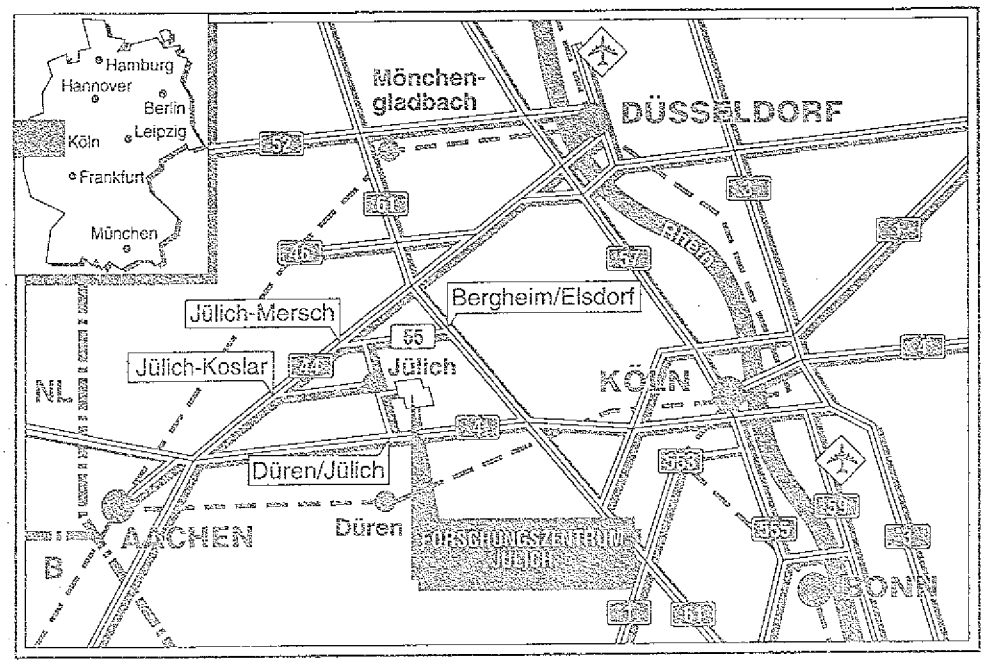
FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH GmbH

KFA

Institut für Festkörperforschung

Charakterisierung des Lorenz-Attraktors durch periodische Orbits

Gerolf Ott



Berichte des Forschungszentrums Jülich ; 2525
ISSN 0366-0885
Institut für Festkörperforschung Jül-2525
D 38 (Diss. Universität Köln)

Zu beziehen durch: Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek
Postfach 1913 · D-5170 Jülich · Bundesrepublik Deutschland
Telefon: 02461/61-6102 · Telefax: 02461/61-6103 · Telex: 833556-70 kfa d

Charakterisierung des Lorenz-Attraktors durch periodische Orbits

Gerolf Ott

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0: Einleitung

Ein und dasselbe dynamische System kann uns auf die unterschiedlichste Weise begegnen: etwa als Trajektorien im Phasenraum, als Zeitverzögerungsplot oder als Poincaré-Abbildung eines geeigneten Phasenraum-Schnittes. Es ist daher nicht immer offensichtlich, daß es sich tatsächlich um dasselbe System handelt, das nur verschieden dargestellt wurde, oder an dem unterschiedliche Experimente ausgeführt wurden.

Die Frage einer invarianten Charakterisierung ist deshalb von zentraler Bedeutung für die Theorie dynamischer Systeme.

Die meisten Größen, die zur Charakterisierung chaotischer Systeme eingeführt wurden, sind statistischer Natur. Lyapunov-Exponenten, die die Divergenz benachbarter Orbits bestimmen, verallgemeinerte Dimensionen für die komplizierte innere Struktur von Attraktoren oder Repelloren und Entropien, die den Verlust von Information über die Anfangsbedingungen beschreiben, gehören zu den am häufigsten bestimmten Objekten der chaotischen Dynamik.

Fast immer geschieht ihre Berechnung über die Analyse von chaotischen Zeitreihen, wobei man annimmt, daß für fast alle Anfangsbedingungen $x(0)$ der Grenzwert

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(x(t))\, dt = \langle A \rangle \tag{0.1}$$

für eine beliebige stetige Observable A existiert und unabhängig von $x(0)$ ist[1]. Dies definiert ein invariantes, ergodisches Wahrscheinlichkeitsmaß ρ auf dem Phasenraum, mit dessen Hilfe Zeitmittel als Phasenraummittel geschrieben werden können:

$$\langle A \rangle = \int A(x)\, \rho(dx)\,. \tag{0.2}$$

Das Problem derartiger "brute force"-Methoden ist einerseits, daß man immer aus endlichen Messungen den asymptotischen Grenzwert extrapolieren muß, und dies kann äußerst schwierig sein, wenn die Konvergenz langsam ist. Andererseits hätte man für analytisch bekannte Systeme gerne Verfahren, mit denen diese Schwierigkeiten überwunden werden können. Z.B. sollte die Invarianz der oben

[1] Für diskrete Dynamiken ist das Integral durch eine Summe zu ersetzen.

genannten Mittelwerte gegenüber stetigen Koordinatentransformationen besser zum Ausdruck kommen.
Es besteht seit einiger Zeit die Hoffnung, daß in diesem Sinne inverse dynamische Zetafunktionen [38, 39] gute Kandidaten sind. Diese treten in natürlicher Weise auf, wenn man Phasenraummittelungen umschreibt in Mittelungen über die periodischen Bahnen der Dynamik [1, 2, 9].
Dabei nutzt man die folgenden vorteilhaften Eigenschaften periodischer Bahnen aus:

(0) Periodische Orbits sind Teil der invarianten Menge der Dynamik, obwohl sie in endlichen Zeiten bestimmt werden können, bleiben sie unbegrenzt erhalten. In vielen chaotischen Systemen hat man zudem die Vermutung, daß die periodischen Bahnen dicht in der seltsamen Menge liegen.

(1) Periodische Orbits und damit auch ihre Symbolfolgen sind topologische Invarianten unter glatten Koordinatentransformationen: sie beschreiben die Topologie des seltsamen Attraktors oder Repellors.

(2) Die Eigenwerte der Linearisierung der Dynamik in der Nähe periodischer Orbits sind metrische Invarianten: sie beschreiben die lokalen Längenskalen der seltsamen Menge.

(3) Periodische Orbits sind hierarchisch geordnet: die kurzen Zyklen geben eine gute Approximation der Dynamik auf der seltsamen Menge; Fehler, die aus der Vernachlässigung längerer Orbits entstehen, können abgeschätzt und beschränkt werden.

(4) Periodische Orbits sind robust: die Eigenwerte kurzer periodischer Bahnen variieren relativ langsam bei einer glatten Änderung der Parameterwerte.

(5) Kurze Zykel sind oft leicht und sehr genau aus experimentellen (d.h. auch numerischen) Daten zu extrahieren [3, 30].

Die Bedeutung periodischer Orbits ist schon seit langem bekannt. Seit den Arbeiten von H. Poincaré zu Ende des 19. Jahrhunderts spielen sie eine zentrale Rolle in der Theorie dynamischer Systeme. Ihre Bedeutung für die Physik ist am besten bekannt aus den Arbeiten von Gutzwiller, Balian und Bloch [5, 23, 24],

wo im Rahmen eines semiklassischen Formalismus Energiespektren ausschließlich aus den klassischen periodischen Trajektorien gewonnen werden können.
Ein anderes Beispiel ist das Studium des Übergangs zu Chaos in Hamiltonschen fastintegrablen Systemen. Hier sind die periodischen Orbits wesentlich für das Verständnis vom Aufbrechen der KAM-Tori [35].
Die Frage nach der Rekonstruktion einer Dynamik aus ihrer chaotischen Zeitreihen ist ein wesentliches Problem der Modellbildung. Hier können periodische Orbits, die man relativ leicht aus den Zeitreihen gewinnt, ein gutes Mittel sein, das dynamische Gesetz in systematischer Form zu approximieren [16, 30]. Man stellt sich dann vor, daß der Phasenraum durch Umgebungen periodischer Bahnen überdeckt wird. Die Größe dieser Umgebungen hängt ab von der Instabilität des Orbits, die Dynamik wird approximiert durch ihre Linearisierung in der Nähe der geschlossenen Bahn.
Wie gesagt, sollen Zetafunktionen Mittelungen über periodische Bahnen berechnen. Dabei stößt man auf das Problem, daß die Anzahl dieser Bahnen i.a. exponentiell mit der Periode anwächst, die Wachstumsrate ist dabei die topologische Entropie. Lange Zeit war nicht bekannt, wie man diese Schwierigkeit umgehen könnte.
Von P. Cvitanović [9] wurde dann im Jahre 1988 ein Lösungsvorschlag gemacht, der auf der Beobachtung beruht, daß man in vielen Systemen eine Unterscheidung treffen kann zwischen einigen wenigen fundamentalen periodischen Orbits, die durch keine anderen Bahnen approximiert werden können, und Orbits, die mit wachsender Länge immer besser durch die Aneinanderreihung kurzer Bahnen beschrieben werden können.
Die Umsetzung dieser Beobachtung in eine Berechnungsvorschrift zur Auswertung der dynamischen Zetafunktionen ist die sog. *cycle expansion.* Man entwickelt die Zetafunktion in eine Potenzreihe

$$1/\zeta \equiv \prod_p (1 - t_p) = 1 - \sum_f t_f \, z^{n_f} - \sum_n c_n \, z^n \,, \tag{0.3}$$

in der die erste Summe sich über die fundamentalen Orbits erstreckt, und die zweite Summe alle übrigen Terme umfaßt, geordnet nach ihrer Periodenlänge n. Dabei enthalten die c_n Kombinationen von Gewichten periodischer Bahnen und der sie approximierenden Pseudoorbits, so daß man in manchen Systemen exponentiell abfallende Beiträge erhält. Es gelingt dann, aus der Kenntnis we-

niger kurzer periodischer Orbits den Wert des obigen Produktes sehr genau abzuschätzen und die Nullstellen der inversen dynamischen Zetafunktion zu bestimmen. Diese Nullstellen erweisen sich dann als die gesuchten Mittelungen über die chaotische Menge.
Das Verfahren der cycle expansion hat sich in einigen Fällen als sehr erfolgreich erwiesen:

- Anwendungen auf ein- und zweidimensionale Abbildungen werden in [2] behandelt. Dort wird auch gezeigt, daß fehlende Hyperbolizität des Systems nicht notwendig zu einem Versagen der cycle expansion führt.

- Die Feigenbaumkonstante δ, die fraktale Dimension und die Entweichrate des Repellors am kritischen Punkt der logistischen Abbildung läßt sich mittels cycle expansion mit hoher Genauigkeit bestimmen [2, 37].

- Quantenresonanzen eines klassisch chaotischen Streusystems aus drei Kreisscheiben konnten in guter Übereinstimmung mit den exakten quantenmechanischen Polstellen bestimmt werden [10].

Ziel dieser Arbeit ist es, die Anwendung der cycle expansion auf ein 3-dimensionales kontinuierliches chaotisches System, das Lorenz-System, zu testen. Der Attraktor besitzt viele Eigenschaften generischer chaotischer Systeme, aber er verletzt Axiom A. Er erscheint deshalb als guter Testkandidat, um die Übertragung der cycle expansion auf nicht-hyperbolische Systeme zu untersuchen.
In Kapitel 1 werden wir die Bedeutung periodischer Orbits in dynamischen Systemen beleuchten. An einem einfachen Beispiel – einem 1-dimensionalen Repellor – demonstrieren wir die Berechnung der Entweichrate aus den Eigenschaften der periodischen Punkte und leiten eine dynamische Zetafunktion her, deren führende Nullstelle die Entweichrate bestimmt. Nach der Einführung des Frobenius-Perron-Operators, der gewissermaßen dual zum Zeitentwicklungsoperator ist, verallgemeinern wir diese Zetafunktion und zeigen, daß ihre Nullstellen mit den Eigenwerten des Frobenius-Perron-Operators identifiziert werden können. Daß man diese Nullstellen (in gewissen Systemen) auch numerisch leicht berechnen kann, zeigen wir mit Hilfe der cycle expansion von P. Cvitanović. Als numerischer Test dient uns dabei wieder die Entweichrate des eindimensionalen Repellors.

Kapitel 2 behandelt die Korrelationsfunktionen deterministischer dynamischer Systeme. Die Fouriertransformierten dieser Funktionen weisen oft Polstellen in der komplexen Ebene auf, die man als Resonanzen interpretiert. Wir zeigen, daß auch hier die Eigenwerte des Frobenius-Perron-Operators den Schlüssel zum Verständnis dieser Resonanzen liefern. Eine Verallgemeinerung der zugehörigen Zetafunktionen auf dynamische Flüsse schließt sich an.
Die Anwendung der gewonnenen theoretischen Erkenntnisse das dreidimensionale kontinuierliche Lorenz-System ist der Inhalt des 3. Kapitels. Nach einer kurzen Übersicht der elementaren Eigenschaften des Lorenz-Modells diskutieren wir die symbolische Dynamik und die Symmetriereduzierung des Phasenraums. Der Zusammenhang zwischen dem natürlichen Maß auf dem Lorenzattraktor und den Instabilitäten der periodischen Orbits wird dargestellt und anhand der 7- und 8-periodischen Orbits durch einen Vergleich mit den relativen Häufigkeiten einer langen Zeitreihe überprüft. Der folgende Abschnitt befaßt sich mit dem *pruning* in der symbolischen Dynamik des Lorenz-Systems, d.h. nicht alle Symbolfolgen sind im System tatsächlich durch periodische Bahnen realisiert, und erörtert Möglichkeiten, dieses Problem zu umgehen.
Als Anwendungen der cycle expansion werden die Lyapunovexponenten und die fraktale Dimension bestimmt. Ein abschließender Abschnitt widmet sich den Korrelationen im Lorenz-Modell und fragt nach dem Einfluß der kurzen periodischen Bahnen auf deren Struktur.

Kapitel 1: Dynamische Systeme und periodische Orbits

1.1 Einführung

Wir wollen zu Anfang einige mathematische Sprechweisen einführen, die wir im folgenden verwenden.
Die mathematisch abstrakte Beschreibung der zeitlichen Entwicklung physikalischer Vorgänge basiert auf dem Begriff des *dynamischen Systems*. Die Zustände des physikalischen Prozesses entsprechen dabei den Punkten eines *Phasenraums* $\mathcal{M}$, ihre zeitliche Evolution wird beschrieben durch ein dynamisches Gesetz $f^t : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, das die Punkte von $\mathcal{M}$ in ihre Bildpunkte zur Zeit t überführt.
$\mathcal{M}$ wird i.a. mit der Struktur einer d-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit versehen, f^t soll als differenzierbar vorausgesetzt werden. Für die Zeiten t wollen wir sowohl diskrete, als auch kontinuierliche Werte zulassen und reden dann entsprechend von den Iterationen einer Abbildung $f(= f^1)$ oder einem kontinuierlichen Fluß f^t.
Wir werden stets annehmen, daß unsere Dynamik f^t *autonom* ist, d.h. nicht explizit von der Zeit t abhängt. Ist weiterhin für alle t auch die Abbildung f^{-t} definiert, so bezeichnen wir die Menge $\{f^t \mid t \in \mathbb{R}\}$ bzw. $\{f^t \mid t \in \mathbb{Z}\}$ mit den Gruppeneigenschaften

$$\text{(a) } f^0 = id_{\mathcal{M}} \quad \text{und}$$
$$\text{(b) } f^s \circ f^t = f^{s+t} \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{Z}$$

als (*reversibles*) *dynamisches System* auf $\mathcal{M}$. Für jeden Punkt $\mathrm{x} \in \mathcal{M}$ heißt $\{\mathrm{x}(t) = f^t(\mathrm{x})\}$ die *Trajektorie* oder der *Orbit* von x.
Die physikalisch wichtigsten kontinuierlichen Dynamiken ergeben sich als Lösungen von Systemen autonomer gewöhnlicher Differentialgleichungen auf $\mathcal{M}$, die in lokalen Koordinaten in der Form

$$\dot{x}_i = F_i(\mathrm{x}), \quad i = 1, 2, \ldots, d \tag{1.1}$$

geschrieben werden können; x bezeichnet dabei den Vektor $(x_1, ..., x_d)$, der Punkt

bedeutet die Ableitung nach t. Die Reversibilität ist in diesem Fall automatisch gegeben.
Nichtinvertierbare Abbildungen oder bestimmte partielle Differentialgleichungen können andererseits zu Dynamiken führen, die nur für positive Zeiten definiert sind. Ein solches *semidynamisches System* bildet eine Halbgruppe, die obige Eigenschaft (b) ist dann nur für $s, t > 0$ erfüllt.
Seit etwa Mitte der 60-er Jahre ist die Erkenntnis gereift, daß auch einfach erscheinende nicht-lineare Dynamiken zu sehr komplexem Verhalten ihrer Trajektorien führen können. Die Arbeit von Lorenz [32] über das heutzutage nach ihm benannte Modellsystem war in dieser Hinsicht bahnbrechend, auch wenn es einige Zeit dauerte, bis dies allgemein anerkannt wurde.
Wenn man heute von chaotischem Verhalten spricht, so meint man damit i.a. das Phänomen der sensiblen Abhängigkeit vom Startwert (*sensitive dependence on initial conditions*), was bedeutet, daß eine noch so kleine Störung des Anfangswertes – und diese ist weder experimentell noch numerisch zu verhindern – exponentiell anwächst. Zum Zeitpunkt $t = 0$ benachbarte Orbits entfernen sich also exponentiell voneinander, solange nicht globale Eigenschaften der Dynamik, wie etwa eine Begrenztheit des für die Trajektorien erreichbaren Phasenraumgebiets, dies verhindern. Letzteres wiederum ist aber typisch für dissipative dynamische Systeme, in denen fast alle Trajektorien auf Phasenraummengen vom (Lebesgue-)Maß null, sogenannte *Attraktoren*, zulaufen. Dieses Zusammenwirken von lokaler Instabilität und globaler Kontraktion führt dazu, daß die Attraktoren eine sehr komplexe topologische Struktur aufweisen. Man hat dafür den Begriff des *seltsamen* Attraktors geprägt.
Das Langzeitverhalten benachbarter Orbits in einer chaotischen Dynamik ist also vollständig voneinander verschieden. Somit macht es keinen Sinn, einzelne Trajektorien zu studieren, sondern man muß dazu übergehen, statistische Größen zu finden, die das Verhalten vieler Orbits charakterisieren.
Zentral für diese Betrachtungen ist der Begriff der *invarianten* Mengen, das sind Punktmengen im Phasenraum, die unter dem Fluß oder der Abbildung unverändert bleiben (siehe hierzu Anhang A).
Sowohl seltsame Attraktoren als auch seltsame Repelloren sind wichtige Beispiele invarianter Mengen. Attraktoren stellen das asymptotische Verhalten typischer Orbits dar. Im Laufe der Zeit nähert sich die Bewegung des Systems dem At-

traktor mehr und mehr, während es gleichzeitig bestrebt ist, sich von Repelloren immer weiter zu entfernen.
Nichtsdestoweniger ist auch ein Repellor von Interesse, da er z.B. als Separatrix auftreten kann, die die Bassins zweier oder mehrerer Attraktoren trennt, und damit Grenze zwischen unterschiedlichen Bewegungstypen darstellt.
Alternativ kann die Dynamik dazu führen, daß für fast alle Anfangsbedingungen die Orbits für $t \to \infty$ aus einem beschränkten Beobachtungsgebiet entweichen. Hier bildet eventuell die Menge der übrigbleibenden Punkte einen seltsamen Repellor.
In typischen chaotischen Systemen haben diese seltsamen Mengen die Eigenschaft, daß in ihnen eine Hierachie von periodischen Orbits existiert, die allesamt instabil sind. Bei den in der Mathematik besonders ausführlich untersuchten Axiom-A-Systemen ist diese Eigenschaft sogar explizit Bestandteil ihrer Definition; genauer fordert man, daß die periodischen Orbits in einem Axiom-A-Attraktor dicht liegen. Man vermutet aber, daß diese Dichteeigenschaft für alle typischen hyperbolischen Attraktoren und Repelloren zutrifft.
Es liegt daher nahe, Mittelwerte über seltsame Mengen auszudrücken als Mittelwerte über periodische Orbits. Wir werden diese Strategie zuerst bei einem einfachen 1-dimensionalen Repellor verfolgen.

1.2 Entweichraten seltsamer Repelloren

Die elementare Größe zur Charakterisierung der Bewegung in der Nachbarschaft eines Repellors ist die sog. Entweichrate (engl. *escape rate*), die angibt, wie schnell sich eine Trajektorie im Mittel vom Repellor entfernt.
Wir behandeln im folgenden nur den diskreten Fall einer differenzierbaren Abbildung $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ einer d-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ in sich.
Um die Entweichrate γ einzuführen, betrachten wir eine Teilmenge $\mathcal{R}$ des Phasenraumes mit endlichem Lebesgue-Maß $\mu_L(\mathcal{R})$[1].
Man kann dann folgende operative Definition von γ geben: wir wählen ein Anzahl N_0 von Anfangsbedingungen, die bezüglich des Lebesgue-Maßes gleichmäßig über $\mathcal{R}$ verteilt sind. Nun lassen wir die Abbildung f n-mal operieren und überprüfen,

[1] Diese soll in gewissem Sinn einfach, und im Gegensatz zum Repellor nicht seltsam sein.

wieviele Punkte N_n nach n Iterationen noch innerhalb von $\mathcal{R}$ liegen. Setzen wir für festes n

$$\Gamma_n = \lim_{N_0 \to \infty} \frac{N_n}{N_0} \approx \frac{\mu_L(f^n(\mathcal{R}) \cap \ldots \cap f(\mathcal{R}) \cap \mathcal{R})}{\mu_L(\mathcal{R})}, \tag{1.2}$$

dann können wir als Entweichrate γ definieren:

$$\gamma = -\lim_{n \to \infty} \frac{\log \Gamma_n}{n}, \tag{1.3}$$

so daß ein exponentielles Abnehmen der Punkte in $\mathcal{R}$ ein nicht verschwindendes γ zur Folge hat. Enthält $\mathcal{R}$ einen Attraktor, so ist γ=0, umfaßt $\mathcal{R}$ einen Repellor und *keinen* Attraktor, so erwartet man ein endliches, positives γ, in allen übrigen Fällen ist keine eindeutige Aussage möglich.
So physikalisch interessant die Größe Γ_n ist, so schwer ist sie i.a. zu berechnen, besonders dann, wenn $\mathcal{M}$ von hoher Dimension ist. Deswegen schlugen Kadanoff und Tang [27] eine alternative Methode vor, die sich auf die abstoßenden periodischen Orbits von f stützt.
An dem folgenden Beispiel wollen wir dies demonstrieren.

Beispiel: ein eindimensionaler Repellor

Wir betrachten den Fall einer eindimensionalen differenzierbaren Abbildung $f: \mathcal{J} = [0,1] \to [0, x_{max}]$ wie in Abb. 1.1 mit $x_{max} = f(x_c) > 1$. Außerdem wollen wir annehmen, daß der Betrag der Ableitung von f auf den Teilintervallen $[0, x_a]$ und $[x_b, 1]$ strikt größer als 1 ist.
Bei der ersten Iteration der Abbildung f entweichen alle Punkte im Intervall $]x_a, x_b[$, bei der nächsten die beiden Urbildintervalle von $]x_a, x_b[$ usw. . Nach n Iterationen besteht die Menge der verbliebenen Punkte aus 2^n Intervallen. Jedem dieser Intervalle kann man eine eindeutige n-elementige symbolische Adresse $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n$ zuordnen, die durch die Dynamik seiner Punkte festgelegt wird: wir setzen $\sigma_k = 0$, falls $f^{(k)}(x) < x_c$ und $\sigma_k = 1$, falls $f^{(k)}(x) > x_c$, x ist dabei beliebig aus dem entsprechenden Intervall gewählt. Sei l_i das Maß (die Länge) des i-ten Intervalls. Dann ist:

$$\Gamma_n = \sum_i^{(n)} l_i, \tag{1.4}$$

wobei die Summe über alle Intervalle der n-ten Generation läuft.

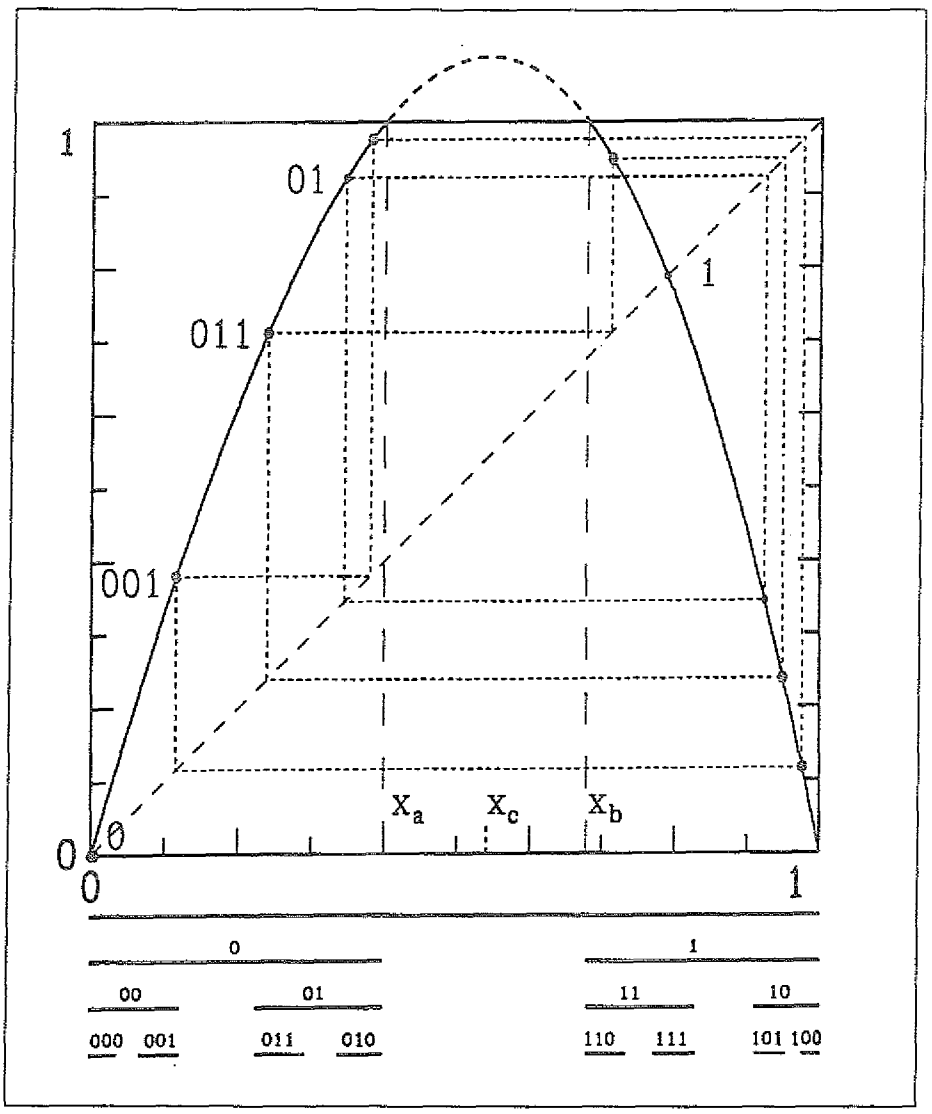


Abbildung 1.1: Beispiel für eine Abbildung, die als invariante Menge einen seltsamen Repellor aufweist. (Als Funktion wurde $4.2\,x(1-x)\log(2.3+x)$ gewählt.) Die eingezeichneten Intervalle entsprechen den Punkten, die 1, 2 oder 3 Iterationen in [0,1] verbleiben. Die symbolische Dynamik ist durch das Maximum x_c bestimmt.

Wegen der oben angenommenen Expansivität von f auf $[0, x_a] \cup [x_b, 1]$ erwartet man, daß Γ_n exponentiell mit n abfällt:

$$\Gamma_n = \mathrm{e}^{-n\gamma_n} \to \mathrm{e}^{-n\gamma} \quad \text{für } n \to \infty\,, \tag{1.5}$$

mit der Entweichrate $\gamma = 1/T$; T is dabei die asymptotische Verweildauer eines zufälligen Startpunktes in $\mathcal{J}$. Eine numerische Untersuchung an der obigen

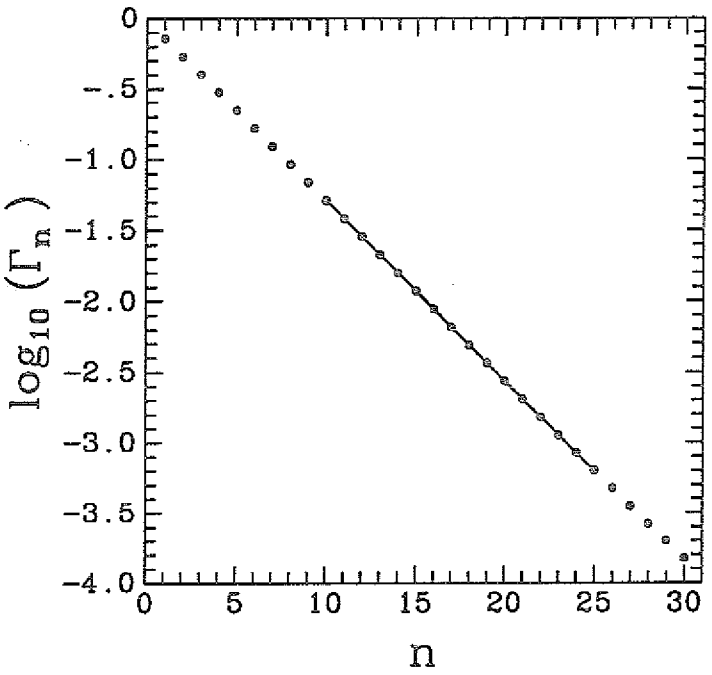


Abbildung 1.2: Maß der in $\mathcal{J}$=[0,1] verbliebenen Startpunkte in Abhängigkeit von der Anzahl n der Iterationen. Es wurden insgesamt 10^7 äquidistante Anfangswerte über maximal 30 Iterationen verfolgt. Eine Geradenanpassung unter Berücksichtigung der Punkte zur 10.-20. bzw. 15.-25. Iteration liefert die Steigung $a = -0.12745 \pm 0.00004$ bzw. $a = -0.12735 \pm 0.00011$ ($= \gamma/\ln 10$). Die Fehler stammen dabei aus der Geradenanpassung.

Abbildung bestätigte diese Erwartung, wie in Abbildung 1.2 zu sehen ist. Mittels Geradenanpassung ermittelt man eine Entweichrate $\gamma = -0.29335 \pm 0.00027$ (siehe Text zur Abbildung).

Wir wollen nun die Summe (1.4) in eine Form bringen, bei der nur die Eigenschaften der periodischen Punkte eingehen [1]. Dazu bemerken wir, daß jedes der oben betrachteten 2^n Intervalle der n-ten Generation durch $f^{(n)}$ auf ganz $\mathcal{J}$ abgebildet wird, insbesondere also einen instabilen n-periodischen Punkt x_i enthält. Je kleiner ein Intervall wird, desto geringer ist die relative Schwankung der Ableitung von $f^{(n)}$ auf diesem. Deshalb kann man sein Expandieren auf ganz $\mathcal{J}$ in n Iterationen mit zunehmnender Genauigkeit durch die Stabilität des periodischen

Punktes ausdrücken: $l_i = a_i/|\Lambda_i|$. Dabei stellt

$$\Lambda_i = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x_i) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^{(k)}(x_i)) \tag{1.6}$$

die Ableitung entlang des periodischen Orbits dar, die a_i sind Korrekturfaktoren der Ordnung $\mathcal{O}(1)$, genauer $a_i = f^{(n)\prime}(x_i)/f^{(n)\prime}(\overline{x_i})$, wobei $\overline{x_i}$ die Stelle im Intervall ist, an der nach Zwischenwertsatz $f^{(n)\prime}(x) = 1/l_i$ ist.
Wir machen nun die Hyperbolizitäts-Annahme, daß nämlich das exponentielle Anwachsen der Λ_i ausschlaggebend ist für das Abnehmen der l_i, und die Asymptotik der Koeffizienten a_i vernachlässigt werden kann[2]. Dann können wir die a_i auch kurzerhand gleich 1 setzen, also in (1.4) $l_i = 1/|\Lambda_i|$ setzen. Damit gilt

$$\Gamma_n \approx \sum_i^{(n)} |\Lambda_i|^{-1} . \tag{1.7}$$

In der Tat berechnet man unter Benutzung aller 7-,8- und 9-periodischen Punkte für das Verhältnis $\sum_i l_i / \sum_i |\Lambda_i|^{-1}$ die Zahlenwerte 0.979, 1.034 und 0.983. Hierbei wurde die Summe $\sum l_i$ mit den in Abb. 1.2 dargestellten Werten für Γ_n abgeschätzt.

1.3 Herleitung einer Zetafunktion

Mit den oben gewählten "Gewichten" $t_i = |\Lambda_i|^{-1}$ bilden wir nun die formale Summe über die periodischen Orbits beliebiger Länge:[3]

$$\begin{aligned}\Omega(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_i^{(n)} |\Lambda_i|^{-1} = \; & z/|\Lambda_0| + z/|\Lambda_1| + z^2/|\Lambda_{00}| + z^2/|\Lambda_{01}| + z^2/|\Lambda_{10}| \\ & + z^2/|\Lambda_{11}| + z^3/|\Lambda_{000}| + z^3/|\Lambda_{001}| + \ldots ,\end{aligned} \tag{1.8}$$

wobei die zweite Summe über alle n-periodischen Punkte auszuführen ist. Diese Reihe konvergiert, falls für genügend große n $(|z^n| \sum_i^{(n)} |\Lambda|^{-1})^{1/n} < 1$ ist. Weil für große n die Summe (1.4) aber gegen $e^{-n\gamma}$ konvergiert, divergiert der Ausdruck (1.8) bei $z = e^{\gamma}$. Die Entweichrate ergibt sich somit als Polstelle von (1.8). Der

[2] Die a_i geben die spezielle Wahl der Anfangsbedingungen wieder. Da die asymptotischen Bahnen jedoch chaotisch den Repellor durchlaufen und dabei stark mischen, erwarten wir eine Unempfindlichkeit gegenüber einer glatten Variation in der Dichte der Anfangsbedingungen.

[3] Diese erinnert an die großkanonische Zustandssumme oder Erzeugendenfunktion der statistischen Physik.

praktische Nutzen dieser Aussage ist jedoch recht gering, denn die Bestimmung der Polstelle einer Funktion ist numerisch eine äußerst delikate Aufgabe. Aber es gibt eine bessere Methode, γ zu bestimmen. Dazu benötigen wir die Einführung von sog. *prim-periodischen* Orbits.

Die Summe (1.8) enthält zu jedem Orbit auch alle seine Wiederholungen. Es ist deshalb naheliegend, *prim-periodische Orbits* auszuzeichnen, die sich nicht als mehrfache Durchläufe einer kürzeren periodischen Bahn darstellen lassen. In der Sprache der Symbolfolgen entspricht ein prim-periodischer Orbit einer wiederholungsfreien Sequenz, wobei wir alle zyklischen Permutationen der Symbolfolge als nur *einen* Prim-Orbit zählen. Z.B. ist $\overline{0001} = \overline{0010} = \overline{0100} = \overline{1000}$ prim[4], nicht aber $\overline{0101} = \overline{01}$.

Ist Λ_p die Stabilität eines prim-periodischen Orbits, so besitzt seine r-fach wiederholte Durchlaufung die Ableitung Λ_p^r. Die Stabilität eines n_p-periodischen Orbits ist nach Kettenregel für jeden seiner Punkte dieselbe. Deshalb liefert jeder Orbit eine seiner Länge entsprechende Anzahl gleicher Beiträge zur obigen Summe. Wir können somit (1.8) umformen in:

$$\Omega(z) = \sum_p n_p \sum_{r=1}^{\infty} (z^{n_p}|\Lambda_p|^{-1})^r = \sum_p \frac{n_p\, z^{n_p}|\Lambda_p^{-1}|}{1 - z^{n_p}|\Lambda_p^{-1}|}\,, \tag{1.9}$$

wobei der Index p alle verschiedenen prim-periodischen Orbits durchläuft.

Die Faktoren $n_p\, z^{n_p}$ in der Summe suggerieren eine Umformung in eine logarithmische Ableitung:

$$\Omega(z) = -z\frac{d}{dz}\sum_p \ln(1 - z^{n_p}/|\Lambda_p|). \tag{1.10}$$

Somit ist $\Omega(z)$ die logarithmische Ableitung des unendlichen Produktes

$$1/\zeta(z) = \prod_p (1 - z^{n_p}|\Lambda_p|^{-1})\,. \tag{1.11}$$

Dies ist ein Beispiel für eine dynamische Zetafunktion. Diese Bezeichnung erklärt sich aus der rein formalen Analogie des Produktes (1.11) zur Darstellung der Riemannschen Zetafunktion als Eulerprodukt über Primzahlen.

[4]Der Balken über der Sequenz bedeutet ihre periodische Fortsetzung; wir werden ihn in Zukunft aber wieder fortlassen, weil wir immer periodische Orbits meinen.

1.4 Mehrdimensionale Repelloren

Wir wollen nun zum allgemeineren mehrdimensionalen Fall zurückkehren. Dabei sei nun $\mathcal{R}$ eine endliche, einen Repellor einschließende Teilmenge von $\mathcal{M}$. Wir setzen

$$\Gamma_n = \mathrm{e}^{-n\gamma_n} = \int_{\mathcal{R}} dy \int_{\mathcal{R}} dx\, \delta[y - f^n(x)] \Big/ \int_{\mathcal{R}} dx\,. \tag{1.12}$$

Für genügend große n kann man dies ersetzen [1, 27] durch eine Summe über die periodischen Orbits:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-n\gamma_n} &= \int_{\mathcal{R}} dx\, \delta[x - f^n(x)] \\ &= \sum_{x_i \in Fix(f^n)} |\det[1 - Df^n(x_i)]|^{-1}\,. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Letzteres folgt aus der Formel für die δ-Funktion

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|\det Dg(x_i)|}\, \delta(x - x_i)\,,$$

wobei g einfache Nullstellen in x_i haben soll, mit $g = id_{\mathcal{R}} - f$.
$Df^n(x_i)$ ist die Jacobimatrix von f^n an der Stelle x_i:

$$Df^n(x_i) = \prod_{j=0}^{n-1} Df(f^{(j)}(x_i))\,, \qquad (Df(x))_{kl} = \frac{\partial}{\partial x_l} f_k(x)\,. \tag{1.14}$$

Sind $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_d$ die Eigenwerte dieser Matrix, und ist kein Eigenwert vom Betrage 1, so kann die Determinante $\det[1 - Df^n(x)]$ durch $\prod_{a=1}^{d}(1 - \Lambda_i^a)$ ersetzt werden. Im Grenzwert langer Zeiten tragen nur die expandierenden Eigenwerte zum Wachstum des Nenners bei, so daß man schreiben kann

$$\mathrm{e}^{-n\gamma_n} = \sum_{x_i \in Fix(f^n)} \frac{1}{|\Lambda_i|}\,, \tag{1.15}$$

wobei $\Lambda_i = \prod_a^D \Lambda_i^a$ das Produkt dieser D expandierenden Eigenwerte darstellt.
Man sieht also, daß die obige Zetafunktion (1.11) auch für mehrdimensionale Repelloren korrekt ist, wenn man Λ_p als Produkt über alle expandierenden Eigenwerte interpretiert.
Gleichung (1.11) ist das wesentliche Ergebnis dieses Kapitels. Anstatt asymptotische Entweichraten aus den Summen für Γ_n bei endlichen n zu extrapolieren, suchen wir nun nach Nullstellen der zugehörigen Zetafunktion. Die Entweichrate

ist über (1.8) mit den Polstellen von $\Omega(z)$ verbunden, und $\Omega(z)$ divergiert genau dann, wenn $[\zeta^{-1}(z)]'$ divergiert, oder $\zeta(z)^{-1}$ eine Nullstelle aufweist.
Dabei besteht der Vorteil in der Tatsache, daß die Form der Zetafunktion schon einen asymptotischen Ausdruck darstellt, und die Singularitätensuche in (1.8) durch eine Nullstellensuche ersetzt werden kann. Eine Extrapolation $n \to \infty$ ist nicht mehr durchzuführen. Außerdem ist (1.8) und damit auch (1.11) invariant gegenüber differenzierbaren Koordinatentransformationen, denn die Stabilitäten der periodischen Orbits sind koordinatenunabhängig.
Bevor wir zum allgemeineren Formalismus übergehen, wollen wir nochmal die wesentlichen Punkte unserer Umformungen zusammenfassen: wir waren ausgegangen von dem Problem, eine Mittelwertbildung auf einer chaotischen Menge ausführen zu müssen (im Repellor-Beispiel war dies trivialerweise die charakteristische Funktion). Diese Mittelung haben wir ersetzt durch eine Mittelung über periodische Punkte in dieser Menge, wobei wesentlich war, daß diese im Repellor dicht liegen. Jedem Punkt einer periodischen Bahn haben wir dabei ein Gewicht verliehen, dessen wesentliche Eigenschaft die Multiplikativität längs der Bahn war. Durch Ausnutzen dieser Eigenschaft konnten wir zu einer Summe über prim-periodische Orbits übergehen, die man dann als logarithmische Ableitung einer dynamischen Zetafunktion interpretieren konnte. Die Null- oder Polstellen dieser Zetafunktion haben wir wiedererkannt als die charakteristischen Werte, bei denen in der ursprünglichen Mittelwertberechnung ein Übergang von Konvergenz zu Divergenz auftrat.
Wir werden sehen, daß in diesem Vorgehen alle wesentlichen Schritte vorhanden sind, die auch im allgemeineren Fall durchzuführen sind.

1.5 Der Frobenius-Perron-Operator

Sei $f(x)$ eine differenzierbare Abbildung einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ in sich, z.B. die Poincaré-Abbildung eines $(d+1)$-dimensionalen Flusses, dann wird ihre Wirkung auf eine stetige Verteilung $\phi(x)$ auf $\mathcal{M}$ beschrieben durch den Zeitentwicklungs- oder *Frobenius-Perron*-Operator:

$$(\mathcal{L} \circ \phi)(y) = \int_{\mathcal{M}} dx\, \delta(y - f(x))\, \phi(x) = \sum_{f(x_i)=y} \frac{\phi(x_i)}{|\det \mathbf{J}(x_i)|}. \tag{1.16}$$

$\mathbf{J}(x)$ bezeichnet die Jacobimatrix zu f am Punkt x.

Im Rückblick auf die Berechnungen der Entweichrate eines d-dimensionalen Repellors erkennen wir den Integralkern $G(x,y) = \delta(y - f(x))$ von (1.12) für $n = 1$ wieder. Das Integral (1.13) selbst ist also proportional zu $\mathcal{L}^n$ und wird durch den größten Eigenwert von $\mathcal{L}$ bestimmt:

$$e^{n\gamma_n} \propto \lambda_0^n\,, \tag{1.17}$$

so daß der Grenzwert von γ_n für $n \to \infty$ $\gamma = -\log \lambda_0$ ist. Dies ist die eigentliche Rechtfertigung für den Übergang von (1.12) zu (1.13).
Die Eigenwerte von $\mathcal{L}$ sind gegeben durch die Nullstellen von[5]

$$\det(1 - z\mathcal{L}) = \prod_{k=0}^{\infty}(1 - z\lambda_k)\,. \tag{1.18}$$

Ist $\mathcal{L}$ reellwertig, so sind diese reell oder tauchen in komplex konjugierten Paaren λ_k, λ_k^* auf. Die Determinante kann ausgewertet werden mittels der Identität:

$$\det(1 - z\mathcal{L}) \equiv \exp[\,\mathrm{Sp}\,(\ln(1 - z\mathcal{L}))\,] = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\,\mathrm{Sp}\,\mathcal{L}^n\right)\,. \tag{1.19}$$

$\mathrm{Sp}\,\mathcal{L}^n$ ist nichts anderes als die Summe über alle n-periodischen Punkte:

$$\mathrm{Sp}\,\mathcal{L}^n = \int\int dx\,dy\,\delta(x-y)\,\mathcal{L}^n(y,x) = \sum_i^{(n)}\frac{1}{\left|\det\left[\mathbf{1}-\mathbf{J}^{(n)}(x_i)\right]\right|}\,. \tag{1.20}$$

Dabei bezeichnet

$$\mathbf{J}^{(n)}(x_i) = \prod_{j=0}^{n-1}\mathbf{J}(f^{(j)}(x_i)), \qquad (\mathbf{J}(x))_{kl} = \frac{\partial}{\partial x_l}f_k(x) \tag{1.21}$$

die $(d \times d)$-dimensionale Jacobimatrix des i-ten n-periodischen Orbits mit Eigenwerten $\Lambda_{i,1}, \Lambda_{i,2}, \ldots, \Lambda_{i,d}$. Bei der Umformung (1.20) wurde explizit ausgenutzt, daß kein Eigenwert den Betrag 1 hat, das System also hyperbolisch ist. Das Auftreten sogenannter marginaler Eigenwerte führt i.a. zum Verlust des rein exponentiellen Skalenverhaltens [2]. Dies tritt in Systemen auf, in denen geordnete und chaotische Bereiche nebeneinander existieren. Ein Beispiel dafür ist der KAM-Bereich beim Einsetzen chaotischer Bewegungen in Hamiltonschen Systemen.

[5] Wir nehmen der Einfachheit halber ein diskretes Spektrum von $\mathcal{L}$ an. I.a. hängt die Form des Spektrums stark von der Wahl des Funktionenraumes ab, auf dem $\mathcal{L}$ wirkt [13].

Die Nenner det[1–J] haben den großen Nachteil, daß sie nicht multiplikativ sind. Um dies zu erreichen, faktorisieren wir sie in Produkte aus expandierenden Eigenwerten $\Lambda_{i,1}, \Lambda_{i,2}, \ldots, \Lambda_{i,e}$ und kontrahierenden Eigenwerten $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \ldots, \lambda_{i,f}$, $e+f = d = dim(\mathcal{M})$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left|\det\left[\mathbf{1}-\mathbf{J}^{(n)}(x_i)\right]\right|} &= \frac{1}{|\Lambda_i|}\prod_{a=1}^{e}\frac{1}{1-\Lambda_{i,a}^{-1}}\prod_{b=1}^{f}\frac{1}{1-\lambda_{i,b}} \\
&= \frac{1}{|\Lambda_i|}\prod_{a=1}^{e}\sum_{l_a=0}^{\infty}\Lambda_{i,a}^{-l_a}\prod_{b=1}^{f}\sum_{m_b=0}^{\infty}\lambda_{i,b}^{m_b} \\
&= \frac{1}{|\Lambda_i|}\sum_{\substack{l_1,\ldots,l_e=0\\ m_1,\ldots,m_f=0}}^{\infty}\frac{\lambda_{i,1}^{m_1}\lambda_{i,2}^{m_2}\ldots\lambda_{i,f}^{m_f}}{\Lambda_{i,1}^{l_1}\Lambda_{i,2}^{l_2}\ldots\Lambda_{i,e}^{l_e}}\,. \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

Dabei bedeutet Λ_i das Produkt $\prod_{a=1}^{e}\Lambda_{i,a}$ aller expandierenden Eigenwerte. Setzt man diesen Ausdruck in die obige Spurformel ein, so ergibt sich:

$$\det(1-z\mathcal{L}) = \prod_{\substack{l_1,\ldots,l_e\\ m_1,\ldots,m_f}} \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\sum_{i}^{(n)}\frac{1}{|\Lambda_i|}\frac{\lambda_{i,1}^{m_1}\lambda_{i,2}^{m_2}\ldots\lambda_{i,f}^{m_f}}{\Lambda_{i,1}^{l_1}\Lambda_{i,2}^{l_2}\ldots\Lambda_{i,e}^{l_e}}\right)\,. \qquad (1.23)$$

Im 2-dimensionalen Fall $\lambda < 1 < \Lambda$ vereinfacht sich diese Formel zu:

$$\det(1-z\mathcal{L}) = \prod_{l,m=0}^{\infty}\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\sum_{i}^{(n)}\frac{1}{|\Lambda_i|}\frac{\lambda_i^m}{\Lambda_i^l}\right)\,. \qquad (1.24)$$

Diese Gewichte sind nun multiplikativ in folgendem Sinne: ist $t_i(l,m) := \lambda_i^m/|\Lambda_i|\Lambda_i^l$ das Gewicht eines n-periodischen Orbits x_i, der tatsächlich der Mehrfachdurchlauf eines kürzeren n_p–periodischen Orbits ist, also $f^{(n_p)}(x_i) = x_i$, dann ist $t_i(l,m) = [t_p(l,m)]^r$ mit $r = n/n_p$ (die Eigenwerte der n-ten Iterierten der Jacobimatrix $\mathbf{J}^{(n)}(x_i) = [\mathbf{J}^{(n_p)}(x_i)]^r$ erfüllen z.B. diese Eigenschaft). Nach Kettenregel ist außerdem die Stabilität eines periodischen Orbits konstant entlang der Bahn, womit jeder prim-periodische Orbit der Länge n_p den Beitrag $\sum_{i\in p} t_i = n_p t_p^{n/n_p}$ liefert.

Damit können die Exponenten in (1.23) umgeschrieben werden in:

$$\begin{aligned}
1/\zeta(z) &= \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\sum_{i}^{(n)}t_i\right) \\
&= \exp\left(-\sum_{p}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(z^{n_p}t_p)^r}{r}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left(-\sum_p \log(1 - z^{n_p} t_p)\right) \\
&= \prod_p (1 - z^{n_p} t_p)\,, \qquad (1.25)
\end{aligned}
$$

wobei der Index p nun alle prim-periodischen Bahnen durchläuft.
Aus (1.23) wird nun

$$
\begin{aligned}
\det(1 - z\mathcal{L}) =: \mathcal{Z}(z) &= \prod_{l_1,\ldots,l_e} \prod_{m_1,\ldots,m_f} \frac{1}{\zeta_{l_1,\ldots,m_f}(z)} \quad \text{mit} \\
\zeta^{-1}_{l_1,\ldots,l_e,m_1,\ldots,m_f}(z) &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{|\Lambda_p|} \frac{\lambda_{p,1}^{m_1} \lambda_{p,2}^{m_2} \ldots \lambda_{p,f}^{m_f}}{\Lambda_{p,1}^{l_1} \Lambda_{p,2}^{l_2} \ldots \Lambda_{p,e}^{l_e}} z^{n_p}\right) . \qquad (1.26)
\end{aligned}
$$

Wir haben somit eine Formel für die Eigenwerte des Transferoperators in Größen der periodischen Orbits gefunden. Diese Formel sollte gleichermaßen für alle Mittelungen gültig sein, vorausgesetzt, das Maß ist längs der Orbits multiplikativ. Im allgemeinen läßt man den formalen Parameter z, der nur zum Ordnen der Terme nach Periodenlänge dient, in den Gewichten verschwinden, indem man $z\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ und $z^{n_p} t_p \to t_p$ ersetzt. (1.25) ist ein weiteres Beispiel für eine dynamische Zetafunktion. Das unendliche Produkt $\mathcal{Z}$(z) (1.26) wird bisweilen als *Selberg*-Produkt bezeichnet, weil es formal an die Selbergsche Zetafunktion erinnert.

Eine Vielzahl physikalisch relevanter Größen läßt sich mit den Eigenwerten des Zeitentwicklungsoperators, d.h. aus den Nullstellen von $\det(1-z\mathcal{L})$ berechnen. Im obigen Beispiel erhielten wir den führenden Eigenwert λ_0 von $\mathcal{L}$ aus dem ersten, mit dem "Volumen" $|\Lambda_p|$ gewichteten Faktor $\zeta_{\underline{0}} = \zeta_{0\ldots0}$ des Selberg-Produkts:

$$
1/\zeta_0(z) = \prod_p \left(1 - \frac{z^{n_p}}{|\Lambda_p|}\right) . \qquad (1.27)
$$

Die Entweichrate ergab sich als $\gamma = -\log \lambda_0$. Die weiteren Faktoren $1/\zeta_{\underline{k}}$ in (1.26) beeinflussen die nicht-führenden und anisotropie-abhängigen Eigenwerte von $\mathcal{L}$ [8], das Verhältnis λ_1/λ_0 ergibt z.B. den Korrelationsexponenten für chaotische Flüsse (s.u.).

Im Fall eindimensionaler Abbildungen läßt sich das obige Selbergprodukt mit Hilfe einer Euler-Transformation umformen, was in manchen Fällen zu einer weiteren Beschleunigung der Konvergenz führt. Das Selberg-Produkt lautet in diesem Fall einfach:

$$
\mathcal{Z}(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta_k(z)}\,, \quad \frac{1}{\zeta_k(z)} = \prod_p \left(1 - \frac{t_p}{\Lambda_p^k}\right) . \qquad (1.28)
$$

Es gilt dann:

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1-t_p\Lambda_p^{-k}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-t_p)^k \frac{\Lambda_p^{-\frac{1}{2}k(k-1)}}{\prod_{r=1}^{k}(1-\Lambda_p^{-r})}. \tag{1.29}$$

Ein Beweis dieser Formel findet sich in Anhang C.

1.6 Die cycle expansion nach P. Cvitanović

Nun wollen wir zeigen, wozu die obigen Formulierungen mithilfe der Zetafunktionen nützlich sind. Zwar sind Zetafunktionen ihrer Definition nach asymptotische Ausdrücke, aber auf den ersten Blick bedarf es der Daten aller im System auftretenden periodischen Orbits, um sie zu berechnen. Da deren Anzahl aber typischerweise exponentiell mit der Periode anwächst – der zugehörige asymptotische Exponent ist die sogenannte *topologische Entropie* – scheint man nichts gewonnen zu haben.
Es gibt jedoch – zumindest für einige Systeme – eine Methode, Zetafunktionen und ihre Nullstellen effizient zu berechnen. Diese Methode, die sogenannte *cycle expansion* wurde 1988 von P. Cvitanović entwickelt und populär gemacht [9]. Voraussetzung für ihre erfolgreiche Anwendung ist die Existenz einer symbolischen Dynamik für das untersuchte System, sowie ein gute Kontrolle derselben.

1.6.1 Symbolische Dynamik

Eine symbolische Dynamik gewinnt man dadurch, daß man den Phasenraum in Teilmengen zerlegt, und jeder dieser Mengen genau einen Buchstaben aus einem Alphabet zuordnet. Die Bewegung eines Orbits durch den Phasenraum wird so diskretisiert in eine Abfolge von besuchten Zellen und einer entsprechenden Folge von Symbolen $\ldots\sigma_{-2}\sigma_{-1}\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots$. Die Zeitentwicklung im ursprünglichen System wird dabei zu einer Verschiebung des "Nullpuktes" dieser Symbolsequenz (*Shift-Abbildung*). Man spricht von einer *überdeckenden* symbolischen Dynamik, wenn verschiedene Orbits auch verschiedene Symbolsequenzen erhalten. Andererseits kann es Symbolfolgen geben, die gar keiner dynamischen Bahn entsprechen. Sind alle Sequenzen als physikalische Orbits realisiert, so spricht man von einer *vollständigen* symbolischen Dynamik, sind hingegen einige Orbits nicht erlaubt,

so spricht man von *pruning*[6].
Periodischen Orbits der ursprünglichen Dynamik entsprechen nun periodische Symbolfolgen. Ein prim-periodischer Orbit wird dargestellt durch eine wiederholungsfreie endliche Sequenz, die wir auch als *Primzykel* bezeichnen.
Zu ihrer Bestimmung ist zuerst einmal numerische Vorarbeit erforderlich. Man bestimmt die Positionen und Stabilitäten der kurzen Orbits bis zu einer bestimmten Symbollänge. Dabei nimmt man an, daß die Periode in der symbolischen Dynamik gleichzeitig eine Hierarchie der periodischen Orbits im untersuchten System wiedergibt in einem Sinne, der weiter unten klar wird.
Die Suche nach den periodischen Bahnen geschieht zumeist mit Standardmethoden, etwa einem Newton-Raphson-Verfahren (siehe Anhang D). Wichtig ist, daß man wirklich *alle* periodischen Orbits bis zu einer bestimmten Symbollänge gefunden hat. Übersieht man auch nur einen einzigen, so funktioniert das Verfahren mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit nicht mehr.
Liegt eine vollständige symbolische Dynamik vor, so existiert eine Möglichkeit, die Vollzähligkeit der Orbits zu prüfen, die sog. Möbius-Transformation: diese gibt die maximale Anzahl M_n von Primzykeln der Länge n an, die man in einer symbolischen Dynamik mit einem Alphabet aus N Buchstaben bilden kann. Sie lautet:

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) N^d , \tag{1.30}$$

wobei die Möbius-Funktion gegeben ist durch

$$\mu(p) = \begin{cases} 1 & : \text{ p} = 1 , \\ 0 & : \text{ p ist durch ein Quadrat teilbar,} \\ (-1)^k & : \text{ p hat k verschiedene Primfaktoren.} \end{cases} \tag{1.31}$$

Die Summe läuft über alle Primteiler von n.
Hat man beispielsweise eine symbolische Dynamik mit nur zwei Symbolen, so existieren $M_n = 2, 1, 2, 3, 6, 9, 18, 30, 56, 99, \ldots$ Primzykel.

1.6.2 Cycle Expansion

Nun entwickeln wir das Eulerprodukt

$$1/\zeta(z) = \prod_p (1 - t_p) = 1 - \sum_{p_1 p_2 \cdots p_k} t_{p_1 + p_2 \cdots + p_k} , \tag{1.32}$$

[6] Der Baum der Symbolfolgen ist sozusagen an seinen Zweigen beschnitten.

$$\text{mit} \quad t_{p_1+p_2+\ldots+p_k} = (-1)^{k+1} t_{p_1} t_{p_2} \cdot \ldots \cdot t_{p_k} \,. \tag{1.33}$$

Dabei läuft die Summe über alle verschiedenen nicht-wiederholten Kombinationen prim-periodischer Orbits. Für $k > 1$ sind die $t_{p_1+p_2\ldots+p_k}$ Pseudoorbits, sie sind Folgen kürzerer Orbits, die den Orbit der Sequenz $p_1 p_2 \ldots p_k$ entlang der Segmente $p_1, p_2, \ldots, p_k$ "beschatten". Für genügend kleines z, das wir mittels $z_p^n t_p \to t_p$ in die t_p absorbiert haben, konvergiert die Summe als Potenzreihe in z. Im Falle einer binären Dynamik erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} 1/\zeta = \; & (1-t_0)(1-t_1)(1-t_{01})(1-t_{001})(1-t_{011})(1-t_{0001}) \\ & \times (1-t_{0011})(1-t_{0111})(1-t_{00001})(1-t_{00011}) \\ & \times (1-t_{00101})(1-t_{00111})(1-t_{01011})(1-t_{01111}) \cdot \ldots . \end{aligned} \tag{1.34}$$

Die ersten Terme der Entwicklung lauten:

$$\begin{aligned} 1/\zeta = \; & 1 - t_0 - t_1 - t_{01} - t_{001} - t_{011} - t_{0001} - t_{0011} - t_{0111} - \ldots \\ & -t_{0+1} - t_{0+01} - t_{1+01} - t_{0+001} - t_{0+011} - t_{001+1} - t_{011+1} - \ldots \\ & -t_{0+01+1} - \ldots . \end{aligned} \tag{1.35}$$

Der folgende Schritt ist der eigentliche "Trick" der cycle expansion. Wir beobachten, daß die Entwicklung (1.32) eine Umgruppierung der Terme zuläßt in dominante *fundamentale* Beiträge t_f und abfallende *Krümmungsterme* c_n:

$$1/\zeta = 1 - \sum_f t_f - \sum_n c_n \,. \tag{1.36}$$

Eine solche Reihe bezeichnen wir als *cycle expansion*. Für eine binäre Dynamik besteht diese darin, daß man Terme der gleichen gesamten Symbollänge zusammenfaßt:

$$\begin{aligned} 1/\zeta = \; & 1 - t_0 - t_1 - (t_{01} - t_0 t_1) - [(t_{001} - t_0 t_{01}) + (t_{011} - t_{01} t_1)] \\ & -[(t_{0001} - t_0 t_{001}) + (t_{0111} - t_{011} t_1) + (t_{0011} - t_{001} t_1 - t_0 t_{011} + t_0 t_{01} t_1)] \\ & - \ldots . \end{aligned} \tag{1.37}$$

Die fundamentalen Orbits t_0 und t_1 können nicht durch kürzere Bahnen approximiert werden, sie bilden die "Grundbausteine" der symbolischen Dynamik insofern, daß alle längeren Bahnen aus ihnen zusammengesetzt werden können. Die Summe aller Terme der Gesamtlänge n bezeichnen wir als *curvature*–Korrektur c_n. Das Verfahren der cycle expansion beruht auf der Tatsache, daß

Abschneideperiode n_p in Zeta	führende Nullstelle z_0	$\ln z_0$
3	1.341750183	0.2939748685
4	1.340873631	0.2933213650
5	1.340909933	0.2933484380
6	1.340913389	0.2933510153
7	1.340913386	0.2933510131
8	1.340913376	0.2933510056
9	1.340913375	0.2933510049

Tabelle 1.1: Führende Nullstelle der Zetafunktion (1.11) in Abhängigkeit der Abschneide-Periode n_p, berechnet mittels cycle expansion. Zum Vergleich: die Geradenanpassung hatte den Wert $\gamma = -0.29335 \pm 0.00027$ ergeben.

diese Korrekturen für geeignete Gewichte t_p sehr schnell mit n klein werden. Sind etwa alle Orbits gleich gewichtet ($t_p = z^{n_p}$), so sind die c_n exakt Null. Sind die Gewichte von Orbits mit ähnlicher symbolischer Dynamik von annähernd gleicher Größe, so heben sich diese Beiträge beinahe auf.

Unter Vorgabe dieser cycle expansion ist das weitere Vorgehen klar. Man setzt die Stabilitäten und Längen aller periodischen Orbits bis zu einer geeigneten Abschneideperiode n_p in (1.37) ein und erhält so ein endliches Polynom der Ordnung n_p in z als Approximation für ζ^{-1}. Die Nullstellen dieses Polynoms sind nun mit Standardverfahren leicht zu bestimmen.

Für unsere Modellabbildung aus Abschnitt 1.2 sind in der folgenden Tabelle die führenden Nullstellen von endlichen Approximationen dieser Zetafunktion aufgelistet. Vergleicht man diese Werte mit den vorher aus der Geradenanpassung gewonnenen Entweichraten, so sieht man, daß die Zetafunktion schon mit sehr wenigen periodischen Orbits konvergiert, und zwar mit deutlich höherer Genauigkeit, als es die Geradenanpassung zuläßt.

Kapitel 2:
Resonanzen in dynamischen Systemen

Zeitkorrelationen spielen eine zentrale Rolle im Studium dynamischer Systeme. Die Leistungsspektren, also die Fourier-Laplace-Transformierten dieser Korrelationen sind häufig die einzigen experimentell zugänglichen Größen in chaotischen oder turbulenten Flüssen.

Bei der Interpretation dieser Spektren wird erkennbar, daß deterministische chaotische Systeme typischerweise, trotz ihrer ergodischen Eigenschaften im Langzeitlimes, deutliche Korrelationen der Bewegung auf kurzen Zeitskalen aufweisen. Dies spiegelt sich wieder in mehr oder weniger ausgeprägten Spitzen im Spektrum der (klassischen) Autokorrelationsfunktionen [8, 14, 26].

Die Frequenzen, die diesen Spitzen entsprechen, erscheinen nahe bei Frequenzen von dominierenden periodischen Orbits. Man interpretiert sie deshalb als Resonanzen des Systems [39]: das System folgt bevorzugt einer periodischen Bewegung, kann dieser jedoch aufgrund der Instabilität nur ein endliches Zeitintervall lang folgen [4]. Die Breite τ der Peaks wird entsprechend als Lebensdauer gedeutet. Besitzt der Fluß eine zusammenhängende ergodische Komponente, so folgt, daß alle τ endlich sein müssen bis auf eines, das zu $T=0$ gehört und dem invarianten Maß des Systems entspricht.

Eine mathematisch strenge Theorie dieser Resonanzen existiert bisher nur für die Klasse der Axiom–A–Diffeomorphismen. Diese wurde im wesentlichen von D. Ruelle und M. Pollicott entwickelt [36, 39, 40, 41]. Viele ihrer Beweise nutzen spezielle Eigenschaften der Axiom–A–Dynamiken aus, etwa die Hyperbolizität. Diese erlaubt es einem, Markov-Partitionen des Phasenraumes einzuführen [6], und die ursprüngliche Dynamik eindeutig auf eine Shift-Dynamik in einem geeigneten Raum von Symbolsequenzen abzubilden. Viele Methoden der klassischen statistischen Physik werden dadurch übertragbar auf chaotische dynamische Systeme. So werden etwa die Zeitkorrelationen bezüglich des invarianten Maßes (das als Gibbs-Maß gewählt wird) behandelbar als räumliche Korrelationen in einem eindimensionalen Spinsystem mit einer Wechselwirkung kurzer Reichweite.

In diesem Rahmen konnten Ruelle und Pollicott zeigen, daß die Fouriertransformierten der Korrelationsfunktionen meromorph in einem Streifen um die reelle

Achse sind, die Positionen der Polstellen sind unabhängig von der beobachteten Observablen. Weiterhin gilt für diskrete mischende Systeme, daß in einem geeignet schmalen Streifen um die reelle Achse kein Pol liegt, was zu einem exponentiell schnellen Zerfallen der Korrelationen führt. In einigen Fällen gilt diese Aussage ebenfalls für kontinuierliche Flüsse (Beispiel: geodäsischer Fluß auf Flächen konstanter negativer Krümmung).
Trotz dieser Einschränkung auf eine sehr kleine Klasse mathematisch exakt behandelbarer Modellsysteme weist eine Vielzahl numerischer Untersuchungen darauf hin, daß die gewonnene Erkenntnisse in einem allgemeineren Zusammenhang gültig sein könnten (siehe etwa Isolas Untersuchung der Korrelationen im Hénon-System beim Übergang von chaotischem zu periodischem Verhalten [26]).

2.1 Korrelationsfunktionen

Sei wieder $\{f^t\}$ ein dynamisches System auf einer kompakten Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$. Wir wollen diskretes und kontinuierliches t zulassen, eventuell mit der Einschränkung $t > 0$. Wir nehmen an, es existiere ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß[1], das bezüglich $\{f^t\}$ ergodisch ist:
Im Fall eines hyperbolischen Attraktors ist dessen Existenz garantiert durch das folgende

Theorem 2.1 (Sinai, Ruelle, Bowen) : *Sei $f^t : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ein C^2-Fluß mit einem hyperbolischen Attraktor $\mathcal{A}$. Dann existiert ein eindeutiges invariantes Maß μ mit Träger in $\mathcal{A}$ mit den folgenden Eigenschaften: ist U eine Umgebung von $\mathcal{A}$, so daß $f^t(U) \subset U$ für alle $t \geq t_0$, $\mathcal{A} = \bigcap_{t \geq t_0} f^t(U)$, und ist B eine reellwertige stetige Funktion, dann gilt für (Lebesgue-)fast alle $x \in U$*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T B(f^t(x))\, dt = \int_{\mathcal{A}} B(x)\, d\mu(x) \tag{2.1a}$$

bzw. für diskretes t

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} B(f^t(x)) = \int_{\mathcal{A}} B(x)\, d\mu(x)\,. \tag{2.1b}$$

Sind $A, B : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen auf $\mathcal{M}$, so definieren wir ihre

[1] d.h. für alle $t \geq 0$ und alle meßbaren Mengen E gilt: $\mu(f^{-t}(E)) = \mu(E)$

Korrelationsfunktion C_{AB} durch:

$$\begin{aligned} C_{AB}(t) &= \int \mu(dx)\,(A(f^t(x)) - \overline{A})\,(B(x) - \overline{B}) \\ &= \int \mu(dx)\,A(f^t(x))\,B(x) - \left(\int \mu(dx)\,A(x)\right)\left(\int \mu(dx)\,B(x)\right) \\ &= \mu((A \circ f^t)B) - \mu(A)\mu(B)\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dabei haben wir die Abkürzung $\mu(A) = \int \mu(dx)A(x)$ eingeführt, der Querstrich bedeutet eine zeitliche Mittelung. Man definiert als Leistungsspektrum (gewöhnlich für $A \equiv B$) die Fourier-Transformierte

$$\widehat{C}_{AB}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} C_{AB}(t)\,. \tag{2.3}$$

Im diskreten Fall wird das letzte Integral zu einer Summe, und $\widehat{C}$ ist 2π-periodisch in ω. Aufgrund unserer Ergodizitäts-Annahme können wir die Korrelationsfunktion als Zeitmittel gewinnen:

$$\begin{aligned} C_{AB}(t) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(f^{t+\tau}(x))\,B(f^\tau(x))\,d\tau \\ &\quad - \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(f^\tau(x))\,d\tau - \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T B(f^\tau(x))\,d\tau\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dies ist gewöhnlich die Methode, Korrelationen aus Experimenten zu bestimmen.

2.2 Korrelationen und das Spektrum des Frobenius-Perron-Operators

Betrachten wir nun der Einfachheit halber den Fall einer Abbildung f mit einem absolut stetigen invarianten Maß. Letzteres bedeutet, das sich das Maß μ durch das Lebesguemaß μ_0 ausdrücken läßt als $\mu(dx) = \psi_0(x)\mu_0(dx)$ mit einer Lebesgue-integrablen Funktion $\psi_0(x)$. ψ_0 ist dann eine Eigenfunktion des Frobenius-Perron-Operators, der auf dem Raum der integrablen Funktionen ϕ wirkt gemäß:

$$\mathcal{L} : \phi \mapsto \mathcal{L}\phi \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}\phi(y) = \int dy\,\delta(x - f(y))\,\phi(y) = \sum_{x_i \in f^{-1}(y)} \frac{\phi(x_i)}{|\det\, Df(x_i)|}\,. \tag{2.5}$$

Der zugehörige Eigenwert ist $\nu_0 = 1$.
Aus der Definition folgt sofort, daß für alle integrablen Funktionen ϕ gilt: $\mu_0(\mathcal{L}\phi) = \mu_0(\phi)$. Sind A und B zwei beliebige Observablen, so gilt

$$\mu_0((A \circ f^n) \cdot B) = \mu_0(A \cdot (\mathcal{L}^n B)) \,. \tag{2.6}$$

$\mathcal{L}^n$ ist dabei analog zu (2.5) definiert, indem man auf der rechten Seite f^{-1} durch f^{-n} ersetzt. Der Frobenius-Perron-Operator ist also gewissermaßen dual zur Zeitentwicklung des Systems, was schon darauf hinweist, daß dieser Operator auch für Zeit-Korrelationen von großem Nutzen ist.
Betrachten wir dazu die Fouriertransformierten der obigen Integranden.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega n} \mu((A \circ f^n) \cdot B) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega n} \mu_0((A \circ f^n)\psi_0 \cdot B) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega n} \mu_0(A \cdot \mathcal{L}^n(\psi_0 \cdot B)) \\
&= \mu_0(A \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega n} \mathcal{L}^n(\psi_0 \cdot B)) \\
&= \mu_0(A(1 - \mathrm{e}^{-i\omega}\mathcal{L})^{-1}(\psi_0 \cdot B)) \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Wir haben dabei formal die Umkehrbarkeit von $(1 - \mathrm{e}^{-i\omega}\mathcal{L})$ angenommen, die z.B. im Fall reversibler dynamischer Systeme gesichert ist. Wiederholt man die obige Rechnung für $n \leq 0$, so erhält man mit $z = \mathrm{e}^{-i\omega}$ das Gesamtresultat:

$$\widehat{C}_{AB}(\omega) = \mu_0(A(1 - z\mathcal{L})^{-1}(\psi_0 \cdot B)) + \mu_0(B(1 - z^{-1}\mathcal{L})^{-1}(\psi_0 \cdot A)) - \mu(AB)\,,^2 \tag{2.8}$$

so daß die komplexen Polstellen des Leistungsspektrums $\widehat{C}$ die Logarithmen der Eigenwerte von $\mathcal{L}$ sind. Ihre Residuen hängen von A und B ab, nicht jedoch ihre Position. Für diese komplexen Polstellen hat D. Ruelle den Begriff der Resonanzen geprägt [39]. Auch wenn hier noch nicht klar ist, wie das Spektrum von $\mathcal{L}$ aussieht, und wann der Operator $(1 - z\mathcal{L})^{-1}$ überhaupt existiert, sehen wir doch, daß die spektralen Eigenschaften von $\mathcal{L}$ maßgeblich sind für das Studium der Korrelationsfunktionen.
Die einzigen strengen Aussagen zum Spektrum von $\mathcal{L}$ existieren, wie oben erwähnt, nur für Axiom-A-Systeme. Dort konnten Ruelle und Pollicott zeigen[40, 41], daß für C^2-Diffeomorphismen und Observable, die Hölder-stetig sind, das Leistungsspektrum fortgesetzt werden kann zu einer meromorphen Funktion auf dem

[2] $\mu(AB)$ ist der Term zu n=0, der in der Summe doppelt auftritt.

Bereich $|\mathrm{Im}\,\omega| < -\log\theta'$, für ein $\theta' < 1$. Die Pole ω in dieser Region entsprechen exakt den Eigenwerten z von $\mathcal{L}$ angewandt auf dem Raum Hölder-stetiger Funktionen: $\omega = \pm i \log z$.
Wir wollen vereinfachend annehmen, der obige Integralkern $G(x,y) = \delta(x - f(y))$ besäße eine Spektraldarstellung der Form:

$$G(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu_i\, \phi_i(x)\psi_i(y) \tag{2.9}$$

mit Eigenwerten $\nu_0 = 1$, ν_1, ν_2, ... und Eigenfunktionen ψ_i, ϕ_i, die erfüllen

$$\int G(x,y)\psi_i(y)\,dy = \nu_i\psi_i(x) \quad \text{bzw.} \quad \int \phi_i(x)G(x,y)\,dx = \nu_i\phi_i(y)\,. \tag{2.10}$$

Weiter gelten die Orthonormalitätsrelationen

$$\int \phi_i(x)\psi_j(x)dx = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \sum \phi_i(x)\psi_i(y) = \delta(x-y)\,. \tag{2.11}$$

Insbesondere, da ψ_0 die invariante Dichte darstellt, folgt $\phi_0 \equiv 1$. Man zeigt leicht, daß aufgrund der Ergodizität gilt:

$$\int \phi_i(x)\mu(dx) = \delta_{i0}\,, \quad |\nu_i| \le 1 \quad \text{und} \quad \nu_i \neq 1 \text{ für jedes } i \neq 0\,. \tag{2.12}$$

Der Eigenwert 1 ist also nicht entartet. Nimmt man die stärkere Mischungseigenschaft für das System an, so gilt sogar $|\nu_i| < 1$ für alle $i \neq 0$. Nun folgt für die Korrelationsfunktionen

$$\begin{aligned} \mu((A\circ f^t)\cdot B) &= \int\int dy\,\mu(dx)\,A(y)\,\delta(y - f^t(x))\,B(x) \\ &= \int dy\,A(y)[\mathcal{L}^t B\psi_0](y) \qquad (2.13) \\ &= \sum_{i=0} \nu_i^t \int A(x)\phi_i(x)\mu(x) \int B(y)\psi_i(y)\,dy\,. \qquad (2.14) \end{aligned}$$

Für $i = 0$ ergibt die rechte Seite von (2.14) $\mu(A)\mu(B)$, so daß die Korrelationsfunktion gegeben ist durch:

$$C_{AB}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\alpha_k t + i\omega_k t}\,, \tag{2.15}$$

wobei wir ν_k als $\exp(-\alpha_k + i\omega_k)$ geschrieben haben. Die Korrelationsfunktionen erweisen sich also als Überlagerung komplexer Exponentialfunktionen, deren Koeffizienten von der Wahl der Beobachtungsgrößen abhängen, nicht jedoch ihre

Exponenten. Der Realteil von $-\log \nu_k$ ist dabei eine Mischungsrate, sein Imaginärteil liefert die Frequenz der entsprechenden Oszillation. (Man beachte, daß die Resonanzen zu ν_k bei $\pm i \log \nu_k$ liegen.) Nimmt man weitergehend an, daß die Eigenwerte $\{\nu_k\}$ verschiedene Beträge besitzen, so erkennt man aus der obigen Beziehungen, daß der Eigenwert mit größtem Realteil ν_1 das asymptotische Abfallen der Korrelationen bestimmt (vorausgesetzt A und B sind beide nicht orthogonal zu $\psi_1(x)$). In diesem Fall ist $-i \log \nu_1$ wegen $1 > |\nu_1| > |\nu_2| > \ldots$ die Resonanz, die der reellen Achse am nächsten liegt. Es ist deshalb i.a. schwer, die nicht-führenden Resonanzen zu bestimmen. Dies ist analog zu dem Problem, in chaotische Systemen die nicht-führenden Lyapunov-Exponenten zu ermitteln [7].

2.3 Korrelationsfunktionen kontinuierlicher Flüsse

In diesem Abschnitt wollen wir die ζ-Funktion für einen glatten dynamischen Fluß herleiten [11].

Das System sei gegeben durch d gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Form $\dot{x}_\nu = F_\nu(\mathrm{x})$, $\nu = 1, \ldots, d$. Die Lösungskurven $\mathrm{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_d(t))$ schreiben wir als $\mathrm{x}(t) = \mathrm{f}^t(\mathrm{x}_0)$, wenn sich die Trajektorie zum Zeitpunkt 0 in x_0 befunden hat.

Eine beliebige Anfangsdichte $\rho(\mathrm{x})$ wird durch diesen Fluß in der Zeit t zu

$$\rho_t(\mathrm{x}) = \int d\mathrm{y}\, \rho(\mathrm{y})\, \delta(\mathrm{x} - \mathrm{f}^t(\mathrm{y})) \tag{2.16}$$

transformiert. Der Kern $\delta(\mathrm{x} - \mathrm{f}^t(\mathrm{y}))$ dieses Integrals definiert die kontinuierliche Variante $\mathcal{L}^t$ des oben eingeführten Frobenius-Perron-Operators: $\rho_t(\mathrm{x}) = (\mathcal{L}^t\rho)(\mathrm{x})$[3]. $\mathcal{L}^t$ ist ein linearer Operator auf dem Raum stetiger Funktionen, von dem wir annehmen, daß sein Spektrum diskret ist. Die Eigenwerte bezeichnen wir mit $\mathrm{e}^{-\gamma_0 t}$, $\mathrm{e}^{-\gamma_1 t}, \ldots$. Damit kann die Spur von $\mathcal{L}^t$ geschrieben werden als

$$\mathrm{Sp}\mathcal{L}^t = \sum_{k=0}^{\infty} m_k\, \mathrm{e}^{-\gamma_k t}, \tag{2.17}$$

wobei m_k die Vielfachheit des k-ten Eigenwertes ist. Die γ_k stellen die Positionen der Resonanzen dar, die man in den Fouriertransformierten der Korrelationsfunktion sieht: $\gamma_k = \alpha_k + i\omega_k$.

[3] Ein Beispiel hierfür ist der klassische Liouville-Operator.

Die physikalische Bedeutung dieser Eigenwerte läßt sich wieder am obigen Beispiel eines Repellors demonstrieren. Dazu haben wir in (1.12) einfach n durch t zu ersetzen, also

$$\Gamma(t) = \int_R d\mathrm{x} \int_R d\mathrm{y}\, \delta[\mathrm{y} - \mathrm{f}^t(\mathrm{x})] \Big/ \int_R d\mathrm{x}\,, \tag{2.18}$$

die Entweichrate ist dann analog zu (1.3) gegeben als $\gamma = -\lim_{t\to\infty} \frac{\log \Gamma(t)}{t}$.
Andererseits wird das Integral (2.18) dominiert durch den führenden Eigenwert von $\mathcal{L}^t$, der den größten Realteil aufweist. Dieser bestimmt deshalb die Entweichrate, während die nicht-führenden, eventuell komplexen Eigenwerte die Korrelationen im Fluß auf dem Repellor charakterisieren[4].
Bezeichen $\phi_i(x)$ und $\psi_i(x)$ wie oben die Eigenfunktionen von $\mathcal{L}^t$, so erhalten wir als Spur

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}\mathcal{L}^t &= \sum_{i=0}^{\infty} \int d\mathrm{x}\, \phi_i(\mathrm{x})\, (\mathcal{L}^t \psi_i)(\mathrm{x}) && (2.19)\\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \int d\mathrm{x} \int d\mathrm{y}\, \phi_i(\mathrm{x})\, \psi_i(\mathrm{y})\, \delta(\mathrm{x} - f^t(\mathrm{y})) && (2.20)\\ &= \int d\mathrm{x}\, \delta(\mathrm{x} - \mathrm{f}^t(\mathrm{x}))\,, && (2.21) \end{aligned}$$

wegen der δ-Normierung der Eigenfunktionen. Man erkennt also, daß zu Berechnung der Spur einzig die periodischen Punkte der Periode t einen Beitrag liefern.
Um den Beitrag eines prim-periodischen Orbits p der Periode T_p zu diesem Integral zu bestimmen, gehen wir in der Nähe des Orbits zu einem Koordinatensystem über, das der Problemstellung besonders angepaßt ist:[5] da die δ-Funktion nur auf dem Orbit einen Beitrag liefert, wählen wir eine longitudinale Koordinate $dx_{\|}$ in Richtung des Flusses $\mathbf{F}(\mathrm{x}(t))$ und d–1 Koordinaten $d\mathrm{x}_{\perp}$ in Richtungen $\hat{\mathrm{u}}_1(t), \ldots, \hat{\mathrm{u}}_{d-1}(t)$ transversal dazu.
Dann ist

$$(\mathrm{Sp}\mathcal{L}^t)\big|_p = \int_{V_p} d\mathrm{x}_{\perp}\, dx_{\|}\, \delta_{\perp}(\mathrm{x} - \mathrm{f}^t(\mathrm{x}))\, \delta_{\|}(\mathrm{x} - \mathrm{f}^t(\mathrm{x}))\,. \tag{2.22}$$

Man kann sich das obige Integral veranschaulichen, indem man sich die δ-Funktion ausgeschmiert vorstellt, und das Integral über ein "Schlauch"-Volumen V_p ausgeführt denkt, das den periodischen Orbit p einschließt. Es liefert einen

[4]Man beachte, daß dieser F.-P.-Operator natürlich *nicht* das Lebesguemaß erhält!
[5]Diese spezielle Wahl der Koordinaten wurde z.B. von Koga [29] verwendet, um Phasenraummittelungen im Lorenz-System durch periodische Orbits zu beschreiben.

Beitrag jedesmal, wenn eine Tajektorie zu ihrem Anfangspunkt zurückkehrt, d.h. auch Mehrfachdurchläufe desselben Orbits müssen mitberücksichtigt werden.
Zur Auswertung der transversalen δ-Funktion benötigt man nur die Linearisierung des Flusses in einer Ebene senkrecht zum Orbit.

$$\int_{V_p} d\mathrm{x}_\perp\, \delta_\perp(\mathrm{x} - \mathrm{f}^{rT_p}(\mathrm{x})) \;=\; \frac{1}{|\det(\mathbf{1} - \mathbf{J}_p^r)|}\,, \tag{2.23}$$

wobei $\mathbf{J}_p$ die $(d-1)\times(d-1)$-dimensionale Stabilitäts- oder Monodromiematrix $\hat{\mathrm{u}}(t+T_p) = \mathbf{J}_p\hat{\mathrm{u}}(t)$ ist, berechnet auf dem periodischen Orbit p. Ihre Eigenwerte $\Lambda_{p,1},\ldots,\Lambda_{p,d-1}$ sind unabhängig von der Position längs der Bahn und von der Wahl der Koordinaten in transversaler Richtung. Die geometrische Deutung dieses Beitrags ist die, daß nach dem r-fachen Wiederkehren zur Poincaré-Fläche der "Schlauch" V_p längs der Eigenrichtungen der Stabilitätsmatrix senkrecht zum Fluß gedehnt bzw. gestaucht wurde, und der Überlapp mit dem ursprünglichen Volumen gegeben ist durch $|\det(\mathbf{1} - \mathbf{J}_p^r)|^{-1}$.
Bei Koordinatenwechsel $dx_\| = v dt'$ mit der Bahngeschwindigkeit $v = |\mathbf{F}(\mathrm{x})|$ erhält man aus dem longitudinalen Integral jedesmal einen Beitrag, wenn t' ein Vielfaches der Periode T_p ist (der Faktor v der Koordinatentransformation kürzt sich dabei mit einem Faktor $1/v$ aus der δ-Funktion):

$$\int_{V_p} dx_\|\, \delta_\|(\mathrm{x} - \mathrm{f}^t(\mathrm{x})) \;=\; \sum_{r=1}^{\infty} \delta(t - rT_p) \int_p dt' \;=\; T_p \sum_{r=1}^{\infty} \delta(t - rT_p)\,. \tag{2.24}$$

(Auch hier mußten wir wieder für die Lösbarkeit des Integrals die Hyperbolizität des Systems voraussetzen, also annehmen, daß die Beträge aller Eigenwerte Λ einen endlichen Abstand von 1 haben.)
Einsetzen der Ausdrücke in die Gleichung (2.22) ergibt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}\,\mathcal{L}^t &= \sum_p T_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\delta(t - rT_p)}{|\det(\mathbf{1} - \mathbf{J}_p^r)|} && (2.25)\\ &= \frac{1}{2\pi} \int dk\, \mathrm{e}^{ikt} \sum_p T_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ikrT_p}}{|\det(\mathbf{1} - \mathbf{J}_p^r)|} \\ &= \frac{i}{2\pi} \int dk\, \mathrm{e}^{ikt} \frac{\partial}{\partial k} \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\mathrm{e}^{-ikrT_p}}{|\det(\mathbf{1} - \mathbf{J}_p^r)|}\,. && (2.26) \end{aligned}$$

Hierbei haben wir in der vorletzten Umformung die δ-Funktion durch ihre Fourierdarstellung ersetzt.

Man sieht leicht nach einer komplexen Rotation $k \to is$, daß die gewonnene Summe über periodische Orbits die logarithmische Ableitung der Zetafunktion

$$\mathcal{Z}(s) = \exp\left(-\sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{e^{srT_p}}{|\det(\mathbf{1} - \mathbf{J}_p^r)|}\right) \tag{2.27}$$

ist.

Zusammen erhalten wir aus (2.17) und (2.27)

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k e^{-\gamma_k t} = \frac{-i}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} ds\, e^{-st} \frac{\mathcal{Z}'(s)}{\mathcal{Z}(s)} \tag{2.28}$$

Ist $\mathcal{Z}(s)$ eine ganze Funktion, so kann der Integrationsweg verformt werden, so daß er die Pole von $\mathcal{Z}'(s)/\mathcal{Z}(s)$ umläuft, und dabei einen Beitrag $m_k \exp(-\gamma_k t)$ von jedem Pol $s = \gamma_k$ der Vielfachheit m_k aufsammelt.

Somit bestimmen die Nullstellen von $\mathcal{Z}(s)$ das Spektrum $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$, wie oben behauptet. Die Bestimmung von Resonanzen wurde somit zurückgeführt auf die Berechnung von Nullstellen der Zetafunktion (2.27).

Die obige Formel vereinfacht sich wieder im 2-dimensionalen Fall, wenn man den Zähler entwickelt: sei $|\lambda_p| < 1 < |\Lambda_p|$, dann gilt:

$$\begin{aligned} |\det(\mathbf{1} - \mathbf{J}_p^r)|^{-1} &= |(1 - \Lambda_p^r)(1 - \lambda_p^r)|^{-1} = \frac{1}{|\Lambda_p|^r} \frac{1}{1 - \Lambda_p^{-r}} \frac{1}{1 - \lambda_p^r} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\Lambda_p|^{-r} \Lambda_p^{-jr} \lambda_p^{kr} . \end{aligned} \tag{2.29}$$

Damit läßt sich der Exponent in (2.27) umschreiben in:

$$\begin{aligned} \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{e^{srT_p}}{|\det(\mathbf{1} - \mathbf{J}_p^r)|} &= \sum_p \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left(e^{sT_p} z^{n_p} |\Lambda_p|^{-1} \Lambda_p^{-j} \lambda_p^k\right)^r \\ &= -\sum_p \sum_{j,k=0}^{\infty} \ln\left(1 - e^{sT_p} z^{n_p} |\Lambda_p|^{-1} \Lambda_p^{-j} \lambda_p^k\right) . \end{aligned} \tag{2.30}$$

Hierbei wurde der formale Parameter z eingeführt, der es uns später erlaubt, die Beiträge nach der Periode n_p (der Poincaré-Abbildung) zu sortieren, z wird danach gleich 1 gesetzt.

Somit nimmt unsere Zetafunktion die Gestalt an:

$$\mathcal{Z}(s) = \prod_p \prod_{j,k=0}^{\infty} \left(1 - e^{sT_p} z^{n_p} |\Lambda_p|^{-1} \Lambda_p^{-j} \lambda_p^k\right) . \tag{2.31}$$

Kapitel 3: Anwendung der cycle expansion auf das Lorenz-System

3.1 Historisches und elementare Eigenschaften des Lorenz-Systems

Das Lorenz-System verdankt seinen Namen dem Meteorologen Edward Lorenz, der im Jahre 1963 ein System aus drei nichtlinearen gewöhnlichen autonomen Differentialgleichungen als vereinfachtes Modell für eine 2-dimensionale thermische Konvektion in einem sog. Bénard-Problem vorstellte. Dies war in zweifacher Weise bemerkenswert: zum einen war das Lorenz-System eines der wenigen zu dieser Zeit bekannten Differentialgleichungssysteme, die chaotisches Verhalten zeigten, zum anderen war die Problemstellung, aus der es abgeleitet war, von großem Interesse: es keimte die Hoffnung auf, daß turbulente Phänomene durch einfache, endlich-dimensionale Modellsysteme adäquat beschrieben werden könnten.

Diese Ideen waren wohl derart neu, daß es bis in die 70-er Jahre dauerte, bis die Lorenzgleichungen im Rahmen eines steigenden Interesses an chaotischen Systemen zu der richtigen Würdigung gelangten. Grundlegende Arbeiten wie Hénons Aufsatz über die heute nach ihm benannte Abbildung oder Manneville und Pomeaus Arbeit über Intermittenz gehen von Betrachtungen des Lorenz-Systems aus.

Gleichzeitig entwickelten Guckenheimer und Williams ein geometrisches Modell, das in einem gewissen Parameterbereich dieselben Eigenschaften wie das Lorenz-System zu besitzen scheint. (Die volle Äquivalenz hängt allerdings von globalen Eigenschaften ab, die zwar numerisch gestützt werden, aber noch nicht streng bewiesen sind.) Dieser Parameterbereich umfaßt die von Lorenz gewählten Werte. Das geometrische Modell weist für eine überabzählbare Menge von Parametern einen seltsamen Attraktor auf, allerdings sind die Attraktoren zu je zwei Parameterwerten topologisch verschieden. Der Attraktor ist somit nicht strukturell stabil (obwohl "nur" Axiom A verletzt ist).

Inzwischen zählt das Lorenz-System zu den am meisten untersuchten chaotischen Systemen. Dies beruht nicht auf seiner physikalischen Relevanz — diese basiert allenfalls auf einer Verbindung zu den Maxwell–Bloch–Gleichungen für Laser oder zur Konvektion in sehr speziellen Geometrien[1] — sondern auf der Tatsache, daß eine Vielzahl generischer Verhaltensweisen chaotischer Systeme im Lorenzsystem auftritt. Beispiele für fast jeden Typ chaotischer Bewegung, die man in anderen dreidimensionalen Systemen findet, können an den Lorenzgleichungen bei bestimmten Parametern studiert werden. Der große Vorrat an experimentellen und theoretischen Arbeiten über diese Gleichungen erlaubt es oft, neue Entwicklungen in einem vollständigeren Zusammenhang zu sehen, als es bei weniger bekannten Systemen möglich ist.

Das Lorenz-System besteht aus dem folgenden System gewöhnlicher Differentialgleichungen auf dem $\mathbb{R}^3$:

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y \tag{3.1a}$$

$$\dot{y} = -xz + \varrho x - y \tag{3.1b}$$

$$\dot{z} = xy - \beta z \tag{3.1c}$$

σ, ϱ und β sind hierbei positive Parameter[2]. In Untersuchungen über das Bifurkationsverhalten von (3.1) hält man i.a. zwei Parameter fest (oft sind dies — wegen (3.4) — σ und β) und variiert den dritten. Einen ausführlichen Überblick der verschiedenen Parameterbereiche findet sich in der Monographie von C. Sparrow [42].

Wir wollen uns hier auf den "klassischen", von Lorenz selbst untersuchten Parametersatz

$$\beta = \frac{8}{3}, \quad \varrho = 28 \quad \text{und} \quad \sigma = 10 \tag{3.2}$$

beschränken. Für diesen existieren die umfangreichsten Erkenntnisse in der Literatur. Alle weiteren Aussagen über das Lorenzsystem sind deshalb immer in

[1] Das ursprüngliche Problem der Rayleigh–Bénard–Konvektion beschreiben die Lorenz-Gleichungen tatsächlich nur in einem recht uninteressanten Parameterbereich.

[2] Im ursprünglichen hydrodynamischen Problem stellen diese die Prandtl-Zahl der Flüssigkeit, das Verhältnis der Rayleighzahl R zu ihrem kritischen Wert R_c, bei dem Konvektion einsetzt, sowie einen mit der Wellenzahl der Konvektion verbundenen Parameter dar. x mißt die Geschwindigkeit der Konvektionsbewegung, z beschreibt die Abweichung des vertikalen Temperaturprofils vom linearen Konduktionsverhalten zwischen den horizontalen Begrenzungsflächen der Flüssigkeit, y schließlich ist ein Maß für die horizontale Abhängigkeit dieser Temperaturabweichung.

Bezug auf diese Parameterwerte zu verstehen.
Der Fluß, der durch die obigen Differentialgleichungen erzeugt wird, besitzt drei Fixpunkte bei:

$$\mathrm{C}_0 = (0,0,0) \quad \text{und} \quad \mathrm{C}_\pm = (\pm\sqrt{\beta(\varrho-1)}\,,\, \pm\sqrt{\beta(\varrho-1)}\,,\, \varrho-1) \tag{3.3}$$

und ist symmetrisch bei einer Rotation: $(x,y,z) \mapsto (-x,-y,z)$ von π um die z-Achse. Auf der Symmetrieachse verschwinden $\dot{x}$ und $\dot{y}$, so daß die z-Achse invariant unter dem Fluß ist.
Die Divergenz des Lorenz-Vektorfeldes ist konstant und negativ, denn

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathrm{x}) = \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial\dot{z}}{\partial z} = -\sigma - 1 - \beta\,, \tag{3.4}$$

d. h. es liegt ein dissipatives System vor, dessen Dissipationsrate im übrigen nicht von ϱ abhängt[3].
Alle Fixpunkte sind instabil: der Fixpunkt C_0 besitzt eine zweidimensionale anziehende und eine eindimensionale abstoßende Mannigfaltigkeit, die symmetrischen Fixpunkte $\mathrm{C}_\pm$ hingegen weisen eine eindimensionale anziehende und eine zweidimensionale abstoßende Mannigfaltigkeit auf. Die Eigenwerte der Linearisierung des Flusses bei $\mathrm{C}_\pm$ sind komplex konjugiert[4].
Man kann zeigen, daß jede Trajektorie nach einer gewissen Zeit eine kompakte Teilmenge K des $\mathbb{R}^3$ erreicht, die sie dann nie mehr verläßt. Alle drei Fixpunkte liegen innerhalb von K. Zusammen mit der negativen Divergenz des Flusses bedeutet dies, daß sich eine attraktive Menge innerhalb von K befinden muß. Bei den gewählten Parametern spricht numerisch vieles dafür, daß es sich hierbei um einen seltsamen Attraktor handelt[5].
Einen Eindruck von der Form des Attraktors kann man aus dem folgenden Bild 3.1 erhalten. Dieses zeigt eine typische Trajektorie, wie sie bei einer numerischen Integration der Gleichungen (3.1) entsteht.
Man beobachtet, daß die Trajektorie eine scheinbar zufällige Anzahl von Umrundungen eines der beiden symmetrischen Fixpunkte ausführt, um dann, nach Erreichen eines gewissen Abstandes von diesem auf die Seite des anderen hinüber-

[3]Bei den Parameterwerten (3.2) bedeutet dies, daß ein Einheitsvolumen innerhalb einer natürlichen Zeiteinheit um den Faktor $\exp(-13\frac{2}{3}) \approx 1.16 \cdot 10^{-6}$ schrumpft!
[4]Numerische Werte: λ, $\lambda^* \approx 0.094 \pm 10.2i$, $\lambda_- \approx -13.85$
[5]auch wenn die numerische Unterscheidung von einem sehr langen Grenzzyklus praktisch nicht möglich ist

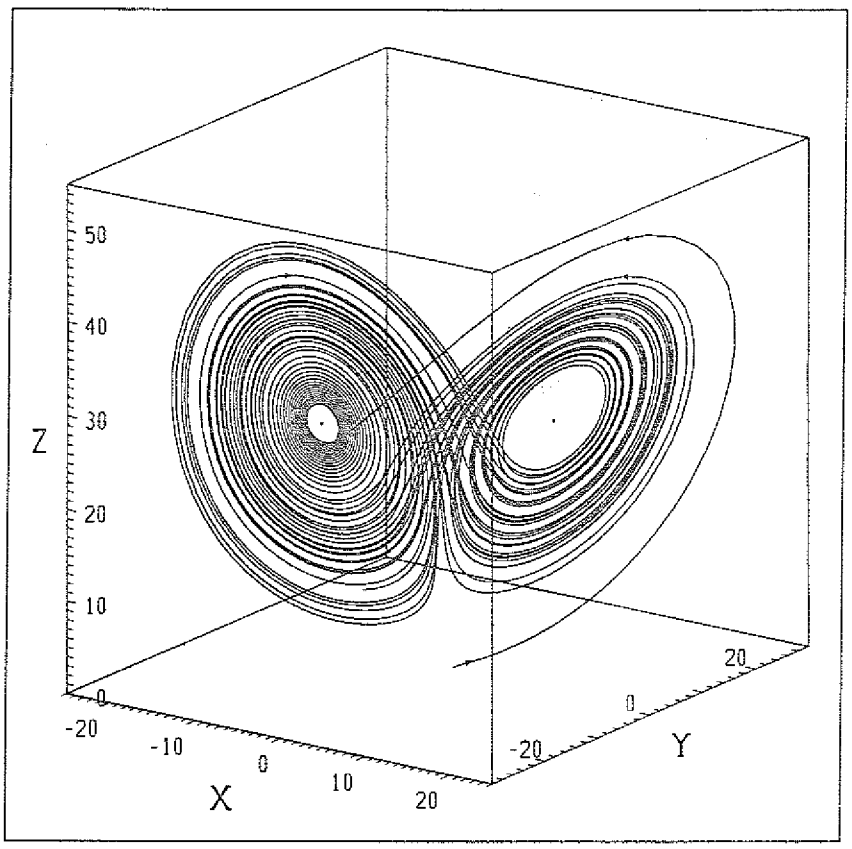


Abbildung 3.1: Darstellung einer typischen Trajektorie, wie man sie durch numerische Integration der Gleichungen (3.1) erhält. Die Fixpunkte $C_\pm$ liegen in den Zentren zweier Öffnungen, in die kein Orbit zurückkehrt.

zuwechseln. Die gesamte Bewegung findet aufgrund der hohen Volumenkontraktion des Flusses in einem sehr schmalen Teil des Phasenraumes statt, den man annähernd durch eine 2-dimensionale verzweigte Mannigfaltigkeit beschreiben kann. (Die tatsächliche (fraktale) Dimension des Attraktors liegt bei etwa 2.06).

Abstände transversal zu den Blättern dieser approximierenden Fläche werden durch den Fluß kontrahiert, während Bahnen innerhalb der Fläche auseinanderlaufen.

Um uns eine Vorstellung von der inneren Geometrie des Attraktors zu verschaffen, betrachten wir zunächst einen geeigneten Schnitt, und gehen vom dreidimensionalen Fluß zu einer zweidimensionalen Abbildung dieses Schnittes in sich über.

3.2 Der geometrische Lorenz-Attraktor

Der geometrische Lorenzattraktor ist ein Modell, von dem man annimmt, daß es die wesentlichen Eigenschaften des Lorenz-Systems wiedergibt. Ausgangspunkt ist die Konstruktion einer geeigneten Poincaré-Abbildung.
Man beobachtet, daß jede typische Trajektorie wie in Abb. 3.1, hat sie erst einmal die Nähe des Attraktors erreicht, bei jeder Umrundung eines der Fixpunkte $C_\pm$ die Ebene $\{z = \varrho - 1\}$, in der diese liegen, von oben nach unten durchstößt. Es ist deshalb zweckmäßig, diesen Ausschnitt Σ der Ebene als Poincaré-Schnitt zu wählen. Die Poincaré-Abbildung P weist dann jedem Durchstoßpunkt eines Orbits den nächsten folgenden zu.
Eine idealisierte Darstellung dieser Abbildung ist im folgenden Bild 3.2 zu sehen. Wir stellen uns Σ vereinfacht als einen rechteckigen Ausschnitt von $\{z = \varrho - 1\}$ vor. Die beiden schmalen Kanten werden von Teilstücken der stabilen Mannigfaltigkeiten der Fixpunkte $C_\pm$ gebildet, wobei wir annehmen, daß diese hinreichend weit horizontal verlaufen und genügend gut durch Geraden approximiert werden können.
Die im vollen Fluß beobachtete Aufspaltung zwischen einer stabilen Richtung transversal zum Attraktor und einer instabilen innerhalb spiegelt sich in unserem Modell wieder in der Annahme, daß eine *stabile invariante Blätterung* der Poincaré-Fläche existiert: wir fordern, daß durch die Poincaré-Abbildung horizontale Abstände gedehnt, vertikale hingegen kontrahiert werden. Σ zerfällt dadurch in eine Schar eindimensionaler vertikaler Geradenstücke ("Blätterung"), so daß alle Punkte eines Blattes dasselbe Langzeitverhalten aufweisen[6].
Abbildung 3.2 zeigt unser Modell für die Poincaré-Abbildung des Lorenz-Systems: Σ zerfällt in zwei symmetrische Stücke $\Sigma_\pm$. Die Trennlinie S ist die Kurve, in der die 2-dimensionale stabile Mannigfaltigkeit des Fixpunktes C_0 die Poincaré-Ebene durchstößt. (Dieser Schnitt *muß* existieren, da ja die gesamte z-Achse ein Teil dieser stabilen Mannigfaltigkeit ist.) Alle Punkte von S wandern deshalb monoton auf C_0 zu und kehren niemals nach Σ zurück. Punkte in $\Sigma \backslash S$, die sehr nahe an S liegen, folgen dieser Bewegung eine beliebig lange Zeit, um sich aber letztendlich wieder längs der instabilen Mannigfaltigkeit von C_0 zu entfernen.

[6] Dadurch ist mit Einführung einer geeigneten horizontalen Koordinate eine weitere Reduzierung der zweidimensionalen Poincaré-Abbildung zu einer eindimensionalen Abbildung möglich. Wir wollen darauf jedoch hier nicht weiter eingehen.

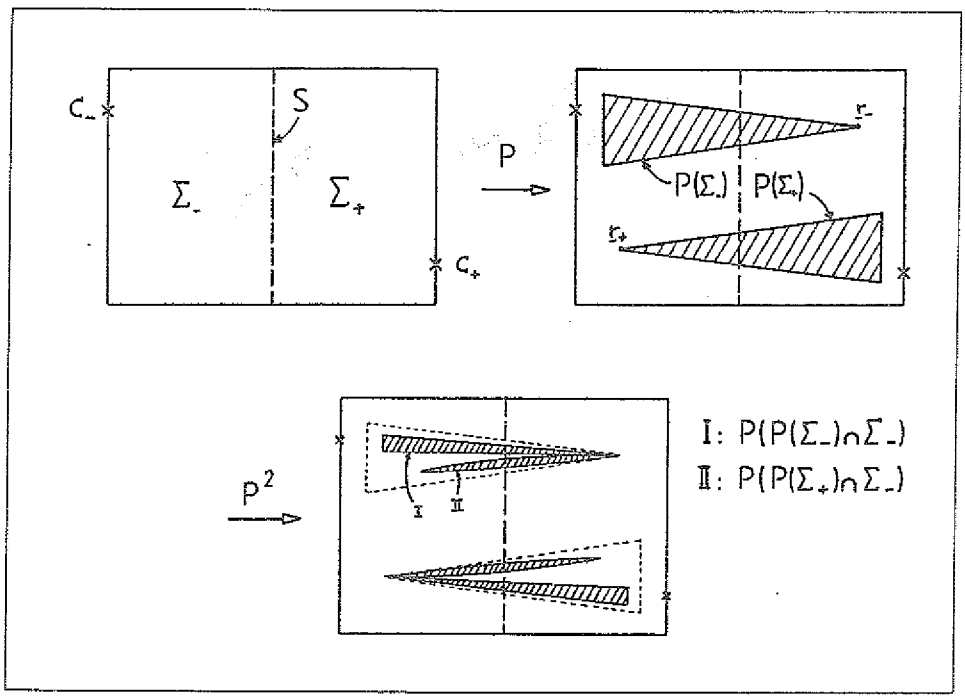


Abbildung 3.2: Poincaré-Abbildung im geometrischen Lorenzattraktor als Modell für die Poincaré-Abbildung im Lorenz-System.

Alle diese nahe bei S startenden Orbits kehren deshalb stark gebündelt nach Σ zurück, d.h. die vertikale Kontraktion ist nahe S am stärksten. Dies führt zu den Spitzen $r_\pm$, die selbst die ersten Durchstoßpunkte der instabilen Mannigfaltigkeit von C_0 mit Σ darstellen. Σ_+ wird in den oberen Keil abgebildet, Σ_- in den symmetrischen unteren.

Iteriert man diese Abbildung, so erhält man als ω-Grenzmenge eine Cantormenge von Kurvenstücken, die in $r_\pm$ und deren Abbildern aneinandergeheftet sind. Dementsprechend bezeichnet man den Attraktor des vollen dreidimensionalen Flusses auch bisweilen als *Cantor-Buch*.

Wie man sich diese Abbildung zu einem dreidimensionalen Fluß vervollständigt vorzustellen hat, ist in Abbildung 3.3 zu sehen.

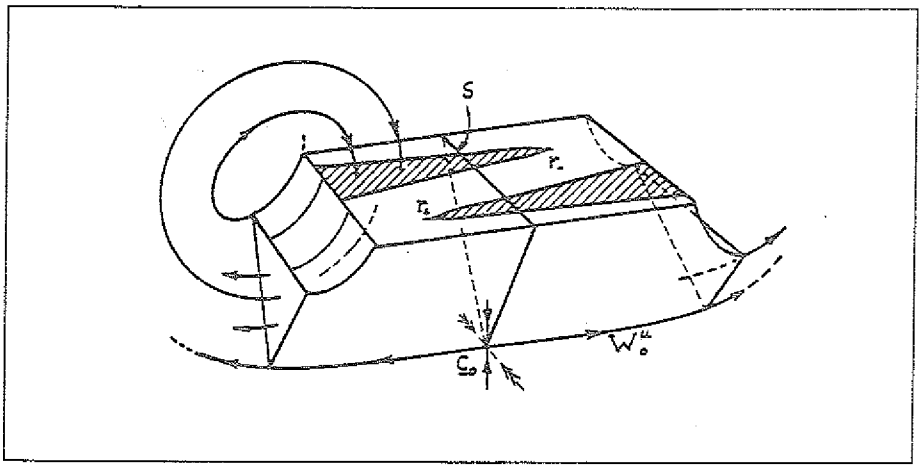


Abbildung 3.3: Geometrischer Lorenz-Attraktor (nach Guckenheimer [22]), der als geometrisches Modell für den Lorenzfluß betrachtet wird. W_0^u ist die instabile Mannigfaltigkeit des Fixpunktes C_0, die Σ in den Punkten $r_\pm$ trifft.

3.3 Symbolische Dynamik und Symmetriezerlegung

Nun ist auch klar, wie man eine symbolische Dynamik für das Lorenz-System gewinnt. Jedem Orbit kann man die Folge seiner Durchstoßpunkte $\mathbf{x}_i$ in der Poincaré-Fläche zuordnen. Je nachdem, ob $\mathbf{x}_i$ in Σ_- oder Σ_+ liegt, vergeben wir das Symbol $\sigma_i = 0$ oder $\sigma_i = 1$. Fast alle Orbits entsprechen so unendlichen Symbolfolgen. Ausnahmen sind die Bahnen, die irgendwann auf S treffen; für diese bricht die Symbolsequenz nach endlich vielen Gliedern ab. Die Zuordnung zwischen Symbolfolgen und Trajektorien ist insofern eindeutig, daß allen Punkten eines Blattes der invarianten Blätterung dieselbe Symbolfolge für positive Zeiten zugeordnet wird. Dadurch reduzieren wir unsere Dynamik gleichsam um eine weitere Dimension, indem wir nur Klassen äquivalenter Orbits betrachten; dabei wird jede Äquivalenzklasse durch einen Orbit im Attraktor repräsentiert, für den die Symbolfolge auch zu allen negativen Zeiten definiert ist.

Eine weitere Vereinfachung und in Hinsicht auf die Berechnung von Zetafunktionen nützliche Umformung gewinnt man durch Ausnutzen der diskreten Symmetrie des Lorenz-Systems.

Invarianz des Systems unter einer Symmetrie bedeutet, daß das symmetrietrans-

formierte Bild eines periodischen Orbits wieder ein periodischer Orbit mit dem selben Gewicht ist[7]. Dabei sind zwei Fälle möglich: entweder der neue Orbit ist topologisch verschieden von seinem Urbild, dann erhöht sich seine Vielfachheit um eins, oder der neue Orbit ist identisch zum Urbild und nur zeitlich verschoben. Im letzteren Fall kann der Orbit zerlegt werden in Segmente, von denen jedes durch eine Symmetrietransformation aus einem einzigen irreduziblen Segment hervorgeht. Die Periode des gesamten Orbits ist dann die Summe der Zeiten längs aller Segmente, seine Stabilität ergibt sich aus dem Produkt der Stabilitätsmatrizen der einzelnen Segmente.

Dies ergibt die Möglichkeit, den Phasenraum zu zerlegen in einen Fundamentalbereich und dessen Bilder unter der Symmetriegruppe. Durch Zurückfalten der irreduziblen Segmente eines Orbits auf den Fundamentalbereich erhält man so geschlossene Orbits in einem reduzierten Phasenraum.

Diese Zerlegung besitzt ihr Gegenstück in einer geeigneten Zerlegung der Zetafunktionen [12]. Ist p ein Zykel der Periode n_p, der mit einer Vielfachheit m_p zu einer Zetafunktion beiträgt, so faktorisiert sein Beitrag in ein Produkt über die d_α-dimensionalen irreduziblen Darstellungen D_α der Symmetriegruppe:

$$(1-t_p)^{m_p} = \prod_\alpha \det(1 - D_\alpha(g_{\hat{p}})\, t_{\hat{p}})^{d_\alpha}, \quad t_p = t_{\hat{p}}^{g/m_p}, \tag{3.5}$$

wobei $t_{\hat{p}}$ das auf der Fundamentalumgebung berechnete Gewicht darstellt, g ist die Dimension der Gruppe, $g_{\hat{p}}$ bezeichnet das Gruppenelement, welches das Fundamentalsegment in das Segment des vollen Orbits transformiert.

Im Lorenzsystem tritt mit der sog. C_2-Symmetrie die fast einfachste Form dieser Symmetriezerlegung auf. Die Symmetriegruppe besteht einzig aus der Identität e und der 180°-Rotation g um die z-Achse. Eine natürliche Wahl des Fundamentalbereiches $\hat{\mathcal{M}}$ ist deshalb $\hat{\mathcal{M}} = \{y \geq x\}$ entweder als Teil der Poincaré-Ebene Σ oder als Halbraum des gesamten Phaseraumes betrachtet.

Die Orbits zerfallen in zwei Symmetrieklassen A_1 und A_2. Orbits, die nur unter der Identität invariant bleiben, tauchen in symmetrischen Paaren auf, wie z.B. 001 und 011. Ihre Beiträge zur vollen Zetafunktion sind gleich

$$(1-t_{\hat{p}})^2 = (1-t_{\hat{p}})(1-t_{\hat{p}})\,. \tag{3.6}$$

[7] Allgemeiner ist natürlich jede symmetrietransformierte Trajektorie wieder eine erlaubte Bewegung im System.

Andere Orbits, wie z.B. 01, 0011, ..., 00101101, ... sind invariant unter e und g, und haben Vielfachheit 1. Ihr Beitrag zerfällt gemäß

$$(1 - t_{\hat{p}}) = (1 - \sqrt{t_{\hat{p}}})(1 + \sqrt{t_{\hat{p}}}) \,. \tag{3.7}$$

Eine symmetriereduzierte Symbolik (ρ_i) der Orbits gewinnt man, indem man setzt

$$\begin{aligned} \rho_i &= n, \qquad falls \quad \sigma_{i+1} = \sigma_i \\ \rho_i &= j, \qquad falls \quad \sigma_{i+1} \neq \sigma_i \,, \end{aligned} \tag{3.8}$$

wir vergeben also das Symbol 'n', wenn der Orbit *nicht* auf die Seite des anderen Fixpunktes ($C_\pm$) hinüberwechselt, und 'j' sonst. Die Übersetzung der ursprünglichen in die neue symbolische Dynamik ist aus der Tabelle in Anhang E zu ersehen.
Man kann dann die volle Zetafunktion schreiben als

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{\zeta_{A_1}} \cdot \frac{1}{\zeta_{A_2}} \,. \tag{3.9}$$

Die cycle expansion der symmetrischen Zetafunktion ζ_{A_1} ist die selbe, wie in Kapitel 1 angegeben. Die Entwicklung der asymmetrischen Zetafunktion ζ_{A_2} unterscheidet sich davon einzig in den umgekehrten Vorzeichen bei Zykeln mit einer ungeraden Anzahl von n's.

$$\begin{aligned} 1/\zeta_{A_2} = \; & (1 + t_n)(1 - t_j)(1 + t_{nj})(1 - t_{nnj})(1 + t_{njj})(1 + t_{nnnj}) \\ & \times (1 - t_{nnjj})(1 + t_{njjj})(1 - t_{nnnnj})(1 + t_{nnnjj}) \\ & \times (1 + t_{nnjnj})(1 - t_{nnjjj})(1 - t_{njnjj})(1 + t_{njjjj}) \cdot \ldots \\ = \; & 1 + t_n - t_j + (t_{nj} - t_n t_j) - (t_{nnj} - t_n t_{nj}) + (t_{njj} - t_{nj} t_j) \\ & + (t_{nnnj} - t_n t_{nnj}) + (t_{njjj} - t_{njj} t_j) \\ & - (t_{nnjj} - t_{nnj} t_j - t_n t_{njj} + t_n t_{nj} t_j) - \ldots . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Man erkennt, daß die Symmetriezerlegung die Kombinationen von Primzykeln und approximierenden Pseudoorbits unberührt läßt, nur die Vorzeichen ganzer "Komplexe" ändern sich.
Wir betrachten im folgenden bei Symmetriezerlegung stets nur die symmetrische Zetafunktion, weil diese symmetrischen Observablen auf dem Lorenzattraktor entspricht.

3.4 Die periodischen Orbits des Lorenzsystems

Wir wollen nun versuchen, die oben diskutierte Methode der cycle expansion auf das Lorenz-System anzuwenden. Zuerst auf die Poincaré-Abbildung bezüglich der Ebene $\{z = \varrho - 1\}$, später — bei den Korrelationen — auf den vollständigen dreidimensionalen Fluß.

Der erste Schritt dazu ist die Beschaffung der periodischen Orbits und ihrer Stabilitäten. Dazu genügt es, die periodischen Orbits der Poincaré-Abbildung zu kennen, denn die periodischen Bahnen des vollen Flusses ergeben sich aus diesen durch Integration der Differentialgleichungen.

Dies ist der numerisch bei weitem rechenintensivste Teil der Arbeit, da man die Poincaré-Abbildung nicht in expliziter Form vorliegen hat, sondern aufwendige Integrationsverfahren anwenden muß. Es ist deshalb auch nicht möglich bis zu Periodenlängen zu gelangen, wie sie bei Untersuchungen von chaotischen Abbildungen leicht erreicht werden[8].

Zur Integration der Lorenz-Gleichungen wurde ein Extrapolationsverfahren nach Bulirsch und Stoer verwandt [15]. Es hat sich gezeigt, daß dieses Verfahren am weitesten den hohen Genauigkeitsanforderungen bei gleichzeitig akzeptablen Schrittweiten gerecht wird.

Um die Bestimmung der Punkte, in denen die Trajektorien die Poincaré-Ebene durchstoßen, weiter zu verbessern, wurde ein von M. Hénon [25] vorgeschlagener Trick benutzt: stellt man im Laufe der Integration fest, daß im letzten Schritt die Trajektorie die Poincaré-Ebene durchstoßen hat, so verwirft man diesen Schritt und geht zum vorletzten Startpunkt zurück. Von hier aus integriert man ein transformiertes Differentialgleichungssytem, das aus dem ursprünglichen hervorgeht, indem man die Gleichungen nach z als unabhängiger Variable auflöst. D.h. man wechselt über von dem dem Differentialgleichungs-System

$$\frac{dx}{dt} = F_x(x,y,z)\,, \quad \frac{dy}{dt} = F_y(x,y,z)\,, \quad \frac{dz}{dt} = F_z(x,y,z) \tag{3.11}$$

zu

$$\frac{dx}{dz} = \frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}\,, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}\,, \quad \frac{dt}{dz} = \frac{1}{F_z(x,y,z)}\,. \tag{3.12}$$

[8] Grassberger u.a. [17] verwenden z.B. periodische Orbits der Hénon-Abbildung bis zur Periodenlänge 27 !

I.a. genügt nun ein weiterer Integrationsschritt, um exakt auf der Poincaré-Ebene zu landen. Dann wird mit dem ursprünglichen System weiter integriert.
Nun kann man nach periodischen Orbits suchen, indem man eine genügend lange Zeitreihe von Poincaré-Punkten bestimmt. In dieser sucht man dann nach Teilsequenzen, die nach n Iterationen annähernd geschlossen sind.
Es stellte sich heraus, daß bei einer Anzahl von $\sim 10^6 - 10^7$ Umläufen fastperiodische Orbits zu beinahe allen Symbolfolgen bis zur Länge 9 auftraten. Anstatt die Zeitreihe zu erweitern, wurden die wenigen fehlenden Orbits gezielt gesucht (siehe dazu Anhang B).
Die so gefundenen fast-periodischen Orbits dienten nun als 0-te Approximation der periodischen Bahnen in einem verallgemeinerten Newton-Raphson-Verfahren (siehe Anhang D). Das Differential der Poincaré-Abbildung wurde hierbei durch Integration von benachbarten Bahnen numerisch bestimmt, das heißt zu jedem Startpunkt $(x, y, \rho - 1)$ wurden auch die Poincaré-Abbilder von Punkten $(x \pm \epsilon, y \pm \epsilon, \rho - 1)$ bestimmt und daraus die Differenzenquotienten gebildet.
Es erwies sich, daß das Newton-Raphson-Verfahren schon nach sehr wenigen Iterationen auf Orbits konvergierte, die mit einer relativen Genauigkeit von 10^{-10} und kleiner geschlossen waren. Die Konvergenz hing dabei nicht davon ab, welchen speziellen Punkt einer fast-periodischen Bahn man als Startpunkt wählte. Die konvergierten Orbits stimmten stets auf allen signifikanten Stellen überein.
Im nächsten Schritt wurden die Lyapunovzahlen der periodischen Orbits bestimmt. Diese ergeben sich als Eigenwerte der sog. Stabilitäts– oder Monodromiematrix $\mathbf{J}$, die durch

$$\hat{\mathbf{u}}(t + T_p) = \mathbf{J}_p \hat{\mathbf{u}}(t) \tag{3.13}$$

definiert ist. Dabei ist T_p die Periode des Orbits p und $\hat{\mathbf{u}}(t)$ ein beliebiger Vektor aus dem Tangentialraum in $p(t)$[9].
Numerisch erhält man die Eigenwerte durch Aufintegrieren der Linearisierung der Lorenz-Gleichungen entlang der periodischen Trajektorie. Als Anfangsbedingungen wählt man eine Basis von drei orthonormalen Vektoren. Aufgrund der konstanten Divergenz des Lorenz-Vektorfeldes genügt es dabei vollkommen, den betraglich größten Eigenwert Λ_p zu bestimmen. Der Eigenwert entlang der Bahn

[9] Bei den symmetriereduzierten Orbits hat man anschließend noch eine 180°–Rotation um die z-Achse durchzuführen, denn nach p Iterationen liegen die Bilder der Ausgangsvektoren im symmetrischen Tangentialraum.

ist wie bei allen kontinuierlichen Flüssen gleich Eins, der kleinste Eigenwert λ_p ergibt sich mittels der Divergenz des Lorenzflusses $-(\sigma+\beta+1)$ aus der Gleichung

$$\Lambda_p \cdot \lambda_p = \exp(-(\sigma+\beta+1)T_p)\,. \tag{3.14}$$

Der Eigenwert Eins ist ein guter Test für die Genauigkeit des verwendeten Integrationsverfahrens. In allen Fällen wurde dieser Eigenwert mit einer Abweichung von weniger als $5 \cdot 10^{-10}$ bestätigt. Der kleinste Eigenwert hingegen wurde wegen der starken Kontraktion des Lorenzsystems schon bei Perioden größer als 4 so klein, daß er in der Größe der Rechengenauigkeit lag.
Tabelle E.1 in Anhang E zeigt die numerischen Ergebnisse für alle Orbits bis zur Periode 9 und soll gleichzeitig als Übersetzungshilfe zwischen symmetrischer und symmetriereduzierter symbolischer Dynamik dienen. In den Abbildungen 3.4 und 3.5 sind die Stabilitäten graphisch dargestellt.

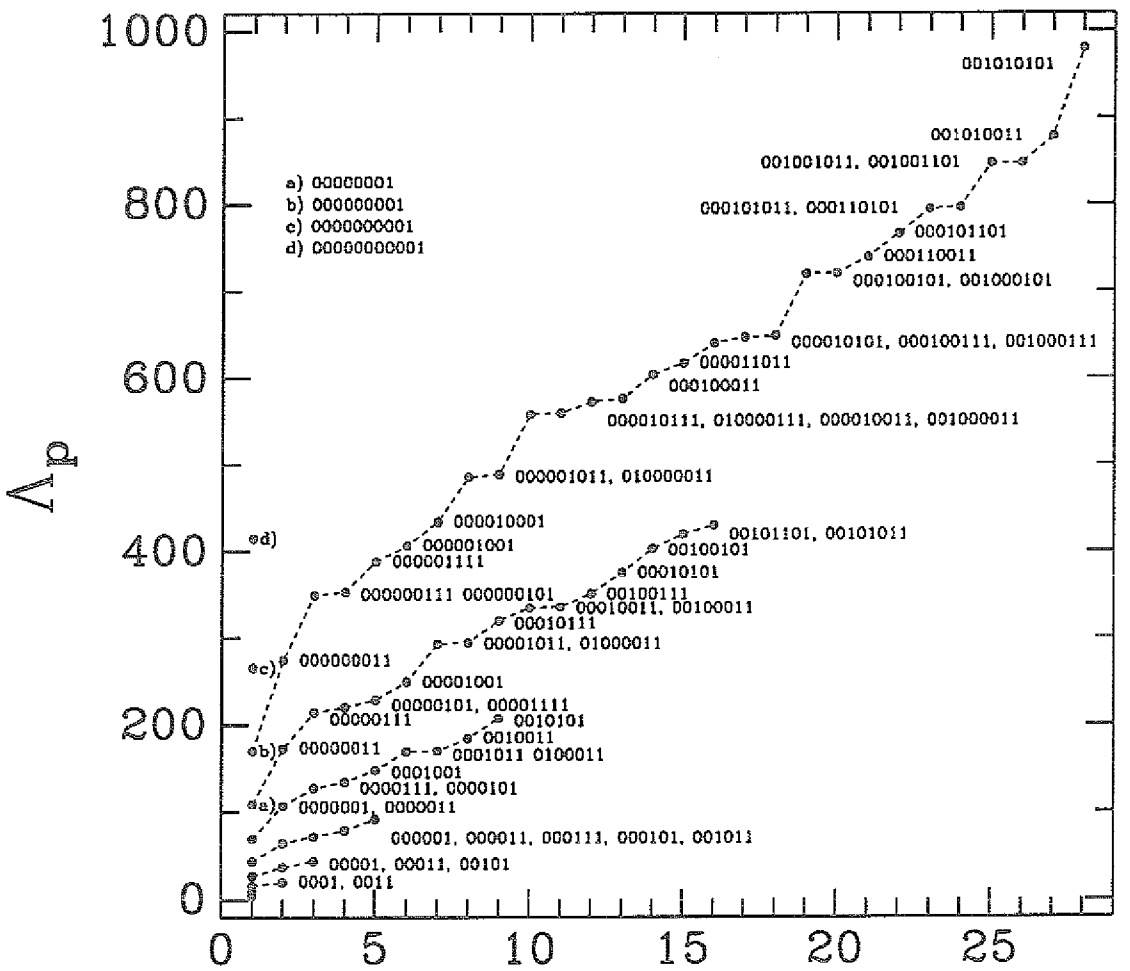


Abbildung 3.4: Stabilitäten der periodischen Orbits bis zur Periode 9

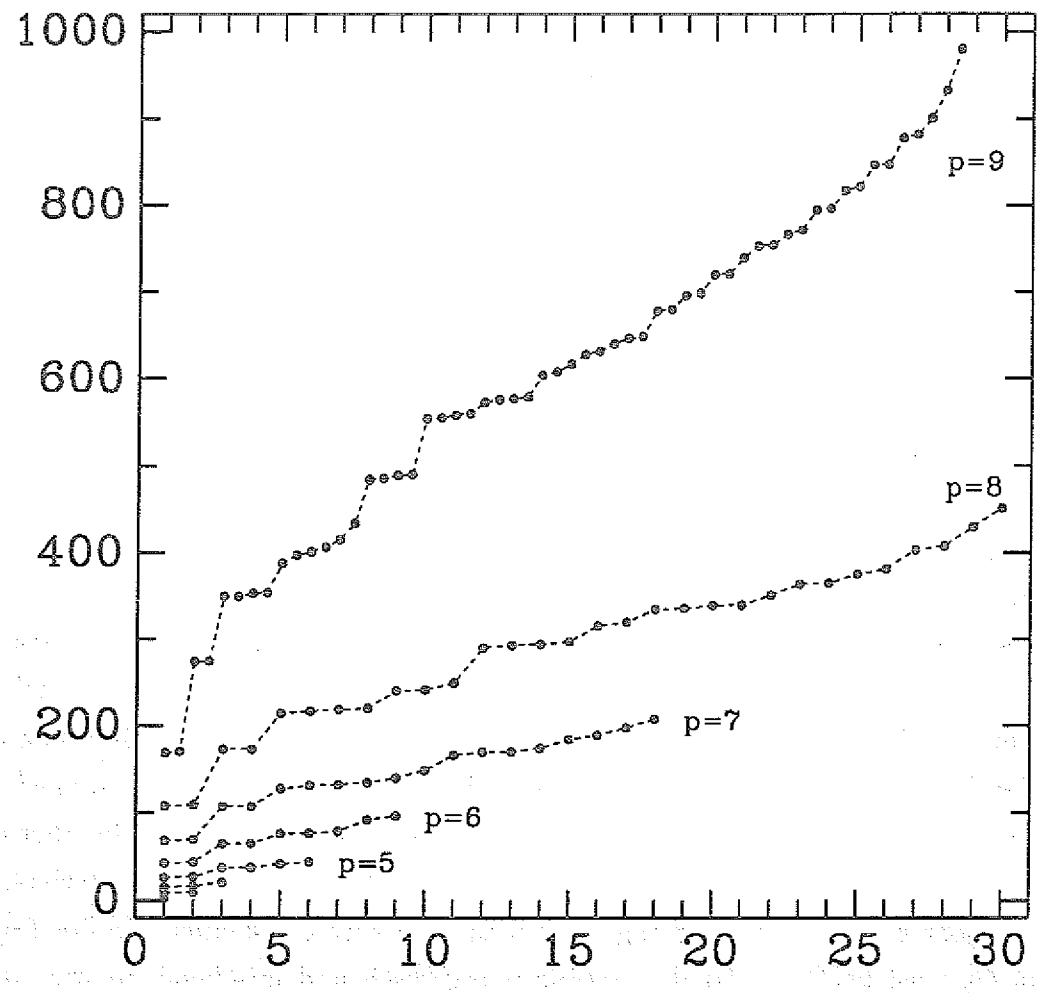


Abbildung 3.5: Stabilitäten der periodischen Orbits bis zur Periode 9 mit Symmetriereduzierung

3.5 Periodische Orbits und das natürliche Maß eines Attraktors

Für streng hyperbolische Attraktoren kann das natürliche invariante Maß beliebig genau approximiert werden durch eine Summe über δ-Maße, die auf den periodischen Orbits konzentriert sind [17, 19, 20]. Jeder Punkt $\mathbf{x}$ eines p-periodischen Orbits erhält dabei das Gewicht

$$w_{\mathbf{x}} = \mathrm{e}^{-ph(\mathbf{x})}\,, \tag{3.15}$$

wobei die *punktweise metrische Entropie* $h(\mathbf{x})$ gegeben ist durch die Summe aller positiven Lyapunovexponenten des Orbits. Damit gilt:

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{\mathbf{x}\in Fix(f^p)} \mathrm{e}^{-ph(\mathbf{x})} = 1\,, \tag{3.16}$$

$Fix(f^p)$ bezeichne hierbei die Menge aller p-periodischen Punkte der betrachteten Abbildung f.

An dem Beispiel einer zweidimensionalen hyperbolischen Abbildung kann man sich diesen Sachverhalt plausibel machen [20]:
Man stelle sich den Phasenraum zerlegt in eine Menge von "Zellen" C_i vor, deren Ränder von Teilstücken stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten gebildet werden. Wenn diese Zellen genügend klein sind, kann man die Krümmung ihrer Ränder vernachlässigen und sie als Parallelogramme ansehen. Betrachten wir eine spezielle Zelle C_k und eine große Anzahl von Anfangsbedingungen, die über diese Zelle nach dem natürlichen Gewicht auf dem Attraktor verteilt sind. Iterieren wir nun jede dieser Anfangsbedingungen n-mal, so wird ein kleiner Teil der Punkte in C_k zurückkehren. Ist der Attraktor ergodisch und mischend, so wird dieser Bruchteil für großes n dem natürlichen Gewicht dieser Zelle $w(C_k)$ entsprechen. Sei nun x_0 eine dieser wiederkehrenden Anfangsbedingungen, x_n ihre n-fache Iterierte (siehe Abb. 3.6(a)). Dann existieren maximale Teilstücke ab (bzw. $c'd'$) der stabilen (instabilen) Mannigfaltigkeit von x_0 (bzw. x_n), die noch ganz in C_k liegen. (Die stabile Richtung sei in unserer Abbildung die horizontale, die instabile Richtung die vertikale.) Nach n Iterationen wird ab auf $a'b'$ abgebildet, $c'd'$ ist nach n Iterationen aus dem Segment cd hervorgegangen (Abb. 3.6(b)). Nun konstruieren wir ein Rechteck $e'f'g'h'$, indem wir maximale Segmente instabiler

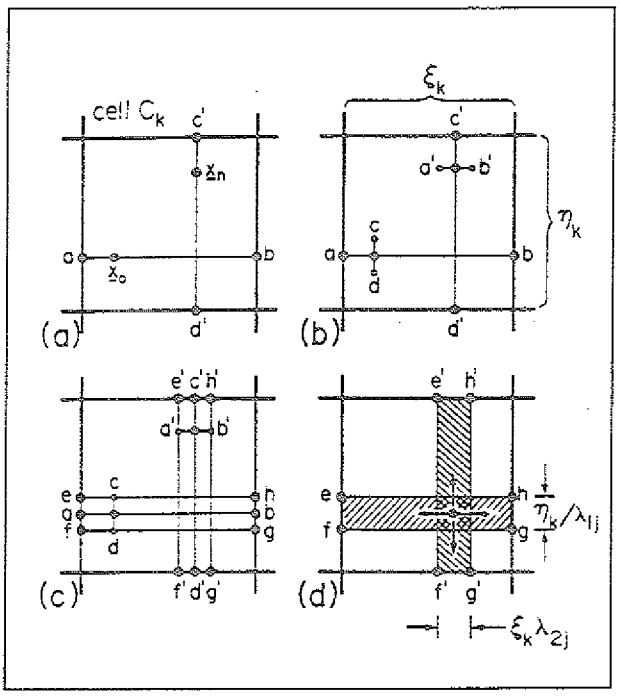


Abbildung 3.6: Schematische Konstruktion eines Rechtecks in Zelle C_k, das nach n Iterationen wiederkehrt (nach [20]).

Mannigfaltigkeiten $e'f'$ durch a' und $g'h'$ durch b' wählen. Nach Konstruktion sind diese Teilstücke die n-ten Abbilder von stabilen Segmenten ef und gh (Abb. 3.6(c)).

Wir haben somit ein Rechteck $efgh$ in C_k konstruiert, in dem *alle* Punkte nach n Iterationen in C_k zurückkehren. Der Schnitt der Rechtecke $efgh$ und $e'f'g'h'$ muß deshalb einen hyperbolischen, n-periodischen Fixpunkt beinhalten (siehe Abb. 3.6(d)). Somit liegen alle Anfangsbedingungen, die nach n Iterationen wiederkehren, in schmalen Rechtecken analog zu $efgh$, die einen n-periodischen Fixpunkt enthalten. Wir geben diesem Fixpunkt den Index j und bezeichnen seine Lyapunovzahlen mit λ_{1j} und λ_{2j}. Der Streifen $efgh$ wird dann mit dem Faktor λ_{1j} in vertikaler Richtung gedehnt und dem Faktor λ_{2j} in horizontaler gestaucht. Da die Dynamik in vertikaler Richtung expandierend ist, kann man annehmen, daß das Maß auf dem Attraktor in dieser Richtung glatt ist. Der Bruchteil des Maßes von C_k, der von dem Streifen $efgh$ eingenommen wird, ist damit $1/\lambda_{1j}$. Da für $n \to \infty$ der Bruchteil von Anfangsbedingungen, die nach C_k zurückkehren

gleich $w(C_k)$ ist, folgt

$$w(C_k) = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{j\in C_k \cap Fix(f^n)} \lambda_{1j}^{-1} \right] . \tag{3.17}$$

Im mehrdimensionalen Fall kann man analog argumentieren, man hat in dieser Formel nur λ_{1j} durch das Produkt $\lambda_j = \prod_i^{(exp.)} \lambda_{ij}$ aller expandierenden Eigenwerte zu ersetzen.

Führt man nun die Erzeugendenfunktion

$$Q_p(\beta) = \sum_{\mathbf{x}\in Fix(f^p)} \mathrm{e}^{-\beta p \lambda(\mathbf{x})} \tag{3.18}$$

ein, so kann man (3.16) schreiben als

$$\lim_{p\to\infty} \log Q_p(\beta=1) = 0 . \tag{3.19}$$

Man vermutet, daß die Gültigkeit von (3.16) nicht auf streng hyperbolische Systeme beschränkt ist. So wurde diese Beziehung z.B. von Grassberger u.a. [17] beim Hénon-Attraktor für bestimmte Parameterwerte recht gut bestätigt.
Auch im Fall des Lorenzattraktors scheint (3.16) erfüllt zu sein, wie die folgenden Abbildungen zeigen. Für die periodischen Orbits der Längen $p = 5, \ldots, 9$ sind dort die Summen über ihre Gewichte gemäß (3.15) aufgetragen. Orbits, deren Periode q ein Teiler von p ist, gehen in diese Summe mit dem Gewicht $w_q^{p/q}$ ein, das ihren p/q-fachen Durchläufen entspricht. Die Konvergenz gegen den Wert 1 ist deutlich zu erkennen. Zudem scheinen auch die einzelnen w_i die natürlichen Gewichte der Orbits recht gut wiederzugeben. Um dies zu zeigen, wurde eine Zeitreihe von etwas über $7 \cdot 10^5$ Poincaré-Abbildern erstellt und die relativen Häufigkeiten für das Auftreten 7- und 8-elementiger Teilsequenzen in der Symbolfolge ermittelt.
In den Abbildungen 3.8–3.10 sind die nach (3.15) theoretisch vorhergesagten Häufigkeiten den in der Zeitreihe gefundenen gegenübergestellt.

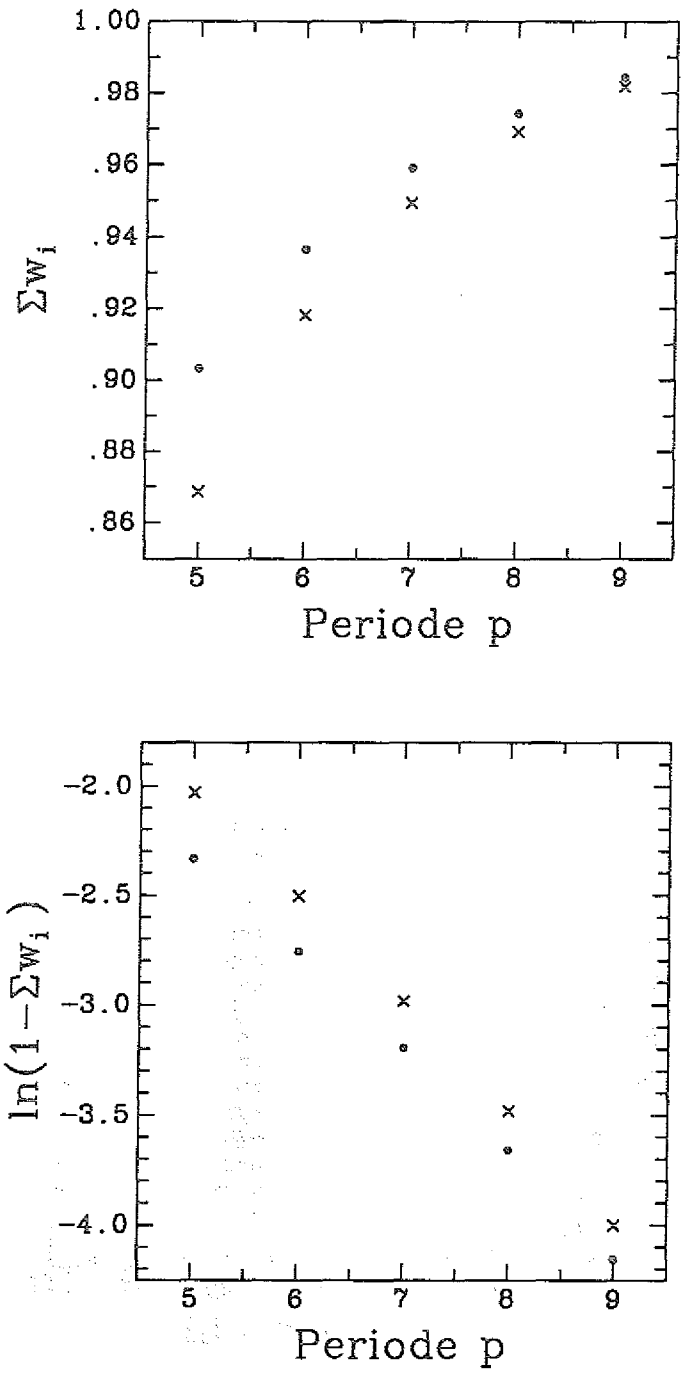


Abbildung 3.7: Summe der Gewichte $w_i := 1/|\Lambda_i|$ aller p-periodischen Orbits (oberes Bild) bzw. deren Abweichungen von der Normierung (unteres Bild): ×) Orbits ohne Symmetriereduktion, •) Orbits mit Symmetriereduktion. Die Konvergenz der Summe gegen 1 ist deutlich zu erkennen.

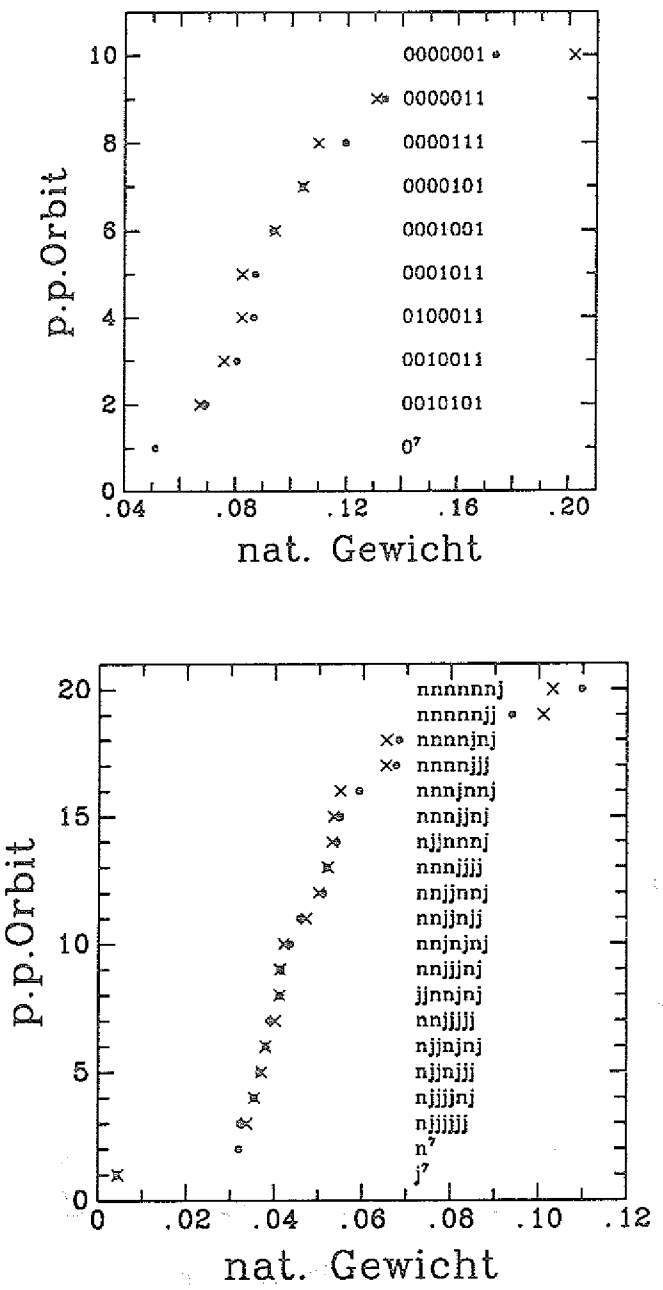


Abbildung 3.8: Vergleich der relativen Häufigkeiten 7-elementiger Teilsymbolfolgen (⊙) mit den natürlichen Gewichten w_i aus (3.16) (×). Oberes Bild: ohne Symmetriereduktion, unteres Bild: mit Symmetriereduktion

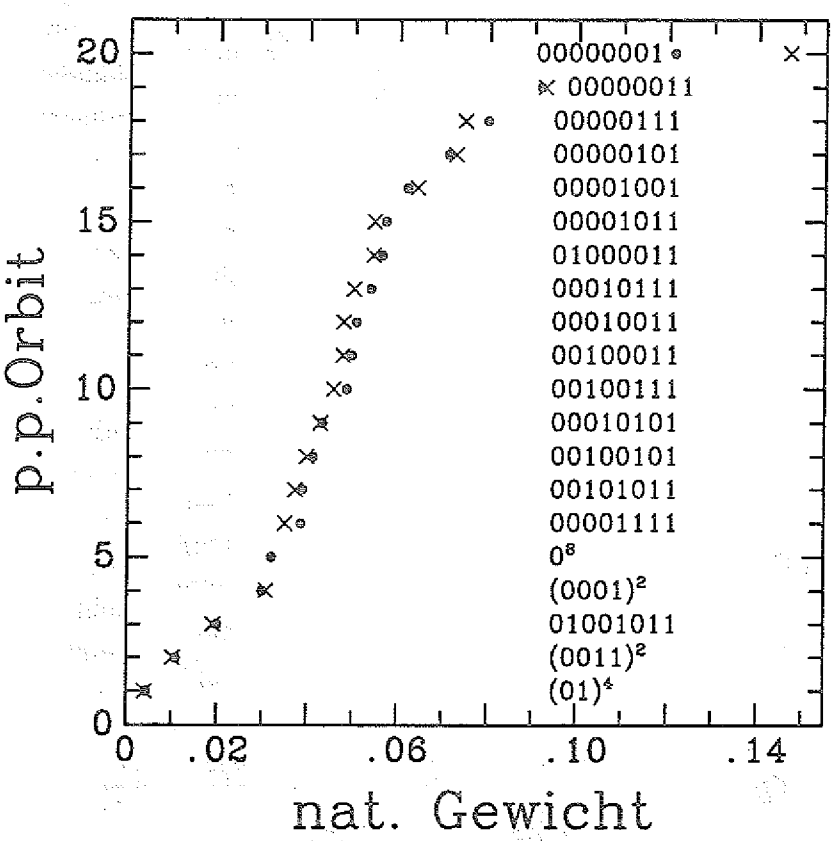


Abbildung 3.9: Dasselbe wie in Abb. 3.8 für die 8-periodischen Orbits ohne Symmetriereduktion

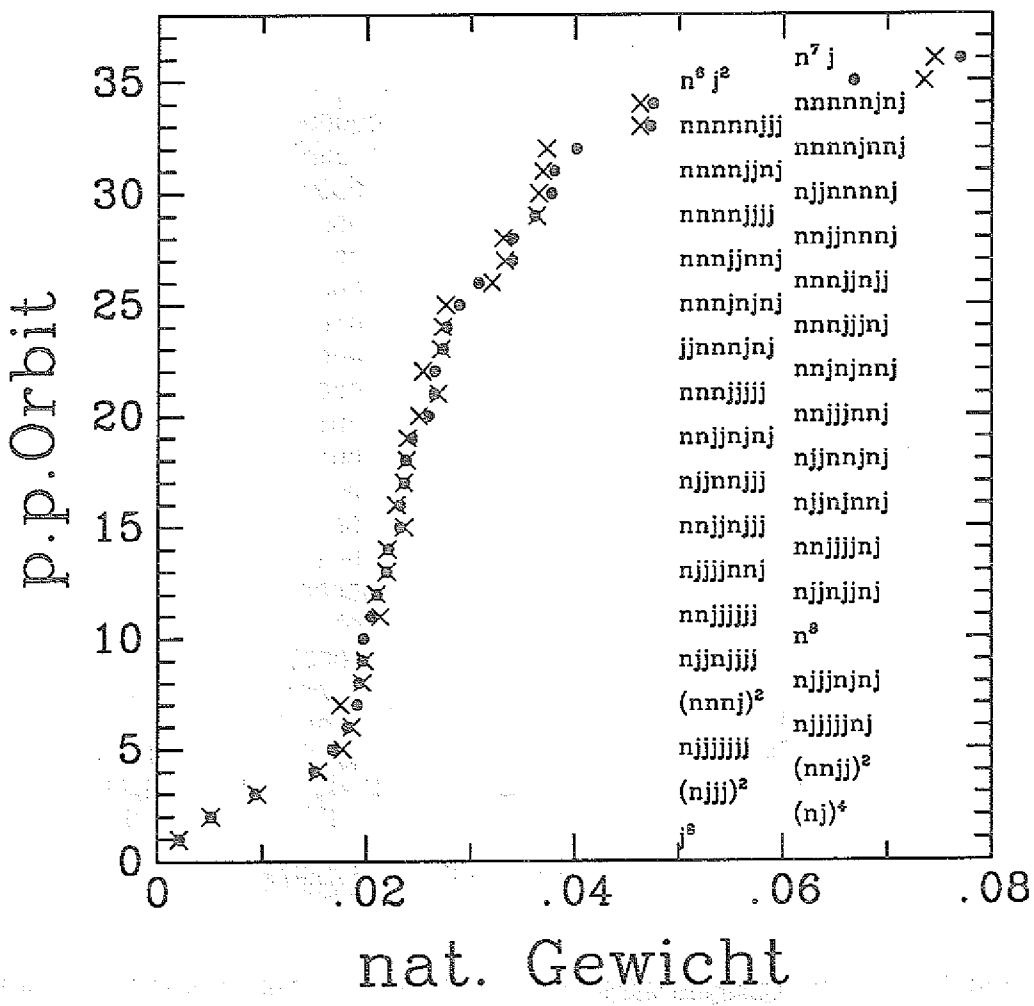


Abbildung 3.10: Dasselbe wie in Abb. 3.8 für die 8-periodischen Orbits mit Symmetriereduktion

3.6 Lyapunov-Exponenten

Viele charakteristische Eigenschaften des Attraktors lassen sich mit Hilfe der obigen Erzeugendenfunktion (3.18) ausdrücken. So ergibt sich im Fall, daß nur ein Lyapunovexponent positiv ist, der mittlere Lyapunovexponent des Systems als Ableitung nach β:

$$\lambda = -\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \frac{\partial Q_p(\beta)}{\partial \beta}\bigg|_{\beta=1} \tag{3.20}$$

$$\overset{(3.19)}{=} -\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \frac{\partial \ln Q_p(\beta)}{\partial \beta}\bigg|_{\beta=1} . \tag{3.21}$$

Die Ergebnisse für verschiedene Periodenlängen sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Periode p	a)	b)
5	0.61160	0.63453
6	0.63866	0.65058
7	0.65496	0.66116
8	0.66496	0.66819
9	0.67116	0.67284

Tabelle 3.1: Aus der Ableitung von $Q'_p(\beta)|_{\beta=1}$ bestimmter Wert des mittleren positiven Lyapunovexponenten λ_+^P der Poincaré-Abbildung: a) ohne, b) mit Symmetriereduktion

Um mit dem positiven Lyapunovexponenten $\lambda_+ \approx 0.9052 \pm 0.0001$ des vollen dreidimensionalen Systems vergleichen zu können, muß dieser mit der mittleren Rückkehrzeit der Poincaré-Abbildung $\langle\tau\rangle \approx 0.75117$ multipliziert werden. Dies ergibt einen Wert von $\lambda_+ \cdot \langle\tau\rangle \approx 0.67995$. Der Lyapunovexponent des vollen Flusses wurde dabei mit einem Standardverfahren bestimmt: außer dem Lorenzsystem integriert man gleichzeitig dessen Linearisierung. Der Anfangsvektor für diese zusätzliche Integration ist dabei beliebig zu wählen, da fast jeder Tangentialvektor mit dem größten Lyapunovexponenten anwächst. Indem man in genügend kurzen Abständen den Tangentialvektor normiert und die Normierungsfaktoren logarithmisch aufsummiert, erhält man nach Division durch die gesamte Intergrationsdauer λ_+.

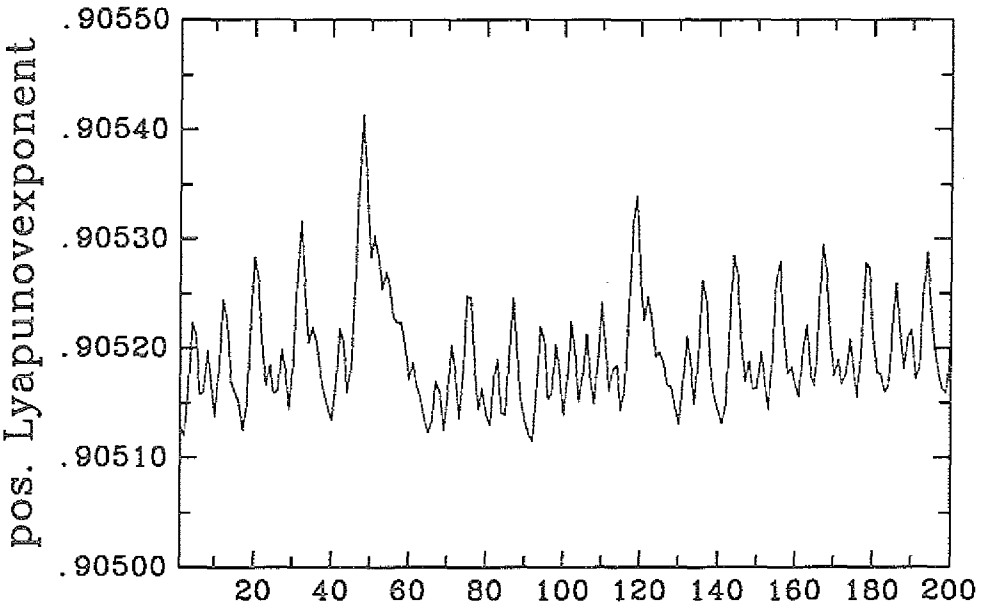


Abbildung 3.11: Schwankung des berechneten Lyapunovexponenten im vollen dreidimensionalen Fluß des Lorenz-Systems. Eingezeichnet sind die Werte der letzten 200 Integrationsschritte, wobei insgesamt 100200 Schritte der Länge 0.2 durchgeführt wurden. Die starken Spitzen tauchen auf, wenn die Trajektorie besonders nahe am Fixpunkt C_0 vorbeiläuft.

In der Berechnung wurde ein Schrittweite von 0.2 Zeiteinheiten gewählt und insgesamt 10^6 Integrationsschritte durchgeführt. Selbst nach einer derart langen Integration war noch eine deutliche Schwankung des berechneten Mittelwertes zu sehen (vgl. Abbildung 3.11, in der die Mittelwerte der letzten 200 Integrationsschritte dargestellt sind).

Die Konvergenz in p kann deutlich beschleunigt werden durch Einführung einer geeigneten ζ-Funktion. Diese wird definiert über die "großkanonische Zustandssumme" Ω durch:

$$\Omega(z,\beta) = \sum_{p=1}^{\infty} z^p Q_p(\beta) = \frac{z}{\zeta(z,\beta)} \frac{\partial \zeta(z,\beta)}{\partial z}, \tag{3.22}$$

mit $\zeta(0,\beta) = 1$. Sie kann wieder umgeschrieben werden in ein Produkt über prim-periodische Orbits:

$$\zeta(z,\beta)^{-1} = \prod_p [1 - z^p \exp(-p\beta\lambda_p)]. \tag{3.23}$$

Die obigen Gleichungen (3.16) und (3.21) sind dann äquivalent zur Aussage, daß $\zeta(z,\beta)^{-1}$ eine einfache Nullstelle $z_0(\beta)$ mit $z_0(1)=1$ aufweist, und λ durch $dz_0(\beta)/d\beta|_{\beta=1}$ gegeben ist.
Bevor wir diese Zetafunktion auswerten, müssen wir uns zunächst mit dem Problem der fehlenden periodischen Orbits im Lorenzsystem befassen.

3.7 Pruning im Lorenz-System

Die symmetrischen Fixpunkte des Lorenzsystems $C_\pm$ sind *nicht* Teil des Lorenz-Attraktors. Es existieren Umgebungen dieser Punkte, in die Orbits nie wiederkehren, wenn sie erst einmal entlang der instabilen Mannigfaltigkeit aus ihnen entwichen sind. (Daher stammen die "Löcher" bei $C_\pm$, die man in den Abbildungen des Lorenzattraktors erkennt.)
Dies wirft das Problem auf, daß die elementaren Orbits der symbolischen Dynamik '0' und '1' (bzw. 'n' in der symmetriereduzierten Darstellung) fehlen. Die entsprechenden Terme in der cycle expansion sind daher nicht ausgewogen, und man kann nicht a priori erwarten, daß die cycle expansion zu einer merklichen Konvergenzbeschleunigung führt.
Trotzdem kann man versuchen, die Zetafunktion mit einem Term $(1-t_0)^2$ (bzw. $(1-t_n)$) zu erweitern, wobei t_0 (bzw. t_n) sozusagen das Gewicht einer fiktiven Bahn der Periode 1 darstellt[10]. Das hätte den Vorteil, daß nun erst Orbits sehr großer Periodenlänge fehlten. (Mehr als ~25 Umrundungen desselben Fixpunktes sind bei den hier gewählten Parametern des Lorenz-Systems nicht möglich, es existiert deshalb in jedem Fall ein *pruning* bei großen Perioden, d.h. nicht alle Orbits der symbolischen Dynamik sind tatsächlich im dynamischen System realisiert.)
Es wurden verschiedene Ansätze versucht, dieses "fehlende Gewicht" zu finden. Dabei spezialisieren wir uns auf den Fall der Gewichte $t_p \equiv |\Lambda_p|^{-1} \equiv w_p$, wie sie bei der obigen Erörterung des natürlichen Maßes auftraten.

[10] Um die Sprechweise zu vereinfachen, werden wir im folgenden immer von t_0 reden, wobei dann je nachdem, ob das System symmetrisch oder symmetriereduziert betrachtet wird, das Paar $t_0 = t_1$ oder der Wert t_n zu verstehen ist.

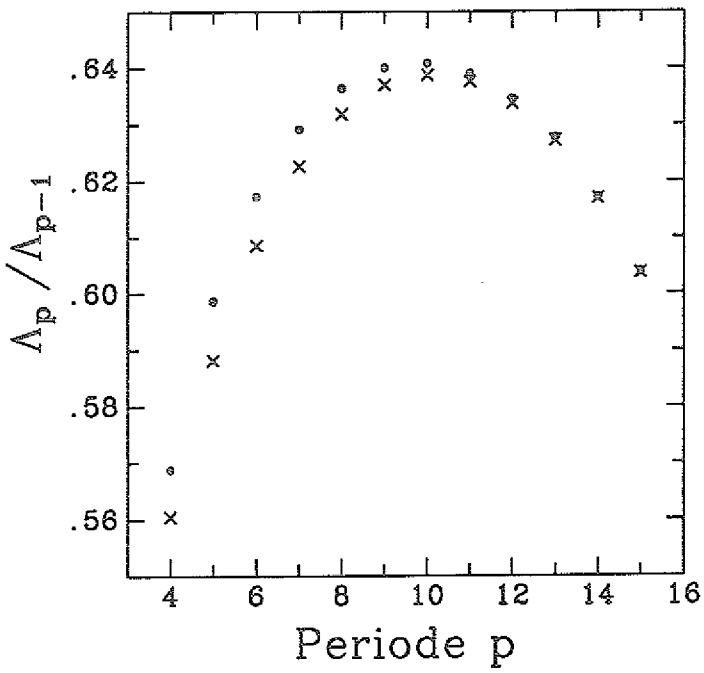


Abbildung 3.12: Verhältnisse der Stabilitäten von Orbits der Symbolfolgen 0...01 (×) und n...nj (•)

3.7.1 Die Gewichtsverhältnisse "verwandter" Orbits

Eine der Grundannahmen der cycle expansion ist, daß die Gewichte langer Orbits angenähert werden können durch die Produkte der Gewichte kürzerer Bahnen mit derselben gesamten Symbolsequenz. Es liegt daher der Versuch nahe, t_0 aus den Verhältnissen der Gewichte von Orbits der Form $\sigma_1 \ldots \sigma_p$ und $0\sigma_1 \ldots \sigma_p$ zu extrahieren, denn es müßte ja asymptotisch $t_{0\sigma_1 \ldots \sigma_p} \approx t_0 \cdot t_{\sigma_1 \ldots \sigma_p}$ sein.
Für die Orbits zu den Symbolsequenzen 00...01$\hat{=}n...njj$ und $nn \ldots nj$ sind diese Verhältnisse in Abbildung 3.12 dargestellt. Es wurden hierzu zusätzliche Orbits bis zur Periode 15 bestimmt. Als Gewichte wurde wieder $w_i = |\Lambda_i|^{-1}$ gewählt. Wie man erkennt, existiert in keinem der Fälle eine Konvergenz, sondern die Kurven durchlaufen im Gegenteil sogar ein deutliches Maximum.
Eine Erklärung hierfür könnte in der Tatsache liegen, daß die Länge der Symbolfolge kein guter Ordnungsparameter für die Stabilitäten darstellt: schon bei Periode 6 beginnen die "Stabilitätsbänder" in Abbildung 3.4 und 3.5 zu überlappen.

3.7.2 Fehlendes Gewicht aus Gleichung (3.16)

Ein anderer Ansatz für die Wahl des fehlenden Gewichtes ergibt sich aus der Normierung der natürlichen Gewichte nach (3.16). Da die 1-periodischen Punkte dort mit der Wahrscheinlichkeit für ihre p-fache Wiederholung eingehen würden, bestimme man das natürliche Gewicht von '0' bzw. 'n' so, daß

$$\sum_{i\neq 0,1}^{(p)} w_i + 2\cdot w_0^p = 1 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i\neq n}^{(p)} w_i + w_n^p = 1 \tag{3.24}$$

ist.

Die Ergebnisse dieser Berechnung sind in Abbildung 3.13 zu sehen. Da man alle Orbits zur Berechnung heranziehen muß, ist es nicht möglich zu sagen, ob auch hier ein lokales Maximum vorliegt. Das leichte Abfallen im symmetriereduzierten Fall könnte auch ein numerischer Fehler sein. Man beachte, daß die Werte für t_0 deshalb wesentlich unter den Werten t_n liegen, weil sich das Gewicht hier auf zwei symmetrische Orbits verteilt.

3.7.3 Das Skalen langer Orbits '0...01'

Orbits, die sehr oft auf derselben Seite bleiben, halten sich lange im "mittleren" Teil des Attraktors auf, sie kommen relativ selten in die Nähe eines der Fixpunkte. (Bei den Orbits '0...01' geschieht dies nur ein einziges Mal, wenn sie sich beim Wechsel auf die symmetrische Seite am Fixpunkt im Ursprung vorbeilaufen, siehe dazu die Abbildungen in Anhang F.) Man kann deshalb für die Stabilitäten ansetzen

$$\Lambda_{\underbrace{0\ldots0}_{k-mal}1} \approx \Lambda_0^k \cdot \epsilon(k)\,, \tag{3.25}$$

wobei wir annehmen, daß $\epsilon(k)$ weniger stark von k abhängt. Eine logarithmische Auftragung der $\Lambda_{0\ldots01}$ gegen k sollte dann im idealen Fall einen linearen Anstieg zeigen. Für die Orbits bis zur Periode 15 ist dies in Abbildung 3.14 dargestellt. Man stellt eine überaschend gute Bestätigung unserer Annahme fest. Aus der Geradenanpassung unter Berücksichtigung der 7–14-periodischen Orbits erhält man eine Steigung von 0.457 ± 0.002, daraus ergibt sich $\Lambda_0 \approx 1.582 \pm 0.005$, bzw. $w_0 \approx 0.632 \pm 0.002$. Dies ist deutlich verschieden von den Werten, die wir im vorherigen Abschnitt ermittelt haben (vgl. Abb. 3.13). Andererseits erhält man aus der analogen Rechnung für die Orbits '$n\ldots nj$' einen Wert $w_n \approx 0.630 \pm 0.002$, was wiederum sehr gut mit den in Abb. 3.13 dargestellten Werten übereinstimmt.

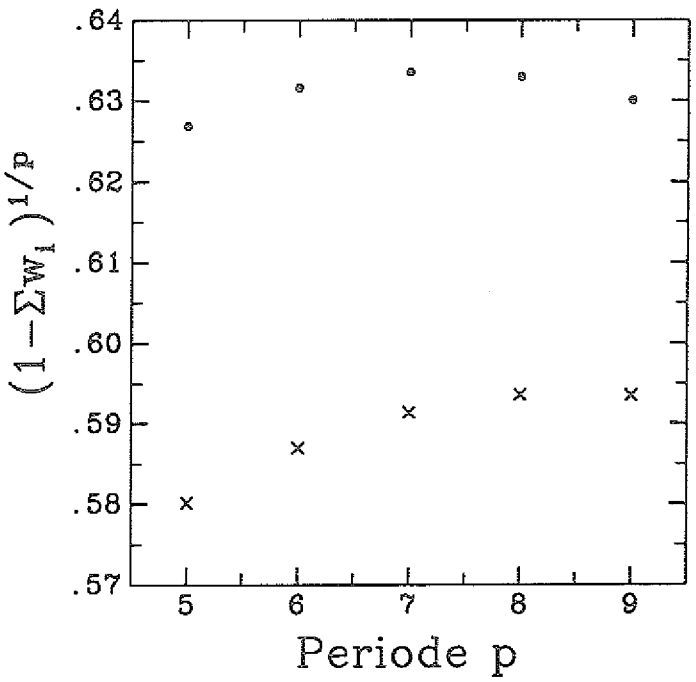


Abbildung 3.13: Interpretation der Differenz $1 - \sum w_i$ als Gewicht einer p-fach durchlaufenen hypothetischen Bahn '0' (∗) bzw. 'n' (∘).

3.7.4 Benutzung der symmetrischen Fixpunkte $C_\pm$

Man könnte weiterhin die Annahme untersuchen, ob nicht doch die symmetrischen Fixpunkte die geeigneten Gewichte liefern. Bei den gewählten Parameterwerten in den Lorenzgleichungen sind diese instabil mit einem negativen und zwei komplex konjugierten Eigenwerten λ, $\bar{\lambda} = 0.0939556 \pm 10.194505 \cdot i$. In der zum komplexen Paar gehörigen instabilen Mannigfaltigkeit führt dies zu der beobachteten spiralförmigen Bewegung der Orbits. In geeigneten (Polar-)Koordinaten wird diese Bewegung in der direkten Umgebung von $C_\pm$ beschrieben durch die Differentialgleichungen

$$\dot{r} = \mathrm{Re}\,\lambda \cdot r \qquad \text{und} \qquad \dot{\Phi} = \mathrm{Im}\,\lambda\,, \tag{3.26}$$

woraus man eine Umlaufdauer von $2\pi/\mathrm{Im}\,\lambda \approx 0.616331$ abliest. Nach dieser Zeit wächst der Radius um einen Faktor ≈ 1.059617, so daß man diesen Wert als Instabilität des symmetrischen Fixpunktes ansehen könnte. Das hieraus resultierende t_0 beträgt daher ≈ 0.943737. Es stellt sich jedoch heraus, daß diese Werte keine besonders guten Kandidaten sind (s.u. bei der Betrachtung der curvatures).

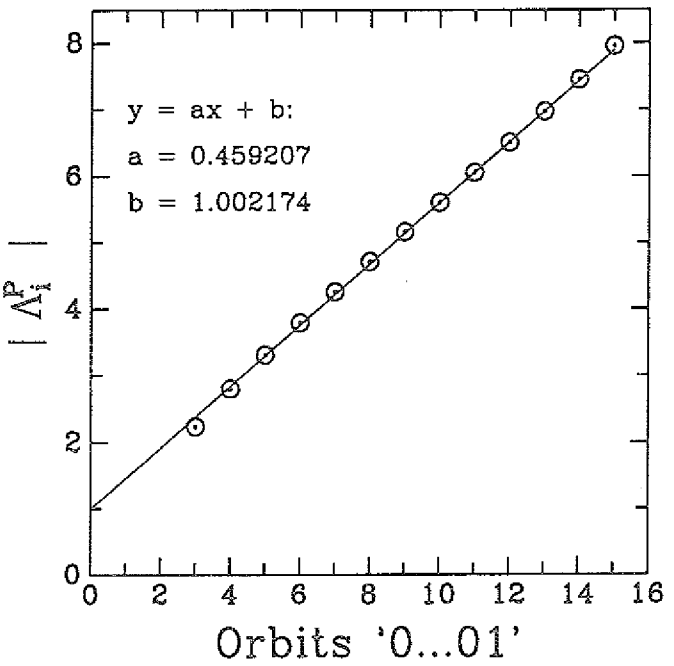


Abbildung 3.14: Logarithmen der Stabilitäten der Orbits '0...01' in Abhängigkeit der Periodenlänge p, der entsprechende Plot für die Orbits '$n \ldots nj$' unterscheidet sich für große p's nur unwesentlich von diesem (vgl. die numerischen Werte der Stabilitäten in Anhang E).

3.7.5 Exponentieller Zerfall der curvatures

Als letzte Möglichkeit wurde untersucht, ob man das fehlende Gewichte so bestimmen kann, daß die Forderung nach einem exponentiellen Zerfallen der curvatures möglichst optimal erfüllt ist. Dazu sind in der folgenden Abbildung die curvature-Werte für verschiedene t_n aufgetragen[11]. Es erweist sich, daß nur für einen engen Wertebereich der t_n ein annähernd gleichmäßiger exponentieller Zerfall vorliegt. Dieser liegt etwa bei $t_n \approx 0.643 \pm 0.001$ (Man vergleiche dies wieder mit Abb. 3.13 !). Außerhalb dieses Bereiches treten entweder starke Schwankungen auf (bei kleineren Werten) oder die curvatures wachsen insgesamt an (ohne Abb.). Setzt man etwa die "Instabilität" des symmetrischen Fixpunktes ein, so liegen alle c_n in der Größenordnung von $10^{-1} - 10^{-2}$. Damit liegt man weit jenseits von jeder

[11] Hier wird nur der symmetriereduzierte Fall dargestellt, ohne Symmetriereduktion ergeben sich aber qualitativ ähnliche Ergebnisse.

schnellen Konvergenz der cycle expansion.

3.7.6 Fazit

Keine der oben diskutierten Methoden liefert eine eindeutige Aussage über die "beste" Methode, die Zetafunktion zu erweitern. Allenfalls die Tatsache, daß drei Methoden Werte in der gleichen Größenordnung ergeben, läßt vermuten, daß es in diesem Bereich eine gute Wahl gibt. Dabei haben wir natürlich vorausgesetzt, daß die cycle expansion ohne diese Erweiterung nur schlecht konvergiert und derartige Überlegungen nötig macht. Dieses ist im Einzelfall zuerst zu prüfen.

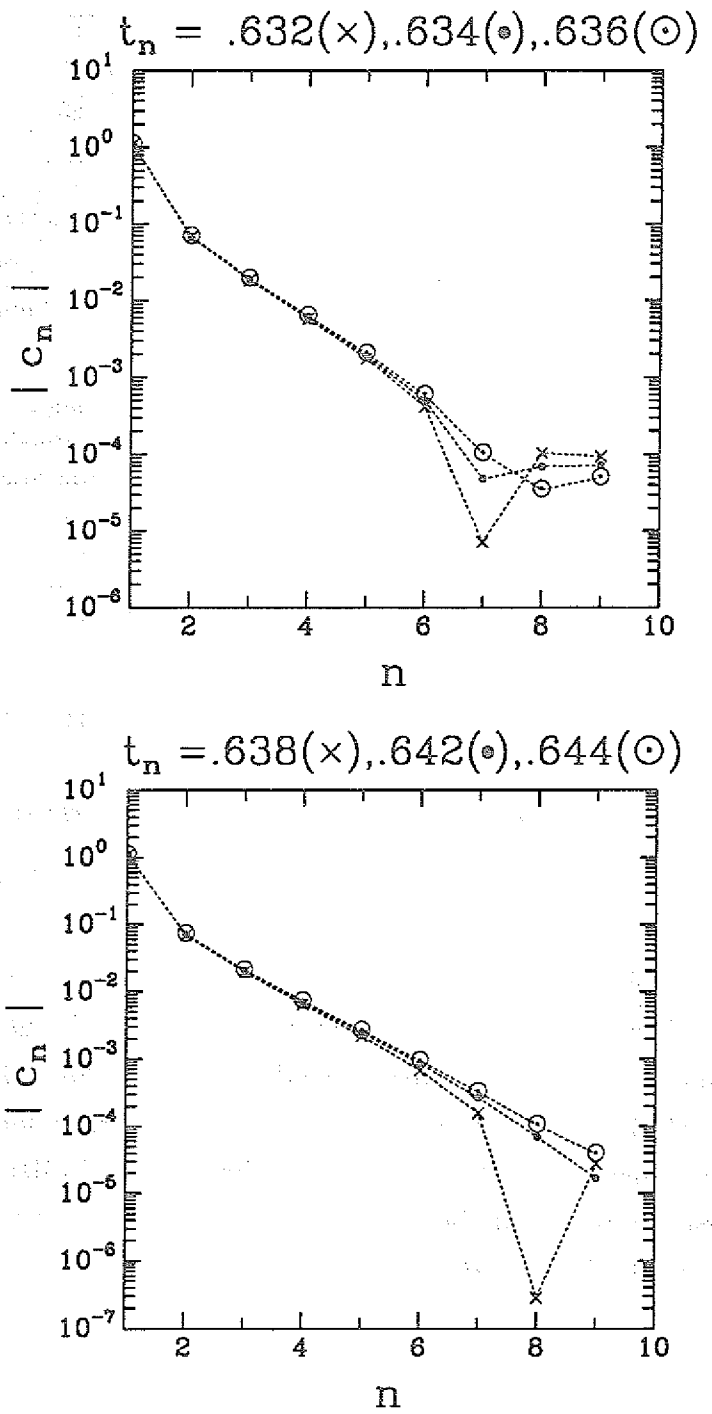


Abbildung 3.15: Abfallen der curvatures für verschiedene Werte von t_n

Ordnung	t_0	$z_0(1)$	$dz_0(\beta)/d\beta\|_{\beta=1}$
7	0.591371	1.0003618	0.682444
8	0.593562	1.0001434	0.681275
9	0.593496	1.0000234	0.680585

Ordnung	t_n	$z_0(1)$	$dz_0(\beta)/d\beta\|_{\beta=1}$	$t_n = 0$
7	0.633569	1.0000785	0.680191	0.707128
8	0.633010	1.0000098	0.680035	0.698251
9	0.630052	0.9999799	0.679992	0.692239

Tabelle 3.2: Bestimmung des positiven Lyapunov-Exponenten der Poincaré-Abbildung mittels Zetafunktionen (3.23) verschiedener Ordnungen ohne bzw. mit Symmetriereduktion. Im symmetriereduzierten Fall besaß die Zetafunktion ebenfalls eine Nullstelle in der Nähe von 1, wenn man keine Extrapolation von t_n einsetzte. Die daraus bestimmten Werte für den Lyapunov-Exponenten sind zusätzlich angegeben. Zum Vergleich: aus der Integration der Differentialgleichungen erhielten wir oben den Wert 0.67995.

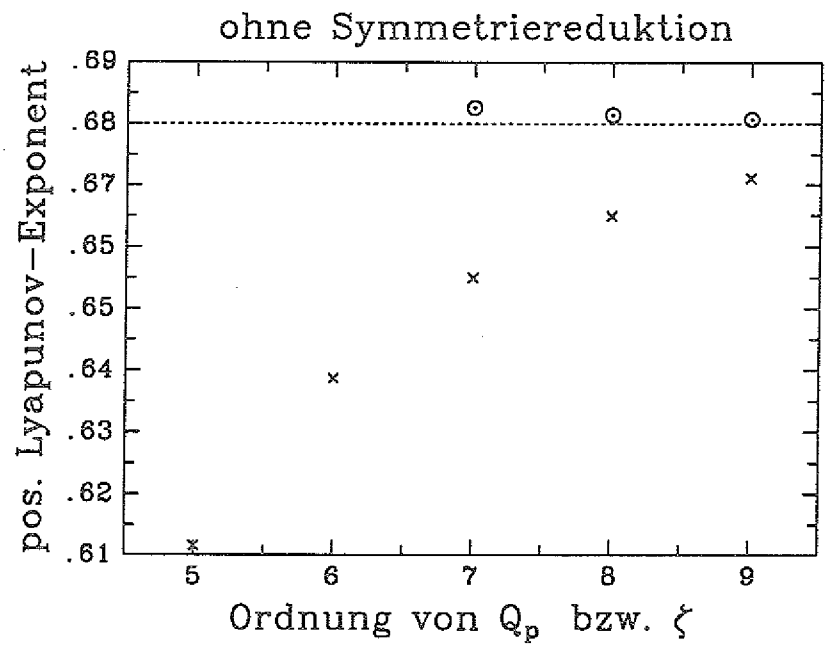
3.8 Anwendungen der cycle expansions

3.8.1 Bestimmung des Lyapunovexponenten

Nun wollen wir die in (3.23) eingeführte Zetafunktion mittels cycle expansion auswerten[12].

Es stellte sich heraus, das die besten Ergebnisse erzielt werden konnten, wenn man für den fehlenden Orbit ein Gewicht wählt, wie es sich aus den Überlegungen in Abschnitt 3.7.2 bei der entsprechenden Periode ergibt. Dadurch war die Bedingung, daß die Nullstelle $z_0(\beta)$ für $\beta = 1$ bei 1 liegen sollte, bestmöglich erfüllt (siehe folgende Tabelle 3.2). Die Ergebnisse sind in der Abbildung 3.16 dargestellt. Schon mit Orbits bis zur Periode 7 läßt sich der mit Standardverfahren (Integration der Tangentialabbildung) bestimmte Wert mittels Zetafunktion bis auf wenige Promille reproduzieren.

[12]Zu deren Berechnung benutzt man i.a. ein Programm zur Formelmanipulation wie etwa REDUCE. Dieses liefert einem die Auswertung des Produktes (1.32) und gestattet es, die Koeffizienten der z-Potenzen zu separieren.



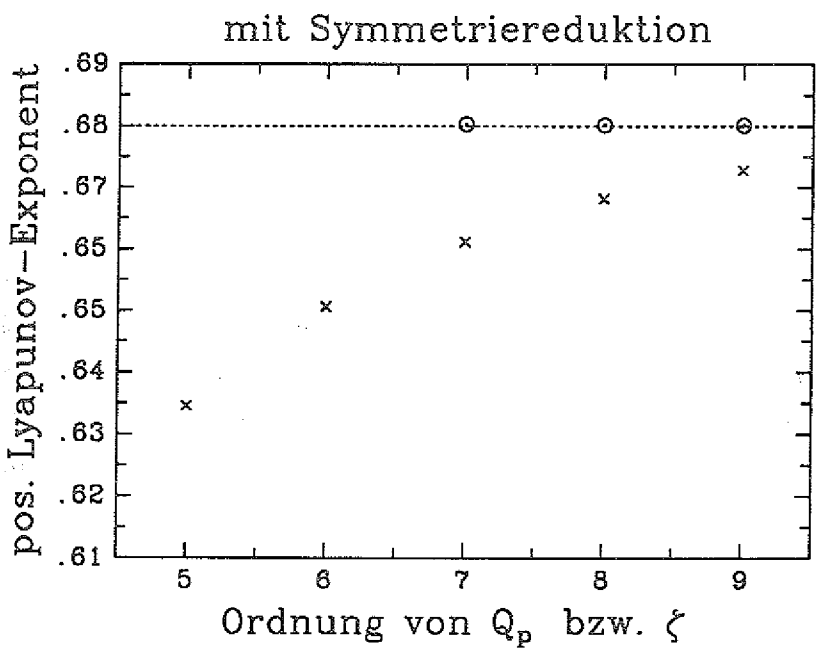


Abbildung 3.16: Ergebnisse der Bestimmung des positiven Lyapunov-Exponenten im Lorenzsystem. Es bedeutet: $\odot$: mittels Zetafunktion bis zur angegebenen Periode, $\times$: aus der Zustandssumme $Q_p(\beta)$ aus (3.18). Die gestrichelte Linie gibt den Wert an, den man aus einer Integration der linearisierten Lorenzgleichungen erhält

3.8.2 Berechnung der fraktalen Dimension

Eine fundamentale Charakterisierung fraktaler Mengen $\mathcal{A}$ ist ihre *Hausdorff-Dimension.*

Nehmen wir an, daß $\mathcal{A}$ als eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes vorliegt, dann kann man für jedes positive ϵ eine endliche Überdeckung $\mathcal{C}(\epsilon)$ aus Mengen finden, deren Durchmesser $\delta_i \leq \epsilon$ ist. Die Hausdorff-Dimension $D_H(\mathcal{A})$ ist dann definiert durch

$$\limsup_{\epsilon\to\infty} \inf_{\mathcal{C}(\epsilon)} \sum_i \delta_i^d = \begin{cases} 0\,, & falls\ d > D_H \\ \infty, & falls\ d < D_H\,. \end{cases} \tag{3.27}$$

Die in dieser Definition geforderte Optimierung der Überdeckung ist in der Anwendung nur selten zu realisieren. Statt dessen begnügt man sich mit einer Überdeckung aus gleichgroßen Mengen, und läßt den gemeinsamen Durchmesser ϵ klein werden. Man gewinnt dann mit der *Kapazität*

$$D_0 = -\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon}\,, \tag{3.28}$$

wobei $N(\epsilon)$ die zur Überdeckung nötige Anzahl von Mengen ist, eine untere Schranke für die Hausdorff-Dimension. I.a. verfolgt man dazu eine typische Trajektorie und zählt zur Abschätzung von $N(\epsilon)$ die Mengen der Überdeckung, die von ihr besucht werden.

Für den Lorenz-Attraktor führt diese "Kästchen-Zähl-Methode" zu ernsten numerischen Schwierigkeiten [34]. Der Grund liegt darin, daß viele Kästchen nur mit geringer Wahrscheinlichkeit von den Trajektorien durchlaufen werden.

Leichter ist es, die sog. *Korrelationsdimension* D_2 zu bestimmen, bei der diese Probleme nicht auftreten. D_2 ist eine untere Schranke für D_0 und wurde von Grassberger und Procaccia [18] mit 2.05 ± 0.01 angegeben.

Eine andere Abschätzung gewinnt man aus der Kaplan-Yorke-Vermutung [28], die in unserem Fall die fraktale Dimension

$$D_{KY} = 2 - \frac{\lambda_+}{|\lambda_-|} \approx 2.06 \tag{3.29}$$

ergibt. (Dabei wurde der numerisch bestimmte Wert des positiven Lyapunovexponenten benutzt.)

Die Möglichkeit, die fraktale Dimension allein aus den Eigenschaften periodischer Orbits zu bestimmen, wird z.B. in [3] diskutiert. Idee ist dabei, daß man das

dynamische Fraktal mit Umgebungen periodischer Punkte überdeckt, so daß mit wachsender Periode die Überdeckung immer feiner wird.
Betrachten wir spezieller den Fall einer 2-dimensionalen Abbildung, deren periodische Orbits sämtlich hyperbolisch sind. Zur Berechnung der fraktalen Dimension ist es nun ausreichend, die Überdeckung in der stabilen Richtung zu verfeinern. Jeder periodische Punkt p besitzt eine stabile Richtung mit einer zugehörigen Lyapunovzahl $\Lambda_i^s < 1$. Dies definiert die i-te lokale Breite der Überdeckung, in der instabilen Richtung hingegen nehmen wir eine Skala von der Ordnung 1 an.
Unsere Vorstellung ist also, daß wir das Fraktal mit Streifenumgebungen überdecken, deren Länge 1 und deren Breite Λ_i^s ist. Jeder dieser Streifen wird wiederum überdeckt mit $1/\Lambda_i^s$ Kreisumgebungen mit Radius Λ_i^s. Berechnen wir nun für wachsendes p die Werte $D_0^{(p)}$, für die

$$\sum_{i=1}^{N_p} \frac{1}{\Lambda_i^s}(\Lambda_i^s)^{D_0^{(p)}} \equiv \sum_{i=1}^{N_p}(\Lambda_i^s)^{(D_0^{(p)}-1)} = 1 \tag{3.30}$$

ist, so erwarten wir $D_0 = \lim_{p\to\infty} D_0^{(p)}$; N_p bezeichnet hierbei die gesamte Anzahl der zur Überdeckung nötigen Kreisumgebungen.
Statt diese endlichen Summen für jedes p auszurechnen und eine Extrapolation $p \to \infty$ durchzuführen, setzen wir die entsprechenden Gewichte (d.h. die Summanden von (3.30)) in die dynamische Zetafunktion ein, und berechnen deren führende Nullstelle.
In der folgenden Abbildung sind die ermittelten Werte für D_0^ζ zu sehen. Man beachte, daß die fraktale Dimension des vollständigen Attraktors im $\mathbb{R}^3$ um 1 höher ist, als die des Schnittes mit der Poinaré-Ebene. Es zeigte sich, daß eine Extrapolation in diesem Falle keine Verbesserung der Konvergenz bewirkte. Die Ergebnisse erwiesen sich hingegen als auf drei Nachkommastellen stabil gegenüber Variation von t_0 bzw. t_n.

3.9 Bestimmung der Autokorrelationen im Lorenzsystem

Als Anwendung der Zetafunktionen auf den vollen dreidimensionalen Fluß des Lorenz-Systems betrachten wir nun das Spektrum von Autokorrelationsfunktionen.

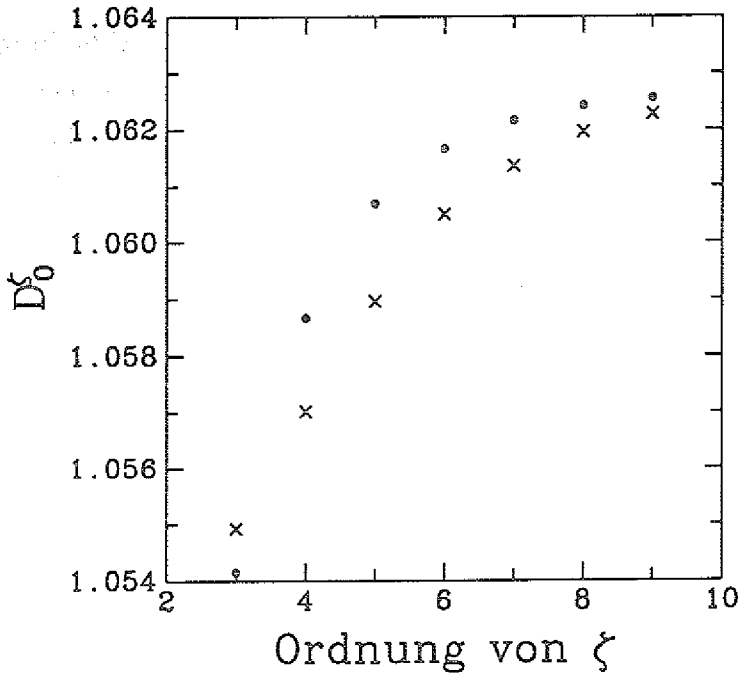


Abbildung 3.17: Mittels Zetafunktion berechnete Werte für die fractale Dimension des Schnittes des Lorenzattraktors mit der Poincaré-Ebene $\{z = \rho - 1\}$. Die fraktale Dimension des vollständigen Attraktors im $\mathbb{R}^3$ ist um 1 größer. ×: ohne Symmetriereduktion, •: mit Symmetriereduktion.

Die Korrelationsfunktionen im Lorenz-System und ihre Spektren stehen im Zusammenhang mit der Frage, inwiefern eine Beschreibung des Systems in der Sprache der statistischen Mechanik möglich ist. Dies wurde zuerst von Lücke [33], später dann von Grossmann und Sonneborn-Schmick [21] ausführlich an der Anwendbarkeit des sog. Mori-Zwanzig-Projektor-Formalismus auf die Korrelationen der Koordinatenfunktionen diskutiert.

Dabei interessieren wir uns für Funktionen $A(x, y, z)$, die stetig von den Koordinaten x, y und z abhängen, und deren zeitlicher Mittelwert

$$\langle A \rangle_{\mathrm{X}} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt\, A(x(t), y(t), z(t)) \tag{3.31}$$

für beliebige Startwerte $(x(0), y(0), z(0))$ konvergiert. Im chaotischen Regime des Lorenz-Systems erwarten wir natürlich, daß dieser Mittelwert für fast alle Startpunkte derselbe ist. Ausnahmen sind einzig die Fixpunkte, sowie alle Punkte auf der stabilen Mannigfaltigkeit des Fixpunktes im Koordinatenursprung.

Die einfachsten Beziehungen zwischen den Momenten dynamischer Variablen ergeben sich aus der Symmetrie und der Zeitinvarianz der Mittelwerte.
Aus der Symmetrie $g : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$ folgt das Verschwinden aller Mittelwerte von ungeraden Funktionen, für die $A(g\mathrm{x}) = -A(\mathrm{x})$ ist. Insbesondere sind z.B. $\langle x \rangle = \langle y \rangle = \langle xz \rangle = \ldots = 0$.
Die Zeitinvarianz eines Mittelwertes andererseits liefert Beziehungen der Form

$$0 = \frac{d}{dt}\langle A(x, y, z)\rangle = \left\langle \frac{\partial A}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A}{\partial z}\dot{z} \right\rangle . \tag{3.32}$$

Insbesondere für die Momente der Koordinatenfunktionen $\langle x^k y^l z^m \rangle$ liefert dies wegen der polynomialen Gestalt der Bewegungsgleichungen eine Vielzahl von Beziehungen (vergleiche die Formeln (13a-f) in [33]). Man kann diese ausnutzen, um zu sehen, daß nur zwei der Momente, z.B. $\langle z \rangle$ und $\langle z^2 \rangle$ wirklich unabhängig sind.
Die Bewegung der Phasenraumpunkte wird dominiert durch drei charakteristische Frequenzen, die wir nach Lücke mit Ω_0, Ω_z und Ω_∞ bezeichnen. Ω_0 ergibt sich aus

$$\Omega_0^2 = \langle \dot{x}^2 \rangle / \langle x^2 \rangle \tag{3.33}$$

und korrespondiert zur mittleren Umlaufzeit einer Trajektorie um die symmetrischen Fixpunkte.

$$\Omega_z^2 = \langle \dot{z}^2 \rangle / \langle (\delta z)^2 \rangle \tag{3.34}$$

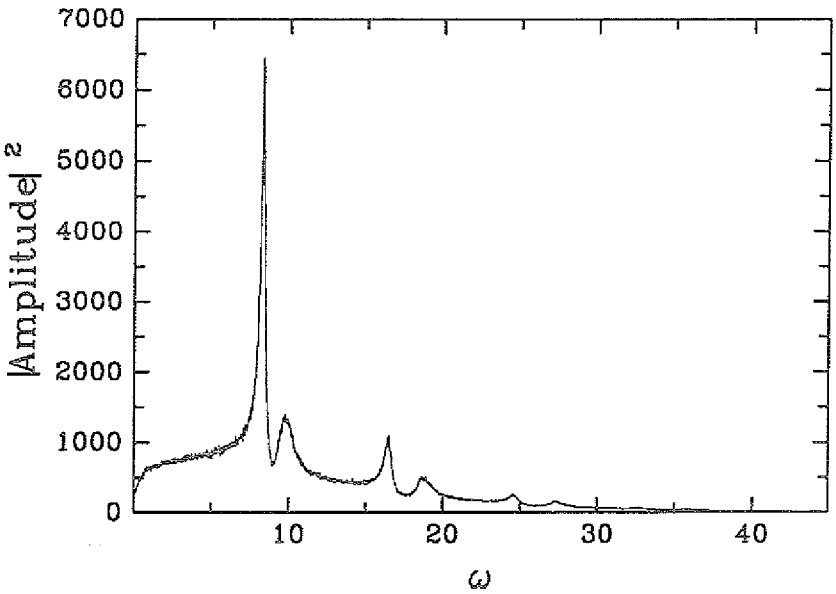
mißt die Oszillation von $\delta z = z - \langle z \rangle$.

$$\Omega_\infty^2 = \langle \dot{\eta}^2 \rangle / \langle \eta^2 \rangle = \langle \ddot{x}^2 \rangle / \langle \dot{x}^2 \rangle, \quad \eta = y - x\,, \tag{3.35}$$

charakterisiert das hochfrequente Umrunden in der Nähe der symmetrischen Fixpunkte.
Als numerischer Test dieser Aussagen wurden die Korrelationen der Koordinatenfunktionen $z(t)$ und $\sqrt{x^2 + y^2}(t)$ berechnet. Es erwies sich, daß beide Korrelationsfunktionen eine fast identische Gestalt aufwiesen, so daß wir im folgenden nur $(z - \langle z \rangle)(t)$ betrachten werden.
Die Berechnung der Autokorrelation geschieht am günstigsten mittels Fast-Fourier-Transformation. Dazu wurde eine sehr lange Zeitreihe von Phasenraumpunkten im Lorenzfluß durch Integration der Bewegungsgleichungen bestimmt. Als Schrittweite wurde dabei $\Delta t = 0.07$ gewählt, so daß im Mittel etwa 10

Integrationsschritte für eine Umrundung der Fixpunkte benötigt wurden. Je $2^{13} = 8192$ aufeinanderfolgende Punkte wurden zu einem Datensatz zusammengefaßt, und die Fast-Fourier-Transformation der zugehörigen z-Koordinaten berechnet [13]. Deren Betragsquadrat ist (nach dem Wiener-Khinchin-Theorem) die Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion.
Abb. 3.18 zeigt diese Funktion, gemittelt über insgesamt 100 Datensätze. Deutlich erkennt man eine Folge scharfer Peaks, die bei den Vielfachen der mittleren Umlauffrequenz $2\pi/\langle\tau\rangle \approx 8.3645$ liegen. Eine zweite Sequenz von Peaks läßt sich interpretieren als charakteristische Frequenz der z-Koordinate. Die Spitzen liegen im Vergleich zu den von Lücke angegebenen Frequenzen zu höheren Werten verschoben. Dies ist ein Phänomen, daß auch schon in [33] und [21] beobachtet und diskutiert wird.

[13] Der zeitliche Mittelwert $\langle z\rangle$ wurde zuvor abgezogen.



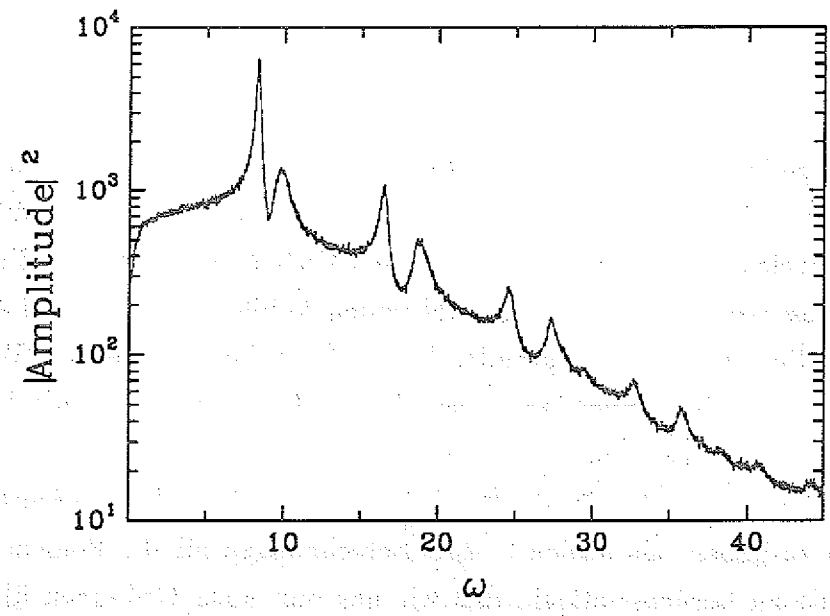


Abbildung 3.18: Fouriertransformierte der Autokorrelation $z - \langle z \rangle$ in linearer und logarithmischer Darstellung. Deutlich sind zwei Folgen von Spitzen zu erkennen, die mit der mittleren Umlaufzeit der Bahnen um die symmetrischen Fixpunkte, und der charakteristischen Frequenz der z-Koordinate zusammenhängen.

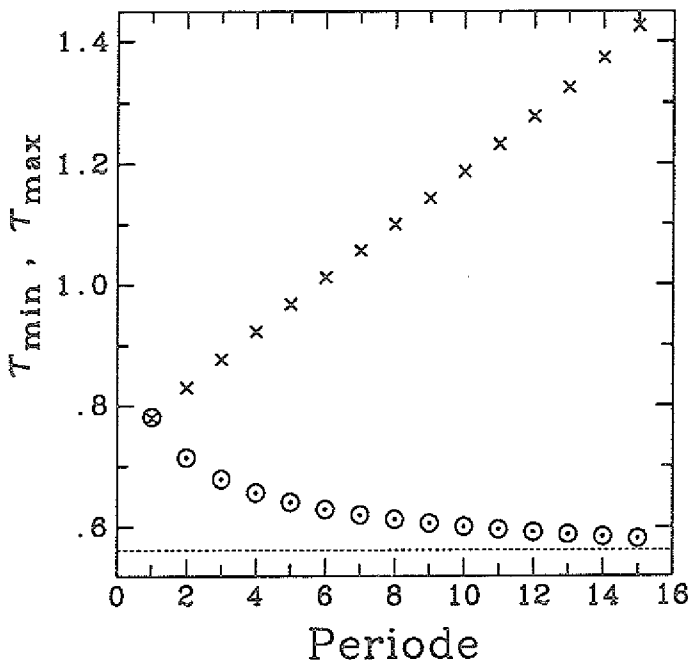


Abbildung 3.19: Minimale (⊙) und maximale (×) Rückkehrzeit eines Teilsegments der Orbits '0...01'.

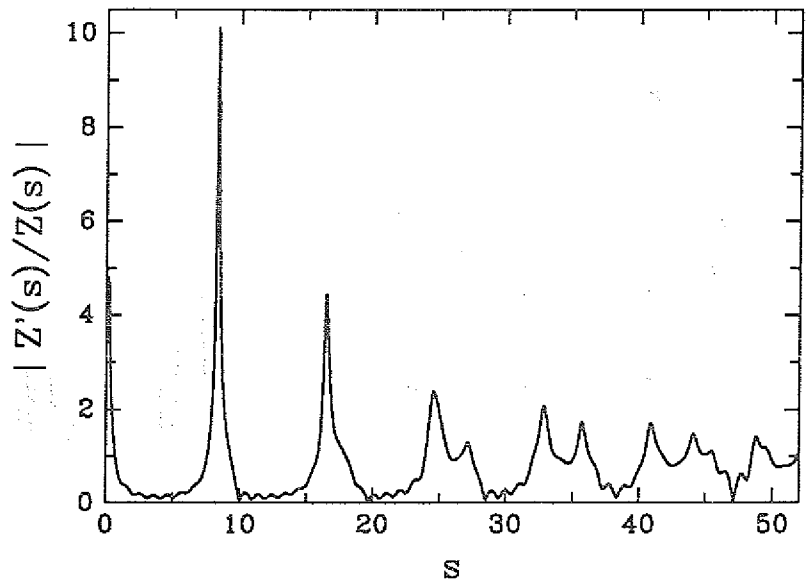
Zum Vergleich wurde der Integrand von (2.28) in Abhängigkeit vom Parameter s untersucht. Dazu ist sowohl die Zetafunktion $\mathcal{Z}(s)$ als auch deren Ableitung $\mathcal{Z}'(s)$ mittels cycle expansion zu berechnen. Den Verlauf der Funktion $|\mathcal{Z}'(s)/\mathcal{Z}(s)|$ für reelles positives s sieht man in den folgenden Abbildungen 3.20 und 3.21. Obwohl man die Polstellen des Integranden $|\mathcal{Z}'(s)/\mathcal{Z}(s)|$ bei komplexen s-Werten erwartet, kann man doch einen Anhaltspunkt für deren Lage bei einer Untersuchung auf $\{\mathrm{Im}\, s = 0\}$ erwarten.

Die Wahl der Gewichte für die fehlenden Orbits scheint hier wesentlich stärkeren Einfluß zu haben, als in den obigen Berechnungen für die Poincaré-Abbildung. Dabei ist zu berücksichtigen, daß wir uns nun auch Gedanken über die Frage machen müssen, welche Rückkehrzeit wir dem fiktiven Orbit '0' bzw. 'n' zuordnen. Da wir die Vorstellung haben, daß der Orbit '0' in gewisser Weise Grenzorbit von Zykeln der Form '0...01' darstellt, und diese mit wachsender Anzahl von Nullen sich immer enger um die symmetrischen Fixpunkte winden, liegt es nahe, daraus eine asymptotische Rückkehrzeit zu extrapolieren.

Abbildung 3.19 zeigt für diese Orbits die minimalen und maximalen Rückkehr-

zeiten eines Teilsegments. Die kleinste Rückkehrzeit tritt bei der engsten Umrundung von $C_\pm$, die längste entsteht beim Wechsel auf die symmetrische Seite (vgl. Anhang F).
Die asymptotische Gerade bei $\tau \approx 0.5625...$ entspricht der minimalen Rückkehrzeit, die man im Lorenz-System mißt. Diese beobachtet man für eine Punkt auf der instabilen Mannigfaltigkeit des Fixpunktes C_0.
In der zweiten Berechnung mittels Zetafunktionen haben wir diesen Wert für τ_n eingesetzt. Alle Rechnungen wurden mit Symmetriereduktion durchgeführt.
Betrachten wir zuerst einmal den Plot 3.20, bei dem das Gewicht des fehlenden Orbits null gesetzt wurde. Man erkennt eine Folge scharfer Spitzen bei $s(\equiv \omega) = 8.3155 \pm 0.0005$, 16.4915 ± 0.0005, 24.595 ± 0.001, 32.877 ± 0.001 und 40.892 ± 0.001, die wieder in der Nähe von n-fachen der mittleren Umlauffrequenz der Orbits liegen.
Im unteren Bild wurden die Frequenzen der 1-, 2- und 3-periodischen Orbits zusätzlich eingezeichnet. (Für die beiden eng benachbarten Frequenzen der 3-periodischen Orbits wurde ein Mittelwert eingezeichnet.) Es scheint, als wenn für kleine s-Werte das Spektrum ausschließlich durch die mittlere Frequenz bestimmt wird. Erst für größere s gewinnt die Funktion mehr Struktur und es fällt auf, daß einige Peaks überraschend genau bei den Frequenzen der periodischen Orbits liegen. Insgesamt ist es jedoch nicht möglich, die Spitzen individuellen periodischen Orbits zuzuordnen.
Nimmt man nun ein Gewicht für den fehlenden Orbit mit, so führt man damit eine weitere charakteristische Frequenz ein, die sich in den Spitzen bei $2\pi/\tau_n \approx 11.17$, $4\pi/\tau_n \approx 22.34, \ldots$ wiederspiegelt. Insgesamt scheint man aber keine weiteren Informationen zu gewinnen, wie man aus Abb. 3.21 sieht. Allenfalls die Verstärkung einiger Spitzen ist auffällig.
Die Halbwertsbreiten der größten Peaks in den Abbildungen 3.20 und 3.21 stimmen übrigens bis auf ca. 15% mit der Halbwertsbreite des führenden Peaks des Korrelationsspektrums überein. In der Zetafunktion erhält man eine Breite $\Delta s \approx 0.32 \pm 0.01$, das Spektrum der Korrelationsfuntion weist eine Halbwertsbreite $\Delta\omega \approx 0.37 \pm 0.02$, wobei man zur Bestimmung der letzteren eine weitere Glättung über benachbarte Spektralwerte durchführen muß.
Schliesslich soll noch auf eine gewisse Regularität der Umlaufzeiten periodischer Orbits im Lorenz-System hingewiesen werden. Während die Instabilitäten der

periodischen Bahnen mit wachsender Periode einen immer breiteren Wertebereich überdecken, gilt dies nicht für die Zeiten. Die folgende Abb. 3.22 belegt, daß die Abweichungen der Umlaufzeiten der n-periodischen Bahnen vom n-fachen der mittleren Rückkehrzeit $\langle\tau\rangle$ der Poincaré-Abbildung nur relativ gering sind.



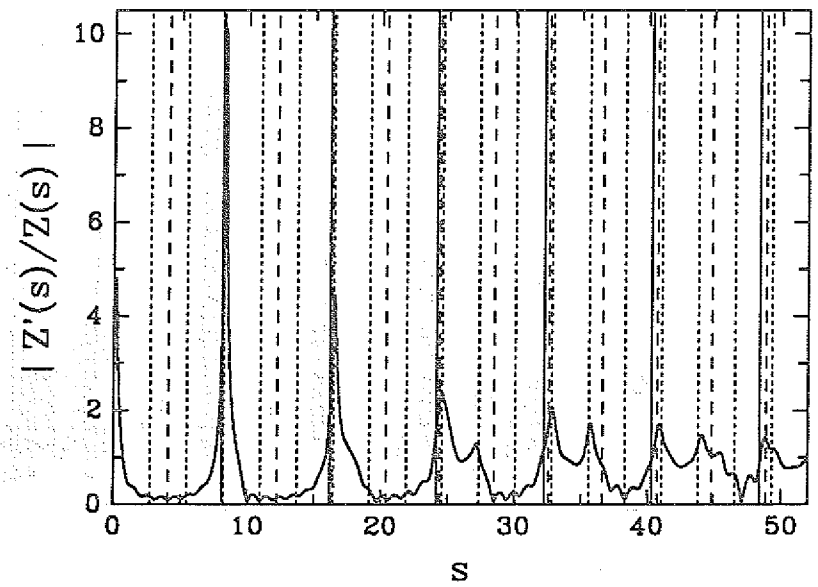


Abbildung 3.20: $|\mathcal{Z}'(s)/\mathcal{Z}(s)|$ in Abhängigkeit von reellem s. Hier wurde kein fehlendes Gewicht eingesetzt. Die Ordnung der Zetafunktion betrug 9. Es ist der symmetriereduzierte Fall dargestellt.

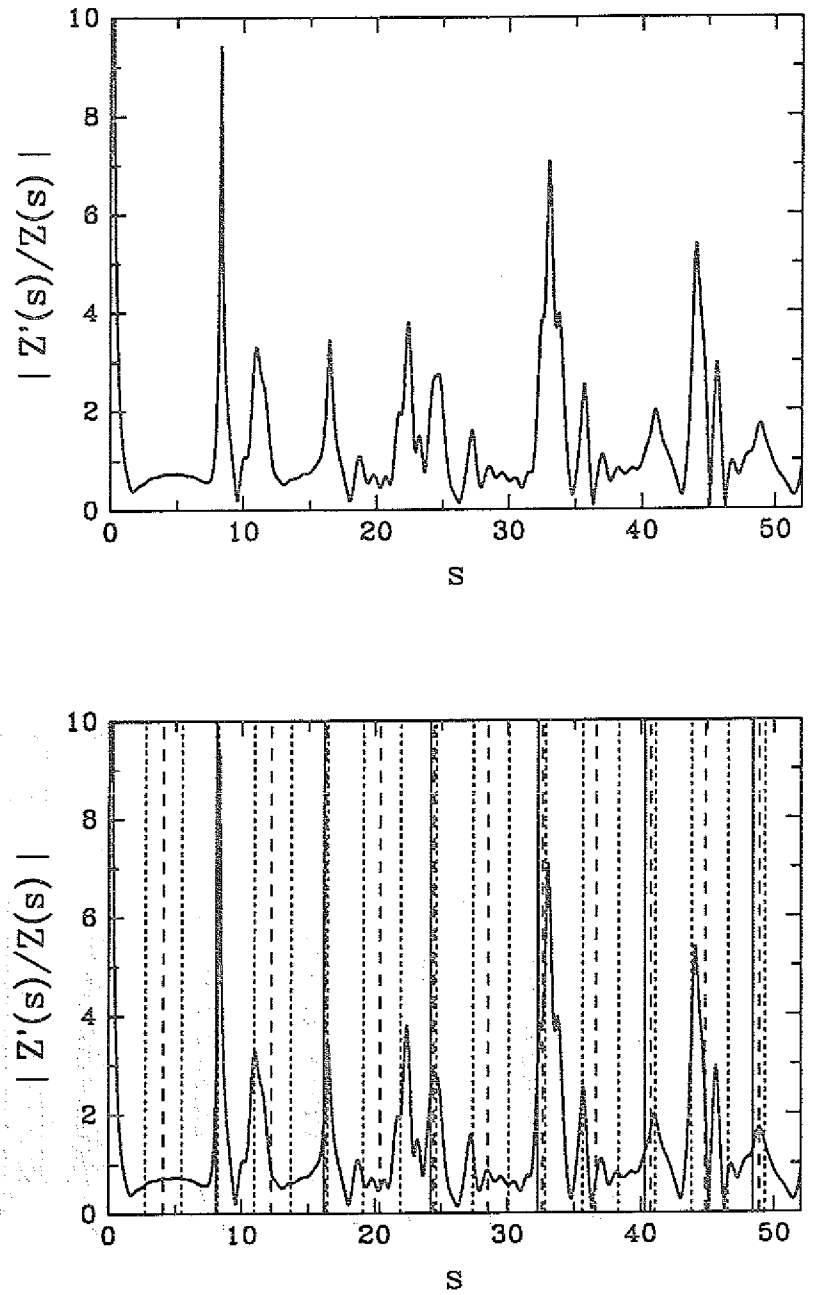


Abbildung 3.21: $|\mathcal{Z}'(s)/\mathcal{Z}(s)|$ in Abhängigkeit von reellem s. Für den fehlenden Orbit wurde als Rückkehrzeit die minimale, im System auftretende Rückkehrzeit verwandt. Für die Stabilität wurde der Wert $1/t_n$ aus Tabelle 3.2 gewählt.

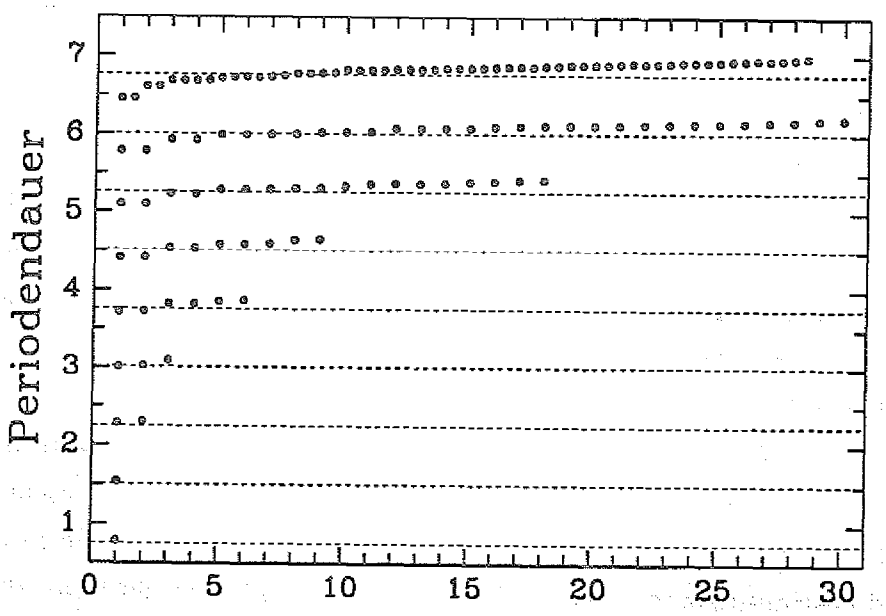


Abbildung 3.22: Rückkehrzeiten der periodischen Orbits: die gestrichelten Linien entsprechen den Vielfachen der mittleren Rückkehrzeit $\langle\tau\rangle$.

Kapitel 4: Zusammenfassung

Es wurde untersucht, inwiefern die periodischen Orbits im Lorenz-System eine vollständige Charakterisierung des seltsamen Attraktors liefern: dabei stellte sich heraus, daß die Instabilitäten dieser stets hyperbolischen Bahnen eine gute Approximation des natürlichen invarianten Maßes auf dem Attraktor liefern. Phasenraum-Mittelungen lassen sich damit ausdrücken als Mittelungen über periodische Trajektorien.

Diese Mittelungen können in eine sehr schnell konvergierende Form gebracht werden, indem man die zur Mittelung korrespondierenden Zetafunktionen mit Hilfe der Methode der cycle expansion in eine Potenzreihe entwickelt.

Wesentlich für das Funktionieren dieser Methode ist, daß man eine gute symbolische Dynamik des betrachteten Systems kennt, und eine vollständige Kontrolle über diese besitzt. Das gilt insbesondere, wenn Symbolfolgen existieren, deren dynamische Gegenstücke dynamisch nicht erlaubt sind (*Pruning-Problem*). (Den trivialen Fall, daß man durch Übergang zu einem neuen Alphabet diese Lücken schließen kann, wollen wir natürlich nicht betrachten.)

Wenn man die übliche Wahl trifft, einen Orbit im Lorenz-System durch die Abfolge der Umrundungen beider symmetrischer Fixpunkte zu beschreiben, treten diese Probleme leider an zwei Seiten auf: durch die globale Form der Dynamik sind bestimmte lange periodische Orbits ausgeschlossen, die Trajektorien bleiben nicht beliebig lange auf einer Seite des symmetrischen Attraktors. Andererseits liegen die periodischen Fixpunkte nicht im Attraktor, weshalb die fundamentalen Orbits der symbolischen Dynamik '0' und '1' fehlen, wenn man mit '0' die Umrundung des einen und mit '1' die Umrundung des anderen Fixpunktes symbolisiert. Die fundamentalen Orbits sind deshalb die Orbits 01, 001, 0001, ..., $0^{25}1$, wenn maximal 25 Umläufe auf einer Seite erlaubt sind. Eine konsequente Anwendung der cycle expansion würde nun aber verlangen, daß man alle diese fundamentalen Orbits im System bestimmt, was aber numerisch hoffnungslos ist.

Statt dessen wurde die Möglichkeit diskutiert, sozusagen fiktive Orbits einzuführen, deren Gewichte die Konvergenz der cycle expansion beschleunigen sollen. Auf der Ebene der Zetafunktionen bedeutet dies einfach eine Erweite-

rung mit einem konstanten Faktor, was im absoluten Konvergenzbereich erlaubt ist. Es wurden verschieden Ansätze getestet und miteinander verglichen.
An den Beispielen der Lyapunovexponenten im Lorenzsystem und der Hausdorff-Dimension seines seltsamen Attraktors konnten die Vorteile der cycle expansion gegenüber anderen Verfahren aufgezeigt werden.
Für den vollständigen dreidimensionalen Fluß betrachteten wir schließlich die Autokorrelationsfunktionen der Koordinatenfunktionen. Es stellte sich heraus, daß zwei charakteristische Frequenzen die Form dieser Spektren dominieren. Diese führt zu komplexen Polstellen in den Fourier-Transformierten der Korrelationsfunktion.
Es besteht die Hoffnung, im wesentlichen basierend auf den Ergebnissen für Axiom-A-Systeme, daß man diese Resonanzen durch die Null- oder Polstellen geeigneter Zetafunktionen bestimmen kann. Eine derartige Zetafunktion leiteten wir in Kapitel 2 ab und untersuchten das Verhalten ihrer logarithmischen Ableitung auf der reellen Achse. Es erwies sich, daß einige charakteristische Eigenschaften des Korrelationsspektrums wiedergefunden werden konnten.
Jedoch zeigen diese Zetafunktionen zusätzliche Strukturen, die einer weiteren Klärung bedürfen.

Anhang A: Allgemeine Definitionen und Sätze

Um die in dieser Arbeit verwandte Terminologie festzulegen, sind im folgenden Anhang einige wichtige Definitionen und Sätze zusammengefaßt, die grundlegend für das Studium chaotischer Systeme sind. Die grundlegende Referenz für diesen Anhang ist das Buch von Guckenheimer und Holmes [?]:
Im folgenden bedeute $f^t : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ einen Fluß oder eine Abbildung, je nachdem, ob t kontinuierliche oder diskrete Werte annimmt. $\mathcal{M}$ sei dabei eine d-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

A.1 Invariante Mengen einer Dynamik

Interessiert man sich für das Langzeitverhalten von Trajektorien eines dynamischen Systems, so kann man annehmen, daß die asymptotische Bewegung sich in der Nähe von Phasenraumgebieten abspielt, die selbst von der Dynamik unverändert bleiben. Als *invariante Menge* S für f^t bezeichnen wir deshalb die Menge aller Punkte x, für die aus $x \in S$ folgt, daß $f^t(x)$ für alle Zeiten t in S liegt. Diese Menge umfaßt z.B. alle stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten eines Fixpunktes und alle periodischen Orbits.
Wichtiger für das Studium des Langzeitverhaltens ist die *Menge der nicht-wandernden Punkte*, da sich in ihr stationäres und wiederkehrendes Verhalten abspielt.

Definition A.1 (Menge der (nicht-)wandernden Punkte) *: $x \in \mathcal{M}$ heißt* wandernd, *wenn es eine Umgebung U von x gibt, so daß $f^t U \cap U = \emptyset$ für alle genügend großen t. Ein Punkt gehört umgkehrt zur nicht-wandernden Menge, die wir mit Ω oder $\Omega(f)$ bezeichnen, wenn er nach genügend langer Zeit in jede seiner Umgebungen zurückkehrt. Ω ist offensichtlich eine abgeschlossene Menge.*

Insbesondere liegen also Fixpunkte und periodische Punkte in Ω und, weil Ω abgeschlossen ist, auch deren Abschluß. Während also die wandernden Punkte einem transienten Verhalten entsprechen, spielt sich die asymptotische Bewegung auf den Orbits nicht-wandernder Punkte ab.

Besonders wichtige nicht-wandernde Mengen sind Attraktoren. Vor deren Einführung benötigen wir aber noch den Begriff der $\omega(\alpha)$-Grenzmenge.

Definition A.2 ($\omega(\alpha)$-Grenzmenge) : *Ein Punkt p (q) heißt ein $\omega(\alpha)$-Grenzpunkt von $x \in \mathcal{M}$, wenn es eine Folge von Zeiten t_i gibt, so daß $f^{t_i}(x) \to p\,(q)$ für $t_i \to \infty\,(-\infty)$. Die Menge $\omega(x)$ $(\alpha(x))$ aller dieser Punkte p (q) heißt die $\omega(\alpha)$-Menge von x. Sie ist die Menge aller Häufungspunkte von Folgen $f^{t_i}(x)$ mit $t_i \to \infty\,(-\infty)$ und damit abgeschlossen und f^t-invariant.*

Somit gilt für alle $x \in \mathcal{M}$: $f^t(x)$ konvergiert gegen $\tilde{\Omega} := \bigcup\{\omega(x) \mid x \in \mathcal{M}\}$ für $t \to \infty$ und $\tilde{\Omega}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge mit dieser Eigenschaft. Interessiert man sich also für das Langzeitverhalten von Lösungskurven, so genügt es, den Fluß auf oder in der Nähe von $\tilde{\Omega}$ zu studieren. $\tilde{\Omega}$ ist somit der wesentliche Teil des Phasenraumes für Langzeitbetrachtungen.

Satz A.1 : *Jedes f^t-invariante Wahrscheinlichkeitsmaß μ hat einen Träger in* $\tilde{\Omega}$.(Der Beweis hierzu findet sich in [?].)

Es gilt $\tilde{\Omega} \subset \Omega$. Bei den meisten physikalisch interessanten Systemen scheinen Ω und $\tilde{\Omega}$ allerdings identisch zu sein, jedoch lassen sich Beispiele konstruieren, in denen die strenge Teilmengenbeziehung gilt.

Definition A.3 (Attraktive (repulsive) Menge) [1]: *Eine abgeschlossene, invariante Menge $A \subset \mathcal{M}$ heißt* attraktive Menge, *wenn eine Umgebung U von A existiert, so daß für alle $x \in U$ gilt: $f^t(x) \in U$ für $t \geq 0$ und $f^t(x) \to A$ mit $t \to \infty$. Die Menge $\bigcup f^t(U)$, $t \leq 0$ heißt der Attraktionsbereich oder das* Bassin *von A.*
Eine repulsive Menge *ist eine attraktive Menge unter Zeitumkehr.*

Existiert eine abgeschlossene einfach zusammenhängende Menge D mit $f^t(D) \subset D$, so enthält D eine attraktive Menge. Diese ist gegeben als $A = \bigcap f^t(D)\,, t \geq 0$.

Definition A.4 (Attraktor, Repellor) : *Als* Attraktor (Repellor) *bezeichnen wir eine attraktive (repulsive) Menge, die einen dichten Orbit enthält.*

Dadurch wird ausgeschlossen, daß sich ein Attraktor in mehrere verschiedene Attraktoren zerlegen läßt.

[1] engl.: *attracting (repelling) set*

Bassins von Attraktoren sind offen. Existieren also zwei oder mehr Attraktoren im Phasenraum, und ist dieser zusammenhängend, so folgt, daß die Bassingrenzen selbst Lösungen der Dynamik sein müssen, die auf keinen Attraktor konvergieren. Bassingrenzen sind daher gute Kandidaten für Repelloren.

A.2 Hyperbolische Systeme

Sei nun $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ein Diffeomorphismus einer kompakten differenzierbaren Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ [2]. Die Ableitung oder Linearisierung von f ist dann eine Abbildung $Df : T\mathcal{M} \to T\mathcal{M}$ des Tangentialbündels $T\mathcal{M} = \bigcup_{x\in\mathcal{M}} T_x\mathcal{M}$ in sich mit $D_x f : T_x\mathcal{M} \to T_{f(x)}\mathcal{M}$.

Definition A.5 (Hyperbolische Menge) : *Eine abgeschlossene Teilmenge $\Lambda \subset \mathcal{M}$ heißt* hyperbolisch, *wenn $f(\Lambda) = \Lambda$ ist, und jeder Tangentialraum $T_x\mathcal{M}$ mit $x \in \Lambda$ in eine direkte Summe $T_x\mathcal{M} = E_x^u \oplus E_x^s$ von Teilräumen zerlegt werden kann, die die folgenden Bedingungen erfüllen:*

(a) $Df(E_x^s) = E_{f(x)}^s, \quad Df(E_x^u) = E_{f(x)}^u,$

(b) es existieren Konstanten $c > 0$ und $\lambda \in]0,1[$, so daß

$$||Df^n(v)|| \leq c\lambda^n||v||, \text{ falls } v \in E_x^s, \ n \geq 0 \quad \text{und} \tag{A.1}$$

$$||Df^{-n}(v)|| \leq c\lambda^n||v||, \text{ falls } v \in E_x^u, \ n \geq 0, \tag{A.2}$$

(c) E_x^s und E_x^u hängen stetig von x ab.

$E^u = \bigcup_{x\in\Lambda} E_x^u$ und $E^s = \bigcup_{x\in\Lambda} E_x^s$ sind stetige Unterbündel des Tangentialbündels $T_\Lambda\mathcal{M} = \bigcup_{x\in\Lambda} T_x\mathcal{M}$ und $T_\Lambda\mathcal{M} = E_x^u \oplus E_x^s$.

Definition A.6 (Smale's Axiom A) :[3] *Man sagt, f* erfüllt Axiom A, *wenn die Menge der nicht-wandernden Punkte $\Omega(f)$ hyperbolisch ist und sich als Abschluß aller periodischen Orbits darstellen läßt:*

$$\Omega(f) = \overline{\{x \in \mathcal{M} |\ x \text{ ist periodisch}\}}. \tag{A.3}$$

[2] Die Formulierung für kontinuierliche Flüsse verläuft vollständig analog.

[3] Eine von Mathematikern besonders eingehend untersuchte Klasse von Abbildungen ist die Menge der *Anosov*-Diffeomorphismen, bei denen ganz $\mathcal{M}$ hyperbolisch ist. Es kann gezeigt werden, daß diese Abbildungen immer auch Axiom A erfüllen. Inwiefern für Anosov-Diffeomorphismen $\Omega(f) = \mathcal{M}$ gilt, ist allerdings nicht geklärt.

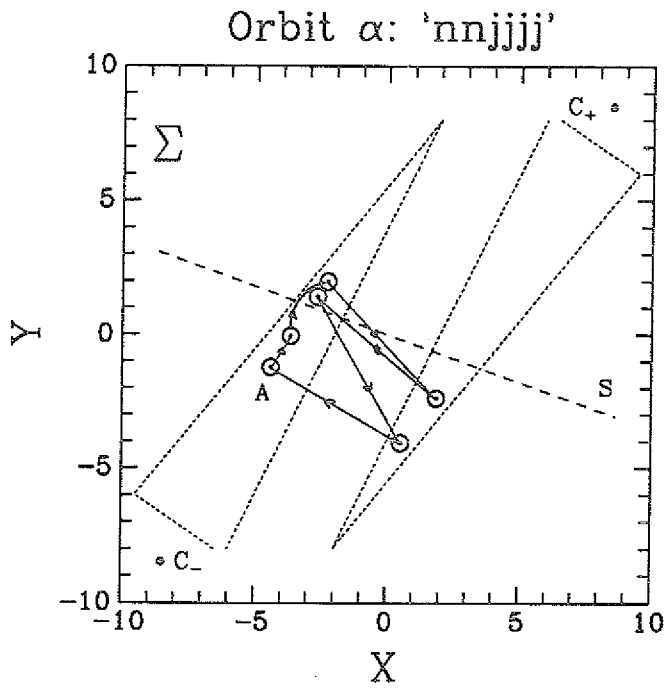
Die große Bedeutung diese Axiom-A-Systeme liegt in der Tatsache begründet, daß man für sie die Existenz einer symbolischen Dynamik beweisen kann. Das macht ihre Beschreibbarkeit im Rahmen des sog. thermodynamischen Formalismus für chaotische Dynamiken [?] möglich, aus dem die meisten Ideen stammen, die dieser Arbeit zugrundeliegen.
Leider kann man nur bei wenigen für die Physik interessanten Systemen beweisen, daß sie Axiom A erfüllen, meist ist man sogar überzeugt, daß sie dies nicht tun.

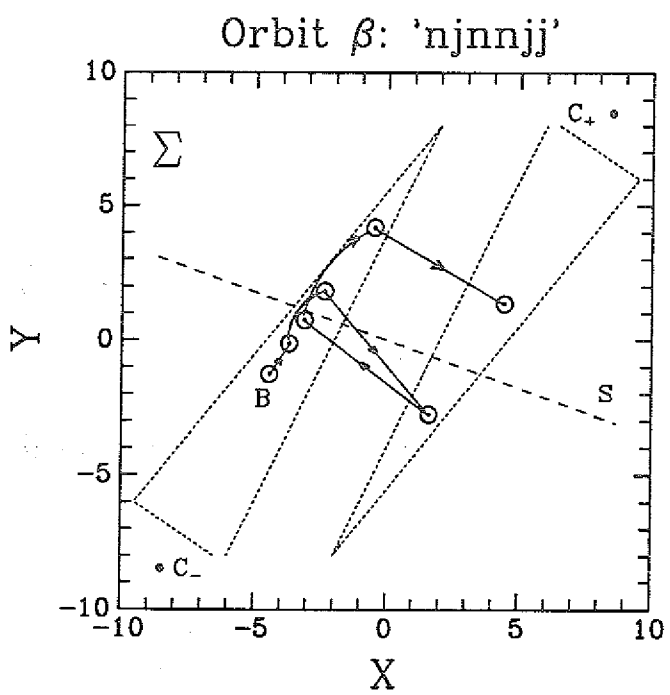
Anhang B:
Suche nach fehlenden Orbits

Das folgende Beispiel soll demonstrieren, wie man einen Orbit der Periode $p+1$ sucht, wenn man alle p-periodischen Orbits bereits kennt. Dazu macht man Gebrauch von der Tatsache, daß man die Topologie der Poincaré-Abbildung durch das Modell des geometrischen Lorenz-Attraktors gut im Griff hat. Insbesondere verwendet man die Kenntnis, daß Orbits desto länger auf der selben Seite $\Sigma_\pm$ des Attraktors bleiben, je näher sie einem der symmetrischen Fixpunkte kommen.
Sei etwa der 7-periodische Orbit mit der Sequenz `njnnjjj` gesucht. In der ursprünglichen symbolischen Dynamik entspricht dies dem Orbit `0011101` bzw. seinem symmetrischen Gegenstück `1100010`. Die benachbarten 6-periodischen Orbits erhält man durch Verkürzen der Symbolfolge um ein Symbol, d.h. man benötigt die Orbits `jnnjjj = nnjjjj` $\hat{=}$ `000101.000101` und `njnnjj` $\hat{=}$ `001110.110001`. Die längste Folge von Symbolen, in denen die Sequenzen übereinstimmen ist `00010` (in der Sequenz unterstrichen). Man sucht deshalb die Punkte der 6-periodischen Orbits heraus, die der führenden `0` entsprechen, und sucht auf der Geraden durch diese Punkte nach einem Startpunkt für die gesuchte 7-periodische Bahn. Ob man diesen auf der Verbindungstrecke oder auf ihrer Extrapolation über einen der Randpunkte hinaus findet, hängt von den weiteren Symbolen ab.

bekannt α:	`nnjjjj`	`00010 1000101`
bekannt β:	`njnnjj`	`00010 0111011`
gesucht γ:	`njnnjjj`	`00010 110001011.`

Orbit β bleibt eine Iteration länger auf der selben Seite. Sein Startpunkt B liegt deshalb näher am Fixpunkt C_- als der von α (A). Orbit α wandert auf die Seite von C_+, um dann in der nächsten Iteration zurückzukehren. Der gesuchte Orbit hingegen bleibt eine weitere Iteration auf dieser Seite. Daher muß der Startpunkt C des gesuchten Orbits γ näher an C_- liegen als der von α . Wir suchen also nach C auf der über A hinaus verlängerten Verbindungsstrecke von B nach A.


Orbit α: 'nnjjjj'
Σ
C+
C−
A
S
Y
X
10
5
0
−5
−10
−10
−5
0
5
10


Orbit β: 'njnnjj'
Σ
C+
C−
B
S
Y
X
10
5
0
−5
−10
−10
−5
0
5
10

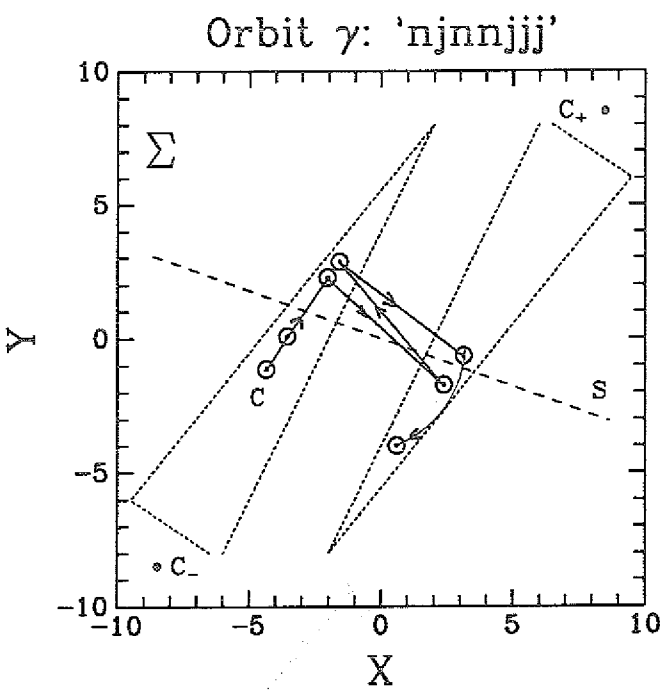


Abbildung B.1: Abfolge der Punkte in der Poincaré-Ebene Σ für die drei Beispielorbits.

Anhang C: Die Eulerformel

In diesem Anhang soll ein Beweis der in Kapitel 1.5 angegebene Formel (1.29) gegeben werden, weil dieser in der Literatur nicht so leicht zu finden ist. Dabei verwenden wir die Lösung einer Leseraufgabe in *Am. Math. Monthly* **72** (1965), S. 431:

Wir zeigen, daß für alle x mit $|x| < 1$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+tx^k) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \frac{x^{\frac{k(k+1)}{2}}}{\prod_{r=1}^{k}(1-x^r)}\,. \tag{C.1}$$

Dazu betrachten wir die Funktion

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k t^k \qquad \text{mit} \quad C_k = \frac{x^{\frac{k(k+1)}{2}}}{\prod_{r=1}^{k}(1-x^r)}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{C.2}$$

Es gilt die Rekursionsformel:

$$C_{k+1} \;=\; \frac{x^{k+1}}{1-x^{k+1}}\,C_k\,. \tag{C.3}$$

Multipliziert man beide Seiten mit $t^{k+1}(1-x^{k+1})$ und summiert über $k \geq 1$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} C_{k+1}\, t^{k+1}(1-x^{k+1}) &= \sum_{k=1}^{\infty} C_k\,(tx)^{k+1} \\
f(t) - f(tx) - C_1 t(1-x) &= tx\,(f(tx)-1) \\
f(t) - f(tx) - tx &= tx\,f(tx) - tx\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
f(t) &= (1+tx)f(tx) = (1+tx)(1+tx^2)f(tx^2) = \ldots \\
&= \lim_{N\to\infty} \underbrace{f(tx^N)}_{\to f(0)=1} \prod_{k=1}^{N}(1+tx^k) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+tx^k)\,.
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Ersetzt man t durch $-t_p\Lambda_p$ und x durch Λ_p^{-1}, so erhält man die behauptete Identität:

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1-t_p\Lambda_p^{-k}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-t_p)^k \frac{\Lambda_p^{-\frac{1}{2}k(k-1)}}{\prod_{r=1}^{k}(1-\Lambda_p^{-r})} \tag{C.5}$$

$$= 1 - \frac{t_p}{1-\Lambda_p^{-1}}\left(1 - \frac{t_p\,\Lambda_p^{-1}}{1-\Lambda_p^{-2}}\left(1 - \frac{t_p\,\Lambda_p^{-2}}{1-\Lambda_p^{-3}}\left(1 - \frac{t_p\,\Lambda_p^{-3}}{1-\Lambda_p^{-4}}(1-\ldots)\right)\right)\right). \tag{C.6}$$

(Die letzte Umformung ist praktisch bei einer Berechnung des Produktes auf einem Computer.)

Anhang D: Das verallgemeinerte Newton-Raphson-Verfahren

Im folgenden bezeichne $\mathbf{F} : U \to U$ eine differenzierbare Abbildung einer Teilmenge U des $\mathbb{R}^N$ in sich. Wir interessieren uns für n-periodische Bahnen dieser Abbildung mit $n \in \mathbb{N}$, suchen also Punkte $\mathbf{p}_0 \in U$, für die gilt: $\mathbf{p}_n := \mathbf{F}^n(\mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_0$. Dazu setzen wir voraus, daß uns eine Näherungslösung des Problems bekannt sei, d.h. es existiert eine Sequenz $(\mathbf{q}_i)_{i=0,\ldots,n}$ von Punkten in U, für die gilt: $\mathbf{F}(\mathbf{q}_i) = \mathbf{q}_{i+1} - \boldsymbol{\Delta}_i$ mit $|\boldsymbol{\Delta}_i| < C$ für $i = 0, 1, \ldots, n-1$ und eine genügend kleine positive Konstante C.

Einen solchen *Pseudoorbit* kann man etwa dadurch finden, daß man sehr lange Zeitreihen typischer Orbits bestimmt und auf fast-periodische Teilsequenzen untersucht. Jede Teilfolge von Punkten, die nach n Iterationen zu ihrem Anfangspunkt genügend nahe zurückkehrt, dient dabei als Näherungslösung[1].

Wir nehmen an, daß in der Nähe dieses Pseudoorbits tatsächlich ein n-periodischer Orbit $(\mathbf{p}_i)_{i=0,\ldots,n}$ existiert und setzen $\mathbf{p}_i = \mathbf{q}_i + \mathbf{d}_i$. Aus $\mathbf{F}(\mathbf{p}_i) = \mathbf{p}_{i+1}$ folgt dann:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{F}(\mathbf{q}_i + \mathbf{d}_i) - (\mathbf{q}_{i+1} + \mathbf{d}_{i+1}) \\ &\approx \mathbf{F}(\mathbf{q}_i) - \mathbf{q}_{i+1} + \mathbf{DF}(\mathbf{q}_i) \cdot \mathbf{d}_i - \mathbf{d}_{i+1} \\ &= -\boldsymbol{\Delta}_i + \mathbf{DF}(\mathbf{q}_i) \cdot \mathbf{d}_i - \mathbf{d}_{i+1} \,. \end{aligned} \tag{D.1}$$

Oder in Komponenten:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{I}_N & \mathbf{0}_N & \cdots & \mathbf{0}_N \\ \mathbf{0}_N & \mathbf{A}_2 & -\mathbf{I}_N & \cdots & \mathbf{0}_N \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_N & \cdots & \mathbf{0}_N & \mathbf{A}_{N-1} & -\mathbf{I}_N \\ -\mathbf{I}_N & \mathbf{0}_N & \cdots & \mathbf{0}_N & \mathbf{A}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{N-1} \\ \mathbf{d}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Delta}_1 \\ \boldsymbol{\Delta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Delta}_{N-1} \\ \boldsymbol{\Delta}_N \end{pmatrix} , \tag{D.2}$$

wobei $\mathbf{I}_N$ die $N \times N$-Einheitsmatrix, $\mathbf{0}_N$ die Nullmatrix darstellt, und $\mathbf{A}_i =$

[1] In diesem Fall sind natürlich alle Δ's bis auf das letzte von der Größenordnung des numerischen Fehlers, und nur Δ_n muß genügend klein werden.

$\mathbf{DF}(\mathbf{q}_i)$ ist. Dies stellt ein inhomogenes Gleichungssystem für die Verschiebungen $\mathbf{d}_i$ dar, das mit Standardmethoden iterativ gelöst werden kann.

Anhang E: Stabilitäten und Rückkehrzeiten

Tabelle E.1: Die folgende Tabelle enthält die Stabilitäten und Rückkehrzeiten für alle periodischen Orbits im Lorenz-System bis zur Periode 9. Dabei sind die Symbolfolgen jeweils in symmetriereduzierter und voller symmetrischer Darstellung angegeben. Da die Orbits, deren Periode bei Symmetriereduzierung halbiert wird, nach n_p Iterationen im symmetrischen Punkt ankommen, erhält die Stabilität ein negatives Vorzeichen. Es ist also zusätzlich noch eine 180°-Rotation um die z-Achse auszuführen.

Periode n_p	Nr.	Periodischer Orbit symm.red.	nicht symm.red.	Rückkehrzeit τ_p	Stabilität Λ_p
1	1	n	1 ...	–	–
1	2	j	0 1	0.77932611	-2.170932351
2	1	nj	00 11	1.5421384	-4.453888483
3	1	njj	001 ...	2.3059073	9.165491816
3	2	nnj	000 111	2.2831556	-8.478522926
4	1	nnjj	0001 ...	3.0235837	16.11365889
4	2	nnnj	0000 1111	3.0050133	-15.12692798
4	3	njjj	0010 1101	3.0937596	-20.48968951
5	1	nnnjj	00001 ...	3.7256418	26.91263057
5	2	nnjnj	00011 ...	3.8202542	37.11786013
5	3	njjjj	00101 ...	3.8695391	43.94245489
5	4	nnnnj	00000 11111	3.7121487	-25.71570710
5	5	nnjjj	00010 11101	3.8231916	-37.49093667
5	6	njnjj	00100 11011	3.8530922	-41.53594600
6	1	nnnnjj	000001 ...	4.4177665	43.59646344
6	2	nnnjnj	000011 ...	4.5341079	64.46700239
6	3	nnjjjj	000101 ...	4.5938144	79.00307517
6	4	njnjjj	001011 ...	4.6371408	91.64895409
6	5	nnnnnj	000000 111111	4.4084133	-42.25801481
6	6	nnnjjj	000010 111101	4.5348810	-64.64296036
6	7	nnjnjj	001000 110111	4.5839239	-76.35290632
6	8	njnnjj	000100 111011	4.5829129	-76.11468455
6	9	njjjjj	001010 110101	4.6505680	-95.95643036

Periode n_p	Nr.	Periodischer Orbit symm.red.	nicht symm.red.	Rückkehr-zeit τ_p	Stabilität Λ_p
7	1	nnnnnjj	0000001 ...	5.1030385	69.29412615
7	2	nnnnjnj	0000011 ...	5.2341982	107.1061419
7	3	nnnjnnj	0000111 ...	5.2863415	127.4738601
7	4	nnnjjjj	0000101 ...	5.3012005	134.2822925
7	5	nnjnjjj	0100011 ...	5.3705256	169.9649111
7	6	njnnjjj	0001011 ...	5.3698804	169.6123724
7	7	nnjjnjj	0001001 ...	5.3309123	148.3956770
7	8	njnjnjj	0010011 ...	5.3942169	184.3530754
7	9	njjjjjj	0010101 ...	5.4291254	207.7648844
7	10	nnnnnnj	0000000 1111111	5.0967209	-67.86876806
7	11	nnnnjjj	0000010 1111101	5.2342492	-107.1434872
7	12	nnnjnjj	0010000 1101111	5.2964610	-131.9720577
7	13	nnjnnjj	0001000 1110111	5.3136809	-139.8994436
7	14	njnnnjj	0000100 1111011	5.2940628	-131.0587403
7	15	nnjnjnj	0001100 1110011	5.3636643	-166.0375960
7	16	nnjjjjj	0001010 1110101	5.3772680	-173.9479280
7	17	njnjjjj	0010100 1101011	5.4142683	-197.4640980
7	18	njjnjjj	0010010 1101101	5.4010072	-188.6654472
8	1	nnnnnnjj	00000001 ...	5.7834109	108.8914246
8	2	nnnnnjnj	00000011 ...	5.9249939	173.0416241
8	3	nnnnjnnj	00000111 ...	5.9904436	214.5789321
8	4	nnnnjjjj	00000101 ...	5.9973193	220.2658750
8	5	nnnjnjjj	01000011 ...	6.0838269	294.5943819
8	6	nnnjjnjj	00001001 ...	6.0352324	249.6750765
8	7	nnjnnjjj	00010111 ...	6.1080547	319.7316804
8	8	njnnnjjj	00001011 ...	6.0823580	293.2906382
8	9	nnjnjnjj	00100011 ...	6.1223365	335.7648293
8	10	njnjnnjj	00010011 ...	6.1214547	334.8552570
8	11	njnnjnjj	00100111 ...	6.1351271	350.8226155
8	12	nnjjjjjj	00010101 ...	6.1547195	375.2158949
8	13	njnjjjjj	00101011 ...	6.1946020	430.1701710
8	14	njjnjjjj	00100101 ...	6.1758788	403.3532092
8	15	nnnnnnnj	00000000 11111111	5.7792219	-107.4237893
8	16	nnnnnjjj	00000010 11111101	5.9248345	-172.9845661
8	17	nnnnjnjj	00100000 11011111	5.9964938	-219.0858712
8	18	nnnjnnjj	00010000 11101111	6.0262195	-241.7850717
8	19	nnnjnjnj	00001100 11110011	6.0794278	-290.2248068
8	20	nnjnnnjj	00001000 11110111	6.0243990	-240.6031796
8	21	nnjnnjnj	00011000 11100111	6.1041347	-315.4857600

Periode n_p	Nr.	Periodischer Orbit symm.red.	nicht symm.red.	Rückkehr-zeit τ_p	Stabilität Λ_p
8	22	njnnnnjj	00000100 11111011	5.9926649	-216.8191486
8	23	nnnjjjjj	00001010 11110101	6.0866617	-297.6387547
8	24	nnjnjjjj	00101000 11010111	6.1465231	-364.7731169
8	25	nnjjnjjj	00010010 11101101	6.1252323	-339.1800168
8	26	njnnjjjj	00010100 11101011	6.1456799	-363.8030291
8	27	njnjnjjj	00101100 11010011	6.1789870	-407.7848315
8	28	njnjjnjj	00100100 11011011	6.1596671	-381.5711844
8	29	njjnnjjj	00100010 11011101	6.1257280	-339.6716735
8	30	njjjjjjj	00101010 11010101	6.2088089	-451.5981531
9	1	nnnnnnnjj	000000001 ...	6.4602592	170.1343550
9	2	nnnnnnjnj	000000011 ...	6.6092444	274.6982786
9	3	nnnnnjnnj	000000111 ...	6.6839408	349.5942274
9	4	nnnnjnnnj	000001111 ...	6.7164428	388.1029519
9	5	nnnnnjjjj	000000101 ...	6.6855224	353.0857194
9	6	nnnnjnjjj	000001101 ...	6.7839875	489.4073071
9	7	nnnnjjnjj	000001001 ...	6.7293949	407.0036347
9	8	nnnjnnjjj	000011101 ...	6.8243710	559.7779117
9	9	nnnjnjnjj	000011001 ...	6.8326637	576.1128285
9	10	nnnjjnnjj	000010001 ...	6.7497581	434.3971897
9	11	nnjnnnjjj	000111101 ...	6.8233276	558.1303615
9	12	nnjnnjnjj	000111001 ...	6.8676211	648.5626542
9	13	nnjnjnnjj	000110001 ...	6.8466932	603.9643992
9	14	nnjnjnjnj	000110011 ...	6.9055252	738.8130506
9	15	njnnnnjjj	001111101 ...	6.7817001	486.2399141
9	16	njnnnjnjj	001111001 ...	6.8527131	617.0057229
9	17	njnnjnnjj	001110001 ...	6.8666695	646.6669677
9	18	njnjnnnjj	001100001 ...	6.8306086	572.7089509
9	19	nnnjjjjjj	000010101 ...	6.8631940	640.0653345
9	20	nnjnjjjjj	000110101 ...	6.9273863	796.1046844
9	21	nnjjnjjjj	000100101 ...	6.8977943	719.4247870
9	22	njnnjjjjj	001110101 ...	6.9266290	794.1863344
9	23	njnjnjjjj	001100101 ...	6.9558374	877.7643149
9	24	njnjjnjjj	001101101 ...	6.9454472	846.9570956
9	25	njjnnjjjj	001000101 ...	6.8980627	719.9769880
9	26	njjnjnjjj	001001101 ...	6.9454980	847.1137259
9	27	njjjnnjjj	001011101 ...	6.9161110	765.9893394
9	28	njjjjjjjj	001010101 ...	6.9879711	979.8365473
9	29	nnnnnnnnj	000000000 111111111	6.4575266	-168.6617862
9	30	nnnnnnjjj	000000010 111111101	6.6090561	-274.5816014

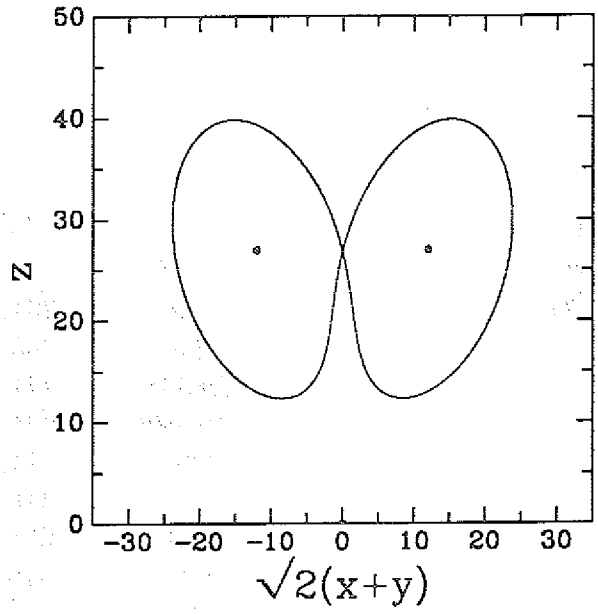
Periode n_p	Nr.	Periodischer Orbit symm.red.	nicht symm.red.	Rückkehr-zeit τ_p	Stabilität Λ_p
9	31	nnnnnjnjj	000000110 111111001	6.6876451	-354.0890071
9	32	nnnnjnnjj	000001110 111110001	6.7263412	-401.4048942
9	33	nnnnjnjnj	000001100 111110011	6.7811561	-484.7392568
9	34	nnnjnnnjj	000011110 111100001	6.7367201	-415.5593324
9	35	nnnjnnjnj	000011100 111100011	6.8218762	-555.0553801
9	36	nnjnnnnjj	000111110 111000001	6.7225129	-397.5636100
9	37	nnjnnnjnj	000111100 111000011	6.8214711	-554.4782519
9	38	njnnnnnjj	001111110 110000001	6.6824973	-349.5044347
9	39	nnnnjjjjj	000001010 111110101	6.7842938	-490.5827788
9	40	nnnjnjjjj	000011010 111100101	6.8595165	-631.5313595
9	41	nnnjjnjjj	000010010 111101101	6.8328241	-577.0356407
9	42	nnjnnjjjj	000111010 111000101	6.8805328	-678.0482988
9	43	nnjnjnjjj	000110010 111001101	6.9114800	-753.9508950
9	44	nnjnjjnjj	001000110 110111001	6.8892008	-698.3012494
9	45	nnjjnnjjj	000100010 111011101	6.8485734	-607.8328412
9	46	njnnnjjjj	001111010 110000101	6.8575634	-627.8874926
9	47	njnnjnjjj	001110010 110001101	6.9181488	-771.3730827
9	48	njnnjjnjj	001001110 110110001	6.8880129	-695.7560540
9	49	njnjnnjjj	001100010 110011101	6.9109644	-752.6952160
9	50	njnjnjnjj	001100110 110011001	6.9365882	-821.7454806
9	51	njnjjnnjj	001101110 110010001	6.8811236	-679.4571226
9	52	njjnnnjjj	001000010 110111101	6.8340062	-578.9096728
9	53	nnjjjjjjj	000101010 111010101	6.9349146	-816.9925658
9	54	njnjjjjjj	001101010 110010101	6.9734629	-932.3765489
9	55	njjnjjjjj	001001010 110110101	6.9572748	-881.9081938
9	56	njjjnjjjj	001011010 110100101	6.9635520	-901.1520895

Periode n_p	Periodischer Orbit symm.red.	nicht symm.red.	Rückkehr-zeit τ_p	Stabilität Λ_p
10	n^9j	$0^{10}\ 1^{10}$	7.1328794	-264.0706449
10	n^8jj	$0^91\ \ldots$	7.1346327	265.5162294
10	n^7jjj	$0^810\ 1^801$	7.2886501	-431.4699308
10	n^7jnj	$0^811\ \ldots$	7.2888092	431.6179914
11	$n^{10}j$	$0^{11}\ 1^{11}$	7.8062836	-414.1996852
11	n^9jj	$0^{10}1\ \ldots$	7.8073812	415.5904666
11	n^8jjj	$0^910\ 1^901$	7.9649240	-674.8627211
11	n^8jnj	$0^911\ \ldots$	7.9650421	675.0186647
12	$n^{11}j$	$0^{12}\ 1^{12}$	8.4785897	-653.6467398
12	$n^{10}jj$	$0^{11}1\ \ldots$	8.4792718	654.9580225
13	$n^{12}j$	$0^{13}\ 1^{13}$	9.1505618	-1042.2459576
13	$n^{11}jj$	$0^{12}1\ \ldots$	9.1509718	1043.4554447
14	$n^{13}j$	$0^{14}\ 1^{14}$	9.8231552	-1689.3230883
14	$n^{12}jj$	$0^{13}1\ \ldots$	9.8231720	1687.8810210
15	$n^{14}j$	$0^{15}\ 1^{15}$	10.4971604	-2798.5674274
15	$n^{13}jj$	$0^{14}1\ \ldots$	10.4972934	2799.5004540

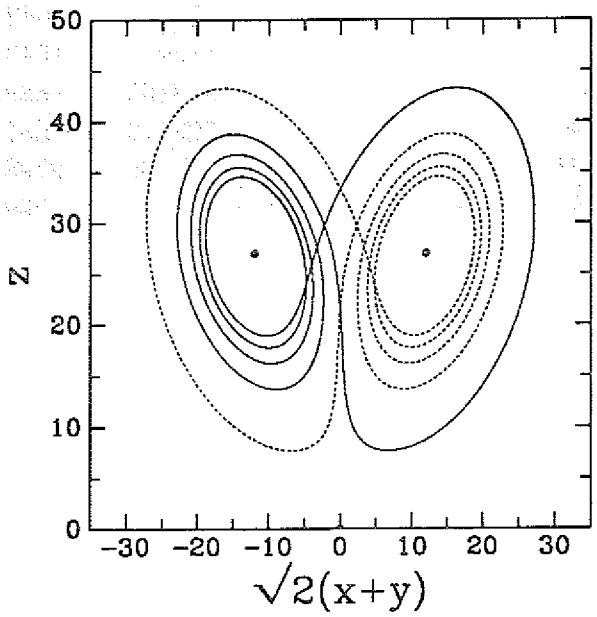
Tabelle E.2: Einige ausgewählte lange Orbits

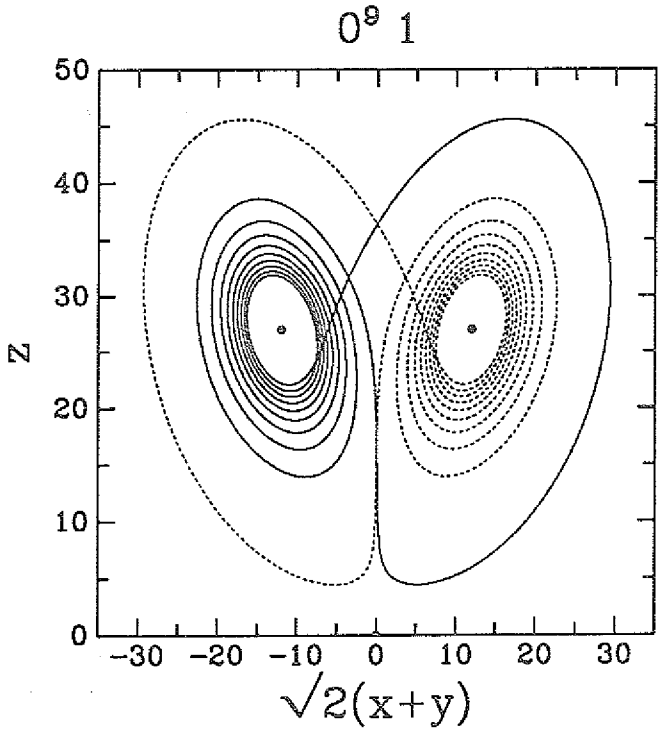
Anhang F:
Plots einiger ausgewählter Zykel

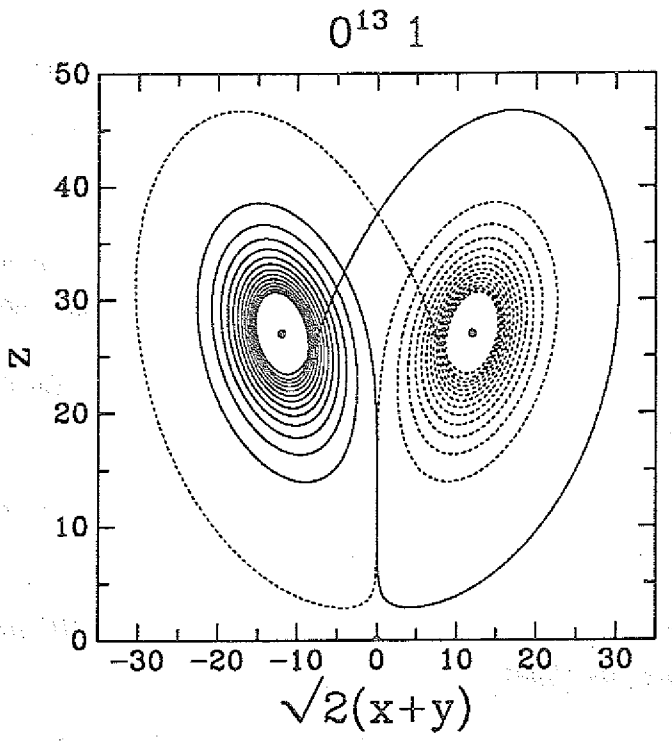
01



00001




0^9 1
50
40
30
20
10
0
z
−30 −20 −10 0 10 20 30
√2(x+y)


0^{13} 1
50
40
30
20
10
0
z
−30 −20 −10 0 10 20 30
√2(x+y)

Literaturverzeichnis

[1] R. Artuso, E. Aurell und P. Cvitanović, *Recycling of strange sets: I. Cycle expansions*, Nonlinearity, 3 (1990), S. 325–359.

[2] ——, *Recycling of strange sets: II. Applications*, Nonlinearity, 3 (1990), S. 361–386.

[3] D. Auerbach, P. Cvitanović, J.-P. Eckmann und G. Gunaratne, *Exploring chaotic motions through periodic orbits*, Phys. Rev. Lett., 58 (1987), S. 2387–2389.

[4] V. Baladi, J.-P. Eckmann und D. Ruelle, *Resonances for intermittent systems*, Nonlinearity, 2 (1989), S. 119–135.

[5] R. Balian und C. Bloch, *Solution of the Schrödinger equation in terms of classical paths*, Ann. Phys. (USA), 85 (1974), S. 514–545.

[6] R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, LNM 470, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.

[7] F. Christiansen, S. Isola, G. Paladin und H. H. Rugh, *Mixing rates and exterior forms in chaotic systems*, Preprint.

[8] F. Christiansen, G. Paladin und H. H. Rugh, *Determination of correlation spectra in chaotic systems*, Phys. Rev. Lett., 65 (1990), S. 2087–2090.

[9] P. Cvitanović, *Invariant measurement of strange sets in terms of cycles*, Phys. Rev. Lett., 61 (1988), S. 2729–2732.

[10] P. Cvitanović und B. Eckhardt, *Dynamical zeta functions I: Cycles and symmetries*, (in Vorbereitung).

[11] ——, *Periodic orbit expansions for classical smooth flows*, J. Phys. A: Math. Gen., 24 (1991), S. L237–L241.

[12] ——, *Symmetry decomposition of chaotic dynamics*, Preprint, 1991.

[13] M. Dörfle, *Spectrum and eigenfunctions of the Frobenius-Perron operator of the tent map*, J. Stat. Physics, 40 (1985), S. 93–132.

[14] B. ECKHARDT, J. M. GOMEZ-LLORENTE UND E. POLLAK, *Phase space analysis of chaotic spectra in a conservative Hamiltonian system*, Chem. Phys. Lett., 174 (1990), S. 325–332.

[15] G. ENGELN-MÜLLGES UND F. REUTTER, *Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit Standard-FORTRAN-Programmen*, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1984. 4. Auflage.

[16] J. D. FARMER UND J. J. SIDOROWICH, *Predicting chaotic time series*, Phys. Rev. Lett., 59 (1987), S. 845–848.

[17] P. GRASSBERGER, H. KANTZ UND U. MOENIG, *On the symbolic dynamics of the Henon map*, J. Phys. A, 22 (1989), S. 5217–5230.

[18] P. GRASSBERGER UND I. PROCACCIA, *Measuring the strangeness of strange attractors*, Physica, 9D (1983), S. 189–208.

[19] C. GREBOGI, E. OTT UND J. A. YORKE, *Unstable periodic orbits and the dimension of chaotic attractors*, Phys. Rev. A, 36 (1987), S. 3522–3524.

[20] ——, *Unstable periodic orbits and the dimensions of multifractal chaotic attractors*, Phys. Rev. A, 37 (1988), S. 1711–1724.

[21] S. GROSSMANN UND B. SONNEBORN-SCHMICK, *Correlation decay in the Lorenz model as a statistical physics problem*, Phys. Rev. A, 25 (1982), S. 2371–2384.

[22] J. GUCKENHEIMER UND P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer Appl. Math. Sc. 42, Springer Verlag, Heidelberg, Berlin, New York, 1983.

[23] M. C. GUTZWILLER, *Energy spectrum according to classical mechanics*, J. Math. Phys., 11 (1970), S. 1791–1806.

[24] ——, *Periodic orbits and classical quantization condition*, J. Math. Phys., 12 (1971), S. 343–358.

[25] M. HÉNON, *On numerical calculation of Poincaré-maps*, Physica, 5D (1982), S. 412ff.

[26] S. Isola, *Resonances in chaotic dynamics*, Commun. Math. Phys, 116 (1988), S. 343–352.

[27] L. P. Kadanoff und C. Tang, *Escape from strange repellers*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 81 (1984), S. 1276–1279.

[28] J. L. Kaplan und J. A. Yorke, *Funktional Differential Equations and Approximations of Fixed Points*, Lecture Notes in Math. 730, Springer-Verlag, 1979.

[29] S. Koga, *Phase description method to time averages in the Lorenz system*, Proc. Theor. Phys., 76 (1986), S. 335–355.

[30] E. J. Kostelich und J. A. Yorke, *Noise reduction in dynamical systems*, Phys. Rev. A, 38 (1988), S. 1649–1652.

[31] O. E. Lanford, *Qualitative and statistical theory of dissipative systems*, C. I. M. E. Lectures on Statistical Mechanics, 1976, S. 26–98.

[32] E. N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmos. Sci., 20 (1963), S. 130–141.

[33] M. Lücke, *Statistical dynamics of the Lorenz model*, J. Stat. Physics, 15 (1976), S. 455–475.

[34] M. J. McGuinness, *A computation of the limit capacity of the Lorenz attractor*, Physica, 16D (1985), S. 265–275.

[35] R. McKay und J. D. Meiss, *Hamiltonian Dyanmical Systems*, Hilger, Bristol, 1987.

[36] M. Pollicott, *Meromorphic extensions of generalized zeta functions*, Invent. Math., 85 (1986), S. 147–164.

[37] ——, *A note on the Artuso-Aurell-Cvitanović approach to the Feigenbaum tangent operator*, J. Stat. Physics, 62 (1991), S. 257–267.

[38] D. Ruelle, *Statistical Mechanics, Thermodynamic Formalism*, Addison-Wesley, 1978.

[39] ——, *Locating resonances for axiom A dynamical systems*, J. Stat. Physics, 44 (1986), S. 281–292.

[40] ——, *One-dimensional Gibbs states and axiom A diffeomorphisms*, J. Diff. Geom., 25 (1987), S. 117–137.

[41] ——, *Resonances for axiom A flows*, J. Diff. Geom., 25 (1987), S. 99–116.

[42] C. T. SPARROW, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*, Appl. Math. Sci. 41, Springer Verlag, Heidelberg, Berlin, New York, 1982.

FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH GmbH

KFA

Jül-2525
September 1991
ISSN 0366-0885