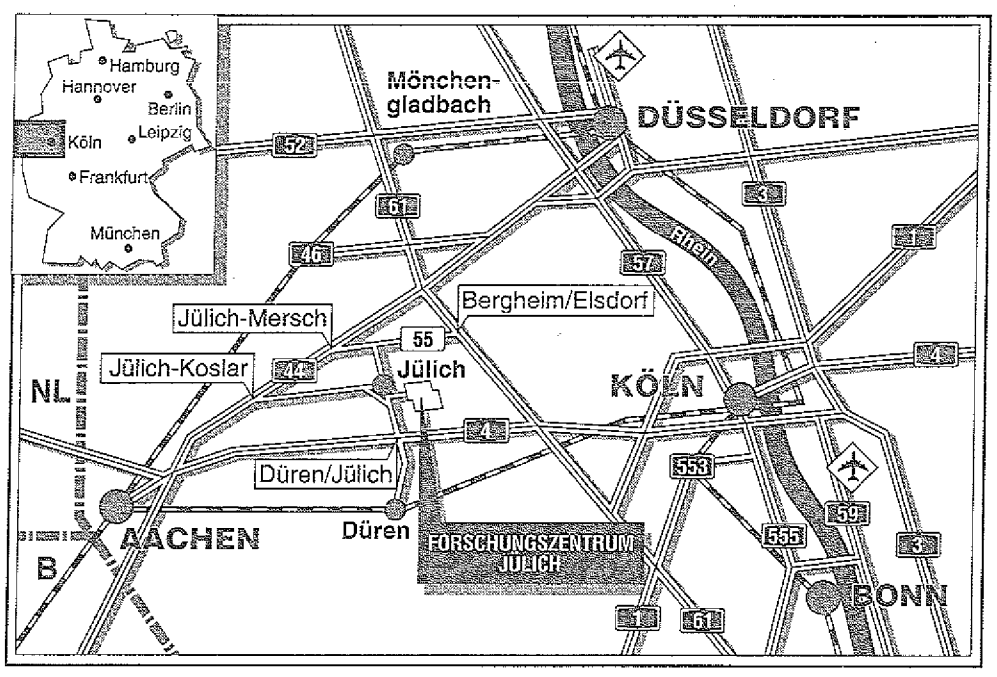
FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH GmbH

Institut für Kernphysik

Pion- und Photoabsorption an Kernen im Δ-Resonanzbereich

Bernd Körfgen



Berichte des Forschungszentrums Jülich ; 2540
ISSN 0366-0885
Institut für Kernphysik Jül-2540

Zu beziehen durch: Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek
Postfach 1913 · D-5170 Jülich · Bundesrepublik Deutschland
Telefon: 02461/61-6102 · Telefax: 02461/61-6103 · Telex: 833556-70 kfa d

Pion- und Photoabsorption an Kernen im Δ-Resonanzbereich

Bernd Körfgen

Abstract

In charge-exchange reactions and in π-absorption at intermediate energies the Δ peak position in nuclei is shifted downwards in energy compared to the Δ-excitation of the nucleon. For electromagnetic probes the experimental data do not show such a shift. We describe the excitation of the Δ in nuclei consistently for all these different probes using the isobar-hole-model (ΔN^{-1}-model). The shift of the Δ peak position in charge-exchange reactions and in π-absorption is due to an attractive ΔN^{-1}-residual interaction in the spin-longitudinal $(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})$ channel. A ΔN^{-1}-residual interaction consisting of the π-exchange potential alone is too attractive in the spin-longitudinal channel and shifts the Δ peak position for π-absorption to too low energies. In order to reproduce the Δ peak position we have to include short range correlations in the ΔN^{-1}-residual interaction. This is done either by adding a δ-force, parametrized through the Landau-Migdal-parameter $g'_{\Delta\Delta}$, to the π-exchange potential, or by multiplying the π-exchange potential with a correlation-function. This leads to a repulsive ΔN^{-1}-residual interaction in the spin-transverse $(\vec{\sigma} \times \vec{q})$ channel, which shifts the Δ peak position in the calculations for photo-absorption to higher energies compared to the photo-absorption on the nucleon.

Abstract

In Ladungsaustauschreaktionen und in der π-Absorption an Kernen bei mittleren Einschußenergien ist die Peak-Position der Δ-Resonanz gegenüber der Peak-Position des freien Δ's zu niedrigeren Energien hin verschoben. Bei Elektron-Streuung und γ-Absorption wird diese Verschiebung nicht beobachtet. Wir beschreiben die Anregung des Δ's im Kern konsistent für die verschiedenen Anregungsmechanismen im Rahmen des Isobar-Loch-Modells (ΔN^{-1}-Modell). Die Verschiebung der Δ-Peak-Position in Ladungsaustauschreaktionen und in der π-Absorption wird hervorgerufen durch die attraktive ΔN^{-1}-Restwechselwirkung im spin-longitudinalen $(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})$ Kanal. Eine ΔN^{-1}-Restwechselwirkung, die nur aus dem π-Austauschpotential besteht, ist zu attraktiv im spin-longitudinalen Kanal und verursacht bei der Berechnung der π-Absorption eine zu große Energieverschiebung der Δ-Peak-Position. Um eine bessere Übereinstimmung mit den Daten zu erreichen, müssen kurzreichweitige Korrelationen in der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung berücksichtigt werden. Diese werden eingeführt entweder durch Addition einer δ-Kraft, die durch den Landau-Migdal-Parameter $g'_{\Delta\Delta}$ parametrisiert wird, oder durch Multiplikation des π-Austauschpotentials mit einer Korrelationsfunktion. Dies führt zwangsläufig zu einer repulsiven ΔN^{-1}-Restwechselwirkung im spin-transversalen $(\vec{\sigma} \times \vec{q})$ Kanal, die bei der Berechnung der γ-Absorption eine Verschiebung des Δ-Peaks zu höheren Energien hin hervorruft.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 3

2 Photon-Streuung am Nukleon 6
2.1 Pion-Photoproduktion am Nukleon 6
2.1.1 Allgemeine S-Matrix der Pion-Photoproduktion 6
2.1.2 Pion-Photoproduktion im Δ-Resonanzbereich 8
2.2 Compton-Streuung und Photoabsorption am Nukleon 16

3 Modell der Kernstruktur 22
3.1 Der Δ-Loch-Formalismus 22
3.2 Der Quellterm formalismus 23
3.3 Propagation des Δ's im Kern 25
3.4 Das Modell der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung 29

4 Pion- und Photoabsorption an ^{12}C 36
4.1 Der totale Wirkungsquerschnitt 36
4.2 Festlegen der Anregungsoperatoren im Kern 37
4.3 Ergebnisse zur Photoabsorption an ^{12}C 39
4.4 Ergebnisse zur Pionabsorption an ^{12}C 47

5 Zusammenfassung 51

A Wirkungsquerschnitt für Pion-Photoproduktion am Nukleon 53

B Wirkungsquerschnitt für Compton-Streuung und Photoabsorption am Nukleon 57

C Berechnung der Quellfunktion für Photoabsorption 62

D Berechnung der Quellfunktion für Pionabsorption 70

E Berechnung des Matrixelements der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung 73

F Berechnung der geometrischen Faktoren 78

G Multipol-Entwicklung der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung 80

H Parametrisierung der Potentiale und Korrelationsfunktion 84

Kapitel 1

Einleitung

In den vergangenen 20 Jahren sind $\Delta(1232)$-Anregungen in Kernen mit so verschiedenen Anregungsmechanismen wie *Pion-* und *Photoabsorption*, *inelastischer Elektronstreuung* und *Ladungsaustauschreaktionen* intensiv untersucht worden. Das Ziel dieser Studien ist, Aussagen über das Verhalten der Δ-Resonanz im Medium zu erhalten, d.h. ob und inwieweit sich die Masse und die Zerfallsbreite des Δ' s im Kern aufgrund der Wechselwirkung mit den Nachbarnukleonen ändert. Da die Δ-Anregung als eine *Pion-Nukleon-Resonanz* mit Spin $J = \frac{3}{2}$ und Isospin $I = \frac{3}{2}$ interpretiert werden kann, ist diese Fragestellung auch direkt mit der Frage nach der Propagation des *Pions im Medium* verknüpft.

Die experimentellen Daten zur Pionabsorption an Kernen zeigen eine Verschiebung der Δ-*Peak-Position* von ca. 50 MeV zu niedrigeren Energien hin im Vergleich zur Pionabsorption am Nukleon [1, 2]. Bei der Photoabsorption am Kern hingegen wird solch eine Verschiebung nicht beobachtet [3, 4].

Die Verschiebung der Peak-Position im Falle der Pionabsorption am Kern hat ihre Ursache darin, daß das Pion *spin-longitudinal* $(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})$ an den Nukleon-Δ-Vertex koppelt. Der spin-longitudinal angeregte Δ-Loch-Zustand (ΔN^{-1}-Zustand) kann dann im Kern gleichzeitig als ΔN^{-1}-Zustand und als *kohärente Pion-Welle* existieren. Diese beiden Zustände mischen zum sogenannten *"Pisobar"* [5], einem kohärenten ΔN^{-1}-Zustand mit reduzierter Resonanzenergie, was zu der beobachteten Verschiebung der Peak-Position führt. Diese Vorstellung wurde bestätigt durch Rechnungen im Rahmen des *Isobar-Loch-Formalismus* [6, 7, 8, 9]. Dort wird die Verschiebung auf die attraktive ΔN^{-1}-*Restwechselwirkung* im spin-longitudinalen Kanal zurückgeführt [10, 11]. Bei diesen Rechnungen bestand die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung aus einem reinen π-Austauschpotential und war daher rein *spin-longitudinal*.

Bei der Photoabsorption dagegen werden die ΔN^{-1}-Zustände *spin-transversal* $(\vec{\sigma} \times \vec{q})$ angeregt. Im Fall von *Kernmaterie* sind spin-longitudinale und spin-transversale Zustände *orthogonal* und daher vollständig entkoppelt. Dem Kernmateriebild folgend erwartet man nun, daß spin-longitudinale und spin-transversale Kanäle auch im *endlichen* Kern nur schwach mischen. Dies erklärt die fehlende Verschiebung der Δ-Resonanz bei Photoabsorption, da die spin-transversal angeregten ΔN^{-1}-Zustände durch die rein

spin-longitudinale ΔN^{-1}-Restwechselwirkung nicht beeinflußt werden sollten [12].

In den letzten Jahren wurden die Δ-Anregungen in Kernen mit Hilfe der *Ladungsaustauschreaktionen*, wie z.B. der (p,n)-, der (^{3}He,t)- oder der (d,2p)-Reaktion untersucht. Dabei wurde festgestellt, daß die Peak-Position der Δ-Resonanz um ca. 70 MeV zu niedrigeren Energien hin verschoben ist im Vergleich zur Δ-Anregung des Nukleons [13, 14, 15, 16, 17]. Diese Verschiebung von 70 MeV hat im wesentlichen zwei Ursachen. Vierzig MeV der Verschiebung gehen auf *kinematische Effekte* und die *Fermi-Bewegung* der Nukleonen im Kern zurück. Die restlichen 30 MeV sind von Udagawa et al. [18] und Delorme und Guichon [19, 20] ebenfalls im Rahmen des ΔN^{-1}-Formalismus durch eine *attraktive* ΔN^{-1}-Restwechselwirkung im *spin-longitudinalen* Kanal erklärt worden. Bei den Ladungsaustauschreaktionen wird das Δ sowohl spin-longitudinal als auch spin-transversal angeregt. In einem Mesonaustauschbild wird diese Anregung in niedrigster Ordnung durch einen π- und ρ-Austausch zwischen Projektil und Target bewirkt. Es stellt sich heraus, daß spin-transversale und spin-longitudinale Anregung im Verhältnis $2:1$ stehen [21]. Für die spin-longitudinal angeregten ΔN^{-1}-Zustände gilt dann wieder die gleiche Argumentation wie bei der Pionabsorption und für die spin-transversal angeregten ΔN^{-1}-Zustände gilt entsprechend die Argumentation wie im Falle der Photoabsorption.

Bei der Analyse der Ladungsaustauschreaktionen mußte im Gegensatz zu den Modellen, die zur Beschreibung der Pion- und Photoabsorption enwickelt wurden, das π-Austauschpotential im Medium um eine *phänomenologische δ-Kraft* ergänzt werden. Der Grund dafür ist, daß das π-Austauschpotential allein *zu attraktiv* ist und die Δ-Resonanz um deutlich mehr als 30 MeV verschiebt.

Da wir eine *konsistente* Beschreibung von Pion- und Photon-Streuung *und* Ladungsaustauschreaktionen erreichen wollen, bauen wir bei der Entwicklung unseres Modells der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung auf dem bei der Beschreibung der Ladungsaustauschreaktionen benutzten Modell auf. Dabei lassen wir uns von den Erfahrungen leiten, die schon früher bei der Untersuchung der NN^{-1}-Restwechselwirkung im Spin-Isospin-Kanal (Speth et al., [22]) gemacht wurden. Auch dort hatte man eine phänomenologische δ-Kraft einführen müssen, um die unphysikalisch starke Attraktion des π-Austauschpotentials zu kompensieren. Wir wollen deshalb alternativ zur phänomenologischen δ-Kraft ein π- und ρ-Austauschmodell mit einer *Korrelationsfunktion* benutzen. Die Korrelationsfunktion berücksichtigt dabei effektiv die *kurzreichweitigen Korrelationen*.

Pion- und Photon-Streuung sind zur Festlegung unseres Modells besonders geeignet, da wir mit diesen Proben gezielt den spin-longitudinalen bzw. spin-transversalen Kanal anregen können und damit die "Response" des Kerns in jedem Spin-Kanal getrennt untersuchen können. Die *reellen* Pionen und Photonen gehorchen außerdem den Energie-Impuls-Beziehungen $E_\pi^2 - \vec{p}_\pi^{\,2} = m_\pi^2$ bzw. $E_\gamma^2 - \vec{p}_\gamma^{\,2} = 0$. Sie unterscheiden sich damit von der Kinematik der Ladungsaustauschreaktionen, bei denen Energieübertrag ω und Impulsübertrag q unabhängig von einander variiert werden können.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert. In Kapitel 2 diskutieren wir die

Photon-Streuung am Nukleon und legen den *γ-Nukleon-Delta-Vertexoperator* und den *π-Nukleon-Delta-Vertexoperator* fest. Die so festgelegten Anregungsoperatoren werden dann in der *Impulsapproximation* auch im Kern verwandt. In Kapitel 3 stellen wir unser Modell für die Beschreibung der Photon- bzw. Pion-Streuung am Kern vor. Das Modell basiert auf dem *ΔN^{-1}-Formalismus*. Dabei verwenden wir den sogenannten *Quelltermformalismus* zur Lösung des Kernstruktur-Problems. Außerdem entwicklen wir das Modell der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung. Im Kapitel 4 behandeln wir die Photon- und Pion-Streuung an ^{12}C und diskutieren unsere Ergebnisse zum *totalen Photo-* und *Pionabsorptionswirkungsquerschnitt*. Kapitel 5 schließlich enthält eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse.

Kapitel 2

Photon-Streuung am Nukleon

2.1 Pion-Photoproduktion am Nukleon

2.1.1 Allgemeine S-Matrix der Pion-Photoproduktion

Der Prozeß der *Pion-Photoproduktion* am Nukleon ist schematisch in Abbildung 2.1 dargestellt. Ein einlaufendes Photon mit *Vierer-Impuls* k , *Helizität* λ und *Polarisationsvektor* ε_λ wird von einem Nukleon mit Impuls p_1 absorbiert; anschließend wird ein Pion mit Impuls q von dem auslaufenden Nukleon mit Impuls p_2 emittiert. Eingangs- und Ausgangskanal bei diesem Streuprozeß werden durch die Produkt-Wellenfunktionen $| k\, \varepsilon_\lambda\, ,\, u(\vec{p}_1\, ,\, m_1)\rangle$ bzw. $| q\, ,\, u(\vec{p}_2\, ,\, m_2)\rangle$ beschrieben, wobei $u(\vec{p}_1\, ,\, m_1)$ und $u(\vec{p}_2\, ,\, m_2)$ die *Dirac-Spinoren* des ein- bzw. auslaufenden Nukleons sind. Das zugehörige *S-Matrixelement* für den Streuprozeß ist

$$\langle q\ ;\ u(\vec{p}_2\, ,\, m_2) \mid S \mid k\, \varepsilon_\lambda\ ;\ u(\vec{p}_1\, ,\, m_1)\rangle \quad . \tag{2.1}$$

Zur Beschreibung der Kinematik des Prozesses benötigt man drei linear unabhängige *Vierer-Vektoren*, die wir als k, q und P wählen können, wobei $P = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ durch Addition der Eingangs- und Ausgangsimpulse des Nukleons entsteht.

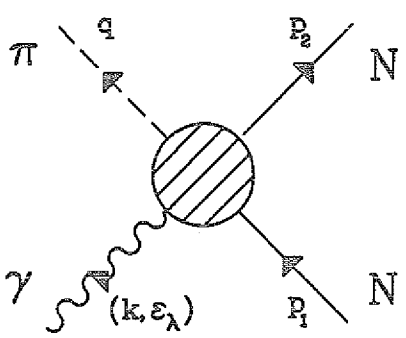


Abbildung 2.1: Pion-Photoproduktion am Nukleon

Die Forderung nach *Lorentz-Invarianz* und *Eichinvarianz* der S-Matrix bedingt, daß nur folgende vier linear unabhängige Lorentz-Skalare, gebildet aus den Vierer-Vektoren k, q, P, dem Polarisationsvektor ε_λ und dem Vierer-Vektor der *Dirac-Matrizen* γ, zum Übergangsoperator S beitragen können [23]:

$$\gamma\cdot\varepsilon\,\gamma\cdot k\ ,\ P\cdot\varepsilon\,\gamma\cdot k-\gamma\cdot\varepsilon\,P\cdot k\ ,\ q\cdot\varepsilon\,\gamma\cdot k-\gamma\cdot\varepsilon\,q\cdot k\ ,\ P\cdot\varepsilon\,q\cdot k-q\cdot\varepsilon\,P\cdot k\ . \quad (2.2)$$

Da das Pion ein *pseudoskalares* Teilchen ist, muß man noch mit γ_5 multiplizieren, damit auch die S-Matrix pseudoskalare Transformationseigenschaften hat. Die S-Matrix setzt sich daher in der folgenden Weise zusammen:

$$S \;=\; A\,M_A \;+\; B\,M_B \;+\; C\,M_C \;+\; D\,M_D \quad , \qquad (2.3)$$

wobei die Größen M_A, M_B, M_C und M_D durch

$$\begin{aligned}
M_A &= i\,\gamma_5\,\gamma\cdot\varepsilon\,\gamma\cdot k \quad , && (2.4)\\
M_B &= 2i\,\gamma_5\,(P\cdot\varepsilon\,q\cdot k - P\cdot k\,q\cdot\varepsilon) \quad , && (2.5)\\
M_C &= \gamma_5\,(\gamma\cdot\varepsilon\,q\cdot k - \gamma\cdot k\,q\cdot\varepsilon) \quad , && (2.6)\\
M_D &= 2\,\gamma_5\,(\gamma\cdot\varepsilon\,P\cdot k - \gamma\cdot k\,P\cdot\varepsilon - i\,M_N\,\gamma\cdot\varepsilon\,\gamma\cdot k) && (2.7)
\end{aligned}$$

definiert sind, M_N die Nukleonmasse ist und die Amplituden A, B, C und D Funktionen der beiden unabhängigen Lorentz-Skalare $\nu = -P\cdot k\,/\,M_N$ und $\nu_1 = -q\cdot k\,/\,M_N$ sind. Außerdem hängen die Amplituden von den Isospinquantenzahlen ab.
Im *nichtrelativistischen Grenzfall* gehen die Lorentzpseudoskalare über in [23]:

$$\begin{aligned}
M_A &\longrightarrow i\,\vec\sigma\cdot\hat\varepsilon \quad , && (2.8)\\
M_B &\longrightarrow i\,\vec q\cdot\hat\varepsilon\,\vec\sigma\cdot(\vec k-\vec q) \quad , && (2.9)\\
M_C &\longrightarrow i\,\vec\sigma\cdot\vec q\times(\vec k\times\hat\varepsilon) \quad , && (2.10)\\
M_D &\longrightarrow \vec q\cdot(\vec k\times\hat\varepsilon) \quad , && (2.11)
\end{aligned}$$

wobei $\vec\sigma$ der Vektor der *Pauli-Matrizen* und $\vec k$, $\vec q$ und $\hat\varepsilon$ die zu k, q und ε gehörenden Dreier-Vektoren sind. Im *nichtrelativistischen Grenzfall* entspricht der S-Matrix der Übergangsoperator $\mathcal{F}$, der sich in der folgenden Weise aus den Beiträgen 2.8 – 2.11 zusammensetzt [23]:

$$\mathcal{F} \;=\; i\,\mathcal{F}_1\,(\vec\sigma\cdot\hat\varepsilon) + \mathcal{F}_2\,(\vec\sigma\cdot\hat q)\left(\vec\sigma\cdot(\hat k\times\hat\varepsilon)\right) + i\,\mathcal{F}_3\left(\vec\sigma\cdot\hat k\right)(\hat q\cdot\hat\varepsilon) + i\,\mathcal{F}_4\,(\vec\sigma\cdot\hat q)\,(\hat q\cdot\hat\varepsilon) \qquad (2.12)$$

mit $\hat{q}^2 = \hat{k}^2 = 1$. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ergibt sich dann als Matrixelement von $\mathcal{F}$ bezüglich der *Pauli-Spinoren* χ_i und χ_f des ein- bzw. auslaufenden Nukleons:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\vec{q}|}{|\vec{k}|} |\langle \chi_f \mid \mathcal{F} \mid \chi_i \rangle|^2 \quad . \tag{2.13}$$

Da bei niedrigen Photon-Einschußenergien ($E_\gamma \leq 400$ MeV) nur *s-* und *p-Wellen* - Pion-Photoproduktion vorliegt und man sich daher auf die Multipole niedriger Ordnung von $\mathcal{F}$ beschränken kann, ist es sinnvoll, eine Multipolzerlegung der Streuamplitude vorzunehmen. Chew, Goldberger, Nambu und Low haben folgende *Multipolentwicklung* angegeben [23]:

$$\mathcal{F}_1 = \sum_{l=0}^{\infty} (l\, M_{l+} + E_{l+})\; P'_{l+1}(\cos\vartheta) + ((l+1)\, M_{l-} + E_{l-})\; P'_{l-1}(\cos\vartheta) \quad , \tag{2.14}$$

$$\mathcal{F}_2 = \sum_{l=1}^{\infty} ((l+1)\, M_{l+} + l\, M_{l-})\; P'_l(\cos\vartheta) \quad , \tag{2.15}$$

$$\mathcal{F}_3 = \sum_{l=1}^{\infty} (E_{l+} - M_{l+})\; P''_{l+1}(\cos\vartheta) + (E_{l-} + M_{l-})\; P''_{l-1}(\cos\vartheta) \quad , \tag{2.16}$$

$$\mathcal{F}_4 = \sum_{l=1}^{\infty} (M_{l+} - E_{l+} - M_{l-} - E_{l-})\; P''_l(\cos\vartheta) \quad . \tag{2.17}$$

Dabei sind P'_l und P''_l die ersten bzw. zweiten Ableitungen der *Legendre-Polynome* $P_l(\cos\vartheta)$, wobei ϑ der Winkel zwischen $\hat{q}$ und $\hat{k}$ ist. Die Chew-Goldberger-Low-Nambu (CGLN)-Amplitude $M_{L\pm}$ steht dabei für *magnetische* Multipol-Strahlung der Ordnung L und $E_{L\pm}$ für *elektrische* Multipol-Strahlung der Ordnungen $L \pm 1$. Der Index $L\pm$ an $M_{L\pm}$ oder $E_{L\pm}$ bedeutet, daß der *Gesamtdrehimpuls* des Photon-Nukleon-Systems $J = L \pm \frac{1}{2}$ ist.

2.1.2 Pion-Photoproduktion im Δ-Resonanzbereich

Bei der Photon-Nukleon-Streuung im Energiebereich von $E_\gamma \approx 250 - 350$ MeV liefert die Δ-Resonanz den dominanten Beitrag zur Pion-Photoproduktion. In diesem Falle kann die allgemeine S-Matrix aus Abbildung 2.1 durch den Resonanzprozeß in Abb. 2.2 ersetzt werden. Beim Resonanzprozeß wird ein intermediäres Δ mit *Spin* $\frac{3}{2}$ und *Isospin* $\frac{3}{2}$ gebildet. Dieses Δ besitzt den Impuls $p_\Delta = p_1 + k$ und wird beschrieben durch den *relativistischen Rarita-Schwinger-Spinor* $u^\mu(\vec{p}_\Delta, \Lambda)$, wobei Λ die Spinprojektion ist. Der Rarita-Schwinger-Spinor setzt sich zusammen aus einem Dirac-Spinor und einer relativistischen Spin-1 - Wellenfunktion. Dabei setzen wir voraus, daß das Δ im untersuchten Energiebereich immer nahe seiner *Massenschale* ist. Der Resonanzprozeß

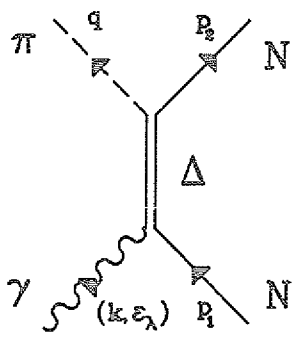


Abbildung 2.2: Pion-Photoproduktion am Nukleon über eine intermediäre Δ-Resonanz

aus Abbild. 2.2 wird durch die folgende *relativistische* T-Matrix [24] beschrieben:

$$T_{fi}^{\Delta} = -\sum_{\Lambda} \bar{u}(\vec{p}_2\,,\,m_2)\,C_\mu(p_2\,,\,p_\Delta)\,u^\mu(\vec{p}_\Delta\,,\,\Lambda)\;\frac{2M_\Delta}{p_\Delta^2 - M_\Delta^2 + i\,M_\Delta\,\Gamma_\Delta}$$
$$\bar{u}^\nu(\vec{p}_\Delta\,,\,\Lambda)\,\Gamma_\nu(p_1\,,\,p_\Delta)\,u(\vec{p}_1\,,\,m_1)\;. \qquad (2.18)$$

Dabei ist $M_\Delta = 1232$ MeV die Masse und Γ_Δ die *freie Zerfallsbreite* des Δ's. Die Funktionen $C_\mu(p_2\,,\,p_\Delta)$ und $\Gamma_\nu(p_1\,,\,p_\Delta)$ beschreiben die π-Nukleon- bzw. die γ-Nukleon-Kopplung und beinhalten die Kopplungskonstanten und *Formfaktoren* der Vertices.
Für den $\pi N\Delta$-Vertex in Gleichung 2.18 gilt [25, Kapitel 5.2]:

$$\bar{u}(\vec{p}_2\,,\,m_2)\,C_\mu(p_2\,,\,p_\Delta)\,u^\mu(\vec{p}_\Delta\,,\,\Lambda) = C_\pi\,G_3\,\bar{u}(\vec{p}_2\,,\,m_2)\,q_\mu\,u^\mu(\vec{p}_\Delta\,,\,\Lambda)\;, \qquad (2.19)$$

wobei G_3 die Kopplungskonstante und C_π der Isospin-Faktor des $\pi N\Delta$-Vertex ist.

Zur Beschreibung der $\gamma N\Delta$-Kopplung müssen wir zunächst untersuchen, welche der verschiedenen möglichen Kopplungen den dominanten Beitrag liefert. Durch Multipol-Zerlegung des *experimentell gemessenen* differentiellen Wirkungsquerschnitts der Pion-Photoproduktion und anschließendem Vergleich mit der in Abschnitt 2.1.1 hergeleiteten Multipol-Entwicklung der Streuamplitude stellt man fest, daß im *Δ-Resonanzbereich* $\mathcal{F}_2$ (2.15) und speziell der magnetischen Dipol M_{1+} den dominanten Beitrag zur Pion-Photoproduktion liefert [25, Kapitel 10.8]. Die magnetische Dipol - Kopplung führt zu folgendem $\gamma N\Delta$-Vertex [25]:

$$\bar{u}^\nu(\vec{p}_\Delta\,,\,\Lambda)\,\Gamma_\nu(p_1\,,\,p_\Delta)\,u(\vec{p}_1\,,\,m_1) = -iC_\gamma G_1\,\bar{u}^\nu(\vec{p}_\Delta\,,\,\Lambda)\left(\varepsilon_\nu - \frac{(\gamma\cdot\varepsilon)\,k_\nu}{M_N + M_\Delta}\right)\gamma_5\,u(\vec{p}_1\,,\,m_1) \qquad (2.20)$$

wobei G_1 die Kopplungskonstante und C_γ der Isospin-Faktor des $\gamma N\Delta$-Vertex ist.
Für das Produkt der beiden Matrixelemente 2.19 und 2.20 folgt im *nichtrelativistischen Grenzfall* [24]:

$$\sum_{\Lambda} \bar{u}(\vec{p}_2\,,\,m_2)\,C_\mu(p_2\,,\,p_\Delta)\,u^\mu(\vec{p}_\Delta\,,\,\Lambda)\;\bar{u}^\nu(\vec{p}_\Delta\,,\,\Lambda)\,\Gamma_\nu(p_1\,,\,p_\Delta)\,u(\vec{p}_1\,,\,m_1) \;\longrightarrow$$

$$G_3\,G_1\,C_\pi\,C_\gamma \left(\chi_f \left| \left[\vec{S}\cdot\left(-\vec{q}+\frac{q^0}{M_\Delta}\vec{p}_\Delta\right)\right]\left[\left(\vec{S}^\dagger\times\left[\vec{k}-\frac{M_\Delta-M_N}{M_N}\vec{p}_1\right]\right)\cdot\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\,\lambda}\right]\right|\chi_i\right) \tag{2.21}$$

wobei $\vec{S}^\dagger$ der *Spinübergangsoperator* ist, der den Übergang vom Spin $\frac{1}{2}$ Nukleon zum Spin $\frac{3}{2}$ Δ beschreibt [26]:

$$\langle\frac{3}{2}\,m_\Delta \mid \vec{S}^\dagger \mid \frac{1}{2}\,m_N\rangle \;:=\; \sum_m (1\,m\;\frac{1}{2}\,m_N \mid \frac{3}{2}\,m_\Delta)\;\hat{\varepsilon}(m) \quad . \tag{2.22}$$

Dabei sind die $\hat{\varepsilon}(m)$ $(m = -1,0,1)$ *kartesische* Polarisationsvektoren, die wie folgt definiert sind:

$$\hat{\varepsilon}(\pm 1) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\mp 1\\ -i\\ 0\end{pmatrix} \quad,\quad \hat{\varepsilon}(0) \;=\; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad .$$

In *sphärischer Basis*, d.h. für $S^\dagger_{\pm 1} = \frac{\mp 1}{\sqrt{2}}(S^\dagger_x \pm i\,S^\dagger_y)$ und $S^\dagger_0 = S^\dagger_z$, gilt:

$$\langle\frac{3}{2}\,m_\Delta \mid S^\dagger_\nu \mid \frac{1}{2}\,m_N\rangle \;=\; (1\,\nu\;\frac{1}{2}\,m_N \mid \frac{3}{2}\,m_\Delta) \quad . \tag{2.23}$$

Durch Anwendung des *Wigner-Eckart-Theorems* erhält man für das *reduzierte Matrixelement* des Spinübertragsoperators [27]:

$$\langle\frac{3}{2} \parallel S^\dagger \parallel \frac{1}{2}\rangle \;=\; 2 \quad . \tag{2.24}$$

Einsetzen von (2.21) in (2.18) ergibt für die *nichtrelativistische* T-Matrix im γ-*Nukleon-CMS*:

$$T^\Delta_{fi} \;\longrightarrow\; G_3\,G_1\,C_\pi\,C_\gamma\,\frac{2\,M_\Delta}{p^2_\Delta - M^2_\Delta + i\,M_\Delta\,\Gamma_\Delta}\left(\chi_f\left|\left[\vec{S}\cdot\vec{q}\right]\left[\left(\vec{S}^\dagger\times\vec{k}\right)\cdot\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\,\lambda}\right]\right|\chi_i\right) \quad , \tag{2.25}$$

Dabei wurde benutzt, daß im γ-*Nukleon-CMS* $\vec{p}_\Delta = 0$ und $\vec{p}_1 = -\vec{k}$ ist.

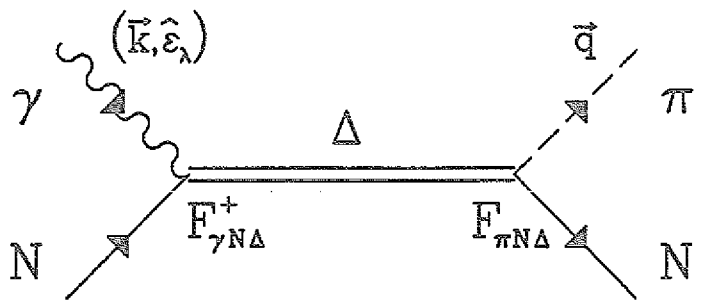


Abbildung 2.3: *Resonanter* Beitrag zur Pion-Photoproduktion am freien Nukleon im 33-Kanal

Die durch Gleichung 2.25 festgelegte Spinstruktur der T-Matrix rechtfertigt den folgenden *nichtrelativistischen* Ansatz für den *Übergangsoperator* $T^{\Delta}_{\pi\gamma}$ der Pion-Photoproduktion im Δ-Resonanzbereich (s. Abbild. 2.3):

$$T^{\Delta}_{\pi\gamma} \;=\; F_{\pi N\Delta}(\vec{q})\,\frac{1}{D(E)}\,F^{\dagger}_{\gamma N\Delta}(\vec{k}\,) \tag{2.26}$$

mit dem $\gamma N\Delta$-*Vertexoperator*:

$$F^{\dagger}_{\gamma N\Delta}(\vec{k}\,) \;:=\; \frac{g_{\gamma N\Delta}}{M_{\Delta}}\,\left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\,\lambda}\times\vec{k}\right)\cdot\vec{S}^{\dagger}\;\;T^{\dagger}_{3} \tag{2.27}$$

und dem $\pi N\Delta$-*Vertexoperator*:

$$F_{\pi N\Delta}(\vec{q}\,) \;:=\; \frac{g_{\pi N\Delta}}{M_{\pi}}\,v(q)\,\left(\vec{q}\cdot\vec{S}\right)\;\;T_{\alpha}\;\;. \tag{2.28}$$

Dabei sind $\frac{g_{\gamma N\Delta}}{M_{\Delta}}$ und $\frac{g_{\pi N\Delta}}{M_{\pi}}$ die entsprechenden *Kopplungskonstanten*, $v(q)$ ist der *Formfaktor*, der die *Ausdehnung* des $\pi N\Delta$-Vertex beschreibt, und $T^{\dagger}_{3}$ und T_{α} sind *Isospinübergangsoperatoren*. Für $v(q)$ machen wir den folgenden Ansatz:

$$v(q) \;=\; \frac{1}{1+q^2\,/\,\beta^2}\;\;, \tag{2.29}$$

wobei β der *Cutoff-Parameter* ist. Für Photon-Nukleon-Streuung im Δ-Resonanzbereich vernachlässigen wir die Energieabhängigkeit der Photon-Nukleon-Kopplung und berücksichtigen daher auch keinen Formfaktor für diesen Vertex.

Die expliziten Kopplungskonstanten sind:

$$\begin{aligned} g_{\pi N\Delta} &= \sqrt{0.90 \cdot 4\pi} \\ g_{\gamma N\Delta} &= 1.02 \quad . \end{aligned}$$

Den Cutoff - Parameter wählen wir wie Koch und Moniz [28] zu $\beta = 300$ MeV .

Der Nenner $1 / D(E)$ in Gleichung 2.26 beschreibt die Resonanzstruktur des Δ's; in $D(E)$ gehen daher die energieabhängige *Resonanzenergie* $E_R(E)$ und die freie Zerfallsbreite $\Gamma_\Delta(E)$ ein:

$$D(E) = E - E_R(E) + \frac{i}{2}\Gamma_\Delta(E) \quad . \tag{2.30}$$

Gleichung 2.30 können wir mit Hilfe der *Pion-Nukleon-Streuphase* im 33-Kanal, $\delta_{33}(E)$, umschreiben:

$$D(E) = \frac{1}{2}\Gamma_\Delta(E)\ [i - \cot\delta_{33}(E)] \quad . \tag{2.31}$$

Die Streuphase entnehmen wir dem Experiment [29]. Wir erwähnen, daß die Streuphase auch die *freie Zerfallsbreite* des Δ's festlegt [30]; wir benutzen eine Parametrisierung der Zerfallsbreite, die z.B. von Esbensen und Lee [31] verwendet worden ist:

$$\Gamma_\Delta(E) = \left(\frac{q}{q_R}\right)^3 \frac{M_\Delta}{E} \left(\frac{v(q)}{v(q_R)}\right)^2 \Gamma_R \quad , \tag{2.32}$$

wobei $\Gamma_R = 110$ MeV ist. In Gleichung 2.32 ist E die Gesamtenergie des Δ's und q ist der zugehörige Pionimpuls im Δ-Ruhsystem; entsprechend ist q_R der Pionimpuls, der zur Resonanzenergie $E = 1232$ MeV gehört und $v(q)$ ist der *Formfaktor* des π-Nukleon-Vertex aus Gleichung 2.29.

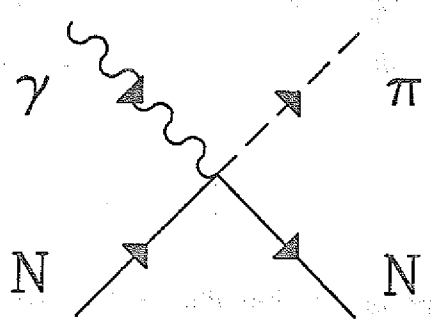


Abbildung 2.4: *Nicht-resonanter* Beitrag zur Pion-Photoproduktion am freien Nukleon im 33 - Kanal

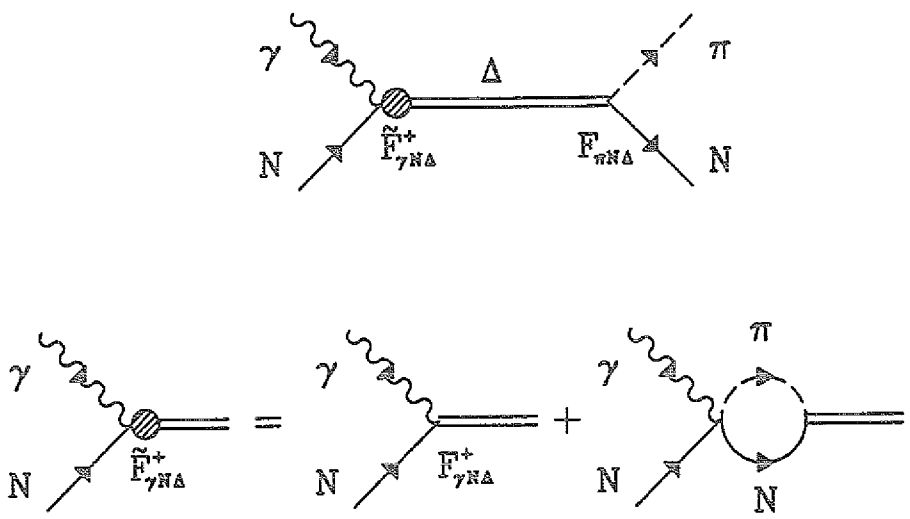


Abbildung 2.5: *Interferenz* von resonantem und nicht-resonantem Beitrag zur Pion-Photoproduktion am freien Nukleon im 33 - Kanal

Neben dem durch Gleichung 2.26 beschriebenen und in Abbildung 2.3 dargestellten resonanten Beitrag zur Pion-Photoproduktion müssen wir auch noch einen *nicht-resonanten* Beitrag berücksichtigen, wie er in Abbildung 2.4 skizziert ist. Da dieser Untergrund auch zum $J = \frac{3}{2}$ - Kanal beiträgt, machen wir den folgenden Ansatz für den Übergangsoperator des Untergrundes:

$$T^B_{\pi\gamma} \;=\; F_{\pi N\Delta}(\vec{q})\, \mathcal{A}_B\, F^{\dagger}_{\gamma N\Delta}(\vec{k}) \quad , \tag{2.33}$$

wobei wir die Amplitude $\mathcal{A}_B$ zunächst noch nicht festgelegt haben.
Den Übergangsoperator für Pion-Photoproduktion, der sowohl den resonanten als auch den nicht-resonanten Beitrag beschreibt, erhalten wir nun *nicht* durch Addition von 2.26 und 2.33, sondern wir erweitern stattdessen den resonanten Anteil mit einem *Phasenfaktor*, der die in Abbildung 2.5 dargestellte Interferenz der beiden Beiträge beschreibt. Auf diese Weise bleibt die *Unitarität* des Übergangsoperators erhalten:

$$\tilde{T}^{\Delta}_{\pi\gamma} \;=\; F_{\pi N\Delta}(\vec{q})\, \frac{e^{i\Phi(E)}}{D(E)}\, F^{\dagger}_{\gamma N\Delta}(\vec{k}) \tag{2.34}$$

$$\;=\; F_{\pi N\Delta}(\vec{q})\, \frac{1}{D(E)}\, \tilde{F}^{\dagger}_{\gamma N\Delta}(\vec{k}) \quad . \tag{2.35}$$

Hier ist im modifizierten Vertexoperator $\tilde{F}^{\dagger}_{\gamma N\Delta}(\vec{k})$ die Kopplungskonstante $\frac{g_{\gamma N\Delta}}{M_\Delta}$ durch die effektive "Kopplungskonstante" $\frac{\tilde{g}_{\gamma N\Delta}}{M_\Delta}$ ersetzt worden:

$$\frac{\tilde{g}_{\gamma N\Delta}}{M_\Delta} \;:=\; \frac{g_{\gamma N\Delta}}{M_\Delta}\, e^{i\Phi(E)} \quad . \tag{2.36}$$

Die Interferenzphase übernehmen wir ebenfalls von Koch und Moniz [28]:

$$\Phi(E) \;:=\; \frac{p(E)^3}{a + b\,p(E)^2} \quad , \tag{2.37}$$

wobei $a = 1.27$ fm^{-3} , $b = 4.46$ fm^{-1} sind, und $p(E)$ der zur Energie E gehörende Pionimpuls ist.

Mit dem folgenden einfachen Ansatz für die Untergrund-Amplitude

$$\mathcal{A}_B \;=\; -\frac{\sin\Phi(E)}{\Gamma_\Delta(E)\,/\,2} \tag{2.38}$$

folgt für die Pion-Photoproduktionsamplitude:

$$T_{\pi\gamma} \;=\; \tilde{T}^{\Delta}_{\pi\gamma} + T^{B}_{\pi\gamma} \tag{2.39}$$

$$\;=\; F_{\pi N\Delta}(\vec{q})\,\frac{1}{D(E)}\,\tilde{F}^{\dagger}_{\gamma N\Delta}(\vec{k}) \;+\; F_{\pi N\Delta}(\vec{q})\,\left(-\frac{\sin\Phi(E)}{\Gamma_\Delta(E)\,/\,2}\right) F^{\dagger}_{\gamma N\Delta}(\vec{k}) \tag{2.40}$$

$$\;=\; F_{\pi N\Delta}(\vec{q})\,\frac{1}{\widetilde{D(E)}}\,F^{\dagger}_{\gamma N\Delta}(\vec{k}) \tag{2.41}$$

mit dem modifizierten Propagator:

$$\frac{1}{\widetilde{D(E)}} \;=\; -\,e^{\,i\,\delta_{33}(E)}\;\frac{\sin\left[\delta_{33}(E)+\Phi(E)\right]}{\Gamma_\Delta(E)\,/\,2} \quad . \tag{2.42}$$

Um zu überprüfen, ob wir die eingeführten Parameter richtig an das Experiment angepaßt haben, definieren wir die $\tilde{M}_{1+}$ - Amplitude, in die die Kopplungskonstanten, der Cutoff-Parameter, die Interferenzphase und die Parametrisierung der freien Zerfallsbreite eingehen:

$$\tilde{M}_{1+} \;=\; \frac{1}{3}\,\frac{1}{4\pi}\,\frac{M_N}{\sqrt{s}}\,\left(\frac{g_{\gamma N\Delta}}{M_\Delta}\,\frac{g_{\pi N\Delta}}{M_\pi}\,v(q)\,\frac{k\,q}{\widetilde{D(E)}}\right) \quad . \tag{2.43}$$

Die gute Übereinstimmung von Rechnung und Experiment in Abbildung 2.6 zeigt, daß die Parameter geeignet an die Daten angepaßt worden sind. Wir weisen darauf hin, daß wir die Definition der Amplitude $\tilde{M}_{1+}$ von Koch, Moniz und Ohtsuka [12] übernommen

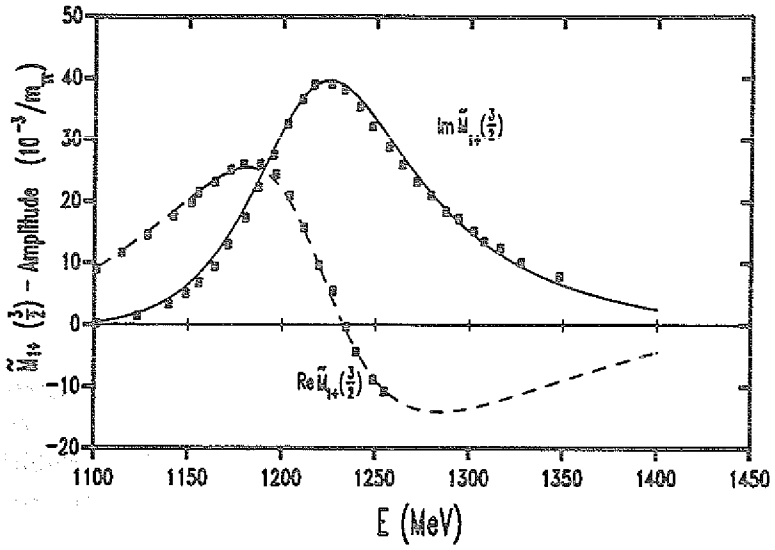


Abbildung 2.6: Energieabhängigkeit der $\tilde{M}_{1+}(\frac{3}{2})$-Amplitude für Pion-Photoproduktion. Die *durchgezogene* Kurve zeigt den Imaginärteil und die *gestrichelte* Kurve den Realteil der Amplitude. Die Daten stammen von Berends und Donnachie [32].

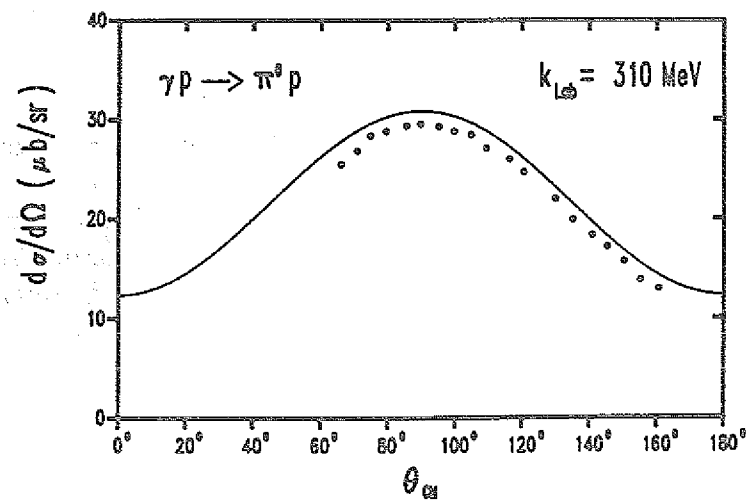


Abbildung 2.7: Differentieller Wirkungsquerschnitt für π^0-Photoproduktion am Proton im γ-p-*CMS* für eine Einschußenergie von k_{Lab} = 310 MeV. Die Daten stammen von Genzel et al. [33].

haben. Diese Definition ist *nicht* identisch mit der von Chew, Goldberger, Low und Nambu (*CGLN*) [23] eingeführten M_{1+}-Amplitude.

Ausgehend von dem Übergangsoperator 2.41 erhalten wir für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Pion-Photoproduktion:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{27}\frac{1}{1+k/E_i}\frac{M_N}{E_i}\frac{M_N}{E_f}\frac{M_N}{\sqrt{s}}\left(\frac{g_{\gamma N\Delta}}{M_\Delta}\right)^2\left(\frac{g_{\pi N\Delta}}{M_\pi}\right)^2 k\,q^3\,v(q)^2$$
$$\frac{1}{|\,\widetilde{D(E)}\,|^2}\,(1-\alpha\,\frac{1}{2}\,\tau_N+\alpha\,|\,\frac{3}{2}\,\tau_N)^2\quad(5-3\cos\vartheta)\quad . \tag{2.44}$$

Dieses Ergebnis leiten wir in Anhang A her. In Abbildung 2.7 vergleichen wir den differentiellen Wirkungsquerschnitt im γ-*Nukleon-CMS* für eine Photon-Energie von $k_{Lab} = 310$ MeV mit den experimentellen Daten. Da die Winkelabhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitts durch die Spin-Struktur der Vertexoperatoren bestimmt wird, bestätigt die Übereinstimmung der Rechnung mit dem Experiment unsere Wahl von $F_{\pi N\Delta}$ und $\tilde{F}_{\gamma N\Delta}$. Für Photon-Einschußenergien außerhalb des Resonanzbereichs ist die Beschreibung der Daten deutlich schlechter. Für unsere Zwecke ist dieses Ergebnis jedoch hinreichend, da wir das Verhalten von Δ-Anregungen in Kernen untersuchen wollen und uns daher auf Anregungsenergien in der Nähe der Resonanzenergie beschränken.

2.2 Compton-Streuung und Photoabsorption am Nukleon

Bei Photoneinschußenergien von ca. 250 MeV bis 350 MeV verläuft auch der Prozeß der *Compton-Streuung* am Nukleon dominant über die intermediär gebildete Δ-Resonanz; dieser Prozeß ist in Abbildung 2.8 schematisch dargestellt. Neben diesem *resonanten* Prozeß tragen noch zwei weitere *nicht-resonante* Prozesse als Untergrund zur Compton-Streuung bei, bei denen intermediär nicht ein Δ, sondern ein nicht-resonantes *Pion-Nukleon-System* mit Gesamtdrehimpuls $J = \frac{3}{2}$ bzw. $J = \frac{1}{2}$ auftritt (s. Abbildungen 2.9 und 2.10).

Für den resonanten Prozeß der Compton-Streuung machen wir, analog der Beschreibung der Pion-Photoproduktion in Gleichung 2.26, folgenden Ansatz (im γ-*Nukleon-CMS*):

$$T^{\Delta}_{\gamma\gamma} = \tilde{F}_{\gamma N\Delta}(\vec{k}')\,\frac{1}{D(E)}\,\tilde{F}^{\dagger}_{\gamma N\Delta}(\vec{k})\quad . \tag{2.45}$$

Hier beschreiben $\vec{k}$ und $\vec{k}'$ die Impulse der ein- und auslaufenden Photonen. Den effektiven $\gamma N\Delta$-*Vertexoperator* $\tilde{F}^{\dagger}_{\gamma N\Delta}$ haben wir schon in Abschnitt 2.1.2 bei der Beschreibung der Pion-Photoproduktion festgelegt.

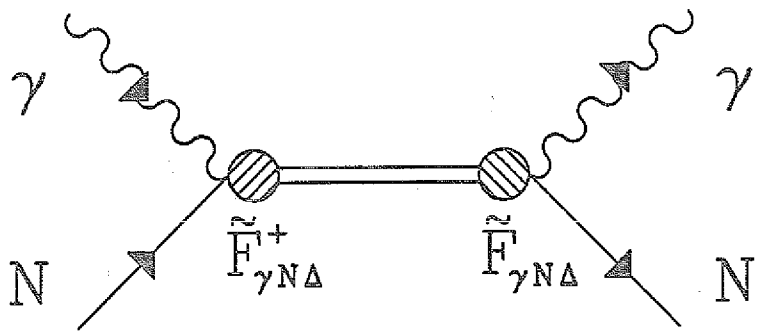


Abbildung 2.8: *Resonanter* Beitrag zur Compton-Streuung am freien Nukleon im 33-Kanal. Der *effektive* $\gamma N\Delta$-Vertex ist auf Seite 13 definiert worden.

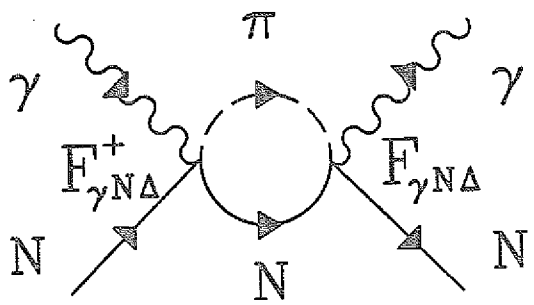


Abbildung 2.9: *Untergrund* der Compton-Streuung am freien Nukleon im 33-Kanal.

Dieser ist gegeben durch

$$\tilde{F}^{\dagger}_{\gamma N\Delta}(\vec{k}\,) \;:=\; \frac{\tilde{g}_{\gamma N\Delta}}{M_{\Delta}}\,\left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}\times\vec{k}\right)\cdot\vec{S}^{\dagger}\;T_3^{\dagger}\quad, \tag{2.46}$$

wobei die *energieabhängige* Kopplungskonstante $\frac{\tilde{g}_{\gamma N\Delta}}{M_{\Delta}}$ durch Gleichung 2.36 definiert ist. Einsetzen von 2.46 in 2.45 liefert uns für den resonanten Übergangsoperator:

$$T^{\Delta}_{\gamma\gamma} \;=\; A_{\Delta}(E)\;\left(\hat{\varepsilon}^{*}_{\vec{k}'\lambda'}\times\vec{k}'\right)\cdot\vec{S}\,T_3\quad\left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}\times\vec{k}\right)\cdot\vec{S}^{\dagger}\,T_3^{\dagger} \tag{2.47}$$

mit der Amplitude:

$$A_{\Delta}(E) \;=\; \left(\frac{g_{\gamma N\Delta}}{M_{\Delta}}\right)^{2}\,e^{2i\Phi(E)}\,\frac{1}{D(E)}\quad. \tag{2.48}$$

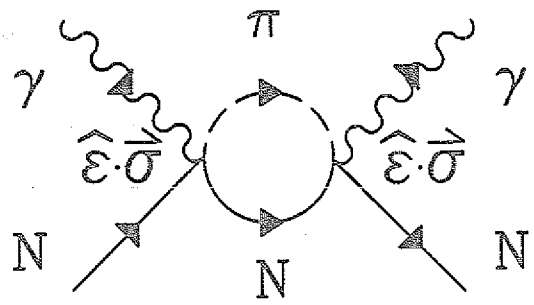


Abbildung 2.10: Beitrag der s-Wellen Pion-Photoproduktion zum $J = \frac{1}{2}$ - Untergrund der Compton-Streuung.

Da der nicht-resonante Untergrund aus Abbildung 2.9 auch zum $J = \frac{3}{2}$ - Kanal beiträgt, beschreiben wir die Kopplung durch den gleichen Vertexoperator wie beim resonanten Prozeß. Für die Amplitude des nicht-resonanten Beitrags machen wir den gleichen Ansatz wie Koch, Moniz und Ohtsuka [12, Gl. (26)] und schreiben:

$$A_B(E) \;=\; g_B^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{M_N}{E_N(p)}\,\frac{1}{2\omega(p)}\,\frac{\frac{1}{3}\,p^2\,v(p)^2}{E\,-\,[E_N(p)+\omega(p)]}\quad , \tag{2.49}$$

wobei $E_N(p)$ und $\omega(p)$ die Energien des *intermediären* Nukleons bzw. Pions sind und $v(p)$ der Formfaktor des $\pi N\Delta$-Vertex ist. Im 33-Kanal ergibt sich so für den Übergangsoperator:

$$T^{33}_{\gamma\gamma} \;=\; A(E)\,\left(\hat{\varepsilon}^{*}_{\vec{k}'\lambda'}\times\vec{k}'\right)\cdot\vec{S}\,T_3\quad\left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}\times\vec{k}\right)\cdot\vec{S}^{\dagger}\,T_3^{\dagger} \tag{2.50}$$

mit der Amplitude $A(E)$:

$$A(E) \;=\; A_\Delta(E) \;+\; A_B(E)\quad . \tag{2.51}$$

Neben den $J = \frac{3}{2}$ - Prozessen müssen wir noch den nicht-resonanten Untergrund zur Compton-Streuung im $J = \frac{1}{2}$ - Kanal berücksichtigen. Der zugehörige Feynman-Graph ist in Abbildung 2.10 dargestellt. Der Gesamt-Übergangsoperator für Compton-Streuung setzt sich deshalb zusammen aus dem Beitrag des 33 - Kanals und dem Beitrag des $J = \frac{1}{2}$ - Kanals:

$$T_{\gamma\gamma} \;=\; T^{33}_{\gamma\gamma} + T^{B}_{\gamma\gamma}\quad . \tag{2.52}$$

Ursache für diesen Untergrund-Prozeß ist die *s-Wellen Pion-Photoproduktion*, wobei ein intermediäres Pion-Nukleon-System mit Gesamtdrehimpuls $J = \frac{1}{2}$ erzeugt wird. Die s-Wellen Pion-Photoproduktion beschreiben wir mit Hilfe eines Ansatzes von *Kroll-Ruderman* [12, 34]:

$$T^B_{\pi\gamma} = B(E) \left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \cdot \vec{\sigma}\right) \quad , \tag{2.53}$$

wobei die Amplitude $B(E)$ für $\pi^{\pm}$ - Produktion in der folgenden Weise definiert ist:

$$B(E) = \pm\sqrt{8\pi}\, e \frac{f}{M_\pi}\, h(E) \quad . \tag{2.54}$$

Dabei ist $f = \sqrt{0.08}$ die Kopplungskonstante, und e ist die *Elementarladung*. Für die *phänomenologisch* eingeführte Energieabhängigkeit der T-Matrix $h(E)$ wählen wir die folgenden Parametrisierung [12, Gl. (28)]:

$$h^2(E) = \left[1 + \frac{2\,k^2}{3\,(k^2 + 2\,M_\pi^2)}\right]^{-1} \quad . \tag{2.55}$$

Die Übergangsamplitude aus Abbildung 2.10 ergibt sich dann wie in Gleichung 2.49 durch ein *Dispersions-Integral* [12, (29)]:

$$T^B_{\gamma\gamma} = C(E) \left(\hat{\varepsilon}^*_{\vec{k}'\lambda'} \cdot \vec{\sigma}\right) \left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \cdot \vec{\sigma}\right) \tag{2.56}$$

mit:

$$C(E) = 2\,(4\pi)^2\,\alpha \frac{f^2}{M_\pi^2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{M_N}{E(p)} \frac{1}{2\omega(p)} \left|\frac{v(p)}{v(q(E))}\right|^2 \frac{h^2(E)}{E - [E_N(p) + \omega(p)]} \quad , \tag{2.57}$$

wobei α die *Feinstrukturkonstante* ist.

Aus den Übergangsoperatoren 2.50 und 2.56 folgt für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung am Nukleon:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{M_N}{\sqrt{s}} \Big(& \frac{2}{81}\, k^4 \mid A(E) \mid^2 \left(7 + 3\cos^2\vartheta\right) + \\ & \frac{4}{9}\, k^2 \left[A^*(E)\, C(E) + A(E)\, C^*(E)\right] \cos\vartheta + \\ & 2 \mid C(E) \mid^2 \Big) \, . \end{aligned} \tag{2.58}$$

Dies wird in Anhang B hergeleitet.
In Abbildung 2.11 zeigen wir eine Rechnung für den differentiellen Wirkungsquerschnitt bei einer Photon-Einschuß-Energie von $k_{Lab} = 320$ MeV. Wie man erkennen kann, beschreibt die Rechnung die Daten qualitativ richtig; gleiches gilt für Einschußenergien zwischen 280 MeV und 400 MeV.

In Abbildung 2.12 vergleichen wir den berechneten totalen Wirkungsquerschnitt für Photoabsorption am Nukleon (Gleichung B.28) mit dem Experiment. Wir stellen fest, daß sowohl die Peak-Position der Δ-Resonanz als auch die absolute Größe des Wirkungsquerschnitts gut reproduziert werden.

Diese Ergebnisse zeigen, daß die *effektiven Vertexoperatoren* für $\gamma N\Delta$ - Kopplung richtig gewählt worden sind. Diese am Nukleon festgelegten Anregungsoperatoren übernehmen wir für die Beschreibung der *Photoabsorption an Kernen.*

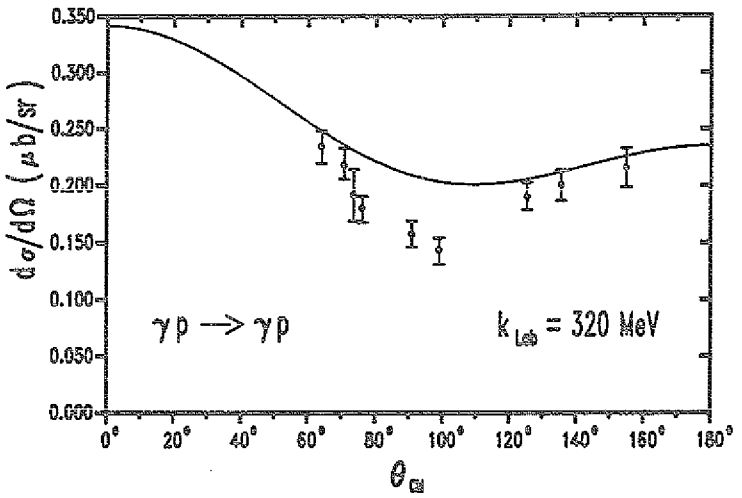


Abbildung 2.11: Differentieller Wirkungsquerschnitt für Compton-Streuung am Proton im γ-p-*CMS* für eine Einschußenergie von $k_{Lab} = 320$ MeV. Die Daten stammen von Guiaşu et al. [35].

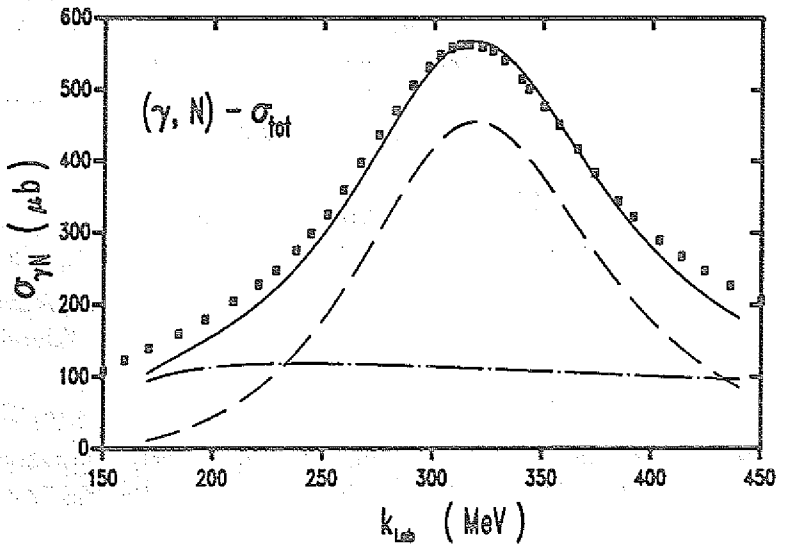


Abbildung 2.12: *Totaler* Wirkungsquerschnitt für Photoabsorption am Nukleon. Die *gestrichelte* Kurve zeigt den totalen Wirkungsquerschnitt im 33-Kanal, der durch Gleichung B.14 gegeben ist. Die *strich-punktierte* Kurve stellt den durch den Kroll-Ruderman-Term beschriebenen $J = \frac{1}{2}$ - Untergrund dar (Gleichung B.27). Der totale Wirkungsquerschnitt (*durchgezogene* Kurve) ergibt sich durch Addition der beiden Beiträge. Die Daten stammen von Berends und Donnachie [32].

Kapitel 3

Modell der Kernstruktur

3.1 Der Δ-Loch-Formalismus

Die Streuung von Pionen und Photonen am Kern behandeln wir im Rahmen des *Δ-Loch-Formalismus*. Dabei regt das Photon im Kern einen Δ-Loch-Zustand (ΔN^{-1}) an. Da wir uns im Rahmen dieses Formalismus auf einen Ein-Teilchen - Ein-Loch - Modellraum beschränken und *Grundzustandskorrelationen* nicht berücksichtigen, behandeln wir die Kernstruktur in der *Tamm-Dancoff-Approximation* (TDA). Die Vernachlässigung der Grundzustandskorrelationen ist gerechtfertigt, denn diese haben $\Delta\Delta N^{-1}N^{-1}$ - Charakter und sind aufgrund ihrer hohen Anregungsenergie unterdrückt.

Die Propagation der Δ-Loch-Zustände im Kern beschreiben wir, wie in Abbildung 3.1 angedeutet, durch den *Propagator* G . In diesen geht als wesentlicher Bestandteil die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}}$ ein.

Die Anregung der ΔN^{-1}-Zustände durch Absorption eines Photons behandeln wir in der *Impulsapproximation* (*Stoßapproximation*).Dies erlaubt es uns, den Anregungsoperator im Kern, $\tilde{F}^{\dagger\,\mathrm{eff}}_{\gamma N\Delta}$, auf den Anregungsoperator $\tilde{F}^{\dagger}_{\gamma N\Delta}$ am *freien Nukleon* zurückzuführen. Dabei müssen wir natürlich die *Fermi-Bewegung* der Nukleonen im Kern berücksichtigen.

Wir nehmen an, daß sich der Kern vor der Absorption des Photons im *Grundzustand* mit *Gesamtdrehimpuls* und *Parität* $J^{\pi} = 0^{+}$ befindet. Der Vertexoperator $\tilde{F}^{\dagger\,\mathrm{eff}}_{\gamma N\Delta}$ wirkt dann auf die Grundzustandswellenfunktion des Kerns $\mid 0^{+}\rangle$. Wir beschreiben deshalb die *Compton-Streuung am Kern* durch die Amplitude $\mathcal{M}_{\gamma'\gamma}$, für die wir folgenden Ansatz machen:

$$\mathcal{M}_{\gamma'\gamma} \;=\; \langle 0^{+} \mid \tilde{F}^{\mathrm{eff}}_{\gamma N\Delta}(\vec{k}')\, G\, \tilde{F}^{\dagger\,\mathrm{eff}}_{\gamma N\Delta}(\vec{k}) \mid 0^{+}\rangle \quad . \tag{3.1}$$

Analog beschreiben wir die *Pion-Streuung* am Kern. Dabei werden lediglich die Photon-Linien in Abbildung 3.1 durch die entsprechenden Pion-Linien mit den Impulsen $\vec{q}$ und $\vec{q}'$ und die An- und Abregungsoperatoren für die *Photon-Nukleon-Delta-Vertices* durch

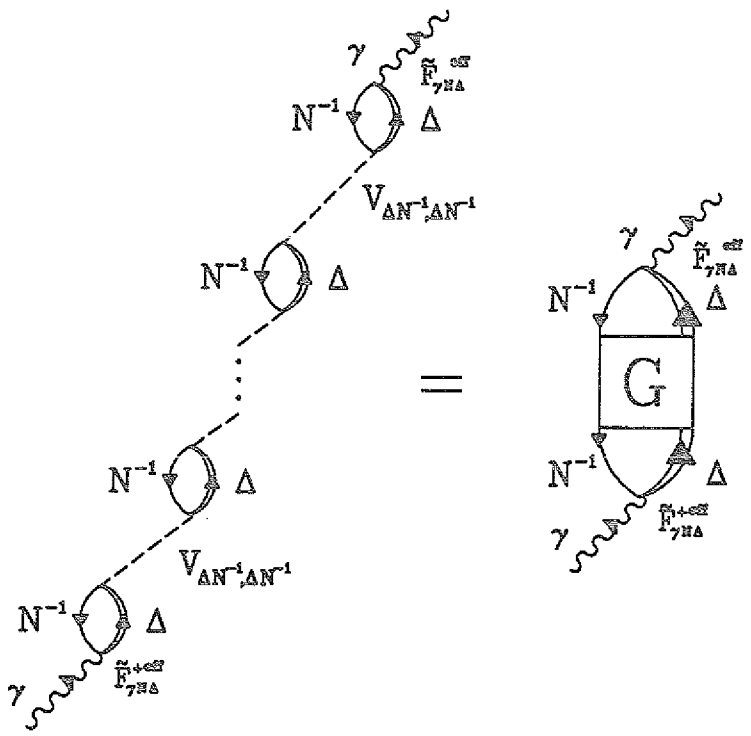


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der Compton-Streuung am Kern.

die entsprechenden Operatoren für die *Pion-Nukleon-Delta-Vertices* ersetzt. Daher gilt für die Amplitude der *elastischen* Pion-Streuung am Kern:

$$\mathcal{M}_{\pi'\pi} \;=\; \langle 0^+ \mid F^{\rm eff}_{\pi N\Delta}(\vec{q}\,')\, G\, F^{\dagger\,\rm eff}_{\pi N\Delta}(\vec{q}\,) \mid 0^+ \rangle \quad . \tag{3.2}$$

Im folgenden werden wir das Modell für die Compton-Streuung am Kern entwickeln. Wir machen darauf aufmerksam, daß wir die Pion-Streuung vollkommen analog behandeln und daher alle folgenden Ableitungen in analoger Weise für die Pion-Kern-Streuung gelten.

3.2 Der Quelltermformalismus

Wir wollen die Beiträge der verschiedenen Multipole zur Compton-Streuung am Kern untersuchen und charakterisieren daher die ΔN^{-1}-Zustände durch ihren Gesamtdrehimpuls $(j_t\, m_t)$. Wir definieren den *Doorway-Zustand* durch:

$$\mid \rho\,,\, j_t\, m_t \rangle \;:=\; (j_t\,, m_t \mid \tilde{F}^{\dagger\,\rm eff}_{\gamma N\Delta}(\vec{k}\,) \mid 0^+ \rangle \quad . \tag{3.3}$$

Die runde Klammer in Gleichung 3.3 deutet an, daß nur die Integration über die *Winkelkoordinaten* des ΔN^{-1}-Zustands durchgeführt wird.
Mit dieser Definition können wir die Amplitude 3.1 umschreiben in:

$$\mathcal{M}_{\gamma'\gamma}^{(j_t m_t)} \;=\; \left(\langle 0^+ \mid \tilde{F}^{\mathrm{eff}}_{\gamma N\Delta}(\vec{k}')\, G\, \tilde{F}^{\dagger\mathrm{eff}}_{\gamma N\Delta}(\vec{k}) \mid 0^+ \rangle \right)^{(j_t m_t)} \;=\; \langle \rho' , j_t m_t \mid G \mid \rho , j_t m_t \rangle \quad . \tag{3.4}$$

Dies bedeutet, daß wir nach Lösung des *Kernstruktur-Problems*

$$\mid \Psi , j_t m_t \rangle \;:=\; G \mid \rho , j_t m_t \rangle \tag{3.5}$$

die Amplitude $\mathcal{M}_{\gamma'\gamma}^{(j_t m_t)}$ direkt ausrechnen können zu:

$$\mathcal{M}_{\gamma'\gamma}^{(j_t m_t)} \;=\; \langle \rho' , j_t m_t \mid \Psi , j_t m_t \rangle \quad . \tag{3.6}$$

Dabei ist $\mid \Psi , j_t m_t \rangle$ der *kohärente* Δ-Loch-Zustand, der durch Anwendung der *Green's Funktion* G auf den Doorway-Zustand entsteht.
Das Kernstruktur-Problem lösen wir im Rahmen des sogenannten *Quellterm formalimus*; dazu formen wir die *Integro-Differentialgleichung* 3.5 um in:

$$G^{-1} \mid \Psi , j_t m_t \rangle \;=\; \mid \rho , j_t m_t \rangle \quad . \tag{3.7}$$

Im *Ortsraum* folgt für Gleichung 3.7:

$$\int \frac{d^3 r'}{\sqrt{2\pi}^3} \, \langle \vec{r} \mid G^{-1} \mid \vec{r}' \rangle \, \langle \vec{r}' \mid \Psi , j_t m_t \rangle \;=\; \langle \vec{r} \mid \rho , j_t m_t \rangle \quad , \tag{3.8}$$

oder

$$\int \frac{d^3 r'}{\sqrt{2\pi}^3} \, G^{-1}(\vec{r}, \vec{r}') \, \Psi^{(j_t m_t)}(\vec{r}') \;=\; \rho^{(j_t m_t)}(\vec{r}) \quad . \tag{3.9}$$

Dies ist eine Integralgleichung bezüglich $\Psi^{(j_t m_t)}(\vec{r})$ mit der *Inhomogenität* $\rho^{(j_t m_t)}(\vec{r})$. Man nennt $\rho^{(j_t m_t)}(\vec{r})$ die *Quellfunktion*, da sie die *Wahrscheinlichkeitsdichte* der durch die Absorption des Photons erzeugten Δ's im Kern beschreibt und so die "Quelle" für die Propagation der Δ-Loch-Zustände darstellt.

Für die Quellfunktion der Compton-Streuung ergibt sich der explizite Ausdruck:

$$\begin{aligned}\rho^{(j_t\, m_t=-\lambda)}(r) \;=\; & \sum_{n_h,j_p,j_h}\sum_{l_p,l_h}\sum_{\tau_h}(-4i)\,\frac{\tilde{g}_{\gamma N\Delta}}{M_\Delta}\,c(k)\,k\,i^{l_h-l_p}\,\hat{j}_t\,\hat{j}_p\,\hat{j}_h\,\hat{l}_h \\ & (j_t\,\lambda\; j_t\;-\lambda\mid 0\,0)\;\psi_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})\,j_h}(r)\;\;\varepsilon_{\vec{k}\,\lambda\,(1\,\lambda)} \\ & \sum_l i^l\,j_l(kr)\,\hat{l}^2\,(l_h\,0\;l\,0\mid l_p\,0)\begin{Bmatrix} l_p & \frac{3}{2} & j_p \\ l_h & \frac{1}{2} & j_h \\ l & 1 & j_t \end{Bmatrix} \\ & \sum_{l'}\hat{l}'\,(l0\;1\,0\mid l'\,0)\,W(l\,1\,j_t\,1\,,\,l'\,1)\,(l'\,0\;1\,\lambda\mid j_t\,\lambda)\quad . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Dabei ist $\psi_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})\,j_h}(r)$ die Radialwellenfunktion des Loch-Zustands. Diese Formel wird in Anhang C explizit hergeleitet. Entsprechend berechnen wir in Anhang D die Quellfunktion für die Pion-Streuung am Kern, und Gleichung D.8 gibt das Endergebnis für die Quellfunktion an.

Nachdem wir nun die Quellfunktion $\rho^{(j_t\,m_t)}(\vec{r})$ explizit angegeben haben, können wir das Kernstruktur-Problem (Gl. 3.9) lösen. Dazu entwickeln wir im nächsten Abschnitt unser Modell für den Propagator G und legen in Abschnitt 3.4 das Modell für die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung fest.

3.3 Propagation des Δ's im Kern

Das Kernstruktur-Problem haben wir in Gleichung 3.5 mit einem allgemeinen Propagator G formuliert. Um die "propagierten" ΔN^{-1}-Zustände konkret berechnen zu können, müssen wir einen Ansatz für G machen und damit unser Modell für die Wechselwirkung des Δ's mit dem Restkern festlegen.

Die Wechselwirkung des Δ's mit dem Kern setzt sich zusammen aus dem *mittleren Δ-Kern-Potential* U_Δ, dem komplexen *Spreading-Potential* W_{Spread} und der *Zweikörperrestwechselwirkung* $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}}$. Wir machen daher für den Propagator den folgenden Ansatz [18]:

$$G \;=\; \frac{1}{E_\Delta + i/2\,\Gamma_\Delta - H_B - T_\Delta - U_\Delta - W_{\mathrm{Spread}} - V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}}}\quad , \tag{3.11}$$

wobei E_Δ die *Gesamtenergie* des ΔN^{-1}-Zustands, H_B der *Hamiltonian des Restkerns*, Γ_Δ die *freie Zerfallsbreite* des Δ's und T_Δ die *kinetische Energie* des Δ's ist.

Dieser Ansatz ergibt sich durch Verallgemeinerung des Propagators für das *freie* Δ aus Gleichung 2.30 auf den Kern:

$$\frac{1}{D(E)} \quad \longrightarrow \quad G = \frac{1}{D(E - H_\Delta) - H_B - W_{\text{Spread}} - V_{\Delta N^{-1}, \Delta N^{-1}}} \tag{3.12}$$

$$= \frac{1}{D(E) - \gamma(E)\, H_\Delta - H_B - W_{\text{Spread}} - V_{\Delta N^{-1}, \Delta N^{-1}}} \tag{3.13}$$

wobei $H_\Delta = T_\Delta + U_\Delta$ der Einteilchen-Hamiltonian des Δ's ist und

$$\gamma(E) := \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=E} = \left(1 - \frac{dE_R(\varepsilon)}{d\varepsilon} + \frac{i}{2}\frac{d\Gamma_\Delta(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=E} . \tag{3.14}$$

Dabei haben wir $D(E - H_\Delta)$ durch eine *Taylor-Entwicklung* linearisiert. Da im interessanten Energie-Bereich nahe der Resonanz $\gamma(E) \approx 1$ ist, liegt es nahe, den Ansatz 3.11 für G zu machen.

Das mittlere Δ-Kern-Potential und das Spreading-Potential sind schon bei Rechnungen zur Pion- und Photon-Kern-Streuung untersucht worden [10, 11, 28, 12]. Wir übernehmen den in diesen Arbeiten gemachten Ansatz, U_Δ und W_{Spread} durch *Woods-Saxon-Potentiale* zu parametrisieren:

$$U_\Delta(R) = \frac{U_0}{1 + \exp\left(\frac{R - R_0}{a}\right)} \tag{3.15}$$

und

$$W_{\text{Spread}}(R) = \frac{W_0}{1 + \exp\left(\frac{R - R_S}{a_S}\right)} . \tag{3.16}$$

Dabei sind U_0 und W_0 die Tiefen, $R_0 = r_0 A^{1/3}$ und R_S die Radien und a_0 und a_S beschreiben die "Diffuseness" der Potentiale. Die konkrete Wahl dieser Parameter hängt natürlich von dem untersuchten Kern und den weiteren Modellannahmen, wie z.B. der benutzten ΔN^{-1}-Restwechselwirkung, ab.

Wir machen bei unseren Rechnungen zu ^{12}C die Annahme, daß sich das Δ im gleichen mittleren Feld befindet, wie das Nukleon. Daher wählen wir $U_0 = -65$ MeV , $R_0 = 2.52$ fm und $a = 0.53$ fm .

Das Spreading-Potential beschreibt Prozesse höherer Ordnung, wie z.B. *Absorption des intermediären Pions*, oder intermediäre $2N2N^{-1}$ - Zustände. Diese inelastischen Prozesse beeinflussen die *Zerfallsbreite* des Δ's im Kern und führen daher zu einem komplexen Spreading-Potential. Horikawa, Thies und Lenz [11] haben in ihren Untersuchungen zur Pion-Streuung an ^{12}C festgestellt, daß man für $W_0 = 30 - i40$ MeV

im Rahmen eines Isobar-Loch-Modells eine gute Beschreibung der Daten erreicht. Wir übernehmen diese Tiefe des Spreading-Potentials und wählen $R_S = R_0$ und $a_S = a$.

Zur Lösung des Kernstruktur-Problem, definieren wir den Propagator

$$G_0 \;:=\; \frac{1}{E_\Delta + i/2\,\Gamma_\Delta - H_B - T_\Delta - U_\Delta - W_{\mathrm{Spread}}} \quad , \tag{3.17}$$

der die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung nicht enthält. Mit Hilfe von G_0 erhalten wir die folgende Identität für G:

$$G \;=\; G_0 \,+\, G_0\, V_{_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}}}\, G \quad . \tag{3.18}$$

Damit können wir Gleichung 3.5 in ein System von zwei gekoppelten Integro-Differentialgleichungen überführen:

$$|\,\Lambda\,,\,j_t\,m_t\rangle \;=\; |\,\rho\,,\,j_t\,m_t\rangle \,+\, V\,G_0\,|\,\Lambda\,,\,j_t\,m_t\rangle \quad , \tag{3.19}$$

$$|\,\Psi\,,\,j_t\,m_t\rangle \;=:\; G_0\,|\,\Lambda\,,\,j_t\,m_t\rangle \quad , \tag{3.20}$$

wobei wir abkürzend für $V_{_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}}}$ nun V geschrieben haben. Dieses Gleichungssystem hat den Vorteil, daß in ihm die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung nur noch multiplikativ auftritt.

Wir lösen die Kernstruktur-Integralgleichung (Gl. 3.19) durch Einführen eines *biorthogonalen Basissystems*

$$\Big\{|\,D_0\rangle\,,\,|\,D_1\rangle\,,\,|\,D_2\rangle\,,\ldots\,,\langle\tilde{D}_0\,|\,,\langle\tilde{D}_1\,|\,,\langle\tilde{D}_2\,|\,,\ldots\Big\} \quad , \tag{3.21}$$

wobei die Basiszustände laut Definition die Eigenschaft $\langle\tilde{D}_i\,|D_j\rangle = \delta_{i,j}$ haben. Ein biorthogonales Basissystem unterscheidet sich vom normalerweise benutzten Orthogonalsystem dadurch, daß:

$$\langle\tilde{D}_i\,| \;\neq |\,D_i\rangle^\dagger \quad . \tag{3.22}$$

Der Grund für das Auftreten eines Biorthogonalsystems ist der, daß V und G_0 *nichthermitesche* Operatoren sind $(V^\dagger \neq V)$ und sich diese Eigenschaft auf die im folgenden zu konstruierenden Basiszustände überträgt.
Man kann leicht zeigen [36], daß für einen Operator der Form $H = T + V + iW$ gilt:

$$H\,\chi \;=\; \varepsilon\,\chi \quad , \quad H^\dagger\xi \;=\; \varepsilon\,\xi \quad \Rightarrow \quad \xi^* \;=\; \chi \quad . \tag{3.23}$$

Wenn man nun einen Zustand $|\, D_i\rangle$ als Produkt von Radial- und Drehimpulswellenfunktion schreibt, so gilt wegen 3.23:

$$|\, D_i\rangle \;=\; f(r)\;|\, j\, m\rangle \quad \text{und} \quad \langle \tilde{D}_i\,| \;=\; \langle j\, m\,|\; f(r) \quad . \tag{3.24}$$

Das biorthogonale Basissystem konstruieren wir analog dem Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren [37]:

$$|\, D_0\rangle \;=\; \frac{1}{N_0}\,|\,\rho\,,\, j_t\, m_t\rangle \quad , \tag{3.25}$$

$$|\, D_1\rangle \;=\; \frac{1}{N_1}\left(|\, V_0\rangle \;-\; |\, D_0\rangle\,\alpha_{0,0}\right) \quad , \tag{3.26}$$

$$\vdots$$

$$|\, D_i\rangle \;=\; \frac{1}{N_i}\left(|\, V_{i-1}\rangle \;-\; \sum_{j=0}^{i-1} |\, D_j\rangle\,\alpha_{j,i-1}\right) \quad . \tag{3.27}$$

Dabei ist $|\, V_i\rangle = V\, G_0\,|\, D_i\rangle$, und die Normierungskonstanten sind durch $N_i := \sqrt{\langle \tilde{D}_i\,|D_i\rangle}$ gegeben. Die *Matrixelemente* $\alpha_{j,i}$ sind wie folgt definiert:

$$\alpha_{j,i} \;=\; \langle \tilde{D}_j\,|V_i\rangle \;=\; \langle \tilde{D}_j\,|V\, G_0|\, D_i\rangle \quad . \tag{3.28}$$

Aufgrund dieser speziellen Konstruktion der Basiszustände ist die Matrix $(\alpha_{j,i})$ von *unterer Dreiecksform* (mit einer zusätzlichen Nebendiagonalen). Durch Auflösen von 3.27 nach $|\, V_i\rangle$ erhalten wir

$$|\, V_i\rangle \;=\; N_{i+1}\,|\, D_{i+1}\rangle \;+\; \sum_{j=0}^{i} |\, D_j\rangle\,\alpha_{j,i} \tag{3.29}$$

und durch Einsetzten von 3.29 in das Matrixelement 3.28 ergibt sich:

$$\begin{aligned} \alpha_{k,i} \;&=\; \langle \tilde{D}_k\,|V G_0|\, D_i\rangle \;=\; N_{i+1}\,\langle \tilde{D}_k\,|D_{i+1}\rangle \;+\; \sum_{j=0}^{i} \langle \tilde{D}_k\,|D_j\rangle\,\alpha_{j,i} \\ &=\; 0 \qquad\qquad \text{für:}\quad k \geq i+2 \quad . \end{aligned} \tag{3.30}$$

Die Matrixelemente der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung $\alpha_{j,i}$ berechnen wir in Anhang E.

Entwicklung des gesuchten Zustands $|\, \Lambda\,,\, j_t\, m_t\rangle$ nach den Basiszuständen

$$|\, \Lambda\,,\, j_t\, m_t\rangle \;=\; \sum_i c_i\,|\, D_i\rangle \tag{3.31}$$

und Einsetzen von 3.31 in die Integralgleichung 3.19 ergibt:

$$\sum_i c_i \mid D_i\rangle \;=\; N_0 \mid D_0\rangle \;+\; \sum_i c_i \, V \, G_0 \mid D_i\rangle \quad . \tag{3.32}$$

Multiplikation dieser Gleichung von links mit $\langle \tilde{D}_j \mid$ führt zu einem *gekoppelten Gleichungssystem* für die c_i:

$$c_j \;=\; N_0 \, \delta_{0,j} \;+\; \sum_{i=0} c_i \, \alpha_{j,i} \quad \Leftrightarrow \tag{3.33}$$

$$\sum_i c_i \, (\delta_{j,i} - \alpha_{j,i}) \;=\; N_0 \, \delta_{0,j} \quad . \tag{3.34}$$

In Matrixschreibweise hat das gekoppelte Gleichungssystem die folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha_{n,n} & -\alpha_{n,n-1} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ -\alpha_{n-1,n} & 1-\alpha_{n-1,n-1} & -\alpha_{n-1,n-2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_{n-2,n} & -\alpha_{n-1,n-1} & 1-\alpha_{n-2,n-2} & -\alpha_{n-2,n-3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{1,n} & -\alpha_{1,n-1} & -\alpha_{1,n-2} & -\alpha_{1,n-3} & \cdots & -\alpha_{1,0} \\ -\alpha_{0,n} & -\alpha_{0,n-1} & -\alpha_{0,n-2} & -\alpha_{0,n-3} & \cdots & 1-\alpha_{0,0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ c_{n-2} \\ \vdots \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ N_0 \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

Aufgrund der Dreiecksform der Matrix läßt sich das Gleichungssystem leicht lösen, indem man die Matrix auf *Zeilenstufenform* bringt und dann *rekursiv* löst, wie beim *Gauß'schen Eliminationsverfahren* .

Das hier dargestellte Verfahren ist eine Erweiterung des Lanczos-Verfahrens [38]. Das Lanczos-Verfahren ist für *hermitesche* Propagatoren entwickelt worden und führt daher zu einer *tridiagonalen* Matrix.

3.4 Das Modell der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung

Wir wollen die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}}$ ausgehend von einem *Ein-Meson-Austausch-Modell* beschreiben. Dabei bauen wir auf Modellen auf, die Speth et al. [22], Anastasio und Brown [39] und andere für die Nukleon-Loch-Restwechselwirkung entwickelt haben. Bei diesen Untersuchungen hat sich herausgestellt, daß man mit Ein-Meson-Austauschpotentialen allein die Experimente nicht beschreiben kann, sondern den kurzreichweitigen Anteil der Wechselwirkung phänomenologisch behandeln muß.

Da im 33-Kanal sowohl ein *Spin-Flip* ($\Delta S = 1$) als auch ein *Isospin-Flip* ($\Delta T = 1$) auftritt, können zum *direkten* Matrixelement der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung nur die

Isovektor-Mesonen π und ρ beitragen. *Austausch-Graphen* müssen nicht berücksichtigt werden, da in der $\Delta N^{-1}\Delta N^{-1}$ - Wechselwirkung die Teilchen stets *unterscheidbar* sind.
Die direkten π- und ρ- Austausch-Potentiale sind:

$$V_\pi(\omega\,,\,\vec{q}) \;=\; 4\pi\hbar c\,\frac{f^2_{\pi N\Delta}}{m^2_\pi}\,\left(\frac{\Lambda^2_\pi - m^2_\pi}{\Lambda^2_\pi - t}\right)^2\,\frac{1}{t-m^2_\pi}\;(\vec{S}_2^{\,\dagger}\cdot\vec{q})\,(\vec{S}_1\cdot\vec{q})\;\;(\vec{T}_2^{\,\dagger}\cdot\vec{T}_1)\;\;, \tag{3.36}$$

$$V_\rho(\omega\,,\,\vec{q}) \;=\; 4\pi\hbar c\,\frac{f^2_{\rho N\Delta}}{m^2_\rho}\,\left(\frac{\Lambda^2_\rho - m^2_\rho}{\Lambda^2_\rho - t}\right)^2\,\frac{1}{t-m^2_\rho}\;(\vec{S}_2^{\,\dagger}\times\vec{q})\cdot(\vec{S}_1\times\vec{q})\;\;(\vec{T}_2^{\,\dagger}\cdot\vec{T}_1)\;\;, \tag{3.37}$$

wobei $t=\omega^2-\vec{q}^{\,2}$ der Viererimpulsübertrag ist. Die Größe $(\Lambda^2_\pi - m^2_\pi)\,/\,(\Lambda^2_\pi - t)$ ist der $\pi N\Delta$-Formfaktor, $f_{\pi N\Delta}$ ist die $\pi N\Delta$ - Kopplungskonstante, Λ_π der Cutoff-Parameter des $\pi N\Delta$-Formfaktors und m_π die Pion-Masse. Entsprechendes gilt für das ρ-Meson. Für die Kopplungs-Parameter haben wir dabei folgende Werte angenommen:

$f_{\pi N\Delta} = 2f_{\pi NN}$	0.569	$f_{\rho N\Delta} = 2f_{\rho NN}$	4.078
Λ_π	780 MeV	Λ_ρ	2000 Mev
m_π	140 MeV	m_ρ	770 MeV

wobei wir "pionische Einheiten"

$$4\pi\hbar c\,\frac{f^2_{\pi NN}}{m^2_\pi} \;\approx\; 400\ \text{MeV fm}^3 \tag{3.38}$$

benutzt haben.
Für die *spin-longitudinalen* $(\vec{S}_2^{\,\dagger}\cdot\hat{q})\,(\vec{S}_1\cdot\hat{q})$ und *spin-transversalen* $(\vec{S}_2^{\,\dagger}\times\hat{q})\cdot(\vec{S}_1\times\hat{q})$ Spinoperatoren gelten die folgenden Relationen:

$$(\vec{S}_2^{\,\dagger}\cdot\hat{q})\,(\vec{S}_1\cdot\hat{q}) \;=\; \frac{1}{3}\,(\vec{S}_2^{\,\dagger}\cdot\vec{S}_1) + \frac{1}{3}\,S_{12}(\hat{q})\;\;, \tag{3.39}$$

$$(\vec{S}_2^{\,\dagger}\times\hat{q})\cdot(\vec{S}_1\times\hat{q}) \;=\; \frac{2}{3}\,(\vec{S}_2^{\,\dagger}\cdot\vec{S}_1) - \frac{1}{3}\,S_{12}(\hat{q})\;\;, \tag{3.40}$$

wobei $S_{12}(\hat{q})$ der Tensoroperator

$$S_{12}(\hat{q}) \;:=\; 3\,(\vec{S}_2^{\,\dagger}\cdot\hat{q})\,(\vec{S}_1\cdot\hat{q}) \;-\; (\vec{S}_2^{\,\dagger}\cdot\vec{S}_1)\;\;. \tag{3.41}$$

ist. Mit Hilfe der Relationen 3.39 und 3.40 können wir die π- und ρ-Austauschpotentiale in *Zentralkraft* (C) und *Tensorkraft* (T) zerlegen:

$$V_\pi(\omega, \vec{q}) = \left[V_\pi^C(q)\ (\vec{S}_2^\dagger \cdot \vec{S}_1) + V_\pi^T(q)\ S_{12}(\hat{q})\right]\ (\vec{T}_2^\dagger \cdot \vec{T}_1)\ , \tag{3.42}$$

$$V_\rho(\omega, \vec{q}) = \left[V_\rho^C(q)\ (\vec{S}_2^\dagger \cdot \vec{S}_1) - V_\rho^T(q)\ S_{12}(\hat{q})\right]\ (\vec{T}_2^\dagger \cdot \vec{T}_1)\ , \tag{3.43}$$

wobei:

$$V_\pi^C(q) = V_\pi^T(q) = \frac{1}{3}\,\alpha_\pi\,\frac{(\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2)^2}{(\Lambda_\pi^2 + q^2)^2}\,\frac{q^2}{(\omega^2 - m_\pi^2) - q^2}\ , \tag{3.44}$$

$$V_\rho^C(q) = 2\,V_\rho^T(q) = \frac{2}{3}\,\alpha_\rho\,\frac{(\Lambda_\rho^2 - m_\rho^2)^2}{(\Lambda_\rho^2 + q^2)^2}\,\frac{q^2}{(\omega^2 - m_\rho^2) - q^2}\ , \tag{3.45}$$

$$\alpha_\pi = 4\pi\hbar c\,\frac{f_{\pi N\Delta}^2}{m_\pi^2}\ , \tag{3.46}$$

$$\alpha_\rho = 4\pi\hbar c\,\frac{f_{\rho N\Delta}^2}{m_\rho^2}\ . \tag{3.47}$$

ist.
Wir wollen unser Modell der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung analog den Modellen für die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung im Medium entwickeln. Aus der Untersuchung der NN^{-1}-Restwechselwirkung ist bekannt, daß die direkten π- und ρ- Austausch-Prozesse nicht ausreichen, um die experimentellen Daten zu reproduzieren. Der Grund dafür ist, daß die π- und ρ-Austauschpotentiale für $q \to 0$ verschwinden, während das Experiment eine stark repulsive Wechselwirkung für $q = 0$ fordert. Die *kurzreichweitigen Korrelationen*, die ihre Ursache in Prozessen höherer Ordnung haben, modifizieren die Potentiale für kleine q wesentlich. Der Grund dafür wird deutlich, wenn wir den Zentralteil des π-Austauschpotentials in der folgenden Weise umformen:

$$V_\pi^C(q) = \frac{1}{3}\,\alpha_\pi\,\frac{(\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2)^2}{(\Lambda_\pi^2 + q^2)^2}\,\left(\frac{(\omega^2 - m_\pi^2)}{(\omega^2 - m_\pi^2) - q^2} - 1\right)\ . \tag{3.48}$$

Der zweite, *attraktive* Term in Gleichung 3.48 geht aufgrund seiner schwachen Energieabhängigkeit bei Fourier-Transformation in den *Ortsraum* in ein sehr kurzreichweitiges, *δ-funktionsartiges* Potential über. Die kurzreichweitigen Korrelationen zwischen den Nukleonen verhindern nun, daß sich die Nukleonen auf kleine Abstände nähern und sorgen so dafür, daß der attraktive kurzreichweitige Anteil nicht wirksam werden kann. In einem ersten einfachen Modell [40, 41] hat man die kurzreichweitigen Korrelationen daher so berücksichtigt, daß man den kurzreichweitigen (attraktiven) Anteil von Gleichung 3.48 aus dem π-Austauschpotential entfernt hat.

Eine andere Möglichkeit, die kurzreichweitigen Korrelationen effektiv zu berücksichtigen, ist, daß man zu den π- und ρ-Austauschpotentialen eine phänomenologische

δ-Kraft addiert, die den kurzreichweitigen Anteil des π-Austauschpotentials kompensiert. Udagawa et al. [18] haben dieses Konzept auf die Beschreibung der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung übertragen und haben dabei folgenden Ansatz für die phänomenologische *kurzreichweitige* Kraft, im folgenden abkürzend auch δ-Kraft genannt, gemacht:

$$V_\delta(\omega\,,\,\vec{q}) \;=\; 4\pi\hbar c\,\frac{f^2_{\pi N\Delta}}{m^2_\pi}\,\frac{(\Lambda^2_\pi - m^2_\pi)^2}{(\Lambda^2_\pi - t)^2}\;g'_{\Delta\Delta}\;(\vec{S}^\dagger_2\cdot\vec{S}_1)\;(\vec{T}^\dagger_2\cdot\vec{T}_1)\;, \tag{3.49}$$

wobei der sogenannte *Landau-Migdal-Parameter* $g'_{\Delta\Delta}$ an das Experiment angepaßt werden muß. Der Zentralteil des ρ-Austauschpotentials ist ebenfalls sehr kurzreichweitig. Udagawa et al. berücksichtigen deshalb nur den Tensorteil des ρ-Austauschpotentials explizit, in der Annahme, daß der Zentralteil des ρ-Austauschpotentials bereits effektiv durch die phänomenologische δ-Kraft berücksichtigt wird. In ihrem Modell setzt sich die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung daher in der folgenden Weise zusammen:

$$V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} \;=\; V_\pi(\omega\,,\,\vec{q}) \;+\; V^T_\rho(\omega\,,\,\vec{q}) \;+\; V_\delta(\omega\,,\,\vec{q})\;. \tag{3.50}$$

Bei der Beschreibung von Ladungsaustauschreaktionen haben sie den Parameter $g'_{\Delta\Delta} = \frac{1}{3}$ gefunden. Durch Vergleich mit Gleichung 3.48 stellen wir fest, daß bei diesem Wert des Landau-Migdal-Parameters der kurzreichweitige Anteil des π-Austauschpotentials genau kompensiert wird. Deshalb nennt man $g'_{\Delta\Delta} = 1/3$ auch "minimal short range correlation".

Eine alternative Methode, zur Berücksichtigung der kurzreichweitigen Korrelationen ist die Multiplikation der π- und ρ-Austauschpotentiale im *Ortsraum* mit einer *Zweikörper-Korrelationsfunktion* $g(r)$ [42]. Im *Impulsraum* ergibt dies für die Potentiale $(i = \pi\,,\,\rho)$:

$$\hat{V}_i(\omega\,,\,\vec{q}) \;=\; \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,V_i(\omega\,,\,\vec{k}\,)\,g(\vec{q}-\vec{k}\,)\;, \tag{3.51}$$

wobei $g(\vec{q})$ die Fourier-Transformierte von $g(r)$ ist:

$$g(\vec{q}) \;=\; \int d^3r\;e^{i\,\vec{q}\cdot\vec{r}}\,g(r)\;. \tag{3.52}$$

Da im Mesonaustauschbild die kurzreichweitigen Korrelationen vom für kleine Abstände repulsiven *ω-Austauschpotential* herrühren, sollte die Reichweite der Korrelationsfunktion vergleichbar mit der *Compton-Wellenlänge* $q_c = 3.93\ \mathrm{fm}^{-1} \approx m_\omega$ des ω-Mesons sein.

Anastasio und Brown [39] haben daher bei der Beschreibung der NN^{-1}-Restwechselwirkung die folgende Parametrisierung der Korrelationsfunktion benutzt, die an eine mit dem "*Reid soft-core potential*" berechnete realistische Korrelationsfunktion angepaßt worden ist:

$$g(r) \;=\; 1 \;-\; j_0(q_c\, r) \quad , \tag{3.53}$$

wobei $j_0(z)$ die sphärische Besselfunktion der Ordnung $l = 0$ ist. Bei Fouriertransformation in den Impulsraum geht $g(r)$ über in:

$$g(\vec{q}) \;=\; (2\pi)^3\delta^3(\vec{q}) \;-\; (2\pi^2)\,\frac{1}{q_c^2}\,\delta(\mid \vec{q}\mid -q_c) \quad . \tag{3.54}$$

Einsetzen von 3.54 in Gleichung 3.51 liefert für das *korrelierte* Potential:

$$\hat{V}_i(\omega\,,\vec{q}) \;\approx\; V_i(\omega\,,\vec{q}) \;-\; V_i(\mid \vec{q}_c\mid) \quad . \tag{3.55}$$

Neben der von Anastasio und Brown eingeführten Parametrisierung der Korrelationsfunktion (3.53) findet man in der Literatur, z.B. bei Towner [43], noch andere Parametrisierungen, die in verschiedenen Modellen der NN^{-1}-Restwechselwirkung benutzt worden sind. In Abbildung 3.2 sind die Korrelationsfunktion aus Gleichung 3.53 und z.B. die Korrelationsfunktion

$$\tilde{g}(r) \;=\; 1 \;-\; e^{-a\,r^2}\,(1 - b\,r^2) \tag{3.56}$$

aufgetragen, wobei $a = 1.1\ \mathrm{fm}^{-1}$ und $b = 0.68\ \mathrm{fm}^{-2}$ ist.

Wir wollen nun diese Methode zur Berücksichtigung der kurzreichweitige Korrelationen auf die Beschreibung der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung übertragen. Dafür bietet es sich an, die π- und ρ-Austauschpotentiale in den *Ortsraum* zu transformieren und dort dann mit der Korrelationsfunktion zu multiplizieren.

Bei der Berechnung der Fourier-Transformation der Potentiale müssen wir beachten, daß in dem von uns untersuchten Energieübertragsbereich das π-Austauschpotential (Gl. 3.44) für $\omega \geq m_\pi$ einen Pol hat. Wir müssen daher die Transformation für die verschiedenen ω-Bereiche getrennt durchführen:

für $\omega \geq m_\pi$:

$$V_\pi^C(r) \;=\; \frac{\alpha_\pi}{3}\,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{{\kappa_\pi}^2}{r}\,[e^{-\Lambda'_\pi r} - e^{i\,\kappa_\pi r}] - \frac{1}{2}\,(\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2)\,\Lambda'_\pi\,e^{-\Lambda'_\pi r}\right) \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned} V_\pi^T(r) \;=\; \frac{\alpha_\pi}{3}\,\frac{1}{4\pi}\Bigg(&\frac{{\kappa_\pi}^2}{r}\,[e^{-\Lambda'_\pi r} - e^{i\,\kappa_\pi r}] - \frac{1}{2}\,(\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2)\,\Lambda'_\pi\,e^{-\Lambda'_\pi r} \\ &- \frac{3}{2}\,(\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2)\,\frac{e^{-\Lambda'_\pi r}}{r} \\ &- \frac{3}{r^2}\,[i\,\kappa_\pi\,e^{i\kappa_\pi r} + \Lambda'_\pi\,e^{-\Lambda'_\pi r}] + \frac{3}{r^3}\,[e^{i\,\kappa_\pi r} - e^{-\Lambda'_\pi r}]\Bigg) \end{aligned} \tag{3.58}$$

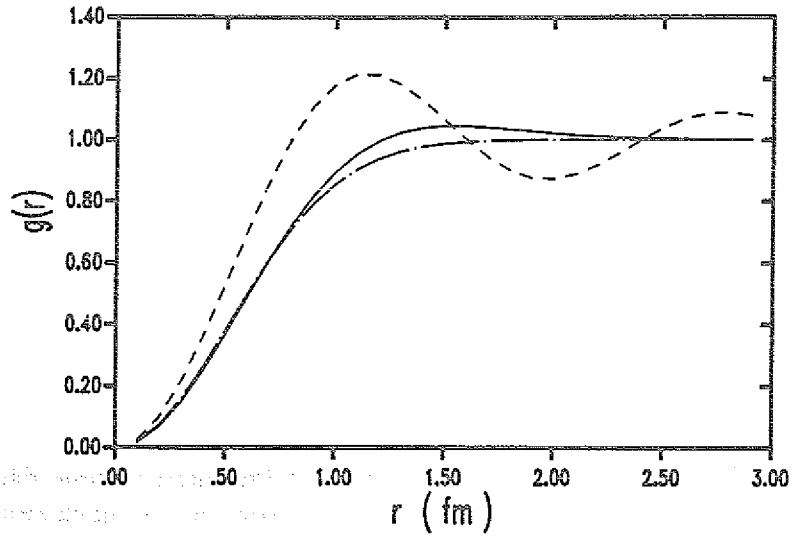


Abbildung 3.2: *Korrelationsfunktion* $g(r)$ im Bereich von 0 bis 3 fm. Die *gestrichelte* Kurve zeigt die Korrelationsfunktion $g(r) = 1 - j_0(q_c r)$, wobei $q_c = 3.93$ fm^{-1} die Comptonwellenlänge des ω-Mesons ist. Die *durchgezogene* Kurve beschreibt die Korrelationsfunktion, die durch Gleichung 3.56 gegeben ist. Die *strich-punktierte* Kurve stellt die Parametrisierung H.10 der durchgezogen gezeichneten Korrelationsfunktion dar.

für $\omega < m_\pi$:

$$V_\pi^C(r) = \frac{\alpha_\pi}{3}\frac{1}{4\pi}\left(\frac{{\kappa_\pi}^2}{r}[-e^{-\Lambda'_\pi r} + e^{-\kappa_\pi r}] - \frac{1}{2}(\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2)\,\Lambda'_\pi\, e^{-\Lambda'_\pi r}\right) \quad (3.59)$$

$$V_\pi^T(r) = \frac{\alpha_\pi}{3}\frac{1}{4\pi}\left(\frac{{\kappa_\pi}^2}{r}[-e^{-\Lambda'_\pi r} + e^{-\kappa_\pi r}] - \frac{1}{2}(\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2)\,\Lambda'_\pi\, e^{-\Lambda'_\pi r} - \frac{3}{2}(\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2)\frac{e^{-\Lambda'_\pi r}}{r} + \frac{3}{r^2}[\kappa_\pi\, e^{-\kappa_\pi r} - \Lambda'_\pi\, e^{-\Lambda'_\pi r}] + \frac{3}{r^3}[e^{-\kappa_\pi r} - e^{-\Lambda'_\pi r}]\right) \quad (3.60)$$

für alle ω :

$$V_\rho^C(r) = 2\,\frac{\alpha_\rho}{3}\frac{1}{4\pi}\left(\frac{{\kappa_\rho}^2}{r}[-e^{-\Lambda'_\rho r} + e^{-\kappa_\rho r}] - \frac{1}{2}(\Lambda_\rho^2 - m_\rho^2)\,\Lambda'_\rho\, e^{-\Lambda'_\rho r}\right) \quad (3.61)$$

$$V_\rho^T(r) = \frac{\alpha_\rho}{3}\frac{1}{4\pi}\left(\frac{{\kappa_\rho}^2}{r}[-e^{-\Lambda'_\rho r}+e^{-\kappa_\rho r}]-\frac{1}{2}(\Lambda_\rho^2-m_\rho^2)\,\Lambda'_\rho\,e^{-\Lambda'_\rho r}\right.$$
$$-\frac{3}{2}(\Lambda_\rho^2-m_\rho^2)\,\frac{e^{-\Lambda'_\rho r}}{r}$$
$$\left.+\frac{3}{r^2}[\kappa_\rho\,e^{-\kappa_\rho r}-\Lambda'_\rho\,e^{-\Lambda'_\rho r}]+\frac{3}{r^3}[e^{-\kappa_\rho r}-e^{-\Lambda'_\rho r}]\right) \quad . \quad (3.62)$$

Dabei sind $\kappa_{\pi,\rho}$ und $\Lambda_{\pi,\rho}$ wie folgt definiert:

$$\kappa_\pi^2 = \begin{cases} \omega^2-m_\pi^2 & \text{für:} \quad \omega \geq m_\pi \\ m_\pi^2-\omega^2 & \text{für:} \quad \omega < m_\pi \end{cases} \quad (3.63)$$

$$\kappa_\rho^2 = m_\rho^2-\omega^2 \quad (3.64)$$

$$\Lambda_\pi'^2 = \Lambda_\pi^2-\omega^2 \quad (3.65)$$

$$\Lambda_\rho'^2 = \Lambda_\rho^2-\omega^2 \quad . \quad (3.66)$$

Im Ortsraum können wir nun die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung als Produkt von π-Austauschpotential und Korrelationsfunktion ansetzen:

$$V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = \hat{V}_\pi(\omega,\vec{r}) = V_\pi(\omega,\vec{r})\,g(r) \quad . \quad (3.67)$$

Dabei haben wir das ρ-Austauschpotential zunächst nicht berücksichtigt, da bisher wenig experimentelle Information über die Stärke der $\rho N\Delta$ - Kopplung vorliegt.

Bei unseren Untersuchungen zur Pion- und Photoabsorption an ^{12}C werden wir Rechnungen nicht nur mit diesem Modell der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung durchführen, sondern auch das Modell von Udagawa et al. (Gl. 3.50) benutzen, da es unser Ziel ist, ein Modell der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung zu entwickeln, mit dem wir die Ladungsaustauschreaktionen und Pion- und Photoabsorption *konsistent* beschreiben können.

Bei der Berechnung des Matrixelements der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung in Anhang E benutzen wir, daß das Potential in Form einer *Multipol-Entwicklung* vorliegt, wie sie in Anhang G hergeleitet wird. Um diese Multipol-Entwicklung analytisch durchführen zu können, müssen die Potentiale entweder von Yukawa-Typ oder Gauß-Typ sein. Dies zwingt uns, Teile der π- und ρ- Austauschpotentiale und die Korrelationsfunktion durch eine Summe von Yukawa- und Gaußfunktionen zu *parametrisieren*; diese Parametrisierungen sind in Anhang H angegeben.

Kapitel 4

Pion- und Photoabsorption an ^{12}C

4.1 Der totale Wirkungsquerschnitt

Wir benutzen nun das in Kapitel 3 entwickelte Modell für die Compton-Streuung und elastische Pion-Streuung an Kernen, um die *Pion-* und *Photoabsorption an* ^{12}C zu berechnen.

Die Amplituden $\mathcal{M}_{\gamma'\gamma}$ und $\mathcal{M}_{\pi'\pi}$, die die Photon- und Pionstreuung beschreiben, haben wir in Abschnitt 3.1 definiert. Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt für Compton-Streuung am Kern folgt aus dieser Definition der Amplitude im *nichtrelativistischen Grenzfall*, im *γ-Kern-CMS* [24, 44]:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\lambda'}\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{M_A}{\sqrt{s}} \mid \mathcal{M}_{\gamma'\gamma} \mid^2 , \tag{4.1}$$

wobei M_A die Masse des Kerns und $\sqrt{s}$ die Gesamtenergie des Photon-Kern-Systems ist. Für die Helizität des einlaufenden *reellen* Photons gilt $\lambda = \pm 1$.
Durch das *optische Theorem* [25] ist eine Beziehung zwischen dem *totalen Wirkungsquerschnitt* für Photoabsorption und der Amplitude $\mathcal{M}_{\gamma\gamma}$ für Compton-Streuung unter dem Streuwinkel $\vartheta = 0°$ gegeben:

$$\sigma^{\gamma}_{\text{tot}} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda}\frac{1}{\mid \vec{k} \mid}\frac{\sqrt{M_A}}{\sqrt[4]{s}}\ \text{Im}[-\mathcal{M}_{\gamma\gamma}] \quad . \tag{4.2}$$

Dabei haben wir benutzt, daß Compton-Streuung ein elastischer Prozeß ist und daher bei einem Streuwinkel $\vartheta = 0°$ ein- und auslaufendes Photon *identisch* sind und damit auch $\lambda' = \lambda$ gilt.
Aus Gleichung 3.1 für $\mathcal{M}_{\gamma'\gamma}$ folgt für die Amplitude $\mathcal{M}_{\gamma\gamma}$ der Compton-Streuung unter Streuwinkel $\vartheta = 0°$:

$$\mathcal{M}_{\gamma\gamma} = \langle 0^+ \mid \tilde{F}^{\text{eff}}_{\gamma N\Delta}(\vec{k})\, G\, \tilde{F}^{\dagger\text{eff}}_{\gamma N\Delta}(\vec{k}) \mid 0^+ \rangle \tag{4.3}$$

und für den totalen Wirkungsquerschnitt folgt:

$$\sigma^{\gamma}_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \frac{1}{|\vec{k}|} \frac{\sqrt{M_A}}{\sqrt[4]{s}} \, \text{Im} \Big[- \langle 0^+ \mid \tilde{F}^{\text{eff}}_{\gamma N \Delta}(\vec{k}) \, G \, \tilde{F}^{\dagger \text{eff}}_{\gamma N \Delta}(\vec{k}) \mid 0^+ \rangle \Big] \quad . \tag{4.4}$$

Da der Gesamtdrehimpuls $(j_t \, m_t)$ der Δ-Loch-Zustände eine *gute Quantenzahl* ist, erhalten wir den totalen Wirkungsquerschnitt durch Addition der Beiträge der verschiedenen Multipole:

$$\sigma^{\gamma}_{\text{tot}} = \sum_{j_t, m_t} \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \frac{1}{|\vec{k}|} \frac{\sqrt{M_A}}{\sqrt[4]{s}} \, \text{Im} \Big[- \Big(\langle 0^+ \mid \tilde{F}^{\text{eff}}_{\gamma N \Delta}(\vec{k}) \, G \, \tilde{F}^{\dagger \text{eff}}_{\gamma N \Delta}(\vec{k}) \mid 0^+ \rangle \Big)^{(j_t \, m_t)} \Big] \quad . \tag{4.5}$$

Mit der Definition des Doorway-Zustands (Gl. 3.3) und des kohärenten Zustands $\mid \Psi \, , \, j_t \, m_t \rangle$ (Gl. 3.5) ergibt sich der totale Wirkungsquerschnitt zu:

$$\sigma^{\gamma}_{\text{tot}} = \sum_{j_t, m_t} \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \frac{1}{|\vec{k}|} \frac{\sqrt{M_A}}{\sqrt[4]{s}} \, \text{Im} [- \langle \rho \, , \, j_t \, m_t \mid G \mid \rho \, , \, j_t \, m_t \rangle] \tag{4.6}$$

$$= \sum_{j_t, m_t} \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \frac{1}{|\vec{k}|} \frac{\sqrt{M_A}}{\sqrt[4]{s}} \, \text{Im} [- \langle \rho \, , \, j_t \, m_t \mid \Psi \, , \, j_t \, m_t \rangle] \quad . \tag{4.7}$$

Entsprechend gilt für den totalen Wirkungsquerschnitt für Pionabsorption am Kern:

$$\sigma^{\pi}_{\text{tot}} = \sum_{j_t, m_t} \frac{1}{|\vec{q}|} \frac{\sqrt{M_A}}{\sqrt[4]{s}} \, \text{Im} [- \langle \rho_{\pi} \, , \, j_t \, m_t \mid \Psi_{\pi} \, , \, j_t \, m_t \rangle] \quad . \tag{4.8}$$

4.2 Festlegen der Anregungsoperatoren im Kern

Der in Abschnitt 3.1 eingeführte Operator $\tilde{F}^{\dagger \text{eff}}_{\gamma N \Delta}$ berücksichtigt, daß dieser Operator im γ-*Kern-CMS* angewendet wird, während der Vertexoperator $\tilde{F}^{\dagger}_{\gamma N \Delta}$ im γ-*Nukleon-CMS* definiert worden ist. Beim Übergang vom γ-*Nukleon-CMS* zum γ-*Kern-CMS* machen wir die sogenannte *"frozen approximation"*, d.h. wir nehmen an, daß alle Nukleonen im Kern den *gleichen* Impuls haben; denn dadurch behält, wie wir sehen werden, $\tilde{F}^{\dagger \text{eff}}_{\gamma N \Delta}$ die gleiche Spinstruktur wie $\tilde{F}^{\dagger}_{\gamma N \Delta}$. Unter dieser Näherung gilt im γ-*Kern-CMS* für einen Kern mit A Nukleonen:

$$\text{Photonimpuls } \vec{k} \quad \Longrightarrow \quad \text{Nukleonimpuls } \vec{p} = -\frac{\vec{k}}{A} \tag{4.9}$$

und für die Gesamtenergie des Δ's gilt:

$$\sqrt{s} \;=\; \sqrt{(k+E_N)^2-(\frac{A-1}{A}\,\vec{k})^2} \qquad\qquad \text{mit:}\;\; E_N \;=\; \sqrt{M_N^2+\frac{k^2}{A^2}}\;\;. \tag{4.10}$$

Durch *Lorentz-Transformation* mit $\vec{\beta} = (\vec{k}+\vec{p})/(k+E_N)$ folgt für den Photonimpuls $\vec{k}'$ im *γ-Nukleon-CMS*:

$$\vec{k}' \;=\; \frac{E_N}{\sqrt{s}}\,\vec{k} \;-\; \frac{k}{\sqrt{s}}\,\vec{p} \;=\; \frac{E_N + k\,/\,A}{\sqrt{s}}\,\vec{k}\;\;. \tag{4.11}$$

In Abschnitt 2.2 haben wir den $\gamma N\Delta$-Vertexoperator in der folgenden Weise festgelegt (*γ-Nukleon-CMS*):

$$\tilde{F}^{\dagger}_{\gamma N\Delta}(\vec{k}') \;=\; \frac{\tilde{g}_{\gamma N\Delta}}{M_\Delta}\left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}\times\vec{k}'\right)\cdot\vec{S}^{\dagger}\;T_3^{\dagger}\;\;. \tag{4.12}$$

Zur Beschreibung der Compton-Streuung an ^{12}C definieren wir daher den effektiven Anregungsoperator

$$\tilde{F}^{\dagger\,\mathrm{eff}}_{\gamma N\Delta}(\vec{k}) \;:=\; \frac{\tilde{g}_{\gamma N\Delta}}{M_\Delta}\left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}\times c(k)\,\vec{k}\right)\cdot\vec{S}^{\dagger}\;T_3^{\dagger}\;\;, \tag{4.13}$$

wobei:

$$c(k) \;:=\; \frac{E_N + 4\,k\,/\,A}{\sqrt{s}}\;\;. \tag{4.14}$$

Form und Position der Resonanzverteilung des Δ's werden durch Änderungen in der Näherung, d.h. durch Annahme eines anderen mittleren Nukleonimpulses, nicht beeinflußt, sondern nur die *absolute Größe* des totalen Wirkungsquerschnitts wird modifiziert. Deshalb haben wir die Funktion $c(k)$ so gewählt, daß wir eine bessere Übereinstimmung in der absoluten Größe mit dem experimentell gemessenen totalen Wirkungsquerschnitt erreichen.

In Abschnitt 2.1.2 haben wir den $\pi N\Delta$-Vertexoperator im *π-Nukleon-CMS* festgelegt:

$$F^{\dagger}_{\pi N\Delta}(\vec{q}') \;=\; \frac{g_{\pi N\Delta}}{M_\pi}\,v(q')\,\left(\vec{q}'\cdot\vec{S}^{\dagger}\right)\;T_\alpha^{\dagger}\;\;. \tag{4.15}$$

Wie im Falle der Compton-Streuung machen wir für den Anregungsoperator im *π-Kern-CMS* den Ansatz:

$$F^{\dagger\,\mathrm{eff}}_{\pi N\Delta}(\vec{q}) \;:=\; \frac{g_{\pi N\Delta}}{M_\pi}\,v(q)\,\left(c(q)\,\vec{q}\cdot\vec{S}^{\dagger}\right)\;T_\alpha^{\dagger}\;\;. \tag{4.16}$$

wobei $c(q)$ durch Gleichung 4.14 gegeben ist.

4.3 Ergebnisse zur Photoabsorption an ^{12}C

In diesem Abschnitt präsentieren wir unsere Ergebnisse zur Photoabsorption an ^{12}C. Wir wollen dabei die Effekte, die vom mittleren Δ-Kern-Potential, dem Spreading-Potential und der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung verursacht werden, im einzelnen untersuchen. Besondere Beachtung werden wir dabei dem Vergleich der Rechnungen mit verschiedenen Modellen für die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung schenken.

Die langgestrichelte Kurve in Abbildung 4.1 zeigt den mit der Nukleonenzahl $A = 12$ multiplizierten totalen Wirkungsquerschnitt der Photoabsorption am Nukleon, auch als *"inkohärente Summe"* bezeichnet, im Vergleich mit den experimentellen Daten. Man erkennt, daß die "inkohärente Summe" die Daten qualitativ richtig beschreibt und insbesondere die Peak-Position richtig wiedergibt. Dies ist ein Indiz für die ursprüngliche These, daß vom Photon angeregte und damit spin-transversale ΔN^{-1}-Anregungen durch die Propagation im Medium nur wenig beeinflußt werden.

Die durchgezogene Kurve zeigt die Rechnung für den totalen Wirkungsquerschnitt der Photoabsorption an ^{12}C bei Vernachlässigung des Spreading-Potentials und der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung, d.h. $W_{\text{Spread}} = 0$ und $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = 0$. Für die Tiefe des mittleren Δ-Kern-Potentials haben wir $U_0 = -65$ MeV angenommen, entsprechend unserer Vorstellung, daß sich das Δ im Kern im gleichen mittleren Potential bewegt wie das Nukleon. Im Vergleich mit der inkohärenten Summe stellen wir fest, daß die Resonanz aufgrund der *Fermi-Bewegung* der Nukleonen im Kern verbreitert ist. In dieser Rechnung ist ein Untergrund von *s-Wellen Pion-Photoproduktion* enthalten, den wir strichpunktiert eingetragen haben. Diesen Untergrund haben wir auch "inkohärent" behandelt, d.h. wir haben den Wirkungsquerschnitt der s-Wellen Pion-Photoproduktion *am Nukleon* aus Anhang B übernommen und mit A multipliziert.

In Abbildung 4.2 zeigen wir als strichpunktierte Kurve noch einmal die Rechnung mit $W_{\text{Spread}} = 0$ und $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = 0$. Bei der Berechnung der kurzgestrichelten Kurve haben wir zusätzlich das Spreading-Potential berücksichtigt, das Prozesse höherer Ordnung, wie z.B. intermediäre $2N2N^{-1}$-Zustände beschreibt und aufgrund dieser inelastischen Prozesse nicht nur einen Realteil besitzt, sondern auch einen Imaginärteil. Die Tiefe des Spreading-Potentials haben wir dabei als $W_0 = 30 - i40$ MeV gewählt. Berücksichtigung dieser Prozesse führt zu einer weiteren Verbreiterung der Resonanz und zu einer Verschiebung der Peak-Position um ca. 25 MeV zu höheren Energien hin. Der Grund für diese Verschiebung ist der repulsive Realteil, der die Tiefe des Einteilchpotentials um 30 MeV auf -35 Mev reduziert.
Die durchgezogene Kurve in Abbildung 4.2 zeigt die Rechnung unter Einschluß von Spreading-Potential und ΔN^{-1}-Restwechselwirkung. Die Restwechselwirkung haben wir dabei als

$$V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}}(\omega, r) = \hat{V}_\pi(\omega, r) = V_\pi(\omega, r)\, g(r) \qquad (4.17)$$

angenommen. Entgegen der ursprünglichen Erwartung stellen wir fest, daß die Resonanz noch weiter verbreitert wird und die Peak-Position um nochmals ca. 25 MeV energetisch

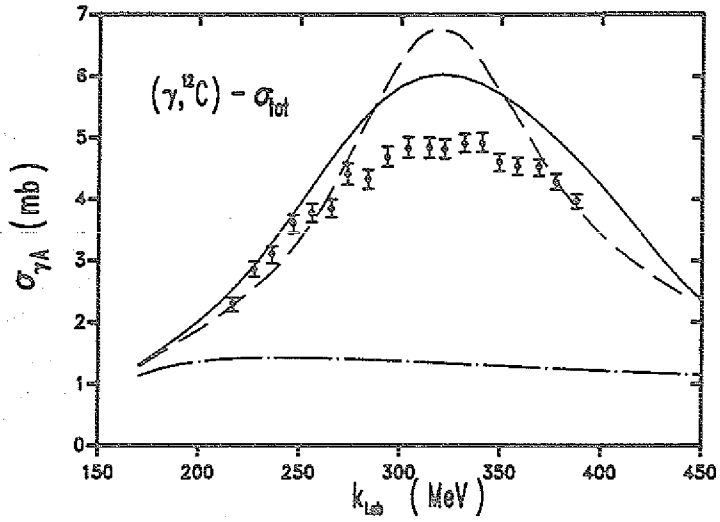


Abbildung 4.1: Totaler Wirkungsquerschnitt für Photoabsorption an ^{12}C. Die *langgestrichelte* Kurve ist die *"inkohärente Summe"* der Photoabsorption an den einzelnen Nukleonen. Die *durchgezogene* Kurve zeigt die Rechnung für $U_0 = -65$ MeV , $W_{\text{Spread}} = 0$ und $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = 0$. Der Untergrund von s-Wellen Pion-Photoproduktion ist *strich-punktiert* dargestellt. Die Daten stammen von Rost et al. [3].

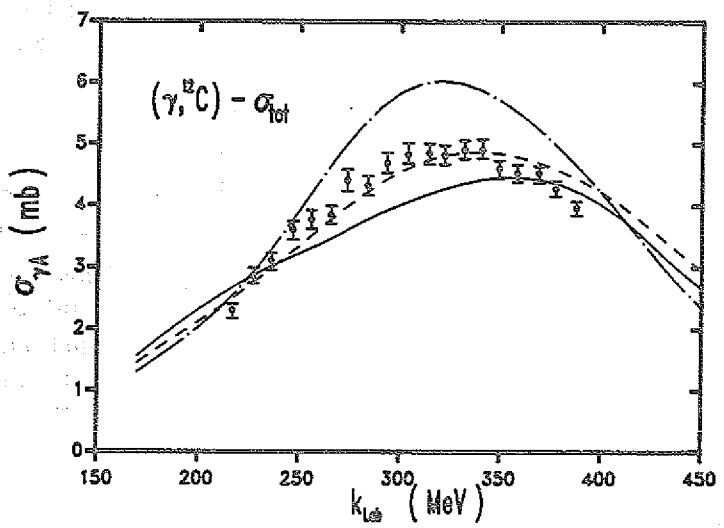


Abbildung 4.2: Totaler Wirkungsquerschnitt für Photoabsorption an ^{12}C. Die *strich-punktierte* Kurve zeigt die Rechnung für $U_0 = -65$ MeV, $W_{\text{Spread}} = 0$ und $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = 0$. Die *kurzgestrichelte* Kurve zeigt die Rechnung für $U_0 = -65$ MeV, $W_0 = 30 - i40$ MeV und $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = 0$. In der als *durchgezogene* Kurve dargestellten Rechnung haben wir neben dem mittleren Δ-Kern-Potential und dem Spreading-Potenital auch die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung berücksichtigt, wobei wir die Wechselwirkung aus Gl. 4.17 benutzt haben.

nach oben verschoben wird. Dies deutet darauf hin, daß auch spin-transversal angeregte ΔN^{-1}-Zustände durch die Restwechselwirkung beeinflußt werden.

Bei allen im folgenden gezeigten Rechnungen wird das mittlere Δ-Kern-Potential und das Spreading-Potential berücksichtigt, wobei wir $U_0 = -65$ MeV und $W_0 = 30 - i40$ MeV festgelegt haben.

Um die Effekte der Restwechselwirkung im Einzelnen zu untersuchen, nehmen wir in den Abbildungen 4.3 und 4.4 eine *Multipolentwicklung* des totalen Wirkungsquerschnitts vor. In Abbildung 4.3 sind die kurz- bzw. langgestrichelten Kurven die Multipole 1^+ und 2^-, wobei $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = 0$ gesetzt ist; die strichpunktierte bzw. durchgezogene Kurve zeigen die entsprechenden Multipole unter Einschluß der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung aus Gleichung 4.17. Die Abbildung 4.4 zeigt entsprechend die Multipole 1^- und 2^+. Wie wir sehen, werden durch das Photon im Kern sowohl Multipole mit *natürlicher Parität* (1^- und 2^+), als auch Multipole *unnatürlicher Parität* (1^+ und 2^-) mit vergleichbarer Stärke angeregt. Wie in Abbildung 4.3 zu erkennen ist, werden die unnatürlichen und damit *pionartigen* Multipole 1^+ und 2^- durch die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung stark zu niedrigeren Energien hin verschoben. Dies erklärt die Zunahme im Wirkungsquerschnitt in Abbild. 4.2 (durchgezogene Kurve) bei kleinen Energien. Dieses Ergebnis zeigt, daß im *endlichen* Kern spin-transversal angeregte ΔN^{-1}-Zustände unnatürlicher Parität in den spin-longitudinalen Kanal mischen können und diese Kanäle daher nicht entkoppelt sind, wie es z.B. in *Kernmaterie* der Fall wäre. Die natürlichen Paritätszustände 1^- und 2^+ werden von der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung zu höheren Energien hin verschoben. Dies ist zunächst überraschend, da die natürlichen Paritätszustände spin-transversale ΔN^{-1}-Zustände sind und deshalb von einer rein spin-longitudinalen Wechselwirkung nicht beeinflußt werden sollten.

Der Grund für diese Verhalten wird klar, wenn wir die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung im *Impulsraum* untersuchen. Abbildung 4.5 zeigt für den Energieübertrag $\omega = 300$ MeV verschiedene Potentiale im spin-longitudinalen Kanal. Die kurzgestrichelte Kurve in Abbildung 4.5 zeigt das π-Austauschpotential V_π. Die phänomenologische δ-Kraft V_δ mit $g'_{\Delta\Delta} = 1/3$ ist strichpunktiert aufgetragen und die Summe $V_\pi + V_\delta$ ist langgestrichelt dargestellt. Die durchgezogene Kurve schließlich zeigt das mit der Korrelationsfunktion multiplizierte π-Austauschpotential aus Gl. 4.17. Wir erkennen, daß das π-Austauschpotential sowohl durch Multiplikation mit der Korrelationsfunktion, als auch durch Addition der δ-Kraft nach "oben" geschoben wird und damit repulsiver wird; dabei ist die Verschiebung durch die δ-Kraft geringfügig größer als die durch die Korrelationsfunktion. Da es sich bei der δ-Kraft um eine *Zentralkraft* handelt, sie also auch einen spin-transversalen Anteil hat, müssen wir diesen natürlich auch bei den Berechnungen im spin-transversalen Kanal berücksichtigen. Entsprechend wird durch die Multiplikation des π-Austauschpotentials mit der Korrelationsfunktion der rein spin-longitudinale Charakter des korrelierten π-Austauschpotentials gebrochen. Abbildung 4.6 zeigt diese spin-transveralen Anteile der Potentiale ebenfalls bei einem Energieübertrag von $\omega = 300$ MeV . Die gestrichelte Kurve zeigt den spin-transversalen Anteil von $\hat{V}_\pi$ und die durchgezogene Kurve den spin-transversalen Anteil von V_δ .

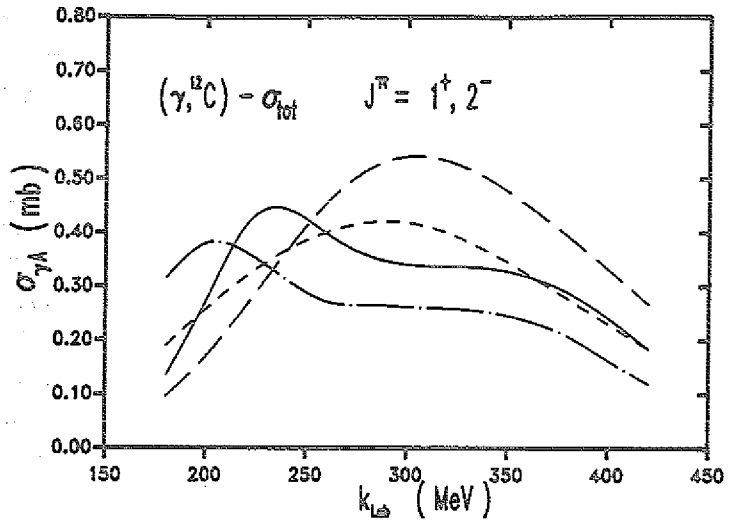


Abbildung 4.3: Beiträge der *unnatürlichen Paritäten* $J^\pi = 1^+, 2^-$ zum totalen Wirkungsquerschnitt für Photoabsorption an ^{12}C. Die *kurz-* und *langgestrichelte* Kurve zeigen die Multipole 1^+ und 2^- bei einer Rechnung mit $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = 0$. Die *strichpunktierte* und *durchgezogene* Kurve zeigen diese Multipole bei Berücksichtigung der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung aus Gl. 4.17.

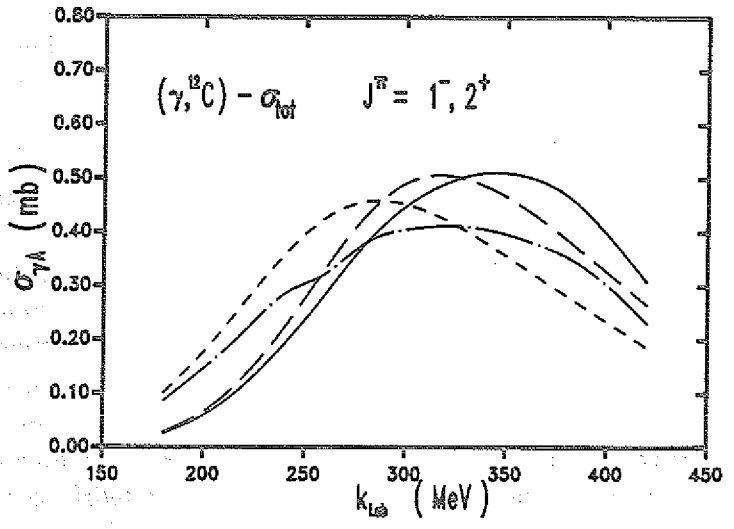


Abbildung 4.4: Beiträge der *natürlichen Paritäten* $J^\pi = 1^-, 2^+$ zum totalen Wirkungsquerschnitt für Photoabsorption an ^{12}C. Die *kurz-* und *langgestrichelte* Kurve zeigen die Multipole 1^- und 2^+ bei einer Rechnung mit $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = 0$. Die *strichpunktierte* und *durchgezogene* Kurve zeigen diese Multipole bei Berücksichtigung der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung aus Gl. 4.17.

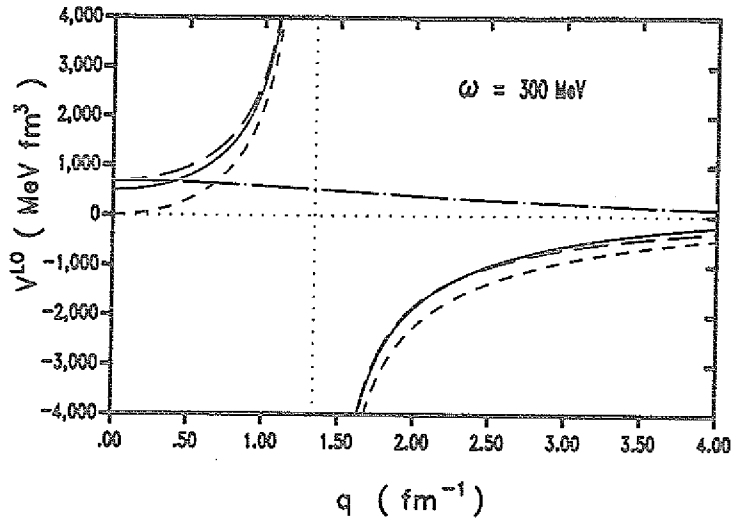


Abbildung 4.5: Verschiedene Potentiale im *spin-longitudinalen Kanal* für $\omega = 300$ MeV. Die phänomenologische *δ-Kraft* für $g'_{\Delta\Delta} = 1/3$ ist *strich-punktiert* gezeichnet. Das π-Austauschpotential ist *kurz-gestrichelt* und die Summe von δ-Kraft und π-Austauschpotential ist *lang-gestrichelt* dargestellt. Die *durchgezogene* Kurve zeigt das *korrelierte* π-Austauschpotential aus Gleichung 4.17.

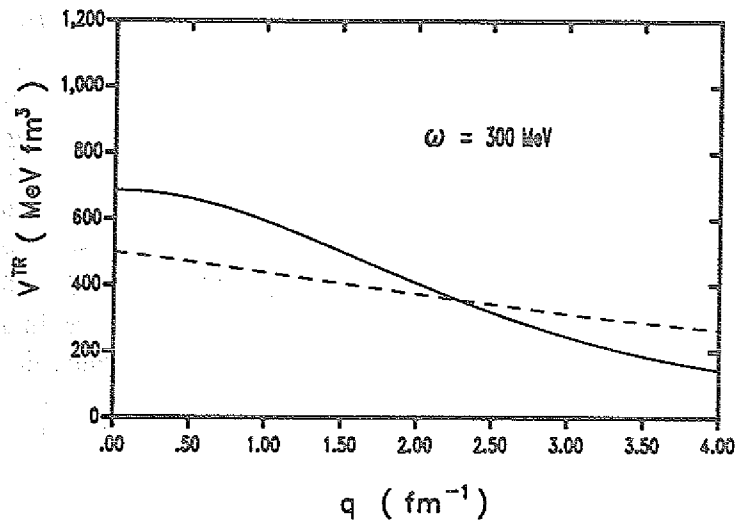


Abbildung 4.6: Verschiedene Potentiale im *spin-transversalen Kanal* für $\omega = 300$ MeV. Die phänomenologische *δ-Kraft* für $g'_{\Delta\Delta} = 1/3$ ist *durchgezogen* gezeichnet. Die *gestrichelte* Kurve zeigt das *korrelierte* π-Austauschpotential aus Gleichung 4.17.

Da dieser Anteil der Potentiale im gesamten relevanten Impulsbereich *positiv* ist, führt dies zu der in Abbildung 4.4 beobachteten Repulsion in spin-transversalen Kanal.

Ein Maß für die durch die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung hevorgerufene Verschiebung der Δ-Peakposition ist die *Energieverschiebung* $\Delta E^{(j_t m_t)}$. Diese ist definiert durch den Erwartungswert:

$$\Delta E^{(j_t m_t)} := \langle \Psi , j_t m_t \mid V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} \mid \Psi , j_t m_t \rangle \quad . \tag{4.18}$$

Im *Impulsraum* erhalten wir für dieses Matrixelement:

$$\Delta E^{(j_t m_t)} = \int \frac{dq}{(2\pi)^3} \Big[V^{LO}_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}}(\omega , q)\ q^2\ M^{(j_t m_t)}_{LO}(\omega , q) + V^{TR}_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}}(\omega , q)\ q^2\ M^{(j_t m_t)}_{TR}(\omega , q) \Big] \quad . \tag{4.19}$$

Dabei sind $M^{(j_t m_t)}_{LO}(\omega , q)$ und $M^{(j_t m_t)}_{TR}(\omega , q)$ die Quadrate der *Übergangsdichten* im spin-longitudinalen und spin-transversalen Kanal.

Die gestrichelten Kurven in den Abbildungen 4.7 und 4.8 zeigen die mit q^2 multiplizierten Quadrate der Übergangsdichten des Zustands $J^\pi = 1^+ , L = 0$ im spin-longitudinalen und spin-transversalen Kanal für die Energie $\omega = 300$ MeV. Die durchgezogenen Kurven sind die zugehörige ΔN^{-1}-Restwechselwirkung $\hat{V}_\pi$. Durch "Faltung" der Übergangsdichte mit dem Potential erkennen wir aus 4.7, daß im spin-transversalen Kanal eine starke *repulsive* Energieverschiebung auftritt. Im spin-longitudinalen Kanal ergibt sich dagegen, wie wir in Abbildung 4.8 sehen, nur eine geringfügige Attraktion . Die Abbildungen 4.9 und 4.10 zeigen die entsprechenden Kurven für die Energie $\omega = 200$ MeV. Wir erkennen hier, daß im spin-transversalen Kanal (Abbild. 4.9) wieder eine repulsive Energieverschiebung auftritt, die für $\omega = 200$ MeV aber geringer ausfällt als für $\omega = 300$ MeV. Im spin-longitudinalen Kanal (Abbild. 4.10) fällt der Peak in der Übergangsdichte mit dem *Pion-Pol* zusammen und führt zu der in Abbildung 4.3 beobachteten sehr starken *Attraktion* auf der niederenergetischen Seite der Δ-Resonanz.

Die hier im Detail untersuchten Energieverschiebungen führen zu der in Abbildung 4.2 beobachteten Verbreiterung der Resonanz und der Verschiebung der Peak-Position zu höheren Energien.

In den Abbildungen 4.11 und 4.12 zeigen wir Rechnungen für den totalen Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitt für verschiedene ΔN^{-1}-Restwechselwirkungen. Die kurzgestrichelte Kurve in Abbildung 4.11 zeigt eine Rechnung ohne ΔN^{-1}-Restwechselwirkung, die langgestrichelte Kurve hingegen die Rechnung mit $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = V_\pi$. Die Rechnungen unter Berücksichtigung der Korrelationsfunktion $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = \hat{V}_\pi$ oder bei

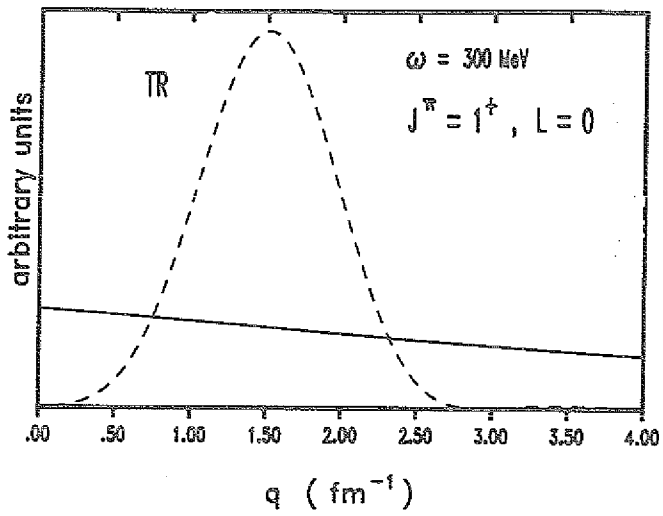


Abbildung 4.7: ΔN^{-1}-Restwechselwirkung und $\mathrm{Re}\left[q^2\, M_{TR}^{(j_t\, m_t)}\right]$ für $\omega = 300$ MeV. $\mathrm{Re}\left[q^2\, M_{TR}^{(j_t\, m_t)}\right]$ zum Multipol 1^+ mit Bahndrehimpuls $L = 0$ ist *gestrichelt* gezeichnet. Die *durchgezogene* Kurve zeigt die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung aus Gl. 4.17.

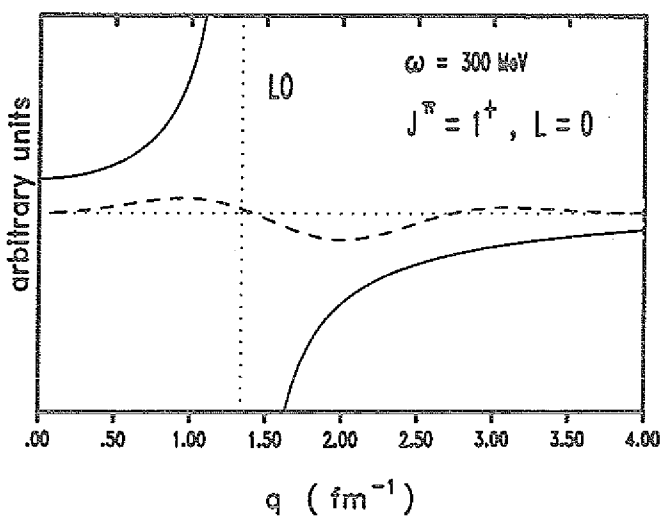


Abbildung 4.8: ΔN^{-1}-Restwechselwirkung und $\mathrm{Re}\left[q^2\, M_{LO}^{(j_t\, m_t)}\right]$ für $\omega = 300$ MeV. $\mathrm{Re}\left[q^2\, M_{LO}^{(j_t\, m_t)}\right]$ zum Multipol 1^+ mit Bahndrehimpuls $L = 0$ ist *gestrichelt* gezeichnet. Die *durchgezogene* Kurve zeigt die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung aus Gl. 4.17.

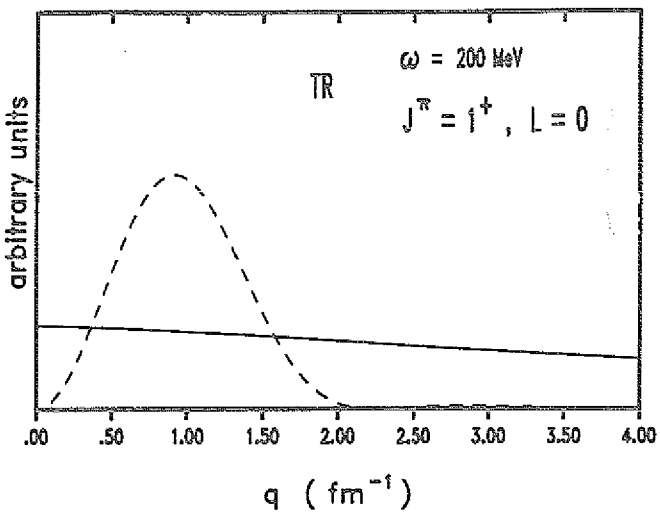


Abbildung 4.9: ΔN^{-1}-Restwechselwirkung und $\mathrm{Re}\left[q^2\, M_{TR}^{(j_t\, m_t)}\right]$ für $\omega = 200$ MeV. $\mathrm{Re}\left[q^2\, M_{TR}^{(j_t\, m_t)}\right]$ zum Multipol 1^+ mit Bahndrehimpuls $L = 0$ ist *gestrichelt* gezeichnet. Die *durchgezogene* Kurve zeigt die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung aus Gl. 4.17.

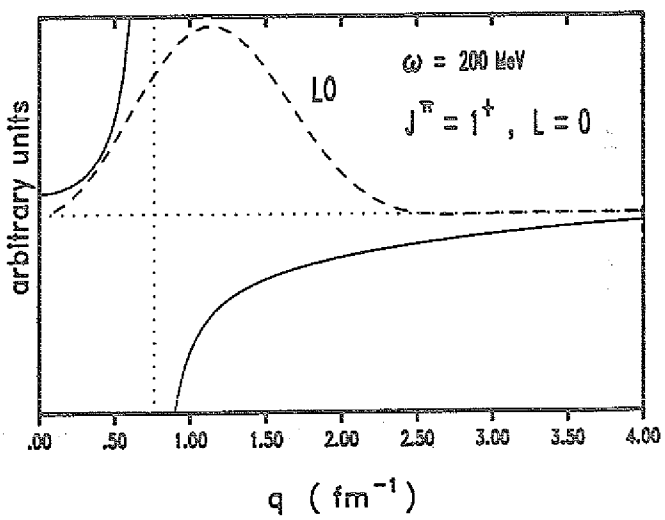


Abbildung 4.10: ΔN^{-1}-Restwechselwirkung und $\mathrm{Re}\left[q^2\, M_{LO}^{(j_t\, m_t)}\right]$ für $\omega = 200$ MeV. $\mathrm{Re}\left[q^2\, M_{LO}^{(j_t\, m_t)}\right]$ zum Multipol 1^+ mit Bahndrehimpuls $L = 0$ ist *gestrichelt* gezeichnet. Die *durchgezogene* Kurve zeigt die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung aus Gl. 4.17.

Addition einer δ-Kraft $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = V_\pi + V_\delta$ (durchgezogene und strichpunktierte Kurve) zeigen eine Verschiebung der Peak-Position zu höheren Energien hin, wobei die δ-Kraft die Peak-Position stärker verschiebt. Dies entspricht unseren Beobachtungen für das Verhalten der Potentiale in den Abbildungen 4.5 und 4.6. Denn das π-Austauschpotential allein ist rein spin-longitudinal und attraktiv; erst durch Addition der δ-Kraft oder Multiplikation mit der Korrelationsfunktion erhält die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung einen repulsiven spin-transversalen Anteil, wobei die δ-Kraft repulsiver ist als $\hat{V}_\pi$.

Um zu untersuchen, inwieweit unsere bisherigen Ergebnisse, bei denen nur das π-Meson berücksichtigt wurde, durch das ρ-Meson modifiziert werden, haben wir auch Rechnungen mit dem ρ-Austauschpotential durchgeführt. In Abbildung 4.12 zeigt die kurzgestrichelte Kurve wieder die Rechnung mit $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = 0$, die langgestrichelte Kurve die Rechnung mit $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = V_\pi + V_\rho$ und die durchgezogene Kurve die Rechnung mit $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = \hat{V}_\pi + \hat{V}_\rho$. Wie wir sehen ist das Verhalten bei Einschluß des ρ-Austauschpotentials qualitativ das gleiche wie in Abbild. 4.11. Der Grund dafür ist, daß das π-Austauschpotential aufgrund seines Pols die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung dominiert und das ρ-Austauschpotential daher den Effekt nur noch geringfügig verstärkt.

4.4 Ergebnisse zur Pionabsorption an ^{12}C

In diesem Abschnitt stellen wir unsere Ergebnisse zur Pionabsorption an ^{12}C vor. Nachdem wir uns im vorangegangenen Abschnitt mit den Effekten der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung bei der Photoabsorption an ^{12}C im Detail beschäftigt haben, wollen wir nun untersuchen, ob wir eine *konsistente* Beschreibung von Pion- und Photoabsorption mit den verschiedenen Modellen der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung erreichen können.

Die strichpunktierte Kurve in Abbildung 4.13 zeigt den mit $A = 12$ multiplizierten totalen Wirkungsquerschnitt der Pionabsorption *am Nukleon*. Im Gegensatz zu unserer Beobachtung bei der Photoabsorption (Abbild. 4.1) stellen wir bei Vergleich mit den experimentellen Daten fest, daß die "inkohärente Summe" die Daten *nicht* richtig beschreibt; insbesondere liegt der Peak der inkohärenten Summe bei ca. 180 MeV Einschußenergie des Pions, während die Daten ihren Peak bei ca. 130 MeV Einschußenergie haben. Dies bedeutet, daß die durch das Pion spin-longitudinal angeregten ΔN^{-1}-Zustände bei ihrer Propagation im Medium einer stark attraktiven Wechselwirkung unterliegen.

Die kurzgestrichelte Kurve in Abbildung 4.13 zeigt die Rechnung ohne ΔN^{-1}-Restwechselwirkung ($V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = 0$), wobei wir, wie bei den Rechnungen zur Photoabsorption, die Tiefe des mittleren Δ-Kern-Potentials mit $U_0 = -65$ MeV und die Tiefe des Spreading-Potentials mit $W_0 = 30 - i\,40$ MeV angenommen haben. Beim Vergleich mit der inkohärenten Summe stellen wir fest, daß bei beiden Rechnungen der Peak an der gleichen Stelle liegt. Die durchgezogene Kurve stellt die Rechnung mit $\hat{V}_\pi$ dar. Wie wir sehen, wird die Peak-Postion durch die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung zu niedrigeren Energien hin verschoben und beschreibt damit die Daten qualitativ richtig.

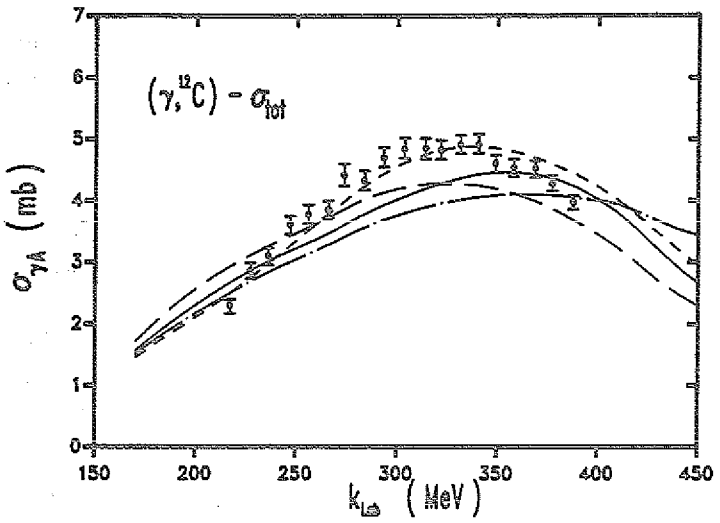


Abbildung 4.11: Totaler Wirkungsquerschnitt für Photoabsorption an ^{12}C für verschiedene ΔN^{-1}-Restwechselwirkungen. Die *kurz-gestrichelte* Kurve zeigt die Rechnung mit $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = 0$. Die *durchgezogene* Kurve ist das Ergebnis für die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung aus Gleichung 4.17, die *lang-gestrichelte* Kurve für $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = V_\pi$ und die *strich-punktierte* Kurve für $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = V_\pi + V_\delta$, wobei $g' = 1/3$ gewählt ist.

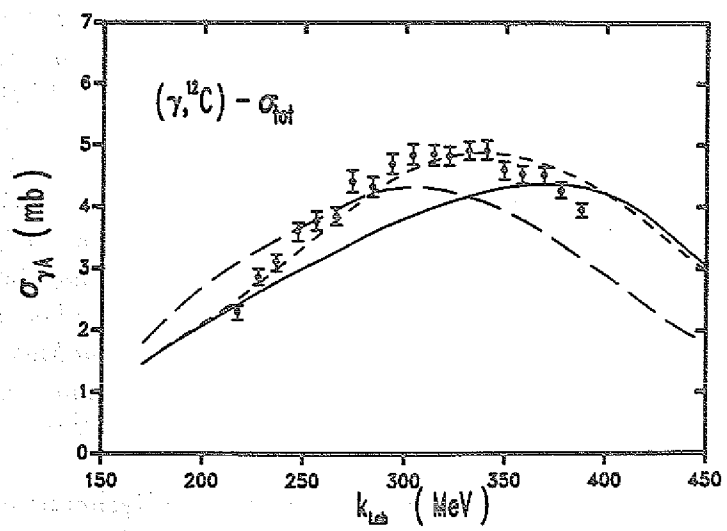


Abbildung 4.12: Totaler Wirkungsquerschnitt für Photoabsorption an ^{12}C für verschiedene ΔN^{-1}-Restwechselwirkungen. Die *kurz-gestrichelte* Kurve zeigt die Rechnung mit $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = 0$. Die *lang-gestrichelte* Kurve ist das Ergebnis für $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = V_\pi + V_\rho$ und die *ausgezogene* Kurve für $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = \hat{V}_\pi + \hat{V}_\rho$.

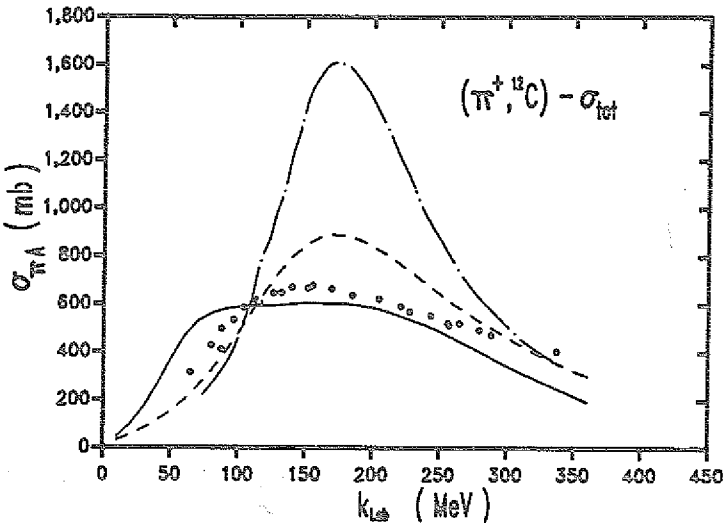


Abbildung 4.13: Totaler Wirkungsquerschnitt für π^+-Absorption an ^{12}C. Die *strichpunktierte* Kurve ist die *"inkohärente Summe"* der Pionabsorption an den Nukleonen des Kerns. Die *kurz-gestrichelte* Kurve zeigt die Rechnung für $V = 0$ und die *durchgezogene* Kurve die Rechnung für $V = \hat{V}_\pi$. Die Daten stammen von Carroll et al. [2].

Dies bestätigt unsere Vorstellung, daß die experimentell beobachtete Verschiebung durch die im spin-longitudinalen Kanal attraktive ΔN^{-1}-Restwechselwirkung verursacht wird.

In Abbildung 4.14 stellt die kurzgestrichelte Kurve wieder die Rechnung ohne ΔN^{-1}-Restwechselwirkung und die durchgezogene Kurve die Rechnung mit $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = \hat{V}_\pi$ dar. Zum Vergleich haben wir außerdem die Rechnung mit einem reinen π-Austauschpotential (langgestrichelte Kurve) und die Rechnung für $V_\pi + V_\delta$ (strichpunktierte Kurve) eingetragen. Wir stellen fest, daß das π-Austauschpotential im spin-longitudinalen Kanal viel zu attraktiv ist. Erst durch Multiplikation mit der Korrelationsfunktion oder Addition der phänomenologischen δ-Kraft wird die Attraktion soweit verringert, daß die Daten qualitativ richtig beschrieben werden. Wie bei der Photoabsorption erkennen wir, daß $V_\pi + V_\delta$ mit $g'_{\Delta\Delta} = 1/3$ etwas repulsiver ist als $\hat{V}_\pi$.

Auch bei der Pionabsorption haben wir Rechnungen mit dem ρ-Austauschpotential durchgeführt, um festzustellen, wie die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung durch die Berücksichtigung des ρ-Mesons modifiziert wird. In Abbildung 4.15 zeigt die kurzgestrichelte Kurve nochmals die Rechnung mit $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = 0$. Die langgestrichelte Kurve stellt die Rechnung für $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = V_\pi + V_\rho$ dar und die durchgezogene Kurve die Rechnung für $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} = \hat{V}_\pi + \hat{V}_\rho$. Auch hier wird durch die zusätzliche Berücksichtigung des ρ-Austauschpotentials das Ergebnis nur geringfügig modifiziert, da die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung vom Pion-Pol dominiert wird.

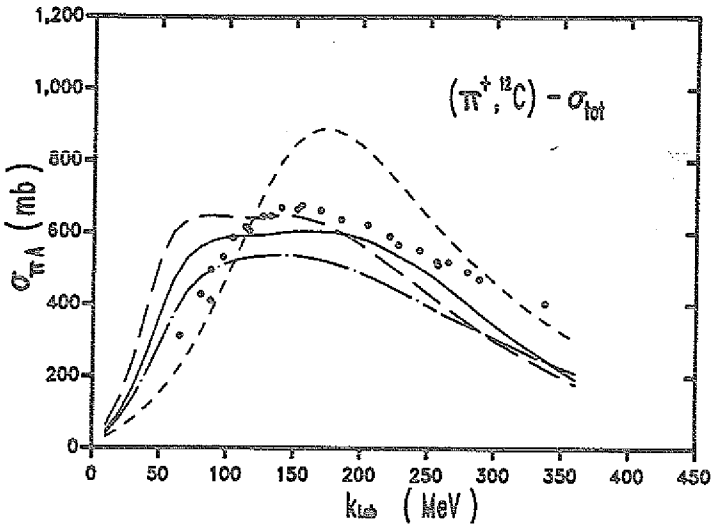


Abbildung 4.14: Totaler Wirkungsquerschnitt für π^+-Absorption an ^{12}C für verschiedene ΔN^{-1}-Restwechselwirkungen. Die *kurz-gestrichelte* Kurve zeigt die Rechnung für $V = 0$, die *durchgezogene* Kurve die Rechnung für $V = \hat{V}_\pi$, die *lang-gestrichelte* Kurve die Rechnung für $V = V_\pi$ und die *strich-punktierte* Kurve die Rechnung für $V = V_\pi + V_\delta$, wobei $g' = 1/3$ ist.

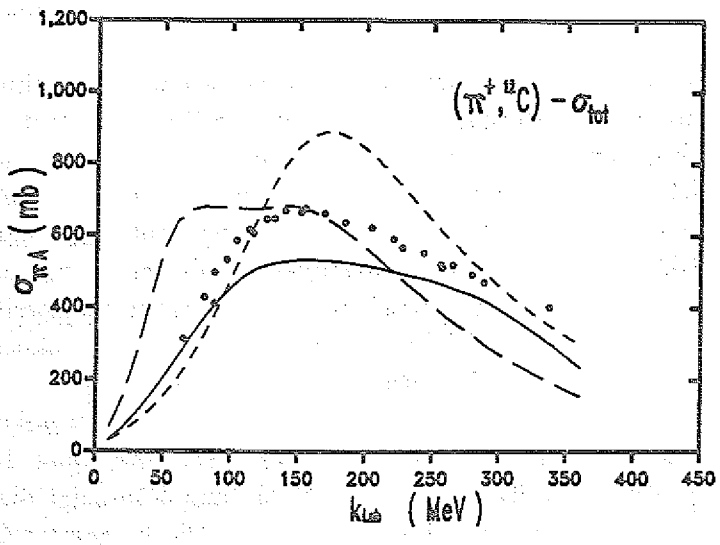


Abbildung 4.15: Totaler Wirkungsquerschnitt für π^+-Absorption an ^{12}C für verschiedene ΔN^{-1}-Restwechselwirkungen. Die *kurz-gestrichelte* Kurve zeigt die Rechnung für $V = 0$. Die *lang-gestrichelte* Kurve zeigt die Rechnung für $V = V_\pi + V_\rho$ und die *ausgezogene* Kurve für $V = \hat{V}_\pi + \hat{V}_\rho$.

Kapitel 5

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die *Pion- und Photoabsorption* an ^{12}C im Δ-Resonanzbereich untersucht. Die experimentellen Daten zeigen, daß die Peak-Position der Δ-Resonanz bei Pionabsorption am Kern gegenüber der am Nukleon zu niedrigeren Energien hin verschoben ist. Andererseits wird bei Photoabsorption solch eine Verschiebung nicht beobachtet. Dieses unterschiedliche Verhalten des Δ's bei Pion- und Photoabsorption kann im Rahmen des ΔN^{-1}-Modells erklärt werden.

Zur theoretischen Untersuchung der Δ-Anregung im Kern benutzen wir einen Isobar-Loch-Formalismus, der die Dynamik des Δ's im Kern explizit beschreibt und die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung berücksichtigt. Wir nehmen an, daß sich das Δ in einem mittleren Δ-Kern-Potential bewegt, welches sich aus dem mittleren Nukleon-Kern-Potential und einem komplexen Spreading-Potential zusammensetzt. Für das *Spreading-Potential* übernehmen wir den Ansatz von Horikawa et al. [11].

Die ΔN^{-1}-*Restwechselwirkung* beschreiben wir im Mesonaustauschbild. Die Wechselwirkung setzt sich zusammen aus π- und ρ-Austausch und einem kurzreichweitigen Anteil, der entweder durch eine phänomenologische δ-Kraft vom Landau-Migdal-Typ oder durch Multiplikation der π- und ρ-Austauschpotentiale mit einer Korrelationsfunktion beschrieben wird.

Da es unser Ziel ist, die Pion- und Photoabsorption *sowie* die Ladungsaustauschreaktionen *konsistent* zu beschreiben, starten wir mit einem Modell für die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung, das von Udagawa et al. [18] bei der Beschreibung von Ladungsaustauschreaktionen entwickelt wurde. Dabei wurde die Restwechselwirkung als Summe von π- und ρ-Austauschpotential und einer phänomenologischen δ-Kraft angenommen. Um die experimentellen Daten zu beschreiben, musste der *Landau-Migdal-Parameter* $g'_{\Delta\Delta} = 1/3$ gewählt werden. Es stellt sich heraus, daß dieses Modell für die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung auch die Pion- und Photoabsorption richtig beschreibt.

Die Analyse der Pion- und Photoabsorptionswirkungsquerschnitte läßt uns zusammenfassend folgende Schlüsse ziehen:

- Die Verschiebung der Peak-Position der Δ-Resonanz bei Pionabsorption am Kern wird durch den attraktiven spin-longitudinalen π-Austausch in der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung bewirkt. Jedoch ist das reine π-Austauschpotential *zu attraktiv*. Daher muß es durch Addition einer phänomenologischen δ-Kraft oder durch Multiplikation mit einer Korrelationsfunktion reduziert werden. Dies führt zwangsläufig dazu, daß die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung auch einen spin-transversalen Anteil erhält.

- Bei der Berechnung der Photoabsorption mußten wir feststellen, daß der spin-longitudinale und spin-transversale Kanal im *endlichen* Kern unerwartet stark koppeln. Dies führt dazu, daß die spin-transversal angeregten ΔN^{-1}-Zustände durch den spin-longitudinalen Anteil der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung eine attraktive Energieverschiebung auf der niederenergetischen Flanke der Δ-Resonanz erfahren.

- Der durch die δ-Kraft bzw. der durch die Korrelationsfunktion hervorgerufene spin-transversale Anteil der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung sorgt bei den Rechnungen zur Photoabsorption für eine Verschiebung der Peak-Position der Δ-Resonanz zu höheren Energien hin, im Widerspruch zu den experimentellen Daten. Eine mögliche Lösung dieses Problem ist die Reduktion der Kopplungsstärke des Pions an den Nukleon-Delta-Vertex. Koch, Moniz und Ohtsuka [12] haben dies erreicht, indem sie den *Cut-off - Parameter* des Pions mit 300 MeV gewählt haben. Wir dagegen benutzen einen Cut-off - Parameter von 780 MeV , der aus der Analyse von Pion-Nukleon-Streudaten [45] folgt und benutzen damit ein effektiv viel "stärkeres" Pion.

- Der Einschluß des ρ-Austauschpotentials modifiziert die ΔN^{-1}-Restwechselwirkung nur geringfügig, da das π-Austauschpotential aufgrund seiner Pol-Struktur die Restwechselwirkung dominiert.

Diese Beobachtungen stimmen mit den bei der Beschreibung der Ladungsaustauschreaktionen erhaltenen Ergebnissen überein. Auch dort konnte man die Verschiebung der Peak-Position der Δ-Resonanz zu niedrigeren Energien durch die vom π-Austauschpotential im spin-longitudinalen Kanal der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung verursachte Attraktion erklären. Die im spin-transversalen Kanal auftretende Repulsion kommt dort nicht zum Tragen, da die hochenergetische Flanke der Δ-Resonanz bei Anregung durch Ladungsaustauschreaktionen aufgrund der Impulsabhängigkeit der Formfaktoren von Projektil und Target stark unterdrückt wird.

Zusammenfassend können wir sagen, daß unser Modell der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung die Pion- und Photoabsorption *sowie* die Ladungsaustauschreaktionen *konsistent* beschreibt.

Anhang A

Berechnung des Wirkungsquerschnitts für Pion-Photoproduktion am Nukleon

In Kapitel 2.1.2 ist der *γ-Nukleon-Delta-Vertexoperator* $F^{\dagger}_{\gamma N\Delta}$ im *γ-Nukleon-CMS* hergeleitet worden:

$$F^{\dagger}_{\gamma N\Delta}(\vec{k}) \;=\; \frac{g_{\gamma N\Delta}}{M_{\Delta}} \left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\,\lambda} \times \vec{k}\right) \cdot \vec{S}^{\dagger}\; T_3^{\dagger} \quad . \tag{A.1}$$

Für den *π-Nukleon-Delta-Vertexoperator* haben wir dort den folgenden Ausdruck gefunden (im *π-Nukleon-CMS*):

$$F_{\pi N\Delta}(\vec{q}) \;=\; \frac{g_{\pi N\Delta}}{M_{\pi}}\, v(q) \left(\vec{q}\cdot\vec{S}\right)\; T_{\alpha} \quad . \tag{A.2}$$

Wenn man die *kartesischen* Vektoren, z.B. $\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\,\lambda}$, in ihre *sphärischen* Komponenten, hier $\varepsilon_{\vec{k}\,\lambda\,(1\,q)}$, umschreibt [27, Kapitel 5.1], erhält man für die Vektor- und Skalarprodukte in den Gleichungen A.1 und A.2:

$$\begin{aligned}\left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\,\lambda} \times \vec{k}\right) \cdot \vec{S}^{\dagger} \;&=\; \left(-i\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\right) k \sum_{\nu\,,\,\mu} (-1)^{\nu} \\ &\quad (1\,\mu{-}\nu\;1\;\;-\mu \mid 1\;\;-\nu)\; \varepsilon_{\vec{k}\,\lambda\,(1\,\mu-\nu)}\; Y_{(1\,-\mu)}(\hat{k})\; S^{\dagger}_{(1\,\nu)}\,, \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\left(\vec{q}\cdot\vec{S}\right) \;=\; \left(\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\right) q \sum_{\kappa} (-1)^{\kappa}\, Y_{(1\,-\kappa)}(\hat{q})\; S_{(1\kappa)} \quad . \tag{A.4}$$

Bei der Herleitung von A.3 ist der Vorzeichenfehler in Gleichung 5.1.8 in [27] zu beachten.

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt im γ-*Nukleon-CMS* gilt [24, 44]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \sum_{m'_N, m_N, \lambda} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{1 + k/E_i} \frac{M_N}{E_i} \frac{M_N}{E_f} \frac{\mid \vec{q} \mid}{\mid \vec{k} \mid} \frac{M_N}{\sqrt{s}} \mid \mathcal{M} \mid^2 \quad . \tag{A.5}$$

Dabei ist $\vec{k}$ der Impuls des einlaufenden Photons, $\vec{q}$ der Impuls des auslaufenden Pions, E_i und E_f sind die Energien des einlaufenden bzw. auslaufenden Nukleons und $\sqrt{s}$ ist die Gesamtenergie des Δ's. Die *invariante Amplitude* $\mathcal{M}$ [44, Anhang B] ist in der folgenden Weise definiert:

$$\mathcal{M} = \langle \frac{1}{2} m'_N, \frac{1}{2} \tau'_N \mid T_{\pi\gamma} \mid \frac{1}{2} m_N, \frac{1}{2} \tau_N \rangle \tag{A.6}$$

mit dem Übergangsoperator:

$$T_{\pi\gamma} = \sum_{m_\Delta, \tau_\Delta} F_{\pi N\Delta} \mid \frac{3}{2} m_\Delta, \frac{3}{2} \tau_\Delta \rangle \frac{1}{\widetilde{D(E)}} \langle \frac{3}{2} m_\Delta, \frac{3}{2} \tau_\Delta \mid F^\dagger_{\gamma N\Delta} \quad . \tag{A.7}$$

Dabei sind m'_N und m_N die Spin-Projektionen des einlaufenden und auslaufenden Nukleons, und τ'_N und τ_N die entsprechenden Isospin-Projektionen.

Einsetzen von A.1 und A.2 in Gleichung A.6 und Ausnutzen von A.3 und A.4 ergibt:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = {} & \frac{g_{\gamma N\Delta}}{M_\Delta} \left(-i \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \right) k \frac{g_{\pi N\Delta}}{M_\pi} \left(\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \right) q\, v(q) \frac{1}{\widetilde{D(E)}} \\ & \sum_{\nu, \mu, \kappa} (-1)^{\nu+\kappa} (1\,\mu - \nu\; 1\; -\mu \mid 1\; -\nu)\, \varepsilon_{\vec{k}\lambda(1\,\mu-\nu)}\, Y_{(1\,-\mu)}(\hat{k})\; Y_{(1\,-\kappa)}(\hat{q}) \\ & \sum_{m_\Delta} \langle \frac{1}{2} m'_N \mid S_{(1\kappa)} \mid \frac{3}{2} m_\Delta \rangle \langle \frac{3}{2} m_\Delta \mid S^\dagger_{(1\,\nu)} \mid \frac{1}{2} m_N \rangle \\ & \sum_{\tau_\Delta} \langle \frac{1}{2} \tau'_N \mid T_\alpha \mid \frac{3}{2} \tau_\Delta \rangle \langle \frac{3}{2} \tau_\Delta \mid T^\dagger_3 \mid \frac{1}{2} \tau_N \rangle \quad . \end{aligned} \tag{A.8}$$

Für die Spin-Matrixelemente gilt:

$$\langle \frac{3}{2} m_\Delta \mid S^\dagger_\nu \mid \frac{1}{2} m_N \rangle = (1\,\nu\, \frac{1}{2} m_N \mid \frac{3}{2} m_\Delta) \quad , \tag{A.9}$$

$$\langle \frac{1}{2} m'_N \mid S_\kappa \mid \frac{3}{2} m_\Delta \rangle = (-1)^\kappa\, (1\; -\kappa\, \frac{1}{2} m'_N \mid \frac{3}{2} m_\Delta) \quad . \tag{A.10}$$

Für die Isospin-Matrixelemente gilt entsprechend:

$$\langle \frac{3}{2}\tau_\Delta \mid T_3^\dagger \mid \frac{1}{2}\tau_N \rangle \;=\; (1\,0\,\frac{1}{2}\tau_N \mid \frac{3}{2}\tau_N) \;=\; \sqrt{\frac{2}{3}} \quad , \tag{A.11}$$

$$\langle \frac{1}{2}\tau'_N \mid T_\alpha \mid \frac{3}{2}\tau_\Delta \rangle \;=\; (-1)^\alpha \;(1\,-\alpha\,\frac{1}{2}\tau'_N \mid \frac{3}{2}\tau_N) \quad . \tag{A.12}$$

Durch Wahl des *Helizitätsformalismus*, d.h. durch Festlegen der *Quantisierungs-Achse* in Richtung von $\hat{k}$, erhält man folgende Relation für die Kugelflächenfunktionen:

$$Y_{(1\,-\mu)}(\hat{k}) \;=\; \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\delta_{-\mu,0} \qquad \text{für } \hat{k} \parallel z\text{-Achse} \quad . \tag{A.13}$$

Für die Helizität λ des *reellen* Photons gilt natürlich $\lambda = \pm 1$.
Aus A.9 - A.12 und A.13 folgt für die invariante Amplitude A.8:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \;=\; & \frac{g_{\gamma N\Delta}}{M_\Delta}\left(-i\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\right) k\,\frac{g_{\pi N\Delta}}{M_\pi}\left(\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\right) q\,v(q)\,\sqrt{\frac{2}{3}}\,\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\frac{1}{\widetilde{D(E)}} \\ & \sum_{\kappa,m_\Delta} (-1)^{-\lambda-2\kappa+\alpha}\,(1\,\lambda\,1\,0 \mid 1\,\lambda)\,\varepsilon_{\vec{k}\,\lambda\,(1\,\lambda)}\;Y_{(1\,\kappa)}(\hat{q}) \\ & (1\,-\lambda\,\frac{1}{2}m_N \mid \frac{3}{2}m_\Delta)\,(1\,\kappa\,\frac{1}{2}m'_N \mid \frac{3}{2}m_\Delta)\,(1\,-\alpha\,\frac{1}{2}\tau'_N \mid \frac{3}{2}\tau_N)\end{aligned} \tag{A.14}$$

mit

$$m_\Delta \;=\; m_N - \lambda \tag{A.15}$$

und

$$\kappa \;=\; m_\Delta - m'_N \;=\; (m_N - \lambda) - m'_N \quad . \tag{A.16}$$

Durch Einsetzen von A.14 in Gleichung A.5 folgt für den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{(4\pi)}\frac{1}{9}\frac{1}{1+k/E_i}\frac{M_N}{E_i}\frac{M_N}{E_f}\frac{M_N}{\sqrt{s}}\left(\frac{g_{\gamma N\Delta}}{M_\Delta}\right)^2\left(\frac{g_{\pi N\Delta}}{M_\pi}\right)^2 k\,q^3\,v(q)^2 \\ &\quad \frac{1}{|\,\widetilde{D(E)}\,|^2}\,(1\;-\alpha\,\frac{1}{2}\,\tau_N+\alpha\,|\,\frac{3}{2}\,\tau_N)^2 \sum_{m'_N,\,m_N,\,\lambda}(1\,\lambda\;1\,0\,|\,1\,\lambda)^2 \\ &\quad (1\;-\lambda\,\frac{1}{2}\,m_N\,|\,\frac{3}{2}\,m_N-\lambda)^2\,(1\;m_N-m'_N-\lambda\,\frac{1}{2}\,m'_N\,|\,\frac{3}{2}\,m_N-\lambda)^2 \\ &\quad |\,Y_{(1\;m_N-m'_N-\lambda)}\,|^2 \quad . \end{aligned} \tag{A.17}$$

Ausführen der Summationen über Anfangs- und Endzustände liefert schließlich den folgenden Ausdruck für die Winkelabhängigkeit:

$$\begin{aligned}&\sum_{m'_N,\,m_N,\,\lambda}(1\,\lambda\;1\,0\,|\,1\,\lambda)^2\,(1\;-\lambda\,\frac{1}{2}\,m_N\,|\,\frac{3}{2}\,m_N-\lambda)^2 \\ &(1\;m_N-m'_N-\lambda\,\frac{1}{2}\,m'_N\,|\,\frac{3}{2}\,m_N-\lambda)^2\;\;|\,Y_{(1\;m_N-m'_N-\lambda)}\,|^2 \;=\; \frac{1}{9}\,\frac{3}{4\pi}\,\left(5-3\cos^2\vartheta\right)\quad .\end{aligned} \tag{A.18}$$

Damit gilt für den differentiellen Wirkungsquerschnitt für Pion-Photoproduktion im *γ-Nukleon-CMS*:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{27}\frac{1}{1+k/E_i}\frac{M_N}{E_i}\frac{M_N}{E_f}\frac{M_N}{\sqrt{s}}\left(\frac{g_{\gamma N\Delta}}{M_\Delta}\right)^2\left(\frac{g_{\pi N\Delta}}{M_\pi}\right)^2 k\,q^3\,v(q)^2 \\ &\quad \frac{1}{|\,\widetilde{D(E)}\,|^2}\,(1\;-\alpha\,\frac{1}{2}\,\tau_N+\alpha\,|\,\frac{3}{2}\,\tau_N)^2\quad(5-3\cos\vartheta)\end{aligned} \tag{A.19}$$

mit $\alpha = -1, 0, +1$ für π^+, π^0, π^- - Produktion.

Anhang B

Berechnung des Wirkungsquerschnitts für Compton-Streuung und Photoabsorption am Nukleon

In Kapitel 2.2 haben wir gezeigt, daß der Übergangsoperator der Compton-Streuung im 33-Kanal die folgende Form hat:

$$T^{33}_{\gamma\gamma} = A(E) \left(\hat{\varepsilon}^{*}_{\vec{k}'\lambda'} \times \vec{k}'\right) \cdot \vec{S}\, T_3 \quad \left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \times \vec{k}\right) \cdot \vec{S}^{\dagger}\, T_3^{\dagger} \quad . \tag{B.1}$$

Für den $J = \frac{1}{2}$ - Untergrund haben wir dort die folgenden Übergangsoperatoren hergeleitet. Für Pion-Photoproduktion und Compton-Streuung gilt:

$$T^{B}_{\pi\gamma} = B(E) \left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \cdot \vec{\sigma}\right) \quad , \tag{B.2}$$

$$T^{B}_{\gamma\gamma} = C(E) \left(\hat{\varepsilon}^{*}_{\vec{k}'\lambda'} \cdot \vec{\sigma}\right) \left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \cdot \vec{\sigma}\right) . \tag{B.3}$$

Mit der Gleichung A.3 kann man B.1 wie in Anhang A umformen:

$$\begin{aligned} T^{33}_{\gamma\gamma} = {} & A(E) \left(-\frac{8\pi}{3}\right) \sum_{\nu,\mu,\kappa,\iota} k\,k' \,(-1)^{\nu+\kappa}\, \varepsilon^{*}_{\vec{k}'\lambda'\,(1\,\iota-\kappa)}\, \varepsilon_{\vec{k}\lambda\,(1\,\mu-\nu)} \\ & Y_{(1\,-\iota)}(\hat{k}')\, Y_{(1\,-\mu)}(\hat{k})\, (1\,\iota-\kappa\; 1\; -\iota \mid 1\; -\kappa)\, (1\,\mu-\nu\; 1\; -\mu \mid 1\; -\nu) \\ & S_{(1\,\kappa)}\, S^{\dagger}_{(1\,\nu)}\, T_3\, T_3^{\dagger} \quad . \end{aligned} \tag{B.4}$$

Gleichung A.13 für die Kugelflächenfunktionen erlaubt es uns, durch Wahl des Helizitätsformalismus den Übergangsoperator in der folgenden Weise umzuformen:

$$T^{33}_{\gamma\gamma} = A(E) \left(-2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\right) \sum_{\kappa,\iota} k\,k' \; (-1)^{-\lambda+\kappa} \; \varepsilon^{*}_{\vec{k}'\,\lambda'\,(1\,\lambda')} \; \varepsilon_{\vec{k}\,\lambda\,(1\,\lambda)}$$
$$Y_{(1\,-\iota)}(\hat{k}')(1\,\lambda'\,1\,-\iota \mid 1\,-\kappa)\,(1\,\lambda\,1\,0 \mid 1\,\lambda)$$
$$S_{(1\,\kappa)}\; S^{\dagger}_{(1\,-\lambda)}\; T_3\, T_3^{\dagger} \qquad \text{(B.5)}$$

mit $\lambda = \pm 1$ und $\lambda' = \pm 1, 0$.

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung im γ-*Nukleon-CMS* gilt ebenfalls Gleichung A.5, allerdings mit der zusätzlichen Bedingung, daß $q = k' = k$ ist. Man erhält:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{33} = \frac{1}{4} \sum_{m'_N,\, m_N,\, \lambda',\, \lambda} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{1 + k/E_i} \frac{M_N}{E_i} \frac{M_N}{E_f} \frac{M_N}{\sqrt{s}} \mid \mathcal{M}_{33} \mid^2 \qquad \text{(B.6)}$$

mit

$$\mathcal{M}_{33} = \langle \frac{1}{2} m'_N\,,\, \frac{1}{2} \tau'_N \mid T^{33}_{\gamma\gamma} \mid \frac{1}{2} m_N\,,\, \frac{1}{2} \tau_N \rangle \quad . \qquad \text{(B.7)}$$

Einsetzen von B.5 in Gleichung B.7 liefert nach einer Rechnung, analog zu Anhang A, folgende Ergebnis:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{33} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{2}{81} \frac{1}{1 + k/E_i} \frac{M_N}{E_i} \frac{M_N}{E_f} \frac{M_N}{\sqrt{s}} \mid k^2\, A(E) \mid^2 \left(7 + 3\cos^2\vartheta\right) \quad . \qquad \text{(B.8)}$$

Für niederenergetische Photonen $k \ll M_N$ gilt in guter Näherung:

$$\frac{1}{1 + k/E_i} \frac{M_N}{E_i} \frac{M_N}{E_f} \approx 1 \quad . \qquad \text{(B.9)}$$

Daraus folgt für den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{33} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{2}{81} \frac{M_N}{\sqrt{s}} \mid k^2\, A(E) \mid^2 \left(7 + 3\cos^2\vartheta\right) \quad . \qquad \text{(B.10)}$$

Das *optische Theorem* beschreibt den Zusammenhang zwischen dem *totalen Wirkungsquerschnitt* und dem *elastischen differentiellen Wirkungsquerschnitt* für $\vartheta = 0°$.

Nach Pilkuhn [25] hat das optische Theorem die folgende Form:

$$\sigma_{\text{tot}} \;=\; \frac{1}{2\,k\,\sqrt{s}}\,\text{Im}\,[\,T(s,\vartheta=0°)\,] \quad . \tag{B.11}$$

Dabei ist die *T-Matrix* so definiert, daß gilt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CMS}} \;=\; \frac{1}{4\,s}\,\left|\frac{T(s,\vartheta)}{4\pi}\right|^2 \quad . \tag{B.12}$$

Daraus folgt durch Vergleich von B.12 mit B.10 für die T-Matrix:

$$T(s,\vartheta) \;=\; -\sqrt{2}\,\frac{2}{9}\,\sqrt{M_N}\;\sqrt[4]{s}\;\;k^2\;A(E)\;\;\sqrt{7+3\cos^2\vartheta} \tag{B.13}$$

und für den totalen Wirkungsquerschnitt im 33-Kanal:

$$\sigma^{33}_{\text{tot}} \;=\; \sqrt{20}\,\frac{\sqrt{M_N}}{\sqrt[4]{s}}\;k\;\frac{1}{9}\;\,\text{Im}\,[-A(E)] \quad . \tag{B.14}$$

Für den $J = \frac{1}{2}$ - Untergrund der Compton-Streuung gelten ebenfalls B.6 und B.7. Mit der Näherung B.9 ergibt sich für den differentiellen Wirkungsquerschnitt des Untergrundes:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_B \;=\; \frac{1}{4}\sum_{m'_N,m_N,\lambda,\lambda'}\frac{1}{(4\pi)^2}\,\frac{M_N}{\sqrt{s}}\;\;|\,\mathcal{M}_B\,|^2 \tag{B.15}$$

mit:

$$\mathcal{M}_B \;=\; \langle\frac{1}{2}\,m'_N\,|\,T^B_{\gamma\gamma}\,|\,\frac{1}{2}\,m_N\rangle \quad . \tag{B.16}$$

Aus dem Übergangsoperator für den $J = \frac{1}{2}$ - Untergrund (B.3) folgt daher für den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_B \;=\; \frac{1}{4}\,\frac{1}{(4\pi)^2}\,\frac{\sqrt{M_N}}{\sqrt{s}}\;|C(E)|^2$$
$$\sum_{m'_N,m_N,\lambda,\lambda'}\left|\langle\frac{1}{2}\,m'_N\,|\,\sigma_{-\lambda'}\,|\,\frac{1}{2}\,m\rangle\,\langle\frac{1}{2}\,m\,|\,\sigma_{-\lambda}\,|\,\frac{1}{2}\,m_N\rangle\right|^2 \tag{B.17}$$

$$\;=\; \frac{2}{(4\pi)^2}\,\frac{\sqrt{M_N}}{\sqrt{s}}\;|C(E)|^2 \quad . \tag{B.18}$$

Der *gesamte* differentielle Wirkungsquerschnitt für Compton-Streuung ergibt sich nun durch Addition von B.10 und B.18 *und* durch Addition eines zusätzlichen Terms, der durch die Interferenz der beiden Beiträge entsteht:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{1}{4} \sum_{m'_N, m_N, \lambda, \lambda'} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{M_N}{\sqrt{s}} \mid \mathcal{M}_{33} + \mathcal{M}_B \mid^2 \tag{B.19}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{m'_N, m_N, \lambda, \lambda'} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{M_N}{\sqrt{s}} \left(\mid \mathcal{M}_{33} \mid^2 + \mid \mathcal{M}_B \mid^2 + [\mathcal{M}^*_{33} \mathcal{M}_B + \mathcal{M}_{33} \mathcal{M}^*_B] \right) \tag{B.20}$$

$$= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{33} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{B} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Int} \quad . \tag{B.21}$$

Durch Einsetzen von B.1 und B.3 folgt für diesen Interferenzterm:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Int} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{4}{9} \frac{M_N}{\sqrt{s}} k^2 \left[A^*(E) C(E) + A(E) C^*(E)\right] \cos\vartheta \quad . \tag{B.22}$$

Insgesamt ergibt sich so für den differentiellen Wirkungsquerschnitt für Compton-Streuung:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{M_N}{\sqrt{s}} \Bigg(& \frac{2}{81} k^4 \mid A(E) \mid^2 \left(7 + 3\cos^2\vartheta\right) + \\ & \frac{4}{9} k^2 \left[A^*(E) C(E) + A(E) C^*(E)\right] \cos\vartheta + \\ & 2 \mid C(E) \mid^2 \Bigg) . \end{aligned} \tag{B.23}$$

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der s-Wellen Pion-Photoproduktion gilt entsprechend Gleichung A.5:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\pi} = \frac{1}{4} \sum_{m'_N, m_N, \lambda, \lambda'} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{M_N}{\sqrt{s}} \frac{q}{k} \left| \langle \frac{1}{2} m'_N \mid T^B_{\pi\gamma} \mid \frac{1}{2} m_N \rangle \right|^2 \quad , \tag{B.24}$$

wobei wir wieder die Näherung B.9 gemacht haben. Einsetzen von B.2 liefert:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\pi} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{M_N}{\sqrt{s}} \frac{q}{k} \mid B(E) \mid^2 \quad . \tag{B.25}$$

Den Beitrag dieser s-Wellen Pion-Photoproduktion zur totalen Photoabsorption erhält man durch Berechnung des Wirkungsquerschnitts:

$$\sigma_{\text{Abs}\,,\,\pi} = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\pi} \tag{B.26}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)} \frac{M_N}{\sqrt{s}} \frac{q}{k} \mid B(E) \mid^2 \quad . \tag{B.27}$$

Der totale Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitt ergibt sich nun durch Addition des Beitrags des 33-Kanals (B.14) und des Pion-Photoproduktion-Untergrundes:

$$\sigma_{\text{tot}} = \sqrt{20}\,\frac{\sqrt{M_N}}{\sqrt[4]{s}}\,k\,\frac{1}{9}\,\text{Im}[-A(E)] + \frac{1}{(4\pi)}\,\frac{M_N}{\sqrt{s}}\,\frac{q}{k}\,\mid B(E)\mid^2 \quad . \tag{B.28}$$

Anhang C

Berechnung der Quellfunktion für Photoabsorption

In diesem Anhang leiten wir den expliziten Ausdruck der Quellfunktion $\rho^{(j_t m_t)}(\vec{r})$ für die Photoabsorption her. $\rho^{(j_t m_t)}(\vec{r})$ ist die *Ortsdarstellung* des *Doorway*-Zustands $|\,\rho\,,\,j_t\,m_t\rangle$:

$$\rho^{(j_t m_t)}(\vec{r}) \;=\; \langle \vec{r}\,|\,\rho\,,\,j_t\,m_t\rangle \quad . \tag{C.1}$$

Dieser Doorway-Zustand ist in der folgenden Weise definiert:

$$|\,\rho\,,\,j_t\,m_t\rangle \;:=\; (j_t\,m_t\,|\,\tilde{F}^{\dagger\,\mathrm{eff}}_{\gamma N\Delta}\,|\,0^+\rangle \quad . \tag{C.2}$$

Dabei ist $|\,0^+\rangle$ der Grundzustand des Kerns mit Gesamtdrehimpuls $J^\pi = 0^+$ und Isospin $I = 0$. $\tilde{F}^{\dagger\,\mathrm{eff}}_{\gamma N\Delta}$ ist der Anregungsoperator für die Absorption eines Photons. Die runde Klammer im Matrixelement C.2 deutet an, daß nur die Integration über den *Winkelanteil* durchgeführt wird. Dadurch werden die Zustände mit Gesamtdrehimpuls $(j_t\,,\,m_t)$ herauszuprojiziert. Für den Zustand $|\,j_t\,m_t)$ gilt:

$$|\,j_t\,m_t) \;=\; \sum_{n_h,j_p,j_h}\;\sum_{l_p,l_h}\left[a^\dagger_{(l_p\,\frac{3}{2})j_p}\;b^\dagger_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})j_h}\right]_{(j_t\,m_t)}\;|\,0^+\rangle \tag{C.3}$$

$$\;=\; \sum_{n_h,j_p,j_h}\;\sum_{l_p,l_h}\;\sum_{m_p,m_h}(j_p\,m_p\;j_h\,m_h\,|\,j_t\,m_t)\,a^\dagger_{(l_p\,\frac{3}{2})j_p\,m_p}\;b^\dagger_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})j_h\,m_h}\;|\,0^+\rangle\;, \tag{C.4}$$

wobei $a^\dagger_{(l_p\,\frac{3}{2})j_p\,m_p}$ und $b^\dagger_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})j_h\,m_h}$ die Teilchen- bzw. Locherzeugungsoperatoren sind. Diese Erzeugungsoperatoren weichen insofern von der üblichen Konvention (siehe Bohr

und Mottelson [46]) ab, als die Teilchenerzeugungsoperatoren $a^{\dagger}_{(l_p\,\frac{3}{2})\,j_p\,m_p}$ nur durch die Drehimpulsquantenzahlen und nicht durch die Radialquantenzahlen [46, Anhang 3A] charakterisiert sind:

$$\langle \vec{r} \mid a^{\dagger}_{(l_p\,\frac{3}{2})\,j_p\,m_p} \mid 0^+ \rangle \;=\; \left[i^{l_p}\, Y_{l_p}(\hat{r})\, \chi^{\frac{3}{2}} \right]_{(l_p\,\frac{3}{2})\,j_p\,m_p} \quad . \tag{C.5}$$

Die Locherzeugungsoperatoren $b^{\dagger}_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})\,j_h\,m_h}$ sind dagegen auch in der Radialquantenzahl n_h festgelegt. Die vollständige Wellenfunktion schreibt sich dann

$$\langle \vec{r} \mid b^{\dagger}_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})\,j_h\,m_h} \mid 0^+ \rangle \;=\; (-1)^{j_h+m_h}\, \langle \vec{r} \mid a_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})\,j_h\,-m_h} \mid 0^+ \rangle \tag{C.6}$$

$$\;=\; (-1)^{j_h+m_h}\, \psi_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})\,j_h}(r)\, \left[i^{l_h}\, Y_{l_h}(\hat{r})\, \chi^{\frac{1}{2}} \right]_{(l_h\,\frac{1}{2})\,j_h\,-m_h} , \tag{C.7}$$

wobei $\psi_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})\,j_h}(r)$ die Loch-Radialwellenfunktion ist. Gleichung C.6 ergibt sich aus folgender Beziehung zwischen Locherzeugungsoperator $b^{\dagger}_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})\,j_h\,m_h}$ und Teilchenvernichtungsoperator $a_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})j_h\,-m_h}$:

$$b^{\dagger}_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})\,j_h\,m_h} \;=\; (-1)^{j_h+m_h}\, a_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})j_h\,-m_h} \quad . \tag{C.8}$$

Diese Relation gilt nur, da wir als *Phasenkonvention* die *Zeitumkehrphase* (wie in [46, Anhang 3]) gewählt haben.

Einsetzen von Gleichung C.4 in die Definition des Doorway-Zustands (Gl. C.2) liefert mit Hilfe von C.8 :

$$\mid \rho\,,\, j_t\, m_t \rangle \;=\; \sum_{n_h\,,j_p\,,j_h} \sum_{l_p\,,l_h} \sum_{m_p\,,m_h} (-1)^{j_h+m_h}\, (j_p\, m_p\; j_h\, m_h \mid j_t\, m_t)$$

$$\langle 0^+ \mid a_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})j_h\,-m_h}\; a^{\dagger}_{(l_p\,\frac{3}{2})\,j_p\,m_p}\; \tilde{F}^{\dagger\,\mathrm{eff}}_{\gamma N\Delta} \mid 0^+ \rangle \quad . \tag{C.9}$$

In *Impulsraum-Darstellung* folgt für den Doorway-Zustand:

$$\langle \vec{q} \mid \rho\,,\, j_t\, m_t \rangle \;=\; \sum_{n_h\,,j_p\,,j_h} \sum_{l_p\,,l_h} \sum_{m_p\,,m_h} (-1)^{j_h+m_h}\, (j_p\, m_p\, j_h\, m_h \mid j_t\, m_t)$$
$$\langle 0^+ \mid a_{(l_h\,\frac{1}{2})\,j_h\,-m_h}\; a^{\dagger}_{(l_p\,\frac{3}{2})\,j_p\,m_p}\;\; \tilde{F}^{\dagger\,\mathrm{eff}}_{\gamma N\Delta}\;\; \psi_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})\,j_h}(\vec{p}\,) \mid 0^+ \rangle \quad . \tag{C.10}$$

$\vec{q}$ ist hier der Impuls des Δ's und $\vec{p}$ der Impuls des einlaufenden Nukleons. Wenn das einlaufende Photon den Impuls $\vec{k}$ hat, gilt daher: $\vec{q} = \vec{k} + \vec{p}$.

Den Anregungsoperator $\tilde{F}^{\dagger\,\mathrm{eff}}_{\gamma N\Delta}$ schreiben wir nun in *zweiter Quantisierung*:

$$\tilde{F}^{\dagger\,\mathrm{eff}}_{\gamma N\Delta} \;=\; \sum_{j'_p\,,m'_p} \sum_{j'_h\,,m'_h} \sum_{l'_p\,,l'_h} \langle (l'_p\,\tfrac{3}{2})\, j'_p\, m'_p \mid \tilde{F}^{\dagger\,\mathrm{eff}}_{\gamma N\Delta} \mid (l'_h\,\tfrac{1}{2})\, j'_h\, m'_h \rangle\; a^{\dagger}_{(l'_p\,\frac{3}{2})\,j'_p\,m'_p}\; a_{(l'_h\,\frac{1}{2})\,j'_h\,m'_h} \,. \tag{C.11}$$

Einsetzen in C.10 und Kontraktion der Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren ergibt schließlich:

$$\langle \vec{q} \mid \rho\,,\, j_t\, m_t \rangle \;=\; \sum_{n_h\,,j_p\,,j_h} \sum_{l_p\,,l_h} \sum_{m_p\,,m_h} (-1)^{j_h+m_h}\, (j_p\, m_p\, j_h\, m_h \mid j_t\, m_t)$$
$$\langle (l_p\,\tfrac{3}{2})\, j_p\, m_p \mid \tilde{F}^{\dagger\,\mathrm{eff}}_{\gamma N\Delta} \mid (l_h\,\tfrac{1}{2})\, j_h\; -m_h \rangle\; \psi_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})\,j_h}(\vec{p}\,) \quad . \tag{C.12}$$

Bei der Berechnung der Quellfunktion haben wir bis hierhin den *Isospin* nicht berücksichtigt. Da *nicht* zum Gesamtisospin gekoppelt wird, können wir diesen direkt in das Matrixelement C.12 einführen und erhalten so für den Doorway-Zustand:

$$\langle \vec{q} \mid \rho\,,\, j_t\, m_t \rangle \;=\; \sum_{n_h\,,j_p\,,j_h} \sum_{l_p\,,l_h} \sum_{m_p\,,m_h} \sum_{\tau_p\,,\tau_h} (-1)^{j_h+m_h}\, (j_p\, m_p\, j_h\, m_h \mid j_t\, m_t)$$
$$\langle (l_p\,\tfrac{3}{2})\, j_p\, m_p\,,\, \tfrac{3}{2}\,\tau_p \mid \tilde{F}^{\dagger\,\mathrm{eff}}_{\gamma N\Delta} \mid (l_h\,\tfrac{1}{2})\, j_h\; -m_h\,,\, \tfrac{1}{2}\,\tau_h \rangle\;\; \psi_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})\,j_h}(\vec{p}\,) \,. \tag{C.13}$$

In Abschnitt 4.2 haben wir den *effektiven* Anregungsoperator $\tilde{F}^{\dagger\,\mathrm{eff}}_{\gamma N\Delta}$ im *Impulsraum* in der folgenden Form im (γ-*Kern-CMS*) festgelegt:

$$\tilde{F}^{\dagger\,\mathrm{eff}}_{\gamma N\Delta}(\vec{k}\,) \;=\; \frac{\tilde{g}_{\gamma N\Delta}}{M_\Delta} \left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\,\lambda} \times c(k)\, \vec{k} \right) \cdot \vec{S}^{\dagger}\;\; T^{\dagger}_3 \quad , \tag{C.14}$$

wobei $\vec{k}$ der Impuls des Photons im γ-*Kern-CMS* ist und $c(k)$ der in Abschnitt 4.2 festgelegte kinematische "Faktor" ist, der die Änderung des Anregungsoperators durch den Übergang vom γ-*Nukleon-CMS* zum γ-*Kern-CMS* beschreibt. Da wir das Kernstrukturproblem mit einer effektiven, im *Ortsraum* konstruierten Δ-Loch-Restwechselwirkung lösen wollen, müssen wir die Quellfunktion Fourier-transformieren:

$$\rho^{(j_t\, m_t)}(\vec{r}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3q\; e^{-i\,\vec{q}\cdot\vec{r}}\; \langle \vec{q}\,|\,\rho\,,\, j_t\, m_t\rangle \quad . \tag{C.15}$$

Wegen $\vec{q} = \vec{k}+\vec{p}$ kann man nach der Substitution $\vec{q} \rightarrow \vec{q}\,' = \vec{q}-\vec{k}$ alle $\vec{k}$-abhängigen Ausdrücke vor das Integral ziehen und erhält:

$$\begin{aligned}\rho^{(j_t\, m_t)}(\vec{r}) \;=\; & \sum_{n_h\,,j_p\,,j_h} \sum_{l_p\,,l_h} \sum_{m_p\,,m_h} \sum_{\tau_p\,,\tau_h} (-1)^{j_h+m_h}\; (j_p\, m_p\; j_h\, m_h \mid j_t\, m_t) \\ & \langle (l_p\, \tfrac{3}{2})\, j_p\, m_p\,,\; \tfrac{3}{2}\, \tau_p \mid e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{r}} \left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\,\lambda} \times c(k)\,\vec{k}\right) \cdot \vec{S}^{\dagger}\; T_3^{\dagger} \mid (l_h\, \tfrac{1}{2})\, j_h\; -m_h\,,\; \tfrac{1}{2}\, \tau_h\rangle \\ & \frac{\tilde{g}_{\gamma N\Delta}}{M_\Delta}\; \psi_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})\,j_h}(r) \quad . \end{aligned} \tag{C.16}$$

Für die Exponentialfunktion gilt die folgende Zerlegung in Kugelflächenfunktionen $Y_{l\,m}$ [27, Gl. 5.8.3]:

$$e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{r}} \;=\; 4\pi \sum_l (-i)^l\, j_l(kr)\; (-1)^l\, \hat{l}\; \left[\, Y_l(\hat{k}) \otimes Y_l(\hat{r}) \,\right]_{(00)} \quad , \tag{C.17}$$

wobei $j_l(kr)$ die sphärische Besselfunktion erster Art ist und $\hat{l} := \sqrt{2l+1}$. Außerdem haben wir das *Tensorprodukt* $\otimes$ für *sphärische Tensoren* eingeführt [47]:

$$\left[\, T_{l_1} \otimes T_{l_2} \,\right]_{(j\,m)} \;:=\; \sum_{m_1\,,m_2} (l_1\, m_1\; l_2\, m_2 \mid j\, m)\; T_{l_1\, m_1}\; T_{l_2\, m_2} \quad . \tag{C.18}$$

Da ein Vektor ein *Tensor* 1. *Stufe* ist, können wir die Skalar- bzw. Vektorprodukte in C.16 als gekoppelte sphärische Tensoren schreiben:

$$\vec{k} \;=\; \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\; k\; Y_1(\hat{k}) \quad , \tag{C.19}$$

$$\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\,\lambda} \times \vec{k} \;=\; \left(-i\sqrt{2}\right) \left[\, \varepsilon_{\vec{k}\,\lambda\,(1)} \otimes k_{(1)} \,\right]_{(1)} \quad , \tag{C.20}$$

$$\left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\,\lambda} \times \vec{k}\right) \cdot \vec{S}^{\dagger} \;=\; \left(-\sqrt{3}\right) \left[\, (\,\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\,\lambda} \times \vec{k}\,)_{(1)} \otimes S^{\dagger}_{(1)} \,\right]_{(00)} \quad . \tag{C.21}$$

Aus C.19 - C.21 folgt:

$$\left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \times \vec{k}\right) \cdot \vec{S}^{\dagger} \;=\; \left(i\sqrt{8\pi}\right)\; k \;\left[\left[\varepsilon_{\vec{k}\lambda\,(1)} \otimes Y_1(\hat{k})\right]_{(1)} \otimes S^{\dagger}_{(1)}\right]_{(00)} \quad . \tag{C.22}$$

Multiplikation von C.22 mit C.17 und umkoppeln der Operatoren liefert [27, Kapitel 6.4]:

$$e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \times \vec{k}\right) \cdot \vec{S}^{\dagger} \;=\; \left(i\sqrt{8\pi}\right)\; 4\pi\; k \sum_{l,j} (-i)^l\, j_l(kr)\,(-1)^l\,\hat{l}\,\hat{j}^2 \begin{Bmatrix} l & 1 & j \\ l & 1 & j \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$
$$\left[\left[Y_l(\hat{k}) \otimes \left[\varepsilon_{\vec{k}\lambda\,(1)} \otimes Y_1(\hat{k})\right]_{(1)}\right]_{(j)} \otimes \left[Y_l(\hat{r}) \otimes S^{\dagger}_{(1)}\right]_{(j)}\right]_{(00)} \quad . \tag{C.23}$$

Für das 9j-Symbol gilt:

$$\begin{Bmatrix} l & 1 & j \\ l & 1 & j \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \;=\; \frac{1}{\hat{j}\,\hat{1}\,\hat{l}} \qquad \text{für: } l = j, j \pm 1 \quad . \tag{C.24}$$

Umkopplung der Tensoroperatoren in C.23 liefert [27, Kapitel 6.1]:

$$\left[Y_l(\hat{k}) \otimes \left[\varepsilon_{\vec{k}\lambda\,(1)} \otimes Y_1(\hat{k})\right]_{(1)}\right]_{(j)} \;=\; \sum_{l'} (-1)\,\hat{1}\,\hat{l}'\,W(l\,1\,j\,1\,,\,l'\,1)$$
$$\left[\left[Y_l(\hat{k}) \otimes Y_1(\hat{k})\right]_{(l')} \otimes \varepsilon_{\vec{k}\lambda\,(1)}\right]_{(j)} \quad . \tag{C.25}$$

Die Kugelflächenfunktionen können zusammengefaßt werden zu:

$$\left[Y_l(\hat{k}) \otimes Y_1(\hat{k})\right]_{(l'\,m')} \;=\; \frac{\hat{l}\,\hat{1}}{\sqrt{4\pi}\,\hat{l}'}\,(l\,0\,1\,0 \mid l'\,0)\; Y_{l'\,m'}(\hat{k}) \quad . \tag{C.26}$$

Einsetzen von C.24 - C.26 in Gleichung C.23 ergibt schließlich:

$$e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}\times\vec{k}\right)\cdot\vec{S}^{\dagger} = \left(-i\sqrt{2}\right)\,4\pi\,k\sum_{l,j,l'} i^{l}\,j_{l}(kr)\,\hat{\jmath}\,\hat{l}\,\hat{1}\,(l\,0\,1\,0\mid l'\,0)\,W(l\,1\,j\,1\,,\,l'\,1)$$
$$\left[\left[Y_{l'}(\hat{k})\otimes\varepsilon_{\vec{k}\lambda\,(1)}\right]_{(j)}\otimes\left[Y_{l}(\hat{r})\otimes S^{\dagger}_{(1)}\right]_{(j)}\right]_{(0\,0)}\,. \qquad \text{(C.27)}$$

Gleichung C.27 kann man noch weiter vereinfachen, indem man zwei Tensorprodukte explizit ausschreibt:

$$e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}\times\vec{k}\right)\cdot\vec{S}^{\dagger} = \left(-i\sqrt{2}\right)\,4\pi\,k\sum_{l,j,l'} i^{l}\,j_{l}(kr)\,\hat{\jmath}\,\hat{l}\,\hat{1}\,(l\,0\,1\,0\mid l'\,0)\,W(l\,1\,j\,1\,,\,l'\,1)$$
$$\sum_{m\,,\,m'}(j\;-m\;j\;m\mid 0\,0)\;(l'\,m'\,1\;\;-m\;-m'\mid j\;-m)$$
$$Y_{l'\,m'}(\hat{k})\;\varepsilon_{\vec{k}\lambda\,(1\;-m-m')}\left[Y_{l}(\hat{r})\otimes S^{\dagger}_{(1)}\right]_{(j\,m)}\,. \qquad \text{(C.28)}$$

Im Helizitätsformalismus gilt für die Kugelflächenfunktion $Y_{l'\,m'}(\hat{k})$ wie in A.13:

$$Y_{l'\,m'}(\hat{k}) = \frac{\hat{l}'}{\sqrt{4\pi}}\,\delta_{m',0} \qquad \text{für: } \hat{k}\parallel z\text{-Achse} \qquad \text{(C.29)}$$

und für das *reelle* Photon $\lambda=\pm 1$. Damit folgt für C.28:

$$e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}\times\vec{k}\right)\cdot\vec{S}^{\dagger} = \left(-i\sqrt{2}\right)\,4\pi\,k\sum_{l,j,l'} i^{l}\,j_{l}(kr)\,\hat{\jmath}\,\hat{l}\,\hat{1}\,(l\,0\,1\,0\mid l'\,0)\,W(l\,1\,j\,1\,,\,l'\,1)$$
$$(j\,\lambda\,j\;-\lambda\mid 0\,0)\;(l'\,0\,1\,\lambda\mid j\,\lambda)$$
$$\frac{\hat{l}'}{\sqrt{4\pi}}\,\varepsilon_{\vec{k}\lambda\,(1\,\lambda)}\left[Y_{l}(\hat{r})\otimes S^{\dagger}_{(1)}\right]_{(j\,-\lambda)}\,. \qquad \text{(C.30)}$$

Einsetzen von C.30 in die Gleichung C.16 für die Quellfunktion ergibt:

$$\rho^{(j_t\,m_t)}(\vec{r}) = \sum_{n_h,j_p,j_h}\;\sum_{l_p,l_h}\;\sum_{m_p,m_h}\;\sum_{\tau_p,\tau_h}(-1)^{j_h+m_h}\,(j_p\,m_p\,j_h\,m_h\mid j_t\,m_t)\,\frac{\tilde{g}_{\gamma N\Delta}}{M_{\Delta}}$$
$$\left(-i\sqrt{2}\right)\,4\pi\,c(k)\,k\sum_{l,j,l'} i^{l}\,j_{l}(kr)\,\hat{\jmath}\,\hat{l}\,\hat{1}\,(l\,0\,1\,0\mid l'\,0)\,W(l\,1\,j\,1\,,\,l'\,1)$$
$$(j\,\lambda\,j\;-\lambda\mid 0\,0)\;(l'\,0\,1\,\lambda\mid j\,\lambda)\;\frac{\hat{l}'}{\sqrt{4\pi}}\,\varepsilon_{\vec{k}\lambda\,(1\,\lambda)}\;\psi_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})\,j_h}(r)$$
$$\left((l_p\,\tfrac{3}{2})\,j_p\,m_p\,,\,\tfrac{3}{2}\,\tau_p\mid\left[Y_{l}(\hat{r})\otimes S^{\dagger}_{(1)}\right]_{(j\,-\lambda)}\;T_3^{\dagger}\mid(l_h\,\tfrac{1}{2})\,j_h\;-m_h\,,\,\tfrac{1}{2}\,\tau_h\right)\,. \qquad \text{(C.31)}$$

Das zu berechnende Matrixelement in C.31 können wir in einen Spin- und einen Isospinanteil aufspalten. Das Isospin-Matrixelement führt gemäß der Definition des Isospin-Übergangsoperators $\vec{T}^\dagger$ zu folgendem Beitrag zur Quellfunktion:

$$\begin{aligned} \langle \frac{3}{2}\tau_p \mid T_3^\dagger \mid \frac{1}{2}\tau_h \rangle &= (1\,0\,\frac{1}{2}\tau_h \mid \frac{3}{2}\tau_p) \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \text{für } \tau_p = \tau_h = \pm\frac{1}{2} \quad . \end{aligned} \tag{C.32}$$

Zur Berechnung des Spin-Matrixelementes benutzten wir das Wigner-Eckart-Theorem und Gleichung 7.1.5 aus [27]:

$$\begin{aligned} &\langle ((l_p\,\tfrac{3}{2})\,j_p\,m_p \mid \Big[Y_l(\hat{r}) \otimes S^\dagger_{(1)} \Big]_{(j\,-\lambda)} \mid (l_h\,\tfrac{1}{2})\,j_h\,-m_h \rangle = \\ &\frac{1}{\hat{j}_p}\,(j_h\,-m_h\,j\,-\lambda \mid j_p\,m_p)\,\langle (l_p\,\tfrac{3}{2})\,j_p \parallel \Big[Y_l(\hat{r}) \otimes S^\dagger_{(1)} \Big]_{(j)} \parallel (l_h\,\tfrac{1}{2})\,j_h \rangle = \\ &\frac{1}{\hat{j}_p}\,(j_h\,-m_h\,j\,-\lambda \mid j_p\,m_p)\,\hat{j}\,\hat{j}_p\,\hat{j}_h \begin{Bmatrix} l_p & \frac{3}{2} & j_p \\ l_h & \frac{1}{2} & j_h \\ l & 1 & j \end{Bmatrix} \langle \frac{3}{2} \parallel S^\dagger \parallel \frac{1}{2} \rangle \langle l_p \parallel Y_l(\hat{r}) \parallel l_h \rangle \quad . \end{aligned} \tag{C.33}$$

Für das reduzierte Spin-Matrixelement gilt nach der Definition des Spin-Übergangsoperators :

$$\langle \frac{3}{2} \parallel S^\dagger \parallel \frac{1}{2} \rangle = 2 \quad . \tag{C.34}$$

Für das Bahndrehimpuls-Matrixelement ergibt sich nach [27, Gl. 5.4.5] :

$$\langle l_p \parallel Y_l(\hat{r}) \parallel l_h \rangle = \frac{\hat{l}\,\hat{l}_h}{\sqrt{4\pi}}\, i^{\,l_h - l_p}\,(l_h\,0\,l\,0 \mid l_p\,0) \quad . \tag{C.35}$$

Der Phasenfaktor $i^{\,l_h - l_p}$ tritt hier aufgrund der gewählten Phasenkonvention der *Zeitumkehrphase* auf.

Insgesamt ergibt sich so für die Quellfunktion $\rho^{(j_t m_t)}(\vec{r})$:

$$\begin{aligned}
\rho^{(j_t m_t)}(\vec{r}) \;=\; & \sum_{n_h, j_p, j_h} \sum_{l_p, l_h} \sum_{m_p, m_h} \sum_{\tau_h} (-1)^{j_h + m_h} \, (j_p \, m_p \; j_h \, m_h \mid j_t \, m_t) \\
& \left(-i\sqrt{2}\right) 4\pi \, \frac{\tilde{g}_{\gamma N \Delta}}{M_\Delta} \, c(k) k \sum_{l, j, l'} i^l \, j_l(kr) \, \hat{j} \hat{l} \hat{1} \, (l\,0\;1\,0 \mid l'\,0) \, W(l\,1\,j\,1\,,\, l'\,1) \\
& (j\,\lambda\; j\; -\lambda \mid 0\,0) \, (l'\,0\;1\,\lambda \mid j\,\lambda) \, \frac{\hat{l}'}{\sqrt{4\pi}} \, \varepsilon_{\vec{k}\,\lambda\,(1\,\lambda)} \sqrt{\frac{2}{3}} \\
& (j_h \; -m_h \; j \; -\lambda \mid j_p \, m_p) \, \hat{j} \hat{j}_h \, 2 \, \frac{\hat{l} \hat{l}_h}{\sqrt{4\pi}} \, i^{l_h - l_p} \, (l_h \, 0 \; l \, 0 \mid l_p \, 0) \\
& \left\{ \begin{array}{ccc} l_p & \frac{3}{2} & j_p \\ l_h & \frac{1}{2} & j_h \\ l & 1 & j \end{array} \right\} \; \psi_{n_h \, (l_h \frac{1}{2}) j_h}(r) \quad . \qquad \text{(C.36)}
\end{aligned}$$

Kontraktion des ersten und des fünften Clebsch-Gordan-Koeffizienten führt zu der Bedingung, daß $j_t = j$ und $m_t = -\lambda$ sein muß:

$$\begin{aligned}
\rho^{(j_t \, m_t = -\lambda)}(r) \;=\; & \sum_{n_h, j_p, j_h} \sum_{l_p, l_h} \sum_{\tau_h} (-4i) \, \frac{\tilde{g}_{\gamma N \Delta}}{M_\Delta} \, c(k) \, k \, i^{l_h - l_p} \, \hat{j}_t \hat{j}_p \hat{j}_h \, \hat{l}_h \\
& (j_t \, \lambda \; j_t \; -\lambda \mid 0\,0) \;\; \psi_{n_h \, (l_h \frac{1}{2}) j_h}(r) \;\; \varepsilon_{\vec{k}\,\lambda\,(1\,\lambda)} \\
& \sum_{l} i^l \, j_l(kr) \, \hat{l}^2 \, (l_h \, 0 \; l \, 0 \mid l_p \, 0) \left\{ \begin{array}{ccc} l_p & \frac{3}{2} & j_p \\ l_h & \frac{1}{2} & j_h \\ l & 1 & j_t \end{array} \right\} \\
& \sum_{l'} \hat{l}' \, (l\,0\;1\,0 \mid l'\,0) \, W(l\,1\,j_t\,1\,,\, l'\,1) \, (l'\,0\;1\,\lambda \mid j_t\,\lambda) \quad . \qquad \text{(C.37)}
\end{aligned}$$

Damit haben wir unser Ziel erreicht, eine Quellfunktion herzuleiten, die die "Dichte" des durch das Photon angeregeten Δ's im Kern beschreibt und dabei alle quantenmechanisch erlaubten Beiträge der verschiedenen möglichen Δ-Loch-Konfigurationen berücksichtigt. Da wir dabei die Integration über den Winktelanteil ausgeführt haben, hängt die Quellfunktion nur noch vom Abstand r , der Energie des einlaufenden Photons und dem Gesamtdrehimpuls $(j_t \, m_t)$ ab.

Anhang D

Berechnung der Quellfunktion für Pionabsorption

In diesem Anhang wird die Quellfunktion für die Pionabsorption berechnet. Da die Vorgehensweise vollkommen analog zu der bei der Berechnung der Quellfunktion für die Photoabsorption in Anhang C ist, können wir uns darauf beschränken, nur den Anregungsoperator für Photoabsorption durch den Anregungsoperator für Pionabsorption, $F^{\dagger\ \mathrm{eff}}_{\pi N\Delta}$, zu ersetzen. In Kapitel 4.2 haben wir gezeigt, daß für den *effektiven* Anregungsoperator im *π-Kern-CMS* gilt:

$$F^{\dagger\ \mathrm{eff}}_{\pi N\Delta}(\vec{q}) \;=\; \frac{g_{\pi N\Delta}}{M_\pi}\, v(q) \left(c(q)\, \vec{q}\cdot \vec{S}^\dagger \right)\; T^\dagger_\alpha \quad . \tag{D.1}$$

Durch Fourier-Transformation erhalten wir damit für die Quellfunktion:

$$\begin{aligned} \rho^{(j_t\, m_t)}(\vec{r}) \;=\; & \sum_{n_h, j_p, j_h} \sum_{l_p, l_h} \sum_{m_p, m_h} \sum_{\tau_p, \tau_h} (-1)^{j_h + m_h}\, (j_p\, m_p\; j_h\, m_h \mid j_t\, m_t) \\ & \left((l_p\, \tfrac{3}{2})\, j_p\, m_p\,,\; \tfrac{3}{2}\, \tau_p \mid e^{-i\,\vec{q}\cdot\vec{r}} \left(c(q)\, \vec{q}\cdot \vec{S}^\dagger \right)\; T^\dagger_\alpha \mid (l_h\, \tfrac{1}{2})\, j_h\; -m_h\,,\; \tfrac{1}{2}\, \tau_h \right) \\ & \frac{g_{\pi N\Delta}}{M_\pi}\; v(q)\; \psi_{n_h\, (l_h\, \frac{1}{2})\, j_h}(r) \quad . \end{aligned} \tag{D.2}$$

Wir formen nun das Skalarprodukt in D.2 wie in Anhang C um und erhalten anstelle von C.27:

$$\begin{aligned} e^{-i\,\vec{q}\cdot\vec{r}} \left(\vec{q}\cdot\vec{S}^\dagger \right) \;=\; & (-4\pi)\; q \sum_{l,j} i^l\, j_l(qr)\, \hat{l}\, (l\,0\;1\,0 \mid j\,0) \\ & \left[Y_j(\hat{q}) \otimes \left[Y_l(\hat{r}) \otimes S^\dagger_{(1)} \right]_{(j)} \right]_{(00)} \quad . \end{aligned} \tag{D.3}$$

Geeignete Wahl des Koordinatensystems und Umformungen analog zu denen in C.28 - C.30 liefern uns schließlich:

$$e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\left(\vec{q}\cdot\vec{S}^{\dagger}\right) = \left(-\sqrt{4\pi}\right) q \sum_{l,j} i^{l} j_l(qr)\, \hat{l}\,\hat{j}\,(l0\,1\,0 \mid j\,0) \\ (j\,0\,j\,0 \mid 0\,0)\left[Y_l(\hat{r}) \otimes S^{\dagger}_{(1)}\right]_{(j\,0)} \quad . \tag{D.4}$$

Durch Einsetzen von D.4 in D.2 folgt für die Quellfunktion:

$$\rho^{(j_t\, m_t)}(\vec{r}) = \sum_{n_h, j_p, j_h} \sum_{l_p, l_h} \sum_{m_p, m_h} \sum_{\tau_p, \tau_h} (-1)^{j_h + m_h}\, (j_p\, m_p\, j_h\, m_h \mid j_t\, m_t) \\ (-\sqrt{4\pi})\, \frac{g_{\pi N\Delta}}{M_\pi}\, c(q)\, q\, v(q) \sum_{l,j} i^{l} j_l(qr)\, \hat{l}\,\hat{j}\,(l0\,1\,0 \mid j\,0)\,(j\,0\,j\,0 \mid 0\,0) \\ \langle (l_p\, \tfrac{3}{2})\, j_p\, m_p\,,\, \tfrac{3}{2}\, \tau_p \mid \left[Y_l(\hat{r}) \otimes S^{\dagger}_{(1)}\right]_{(j\,0)}\, T^{\dagger}_{\alpha} \mid (l_h\, \tfrac{1}{2})\, j_h\, -m_h\,,\, \tfrac{1}{2}\, \tau_h \rangle \\ \psi_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})\,j_h}(r) \quad . \tag{D.5}$$

Das Spin-Matrixelement in Gleichung D.5 haben wir schon in Anhang C berechnet (Siehe C.33 - C.35.). Für das Isospin-Matrixelement gilt:

$$\langle \frac{3}{2}\, \tau_p \mid T^{\dagger}_{\alpha} \mid \frac{1}{2}\, \tau_h \rangle = (1\,\alpha\,\frac{1}{2}\,\tau_h \mid \frac{3}{2}\,\tau_p) \tag{D.6}$$

mit $\alpha = +1, 0, -1$ für π^+, π^0, π^--Absorption.

Mit D.6 und C.33 - C.35 ergibt sich dann für die Quellfunktion:

$$\rho^{(j_t\, m_t)}(\vec{r}) = \sum_{n_h, j_p, j_h} \sum_{l_p, l_h} \sum_{m_p, m_h} \sum_{\tau_p, \tau_h} (-1)^{j_h + m_h}\, (j_p\, m_p\, j_h\, m_h \mid j_t\, m_t) \\ \left(-\sqrt{4\pi}\right)\, \frac{g_{\pi N\Delta}}{M_\pi}\, c(q)\, q\, v(q) \sum_{l,j} i^{l} j_l(qr)\, \hat{l}\,\hat{j}\,(l0\,1\,0 \mid j\,0)\,(j\,0\,j\,0 \mid 0\,0) \\ (j_h\, -m_h\, j\,0 \mid j_p\, m_p)\, \hat{j}\,\hat{j}_h\, 2\, \frac{\hat{l}\,\hat{l}_h}{\sqrt{4\pi}}\, i^{l_h - l_p}\, (l_h\,0\,l\,0 \mid l_p\,0) \\ \begin{Bmatrix} l_p & \frac{3}{2} & j_p \\ l_h & \frac{1}{2} & j_h \\ l & 1 & j \end{Bmatrix} (1\,\alpha\,\frac{1}{2}\,\tau_h \mid \frac{3}{2}\,\tau_p)\; \psi_{n_h\,(l_h\,\frac{1}{2})\,j_h}(r) \quad . \tag{D.7}$$

Durch Kontraktion des ersten und vierten Clebsch-Gordan-Koeffizienten folgt $j_t = j$, $m_t = 0$ und:

$$\rho^{(j_t\, m_t=0)}(\vec{r}) = \sum_{n_h, j_p, j_h} \sum_{l_p, l_h} \sum_{\tau_h} (-2)\, \frac{g_{\pi N\Delta}}{M_\pi}\, c(q)\, q\, i^{l_h - l_p}\, \hat{j}_t\, \hat{j}_p\, \hat{j}_h\, \hat{l}_h$$

$$(j_t\, 0\; j_t\, 0 \mid 0\, 0) \begin{Bmatrix} l_p & \frac{3}{2} & j_p \\ l_h & \frac{1}{2} & j_h \\ l & 1 & j_t \end{Bmatrix} (1\, \alpha\, \frac{1}{2}\, \tau_h \mid \frac{3}{2}\, \tau_h + \alpha)\; \psi_{n_h\, (l_h\, \frac{1}{2})\, j_h}(r)$$

$$\sum_l i^l\, j_l(qr)\, \hat{l}^2\, (l\, 0\; 1\, 0 \mid j_t\, 0)\, (l_h\, 0\; l\, 0 \mid l_p\, 0) \quad . \tag{D.8}$$

Anhang E

Berechnung des Matrixelements der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung

In Abschnitt 3.3 haben wir in Gleichung 3.28 das Matrixelement der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung definiert:

$$\alpha_{j,i} \;=\; \langle \tilde{D}_j \,|V_i\rangle \;=\; \langle \tilde{D}_j \,|V\, G_0|\, D_i\rangle \;. \tag{E.1}$$

Um den Zweikörperoperator V auf den Zustand $G_0|\, D_i\rangle$ anwenden zu können, spalten wir $G_0|\, D_i\rangle$ in seine einzelnen Drehimpuls-Komponenten auf:

$$G_0|\, D_i\rangle \;=:\; \sum_{\nu_{p_1}\,,\nu_{h_1}} |\, \Phi_{\nu_{p_1}\,\nu_{h_1}\; j_t\, m_t}\rangle \quad , \tag{E.2}$$

wobei $\nu_{p_1} = \left(\left(\frac{3}{2}\, l_{p_1}\right) j_{p_1}\right)$ und $\nu_{h_1} = \left(n_{h_1}\, \left(\frac{1}{2}\, l_{h_1}\right) j_{h_1}\right)$ sind. Den zu berechnenden Zustand zerlegen wir ebenfalls in Drehimpuls-Komponenten:

$$VG_0|\, D_i\rangle \;=:\; \sum_{\nu_{p_2}\,,\nu_{h_2}} \frac{1}{r_2}\, \lambda^{(j_t m_t)}_{\nu_{p_2}\,\nu_{h_2}}(r_2) \;|\, [\nu_{p_2}\,\nu_{h_2}]\; j_t\, m_t\rangle \;. \tag{E.3}$$

Diese Zerlegung erlaubt es uns, durch *Projektion* auf die Drehimpulse, Gleichung E.3 umzuschreiben:

$$\lambda^{(j_t m_t)}_{\nu_{p_2}\,\nu_{h_2}}(r_2) \;=\; r_2\, \langle [\nu_{p_2}\,\nu_{h_2}]\; j_t\, m_t \,|\, VG_0|\, D_i\rangle \;. \tag{E.4}$$

Durch Einsetzen von (E.2) in (E.4) erhalten wir folgenden Ausdruck für die *Radialwellenfunktion* des Zustands $VG_0|\, D_i\rangle$:

$$\lambda^{(j_t m_t)}_{\nu_{p_2}\,\nu_{h_2}}(r_2) \;=\; \sum_{\nu_{p_1}\,,\nu_{h_1}} r_2\, \langle [\nu_{p_2}\,\nu_{h_2}]\; j_t\, m_t \,|\, V \,|\, \Phi_{\nu_{p_1}\,\nu_{h_1}\; j_t\, m_t}\rangle \;. \tag{E.5}$$

Die runde Klammer in Gleichung E.5 deutet an, daß nur auf die Drehimpuls-Zustände projiziert wird und daher nur die Winkelintegration bei der Berechnung des Matrixelements durchgeführt wird.

Zur Berechnung des Matrixelements

$$\langle j_t\, m_t \mid V \mid \Phi_1 \rangle \;:=\; \langle [\nu_{p_2}\, \nu_{h_2}]\, j_t\, m_t \mid V \mid \Phi_{\nu_{p_1}\, \nu_{h_1}}\; j_t\, m_t \rangle \tag{E.6}$$

schreiben wir den Zweikörperoperator V in zweiter Quantisierung [46, Anhang 3B]:

$$V \;=\; \frac{1}{4} \sum \langle \nu_3\, \nu_4 \mid V \mid \nu_1\, \nu_2 \rangle_a \;\; a^\dagger_{\nu_4} a^\dagger_{\nu_3} a_{\nu_1} a_{\nu_2} \tag{E.7}$$

$$\;=\; \sum_{\nu_1 < \nu_2\,,\, \nu_3 < \nu_4} \langle \nu_3\, \nu_4 \mid V \mid \nu_1\, \nu_2 \rangle_a \;\; a^\dagger_{\nu_4} a^\dagger_{\nu_3} a_{\nu_1} a_{\nu_2} \tag{E.8}$$

mit:

$$\langle \nu_3\, \nu_4 \mid V \mid \nu_1\, \nu_2 \rangle_a \;:=\; \langle \nu_3\, \nu_4 \mid V \mid \nu_1\, \nu_2 \rangle \;-\; \langle \nu_3\, \nu_4 \mid V \mid \nu_2\, \nu_1 \rangle \tag{E.9}$$

und

$$\langle \nu_3\, \nu_4 \mid V \mid \nu_1\, \nu_2 \rangle \;:=\; \int \phi^\dagger_{\nu_3}(\vec{r}_1)\, \phi^\dagger_{\nu_4}(\vec{r}_2)\, V(\vec{r}_1\,,\, \vec{r}_2)\, \phi_{\nu_1}(\vec{r}_1)\, \phi_{\nu_2}(\vec{r}_2)\;\; d^3r_1\, d^3r_2 \;\; . \tag{E.10}$$

Die Operatoren $a^\dagger_{\nu_i}$ und a_{ν_j} sind die Teilchenerzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren zu den Quantenzahlen $\nu_i = (n_i\, (s_i\, l_i)\, j_i\, m_i)$ und die $\phi_{\nu_i}(\vec{r}_{1,2})$ sind die zugehörigen Wellenfunktionen.

Da in unserem Modell der Δ-Loch-Restwechselwirkung nur direkte Mesonaustauschgraphen auftreten, vernachlässigen wir im weiteren die Austausch-Matrixelemente, d.h. wir schreiben

$$V \;=\; \sum_{\nu_1 < \nu_2\,,\, \nu_3 < \nu_4} \langle \nu_3\, \nu_4 \mid V \mid \nu_1\, \nu_2 \rangle \;\; a^\dagger_{\nu_4} a^\dagger_{\nu_3} a_{\nu_1} a_{\nu_2} \;\; . \tag{E.11}$$

Den Teilchen-Loch-Zustand $\mid \Phi_{\nu_{p_1}\, \nu_{h_1}}\; j_t\, m_t \rangle$ schreiben wir ebenfalls in zweiter Quantisierung:

$$\mid \Phi_{\nu_{p_1}\, \nu_{h_1}}\; j_t\, m_t \rangle \;=\; \left[a^\dagger_{(\frac{3}{2}\, l_{p_1})\, j_{p_1}}\; b^\dagger_{n_{h_1}\, (\frac{1}{2}\, l_{h_1})\, j_{h_1}} \right]_{(j_t\, m_t)} \mid 0 \rangle \tag{E.12}$$

$$\;=\; \sum_{m_{p_1}\,,\, m_{h_1}} (j_{p_1} m_{p_1}\, j_{h_1} m_{h_1} \mid j_t\, m_t) \;\; (-1)^{j_{h_1} + m_{h_1}}$$

$$a^\dagger_{(\frac{3}{2}\, l_{p_1})\, j_{p_1}\, m_{p_1}}\; a_{n_{h_1}\, (\frac{1}{2}\, l_{h_1})\, j_{h_1}\, -m_{h_1}} \mid 0 \rangle \;\; , \tag{E.13}$$

wobei wir die folgende Beziehung zwischen dem Locherzeugungsoperator $b^\dagger$ und dem Teilchenvernichtungsoperator a benutzt haben:

$$b^\dagger_{n_{h_1}\,(\frac{1}{2}\,l_{h_1})\,j_{h_1}\,m_{h_1}} \;=\; (-1)^{j_{h_1}+m_{h_1}}\;\; a_{n_{h_1}\,(\frac{1}{2}\,l_{h_1})\,j_{h_1}\,-m_{h_1}} \quad . \tag{E.14}$$

Für den Zustand $([\nu_{p_2}\,\nu_{h_2}]\,j_t\,m_t\mid$ gilt:

$$([\nu_{p_2}\,\nu_{h_2}]\,j_t\,m_t\mid \;=\; \langle 0\mid \left[b_{n_{h_2}\,(\frac{1}{2}\,l_{h_2})\,j_{h_2}}\;a_{(\frac{3}{2}\,l_{p_2})\,j_{p_2}}\right]_{(j_t\,m_t)} \quad . \tag{E.15}$$

Durch Einsetzen von (E.11), (E.13) und (E.15) in das Matrixelement (E.6) und Ausnutzen der Kommutatorrelationen für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

$$\begin{aligned} & a^\dagger_{n_{h_2}\,(\frac{1}{2}\,l_{h_2})\,j_{h_2}\,-m_{h_2}}\;a_{(\frac{3}{2}\,l_{p_2})\,j_{p_2}\,m_{p_2}}\;a^\dagger_{\nu_4}\,a^\dagger_{\nu_3}\,a_{\nu_1}\,a_{\nu_2}\,a^\dagger_{(\frac{3}{2}\,l_{p_1})\,j_{p_1}\,m_{p_1}}\;a_{n_{h_1}\,(\frac{1}{2}\,l_{h_1})\,j_{h_1}\,-m_{h_1}} \\ &= \;\delta_{\nu_4,(\frac{3}{2}\,l_{p_2})\,j_{p_2}\,m_{p_2}}\;\delta_{\nu_1,(\frac{3}{2}\,l_{p_1})\,j_{p_1}\,m_{p_1}}\;\delta_{\nu_2,n_{h_2}\,(\frac{1}{2}\,l_{h_2})\,j_{h_2}\,-m_{h_2}}\;\delta_{\nu_3,n_{h_1}\,(\frac{1}{2}\,l_{h_1})\,j_{h_1}\,-m_{h_1}} \end{aligned} \tag{E.16}$$

erhalten wir für $(j_t\,m_t\mid V\mid\Phi_1\rangle$:

$$\begin{aligned} (j_t\,m_t\mid V\mid\Phi_1\rangle \;=\; & \sum_{m_{p_1},m_{p_2},m_{h_1},m_{h_2}} (-1)^{j_{h_1}+m_{h_1}+j_{h_2}+m_{h_2}} \\ & (j_{p_1}m_{p_1}\,j_{h_1}m_{h_1}\mid j_t\,m_t)\;\;(j_{p_2}m_{p_2}\,j_{h_2}m_{h_2}\mid j_t\,m_t) \\ & \langle n_{h_1}\,(\tfrac{1}{2}\,l_{h_1})\,j_{h_1}\;-m_{h_1}\;\;(\tfrac{3}{2}\,l_{p_2})\,j_{p_2}\,m_{p_2}\mid V\mid(\tfrac{3}{2}\,l_{p_1})\,j_{p_1}\,m_{p_1}\;\;n_{h_2}\,(\tfrac{1}{2}\,l_{h_2})\,j_{h_2}\;-m_{h_2}\rangle \quad . \end{aligned} \tag{E.17}$$

Nun entwickeln wir den Zweikörperoperator nach Multipolen (siehe Anhang G):

$$V(\vec{r}_1\,,\,\vec{r}_2) \;=\; \sum_{J,M,l_1,l_2} v_{l_1,l_2,J}(r_1\,,\,r_2)\;\;[i^{l_1}\,Y_{l_1}(\hat{r}_1)\otimes S_1]^{\widetilde{(JM)}}\;\;[i^{l_2}\,Y_{l_2}(\hat{r}_2)\otimes S_2^\dagger]^{(JM)}. \tag{E.18}$$

Dann können wir die Integrationen über $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ wie folgt ausführen:

$$\begin{aligned} (j_t\,m_t\mid V\mid\Phi_1\rangle \;=\; & \sum_{J,M,l_1,l_2} g_{\nu_{p_1}\,\nu_{h_1}}\;\;g_{\nu_{p_2}\,\nu_{h_2}}\;\;\int dr_1\;r_1^2\;\;v_{l_1,l_2,J}(r_1\,,\,r_2) \\ & \psi^*_{n_{h_1}\,l_{h_1}\,j_{h_1}\,-m_{h_1}}(r_1)\,\psi_{l_{p_1}\,j_{p_1}\,m_{p_1}}(E_{p_1}\,,\,r_1)\,\psi_{n_{h_2}\,l_{h_2}\,j_{h_2}\,-m_{h_2}}(r_2) \quad . \end{aligned} \tag{E.19}$$

Dabei beschreiben die $\psi(r)$ die *Radial-Anteile* der Wellenfunktionen $\phi(\vec{r})$ aus Gleichung E.10. Die *geometrischen Faktoren* $g_{\nu_{p_1}\nu_{h_1}}$ und $g_{\nu_{p_2}\nu_{h_2}}$, die aus der Winkelintegration resultieren, werden in Anhang F explizit berechnet.

Bei der Berechnung des Matrixelements (E.6) wurden bis jetzt nur die Drehimpuls-Matrixelemente berücksichtigt. Da die Herleitung der Isospin-Matrixelemente vollkommen analog verläuft, soll sie hier nur kurz skizziert werden. In zweiter Quantisierung gilt für den Zweikörper-Isospinoperator V^I :

$$V^I = - \sum_{\nu_1<\nu_2\,,\nu_3<\nu_4} \langle \overline{\nu_1}\,\nu_4 \mid \vec{T}_2^{\dagger} \cdot \vec{T}_1 \mid \overline{\nu_3}\,\nu_2 \rangle \; a^{\dagger}_{\nu_4}\, b^{\dagger}_{\nu_3}\, b_{\nu_1}\, a_{\nu_2} \tag{E.20}$$

$$= - \sum_{\nu_1<\nu_2\,,\nu_3<\nu_4} \sum_m \langle \nu_4 \mid T^{\dagger}_m(2) \mid \overline{\nu_3} \rangle a^{\dagger}_{\nu_4}\, b^{\dagger}_{\nu_3} \; \langle \overline{\nu_1} \mid (-1)^m \, T_{-m}(1) \mid \nu_2 \rangle \, b_{\nu_1}\, a_{\nu_2} \; . \tag{E.21}$$

Dabei ist $\overline{\nu}$ der zu ν *zeitumgekehrte* Zustand, d.h. $\overline{(j\,m)} = (-1)^{j+m}\,(j\;\;-m)$; für V^I sind schon die Isospin-Operatoren eingesetzt worden, die sich aus den in Abschnitt 3.4 angegebenen Ein-Meson-Austauschpotentialen ergeben. Die Isospin-Teilchen-Loch-Zustände schreiben wir analog zu E.12:

$$\mid \Phi^{\tau}_{(\frac{3}{2}\tau_2),(\frac{1}{2}\tau_1)} \rangle \;=\; \mid \overline{\tfrac{1}{2}\tau_1}\,\tfrac{3}{2}\tau_2 \rangle \;=\; a^{\dagger}_{\frac{3}{2}\tau_2}\; b^{\dagger}_{\frac{1}{2}\tau_1} \;\mid 0 \rangle \quad , \tag{E.22}$$

$$\langle \Phi^{\tau}_{(\frac{3}{2}\tau_4),(\frac{1}{2}\tau_3)} \mid \;=\; \langle \overline{\tfrac{1}{2}\tau_3}\,\tfrac{3}{2}\tau_4 \mid \;=\; \langle 0 \mid \; b_{\frac{1}{2}\tau_3}\; a_{\frac{3}{2}\tau_4} \quad . \tag{E.23}$$

Entsprechend E.16 - E.17 folgt damit für das Isospin-Matrixelement:

$$\langle \Phi^{\tau}_{(\frac{3}{2}\tau_4),(\frac{1}{2}\tau_3)} \mid V^I \mid \Phi^{\tau}_{(\frac{3}{2}\tau_2),(\frac{1}{2}\tau_1)} \rangle \;=\; - \sum_m \; g^I_{(\frac{3}{2}\tau_2),(\frac{1}{2}\tau_1)} \; g^I_{(\frac{3}{2}\tau_4),(\frac{1}{2}\tau_3)} \tag{E.24}$$

mit

$$g^I_{(\frac{3}{2}\tau_2),(\frac{1}{2}\tau_1)} \;=\; \langle \overline{\frac{1}{2}\tau_1} \mid (-1)^m \, T_{-m}(1) \mid \frac{3}{2}\tau_2 \rangle \quad , \tag{E.25}$$

$$g^I_{(\frac{3}{2}\tau_4),(\frac{1}{2}\tau_3)} \;=\; \langle \frac{3}{2}\tau_4 \mid T^{\dagger}_m(2) \mid \overline{\frac{1}{2}\tau_3} \rangle \quad . \tag{E.26}$$

Diese "iso-geometrischen" Faktoren $g^I_{(\frac{3}{2}\tau_2),(\frac{1}{2}\tau_1)}$ und $g^I_{(\frac{3}{2}\tau_4),(\frac{1}{2}\tau_3)}$ werden ebenfalls in Anhang F berechnet.

Für das Matrixelement $([\nu_{p_2}\,\nu_{h_2}]\,j_t\,m_t \mid V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}} \mid \Phi_{\nu_{p_1}\,\nu_{h_1}}\;j_t\,m_t\rangle$ ergibt sich also insgesamt:

$$\begin{aligned}(j_t\,m_t \mid V \mid \Phi_1\rangle \;=\; & -\sum_{J,M,l_1,l_2}\;\sum_{\tau_4,\tau_3,\tau_2,\tau_1,m} g_{\nu_{p_1}\nu_{h_1}}\;\; g_{\nu_{p_2}\nu_{h_2}}\;\; g^I_{(\frac{3}{2}\tau_2),(\frac{1}{2}\tau_1)}\;\; g^I_{(\frac{3}{2}\tau_4),(\frac{1}{2}\tau_3)} \\ & \int dr_1\, r_1^2\;\; v_{l_1,l_2,J}(r_1\,,\,r_2) \\ & \psi^*_{n_{h_1}\,l_{h_1}\,j_{h_1}\,-m_{h_1}}(r_1)\,\psi_{l_{p_1}\,j_{p_1}\,m_{p_1}}(E_{p_1}\,,\,r_1)\,\psi_{n_{h_2}\,l_{h_2}\,j_{h_2}\,-m_{h_2}}(r_2)\;\;. \end{aligned} \tag{E.27}$$

Für die Radialwellenfunktion des Zustands $V\,G_0|\,D_i\rangle$ gilt daher:

$$\begin{aligned}\lambda^{(j_t\,m_t)}_{\nu_{p_2}\,\nu_{h_2}}(r_2) \;=\; & -\sum_{\nu_{p_1},\nu_{h_1}}\;\sum_{J,M,l_1,l_2}\;\sum_{\tau_4,\tau_3,\tau_2,\tau_1,m} r_2\;\psi_{n_{h_2}\,l_{h_2}\,j_{h_2}\,-m_{h_2}}(r_2) \\ & g_{\nu_{p_1}\nu_{h_1}}\;\; g_{\nu_{p_2}\nu_{h_2}}\;\; g^I_{(\frac{3}{2}\tau_2),(\frac{1}{2}\tau_1)}\;\; g^I_{(\frac{3}{2}\tau_4),(\frac{1}{2}\tau_3)} \\ & \int dr_1\, r_1^2\;\; v_{l_1,l_2,J}(r_1\,,\,r_2)\;\; \psi^*_{n_{h_1}\,l_{h_1}\,j_{h_1}\,-m_{h_1}}(r_1)\,\psi_{l_{p_1}\,j_{p_1}\,m_{p_1}}(E_{p_1}\,,\,r_1) \end{aligned} \tag{E.28}$$

Anhang F

Berechnung der geometrischen Faktoren

In diesem Anhang werden die geometrischen Faktoren $g_{\nu_{p_1}\nu_{h_1}}$ und $g_{\nu_{p_2}\nu_{h_2}}$ berechnet, die in Anhang E eingeführt worden sind:

$$
\begin{aligned}
g_{\nu_{p_1}\nu_{h_1}} &= \sum_{m_{h_1}} \sum_{m_{p_1}} (-1)^{j_{h_1}+m_{h_1}} \; (j_{p_1} m_{p_1} j_{h_1} m_{h_1} \mid j_t \, m_t) \\
&\quad \langle (\tfrac{1}{2}\, l_{h_1})\, j_{h_1} \, -m_{h_1} \mid [i^{l_1}\, Y_{l_1}(\hat{r}_1) \otimes S_1]^{\widetilde{(JM)}} \mid (\tfrac{3}{2}\, l_{p_1})\, j_{p_1} m_{p_1} \rangle \qquad \text{(F.1)} \\
&= \sum_{m_{h_1}} \sum_{m_{p_1}} (-1)^{j_{h_1}+m_{h_1}} \; (j_{p_1} m_{p_1} j_{h_1} m_{h_1} \mid j_t \, m_t) \\
&\quad i^{l_1}\, (-1)^{J+M} \, \frac{1}{\hat{j}_{h_1}} \, (j_{p_1} m_{p_1} \, J \, -M \mid j_{h_1} \, -m_{h_1}) \\
&\quad \langle (\frac{1}{2}\, l_{h_1})\, j_{h_1} \parallel [Y_{l_1}(\hat{r}_1) \otimes S_1]_J \parallel (\frac{3}{2}\, l_{p_1})\, j_{p_1} \rangle \; . \qquad \text{(F.2)}
\end{aligned}
$$

Durch Kontraktion der beiden Clebsch-Gordan-Koeffizienten folgt aus F.2:

$$
\begin{aligned}
g_{\nu_{p_1}\nu_{h_1}} &= i^{l_1}\, (-1)^{j_{h_1}+m_{h_1}+j_{p_1}-m_{p_1}+J+M} \, \frac{1}{\hat{j}} \, \delta_{J,j_t} \, \delta_{M,m_t} \\
&\quad \hat{j}_{h_1} \, \hat{j}_{p_1} \, \hat{j} \, \langle \, l_{h_1} \parallel Y_{l_1} \parallel l_{p_1} \rangle \, \langle \, \frac{1}{2} \parallel S_1 \parallel \frac{3}{2} \rangle \, \left\{ \begin{array}{ccc} l_{h_1} & \frac{1}{2} & j_{h_1} \\ l_{p_1} & \frac{3}{2} & j_{p_1} \\ l_1 & 1 & J \end{array} \right\} \; . \qquad \text{(F.3)}
\end{aligned}
$$

Für die reduzierten Matrixelemente gilt:

$$\langle \frac{1}{2} \,||\, S_1 \,||\, \frac{3}{2} \rangle \;=\; -2 \;, \tag{F.4}$$

$$\langle l_{h_1} \,||\, Y_{l_1} \,||\, l_{p_1} \rangle \;=\; \frac{\hat{l}_{p_1}\,\hat{l}_{h_1}}{\sqrt{4\,\pi}}\;(-1)^{l_1+l_{h_1}}\;i^{\,l_{p_1}-l_{h_1}}\;(l_{h_1}\,0\,l_{p_1}\,0 \mid l_1\,0)\;. \tag{F.5}$$

Der Phasenfaktor $i^{\,l_{p_1}-l_{h_1}}$ stammt von der gewählten *Phasenkonvention* der *Zeitumkehrphase* [46]. Damit ergibt sich für den geometrischen Faktor $g_{\nu_{p_1}\,\nu_{h_1}}$:

$$g_{\nu_{p_1}\,\nu_{h_1}} \;=\; \frac{-2}{\sqrt{4\,\pi}}\;i^{\,l_{p_1}+l_{h_1}-l_1}\;\hat{\jmath}_{h_1}\;\hat{\jmath}_{p_1}\;\hat{l}_{h_1}\;\hat{l}_{p_1}\;(l_{h_1}\,0\,l_{p_1}\,0 \mid l_1\,0)\;\;\delta_{J,j_t}\;\delta_{M,m_t}$$
$$\left\{ \begin{array}{ccc} l_{p_1} & \frac{3}{2} & j_{p_1} \\ l_{h_1} & \frac{1}{2} & j_{h_1} \\ l_1 & 1 & j_t \end{array} \right\}. \tag{F.6}$$

Analog folgt aus $\langle \frac{1}{2} \,||\, S_1^{\dagger} \,||\, \frac{3}{2} \rangle \;=\; 2$ für den geometrischen Faktor $g_{\nu_{p_2}\,\nu_{h_2}}$:

$$g_{\nu_{p_2}\,\nu_{h_2}} \;=\; \frac{2}{\sqrt{4\,\pi}}\;i^{\,l_{p_2}+l_{h_2}-l_2}\;\hat{\jmath}_{h_2}\;\hat{\jmath}_{p_2}\;\hat{l}_{h_2}\;\hat{l}_{p_2}\;(l_{h_2}\,0\,l_{p_2}\,0 \mid l_2\,0)\;\;\delta_{J,j_t}\;\delta_{M,m_t}$$
$$\left\{ \begin{array}{ccc} l_{p_2} & \frac{3}{2} & j_{p_2} \\ l_{h_2} & \frac{1}{2} & j_{h_2} \\ l_2 & 1 & j_t \end{array} \right\}. \tag{F.7}$$

Für die "iso-geometrischen" Faktoren $g^I_{(\frac{3}{2}\,\tau_2),(\frac{1}{2}\,\tau_1)}$ und $g^I_{(\frac{3}{2}\,\tau_4),(\frac{1}{2}\,\tau_3)}$ ergibt sich:

$$g^I_{(\frac{3}{2}\,\tau_2),(\frac{1}{2}\,\tau_1)} \;=\; \langle \overline{\frac{1}{2}\,\tau_1} \mid (-1)^m\;T_{-m}(1) \mid \frac{3}{2}\,\tau_2 \rangle \tag{F.8}$$

$$\;=\; (-1)^{\frac{1}{2}+\tau_1}\;\langle \frac{1}{2}\;-\tau_1 \mid (-1)^m\;T_{-m}(1) \mid \frac{3}{2}\,\tau_2 \rangle \tag{F.9}$$

$$\;=\; (-1)^{\frac{1}{2}+\tau_1}\;(1\,m\;\frac{1}{2}\;-\tau_1 \mid \frac{3}{2}\,\tau_2) \tag{F.10}$$

und

$$g^I_{(\frac{3}{2}\,\tau_4),(\frac{1}{2}\,\tau_3)} \;=\; \langle \frac{3}{2}\,\tau_4 \mid T^{\dagger}_m(2) \mid \overline{\frac{1}{2}\,\tau_3} \rangle \tag{F.11}$$

$$\;=\; (-1)^{\frac{1}{2}+\tau_3}\;(1\,m\;\frac{1}{2}\;-\tau_3 \mid \frac{3}{2}\,\tau_4)\;\;. \tag{F.12}$$

Anhang G

Multipol-Entwicklung der ΔN^{-1}-Restwechselwirkung

Um eine *Trennung der Variablen* $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ in der Δ-Loch-Restwechselwirkung zu erreichen, entwickeln wir die im Anhang 3.4 festgelegten Ein-Meson-Austauschpotentiale nach Multipolen. Die Vorgehensweise ist die gleiche wie bei Horie und Sasaki [48] und soll hier nur skizziert werden.

Zur Vorbereitung der Multipolentwicklung von $V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}}$ spalten wir das Potential in seinen Zentral- ($\kappa = 0$) und Tensoranteil ($\kappa = 2$) auf:

$$V_{\Delta N^{-1},\Delta N^{-1}}(\vec{r}_1\,,\vec{r}_2) \;=\; \sum_{\kappa=0,2} \tilde{v}^{\,(\kappa)}(\vec{r}) \quad , \tag{G.1}$$

$$\tilde{v}^{\,(0)}(\vec{r}) \;=\; V_C\,(r)\;\vec{S}_2^{\dagger}\cdot\vec{S}_1 \;=\; V_0(r)\;(-\sqrt{3})\;C^{(0)}(\hat{r})\;[S_1\otimes S_2^{\dagger}]^{(0)} \quad , \tag{G.2}$$

$$\tilde{v}^{\,(2)}(\vec{r}) \;=\; V_T\,(r)\;S_{12}(\hat{r}) \;=\; V_2(r)\;\sqrt{30}\;[\,C^{(2)}(\hat{r})\otimes[S_1\otimes S_2^{\dagger}]^{(2)}\,]^{(0)} . \tag{G.3}$$

Dabei ist $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ und

$$C^{(\kappa)}(\hat{r}) \;=\; \sqrt{\frac{4\,\pi}{2\kappa+1}}\;Y_\kappa\,(\hat{r}) \quad . \tag{G.4}$$

Fourier-Transformation in den Impulsraum ergibt für das Potential:

$$v^{\,(\kappa)}(\vec{p}) \;=\; \frac{1}{(2\,\pi)^3}\int d^3r\;V_\kappa(r)\;C^{\,(\kappa)}(\hat{r})\;e^{\,i\vec{p}\cdot\vec{r}} \tag{G.5}$$

$$\;=\; \frac{1}{4\,\pi}\;i^{\,\kappa}\;v_\kappa(p)\;C^{\,(\kappa)}(\hat{p}) \tag{G.6}$$

mit

$$v_\kappa(p) \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dr\;r^2\;j_\kappa(pr)\;V_\kappa(r) \quad , \tag{G.7}$$

wobei $j_\kappa(pr)$ die sphärische Besselfunktion der Ordnung κ ist. Rücktransformation in den Ortsraum liefert:

$$\begin{aligned} V_\kappa(r)\, C^{(\kappa)}(\hat{r}) &= \frac{1}{4\pi}\, i^\kappa \int d^3p\, v^{(\kappa)}(\vec{p})\, C^\kappa(\hat{p})\, e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)} \\ &= \sum_{k_1,k_2} i^{k_1-k_2+\kappa} \frac{\hat{k}_1^2 \hat{k}_2^2}{\hat{\kappa}^2}\, (k_1\, 0\; k_2\, 0 \mid \kappa\, 0)\, [C_1^{(k_1)} \otimes C_2^{(k_2)}]^{(\kappa)}\, v^{(k_1,k_2,\kappa)}(r_1, r_2) \end{aligned} \tag{G.8}$$

mit

$$v^{(k_1,k_2,\kappa)}(r_1, r_2) = \int_0^\infty dp\, p^2\, j_{k_1}(pr_1)\, j_{k_2}(pr_2)\, v_\kappa(p) \tag{G.9}$$

und $\hat{\kappa} := \sqrt{2\kappa+1}$. In Gleichung G.8 ist $[C_1^{(k_1)} \otimes C_2^{(k_2)}]^{(\kappa)}$ das Tensorprodukt der beiden sphärischen Tensoren der Ordnung k_1 und k_2, gekoppelt zum Tensor mit Drehimpuls κ.

Für den Zentralteil $\tilde{v}^{(\kappa=0)}(\vec{r}) = V_C(r)\, \vec{S}_2^\dagger \cdot \vec{S}_1$ folgt daraus:

$$V_C(r)\, \vec{S}_2^\dagger \cdot \vec{S}_1 = \sum_l (-1)^{l+1}\, \hat{l}^3 \sqrt{3}\, v_l(r_1, r_2)\, [[C^{(l)}(\hat{r}_1) \otimes C^{(l)}(\hat{r}_2)]^{(0)}\, [S_1 \otimes S_2^\dagger]^{(0)}]^{(0)} \tag{G.10}$$

$$= 4\pi \sum_{l,j} (-1)^{l+1}\, \hat{j}\, v_l(r_1, r_2)\, [[Y_l(\hat{r}_1) \otimes S_1]^{(j)}\, [Y_l(\hat{r}_2) \otimes S_2^\dagger]^{(j)}]^{(0)} \tag{G.11}$$

$$= -4\pi \sum_{j,m,l} v_l(r_1, r_2)\, [i^l\, Y_l(\hat{r}_1) \otimes S_1]^{\widetilde{(j\,m)}}\, [i^l\, Y_l(\hat{r}_2) \otimes S_2^\dagger]^{(j\,m)} \tag{G.12}$$

mit

$$v_l(r_1, r_2) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, V_C(r)\, P_l(\cos\theta)\ . \tag{G.13}$$

θ ist hier der Winkel zwischen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ und $\widetilde{(j\,m)}$ ist der *zeitumgekehrte* Zustand zu $(j\,m)$, d.h. :

$$[\cdots]^{\widetilde{(j\,m)}} = (-1)^{j+m}\, [\cdots]^{(j\,-m)}\ . \tag{G.14}$$

Für den Tensorteil $\tilde{v}^{(\kappa=2)}(\vec{r}) = V_T(r)\, S_{12}(\hat{r})$ ergibt sich analog:

$$\begin{aligned} V_T(r)\, S_{12}(\hat{r}) = \sqrt{30} \sum_{l_1,l_2} & i^{l_1-l_2+2}\, \frac{\hat{l}_1^2\, \hat{l}_2^2}{\hat{2}^2}\, (l_1\, 0\; l_2\, 0 \mid 2\, 0)\, v^{(l_1,l_2,2)}(r_1, r_2) \\ & [[C^{(l_1)}(\hat{r}_1) \otimes C^{(l_2)}(\hat{r}_2)]^{(2)}\, [S_1 \otimes S_2^\dagger]^{(2)}]^{(0)} \end{aligned} \tag{G.15}$$

$$= \sqrt{30} \sum_{l_1,l_2,j} i^{l_1-l_2+2} \frac{\hat{l}_1^2 \hat{l}_2^2 \hat{j}}{\hat{2}} (-1)^{j+1+l_2} (l_1\,0\; l_2\,0 \mid 2\,0)\, W(l_1\,1\; l_2\,1;\, j\,2)$$
$$v^{(l_1,l_2,2)}(r_1, r_2) \left[[C^{(l_1)}(\hat{r}_1) \otimes S_1]^{(j)} [C^{(l_2)}(\hat{r}_2) \otimes S_2^\dagger]^{(j)}\right]^{(0)} \qquad \text{(G.16)}$$

$$= \sqrt{6} \sum_{l_1,l_2,j} (-1)^j\, 4\pi \hat{l}_1\, \hat{l}_2\, (l_1\,0\; l_2\,0 \mid 2\,0)\, W(l_1\,1\; l_2\,1;\, j\,2)$$
$$v^{(l_1,l_2,2)}(r_1, r_2) \left[i^{l_1} Y_{l_1}(\hat{r}_1) \otimes S_1\right]^{\widetilde{(j\,m)}} \left[i^{l_2} Y_{l_2}(\hat{r}_2) \otimes S_2^\dagger\right]^{(j\,m)} \quad . \qquad \text{(G.17)}$$

Für die $v^{(l_1,l_2,2)}(r_1, r_2)$ gilt:

$$v^{(l,l,2)}(r_1, r_2) = r_1 r_2 \left\{ \frac{2l+3}{2l+1} w^{(l-1)}(r_1, r_2) + \frac{2l-1}{2l+1} w^{(l+1)}(r_1, r_2) \right\}$$
$$-(r_1^2 + r_2^2)\, w^{(l)}(r_1, r_2) \quad , \qquad \text{(G.18)}$$

$$v^{(l,l+2,2)}(r_1, r_2) = r_2^2\, w^{(l)}(r_1, r_2) - 2 r_1 r_2 w^{(l+1)}(r_1, r_2) + r_1^2\, w^{(l+2)}(r_1, r_2) \quad , \qquad \text{(G.19)}$$

$$v^{(l_2,l_1,2)}(r_1, r_2) = v^{(l_1,l_2,2)}(r_1, r_2) \quad , \qquad \text{(G.20)}$$

wobei

$$w^{(l)}(r_1, r_2) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, \frac{V_T(r)}{r^2}\, P_l(\cos\theta) \quad . \qquad \text{(G.21)}$$

Damit haben wir eine allgemeine Multipol-Entwicklung sowohl für den Zentral- als auch den Tensorteil gewonnen:

$$\tilde{v}^{(\kappa)}(\vec{r}) = \sum_{j,m,l_1,l_2} v^{(\kappa)}_{l_1,l_2,j}(r_1, r_2) \left[i^{l_1} Y_{l_1}(\hat{r}_1) \otimes S_1\right]^{\widetilde{(j\,m)}} \left[i^{l_2} Y_{l_2}(\hat{r}_2) \otimes S_2^\dagger\right]^{(j\,m)} \quad . \qquad \text{(G.22)}$$

Für $\tilde{v}^{(\kappa)}(\vec{r})$ gilt im Falle der *Zentralkraft*:

$$\tilde{v}^{(\kappa)}(\vec{r}) = -4\pi\, v_l(r_1, r_2)\, \delta_{l,l_1}\, \delta_{l,l_2} \qquad \text{(G.23)}$$

und im Falle der *Tensorkraft*:

$$\tilde{v}^{(\kappa)}(\vec{r}) = 4\pi \sqrt{6}\, (-1)^j\, \hat{l}_1\, \hat{l}_2\, (l_1\,0\; l_2\,0 \mid 2\,0)\, W(l_1\,1\; l_2\,1;\, j\,2)$$
$$v^{(l_1,l_2,2)}(r_1, r_2) \quad . \qquad \text{(G.24)}$$

Die Integrationen in den Gleichungen G.13 und G.21 sind *analytisch* nur für bestimmte Klassen von Potentialen ausführbar, z.B. für Potentiale von Yukawa- oder Gaußform. Diese Potentiale können in der folgenden Form analytisch in Legendre-Polynome entwickelt werden [49, Kapitel 16]:

$$\frac{e^{-k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -k \sum_l (2l+1)\, j_l(ikr_<)\, h_l^1(ikr_>)\, P_l(\cos\theta) \quad , \tag{G.25}$$

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = i\,k \sum_l (2l+1)\, j_l(kr_<)\, h_l^1(kr_>)\, P_l(\cos\theta) \quad , \tag{G.26}$$

$$\begin{aligned} e^{-k(\vec{r}-\vec{r}')^2} &= e^{-k(\vec{r}^2+\vec{r}'^2)}\; e^{2k\vec{r}\cdot\vec{r}'} \\ &= e^{-k(\vec{r}^2+\vec{r}'^2)} \sum_l (2l+1)\, i^l\, j_l(2ikrr')\, P_l(\cos\theta) \quad . \end{aligned} \tag{G.27}$$

Dabei sind $r_<$, bzw. $r_>$ der betragsmäßig kleinere, bzw. größere der beiden Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{r}'$, $j_l(kr_<)$ ist die sphärische Besselfunktion erster Art und $h_l^1(kr_>)$ ist die sphärische Hankelfunktion erster Art, definiert wie in Jackson [49].
Die *Orthogonalitätsrelationen* der Legendre-Polynome lauten:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d(\cos\theta) P_l(\cos\theta)\, P_k(\cos\theta) = \frac{1}{2k+1}\,\delta_{l,k} \quad . \tag{G.28}$$

Mit Hilfe von (G.28) lassen sich die Integrale in den Gleichungen G.13 und G.21 leicht analytisch lösen, wenn die Potentiale von Yukawa- oder Gaußform sind und wir daher die Entwicklungen in Legendre-Polynome (G.25) - (G.27) benutzen können.

Anhang H

Parametrisierung der Potentiale und Korrelationsfunktion

In Anhang G haben wir gezeigt, daß Potentiale von Yukawa- oder Gauß-Typ ein besonders einfaches analytisches Verhalten unter Multipolentwicklung haben. Wir parametrisieren deshalb die nicht Yukawa-förmigen Terme der Zentralkraft in den Gleichungen 3.57, 3.59 und 3.61 durch Gaußverteilungen im hier relevanten Bereich des Abstands von $0 < r < 5\ fm$:

$$-\frac{\alpha_\pi}{3}\frac{\Lambda'_\pi}{8\pi}(\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2)\,e^{-\Lambda'_\pi r} \approx -\frac{\alpha_\pi}{3}\frac{\Lambda'_\pi}{8\pi}N_\pi(\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2) \left[0.375\,e^{-\Lambda'^2_\pi r^2} + 0.375\,e^{-0.4\,\Lambda'^2_\pi r^2}\right] , \qquad \text{(H.1)}$$

$$-\frac{\alpha_\rho}{3}\frac{\Lambda'_\rho}{4\pi}(\Lambda_\rho^2 - m_\rho^2)\,e^{-\Lambda'_\rho r} \approx -\frac{\alpha_\rho}{3}\frac{\Lambda'_\rho}{4\pi}N_\rho(\Lambda_\rho^2 - m_\rho^2) \left[0.485\,e^{-0.3\,\Lambda'^2_\rho r^2} + 0.011\,e^{-0.5\,\Lambda'^2_\rho r^2}\right] . \qquad \text{(H.2)}$$

Die Normierungskonstanten sind mit $N_\pi = 2.43$ und $N_\rho = 1.51$ so bestimmt, daß

$$\int d^3r\ N_\pi \left[0.375\,e^{-\Lambda'^2_\pi r^2} + 0.375\,e^{-0.4\,\Lambda'^2_\pi r^2}\right] = \int d^3r\ e^{-\Lambda'_\pi r} , \qquad \text{(H.3)}$$

$$\int d^3r\ N_\rho \left[0.485\,e^{-0.3\,\Lambda'^2_\rho r^2} + 0.011\,e^{-0.5\,\Lambda'^2_\rho r^2}\right] = \int d^3r\ e^{-\Lambda'_\rho r} . \qquad \text{(H.4)}$$

Die Tensorkräfte aus (3.58), (3.60) und (3.62) werden durch eine Summe von Yukawa-Funktionen parametrisiert. Dabei muß beachtet werden, daß in Gleichung G.21 nicht

$V_T(r)$ integriert wird, sondern $V_T(r)/r^2$. Deshalb parametrisieren wir diese modifizierten Potentiale:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{V_T(\omega\,,\,r)}{r^2}\right) \;=\; \sum_{i=1}^{3} V_i^R(\omega)\,\frac{e^{a_i^R(\omega)\,r}}{r} \;+\; V_4^R(\omega)\,\frac{\sin[a_4^R(\omega)\,r]}{r} \quad , \tag{H.5}$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{V_T(\omega\,,\,r)}{r^2}\right) \;=\; \sum_{i=1}^{3} V_i^I(\omega)\,\frac{e^{a_i^I(\omega)\,r}}{r} \;+\; V_4^I(\omega)\,\frac{\sin[a_4^I(\omega)\,r]}{r} \quad . \tag{H.6}$$

Die Parameter V_i^R , V_i^I , a_i^R und a_i^I $(i = 1,4)$ werden in Abhängigkeit des Energieübertrags ω so bestimmt, daß im Bereich $0 < r < 5\ fm$ die Parametrisierung in guter Übereinstimmung mit dem ursprünglichen Potential ist.

Für die Nukleon-Nukleon-Korrelationsfunktion $g(r)$ findet man in der Literatur verschiedene Vorschläge. Im Übersichtsartikel von Towner [43] sind z.B. unter anderen auch die folgenden Korrelationsfunktionen angegeben:

$$g(r) \;=\; 1 - j_0(q_c r) \tag{H.7}$$

mit $q_c = 3.93\ \mathrm{fm}^{-1}$ der Comptonwellenlänge des ω-Mesons, oder

$$g(r) \;=\; 1 - e^{-a\,r^2}\,(1 - b\,r^2) \tag{H.8}$$

mit $a = 1.1\ \mathrm{fm}^{-2}$ und $b = 0.68\ \mathrm{fm}^{-2}$.

Da die Potentiale mit diesen Korrelationsfunktionen multipliziert werden, gelten für die Korrelationsfunktionen die gleichen Anforderungen bezüglich ihrer Form, wie für die Potentiale. Wir parametrisieren deshalb die durch H.8 gegebene Korrelationsfunktion mit Gaußverteilungen oder Exponentialfunktionen:

$$\begin{aligned} g(r) \;=\; 1 - (\, &-678.672\; e^{-0.4999\,q_c\,r} - 309.569\; e^{-0.4279\,q_c\,r} \\ &+\; 28.707\; e^{-0.3332\,q_c\,r} + 960.446\; e^{-0.4810\,q_c\,r}) \quad , \end{aligned} \tag{H.9}$$

$$g(r) \;=\; 1 - e^{-0.125\,q_c^2\,r^2} \quad . \tag{H.10}$$

Denn bei Multiplikation der Potentiale mit diesen Funktionen kann immer noch in einfacher Weise nach Multipolen entwickelt werden. In (H.9) und (H.10) sind die Parameter so festgelegt worden, daß $g(r)$ im Bereich von $0 < r < 5$ fm gut mit der Korrelationsfunktion aus H.8 übereinstimmt. Abbildung 3.2 zeigt die Korrelationsfunktionen H.7, H.8 und die Parametrisierung mit der Gaußverteilung aus H.10. Die Parametrisierung mit einer Summe von Exponentialfunktionen aus H.9 stimmt so gut mit der Korrelationsfunktion aus H.8 überein, daß sie nicht eingezeichnet worden ist.

Literaturverzeichnis

[1] A. S. Clough, et al., Nucl. Phys. **B 76** (1974), 15

[2] A. S. Carroll, et al., Phys. Rec. **C 14** (1976), 635

[3] H. Rost, Bonn Report IR-80-10 (1980)

[4] J. Ahrens, Nucl. Phys. **A 446** (1985), 229c

[5] G. E. Brown, Comm. Nucl. Part. Phys. **19** (1990), 185

[6] F. Lenz, Ann. of Phys. **95** (1975), 348

[7] M. Hirata, F. Lenz und K. Yazaki, Ann. of Phys. **108** (1977), 116

[8] E. Oset und W. Weise, Nucl. Phys. **A 368** (1981), 375

[9] K. Klingenbeck und M. G. Huber, J. Phys. **G 6** (1980), 961

[10] M. Hirata, J. H. Koch, F. Lenz und E. J. Moniz, Ann. of Phys. **120** (1979), 205

[11] Y. Horikawa, M. Thies und F. Lenz, Nucl. Phys. **A 345** (1980), 386

[12] J. H. Koch, E. J. Moniz und N. Ohtsuka, Ann. of Phys. **154** (1984), 99

[13] B. E. Bonner, et al., Phys. Rev. **C 18** (1978), 1418

[14] D. A. Lind, et al., Can. J. Phys. **65** (1987), 637

[15] C. Gaarde, Nucl. Phys. **A 478** (1988), 475c

[16] V. G. Ableev, et al., Sov. J. N. Phys. **46** (1987), 300

[17] C. Ellegaard, et al., Phys. Lett. **231 B** (1989), 365

[18] T. Udagawa, S. W. Hong und F. Osterfeld, Phys. Lett. **245 B** (1990), 1

[19] J. Delorme und P. A. M. Guichon, in *Proc., 10e Biennale de Physique Nucleaire (Aussois)*, 1989, IPN Lycen report LYCEN 8906, p. C-1

[20] J. Delorme und P. A. M. Guichon, Phys. Lett. **263 B** (1991), 157

[21] P. Oltmanns, Diplomarbeit, Univ. Bonn, 1991

[22] J. Speth, et al., Nucl. Phys. **A 343** (1980), 382

[23] G. F. Chew, M. L. Goldberger, F. E. Low und Y. Nambu, Phys. Rev. **106** (1957), 1345

[24] I. Blomqvist und J. M. Laget, Nucl. Phys. **A 280** (1977), 405

[25] H. Pilkuhn, *Relativistic Particle Physics*, Springer, 1979

[26] H. Sugawara und F. von Hippel, Phys. Rev. **172** (1968), 1764

[27] E. R. Edmonds, *Angular Momenta in Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1974

[28] J. H. Koch und E. J. Moniz, Phys. Rev. **C 27** (1983), 751

[29] G. Rowe, M. Salomon und R. H. Landau, Phys. Rev. **C 18** (1978), 584

[30] T. E. O. Ericson und W. Weise, *Pions and Nuclei*, Oxford University Press, 1988

[31] H. Esbensen und T.-S. H. Lee, Phys. Rev. **C 32** (1985), 1966

[32] F. A. Berends und A. Donnachie, Nucl. Phys. **B 84** (1975), 342

[33] H. Genzel, et al., Z. Phys. **268** (1974), 43

[34] N. M. Kroll und M. A. Ruderman, Phys. Rev. **C 93** (1954), 233

[35] I. Guiaşu, C. Pomponiu und E. E. Radescu, Ann. Phys. **114** (1978), 296

[36] D. Robson, Phys. Rev. **C 7** (1973), 1

[37] W. Klingenberg, *Lineare Algebra und Geometrie*, Springer Hochschultext, Springer, 1984

[38] R. R. Whitehead, A. Watt, B. J. Cole und I. Morrison, *Advances in Nuclear Physics* (M. Baranger and E. Vogt, Eds.), Vol. 9, Plenum Press, New York, 1977, 123

[39] M. R. Anastasio und G. E. Brown, Nucl. Phys. **A 285** (1977), 516

[40] M. Ericson und T. E. O. Ericson, Ann. Phys. **36** (1966), 323

[41] G. E. Brown und W. Weise, Phys. Rev. **C 22** (1975), 280

[42] F. Osterfeld, *Reviews of Modern Physics*, in Druck

[43] I. S. Towner, Phys. Rep. **155** No. 5 (1987), 263

[44] J. D. Bjorken und S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1964

[45] T.-S. H. Lee, Phys. Rev. Lett. **50** (1983), 1571

[46] A. Bohr und B. Mottelson, *Nuclear Structure*, Vol. I, Benjamin, New York, 1969

[47] A. de-Shalit und I. Talmi, *Nuclear Shell Theory*, Academic Press, New York, 1963

[48] H. Horie und K. Sasaki, Prog. Theor. Phys. **25** (1961), 475

[49] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1975

Schlußwort

Ich möchte mich zuerst bei Herrn Prof. Dr. J. Speth bedanken, der mir die vorliegende Arbeit durch Aufnahme in das hiesige Institut erst ermöglicht und sie wohlwollend unterstützt hat.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. F. Osterfeld für das Engagement und die Zeit, die er für die Betreuung meiner Diplomarbeit aufbrachte. Insbesondere möchte ich mich für seine stete Bereitschaft bedanken, auftretende Fragen zu beantworten und Probleme zu diskutieren.

Herrn Prof. Dr. T. Udagawa möchte ich für die Diskussionen während seiner Aufenthalte in Jülich danken und für seine Hilfe bei Fragen zu unseren Computer-Programmen.

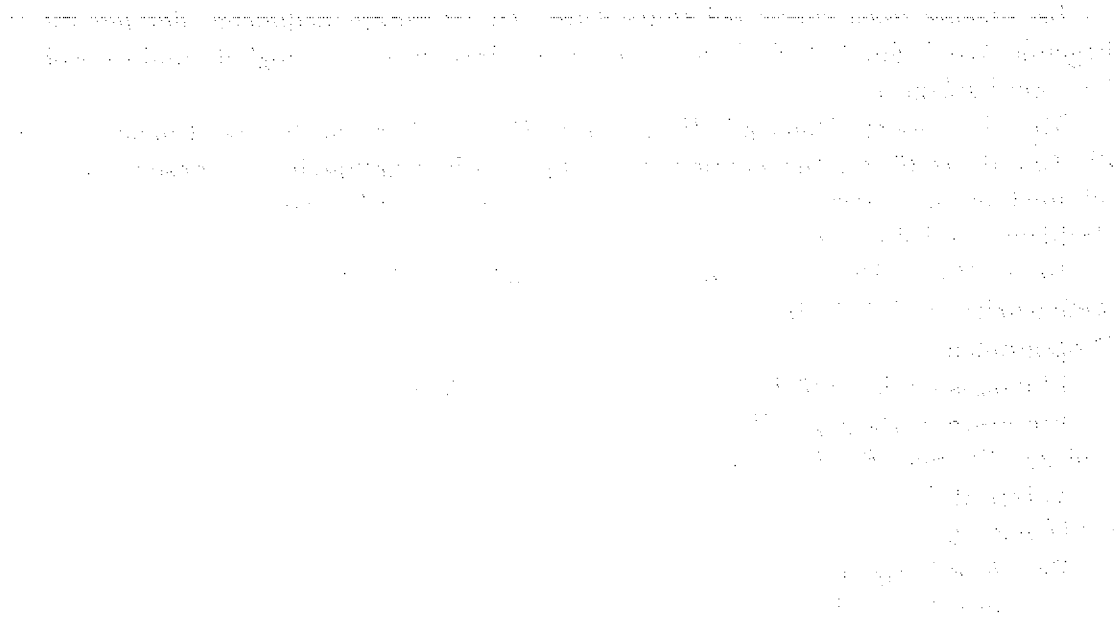
Ebenfalls danken möchte ich Peter Oltmanns für die gute Zusammenarbeit.

Ein weiterer Dank gilt Herrn E. Brökel für seine Hilfe in allen die Großrechneranlage und den PC betreffenden Fragen.

Volker Mull sei für seine Unterstützung beim Erstellen von Zeichnungen mit AUTOCAD gedankt.

Den Angehörigen des Instituts möchte ich für die angenehme und freundliche Arbeitsatmosphäre danken.

Schließlich möchte ich der Friedrich-Ebert-Stiftung danken für die durch sie erfahrene Förderung während meines Studiums.



FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH GmbH

KFA

Jül-2540
Oktober 1991
ISSN 0366-0885