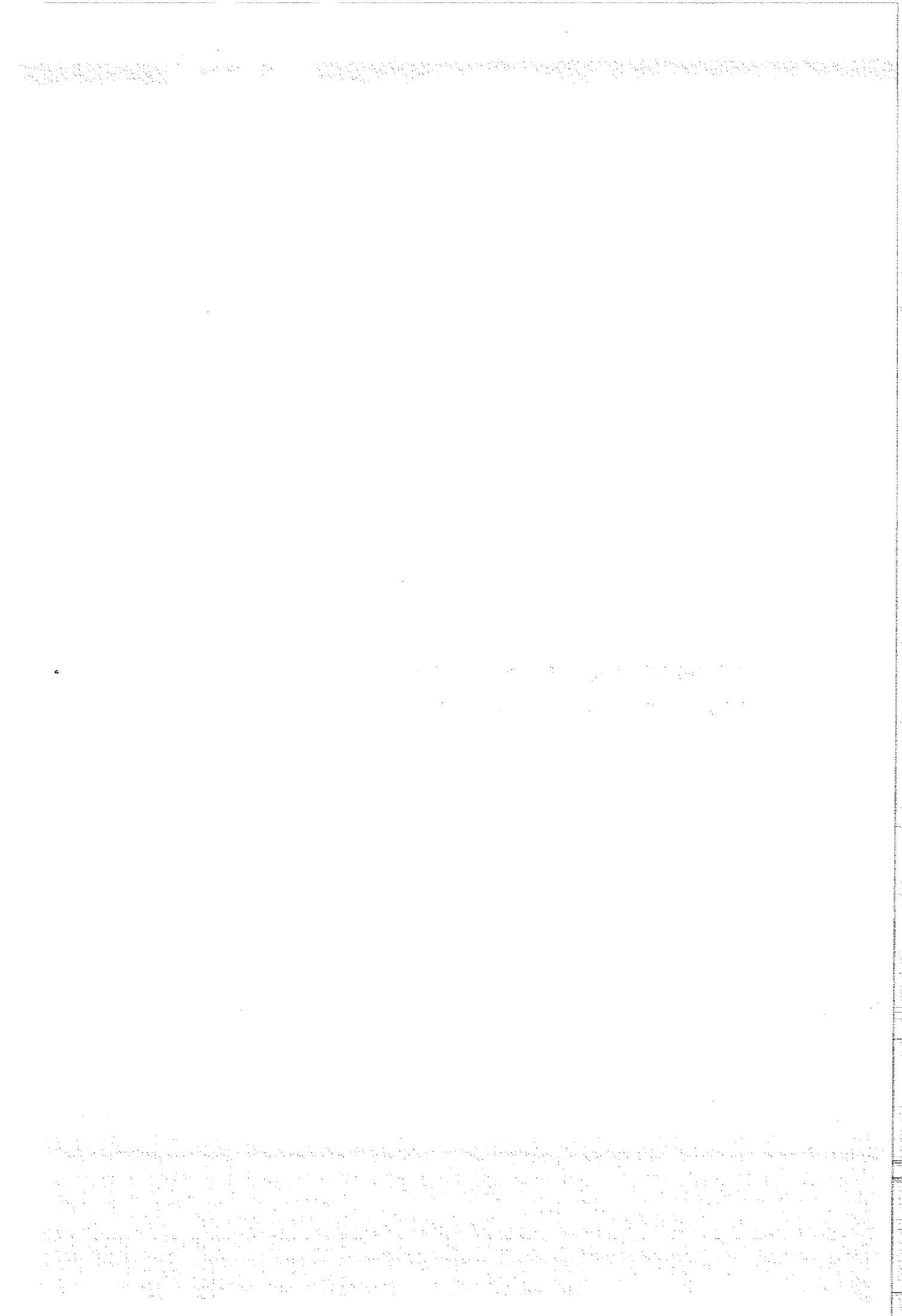
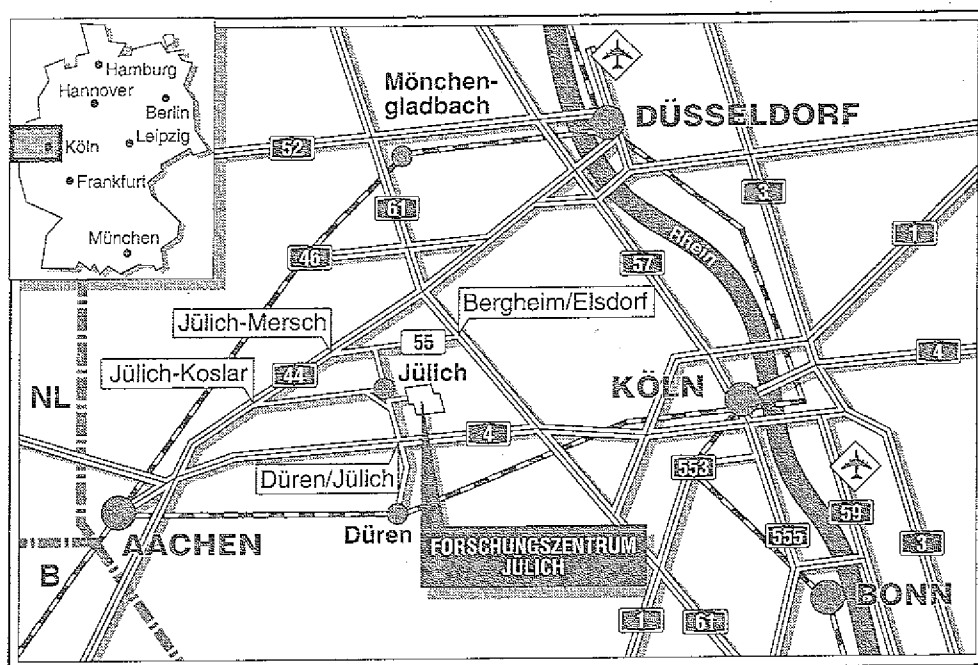


Institut für Festkörperforschung

Chaotische Bewegung auf Hamiltonschen Tori

Andreas von Kempis





Berichte des Forschungszentrums Jülich ; 2660

ISSN 0366-0885

Institut für Festkörperforschung Jüli-2660

D 464 (Diss. Universität-GH-Duisburg)

Zu beziehen durch: Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek

Postfach 1913 · D-5170 Jülich · Bundesrepublik Deutschland

Telefon: 02461/61-6102 · Telefax: 02461/61-6103 · Telex: 833556-70 kfa d

Chaotische Bewegung auf Hamiltonschen Tori

Andreas von Kempis

Abstract

KAM-tori are well known to be that (finite!) part of phase space in which the motion of a weakly perturbed classical Hamiltonian system remains integrable. Moreover, they are barriers in the phase space of systems with two degrees of freedom. We show that certain Hamiltonian systems contain invariant *nonregular tori* with compressible flow. Using as an example an electron moving in electromagnetic fields which are periodic in space we demonstrate (i) that strange attractors (and repellers) of well-known autonomous or (quasi-)periodically time-driven systems may occur on such *strange tori*, (ii) that one may find *barriers* consisting of nonregular Hamiltonian tori in systems with any number of degrees of freedom (the flow on such barriers is non-chaotic, though), and (iii) that certain KAM-tori transform into nonregular tori – rather than breaking up – when the perturbation becomes strong.

PACS numbers: 03.20 & 41.70

Kurzfassung

In integrablen Hamiltonschen Systemen verlaufen die Trajektorien auf invarianten Tori im Phasenraum. Geht die universelle Integrabilität durch eine *kleine* Störung verloren, so bleibt der Fluß in einem endlichen Teilvolumen des Phasenraums integrabel, nämlich auf Tori mit hinreichend irrationalen (also nicht-resonanten) Windungszahlverhältnissen, den sogenannten KAM-Tori. Diese bilden in Systemen mit nur zwei Freiheitsgraden Barrieren, welche den Phasenraum in nicht durch Trajektorien zu verbindende Teile zerlegen.

Im Phasenraum gewisser Hamiltonscher Systeme – welche sich von integrablen wesentlich, z.B. durch große Störterme, unterscheiden können – treten aber invariante Tori mit ganz anderen Eigenschaften auf. Physikalisch lassen sich Systeme dieser Art durch die nichtrelativistische Bewegung eines Elektrons in spezifischen, räumlich periodischen elektromagnetischen Feldern realisieren. Der Fluß auf den invarianten Tori dieser Systeme ist kompressibel und kann daher Attraktoren enthalten (dies wird durch das Liouvillesche Theorem von der Erhaltung des Phasenraumvolumens nicht ausgeschlossen, da ein einzelner Torus kein endliches Phasenraumvolumen hat). Es wird gezeigt, daß diese Tori nicht nur isoliert auftreten, sondern daß es Hyperflächen im Phasenraum geben kann, die aus solchen invarianten Tori bestehen. Derartige Hyperflächen haben – für beliebige Anzahl N von Freiheitsgraden – bis zu $2N - 1$ Dimensionen, also nur eine weniger als der Phasenraum. Im Unterschied zu KAM-Tori können die hier betrachteten invarianten Tori daher auch in Systemen mit mehr als zwei Freiheitsgraden Barrieren bilden.

Auf invarianten Tori, die Teil einer Barriere sind, kann die Bewegung nicht chaotisch sein. Auf isolierten Tori oder solchen, die gemeinsam Hyperflächen geringerer Dimension bilden, treten hingegen seltsame Attraktoren auf (dann sprechen wir von *chaotischen Tori*). Mit einem einfachen Verfahren können Hamiltonsche Systeme angegeben werden, in deren Phasenraum invariante Tori vorkommen, auf denen der Fluß wohlbekannte seltsame Attraktoren – und strukturell identische Repeller – autonom oder (quasi-)periodisch zeitabhängiger Differentialgleichungssysteme enthält, wie etwa den Rössler-Attraktor oder die Attraktoren des getriebenen Duffing-Oszillators. Neben diesen Attraktoren finden sich weitere periodische (d.h. Grenzzyklen) und chaotische Attraktoren, wobei letztere aus periodischen über Periodenverdopplungssequenzen oder intermittente Phasen hervorgehen. In quasiperiodisch getriebenen Systemen treten quasiperiodische Attraktoren an die Stelle der periodischen Fixpunkte, und damit eventuell Punktattraktoren, kommen nur auf isolierten Tori vor.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Übersicht	1
2	Tori in Hamiltonschen Systemen	9
2.1	Reguläre und nichtreguläre Tori	10
2.2	Bewegung eines Elektrons auf nichtregulären Tori	12
2.3	Dissipativer Fluß auf nichtregulären Tori	15
2.4	Ein Beispiel zur Rückführung nichtregulärer Tori auf reguläre	16
3	Isolierte chaotische Tori	22
3.1	Tori mit seltsamen Attraktoren autonomer Differentialgleichungssysteme . . .	23
3.2	Symmetrien der Bewegung auf diesen chaotischen Tori	25
3.3	Systematische Suche nach Attraktoren auf isolierten nichtregulären Tori . . .	27
3.4	Ljapunovspektren von Attraktoren	29
3.5	Fixpunkte und Attraktoren auf chaotischen Tori vom Rössler-Typ	33
3.5.1	Der Rössler-Torus	33
3.5.2	Der Fluß im "Störsystem"	39
3.5.3	Der Fluß als Funktion des Störparameters η	41
3.6	Fixpunkte und Attraktoren auf chaotischen Tori vom Lorenz-Typ	48
3.6.1	Der Fluß im "Störsystem"	48
3.6.2	Der Fluß als Funktion des Störparameters η	49
4	Nicht-isolierte nichtreguläre Tori	58
4.1	Invariante Hyperflächen im Phasenraum, die aus nichtregulären Tori bestehen	58
4.2	Partielle Entkopplung der Bewegungsgleichungen	63
4.3	Fallunterscheidung: Welche Attraktortypen können wo auftreten?	66
4.4	Nichtreguläre Barriere-Tori	69
4.5	Chaotische Tori auf $(2N-2)$ -dimensionalen invarianten Hyperflächen ($N \geq 3$)	74
4.5.1	Der Fall $N = 3$ (Attraktoren periodisch getriebener Systeme)	74
4.5.2	Der Fall $N > 3$ (Attraktoren quasiperiodisch getriebener Systeme) . . .	81
4.5.3	Bewegung eines Elektrons auf solchen chaotischen Tori	86
4.6	Chaotische Tori auf $(2N-m)$ -dimensionalen invarianten Hyperflächen ($m \geq 3$)	89
4.7	Attraktoren (quasi-)periodisch getriebener Systeme auf nicht-isolierten Tori .	92

5 Abschließende Betrachtungen	98
5.1 Über die Bewegung in der Umgebung nichtregulärer Tori	98
5.2 Über andere Studien der Bewegung auf nichtregulären Tori	100
5.3 Über die Ergebnisse sowie zu offenen Fragen	104
 Anhänge	 111
A Verschiedene Anmerkungen und Ergänzungen	112
A.0 Zum Hamiltonformalismus	112
A.1 Zu Kap.2.2: Elektromagnetische Beziehungen	114
A.2 Zu Kap.2.4: Auch die nicht regularisierbare Bewegung ist integrabel	115
A.3 Zu Kap.3.2: Für welche "Periodisierungsverfahren" gelten diese Symmetrien?	119
A.4 Zu Kap.3.5&3.6: Lösung der kubischen Gleichungen	120
A.5 Zu Kap.3.3&4.1: Mannigfaltigkeiten im Phasenraum	124
A.6 Zu Kap.4.2: Die Bewegungsgleichungen auf einer gekrümmten Barriere	125
A.7 Zu Kap.4.3: Reduktion gewisser nicht-isolierter N -Tori auf $(m+1)$ -Tori	126
 B Zur KAM-Störungsrechnung	 128
B.1 Standard-Störungstheorie und das Problem der kleinen Nenner [LL83, Ber78]	128
B.2 Das Verfahren von Kolmogorov [Kol54b, Thi77]	131
B.3 Zur allgemeinen KAM-Theorie	135
B.4 Anwendung des Kolmogorov-Verfahrens auf nichtreguläre Tori	136
 C Eine Fallstudie integrierbarer Bewegung auf nichtregulären 2-Tori	 143
C.1 Zur Integrabilität Hamiltonscher Systeme der Form $H(I_1, \dots, I_N, \sum_{i=1}^N k_i \Phi_i)$	144
C.2 Das Fallbeispiel ($N = 2$)	145
C.3 Der "nichtreguläre Bereich" stabiler periodischer Bewegung ($\lambda \neq 0$)	147
C.4 Die Grenzfälle marginaler Stabilität ($\lambda = 0$)	149
C.5 Die Bewegung im "regulären Bereich" - periodisch oder quasiperiodisch	151
 D Numerische Hilfsmittel	 154
 Verzeichnisse und Register	 155
Abbildungsverzeichnis	156
Verzeichnis der Beispielsysteme	157
Namenregister	158
Quellenregister	160

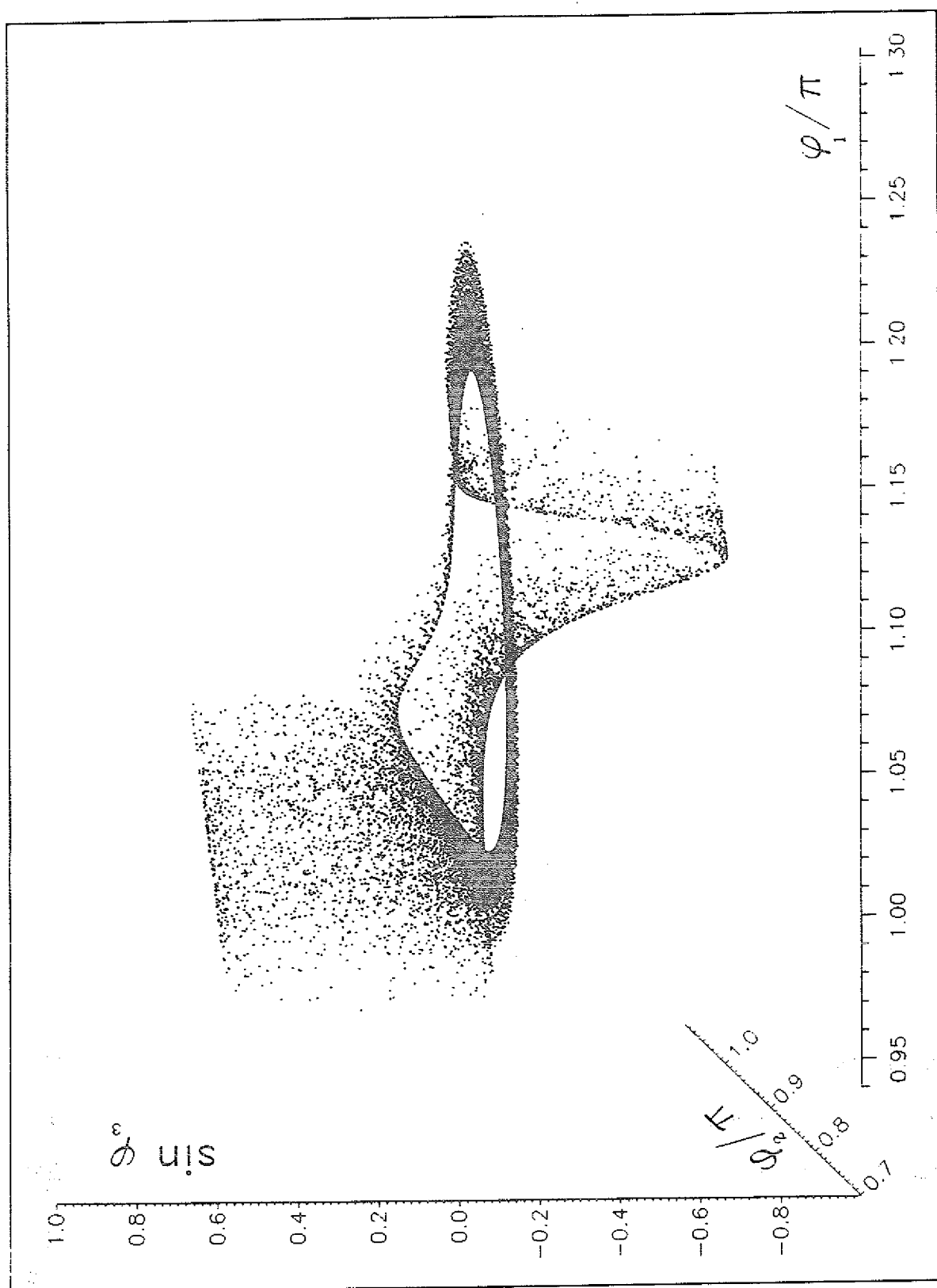


Abb.0.1: Pseudo-3d-Plot eines chaotischen Attraktors auf dem Rössler-Torus bei $\eta = 1.536$ (vgl. Seite 47 im Kap.3.5.3, und zu Pseudo-3d-Plots die Fußnote Seite 34).

Kapitel 1

Einleitung und Übersicht

In dissipativen dynamischen Systemen geht während der Bewegung Energie verloren, etwa durch Reibung im Fall mechanischer Systeme. Wenn die Bewegung eines – z.B. mechanischen – Systems energieerhaltend (konservativ) ist, so lassen sich die Bewegungsgleichungen in die von Hamilton angegebene Form bringen.[†] Man spricht daher auch von Hamiltonschen Systemen. In der vorliegenden Arbeit werden Hamiltonsche Systeme mit wenigen “Freiheitsgraden” betrachtet und gezeigt, daß gewisse Formen chaotischen Langzeitverhaltens, die für dissipative Systeme typisch sind – nämlich das Auftreten “seltsamer Attraktoren” –, auch in Hamiltonschen Systemen vorkommen.

Ohne Energieerhaltung kann vielen verschiedenen Anfangszuständen eines Systems der gleiche Endzustand entsprechen. Ein gedämpftes Pendel etwa kommt unabhängig von seiner anfänglichen Auslenkung schließlich stets zur Ruhe. Wird es in periodischer Weise angetrieben, so stellt sich, wiederum unabhängig von der Ausgangslage, ein periodischer Endzustand ein (wenn der Antrieb nicht zu stark ist, s.u.). Ein ungedämpftes Pendel schwingt hingegen für immer mit seiner Anfangsamplitude. Betrachtet man die möglichen Bewegungen als Fluß im Raum der dynamischen Variablen[‡] (dem sogenannten Phasenraum), so können wir diesen Sachverhalt wie folgt formulieren: Der Fluß im Phasenraum konservativer Systeme ist inkompressibel, im Phasenraum dissipativer Systeme hingegen kompressibel.[§]

Das von einem Ensemble von Anfangszuständen im Phasenraum eingenommene Volumen wird in Hamiltonschen Systemen während der Bewegung zwar nicht in der Form, aber in der Größe unverändert bleiben. Im Gegensatz dazu wird in dissipativen Systemen ein solches Volumen kontinuierlich schrumpfen. Das Ensemble der Endzustände nimmt daher kein endliches Volumen im Phasenraum ein – viele Anfangszustände können denselben Endzustand haben. Diese wirken anziehend auf die Ausgangszustände und werden daher Attraktoren genannt. Es kann sich um einen zeitlich unveränderlichen Zustand handeln, wie im Fall des gedämpften Pendels ohne Antrieb. Solche Endzustände nennt man attraktive Fixpunkte

[†]vgl. Anhang A.0

[‡]In mechanischen Systemen sind das (beispielsweise) die kartesischen Orts- und die zugehörigen Newtonschen Impulsvariablen. Zum Begriff *Fluß* vgl. wiederum Anhang A.0.

[§]Es gibt natürlich auch Systeme mit inkompressiblem Fluß, die nicht Hamiltonsche Systeme sind, etwa in der Hydrodynamik (daher stammt der Begriff selbstverständlich) oder der Populationsdynamik (Lotka-Volterra - Gleichungen, vgl. z.B. [Ver90]).

oder Punktattraktoren. Oder der Endzustand ist zeitlich periodisch, was bei einem periodisch angetriebenen gedämpften Pendel eintreten kann. Dann spricht man von einem Grenzyklus.

Ein nicht periodisch angetriebenes gedämpftes Pendel kann natürlich auch keinen periodischen Endzustand erreichen. Aber selbst bei periodischem Antrieb ist der Endzustand möglicherweise nicht periodisch, wenn der Antrieb nur stark genug ist. Es ist nämlich möglich, daß auch bei bekannten Antriebskräften (und eventuell Kopplungen zwischen den verschiedenen Schwingungsrichtungen) praktisch nicht vorhersagbar ist, wo sich ein Pendel mit bekanntem Anfangszustand zu einem späteren Zeitpunkt befindet, weil winzige Variationen des Anfangszustandes – weit unterhalb jeder Meßgenauigkeit – einen wesentlichen Einfluß auf die Entwicklung haben (diesen Sachverhalt bezeichnet man als empfindliche – oder sensitive – Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen). Solche Bewegungen heißen chaotisch und die zugehörigen Ensembles attraktiver Endzustände chaotische Attraktoren.[†] Sie treten nur auf, wenn zur Beschreibung der Bewegung mindestens drei Gleichungen (genauer: Differentialgleichungen erster Ordnung) erforderlich sind, wie das beispielsweise im Fall unseres Pendels gegeben ist (zwei Gleichungen für die beiden dynamischen Variablen – Ort und Impuls – und eine für die Zeitabhängigkeit des Antriebs), und wenn diese Bewegungsgleichungen nichtlineare Terme enthalten – die linearen Bewegungsgleichungen harmonischer Oszillatoren sind immer lösbar.[‡]

In Hamiltonschen Systemen kann es keine Attraktoren geben. Wenn die Bewegung nur eine (Orts-)Komponente hat, sind die Bewegungsgleichungen wegen der Energieerhaltung stets integrabel (vgl. [Hel84]). Im Fall zweier Komponenten (dann gibt es also vier zugehörige dynamische Variable – zwei Ortsvariable und zwei Impulsvariable) können sie stets gelöst werden, wenn es eine weitere, von der Hamiltonfunktion (deren Wert gleich der Energie des Systems ist) unabhängige Erhaltungsgröße gibt, welche mit der Hamiltonfunktion vertauscht.[§] Ebenso ist es im Fall dreier Komponenten – wenn es zwei zur Energie hinzutretende Erhaltungsgrößen gibt, die von dieser und voneinander unabhängig sind, und die miteinander und mit der Hamiltonfunktion vertauschen, so sind die Bewegungsgleichungen lösbar. Ein Beispiel ist die Bewegung einer Punktmasse unter dem Einfluß einer stets auf ein Zentrum gerichteten Kraft. Die beiden zusätzlichen Erhaltungsgrößen sind dann der Betrag des Drehimpulsvektors und eine beliebige seiner Komponenten.

In diesem Sinn entspricht jeder Bewegungskomponente (und den zwei zugehörigen dynamischen Variablen) in konservativen Systemen nur ein "Freiheitsgrad". Wenn es genügend

[†]Man spricht auch von seltsamen Attraktoren, da sie im Phasenraum nicht auf Hyperflächen ganzzahliger Dimension liegen, sondern eine "fraktale" Struktur mit nicht ganzzahliger Dimension besitzen. Wir verwenden die Ausdrücke *chaotischer* und *seltsamer* Attraktor hier stets synonym. Streng genommen sind seltsame Attraktoren durch ein Axiomensystem definiert, auf das wir hier nicht eingehen.

[‡]Eine (Differential-)Gleichung, oder ein System solcher Gleichungen, heißt lösbar oder integrabel, wenn man die gesuchte(n) Funktion(en) oder ihre Umkehrfunktion(en) durch eindimensionale Integrale mit bekannten Integranden ausdrücken kann. Da das Problem der Berechnung solcher Integrale als Quadratur bezeichnet wird, spricht man auch von lösbar durch Quadratur. (Die eventuell nötige Bildung der Umkehrfunktion ist eine algebraische Operation.)

[§]In mikroskopischen (quantenmechanischen) Systemen bedeutet die entsprechende Forderung, daß beide Größen – die Energie und der Wert der zusätzlichen Erhaltungsgröße – gleichzeitig scharf meßbar sind, d.h. durch Quantenzahlen charakterisiert werden können.

unabhängige und miteinander vertauschende Erhaltungsgrößen gibt, nämlich für jeden Freiheitsgrad eine, so sind die Bewegungsgleichungen lösbar, und das Langzeitverhalten des Systems ist mit beliebiger Genauigkeit vorhersagbar. Statt der ursprünglichen wählt man zweckmäßigerweise neue dynamische Variable, und zwar führt man die Erhaltungsgrößen als neue Impulsvariablen ein (das ist möglich, weil sie vertauschen). Da diese Impulse zeitlich konstant sind, hat man das Problem gewissermaßen auf die Beschreibung freier Teilchen zurückgeführt, die sich ja mit konstanten Impulsen bewegen. Die zugehörigen (konjugierten) dynamischen Variablen sind dann natürlich lineare Funktionen der Zeit – freie Teilchen bewegen sich gleichförmig. Wenn die Bewegung gebunden ist, so stellt sich heraus, daß sie sich im Raum der neuen Variablen auf Tori[†] vollzieht, deren konstante Radien durch die Erhaltungsgrößen bestimmt werden. Es liegt dann nahe, als neue Ortsvariablen die Winkelkoordinaten auf diesen Tori zu wählen. Die zugehörigen Impulsvariablen sind als Funktionen der ursprünglichen Erhaltungsgrößen ebenfalls Erhaltungsgrößen und werden als Wirkungsvariable bezeichnet (ihre Dimension ist die einer Wirkung, d.h. gleich Energie mal Zeit). Ein einfaches Beispiel ist die Darstellung der Bewegung harmonischer Oszillatoren durch die von der Zeit linear abhängigen Winkelvariablen und die konstanten Schwingungsamplituden, deren Quadrate den Wirkungen proportional sind.

In integrablen Hamiltonschen Systemen lassen sich daher stets solche Wirkungs-Winkel-Variablen einführen[‡], in denen die Beschreibung der Bewegung geradezu trivial ist – die Wirkungen sind zeitlich konstant (jede Bahn verbleibt auf ihrem Torus), und die Winkel ändern sich zeitlich linear. Leider sind integrable Hamiltonsche Systeme nicht die Regel, sondern die Ausnahme (oder umgekehrt – gottlob ist die Welt interessanter, als das Studium der Dynamik von Systemen freier Teilchen vermuten ließe!). Fügt man einem integrablen Hamiltonschen System eine kleine Störung hinzu, die nicht integrabel ist – das neue System hat nicht mehr genügend unabhängige und vertauschende Erhaltungsgrößen –, so bleiben die meisten der Tori erhalten, und die Bewegung auf ihnen ändert ihren Charakter nicht. Das wurde zwar schon lange vermutet, aber der Beweis ist recht jungen Datums. Die entsprechende mathematische Theorie wurde zwischen 1954 und 1967 von Kolmogorov, Arnold und Moser entwickelt. Daher spricht man auch vom KAM-Theorem und von KAM-Tori. Die Bewegung auf einem Torus bleibt bei Hinzutreten einer Störung nur dann qualitativ ungeändert, wenn sie nicht-periodisch ist; ja sie darf noch nicht einmal nahezu periodisch sein. Periodische Bewegung auf einem Torus ist durch rationale Verhältnisse der Windungszahlen

$$v_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi_i}{t}, \quad \Phi_i = \text{Winkelvariable} \quad (1.1)$$

gekennzeichnet. KAM-Tori, auf denen integrable Bewegung in *fast-integrablen* Hamiltonschen Systemen überlebt, haben also stark irrationale Windungszahlverhältnisse. Physikalisch liegt

[†]Im dreidimensionalen Raum hat ein (2-)Torus die Form eines Schwimmrings. Die Oberfläche ist zweidimensional, und jeder Punkt auf ihr kann durch zwei Winkelkoordinaten beschrieben werden. Ein 2-Torus kann daher als Quadrat mit der Seitenlänge 2π dargestellt werden, ein 3-Torus als Würfel mit der Seitenlänge 2π , usf. Perspektivisch eindrucksvolle Bilder von 2-Tori finden sich im ersten Kapitel des Buchs von Haken [Hak83a].

[‡]Alle diese und die folgenden Aussagen über Hamiltonsche Systeme lassen sich in exakter und verständlicher Form den Übersichtsartikeln von Berry [Ber78] und Helleman [Hel84] entnehmen.

dem zugrunde, daß bei periodischer oder nahezu periodischer Bewegung die Störung immer in der gleichen Bewegungsphase wirksam wird, so daß sich ihre Wirkung aufsummiert, was dazu führt, daß die Bahn aus ihrem bisherigen Bereich verdrängt wird – der Torus wird durch *Resonanz* zerstört.[†] Ist die Bewegung hingegen hinreichend nicht-periodisch, so kann sich die Wirkung der Störung nicht aufsummieren, sondern nur zu kleineren Änderungen der Bewegung führen. Die ursprünglichen Erhaltungsgrößen fluktuieren zeitlich ein wenig, aber es lassen sich gleich viele neue finden, die sich von den ursprünglichen nur wenig unterscheiden – die Tori werden also nur leicht deformiert. Die Bewegung bleibt in einem endlichen Teilvolumen des Phasenraums integrabel, d.h. die KAM-Tori bilden in diesem eine Menge von endlichem Maß (welches gegen eins strebt, wenn die Stärke der Störung gegen null tendiert).

In nicht-integrablen Hamiltonschen Systemen kann die Bewegung natürlich auch chaotisch sein. Es kann aber, wie gesagt, keine Attraktoren der Bewegung geben, also auch keine chaotischen bzw. seltsamen Attraktoren. Diese Aussage gilt so allerdings nur im Phasenraum als Ganzem. Wenn man Bewegung in Teilen des Phasenraums betrachtet, die kein endliches Volumen haben (so wie etwa eine Fläche im Raum kein endliches Volumen hat), dann ist die Bedingung, daß der Fluß inkompressibel verlaufen muß, für die Bewegung eines Ensembles von Bahnen in dem betrachteten niederdimensionalen Gebiet bedeutungslos – hier können also verschiedene Anfangszustände gleichen Endzuständen zustreben. Das gilt natürlich auch für die Bewegung auf der Oberfläche von Tori. Zwar verläuft die Bewegung auf KAM-Tori dissipationslos. Es gibt aber in Hamiltonschen Systemen durchaus auch andere *invariante Tori*.[‡] In dieser Arbeit werden solche Tori angegeben und gezeigt, daß der Fluß auf ihnen im allgemeinen kompressibel ist, so daß auf ihnen Attraktoren auftreten können.

Diese Möglichkeit irritiert Mathematiker übrigens weit weniger als Physiker, die in den letzten Jahrzehnten offenbar Hamiltonsche Tori und integrable Bewegung als Synonyme verinnerlicht haben. Dabei handelt es sich bei den hier behandelten Systemen eigentlich nicht einmal um besonders exotische. Wir zeigen vielmehr, daß sich die Bewegung auf den von uns untersuchten invarianten Tori[§] durch die nichtrelativistische Bewegung geladener Einzelteilchen, etwa eines Elektrons, in räumlich periodischen elektromagnetischen Feldern realisieren läßt. Die Felder können sowohl stationär als auch zeitabhängig sein. Entscheidend ist, daß das elektrische Feld einen bestimmten Teil der magnetischen Kraft kompensiert. Je nach der Zahl der linear unabhängigen Komponenten des magnetischen Vektorpotentials[¶] sind diese Tori

[†]Vgl. hierzu besonders das schöne Beispiel der Kirkwood-Gaps im Asteroidengürtel in Berrys Darstellung [Ber78] ("astronomy of the gaps between the tori").

[‡]Niederdimensionale Bereiche des Phasenraums – genauer gesagt: (differenzierbare) Mannigfaltigkeiten, etwa (glatte) Hyperflächen wie z.B. Tori – heißen *invariant*, wenn der Fluß überall tangential zu ihnen verläuft. Trajektorien mit Anfangsbedingungen in solchen Bereichen können diese also nicht verlassen, während sie andererseits von außerhalb nicht erreicht (also auch nicht durchquert) werden können. (Zum Begriff *Mannigfaltigkeit* → Anhang A.5).

[§]Zur Unterscheidung von den oben beschriebenen *regulären Tori* integrierbarer und fast-integrierbarer Systeme bezeichnen wir sie als *nichtreguläre Tori*.

[¶]Diese kann maximal gleich der Zahl der Raumdimensionen, also gleich zwei bzw. drei sein. Dann läßt sich das Vektorpotential offensichtlich als lineare Superposition von zwei bzw. drei Anteilen verschiedener Richtung, aber gleicher räumlicher Periodizität darstellen. Andernfalls hat es eine feste Richtung oder läßt sich als lineare Superposition zweier derartiger Anteile darstellen.

im Phasenraum isoliert oder aber Teil einer (invarianten) Hyperfläche, die aus gleichartigen invarianten Tori zusammengesetzt ist. In stationären Feldern gilt: Falls die Zahl der linear unabhängigen Komponenten des magnetischen Vektorpotentials und die Zahl der räumlichen Freiheitsgrade der Bewegung gleich sind, enthält der Fluß einen im Phasenraum isolierten nichtregulären Torus. Andernfalls treten nichtreguläre Tori auf, die gemeinsam eine (höherdimensionale) invariante Hyperfläche bilden. In (quasi-)periodisch zeitabhängigen Feldern erhöht sich die Zahl der Freiheitsgrade im gleichen Maß wie die Zahl der Basisfrequenzen[†] (die Dimension der von den Tori im Phasenraum gebildeten Hyperfläche wächst natürlich doppelt so schnell).

In räumlich periodischen Feldern dieser Art mit einem überall gleich gerichteten Vektorpotential bilden die nichtregulären Tori eine Barriere, d.h. eine invariante Hyperfläche, deren Dimension nur um eins geringer ist als die des Phasenraums und die diesen (zumindestens lokal) in zwei Teile teilt, welche nicht durch Trajektorien verbunden werden können.[‡] Die hier betrachteten nichtregulären Tori vermögen also in Systemen mit beliebig vielen Freiheitsgraden Barrieren zu bilden, was KAM-Tori nur in – fast-integrablen – Systemen mit zwei Freiheitsgraden möglich ist (obwohl sie auch in Systemen mit mehr als zwei Freiheitsgraden stets ein endliches Teilvolumen des Phasenraums einnehmen). Auf aus nichtregulären Tori bestehenden Barrieren können zwar keine chaotischen Attraktoren auftreten, wohl aber auf den nichtregulären Tori, welche gemeinsam invariante Hyperflächen geringerer Dimension bilden oder die im Phasenraum isoliert sind. Solche nichtregulären Tori bezeichnen wir als *chaotische Tori*.

In dieser Arbeit wird ein einfaches Verfahren entwickelt, das es uns erlaubt, Hamiltonsche Systeme anzugeben, die nichtreguläre Tori enthalten, auf denen vorgegebene, wohlbekannte Attraktoren autonom oder (quasi-)periodisch getriebener gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme auftreten. Alle näher (d.h. numerisch) untersuchten Systeme lassen sich – prinzipiell – durch die nichtrelativistische Bewegung eines Elektrons in leicht zu spezifizierenden, räumlich periodischen elektromagnetischen Feldern realisieren. Die Attraktoren autonomer dissipativer Systeme, wie z.B. die seltsamen Attraktoren von Rössler [Rös76] oder Lorenz [Lor63], treten auf isolierten chaotischen Tori auf, diejenigen nicht-autonomer mit periodischer oder quasiperiodischer Zeitabhängigkeit, wie etwa diejenigen des Duffing-Oszillators [Ued79, Sch86], auf nicht-isolierten Tori. Da im Gegensatz zu dissipativen Systemen, wie etwa dem von Lorenz [Lor63], das Volumen eines Ensembles von Trajektorien auf einem Torus lokal nicht überall kontrahieren kann, treten natürlich auch Repeller auf – bei dem von uns gewählten Verfahren läßt sich sogar jedem Attraktor ein strukturell identischer Repeller auf dem Torus zugeordnen. Außer dem vorgegebenen Attraktor treten auf den Tori stets noch weitere auf. Auf isolierten nichtregulären Tori kann die Kopplung so stark sein, daß alle Windungszahlen verschwinden – die Bewegung ist dann auf Teilbereiche des Torus beschränkt. Derartige Systeme sind bislang noch gar nicht untersucht worden.

[†]Vgl. Anhang A.0, und zu Quasiperiodizität deren Definition auf Seite 17.

[‡]Vgl. die eingehendere Beschreibung bzw. Definition von Barrieren auf Seite 61.

● Übersicht

Im folgenden Kapitel betrachten wir zunächst *reguläre Tori*, d.h. die invarianten Tori im Phasenraum integrierbarer Hamiltonscher Systeme sowie die mit diesen verwandten KAM-Tori fast-integrierbarer Systeme. Diese Betrachtung legt eine Modifikation des Störanteils der Hamiltonfunktion nahe, die auf Systeme führt, welche invariante Tori enthalten (die wir als *nichtreguläre Tori* bezeichnen), auf denen der Fluß kompressibel sein kann und i.a. nicht integrierbar verläuft.[†] Anschließend demonstrieren wir im zweiten Abschnitt des Kapitels, daß die nichtrelativistische Bewegung geladener Einzelteilchen in gewissen räumlich periodischen elektromagnetischen Feldern auf solchen Tori verlaufen kann (s.o.). Im dritten Abschnitt wird gezeigt, daß die Bewegung auf nichtregulären Tori in der Regel dissipativ ist, und daß dies keinen Verstoß gegen das Liouvillesche Gesetz (von der Erhaltung des Phasenraumvolumens durch Hamiltonsche Bewegung) darstellt, da das Phasenraumvolumen eines einzelnen N -Torus im $2N$ -dimensionalen Phasenraum verschwindet. Falls die Störung schwach ist, können nichtreguläre Tori unter Umständen auf reguläre (KAM-) Tori zurückgeführt werden. Zum Abschluß des zweiten Kapitels diskutieren wir ein Beispiel (und geben nebenbei die elektromagnetischen Potentiale an, in welchen ein nichtrelativistisch bewegtes Elektron den Fluß auf diesem Torus realisieren können). Die Diskussion zeigt exemplarisch, daß die Transformation auf KAM-Tori nur im Fall genügend irrationaler Windungszahlverhältnisse gelingt, und daß diese Bedingung nur für schwache Störungen erfüllt werden kann, da sonst einzelne oder – auf isolierten Tori – eventuell sogar alle Windungszahlen verschwinden. Der allgemeine Fall wird im Anhang B mit Hilfe des KAM-Formalismus⁷ analysiert.

Im dritten Kapitel werden im Phasen- bzw. Wirkungsraum isolierte *chaotische Tori* untersucht (damit sind nichtreguläre Tori gemeint, auf denen der Fluß seltsame Attraktoren enthält, s.o.). Zunächst stellen wir ein Verfahren vor, mit welchem in einfacher Weise Hamiltonfunktionen angegeben werden können, deren Fluß nichtreguläre Tori enthält, auf denen in der Nähe des Ursprungs (d.h. nahe $\mathcal{Q} = 0$) ein vorgegebener (eventuell seltsamer) Attraktor endlicher Ausdehnung eines beliebigen autonomen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen auftritt. Die Tatsache, daß die Ausdehnung des Attraktors auf einem kleinen Bereich des Torus beschränkt ist, zeigt bereits, daß die Kopplung der Phasen, d.h. der Winkelvariablen, stark sein muß (Trajektorien, die dem Attraktor zustreben, haben ausschließlich verschwindende Windungszahlen). Dieses Verfahren bedingt Symmetrien des Flusses auf den chaotischen Tori in Bezug auf Fixpunkte und Zeitumkehr, die u.a. dazu führen, daß jedem Attraktor ein strukturell identischer Repeller zugeordnet ist. Natürlich erwartet man, auf den chaotischen Tori außer dem vorgegebenen (seltsamen) Attraktor und den Fixpunkten noch weitere Attraktoren zu finden. Daher entwickeln wir ein systematisches Verfahren zur numerischen Suche nach Attraktoren auf isolierten chaotischen Tori – welches die Existenz von Fixpunkten voraussetzt – und gehen zwecks Charakterisierung von Attraktoren auf das Konzept und die Methode zur Berechnung der Ljapunovexponenten ein. Im Anschluß daran werden beispielhaft chaotische Tori in zwei verschiedenen Hamiltonschen Systemen mit drei

[†]In diesem Kapitel werden zwar explizit nur im Phasen- bzw. Wirkungsraum isolierte nichtreguläre Tori betrachtet, aber die nicht-isolierten haben (*cum grano salis*) ebenfalls die hier besprochenen Eigenschaften.

Freiheitsgraden untersucht. Diese chaotischen Tori enthalten (wie erwartet) neben Fixpunkten und den vorgegebenen seltsamen Attraktoren – im einen Fall vom Rössler-Typ [Rös76], im anderen Fall vom Lorenz-Typ [Lor63] – noch weitere Attraktoren, nämlich Grenzzyklen, die über Periodenverdopplungs-Sequenzen (in einem Fall auch über eine intermittente Phase) in verschiedene chaotische Attraktoren übergehen, wenn die Stärke der Störung variiert wird.

Im vierten Kapitel wird analysiert, welche Attraktoren auf nicht isoliert liegenden nichtregulären Tori auftreten können. Unter Umständen bilden nichtreguläre Tori nämlich gemeinsam Hyperflächen im Wirkungsraum (s.o.). Die Bedingungen, welche die n -dimensionale Hyperfläche im Wirkungsraum festlegen, haben zur Folge, daß n Linearkombinationen der Winkel sich zeitlich linear entwickeln. Man kann dementsprechend auf neue Variable transformieren, von denen n linear von der Zeit abhängen und daher trivial-integrierbar sind. Diese Transformation führt natürlich zu expliziten Zeitabhängigkeiten in den verbleibenden $m = N - n$ "nicht-trivialen" Gleichungen. Die zugehörigen invarianten Hyperflächen im $2N$ -dimensionalen Phasenraum dynamischer Systeme mit N Freiheitsgraden haben, je nach Dimension der Hyperfläche im Wirkungsraum, Dimensionen zwischen $N + 1$ und $2N - 1$. Sie können daher, unabhängig von der Zahl der Freiheitsgrade, Barrieren für den Phasenraumfluß bilden (dies ist KAM-Tori nur in Systemen mit zwei Freiheitsgraden möglich). Auf solchen aus nichtregulären Tori bestehenden Barrieren – das sind also $(2N - 1)$ -dimensionale invariante Hyperflächen – treten in Systemen mit mehr als zwei Freiheitsgraden zwar aperiodische Attraktoren auf, aber nie chaotische. Auf den invarianten Hyperflächen geringerer Dimension, welche aus nichtregulären Tori bestehen, findet man hingegen in der Regel auch chaotische Attraktoren. Auf $(2N - 2)$ -dimensionalen Hyperflächen, die sich aus nichtregulären (bzw. chaotischen) Tori zusammensetzen, kommen etwa, neben vielen anderen, beispielsweise auch alle in eindimensionalen, periodisch oder quasiperiodisch getriebenen Oszillatorsystemen auftretenden Attraktoren vor – z.B. die seltsamen Attraktoren des Duffing-Oszillators [Ued79, Sch86].

Barrieren aus nichtregulären Tori treten auch in der nichtrelativistischen Bewegung geladener Einzelteilchen auf, wenn man räumlich periodische Vektorpotentiale konstanter Richtung betrachtet, und ebenso auf $(2N - 2)$ -dimensionalen invarianten Hyperflächen, wenn man zwei solche Vektorpotentiale linear superponiert. Falls $N > 3$ ist, muß man allerdings zeitlich periodische ($N = 4$) oder quasiperiodische ($N > 4$) elektromagnetische Felder zulassen. Die Zahl "nicht-trivialer" Gleichungen (s.o.) kann aber nicht größer als drei sein, und nichtlineare Störterme sind ausgeschlossen. Immerhin können auf diese Weise (wenigstens prinzipiell) alle in dieser Arbeit numerisch untersuchten Systeme realisiert werden.

Während wir im dritten Kapitel bereits zu Anfang ein allgemeines Verfahren einführen, welches die Angabe von isolierten nichtregulären Tori mit beliebig vorgegebenen Attraktoren autonomer dissipativer Systeme erlaubt, wird die Analyse der Bewegung auf nichtregulären Barriere-Tori und solchen, die invariante Hyperflächen geringerer Dimension bilden, zunächst lediglich fallbezogen durchgeführt, d.h. ohne Rückgriff auf ein solches allgemeines Verfahren. Die Erweiterung des zur Untersuchung isolierter Tori eingeführten Verfahrens auf nicht-autonome Systeme mit periodischer oder quasiperiodischer Zeitabhängigkeit wird aber am Ende des Kapitels nachgeholt.

Abschließend wird *im fünften Kapitel*

- durch die Untersuchung des Flusses in der Umgebung nichtregulärer Tori der Einfluß der Poincaré-Invarianten, und besonders des Liouvilleschen Gesetzes, auf die Bewegung außerhalb dieser Tori demonstriert (dissipative Bewegung auf Tori muß durch antidissipative in deren Umgebung kompensiert werden, und umgekehrt);
- eine Würdigung anderer Studien der Bewegung auf nichtregulären Tori vorgenommen und insbesondere gezeigt, daß diese stets einen ganz anderen Aspekt behandeln als die hier vorliegende Arbeit, nämlich den Fall kleiner Störung bzw. schwacher Kopplung – und auch diesen mehr im Hinblick auf dissipative Systeme (bekanntlich kann ein gegebener Torus eines dissipativen Systems aber stets in ein Hamiltonsches System eingebettet werden, vgl. Kap.5.2.);
- ein kurzer Überblick über die hier durchgeführten Untersuchungen der Bewegung auf nichtregulären und chaotischen Tori gegeben und anschließend diskutiert, inwieweit die zugehörigen Systeme sich im Rahmen des elektromagnetischen Modells (prinzipiell) realisieren lassen. Die Arbeit schließt mit einem Ausblick auf noch offene Fragen.

Anhang A enthält einige ausführlichere Anmerkungen und die Diskussion der beim Fixpunktproblem im dritten Kapitel auftretenden kubischen Gleichungen. Im Anhang B wird das KAM-Verfahren diskutiert und auf das Problem der Reduktion nichtregulärer Tori auf reguläre angewandt (im zweiten Kapitel wurde ja lediglich der Fall spezieller isolierter Tori untersucht). Der Anhang C schließlich dient der Präsentation einer Fallstudie integrierbarer Bewegung auf nichtregulären 2-Tori.

Kapitel 2

Tori in Hamiltonschen Systemen

Die meisten Hamiltonschen Systeme sind nicht integrabel [Sie41, Sie54].[†] Verlässliche Aussagen über ihr Langzeitverhalten sind daher nicht möglich. Integrabel (d.h. für alle möglichen Anfangsbedingungen lösbar) sind Hamiltonsche Systeme, bei denen die Zahl *unabhängiger* Erhaltungsgrößen mit *vertauschenden* Poissonklammern[‡] mindestens ebenso groß ist wie die der Freiheitsgrade.[§] In integrablen Hamiltonschen Systemen mit N Freiheitsgraden verlaufen die Trajektorien auf invarianten N -dimensionalen Mannigfaltigkeiten[¶] im $2N$ -dimensionalen Phasenraum. Bei gebundener Bewegung sind diese Mannigfaltigkeiten diffeomorph den N -Tori. In fast-integrablen Systemen – die sich von den integrablen nur durch eine genügend kleine Störung unterscheiden – bleibt ein großer Teil dieser invarianten Tori^{||} erhalten, und der Fluß auf ihnen ist weiterhin integrabel.^{**}

Umgekehrt muß die Bewegung auf Hamiltonschen Tori^{||} aber keineswegs unbedingt integrabel sein. In diesem Kapitel wird zunächst die *reguläre* Bewegung auf invarianten Tori in integrablen oder fast-integrablen Hamiltonschen Systemen betrachtet. Diese Betrachtung legt eine Modifikation des Störanteils der Hamiltonfunktion fast-integrabler Hamiltonscher Systeme nahe, die auf Systeme führt, deren Trajektorien in der Regel selbst dann nicht integrabel sind, wenn sie auf invarianten Tori verlaufen. Im zweiten Abschnitt des Kapitels

[†]Vgl. Anhang B.1. Integrabilität (Lösbarkeit) wird auf Seite 2 definiert.

[‡]vgl. Anhang A.0

[§]Quantenmechanisch korrespondieren den Poissonklammern Kommutatorbeziehungen. Einem klassischen System mit N vertauschenden Erhaltungsgrößen entspricht daher quantenmechanisch ein Ensemble von Systemen mit einem vollständigen Satz vertauschender Observabler. – Streng genommen sind diese Bedingungen nur *hinreichend* zur Sicherung der Integrabilität eines Hamiltonschen Systems. Allerdings sind keine Gegenbeispiele bekannt, d.h. alle bekannten integrablen Hamiltonschen Systeme besitzen einen vollständigen Satz unabhängiger und vertauschender Erhaltungsgrößen [Ber78].

[¶]*Invariante* Mannigfaltigkeiten werden auf Seite 4 definiert. (Zu *Mannigfaltigkeit* → Anhang A.5.)

^{||}bzw. invarianten N -dimensionalen Mannigfaltigkeiten im $2N$ -dimensionalen Phasenraum

^{**}Diese Aussage über *fast-integrable Hamiltonsche Systeme* ist Gegenstand der sogenannten KAM-Theorie (→ Anhang B). Gute Übersichtsdarstellungen der Bewegung in integrablen *und* nicht-integrablen Hamiltonschen Systemen findet man bei Berry [Ber78] und Helleman [Hel84]. Eine stärker mathematisch orientierte Übersicht stammt von Percival [Per85]. Einen strikten Beweis aller hier wiedergegebenen Aussagen über *integrable* Hamiltonsche Systeme gibt z.B. Arnold [Arn78, §49f.].

demonstrieren wir, daß die nichtrelativistische Bewegung geladener Einzelteilchen – etwa eines Elektrons – in räumlich periodischen elektromagnetischen Feldern auf solchen *nichtregulären* Hamiltonschen Tori verlaufen kann, wenn das elektrische Feld die gleiche räumliche Periodizität aufweist wie das magnetische und einen bestimmten Teil der magnetischen Kraftwirkung kompensiert. Im dritten Abschnitt wird gezeigt, daß

- die Bewegung auf nichtregulären Tori in der Regel dissipativ ist;
- die Poincaré-Invarianten auf diesen Tori stets verschwinden (ihr Wert also konstant ist), was insbesondere die Erhaltung des Phasenraumvolumens (Liouvillesches Gesetz) garantiert;
- zu jedem Zeitpunkt die über den ganzen Torus gemittelte relative Änderung des spezifischen Torusvolumens verschwindet (während in dissipativen Systemen die entsprechende Größe überall negativ sein kann!).

Im Fall schwacher Störungen können nichtreguläre Tori eventuell durch eine kanonische Transformation[†] auf reguläre zurückgeführt ("regularisiert") werden. Zum Abschluß des zweiten Kapitels diskutieren wir den Fall eines nichtregulären Torus¹, für den sich die Transformation auf einen KAM-Torus explizit – und ohne Rückgriff auf den KAM-Formalismus – durchführen läßt (und geben nebenbei die elektromagnetischen Potentiale an, in welchen die nichtrelativistische Bewegung eines Elektrons mit dem passenden Impuls – in geeigneten Koordinaten – auf diesem Torus stattfindet). Die Diskussion dieses Falles demonstriert beispielhaft, daß hinreichend irrationale Windungszahlverhältnisse für die Konvergenz der Transformation notwendig sind, und daß diese Forderung die Stärke der Störungen begrenzt, für die eine solche Transformation durchführbar ist (starke Störungen führen nämlich zum Verschwinden einiger oder sogar aller Windungszahlen). Die Untersuchung des allgemeinen Falles mit dem KAM-Verfahren wird im Anhang B.4 durchgeführt.

2.1 Reguläre und nichtreguläre Tori

In integrablen Hamiltonschen Systemen kann man immer eine Transformation von den ursprünglichen auf sogenannte Wirkungs-Winkel-Variable (I, Φ) finden (vgl. Kap.1). Diese zeichnen sich dadurch aus, daß die Hamiltonfunktion nur von den Wirkungsvariablen I abhängt und daß die Relation zwischen den ursprünglichen und den Wirkungs-Winkel-Koordinaten 2π -periodisch in den neuen Winkelvariablen ist (*Liouvillesches Theorem*, siehe Arnol'd [Arn78, §49f.]). Die Bewegungsgleichungen lauten daher

$$\begin{aligned}\dot{I} &= 0 \\ \dot{\Phi} &= \omega(I) = \frac{\partial H(I)}{\partial I}\end{aligned}\tag{2.1}$$

wobei der Punkt für die *totale* Ableitung nach der Zeit steht. Da die Wirkungen I ergo Erhaltungsgrößen sind, besteht der $2N$ -dimensionale Phasenraum integrierbarer Hamiltonscher

[†]vgl. Anhang A.0

Systeme mit N Freiheitsgraden strukturell aus einer Schichtung invarianter N -Tori[†], die jeweils einem der erhaltenen Wirkungsvektoren I zugeordnet sind. Die Bewegung auf diesen invarianten Tori läßt sich durch triviale Integration der Bewegungsgleichungen (2.1) vorhersagen.

In fast-integrablen Systemen – die sich wie gesagt von einem integrablen nur durch eine genügend kleine Störung unterscheiden – bleibt ein großer Teil der invarianten Tori (genauer gesagt, eine Menge von endlichem Maß) erhalten, und der Fluß auf ihnen ist weiterhin integrierbar. Nach ihren Entdeckern Kolmogorov, Arnol'd und Moser bezeichnet man diese Tori kurz als KAM-Tori.[‡] Wenn die Hamiltonfunktion eine analytische Funktion ihrer Variablen ist, so nimmt sie in der Nachbarschaft eines solchen KAM-Torus – in geeigneten Wirkungs-Winkel-Variablen – die folgende Form an:

$$H = H_0(I) + \varepsilon \sum_{i,j=1}^N (I_i - I_{0,i}) h_{1i,j}(I, \Phi) (I_j - I_{0,j}) \quad (2.2)$$

Nur dann haben die Bewegungsgleichungen auf dem hier betrachteten KAM-Torus zum Wert $I = I_0$ nämlich wieder die obige Form:

$$\begin{aligned} \dot{I} |_{I_0} &= 0 \\ \dot{\Phi} |_{I_0} &= \omega_0(I_0) = \frac{\partial H_0(I)}{\partial I_0} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die Komponenten des Frequenzvektors ω_0 sind offenbar mit den in (1.1) definierten Windungszahlen identisch. Wie im Kapitel 1 plausibel gemacht wurde, existieren KAM-Tori nur für hinreichend irrationale Windungszahlverhältnisse.[§] Alle anderen Tori des integrablen Systems verschwinden aufgrund von Resonanzen schon für infinitesimale Werte des Störparameters ε .

Für große Störungen geht die Integrabilität völlig verloren, die KAM-Tori "brechen auf". Trotzdem kann es in solchen Hamiltonschen Systemen noch invariante Tori geben. Wir setzen der Einfachheit halber voraus, daß die betrachteten Hamiltonfunktionen in der Umgebung von Tori analytisch von (I, Φ) abhängen. Dann nehmen diese Hamiltonfunktionen in der Umgebung solcher Tori folgende Form an:[¶]

$$H = H_0(I) + \eta(I - I_0) \cdot G(I, \Phi) \quad (2.4)$$

[†]für gebundene Bewegung ($\rightarrow$ Arnol'd, aaO.) oder periodische Systeme (vgl. das Beispiel des rotierenden Pendels bei Arnol'd, aaO., sowie das im folgenden Abschnitt vorgestellte Modellsystem). Im allgemeinen Fall handelt es sich um eine Schichtung invarianter N -dimensionaler Mannigfaltigkeiten, die nicht die topologischen Eigenschaften von Tori haben, vgl. wiederum Arnol'd, aaO.

[‡]siehe Anhang B; zu Quellenangaben speziell Anhang B.3.

[§]Die exakte Formulierung dieser Bedingung findet sich im Anhang B.1, wo auch der Zusammenhang mit dem klassischen Problem der kleinen Nenner aufgezeigt wird.

[¶]sofern es sich um im Phasen- bzw. Wirkungsraum isolierte Tori handelt. Im vierten Kapitel werden invariante Hyperflächen eingeführt, welche aus Tori bestehen, die nicht vom KAM-Typ sind. Diese Tori haben ebenfalls die wesentlichen der in diesem Kapitel besprochenen Eigenschaften (s.u.; d.h. der Fluß auf ihnen ist i.a. kompressibel, in einigen Fällen gelingt eine Rückführung auf KAM-Tori, und sie treten in der Bewegung geladener Einzelteilchen in gewissen räumlich periodischen elektromagnetischen Feldern auf).

Für die Wirkungen ergibt sich (wie erforderlich) $\dot{I}|_{I_0} = 0$. H_0 ist der integrable Teil der Hamiltonfunktion, η ein dimensionsloser Parameter und G eine vektorwertige Funktion der Größenordnung eins, die 2π -periodisch in den Winkeln Φ ist (und analytisch gemäß unserer generellen Voraussetzung, ansonsten aber beliebig).[†] Die Bewegung auf solchen invarianten Tori genügt den Bewegungsgleichungen

$$\dot{\Phi}|_{I_0} = \omega_0(I_0) + \eta G(I_0, \Phi) \quad (2.5)$$

und ist im allgemeinen nicht integrabel, da von G im wesentlichen nur 2π -Periodizität in den Winkeln gefordert wird. Wir bezeichnen diese invarianten Tori als *nichtreguläre* Tori – im Gegensatz zu den *regulären* Tori, in deren Umgebung die Hamiltonfunktion die Form (2.2) mit $\varepsilon \geq 0$ annimmt.

2.2 Bewegung eines Elektrons auf nichtregulären Tori

Bevor wir uns weiter mit den Eigenschaften nichtregulärer Tori in Hamiltonschen Systemen beschäftigen zeigen wir zunächst, daß die nichtrelativistische Bewegung geladener Einzelteilchen in räumlich periodischen Feldern unter gewissen Bedingungen auf solchen Tori verläuft.

Die Bewegung geladener Einzelteilchen in elektromagnetischen Feldern kann durch eine Hamiltonfunktion beschrieben werden. Bei nichtrelativistischer Bewegung ist diese für ein Teilchen der Masse m und der Ladung e – etwa ein Elektron der Ladung $e = -e_0$ – in MKS-Einheiten als Funktion der kartesischen Ortskoordinaten r und des zu diesen kanonisch konjugierten Impulses

$$P = m\dot{r} + eA(r, t) \quad (2.6)$$

durch

$$H(P, r, t) = \frac{1}{2m} \left(P - eA(r, t) \right)^2 + e\phi(r, t) \quad (2.7)$$

gegeben. A steht für das magnetische Vektorpotential, ϕ für das elektrische Potential. Im Anhang A.1 wird gezeigt, daß diese Hamiltonfunktion auf die nichtrelativistische Lorentzgleichung führt, und ferner, daß sie "eichinvariant" ist. Letzteres bedeutet, daß eine kanonische Transformation angegeben werden kann, welche die Hamiltonfunktion (2.7) forminvariant läßt und gleichzeitig eine Eichtransformation der elektromagnetischen Potentiale bewirkt.[‡] Die transformierte Hamiltonfunktion hängt also in gleicher Weise vom transformierten kanonischen Impuls und den umgekehrten elektromagnetischen Potentialen ab wie die Hamiltonfunktion (2.7) von P bzw. A und ϕ .

Die Hamiltonfunktion (2.7) läßt sich folgendermaßen umformen:

$$H = \frac{P^2}{2m} - \frac{e}{m} (P - P_0) \cdot A + \left(\frac{e^2}{2m} A^2 - \frac{e}{m} P_0 \cdot A + e\phi \right) \quad (2.8)$$

[†]Ausgeschlossen werden natürlich winkelunabhängige Vektorfunktionen G .

[‡]Dem Anhang A.1 sind der Vollständigkeit halber außerdem noch die Zusammenhänge zwischen den Potentialen einerseits und den Feldern sowie den Strom- und Ladungsverteilungen andererseits zu entnehmen.

Der impulsunabhängige Term läßt sich natürlich durch das folgende elektrische Potential stets zum Verschwinden bringen:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{m} - \frac{e}{2m} A^2(\mathbf{r}, t) \quad (2.9)$$

Die Bewegungsgleichungen eines geladenen Teilchens mit dem Impuls $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ lauten dann

$$\dot{\mathbf{P}}|_{\mathbf{P}_0} = 0, \quad \dot{\mathbf{r}}|_{\mathbf{P}_0} = \frac{\mathbf{P}_0}{m} - \frac{e}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (2.10)$$

Falls die Ortsabhängigkeit des magnetischen Vektorpotentials periodisch ist, gibt es drei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{r}_{i=1,2,3}$, für die gilt

$$\mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_i) = \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.11)$$

Im Folgenden wählen wir stets[†]

$$\mathbf{r}_1 = (x_0, 0, 0), \quad \mathbf{r}_2 = (0, y_0, 0), \quad \mathbf{r}_3 = (0, 0, z_0) \quad (2.12)$$

Wir zeigen nun, daß die Bewegung geladener Einzelteilchen in räumlich periodischen elektromagnetischen Feldern auf nichtregulären Tori erfolgt – d.h., daß die Hamiltonfunktion (2.8) die Form (2.4) annimmt –, wenn die Teilchen den kanonischen Impuls $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ haben und ein durch die Beziehung (2.9) gegebenes elektrisches Potential einen Teil der magnetischen Kraftwirkung kompensiert. Dazu skalieren wir die Ortsvariablen folgendermaßen:

$$\Phi = 2\pi \left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}, \frac{z}{z_0} \right) \quad (2.13)$$

Die zu diesen *Winkelvariablen* kanonisch konjugierten Wirkungen sind offensichtlich[‡] die folgenden:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2\pi} (x_0 P_x, y_0 P_y, z_0 P_z) \quad (2.14)$$

Die Hamiltonfunktion (2.8) & (2.9)

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} - \frac{e}{m} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) \cdot \mathbf{A} \quad (2.15)$$

nimmt in diesen Koordinaten folgende Form an:

$$H = \frac{2\pi^2}{m} \left(\frac{I_1^2}{x_0^2} + \frac{I_2^2}{y_0^2} + \frac{I_3^2}{z_0^2} \right) - 2\pi \frac{e}{m} (\mathbf{I} - \mathbf{I}_0) \cdot \left(\frac{A_x(\mathbf{r}(\Phi))}{x_0}, \frac{A_y(\mathbf{r}(\Phi))}{y_0}, \frac{A_z(\mathbf{r}(\Phi))}{z_0} \right) \quad (2.16)$$

mit $\mathbf{r}(\Phi) = \frac{1}{2\pi} (x_0 \Phi_1, y_0 \Phi_2, z_0 \Phi_3)$

[†]Die Beschränkung auf kubische *Basiszellen* ist natürlich nicht notwendig, aber im Rahmen dieser Arbeit werden andere nicht benötigt (vgl. aber Kap.5.3).

[‡]Nur auf diese Weise lassen sich die fundamentalen Poissonklammern erfüllen (zu diesen vgl. Anhang A.0).

Die transformierte Hamiltonfunktion hängt also in der Tat 2π -periodisch von den Winkelkoordinaten Φ (2.13) ab. Führt man nun die Frequenz

$$\omega_0(I) = \frac{4\pi^2}{m} \left(\frac{I_1}{x_0^2}, \frac{I_2}{y_0^2}, \frac{I_3}{z_0^2} \right) \quad (2.17)$$

und das Vektorfeld

$$G(\Phi) = -\frac{e}{m} \cdot \frac{2\pi}{\eta} \left(\frac{A_x(r(\Phi))}{x_0}, \frac{A_y(r(\Phi))}{y_0}, \frac{A_z(r(\Phi))}{z_0} \right) \quad (2.18)$$

ein, so folgt

$$H(I, \Phi) = \sum_{i=1}^3 \int \omega_{0,i}(I_i) dI_i + \eta(I - I_0) \cdot G(\Phi) \quad (2.19)$$

Die transformierte Hamiltonfunktion hat also tatsächlich die Form der Hamiltonfunktion (2.4). Der ungestörte (winkelunabhängige) Anteil hängt quadratisch von den Wirkungen ab, der Störterm hingegen linear. Die Bewegung von geladener Einzelteilchen mit dem kanonischen Impuls P_0 im System (2.15) erfolgt also – in den obigen Wirkungs-Winkel-Koordinaten – auf einem nichtregulären Torus. Die Hamiltonfunktionen (2.19) und (2.15) sind allerdings – im Gegensatz zur allgemeinen Hamiltonfunktion (2.7) – *nicht* eichinvariant, da die Bedingung (2.9) für das elektromagnetische Potential nicht eichinvariant ist. Das bedeutet aber natürlich nicht, daß die Existenz nichtregulärer Tori von der Wahl der Eichung abhängt. Die oben eingeführten Wirkungs-Winkel-Koordinaten sind aber nur für die Eichung, in der das elektrische Potential eine Bedingung der Form (2.9) erfüllt, „problemangepaßt“ in dem Sinn, daß die (invarianten) nichtregulären Tori durch feste Werte der Wirkungen (2.14) – also durch Invarianten – charakterisiert werden und dementsprechend die Winkelvariablen (2.13) einen Satz von die Torusoberfläche parametrisierenden Winkeln darstellen.

Es ist also, wenigstens prinzipiell, möglich, nichtreguläre Tori für die nichtrelativistische Bewegung geladener Einzelteilchen im dreidimensionalen Raum zu präparieren, indem man ein räumlich periodisches Magnetfeld aufbaut sowie ein durch die Vorgabe des magnetischen Vektorpotential gemäß der obigen Beziehung (2.9) bestimmtes elektrisches Potential anlegt. Im Vorgriff auf spätere Betrachtungen (im Kapitel 4) merken wir bereits an dieser Stelle an, daß nichtreguläre Tori auch dann in der nichtrelativistischen Bewegung geladener Einzelteilchen auftreten können, wenn die Felder zeitabhängig sind oder die Bewegung nur zwei räumliche Freiheitsgrade hat, d.h. auf eine zweidimensionale Fläche beschränkt ist. Betrachten wir etwa den Fall $A_z = 0$. Dann gilt auf den nichtregulären Tori $\dot{\Phi}_3 = \frac{2\pi}{z_0} \dot{z} = \text{const.}$ Dies impliziert $\dot{z} = 0$, d.h. die Bewegung auf diesen Tori hat nur zwei räumliche Freiheitsgrade. Im allgemeinen bedingt die Forderung $A_z = 0$ übrigens keineswegs Bewegung auf einer zweidimensionalen Fläche. Wenn das elektrische Potential nicht die Bedingung (2.9) erfüllt, oder auch außerhalb der hier betrachteten invarianten Tori, gilt nämlich $\dot{z} = 0$ nur dann, wenn

$$A_z = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \quad (2.20)$$

2.3 Dissipativer Fluß auf nichtregulären Tori

Im Langzeitlimes ist die Bewegung auf nichtregulären Tori zumeist dissipativ. Zum Beweis dieser Behauptung gehen wir von der Kontinuitäts- oder Liouville-Gleichung[†] aus:

$$\dot{\rho} + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.21)$$

Wie sonst auch steht der Punkt für die *totale* Ableitung nach der Zeit; ρ ist eine Ensemble-Dichte im Phasenraum der Variablen $\mathbf{x}$, und $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ ist die Phasenraumgeschwindigkeit.[‡] Diese Gleichung kann durch die Einführung des spezifischen Phasenraumvolumens

$$V_{\mathbf{x}} = \frac{1}{\rho} \quad (2.22)$$

wie folgt umformuliert werden:

$$\Lambda_{\mathbf{x}} \equiv \frac{\dot{V}_{\mathbf{x}}}{V_{\mathbf{x}}} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} \quad (2.23)$$

Die Divergenz der Phasenraumgeschwindigkeit ist demnach gleich der relativen Änderung des spezifischen Phasenraumvolumens pro Zeit.[§] Setzt man (für $\mathbf{v}$) die Hamiltonschen Gleichungen in diese Beziehung ein, so findet man

$$\Lambda_{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} + \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} \cdot (-\nabla_{\mathbf{q}} H) + \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} H = 0 \quad (2.24)$$

Der Fluß in Phasenraum Hamiltonscher Systeme ist also volumenerhaltend oder inkompressibel (*Liouvillesches Gesetz*). Dieses Theorem verbietet jedoch keineswegs dissipative Bewegung auf (niederdimensionalen!) Hyperflächen im Phasenraum. Im N -dimensionalen Raum der Winkel beispielsweise kann

$$\Lambda_{\Phi} \equiv \frac{\dot{V}_{\Phi}}{V_{\Phi}} = \nabla_{\Phi} \cdot \dot{\Phi} \quad (2.25)$$

durchaus nichtverschwindende Werte annehmen. Bei der Betrachtung der Bewegung auf nichtregulären Tori – welche der obigen Bewegungsgleichung (2.5) genügt – findet man, daß die *relative Änderung des spezifischen Torusvolumens* durch

$$\Lambda_{\Phi}|_{I_0} = \nabla_{\Phi} \cdot \dot{\Phi}|_{I_0} = \eta \nabla_{\Phi} \cdot G(I_0, \Phi) \quad (2.26)$$

gegeben ist. Natürlich kann man ohne weiteres Vektorfelder $G(I_0, \Phi)$ angeben, welche in den Winkeln Φ 2π -periodisch sind, und deren Divergenz bezüglich der Winkel nicht verschwindet.

Der Liouvillesche Erhaltungssatz ist nur ein Spezialfall einer Klasse von Erhaltungsgrößen, die von Poincaré eingeführt und Integralinvarianten genannt wurden [Whi37, §111].[¶] Diese

[†]Zu dieser vgl. [LL79, §3] oder [Jac89, Anhang C].

[‡]In Hamiltonschen Systemen sind die Variablen $\mathbf{x}$ also die Orte und Impulse bzw. die Winkel und Wirkungen. Zur Phasenraumgeschwindigkeit $\mathbf{v}$ vgl. die Bemerkungen zum Hamiltonschen Fluß im Anhang A.0.

[§]Shaw [Sha81] spricht – in Bezug auf dissipative Systeme – von “comoving contraction rate” oder von “Lie derivative with respect to the volume element”.

[¶]Bei Whittaker, aaO., findet sich auch das Zitat der Originalarbeit von Poincaré.

Poincaré-Invarianten $J_2, \dots, J_{2N}$ sind definiert durch [Arn78, Gol63]

$$\begin{aligned} J_{2k} &= \int dp_{i_1} \wedge \dots \wedge dp_{i_k} \wedge dq_{i_1} \wedge \dots \wedge dq_{i_k}, \quad i_1 \leq \dots \leq i_k \text{ \& } i_{l \leq k} \in \{1, \dots, N\} \\ &= \int_S \sum_{j_1 < \dots < j_k \leq N} dp_{j_1} \cdot \dots \cdot dp_{j_k} \cdot dq_{j_1} \cdot \dots \cdot dq_{j_k} \end{aligned} \quad (2.27)$$

wobei S eine beliebige $2k$ -dimensionale Fläche im $2N$ -dimensionalen Phasenraum der kanonischen Koordinaten (p, q) ist. Die integrale Formulierung des Liouvilleschen Gesetzes ist in (2.27) für $k = N$ enthalten. Auf Tori hat man zu ersetzen

$$p \rightarrow I, \quad q \rightarrow \Phi \quad (2.28)$$

Da nun auf einem einzelnen invarianten Torus $dI_j = 0$ gilt, ist die Erhaltung der Poincaré-Invarianten durch den Fluß auf invarianten Tori trivialerweise gegeben. Wegen ihres identischen Verschwindens auf invarianten Tori haben sie keinen Einfluß auf die Bewegung dort.

Die 2π -Periodizität der Vektorfelder $G(I_0, \Phi)$ – bzw. ganz allgemein der Bewegungsgleichungen auf Tori – garantiert jedoch, daß die zu einem gegebenen Zeitpunkt über den ganzen Torus gemittelte relative Änderung des spezifischen Volumens verschwindet (wie durch Einsetzen der Fourierentwicklung für $G(I_0, \Phi)$ leicht zu überprüfen ist):

$$\oint \Delta \Phi|_{I_0} d^N \Phi = \eta \sum_{k=1}^N \oint \frac{\partial G_k(I_0, \Phi)}{\partial \Phi_k} d^N \Phi = 0 \quad (2.29)$$

Im Mittel verschwindet also die relative Änderung des spezifischen Torusvolumens. Gleichwohl ist das Langzeitverhalten des Flusses auf nichtregulären Tori bei hinreichender Stärke der Störung (d.h. für $\eta \gtrsim 1$) für fast alle Anfangsbedingungen (bzw. Trajektorien) dissipativ, da Regionen, in denen $\Delta \Phi|_{I_0} > 0$ gilt, rasch verlassen werden. Die Anfangsbedingungen mit antidissipativem Langzeitverhalten können auf nichtregulären Tori übrigens generell nur das Maß Null haben (bzw. kein endliches N -dimensionales Volumen einnehmen), da letzteres (zeitlich) exponentiell divergieren würde (vgl. Kap.3.4). Dies widerspräche aber der Erhaltung des endlichen Torusvolumens.

2.4 Ein Beispiel zur Rückführung nichtregulärer Tori auf reguläre

Für kleine Werte von η kann man natürlich ganz allgemein versuchen, eine zeitunabhängige kanonische Transformation zu finden, welche den in $I - I_0$ linearen Term der Hamiltonfunktion (2.4) beseitigt, scheinbar nichtreguläre Tori also als reguläre entlarvt. Störungstheoretische Betrachtungen, die von Arnol'd [Arn61, Arn83] und Herman [Her79] angestellt wurden, führen auf Probleme mit kleinen Nennern von der gleichen Art wie in der klassischen Störungstheorie (s.u. sowie besonders Kap.5.2 und Anhang B.3). Umgekehrt liegen, wiederum

für kleine Störungen, erste numerische [GOY83, GOY85] und analytische [KMG89, BGK91] Untersuchungen der Bewegungen auf nicht regularisierbaren Tori vor ($\rightarrow$ Kap.5.2).

Das Problem läßt sich also wie folgt formulieren: Unter welchen Bedingungen ist in dem Hamiltonschen System[†]

$$H = H_0(I) + \varepsilon(I - I_0) \cdot B_p(I, \Phi) \quad (2.30)$$

die Bewegung auf dem Torus bei $I = I_0$ quasiperiodisch[‡], der Torus also ein KAM-Torus?

Natürlich handelt es sich genau dann um einen KAM-Torus, wenn bei der Anwendung der KAM-Störungsrechnung auf die Hamiltonfunktion (2.30) die transformierten Koordinaten an der Stelle, die $I = I_0$ entspricht, Bewegungsgleichungen von der Form (2.3) genügen. Der allgemeine Fall wird im Anhang B.4 behandelt. An dieser Stelle genügt die Untersuchung eines Beispiels, denn dieses läßt bereits erkennen, in welcher Weise große Störungen oder Resonanzen die angestrebte Reduktion der Hamiltonfunktion (2.30) auf die KAM-Form (2.2) verhindern, ohne daß auf den zur Durchführung des KAM-Verfahrens nötigen Formalismus zurückgegriffen werden müßte.

● Nichtreguläre Tori mit fester Richtung der Winkel-Geschwindigkeit

Zunächst zerlegen wir den Störterm der Hamiltonfunktion (2.30) in einen winkelmittelten Anteil und den echt winkelabhängigen Restterm

$$B^{(0)}(I, \Phi) = B_p(I, \Phi) - \langle B_p(I, \Phi) \rangle_\Phi \quad (2.31)$$

Die Bewegungsgleichung für die Winkelvariablen

$$\dot{\Phi} = \omega_0(I) + \varepsilon B_p(I, \Phi) \quad (2.32)$$

nimmt nach Einführung der winkelmittelten Frequenz

$$\Omega_0(I) = \left\langle \frac{\partial H}{\partial I} \right\rangle_\Phi \quad (2.33)$$

folgende Form an:

$$\dot{\Phi} = \Omega_0(I) + \varepsilon B^{(0)}(I, \Phi) \quad (2.34)$$

Wir beschränken unsere Betrachtungen nun auf Systeme, für die an der Stelle $I = I_0$

$$B^{(0)}(I_0, \Phi) = \Omega_0(I_0) b(\Phi) \quad (2.35)$$

[†]Statt des Parameters η in (2.4) benutzen wir in diesem Abschnitt ε , da der winkelabhängige "Störterm" – wie sich herausstellen wird – klein sein muß. Da ε üblicherweise dimensionslos ist, verwenden wir B_p statt des sonst benutzten Symbols G . Der Index p (perturbation) dient nur zur Unterscheidung dieser Größe von Magnetfeldern (die Verwendung des Buchstabens B wird durch die Anwendung des Kolmogorov-Verfahrens im Anhang B.4 nahegelegt).

[‡] d.h. durch N rational unabhängige Basisfrequenzen vollständig zu beschreiben; eine Funktion $\Phi(t)$ heißt *quasiperiodisch*, wenn man sie in der Form $\Phi(t) = F(\omega_1 t, \dots, \omega_N t)$ schreiben kann, wobei $F(x_1, \dots, x_N)$ eine stetige und 2π -periodische Funktion der Variablen $x_{i=1, \dots, N}$ ist [Mos66].

gilt. Die Bewegung auf dem nichtregulären Torus bei $I = I_0$ wird dann durch die Gleichung

$$\dot{\Phi} |_{I=I_0} = \Omega_0(I_0) \left(1 + \varepsilon b(\Phi) \right) \quad (2.36)$$

beschrieben. Die Vektor der Winkel-Geschwindigkeit ist also stets parallel zu einer festen Achse, nur der Betrag und, bezogen auf diese Achse, das Vorzeichen der Geschwindigkeit variieren.

• Beispiel: Bewegung eines Elektrons auf einem solchen Torus

Bei der nichtrelativistischen Bewegung eines Elektrons in stationären und räumlich periodischen Feldern, die von einem räumlich periodischen Vektorpotential konstanter Richtung

$$A(r) = \alpha \tilde{A}(r) \quad \text{mit} \quad \tilde{A}(r + r_{i=1,2,3}) = \tilde{A}(r), \quad (2.37)$$

$r_{i=1,2,3}$ aus (2.12)

und einem elektrischen Potential herrühren, welches der Beziehung (2.9) genügt, nimmt die Hamiltonfunktion (2.15) folgende Form an:

$$H(P, r) = \frac{P^2}{2m} - \frac{e}{m} (P - P_0) \cdot \alpha \tilde{A}(r) \quad (2.38)$$

Als Funktion der oben eingeführten Winkeln Φ (2.13) und Wirkungen I (2.14) gilt

$$H(I, \Phi) = \sum_{i=1}^3 \int \omega_{0,i}(I_i) dI_i + \eta (I - I_0) \cdot \bar{\alpha} \bar{g}(\Phi) \quad (2.39)$$

mit

$$\bar{\alpha} = \left(\frac{\alpha_1}{x_0}, \frac{\alpha_2}{y_0}, \frac{\alpha_3}{z_0} \right) \quad \text{und} \quad \bar{g}(\Phi) = - \frac{e}{m} \cdot \frac{2\pi}{\eta} \tilde{A}(r(\Phi)) \quad (2.40)$$

sowie $r(\Phi)$ aus (2.16) und $\omega_0(I)$ aus (2.17)

Nun zerlegen wir wiederum den Störterm der Hamiltonfunktion (2.39) in einen winkelmittelten Anteil und einen echt winkelabhängigen Restterm

$$\bar{g}^{(0)}(\Phi) = \bar{g}(\Phi) - \langle \bar{g}(\Phi) \rangle_{\Phi} \quad (2.41)$$

Wenn wir wie oben die winkelmittelte Frequenz (2.33) einführen, gelangen wir zu folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\dot{\Phi} = \Omega_0(I) + \eta \bar{\alpha} \bar{g}^{(0)}(\Phi) \quad (2.42)$$

Diese sind von der gleichen Form wie die obigen Bewegungsgleichungen (2.34). Falls der Vektor $\bar{\alpha}$ parallel zum Frequenzvektor $\Omega_0(I_0)$ ist, können wir den zweiten Term auf der rechten Gleichungsseite folgendermaßen schreiben:

$$\eta \bar{\alpha} \bar{g}^{(0)}(\Phi) = \varepsilon \Omega_0(I_0) b(\Phi) \quad (2.43)$$

Hierin sind ε und b dimensionslos. Die Bewegungsgleichungen auf dem Torus bei $I = I_0$ sind demnach in diesem Fall genau von der Form (2.36). •

● Die regularisierende Transformation[†]

Gesucht ist eine Transformation auf Wirkungs-Winkel-Variable $(\bar{I}, \bar{\Phi})$, die den invarianten Torus bei $I = I_0$ erhält und die Bewegungsgleichung (2.36) auf diesem in die Form (2.3) überführt. In den neuen Wirkungs-Winkel-Variablen soll also Folgendes gelten:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{I}}|_{I=I_0} &= 0 \\ \dot{\bar{\Phi}}|_{I=I_0} &= \Omega\end{aligned}\tag{2.44}$$

Da die Transformation natürlich die raumfeste Richtung des Winkel-Geschwindigkeitsvektors nicht ändern kann, muß gelten

$$\Omega = \gamma \Omega_0(I_0)\tag{2.45}$$

d.h. die Windungszahlen auf dem gesuchten KAM-Torus sind den Komponenten des Frequenzvektors $\Omega_0(I_0)$ proportional. Die Windungszahlverhältnisse auf dem vorgegebenen invarianten Torus bei $I = I_0$ sind also von vornherein bekannt.[‡]

Mit der erzeugenden Transformation

$$S(\bar{I}, \bar{\Phi}) = \bar{I} \cdot \bar{\Phi} + \varepsilon (\bar{I} - I_0) \cdot Y(\bar{\Phi})\tag{2.46}$$

ergibt sich (vgl. Anhang A.0)

$$\begin{aligned}I &= \bar{I} + \varepsilon (\bar{I} - I_0) \frac{\partial Y}{\partial \bar{\Phi}} \\ \bar{\Phi} &= \bar{\Phi} + \varepsilon Y(\bar{\Phi})\end{aligned}\tag{2.47}$$

$Y(\bar{\Phi})$ muß eine 2π -periodische Funktion von $\bar{\Phi}$ sein, denn nur dann sind die neuen Variablen wieder Wirkungs-Winkel-Variable (vgl. Seite 63). Da

$$\bar{I}|_{\bar{I}=I_0} = I \Rightarrow \dot{\bar{I}}|_{I=I_0} = 0\tag{2.48}$$

erhält die Transformation den invarianten Torus. Mit dem Ansatz

$$Y(\bar{\Phi}) = \Omega_0(I_0) y(\bar{\Phi})\tag{2.49}$$

und der Notation

$$\Omega_0(I_0) \equiv \Omega_0\tag{2.50}$$

folgt

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\Phi}}|_{\bar{I}=I_0} &= \dot{\bar{\Phi}}|_{I=I_0} + \varepsilon \Omega_0 \dot{y}(\bar{\Phi}) \\ &= \Omega_0 \left(1 + \varepsilon b(\bar{\Phi})\right) + \varepsilon \Omega_0 \frac{\partial y}{\partial \bar{\Phi}} \cdot \Omega_0 \left(1 + \varepsilon b(\bar{\Phi})\right) \\ &= \Omega_0 \left(1 + \varepsilon b(\bar{\Phi})\right) \left\{1 + \varepsilon \left(\Omega_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\Phi}}\right) y(\bar{\Phi})\right\}\end{aligned}\tag{2.51}$$

[†]Es besteht kein Zusammenhang mit der "regularisierenden Transformation" im Dreikörperproblem (zu dieser vgl. [Whi37, §189] oder [Sie56, §7]).

[‡]Das ist im allgemeinen natürlich nicht der Fall. Das KAM-Verfahren umgeht dieses Problem durch die Suche nach einem Torus zu vorgegebenen Windungszahlen.

Da andererseits

$$\dot{\Phi} = \gamma \Omega_0 \quad (2.52)$$

gefordert ist, ergibt sich

$$b(\Phi) + [1 + \varepsilon b(\Phi)] \left(\Omega_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \Phi} \right) y(\Phi) + \frac{1 - \gamma}{\varepsilon} = 0 \quad (2.53)$$

Nach einer Fouriertransformation verwandelt sich diese Gleichung in eine Bestimmungsgleichung für die Fourierkoeffizienten $\tilde{y}_{m \neq 0}$ und den winkelunabhängigen Term. Diesen können wir daher mit dem 0-ten Fourierkoeffizienten identifizieren

$$\frac{1 - \gamma}{\varepsilon} \equiv \tilde{y}_0 = \langle y \rangle_{\Phi}^\dagger \quad (2.54)$$

und erhalten so die folgende Bestimmungsgleichung für $y(\Phi)$:

$$b(\Phi) + [1 + \varepsilon b(\Phi)] \left(\Omega_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \Phi} \right) y(\Phi) + \langle y \rangle_{\Phi} = 0 \quad (2.55)$$

Für die Größe

$$x(\Phi) = \left(\Omega_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \Phi} \right) y(\Phi) \quad (2.56)$$

ergibt sich unmittelbar die formale Lösung

$$x(\Phi) = - \frac{b(\Phi) + \langle y \rangle_{\Phi}}{1 + \varepsilon b(\Phi)} \quad (2.57)$$

Dabei ist $\langle y \rangle_{\Phi}$ durch die sich aus der Definition (2.56) ergebende Bedingung $\langle x \rangle_{\Phi} = 0$ festgelegt:

$$\langle y \rangle_{\Phi} = - \frac{\left\langle \frac{b(\Phi)}{1 + \varepsilon b(\Phi)} \right\rangle_{\Phi}}{\left\langle \frac{1}{1 + \varepsilon b(\Phi)} \right\rangle_{\Phi}} \quad (2.58)$$

Die formale Lösung für $y(\Phi)$ ergibt sich daraus und aus der Definitionsgleichung (2.56):

$$y(\Phi) = \langle y \rangle_{\Phi} - i \sum_{m \neq 0} \frac{x_m}{\Omega_0 \cdot m} e^{im \cdot \Phi} \quad (2.59)$$

Die formale Lösung ist natürlich nur dann eine gültige, wenn

1) die Störung so klein ist, daß

$$1 + \varepsilon b(\Phi) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon |b(\Phi)| < 1^\dagger \quad (2.60)$$

[†]Vgl. ggf. die ausführlichere Argumentation im Anhang B.4. Damit ergibt sich übrigens für die Windungszahlen

$$\nu = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{\Phi}}{t} = \gamma \Omega_0 = \left(1 - \varepsilon \langle y \rangle_{\Phi} \right) \Omega_0$$

[‡]Hierbei ist zu beachten, daß $\langle b(\Phi) \rangle_{\Phi} = 0$ gilt (s.o.).

- sonst ist die formale Lösung (2.60) für $z(\varnothing)$ nicht definiert. Die Störung darf also nicht so stark sein, daß der Fluß auf dem invarianten Torus Fixpunkte enthält. Das liegt daran, daß der Fluß auf regulären Tori keine Fixpunkte enthält, und diese sich auch durch kanonische Transformationen nicht beseitigen lassen [Arn83, §10B];

- 2) die in (2.59) auftretenden Nenner $\Omega_0 \cdot m$ nicht verschwinden und auch für große Werte von $|m|$ nicht zu rasch abfallen, da sonst die Reihe divergiert (die exakte Formulierung dieser Bedingung findet sich im Anhang B.1).

Für zu starke Störungen oder nicht genügend irrationale Windungszahlverhältnisse (d.h. nahe von oder in Resonanzen) existiert also keine regularisierende Transformation. Das führt in diesem einfachen Fall aber noch nicht zu chaotischem Verhalten, der Fluß auf dem hier betrachteten nichtregulären Torus bleibt vielmehr stets integrabel im Sinne des auf Seite 2 definierten Integrabilitätsbegriffs, d.h. integrabel durch Quadratur. Die Bewegung verläuft allerdings völlig anders als auf den Tori integrierbarer Systeme. Man findet z.B. periodische Bewegung, deren Frequenz (anders als im KAM-Fall!) von den Anfangsbedingungen abhängt, also keine durch die Wirkungen festgelegte Konstante ist (Näheres $\rightarrow$ Anhang A.2).

● Anmerkungen zum allgemeinen Fall

Wenn alle Komponenten der winkelgemittelten Frequenz Ω_0 (2.33) von Null verschieden sind, können im bislang betrachteten Spezialfall nicht einzelne Windungszahlen verschwinden, sondern nur alle gleichzeitig. Das ist aber nicht typisch (generisch). Im allgemeinen gibt es vielmehr unterhalb der Schwelle, an der die Störung so stark wird, daß Fixpunkte existieren, noch einen Bereich, in welchem aufgrund der Stärke der Störung

- einzelne Windungszahlen verschwinden (ein solches Beispiel wird im Anhang B.4 auf Seite 140 sowie im Anhang C.3 diskutiert), oder
- die Limes-Bildung in der Definitionsgleichung für die Windungszahlen (1.1) nicht möglich ist – die Windungszahlverhältnisse variieren chaotisch (sogenanntes toroidales Chaos, vgl. Kap.5.2 [BGK91]).

In diesem Bereich sind natürlich nicht alle Windungszahlverhältnisse hinreichend irrational, d.h. die KAM-Bedingung (B.9) kann ebenfalls nicht erfüllt werden. Wir bezeichnen im Folgenden den Bereich des Störparameters, für den der Fluß auf einem Torus Fixpunkte enthält, als "nichtregulären Bereich im engeren Sinne", und den Bereich, in dem aufgrund der Stärke der Störung wenigstens eine Windungszahl verschwindet oder einige Windungszahlen nicht definiert werden können, als "nichtregulären Bereich im weiteren Sinne".

In dem in diesem Abschnitt betrachteten Beispiel hängen zwar die Windungszahlen von der Stärke der Störung ab, nicht aber die Windungszahlverhältnisse. Auch das ist im allgemeinen nicht so, was dazu führt, daß normalerweise die Transformation eines vorgegebenen invarianten Torus auf einen KAM-Torus nie in einem ε -Intervall gelingt, sondern nur punktweise. Diese Punkte haben auf der ε -Achse aber ein endliches Maß, welches mit $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 1 strebt ($\rightarrow$ Anhang B.1).

Kapitel 3

Isolierte chaotische Tori

Wir wenden uns nun der Untersuchung der Bewegung auf im Phasen- bzw. Wirkungsraum isolierten nichtregulären Tori zu, auf denen der Fluß – zumindestens für gewisse Werte des Störparameters η – seltsame Attraktoren enthält. Tori dieses Typs bezeichnen wir im Folgenden kurz als *isolierte chaotische Tori*.

Zunächst geben wir ein einfaches Verfahren an, welches auf Hamiltonsche Systeme mit einem Torus bei einem (und nur diesem) Wert I_0 im Wirkungsraum führt, auf welchem der Fluß im Limes $\eta \rightarrow \infty$ nahe $\Phi = 0$ einen vorgegebenen seltsamen Attraktor enthält. Dieser Grenzfall ist im Hamiltonschen System (2.4) natürlich unphysikalisch, im System

$$H = \frac{H_0(I)}{\eta} + (I - I_0) \cdot G(I, \Phi) \quad (3.1)$$

aber keineswegs. Dort entspricht der Grenzfall $\eta = \infty$ einer Hamiltonfunktion (2.4) ohne ungestörten Term, d.h. mit $H_0 = 0$ und $\eta = 1$. Dieses System

$$H = (I - I_0) \cdot G(I, \Phi) \quad (3.2)$$

bezeichnen wir naheliegenderweise als (reines) „*Störsystem*“.

Das hier vorgestellte Verfahren bedingt Symmetrien des Flusses auf den (speziellen) chaotischen Tori in Bezug auf die Fixpunkte und die Zeitumkehrtransformation, die anschließend untersucht werden. Beispielsweise entspricht jedem Attraktor ein strukturell identischer Repeller (d.i. ein Attraktor des zeitumgekehrten Flusses). Im dritten Abschnitt wird für den Bereich des Störparameters η , in welchem stationäre Lösungen der Bewegungsgleichungen (Fixpunkte) existieren, ein systematisches Verfahren zur Suche nach weiteren Attraktoren entwickelt. Zur Charakterisierung von Attraktoren bietet sich die Berechnung der Ljapunov-exponenten an. Daher werden deren Definition und Eigenschaften sowie die gängige Methode zu ihrer Berechnung referiert.

Nach dieser Vorbereitung untersuchen wir in den letzten beiden Abschnitten dieses Kapitels detailliert die Bewegung auf zwei verschiedenen chaotischen Tori, die jeweils einen wohlbekannten seltsamen Attraktor enthalten – im einen Fall den Rössler-Attraktor, im anderen den Lorenz-Attraktor. Wir betrachten m.a.W. zwei verschiedene Hamiltonsche Systeme vom Typ (2.4), wobei der Fluß auf dem nichtregulären Torus im jeweiligen Störsystem nahe

$\Phi = 0$ die genannten seltsamen Attraktoren enthält. Wie wir schon im Kap.2.3 gesehen haben, kann die lokale Divergenzrate auf Tori – im Gegensatz zu dissipativen Systemen – nicht überall negativ sein[†], und deshalb muß sich der Fluß in anderen Regionen des Torus^{*} wesentlich von dem nahe des Ursprungs unterscheiden. Daher finden wir in den Störssystemen sowohl Repeller als auch Punktattraktoren und Grenzzyklen, die in den dissipativen Systemen von Rössler und Lorenz nicht vorkommen. Der Fluß im vollständigen System (d.h. für $H_0(I) \neq 0$) unterscheidet sich bei großen Werten des Störparameters η natürlich kaum von dem im Störssystem. Bei relativ kleinen Werten von η – aber immer noch im “nichtregulären Bereich”, in dem Fixpunkte existieren – finden sich hingegen intermittente oder (meist) Periodenverdopplungsübergänge von Grenzzyklen zu chaotischen Attraktoren, wenn η variiert wird; Punktattraktoren werden zu “normalen” Fixpunkten oder verschwinden ins Komplexe, um einem Grenzzyklen Platz zu machen ...

3.1 Tori mit seltsamen Attraktoren autonomer Differentialgleichungssysteme

Ausgangspunkt des Verfahrens kann jedes autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung mit M Kontrollparametern

$$\dot{x} = f(x; p_1, \dots, p_M) \quad (3.3)$$

oder, in skalarer Notation,

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_j; p_r) \\ \text{mit } i, j &\in \{1, \dots, N\} \text{ und } r \in \{1, \dots, M\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

sein, welches im N -dimensionalen Phasenraum der Variablen x einen seltsamen Attraktor endlicher Ausdehnung enthält.[‡] Falls nötig werden die Variablen x – durch Umskalierung und/oder Nullpunktverschiebung – so transformiert, daß der Attraktor nahe dem Ursprung plazierte wird. Anschließend ersetzt man

$$f_i(x_j; p_r) \rightarrow \tilde{f}_i(x_j; p_r) = f_i\left(\alpha \sin\left(\frac{x_j}{\alpha}\right); p_r\right) \quad (3.5)$$

wobei der neu eingeführte Parameter α dimensionslos ist. Auf diese Weise gelangt man zu dem modifizierten System

$$\dot{x}_i = \tilde{f}_i\left(\alpha \sin\left(\frac{x_j}{\alpha}\right); p_r\right) \quad (3.6)$$

Wegen

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \sin\left(\frac{x}{\alpha}\right) = x \quad (3.7)$$

[†]Mit lokaler Divergenzrate ist hier Shaws “comoving contraction rate” im Winkelraum (2.26) gemeint. Diese kann zwar in dissipativen Systemen stellenweise positive Werte annehmen ($\rightarrow$ [LL83, Kap.7.1]), aber beispielsweise ist sie im dissipativen Lorenz-System (3.55) ortsunabhängig, also überall negativ. Auf Tori hingegen verschwindet stets ihr Mittelwert, vgl. Kap.2.3.

[‡]Falls der Attraktor kein chaotischer ist, sondern etwa ein Grenzzyklus, ist der resultierende isolierte Torus zwar ein nichtregulärer, aber möglicherweise kein chaotischer.

ist das modifizierte System (3.6) in diesem Limes offensichtlich mit dem ursprünglichen System (3.4) identisch. Die rechte Seite der Gleichung (3.6) ist 2π -periodisch in den neuen Variablen

$$\Phi = \frac{z}{\alpha} \quad (3.8)$$

und eine Variablensubstitution führt schließlich auf das System

$$\dot{\Phi}_i = \frac{1}{\alpha} f_i(\alpha \sin \Phi_j; p_r) \quad (3.9)$$

Nun identifiziert man die rechte Seite dieses Gleichungssystems mit dem Vektorfeld $G(\Phi)$:

$$G(\Phi) \equiv \frac{1}{\alpha} f(\alpha \sin \Phi_1, \dots, \alpha \sin \Phi_N; p_1, \dots, p_M) \quad (3.10)$$

Dieses Vektorfeld ist offenbar 2π -periodisch in den Variablen Φ . Wenn man es in die Bewegungsgleichungen (2.5) einsetzt, gelangt man zu folgenden Bewegungsgleichungen auf dem Torus bei $I = I_0$:

$$\dot{\Phi} = \omega_0(I_0) + \frac{\eta}{\alpha} f(\alpha \sin \Phi_1, \dots, \alpha \sin \Phi_N; p_1, \dots, p_M) \quad (3.11)$$

An dieser Stelle führen wir eine skalierte Zeitvariable $\tau = \eta t$ ein. In Bezug auf diese lauten die Bewegungsgleichungen

$$\Phi' = \frac{\omega_0(I_0)}{\eta} + \frac{1}{\alpha} f(\alpha \sin \Phi_1, \dots, \alpha \sin \Phi_N; p_1, \dots, p_M) \quad (3.12)$$

Zu einer Bewegungsgleichung der gleichen Form gelangen wir auch, wenn wir von einer Hamiltonfunktion der Form (3.1) – statt wie bisher von einer der Form (2.4) – ausgehen und für das Vektorfeld $G(\Phi)$ die Beziehung (3.10) einsetzen. Die Ableitung ist dann allerdings bzgl. der unskalierten Zeitvariable t zu nehmen:

$$\dot{\Phi} = \frac{\omega_0(I_0)}{\eta} + \frac{1}{\alpha} f(\alpha \sin \Phi_1, \dots, \alpha \sin \Phi_N; p_1, \dots, p_M) \quad (3.13)$$

Im Limes

$$\Phi = \frac{z}{\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \eta \rightarrow \infty \quad (3.14)$$

tendiert das System (3.13) gegen das ursprüngliche Differentialgleichungssystem (3.3). Ein ursprungsnaher Attraktor des Systems (3.3) wird deshalb in diesem Grenzfall an der gleichen Stelle auch im System (3.13) auftauchen. Für hinreichend große Werte von η erwartet man natürlich, diesen Attraktor auch im System (3.12) in nur wenig modifizierter Form an der gleichen Stelle wiederzufinden.

Die Bewegung im Grenzfall $\eta = \infty$ kann auch für endliche Werte von η – nämlich $\eta = 1$ – realisiert werden, wenn $H_0(I_0) = 0$, was $\omega_0(I_0) = 0$ impliziert. Die Bewegung im Störssystem (3.2) des Hamiltonschen Systems (2.4) tritt also bei endlichem η tatsächlich auf, wenn

$$\omega_0(I_0) = 0 \quad \text{und} \quad \eta = 1 \quad (3.15)$$

Der Grenzfall $\eta = \infty$ kann daher interpretiert werden als "Abschalten des ungestörten Anteils" im System (3.1), oder als der Fall "unendlich großer Störung" im System (2.4), und schließlich als Realisierung der Bewegung im Störsystem (3.2) des Hamiltonschen Systems (2.4) durch die Parameterwerte (3.15).

Unbeschadet der Übereinstimmung im Limes (3.14) unterscheidet sich das System (3.13) vom ursprünglichen (3.3) in verschiedener Hinsicht:

- Die 2π -Periodizität der rechten Seite von (3.13) bedingt, daß (im besagten Grenzfall) statt eines einzigen Attraktors ein unendlich ausgedehntes, N -dimensionales Gitter von Attraktoren mit Gitterkonstanten 2π in jeder Komponente von Φ auftritt.
- Da die Existenz "dissipativer Regionen" (mit $\Lambda_\Phi|_{I_0} < 0$) diejenige von "antidissipativen" nach sich zieht ($\rightarrow$ Kap.2.3), wird sich das System (3.13) weitab vom Ursprung und seinen äquivalenten Versionen, also in einiger Entfernung von

$$\Phi = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}^N \quad (3.16)$$

vom ursprünglichen System (3.3) qualitativ unterscheiden. Da beide Systeme nur im Grenzfall (3.14) zusammenfallen, wird ihr Verhalten auch in der Umgebung von (3.16) unterschiedlich sein, sofern η und/oder α kleine Werte annehmen.

Offenbar können *alle* in autonomen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung auftretenden – ggf. seltsamen – Attraktoren endlicher Ausdehnung auch auf (isolierten) nichtregulären Tori vorkommen, wobei die Hamiltonschen Systeme, die solche Tori enthalten, jeweils leicht mit dem hier vorgeführten Verfahren anzugeben sind.[†]

3.2 Symmetrien der Bewegung auf diesen chaotischen Tori

Die Bewegungsgleichungen (3.12) bzw. (3.13) enthalten wegen

$$\sin \varphi = \sin(\pi - \varphi) \quad (3.17)$$

Symmetrien in Bezug auf die Fixpunktlösungen und die Zeitumkehrtransformation.[‡] Bevor wir uns der Betrachtung konkreter Beispiele zuwenden ist es ratsam, diese Symmetrien en

[†] Dieses Verfahren ist natürlich in gleicher Weise auf Differentialgleichungssysteme mit *beliebiger* Zeitabhängigkeit anwendbar, wenn man letztere bei der "Periodisierung" der übrigen Variablen unverändert läßt. Im Spezialfall nicht-autonomer Systemen mit periodischer oder quasiperiodischer Zeitabhängigkeit kann die explizite Zeitabhängigkeit – vor oder auch nach der "Periodisierung" der übrigen Variablen – durch die Einführung neuer *Winkelvariabler* eliminiert werden ($\rightarrow$ Anhang A.0). Das "Periodisierungsverfahren" führt dann auf Systeme mit nichtregulären Tori, die Teil einer aus gleichartigen Tori zusammengesetzten invarianten Hyperfläche im Phasenraum sind ($\rightarrow$ Kap.4.7).

Die *Behauptung*, daß das Verfahren "stets funktioniert", muß allerdings wie folgt präzisiert werden: Wenn die Parameter $\{p_r\}$ festgehalten werden, konvergieren die Ljapunovexponenten im Limes (3.14) gegen diejenigen des ursprünglichen Attraktors, sofern dieser strukturell stabil ist. Andernfalls kann man Parameter $\{p_r\}$ finden, welche von α und η derart abhängen, daß die Ljapunovexponenten und die $\{p_r\}$ in diesem Limes zu den für den ursprünglichen Attraktor gültigen Werten konvergieren.

[‡] Diese Symmetrien gelten teilweise auch für Bewegungsgleichungen, die mit Hilfe anderer "Periodisierungsverfahren" hergeleitet wurden ($\rightarrow$ Anhang A.3).

détail zu untersuchen, da man auf diese Weise einiges über das Verhalten weitab von (3.16) in Erfahrung bringen kann.

● Fixpunkt-Symmetrien

Zunächst betrachten wir die stationären Lösungen der obigen Bewegungsgleichungen (3.12) bzw. (3.13) auf dem chaotischen Torus. Falls wenigstens ein Fixpunkt Φ_* existiert – und jeder Fixpunkt des ursprünglichen Systems (3.3) bedingt im Limes (3.14) die Existenz eines solchen Fixpunktes –, so folgt aus der Symmetrierelation (3.17) die Existenz von $2^N - 1$ weiteren *nicht-äquivalenten* Fixpunkten[†], sofern

$$\Phi_{*,i} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, N \quad (3.18)$$

da dann für alle Komponenten $\Phi_{*,i} \neq \pi - \Phi_{*,i}$ gilt.[‡] Mit der Notation

$$\Phi_i^{[0]} = \Phi_i, \quad \Phi_i^{[1]} = \pi - \Phi_i \quad (3.19)$$

kann jeder dieser 2^N Fixpunkte durch N Bits $[n_1, \dots, n_N]$ charakterisiert werden:

$$\Phi_*^{[n_1, \dots, n_N]} = (\Phi_{*,1}^{[n_1]}, \dots, \Phi_{*,N}^{[n_N]}) \quad \text{und} \quad n_{i=1, \dots, N} \in \{0; 1\} \quad (3.20)$$

Damit die Bezeichnung eindeutig wird, ist allerdings noch eine weitere Festlegung nötig. Naheliegenderweise identifizieren wir $[0, 0, 0]$ mit dem ursprungsnächsten Fixpunkt.

Wo Fixpunkte der Bewegungsgleichungen (3.12) existieren, wird man natürlich die Bewegung in ihrer Umgebung mit Hilfe der linearen Stabilitätsanalyse analysieren. Die Entwicklung der allgemeinen Bewegungsgleichung (2.5) um Φ_* führt wegen $\dot{\Phi}|_{\Phi_*} = 0$ bzgl. der skalierten Zeit auf

$$\Phi' |_{I_0} = \frac{\partial G(I_0, \Phi)}{\partial \Phi} |_{\Phi_*} (\Phi - \Phi_*) + \dots \quad (3.21)$$

Die Eigenwerte der Matrix $\frac{\partial G}{\partial \Phi} |_{I_0}$ charakterisieren den Fluß nahe Φ_* . Sind z.B. alle Eigenwerte negativ, so ist der Fixpunkt ein (Punkt-)Attraktor. Für Vektorfelder $G(\Phi)$, die durch eine Beziehung der Form (3.10) definiert sind, gilt

$$\frac{\partial G_i}{\partial \Phi_{*,j}} = \frac{\partial G_i}{\partial \sin(\Phi_{*,j})} \cdot \cos(\Phi_{*,j}) \quad (3.22)$$

Jeder Fixpunkt $[n_1, \dots, n_N]$ hat daher unter den anderen $2^N - 1$ Fixpunkten einen *konjugierten* Partner $[\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_N]$ mit den entgegengesetzten Eigenwerten, nämlich

$$\Phi_*^{[\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_N]} = (\pi - \Phi_{*,1}^{[n_1]}, \dots, \pi - \Phi_{*,N}^{[n_N]}) \equiv \pi - \Phi_*^{[n_1, \dots, n_N]} \quad (3.23)$$

da $\cos \varphi = -\cos(\pi - \varphi)$.

[†] Zu jedem Fixpunkt Φ_* gibt es natürlich ein Gitter von *äquivalenten Fixpunkten*, die sich von Φ_* (komponentenweise) nur durch beliebige ganzzahlige Vielfache von 2π unterscheiden (alle Gitterkonstanten sind gleich 2π).

[‡] Falls für eine Komponente die Bedingung (3.18) verletzt ist, so gibt es nur $2^{N-1} - 1$ weitere nicht-äquivalente Fixpunkte, usw.: Falls diese Beziehung für n Komponenten von Φ_* verletzt ist, so gibt es nur $2^{N-n} - 1$ weitere nicht-äquivalente Fixpunkte – im Extremfall $n = N$ also keine weiteren nicht-äquivalenten.

● Zeitumkehr-Symmetrie

Vergleicht man nun ganz allgemein die Bewegungsgleichungen eines Punkts Φ mit denen des konjugierten Punkts

$$\bar{\Phi} = (\pi - \Phi_1, \dots, \pi - \Phi_N) \equiv \pi - \Phi \quad (3.24)$$

so fällt ins Auge, daß $\dot{\bar{\Phi}} = -\dot{\Phi}$. Außerdem hat die Symmetrierelation (3.17) der Sinusfunktion für Vektorfelder $G(\Phi)$, die durch eine Beziehung der Form (3.10) definiert sind, zur Folge, daß $G(\bar{\Phi}) = G(\Phi)$. Die Bewegungsgleichungen eines Punkts Φ sind daher den zeitumgekehrten Bewegungsgleichungen des konjugierten Punkts $\bar{\Phi}$ vollständig äquivalent.[†] Jeder Trajektorie entspricht daher unter Zeitumkehr genau eine andere, die aus der ursprünglichen durch die Transformation (3.24) hervorgeht, d.h. durch eine einfache Kombination einer Verschiebung um den Vektor π mit einer Spiegelung am Ursprung. Alle Attraktoren treten daher – lediglich verschoben und gespiegelt – auch im zeitumgekehrten Fluß auf. Da die Attraktoren des zeitumgekehrten Flusses aber Repeller der Bewegung sind, gibt es zu jedem Attraktor einen Repeller vom gleichen Typ, und beide gehen durch die invertierbare Transformation (3.24) auseinander hervor (siehe auch das oben besprochene Beispiel der Fixpunkte!).

3.3 Systematische Suche nach Attraktoren auf isolierten nichtregulären Tori

Der Fluß auf einem chaotischen Torus wird außer dem ursprungsnah im Störsystem vorgegebenen seltsamen Attraktor und eventuell attraktiven Fixpunkten ($\equiv$ *Punktattraktoren*) im allgemeinen natürlich noch weitere chaotische oder periodische Attraktoren ($\equiv$ *Grenzzyklen*) enthalten. Um diese systematisch (und nicht nur zufällig) aufzufinden, wurde das im folgenden erläuterte Verfahren angewandt.

Bekanntlich gibt es zu jedem Fixpunkt eine stabile und eine instabile Mannigfaltigkeit, die folgendermaßen definiert sind: Trajektorien mit Anfangsbedingungen auf der stabilen Mannigfaltigkeit streben im Limes $t \rightarrow \infty$ gegen den Fixpunkt, während solche mit Anfangsbedingungen auf der instabilen Mannigfaltigkeit im Limes $t \rightarrow -\infty$ (d.h. bei Zeitumkehr) gegen den Fixpunkt streben.[‡] Trajektorien mit Anfangswerten außerhalb dieser Mannigfaltigkeiten streben für $t \rightarrow \infty$ gegen die instabile Mannigfaltigkeit (man denke etwa an die Bewegung in der Umgebung eines Sattelpunktes in einer Ebene, vgl. [Ver90, Fig.3.5]). Die stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeiten verlaufen im Fixpunkt tangential zu den durch die lineare Stabilitätsanalyse (siehe Abschnitt 3.2) ermittelten, und haben die gleiche Dimension wie jene [Ver90, Kap.3.3]. Die Summe der Dimensionen der stabilen und instabilen

[†] Anders ausgedrückt: Falls $\Phi(t)$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen vom Typ (2.5) auf einem nichtregulären Torus darstellt, dann ist $\bar{\Phi}(-t) = \pi - \Phi(-t)$ ebenfalls eine Lösung dieser Bewegungsgleichungen, und umgekehrt (da $\bar{\bar{\Phi}} = \Phi$).

[‡]Zum Begriff *Mannigfaltigkeit* → Anhang A.5. Singuläre Fixpunkte – das sind solche, die mindestens einen Eigenwert mit verschwindendem Realteil haben – besitzen außerdem noch eine neutrale Mannigfaltigkeit ("center manifold"; Näheres dazu siehe [Ver90, §13.4]). Wir haben es typischerweise aber stets mit nichtsingulären Fixpunkten zu tun – dies ist der "generische" Fall, auf dessen Behandlung wir uns hier konzentrieren.

Mannigfaltigkeiten eines Fixpunktes, n_s und n_u , ist gleich der Zahl der Komponenten N des Differentialgleichungssystems:

$$n_s + n_u = N \quad (3.25)$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösungen des Differentialgleichungssystems darf sich eine solche Mannigfaltigkeit nicht selbst schneiden. Ebenso wenig darf eine von einem Fixpunkt ausgehende stabile Mannigfaltigkeit eine von einem anderen Fixpunkt ausgehende stabile Mannigfaltigkeit schneiden, und vice versa für instabile Mannigfaltigkeiten. Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten dürfen sich hingegen schneiden (auch wenn sie vom selben Fixpunkt ausgehen). Ein solcher Schnitt muß allerdings vom Fixpunkt der instabilen Mannigfaltigkeit bis zum Fixpunkt der stabilen Mannigfaltigkeit verlaufen, da jedem Schnittpunkt eine Kurve entspricht, die vom Fixpunkt der instabilen Mannigfaltigkeit ausgeht und im Fixpunkt der stabilen Mannigfaltigkeit endet.

Die Dimension der Schnittmannigfaltigkeit d_c ist also mindestens gleich eins. Sie hängt mit den Dimensionen n'_s bzw. n''_u der stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeiten folgendermaßen zusammen (die Striche erinnern hierbei daran, daß es sich um Mannigfaltigkeiten zu – möglicherweise – verschiedenen Fixpunkten handelt): Wenn die Mannigfaltigkeiten sich

- nicht "echt schneiden", sondern zusammenfallen, d.h. überall tangential zueinander verlaufen, gilt $d_c = \min(n'_s, n''_u)$. Dieser Fall ist aber untypisch (nicht "generisch");
- hingegen "echt schneiden", gilt $d_c = n'_s + n''_u - N$.

Falls

$$n'_s + n''_u - N \geq 1 \quad (3.26)$$

ist es daher nicht untypisch (bzw. ist es "generisch"), daß sich die zugehörigen stabile und instabile Mannigfaltigkeit ("echt") schneiden. Die von einem Fixpunkt ausgehenden stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten etwa können sich aus Dimensionsgründen nicht "echt schneiden". Die stabile Mannigfaltigkeit eines total attraktiven Fixpunktes ($n_s = N$) wird hingegen typischerweise die instabilen Mannigfaltigkeiten anderer Fixpunkte schneiden. Man erwartet also, einen solchen Fixpunkt als Endpunkt von Trajektorien zu finden, die auf instabilen Mannigfaltigkeiten anderer Fixpunkte verlaufen.

Auch für periodische Trajektorien lassen sich stabile und instabile Mannigfaltigkeiten definieren ($\rightarrow$ [Hak83a, Kap.1.12], besonders Figur 1.12.21). Anders als im Fall nichtsingulärer Fixpunkte gibt es für solche Bahnen stets noch eine neutrale Mannigfaltigkeit ("center manifold") parallel zur Bewegungsrichtung, in welcher sie weder attraktiv noch repulsiv sind. Senkrecht zur Bewegungsrichtung ist ein Grenzyklus – darunter verstehen wir stets eine attraktive periodische Trajektorie – aber für alle Punkte in seiner Umgebung attraktiv. In diesem Sinn gilt auch für Grenzyklen $n_s = N$, und daher erwarten wir, daß Grenzyklen asymptotisch Endpunkt von Trajektorien sind, die auf instabilen Mannigfaltigkeiten von Fixpunkten verlaufen.

Um Trajektorien in allen abstoßenden Richtungen auf der instabilen Mannigfaltigkeit eines Fixpunktes zu finden, bietet sich folgendes Vorgehen an: Man wähle (im Fall $N = 3$) sechs Startpunkte nahe des Fixpunktes, die durch Verschiebung aus dem Fixpunkt parallel

zur Richtung der Achsen des orthogonalen Koordinatensystems (Φ_1, Φ_2, Φ_3) auf dem Torus gewonnen werden, und paarweise auf verschiedenen Seiten des Fixpunktes liegen. Dies tue man für alle Fixpunkte – deren Lage ist nach, ggf. numerischer, Lösung der Fixpunktgleichungen bekannt. Wenn man aus diesem Ensemble die zu Punktattraktoren gehörigen Startwerte herausnimmt, so muß auf jedem der Punktattraktoren wenigstens jeweils eine der verbliebenen Trajektorien enden.

In diesem Sinn funktioniert das Verfahren auf den von uns untersuchten chaotischen Tori tatsächlich. Ferner wurden mit dem Verfahren Grenzzyklen und auch chaotische Attraktoren entdeckt. Verschiedentlich wurde zu Testzwecken versucht, den Punkt, an dem ein Attraktor bei Variation des Parameters η verschwindet, durch immer näheres "Heranpirschen" (wegen der Schrumpfung des Attraktionsgebietes bei gleichzeitiger Wanderung des Attraktors) so genau wie möglich festzulegen. Solange ein Attraktor auf diese Art verfolgt werden konnte, war er stets auch Ziel wenigstens einer Trajektorie des eben beschriebenen Ensembles. Es gelang also nie, einen Attraktor aufzuspüren, der nicht auch mit der hier beschriebenen Methode hätte aufgefunden werden können. Mit anderen Worten – das Verfahren funktioniert allem Anschein nach so gut, wie man es nur erhoffen konnte.

3.4 Ljapunovspektren von Attraktoren

"Ljapunovexponenten sind die mittleren exponentiellen Divergenz- oder Konvergenzraten benachbarter Bahnen im Phasenraum.[†] Da benachbarte Bahnen aber sehr ähnlichen Zuständen entsprechen, bedeutet exponentielle Divergenz der Bahnen, daß Systeme, welche wir vielleicht nicht einmal unterscheiden können, sich rasch sehr verschieden verhalten werden – die Vorhersagbarkeit geht verloren. Ein System, das wenigstens einen positiven Ljapunovexponenten enthält, ist per definitionem chaotisch[‡], wobei die Größe des Exponenten die Zeitskala widerspiegelt, auf der das System unvorhersagbar wird [Sha81]." [WS²V85]

Ljapunovexponenten wurden erstmals vor 100 Jahren von Poincaré und Ljapunov im Zusammenhang mit der Stabilität periodischer Trajektorien betrachtet [Whi37, §173] (dort sind die Originalarbeiten zitiert). Da periodische Trajektorien im Phasenraum dicht liegen, gelang Oseledec (vor nicht allzu langer Zeit) die Verallgemeinerung des Konzepts auf nicht-periodische Bahnen [Ose68]. Einen guten Überblick über die seitherige Entwicklung enthält das Buch von Lichtenberg und Lieberman [LL83, Kap.5.2b].

Die gängige Methode zur Berechnung *aller* Ljapunovexponenten eines gegebenen Differentialgleichungssystems wurde unabhängig voneinander von Bennetin et al. [BGS80] und von Shimada und Nagashima [SN79] entwickelt. In dieser Arbeit wird das auf dieser Basis von Wolf et al. [WS²V85] erarbeitete Computerprogramm benutzt. Neben der sehr gut lesbaren Arbeit von Wolf et al. [WS²V85] wird dieses Verfahren auch in den Lehrbüchern von Lichtenberg/Lieberman [LL83, Kap.5.3b] und Jackson [Jac89, Kap.7.10] erläutert, so daß wir

[†]Sofern das Differentialgleichungssystem eine Lipschitz-Bedingung erfüllt, können sich zwei Trajektorien nicht schneller als exponentiell voneinander entfernen (die Distanz kann z.B. nicht wie e^{Kt^2} wachsen), vgl. [Jac89, Kap.7.10].

[‡]natürlich nur dann, wenn man für ein *endliches Maß* von Anfangsbedingungen im Phasenraum einen positiven Ljapunovexponenten findet.

uns bei der Beschreibung der Berechnungsmethode kurz fassen können. Zuvor geben wir eine Zusammenstellung der hier relevanten Eigenschaften der Ljapunovexponenten.

Verfolgt man die Entwicklung einer infinitesimalen M -Sphäre im Phasenraum eines kontinuierlichen dynamischen Systems, welches durch ein System von M Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.27)$$

gegeben ist, so wird sich die Kugel aufgrund der lokal deformierenden Natur des Flusses zu einem M -Ellipsoid entwickeln. Der i -te Ljapunovexponent kann definiert werden als Langzeitlimites des Quotienten aus dem Logarithmus der Länge der i -ten Hauptachse dieses Ellipsoids (in Einheiten der Anfangslänge dieser Achse) und der Zeit t :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \ln \frac{p_i(t)}{p_i(0)} \right), \quad i = 1, \dots, M \quad (3.28)$$

wobei die Exponenten üblicherweise in fallender Reihenfolge angeordnet werden:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M \quad (3.29)$$

Auf diese Weise hängen die Ljapunovexponenten mit der expandierenden oder kontrahierenden Natur der verschiedenen Richtungen im Phasenraum zusammen. Es gibt allerdings im allgemeinen keine wohldefinierte Richtung, die zu einem gegebenen Exponenten gehörte, da die Orientierung der Ellipsoid-Hauptachsen während der Bewegung auf einem Attraktor ständig wechselt. [WS²V85]

Natürlich werden fast alle Vektoren x dazu tendieren, sich in die Richtung auszurichten, in der lokal die Expansion am stärksten ist. Die Definition (3.28) ist daher zur Berechnung der Ljapunovexponenten (außer des größten unter ihnen) ungeeignet. Zu diesem Zweck macht man vielmehr davon Gebrauch, daß Oseledec [Ose68] auch dieses Konzept verallgemeinert hat, um die exponentielle Änderung eines n -dimensionalen Volumens $V^{(n)}$ im Tangentialraum (des Phasenraums) zu beschreiben. Ein Ljapunovexponent der Ordnung n wird definiert als

$$\lambda^{(n)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \ln \frac{\|V^{(n)}(x_0, t)\|}{\|V^{(n)}(x_0, 0)\|} \right) \quad (3.30)$$

Für fast alle n -dimensionalen Volumina $V^{(n)}$ ist dieser Ljapunovexponent der Ordnung n gleich der Summe der n größten Ljapunovexponenten der Ordnung 1 [Ose68, BGS80]

$$\lambda^{(n)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (3.31)$$

und diese Beziehung liegt der numerischen Methode zur Berechnung der N Exponenten erster Ordnung zugrunde (s.u.).

Die mittlere exponentielle Änderungsrate des Phasenraumvolumens Λ_0 (gemittelt entlang einer Trajektorie) ergibt sich so als Summe aller Ljapunovexponenten erster Ordnung:

$$\Lambda_0 = \lambda^{(M)} = \sum_{i=1}^M \lambda_i \quad (3.32)$$

Unter dissipativen Systemen versteht man solche, für die stets $\Lambda_0 < 0$ gilt. In dissipativen Systemen findet die Bewegung im Langzeitlimes (nach der "transienten Phase") daher auf einem Gebilde mit verschwindendem Phasenraumvolumen statt, einem *Attraktor*. Im Fall Hamiltonscher Systeme ist natürlich $\Lambda_0 = 0$ (Liouvillesches Theorem, vgl. Kap.2.3), und daher muß die Summe aller Ljapunovexponenten stets verschwinden:

$$\Lambda_0 = \lambda^{(M=2N)} = \sum_{i=1}^{2N} \lambda_i = 0 \quad (3.33)$$

Tatsächlich gilt für Hamiltonsche Systeme wegen der Symmetrie der Hamiltonschen Gleichungen

$$\lambda_i = -\lambda_{2N-i+1}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.34)$$

d.h. die Ljapunovexponenten treten in Paaren mit gleichem Betrag und entgegengesetztem Vorzeichen auf.[†] Von Λ_0 zu unterscheiden ist die relative Änderung des spezifischen Phasenraumvolumens oder lokale Divergenzrate (vgl. Kap.2.3)

$$\Lambda_x \equiv \frac{\|\dot{V}^{(M)}\|}{\|V^{(M)}\|} = \nabla_x \cdot f(x) \quad (3.35)$$

die eine lokale (ortsabhängige) Größe ist und auch für dissipative Systeme stellenweise positive Werte annehmen kann. Falls Λ_x konstant ist, haben beide Größen natürlich den gleichen (für dissipative Systeme negativen) Wert [LL83, Kap.7.1]:

$$\Lambda_x = \Lambda = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \Lambda_0 = \Lambda \quad (3.36)$$

In autonomen Systemen verschwindet stets ein Ljapunovexponent (außer für Bahnen, die auf Punktattraktoren enden), da Trajektorien in der Richtung des Flusses nicht exponentiell auseinanderstreben können.[‡] In Hamiltonschen Systemen verschwinden daher immer *zwei* Ljapunovexponenten.

Exponentielle Expansion des Phasenraumvolumens auch nur in einigen Richtungen ist mit der Bewegung auf einem begrenzten Attraktor natürlich nur dann verträglich, wenn irgendein "Faltungsprozeß" weit auseinanderliegende Trajektorien immer wieder zusammenführt. Benachbarte Zustände werden also durch abwechselnde exponentielle Divergenz (in den mit den positiven Exponenten zusammenhängenden "Richtungen", s.o.) und anschließende Faltung voneinander getrennt ("dekorreliert"). Das Langzeitverhalten einer Trajektorie mit bekannter Anfangsbedingung ist dann nicht vorhersagbar – solches Verhalten bezeichnet man als chaotisch, und Attraktoren mit (wenigstens einem) positiven Ljapunovexponenten als *chaotische* oder *seltsame Attraktoren*.[§] Diese liegen im Phasenraum nicht auf Hyperflächen (mit

[†]Für die Ljapunovexponenten periodischer Bahnen findet sich der Beweis in [Whi37, §177].

[‡]Für periodische Bahnen findet sich der Beweis wiederum in [Whi37, §§173&174]. Der allgemeine Fall wird in [Hak83b] behandelt.

[§]Wir verwenden die Ausdrücke *chaotischer* und *seltsamer* Attraktor hier wie gesagt stets synonym, obwohl man streng genommen unter seltsamen Attraktoren Gebilde versteht, die gewisse Axiome erfüllen, auf die wir in dieser Arbeit nicht näher eingehen (vgl. die zitierten einschlägigen Quellen).

ganzzahliger Dimension), sondern besitzen eine "fraktale" Struktur mit nicht ganzzahliger Dimension – im Gegensatz zu *regulären* Attraktoren, deren Ljapunovspektrum keine positiven Exponenten enthält.

Es gibt auch Zusammenhänge zwischen der fraktalen Dimension seltsamer Attraktoren und ihrem Ljapunovspektrum. Eine solche zwar nicht exakte, aber in der Regel gut erfüllte Beziehung ist die zwischen den Ljapunovexponenten und der Informations-Dimension d_f , die von Kaplan und Yorke postuliert wurde (*Kaplan-Yorke conjecture* [KY79], vgl. besonders Jacksons Darstellung [Jac89, Kap7.12]):

$$d_f = j + \frac{1}{|\lambda_{j+1}|} \sum_{i=1}^j \lambda_i \quad (3.37)$$

wobei $\sum_{i=1}^j \lambda_i > 0$ und $\sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0$

Da die Ljapunovexponenten nur die exponentielle Änderung des Abstandes infinitesimal benachbarter Bahnen messen, enthalten sie keine Information über den Faltungsprozeß auf seltsamen Attraktoren, der die Dimension dieser Attraktoren natürlich mitbeeinflusst. Es ist daher nicht zu erwarten, daß eine Beziehung wie die durch die Kaplan-Yorkesche Vermutung gegebene exakt gültig ist (vgl. Jackson, aaO.).

Die *Größe der Ljapunovexponenten* ist ein *quantitatives* Maß dafür, mit welcher Rate der dem dynamischen System zugrundeliegende Prozeß Information erzeugt oder vernichtet [Sha81]. Wolf et al. [WS²V85] geben die Ljapunovexponenten daher in Bits an, d.h. sie wählen statt Logarithmen zur Basis e solche zur Basis 2 in den Definitionen (3.28) & (3.30). Wir halten uns in dieser Hinsicht an die gängigere Konvention (die Umrechnung ist trivial).

Die *Vorzeichen der Ljapunovexponenten* charakterisieren die Dynamik auf den Attraktoren hingegen *qualitativ*. In dreidimensionalen Systemen können Attraktoren beispielsweise nur die folgenden Spektren besitzen [WS²V85]:

- $(+, 0, -)$ – seltsame Attraktoren;
- $(0, 0, -)$ – attraktive 2-Tori[†];
- $(0, -, -)$ – Grenzzyklen;
- $(-, -, -)$ – Punktattraktoren.

Die Definition (3.28) ist zur praktischen Berechnung *aller* Ljapunovexponenten ungeeignet, da, wie schon gesagt, fast alle Vektoren die Tendenz haben, sich in die Richtung, die lokal am stärksten expandiert, zu drehen, und ferner, weil die Ellipsoid-Hauptachsen nicht infinitesimal bleiben. Beide Probleme werden durch die kombinierte Betrachtung der Bewegung im Phasenraum und im Tangentialraum vermieden. Man definiert eine Testtrajektorie im Phasenraum – das Zentrum des Ellipsoids – durch die Wirkung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen (3.27) auf einen Startpunkt. Trajektorien auf der Oberfläche der Kugel können

[†] Auf den 2-Tori ist die Bewegung periodisch oder quasiperiodisch, also nicht attraktiv. Daher gibt es, den beiden Richtungen entsprechend, zwei verschwindende Ljapunovexponenten.

dann durch die Wirkung der linearisierten Bewegungsgleichungen auf Punkte, die von der Testtrajektorie einen infinitesimalen Abstand haben, definiert werden.[†] Die Expansionsraten der Ellipsoid-Hauptachsen findet man so durch die zeitliche Entwicklung eines willkürlich gewählten Satzes von M orthonormalen (Tangential-)Vektoren infinitesimaler Länge. Da auch die Länge dieser Vektoren divergiert, und fast alle Vektoren dazu neigen, sich in die lokal am stärksten expandierende Richtung zu drehen, werden die M Tangentialvektoren in regelmäßigen Abständen mit der Gram-Schmidt-Prozedur re-orthonormalisiert (etwa einmal pro Umlauf auf dem Attraktor). Dabei wird ein Vektor v_1 normalisiert, einem zweiten v_2 wird die Komponente in Richtung v_1 genommen, bevor er normalisiert wird, usf. Der Vektor v_1 wird also mit der größten Rate λ_1 wachsen. Der Vektor v_2 ist wegen der wiederholten Richtungsänderungen nicht frei, sich in die am schnellsten oder die am zweitschnellsten expandierende Richtung auszurichten. Der von v_1 und v_2 aufgespannte zweidimensionale Unterraum wird aber durch die Gram-Schmidt-Prozedur nicht geändert und daher mit der Rate $\lambda^{(2)} = \lambda_1 + \lambda_2$ wachsen, woraus sich λ_2 ergibt, usf. für die übrigen Ljapunovexponenten. Die numerischen Berechnung basiert also auf den Beziehungen (3.30) und (3.31).

3.5 Fixpunkte und Attraktoren auf chaotischen Tori vom Rössler-Typ

Wir nehmen das von Rössler [Rös76] angegebene Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c)\end{aligned}\tag{3.38}$$

zum Ausgangspunkt einer ersten konkreten Anwendung des im Abschnitt 3.1 beschriebenen Verfahrens. Rössler legte seinen Berechnungen folgende Werte der Kontrollparameter zugrunde:

$$a = 0.2, \quad b = 0.2, \quad c = 5.7\tag{3.39}$$

3.5.1 Der Rössler-Torus

Wenn wir Rösslers System (3.38) mit dem System (3.3) identifizieren und es in die Bewegungsgleichungen (3.12) einsetzen, so erhalten wir in Bezug auf die skalierte Zeit die folgenden Bewegungsgleichungen auf dem Torus zu $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0$:

$$\begin{aligned}\Phi_1' &= \frac{\omega_{0,1}}{\eta} - \sin \Phi_2 - \sin \Phi_3 \\ \Phi_2' &= \frac{\omega_{0,2}}{\eta} + \sin \Phi_1 + a \sin \Phi_2 \\ \Phi_3' &= \frac{\omega_{0,3}}{\eta} + \frac{b}{\alpha} + \alpha \sin \Phi_3 \left\{ \sin \Phi_1 - \frac{c}{\alpha} \right\}\end{aligned}\tag{3.40}$$

[†]Dies sind m.a.W. Tangentialvektoren infinitesimaler Länge.

Wie im Kapitel 2.2 beschrieben wurde, kann man leicht elektromagnetische Felder (bzw. deren Potentiale) angeben, in denen die Bewegung nichtrelativistische Bewegung geladener Einzelteilchen mit dem passenden kanonischen Impuls auf einem Torus stattfindet und vorgegebenen Bewegungsgleichungen genügt. Im hier betrachteten Fall setzt man folgendes Vektorpotential in die Bewegungsgleichungen (2.10) ein:

$$-\frac{e}{m}A(\mathbf{r}) = \frac{\eta}{2\pi} \begin{pmatrix} -x_0 \sin\left(2\pi \frac{y}{y_0}\right) - x_0 \sin\left(2\pi \frac{z}{z_0}\right) \\ y_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{x_0}\right) + ay_0 \sin\left(2\pi \frac{y}{y_0}\right) \\ z_0 \frac{b}{\alpha} + \alpha z_0 \sin\left(2\pi \frac{z}{z_0}\right) \left\{ \sin\left(2\pi \frac{x}{x_0}\right) - \frac{c}{\alpha} \right\} \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Wenn man anschließend auf die Wirkungs-Winkel-Koordinaten (2.13) & (2.14) transformiert, erhält man gerade die Bewegungsgleichungen (3.40) auf einem Torus, der durch einen festen Impulswertwert $P = P_0$ charakterisiert wird. Das zugehörige elektrische Potential ist durch die Beziehung (2.9) definiert. Außerhalb des nichtregulären Torus' hängt die Frequenz

$$\omega_0(P) = \frac{2\pi}{m} \left(\frac{P_x}{x_0}, \frac{P_y}{y_0}, \frac{P_z}{z_0} \right) \quad (3.42)$$

linear vom kanonischen Impuls ab.

Im Folgenden gebrauchen wir stets Rösslers [Rös76] Kontrollparameterwerte (3.39). Ferner setzen wir $\alpha = 100$. Innerhalb gewisser Grenzen, die im folgenden Abschnitt erläutert werden, hängt die Bewegung vom Wert des Parameters α nämlich nur sehr schwach ab. Der numerische Wert der Frequenz ω_0 des ungestörten Systems ist ähnlich unwichtig (im Limes $\eta \rightarrow \infty$ bzw. im Störsystem sogar gänzlich bedeutungslos). Den hier präsentierten Berechnungen liegt $\omega_0 = (\sigma_g, \sigma_g^2, 1)$ zugrunde, wobei $\sigma_g = (\sqrt{5} - 1)/2$ das goldene Mittel ist. Der Torus bei $\eta = 0$ ist dann ein KAM-Torus. Für jede andere Frequenz findet man aber qualitativ das gleiche Verhalten.

Die Abbildung 3.1 zeigt den im Grenzfall $\eta = \infty$ (bzw. im Störsystem) erwarteten Attraktor.[†] Optisch ist dieser von Rösslers seltsamen Attraktor nicht zu unterscheiden. Die Berechnung der Ljapunovexponenten zeigt jedoch die aufgrund des endlichen Wertes von α zu erwartenden leichten Unterschiede. Für den "Rössler-ähnlichen" Attraktor der Abbildung 3.1 findet man

$$\lambda_1 = 0.06, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -5.39 \quad (3.43)$$

wohingegen der seltsame Attraktor des ursprünglichen Rössler-Systems (3.38) durch folgende Exponenten charakterisiert wird:

$$\lambda_1 = 0.07, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -5.39 \quad (3.44)$$

Wie der originale Rössler-Attraktor ist natürlich auch der hier betrachtete "Rössler-ähnliche" um den ursprungsnächsten instabilen Fixpunkt zentriert.

[†] Für diesen *Pseudo-3d-Plot* – wie auch für alle folgenden – gilt: Aufgetragen wird $x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{2}}$ auf der Abszisse und $x_3 + \frac{x_2}{\sqrt{2}}$ auf der Ordinate, wobei $x_{i=1,2,3}$ die Werte der drei Variablen sind. Die auf den Achsen abgetragenen Werte geben den Wertebereich in den drei Variablen an.

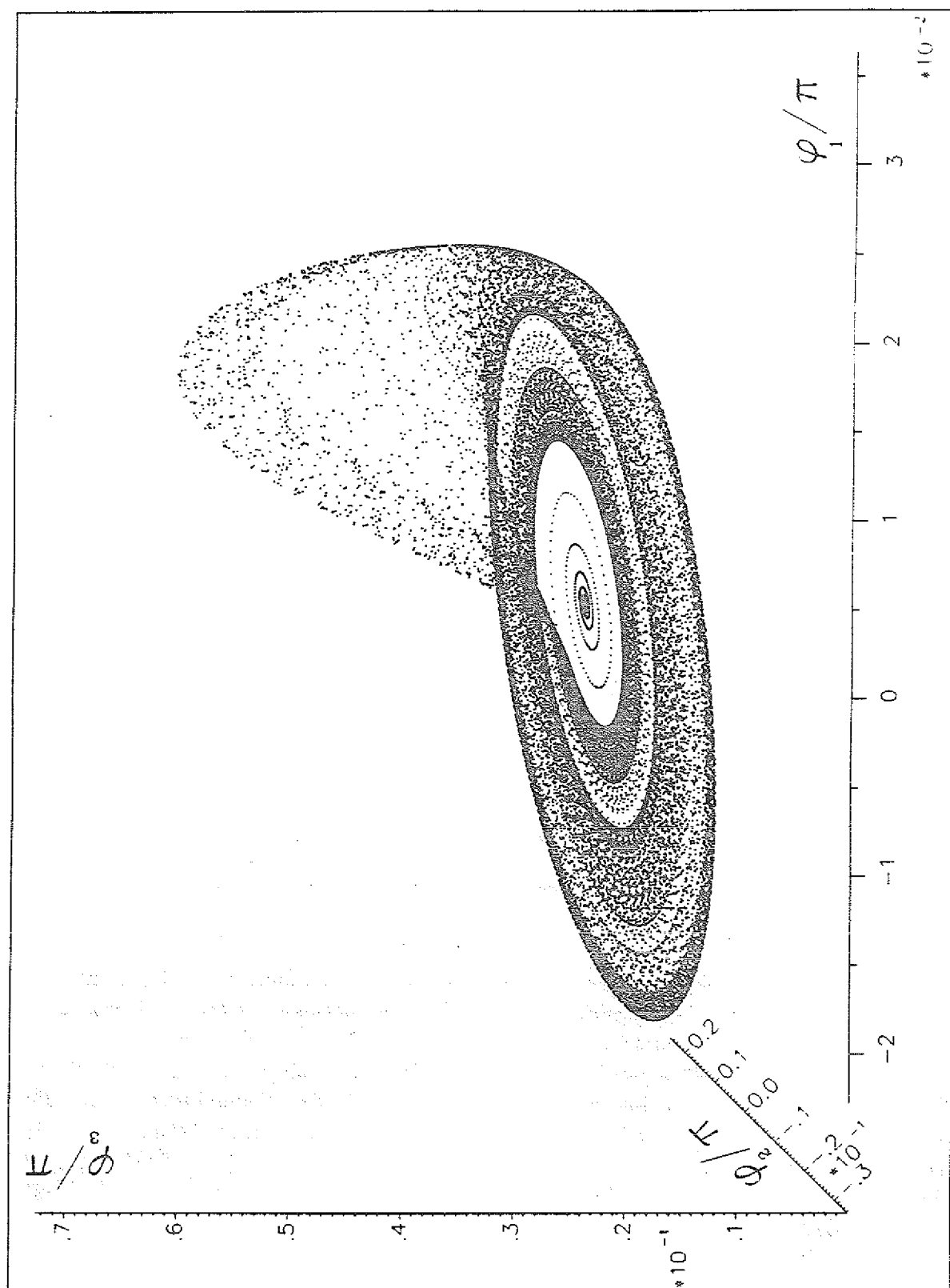


Abb.3.1: Pseudo-3d-Plot des ursprungsnahen "Rössler-ähnlichen" Attraktors im Grenzfall $\eta = \infty$ bzw. im Störsystem. Wie stets ist $\alpha = 100$. Der Attraktor ist um den instabilen Fixpunkt $[0, 0, 0]$ - zentriert.

Im Abschnitt 3.3 wurde erläutert, wie auf systematische Weise nach Attraktoren gesucht werden kann, indem man Trajektorien auf den instabilen Mannigfaltigkeiten der Fixpunkte verfolgt, welche nicht selbst (Punkt-) Attraktoren sind. Daher berechnen wir im Folgenden zunächst die Positionen und Eigenwerte aller Fixpunkte.

• Fixpunktbestimmung und lineare Stabilitätsanalyse

Die Position der Fixpunkte des Systems (3.40) kann analytisch angegeben werden. Man findet eine quadratische Gleichung für den Sinuswert einer beliebigen Komponente, etwa für $\sin \Phi_{*,1}$. Von den Lösungen dieser Gleichung

$$[\sin \Phi_{*,1}]_{\pm} = \frac{c}{2\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{\eta c} (\omega_{0,2} + a\omega_{0,1}) \right) \cdot \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{ab + \frac{\alpha}{\eta} \{a\omega_{0,3} - c(\omega_{0,2} + a\omega_{0,1})\}}{c^2 \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\eta c} (\omega_{0,2} + a\omega_{0,1}) \right\}^2}} \right\} \quad (3.45)$$

hängen die Sinuswerte der beiden anderen Komponenten des Fixpunktes jeweils linear ab:

$$\begin{aligned} \sin \Phi_{*,2} &= -\frac{1}{a} \left(\frac{\omega_{0,2}}{\eta} + \sin \Phi_{*,1} \right) \\ \sin \Phi_{*,3} &= \frac{1}{a} \left(\frac{\omega_{0,2}}{\eta} + a \frac{\omega_{0,1}}{\eta} + \sin \Phi_{*,1} \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Es gibt also zwei ursprungsnahe Fixpunkte, die den beiden Fixpunkten des Rössler-Systems (3.38) entsprechen. Aufgrund der Symmetrierelation (3.17) für die Sinusfunktion gibt es aber zu jedem Fixpunkt des Systems (3.38) im allgemeinen $2^3 = 8$ nicht-äquivalente Fixpunkte des Systems (3.40). Wir finden mithin zwei Sätze von je acht nicht-äquivalenten Fixpunkten. Jeder dieser Fixpunkte

- hat einen konjugierten Partner im gleichen Fixpunktsatz (vgl. Abschnitt 3.2),
- hat einen nächsten Nachbar, der zum anderen Fixpunktsatz gehört, und
- erzeugt ein Gitter äquivalenter Fixpunkte mit Gitterkonstanten 2π .

Im Limes $\eta \rightarrow \infty$ sind beide Lösungen der quadratischen Gleichung für $\sin \Phi_{*,1}$ positiv (für $\omega_0(I_0) = 0$ & $\eta = 1$ gilt das natürlich ebenfalls!). Es gibt aber immer einen (positiven) endlichen η -Wert, bei dem die betragsmäßig kleinere der beiden Lösungen ihr Vorzeichen wechselt, und für η -Werte unterhalb dieses Wertes haben die beiden Lösungen stets unterschiedliches Vorzeichen.[†] Wir benutzen dies zur Kennzeichnung der beiden Fixpunktsätze. Den Fixpunktsatz, bei dem $\sin \Phi_{*,1}$ für kleine η negativ wird, bezeichnen wir als "Minus-Satz", den anderen als "Plus-Satz" (diese Bezeichnung bezieht sich also *nicht* auf das $\pm$ -Zeichen in Gleichung (3.45)). Der Attraktor in Abbildung 3.1 ist z.B. um den ursprungsnächsten Fixpunkt des Minus-Satzes zentriert. Im Sinn der im Abschnitt 3.2 eingeführten Notation bezeichnen wir diesen Fixpunkt als $[0, 0, 0]_-$ (und entsprechend die übrigen Fixpunkte).

[†]Falls der Koeffizient in den runden Klammern verschwindet, gilt natürlich trotzdem $[\sin \Phi_{*,1}]_{\pm} \neq 0$ (Durchmultiplizieren!).

$n_1 \ n_2 \ n_3^\dagger$	E_+	E_-
0 0 0	0.18500 $-0.42307 \cdot 10^{-5} \pm 5.3103 i$	-5.6870 $0.97001 \cdot 10^{-1} \pm 0.99519 i$
1 0 0	5.3105 -5.3105 0.18498	1.1073 -5.6993 -0.90096
0 1 0	-0.19845 $-0.48675 \cdot 10^{-5} \pm 5.1271 i$	0.90206 -5.6866 -1.1084
1 1 0	5.1269 -5.1269 -0.19847	-5.6989 $-0.97013 \cdot 10^{-1} \pm 0.99414 i$
0 0 1	5.1269 -5.1269 0.19847	5.6989 $0.97013 \cdot 10^{-1} \pm 0.99414 i$
1 0 1	0.19845 $0.48675 \cdot 10^{-5} \pm 5.1271 i$	5.6866 -0.90206 1.1084
0 1 1	5.3105 -5.3105 -0.18498	5.6993 -1.1073 0.90096
1 1 1	-0.18500 $0.42307 \cdot 10^{-5} \pm 5.3103 i$	5.6870 $-0.97001 \cdot 10^{-1} \pm 0.99519 i$

[†] Binäre Fixpunktkennung, vgl. Abschnitt 3.2

Tabelle 3.1: Fixpunkteigenwerte auf dem Rössler-Torus im Grenzfall $\eta = \infty$ bzw. im Störsystem, d.h. für $\omega_0(I_0) = 0$ & $\eta = 1$. Wie stets ist $\alpha = 100$. Vgl. Abschnitt 3.5.2.

Uns interessieren natürlich im wesentlichen reellwertige Fixpunkte. Diese Forderung impliziert zwei notwendige Bedingungen, die zusammengekommen auch hinreichend sind:

$$\operatorname{Im}(\sin \Phi_{*,1}) = 0 \quad (3.47)$$

$$\text{und} \quad |\sin(\Phi_{*,k})| \leq 1, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.48)$$

Für einen gegebenen Wert von η schränken diese beiden Bedingungen natürlich die Werte von α ein, für die Fixpunkte existieren können. Die erste der beiden Bedingungen ist bei Benutzung der Parameterwerte (3.39) weniger restriktiv als die zweite. Für $\eta = \infty$ (bzw. $\omega_0(I_0) = 0$ & $\eta = 1$) lautet sie

$$\kappa = 4 \frac{ab}{c^2} \leq 1 \quad (3.49)$$

Sie ist in diesem Fall also einerseits unabhängig von α sowie andererseits für Rösslers Parameterwerte (3.39) – und zwar nicht nur knapp – erfüllt. Die zweite Bedingung reduziert sich im Grenzfall $\eta = \infty$ – bzw. im Störsystem – auf

$$\alpha_{\pm} \geq \frac{c}{2a} |1 \pm \sqrt{1 - \kappa}| \quad (3.50)$$

Bei Wahl der Standardparameterwerte (3.39) ergibt dies $\alpha_+ \gtrsim 28.47$ und $\alpha_- \gtrsim 0.035$. Falls α nicht so klein gewählt wird, daß im Grenzfall $\eta = \infty$ – bzw. im Störsystem – keine Fixpunkte mehr existieren, ist der genaue Wert nicht so wichtig – die Fixpunkteigenwerte etwa hängen von α ähnlich schwach ab wie die Ljapunovexponenten. Wir verwenden daher stets den Wert $\alpha = 100$.

Die lineare Stabilitätsanalyse zur Bestimmung der Fixpunkteigenwerte (vgl. Abschnitt 3.2) führt im Fall von 3-Tori auf das Eigenwertproblem einer 3×3 -Matrix, d.h. auf das Nullstellenproblem des zugehörigen kubischen charakteristischen Polynoms. Das charakteristische Polynom der linearisierten Version der Bewegungsgleichungen (3.40) ist im Anhang A.4 angegeben. Dort finden sich auch die Lösungsformeln für kubische Gleichungen.

• Übersicht

Im folgenden Unterabschnitt wird die Bewegung im Grenzfall $\eta = \infty$ untersucht, d.h. die Bewegung im Störsystem. Außer dem vorgegebenen, ursprungsnahen seltsamen Attraktor finden wir – neben den Fixpunkten, unter ihnen zwei Punktattraktoren – einen Grenzzzyklus, der in gewissem Sinn von Rösslers Konstruktionsprinzip herrührt (s.u.), und den wir daher als "generischen" Grenzzzyklus bezeichnen.

In der Bewegung geladener Einzelteilchen ist der Grenzfall $\eta = \infty$ natürlich ebenfalls zu realisieren, nämlich durch Teilchen mit einem Newtonschen Impuls p_0 , der den kanonischen Impuls P_0 der Teilchen auf dem Torus zum Verschwinden bringt, da dann $\omega_0(P_0) = 0$.[†] Es muß also gelten – vgl. (2.6) –

$$p_0 = -eA(r) \quad (3.51)$$

d.h. man muß die Anfangsbedingungen entsprechend dieser Beziehung wählen.

Auch in der Bewegung von Teilchen mit $P \neq 0$ treten chaotische Attraktoren auf, da man solche im System (3.40) schon bei endlichen Werten von η beobachtet, wie im Abschnitt 3.5.3 gezeigt wird. Zum einen findet man in der Nähe des Ursprungs bei kleinen und mittleren η -Werten einen Grenzzzyklus, der via Periodenverdopplung in den oben beschriebenen seltsamen Attraktor vom Rössler-Typ übergeht. Die Bewegung auf dem Attraktor wird dabei schon für $\eta \approx 175$ chaotisch. Zum anderen wird auch der "generische" Grenzzzyklus zu einem chaotischen Attraktor (ebenfalls über eine Periodenverdopplungskaskade, aber in fallender η -Richtung), wenn auch nur in dem kleinen η -Intervall $1.54 \lesssim \eta \lesssim 1.55$.

Im Limes $\eta \rightarrow 0$ existieren natürlich weder Fixpunkte ($\rightarrow$ Abschnitt 3.5.3) noch Attraktoren. Es gibt aber natürlich auch dort noch Attraktoren, wo keine Fixpunkte mehr existieren.

[†]Vgl. Abschnitt 3.1, besonders Gleichung (3.15), sowie die Impulsabhängigkeit der Frequenz ω_0 (3.42) auf isolierten chaotischen Tori.

Im vorliegenden Fall scheinen die meisten Trajektorien dann einem Grenzyklus mit nichtverschwindenden Windungszahlen zuzustreben.[†] Wir interessieren uns hier aber hauptsächlich für den Fluß im "nichtregulären Bereich" (wo Fixpunkte existieren), da für kleine Störungen bzw. Kopplungen bereits Untersuchungen der Bewegung auf nichtregulären 3-Tori vorliegen (vgl. Kap.5.2).

3.5.2 Der Fluß im "Störsystem"

Für $\eta = \infty$ - bzw. im Störsystem - findet man die beiden ursprungsnächsten Fixpunkte an folgenden Positionen:

$$\begin{aligned}\Phi_*^{[0,0,0]-} &= (0.223651 \cdot 10^{-4} \pi, -0.111826 \cdot 10^{-3} \pi, 0.111826 \cdot 10^{-3} \pi) \\ \Phi_*^{[0,0,0]+} &= (0.181311 \cdot 10^{-1} \pi, -0.918769 \cdot 10^{-1} \pi, 0.918769 \cdot 10^{-1} \pi)\end{aligned}\tag{3.52}$$

Die Positionen der übrigen Fixpunkte ergeben sich daraus in der wohlbekannten Weise (vgl. Abschnitt 3.2). Die Fixpunkteigenwerte sind tabellarisch aufgelistet (Tabelle 3.1).[‡] E_+ bezeichnet die Eigenwerte der Fixpunkte des Plus-Satzes (und entsprechend E_-). In jedem Satz findet sich ein attraktiver Fixpunkt: $[1, 1, 0]_-$ im Minus-Satz und $[0, 1, 0]_+$ im Plus-Satz. Ein weiterer Fixpunkt im Plus-Satz ist beinahe ein Attraktor, nämlich $[1, 1, 1]_+$.

Außer diesen beiden Punktattraktoren und dem um den ursprungsnächsten Fixpunkt zentrierten seltsamen Attraktor ($\rightarrow$ Abb.3.1) findet man noch einen weiteren Attraktor, und zwar einen Grenzyklus. Die Abbildung 3.2 zeigt sowohl einen Pseudo-3d-Plot der Grenzkurve wie auch deren Projektion in die (Φ_1, Φ_2) -Ebene, welche um $(\Phi_1, \Phi_2) = (\pi, \pi)$ zentriert ist. Der Umlauf auf der projizierten Kurve erfolgt im Uhrzeigersinn. Die Komponente Φ_3 wächst monoton, und zwar in zeitlich kurzen Sprüngen jeweils um π , siehe Abbildung 3.3. Dieses Verhalten läßt sich leicht nachvollziehen, wenn man die Bewegungsgleichungen (3.40) betrachtet und um $\sin \Phi_{i=1,2} = \pi$ entwickelt.[§] Übrigens enden die meisten Trajektorien des im Abschnitt 3.3 beschriebenen Test-Ensembles auf diesem Grenzyklus (bzw. seinen äquivalenten Versionen).

Die Attraktoren der zeitumgekehrten Bewegung sollten mit den gerade beschriebenen über die Transformation (3.24) zusammenhängen (nämlich Spiegelung am Ursprung und Verschiebung um $\pi = (\pi, \pi, \pi)$). In der Tat findet man bei Zeitumkehr, daß

[†]Unser systematisches Verfahren zur Suche nach Attraktoren setzt die Existenz von Fixpunkten voraus.

[‡]Der Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und den Flußkonfigurationen in der Nähe von Fixpunkten in Systemen mit drei Freiheitsgraden wird in [Ver90, Kap.3.2] sowie in [Jac89, Kap.7.1] diskutiert.

[§]In gewissem Sinn handelt es sich um ein typisches "Rössler-Verhalten", denn Rössler beschreibt das Konstruktionsprinzip seines dynamischen Systems (3.38) wie folgt: "combining a two-variable oscillator (in this case x and y) with a switching-type subsystem (z) in such a way that the latter is being switched by the first while the flow of the first is dependent on the switching state of the latter." [Rös76] Wir bezeichnen den hier beschriebenen Grenzyklus daher als "generischen" Grenzyklus (zur Unterscheidung von anderen, für endliche η -Werte auftretenden Grenzyklen).

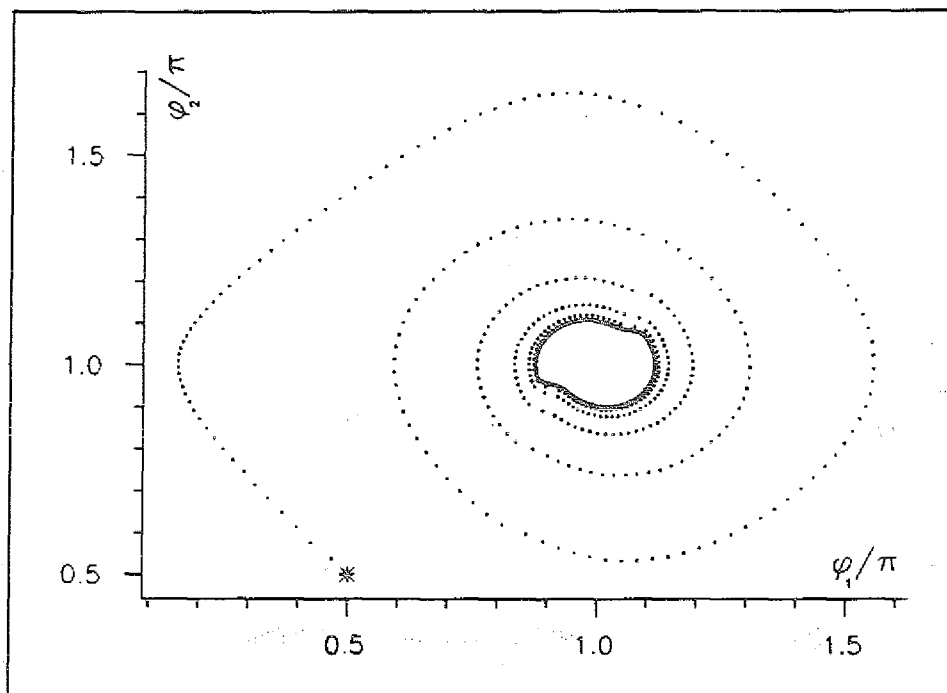
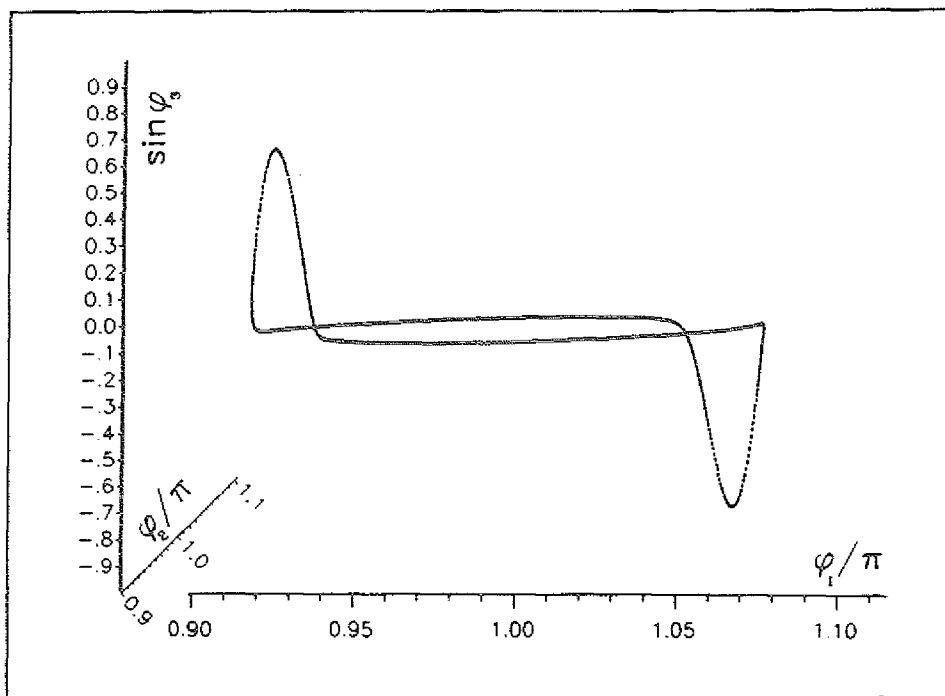


Abb.3.2: Der "generische" Grenzzyklus auf dem Rössler-Torus im Grenzfall $\eta = \infty$ bzw. im Störsystem. Pseudo-3d-Plot (oberes Bild) und Projektion in die (Φ_1, Φ_2) -Ebene (unteres Bild); im letzteren Fall wird auch die Annäherung an den Grenzzyklus gezeigt. $\Phi = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0)$ ist der (im unteren Bild durch * markierte) Startpunkt der hier abgebildeten Trajektorie.

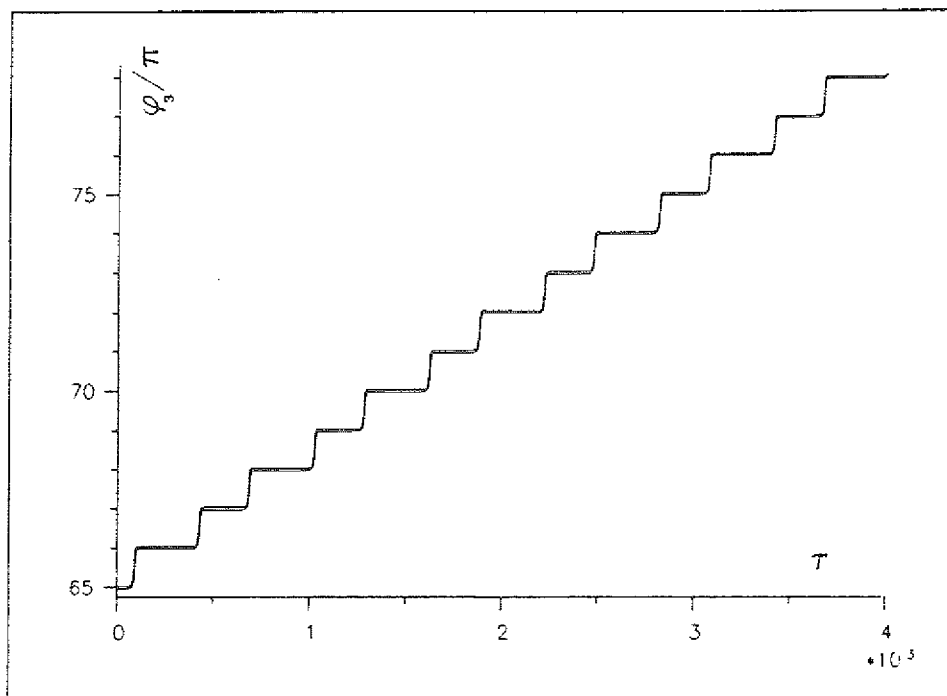


Abb.3.3: $\Phi_3(t)$ auf dem "generischen" Rössler-Grenzzyklus im Grenzfall $\eta = \infty$ bzw. im Störsystem. (Die Einheiten auf der τ -Achse – bzw. t -Achse – sind willkürliche.)

- die konjugierten Partner der bisherigen Punktattraktoren, also $[0, 0, 1]_-$ und $[1, 0, 1]_+$, attraktiv sind (die Fixpunkteigenwerte kehren ihre Werte um);
- ein seltsamer "Rössler-ähnlicher" Attraktor – ebenfalls charakterisiert durch die Ljapunovexponenten (3.43) – um $[1, 1, 1]_-$ zentriert ist, jedoch natürlich mit einer der Punktspiegelung entsprechenden "spiegelbildlichen" Orientierung;
- die Projektion eines Grenzzyklus' vom oben beschriebenen Typ um $\Phi_{i=1,2} = 0$ zentriert ist, wobei der Umlauf im Gegenuhrzeigersinn stattfindet und $\Phi_3(t)$ monoton fallend – in Stufen der Größe π – verläuft.

3.5.3 Der Fluß als Funktion des Störparameters η

Alle im Grenzfall $\eta = \infty$ – bzw. im Störsystem – aufgefundenen Attraktoren existieren auch für endliche Werte von η , aber natürlich nicht im Limes $\eta \rightarrow 0$.

Der um $[0, 0, 0]_-$ zentrierte "Rössler-ähnliche" Attraktor bleibt auch für endliche η -Werte ein seltsamer Attraktor. Bei kleinen und mittleren η -Werten ($1 \lesssim \eta \lesssim 100$) findet man an seiner Stelle allerdings einen Grenzzyklus. Zur Unterscheidung vom oben beschriebenen ("generischen") Grenzzyklus bezeichnen wir diesen als den ursprungsnahen Grenzzyklus. Die Abbildung 3.4 zeigt für $\eta = 25$ bzw. $\eta = 160$ jeweils eine Trajektorie, die nahe $[0, 0, 0]_-$ startet und auf diesem Grenzzyklus endet. Unterhalb von $\eta = 25$ ändert dieser Grenzzyklus im wesentlichen nur seine Ausdehnung, die bei $\eta = 1$ etwa das Zehnfache derjenigen bei $\eta = 25$

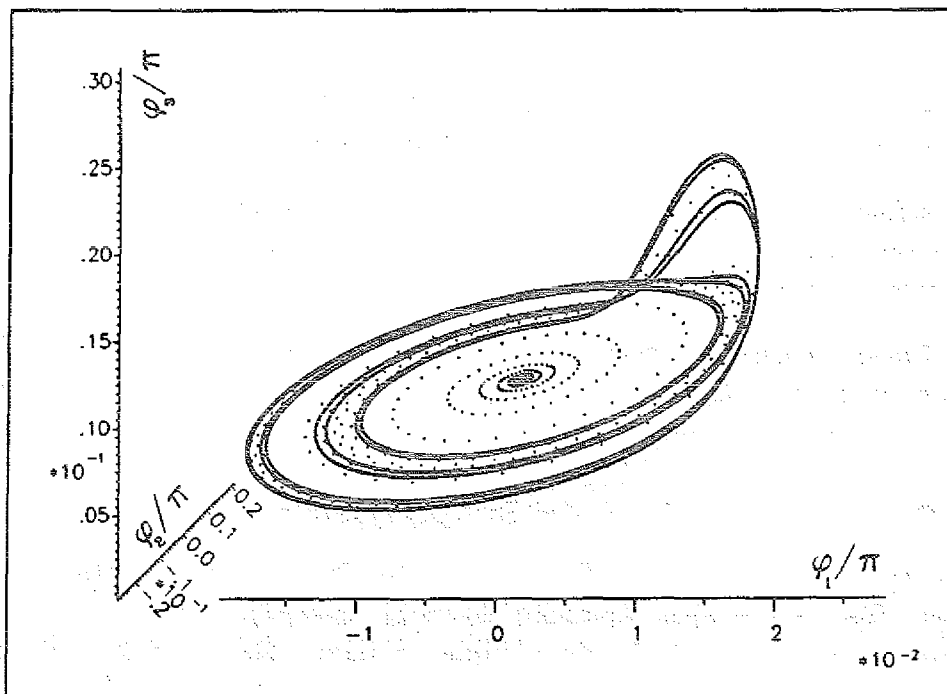
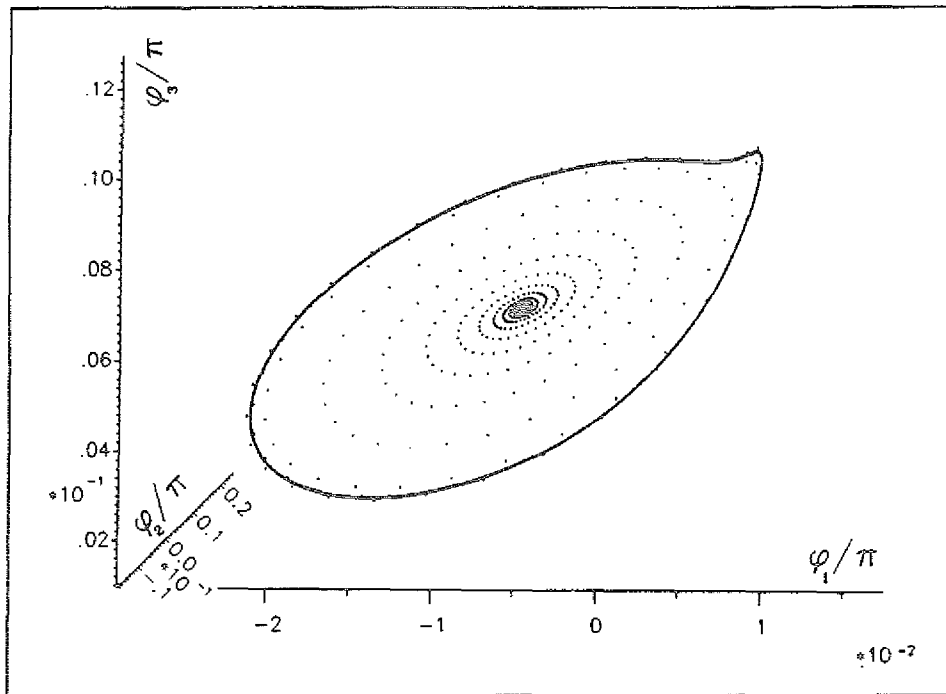


Abb.3.4: Pseudo-3d-Plots des "ursprungsnahen" Grenzyklus' auf dem Rössler-Torus. Gezeigt werden jeweils Trajektorien, die nahe $[0, 0, 0]_-$ starten. Einfacher Grenzyklus bei $\eta = 25$ (oben) und 4-Zyklus bei $\eta = 160$ (unten).

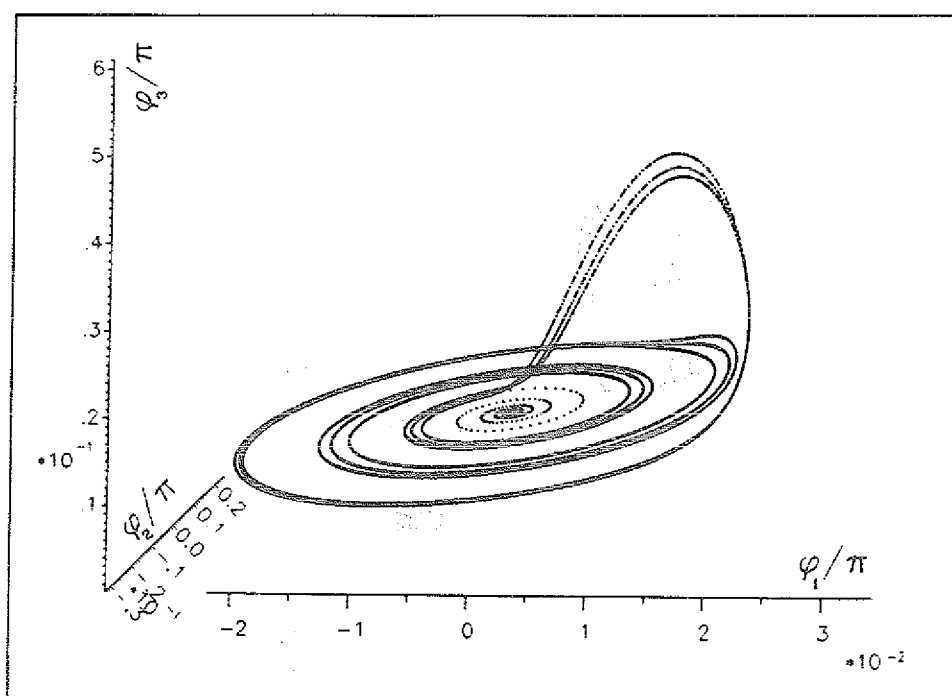
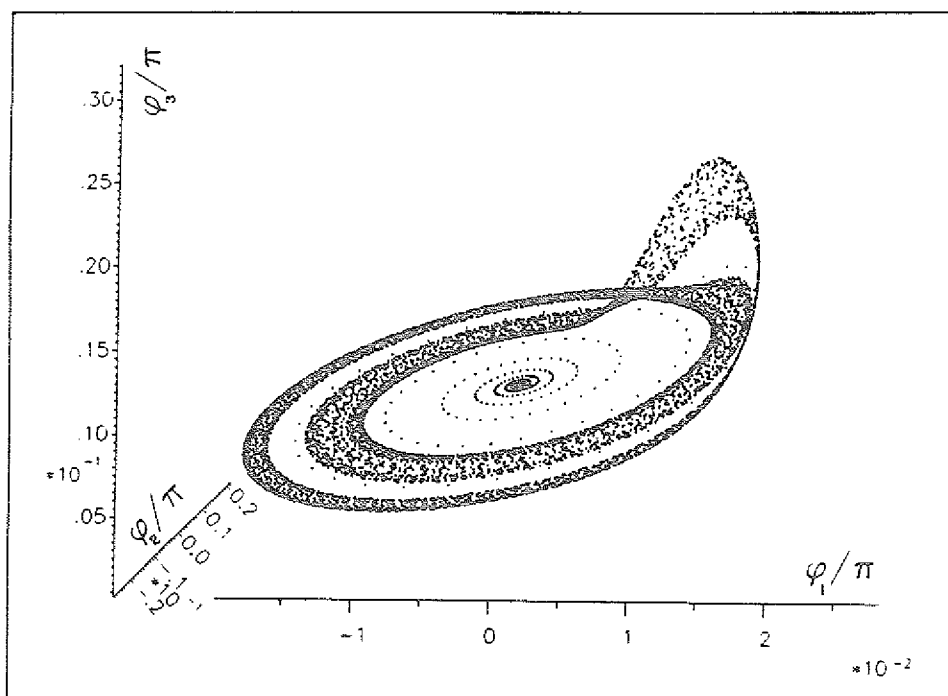


Abb.3.5: Chaotische und periodische Bewegung auf dem "ursprungsnahen Attraktor" des Rössler-Torus jenseits der ersten Periodenverdopplungs-Sequenz. Die Trajektorien starten jeweils nahe $[0,0,0]$ -. Chaotischer Attraktor bei $\eta = 175$ (oben) und 3-Zyklus in einem periodischen Fenster innerhalb des chaotischen Bereichs bei $\eta = 1250$ (unten).

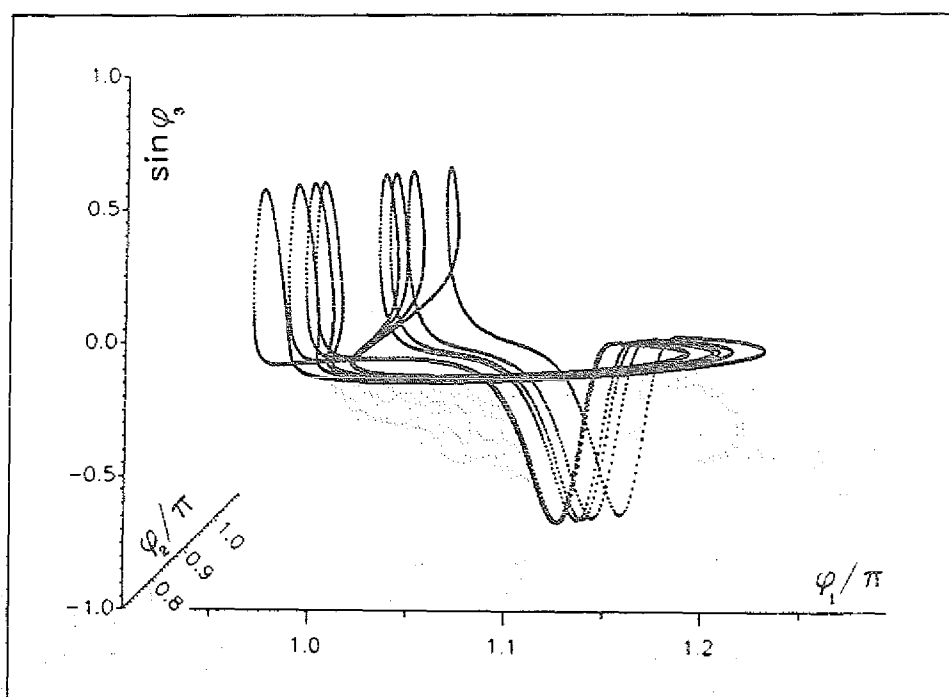
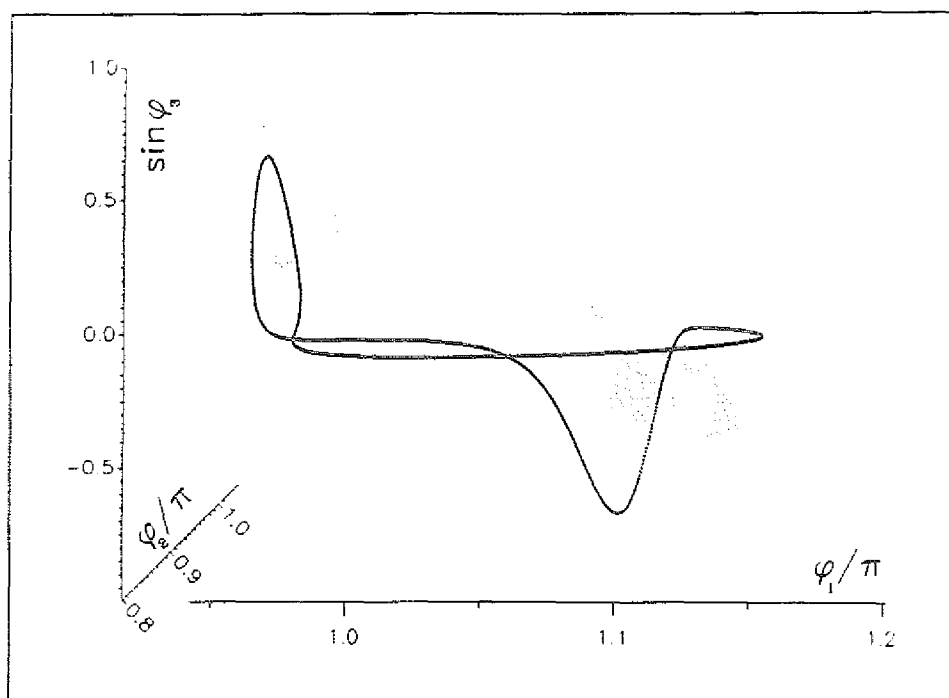


Abb.3.6: Pseudo-3d-Plots des "generischen" Grenzyklus' auf dem Rössler-Torus. 1-Zyklus bei $\eta = 2$ (oben) und 8-Zyklus bei $\eta = 1.5435$ (unten).

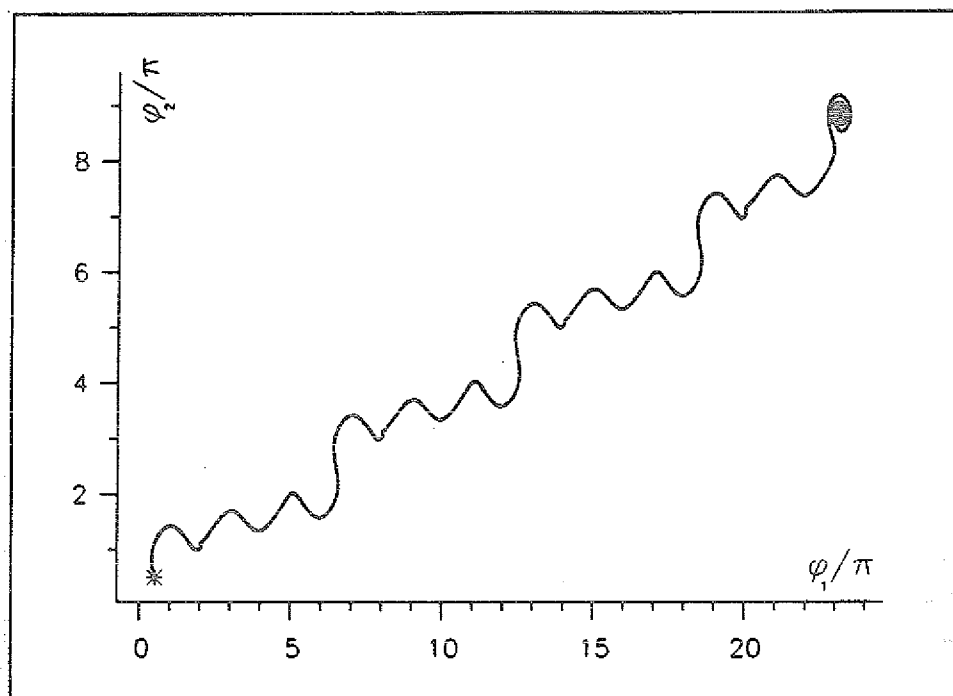
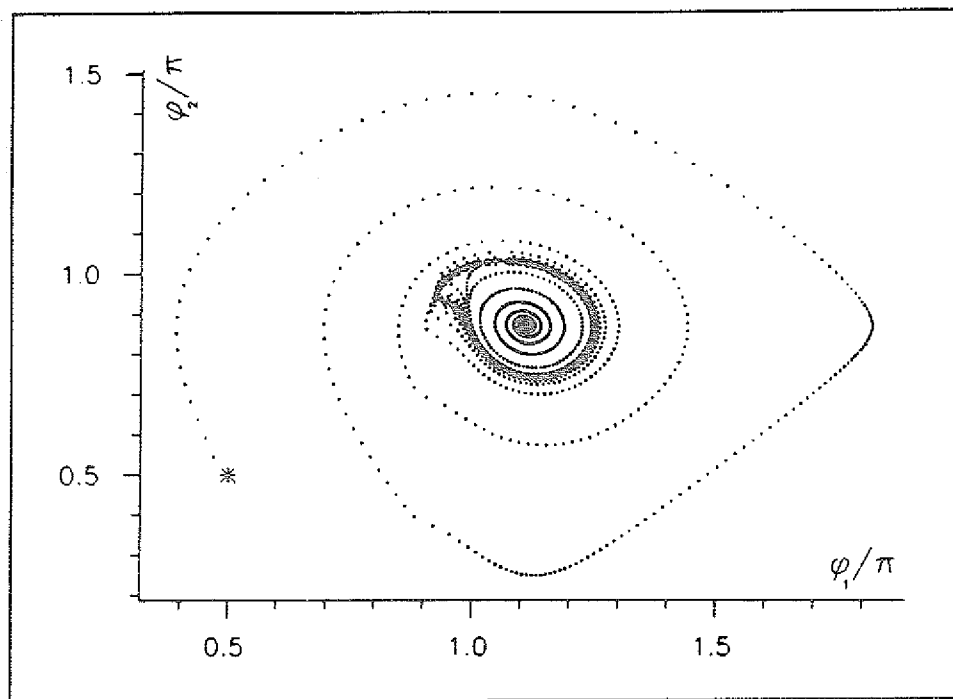


Abb.3.7: Der Punktattraktor $[1, 1, 0]$ - und der (verschwundene) "generische" Attraktor im Bereich $\eta \lesssim 1.5$. Der jeweils durch * markierte Startpunkt der Trajektorien ist der gleiche wie in Abb.3.6, nämlich $\vec{\varphi} = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0)$ (vgl. auch Abb.3.2). Oberes Bild: $\eta = 1.5$. Unteres Bild: $\eta = 1.25$.

beträgt, bevor er bei $\eta \approx 0.755$ verschwindet (s.u.). Eine Suche in Richtung zunehmender η -Werte zeigt, daß der zentrale Fixpunkt bei $\eta = 100$ bereits zweimal umlaufen wird, und bei $\eta = 160$ viermal, siehe Abbildung 3.4. Das sieht wie der Beginn einer Periodenverdopplungs-Sequenz aus. Tatsächlich findet man bei $\eta = 165$ einen 8-Zyklus. Die weiteren Periodenverdopplungen sind ohne Rückgriff auf Fourierspektren nur schwer auszumachen. Die Bewegung auf dem Attraktor wird bei nur geringer Erhöhung von η nicht-periodisch. Das obere Bild der Abbildung 3.5 zeigt den Attraktor bei $\eta = 175$. Abgesehen von der geringeren Ausdehnung hat dieser Attraktor bereits große Ähnlichkeit mit dem "Rössler-ähnlichen" Attraktor im Grenzfall $\eta = \infty$ bzw. im Störsystem (siehe Abbildung 3.1). Die Berechnung der Ljapunovexponenten liefert

$$\lambda_1 = 0.02, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -5.64 \quad (3.53)$$

Der Vergleich mit den Ljapunovexponenten (3.43) des "Rössler-ähnlichen" Attraktors zeigt, daß die Bewegung auf dem Attraktor zwar chaotisch ist, die chaotische Komponente bei $\eta = 175$ aber noch nicht so stark ausgeprägt ist wie im Grenzfall $\eta = \infty$ (bzw. im Störsystem). Im Lichte des Feigenbaum-Szenarios ist es dann keine wirkliche Überraschung mehr, im chaotischen Bereich jenseits des Endes der hier beschriebenen Periodenverdopplungskaskade periodische "Fenster" zu finden, siehe z.B. den im unteren Bild der Abbildung 3.5 gezeigten 3-Zyklus bei $\eta = 1250$.

Diese Transformation des "ursprungsnahen" Attraktors mit anwachsendem η auf dem hier betrachteten Rössler-Torus paßt gut mit den Ergebnissen von Crutchfield et al. [CFP80] zusammen. Diese Autoren gelangten durch Variieren des Kontrollparameters c in Rösslers System (3.38) von einem einfachen Grenzzyklus über eine Periodenverdopplungs-Sequenz zu Rösslers chaotischem Attraktor.

Im Limes $\eta \rightarrow 0$ darf es natürlich keine Fixpunkte geben. Tatsächlich verschwindet in diesem Grenzfall in der Lösung (3.45) für $\sin \Phi_{*,1}$ der η -abhängige Term unter der Wurzel. Das bedeutet zum einen, daß die Sinuswerte der Lösungen für die Fixpunkt Komponenten im Limes $\eta \rightarrow 0$ stets reell sind (d.h. die Bedingung (3.47) ist erfüllt). Zum anderen folgt, daß eine der beiden Lösungen für $\sin \Phi_{*,1}$ mit η gegen null strebt, während der Betrag der anderen unbegrenzt wächst. In beiden Fällen streben die Fixpunkte im Komplexen gegen den Punkt ∞ , da im Fall $\eta \rightarrow 0$ und $\sin \Phi_{*,1} \rightarrow 0$ die Beträge der Sinuswerte der beiden übrigen Komponenten gegen ∞ streben, vgl. (3.46).

Reellwertige Fixpunkte existieren für $\eta \gtrsim 0.608$. Dort verschwindet der Minus-Satz ins Komplexe, da $|\sin \Phi_{*,2}|$ über eins hinauswächst. Der Plus-Satz wird bereits nahe $\eta = 3.465$ komplexwertig, weil der Sinuswert der dritten Komponente den Wert eins überschreitet. Für diesen Fixpunktsatz strebt übrigens $\sin \Phi_{*,1}$ mit $\eta \rightarrow 0$ gegen null.

Auch für endliche η -Werte findet man die gleichen Punktattraktoren wie im Fall $\eta = \infty$ (bzw. im Störsystem), nämlich $[1, 1, 0]_-$ und $[0, 1, 0]_+$. Der Fixpunkt $[1, 1, 1]_+$ bleibt ebenfalls ein "Beinahe-Attraktor" (vgl. Tabelle 3.1). Unterhalb von $\eta = 3.4705$ (genauer: im Intervall $3.4705 \geq \eta \geq 3.4704$) wird er schließlich tatsächlich zum Attraktor, während gleichzeitig die Realteile der beiden komplexen Eigenwerte des bisherigen Attraktors im Plus-Satz, $[0, 1, 0]_+$, ihr Vorzeichen wechseln, so daß diese beiden Fixpunkte in dieser Hinsicht die Rollen tauschen – allerdings nur für das relativ kleine η -Intervall $3.4704 \gtrsim \eta \gtrsim 3.465$, da der Plus-Satz dann ins Komplexe verschwindet (s.o.). Der Fixpunkt $[1, 1, 0]_-$ behält hingegen seine Rolle

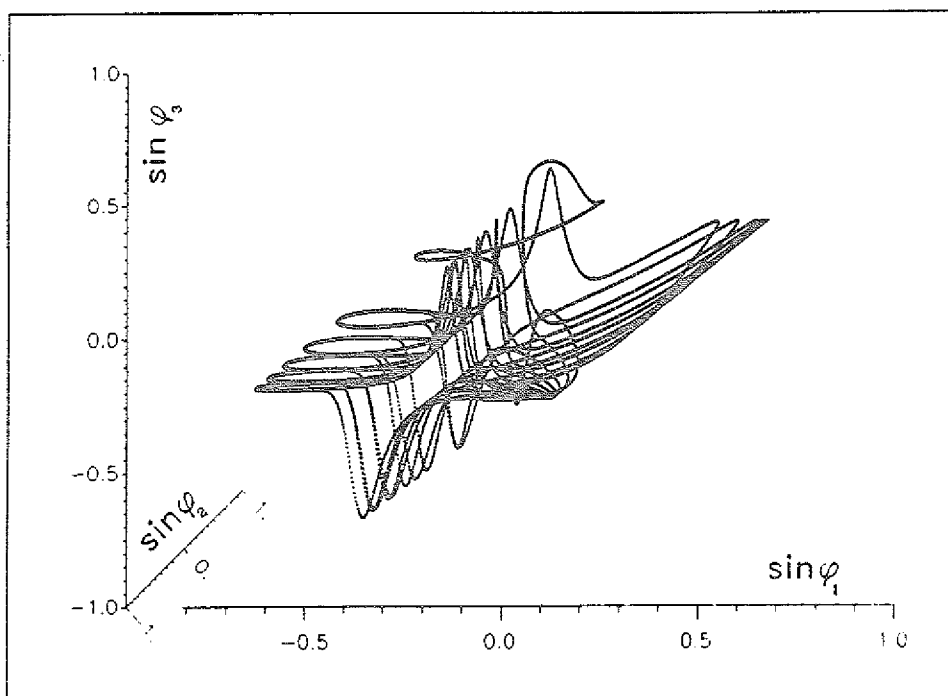


Abb.3.8: Ein Grenzyklus mit drei nichtverschwindenden Windungszahlen ($\eta = 0.5$).

als einziger Attraktor im Minus-Satz im ganzen η -Bereich, in welchem der Minus-Satz reellwertig ist, d.h. für $\eta \geq 0.608$. Betrachtet man die Projektion des "generischen" Grenzyklus auf die (Φ_1, Φ_2) -Ebene, so befindet sich dieser Fixpunkt nahe des Zentrums der Projektion der Grenzkurve.

Diese Grenzkurve ändert ihre Form oberhalb von $\eta \approx 10$ so gut wie gar nicht, und für kleinere η -Werte nur wenig. Das obere Bild der Abbildung 3.6 zeigt sie bei $\eta = 2$. Auch die Periode ist (bezogen auf die skalierte Zeit) beinahe konstant. Unterhalb von $\eta = 1.6$ beginnt eine Periodenverdopplungs-Sequenz. Bei $\eta = 1.55$ findet man bereits den 4-Zyklus, und bei $\eta = 1.5435$ den im unteren Bild der Abbildung 3.6 wiedergegebenen 8-Zyklus. Der Übergang zu einem chaotischen Attraktor vollzieht sich rasch, d.h. in einem kleinen η -Intervall. Bei $\eta = 1.536$ ist der Attraktor durch folgende Ljapunovexponenten charakterisiert:

$$\lambda_1 = 0.07, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -27.0 \quad (3.54)$$

Ein Pseudo-3d-Plot dieses Attraktors wurde als "Titelbild" zwischen Inhaltsverzeichnis und erstem Kapitel als Abbildung 0.1 aufgenommen. Beim Übergang zu einem chaotischen Attraktor schrumpft das Attraktionsgebiet rapide, und schon bei $\eta = 1.53$ findet man den Attraktor nicht mehr – die Trajektorien enden jetzt zumeist auf dem Punktattraktor $[1, 1, 0]$. Gleichwohl wird der Transport im Gebiet des ehemaligen Attraktors weiterhin beeinflusst bzw. behindert, wie die Abbildung 3.7 deutlich macht.

Der Startwert aller in den Abbildungen 3.6 und 3.7 gezeigten Trajektorien ist übrigens stets der gleiche, nämlich $\Phi = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0)$. Mit fallendem η nimmt auch die Attraktivität des verbliebenen Punktattraktors ab. Die genannte Trajektorie umläuft den Torus zunächst

mehr oder weniger oft, ehe sie in einer äquivalenten Version des Punktattraktors endet (siehe den unteren Teil der Abbildung 3.7), aber für $\eta \lesssim 0.8$ – also schon vor dem Verschwinden des Punktattraktors – strebt sie zumeist einem Grenzzyklus zu, dessen Windungszahlen alle ungleich null sind. Die Abbildung 3.8 zeigt diesen Grenzzyklus bei $\eta = 0.5$ (statt $\Phi_{k=1,2,3} \bmod 2\pi$ wurde $\sin \Phi_{k=1,2,3}$ auf den Achsen abgetragen). Nach dem Verschwinden des “ursprungsnahen” Grenzzyklus nahe $\eta \approx 0.755$ zeigen die meisten Trajektorien dieses Verhalten. Übrigens tendiert natürlich die Projektion jeder beliebigen Trajektorie in die (Φ_1, Φ_2) -Ebene im Limes $\eta \rightarrow 0$ gegen eine Gerade mit Steigung $\sigma_g = (\sqrt{5} - 1)/2$ (siehe etwa das untere Bild der Abbildung 3.7).

3.6 Fixpunkte und Attraktoren auf chaotischen Tori vom Lorenz-Typ

Ein weiteres Beispiel für chaotische Tori erhalten wir durch Anwenden des im Abschnitt 3.1 beschriebenen Verfahrens auf das Lorenzsystem [Lor63]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(r - z) - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{3.55}$$

mit den von Lorenz [Lor63] benutzten Werten der Kontrollparameter

$$\sigma = 10, \quad r = 28, \quad b = \frac{8}{3}\tag{3.56}$$

In gleicher Weise wie im Rössler-Fall vorgehend, gelangen wir zum System

$$\begin{aligned}\Phi_1' &= \frac{\omega_{0,1}}{\eta} + \sigma\{\sin \Phi_2 - \sin \Phi_1\} \\ \Phi_2' &= \frac{\omega_{0,2}}{\eta} + \sin \Phi_1\{r - \alpha \sin \Phi_3\} - \sin \Phi_2 \\ \Phi_3' &= \frac{\omega_{0,3}}{\eta} + \alpha \sin \Phi_1 \sin \Phi_2 - b \sin \Phi_3\end{aligned}\tag{3.57}$$

als dem System der Bewegungsgleichungen auf dem Torus zu $I = I_0$. In unseren Berechnungen benutzen wir naheliegenderweise die gleichen Werte für ω_0 und α wie bei der Untersuchung der vom Rösslerschen System abgeleiteten Bewegungsgleichungen.

3.6.1 Der Fluß im “Störsystem”

Der im Grenzfall $\eta = \infty$ – bzw. im Störsystem – zu erwartende ursprungsnaher Attraktor ist optisch vom wohlbekannten Lorenz-Attraktor ebenso wenig zu unterscheiden wie der in Abbildung 3.1 gezeigte “Rössler-ähnliche” Attraktor vom originalen Rössler-Attraktor. Wegen des endlichen Wertes von α findet man wiederum leichte Abweichungen der Ljapunovexponenten dieses “Lorenz-ähnlichen” Attraktors

$$\lambda_1 = 0.89, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -14.44\tag{3.58}$$

von denen des seltsamen Attraktors im Lorenz-System (3.55), für die man

$$\lambda_1 = 0.906, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -14.572 \quad (3.59)$$

findet. Im Lorenz-System (3.55) gilt übrigens $\nabla \cdot \dot{z} = -\sigma - 1 - b = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -13.6$, weil $\nabla \cdot \dot{z}$ ortsunabhängig ist (vgl. die Beziehungen (3.32) & (3.36) Abschnitt 3.4).

Wie im Rössler-Fall kann die Position der Fixpunkte des Systems (3.57) analytisch bestimmt werden. Man hat nun allerdings eine kubische Gleichung für den Sinuswert einer Komponente, etwa $\sin \Phi_{*,1}$, zu lösen. Die Lösungen für $\sin \Phi_{*,2}$ hängen linear, die für $\sin \Phi_{*,3}$ quadratisch von $\sin \Phi_{*,1}$ ab. Diese Gleichungen sind im Anhang A.4 angegeben. Dort wird gezeigt, daß im Limes $\eta \rightarrow \infty$ (wie immer $\Leftrightarrow \omega_0(I_0) = 0$ & $\eta = 1$) stets drei reelle Lösungen für $\sin \Phi_{*,1}$ existieren, wenn $\tau > 1$ und $\alpha \geq \sqrt[3]{\frac{4}{9} b (\tau - 1)^2}$. Im Fall der von uns gewählten Kontrollparameterwerte (3.56) ist $\tau = 28$, und daher existieren im Limes $\eta \rightarrow \infty$ drei reellwertige Fixpunktsätze, wenn $\alpha \geq 6\sqrt[3]{4} \approx 9.52$. Für große η erwartet man daher ebenfalls drei reellwertige Fixpunktsätze mit je acht nicht-äquivalenten Fixpunkten, je einen Satz für jeden Fixpunkt im Lorenz-System (3.55). Jeder dieser 24 Fixpunkte

- hat einen konjugierten Partner im gleichen Fixpunktsatz (vgl. Abschnitt 3.2),
- hat zwei nächste Nachbarn, die zu den anderen beiden Fixpunktsätzen gehören, und
- erzeugt ein Gitter äquivalenter Fixpunkte mit Gitterkonstanten 2π .

Die drei ursprungsnächsten Fixpunkte hängen natürlich mit dem "Lorenz-ähnlichen" Attraktor in der vom Lorenz-Attraktor wohlbekannten Weise zusammen: Die Spiralen sind um zwei von ihnen zentriert – die wir den linken bzw. rechten nennen werden, je nachdem, ob $\sin \Phi_{*,1}$ seinen größten oder seinen kleinsten Wert annimmt –, und der dritte liegt im Zentrum am Treffpunkt der Spiralen. Wir bezeichnen diese drei Fixpunkte also als $[0, 0, 0]_L$, $[0, 0, 0]_R$ bzw. $[0, 0, 0]_M$, und die zugehörigen Fixpunktsätze als "linken", "rechten" und "mittleren".

Die lineare Stabilitätsanalyse (vgl. Abschnitt 3.2 und speziell Anhang A.4) ergibt, daß unter den Fixpunkten $[0, 1, 0]_M$ als einziger attraktiv ist. Außer diesem Punktattraktor und dem ursprungsnahen "Lorenz-ähnlichen" findet sich mit der im Abschnitt 3.3 entwickelten Suchstrategie im Grenzfall $\eta = \infty$ (bzw. im Störsystem) kein weiterer Attraktor. Die meisten Trajektorien des Test-Ensembles enden auf dem Fixpunkt $[0, 1, 0]_M$ (oder seinen äquivalenten Versionen, d.h. sie umlaufen den Torus zunächst einige Male).

3.6.2 Der Fluß als Funktion des Störparameters η

Für $\eta \geq 20.78$ ändert sich diese Situation nicht nennenswert. Im Anhang A.4 wird gezeigt, daß für die von uns gewählten Werte der Parameter α , ω_0 , σ , τ und b (s.o.) die Sinuswerte aller Fixpunktlösungen im Bereich $\eta \geq 2.4758$ stets reell sind. Da in diesem Bereich auch ferner die Bedingungen (3.48) – nämlich $|\sin \Phi_{*,k=1,2,3}| \leq 1$ – erfüllt sind, existieren dort drei reellwertige Fixpunktsätze. Sowohl Position wie Eigenwerte des Punktattraktors $[0, 1, 0]_M$ bleiben nahezu konstant[†], und der "Lorenz-ähnliche" Attraktor ändert augenscheinlich weder

[†]Im Grenzfall $\eta = \infty$ sind die Eigenwerte -2.6667 ; $-4.5000 \pm 15.803i$, und bei $\eta = 20.78$ findet man -2.6646 ; $-4.5008 \pm 15.218i$.

Form noch Ausdehnung. Bei $\eta = 20.78$ wird er durch die Ljapunovexponenten

$$\lambda_1 = 0.79, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -14.34 \quad (3.60)$$

charakterisiert, welche sich nur wenig von den im Grenzfall $\eta = \infty$ bzw. im Störsystem gültigen unterscheiden, vgl. (3.58).

Bei $\eta \approx 20.78$ (genauer: im Intervall $20.779 \geq \eta \geq 20.778$) wird $[0, 0, 0]_R$ zum Attraktor, und der "Lorenz-ähnliche" Attraktor verschwindet. Im Intervall $20.78 \gtrsim \eta \gtrsim 2.466$ sind die Fixpunkte $[0, 1, 0]_M$ und $[0, 0, 0]_R$ die einzigen Attraktoren. Bei $\eta \approx 2.646$ (im Intervall $2.6459 \geq \eta \geq 2.6458$) wird $[0, 1, 1]_L$ attraktiv, so daß für $2.6458 \gtrsim \eta \gtrsim 2.4758$ drei Punktattraktoren existieren, aus jedem Fixpunktsatz einer.

Wie im Anhang A.4 gezeigt wird, lassen die Fixpunktgleichungen im Bereich $2.4758 \gtrsim \eta \gtrsim 0.1086$ höchstens einen reellwertigen Fixpunktsatz zu. Bei $\eta \approx 2.4758$ (genauer: im Intervall $2.47579 \geq \eta \geq 2.47578$) werden der "linke" und der "mittlere" Fixpunktsatz komplexwertig. Der Punktattraktor $[0, 1, 0]_M$ verschwindet übigens nicht ersatzlos, sondern wird durch einen periodischen Attraktor abgelöst (s.u.). Der ursprungsnächste Fixpunkt des reellwertigen Satzes bleibt Punktattraktor, aber dieser Satz erfüllt die Bedingungen (3.48) nur oberhalb von $\eta \gtrsim 0.3374$ (für kleinere η -Werte ist $|\sin \Phi_{*,3}| > 1$). Deshalb existieren im Intervall $0.3374 \gtrsim \eta \gtrsim 0.1086$ gar keine reellwertigen Fixpunkte. Bei $\eta \approx 0.1086$ tauchen die beiden Fixpunktsätze, für die nach wie vor die Bedingung (3.48) erfüllt ist, wieder im Reellen auf. Da der Satz, dessen $\sin \Phi_{*,3}$ -Wert betragsmäßig größer als eins ist, nun derjenige mit dem kleinsten Wert von $\sin \Phi_{*,1}$ ist, handelt es sich bei diesen beiden Fixpunktsätzen in unserer Terminologie nunmehr um den "rechten" und den "mittleren" Satz. Unter diesen Fixpunkten gibt es einen Punktattraktor, nämlich $[0, 0, 0]_R$. Bei $\eta \approx 0.0529$ wird der "mittlere" Satz wegen $|\sin \Phi_{*,2}| > 1$ komplexwertig, und das gleiche Schicksal ereilt den verbliebenen Satz bei $\eta \approx 0.0523$ (da $|\sin \Phi_{*,1}| > 1$), womit der letzte Punktattraktor verschwindet.

Im Anhang A.4 wird ebenfalls gezeigt, daß im Limes $\eta \rightarrow 0$ von den Lösungen für die Sinuswerte der Fixpunkt Komponenten stets mindestens eine betragsmäßig gegen ∞ tendiert, so daß die Fixpunkte – in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß solche auf regulären Tori nicht existieren – in diesem Limes gegen den Punkt ∞ im Komplexen streben.

Es wurde schon darauf hingewiesen, daß der Punktattraktor $[0, 1, 0]_M$ bei $\eta \approx 2.4758$ durch einen Grenzzyklus abgelöst wird. Wir bezeichnen diesen Attraktor im Folgenden als "Nachfolge-Attraktor". Die Transformationen dieses Attraktors werden nun in einiger Ausführlichkeit beschrieben (und illustriert), weil sie für Attraktoren auf chaotischen Tori typisch zu sein scheinen.

Wie im Fall des "generischen" Grenzzyklus' auf dem Rössler-Torus ist die Bewegung auf der Grenzkurve des "Nachfolge-Attraktors" in Φ_1 und Φ_2 auf Intervalle mit Längen kleiner als 2π beschränkt (die zugehörigen Windungszahlen verschwinden), wohingegen Φ_3 monoton wächst. Die Abbildung 3.9 enthält einen Pseudo-3d-Plot des Attraktors und dessen Projektion in die (Φ_1, Φ_2) -Ebene bei $\eta = 2.4$. Solange der Wert von η nicht allzu weit unterhalb $\eta \approx 2.4758$ liegt, ist die Bewegung auf der Grenzkurve in der Nähe der Stelle, an der sich der Punktattraktor $[0, 1, 0]_M$ befunden hatte, sehr viel langsamer als anderswo. Mit abnehmendem η verringert sich der Einfluß des ehemaligen (nun komplexwertigen) Fixpunktes auf die Bewegung auf der Grenzkurve aber rasch. Die Periode (bezüglich der skalierten Zeit) verkürzt

sich im gleichen Maß – ganz anders als im Fall des “generischen” Grenzzzyklus’ auf dem Rössler-Torus. Die Grenzkurve passiert die Stelle, an der $[0, 1, 0]_M$ gelegen hatte, in immer größerem Abstand, so daß die im unteren Teil der Abbildung 3.9 sichtbaren “Loops” nacheinander verschwinden (vgl. die Projektion der Grenzkurve in die (Φ_1, Φ_2) -Ebene bei $\eta = 0.16$ im oberen Bild der Abbildung 3.10).

Unterhalb von $\eta \approx 0.158$ findet man eine Periodenverdopplungs-Sequenz – das untere Bild der Abbildung 3.10 zeigt den 4-Zyklus beim $\eta = 0.1561$ – und der Attraktor wird chaotisch, wobei sich die Bewegung zunächst auf schmale Bänder entlang der Bahn der ehemaligen Grenzkurve beschränkt. Jenseits der ersten Periodenverdopplungs-Sequenz (sie endet nahe $\eta \approx 0.1560$) befindet sich ein enges “Fenster” der Periode drei, d.h. ein 3-Zyklus (bei $\eta = 0.1559$) mit zugehöriger Periodenverdopplungskaskade. Mit abnehmendem η werden die beschriebenen chaotischen “Bänder” breiter und verschmelzen. Die Abbildung 3.11 zeigt den chaotischen Attraktor bei $\eta = 0.1558$ sowie bei $\eta = 0.155$. Die zugehörigen Ljapunovexponenten sind der Bildunterschrift dieser Abbildung zu entnehmen. Bemerkenswerterweise ist der positive Ljapunovexponent dort, wo die chaotische Bewegung räumlich noch weniger ausgedehnt ist, größer. Der Attraktor bleibt für $\eta \geq 0.14273$ chaotisch, außer in (engen) “periodischen Fenstern”. Die Abbildung 3.12 zeigt im oberen Bild einen 7-Zyklus bei $\eta = 0.145$. Der größte “Loop” entspricht dem im unteren Bild der Abbildung 3.11 sichtbaren “chaotischen Seitenband”, das in der räumlich noch nicht so ausgedehnten chaotischen Bewegung nahe den ersten Periodenverdopplungskaskaden noch nicht vorhanden ist.

Unterhalb von $\eta = 0.14273$ wird die Bewegung auf dem Attraktor wieder periodisch. Der Übergang ist durch intermittentes Verhalten gekennzeichnet. Die Trajektorien wechseln in unregelmäßigen Abständen zwischen dem chaotischen Attraktor und der wieder sichtbaren Grenzkurve, siehe das untere Bild der Abbildung 3.12. Die Grenzkurve hat eine ganz ähnliche Form wie oberhalb des chaotischen Bereichs (vgl. mit dem unteren Bild der Abbildung 3.10). Unterhalb von $\eta = 0.133$ durchläuft der Attraktor eine weitere Periodenverdopplungskaskade. Diese endet bei $\eta \approx 0.12599$. Dort ist der Attraktor wieder chaotisch, wobei die Bewegung zunächst wiederum auf schmale Bänder um die Position der ehemaligen Grenzkurve beschränkt ist. Die Abbildung 3.13 zeigt den Attraktor im (engen) Fenster der Periode drei, bei $\eta = 0.12597$. Jenseits dieses periodischen Fensters nimmt der Attraktor bald eine sehr ähnliche Form wie im ersten chaotischen Bereich an, auch das “chaotische Seitenband” (s.o.) erscheint wieder. Unterhalb von $\eta = 0.118$ verschwindet er allem Anschein nach (unsere systematische Suchstrategie ist ohne reellwertige Fixpunkte nicht anwendbar).

Das hier beschriebene komplizierte Verhalten des Attraktors im Intervall $0.16 \gtrsim \eta \gtrsim 0.12$ spielt sich im fixpunktlosen Bereich ab. Unterhalb von $\eta \approx 0.1086$ gibt es aber wieder reellwertige Fixpunkte, und unter ihnen einen ursprungsnahen Punktattraktor (s.o.). Gleichwohl taucht der Attraktor dort in einem engen Intervall um $\eta = 0.1$ (für $1.02 \gtrsim \eta \gtrsim 0.97$) wieder an der alten Stelle nahe $(\Phi_1, \Phi_2) = (0, \pi)$ auf. Die Grenzkurve hat praktisch die gleiche Form wie zuvor. Bei $\eta = 0.97$ findet sich der einfache Grenzzzyklus, bei $\eta = 0.98$ der 2-Zyklus. Ein Pseudo-3d-Plot des letzteren ist im oberen Bild der Abbildung 3.14 zu sehen. Die Periodenverdopplungs-Sequenz verläuft also hier in Richtung anwachsender η -Werte. Bei $\eta = 0.1$ ist die Bewegung auf dem Attraktor bereits chaotisch, charakterisiert durch die

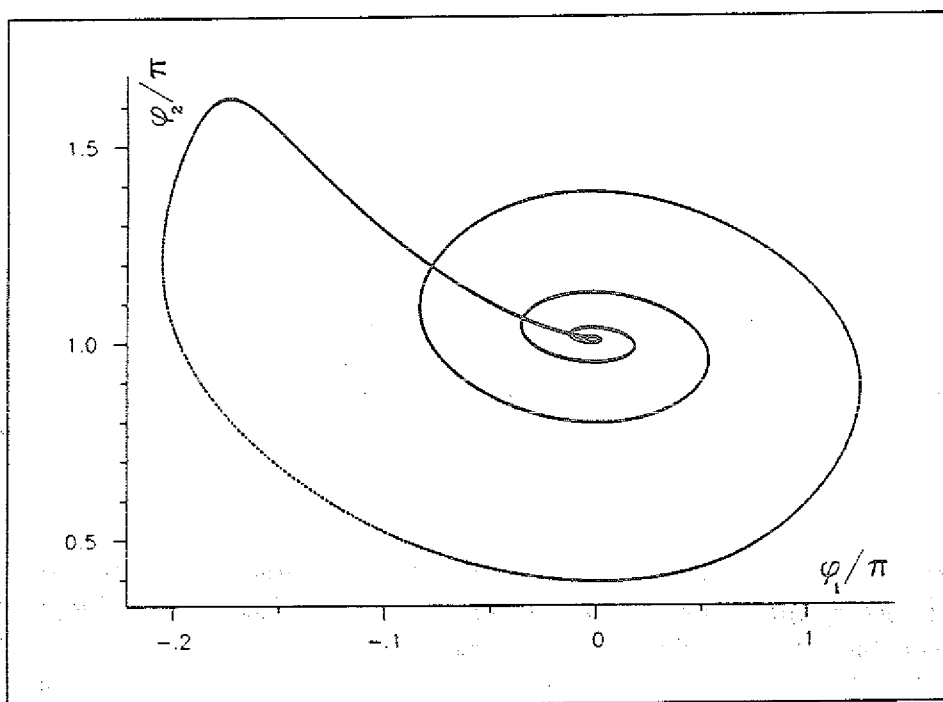
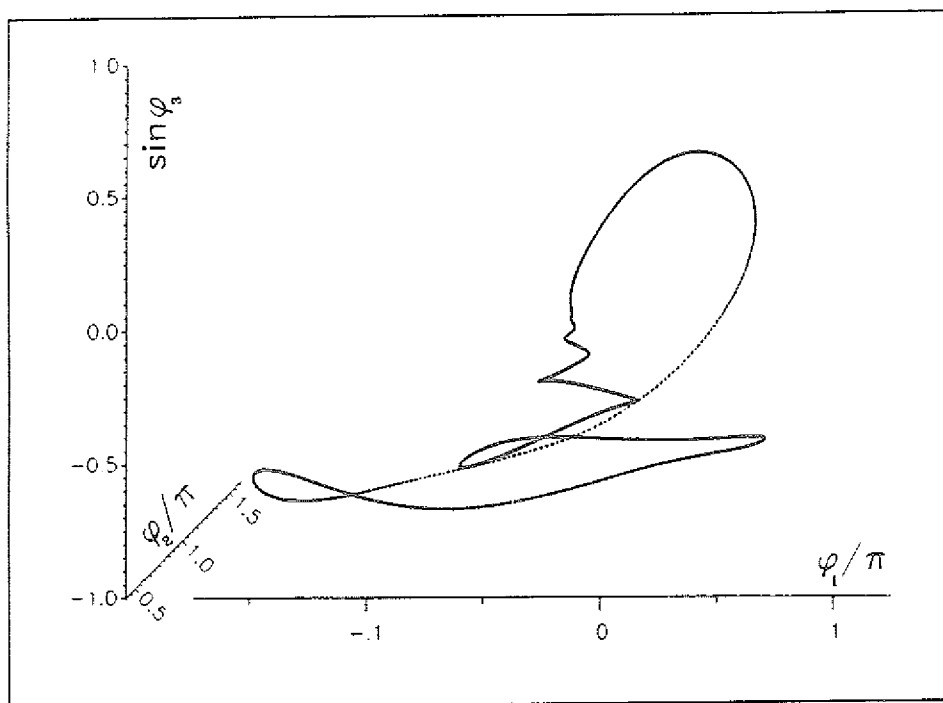


Abb.3.9: Ein Grenzyklus als "Nachfolger" des Punktattraktors $[0,1,0]_M$. Pseudo-3d-Plot (oben) und Projektion in die (φ_1, φ_2) -Ebene; $\eta = 2.4$.

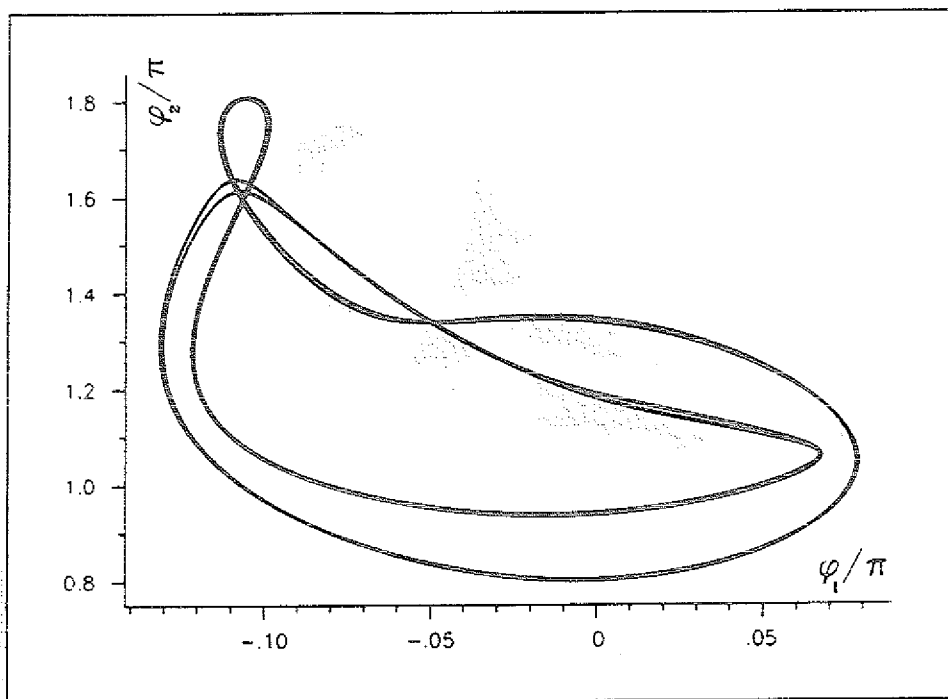
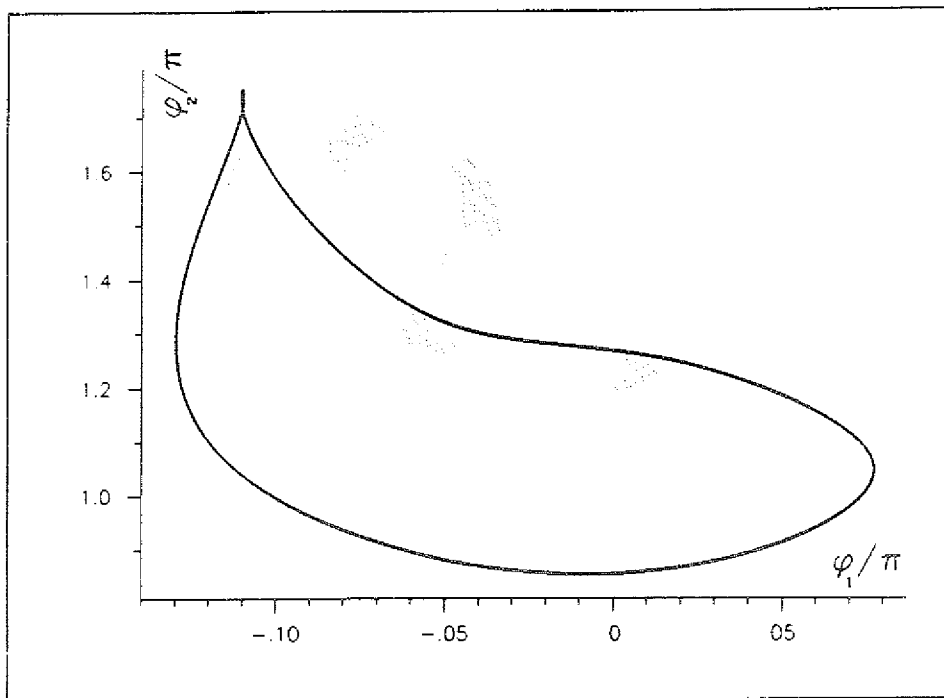


Abb.3.10: Erste Periodenverdopplung: 1-Zyklus bei $\eta = 0.16$ (oben) und 4-Zyklus bei $\eta = 0.1561$ (unten), jeweils in Projektion in die (Φ_1, Φ_2) -Ebene.

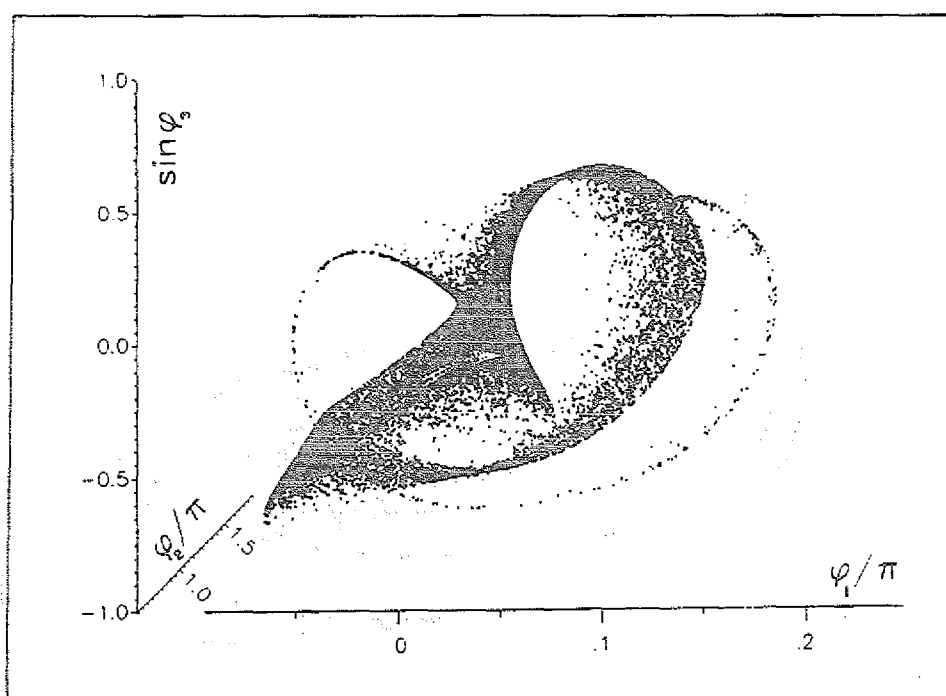
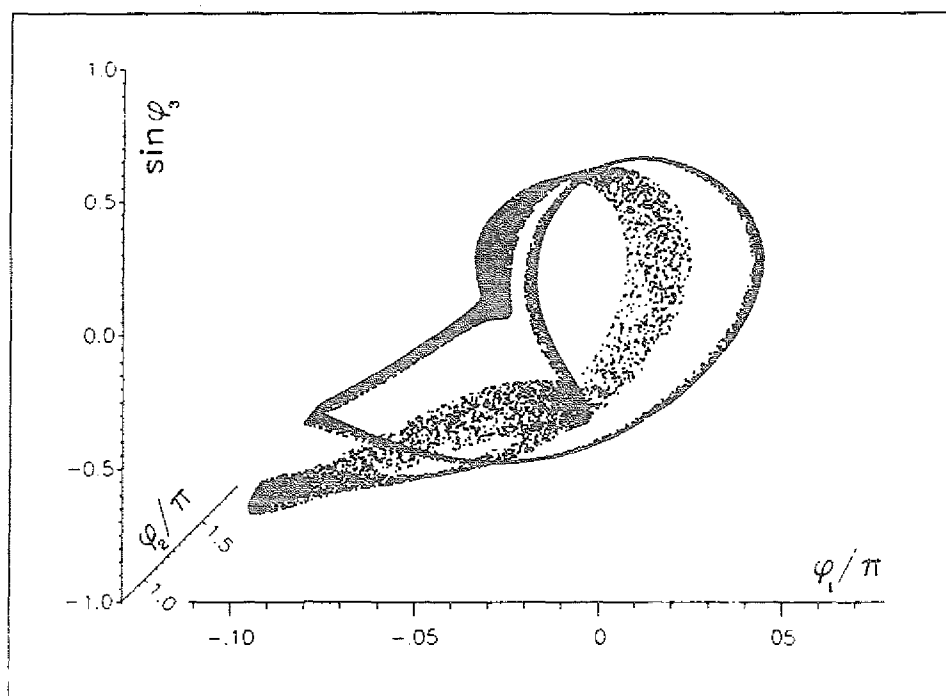


Abb.3.11: Pseudo-3d-Plots des "Nachfolge-Attraktors" im chaotischen Bereich bei $\eta = 0.1558$ (oben) und $\eta = 0.1550$ (unten). Die nichtverschwindenden Ljapunovexponenten λ_1 und λ_3 haben folgende Werte: $\lambda_1 = 0.65$ & $\lambda_3 = -11.19$ bei $\eta = 0.1558$ sowie $\lambda_1 = 0.30$ & $\lambda_3 = -10.80$ bei $\eta = 0.155$.

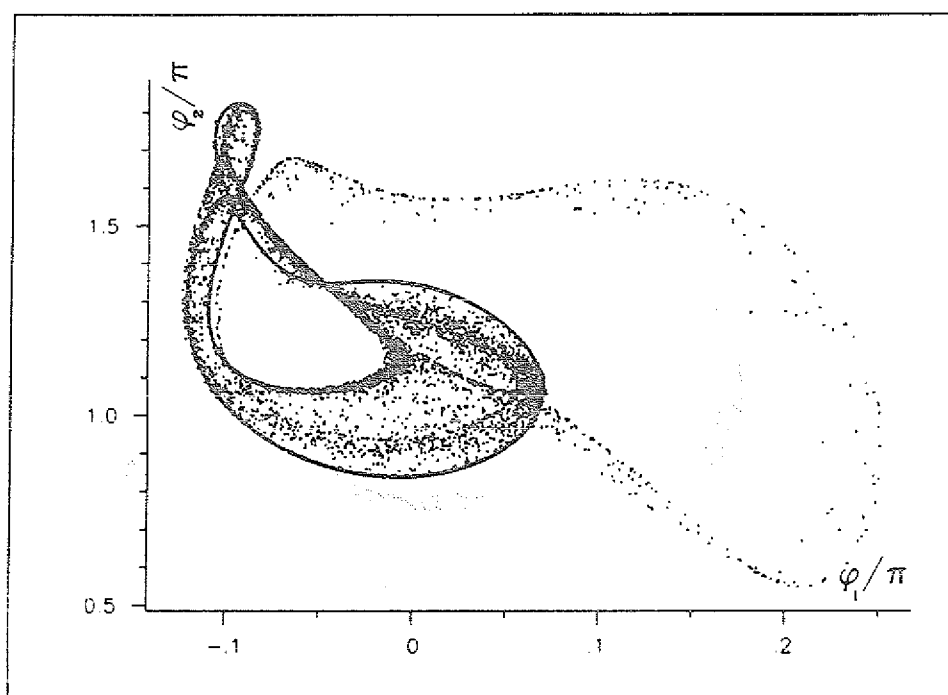
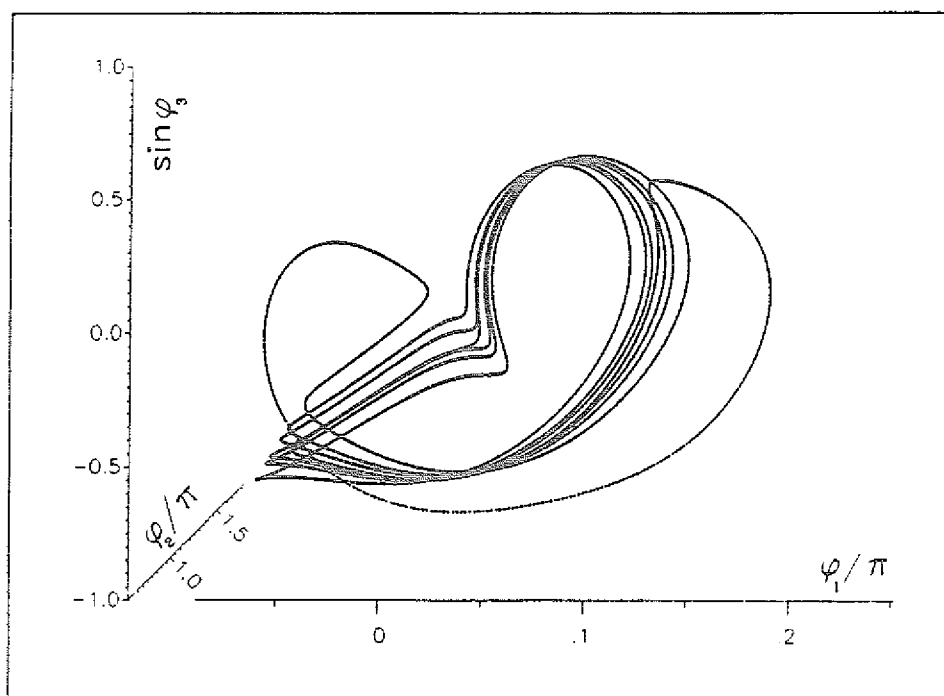


Abb.3.12: Der "Nachfolge-Attraktor" bei $\eta = 0.145$ in einem periodischen Fenster (oben, Pseudo-3d-Plot) und bei $\eta = 0.14273$ (unten, Projektion in die (Φ_1, Φ_2) -Ebene) am Rand des chaotischen Bereichs (intermittentes Verhalten, vgl. Text).

Ljapunovexponenten

$$\lambda_1 = 0.18, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -10.45 \quad (3.61)$$

wobei sich die chaotische Bewegung noch auf schmale Bereiche nahe der ehemaligen Grenzkurve beschränkt. Bei $\eta = 0.101$ ist das Chaos optisch – siehe das untere Bild der Abbildung 3.14 – und nach Maßgabe der Ljapunovexponenten

$$\lambda_1 = 1.12, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -11.38 \quad (3.62)$$

noch wesentlich stärker ausgeprägt.

Unterhalb von $\eta \approx 0.15$ gibt es übrigens noch einen weiteren Grenzzyklus. Dieser existiert bis in den Bereich, in dem wieder reellwertige Fixpunkte auftauchen ($\eta \lesssim 0.1086$). Dort wird auch dieser periodische Attraktor durch einen Periodenverdopplungsübergang chaotisch. Von dem bislang betrachteten unterscheidet er sich vor allem dadurch, daß die Bewegung zwei nichtverschwindende Windungszahlen aufweist (nur in der Φ_1 -Komponente wird der Torus nicht vollständig umlaufen).

Sobald der letzte Punktattraktor bei $\eta \approx 0.0523$ verschwunden ist, wird die Bewegung auf dem Lorenz-Torus durch einen chaotischen Attraktor mit drei nichtverschwindenden Windungszahlen in ähnlicher Weise geprägt, wie auf dem im vorhergehenden Abschnitt untersuchten Rössler-Torus durch einen Grenzzyklus mit nichtverschwindenden Windungszahlen.

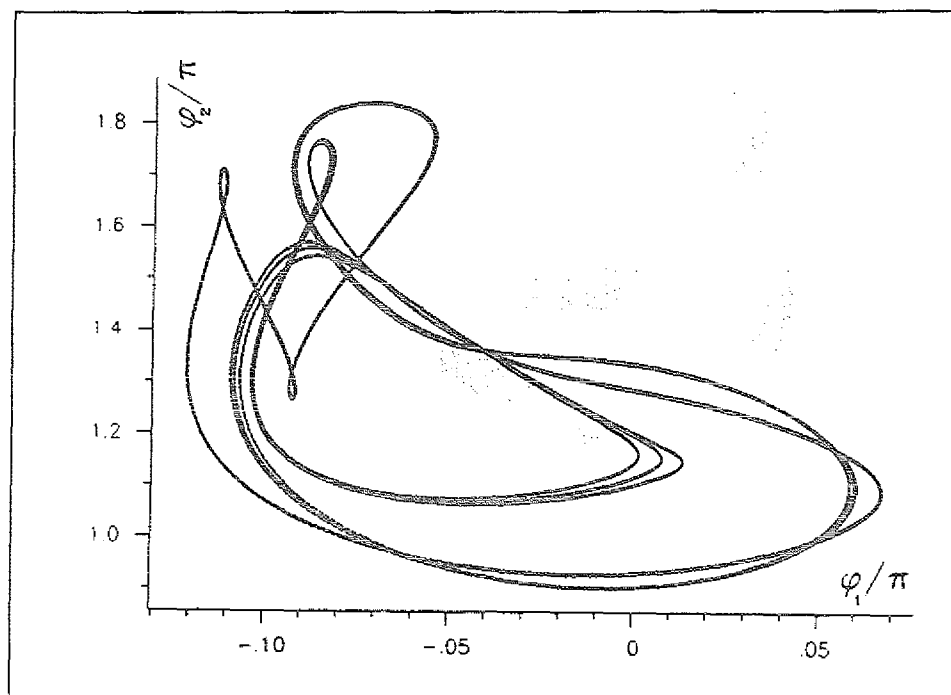


Abb.3.13: Der "Nachfolge-Attraktor" als 3-Zyklus, in einem periodischen Fenster des zweiten chaotischen Bereichs bei $\eta = 0.12597$ (in Projektion in die (Φ_1, Φ_2) -Ebene).

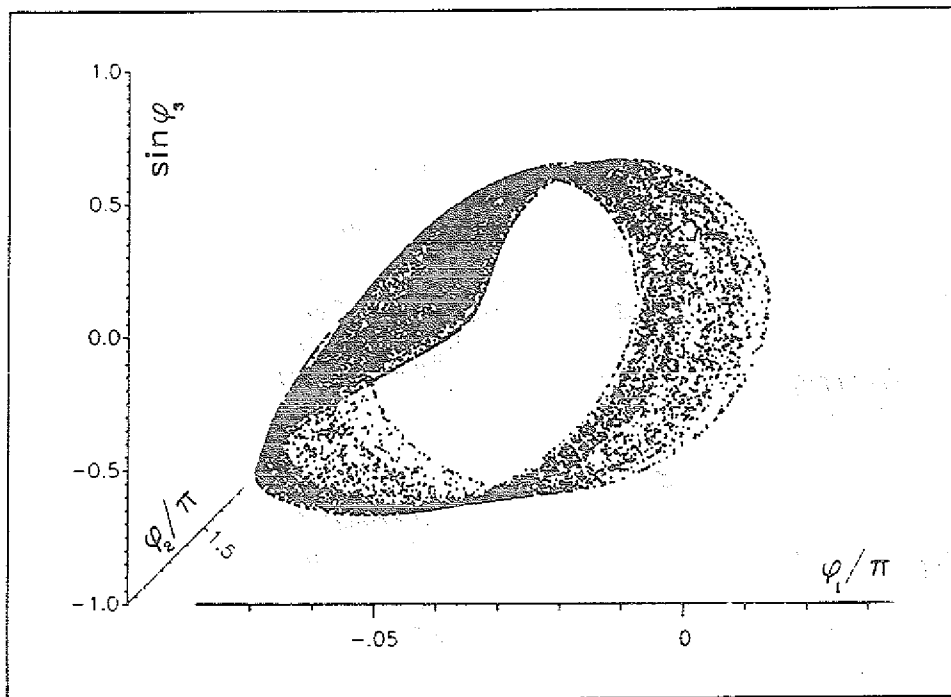
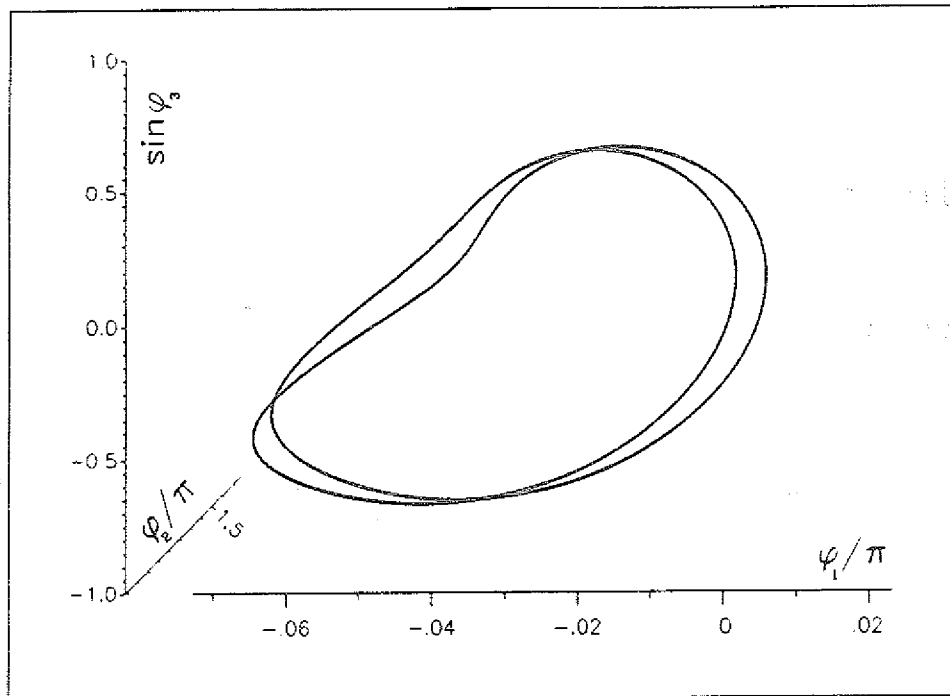


Abb.3.14: Pseudo-3d-Plots des "Nachfolge-Attraktors" nahe $\eta = 0.1$ – als 2-Zyklus bei $\eta = 0.98$ (oberes Bild) und als chaotischer Attraktor bei $\eta = 0.101$ (unteres Bild).

Kapitel 4

Nicht-isolierte nichtreguläre Tori

Die bislang betrachteten, im $2N$ -dimensionalen Phasenraum Hamiltonscher Systeme der Form (2.4) bzw. (3.1) isolierten nichtregulären Tori bilden dort Hyperflächen der Dimension N , weil jedem solchen Torus im Wirkungsraum nur ein Punkt entspricht. Im Wirkungsraum Hamiltonscher Systeme können aber auch endlichdimensionale Hyperflächen der Dimension $n \leq N - 1$ vorkommen, auf denen jedem Punkt ein invarianter Torus im Phasenraum entspricht. Die Gesamtheit aller dieser Tori bildet dann eine invariante Hyperfläche im Phasenraum, deren Dimension zwischen $N + 1$ und $2N - 1$ liegt.[†]

4.1 Invariante Hyperflächen im Phasenraum, die aus nicht-regulären Tori bestehen

Wir betrachten im Folgenden stets Hamiltonsche Systeme der Form

$$H = H_0(I) + \eta H_1(I, \Phi) \quad \text{bzw.} \quad H = \frac{H_0(I)}{\eta} + H_1(I, \Phi) \quad (4.1)$$

mit $H_1(I, \Phi) = F(I) \cdot G(I, \Phi)$

deren winkelabhängiger Term H_1 auf einer n -dimensionalen Hyperfläche $M_{n;N}$ im N -dimensionalen Wirkungsraum verschwindet:

$$F(I) |_{I. \in M_{n;N}} = 0 \quad \text{und} \quad \dim M_{n;N} = n \leq N - 1 \quad (4.2)$$

Auf der Hyperfläche $M_{n;N}$ verschwindet dann[‡] die Änderung der Wirkungen:

$$\dot{I} |_{I. \in M_{n;N}} = 0 \quad (4.3)$$

[†]Vgl. die Definition invarianter Mannigfaltigkeiten auf Seite 4. Hyperflächen sind natürlich differenzierbare Mannigfaltigkeiten ($\rightarrow$ Anhang A.5).

[‡]Übrigens läßt sich jede analytische Hamiltonfunktion, deren Ableitung nach den Winkeln auf einer n -dimensionalen Hyperfläche im Wirkungsraum verschwindet, in dieser Form schreiben. Zu gegebenem H_1 und $M_{n;N}$ gibt es aber verschiedene Vektorfelder F , die (4.2) erfüllen. Für die bisher betrachteten Hamiltonschen Systeme (2.4) gilt $F(I) = I - I_0 = 0$, und dementsprechend $n = 0$.

Jeder Wirkung I_* auf der Hyperfläche $M_{n;N}$ ist also ein invarianter Torus zugeordnet. Die Gesamtheit dieser Tori bildet wiederum eine (invariante) Hyperfläche im Phasenraum[†], auf welcher die Bewegung den folgenden Gleichungen genügt:

$$\dot{\Phi} = \omega_0(I_*) + \eta \frac{\partial F}{\partial I_*} G(I_*, \Phi) \quad \text{für jedes } I_* \in M_{n;N} \quad (4.4)$$

Beispiel 4.1: Als einfaches Beispiel betrachten wir folgendes Hamiltonsches System mit zwei Freiheitsgraden:

$$H = \omega_{0,1} I_1 + \omega_{0,2} I_2 + \eta(I_2 - I_{0,2}) \sin \Phi_1 \cos \Phi_2 \quad (4.5)$$

Der Störterm läßt sich also beispielsweise durch

$$F(I_*) = (0, I_{*,2} - I_{0,2}) = 0 \quad \text{und} \quad G(\Phi) = (0, \sin \Phi_1 \cos \Phi_2) \quad (4.6)$$

zusammensetzen. Auf der eindimensionalen Hyperfläche im Wirkungsraum, die durch $I_{*,2} = I_{0,2}$ gegeben ist (also einer Geraden), gilt $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = 0$. Die Bewegungsgleichungen auf den zugehörigen Tori lauten

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_1 &= \omega_{0,1} + \eta \sin \Phi_1 \cos \Phi_2 \\ \dot{\Phi}_2 &= \omega_{0,2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nach Einsetzen der trivialen Lösung für Φ_2 verbleibt eine explizit zeitabhängige Gleichung:

$$\dot{\Phi}_1 = \omega_{0,1} + \eta \sin \Phi_1 \cos \left(\omega_{0,2} t + \Phi_2(t=0) \right) \quad (4.8)$$

Auch in diesem System findet man zu jedem Attraktor einen Repeller, da jeder Trajektorie (Φ_1, Φ_2) unter Zeitumkehr eine Trajektorie $(\pi - \Phi_1, -\Phi_2)$ entspricht.[‡] Die Abbildung 4.1 zeigt einen Grenzzyklus und den zugehörigen Repeller (letzteren als Attraktor unter Zeitumkehr). Fixpunkte sind ausgeschlossen, solange $\omega_{0,2} \neq 0$. Das Auftreten chaotischer Attraktoren kann auf Barrieren ebenfalls ausgeschlossen werden ($\rightarrow$ Abschnitt 4.3). $\odot$

Die Dimension $D_{n;N}$ der invarianten Hyperfläche, welche aus allen invarianten Tori besteht, die im Wirkungsraum eine n -dimensionale Hyperfläche $M_{n;N}$ bilden, ist offensichtlich gleich der Summe aus der Zahl N der Winkelvariablen einerseits und der Dimension n der Hyperfläche im Wirkungsraum andererseits:

$$D_{n;N} = N + n \quad (4.9)$$

Es liegt nahe, $D_{n;N}$ mit der Dimension D_{reg} zu vergleichen, welche die von den KAM-Tori zu einem festen normierten Frequenzvektor $\tilde{\Omega} = \frac{\Omega}{|\Omega|}$ (d.h. mit fixierten Frequenzverhältnissen)

[†]Zur Unterscheidung von der Hyperfläche $M_{n;N}$ im Wirkungsraum, auf welcher der winkelabhängige Anteil der Hamiltonfunktion (4.1) verschwindet, bezeichnen wir im Folgenden die Gesamtheit der zugehörigen invarianten Tori oft als "invariante Hyperfläche" (im Phasenraum). Natürlich ist $M_{n;N}$ ebenfalls eine invariante Mannigfaltigkeit (Nullvektoren verlaufen tangential zu jeder Fläche).

[‡]Vgl. die Anmerkung auf Seite 27 im Abschnitt 3.2 (sowie Anhang A.3 im Zusammenhang mit Kap.4.7).

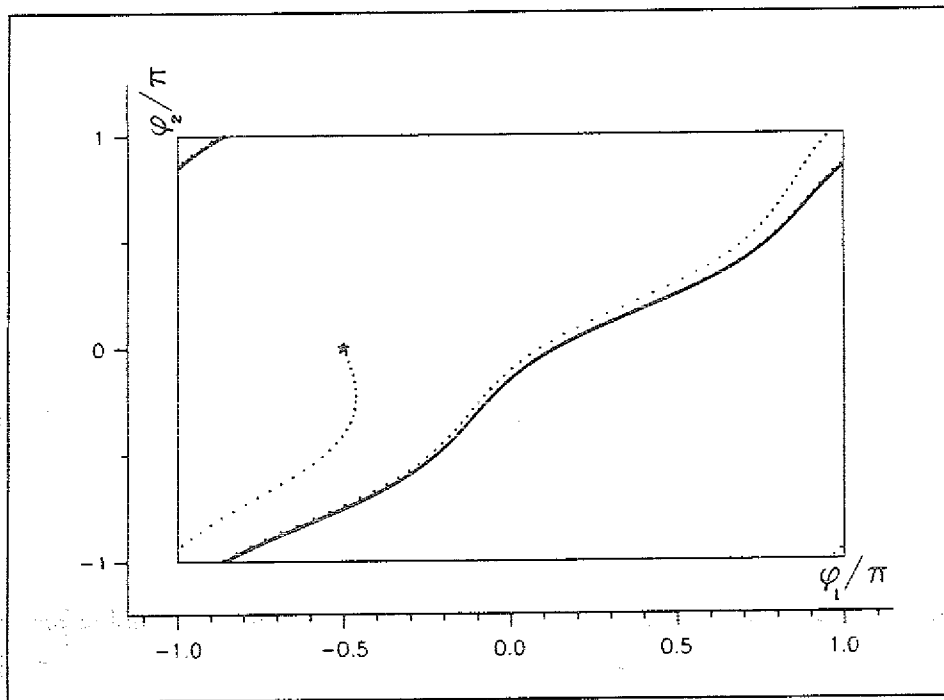
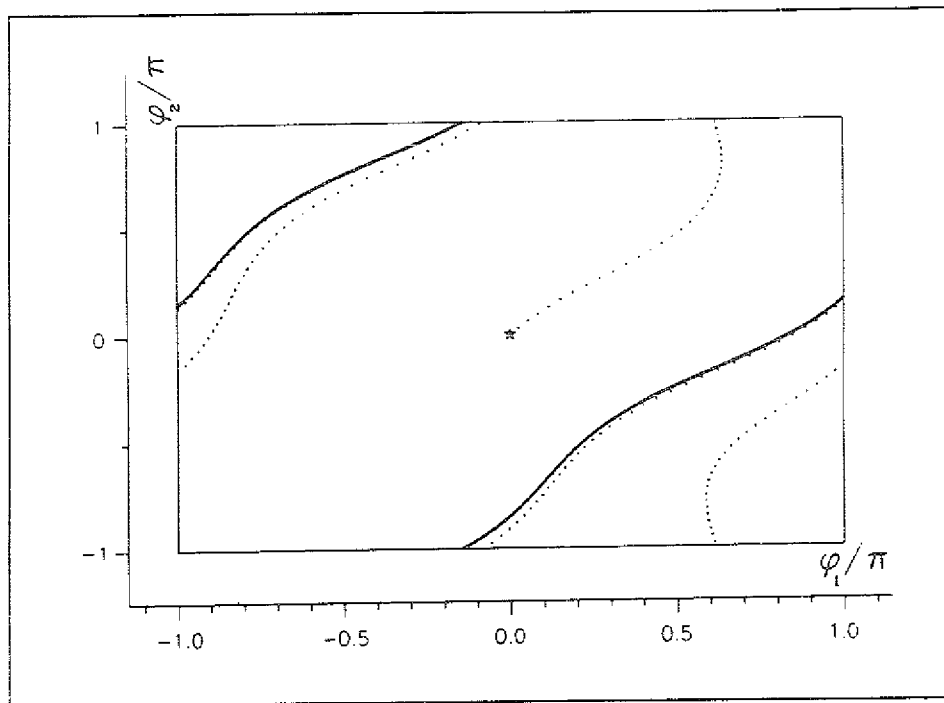


Abb.4.1: Oberes Bild: Ein Grenzyklus des Systems (4.7). Unteres Bild: Der zugehörige Repeller (als Attraktor unter Zeitumkehr). Parameter: $\eta = 1$, $\omega_{0,1} = \frac{3}{4}$, $\omega_{0,2} = 1$. Die jeweilige Anfangsbedingung ist durch * markiert. Aufgetragen ist $\frac{1}{\pi} (\Phi_{i=1,2} \bmod 2\pi)$.

gebildete Hyperfläche im Phasenraum fast-integrabler Systeme mit N Freiheitsgraden besitzt. Da KAM-Tori in einem ganzen Energieintervall existieren, gilt

$$D_{\text{reg}} = N + 1 \quad (4.10)$$

Die Dimension invarianter Hyperflächen, die aus nichtregulären Tori bestehen, ist daher für $n \geq 1$ (wenn es sich also nicht um *isolierte* Tori handelt) stets mindestens so groß wie die Dimension der Hyperfläche aller KAM-Tori zu einem festen normierten Frequenzvektor und liegt zwischen $N + 1$ und $2N - 1$. Da $(2N - 1)$ -dimensionale invariante Hyperflächen im $2N$ -dimensionalen Phasenraum Barrieren[†] bilden, kann es sich sogar um Barrieren für den Phasenraum-Fluß handeln, und zwar bemerkenswerterweise in Systemen mit beliebig vielen Freiheitsgraden. Im Fall der einem festen normierten Frequenzvektor zugeordneten KAM-Tori ist dies nur in (fast-integrablen) Systemen mit zwei Freiheitsgraden möglich, weil für $N > 2$ stets $D_{\text{reg}} < 2N - 1$.

Ein einfaches Beispiel für eine solche Barriere ist das System im obigen Beispiel 4.1 – die Hyperfläche im Wirkungsraum (eine Gerade) teilt diesen, und damit den Phasenraum, in zwei Teile, die nicht durch Trajektorien verbunden werden können. Da endlichdimensionale Hyperflächen im Wirkungsraum von Systemen mit zwei Freiheitsgraden stets die Dimension $n = 1$ haben, bilden die zugehörigen invarianten Hyperflächen im Phasenraum jedenfalls (aber nicht notwendigerweise echte) Barrieren.

● Übersicht über das folgende Kapitel

Im folgenden Abschnitt untersuchen wir zunächst ein weiteres Beispiel einer Barriere aus nichtregulären Tori in einem System mit nur zwei Freiheitsgraden. Während im obigen Beispiel eine der beiden Bewegungsgleichungen trivial integrierbar ist (d.h. die rechte Gleichungsseite ist konstant), kann man die Bewegungsgleichungen dieses Systems durch eine lineare Transformation in eine trivial integrierbare („triviale“) und eine „nicht-triviale“ zerlegen. Diese Zerlegung wird anschließend ganz allgemein durchgeführt, d.h. für beliebige Anzahl N von Freiheitsgraden und für (im Wirkungsraum) möglicherweise gekrümmte Hyperflächen. Man findet immer n „triviale“ und $m = N - n$ „nicht-triviale“ Bewegungsgleichungen.

Die je nach der Dimension der Hyperfläche im Wirkungsraum (bzw. der zugehörigen invarianten Hyperfläche im Phasenraum) unterschiedliche Form der resultierenden Bewegungsgleichungssysteme läßt bereits Schlüsse in Bezug auf die jeweils möglichen Attraktortypen zu, wie im dritten Abschnitt nachgewiesen wird. In einigen Fällen kann das Auftreten chaotischer Attraktoren ausgeschlossen werden (alle Attraktoren müssen *regulär* sein), in anderen das Auftreten periodischer Bewegung (und damit das Auftreten von Grenzzyklen).

[†] Eine invariante $(2N - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit stellt sie für den Fluß im $2N$ -dimensionalen Phasenraum eine *echte Barriere* dar, wenn sie den Rand einer $2N$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit bildet oder ihn enthält. Der Fluß verläuft dann tangential zum Rand der $2N$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit. Trajektorien, die in ihrem Inneren starten, können diese daher nie verlassen, und umgekehrt können Trajektorien, die außerhalb starten, das Innere nie erreichen. Invariante $(2N - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten, die nicht die Oberfläche einer $2N$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit enthalten, stellen ebenfalls Barrieren für den Phasenraum-Fluß dar, die aber (auf einem nicht nur infinitesimalen Umweg) umgangen werden können.

Im vierten Abschnitt wird die Bewegung auf Barrieren untersucht. Dort können nur reguläre Attraktoren vorkommen. Periodische Bewegung ist auf nichtregulären Barriere-Tori in Systemen mit zwei Freiheitsgraden möglich, in Systemen drei oder mehr Freiheitsgraden aber eher die Ausnahme. Wir geben die Bedingungen an, unter denen periodische Bewegung (nicht) auftreten kann und untersuchen numerisch einen regulären Attraktor, auf dem die Bewegung nicht-periodisch verläuft. Anschließend weisen wir nach, daß die nichtrelativistische Bewegung geladener Einzelteilchen auf Barrieren verlaufen kann, wenn das magnetische Vektorpotential räumlich periodisch ist und eine feste Richtung hat. Als Beispiel werden die elektromagnetischen Potentiale und Felder angegeben, die zur Realisierung der Bewegung auf den nichtregulären Barriere-Tori des Beispiels 4.2 (welches zu Beginn dieser Übersicht beschrieben wurde) nötig sind. In periodisch oder quasiperiodisch zeitabhängigen Feldern kann auch die Bewegung auf nichtregulären Barriere-Tori im Phasenraum von Systemen mit mehr als drei Freiheitsgraden durch ein nichtrelativistisch bewegtes Elektron realisiert werden.

Im fünften Abschnitt werden Systeme mit N Freiheitsgraden untersucht, in deren Phasenraum $(2N - 2)$ -dimensionale invariante Hyperflächen auftreten, die aus chaotischen Tori bestehen, auf denen sich die Bewegungsgleichungen bei geeigneter Skalierung der Parameter auf diejenigen eindimensionaler Oszillatorsysteme reduzieren lassen. Am Beispiel zweier Systeme, deren Bewegungsgleichungen sich in dieser Weise auf diejenigen des Duffing- bzw. des van der Pol - Oszillators reduzieren lassen, betrachten wir relativ ausführlich die Bewegung auf solchen Tori für $N = 3$ und $N = 4$. Wegen der in die beiden nicht-trivialen Bewegungsgleichungen eingehenden Zeitabhängigkeit können hier seltsame Attraktoren auftreten. Neben diesen finden wir periodische und, wo periodische Bewegung ausgeschlossen ist, reguläre aperiodische Attraktoren. Alle in diesem Abschnitt untersuchten Bewegungen auf nichtregulären bzw. chaotischen Tori können auch in der nichtrelativistischen Bewegung geladener Einzelteilchen in geeigneten Feldern auftreten, wie abschließend nachgewiesen wird. Die Realisierung der Bewegung auf Attraktoren *periodisch* getriebener Systeme ist dabei (wahlweise) sogar in stationären Feldern möglich.

Im vorletzten Abschnitt des Kapitels behandeln wir anhand von Beispielen nichtreguläre bzw. chaotische Tori, die invariante Hyperflächen mit weniger als $2N - 2$ Dimensionen bilden. Zunächst zeigen wir, daß die im dritten Kapitel betrachteten isolierten chaotischen Tori als Subtori nichtregulärer Tori auftreten können, welche höherdimensionale invariante Hyperflächen bilden. Dieses Beispiel läßt sich ebenso verallgemeinern wie ein weiteres, welches die Kopplung der im vorhergehenden Abschnitt betrachteten Oszillatoren behandelt. Außerdem wird nachgewiesen, daß die Bewegung geladener Einzelteilchen auch auf nichtregulären Tori verlaufen kann, die Teil einer invarianten Hyperfläche der Dimension $2N - 3$ sind.

Während wir im vorhergehenden Kapitel bereits zu Anfang ein Verfahren einführen, welches die Angabe von isolierten nichtregulären Tori mit *beliebig* vorgegebenen Attraktoren autonomer dissipativer Systeme erlaubt, gehen wir hier bei der Analyse der Bewegung auf nicht-isolierten nichtregulären Tori zunächst rein fallbezogen vor, d.h. ohne Rückgriff auf das im Kap.3.1 vorgestellte Verfahren, dessen Erweiterung auf nicht-autonome Systeme mit periodisch oder quasiperiodisch zeitabhängigen Termen aber im letzten Abschnitt nachgeholt wird.

4.2 Partielle Entkopplung der Bewegungsgleichungen

Die Untersuchung des folgenden Beispiels legt die Erwartung nahe, daß die Bewegungsgleichungen auf nicht-isolierten nichtregulären Tori in jedem Fall in n triviale und $m = N - n$ nichttriviale zerlegt werden können (wobei n , wie stets, die Dimension der Hyperfläche ist, welche die nichtregulären Tori im Wirkungsraum bilden).

Beispiel 4.2: Wir betrachten folgendes System mit zwei Freiheitsgraden:

$$H = \omega_{0,1}I_1 + \omega_{0,2}I_2 + \eta(a_1I_1 - a_2I_2) \cos(\Phi_1 - \Phi_2) \quad (4.11)$$

mit $a_{i=1,2} > 0$. Auf der durch die Beziehung

$$f(I) = a_1I_1 - a_2I_2 = 0 \quad (4.12)$$

gegebenen eindimensionalen Hyperfläche (einer Geraden) im Wirkungsraum gilt wiederum $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = 0$. Auch diese Gerade zerlegt den Wirkungsraum in zwei Teile, die nicht durch Trajektorien verbunden werden können. Die Bewegungsgleichungen auf den zugehörigen Tori (und, was die Winkel angeht, auch im übrigen Phasenraum) lauten

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_1 &= \omega_{0,1} + \eta a_1 \cos(\Phi_1 - \Phi_2) \\ \dot{\Phi}_2 &= \omega_{0,2} - \eta a_2 \cos(\Phi_1 - \Phi_2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Im Gegensatz zum ersten Beispiel ist diesmal ohne weitere Transformation keine der beiden Bewegungsgleichungen (4.13) trivial integrierbar. Das hängt damit zusammen, daß im vorhergehenden Beispiel die Hyperfläche (ebenfalls eine Gerade) im Wirkungsraum achsenparallel liegt, die hier betrachtete Hyperfläche (bzw. Gerade) hingegen nicht. Führen wir aber eine lineare Transformation auf neue Variable durch, nämlich[†], auf

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

[†] Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, daß diese Transformation kanonisch ist. Die neuen Variablen sind allerdings keine Wirkungs-Winkel-Variablen mehr. *Kanonische Transformationen* ($\rightarrow$ Anhang A.0), welche die Wirkungs-Winkel-Variablen wieder in Wirkungs-Winkel-Variablen überführen, haben nämlich die Eigenschaft, daß die neuen Winkelvariablen 2π -periodische Funktionen der alten Winkelvariablen sind, weil nur dann gewährleistet ist, daß wiederum jedem Punkt auf einem Torus auch in den neuen Winkelvariablen genau ein (modulo 2π eindeutiger) Wert entspricht. Falls eine solche Transformation linear ist (wie die hier betrachtete) oder einen linearen Anteil hat, darf sie bzw. dieser daher Wirkungs- und Winkelvariable nicht "mischen", und die Transformationsmatrix darf nur ganze Zahlen enthalten. Ferner muß ihre Determinante Betrag eins haben, denn aufgrund der Cramerschen Regel ist nur dann gewährleistet, daß sowohl die neuen Winkelvariablen ganzzahlige Linearkombinationen der alten als auch die alten Winkelvariablen ganzzahlige Linearkombinationen der neuen sind [Per85]. Die hier betrachtete Drehmatrix hat zwar Determinante eins, aber ihre Elemente sind nicht ganzzahlig (Richtungscosinus!).

so ist im transformierten Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= \frac{a_1\omega_{0,1} - a_2\omega_{0,2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} + \eta\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cos\left(\frac{a_1 + a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}Q_1 + \frac{a_2 - a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}Q_2\right) \\ \dot{Q}_2 &= \frac{a_2\omega_{0,1} + a_1\omega_{0,2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\end{aligned}\quad (4.15)$$

die zweite Gleichung trivial integrierbar. Durch eine Linearkombination beider Gleichungen, nämlich

$$\frac{a_1 + a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\dot{Q}_1 + \frac{a_2 - a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\dot{Q}_2 \quad (4.16)$$

gelangt man zu einer weiteren (durch Quadratur) lösbaren Gleichung, so daß auch die erste Gleichung lösbar ist. Der Transformation (4.14) entspricht im Wirkungsraum eine Drehung der Achsen des Koordinatensystems derart, daß die Hyperfläche (Gerade) parallel zu den neuen Achsen liegt.

Eine detaillierte Diskussion der Bewegung auf den nichtregulären Tori dieses Systems wird im Anhang C präsentiert. Es zeigt sich, daß nicht nur das System (4.13) integrabel ist, also die Bewegung auf der Barriere, sondern sogar die zugehörige Hamiltonfunktion (4.11)[†]. Es gibt sowohl ein Regime ohne Attraktoren wie eines mit Grenzzyklen, welche sich von den bisher untersuchten wesentlich nur darin unterscheiden, daß ihr Auftreten und ihre Position analytisch vorhersagbar sind. Nichtregularität und universelle Integrabilität bilden also durchaus keinen Widerspruch (siehe auch die Diskussion im Anhang A.2). Im übrigen ist es offensichtlich ein Leichtes, Hamiltonsche Systeme anzugeben, deren Bewegungsgleichungen auf ihren nichtregulären (und nicht-isolierten) Tori von vornherein entkoppelt sind. ●

Im allgemeinen Fall – d.h. im Fall beliebiger Zahl N von Freiheitsgraden und im Wirkungsraum möglicherweise gekrümmter n -dimensionaler Hyperflächen $M_{n,N}$ – können die Bewegungsgleichungen auf den zugehörigen invarianten Hyperflächen ebenfalls (und in der gleichen Weise wie im vorhergehenden Beispiel) in genau n triviale und $m = N - n$ nicht-triviale zerlegt werden. Dies bedingt das identische Verschwinden von m Poincaré-Invarianten einerseits, und andererseits das Nichtverschwinden der n übrigen. Die Zerlegung in n triviale und m nicht-triviale Gleichungen liefert also Gleichungssysteme, deren Form durch die Dimension der Hyperfläche, welche die nichtregulären Tori im Wirkungsraum bilden, bestimmt wird. Diese läßt daher Schlüsse auf die Typen von Attraktoren zu, die auf den zugehörigen invarianten Hyperflächen im Phasenraum auftreten bzw. nicht auftreten können.

● Zerlegung der Bewegungsgleichungen in triviale und nicht-triviale

Komponentenweise lautet die Bedingung (4.2)

$$F_i(I) |_{I_*} \in M_{n,N} = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.17)$$

[†]und darüber hinaus alle Hamiltonfunktionen mit $N \geq 2$ Freiheitsgraden, die nur von einer einzigen Linearkombination der N Winkel abhängen.

d.h. die Skalarfelder $F_{i=1,\dots,N}(I)$ haben auf der Hyperfläche $M_{n;N}$ im Wirkungsraum einen konstanten Wert. Genau wie Feldlinien immer senkrecht auf den zugehörigen Äquipotentialflächen stehen, müssen daher die Gradienten dieser Skalarfelder senkrecht auf der Hyperfläche $M_{n;N}$ stehen, und es gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial I} F_{i=1,\dots,N}(I) \right) |_{I_* \in M_{n;N}} \perp M_{n;N} \Rightarrow \text{Rang} \left(\frac{\partial F}{\partial I} \right) |_{I_* \in M_{n;N}} = N - n \quad (4.18)$$

d.h. die aus diesen Gradienten gebildeten $N \times N$ -Matrizen $\frac{\partial F(I)}{\partial I}$ bilden für jede Wirkung I_* auf der Hyperfläche $M_{n;N}$ Vektoren in den zu $M_{n;N}$ im Punkt I_* senkrecht stehenden Unterraum ab. Der Rang dieser Matrizen ist deshalb gleich $m = N - n$, und der Vektor

$$\frac{1}{\eta} \left(\dot{\Phi} - \omega_0 \right) |_{I_* \in M_{n;N}} = \frac{\partial F}{\partial I_*} G(I_*, \Phi) \quad (4.19)$$

steht senkrecht auf $M_{n;N}$ und hat m linear unabhängige Komponenten.

Übrigens identifizieren wir bei dieser Betrachtung den Wirkungsraum mit dem $\mathcal{M}^N$. In dieser Sichtweise ist $M_{n;N}$ also eine Hyperfläche im $\mathcal{M}^N$, und die Vektoren $G(I_*, \Phi)$ sowie (4.19) sind Vektoren im $\mathcal{M}^N$. Der Vektor (4.19) ist aber dem winkelabhängigen Term in der obigen Bewegungsgleichung (4.4) proportional. Es liegt also nahe, die kanonische Basis[†] im Phasenraum so zu drehen, daß $m = N - n$ Basisvektoren im Wirkungsraum senkrecht auf $M_{n;N}$ in einem beliebig (aber fest) vorgegebenem Punkt $I_* \in M_{n;N}$ stehen. Dies geschieht durch Anwendung einer nur N -dimensionalen Drehmatrix $R(I_*)$, welche über die erzeugende Funktion

$$S(P, \Phi) = \sum_{i=1}^N P_i \sum_{j=1}^N R_{ij}(I_*) \Phi_j \quad (4.20)$$

folgende kanonische Transformation "induziert":[‡]

$$I = R^{-1}(I_*)P \Leftrightarrow P = R(I_*)I, \quad \text{sowie} \quad Q = R(I_*)\Phi \quad (4.21)$$

Die neuen Variablen P sind also Linearkombinationen der Wirkungen I , und in gleicher Weise sind die konjugierten Variablen Q Linearkombinationen der Winkel Φ . Wie im obigen Beispiel gezeigt wurde, handelt es sich gleichwohl nicht um Wirkungs-Winkel-Variable (vgl. die Anmerkung auf Seite 63).

Bei Anwendung dieser Drehung auf den Vektor (4.19) verschwinden also genau n Komponenten des transformierten Vektors

$$\frac{1}{\eta} \left(\dot{Q} - \tilde{\omega}_0 \right) |_{I_* \in M_{n;N}}, \quad \text{wobei} \quad \tilde{\omega}_0(I_*) = R(I_*)\omega_0(I_*) \quad (4.22)$$

Die Transformation überführt mithin die Bewegungsgleichungen (4.4) in ein Gleichungssystem mit $m = N - n$ nicht-trivialen Bewegungsgleichungen (o.B.d.A. die ersten m Stück)

[†]gemeint ist die Standardbasis aus $2N$ aufeinander senkrecht stehenden Einheitsvektoren.

[‡]Hier geht ein, daß für Drehmatrizen $R^T = R^{-1}$. Bzgl. des allgemeinen Falls vgl. (C.3) & (C.4).

sowie n weiteren trivialen:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= \dot{\omega}_{0,i}(I_*) + \eta \left(R(I_*) \frac{\partial F}{\partial I_*} G(I_*, R^{-1}(I_*)Q) \right)_i \\ &\text{für } i = 1, \dots, m = N - n, \text{ sowie} \\ \dot{Q}_i &= \dot{\omega}_{0,i}(I_*) \text{ für } i = m + 1, \dots, N\end{aligned}\quad (4.23)$$

Die Bewegungsgleichungen (4.23) gelten auf gekrümmten Hyperflächen $M_{n,N}$ im Wirkungsraum lokal für jeden Punkt I_* . Auf nicht gekrümmten Hyperflächen $M_{n,N}$ ist die Drehmatrix R hingegen überall die gleiche. Ein Beispiel für gekrümmte Hyperflächen und die Bewegungsgleichungen auf den zugehörigen nichtregulären Tori wird im Anhang A.6 gegeben.

● Die Poincaré-Invarianten auf nicht-isolierten nichtregulären Tori

Bezüglich der Poincaré-Invarianten des Flusses auf den nichtregulären Tori, die im Wirkungsraum die Hyperfläche $M_{n,N}$ bilden, findet man dementsprechend, daß $m = N - n$ identisch verschwinden:

$$J_{2k} = 0, \quad k > n \quad (4.24)$$

denn da jedes $I_* \in M_{n,N}$ nur n linear unabhängige Komponenten hat, gilt

$$dI_{i_1} \wedge \dots \wedge dI_{i_k} |_{I_* \in M_{n,N}} = 0 \quad \text{falls } k > n \quad (4.25)$$

Für $k < n$ verschwindet dieses äußere Produkt hingegen im allgemeinen nicht, weil ein Wirkungsvektor $I_* \in M_{n,N}$ mehr als k linear unabhängige Komponenten haben kann. Daher findet man in der Regel n nichtverschwindende Poincaré-Invarianten

$$J_{2k} = \text{const.} \neq 0, \quad k \leq n \quad (4.26)$$

4.3 Fallunterscheidung: Welche Attraktortypen können wo auftreten?

Die Zerlegung der Bewegungsgleichungen auf nichtregulären N -Tori, die im Phasenraum $(N + n)$ - bzw. $(2N - m)$ -dimensionale invariante Hyperflächen bilden, in $m = N - n$ "nicht-triviale" und n "triviale" läßt Schlüsse darauf zu,

- auf welchen dieser invarianten Hyperflächen überhaupt chaotische Attraktoren auftreten können, und ferner
- auf welchen periodische Bewegung (nicht) möglich ist.

Die Tabelle 4.1 gibt einen Überblick über die im Folgenden beschriebenen Fallunterscheidungen.

● Reguläre oder chaotische Attraktoren?

Eine exponentielle Separation verschiedener Trajektorien ist in den n Komponenten, welche trivial-integrablen Gleichungen genügen, ausgeschlossen. Daher verschwinden auf nichtregulären N -Tori, die im Phasenraum $(N + n)$ -dimensionale invariante Hyperflächen bilden, die zugehörigen n Ljapunovexponenten[†] und ergo ist $m = N - n$ die maximale Anzahl nichtverschwindender Ljapunovexponenten. Das Auftreten chaotischer Attraktoren ist aber definitionsgemäß nur möglich, wenn es mindestens zwei nichtverschwindende Ljapunovexponenten gibt, von denen wiederum mindestens einer positiv und deren Summe negativ sein muß. Auf Barrieren können deshalb keine chaotischen Attraktoren vorkommen, weil Attraktoren dort nur auftreten, wenn der eine verbleibende (eventuell) nichtverschwindende Ljapunovexponent negativ ist.

Auf invarianten Hyperflächen mit dieser Art $2N - 2$ Dimensionen, also nur einer weniger als Barrieren, ist das Auftreten seltsamer Attraktoren hingegen möglich, da die trivialen Komponenten in der Regel explizite Zeitabhängigkeiten der beiden nicht-trivialen Bewegungsgleichungen bedingen, und daher im allgemeinen zwei der Ljapunovexponenten nicht verschwinden. Wenn allerdings die beiden nicht-trivialen Gleichungen von den trivialen entkoppelt sind, entfallen die im allgemeinen Fall auftretenden explizit zeitabhängigen Terme in den nicht-trivialen Bewegungsgleichungen. Dann verschwindet ein weiterer Ljapunovexponent, nämlich der zur Bewegungskomponente in Richtung des zweidimensionalen Flusses in den beiden nicht-trivialen Bewegungskomponenten gehörige. Dementsprechend können in diesem Fall nur reguläre Attraktoren auftreten.

Auf nichtregulären N -Tori, die invariante Hyperflächen mit weniger als $2N - 2$ Dimensionen bilden, sind mindestens drei der Bewegungsgleichungen "nicht-triviale", und daher gibt es im allgemeinen immer mindestens zwei (in der Regel $m = N - n$) nichtverschwindende Ljapunovexponenten. Auf diesen invarianten Hyperflächen ist das Auftreten seltsamer Attraktoren daher normalerweise möglich.

● Periodische oder aperiodische Bewegung?

Falls die Bewegungsgleichungen von vornherein in m nicht-triviale und n triviale Gleichungen zerlegt sind, und im System der Bewegungsgleichungen wenigstens zwei triviale Gleichungen auftreten, ist es wichtig zu unterscheiden, ob die zugehörigen Frequenzen kommensurabel sind oder nicht, d.h. ob sie zueinander in rationalen Verhältnissen stehen oder nicht. Die n Frequenzen $\omega_{0,i=m+1,\dots,N}$ der trivialen Bewegungskomponenten sind

- kommensurabel, wenn es n nichtverschwindende ganze Zahlen $k_{i=m+1,\dots,N}$ gibt, so daß

$$k_{m+1}\omega_{0,m+1} + \dots + k_N\omega_{0,N} = 0 \quad \text{und} \quad k_{i=m+1,\dots,N} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (4.27)$$

- inkommensurabel, wenn es keine solche Beziehung gibt.

Falls die Frequenzen der trivialen Bewegungskomponenten inkommensurabel sind, so kann die Bewegung grundsätzlich nicht periodisch sein (also auch auf Attraktoren nicht) – in diesem

[†]In diesem Fall können ausnahmsweise n der N Ljapunovexponenten raumfesten Richtungen zugeordnet werden.

Fallunterscheidungen		Die zulässigen Attraktortypen auf einer aus nichtregulären N -Tori bestehenden invarianten Hyperfläche der Dimension		
		$2N - 1$	$2N - 2$	$2N - m, m \geq 3$
triviale und nicht-triviale Gleichungen entkoppeln	$\tilde{\omega}_0(I_*) = 0$, oder $\tilde{\omega}_0(I_*) \perp M_{n,N}$	Fixpunkte	reguläre	alle
	andernfalls, sofern $R(I_*) = \mathbb{I}$	reguläre [†]	reguläre [†]	alle [†]
$N = m + 1$, oder die Kommensurabilitätsbedingungen (4.27) bzw. (4.29) sind erfüllt		reguläre [†]	alle [†]	alle [†]
und andernfalls ($\Rightarrow N \geq 3$)		reguläre, aber aperiodische	aperiodische	aperiodische

[†]außer Fixpunkten

[†]außer Fixpunkten; auch im Fall $R(I_*) \neq \mathbb{I}$ ist periodische Bewegung
nicht unbedingt ausgeschlossen, vgl. Text.

Tabelle 4.1: Übersicht

Fall kann eine Trajektorie nämlich nie wieder an einen Punkt auf dem N -Torus gelangen, den sie schon einmal erreicht hatte. Andernfalls ist die Bewegung zumindestens in den trivialen Bewegungskomponenten periodisch. Im Anhang A.7 wird gezeigt, daß zur Beschreibung der Bewegung in den m nicht-trivialen Winkelvariablen die Betrachtung der Bewegung auf einem $(m + 1)$ -Torus genügt, sofern die Kommensurabilitätsbedingung (4.27) erfüllt ist.

Wenn die Bewegungsgleichungen aber erst durch eine lineare Transformation in m nicht-triviale und n triviale Gleichungen zerlegt werden müssen, so kann im allgemeinen die Möglichkeit periodischer Bewegung nicht ausgeschlossen werden. Man kann lediglich eine notwendige (aber im Unterschied zum oben betrachteten Fall keineswegs hinreichende) Bedingung angeben, die erfüllt sein muß, damit periodische Bewegung auftreten kann:

Die Abhängigkeit der m nicht-trivialen Bewegungsgleichungen von den n trivialen Komponenten ist im System (4.23) zeitlich periodisch, wenn die Komponenten des Vektors

$$\tilde{\omega} \equiv R^{-1} \left(0, \dots, 0, \tilde{\omega}_{0,m+1}, \dots, \tilde{\omega}_{0,N} \right) \quad (4.28)$$

kommensurabel sind, d.h. wenn es N nichtverschwindende ganze Zahlen $k_{i=1,\dots,N}$ gibt, so daß

$$k_1 \tilde{\omega}_1 + \dots + k_N \tilde{\omega}_N = 0 \quad \text{und} \quad k_{i=1,\dots,N} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (4.29)$$

4.4 Nichtreguläre Barriere-Tori

In diesem Abschnitt fassen wir zunächst die bisher abgeleiteten Resultate über Attraktoren zusammen, welche auf Barrieren vorkommen können, die aus nichtregulären Tori bestehen, und illustrieren dann die aperiodische Bewegung auf einem regulären Attraktor (Beispiel 4.4.a). Anschließend wird gezeigt, daß solche Barrieren auch in der Bewegung geladener Einzelteilchen in räumlich periodischen Feldern auftreten. Exemplarisch werden die Felder angegeben, welche zur Realisierung der Bewegung auf den Barriere-Tori nötig sind, die im Beispiel 4.2 (bzw. im Anhang C) untersucht wurden (Beispiel 4.4.b).

Wie wir gesehen haben, können chaotische Attraktoren auf Barrieren nicht auftreten. Das gilt natürlich auch für den zeitumgekehrten Fluß. Daher kann es auf Barrieren auch auf Repellern keine chaotische Bewegung geben. Insbesondere kann die Bewegung auf den aus nichtregulären Tori bestehenden, dreidimensionalen invarianten Hyperflächen in Systemen mit nur zwei Freiheitsgraden überhaupt kein chaotisches Langzeitverhalten zeigen, da diese invarianten Hyperflächen jedenfalls Barrieren bilden.

Periodische Attraktoren sind auf Barrieren in Systemen mit nur zwei Freiheitsgraden zu erwarten (vgl. die beiden Beispiele 4.1 und 4.2). Auf Barrieren in Systemen mit drei oder mehr Freiheitsgraden können sie nur dann auftreten, wenn die entsprechende Kommensurabilitätsbedingung (4.27) bzw. (4.29) erfüllt ist, wobei im Fall nicht achsenparalleler Barrieren die Kommensurabilitätsbedingung (4.29) nur eine notwendige, aber noch nicht hinreichende Bedingung für die Möglichkeit des Auftretens periodischer Bewegung ist. Andernfalls ist periodische Bewegung, und damit auch das Auftreten periodischer Attraktoren, jedenfalls ausgeschlossen.

Beispiel 4.4.a: Als Beispiel für solche aperiodischen und gleichwohl regulären Attraktoren auf Barrieren betrachten wir die Bewegung auf der (fünfdimensionalen) Barriere eines Systems mit drei Freiheitsgraden. Die dieser Bewegung zugrundeliegenden Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_1 &= \omega_{0,1} + \eta a \sin \Phi_1 \sin \Phi_2 \sin \Phi_3 \\ \dot{\Phi}_2 &= \omega_{0,2} \\ \dot{\Phi}_3 &= \omega_{0,3}\end{aligned}\tag{4.30}$$

wobei $\frac{\omega_{0,2}}{\omega_{0,3}}$ irrational ist.

Die Abbildung 4.2 zeigt zwei Aspekte der Bewegung auf einem Attraktor dieses Systems. Das obere Bild der Abbildung enthält die Projektion einiger Umläufe auf dem Attraktor in die (Φ_1, Φ_2) -Ebene, das untere hingegen einen Poincaré-Schnitt zu einem festen Wert von Φ_3 mod 2π , d.h. mit einem Zeitschritt $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_{0,3}}$. Statt $\frac{1}{\pi} (\Phi_{i=1,2} \bmod 2\pi)$ wurde auf den Achsen $\sin \Phi_{i=1,2}$ aufgetragen. Der Startpunkt ist in beiden Fällen der gleiche. Der Poincaré-Schnitt beweist, daß die Bewegung auf dem Attraktor im dreidimensionalen Raum der Winkel $\Phi_{i=1,2,3}$ auf einer glatten zweidimensionalen Hyperfläche verläuft, wie zu erwarten.[†] Lage und Form

[†]Das Ljapunovspektrum ist von der Form $(0, 0, -)$, daher erwartet man einen 2-Torus, vgl. die Anmerkung auf Seite 32.

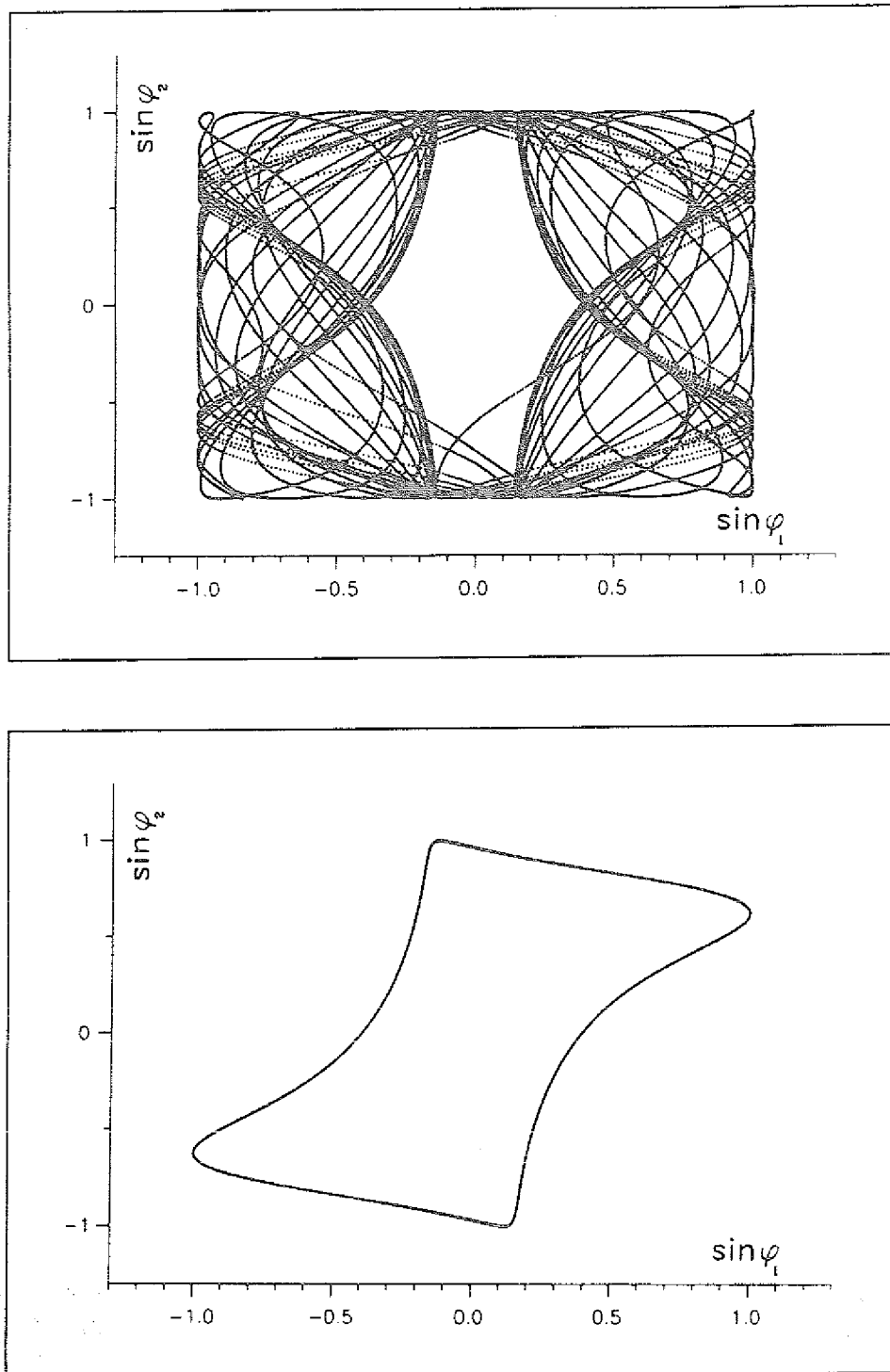


Abb.4.2: Ein regulärer aperiodischer Attraktor auf der zum System (4.30) gehörigen Barriere. Parameter: $\eta = 1$, $a = 5$, $\omega_{0,1} = \frac{2}{3}$, $\omega_{0,2} = 1$, $\omega_{0,3} = \sigma_g$. Der nichtverschwindende Ljapunov-exponent hat den Wert $\lambda_3 = -1.62$; für die Windungszahlen gilt $\nu_{i=1,2,3} \neq 0$. Oberes Bild: Projektion einiger Umläufe auf dem Attraktor in die (Φ_1, Φ_2) -Ebene. Unteres Bild: Poincaréschnitt zu einem festen Wert von $\Phi_3 \bmod 2\pi$, d.h. mit dem Zeitschritt $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_{0,3}}$. Der Startpunkt ist in beiden Fällen der gleiche. Auf den Achsen wurde $\sin \Phi_{i=1,2}$ aufgetragen.

der Kurve im unteren Bild der Abbildung 4.2 hängen natürlich von der Lage des Poincaré-Schnitts ab, d.h. von $\Phi_3(t=0)$. Ebenso gut kann man übrigens einen Poincaré-Schnitt zu einem festen Wert von $\Phi_2 \bmod 2\pi$ machen. •

• Bewegung eines Elektrons auf nichtregulären Barriere-Tori

Bei der Untersuchung eines nichtregulären Torus mit konstanter Richtung der Winkel-Geschwindigkeit im Kapitel 2.4 haben wir gesehen, daß die Hamiltonfunktion der nichtrelativistischen Bewegung geladener Einzelteilchen in räumlich periodischen Feldern folgende Form hat, sofern das elektrische Potential und das magnetische Vektorpotential durch die Beziehung (2.9) verbunden sind:

$$H(I, \Phi) = \sum_{i=1}^3 \int \omega_{0,i}(I_i) dI_i + \eta \left(\bar{\alpha}_1 I_1 + \bar{\alpha}_2 I_2 + \bar{\alpha}_3 I_3 - \bar{\alpha} \cdot I_0 \right) \bar{g}(r(\Phi)) \quad (4.31)$$

Der Zusammenhang zwischen den Wirkungs-Winkel-Variablen und den ursprünglichen Koordinaten und Impulsen ist durch die Beziehungen (2.13) & (2.14) gegeben; $\bar{\alpha}$ und $\bar{g}(\Phi)$ sind durch (2.40) definiert, $r(\Phi)$ durch (2.16) und $\omega_0(I)$ durch (2.17).

Die Hamiltonfunktion (4.31) ist offensichtlich vom Typ (4.1).[†] Der winkelabhängige Term verschwindet auf der Ebene im Wirkungsraum (bzw. Impulsraum), die durch die Beziehung

$$\bar{\alpha}_1 I_{*,1} + \bar{\alpha}_2 I_{*,2} + \bar{\alpha}_3 I_{*,3} = \bar{\alpha} \cdot I_0 \quad (4.32)$$

gegeben ist. Die durch diese Gleichung fixierte invariante Hyperfläche (eine fünfdimensionale Hyperfläche im sechsdimensionalen Phasenraum) bildet natürlich eine Barriere für die Teilchenbewegung – sogar eine echte Barriere, da die durch (4.32) gegebene Ebene den Wirkungsraum in zwei Teile teilt, die nicht durch Trajektorien verbunden werden können.[‡] Die Bewegungsgleichungen auf dieser Barriere lauten[§]

$$\dot{\Phi} = \omega_0(I_*) + \eta \bar{\alpha} \bar{g}(\Phi) \quad (4.33)$$

Falls ein räumlich periodisches Vektorpotential konstanter Richtung keine z -Komponente hat, sind die Barrieren natürlich solche für nichtrelativistische Bewegung geladener Einzelteilchen mit nur zwei Freiheitsgraden (vgl. die Schlußpassage von Kap.2.2). Dementsprechend können die im Beispiel 4.2 (bzw. im Anhang C) betrachteten nichtregulären Barriere-Tori in der

[†]Der winkelabhängige "Störterm" kann ohne weiteres auch als Skalarprodukt geschrieben werden!

[‡]Der im Kap.2.4 betrachtete nichtreguläre Torus tritt, wie wir hier sehen, in der Bewegung geladener Einzelteilchen nicht als isolierter Torus auf, sondern als Teil einer Barriere. Auf den anderen zur Barriere gehörigen Tori ist die Richtung der Winkel-Geschwindigkeit aber nicht konstant, es sei denn, Ω_0 sei wirkungsunabhängig, d.h. das (effektive) ungestörte System ein lineares.

[§]Anderswo ist $\dot{\Phi}$ von der gleichen Form, nur ist dort der Wert der Wirkungsvariablen nicht konstant. Falls eine oder zwei Komponenten des Vektorpotentials verschwinden, sind dementsprechend eine oder zwei dieser Gleichungen triviale. Andernfalls kann man natürlich durch geeignete Drehung der Achsen die Gleichungen in diese Form bringen (vgl. Kap.4.2).

nichtrelativistischen Bewegung eines Elektrons in stationären, räumlich periodischen Feldern auftreten:

Beispiel 4.4.b: Das Vektorpotential

$$-\frac{e}{m}A(\mathbf{r}) = \frac{\eta}{2\pi} \left(x_0 a_x, y_0 a_y, 0 \right) \cos \left(2\pi \frac{x}{x_0} \right) \quad (4.34)$$

führt bei Anlegen eines elektrischen Potentials, welches die Beziehung (2.9) erfüllt, auf die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m} + \frac{\eta}{2\pi} \left(a_x x_0 (P_x - P_{0,x}) + a_y y_0 (P_y - P_{0,y}) \right) \cos \left(2\pi \frac{x}{x_0} \right) \quad (4.35)$$

Als Funktion der Wirkungs-Winkel-Variablen

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2\pi} x_0 P_x \quad \text{und} \quad \Psi_1 = 2\pi \frac{x}{x_0} \\ \text{sowie} \quad J_2 &= \frac{1}{2\pi} y_0 P_y \quad \text{und} \quad \Psi_2 = 2\pi \frac{y}{y_0} \end{aligned} \quad (4.36)$$

ergibt sich

$$H = \int \omega_1(J_1) dJ_1 + \int \omega_2(J_2) dJ_2 + \eta \left(a_x (J_1 - J_{0,1}) + a_y (J_2 - J_{0,2}) \right) \cos \Psi_1 \quad (4.37)$$

mit den wirkungsabhängigen Frequenzen

$$\omega_1 = \frac{4\pi^2}{m} \frac{J_1}{x_0^2} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \frac{4\pi^2}{m} \frac{J_2}{y_0^2} \quad (4.38)$$

Auf der durch die Beziehung

$$a_x J_1 + a_y J_2 = a_x J_{0,1} + a_y J_{0,2} \quad (4.39)$$

definierten Barriere gelten die gleichen Bewegungsgleichungen wie auf der entsprechenden Barriere im linearen System mit der Hamiltonfunktion (C.12). Außerhalb der Barriere ist die Bewegung im nichtlinearen System (4.37) ebenfalls integrabel (wenn auch in der hier gegebenen Koordinatendarstellung nicht durch Quadratur; vgl. Anhang C.1 & C.2), da mit J_2 eine zweite, mit der Hamiltonfunktion vertauschende Invariante gegeben ist. Wenn man H und J_2 als neue Impulsvariable einführt, gelangt man auf dem bekannten Weg (vgl. etwa Berry [Ber78] oder Arnol'd [Arn78]) zu Wirkungs-Winkel-Variablen, in denen die Bewegungsgleichungen die trivial-integrable Form (2.1) annehmen.

Unter den durch die Beziehung (4.39) definierten Barrieren sind solche, für die

$$\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (4.40)$$

gilt. In diesem Fall ergibt sich aus der Beziehung (2.9) das folgende elektrische Potential:

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{m}{e} \eta^2 \frac{x_0^2 a_x^2 + y_0^2 a_y^2}{8\pi^2} \cos^2 \left(2\pi \frac{x}{x_0} \right) \quad (4.41)$$

Die der Teilchenbewegung auf diesen Barriere-Tori zugrundeliegenden elektromagnetischen Felder ergeben sich aus diesen Potentialen zu

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}) &= -\nabla\phi(\mathbf{r}) = -\frac{m}{e}\eta^2 \frac{x_0^2 a_x^2 + y_0^2 a_y^2}{4\pi x_0} \left(\sin\left(4\pi \frac{x}{x_0}\right), 0, 0 \right) \\ B(\mathbf{r}) &= \nabla \times A(\mathbf{r}) = \frac{m}{e}\eta \frac{y_0}{x_0} a_y \left(0, 0, \sin\left(2\pi \frac{x}{x_0}\right) \right) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Diese Felder werden durch folgende stationäre, räumlich periodische Ladungs- und Stromdichten hervorgerufen ($\rightarrow$ (A.12) im Anhang A.1):

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= -\varepsilon_0 \Delta\phi(\mathbf{r}) = -\varepsilon_0 \frac{m}{e} \eta^2 \left\{ a_x^2 + \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 a_y^2 \right\} \cos\left(4\pi \frac{x}{x_0}\right) \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \nabla \times B(\mathbf{r}) = -\frac{m}{e} \eta \frac{y_0}{x_0} 2\pi a_y \left(0, \cos\left(2\pi \frac{x}{x_0}\right), 0 \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Elektrisches und magnetisches Feld stehen im vorliegenden Fall übrigens aus folgendem Grund aufeinander senkrecht: Wenn, wie auf den hier betrachteten Barriere-Tori, $\mathbf{P}_0 \perp \mathbf{A}$, so folgt aus der Beziehung (2.9), daß $\phi \sim A^2$, und daraus ergibt sich im Fall stationärer Felder $\mathbf{E} \parallel \nabla A^2$. Da aber stets $\nabla \times \mathbf{A} \perp \nabla A^2$, folgt $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$. Im stationären Fall vollzieht sich die Bewegung also in gekreuzten Feldern, wenn $\mathbf{P}_0 \perp \mathbf{A}$. $\odot$

Alle bisherigen Betrachtungen lassen sich ohne weiteres auf zeitabhängige Vektorpotentiale anwenden.

• Phasenraumerweiterung ($N \geq 3$)

Auch im Fall zeitabhängiger Felder kann man durch Anlegen eines elektrischen Potentials, welches die Beziehung (2.9) erfüllt, den impuls- bzw. wirkungsunabhängigen Term der Hamiltonfunktion (2.7) stets zum Verschwinden bringen. Falls die Zeitabhängigkeit periodisch oder quasiperiodisch ist, setzt sich die invariante Hyperfläche im erweiterten Phasenraum weiterhin aus Tori zusammen. Die Zeitabhängigkeit eines Vektorpotentials in einem System mit $n_r = 2$ bzw. 3 räumlichen Freiheitsgraden ist quasiperiodisch, wenn[†]

$$A(\Phi) = A\left(\mathbf{r}(\Phi_{i=1,\dots,n_r}), \Phi_{n_r+1,\dots,N}\right) \quad \text{mit} \quad \dot{\Phi}_i = \omega_{0,i} = \text{const.}, \quad i = n_r + 1, \dots, N \quad (4.44)$$

Die Hamiltonfunktion (4.31) hat in Systemen mit zeitabhängigen und räumlich periodischen Vektorpotentialen konstanter Richtung, d.h. vom Typ (2.37), die Form

$$\begin{aligned} H(\mathbf{I}, \Phi) &= \sum_{i=1}^{n_r} \int \omega_{0,i}(I_i) dI_i + \sum_{i=n_r+1}^N \omega_{0,i} I_i \\ &+ \eta \left(\sum_{i=1}^{n_r} \tilde{\alpha}_i I_i - \tilde{\alpha} \cdot \mathbf{I}_0 \right) \tilde{g}\left(\mathbf{r}(\Phi_{l=1,\dots,n_r}), \Phi_{l=n_r+1,\dots,N}\right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Die Einführung zeitlich periodischer Felder führt also nichtreguläre Barriere-Tori in Systemen mit zwei bzw. drei (räumlichen) Freiheitsgraden in nichtreguläre Barriere-Tori von Systemen

[†]Vgl. die Definition quasiperiodischer Funktionen auf Seite 17.

mit drei bzw. vier Freiheitsgraden über. Die Einführung zeitlich quasiperiodischer Felder führt entsprechend auf Barriere-Tori in Systemen mit $N > 3$ bzw. $N > 4$ Freiheitsgraden. Die zusätzlichen *Wirkungsvariablen* sind physikalisch allerdings irrelevant. Die Tori gewinnen in (quasi-)periodisch zeitabhängigen Feldern zusätzliche Dimensionen, von den aus diesen Tori bestehenden invarianten Hyperflächen im erweiterten Phasenraum gilt das nur formal.

4.5 Chaotische Tori auf $(2N-2)$ -dimensionalen invarianten Hyperflächen ($N \geq 3$)

Im folgenden Abschnitt geben wir Systeme mit N Freiheitsgraden an, in deren Phasenraum $(2N-2)$ -dimensionale invariante Hyperflächen auftreten, die aus nichtregulären Tori bestehen, auf denen sich die Bewegungsgleichungen bei geeigneter Skalierung der Parameter auf diejenigen eindimensionaler Oszillatorsysteme reduzieren lassen. Am Beispiel zweier Systeme, deren Bewegungsgleichungen sich so auf diejenigen des Duffing- bzw. des van der Pol - Oszillators reduzieren lassen, untersuchen (und illustrieren) wir ausführlich die Bewegung auf solchen chaotischen Tori, und zwar jeweils im Fall von drei sowie von vier Freiheitsgraden ($N = 3$ bzw. $N = 4$).

Wir zeigen insbesondere, daß tatsächlich die bekannten periodischen und chaotischen Attraktoren des Duffing-Oszillators [Ued79, Sch86] auftreten. Da die Bewegungsgleichungen von vornherein in zwei nicht-triviale einerseits und eine bzw. zwei triviale andererseits zerlegt sind, ist die explizite Zeitabhängigkeit der Bewegungsgleichungen im Fall dreier Freiheitsgrade periodisch, bei vier Freiheitsgraden hingegen quasiperiodisch (mit zwei Basisfrequenzen). Für $N = 4$ treten daher, im Gegensatz zum Fall $N = 3$, keine periodischen Attraktoren (Grenzzyklen) auf, sondern reguläre aperiodische. Mit Hilfe eines Poincaréschnitts kann demonstriert werden, daß diese Attraktoren auf den nichtregulären 4-Tori zweidimensionale Flächen – genauer gesagt 2-Tori – bilden, die beim Übergang zu chaotischen Attraktoren (mit fraktaler Dimension!) “aufbrechen”. Zum Abschluß dieser Untersuchungen weisen wir nach, daß die Bewegung geladener Einzelteilchen in bestimmten räumlich periodischen Feldern auf solchen chaotischen Tori verlaufen kann. Im Fall $N = 3$ können diese Felder (wahlweise) auch stationäre sein – die Attraktoren etwa des periodisch getriebenen Duffing-Oszillators treten also auf nicht-isolierten Tori auf, die sich durch die Bewegung eines Elektrons in stationären Feldern realisieren lassen.

4.5.1 Der Fall $N = 3$ (Attraktoren periodisch getriebener Systeme)

Wir gehen von den Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_1 &= \omega \sin \Phi_2 \\ \dot{\Phi}_2 &= -f_1(\sin \Phi_1) \sin \Phi_2 - f_2(\sin \Phi_1) + \frac{a_1}{\omega} \cos \Phi_3 \\ \dot{\Phi}_3 &= \omega_1\end{aligned}\tag{4.46}$$

aus, die – im Fall $\eta = 1$ – von der Hamiltonfunktion

$$H = (I_1 - I_{0,1})\omega \sin \Phi_2 + \frac{\omega_1 I_3}{\eta} + (I_2 - I_{0,2}) \left(\frac{a_1}{\omega} \cos \Phi_3 - f_1(\sin \Phi_1) \sin \Phi_2 - f_2(\sin \Phi_1) \right) \quad (4.47)$$

hergeleitet werden können. Beim Vergleich dieser Hamiltonfunktion mit der allgemeinen Form (4.1) findet man

$$H_0(I) = \frac{\omega_0 \cdot I}{\eta} \quad \text{mit} \quad \omega_0 = (0, 0, \omega_1) \quad (4.48)$$

Die Bewegungsgleichungen (4.46) gelten auf der eindimensionalen Hyperfläche

$$M_{1,3} = \{(I_{*,1}, I_{*,2}, I_{*,3}) \mid I_{*,i} = I_{0,i}, i = 1, 2\} \quad (4.49)$$

Diese ist eine Gerade parallel zur 3-Achse. Es ist also $N = 3$ und $n = 1$, und die Gesamtheit aller zu $M_{1,3}$ gehörigen invarianten Tori bildet eine vierdimensionale invariante Hyperfläche im sechsdimensionalen Phasenraum. Aus der Bewegungsgleichung für Φ_1 ergibt sich

$$\sin \Phi_2 = \frac{\dot{\Phi}_1}{\omega} \Rightarrow \frac{\ddot{\Phi}_1}{\omega} = \dot{\Phi}_2 \cos \Phi_2 = \dot{\Phi}_2 \operatorname{sgn}(\cos \Phi_2) \sqrt{1 - \frac{\dot{\Phi}_1^2}{\omega^2}} \quad (4.50)$$

Das Vorzeichen von $\cos \Phi_2$ ist immer dann konstant, wenn stets $|\dot{\Phi}_1| < \omega$ gilt. Falls dies gegeben ist, erhalten wir durch Einsetzen der Beziehung (4.50) und der trivialen Lösung $\Phi_3 = \omega_1 t$ in die Bewegungsgleichung für Φ_2 eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in Φ_1 :

$$\ddot{\Phi}_1 = \pm \sqrt{1 - \frac{\dot{\Phi}_1^2}{\omega^2}} \left(-f_1(\sin \Phi_1) \dot{\Phi}_1 - \omega f_2(\sin \Phi_1) + a_1 \cos(\omega_1 t) \right) \quad (4.51)$$

Im Fall $\Phi_2 \approx 0$ ist das positive Vorzeichen einzusetzen. Kann der Wurzelkoeffizient durch eins genähert werden – d.h. im Fall $|\dot{\Phi}_1| \ll \omega$ –, und ist ferner $\Phi_1 \ll 1$ (so daß $\sin \Phi_1 \approx \Phi_1$), dann nimmt diese Differentialgleichung die Form der Gleichung gedämpfter, periodisch getriebener Oszillatoren an:

$$\ddot{\Phi}_1 + f_1(\Phi_1) \dot{\Phi}_1 + \omega f_2(\Phi_1) = a_1 \cos(\omega_1 t) \quad (4.52)$$

In dieser Näherung gilt natürlich $\frac{\dot{\Phi}_1}{\omega} = \Phi_2$.

Beispiel 4.5.a: Setzt man

$$f_1(\sin \Phi_1) = \mu > 0 \quad \text{und} \quad f_2(\sin \Phi_1) = k_H \omega \sin \Phi_1 + \frac{\kappa}{\omega} \sin^3 \Phi_1 \quad (4.53)$$

in die Bewegungsgleichung (4.46) ein, so reduziert sich diese im hier betrachteten Grenzfall auf die Gleichung des periodisch getriebenen Duffing-Oszillators:

$$\ddot{\Phi}_1 + \mu \dot{\Phi}_1 + k_H \omega^2 \Phi_1 + \kappa \Phi_1^3 = a_1 \cos(\omega_1 t) \quad (4.54)$$

Die Lösungen der Duffing-Gleichung sind analytisch ($\rightarrow$ [Ver90]) und numerisch[†] gut untersucht. Neben Grenzyklen wurden auch seltsame Attraktoren beobachtet [Ued79, Sch86][‡], allerdings bei so großen Amplitudenwerten, daß die bei der Herleitung der Gleichung (4.54) gemachten Voraussetzung nicht mehr ohne weiteres erfüllt sind.

Mit einem Skalierungstrick ist es aber gleichwohl möglich, das Verhalten des Duffing-Oszillators im System (4.46) & (4.53) quantitativ zu reproduzieren. Man transformiert – für $|\dot{\Phi}_1| < \omega$ – die Gleichung (4.51) & (4.53)

$$\ddot{\Phi}_1 = \sqrt{1 - \frac{\dot{\Phi}_1^2}{\omega^2}} \left(-\mu \dot{\Phi}_1 - k_H \omega^2 \sin \Phi_1 - \kappa \sin^3 \Phi_1 + a_1 \cos(\omega_1 t) \right) \quad (4.55)$$

auf die neue Variable

$$x = \alpha \Phi_1 \quad (4.56)$$

und betrachtet anschließend den Fall sehr großer Werte des Skalierungsparameters α , für die (in exzellenter Näherung)

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + k_H \omega^2 x + \frac{\kappa}{\alpha^2} x^3 = a_1 \alpha \cos(\omega_1 t) \quad (4.57)$$

gilt. Die Skalierung

$$\kappa = \bar{\kappa} \alpha^2, \quad a_1 = \frac{\bar{a}_1}{\alpha} \quad (4.58)$$

führt dann auf eine der Duffing-Gleichung (4.54) praktisch exakt genügende Größe x .

Wenn man also gemäß der Skalierungsvorschrift (4.58) den periodischen Term abschwächt und den nichtlinearen Term verstärkt, so sollte man im System (4.46) & (4.53) sehr nahe bei $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ für die Variable Φ_1 das Verhalten des Duffing-Oszillators quantitativ reproduzieren können. Die beiden Abbildungen 4.3 und 4.4, berechnet für die Parameterwerte

$$\mu = 0.2, \quad k_H = 1, \quad \bar{\kappa} = 1, \quad \omega = \omega_1 = 1 \quad (4.59)$$

und zwei verschiedene Amplitudenwerte $\bar{a}_1$, entsprechen tatsächlich genau zwei Abbildungen aus der Arbeit von Schmidt [Sch86]. Die Abbildung 4.3 zeigt einen Grenzyklus bei $\bar{a}_1 = 190$, die Abbildung 4.4 hingegen einen seltsamen Attraktor bei $\bar{a}_1 = 55$. Für die Windungszahlen auf dem Torus[§] gilt in beiden Fällen $\nu_1 = \nu_2 = 0$ und $\nu_3 = \omega_1$. Da die Dissipativität μ des Duffing-Oszillators räumlich konstant ist, muß die Summe der Ljapunovexponenten gleich $(-\mu)$ sein^{||}:

$$\sum_{i=1}^{N=3} \lambda_i = -\mu \quad (4.60)$$

Tatsächlich ist diese Beziehung für hinreichend große Werte des Skalierungsparameters α erfüllt – vgl. die Angaben in den Unterschriften der Abbildungen 4.3 und 4.4 –, wodurch die quantitative Übereinstimmung mit Schmidts Resultaten [Sch86] erwiesen ist.

Ohne die Skalierung (4.58) findet man im System (4.46) & (4.53)^{||} bei kleiner Amplitude

[†]siehe [Jac89, Band 1] und [LL83], sowie die darin enthaltenen Verweise auf die Originalarbeiten.

[‡]Ueda [Ued79] untersuchte rein anharmonische Duffing-Oszillatoren ($k_H = 0$).

[§]Vgl. deren Definitionsgleichung (1.1).

^{||}Vgl. die Beziehungen (3.32) & (3.36) im Kap.3.4 sowie die Darstellung (4.103) des Duffing-Systems als Differentialgleichungssystem erster Ordnung im Abschnitt 4.7.

^{||}im Folgenden bezeichnet als "Gleichungssystem der Duffing-Tori ($N = 3$)"

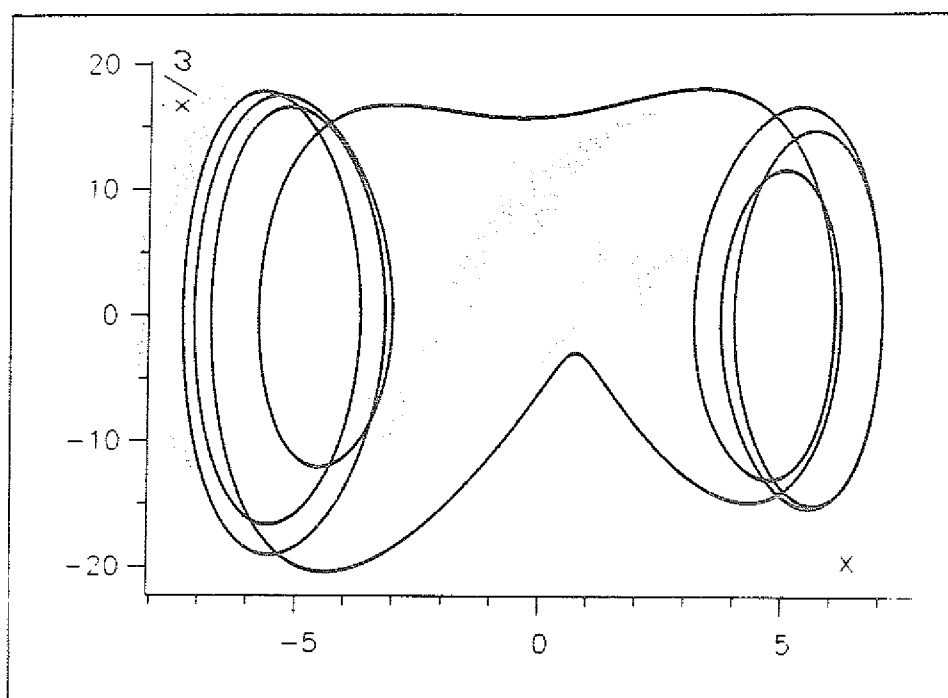


Abb.4.3: Ein Grenzzzyklus im Duffing-System (4.57–59) bei $\bar{a}_1 = 190$. Als Skalierungsparameter wurde $\alpha = 10^{10}$ gewählt. Die Ljapunovexponenten haben dann folgende Werte: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -0.099$, $\lambda_3 = -0.101$ ($\Rightarrow$ die Beziehung (4.60) ist erfüllt, vgl. Text).

(die aber jedenfalls um vieles größer ist als diejenige bei Skalierung!) einen in der (Φ_1, Φ_2) -Ebene um den Ursprung zentrierten Grenzzzyklus, bei größerer Amplitude ($a_1/\omega^2 \approx 0.5$) gelegentlich auch zwei koexistierende Grenzzyklen dieser Art. Die Abbildung 4.5 zeigt einen Periodenverdopplungsübergang eines solchen Grenzzykles¹. Im Resonanzfall $\omega_1 = \omega = 1$ findet man übrigens ausschließlich Grenzzyklen bis in den Bereich, in dem die Amplitude a_1 so groß ist, daß die Windungszahlen $\nu_{i=1,2}$ nicht mehr verschwinden. Bei hinreichend großer Amplitude a_1 findet man neben regulären schließlich stets auch seltsame Attraktoren. ●

Beispiel 4.5.b: Eine andere naheliegende Wahl für die Funktionen $f_{i=1,2}(\sin \Phi_1)$ in der Bewegungsgleichung (4.46) ist

$$f_1(\sin \Phi_1) = -\mu (1 - \sin^2 \Phi_1) \leq 0 \quad \text{und} \quad f_2(\sin \Phi_1) = \omega \sin \Phi_1 \quad (4.61)$$

In dem Grenzfall, für den sich die Bewegungsgleichung (4.46) auf die Oszillatorgleichung (4.52) reduziert, findet man dann die Gleichung des periodisch getriebenen van der Pol-Oszillators[†]:

$$\ddot{\Phi}_1 - \mu (1 - \Phi_1^2) \dot{\Phi}_1 + \omega^2 \Phi_1 = a_1 \cos(\omega_1 t) \quad (4.62)$$

Wenn man das Verhalten des van der Pol-Oszillators im System (4.46) & (4.61) reproduzieren

[†]Historisch ist der van der Pol-Oszillator übrigens das erste dissipative System, in dem "Chaos" beobachtet wurde [CL45] (siehe [Rös83] und besonders [Jac89]).

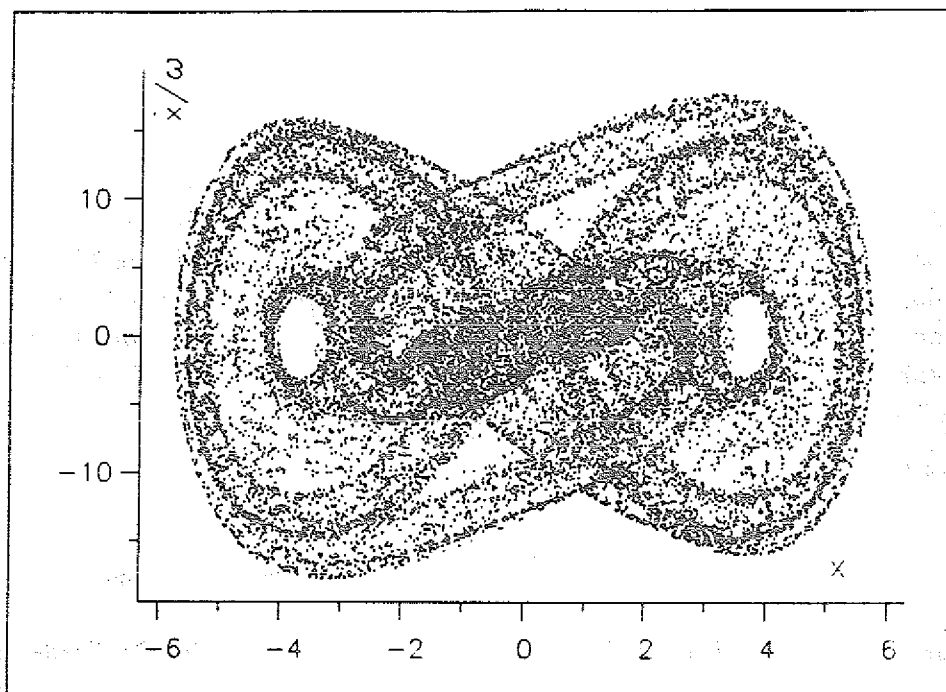
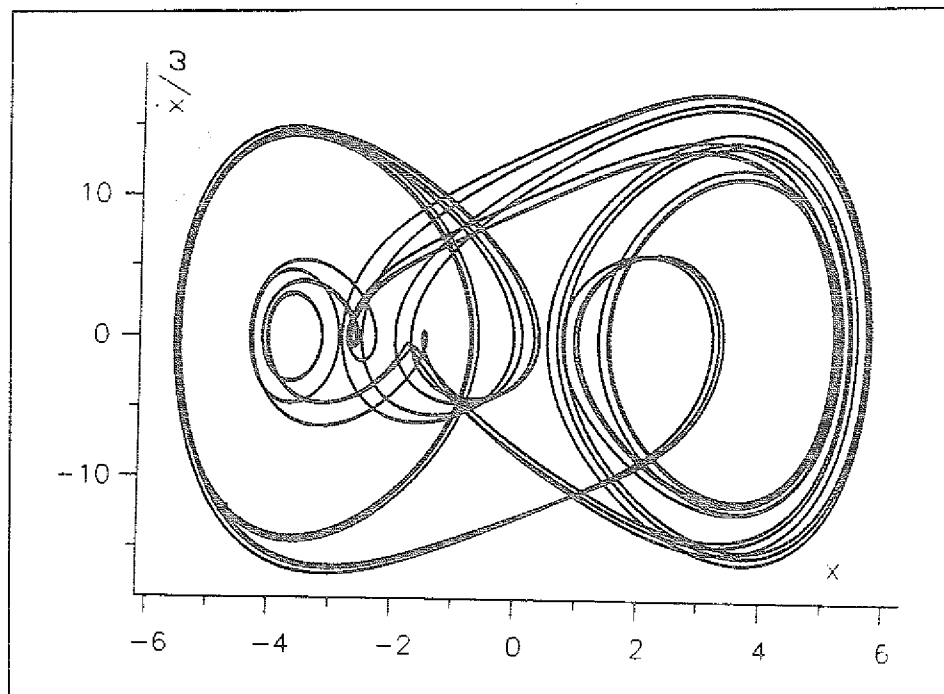


Abb.4.4: Ein seltsamer Attraktor im Duffing-System(4.57-59) bei $\bar{a}_1 = 55$. Einige Umläufe (oben) und ein vollständigeres Bild bei längerer Laufzeit und größerem Zeitschritt (unten). Als Skalierungsparameter wurde $\alpha = 10^{10}$ gewählt. Die Ljapunovexponenten haben dann folgende Werte: $\lambda_1 = 0.097$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -0.297$ ($\Rightarrow$ die Beziehung (4.60) ist erfüllt, vgl. Text).

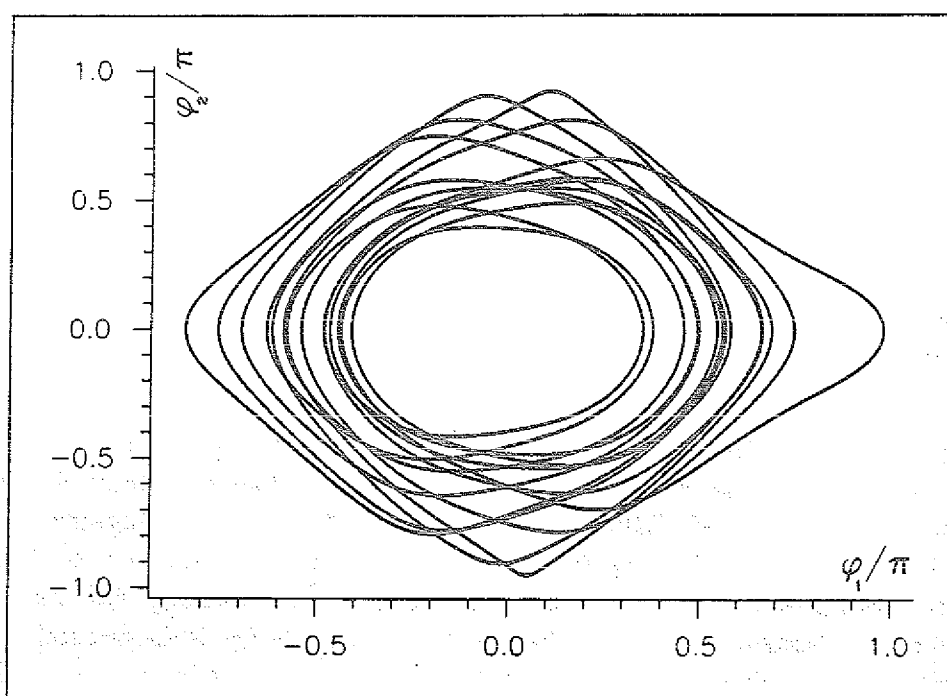
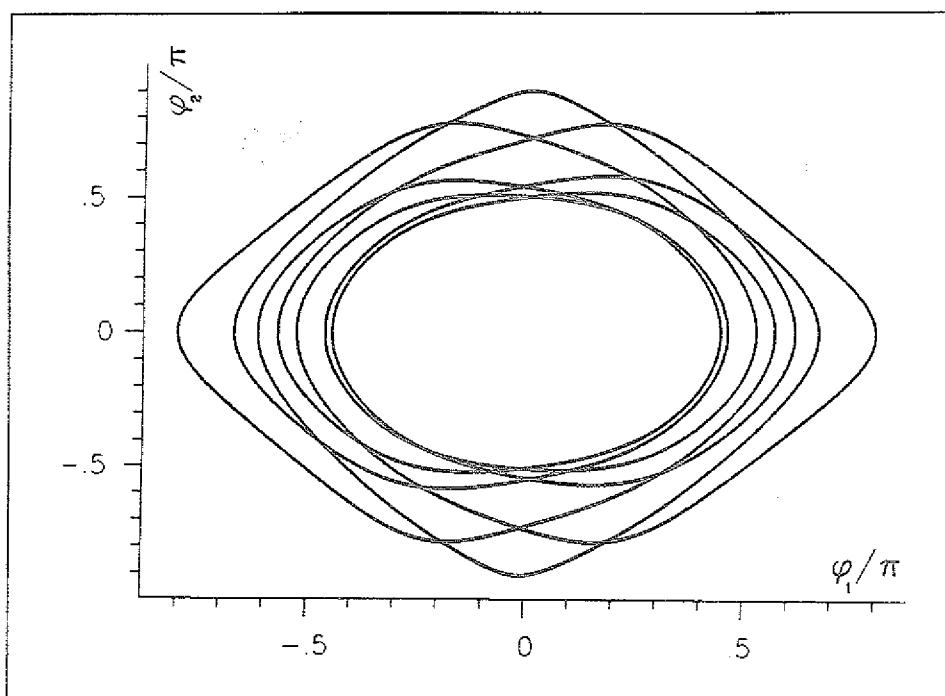


Abb.4.5: Periodenverdopplungsübergang eines Grenzzyklus' auf einem (rein anharmonischen) Duffing-Torus ($N = 3$), dargestellt in Projektion in die (Φ_1, Φ_2) -Ebene. Parameter: $\mu = 0.1$, $k_H = 0$, $\kappa = 1$, $\omega = 1$, $\omega_1 = \sigma_g$, und $a_1 = 0.55$ (oben) bzw. $a_1 = 0.56$ (unten). Windungszahlen: $\nu_1 = \nu_2 = 0$, $\nu_3 = \omega_1$.

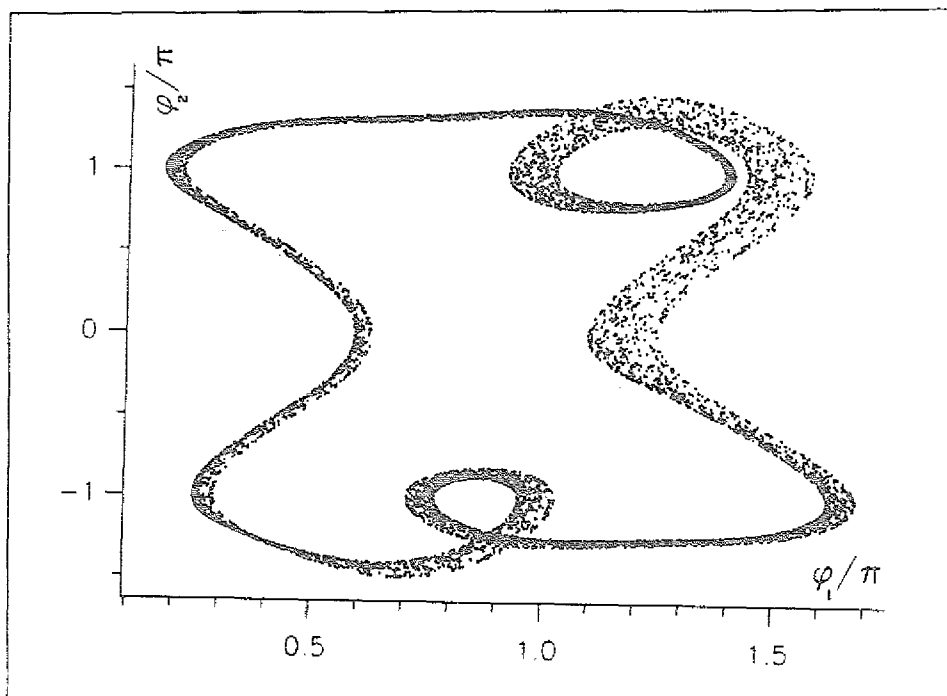


Abb.4.6: Ein seltsamer Attraktor auf einem van der Pol - Torus ($N = 3$), d.h. für das Gleichungssystem (4.46) & (4.61), dargestellt in Projektion in die (Φ_1, Φ_2) -Ebene. Parameter: $\mu = 1$, $\omega = 1$, $\omega_1 = \sigma_g$, $a_1 = 1$. Die Ljapunovexponenten haben die Werte $\lambda_1 = 0.01$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -0.30$, und für die Windungszahlen gilt $\nu_1 = \nu_2 = 0$, $\nu_3 = \omega_1$.

will, ist wiederum eine Skalierung notwendig (die Durchführung ist derjenigen im Duffing-Fall völlig analog).

Nahe $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ stellt der Φ_1 proportionale Term einen Anregungs- statt eines Dämpfungsterms dar. Eine lineare Stabilitätsanalyse zeigt unmittelbar, daß (für $a_1/\omega^2 < 1$) der Fixpunkt nahe $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ein instabiler Fokus, der nahe $\Phi_1 = \Phi_2 = \pi$ hingegen ein stabiler Fokus ist. Die beiden Fixpunkte $(\Phi_1, \Phi_2) = (\pi, 0)$ bzw. $(0, \pi)$ sind hyperbolische Fixpunkte. Im Fall nicht allzu großer Amplitude a_1 ist es daher keine Überraschung, daß alle Trajektorien (außer bei sorgfältiger Wahl der Skalierung!) sehr rasch in der Nähe des stabilen Fokus bei $(\Phi_1, \Phi_2) = (\pi, \pi)$ anlangen und dort verbleiben. Wiederum findet man Grenzzyklen – bei etwas größeren Amplituden a_1 auch mehrere koexistierende –, welche wie gesagt in der (Φ_1, Φ_2) -Ebene alle um $(\Phi_1, \Phi_2) = (\pi, \pi)$ zentriert sind. Mit zunehmender Amplitude a_1 gibt es wiederum mehr und mehr chaotische Attraktoren, wobei die Windungszahlen $\nu_{i=1,2}$ im allgemeinen, d.h. bei hinreichend großer Amplitude a_1 , nicht verschwinden. Die Abbildung 4.6 zeigt aber die Projektion eines seltsamen Attraktors, welcher in der (Φ_1, Φ_2) -Ebene nicht den ganzen Torus umspannt, sondern um $(\Phi_1, \Phi_2) = (\pi, 0)$ zentriert ist. ●

4.5.2 Der Fall $N > 3$ (Attraktoren quasiperiodisch getriebener Systeme)

Erweitert man die Hamiltonfunktion (4.47) um einen additiven Term $\omega_2 I_4$, und somit den Phasenraum um zwei weitere Dimensionen, so genügt die hinzukommende Winkelvariable Φ_4 (genau wie Φ_3) einer trivialen Bewegungsgleichung. Für jeden Term $\omega_{i-2} I_{i \geq 4}$, den man der Hamiltonfunktion (4.47) hinzufügt, gewinnt der Phasenraum zwei Dimensionen, die invariante Hyperfläche aber auch, da die Zahl der nicht-trivialen Gleichungen unverändert (bei zwei) bleibt. Wenn man nun für jede hinzutretende Winkelvariable $\Phi_{i \geq 4}$ der Bewegungsgleichung (4.46) für Φ_2 einen Term $a_{i-2} \cos(\Phi_{i \geq 4})$ hinzufügt, so gelangt man zu dem System

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_1 &= \omega \sin \Phi_2 \\ \dot{\Phi}_2 &= \sum_{j=1}^{N-2} \frac{a_j}{\omega} \cos(\Phi_{j+2}) - f_1(\sin \Phi_1) \sin \Phi_2 - f_2(\sin \Phi_1) \\ \dot{\Phi}_i &= \omega_{i-2} \quad \text{mit } i = 3, \dots, N\end{aligned}\tag{4.63}$$

welches sich im Grenzfall $\Phi_{i=1,2} \ll 1$ auf folgendes System reduziert (s.o.):

$$\begin{aligned}\ddot{\Phi}_1 + f_1(\Phi_1)\dot{\Phi}_1 + \omega f_2(\Phi_1) &= \sum_{j=1}^{N-2} a_j \cos(\omega_j t + \Phi_{j+2}(t=0)) \\ \text{mit } \frac{\dot{\Phi}_1}{\omega} &= \Phi_2 \quad \text{und} \quad \Phi_i = \omega_{i-2} t + \Phi_i(t=0) \quad \text{für } i = 3, \dots, N\end{aligned}\tag{4.64}$$

In dieser Näherung genügt Φ_1 der Gleichung eines gedämpften, quasiperiodisch getriebenen Oszillators, sofern die Frequenzen $\omega_{i \geq 1}$ inkomensurabel sind.

Im erweiterten Phasenraum der im vorhergehenden Abschnitt beispielhaft besprochenen Duffing- und van der Pol - Tori findet man bei kleinen Amplituden $a_{j \geq 1}$ aperiodische Attraktoren, deren Ljapunovspektrum die Form $(0, 0, -, -)$ hat.

Beispiel 4.5.c: Die Abbildungen 4.7 und 4.8 zeigen einen solchen regulär-aperiodischen Attraktor des Gleichungssystems der van der Pol - Tori ($N = 4$). Beide nichtverschwindenden Ljapunovexponenten sind negativ (sie differieren um weniger als ein Promille):

$$\lambda_3 \approx \lambda_4 = -0.23\tag{4.65}$$

Die Abbildung 4.8 enthält im oberen Bild die Projektion einiger Umläufe auf dem Attraktor in den Unterraum der Winkel $\Phi_{i=1,2,3}$, während die beiden Bilder der Abbildung 4.7 zwei Projektionen des gleichen Attraktors in die (Φ_1, Φ_2) -Ebene zeigen, wobei sehr viel größere Zeitschritte gewählt wurden. Das untere Bild der Abbildung 4.8 enthält die Projektion der Bewegung auf dem Attraktor in den Unterraum (Φ_1, Φ_2, Φ_3) , aber mit dem gleichen Zeitschritt wie im unteren Bild der Abbildung 4.7. Der Vergleich mit dem oberen Teil der Abbildung 4.8 macht deutlich, daß die beiden Darstellungen des Attraktors in der Abbildung 4.7 – unbeschadet ihres ästhetischen Reizes – die Bewegung auf dem Attraktor nur sehr bedingt widerspiegeln.

Die große Ellipse im unteren Bild der Abbildung 4.8 stellt einen Poincaréschnitt zu einem festem Wert von $\Phi_4 \bmod 2\pi$ dar. Da ein Poincaréschnitt die Dimension um eins reduziert,

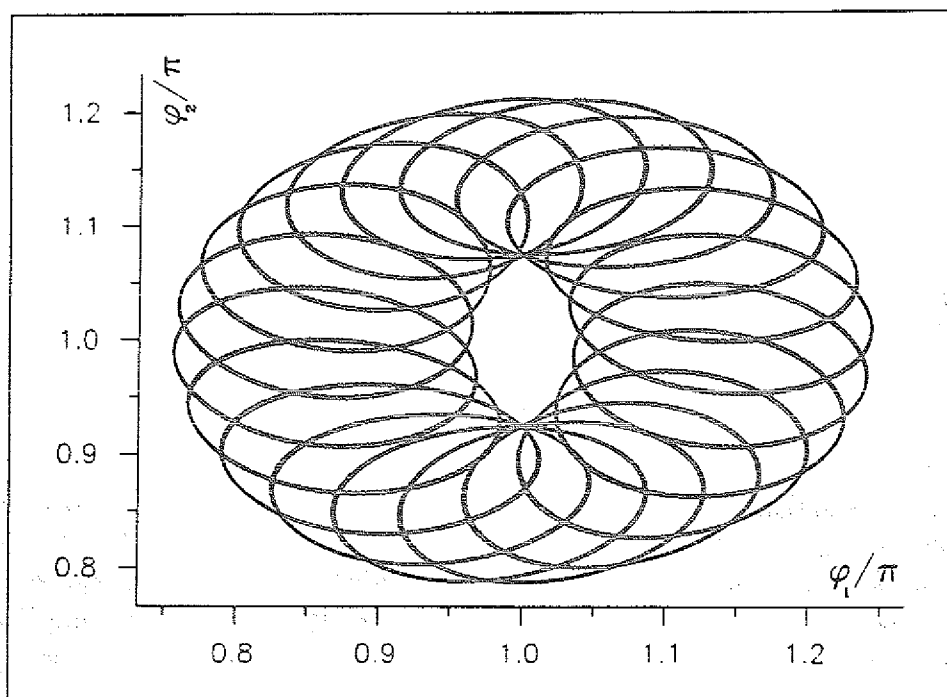
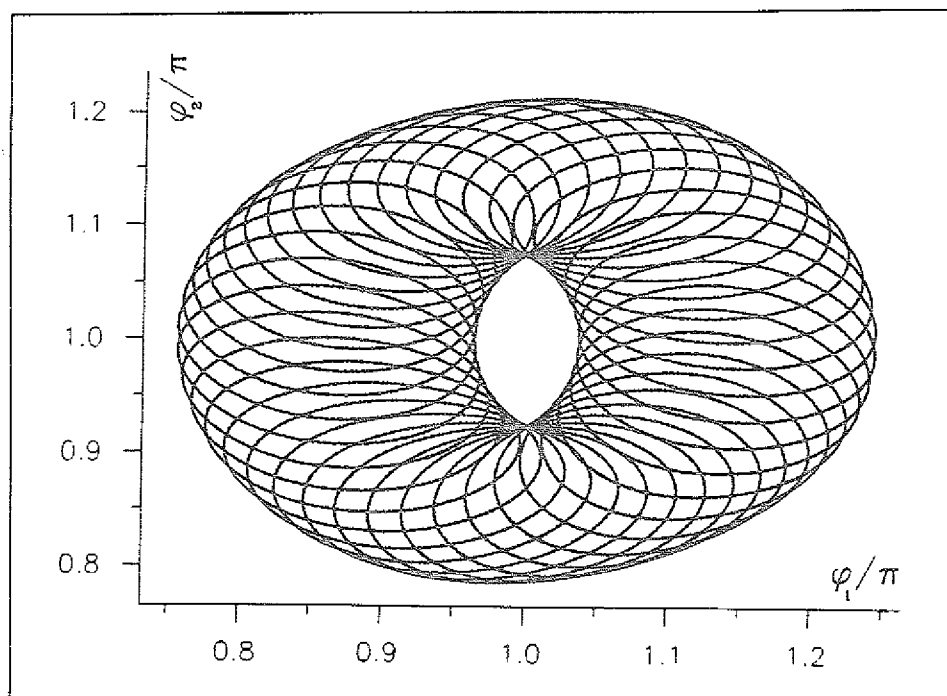


Abb.4.7: Ein regulärer aperiodischer Attraktor auf einem van der Pol - Torus ($N = 4$). Parameter: $\mu = 0.5$, $\omega = \omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sigma_g$, $a_1 = a_2 = 0.2$. Laufzeit $T = 2500$ und Zeitschritt $\Delta t = 0.15708$ (oben) sowie $T = 8000$, $\Delta t = 0.31416$ (unten).

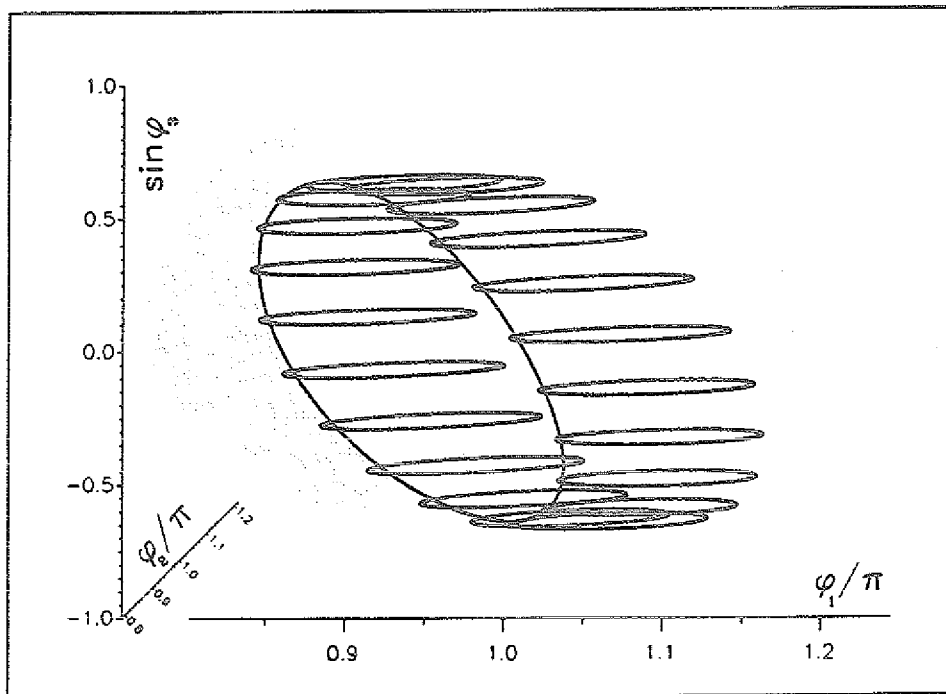
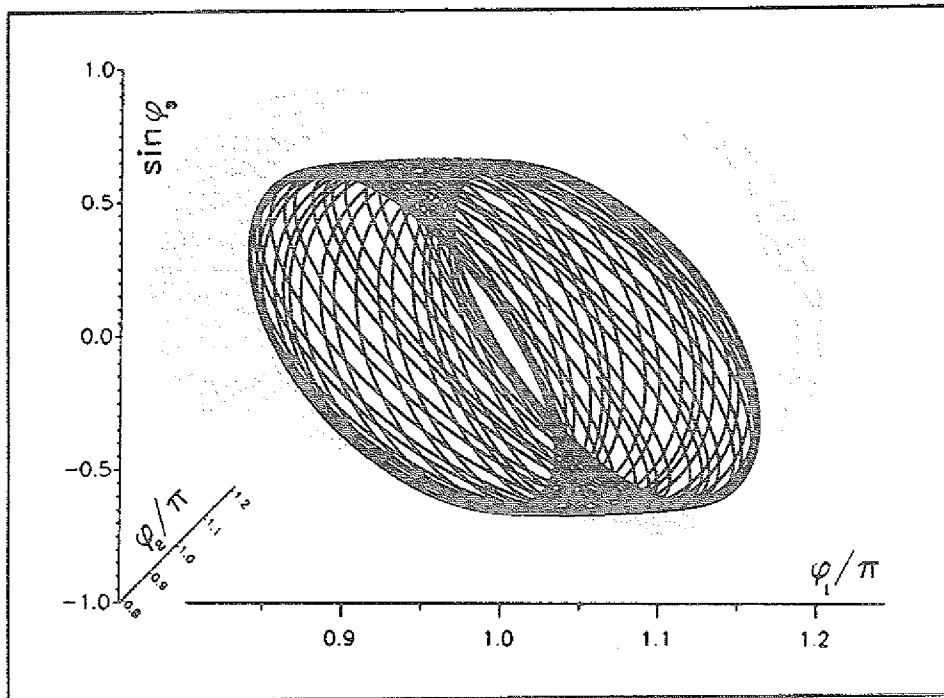


Abb.4.8: Alternative Darstellungen des in der Abb.4.7 gezeigten regulär-aperiodischen Attraktors. Pseudo-3d-Plots der Projektion einiger Umläufe auf dem Attraktor in den Unterraum (Φ_1, Φ_2, Φ_3) (oberes Bild) und eines Poincaréschnitts zu einem festen Wert von $\Phi_4 \bmod 2\pi$, d.h. mit dem Zeitschritt $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_2}$, auf dem Hintergrund einer Projektion des Attraktors in den Unterraum (Φ_1, Φ_2, Φ_3) mit dem Zeitschritt $\Delta t = 0.31416$ (unteres Bild). Vgl. Text.

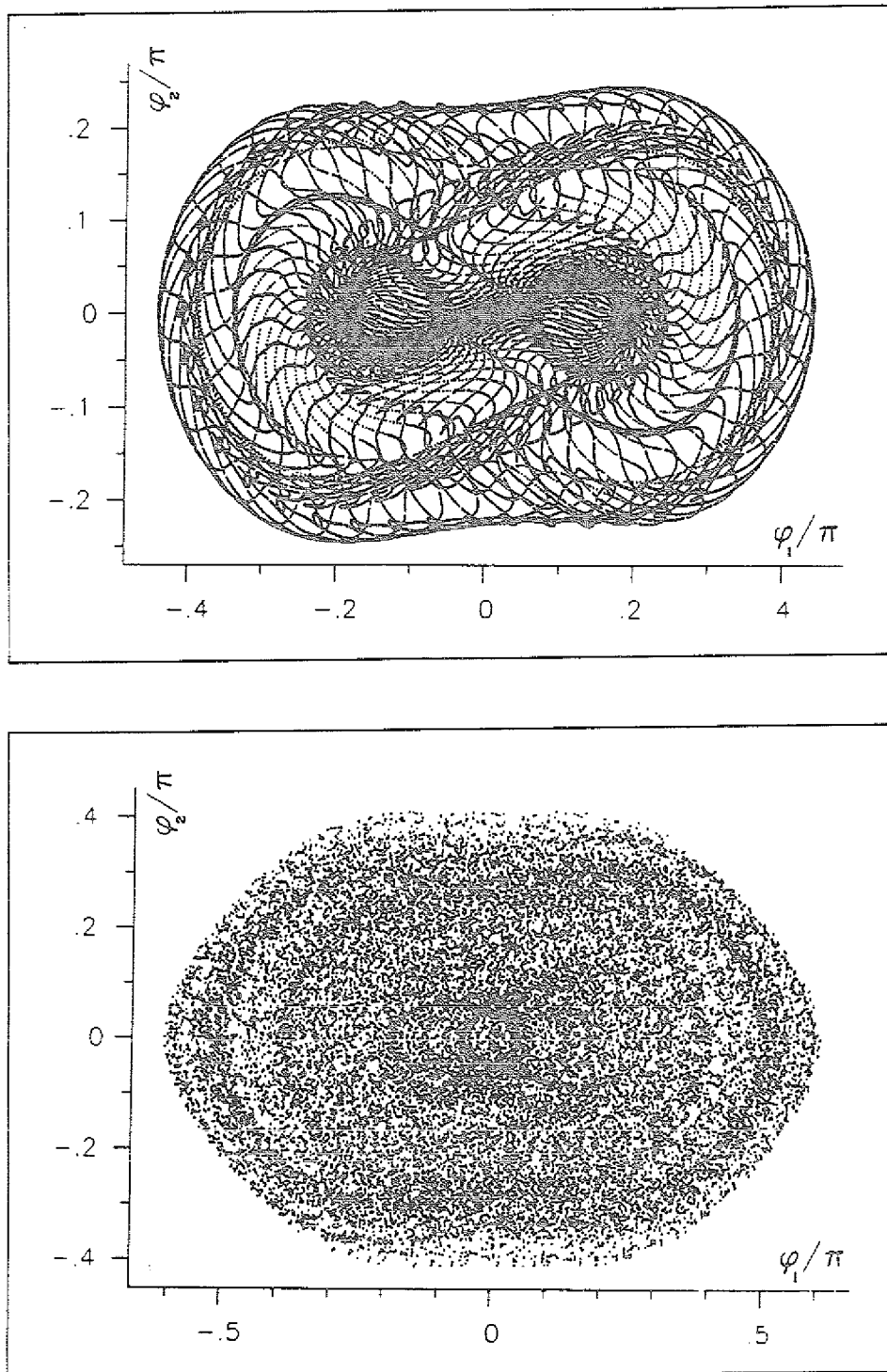


Abb.4.9: Übergang eines regulär-aperiodischen in einen chaotischen Attraktor auf einem Duffing-Torus ($N = 4$), dargestellt in Projektion in die (φ_1, φ_2) -Ebene. Parameter: $\mu = 0.1$, $k_H = 0$, $\kappa = 1$, $\omega = 1$, $\omega_1 = \sigma_g$, $\omega_2 = \sigma_g^2$ und (oben) $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0.2$ sowie (unten) $a_1 = 0.1625$, $a_2 = 0.2$. Laufzeit $T = 25000$ (oben) bzw. $T = 12500$ (unten); Zeitschritt $\Delta t = 0.5$. Zugehörige (nichtverschwindende) Ljapunovexponenten: $\lambda_3 = -0.04$, $\lambda_4 = -0.06$ für den oberen Attraktor bzw. $\lambda_1 = 0.01$, $\lambda_4 = -0.09$ für den unteren Attraktor.

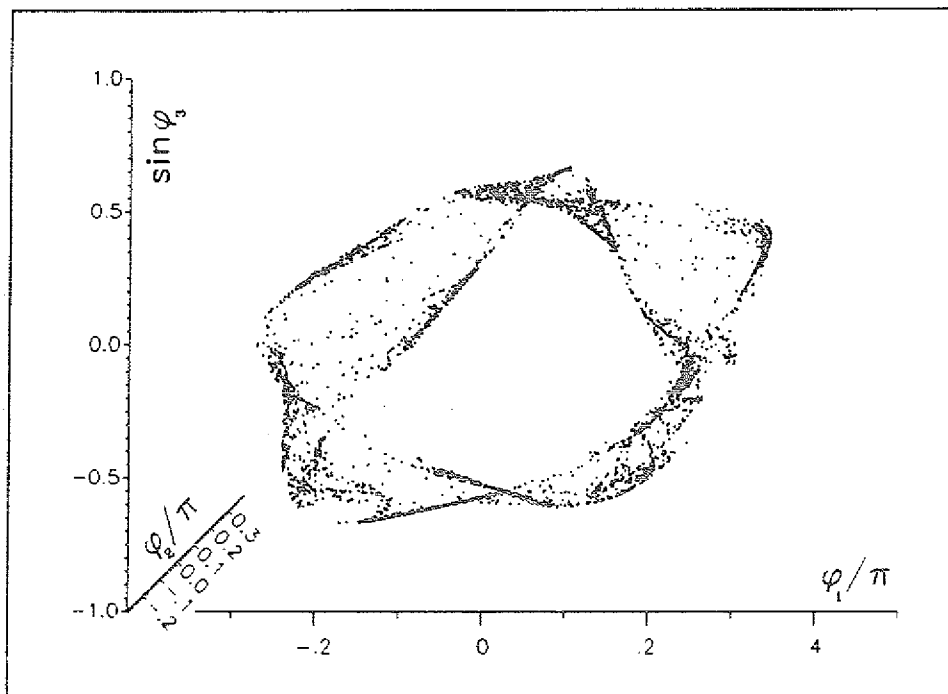
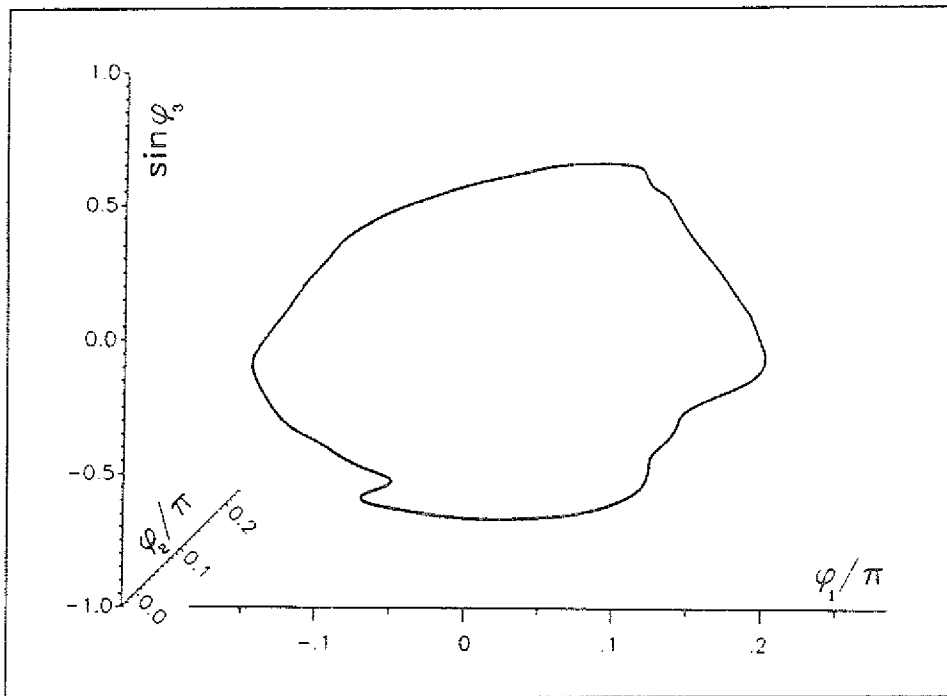


Abb.4.10: Wie Abb.4.9, – auch die Amplituden $a_{i=1,2}$ sind in gleicher Weise dem oberen bzw. unteren Bild zugeordnet – aber Darstellung als Poincaréschnitt mit dem Zeitschritt $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_2}$, d.h. zu einem festen Wert von Φ_4 .

kann man aus der Tatsache, daß man eine Kurve findet, schließen, daß der Attraktor eine zweidimensionale Hyperfläche auf dem 4-Torus bildet. Offenbar handelt es sich um einen 2-Torus. Angesichts eines Ljapunovspektrums der Form $(0, 0, -, -)$ war das eigentlich auch zu erwarten. Natürlich liefert ein Poincaréschnitt zu einem festen Wert von $\Phi_3 \bmod 2\pi$ ebenfalls eine solche Kurve. $\odot$

Bei größeren Amplituden $a_j \geq 1$ findet man außer diesen regulär-aperiodischen Attraktoren schließlich mehr und mehr chaotische. Vielfach beobachtet man ausschließlich reguläre Attraktoren bis in den Bereich, in dem Windungszahlen $\nu_{i=1,2}$ wegen der Größe der Amplituden längst nicht mehr verschwinden.

Beispiel 4.5.d: Es gibt aber auch Fälle, in denen chaotisches Verhalten schon bei relativ kleinen Amplituden auftritt. Die Abbildung 4.9 zeigt – in der Projektion der Bewegung in die (Φ_1, Φ_2) -Ebene – den Übergang eines regulär-aperiodischen Attraktors auf einem Duffing-Torus ($N = 4$) zu einem seltsamen Attraktor, wobei für die Windungszahlen jeweils $\nu_1 = \nu_2 = 0$ gilt. Die Abbildung 4.10 enthält die zugehörigen Poincaréschnitte mit dem Zeitschritt $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_2}$, d.h. zu konstantem $\Phi_4 \bmod 2\pi$ (anders als im unteren Bild der Abbildung 4.8 aber ohne Projektion des Attraktors). Im regulären Fall ergibt dieser Poincaréschnitt – wie auch derjenige zu konstantem $\Phi_3 \bmod 2\pi$ – eine geschlossene Kurve. Die Bewegung auf dem regulären Attraktor findet also wiederum auf einem 2-Torus statt. Beide Kurven sind aber schon deutlich weniger glatt als diejenige in der Abbildung 4.8, wo der Attraktor noch weiter vom Übergang zum Chaos entfernt war als der hier betrachtete. Der untere Teil der Abbildung zeigt, daß beim Übergang zu chaotischer Bewegung auf dem Attraktor der Torus "aufbricht" – seltsame Attraktoren haben nun einmal eine fraktale Struktur. Im Sinne der Kaplan-Yorkeschen Vermutung (3.37) gilt $d_f \approx 3.1$. $\odot$

4.5.3 Bewegung eines Elektrons auf solchen chaotischen Tori

Wie wir oben (im Abschnitt 4.4.2) gesehen haben, kann die nichtrelativistische Bewegung geladener Einzelteilchen auf nichtregulären Tori verlaufen, die Teil einer Barriere sind, wenn das Vektorpotential räumlich periodisch ist und eine konstante Richtung hat. Wir zeigen nun, daß sich ein nichtrelativistisch bewegtes Elektron auch auf nichtregulären Tori bewegen kann, die $(2N - 2)$ -dimensionale invariante Hyperflächen bilden, falls sich das räumlich periodische Vektorpotential als Summe zweier Anteile mit verschiedener, aber jeweils konstanter Richtung darstellen läßt, d.h. falls

$$A(\mathbf{r}) = \alpha_1 \tilde{A}_1(\mathbf{r}) + \alpha_2 \tilde{A}_2(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad \tilde{A}_{j=1,2}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_{i=1,2,3}) = \tilde{A}_{j=1,2}(\mathbf{r}), \quad (4.66)$$

$\mathbf{r}_{i=1,2,3} \text{ aus (2.12)}$

Die obigen Überlegungen lassen sich direkt übertragen. Man gelangt auf diese Weise zur Hamiltonfunktion

$$H(I, \Phi) = \sum_{i=1}^3 \int \omega_{0,i}(I_i) dI_i + \eta \sum_{j=1}^2 \left(\tilde{\alpha}_{j1} I_1 + \tilde{\alpha}_{j2} I_2 + \tilde{\alpha}_{j3} I_3 - \tilde{\alpha}_j \cdot I_0 \right) \tilde{g}_j(\mathbf{r}(\Phi)) \quad (4.67)$$

wobei

$$\tilde{g}_j(\mathbf{r}(\Phi)) = - \frac{e}{m} \cdot \frac{2\pi}{\eta} \tilde{A}_j(\mathbf{r}(\Phi)), \quad j = 1, 2 \quad (4.68)$$

Der Zusammenhang zwischen den Wirkungs-Winkel-Variablen und den ursprünglichen Koordinaten und Impulsen ist wieder durch die Beziehungen (2.13) & (2.14) gegeben; $\bar{\alpha}_{j=1,2}$ ist wie in (2.40) definiert, $r(\Phi)$ durch (2.16) und $\omega_0(I)$ durch (2.17).

Der winkelabhängige Term der Hamiltonfunktion (4.67) verschwindet auf einer Geraden, die als Schnitt folgender Ebenen

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_{11}I_{*,1} + \bar{\alpha}_{12}I_{*,2} + \bar{\alpha}_{13}I_{*,3} &= \bar{\alpha}_1 \cdot I_0 \\ \bar{\alpha}_{21}I_{*,1} + \bar{\alpha}_{22}I_{*,2} + \bar{\alpha}_{23}I_{*,3} &= \bar{\alpha}_2 \cdot I_0\end{aligned}\quad (4.69)$$

gegeben ist.[†] Diese Gleichungen fixieren eine vierdimensionale invariante Hyperfläche im sechsdimensionalen Phasenraum. Die Bewegungsgleichungen auf dieser invarianten Hyperfläche lauten

$$\dot{\Phi} = \omega_0(I_*) + \eta \bar{\alpha}_1 \bar{g}_1(r(\Phi)) + \eta \bar{\alpha}_2 \bar{g}_2(r(\Phi)) \quad (4.70)$$

Falls eine Komponente des Vektorpotentials verschwindet, ist eine dieser drei Bewegungsgleichungen eine triviale. Andernfalls läßt sich diese Form wiederum durch geeignete Drehung der Achsen erreichen (vgl. Kap.4.2).

Beispiel 4.5.e: Wir definieren eine Gerade im Wirkungsraum durch Wahl folgender Konstanten:

$$\bar{\alpha}_{11} = \bar{\alpha}_{22} = 1, \bar{\alpha}_{12} = \bar{\alpha}_{21} = \bar{\alpha}_{13} = \bar{\alpha}_{23} = 0 \quad \text{und} \quad I_{0,1} = I_{0,2} = 0 \quad (4.71)$$

Das Vektorpotential setzt sich dann aus zwei Feldern (gleicher räumlicher Periode) zusammen, von denen das eine parallel zu x -Achse, das andere hingegen parallel zur y -Achse gerichtet ist. Da $P_{0,x} = P_{0,y} = 0$ gilt, muß man folgende Anfangsbedingungen wählen, um Teilchen auf den in diesem Beispiel betrachteten nichtregulären Tori plazieren zu können:

$$p_x = -e\bar{A}_1(r(\Phi)), \quad p_y = -e\bar{A}_2(r(\Phi)) \quad (4.72)$$

Die z -Komponente des Newtonschen Impulses ist hingegen frei, da $P_{0,z}$ jeden beliebigen Wert annehmen kann und $A_z = 0$. Auf der durch die obigen Konstanten festgelegten Hyperfläche bzw. Geraden ist die "ungestörte" Frequenz gegeben durch

$$\omega_0(0, 0, I_{*,3}) = \left(0, 0, \frac{4\pi^2}{mz_0^2} I_{*,3} \right) \quad (4.73)$$

Das Vektorpotential (4.66) definieren wir durch folgende Skalarfelder (4.68):

$$\begin{aligned}\bar{g}_1(\Phi) &= \omega \sin \Phi_2 \\ \text{und} \quad \bar{g}_2(\Phi) &= \mu (1 - \sin^2 \Phi_1) \sin \Phi_2 - \omega \sin \Phi_1 + \frac{a}{\omega} \cos \Phi_3\end{aligned}\quad (4.74)$$

[†]Die Ebenen schneiden sich jedenfalls; für $\alpha_1 = \alpha_2$ liegt der oben behandelte Fall eines Vektorpotentials konstanter Richtung vor.

Für $\eta = 1$ nehmen die Bewegungsgleichungen (4.70) in diesen Feldern (das zugehörige elektrische Feld ist wie stets durch die Beziehung (2.9) festgelegt) auf der oben definierten Hyperfläche im Wirkungs- bzw. Phasenraum die folgende Form an:

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_1 &= \omega \sin \Phi_2 \\ \dot{\Phi}_2 &= \mu (1 - \sin^2 \Phi_1) \sin \Phi_2 - \omega \sin \Phi_1 + \frac{a}{\omega} \cos \Phi_3 \\ \dot{\Phi}_3 &= \omega_{0,3}(I_{*,3})\end{aligned}\quad (4.75)$$

Das sind gerade die Bewegungsgleichungen (4.46) & (4.61), welche im Beispiel 4.5.b (Seite 77) betrachtet wurden. Nahe $\Phi_{i=1,2} = 0$ können sie durch Skalierung auf das van der Pol - System reduziert werden.

Ein Elektron kann sich also im Rahmen unseres elektromagnetischen Modells auf nicht-isolierten chaotischen Tori bewegen - und dort auf wohlbekannten chaotischen Attraktoren wie denen des van der Pol - Oszillators (oder auch denen des Duffing-Oszillators). Falls die Attraktoren solche periodisch getriebener Oszillatoren sind (d.h. für $N = 3$), können die zur Realisierung der Bewegung benötigten elektromagnetischen Felder stationäre sein. Es wäre allerdings genauso gut möglich, die Abhängigkeit der Bewegungsgleichungen von Φ_3 als periodische Zeitabhängigkeit zu interpretieren. Dann gilt nicht nur $A_z = 0$, sondern das Vektorpotential ist periodisch zeitabhängig und vom Typ (2.20), d.h. mit verschwindender z -Komponente sowie x - sowie y -Komponenten, die nicht von z (aber periodisch von t) abhängen. Die Bewegungsgleichungen beschreiben dann die Bewegung eines geladenen Einzelteilchens mit nur zwei räumlichen Freiheitsgraden in periodisch zeitabhängigen Feldern. $\odot$

Auch hier lassen sich alle Betrachtung ohne weiteres auch auf zeitabhängige Felder ausdehnen.

$\odot$ Phasenraumerweiterung ($N > 3$)

Die Hamiltonfunktion (4.67) nimmt in Systemen mit $n_r = 2$ bzw. 3 räumlichen Freiheitsgraden sowie quasiperiodisch zeitabhängigen[†] und räumlich periodischen Vektorpotentialen, die sich durch lineare Superposition zweier Anteile konstanter Richtung ergeben - d.h. solchen vom Typ (4.66) -, die folgende Form an:

$$\begin{aligned}H(I, \Phi) &= \sum_{i=1}^{n_r} \int \omega_{0,i}(I_i) dI_i + \sum_{i=n_r+1}^N \omega_{0,i} I_i \\ &+ \eta \sum_{j=1}^2 \left(\sum_{i=1}^{n_r} \tilde{\alpha}_{ji} I_i - \tilde{\alpha}_j \cdot I_0 \right) \cdot \tilde{g}_j \left(\tau(\Phi_{i=1,\dots,n_r}), \Phi_{i=n_r+1,\dots,N} \right)\end{aligned}\quad (4.76)$$

Die Einführung zeitlich periodischer Felder führt also

- $\odot$ nichtreguläre Tori, welche im sechsdimensionalen Phasenraum von Systemen mit drei räumlichen Freiheitsgraden vierdimensionale invariante Hyperflächen bilden, in Tori über, die im achtdimensionalen Phasenraum von Systemen mit vier Freiheitsgraden sechsdimensionale invariante Hyperflächen bilden;

[†]vgl. (4.44)

- einen im vierdimensionalen Phasenraum eines Systems mit zwei räumlichen Freiheitsgraden isolierten nichtregulären 2-Torus in einen 3-Torus auf einer aus gleichartigen Tori bestehenden, vierdimensionalen invarianten Hyperflächen im sechsdimensionalen Phasenraum eines Systems mit drei Freiheitsgraden über.[†]

Die Einführung zeitlich quasiperiodischer Felder führt entsprechend auf $(2N-2)$ -dimensionale invariante Hyperflächen im Phasenraum von Systemen mit $N > 4$ (falls $n_r = 3$) bzw. $N > 3$ (falls $n_r = 2$) Freiheitsgraden. Die zusätzlichen *Wirkungsvariablen* sind (wie im Fall der Barriere-Tori unseres elektromagnetischen Modells) physikalisch bedeutungslos.

4.6 Chaotische Tori auf $(2N-m)$ -dimensionalen invarianten Hyperflächen ($m \geq 3$)

Es ist offensichtlich unmöglich, auf einer aus chaotischen Tori bestehenden, $(2N-2)$ -dimensionalen invarianten Hyperfläche chaotische Tori vom Rössler- oder Lorenz-Typ zu finden, da der Vektor $\frac{1}{\eta}(\dot{\Phi} - \omega_0) |_{I_*} \in M_{N-2;N}$ nur zwei linear unabhängige Komponenten hat.[‡] Invariante Hyperflächen, die aus chaotischen Tori bestehen, welche von Gleichungssystemen mit drei oder mehr linear unabhängigen und nicht-trivialen Gleichungen hergeleitet wurden, haben daher immer weniger als $2N-2$ Dimensionen (s.o.). Das folgende Beispiel zeigt, daß man seltsame Attraktoren vom Rössler- oder Lorenz-Typ auf $(2N-3)$ -dimensionalen invarianten Hyperflächen im Phasenraum finden kann.

Beispiel 4.6.a: Wenn die Bedingung (4.2) auf der Ebene

$$M_{2;5} = \{(I_{*,1}, I_{*,2}, I_{*,3}, I_{*,4}, I_{*,5}) \mid I_{*,i} = I_{0,i}, i \leq 3\} \quad (4.77)$$

in einem fünfdimensionalen Wirkungsraum erfüllt werden soll, nehmen Hamiltonfunktionen des Typs (4.1) folgende Form an:

$$H(I, \Phi) = H_0(I) + \eta(I_1 - I_{0,1}, I_2 - I_{0,2}, I_3 - I_{0,3}, 0, 0) \cdot G(I, \Phi) \quad (4.78)$$

Die Trajektorien mit Wirkungen auf dieser Hyperfläche $M_{2;5}$ genügen daher den folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\Phi_k' = \frac{\omega_{0,k}}{\eta} + G_k(I_{0,1}, I_{0,2}, I_{0,3}, I_4, I_5; \Phi), \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.79)$$

$$\Phi_k' = \frac{\omega_{0,k}}{\eta}, \quad k = 4, 5 \quad (4.80)$$

Wählt man nun etwa Funktionen $G_{i=1,2,3}$, die von $I_{k=4,5}$ sowie $\Phi_{k=4,5}$ unabhängig sind – letzteres läßt sich auch durch $\omega_{0,k=4,5} = 0$ erreichen –, so sind die Bewegungsgleichungen (4.79) denen auf den im vorhergehenden Kapitel betrachteten isolierten chaotischen Tori äquivalent,

[†]Übrigens ist für ein geladenes Teilchen mit zwei räumlichen Freiheitsgraden der Bewegung auf einem solchen isolierten nichtregulären Torus stets eine (die dritte) Impulskomponente frei wählbar.

[‡]Siehe die Beziehungen (4.18) und (4.19).

d.h. man kann auf der rechten Gleichungsseite von (4.79) etwa die rechten Gleichungsseiten von (3.40) oder (3.57) einsetzen und findet die dort beschriebenen Attraktoren dann auf allen zur zweidimensionalen Hyperfläche $M_{2,3}$ im fünfdimensionalen Wirkungsraum gehörigen Tori, d.i. auf einer siebendimensionalen invarianten Hyperfläche im zehndimensionalen Phasenraum. •

Dieses Beispiel läßt sich ohne weiteres verallgemeinern. Man geht von einem m -dimensionalen chaotischen Torus in einem $2m$ -dimensionalen Phasenraum aus. Der Fluß auf diesem isolierten chaotischen Torus ist durch Bewegungsgleichungen charakterisiert, welche (auf die gleiche Weise wie in Kapitel 3.1 bzw. Anhang A.3) durch "Periodisierung" eines m -dimensionalen Gleichungssystems gewonnen wurden. Dann ergänzt man die Hamiltonfunktion durch Addition des Terms $\sum_{j=m+1}^N \omega_{0,j} I_j$, d.h. man erweitert den Phasenraum (wie im vorhergehenden Abschnitt) um $n = N - m$ Dimensionen, wobei die neuen Wirkungskomponenten konstant sind und die neuen Winkel trivialen Bewegungsgleichungen genügen. Wenn man die bisherigen Bewegungsgleichungen nicht ändert, so findet man nun auf allen Tori auf der $(N - m)$ -dimensionalen Hyperfläche im Wirkungsraum

$$M_{N-m;N} = \{(I_{*,1}, \dots, I_{*,m}, I_{*,m+1}, \dots, I_{*,N}) \mid I_{*,i} = I_{0,i}, i \leq m\} \quad (4.81)$$

in den m Variablen $\Phi_{i=1,\dots,m}$ die gleiche Bewegung wie auf dem ursprünglichen isolierten chaotischen Torus. Alle Attraktoren, die auf diesem Torus gefunden wurden, treten nun also auf einer $(2N - m)$ -dimensionalen invarianten Hyperfläche im $2N$ -dimensionalen Phasenraum auf.

Modifiziert man allerdings die Bewegungsgleichungen in den m ursprünglichen Winkeln $\Phi_{i=1,\dots,m}$, indem man Abhängigkeiten von den hinzutretenden Winkeln $\Phi_{i=m+1,\dots,N}$ zuläßt, so läuft das, wie wir bereits gesehen haben, i.a. auf die Einführung periodischer bzw. quasiperiodischer Terme in diesen Gleichungen hinaus.

Bevor wir nicht-isolierte nichtreguläre Tori betrachten, auf denen das System der Bewegungsgleichungen mehr als drei nicht-triviale Komponenten hat ($m \geq 4$), bleiben wir zunächst noch beim Fall dreier nicht-trivialer Bewegungsgleichungen ($m = 3$). Man kann nämlich räumlich periodische und zeitlich (quasi-)periodische Felder angeben, in denen die nichtrelativistische Bewegung geladener Einzelteilchen auf 3-Tori verläuft, die im $2N$ -dimensionalen Phasenraum $(2N - 3)$ -dimensionale invariante Hyperflächen bilden.

Beispiel 4.6.b: Wie im Kapitel 2.2 gezeigt wurde, läßt sich (im Prinzip) die Bewegung auf beliebigen, isolierten nichtregulären 3-Tori durch die nichtrelativistische Bewegung geladener Einzelteilchen in stationären, räumlich periodischen Feldern realisieren. Im Kapitel 3.5 ist beispielhaft das Vektorpotential für den Fall des Rössler-Torus angegeben worden. In den beiden vorhergehenden Abschnitten wurde demonstriert, daß sich für speziell gewählte Vektorpotentiale alle bisherigen Betrachtungen auch anwenden lassen, wenn man periodische oder quasiperiodische Zeitabhängigkeiten zuläßt. Dies gilt aber auch im Fall beliebiger räumlich periodischer Vektorpotentiale:

Durch Anlegen eines elektrischen Potentials, welches die Beziehung (2.9) erfüllt, kann der impuls- bzw. wirkungsunabhängige Term der Hamiltonfunktion (2.7) stets zum Verschwinden gebracht werden. Isolierte nichtreguläre Tori in Systemen mit stationären Feldern (und

$n_r = 2$ bzw. 3 räumlichen Freiheitsgraden) verwandeln sich bei Einführung periodischer oder quasiperiodischer Zeitabhängigkeiten in invariante Hyperflächen, die aus nichtregulären Tori bestehen. Die Hamiltonfunktion hat dann die Form

$$H(I, \Phi) = \sum_{i=1}^{n_r} \int \omega_{0,i}(I_i) dI_i + \sum_{i=n_r+1}^N \omega_{0,i} I_i + \eta \sum_{i=1}^{n_r} (I_i - I_{0,i}) G_i(\Phi) \quad (4.82)$$

Die Wirkungs-Winkel-Variablen sind für $i = 1, \dots, n_r$ natürlich wieder durch die Beziehungen (2.13) und (2.14) gegeben. Für $i \geq n_r + 1$ sind die Winkel durch die quasiperiodische Zeitabhängigkeit der Felder (4.44) definiert, und die Wirkungen sind die zu diesen Winkeln kanonisch konjugierten Variablen (sie haben allerdings keine physikalische Bedeutung). Die Wirkungsabhängigkeit der ersten zwei bzw. drei Frequenzkomponenten ist durch (2.17) gegeben. G hängt mit dem Vektorpotential weiterhin über eine Beziehung der Form (2.18) zusammen, wobei das Vektorpotential aber von der Form (4.44) ist.

Ausgehend von stationären, räumlich periodischen Feldern, in denen die nichtrelativistische Bewegung geladener Einzelteilchen mit geeignetem (kanonischen) Impuls Wert auf einem isolierten 3-Torus[†] verläuft, gelangt man also durch Einführung periodischer bzw. quasiperiodischer Zeitabhängigkeiten zu Systemen mit $N = 4$ bzw. $N > 4$ Freiheitsgraden, deren $2N$ -dimensionaler Phasenraum eine $(2N - 3)$ -dimensionale invariante Hyperfläche enthält, die aus nichtregulären Tori besteht. Die Subtori im Unterraum der Winkel $\Phi_{i=1,2,3}$ sind aber nicht Duplikate des ursprünglichen nichtregulären Torus, da die drei nicht-trivialen Bewegungsgleichungen nun periodische bzw. quasiperiodische Zeitabhängigkeiten enthalten. $\odot$

Es ist auch weiter nicht schwierig, nichtreguläre Tori in Systemen mit N Freiheitsgraden anzugeben, auf denen die Bewegungsgleichungen mehr als drei nicht-triviale Komponenten haben ($m \geq 4$):

Beispiel 4.6.c: Es liegt nahe, etwa zwei der im vorhergehenden Abschnitt betrachteten Oszillatoren bzw. Gleichungssysteme vom Typ (4.46) zu koppeln:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_1 &= \omega_1 \sin \Phi_2 \\ \dot{\Phi}_2 &= -f_1(\sin \Phi_1) \sin \Phi_2 - f_2(\sin \Phi_1) + \frac{a_1}{\omega_1} \cos \Phi_5 + g_1(\Phi_1, \Phi_3) \\ \dot{\Phi}_3 &= \omega_3 \sin \Phi_4 \\ \dot{\Phi}_4 &= -f_3(\sin \Phi_3) \sin \Phi_4 - f_4(\sin \Phi_3) + \frac{a_2}{\omega_3} \cos \Phi_6 + g_2(\Phi_1, \Phi_3) \\ \eta \dot{\Phi}_5 &= \omega_2 \\ \eta \dot{\Phi}_6 &= \omega_4 \end{aligned} \quad (4.83)$$

Dabei müssen die Kopplungsterme $g_{i=1,2}(\Phi_1, \Phi_3)$ natürlich 2π -periodisch in Φ_1 und Φ_3 sein. Wenn N_O die Zahl der Oszillatoren ist, so findet man Gleichungen vom Typ (4.83) auf einer invarianten Hyperfläche der Dimension $N + N_O = 2(N - N_O)$ – die Dimension der Hyperfläche im Wirkungsraum ist bei periodischem Antrieb der Oszillatoren $n = N_O$, und für je zwei

[†]Der Fall isolierter Tori in Systemen mit zwei räumlichen Freiheitsgraden wurde bereits im Abschnitt 4.5.3 besprochen.

nicht-triviale Bewegungsgleichungen gibt es eine triviale. Es gilt also $N = 3N_O$, und bei Phasenraumerweiterung nach obigem Muster (d.h. Übergang zu quasiperiodisch getriebenen Oszillatoren) $N > 3N_O$.

Betrachten wir die Kopplung zweier "periodisierter" van der Pol - Oszillatoren (4.46) & (4.61) durch Kopplungsterme

$$g_1(\Phi_3) = \beta \sin \Phi_3 \quad \text{und} \quad g_3(\Phi_1) = \beta \sin \Phi_1 \quad (4.84)$$

so führt eine Skalierung[†] nahe $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ auf die linear gekoppelten van der Pol - Oszillatoren, deren Attraktoren Battelino et al. [Bat88, BGO89] untersucht haben. In diesem System werden die Oszillatoren zwar phasenverschoben, aber mit der gleichen Frequenz angetrieben:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - \nu(1 - x_1^2) \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \epsilon x_1^3 &= \beta x_2 + \gamma \sin t \\ \ddot{x}_2 - \nu(1 - x_2^2) \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \epsilon x_2^3 &= \beta x_1 + \gamma \sin(t + 0.25) \end{aligned} \quad (4.85)$$

Daher genügt für diesen Fall auch eine triviale Gleichung im System (4.83).

Natürlich lassen sich auch mehr als zwei Oszillatorsysteme auf diese Art koppeln. Man kann eventuell nur einige von ihnen mit "Antrieb" versehen. Letzterer kann ggf. quasiperiodisch erfolgen und für jeden Oszillator andere Frequenzen enthalten. Wie das Beispiel 4.5.e gezeigt hat, kann unter den einen solchen Oszillator "treibenden" Termen auch einer sein, der statt von der Zeit periodisch von einer Ortskoordinate abhängt. $\odot$

4.7 Attraktoren (quasi-)periodisch getriebener Systeme auf nicht-isolierten Tori

Zu Anfang des dritten Kapitels wurde gezeigt, daß – und wie – man zu jedem vorgegebenen Attraktor endlicher Ausdehnung eines beliebigen autonomen Differentialgleichungssystems ein Hamiltonsches System angeben kann, in dessen Phasenraum ein isolierter invarianter Torus vorkommt, auf dem dieser Attraktor ursprungsnah auftritt. Dieses Verfahren läßt sich (mit geringfügigen Modifikationen) auch auf nicht-autonome dissipative Systeme mit periodischer oder quasiperiodischer Zeitabhängigkeit anwenden, d.h. auf Systeme der Form

$$\dot{x} = f(x; \omega_1 t, \dots, \omega_n t) \quad (4.86)$$

beziehungsweise[‡]

$$\dot{x} = f(x; \Psi_1, \dots, \Psi_n) \quad \text{mit} \quad \dot{\Psi}_j = \omega_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.87)$$

wobei $f(x; \dots, \Psi_j, \dots) = f(x; \dots, \Psi_j + 2k\pi, \dots)$, $k \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, n$

Die explizite Zeitabhängigkeit kann in diesen Systemen also durch die Einführung von n Winkelvariablen $\Psi_{j=1, \dots, n}$ eliminiert werden, die sich zeitlich linear entwickeln.[§]

[†]Wie im Beispiel 4.5.a – zur Durchführung im allgemeinen Fall vgl. auch Abschnitt 4.7.

[‡]Vgl. die Definition quasiperiodischer Funktionen auf Seite 17.

[§]Nicht-autonome Systeme mit nicht nur periodischer oder quasiperiodischer Zeitabhängigkeit können zwar durch Einführung einer zusätzlichen Variablen in lediglich periodisch oder quasiperiodisch zeitabhängige transformiert werden. Auf solche Systeme ist das Verfahren aber nicht anwendbar – vgl. die Anmerkung auf Seite 25.

Das für isolierte nichtreguläre Tori entwickelte Verfahren muß bei Anwendung auf Systeme vom Typ (4.87) lediglich in zweierlei Hinsicht verallgemeinert werden:

- 1) Da Systeme vom Typ (4.87) von jeder der n Winkelvariablen 2π -periodisch abhängen, erübrigt sich natürlich deren Ersetzung im "Periodisierungsschritt", in welchem die m übrigen Variablen gemäß der Vorschrift (3.5)

$$x_i \rightarrow \alpha \sin \left(\frac{x_i}{\alpha} \right), \quad i = 1, \dots, m \quad (4.88)$$

ersetzt werden. Damit das nach der "Periodisierung" resultierende System der Bewegungsgleichungen auf den invarianten Tori sich im Limes $\eta \rightarrow \infty$ & $x_i/\alpha \rightarrow 0$ ($i = 1, \dots, m$) wiederum auf das Ausgangssystem (4.87) reduziert, muß die allgemeine Hamiltonfunktion (4.1) leicht modifiziert werden:

$$H = \frac{H_0(I; \eta)}{\eta} + F(I) \cdot G(I, \Phi) \quad \text{bzw.} \quad H = H_0(I; \eta) + \eta F(I) \cdot G(I, \Phi) \quad (4.89)$$

$$\text{mit}^\dagger \quad H_0(I; \eta) = \sum_{i=1}^m \int \omega_{0,i}(I_{k=1,\dots,m}) dI_i + \eta \sum_{i=m+1}^{N=m+n} \omega_{i-m} I_i$$

- 2) Im Unterschied zu isolierten nichtregulären Tori muß zur Festlegung des Störanteils H_1 der Hamiltonfunktion (4.89) neben dem Vektorfeld $G(\Phi)$ auch das Vektorfeld $F(I)$ spezifiziert werden, d.h. die Hyperfläche im Wirkungsraum, auf der H_1 verschwindet.

Das System (4.87)

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_{k=1,\dots,m}; \Psi_{k=1,\dots,n}), \quad i = 1, \dots, m \\ \dot{\Psi}_j &= \omega_j, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.90)$$

geht bei "Periodisierung" gemäß der Vorschrift (4.88) über in

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i \left(\alpha \sin \left(\frac{x_{k=1,\dots,m}}{\alpha} \right); \Psi_{k=1,\dots,n} \right), \quad i = 1, \dots, m \\ \dot{\Psi}_j &= \omega_j, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.91)$$

[†] Ohne Modifikation des ungestörten Anteils der Hamiltonfunktion, d.h. für $H_0(I) \equiv H_0(I; \eta = 1)$, reduzieren sich die Bewegungsgleichungen auf den Tori im Limes $\eta \rightarrow \infty$ & $x_i/\alpha \rightarrow 0$ ($i = 1, \dots, m$) nicht auf das Ausgangssystem (4.87), sondern auf ein autonomes. Die Bewegung im Ausgangssystem kann allerdings im Limes $x_i/\alpha \rightarrow 0$ ($i = 1, \dots, m$) stets durch folgende Parameterwahl reproduziert werden: $\omega_{0,i=1,\dots,m} = 0$ & $\eta = 1$ (s.u.).

Im Rahmen unseres elektromagnetischen Modells bedeutet die obige η -Abhängigkeit des "ungestörten" Terms der Hamiltonfunktion (4.89), daß die Basisfrequenzen der (quasi-)periodischen Zeitabhängigkeit des elektromagnetischen Feldes – vgl. die Beziehung (4.44) – in gleicher Weise von η abhängen wie die Feldstärke. Ein η -abhängiges H_0 ist also zwar nicht direkt unphysikalisch, aber allenfalls bedingt sinnvoll. (Der Übergang zu einem η -unabhängigen H_0 kann in den folgenden Ableitungen jederzeit leicht durchgeführt werden, indem man in den Gleichungssystemen (4.98) und (4.106) die Frequenzen $\omega_{j=1,\dots,n}$ durch ω_j/η ersetzt.)

Nun substituieren wir

$$\Phi_i = \frac{x_i}{\alpha}, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.92)$$

und benennen die bisherigen Winkelvariablen $\Psi_{j=1, \dots, n}$ um in

$$\Phi_{m+j} \equiv \Psi_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.93)$$

So erhalten wir das System

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_i &= \frac{1}{\alpha} f_i(\alpha \sin \Phi_{k=1, \dots, m}; \Phi_{k=m+1, \dots, N}), \quad i = 1, \dots, m \\ \dot{\Phi}_i &= \omega_{i-m}, \quad i = m+1, \dots, N = m+n \end{aligned} \quad (4.94)$$

Wir identifizieren die rechte Gleichungsseite der ersten m Komponenten dieses Systems mit den entsprechenden Komponenten des Vektorfeldes $G(\Phi)$, welches in die allgemeine Hamiltonfunktion (4.89) eingeht:

$$G_i(\Phi) = \frac{1}{\alpha} f_i(\alpha \sin \Phi_{k=1, \dots, m}; \Phi_{k=m+1, \dots, N}), \quad i = 1, \dots, m \quad (4.95)$$

Wenn wir für das Vektorfeld $F(I)$

$$\begin{aligned} F_i(I) &= I_i - I_{0,i}, \quad i = 1, \dots, m \\ \text{sowie} \quad F_i(I) &= 0, \quad i = m+1, \dots, N = m+n \end{aligned} \quad (4.96)$$

einsetzen, gelten auf der n -dimensionalen Hyperebene

$$M_{n;N} = \{I_* \mid I_{*,k} = I_{0,k}, \quad k = 1, \dots, m\} \quad (4.97)$$

folgende Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_i &= \frac{\omega_{0,i}(I_{*,k=1, \dots, m})}{\eta} + \frac{1}{\alpha} f_i(\alpha \sin \Phi_{k=1, \dots, m}; \Phi_{k=m+1, \dots, N}), \quad i = 1, \dots, m \\ \dot{\Phi}_i &= \omega_{i-m}, \quad i = m+1, \dots, N = m+n \end{aligned} \quad (4.98)$$

Dieses System tendiert im Limes

$$\Phi_i = \frac{x_i}{\alpha} \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.99)$$

gegen das ursprüngliche System (4.90), wenn gleichzeitig

$$\eta \rightarrow \infty \quad \text{oder (alternativ!)} \quad \omega_{0,i=1, \dots, m}(I_{*,k=1, \dots, m}) = 0 \quad \text{und} \quad \eta = 1 \quad (4.100)$$

• Beispiel: "Duffing-Tori" ($N = 3$ und $N = 4$)

Wir demonstrieren das Verfahren nun am Beispiel eines periodisch oder quasiperiodisch getriebenen Oszillatorsystems vom Duffing-Typ[†]:

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + k_H \omega^2 x + \bar{k} x^3 = \bar{a}_1 \cos(\omega_1 t) + \bar{a}_2 \cos(\omega_2 t) \quad (4.101)$$

[†]Wir verwenden hier die gleiche Notation wie im Beispiel 4.5.a und versehen daher die Variablen $\bar{k}$ und $\bar{a}_{j=1,2}$ mit Querstrichen. k_H ist entweder gleich 0 oder gleich 1.

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung wird mit den Substitutionen

$$x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv \frac{\dot{x}_1}{\omega} \quad \text{und} \quad \Psi_j \equiv \omega_j t, \quad j = 1, 2 \quad (4.102)$$

in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung vom Typ (4.87) überführt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\mu}{\omega} \cdot \dot{x}_1 - k_H \omega x_1 - \frac{\bar{\kappa}}{\omega} x_1^3 + \sum_{j=1}^2 \frac{\bar{a}_j}{\omega} \cos \Psi_j \\ \dot{\Psi}_j &= \omega_j, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.103)$$

Falls ω_1 und ω_2 inkomensurabel sind, erfolgt der Antrieb quasiperiodisch ($\omega_{i=1,2}$ sind dann die Basisfrequenzen). Andernfalls hat das System (4.103) die Periode $T = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$, wobei $\bar{\omega}$ das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Frequenzen $\omega_{i=1,2}$ ist, und hängt dann nur von einer Winkelvariablen $\bar{\Psi}$ mit $\bar{\Psi} = \bar{\omega} t$ ab, wobei $\bar{\Psi}_i = \frac{\omega_i}{\bar{\omega}} \bar{\Psi}$ – d.h. das System (4.103) hat in diesem Fall nur drei (statt sonst vier) Freiheitsgrade.

Der "Periodisierungsschritt" des Verfahrens führt mit der Substitution $\bar{\Phi}_{i=1,2} = \frac{x_i}{\alpha}$ und der Umbenennung $\bar{\Phi}_{i=3,4} \equiv \bar{\Psi}_{i-2}$ auf

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Phi}}_1 &= \omega \sin \bar{\Phi}_2 \\ \dot{\bar{\Phi}}_2 &= -\mu \sin \bar{\Phi}_2 - k_H \omega \sin \bar{\Phi}_1 - \frac{\bar{\kappa} \alpha^2}{\omega} \sin^3 \bar{\Phi}_1 + \sum_{j=1}^2 \frac{\bar{a}_j}{\omega \alpha} \cos \bar{\Phi}_{j+2} \\ \dot{\bar{\Phi}}_{j+2} &= \omega_j, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.104)$$

Durch Identifizierung der rechten Gleichungsseite der ersten beiden Komponenten dieses Gleichungssystems mit den entsprechenden Komponenten des Vektorfeldes $G(\bar{\Phi})$, welches in die allgemeine Hamiltonfunktion (4.89) eingeht, gelangt man auf der Ebene im Wirkungsraum

$$M_{2,4} = \{I_{*,1}, I_{*,2}, I_{*,3}, I_{*,4} \mid I_{*,l} = I_{0,l}, \quad l = 1, 2\} \quad (4.105)$$

zu folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Phi}}_1 &= \frac{\omega_{0,1}(\bar{I}_*)}{\eta} + \omega \sin \bar{\Phi}_2 \\ \dot{\bar{\Phi}}_2 &= \frac{\omega_{0,2}(\bar{I}_*)}{\eta} - \mu \sin \bar{\Phi}_2 - k_H \omega \sin \bar{\Phi}_1 - \frac{\bar{\kappa} \alpha^2}{\omega} \sin^3 \bar{\Phi}_1 + \sum_{j=1}^2 \frac{\bar{a}_j}{\omega \alpha} \cos \bar{\Phi}_{j+2} \\ \dot{\bar{\Phi}}_{j+2} &= \omega_j, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.106)$$

Dies sind die Bewegungsgleichungen auf invarianten 4-Tori, die eine sechsdimensionale invariante Hyperfläche (im achtdimensionalen Phasenraum) bilden. Es handelt sich um das System, welches im Beispiel 4.5.d betrachtet wurde (dort war $\eta = \alpha = 1$). Bei periodischem Antrieb ist das System (4.106) im Spezialfall $\omega_1 = \omega_2$ mit dem System (4.46) & (4.53) des Beispiels 4.5.a identisch. Wie dort gezeigt wurde, reduziert sich dieses nahe $\bar{\Phi}_{i=1,2} = 0$ – für Wirkungen auf einer Gerade im nun dreidimensionalen Wirkungsraum – bei geeigneter Skalierung (α groß) auf das periodisch getriebene Duffing-System (4.57). Die Skalierung (4.58),

d.h. die nötige Verstärkung des nichtlinearen und die Abschwächung des periodischen Terms, liefert das obige Verfahren automatisch.

Wenn die Frequenzen $\omega_{0,i=1,2}$ in geeigneter Weise quadratisch von den Wirkungen abhängen – nämlich gemäß Gleichung (2.17), vgl. Abschnitt 4.5.3 –, dann beschreibt das Gleichungssystem (4.106) die Bewegung eines Elektrons mit zwei räumlichen Freiheitsgraden (x und y) in elektromagnetischen Feldern, die periodisch oder quasiperiodisch von der Zeit abhängen. Natürlich kann man Φ_3 mit $2\pi \frac{z}{z_0}$ identifizieren. In diesem Fall beschreibt das System (4.106) die Bewegung eines Elektrons mit drei räumlichen Freiheitsgraden – bei periodischem Antrieb in stationären und sonst in periodisch zeitabhängigen elektromagnetischen Feldern (vgl. Beispiel 4.5.e). •

Periodische Zeitabhängigkeit kann also durch periodische Abhängigkeit des Systems von (einer oder mehreren) sich zeitlich linear entwickelnden Systemvariablen hervorgerufen werden, wie wir bereits im Beispiel 4.5.e sahen.[†] Im oben präsentierten Verfahren wurde diese Möglichkeit noch nicht berücksichtigt, was hiermit nachgeholt wird:

Wenn m_p der n Winkelvariablen physikalischen Ortsvariablen proportional sind, so ist das ungestörte System von der Form[‡]

$$H_0(I) = \sum_{i=1}^{m+m_p} \int \omega_{0,i}(I_{k=1,\dots,m+m_p}) dI_i + \sum_{i=m+m_p+1}^{N=m+n} \omega_{i-m} I_i \quad (4.107)$$

Der Störanteil der Hamiltonfunktion wird wieder durch die obigen Vektorfelder $G(\Phi)$ und $F(I)$ definiert – vgl. die Beziehungen (4.95) & (4.96). Auf der n -dimensionalen Hyperebene $M_{n,N}$ (4.97) gelten dann die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_i &= \frac{\omega_{0,i}(I_{*,k=1,\dots,m+m_p})}{\eta} + \frac{1}{\alpha} f_i(\alpha \sin \Phi_{k=1,\dots,m}; \Phi_{k=m+1,\dots,N}), \quad i = 1, \dots, m \\ \dot{\Phi}_i &= \frac{\omega_{0,i}(I_{*,k=1,\dots,m+m_p})}{\eta}, \quad i = m+1, \dots, m+m_p \\ \dot{\Phi}_i &= \frac{\omega_{i-m}}{\eta}, \quad i = m+m_p+1, \dots, N = m+n \end{aligned} \quad (4.108)$$

Der Phasenraum hat in diesem Fall also $2N - (n - m_p)$ physikalisch relevante Dimensionen, die aus nichtregulären N -Tori bestehende invariante Hyperfläche $2N - m - (n - m_p)$.

Die Bewegungsgleichungen (4.108) tendieren im Limes (4.99)

$$\Phi_i = \frac{x_i}{\alpha} \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.109)$$

nur dann gegen das ursprüngliche System (4.90), wenn gleichzeitig

$$\omega_{0,i=1,\dots,m}(I_{*,k=1,\dots,m}) = 0 \quad \text{und} \quad \eta = 1 \quad (4.110)$$

[†]Im Beispiel 4.5.e hängen die beiden nicht-trivialen Komponenten der Bewegungsgleichungen periodisch von einer sich zeitlich linear entwickelnden Ortsvariablen ab. Auf Barrieren können im Rahmen unseres elektromagnetischen Modells auch zwei solcher Ortsvariablen auftreten.

[‡]In gleicher Weise wie oben kann der ungestörte Term auch η -unabhängig gewählt werden, vgl. Seite 93. Das ist hier allerdings nicht sinnvoll, da die Bewegungsgleichungen auf den invarianten Tori sich im Limes (4.109) für $\eta \rightarrow \infty$ nicht auf das Ausgangssystem reduzieren.

Fazit: Wir gehen von einem Differentialgleichungssystem mit periodischer oder quasiperiodischer Zeitabhängigkeit aus. Dieses wird ggf. in ein m -komponentiges Differentialgleichungssystem erster Ordnung transformiert, dessen Zeitabhängigkeit durch n sich zeitlich linear entwickelnde Winkelvariable charakterisiert wird. Jeder Attraktor endlicher Ausdehnung dieses Systems kann (nötigenfalls) durch Umskalieren der Variablen und/oder Nullpunktverschiebung nahe des Ursprungs plazierte werden.

In der oben beschriebenen Weise kann man zu dem so umgeformten Gleichungssystem ein Hamiltonsches System angeben, dessen Fluß invariante N -Tori enthält (wobei $N = m + n$), die eine $(2N - m)$ -dimensionale invariante Hyperfläche im Phasenraum bilden, auf welcher der Ausgangsattraktor im Limes $\Phi_{i=1,\dots,m} \rightarrow 0$ in unveränderter Form auftritt. Teilweise oder auch vollständig kann die (quasi-)periodische Zeitabhängigkeit auf periodischen Abhängigkeiten des Hamiltonschen Systems von seinen (Orts-)Koordinaten beruhen. So können etwa die Attraktoren einiger (quasi-)periodisch zeitabhängiger Systeme in der Bewegung eines Elektrons in stationären Feldern auftreten (s.o. und Beispiel 4.5.e).

Der winkelabhängige Störterm der Hamiltonschen Funktionen (bzw. das zugehörige "Störsystem") ist stets in linearer Weise wirkungsabhängig, d.h. die von den nichtregulären Tori im Wirkungsraum gebildeten Hyperflächen sind eben[†] (und ferner achsenparallel). Die Bewegung auf solchen Tori läßt sich daher stets durch ein Elektron in geeigneten Feldern realisieren, solange das zugrundeliegende dissipative System durch höchstens drei nicht-triviale Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben wird (d.h. $m \leq 3$).

Die in Kap.3.2 und Anhang A.3 angestellten Überlegungen zur Zeitumkehrsymmetrie gelten natürlich weiterhin, und für Fixpunkte gilt das gleiche, sofern sie auftreten.[‡]

[†]Die der Vollständigkeit in den Abschnitten 4.2 und 4.3 mitbehandelten invarianten Tori auf gekrümmten Hyperflächen werden also nicht benötigt, um Attraktoren (quasi-)periodisch zeitabhängiger Systeme im Fluß auf invarianten Tori zu realisieren.

[‡]Repeller werden exemplarisch im Beispiel 4.1 und im Anhang C.3 untersucht. Zu den Bedingungen, unter denen Fixpunkte auftreten, vgl. Abschnitt 4.3, besonders Tabelle 4.1.

Kapitel 5

Abschließende Betrachtungen

Bisher haben wir stets die Bewegung *auf* nichtregulären Tori betrachtet. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels analysieren wir kurz die Bewegung *der* Umgebung. Im zweiten Abschnitt werden die Zusammenhänge der hier vorgestellten Ergebnisse mit denjenigen anderer Studien der Bewegung auf nichtregulären Tori (bzw. in gewissen linearen Systemen) erläutert. Im dritten Abschnitt lenken wir den Blick noch einmal auf die hier gewonnenen Ergebnisse und schließen mit einem Ausblick auf durch diese Arbeit aufgeworfene offene Fragen.

5.1 Über die Bewegung in der Umgebung nichtregulärer Tori

In den vorangehenden Kapiteln haben wir die Existenz dissipativer Bewegung – und insonderheit das Auftreten seltsamer Attraktoren – auf invarianten Tori im Wirkungsraum gewisser Hamiltonscher Systeme demonstriert. Natürlich läuft dieses dissipative Verhalten der Erhaltung des Phasenraumvolumens im Phasenraum als Ganzem nicht zuwider, da zum einen das Phasenraumvolumen eines einzelnen Torus verschwindet und zum anderen die Erhaltung *aller* Poincaré-Invarianten durch die Bewegung auf nichtregulären Tori stets gewährleistet ist (vgl. Kap.2.3 und Kap.4.2). In der Umgebung solcher Tori muß aber dissipative Bewegung in den Winkelvariablen durch antidissipative in den Wirkungsvariablen ausgeglichen werden und umgekehrt. Dabei ist zu unterscheiden, ob die Bewegungsgleichungen der Winkelvariablen von den Wirkungsvariablen abhängen oder nicht, mit anderen Worten, ob die betrachteten Hamiltonschen Systeme linear sind oder nicht.[†] Im Folgenden untersuchen wir exemplarisch die Bewegung im Wirkungsraum einiger linearer Hamiltonscher Systeme, in deren Phasenraum nichtreguläre Tori auftreten. Die Bewegung in der Umgebung nichtregulärer Tori in nichtlinearen Systemen verläuft qualitativ natürlich ebenso.

Beispiel 5.1.a: Wir betrachten zunächst den Fluß in der Umgebung eines bei $I = I_*$ gelegenen, isolierten nichtregulären Torus¹ im Phasenraum eines Hamiltonschen Systems vom Typ (2.4), bei dem die "ungestörte Frequenz" ω_0 und das Vektorfeld $G(\Phi)$ wirkungsunabhängig

[†]Linear hinsichtlich der Wirkungsabhängigkeit (d.h. linear im Sinne der Definition nichtlinearer Systeme nach Percival – vgl. hierzu ggf. die Anmerkung auf Seite 132).

sind. Die Bewegungsgleichungen in solchen Systemen lauten

$$\begin{pmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\eta} \omega_0 + G(\Phi) \\ -\frac{\partial G}{\partial \Phi}(I - I_*) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Sei nun Φ_* ein Fixpunkt auf dem Torus zu $I = I_*$. Dann ist (Φ_*, I_*) ein Fixpunkt der Bewegungsgleichungen (5.1). Entwickelt man letztere um diesen Fixpunkt bis zu Termen erster Ordnung, so erhält man

$$\begin{pmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial \Phi_*} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial G}{\partial I_*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi - \Phi_* \\ I - I_* \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Diese lineare Stabilitätsanalyse der Bewegung in der Umgebung der Fixpunkte demonstriert die Erhaltung des Phasenraumvolumens durch die linearisierte Bewegung: Negative Eigenwerte der Bewegung auf Tori in der Nähe von Fixpunkten werden durch positive der Bewegung im den Torus umgebenden Wirkungsraum exakt ausgeglichen, und umgekehrt. Dieser Ausgleich dissipativer und antidissipativer Komponenten des Phasenraumflusses ist aber natürlich nicht auf die linearisierte Bewegung beschränkt. So findet man etwa in der Umgebung eines total abstoßenden Fixpunktes des Systems (5.1) folgendes Verhalten: Solange der Abstand zum Fixpunkt klein bleibt – nur für kurze Zeit also – konvergieren die Wirkungen in Richtung auf I_0 ; sobald die Bewegung in den Winkeln jedoch dissipativ wird, divergieren die Wirkungen zeitlich exponentiell. •

In der Umgebung nicht-isolierter nichtregulärer Tori findet man das gleiche Verhalten.

Beispiel 5.1.b: Die Bewegungsgleichungen (4.13) bzw. (C.13) der Winkelvariablen des im Anhang C betrachteten integrablen Hamiltonschen Systems hängen nicht von den Wirkungsvariablen ab. In diesem Fall kann analytisch nachgewiesen werden, daß der Abstand vom betrachteten nichtregulären Barriere-Torus des Systems (4.11) im Fall antidissipativer bzw. dissipativer Bewegung in den Winkelvariablen exponentiell ab- bzw. zunimmt, wenn nämlich die Trajektorien im "nichtregulären Bereich" Grenzzyklen zustreben oder auf dem Repeller verlaufen (vgl. die Schlußpassage des dritten Abschnitts im Anhang C). •

Beispiel 5.1.c: Weitere Beispiele dieser Art stammen von Salat, der in [Sal84, Sal88] den Fluß in linearen Systemen mit zwei Freiheitsgraden betrachtete und eine exponentielle Divergenz der Wirkungen feststellte, wenn die Bewegung in den Winkelvariablen gegen einen Grenzzyklus tendiert (wie aufgrund des Liouville-Theorems zu erwarten).[†] •

Bei hinreichend großer Störung ($\eta \gtrsim 1$) existieren stets Attraktoren, denen im Langzeitlimit fast alle Trajektorien auf nichtregulären Tori zustreben. In diesem "nichtregulären Bereich" wirken nichtreguläre Tori daher im Phasenraum stark abstoßend – Trajektorien können sich ihnen nur nähern

[†] Salat interessiert sich für die Integrabilität dieser Systeme ($\rightarrow$ Kap.5.2) und äußert in [Sal84] die Vermutung, daß solche mit nichtverschwindender Divergenz der Bewegung in den Winkelvariablen auch dann integrabel sein könnten, wenn Grenzzyklen auftreten (ein graphischer Nachweis der Integrabilität ist dann wegen der Divergenz der Wirkungen nicht möglich). Man kann übrigens leicht Beispielsysteme angeben, für die diese Vermutung zutrifft, vgl. Anhang C.2&C.3.

- während der anfänglichen (transienten) Bewegungsphase, sofern die Anfangsbedingungen in den Winkeln in der Nähe eines Repellers liegen, oder
- wenn die Anfangsbedingungen in den Winkeln auf einem Repeller liegen (dann zeitlich exponentiell für alle Zeiten).

5.2 Über andere Studien der Bewegung auf nichtregulären Tori

Bei diesen Studien handelt es sich die folgenden:

- 1) die Arbeiten von Salat [Sal84, Sal88] über lineare Hamiltonsche Systeme vom Typ

$$H(I, \Phi) = I \cdot \left(\omega_0 + \varepsilon G(\Phi) \right), \quad \varepsilon \lesssim 1 \quad \text{und} \quad N = 2^\dagger \quad (5.3)$$

welche natürlich nichtreguläre Tori enthalten können (und bei $I = 0$ stets einen solchen enthalten), auch wenn dies in den genannten Arbeiten unbeachtet bleibt;

- 2) die Arbeiten von Baesens, Kim, MacKay und Guckenheimer [BGK91, KMG89] über die Bewegung auf nicht regularisierbaren 3-Tori in Systemen schwach gekoppelter Oszillatoren;
- 3) die numerischen Arbeiten von Grebogi, Ott und Yorke [GOY83, GOY85] über Attraktoren auf Tori in (nicht unbedingt Hamiltonschen) Systemen mit drei oder vier Freiheitsgraden im Falle kleiner Störung, sowie die Arbeiten von Battelino und der eben genannten Autoren [Bat88, BGO89] über Torus-Breakup beim Übergang zu chaotischer Bewegung in einem System, welches aus zwei gekoppelten, getriebenen van der Pol - Oszillatoren besteht.

• Salats lineare Systeme vom Typ (5.3) [Sal84, Sal85, Sal88]

Die plasmaphysikalischen Feldliniengleichungen können als eindimensionales zeitabhängiges Hamiltonsches System aufgefaßt werden. Bei dem Versuch, integrable Hamiltonfunktionen anzugeben, die zu Feldlinienkonfigurationen führen, welche die magnetohydrodynamische Gleichgewichtsbedingungen für Stromdichten und Magnetfelder

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p \quad (5.4)$$

erfüllen, stieß Salat auf Hamiltonfunktionen vom Typ (5.3) mit *drei* Freiheitsgraden [Sal85].[†]

In [Sal84, Sal88] wurde die Integrabilität solcher Hamiltonfunktionen mit nur zwei Freiheitsgraden untersucht. Neben numerischen Material werden in [Sal84] Ansätze für die Suche nach einer zweiten Invarianten (die erste ist die Hamiltonfunktion selbst) diskutiert, da sich

[†]d.h. also vom Typ (2.4) mit $H_0(I) = \omega_0 \cdot I$ sowie $I_0 = 0$ und $G(I, \Phi) = G(\Phi)$.

[‡]Übrigens konnten auf diese Art nur zwei der drei Komponenten der Gleichgewichtsbedingung (5.4) erfüllt werden.

die meisten der untersuchten Hamiltonfunktionen als integrabel erwiesen. Interessanter in unserem Zusammenhang ist die spätere Arbeit [Sal88], in welcher die Theorie von Arnol'd und Herman [Arn61, Her79] zur Rückführung von Kreisabbildungen auf starre Rotationen auf Hamiltonfunktionen vom Typ (5.3) angewandt wird.

Die Bewegungsgleichungen in den Winkelvariablen

$$\dot{\Phi}_i = \omega_{0,i} + \varepsilon G_i(\Phi), i = 1, 2 \quad (5.5)$$

lassen sich bei genügend kleinen Störungen auf eine Kreisabbildung reduzieren, da dann die Kopplung der beiden Winkelvariablen so klein wird, daß sich stets eine von ihnen – oder eine ganzzahlige Linearkombination beider – für alle Zeiten monoton entwickelt.[†] Quer zur Bewegungsrichtung in dieser Variablen – die sich also ggf. durch eine lineare Transformation aus den beiden ursprünglichen ergibt – kann daher ein Poincaréschnitt durchgeführt werden. Bei der so konstruierten Poincaré- oder Rückkehrabbildung handelt es sich natürlich um eine Kreisabbildung. Falls diese analytisch (oder wenigstens dreimal stetig differenzierbar) ist, so gibt es für hinreichend irrationale Windungszahlen – d.h. für solche, die die KAM-Bedingung (B.9) erfüllen – eine analytische (bzw. diffeomorphe[‡]) Transformation auf eine starre Rotation, d.h. auf Winkelkoordinaten, in denen die Bewegungsgleichungen die triviale Form $\dot{\Phi} = \omega$ annehmen [Her79].[§]

Salat gibt für den Fall *analytischer* Kreisabbildungen mit *hinreichend* irrationalen Windungszahlen die kanonische Transformation an, welche die Bewegungsgleichungen in Systemen vom Typ (5.3) in triviale Bewegungsgleichungen vom Typ (2.3) überführt. In Systemen mit nur zwei Freiheitsgraden gilt allerdings nicht nur das KAM-Theorem, sondern außerdem das viel stärkere

Theorem von Denjoy (1932): Für wenigstens zweimal stetig differenzierbare Kreisabbildungen mit irrationalen Windungszahlen – welche also keineswegs die KAM-Bedingung (B.9) erfüllen müssen – existiert stets eine stetige und stetig umkehrbare Transformation (also ein *Homeomorphismus*) auf eine starre Rotation.[¶]

Wenn die Kreisabbildung, die mittels Poincaréschnitt aus den obigen Bewegungsgleichungen (5.5) gewonnen werden kann, zweimal stetig differenzierbar ist und *irgendeine* irrationale Windungszahl besitzt (die rationalen haben natürlich das Maß null), ist die Bewegung in den Winkelvariablen also integrabel. Da lineare Systeme betrachtet werden, ergibt sich die Bewegung in den Wirkungsvariablen dann aber natürlich durch Quadratur.

Die Windungszahlen sind aber im allgemeinen nicht explizit verfügbar – anders als im KAM-Fall, wo sie von Anfang an festliegen (da dort Tori zu vorgegebenen Windungszahlen gesucht werden).^{||} Die von Salat angegebene kanonische Transformation hat also nur einen

[†]Das bedeutet nicht notwendigerweise, daß die zugehörige Windungszahl von null verschieden ist!

[‡]Ein *Diffeomorphismus* ist eine stetig differenzierbare Abbildung, die eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion besitzt.

[§]Wesentlich leichter zugänglich ist die zugehörige Lehrbuchversion von Arnol'd [Arn83, §§11f.], die sich allerdings auf den Fall $N = 2$ beschränkt.

[¶]Vgl. Arnol'd, aaO. Die Originalarbeiten von Denjoy sind in den Artikeln von Herman und Salat [Her79, Sal88] zitiert.

^{||}Es gibt aber spezielle Fälle, in denen die Berechnung der Windungszahlen gelingt, vgl. Anhang C.

geringen praktischem Wert. Zum Nachweis der Integrabilität dieser Systeme aber ist sie nicht erforderlich, da dieser mit dem Theorem von Denjoy viel allgemeiner möglich ist.

Auch ohne explizite Kenntnis der Windungszahlen kann auf die hier beschriebene Weise für lineare Systeme vom Typ (5.3) Integrabilität[†] im Prinzip für sehr viel größere Störungen nachgewiesen werden als für die – wegen der Twistbedingung (B.15) – nichtlinearen Systeme, auf die die KAM-Theorie anwendbar ist (vgl. Anhang B). Wegen der Beschränkung auf lineare Systeme gelten für die Winkel überall im Phasenraum die gleichen Bewegungsgleichungen, so daß die Resultate auch auf den Fluß auf nichtregulären Tori in Systemen vom Typ (5.3) anwendbar sind. Die Existenz solcher Tori findet aber wie gesagt in den genannten Arbeiten keine Beachtung.

● 3-Tori in Systemen schwach gekoppelter Oszillatoren [KMG89, BGK91]

Baesens, Guckenheimer, Kim und MacKay betrachten Systeme, die aus drei schwach gekoppelten Oszillatoren bestehen, wobei sie unter einem Oszillator ein System mit einer attraktiven periodischen Trajektorie verstehen. Auf diesen periodischen Trajektorien können Winkelvariable eingeführt werden, und bei schwacher Kopplung gibt es im Raum dieser Phasenvariablen einen attraktiven 3-Torus.

Die Autoren gehen davon aus, daß die Bewegung auf dem 3-Torus stets durch eine Poincaréabbildung ("return map") beschrieben werden kann. Wie wir oben gesehen haben bedeutet dies eine Beschränkung auf den Fall hinreichend schwacher Kopplung der Bewegungsgleichungen (d.h. auf kleine Störungen). Diese Poincaré- oder Rückkehrabbildung ist ein Diffeomorphismus des durch die beiden verbleibenden Koordinaten gegebenen 2-Torus[‡].

Die Untersuchung dieser Torusabbildungen ("torus maps") ist eine Verallgemeinerung des wohlbekannten Vorgehens bei Untersuchungen der Bewegung auf 2-Tori (nämlich des Studiums von "circle maps", s.o. und Anhang B.3). Die Dynamik der Bewegung auf 3-Tori ist natürlich viel komplizierter. Das Konzept der Rotationszahl etwa läßt sich zu dem von Rotationsvektoren verallgemeinern, aber verschiedene Trajektorien können verschiedene Rotationsvektoren haben (während die Rotationszahl einer Kreisabbildung für den ganzen zugehörigen 2-Torus gilt), und für manche Trajektorien ist der Rotationsvektor nicht definiert. Es können vier Haupttypen der Bewegung unterschieden werden:

- "Fully mode-locked": Alle Trajektorien haben die gleichen *rationalen* Windungszahlverhältnisse, d.h. es gibt zwei Relationen

$$k_1^{(j)} \nu_1 + k_2^{(j)} \nu_2 + k_3^{(j)} \nu_3 = 0 \quad \text{und} \quad k_{i=1,2,3}^{(j=1,2)} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \text{sowie} \quad k^{(1)} \neq k^{(2)} \quad (5.6)$$

- "Partially mode-locked": Es gibt eine Relation vom Typ (5.6).
- "Inkommensurabel": Alle Trajektorien haben die gleichen inkommensurablen Windungszahlverhältnisse (Quasiperiodizität mit drei Basisfrequenzen).
- "Toroidales Chaos": Chaotisches Variieren der Windungszahlen.[‡]

[†]Im Sinne von Reduzierbarkeit der Bewegungsgleichungen auf solche vom KAM-Typ (2.3).

[‡]"There are orbits for which the average frequency ratio does not necessarily have a limit but short-term estimates of it perform a random walk in a set of different directions." [BGK91]

Das Ziel der Autoren war es, die auftretenden Resonanzphänomene und die mit diesen Resonanzen zusammenhängenden Bifurkationen zu untersuchen, um damit einen theoretischen Rahmen für die Interpretation von Experimenten zu liefern, die drei wechselwirkende Frequenzen involvieren. Nach ihrer eigenen Einschätzung läßt sich Folgendes sagen: "By studying families of maps numerically and analytically, we have obtained a comprehensive picture of the major features of the phase portraits and bifurcation diagrams associated with resonances in families of torus maps. From this information, one can develop predictions about the location of and the geometric structure associated to resonances and bifurcations in experimental studies." [BGK91, §7.2]

Hier sollen aber weniger die Ergebnisse dieser Arbeiten vorgestellt als vielmehr deren Anwendungsbereich von dem dieser Arbeit abgegrenzt werden. Zunächst einmal ist klar, daß man einen invarianten Torus, auf dem die Bewegung den Bewegungsgleichungen

$$\dot{\Phi} = f(\Phi) \quad (5.7)$$

genügt, als isolierten invarianten Torus des Hamiltonschen Systems

$$H(I, \Phi) = (I - I_0) \cdot f(\Phi) \quad (5.8)$$

bei $I = I_0$ ansehen kann. Die Beschränkung auf Systeme, in denen wenigstens eine Winkelvariable sich für alle Zeiten monoton entwickelt, schließt allerdings alle Fälle aus, in denen der Fluß auf den 3-Tori Fixpunkte enthält. Mit den in den genannten Arbeiten entwickelten Methoden lassen sich also keine Aussagen über die Bewegung auf chaotischen Tori in dem Bereich treffen, in dem Fixpunkte existieren (dort ist die Kopplung zu stark). Die im Kapitel 4.5.1 untersuchten 3-Tori – die mit den Oszillatorsystemen von Duffing bzw. van der Pol (in der bekannten Weise) zusammenhängen – fallen jedoch zweifellos unter diejenigen, auf die die Ergebnisse von Baesens et al. im Prinzip anwendbar sind, und von der Bewegung auf Barrieren im Fall $N = 3$ (z.B. im System des Beispiels 4.4.a) gilt das nämliche.

Aus den vorstehenden Betrachtungen geht hervor, daß es sicherlich eine gewisse Überschneidung der Bereiche, auf die sich die Untersuchungen in dieser Arbeit erstrecken, mit denjenigen, die die Autoren der Studien [KMG89, BGK91] ins Auge fassen, gibt. Auch wenn die von Baesens et al. ins Auge gefaßten Tori als Hamiltonsche Tori im Phasenraum stets isoliert sind, lassen sich die von ihnen entwickelten Methoden auf einige der hier untersuchten Systeme anwenden (s.o.). Andererseits gibt es weite Bereiche, in denen keinerlei Überschneidung vorliegt – immer dann, wenn keine 3-Tori untersucht werden, oder aber auf selbigen Fixpunkte existieren.

● Quasiperiodizität und Chaos auf Tori bei schwacher Störung [GOY83, GOY85] sowie Torus-Breakup [Bat88, BGO89]

Das Ziel der Arbeiten von Battelino, Grebogi, Ott und Yorke ist der Nachweis, daß quasiperiodisches Verhalten in dissipativen Systemen mit drei oder vier Freiheitsgraden durchaus typisch ist. Das war seit den Arbeiten von Ruelle, Takens und Newhouse in Frage gestellt – diese hatten gezeigt, daß quasiperiodischer Fluß auf N -Tori ($N \geq 3$) bei beliebig kleinen

Störungen chaotisch wird [RT71, NRT78]. Allerdings müssen diese Störungen sehr subtil gewählt werden, und ob sie in praxi überhaupt vorkommen, war (und ist) unklar.

In allen hier referierten Untersuchungen reduzieren die Autoren die Bewegung auf N -Tori durch einen Poincaréschnitt auf Torusabbildungen eines $(N-1)$ -Torus.[†] In [GOY83, GOY85] werden dem quasiperiodischen Fluß auf dem Torus in gewisser Weise zufällig gewählte periodische Störterme hinzugefügt, und durch Berechnung des Ljapunovspektrums geprüft, welche Art der Bewegung vorliegt. Für $N = 3$ gibt es folgende Möglichkeiten[‡]:

- $(0, -, -)$ – periodische Bewegung, d.h. Grenzzyklen (“fully mode-locked”);
- $(0, 0, -)$ – Quasiperiodizität mit zwei Basisfrequenzen, d.h. Bewegung auf einem 2-Torus (“partially mode-locked”);
- $(0, 0, 0)$ – Quasiperiodizität mit drei Basisfrequenzen, d.h. ergodische (nicht attraktive) Bewegung auf dem 3-Torus (“inkommensurabel”);
- $(+, 0, -)$ – chaotische Attraktoren.

Auch für endliche Störungen finden die Autoren in vielen Fällen (“generisch”) quasiperiodisches Verhalten. Natürlich müssen die Störungen so klein sein, daß ein Poincaréschnitt gemacht werden kann – genau wie im Fall oben besprochenen Arbeiten von Baesens et alii.

Battelino [Bat88] betrachtet mit der gleichen Technik ein etwas weniger künstliches System, nämlich zwei gekoppelte van der Pol - Oszillatoren, vgl. (4.85).[§] In der Studie [BGO89] von Battelino et al. wird schließlich untersucht, ob die chaotischen Attraktoren des Systems (4.85) überhaupt noch auf Tori liegen. Dazu wird ein geometrischer Test ersonnen, der auch ohne Betrachtung von Trajektorien zu entscheiden gestattet, ob diese auf einem Torus liegen können oder nicht – wie sich herausstellt, liegt keiner der untersuchten chaotischen Attraktoren auf einem Torus. Diese Möglichkeit des “Torus-Breakup” ist in den übrigen in diesem Abschnitt besprochenen Studien per constructionem ausgeschlossen. Die von uns untersuchten nichtregulären Tori können natürlich auch nicht “aufbrechen”, wohl aber die im Kap.4.5.2 beobachteten attraktiven 2-Tori auf invarianten 4-Tori.[¶]

5.3 Über die Ergebnisse sowie zu offenen Fragen

Zunächst geben wir einen kurzen Überblick über die hier untersuchten nichtregulären und chaotischen Tori, kommen dann detaillierter auf das elektromagnetische Modell zu sprechen und geben abschließend einen Ausblick auf durch diese Arbeit aufgeworfene Probleme.

[†]Sie bezeichnen diese Torusabbildung übrigens verwirrenderweise schlicht als $(N-1)$ -Torus.

[‡]vgl. Seite 32 im Kap.3.4. Punktattraktoren kommen wegen des Poincaréschnitts nicht in Frage.

[§] Battelino [Bat88] untersucht den Fluß auf 3-Tori im dissipativen System (4.85), während wir im Beispiel 4.6.c die Bewegung auf einem 5-Torus betrachten, welche im Limes $\Phi_{i=1,2,3,4} \rightarrow 0$ für $\omega_{0,i=1,2,3,4} = 0$ und $\eta = 1$ den Bewegungsgleichungen (4.85) genügt.

[¶]Vgl. Beispiel 4.5.d, besonders Abb.4.9 & 4.10.

● Nichtreguläre und chaotische Tori im Überblick

In dieser Arbeit wurde die Bewegung auf Hamiltonschen Tori untersucht, die nicht vom KAM-Typ sind. Der Fluß auf diesen *nichtregulären* Tori ist im Regelfall dissipativ und nicht integrabel ($\rightarrow$ Kap.2.1 & 2.3). Es können also Attraktoren auf solchen Tori auftreten, darunter auf (*chaotischen*) N -Tori in Systemen mit $N \geq 3$ Freiheitsgraden auch seltsame.

Mit einem einfachen "Periodisierungsverfahren" wurde zu jedem beliebigen Attraktor eines autonomen Differentialgleichungssystems – sofern seine Ausdehnung endlich ist – ein Hamiltonsches System angegeben, welches einen im Phasenraum isolierten invarianten Torus enthält, auf dem dieser Attraktor nahe am Ursprung auftritt ($\rightarrow$ Kap.3.1). Auf die gleiche Weise konnte auch für jeden Attraktor endlicher Ausdehnung in periodisch oder quasiperiodisch getriebenen Systemen ein Hamiltonsches System angegeben werden, in dessen Phasenraum invariante Tori auftreten, die diesen Attraktor ursprungsnah enthalten ($\rightarrow$ Kap.4.7). Solche Tori treten allerdings nicht isoliert auf, sondern bilden höherdimensionale invariante (ebene) Hyperflächen im $2N$ -dimensionalen Phasenraum, deren Dimension – je nach der Zahl der Basisfrequenzen im (quasi-)periodisch getriebenen Ausgangssystem – zwischen $N + 1$ und $2N - 1$ liegt.[†] Diese invarianten Hyperflächen können also auch Barrieren im Phasenraum bilden. Auf Barriere-Tori ist die Bewegung allerdings nie chaotisch, es können dort aber gleichwohl Attraktoren auftreten, auf denen die Bewegung nicht-periodisch verläuft ($\rightarrow$ Kap.4.4).

Außer den "vorgegebenen" Attraktoren enthält der Fluß auf den mit diesem Verfahren angegebenen nichtregulären oder chaotischen Tori aber stets noch Repeller – und zwar gibt es zu jedem Attraktor einen strukturell identischen Repeller auf dem Torus – sowie weitere Attraktoren verschiedenen Typs und eventuell (vor allem auf isolierten Tori) Fixpunkte. Natürlich ändert sich der Fluß auch mit der Stärke der Störung. Im Fall isolierter chaotischer Tori ($\rightarrow$ Kapitel 3) wurden exemplarisch solche untersucht, auf denen der Fluß (u.a.!) die wohlbekannten seltsamen Attraktoren von Rössler [Rös76] bzw. Lorenz [Lor63] enthält ($\rightarrow$ Kap.3.5 & 3.6), im Fall der nicht-isolierten chaotischen Tori ($\rightarrow$ Kapitel 4) besonders solche, auf denen die Attraktoren des Duffing-Oszillators [Ued79, Sch86] bzw. des van der Pol-Oszillators auftreten können ($\rightarrow$ Kap.4.5 & 4.7).

Da die Bewegung im Phasenraum als Ganzem nicht dissipativ sein kann, muß die dissipative bzw. antidissipative Bewegung auf den Attraktoren und Repellern, die auf nichtregulären Tori auftreten, durch die Bewegung im Wirkungsraum jeweils kompensiert werden ($\rightarrow$ Kap.5.1). Der Fluß auf den Tori erhält aber selbstverständlich *alle* Poincaréinvarianten ($\rightarrow$ Kap.2.3 & 4.2).

[†]Im Phasenraum der mit dem hier beschriebenen Verfahren angegebenen Systeme treten stets invariante Hyperebenen auf. Im allgemeinen können natürlich auch gekrümmte invariante Hyperflächen auftreten ($\rightarrow$ Kap.4.1), was bei den Betrachtungen über die Form der Bewegungsgleichungen auf nicht-isolierten nichtregulären Tori und den daraus gezogenen Schlüsse in Bezug darauf, welche Attraktortypen auf Hyperflächen welcher Dimension auftreten können, auch berücksichtigt wird ($\rightarrow$ Kap.4.2 & 4.3).

● Zum elektromagnetischen Modell

Diese nichtregulären und chaotischen Tori treten tatsächlich in der nichtrelativistischen Bewegung eines Elektrons in räumlich periodischen elektromagnetischen Feldern auf, wenn das elektrische Feld einen gewissen Teil der magnetischen Kraftwirkung kompensiert[†] und die Teilchen den passenden Impuls haben. Ob ein solcher Torus ein isolierter ist oder aber mit gleichartigen invarianten Tori eine höherdimensionale invariante Hyperfläche im Phasenraum bildet, hängt davon ab, wieviele linear unabhängige Komponenten das magnetische Vektorpotential besitzt.

Im Fall von Systemen mit drei räumlichen Freiheitsgraden gilt folgender Zusammenhang: In räumlich periodischen, stationären Vektorpotentialen bewegen sich geladene Einzelteilchen mit dem passenden Impuls – in geeigneten Koordinaten – im sechsdimensionalen Phasenraum auf nichtregulären Tori, die

- dort isoliert sind, wenn das Vektorpotential drei linear unabhängigen Komponenten besitzt (→ Kap.2.2 & 3.5.1);
- eine vierdimensionale invariante Hyperfläche bilden, wenn das Vektorpotential zwei linear unabhängige Komponenten besitzt (→ Kap.4.5.3);
- eine fünfdimensionale invariante Hyperfläche bilden, d.h. eine Barriere, wenn das Vektorpotential raumfest ausgerichtet ist (→ Kap.4.4).

Zur Realisierung der Bewegung auf einem isolierten 3-Torus müssen alle *kanonischen* Impulskomponenten einen vorgegebenen, festen Wert annehmen. Auf Barriere-Tori sind zwei, auf den Tori in Systemen mit magnetischen Vektorpotentialen, welche sich durch Superposition zweier Anteile mit raumfester Richtung ergeben, ist eine Impulskomponente frei wählbar.

In stationären Systemen mit nur zwei räumlichen Freiheitsgraden bewegen sich geladene Einzelteilchen mit dem passenden Impuls hingegen im vierdimensionalen Phasenraum

- auf einem isolierten invarianten Torus, wenn das Vektorpotential zwei linear unabhängigen Komponenten besitzt (→ Kap.4.5.3);
- auf einem Barriere-Torus, d.h. auf einer dreidimensionalen invarianten Hyperfläche, wenn das Vektorpotential raumfest ausgerichtet ist (→ Beispiel 4.4.b).

Wenn die Felder (quasi-)periodisch von der Zeit abhängen, so enthalten die Bewegungsgleichungen – mindestens in einer Komponente – (quasi-)periodisch zeitabhängige Terme. Die Dimension der nichtregulären Tori steigt im gleichen Maß wie die der Basisfrequenzen der quasiperiodischen Zeitabhängigkeit. Die zugehörigen zusätzlichen *Wirkungsvariablen* sind aber physikalisch irrelevant.

Die Bewegung eines Elektrons auf nichtregulären Tori kann allerdings auch dann einem periodisch oder (auf Barrieren) quasiperiodisch getriebenen System von Bewegungsgleichungen genügen, wenn die elektromagnetischen Felder stationäre sind. In diesem Fall sind

[†]genauer: Wenn das elektrische Potential mit dem magnetischen Vektorpotential über die Beziehung (2.9) zusammenhängt, wodurch ein sonst vorhandener Beitrag der Potentiale zur Hamiltonfunktion verschwindet, vgl. Kap.2.2.

die Winkelvariablen, durch welche die quasiperiodische Zeitabhängigkeit beschrieben wird, Ortskoordinaten proportional – diese Ortskoordinaten ändern sich also zeitlich linear. Die Bewegung im System des periodisch getriebenen Duffing-Oszillators kann beispielsweise durch ein nichtrelativistisch bewegtes Elektron in geeigneten stationären Feldern realisiert werden ($\rightarrow$ Kap.4.7). Natürlich haben dann alle Wirkungsvariablen eine physikalische Bedeutung.

Die Wirkungsabhängigkeit der Hamiltonfunktion, welche die nichtrelativistische Bewegung geladener Einzelteilchen in solchen Feldern beschreibt, ist quadratisch, die ihres Störterms (bzw. die des zugehörigen "Störsystems") linear ($\rightarrow$ Kap.2.2 & 4.4 & 4.5.3).[†] Die in diesen Systemen auftretenden invarianten Hyperflächen sind daher nie gekrümmt – genau wie in den Systemen, die mit Hilfe des "Periodisierungsverfahrens" angegeben wurden. Hauptsächlich deshalb treten alle hier numerisch untersuchten nichtregulären Tori im Rahmen unseres elektromagnetischen Modells auf.

Gleichwohl passen einige der hier betrachteten Systeme nicht in den Rahmen dieses Modells. Da einem Elektron maximal drei räumliche Freiheitsgrade zur Verfügung stehen, kann es nur die Bewegung in Systemen mit höchstens drei nicht-trivialen Gleichungen realisieren (d.h. $m = N - n \leq 3$, wobei n die Zahl der Basisfrequenzen im periodisch bzw. quasiperiodisch getriebenen Ausgangssystem ist). Zwar betrachten wir hier nur ein System mit mehr als drei nicht-trivialen Gleichungen, nämlich das System des Beispiels 4.6.c, welches sich in dem bekannten Limes[‡] auf das System (4.85) zweier gekoppelter van der Pol - Oszillatoren reduzieren läßt. Natürlich kann aber auch die im Beispiel 4.6.a beschriebene Einbettung isolierter chaotischer 3-Tori in höherdimensionale invariante Hyperflächen nicht durch ein Elektron in elektromagnetischen Feldern realisiert werden, denn letztere müßten zeitabhängig sein; Zeitabhängigkeiten der Felder führen aber stets zu expliziten Zeitabhängigkeiten der Bewegungsgleichungen auf den Tori. Ferner betrachten wir auch Systeme mit nichtlinearem Störterm, und zwar im Anhang A.6 (explizit) und im Anhang B.4 (implizit, s.u.). Schließlich kann die Bewegung auf dem im Kap.2.4 (sowie im Anhang A.2) untersuchten isolierten nichtregulären Torus mit raumfester Richtung von $\vec{\Phi}$ zwar durch nichtrelativistisch bewegte geladene Einzelteilchen realisiert werden, aber diese bewegen sich dann auf einem (nicht-isolierten) Barriere-Torus (vgl. die Anmerkung auf Seite 71). Die im Anhang B.4 untersuchten nicht-isolierten Tori dieser Art lassen sich durch die Bewegung eines Elektrons nur dann realisieren, wenn die Hamiltonschen Systeme linear (hinsichtlich der Wirkungsabhängigkeit) sind – schon bei einer Nichtlinearität des ungestörten Systemanteils würde die Wirkungsabhängigkeit der effektiven Frequenz $\Omega_0(I_*)$ ein impulsabhängiges Vektorpotential erforderlich machen (was natürlich nicht möglich ist) – zu schweigen davon, daß auch nichtlineare Systeme dieser Art denkbar sind.

Von diesen Fällen abgesehen können aber *alle* in dieser Arbeit beispielhaft betrachteten nichtregulären oder chaotischen Tori im Prinzip in der nichtrelativistische Bewegung geladener Einzelteilchen auftreten (das gilt also insbesondere für alle numerisch behandelten Systeme!).

[†]Die Wirkungsabhängigkeit des ungestörten Teils der Hamiltonfunktion spielt für die Bewegung auf einem gegebenen invarianten Torus keine Rolle, wohl aber für die Bewegung auf der invarianten Hyperfläche als ganzer.

[‡]Vgl. die dritte Anmerkung auf Seite 104.

So weit, so gut – nun zu noch ungelösten Problemen.

● Ein Ausblick auf offene Fragen

Dabei handelt es sich um zwei Problemkreise:

- 1) Bislang ist ungewiß, ob die Bewegung auf nichtregulären Tori Hamiltonscher Systeme in *beobachtbaren Systemen* auftritt[†], d.h. in solchen, die natürlich auftreten oder sich experimentell realisieren lassen.
- 2) Ebenso ungeklärt ist folgendes Problem: Immer wieder ist in dieser Arbeit vom Fluß auf den Tori die Rede gewesen, tatsächlich wurde aber – abgesehen von den integrablen Fällen (→ Anhang A.2 und Anhang C) – stets nur nach den Attraktoren und den Fixpunkten des Flusses gesucht. So wichtig diese für die Beschreibung der Bewegung sind, so sehr muß doch betont werden, daß zur Kenntnis des Flusses mehr nötig ist als die seiner Fixpunkte und Attraktoren (man denke etwa an die instabilen periodischen Bahnen!).[‡]

Wenden wir uns zunächst dem Problem zu, wo solche Systeme überhaupt (beobachtbar) auftreten. Die Analyse des hier vorgestellten elektromagnetischen Modells dient im Rahmen dieser Arbeit mehr der Einbettung der meisten der hier betrachteten dynamischen Systeme in ein für Physiker gängiges Szenario (nämlich die nichtrelativistische Bewegung geladener Einzelteilchen in elektromagnetischen Feldern) als der Lösung dieses Problems. Dementsprechend wurde diese Analyse auch nur soweit betrieben, wie das zu diesem Zwecke notwendig war.[§] Insbesondere wurde kein Versuch unternommen zu überprüfen, ob die zur Realisierung der hier untersuchten Systeme (oder anderer ebenso naheliegender) benötigten Felder durch physikalisch machbare Strom- und Ladungsverteilungen erzeugt werden oder nicht.

Hinsichtlich der isolierten chaotischen Tori ist zu bedenken, daß wegen des Verschwindens aller Windungszahlen im Fall starker Störung bzw. hinreichend starker Kopplung (wenn $\omega_0(I_0) = 0$) der Torus allenfalls einige wenige Male umlaufen wird, so daß nur dementsprechend wenige räumlichen Perioden der Felder tatsächlich real vorhanden sein müßten, um die Bewegung auf diesen Tori beobachten zu können. Wenn hingegen eine oder zwei (kanonische) Impulskomponenten frei gewählt werden können, müssen zu diesem Zweck i.a. viele Perioden der entsprechenden Felder in den zugehörigen Raumrichtungen realisiert werden.

Jenseits unseres elektromagnetischen Modells wäre von besonderem Interesse, ob nicht-reguläre Barriere-Tori oder chaotische Tori im für Hamiltonsches Chaos prototypischen

[†]Ob so etwas in der Natur stattfindet, weiß ich nicht und bekümmere mich nichts darum. Genug daß es in den Büchern stattfindet ... Georg Christoph Lichtenberg (1742 - 1799), in: Aphorismen, ausgewählt von F. Sengle, Reclam, Stuttgart (1953).

[‡]In diesem Zusammenhang liefert die im Kap.5.2 besprochene Arbeit von Baesens et al. [BGK91] interessantes Material.

[§]Es wurde bereits angemerkt (vgl. Kap.2.2), daß die räumliche Periodizität der Felder auch andere Formen als diejenigen annehmen kann, die hier betrachtet wurden (welche sich durch kubische Basiszellen charakterisieren lassen).

Dreikörperproblem [Whi37, Mar90] auftreten können und (eventuell in diesem Zusammenhang) ob es auch physikalische Gegenstücke – möglicherweise sogar unter den oben definierten beobachtbaren Systemen – zu den nichtregulären Tori in Systemen mit nichtlinearem Störterm gibt.[†] Schließlich drängt sich natürlich die Frage auf, ob Barrieren, die aus nichtregulären Tori bestehen, in physikalisch relevanten Systemen gar die Arnol'd-Diffusion[‡] verhindern können.

Hinsichtlich der noch offenen mathematischen Probleme seien drei Punkte besonders hervorgehoben:

- Die allgemeine Lösung der Frage, wann eine Rückführung nichtregulärer Tori auf reguläre möglich ist, steht noch aus. Der Anhang B(.4) liefert dafür nur Anhaltspunkte (die zeigen, um was für ein schwieriges Problem es sich dabei handelt!). Hier wird die Lösung nur für die im Kap.2.4 und im Anhang B.4 analysierten Systeme mit konstanter Richtung der Winkel-Geschwindigkeit angegeben, bei denen die Windungszahlen auf den Tori a priori bekannt sind.
- Der Fluß auf den in dieser Arbeit behandelten nichtregulären Tori weist in Bezug auf Fixpunkte und Zeitumkehr gewisse Symmetrien auf ($\rightarrow$ Kap.3.2), die nicht auf allen denkbaren Tori dieser Art vorkommen (vgl. dazu Anhang A.3).
- Nicht unerwähnt soll schließlich bleiben, daß die Definition von Repellern als Attraktoren des zeitumgekehrten Flusses nicht alle denkbaren Möglichkeiten ausschöpft. Bekanntlich lassen sich für viele Attraktoren, etwa den Rössler- und den Lorenz-Attraktor, wichtige Eigenschaften des Flusses durch die Analyse einer diskreten Abbildung, der “Lorenz-map” [Jac89, Kap.7][§], erschließen. Im Fall des Rössler-Attraktors hat diese die gleiche einfache Struktur wie die logistische Abbildung. Wenn nun – infolge der Höhe des Maximums – das Intervall der Werte (x_{n+1}) größer wird als das Intervall der Urbilder (x_n) , so verwandelt sich der Attraktor in einen (“transienten”) Repeller, der aber auch unter Zeitumkehr ein solcher bleibt [Tel90]. Was die im Kapitel 3 betrachteten “Rössler-” bzw. “Lorenz-ähnlichen” Attraktoren angeht, ist unsere Untersuchung offenbar (aber warum?) außerhalb des Parameterbereichs geblieben, für den dieses Verhalten – wenn überhaupt – eintritt. Das muß jedoch natürlich nicht für alle Repeller dieser Art gelten.

Abgesehen von diesen “transienten Repellern” ist die Analyse der isolierten Rössler- und Lorenz-Tori im dritten Kapitel, soweit es um die Untersuchung der Attraktoren/Repeller

[†]Ganz außer Betracht blieben bislang auch nichtlineare Systeme, bei denen die Nichtlinearität des Störterms nicht von der Krümmung der von den Tori gebildeten Hyperfläche im Wirkungsraum herrührt, sondern von einer Wirkungsabhängigkeit der vektorwertigen Funktion $G(I, \Phi)$ in den Hamiltonfunktionen (2.4) bzw. (4.1).

[‡]In fast-integrablen Hamiltonschen Systemen mit mehr als zwei Freiheitsgraden bilden KAM-Tori keine Barrieren, obwohl sie ein endliches Volumen im Phasenraum einnehmen ($\rightarrow$ Kap.4.1). Im Langzeitlimit können Trajektorien, die nicht auf diesen Tori verlaufen, daher i.a. nicht in Teilbereiche des Phasenraums eingeschlossen werden. Arnol'd [Arn64] gab als erster ein konkretes Beispiel für diese – extrem langsame – Diffusion der Trajektorien (siehe auch Anhang B.3).

[§]Das ist eigentlich keine Abbildung, sondern nur eine Relation (“match”), vgl. Jackson, aaO.

und Fixpunkte geht – außer im Bereich kleiner Störung, in dem keine Fixpunkte existieren – in sich im wesentlichen abgeschlossen. Gleiches kann von der Untersuchung nicht-isolierter nichtregulärer oder chaotischer Tori in quasiperiodisch getriebenen Systemen nicht behauptet werden. Die Bewegung auf Barriere-Tori, welche allerdings nie chaotisch ist, wurde nicht sehr eingehend behandelt – ausgenommen der im Anhang C analysierte Fall integrierbarer Bewegung auf nichtregulären Barriere-Tori in einem System mit zwei Freiheitsgraden. Im Fall der “Duffing-” und “van der Pol - Tori” wurde die Bewegung nur für $\omega_{0,i=1,\dots,m} = 0$ & $\eta = 1$ untersucht, wo sich im Limes $\bar{\Phi}_i = x_i/\alpha \rightarrow 0$ ($i = 1, \dots, m$) die Bewegung im Ausgangssystem ergibt, und auch diese mehr kursorisch. Es kam uns im Fall der nicht-isolierten nichtregulären Tori mehr darauf an zu zeigen, welche Attraktoren auf den verschiedenen nicht-isolierten Tori (nicht) vorkommen können, während die unseres Wissens nach bislang noch nirgends in Betracht gezogenen isolierten chaotischen Tori, insbesondere im “nichtregulären Bereich” (wo Fixpunkte existieren), eine gründlichere Behandlung verdienten.

Anhänge

2. Teil

1. Die Bedeutung der...

2. Die Bedeutung der...

3. Die Bedeutung der...

4. Die Bedeutung der...

5. Die Bedeutung der...

6. Die Bedeutung der...

7. Die Bedeutung der...

8. Die Bedeutung der...

9. Die Bedeutung der...

10. Die Bedeutung der...

11. Die Bedeutung der...

12. Die Bedeutung der...

13. Die Bedeutung der...

Anhang A

Verschiedene Anmerkungen und Ergänzungen

A.0 Zum Hamiltonformalismus

In diesem Anhang werden die in dieser Arbeit benötigten grundlegenden Gleichungen und Begriffe der Theorie Hamiltonscher Systeme zusammengestellt.[†]

In Hamiltonschen Systemen lassen sich die Bewegungsgleichungen von einer skalaren Funktion, der Hamiltonfunktion, herleiten. Wenn diese nicht explizit zeitabhängig ist, ist ihr Wert eine Erhaltungsgröße und gleich der Energie des Systems.[‡] Sie hängt von den Koordinaten und den zu diesen kanonisch konjugierten Impulsen ab:

$$\text{Hamiltonfunktion} \quad H = H(p, q) \quad (\text{A.1})$$

Die Bewegungsgleichungen haben die (Hamiltonsche) Form

$$\text{Hamiltonsche Gleichungen} \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q} \quad (\text{A.2})$$

[†]Nicht näher erläuterte Begriffe (z.B. "symplektisch" oder "kanonisch konjugierter Impuls") sind Mechaniklehrbüchern zu entnehmen (z.B. → [Arn78, Gol63]).

[‡]Andernfalls kann man von einer explizit zeitabhängigen Hamiltonfunktion mit z.B. N Freiheitsgraden zu einer nicht explizit zeitabhängigen (autonomen) mit $N + 1$ Freiheitsgraden übergehen, vgl. Anhang A.7 und [LL83, Kap.1.2b] (im Fall allgemeiner nicht-autonomer gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme kann man bekanntlich ebenfalls durch Einführung einer zusätzlichen abhängigen Variablen zu einem autonomen System übergehen). Sonderfälle:

- Wenn die Zeitabhängigkeit periodisch ist, ist die zusätzliche Koordinate eine Winkelkoordinate (dann spricht man von einem System mit $N + \frac{1}{2}$ Freiheitsgraden).
- Im Fall quasiperiodischer Systeme mit m Freiheitsgraden und n Basisfrequenzen kann man zu einem autonomen Hamiltonschen System mit $N = m + n$ Freiheitsgraden übergehen, wobei die n zusätzlichen Koordinaten wiederum Winkelvariable sind.

Zwei Funktionen der dynamischen Variablen (Koordinaten, kanonisch konjugierte Impulse, und eventuell die Zeit) ordnet man durch folgende Operation eine neue solche Funktion zu, die man als

$$\text{Poissonklammer} \quad \{f, g\} \equiv \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (\text{A.3})$$

der beiden ursprünglichen Funktionen bezeichnet. Damit kann man die Hamiltonschen Gleichungen in folgender Form schreiben:

$$\dot{q} = \{q, H\}, \quad \dot{p} = \{p, H\} \quad (\text{A.4})$$

Kanonische Transformationen

$$p \rightarrow \bar{p}, \quad q \rightarrow \bar{q}, \quad H(p, q, t) \rightarrow \bar{H}(\bar{p}, \bar{q}, t) \quad (\text{A.5})$$

erhalten die Hamiltonsche Struktur des dynamischen Systems, d.h.: Die Hamiltonschen Gleichungen ändern ihre Form nicht, und die fundamentalen Poissonklammern

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0 \quad (\text{A.6})$$

ändern sich allenfalls, bei Skalentransformation der Variablen, um eine multiplikative Konstante [Sie56, §2]. Schließt man Skalentransformationen aus, so folgt aus der Invarianz der fundamentalen Poissonklammern, daß alle Poissonklammern unter kanonischen Transformationen invariant sind. Solche Transformationen sind aufgrund des Hamiltonschen Variationsprinzips durch erzeugende Funktionen charakterisiert, die von den alten und den neuen Variablen abhängen. Am häufigsten werden erzeugende Funktionen der Form $S(\bar{p}, q, t)$ verwendet. Die kanonischen Transformationsgleichungen nehmen dann die folgende Form an:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad \bar{q}_i = \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_i}, \quad \bar{H}(\bar{p}, \bar{q}, t) = H(p, q, t) + \frac{\partial}{\partial t} S(\bar{p}, q, t) \quad (\text{A.7})$$

Hamiltonsche Systeme können auch als Fluß im Phasenraum betrachtet werden [Eil83]. Der Phasenraum ist der von den Orts- und Impulsvariablen aufgespannte Raum.[†] In diesem Raum kann man jedem Punkt einen Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{v} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

zuordnen. Dieses Vektorfeld erzeugt den Hamiltonschen Fluß

$$\phi^t: v(0) \rightarrow v(t) \quad (\text{A.9})$$

Der Fluß ist die Schar aller dieser Abbildungen (d.h. an jedem Punkt des Phasenraums für alle Zeiten). Das System (A.1) zu lösen bedeutet, sich einen quantitativen Überblick über den gesamten Fluß zu verschaffen.[‡] Die Abbildung (A.9) ist symplektisch und daher eine kanonische Transformation [Dra82, Dou82].

[†]Er hat die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, vgl. Anhang A.5.

[‡]Zur Lösbarkeit Hamiltonscher Systeme vgl. Kapitel 1.

A.1 Zu Kap.2.2: Elektromagnetische Beziehungen

In diesem Anhang wird gezeigt, daß Hamiltonfunktion (2.7) auf die nichtrelativistische Lorentzgleichung führt, und daß sie bei Umeichung der Potentiale ihre Form nicht ändert. Zunächst geben wir aber der Vollständigkeit halber die Beziehungen zwischen Feldern und ihren Potentialen sowie zwischen diesen und den mit den Feldern verbundenen Strom- und Ladungsverteilungen an.

● Potentiale und Felder, Strom- und Ladungsverteilungen [Jac75]

Bekanntlich kann man die homogenen Maxwellgleichungen für die elektromagnetischen Felder durch die Einführung eines magnetischen Vektorpotentials A und eines elektrischen skalaren Potentials ϕ identisch erfüllen. Die Beziehung zwischen den Feldern und diesen Potentialen ist in MKS-Einheiten gegeben durch

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{und} \quad B = \nabla \times A \quad (\text{A.10})$$

Die mit elektromagnetischen Feldern verbundenen Ladungs- und Stromverteilungen werden durch die inhomogenen Maxwellgleichungen bestimmt, die in MKS-Einheiten folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} \rho &= -\epsilon_0 \left(\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot A) \right) \\ j &= \nabla \left(\nabla \cdot A + \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \Delta A \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Im Fall stationärer Felder gilt

$$\begin{aligned} \rho &= -\epsilon_0 \Delta\phi \\ j &= \text{grad div } A - \Delta A = \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla \times B \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

d.h. die Ladungsverteilung gehorcht der Laplacegleichung und die Stromdichte ergibt sich als Rotation des Magnetfeldes.

● Hamiltonfunktion (2.7) $\Rightarrow$ nichtrelativistische Lorentzgleichung

Es ist bekanntlich möglich, der Lorentzgleichung, welche die Bewegung (punktförmiger) geladener Einzelteilchen in elektromagnetischen Feldern beschreibt, die Form einer Euler-Lagrange-Gleichung zu geben [Gol63, Jac75], und ergo auch eine entsprechende Hamiltonfunktion anzugeben. Hier soll lediglich umgekehrt verifiziert werden, daß die Hamiltonfunktion (2.7) auf die nichtrelativistische Version der Lorentzgleichung führt.

Als Bewegungsgleichung für die Ortskoordinaten ergibt sich durch Einsetzen der Beziehung (2.6) für den kanonischen Impuls unmittelbar die Identität

$$\dot{r} = \nabla_P H = \frac{P - eA}{m} = \dot{r} \quad (\text{A.13})$$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichungen für die Impulsvariablen folgt

$$\begin{aligned}\dot{P} &= -\nabla_{\mathbf{r}} H = -\frac{P - eA}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} (P - eA) - e \nabla_{\mathbf{r}} \phi \\ &= e \dot{\mathbf{r}} \cdot (\nabla_{\mathbf{r}} A) - e \nabla_{\mathbf{r}} \phi = e \nabla_{\mathbf{r}} (\dot{\mathbf{r}} \cdot A) - e \nabla_{\mathbf{r}} \phi\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

Unter Benutzung vektoranalytischer Identitäten, nämlich

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times A) &= \nabla (\dot{\mathbf{r}} \cdot A) - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla) A \\ \text{und } \dot{A} &= \frac{\partial A}{\partial t} + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla) A\end{aligned}\quad (\text{A.15})$$

sowie der Beziehung zwischen den elektromagnetischen Feldern und ihren Potentialen (A.10) folgt daraus direkt die Lorentzgleichung für nichtrelativistische Bewegung:

$$m \ddot{\mathbf{r}} = e \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} + e \mathbf{E} \quad (\text{A.16})$$

● Eichfreiheit

Die elektromagnetischen Felder ändern sich bekanntlich nicht, wenn man die Potentiale folgendermaßen [Jac75] umeicht:

$$\begin{aligned}A &\rightarrow A' = A + \nabla \Lambda \\ \phi &\rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\end{aligned}\quad (\text{A.17})$$

Nun läuft eine kanonische Transformation, die nur die Impulsvariablen ändert, auf eine Eichtransformation dieses Typs hinaus. Erzeugende Funktion und Transformationsgleichungen (vgl. Anhang A.0) lauten

$$S = \bar{P} \cdot \mathbf{r} - e \Lambda(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} = \bar{P} - e \nabla \Lambda \\ \bar{\mathbf{r}} = \frac{\partial S}{\partial \bar{P}} = \mathbf{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{P} = m \dot{\mathbf{r}} + e A' \quad (\text{A.18})$$

und die transformierte Hamiltonfunktion

$$\bar{H} = \frac{1}{2m} \left(\bar{P} - e \{A + \nabla \Lambda\} \right)^2 + e \phi(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\bar{P} - e A' \right)^2 + e \phi' \quad (\text{A.19})$$

hängt von den umgezeichneten Potentialen in der gleichen Weise ab wie die Hamiltonfunktion (2.7) von den ursprünglichen. Man hat also durchaus die Freiheit, ein gegebenes Vektorpotential etwa so umzueichen, daß $\nabla \cdot A = 0$ (Coulombeichung).

A.2 Zu Kap.2.4: Auch die nicht regularisierbare Bewegung ist integrabel

Im Kapitel 2.4 wurde gezeigt, daß ein Torus, auf dem die Bewegung der Gleichung (2.36)

$$\ddot{\varphi} |_{I=I_0} = \Omega_0 \left(1 + \varepsilon b(\varphi) \right) \quad (\text{A.20})$$

genügt, tatsächlich ein regulärer Torus ist, wenn die Störung (ε) so klein ist, daß keine Fixpunkte existieren, und ferner die Windungszahlverhältnisse hinreichend irrational sind. Man findet dann also eine kanonische Transformation auf neue Wirkungs-Winkel-Variable $(\bar{I}, \bar{\Phi})$, in denen die Bewegungsgleichungen die Form (2.3) haben.

Es ist aber nicht schwer zu sehen, daß die Bewegung auf diesem Torus unter allen Umständen integrabel verläuft, also auch im Fall von starker Störung oder von Resonanz.

● Beweis

Zunächst geht man durch eine Drehung der Achsen von den Winkelkoordinaten Φ zu Koordinaten

$$Q = R \Phi \quad (\text{A.21})$$

über. Dem entspricht eine lineare kanonische Transformation, deren erzeugende Funktion

$$S(P, \Phi) = \sum_{i=1}^N P_i \sum_{j=1}^N R_{ij} \Phi_j \quad (\text{A.22})$$

ist (davon wurde auch in Kap.4.2 Gebrauch gemacht). Diese erzeugende Funktion "induziert" folgende Transformation:[†]

$$I = R^{-1} P \Leftrightarrow P = R I, \quad \text{ sowie } Q = R \Phi \quad (\text{A.23})$$

Man kann nämlich mit der Drehmatrix

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\Omega_0}{|\Omega_0|} \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \Omega_0 \cdot e_{i \geq 2} = 0 \quad \text{ und } \quad e_i \cdot e_j = \delta_{i,j} \quad \text{ ist,} \quad (\text{A.24})$$

zu Koordinaten gelangen, in denen die Bewegung nur eine zeitlich variable Komponente hat:

$$\dot{Q} = R \dot{\Phi} = R \Omega_0 \left(1 + \varepsilon b(\Phi) \right) = \begin{pmatrix} |\Omega_0| \left(1 + \varepsilon b(R^{-1} Q) \right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

Die einzig verbleibende nicht-triviale Bewegungsgleichung auf dem Torus

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= |\Omega_0| \left(1 + \varepsilon b(R^{-1} Q) \right) \\ &= |\Omega_0| \left(1 + \varepsilon \tilde{b}(Q_1) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

[†]Hier geht ein, daß für Drehmatrizen $R^T = R^{-1}$. Bezgl. des allgemeinen Falls vgl. (C.3) & (C.4).

ist integrierbar in dem Sinn, daß die Umkehrfunktion durch Quadratur berechnet werden kann:

$$\int \frac{dQ_1}{|\Omega_0| (1 + \varepsilon \tilde{b}(Q_1))} = \int_{t_0}^t d\tau \Rightarrow t = t(Q_1) \quad (\text{A.27})$$

Die neuen Koordinaten (P, Q) sind allerdings keine Wirkungs-Winkel-Variablen, denn die Q hängen nur dann 2π -periodisch von den Winkeln Φ ab, wenn alle Elemente der Drehmatrix ganze Zahlen wären (vgl. die Anmerkung auf Seite 63). Drehmatrizen haben aber keine ganzzahligen Elemente (Richtungscosinus!).

● Nichtreguläre Tori mit periodischer Bewegung

Im folgenden Fall läßt sich die Lösung der Bewegungsgleichung (2.36) bzw. (A.20) sogar analytisch angeben: Wenn die zeitliche Änderung der Größe $b(\Phi)$ verschwindet

$$\dot{b}(\Phi) = \nabla_{\Phi} b(\Phi) \cdot \dot{\Phi} = (1 + \varepsilon b) \Omega_0 \cdot \nabla_{\Phi} b(\Phi) = 0 \quad (\text{A.28})$$

– was also stets gegeben ist, wenn der Gradient des Skalarfeldes $b(\Phi)$ senkrecht auf dem Frequenzvektor Ω_0 steht –, so ist die Winkel-Geschwindigkeit eine nur von der Anfangsbedingung Φ_0 abhängige Konstante:

$$\dot{\Phi} = \Omega_0 (1 + \varepsilon b(\Phi)) \equiv \omega(\Phi_0) = \text{const.} \quad (\text{A.29})$$

Dann gilt

$$\Phi = \omega(\Phi_0)(t - t_0) + \Phi_0 \quad (\text{A.30})$$

Die Bewegung verläuft also periodisch mit einer von den Anfangsbedingungen abhängigen Frequenz.[†]

Als Beispiel betrachten wir einen Torus bei $I = I_0$ mit rationalen Frequenzverhältnissen, der durch

$$\Omega_0 = (0, 1) \quad \text{und} \quad b(\Phi) = \cos(\Phi_1) \quad (\text{A.31})$$

definiert ist. Die Bedingung (A.28) ist erfüllt. Die Bewegungsgleichungen auf diesem Torus lauten

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_1 &= 0 \\ \dot{\Phi}_2 &= 1 + \varepsilon \cos(\Phi_1) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Die Bewegung ist zwar regulär (nämlich periodisch) und verläuft auf einem Torus, dieser ist aber trotzdem kein KAM-Torus. Im Sinne der oben definierten Notation – deren Grenzen spätestens hier sichtbar werden – handelt es sich gleichwohl um einen nichtregulären Torus, da wir unter regulären nur solche mit einer von den Anfangsbedingungen unabhängigen Frequenz verstehen.

[†]In diesem Fall verläuft die Bewegung offenbar dissipationsfrei. Das liegt daran, daß

$$\nabla_{\Phi} \cdot \dot{\Phi} = \varepsilon \Omega_0 \cdot \nabla_{\Phi} b(\Phi) \sim \dot{b}(\Phi) = 0$$

● Einbettung dieser isolierten Tori in ein integrables System

Der hier und im Kap.2.4 betrachtete isolierte Torus, auf dem die Bewegung also jedenfalls integrabel verläuft, und der unter gewissen Bedingungen auf einen regulären zurückgeführt werden kann, tritt ursprünglich (vgl. Kap.2.4) im folgenden Hamiltonschen System auf:

$$H = H_0(I) + \varepsilon(I - I_0) \cdot \langle B_p(I, \Phi) \rangle_{\Phi} + \varepsilon(I - I_0) \cdot B^{(0)}(I, \Phi) \quad (\text{A.33})$$

mit $B^{(0)}(I_0, \Phi) = \Omega_0(I_0) b(\Phi)$ und $\Omega_0(I_0) = \frac{\partial H_0}{\partial I_0} + \varepsilon \langle B_p(I_0, \Phi) \rangle_{\Phi}$

Bei $I = I_0$ findet man den gleichen Torus aber auch im linearen System[†]

$$H_{\text{lin}}(I, \Phi) = (I - I_0) \cdot \Omega_0(1 + \varepsilon b(\Phi)) \quad (\text{A.34})$$

welches für $I \neq I_0$ ebenfalls integrabel ist. In den neuen Koordinaten hat die Hamiltonfunktion die Form

$$H_{\text{lin}}(I, \Phi) = R^{-1}(P - P_0) \cdot \Omega_0(1 + \varepsilon b(R^{-1}Q)) \quad (\text{A.35})$$

Da aber

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H_{\text{lin}}}{\partial P_i} = 0, \quad i = 2, \dots, N \quad (\text{A.36})$$

hängt H nicht von allen Impulskomponenten ab, sondern nur von P_1 . Man kann leicht nachrechnen, daß in $R^{-1}P \cdot \Omega_0$ nur P_1 eingeht:

$$R^{-1}P \cdot \Omega_0 = f(P_1) \quad (\text{A.37})$$

Daher ist

$$\dot{P}_1 = - \frac{\partial H_{\text{lin}}}{\partial Q_1} = - \left(f(P_1) - R^{-1}P_0 \cdot \Omega_0 \right) \varepsilon \frac{\partial b(Q_1)}{\partial Q_1} \quad (\text{A.38})$$

eine inhomogene lineare Differentialgleichung, und ergo lösbar. Die übrigen $N-1$ Gleichungen

$$\dot{P}_i = - \frac{\partial H_{\text{lin}}}{\partial Q_i} = - \left(f(P_1) - R^{-1}P_0 \cdot \Omega_0 \right) \varepsilon \frac{\partial b(R^{-1}Q)}{\partial Q_i} \quad (\text{A.39})$$

sind dann durch Quadratur lösbar. Die Linearität des Systems ermöglicht diese Reduktion der Bewegungsgleichung auf durch Quadratur lösbare ohne Benutzung der Standard-Konstruktion von Wirkungs-Winkel-Variablen auf der Basis N vertauschender Erhaltungsgrößen.[‡] Natürlich lassen sich N vertauschende Erhaltungsgrößen angeben, nämlich H_{lin} und die $N-1$ Koordinaten $Q_{i \geq 2}$. Daher kann man also alternativ auf Wirkungs-Winkel-Variable transformieren, die den trivialen Bewegungsgleichungen (2.1) genügen. Der Phasenraum besteht dann aus einer Schichtung regulärer Tori.

[†]Linear hinsichtlich der Wirkungsabhängigkeit (d.h. linear im Sinne der Definition nichtlinearer Systeme nach Percival – vgl. hierzu ggf. die Anmerkung auf Seite 132).

[‡]Zu dieser vgl. Berry [Ber78] oder Arnol'd [Arn78, §49 ff.].

A.3 Zu Kap.3.2: Für welche "Periodisierungsverfahren" gelten diese Symmetrien?

Das in Kap.3.1 dargestellte "Periodisierungsverfahren", welches beliebige autonome Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung in Bewegungsgleichungen auf isolierten chaotischen Tori überführt, läßt sich leicht verallgemeinern, wie das folgende Beispiel zeigt:

Ausgangspunkt ist wiederum das Differentialgleichungssystem (3.3). Statt (3.5) wählen wir nun die Ersetzungsvorschrift

$$f_i(x_j; p_r) \rightarrow \tilde{f}_i(x_j; p_r) = f_i\left(\frac{\alpha}{j} \sin(j \frac{x_j}{\alpha}) + \frac{\alpha}{\eta} \{\cos(2j \frac{x_j}{\alpha}) - 1\}; p_r\right) \quad (\text{A.40})$$

In den neuen Variablen $\Phi = \frac{x}{\alpha}$ erhalten wir dann die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\Phi}_i = \frac{\omega_{0,i}(\mathcal{I}_0)}{\eta} + \frac{1}{\alpha} f_i\left(\frac{\alpha}{j} \sin(j \Phi_j) + \frac{\alpha}{\eta} \{\cos(2j \Phi_j) - 1\}; p_r\right) \quad (\text{A.41})$$

Wie die Bewegungsgleichungen (3.12) tendieren auch diese Bewegungsgleichungen im Limes (3.14) gegen das Ausgangssystem (3.3).[†]

Bei beiden Verfahren ist das Vektorfeld $G(\Phi)$ von der Form

$$G(\Phi) = G\left(g_1(\Phi_1), \dots, g_N(\Phi_N)\right) \quad \text{mit} \quad g_i(\Phi_i + 2\pi) = g_i(\Phi_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{A.42})$$

Auf den nichtregulären Tori zu solchen Vektorfeldern gilt nun: Existiert ein Fixpunkt Φ_* mit

$$\frac{\partial g_i}{\partial \Phi_{*,i}} \neq 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{A.43})$$

so gibt es mindestens $2^N - 1$ weitere nicht-äquivalente Fixpunkte (zur Definition äquivalenter Fixpunkte → Seite 26).[‡] Da periodische Funktionen innerhalb der Periode außer (absoluten oder relativen) Extrema jeden Wert mindestens zweimal annehmen und aufgrund der Bedingungen (A.43) bei den Werten $\Phi_{*,i}$ keine Extrema der Funktionen $g_{i=1,\dots,N}$ liegen, gibt es für jedes $i = 1, \dots, N$ mindestens einen Wert $\Psi_{*,i} \neq \Phi_{*,i}$ im Intervall $[0, 2\pi)$, für den $g_i(\Psi_{*,i}) = g_i(\Phi_{*,i})$. Jeder verschwindende Fixpunkt-Eigenwert führt zu einer entsprechenden Reduktion der Zahl nicht-äquivalenter Fixpunkte, wie in Kap.3.2 für das in Kap.3.1 dargestellte Periodisierungsverfahren beispielhaft erläutert (→ Anmerkung auf Seite 26).

[†]Wenn das Vektorfeld $G(\Phi)$ wie hier einen η -abhängigen Term enthält, kann die Bewegung im "Störsystem" nicht durch Wahl der Parameter (3.15) - $\omega_0(\mathcal{I}_0) = 0$ & $\eta = 1$ - realisiert werden. Im Unterschied zum Fall η -unabhängiger Vektorfelder $G(\Phi)$ unterscheidet sich in diesem Fall der Limes $\Phi = \frac{x}{\alpha} \rightarrow 0$ auch für die Parameterwerte (3.15) vom Limes (3.14).

[‡]Wenn eine der Bedingungen (A.43) verletzt ist, verschwindet mindestens ein Fixpunkt-Eigenwert, da die Determinante $\det\left(\frac{\partial G}{\partial \Phi_*}\right)$ folgende Form hat:

$$\det\left(\frac{\partial G}{\partial \Phi_*}\right) = \frac{\partial g_1}{\partial \Phi_{*,1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial g_N}{\partial \Phi_{*,N}} \cdot \det\left(\frac{\partial G}{\partial p(\Phi_*)}\right)$$

Hinsichtlich der Zeitumkehr-Transformation gilt: Sind alle 2π -periodischen Funktionen $g_i(\Phi_i)$ in (A.42) gerade oder alle ungerade, d.h. lassen sie sich durch Fourierreihen darstellen, die *nur* cos- oder *nur* sin-Terme enthalten, so gibt es zu jeder Lösung $\Phi(t)$ der Bewegungsgleichungen (2.5) auch eine Lösung $\bar{\Phi}(-t)$. Dabei ist $\bar{\Phi} = -\Phi$, falls alle g_i gerade, und $\bar{\Phi} = \pi - \Phi$, falls alle g_i ungerade Funktionen sind. Jeder Trajektorie entspricht dann unter Zeitumkehr genau eine andere, die aus der ursprünglichen durch Spiegelung am Ursprung bzw. durch Verschiebung um den Vektor π und Spiegelung am Ursprung hervorgeht, und genau wie im oben geschilderten Fall treten alle Attraktoren (gespiegelt und ggf. verschoben) auch im zeitumgekehrten Fluß auf, was die Existenz der entsprechenden Repeller bedingt. Sind die Funktionen $g_{i=1,\dots,N}$ aber weder gerade noch ungerade, wie etwa im Fall des obigen Beispiels mit den Bewegungsgleichungen (A.41), so gibt es keine solche Symmetrie unter Zeitumkehr. Natürlich bedingt auch dann die Existenz eines Fixpunkts, für den die Bedingung (A.43) erfüllt ist, diejenige von $2^N - 1$ weiteren nicht-äquivalenten Fixpunkten, aber ein gegebener Fixpunkt hat dann keinen konjugierten Partner mit den entgegengesetzten Eigenwerten.

A.4 Zu Kap.3.5&3.6: Lösung der kubischen Gleichungen

Im ersten Abschnitt dieses Anhangs wird die allgemeine Lösung kubischer Gleichungen angegeben. Anschließend wird die Ableitung der bei der Lösung des Fixpunktproblems im Lorenz-Fall auftretenden kubischen Gleichung durchgeführt und gezeigt, daß die Fixpunkte im Grenzfall $\eta \rightarrow \infty$ alle im Reellen liegen und im Grenzfall $\eta \rightarrow 0$ im Komplexen gegen ∞ streben. Der Vollständigkeit halber führen wir abschließend die bei der linearen Stabilitätsanalyse im Rössler- und Lorenz-Fall auftretenden kubischen charakteristischen Polynome an.

● Die allgemeine Lösung kubischer Gleichungen [BS79]

Ausgehend von der Normalform der kubischen Gleichung

$$x^3 + rx^2 + sx + t = 0 \quad (\text{A.44})$$

gelangt man zur reduzierten Form

$$y^3 + py + q = 0 \quad (\text{A.45})$$

durch folgende Substitutionen:

$$p = s - \frac{r^2}{3}, \quad q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t, \quad \text{und} \quad y = x + \frac{r}{3} \quad (\text{A.46})$$

Ist die Diskriminante

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad (\text{A.47})$$

negativ (*casus irreducibilis*), so ergeben sich drei reelle Lösungen:

$$y_k = 2\sqrt[3]{\rho} \cos\left(\frac{\varphi}{3} + (k-1)\frac{2\pi}{3}\right), \quad k = 1; 2; 3 \quad (\text{A.48})$$

mit $\rho = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}$ und $\cos \varphi = -\frac{q}{2\rho}$

Für positiv-definite Diskriminante ($D \geq 0$) sind die Lösungen der reduzierten kubischen Gleichung (A.45) durch die *Cardanischen Lösungsformeln* gegeben:

$$\begin{aligned} y_1 &= u + v \\ y_{2,3} &= -\frac{u+v}{2} \pm i \frac{u-v}{2} \sqrt{3} \\ \text{mit } u &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \quad \text{und} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

● Die kubischen Fixpunktgleichungen im Lorenz-Fall

Für den Sinuswert der ersten Komponente eines Fixpunktes im System (3.57) findet man durch sukzessives Eliminieren der beiden anderen Variablen eine kubische Gleichung. Von den Lösungen dieser Gleichung hängen die beiden anderen Komponenten in folgender Weise ab:

$$\begin{aligned} \sin \Phi_{*,2} &= \sin \Phi_{*,1} - \frac{\omega_{0,1}}{\eta \sigma} \\ \sin \Phi_{*,3} &= \frac{\omega_{0,3}}{\eta b} + \frac{\alpha}{b} \sin \Phi_{*,1} \left(\sin \Phi_{*,1} - \frac{\omega_{0,1}}{\eta \sigma} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Die Koeffizienten der reduzierten Form (A.45) der kubischen Gleichung für $\sin \Phi_{*,1}$ lauten

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{3} \left(\frac{\omega_{0,1}}{\sigma \eta} \right)^2 - \frac{b}{\alpha^2} \left(\tau - 1 - \frac{\alpha \omega_{0,3}}{b \eta} \right) \\ q &= -2 \left(\frac{\omega_{0,1}}{3 \sigma \eta} \right)^3 - \frac{b}{\alpha^2} \left\{ \frac{\omega_{0,2}}{\eta} + \frac{\omega_{0,1}}{\sigma \eta} \left(\frac{\tau + 2}{3} - \frac{\alpha \omega_{0,3}}{3 b \eta} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Im Limes $\eta \rightarrow \infty$ tendiert $q \rightarrow 0$, und für $\tau > 1$ ist $\text{sig}(p) < 0$. Die Diskriminante (A.47) ist daher negativ, und man findet drei reelle Lösungen für $\sin \Phi_{*,1}$, die für nicht zu kleine α -Werte alle recht nahe bei null liegen. Der Sinuswert der zweiten Komponente ist dann gleich dem der ersten. Für $\sin \Phi_{*,3}$ gilt

$$\begin{aligned} |\sin(\Phi_{*,3})_{k=1,2,3}| &= \frac{\alpha}{b} \sin^2(\Phi_{*,1})_k = \frac{\alpha}{b} 4 \sqrt[3]{\rho^2} \cdot \cos^2 \left((k-1) \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= \frac{\alpha}{b} 4 \sqrt[3]{\frac{b^6}{\alpha^{12}} \frac{(\tau-1)^6}{27^2}} \cdot \cos^2 \left((k-1) \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= \frac{4}{9} b \frac{(\tau-1)^2}{\alpha^3} \cos^2 \left((k-1) \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Um $|\sin(\Phi_{*,3})| \leq 1$ zu erfüllen, muß daher bei Wahl des Parameterwerts (3.56) $\tau = 28$ für α Folgendes gelten:

$$\alpha_M \geq \sqrt[3]{\frac{4}{9} b (\tau-1)^2} = 6 \sqrt[3]{4} \approx 9.5244 \quad \text{und} \quad \alpha_{R,L} \geq \sqrt[3]{\frac{b}{9} (\tau-1)^2} = 6 \quad (\text{A.53})$$

Im Limes $\eta \rightarrow 0$ kann die Diskriminante je nach Wahl der Parameter positiv oder negativ sein. Im letzteren Fall muß eine der Lösungen gegen null tendieren (da $\lim_{\eta \rightarrow 0} \cos \varphi \rightarrow 0$),

während die beiden anderen divergieren. Falls aber im Limes $\eta \rightarrow 0$ auch $\sin \Phi_{*,1} \rightarrow 0$ strebt, so divergieren die Sinuswerte der beiden anderen Komponenten, vgl. (A.50). Ist die Diskriminante hingegen positiv, so divergieren die Real- und (ggf.) Imaginärteile der Sinuswerte aller Fixpunkt-Komponenten. In jedem Fall streben also die Fixpunkte für $\eta \rightarrow 0$ im Komplexen gegen den Punkt ∞ . Für den von uns gewählten Parametersatz sind übrigens im Limes $\eta \rightarrow 0$ alle Sinuswerte stets reell. Wählt man aber bei gleichen Kontrollparameterwerten und $\alpha = 100$ als "ungestörte Frequenz" z.B. $\omega_0 = (1, 1, 1)$, so strebt im Limes $\eta \rightarrow 0$ die Diskriminante $D(\eta) \rightarrow +\infty$.

Im Fall endlicher nichtverschwindender η -Werte hat die Diskriminante für die von uns gewählten Parameter nur im Intervall $0.1086 \lesssim \eta \lesssim 2.4757$ positive Werte – siehe Abbildung A.1. In diesem Intervall kann also höchstens ein Fixpunktsatz existieren. Außerhalb dieses Intervalls kann es bis zu drei reellwertige Fixpunktsätze (mit je acht Fixpunkten) geben. Wieviele davon tatsächlich reellwertig sind, hängt davon ab, wieviele die Bedingung (3.48) – nämlich $|\sin \Phi_{*,k=1,2,3}| \leq 1$ – erfüllen (vgl. Kap.3.6.2).

● Die kubischen Gleichungen zur Bestimmung der Fixpunkteigenwerte

Sowohl im Rössler- wie im Lorenz-Fall führt die lineare Stabilitätsanalyse (vgl. Kap.3.2) auf das Eigenwertproblem einer 3×3 -Matrix, mithin auf das Nullstellenproblem des zugehörigen kubischen charakteristischen Polynoms. Die Koeffizienten der Normalform (A.44) der zur Eigenwertbestimmung im Rössler-Fall zu lösenden kubischen Gleichung sind

$$\begin{aligned} r &= -(\alpha \bar{s}_1 c_3 + a c_2) \\ s &= \alpha a \bar{s}_1 c_2 c_3 + \alpha c_1 s_3 c_3 + c_1 c_2 \\ t &= -(a c_1 c_2 s_3 c_3 + \bar{s}_1 c_1 c_2 c_3) \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

$$\text{mit } s_k = \sin \Phi_{*,k}, \quad c_k = \cos \Phi_{*,k}, \quad k = 1, 2, 3$$

$$\text{und } \bar{s}_1 = \sin \Phi_{*,1} - \frac{c}{\alpha}$$

Im Lorenz-Fall findet man

$$\begin{aligned} r &= b c_3 + c_2 + \sigma c_1 \\ s &= \alpha^2 s_1^2 c_2 c_3 + (c_2 + \sigma c_1) c_3 b + \sigma c_1 c_2 (1 + \alpha s_3 - r_L) \\ t &= \left(\alpha^2 s_1 (s_1 + s_2) + \alpha s_3 b + b(1 - r_L) \right) \sigma c_1 c_2 c_3 \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

$$\text{mit } s_k = \sin \Phi_{*,k}, \quad c_k = \cos \Phi_{*,k}, \quad k = 1, 2, 3$$

wobei wir ausnahmsweise den Parameter r des Gleichungssystems (3.55) bzw. des Gleichungssystems (3.57) mit r_L bezeichnen, um eine Verwechslung mit dem Koeffizienten r der Normalform (A.44) kubischer Gleichungen zu vermeiden.

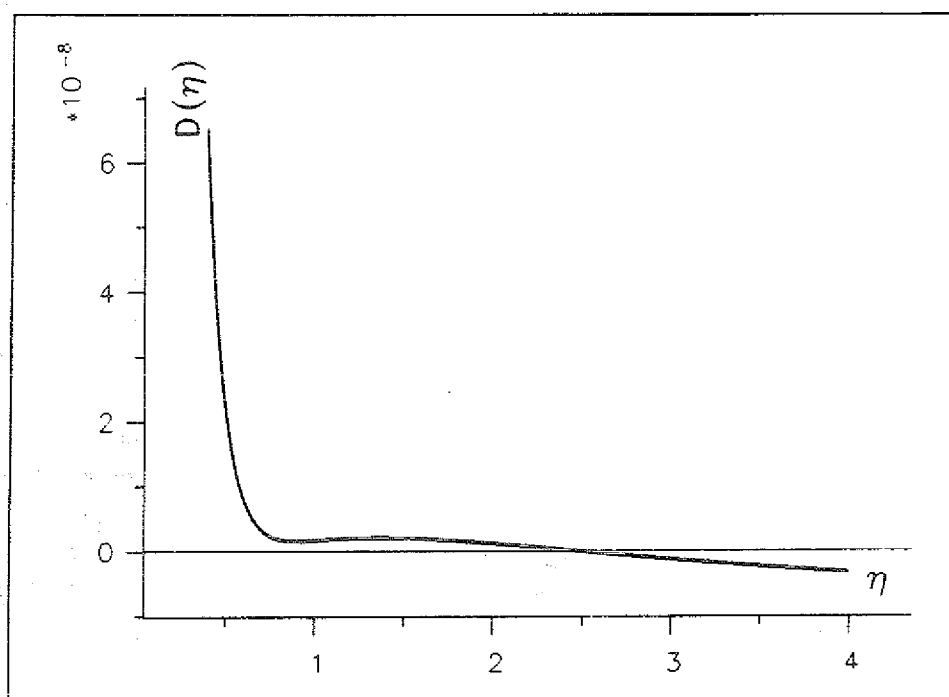
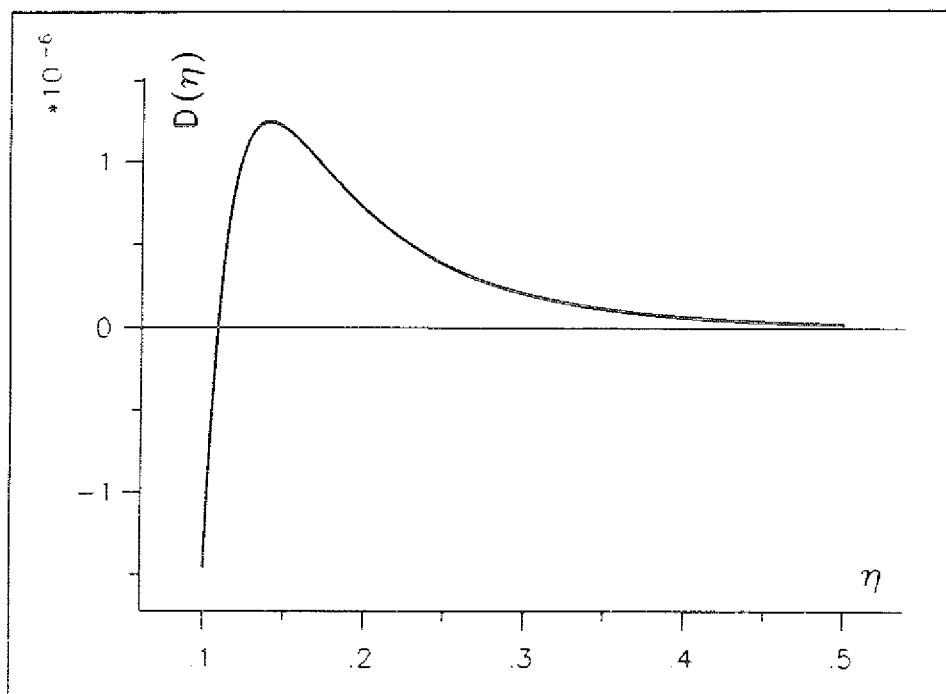


Abb.A.1: Die Diskriminante $D(\eta)$ der Fixpunktgleichungen auf dem Lorenz-Torus für die Kontrollparameterwerte (3.56) sowie $\alpha = 100$ und $\omega_0 = (\sigma_g, \sigma_g^2, 1)$, wobei $\sigma_g = (\sqrt{5} - 1)/2$.

A.5 Zu Kap.3.3&4.1: Mannigfaltigkeiten im Phasenraum

In dieser Arbeit wird stets der Fluß auf *invarianten* Mannigfaltigkeiten[†] im Phasenraum behandelt, auch wenn dieser Begriff soweit als möglich vermieden und durch spezifischere wie *invariante Hyperfläche* bzw. *invarianter Torus* ersetzt wurde. Im Kapitel 3.3 war dies allerdings – in Bezug auf die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten von Fixpunkten auf nichtregulären Tori – nicht möglich.

● Zur Definition (differenzierbarer) Mannigfaltigkeiten

Definition:[‡] Eine (zusammenhängende) n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit M_n ist eine Punktmenge M zusammen mit einer (endlichen oder) abzählbaren Menge n -dimensionaler verträglicher Koordinaten-Karten, welche zusammengenommen die Menge M so überdecken, daß es zu zwei verschiedenen Punkten in M stets auch disjunkte Umgebungen dieser Punkte gibt (Hausdorffsches Separationsaxiom).

Der in dieser Definition enthaltene Begriff “ n -dimensionale verträgliche Karte” wird (zusammen mit allem Nötigen) in unübertroffener Kürze von Arnol'd [Arn78, §18] erläutert. Differenzierbarkeit ist eine wesentliche Eigenschaft solcher Karten.

● Mannigfaltigkeiten im Phasenraum

Der Phasenraum Hamiltonscher Systeme bildet eine differenzierbare (symplektische) Mannigfaltigkeit [Arn78]. Aus den zitierten Definitionen (besonders auch von Karten) folgt, daß jede offene zusammenhängende Teilmenge im Phasenraum eine differenzierbare Mannigfaltigkeit bildet.

Das gilt insbesondere vom *Wirkungsraum* (“action space”) – der Menge aller Werte, die die Wirkungsvariablen eines Systems mit N Freiheitsgraden annehmen können. Der Wirkungsraum ist i.a. kein Vektorraum (etwa im Fall harmonischer Oszillatoren, deren Wirkungen stets positiv sind), aber stets eine N -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Die *stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten von Fixpunkten* (Kap.3.3) sind natürlich ebenfalls Mannigfaltigkeiten im Phasenraum, und zwar solche im “*Winkelraum*”, dem Komplement zum Wirkungsraum.

Gegenstand dieser Arbeit ist der Fluß auf invarianten Mannigfaltigkeiten[†], die durch konstante Werte der Wirkungen definiert sind ($\dot{I} = 0$), oder anders gesagt, die aus invarianten N -Tori bestehen. Da diese Mannigfaltigkeiten durch die $m = N - n$ Bedingungen (4.2) im N -dimensionalen Wirkungsraum festgelegt sind, handelt es sich um Hyperflächen der Dimension $N + n = 2N - m$. Die zugehörigen Hyperflächen (der Dimension n) im Wirkungsraum sind natürlich ebenfalls *invariante* Mannigfaltigkeiten (Nullvektoren verlaufen tangential zu jeder Fläche). Von wenigen Ausnahmen[§] abgesehen behandeln wir in den exemplarisch un-

[†]Vgl. deren Definition auf Seite 4.

[‡]nach [Ric81, Kap.23]

[§]im folgenden Anhang A.6 (explizit: Behandlung der Bewegungsgleichungen auf einer gekrümmten Barriere) sowie im Anhang B.4 (implizit: die Systeme mit konstanter Richtung der Winkelgeschwindigkeit können auf beliebigen Hyperflächen auftreten).

tersuchten Systemen stets den Fluß auf invarianten Hyperebenen, d.h. die Bedingungen (4.2) sind linear in den Wirkungen.

A.6 Zu Kap.4.2: Die Bewegungsgleichungen auf einer gekrümmten Barriere

Außer in diesem Anhang wurden stets Hamiltonfunktionen mit linearem Störterm bzw. linearem Störsystem betrachtet.[†] Daher waren alle aus invarianten Tori bestehenden Hyperflächen tatsächlich Hyperebenen. Als Beispiel für (im Wirkungsraum) gekrümmte Barrieren betrachten wir die Oberfläche einer Achtel-Kugel:

$$M_{2,3} = \{(I_{*,1}, I_{*,2}, I_{*,3}) \mid I_{*,1}^2 + I_{*,2}^2 + I_{*,3}^2 = I_0^2, I_{*,i=1,2,3} > 0\} \quad (\text{A.56})$$

Es ist also $N = 3$ und $n = 2$. Die Bedingung (4.2) soll auf dieser Kugelausschnitts-Oberfläche erfüllt sein. Zur expliziten Formulierung dieser Bedingung definieren wir – analog der Form des Vektorfelds $F(I) = I - I_0$ im Fall isolierter nichtregulärer Tori[‡] – ein Vektorfeld $F_*(I)$ durch

$$I - F_*(I) \equiv F(I) \quad (\text{A.57})$$

In dieser suggestiven Notation nimmt die Bedingung (4.2) auf der Hyperfläche $M_{2,3}$ folgende Form an:

$$F_*(I_*) = \left(\sqrt{I_0^2 - (I_{*,2}^2 + I_{*,3}^2)}, \sqrt{I_0^2 - (I_{*,1}^2 + I_{*,3}^2)}, \sqrt{I_0^2 - (I_{*,1}^2 + I_{*,2}^2)} \right) = I_* \quad (\text{A.58})$$

Für Trajektorien auf den invarianten Tori, deren Wirkungsvektoren I_* zur Hyperfläche $M_{2,3}$ gehören, nehmen die Bewegungsgleichungen (4.4) somit folgende Form an:

$$\dot{\Phi}_i = \omega_{0,i}(I_*) + \eta G_i(\Phi) + \eta \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{I_{*,j}}{I_{*,i}} G_j(\Phi) \quad (\text{A.59})$$

Dabei kann der Vektor $\frac{1}{\eta}(\dot{\Phi} - \omega_0) \mid I_* \in M_{2,3}$ – wie oben erläutert, siehe die Beziehungen (4.18) und (4.19) – wegen $m = N - n = 1$ nicht mehrere linear unabhängige Komponenten haben. Tatsächlich findet man, daß

$$\left\{ I_{*,k} \left(\dot{\Phi}_k - \omega_{0,k} \right) - I_{*,l} \left(\dot{\Phi}_l - \omega_{0,l} \right) \right\} \mid I_* \in M_{2,3} = 0 \quad (\text{A.60})$$

Im Spezialfall $I_{*,1}^2 = I_{*,2}^2 = I_{*,3}^2 = \frac{I_0^2}{3}$ etwa gilt

$$\left(\dot{\Phi}_i - \omega_{0,i} \right) \mid I_* \in M_{2,3} = \eta \sum_{j=1}^3 G_j(\Phi) \quad (\text{A.61})$$

d.h. alle Komponenten dieses Vektors sind gleich.

[†]Linear hinsichtlich der Wirkungsabhängigkeit (d.h. linear im Sinne der Definition nichtlinearer Systeme nach Percival – vgl. hierzu ggf. die Anmerkung auf Seite 132).

[‡]Vgl. (4.1) und die Anmerkung auf Seite 58.

A.7 Zu Kap.4.3: Reduktion gewisser nicht-isolierter N -Tori auf $(m+1)$ -Tori

Wenn die Bewegungsgleichungen von vornherein in $m = N - n$ nicht-triviale und n triviale zerlegt sind (d.h. im einfachsten Fall), so läßt sich die Bewegung in den m "nicht-trivialen" Winkeln $\Phi_{i=1,\dots,m}$ durch die Bewegung auf einem $(m+1)$ -Torus darstellen, falls die Frequenzen der Bewegung in den n "trivialen" Winkeln $\Phi_{i=m+1,\dots,N}$ die Kommensurabilitätsbedingung (4.27) erfüllen.

Beweis: Im Fall nicht gekrümmter achsenparalleler Hyperflächen $M_{n;N \geq 3}$ im Wirkungsraum haben die Bewegungsgleichungen auf den die zugehörige invariante Hyperfläche im Phasenraum bildenden N -Tori (mit Wirkungen I_* auf $M_{n;N}$) ohne weitere Transformation die Form

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_i &= \omega_{0,i}(I_*) + \eta g_i(I_*, \Phi), \quad i = 1, \dots, m = N - n \\ \dot{\Phi}_i &= \omega_{0,i}(I_*), \quad i = m + 1, \dots, N \geq 3\end{aligned}\tag{A.62}$$

wobei die m skalaren Funktionen $g_i(I, \Phi)$ von den Winkelvariablen Φ in 2π -periodischer Weise abhängen. Wenn außerdem die in den n trivialen Bewegungsgleichungen auftretenden Frequenzen $\omega_{0,i=m+1,\dots,N}$ kommensurabel sind, dann kann man eine Zeit T finden (nämlich die Periode der Bewegung in den n "trivialen" Winkeln), so daß

$$\omega_{0,i}T = 2\pi m_i, \quad m_i \in \mathbb{N}, \quad i = m + 1, \dots, N\tag{A.63}$$

Die nicht-trivialen Bewegungsgleichungen nehmen unter diesen Umständen die Form

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}_i &= \omega_{0,i} + \eta g_i(\Psi_{j \leq m}, t; I_*) \quad \text{mit} \quad \Psi_i \equiv \Phi_i \\ \text{sowie} \quad g_i(\Psi_{j \leq m}, t + T; I_*) &= g_i(\Psi_{j \leq m}, t; I_*), \quad i = 1, \dots, m\end{aligned}\tag{A.64}$$

an, wobei die N Variablen I_* nun als Parameter interpretiert werden. Die Bewegungsgleichung (A.64) kann von der zeitabhängigen Hamiltonfunktion

$$H(J_{j \leq m}, \Psi_{j \leq m}, t) = \sum_{i=1}^m \left(\omega_{0,i}(I_*) + \eta g_i(\Psi_{j \leq m}, t; I_*) \right) J_i\tag{A.65}$$

hergeleitet werden, in welcher die J_i die zu den Ψ_i konjugierten Variablen darstellen. Die periodische Zeitabhängigkeit kann nun durch Erweiterung des Phasenraums in eine weitere Winkelvariable verwandelt werden:

$$\Psi_{m+1} = \omega t \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}\tag{A.66}$$

Die zugehörige Wirkung ist

$$J_{m+1} = - \frac{H}{\omega}\tag{A.67}$$

Die Hamiltonfunktion im so erweiterten Phasenraum lautet

$$\hat{H}(J, \Psi) = H(J_{j \leq m}, \Psi_{j \leq m}, \Psi_{m+1}) + \omega J_{m+1}\tag{A.68}$$

und ist eine Erhaltungsgröße. Man kann also die Bewegungsgleichungen (A.64) – statt von einer explizit zeitabhängigen Hamiltonfunktion mit m Freiheitsgraden – ebenso gut von einer nicht explizit zeitabhängigen Hamiltonfunktion mit $m + 1$ Freiheitsgraden herleiten, und die dann hinzutretende Bewegungsgleichung ist eine triviale (zur Prozedur der Phasenraumerweiterung $\rightarrow$ [LL83, Kap.1.2b]).

Bei $J = 0$ verschwindet $\dot{J}$, d.h. dort liegt ein invarianter Torus, und die Bewegung auf diesem wird durch die m Gleichungen (A.64) und die triviale Gleichung $\dot{\Psi}_{m+1} = \omega$ beschrieben. Q.E.D.

Beispielsweise läßt sich die Bewegung auf Barrieren so auf die Bewegung auf 2-Tori mit einer trivialen Bewegungsgleichung reduzieren, sofern von vornherein nur eine der N Bewegungsgleichungen eine nicht-triviale Form hat, und für die Frequenzen der übrigen die Kommensurabilitätsbedingung (4.27) erfüllt ist.

Anhang B

Zur KAM-Störungsrechnung

B.1 Standard-Störungstheorie und das Problem der kleinen Nenner [LL83, Ber78]

Störungstheorien sind Verfahren, welche den Störterm der Hamiltonfunktion eines fast-integrablen Systems durch iterative Abfolge kanonischer Transformationen[†] immer weiter verkleinern und, falls die Verfahren konvergieren, die Hamiltonfunktion (im Limes $n \rightarrow \infty$) in die eines integrablen Systems überführen. Im Fall fast-integrabler Systeme, welche als Funktion der Wirkungs-Winkel-Koordinaten eines integrablen Systems gegeben sind, d.h.

$$H(I, \Phi) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \Phi) \quad (\text{B.1})$$

mit

$$\varepsilon H_1(I, \Phi) = \varepsilon \sum_{k \neq 0} H_{1k}(I) e^{ik \cdot \Phi} \quad (\text{B.2})$$

ist im ersten Schritt der folgende Ansatz für die erzeugende Funktion[†] naheliegend:

$$S_1(\bar{I}, \Phi) = \bar{I} \cdot \Phi + \varepsilon \sum_{k \neq 0} s_{1k}(\bar{I}) e^{ik \cdot \Phi} \quad (\text{B.3})$$

Der erste Summand ergibt die identische Transformation. Als transformierte Hamiltonfunktion findet man

$$\begin{aligned} \bar{H} &= H_0\left(\bar{I} + i\varepsilon \sum_{k \neq 0} k s_{1k}(\bar{I}) e^{ik \cdot \Phi}\right) \\ &\quad + \varepsilon \sum_{k \neq 0} H_{1k}\left(\bar{I} + i\varepsilon \sum_{m \neq 0} m s_{1m}(\bar{I}) e^{im \cdot \Phi}\right) e^{ik \cdot \Phi} \\ &= H_0(\bar{I}) + \varepsilon \sum_{k \neq 0} [H_{1k}(\bar{I}) + ik \cdot \omega_0(\bar{I}) s_{1k}(\bar{I})] e^{ik \cdot \Phi} + O(\varepsilon^2) \quad \text{mit} \quad \omega_0(\bar{I}) = \frac{\partial H_0}{\partial \bar{I}} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

[†]vgl. Anhang A.0

Die erzeugende Funktion

$$S_1(\bar{I}, \bar{\Phi}) = \bar{I} \cdot \bar{\Phi} + i\varepsilon \sum_{k \neq 0} \frac{H_1 k(\bar{I})}{k \cdot \omega_0(\bar{I})} e^{ik \cdot \bar{\Phi}} \quad (\text{B.5})$$

führt daher die Hamiltonfunktion (B.1) in eine Hamiltonfunktion (B.4) über, deren Störterm nur noch von zweiter Ordnung ist ($\sim \varepsilon^2$).

Man kann dieses Verfahren nun mit einer erzeugenden Funktion $S_2(\bar{I}, \bar{\Phi})$ wiederholen, die nur durch Terme von zweiter Ordnung in ε von der identischen Transformation abweicht, und gelangt so zu einer Hamiltonfunktion, deren Störterme nur noch von dritter Ordnung in ε sind; und so fort. Die erzeugende Funktion der Gesamttransformation ist dann eine Potenzreihe in ε , und formal sind die Störterme in aufeinanderfolgenden Schritten dieses Standard-Verfahrens von der Größenordnung

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon^2 \rightarrow \varepsilon^3 \rightarrow \dots \rightarrow \varepsilon^n \rightarrow \dots \quad (\text{B.6})$$

Tatsächlich liefert diese Prozedur jedoch fast nie eine konvergente Reihe für die erzeugende Funktion der Gesamttransformation, da in jedem Schritt in den Nennern der hinzukommenden Fourierreihe ein anderer Frequenzvektor ω_0 auftritt (falls das ungestörte System nicht nur linear von den Wirkungen abhängt). Wenn aber die Verhältnisse der Komponenten eines solchen Frequenzvektors zueinander nicht hinreichend irrational sind, fallen die Fourierkoeffizienten in den Fourierreihen vom Typ

$$\sum_{k \neq 0} \frac{ih_k(\bar{I})}{k \cdot \omega_0(\bar{I})} e^{ik \cdot \bar{\Phi}} \quad (\text{B.7})$$

mit wachsendem $|k|$ nicht rasch genug ab, da das Auftreten kleiner Nenner (die im Fall von *Resonanz* sogar verschwinden) dann für große $|k|$ unvermeidlich wird.[†] In die erzeugende Funktion der Gesamttransformation gehen aber unendlich viele solcher Fourierreihen ein. Infolge der Wirkungsabhängigkeit der ungestörten Frequenz gibt es kein endliches Volumen im Wirkungsraum, für welches die Bedingung hinreichend irrationaler Verhältnisse der Komponenten all' der Frequenzvektoren, die in den Nennern dieser Fourierreihen vorkommen, erfüllt werden könnte. In jeder Umgebung einer Wirkung $\bar{I}$ gibt es im Wirkungsraum nämlich Wirkungen $\bar{I}$, für die $k \cdot \omega_0(\bar{I}) = 0$. Dementsprechend ist kaum damit zu rechnen, daß alle in die erzeugende Funktion der Gesamttransformation eingehenden Fourierreihen konvergieren.[‡] Die Konvergenz des Verfahrens wäre aber noch nicht einmal dann gesichert, wenn alle auftretenden Fourierreihen konvergierten, da die Konvergenz der Potenzreihe in ε , die sich für die Erzeugende der Gesamttransformation ergibt, nicht schon dadurch gesichert ist, daß alle ihre Glieder endlich sind. Siegel [Sie41, Sie54] konnte vielmehr zeigen, daß selbst dann diese Reihe fast immer divergiert.[§] Dies ist das klassische *Problem der kleinen Nenner*,

[†]Die Zähler der Fourierkoeffizienten in Fourierreihen dieses Typs fallen mit $|k|$ exponentiell ab: $|h_k| \sim e^{-|k|} \rho$, wobei ρ eine Konstante ist und $|k| = |k_1| + \dots + |k_N|$ (vgl. [Jac89, Anhang L]).

[‡]Es gibt allerdings Fälle, in denen $h_k(\bar{I}) = 0$ wenn $k \cdot \omega_0(\bar{I}) = 0$, etwa Whittakers adelphische Integrale [Whi37, §196 ff.] (vgl. [Jac89, Anhang L]).

[§]Eine Ausnahme sind wiederum Whittakers adelphische Integrale.

welches die störungstheoretische Behandlung der Planetenbewegung von jeher so schwierig machte.[†]

Der Lösungsansatz für dieses Problems stammt von Kolmogorov [Kol54a, Kol54b]. Er erkannte, daß es keinen Sinn hat, eine Transformation zu suchen, die für alle Wirkungen gleichzeitig die Störung eliminiert. Stattdessen entwickelte er das im folgenden Abschnitt dargestellte Störungsverfahren, welches auf *einen* invarianten Torus führt, auf dem die Bewegung durch einen von Anfang an vorgegebenen Frequenzvektor charakterisiert ist, dessen Komponenten zueinander in hinreichend irrationalen Verhältnissen stehen[‡] (diese Bedingung wird gleich präzisiert). Die Fixierung des Frequenzvektors führt dazu, daß die in jedem Schritt auftretenden Fourierreihen konvergieren. Da bei diesem Verfahren außerdem in jedem Schritt die Ergebnisse des vorherigen benutzt werden[§], ist die erzeugende Funktion der Gesamttransformation eine Potenzreihe in ε^{2^n} , konvergiert also viel rascher (sogenannt *quadratisch*) als die der Standardstörungstheorie. Die (zunächst formal) raschere Konvergenz sichert für hinreichend kleine Störungen die tatsächliche Konvergenz des Verfahrens.

Wann sind nun die Verhältnisse der Komponenten eines Frequenzvektors ω_0 hinreichend irrational, um die Konvergenz einer Fourierreihe vom Typ (B.7) zu gewährleisten?

Man kann leicht zeigen ($\rightarrow$ [Jac89, Anhang L]),

- 1) daß Fourierreihen vom Typ (B.7) konvergieren, wenn die Nenner für *irgendwelche* positive C , τ eine diophantische Beziehung erfüllen:

$$|k \cdot \omega_0| \geq \frac{C}{|k|^\tau}, \quad \text{wobei} \quad |k| = |k_1| + \dots + |k_N| \quad (\text{B.8})$$

- 2) daß das Maß der Frequenzvektoren im Frequenzraum, die keine solche Beziehung (B.8) erfüllen, mit $C \rightarrow 0$ gegen null strebt, wenn $\tau > N - 1$.

Daher fordern die KAM-Verfahren (sowohl das Verfahren von Kolmogorov wie die von Arnol'd und Moser) stets, daß der vorgegebene Frequenzvektor Ω_0 folgende diophantische Bedingung[¶] erfüllt:

$$|k \cdot \Omega_0| \geq \frac{C}{|k|^\tau}, \quad \tau > N - 1 \quad (\text{B.9})$$

Für $N = 2$ schreibt man statt (B.9) gewöhnlich

$$\left| \frac{\Omega_{01}}{\Omega_{02}} - \frac{\tau}{s} \right| \geq \frac{K}{s^\mu} \quad \text{mit} \quad \tau, s \in \mathbb{N}, s > 1 \text{ und } \mu > 2 \quad (\text{B.10})$$

[†]Wenn man sich mit der Bahnberechnung für endliche Zeiten begnügt, kann das Verfahren trotzdem brauchbare Resultate liefern, da dann nur die Terme niedrigster Ordnung in ε und $|k|$ berücksichtigt werden müssen, da alle anderen klein sind und nur für lange Zeiten beobachtbare Effekte hervorrufen.

[‡]m.a.W. sind die Windungszahlverhältnisse der Bewegung auf dem gesuchten Torus hinreichend irrational.

[§]genau wie in der superkonvergenten Newtonschen Methode der Nullstellenberechnung. Diese Analogie wird von Berry [Ber78] erläutert.

[¶]Diophantische Approximationen im Rahmen der Theorie der Kettenbruchentwicklungen, siehe [Her79, Abschnitt V] und für $N = 2$ [Ber78, Abschnitt 4], sowie die dort angegebenen Quellen.

Genügen zwei Frequenzen einer solchen diophantischen Bedingung, so läßt sich ihr Verhältnis also nur sehr schlecht durch rationale Zahlen approximieren.[†]

Wie schon gesagt konvergiert das Kolmogorov-Verfahren aufgrund der beschleunigten Konvergenz auch insgesamt, wobei die Konstante C in (B.9) für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen Null strebt.[‡] Unter allen möglichen Frequenzvektoren bilden diejenigen, für die das Verfahren konvergiert (also die zu den KAM-Tori gehörigen) daher stets eine Menge von endlichem Maß[§], welches mit $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 1 strebt.

B.2 Das Verfahren von Kolmogorov [Kol54b, Thi77]

Die Hamiltonfunktion (B.1) wird zunächst durch einige Transformationen in eine geeignete Form überführt. Zu Beginn schlägt man (wie stets) einen eventuell noch vorhandenen winkelunabhängigen Anteil des Störterms H_1 dem ungestörten Term zu:

$$H = \hat{H}_0(I) + \varepsilon \hat{H}_1(I, \Phi) \quad (\text{B.11})$$

mit $\hat{H}_0(I) = H_0(I) + \varepsilon \langle H_1(I, \Phi) \rangle_\Phi$ und $\langle \hat{H}_1(I, \Phi) \rangle_\Phi = 0$

Auf die Hamiltonfunktion (B.11) wird sodann die erzeugende Funktion

$$S^{(0)}(I^{(0)}, \Phi) = \left(I^{(0)} + I_0 \right) \cdot \Phi \quad (\text{B.12})$$

angewandt, welche lediglich eine Verschiebung der Wirkungen bewirkt:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\partial S^{(0)}}{\partial \Phi} = I^{(0)} + I_0 \\ \Phi^{(0)} &= \frac{\partial S^{(0)}}{\partial I^{(0)}} = \Phi \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

d.h. es gilt $I^{(0)} = I - I_0$. Addiert man nun noch die "geschickte Null" $\{\Omega_0 \cdot I_0 + H_0(I_0)\}$, so gelangt man zu folgender Hamiltonfunktion:

$$H^{(0)} = \Omega_0 \cdot I + \left\{ \hat{H}_0(I^{(0)} + I_0) - \hat{H}_0(I_0) - \Omega_0 \cdot I \right\} + \varepsilon \hat{H}_1(I^{(0)} + I_0, \Phi) + \hat{H}_0(I_0) \quad (\text{B.14})$$

(der von I und Φ unabhängige Term $H_0(I_0)$ kann wieder weggelassen werden). Ω_0 ist hierbei eine geeignet gewählte Konstante (s.u.). Die Freiheit zur beliebigen Vorgabe von

[†]Der Zusammenhang mit der Kettenbruchentwicklung wird von Berry, aaO., erläutert. Für Frequenzvektoren, die einer diophantischen Bedingungen genügen, sind die Nenner in Fourierreihen des Typs (B.7) wenigstens für Resonanzen niedriger Ordnung (d.h. solche mit kleinem $|k|$) relativ groß (man spricht auch von relativ großem Abstand zu diesen Resonanzen). Auch für Resonanzen höherer Ordnung fallen sie wie gesagt nicht so rasch ab, daß die Konvergenz der Fourierreihe zerstört würde.

[‡]Quellenangaben zum vollständigen Beweis siehe Abschnitt B.3. Sehr empfehlenswert ist die hier wiederholt zitierte Beweisskizze in [Jac89, Anhang I].

[§]Eine grobe Abschätzung findet sich wiederum bei Berry, aaO.

Ω_0 hat man offenbar nur dann, wenn die winkelmittelte Frequenz $\frac{\partial}{\partial I} \langle H_0 + \varepsilon H_1 \rangle_{\Phi}$ von allen Wirkungen abhängt, d.h. wenn die Determinante

$$\left\| \frac{\partial^2 \langle H \rangle_{\Phi}}{\partial I_i \partial I_j} \right\| \neq 0 \quad (\text{B.15})$$

nicht verschwindet. Dies ist die *Twistbedingung*.[†] Zu vorgegebenem Ω_0 kann man dann das bislang nicht spezifizierte I_0 durch folgende Bedingung festlegen:

$$\frac{\partial \hat{H}_0}{\partial I_0} = \Omega_0 \quad (\text{B.16})$$

oder, anders ausgedrückt,

$$\omega_0 + \varepsilon \frac{\partial \langle H_1 \rangle_{\Phi}}{\partial I_0} = \Omega_0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{\partial H_0}{\partial I_0} \quad (\text{B.17})$$

Wird nun die Hamiltonfunktion um die Stelle $I^{(0)} = 0$ (d.h. $I = I_0$) entwickelt, so erhält man schließlich

$$H^{(0)} = \Omega_0 \cdot I^{(0)} + \varepsilon A^{(0)}(\Phi^{(0)}) + \varepsilon B^{(0)}(\Phi^{(0)}) \cdot I^{(0)} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=1}^N C_{ij}^{(0)}(\Phi^{(0)}) I_i^{(0)} I_j^{(0)} + \dots \quad (\text{B.18})$$

wobei die Winkelmittel des A - wie des B -Terms verschwinden:

$$\langle A^{(0)}(\Phi^{(0)}) \rangle_{\Phi^{(0)}} = 0 \quad \text{und} \quad \langle B^{(0)}(\Phi^{(0)}) \rangle_{\Phi^{(0)}} = 0 \quad (\text{B.19})$$

[†] Percival [Per85] bezeichnet die Matrix $\frac{\partial \Omega_i}{\partial I_j} = \frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j}$ als Nichtlinearitäts-Matrix und den Wert der Determinante $\left\| \frac{\partial \Omega_i}{\partial I_j} \right\|$ (B.15) als *Nichtlinearität*. In *linearen* Hamiltonschen Systemen ist die Frequenz Ω_0 (B.17) überall gleich, und die Nichtlinearitäts-Matrix verschwindet identisch. In *teilweise linearen* Systemen verschwindet zwar die Nichtlinearität identisch – d.h. wenigstens ein Eigenwert der Nichtlinearitäts-Matrix verschwindet stets –, die Nichtlinearitäts-Matrix jedoch nicht (andere Autoren sprechen in diesem Fall von *Entartung* bzw. *entarteten* Systemen). Für *nichtlineare Systeme* ist die so definierte Nichtlinearität hingegen per definitionem stets eine nichtverschwindende Größe. Die KAM-Theorie gilt also nur für nichtlineare Systeme, da deren Frequenz amplitudenabhängig und somit nachstimmbar ist (es sei denn, die Lage eines invarianten Torus sei a priori bekannt – dann sind nach der anfänglichen keine weiteren Wirkungsverschiebungen mehr nötig, vgl. Kap.2.4 und Anhang B.4). Das Konvergenzverhalten verschlechtert sich natürlich, wenn die Nichtlinearität klein ist (etwa nur von der Größenordnung ε , was eintritt, wenn das ungestörte System linear ist).

Percivals Behauptung "linear conservative systems can be analysed entirely in terms of matrices and exponential functions of time" [Per85] ist übrigens falsch. Alle in der vorliegenden Arbeit behandelten Beispielsysteme, ausgenommen nur diejenigen im Anhang A.6 und (teilweise) im Anhang B.4, sind lineare Systeme oder haben – im Fall der Bewegung geladener Einzelteilchen auf nichtregulären Tori – wenigstens lineare Störterme (auf einem gegebenen nichtregulären Torus ist eine Nichtlinearität des Systems ja irrelevant). Gleichwohl ist die Bewegung in diesen Systemen keineswegs vollständig durch Matrizen und exponentielle Funktionen der Zeit zu beschreiben!

Ω_0 ist daher offenbar der (winkelgemittelte) Frequenzvektor des Hamiltonschen Systems (B.1) an der Stelle $I = I_0$. Die höheren Terme der Entwicklung nach $I^{(0)}$ werden nur der Einfachheit wegen weggelassen (o.B.d.A.).

Auf diese Hamiltonfunktion wird eine in der transformierten Wirkung lineare erzeugende Funktion

$$S^{(1)}(I^{(1)}, \Phi^{(0)}) = \left(I^{(1)} + \varepsilon I_0^{(1)} \right) \cdot \Phi^{(0)} + \varepsilon X^{(1)}(\Phi^{(0)}) + \varepsilon Y^{(1)}(\Phi^{(0)}) \cdot I^{(1)} \quad (\text{B.20})$$

angewandt. Die Koordinaten transformieren sich dabei folgendermaßen:

$$\begin{aligned} I^{(0)} &= \frac{\partial S^{(1)}}{\partial \Phi^{(0)}} = \left(\mathbb{I} + \varepsilon \frac{\partial Y^{(1)}}{\partial \Phi^{(0)}} \right) I^{(1)} + \varepsilon \frac{\partial X^{(1)}}{\partial \Phi^{(0)}} + \varepsilon I_0^{(1)} \\ \Phi^{(1)} &= \frac{\partial S^{(1)}}{\partial I^{(1)}} = \Phi^{(0)} + \varepsilon Y^{(1)}(\Phi^{(0)}) \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Hier erkennt man sofort zwei wichtige *technische* Vorzüge des Kolmogorov-Verfahrens im Verhältnis zur Standard-Störungstheorie: Da die erzeugende Funktion *linear* von den Wirkungen abhängt, ist die Beziehung $I^{(0)} \leftrightarrow I^{(1)}$ explizit, und ferner hängen die neuen Winkel nur von den alten ab:

$$\Phi^{(1)} = \Phi^{(1)}(\Phi^{(0)}) \quad (\text{B.22})$$

Für die transformierte Hamiltonfunktion ergibt sich[†]

$$\begin{aligned} H^{(1)} &= H^{(0)}\left(I^{(0)}(I^{(1)}, \Phi^{(1)}), \Phi^{(0)}(\Phi^{(1)})\right) \\ &= \Omega_0 \cdot I^{(1)} + \varepsilon^2 A^{(1)}(\Phi^{(0)}(\Phi^{(1)})) + \varepsilon^2 B^{(1)}(\Phi^{(0)}(\Phi^{(1)})) \cdot I^{(1)} \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^N C_{ij}^{(1)}(\Phi^{(0)}(\Phi^{(1)})) I_i^{(1)} I_j^{(1)} + \omega_0 \cdot \varepsilon I_0^{(1)} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

sofern $X^{(1)}$ und $Y^{(1)}$ folgende Beziehungen erfüllen:

$$A^{(0)}(\Phi^{(0)}) + \Omega_0 \cdot \frac{\partial X^{(1)}}{\partial \Phi^{(0)}} = 0 \quad (\text{B.24})$$

$$B_i^{(0)}(\Phi^{(0)}) + \left(\Omega_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \Phi^{(0)}} \right) Y_i^{(1)}(\Phi^{(0)}) + \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)}(\Phi^{(0)}) \left(\frac{\partial X^{(1)}}{\partial \Phi_j^{(0)}} + I_{0,j}^{(1)} \right) = 0 \quad (\text{B.25})$$

Die Gleichung (B.24) für $X^{(1)}$ wird gelöst durch

$$X^{(1)}(\Phi^{(0)}) = i \sum_{k \neq 0} \frac{\bar{A}^{(0)}(k)}{\Omega_0 \cdot k} e^{ik \cdot \Phi^{(0)}} \quad (\text{B.26})$$

[†]Zur Form von $A^{(1)}$, $B^{(1)}$ und $C^{(1)}$ → [Thi77, Kap.3.6]. $\omega_0 \cdot I_0^{(1)}$ ist als Konstante irrelevant.

Daraus berechnet man die in der Gleichung (B.25) für $Y^{(1)}$ auftretende Größe

$$Z_i^{(0)}(\Phi^{(0)}) = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)}(\Phi^{(0)}) \frac{\partial X^{(1)}(\Phi^{(0)})}{\partial \Phi_j^{(0)}} \quad (\text{B.27})$$

Die nullte Fourierkomponente in (B.25) legt die Verschiebung $I_0^{(1)}$ fest (wobei die Existenz der Umkehrmatrix $\{\tilde{C}_{ij}^{(0)}(k=0)\}^{-1}$ durch die Twistbedingung (B.15) gesichert ist)

$$\sum_{i=1}^N \tilde{C}_{ij}^{(0)}(k=0) I_{0,i}^{(1)} = -\tilde{B}_j^{(0)}(k=0) - \tilde{Z}_j^{(0)}(k=0) \quad (\text{B.28})$$

und die übrigen Fourierkomponenten dieser Gleichung legen $Y^{(1)}$ fest:

$$Y^{(1)}(\Phi^{(0)}) = i \sum_{k \neq 0} \left(\tilde{B}_j^{(0)}(k) + \tilde{Z}_j^{(0)}(k) + \sum_{i=1}^N \tilde{C}_{ij}^{(0)}(k) I_{0,i}^{(1)} \right) \frac{e^{ik \cdot \Phi^{(0)}}}{\Omega_0 \cdot k} \quad (\text{B.29})$$

Die in den Lösungen (B.26) und (B.29) auftretenden Fourierreihen sind vom Typ (B.7). Daher müssen – genau wie in der Standard-Störungstheorie – die Verhältnisse der Windungszahlen des Frequenzkomponenten von Ω_0 "hinreichend" irrational sein müssen, weil sonst die Nenner so klein werden, daß die Reihen nicht konvergieren (siehe Abschnitt B.1).

Nach der Lösung der Gleichungen (B.24) und (B.25) – d.h. nach Berechnung der erzeugenden Funktion (B.20) – hat die resultierende Hamiltonfunktion (B.23) die gleiche Form wie die ursprüngliche Hamiltonfunktion (B.18), wobei jedoch das Winkelmittel der A - und B -Terme i.a. nicht verschwindet. Der nullte Fourierkoeffizient von $A^{(1)}$ ist eine Konstante und somit irrelevant; der nullte Fourierkoeffizient von $B^{(1)}$ bewirkt jedoch eine Frequenzverschiebung. Erst nach einer weiteren Wirkungsverschiebung durch eine erzeugende Funktion vom Typ (B.12)[†] hat die Hamiltonfunktion die gleiche (winkelgemittelte) Frequenz Ω_0 wie die ursprüngliche. Nur durch dieses Fixieren der Frequenz kann jedoch das Auftreten konvergenzerstörender kleiner Nenner verhindert werden.

Ferner sind die Störterme in (B.23) quadratisch in ε . Da die Hamiltonfunktion (B.23) – nach der erwähnten Wirkungsverschiebung – sonst in jeder Hinsicht von der gleichen Form ist wie die ursprüngliche Hamiltonfunktion (B.18), kann das gleiche Verfahren nochmals angewandt werden, was folglich zu einem Störterm der Größenordnung ε^4 führt, etc. Die Konvergenz des Kolmogorov-Verfahrens ist dementsprechend quadratisch

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon^2 \rightarrow \varepsilon^4 \rightarrow \varepsilon^8 \rightarrow \dots \rightarrow \varepsilon^{2^n} \rightarrow \dots \quad (\text{B.30})$$

Die existierenden Beweise zur Konvergenz dieses und allgemeinerer Verfahren (vgl. den folgenden Abschnitt) gelten allerdings nur für wahrhaft winzige Werte des Störparameters ε , welche mit wachsender Zahl N der Freiheitsgrade noch ganz drastisch schrumpfen, nämlich $\sim 1/N^6$ [Thi77, Kap.3.6]. Realistischere Abschätzungen für die zulässige Größenordnung von ε gibt es bislang nur für Systeme mit zwei Freiheitsgraden (siehe Abschnitt B.3). Bei der Anwendung des Kolmogorov-Verfahrens auf vorgegebene invariante Tori ($\rightarrow$ Kap.2.4 und Anhang B.4) gelingt es allerdings, die iterative Prozedur durch eine geschlossene Transformationsgleichung zu ersetzen. Dann sind wesentlich größere Störparameterwerte ε zulässig.

[†]Wiederum geht die Twistbedingung (B.15) ein.

B.3 Zur allgemeinen KAM-Theorie

Die "KAM-Theorie" fußt auf der Arbeit von Kolmogorov [Kol54a, Kol54b], welche die Methode des Konvergenzbeweises allerdings lediglich skizziert. Die erste detaillierte Beschreibung der Methode gab Arnol'd [Arn61] im Rahmen einer Studie zur Rückführung von Kreisabbildungen auf starre Rotationen.[†] Später veröffentlichte er auch eine auf analytische Hamiltonsche Systeme zugeschnittene Fassung des Beweises [Arn63].[‡]

Moser verallgemeinerte die Theorie in mancherlei Hinsicht, besonders auf allgemeinere Systeme von Differentialgleichungen[§] [Mos67] sowie auf nicht-analytische, aber hinreichend oft differenzierbare Hamiltonsche Systeme[¶]. Das ursprüngliche Moser-Verfahren konvergierte nicht quadratisch (d.h. mit ε^2), sondern nur mit $\varepsilon^{(3/2)^n}$. Später verbesserte er selber den Konvergenzexponenten von $\frac{3}{2}$ auf $1 + \sigma_g = 1.62 \dots$, und durch eine leichte Modifikation konnte auch die quadratische Konvergenz des Verfahrens demonstriert werden [Mos73, Anhang A zu Kap.V].^{||}

In den letzten zwei Jahrzehnten hat es über diese "klassische" KAM-Theorie hinausgehende Fortschritte gegeben, zunächst allerdings nur in Bezug auf Torus-Breakup und Transport in Hamiltonschen Systemen mit anderthalb bis zwei Freiheitsgraden^{**} – siehe z.B. die Übersichtsdarstellungen von Moser [Mos85, Mos86] und MacKay [McK85]. Hinsichtlich Torus-Breakup konnten für diese Systeme – im Fall diskreter Dynamik (für "area-preserving maps") – realistische Berechnungen der Größe der zulässigen Störung durchgeführt und umgekehrt die Nicht-Existenz von KAM-Tori ("invariant circles") bewiesen werden.^{††} In jüngster Zeit ist es aber gelungen, die für den Fall $N = 2$ entwickelten Transport-Konzepte auch auf Systeme mit mehr als zwei Freiheitsgraden anzuwenden [Wig90]. Dies ist der erste signifikante Fortschritt in dieser Richtung seit der Entdeckung der sogenannten Arnol'd-Diffusion [Arn64] (siehe aber auch [CSZ88] für *entartete* Systeme^{††} mit anderthalb Freiheitsgraden).

Zur physikalischen Interpretation des KAM-Theorems sei ferner auf die bereits erwähnten Übersichtsartikel von Berry und Helleman [Ber78, Hel84] verwiesen.

[†]Vgl. die Kurzdarstellung auf Seite 101 im Kap.5.2. Herman [Her79] konnte das dort erwähnte Theorem übrigens auch auf den Fall $N > 2$ ausdehnen. Der Fall $N = 2$ ist in [Arn83, Kap.3] ausführlich behandelt (Stichworte: *Rotationszahl, Arnol'd-Zungen*).

[‡]Dieser Beweis findet sich auch in [AA68, Anhang 34]. Eine andere Darstellung des Kolmogorov-Verfahrens (inclusive des zugehörigen Konvergenzbeweises) ist in Thirring's Lehrbuch [Thi77, Kap.3.6] enthalten. Nochmals sei auf die Beweisskizze in [Jac89, Anhang L] verwiesen.

[§]etwa auf reversible Systeme wie z.B. $\ddot{x} + a^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, t)$ mit $f(x, -\dot{x}, -t) = f(x, \dot{x}, t)$ [Mos66]. Für fast-integrierte Hamiltonsche Systeme gelang ihm der Nachweis der (Fort-)Existenz stabiler quasiperiodischer Bewegung mit $N - 1$ Basisfrequenzen [Mos66, Mos67] und instabiler quasiperiodischer Bewegung mit $2 \dots N - 2$ Basisfrequenzen [Mos67].

[¶]Siehe die Anmerkungen und Quellenangaben in [Arn83, §12J1] sowie in [Mos73, Kap.V.4c].

^{||}Eine besonders klare Darstellung des ursprünglichen Moser-Verfahrens enthält [Hak83a]. Aus didaktischen Gründen beschränkt sich die Exposition in [Mos73] auf reversible Systeme. Sehr empfehlenswert ist ferner der von Moser [Mos67] als erklärend ("expository") bezeichnete Artikel [Mos66].

^{**} $N = \frac{3}{2}$ bedeutet: Hamiltonfunktion mit einem Freiheitsgrad und *periodischer* Zeitabhängigkeit, vgl. die Anmerkung im Anhang A.0 auf Seite 112.

^{††}"Converse KAM", vgl. [MP85, Ma84].

^{††}Für diese ist die Twistbedingung (B.15) nicht erfüllt (siehe Anmerkung auf Seite 132).

B.4 Anwendung des Kolmogorov-Verfahrens auf nichtreguläre Tori

Im Kapitel 2.4 wurde das Problem, wann der nichtreguläre Torus der allgemeinen Hamiltonfunktion (2.30)

$$H = H_0(I) + \varepsilon(I - I_0) \cdot B_p(I, \Phi) \quad (\text{B.31})$$

bei $I = I_0$ auf einen regulären zurückgeführt werden kann, nur für das System (A.33) gelöst, bei welchem die Windungszahlverhältnisse von vornherein bekannt sind. Tatsächlich sind wir sogar an der allgemeinen Lösung des Problems auch für nicht-isolierte nichtreguläre Tori interessiert, d.h. also für Tori von Hamiltonfunktionen der Form (4.1) & (4.2):

$$H = H_0(I) + \varepsilon F(I) \cdot B_p(I, \Phi) \quad \text{mit} \quad F(I)|_{I_*} \in M_{n,N} = 0 \quad \& \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (\text{B.32})$$

● Herleitung der Transformationsgleichung

Da die Lage der Tori im Wirkungsraum von vornherein bekannt ist, kann wie im Fall des im Kap.2.4 behandelten Beispiels auch im allgemeinen Fall die iterative KAM-Störungsrechnung formal durch die Lösung einer geschlossenen Transformationsgleichung ersetzt werden. Deren Lösung kann allerdings nur dann gelingen, wenn die Windungszahlverhältnisse auf dem vorgegebenen Torus hinreichend irrational sind. Beim normalen KAM-Verfahren wird eine solche Windungszahl vorgegeben und ein dazugehöriger Torus gesucht (s.o.). Für einen vorgegebenen Torus sind die Windungszahlen aber i.a. unbekannt. Von praktischem Nutzen ist die formale Ersetzung der iterativen KAM-Prozedur durch eine geschlossene Transformationsgleichung daher nur dann, wenn der Störterm die Windungszahlverhältnisse nicht ändert. Diesen Fall – eine Verallgemeinerung des im Kap.2.4 betrachteten Falls – werden wir zum Abschluß des folgenden Abschnitts behandeln. Zuvor leiten wir die Transformationsgleichung aus dem KAM-Verfahren ab und stellen generelle Betrachtungen zur Durchführbarkeit der Transformation von invarianten Tori in Hamiltonschen Systemen des Typs (B.32) auf invariante Tori in Hamiltonschen Systemen vom KAM-Typ (2.2) an.

Da wir uns auf analytische Hamiltonfunktionen beschränken, genügt die Anwendung des ursprünglichen Kolmogorov-Verfahrens [Kol54b], welches im Abschnitt B.2 dargestellt wurde. Man beginnt mit einer Verschiebung der Wirkungen durch die erzeugende Funktion (B.12)

$$\begin{aligned} S^{(0)}(I^{(0)}, \Phi) &= \left(I^{(0)} + I_* \right) \cdot \Phi \\ \Rightarrow \quad I^{(0)} &= I - I_* \quad \text{und} \quad \Phi^{(0)} = \Phi \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

wobei I_* ein beliebiger aber fester Wert der Wirkungsvariablen auf der Hyperfläche $M_{n,N}$ in (B.32) ist. Bei $I = I_*$, d.h. bei $I^{(0)} = 0$, liegt also ein invarianter Torus, der Teil der invarianten Mannigfaltigkeit des Systems (B.32) ist.

Die transformierte Hamiltonfunktion hat die Form

$$H^{(0)} = H_0(I^{(0)} + I_*) + \varepsilon F(I^{(0)} + I_*) \cdot B_p(I^{(0)} + I_*, \Phi^{(0)}) \quad (\text{B.34})$$

Entwickelt man $H^{(0)}$ um $I^{(0)} = 0$ und faßt alle in $I^{(0)}$ mindestens quadratischen Terme formal zusammen, so ergibt sich wegen $F(I_*) = 0$

$$H^{(0)} = H_0(I_*) + \left(\frac{\partial H_0}{\partial I_*} + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial I_*} B_p(I_*, \Phi^{(0)}) \right) \cdot I^{(0)} + \varepsilon \sum_{i,j=1}^N D_{ij}^{(0)}(I^{(0)}, \Phi^{(0)}) I_i^{(0)} I_j^{(0)} \quad (\text{B.35})$$

Der erste Term auf der rechten Gleichungsseite kann als Konstante fortgelassen werden. Alle winkelunabhängigen Koeffizienten des linearen Terms werden zusammengefaßt zu einer Frequenz $\Omega_0(I_*)$ (der "Frequenz in erster Näherung"):

$$\Omega_0(I_*) = \omega_0(I_*) + \varepsilon \left\langle \frac{\partial F}{\partial I_*} B_p(I_*, \Phi^{(0)}) \right\rangle_{\Phi^{(0)}} \quad \text{mit} \quad \omega_0(I) = \frac{\partial H_0}{\partial I} \quad (\text{B.36})$$

Den übrigen Teil des Koeffizienten des linearen Terms bezeichnen wir als

$$B^{(0)}(I_*, \Phi^{(0)}) = \frac{\partial F}{\partial I_*} B_p(I_*, \Phi^{(0)}) - \left\langle \frac{\partial F}{\partial I_*} B_p(I_*, \Phi^{(0)}) \right\rangle_{\Phi^{(0)}} \quad (\text{B.37})$$

und somit nimmt die transformierte Hamiltonfunktion folgende Gestalt an:

$$H^{(0)} = \Omega_0(I_*) \cdot I^{(0)} + \varepsilon B^{(0)}(I_*, \Phi^{(0)}) \cdot I^{(0)} + \varepsilon \sum_{i,j=1}^N D_{ij}^{(0)}(I^{(0)}, \Phi^{(0)}) I_i^{(0)} I_j^{(0)} \quad (\text{B.38})$$

wobei das Winkelmittel des winkelabhängigen Teils des Koeffizienten des linearen Terms natürlich verschwindet:

$$\left\langle B^{(0)}(I_*, \Phi^{(0)}) \right\rangle_{\Phi^{(0)}} = 0 \quad (\text{B.39})$$

In der erzeugenden Funktion $S^{(1)}$ (B.20) der sich anschließenden Transformation (B.21) kann auf die wirkungsunabhängigen Terme verzichtet werden, weil sie nur eine weitere Wirkungsverschiebungen bewirken; wir wissen aber von Anfang an, daß der uns interessierende Torus bei $I^{(0)} = 0$ gelegen ist.[†] Die erzeugende Funktion (B.20) hat dann die einfache Gestalt

$$\begin{aligned} S^{(1)}(I^{(1)}, \Phi^{(0)}) &= I^{(1)} \cdot \Phi^{(0)} + \varepsilon Y^{(1)}(\Phi^{(0)}) \cdot I^{(1)} \\ \Rightarrow I^{(0)} &= \left(\mathbb{I} + \varepsilon \frac{\partial Y^{(1)}}{\partial \Phi^{(0)}} \right) I^{(1)} \quad \text{und} \quad \Phi^{(1)} = \Phi^{(0)} + \varepsilon Y^{(1)}(\Phi^{(0)}) \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

und die in $I^{(0)}$ mindestens quadratischen Terme sind daher auch in $I^{(1)}$ mindestens quadratisch. Als neue Hamiltonfunktion findet man daher (mit $\Phi^{(0)} = \Phi^{(0)}(\Phi^{(1)})$)

$$\begin{aligned} H^{(1)} &= \Omega_0(I_*) \cdot I^{(1)} + \varepsilon \sum_{i,j=1}^N D_{ij}^{(1)}(I^{(0)}, \Phi^{(0)}) I_i^{(1)} I_j^{(1)} \\ &+ \varepsilon \sum_{i=1}^N \left[B_i^{(0)}(I_*, \Phi^{(0)}) + \sum_{j=1}^N \left\{ \Omega_{0,j}(I_*) + \varepsilon B_j^{(0)}(I_*, \Phi^{(0)}) \right\} \frac{\partial Y_i^{(1)}}{\partial \Phi_j^{(0)}} \right] I_i^{(1)} \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

[†] Deshalb ist die im allgemeinen Kolmogorov-Verfahren so zentrale Twistbedingung (B.15) hier unwesentlich.

Man sieht sofort, daß der Torus bei $I = I_* \Leftrightarrow I^{(1)} = 0$ ein KAM-Torus ist, wenn der Ausdruck in den eckigen Klammern eine (winkelunabhängige) Konstante ist, d.h. wenn

$$B_i^{(0)}(I_*, \Phi^{(0)}) + \sum_{j=1}^N \left\{ \Omega_{0,j}(I_*) + \varepsilon B_j^{(0)}(I_*, \Phi^{(0)}) \right\} \frac{\partial Y_i^{(1)}}{\partial \Phi_j^{(0)}} + \mu_i = 0 \quad (\text{B.42})$$

mit $\frac{\partial \mu_i}{\partial \Phi^{(0)}} = 0$

denn dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{I}^{(1)}|_{I=I_*} &= 0 \\ \dot{\Phi}^{(1)}|_{I=I_*} &= \Omega_0(I_*) - \varepsilon \mu \equiv \Omega(I_*, \varepsilon) = \text{const.} \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

Die erzeugende Funktion $S^{(1)}$ transformiert die in $\Phi^{(0)}$ periodische Hamiltonfunktion $H^{(0)}$ nur dann in eine von den neuen Winkelvariablen periodisch abhängende Hamiltonfunktion $H^{(1)}$, wenn $S^{(1)}$ selbst, und somit $Y^{(1)}$, periodisch in $\Phi^{(0)}$ ist. Daher kann $Y^{(1)}$ in eine Fourierreihe entwickelt werden. Nach einer Fouriertransformation wird die Bedingungsgleichung für $Y^{(1)}$ (B.42) eine Gleichung in den Fourierkoeffizienten $\tilde{Y}^{(1)}(m \neq 0)$ und den winkelunabhängigen Konstanten μ :

$$\tilde{B}_n^{(0)} + i \sum_{m \neq 0} \left(m \cdot \Omega_0(I_*) \delta_{n,m} + \varepsilon m \cdot \tilde{B}_{n-m}^{(0)} \right) \tilde{Y}_m^{(1)} + \mu = 0 \quad (\text{B.44})$$

Wir können die Konstanten μ deshalb mit den winkelunabhängigen Fourierkoeffizienten $\tilde{Y}^{(1)}(0)$ identifizieren:

$$\mu = \tilde{Y}^{(1)}(k=0) = \langle Y^{(1)} \rangle_{\Phi^{(0)}} \quad (\text{B.45})$$

Eingesetzt in die Transformationsgleichung (B.42) ergibt sich

$$B^{(0)}(I_*, \Phi^{(0)}) + \left(\left\{ \Omega_0(I_*) + \varepsilon B^{(0)}(\Phi^{(0)}) \right\} \cdot \nabla_{\Phi^{(0)}} \right) Y^{(1)}(\Phi^{(0)}) + \langle Y^{(1)} \rangle_{\Phi^{(0)}} = 0 \quad (\text{B.46})$$

Eine kompaktere Darstellung dieser Gleichung ist möglich, wenn man Folgendes bedenkt: Hamiltonsche Systeme vom Typ (B.32) gehen bei Anwendung der Transformation (B.33) in die Form (B.38) über. Folglich gilt

$$\dot{\Phi}^{(0)}|_{I=I_*} = \Omega_0(I_*) + \varepsilon B^{(0)}(I_*, \Phi^{(0)}) \quad (\text{B.47})$$

In dieser Form kann man die Bewegungsgleichung direkt in die Transformationsgleichung (B.46) einsetzen und erhält

$$B^{(0)}(I_*, \Phi^{(0)}) + \left(\dot{\Phi}^{(0)}|_{I=I_*} \cdot \nabla_{\Phi^{(0)}} \right) Y^{(1)}(\Phi^{(0)}) + \langle Y^{(1)} \rangle_{\Phi^{(0)}} = 0 \quad (\text{B.48})$$

● Notwendige Bedingungen für die Konvergenz der Lösung

Unter der Voraussetzung, daß die Lösung existiert, kann man die Transformationsgleichung (B.48) außerdem in der folgenden Weise formal umformen: Man benutzt die Identität

$$\dot{\Phi}^{(0)} \cdot \nabla_{\Phi^{(0)}} = \dot{\Phi}^{(1)} \cdot \nabla_{\Phi^{(1)}} \quad (\text{B.49})$$

und ersetzt $\dot{\Phi}^{(1)}$ gemäß der Beziehung (B.43) & (B.45). So erhält man

$$\begin{aligned} \left(\Omega \cdot \nabla_{\Phi^{(1)}} \right) Y^{(1)} \left(\Phi^{(0)}(\Phi^{(1)}) \right) &= - \langle Y^{(1)} \rangle_{\Phi^{(0)}} - B^{(0)} \left(I_*, \Phi^{(0)}(\Phi^{(1)}) \right) \\ &= \sum_{m \neq 0} i m \cdot \Omega \tilde{Y}_m^{(1)} e^{i m \cdot \Phi^{(1)}} \\ &= - \langle Y^{(1)} \rangle_{\Phi^{(0)}} - \langle B^{(0)} \rangle_{\Phi^{(1)}} - \sum_{m \neq 0} \tilde{B}_m^{(0)} e^{i m \cdot \Phi^{(1)}} \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

Ein Koeffizientenvergleich[†] ergibt unmittelbar

$$\tilde{Y}_m^{(1)} = \frac{i \tilde{B}_m^{(0)}}{m \cdot \Omega} \quad \text{für } m \neq 0 \quad (\text{B.51})$$

Die Windungszahlverhältnisse, d.h. die Verhältnisse der Komponenten des Frequenzvektors Ω untereinander, müssen daher hinreichend irrational sein, um die Konvergenz dieser Fourierreihe zu gewährleisten. Zu vorgegebenem I_* ist Ω aber i.a. eine Funktion des Störparameters ε . Die "regularisierende" Transformation kann daher für einen gegebenen Torus bei $I = I_*$ auch bei kleinen Werten von ε i.a. nicht in einem ganzen ε -Intervall gelingen, sondern nur punktwiese.

In der Form (B.48) wird unmittelbar deutlich, daß

$$\dot{\Phi}^{(0)}|_{I=I_*} \neq 0 \quad (\text{B.52})$$

gefordert werden muß. Der Störparameter ε muß also so klein sein, daß keine Fixpunkte auftreten. Das liegt daran, daß der Fluß auf regulären Tori keine Fixpunkte enthält, und diese sich auch durch kanonische Transformationen nicht beseitigen lassen [Arn83, §10B].

Der zulässige Bereich von ε muß aber noch stärker eingeschränkt werden. Integriert man nämlich die triviale Gleichung für $\dot{\Phi}^{(1)}$ (B.43) und setzt die Lösung in die Beziehung (B.40) zwischen $\dot{\Phi}^{(1)}$ und $\dot{\Phi}^{(0)}$ ein, so folgt

$$\dot{\Phi}^{(0)} = \Omega(I_*, \varepsilon) t + \text{const.} - \varepsilon Y^{(1)}(\Phi^{(0)}) \quad (\text{B.53})$$

$Y^{(1)}(\Phi^{(0)})$ ist als differenzierbare periodische Funktion beschränkt. Daher gilt für die Windungszahlen (1.1)

$$\nu = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi^{(0)}}{t} = \Omega(I_*, \varepsilon) \quad (\text{B.54})$$

[†]Entwickelt wird hier nach den noch unbekannten Winkeln $\Phi^{(1)}$, nicht nach $\Phi^{(0)}$.

– was zu erwarten war, denn da wir einen vorgegebenen invarianten Torus betrachten, kann die Transformation die Windungszahlen nicht ändern. Falls nun der Störparameter ε so groß ist, daß eine oder gar mehrere Komponenten der Bewegungsgleichung (B.47) nicht von null wegbeschränkt sind, so können die zugehörigen Windungszahlen ν_i verschwinden. Dann sind die Windungszahlverhältnisse natürlich nicht mehr alle hinreichend irrational. Dieser Fall tritt mit Sicherheit ein, wenn

$$\dot{\Phi}_i^{(0)} \equiv 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\Phi}_i^{(0)} = 0 \quad \text{für einige } i \in \{1, \dots, N\} \quad (\text{B.55})$$

Dies gilt aber nicht nur für die Koordinaten, in denen die Hamiltonfunktion (B.38) gegeben ist, sondern für alle möglichen Darstellungen des invarianten Torus in Wirkungs-Winkel-Variablen.[†]

Beispiel: Im Kap.4.2 und im Anhang C betrachten wir Barriere-Tori in einem System mit zwei Freiheitsgraden, auf denen die Bewegung durch folgende Gleichungen beschrieben wird:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_1 &= \omega_{0,1} + \varepsilon a_1 \cos(\Phi_1 - \Phi_2) \\ \dot{\Phi}_2 &= \omega_{0,2} - \varepsilon a_2 \cos(\Phi_1 - \Phi_2) \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

Im Bereich

$$\varepsilon < \min_{i=1,2} \frac{\omega_{0,i}}{a_i} \quad (\text{B.57})$$

können die Beziehungen (B.55) nicht erfüllt werden. Durch eine lineare kanonische Transformation (vgl. Anhang C.1) gelangt man aber in den neuen Winkelvariablen $\Psi_1 = \Phi_1 - \Phi_2$ und $\Psi_2 = \Phi_2$ zu folgenden Bewegungsgleichungen auf den Tori:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_1 &= \omega_{0,1} - \omega_{0,2} + \varepsilon (a_1 + a_2) \cos \Psi_1 \\ \dot{\Psi}_2 &= \omega_{0,2} - \varepsilon a_2 \cos \Psi_1 \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

Für diese äquivalente Form der Bewegungsgleichungen ergibt sich aber (vgl. Anhang C.3!)

$$\varepsilon < \frac{|\omega_{0,1} - \omega_{0,2}|}{a_1 + a_2} \quad (\text{B.59})$$

was nicht selten eine schärfere Anforderung ist. $\odot$

Notwendig für die Lösbarkeit der Transformationsgleichung (B.46) ist also, daß

- keine Fixpunkte auf dem invarianten Torus $I = I_*$ existieren, und daß
- die Windungszahlen hinreichend irrational sind – was den Bereich der zulässigen Störparameterwerte ε weiter einschränkt, aber keinesfalls so stark, wie es zur Sicherung der Konvergenz des iterativen KAM-Verfahrens nötig ist.

[†] Bezüglich der Transformationen, die Wirkungs-Winkel-Variable wieder in Wirkungs-Winkel-Variable überführen vgl. die Anmerkung Seite 63. Unter diesen sind hier aber nur diejenigen zulässig, die den betrachteten Torus als invarianten Torus erhalten, d.h. nur solche ohne Wirkungsverschiebungen.

Falls der Störterm so groß ist, daß Fixpunkte auftreten, ist die Bewegung auf nichtregulären Tori mit Sicherheit nicht "regularisierbar". Im sich anschließenden Bereich kleinerer Werte von η ist die KAM-Bedingung hinreichend irrationaler Windungszahlverhältnisse meist zunächst ebenfalls nicht erfüllt – sei es, daß einige Windungszahlen verschwinden (s.o.), oder weil die zur Definition der Windungszahlen nötige Limesbildung nicht mehr durchführbar ist ("toroidales Chaos", vgl. die Schlußpassage von Kap.2.4). Für genügend kleine Störparameterwerte ist die Bewegung auf Tori (bzw. sind diese selbst) eventuell *regularisierbar*. Auch in diesem Bereich gibt es aber immer auch Störparameterwerte, für welche keine Regularisierungstransformation durchführbar ist, weil die Windungszahlverhältnisse nicht hinreichend irrational sind.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß die Transformationsgleichung (B.46) im allgemeinen kein brauchbares Werkzeug zur Durchführung der Transformation von invarianten Tori in Hamiltonschen Systemen des Typs (B.32) auf KAM-Tori, d.h. invariante Tori in Hamiltonschen Systemen des Typs (2.2) ist, da die Windungszahlen Ω auf einen vorgegebenen invarianten Torus bei $I = I_*$ nicht von vornherein bekannt sind. In der formalen Lösung der Transformationsgleichung (B.46) in ihrer Fouriertransformierten Form (B.44) & (B.45) treten daher Reihen auf, die im allgemeinen divergieren, auch wenn die Windungszahlen tatsächlich die KAM-Bedingung (B.9) erfüllen.

● Formale Lösung der Transformationsgleichung

Die Fouriertransformierte Form (B.44) & (B.45) der Transformationsgleichung (B.46) kann leicht in eine lineare Gleichung zur Bestimmung der Koeffizienten $\tilde{Y}_m^{(1)}$ umgewandelt werden:

$$\sum_m \left[\left(\delta_{m,0} + m \cdot \Omega_0 \right) \delta_{n,m} + \varepsilon m \cdot \tilde{B}_{n-m}^{(0)} \right] \tilde{Y}_m^{(1)} = i \tilde{B}_n^{(0)} \quad (\text{B.60})$$

Zur Lösung dieser Gleichung muß man die Matrix

$$F_{n,m} = \left(\delta_{m,0} + m \cdot \Omega_0 \right) \delta_{n,m} + \varepsilon m \cdot \tilde{B}_{n-m}^{(0)} \equiv P_{n,m} + \varepsilon Q_{n,m} \quad (\text{B.61})$$

invertieren. Deren Dimension ist in der Regel keineswegs endlich. Wir begnügen uns hier mit der Angabe der formalen Lösung. Die Matrix εQ hat nur Nichtdiagonalelemente, weil das Winkelmittel von $B^{(0)}$ per definitionem verschwindet, vgl. (B.37) und (B.39). P ist als Diagonalmatrix invertierbar (falls die Diagonalelemente nicht verschwinden!), und es gilt

$$P_{n,m}^{-1} = \frac{\delta_{n,m}}{\delta_{m,0} + m \cdot \Omega_0} \quad (\text{B.62})$$

Wir schreiben F nun in der Form

$$F = P \left(\mathbb{I} + \varepsilon P^{-1} Q \right) \Rightarrow F^{-1} = \left(\mathbb{I} + \varepsilon P^{-1} Q \right)^{-1} P^{-1} \quad (\text{B.63})$$

Falls ε hinreichend klein ist (salopp formuliert: " $\varepsilon P^{-1} Q \ll \mathbb{I}$ "), kann man die inverse Matrix zu $(\mathbb{I} + \varepsilon P^{-1} Q)$ als binomische Reihe angeben und erhält so

$$F^{-1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-\varepsilon)^{\nu} \left(P^{-1} Q \right)^{\nu} P^{-1} \quad (\text{B.64})$$

Ob diese inverse Matrix existiert, hängt offenbar von der in gewissen Grenzen[†] willkürlichen Wahl der ungestörten Frequenz erster Ordnung $\Omega_0(I_*)$ ab, die die Größe der Elemente der zu P inversen Matrix P^{-1} festlegt. In der Regel wird die Reihe (B.64), auf die die formale Lösung der Transformationsgleichung (B.46) führt, daher auch dann divergieren, wenn die Windungszahlen des Torus bei $I = I_*$ die KAM-Bedingung (B.9) erfüllen.

● Der Spezialfall konstanter Richtung der Winkel-Geschwindigkeit

In der iterativen KAM-Störungsrechnung werden diese Windungszahlen a priori festgelegt und durch ständige Verschiebung der Wirkungen ein KAM-Torus zu dieser vorgegebenen Windungszahl gesucht. In Systemen, in denen der winkelabhängige Störterm so beschaffen ist, daß auf den invarianten Tori $\Omega \parallel \Omega_0(I_*)$, sind aber die entscheidenden Windungszahlverhältnisse von vornherein bekannt – es sind nämlich die gleichen wie im ungestörten System $H_0^{(0)} = \Omega_0(I_*) \cdot I^{(0)}$, vgl. (B.38). Für diese Systeme können wir daher die Transformationsgleichung (B.46) lösen und somit für jeden invarianten Torus die Transformation der Hamiltonfunktion (B.32) in die KAM-Form (2.2) in geschlossener Form angeben. Wir betrachten nun Systeme, für die sich die "gestörte" von der "ungestörten" Bewegung nur im Betrag der Winkel-Geschwindigkeit, nicht jedoch in der Richtung unterscheidet, d.h.[‡]

$$B^{(0)}(I_*, \Phi) = \Omega_0(I_*) b(\Phi) \quad (\text{B.65})$$

Die Bewegungsgleichung (B.49) nimmt in diesem Fall die folgende Form an:

$$\dot{\Phi} \big|_{I=I_*} = \Omega_0(I_*) \left(1 + \varepsilon b(\Phi) \right) \quad (\text{B.66})$$

Für solche Systeme kann die Gleichung (B.46) auf eine skalare Gleichung zurückgeführt werden. Das liegt daran, daß die Geschwindigkeit in den neuen Koordinaten die gleiche (konstante) Richtung hat wie in den alten: $\dot{\Phi}^{(1)} \parallel \dot{\Phi}^{(0)} \parallel \Omega_0$. Wegen (B.21) gilt andererseits $\dot{\Phi}^{(1)} = \dot{\Phi}^{(0)} + \varepsilon \dot{Y}^{(1)}$. Daraus folgt $\dot{Y}^{(1)} \parallel \Omega_0$. Da $Y^{(1)}$ periodische Funktion von $\Phi^{(0)}$ ist, muß also gelten $\dot{Y}^{(1)} = \Omega_0(I_*) \dot{y}(\Phi^{(0)})$, und somit

$$Y^{(1)}(\Phi) = \Omega_0(I_*) y(\Phi) \Rightarrow \langle Y^{(1)} \rangle_{\Phi} = \Omega_0(I_*) \langle y \rangle_{\Phi} \quad (\text{B.67})$$

Setzt man dies in Gleichung (B.46) ein, multipliziert mit $\frac{\Omega_0}{|\Omega_0|^2}$ durch und resubstituiert für Φ die Bewegungsgleichung (B.66), so erhält man für jeden invarianten Torus auf der Hyperfläche $M_{n,N}$ in (B.32) die gleiche skalare Transformationsgleichung wie für den isolierten Torus in Kap.2.4:

$$b(\Phi) + [1 + \varepsilon b(\Phi)] \left(\Omega_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \Phi} \right) y(\Phi) + \langle y \rangle_{\Phi} = 0 \quad (\text{B.68})$$

[†]Vgl. die Anmerkung auf Seite 140.

[‡] $\Phi \equiv \Phi^{(0)}$, vgl. (B.33).

Anhang C

Eine Fallstudie integrierbarer Bewegung auf nichtregulären 2-Tori

In diesem Anhang weisen wir zunächst nach, daß Hamiltonsche Systeme, die nur von einer einzigen Linearkombination der Winkelvariablen – d.h. effektiv nur von einem Winkel – abhängen, integrabel sind. Als Fallbeispiel wird dann die Bewegung in dem System betrachtet, welches im Beispiel 4.2 vorgestellt wurde. Wegen der Linearität dieses Systems können die Bewegungsgleichungen durch eine einfache lineare Transformation auf durch Quadratur lösbare zurückgeführt werden, ohne daß von der Standard-Konstruktion der “echten” Wirkungs-Winkel-Variablen auf der Basis der beiden vertauschenden Erhaltungsgrößen Gebrauch gemacht werden muß.[†] Das System enthält auch in diesen Koordinaten eine aus nichtregulären Tori bestehende Barriere. Auf den Barriere-Tori verschwindet im “nichtregulären Bereich” eine der beiden Windungszahlen – dort findet man einen Grenzzyklus und einen Repeller. Im “regulären Bereich” ist die Bewegung periodisch oder quasiperiodisch und es lassen sich (u.a.) die Windungszahlen berechnen.

[†]Zu dieser vgl. Berry [Ber78] oder Arnol'd [Arn78, §49 ff.]. Der Phasenraum des Systems besteht in den “echten” Wirkungs-Winkel-Variablen natürlich aus einer Schichtung regulärer Tori. Eine Rückführung auf KAM-Tori durch die KAM-Störungsrechnung (statt dieser Standard-Transformation auf “echte” Wirkungs-Winkel-Variable) ist trotz der universellen Integrabilität nur für kleine Störungen, und auch dann nur im Fall (hinreichend) irrationaler Windungszahlen möglich (vgl. besonders Kap.5.2).

C.1 Zur Integrabilität Hamiltonscher Systeme der Form

$$H(I_1, \dots, I_N, \sum_{i=1}^N k_i \Phi_i)$$

Hamiltonsche Systeme, die nur von einer einzigen ganzzahligen Linearkombination der Winkelvariablen abhängen, d.h. solche der Form

$$H = H\left(I, \sum_{i=1}^N k_i \Phi_i\right) \quad \text{mit} \quad k_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad k_{i=2, \dots, N} \in \mathbb{Z} \quad (\text{C.1})$$

sind integrabel, da N vertauschende Erhaltungsgrößen angegeben werden können.[†]

Beweis: Man führt eine lineare kanonische Transformation

$$I, \Phi, H(I, \Phi) \rightarrow J, \Psi, H(J, \Psi) \quad (\text{C.2})$$

durch, die durch die erzeugende Funktion

$$S(J, \Phi) = \sum_{i=1}^N J_i \sum_{j=1}^N M_{i,j} \Phi_j \quad (\text{C.3})$$

gegeben ist. Dann gilt

$$J = I M^{-1} \quad \text{und} \quad \Psi = M \Phi \quad (\text{C.4})$$

Als Koordinatentransformation wählt man

$$\Psi_1 = \sum_{i=1}^N k_i \Phi_i \quad \text{und} \quad \Psi_i = \Phi_i, \quad i = 2, \dots, N \quad (\text{C.5})$$

Dies bedingt folgende Wirkungstransformation:

$$J_1 = \frac{1}{k_1} \cdot I_1 \quad \text{und} \quad J_i = -\frac{k_i}{k_1} \cdot I_1 + I_i, \quad i = 2, \dots, N \quad (\text{C.6})$$

Die transformierte Hamiltonfunktion hat die Form

$$H(J, \Psi) = H(J, \Psi_1) \quad (\text{C.7})$$

Daher vertauschen H und die $J_{i \geq 2}$:

$$\{H, J_i\} = \dot{J}_i = -\frac{\partial H}{\partial \Psi_i} = 0 \quad \text{für} \quad i = 2, \dots, N \quad (\text{C.8})$$

Ausgehend von diesen N vertauschenden Erhaltungsgrößen gelangt man zu Wirkungs-Winkel-Variablen, in denen die Bewegungsgleichungen die triviale Form (2.1) haben. **Q.E.D.**

[†]Es muß sich um eine ganzzahlige Linearkombination handeln, da H sonst nicht 2π -periodisch von den Φ abhängt.

C.2 Das Fallbeispiel ($N = 2$)

Die im Beispiel 4.2 betrachtete Hamiltonfunktion (4.11)

$$H = \omega_{0,1}I_1 + \omega_{0,2}I_2 + \eta(a_1I_1 - a_2I_2) \cos(\Phi_1 - \Phi_2) \quad \text{mit} \quad a_{i=1,2} > 0 \quad (\text{C.9})$$

welche bezüglich der Winkel auf die Bewegungsgleichungen (4.13) führt, ist vom Typ (C.1) und daher integrabel.[†]

Wie im Anhang A.2 können wir wegen der Linearität des Systems die Bewegungsgleichungen auf durch Quadratur lösbare zurückführen, ohne auf die "echten" Wirkungs-Winkel-Variable des Systems zu transformieren. Zunächst führen wir durch eine lineare Transformation folgende neue Variable ein:[‡]

$$\begin{aligned} \Phi_{\pm} &= \Phi_1 \pm \Phi_2 \\ I_{\pm} &= \frac{1}{2}(I_1 \pm I_2) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Diese Transformation ist kanonisch. Von den neuen Variablen sind zwar nur I_- und Φ_- wieder Wirkungs-Winkel-Variable[§], aber Φ_+ ist 2π -periodisch in Φ_1 und Φ_2 , und das genügt im Folgenden. Unter Verwendung der abkürzenden Notation

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \omega_{0,1} \pm \omega_{0,2} \\ a_{\pm} &= a_1 \pm a_2 \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

nimmt die Hamiltonfunktion in diesen Variablen die folgende Form an:

$$H = \omega_+ I_+ + \omega_- I_- + \eta(a_- I_+ + a_+ I_-) \cos \Phi_- \quad (\text{C.12})$$

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_- &= \omega_- + \eta a_+ \cos \Phi_- \\ \dot{\Phi}_+ &= \omega_+ + \eta a_- \cos \Phi_- \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

[†] Ein Druckfehler in [Sal88] erweckt den Anschein, daß Salat gerade dieses System untersucht hat, d.h. insbesondere die Bewegungsgleichungen (4.13). Ein Vergleich mit [Sal86] zeigt jedoch, daß tatsächlich das lineare aber nichtintegrable System

$$H = \omega_{0,1}I_1 + \omega_{0,2}I_2 + \varepsilon a_1 I_1 \cos(\Phi_1 + \Phi_2) + \varepsilon a_2 I_2 \cos(\Phi_1 - \Phi_2)$$

untersucht wurde [Salat, private Mitteilung]. Die Bewegungsgleichungen in den Winkeln unterscheiden sich dann von den Bewegungsgleichungen (4.13) in zwei Vorzeichen.

[‡]Im Beispiel 4.2 wurde auf Koordinaten transformiert, in denen eine Bewegungsgleichung trivial wurde. Auch auf diese Weise kann man die Bewegungsgleichungen auf durch Quadratur lösbare zurückführen (für die Winkel wurde dies ja auch durchgeführt). Die hier eingeführten Koordinaten (besonders Φ_-) haben aber durchaus ihre Vorteile, s.u.

[§]Die Determinante der Transformationsmatrix ist nicht gleich eins, was in der Anmerkung auf Seite 63 als notwendig für eine Transformation von Wirkungs-Winkel- auf Wirkungs-Winkel-Variable erkannt wurde. Φ_- ist aber unverkennbar eine Winkelvariable. Φ_+ ändert sich um 2π , wenn Φ_1 oder Φ_2 sich um 2π ändern, und mehr wird hier nicht benötigt. Wir hätten aber auch die Transformation (C.5) & (C.6) durchführen können, die hinsichtlich der Winkel auf $\Psi_1 = \Phi_-$ und $\Psi_2 = \Phi_2$ führt (die Determinante dieser Transformation ist eins, da $k_1 = 1$).

für die Winkel, sowie

$$\begin{aligned}\dot{I}_- &= \eta(a_- I_+ + a_+ I_-) \sin \Phi_- \\ \dot{I}_+ &= 0\end{aligned}\quad (\text{C.14})$$

für die Wirkungen[†], und auf der durch die Beziehung

$$f(I) = a_- I_+ + a_+ I_- = 2(a_1 I_1 - a_2 I_2) = 0 \quad (\text{C.15})$$

gegebenen eindimensionalen Hyperfläche (einer Geraden) im Wirkungsraum verschwindet $\dot{I}$ (da dort $I_- \sim I_+$). Auf den zugehörigen invarianten Tori ist die Bewegung natürlich integrabel, da die Bewegungsgleichung für Φ_- separat gelöst werden kann. Die separierte Gleichung

$$\int \frac{d\Phi_-}{\omega_- + \eta a_+ \cos \Phi_-} = \int_{t_0}^t d\tau \quad (\text{C.16})$$

ist sogar analytisch nach $t = t(\Phi_-)$ auflösbar.[‡] $\Phi_+(t)$ erhält man im Anschluß an die Umkehrung dieser Lösungsfunktion – welche $\Phi_-(t)$ liefert –, indem man die folgende Linearkombination der Bewegungsgleichungen bildet:

$$a_+ \ddot{\Phi}_+(t) - a_- \ddot{\Phi}_-(t) = a_+ \omega_+ - a_- \omega_- \quad (\text{C.17})$$

Darin fallen die winkelabhängigen Terme weg[§], und so ergibt sich

$$\Phi_+(t) = \left(\omega_+ - \frac{a_-}{a_+} \omega_- \right) (t - t_0) + \frac{a_-}{a_+} \cdot \Phi_-(t) \quad (\text{C.18})$$

Da $\Phi_-(t)$ bekannt ist, genügt I_- einer inhomogenen linearen Differentialgleichung, welche natürlich lösbar ist.

[†]Wegen $\dot{I}_+ = \{H, I_+\} = 0$ ist I_+ die zweite Invariante. Übrigens wird im Beispiel 4.4.b ein System betrachtet, dessen Störterm von der gleichen Form ist wie der der Hamiltonfunktion (C.12), dessen ungestörter Term aber quadratisch von den Wirkungen abhängt. In diesem Fall wurden die im Abschnitt C.1 eingeführten Wirkungs-Winkel-Variablen verwendet. Wegen der quadratischen Wirkungsabhängigkeit kann man nur mit Hilfe der beiden vertauschenden Invarianten H und J_2 zu durch Quadratur lösbaren Bewegungsgleichungen gelangen (nämlich den "echten" Wirkungs-Winkel-Variablen des Systems).

[‡]Vgl. die Formel für das Integral $\int \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi}$ im Fall $a^2 \neq b^2$, z.B. in [Dwi61, # 446.00.]. Wir benötigen diese Lösung hier nur im Fall $a^2 > b^2$ – siehe Abschnitt C.5. In den Fällen $a^2 = b^2$ oder $a = 0$ sind (wie auch im Fall $a^2 > b^2$, aber anders als für $a^2 < b^2$) sogar die Umkehrfunktionen von $t = t(\Phi_-)$ global definierte analytische Funktionen, wovon im Abschnitt C.4 noch Gebrauch gemacht wird.

[§]Ein Vergleich mit den transformierten Bewegungsgleichungen (4.15) zeigt, daß

$$\dot{Q}_2 = \frac{a_+ \dot{\Phi}_+ - a_- \dot{\Phi}_-}{2\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

C.3 Der "nichtreguläre Bereich" stabiler periodischer Bewegung ($\lambda \neq 0$)

Die Winkelvariable Φ_- genügt einer Bewegungsgleichung, die gewissermaßen eine kontinuierliche Kreisabbildung darstellt, vgl. (C.13). Für den zeitlichen Verlauf der Bewegung in dieser Variablen gibt es daher nur zwei Möglichkeiten:

- 1) Entweder ist η so groß, daß $\dot{\Phi}_-$ verschwinden kann. Das ist der Fall, wenn

$$\eta \geq \frac{|\omega_-|}{a_+} = \frac{|\omega_{0,1} - \omega_{0,2}|}{a_1 + a_2} \equiv \eta_0 \quad (\text{C.19})$$

Dann gibt es also zwei Fixpunkte, einen bei

$$\begin{aligned} (\Phi_{*, -})_1 &= \arccos \left(\frac{\omega_{0,2} - \omega_{0,1}}{\eta(a_1 + a_2)} \right) = \text{const.} \\ &\neq 0 \quad \text{für} \quad \eta \neq \eta_0 \quad \text{und} \quad \omega_- \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

und einen bei

$$(\Phi_{*, -})_2 = - (\Phi_{*, -})_1 \quad (\text{C.21})$$

Von diesen ist derjenige anziehend, für den

$$\Lambda_{\Phi_-} = \frac{\partial \dot{\Phi}_-}{\partial \Phi_-} < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \Phi_{*, -} < \pi \quad (\text{modulo } 2\pi) \quad (\text{C.22})$$

und Φ_- strebt diesem Fixpunktwert zu, ohne daß sich das Vorzeichen von $\dot{\Phi}_-$ vor Erreichen dieses Fixpunktes ändern kann, um dann dort zu verharren.

- 2) Oder η ist zu klein, als daß $\dot{\Phi}_-$ verschwinden könnte, d.h.

$$\eta < \eta_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\Phi}_- \neq 0 \quad \text{und} \quad \text{sig}(\dot{\Phi}_-) = \text{sig}(\omega_-) \quad (\text{C.23})$$

Da $\dot{\Phi}_-$ periodisch von Φ_- abhängt, muß $\Phi_-(t)$ dann eine zeitlich periodische Funktion sein.

Wir betrachten zunächst den Fall $\eta > \eta_0$.[†] Wenn Φ_- dem Wert $\Phi_{*, -}$ zustrebt, tendiert die Bewegung auf dem 2-Torus gegen einen Grenzyklus, denn wenn Φ_- gegen eine Konstante strebt, so strebt die rechte Seite der Bewegungsgleichung für Φ_+ ebenfalls gegen eine Konstante, Φ_+ selbst also gegen eine lineare Funktion der Zeit. Die Bewegung auf dem Grenzyklus ist also zeitlich linear. Die Transformation (C.10) entspricht einer Drehung der Achsen um 45° , und so erwartet man bei einer Darstellung der Bewegung auf dem Torus in den ursprünglichen Koordinaten einen einfach geschlossenen Grenzyklus, der linear und parallel zur ersten Winkelhalbierenden verläuft. Wie die Abbildung C.1 zeigt, findet man oberhalb von $\eta = \eta_0$ tatsächlich eben dieses Verhalten.

[†]Wie wir im Anhang B.4 gezeigt haben, ist in diesem Bereich die Bewegung sicher nicht regulierbar (vgl. das Beispiel Seite 140).

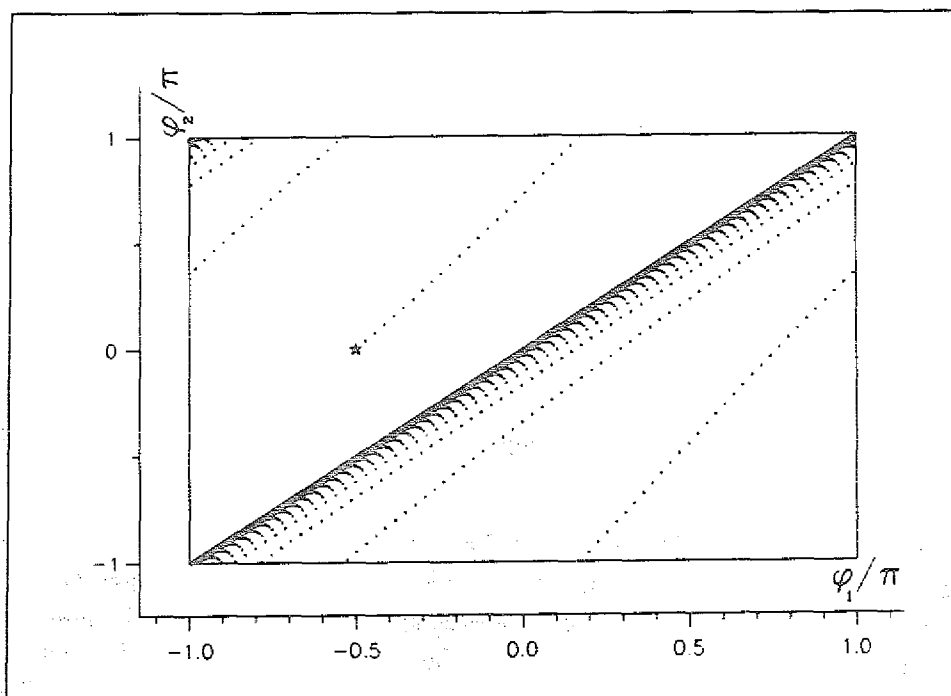
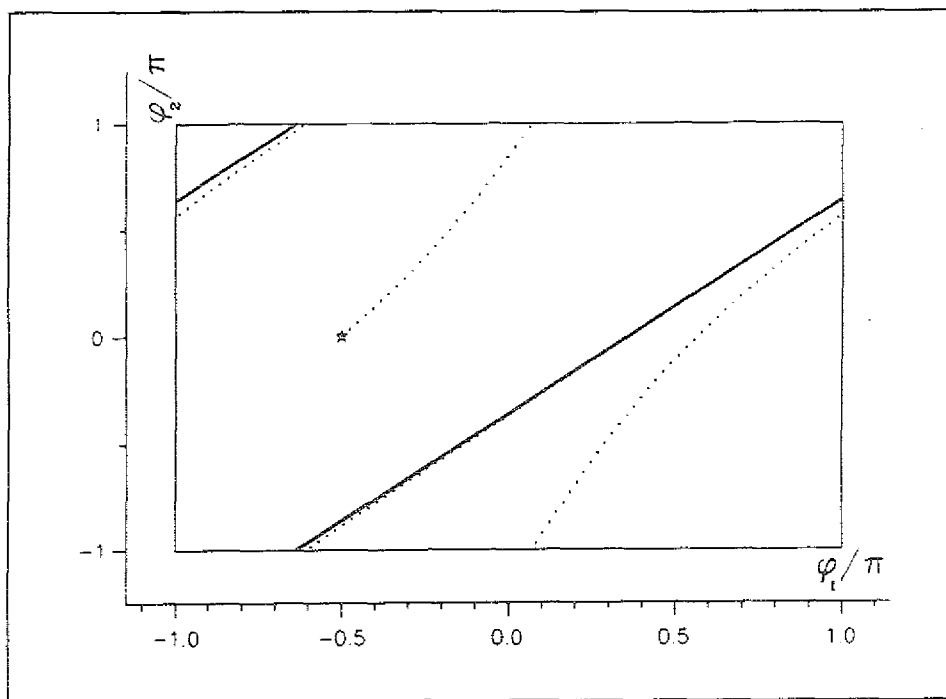


Abb.C.1: Global attraktive Grenzyklen im Bereich asymptotisch periodischer Bewegung des integrablen Systems (4.13) bzw. (C.13). Parameter: $\omega_{0,1} = 0.75$, $\omega_{0,2} = 1$, $a_1 = 0.1$ und $a_2 = 0.5$, ergo $\omega_- < 0$ und $\eta_0 = 0.41\bar{6}$. Oberes Bild: $\eta = 1 > \eta_0$ - exponentielle Attraktion mit $\lambda \approx -0.545$. Unteres Bild: $\eta = \eta_0$ - nicht exponentielle Attraktion mit $\lambda = 0$, vgl. (C.29). Die Anfangsbedingung ist jeweils durch * markiert. Aufgetragen wurde $\frac{1}{\pi}(\Phi_{i=1,2 \bmod 2\pi})$.

Auf dem Grenzzzyklus ist $\cos \Phi_-$ konstant, und damit auch die Änderung des spezifischen Torusvolumens

$$\Lambda_{\Phi} = \nabla_{\Phi} \cdot \dot{\Phi} = -\eta a_+ \sin \Phi_- \quad (\text{C.24})$$

Diese ist daher gleich der Summe der Ljapunovexponenten (vgl. die Beziehungen (3.32) & (3.36) im Kap.3.4). Weil aber einer der beiden Ljapunovexponenten verschwinden muß, gilt für den verbleibenden auf dem Grenzzzyklus, und damit für alle dorthin strebenden Trajektorien:

$$\lambda = \Lambda_{\Phi} = -\eta a_+ \sin \Phi_- < 0 \quad (\text{C.25})$$

Ein Blick auf die Bewegungsgleichungen (C.13) zeigt, daß jeder Trajektorie (Φ_-, Φ_+) unter Zeitumkehr eine Trajektorie $(-\Phi_-, -\Phi_+)$ entspricht.[†] Den zum oben aufgefundenen Grenzzzyklus gehörigen Repeller findet man also einfach durch Spiegelung am Ursprung. Auf diesem Repeller ist Φ_- natürlich ebenfalls konstant, wobei sich das Vorzeichen umkehrt (es handelt sich ja um den oben beschriebenen abstoßenden Fixpunkt der Bewegung in der Komponente Φ_-). Der Ljapunovexponent auf diesem Repeller ist daher gleich dem Betrag des Ljapunovexponenten aller zum Grenzzzyklus strebenden Bahnen. Da Φ_- auch auf dem Repeller konstant ist, ist auch dort Φ_+ eine lineare Funktion der Zeit. Dies illustriert sehr schön das allgemeine Theorem (vgl. Kap.4.4), daß die Bewegung auf Repellern im Falle nichtregulärer Barrieren nie chaotisch ist (trotz des positiven Ljapunovexponenten!).

Verläuft die Bewegung in den Winkeln auf dem Repeller oder auf dem Grenzzzyklus, so hat $\sin \Phi_-$ einen konstanten Wert. In diesem Fall divergiert bzw. konvergiert die Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung für I_- außerhalb der Barriere (C.15) exponentiell mit dem Ljapunovexponenten $(-\lambda)$ – je nachdem, ob man die Bewegung auf dem Grenzzzyklus oder diejenige auf dem Repeller betrachtet. Natürlich kann man aus der Bewegungsgleichung (C.14) für die Wirkungen auch direkt entnehmen, daß die der Änderung des spezifischen Volumens Λ_{Φ} (C.24) im Wirkungsraum entsprechende Größe $\Lambda_I = \nabla_I \cdot \dot{I} = \eta a_+ \sin \Phi_-$ den zu Λ_{Φ} entgegengesetzten Wert hat (wie es aufgrund des Liouville-Theorems (2.24) sein muß).

C.4 Die Grenzfälle marginaler Stabilität ($\lambda = 0$)

In den Grenzfällen $\eta = \eta_0$ und (alternativ) $\omega_- = 0$ findet man natürlich weiterhin (jeweils) einen Grenzzzyklus (siehe Abbildung C.1). Da $\cos \Phi_-$ dann auf der Grenzkurve betragsmäßig gleich eins ist, verschwinden jedoch *beide* Ljapunovexponenten. Das Zustandekommen dieser nicht exponentiellen Attraktion kann man analytisch verstehen, weil gerade in diesen Fällen nicht nur die Lösungen der Separationsgleichung (C.16) existieren, sondern diese sogar global analytisch umkehrbar sind.

Im Grenzfall $\eta = \eta_0$ nimmt die Separationsgleichung (C.16) wegen $|\omega_-| = \eta a_+$ die folgende Form an:

$$\int \frac{d\Phi_-}{1 + \text{sig}(\omega_-) \cos \Phi_-} = \omega_- (t - t_0) \quad (\text{C.26})$$

[†]Siehe die Anmerkung auf Seite 27 im Abschnitt 3.2 (sowie Anhang A.3 im Zusammenhang mit Kap.4.7).

Man kann nun leicht zeigen, daß[†]

$$\int \frac{d\varphi}{1 + \cos \varphi} = \tan \frac{\varphi}{2} \quad \text{und} \quad \int \frac{d\varphi}{1 - \cos \varphi} = -\cot \frac{\varphi}{2} \quad (\text{C.27})$$

und daher gilt für $\omega_- > 0$

$$\Phi_-(t) = 2 \arctan \omega_- (t - t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_-(t) = \pi \quad (\text{C.28})$$

und für $\omega_- < 0$

$$\Phi_-(t) = 2 \operatorname{arccot} \omega_- (t - t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_-(t) = 0 \quad (\text{C.29})$$

Die Abbildung C.1 zeigt exemplarisch den Fall $\omega_- < 0$, $\eta = \eta_0$. Die Trajektorien nähern sich dem Grenzyklus nicht exponentiell, sondern mit der Arcuscotangens-Funktion.

Für $\omega_- = 0$ hat die Separationsgleichung (C.16) hingegen die Gestalt

$$\int \frac{d\Phi_-}{\cos \Phi_-} = \eta a_+ (t - t_0) \quad (\text{C.30})$$

Nun gilt [Dwi61][†]

$$\int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \lambda(\varphi) = \operatorname{gd}^{-1}(\varphi) \quad \text{mit} \quad \operatorname{gd}(x) = 2 \arctan(e^x) - \frac{\pi}{2} \quad (\text{C.31})$$

und so ergibt sich

$$\Phi_-(t) = 2 \arctan \left(e^{\eta a_+ (t - t_0)} \right) - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_-(t) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{C.32})$$

[†]Aufgrund wohlbekannter trigonometrischer Identitäten gilt

$$\cos \varphi = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$\text{und daher} \quad \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi) \quad \text{sowie} \quad \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \varphi)$$

Ferner ist

$$\frac{d}{d\varphi} (\tan \varphi) = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \quad \text{sowie} \quad \frac{d}{d\varphi} (\cot \varphi) = -\frac{1}{\sin^2 \varphi}$$

und somit

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\tan \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1}{1 + \cos \varphi} \quad \text{sowie} \quad \frac{d}{d\varphi} \left(\cot \frac{\varphi}{2} \right) = -\frac{1}{1 - \cos \varphi} \quad \text{Q.E.D.}$$

[†]Vgl. [Dwi61, #442.10, #640. und #641.] bezüglich Lambda-Funktion – nicht zu verwechseln mit dem Ljapunovexponenten $\lambda = 0$ – und Gudermannscher Funktion.

C.5 Die Bewegung im "regulären Bereich" – periodisch oder quasiperiodisch

Gegen Ende des zweiten Kapitels ($\rightarrow$ Seite 21) wurde der Bereich nichtverschwindender (und wohldefinierter) Windungszahlen als "regulärer Bereich" eingeführt. Im vorliegenden Fall ist das der Bereich $\eta < \eta_0$ (vgl. das Beispiel auf Seite 140). Numerische Berechnungen zeigen, daß dort weiterhin beide Ljapunovexponenten verschwinden. Das liegt daran, daß Φ_- für $\eta < \eta_0$ eine periodische Funktion der Zeit ist (vgl. Abschnitt C.3). Dann verschwindet $\sin \Phi_-$ natürlich im Zeitmittel auf jeder Trajektorie, und damit beide Ljapunovexponenten, da dann das Zeitmittel der relativen Änderung des spezifischen Torusvolumens (C.24) auf allen Trajektorien verschwindet. Die Periode der Bewegung in der Komponente Φ_- läßt sich aus der Lösung der Separationsgleichung (C.16) direkt ermitteln. Letztere ergibt sich im Bereich $\eta < \eta_0$ mit Hilfe des oben erwähnten Integrals [Dwi61, # 446.00.]

$$\int \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\frac{(a-b) \tan \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right) \quad \text{für } a^2 > b^2 \quad (\text{C.33})$$

da für $\eta < \eta_0 = \frac{|\omega_-|}{\eta a_+}$ stets $\omega_-^2 > \eta^2 a_+^2$ gilt. Die Periode ergibt sich daraus in der bekannten Weise:

$$\begin{aligned} T_- &= \left| \oint \frac{d\Phi_-}{\dot{\Phi}_-(\Phi_-)} \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\Phi_-}{\dot{\Phi}_-(\Phi_-)} \right| \\ &= \frac{2}{\sqrt{\omega_-^2 - \eta^2 a_+^2}} \left(\arctan(\infty) - \arctan(-\infty) \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_-^2 - \eta^2 a_+^2}} \quad (\text{C.34}) \\ \Rightarrow \quad \Omega_- &= \sqrt{\omega_-^2 - \eta^2 a_+^2} \end{aligned}$$

Ein Blick auf die Bewegungsgleichungen (C.13) zeigt, daß $\dot{\Phi}_+(t)$ die gleiche Periode T_- hat wie $\Phi_-(t)$. Falls $\Phi_+(t)$ selbst periodisch ist, muß die zugehörige Periode daher ein ganzzahliges Vielfaches der Periode von $\Phi_-(t)$ und (deshalb) mit der Periode der Gesamtbewegung identisch sein. Wie wir im Abschnitt C.2 gesehen haben, ist $\Phi_+(t)$ durch eine lineare Superposition der Bewegung in der Komponente Φ_- und einer zeitlich linearen Funktion gegeben, vgl. Gleichung (C.18). Aus dieser Gleichung läßt sich der Phasenvorschub in Φ_+ während der Zeit T_- berechnen:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_+(T_-) &= \Phi_+(t + T_-) - \Phi_+(t) \\ &= \left(\omega_+ - \frac{a_-}{a_+} \omega_- \right) T_- + \frac{a_-}{a_+} \cdot \text{sig}(\omega_-) 2\pi \quad (\text{C.35}) \\ &= 2\pi \left(\frac{a_+ \omega_+ - a_- \omega_-}{a_+ \Omega_-} + \frac{a_-}{a_+} \cdot \text{sig}(\omega_-) \right) \end{aligned}$$

$\Delta \Phi_+(T_-)$ ist für alle Zeiten t gleich, auch wenn $\Phi_+(t)$ nicht periodisch ist. Natürlich ist $\Phi_+(t)$

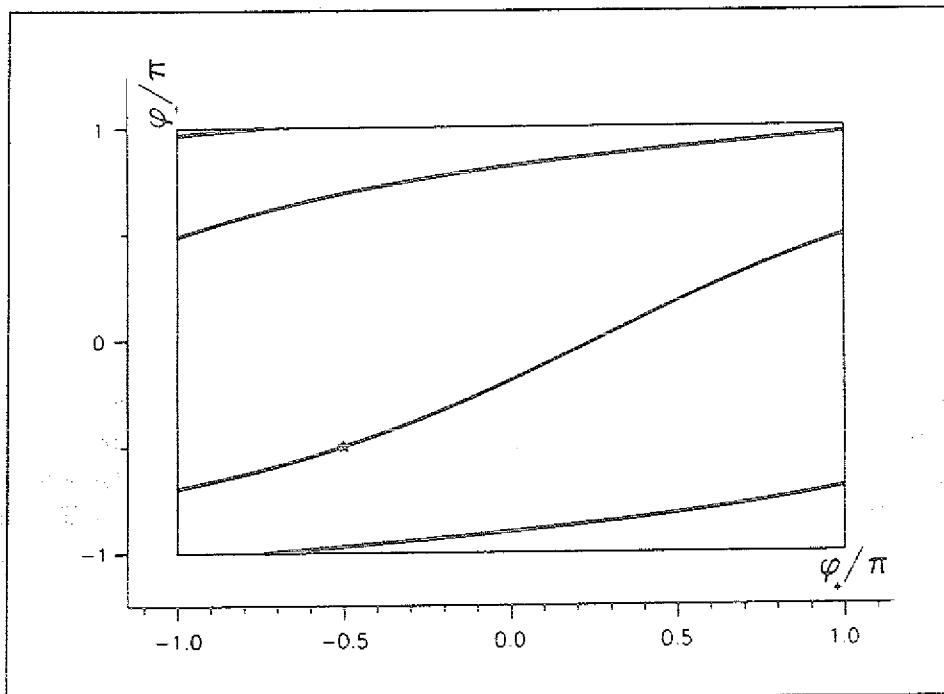
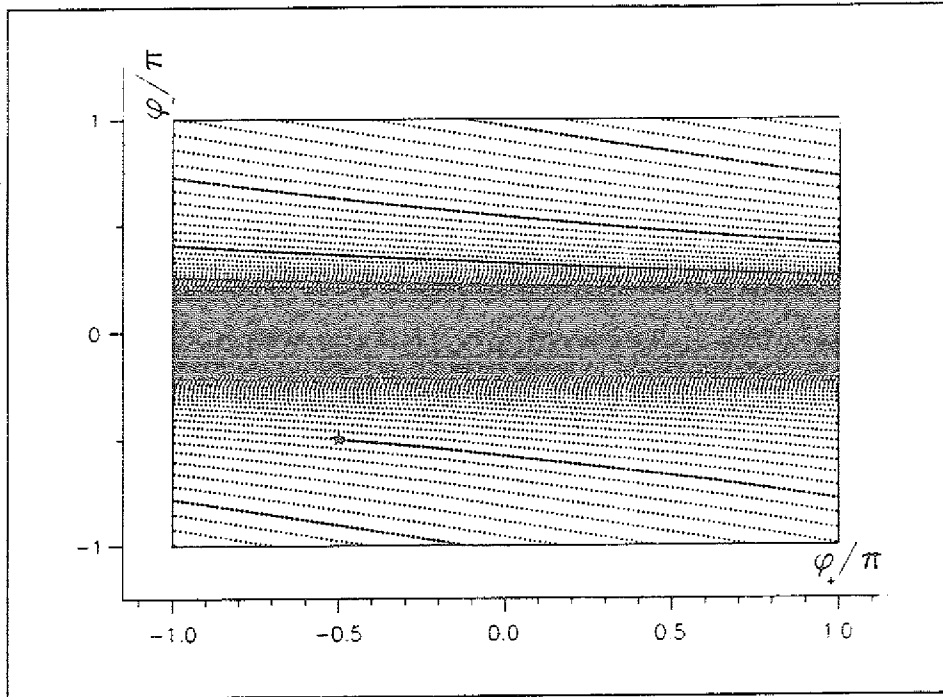


Abb.C.2: Zwei Beispiele periodischer Bewegung im regulären Bereich des Systems (4.13) bzw. (C.13). Die Anfangsbedingung ist durch * wieder jeweils durch * markiert. Oberes Bild: Frequenzen und Amplituden wie in Abb.C.1, aber $\eta = 0.4 < \eta_0$. Windungszahlverhältnis: $|\nu_+/\nu_-| = 163/7$. Unteres Bild: $\omega_{0,1} = 1.5$, $\omega_{0,2} = 0.5$, $a_1 = 1.5$, $a_2 = 0.5$, ergo $\omega_- > 0$ und $\eta_0 = 0.5$. Hier ist $\eta = 0.4$ und das Windungszahlverhältnis $\nu_+/\nu_- = 3/1$. Aufgetragen wurde $\frac{1}{\pi}(\Phi_{\pm} \bmod 2\pi)$.

nur periodisch, wenn dieser Phasenvorschub ein rationales Vielfaches von 2π ist, d.h. wenn

$$\frac{\Delta\Phi_+(T_-)}{2\pi} = \frac{p}{q} \quad \text{mit} \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \quad (\text{C.36})$$

Dann gilt

$$\Phi_+(t + qT_-) = \Phi_+(t) + q \cdot \frac{\Delta\Phi_+(T_-)}{2\pi} = \Phi_+(t) + p \cdot 2\pi \Rightarrow T = qT_- \quad (\text{C.37})$$

d.h. die Periode T der Bewegung ist gleich qT_- .

Aus der Lösungsgleichung (C.18) für $\Phi_+(t)$ läßt sich in jedem Fall auch das Verhältnis der Windungszahlen

$$\nu_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{\pm}}{t} \quad (\text{C.38})$$

berechnen. Für die periodische Bewegung in Φ_- gilt natürlich

$$\nu_- = \Omega_- \operatorname{sig}(\omega_-) \quad (\text{C.39})$$

und so ergibt sich

$$\frac{\nu_+}{\Omega_-} = \operatorname{sig}(\omega_-) \frac{\nu_+}{\nu_-} = \frac{a_+\omega_+ - a_-\omega_-}{a_+\Omega_-} + \frac{a_-}{a_+} \cdot \operatorname{sig}(\omega_-) = \frac{\Delta\Phi_+(T_-)}{2\pi} \quad (\text{C.40})$$

Die Tatsache, daß es jedenfalls wohldefinierte Windungszahlen gibt, zeigt, daß die nicht periodische Bewegung quasiperiodisch[†] ist, obwohl nur eine der Basisfrequenzen (Ω_-) bekannt ist. Im übrigen existiert im Bereich $\eta < \eta_0$ eine analytische Umkehrfunktion zur Lösung $t(\Phi_-)$ der Separationsgleichung (C.16), wie ein Blick auf das Integral (C.33) unmittelbar zeigt. Im regulären Bereich ist daher zu jedem Zeitpunkt $\Phi_-(t)$, und via (C.18) auch $\Phi_+(t)$, analytisch bekannt.

Bild C.2 zeigt zwei Beispiele periodischer Bewegung mit sehr verschiedenen Windungszahlverhältnissen. Im Fall $\nu_+/\nu_- \gg 1$ (oberes Bild) sieht man, daß die Trajektorien die meiste Zeit nahe $\Phi_- = 0$ verbringen, wo $\dot{\Phi}_-$ am kleinsten ist. Das gleiche Verhalten erkennt man auch bei quasiperiodischer Bewegung.

[†]Vgl. die Definition quasiperiodischer Funktionen auf Seite 17.

Anhang D

Numerische Hilfsmittel

Die in dieser Arbeit beschriebenen numerischen Resultate wurden auf den IBM-Großrechnern des Forschungszentrums Jülich (KFA) ermittelt. Neben eigenen FORTRAN-Programmen wurde dabei zurückgegriffen auf

- folgende Bibliotheksroutinen zur Integration von Differentialgleichungen:
 - DVERK - eine IMSL(9)-Routine (Runge-Kutta - Verfahren);
 - DIFEX1 (Extrapolationsverfahren) - in zwei Versionen:¹
 - 1) eine Routine des Konrad Zuse - Zentrums für Informationstechnik, Berlin, Stand Februar 1988;
 - 2) eine ältere Fassung von P. Deufhard (Universität Heidelberg) [Deu85], Stand März 1985.
- das in Kap.3.4 beschriebene Programm zur Berechnung der Ljapunovexponenten von Wolf et al. [WS²V85];
- die vom Zentralinstitut für Mathematik entwickelte Plotsoftware für FORTRAN-Programmierer (GR-Software).

¹wegen unerforschter Vorlieben und Abneigungen der verschiedenen Compiler. Natürlich stimmen die Ergebnisse überein, die neuere Version ist aber etwas schneller.

Verzeichnisse und Register

Abbildungsverzeichnis

0.1	† Ein chaotischer Attraktor auf dem Rössler-Torus bei $\eta = 1.536$	
3.1	† Der ursprungsnahe "Rössler-ähnliche" Attraktor im Störsystem ($\alpha = 100$) .	35
3.2	† Der "generische" Grenzzyklus auf dem Rössler-Torus im Störsystem	40
3.3	§ $\Phi_3(t)$ auf dem "generischen" Rössler-Grenzzyklus im Störsystem	41
3.4	† Der "ursprungsnahe" Grenzzyklus: 1-Zyklus ($\eta = 25$) und 4-Zyklus ($\eta = 160$)	42
3.5	† Chaos und periodische Fenster auf dem "ursprungsnahen" Attraktor	43
3.6	† Der "generische" Grenzzyklus: 1-Zyklus ($\eta = 2$) und 8-Zyklus ($\eta = 1.5435$) .	44
3.7	† Der Punktattraktor $[1, 1, 0]$ - und der "verschwundene" Attraktor ($\eta \lesssim 1.5$) .	45
3.8	§ Ein Grenzzyklus mit drei nichtverschwindenden Windungszahlen ($\eta = 0.5$) .	47
3.9	† Ein Grenzzyklus als "Nachfolger" des Punktattraktors $[0, 1, 0]_M$ ($\eta = 2.4$) .	52
3.10	† Erste Periodenverdopplung: 1-Zyklus ($\eta = 0.16$) und 4-Zyklus ($\eta = 0.1561$)	53
3.11	† Der "Nachfolge-Attraktor (N.A.)" wird chaotisch ($\eta = 0.1558$ & 0.1550) . .	54
3.12	† Der "N.A." bei $\eta = 0.145$ (periodisch) und bei $\eta = 0.14273$ (intermittent). .	55
3.13	§ Der "N.A." als 3-Zyklus in einem periodischen Fenster bei $\eta = 0.12597$. . .	56
3.14	† Der "N.A." nahe $\eta = 0.1$ - als 2-Zyklus und als chaotischer Attraktor	57
4.1	† Ein Grenzzyklus und ein Repeller auf einer Barriere ($N = 2$)	60
4.2	† Ein regulärer aperiodischer Attraktor auf einer Barriere ($N = 3$)	70
4.3	§ Ein Grenzzyklus im Duffing-System	77
4.4	† Ein seltsamer Attraktor im Duffing-System	78
4.5	† Periodenverdopplung eines Grenzzyklus' auf einem Duffing-Torus ($N = 3$) .	79
4.6	§ Ein seltsamer Attraktor auf einem van der Pol - Torus ($N = 3$)	80
4.7	† Ein regulärer aperiodischer Attraktor auf einem van der Pol - Torus ($N = 4$)	82
4.8	† Parameter wie Abb.4.7. Projektion einiger Umläufe und ein Poincaréschnitt	83
4.9	† Übergang regulär-aperiodisch $\rightarrow$ chaotisch auf einem Duffing-Torus ($N = 4$)	84
4.10	† Wie Abb.4.9, aber Darstellung als Poincaréschnitt	85
A.1	† Die Diskriminante $D(\eta)$ der kubischen Lorenz-Fixpunktgleichungen	123
C.1	† Grenzzyklen auf einem nichtregulären 2-Torus mit integrierbarer Bewegung . .	148
C.2	† Zwei Beispiele periodischer Bewegung im "regulären Bereich"	152

†1 Abbildung (ganzseitig); †2 Abbildungen (ganzseitig); §1 Abbildung (halbseitig)

Verzeichnis der Beispielsysteme

Kapitel 2	
2.2	<i>Bewegung geladener Teilchen auf isolierten nichtregulären Tori</i> 12
2.4	<i>Isolierter nichtregulärer Torus mit raumfester Richtung von $\vec{\Phi}^\dagger$</i> speziell: <i>Bewegung geladener Teilchen auf einem solchen Torus[†]</i> 18
Kapitel 3	
3.5	<i>Rössler-Torus</i> – [Abb.0.1 & Abb.3.1 – 3.8] 33
3.6	<i>Lorenz-Torus</i> – [Abb.3.9 – 3.14] 48
Kapitel 4	
4.1 & 4.2	<i>Bewegung auf Barriere-Tori im Fall $N = 2$</i>
# 4.1	Beispiel einer achsenparallelen Barriere – [Abb.4.1] 59
# 4.2	Beispiel einer nicht achsenparallelen Barriere – [Abb.C.1 & C.2] [§] . 63
4.4	<i>Reguläre Attraktoren auf nichtregulären Barriere-Tori ($N \geq 3$)</i>
# 4.4.a	Ein regulär-aperiodischer Attraktor ($N = 3$) – [Abb.4.2] 69
# 4.4.b	Bewegung eines Elektrons auf den 2-Tori des Systems # 4.2 72
4.5	<i>Attraktoren "periodisierter" Oszillatorsysteme auf chaotischen Tori, die $(2N-2)$-dimensionale invariante Hyperflächen bilden ($N \geq 3$)</i> ... 74
# 4.5.a	Duffing-Tori ($N = 3$) – [Abb.4.3 – 4.5] 75
# 4.5.b	van der Pol - Tori ($N = 3$) – [Abb.4.6] 77
# 4.5.c	van der Pol - Tori ($N = 4$) – [Abb.4.7 & 4.8] 81
# 4.5.d	Duffing-Tori ($N = 4$) – [Abb.4.9 & 4.10] 86
# 4.5.e	Bewegung eines Elektrons auf van der Pol - Tori ($N = 3$) 87
4.6	<i>Chaotische Tori auf $(2N-m)$-dim. invarianten Hyperflächen ($m \geq 3$)</i>
# 4.6.a	Chaotische 3-Tori und Phasenraumerweiterung ($N \geq 4, m = 3$) 89
# 4.6.b	Bewegung eines Elektrons auf solchen Tori ($m = 3$) 90
# 4.6.c	"Double van der Pol - Tori" ($N = 5, m = 4$) 91
Kapitel 5	
5.1	<i>Bewegung in der Umgebung nichtregulärer Tori in linearen Systemen</i>
# 5.1.a	Bewegung im Wirkungsraum linearer Systeme vom Typ (2.4) 96
# 5.1.b	Bewegung im Wirkungsraum des integrablen Systems # 4.2 99
# 5.1.c	Salats Beispiele für lineare Systeme vom Typ (5.3) [Sal84, Sal88] ... 99

[†]Vgl. Anhang A.2 sowie die Behandlung nicht-isolierter Tori dieser Art im Anhang B.4.

[§]Vgl. die Anmerkung auf Seite 71.

[‡]Vgl. die Fallstudie der zugehörigen integrablen Bewegung im Anhang C.

Namenregister

- Arnol'd, V.I. 9,10,11,16,21,72,101,109,
 112,118,124,135,139,143
 Avez, A. 135 (→ Arnol'd)
 Baesens, C. 17,21,100,102,103,108
 Battelino, P.M. 92,100,104
 Bennetin, G. 29,30
 Berry, M.V. 3,4,9,72,118,128,130,131,
 135,143
 Bronstein, I.N. 120
 Cartwright, M.L. 77
 Chernikov, A.A. 135
 Crutchfield, J. 46
 Denjoy, A. 101
 Denflhard, P. 154
 Donnelly, R.J. → Crutchfield
 Douglas, D.R. 113
 Dragt, A.J. 113
 Dwight, H.B. 146,150,151
 Eilenberger, G. 113
 Farmer, D. → Crutchfield
 Giorgilli, A. → Bennetin
 Goldstein, H. 16,112,114
 Grebogi, C. 17,100,104; → Battelino
 Guckenheimer, J. → Baesens; Kim
 Haken, H. 3,28,31,135
 Helleman, R.H.G. 2,3,9,135
 Herman, M.R. 16,101,130,135
 Jackson, E.A. 15,29,32,39,76,77,109,
 129,130,131,135
 Jackson, J.D. 114,115
 Jones, G. → Crutchfield
 Kaplan, J.L. 32
 Kim, S. 17,100,102,103; → Baesens
 Kolmogorov, A.N. 11,130,131,133,134,
 135,136
 Landau, L.D. 15
 Lichtenberg, A.J. 23,29,31,76,112,127,128
 Lieberman, M.A. → Lichtenberg
 Lifschitz, E.M. → Landau
 Littlewood, J.E. → Cartwright, M.L.
 Ljapunov, A.M. 29
 Lorenz, E.N. 5,7,48,105
 MacKay, R.S. 135; → Baesens; Kim
 Marchal, C. 109
 Mather, J.N. 135
 Moser, J. 11,17,135
 Nagashima, T. → Shimada, I.
 Newhouse, S. 104
 Oseledec, V.I. 29,30
 Ott, E. → Grebogi; Battelino
 Packard, N. → Crutchfield
 Percival, I. 9,63,132; → MacKay
 Poincaré, H. 15,29
 Richtmyer, R.D. 124
 Rössler, O.E. 5,7,33,34,39,77,105
 Ruelle, D. 104; → Newhouse
 Sagdeev, R.Z. → Chernikov
 Salat, A. 99,100,101,102,145,157
 Schmidt, K. 5,7,74,76,105
 Semendjajew, K.A. → Bronstein
 Shaw, R. 15,29,32; → Crutchfield
 Shimada, I. 29
 Siegel, C.L. 9,19,113,129
 Strelcyn, J.-M. → Bennetin
 Swift, J.B. → Wolf
 Swinney, H.L. → Wolf
 Takens, F. → Newhouse; Ruelle
 Tél, T. 109
 Thirring, W. 131,133,134,135
 Ueda, Y. 5,7,74,76,105

Vastano, J.A. → Wolf

Verhulst, F. 1,27,39,76

Whittaker, E.T. 15,19,29,31,109,129

Wiggins, S. 135

Wolf, A. 29,30,32,154

Yorke, J.A.

→ Battelino; Grebogi; Kaplan

Zaslavsky, G.M. → Chernikov

Quellenregister

- [AA68] V.I. Arnol'd, A. Avez, Ergodic Problems of Classical Mechanics,
W.A. Benjamin Inc., New York (1968)
- [Arn61] V.I. Arnol'd, Izvest. Akad. Nauk USSR, Ser. Mat. 25 (1961) 21 - 86 [russ.]
≡ AMS Transl. Ser. (2) 46 (1965) 213 - 284 [engl.]
(Small denominators I: Mappings of the circumference onto itself)
- [Arn63] V.I. Arnol'd, Usp. Mat. Nauk 18#5 (1963) 13 - 40 [russ.]
≡ Russ. Math. Surv. 18#5 (1963) 9 - 36 [engl.]
([Small denominators II:] Proof of a theorem of A.N. Kolmogorov on the invariance
of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian function)
- [Arn64] V.I. Arnol'd, Dokl. Akad. Nauk USSR 156 (1964) 9 - 12 [russ.]
≡ Sov. Math. Dokl. 5 (1964) 581 - 585 [engl.]
(Instability of dynamical systems with several degrees of freedom)
- [Arn78] V.I. Arnol'd, Mathematical Methods in Classical Mechanics, Springer-Verlag,
New York (1978); Originalausgabe [russ.] Nauka, Moskau (1974)
- [Arn83] V.I. Arnol'd, Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations,
Springer-Verlag, New York (1983)
- [Bat88] P.M. Battelino, Phys. Rev. A 38 (1988) 1495 - 1502
(Persistence of three-frequency quasiperiodicity under large perturbations)
- [Ber78] M.V. Berry, in: S. Jorna (ed.), Topics in Nonlinear Dynamics,
Am. Inst. Phys. Conf. Proc. 46 (1978) 16 - 120 (Regular and irregular motion)
- [BGK91] C. Baesens, J. Guckenheimer, S. Kim, R.S. MacKay,
Physica D 49 (1991) 387 - 475
(Three Coupled Oscillators: Mode-locking, global bifurcations and toroidal chaos)
- [BGO89] P.M. Battelino, C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, Physica D 39 (1989) 299 - 314
(Chaotic attractors on a 3-torus, and torus break-up)
- [BGS80] G. Bennetin, A. Giorgilli, J.-M. Strelcyn, Meccanica 15 (1980) 9
(Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian
systems: a method for computing all of them)

- [BS79] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik; Herausgeber der 19. (völlig überarbeiteten) Auflage: G. Grosche, V. Ziegler; BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig (1979); Lizenzausgabe für den Verlag Harri Deutsch, Thun (1980)
- [CFP80] J. Crutchfield, D. Farmer, N. Packard, R. Shaw, G. Jones, R.J. Donnelly, Phys. Lett. 76A (1980) 1 – 4 (Power spectral analysis of a dynamical system)
- [CL45] M.L. Cartwright, J.E. Littlewood, J. Lond. Math. Soc., 20 (1945) 180 – 189
(On non-linear differential equations of the second order.
I. The equation $\ddot{y} + k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + a)$, k large)[†]
- [CSZ88] A.A. Chernikov, R.Z. Sagdeev, G.M. Zaslavsky, Physica D 33 (1988) 65 – 76
(Stochastic Webs)
- [Deu85] P. Deufhard, SIAM Review 27#4 (1985) 505 – 535
(Recent progress in extrapolation methods for ordinary differential equations)
- [Dou82] D.R. Douglas, Lie Algebraic Methods for Particle Accelerator Theory, Dissertation, University of Maryland (1982)
- [Dra82] A.J. Dragt, in: R.A. Carrington, F.R. Huson, M. Month (eds.), Physics of High-Energy Particle Accelerators, Am. Inst. Phys. Conf. Proc. 87 (1982) 147 – 313
(Lectures on nonlinear orbit dynamics)
- [Dwi61] H.B. Dwight, Tables of Integrals and Other Mathematical Data, Macmillan Publ., 4th edition, New York (1961)
- [Eil83] G. Eilenberger, in: Nichtlineare Dynamik in kondensierter Materie, 14. Ferienkurs des Instituts für Festkörperforschung der KFA Jülich (1983)
(Reguläres und chaotisches Verhalten Hamiltonscher Systeme)
- [Gol63] H. Goldstein, Klassische Mechanik, Übersetzung der 6. amerikanischen Auflage (1959), Lizenzausgabe der Akademischen Verlagsanstalt, Frankfurt/Main (1963)
- [GOY83] C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, Phys. Rev. Lett. 51#5 (1983) 339 – 342
(Are three-frequency quasiperiodic orbits to be expected in typical nonlinear dynamical systems?)
- [GOY85] C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, Physica D 15 (1985) 354 – 373
(Attractors on an N -torus: Quasiperiodicity versus chaos)
- [Hak83a] H. Haken, Advanced Synergetics, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg (1983)
- [Hak83b] H. Haken, Phys. Lett. 94A (1983) 71 – 72
(At least one Lyapunov exponent vanishes if the trajectory of an attractor does not contain a fixed point)

[†]zitiert nach [Jac89]

- [Hel84] R.H.G. Helleman in: P. Cvitanović (ed.), *Universality in Chaos, A Reprint Selection*, Adam Hilger (1984) 420 – 488; aktualisierte Version der Originalveröffentlichung (1980) (Self-generated chaotic behaviour in nonlinear mechanics)
- [Her79] M.R. Herman, *Pub. Math. I.H.E.S.* 49 (1979) 5 – 234
(Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations)
- [Jac75] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, J. Wiley & Sons, New York, 2. Auflage (1975)
- [Jac89] E.A. Jackson, *Perspectives of Nonlinear Dynamics* (zwei Bände), Cambridge University Press, Cambridge 1989
- [JMT86] J.M. Jowett, M. Month, S. Turner (eds.), *Nonlinear Dynamics Aspects of Particle Accelerators; Proceedings of the Joint US-CERN School on Particle Accelerators, Sardinien* (1985); *Lecture Notes in Physics # 247*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg (1986)
- [KMG89] S. Kim, R.S. MacKay, J. Guckenheimer, *Nonlinearity* 2 (1989) 391 – 404
(Resonance regions for families of torus maps)
- [Kol54a] A.N. Kolmogorov, in: *Proc. of the 1954 Internat. Congress. Math., North Holland, Amsterdam* (1957) 315 – 333 [russ.] $\equiv$ R. Abraham, J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd ed., Benjamin/Cummings Publ. (1978) 741 – 759 (Anhang) [engl.]
(The General Theory of Dynamical Systems and Classical Mechanics)
- [Kol54b] A.N. Kolmogorov, *Dokl. Akad. Nauk USSR* 98 (1954) 527 – 530 [russ.]
 $\equiv$ G. Casati, J. Ford (eds.), *Stochastic Behaviour in Classical and Quantum Hamiltonian Systems*, Springer Lecture Notes in Physics 93 (1979) 51 – 56 sowie Hao Bai-Lin (ed.), *Chaos II*, World Scientific Publ., Singapore (1990) 107 – 112 [engl.]
(On the preservation of quasiperiodic motions under a small variation of Hamilton's function)
- [KY79] J.L. Kaplan, J.A. Yorke, in: H.O. Peitgen, H.O. Walther (eds.), *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points*, Springer Lecture Notes in Mathematics 730 (1979) 228 – 237
(Chaotic behaviour of multidimensional difference equations)
- [LL79] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, *Statistische Physik – Teil 1*; von E.M. Lifschitz und L.P. Pitajewski ergänzte 5. Auflage; Lizenzausgabe des Akademie-Verlags, Berlin (1979)
- [LL83] A.J. Lichtenberg, M.A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag, New York (1983)
- [Lor63] E.N. Lorenz, *J. Atmospheric Sci.* 20 (1963) 130 – 141
(Deterministic nonperiodic flow)
- [Ma84] J.N. Mather, *Erg. Theory Dyn. Sys.* 4 (1984) 301 – 309
(Non-existence of invariant circles)

- [Mar90] C. Marchal, The Three-Body Problem, Elsevier Science Publ., Amsterdam (1990)
- [McK85] R.S. MacKay, Übersichtsvortrag (1985), in: [JMT86] 390 – 454
(Transition to chaos for area-preserving maps)
- [Mos66] J. Moser, SIAM Review 8#2 (1966) 145 – 172
(On the theory of quasi-periodic motions)
- [Mos67] J. Moser, Math. Ann. 169 (1967) 136 – 176
(Convergent series expansions for quasi-periodic motions)
- [Mos73] J. Moser, Stable and Random Motions – With Special Emphasis on
Celestial Mechanics (Hermann Weyl Lectures, Princeton 1972),
Princeton University Press, Princeton/New Jersey (1973)
- [Mos85] J. Moser, Übersichtsvortrag (1985), in: [JMT86] 492 – 518
(Break-down of stability)
- [Mos86] J. Moser, SIAM Review 28#4 (1986) 459 – 485
(Recent developments in the theory of Hamiltonian systems)
- [MP85] R.S. MacKay, I.C. Percival, Comm. Math. Phys. 98 (1985) 469 – 512
(Converse KAM: theory and practice)
- [NRT78] S. Newhouse, D. Ruelle, F. Takens, Commun. Math. Phys. 64 (1978) 35 – 40
(Occurrence of strange axiom A attractors near quasi-periodic flow on T^m , $m > 3$)
- [Ose68] V.I. Oseledec, Trans. Moscow Math. Soc. 19 (1968) 197 – 231
(A multiplicativ ergodic theorem. Ljapunov characteristic numbers
for dynamical systems)
- [Per85] I. Percival, Übersichtsvortrag (1985), in: [JMT86] 12 – 36
(Integrable and nonintegrable Hamiltonian systems)
- [Ric81] R.D. Richtmyer, Principles of Advanced Mathematical Physics, Volume II,
Springer-Verlag, New York (1981)
- [Rös76] O.E. Rössler, Phys. Lett. 57A (1976) 397 – 398
(An equation for continuous chaos)
- [Rös83] O.E. Rössler, Z. Naturforsch. 38a (1983) 788 – 801 (The chaotic hierarchy)
- [RT71] D. Ruelle, F. Takens, Commun. Math. Phys. 20 (1971) 167 – 192 &
Commun. Math. Phys. 23 (1971) 343 – 344 (On the nature of turbulence)
- [Sal84] A. Salat, Z. Naturforsch. 39a (1984) 830 – 841
(Integrability of non-KAM Hamiltonians)
- [Sal85] A. Salat, Z. Naturforsch. 40a (1985) 959 – 967
(Hamiltonian approach to magnetic fields with toroidal surfaces)

- [Sal86] A. Salat, IPP-Report 6 / 257 (Jan. 1986)
(Integrable and Nonintegrable Non-KAM Hamiltonians and Magnetic Field Topology)
- [Sal88] A. Salat, Physica Scripta 38 (1988) 17 – 21 (Non-KAM Hamiltonians)[†]
- [Sch86] K. Schmidt, Liapunovexponenten einfacher dynamischer Systeme und deren Skalenverhalten bei der Kreisabbildung (Diplomarbeit), Frankfurt/Main (1986)
- [Sha81] R. Shaw, Z. Naturforsch. 36a (1981) 80 – 112
(Strange attractors, chaotic behaviour, and information flow)
- [Sie41] C.L. Siegel, Ann. Math. 42 (1941) 806 – 822
(On the integrals of canonical systems)
- [Sie54] C.L. Siegel, Math. Ann. 128 (1954) 144 – 170
(Über die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung)
- [Sie56] C.L. Siegel, Vorlesungen über Himmelsmechanik, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg (1956)
- [SN79] I. Shimada, T. Nagashima, Progr. Theor. Phys. 61 (1979) 1605 – 1616
(A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems)
- [Tel90] T. Tél, in: Hao Bai-lin (ed.), Directions in Chaos III, World Scientific Publ., Singapore (1990) 149 – 211 (Transient chaos)
- [Thi77] W. Thirring, Lehrbuch der Mathematischen Physik – Band I: Klassische dynamische Systeme, Springer-Verlag, Wien (1977)
- [Ued79] Y. Ueda, J. Stat. Phys. 20 (1979) 181 – 196
(Randomly transistional phenomena in the system governed by Duffing's equation)
- [Ver90] F. Verhulst, Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg (1990)
- [Whi37] E.T. Whittaker, A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies (With an Introduction to the Problem of Three Bodies), Cambr. Univ. Press, Wiederauflage (1988) der 4. Ausgabe, Cambridge (1937)
- [Wig90] S. Wiggins, Physica D 44 (1990) 471 – 501
(On the geometry of transport in phase space
I. Transport in k-degree of freedom Hamiltonian systems, $2 \leq k < \infty$)
- [WS²V85] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano, Physica D 16 (1985) 285 – 317
(Determining Lyapunov exponents from a time series)

[†]Hinsichtlich eines Druckfehlers in [Sal88] vgl. die Anmerkung auf Seite 145.

Danksagung

Zunächst habe ich zu danken

- Herrn Dr. Lustfeld für die Anregung der Untersuchungen, über die in der vorliegenden Arbeit berichtet wird, sowie für sein reges Interesse an diesem Projekt. Eine besondere Würdigung verdient sein geduldiges Zuwarten während meiner langwierigen Genesung nach einem Autounfall. Ferner verdanke ich ihm die Gelegenheit zur Abrundung des Abstechers in die nichtlineare Beschleunigerphysik durch Teilnahme an zwei CERN Accelerator Schools, die Ermunterung zum Kauf eines PC und die für dessen Betrieb nötige Software, sowie einen tiefen Einblick in die Behandlung nicht-periodisch zeitabhängiger Hamiltonscher Systeme mit verschiedenen Varianten der Störungsrechnung;
- Herrn Prof. Eilenberger für die Vermittlung des Kontakts zu Dr. H. Lustfeld sowie für die Gastfreundschaft seines Instituts seit dem Abbruch des KFA-Projekts Spallations-Neutronenquelle;
- der Kernforschungsanlage Jülich – mittlerweile Forschungszentrum Jülich (KFA) – für die zeitweilige Förderung als Doktorand.

Ohne das Engagement von Dr. R. Jones zugunsten der Verfügbarkeit von $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ und $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ auf den KFA-Rechnern wäre es sicher nur mit sehr viel größerer Mühe möglich gewesen, diese Arbeit in einer auch nur halbwegs vergleichbaren Form zu präsentieren. Der sehr wichtige Hinweis auf Kopkas Buch[†] stammt von Dr. Gerolf Ott. Dr. K. Schmidt verdanke ich eine aktuelle Version der Integrationsroutine DIFEX1. Michael Eiseles stete Diskussionsbereitschaft war mir eine willkommene Hilfe beim Verständnis der Ljapunovexponenten und einiger Aspekte periodischer Bewegung.

Die Kaffeepausen mit Dr.phil. Jens Simon während des letzten Jahres werden mir stets in guter Erinnerung bleiben. In gleicher Weise danke ich allen anderen Mitarbeitern und Doktoranden des Instituts für Festkörperforschung (Theorie I) für die freundschaftliche Atmosphäre während meines Aufenthalts.

Meiner Frau Beatrix danke ich für ihren Langmut im Ertragen aller Nachteile des Zusammenlebens mit einem Doktoranden. Ihr Verständnis und ihre Ermunterung waren für mich *von unschätzbarem Wert*.

Diese Arbeit hätte ohne die großzügige Unterstützung durch meine Eltern nicht fertiggestellt werden können.

Andreas v. Kempis
Jülich, im Dezember 1991

[†]H. Kopka, $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ – Eine Einführung, Addison-Wesley, 2. Auflage, Bonn/München (1989)

Jül-2660
August 1992
ISSN 0366-0885