell bei drei verschiedenen Konstituentenmassen M dargestellt. In allen drei Fällen wurde $m_\pi = 0$ verwendet. Für $M = 363 MeV$ ($g = 3.9$), was knapp über dem kritischen Wert liegt, liegen σ und π fast auf dem chiralen Zirkel. In diesem Fall besteht kein wesentlicher Unterschied zwischen linearem und nichtlinearem Modell, wie man explizit aus Bild 4.7 sieht. Dort werden die selbstkonsistenten Mesonfelder beider Versionen miteinander verglichen. Weiter erkennt man aus Bild 4.4, 4.5, daß nur eine geringe Erhöhung von M bereits zu starken Abweichungen vom chiralen Zirkel führt. σ und π bilden am Ursprung immer tiefere Taschen aus, während ihre gesamte Ausdehnung schrumpft. Dies führt zu einer Baryondichte, die sehr stark am Ursprung konzentriert ist. Für $M > 400 MeV$ ($g > 4.25$) versagt unser selbstkonsistentes Verfahren. Es tritt ein bei nichtlinearen Systemen¹⁶⁾ häufig anzutreffendes chaotisches Verhalten auf, welches dadurch gekennzeichnet ist, daß die Felder zwischen verschiedenen Konfigurationen hin- und herspringen. Das Problem liegt vermutlich darin begründet, daß, anschaulich gesehen, das Minimum im $\{\sigma, \pi\}$ -Raum sehr flach ausgeprägt ist. Man ändert die Gesamtenergie nur wenig, wenn man tiefere Taschen für σ und π am Ursprung zuläßt und dadurch E_M (d.h. die Abweichung vom chiralen Zirkel) erhöht, gleichzeitig ϵ_{val} jedoch absenkt. Nach unserer Meinung existiert in diesen Fällen trotzdem eine Lösung mit Baryonenzahl $B = 1$, allerdings

¹⁶⁾ Der Ausdruck *nichtlinear* bezieht sich hier auf das zu lösende System, nicht auf die Darstellung der chiralen Symmetrie.

ist unsere naive selbstkonsistente Prozedur nicht in der Lage, eine solche zu finden.



Die Kurve zeigt den Verlauf der Funktion $f(x)$ für verschiedene Werte von x . Die Kurve ist in der Regel monoton fallend, was auf eine negative Korrelation zwischen den Variablen hindeutet.



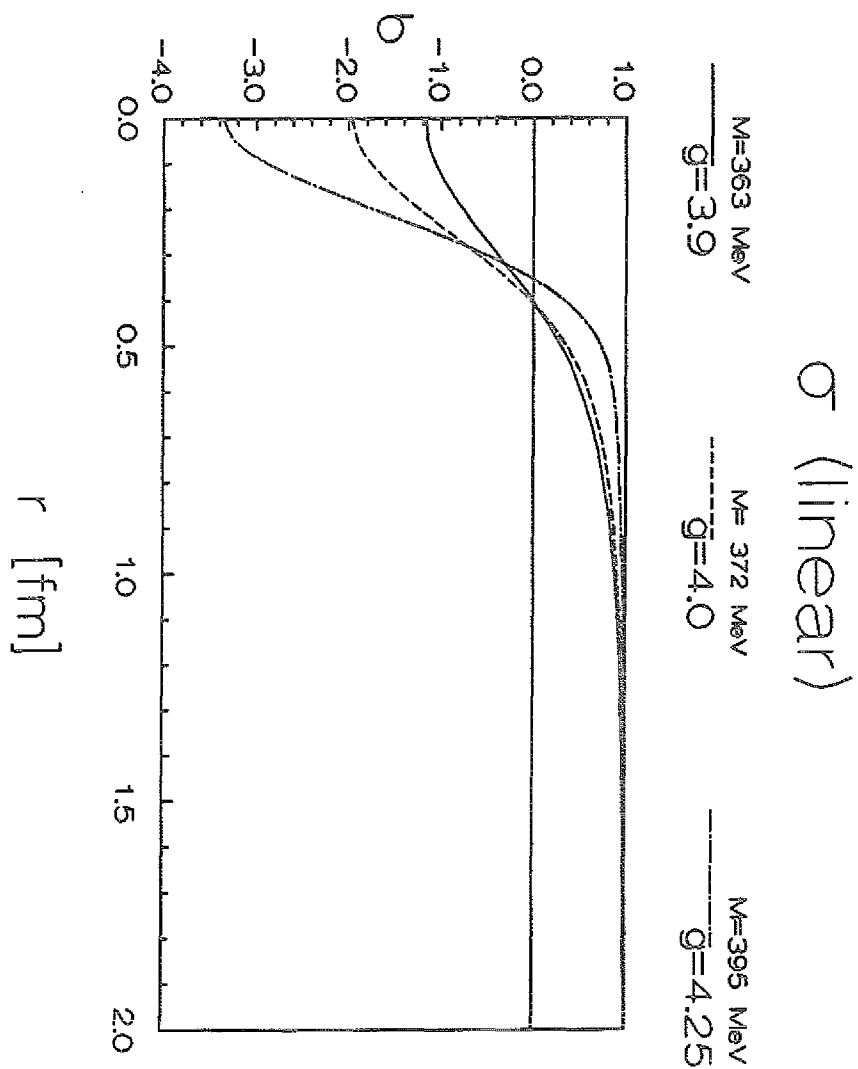


Bild 4.4: Das selbstkonsistente σ -Feld (auf f_π normiert) im linearen Modell mit $m_\pi = 0$ für 3 verschiedene Konstituentenquarkmassen M .

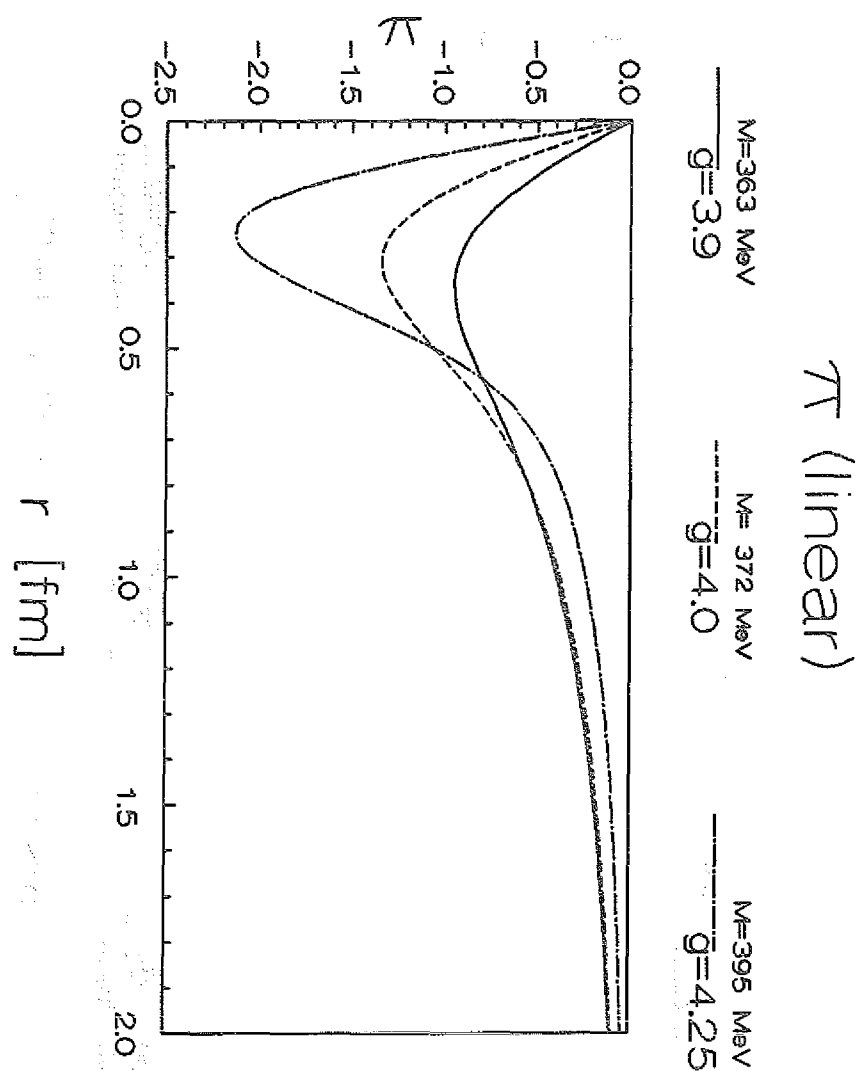


Bild 4.5: Das selbstkonsistente π -Feld (auf f_π normiert) im linearen Modell mit $m_\pi = 0$ für 3 verschiedene Konstituentenquarkmassen M .

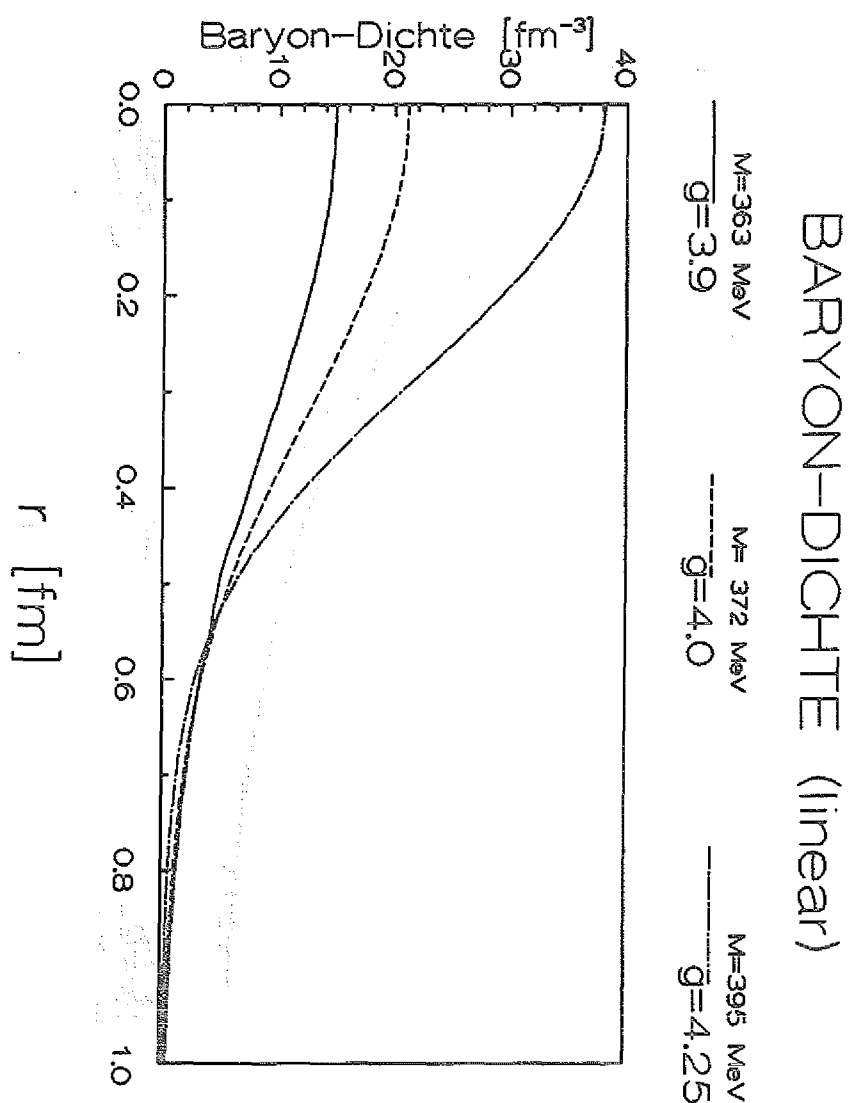


Bild 4.6: Die Baryondichten ρ der selbstkonsistenten Lösungen im linearen Modell mit $m_\pi = 0$ für 3 verschiedene Konstituentenquarkmassen M .

Glücklicherweise existieren im nichtlinearen Modell keine solchen Konvergenzprobleme. Hier findet man auch für hohe Werte von M selbstkonsistente Lösungen. Die Kurven für σ , π und ρ bei verschiedenen M sind in Bild 4.8, 4.9, 4.10 dargestellt. Man stellt fest, daß sich σ und π bei Erhöhung von M kaum verändern, was in der Restriktion auf den chiralen Zirkel begründet liegt. Bei größeren M ist die Baryondichte ρ auch hier stärker um den Ursprung konzentriert, allerdings ist der Effekt wesentlich schwächer als im linearen Modell ausgeprägt, da σ und π mit steigendem M nahezu konstant bleiben. Für $M > 725 \text{ MeV}$ ($g > 7.8$) erhält man eine Lösung mit $\eta_{val} = 0$, das heißt, daß das Valenzorbital in den Diracsee eingetaucht ist ($\epsilon_{val} < 0$). Allerdings sollte man sich darüber im Klaren sein, daß die Theorie bei solchen hohen Werten kaum als sinnvoll betrachtet werden kann, da dann das Verhältnis $\frac{\Lambda}{M}$ so klein ist (vgl. Tab. 3.1), daß die Orbitale des Diracsees durch die Regularisierung unterdrückt werden.

Aus Bild 4.7 ist ferner ersichtlich, daß der Effekt einer endlichen Pionmasse auf die selbstkonsistenten Lösungen außerordentlich gering ist. Diese Eigenschaft wurde in allen untersuchten Fällen festgestellt.

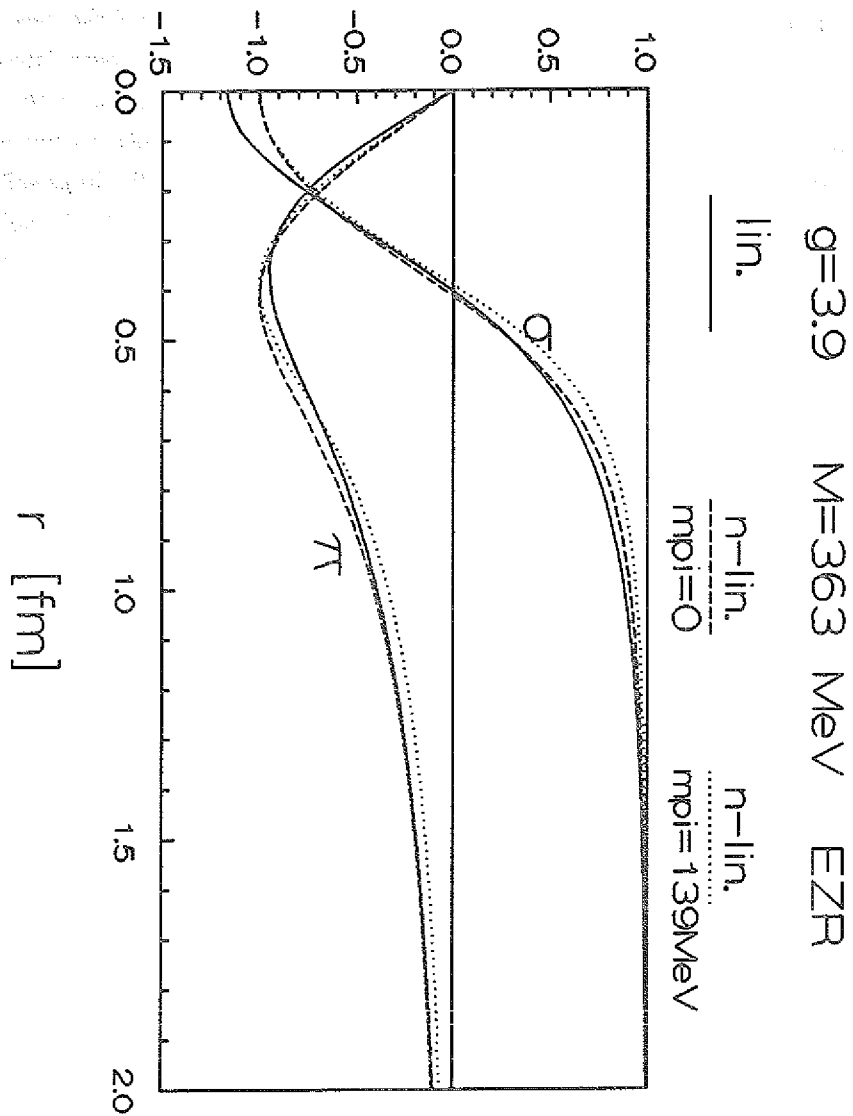


Bild 4.7: Vergleich der selbstkonsistenten σ und π -Felder (jeweils auf f_π normiert) des linearen Modells mit $m_\pi = 0$ und des nichtlinearen Modells mit $m_\pi = 0$ und $m_\pi = 139\text{MeV}$ für $M = 363\text{MeV}$, $g = 3.9$.

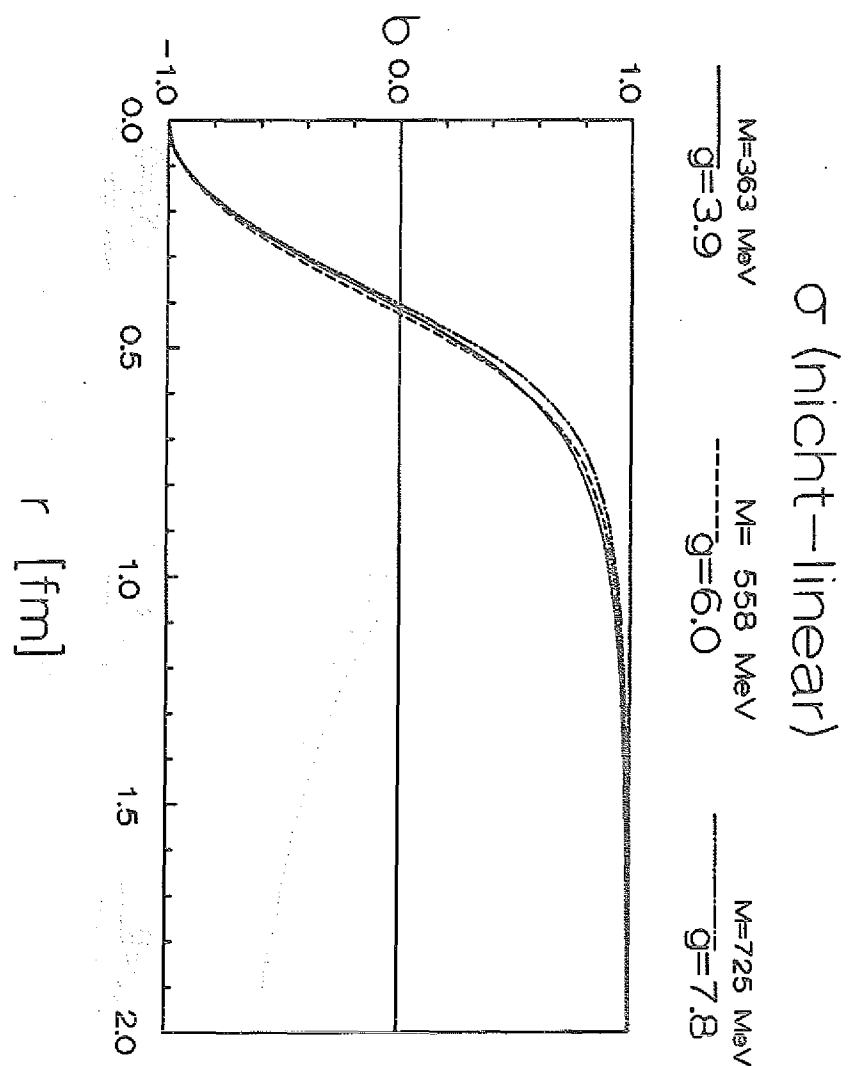


Bild 4.8: Das selbstkonsistente σ -Feld (auf f_π normiert) im nicht-linearen Modell mit $m_\pi = 0$ für 3 verschiedene Konstituentenquarkmassen M .

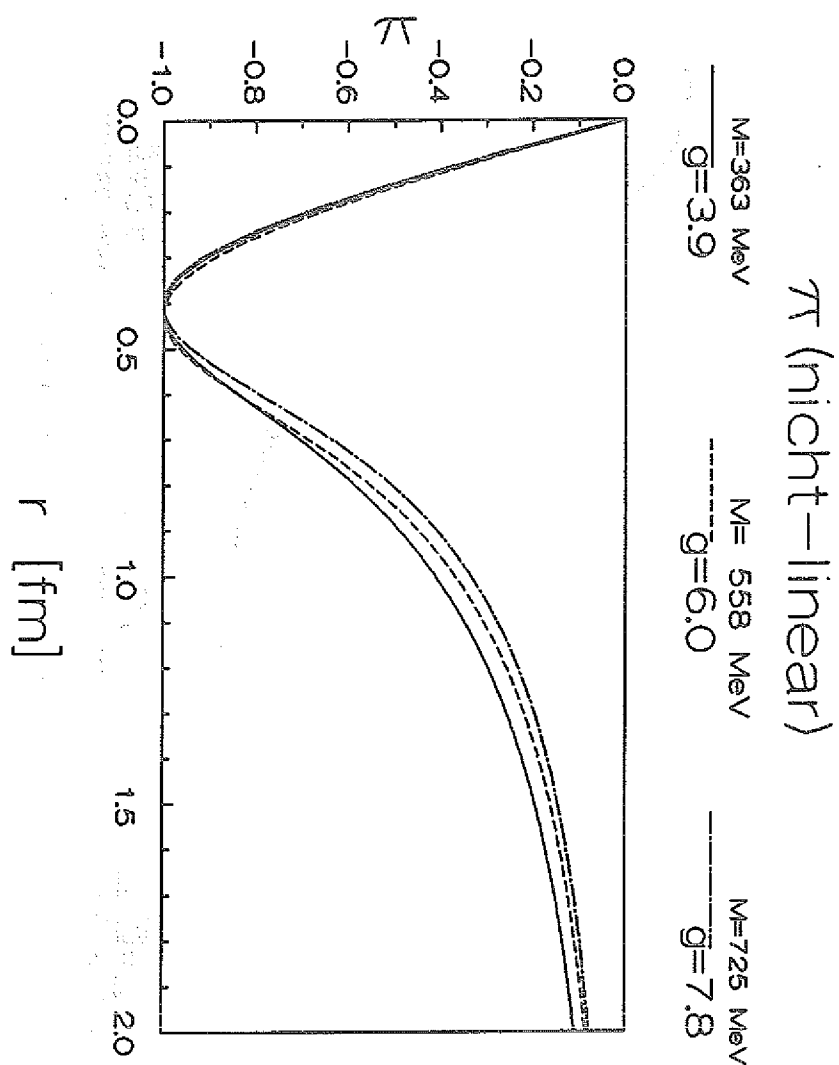


Bild 4.9: Das selbstkonsistente π -Feld (auf f_π normiert) im nicht-linearen Modell mit $m_\pi = 0$ für 3 verschiedene Konstituentenquarkmassen M .

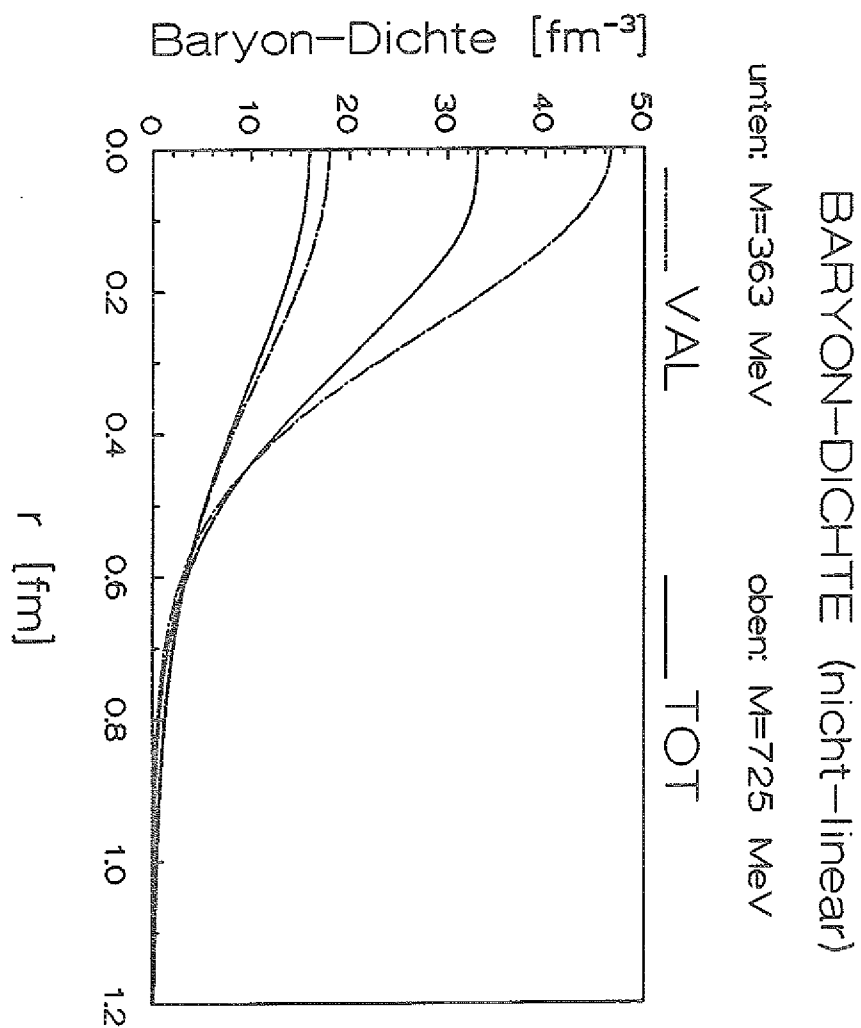


Bild 4.10: Die Baryondichten ρ der selbstkonsistenten Lösungen im nicht-linearen Modell mit $m_\pi = 0$ für 2 verschiedene Konstituentenquarkmassen M . Dabei ist explizit der jeweilige Valenzanteil angegeben.

In Bild 4.11, 4.12 betrachten wir abschließend die selbstkonsistenten Felder σ und π im nichtlinearen Modell mit $M = 363\text{MeV}$, $g = 3.9$, $m_\pi = 139\text{MeV}$ für die 4 verschiedenen Regularisierungsschemata. Man erkennt, daß sich die unterschiedlichen Verfahren auf die selbstkonsistenten solitonischen Lösungen $B = 1$ -Lösungen im Gegensatz zum Vakuumsektor (Kapitel 3.5) nur relativ schwach auswirken.

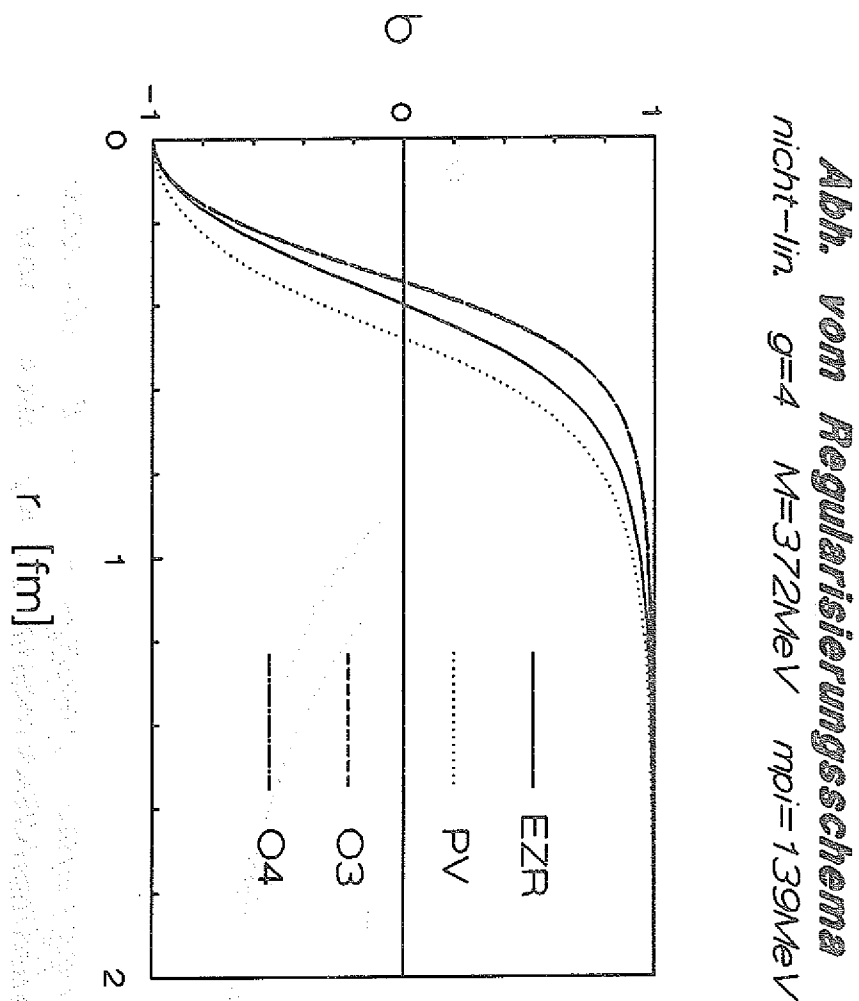


Bild 4.11: Das selbstkonsistente σ -Feld (auf f_π normiert) im nicht-linearen Modell ($m_\pi = 139\text{MeV}$, $M = 372\text{MeV}$, $g = 4.0$) für die 4 Regularisierungsschemata aus Kapitel 3 (Eigenzeit-Regularisierung EZR, O(3)- und O(4)-invarianter scharfer Abschnitt im Impulsraum und Pauli-Villars-Regularisierung PV).

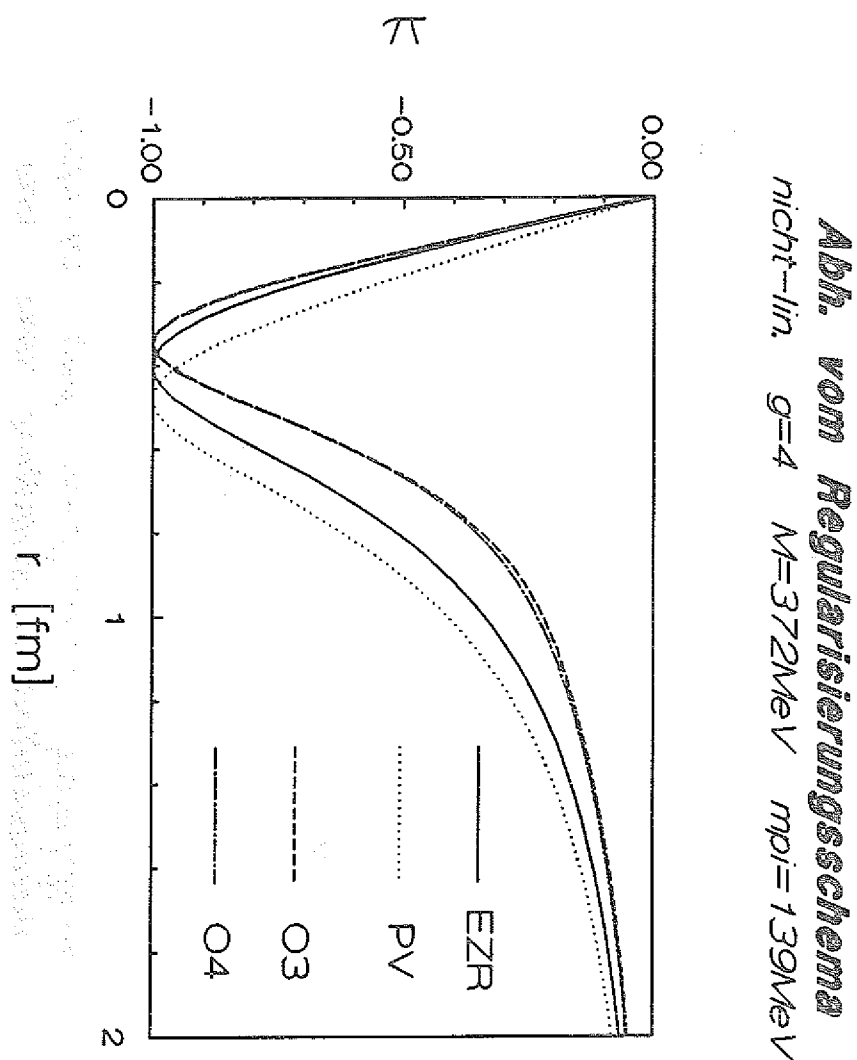


Bild 4.12: Das selbstkonsistente π -Feld (auf f_π normiert) im nicht-linearen Modell ($m_\pi = 139\text{MeV}$, $M = 372\text{MeV}$, $g = 4.0$) für die 4 Regularisierungsschemata aus Kapitel 3 (Eigenzeit-Regularisierung EZR, O(3)-und O(4)-invarianter scharfer Abschnitt im Impulsraum und Pauli-Villars-Regularisierung PV).

4.4. SELBSTKONSISTENTE LÖSUNGEN DES CHIRALEN SIGMA-MODELLS (CSM)

In Kapitel 3.4 haben wir durch Berechnung der Strahlungskorrekturen die UV-divergenten Anteile unserer ECW bestimmt, welche identisch zur niedrigsten Ordnung Gradienten- oder Heat-Kernel-Entwicklung sind (siehe Anhang C für verschwindende Vektor- und Axialvektorfelder $v = a = 0$). Die in Gl. (3.47) auftretenden divergenten Terme sind aber exakt die mesonischen Anteile der Wirkung des linearen chiralen Sigma-Modells von Gell-Mann und Levi [GL60] (CSM) mit der durch Gl. (3.46) bestimmten Sigma-Masse m_σ . Addiert man noch explizit auf klassischem (d.h. Fermion-0-Schleifen) Niveau den fermionischen Anteil $\bar{q}[i\partial - g(\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5)]q$ hinzu, erhält man demnach eine formale Analogie zwischen der ECW des NJL im $B = 1$ -Sektor mit polarisiertem Diracsee und dem CSM mit Valenz- aber ohne Seequarks, wobei der Diracsee des NJL durch die kinetische Energie der Mesonen und das Mexikanerhutpotential des CSM ersetzt wird.¹⁷⁾

$$S_{eff}^{B=1}(\sigma, \vec{\pi}, \mu) \xrightarrow{\text{Grad. Entw.}} S_{CSM} = \int d^4x_M \mathcal{L}_{CSM}$$

$$\mathcal{L}_{CSM} = \bar{q}[i\partial - g(\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5)]q + \frac{1}{2} [\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi}]$$

$$- \frac{\lambda^2}{4} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \nu^2)^2 + m_\pi^2 f_\pi \sigma \quad (4.77)$$

mit:

$$\lambda^2 = \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{2f_\pi^2}$$

$$\nu^2 = f_\pi^2 - \frac{m_\pi^2}{\lambda^2} \quad (4.78)$$

$$m_\sigma^2 = 4(gf_\pi)^2 + m_\pi^2$$

Man kann zeigen, daß für klassische Mesonfelder in diesem Modell das Minimum der statischen Gesamtenergie E_{CSM} tatsächlich durch die Hedgehog-Konfiguration für σ und π erreicht wird [GU85]. Der Valenzquarkspinor $\phi_{val}(\vec{r})$ ist dann automatisch durch den Ansatz (E.48) gegeben.

Die Variation der Gesamtenergie $\delta E_{CSM} = 0$ mit:

$$E_{CSM} = E_{val} + E_{kin} + E_{mh} + E_{br}$$

$$E_{val} = N_F \epsilon_{val} = N_F \int dr r^2 \left[u \frac{dv}{dr} - v \frac{du}{dr} + 2 \frac{uv}{r} + g\sigma(u^2 - v^2) + 2g\pi uv \right]$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} 4\pi \int dr r^2 \left[\left(\frac{d\sigma}{dr} \right)^2 + \left(\frac{d\pi}{dr} \right)^2 + 2 \frac{\pi^2}{r^2} \right] \quad (4.79)$$

$$E_{mh} = \frac{\lambda^2}{4} 4\pi \int dr r^2 [\sigma^2 + \pi^2 - \nu^2]^2$$

$$E_{br} = -m_\pi^2 f_\pi 4\pi \int dr r^2 \sigma$$

¹⁷⁾Die mesonische Selbstwechselwirkung $\sigma^2 + \pi^2 - f_\pi^2$ des NJL ist ebenfalls in das Mexikanerhutpotential $\frac{\lambda^2}{4}(\sigma^2 + \pi^2 - \nu^2)^2$ absorbiert worden.

liefert dann für u und v die Diracgleichung $h\phi_{val} = \epsilon_{val}\phi_{val}$ mit σ und π als Quellen:

$$\begin{aligned} \frac{dv(r)}{dr} + 2\frac{v(r)}{r} + g\sigma(r)u(r) + g\pi(r)v(r) &= \epsilon_{val} u(r) \\ -\frac{du(r)}{dr} + g\pi(r)u(r) - g\sigma(r)v(r) &= \epsilon_{val} v(r) \end{aligned} \quad (4.80)$$

mit der Normierung:

$$\int dr r^2 (u^2 + v^2) = 1 \quad (4.81)$$

sowie die nichtlinearen gekoppelten DGL zweiter Ordnung für die Mesonfelder mit den Quellen u und v :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\sigma}{dr} - N_F g(u^2 - v^2) + f_\pi m_\pi^2 - \lambda^2(\sigma^2 + \pi^2 - \nu^2) &= 0 \\ \frac{d^2\pi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\pi}{dr} - N_F 2guv - 2\frac{\pi}{r^2} - \lambda^2(\sigma^2 + \pi^2 - \nu^2) &= 0 \end{aligned} \quad (4.82)$$

welche numerisch mit Standardverfahren gelöst werden können [BB84a, Bir85, FG88].

Läßt man $m_\sigma \rightarrow \infty$ laufen, so werden die Mesonfelder auf den chiralen Zirkel $\sigma^2 + \pi^2 = f_\pi^2$ gezwungen (nicht-lineares Modell). Es stellt sich heraus, daß der aktuelle Wert von m_σ weder die selbstkonsistenten Lösungen der Gln. (4.80, 4.82) noch die daraus berechneten nukleonischen Größen nennenswert beeinflusst, sofern m_σ im Bereich $m_\sigma \geq 0.7\text{GeV}$ liegt [FG88], so daß in diesem Modell die nichtlineare und die lineare Version grundsätzlich gut miteinander übereinstimmen.

Im asymptotischen Grenzfall $r \rightarrow \infty$ kann man für σ und π aus (4.82) die Formen:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \sigma(r) &= f_\pi + A \frac{e^{-m_\sigma r}}{m_\sigma r} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \pi(r) &= B e^{-m_\pi r} \frac{1 + m_\pi r}{r^2} \end{aligned} \quad (4.83)$$

als Lösungen der asymptotischen DGL:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dr^2} &= -\frac{2}{r}\frac{d\sigma}{dr} + m_\sigma^2(\sigma - f_\pi) \\ \frac{d^2\pi}{dr^2} &= -\frac{2}{r}\frac{d\pi}{dr} + 2\frac{\pi}{r^2} + m_\pi^2\pi \end{aligned} \quad (4.84)$$

ableiten. Auch die selbstkonsistenten Lösungen σ und π des NJL mit $B = 1$ weisen dieses asymptotische Verhalten auf, da die Bewegungsgleichungen für $r \rightarrow \infty$ in beiden Modellen identisch sind. Man sieht dies, wenn man den Ausdruck für die Energie $E^{B=1}$ in der Heat-Kernel oder gradientenentwickelten Form schreibt und beachtet, daß die Mesonfelder für $r \rightarrow \infty$ ihre Vakuumwerte annehmen. In der Stationaritätsbedingung $\delta E^{B=1} = 0$ bleiben dann exakt die DGL (4.82) übrig. Allerdings sind die Konstanten A und B in Gl. (4.83) für beide Modellen natürlich im allgemeinen verschieden.

In Bild 4.13 und Bild 4.14 vergleichen wir die selbstkonsistenten Lösungen der nicht-linearen Versionen beider Modelle mit $m_\pi = 139\text{MeV}$ und $M = 363\text{MeV}$ ($g = 3.9$). Während die Valenzquarkspinoren u und v numerisch kaum differieren, sind die entsprechenden Eigenwerte $N_F \epsilon_{val}$ mit 716MeV im NJL und 526MeV im CSM sowie die Mesonfelder doch deutlich verschieden. Wir werden sehen, daß dies eine Reihe von nukleonischen Observablen, die wir im Anschluß berechnen wollen, stark beeinflusst.

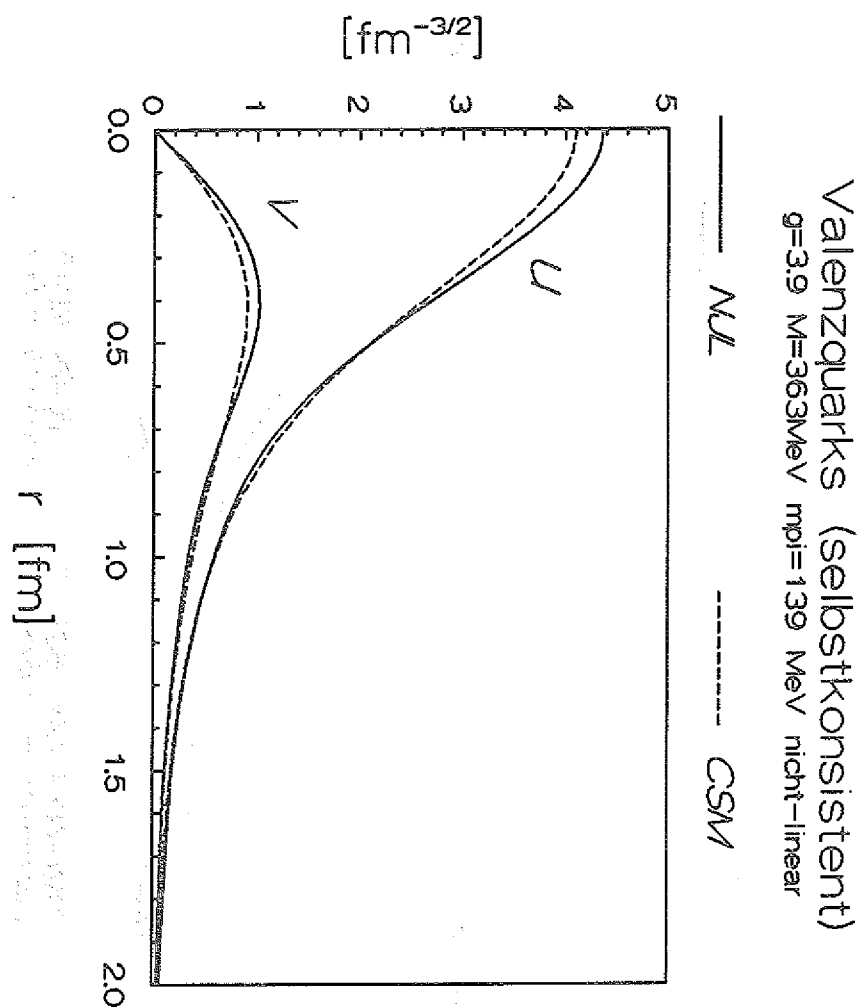


Bild 4.13: Vergleich der Valenzquarkspinoren u und v aus den selbstkonsistenten Lösungen von NJL und CSM. In beiden Fällen wurde die nicht-lineare Version mit $m_\pi = 139\text{MeV}$ und eine Konstituentenmasse von $M = 363\text{MeV}$ ($g = 3.9$) verwendet. Die Valenzquarkenergien $E_{\text{val}} = 3\epsilon_{\text{val}}$ betragen 716MeV im NJL und 526MeV im CSM.

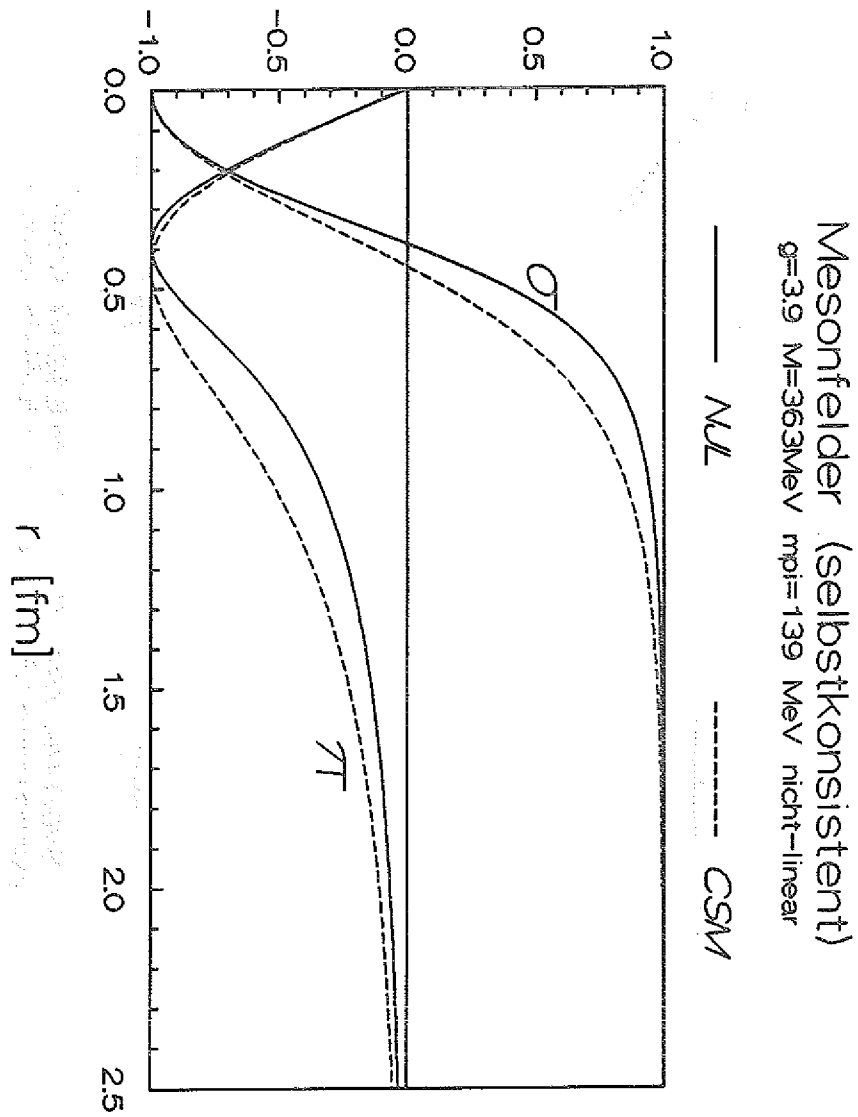


Bild 4.14: Vergleich der Mesonfelder σ und π aus den selbstkonsistenten Lösungen von NJL und CSM. In beiden Fällen wurde die nicht-lineare Version mit $m_\pi = 139\text{MeV}$ und eine Konstituentenmasse von $M = 363\text{MeV}$ ($g = 3.9$) verwendet.

4.5. DAS RENORMIERTE CSM - VAKUUMINSTABILITÄT

Zeitweise wurde in der Literatur noch das renormierte CSM diskutiert [Son87, RK87]. Hierbei betrachtet man die unregularisierte ECW und zieht die divergenten Anteile aus Gl. (3.47) als Gegenterme wieder ab. Die kinetische Energie der Mesonen (und im linearen Modell das Mexikanerhutpotential) werden dann als dynamische Terme des CSM explizit hinzuaddiert, also nicht aus der Polarisierung des Diracsees erzeugt. Eine solche Theorie enthält demnach per Konstruktion keinen endlichen UV-Abschneideparameter. Die Gesamtenergie im $B = 1$ -Sektor kann dann (auf dem chiralen Zirkel) formal als:

$$E_{CSM}^{ren}|_{B=1} = N_F \epsilon_{val} + \frac{1}{2} \int d^3r \left[(\vec{\nabla} \sigma)^2 + (\vec{\nabla} \vec{\pi})^2 \right] + \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\{ E_0(\Lambda) - (4N_F g^2 I_2^\Lambda)^{\frac{1}{2}} \int d^3r \left[(\vec{\nabla} \sigma)^2 + (\vec{\nabla} \vec{\pi})^2 \right] \right\} \quad (4.85)$$

geschrieben werden, wobei I_2 das logarithmisch divergente Integral aus Gl. (3.27) ist. De facto unterscheiden sich die Energien $E^{B=1}$ unseres Modells und $E_{CSM}^{ren}|_{B=1}$ nur in der Behandlung der aus $\tilde{S}_{eff}$ in Gln. (3.29, 3.47) herrührenden konvergenten Anteile des 1-Quark-Schleifen Beitrags der ECW. Das renormierte CSM versieht diese mit einem unendlichen Abschneideparameter, während wir alle Terme der ECW mit dem gleichen durch Gl. (3.45) bestimmten Λ abschneiden. Diese Differenz hat jedoch beträchtliche Auswirkungen. In Ref. [RK87] wurde gezeigt, daß die fermionische Energie E_0 bei endlichen Mesonprofilen einen negativen Wert aufweist, was eine Instabilität des translationsinvarianten Vakuums $\sigma = f_\pi$, $\pi = 0$ zur Folge hat. Das allein wäre zwar noch nicht unbedingt problematisch, allerdings zeigt sich, daß diese Vakuumenergie bei Erhöhung der topologischen Windungszahl n immer negativer wird. Daraus muß der Schluß gezogen werden, daß auch für ein System mit $B = 1$ keine stabile Solitonkonfiguration existiert.

Wir haben in unserem Modell bei keinem Regularisierungsschema ein Mesonprofil gefunden, welches eine solche Vakuuminstabilität aufweist, sondern die Seeenergie E_0 war in allen Fällen positiv.

5. SPIN-ISOSPIN-QUANTISIERUNG – CRANKING

5.1. DIE CRANKING-FREQUENZ ALS LAGRANGEMULTIPLIKATOR FÜR DEN ISO-SPIN - ADIABATISCHE ROTATION - TRÄGHEITSMOMENT

Ähnlich wie im letzten Kapitel die Baryonenzahl, führen wir nun (Gesamt-) Spin J^a und Isospin T^a über Lagrangemultiplikatoren als Zwangsbedingungen in die ECW ein, um ein nukleonisches System mit den geeigneten Quantenzahlen zu erhalten. Wir betrachten zunächst den Isospin

$$T^a = \int d^3r \bar{q}(\vec{r}) \beta \frac{\tau^a}{2} q(\vec{r}) \quad (5.1)$$

und werden später sehen, daß J^a durch T^a automatisch fixiert ist. Der Übersichtlichkeit halber setzen wir weiter das chemische Potential $\mu = 0$, das heißt, wir adjustieren die Baryonenzahl nicht. Die Verallgemeinerung auf ein endliches μ wird sich als trivial herausstellen, da der Baryonenzahloperator mit dem Isospinoperator kommutiert. Der Erwartungswert $\langle T^a \rangle$ ergibt sich im euklidischen Raum nach Gl. (4.29) aus der *rotierten* ECW:

$$S_{eff}^F(\omega) = (-) \text{Spln} \left[-iD - \beta \frac{\omega^a \tau^a}{2} \right] = (-) \text{Spln} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + h - \frac{\omega^a \tau^a}{2} \right] \quad (5.2)$$

zu:

$$\langle T^a \rangle(\omega) = (-) \frac{1}{T} \frac{\delta}{\delta \omega^a} S_{eff}^F(\omega) \quad (5.3)$$

Der Lagrangemultiplikator ω^a läßt sich als Rotationsfrequenz im $SU(2)$ -Isospinraum interpretieren. Dazu betrachten wir die $SU(2)$ -Matrix:

$$B(\tau) := e^{i \frac{\Omega^a \tau^a}{2} \tau} \quad (5.4)$$

mit der reellen euklidischen Frequenz Ω^a und der euklidischen Zeit τ und definieren die *rotierenden* Quarkfelder

$$\tilde{q}(\tau) := B^\dagger(\tau) q \quad (5.5)$$

sowie den rotierenden Hedgehog:

$$\tilde{U}_5(\tau) = B^\dagger(\tau) U_5 B(\tau) \quad (5.6)$$

wobei U_5 abkürzend für $U_5 = \frac{1}{\sigma} (\sigma + i \gamma_5 \vec{\tau} \vec{\pi})$ steht (vgl. Anhänge C und D). Für σ und $\vec{\pi}$ bedeutet dies:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(\tau; \vec{r}) &= \sigma(\vec{r}) \\ \tilde{\pi}^b(\tau; \vec{r}) &= D^{ab}(\tau) \pi^a(\vec{r}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Die rein mesonischen Anteile der effektiven Wirkung S_M und S_{br} bleiben invariant unter der Rotation: $U_5 \rightarrow \tilde{U}_5$, denn $[D]$ ist eine $O(3)$ -Matrix ($D^T D = D D^T = I$) und hängt mit der

Winkelfrequenz Ω und B über:

$$B\tau^a B^\dagger = \tau^b D^{ba} \quad B^\dagger \tau^a B = \tau^b D^{ab} \quad (5.8a)$$

$$\dot{D}^{ab} D^{cb} = \epsilon^{acd} \Omega^d \quad \dot{D}^{ab} \dot{D}^{ab} = 2\tilde{\Omega}^2 \quad (5.8b)$$

$$\dot{B} B^\dagger = \frac{i}{2} \tau^a \Omega^a \quad B^\dagger \dot{B} = \frac{i}{2} \tau^a \Omega^a D^{ba} \quad (5.8c)$$

$$\Omega^a = (-i) \text{Tr}_\tau [\dot{B} B^\dagger \tau^a] \quad \Omega^a D^{ab} = (-i) \text{Tr}_\tau [B^\dagger \dot{B} \tau^b] \quad (5.8d)$$

$$\text{Tr}_\tau \dot{B} \dot{B}^\dagger = \frac{1}{2} \tilde{\Omega}^2 \quad \text{Tr}_\tau [\tau^a B^\dagger \tau^b B] = 2D^{ba} \quad (5.8e)$$

zusammen. Dabei bezeichnet der Punkt $\dot{}$ die Ableitung nach der euklidischen Zeit τ .

Mit Hilfe dieser Identitäten kann man nun zeigen, daß die effektive Wirkung der *rotierenden* Felder gleich der *rotierten* effektiven Wirkung $S_{eff}(\omega)$ (Gl. (5.2)) ist:

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}\bar{q} e^{-\int d^4 x_E \bar{q} [-iD(\tilde{U}_5)] q} = \\ & \int \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}\bar{q} e^{-\int d^4 x_E \bar{q} [-iD(U_5) - \gamma^4 \frac{\Omega^a \tau^a}{2}] q} = \\ & e^{-S_{eff}^F(\omega)} \end{aligned} \quad (5.9)$$

falls ω mit $i\Omega$ identifiziert wird.

Die endliche Baryonenzahl kann wieder über ein chemisches Potential durch die großkanonische *rotierte* ECW:

$$S_{eff}^F(\mu, \Omega) = (-) \text{Spln} \left(-D(U_5) - i\beta \frac{\Omega^a \tau^a}{2} - \mu\beta \right) \quad (5.10)$$

adjustiert werden. Wir möchten darauf hinweisen, daß die beiden Lagrangemultiplikatoren μ und $\omega = i\Omega$ zur Adjustierung von B bzw. T^a im euklidischen Raum unterschiedliches Hermitizitätsverhalten besitzen. Was μ betrifft, wurde die Notwendigkeit von $\mu^* = \mu$ im letzten Kapitel dargelegt. Soeben haben wir gesehen, daß Ω reell (bzw. ω imaginär) sein muß, da im anderen Falle der Rotationsoperator im euklidischen Raum $B = e^{i\tau \frac{\Omega^a \tau^a}{2}}$ keine $SU(2)$ -Matrix wäre, was aber für die kollektive Quantisierung der Freiheitsgrade von B , die in Abschnitt 5.4 durchgeführt wird, unbedingt erforderlich ist. Andererseits sind wir gezwungen im euklidischen Raum zu arbeiten, wenn wir zum Beispiel die EZR oder den $O(4)$ -Abschnitt anwenden wollen. Aus diesen Gründen werden wir ω wie beschrieben an die ECW ankoppeln, was der Behandlung der Zeitkomponente eines ρ -Mesons entspricht (vgl. Anhang C: $v_{\mu=0}^{a=1,2,3}$). In Ref. [Rei89] wurde zusätzlich gezeigt, daß ein anderes Verhalten von ω ($\omega^* = \omega$) bei Anwendung von EZR dazu führt, daß die Vakuumkonfiguration ($U_5|_V = \mathcal{I}$) selbst bei kleinen Rotationsfrequenzen ω (d.h. bei Anwendung der Störungstheorie in ω) eine Änderung der ECW unter $U_5 \rightarrow \tilde{U}_5(\tau)$ bewirken würde. Diese Tatsache unterstützt zusätzlich die von uns getroffene Wahl.

Die vollständige Lösung des Problems bestünde nun darin, die stationären Punkte von $S_{eff}(\mu, \Omega)$ für ein $B = 1$ -System zu bestimmen und dabei Ω so so zu adjustieren, daß T^a den gewünschten Wert des nukleonischen Systems annimmt. Eine solche Behandlung wäre jedoch technisch ausgesprochen aufwendig, da dies selbstkonsistent in Ω und den Mesonfeldern durchzuführen wäre und

außerdem die Lösung des Eigenwertproblems $(h - i\frac{\Omega^a \tau^a}{2})\phi_\lambda(\Omega) = \epsilon_\lambda(\Omega)\phi_\lambda(\Omega)$ numerisch langwierig ist, da h mit τ^a nicht kommutiert und daher der Grand-Spin G keine gute Quantenzahl mehr ist. Dies hätte zur Folge, daß die Diagonalisierungsmethode aus Anhang E nicht mehr separat für jedes G durchgeführt werden könnte. Zusätzlich sieht man sich einem nichthermiteschen Eigenwertproblem gegenübergestellt, da $\omega = i\Omega$ imaginär ist. Das bedeutet, daß auch in $S_{eff}^F(\Omega)$ selbst explizit ein Imaginärteil auftritt:

$$S_{eff}^F(\Omega) = \Re S_{eff}^F(\Omega) + i\Im S_{eff}^F(\Omega) \quad (5.11)$$

Man überzeugt sich leicht, daß $\Re S_{eff}^F(\Omega)$ nur gerade, $\Im S_{eff}^F(\Omega)$ nur ungerade Potenzen von Ω enthält. Um nun am Ende den Zusammenhang unserer Theorie mit den physikalischen Größen herzustellen, ist es nötig, aus dem euklidischen in den Minkowski-Raum zurückzugehen. Im Falle des statischen Hedgehogs im letzten Kapitel, war dies trivial, da alle Zeitkomponenten aus der ECW herausfaktorisiert werden können. Hier ist dies jedoch nicht mehr möglich, da Ω als Zeitkomponente ankoppelt und es ist nicht klar, wie man den numerisch berechneten Ausdruck für $S_{eff}^F(\Omega)$ in den Minkowski-Raum fortsetzen soll.

In der Vergangenheit hat man im Rahmen einfacherer Modelle versucht, durch Vergleich mit der exakten Lösung des rotierten Eigenwertproblems zu überprüfen, wie gut die perturbative Methode wirklich ist. Unglücklicherweise sind die Ergebnisse der verschiedenen Autoren [BR88, PM89], die innerhalb verschiedener Modelle gemacht wurden, völlig entgegengesetzt, so daß der Schluß gezogen werden muß, daß die Aussagen extrem vom betrachteten Modell abhängen.

Aufgrund der eben angesprochenen Schwierigkeiten, werden wir das Problem perturbativ in Ω behandeln. Wir sind uns allerdings darüber im Klaren, daß vom Prinzip her diese Approximation keineswegs gerechtfertigt ist.

Dazu setzen wir uns auf die im letzten Kapitel berechneten selbstkonsistenten Mesonfelder und entwickeln $S_{eff}^F(\Omega)$ bis zur ersten nichttrivialen Ordnung in Ω . Anschaulich bedeutet dies, daß die Isospinrotation (5.6) sehr langsam (adiabatisch) erfolgt. Dieses Verfahren ist aus der Kernphysik als Cranking-Methode bekannt [RS80] und wurde auch im Skyrme-Modell [AN83] und im chiralen-Sigma Modell [CB86] angewandt. Die Taylor-Entwicklung von $S_{eff}^F(\Omega)$ nach Ω lautet:

$$S_{eff}^F(\Omega) = S_{eff}^F(0) + \frac{\delta S_{eff}^F(\Omega)}{\delta \Omega^a} \Big|_{\Omega=0} \Omega^a + \frac{1}{2} \Omega^a \frac{\delta^2 S_{eff}^F(\Omega)}{\delta \Omega^a \delta \Omega^b} \Big|_{\Omega=0} \Omega^b + \dots \quad (5.12)$$

Entsprechend ist:

$$\langle T^a \rangle(\Omega) = (-) \frac{1}{T} \frac{1}{i} \frac{\delta S_{eff}^F(\Omega')}{\delta \Omega'^a} \Big|_{\Omega'=\Omega} = (-) \frac{1}{T} \frac{1}{i} \left[\frac{\delta S_{eff}^F(\Omega')}{\delta \Omega'^a} \Big|_{\Omega'=0} + \Omega^b \frac{\delta^2 S_{eff}^F(\Omega')}{\delta \Omega'^a \delta \Omega'^b} \Big|_{\Omega'=0} + \dots \right] \quad (5.13)$$

Nun verschwindet aber der Mittelwert $\langle T^a \rangle(\Omega = 0)$, da $\sum_M \langle GM | \tau^a | GM \rangle = 0$, demnach auch der in Ω lineare Term in $S_{eff}^F(\Omega)$ und somit die führende Ordnung des Imaginärteils.

Der Ausdruck

$$\Theta^{ab} := \frac{1}{T} \frac{\delta^2 S_{eff}^F(\Omega)}{\delta \Omega^a \delta \Omega^b} \Big|_{\Omega=0} \quad (5.14)$$

wird als Trägheitsmomententensor des Systems bezeichnet. Die Entwicklungen für $S_{eff}^F(\Omega)$ und $\langle T^a \rangle$ nehmen dann die Formen:

$$\frac{1}{T} S_{eff}^F(\Omega) = \frac{1}{T} S_{eff}^F(0) + \frac{1}{2} \Omega^a \Theta^{ab} \Omega^b + \dots \quad (5.15)$$

und

$$\langle T^a \rangle(\Omega) = (-) \frac{1}{2} \Theta^{ab} \Omega^b + \dots \quad (5.16)$$

an, woraus die Beziehung:

$$\frac{1}{T} S_{eff}^F(\Omega) = \frac{1}{T} S_{eff}^F(0) + \frac{1}{2} \langle \vec{T} \rangle^\dagger [\Theta^{-1}] \langle \vec{T} \rangle \quad (5.17)$$

folgt. $\frac{1}{T} S_{eff}^F(\Omega)$ kann als (fermionische) Energie im rotierenden System interpretiert werden, die sich aus der ursprünglichen Energie ($\Omega = 0$) und der 'Rotationsenergie' $\frac{1}{2} \langle \vec{T} \rangle^\dagger [\Theta^{-1}] \langle \vec{T} \rangle$ zusammensetzt.

5.2. DAS TRÄGHEITSMOMENT IN DER EINTEILCHEN-BASIS

Es ist unser Ziel, Θ wie im letzten Kapitel in einen endlichen, unregulisierten Valenzanteil und einen regulisierten Seeanteil zu zerlegen

$$\Theta^{ab} = \Theta_{val}^{ab} + \Theta_0^{ab} \quad (5.18)$$

und beide durch die 1-Teilchenbasis $|\lambda\rangle$ des statischen Eigenwertproblems $h(\sigma, \pi)|\lambda\rangle = \epsilon_\lambda|\lambda\rangle$ für die im letzten Kapitel berechneten selbstkonsistenten Mesonfelder auszudrücken.

Separation von Valenz- und Seeanteil

Die Trennung von $S_{eff}^F(\mu, \Omega)$ in Valenz- und Seeanteil erfolgt mit der in Kapitel 4 beschriebenen Methode. Es ist nach Normalordnung:

$$S_{eff}^F(\mu, \Omega) - S_{eff}^F(\mu = 0, \Omega = 0)|_V = S_{eff}^{val}(\mu, \Omega) + S_{eff}^F(\Omega) \quad (5.19)$$

mit:

$$\begin{aligned} S_{eff}^{val}(\mu, \Omega) &= S_{eff}^F(\mu, \Omega) - S_{eff}^F(\mu = 0, \Omega) \\ S_{eff}^F(\Omega) &= S_{eff}^F(\mu = 0, \Omega) - S_{eff}^F(\mu = 0, \Omega = 0)|_V \end{aligned} \quad (5.20)$$

Wir kümmern uns zunächst nicht um die Regularisierung. Es ist dann:

$$\begin{aligned} S_{eff}^F(\Omega) &= (-T) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \text{Sp} \ln \left[-iu + h - i \frac{\Omega^c \tau^c}{2} \right] \\ \frac{\delta^2 S_{eff}^F(\Omega)}{\delta \Omega^a \delta \Omega^b} \Big|_{\Omega=0} &= (-T) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \text{Sp} \left[\frac{\tau^a}{2} (-iu + h)^{-1} \frac{\tau^b}{2} (-iu + h)^{-1} \right] \\ &= (-N_F T) \sum_{\lambda \nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \frac{\langle \lambda | \frac{\tau^a}{2} | \nu \rangle \langle \nu | \frac{\tau^b}{2} | \lambda \rangle}{(-iu + \epsilon_\lambda)(-iu + \epsilon_\nu)} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \frac{1}{(u+ia)(u+ib)} = \frac{1}{b-a} [\theta(-a) - \theta(-b)] = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{falls } b > 0 \text{ und } a < 0 \\ \frac{1}{a-b} & \text{falls } a > 0 \text{ und } b < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.22)$$

folgt schließlich für den Seeanteil des Trägheitsmomententensors:

$$\Theta_{\equiv}^{ab} = \frac{1}{T} \frac{\delta^2 S_{eff}^F(\Omega)}{\delta \Omega^a \delta \Omega^b} \Big|_{\Omega=0} = \frac{N_F}{2} \sum_{\lambda\nu} \frac{\langle \lambda | \tau^a | \nu \rangle \langle \nu | \tau^b | \lambda \rangle}{\epsilon_\nu - \epsilon_\lambda} \theta(\epsilon_\nu) \theta(-\epsilon_\lambda) \quad (5.23)$$

was aus der nichtrelativistischen Kernphysik als *Inglis-Formel* bekannt ist. Im Falle des Valenzquarks ergibt sich:

$$S_{eff}^{val}(\mu, \Omega) = (-T) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \text{Sp} \left(\ln \left[-iu + h - i \frac{\Omega^c \tau^c}{2} - \mu \right] - \ln \left[-iu + h - i \frac{\Omega^c \tau^c}{2} \right] \right) \quad (5.24)$$

$$\frac{\delta^2 S_{eff}^{val}(\mu, \Omega)}{\delta \Omega^a \delta \Omega^b} \Big|_{\Omega=0} = (N_F T) \frac{1}{4} \sum_{\lambda\nu} \frac{\langle \lambda | \tau^a | \nu \rangle \langle \nu | \tau^b | \lambda \rangle}{\epsilon_\nu - \epsilon_\lambda} T(\epsilon_\lambda, \epsilon_\nu, \mu)$$

mit:

$$T(\epsilon_\lambda, \epsilon_\nu, \mu) = [\theta(\mu - \epsilon_\lambda) - \theta(\mu - \epsilon_\nu)] - [\theta(-\epsilon_\lambda) - \theta(-\epsilon_\nu)] \quad (5.25)$$

Durch explizite Fallunterscheidung für ϵ_λ , ϵ_ν und μ überzeugt man sich, daß

$$T(\epsilon_\lambda, \epsilon_\nu, \mu) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 < \epsilon_\lambda < \mu \text{ und } (\epsilon_\nu > \mu \text{ oder } \epsilon_\nu < 0) \\ -1 & \text{falls } 0 < \epsilon_\nu < \mu \text{ und } (\epsilon_\lambda > \mu \text{ oder } \epsilon_\lambda < 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.26)$$

gilt, was für Θ_{val}

$$\Theta_{val}^{ab} = \frac{1}{T} \frac{\delta^2 S_{eff}^{val}(\mu, \Omega)}{\delta \Omega^a \delta \Omega^b} \Big|_{\Omega=0} = \frac{N_F}{2} \sum_{\epsilon_\nu \neq \epsilon_{val}} \frac{\langle val | \tau^a | \nu \rangle \langle \nu | \tau^b | val \rangle}{\epsilon_\nu - \epsilon_{val}} \quad (5.27)$$

ergibt.

Das Problem besteht also im wesentlichen in der Berechnung der Übergangsmatrixelemente $\langle \lambda | \tau^a | \nu \rangle$ zwischen den Teilchen-Loch Eigenzuständen von h . In der Vakuumkonfiguration vertauscht dieser mit τ^a : $[h_V, \tau^a] = 0$, so daß Θ notwendigerweise verschwindet. Da jedoch die numerische Lösung des Eigenwertproblems in einem endlichen Kasten mit der Länge D erfolgt, wobei die Eigenfrequenzen der (freien) Basis $k_{n(G)}$ für jedes G separat durch die Randbedingung

$$j_G(k_{n(G)} D) = 0 \quad (5.28)$$

festgelegt sind (Anhang E), ist unsere diskrete Basis nicht τ^a -invariant, denn τ^a mischt als Vektoroperator die Grand-Spin-Zustände $G-1$, G , $G+1$. Folglich liefert eine naive Berechnung

von Θ_0^{ab} in unserer diskreten Basis für die Vakuumkonfiguration einen endlichen Beitrag, der numerisch in der Größenordnung von Θ^{ab} unserer selbstkonsistenten Solitonenkonfigurationen liegt.¹⁸⁾ Daraus muß dann der Schluß gezogen werden, daß alle auf diese Weise berechneten Werte von θ unzuverlässig sind. Man kann diese Schwierigkeit umgehen, wenn man die Beziehung:

$$\langle \lambda | \tau^a | \nu \rangle = \frac{\langle \lambda | [h, \tau^a] | \nu \rangle}{\epsilon_\lambda - \epsilon_\nu} \quad (5.29)$$

verwendet und beachtet, daß für ein Hedgehog- $\vec{\pi}$:

$$[h, \tau^a] = 2\beta\gamma_5\pi(\vec{r})(\vec{r} \times \vec{\tau})^a \quad (5.30)$$

gilt. Berechnet man daher statt von τ^a die entsprechenden Übergangsmatrixelemente der r.S. von Gl. (5.29), so unterdrückt das Pionfeld, welches für $r \rightarrow \infty$ gegen $\pi_V = 0$ geht, automatisch diesen unerwünschten unphysikalischen Randeffect [GG91]. Im Falle $h = h_V$ verschwindet dann Θ_0^{ab} identisch.

Allgemein folgt aus seiner Definition (5.14), daß Θ^{ab} symmetrisch ist. Da h ein Isoskalar ist, muß Θ zusätzlich ein Vielfaches der Einheitsmatrix sein, also $\Theta^{ab} = \Theta \mathcal{I}^{ab}$.

Kontinuuumlimites des Valenzanteils

Aus Erfahrung weiß man, daß Teilchen-Loch-Anregungen, wie sie die Θ aus den Inglis-Formeln (5.23, 5.27) darstellen, im allgemeinen wesentlich empfindlicher auf die Kastengröße D reagieren als reine Einteilchen-Observablen. Es ist daher instruktiv, den Valenzbeitrag von θ im Kontinuuumlimites zu berechnen und mit dem Wert, der aus der Inglis-Formel (5.27) in der endlichen Basis erhalten wurde, zu vergleichen. Dies geschieht durch perturbative Lösung der Differentialgleichung:

$$\left(h - i \frac{\Omega^a \tau^a}{2} \right) |\phi_{val}(\Omega)\rangle = \epsilon_{val}(\Omega) |\phi_{val}(\Omega)\rangle \quad (5.31)$$

in Ω um die statische Hedgehog-Konfiguration für das Valenzquark ($\Omega = 0$) (vgl. Anhang E). Die Details dazu sind in Anhang II beschrieben.

Es zeigt sich, daß die Abweichungen vom Kontinuuumlimites (Tab. 5.1) bei den von uns verwendeten Kastenlängen ($D \cdot M = 10 \dots 20$) numerisch tolerabel sind.

D (sk.)	10	15	20	∞
$\frac{\Theta_{val}(D)}{\Theta_{val}(\infty)}$	0.96	0.98	0.99	1.00

Tab. 5.1: Abweichung von θ_{val} vom Kontinuuumlimites für eine Basis mit endlicher Kastengröße D (in den skal. Einheiten aus Anhang E). Es wurde ein selbstkonsistentes Profil bei EZR auf dem chiralen Zirkel mit $M = 418\text{MeV}$, $g = 4.5$, $m_\pi = 139\text{MeV}$ verwendet. Der absolute Wert beträgt $\Theta_{val} = 0.81\text{fm}$.

¹⁸⁾R. Wünsch, F. Grümmer: Private Mitteilung

Regularisierung des Seeanteils

Da der Term $\bar{\Omega}\vec{\tau}$ wie die Zeitkomponente eines räumlich und zeitlich konstanten ρ -Mesons (vgl. Anhang C (C.2) $v_\mu = \delta_{4\mu}(-i)\frac{\Omega^a\tau^a}{2}$) ankoppelt, ist der Seebeitrag Θ_0 wie die kinetische Energie der Mesonen logarithmisch divergent. Wir haben die Regularisierung von Θ im EZ-Schema durchgeführt.

Dazu stellen wir den EZ-regularisierten Ausdruck für den Realteil der rotierten ECW:

$$\Re S_{eff}^F(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Sp} K(s) \quad (5.32a)$$

mit:

$$K(s) = e^{-sA} \quad (5.32b)$$

$$A = \left(-iD - i\frac{\Omega^a\tau^a}{2} \right)^\dagger \left(-iD - i\frac{\Omega^a\tau^a}{2} \right)$$

auf und bilden die 2.Ableitung $\frac{\delta}{\delta\Omega^a\delta\Omega^b}\big|_{\Omega=0}$. Die etwas langwierige Rechnung ist in Anhang I2 dargestellt. Das Ergebnis lautet [Rei89,GG91]:

$$\Theta_0^{ab} = \frac{N_F}{4} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds s^{-\frac{3}{2}} \sum_{\lambda\nu} \langle \lambda | \tau^a | \nu \rangle \langle \nu | \tau^b | \lambda \rangle \mathcal{R}_\Theta(\epsilon_\lambda, \epsilon_\nu, s) \quad (5.33)$$

$$\mathcal{R}_\Theta(\epsilon_\lambda, \epsilon_\nu, s) = \left[\frac{e^{-s\epsilon_\nu^2} - e^{-s\epsilon_\lambda^2}}{\epsilon_\lambda^2 - \epsilon_\nu^2} - s \frac{\epsilon_\lambda e^{-s\epsilon_\nu^2} + \epsilon_\nu e^{-s\epsilon_\lambda^2}}{\epsilon_\nu + \epsilon_\lambda} \right]$$

Für die Grenzfälle $\epsilon_\lambda \rightarrow \pm\epsilon_\nu$ gilt:

$$\lim_{\epsilon_\lambda \rightarrow \epsilon_\nu} \mathcal{R}_\Theta(\epsilon_\lambda, \epsilon_\nu, s) = 0 \quad (5.34)$$

$$\lim_{\epsilon_\lambda \rightarrow -\epsilon_\nu} \mathcal{R}_\Theta(\epsilon_\lambda, \epsilon_\nu, s) = 2s^2 \epsilon_\lambda^2 e^{-s\epsilon_\lambda^2}$$

Daraus folgt, daß für die Vakuumkonfiguration auch das regularisierte Trägheitsmoment $\Theta_0|_V$ verschwindet.¹⁹⁾ Würde man die (reelle) Winkelfrequenz ω im Dirac-Operator wie $-iD - \frac{\omega^a\tau^a}{2}$ ankoppeln, so zeigt die entsprechende Rechnung, daß der regularisierte Ausdruck für $\Theta_0|_V$ endlich ist, was als unphysikalisch betrachtet werden muß [Rei89].

¹⁹⁾Natürlich tritt auch hier der von der Diskretisierung der Basis in einem endlichen Kasten der Länge D herrührende Randeffect auf. Dies ist jedoch ein rein numerisches Problem und kann wie oben beschrieben umgangen werden. Im Kontinuumlimes ($\lim_{D \rightarrow \infty}$) verschwindet $\Theta_0|_V$ exakt.

5.3. ERWARTUNGSWERTE VON SPIN UND ISOSPIN BEI ROTIERENDEN FELDERN

Zur Berechnung des Erwartungswertes einer beliebigen Dirac-Isospin-Observablen $K = \int d^3r \bar{q}(\vec{r}) K q(\vec{r})$ setzen wir uns nun in das fiktive System, in welchem die Felder rotieren, also zeitabhängig sind, das heißt wir berechnen den Ausdruck

$$\begin{aligned} \langle K' \rangle &= \frac{\int \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \int d^3r \bar{q} K q e^{-\int d^4x \bar{q} [-iD(\vec{U}_5)] q}}{e^{-\int d^4x \bar{q} [-iD(\vec{U}_5)] q}} \\ &= \frac{\delta}{\delta \kappa} \text{Spln} \left[-iD(U_5) - i\beta \frac{\Omega^a \tau^a}{2} - \kappa B \beta K B^\dagger \right]_{\kappa=0} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Falls K eine isovektorielle Größe ist, unterscheidet sich K' von dem direkt aus der rotierten ECW $S_{eff}^F(\Omega)$ abgeleiteten Erwartungswert (vgl. Gl. (5.3)):

$$\langle K(\Omega) \rangle = \frac{\delta}{\delta \kappa} \text{Spln} \left[-iD(U_5) - i\beta \frac{\Omega^a \tau^a}{2} - \kappa \beta K \right]_{\kappa=0} \quad (5.36)$$

denn wegen Gl. (5.8a) ist:

$$\langle K'^a \rangle = D^{ba} \langle K^b(\Omega) \rangle \quad (5.37)$$

Bei isoskalaren Größen sind die Erwartungswerte in beiden Systemen die gleichen.

In der perturbativen Cranking-Approximation wird nun $\langle K' \rangle$ exakt bis zur ersten Ordnung Ω entwickelt. Falls diese verschwindet, betrachtet man nur die nullte Ordnung, die bei einer isoskalaren Observablen (z.B. isoskalare Ladungsdichte und Formfaktor) identisch mit dem Resultat des unrotierten Falles (statischer Hedgehog) ist, bei einer isovektoriellen Observablen sich wegen Gl. (5.37) jedoch sehr wohl vom statischen Fall ($\langle K^a(\Omega=0) \rangle$) unterscheidet. Einzig die Wirkung wird bis zur zweiten Ordnung Ω entwickelt.

Anschließend werden die Rotationsfreiheitsgrade, also die Komponenten der Matrix B , als kollektive Variablen quantisiert und die Erwartungswerte in den entsprechenden nukleonischen Zuständen $|N\rangle$ berechnet. Man sieht bereits hier, daß isovektorielle Größen selbst in nullter Ordnung Ω je nach dem Wert des Matrixelements $\langle N | D^{ab} | N \rangle$ eine Abweichung vom Mittelwert der statischen Hedgehogkonfiguration liefern. Die Methode der kollektiven Quantisierung wird im nächsten Abschnitt besprochen. Hier wollen wir zunächst die expliziten Ausdrücke für die Erwartungswerte von Spin und Isospin des rotierenden Systems angeben. Diese lauten:

$$(1) \text{ Isospin: } T^a = \int d^3r \bar{q}(\vec{r}) \beta \tau^a q(\vec{r})$$

$$\langle T'^a \rangle = D^{ba} \langle T(\Omega)^b \rangle = (-)\frac{1}{i} \Theta D^{ba} \Omega^b \quad (5.38)$$

$$(2) \text{ Gesamt-Spin: } J^a = \int d^3r \bar{q}(\vec{r}) \beta \left(\frac{\sigma^a}{2} + \vec{r} \times \frac{\vec{\nabla}}{i} \right) q(\vec{r}) = G^a - T^a$$

$$\langle J'^a \rangle = \langle J^a(\Omega) \rangle = \langle G^a(\Omega) \rangle - \langle T^a(\Omega) \rangle \quad (5.39)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß als Folge von $[h, G^a] = 0$ der Erwartungswert $\langle G^a(\Omega) \rangle$ in niedrigster Ordnung Ω verschwindet. Daher ist:

$$\langle J'^a \rangle = -\langle T^a(\Omega) \rangle = \frac{1}{i} \Theta \Omega^a \quad (5.40)$$

oder:

$$\langle \vec{J} \rangle + \langle \vec{T} \rangle [D] = 0 \quad (5.41)$$

Insbesondere gilt:

$$\langle \vec{J} \rangle^2 = \langle \vec{T} \rangle^2 = \langle \vec{T} \rangle^2 = \langle \vec{T} \rangle^2 \quad (5.42)$$

so daß der Spin durch die Adjustierung und semiklassische Quantisierung des Isospins automatisch festliegt.

5.4. KOLLEKTIVE QUANTISIERUNG

Wie bereits angedeutet wurde, sollen nun die Freiheitsgrade der $SU(2)$ -Rotationsmatrix B quantisiert werden, so daß die Erwartungswerte $\langle T'^a \rangle$ und $\langle J'^a \rangle$ zu Operatoren werden, die die Kommutatorregeln der Drehimpulsalgebra erfüllen. Da die Mesonfelder klassisch sind, kann dies nicht im Rahmen der aus der Kernphysik bekannten Projektionstheorie [Bir85, FG88] erfolgen, sondern muß per Hand eingeführt werden. Man bezeichnet dies auch als semiklassische Quantisierung. Diese Methode ist aus der Kernphysik ebenfalls wohlbekannt [RS80] und konnte sowohl im Skyrme-Modell [AN83] als auch im chiralen Solitonmodell [CB86] relativ erfolgreich angewandt werden.

Statt den im euklidischen Raum imaginären Größen $\langle T'^a \rangle$ und $\langle J'^a \rangle$ gehen wir zu reellen Größen über und drücken diese nach den Gln. (5.38, 5.41, 5.8d) durch die Komponenten von $B(\tau)$

$$B = b^0 + i b^a \tau^a \quad \text{mit} \quad \sum_{\alpha=0}^4 b^{\alpha 2} = 1 \quad (5.43)$$

aus:

$$\begin{aligned} t^a &= (-i) \langle T'^a \rangle = \Theta D^{ba} \Omega^b = (-i) \Theta \text{Tr}_\tau [B^\dagger \dot{B} \tau^a] \\ j^a &= (-i) \langle J'^a \rangle = -\Theta \Omega^a = (+i) \Theta \text{Tr}_\tau [\dot{B} B^\dagger \tau^a] = (-i) \Theta \text{Tr}_\tau [B \dot{B}^\dagger \tau^a] \end{aligned} \quad (5.44)$$

Man erkennt, daß die Substitution $B \leftrightarrow B^\dagger$ dem Übergang $t \leftrightarrow j$ entspricht. Der rotationsabhängige Anteil von $S_{eff}^F(\Omega)$ lautet dann nach den Gln. (5.17, 5.8e):

$$\begin{aligned} \int d\tau L_{rot}(B) &:= \frac{1}{2} T \Theta \tilde{\Omega}^2 \\ L_{rot}(B) &= \Theta \text{Tr}_\tau [\dot{B} \dot{B}^\dagger] = 2\Theta \sum_\alpha [\dot{b}^\alpha]^2 \end{aligned} \quad (5.45)$$

Die Komponenten b^α lassen sich als Ortsraumkoordinaten der dreidimensionalen Einheitssphäre S^3 auffassen. Die zugehörigen kanonisch konjugierten Impulse sind dann durch

$$\pi^\alpha = \frac{\partial L_{rot}(B)}{\partial \dot{b}^\alpha} = 4\Theta \dot{b}^\alpha \quad (5.46)$$

gegeben. Die Quantisierung kann nun wie gewohnt durch Übergang zu den Operatoren

$$\begin{aligned} b^\alpha &\rightarrow \hat{b}^\alpha \\ \pi^\alpha &\rightarrow \hat{\pi}^\alpha = (-i) \frac{\partial}{\partial \hat{b}^\alpha} \end{aligned} \quad (5.47)$$

mit den Vertauschungsregeln

$$[\hat{\delta}^\alpha, \hat{\pi}^\beta] = (+i)\delta^{\alpha\beta} \quad (5.48)$$

erfolgen. Einsetzen von Gl. (5.46) in Gl. (5.44) liefert nun unter Verwendung Gl. (5.48) die gewünschten Drehimpulsalgebren für die entsprechenden quantisierten Operatoren $\hat{i}$ und $\hat{j}$:

$$\begin{aligned} [\hat{i}^a, \hat{i}^b] &= i\epsilon^{abc}\hat{i}^c \\ [\hat{j}^k, \hat{j}^l] &= i\epsilon^{klm}\hat{j}^m \end{aligned} \quad (5.49)$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} [\hat{i}^a, \hat{B}] &= \hat{B} \frac{\tau^a}{2} \\ [\hat{j}^a, \hat{B}] &= -\frac{\tau^a}{2} \hat{B} \end{aligned} \quad (5.50)$$

Wegen

$$B \frac{\tau^3}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +B^{11} & -B^{12} \\ +B^{21} & -B^{22} \end{pmatrix} - \frac{\tau^3}{2} B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -B^{11} & -B^{12} \\ +B^{21} & +B^{22} \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

können aus den Komponenten von B die Kombinationen:

$$\begin{array}{cccc} & B^{11} & B^{12} & B^{21} & B^{22} \\ j^3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ i^3 & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ p \downarrow & n \downarrow & p \uparrow & n \uparrow & \end{array} \quad (5.52)$$

gebildet werden. Bei geeigneter Normierung über die Kugeloberfläche S_3 (vgl. Anhang J) sind dann die Spin-Isospin-Zustände des Nukleons in der b -Darstellung durch:

$$\begin{aligned} |p \uparrow\rangle &= \frac{i}{\pi}(b^1 + ib^2) & |n \uparrow\rangle &= \frac{1}{\pi}(b^0 - ib^3) \\ |p \downarrow\rangle &= \frac{1}{\pi}(b^0 + ib^3) & |n \downarrow\rangle &= -\frac{i}{\pi}(b^1 - ib^2) \end{aligned} \quad (5.53)$$

und die Operatoren $\hat{i}^a$ und $\hat{j}^a$ durch:

$$\begin{aligned} \hat{i}^a &= \frac{i}{2} \left[b^a \frac{\partial}{\partial b^0} - b^0 \frac{\partial}{\partial b^a} - \epsilon^{abc} b^b \frac{\partial}{\partial b^c} \right] \\ \hat{j}^k &= \frac{i}{2} \left[b^0 \frac{\partial}{\partial b^k} - b^k \frac{\partial}{\partial b^0} - \epsilon^{klm} b^l \frac{\partial}{\partial b^m} \right] \end{aligned} \quad (5.54)$$

gegeben. Durch Drehimpulskopplung kann man sich auch entsprechende Eigenzustände für das Δ -Teilchen beschaffen, welche dann Polynome höherer Ordnung in b sind.

Damit ist es nun möglich, Übergangsmatrixelemente und insbesondere Erwartungswerte von beliebigen Dirac-Isospin-Observablen im rotierenden System zwischen nukleonischen Zuständen zu berechnen.

5.5. ENERGIEN VON NUKLEON UND DELTA

Als einfachsten Fall betrachten wir zunächst die rotierte ECW bzw. die Energie des rotierenden System Gl. (5.17), die in der Notation von Gl. (5.44):

$$\frac{1}{T} S_{eff}^F(\Omega) = \frac{1}{T} S_{eff}^F(0) + \frac{\tilde{T}^2}{2\Theta} \quad (5.55)$$

lautet. Der erste Term ist unabhängig vom kollektiven Zustand und liefert genau die Mean-Field-Energie $E^{B=1}$ aus dem letzten Kapitel. Der rotationsabhängige Anteil beträgt für einen kollektiven Zustand mit Gesamtspin T dann gerade $\frac{T(T+1)}{2\Theta}$, so daß die Energiedifferenz zwischen einem $T = \frac{1}{2}$ -Teilchen (Nukleon N) und einem $T = \frac{3}{2}$ -Teilchen (Delta Δ) gerade:

$$E_{T=\frac{3}{2}} - E_{T=\frac{1}{2}} = \frac{3}{2\Theta} \quad (5.56)$$

lautet. Setzt man hierin die experimentellen Werte ($M_N = 938\text{MeV}$, $M_\Delta = 1232\text{MeV}$) ein, so kann Θ der 'phänomenologische Wert' von $\Theta = 5.1\text{GeV}^{-1} = 1.01\text{fm}$ zugeordnet werden. Wie bereits festgestellt wurde (Gl. (5.42)), gilt automatisch $\tilde{T}^2 = \vec{J}^2$, was letztlich darin begründet liegt, daß der Grand-Spin G eine gute Quantenzahl des Systems ist. Daher tritt bezüglich des Spins J keine weitere Aufspaltung mehr auf.

Interessiert man sich für die Energie E_T in einem kollektiven Zustand mit Isospin T selbst, so ist dieser nicht einfach durch die Summe von Mean-Field-Energie und Rotationsenergie $E^{B=1} + \frac{T(T+1)}{2\Theta}$ gegeben. Der Grund liegt darin, daß wir beim Anlegen der Zwangsbedingung für $\tilde{T}$ nicht berücksichtigt haben, daß bereits auf reinem Mean-Field Niveau ohne Rotation unser System einen endlichen Erwartungswert $\langle \tilde{T}^2 \rangle$ besitzt. Nach Anhang H ist dieser genau gleich dem Erwartungswert des Einteilchen-Operators im Valenzorbital (sphärischer Hedgehog mit $G = 0$, $M = 0$ aus $N_F = 3$ Quarks):

$$\langle \tilde{T}^2 \rangle_{val} = N_F \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{9}{4} \quad (5.57)$$

Wir betonen ausdrücklich, daß dies völlig unabhängig vom späteren kollektiven Zustand und der semiklassischen Quantisierung ist, sondern bereits auf Mean-Field-Niveau auftritt. Wie wir gesehen haben, läßt sich das Cranking-Verfahren formal als Energieaufspaltung unter Anlegen einer Zwangsbedingung für den Operator $\tilde{T}$ mit dem Erwartungswert $\langle \tilde{T} \rangle = \sqrt{T(T+1)}$ durch einen Lagrange-multiplikator $i\tilde{\Omega}$ an die ECW auffassen. Nach dem oben Gesagten müssen wir aber stattdessen eine Zwangsbedingung für einen Operator mit dem Erwartungswert $\langle \tilde{T} \rangle = \sqrt{T(T+1) - \langle \tilde{T}^2 \rangle_{val}}$ anlegen [RS80], was auf die Energie

$$E_T = E^{B=1} + \frac{T(T+1)}{2\Theta} - \frac{\langle \tilde{T}^2 \rangle_{val}}{2\Theta} \quad (5.58)$$

führt. Der Korrekturterm ist in der nichtrelativistischen Kernphysik wohlbekannt und wird dort als spuriose Korrelations- oder Bandenenergie bezeichnet. Dort konnte ferner gezeigt werden, daß der Ausdruck Gl. (5.58) unter gewissen Voraussetzungen eine Näherung zur Energie ist, die man

bei Anwendung der Peierls-Yoccoz-Projektion vor der Variation erhält (sog. Kamlah-Entwicklung) [RS80]. Die totalen Energien von N und Δ ergeben sich damit zu:

$$\begin{aligned} M_N &= E^{B=1} - \frac{3}{4\Theta} \\ M_\Delta &= E^{B=1} + \frac{3}{4\Theta} \end{aligned} \quad (5.59)$$

Die Nukleonenergie ist also tatsächlich niedriger als die Mean-Field-Energie und die Δ -Energie liegt um den gleichen Betrag höher.

5.6. ELEKTRISCHE UND ISOSKALARE LADUNGSVERTEILUNG

Der elektromagnetische Stromoperator ist durch

$$j_{em}^\mu = \gamma^\mu Q \quad (5.60)$$

gegeben, wobei Q die Ladungsmatrix der Quarks

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \\ & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\mathcal{I} + \frac{\tau^3}{2} \quad (5.61)$$

darstellt. Wir betrachten den elektrischen Anteil $\mu = 0$, dessen Erwartungswert $\langle \bar{q}(\vec{r}) j_{em}^\mu q(\vec{r}) \rangle$ nach Integration über den Raumwinkel ϑ^{20} die elektrische Ladungsdichte $\rho_E(r)$ angibt:

$$\begin{aligned} \rho_E(r) &= \int d\vartheta \langle (\bar{q}(\vec{r}) j_{em}^0 q(\vec{r}))' \rangle \\ \langle (\bar{q}(\vec{r}) j_{em}^0 q(\vec{r}))' \rangle &= \frac{\delta}{\delta \kappa(x)} \text{Spln} \left(-iD - i\frac{\Omega^a \tau^a}{2} - \kappa(x) B Q B^\dagger \right)_{\kappa=0} \end{aligned} \quad (5.62)$$

Man überzeugt sich leicht, daß in der nullten Ordnung Ω nur der Anteil $\frac{1}{6}\mathcal{I}$ und in der ersten Ordnung Ω nur der Anteil $\frac{\tau^3}{2}$ von Q beiträgt. Durch Anwendung simpler Clebsch-Gordan-Algebra sieht man ferner, daß nach Integration über den Raumwinkel ϑ die erste Ordnung in Ω

$$\propto \text{Tr} \left[\tau^a (-iu + h)^{-1} \tau^b (-iu + h)^{-1} \right] D^{b3} \Omega^a \propto D^{a3} \Omega^a \propto i^3 \quad (5.63)$$

ist. ρ_E zerfällt also in einen isoskalaren und einen isovektoriellen Anteil, welche jeweils nur in nullter bzw. erster Ordnung Ω beitragen.

$$\hat{\rho}_E =: \frac{1}{2} \rho^{T=0} \mathcal{I} + \rho^{T=1} i^3 \quad (5.64)$$

Bildet man die Summe aus den Erwartungswerten in Proton und Neutron-Zuständen, so verschwindet der $T=1$ -Term und man erhält:

$$\rho_E^{T=0} = \langle p | \hat{\rho}_{el} | p \rangle + \langle n | \hat{\rho}_{el} | n \rangle \quad (5.65)$$

$\rho_E^{T=0}$ ist aber in nullter Ordnung Ω nichts anderes als die im letzten Kapitel behandelte Baryondichte, die dort als ρ bezeichnet wurde. Demnach erfährt diese Größe keine Cranking-Korrekturen und ist als Summe der experimentell zugänglichen protonischen und neutronischen Ladungsdichteverteilung gegeben.

²⁰⁾Der Raumwinkel wird hier ausnahmsweise mit ϑ bezeichnet, um ihn nicht mit der Winkelfrequenz zu verwechseln.

5.7. AXIALER VEKTORSTROM

Wir betrachten die räumliche ($\mu = i$) dritte Isovektor- ($\alpha = 3$) Komponente des axialen Vektorstroms:

$$A_{\mu=i}^{\alpha=3} = \int d^3x \bar{q} \gamma_i \gamma_5 \frac{\tau^3}{2} q \quad (5.66)$$

in einem $|p \uparrow\rangle$ -Zustand. In den rotierenden Feldern ist (Gl. (5.37))

$$\langle A_i^3 \rangle = D^{b3} \langle A_i^b \rangle \quad (5.67)$$

Zunächst konzentrieren wir uns auf die nullte Ordnung Ω . Die Gln. (5.43, 5.8e, 5.53) liefern nach Integration über die Einheitskugel S_3 im b -Raum:

$$\langle p \uparrow | D^{b3} | p \uparrow \rangle = \left(-\frac{1}{3} \right) \delta^{b3} \quad (5.68)$$

In Anhang J wird die Rechnung für den Fall $b = 3$ explizit ausgeführt. Gl. (5.68) hat zur Folge, daß sich der Erwartungswert des axialen Stroms in einem $|p \uparrow\rangle$ -Zustand in niedrigster Ordnung Cranking vom Mittelwert der statischen Hedgehog-Konfiguration um den Faktor $(-\frac{1}{3})$ unterscheidet. Letzterer kann nach den Gln. (4.32, 4.47) mit Hilfe der in Anhang F aufgeführten Matrixelemente mit $\beta \gamma_i \gamma_5 \tau^a = \sigma_i \tau^a$ aus den Eigenfunktionen des statischen Hamiltonoperators h gewonnen werden.

Zur Berechnung der ersten Ordnung in Ω legen wir der Einfachheit halber die Rotationsachse in z -Richtung ($\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$). Der entsprechende Term des Seebeitrages ist dann wegen:

$$\langle p \uparrow | \Omega^3 D^{3b} | p \uparrow \rangle = \langle p \uparrow | i^b | p \uparrow \rangle \propto \delta^{3b} \quad (5.69)$$

proportional zu [MG91b]:

$$\begin{aligned} \langle p \uparrow | \Omega^3 D^{3b} | p \uparrow \rangle &= \sum_{\lambda\nu} (-iu + \epsilon_\lambda)^{-1} (-iu + \epsilon_\nu)^{-1} \langle \lambda | \tau^3 | \nu \rangle \langle \nu | \sigma_i \tau^b | \lambda \rangle \\ &\propto \sum_{\lambda\nu} (-iu + \epsilon_\lambda)^{-1} (-iu + \epsilon_\nu)^{-1} \langle \lambda | \tau^3 | \nu \rangle \langle \nu | \sigma_i \tau^3 | \lambda \rangle \\ &\propto \sum_{M_1 M_2 g \gamma} C(G_2 1 G_1 | M_2 0 M_1) C(G_1 g G_2 | M_1 \gamma M_2) C(11g | 00\gamma) \\ &\propto C(111 | 000) = 0 \end{aligned} \quad (5.70)$$

Im Valenzanteil besteht die erste Ordnung Ω von A_i^3 aus Matrixelementen von $\sigma_i \tau^3$ zwischen Zuständen mit den Quantenzahlen $|G = 0, M = 0\rangle$ und $|G = 1, M = 0\rangle$ (siehe Anhang II). Es ist nicht schwer, sich davon zu überzeugen, daß diese verschwinden.

Analog kann man zeigen, daß auch die axialen Dichten (vgl. Anhang F)

$$\begin{aligned} A_0(r) &= \int d\vartheta \langle p \uparrow | \left\{ \bar{q}(\vec{r}) \gamma_i \gamma_5 \frac{\tau^3}{2} q(\vec{r}) \right\} | p \uparrow \rangle \\ A_2(r) &= \int d\vartheta \langle p \uparrow | \left\{ \sqrt{\frac{6\pi}{5}} \left[\left(\bar{q}(\vec{r}) \gamma_i \gamma_5 \frac{\tau^3}{2} q(\vec{r}) \right)^{(1)} \otimes \hat{z}^{(1)} \right]^{(2)} \otimes Y^{(2)} \right\}^{(0)} | p \uparrow \rangle \right\} \quad (5.71) \end{aligned}$$

die wir im nächsten Kapitel zur Berechnung des axialen Formfaktors $g_A(q^2)$ benötigen werden, nur in nullter Ordnung Ω beitragen und diese sich vom statischen Hedgehog gemäß Gl. (5.68) um den Faktor $(-\frac{1}{3})$ unterscheidet [MG91b].

6. NUKLEONISCHE OBSERVABLE

Wir sind nun in der Lage aus unseren selbstkonsistenten Lösungen eine Reihe von nukleonischen Größen zu berechnen und diese soweit wie möglich mit experimentellen Daten zu vergleichen. Dabei beschränken wir uns zunächst auf das nichtlineare Modell mit $m_\pi = 139\text{MeV}$ im EZ-Schema und untersuchen insbesondere die Abhängigkeit der einzelnen Größen von der Konstituentenmasse M (bzw. der Kopplungskonstanten g), die als einziger freier Parameter für den solitonischen Sektor übriggeblieben ist [MG91a, MG91b]. Danach diskutieren wir kurz im Zusammenhang die Unterschiede zwischen linearem und nichtlinearem Modell, den Einfluß einer endlichen Pion- bzw. Quarkstrommasse [MG89, MG91a] und die Abhängigkeit vom angewandten Regularisierungsschema [BD90]. Abschließend werden wir die Güte der Gradientenentwicklung für diese Observablen untersuchen und einen Vergleich zum Gell-Mann-Levi CSM, welches mit dem gleichen Quantisierungsverfahren (Cranking) behandelt wurde, ziehen.

6.1. ENERGIE DER MEAN-FIELD-LÖSUNG

Tab. 6.1 und Bild 6.1 zeigen zunächst die Mean-Field Energie für eine Hedgehog-Konfiguration $E^{B=1}$ und explizit die entsprechenden Valenz- E_{val} und Seeanteile E_0 sowie den chiral brechenden Term E_{br} in Abhängigkeit von M .

g	3.9	4.0	4.25	5.0	6.0	7.0	7.8	10.0
M [MeV]	363	372	395	465	558	651	725	930
E_{val} [MeV]	716	695	649	530	376	217	89	-
E_0 [MeV]	504	524	567	674	806	936	1043	1093
E_{br} [MeV]	34	34	35	35	32	30	28	24
$E^{B=1}$ [MeV]	1255	1255	1252	1240	1216	1184	1161	1093

Tab. 6.1: Die Mean-Field Energie $E^{B=1}$ aufgespalten in Valenz- E_{val} und Seeanteil E_0 sowie den chiral brechenden Term E_{br} der selbstkonsistenten Lösungen des nichtlinearen Modells (EZR) mit $m_\pi = 139\text{MeV}$.

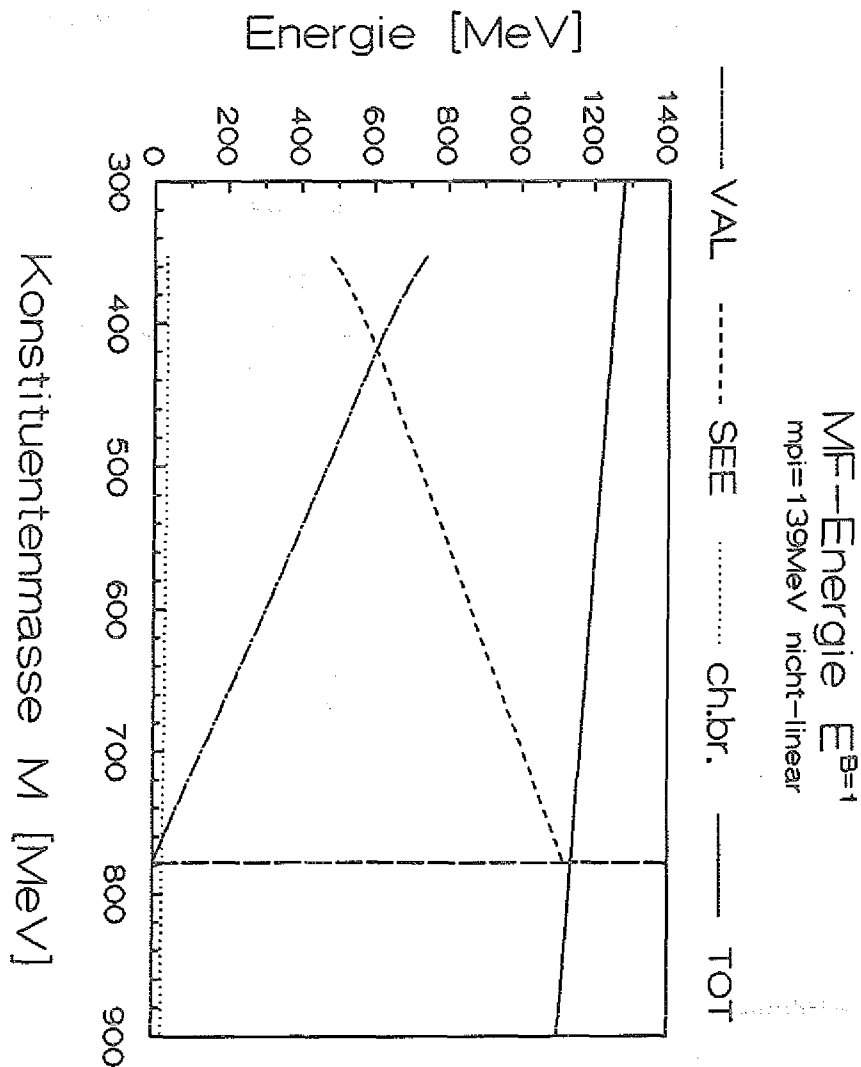


Bild 6.1: Die Mean-Field-Energie (Hedgehog-Konfiguration) $E^{B=1}$ (aufgespalten in Valenz- E_{val} und Seeanteil E_0 sowie den chiral brechenden Term E_{br}) der selbstkonsistenten Lösungen des nichtlinearen Modells (EZR) mit $m_{\pi} = 139\text{MeV}$ in Abhängigkeit der Konstituentenmasse M . Für $M > 778\text{MeV}$ ($g > 8.3$) ist das Valenzquark in den See eingetaucht ($E_{val} = 0$, $\eta_{val} = 0$) und tritt in der Gesamtenergie nicht mehr explizit auf.

Wie man sieht, variiert die totale Energie nur sehr wenig mit M , während E_{val} dem Verhalten des Eigenwertes ϵ_{val} entsprechend stark absinkt, E_0 hingegen stark anwächst. Für $M > 780\text{MeV}$, ($g > 8.3$) ist das Valenzorbital in den Diracsee eingetaucht ($\eta_{val} = 0$) und tritt dann im Ausdruck für die Gesamtenergie nicht mehr explizit auf. Ferner erkennt man, daß das Mean-Field-Soliton bei kleinen Konstituentenmassen $M_{kr} < M < 420\text{MeV}$ metastabil ist, das heißt, daß seine Energie über der von drei freien Quarks liegt.

Die chiral brechende Energie E_{br} bewegt sich im gesamten Bereich in der Größenordnung von $20 - 40\text{MeV}$, so daß ihr relativer Beitrag zu $E^{B=1}$ ziemlich unbedeutend ist.

6.2. ISOSKALARER ELEKTRISCHER RADIUS- UND FORMFAKTOR

Die allgemeine Form des Matrixelementes der Baryonendichte (isoskalarer Anteil der elektromagnetischen Ladungsverteilung) $\rho(x)$ zwischen zwei beliebigen nukleonischen Zuständen $|N_i(p_i, s_i, t_i)\rangle$ mit 4-er Impuls p_i , Spin z-Komponente s_i und Isospin z-Komponente t_i ($i=1,2$) lautet:

$$\begin{aligned} \langle N_2(p_2, s_2, t_2) | \rho(x) | N_1(p_1, s_1, t_1) \rangle &= e^{-iqx} \langle N_2(p_2, s_2, t_2) | \rho(0) | N_1(p_1, s_1, t_1) \rangle \\ \langle N_2(p_2, s_2, t_2) | \rho(0) | N_1(p_1, s_1, t_1) \rangle &= \bar{u}(p_2, s_2, t_2) \beta u(p_1, s_1, t_1) G_E^{T=0}(q^2) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Hierbei bezeichnen $q = p_2 - p_1$ den 4-er-Impulsübertrag und

$$u(p, s, t) = \sqrt{\frac{E + M_N}{2M_N}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + M_N} \end{pmatrix} \chi_s \chi_t \quad (6.2)$$

den Spinor eines freien, punktförmigen Nukleons der Masse M_N mit Spin $\frac{1}{2}$ und Isospin $\frac{1}{2}$. $G_E^{T=0}(q^2)$ ist der isoskalare elektrische Formfaktor. Im Breit-System, welches durch:

$$\begin{aligned} p_1 &= (E, -\vec{q}/2) \quad p_2 = (E, +\vec{q}/2) \quad q = (0, \vec{q}) \\ E &= \sqrt{M_N^2 + \vec{q}^2/4} \quad Q^2 = -q^2 = \vec{q}^2 \quad Q = |\vec{q}| \end{aligned} \quad (6.3)$$

definiert ist, erhält man:

$$\langle N_2(\frac{\vec{q}}{2}, s_2, t_2) | \rho(0) | N_1(\frac{-\vec{q}}{2}, s_1, t_1) \rangle = \delta_{s_1 s_2} \delta_{t_1 t_2} G_E^{T=0}(Q^2) \quad (6.4)$$

Wir behandeln grundsätzlich den Nukleonzustand in der statischen Approximation und vernachlässigen sämtliche Schwerpunktskorrekturen. Ferner nehmen wir $s_1 = s_2 = +\frac{1}{2}$, $t_1 = t_2 = +\frac{1}{2}$. Dies führt zu:

$$|N_1(\frac{-\vec{q}}{2}, s_1, t_1)\rangle = |N_2(\frac{\vec{q}}{2}, s_2, t_2)\rangle = \sqrt{(2\pi^3)\delta(0)} |p \uparrow\rangle \quad (6.5)$$

und daher

$$\langle N_2(\frac{\vec{q}}{2}, s_2, t_2) | \rho(0) | N_1(\frac{-\vec{q}}{2}, s_1, t_1) \rangle = \int d^3r e^{-i\vec{q}\vec{r}} \langle p \uparrow | \rho(\vec{r}) | p \uparrow \rangle = \int d^3r e^{-i\vec{q}\vec{r}} \rho(\vec{r}) \quad (6.6)$$

$|p \uparrow\rangle$ ist hierbei der im letzten Kapitel konstruierte Proton-Zustand nach kollektiver Quantisierung. Dabei ist es im Falle der isoskalaren Dichte egal, wie dessen Spin-Isospin-Quantenzahlen wirklich

aussehen. Einsetzen von Gln. (6.6, 6.4) in Gl. (6.1) liefert nach beidseitiger Integration über den Raumwinkel $\int d\Omega_q$ im Impulsraum schließlich für den isoskalaren elektrischen Formfaktor.

$$G_E^{T=0}(Q^2) = 4\pi \int dr r^2 j_0(Qr) \rho(r) \quad (6.7)$$

mit: $\rho(r) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \rho(\vec{r})$. Der isoskalare elektrische quadratische Radius $\langle R^2 \rangle$ ist durch:

$$\begin{aligned} \langle R^2 \rangle &= \int d^3r r^2 \rho(\vec{r}) = 4\pi \int dr r^4 \rho(r) \\ &= (-6) \frac{dG_E^{T=0}(Q^2)}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0} \end{aligned} \quad (6.8)$$

gegeben. Wie wir Kap.5.6 diskutiert haben, erhält man beide Größen als Summe der entsprechenden Proton- und Neutron-Werte, so daß sie mit experimentellen Daten verglichen werden können. Die Q^2 -Abhängigkeit des Formfaktors entnehmen wir dem Gari-Krümpelmann-Fit [GK85, GK86]. Der experimentelle Wert von $\langle R^2 \rangle$ liegt bei $\langle R^2 \rangle = 0.63 \text{ fm}^2$.

Tab. 6.2 und Bild 6.2 zeigen zunächst $\langle R^2 \rangle$ in Abhängigkeit von M .

g	3.8	3.9	4.0	4.25	5.0	6.0	7.0	7.8	10.0
M [MeV]	353	363	372	395	465	558	651	725	930
$\langle R^2 \rangle_{val} [\text{fm}^2]$	0.66	0.61	0.57	0.49	0.37	0.30	0.24	0.21	-
$\langle R^2 \rangle_0 [\text{fm}^2]$	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.04	0.04	0.20
$\langle R^2 \rangle [\text{fm}^2]$	0.68	0.63	0.59	0.51	0.40	0.33	0.28	0.25	0.20

Tab. 6.2: Der isoskalare elektrische quadratische Radius $\langle R^2 \rangle = \langle R^2 \rangle_E^p + \langle R^2 \rangle_E^n = 4\pi \int dr r^4 \rho(r)$ aufgespalten in Valenz- $\langle R^2 \rangle_{val}$ und Seeanteil $\langle R^2 \rangle_0$ (jeweils in $[\text{fm}^2]$) der selbstkonsistenten Lösungen des nichtlinearen Modells (EZR) mit $m_\pi = 139 \text{ MeV}$.

Der experimentelle Wert wird bei $M = 363 \text{ MeV}$, $g = 3.9$ erreicht, was nur knapp oberhalb des kritischen Wertes M_{kr} (Tab. 4.2) liegt. Der Wert von $\langle R^2 \rangle$ wird hier fast ausschließlich von den Valenzquarks getragen. Mit zunehmender Konstituentenmasse nimmt $\langle R^2 \rangle$ sehr rasch ab. Stellt man daher die Forderung, daß $\langle R^2 \rangle$ und damit die Ausdehnung des Nukleons korrekt adjustiert werden, so ist der physikalisch sinnvolle Bereich für M bzw. g sehr eng festgelegt. Die Q^2 -Abhängigkeit des Formfaktors $G_E^{T=0}(Q^2)$ (Bild 6.3) stimmt bei diesen M mit den phänomenologischen Daten für kleine $Q^2 < 0.5 \text{ GeV}^2$ gut überein. Ferner sei noch bemerkt, daß die Unstetigkeit des Seebeitrages $\langle R^2 \rangle_0$ bei $M = 778 \text{ MeV}$ auf den Sprung von B_0 von 0 auf 1 an diesem Punkt, an dem das Valenzquark in den See eintaucht, zurückzuführen ist.

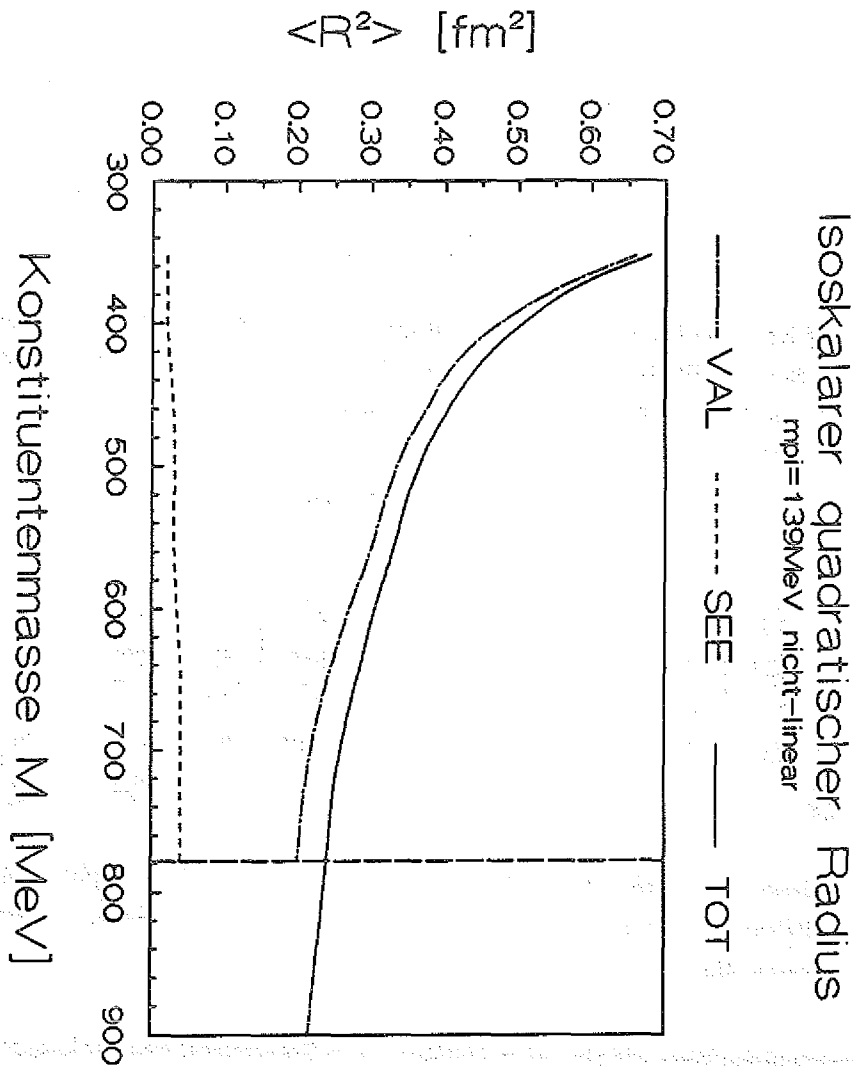


Bild 6.2: Der isoskalare elektrische quadratische Radius $\langle R^2 \rangle = \langle R^2 \rangle_E^p + \langle R^2 \rangle_E^n = 4\pi \int dr r^4 \rho(r)$ aufgespalten in Valenz- $\langle R^2 \rangle_{val}$ und Seeanteil $\langle R^2 \rangle_0$ der selbstkonsistenten Lösung des nichtlinearen Modells (EZR) mit $m_\pi = 139\text{MeV}$ in Abhängigkeit der Konstituentenmasse M . Für $M > 778\text{MeV}$ ($g > 8.3$) ist das Valenzquark in den See eingetaucht ($\eta_{val} = 0$). Dort macht der Seebeitrag von B und $\langle R^2 \rangle$ einen Sprung.

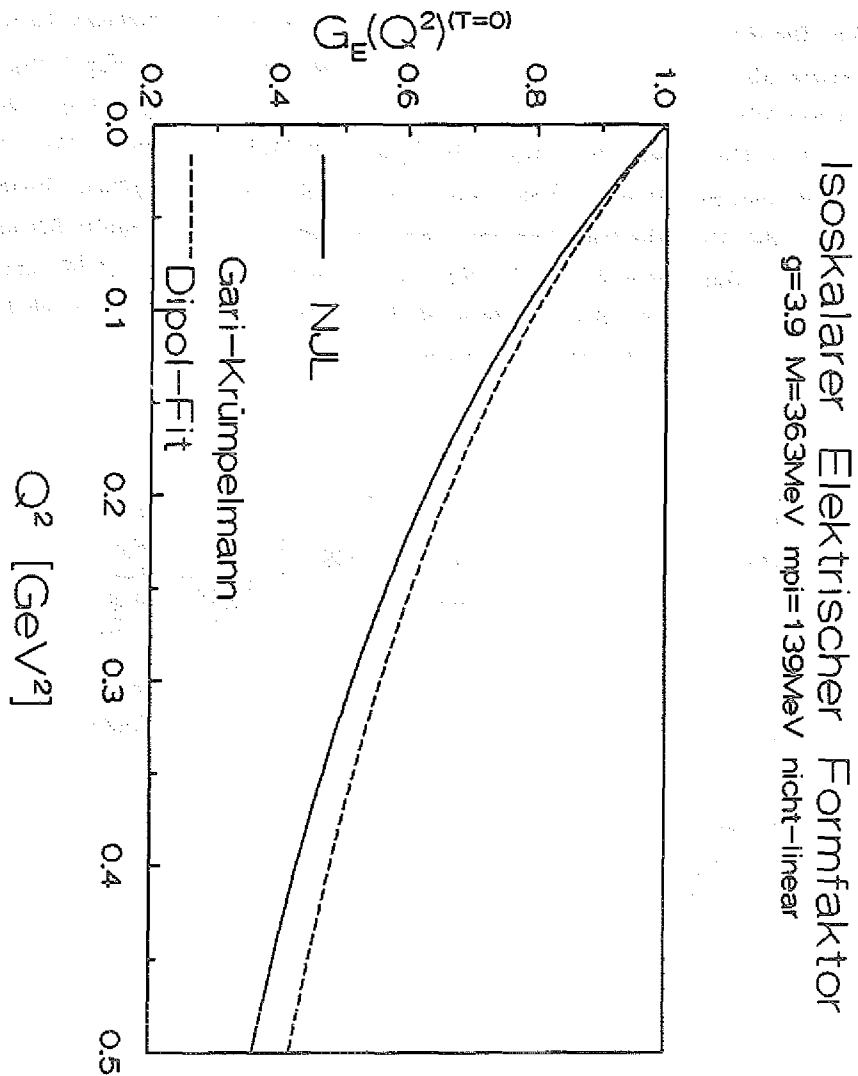


Bild 6.3: Der isoskalare elektrische Formfaktor $G_E^{T=0}(Q^2) = G_E^p(Q^2) + G_E^n(Q^2)$ in Abhängigkeit des negativen quadrierten 4-er-Impulsübertrages $Q^2 = -q^2$ der selbstkonsistenten Lösung des nichtlinearen Modells (EZR) mit $m_\pi = 139\text{MeV}$ bei $M = 363\text{MeV}$, $g = 3.9$. Die experimentellen Daten wurden dem Gari-Krumpelmann-Fit [GK85, GK86] entnommen (gestrichelte Linie).

6.3. TRÄGHEITSMOMENT - ENERGIE VON NUKLEON UND Δ

Das Trägheitsmoment Θ sowie die aus Gl. (5.59) berechnete Energieaufspaltung zwischen Mean-Field-Lösung $E^{B=1}$, der Nukleonmasse M_N und der Δ -Masse M_Δ findet man in Tab. 6.3 und Bild 6.4, 6.5. Bei der an $\langle R^2 \rangle$ adjustierten Konstituentenmasse $M = 363\text{MeV}$ ($g = 3.9$) liegt Θ mit 1.44fm etwas über dem aus der experimentell gemessenen $N - \Delta$ -Aufspaltung folgenden phänomenologischen Wert von $\theta_{exp} = 1.01\text{fm}$. Die $N - \Delta$ Aufspaltung $M_\Delta - M_N = 206\text{MeV}$ ist dann entsprechend zu klein gegenüber $[M_\Delta - M_N]_{exp} = 294\text{MeV}$. Um diesen Wert korrekt zu reproduzieren, muß man mit M etwas höher auf $M \approx 420\text{MeV}$ ($g \approx 4.5$) gehen. In jedem Falle ist jedoch auch hier der Valenzbeitrag dominant, was die Aussage aus Abschnitt 6.2 unterstützt. Die Nukleonenergie ist durch den Abzug der Korrelationsenergie $\frac{9}{4g}$ in Gl. (5.59) grundsätzlich kleiner als die des Hedgehogs. Sie liegt für $M = 363\text{MeV}$ mit $M_N = 1152\text{MeV}$ noch knapp über der Schwelle von $3M = 1090\text{MeV}$. Bei einer leichten Erhöhung von M auf $M \approx 380\text{MeV}$ wird diese Schwelle bereits unterschritten, das heißt, daß das Cranking-Soliton stabil ist.

g	3.9	4.0	4.25	5.0	6.0	7.0	7.8
M [MeV]	363	372	395	465	558	651	725
Θ [fm]	1.440	1.361	1.179	0.904	0.730	0.619	0.561
$E^{B=1}$ [MeV]	1255	1255	1252	1240	1216	1184	1161
M_N [MeV]	1152	1146	1127	1076	1013	945	897
M_Δ [MeV]	1358	1364	1377	1404	1419	1423	1425

Tab. 6.3: Das Trägheitsmoment Θ sowie die Energien der Mean-Field-Lösung (Hedgehog): $E^{B=1}$, des Nukleons: M_N und des Δ : M_Δ (Gl. (5.59)) (jeweils in [MeV]) der selbstkonsistenten Lösungen des nichtlinearen Modells (EZR) mit $m_\pi = 139\text{MeV}$.

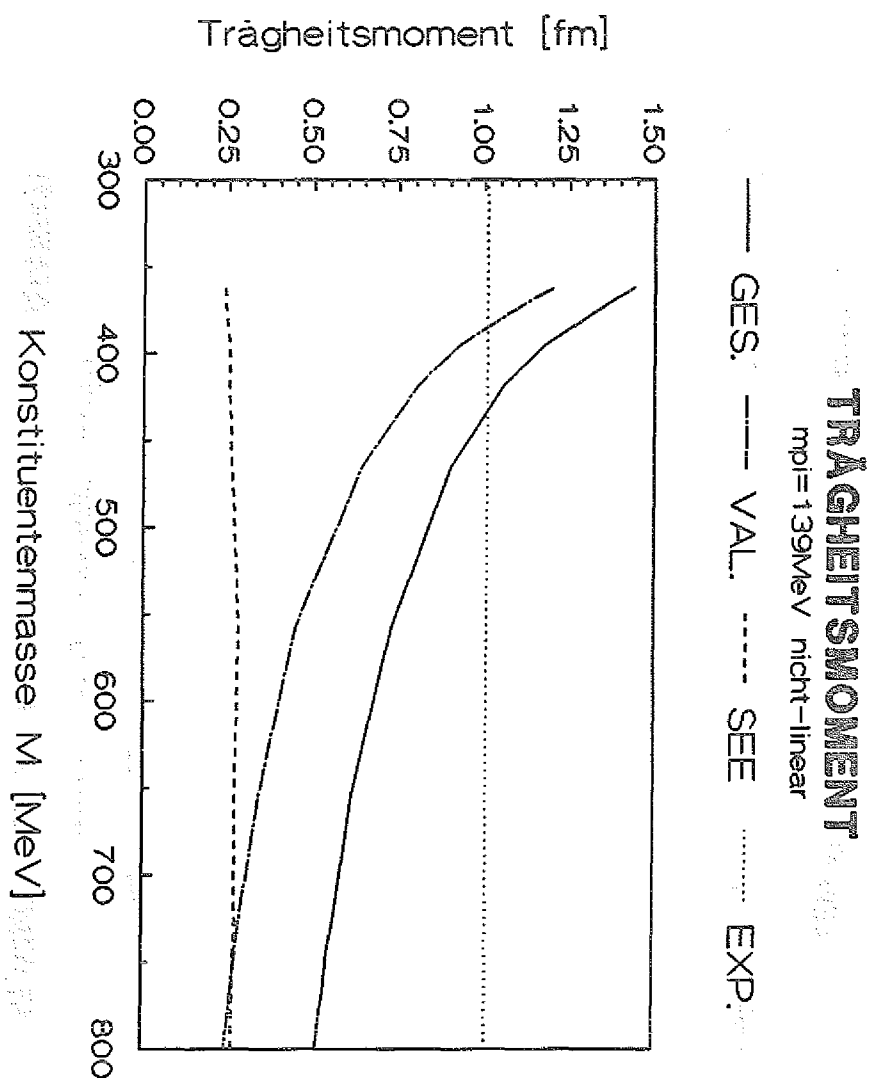


Bild 6.4: Das Trägheitsmoment Θ aufgespalten in Valenz- Θ_{val} und Seeanteil Θ_0 der selbstkonsistenten Lösungen des nichtlinearen Modells (EZR) mit $m_\pi = 139 \text{ MeV}$ in Abhängigkeit der Konstituentenmasse M .

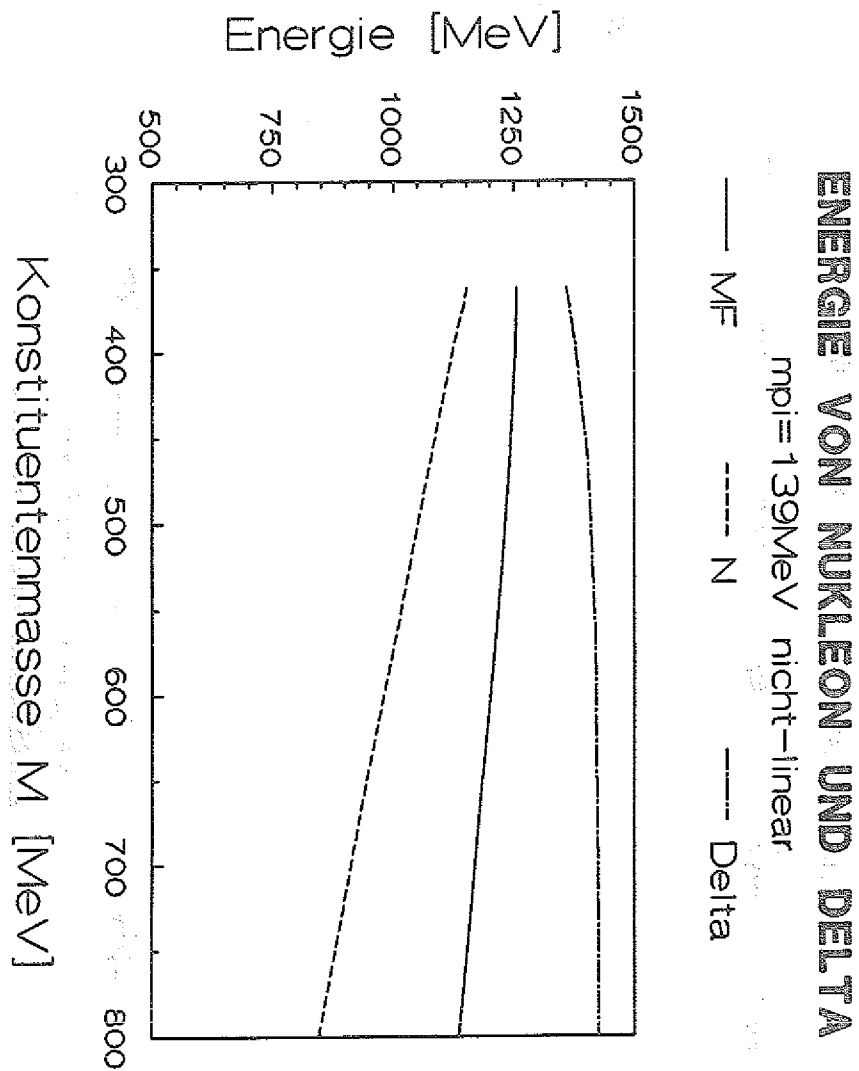


Bild 6.5: Die Energie der Mean-Field-Lösung (Hedgehog) $E^{B=1}$, des Nukleons M_N und des Δ M_Δ der selbstkonsistenten Lösungen des nichtlinearen Modells (EZR) mit $m_\pi = 139 \text{ MeV}$ in Abhängigkeit der Konstituentenmasse M .

6.4. PION-NUKLEON-KOPPLUNG- UND FORMFAKTOR

Der Pion-Nukleon-Formfaktor $g_{\pi NN}(q^2)$ ist durch das Matrixelement des pionischen Stroms $J_\pi^a(x)$

$$(\square + m_\pi^2)\pi^a(x) = J_\pi^a(x) \quad (6.9)$$

zwischen zwei nukleonischen Zuständen $|N_i(p_i, s_i, t_i)\rangle$ mit 4-er Impuls p_i , Spin z-Komponente s_i und Isospin z-Komponente t_i ($i=1,2$) (vgl. Abschnitt 6.2) definiert:

$$\langle N_2(p_2, s_2, t_2) | J_\pi^a(0) | N_1(p_1, s_1, t_1) \rangle = (-i) \bar{u}(p_2, s_2, t_2) \tau^a \gamma_5 u(p_1, s_1, t_1) g_{\pi NN}(q^2) \quad (6.10)$$

Für statische Pionfelder ist $J_\pi^a(\vec{r}) = (-\nabla^2 + m_\pi^2)\pi^a(\vec{r})$. Dies gilt auch für den Fall der adiabatischen Rotation im Isospinraum, da die zweite Zeitableitung von zweiter Ordnung in der Cranking-Frequenz Ω ist, und daher verschwindet.

Im Breit-System (6.3) ergibt sich bei Verwendung des Ansatzes (6.5):

$$\int d^3r e^{i\vec{q}\vec{r}} q^z \langle p \uparrow | [J_\pi^3]^3 | p \uparrow \rangle = \frac{i}{2M_N} (q^z)^2 g_{\pi NN}(Q^2) \quad (6.11)$$

Dabei ist $[J_\pi^3]^a$ der pionische Strom des isospin-rotierenden Systems. Wie in Kapitel 5.3 + 5.7 eingehend diskutiert wurde, liefert diese Rotation gegenüber der Hedgehog-Konfiguration gerade einen Faktor $(-\frac{1}{3})$ und daher:

$$\frac{i}{2M_N} (q^z)^2 g_{\pi NN}(Q^2) = (-\frac{1}{3}) \int d^3r e^{i\vec{q}\vec{r}} q^z J_\pi^3(\vec{r})|_{stat.} \quad (6.12)$$

Man integriert wieder über den Raumwinkel $\int d\Omega_q$ im Impulsraum, und erhält:

$$\frac{g_{\pi NN}(Q^2)}{2M_N} = (-) \int d^3r \frac{j_1(Qr)}{Qr} z J_\pi^3(\vec{r})|_{stat.} \quad (6.13)$$

Wegen Gl. (6.9) können wir J_π durch das Pionfeld ausdrücken. Setzt man

$$J_\pi^a(\vec{r}) = (-\nabla^2 + m_\pi^2)\pi^a(\vec{r}) \quad (6.14)$$

in Gl. (6.12) ein, und führt eine partielle Integration sowie die Raumwinkelintegration $\int d\Omega_q$ durch, endet man schließlich mit:

$$\frac{g_{\pi NN}(Q^2)}{2M_N} = -(m_\pi^2 + Q^2) \cdot \frac{4\pi}{3} \int dr r^3 \left(\frac{j_1(Qr)}{Qr} \right) \pi(r) \quad (6.15)$$

Am Punkt $Q^2 = -q^2 = 0$ erhalten wir insbesondere:

$$\frac{g_{\pi NN}(0)}{2M_N} = -m_\pi^2 \frac{4\pi}{9} \int dr r^3 \pi(r) \quad (6.16)$$

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß $g_{\pi NN}(0)$ aus der axialen Vektorkopplungskonstanten g_A mittels der Goldberger-Treiman-Relation verknüpft ist:

$$g_{\pi NN}(0) = \frac{M_N}{f_\pi} g_A \quad (6.17)$$

Setzt man darin die experimentellen Werte ein, so erhält man: $g_{\pi NN}(0) = 12.4$. Unglücklicherweise ist die πN -Wechselwirkung nur für Pionen, die auf der Massenschale sitzen $q^2 > M_\pi^2$, $Q^2 < -m_\pi^2$ direkt experimentell zugänglich. Im Falle $Q^2 = -m_\pi^2$ erkennt man insbesondere die berühmte Pion-Nukleon-Kopplungskonstante $g_{\pi NN}$ mit dem experimentellen Wert $g_{\pi NN} = g_{\pi NN}(Q^2 = -m_\pi^2) = 13.6$. Um diese theoretisch zu berechnen, müssen wir den Formfaktor $g_{\pi NN}(q^2) = g_{\pi NN}(-Q^2)$ in den Bereich zeitartiger Viereimpulsüberträge $q^2 > 0$, $Q^2 < 0$ analytisch fortsetzen. Wir ersetzen dazu in Gl. (6.13) $Q = |\vec{q}| \rightarrow iP$ mit reellem P . Man muß nun beachten, daß bei der partiellen Integration, die zu Gl. (6.15) führt ein zusätzlicher Randterm $R(Q)$ auftritt:

$$\frac{g_{\pi NN}(Q^2 < 0)}{2M_N} = R(Q) - (m_\pi^2 + Q^2) \cdot \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dr r^3 \left(\frac{j_1(Qr)}{Qr} \right) \pi(r) \quad (6.18)$$

mit:

$$R(Q) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{4\pi R^2}{3Q} \left[\frac{d\pi(r)}{dr} \Big|_R j_1(QR) - \frac{dj_1(QR)}{dr} \Big|_R \pi(R) \right] \right\} \quad (6.19)$$

Im Bereich $Q^2 < -m_\pi^2$ sind beide Terme auf der r.S. von Gl. (6.19) divergent und $g_{\pi NN}(Q^2)$ kann nicht aus dem Pionfeld extrahiert werden. Für $0 > Q^2 > -m_\pi^2$ existiert Gl. (6.18) als analytische Fortsetzung von Gl. (6.15). Zur Berechnung des Ausdruckes zerlegen wir das Integral $\int_0^\infty dr$ in einen asymptotischen Teil $\int_R^\infty dr$, in der die asymptotische Form Gl. (4.83) für das π -Feldes gilt, und einen endlichen Teil $\int_0^R dr$ und verwenden ferner die Beziehung $j_1(ix) = (-i) \left(\frac{\sinh x}{x^2} - \frac{\cosh x}{x} \right)$. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned} \frac{g_{\pi NN}(Q^2 < 0)}{2M_N} &= \left[-(m_\pi^2 + Q^2) \cdot \frac{4\pi}{3} \int_0^R dr r^3 \left(\frac{j_1(Qr)}{Qr} \right) \pi(r) \right] \\ &+ \left[-(m_\pi^2 + Q^2) \cdot \frac{4\pi}{3} B e^{-m_\pi R} R \left(\frac{j_1(QR)}{QR} \right) \right] \\ &+ \left[-\frac{4\pi}{3} B e^{-m_\pi R} \frac{1}{|Q|} (m_\pi \sinh(|Q|R) + |Q| \cosh(|Q|R)) \right] \end{aligned} \quad (6.20)$$

und insbesondere für $Q^2 = -m_\pi^2$:

$$\frac{g_{\pi NN}(Q^2 = -m_\pi^2)}{2M_N} = -\frac{4\pi}{3} B \quad (6.21)$$

mit B aus Gl. (4.83). Die Abweichung zwischen Gl. (6.21) und Gl. (6.16) ist eine Soft-Pion-Korrektur. Tab. 6.4 zeigt die in unserem Modell berechneten Werte für $g_{\pi NN}(Q^2 = -m_\pi^2) = g_{\pi NN}$ und $g_{\pi NN}(0)$ wobei die Nukleonmassen M_N aus Tab. 6.3 entnommenen wurden. Da, wie bereits angedeutet wurde, die Pion-Nukleon-Kopplung durch die Golgberger-Treiman-Relation stark mit der axialen Kopplung korreliert ist, verschieben wir die Interpretation dieses Ergebnisses auf den folgenden Abschnitt. Im Bereich $Q^2 > 0$ kann man $g_{\pi NN}(Q^2)$ zwar nicht direkt messen, allerdings ist es möglich seinen Verlauf durch Verwendung von Ein-Boson-Austauschpotentiale (OBEP) an Daten der NN -Streuung als Monopol-Form:

$$f_{\pi NN}(Q^2) = \frac{g_{\pi NN}(Q^2)}{g_{\pi NN}(Q^2 = -m_\pi^2)} = \frac{\Lambda^2 - m_\pi^2}{\Lambda^2 + Q^2} \quad (6.22)$$

mit einer Monopol-Masse von $\Lambda = 1530\text{MeV}$ anzupassen [MH87]. In unserem Modell erhalten wir hingegen einen Monopol-Cutoff von $\Lambda = 790 \pm 50\text{MeV}$, was dem in Bild 6.6 gezeigten Verlauf von $f_{\pi NN}$ entspricht. Auch in allen anderen chiralen Modellen liegen die Werte von Λ wesentlich niedriger als der in den Meson-Austauschrechnungen phänomenologisch bestimmte. So liefert beispielsweise das Skyrme-Modell 580MeV [Coh86], das Vektor-Skyrme-Modell 850MeV [KM87] und das projizierte lineare CSM 690MeV [AR88, AR90a]. Die gleiche Größenordnung für den Monopol-Cutoff wird in Ladungsaustauschreaktionen [EL85] und neueren Abschätzungen innerhalb des Meson-Austausch-Modells [DG90] benötigt, und ergibt sich auch durch Einsetzen der experimentellen Werte für $g_{\pi NN}(Q^2 = -m_\pi^2) = g_{\pi NN} = 13.6$ und $g_{\pi NN}(0) = \frac{M_N}{f_\pi} g_A = 12.4$ in Gl. (6.22):

$$\Lambda = \frac{m_\pi}{\sqrt{1 - f_{\pi NN}(0)}} = 468\text{MeV} \quad (6.23)$$

Diese Diskrepanz ist vermutlich darauf zurückzuführen, daß zu einer korrekten Beschreibung der NN -Wechselwirkung noch andere, kompliziertere Prozesse als der πNN -Vertex benötigt werden.

g	3.9	5.0	7.8
M [MeV]	363	465	725
$g_{\pi NN}(Q^2 = -m_\pi^2)$	10.4	8.6	6.0
$g_{\pi NN}(Q^2 = 0)$	10.0	8.4	5.8

Tab. 6.4: Die Pion-Nukleon-Kopplung $g_{\pi NN}$ auf der Massenschale ($Q^2 = -m_\pi^2$) und bei $Q^2 = 0$ der selbstkonsistenten Lösungen des nichtlinearen Modells (EZR) mit $m_\pi = 139\text{MeV}$. Zur Berechnung wurden die Gln. (6.21, 6.16) mit den Nukleonmassen M_N aus Tab. 6.3 verwendet. Der experimentelle Wert auf der Massenschale ist $g_{\pi NN}(-m_\pi^2) = 13.6$. $g_{\pi NN}(0)$ hängt über die Goldberger-Treiman-Relation mit g_A zusammen: $g_{\pi NN}(0) = g_A \frac{M_N}{f_\pi} \stackrel{\text{exp}}{=} 12.4$.

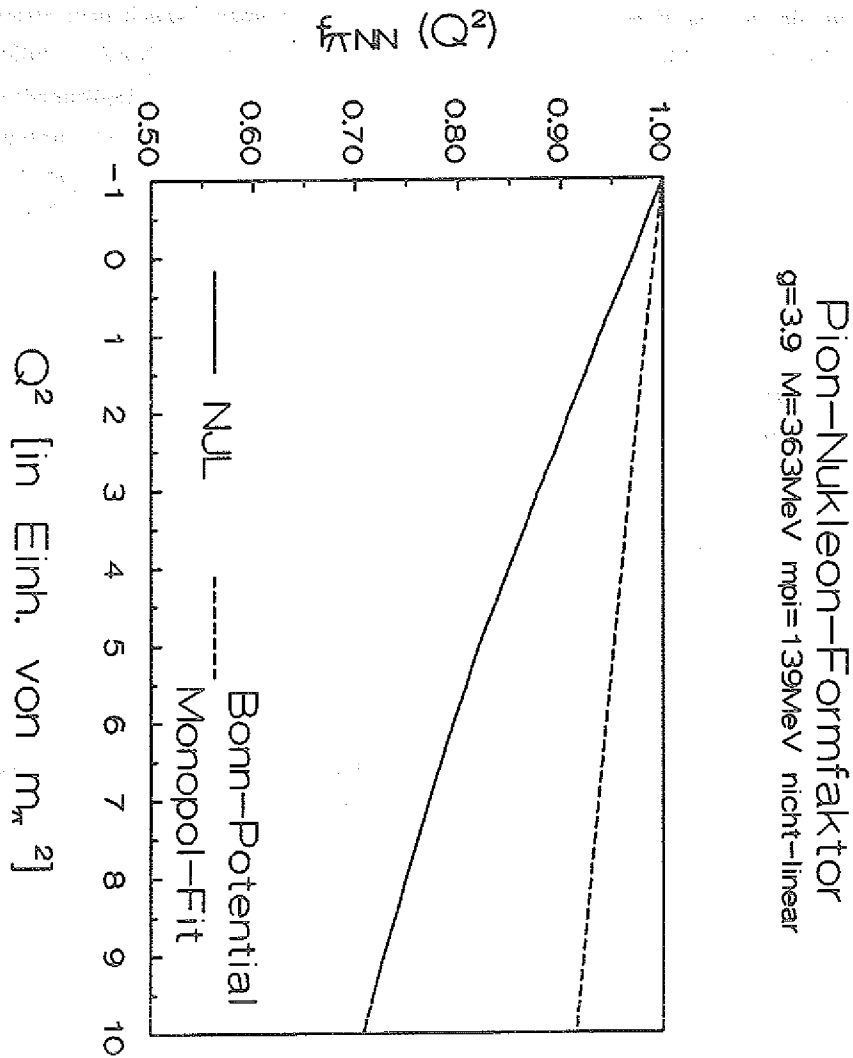


Bild 6.6: Der Pion-Nukleon-Formfaktor $g_{\pi NN}(Q^2)$ in Abhängigkeit des negativen quadrierten 4-er-Impulsübertrages $Q^2 = -q^2$ der selbstkonsistenten Lösung des nichtlinearen Modells (EZR) mit $m_\pi = 139\text{MeV}$ bei $M = 363\text{MeV}$, $g = 3.9$. Das Ergebnis wird mit dem Monopol-Fit des Bonn-Potentials mit der Cutoff-Masse $\Lambda = 1530\text{MeV}$ [MH87] (gestrichelte Linie) verglichen.

6.5. AXIALE VEKTORKOPPLUNGSKONSTANTE – AXIALER FORMFAKTOR – GOLDBERGER-TREIMAN-RELATION

Die allgemeine Form des Matrixelementes des axialen Stromes $A_\mu^a(x)$ zwischen den nukleonischen Zuständen $|N_i(p_i, s_i, t_i)\rangle$ mit 4-er-Impuls p_i , Spin z-Komponente s_i und Isospin z-Komponente t_i ($i=1,2$) lautet:

$$\begin{aligned} \langle N_2(p_2, s_2, t_2) | A_\mu^a(x) | N_1(p_1, s_1, t_1) \rangle &= e^{-iqx} \langle N_2(p_2, s_2, t_2) | A_\mu^a(0) | N_1(p_1, s_1, t_1) \rangle \\ \langle N_2(p_2, s_2, t_2) | A_\mu^a(0) | N_1(p_1, s_1, t_1) \rangle &= \bar{u}(p_2, s_2, t_2) \frac{\tau_a}{2} [\gamma_\mu \gamma_5 g_A(q^2) + q_\mu \gamma_5 h_A(q^2)] u(p_1, s_1, t_1) \end{aligned} \quad (6.24)$$

wobei die gleichen Bezeichnungen wie in den Abschnitten 6.2 und 6.4 gewählt wurden. $g_A(q^2)$ ist der axiale und $h_A(q^2)$ der polare Formfaktor. Im Breit-System (6.3) erhalten wir für die räumlichen Komponenten:

$$\begin{aligned} \langle N_2(\frac{\vec{q}}{2}, s_2, t_2) | \vec{A}^a(0) | N_1(\frac{-\vec{q}}{2}, s_1, t_1) \rangle &= \\ \langle \chi_{s_2}^\dagger \chi_{t_2}^\dagger \rangle \frac{\tau_a}{2} \left[\frac{E}{M_N} g_A(q^2) \vec{\sigma}_T + \left(g_A(q^2) - \frac{Q^2}{2M_N} h_A(q^2) \right) \vec{\sigma}_L \right] (\chi_{s_1} \chi_{t_1}) \end{aligned} \quad (6.25)$$

mit: $\vec{\sigma}_L = \vec{q}(\vec{\sigma}\vec{q})$, $\vec{\sigma}_T = \vec{\sigma} - \vec{\sigma}_L$.

Der Nukleonenzustand wird wieder in der statischen Approximation unter Vernachlässigung aller Schwerpunktskorrekturen (Gl. (6.5)) mit semiklassischer Quantisierung (vgl. Kap. 5.7) für $A^a(\vec{r})$ behandelt und ferner wird $s_i = t_i = \frac{1}{2} i = 1, 2$ gewählt.

$$\begin{aligned} |N_1(\frac{-\vec{q}}{2}, s_1, t_1) \rangle &= |N_2(\frac{\vec{q}}{2}, s_2, t_2) \rangle = \sqrt{(2\pi^3)\delta(0)} |p \uparrow \rangle \\ \langle N_2(\frac{\vec{q}}{2}, s_2, t_2) | A_\mu^a(0) | N_1(\frac{-\vec{q}}{2}, s_1, t_1) \rangle &= \int d^3r e^{i\vec{q}\vec{r}} \langle p \uparrow | A^a(\vec{r}) | p \uparrow \rangle \end{aligned} \quad (6.26)$$

Man kann $g_A(q^2)$ aus Gl. (6.25) extrahieren, indem man das Kreuzprodukt $\vec{q} \times \dots$ bildet, den ganzen Ausdruck mit $(\vec{q} \times \chi_{s=\frac{1}{2}}^\dagger \vec{\sigma} \chi_{s=\frac{1}{2}})$ multipliziert und schließlich auf beiden Seiten über $\int d\Omega_q$ integriert: Unter Benutzung von:

$$\begin{aligned} \int d\Omega_q e^{i\vec{q}\vec{r}} &= 4\pi j_0(Qr) \\ \int d\Omega_q e^{i\vec{q}\vec{r}} (\vec{q}\vec{a})(\vec{q}\vec{b}) &= \frac{4\pi}{3} [\vec{a} \otimes \vec{b}]^{(0)} j_0(Qr) + \frac{(4\pi)^2}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{2}{15}} (-) [\vec{a} \otimes \vec{b}]^{(2)} \otimes Y^{(2)} \Big|^{(0)} j_2(Qr) \end{aligned} \quad (6.27)$$

mit den Notationen:

$\vec{a}, \vec{b}$: Vektoren $t_M^{(L)}$: sphärischer Tensor vom Rang L , Komponente M $[A \otimes B]^{(L)}$: sphärisches Tensorprodukt vom Rang L (vgl. Anhang F (F.6))

ergibt sich:

$$g_A(Q^2) = (-) \frac{M_N}{E} \int dr r^2 [j_0(Qr) A_0(r) + j_2(Qr) A_2(r)] \quad (6.28)$$

mit den axialen Dichten:

$$\begin{aligned} A_0(r) &= \int d\Omega \langle p \uparrow | A_{a=3}^{i=3}(x) | p \uparrow \rangle = (-) \frac{1}{3} \int d\Omega [q^\dagger(\vec{r}) \frac{1}{2} \sigma_0^{(1)} \tau_0^{(1)} q(\vec{r})] \\ A_2(r) &= \int d\Omega \left\langle p \uparrow \left| \sqrt{\frac{6\pi}{5}} [A_{a=3}^{i=1}(x) \otimes \hat{r}_3^{(1)(2)} \otimes Y^{(2)}]^{(0)} \right| p \uparrow \right\rangle \\ &= (-) \frac{1}{3} \int d\Omega \left\{ q^\dagger(\vec{r}) \sqrt{\frac{\pi}{2}} [Y^{(2)} \otimes \sigma^{(1)(1)} \tau_0^{(1)} q(\vec{r})] \right\} \end{aligned} \quad (6.29)$$

und $E = \sqrt{M_N^2 + \vec{q}^2/4}$.

Die Berechnung der Seeanteile von A_0 und A_2 erfolgt gemäß Gl. (4.32) und ist im Deatail in Anhang F ausgeführt. Die Valenzanteile lauten in den Spinorkomponenten (E.48):

$$\begin{aligned} A_0(r)|_{val} &= (-\frac{N_F}{3})[u^2(r) - v^2(r)] \\ A_2(r)|_{val} &= (-\frac{N_F}{3})\frac{2}{3}v^2(r) \end{aligned} \quad (6.30)$$

Am Punkte $Q^2 = q^2 = 0$ ergibt sich insbesondere die axiale Vektorkopplungskonstante g_A :

$$g_A = g_A(q^2 = 0) = 2 \int d^3r \langle p \uparrow | A_{a=3}^{i=3}(x) | p \uparrow \rangle = -2 \int dr r^2 A_0(r) \quad (6.31)$$

mit dem experimentellen Wert $g_A = 1.23$.

Durch Verwendung der PCAC-Relation für den Erwartungswert $\langle A_\mu^a(x) \rangle$ des axialen Vektorstroms (siehe Anhang B Gl.(B.28)) kann man den totalen Wert (Valenz + See !) von g_A durch das Integral über das selbstkonsistente π -Feld ausdrücken:

$$\begin{aligned} g_A &= 2 \int d^3r \langle p \uparrow | A_{a=3}^{i=3}(x) | p \uparrow \rangle = 2 \int d^3r \langle \partial_i z \rangle \langle p \uparrow | A_{a=3}^{i=3}(x) | p \uparrow \rangle = \\ &= (-2) \int d^3r z \partial_i \langle p \uparrow | A_{a=3}^{i=3}(x) | p \uparrow \rangle = f_\pi m_\pi^2 2 \int d^3r z \langle p \uparrow | D_{3b} | p \uparrow \rangle \pi^b(\vec{r}) = \\ &= (-\frac{8\pi}{9}) f_\pi m_\pi^2 \int dr r^3 \pi(r) \end{aligned} \quad (6.32)$$

und wegen Gl. (6.16) zu $g_{\pi NN}(0)$ in Beziehung setzen, was auf die berühmte

Goldberger-Treiman-Relation:

$$g_A = (-\frac{8\pi}{9}) f_\pi m_\pi^2 \int dr r^3 \pi(r) = g_{\pi NN}(0) \frac{f_\pi}{M_N} \quad (6.33)$$

führt. Im Soft-Pion-Limes ist $g_{\pi NN}(0) \approx g_{\pi NN}((^2)Q^2 = -m_\pi^2)$ und daher g_A nach Gl. (6.21) durch den asymptotischen Schwanz von π gegeben:

$$g_A = g_{\pi NN}(q^2 = 0) \cdot \frac{f_\pi}{M} \approx g_{\pi NN}(q^2 = m_\pi^2) \cdot \frac{f_\pi}{M} = (-\frac{8\pi}{3}) f_\pi B \quad (6.34)$$

mit:

$$\pi(r) = B e^{-m_\pi r} \frac{1 + m_\pi r}{r^2} \quad (6.35)$$

In Tab. 6.5 sind die nach den verschiedenen Methoden berechneten Werte von g_A , aufgespalten in Valenz- und Seeanteil, zusammengestellt. Zunächst stellen wir die gute Übereinstimmung zwischen dem direkt aus den Matrixelementen von A_μ^a extrahierten $(g_A)_{tot}$ und dem aus Gl. (6.33) erhaltenen $(g_A)_{\pi-Int}$ fest, was ein exzellenter Test für die numerische Güte unseres Selbstkonsistenzverfahrens ist, da die Gültigkeit der PCAC-Relation (B.28) auf den Bewegungsgleichungen (4.72, 4.73, 4.76) beruht. Die Abweichung zwischen (6.33) und (6.34) sind ebenfalls sehr gering, was darauf schließen läßt, daß der Soft-Pion-Limes erfüllt ist. Im physikalisch relevanten Bereich $g = 3.9$ ist $g_A \approx 0.8$ und daher gegenüber seinem experimentellen Wert um etwa ein Drittel zu klein. Die scheinbar bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment im Falle der Pion-Nukleon-Kopplungskonstanten Tab. 6.4 ist nur darauf zurückzuführen, daß M_N aus Tab. 6.3 größer als die experimentelle Nukleonmasse ist, was in der Goldberger-Treiman-Relation (6.33) das zu kleine g_A wieder teilweise aufhebt. Ferner erkennt man, daß g_A fast ausschließlich von den Valenzquarks aufgebracht wird. Auch in diesem Falle finden wir, wie schon bei Θ und $\langle R^2 \rangle$, das Valenzbild des Nukleons bestätigt.

g	3.9	5.0	7.8	10.0
M [MeV]	363	465	725	930
$(g_A)_{val}$	0.75	0.71	0.69	-
$(g_A)_0$	0.06	0.03	-0.08	0.54
$(g_A)_{tot}$	0.81	0.74	0.61	0.54
$(g_A)_{\pi-Int}$	0.81	0.73	0.61	0.53
$(g_A)_{\pi-asympt.}$	0.84	0.74	0.62	0.54

Tab. 6.5: Die axiale Vektorkopplungskonstante g_A der selbstkonsistenten Lösungen des nichtlinearen Modells (EZR) mit $m_\pi = 139\text{MeV}$. Angegeben sind Valenz- $(g_A)_{val}$, See- $(g_A)_0$ und totaler Beitrag $(g_A)_{tot}$. Letzterer kann aus dem Integral des selbstkonsistenten π -Feldes $(g_A)_{\pi-Int}$ (6.33) und im Soft-Pion-Limes aus dessen asymptotischen Schwanz $(g_A)_{\pi-asympt.}$ (6.34) extrahiert werden. Für $M > 778\text{MeV}$ ($g > 8.3$) ist das Valenzquark in den See eingetaucht ($\eta_{val} = 0$). Dort macht der Seebeitrag $(g_A)_0$ einen Sprung.

Der volle axiale Formfaktor $g_A(Q^2)$ (auf $g_A(0)$ normiert) ist in Bild 6.7 dargestellt. Für M_N wurde der Wert aus Tab. 6.3 $M_N = 1152\text{MeV}$ eingesetzt. Allerdings ist der numerische Effekt außerordentlich gering, wenn man stattdessen den experimentelle Nukleonmasse $M_N = 938\text{MeV}$ verwendet. Im Bereich $Q^2 < 1\text{GeV}^2$ können wir unsere Kurve durch eine Dipol-Form

$$\frac{g_A(Q^2)}{g_A(0)} = \left(1 + \frac{Q^2}{M_A^2}\right)^{-2} \quad (6.36)$$

mit einer axialen Dipolmasse von $M_A = 0.91 \pm 0.01\text{GeV}$ parametrisieren, was sich in sehr guter Übereinstimmung mit den experimentellen Daten befindet. Diese liefern $M_A = 1.07^{+0.12}_{-0.16}\text{GeV}$ [Bak81, Kit83].

Aus $g_A(Q^2)$ kann außerdem der quadratische axiale Radius $\langle r_A^2 \rangle$ durch:

$$\langle r_A^2 \rangle = -\frac{6}{g_A(0)} \frac{d}{dQ^2} g_A(Q^2) \Big|_{Q^2=0} = \frac{1}{g_A} \int dr r^4 (-A_0(r) + \frac{2}{5} A_2(r)) + \frac{3}{4M_N^2} = \frac{12}{M_A^2} \quad (6.37)$$

bestimmt werden. Das Resultat ist: $\langle r_A^2 \rangle = 0.59 \text{ fm}^2$ (exp. $0.42_{-0.08}^{+0.18} \text{ fm}^2$) wozu die Valenzquarks mit 0.46 fm^2 beitragen.

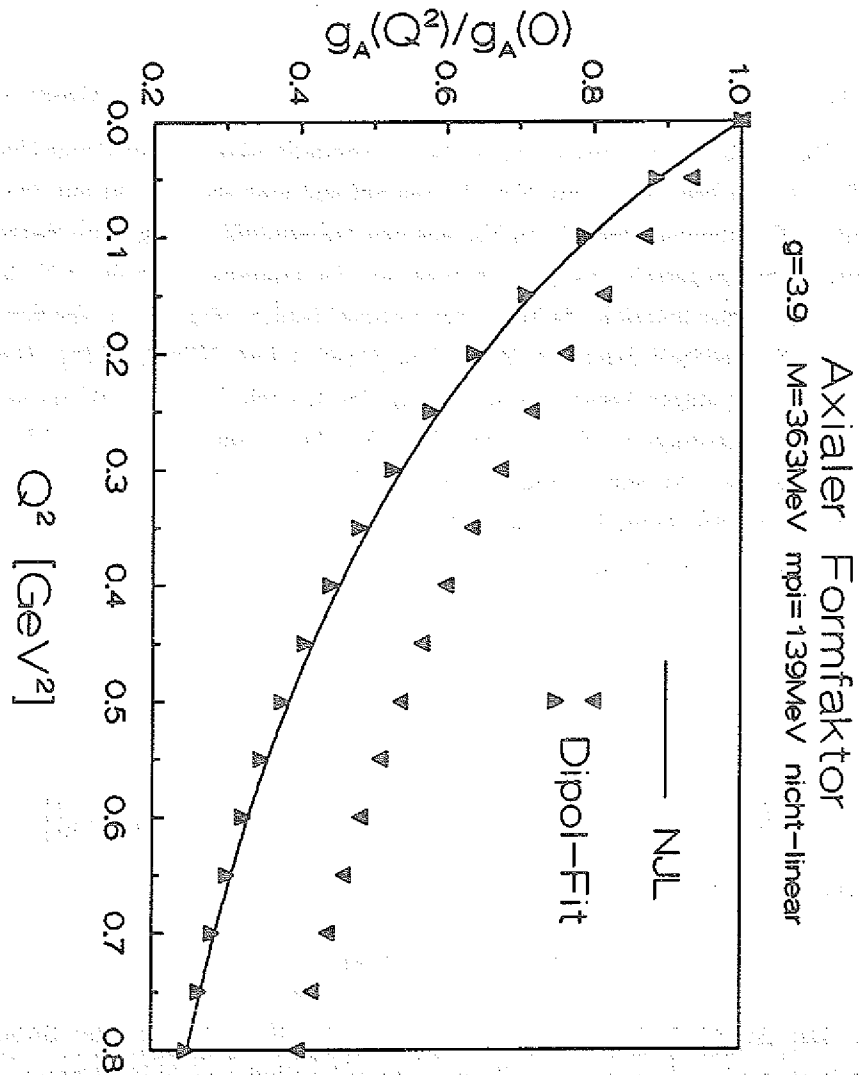


Bild 6.7: Der axiale Formfaktor $g_A(Q^2)$ (auf $g_A(0)$ normiert) in Abhängigkeit des negativen quadrierten 4-er-Impulsübertrages $Q^2 = -q^2$ der selbstkonsistenten Lösung des nichtlinearen Modells (EZR) mit $m_\pi = 139\text{MeV}$ bei $M = 363\text{MeV}$, $g = 3.9$. Die nach oben und unten gerichteten Pfeile markieren den Bereich des aus den experimentellen Daten extrahierten Dipol-Fits mit einer axialen Dipol-Masse von $M_A = 1.05^{+0.12}_{-0.16}\text{GeV}$ [Bak81, Kit83].

6.6. NUKLEONISCHER σ -TERM

Der nukleonische σ -Term ist als Analogon zum Quarkkondensat im nukleonischen Sektor durch

$$\Sigma = m_0 \int d^3r \langle N | \bar{q}q | N \rangle \quad (6.38)$$

definiert, wobei $m_0 = \frac{1}{2}(m_u + m_d)$, $q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ bezeichnet. Als isoskalare Größe ist Σ ähnlich wie $\langle R^2 \rangle$ und $G_E^{T=0}(Q^2)$ unabhängig von der Spin-Isospin-Struktur des nukleonischen Zustandes $|N\rangle$, das heißt es treten keine Cranking-Korrekturen auf und man kann direkt mit der Mean-Field-Lösung arbeiten. Phänomenologisch kann Σ_N aus den Massenaufspaltungen im Baryonoktett mit Hilfe der chiralen Störungsrechnung (A) als auch aus Streudatenanalyse der πN -Streuung (B) extrahiert werden. Leider liefern beide Methoden unterschiedliche Ergebnisse, die von $\Sigma \approx 30 \text{ MeV}$ (Methode A) bis $\Sigma \approx 65 \text{ MeV}$ (Methode B) reichen [GL82, CL84, Klu90, GL91]. Die Diskrepanz ließe zunächst auf eine starke Verletzung der Zweig-Regel, nach der das Nukleon keine $s\bar{s}$ -Paare enthält, schließen. Allerdings ist die Analyse der πN -Daten mit größeren Problemen behaftet [Klu90] so daß eine klare Aussage bezüglich des experimentellen Wertes von Σ bisher noch nicht endgültig gemacht werden kann. Die neueste Analyse [GL91] liefert $\Sigma \approx 45 \text{ MeV}$.

Für eine allgemeine Wechselwirkung $S(q, \bar{q}, \mathcal{M}) = \int d^4x [\bar{q}i\partial q + \mathcal{L}_{int}(q, \bar{q}, \mathcal{M})]$ die neben den Quarkfeldern q and $\bar{q}$ von einem beliebigen Feld $\mathcal{M}$ abhängt, ist

$$\begin{aligned} \Sigma &= -m_0 \cdot \frac{\int Dq D\bar{q} D\mathcal{M} \exp[iS(q, \bar{q}, \mathcal{M})] \int d^3x (q\bar{q})}{\int Dq D\bar{q} D\mathcal{M} \exp[iS(q, \bar{q}, \mathcal{M})]} \\ &= m_0 \cdot \frac{1}{T} \frac{\delta}{\delta \tilde{m}} \ln \int Dq D\bar{q} D\mathcal{M} \exp \left[\int d^4x E[\bar{q}(-i\partial - \tilde{m})q + \mathcal{L}_{int}(q, \bar{q}, \mathcal{M})] \right] \Big|_{\tilde{m}=0} \end{aligned} \quad (6.39)$$

was sich analog zu Gl. (4.29) auf:

$$\Sigma = m_0 \cdot \frac{\delta}{\delta \tilde{m}} E(\tilde{m}) \Big|_{\tilde{m}=0} \quad (6.40)$$

vereinfacht. Der Ausdruck $E(\tilde{m})$ kann dann als Energie beim Anlegen der Zwangsbedingung $\tilde{m}\bar{q}q$ interpretiert werden. In unserem Falle sind nun prinzipiell zwei Möglichkeiten zur expliziten Berechnung von Σ denkbar.

- (1) Entweder führt man die Operationen in Gl. (6.39) vor der Bosonisierungsprozedur durch, so daß $\tilde{m}$ wie die Quarkstrommasse m_0 behandelt wird. Aus Gln. (3.10, 3.34) sieht man sofort, daß Σ nach Abzug des Vakuumbeitrages nichts anderes als die chirale brechende Energie E_{br} ist.

$$\Sigma_1 = -\frac{m_0 \mu^2}{g} \int d^3r (\sigma - f_\pi) = -m_\pi^2 f_\pi \int d^3r (\sigma - f_\pi) = E_{br} \quad (6.41)$$

- (2) Man rechnet Σ nach (6.38, 6.39) direkt im bosonisierten Modell wie einen Erwartungswert gemäß Gl. (4.29) aus:

$$\Sigma_2 = m_0 \cdot \int dr r^2 N_F(S_0(r) + s_{val}(r)\eta_{val}) \quad (6.42)$$

wobei S die skalar-isoskalare Dichte nach Gl. (4.74) bezeichnet und m_0 durch Gl. (3.34) gegeben ist.

Grundsätzlich macht eine Berechnung von Σ nur bei einem Modell mit einer endlichen, die chirale Symmetrie explizit brechenden, Quarkstrommasse m_0 bzw. Pionmasse m_π Sinn. Im linearen Modell sind beide Ausdrücke Σ_1 und Σ_2 aufgrund der Bewegungsgleichung Gl. (4.72) für das σ -Feld identisch $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ und der σ -Term ist wohldefiniert. In der nicht-linearen Version erfüllt jedoch das σ -Feld, welches aus dem selbstkonsistenten chiralen Winkel θ (Gl. (4.76)) gemäß $\sigma = f_\pi \cos \theta$ (Gl. (4.6)) extrahiert wird, die Bewegungsgleichung (4.72) nicht, so daß Σ_1 und Σ_2 im Prinzip unterschiedliche Werte annehmen können, was, wie man aus Tab. 6.6 entnehmen kann, insbesondere bei höheren M auch der Fall ist.

g	3.9	4.0	4.25	5.0	6.0	7.8	10.0
M [MeV]	363	372	395	465	558	725	930
$\Sigma_1 = E_{br}$ [MeV]	35	35	35	35	33	28	24
Σ_2 [MeV]	41	40	39	33	27	20	15

Tab. 6.6: Der σ -Term $\Sigma_1 = E_{br}$ und Σ_2 nach (6.42) der selbstkonsistenten Lösungen des nichtlinearen Modells (EZR) mit $m_\pi = 139\text{MeV}$.

Wegen der angesprochenen Unklarheiten und Zweideutigkeiten, die sowohl bei der theoretischen als auch bei der phänomenologischen Bestimmung von Σ auftreten, verzichten wir auf eine weitere Interpretation der Ergebnisse in Tab. 6.6 und bemerken nur, daß bei dem favorisierten Wert von $g = 3.9$ Σ_1 und Σ_2 nicht sehr stark differieren und beide mit den in der Literatur diskutierten Werten von $\Sigma = 30 \dots 65\text{MeV}$ [GL82, GL91] konsistent sind.

6.7. RELATIVER ANTEIL VON VALENZ- UND SEQUARKS

Grundsätzlich erwartet man für jede Observable bei Erhöhung von M zwei gegenläufige Effekte:

- (A) Da die Kopplungsstärke g anwächst, nimmt auch die Polarisierung des Diracsees zu, so daß der relative Anteil der Sequarks im Vergleich zum Valenzbeitrag zunimmt.
- (B) Wegen $\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{A}{M} = 0$ werden die Seeorbitale im Kontinuum zunehmend unterdrückt, so daß letztlich bei sehr hohen M nur mehr die, allerdings dann stark polarisierten, gebundenen Zustände übrigbleiben.

Allgemein ist festzustellen, daß bei kleineren M zunächst (A) überwiegt, während insbesondere im Bereich, in dem das Valenzorbital in den See eingetaucht ist ($\epsilon_{val} < 0$, $\eta_{val} = 0$) der Effekt (B) schließlich dominiert. Im Grenzfall $M \rightarrow \infty$ ist die Unterdrückung durch die Regularisierung so stark, daß sämtliche Beiträge verschwinden. Die einzige Ausnahme von diesem

Verhalten ist im Falle von g_A festzustellen. Dort steigt der relative Valenzbeitrag mit zunehmendem M . Bei $M \approx 560 \text{ MeV}$ verschwindet der Seebeitrag schließlich und wechselt bei weiterer Erhöhung von M das Vorzeichen, bis beim Eintauchen des Valenzquarks der bekannte Sprung auftritt.

Auf der anderen Seite ist jedoch auch klar zu erkennen, daß bei kleinen M in allen Fällen eindeutig das Valenzquark dominiert. So beträgt der relative Valenzanteil für die Konstituentenmasse $M = 363 \text{ MeV}$, $g = 3.9$, bei der $\langle R^2 \rangle$ seinen experimentellen Wert 0.63 fm^2 annimmt, im Falle von $E^{B=1}$ 57%, $\langle R^2 \rangle$ 96%, Θ 83%, g_A 93% und $\langle r_A^2 \rangle$ 78%. Dies bestätigt ein klares Valenzquarkbild des Nukleons. Der See dient lediglich zur Stabilisierung des Solitons, beeinflußt aber scheinbar die nukleonischen Observablen, selbst die Teilchen-Loch-Anregungen wie das Trägheitsmoment Θ , nur wenig.

6.8. EINFLUSS DES CHIRALEN ZIRKELS UND DER PIONMASSE

In Kapitel 4 haben wir gesehen, daß für Kopplungskonstanten knapp über dem kritischen Wert sich die selbstkonsistenten Lösungen des linearen und des nichtlinearen Modells nur sehr wenig voneinander unterscheiden, aber eine relativ geringe Erhöhung von g bzw. M im linearen Modell bereits zu starken Abweichungen vom chiralen Zirkel führt (Bild 4.4, 4.5, 4.6, 4.7). Dieses Verhalten reflektiert sich auch in den aus diesen Lösungen extrahierten Observablen Tab. 6.7. So ist im linearen Fall bei einer Kopplungskonstante von $g = 4.25$ der quadratische Radius $\langle R^2 \rangle$ des Nukleons bereits viel zu klein. Daraus muß der Schluß gezogen werden, daß das lineare Modell genau dort physikalisch relevant ist, wo es mit dem nichtlinearen Modell übereinstimmt, nämlich gerade knapp überhalb von g_{kr} . Die Restriktion auf den chiralen Zirkel stellt daher im physikalisch relevanten Bereich keine wesentliche Einschränkung dar.

	$E^{B=1} [\text{MeV}]$	$\langle R^2 \rangle [\text{fm}^2]$	g_A	$\Sigma_1 = E_{br} [\text{MeV}]$
linear	1248	0.51	0.76	35
nicht-linear	1255	0.59	0.82	35

Tab. 6.7: Vergleich einiger Observablen (MF -Energie $E^{B=1}$, isoskalarer elektrischer quadratischer Radius $\langle R^2 \rangle$, aziale Vektorkopplung g_A nach Gl. (6.34) und σ -Term $\Sigma_1 = E_{br}$) der selbstkonsistenten Lösungen von linearem und nichtlinearem Modell (EZR) mit $m_\pi = 139 \text{ MeV}$ bei $M = 372 \text{ MeV}$, $g = 4.0$.

Ferner wissen wir aus Bild 4.7, daß eine endliche Pionmasse m_π , was nach Gl. (3.34) einer endlichen Quarkstrommasse entspricht, die selbstkonsistenten Felder praktisch überhaupt nicht beeinflußt, was nicht nur für $g = 3.9$, sondern im gesamten Bereich von g gilt. Auch die sich daraus ergebenden nukleonischen Größen Tab. 6.8 sind daher fast identisch. Einzig die totale Energie $E^{B=1}$ liegt bei $m_\pi = 139 \text{ MeV}$ um etwa 40 MeV höher als im chiralen Limes, was auf den

chiral brechenden Term bzw. den σ -Term $E_{br} = \Sigma_2$ zurückzuführen ist.

	$E^{B=1}$ [MeV]	$\langle R^2 \rangle$ [fm ²]	g_A
$m_\pi = 139\text{MeV}$	1255	0.63	0.84
$m_\pi = 0$	1214	0.63	0.80

Tab. 6.8: Vergleich einiger Observablen (MF-Energie $E^{B=1}$, isoskalärer elektrischer quadratischer Radius $\langle R^2 \rangle$ und axiale Vektorkopplung g_A nach Gl. (6.34)) der selbstkonsistenten Lösungen des nichtlinearen Modells (EZR) bei $M = 363\text{MeV}$, $g = 3.9$ mit $m_\pi = 139\text{MeV}$ und $m_\pi = 0$

6.9. ABHÄNGIGKEIT VOM REGULARISIERUNGSSCHEMA

In Tab. 6.9 werden einige der nukleonischen Observablen, die in den vier verschiedenen Regularisierungsschemata (Eigenzeit-Schema EZR, $O(4)$ - und $O(3)$ -invarianter scharfer Abschnitt im Impulsraum sowie Pauli-Villars-Regularisierung PV) berechnet wurden, gegenübergestellt. Im Gegensatz zum Vakuumsektor (Kap.3.5), bei dem die dort untersuchten Größen (z.B.: $\langle \bar{q}q \rangle_V$ oder m_0) sehr stark auf die angewandte Regularisierung reagierten, sehen wir, daß der solitonische Sektor in dieser Hinsicht ausgesprochen unempfindlich ist. Die einzige Ausnahme bildet der nukleonische σ -Term, der bei den scharfem Impulsabschnittsverfahren mit $\approx 22\text{MeV}$ deutlich unter dem entsprechenden Wert im EZ, im PV-Schema hingegen deutlich darüber liegt.

Dieser Unterschied zwischen Vakuum- und solitonischem Sektor liegt ebnefalls wieder in der starken Dominanz der unregularisierten Valenzquarks bei den nukleonischen Observablen begründet. Im Vakuum hingegen tritt nur der regularisierte 1-Quark-Schleifen Beitrag auf, und es ist daher verständlich, daß hier der Effekt der Regularisierung stärker zu Tage tritt.

	$E^{B=1}$ [MeV]	$\langle R^2 \rangle$ [fm ²]	Σ_1 [MeV]
EZR	1255	0.59	35
$O(4)$ scharf	1240	0.66	22
$O(3)$ scharf	1234	0.66	22
Pauli-Villars	1139	0.58	49

Tab. 6.9: Vergleich einiger Observablen (MF-Energie $E^{B=1}$, Isoskalärer elektrischer quadratischer Radius $\langle R^2 \rangle$ und σ -Term $\Sigma_1 = E_{br}$) der selbstkonsistenten Lösungen im nichtlinearen Modell mit $m_\pi = 139\text{MeV}$ bei $M = 372\text{MeV}$, $g = 4.0$ für verschiedene Regularisierungsschemata.

6.10. VERGLEICH MIT DEN GRADIENTENENTWICKELTEN GRÖSSEN UND DEM CSM

Zu guter letzt wollen wir, wie angedeutet, die Güte der Gradienten- bzw. Heat-Kernel-Entwicklung des 1-Quark-Schleife-Anteils untersuchen. Wir betrachten zunächst in Bild 6.8 die Gesamtenergie $E^{B=1} = E_{val} + E_0$ des nicht-linearen Modells im chiralen Limes ($m_\pi = 0$). Zum Vergleich dazu sind die jeweiligen Ausdrücke, in denen E_0 bis zur zweiten bzw. 4.Ordnung HKE entwickelt wurde (vgl. Anhang C), dargestellt:

$$\begin{aligned} E^{B=1} &= N_F \epsilon_{val} + E_0 \\ E^{B=1}|^{(2)} &= N_F \epsilon_{val} + E_0^{(2)} \\ E^{B=1}|^{(4)} &= N_F \epsilon_{val} + E_0^{(2)} + E_0^{(4)} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Die analytischen Ausdrücke für $E_0^{(2)}$ und $E_0^{(4)}$ in Termen des chiralen Winkel θ lauten:

$$\begin{aligned} E_0^{(2)} &= \frac{1}{2} 4\pi f_\pi^2 \int dr r^2 \left[\left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 \theta \right] \\ E_0^{(4)} &= \frac{N_F}{4\pi} 4\pi \int dr r^2 \left\{ \frac{1}{6} \Gamma \left(2, \frac{M^2}{\Lambda^2} \right) \left[8 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \left(2 \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{6} \Gamma \left(2, \frac{M^2}{\Lambda^2} \right) 2 \left[\left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 + \frac{2 \sin^2 \theta}{r^2} \right]^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{3} \Gamma \left(1, \frac{M^2}{\Lambda^2} \right) 2 \left[\left(\frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{\sin 2\theta}{r^2} \right)^2 + \left(\left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 + \frac{2 \sin^2 \theta}{r^2} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.44)$$

Im physikalisch relevanten Bereich stimmt $E^{B=1}$ zwar mit der 2.Ordnung HKE bis auf etwa 10 – 15% überein, allerdings ist die 4. Ordnung eine deutliche Verschlechterung gegenüber der 2.Ordnung. Ein solches Verhalten ist typisch für eine asymptotische oder alternierende Reihe, wie sie die HKE vermutlich darstellt. Man muß daraus schließen, daß die zunächst als ausreichend erscheinende Güte der 2.Ordnung rein zufällig ist, und die Hinzunahme höherer Ordnungen im allgemeinen keine Verbesserung darstellt.

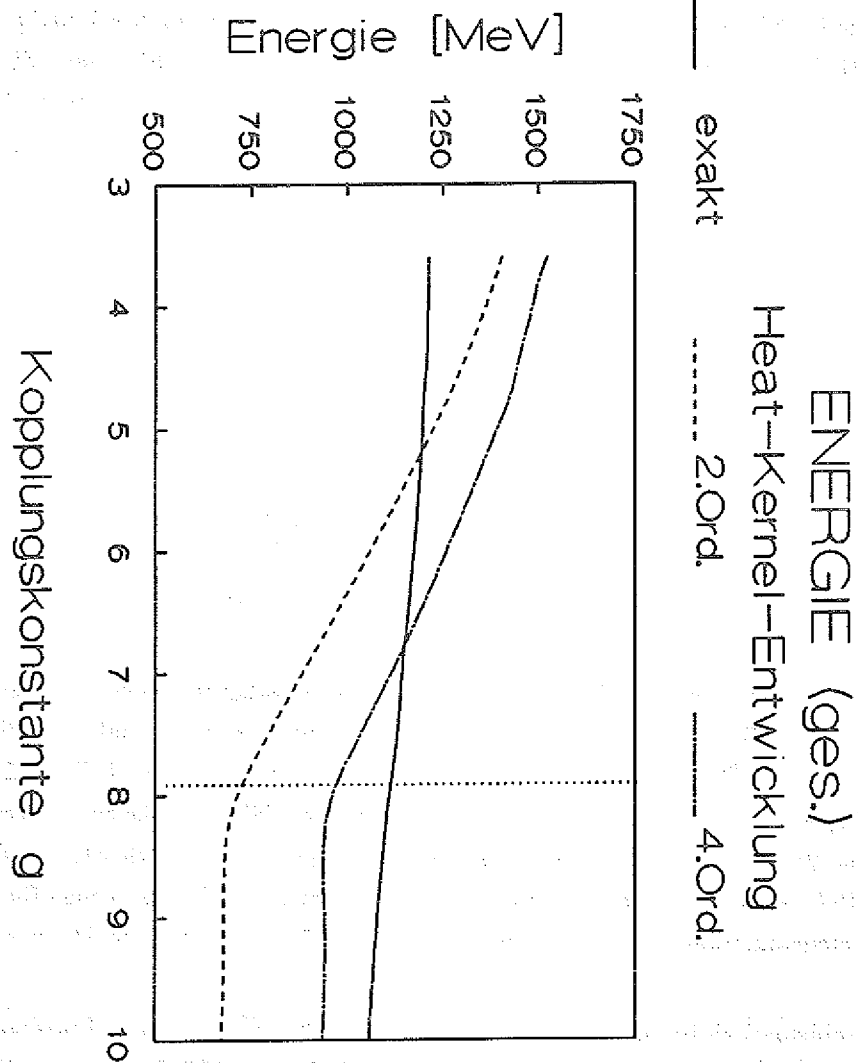


Bild 6.8: Die Seenergie E_0 im Vergleich zur zweiten und vierten Ordnung Heat-Kernel-Entwicklung der selbstkonsistenten Lösungen des nichtlinearen Modells (EZR) mit $m_\pi = 0$ in Abhängigkeit der Konstituentenmasse M .

Es treten sogar auch Fälle auf, in denen bereits die 2.Ordnung völlig fehlschlägt. Dazu betrachten wir die in Tab. 6.10 zusammengestellten Observablen. Hierbei haben wir neben der exakten und der 2.Ordnung HKE des NJL im $B = 1$ -Sektor noch die entsprechenden Resultate für das selbstkonsistent gelöste CSM aus Kap. 4.4 angegeben, wobei ebenfalls die semiklassische Quantisierung (Cranking) wie im NJL verwendet wurde. Die dort auftretenden mesonischen Beiträge haben die gleiche analytische Form wie die entsprechenden Terme der 2.Ordnung HKE im NJL, allerdings sind die jeweils einzusetzenden selbstkonsistenten Felder natürlich verschieden. Der Vollständigkeit halber geben stellen wir hier die benötigten analytischen Ausdrücke, soweit noch nicht geschehen, in Termen der selbstkonsistenten Valenzquarkfelder u und v und der Mesonfelder σ und π zusammen. Das Verfahren zur allgemeinen Berechnung der HK-entwickelten Observablen findet man in Anhang C.

$$\begin{aligned}
 \langle R^2 \rangle_{val} &= \int dr r^4 (u^2 + v^2) \\
 \langle R^2 \rangle_0^{(2)} &= \langle R^2 \rangle_{mes} = 0 \\
 \Theta_0^{(2)} &= \Theta_{mes} = \frac{8\pi}{3} \int dr r^2 \pi^2(r) \\
 (g_A)_{val} &= (-2) \frac{N_F}{3} \int dr r^2 \left(u^2 - \frac{v^2}{3} \right) \\
 (g_A)_0^{(2)} &= (g_A)_{mes} = \left(-\frac{8\pi}{9} \right) \int dr r^2 \left[\sigma(r) \frac{d\pi}{dr} + 2 \frac{\sigma(r)\pi(r)}{r} - \pi(r) \frac{d\sigma}{dr} \right]
 \end{aligned} \tag{6.45}$$

In Bild 4.13 haben wir gesehen, daß sich für $g = 3.9$ die selbstkonsistenten Valenzquarkfelder u und v im NJL und CSM kaum unterscheiden, so daß es nicht verwundert, daß auch die jeweiligen Valenzbeiträge von $\langle R^2 \rangle$, Θ und g_A nur wenig differieren. Anders liegt der Fall bei E_{val} , welches nach Gl. (4.79) selbst wieder von σ und π abhängt, so daß im CSM im Falle der Energie eine klare Trennung von Valenz- und mesonischem Beitrag überhaupt nicht möglich ist. Da für $\langle R^2 \rangle$ die 2.Ordnung HKE exakt verschwindet und der Seebeitrag sehr gering ist, stellt man für diese Größe eine gute Übereinstimmung fest. Beim Trägheitsmoment Θ hingegen sind die Abweichungen schon stärker.

Besonders problematisch ist der Fall der axialen Vektorkopplung g_A . Zwar konvergiert der Seebeitrag der axialen Dichte $A_0(r)$ exzellent gegen die 2.Ordnung HKE für $r \rightarrow \infty$ (Bild 6.9, 6.10) da in diesem Bereich die Gradienten der Mesonfelder verschwinden. Allerdings haben $[A_0(r)]_0$ und $[A_0(r)]_0^{(2)}$ bei kleinen r unterschiedliches Vorzeichen. Bildet man daher das Radialintegral $g_A = (-2) \int dr r^2 A_0(r)$, so verschwindet der exakte Seebeitrag fast vollständig, während die 2.Ordnung HKE einen endlichen Beitrag liefert, der mehr als die Hälfte des Valenzanteils ausmacht. Setzt man gar die selbstkonsistenten Mesonfelder des CSM ein, so ergibt sich ein mesonischer Beitrag in der Größe des Valenzbeitrages. Dies erklärt die starke Diskrepanz von g_A zwischen NJL und CSM.

	NJL (exakt)	NJL (grad.)	CSM
E_{val} [MeV]	716	716	526
E_0/E_{mes} [MeV]	504	693	819
$E_{br} = \Sigma_1$ [MeV]	34	34	63
$E^{B=1}$ [MeV]	1255	1443	1408
$\langle R^2 \rangle_{val} [\text{fm}^2]$	0.60	0.60	0.60
$\langle R^2 \rangle_0 / \langle R^2 \rangle_{mes} [\text{fm}^2]$	0.03	0	-
$\langle R^2 \rangle_{tot} [\text{fm}^2]$	0.63	0.60	0.60
$\Theta_{val} [\text{fm}]$	1.20	1.20	0.90
$\Theta_0 / \Theta_{mes} [\text{fm}]$	0.24	0.34	0.64
$\Theta_{tot} [\text{fm}]$	1.44	1.54	1.54
$(g_A)_{val}$	0.75	0.75	0.75
$(g_A)_0 / (g_A)_{mes}$	0.06	0.39	0.56
$(g_A)_{tot}$	0.81	1.14	1.31

Tab. 6.10: Vergleich zwischen NJL mit Seequarks (selbstkonsistent) (1.Spalte), dem selbstkonsistenten NJL, bei dem der 1-Quark-Schleifen-Anteil in 2. Ordnung Heat-Kernel- bzw. Gradientenentwicklung behandelt wurde (2.Spalte) und dem selbstkonsistenten CSM mit Valenzquarks und kinetischem Term der Mesonen (3.Spalte). Es wurde jeweils das nichtlineare Modell mit $m_\pi = 139\text{MeV}$ bei $M = 363\text{MeV}$ ($g = 3.9$) und für das NJL die EZR verwendet.

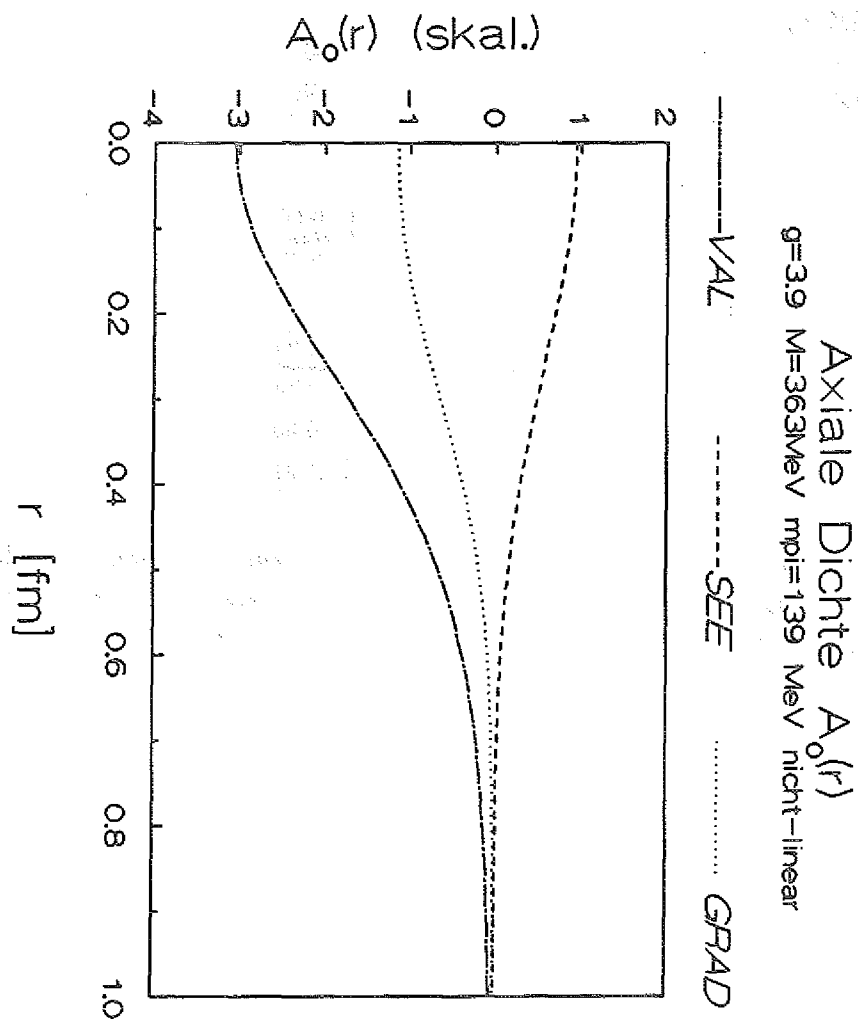


Bild 6.9: Die axiale Dichte $A_0(r)$ in beliebigen Einheiten der selbstkonsistenten Lösung des nicht-linearen Modells (EZR) mit $m_\pi = 139\text{MeV}$ bei $M = 363\text{MeV}$ ($g = 3.9$). Die Abbildung zeigt den Valenzbeitrag (Strich-Punkt), den Seeanteil (Striche) und die zweite Ordnung Gradienten- oder Heat-Kernel-Entwicklung (Punkte).

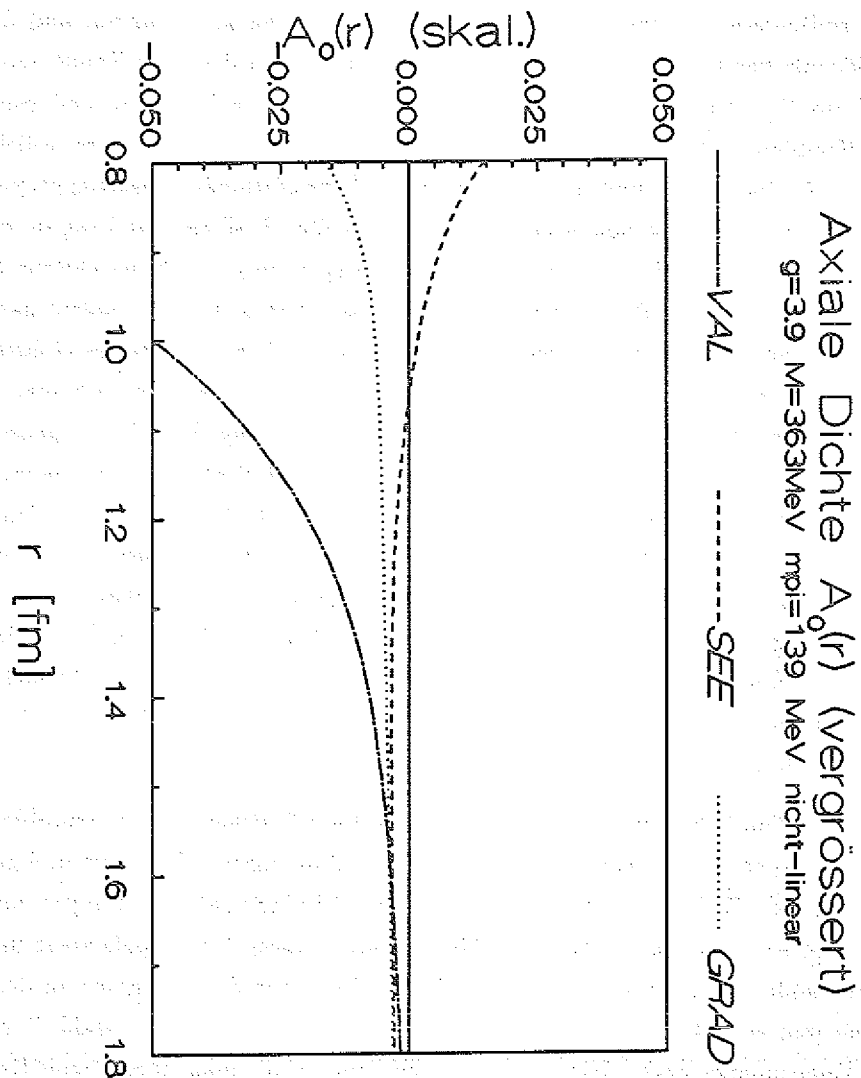


Bild 6.10: Bild 6.9 im asymptotischen Bereich stark vergrößert.

7. DISKUSSION UND SCHLUSSBEMERKUNGEN

Unser Ziel war es, in einem effektiven chiralen Modell unter vollständiger Berücksichtigung des Diracsees solitonische Lösungen mit Baryonenzahl $B = 1$ zu konstruieren, und daraus eine Reihe von nukleonischen Größen zu extrahieren. Wir betrachteten dazu das Nambu–Jona-Lasinio Modell (NJL) im $SU(2)$ -Flavour Sektor, wobei wir uns auf skalar-isoskalare und pseudoskalar-isovektorielle Kopplungen beschränkt haben. Zunächst wurde die Theorie in den kollektiven Mesonfeldern σ und $\vec{\pi}$ reformuliert, und es wurde gezeigt, daß die stationäre Phasenapproximation für σ und $\vec{\pi}$ in der bosonisierten Version äquivalent zur NJL-4-Quark-Wechselwirkung in der Hartree-Fock-Approximation ist, falls man sich in einer Phase mit spontan gebrochener chiraler Symmetrie (SCSB) befindet und der Soft-Pion-Limes gilt. Dies erlaubte es uns, insbesondere das kollektive Hintergrundfeld $\vec{\pi}$ mit dem physikalischen Pion, welches im NJL als masseloses Goldstone-Boson durch Lösung der Bethe-Salpeter-Gleichung im pseudoskalar-isovektoriellen $\bar{q}q$ -Kanal auftritt, zu identifizieren und damit die Parameter unseres Modells an die physikalischen Eigenschaften des mesonischen Sektors zu adjustieren. Die Berechnung der 1-Quark-Schleifen-Graphen im schwachen Pionzerfall f_π liefert eine Beziehung zwischen der durch die SCSB hervorgerufene Konstituentenquarkmasse M und dem UV-Abschneideparameter Λ , der zur Regularisierung der divergenten Quark-Schleifen benötigt wird. Durch eine endliche Strommasse $m_0 \approx 10\text{MeV}$ wird die chirale Symmetrie explizit gebrochen, was den Pionen ihre kleine, aber endliche Masse m_π verleiht. Letztlich läßt die Physik des mesonischen Sektors nur einen freien Parameter für den solitonischen Sektor übrig und wir haben uns entschlossen, hierfür die Konstituentenmasse M bzw. die Quark-Meson-Kopplungskonstante $g = \frac{M}{f_\pi}$ zu nehmen.

Im statischen Fall haben wir die Dirac-Gleichung des 1-Teilchen-Eigenwertproblems in einer endlichen, genügend großen Kugel mit geeigneten Randbedingungen diskretisiert und gelöst, wobei für die Mesonfelder die Hedgehog-Form mit topologischer Windungszahl $n = 1$ angenommen wurde. Mit zunehmender Ausdehnung des Mesonprofils wird das Diracspektrum polarisiert und es treten gebundene Zustände auf. Dabei wandert das Valenzorbital aus dem positiven in den negativen Energiebereich und erhöht beim Eintauchen in den Diracsee dessen Baryonzahl B von 0 auf 1. Solange die Valenzquarks noch positive Energie besitzen, kann man durch explizite Besetzung dieser Orbitale ein System mit Baryonenzahl $B = 1$ konstruieren. Formal entspricht dies der Einführung von $B = 1$ als Zwangsbedingung in die effektive Wirkung über das thermochemische Potential μ als Lagrangemultiplikator. Dabei werden Valenz- und Seebeitrag so separiert, daß die Valenzquarks unregularisiert bleiben.

Wir haben dann die Bewegungsgleichungen für ein $B = 1$ -System aufgestellt und durch ein einfaches iteratives Verfahren selbstkonsistent gelöst. Zunächst geschah dies auf Mean-Field-Niveau mit statischen Hedgehog-Konfigurationen für σ und $\vec{\pi}$. Die Spin-Isospin-Quantenzahlen eines nukleonischen Systems erreichten wir mit Hilfe der aus der nichtrelativistischen Kernphysik wohl bekannten Cranking-Methode. Diese besteht in der Ausführung einer fiktiven adiabatischen Rotation der selbstkonsistenten Mean-Field-Lösung im Isospinraum mit der Cranking-Frequenz Ω und anschließender kollektiver Quantisierung der Rotationsfreiheitsgrade. Dabei werden sämtliche

Observable in den rotierenden Feldern ausgedrückt, bis zur ersten Ordnung in Ω entwickelt und anschließend der Erwartungswert in den kollektiven nukleonischen Zuständen gebildet. Wir haben diskutiert, daß die Cranking-Rotation dem Anlegen einer Zwangsbedingung für den Isospin mit Ω als Lagrangemultiplikator entspricht, falls dieser im euklidischen Raum wie die Zeitkomponente eines Vektormesons behandelt wird. Die Rotation bzw. die Variation unter dieser Zwangsbedingung führt zunächst zu einer Erhöhung der Energie E_T eines Systems mit Isospin T gegenüber der Mean-Field-Energie $E_{MF}^{B=1}$ um den Zentrifugalterm $\frac{T(T+1)}{2\Theta}$, wobei das Trägheitsmoment Θ die lineare Responsfunktion des Systems gegenüber einer solchen Rotation darstellt. Da jedoch die Mean-Field-Lösung bereits einen endlichen Erwartungswert $\langle T^2 \rangle_{MF}$ besitzt, muß die entsprechende spuriose Korrelations- oder Bandenenergie $\frac{\langle T^2 \rangle_{MF}}{2\Theta}$ abgezogen werden:

$$E_T = E_{MF}^{B=1} + \frac{T(T+1)}{2\Theta} - \frac{\langle T^2 \rangle_{MF}}{2\Theta} \quad (7.1)$$

was dazu führt, daß wegen $\langle T^2 \rangle_{MF} = \langle T^2 \rangle_{MF|val} = N_F \frac{1}{2} (\frac{1}{2} + 1) = \frac{9}{4}$ die Masse des Nukleons M_N ($T = \frac{1}{2}$) um $\frac{3}{4\Theta}$ niedriger, und die Masse des Δ um $\frac{3}{4\Theta}$ höher als die Mean-Field-Energie liegen.

Es stellte sich heraus, daß nur oberhalb eines kritischen Wertes $M_{kr} \approx 350\text{MeV}$ bzw. $g_{kr} \approx 3.6$ eine solitonische Mean-Field-Lösung existiert. Physikalisch bedeutet dies, daß die Quarks genügend stark an die Mesonfelder koppeln müssen, damit sich ein Baryon ausbilden kann. Ein solches Verhalten ist auch aus anderen chiralen Modellen mit Valenzquarks [BB84a, Bir85, FG88] bekannt. In allen betrachteten Fällen erschöpfte sich der Unterschied zwischen chiralem Limes ($m_\pi = 0$) und einem Modell mit $m_\pi = 139\text{MeV}$ in einer Erhöhung der Gesamtenergie um $\approx 40\text{MeV}$ bei endlichem m_π .

Wir haben gesehen, daß bei Massen M knapp über M_{kr} der quadratische isoskalare elektrische Radius $\langle R^2 \rangle$ seinen experimentellen Wert $\langle R^2 \rangle = \langle R^2 \rangle_p + \langle R^2 \rangle_n = 0.63\text{fm}^2$ erreicht und bei größeren M rasch abnimmt. Die Ausdehnung des Nukleons schränkt also eindeutig den Bereich für den freien Parameter M auf $M \approx 400\text{MeV}$ ein. Diese Größenordnung ist konsistent mit den Konstituentenmassen, die im Rahmen von Instanton-Flüssigkeit-Theorien diskutiert werden, in welchen aus gewissen Modellannahmen über das QCD-Vakuum eine effektive Wirkung, wie wir sie verwendet haben, abgeleitet werden kann [Shu80, Shu82, Shu86, DP84, DP86]. Es zeigte sich, daß für $M \approx M_{kr}$ die Restriktion auf den chiralen Zirkel $\sigma^2 + \vec{\pi}^2 = f_\pi^2$ (nicht-lineare Version), in der die Anzahl der mesonischen Freiheitsgrade um 1 reduziert wird, keine wesentliche Einschränkung gegenüber dem vollen (linearen) Modell darstellt. Allerdings führte bereits eine geringe Erhöhung von $M > 400\text{MeV}$ im linearen Modell sowohl zu starken Abweichungen vom chiralen Zirkel als auch zu völlig unphysikalischen Lösungen, so daß wir uns für alle folgenden Betrachtungen auf das nichlineare Modell beschränkt haben. Weiter ist von Bedeutung, daß bei kleinen M sämtliche untersuchten nukleonischen Observablen eindeutig von den Valenzquarks dominiert werden, der See also hauptsächlich zur Stabilisierung des Solitons dient. Eine Folge davon ist unter anderem, daß der gesamte solitonische Bereich im Gegensatz zum Vakuumsektor ausgesprochen unempfindlich auf das verwendete Regularisierungsschema reagiert, da jeweils nur der Seebeitrag regularisiert wird und der dominante Valenzanteil unregularisiert bleibt. Wir haben dies explizit für 4 verschiedene

Regularisierungsmethoden (Eigenzeit-Schema, $O(4)$ - und $O(3)$ -invariante scharfe Impulsabschnitte und die Pauli-Villars-Regularisierung) überprüft.

Die Mean-Field-Energie betrug etwa $E_{MF}^{B=1} \approx 1250 \text{ MeV}$, während das Nukleon selbst aufgrund von Zentrifugal- und spurioser Korrelationsenergie um etwa 100 MeV niedriger und damit knapp über der Schwellenenergie von $N_F = 3$ freien Konstituentenquarks liegt, also metastabil gebunden ist. Hierbei ist jedoch zu bedenken, daß bisher zwar die Spin- und Isospinquantenzahlen fixiert wurden, nicht aber der lineare Impuls $\vec{P}$. Ein dem Cranking analoges Verfahren würde für ein System mit Impuls $\vec{P} = 0$ (ruhend Teilchen) zu einer Energie von:

$$E_{T,P=0} = E_{MF}^{B=1} + \frac{T(T+1)}{2\Theta} - \frac{\langle T^2 \rangle_{MF}}{2\Theta} - \frac{\langle P^2 \rangle_{MF}}{2M^*} \quad (7.2)$$

führen, wobei der Massentensor M^* die der Translation entsprechende lineare Responsfunktion und $\frac{\langle P^2 \rangle_{MF}}{2M^*}$ die spuriose Schwerpunktsenergie darstellen. Solche Terme wurden innerhalb von nichtrelativistischen Oszillatorpotentialmodellen [RG90] und neuerdings auch im linearen chiralen Sigma-Modell (CSM) im Rahmen eines Projektionsformalismus [NG91] berechnet, und liegen dort jeweils zwischen 300 und 400 MeV . Dies würde in unserem Modell bedeuten, daß es möglich ist, mit $E_{T=\frac{1}{2}, P=0}$ die experimentelle Nukleonmasse $M_N = 938 \text{ MeV}$ zu treffen und das Nukleon in jedem Falle unter der $3M$ -Schwellenenergie liegt.

Im angegebenen Parameterbereich von M wurden nun eine Reihe von nukleonischen Observablen (Nukleon-Delta-Aufspaltung $E_\Delta - E_N$, isoskalarer elektrischer Formfaktor $G_E^{T=0}(Q^2)$, axialer Formfaktor $g_A(Q^2)$ und axiale Vektorkopplung g_A , Pion-Nukleon-Formfaktor $g_{\pi NN}(Q^2)$ sowie der nukleonische σ -Term Σ) berechnet. Diese stimmen im Rahmen von 10 – 20% Abweichung mit den experimentellen Werten, sofern bekannt, überein. Lediglich die axiale Vektorkopplung ist mit $g_A \approx 0.8$ wesentlich zu klein. Auch hier wäre es natürlich interessant, den Einfluß von Schwerpunktskorrekturen zu studieren.

Zum Schluß wurde noch ein Vergleich zwischen der exakten Theorie, in der die Polarisation des Diracsees vollständig berücksichtigt ist, und der niedrigsten Ordnung der Gradienten- bzw. Heat-Kernel-Entwicklung (HKE) des Seebeitrages gezogen. Es zeigte sich, daß für eine Reihe von Größen (insbesondere g_A) bereits die niedrigste Ordnung sehr schlecht ist und bei den anderen Observablen die anscheinend bessere Übereinstimmung zum Teil auf reinem Zufall beruht, da die Hinzunahme höherer Ordnungen zu einer Verschlechterung führt. Im Gegensatz zum Vakuum- und mesonischen Sektor, in dem die Gradienten der Mesonfelder per se als klein betrachtet werden, bietet diese Entwicklung im solitonischen Bereich also keine zuverlässige Approximationsmethode. Das gleiche gilt natürlich auch für die Gradientenentwicklung der effektiven $B = 1$ -Wirkung selbst, welche auf die Wirkung des chiralen Sigma-Modells mit Valenzquarks führt. Deren selbstkonsistenten Lösungen und die daraus mit dem gleichen Quantisierungsverfahren berechneten Observablen unterscheiden sich doch beträchtlich von denen des NJL-Modells.

Ein wichtiger Punkt, der abschließend ebenfalls noch einmal betont werden sollte, ist die Tatsache, daß die Philosophie der topologischen Solitonmodelle (z.B.: dem Skyrme-Modell) durch unsere Rechnungen eindeutig nicht unterstützt wird. Zwar finden auch wir selbstkonsistente Lösungen,

die wie in den topologischen Modellen keine expliziten Valenzquarks mehr enthalten, sondern in denen das Valenzorbital Bestandteil des Diracsees geworden ist, und daher die Baryonenzahl B des Sees mit der topologischen Windungszahl n des Mesonprofils übereinstimmt. Allerdings treten solche Lösungen bei sehr hohen Konstituentenmassen $M > 720\text{MeV}$ auf, die ein völlig unphysikalisches Nukleon (z.B.: ist $\langle R^2 \rangle$ viel zu klein) zur Folge haben. Es bleibt zu untersuchen, inwiefern sich dies bei Hinzunahme von Vektormesonen ändert.

Insgesamt ist als grundlegendes Resultat dieser Arbeit festzustellen, daß das Nambu-Jona-Lasinio-Modell trotz seiner extrem einfachen Struktur so an Mesondaten angepaßt werden kann, daß das Vakuum ($B = 0$) und insbesondere das Nukleon ($B = 1$) qualitativ und quantitativ gut beschrieben werden. Im solitonischen Bereich ergibt sich ein klares Valenzbild mit nur geringen Einflüssen durch die Polarisation des Diracsees. Probleme bestehen bei der Berechnung der axialen Vektorkopplungskonstanten g_A .

Anhang A. MINKOWSKI-RAUM UND EUKLIDISCHER RAUM

In diesem Anhang wollen wir kurz die Notationen für 4-er Vektoren und γ -Matrizen sowie die wichtigsten Objekte, die daraus gebildet werden, zusammenstellen:

	Minkowski-Raum	Euklidischer Raum
kontravarianter 4-er Vektor A^μ	(A_M^0, A_M^i)	(A_E^1, A_E^4)
kovarianter 4-er Vektor A_μ	(A_{M0}, A_{Mi})	(A_{E1}, A_{E4})
Metrik $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$	$g_M^{00} = 1, g_M^{ii} = -1$	$g_E^{\mu\nu} = g_{E\mu\nu} = -\delta^{\mu\nu}$
Kontraktion $A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$	$A_M^0 = A_{M0}, A_M^i = -A_{Mi}$	$A_E^\mu = -A_{E\mu}$
Skalarprodukt $(A \cdot B) = A^\mu B_\mu$	$A_M^0 B_{M0} - A_M^i B_{Mi}$	$-A_E^\mu B_{E\mu}$
γ -Matrizen: Hermitizität	$(\gamma_M^0)^\dagger = (\gamma_M^0), (\gamma_M^i)^\dagger = -(\gamma_M^i)$	$(\gamma_E^\mu)^\dagger = -(\gamma_E^\mu)$
γ -Matrizen: Antikommutatoren	$\{\gamma_M^\mu; \gamma_M^\nu\} = 2g_M^{\mu\nu}$	$\{\gamma_E^\mu; \gamma_E^\nu\} = 2g_E^{\mu\nu} = -2\delta^{\mu\nu}$

Dabei laufen griechische Indizes immer von 0 – 3 im Minkowski-Raum bzw. von 1 – 4 im euklidischen Raum und lateinische Indizes grundsätzlich von 1 – 3.

Die Transformation eines beliebigen Minkowski 4er-Vektors A_M^μ in einen euklidischen 4er-Vektor A_E^μ erfolgt durch

Wick-Rotation:

$$\begin{aligned}
 A_E^4 &= (+i)A_M^0 \\
 A_{E4} &= -A_E^4 = (-i)A_M^0 = (-i)A_{M0} \\
 A_E^i &= A_M^i \\
 A_{Ei} &= A_{Mi}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Dabei ist A_E^4 wie A_M^0 reell, das heißt durch die Wick-Rotation wird jede Funktion $f(A_M^0)$, die von der reellen Variablen A_M^0 abhängt, analytisch fortgesetzt. Für den 4-er Ortsvektor x^μ und den 4-er Impulsvektor p^μ gilt insbesondere:

$$\begin{aligned}
 x_M^\mu &= (t, \vec{r}) & x_E^\mu &= (\tau, \vec{r}) \\
 \tau &= (+i)t & \int d^4 x_E &= (+i) \int d^4 x_M & \frac{\partial}{\partial \tau} &= (-i) \frac{\partial}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

und

$$\begin{aligned}
 p_M^\mu &= (\nu, \vec{p}) & p_E^\mu &= (u, \vec{p}) \\
 u &= (+i)\nu & \int d^4 p_E &= (+i) \int d^4 p_M & \frac{\partial}{\partial u} &= (-i) \frac{\partial}{\partial \nu}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

mit den Bezeichnungen:

t : Minkowski-Zeit τ : euklidische Zeit

ν : Minkowski-Frequenz u : euklidische Frequenz

Die Transformation eines Skalarproduktes lautet:

$$\begin{aligned}(A_M \cdot B_M) &= \\ A_M^\mu B_{M\mu} &= A_M^0 A_{M0} + A_M^i A_{Mi} = A_M^0 A_M^0 - A_M^i A_M^i = \\ &= -A_E^4 A_E^4 + A_E^i A_E^i = A_E^4 A_E^4 + A_E^i A_E^i = A_E^\mu B_{E\mu} = \\ (A_E \cdot B_E)\end{aligned}$$

also:

$$(A_M \cdot B_M) = (A_E \cdot B_E) \quad (A.4)$$

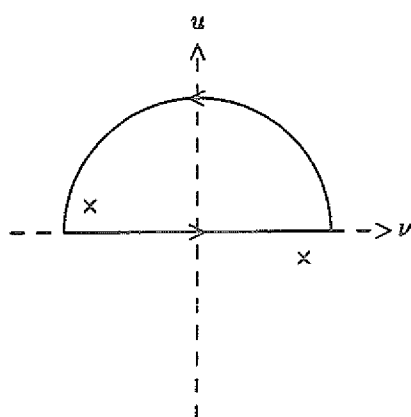
Ferner notieren wir:

$$\begin{aligned}(A_M)^2 &= (A_M \cdot A_M) \\ (A_E)^2 &= A_E^\mu A_{E\mu} = -(A_E \cdot A_E)\end{aligned} \quad (A.5)$$

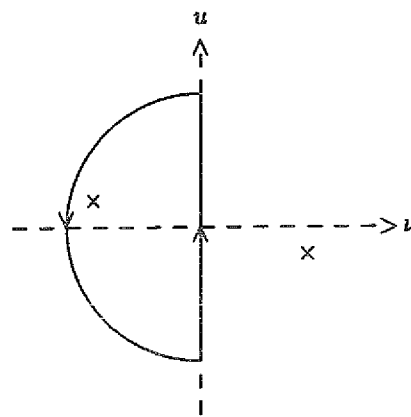
so daß

$$(A_M)^2 = -(A_E)^2 \quad (A.6)$$

gilt. Eine wichtige Eigenschaft der Wick-Rotation ist die Tatsache, daß bei der Integration über die freien Propagatoren im Impulsraum auf dem Integrationsweg in der komplexen Frequenzebene die Pole $\nu = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$ nicht mehr enthalten sind, diese aber nach wie vor innerhalb der Integrationskontur liegen und daher die Integrale bis auf Potenzen von i übereinstimmen.



Minkowski-Kontur



euklidische Kontur

So ist zum Beispiel:

$$\int d^4 p_M \frac{1}{p_M^2 - m^2 + i\epsilon} = (+i) \int d^4 p_E \frac{1}{p_E^2 + m^2} \quad (A.7)$$

Die zentrale Annahme (Euklidisches Postulat) ist, daß dies auch für alle n-Punkt Greensfunktionen der wechselwirkenden Theorie gilt, das heißt, daß die analytische Fortsetzung der Theorie keine Singularitäten enthält, über die hinwegrotiert werden muß.

Auch die γ -Matrizen können formal ins Euklidische transformiert werden. Dies ist jedoch eine schlichte Umdefinition der Matrizen und keine analytische Fortsetzung.²¹⁾

$$\gamma_E^4 = (+i)\gamma_M^0 \quad \gamma_E^i = \gamma_M^i \quad (A.8)$$

Das hat zur Folge, daß γ_E^4 antihermitesch wie die γ^i ist.

Man tut dies nur deshalb, da dann die Regel für die Fortsetzung eines Skalarproduktes Gl. (A.4) formal auch auf den Ausdruck $\bar{\psi}\psi$ angewendet werden kann:

$$\bar{A}_M = \bar{A}_E \quad (A.9)$$

Für die Matrizen β und γ_5 werden wir hingegen keine euklidischen Werte definieren, sondern β und γ_5 immer mit:

$$\beta = \gamma_M^0 = (-i)\gamma_E^4 \quad (A.10)$$

und

$$\gamma_5 = \gamma^5 = (+i)\gamma_M^0\gamma_M^1\gamma_M^2\gamma_M^3 = \gamma_E^1\gamma_E^2\gamma_E^3\gamma_E^4 \quad (A.11)$$

notieren.

Als Darstellung der γ -Matrizen verwenden wir nach Bjorken-Drell [BD1, BD2]:

$$\gamma_M^0 = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathcal{I}_2 \end{pmatrix} \quad \gamma_M^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (A.12)$$

mit den Paulischen Spin-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (A.13)$$

Es ist dann:

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathcal{I}_2 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I}_2 \\ \mathcal{I}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (A.14)$$

Ferner wird definiert:

$$\gamma^i = \beta\alpha^i \quad (A.15)$$

²¹⁾Die γ -Matrizen sind keine physikalischen Objekte, die sich unter Lorentztransformationen wie 4-er Vektoren verhalten.

Anhang B. AXIALE WARD-IDENTITÄT

Die Ward-Identitäten entsprechen einer Verallgemeinerung des klassischen Noether-Theorems auf eine quantisierte Theorie, das heißt sie liefern Beziehungen zwischen den verschiedenen Greens-Funktionen bzw. den zugehörigen erzeugenden Funktionalen als Folge einer inneren Symmetrie. Wir wollen dies am Beispiel der axialen Ward-Identität für eine $SU(2)$ -Quarktheorie, von der wie im Laufe dieser Arbeit einige Male Gebrauch machen werden, demonstrieren.

Sei dazu $\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, \partial\psi, \mathcal{F})$ eine Lagrangedichte, die von den $SU(2)$ -Flavour Quarkfeldern $\psi, \bar{\psi}$ und beliebigen äußeren nicht-dynamischen Feldern $\mathcal{F}$ (z.B.: $\sigma, \vec{\pi}$) abhängt, und die Form:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, \partial\psi, \mathcal{F}) &= \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \mathcal{L}_0(\psi, \bar{\psi}, \mathcal{F}) + \mathcal{L}_{br}(\mathcal{F}) \\ S &= \int d^4x \mathcal{L}\end{aligned}\tag{B.1}$$

hat. Im Falle unserer effektiven, chiralen Theorie (bosonisiertes NJL) ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(\psi, \bar{\psi}, \sigma, \vec{\pi}) &= -g \bar{\psi} (\sigma + i \vec{\tau} \gamma_5 \vec{\pi}) \psi \\ \mathcal{L}_{br}(\sigma) &= m_\pi^2 f_\pi \sigma\end{aligned}\tag{B.2}$$

Dabei soll $\mathcal{L}_0$ invariant unter der globalen axialen $SU(2)$ -Transformation:

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow e^{i \vec{\beta} \vec{\tau} \gamma_5} \psi = (\mathcal{I} + i \vec{\beta} \vec{\tau} \gamma_5) \psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} e^{i \vec{\beta} \vec{\tau} \gamma_5} = \bar{\psi} (\mathcal{I} + i \vec{\beta} \vec{\tau} \gamma_5)\end{aligned}\tag{B.3}$$

und der entsprechenden Transformation von $\mathcal{F}$ sein. Im Falle von Gl. (B.2) lautet diese:

$$\begin{aligned}\sigma &\rightarrow \sigma + 2 \vec{\beta} \vec{\pi} \\ \vec{\pi} &\rightarrow \vec{\pi} - 2 \vec{\beta} \sigma\end{aligned}\tag{B.4}$$

$\mathcal{L}_{br}$ bricht die Symmetrie explizit.

β^b , $b = 1, 2, 3$ bezeichnet einen infinitesimalen, ortsunabhängigen Parameter im Isovektorraum.

Auf klassischem Niveau gilt das

Noether-Theorem:

Falls $\psi, \bar{\psi}$ und $\mathcal{F}$ den klassischen Bewegungsgleichungen (Euler-Lagrange-Gleichungen):

$$\begin{aligned}\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \psi)} &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \bar{\psi}} &= 0 \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \mathcal{F}} &= 0\end{aligned}\tag{B.5}$$

genügen, so besitzt der axiale Vektorstrom

$$A_\mu^b := \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^b}{2} \psi\tag{B.6}$$

die Divergenz:

$$\partial^\mu A_\mu^b = (-) \frac{1}{2} \frac{\delta \mathcal{L}_{br}(\mathcal{F})}{\delta \mathcal{F}} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \beta^b} \quad (B.7)$$

Für $\mathcal{L}_{br} = m_\pi^2 f_\pi \sigma$ und die Transformation Gl. (B.4) ergibt sich insbesondere die PCAC-Relation auf klassischem Niveau:

$$\partial^\mu A_\mu^b = (-) m_\pi^2 f_\pi \pi^b \quad (B.8)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \delta \mathcal{L} \\ &= \int d^4x \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} \delta \psi + \delta \bar{\psi} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \bar{\psi}} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \mathcal{F}} \delta \mathcal{F} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \psi)} \delta (\partial_\mu \psi) \right] \\ &= \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \psi)} \delta \psi \right] = \int d^4x \partial_\mu \left[\bar{\psi} i \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^b}{2} \psi \right] i \beta^b \\ &= (-) \int d^4x [\partial^\mu A_\mu^b] 2 \beta^b \end{aligned}$$

wobei explizit von den Euler-Lagrange-Gleichungen (B.5) Gebrauch gemacht wurde. Andererseits ist aber

$$\delta S = \int d^4x \frac{\delta \mathcal{L}_{br}(\mathcal{F})}{\delta \mathcal{F}} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \beta^b} \beta^b$$

woraus die Behauptung folgt, da β^b beliebig ist.

Zur Herleitung der axialen Ward-Identität betrachten wir zunächst den quantenmechanischen Erwartungswert $\langle A_\mu^b(x) \rangle$ des axialen Stromes. Dazu koppeln wir an den Dirac-Operator $i\bar{\mathcal{D}}$ in Gl. (B.1) ein äußeres Vektoren $\mathcal{V}_\mu^b(x)$ und ein äußeres Axial-Vektoren $\mathcal{A}_\mu^b(x)$ in kovarianter Weise an, das heißt wir gehen über zu:

$$i\bar{\mathcal{D}} \rightarrow i\bar{\mathcal{D}}[\mathcal{V}, \mathcal{A}] = i\bar{\mathcal{D}} + \mathcal{V}^b(x) \frac{\tau^b}{2} + \mathcal{A}^b(x) \gamma_5 \frac{\tau^b}{2} \quad (B.9)$$

Die Theorie wird dadurch invariant unter einer lokalen axialen Transformation (Gl. (B.3) mit ortsabhängigem $\beta^b(x)$), falls sich $\mathcal{V}_\mu^b(x)$ und $\mathcal{A}_\mu^b(x)$ gleichzeitig wie:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\mu^b(x) &\rightarrow \mathcal{V}_\mu^b(x) - 2\epsilon^{bca} \beta^c(x) \mathcal{A}_\mu^a(x) \\ \mathcal{A}_\mu^b(x) &\rightarrow \mathcal{A}_\mu^b(x) + 2\partial_\mu \beta^b(x) - 2\epsilon^{bca} \beta^c(x) \mathcal{V}_\mu^a(x) \end{aligned} \quad (B.10)$$

transformieren.

Der Erwartungswert des axialen Stromes $A_\mu^b(x) = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^b}{2} \psi$ ist gegeben durch:

$$\langle A_\mu^b(x) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \left[\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^b}{2} \psi \right] e^{iS}}{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS}} \quad (B.11)$$

Integration über die Fermionfelder $\bar{\psi}, \psi$ liefert die effektiven Wirkungen:

$$\begin{aligned} S_{eff}(\mathcal{F}) &= (-i) \left\{ \ln \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i \int d^4x [(\bar{\psi} i \not{\partial} \psi) + \mathcal{L}_0]} \right\} + \int d^4x \mathcal{L}_{br}(\mathcal{F}) \\ S_{eff}(\mathcal{V}, \mathcal{A}, \mathcal{F}) &= (-i) \left\{ \ln \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i \int d^4x [(\bar{\psi} i \not{\partial} [\mathcal{V}, \mathcal{A}] \psi) + \mathcal{L}_0]} \right\} + \int d^4x \mathcal{L}_{br}(\mathcal{F}) \end{aligned} \quad (B.12)$$

$\langle A_\mu^b(x) \rangle$ schreibt sich damit als:

$$\langle A_\mu^b(x) \rangle = \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_\mu^b(x)} S_{eff}(\mathcal{V}, \mathcal{A}, \mathcal{F}) \Big|_{\mathcal{V}=\mathcal{A}=0} \quad (B.13)$$

Der wesentliche Punkt besteht nun in der Annahme, daß auch das Funktionalmaß $\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}$ und damit die effektive Wirkung $S_{eff}(\mathcal{V}, \mathcal{A}, \mathcal{F})$ (abgesehen von $\mathcal{L}_{br}$) invariant unter der Transformation Gln. (B.3, B.10) ist. Dies stellt im allgemeinen eine Forderung an das Regularisierungsschema dar.

Um die Änderung von S_{eff} unter einer axialen Transformation analog zu Gl. (B.7) durch die Divergenz von $\langle A_\mu^b(x) \rangle$ auszudrücken, zeigen wir zunächst das:

Lemma:

Ein beliebiges Funktional $\mathcal{K}[\mathcal{V}, \mathcal{A}]$ verhält sich unter der Transformation Gln. (B.3, B.10) wie:

$$\delta_\beta \mathcal{K}[\mathcal{V}, \mathcal{A}] = 2 \int d^4x \beta^b(x) \left[\partial_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_\mu^b(x)} + \epsilon^{abc} \mathcal{V}_\mu^a(x) \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_\mu^c(x)} + \epsilon^{abc} \mathcal{A}_\mu^a(x) \frac{\delta}{\delta \mathcal{V}_\mu^c(x)} \right] \mathcal{K}[\mathcal{V}, \mathcal{A}] \quad (B.14)$$

Beweis:

$$\delta_\beta \mathcal{K}[\mathcal{V}, \mathcal{A}] = \int d^4x d^4y \beta^c(y) \left[\frac{\delta \mathcal{V}_\mu^b(x)}{\delta \beta^c(y)} \frac{\delta}{\delta \mathcal{V}_\mu^b(x)} + \frac{\delta \mathcal{A}_\mu^b(x)}{\delta \beta^c(y)} \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_\mu^b(x)} \right] \mathcal{K}[\mathcal{V}, \mathcal{A}]$$

Aus Gl. (B.10) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{V}_\mu^b(x)}{\delta \beta^c(y)} &= 2[-\epsilon^{bca} \mathcal{A}_\mu^a(x)] \delta(x-y) \\ \frac{\delta \mathcal{A}_\mu^b(x)}{\delta \beta^c(y)} &= 2[\partial_\mu(x) \delta^{bc} - \epsilon^{bca} \mathcal{V}_\mu^a(x)] \delta(x-y) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

Sei nun $\mathcal{F}$ stationärer Punkt von $S_{eff}(\mathcal{F})$:

$$\frac{\delta S_{eff}(\mathcal{F})}{\delta \mathcal{F}} = 0 \quad (B.15)$$

Wegen Gl. (B.13) gilt:

$$S_{eff}(\mathcal{F}) = S_{eff}(\mathcal{V}, \mathcal{A}, \mathcal{F}) - \int d^4x \langle A_\mu^b(x) \rangle \mathcal{A}_\mu^b(x) + \mathcal{O}(\mathcal{V}) + \mathcal{O}(\mathcal{A}\mathcal{V}) + \mathcal{O}(\mathcal{A}^2) \quad (B.16)$$

Die Änderung von $S_{eff}(\mathcal{F})$ unter einer axialen Transformation schreibt sich wegen der Invarianz von $S_{eff}(\mathcal{V}, \mathcal{A}, \mathcal{F})$ bei Verwendung von (B.14) und (B.15):

$$\begin{aligned}\delta_\beta S_{eff}(\mathcal{F}) &= \frac{\delta S_{eff}(\mathcal{F})}{\delta \mathcal{F}} \delta_\beta \mathcal{F} - 2 \int d^4x \beta^b(x) \partial^\mu \langle A_\mu^b(x) \rangle + \mathcal{O}(\mathcal{A}) + \mathcal{O}(\mathcal{V}\mathcal{A}) \\ &= -2 \int d^4x \beta^b(x) \partial^\mu \langle A_\mu^b(x) \rangle\end{aligned}\quad (B.17)$$

da $\mathcal{V}$ und $\mathcal{A}$ beliebig sind.

Andererseits gilt aber für ortsunabhängiges β wegen der expliziten Symmetriebrechung in (B.12) wieder:

$$\delta_\beta S_{eff}(\mathcal{F}) = \int d^4x \beta^b \frac{\delta \mathcal{L}_{br}(\mathcal{F})}{\delta \mathcal{F}} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \beta^b} \quad (B.18)$$

Dies führt unmittelbar auf einen Spezialfall der

Axialen Ward-Identität (Quantenmechanische Stromdivergenz):

$$\partial^\mu \langle A_\mu^b(x) \rangle = (-) \frac{1}{2} \frac{\delta \mathcal{L}_{br}(\mathcal{F})}{\delta \mathcal{F}} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \beta^b} \quad (B.19)$$

was eine Verallgemeinerung der klassischen Relation Gl. (B.7) auf den entsprechenden quantenmechanischen Erwartungswert darstellt.

Eine analoge Überlegung kann auch für die vektorielle Ward-Identität, die zur $SU(2)_V$ -Transformation:

$$\psi \rightarrow e^{i\vec{\alpha}\vec{\tau}} \psi = (\mathcal{I} + i\vec{\alpha}\vec{\tau}) \psi$$

gehört, angestellt werden. Dies liefert die Erhaltung des Vektorstroms (Isospin)

$$\partial^\mu \langle V_\mu^b(x) \rangle = 0 \quad (B.20)$$

Allgemein ist es nicht möglich ein Regularisierungsschema zu finden, in dem $\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}$ gleichzeitig invariant unter einer $SU(n)_V$ und einer $SU(n)_A$ -Transformation ist, so daß die vektorielle und die axiale Ward-Identität nicht zusammen erfüllt werden können. Diese Tatsache wird als nicht-abelsche Anomalie bezeichnet (siehe Anhang D und dort angegebene Referenzen). In unserem speziellen Fall ($SU(2)$ -Flavour ohne isoskalare Vektor- oder Axialvektorkanäle) verschwindet die chirale Anomalie exakt, so daß beide Ward-Identitäten zusammen erfüllt werden können. Für statische Felder σ und $\vec{\pi}$, welche stationäre Punkte der effektiven Wirkung sind (d.h.: die Schwinger-Dyson-Gleichung erfüllen) können wir außerdem die Spezialfälle der Ward-Identitäten (quantenmechanische Stromdivergenzen) Gln. (B.19, B.20) leicht direkt nachrechnen, sofern wir uns auf die in Kapitel 4 angegebenen Regularisierungsmethoden im EZ- und Pauli-Villars-Schema (Gln. (4.32, 4.66, 4.67, 4.76)) beschränken. Dabei machen wir insbesondere von der Hermitizität des 1-Teilchen-Hamiltonoperators $h = \frac{\alpha^i \partial_i}{i} + g\beta(\sigma + i\vec{\tau}\gamma_5)$ im euklidischen Raum Gebrauch, was äquivalent zum Verschwinden des Imaginärteils der euklidischen effektiven Wirkung ist (vgl. Anhang D). Im Falle des NJL mit Vektormesonen ist diese Eigenschaft zum Beispiel nicht mehr allgemein

erfüllt.

Wir betrachten dazu explizit die Divergenzen von $\langle V_\mu^b(x) \rangle$ und $\langle A_\mu^b(x) \rangle$ in der 1-Teilchenbasis

$$h\phi_\lambda(\vec{r}) = \epsilon_\lambda \phi_\lambda(\vec{r}) \quad (B.21)$$

unter Verwendung der Bewegungsgleichungen :

$$\sigma(\vec{r}) = -\frac{g}{\mu^2} \frac{N_F}{4\pi} (S_0(\vec{r}) + s_{val}(\vec{r}) \eta_{val}) + \frac{1}{\mu^2} f_\pi m_\pi^2 \quad (B.22)$$

$$\pi^a(\vec{r}) = -\frac{g}{\mu^2} \frac{N_F}{4\pi} (P_0^a(\vec{r}) + p_{val}^a(\vec{r}) \eta_{val}) \quad (B.23)$$

mit

$$\begin{aligned} S_0(\vec{r}) &= \sum_\lambda \mathcal{R}_2(\epsilon_\lambda, \Lambda) s_\lambda(\vec{r}) \\ P_0^a(\vec{r}) &= \sum_\lambda \mathcal{R}_2(\epsilon_\lambda, \Lambda) p_\lambda^a(\vec{r}) \end{aligned} \quad (B.24)$$

und

$$\begin{aligned} s_\lambda(\vec{r}) &= \bar{\phi}_\lambda(\vec{r}) \phi_\lambda(\vec{r}) \\ p_\lambda^a(\vec{r}) &= \bar{\phi}_\lambda(\vec{r}) i\gamma_5 \tau^a \phi_\lambda(\vec{r}) \end{aligned} \quad (B.25)$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} \langle A_i^b(\vec{r}) \rangle_0 &= (+N_F) \sum_\lambda \langle A_i^b(\vec{r}) \rangle_\lambda \mathcal{R}_2(\epsilon_\lambda, \Lambda) \\ \langle V_i^b(\vec{r}) \rangle_0 &= (+N_F) \sum_\lambda \langle V_i^b(\vec{r}) \rangle_\lambda \mathcal{R}_2(\epsilon_\lambda, \Lambda) \end{aligned} \quad (B.26)$$

mit:

$$\begin{aligned} \langle A_i^b(\vec{r}) \rangle_\lambda &= \bar{\phi}_\lambda(\vec{r}) \gamma_i \gamma_5 \frac{\tau^b}{2} \phi_\lambda(\vec{r}) = \\ \langle V_i^b(\vec{r}) \rangle_\lambda &= \bar{\phi}_\lambda(\vec{r}) \gamma_i \frac{\tau^b}{2} \phi_\lambda(\vec{r}) \end{aligned} \quad (B.27)$$

Wichtig ist, daß in den Bewegungsgleichungen und in den Ausdrücken für die Ströme beide Male die gleiche Regularisierungsfunktion $\mathcal{R}_2$ auftritt, was darauf zurückzuführen ist, daß wir von einer regularisierten effektiven Wirkung gestartet sind und daraus konsistent alles Weitere abgeleitet haben. Die Anwendung von Gl. (B.21) und Gln. (B.22, B.23) ergibt:²²⁾

$$\begin{aligned} \partial^\mu \langle A_\mu^b(x) \rangle &= \partial^i \langle A_i^b(\vec{r}) \rangle = \\ N_F \sum_\lambda \mathcal{R}_2(\epsilon_\lambda, \Lambda) &\left[(\partial_i \bar{\phi}_\lambda) \gamma^i \gamma_5 \frac{\tau^b}{2} \phi_\lambda + \bar{\phi}_\lambda \gamma^i \gamma_5 \frac{\tau^b}{2} (\partial_i \phi_\lambda) \right] + val. = \\ N_F \sum_\lambda \mathcal{R}_2(\epsilon_\lambda, \Lambda) &g \bar{\phi}_\lambda [i\sigma \gamma_5 \tau^b - \pi^b] \phi_\lambda + val. = \\ (-\mu^2) [\sigma \pi^b - \pi^b \sigma] &- f_\pi m_\pi^2 \pi^b = \\ -f_\pi m_\pi^2 \pi^b &\quad (\text{q.e.d.}) \end{aligned} \quad (B.28)$$

²²⁾ Der folgende Beweis wird für das lineare Modell durchgeführt, kann aber ohne Schwierigkeiten auch auf das nichtlineare Modell übertragen werden.

und:

$$\begin{aligned}
 \partial^\mu \langle V_\mu^b(x) \rangle &= \partial^i \langle V_i^b(\vec{r}) \rangle = \\
 N_F \sum_\lambda \mathcal{R}_2(\epsilon_\lambda, \Lambda) \left[(\partial_i \bar{\phi}_\lambda) \gamma^i \frac{\tau^b}{2} \phi_\lambda + \bar{\phi}_\lambda \gamma^i \frac{\tau^b}{2} (\partial_i \phi_\lambda) \right] &+ \text{val.} = \\
 N_F \sum_\lambda \mathcal{R}_2(\epsilon_\lambda, \Lambda) \frac{1}{2} g \bar{\phi}_\lambda \gamma_5 [\tau^b, \tau^c] \pi^c \phi_\lambda + \text{val.} &= \\
 N_F i \epsilon^{bcd} \sum_\lambda \mathcal{R}_2(\epsilon_\lambda, \Lambda) g \bar{\phi}_\lambda \tau^d \pi^c \phi_\lambda + \text{val.} &= \\
 (-\mu^2) i \epsilon^{bcd} \pi^c \pi^d &= \\
 = 0 &\quad (\text{Q.E.D.})
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

In Kapitel 2 benötigen wir eine etwas andere Formulierung der axialen Ward-Identitäten, um Beziehungen zwischen der axialen Vertexfunktion und dem vollen Fermionpropagator aufzustellen, aus denen dann die Äquivalenz von Bethe-Salpeter-Gleichung und Gap-Gleichung im chiralen Limes ($\mathcal{L}_{br} = 0$) folgt. Da es sich hierbei um eine reine Fermionwechselwirkung handelt, lassen wir die Abhängigkeit von $\mathcal{F}$ im folgenden weg.

Das erzeugende Funktional für die n-Punkt-Greensfunktionen $Z[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V}, \mathcal{A}]$ einer Theorie mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, \partial\psi, \mathcal{V}, \mathcal{A}) = \bar{\psi}(i \not{D}[\mathcal{V}, \mathcal{A}])\psi + \mathcal{L}_{int}(\psi, \bar{\psi}) \tag{B.30}$$

ist:

$$Z[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V}, \mathcal{A}] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i \int d^4x \left[\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, \partial\psi, \mathcal{V}, \mathcal{A}) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) \right]} \tag{B.31}$$

Wegen der Invarianz von $\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, \partial\psi, \mathcal{V}, \mathcal{A})$ und unter der Annahme der Invarianz des Funktionalmaßes $\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}$ liefert die Anwendung von Gl. (B.14) an der Stelle $\mathcal{V} = \mathcal{A} = 0$:

$$\left[\partial_\mu^{(x)} \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_\mu^b(x)} - i \bar{\eta} \gamma_5 \frac{\tau^b}{2} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\eta}(x)} - i \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \eta(x)} \gamma_5 \frac{\tau^b}{2} \eta \right] Z[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V}, \mathcal{A}] \Big|_{\mathcal{V}=\mathcal{A}=0} = 0 \tag{B.32}$$

Dies wird nun für die erzeugenden Funktionale der zusammenhängenden n-Punkt-Greensfunktionen $W[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V}, \mathcal{A}]$ und der 1-Teilchen-irreduziblen Vertexfunktionen $\Gamma[\psi, \bar{\psi}, \mathcal{V}, \mathcal{A}]$ umgeschrieben. Letztere sind mit $Z[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V}, \mathcal{A}]$ über:

$$\begin{aligned}
 Z[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V}, \mathcal{A}] &= e^{iW[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V}, \mathcal{A}]} \\
 \Gamma[\psi, \bar{\psi}, \mathcal{V}, \mathcal{A}] &= W[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V}, \mathcal{A}] - \int d^4x (\bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x))
 \end{aligned} \tag{B.33}$$

und

$$\begin{aligned}
 Z[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V}, \mathcal{A}] \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \eta(x)} &= i Z[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V}, \mathcal{A}] W[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V}, \mathcal{A}] \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \eta(x)} & \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\eta}(x)} Z[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V}, \mathcal{A}] &= i Z[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V}, \mathcal{A}] \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\eta}(x)} W[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V}, \mathcal{A}] \\
 W[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V}, \mathcal{A}] \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \eta(x)} &= \bar{\psi} & \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\eta}(x)} W[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V}, \mathcal{A}] &= \psi \\
 \Gamma[\psi, \bar{\psi}, \mathcal{V}, \mathcal{A}] \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \psi(x)} &= -\bar{\eta} & \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}(x)} \Gamma[\psi, \bar{\psi}, \mathcal{V}, \mathcal{A}] &= -\eta
 \end{aligned} \tag{B.34}$$

sowie:

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_\mu^b(x)} Z[\eta, \bar{\eta}, \nu, \mathcal{A}] &= i Z[\eta, \bar{\eta}, \nu, \mathcal{A}] \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_\mu^b(x)} W[\eta, \bar{\eta}, \nu, \mathcal{A}] \\ \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_\mu^b(x)} W[\eta, \bar{\eta}, \nu, \mathcal{A}] &= \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_\mu^b(x)} \Gamma[\psi, \bar{\psi}, \nu, \mathcal{A}]\end{aligned}\quad (B.35)$$

verknüpft. Man erhält:

$$\left[\partial_\mu^{(x)} \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_\mu^b(x)} - i \bar{\eta} \gamma_5 \frac{\tau^b}{2} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\eta}(x)} - i \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \eta(x)} \gamma_5 \frac{\tau^b}{2} \eta \right] W[\eta, \bar{\eta}, \nu, \mathcal{A}] \Big|_{\nu=\mathcal{A}=0} = 0 \quad (B.36)$$

und:

$$\left[\partial_\mu^{(x)} \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_\mu^b(x)} + i \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(x)} \gamma_5 \frac{\tau^b}{2} \psi + i \bar{\psi} \gamma_5 \frac{\tau^b}{2} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}(x)} \right] \Gamma[\psi, \bar{\psi}, \nu, \mathcal{A}] \Big|_{\nu=\mathcal{A}=0} = 0 \quad (B.37)$$

Wir differenzieren Gl. (B.37) auf beiden Seiten nach $\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(x)_1}$ und $\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}(x)_2}$ und setzen anschließend: $\psi = \bar{\psi} = 0$:

$$\begin{aligned}\partial_\mu^{(x)} \frac{\delta^{(3)} \Gamma[\psi, \bar{\psi}, \nu, \mathcal{A}]}{\delta \mathcal{A}_\mu^b(x) \overleftarrow{\delta} \psi(x_1) \overrightarrow{\delta} \bar{\psi}(x_2)} \Big|_{\nu=\mathcal{A}=\psi=\bar{\psi}=0} &= \\ (-i) \frac{\delta^{(2)} \Gamma[\psi, \bar{\psi}, \nu, \mathcal{A}]}{\overleftarrow{\delta} \psi(x_1) \overrightarrow{\delta} \bar{\psi}(x_2)} \frac{\tau^b}{2} \gamma_5 \delta(x-x_1) \Big|_{\nu=\mathcal{A}=\psi=\bar{\psi}=0} &+ (-i) \frac{\delta^{(2)} \Gamma[\psi, \bar{\psi}, \nu, \mathcal{A}]}{\overleftarrow{\delta} \psi(x_1) \overrightarrow{\delta} \bar{\psi}(x_2)} \frac{\tau^b}{2} \gamma_5 \delta(x-x_2) \Big|_{\nu=\mathcal{A}=\psi=\bar{\psi}=0}\end{aligned}\quad (B.38)$$

Die axiale Vertexfunktion $\Gamma_{\mu 5}$ und der inverse Fermionpropagator S_F^{-1} sind im Impulsraum durch $\Gamma[\psi, \bar{\psi}, \nu, \mathcal{A}]$ über:

$$\begin{aligned}\int d^4 x d^4 x_1 d^4 x_2 e^{i(p_1 x_1 - p_2 x_2 - q x)} \frac{\delta^{(3)} \Gamma[\psi, \bar{\psi}, \nu, \mathcal{A}]}{\delta \mathcal{A}_\mu^b(x) \overleftarrow{\delta} \psi(x_1) \overrightarrow{\delta} \bar{\psi}(x_2)} \Big|_{\nu=\mathcal{A}=\psi=\bar{\psi}=0} &= (-i) \delta(p_1 - p_2 - q) \Gamma_{\mu 5}(p_2, q) \\ \int d^4 x_1 d^4 x_2 e^{i(k_1 x_1 - k_2 x_2)} \frac{\delta^{(2)} \Gamma[\psi, \bar{\psi}, \nu, \mathcal{A}]}{\overleftarrow{\delta} \psi(x_1) \overrightarrow{\delta} \bar{\psi}(x_2)} \Big|_{\nu=\mathcal{A}=\psi=\bar{\psi}=0} &= \delta(k_1 - k_2) S_F^{-1}(k_2)\end{aligned}\quad (B.39)$$

definiert.

Fouriertransformation

$$\int d^4 x d^4 x_1 d^4 x_2 e^{i(p_1 x_1 - p_2 x_2 - q x)}$$

von Gl. (B.38) führt somit auf die

Axiale Ward-Identität (2. Fassung):

$$q^\mu \Gamma_{\mu 5}^b(p, q) = S_F^{-1}(p+q) \frac{\tau^b}{2} \gamma_5 + \frac{\tau^b}{2} \gamma_5 S_F^{-1}(p) \quad (B.40)$$

wie sie in Kapitel 2 verwendet wird.

Anhang C. HEAT-KERNEL-ENTWICKLUNG

Wir betrachten den allgemeinen Dirac-Operator ([GL84, DS85, ER86]):

$$i\Delta = i\not{\partial} + i\not{\partial}(x) + i\not{\partial}(x)\gamma_5 - [S(x) + i\gamma_5 P(x)] \quad (C.1)$$

mit:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{i=0}^{n^2-1} S^i(x) \lambda^i && \text{Skalarfeld} \\ P(x) &= \sum_{i=0}^{n^2-1} P^i(x) \lambda^i && \text{Pseudo-Skalarfeld} \\ v_\mu(x) &= (-i) \sum_{i=0}^{n^2-1} v_\mu^i(x) \frac{\lambda^i}{2} && \text{Vektorfeld} \\ a_\mu(x) &= (-i) \sum_{i=0}^{n^2-1} a_\mu^i(x) \frac{\lambda^i}{2} && \text{Axial-Vektorfeld} \end{aligned} \quad (C.2)$$

Die λ^i bezeichnen die Generatoren der $U(n)$ ($\lambda^0 = \sqrt{\frac{2}{n}} \mathcal{I}$, $\text{Tr}_\lambda(\lambda^a \lambda^b) = \delta^{ab}$). Die Felder $S^i, P^i, v_\mu^i, a_\mu^i$ sind sowohl im Minkowski-Raum als auch in euklidischen Raum reell.

Weiter definieren wir die Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= S + iP \\ \mathcal{H}_5 &= S + i\gamma_5 P \\ \Gamma_\mu &= v_\mu + a_\mu \gamma_5 \\ d_\mu &= \partial_\mu + \Gamma_\mu \\ \Gamma_{\mu\nu} &= [d_\mu, d_\nu] = \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu + [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu] = F_{\mu\nu}^V + \gamma_5 F_{\mu\nu}^A \\ F_{\mu\nu}^V &= \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu + [v_\mu, v_\nu] + [a_\mu, a_\nu] \\ F_{\mu\nu}^A &= \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu + [v_\mu, a_\nu] + [a_\mu, v_\nu] \\ \nabla_\mu S &= \partial_\mu S + [v_\mu, S] - i\{a_\mu, P\} \\ \nabla_\mu P &= \partial_\mu P + [v_\mu, P] + i\{a_\mu, S\} \\ \nabla_\mu \mathcal{H}_5 &= \partial_\mu \mathcal{H}_5 + [v_\mu, \mathcal{H}_5] - \gamma_5 \{a_\mu, \mathcal{H}_5\} = \nabla_\mu S + i\gamma_5 \nabla_\mu P \end{aligned} \quad (C.3)$$

Da S und P hermitesch sind, läßt sich der Operator $\mathcal{H} = S + iP$ als:

$$\mathcal{H} = \Omega \Sigma \Omega \quad (C.4)$$

mit dem hermiteschen Operator.

$$\Sigma(x) = \sum_{i=0}^{n^2-1} \Sigma^i(x) \lambda^i \quad (C.5)$$

und dem unitären Operator

$$\Omega(x) = e^{i \frac{\xi(x)}{f_\pi}} \quad (C.6)$$

mit

$$\xi(x) = \sum_{i=0}^{n^2-1} \xi^i(x) \frac{\lambda^i}{2} \quad (C.7)$$

schreiben. Ferner sei:

$$\begin{aligned} U &:= \Omega^2 = e^{i \frac{1}{f_\pi} \sum_{i=0}^{n^2-1} \xi^i \lambda^i} \\ U_5 &:= \frac{1}{2}(U + U^\dagger) + \frac{1}{2} \gamma_5 (U - U^\dagger) = e^{i \frac{1}{f_\pi} \gamma_5 \sum_{i=0}^{n^2-1} \xi^i \lambda^i} \end{aligned} \quad (C.8)$$

Damit ist:

$$\mathcal{H}^\dagger \mathcal{H} = \mathcal{H}_5^\dagger \mathcal{H}_5 = \Omega^\dagger \Sigma^2 \Omega \quad (C.9)$$

und

$$\text{Tr}_\lambda(\mathcal{H}^\dagger \mathcal{H}) = \text{Tr}_\lambda(\mathcal{H}_5^\dagger \mathcal{H}_5) = \text{Tr}_\lambda \Sigma^2 \quad (C.10)$$

Das SCSB-Vakuum ist durch:

$$\Sigma_V = M\mathcal{I} \quad \Omega_V = \mathcal{I} \quad v = a = 0 \quad (C.11)$$

gekennzeichnet. In der nichtlinearen Darstellung wird Σ auf:

$$\Sigma = \Sigma_V = M\mathcal{I} \quad (C.12)$$

eingeschränkt und ξ mit dem skalaren Mesonmultipllett (π, K) identifiziert. Im Falle der SCSB ist dies das masselose Goldstone-Feld. Es gilt dann insbesondere:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= MU \\ \mathcal{H}_5 &= MU_5 \end{aligned} \quad (C.13)$$

Weiter definieren wir:

$$w(x) = i \bar{\Psi} \mathcal{H}_5 + \mathcal{H}_5^\dagger \mathcal{H}_5 + \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \Gamma_{\mu\nu} - M^2 \quad (C.14)$$

Mit diesen Notationen schreibt sich nun der Operator $\Delta^\dagger \Delta$:

$$\Delta^\dagger \Delta = d_\mu d^\mu + w(x) + M^2 \quad (C.15)$$

und der Realteil der effektiven fermionischen Wirkung im euklidischen Raum lautet bei Verwendung der Eigenzeitregularisierung (EZR) (siehe Abschnitt 3.5 Gl. (3.52)):

$$\Re S_{eff}^F(S, P, v, a) = (-) \frac{1}{2} \text{Spln} \Delta^\dagger \Delta = \frac{1}{2} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \text{Sp} K(\tau) \quad (C.16)$$

mit:

$$\begin{aligned} K(\tau) &= e^{-A\tau} \\ A(\tau) &= \Delta^\dagger \Delta = d_\mu d^\mu + w(x) + M^2 \end{aligned} \quad (C.17)$$

und dem entsprechenden Vakuumoperator:

$$\begin{aligned} K_V(\tau) &= e^{-A_V \tau} \\ A_V(\tau) &= \Delta_V^\dagger \Delta_V = \partial_\mu \partial^\mu + M^2 \end{aligned} \quad (C.18)$$

$K(\tau)$ und $K_V(\tau)$ erfüllen die Wärmeleitungsgleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} K(\tau) + A(\tau) K(\tau) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \tau} K_V(\tau) + A_V(\tau) K_V(\tau) = 0 \quad (C.19)$$

mit den Randbedingungen:

$$K(0) = \mathcal{I} \quad K_V(0) = \mathcal{I} \quad (C.20)$$

Für den Vakuumoperator K_V kann die Koordinatendarstellung explizit angegeben werden:

$$K_V(x, y; \tau) := \langle x | K_V(\tau) | y \rangle = \left(\frac{1}{4\pi\tau} \right)^2 e^{-M^2\tau - \frac{(x-y)^2}{4\tau}} \quad (C.21)$$

Wir spalten zunächst aus K den freien Teil K_V ab:

$$K(x, y; \tau) = K_V(x, y; \tau) \cdot H(x, y; \tau) \quad (C.22)$$

H genügt den Bedingungen:

$$H(x = y; \tau = 0) = 1 \quad (C.23a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau} z_\mu d^\mu + d_\mu d^\mu + w(x) \right) H(x, y; \tau) = 0 \quad (C.23b)$$

mit:

$$z := x - y$$

Die Idee der Heat-Kernel-Entwicklung (HKE) besteht darin, H nach Potenzen von τ zu entwickeln:

$$H(x, y; \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x, y) \tau^k \quad (C.24)$$

und die Wärmekoeffizienten h_k iterativ zu bestimmen. Einsetzen von (C.24) in (C.23b) und Koeffizientenvergleich liefert:

$$z_\mu d^\mu h_0(x, y) = 0 \quad (C.25a)$$

$$[(k+1) + z_\mu d^\mu] h_{k+1}(x, y) + [d_\mu d^\mu + w(x)] h_k(x, y) = 0 \quad (C.25b)$$

Insbesondere gilt an der Stelle $x = y$ mit der Notation:

$$h_k(x) := h_k(x, y)|_{x=y}$$

$$k h_k(x) = -[d_\mu d^\mu h_{k-1}(x, y)]_{x=y} - w(x) h_{k-1}(x) \quad (C.25c)$$

Weiter führen wir die Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} R_\nu &= [d_\nu, w] \\ R_{\mu\nu} &= [d_\mu, R_\nu] \end{aligned} \quad (C.26)$$

ein. Durch explizites Nachrechnen bestätigt man für eine beliebige Funktion $f(x, y)$ das

Lemma:

$$d_\alpha(z_\mu d^\mu f(x, y)) = d_\alpha f(x, y) + z_\mu d_\alpha d^\mu f(x, y) \quad (C.27a)$$

$$d_\alpha d_\beta(z_\mu d^\mu f(x, y)) = 2d_\alpha d_\beta f(x, y) - [d_\alpha, d_\beta] f(x, y) + z_\mu d_\alpha d_\beta d^\mu f(x, y) \quad (C.27b)$$

Wegen $H(x, y; \tau = 0) = h_0(x, y)$ und $H(x = y; \tau = 0) = 1$ muß

$$h_0(x) = 1 \quad (C.28)$$

sein. Anwendung von (C.27) auf (C.25a) ergibt mit (C.3):

$$d_\alpha d_\beta h_0(x, y)|_{x=y} = -\frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\beta} \quad (C.29)$$

woraus nach Gl. (C.25c) für $k = 1$ wegen $\Gamma_\mu^\mu = 0$:

$$h_1(x) = -w(x) \quad (C.30)$$

folgt. Die Rekursionsformel (C.25b) liefert für $k = 0$ zunächst:

$$h_1(x, y) + z_\mu d^\mu h_1(x, y) + d_\mu d^\mu h_0(x, y) + w(x) h_0(x, y) = 0 \quad (C.31)$$

Die Anwendung des Operators $d_\alpha d^\alpha$ an der stelle $x = y$ führt zu:

$$3(d_\alpha d^\alpha h_1(x, y))|_{x=y} + d_\alpha d^\alpha d_\mu d^\mu h_0(x, y) + R_\alpha^\alpha(x) h_0(x) = 0 \quad (C.32)$$

Man errechnet aus Gl. (C.25a):

$$d_\mu d^\mu d_\alpha d^\alpha h_0(x, y)|_{x=y} = \frac{1}{2} \Gamma_{\mu\alpha} \Gamma^{\mu\alpha} \quad (C.33)$$

und erhält somit:

$$3(d_\alpha d^\alpha h_1(x, y))|_{x=y} = -\frac{1}{2} \Gamma_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu} - R_\mu^\mu \quad (C.34)$$

was nach Einsetzen in (C.25c) für $k = 2$:

$$h_2(x) = \frac{1}{12} \Gamma_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu} + \frac{1}{2} w^2 + \frac{1}{6} R_\mu^\mu \quad (C.35)$$

ergibt.

Die Berechnung von h_3 und h_4 führen wir nur für den Fall $v = a = 0$ durch. Dabei wird das oben beschriebene Verfahren sukzessive angewandt. Zusammenfassend lauten die Wärmekoeffizienten h_0 bis h_4 :

$$\begin{aligned} h_0(x) &= 1 \\ h_1(x) &= -w(x) \\ h_2(x) &= \frac{1}{12} \Gamma_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu} + \frac{1}{2} w^2(x) + \frac{1}{6} R^\mu_\mu(x) \end{aligned} \quad (C.36a)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Tr}_{\gamma\lambda} h_3(x) &= \frac{1}{12} \text{Tr}_{\gamma\lambda} \left[\partial_\mu w(x) \partial^\mu w(x) - 2w^3(x) \right] \\ \text{Tr}_{\gamma\lambda} h_4(x) &= \frac{1}{4} \text{Tr}_{\gamma\lambda} \left[\frac{1}{30} (\Box w(x))^2 - \frac{1}{3} w(x) \partial_\nu w(x) \partial^\nu w(x) + \frac{1}{6} w^4(x) \right] \end{aligned} \right\} v = a = 0 \quad (C.36b)$$

Setzt man hierin die Definitionen für w , $\Gamma_{\mu\nu}$ und R^ν_μ (Gln. (C.3, C.26)) explizit ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ \text{Sp} h_1 &= -4N_F \int d^4x_E \text{Tr}_\lambda (\Sigma^2 - M^2) \\ \text{Sp} h_2 &= (-2)N_F \int d^4x_E \text{Tr}_\lambda \left\{ \left(\nabla_\mu S \nabla^\mu S + \nabla_\mu P \nabla^\mu P \right) + \frac{1}{3} \left(F_{\mu\nu}^V F^{\mu\nu V} + F_{\mu\nu}^A F^{\mu\nu A} \right) - (\Sigma^2 - M^2)^2 \right\} \end{aligned} \quad (C.37a)$$

und falls $\Sigma = \Sigma_V = M$ (nichtlineares Modell) und $v = a = 0$:

$$\begin{aligned} \text{Sp} h_3 &= (-) \frac{1}{3} N_F M^2 \int d^4x_E \text{Tr}_\lambda (\Box U^\dagger \Box U) \\ \text{Sp} h_4 &= N_F M^4 \int d^4x_E \text{Tr}_\lambda \left[\frac{1}{3} (\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U)^2 - \frac{1}{6} (\partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U^\dagger \partial^\mu U^\dagger \partial^\nu U) - \frac{1}{30M^2} (\Box \partial_\mu U^\dagger) (\Box \partial^\mu U) \right] \end{aligned} \quad (C.37b)$$

Die volle Heat-Kernel-Entwicklung der fermionischen effektiven Wirkung (C.16) lautet nach Einsetzen von (C.21, C.22, C.24):

$$\Re S_{eff}^F = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi} \right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} M^{4-2k} \Gamma \left(k-2, \frac{M^2}{\Lambda^2} \right) \text{Sp} h_k \quad (C.38)$$

Hierbei bezeichnet $\Gamma(\alpha, x)$ die unvollständige Gamma-Funktion:

$$\Gamma(\alpha, x) := \int_x^\infty dt t^{\alpha-1} e^{-t} \quad x \geq 0 \quad (C.39)$$

Diese ist für $x > 0$ konvergent und hat bei $x = 0$ einen Pol, falls $\alpha = -2$ ($k = 0$) und $\alpha = -1$ ($k = 1$), sowie eine logarithmische Divergenz, falls $\alpha = 0$ ($k = 2$) ist.

$$\begin{aligned} \Gamma(-n, x) &= \frac{(-)^n}{n!} \left[\Gamma(0, x) - e^{-x} \sum_{m=0}^{n-1} (-)^m \frac{m!}{x^{m+1}} \right] \\ \Gamma(0, x) &= -(\gamma + \ln x) + J(x) \\ j(x) &= \int_0^x \frac{du}{u} (1 - e^{-u}) \quad \gamma = 0,57721 \quad (\text{Euler - Konstante}) \end{aligned} \quad (C.40)$$

Die Polstelle $\alpha = -2$ ($k = 0$) verschwindet nach Normalordnung. Unter Verwendung von (C.37) erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} \Re S_{eff}^F - \Re S_{eff}^F|_V &= \int d^4x_E \mathcal{L}_E = \\ &= \left(-\frac{N_F}{16\pi^2}\right) \int d^4x_E \text{Tr}_\lambda \\ &\left\{ \Gamma\left(0, \frac{M^2}{\Lambda^2}\right) \left[(\nabla_\mu S \nabla^\mu S + \nabla_\mu P \nabla^\mu P) + \frac{1}{3} (F_{\mu\nu}^V F^{\mu\nu V} + F_{\mu\nu}^A F^{\mu\nu A}) - (\Sigma^2 - M^2)^2 \right] \right. \\ &+ \Gamma\left(-1, \frac{M^2}{\Lambda^2}\right) (2M^2)(\Sigma^2 - M^2) \Big\} \\ &+ \tilde{S}_{eff} \end{aligned} \quad (C.41)$$

Für $\Sigma = \Sigma_V = M$ und $v = a = 0$ ist:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{eff} &= \left(-\frac{N_F}{32\pi^2}\right) \int d^4x_E \text{Tr}_\lambda \\ &\left\{ \Gamma\left(1, \frac{M^2}{\Lambda^2}\right) \frac{1}{3} (\Box U^\dagger \Box U) \right. \\ &+ \Gamma\left(2, \frac{M^2}{\Lambda^2}\right) \left[\frac{1}{6} (\partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U^\dagger \partial^\mu U^\dagger \partial^\nu U) - \frac{1}{3} (\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U)^2 + \frac{1}{30M^2} (\Box \partial_\mu U^\dagger) (\Box \partial^\mu U) \right] + \dots \Big\} \end{aligned} \quad (C.42)$$

Die Lagrange-Funktion im Minkowski-Raum ist durch $\mathcal{L}_M = -\mathcal{L}_E$ gegeben.

Abschließend diskutieren wir einige Sonderfälle:

(a) Der Zusammenhang mit unserer ECW aus Kapitel 3 wird durch:

$$\begin{aligned} n &= 2 & \lambda^i &= \tau^i \quad (i = 1, 2, 3) \\ S^0 &= g\sigma & S^i &= 0 \quad i = 1, 2, 3 & v &= a = 0 \\ P^0 &= 0 & P^i &= \pi^i \quad i = 1, 2, 3 & \text{Tr}_\lambda \Sigma^2 &= 2g^2(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \end{aligned} \quad (C.43)$$

hergestellt. Im nichtlinearen Modell (chiraler Zirkel) ist zusätzlich:

$$H = S + iP = g(\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}) = M(\cos\theta + i\vec{\tau}\hat{\theta}\sin\theta) = Me^{i\vec{\tau}\hat{\theta}} \quad (C.44)$$

und wir können

$$\begin{aligned} \Sigma &= \Sigma_V = M \\ H &= M\Omega^2 = MU = Me^{i\vec{\tau}\hat{\theta}} \end{aligned} \quad (C.45)$$

setzen.

Die HKE der Fermiondeterminante nimmt dann genau die Form von Gl. (3.28) mit den Eigenzeitintegralen:

$$\begin{aligned} I_1^\Lambda(M) &= \frac{1}{16\pi^2} M^2 \Gamma\left(-1, \frac{M^2}{\Lambda^2}\right) = \frac{1}{16\pi^2} M^2 \int_{\frac{M^2}{\Lambda^2}}^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-t} \\ I_2^\Lambda(M) &= \frac{1}{16\pi^2} \Gamma\left(0, \frac{M^2}{\Lambda^2}\right) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\frac{M^2}{\Lambda^2}}^\infty \frac{dt}{t} e^{-t} \end{aligned} \quad (C.46)$$

an, was in Gl. (3.55) verwendet wurde. Entsprechendes gilt für die effektive $\pi - a$ -Kopplung (Gl. (3.43)).

(b) Zur Berechnung des Trägheitsmoments Θ wird gemäß Kapitel 5 ein äußeres Vektorfeld:

$$v_\mu^a = (-)\delta_{4\mu}\Omega^a$$

an die ECW angekoppelt. Mit den Notationen aus Kapitel 5 gilt:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\sigma &= \partial_\mu\sigma \\ \nabla_i(\vec{r}\vec{\pi}) &= \partial_i(\vec{r}\vec{\pi}) \\ \nabla_4(\vec{r}\vec{\pi}) &= [v_4, (\vec{r}\vec{\pi})] = \epsilon^{abc}\Omega^a\pi^b\tau^c \\ \int d^4x_E \text{Tr}_\tau [\nabla_4(\vec{r}\vec{\pi})\nabla^4(\vec{r}\vec{\pi})] &= (-2)\delta^{ab}\Omega^a\Omega^b\frac{8\pi}{3} \int dr r^2 \pi^2(r)\end{aligned}\tag{C.47}$$

so daß die niedrigste Ordnung HKE des Trägheitsmomentes Θ :

$$\Theta^{ab} = \delta^{ab}\frac{8\pi}{3} \int dr r^2 \pi^2(r)\tag{C.48}$$

lautet, falls der Abschneideparameter gemäß (3.45) adjustiert wurde.

(c) Analog erhält man die niedrigste Ordnung HKE des Erwartungswertes des axialen Stroms $\langle A_\mu^a(x) \rangle$ durch Koppeln an ein äußeres axiales Feld a :

$$\begin{aligned}\langle A_\mu^a(x) \rangle &= \frac{\delta}{\delta a_\mu^a(x)} (-)\text{Spln} \left[-i\rlap{\not{\partial}} + g(\sigma + i\vec{r}\vec{\pi}\gamma_5) - a_\mu^a(x)\gamma^\mu\gamma_5\frac{\tau^a}{2} \right]_{a=0} \\ &= [\sigma(x)\partial_\mu\pi^a(x) - \pi^a(x)\partial_\mu\sigma(x)] + \dots\end{aligned}\tag{C.49}$$

Anhang D. CHIRALE ANOMALIE

Wir betrachten die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \Delta \psi \quad (D.1)$$

mit dem Dirac-Operator $i\Delta$ aus Gl. (C.1). $\mathcal{L}$ ist auf klassischem Niveau invariant unter der lokalen chiralen $SU(n)_V \otimes SU(n)_A \cong SU(n)_L \otimes SU(n)_R$ Transformation:

$$\begin{aligned} \psi_L'(x) &= g_L(x) \psi_L(x) \\ \psi_R'(x) &= g_R(x) \psi_R(x) \\ V_L^{\mu'}(x) &= g_L(x) (\partial^\mu + V_L^\mu(x)) g_L^{-1}(x) \\ V_R^{\mu'}(x) &= g_R(x) (\partial^\mu + V_R^\mu(x)) g_R^{-1}(x) \\ \mathcal{H}'(x) &= g_R(x) \mathcal{H}(x) g_L^{-1}(x) \end{aligned} \quad (D.2)$$

wobei:

$$\begin{aligned} \psi_{L,R} &= \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \psi \\ V_{L,R}^\mu &= v_\mu \pm a_\mu \\ g_{L,R}(x) &= e^{i\theta_{L,R}(x)} \\ \theta_{L,R} &= \theta_{L,R}^a(x) \lambda^a \quad a = 1 \dots n^2 - 1 \end{aligned} \quad (D.3)$$

oder mit:

$$\alpha(x) = \frac{1}{2}(\theta_L(x) + \theta_R(x)) \quad \beta(x) = \frac{1}{2}(\theta_L(x) - \theta_R(x)) \quad (D.4)$$

für infinitesimale α und β :

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= [1 + i\alpha(x) + i\beta(x)\gamma_5] \psi(x) \\ v'_\mu(x) &= v_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) + i[\alpha(x), v_\mu(x)] + i[\beta(x), a_\mu(x)] \\ a'_\mu(x) &= a_\mu(x) + \partial_\mu \beta(x) + i[\alpha(x), a_\mu(x)] + i[\beta(x), v_\mu(x)] \\ S'(x) &= S(x) + i[\alpha(x), S(x)] + \{\beta(x), P(x)\} \\ P'(x) &= P(x) + i[\alpha(x), P(x)] - \{\beta(x), S(x)\} \end{aligned} \quad (D.5)$$

was in der nichtlinearen Darstellung ($\Sigma = \Sigma_V = M$) durch:

$$\begin{aligned} U'(x) &= e^{i(\alpha(x) - \beta(x))} U(x) e^{-i(\alpha(x) + \beta(x))} \\ \xi'(x) &= \xi(x) - 2\beta(x) \end{aligned} \quad (D.6)$$

erreicht wird.

Die chirale Anomalie rührt von der Nichtinvarianz des Funktionalmaßes $\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}$ unter der axialen $SU(n)_A$ -Transformation [Fuj79, Fuj80, BM82, Pet85] her. Dieses transformiert sich mit der Phase:

$$[\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}]' = [\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}] e^{i\beta G} \quad (D.7)$$

wobei die abkürzenden Notation:

$$\beta G := \int d^4 x_E \beta^a(x) G^a(x) \quad (D.8)$$

verwendet wurde.

Dieses (anomale) Transformationsverhalten beeinflusst die effektive Wirkung W , welche sich durch Integration über die Fermionfelder $\psi, \bar{\psi}$ ergibt:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-\int d^4 x_E \bar{\psi}(-i\Delta_E)\psi} &= e^{-W(S,P,v,a)} \\ W(S,P,v,a) &= (-)\ln\det(-i\Delta_E) = (-)\text{Spln}(-i\Delta_E) \end{aligned} \quad (D.9)$$

Der Operator $i\Delta_E$ hat kein definiertes Hermitizitätsverhalten (d.h.: er ist weder hermitesch noch antihermitesch):

$$\begin{aligned} i\Delta_E &= i\gamma_E^\mu \partial_\mu + \gamma_E^\mu v_\mu \frac{1}{2} \lambda^a + \gamma_E^\mu \gamma_5 a_\mu \frac{1}{2} \lambda^a - (S^a \lambda^a + i\gamma_5 P^a \lambda^a) \\ i\Delta_E^\dagger &= (-)i\gamma_E^\mu \partial_\mu - \gamma_E^\mu v_\mu \frac{1}{2} \lambda^a + \gamma_E^\mu \gamma_5 a_\mu \frac{1}{2} \lambda^a - (S^a \lambda^a - i\gamma_5 P^a \lambda^a) \end{aligned} \quad (D.10)$$

Daraus folgt, daß das Eigenwertspektrum von $i\Delta_E$ und somit auch W komplex sind:

$$\begin{aligned} (-i\Delta_E)\phi_m &= \lambda_m \phi_m \\ \lambda_m &= u_m + iv_m \quad u_m, v_m \text{ reell} \\ \det(-i\Delta_E) &= \prod_m \lambda_m = |\det(-i\Delta_E)| e^{i\vartheta} \\ \Re W(S,P,v,a) &= (-)\ln|\det(-i\Delta_E)| = (-)\frac{1}{2}\text{Spln}\Delta_E^\dagger \Delta_E \\ \Im W(S,P,v,a) &= -\vartheta \end{aligned} \quad (D.11)$$

Durch Vergleich von (D.7) mit (D.9) und (D.11) erkennt man, daß:

- (a) $\Re W$ unter der axialen $SU(n)_A$ Transformation invariant ist, während
- (b) $\Im W$ sich gemäß :

$$\Im W(S', P', v', a') = \Im W(S, P, v, a) - \beta G \quad (D.12)$$

ändert.

was kompakt in Form der

Anomalen Ward-Identitäten:

$$\begin{aligned} \delta_\alpha^V W &= 0 \\ \delta_\beta^A W &= -i\beta G \end{aligned} \quad (D.13)$$

geschrieben werden kann [WZ71, Wes72]. δ_α^V und δ_β^A bezeichnen dabei die jeweiligen Änderungen unter der $SU(n)_V$ bzw. $SU(n)_A$ -Transformation. In der nichtlinearen Darstellung ($\Sigma = \Sigma_V$) hängt Δ und damit auch W neben v und a nur noch von dem Feld $\xi(x)$ ab, welches im Falle der

SCSB zum Goldstone-Feld wird. Die Variationen δ_α^V und δ_β^A eines beliebigen Funktionals $\mathcal{K}[\xi, v, A]$ können durch die infinitesimalen Eichoperatoren X und Y ausgedrückt werden. Ähnlich zu dem Lemma (B.14) aus Anhang B ist:

$$\begin{aligned}\delta_\alpha^V \mathcal{K}[\xi, v, a] &= - \int d^4x_E \alpha^a(x) X^a(x) \mathcal{K}[\xi, v, a] \\ \delta_\beta^A \mathcal{K}[\xi, v, a] &= - \int d^4x_E \beta^a(x) Y^a(x) \mathcal{K}[\xi, v, a]\end{aligned}\quad (D.14)$$

mit:

$$\begin{aligned}-X^a(x) &= \partial_\mu^{(x)} \frac{\delta}{\delta v_\mu^a(x)} + f^{abc} \left(v_\mu^b(x) \frac{\delta}{\delta v_\mu^c(x)} + a_\mu^b(x) \frac{\delta}{\delta a_\mu^c(x)} \right) \\ -Y^a(x) &= \partial_\mu^{(x)} \frac{\delta}{\delta a_\mu^a(x)} + f^{abc} \left(a_\mu^b(x) \frac{\delta}{\delta v_\mu^c(x)} + v_\mu^b(x) \frac{\delta}{\delta a_\mu^c(x)} \right) - 2 \frac{\delta}{\delta \xi^a(x)}\end{aligned}\quad (D.15)$$

Hierbei bezeichnen die f^{abc} die Strukturkonstanten der $SU(n)$. Die Ward-Identitäten (D.13) lauten damit:

$$\begin{aligned}X^a W &= 0 \\ Y^a W &= iG^a\end{aligned}\quad (D.16)$$

Aufgrund der Lie-Algebra-Struktur der $SU_V(n) \otimes SU_A(n)$:

$$\begin{aligned}[\delta_{\alpha_1}^V, \delta_{\alpha_2}^V] &= i\delta_{[\alpha_1, \alpha_2]}^V \\ [\delta_{\alpha_1}^V, \delta_{\beta_1}^A] &= i\delta_{[\alpha_1, \beta_1]}^A \\ [\delta_{\beta_1}^A, \delta_{\beta_2}^A] &= i\delta_{[\beta_1, \beta_2]}^V\end{aligned}\quad (D.17)$$

erfüllen X und Y die Vertauschungsregeln:

$$\begin{aligned}[X^a(x), X^b(y)] &= f^{abc} \delta(x-y) X^c(x) \\ [X^a(x), Y^b(y)] &= f^{abc} \delta(x-y) Y^c(x) \\ [Y^a(x), Y^b(y)] &= f^{abc} \delta(x-y) X^c(x)\end{aligned}\quad (D.18)$$

Wendet man (D.18) auf die anomalen Ward-Identitäten (D.16) an, so ergeben sich die:

Wess-Zumino-Konsistenzbedingungen: [WZ71, Wes72]

$$\begin{aligned}X^a(x) G^b(y) &= f^{abc} \delta(x-y) G^c(y) \\ Y^a(x) G^b(y) &= Y^b(y) G^a(x)\end{aligned}\quad (D.19)$$

Diese stellen eine notwendige und, wie in Ref. [WZ71, Wes72] gezeigt wurde, auch hinreichende Bedingung für die lokale Integrabilität des inhomogenen Funktional-Differentialgleichungssystems (D.16) (d.h.: die lokale Existenz einer effektiven Wirkung W als Lösung von (D.16)) dar.

Die sogenannte Bardeen-Anomalie G^a kann direkt durch explizite Berechnung der chiralen Transformation des Funktionalmaßes $\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}$ mit Hilfe der Fujikawa-Methode [Fuj79, Fuj80, BM82,

GL84] oder auf elegante Weise durch Lösen der Wess-Zumino-Konsistenzbedingung unter Verwendung differentialgeometrischer Methoden [Zum83, ZY84, Pet85] gewonnen werden. Das Ergebnis ist [Bar69]:

$$-G^a[v, a] = \frac{N_F}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \text{Tr}_\lambda \left\{ \frac{\lambda^a}{2} \left[\frac{1}{4} v_{\mu\nu} v_{\sigma\tau} + \frac{1}{12} a_{\mu\nu} a_{\sigma\tau} + \frac{2}{3} i (a_\mu a_\nu v_{\sigma\tau} + a_\mu v_{\mu\sigma} a_\tau + v_{\mu\nu} a_\sigma a_\tau) - \frac{8}{3} a_\mu a_\nu a_\sigma a_\tau \right] \right\} \quad (D.20)$$

mit:

$$\begin{aligned} v_{\mu\nu} &= \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu - i[v_\mu, v_\nu] - i[v_\mu, v_\nu] \\ a_{\mu\nu} &= \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu - i[v_\mu, a_\nu] - i[a_\mu, v_\nu] \end{aligned} \quad (D.21)$$

Dieser Ausdruck für G^a hängt nur mehr von v und a ab²³⁾ und wird als minimale Bardeen-Anomalie bezeichnet. Man kann zu G^a Ausdrücke addieren, welche ebenfalls die Wess-Zumino-Konsistenzbedingungen (D.19) erfüllen. Diese Zusatzterme können durch Addition lokaler Gegen-terme zu $\mathcal{L}$, die selbst wieder invariant unter der lokalen $SU(2)_V$ -Gruppe sind, in eine Redefinition der Greens-Funktionen absorbiert oder durch geeignete Wahl des Renormierungsschemas zum Verschwinden gebracht werden [Bar69, BM82, GL84, DW85, Pet85]. Es ist jedoch nicht möglich in (D.20) Terme wegzulassen, das heißt, obiger Ausdruck für G^a ist in diesem Sinne minimal. In unserem speziellen Fall ist es noch wichtig zu bemerken, daß für $n = 2$ ohne isoskalare vektorielle bzw. axialvektorielle Kopplungen (d.h.: $\text{Tr}_\lambda v_\mu = \text{Tr}_\lambda a_\mu = 0$) die Anomalie G^a exakt verschwindet, wie man sich leicht durch explizites Nachrechnen überzeugt [GL84]. Dies gilt bereits nicht mehr, wenn das isoskalare ω -Meson angekoppelt wird, da $\text{Tr}_\lambda \omega \neq 0$ ist (Spuranomalie).

Unter Verwendung der Konsistenzbedingungen Gl. (D.19) können die Ward-Identitäten lokal [WZ71, Wes72] als auch global [RT84, PR85, Pet85] integriert werden, woraus man den Imaginärteil der effektiven Wirkung erhält.²⁴⁾ Zur Darstellung der globalen Lösung führen wir einen kontinuierlichen Satz von chiralen Transformationen $\hat{\Omega}(x, \tau)$; $\tau \in [0, 1]$ ein, welcher zwischen den Feldern:

$$\hat{\Omega}(x, \tau) = \begin{cases} \mathcal{I} & , \tau = 0 \\ \Omega(x) & , \tau = 1 \end{cases} \quad (D.22)$$

interpoliert. Ferner definieren wir die gemäß (D.2) bzw. (D.5) mit $g_L = g_R = \hat{\Omega}$ chiral transformierten Felder $U^{\hat{\Omega}}, v^{\hat{\Omega}}, a^{\hat{\Omega}}$ (sog. Stückelberg-Transformation). Es ist dann insbesondere $U^{\hat{\Omega}} = \mathcal{I}$, das heißt, man hat das Pionfeld auf seinen Vakuumwert rotiert. Für den Imaginärteil der effektiven Wirkung erhält man damit [RT84, PR85] den:

Wess-Zumino-Term:

$$\Im W(U, v, a) = \Im W(U = \mathcal{I}, v^{\hat{\Omega}}, a^{\hat{\Omega}}) - \int_0^1 d\tau \int d^4x_E N_F \text{Tr}_\lambda \left\{ \left(\hat{\Omega}^{-1} \partial_\tau \hat{\Omega} + \partial_\tau \hat{\Omega} \hat{\Omega}^{-1} \right) G(v^{\hat{\Omega}}, a^{\hat{\Omega}}) \right\} \quad (D.23)$$

²³⁾ Er ist daher auch im Falle des linearen Modells gültig.

²⁴⁾ Der chiral invariante Realteil ist eine Lösung der homogenen Ward-Identitäten ($G^a = 0$).

Die Integrationskonstante $\Im W(U = \mathcal{I}, v^\Omega, a^\Omega)$ ist lokal invariant unter der vollen $SU(n) \otimes SU(n)$ -Gruppe [RT84, PR85]. In den Referenzen [DS85, ER86] wurde außerdem gezeigt, daß sie in einer SCSB-Phase im Niederenergielimes verschwindet. Sie ist daher unbedeutend für die Physik des anomalen Sektors, die in diesem Limes als effektive anomale Kopplung aus $\Im W$ gewonnen wird [GK84, KR84b].

Es ist nicht möglich $\Im W$ als 4-dimensionales Integral über eine effektive Lagrange-Dichte zu schreiben. Falls die Vektorfelder verschwinden ($v = a = 0$), reduziert sich $\Im W$ auf den berühmten Wess-Zumino-Witten-Term (WZW), der als Integral über eine 5-dimensionale Mannigfaltigkeit B_5 , die durch den 4-dimensionalen euklidischen Raum R_4 berandet wird ($\partial B_5 = R_4$), dargestellt werden kann [Wit80]:²⁵⁾

$$i\Im W(U, v = a = 0) = \Gamma_{WZW} = \frac{(-i)N_F}{240\pi^2} \int_{B_5} d^5x \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5} \text{Tr}_\lambda \left[(U^\dagger \partial_{\mu_1} U) (U^\dagger \partial_{\mu_2} U) (U^\dagger \partial_{\mu_3} U) (U^\dagger \partial_{\mu_4} U) (U^\dagger \partial_{\mu_5} U) \right] \quad (D.24)$$

Wir schließen diesen Anhang mit den folgenden Bemerkungen:

- (a) Falls die Mesonfelder statisch (zeitunabhängig) und der entsprechende 1-Teilchen-Hamiltonoperator h hermitesch und folglich seine Eigenwerte ϵ_λ reell sind, verschwindet der Imaginärteil $\Im W$ grundsätzlich exakt:

$$\Im W = (-) \sum_\lambda \int \frac{du}{2\pi} \Im \ln(-iu + \epsilon_\lambda) = (-) \sum_\lambda \int \frac{du}{2\pi} \arctan \frac{-u}{\epsilon_\lambda} = 0 \quad (D.25)$$

$\Im W$ trägt daher in diesem Fall nicht zur Gesamtenergie des Systems bei.

- (b) G^a und damit $\Im W$ werden zwar innerhalb eines gewissen Regularisierungsschemas berechnet, da sonst nicht-wohldefinierte Ausdrücke (alternierende Reihen) auftreten [Fuj79, Fuj80]. $\Im W$ selbst ist aber nicht UV-divergent, so daß man am Schluß den Abschneideparameter nach ∞ gehen lassen kann.

- (d) Setzt man den Ausdruck für G^a (D.20) in den Wess-Zumino-Term ein, erhält man im allgemeinen Fall einen sehr komplizierten Ausdruck, der sich aus dem WZW-Term (D.24) und dem sogenannten 'geeichten' Wess-Zumino-Term [Wit83, GK84, KR84b, PR85], zusammensetzt. Leitet man Letzteren nach einem konstanten isoskalaren Vektorfeld ω ab und setzt anschließend $\omega = 0$, so erhält man die anomale Baryonenzahl Q , die identisch mit der topologischen Windungszahl des Pionfeldes n ist [Wit83, AN83]. Führt man diese Operation

²⁵⁾Für $n > 2$ ist der Bereich, über den in Gl. (D.23) integriert wird, nicht einfach zusammenhängend und die Integration daher nicht trivial.

direkt in $\Im W$ aus, ergibt sich hingegen (für statische Mesonfelder mit hermiteschem h):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \Im W(\omega) \Big|_{\omega=0} &= \frac{d}{d\omega} (-) \sum_{\lambda} \int \frac{du}{2\pi} \Im \ln[\epsilon_{\lambda} - i(u - \omega)] \Big|_{\omega=0} = \\ &= \frac{d}{d\omega} (-) \sum_{\lambda} \int \frac{du}{2\pi} \arctan \frac{\omega - u}{\epsilon_{\lambda}} \Big|_{\omega=0} = \sum_{\lambda} \int \frac{du}{2\pi} \frac{\epsilon_{\lambda}}{\epsilon_{\lambda}^2 + u^2} = \\ &= (-) \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \text{sign} \epsilon_{\lambda} = B \end{aligned} \quad (D.26)$$

also die gewöhnliche Baryonenzahl B aus Kapitel 4. Das ist auch zu erwarten, da es für die Ableitung der effektiven Wirkung nach ω bzw. dem chemischen Potential μ am Nullpunkt keine Rolle spielt, ob man diese in reeller oder imaginärer Richtung ausführt (vgl. die Diskussion in Abschnitt 4.). Da die Baryonzahl nicht regularisiert wird, könnte man die analytische Fortsetzung in den euklidischen Raum auch umgehen und direkt im Minkowski-Raum arbeiten. B und Q stimmen genau dann überein, wenn das Valenzorbital $\epsilon_{val} < 0$ ist, also für genügend ausgedehnte Mesonfelder. Für unsere solitonischen Lösungen im physikalisch sinnvollen Bereich ist dies jedoch gerade nicht der Fall, sondern die Baryonzahl B des 1-Schleifen-Beitrags der effektiven Wirkung verschwindet und die endliche Baryonenzahl $B = 1$ wird durch Addition von Valenzquarks erreicht. Zum gleichen Schluß sind wir in Kapitel 4 gekommen, als wir B mit seiner derivativen Entwicklung (Goldstone-Wilczek-Entwicklung [GW81]), welche ebenfalls die topologische Windungszahl n liefert, verglichen haben. Der Grund in dieser Diskrepanz liegt darin, daß bei der Ableitung der Wess-Zumino-Wirkung Gl. (D.23) implizit der Niederenergielimes verwendet wurde, was mit einer derivativen Entwicklung korrespondiert. Der Wess-Zumino-Term (D.23) ist zwar eine mögliche Lösung der (inhomogenen) anomalen Ward-Identitäten (D.16) und bestimmt auch vollständig die Physik des anomalen Sektors. Eine allgemeine Lösung von (D.16) und damit auch $\Im W$ kann jedoch zusätzlich einen $SU(n) \otimes SU(n)$ -invarianten Term enthalten, welcher die homogenen Ward-Identitäten ($G^a = 0$) erfüllt und eventuell von höherer derivativer Ordnung ist. Die genaue Form eines solchen Terms kann außerdem davon abhängen, welches Regularisierungsschema bei der Berechnung von G^a angewandt wird, um einen wohldefinierten Ausdruck für die dabei auftretende alternierende Reihe zu erhalten. Eine strenge derivative Entwicklung von $\Im W$ im allgemeinen Fall des Dirac-Operators Gl. (C.1) ist unseres Wissens, wegen der extrem komplizierten Ausdrücke, die man hierbei erhält, bisher nicht durchgeführt worden. Wir haben uns in einer langen Rechnung explizit davon überzeugt, daß für $v = a = 0$ die Änderung von $\Im W$ bei einer Variation von U , in niedrigster Ordnung Gradientenentwicklung identisch mit der entsprechenden Änderung des WZW-Terms (D.24) ist.²⁶⁾ Die 'Eichung' des WZW-Terms unter der $U(1)$ -Symmetrie gemäß Referenz [Wit83] würde dann wieder auf die topologische Baryonenzahl n führen.

Zusammenfassend muß der Schluß gezogen werden, daß die Wess-Zumino-Form Gl. (D.23)

²⁶⁾ Diese Variationen können beide als 4-dimensionale Integrale geschrieben werden.

von $\Im W$ im solitonischen Sektor unbrauchbar ist, so wie auch die Gradientenentwicklung des Realteils der effektiven Wirkung im allgemeinen fehlschlägt (vgl. Kapitel 6).

- (e) Für $n = 2$ und $\text{Tr} v = \text{Tr} a = 0$ verschwindet mit G^a auch $\Im W$ aus Gl. (D.23)²⁷⁾ (Anomaliefreiheit der $SU(2)$).

²⁷⁾Die Integration in Gl. (D.23) ist hier unproblematisch, da der Integrationsbereich einfach zusammenhängend ist.

Anhang E. DIAGONALISIERUNG DES HAMILTONOPERATORS

Dieser Anhang, der in weiten Teilen mit Ref. [Grü90] identisch ist, enthält eine Beschreibung des numerischen Verfahrens zur Lösung der 1-Teilchen-Dirac-Gleichung in einem endlichen Kasten, wie es von Kahana und Ripka in Ref. [KR84a] vorgeschlagen wurde.

Der Dirac Hamilton-Operator

Der 1-Teilchen Dirac-Hamilton-Operator h unseres Modells lautet:

$$h = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}}{i} + g\beta(\sigma(\vec{r}) + i\vec{r} \cdot \vec{\pi}(\vec{r})\gamma_5) \quad (E.1)$$

Für die Dirac-Matrizen verwenden die Notation von Bjorken-Drell [BDa, BDb]:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (E.2)$$

Es erweist sich als vorteilhaft zu den skalierten Größen:

$$\vec{r}' = (gf_\pi)\vec{r}, \quad \vec{\nabla}_{r'} = (gf_\pi)^{-1}\vec{\nabla}_r, \quad \sigma' = \frac{\sigma}{f_\pi}, \quad \vec{\pi}' = \frac{\vec{\pi}}{f_\pi} \quad (E.3)$$

überzugehen, da dann das Diagonalisierungsproblem unabhängig von der Konstituentenmasse M bzw. der Kopplung g wird, und man nur am Ende die Operationen Gl. (E.3) durchführen muß, um die physikalischen Energien bzw. Radian zu erhalten. Es ist dann:

$$h = gf_\pi h' = M h' \quad (E.4)$$

$$h' = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}'}{i} + \beta(\sigma'(\vec{r}') + i\vec{r}' \cdot \vec{\pi}'(\vec{r}')\gamma_5)$$

Im folgenden werden wir die Striche wieder fortlassen. Die Eigenwertgleichung:

$$h\phi_\lambda = \epsilon_\lambda \phi_\lambda \quad (E.5)$$

lautet damit in Matrixform:

$$h \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}}{i} + i\vec{\pi} \cdot \vec{r} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}}{i} - i\vec{\pi} \cdot \vec{r} & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (E.6)$$

Das Vakuum ist durch $\sigma_V = 1$ und $\vec{\pi}_V = 0$ charakterisiert und die entsprechende Dirac-Gleichung ist:

$$h_V \begin{pmatrix} \psi_{1V} \\ \psi_{2V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}}{i} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}}{i} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{1V} \\ \psi_{2V} \end{pmatrix} \quad (E.7)$$

Sphärische Hedgehog-Felder

Wir nehmen nun an, daß die Felder σ und $\vec{\pi}$ in der sphärischen Hedgehog-Form vorliegen:

$$\sigma(\vec{r}) = \sigma(r) \quad \text{und} \quad \vec{\pi}(\vec{r}) = \pi(r) \frac{\vec{r}}{r} = \pi(r) \hat{r} \quad (E.8)$$

Auch der Term der kinetischen Energie wird in sphärischen Koordinaten geschrieben. Dazu benutzen wir die Identität:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{q}) = \vec{p} \cdot \vec{q} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) \quad (E.9)$$

Mit $\vec{p} = \vec{q} = \vec{r}$ erhalten wir $(\vec{\sigma} \cdot \vec{r})^2 = r^2$ oder $(\vec{\sigma} \cdot \hat{r})^2 = 1$. Damit können wir nun:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} = (\vec{\sigma} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \quad (E.10)$$

schreiben. Mit $\vec{p} = \hat{r}$ und $\vec{q} = \vec{\nabla}$ ergibt sich:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} = (\vec{\sigma} \cdot \hat{r})(\hat{r} \cdot \nabla + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{r} \times \vec{\nabla})) \quad (E.11)$$

Benutzt man weiter $\sigma_r \equiv \vec{\sigma} \cdot \hat{r}$, $\frac{\partial}{\partial r} = \hat{r} \cdot \vec{\nabla}$ und $\vec{L} = -i\vec{r} \times \vec{\nabla}$ endet man schließlich mit:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} = \sigma_r \left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right] \quad (E.12)$$

An dieser Stelle wird üblicherweise der Operator:

$$\vec{K} \equiv -\beta(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1) = -\beta \left(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 + \frac{1}{4} \right) \quad (E.13)$$

eingeführt, der es uns erlaubt

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}}{i} = -i\gamma_5 \sigma_r \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} (1 + \beta \vec{K}) \right] \quad (E.14)$$

zu schreiben. Der gesamte 1-Teilchen Dirac-Hamilton-Operator lautet damit in der sphärischen Basis:

$$h = -i\gamma_5 \sigma_r \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} (1 + \beta \vec{K}) \right] + \beta [\sigma(r) + i\gamma_5 \pi(r) \hat{r} \cdot \vec{\tau}] \quad (E.15)$$

Quark-Spinoren für Zentralfelder [BDa]

Wir wollen nun schrittweise geeignete Testwellenfunktionen für die Quarkfelder konstruieren, in denen dann h diagonalisiert wird. Zunächst unterdrücken wir die Isospinabhängigkeit von h , was zum Beispiel für den Vakuumoperator h_V erfüllt ist. In diesem Fall vertauscht h mit dem Gesamtspin $\vec{J}$, allerdings nicht mit dem Bahndrehimpuls $\vec{L}$. Daher können wir folgenden Ansatz für den Dirac-Spinor ϕ machen:

$$\phi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} if(r)|ljm\rangle \\ g(r)|l'jm\rangle \end{pmatrix} \quad (E.16)$$

Die Drehimpulseigenzustände sind durch:

$$\langle \Omega | lj m \rangle = \sum_{m', \mu} C \left(l, \frac{1}{2}, j \middle| m', \mu, m \right) Y_{lm'}(\Omega) \chi_\mu^s \quad (E.17)$$

gegeben, wobei Ω den Raumwinkel bezeichnet. Diese Zustände sind auch Eigenzustände zum nicht-relativistischen Paritätsoperator $\hat{P}$, welcher durch $\hat{P}\varphi(\vec{x}) = \varphi(-\vec{x})$ definiert ist und der Relation:

$$\hat{P}|ljm\rangle = (-1)^l |ljm\rangle \quad (E.18)$$

gehört. Fordert man, daß der gesamte Spinor ϕ ein Eigenzustand des relativistischen Paritätsoperators $\hat{\Pi} = \beta\hat{P}$, der wiederum mit h vertauscht, ist, erhält man:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}\phi &= \begin{pmatrix} if(r)\hat{P}|ljm\rangle \\ -g(r)\hat{P}|l'jm\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} if(r)(-1)^l |ljm\rangle \\ -g(r)(-1)^{l'} |l'jm\rangle \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (E.19)$$

Daraus schließen wir, daß obere und untere Komponente unterschiedliche Parität besitzen, oder anders ausgedrückt, $l' = l \pm 1$ gilt. Da $j = l \pm \frac{1}{2}$ ist, können wir l' als

$$l' = \bar{l} \equiv 2j - l = \begin{cases} l+1 & \text{für } j = l + \frac{1}{2} \\ l-1 & \text{für } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (E.20)$$

schreiben. Mit Hilfe der Relationen:

$$\sigma_r |ljm\rangle = -|\bar{l}jm\rangle \quad (E.21)$$

und

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{l} + 1) |ljm\rangle = -\kappa |ljm\rangle \quad (E.22)$$

wobei

$$\kappa = \begin{cases} l = j + \frac{1}{2} & \text{für } j = l - \frac{1}{2} \\ -l - 1 = -(j + \frac{1}{2}) & \text{für } j = l + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (E.23)$$

können wir nun zeigen, daß der Spinor ϕ auch ein Eigenvektor zum Operator K aus Gl. (E.13) ist:

$$K\phi = \begin{pmatrix} \kappa if(r)|ljm\rangle \\ \kappa g(r)|\bar{l}jm\rangle \end{pmatrix} = \kappa \phi \quad (E.24)$$

Bei gegebenem κ und Parität des Spinors wissen wir außerdem, daß $j = |\kappa| - \frac{1}{2}$ und $l = j + \frac{1}{2} S_\kappa$ gilt, wobei $S_\kappa = \text{sign}\kappa$ gesetzt wurde. Daher können wir den gesamten Spinor durch die Quantenzahlen κ , m und π charakterisieren:

$$\phi = \begin{pmatrix} if(r)\Omega_{\kappa m}^\pi \\ g(r)\Omega_{-\kappa m}^\pi \end{pmatrix} \quad (E.25)$$

Die Lösung für das Vakuum

Mit diesem Ansatz lösen wir nun das Vakuumproblem. Aus Gl. (E.7) erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} if(r)\Omega_{\kappa m}^\pi + \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}(1 - \kappa) \right] ig(r)\Omega_{\kappa m}^\pi \\ -g(r)\Omega_{-\kappa m}^\pi - \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}(1 + \kappa) \right] f(r)\Omega_{-\kappa m}^\pi \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} if(r)\Omega_{\kappa m}^\pi \\ g(r)\Omega_{-\kappa m}^\pi \end{pmatrix} \quad (E.26)$$

was auf 2 gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung für die radialen Felder $f(r)$ und $g(r)$

$$(1 - \epsilon)f(r) + \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}(1 - \kappa) \right] g(r) = 0 \quad (E.27)$$

$$(1 + \epsilon)g(r) + \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}(1 + \kappa) \right] f(r) = 0$$

führt. Setzt man die zweite DGL:

$$g(r) = -\frac{1}{1 + \epsilon} \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 + \kappa}{r} \right] f(r) \quad (E.28)$$

in die erste ein, so erhält man eine DGL zweiter Ordnung für $f(r)$:

$$\left\{ (1 - \epsilon^2) - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\kappa(\kappa + 1)}{r^2} \right\} f(r) = 0 \quad (E.29)$$

Mit der Substitution $\rho = kr$ wobei $k = \sqrt{\epsilon^2 - 1}$ ergibt sich schließlich die DGL für die sphärischen Bessel-Funktionen:

$$\left\{ \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \rho^2 - \kappa(\kappa + 1) \right\} f(r) = 0 \quad (E.30)$$

welche die reguläre Lösung $f(r) = j_l(kr)$ besitzt. Nun benutzen wir die Relationen

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d}{dx} - \frac{\kappa}{x} \right\} j_\kappa(x) &= -j_{\kappa+1}(x) \\ \left\{ \frac{d}{dx} + \frac{1 + \kappa}{x} \right\} j_\kappa(x) &= j_{\kappa-1}(x) \end{aligned} \quad (E.31)$$

sowie Gl. (E.28), um $g(r) = -S_\kappa \frac{k}{1 + \epsilon} j_l(kr)$ zu erhalten. Damit ist die Lösung des Vakuumproblems schließlich durch:

$$\phi = \begin{pmatrix} i j_l(kr) |l j m\rangle \\ -S_\kappa \frac{k}{1 + \epsilon} j_l(kr) |\bar{l} j m\rangle \end{pmatrix} \quad (E.32)$$

gegeben.

Kopplung zu gutem Grand-Spin

Da in h aus Gl. (E.15) der Term $\hat{r} \cdot \vec{\tau}$ auftritt, vertauscht der allgemeine Hamilton-Operator weder mit dem Gesamtspin- noch mit dem Isospinoperator. Er vertauscht jedoch mit dem Grand-Spin-Operator $\vec{G} = \vec{j} + \vec{\tau}$. Wir müssen daher aus den Zuständen $|l j m\rangle$ und dem Isospinor $\chi_{\tau_z}^t$, $t = \frac{1}{2}$ Eigenzustände zu $\vec{G}$ konstruieren:

$$|l j G M\rangle = \sum_{m, \tau_z} C(j, \frac{1}{2}, G | m, \tau_z, M) |l j m\rangle \chi_{\tau_z}^t \quad (E.33)$$

Mit diesen Zuständen berechnen wir die Matrixelemente des Operators $\hat{r} \cdot \vec{\tau}$:

$$\langle l' j' G M | \hat{r} \cdot \vec{\tau} | l j G M \rangle = (-1)^{G+j+\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j' & \frac{1}{2} & G \\ \frac{1}{2} & j & 1 \end{Bmatrix} \langle l' j' || \hat{r} || l j \rangle \langle \frac{1}{2} || \vec{\tau} || \frac{1}{2} \rangle \quad (E.34)$$

Benutzt man $\langle \frac{1}{2} || \vec{r} || \frac{1}{2} \rangle = \sqrt{6}$ und

$$\langle l' \frac{1}{2} j' || \vec{r} || l \frac{1}{2} j \rangle = (-1)^{j_0 + \frac{1}{2}} \sqrt{(2j' + 1)(2j + 1)} \begin{pmatrix} j' & 1 & j \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} (1 - (-1)^{l'+l}) \quad (E.35)$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle l' j' GM | \vec{r} \cdot \vec{r} | l j GM \rangle &= (-1)^G \sqrt{6(2j' + 1)(2j + 1)} \\ &\quad \left\{ \begin{matrix} j' & j & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & G \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} j' & j & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} (1 - (-1)^{l'+l}) \end{aligned} \quad (E.36)$$

Die Berechnung der 3j- und 6j- Symbole [VM88] führt uns schließlich auf:

$$\begin{aligned} \langle l' j' GM | \vec{r} \cdot \vec{r} | l j GM \rangle &= \\ &\quad \begin{matrix} j = G - 1/2 & j = G + \frac{1}{2} \\ j' = G - \frac{1}{2} & \begin{pmatrix} -1 & -2\sqrt{G(G+1)} \\ -2\sqrt{G(G+1)} & +1 \end{pmatrix} \frac{1}{2G+1} \end{matrix} \end{aligned} \quad (E.37)$$

wobei die l -Werte sich um 1 unterscheiden müssen, d.h. $|l - l'| = 1$.

Konstruktion einer endlichen Basis

Um die Eigenzustände aus Gl. (E.15) numerisch zu berechnen, müssen wir eine endliche Anzahl von Basiszuständen konstruieren. Dabei gehen wir von der Lösung des Vakuumproblems Gl. (E.32) aus. Da nur die Parität und der Grand-Spin G sowie dessen z -Komponente M gute Quantenzahlen sind, mischen die beiden Spinoren mit $j = G + \frac{1}{2}$ und $j = G - \frac{1}{2}$. Wir werden nicht direkt die Spinoren aus (E.32) mit $\pm \epsilon$ sondern Zustände, die nur aus einer reinen oberen oder unteren Komponente bestehen, verwenden. Unsere Notation für die Basisspinoren (in der Ortsdarstellung) ist die folgende:

(1) Für Zustände mit natürlicher G -Parität $(-)^G = (-)^l$:

$$\begin{aligned} \langle \vec{r} | 1 \ k \ G \ M \ n \rangle &= \mathcal{N} \begin{pmatrix} i j_l(kr) \langle \Omega | l j GM \rangle \\ 0 \end{pmatrix} & G = l, \ j = G + \frac{1}{2} \\ \langle \vec{r} | 2 \ k \ G \ M \ n \rangle &= \mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 \\ j_l(kr) \langle \Omega | \bar{l} j GM \rangle \end{pmatrix} & G = l, \ j = G + \frac{1}{2}, \ \bar{l} = l + 1 \\ \langle \vec{r} | 3 \ k \ G \ M \ n \rangle &= \mathcal{N} \begin{pmatrix} i j_l(kr) \langle \Omega | l j GM \rangle \\ 0 \end{pmatrix} & G = l, \ j = G - \frac{1}{2} \\ \langle \vec{r} | 4 \ k \ G \ M \ n \rangle &= \mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 \\ j_l(kr) \langle \Omega | \bar{l} j GM \rangle \end{pmatrix} & G = l, \ j = G - \frac{1}{2}, \ \bar{l} = l - 1 \end{aligned} \quad (E.38)$$

(2) Für Zustände mit unnatürlicher G -Parität $(-)^G = (-)^{l+1}$:

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{r} | 1 \ k \ G \ M \ u \rangle &= \mathcal{N} \begin{pmatrix} i j_l(kr) \langle \Omega | l j G M \rangle \\ 0 \end{pmatrix} & G = l - 1, \ j = G + \frac{1}{2} \\
 \langle \bar{r} | 2 \ k \ G \ M \ u \rangle &= \mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 \\ j_{\bar{l}}(kr) \langle \Omega | \bar{l} j G M \rangle \end{pmatrix} & G = l - 1, \ j = G + \frac{1}{2}, \ \bar{l} = l - 1 \\
 \langle \bar{r} | 3 \ k \ G \ M \ u \rangle &= \mathcal{N} \begin{pmatrix} i j_l(kr) \langle \Omega | l j G M \rangle \\ 0 \end{pmatrix} & G = l + 1, \ j = G - \frac{1}{2} \\
 \langle \bar{r} | 4 \ k \ G \ M \ u \rangle &= \mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 \\ j_{\bar{l}}(kr) \langle \Omega | \bar{l} j G M \rangle \end{pmatrix} & G = l + 1, \ j = G - \frac{1}{2}, \ \bar{l} = l + 1
 \end{aligned} \tag{E.39}$$

Im Falle $G = 0$ entfallen die entsprechenden Zustände $|3\rangle$ und $|4\rangle$.

Durch Einführung einer endlichen Kastenlänge D mit der Forderung:

$$j_G(k_n D) = 0 \tag{E.40}$$

wird die Basis diskretisiert. Der Index n läuft von 0 bis N , wobei die Anzahl der k -Werte N durch die Bedingung $k < k_{max}$ limitiert wird.

Die Parameter D und k_{max} sind dabei so groß zu wählen, daß sämtliche in dieser Basis berechneten Größen bei weiterer Erhöhung dieser Parameter stabil bleiben. In unseren aktuellen numerischen Rechnungen erwiesen sich dabei Werte von $D = 10$ und $k_{max} = 5$ (in den skalierten Einheiten von Gl. (E.3)) als ausreichend. Die numerische Stabilität wurde in allen Fällen durch Variation des Parametersatzes D und k_{max} überprüft. Wir möchten in diesem Zusammenhang ausdrücklich darauf hinweisen, daß der numerische Maximalimpuls k_{max} nicht das geringste mit dem physikalischen Abschneideparameter Λ zu tun hat. k_{max} ist ein rein numerischer Parameter, der nur dazu dient, die Anzahl der Basisvektoren endlich zu halten, um eine Diagonalisierung mit dem Computer zu ermöglichen. Numerisch unterscheiden sich beide Größen ebenfalls erheblich. So liegt bei Konstituentenmassen $M \approx 400 \text{ MeV}$ der physikalische Abschneideparameter Λ in der Größenordnung $600 - 700 \text{ MeV}$, während $k_{max} \approx 2000 \text{ MeV}$ ist. Diese Philosophie behalten wir auch im Falle der scharfen Abschnitte im Impulsraum bei.

Die Normintegrale über die Radialkoordinate können explizit berechnet werden ([AS], Formel 11.4.5):

$$\begin{aligned}
 \int_0^D j_G(k_n r) j_G(k_m r) r^2 dr &= D^3 \int_0^1 j_G(k_n D x) j_G(k_m D x) x^2 dx \\
 &= D^3 \int_0^1 j_{G \pm 1}(k_n D x) j_{G \pm 1}(k_m D x) x^2 dx \\
 &= \delta_{nm} \frac{D^3}{2} [j'_G(k_n D)]^2 = \delta_{nm} \frac{D^3}{2} [j_{G \pm 1}(k_n D)]^2
 \end{aligned} \tag{E.41}$$

Somit ist die Normierungskonstante $\mathcal{N}$ unabhängig vom Basisvektor durch:

$$\mathcal{N} = \sqrt{\frac{2}{D^3}} |j_{G\pm 1}(k_n D)| \quad (E.42)$$

gegeben.

Wir können nun die Überlappes des 1-Teilchen-Hamiltonoperators h (E.15) in den Basiszuständen (E.38, E.39) berechnen. Wegen der Hermitizität von h und der Phasenwahl der Basiszustände ist die Matrix reellwertig und symmetrisch. Ferner sind die Matrixelemente bezüglich der Quantenzahl M entartet. Die Berechnung sowie die Diagonalisierung der Matrix für h kann somit separat für jedes G^π und unabhängig von M durchgeführt werden. Bei der Berechnung der Gesamtenergie braucht man dann nur mehr in jedem Summanden mit festem G^π mit dem Entartungsfaktor $2G+1$ zu multiplizieren.

Es ist:

$$\begin{aligned} \langle 1G^\pi M k_n | \hat{t} | 2G^\pi M k_m \rangle &= -S_\kappa k_n \delta_{nm} \\ \langle 3G^\pi M k_n | \hat{t} | 4G^\pi M k_m \rangle &= -S_\kappa k_n \delta_{nm} \end{aligned} \quad (E.43)$$

mit $\hat{t} = -i\gamma_5 \sigma_r \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}(1 + \beta \vec{K}) \right]$. Ferner definieren wir:

$$\begin{aligned} \sigma_{nm}^I &= \mathcal{N}^2 \int_0^D j_l(k_n Dr) \sigma(r) j_l(k_m Dr) r^2 dr \\ \pi_{nm}^{II} &= \mathcal{N}^2 \int_0^D j_l(k_n Dr) \pi(r) j_l(k_m Dr) r^2 dr \end{aligned} \quad (E.44)$$

Zusammenfassend erhalten wir als die zu diagonalisierende Matrix:

$$H_{G\Pi} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & 0 \\ 0 & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & 0 & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \quad (E.45)$$

wobei die $N \times N$ Untermatrizen (N ist die Anzahl der k -Werte) folgendermaßen lauten:

(1) Im Falle natürlicher G-Parität ($\Pi = n$):

$$\begin{aligned} (H_{11})_{nm} &= \sigma_{nm}^G \\ (H_{22})_{nm} &= -\sigma_{nm}^{G+1} \\ (H_{33})_{nm} &= \sigma_{nm}^G \\ (H_{44})_{nm} &= -\sigma_{nm}^{G-1} \\ (H_{12})_{nm} &= +\frac{1}{2G+1} \pi_{nm}^{G,G+1} + k_n \delta_{nm} \\ (H_{21})_{nm} &= +\frac{1}{2G+1} \pi_{nm}^{G+1,G} + k_n \delta_{nm} \\ (H_{34})_{nm} &= -\frac{1}{2G+1} \pi_{nm}^{G,G-1} - k_n \delta_{nm} \end{aligned} \quad (E.46)$$

$$\begin{aligned}
(H_{43})_{nm} &= -\frac{1}{2G+1} \pi_{nm}^{G-1,G} - k_n \delta_{nm} \\
(H_{14})_{nm} &= -\frac{2\sqrt{G(G+1)}}{2G+1} \pi_{nm}^{G,G-1} \\
(H_{23})_{nm} &= -\frac{2\sqrt{G(G+1)}}{2G+1} \pi_{nm}^{G+1,G} \\
(H_{32})_{nm} &= -\frac{2\sqrt{G(G+1)}}{2G+1} \pi_{nm}^{G,G+1} \\
(H_{41})_{nm} &= -\frac{2\sqrt{G(G+1)}}{2G+1} \pi_{nm}^{G-1,G}
\end{aligned}$$

(2) Im Falle unnatürlicher G-Parität ($\Pi = u$):

$$\begin{aligned}
(H_{11})_{nm} &= \sigma_{nm}^{G+1} \\
(H_{22})_{nm} &= -\sigma_{nm}^G \\
(H_{33})_{nm} &= \sigma_{nm}^{G-1} \\
(H_{44})_{nm} &= -\sigma_{nm}^G \\
(H_{12})_{nm} &= +\frac{1}{2G+1} \pi_{nm}^{G+1,G} - k_n \delta_{nm} \\
(H_{21})_{nm} &= +\frac{1}{2G+1} \pi_{nm}^{G,G+1} - k_n \delta_{nm} \\
(H_{34})_{nm} &= -\frac{1}{2G+1} \pi_{nm}^{G-1,G} + k_n \delta_{nm} \\
(H_{43})_{nm} &= -\frac{1}{2G+1} \pi_{nm}^{G,G-1} + k_n \delta_{nm} \\
(H_{14})_{nm} &= -\frac{2\sqrt{G(G+1)}}{2G+1} \pi_{nm}^{G+1,G} \\
(H_{23})_{nm} &= -\frac{2\sqrt{G(G+1)}}{2G+1} \pi_{nm}^{G,G-1} \\
(H_{32})_{nm} &= -\frac{2\sqrt{G(G+1)}}{2G+1} \pi_{nm}^{G-1,G} \\
(H_{41})_{nm} &= -\frac{2\sqrt{G(G+1)}}{2G+1} \pi_{nm}^{G,G+1}
\end{aligned} \tag{E.47}$$

Kontinuuumslimes

Es ist instruktiv, das Ergebnis der Diagonalisierung in der endlichen Basis für einzelne Eigenwerte ϵ_λ mit dem Kontinuuumslimes, welcher der direkten Lösung der Differentialgleichung $\hbar\phi_\lambda = \epsilon_\lambda\phi_\lambda$ entspricht, zu vergleichen, und damit zusätzlich die Güte der Basis zu testen. Wir haben dies explizit am Beispiel des Valenzquarks ($G = 0$, gerade G-Parität) getan. Aufgrund seiner Quantenzahlen, kann man für dieses Orbital im Ortsraum den allgemeinen Ansatz:

$$\phi_{val}(\vec{r}) = \langle \vec{r} | val \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} -u(r) \langle \Omega | l=0 \ j=\frac{1}{2} \ G=0 \ M=0 \rangle \\ +iv(r) \langle \Omega | l=1 \ j=\frac{1}{2} \ G=0 \ M=0 \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} u(r) \chi_h \\ iv(r) \sigma_r \chi_h \end{pmatrix} \tag{E.48}$$

machen. Dabei bezeichnet χ_h den sphärischen Hedgehog-Spinor:

$$\chi_h = \frac{1}{\sqrt{2}} |u \downarrow -d \uparrow \rangle \tag{E.49}$$

mit den üblichen Notationen: $u = \chi_{t=+\frac{1}{2}}$, $d = \chi_{t=-\frac{1}{2}}$, $\uparrow = \chi_{s=+\frac{1}{2}}$, $\downarrow = \chi_{s=-\frac{1}{2}}$. Die Radialwellenfunktionen $u(r)$ und $v(r)$ sind dabei gemäß:

$$\int dr r^2 [u(r)^2 + v(r)^2] = 1 \quad (E.50)$$

normiert. Setzt man nun den Ausdruck für h in der sphärischen Darstellung (E.15) in die Dirac-Gleichung $h\phi_{val} = \epsilon_{val}\phi_{val}$ mit dem Ansatz Gl. (E.48) ein, so erhält man zwei gekoppelte, lineare Differentialgleichungen erster Ordnung für u und v . In den unskalierten physikalischen Einheiten (vgl. Gl. (E.3)) lauten diese:

$$\begin{aligned} \frac{dv(r)}{dr} + 2\frac{v(r)}{r} + g\sigma(r)u(r) + g\pi(r)v(r) &= \epsilon_{val} u(r) \\ -\frac{du(r)}{dr} + g\pi(r)u(r) - g\sigma(r)v(r) &= \epsilon_{val} v(r) \end{aligned} \quad (E.51)$$

Wir haben uns davon überzeugt, daß das daraus erhaltene ϵ_{val} mit demjenigen aus dem Diagonalisierungsverfahren für die von uns verwendeten Kastenlängen D bis auf extrem geringe Abweichungen übereinstimmt. Dies bestätigt auch die relative Unempfindlichkeit von D bei dessen weiterer Vergrößerung, so daß daraus geschlossen werden kann, daß der Kontinuumslimit für unsere D bereits erreicht ist.

Anhang F. MATRICELEMENTE WICHTIGER OPERATOREN

Gemäß den Überlegungen in Anhang E kann jeder Eigenzustand ϕ_λ des 1-Teilchen Hamiltonoperators h durch die Quantenzahlen ϵ_λ , G , M , und Π charakterisiert werden. Die allgemeine Entwicklung eines solchen Eigenzustandes nach den Testzuständen (E.38, E.39) lautet:

$$|\phi(\epsilon_\lambda, G, M, \Pi)\rangle = \sum_{\substack{I=1,2,3,4 \\ n=1\dots N}} V_{\epsilon_\lambda, G, \Pi}^{kn, I} |I, k_n, G, M, \Pi\rangle \quad (F.1)$$

Die Größen $V_{\epsilon_\lambda, G, \Pi}^{kn, I}$ sind dabei die Komponenten der Eigenvektoren, die sich aus der Diagonalisierung der Matrix $H_{G\Pi}$ (E.45) ergeben. Wegen der Hermitizität von h können diese reell gewählt werden. Da die Quantenzahl M entartet ist, ist V unabhängig von M .

Sei nun $\mathcal{O}$ ein beliebiger Operator im Spin (Dirac)-Isospinraum. Der Erwartungswert von $\mathcal{O}$ in einem Basiszustand $|\phi(\epsilon_\lambda, G, M, \Pi)\rangle$ läßt sich dann nach Integration über den Raumwinkel Ω als:

$$\int d\Omega \langle q | \mathcal{O} | q \rangle_\lambda = \int d\Omega \bar{\phi}_{\epsilon_\lambda, G, M, \Pi}(\Omega) \mathcal{O} \phi_{\epsilon_\lambda, G, M, \Pi} = \int d\Omega \langle \phi(\epsilon_\lambda, G, M, \Pi) | \Omega \rangle \beta \mathcal{O} \langle \Omega | \phi(\epsilon_\lambda, G, M, \Pi) \rangle =$$

$$\mathcal{N}^2 \sum_{I, J, n, m} V_{\epsilon_\lambda, G, \Pi}^{kn, I} V_{\epsilon_\lambda, G, \Pi}^{km, J} j_{I(I)}(k_n r) j_{J(J)}(k_m r) [\mathcal{M}^{G\Pi}]_{I, J} \quad (F.2)$$

schreiben. Da $\mathcal{O}$ nur im Dirac-Isospinraum wirkt, ist die entsprechende Matrix unabhängig von n und m . Die Abhängigkeit von M verschwindet bei allen von uns betrachteten Operatoren wegen der Ω -Integration und liefert letztendlich wieder nur den Entartungsfaktor $2G+1$. Die imaginäre Einheit i in den Basisvektoren $|1\rangle$ und $|3\rangle$ wurde in die Definition der Matrix $[\mathcal{M}^{G\Pi}]$ gesteckt.

Im folgenden geben wir nun für eine Reihe von Operatoren $\mathcal{O}$, die im Laufe dieser Arbeit verwendet werden, die Matrix $[\mathcal{M}^{G\Pi}]$ explizit an.

(1) Baryon-Dichte: $\mathcal{O} = \beta$, $\beta \mathcal{O} = \mathcal{I}$

$$[\mathcal{M}^{G\Pi}]_{IJ} = \delta_{IJ} \quad (F.3)$$

(2) Skalar-Isoskalare Dichte: $\mathcal{O} = \mathcal{I}$, $\beta \mathcal{O} = \beta$

$$[\mathcal{M}^{G\Pi}]_{IJ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (F.4)$$

(3) Pseudoskalar-Isovektorielle Dichte: $\mathcal{O} = i\vec{\tau}\hat{r}\gamma_5$

$$[\mathcal{M}^{G\Pi}]_{IJ} = \frac{1}{2G+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & (-2)\sqrt{G(G+1)} \\ 1 & 0 & (-2)\sqrt{G(G+1)} & 0 \\ 0 & (-2)\sqrt{G(G+1)} & 0 & -1 \\ (-2)\sqrt{G(G+1)} & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (F.5)$$

- (4) Axiale Dichte ($L = 0$): $\mathcal{O} = \gamma^3 \gamma_5 \frac{\tau^3}{2}$, $\beta \mathcal{O} = \frac{\sigma^3 \tau^3}{2}$ bzw. $\beta \mathcal{O} = \frac{1}{2} \sigma_0^{(1)} \tau_0^{(1)}$, wobei die Notation für sphärische Tensoroperatoren [VM88]:

$A^{(L)}$: sphärischer Tensoroperator der Stufe L , Komponente M .

$[A \otimes B]^{(L)}$: Sphärisches Tensorprodukt vom Rang L :

$$[A \otimes B]^{(L)} := \sum_{M_1 M_2} C(L_1, L_2, L | M_1 M_2 M) A_{M_1}^{(L_1)} B_{M_2}^{(L_2)} \quad (F.6)$$

verwendet wurde.

$$[\mathcal{M}^{Gn}]_{IJ} = \frac{1}{3} \frac{1}{2G+1} \begin{pmatrix} 2G+3 & 0 & -4\sqrt{G(G+1)} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4\sqrt{G(G+1)} & 0 & 2G-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (F.7)$$

$$[\mathcal{M}^{Gu}]_{IJ} = \frac{1}{3} \frac{1}{2G+1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2G+3 & 0 & -4\sqrt{G(G+1)} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4\sqrt{G(G+1)} & 0 & 2G-1 \end{pmatrix}$$

- (5) Axiale Dichte ($L = 2$): $\beta \mathcal{O} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [Y^{(2)} \otimes \sigma^{(1)}]_0^{(1)} \tau_0^{(1)}$ (mit obiger Notation)

$$[\mathcal{M}^{Gn}]_{IJ} = \frac{1}{3} \frac{1}{2G+1} \begin{pmatrix} -G & 0 & -\sqrt{G(G+1)} & 0 \\ 0 & G+2 & 0 & -3\sqrt{G(G+1)} \\ -\sqrt{G(G+1)} & 0 & -(G+1) & 0 \\ 0 & -3\sqrt{G(G+1)} & 0 & G-1 \end{pmatrix}$$

$$[\mathcal{M}^{Gu}]_{IJ} = \frac{1}{3} \frac{1}{2G+1} \begin{pmatrix} G+2 & 0 & -3\sqrt{G(G+1)} & 0 \\ 0 & -G & 0 & -\sqrt{G(G+1)} \\ -3\sqrt{G(G+1)} & 0 & G-1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{G(G+1)} & 0 & -(G+1) \end{pmatrix} \quad (F.8)$$

Bei der Berechnung von (4) und (5) wurden explizit die Tensorkopplungsidentitäten:

$$\int d\Omega \sum_M \langle l(I), j(I), G, M | \Omega \rangle \left(\frac{\sigma_0^{(1)} \tau_0^{(1)}}{2} \right) \langle \Omega | l(J), j(J), G, M \rangle =$$

$$= (2G+1) (-)^{G+l(I)+j(I)+j(J)+1} \delta_{l(I)l(J)} \sqrt{(2j(I)+1)(2j(J)+1)}$$

$$\begin{Bmatrix} j(I) & j(J) & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & G \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j(I) & j(J) & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & l(I) \end{Bmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} & \int d\Omega \sum_M \langle l(I), j(I), G, M | \Omega \rangle \left([Y^{(2)} \otimes \sigma^{(1)}]_0^{(1)} \tau_0^{(1)} \right) \langle \Omega | l(J), j(J), G, M \rangle = \\ & = \frac{3}{\sqrt{2}} (2G+1) (-)^{l(I)+j(I)+j(J)} C(l(J) l(I) 2 | 000) \\ & \quad \sqrt{(2G+1)(2l(I)+1)(2l(J)+1)(2j(I)+1)(2j(J)+1)} \\ & \quad \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ j(I) & \frac{1}{2} & G \\ j(J) & \frac{1}{2} & G \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ j(I) & \frac{1}{2} & l(I) \\ j(J) & \frac{1}{2} & l(J) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

verwendet.

Im Falle $G = 0$ entfallen jeweils die dritten und vierten Komponenten der Matrix $\mathcal{M}$.

Anhang G. GRADIENTENENTWICKLUNG DES BARYONENSTROMS

Wir betrachten den Erwartungswert der Baryonenstromdichte ρ^μ des Fermion-1-Schleifen Beitrages (Diracsees) für den Dirac-Operator $i\Delta$ Gl. (C.1) im Falle der nichtlinearen Darstellung und $\xi^{i=0} = 0 \iff \text{Tr}_\lambda \xi = 0 \iff U \in SU(n)$. Nach Gl. (3.16) ist:

$$\langle \rho^\mu(x) \rangle = \langle x | \text{Tr}_{\gamma\lambda F} \left[(i\Delta)^{-1} \gamma^\mu \right] | x \rangle \quad (G.1)$$

Es ist:²⁸⁾

$$(i\Delta)^{-1} = [i\hat{\partial} - MU_5]^{-1} = (-) \left[(\partial_\nu \partial^\nu + M^2) + iM\hat{\partial}U_5^\dagger \right]^{-1} (i\hat{\partial} + MU_5) \quad (G.2)$$

und daher:

$$\begin{aligned} \langle \rho^\mu(x) \rangle - \langle \rho^\mu(x) \rangle_V = \\ (-) \langle x | \text{Tr}_{\gamma\lambda F} \left[\gamma^\mu \left((\partial_\nu \partial^\nu + M^2 + iM\hat{\partial}U_5^\dagger)^{-1} (i\hat{\partial} + MU_5) - (\partial_\nu \partial^\nu + M^2)^{-1} (i\hat{\partial} + M) \right) \right] | x \rangle \end{aligned} \quad (G.3)$$

In diesem Ausdruck wird nun die Reihenentwicklung:

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BA^{-1} + \dots = A^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} (-)^m (BA^{-1})^m \quad (G.4)$$

mit:

$$\begin{aligned} A &:= (\partial_\nu \partial^\nu + M^2) =: G^{-1} \\ B &:= i\hat{\partial}U_5^\dagger \end{aligned} \quad (G.5)$$

durchgeführt.

Der Beitrag für $m = 0$ hebt sich wegen $\text{Tr}_\lambda U_5 = 0$ nach Subtraktion des Vakuumbeitrages weg. Die Terme mit $m = 1$ und $m = 2$ verschwinden ebenfalls nach Tr_γ oder Tr_λ -Bildung. Für $m = 3$ bleibt schließlich:

$$\langle \rho^\mu(x) \rangle - \langle \rho^\mu(x) \rangle_V = i^3 M^4 N_F \text{Tr}_{\gamma\lambda} \langle x | \left[\gamma^\mu G(\hat{\partial}U_5) G(\hat{\partial}U_5) G(\hat{\partial}U_5) G U_5^\dagger \right] | x \rangle + \dots \quad (G.6)$$

übrig. G ist diagonal in der Impulsraumbasis $|p_E\rangle$. In der niedrigsten Gradientenentwicklung variiert $\hat{\partial}U_5$ nicht mit dem Ort [AF84, AF85]. Nach Einschieben vollständiger Sätze von Orts- bzw. Impulseigenfunktionen $|x_E\rangle$ bzw. $|p_E\rangle$ erhält man:

$$\begin{aligned} \langle \rho^\mu(x) \rangle - \langle \rho^\mu(x) \rangle_V = \\ i^3 M^4 N_F \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p_E^2 + M^2} \right)^4 \text{Tr}_{\gamma\lambda} \left[\gamma^\mu (\hat{\partial}U_5(x)) (\hat{\partial}U_5(x)) (\hat{\partial}U_5(x)) U_5^\dagger(x) \right] + \dots \end{aligned} \quad (G.7)$$

²⁸⁾Strenggenommen handelt es sich hierbei um die Quarkstromdichte. Die Baryonenstromdichte erhält man daraus nach Division durch N_F .

Unter Verwendung von:

$$\begin{aligned}
 U_5 &= \frac{1}{2}(U + U^\dagger) + \frac{1}{2}\gamma_5(U - U^\dagger) \\
 UU^\dagger &= U^\dagger U = \mathcal{I} \\
 (\partial_\nu U^\dagger)U &= (-)U^\dagger(\partial_\nu U) \\
 \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p_E^2 + M^2} \right)^4 &= \frac{1}{96\pi^2 M^4}
 \end{aligned} \tag{G.8}$$

gelangt man nach Spurbildung über die γ -Matrizen schließlich zu dem berühmten Ausdruck für den

Anomalen Baryonenstrom nach Goldstone-Wilczek [GW81] und Witten [Wit83]:

$$\begin{aligned}
 \langle \rho^\mu(x) \rangle - \langle \rho^\mu(x) \rangle_V &= \frac{-N_F}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu_1\nu_2\nu_3} \text{Tr}_\lambda \left[(\partial_{\nu_1} U)(\partial_{\nu_2} U)(\partial_{\nu_3} U)U^\dagger \right] = \\
 &= \frac{-N_F}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu_1\nu_2\nu_3} \text{Tr}_\lambda [R_{\nu_1} R_{\nu_2} R_{\nu_3}] = \frac{+N_F}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu_1\nu_2\nu_3} \text{Tr}_\lambda [L_{\nu_1} L_{\nu_2} L_{\nu_3}]
 \end{aligned} \tag{G.9}$$

wobei die Rechts-Links-Felder R_ν und L_ν durch:

$$R_\nu = U \partial_\nu U^\dagger \quad L_\nu = U^\dagger \partial_\nu U \tag{G.10}$$

definiert sind. Zum gleichen Ergebnis kommt man durch $U(1)$ -'Eichung' des Wess-Zumino-Witten Terms (D.24) [Wit83], welchen man aus der derivativen Entwicklung des Imaginärteils der effektiven Wirkung erhält (vgl. Anhang D).

Für die Zeitkomponente (Baryondichte) gilt insbesondere:

$$\langle \rho^0(x) \rangle - \langle \rho^0(x) \rangle_V = \frac{N_F}{24\pi^2} \epsilon_{ijk} \text{Tr}_\lambda \left[(\partial_i U^\dagger)(\partial_j U)(\partial_k U^\dagger)U \right] + \dots \tag{G.11}$$

Wir untersuchen nun den speziellen, für uns interessanten Fall, daß U als $SU(2)$ -Hedgehog:

$$U(\vec{r}) = \cos \theta(r) + i(\vec{\tau}\vec{r}) \sin \theta(r) \tag{G.12}$$

vorliegt. Es ist dann [Bha88]:

$$\partial_i U = a\hat{r}_i + ib\tau_i + ic(\vec{\tau}\vec{r})\hat{r}_i \tag{G.13}$$

mit:

$$\begin{aligned}
 a &= -\sin \theta(r) \frac{d\theta}{dr} \\
 b &= \frac{\sin \theta(r)}{r} \\
 c &= \cos \theta(r) \frac{d\theta}{dr} - \frac{\sin \theta(r)}{r}
 \end{aligned} \tag{G.14}$$

und daher:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{ijk}(\partial_i U^\dagger)(\partial_j U) &= 2ib[-a(\vec{\tau} \times \hat{r})_k + (b+c)\tau_k - (\vec{\tau}\vec{r})\hat{r}_k] \\
 \epsilon_{ijk}(\partial_i U^\dagger)(\partial_j U)(\partial_k U^\dagger) &= 6b^2 \frac{d\theta}{dr} U^\dagger
 \end{aligned} \tag{G.15}$$

was nach Einsetzen in (G.11) auf:

$$\langle \rho^0(x) \rangle - \langle \rho^0(x) \rangle_V = \frac{N_F}{2\pi^2} \frac{d\theta}{dr} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} + \dots \quad (G.16)$$

führt. Die Baryonenzahl erhält man durch räumliche Integration $\int d^3r$ (und Division durch N_F). Aufgrund der Identität:

$$2 \sin^2 \theta \frac{d\theta}{dr} = \frac{d}{dr} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right] \quad (G.17)$$

vereinfacht sich der entsprechende Ausdruck zu:

$$B = \frac{1}{\pi} [\theta(\infty) - \theta(0)] + \frac{1}{2\pi} [\sin(2\theta(0)) - \sin(2\theta(\infty))] \quad (G.18)$$

und falls $\theta(\infty) = 0$ (was erfüllt ist, da die Mesonfelder für $r \rightarrow \infty$ ihre Vakuumwerte annehmen):

$$B = \frac{\sin(2\theta(0))}{2\pi} - \frac{\theta(0)}{\pi} \quad (G.19)$$

Setzt man $\theta(0) = -n\pi$, so erkennt man, daß für ganzzahlige Windungszahlen n die gradientenentwickelte Baryonenzahl mit n übereinstimmt und somit die Gradientenentwicklung exakt gilt. Falls n nicht ganzzahlig ist, ist auch B in Gl. (G.19) im Gegensatz zu dem exakt berechneten B aus (4.44) nicht ganzzahlig, woraus man schließt, daß die Gradientenentwicklung für B in keinem Fall konvergiert. Allgemein erhält man als eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit der Gradientenentwicklung aus (G.4) und der Vernachlässigung der Ortsabhängigkeit von ∂U_5 in (G.6), daß

$$|\partial U| \ll M \quad (G.20)$$

sein muß. Für große Abstände $r \rightarrow \infty$ ist dies immer gegeben, das heißt die Gradientenentwicklung für die Dichten (G.9, G.11, G.16) ist bei genügend großen r immer erfüllt. Im Falle der Baryonenzahl, die ein Radialintegral über die Dichte darstellt, muß diese Bedingung an jedem Ort r gelten. Aus Gl. (G.13) liest man ab, daß dazu notwendigerweise sich bei kleinen Abständen wie $\theta(r) \rightarrow n\pi + \alpha r^\kappa$ mit ganzzahligem n und $\kappa \geq 1$ verhalten muß, was unsere obige Behauptung für $\theta(0)$ bestätigt. Betrachtet man zum Beispiel ein lineares Profil mit der Ausdehnung R :

$$\theta(r) = \begin{cases} n\pi \left(1 - \frac{r}{R}\right) & \text{falls } r < R \\ 0 & \text{falls } r \geq R \end{cases} \quad (G.21)$$

so ergibt sich die Abschätzung:

$$\left| \frac{n\pi}{R} \right| \ll M \quad (G.22)$$

Anhang H. ERWARTUNGSWERT EINER ZWEI-TEILCHEN-OBSERVABLE

Wir betrachten im statischen Fall die im Dirac-Isospinraum wirkenden Ein- bzw. Zwei-Teilchen-Observablen

$$\begin{aligned} [K_{1T}] &= \int d^3x \bar{q}_\alpha(x) \mathcal{K}_{\alpha\beta} q_\beta(x) \\ [K^2_{2T}] &= \int d^3x_1 d^3x_2 \bar{q}_{\alpha_1}(x_1) \bar{q}_{\alpha_2}(x_2) \mathcal{K}_{\alpha_1\beta_1} \mathcal{K}_{\alpha_2\beta_2} q_{\beta_1}(x_1) q_{\beta_2}(x_2) \end{aligned} \quad (H.1)$$

Mit Hilfe der Antivertauschungsregeln für die Feldoperatoren

$$\begin{aligned} \{q_\alpha(x), q^\dagger_\beta(y)\} &= \delta^3(x-y) \delta_{\alpha\beta} \\ \{q_\alpha(x), q_\beta(y)\} &= 0 \\ \{q^\dagger_\alpha(x), q^\dagger_\beta(y)\} &= 0 \end{aligned} \quad (H.2)$$

für die Feldoperatoren q und $q^\dagger$ können wir $[K^2_{2T}]$ in den Ein-Teilchen-Operator $[K^2_{1T}]$ und das Quadrat des Ein-Teilchen-Operators $[K_{1T}]$ zerlegen:

$$[K^2_{2T}] = [K^2_{1T}] - [K_{1T}]^2 \quad (H.3)$$

mit:

$$\begin{aligned} [K^2_{1T}] &= \int d^3x \bar{q}_\alpha(x) [\mathcal{K}\beta\mathcal{K}]_{\alpha\beta} q_\beta(x) \\ [K_{1T}]^2 &= \left[\int d^3x_1 \bar{q}_{\alpha_1}(x_1) \mathcal{K}_{\alpha_1\beta_1} q_{\beta_1}(x_1) \right] \left[\int d^3x_2 \bar{q}_{\alpha_2}(x_2) \mathcal{K}_{\alpha_2\beta_2} q_{\beta_2}(x_2) \right] \end{aligned} \quad (H.4)$$

Der Erwartungswert des ersten Anteils $\langle [K^2_{1T}] \rangle$ kann wie in Kapitel 4 beschrieben wurde (Gln. (4.29, 4.31, 4.32, 4.47)) berechnet werden, wobei in den entsprechenden Gleichungen nur $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}\beta\mathcal{K}$ zu setzen ist. Für den zweiten Teil führen wir zunächst die Notation:

$$e^{-S(\kappa)} := Z(\kappa) := \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} e^{-\int d^4x \bar{q}(-iD - \kappa K)q} \quad (H.5)$$

ein. Der Erwartungswert von $[K_{1T}]^2$ lautet dann:

$$\begin{aligned} \langle [K_{1T}]^2 \rangle &= \frac{1}{T^2} \frac{\mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} \left[\int d^4x \bar{q}(x) \mathcal{K} q(x) \right]^2 e^{-\int d^4x \bar{q}(-iD)q}}{\mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} e^{-\int d^4x \bar{q}(-iD)q}} \\ &= \frac{1}{T^2} \left[\frac{1}{Z(\alpha)} \frac{\delta^2}{\delta\alpha^2} Z(\alpha) \right]_{\alpha=0} = \frac{1}{T^2} \frac{1}{Z(\alpha)} \left[e^{-S(\alpha)} \left(\frac{\delta S(\alpha)}{\delta\alpha} \right)^2 - e^{-S(\alpha)} \frac{\delta^2 S(\alpha)}{\delta\alpha^2} \right]_{\alpha=0} \\ &= \frac{1}{T^2} \left(\frac{\delta S(\alpha)}{\delta\alpha} \right)^2 \Big|_{\alpha=0} - \frac{1}{T^2} \frac{\delta^2 S(\alpha)}{\delta\alpha^2} \Big|_{\alpha=0} = \langle K \rangle^2 - \frac{1}{T^2} \frac{\delta^2 S(\alpha)}{\delta\alpha^2} \Big|_{\alpha=0} \end{aligned} \quad (H.6)$$

Nun ist aber für zeituabhängige Mesonfelder $S(\alpha) \propto T$, so daß der Term $\frac{1}{T^2} \frac{\delta^2 S(\alpha)}{\delta\alpha^2} \Big|_{\alpha=0}$ im Grundzustand, d.h.: im Grenzfall $T \rightarrow \infty$ verschwindet. Dies bedeutet, daß

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle [K_{1T}]^2 \rangle = \langle [K_{1T}] \rangle^2 \quad (H.7)$$

gilt.

Als Beispiel betrachten wir den Fall des Isospins T^a , der durch $\mathcal{K} \rightarrow \beta \frac{\tau^a}{2}$ gegeben ist. Hier ist zunächst $\langle [T^a]_{1T} \rangle = 0$. Ferner sind alle Ein-Teilchen-Zustände $|\lambda\rangle$ Eigenzustände zu $[T^2]_{1T}$ mit dem gleichen Eigenwert $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) = \frac{3}{4}$, so daß nach Gln. (4.31, 4.47) zu $\langle [\tilde{T}_{2T}^2] \rangle$ im Grundzustand genau die Valenzquarks mit

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle [\tilde{T}_{2T}^2] \rangle = \langle [\tilde{T}_{1T}^2] \rangle = N_F \frac{3}{4} B = N_F \frac{3}{4} B_{val} = \frac{9}{4} \quad (H.8)$$

beitragen, was auch anschaulich zu erwarten ist.

Anhang I. BERECHNUNG DES TRÄGHEITSMOMENTES

In diesem Anhang sind einige technische Details für die analytische Berechnung des Trägheitsmomentes Θ der Valenzquarks im Kontinuumlimes sowie der Seequarks im EZ-Regularisierungsschema skizziert.

I.1. DER VALENZANTEIL VON Θ IM KONTINUUMLIMES

Es ist:

$$\begin{aligned} S_{eff}^{val}(\mu, \Omega) &= S_{eff}(\mu, \Omega) - S_{eff}(0, \Omega) \\ &= (-T) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \{ \text{Spln}[-iu + h(\Omega) - \mu] - \text{Spln}[-iu + h(\Omega)] \} \end{aligned} \quad (I.1)$$

wobei

$$h(\Omega) = h - i \frac{\Omega^a \tau^a}{2} \quad (I.2)$$

den Ein-Teilchen-Hamiltonoperator im rotierenden System bezeichnet. O.B.d.A. können wir die Rotation um die z -Achse ausführen, d.h. wir setzen $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$. Es ist dann

$$\Theta_{val} = \frac{1}{T} \frac{\delta^2 S_{eff}^{val}(\mu, \Omega)}{\delta \Omega^2} \Big|_{\Omega=0} \quad (I.3)$$

Nach Gl. (4.41) ist $S_{eff}^{val}(\mu, \Omega)$ durch den Ausdruck

$$S_{eff}^{val}(\mu, \Omega) = TN_F \sum_{0 < \epsilon_\lambda(\Omega) < \mu} [\epsilon_\lambda(\Omega) - \mu] \quad (I.4)$$

gegeben, falls $\epsilon_\lambda(\Omega)$ die Lösung des Eigenwertproblems

$$h(\Omega)|\lambda(\Omega)\rangle = \epsilon_\lambda(\Omega)|\lambda(\Omega)\rangle \quad (I.5)$$

ist. Für hinreichend kleine Ω liegen zwischen 0 und μ genauso viele Zustände wie im ungestörten Falle $\Omega = 0$, also für $B = 1$ genau das Valenzorbital $|val\rangle$. Unsere Aufgabe besteht demnach darin, das Eigenwertproblem Gl. (I.5) perturbativ in Ω für $\lambda = val$ zu lösen. Dazu entwickeln wir:

$$\begin{aligned} |val(\Omega)\rangle &= |\phi_0\rangle + (i\Omega)|\phi_1\rangle + (i\Omega)^2|\phi_2\rangle + \dots \\ \epsilon_{val}(\Omega) &= \epsilon_0 + (i\Omega)\epsilon_1 + (i\Omega)^2\epsilon_2 + \dots \end{aligned} \quad (I.6)$$

mit der Normierung

$$\begin{aligned} \langle val(\Omega) | val(\Omega) \rangle &= 1 \\ \langle \phi_0 | \phi_0 \rangle &= 1 \end{aligned} \quad (I.7)$$

woraus bei geeigneter Phasenwahl:

$$\begin{aligned} \langle \phi_0 | \phi_1 \rangle &= 0 \\ \langle \phi_0 | \phi_2 \rangle &= \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle \end{aligned} \quad (I.8)$$

folgt. Einsetzen der Reihenentwicklung in die Eigenwertgleichung (I.5) und Ordnen nach Potenzen von Ω liefert schließlich:

Ω^0 :

$$h|\phi_0\rangle = \epsilon_0|\phi_0\rangle \quad (I.9)$$

also $|\phi_0\rangle = |val\rangle$, $\epsilon_0 = \epsilon_{val}$. Die Ortsdarstellung des ungestörten Valenzorbitals lautet nach Gl. (E.48):

$$\langle \vec{r}|\phi_0\rangle = \langle \vec{r}|val\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} -u(r)\langle \Omega|l=0, j=\frac{1}{2}, G=0, M=0\rangle \\ +iv(r)\langle \Omega|\bar{l}=1, j=\frac{1}{2}, G=0, M=0\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} u(r)\chi_h \\ iv(r)\sigma_r\chi_h \end{pmatrix} \quad (I.10)$$

mit der Normierung:

$$\int dr r^2 [u(r)^2 + v(r)^2] = 1 \quad (I.11)$$

Ω^1 :

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= -\langle \phi_0|\frac{r^3}{2}|\phi_0\rangle = 0 \\ (h - \epsilon_0)|\phi_1\rangle &= \frac{r^3}{2}|\phi_0\rangle \end{aligned} \quad (I.12)$$

Da $|\phi_0\rangle$ die Quantenzahlen $l=0$, $j=\frac{1}{2}$, $G=M=0$ besitzt und r^3 die z -Komponente eines Isektors ist, kann man für $|\phi_1\rangle$ in der Ortsdarstellung den Ansatz:

$$\langle \vec{r}|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} A(r)\langle \Omega|0, \frac{1}{2}, 1, 0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3}B(r)\langle \Omega|2, \frac{3}{2}, 1, 0\rangle \\ -\frac{i}{3}(C(r) - 2D(r))\langle \Omega|1, \frac{1}{2}, 1, 0\rangle + \frac{i\sqrt{2}}{3}(C(r) + D(r))\langle \Omega|1, \frac{3}{2}, 1, 0\rangle \end{pmatrix} \quad (I.13)$$

machen. Einsetzen in Gl. (I.12) liefert bei Verwendung der in Anhang E aufgestellten Regeln für die Anwendung von h auf die Basiszustände $|l, j, G, M\rangle$ ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem 1.Ordnung für die Funktionen A, B, C, D [CB86]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(-A(r) + \frac{2}{3}B(r) \right) &= -2\frac{B(r)}{r} - g\pi(r) \left(A(r) - \frac{2}{3}B(r) \right) + (g\sigma(r) + \epsilon_{val})C(r) + \frac{v(r)}{2} \\ \frac{d}{dr} \left(A(r) + \frac{1}{3}B(r) \right) &= -\frac{B(r)}{r} - g\pi(r) \left(A(r) + \frac{1}{3}B(r) \right) + (g\sigma(r) + \epsilon_{val})D(r) - \frac{v(r)}{2} \\ \frac{d}{dr} \left(C(r) - \frac{2}{3}D(r) \right) &= -\frac{2}{3}\frac{C(r) - 2D(r)}{r} - \frac{1}{3}g\pi(r) (C(r) + 2D(r)) - (g\sigma(r) - \epsilon_{val})A(r) + \frac{u(r)}{2} \\ -\frac{d}{dr} (C(r) + D(r)) &= -\frac{C(r) + D(r)}{r} + g\pi(r) (C(r) - D(r)) - (g\sigma(r) - \epsilon_{val})B(r) \end{aligned} \quad (I.14)$$

mit den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} B(0) &= C(0) = D(0) = 0 \\ A(\infty) &= B(\infty) = C(\infty) = D(\infty) = 0 \end{aligned} \quad (I.15)$$

welches numerisch mit Standardverfahren für feste Felder $u(r)$, $v(r)$, $\sigma(r)$, $\pi(r)$ des selbstkonsistenten Profils gelöst werden kann.

Ω^2 :

$$(h - \epsilon_0)|\phi_2\rangle = \frac{\tau^3}{2}|\phi_1\rangle + \epsilon_2|\phi_0\rangle \quad (I.16)$$

und daher

$$\epsilon_2 = -\langle\phi_0|\frac{\tau^3}{2}|\phi_1\rangle \quad (I.17)$$

Durch Vergleich von Gl. (I.3) mit Gl. (I.6) lesen wir:

$$\Theta_{val} = (-N_F)\epsilon_2 = N_F\langle\phi_0|\frac{\tau^3}{2}|\phi_1\rangle \quad (I.18)$$

ab. Wegen

$$\begin{aligned} \tau^3|l \ G + \tfrac{1}{2} \ G \ 0\rangle &= (-)|l \ G + \tfrac{1}{2} \ G + 1 \ 0\rangle \\ \tau^3|l \ G - \tfrac{1}{2} \ G \ 0\rangle &= (-)|l \ G - \tfrac{1}{2} \ G - 1 \ 0\rangle \end{aligned} \quad (I.19)$$

ist:

$$\langle\vec{r}|\tau^3|\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(+u(r)\langle\Omega|l=0 \ j=\tfrac{1}{2} \ G=1 \ M=0\rangle - iv(r)\langle\Omega|\bar{l}=1 \ j=\tfrac{1}{2} \ G=1 \ M=0\rangle \right) \quad (I.20)$$

und daher:

$$\Theta_{val} = N_F \int dr r^2 \left[u(r) \cdot A(r) + \frac{1}{3}v(r) \cdot C(r) - \frac{2}{3}v(r) \cdot D(r) \right] \quad (I.21)$$

I.2. EZ-REGULARISIERUNG DES SEEANTEILS VON Θ

Wir wollen kurz die wichtigsten Schritte, die von der EZ-regularisierten rotierten ECW (5.32):

$$\Re S_{eff}^F(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Sp} K(s) \quad (I.22)$$

mit:

$$\begin{aligned} K(s) &= e^{-sA} \\ A &= \left(-iD - i\frac{\Omega^a \tau^a}{2} \right)^\dagger \left(-iD - i\frac{\Omega^a \tau^a}{2} \right) \end{aligned} \quad (I.23)$$

zum regularisierten Ausdruck für Θ_0^{ab} in der Ein-Teilchen-Basis (5.33):

$$\begin{aligned} \Theta_0^{ab} &= \frac{N_F}{4} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds s^{-\frac{3}{2}} \sum_{\lambda\nu} \langle\lambda|\tau^a|\nu\rangle\langle\nu|\tau^b|\lambda\rangle \mathcal{R}_\Theta(\epsilon_\lambda, \epsilon_\nu, s) \\ \mathcal{R}_\Theta(\epsilon_\lambda, \epsilon_\nu, s) &= \left[\frac{e^{-s\epsilon_\nu^2} - e^{-s\epsilon_\lambda^2}}{\epsilon_\lambda^2 - \epsilon_\nu^2} - s \frac{\epsilon_\lambda e^{-s\epsilon_\nu^2} + \epsilon_\nu e^{-s\epsilon_\lambda^2}}{\epsilon_\nu + \epsilon_\lambda} \right] \end{aligned} \quad (I.24)$$

führen, skizzieren [Rei89].

Zunächst ist:

$$\text{Sp} K(s) = T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \text{Sp} K(s, u) \quad (I.25)$$

mit:

$$\begin{aligned} K(s, u) &= e^{-sA(s, u)} \\ A(s, u) &= \left(u + i \frac{\Omega^a \tau^a}{2} \right)^2 + h^2 + \Omega^a \left[\frac{\tau^a}{2}, h \right] \end{aligned} \quad (I.26)$$

Wir entwickeln nun $K(s, u)$ nach Potenzen von Ω :

$$\begin{aligned} \text{Sp} K(s, u) &= \text{Sp} K_0(s, u) + \Omega^a \text{Sp} K_1^a(s, u) + \frac{1}{2} \Omega^a \text{Sp} K_2^{ab}(s, u) \Omega^b + \dots \\ \text{Sp} K_0(s, u) &= \text{Sp} e^{-s(u^2 + h^2)} \\ \text{Sp} K_1^a(s, u) &= \text{Sp} \left(\frac{dK(s, u)}{d\Omega^a} \right)_{\Omega=0} \\ \text{Sp} K_2^{ab}(s, u) &= \text{Sp} \left(\frac{d^2 K(s, u)}{d\Omega^a d\Omega^b} \right)_{\Omega=0} \end{aligned} \quad (I.27)$$

Um die Funktionen K_i durch die Eigenfunktionen des nichtrotierenden Systems $\Omega = 0$ auszudrücken, spalten wir den Ω -abhängigen Anteil von $A(s, u)$ in Gl. (I.26) als Störung ab. Dazu verwenden wir einen Spezialfall der allgemeinen

Operatorentwicklung nach Schwinger:

$$\begin{aligned} W_0(s) &= e^{-sH_0} & W(s) &= e^{-s(H_0 + V)} \\ \text{Sp} W(s) &= \text{Sp} W_0(s) - s \text{Sp}[V W_0(s)] + \frac{1}{2} s \int_0^s dz \text{Sp}[V W_0(s-z) V W_0(z)] \end{aligned} \quad (I.28)$$

mit $W \rightarrow K$, $W_0 \rightarrow K_0$. Dies liefert:

$$\begin{aligned} \text{Sp} K_1^a(s, u) &= (-s) \left[\frac{dA}{d\Omega^a} \Big|_{\Omega=0} K_0(s, u) \right] \\ \text{Sp} K_2^{ab}(s, u) &= (-s) \left[\frac{d^2 A}{d\Omega^a d\Omega^b} \Big|_{\Omega=0} K_0(s, u) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} s \int_0^s dz \text{Sp} \left[\frac{dA}{d\Omega^a} \Big|_{\Omega=0} K_0(s-z, u) \frac{dA}{d\Omega^b} \Big|_{\Omega=0} K_0(z, u) \right] \end{aligned} \quad (I.29)$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\Omega^a} \Big|_{\Omega=0} &= u \tau^a - \frac{i}{2} [\tau^a, h] \\ \frac{d^2 A}{d\Omega^a d\Omega^b} \Big|_{\Omega=0} &= \frac{1}{2} \delta^{ab} \end{aligned} \quad (I.30)$$

und daher:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \text{Sp} K_1^a &= 0 \\ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \text{Sp} K_2^{ab} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi s}} \frac{1}{8} \left\{ \int_0^s dz \left(\tau^a K_0(s-z, 0) [\tau^b, K_0(z, 0)] + \tau^b K_0(s-z, 0) [\tau^a, K_0(z, 0)] \right) \right. \\ &\quad \left. - s \int_0^s dz \left([\tau^a, h] K_0(s-z, 0) [\tau^b, h] K_0(z, 0) \right) \right\} \end{aligned} \quad (I.31)$$

was nach Einschieben der Eigenbasis $|\lambda\rangle$ von h schließlich unter Beachtung von

$$\Theta_0^{ab} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Sp} K_2^{ab}(s, u) \quad (I.32)$$

auf Gl. (5.33) führt.

Anhang J. KOLLEKTIVE KOORDINATEN AUF DER S^3

Die Komponenten b_α $\alpha = 0, 1, 2, 3$ der $SU(2)$ -Rotationsmatrix $B(\tau)$ im Isospinraum aus Gl. (5.43)

$$B = b^0 + ib^a \tau^a \quad \text{mit} \quad \sum_{\alpha=0}^4 b^{\alpha 2} = 1 \quad (J.1)$$

lassen sich als Koordinaten der 3-dimensionalen Einheitssphäre S^3 im 4-dimensionalen Raum auffassen und können somit durch:

$$\begin{aligned} b_0 &= \cos \theta \\ b_1 &= \sin \theta \cos \phi \\ b_2 &= \sin \theta \sin \phi \cos \psi \\ b_3 &= \sin \theta \sin \phi \sin \psi \end{aligned} \quad (J.2)$$

parametrisiert werden. Die sphärischen Winkel θ , ϕ , ψ durchlaufen dabei unabhängig voneinander die Bereiche:

$$\begin{aligned} \theta &\in [0, 2\pi] \\ \phi &\in [0, \pi] \\ \psi &\in [0, \pi] \end{aligned} \quad (J.3)$$

und das Integrationsmaß auf der Sphäre S^3 ist

$$d\mu(b) = d\psi d\phi \sin \phi d\theta \sin^2 \theta \quad (J.4)$$

Damit lassen sich nun die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \int d\mu(b) &= 2\pi^2 \\ \int d\mu(b) (b_\alpha^2 + b_\beta^2) &= \frac{2}{3} \pi^2 \bigwedge_{\alpha\beta} \\ \int d\mu(b) (b_\alpha b_\beta) &= \frac{1}{2} \pi^2 \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (J.5)$$

verifizieren, so daß die kollektiven Spin-Isospin-Eigenfunktionen des Nukleons $|N\rangle$ aus Gl. (5.53):

$$\begin{aligned} |p \uparrow\rangle &= \frac{i}{\pi} (b^1 + ib^2) & |n \uparrow\rangle &= \frac{1}{\pi} (b^0 - ib^3) \\ |p \downarrow\rangle &= \frac{1}{\pi} (b^0 + ib^3) & |n \downarrow\rangle &= -\frac{i}{\pi} (b^1 - ib^2) \end{aligned} \quad (J.6)$$

auf der S^3 normiert sind:

$$\langle N|N\rangle = \int d\mu(b) \langle N|b\rangle \langle b|N\rangle = 1 \quad (J.7)$$

Abschließend betrachten wir noch als Beispiel den Erwartungswert des 33-Elementes der orthogonalen Darstellungsmatrix $[D]$ aus Gl. (5.8e):

$$D^{33} = \frac{1}{2} \text{Tr}_\tau [\tau^3 B^\dagger \tau^3 B] = [b_0^2 + b_3^2 - b_1^2 - b_2^2] = 1 - 2 \cdot [b_1^2 + b_2^2] \quad (J.8)$$

in einem $|p \uparrow\rangle$ -Zustand:

$$\langle p \uparrow | D^{33} | p \uparrow \rangle = 1 - \frac{2}{\pi^2} \int d\mu(b) (b_1^2 + b_2^2)^2 = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \quad (J.9)$$

Analog kann man zeigen, daß das entsprechende Matrixelement von $D^{3\alpha}$ für $\alpha \neq 3$ verschwindet. Damit haben wir die Beziehung Gl. (5.68)

$$\langle p \uparrow | D^{b3} | p \uparrow \rangle = \left(-\frac{1}{3}\right) \delta^{b3} \quad (J.10)$$

verifiziert, die in Kapitel 5.6 zur Berechnung des axialen Vektorstroms im rotierenden System benötigt wird.

Literaturverzeichnis

- [AF84] J.R.Aitchison, C.M.Frazer *Phys. Lett. B* **146** (1984) 63
- [AF85] J.R.Aitchison, C.M.Frazer *Phys.Rev. D* **31** (1985) 2608 ; *ibid D* **32** (1985) 2190
- [AN83] G.S.Adkins, C.R.Nappi, E.Witten *Nucl.Phys. B* **228** (1983) 552
- [AR88] P. Alberto, E. Ruiz Arriola, M. Fiolhais, F. Grümmer J.N. Urbano, K. Goeke
Phys. Lett. **208 B** (1988) 75
- [AR90a] P. Alberto, E. Ruiz Arriola, M. Fiolhais, F. Grümmer J.N. Urbano, K. Goeke
Z.Phys. A **336** (1990) 449
- [AR90b] P. Alberto, E. Ruiz Arriola, J.Urbano, K.Goeke *Phys.Lett. B* **236** (1990) 381
- [AS] M.Abramowitz, I.A.Stegun *Handbook of Mathematical Functions*
- [Bak81] N.J.Baker et.al. *Phys.Rev. D* **23** (1981) 2499
- [Bar69] W.A.Bardeen *Phys.Rev.* **184** (1969) 1848
- [BB83] P.Becher, M.Böhm, H.Joos
Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung Teubner, 1983
- [BB84a] M.C. Birse, M.K. Banerjee *Phys. Lett. B* **136** (1984) 284
- [BB84b] V.Bernard, R.Brockmann, M.Schaden, W.Weise, E.Werner *Nucl.Phys. A* **412** (1984) 349
- [BD90] A.Blutz, F.Döring, Th.Meißner, K. Goeke *Phys.Lett. B* **251** (1990) 235
- [BDa] J.D.Bjorken, S.D.Drell *Relativistische Quantenmechanik*
BI Hochschultaschenbücher Band 98
- [BDb] J.D.Bjorken, S.D.Drell *Relativistische Quantenfeldtheorie*
BI Hochschultaschenbücher Band 101
- [Ber86] V.Bernard *Phys.Rev. D* **34** (1986) 1601
- [BerDA] D.Berg *Diplomarbeit Universität Bochum* 1990
- [Bha88] R.K.Bhaduri *Models of the Nucleon: From Quarks to Soliton* Addison-Wesley 1988
- [Bir85] M.C. Birse *Phys.Rev D* **31** (1985) 118
- [BJ87] V.Bernard, R.Jaffe, U.G.Meißner *Phys.Lett B* **198** (1987) 92
- [BJ88] V.Bernard, R.Jaffe, U.G.Meißner *Nucl.Phys. B* **308** (1988) 753
- [BloDA] A.Blutz *Diplomarbeit Universität Bochum* 1990
- [BM82] A.P.Balachandran, G.Marmo, V.P.Nair, C.G.Trahern *Phys.Rev. D* **25** (1982) 2713
- [BM86] V.Bernard, U.G.Meißner, I.Zahed *Phys.Rev.Lett* **59** (1986) 966
- [BM87] V.Bernard, U.G.Meißner, I.Zahed *Phys.Rev. D* **36** (1987) 966
- [BR88] J.P.Blaizot, G.Ripka *Phys.Rev. D* **38** (1988) 1556
- [BW83] R.Brockmann, W.Weise, E.Werner *Phys.Lett. B* **122** (1983) 201

- [CB86] T.D.Cohen, W.Bronjowski *Phys. Rev. D* **34** (1986) 3472
- [CC79] R.D.Carlitz, D.B.Craemer *Ann. of Phys.* **116** (1979) 429
- [CD78] C.G.Callan, R.Dashen, D.J.Gross *Phys.Rev. D* **17** (1978) 2717;
- [CD79] C.G.Callan, R.Dashen, D.J.Gross *D* **19** (1979) 1826 ; *D* **20** (1979) 3279
- [CJ74] J.M.Cornwall, R.Jackiw, E.Tomboulis *Phys.Rev. D* **10** (1974) 2428
- [CL84] Ta-Pei-Cheng, Ling-Fong-Li *Gauge Theory of Elementary Particle Physics* Oxford, 1984
- [Coh86] T.D.Cohen, *Phys.Rev. D* **34** (1986) 2187
- [Cre83] M.Creutz *Quarks, Gluons and Lattices* Cambridge 1983
- [CR90] Chr.V.Christov, E.Ruiz Arriola, K.Goeke *Nucl.Phys. A* **510** (1990) 689
- [DG90] S.Deister, M.F.Gari, W.Krumpelmann, M.Mahlke erscheint bei *Few Body Phys.*
- [DörDA] F.Döring *Diplomarbeit Universität Bochum* 1990
- [DP84] D.Dyakonov, V.Petrov *Nucl.Phys B* **245** (1984) 259 *B* **272** (1986) 457
- [DP86] D.Dyakonov, V.Petrov *Nucl.Phys B* **272** (1986) 457
- [DP88] D.Dyakonov, V.Petrov, P.V.Pobylitsa *Nucl.Phys. B* **306** (1988) 809
- [DP89] D.Dyakonov, V.Petrov, P.V.Pobylitsa, M.Praszalowicz *Nucl.Phys. B* **323** (1989) 53
- [DS85] A. Dhar, R.Shankar, R.S. Wadia *Phys.Rev. D* **31** (1985) 3526
- [DW84] A. Dhar, R.S. Wadia *Phys.Rev.Lett.* **52** (1984) 959
- [Egu76] T.Eguchi *Phys.Rev. D* **14** (1976) 2755
- [EL85] H.Esbensen, T.S.Lee *Phys.Rev. C* **32** (1985) 1966
- [ER86] D.Ebert, H.Reinhardt *Nucl.Phys. B* **271** (1986) 188
- [EV83] D.Ebert, M.K.Volkov *Z.Phys. C* **16** (1983) 205
- [FG88] M. Fiolhais, K. Goeke, F. Grümmer, J.N. Urbano *Nucl. Phys. A* **481** (1988) 727
- [FN87] M. Fiolhais, A.Nippe, K. Goeke, F. Grümmer, J.N. Urbano *Phys.Lett. B* **194** (1987) 187
- [FS86] P.Ferstl, M.Schaden, E.Werner *Nucl.Phys. A* **452** (1986) 680
- [Fuj79] K.Fujikawa *Phys.Rev.Lett.* **42** (1979) 1195
- [Fuj80] K.Fujikawa *Phys.Rev. D* **21** (1980) 2848
- [GG91] K.Goeke, A.Gorski, F.Grümmer, Th.Meißner, H.Reinhardt, R.Wünsch
Phys.Lett B **256** (1991) 321
- [GK84] H.Gomm, Ö.Kaymakçalan, J.Schechter *Phys.Rev. D* **30** (1984) 2345
- [GK85] M.Gari, W.Krumpelmann *Z.Phys. A* **322** (1985) 689
- [GK86] M.Gari, W.Krumpelmann *Phys.Lett. B* **173** (1986) 10
- [GL60] M. Gell-Mann, M. Lévy *Nuovo Cimento* **16** (1960) 705
- [GL82] J.Gasser, H.Leutwyler *Phys.Rep.* **87** (1982) 77
- [GL84] J.Gasser, H.Leutwyler *Ann.of.Phys.* **158** (1984) 142

- [GL91] J.Gasser, H.Leutwyler, M.E.Sainio *Phys.Lett B* 253 (1991) 252,260
- [GO68] M.Gell-Mann, R.J.Oakes, B.Renner *Phys.Rev.* 175 (1968) 2195
- [Grü90] F.Grümmer *Solution of the Dirac Equation with Sigma and Pion Fields*
Kernforschungsanlage Jülich 1987/revid.1990, unveröffentlicht
- [GW81] J.Goldstone, F.Wilczek *Phys.Rev.Lett* 47 (1981) 986
- [GU85] K.Goeke, J.N.Urbano, M.Fiolhais, M.Harvey *Phys.Lett. B* 164 (1985) 249
- [HK85] T.Hatsuda, T.Kunihiro *Progr.Theor.Phys.* 74 (1985) 765
- [HK87] T.Hatsuda, T.Kunihiro *Phys.Lett. B* 185 (1987) 304
- [HK88] T.Hatsuda, T.Kunihiro *B* 198 (1987) 126 ; *B* 206 (1988) 385
- [JR89] M.Jaminon, G.Ripka, P.Stassart *Phys.Lett. B* 227 (1989) 191
- [Kit83] T.Kitagaki et.al. *Phys.Rev. D* 28 (1983) 436
- [KL90] S.Klimt, M.Lutz, U.Vogl, W.Weise *Nucl.Phys. B* 516 (1990) 429
- [Klu90] W.Kluge *Arbeitstreffen Mittelenenergiephysik* 24.-28.9.1990 Hambach
(Herausgeber: Prof. Dr.D.Drechsel, Universität Mainz)
- [KM87] N.Kaiser, U.G.Meißner, W.Weise *Phys.Lett. B* 198 (1987) 319
- [KR84a] S.Kahana, G.Ripka *Nucl.Phys. A* 429 (1984) 462
- [KR84b] Ö.Kaymakçalan, S.Rajeev, J.Schechter *Phys.Rev. D* 30 (1984) 594
- [Lee72] B.W.Lee *Chiral Dynamics* Gordon and Breach 1972
- [Lur68] A.Lurie *Particles and Fields* Wiley & Sons, New York, 1968
- [LutDA] M.Lutz *Diplomarbeit Universität Regensburg* 1989
- [Mei89] U.G.Meißner *Phys.Rev.Lett.* 62 (1989) 1013; *Phys.Lett B* 220 (1989) 1
- [MeiDA] Th.Meißner *Diplomarbeit Universität Bonn* 1987
- [MG89a] Th.Meißner, F. Grümmer, K. Goeke, M.Harvey *Phys.Rev. D* 39 (1989) 1903
- [MG89b] Th.Meißner, F. Grümmer, K. Goeke *Phys.Lett. B* 227 (1989) 296
- [MG90] Th.Meißner, F. Grümmer, K. Goeke *Ann.of Phys.* 202,2 (1990) 297
- [MG91a] Th.Meißner, K.Goeke *Nucl.Phys. A* 524 (1991) 719
- [MG91b] Th.Meißner, K.Goeke *Z.Phys. A* im Druck
- [MH87] R.Machleidt, K.Holinde, Ch.Elster *Phys.Rep.* 149 (1987) 1
- [MP78] W. Marciano, H.Pagels. *Phys.Rep. C* 36 (1978) 137
- [MR88] Th.Meißner, E.Ruiz Arriola, F. Grümmer, K. Goeke, H.Mavromatis *Phys. Lett. B* 214 (1988) 312
- [MR90] Th.Meißner, E.Ruiz Arriola, K. Goeke *Z.Phys. A* 336(1990) 91
- [NG91] T.Neuber, K.Goeke *Preprint Ruhr-Universität Bochum* (in Vorbereitung)
- [NJ61] J.Nambu, G.Jona-Lasinio *Phys.Rev.* 122 (1961) 345 ; 124 (1961) 246

- [Pet85] J.L.Petersen *Acta Phys. Pol.* **B16** (1985) 271
- [PM89] U.Post, U.Mosel *Nucl.Phys.* **A** 499 (1989) 789
- [PR85] N.K.Pak, P.Rossi *Nucl.Phys.* **B** 250 (1985) 279
- [PR87] J.da Providencia, M.C.Ruivo, C.A.de Sousa *Phys.Rev.* **D** 36 (1987) 1882
- [PV49] W.Pauli, F.Villars *Rev.Mod.Phys.* **21** (1949) 434
- [RADA] E.Ruiz Arriola *Doktorarbeit Universität Bochum* 1990
- [RA90] E. Ruiz Arriola, P. Alberto, K.Goeke, J.Urbano *Phys.Lett.* **B** 243 (1990) 191
- [RC89] E.Ruiz Arriola, Chr.V.Christov, K.Goeke *Phys.Lett.* **B** 225 (1989) 22
- [Rei89] H.Reinhardt *Nucl.Phys.* **A** 503 (1989) 825
- [RG90] G.Ripka *Les Houches Winterschule* Februar 1990 (Ausarbeitung: R. Mendez Galain)
- [RK87] G.Ripka, S.Kahana *Phys.Rev.* **D** 36 (1987) 1233
- [RS80] P.Ring, P.Schuck *The Nuclear Many Body Problem* Springer Verlag 1980
- [RT84] G.C.Rossi, M.Testa, K.Yoshida *Phys.Lett.* **B** 134 (1984) 78
- [RW88] H.Reinhardt, R.Wünsch *Phys.Lett.* **B** 215 (1988) 577
- [Sch51] J.Schwinger *Phys.Rev.* **82** (1951) 664
- [Shu80] E.V.Shuryak *Phys.Rep.* **61** (1980) 71
- [Shu82] E.V.Shuryak *Nucl.Phys.* **B** 203 (1982) 93,116,140
- [Shu86] E.V.Shuryak *Phys.Rep.* **115** (1986) 152
- [Sky62] T.H.Skyrme *Nucl.Phys.* **31** (1962) 556
- [Son87] V.Soni *Phys.Lett.* **B** 183 (1987) 91
- [SR90] M.Schaden, H.Reinhardt, P.A.Amundsen, M.J.Lavelle
Nucl.Phys. **B** 339 (1990) 595
- [SV79] M.A.Shifman, A.I.Vainshtein, V.I.Zakharov *Nucl.Phys.* **B** 147 (1979) 385,448,519
- [SV80] M.A.Shifman, A.I.Vainshtein, V.I.Zakharov *Nucl.Phys.* **B** 163 (1980) 46 ; **B** 165 (1980) 45
- [tHo76] G.t'Hooft *Phys.Rev.Lett.* **37** (1976) 8 ; *Phys.Rev.* **D14** (1976) 3432
- [Tho83] A.W.Thomas *Adv.in Nucl.Phys.* **13** (1983)
- [VM88] D.A.Varshalovich, A.N.Moskalev, V.K.Khersonskii
Quantum Theory of Angular Momentum World Scientific 1988
- [WC83] A.G.Williams, R.T.Cahill *Phys.Rev.* **D** 28 (1983) 1966
- [Wes72] J.Wess *Acta Phys. Austr.* **10** (1972) 494
- [Wit83] E.Witten *Nucl.Phys.* **B** 223 (1983) 422,433
- [WZ71] J.Wess, B.Zumino *Phys.Lett.* **B** 37 (1971) 95
- [YO84] A.LeYaouanc, L.Oliver, O.Pene, J.-C.Raynal *Phys.Rev.* **D29** (1984) 1233
- [Zum83] B.Zumino *Chiral Anomalies and Differential Geometry* Les Houches 1983

[ZW84] B.Zumino, Wu Yong-Shi, A.Zee *Nucl.Phys. B* **239** (1984) 477

DANKSAGUNG

Die vorliegende Arbeit wurde zum größten Teil durch ein Promotionsstipendium der Studienstiftung des deutschen Volkes unterstützt, der an dieser Stelle sehr herzlich gedankt sei.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof.Dr.K.Goeke für seine Mühe und Zeit, die er während zur Betreuung meiner Arbeit aufbrachte, bei der er mich stets durch wertvolle Diskussionen und Anregungen unterstützte.

Bei der Bewältigung numerischer Probleme war mir Herr Dr.F.Grümmer, dem ich an dieser Stelle ebenfalls sehr herzlich danken möchte, in vielen Fällen von besonderer Hilfe.

Den Herren Dr.E.Ruiz Arriola, Dr.A.Gorski, A.Blitz und F.Döring danke ich für Ihre Zusammenarbeit an verschiedenen Stellen dieser Arbeit.

Mein Dank gilt auch einer Reihe weiterer Angehöriger des Instituts für Theoretische Physik II der Ruhr-Universität Bochum, insbesondere den Herren T.Neuber, Dr.C.Christov und Frau C.Schüren für wichtige Diskussionsbeiträge, den Herren M.Bergmann und W.Krümpelmann für Ihre Hilfe bei der Bewältigung technischer Probleme im Zusammenhang mit der Bedienung der Rechenanlagen, und nicht zuletzt den Sekretärinnen Fr.M.Kächele, L.Walter und E.Pricking für die stets prompte Erledigung von anfallenden Schreibarbeiten.

Herrn Prof.Dr.H.Reinhardt (Universität Tübingen) und Herrn Dr.R.Wünsch (ZFK Rossendorf) möchte ich sehr herzlich für Ihre Gastfreundschaft während meines Aufenthaltes am ZFK Rossendorf im November 1989 danken, aus der unsere sehr enge Zusammenarbeit im Rahmen des Cranking-Modells hervorging.

PROBLEM 1

Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a function satisfying the functional equation

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}.$$

Assume that f is continuous at the origin. Prove that f is linear, i.e., there exists a constant $c \in \mathbb{R}$ such that $f(x) = cx$ for all $x \in \mathbb{R}$.

Solution: We first show that $f(0) = 0$. Setting $x = y = 0$ in the functional equation, we get

$$f(0+0) = f(0) + f(0) \implies f(0) = 2f(0) \implies f(0) = 0.$$

Next, we show that f is additive over the rationals. For any integer n , we have

$$f(nx) = f(\underbrace{x+x+\dots+x}_n) = \underbrace{f(x)+f(x)+\dots+f(x)}_n = nf(x).$$

In particular, for $x = 1$, we get $f(n) = nf(1)$ for all integers n . Similarly, for any rational number $\frac{p}{q}$, we have

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}f(p) = \frac{1}{q}pf(1) = \left(\frac{p}{q}\right)f(1).$$

Let $c = f(1)$. Then $f(x) = cx$ for all rational numbers x . Since f is continuous at the origin, it follows that f is continuous everywhere. Therefore, for any real number x , we have

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow x} f(r) = \lim_{r \rightarrow x} cr = cx.$$

Thus, $f(x) = cx$ for all $x \in \mathbb{R}$, which completes the proof.

Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a function satisfying the functional equation

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}.$$

Assume that f is continuous at the origin. Prove that f is linear, i.e., there exists a constant $c \in \mathbb{R}$ such that $f(x) = cx$ for all $x \in \mathbb{R}$.

Solution: We first show that $f(0) = 0$. Setting $x = y = 0$ in the functional equation, we get

$$f(0+0) = f(0) + f(0) \implies f(0) = 2f(0) \implies f(0) = 0.$$

Next, we show that f is additive over the rationals. For any integer n , we have

$$f(nx) = f(\underbrace{x+x+\dots+x}_n) = \underbrace{f(x)+f(x)+\dots+f(x)}_n = nf(x).$$

In particular, for $x = 1$, we get $f(n) = nf(1)$ for all integers n . Similarly, for any rational number $\frac{p}{q}$, we have

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}f(p) = \frac{1}{q}pf(1) = \left(\frac{p}{q}\right)f(1).$$

Let $c = f(1)$. Then $f(x) = cx$ for all rational numbers x . Since f is continuous at the origin, it follows that f is continuous everywhere. Therefore, for any real number x , we have

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow x} f(r) = \lim_{r \rightarrow x} cr = cx.$$

Thus, $f(x) = cx$ for all $x \in \mathbb{R}$, which completes the proof.

Handwritten text at the top of the page, possibly a header or title.

Handwritten text at the bottom of the page, possibly a footer or concluding remarks.

JUL-2501

JUL 1991

ISSN 0366-0885