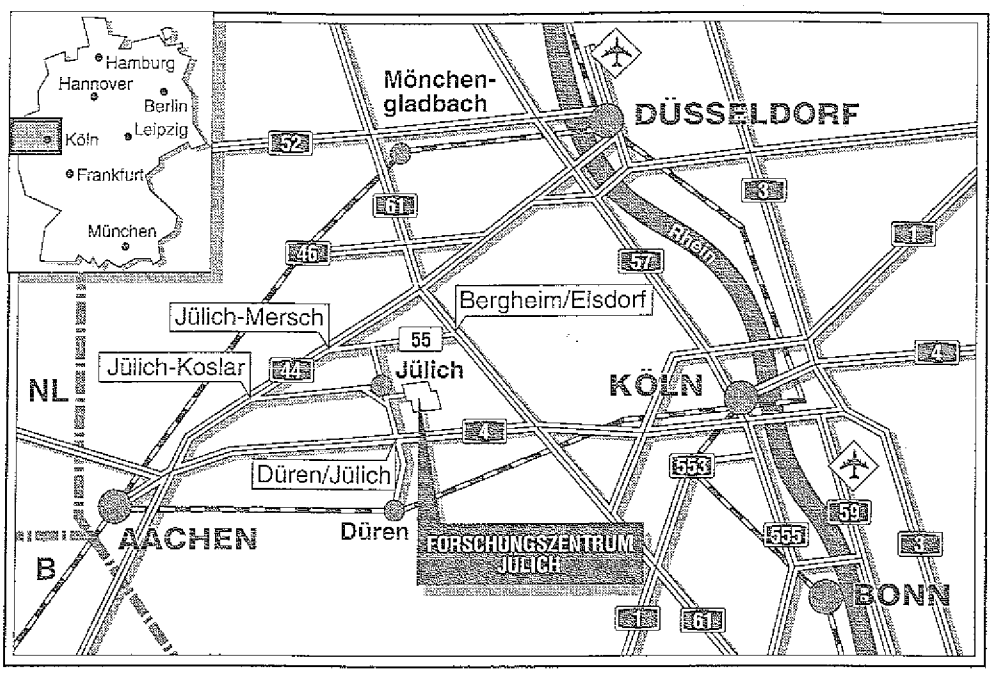
FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH GmbH

KFA

Institut für Kernphysik

# Ein mesontheoretisches Modell für die $\pi\rho$-Wechselwirkung und der $\pi NN$-Formfaktor

Georg Janßen




**Berichte des Forschungszentrums Jülich ; 2734**
ISSN 0366-0885
Institut für Kernphysik Jül-2734

Zu beziehen durch: Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek
Postfach 1913 · D-5170 Jülich · Bundesrepublik Deutschland
Telefon: 02461/61-6102 · Telefax: 02461/61-6103 · Telex: 833556-70 kfa d

# Ein mesontheoretisches Modell für die $\pi\rho$-Wechselwirkung und der $\pi NN$-Formfaktor

Georg Janßen

# ABSTRACT

Nach der erfolgreichen Beschreibung der $\pi\pi$-Wechselwirkung im Rahmen des Mesonaustauschbildes erweitern wir den Anwendungsbereich dieses Modells auf einen weiteren Meson-Meson-Prozeß , die $\pi\rho$-Wechselwirkung.

Im Vergleich zur $\pi\pi$-Wechselwirkung treten bei der Behandlung der $\pi\rho$-Wechselwirkung einige neue Aspekte auf. Hierzu gehört vor allem die Instabilität des $\rho$-Mesons, die zu einem Übergang des $\pi\rho$-Systems in ein $3\pi$-System führt. Die realistische Beschreibung der $\pi\rho$-Wechselwirkung erfordert die Berücksichtigung des angekoppelten $3\pi$-Systems und damit die Anwendung des komplizierten Dreiteilchenformalismus.

Die T-Matrix, die wir im Rahmen unseres Modells erhalten, ermöglicht zunächst die Untersuchung der $L^{JT} = S^{11}$-Partialwelle, d.h. des $A_1$-Kanals. In dieser Welle liefert der $\rho$-Austausch den wesentlichen Beitrag der Austauschgraphen; es ist allerdings notwendig, auch den Beitrag eines genuinen $A_1$-Polgraphen zu berücksichtigen. Die Struktur der resultierenden T-Matrix liefert eine Erklärung für bestehende Diskrepanzen in der Interpretation von empirischen Daten aus unterschiedlichen Experimenten.

Als eine erste Anwendung unseres Modells der $\pi\rho$-Wechselwirkung untersuchen wir den $\pi NN$-Vertex. Wir berechnen den Effekt der Mesonwolke auf die Vertexausdehnung, indem wir mesonische Erweiterungen zum punktförmigen Vertex betrachten. Es zeigt sich, daß unsere Rechnung einen relativ 'soften' Formfaktor liefert, der das Potential auch für größere Abstände signifikant unterdrückt ($\Lambda_{\pi NN} \simeq 1.0 GeV$; Monopol). Entscheidend für dieses Ergebnis ist der Einfluß der $\pi\rho$-Wechselwirkung, die zu einer deutlichen Verschiebung der Cut-Off-Masse hin zu kleineren Werten führt.

# ABSTRACT

Based on the successful description of $\pi\pi$ interaction within the meson exchange framework we extend our model to a further meson-meson process, the $\pi\rho$ interaction.

In comparison with $\pi\pi$ interaction several new aspects appear in the $\pi\rho$ system. Besides other points the main new aspect is due to the instability of the $\rho$-meson, which induces a transition of the $\pi\rho$ system into a $3\pi$ system. A realistic model for the $\pi\rho$ interaction should take into account coupling to this three-particle channel and thus requires application of the complicated three-body formalism.

Having obtained the $\pi\rho$ T-matrix we first investigate the $L^{JT} = S^{11}$ partial wave, i.e. the $A_1$-channel. Here, $\rho$-exchange provides the dominant exchange contribution; however, it is definitely necessary to include the genuine $A_1$-pole term. The detailed investigation of the structure of the resulting T-matrix provides an explanation for discrepancies existing in the interpretation of different experimental data sets.

As a first application of our $\pi\rho$ interaction model we investigate the $\pi NN$ vertex. We consider the meson cloud part of the vertex extension by calculating loop corrections to the pointlike vertex. It turns out that the formfactor is rather soft in our calculation ($\Lambda_{\pi NN} \simeq 1.0 GeV$; monopole parametrization). For this result the inclusion of the $\pi\rho$ interaction is quite important, because it leads to a remarkable shift in the formfactor towards lower cut-off masses.

INHALTSVERZEICHNIS

# 1. Einleitung

Für die Beschreibung von Prozessen der starken Wechselwirkung steht uns heute als fundamentale Theorie die Quantenchromodynamik (QCD) zur Verfügung. Die Wechselwirkung ist auf dieser Basis vollständig festgelegt durch die zugrundeliegende Quark-Gluon-Dynamik.

Im Hochenergiebereich lassen sich die Feldgleichungen der QCD durch störungstheoretische Ansätze auch tatsächlich lösen, da die energieabhängige Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung für große Impulsüberträge klein ist (asymptotische Freiheit). Im Nieder- und Mittelenergiebereich dagegen divergieren solche Ansätze bedingt durch die nichtabelsche Struktur der QCD; zur Beschreibung solcher Prozesse müssen daher nicht-perturbative Methoden entwickelt werden.

In der QCD können freie Teilchen nur farblos, d.h. als Singulett bezüglich $SU(3)_{color}$ auftreten (Confinement). Die Wechselwirkung zwischen Hadronen, deren Abstand groß gegenüber ihrer Ausdehnung ist, kann daher nur durch Austausch farbloser Objekte vermittelt werden. Im Nieder- und Mittelenergiebereich, wo große Abstände dominieren, sind also Mesonen und Hadronen die zur Beschreibung der Wechselwirkung geeigneten Freiheitsgrade. Das Mesonaustauschbild stellt sich daher im Rahmen der QCD nicht mehr als die von Yukawa eingeführte fundamentale Theorie [1], sondern als eine effektive Beschreibung der zugrundeliegenden Quark-Gluon-Prozesse auf der Basis des Confinement dar. Für höhere Energien treten Quark-Gluon-Effekte auch explizit in Erscheinung, das Mesonaustauschbild verliert hier seine Gültigkeit. Durch die Feststellung dieses Gültigkeitsbereiches lassen sich so auch Rückschlüsse auf die QCD ziehen, z.B. auf die oben erwähnte Ausdehnung der Hadronen, über die verschiedene QCD-motivierte Bag-Modelle bisher unterschiedliche Aussagen liefern [2, 3, 4].

Mesonaustauschmodelle wurden zunächst erfolgreich für die NN-Wechselwirkung entwickelt, neben den sog. Paris- und Nijmegen-Potentialen [5, 6] liefert vor allem auch das Bonn-Potential [7] eine sehr gute Beschreibung der empirischen Daten unterhalb der Pion-Schwelle. Ausgehend von der Basis des Bonn-Potentials versucht unsere Arbeitsgruppe in Jülich seit einigen Jahren, das Konzept des Mesonaustauschs in konsistenter Weise auch auf weitere Prozesse der starken Wechselwirkung

auszudehnen, so Baryon-Antibaryon- [8], Meson-Baryon- [9], Meson-Meson- [10] und Hyperon-Baryon-Reaktionen [11]. Ziel dieser Bemühungen ist die möglichst umfassende Beschreibung dieser Prozesse mit einem konsistenten Parametersatz, aber auch die erwähnte Auslotung des Gültigkeitsbereiches des Mesonaustauschbildes.

In dieser Arbeit setzen wir diese Reihe fort und entwickeln zunächst ein Modell für die $\pi\rho$–Wechselwirkung. Dabei ist zu beachten, daß das $\rho$–Meson im $\pi\rho$–System in zwei physikalische Pionen zerfallen kann. Auch wenn es in erster Näherung vertretbar scheint, das $\rho$–Meson als stabiles Teilchen zu betrachten, ist es doch wichtig, die möglichen Effekte der $\rho$-Breite in der $\pi\rho$-Streuung zu untersuchen. Der Zerfall des $\rho$ führt zu einem Übergang des $\pi\rho$–Systems in ein $3\pi$–System, daher ist die Streuamplitude für dieses System gekoppelter Kanäle zu berechnen. Da es sich bei dem angekoppelten Kanal aber um ein Dreiteilchensystem handelt, erfordert dies im Grunde die Lösung der komplizierten Streugleichungen für das Dreiteilchenproblem [12]. Es läßt sich jedoch eine effektive Zweiteilchen-Streugleichung für das $\pi\rho$–System ableiten, die dem zugrundeliegenden $3\pi$–System Rechnung trägt [13].

Neben diesen theoretischen Komplikationen führt der Zerfall des $\rho$–Mesons leider auch dazu, daß zur elastischen $\pi\rho$–Streuung keine experimentellen Daten vorliegen, da die kurze Lebensdauer eine direkte Messung von Streudaten unmöglich macht. Eine quantitative Analyse, d.h. ein Vergleich von Theorie und Experiment, ist daher nur indirekt über die Zerfälle einiger schwerer Mesonen (z.B. $A_1(1260)$ [14, 15], $H_1(1170)$ [16]) in den $\pi\rho$–Kanal möglich und deshalb mit einigen Unsicherheiten behaftet. Bei der Betrachtung des $A_1$-Zerfalls zeigt sich aber bereits, daß die Bedeutung einer full-off-shell $\pi\rho$–Wechselwirkung nicht vorrangig in der Beschreibung der elastischen Streuung besteht. Wichtiger ist die Möglichkeit, dieses Modell in andere Prozesse einzubauen, wo es unter Umständen wichtige Konsequenzen hat. So wird im Falle des $A_1$ seit der Entdeckung erster experimenteller Hinweise eine Diskussion über Existenz und Parameter eines solchen Axialvektormesons geführt [14, 15, 17]. Unsere Rechnungen unterstützen die in den letzten Jahren gefestigte Hypothese des $A_1$ als 'echter', genuiner Resonanz. Sie zeigen aber auch, daß die $\pi\rho$-Wechselwirkung im $1^+$–Kanal einen Untergrund erzeugt, der bei der Analyse dieser Resonanz von Bedeutung ist. Dies könnte insbesondere auch Auswirkungen auf theoretische Modelle haben, die das $A_1$ beinhalten, ein Beispiel dafür ist der axiale Formfaktor des Nukleons.

Eine weitere Anwendungsmöglichkeit der $\pi\rho$–Wechselwirkung ergibt sich bei der Klärung offener Fragen im Zusammenhang mit dem $\pi NN$–Formfaktor [18, 19, 20]. Formfaktoren müssen eingeführt werden, um der endlichen Ausdehnung der am Vertex beteiligten Teilchen Rechnung zu tragen, sie parametrisieren dabei sowohl mesonische Prozesse (Abb. 1.1) als auch die Quark-Gluon-Struktur der beteiligten Hadronen. Um die empirischen NN-Daten beschreiben zu können, muß im Bonn-Potential, wie auch in einigen anderen Modellen, ein $\pi NN$–Formfaktor gewählt werden, der das Potential nur für sehr große Impulsüberträge und damit kleinen Abständen (r $\leq$ 1 fm) unterdrückt (Cut-Off-Masse $\Lambda_{\pi NN} \geq 1.3$ GeV (Monopol-parametrisierung) [7], Einzelheiten s. Kap. 4). Dieser 'harte' Formfaktor steht im Widerspruch zu Vorhersagen aus anderen Modellen, die wesentlich kleinere Cut-Off Massen fordern ($\Lambda_{\pi NN} \simeq 0.8$ - 1.0 GeV [21]).

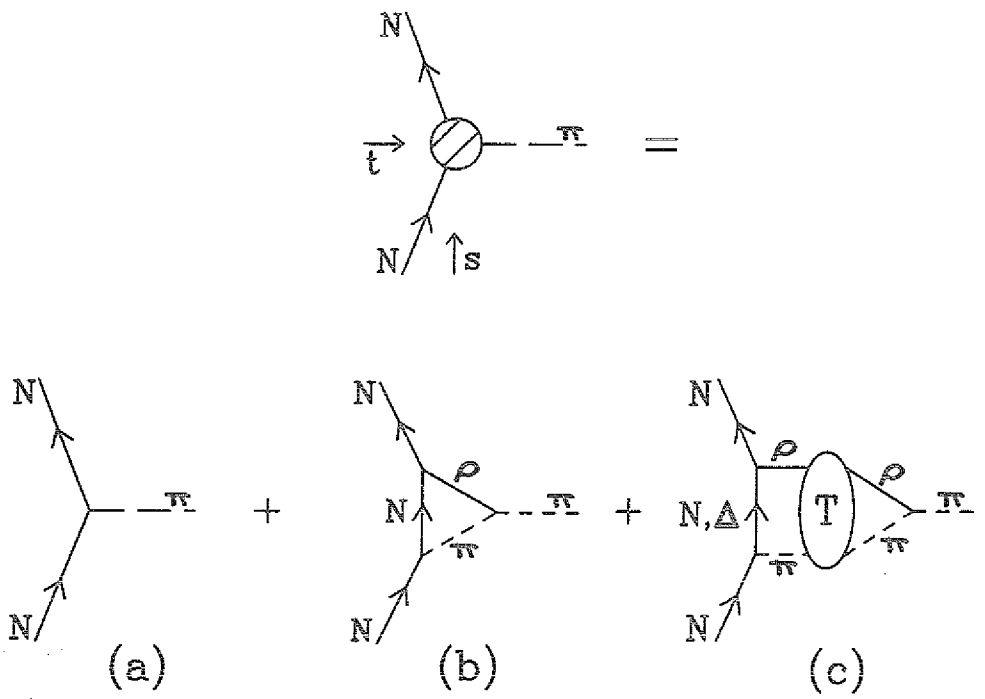



*Abb. 1.1: Mesonische Beiträge zum $\pi NN$–Formfaktor*

Als eine erste Anwendung der $\pi\rho$–Wechselwirkung berechnen wir daher in dieser Arbeit den $\pi NN$–Formfaktor unter Berücksichtigung aller in Abb. 1.1 aufgeführten Prozesse. Unsere Ergebnisse zeigen, daß sich ein weicherer $\pi NN$–Formfaktor

durchaus im Mesonaustauschbild verstehen läßt und daß der Graph in Abb. 1.1 c) eine nicht vernachlässigbare Rolle spielt. Eine Cut-Off-Masse $\Lambda_{\pi NN} \leq 1.2$ GeV führt allerdings im Bonn-Potential zu einer deutlichen Abschwächung der Tensorkraft und zerstört damit die Reproduktion der Deuteron-Daten. Dieser Effekt läßt sich zwar durch eine Veränderung anderer Parameter (etwa einer Reduktion des $\rho$–Austauschs) wieder beheben, jedoch lassen sich dann die NN–Streuphasen nicht mehr reproduzieren. Es müssen daher bisher nicht betrachtete Graphen in das Modell aufgenommen werden, neben Quark-Gluon-Mechanismen kommt hier vor allem ein korrelierter $\pi\rho$-Austausch in Betracht (Abb. 1.2 c)). Dieser könnte im $\pi$–Kanal wie ein schweres $\pi$ wirken und so die Abschwächung der Tensorkraft aufheben.

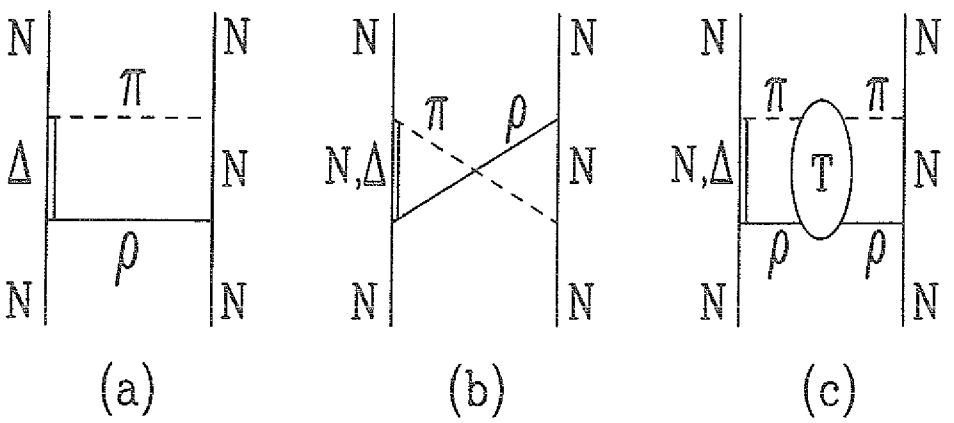



*Abb. 1.2: $\pi\rho$–Beiträge zum NN-Potential*

Darüber hinaus entspricht ein solches Vorgehen der im Bonn-Potential verfolgten Strategie, $\pi\pi$– und $\pi\rho$–Prozesse wegen ihrer entgegengesetzten Wirkung im Tensorkanal stets in der gleichen Weise in das Modell aufzunehmen. Während das Bonn-Potential den korrelierten $\pi\pi$–Austausch bereits in Form eines effektiven $\sigma'$–Mesons enthält, ist der in Abb. 1.2 c) gezeigte entsprechende $\pi\rho$–Prozeß bisher nicht berücksichtigt.

Diese Arbeit ist wie folgt gegliedert:

Im folgenden zweiten Kapitel wird das Modell der $\pi\rho$–Wechselwirkung im Mesonaustauschbild entwickelt. Zunächst behandeln wir dabei diese Wechselwirkung als reines Zweiteilchenproblem, d.h. wir betrachten das $\rho$–Meson als stabiles ('zero-width') Teilchen. Anschließend nehmen wir in Kap. 3 den Zerfall des $\rho$ in das Modell auf, leiten die aus der Dreiteilchendynamik resultierende Streugleichung ab und berechnen ihre Lösungen. In Kap. 4 erläutern wir zunächst allgemein das Konzept der Formfaktoren. Anschließend berechnen wir die in Abb. 1.1 gezeigten Beiträge zum $\pi NN$–Formfaktor. In Kap. 5 wird die Renormierung der Polgraphen behandelt. Im sechsten Kapitel stellen wir einige unserer Resultate vor und diskutieren ihre physikalische Bedeutung. Im siebten Kapitel schließlich geben wir einen Ausblick auf mögliche Entwicklungen, vor allem auf weitere Anwendungen der $\pi\rho$–Wechselwirkung.

# 2. Die $\pi\rho$-Wechselwirkung

## 2.1. Grundlagen des Modells

Im folgenden geben wir eine kurze Übersicht über die grundlegenden Aspekte unseres Modells. Die detaillierte Ausführung der einzelnen Schritte erfolgt dann in den anschließenden Abschnitten dieses Kapitels.

Grundlage der Wechselwirkung ist ein relativistischer Hamilton-Operator

$$H = H_0 + W \quad . \tag{2.1}$$

$H_0$ ist dabei der freie Hamiltonoperator, der die kinetischen Energien der beteiligten Teilchen berücksichtigt. Der Wechselwirkungsoperator W enthält die Vertexfunktionen, die die Kopplung der einzelnen Hadronen beschreiben; in unserem Fall besteht W nur aus Drei-Meson-Vertizes. Dieser Wechselwirkungsoperator wird aus Lagrangedichten bestimmt, die eine effektive Parametrisierung der fundamentalen Quark-Gluon-Kopplungen darstellen.

Die Dynamik des relativistischen Streuproblems ist im Zweiteilchenfall durch die *Bethe-Salpeter-Gleichung* [22] gegeben

$$T = K + \int d^4k \; KGT \quad . \tag{2.2}$$

Dabei ist $G$ der relativistische Zweiteilchenpropagator und $T$ die sog. Übergangsmatrix, aus der sich dann Größen wie Wirkungsquerschnitte oder Streuphasen ableiten lassen. Der Integralkern $K$ umfaßt alle irreduziblen Prozesse beliebiger Ordnung, die reduziblen Graphen werden durch die Iteration in der Streugleichung erzeugt.

Da die Lösung der Bethe-Salpeter-Gleichung in der Praxis sehr kompliziert ist, ist es sinnvoll, geeignete Näherungen durchzuführen. Zum einen kann man durch die Wahl einer Näherung für $G$ die vierdimensionale Bethe-Salpeter-Gleichung in eine dreidimensionale Streugleichung überführen, die sich relativ leicht numerisch lösen läßt. Zum anderen ist es notwendig, den Integralkern durch eine Beschränkung auf die wichtigsten Prozesse so zu reduzieren, daß er berechenbar wird. Dies sind die Graphen niedriger Ordnung, da mit steigender Ordnung der Abstand der Streupartner abnimmt, und man die Gültigkeitsgrenze des Mesonaustauschbildes erreicht.

Aus dem gleichen Grund beschränkt man sich bei den Austauschteilchen auf die leichteren Mesonen.

Die Streugleichung lautet dann:

$$T = V + \int d^3k \; V\tilde{G}T \qquad . \tag{2.3}$$

Der Propagator $\tilde{G}$ und das *Pseudopotential* $V$ ergeben sich aus der beschriebenen Reduktion der Bethe-Salpeter-Gleichung. Diese Reduktion ist allerdings nicht eindeutig, wir werden in dieser Arbeit die von Blankenbecler und Sugar (BbS) [23] beschriebene Methode verwenden.

Die Dynamik eines Dreiteilchensystems ist durch die Faddeev-Gleichungen gegeben [12], ein kompliziertes System gekoppelter Gleichungen auf der Basis der Zweiteilchen-Wechselwirkungen. Durch die Annahme, daß jeweils zwei der drei Teilchen einen gebundenen Zustand oder eine Resonanz bilden, läßt sich wie bereits erwähnt jedoch eine effektive Zweiteilchen-Gleichung ableiten, die sich relativ einfach lösen läßt, aber dennoch die wesenlichen Aspekte des Dreiteilchensystems wiedergibt [13]. Dies ist in Kap. 3 ausgeführt.

Wir werden alle Rechnungen in der Isospinbasis durchführen, da die Matrixelemente der starken Wechselwirkung in dieser Basis diagonal sind.

Durch die Forderung nach Erhaltung bestimmter Größen in der starken Wechselwirkung ergeben sich Auswahlregeln, die die Zahl der möglichen Vertizes einschränken. Im Abb. 2.1 geben wir die Graphen an, die diesen Auswahlregeln genügen und für die $\pi\rho$–Wechselwirkung relevant sind. Zusammen bauen sie das Pseudopotential auf. Die Graphen in Abb. 2.1 a), c) und d) werden häufig als Austauschgraphen bezeichnet, die in Abb. 2.1 b) und e) als Polgraphen. Eine andere Art der Klassifizierung wird in Abschnitt (2.3.1) gegeben. Dort wird auch erläutert, daß das Pseudopotential in Abb. 2.1 die sog. 'Crossing-Symmetrie' verletzt, da zwei nach den obigen Kriterien mögliche Graphen hier nicht aufgeführt sind, der $\pi$–Polgraph und der $A_1$–Austauschgraph. Für unsere Zwecke ist dies jedoch nur von untergeordneter Bedeutung. Die Pion-Masse liegt weit unterhalb der $\pi\rho$–Schwelle, so daß der $\pi$–Polgraph zur elastischen $\pi\rho$–Streuung keinen wesentlichen Beitrag liefert. Bei der Berechnung des $\pi NN$–Formfaktors müßte dieser Graph sogar explizit ausgeschlossen werden (s.Kap. 4). Der $A_1$-Austausch liefert aufgrund der großen Masse des $A_1$ (1260 MeV) einen sehr kurzreichweitigen Beitrag und wird daher vernachlässigt.

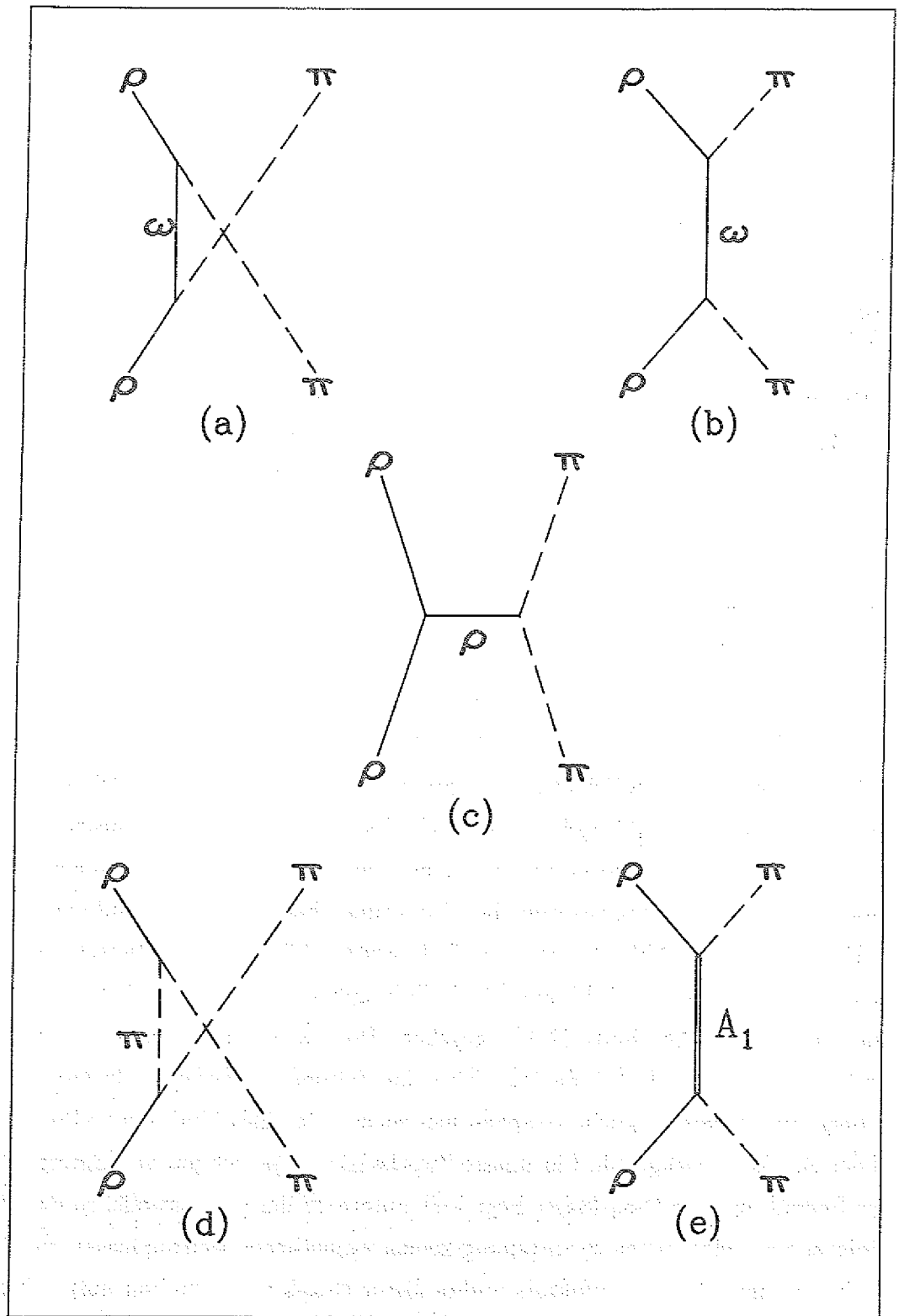



*Abb. 2.1: Beiträge zum Pseudopotential der $\pi\rho$–Wechselwirkung*

## 2.2. Lagrangedichten und Kopplungskonstanten

Die Lagrangedichten beschreiben die Wechselwirkung der einzelnen Teilchen an den Vertizes und bilden damit die physikalische Basis für unser Modell.

Wir verwenden effektive Lagrangedichten, die die Wechselwirkung auf Hadronebene wiedergeben, Quark-Gluon-Freiheitsgrade werden nicht explizit berücksichtigt. Da es noch nicht gelungen ist, solche effektiven Lagrangedichten aus den entsprechenden fundamentalen QCD-Lagrangedichten im strengen Sinne abzuleiten, stellen erstere zunächst einen Ansatz für die Struktur der Wechselwirkung dar. Dieser Ansatz unterliegt jedoch gewissen Symmetrieanforderungen und ist daher keineswegs willkürlich. Außerdem erlaubt die Anwendung von Symmetrieprinzipien, die Lagrangedichten verschiedener Vertizes zueinander in Beziehung zu setzen.

Aus der Lagrangedichte bestimmen wir den Wechselwirkungsanteil des Hamiltonoperators H durch folgende Beziehung:

$$W = -\int d^3x \mathcal{L}\Big|_{t=0} \quad . \tag{2.4}$$

Ein Teil der vollständigen Legendretransformation wird in unserem Modell also vernachlässigt. Aus der obigen Gleichung ergibt sich die Forderung nach Hermitezität für $\mathcal{L}$, da H hermitesch sein muß .

Neben weiteren Symmetrieeigenschaften von $\mathcal{L}$, wie etwa Lorentzinvarianz oder Invarianz der Wechselwirkung unter Zeitumkehr, ist insbesondere die Symmetrie unter chiralen Transformationen von großer Bedeutung.

Unter der chiralen Transformation versteht man die globale Eichtransformation

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i\gamma_5(\vec{\alpha}\vec{\tau}/2)}\psi(x) \quad ,$$

wobei $\psi(x)$ ein Fermionenfeld darstellt. Zusammen mit der bekannten Rotation im Isospinraum

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i(\vec{\alpha}\vec{\tau}/2)}\psi(x)$$

entsteht die Transformationsgruppe $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Die starke Wechselwirkung ist im Limes verschwindender Pionmassen invariant unter dieser Transformation, die Symmetrie wird jedoch auch für $m_\pi \neq 0$ nur schwach explizit gebrochen (PCAC)

[24]. Die von uns verwendeten Lagrangedichten sollten daher ebenfalls diese Symmetrie aufweisen. Ein Modell, das auf einer chiral invarianten Lagrangedichte basiert, ist das sog. nichtlineare $\sigma$-Modell, das zunächst nur Nukleonen und Pionen enthält. Diese Lagrangedichte läßt sich als effektive Beschreibung der QCD mit Hilfe mesonischer Freiheitsgrade auffassen, wie sich durch Betrachtung der QCD im Limes vieler Farben zeigen läßt [25, 24]. Durch Erweiterung von globalen auf lokale $SU(2)_L \times SU(2)_R$–Transformationen erhält man eine Lagrangedichte, die auch Vektor- und Axialvektormesonen einbezieht. Das $\rho$–Meson erscheint in diesem Rahmen als Eichboson der Vektortransformation [26, 27, 28] und das $A_1$–Meson als Eichboson der axialen Transformation [26, 29, 28]. Da die lokale chirale Symmetrie in der Natur stark explizit gebrochen ist, ist auch der resultierende Lagrangian nicht mehr invariant unter der vollständigen Transformationsgruppe.

Auf diese Weise erhält man für den $\pi\pi\rho$–Vertex [26]:

$$\mathcal{L}_{\pi\pi\rho} = g\ (\vec{\pi} \times \partial_\mu \vec{\pi})\ \vec{\rho}^{\mu} \qquad . \tag{2.5}$$

Hier wie auch im folgenden bezeichnen die mit einem Vektorpfeil versehenen Größen Vektoren im Isospinraum.

Für den $A_1\pi\rho$–Vertex ergeben sich zwei mögliche Kopplungen [26],

$$\mathcal{L}_{A_1\pi\rho} = g\ m_{A_1}\ (\vec{\pi} \times \vec{A}_\mu)\ \vec{\rho}^{\mu} \tag{2.6}$$

und

$$\mathcal{L}_{A_1\pi\rho} = \frac{g}{2m_{A_1}}\ (\partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu)\ [\vec{\pi}\ \times\ (\partial^\mu \vec{A}^\nu - \partial^\nu \vec{A}^\mu)] \qquad . \tag{2.7}$$

Dabei wurde die aus dem Vektordominanzmodell folgende Beziehung $m_{A_1}^2 = 2m_\rho^2$ benutzt [30].

Da die $SU(2)_V$ eine nichtabelsche Gruppe ist, können die $\rho$–Mesonen als Eichbosonen dieser Gruppe auch untereinander wechselwirken. Diese Selbstwechselwirkung ist in dem kinetischen Term der Gesamtlagrangedichte [24]

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\vec{F}^{\mu\nu}$$

mit

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu + g(\vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu)$$

enthalten, der für uns relevante $3\rho$–Vertex ergibt sich daraus zu

$$\mathcal{L}_{\rho\rho\rho} = -\frac{1}{2} g(\partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu)\ (\vec{\rho}^{\,\mu} \times \vec{\rho}^{\,\nu}) \qquad . \tag{2.8}$$

Das $\omega$–Meson ist in dem oben beschriebenen Formalismus nicht enthalten. Es ist jedoch möglich, die für $SU(2)$–Transformationen erhaltenen Ergebnisse auf die Gruppe $U(3)$ zu erweitern und so das $\omega$–Meson einzubeziehen [28, 31]. Man erhält für den $\omega\pi\rho$–Vertex

$$\mathcal{L}_{\omega\pi\rho} = g_{\omega\pi\rho}\ \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \partial_\mu \omega_\nu \partial_\sigma \vec{\rho}_\tau\, \vec{\pi} \qquad . \tag{2.9}$$

Damit sind alle für die $\pi\rho$–Wechselwirkung benötigten Lagrangedichten festgelegt.

Ein wichtiger Vorteil des hier benutzten Verfahrens besteht in der Festlegung der Kopplungskonstanten. Die oben verwendete Kopplungskonstante g ist dieselbe in $\mathcal{L}_{\pi\pi\rho}$, $\mathcal{L}_{\rho\rho\rho}$ und $\mathcal{L}_{A_1\pi\rho}$, es gilt $g = g_{\pi\pi\rho}$ ($\rho$–Universalität). Dies gilt in Analogie zur Universalität der elektromagnetischen Kopplungskonstante $e$. Die Gültigkeit dieser Aussage wurde im Rahmen der Unsicherheiten des Vektordominanzmodells gut bestätigt. Der Wert für g läßt sich aus dem Zerfall des $\rho$–Mesons in zwei Pionen bestimmen [10].

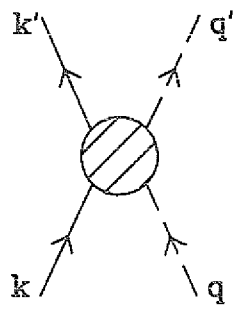
Da für die Einbindung des $\omega$–Mesons eine Erweiterung des SU(2)–Modells erforderlich ist, steht die Kopplungskonstante $g_{\omega\pi\rho}$ nicht in direkter Relation zu g. Aussagen über $g_{\omega\pi\rho}$ lassen sich aus theoretischen und experimentellen Untersuchungen gewinnen. Fujiwara [31] erhält aus feldtheoretischen Überlegungen $g^2_{\omega\pi\rho} = \left(\frac{3g^2}{8\pi^2 f_\pi}\right)^2$ ($f_\pi \simeq 93 MeV$ ist die schwache Pion-Zerfallskonstante), Durso [32] berechnet $g_{\omega\pi\rho}$ aus Zerfällen der Art $\omega \to \pi\rho \to \pi\gamma$.

Die von uns verwendeten Kopplungskonstanten sind im Anhang angegeben.

## 2.3. Die Berechnung des Pseudopotentials

### 2.3.1. Reaktionskinematik

Für die Beschreibung von Streuprozessen sind die sogenannten Mandelstam-Variablen wie folgt definiert:




$q, q'$ : *Viererimpulse der Pionen*
$k, k'$ : *Viererimpulse der $\rho$–Mesonen*

$$\begin{aligned} s &= (k+q)^2 = (k'+q')^2 \\ t &= (k-k')^2 = (q'-q)^2 \\ u &= (k-q')^2 = (q-k')^2 \quad . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Von diesen sind nur zwei linear unabhängig, es gilt:

$$s + t + u = 2m_\pi^2 + 2m_\rho^2 \quad .$$

Ein Reaktionskanal wird durch die Mandelstam-Variable gekennzeichnet, deren Wert dem Quadrat der totalen CMS-Energie entspricht. Wir werden uns stets mit der s-Kanal $\pi\rho$–Streuung beschäftigen.

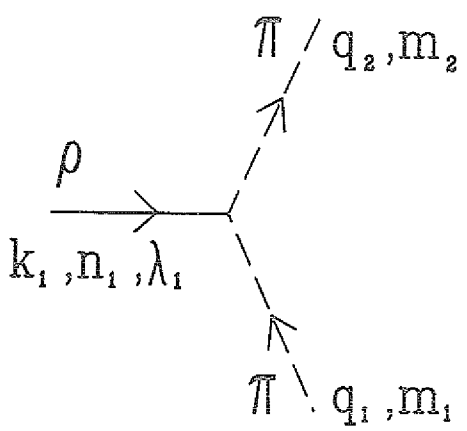
Häufig werden auch die einzelnen Graphen des Pseudopotentials mit Hilfe der Mandelstam-Variablen klassifiziert, Vergleichsgröße ist dann das Viererimpulsquadrat des ausgetauschten Mesons. Der $\rho$-Austausch gehört nach dieser Definition zum t-Kanal, $\omega$– und $\pi$–Austausch zum u-Kanal und die Polgraphen zum s-Kanal. Durch Austausch von s und u geht der $\omega$–Polgraph (s-Kanal-Pol) in

den $\omega$–Austauschgraphen (u-Kanal-Pol) über. Dies bezeichnet man als 'Crossing-Symmetrie'. Wie bereits erwähnt, ist unser vollständiges Pseudopotential nicht invariant unter dieser Transformation, da der $A_1$-u-Kanal-Pol und der $\pi$-s-Kanal-Pol fehlen. Für unsere Zwecke ist dies jedoch nicht von großer Bedeutung, Gründe dafür wurden bereits genannt. Erwähnenswert ist in diesem Zusammenhang auch, daß die Iteration des Pseudopotentials die Crossing-Symmetrie in jedem Fall zerstört.

### 2.3.2. Die Berechnung der invarianten Matrixelemente

Zur Berechnung der invarianten Matrixelemente benötigen wir die Vertexfunktionen für die einzelnen Prozesse des Pseudopotentials. Diese leiten wir unter Benutzung der üblichen Feynmanregeln [33] aus den in Abschnitt (2.2) angegebenen Lagrangedichten her.

Wir fassen zunächst die für uns relevanten Feynmanregeln am Beispiel des $\pi\pi\rho$–Vertex zusammen.




$$\mathcal{L}_{\pi\pi\rho} = g\ (\vec{\pi} \times \partial^\mu \vec{\pi})\ \vec{\rho}_\mu$$

$k_1, q_1, q_2$ : *Viererimpulse der beteiligten Mesonen*
$n_1, m_1, m_2$ : *Isospin–Indizes der beteiligten Mesonen*
$\lambda_1$ : *Helizität des $\rho$–Mesons*

Damit ergibt sich folgende Vertexfunktion $f$:

$$f = -g\Big\{\phi_{m_1} \times (iq_2^\mu)\,\phi^*_{m_2} \ + \ \phi^*_{m_2} \times (-iq_1^\mu)\,\phi_{m_1}\Big\}\,\epsilon_\mu(\vec{k}_1, \lambda_1)\,\phi_{n_1}$$

Allgemein ist folgendes zu beachten:

- Die Vertexfunktion muß symmetrisch unter Austausch gleicher Teilchen sein (hier die Pionen). Dies ist insbesondere für den $3\rho$–Vertex von Bedeutung.
- Ein '$\partial_\mu$' in der Lagrangedichte führt auf '$-iq_\mu$' für einlaufende und auf '$iq_\mu$' für auslaufende Teilchen.
- Vektormesonen liefern zusätzlich den Polarisationsvektor $\epsilon_\mu(\vec{k},\lambda)$ (einlaufend) bzw. $\epsilon_\mu(\vec{k},\lambda)^*$ (auslaufend). Genaueres hierzu wird in Anhang A erläutert.
- $\phi_{0,\pm1}$ steht für Vektoren im Isospinraum, die die Wellenfunktion eines Isospin-1-Teilchens repräsentieren ($\phi^\pi = \phi^\rho \equiv \phi$). Die Bedeutung dieser Isospinwellenfunktionen und die Berechnung von Isospinfaktoren wird im folgenden Abschnitt behandelt. Zur Vermeidung von Vorzeichenfehlern ist es wichtig, Isospin- und Spin-Impuls-Anteil zunächst wie im obigen Beispiel zusammen zu betrachten. Danach ist es möglich, die beiden Anteile zu separieren.
- Aus (2.4) ergibt sich der Faktor (-1) vor $f$.

Man erhält so:

$$f = -ig \underbrace{[\phi_{m_1} \times \phi^*_{m_2}]\,\phi_{n_1}}_{Isospin} \underbrace{(q_2+q_1)_\mu\,\epsilon^\mu(\vec{k}_1,\lambda_1)}_{Spin-Impuls} \quad . \tag{2.11}$$

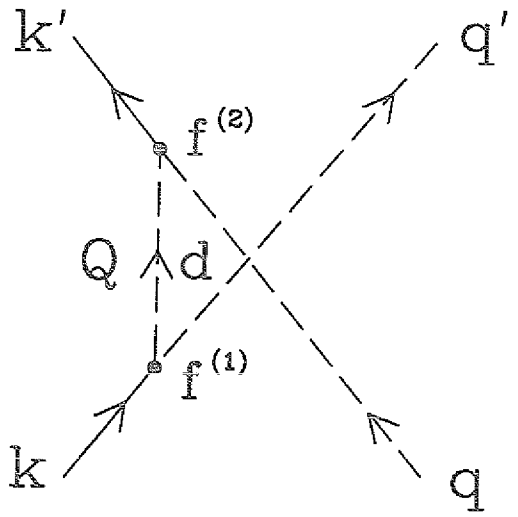
Das invariante Matrixelement für einen bestimmten Prozeß (als Beispiel ist in Abb. 2.2 der Pion-Austausch dargestellt) ergibt sich dann aus den Vertexfunktionen $f^{(1)}, f^{(2)}$ und aus dem Propagator $d$ des ausgetauschten Mesons.

Für $d$ gilt:

$$d = \frac{1}{Q^2 - m^2 + i\epsilon} \quad ,$$

wobei $Q$ den Viererimpuls und $m$ die Masse des ausgetauschten Mesons bezeichnen. Der Summand '$+i\epsilon$' wird im folgenden häufig nicht explizit mitgeschrieben. Die konkrete Form von $d$ ergibt sich durch Einsetzen des Viererimpulses $Q$, dies ist in Anhang B.3 für die einzelnen Graphen des Pseudopotentials ausgeführt.

Jede Vertexfunktion wird zusätzlich noch mit einem Formfaktor $F(Q^2)$ versehen, um die Ausdehnung der beteiligten Teilchen zu berücksichtigen. Das Konzept der Formfaktoren wird in Kap. 4 ausführlich erläutert.




$$M = f^{(2)}\, d\, f^{(1)}$$

*Abb. 2.2: Feynman-Graph für den Pion-Austausch*

Schließlich sei bereits an dieser Stelle auf eine Besonderheit der Polgraphen hingewiesen. Durch die Iteration des Pseudopotentials werden die Kopplungskonstante und die Masse im Propagator des ausgetauschten Teilchens renormiert, erst dadurch erhalten sie ihre physikalischen Werte. Im Potential werden daher die nichtrenormierten oder 'nackten' Größen verwendet, die durch einen Index $_0$ gekennzeichnet sind. Die Renormierung wird in Kap. 5 besprochen.

Die Berechnung der invarianten Matrixelemente für alle von uns betrachteten Prozesse ist im Anhang ausgeführt, wir geben hier nur die Ergebnisse an.

$$\begin{aligned}
d &\equiv \text{Propagator des Austauschteilchens} \\
\epsilon &\equiv \epsilon^{\mu}(\vec{k}, \lambda) \\
\epsilon^* &\equiv \epsilon^{\mu}(\vec{k}', \lambda')^* \\
M &\equiv \langle \lambda' \; \vec{k}'\vec{q}' \; TT_z \,|\, M \,|\, \lambda \; \vec{k}\vec{q} \; TT_z \rangle \\
&= \langle TT_z \,|\, M^{Iso} \,|\, TT_z \rangle \; \langle \lambda' \; \vec{k}'\vec{q}' \,|\, M^{Spin-Imp.} \,|\, \lambda \; \vec{k}\vec{q} \rangle \\
&\equiv I \; \langle \lambda' \; \vec{k}'\vec{q}' \,|\, M^{Spin-Imp.} \,|\, \lambda \; \vec{k}\vec{q} \rangle
\end{aligned}$$

$T, T_z$ : Gesamtisospin, s. Abschnitt (2.3.3)

Ein Punkt indiziert ein Viererprodukt .

(a) $\pi$–Austausch

$$M = -g^2 I d \ (2q - k') \cdot \epsilon^* \quad (2q' - k) \cdot \epsilon \tag{2.12}$$

(b) $\omega$–Austausch

$$\begin{aligned} M = g^2_{\omega\pi\rho} I d \ \{ & \ q \cdot q' \, [k \cdot k' \ \ \epsilon \cdot \epsilon^* \ - \ k' \cdot \epsilon \ \ k \cdot \epsilon^* \ ] \\ & + \ q \cdot k \ [k' \cdot \epsilon \ \ q' \cdot \epsilon^* \ - \ q' \cdot k' \ \ \epsilon \cdot \epsilon^* \ ] \\ & + \ q \cdot \epsilon \ [q' \cdot k' \ \ k \cdot \epsilon^* \ - \ k \cdot k' \ \ q' \cdot \epsilon^* ] \ \ \} \end{aligned} \tag{2.13}$$

(c) $\rho$–Austausch

$$\begin{aligned} M = g^2 I d \ \{ & \ (q + q') \cdot \epsilon \ \ [2k \cdot \epsilon^* \ - \ k' \cdot \epsilon^*] \\ & + \ (q + q') \cdot \epsilon^* \ [ \ 2k' \cdot \epsilon \ - \ k \cdot \epsilon \ ] \\ & - \ \epsilon \cdot \epsilon^* \ \ (q + q') \cdot (k + k') \qquad \} \end{aligned} \tag{2.14}$$

(d) $\omega$–Polgraph

$$\begin{aligned} M = g^2_{0_{\omega\pi\rho}} I d_0 \ s \ \{ & \ [k \cdot k' \ \ \epsilon \cdot \epsilon^* \ - \ k' \cdot \epsilon \ \ k \cdot \epsilon^*] \\ & + \ k_0 \ [\epsilon_0^* \ k' \cdot \epsilon \ - \ k_0' \ \epsilon \cdot \epsilon^*] \\ & + \ \epsilon_0 \ [k_0' \ k \cdot \epsilon^* \ - \ \epsilon_0^* \ k \cdot k'] \qquad \} \end{aligned} \tag{2.15}$$

(e) $A_1$–Polgraph , Gradientenkopplung (2.7)

$$\begin{aligned} M = \frac{g_0^2}{m_{A_1}^2} I d_0 \ s \ \{ & \ k_0' \ [\epsilon_0 \ k \cdot \epsilon^* \ - \ k_0 \ \epsilon \cdot \epsilon^*] \\ & + \ \epsilon_0^* \ [k_0 \ k' \cdot \epsilon \ - \ \epsilon_0 \ k \cdot k' ] \ \ \} \end{aligned} \tag{2.16}$$

(f) $A_1$–Polgraph , skalare Kopplung (2.6)

$$M = g_0^2 I d_0 \ \{(s - m_{A_1}^2) \epsilon_0 \epsilon_0^* + m_{A_1}^2 \vec{\epsilon} \vec{\epsilon}^* \} \tag{2.17}$$

### 2.3.3. Der Isospinanteil der Matrixelemente

Der Isospinanteil der Wechselwirkung ergibt sich aus der Verknüpfung der Isospinwellenfunktionen der beteiligten Teilchen an den Vertizes. Bisher haben wir nur Isospin-1- und Isospin-0-Teilchen betrachtet. Da wir in Kap. 4 jedoch auch Isospin-$\frac{1}{2}$-Teilchen benötigen, werden diese hier miteinbezogen.

Die Isospinwellenfunktionen ergeben sich für den Isospinoperator $\vec{T}$ als Eigenfunktionen zu $\vec{T}^2$ und $T_z$.

- Für Isospin-1-Teilchen erhält man die Eigenzustände $|1\ \ 0\rangle$ und $|1\ \ \pm 1\rangle$ entsprechend den drei Ladungszuständen dieser Teilchen. Diese Eigenzustände lassen sich auch als Basisvektoren $\phi_{0,\pm 1}$ der sog. sphärischen Basis des Isospinraums auffassen, einer Darstellung, die für die Berechnung der Matrixelemente vorteilhaft ist. Für auslaufende Teilchen ist der entsprechende sphärische Vektor zu konjugieren.
- Für Isospin-$\frac{1}{2}$-Teilchen verwenden wir folgende Darstellung:

$$\chi_{\pm\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \text{ für einlaufende Teilchen}$$

$$\chi^{\dagger}_{\pm\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \text{ für auslaufende Teilchen} \quad .$$

Außerdem ist für Isospin-$\frac{1}{2}$-Teilchen zu beachten, daß Teilchen und Antiteilchen in verschiedenen Isospin-Multipletts liegen, daher müssen auch die Antiteilchen-Eigenzustände definiert werden [34]:

$$\bar{\chi}_l = (-1)^{\frac{1}{2}+l}\,\chi_{-l} \text{ für einlaufende Antiteilchen}$$
$$\bar{\chi}^{\dagger}_l = (-1)^{\frac{1}{2}+l}\,\chi^{\dagger}_{-l} \text{ für auslaufende Antiteilchen} \quad ;\text{wobei } l = \pm\frac{1}{2} \quad .$$

Es ist darauf zu achten, daß bei der Transformation eines Teilchenspinors in einen Antiteilchenspinor neben dem Isospin- auch der Spin-Anteil auf diese Weise transformiert wird. Die von uns verwendete Transformation, die auf Gl. ($A$.7) führt, erfüllt diese Forderung.

Aus der Lagrangedichte für den entsprechenden Vertex ergibt sich die Kopplung der so definierten Wellenfunktionen zur Isospinvertexfunktion, vgl. etwa Gl. (2.11).

Die folgenden Beziehungen ermöglichen es, diese Vertexfunktionen konkret auszurechnen [35, 34]:

$$\begin{aligned} \phi_q^* &= (-1)^q \, \phi_{-q} \\ \phi_q \phi_{q'} &= (-1)^q \, \delta_{q,-q'} \\ \phi_q \times \phi_q' &= \sum_{q''=\pm 1,0} i\sqrt{2} \; (1q\,1q' \,|1q'')\; \phi_{q''} \\ & \qquad q, q' = \pm 1, 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} \chi_l^\dagger \tau \phi_q \chi_{l'} &= \sqrt{3}\; (\tfrac{1}{2} l'\, 1q | \tfrac{1}{2} l) \\ \chi_l^\dagger \tau \phi_q^* \chi_{l'} &= \sqrt{3}\; (\tfrac{1}{2} l\, 1q | \tfrac{1}{2} l') \\ & \qquad q = \pm 1, 0;\; l, l' = \pm \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} \chi_l^\dagger \chi_{l'} &= \sqrt{2} (-1)^{l-\frac{1}{2}}\; (\tfrac{1}{2} l\, \tfrac{1}{2} - l' | 00) \\ \bar{\chi}_l^\dagger \chi_{l'} &= \sqrt{2}\; (\tfrac{1}{2} l\, \tfrac{1}{2} l' | 00) \\ & \qquad l, l' = \pm \frac{1}{2} \quad . \end{aligned} \tag{2.20}$$

Unter $\tau\phi_q$ bzw. $\tau\phi_q^*$ ist das Skalarprodukt zwischen dem Vektor $\tau$ und dem sphärischen Vektor $\phi_q$ bzw. $\phi_q^*$ zu verstehen.

Für Isospin-1-Teilchen entspricht die Transformation $\phi_q \rightarrow \phi_q^*$ der Transformation Teilchen $\rightarrow$ Antiteilchen. Nach Gl. (2.18) ergibt sich ein Phasenfaktor zwischen Teilchen und Antiteilchen, beispielsweise gilt $(\pi^+)^* = -\pi^-$. Der Vorteil dieser Konvention ist jedoch, daß es möglich wird, den Formalismus für sphärische Vektoren zu übernehmen (Gl. (2.18)), insbesondere die unten verwendete Gl. (2.21) gilt nur mit dieser Phasenkonvention.

Durch Multiplikation der beiden Vertexfunktionen eines Prozesses und Summation über den Isospin-Index des ausgetauschten Teilchens erhält man dann das Matrixelement $\langle\, 1n'\; 1m' \,|\, M^{Iso} \,|\, 1n\; 1m \,\rangle$ für den Isospinanteil der Wechselwirkung (Der

Propagator hat keine Isospinabhängigkeit.). Dieses Matrixelement ist zunächst in der Teilchenbasis gegeben, d.h. es hängt explizit von den Isospin-Indizes der Streuteilchen ab. Da die starke Wechselwirkung invariant unter Rotationen im Isospinraum ist, ist der Gesamtisospin $T$ eine Erhaltungsgröße. Es ist daher günstig, in einer Basis zu arbeiten, die aus Eigenvektoren zum Gesamtisospinoperator besteht. Mit Hilfe der folgenden Transformation erhält man das Isospinmatrixelement in dieser Basis:

$$\begin{aligned} I &\equiv \langle T\,T_z \,|\, M^{Iso} \,|\, T\,T_z \rangle \\ &= \sum_{n,m,n',m'} (1n\,1m\,|T\,T_z)(1n'\,1m'\,|T\,T_z)\,\langle 1n'\,1m' \,|\, M^{Iso} \,|\, 1n\,1m \rangle \quad . \end{aligned} \tag{2.21}$$

Obwohl die dritte Komponente $T_z$ hier noch explizit aufgeführt wurde, hängt $I$ aufgrund der oben erläuterten Symmetrie nicht mehr von $T_z$ ob, sondern nur noch von $T$.

Durch die Ausnutzung der Beziehungen (2.18–2.20) ergibt sich dann $I$ als Summe über Clebsch-Gordan-Koeffizienten, die sich leicht auswerten läßt. Einzelheiten sind in Anhang B.2 ausgeführt.

### 2.3.4. Die BBS–Streugleichung

Die Iteration des Pseudopotentials erfolgt in dieser Arbeit mit der von Blankenbecler und Sugar [23] angegebenen Streugleichung, die wie folgt lautet:

$$\begin{aligned} &\langle \lambda'\,\vec{k}' \,|\, T^T(s) \,|\, \lambda\,\vec{k} \rangle = \langle \lambda'\,\vec{k}' \,|\, V^T(s) \,|\, \lambda\,\vec{k} \rangle \\ &+ \sum_{\lambda''} \int d^3\vec{k}''\, \langle \lambda'\,\vec{k}' \,|\, V^T(s) \,|\, \lambda''\,\vec{k}'' \rangle \tilde{G}(s;\vec{k}'')\langle \lambda''\,\vec{k}'' \,|\, V^T(s) \,|\, \lambda\,\vec{k} \rangle \end{aligned} \tag{2.22}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{G}(s;\vec{k}'') &= \frac{\omega^\pi + \omega^\rho}{(2\pi)^3\, 2\,\omega^\pi\,\omega^\rho}\;\frac{1}{s\;-\;(\omega^\pi+\omega^\rho)^2} \\ \omega^{\pi(\rho)} &\equiv \omega^{\pi(\rho)}(\vec{k}'') \;\equiv\; \sqrt{\vec{k}''^2 + m^2_{\pi(\rho)}} \quad . \end{aligned} \tag{2.23}$$

Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, werden wir häufig die Argumente von V, T, etc. weglassen.

$\vec{k}$ bezeichnet den CMS-Impuls der gestreuten Teilchen im Anfangszustand ($\vec{k}'$ bzw. $\vec{k}''$ für den End- bzw. Zwischenzustand), s ist das Quadrat der CMS-Energie und der Index $^T$ bezeichnet den Isospinzustand. Wir rechnen stets im CMS, daher gilt $\vec{q} = -\vec{k}$ und $\vec{q}' = -\vec{k}'$, und Potential und T-Matrix hängen nur noch von $\vec{k}$ und $\vec{k}'$ ab. Da sich die Reduktion der Bethe-Salpeter-Gleichung durch Ausführung der Energieintegration ergibt, hängen T und V außerdem nicht mehr von der nullten Komponente der Viererimpulse der beteiligten Teilchen ab.

Die Ableitung von Gl. (2.22) aus der Bethe-Salpeter-Gleichung wird in Kap. 3 ausgeführt, da sich die dabei verwendeten Methoden in natürlicher Weise auf den Dreiteilchenfall verallgemeinern lassen.

Neben der Struktur der Streugleichung legt die Reduktion der Bethe-Salpeter-Gleichung auch das Off-Shell-Verhalten des Potentials fest, dieses ist in Anhang B.3 angegeben.

### 2.3.5. Helizitätsstruktur der Matrixelemente und Partialwellenzerlegung

Pseudopotential und T-Matrix in der Streugleichung (2.22) sind Funktionen der CMS-Dreierimpulse $\vec{k}$, $\vec{k}'$, der Helizitäten $\lambda$, $\lambda'$ sowie der Mandelstam-Variablen s. Für das weitere Vorgehen ist es zweckmäßig, die Streugleichung (2.22) nach Partialwellen zu entwickeln. Zum einen ist der Gesamtdrehimpuls $J$ für die starke Wechselwirkung eine Erhaltungsgröße, $V$ und $T$ sind daher in $J$ diagonal. Zum anderen überführt die Partialwellenzerlegung die dreidimensionale in eine eindimensionale Streugleichung, die sich dann relativ leicht numerisch lösen läßt.

Die Partialwellenentwicklung des Potentials (T-Matrix analog) lautet [36]:

$$\langle \lambda_1' \lambda_2' \, \vec{k}' \,|\, V^T(s) \,|\, \lambda_1 \lambda_2 \, \vec{k} \rangle \;=\; \frac{1}{4\pi} \sum_J (2J+1)\, d^J_{\lambda\lambda'}(\theta)\, \langle \lambda_1' \lambda_2' \, k' \,|\, V^{JT}(s) \,|\, \lambda_1 \lambda_2 \, k \rangle \;. \tag{2.24}$$

mit $\lambda := \lambda_1 - \lambda_2, \lambda' := \lambda_1' - \lambda_2'$ und den reduzierten Rotationsmatrizen $d^J_{\lambda\lambda'}(\theta)$. $k$ bzw. $k'$ in Gl. (2.24) stehen für $|\vec{k}|$ bzw. $|\vec{k}'|$. Ob diese Definition gemeint ist, oder $k$ bzw. $k'$ Viererimpulse bezeichnen, wird jeweils aus dem Kontext klar. Die Rotationsmatrizen besitzen folgende Symmetrieeigenschaften [37]:

$$d^J_{\lambda\lambda'}(\theta) \;=\; d^J_{-\lambda'-\lambda}(\theta) \;=\; (-1)^{\lambda-\lambda'}\, d^J_{\lambda'\lambda}(\theta) \quad . \tag{2.25}$$

Mit ihrer Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{+1} d(\cos\theta)\; d^J_{\lambda\lambda'}(\cos\theta)\; d^{J'}_{\lambda\lambda'}(\cos\theta) \;=\; \frac{2}{2J+1}\,\delta_{JJ'} \tag{2.26}$$

ergibt sich für die Umkehrung von Gl. (2.24) :

$$\langle\, \lambda'\, k' \,|\, V^{JT}(s) \,|\, \lambda\, k \,\rangle \;=\; 2\pi \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta)\; d^J_{\lambda\lambda'}(\cos\theta)\; \langle\, \lambda'\, \vec{k}' \,|\, V^T(s) \,|\, \lambda\, \vec{k} \,\rangle \tag{2.27}$$

Dabei wurde bereits benutzt:

$$\lambda_2 = \lambda_\pi = 0$$
$$\lambda_2' = \lambda_\pi' = 0 \quad .$$

Durch Einsetzen der Entwicklung in die Streugleichung erhält man schließlich für jedes $J$ und jedes $T$ die partialwellenzerlegte Streugleichung in der Helizitätsbasis:

$$\begin{aligned}\langle\, \lambda' k' \,|\, T^{JT}(s) \,|\, \lambda k \,\rangle =& \langle\, \lambda' k' \,|\, V^{JT}(s) \,|\, \lambda k \,\rangle \\ &+ \sum_{\lambda''} \int k''^2 dk'' \langle\, \lambda' k' \,|\, V^{JT}(s) \,|\, \lambda'' k'' \,\rangle \tilde{G}(s, k'') \langle\, \lambda'' k'' \,|\, T^{JT}(s) \,|\, \lambda k \,\rangle \quad .\end{aligned} \tag{2.28}$$

Durch eine orthogonale Transformation von der Helizitätsbasis in die $JLS$–Basis, erhält man die Streugleichung auch in dieser Darstellung:

$$V^{JTLS} \;=\; U\, V^{JT\lambda}\, U^T, UU^T = U^T U = 1, \tag{2.29}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}&\langle\, L'S'\; k' \,|\, T^{JT}(s) \,|\, LS\; k \,\rangle = \langle\, L'S'\; k' \,|\, V^{JT}(s) \,|\, LS\; k \,\rangle \\ &+ \sum_{L''S''} \int k''^2 dk'' \langle\, L'S'\, k' \,|\, V^{JT}(s) \,|\, L''S''\; k'' \,\rangle \tilde{G}(s, k'') \langle\, L''S''\; k'' \,|\, T^{JT}(s) \,|\, LS\, k \,\rangle \quad .\end{aligned} \tag{2.30}$$

Die Transformationsmatrix U ist gegeben durch [38]:

$$\begin{aligned}(JMLS|JM\lambda_1\lambda_2) &= \sqrt{\frac{2L+1}{2J+1}}\,(L0S\lambda|J\lambda)(S_1\lambda_1 S_2-\lambda_2|S\lambda) \\ &= \sqrt{\frac{2L+1}{2J+1}}\,(L01\lambda|J\lambda)\;(1\lambda00|1\lambda) \qquad .\end{aligned} \tag{2.31}$$

Das Potential hängt aufgrund der Rotationssymmetrie nicht von M ab, daher taucht M auf der rechten Seite von Gl. (2.31) nicht auf. Die konkrete Ausführung der Partialwellenzerlegung und der Transformation in die JLS-Basis ist in Anhang B.5 ausgeführt. Aus Gründen der Paritätserhaltung sind $\Delta L = \pm 1$–Übergänge nicht erlaubt. Dies hat zur Folge, daß man Gl. (2.30) in eine ungekoppelte Gleichung für $\langle\, L' = J\ 1\ k' \,|\, T^{JT}(s) \,|\, L = J\ 1\ k \,\rangle$ und in ein System gekoppelter Gleichungen für $\langle\, L' = J\pm 1\ 1\ k' \,|\, T^{JT}(s) \,|\, L = J\pm 1\ 1\ k \,\rangle$ aufteilen kann.

Zur Lösung von Gl. (2.30) benötigt man das Pseudopotential für alle Kombinationen von $\lambda$ und $\lambda'$. Prinzipiell sind daher neun Helizitätsamplituden entsprechend den Werten $\lambda, \lambda' = 0, \pm 1$ zu berechnen. Indem man die Erhaltung der Parität und die Invarianz der starken Wechselwirkung unter Zeitumkehr ausnutzt, läßt sich die Zahl der zu berechnenden Amplituden jedoch auf vier reduzieren.

Für die partialwellenzerlegten Potentiale gilt [39]:

$$\begin{aligned}&\text{Parität}: && \langle\, \lambda'\ k' \,|\, V^{JT}(s) \,|\, \lambda\ k \,\rangle = \langle\, -\lambda'\ k' \,|\, V^{JT}(s) \,|\, -\lambda\ k \,\rangle \\ &\text{Zeitumkehr}: && \langle\, \lambda'\ k' \,|\, V^{JT}(s) \,|\, \lambda\ k \,\rangle = \langle\, \lambda\ k \,|\, V^{JT}(s) \,|\, \lambda'\ k' \,\rangle\end{aligned} \tag{2.32}$$

Wir werden die folgenden Helizitätsamplituden berechnen:

$$\begin{aligned}&\langle\, +1\ k' \,|\, V^{JT}(s) \,|\, +1\ k \,\rangle \\ &\langle\, +1\ k' \,|\, V^{JT}(s) \,|\, -1\ k \,\rangle \\ &\langle\, \ \ 0\ k' \,|\, V^{JT}(s) \,|\, \ \ 0\ k \,\rangle \\ &\langle\, \ \ 0\ k' \,|\, V^{JT}(s) \,|\, +1\ k \,\rangle\end{aligned} \tag{2.33}$$

Mit Hilfe der in Tab. $B.1$ und in den Gln. $(B.10)$ angegebenen Terme lassen sich die Matrixelemente der Gln. (2.12–2.17) für die vier Kombinationen von $\lambda'$ und $\lambda$ und damit für alle Helizitätskombinationen ausrechnen.

Die Lösung von Gl. (2.30) wird mit Hilfe des von Tabakin und Haftel [40] vorgeschlagenen Matrixinversionsverfahrens numerisch berechnet. Eine ausführliche Darstellung dieses Vorgehens ist bei A. Müller-Groeling [9] zu finden.

# 3. Der $3\pi$–Kanal

## 3.1. Allgemeines

Die Behandlung der $\pi\rho$–Wechselwirkung wird dadurch erschwert, daß es sich nicht um die Streuung zweier stabiler Teilchen handelt. Das $\rho$–Meson ($m_\rho = 768MeV$) zerfällt mit einer nicht vernachlässigbaren Zerfallsbreite ($\Gamma_\rho = 150MeV$) in zwei Pionen. Das von uns betrachtete $\pi\rho$–System geht durch diesen Zerfall in ein System aus drei Pionen über. Wir geben daher zunächst einen Überblick über die allgemeine Theorie solcher Dreiteilchensysteme. Anschließend erfolgt dann die Anwendung auf die $\pi\rho$–Wechselwirkung.

## 3.2. Dreiteilchensysteme und die Faddeev-Gleichungen

In diesem Abschnitt werden wir uns zunächst auf ein nichtrelativistisches System beschränken, da sich die wesentlichen Punkte des Dreiteilchenformalismus daran bereits ablesen lassen.

Gegeben sei ein System von drei Teilchen mit Massen $m_1$, $m_2$, $m_3$ und Impulsen $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$.

Alle Rechnungen werden im Dreiteilchen-CMS ausgeführt, d.h. es gilt:

$$\sum_j \vec{p}_j = \vec{0} \quad .$$

Zur Charakterisierung des Systems genügen daher zwei Impulse, eine günstige Wahl ist $\vec{p}_i$, $\vec{q}_i$, wobei $\vec{q}_i$ der relative Impuls der Teilchen $j$ und $k$ ist:

$$\vec{q}_i = (m_k\vec{p}_j - m_j\vec{p}_k)/(m_j + m_k) \quad .$$

Man hat also drei äquivalente Sätze ($\vec{p}_i$, $\vec{q}_i$), die das System beschreiben.

Der freie Hamiltonoperator $H_0$ läßt sich dann wie folgt schreiben:

$$H_0 = \frac{p_i^2}{2\mu_i} + \frac{q_i^2}{2\mu_{jk}} \tag{3.1}$$

$\mu_{jk}$ ist die reduzierte Masse der Teilchen $j$ und $k$, $\mu_i$ die reduzierte Masse des Teilchens $i$ und des Paares $(jk)$:

$$\begin{aligned} \mu_i &= \frac{m_i\,(m_j + m_k)}{m_i + m_j + m_k} \\ \mu_{jk} &= \frac{m_j m_k}{m_j + m_k} \quad . \end{aligned}$$

Für den Wechselwirkungsanteil von $H$ wird die Annahme gemacht, daß stets nur zwei Teilchen gleichzeitig miteinander wechselwirken, die Wechselwirkung also durch Zweiteilchenpotentiale vermittelt wird.

$$H = H_0 + V = H_0 + \sum_{i=1}^{3} V_i \tag{3.2}$$

$$H_i \equiv H_0 + V_i \quad .$$

Dabei wurde die Wechselwirkung zwischen den Teilchen $j$ und $k$ durch den Index des nichtwechselwirkenden Teilchens $i$ gekennzeichnet.

$V_i$ und $H_i$ bezeichnen zwar die Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen, sind aber dennoch Dreiteilchenoperatoren, beispielsweise gilt für das Matrixelement von $V_i$ im Impulsraum:

$$\langle \vec{p}_i{}'\,\vec{q}_i{}' \,|\, V_i \,|\, \vec{p}_i\,\vec{q}_i \rangle = \delta(\vec{p}_i - \vec{p}_i{}')\ \underbrace{\langle \vec{q}_i{}' \,|\, V_i \,|\, \vec{q}_i \rangle}_{\text{Zweiteilchen} - \text{Potential}} \quad .$$

Für den Propagator des Dreiteilchensystems gilt:

$$G = \frac{1}{Z - H} \quad ; \quad G_0 = \frac{1}{Z - H_0} \quad , \tag{3.3}$$

wobei $Z$ die Startenergie des Dreiteilchensystems ist. Ähnlich wie $V_i$ läßt sich auch ein $G_i$ definieren:

$$G_i = \frac{1}{Z - H_i} \quad .$$

Die Dynamik des von uns betrachteten nichtrelativistischen Systems wird durch die Lippmann-Schwinger-Gleichung (LSG) gegeben, es gilt [12]:

$$G(Z) = G_0(Z) + G_0(Z) V G(Z) \tag{3.4}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= V + VG_0\mathcal{T} \\ &= V + \mathcal{T}G_0V \\ &= V + VGV \quad . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dabei ist $\mathcal{T}$ die volle Dreiteilchen-T-Matrix. Ersetzt man in dieser Gleichung das volle Potential $V$ durch ein $V_i$, so erhält man die LSG für die Zweiteilchen-T-Matrix $T_i$, jedoch eingebettet in den Dreiteilchenraum.

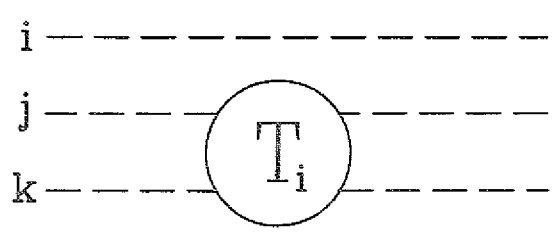
$$\begin{aligned} T_i &= V_i + V_iG_0T_i \\ &= V_i + T_iG_0V_i \quad . \end{aligned} \tag{3.6}$$

In der Impulsraumdarstellung läßt sich leicht zeigen, daß diese Gleichung durch

$$\langle \vec{p}_i{}' \vec{q}_i{}' \,|\, T_i(Z) \,|\, \vec{p}_i \vec{q}_i \rangle = \delta(\vec{p}_i - \vec{p}_i{}') \, \langle \vec{q}_i{}' \,|\, T_i(Z - \frac{p_i^2}{2\mu_i}) \,|\, \vec{q}_i \rangle \tag{3.7}$$

gelöst wird, wobei auf der rechten Seite die reine Zweiteilchen-T-Matrix steht.

Bei der Lösung des Dreiteilchenproblems mit Hilfe der LSG Gl. (3.5) stößt man jedoch auf Probleme. Wie in [13] und [12] erläutert wird, ist der Integralkern $K = G_0V$ der LSG nicht quadratintegrabel, außerdem ist die Lösung nicht eindeutig. Ursache dieser Schwierigkeiten ist das Auftreten nichtverbundener Graphen in der Reihenentwicklung der Streuamplitude:




Faddeev [41] zeigte, daß sich die LSG in ein System gekoppelter Gleichungen transformieren läßt, und daß sich die genannten Schwierigkeiten auf diese Weise beheben lassen. Ausgehend von der LSG Gl. (3.5) definiert man folgende Operatoren:

$$\mathcal{T}^{(i)} = V_i + V_iG_0\mathcal{T} \quad , \tag{3.8}$$

so daß gilt:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^{(1)} + \mathcal{T}^{(2)} + \mathcal{T}^{(3)} \quad .$$

Setzt man

$$V_i = T_i - T_i G_0 V_i$$

aus Gl. (3.6) in Gl. (3.8) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(i)} &= T_i - T_i G_0 V_i + T_i G_0 \mathcal{T} - T_i G_0 V_i G_0 \mathcal{T} \\ &= T_i + T_i G_0 \mathcal{T} - T_i G_0 (V_i + V_i G_0 \mathcal{T}) \\ &= T_i + T_i G_0 (\mathcal{T} - \mathcal{T}^{(i)}) \quad . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Damit lauten die *Faddeev-Gleichungen*:

$$\mathcal{T}^{(i)} = T_i + T_i G_0 (\mathcal{T}^{(j)} + \mathcal{T}^{(k)}) \quad . \tag{3.10}$$

Bisher haben wir ganz allgemein einen (3 Teilchen $\rightarrow$ 3 Teilchen)-Streuprozeß betrachtet. Physikalische Realität ist jedoch eher die Streuung eines Teilchens an einem gebundenen Zustand oder an einer Resonanz aus den beiden anderen. Dies gilt auch für das von uns betrachtete $\pi\rho$–System, das $\rho$–Meson ist eine Zwei-Pion-Resonanz im Drei-Pion-System.

Eine solche Resonanz, gebildet aus den Teilchen $j$ und $k$, deren Quantenzahlen in $c$ zusammengefaßt seien, wird durch $(jk)_c$ gekennzeichnet. Die freie Wellenfunktion von $(jk)_c$ und Teilchen $i$ sei $|\chi_{i;c}\rangle$ und $i\,(c)$ kennzeichnet den Dreiteilchenzustand aus $i$ und Resonanz $(jk)_c$. Dabei heißt Teilchen $i$ das '*Spectator*'-Teilchen.

Zur Beschreibung der Streuamplitude dieser Prozesse verwendet man die sogenannten Lovelace-Operatoren:

$$T_{j(d)\,;\,i(c)} =: \langle \chi_{j;d} \,|\, U_{ji} \,|\, \chi_{i;c} \rangle \quad . \tag{3.11}$$

Für die $U_{ji}$ lassen sich Integralgleichungen vom Typ der Faddeev-Gleichungen ableiten, die *Alt-Grassberger-Sandhas-Gleichungen* [42]:

$$U_{ji}(Z) = (1 - \delta_{ji})\, G_0^{-1} + \sum_{l \neq j} T_l(Z) G_0(Z) U_{li}(Z) \quad . \tag{3.12}$$

Für die Herleitung dieser Gleichungen verweisen wir auf [13, 42].

Gln. (3.10) und (3.12) sind gekoppelte Integralgleichungen in sechs unabhängigen Variablen (z.B. $\vec{p}_i$ und $\vec{q}_i$ in Gl. (3.10)), nach einer Partialwellenzerlegung bleiben davon immer noch drei übrig.

Um das Dreiteilchenproblem lösen zu können, sind daher weitere Vereinfachungen angebracht. Solche sind möglich, wenn die zugrundeliegenden Zweiteilchen-Wechselwirkungen separabel sind. Wir betrachten im folgenden die Wechselwirkung zweier spinloser Teilchen (Pionen). Ein Zweiteilchen-Potential heißt separabel, wenn es sich in der Form

$$\langle \vec{q}\,' \,|\, V \,|\, \vec{q} \rangle \;=\; g(\vec{q}\,')\, g(\vec{q}) \tag{3.13}$$

bzw. formal

$$V \;=\; |\, g \,\rangle \langle\, g \,| \tag{3.14}$$

schreiben läßt.

Die Zweiteilchen-LSG

$$T(Z) \;=\; |\, g \,\rangle \langle\, g \,| \;+\; |\, g \,\rangle \langle\, g \,|\, G_0 T(Z)$$

hat dann eine Lösung der Form

$$T(Z) \;=\; |\, g \,\rangle\, \tau(Z)\, \langle\, g \,| \tag{3.15}$$

mit

$$(\tau(Z))^{-1} \;=\; 1 - \langle\, g \,|\, G_0(Z) \,|\, g \,\rangle \qquad . \tag{3.16}$$

Ein separables Potential führt daher auf eine separable T-Matrix. Im folgenden Abschnitt werden wir zeigen, daß die für unser Problem wichtige $\pi\pi$–T-Matrix im $J = 1$–Kanal in sehr guter Näherung als separabel betrachtet werden kann, da sie durch die $\rho$–Resonanz dominiert wird.

In der formalen Schreibweise gilt für die separable Zweiteilchen-T-Matrix Gl. (3.15) im Dreiteilchenraum folgendes:

$$T_i(Z) \;=\; \int d\vec{p}_i \,|\, i\; \vec{p}_i \,\rangle \tau_i(Z - p_i^2/2\mu_i) \langle\, i\; \vec{p}_i \,| \qquad , \tag{3.17}$$

wobei gilt:

$$\langle\, \vec{p}_i\,' \; \vec{q}_i\,' \,|\, i\; \vec{p}_i \,\rangle \;=\; \delta(\vec{p}_i - \vec{p}_i\,')\, g(\vec{q}_i\,') \qquad . \tag{3.18}$$

Setzt man nun $T_i(Z)$ aus Gl. (3.17) in Gl. (3.12) ein und multipliziert von links mit $\langle j\ \vec{p}_j{}' \,|\, G_0$ und von rechts mit $G_0 \,|\, i\ \vec{p}_i \rangle$, so erhält man:

$$\begin{aligned} X_{ji}(\vec{p}_j{}', \vec{p}_i\,; Z) \;&=\; Z_{ji}(\vec{p}_j{}', \vec{p}_i; Z) + \\ &\sum_l \int d^3\vec{p}_l{}'' Z_{jl}(\vec{p}_j{}', \vec{p}_l{}''; Z)\, \tau_l(Z - p_l{}''^2/2\mu_l)\, X_{li}(\vec{p}_l{}'', \vec{p}_i; Z) \end{aligned} \tag{3.19}$$

mit

$$\begin{aligned} X_{ji}(\vec{p}_j{}', \vec{p}_i; Z) \;&\equiv\; \langle j\vec{p}_j{}' \,|\, G_0(Z) U_{ji}(Z) G_0(Z) \,|\, i\vec{p}_i \rangle \\ Z_{ji}(\vec{p}_j{}', \vec{p}_i; Z) \;&\equiv\; (1 - \delta_{ji})\, \langle j\vec{p}_j{}' \,|\, G_0(Z) \,|\, i\vec{p}_i \rangle \qquad . \end{aligned}$$

Diese Gleichung ähnelt sehr stark der Zweiteilchen-LSG; in [13] wird gezeigt, daß $X$ in der Tat der Streuamplitude in Gl. (3.11) entspricht. $Z$ läßt sich als Potential interpretieren und wie folgt veranschaulichen:

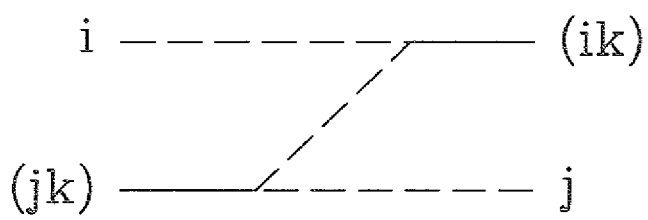



*Abb. 3.1: Graphische Darstellung des Potentials $Z_{ji}$*

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich schließlich noch für den (uns interessierenden) Fall von drei identischen Teilchen, die Nichtdiagonalelemente von $Z$ sind dann identisch

$$Z \;\equiv\; Z_{ji} \quad \text{für } j \neq i \qquad .$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} X_D \;&\equiv\; X_{ii} \\ X_{ND} \;&\equiv\; X_{ji} \quad i \neq j \\ X \;&\equiv\; X_D + 2X_{ND} \end{aligned}$$

kann man Gl. (3.19) zu folgender Gleichung vereinfachen:

$$
\begin{aligned}
X(\vec{p}\,',\vec{p};Z) \;&=\; 2Z(\vec{p}\,',\vec{p};Z) + \\
&\int d^3\vec{p}\,''\, 2Z(\vec{p}\,',\vec{p}\,'';Z)\,\tau(Z-p^{2''}/2\mu)\,X(\vec{p}\,'',\vec{p};Z) \quad .
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

$X_D$ bezeichnet man auch als Streuamplitude der elastischen Streuung, während $X_{ND}$ zur 'rearrangement'-Streuung gehört (Abb. 3.2).

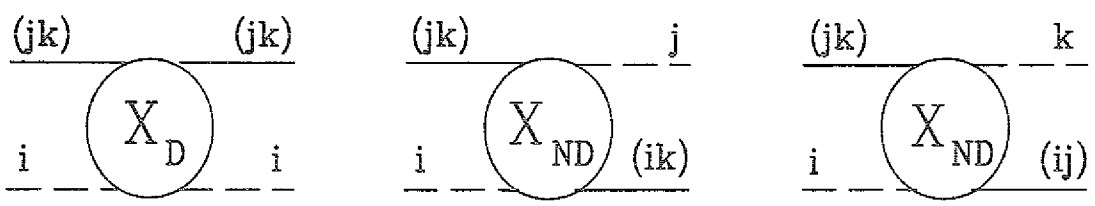



*Abb. 3.2: Elastische und 'rearrangement'-Streuung*

Mit Gl. (3.20) hat man die Faddeev-Gleichungen reduziert auf eine effektive Zweiteilchenstreugleichung vom Lippmann-Schwinger-Typ , die sich relativ einfach lösen läßt.

## 3.3. Das relativistische Dreiteilchensystem

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse, die wir für das nichtrelativistische Dreiteilchenproblem erhalten haben, auf den relativistischen Fall verallgemeinert.

An die Stelle der Zweiteilchen-LSG tritt im relativistischen Fall die Bethe-Salpeter-Gleichung. Für das nichtrelativistische Dreiteilchensystem wurde im letzten Abschnitt die effektive Zweiteilchen-LSG (3.20) abgeleitet. Dieses Ergebnis läßt sich auf das relativistische Dreiteilchensystem übertragen, indem man eine Gl. (3.20) entsprechende Bethe-Salpeter-Gleichung benutzt. Dies ist in Abschnitt (3.3.2) ausgeführt.

Die Lösung des relativistischen Problems erfordert daher noch einen weiteren Schritt, die Reduktion der Bethe-Salpeter-Gleichung auf eine dreidimensionale Gleichung.

Wir werden einen möglichen Weg für diese Reduktion zunächst für den Zweiteilchenfall vorführen und anschließend die dabei verwendeten Methoden auf den Dreiteilchenfall anwenden, wobei wir der Darstellung aus [13] folgen.

### 3.3.1. Die Reduktion der Bethe-Salpeter-Gleichung für das Zweiteilchensystem

Zur besseren Übersichtlichkeit wird im folgenden jede Abhängigkeit von Spin- und Isospin vernachlässigt.

Ausgangspunkt der Reduktion der Bethe-Salpeter-Gleichung ist die Forderung nach *Unitarität* der S-Matrix. Die S-Matrix ist definiert durch

$$S_{fi} \;=\; \delta_{fi} - (2\pi)^4 i\delta^4(P_f - P_i)T_{fi} \quad . \tag{3.21}$$

Die Unitaritätsforderung lautet:

$$SS^\dagger \;=\; S^\dagger S \;=\; 1 \quad .$$

Setzt man die Definition Gl. (3.21) in diese Beziehung ein, so läßt sich Unitarität unter Zuhilfenahme der n-Teilchen Phasenraumdichte

$$d\rho^{(n)} \;=\; (2\pi)^4\delta^4(P_f - \sum_{i=1}^{n} k_i) \prod_{i=1}^{n} (2\pi)^{-4}\, d^4k_i\, 2\pi\, \delta^+(k_i^2 - m_i^2)$$

$$(\; \delta^+(k_i^2 - m_i^2) \;=\; \theta(k_i^0)\delta(k_i^2 - m_i^2)\;)$$

wie folgt durch die T-Matrix ausdrücken:

$$T_{fi} - T_{fi}^* \;=\; -i\sum_n d\rho^{(n)} T_{fn}^* T_{ni} \;=\; -i\sum_n d\rho^{(n)} T_{fn} T_{ni}^* \quad . \tag{3.22}$$

Man betrachtet nun $T$ an der Stelle $s + i\epsilon \equiv s^+$. Da $T$ reell analytisch ist, gilt $T^*(s^+) = T(s - i\epsilon) \equiv T(s^-)$, also läßt sich schreiben

$$2i\, Im(T_{fi}) \;=\; T_{fi} - T_{fi}^* \;=\; T_{fi}(s^+) - T_{fi}(s^-) \;=:\; disc(T_{fi}) \quad .$$

Unter der Annahme, daß der Zwischenzustand $|\,n\,\rangle$ in der Unitaritätsbeziehung Gl. (3.22) nur Zweiteilchenzustände enthält, folgt aus Gl. (3.22):

$$disc(T(s)) \;=\; -(2\pi)^{-4} \int d^4k'' T(s^+)[(2\pi)^2\delta^+(k_1''^2 - m_1^2)\delta^+(k_2''^2 - m_2^2)]T(s^-) \tag{3.23}$$

mit

$$k_1'' + k_2'' = P\,, \qquad k_1'' - k_2'' = 2k''\,, \qquad P = (\sqrt{s}, 0, 0, 0) \quad . \tag{3.24}$$

$k_1''$ und $k_2''$ sind die Viererimpulse der beiden beteiligten Teilchen und $P$ ist der Gesamt-Viererimpuls ($k_1$ entspricht in der im letzten Kapitel benutzten Notation $k$, $k_2$ entspricht $q$.)

Die Unitaritätsbeziehung liefert also eine Bedingung für die Unstetigkeit (discontinuity) von $T$. Die von der Bethe-Salpeter-Gleichung generierte $T$-Matrix muß dieser Bedingung genügen. Die Bethe-Salpeter-Gleichung lautet im Impulsraum:

$$\langle k' | T(s) | k \rangle = \langle k' | V(s) | k \rangle + (2\pi)^{-4} \int d^4k'' \, \langle k' | V(s) | k'' \rangle G_{k''}(s) \langle k'' | T(s) | k \rangle \ . \tag{3.25}$$

Daraus folgt:

$$disc(T(s)) \ = \ (2\pi)^{-4} \int d^4k'' \ T(s^+) \, [G_{k''}(s^+) - G_{k''}(s^-)] \, T(s^-) \quad . \tag{3.26}$$

Diese Beziehung wird in Anhang C hergeleitet und gilt, wie dort gezeigt wird, unter der Annahme, daß $V$ reell ist.

Wie man sieht, wird die Unstetigkeit von $T$ durch den Propagator $G$ erzeugt. Um die Bethe-Salpeter-Gleichung auf eine dreidimensionale Gleichung zu reduzieren, wird $G$ durch einen Propagator $\tilde{G}$ ersetzt, der es ermöglicht, die Energieintegration auszuführen. $\tilde{G}$ soll jedoch so gewählt sein, daß die $T$-Matrix weiterhin die Unitaritätsbeziehung (3.23) erfüllt. Durch Vergleich von Gl. (3.23) und Gl. (3.26) erhält man:

$$\begin{aligned} disc(\tilde{G}_{k''}(s)) \ &= \ \tilde{G}_{k''}(s^+) - \tilde{G}_{k''}(s^-) \ = \ -i(2\pi)^2 \delta^+(k_1''^2 - m_1^2) \delta^+(k_2''^2 - m_2^2) \\ &= \ -i\,(2\pi)^2\,(4\omega_1\omega_2)^{-1}\,\delta(k_0'' + \frac{\sqrt{s}}{2} - \omega_1)\,\delta(\sqrt{s} - \omega_1 - \omega_2) \end{aligned} \tag{3.27}$$

mit $\omega_1 \ = \ \sqrt{(\vec{k}_1'')^2 + m_1^2}$ und $\omega_2$ analog.

Eine Kurve $C$ in der komplexen Ebene heißt '*Cut*' einer Funktion, wenn diese Funktion bei einer Überquerung von $C$ unstetig ist. Anhand der zweiten $\delta$–Funktion in (3.27) erkennt man, daß $\tilde{G}$ entlang der reellen $s$-Achse für $s \ > \ (m_1+m_2)^2$ einen Cut aufweist, es gibt jeweils ein $k_1$ und $k_2$, so daß die $\delta$-Funktion nicht verschwindet. Mit

den Methoden der komplexen Analysis läßt sich zeigen, daß man aus der Kenntnis von $disc(\tilde{G})$ entlang des Cuts mit Hilfe eines Dispersionsintegrals $\tilde{G}$ gewinnen kann.

$$\begin{aligned}\tilde{G}_k(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} ds' \frac{disc(\tilde{G}_k(s'))}{s'-s-i\epsilon} \\ &= \frac{\pi}{(\omega_1\omega_2)} \delta(k_0 - \frac{1}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2) \frac{\omega_1+\omega_2}{s-(\omega_1+\omega_2)^2+i\epsilon} \quad .\end{aligned} \tag{3.28}$$

Durch die verbleibende $\delta$–Funktion läßt sich die Energieintegration in der Bethe-Salpeter-Gleichung explizit ausführen. Man erkennt, daß die Forderung nach Unitarität den Propagator $\tilde{G}$ nicht eindeutig festlegt, da unterschiedliche Propagatoren die gleiche Diskontinuität haben können. Häufig wird etwa statt Gl. (3.28) folgendes $\tilde{G}$ verwendet [43]:

$$\tilde{G}_k(s) = \frac{\pi}{(\omega_1\omega_2)} \delta(k_0) \frac{\omega_1+\omega_2}{s-(\omega_1+\omega_2)^2+i\epsilon} \quad . \tag{3.29}$$

Beide Propagatoren führen nach Einsetzen in die Bethe-Salpeter-Gleichung auf die BbS-Streugleichung:

$$\begin{aligned}T(k',k;s) &= V(k',k;s) \\ &+ \int d^3k''\, V(k',k'';s) \frac{\omega_1+\omega_2}{(2\pi)^3\, 2\omega_1\omega_2} \frac{1}{s-(\omega_1+\omega_2)^2+i\epsilon} T(k'',k;s) \quad .\end{aligned} \tag{3.30}$$

Man sieht, daß der Propagator in der BbS-Gleichung einen Pol (bzw. eine Unstetigkeitsstelle) hat, wenn die beiden Teilchen im Zwischenzustand physikalische Teilchen sind, d.h. für $s = (\omega_1 + \omega_2)^2$. Die Unstetigkeit der T-Matrix wird also durch physikalische Zwischenzustände erzeugt, der entsprechende Cut heißt *Unitaritätscut.*

### 3.3.2. Die Reduktion des Bethe-Salpeter-Gleichung für den Dreiteilchenfall

Im Abschnitt (3.2) wurde gezeigt, unter welchen Voraussetzungen sich für den Dreiteilchenfall eine effektive Zweiteilchen-LSG ableiten läßt. In dieser Gleichung (3.20) erscheint der Propagator $\tau_l(Z - p''^2/2\mu)$. Die Größe $\zeta_p \equiv Z - p^2/2\mu$ entspricht der Gesamtenergie im CMS der beiden Teilchen, die die Resonanz bilden. Statt $Z$ wird im relativistischen Fall $s$ benutzt, wichtig ist dabei die Beziehung $s = P^2$, wobei $P$ der totale Viererimpuls im Gesamt-CMS ist. Die $\zeta$ entsprechende relativistische Größe ist daher wie folgt definiert:

$$\sigma_p \;=\; (P-p)^2 \qquad , \tag{3.31}$$

wobei $p$ der Viererimpuls des Spectator-Pions ist. Das relativistische Analogon zu der effektiven Zweiteilchen-LSG Gl. (3.20) ist somit:

$$\langle q' \,|T(s)|\, q\rangle \;=\; \langle q' \,|B(s)|\, q\rangle + (2\pi)^{-4} \int d^4p \,\langle p\,|B(s)|\,p\rangle \tau(\sigma_p) \langle p\,|T(s)|\,q\rangle \tag{3.32}$$

($q, q', p$ Impulse der Spectator-Pionen).

Analog zum Zweiteilchenfall wird aus dieser Gleichung $disc(T)$ berechnet, mit Gl. $(D.8)$ aus dem Anhang erhalten wir:

$$\begin{aligned} disc(\langle q' \,|\, T(s) \,|\, q\rangle) \;&=\; \\ &+\; (2\pi)^{-4} \int d^4p \langle q' \,|\, T(s^+) \,|\, p\rangle \left[\tau(\sigma_p^+) - \tau(\sigma_p^-)\right] \langle p \,|\, T(s^-) \,|\, q\rangle \;+ \\ &+\; (2\pi)^{-8} \int d^4p \int d^4p' \;\langle q' \,|\, T(s^+) \,|\, p\rangle \,\tau(\sigma_p^+) \cdot \\ &\qquad \cdot \left[\langle p \,|\, B(s^+) \,|\, p'\rangle - \langle p \,|\, B(s^-) \,|\, p'\rangle\right] \tau(\sigma_{p'}^-) \langle p' \,|\, T(s^-) \,|\, q\rangle \end{aligned} \tag{3.33}$$

Im Unterschied zum Zweiteilchenfall ist die Annahme, daß das Potential reell ist (d.h. $disc(B) = 0$), hier nicht mehr gültig. Ausgangspunkt unserer Überlegungen war ja gerade die Tatsache, daß das $\pi\rho$–System durch den Zerfall des $\rho$–Mesons in eine System von drei *physikalischen* Pionen übergeht, und physikalische Zustände erzeugen Cuts.

Wie im Zweiteilchenfall muß $disc(T)$ der aus der Unitarität folgenden Bedingung genügen. Um diese Bedingung aus Gl. (3.22) abzuleiten, benötigen wir die T-Matrix

für den Übergang des Zweiteilchen- in das Dreiteilchensystem, da der Zwischenzustand $|n\rangle$ in (3.22) jetzt auch Dreiteilchensysteme umfaßt.

Diese sogenannte *Break-Up-Amplitude* läßt sich im Rahmen der Dreiteilchentheorie ableiten [13], sie lautet:

$$\langle q_1 q_2 q_3 | T(s) | q \rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}} \sum_{n=1}^{3} \langle q_n | T(s) | q \rangle S(\sigma_{q_n}) f(\tilde{q}_n)$$

Dabei ist $S$ ein mit $\tau$ korrelierter Propagator, dessen konkrete Gestalt sich aus den weiteren Rechnungen ergibt. $f(\tilde{q}_n)$ ist die Vertexfunktion für die Dissoziation eines $\rho$–Mesons in zwei Pionen, wie sie in Gl. (2.11) angegeben ist. Dabei ist z.B. $\tilde{q}_1$ definiert als $\tilde{q}_1 = (q_2 - q_3)$.

Die Bethe-Salpeter-Gleichung und die Break-Up-Amplitude sind in Abb. 3.3 diagrammatisch dargestellt.

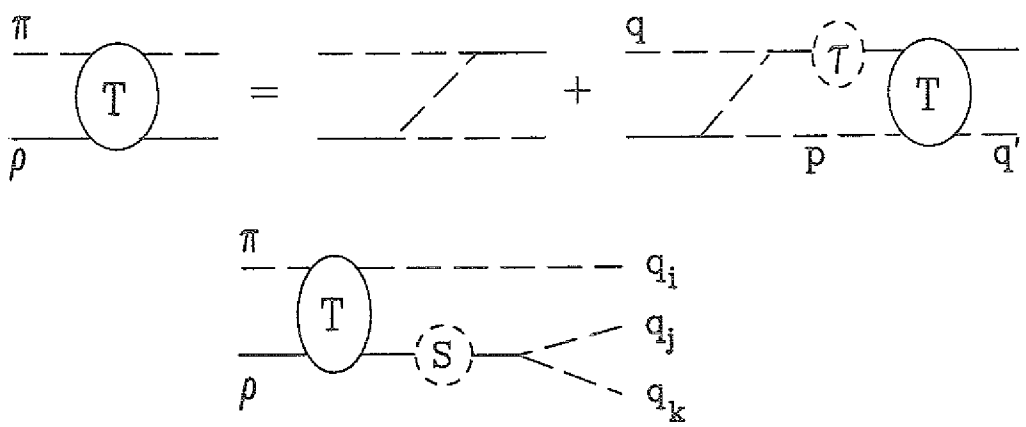
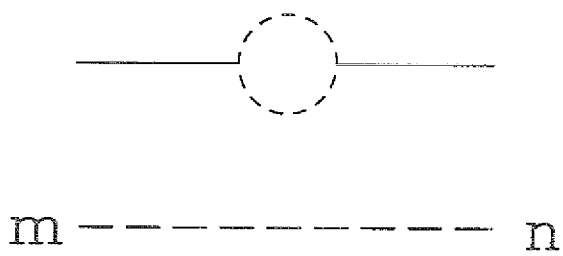



*Abb. 3.3: Diagrammatische Darstellung der Bethe-Salpeter-Gleichung und der Break-Up-Amplitude*

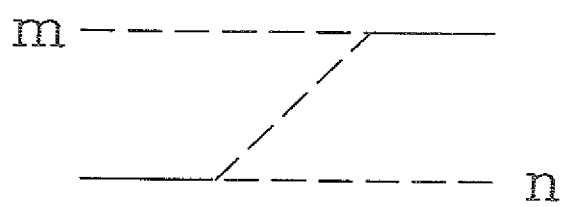
Die Unitaritätsbeziehung lautet dann:

$$\begin{aligned}
&disc(\langle q' | T(s) | q \rangle) = \\
&= i(2\pi)^{-4} \int d^4p \langle q' | T(s^+) | p \rangle \langle p | T(s^-) | q \rangle \, (2\pi)^2 \, \delta^+(\sigma_p - m_\rho^2)\delta^+(p^2 - m_\pi^2) + \\
&+ i(2\pi)^{-5} \int d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 \\
&\qquad \delta^4(P - p_1 - p_1 - p_1)\delta^+(p_1^2 - m_\pi^2)\delta^+(p_2^2 - m_\pi^2)\delta^+(p_3^2 - m_\pi^2) \\
&\qquad \frac{1}{3!} \sum_{n,m=1}^{3} \langle q' | T(s^+) | p_n \rangle S(\sigma_{p_n}^+) f(\tilde{p}_n) f(\tilde{p}_m) S(\sigma_{p_m}^-) \langle p_m | T(s^-) | q \rangle \, .
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Der erste Summand tritt nur für Zweiteilchenzwischenzustände auf. Er ist daher nur dann zu berücksichtigen, wenn der aus zwei der drei Teilchen gebildete Zustand stabil ist, d.h. für gebundene Zustände (z.B Deuteron im $\pi NN$–System). Das $\rho$–Meson ist jedoch eine Resonanz im $\pi\pi$–System und damit instabil, der erste Summand trägt in unserem Fall also nicht bei. Der zweite Summand resultiert aus dem Break-Up. Dieser trägt für $m = n$ zu $disc(\tau)$ bei,




für $m \neq n$ zu $disc(B)$.




Ähnlich wie im Zweiteilchenfall erhält man durch Vergleich von Gl. (3.33) und Gl. (3.34) Ausdrücke für $disc(B)$ und $disc(\tau)$, und daraus über ein Dispersionsintegral $B$ und $\tau$. Die einzelnen Schritte dieser Rechnung sind für das Dreiteilchenproblem jedoch deutlich komplizierter, wir verweisen dazu auf [13].

Man erhält folgendes Ergebnis:

- Die Dynamik des Dreiteilchensystems läßt sich mit einer *dreidimensionalen effektiven Zweiteilchenstreugleichung* erfassen:

$$\begin{aligned} \langle q' \,|\, T(s) \,|\, q \rangle &= \langle q' \,|\, B(s) \,|\, q \rangle \\ &+ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \langle q' \,|\, B(s) \,|\, p \rangle \mathcal{D}(\sigma_p) \langle p \,|\, T(s) \,|\, q \rangle \end{aligned} \tag{3.35}$$

mit

$$\mathcal{D}(\sigma_p) \;=\; \left[\sigma_p - m_{0_\rho}^2 - \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3\omega_{p'}} \frac{f^2}{(\sigma_p - 4\omega_{p'}^2)}\right]^{-1} \quad . \tag{3.36}$$

Für $\sigma_p > 4\omega_{p'}^2$ liegen die Pole des Propagators $\mathcal{D}(\sigma_p)$ in der komplexen s-Ebene. Dennoch erzeugt dieser Propagator nach Konstruktion einen Cut der T-Matrix entlang der reellen s–Achse für $s > 9m_\pi^2$. Die Bedeutung von $\mathcal{D}(\sigma_p)$ wird im folgenden Abschnitt genauer erläutert.

- Für $B$ ergibt sich ein Ausdruck der Gestalt

$$\langle \vec{q}\,' \,|\, B(s) \,|\, \vec{q} \rangle \;=$$
$$f\left[\left(\omega_x - \omega_{q'}, -\vec{q}\,' - 2\vec{q}\right)\right] \frac{\omega_q + \omega_{q'} + \omega_x}{\omega_x\left[s - (\omega_q + \omega_{q'} + \omega_x)^2\right]} f\left[\left(\omega_x - \omega_q, -\vec{q} - 2\vec{q}\,'\right)\right] \tag{3.37}$$

wo

$$\omega_x \;=\; \sqrt{q^2 + q'^2 + m_\pi^2 + 2qq'\cos\theta}$$

die On-Mass-Shell-Energie des ausgetauschten Pions ist. Das Argument der Vertexfunktion ergibt sich aus dem Dispersionsintegral. Dieses Ergebnis entspricht genau dem Matrixelement aus Gl. (2.12), wenn man die $\rho$–Impulse $k$ und $k'$ mit Hilfe der Viererimpulserhaltung durch $\sqrt{s} - q$ bzw. $\sqrt{s} - q'$ ersetzt und anschließend $\sqrt{s} \;=\; \omega_q + \omega_{q'} + \omega_x$ einsetzt, wie es auch durch die Ausführung des Dispersionsintegrals geschieht.
Der Propagator $d$ wird für $\sqrt{s} > 3m_\pi$ singulär, $d$ erzeugt dadurch einen Cut zusätzlich zum Unitaritätscut, der den $3\pi$-Zwischenzuständen in $B$ entspricht. Zerlegt man den Nenner von $d$, so erkennt man, daß der für diesen Cut verantwortliche Term

$$\frac{1}{\sqrt{s} - \omega_q - \omega_{q'} - \omega_x}$$

gerade dem TOPT-Propagator in der entsprechenden Zeitordnung entspricht.

- Der oben für $B$ angegebene Ausdruck ist nur der sich aus $disc(B) \neq 0$ ergebenden Anteil von $B$. $B$ kann natürlich weitere Terme enthalten, die keinen Cut erzeugen und daher auch die Unitarität nicht beeinflussen. In

unserem Fall gehören dazu der $\rho$-Austausch, der $\omega$–Austausch und die Polgraphen. Das Off-Shell-Verhalten dieses Anteils ist wiederum durch die Reduktion der Bethe-Salpeter-Gleichung festgelegt. Aus dieser ergibt sich, daß die Spectator-Pionen stets auf die Massenschale zu setzen sind. Außerdem gilt Viererimpulserhaltung. Für die Viererimpulse der beteiligten $\rho$–Mesonen ist daher $k^{(\prime)} = \sqrt{s} - \omega_{q^{(\prime)}}$ zu setzen.

- Da sich das Spectator-Teilchen auf der Massenschale befindet, gilt für $\sigma_p$:

$$\sigma_p = (P-p)^2 = (\sqrt{s} - p_0, \vec{p})^2 = s + \omega_p^2 - 2\sqrt{s}\omega_p - \vec{p}^{\,2} = s - 2\sqrt{s}\omega_p + m_\pi^2$$

- Für den Propagator $S(\sigma_p)$ in der Break-Up-Amplitude gilt:

$$S(\sigma_p) = -\mathcal{D}(\sigma_p) \quad .$$

## 3.4. Die numerische Behandlung des $3\pi$–Problems

Für das weitere Vorgehen zur Lösung des Dreiteilchenproblems ist es sinnvoll, sich zunächst näher mit der zugrundeliegenden Zweiteilchenwechselwirkung zu befassen, d.h. mit der $\pi\pi$–Wechselwirkung im $J=1$–Kanal.

In Abschnitt (3.2) wurde bereits der Begriff der separablen Wechselwirkung erläutert. Betrachtet man den Beitrag eines Polgraphen zum Pseudopotential, so gilt:

$$\begin{aligned} V(\vec{q}\,', \vec{q}; s) &= f_0(\vec{q}\,'; s) \frac{1}{s - m_0^2} f_0(\vec{q}; s) \\ &= f_0(\vec{q}\,'; s)\, d_0(s)\, f_0(\vec{q}; s) \quad , \end{aligned}$$

bzw. nach Partialwellenzerlegung

$$V^J(q', q; s) = f_0^J(q'; s)\, d_0(s)\, f_0^J(q; s) \quad ,$$

d.h. $V$ ist offensichtlich separabel.

Im allgemeinen enthält $V$ jedoch zusätzlich noch Austauschgraphen, und dieser Anteil des Pseudopotentials ist nicht separabel, d.h. es gilt insgesamt

$$V = V^{ns} + V^s \quad .$$

Die T-Matrix, die aus der Iteration dieses Potentials entsteht, zerfällt ebenfalls in einen separablen und einen nichtseparablen Anteil. Im Anhang ist dazu folgendes gezeigt (Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird der Index $^J$ unterdrückt, im folgenden stehen $T$, $V$ und $f$ stets für die entsprechenden partialwellenzerlegten Größen.):

$$T = T^{ns} + f\tilde{d}f$$

$$\begin{aligned} f &= f_0 + f_0\tilde{G}T^{ns} \\ \tilde{d} &= (d_0^{-1} - \Sigma)^{-1} \\ \Sigma &= f_0\tilde{G}f \end{aligned} \tag{3.38}$$

Der separable Anteil von $T$ ist das relativistische Analogon zu Gl. (3.15).

Für den von uns verwendeten Dreiteilchenformalismus benötigen wir eine separable Zweiteilchen-T-Matrix, es stellt sich daher die Frage, inwieweit der separable Anteil die gesamte T-Matrix approximieren kann.

In unserem konkreten Fall der $\pi\pi$–Wechselwirkung besteht der separable Anteil des Potentials aus dem $\rho$–Polgraphen, zum nichtseparablen Anteil gehört im wesentlichen der $\rho$–Austausch zwischen den Pionen. Einzelheiten zur $\pi\pi$–Wechselwirkung finden sich in [10].

Für $V^{\rho-Pol}$ gilt (s. Anhang D.2):

$$V^{\rho-Pol}(q',q;s) = \frac{16}{3}(2\pi)^2\frac{g_0^2}{4\pi}F(q^2)F(q'^2)\,qq'\frac{1}{s-m_{0_\rho}^2}\delta_{J,1} \quad .$$

Unter der Annahme $T^{ns} = 0$, d.h. $f = f_0$ erhalten wir dann für $\Sigma$:

$$\Sigma(s) = \int_0^\infty dpp^2\left[\frac{1}{(2\pi)^3\omega_p}\frac{1}{s-4\omega_p^2}\right]\left[\frac{16}{3}(2\pi)^2\frac{g_0^2}{4\pi}F^2(p^2)p^2\right] \quad ,$$

denn

$$\begin{aligned} \tilde{G}(s) &= \frac{\omega_1+\omega_2}{(2\pi)^3 2\omega_1\omega_2}\,\frac{1}{s-(\omega_1+\omega_2)^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3\omega_\pi}\,\frac{1}{s-4\omega_\pi^2} \quad , \qquad \text{da } \omega_1 = \omega_2 = \omega_\pi \quad . \end{aligned}$$

Der Propagator in $\Sigma = f_0 \tilde{G} f_0$ hat einen Pol, so daß für dieses Integral eine Hauptwertintegration durchzuführen ist. $\Sigma$ ist daher komplex. Da $Im(\Sigma)$ mit der Breite der Resonanz verknüpft ist, wird zunächst $g_0$ so gewählt, daß die Breite des $\rho$–Mesons reproduziert wird. Anschließend wird $m_0$ so eingestellt, daß die T-Matrix einen Pol bei der physikalischen Masse besitzt. Aus der so bestimmten T-Matrix

$$T^s = f_0 \frac{1}{s - m_{0_\rho}^2 - \Sigma(s)} f_0$$

berechnen wir die $\pi\pi$-Streuphasen in der $J=1$–Partialwelle und vergleichen sie mit dem Experiment.

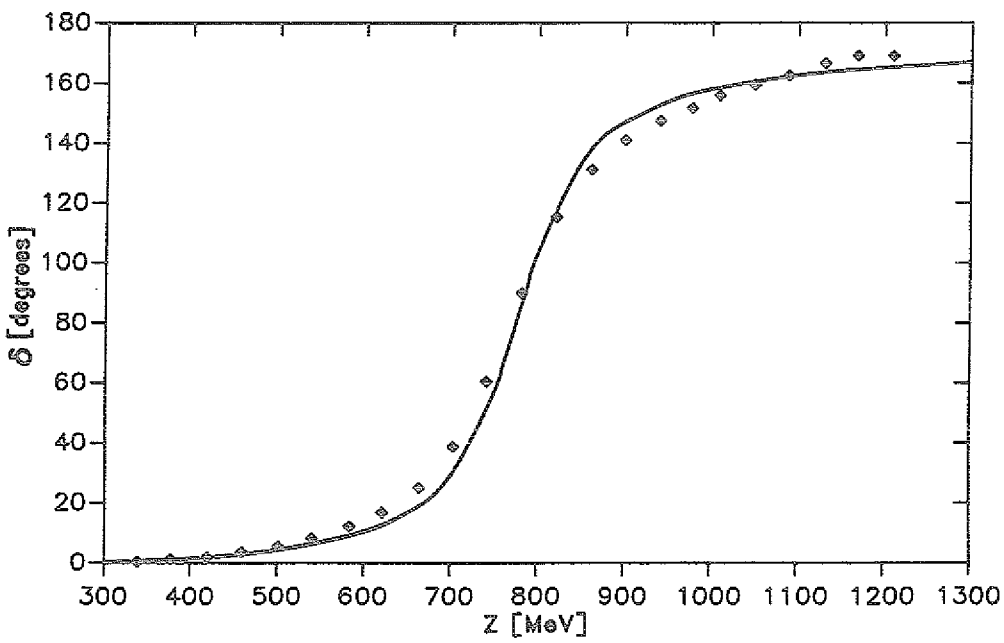



*Abb. 3.4: Die Streuphase der $\pi\pi$–Wechselwirkung im Vektor-/Isovektor–Kanal; Z ist die CMS-Energie des $\pi\pi$–Systems; $m_0 = 1135\ MeV$, $\frac{g_0^2}{4\pi} = 2.1$*

In Abb. 3.4 ist der durch Variation von $g_0$ und $m_0$ erzeugte Fit an die experimentellen Daten gezeigt. Wie man sieht, lassen sich diese Daten sehr gut durch die separable Wechselwirkung beschreiben.

Drückt man nun den Propagator (3.35) der Dreiteilchen-Streugleichung mit Hilfe

der partialwellenzerlegten Vertexfunktionen aus,

$$\mathcal{D}(\sigma_p) \;=\; \left[\sigma_p - m_{0_\rho}^2 - \frac{1}{(2\pi)^3}\int dp' p'^2 \frac{(f_0^J(p'))^2}{\omega_{p'}(\sigma_p - 4\omega_{p'}^2)}\right]^{-1} \quad , \tag{3.39}$$

so erkennt man sofort den Zusammenhang mit der eben diskutierten Zweiteilchenwechselwirkung. Man erhält $\mathcal{D}$ aus dem $\rho$–Propagator $\tilde{d}$, indem man für die CMS-Energie $s$ den Beitrag des Spectator-Pions berücksichtigt, d.h. $s$ durch $\sigma_p$ ersetzt. Da wir $g_0$ und $m_0$ bereits festgelegt haben, ist damit auch $\mathcal{D}$ vollständig bestimmt.

In Abb. 3.5 vergleichen wir den vollen Propagator der effektiven Zweiteilchenstreugleichung

$$D(\sigma_p) \;=\; \mathcal{D}(\sigma_p)\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_p}$$

mit dem in der Zweiteilchen-BbS-Gleichung verwendeten $\tilde{G}$. Zu diesem Zweck führen wir für $\tilde{G}$ eine Hauptwertzerlegung durch:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s-(\omega_1+\omega_2)^2+i\epsilon} &= \mathcal{P}\left(\frac{1}{s-(\omega_1+\omega_2)^2}\right) - i\pi\delta(s-(\omega_1+\omega_2)^2) \\ &= \quad Re(\tilde{G}) \qquad + \qquad i\,Im(\tilde{G})\end{aligned}$$

$Im(\tilde{G})$ liefert also eine $\delta$–Funktion, die einem stabilen (zero-width) $\rho$ entspricht. In Abb. 3.5 erkennt man, daß diese $\delta$–Funktion bei der Verwendung von $D$ in die breite Massenverteilung des $\rho$–Mesons übergeht.

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, daß die Singularitäten in $\tilde{G}$ (Zweiteilchenfall) bzw. in $B$ und $\mathcal{D}$ (Dreiteilchenfall) verantwortlich für die Diskontinuität der T-Matrix sind und damit die Unitarität gewährleisten.

Diese Singularitäten können jedoch bei der numerischen Lösung der Streugleichung Probleme verursachen.

Im Zweiteilchenfall gibt es nur die zum Unitaritätscut gehörenden Pole von $\tilde{G}$. Diese liegen bei $\sqrt{s} = \omega_1(p_0) + \omega_2(p_0)$. Da für ein gegebenes $s$ die Lage des Pols in der $p$–Ebene fixiert ist, läßt sich die numerische Integration mit Hilfe einer einfachen Regularisierung durchführen.

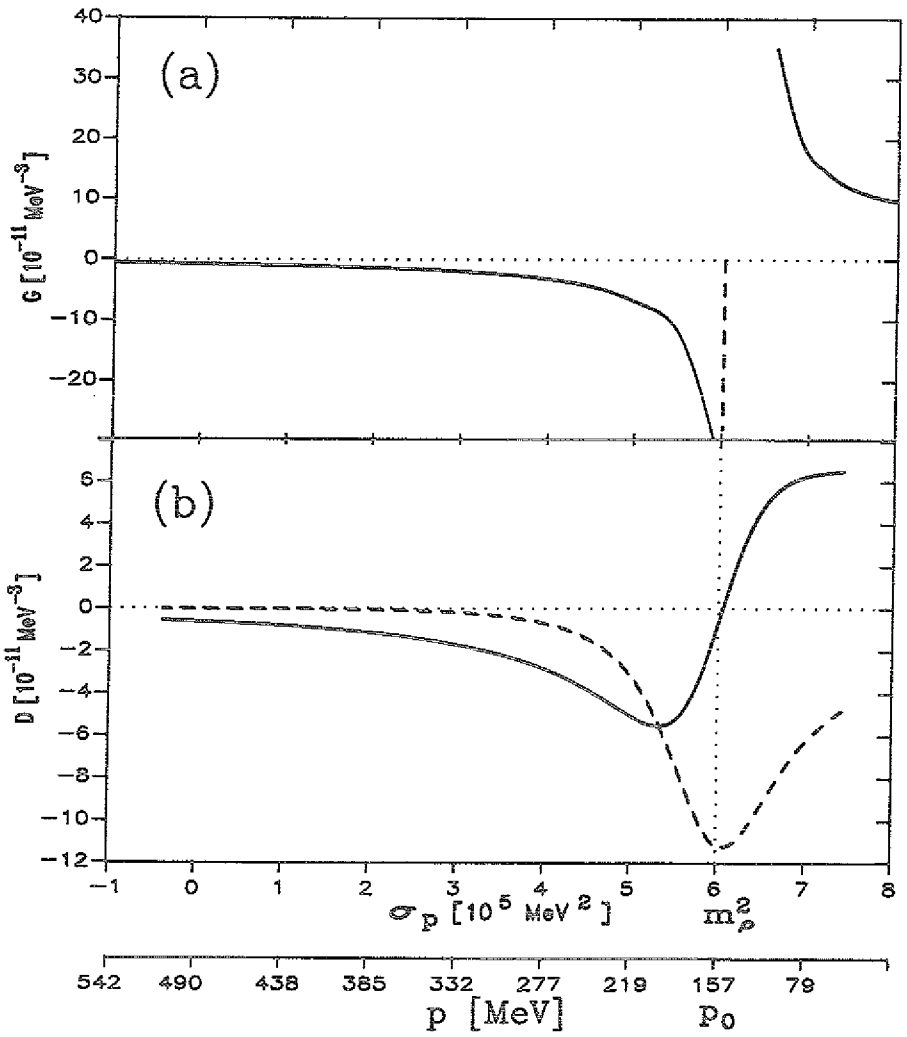



*Abb. 3.5: Die Propagatoren der Zweiteilchenstreugleichung (a) und der Dreiteilchenstreugleichung (b); gestrichelt: Imaginärteil; durchgezogen: Realteil;* $\sqrt{s} = 1$ *GeV*

Im Dreiteilchenfall erzeugt $\mathcal{D}$ zwar einen Cut entlang der reellen $s$-Achse, aber die Pole von $\mathcal{D}$ liegen in der komplexen $s$-Ebene. Diese sind durch

$$\sigma_p - m_{0_\rho}^2 - \Sigma(\sigma_p) \;=\; 0$$

gegeben, wobei $\Sigma$ komplex ist. Bei der Integration über die reelle Impulsachse ist $\mathcal{D}$ also problemlos.

Anders ist dies für die Singularitäten des Potentials $B$. Um diese Singularitäten zu

untersuchen, schreiben wir $B$ als

$$B(\vec{q},\vec{p};s) \;=\; \frac{\tilde{B}(q,p;s;y)}{\sqrt{s}-\omega_q-\omega_p-\omega_x(p,q;y)+i\epsilon} \quad , \qquad y := \cos\theta \quad .$$

$B$ wird singulär, wenn die Gleichung

$$\sqrt{s}-\omega_q-\omega_p-\omega_x(p,q;y)+i\epsilon \;=\; 0 \tag{3.40}$$

für gegebenes $s, q, y$ eine (u.U. komplexe) Lösung für $p$ hat. Dies ist nicht für alle Werte von $s, q$ und $y$ der Fall. Ist die Gleichung jedoch lösbar, so erhält man zwei Lösungen für $p$. Berechnet man diese Lösungen bei festgehaltenem $s$ und $q$ für alle Werte von $y \in [-1,1]$, so erhält man zwei Kurven in der komplexen $p$–Ebene. Da $B$ entlang dieser Kurven singulär ist, handelt es sich um Cuts von $B$, die Anfangs- und Endpunkte (entsprechend $y = \pm 1$) bezeichnet man als '*branch points*'.

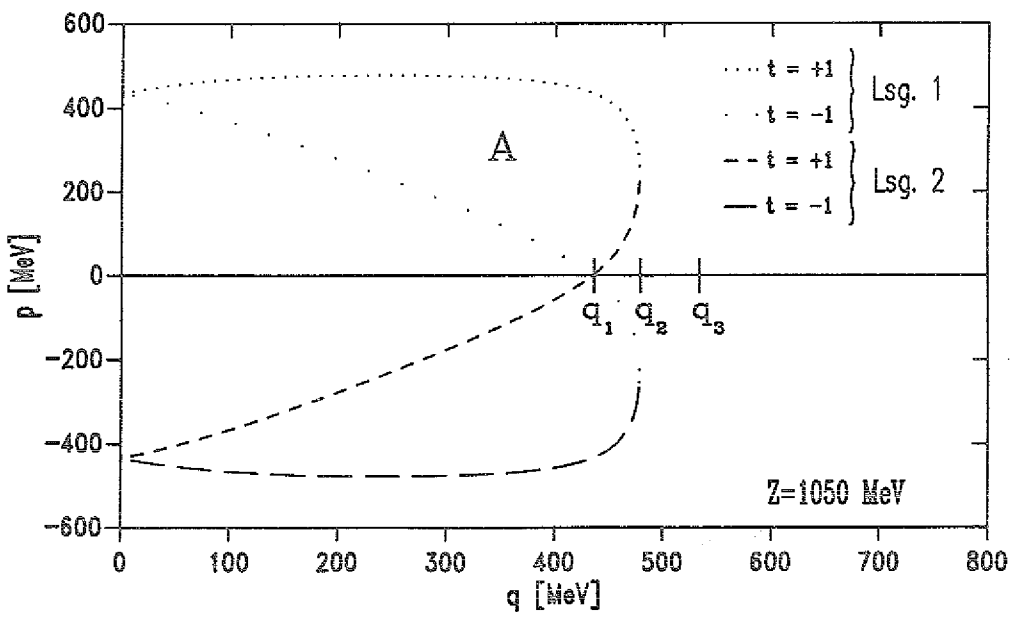



*Abb. 3.6: Lage der branch-points in der $q,p$-Ebene; $\sqrt{s} = Z = 1.05$ GeV*

Abb. 3.6 zeigt die Lage der branch-points in der $q,p$–Ebene für einen Wert von $s$. Für $q > q_3$ hat Gl. (3.40) keine Lösung, für $q_2 < q < q_3$ sind die Lösungen für $p$ komplex und können in diesem Diagramm nicht abgebildet werden. Die Lage der Cuts in

der komplexen $p$–Ebene ist für einige Werte von $q$ in Abb. 3.7 dargestellt ($\sqrt{s} = 1.05\ GeV$). Solange $q < q_1$ ist, liegen die beiden branch-points einer Lösung auf der positiven reellen Achse, bzw. beide auf der negativen reellen Achse. Der Cut verläuft dann ebenfalls entlang dieser Achse (genauer: entlang der um $+i\epsilon$ verschobenen Achse) (Abb. 3.7 a)). Ist $q_2 > q > q_1$, so liegt ein branch-point auf der positiven reellen Achse und einer auf der negativen. Die Cuts beginnen und enden dann auf der reellen Achse, verlaufen jedoch im Komplexen (Abb. 3.7 b),c)). Ist schließlich $q_2 < q < q_3$ so beginnen und enden die Cuts im Komplexen (Abb. 3.7 d)).

Diese Aussagen über den Verlauf der Cuts gelten natürlich nur in der komplexen $p$-Ebene, in der komplexen $s$-Ebene verlaufen die Cuts entlang der reellen $s$-Achse für $s > 9m_\pi^2$.

Zur Lösung der Streugleichung muß für $B$ zunächst die Partialwellenzerlegung durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} B^J(q,p;s) &= 2\pi \int_{-1}^{+1} dy \frac{\breve{B}(q,p;s;y)}{\sqrt{s} - \omega_q - \omega_p - \omega_x(q,p;y) + i\epsilon} \\ &\text{mit } \breve{B} := d^J_{\lambda\lambda'}(y)\ \tilde{B} \end{aligned} \tag{3.41}$$

Nehmen die Impulse $p, q$ dabei Werte an, so daß (p,q) in der in Abb. 3.6 gekennzeichneten Fläche $A$ liegt, dann gibt es ein $y_0$, so daß der Integrand der Partialwellenzerlegung singulär wird (vgl. Abb. 3.7). In Gl. (3.41) ist dann eine Regularisierung durchzuführen. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned} B^J(q,p;s) &= 2\pi \int_{-1}^{+1} dy \frac{\omega_x(q,p;y)\breve{B}(q,p;s;y) - \omega_x(q,p;y_0)\breve{B}(q,p;s;y_0)}{\omega_x(q,p;y)(R - \omega_x(q,p;y))} \\ &+ \frac{\omega_x(q,p;y_0)\breve{B}(q,p;s;y_0)}{qp} \left\{ \ln \left| \frac{R - \omega_x(q,p;y=-1)}{R - \omega_x(q,p;y=+1)} \right| - i\pi \right\} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} R &:= \sqrt{s} - \omega_q - \omega_p \\ y_0 &:= \frac{R^2 - m_\pi^2 - q^2 - p^2}{2qp} \end{aligned}$$

Wie man sieht, besitzt $B$ auch nach der Regularisierung der $y$-Integration noch logarithmische Singularitäten, deren Position mit den branch-points in Abb. 3.6 übereinstimmt. Für die anschließende Impulsintegration ist keine Regularisierung

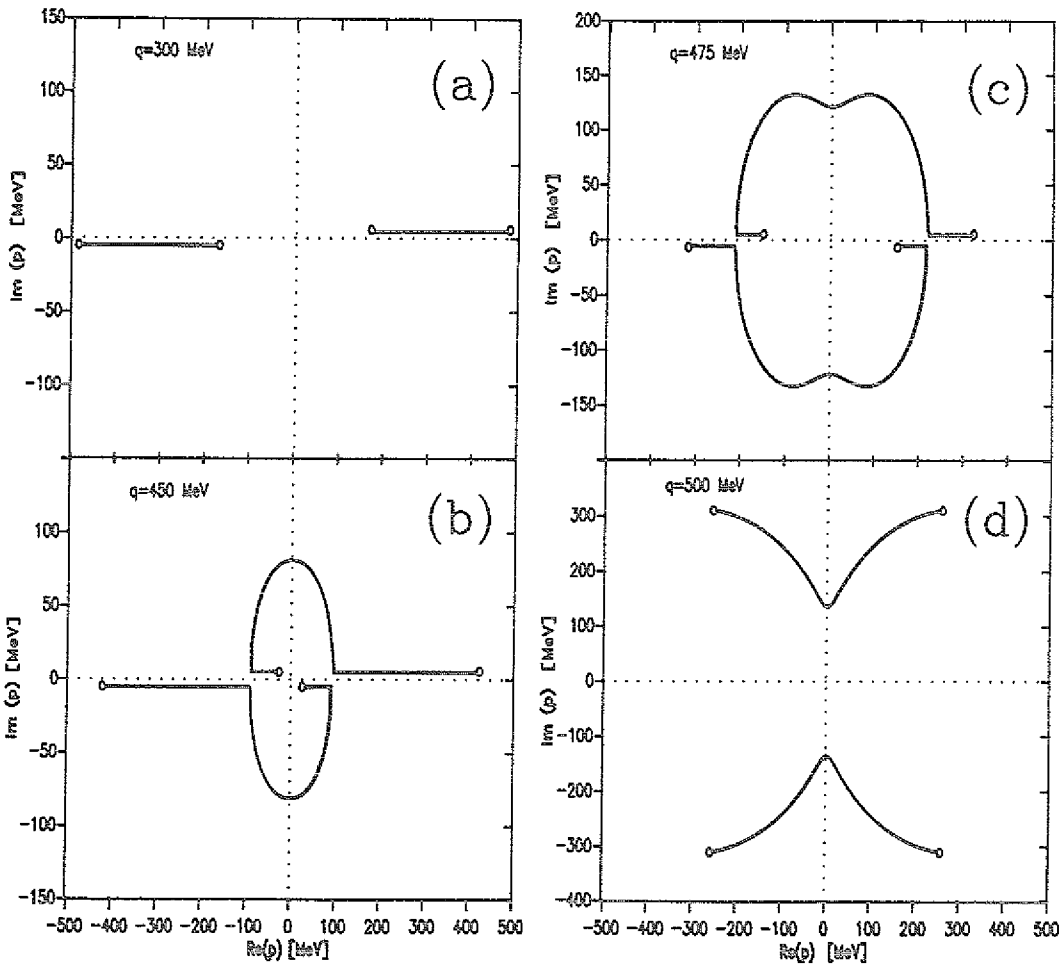



*Abb. 3.7: Beispiele für die Lage der Cuts von $B$ in der komplexen $p$-Ebene*

möglich, da für jedes $q$ die Singularität von $B^J$ bei einem anderen $p$ liegt, diese also nicht fixiert ist.

Dieses Problem läßt sich durch eine Verschiebung des Integrationsweges in die komplexe Ebene umgehen (Contourdeformation) [44]. Als neuer Integrationsweg dient die um den Winkel $\varphi$ in die untere komplexe Halbebene gedrehte reelle Achse. Der Winkel $\varphi$ muß dabei so gewählt werden, daß der Integrationsweg weit genug von Singularitäten entfernt ist, um numerische Probleme zu vermeiden.

Die Streugleichung lautet dann:

$$\begin{aligned}\langle q'e^{i\varphi} \,|\, T(s) \,|\, q \rangle &= \langle q'e^{i\varphi} \,|\, B(s) \,|\, q \rangle \\ &+ \int \frac{d^3(pe^{i\varphi})}{(2\pi)^3 2\omega_{(pe^{i\varphi})}} \langle q'e^{i\varphi} \,|\, B(s) \,|\, pe^{i\varphi} \rangle D(\sigma_{(pe^{i\varphi})}) \langle pe^{i\varphi} \,|\, T(s) \,|\, q \rangle \quad .\end{aligned} \tag{3.42}$$

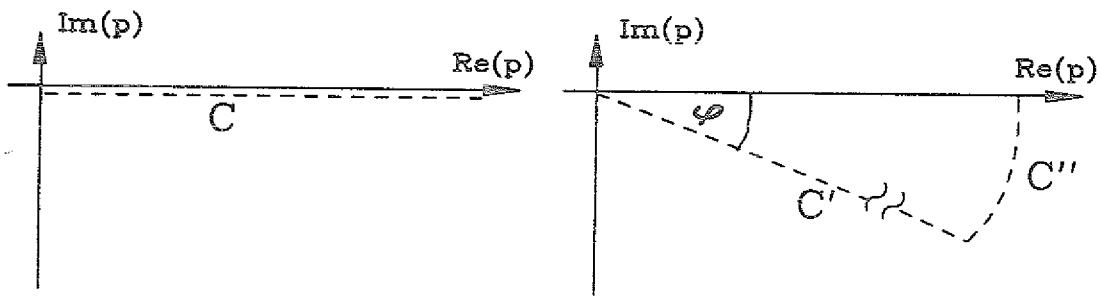



*Abb. 3.8: Die Verschiebung des Integrationsweges*

$q'$ wurde dabei ebenfalls in die komplexe Ebene verschoben, damit die T-Matrix auf der rechten und der linken Seite in der gleichen Weise von komplexen und reellen Impulsen abhängt. $q$ wurde hier nicht modifiziert, es kann komplex oder reell gewählt werden.

Damit diese Wegdeformation möglich ist, müssen zwei Voraussetzungen erfüllt sein. Zum einen muß $T$ eine analytische Funktion der Impulse sein, zum anderen darf das Wegstück $C''$ in Abb. 3.8 keinen Beitrag liefern. Beide Voraussetzungen sind erfüllt [44]. Die so modifizierte Streugleichung läßt sich ohne numerische Probleme lösen, die T-Matrix ist dann allerdings eine Funktion von zwei komplexen, bzw. von einem komplexen und einem reellen Impuls. Für viele Anwendungen der T-Matrix ist dies ausreichend, insbesondere auch für die Berechnung des $\pi NN$–Formfaktors. Dort wird sowohl über den Impuls des Anfangs- als auch über den des Endzustands integriert und die Integranden sind jeweils holomorphe Funktionen. Die Integrationen können dann auch entlang des komplexen Weges ausgeführt werden.

Anders ist dies für Integrale, die z.B. Größen wie $|T|^2$ enthalten. Dabei handelt es sich nicht um holomorphe Funktionen, und die Integration muß entlang der reellen Achse ausgeführt werden. Die aus Gl. (3.42) erhaltene T-Matrix läßt sich prinzipiell

durch eine weitere Iteration auf reelle Impulse transformieren:

$$\begin{aligned}\langle q' \,|\, T(s) \,|\, q \rangle &= \langle q' \,|\, B(s) \,|\, q \rangle \\ &+ \int \frac{d^3(pe^{i\varphi})}{(2\pi)^3 2\omega_{(pe^{i\varphi})}} \langle q' \,|\, B(s) \,|\, pe^{i\varphi} \rangle D(\sigma_{(pe^{i\varphi})}) \langle pe^{i\varphi} \,|\, T(s) \,|\, q \rangle \qquad (3.43) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad q, q' reell\end{aligned}$$

Da $B$ hier im Gegensatz zu Gl. (3.42) von einem reellen und einem komplexen Impuls abhängt, gibt es Werte für $q'$, so daß die komplexe Integrationskontur (Abb. 3.8) einen der Cuts von $B$ schneidet (vgl. etwa Abb. 3.7 b), c)). Der Integrand in Gl. (3.43) ist dann nicht mehr analytisch. Die Lösung dieses Problems ist kompliziert und soll hier nicht weiter verfolgt werden, da unser wesentliches Ziel, die Berechnung von Formfaktoren, auch mit komplexen Impulsen möglich ist.

# 4. Der $\pi NN$–Formfaktor

## 4.1. Das Konzept der Formfaktoren

Zur vollständigen Beschreibung der Vertizes gehört in unserem Modell neben der Vertexfunktion ein Formfaktor.

Ursprünglich eingeführt wurde dieser Formfaktor als rein phänomenologischer Faktor, um die Konvergenz der Streugleichung sicherzustellen. Nach dem heutigen Verständnis subhadronischer Strukturen läßt sich dem Formfaktor jedoch eine physikalisch wohldefinierte Bedeutung zuweisen.

Bis hierhin hatten wir die Wechselwirkung an den Vertizes als punktförmig betrachtet, was eine gute Näherung für kleine Energien darstellt, bei denen nur hadronische Freiheitsgrade relevant sind. Bei höheren Energien macht sich die ausgedehnte Struktur der wechselwirkenden Teilchen bemerkbar. Zum einen treten durch die zunehmende Überlappung der Wellenfunktionen direkte Quark-Gluon-Prozesse in Erscheinung. Die Parametrisierung dieser Effekte im Formfaktor ist weiterhin rein phänomenologisch, auch wenn es Versuche gibt, sie durch QCD-Rechnungen auf eine theoretische Grundlage zu stellen. Zum anderen enthält der Formfaktor mesonische Vertexkorrekturen. Im allgemeinen wird auch dieser Anteil phänomenologisch erfaßt, im Gegensatz zur Quark-Gluon-Struktur sind die zum Formfaktor beitragenden mesonischen Prozesse jedoch einer expliziten Berechnung zugänglich. Eine solche Rechnung führen wir in den folgenden Abschnitten für den $\pi NN$–Formfaktor durch.

Für die Vertizes der Austauschgraphen wählen wir in dieser Arbeit die übliche Form der Parametrisierung

$$F(Q^2) \;=\; \left[\frac{\Lambda^2 - m^2}{\Lambda^2 - Q^2}\right]^n \;\simeq\; \left[\frac{\Lambda^2 - m^2}{\Lambda^2 + \vec{Q}^2}\right]^n \quad , \tag{4.1}$$

wobei $n$ i.a. eins ist (Monopolform). Für den $\omega$–Austausch müssen wir mit $n = 2$ (Dipolform) allerdings ein stärkeres Abschneideverhalten wählen, um die Konvergenz der Intregralgleichung zu erreichen. $Q$ und $m$ bezeichnen Impuls und Masse des Austauschteilchens.

Für die Polgraphen verwenden wir die Form:

$$F(Q^2) \;=\; \left[\frac{\Lambda^2 + m^2}{\Lambda^2 + (\omega_\pi + \omega_\rho)^2}\right]^n \quad . \tag{4.2}$$

Die Vernachlässigung der nullten Komponente von $Q$ in Gl. (4.1) ist eine übliche, wenn auch nicht zwingend notwendige Näherung [7], ebenso wie die Tatsache, daß der Formfaktor nur als Funktion des ausgetauschten Impulses angesetzt wird.

$\Lambda$ ist die sogenannte Cut-Off-Masse, zunächst ein phänomenologischer Parameter, der steuert, wie schnell das Potential für $Q \to \infty$ abfällt. In dem oben besprochenen Rahmen läßt sich jedoch auch der Cut-Off-Masse ein physikalischer Sinn zuordnen. Man kann zeigen, daß die Cut-Off-Masse umgekehrt proportional zur Ausdehnung des Austauschteilchens ist. Durch die Bestimmung der Cut-Off-Masse lassen sich daher auch Aussagen über den Radius der beteiligten Hadronen machen.

## 4.2. Die Berechnung des $\pi NN$–Formfaktors

Die Struktur des $\pi NN$–Vertex ist für eine Reihe von Problemen der Mittelenergiephysik von Bedeutung, zu denen auch die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung gehört.

Die Wichtigkeit des $\pi NN$–Formfaktors liegt dabei in der Modifikation des Ein-Pion-Austauschpotentials, da dieses den dominanten Beitrag zum Tensor-Anteil der Wechselwirkung liefert. Im Rahmen des Bonn-Potentials [7] der NN-Wechselwirkung ergab der Fit an die experimentellen Daten eine Cut-Off-Masse $\Lambda_{\pi NN}$ von 1.3 $GeV$. Ein solcher Formfaktor unterdrückt das Potential nur für sehr große Impulse und führt so auf die zur Beschreibung der Daten notwendige starke Tensorkraft. Vorhersagen aus anderen Modellen liefern jedoch übereinstimmend Cut-Off-Massen $\Lambda_{\pi NN} < 1.0\ GeV$, im allgemeinen wird ein Wert von etwa 0.8 $GeV$ angegeben [19, 21] (in [45] wird für eine Dipolform eine Cut-Off-Masse von $\Lambda = 1150\ MeV$ angegeben, dies entspricht etwa einem 800 $MeV$ Monopol).

Wir untersuchen in dieser Arbeit die Struktur des $\pi NN$–Vertex, indem wir den Einfluß der Mesonwolke auf den resultierenden Formfaktor berechnen. Insbesondere berücksichtigen wir dabei den Einfluß der $\pi\rho$–Wechselwirkung.

Für die Berechnung des $\pi NN$–Formfaktors ist es prinzipiell erforderlich, die Beiträge aller möglichen mesonischen Prozesse zu berechnen und diese aufzuaddieren. In Abb. 4.1 sind einige mögliche Graphen dargestellt. Aus Gründen, die weiter unten erläutert werden, ist es eine gute Näherung, sich auf die in Abb. 4.1 a), b) und

c) gezeigten Graphen zu beschränken, Abb. 4.1 d) sowie kompliziertere Graphen höherer Ordnung werden vernachlässigt. Außerdem werden wir den in Abb. 4.1 b) dargestellten Beitrag des $\sigma$-Mesons in dieser Arbeit nicht berechnen, der mögliche Einfluß dieses Graphen wird in Kap. 6 diskutiert.

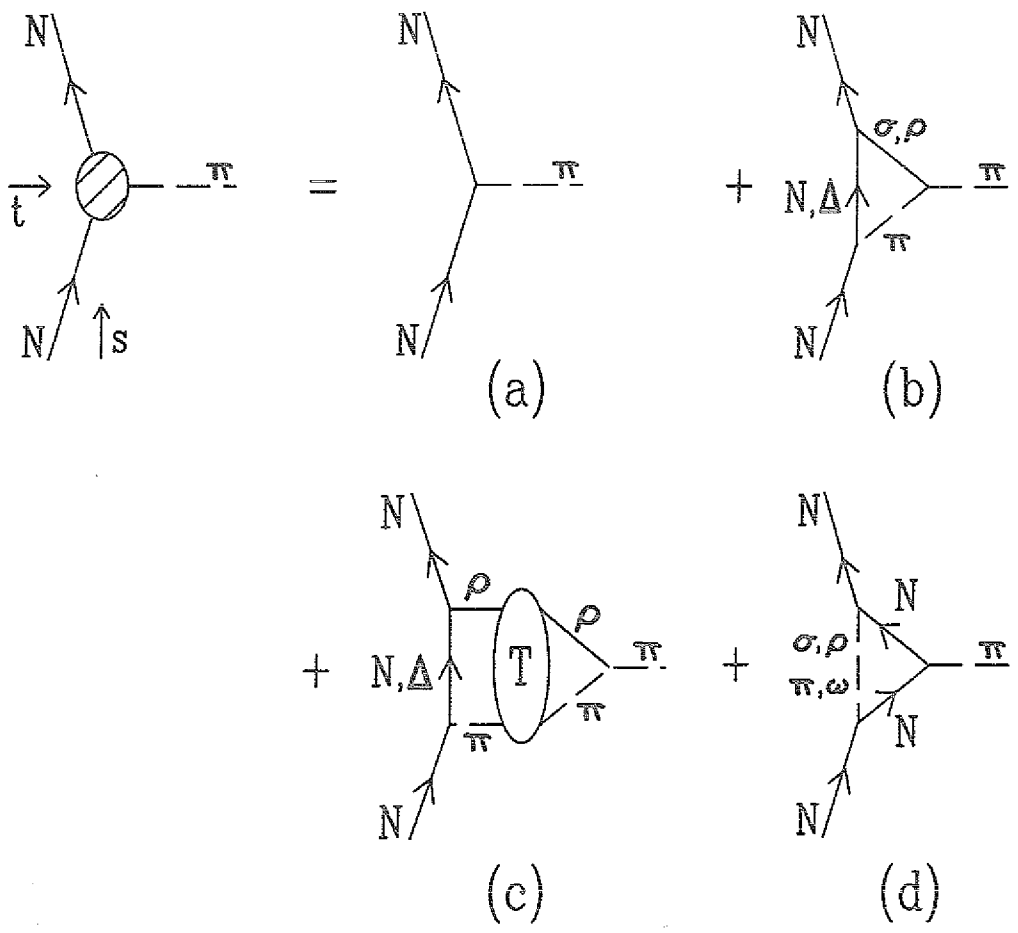



*Abb. 4.1: Beiträge zum $\pi NN$-Vertex*

Die Berechnung der mesonischen Beiträge erfolgt zunächst im t-Kanal, d.h. für den Prozeß $N\bar{N} \rightarrow \pi$. Die Prozesse aus Abb. 4.1 bilden eine Vertexfunktion $F_{N\bar{N}\rightarrow\pi}(t,p)$, die diese Beiträge enthält. $p$ ist dabei der CMS-Impuls im $N\bar{N}$-System. Im folgenden ist das $N\bar{N}$-System stets ein On-Shell-System, d.h. es gilt $p = p_0$ mit $t = \sqrt{p_0^2 + m_N^2} + \sqrt{p_0^2 + m_{\bar{N}}^2}$. $t$ kann allerdings durchaus kleiner $4m_N^2$

sein, $p_0$ ist dann rein imaginär. Obwohl das System On-Shell ist, handelt es sich nicht um ein physikalisches System. Anhand der Abb. 4.1 wird deutlich, daß für die gesamte Vertexfunktion $F$ gilt:

$$F^J_{N\bar{N}\to\pi}(t,p_0) \;=\; f^J_{0N\bar{N}\to\pi}(t,p_0) + \int dk k^2 f^J_{\pi\rho\to\pi}(t,k)\,\tilde{G}(t,k) V^J_{N\bar{N}\to\pi\rho}(t;k,p_0) \tag{4.3}$$

wobei $\tilde{G}(t,k)$ der $\pi\rho$–Propagator in der BbS-Form (Gl. (2.23)) ist. $f^J_{\pi\rho\to\pi}$ ist die 'gedresste' $\pi\rho \to \pi$ Vertexfunktion,

$$f^J_{\pi\rho\to\pi}(t,k) \;=\; f^J_{0\pi\rho\to\pi}(t,k) + \int dk' k'^2 f^J_{0\pi\rho\to\pi}(t,k')\tilde{G}(t,k') T^J_{\pi\rho\to\pi\rho}(t;k',k) \quad , \tag{4.4}$$

d.h. das Integral in Gl. (4.3) enthält bereits die Beiträge aus Abb. 4.1 b) und c).

Wenn die Breite des $\rho$–Mesons berücksichtigt werden soll, ist $\tilde{G}$ durch den Dreiteilchenpropagator $D$ zu ersetzen und die aus dem Dreiteilchenmodell bestimmte T-Matrix $T_{\pi\rho\to\pi\rho}$ zu verwenden. Die Integrationen müssen dann entlang des in die komplexe Ebene verschobenen Weges verlaufen.

Der Index $^J$ zeigt an, daß es sich bereits um die partialwellenzerlegten Vertexfunktionen handelt. Da wir den Übergang in ein Pion betrachten, ist $J = 0$. Prinzipiell kann der Spin im $N\bar{N}$-System zu $S = 0$ und $S = 1$ koppeln. Für den hier benötigten Fall $J = 0$ ist das Matrixelement für $S = 1$ jedoch Null [8,46]. Ähnliches gilt für das $\pi\rho$-System, für $J = 0$ ist nur die $L = 1$–Partialwelle nichtverschwindend. In Gl. (4.3) und (4.4) sind $L$ und $S$ daher nicht mehr explizit angegeben.

Die Berechnung der 'nackten' Vertexfunktionen $f^J_{0N\bar{N}\to\pi}$ und $f^J_{0\pi\rho\to\pi}$ ist in Anhang E ausgeführt. Das Potential $V^J_{N\bar{N}\to\pi\rho}$ wurde in der Jülicher Gruppe bereits berechnet [8,46], durch seine Verwendung in den Prozessen $N\bar{N} \to N\bar{N}$ und $N\bar{N} \to \pi\rho$ ließ sich gute Übereinstimmung mit den empirischen Daten erzielen. Um dieses Potential in dem hier verwendeten Formalismus benutzen zu können, sind einige Modifikationen notwendig. Diese finden sich ebenfalls in Anhang E.

Der Formfaktor $\Gamma(t)$ ergibt sich dann aus folgender Gleichung:

$$F^J_{N\bar{N}\to\pi}(t,p_0) \;=\; \Gamma(t)\; f^J_{0N\bar{N}\to\pi}(t,p_0) \quad ,$$

d.h.

$$\Gamma(t) \;=\; \frac{F^J_{N\bar{N}\to\pi}(t,p_0)}{f^J_{0N\bar{N}\to\pi}(t,p_0)} \quad . \tag{4.5}$$

Das in der Einleitung zu diesem Abschnitt geschilderte Interesse am $\pi NN$–Vertex bezog sich jedoch nicht auf den so erhaltenen Formfaktor im t-Kanal, sondern auf den im s-Kanal des NN-Systems, d.h. wir benötigen $\Gamma(t)$ für t-Werte auf der negativen reellen Achse.

Durch die Anwendung eines Dispersionsintegrals erhalten wir $\Gamma(t)$ auch für t-Werte, an denen wir es nicht direkt berechnen können. Voraussetzung dafür ist die Kenntnis der Unstetigkeit $disc(\Gamma(t))$ entlang der physikalischen Cuts. Wenn der Propagator $\tilde{G}$ in Gl. (4.3) der Zweiteilchenpropagator ist, so erzeugt dieser einen physikalischen Cut von $\Gamma(t)$, der entlang der reellen t-Achse für $t > (m_\pi + m_\rho)^2$ verläuft. Verwendet man an Stelle von $\tilde{G}(t,k)$ den Dreiteilchenpropagator $D(t,k)$, so besitzt $\Gamma(t)$ einen Cut entlang der reellen t-Achse für $t > (3m_\pi)^2$. In beiden Fällen ist $disc(\Gamma(t))$ entlang des Cuts durch $Im(\Gamma(t))$ gegeben, diese Größe heißt *Spektralfunktion.*

Die einfache Form des Dispersionsintegrals für $\Gamma$ lautet:

$$\Gamma(t) \;=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{9m_\pi^2}^{\infty} \frac{Im(\Gamma(t'))dt'}{t'-t} \quad . \tag{4.6}$$

Für das vorliegende Problem ist es jedoch günstiger, eine subtrahierte Dispersionsrelation zu verwenden. Diese lautet:

$$\Gamma(t) \;-\; \Gamma(t=m_\pi^2) \;=\; \frac{t-m_\pi^2}{\pi}\int\limits_{9m_\pi^2}^{\infty} \frac{Im(\Gamma(t'))dt'}{(t'-t)(t'-m_\pi^2)} \quad . \tag{4.7}$$

$\Gamma(m_\pi^2)$ heißt Subtraktionskonstante. Für $t = m_\pi^2$ ist das Pion ein physikalisches Teilchen, für den Formfaktor gilt dann $\Gamma(m_\pi^2) = 1$. Durch die Verwendung der subtrahierten Dispersionsrelation gewinnt man zum einen ein besseres Konvergenzverhalten des Dispersionsintegrals, zum anderen ist der Graph aus Abb. 4.1 a) durch die Subtraktionskonstante in Gl. (4.7) bereits berücksichtigt.

Zusammenfassend gilt also:

$$\Gamma(t) \;=\; 1 + \frac{t - m_\pi^2}{\pi} \int\limits_{9m_\pi^2}^{\infty} \frac{Im(\Gamma(t'))dt'}{(t' - t - i\epsilon)(t' - m_\pi^2)} \quad . \tag{4.8}$$

Jetzt erkennt man auch, warum es sinnvoll ist, sich auf die Graphen aus Abb. 4.1 a)-c) zu beschränken. So beginnt beispielsweise der Cut des Prozesses Abb. 4.1 d) erst bei $t = 4m_N^2$, dieser Beitrag wird daher durch die $t^{-2}$-Abhängigkeit des Dispersionsintegrals unterdrückt.

Die Integration in Gl. (4.8) wird bis zur $N\bar{N}$-Schwelle ausgeführt. Bei noch höheren Energien öffnen sich zahlreiche Teilchenkanäle, so daß etwa die Beschreibung der $\pi\rho$-Wechselwirkung mit Hilfe unseres relativ einfachen Modells unrealistisch wird. Es läßt sich zeigen, daß der Integrand hinreichend schnell abfällt, um die Wahl der oberen Integrationsgrenze zu rechtfertigen.

# 5. Renormierung der Polgraphen

Durch die Iteration der Polgraphen in der Streugleichung werden die Kopplungskonstante und die Masse des jeweiligen Austauschteilchens renormiert, erst dadurch erhalten sie ihre physikalischen Werte. Für das Pseudopotential der Polgraphen werden daher nicht-renormierte oder 'nackte' Größen verwendet.

Die physikalische Masse des $A_1$–Mesons liegt oberhalb der $\pi\rho$-Schwelle, die experimentellen Daten zeigen eine deutliche Resonanzstruktur. Für die Renormierung des $A_1$–Polgraphen ist es daher am sinnvollsten, nackte Masse und Kopplungskonstante so anzupassen, daß die Struktur der experimentellen Daten reproduziert wird. Dies wird in Kap. 6 diskutiert.

Für den $\omega$–Polgraphen ist eine solche Anpassung der Parameter an die empirischen Daten nicht möglich, da die physikalische $\omega$–Masse unterhalb der $\pi\rho$–Schwelle liegt. Wir werden daher im folgenden ein Verfahren diskutieren, das es erlaubt, die Renormierung explizit durchzuführen und so die nackten Größen zu bestimmen. Für die Anwendung dieses Verfahrens ist es von Bedeutung, ob das $\rho$-Meson als stabil oder als instabil betrachtet wird.

### (a) Der $\omega$–Polgraph für ein stabiles $\rho$

In diesen Fall läßt sich direkt das in [47] angegebene Verfahren anwenden, für ein stabiles $\rho$ ist die Renormierung des $\omega$–Mesons analog zur dort besprochenen Renormierung des Nukleon–Polgraphen im $\pi N$–System.

Das Potential eines Polgraphen lautet nach Partialwellenzerlegung

$$V^J(q',q;s) \;=\; f_0^J(q';s)\,d_0(s)\,f_0^J(q;s) \qquad ,$$

Zur besseren Übersichtlichkeit wird der Index $^J$ im folgenden unterdrückt.

Das gesamte Potential enthält im allgemeinen nicht nur den Polgraphen, sondern auch Nicht-Pol-Anteile. es gilt:

$$V \;=\; V^{np} + V^p \qquad .$$

(In diesem Abschnitt verwenden wir anstelle von 'separabel' bzw. 'nicht separabel' die Bezeichnungsweise Pol– bzw. Nicht-Pol-Anteil.)

In Anhang C ist gezeigt, daß die resultierende T-Matrix ebenfalls in einen Pol- und einen Nicht-Pol-Anteil zerfällt, es gilt:

$$T = T^{np} + f\,\tilde{d}\,f$$

$$\begin{aligned} T^{np} &= V^{np} + V^{np}\tilde{G}T^{np} \\ f &= f_0 + f_0\tilde{G}T^{np} \\ \tilde{d} &= (d_0^{-1} - \Sigma)^{-1} \\ \Sigma &= f_0\tilde{G}f \end{aligned} \tag{5.1}$$

$f_0$ ist in unserem Fall die 'nackte' $\pi\rho \to \omega$- (bzw. $\omega \to \pi\rho$) -Vertexfunktion, $f$ die entsprechende 'gedresste' Größe. $\Sigma$ bezeichnet man als Selbstenergie.

Der Pol-Anteil der T-Matrix hat also folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} T^p = f\frac{1}{s - m_0^2 - \Sigma(s)}f &= g_0^2\,\check{f}\frac{1}{s - m_0^2 - \Sigma(s)}\check{f} \\ \text{mit } g_0\check{f} &:= f \quad . \end{aligned} \tag{5.2}$$

$g_0$ bezeichnet dabei die nackte $\omega\pi\rho$–Kopplungskonstante in einer dimensionslosen Form, es gilt $g_0 := g_{0_{\omega\pi\rho}}\,m_\omega^2$. Entsprechendes gilt für $g$, außerdem steht $m_0$ für $m_{0_\omega}$.

Die nackte Masse erhält man aus dieser Beziehung durch die Forderung, daß der Pol-Anteil der T-Matrix einen Pol bei der physikalischen $\omega$–Masse haben muß.

Dies führt unmittelbar auf die Beziehung:

$$m_\omega^2 - m_0^2 - \Sigma(s = m_\omega^2) = 0 \quad . \tag{5.3}$$

$\Sigma(s)$ ergibt sich aus den Gln. (5.1) zu $\Sigma(s) = f_0\tilde{G}f$. Für $s = m_\omega^2$, also unterhalb der $\pi\rho$–Schwelle, hat $\tilde{G}$ keinen Pol, $\Sigma$ ist daher reell. Darin kommt zum Ausdruck, daß der Zerfall $\omega \to \pi\rho$ nur virtuell möglich ist, das $\omega$-Meson hat in diesem Modell keine Breite.

Aus der Herleitung der Gln. (5.1) folgt, daß alle Vertexfunktionen in diesen Gleichungen die nackte Kopplungskonstante $g_0$ enthalten, insbesondere gilt also auch

$\Sigma =: g_0^2 \check{\Sigma}$. Um anhand von Gl. (5.3) die nackte Masse zu bestimmen, muß daher zunächst die nackte Kopplungskonstante berechnet werden.

Dazu wird zunächst eine Taylorentwicklung für $\Sigma(s)$ durchgeführt:

$$\begin{aligned} \Sigma(s) &= \Sigma(m_\omega^2) + (s - m_\omega^2)\Sigma^1 + (s - m_\omega^2)^2\Sigma^2 \\ \Sigma^1 &:= \frac{\partial}{\partial s}\Sigma(s)|_{s=m_\omega^2} \quad . \end{aligned}$$

$\Sigma^2$ wird so gewählt, daß die Gleichheit gegeben ist.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad s - m_0^2 - \Sigma(s) &= s - m_0^2 - \Sigma(m_\omega^2) - (s - m_\omega^2)\Sigma^1 - (s - m_\omega^2)^2\Sigma^2 \\ &= (s - m_\omega^2)\left[1 - \Sigma^1 - (s - m_\omega^2)\Sigma^2\right] \\ &= (s - m_\omega^2)(1 - \Sigma^1)\left[1 - \frac{(s - m_\omega^2)\Sigma^2}{1 - \Sigma^1}\right] \quad , \end{aligned}$$

wobei Gl. (5.3) benutzt wurde. Damit erhält man für den Pol-Anteil der T-Matrix:

$$T^p = g_0^2 \check{f} \left\{ \frac{1}{s - m_\omega^2} K \left[1 - \frac{(s - m_\omega^2)\Sigma^2}{1 - \Sigma^1}\right]^{-1} \right\} \check{f} \quad , \tag{5.4}$$

wobei

$$K := \frac{1}{1 - \Sigma^1}$$

als *Renormierungskonstante* bezeichnet wird.

Diese Beziehung läßt sich nun vergleichen mit einer anderen Darstellung der T-Matrix, durch welche die physikalische Kopplungskonstante definiert wird:

$$\begin{aligned} T^s &= g^2 \check{f}_0 \frac{1}{s - m_\omega^2} \check{f}_0 \\ \text{mit } f_0 &:= g\check{f}_0 \quad . \end{aligned} \tag{5.5}$$

Neben dem Pol bei der physikalischen $\omega$-Masse müssen beide Darstellungen auch das gleiche Residuum an der Polstelle $s = m_\omega^2$ liefern. Aus Gl. (5.4) und Gl. (5.5) erhält man daher:

$$g^2 \check{f}_0^2 = g_0^2 \check{f}^2 K \quad .$$

Um schließlich aus dieser Beziehung $g_0$ zu bestimmen, muß noch berücksichtigt werden, daß $K$ von $g_0$ abhängt. Es gilt:

$$\begin{aligned} g^2 &= g_0^2 \frac{\check{f}^2}{\check{f}_0^2} \frac{1}{1 - g_0^2 \check{\Sigma}^1} \\ \Rightarrow \qquad g_0^2 &= \frac{g^2}{(\check{f}^2/\check{f}_0^2) + g^2 \check{\Sigma}^1} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Wir bestimmen mit dieser Beziehung zunächst die nackte Kopplungskonstante $g_0$ und im Anschluß daran mit Gl. (5.3) die nackte Masse $m_0$. Die dazu benötigte Vertexfunktion $f_{0_{\omega\to\pi\rho}}$ läßt sich aus dem in Kap.2 für den $\omega$–Polgraphen angegebenen Matrixelement durch Ausführung der Partialwellenzerlegung ausrechnen. Das Ergebnis lautet:

$$f_{0_{\omega\to\pi\rho}}(q) = \sqrt{g^2_{\omega\pi\rho}\, 32\pi^2 s}\;\; q\, F(q) \qquad .$$

Die Ergebnisse, die man aus Gl. (5.3) und Gl. (5.6) für nackte Masse und Kopplungskonstante erhält, hängen daher über den Formfaktor $F(q)$ von der verwendeten Cut-Off-Masse ab. Die im folgenden gezeigten Resultate des Renormierungsverfahrens sind aus diesem Grund als Funktionen der Cut-Off-Masse $\Lambda$ für den $\omega$–Polgraphen dargestellt.

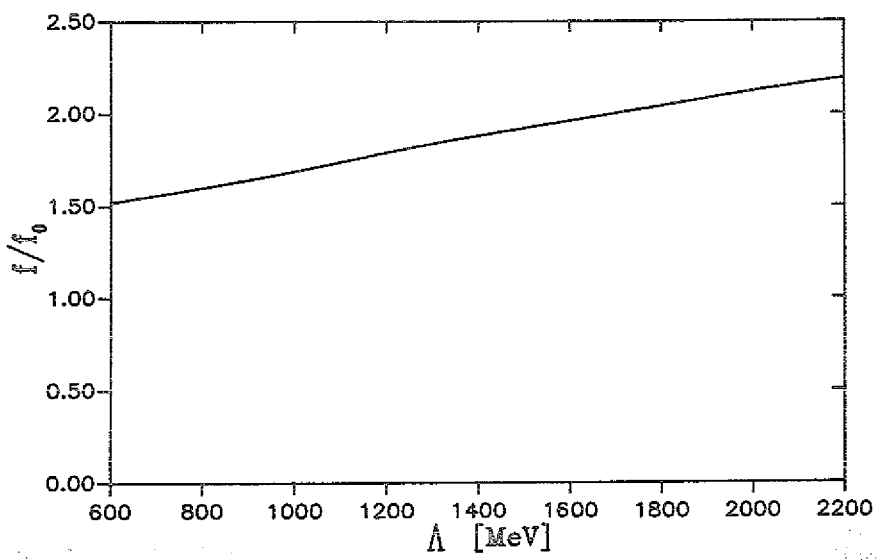



*Abb. 5.1: Das Verhältnis von gedresster zu nackter Vertexfunktion*

Abb. 5.1 zeigt das Verhältnis der gedressten zur nackten Vertexfunktion $\check{f}/\check{f}_0$. Wie man sieht, ist das Dressing der Vertexfunktion keineswegs vernachlässigbar. Die

Berücksichtigung dieses Dressings ist ein deutlicher Vorteil des in [47] dargestellten Verfahrens im Vergleich zum sogenannten Lee-Modell [48]. In diesem Modell wird ausschließlich der Polgraph iteriert, der Einfluß der Austauschgraphen wird vollständig vernachlässigt.

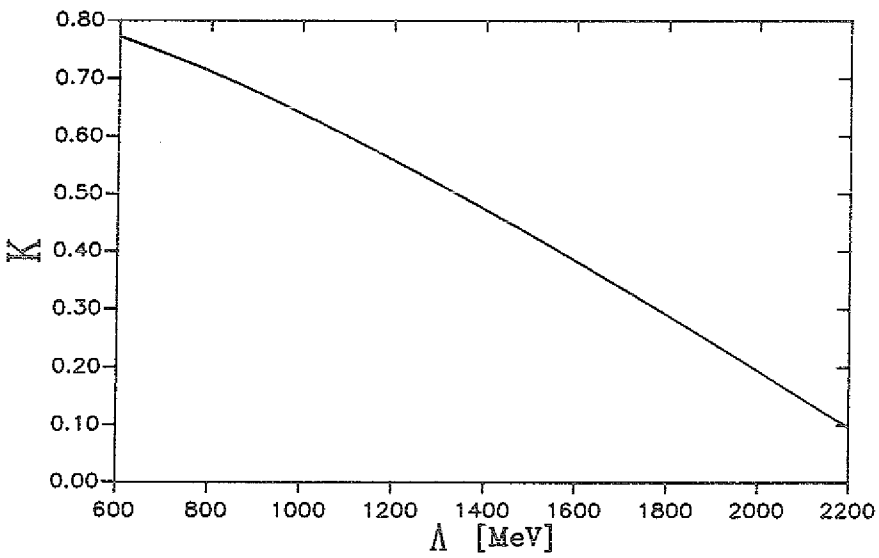



*Abb. 5.2: Die Renormierungskonstante $K$*

Abb. 5.2 zeigt die Renormierungskonstante $K$. Diese läßt sich als der Anteil des nackten Teilchens im physikalischen $\omega$–Meson interpretieren. Mit steigender Cut-Off-Masse nimmt mit der abschneidenden Wirkung des Formfaktors auch der Wert der Renormierungskonstanten immer weiter ab. Physikalisch wird bei zunehmender Cut-Off-Masse die Ausdehnung des Teilchens immer kleiner, Korrekturen durch mesonische Prozesse werden immer wichtiger. Der Verlauf der Renormierungskonstanten drückt dies aus, denn das oben beschriebene Verfahren berücksichtigt mit dem Zerfall $\omega \to \pi\rho$ gerade den wesentlichen mesonischen Beitrag zur Renormierung des $\omega$–Mesons.

Aus Abb. 5.3 und Abb. 5.4 lassen sich schließlich nackte Kopplungskonstante und Masse als Funktion der verwendeten Cut-Off-Masse ablesen. Die Größe $\Delta m$ ergibt

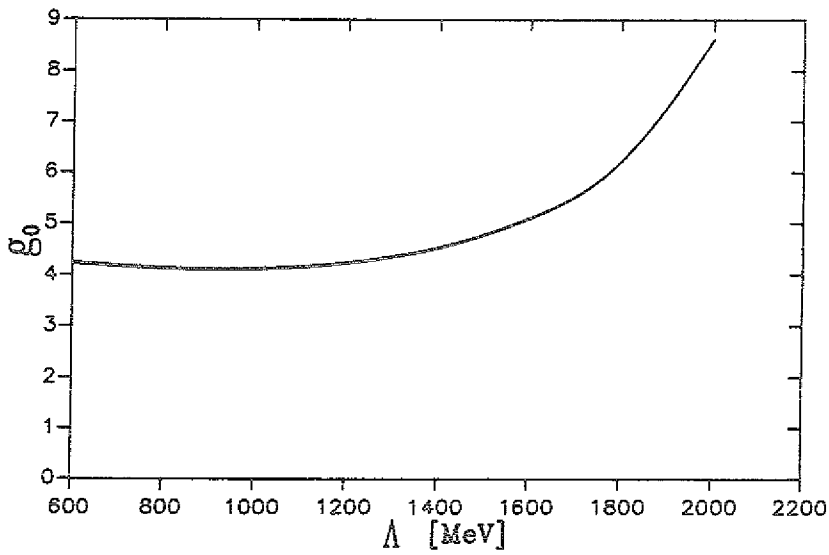



*Abb. 5.3: Die nackte Kopplungskonstante $g_0$*

sich dabei wie folgt aus Gl. (5.3):

$$
\begin{aligned}
m_\omega^2 - m_0^2 - \Sigma(m_\omega^2) &= 0 \\
\Rightarrow \quad m_0 &= \sqrt{m_\omega^2 - \Sigma(m_\omega^2)} \\
\Delta m &:= m_0 - m_\omega
\end{aligned}
$$

Wir verwenden für unser Modell eine Cut-Off-Masse von $\Lambda = 1.1\ GeV$ und erhalten damit für die nackten $\omega$–Parameter $m_0 = 946\ MeV$ und $g_0 = 4.17$.

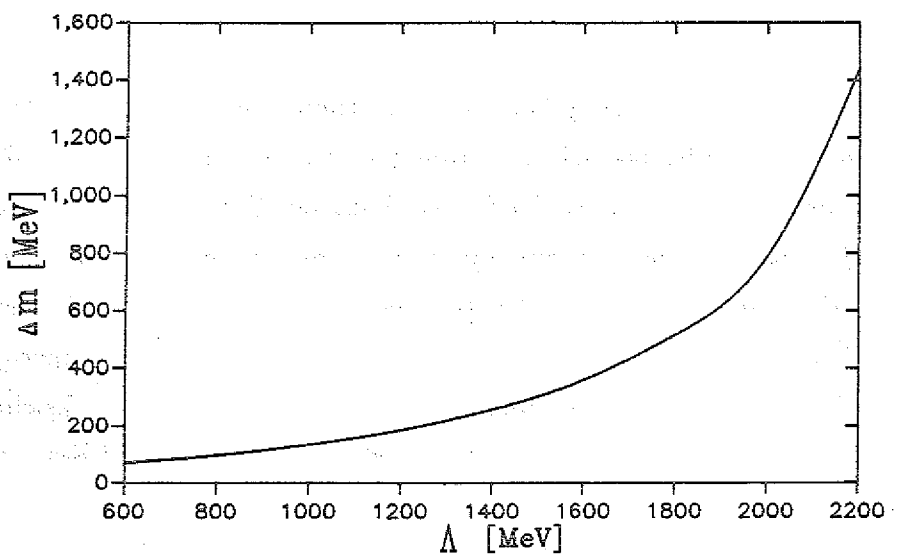



*Abb. 5.4: Die Massenverschiebung $\Delta m$*

### (b) Der $\omega$–Polgraph für ein instabiles $\rho$

Unter (a) wurde das $\omega$–Meson durch die Betrachtung von Selbstenergiebeiträgen der Art $\omega \to \pi\rho \to \omega \to \ldots$ renormiert. Der Zerfall $\omega \to \pi\rho$ ist dabei nur virtuell möglich, dementsprechend hat das $\omega$ in diesem Modell keine Breite. Das physikalische $\omega$–Meson besitzt jedoch eine Breite von $\Gamma_\omega = 8.4 MeV$, die im wesentlichen aus dem Zerfall in drei Pionen resultiert. Man geht davon aus, daß der dominante Prozeß der Zerfall über ein intermediäres $\pi\rho$–System ist, wie er in Abb. 5.5 gezeigt ist.

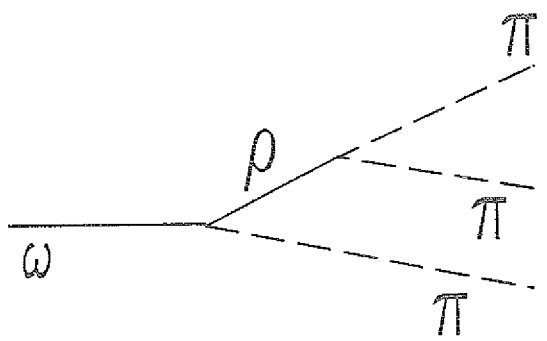



*Abb. 5.5: Der Zerfall des $\omega$–Mesons*

In Kap. 3 haben wir ein Modell diskutiert, das dem $\rho$–Zerfall im $\pi\rho$–System Rechnung trägt. Die Verwendung dieses Modells für die Renormierung des $\omega$–Mesons führt dazu, daß $\Sigma = f_0 \tilde{G} f$ durch $\Sigma = f_0 D f$ ersetzt wird, wobei $D$ der in Kap.3 diskutierte $\pi\rho$–Propagator ist. Im Gegensatz zu $\tilde{G}$ ist $D$ bereits ab der $3\pi$ Schwelle, also auch für $s = m_\omega^2$ komplex. In diesem Modell besitzt das $\omega$–Meson also eine Breite.

Der Ausdruck $\frac{1}{s-m_\omega^2}$ in Gl. (5.5) geht für ein 'breites' $\omega$ in folgenden Term über:

$$\frac{1}{s-(m_\omega - i\frac{\Gamma_\omega}{2})^2} = \frac{1}{s-m_\omega^2 + i\Gamma_\omega m_\omega} \qquad \text{da } m_\omega^2 \gg \frac{\Gamma_\omega^2}{4} \tag{5.7}$$

Dieser Ausdruck ist mit dem entsprechenden Term $\frac{1}{s-m_0^2-\Sigma(s)}$ aus Gl. (5.2) zu vergleichen. Im Gegensatz zu dem in (a) beschriebenen Modell legt hier die Forderung

nach einem Pol an der physikalischen Stelle $s = (m_\omega - i\frac{\Gamma_\omega}{2})^2$ sowohl $g_0$ als auch $m_0$ fest.

Es muß gelten:

$$m_\omega^2 - i\Gamma_\omega m_\omega \;=\; m_0^2 + \Sigma((m_\omega - i\frac{\Gamma_\omega}{2})^2)$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil erhält man zwei Bestimmungsgleichungen für $g_0$ und $m_0$.

Wir verwenden die gleiche Cut-Off-Masse wie unter (a) und erhalten folgende nackte Größen: $m_0 = 901\ MeV$; $g_0 = 2.5$.

# 6. Resultate und Diskussion

## 6.1. Die $\pi\rho$–Wechselwirkung

### 6.1.1. Experimentelle Situation

Die Instabilität des $\rho$–Mesons erhöht nicht nur den theoretischen Aufwand zur Beschreibung der $\pi\rho$–Wechselwirkung, sondern vor allem verhindert sie die direkte Messung von Daten der elastischen $\pi\rho$–Streuung. Man ist daher auf indirekte Schlüsse angewiesen.

Es gibt verschiedene Prozesse, aus denen man Informationen über die $\pi\rho$–Wechselwirkung extrahieren kann.

(a) $\tau$–Zerfall [15, 49]:

$$\tau \rightarrow \pi\pi\,\pi\,\nu \quad .$$

(b) Diffraktive Produktion eines $3\pi$-Systems [14, 13, 15]:

$$\pi^- p \rightarrow \pi^-\pi^+\pi^- p \quad ,$$

bzw. Ladungsaustauschreaktion [16]:

$$\pi^- p \rightarrow \pi^-\pi^0\pi^+ n \quad .$$

(c) Pion-Kern-Reaktionen [50]:

$$\pi^+ A \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+ A \qquad (A = Pb, Cu, ...) \quad .$$

Bei diesen Experimenten entsteht im Verlauf des Gesamtprozesses ein $\pi\rho$–System, das in das letztlich beobachtete $\pi\pi\pi$–System zerfällt. Aus der Verteilung der invarianten Masse dieses $\pi\pi\pi$–Systems erhält man dann Informationen über das $\pi\rho$–System.

Die so gewonnenen empirischen Daten sind zwar nicht so aussagekräftig wie etwa Streuphasen, die Parameter unseres Modells und seine Aussagekraft lassen sich jedoch durch einen Vergleich mit diesen empirischen Ergebnissen hinreichend gut bestimmen.

### 6.1.2. Die Berechnung von Observablen aus der T-Matrix

Das Ergebnis der in Kap. 2 und 3 ausgeführten Rechnungen war die Full-Off-Shell T-Matrix der $\pi\rho$–Wechselwirkung.

Bevor die Ergebnisse dieser Rechnungen diskutiert werden, sollen kurz einige Punkte in Zusammenhang mit der Ableitung von observablen Größen aus der T-Matrix erläutert werden.

Bei der Streuung zweier stabiler Teilchen sind die Streuteilchen physikalische Teilchen, ihr CMS-Impuls ist der durch

$$Z = \sqrt{m_\pi^2 + k_0^2} + \sqrt{m_\rho^2 + k_0^2}$$

definierte On-Shell-Impuls $k_0$. Dementsprechend wird die Streuung physikalischer Teilchen durch die On-Shell-T-Matrix $T(k_0, k_0; Z)$ beschrieben, diese ist auch Ausgangspunkt für die Berechnung von Observablen.

Diese Tatsache läßt sich auch etwas anders formulieren [51]: Betrachtet man den Imaginärteil des Propagators $\tilde{G}$ als Verteilungsfunktion für den Impuls, so kann man die physikalische Streuamplitude wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} T^{phys} &\sim \int\int dk_1 dk_2 Im\, \tilde{G}(k_1; Z) T(k_1, k_2; Z) Im\, \tilde{G}(k_2; Z) \\ &\sim T(k_0, k_0; Z) \quad , \end{aligned} \tag{6.1}$$

da der Imaginärteil des Propagators für stabile Teilchen die Gestalt einer $\delta$-Funktion hat (vgl. Abb. 3.5).

Für ein physikalisches (und damit instabiles) $\rho$ ist $\tilde{G}$ durch $D$ (Gl. (3.36)) zu ersetzen:

$$T^{phys} \sim \int\int dk_1 dk_2 Im\, D(k_1; Z) T(k_1, k_2; Z) Im\, D(k_2; Z) \quad . \tag{6.2}$$

Anhand von Abb. 3.5 erkennt man, daß dann der Impuls des $\rho$–Mesons nicht mehr beim On-Shell-Impuls konzentriert ist, sondern eine breite Verteilung aufweist. Der Begriff der On-Shell-T-Matrix ist daher nicht mehr definiert. Grundsätzlich ließen sich gemittelte Streuphasen und Observablen wie in Gl. (6.2) berechnen, so auch das für einen Vergleich mit den experimentellen Daten benötigte Massenspektrum. Wie in Kap. 3 erläutert wurde, war das Ergebnis unserer Rechnungen unter Berücksichtigung der Dreiteilchendynamik jedoch die T-Matrix als Funktion komplexer Impulse.

Da das Massenspektrum eine zu $|T|^2$ proportionale Größe und damit keine holomorphe Funktion der Impulse ist, lassen sich die Integrationen in Gl. (6.2) nicht entlang des komplexen Integrationsweges ausführen.

Wir werden daher zunächst anhand des einfachen $\pi\rho$-Modells einige wesentliche Aspekte der Wechselwirkung aufzeigen. Dazu berechnen wir aus der On-Shell-T-Matrix das Massenspektrum und vergleichen die theoretischen Resultate mit den experimentellen Daten. Dieses Modell, in dem das $\rho$ als stabiles Teilchen behandelt wird, sei im folgenden als Modell A bezeichnet.

Anschließend wird das volle $\pi\rho$–Modell untersucht, das die Einbeziehung der Dreiteilchendynamik gewährleistet (Modell B). Um die eben beschriebenen Schwierigkeiten bei der Berechnung von Observablen in diesem Modell zu vermeiden, werden wir uns darauf beschränken, anhand der Off-Shell-Potentiale und T-Matrizen aufzuzeigen, welche Änderungen sich im Vergleich zu Modell A ergeben.

### 6.1.3. Die $\pi\rho$–Wechselwirkung mit stabilem $\rho$

Ausgangspunkt unseres Modells sind die Lagrangedichten aus Kap. 2 und das daraus gewonnene Pseudopotential. Die Abb. 6.1 und 6.2 zeigen das von den Austauschgraphen erzeugte On-Shell- und Half-Off-Shell-Pseudopotential $V$ in drei Partialwellen, um anhand dieser Abbildung den Einfluß der einzelnen Graphen auf das Gesamtpotential zu untersuchen. Neben den Quantenzahlen des $\pi\rho$–Systems ist auch das entsprechende Meson aufgeführt, das durch die Quantenzahlen dieser Partialwelle charakterisiert ist.

Zunächst erkennt man, daß der $\omega$–Austausch in allen Partialwellen eine relativ geringe Rolle spielt, Unsicherheiten in der Kopplungskonstante und Cut-Off-Masse für diesen Graphen beeinflussen das Gesamtergebnis daher nur wenig.

Der $\rho$–Austausch erzeugt in allen Partialwellen Attraktion. In der $S^{11}$–Welle ist der $\rho$–Austausch der dominante Beitrag, $\pi$– und $\omega$–Austausch heben sich in dieser Partialwelle nahezu auf.

Der Pion-Austausch liefert aufgrund der geringen Pion-Masse einen langreichweitigen Beitrag und gewinnt dementsprechend in den $P$-Wellen an Bedeutung.

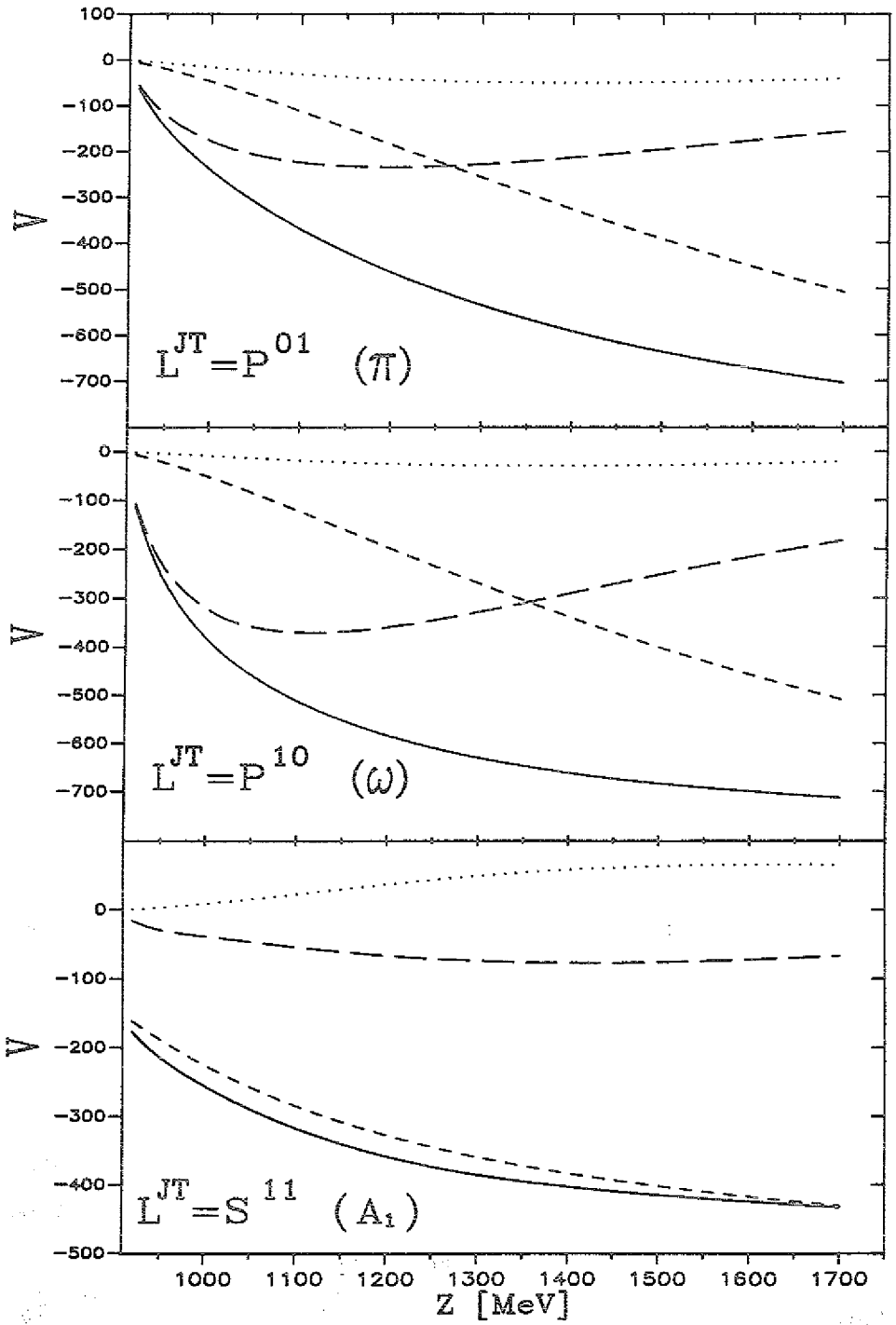



*Abb. 6.1: Beiträge zum On-Shell-Potential;*
*gepunktet: $\omega$-Austausch; kurz gestrichelt: $\rho$-Austausch;*
*lang gestrichelt: $\pi$-Austausch; durchgezogen: Summe der Austauschpotentiale*

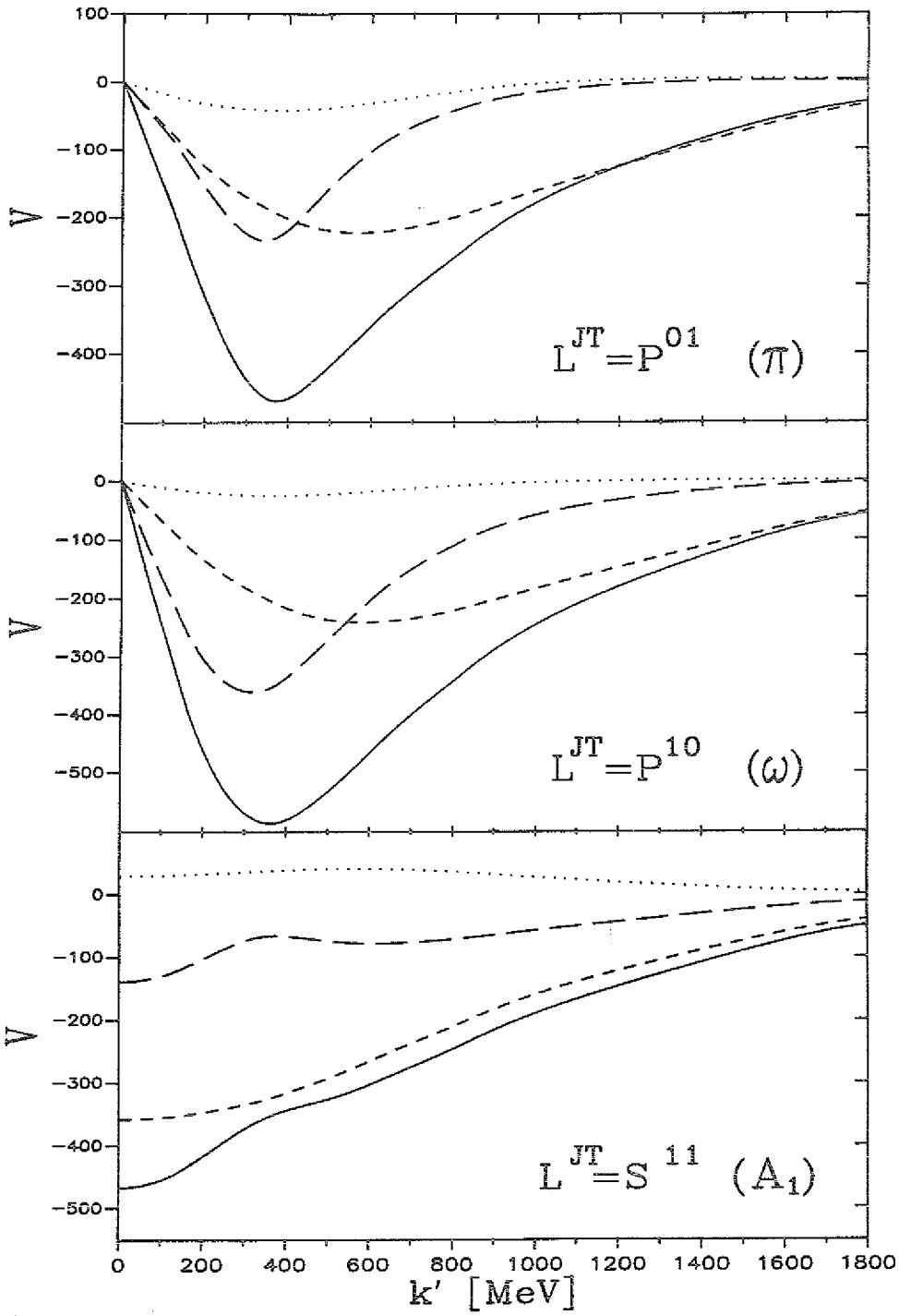



*Abb. 6.2: Beiträge zum Half-Off-Shell-Potential, $Z = 1.2\ GeV, k = k_0 = 334\ MeV$; gepunktet: $\omega$-Austausch; kurz gestrichelt: $\rho$-Austausch; lang gestrichelt: $\pi$-Austausch; durchgezogen: Summe der Austauschpotentiale*

In der $P^{10}$-Welle trägt zusätzlich zu dem in Abb. 6.1 gezeigten Potential der Austauschgraphen auch der $\omega$-Polgraph bei. Durch das in Kap. 5 erläuterte Renormierungsverfahren wurden die Parameter dieses Graphen (nackte Masse und Kopplungskonstante) so bestimmt, daß die T-Matrix bei $s = m_\omega^2$ einen Pol aufweist. Dieser Graph liefert einen repulsiven Beitrag zur Wechselwirkung in der $P^{10}$-Welle. In Abb. 6.3 ist der Aufbau der T-Matrix in dieser Welle gezeigt. Zusätzlich zum attraktiven Beitrag der Austauschgraphen, der aus dem in Abb. 6.1 gezeigten Potential resultiert, erkennt man den repulsiven Einfluß des $\omega$-Polgraphen.

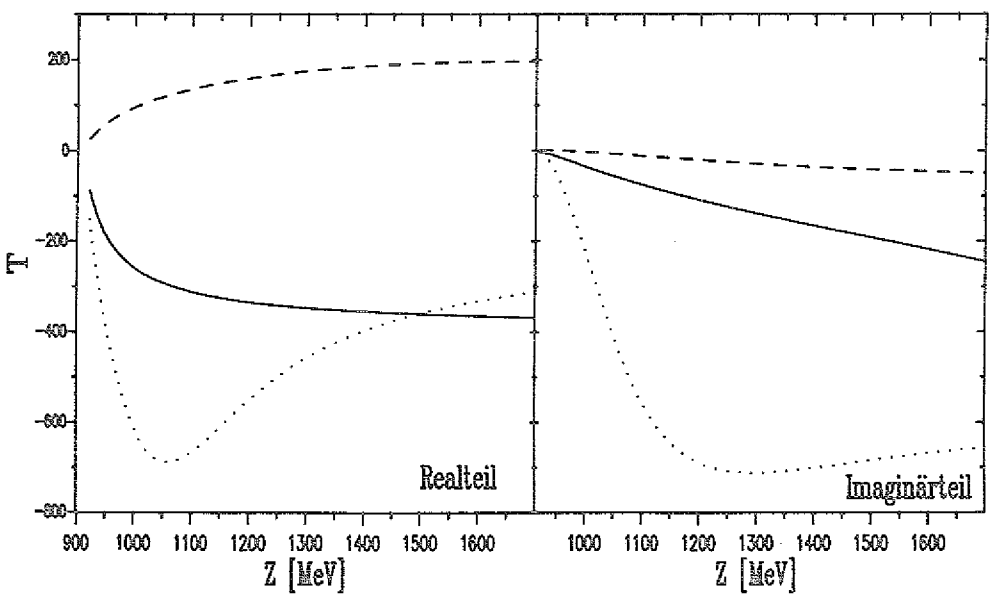



*Abb. 6.3: Die T-Matrix in der $P^{10}$-Welle;*
*gepunktet: nur Austauschgraphen; gestrichelt: nur $\omega$-Polgraph;*
*durchgezogen: das volle Modell*

Der letzte bisher nicht berücksichtigte Graph ist der $A_1$-Polgraph. Dieser trägt vor allem in der $S_{11}$-Welle bei, die Anteile in den D-Wellen sind praktisch zu vernachlässigen.

Die $S^{11}$-Partialwelle ist von besonderer Bedeutung und soll daher im folgenden ausführlicher diskutiert werden. Die experimentellen Daten aus den verschiedenen

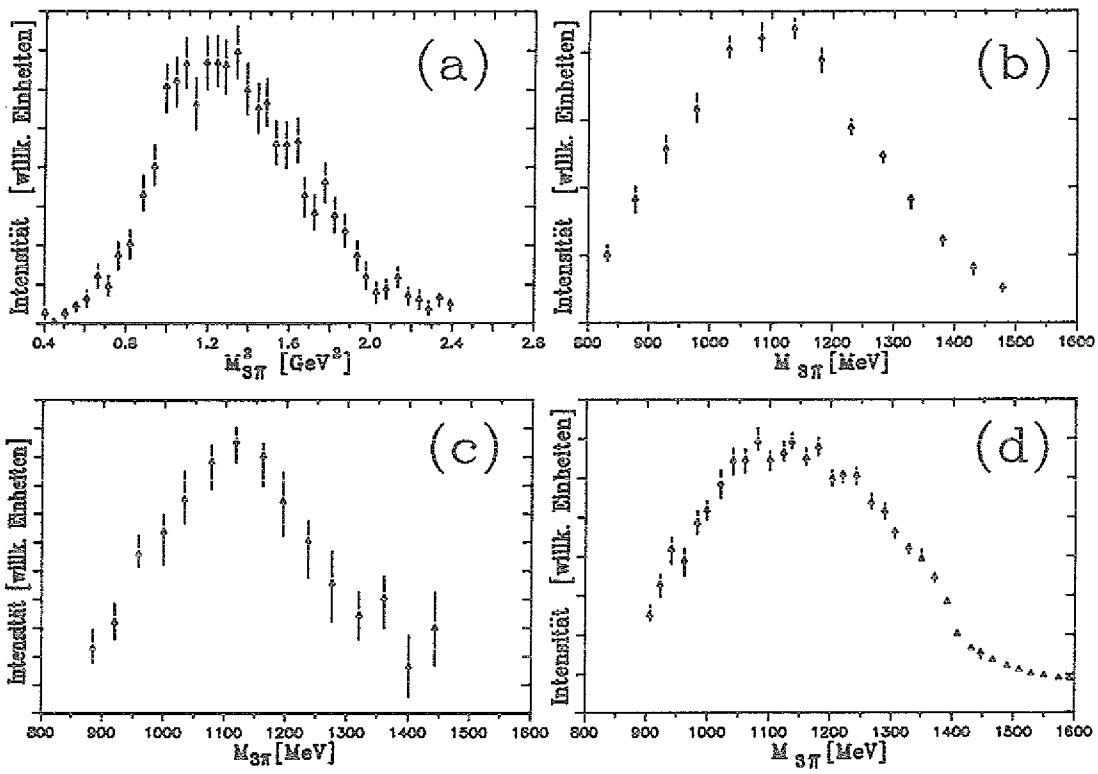



*Abb. 6.4: Experimentelle Daten im $S_{11}$-Kanal;*
*a) $\tau$-Zerfall* [52]*; b) Pion-Kern-Reaktionen* [50]*;*
*c) Ladungsaustauschreaktion* [16]*; d) Diffraktive Produktion* [14]

in Abschnitt (6.1.1) angegebenen Reaktionen zeigen in dieser Partialwelle eine ausgeprägte Resonanzstruktur, die auf die Existenz eines schweren Axialvektormesons hinweist (Abb. 6.4). Die Parameter dieses Mesons lassen sich relativ genau aus den $\tau$-Zerfallsdaten gewinnen, die heute akzeptierten Werte sind $m_{A_1} = 1.26 \pm 0.03\ GeV$ und $\Gamma_{A_1} \simeq 0.4\ GeV$ [53].

Die aus den hadronischen Prozessen extrahierten Parameter stimmten zunächst nicht mit diesen Werten überein, Masse und Breite lagen etwa 100 $MeV$ zu niedrig [14, 15]. Nachdem zeitweise sogar die Existenz eines genuinen $A_1$ angezweifelt wurde [14, 17], ließen sich die Ergebnisse aus den verschiedenen Experimenten schließlich durch Berücksichtigung von Untergrundeffekten für die hadronischen Prozesse in Übereinstimmung bringen [15, 53]. So wird beispielsweise in [16] das in Abb. 6.4 c) gezeigte Massenspektrum angegeben. Wenn bei der Analyse dieser Daten kein Untergrund berücksichtigt wird, so erhält man für das empirische $A_1$ eine Masse

von $m_{A_1} = 1.13\ GeV$. Die Einbeziehung eines solchen Untergrundes in die Analyse verschiebt die Masse zu einem Wert von 1.24 $GeV$ [16], in Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus dem $\tau$–Zerfall.

Unser Modell der $\pi\rho$-Wechselwirkung bietet die Möglichkeit zu einem besseren theoretischen Verständnis der geschilderten experimentellen Situation.

Zunächst untersuchen wir die Frage, ob die beobachtete Resonanzstruktur die Existenz eines genuinen Axialvektormesons erfordert, oder ob die durch die Austauschgraphen erzeugte Attraktion in der $S^{11}$–Partialwelle ausreicht, diese Struktur zu reproduzieren. Beispiele für die Erklärung experimentell beobachteter Resonanzstrukturen ohne die explizite Einführung genuiner Teilchen sind das in der Jülicher Gruppe behandelte $\Lambda(1405)$ im $K^-N$–System [9] und das $f_0(975)$ im $\pi\pi$–System [10].

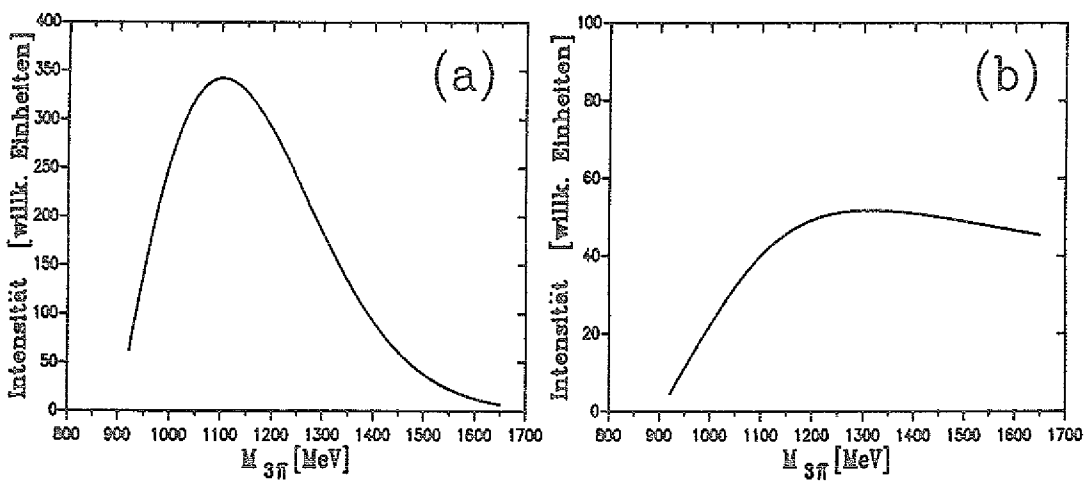



*Abb. 6.5: Das Massenspektrum in der $S^{11}$-Partialwelle;*
*a) bei Berücksichtigung von Austauschgraphen und $A_1$-Polgraph;*
*b) bei ausschließlicher Berücksichtigung von Austauschgraphen;*

In Abb. 6.5 a) ist das Massenspektrum für den Fall dargestellt, daß das Pseudopotential die Austauschgraphen *und* ein genuines Axialvektormeson in Form des $A_1$–Polgraphen enthält. Abb. 6.5 b) zeigt das Massenspektrum *ohne* Berücksichtigung des genuinen $A_1$. Ein Vergleich mit den experimentellen Daten zeigt deutlich,

daß die Existenz eines genuinen Axialvektormesons unumgänglich ist. Zwar erzeugt die Attraktion der Austauschgraphen einen Anstieg des Massenspektrums, ohne $A_1$–Polgraph besteht jedoch keinerlei Ähnlichkeit mit der Resonanzstruktur, wie sie die empirischen Daten zeigen.

Für den Einbau des genuinen $A_1$ in Form eines Polgraphen haben wir die in Gl. (2.7) angegebene Gradientenkopplung verwendet. In Kap. 2 wurde noch eine weitere Möglichkeit der Kopplung des $A_1$ an das $\pi\rho$–System angegeben (skalare Kopplung, Gl. (2.6)). Abb. 6.6 zeigt die $\pi\rho$–Streuphase im $S^{11}$–Kanal, die sich aus der Iteration des $A_1$–Polgraphen ergibt. Während die Streuphase für die Gradientenkopplung eine deutliche Resonanzstruktur zeigt und insbesondere für kleine Energien deutlich abfällt, steigt die Phase bei Verwendung der skalaren Kopplung unmittelbar an der Schwelle stark an. Nimmt man die Austauschgraphen zum Pseudopotential hinzu, so wird die Attraktion nahe der Schwelle viel zu stark, um noch die empirisch beobachtete Resonanzstruktur zu erzeugen. Die Situation ist vergleichbar mit dem Einbau einer $L^{JT} = S^{00}$–Resonanz in die $\pi\pi$–Wechselwirkung, auch dort mußte mit einer Gradientenkopplung gearbeitet werden [10]. Da sich dieses Problem auch durch Variation der Parameter nicht beheben läßt, verwenden wir nur die Gradientenkopplung.

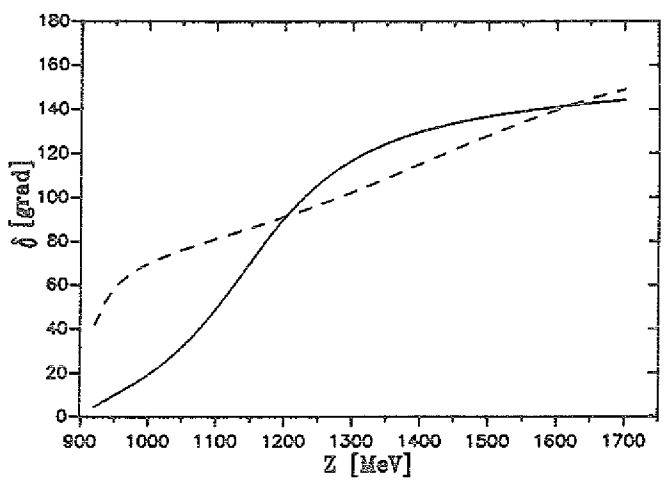



*Abb. 6.6: Streuphasen in der $S^{11}$-Welle ohne Berücksichtigung der Austauschgraphen; gestrichelt: skalare $A_1\pi\rho$-Kopplung; durchgezogen: Gradientenkopplung*

Wir kommen nun zur Diskussion der Untergrundeffekte, die berücksichtigt werden müssen, um die Ergebnisse der hadronischen Experimente in Übereinstimmung mit den Werten aus dem $\tau$–Zerfall zu bringen. Dazu erläutern wir zunächst, welche mikroskopische Vorstellung den experimentell untersuchten Prozessen zugrundeliegt.

Das $\tau$–Lepton zerfällt zunächst über die schwache Wechselwirkung in ein virtuelles $W$–Boson und ein Neutrino. Der anschließende Übergang $W \to \pi\pi\pi$ läßt sich in Analogie zum Vektordominanzmodell des Prozesses $\gamma \to \pi\pi$ verstehen, dies wird in folgender Abbildung deutlich:

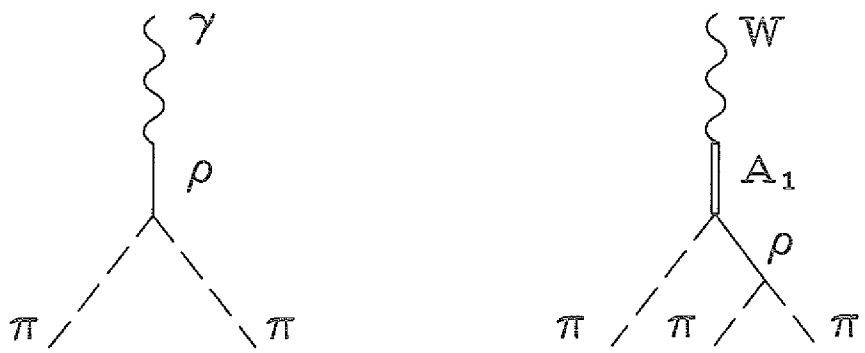



*Abb. 6.7: Vektordominanzmodell und der Prozeß $W \to \pi\pi\pi$*

Ähnlich wie im Vektordominanzmodell die direkte Kopplung des $\gamma$ an das $\pi\pi$–System als vernachlässigbar betrachtet wird, enthält das Modell für den $\tau$–Zerfall keine direkte $W\pi\rho$–Kopplung (Abb. 6.8).

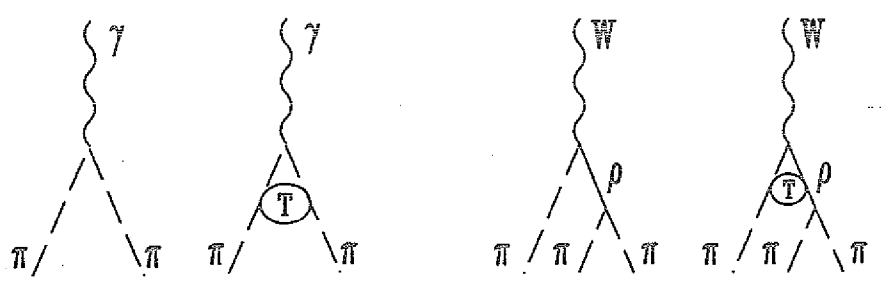



*Abb. 6.8: Graphen, die zu den entsprechenen Zerfällen* nicht *beitragen*

Für die hadronischen Prozesse betrachten wir exemplarisch die Ladungsaustauschreaktion, da sich diese am leichtesten analysieren läßt. Mikroskopisch kann man sie wie folgt verstehen:

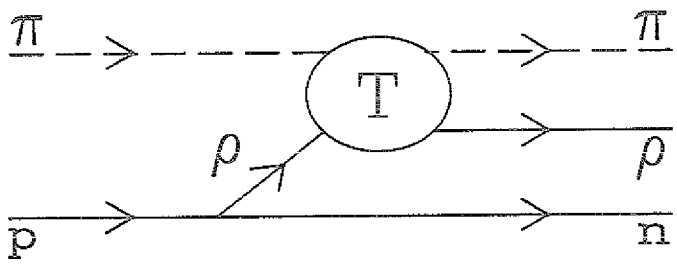



*Abb. 6.9: Mikroskopisches Modell der Ladungsaustauschreaktion*

Für die anderen hadronischen Experimente ist die $\pi\rho$–Wechselwirkung komplizierter in den Gesamtprozeß eingebunden, grundsätzlich lassen sich die folgenden Aussagen jedoch auf diese Prozesse verallgemeinern.

Betrachtet man die T-Matrix der $\pi\rho$–Wechselwirkung in der $S^{11}$–Partialwelle, so läßt sich diese in einen Pol- und einen Nicht-Pol-Anteil zerlegen, wie dies in Kap. 3 und Kap. 5 bereits erläutert wurde. Dies ist möglich, da das Pseudopotential $V$ sich auf die gleiche Weise zerlegen läßt, der Pol-Anteil von $V$ enthält den $A_1$–Polgraphen, der Nicht-Pol-Anteil die Austauschgraphen.

$$T = T^{np} + f\tilde{d}f \quad , \tag{6.3}$$

wobei die gedresste Vertexfunktion $f$ und der Propagator $\tilde{d}$ in Kap. 5 definiert wurden.

Es läßt sich zeigen, daß die Propagation des in Abb. 6.7 dargestellten $A_1$ durch den physikalischen Propagator $\tilde{d}$ erfolgt, und daß dieses physikalische $A_1$ über die gedresste Vertexfunktion $f$ in das $\pi\rho$–System übergeht. Der $\tau$–Zerfall enthält also im wesentlichen den Pol-Anteil der T-Matrix, der Nicht-Pol-Anteil geht *nicht* explizit ein. Dieser könnte nur beitragen, wenn es einen direkten Übergang $W \to \pi\rho$ gäbe, wie er in Abb. 6.8 dargestellt ist. Dagegen enthält der Ladungsaustauschprozeß offensichtlich beide Anteile der Gesamt-T-Matrix.

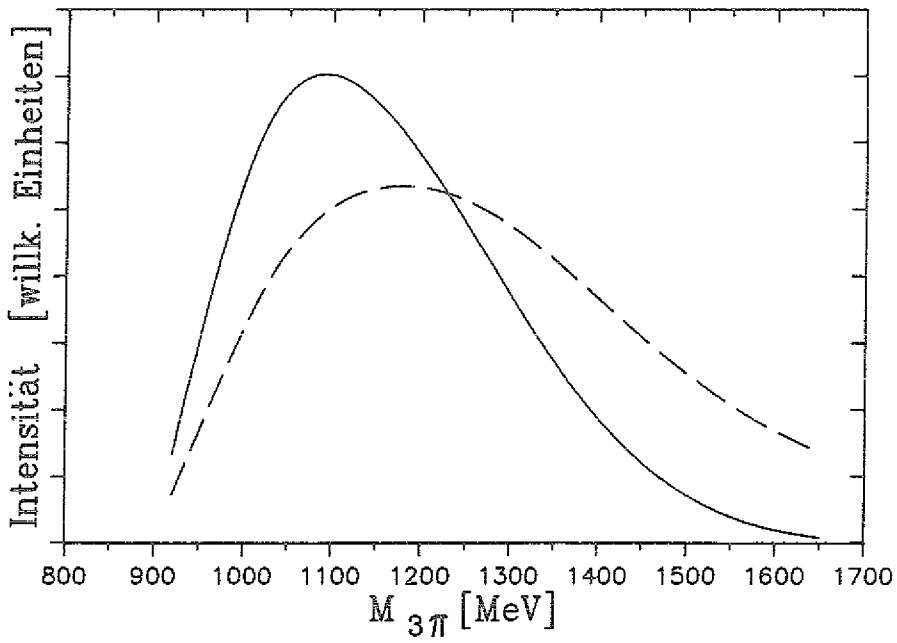



*Abb. 6.10: Das Massenspektrum in der $S^{11}$–Welle;*
*a) Bei ausschließlicher Berücksichtigung von $T^p$ (gestrichelt);*
*b) Bei Berücksichtigung der gesamten T-Matrix $T = T^{np} + T^p$ (durchgezogen);*

In Abb. 6.10 haben wir zunächst das Massenspektrum dargestellt, das sich bei alleiniger Berücksichtigung des Pol–Anteils der T-Matrix ergibt (gestrichelt). Dies ist der Anteil, der gleichermaßen in den $\tau$–Zerfall und in die hadronischen Prozesse eingeht. Gleichzeitig stellt dieser Anteil den Beitrag des *physikalischen* $A_1$ zur Gesamtamplitude dar. Wenn man Masse und Breite des $A_1$ aus der Form des Massenspektrums abschätzt, so erhält man $m_{A_1} \simeq 1.2\ GeV$ und $\Gamma_{A_1} = 400\ MeV$. Für eine genaue Bestimmung dieser Parameter müßte der Pol von $T^p$ in der komplexen Ebene bestimmt werden. Dies ist relativ kompliziert [54] und soll im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt werden. Wichtiger als der absolute Wert der $A_1$–Masse ist in dem hier besprochenen Zusammenhang jedoch der Einfluß von $T^{np}$ auf das Massenspektrum, auch dies ist in Abb. 6.10 gezeigt (durchgezogen). Man erkennt eine Verschiebung des Maximums um etwa 100 $MeV$ zu kleineren Energien hin. Nach dieser Verschiebung zeigt das Massenspektrum genau die experimentell beobachtete

Struktur aus Abb. 6.4 c). Damit liefert unser Modell eine physikalische Erklärung für die eingangs erwähnte Diskrepanz zwischen hadronischen Daten und der aus den Daten zum $\tau$–Zerfall extrahierten $A_1$–Masse.

Auch die Veränderung der Breite $\Gamma_{A_1}$ wird im mikroskopischen Modell verständlich. In [15] wird dargelegt, daß ohne Berücksichtigung von Untergrundeffekten die hadronischen Daten eine Breite von $\Gamma_{A_1} \simeq 300\ MeV$ liefern, im Widerspruch zu der aus dem $\tau$–Zerfall bestimmten Breite von $\Gamma_{A_1} \simeq 400\ MeV$. In Abb. 6.10 erkennt man, wie der Untergrund durch die Austauschgraphen $T^{np}$ dies erklärt. Bei ausschließlicher Betrachtung von $T^p$ liegt die Breite des $A_1$ etwa bei $\Gamma \simeq 400\ MeV$. Durch den Einfluß des in der gesamten Streuamplitude zusätzlich enthaltenen Untergrunds $T^{np}$ verringert sich die Breite des Massenspektrums auf den in den hadronischen Prozessen experimentell beobachteten Wert von $\Gamma \simeq 300\ MeV$.

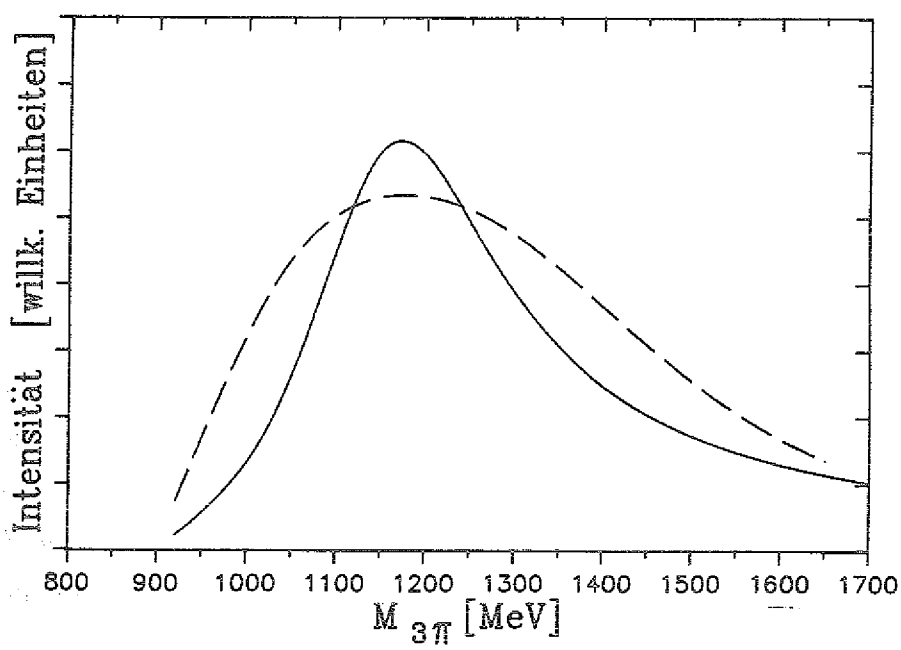



*Abb. 6.11: Das Massenspektrum in der $S^{11}$–Welle;*
*a) Bei Berücksichtigung von $T^p$ (gestrichelt);*
*b) Bei ausschließlicher Berücksichtigung des $A_1$–Polgraphen (durchgezogen)*

Die Tatsache, daß in Prozesse wie den $\tau$–Zerfall der Nicht-Pol-Anteil der T-Matrix nicht explizit eingeht, bedeutet keineswegs, daß die Austauschgraphen hier keine Rolle spielen. Über das Dressing der Vertexfunktionen wirken sich die Austauschgraphen implizit auch auf den Pol-Anteil der T-Matrix aus. In Abb. 6.11 ist das aus $T^p$ resultierende Massenspektrum mit dem verglichen, das sich ergibt, wenn nur der $A_1$–Polgraph iteriert wird, also keinerlei Einfluß der Austauschgraphen berücksichtigt wird. Man erkennt, daß die Austauschgraphen sich auch ohne Berücksichtigung von $T^{np}$ deutlich auf die Form des Massenspektrums auswirken. Dieser Einfluß könnte für theoretische Modelle von Bedeutung sein, die wie der $\tau$–Zerfall auf der 'Axialvektordominanz' beruhen. Ein Beispiel dafür ist der axiale Formfaktor des Nukleons.

### 6.1.4. Die $\pi\rho$–Wechselwirkung für ein instabiles $\rho$-Meson

In diesem Abschnitt wird das in Kap. 3 entwickelte Modell der $\pi\rho$–Wechselwirkung (Modell B, instabiles $\rho$) mit dem bisher besprochenen Modell A (stabiles $\rho$-Meson) verglichen. Dieser Vergleich erfolgt anhand der Off-Shell-Potentiale und T-Matrizen. Ohne Zweifel ergeben sich die wichtigsten Änderungen für den Pion-Austausch, im Grunde läßt sich dieser Graph nur unter Einschluß der Dreiteilchendynamik korrekt behandeln. Wie in Kap. 3 erläutert wurde, führt die Propagatorstruktur für den Pion-Austausch dazu, daß das Potential zu diesem Graphen Cuts aufweist. Abb. 6.12 zeigt einen Vergleich der Off-Shell-Potentiale des Pion-Austauschs von Modell A und Modell B. Deutlich ist die Singularitätenstruktur des Potentials für Modell B zu erkennen. Die Änderungen in der Struktur der Potentiale sind sehr groß, die Größenordnung bleibt jedoch in etwa gleich. Für die Aussagen des letzten Abschnitts, die sich im wesentlichen auf die $S^{11}$-Welle bezogen, war der Pion-Austausch nicht von Bedeutung. Ihre Gültigkeit wird daher durch die in Abb. 6.12 gezeigten Änderungen nicht berührt. Anders ist dies für die Berechnung des $\pi NN$-Formfaktors. In der $P^{01}$-Welle liefert der Pion-Austausch einen deutlichen Beitrag, dementsprechend groß sind die Änderungen die sich bei Verwendung von Modell B anstelle von Modell A ergeben. Für die Untersuchung des $\pi NN$–Vertex verwenden wir daher stets das volle Modell B.

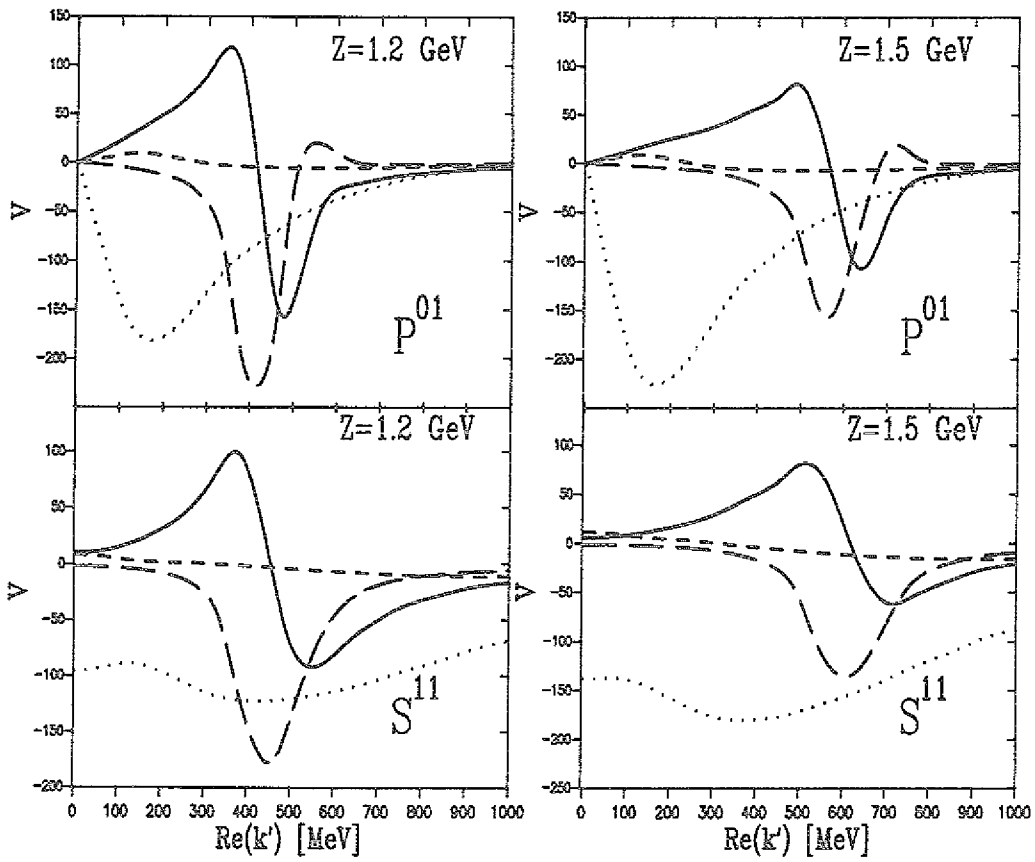



*Abb. 6.12: Off-Shell-Potentiale für den Pion-Austausch, $k = 152$ MeV; durchgezogen/langgestrichelt: Real/Imaginärteil von V für Modell B; kurzgestrichelt/gepunktet: Real/Imaginärteil von V für Modell A*

Für die restlichen Graphen sind die Unterschiede zwischen Modell A und Modell B nicht so gravierend. Exemplarisch ist in Abb. 6.13 das Off-Shell-Potential für den $\rho$-Austausch dargestellt. Neben Modell A (durchgezogen) sind dabei zwei verschiedene Off-Shell-Verhalten für Modell B gezeigt. In Kap. 3 wurde erläutert, wie sich das Off-Shell-Verhalten bei Berücksichtigung der Dreiteilchendynamik aus der Reduktion der Bethe-Salpeter-Gleichung ergibt. Die lang gestrichelte Linie zeigt das Potential, wenn diese Off-Shell-Struktur verwendet wird. Für den $\omega$-Austausch führt die Benutzung dieses Off-Shell-Verhaltens allerdings zu unphysikalischen Singularitäten. Da der $\omega$–Graph jedoch in allen Partialwellen nur eine untergeordnete Rolle spielt, ist es sicherlich vertretbar, den $\omega$-Propagator durch den statischen Pro-

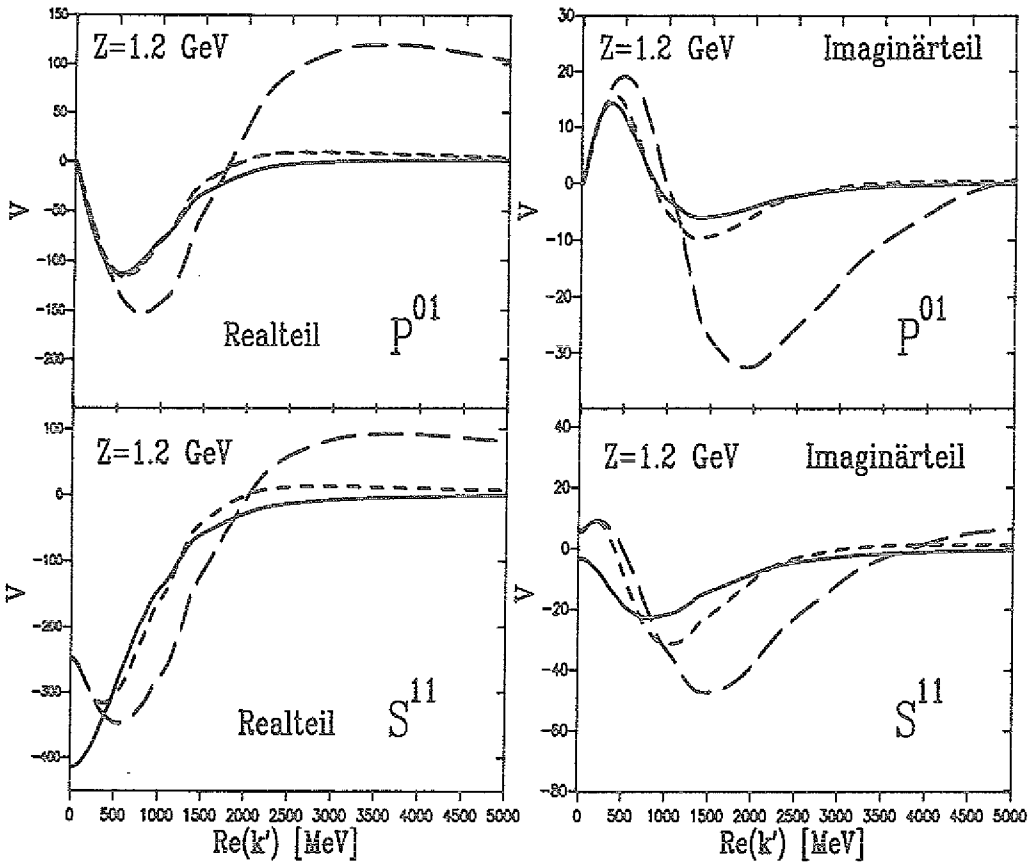



*Abb. 6.13: Off-Shell-Potentiale für den Rho-Austausch, $k = 152\ MeV$;*
*lang gestrichelt: Off-Shell-Verhalten aus Kap. 3;*
*kurz gestrichelt: wie lang gestrichelt, jedoch statischer $\rho$-Propagator;*
*durchgezogen: BbS-Off-Shell-Verhalten*

pagator zu nähern und so die Ursache der Singularitäten zu beseitigen. Versuchsweise haben wir dies auch für den $\rho$-Austausch durchgeführt, es ergibt sich die kurz gestrichelte Kurve. Man erkennt, daß die Unterschiede zwischen Modell A und Modell B vor allem durch die unterschiedliche Form der Propagatoren im Potential erzeugt werden. Allerdings sind diese Unterschiede nur gravierend für große Impulse, bei der Iteration werden sie daher durch die abschneidende Wirkung des Propagators in der Streugleichung unterdrückt. Bei der Berechnung des $\pi NN$-Formfaktors haben wir beide Off-Shell-Verhalten getestet, es ergeben sich nur kleine Unterschiede.

In Abb. 6.14 ist die Off-Shell-T-Matrix für die verschiedenen Off-Shell-Verhalten von

Modell B sowie für Modell A dargestellt. Dabei wurden ausschließlich die Austauschgraphen iteriert. Wiederum wird deutlich, daß die Verwendung der Dreiteilchendynamik starke Änderungen in der Off-Shell-Struktur bewirkt, und daß sich besonders gravierende Modifikationen durch die Singularitätenstruktur des Pion-Austauschs ergeben. Es zeigt sich, daß der Pion-Austausch zwar auch die T-Matrix in der $S_{11}$–Partialwelle stark beeinflußt, daß die attraktive Struktur der Wechselwirkung in dieser Partialwelle jedoch erhalten bleibt. Die im letzten Abschnitt getroffenen Aussagen über die Analyse des $A_1$–Mesons bleiben daher mit vermutlich nur leichten Modifikationen gültig.

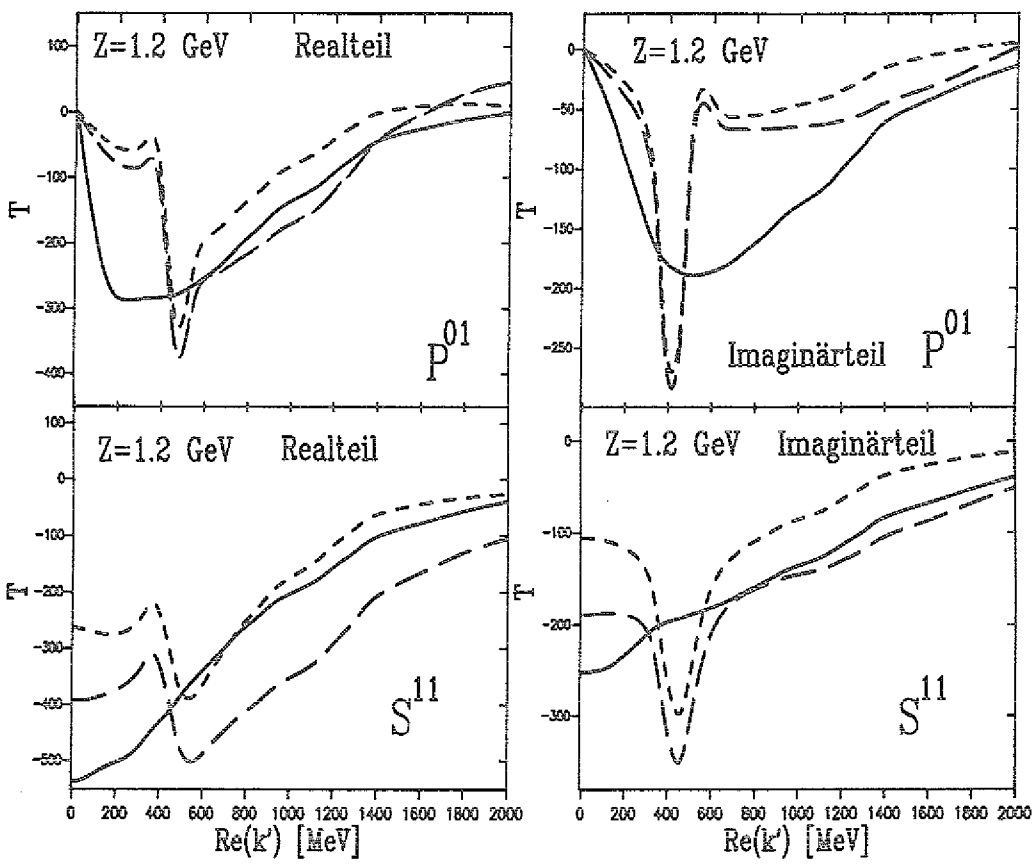
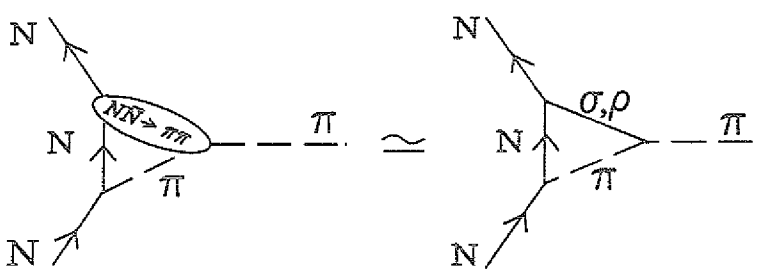



*Abb. 6.14: Off-Shell-T-Matrix, nur Austauschgraphen iteriert, $k = 152$ MeV;*
*lang gestrichelt: Off-Shell-Verhalten aus Kap. 3;*
*kurz gestrichelt: wie lang gestrichelt, jedoch statischer ρ-Propagator;*
*durchgezogen: BbS-Off-Shell-Verhalten*

## 6.2. Der $\pi NN$–Formfaktor

Es existieren verschiedene Arbeiten, die zur Untersuchung des $\pi NN$–Formfaktors Methoden benutzen, die den von uns verwendeten ähnlich sind. Dabei werden jedoch nur die in Abb. 4.1 a) und b) gezeigten Graphen miteinbezogen. In [55] und [56] werden auf diese Weise hadronische Korrekturen zur Goldberger-Treiman-Relation [24] berechnet. Ueda [19] untersucht, vergleichbar mit unserer Zielrichtung, die Rolle des $\pi NN$-Vertex in der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung, wenn auch mit anderen Methoden. In der letztgenannten Arbeit wird eine Cut-Off-Masse $\Lambda_{\pi NN}$ von 0.73 GeV angegeben (Monopol).

Unsere Arbeit baut vor allem auf der von Durso et al. in [57] dargestellten Rechnung auf. Dort wird im Grunde ebenfalls der Beitrag von Abb. 4.1 a) und b) berechnet, wobei allerdings $\rho$ und $\sigma$ im Gegensatz zu den bisher genannten Arbeiten nicht als stabile Teilchen behandelt werden. Stattdessen wird die $N\bar{N} \to \pi\pi$-Amplitude verwendet, mit der sich Abb. 4.1 b) wie folgt darstellen läßt:




Alle bisher erwähnten Arbeiten betrachten den Graphen in Abb. 4.1 b) als 'One-Loop-Correction' zum punktförmigen $\pi NN$-Vertex. An den einzelnen Vertizes dieses 'Loops' werden keine Formfaktoren verwendet. Da nur der Imaginärteil von $\Gamma(t)$ interessiert, führt dies nicht auf Konvergenzprobleme, denn der Imaginärteil des Propagators bei der Integration über den $\pi\rho$-Zwischenzustand ist proportional zu einer $\delta$-Funktion. Dieses Vorgehen ist analog zur Anwendung der *Landau-Cutcosky-Regeln.*

In Abb. 6.15 ist ein Vergleich unserer Rechnung mit dem Ergebnis von Durso et al. gezeigt. Wir haben dazu zunächst ebenfalls auf Formfaktoren verzichtet und die $\pi\rho$-Wechselwirkung nicht betrachtet. Darüberhinaus haben wir zunächst den Propagator für ein stabiles $\rho$ verwendet. Für den $\pi NN$-Vertex benutzen wir Pseudovek-

torkopplung, die nach den bisherigen Erfahrungen der Jülicher Gruppe im Vergleich zur pseudoskalaren Kopplung eine realistischere Beschreibung darstellt. Durso et al. geben die Spektralfunktion zwar nur für pseudoskalare $\pi NN$–Kopplung an, für ein tensorgekoppeltes $\rho$–Meson bleibt das Ergebnis beim Übergang zu Pseudovektorkopplung aber praktisch unverändert, so daß hier ein Vergleich mit unserer Rechnung möglich ist. Es ergibt sich gute Übereinstimmung der Resultate, die Näherung des stabilen $\rho$ ist hier sehr gut. In [57] wurde ein ähnlicher Vergleich durchgeführt, das Ergebnis entsprach genau dem hier erzielten, vgl. auch Fig. 2 in [57]. Für Vektorkopplung am $\rho NN$–Vertex ist ein Vergleich schwierig, da die Spektralfunktion in [57] nur bis $t = 75\ m_\pi^2$ angegeben ist und die Unterschiede zwischen pseudoskalarer und pseudovektorieller $\pi NN$–Kopplung hier nicht vernachlässigbar sind. Qualitativ besteht jedoch Übereinstimmung der Resultate. In Abb. 6.15 ist erkennbar, daß die

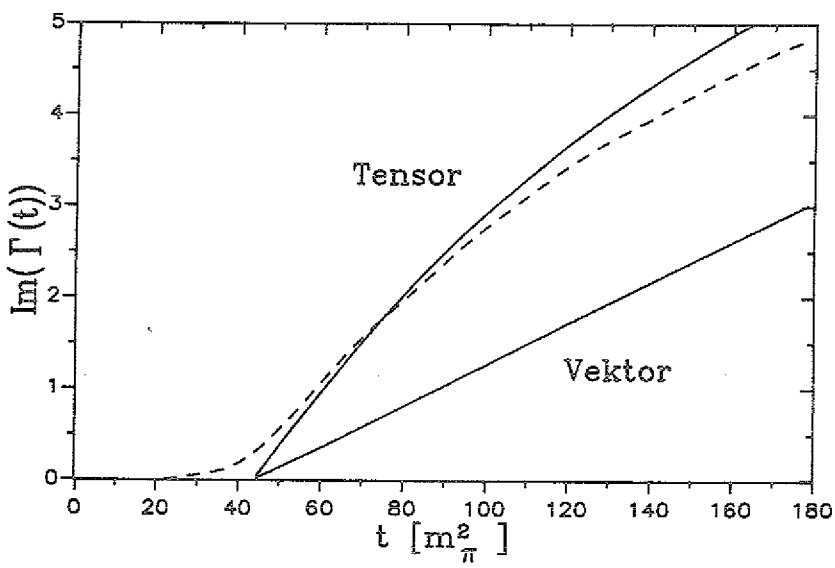



*Abb. 6.15: Die Spektralfunktion $Im\,\Gamma(t)$ (durchgezogen);*
*Für ein tensorgekoppeltes $\rho$ ist zum Vergleich das Ergebnis von Durso et al. dargestellt (gestrichelt)*

Spektralfunktion $Im\,\Gamma(t)$ für Vektorkopplung linear ansteigt, während der Zuwachs für Tensorkopplung schwächer ist. Dies führt auf Schwierigkeiten bei der Berechnung von $\Gamma(t)$ im $s$-Kanal, da für linearen Anstieg von $Im\,\Gamma(t)$ das Dispersionsintegral

divergiert. Durso et al. führen daher eine Cut-Off-Prozedur durch, die dieses Problem beseitigt, aber insbesondere für eine pseudovektorielle $\pi NN$-Kopplung relativ willkürlich ist. Die von uns verwendete Lösung wird weiter unten erläutert.

Im Hinblick auf die Berücksichtigung der $\pi\rho$-Wechselwirkung erscheint die bisherige Rechnung ohne jeglichen 'internen' Formfaktor zweifelhaft. Für den Übergang von der nackten $\pi\rho \to \pi$-Vertexfunktion $f_0$ zur gedressten Vertexfunktion $f$ ist eine Integration über $\pi\rho$-Zwischenzustände erforderlich. Ohne Formfaktor ist diese Integration nicht konvergent, der Realteil von $f$, der zu $Im\,\Gamma(t)$ beiträgt, ist dann nicht wohldefiniert.

Wenn man aber zur Lösung dieses Problems einen $\pi\rho\pi$-Formfaktor einführt, so stellt sich die Frage nach Formfaktoren an den restlichen beiden Vertizes ($\pi NN$ und $\rho NN$). Während die Einführung des $\rho NN$-Formfaktors problemlos ist wollen wir den $\pi NN$-Formfaktor gerade ausrechnen. Dabei ist hier allerdings auch eines der Nukleonen Off-Shell, so daß Form und Cut-Off-Masse dieses Formfaktors nicht dem bisher betrachteten $\pi NN$-Vertex entsprechen müßten. Die physikalische Vorstellung, die der in Kap. 4 beschriebenen Methode zur Berechnung des $\pi NN$–Formfaktors zugrundeliegt, besteht darin, daß der Einfluß des 'Quark-Gluon-Bags' als vernachlässigbar betrachtet wird. Die Ausdehnung der beteiligten Teilchen ist somit ein Effekt der Mesonwolke, die diese Teilchen umgibt. Wenn man, wie wir es tun, für den $\pi NN$–Vertex die Beiträge der Mesonwolke bis zu einer gegebenen Ordnung ausrechnet, ist es daher sinnvoll, alle innerhalb dieser Rechnung auftauchenden, 'internen' $\pi NN$–Vertizes als punktförmig anzunehmen. Wir verwenden also 'interne' $\pi\rho\pi$– und $\rho NN$–Formfaktoren, jedoch keinen $\pi NN$–Formfaktor bei der Berechnung der Graphen in Abb. 4.1 b) und c).

Abb. 6.16 zeigt den Einfluß der internen Formfaktoren auf die Spektralfunktion, wobei wiederum die $\pi\rho$-Wechselwirkung nicht betrachtet wurde. Für den $\rho NN$–Formfaktor haben wir dabei Form und Cut-Off-Masse aus dem $N\bar{N} \to \pi\rho$–Potential übernommen [46], mit dem die empirischen Daten für diesen Prozeß gut beschrieben werden konnten. Aus einer Analyse des elektromagnetischen Pion-Formfaktors ließ sich der Formfaktor des $\pi\pi \to \rho$–Vertex sehr genau bestimmen [58]. Auch wenn der uns interessierende $\pi\rho \to \pi$–Vertex eine andere Off-Shell-Struktur aufweist, sollten Formfaktortyp und Größenordnung der Cut-Off-Masse in etwa mit dem Ergebnis

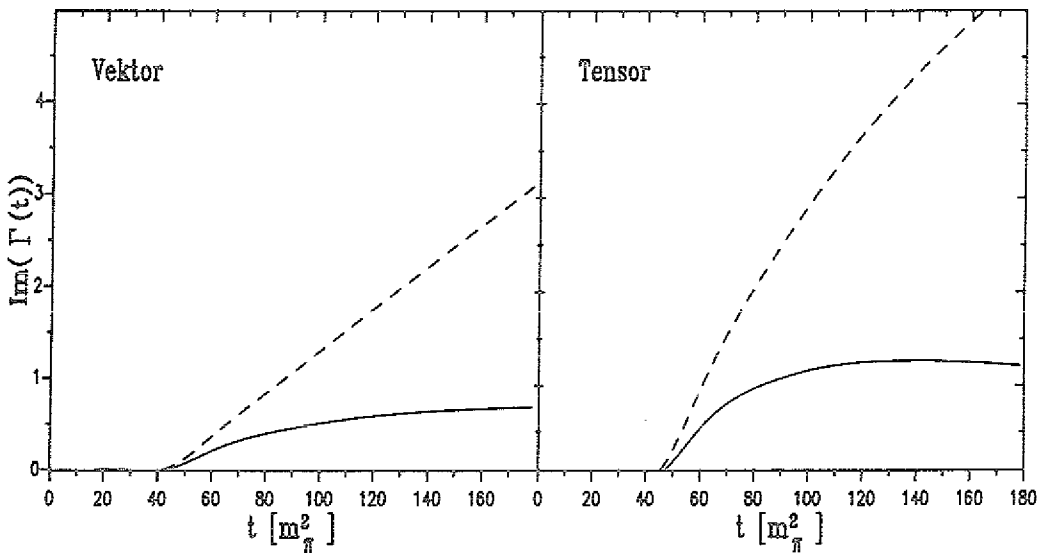



*Abb. 6.16: Der Einfluß von 'internen' Formfaktoren auf die Spektralfunktion;*
*gestrichelt: keine Formfaktoren;*
*durchgezogen: $\pi\rho\pi$- und $\rho NN$-Formfaktoren berücksichtigt;*

aus [58] übereinstimmen. Anhand von Abb. 6.16 erkennt man eine deutliche Beeinflussung der Spektralfunktion, wobei der Effekt auf $\Gamma(t)$ nicht ganz so gravierend ist, wie er hier erscheint, da die Spektralfunktion im Dispersionsintegral noch mit $\frac{1}{t^2}$ gewichtet wird. Es sei darauf hingewiesen, daß der resultierende $\pi NN$–Formfaktor durch die Einführung der internen Formfaktoren 'härter' wird, die Cut-Off-Masse sich also vergrößert.

In Abb. 6.16 zeigt sich ein weiterer Vorteil der internen Formfaktoren, die Spektralfunktion für ein vektorgekoppeltes $\rho$ steigt jetzt schwächer als linear an, die Konvergenzprobleme im Dispersionsintegral sind damit in physikalisch sinnvoller Weise behoben.

Abb. 6.17 a) zeigt die gesamte resultierende Spektalfunktion $Im\,\Gamma(t)$ (Tensor+Vektor). Bisher hatten wir die in Abb. 4.1 b) und c) dargestellten Graphen, bei denen anstelle des Nukleons ein $\Delta$–Isobar ausgetauscht wird, nicht berücksichtigt. In Abb. 6.17 a) ist gezeigt, daß die Einbeziehung dieser Graphen nur einen kleinen Einfluß auf die Spektralfunktion und damit auf den Formfaktor hat. Darüberhinaus

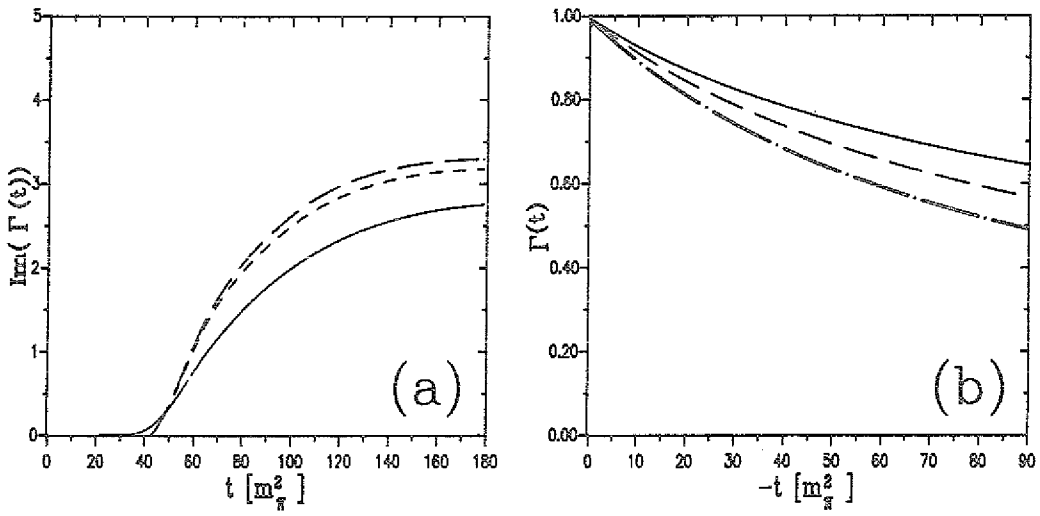



*Abb. 6.17: $Im\,\Gamma(t)$ und $\Gamma(t)$ in unserem Modell;*
*a): kurz gestrichelt: stabiles $\rho$, kein $\Delta$; lang gestrichelt: stabiles $\rho$, $\Delta$ berücksichtigt; durchgezogen: instabiles $\rho$, $\Delta$ berücksichtigt;*
*b): wie a), zum Vergleich ist die Monopolparametrisierung mit $\Lambda = 1.3$ GeV eingezeichnet (strichpunktiert)*

ist in dieser Abbildung dargestellt, welche Auswirkungen es hat, wenn der Propagator $\tilde{G}$ in Gl. (4.3) durch den Propagator $D$ ersetzt wird, der die Breite des $\rho$-Mesons berücksichtigt. Man erkennt, daß die Spektralfunktion jetzt auch für $t < (m_\pi + m_\rho)^2$ nicht verschwindet, dieser Beitrag ist jedoch sehr klein. Insgesamt sind die Werte von $Im\,\Gamma(t)$ für ein zerfallendes $\rho$ kleiner als für ein stabiles $\rho$, auch dies in Übereinstimmung mit [57].

Der Formfaktor im raumartigen Bereich, d.h. für $t$-Werte kleiner als Null, ist in Abb. 6.17 b) dargestellt. Wie bereits anhand der Spektralfunktion zu sehen war, ist der Formfaktor für ein stabiles $\rho$ 'softer', d.h. die Cut-Off-Masse $\Lambda$ ist kleiner. Zum Vergleich ist in Abb. 6.17 b) die Monopolparametrisierung

$$\Gamma(t) = \frac{\Lambda^2 - m_\pi^2}{\Lambda^2 - t}$$

des Formfaktors für $\Lambda = 1.3\ GeV$ gezeigt. Für das stabile $\rho$ erhalten wir für $\Gamma(t)$ eine Monopolform mit $\Lambda \simeq 1.5\ GeV$, für das instabile $\rho$ ist $\Lambda$ noch größer. Während Durso et al. einen Wert von $\Lambda \simeq 1.2\ GeV$ angeben (Pseudovektor-$\pi NN$-Kopplung), erhalten wir durch die Einführung der internen Formfaktoren deutlich größere Werte.

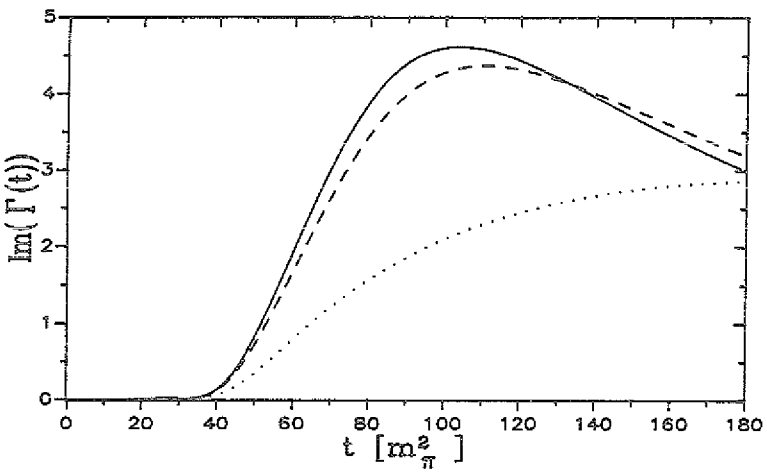



*Abb. 6.18: Der Einfluß der $\pi\rho$–Wechselwirkung auf $Im\,\Gamma(t)$;*
*gepunktet: ohne $\pi\rho$–Wechselwirkung;*
*durchgezogen/gestrichelt: bei Berücksichtigung der $\pi\rho$–Wechselwirkung für zwei verschiedene Off-Shell-Verhalten;*

Wir wenden uns nun dem Einfluß der $\pi\rho$-Wechselwirkung auf den $\pi NN$-Formfaktor zu (Abb. 4.1 c)). Wir werden uns dabei auf die Betrachtung des $\pi\rho$-Modells B beschränken, in dem der Zerfall des $\rho$-Mesons berücksichtigt ist. Für dieses Modell wurden im letzten Abschnitt zwei unterschiedliche Arten von Off-Shell-Struktur diskutiert. Abb. 6.18 zeigt die Spektralfunktion $Im\,\Gamma(t)$ für diese beiden Off-Shell-Verhalten, außerdem zum Vergleich die Spektralfunktion ohne Berücksichtigung der $\pi\rho$–Wechselwirkung. Man erkennt, daß die $\pi\rho$–Wechselwirkung einen starken Einfluß auf die Spektralfunktion hat, die Unterschiede zwischen den beiden untersuchten Off-Shell-Verhalten sind dagegen nicht sehr groß. Für die weitere Diskussion verwenden wir daher das in Kap. 3 angegebene Off-Shell-Verhalten (durchgezogene Linie in Abb. 6.18).

In Abb. 6.19 ist dieses Ergebnis für den raumartigen und den zeitartigen Bereich

des Formfaktors zusammenfassend dargestellt. Die $\pi\rho$–Wechselwirkung bewirkt eine deutliche Verschiebung der Cut-Off-Masse zu kleineren Werten hin. Wie man sieht, entspricht der von uns berechnete Formfaktor etwa einer Monopolparametrisierung mit einer Cut-Off-Masse von $\Lambda \simeq 1.0\ GeV$. Noch besser läßt sich das Ergebnis mit einer Dipolform parametrisieren, $\Lambda$ beträgt dann etwa $1.4\ GeV$.

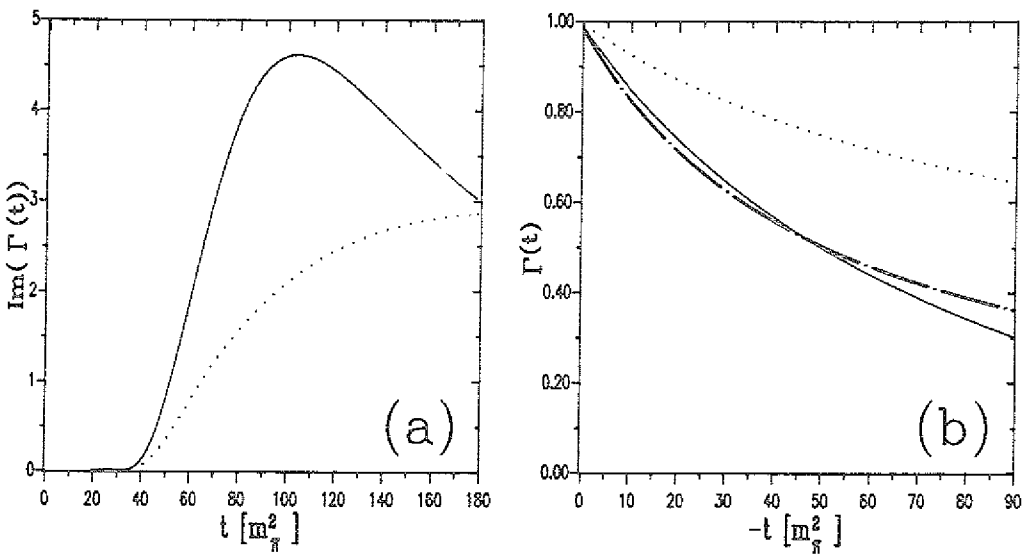



*Abb. 6.19: Der Einfluß der $\pi\rho$–Wechselwirkung auf $Im\,\Gamma(t)$ und $\Gamma(t)$;*
*a)/b) gepunktet: ohne $\pi\rho$–Wechselwirkung;*
*durchgezogen: $\pi\rho$–Wechselwirkung berücksichtigt;*
*b) strichpunktiert: zum Vergleich die Monopolparametrisierung mit $\Lambda = 1.0\ GeV$*

Die Einbeziehung der $\pi\rho$–Wechselwirkung bei der Untersuchung des $\pi NN$–Vertex führt also auf einen deutlich 'softeren' Formfaktor. Natürlich gibt es Unsicherheiten in unserem Modell, die es nicht sinnvoll erscheinen lassen, als Ergebnis unserer Rechnungen einen präzisen Wert für die Cut-Off-Masse des $\pi NN$–Vertex anzugeben. Es läßt sich jedoch sagen, daß der Beitrag der $\pi\rho$–Wechselwirkung auf keinen Fall vernachlässigbar ist und daß wir unter Berücksichtigung dieses Beitrages einen Formfaktor erhalten, der im Bereich der Vorhersagen anderer theoretischer Modelle

liegt. Darüber hinaus ist zu berücksichtigen, daß wir durch die Einführung der internen Formfaktoren von vorneherein einen 'härteren' Formfaktor erhalten als die bisherigen Arbeiten. Der Beitrag der $\pi\rho$–Wechselwirkung bewirkt dann, daß sich im Endeffekt eine relativ kleine Cut-Off-Masse ergibt. In diesem Sinne läßt sich unsere Rechnung als Abschätzung für die obere Grenze der Cut-Off-Masse auffassen.

In Abb. 4.1 b) war zusätzlich zu dem von uns betrachteten '$\rho$–loop' der Beitrag des $\sigma$–Mesons dargestellt, den wir bisher nicht betrachtet haben. In den eingangs erwähnten Arbeiten wurde dieser Beitrag zum Teil berücksichtigt, allerdings mit sehr unterschiedlichen Ergebnissen. In den Arbeiten, die das $\sigma$ als stabiles Teilchen betrachten, ist dieser Graph wichtig, er liefert sogar einen größeren Beitrag als der entsprechende $\rho$-Graph. Dagegen kommen Durso et al. zu dem Ergebnis, daß der $\sigma$–Beitrag schon bei pseudoskalarer $\pi NN$–Kopplung kleiner ist als der entsprechende $\rho$–Beitrag und bei pseudovektorieller Kopplung praktisch zu vernachlässigen ist. Da dort mit einem physikalischen, sehr breiten $\sigma$ gerechnet wird, ist das Ergebnis der physikalischen Realität möglicherweise näher. Übereinstimmung besteht darin, daß der Beitrag des $\sigma$–Mesons den $\pi NN$-Formfaktor 'softer' macht.

Schließlich gibt es noch weitere, von uns nicht betrachtete Beiträge zum $\pi NN$–Formfaktor. Dazu zählen vor allem die Effekte höher liegender Cuts. In Abb. 6.20 sind Diagramme gezeigt, deren Cut bei $4m_N^2$ beginnt. Durso et al. schätzen die Beiträge dieser Cuts ab, sie kommen zu dem Ergebnis, daß solche Diagramme zu einer weiteren, nicht zu vernachlässigenden Absenkung der Cut-Off-Masse führen.

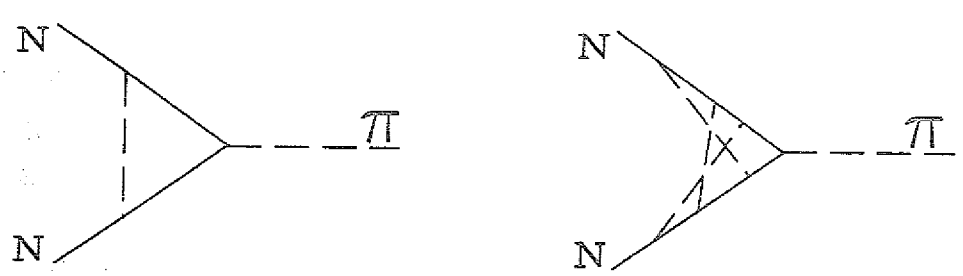



*Abb. 6.20: Beiträge zum $\pi NN$–Formfaktor mit höherliegenden Cuts*

# 7. Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit ein mesontheoretisches Modell zur Beschreibung der $\pi\rho$–Wechselwirkung entwickelt. Nach der $\pi\pi$–Wechselwirkung [10] wurde damit der Anwendungsbereich des Mesonaustauschbildes auf einen weiteren Meson-Meson-Prozeß ausgedehnt, wobei im Vergleich zum $\pi\pi$–System einige neue Aspekte auftraten.

Dazu zählt die kompliziertere Spinstruktur des $\pi\rho$–Systems, die einen größeren Aufwand bei der Berechung der Matrixelemente und der numerischen Lösung der Streugleichung nach sich zieht. Weiterhin traten bisher in der Jülicher Gruppe noch nicht berechnete Vertizes auf, neben dem $\pi\rho\omega$-Vertex ist vor allem der $\rho\rho\rho$–Vertex zu nennen. Es zeigt sich, daß der durch die Berücksichtigung des $3\rho$–Vertex mögliche $\rho$–Austausch eine wichtige Rolle für die Wechselwirkung spielt.

Eine weitere Komplikation, deren korrekte Behandlung einen wesentlichen Teil dieser Arbeit ausmacht, ergibt sich aus dem Zerfall des $\rho$–Mesons in zwei Pionen. Da das $\pi\rho$–System auf diese Weise in ein System von drei Pionen übergeht, erfordert dies die Anwendung des relativ komplizierten Dreiteilchenformalismus. Nach einem Überblick über die allgemeine Theorie solcher Dreiteilchensysteme haben wir das Modell von Aaron, Amado und Young [13] auf die Behandlung des (relativistischen) $\pi\rho$–Systems angewendet. Wir haben dazu die aus diesem Modell resultierende effektive Zweiteilchenstreugleichung abgeleitet, ihre Struktur erläutert und die bei der Lösung dieser Gleichung auftretenden technischen Probleme sowie Möglichkeiten zu ihrer Beseitigung dargestellt.

Die Aussagekraft unseres Wechselwirkungsmodells ließ sich am besten anhand der $J^P = 1^+$–Partialwelle untersuchen. Die experimentellen Daten zeigen in dieser Partialwelle eine ausgeprägte Resonanzstruktur, die mit der Existenz des Axialvektormesons $A_1$ erklärt wird. Wir haben gezeigt, wie sich mit Hilfe der $\pi\rho$–Wechselwirkung Widersprüche aufklären lassen, die sich bei der Analyse der empirischen Daten aus verschiedenen Experimenten ergeben. Für diese Analyse wurde aus technischen Gründen ein vereinfachtes Modell der $\pi\rho$–Wechselwirkung verwendet, in dem das $\rho$–Meson als stabiles Teilchen betrachtet wird. Die getroffenen Aussagen werden zwar aller Vorausicht nach durch die Berücksichtigung der Dreiteilchendynamik nicht wesentlich beeinflußt, es ist aber dennoch wünschenswert, die Untersuchung des $A_1$ auch unter Verwendung des vollen $\pi\rho$–Modells durchzuführen.

Dieser Ansatzpunkt für die zukünftige Arbeit steht in engem Zusammenhang mit einem weiteren Ziel, der Berechnung des axialen Formfaktors des Nukleons. Die $\pi\rho$-Wechselwirkung und die realistische Einbeziehung des $A_1$-Mesons in unser Modell bieten die Möglichkeit, diesen Formfaktor in einem erweiterten Axialvektordominanzmodell zu berechnen.

Neben der Entwicklung der $\pi\rho$–Wechselwirkung haben wir in einem weiteren Schritt als erste Anwendung dieser Wechselwirkung die Struktur des $\pi NN$–Formfaktors analysiert. Dazu wurden mesonische Vertexkorrekturen berechnet und der Einfluß untersucht, den die $\pi\rho$–Wechselwirkung auf den resultierenden Formfaktor hat. Es zeigt sich, daß die $\pi\rho$–Wechselwirkung einen nicht zu vernachlässigenden Beitrag liefert, und daß dieser Beitrag zu einem 'softeren' $\pi NN$–Formfaktor führt. Wir erhalten eine Cut-Off-Masse $\Lambda_{\pi NN}$ im Bereich von 1.0 GeV (Monopol), in Übereinstimmung mit anderen Modellen, die $\Lambda_{\pi NN} \leq 1.0\ GeV$ angeben.

Dieses Ergebnis eines relativ soften $\pi NN$–Formfaktors stellt zugleich einen weiteren Ansatzpunkt für zukünftige Projekte dar. Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß eine Cut-Off-Masse $\Lambda_{\pi NN} \leq 1.0\ GeV$ die konsistente Beschreibung von NN– und Deuteron-Daten im Rahmen des Bonn-Potentials zerstört. Die Einbeziehung des korrelierten $\pi\rho$–Austauschs in dieses Potential sollte zusätzliche Tensorkraft liefern und so den Einfluß des soften $\pi NN$–Formfaktors wieder aufheben.

Neben der bereits genannten Berechnung des axialen Formfaktors und der Einbeziehung des korrelierten $\pi\rho$–Austauschs in das Bonn-Potential gibt es eine Reihe von weiteren Anwendungsmöglichkeiten der $\pi\rho$–Wechselwirkung.

Zu diesen gehört die Berücksichtigung von Effekten der 'final-state-interaction' in der Wechselwirkung $N\bar{N} \rightarrow \pi\rho$. Das in der Jülicher Gruppe entwickelte Modell für Prozesse des Typs $N\bar{N} \rightarrow 2$ Mesonen vernachlässigte zunächst die Wechselwirkung der Mesonen im Endzustand [46]. Die Einbeziehung dieser Wechselwirkung für den Prozeß $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ brachte eine deutliche Verbesserung der Beschreibung der experimentellen Daten [59]. Die Berücksichtigung der $\pi\rho$–Wechselwirkung könnte ähnlichen Einfluß auf den Prozeß $N\bar{N} \rightarrow \pi\rho$ ausüben und beispielsweise das Verständnis des sog. '$\pi\rho$-Puzzles' verbessern [46].

Eine weitere Anwendungsmöglichkeit ergibt sich durch die Erweiterung des bestehenden $\pi\rho$–Modells auf Teilchensysteme mit der gleichen Spinstruktur, die jedoch

Teilchen mit 'Strangeness' enthalten ($K^*\pi$, $K\rho$, ...). Damit ließe sich beispielsweise die Struktur des $K_1(1270)$ untersuchen. Es gibt Vermutungen, daß dieses Meson ähnlich wie das $f_0(975)$ im $\pi\pi$–System, durch einen Schwelleneffekt der sich bei etwa 1270 $MeV$ öffnenden Kanäle $K\rho$ und $K\omega$ verstanden werden kann, die an ein $K^*\pi$-System angekoppelt sind.

Schließlich lassen sich noch weitergehende Anwendungsbereiche denken, etwa eine Untersuchung der $\pi\rho$-Streuung in Kernmaterie. Für die $\pi\pi$–Streuung wurde eine solche Analyse bereits durchgeführt [60]. Um ähnliche Rechnungen für die $\pi\rho$–Wechselwirkung durchzuführen, ist es zunächst erforderlich, den $KK^*$–Kanal anzukoppeln, da die Modifikation der Strangeness-Produktion in Kernmaterie von besonderem theoretischen Interesse ist.

# Anhang A. Definitionen und Konventionen

Wir definieren zunächst die Polarisationsvektoren der Vektorteilchen $\epsilon^\mu(\vec{k},\lambda)$, wobei $\lambda = 0, \pm 1$ die Helizität dieses Teilchens bezeichnet.

Im CM–System lautet der *Polarisationsvektor* für ein Teilchen der Masse m mit Impuls $\vec{k}$ in z–Richtung:

$$\epsilon^\mu(\vec{k},\lambda=\pm 1) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \mp 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^\mu(\vec{k},\lambda=0) \;=\; \frac{1}{m}\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ \omega_k \end{pmatrix} \qquad (A.1)$$

mit

$$\omega_k \;=\; \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \quad .$$

Für alle weiteren Richtungen in der Reaktionsebene erhält man durch Multiplikation mit der Rotationsmatrix

$$R_\theta \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -sin\theta & 0 & cos\theta \end{pmatrix} \quad :$$

$$\epsilon^\mu(\vec{k},\lambda=\pm 1) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \mp cos\theta \\ -i \\ \pm sin\theta \end{pmatrix}, \quad \epsilon^\mu(\vec{k},\lambda=0) \;=\; \frac{1}{m}\begin{pmatrix} k \\ \omega_k sin\theta \\ 0 \\ \omega_k cos\theta \end{pmatrix} \quad . \qquad (A.2)$$

Dabei liege das CM–Koordinatensystem wie in Fig. A.1. gezeigt.

Bezüglich des Helizitätsindizes $\lambda$ ist der Polarisationsvektor $\epsilon^\mu(\vec{k},\lambda)$ ein Tensor 1. Stufe.

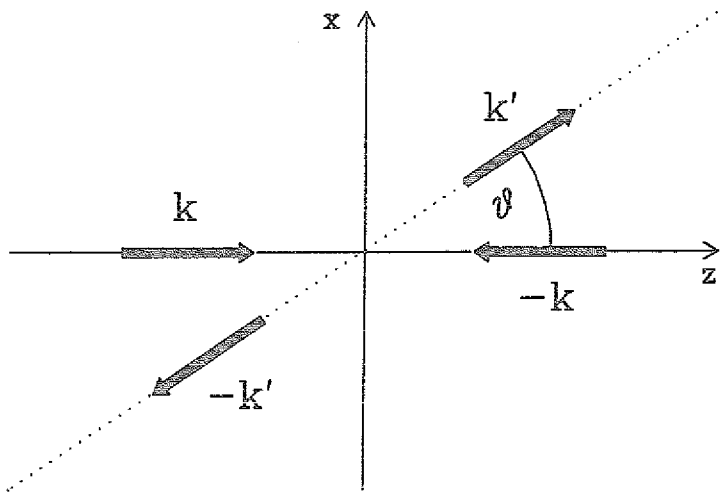



*Abb. A.1: Wahl des CM-Koordinatensystems und Definition des Winkels $\theta$*

Für die Polarisationsvektoren gilt die *Vollständigkeitsrelation*:

$$P_{\mu\nu} := \sum_{\lambda} \epsilon_\mu(\vec{k},\lambda)\epsilon_\nu(\vec{k},\lambda)^* = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \quad . \tag{A.3}$$

Nach den Feynmanregeln ist für auslaufende Teilchen der adjungierte Polarisationsvektor zu benutzen. Dieser ist wie folgt definiert:

$$(-)^\lambda \epsilon_\mu(\vec{k},-\lambda)^* \equiv \epsilon_\mu(\vec{k},\lambda) \quad . \tag{A.4}$$

Wie man sieht, ergibt sich $\epsilon_\mu(\vec{k},\lambda)^*$ einfach dadurch, daß man die Einträge der Vektoren in $(A.1)$ und $(A.2)$ komplex konjugiert. Im folgenden verwenden wir stets die Abkürzung

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu(\vec{k},\lambda) &\equiv \epsilon \\ \epsilon_\mu(\vec{k}',\lambda')^* &\equiv \epsilon^* \quad . \end{aligned}$$

Darüber hinaus zeigt ein Querstrich über dem Polarisationsvektor an, daß es sich um die entsprechende Größe des Austauschmesons handelt.

Für die Viererimpulse der Streuteilchen gilt in dem in Abb. $A.1$ gezeigten Koordinatensystem:

$$k = \begin{pmatrix} k_0 \\ 0 \\ 0 \\ |\vec{k}| \end{pmatrix} \quad q = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \\ 0 \\ -|\vec{k}| \end{pmatrix} \quad k' = \begin{pmatrix} k'_0 \\ |\vec{k}'|\sin\theta \\ 0 \\ |\vec{k}'|\cos\theta \end{pmatrix} \quad q' = \begin{pmatrix} q'_0 \\ -|\vec{k}'|\sin\theta \\ 0 \\ -|\vec{k}'|\cos\theta \end{pmatrix} \quad . \tag{A.5}$$

Die $\gamma$–Matrizen lauten in der Bjorken-Drell-Konvention [33]:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

$I$ ist die $2 \times 2$ Einheitsmatrix und $\sigma^k$ bezeichnet die Pauli-Matrizen.

Bei der Angabe der Spinore gehen wir von einem $N\bar{N}$–System aus ($N$: Impuls $\vec{p}$; $\bar{N}$: Impuls -$\vec{p}$). Der Nukleon-Spinor lautet in der Helizitätsbasis [8]:

$$u(\vec{p}, \lambda_N) = \sqrt{\frac{\omega_N(p) + m_N}{2\omega_N(p)}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2\lambda_N p}{\omega_N(p)+m_N} \end{pmatrix} \mid \lambda_N \rangle \quad . \tag{A.6}$$

Aus diesem erhält man mit Hilfe der Ladungskonjugation den Antinukleonenspinor [8]:

$$v(-\vec{p}, \lambda_{\bar{N}}) = \sqrt{\frac{\omega_{\bar{N}}(p) + m_{\bar{N}}}{2\omega_{\bar{N}}(p)}} \begin{pmatrix} \frac{p}{\omega_{\bar{N}}(p)+m_{\bar{N}}} \\ -2\lambda_{\bar{N}} \end{pmatrix} \mid -\lambda_{\bar{N}} \rangle \quad . \tag{A.7}$$

Die Helizitätseigenzustände lassen sich wie folgt durch die Pauli-Spinore $\chi_{\pm\frac{1}{2}}$ ausdrücken:

$$\begin{aligned} \mid \lambda_N \rangle &= \chi_{\lambda_N} \\ \mid -\lambda_{\bar{N}} \rangle &= \chi_{\lambda_{\bar{N}}} \\ \mid \lambda'_N \rangle &= e^{-\frac{i}{2}\sigma_2\vartheta}\chi_{\lambda'_N} \\ \mid -\lambda'_{\bar{N}} \rangle &= e^{-\frac{i}{2}\sigma_2\vartheta}\chi_{\lambda'_{\bar{N}}} \end{aligned}$$

Die Metrik im Minkowski-Raum ist wie folgt definiert:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Für den dreidimensionalen *Levi-Civita-Tensor* gilt:

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für (ijk) gerade Permutation von (123)} \\ -1 & \text{für (ijk) ungerade Permutation von (123)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für den vierdimensionalen *Levi-Civita-Tensor* gilt:

$$\epsilon^{ijkl} = \begin{cases} +1 & \text{für (ijkl) gerade Permutation von (0123)} \\ -1 & \text{für (ijkl) ungerade Permutation von ( 0123 )} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

# Anhang B. Die Berechnung des $\pi\rho$–Pseudopotentials

## B.1. Spin-Impuls-Anteil der Matrixelemente

### (a) $\pi$–Austausch

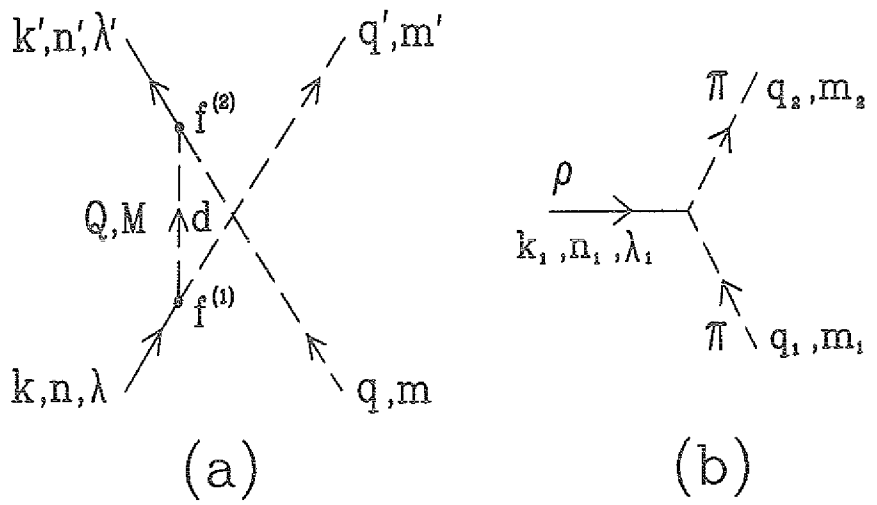



*Abb. B.1: a) Feynman-Graph des $\pi$–Austauschs; b) $\pi\pi\rho$–Vertexfunktion*

Nach Gl. (2.11) erhält man für den Vertex in Abb. $B.1$ b):

$$f = -ig\,[\phi_{m_1} \times \phi^*_{m_2}]\,\phi_{n_1}\;\;(q_2+q_1)_\mu\,\epsilon^\mu(k_1,\lambda_1) \qquad . \qquad (B.1)$$

Durch folgende Ersetzungen erhält man die Vertexfunktionen aus Abb. $B.1$ a):

$$\begin{aligned} f^{(1)}: \quad & k_1 \to k \quad ; \phi_{n_1} \to \phi_n \;\; ; \quad \lambda_1 \to \lambda \\ & q_1 \to -q' \;\; ; \phi_{m_1} \to \phi^*_{m'} \\ & q_2 \to Q \quad ; \phi^*_{m_2} \to \phi^*_M \\ f^{(2)}: \quad & k_1 \to -k' \;\; ; \phi_{n_1} \to \phi^*_{n'}; \;\; \lambda_1 \to \lambda' \\ & q_1 \to Q \quad ; \phi_{m_1} \to \phi_M \\ & q_2 \to -q \quad ; \phi^*_{m_2} \to \phi_m \qquad . \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad M = i^2 g^2\, d\,\{\sum_M [\phi^*_{m'} \times \phi^*_M]\phi_n\;\;[\phi_M \times \phi_m]\phi^*_{n'}\}\cdot\{(Q-q')\epsilon\;\;(Q-q)\epsilon^*\} \;\; (B.2)$$

Mit

$$Q = k - q' = k' - q$$

erhalten wir Gl. (2.12):

$$M = -g^2 Id\ (2q' - k)\epsilon\ \ (2q - k')\epsilon^* \qquad .$$

Dabei ist

I≡ gesamter Isospinanteil

d≡ Propagator des Austauschteilchens.

**(b) $\omega$–Austausch**

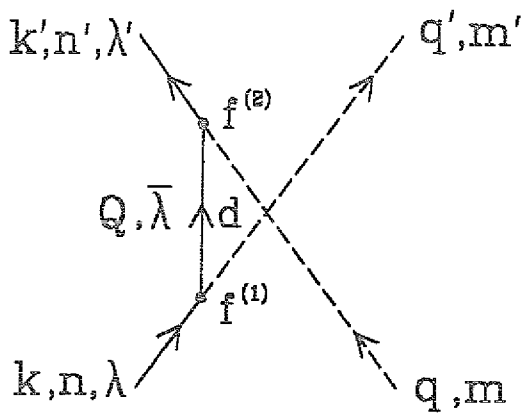



*Abb. B.2: a) Feynman-Graph des $\omega$–Austauschs*

Aus der Lagrangedichte (2.9)

$$\mathcal{L}_{\omega\pi\rho} = g_{\omega\pi\rho}\ \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\ \partial_\alpha\omega_\beta\ \partial_\mu\vec{\rho}_\nu\ \vec{\pi}$$

erhält man folgende Vertexfunktionen:

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= -g_{\omega\pi\rho}\ (\phi_n \cdot \phi_{m'})\ \ \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\ (iQ_\alpha)\ \bar{\epsilon}^*_\beta\ (-ik_\mu)\ \epsilon_\nu \\ f^{(2)} &= -g_{\omega\pi\rho}\ (\phi_{n'} \cdot \phi_m)\ \ \epsilon^{\gamma\delta\sigma\tau}\ (-iQ_\gamma)\ \bar{\epsilon}_\delta\ (ik'_\sigma)\ \epsilon^*_\tau \qquad . \end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\Rightarrow M = g^2_{\omega\pi\rho}\ d\ \{\phi_n\,\phi_{m'}\ \ \phi_{n'}\,\phi_m\}\ \sum_{\lambda_\omega} \epsilon^{\gamma\delta\sigma\tau}\ Q_\gamma\ \bar{\epsilon}_\delta\ k'_\sigma\ \epsilon^*_\tau\ \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\ Q_\alpha\ \bar{\epsilon}^*_\beta\ k_\mu\ \epsilon_\nu \quad (B.4)$$

Es gilt die Näherung:

$$\sum_{\lambda_\omega} \bar{\epsilon}_\delta \bar{\epsilon}^*_\beta \simeq -g_{\delta\beta} \qquad . \qquad (B.5)$$

Für die Beschreibung von Austauschgraphen stellt diese vereinfachte Vollständigkeitsrelation eine gute Näherung dar [7], bei Polgraphen ist jedoch weiterhin stets die vollständige Gl. $(A.3)$ anzuwenden.

$$\Rightarrow M = -g^2_{\omega\pi\rho} Id\ g_{\delta\beta}(\epsilon^{\delta\gamma\sigma\tau} Q_\gamma k'_\sigma \epsilon^*_\tau)\ (\epsilon^{\beta\alpha\mu\nu} Q_\alpha k_\mu \epsilon_\nu)$$

Wir benutzen nun die Beziehung

$$\begin{aligned} & g_{\mu\alpha}(\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} A_\nu B_\sigma C_\tau)\ (\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} M_\beta N_\gamma P_\delta) \\ & = -\,(A\cdot M)(B\cdot N)(C\cdot P) - (A\cdot N)(B\cdot P)(C\cdot M) - (A\cdot P)(B\cdot M)(C\cdot N) \\ & \quad + (A\cdot M)(B\cdot P)(C\cdot N) + (A\cdot N)(B\cdot M)(C\cdot P) + (A\cdot P)(B\cdot N)(C\cdot M)\ . \end{aligned} \qquad (B.6)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M = g^2_{\omega\pi\rho} Id\{ & Q\cdot Q \quad [k\cdot k'\ \epsilon\cdot\epsilon^* - k\cdot\epsilon^*\ k'\cdot\epsilon] \quad + \\ & Q\cdot\epsilon \quad [Q\cdot k'\ k\cdot\epsilon^* - Q\cdot\epsilon^*\ k\cdot k'] \quad + \\ & Q\cdot k \quad [Q\cdot\epsilon^*\epsilon\cdot k' - \epsilon\cdot\epsilon^*\ Q\cdot k'] \quad \} \end{aligned}$$

Setzt man schließlich

$$Q = k - q' = k' - q$$

in diese Gleichung ein, so erhält man nach längerer Rechnung Gl. (2.13) für das invariante Matrixelement.

(c) $\rho$–Austausch

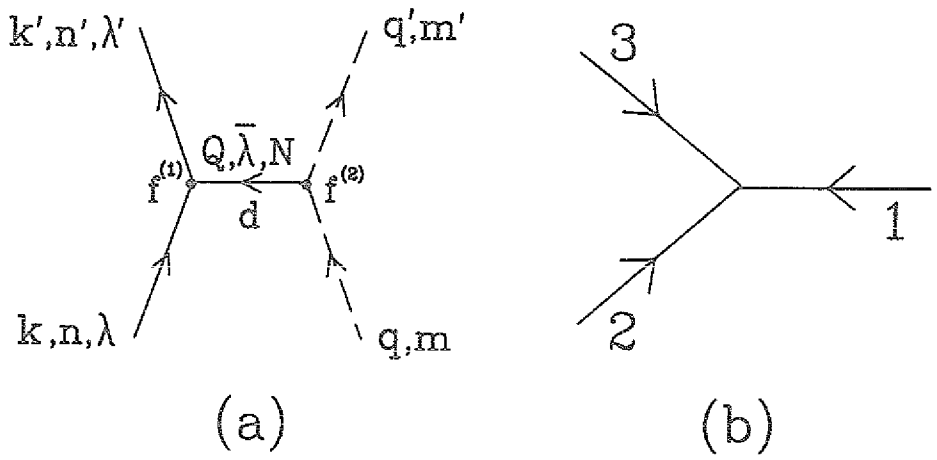



*Abb. B.3: a) Feynman-Graph des $\rho$–Austauschs; b) Symmetrisierte Form des $3\rho$–Vertex*

Die Lagrangedichte aus (2.8) läßt sich noch leicht vereinfachen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rho\rho\rho} &= -\frac{1}{2}g\ (\partial_\mu\vec{\rho}_\nu - \partial_\nu\vec{\rho}_\mu)\ (\vec{\rho}^{\,\mu} \times \vec{\rho}^{\,\nu}) \\ &= -g\ \partial_\mu\vec{\rho}_\nu\ (\vec{\rho}^{\,\mu} \times \vec{\rho}^{\,\nu})\end{aligned}$$

Es muß darauf geachtet werden, daß die Vertexfunktion, die man aus der Lagrangedichte erhält, symmetrisch ist unter Austausch identischer Teilchen. Dazu ist es vorteilhaft, zunächst den symmetrisierten $3\rho$–Vertex in Abb. $B.3$ b) zu betrachten, bei dem alle drei $\rho$–Mesonen einlaufend sind.

Man erhält für $f$:

$$\begin{aligned}f = g\ \{&(-ik_3)_\mu(\epsilon_3)_\nu[I^{312}\epsilon_1^\mu\epsilon_2^\nu + I^{321}\epsilon_2^\mu\epsilon_1^\nu]+ \\ &(-ik_2)_\mu(\epsilon_2)_\nu[I^{213}\epsilon_1^\mu\epsilon_3^\nu + I^{231}\epsilon_3^\mu\epsilon_1^\nu]+ \\ &(-ik_1)_\mu(\epsilon_1)_\nu[I^{123}\epsilon_2^\mu\epsilon_3^\nu + I^{132}\epsilon_3^\mu\epsilon_2^\nu]\ \}\end{aligned}$$

Dabei ist $I^{ijk}$ eine Abkürzung für $\phi_i\ [\phi_j \times \phi_k]$, die I's enthalten also den Isospinanteil. Da diese I's jeweils antisymmetrisch unter Vertauschung des zweiten und dritten

Index sind, gilt weiterhin:

$$
\begin{aligned}
f = -igI^{123} \{ \; & \epsilon_3 \cdot \epsilon_2 \, [k_3 \cdot \epsilon_1 \; - \; k_2 \cdot \epsilon_1] \\
& + \epsilon_3 \cdot \epsilon_1 \, [k_1 \cdot \epsilon_2 \; - \; k_3 \cdot \epsilon_2] \\
& + \epsilon_2 \cdot \epsilon_1 \, [k_2 \cdot \epsilon_3 \; - \; k_1 \cdot \epsilon_3] \; \} \qquad .
\end{aligned}
$$

Durch die folgenden Ersetzungen gelangt man wieder zurück zur Vertexfunktion für den physikalischen Prozeß:

$$
\begin{aligned}
f^{(1)} : \qquad & k_3 \to -k' \; ; \phi_{n_3} \to \phi^*_{n'} ; \lambda_3 \to \lambda' \; ; \; \epsilon_3 \to \epsilon^* \\
& k_2 \to k \quad ; \phi_{n_2} \to \phi_n \; ; \lambda_2 \to \lambda \; ; \; \epsilon_2 \to \epsilon \\
& k_1 \to Q \quad ; \phi_{n_1} \to \phi_N ; \lambda_1 \to \bar{\lambda} \; ; \; \epsilon_1 \to \bar{\epsilon}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad f^{(1)} = -ig \, [\phi_n \times \phi^*_{n'}] \, \phi_N \; \{ & - \epsilon \cdot \epsilon^* \, (k + k') \cdot \bar{\epsilon} \; + \; \epsilon^* \cdot \bar{\epsilon} \, (Q + k') \cdot \epsilon \; + \\
& \epsilon \cdot \bar{\epsilon} \, (k - Q) \cdot \epsilon^* \}
\end{aligned}
$$

Durch geeignete Ersetzungen in $(B.1)$ erhält man die $\pi\pi\rho$-Vertexfunktion $f^{(2)}$. Nachdem man die Vertexfunktionen zum Matrixelement zusammengesetzt hat und mit Hilfe der genäherten Vollständigkeitsrelation Gl. $(B.5)$ über die Helizitäten des ausgetauschten $\rho$–Mesons summiert hat, gelangt man schließlich zu Gl. (2.14) für das invariante Matrixelement.

**(d) $\omega$–Polgraph**

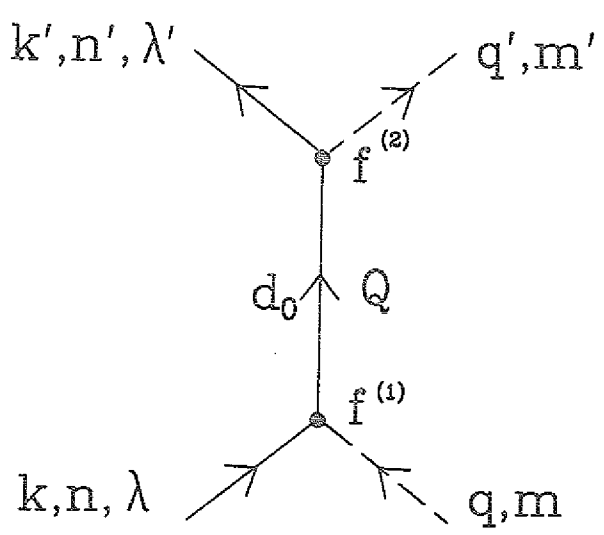



*Abb. B.4: Feynman-Graph des $\omega$–Polgraphen*

Die Berechnung des invarianten Matrixelementes für den $\omega$–Polgraphen verläuft analog wie beim $\omega$–Austauschgraphen. Der Faktor $s$ in dem Matrixelement Gl. (2.15) resultiert daraus, daß für Polgraphen gilt: $Q = (\sqrt{s}, \vec{0})$.

**(e) $A_1$–Polgraph** , Gradientenkopplung

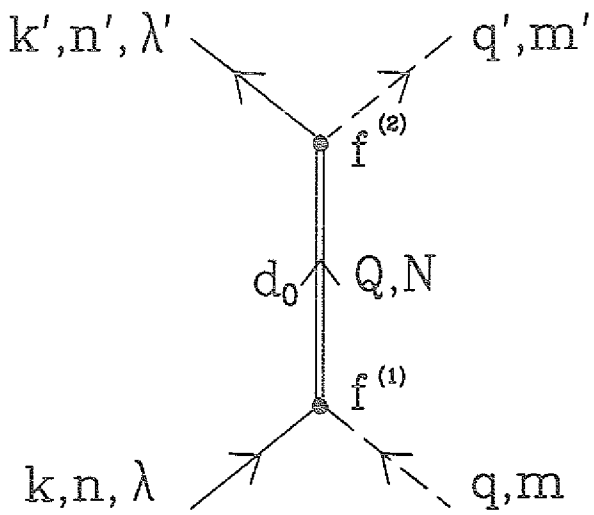



*Abb. B.5: Feynman-Graph des $A_1$-Polgraphen*

Wenn wir für einen Moment die Isospinstruktur weglassen, läßt sich die Lagrangedichte aus Gl. (2.7) noch weiter vereinfachen.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{A_1\pi\rho} &= \frac{g_0}{2m_{A_1}} \left(\partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu\right) \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) \pi \\
&= \frac{g_0}{2m_{A_1}} \left\{\partial_\mu \rho_\nu \partial^\mu A^\nu \; - \; \partial_\mu \rho_\nu \partial^\nu A^\mu \; - \; \partial_\nu \rho_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu \rho_\mu \partial^\nu A^\mu\right\} \; \pi \qquad (B.7) \\
&= \frac{g_0}{m_{A_1}} \left\{\partial_\mu \rho_\nu \partial^\mu A^\nu \; - \; \partial_\mu \rho_\nu \partial^\nu A^\mu\right\} \pi
\end{aligned}$$

Diese Lagrangedichte führt auf folgende Vertexfunktionen:

$$f^{(1)} = -\frac{g_0}{m_{A_1}} \left\{\phi_n \left[\phi_m \times \phi_N^*\right]\right\} \left\{-ik_\alpha \epsilon_\beta i Q^\alpha \bar{\epsilon}^{\beta *} \; - \; (-ik_\alpha) \epsilon_\beta i Q^\beta \bar{\epsilon}^{\alpha *}\right\}$$

$$f^{(2)} = -\frac{g_0}{m_{A_1}} \left\{\phi_{n'}^* \left[\phi_{m'}^* \times \phi_N\right]\right\} \left\{i k'_\mu \epsilon_\nu^* (-iQ^\mu) \bar{\epsilon}^\nu \; - \; i k'_\mu \epsilon_\nu^* (-iQ^\nu) \bar{\epsilon}^\nu\right\}$$

Das invariante Matrixelement lautet daher:

$$
\begin{aligned}
M = \frac{g_0^2}{m_{A_1}^2} Id_0 \; \{ & k'_\mu \epsilon^*_\nu Q^\mu k_\alpha \epsilon_\beta Q^\alpha \; [-g^{\nu\beta} + \frac{Q^\nu Q^\beta}{m_{A_1}^2}] - \\
& k'_\mu \epsilon^*_\nu Q^\mu k_\alpha \epsilon_\beta Q^\beta \; [-g^{\nu\alpha} + \frac{Q^\nu Q^\alpha}{m_{A_1}^2}] - \\
& k'_\mu \epsilon^*_\nu Q^\nu k_\alpha \epsilon_\beta Q^\alpha \; [-g^{\mu\beta} + \frac{Q^\mu Q^\beta}{m_{A_1}^2}] + \\
& k'_\mu \epsilon^*_\nu Q^\nu k_\alpha \epsilon_\beta Q^\beta \; [-g^{\mu\alpha} + \frac{Q^\mu Q^\alpha}{m_{A_1}^2}] \quad \}
\end{aligned}
$$

Dabei wurde für die Summe über die Polarisationsvektoren des $A_1$ bereits die Vollständigkeitsrelation benutzt. Es läßt sich leicht nachrechnen, daß sich aufgrund der Tatsache, daß Q nur eine nullte Komponente besitzt, die $Q^\mu Q^\nu / m_{A_1}^2$–Terme wegheben. Durch Einsetzen von Q auch in die restlichen Terme ergibt sich dann sofort Gl. (2.16).

**(f)** $A_1$**–Polgraph** , skalare Kopplung

Mit der Lagrangedichte aus Gl. (2.6) ergeben sich folgende Vertexfunktionen (Isospinabhängigkeit unterdrückt):

$$f_0^{(1)} = -g_0 m_{A_1} \; \epsilon^\nu \bar{\epsilon}^*_\nu$$

$$f_0^{(2)} = -g_0 m_{A_1} \; \epsilon^{\mu *} \bar{\epsilon}_\mu$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow M &= g_0^2 m_{A_1}^2 Id_0 \; \epsilon^{\mu *} [-g_{\mu\nu} + \frac{Q_\mu Q_\nu}{m_{A_1}^2}] \epsilon^\nu \\
&= -g_0^2 m_{A_1}^2 Id_0 \; \{ \epsilon^*_\mu \epsilon^\mu \; - \; \frac{s}{m_{A_1}^2} \epsilon^*_0 \epsilon^0 \}
\end{aligned}
$$

Der Isospinanteil I ist derselbe wie unter (e). Die letzte Gleichung liefert dann unmittelbar Gl. (2.17).

## B.2. Isospinanteil der Matrixelemente

Mit den in Abschnitt (2.3.3) beschriebenen Methoden berechnen wir hier die Isospinfaktoren:

**(a) $\pi$–Austausch**

$$
\begin{aligned}
I &\equiv \langle T\,T_z \,|\, M^{Iso} \,|\, T\,T_z \rangle \\
&= \sum_{n,m,n',m'} (1n\,1m\,|T\,T_z)\,(1n'\,1m'\,|T\,T_z)\,\langle 1n'\,1m' \,|\, M^{Iso} \,|\, 1n\,1m \rangle \\
&= \sum_{n,m,n',m'} (1n\,1m\,|T\,T_z)\,(1n'\,1m'\,|T\,T_z) \sum_{M} [\phi^*_{m'} \times \phi^*_M]\phi_n \;\; [\phi_M \times \phi_m]\phi^*_{n'} \\
&= \sum_{n,m,n',m'} \sum_{M} (1n\,1m\,|T\,T_z)\,(1n'\,1m'\,|T\,T_z)\,\cdot \\
&\quad \sum_{q,q'} (-1)^{m'+M+n'}(-2)(1\,-m'\,1\,-M\,|1q)\;\phi_q\phi_n(1M\,1m\,|1q')\;\phi_{q'}\phi_{-n'} \\
&= \sum_{n,m,n',m'} \sum_{M} (-2)(-1)^{m'+M+n}\;(1n\,1m\,|T\,T_z)\,(1n'\,1m'\,|T\,T_z)\,\cdot \\
&\qquad (1\,-m'\,1\,-M\,|1\,-n)\,(1M\,1m\,|1n') \\
&= \begin{cases} +2 & \text{für T=0} \\ -1 & \text{für T=1} \\ -1 & \text{für T=2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

**(b) $\omega$–Austausch**

$$
\begin{aligned}
I &\equiv \langle T\,T_z \,|\, M^{Iso} \,|\, T\,T_z \rangle \\
&= \sum_{n,m,n',m'} (1n\,1m\,|T\,T_z)\,(1n'\,1m'\,|T\,T_z)\;\;\phi_n\phi^*_{m'}\;\;\phi^*_{n'}\phi_m \\
&= \sum_{n,m,n',m'} (1n\,1m\,|T\,T_z)\,(1n'\,1m'\,|T\,T_z)\,(-1)^{m'+n'}\,(-1)^{n-n'}\;\delta_{n,m'}\,\delta_{-n',-m} \\
&= \sum_{n,m} (1n\,1m\,|T\,T_z)\,(1m\,1n\,|T\,T_z) \\
&= \begin{cases} +1 & \text{für T=0} \\ -1 & \text{für T=1} \\ +1 & \text{für T=2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

(c) $\rho$–Austausch

$$
\begin{aligned}
I &\equiv \langle T\,T_z \,|\, M^{Iso} \,|\, T\,T_z \rangle \\
&= \sum_{n,m,n',m'} (1n\,1m\,|T\,T_z)\,(1n'\,1m'\,|T\,T_z) \sum_N [\phi_m \times \phi^*_{m'}]\phi^*_N \;\; [\phi_n \times \phi^*_{n'}]\phi_N \\
&= \sum_{n,m,n',m'} \sum_N (-2)(-1)^{m'+N+n'}\,(1n\,1m\,|T\,T_z)\,(1n'\,1m'\,|T\,T_z)\,\cdot \\
&\qquad\qquad (1m\,1\,-m'\,|1N)\,(1n\,1\,-n'\,|1\,-N)
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{cases} +2 & \text{für T=0} \\ +1 & \text{für T=1} \\ -1 & \text{für T=2} \end{cases}
$$

(d) $\omega$–Polgraph

$$
\begin{aligned}
I &\equiv \langle T\,T_z \,|\, M^{Iso} \,|\, T\,T_z \rangle \\
&= \sum_{n,m,n',m'} (1n\,1m\,|T\,T_z)\,(1n'\,1m'\,|T\,T_z) \;\; \phi^*_{n'}\phi^*_{m'} \;\; \phi_n\phi_m \\
&= \sum_{n,m,n',m'} (1n\,1m\,|T\,T_z)\,(1n'\,1m'\,|T\,T_z)\,(-1)^{m'+n'}\,(-1)^{-n'+n}\,\delta_{-n',m'}\,\delta_{n,-m} \\
&= \sum_{n,n'} (-1)^{n+n'}\,(1n\,1\,-n\,|T\,T_z)\,(1n'\,1\,-n'\,|T\,T_z)
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{cases} 3 & \text{für T=0} \\ 0 & \text{für T=1} \\ 0 & \text{für T=2} \end{cases}
$$

(e/f) $A_1$–Polgraph

$$
\begin{aligned}
I &\equiv \langle T\,T_z \,|\, M^{Iso} \,|\, T\,T_z \rangle \\
&= \sum_{n,m,n',m'} (1n\,1m\,|T\,T_z)\,(1n'\,1m'\,|T\,T_z) \sum_N [\phi^*_{m'} \times \phi_N]\phi^*_{n'} \;\; [\phi_m \times \phi^*_N]\phi_n \\
&= \sum_{n,m,n',m'} \sum_N (-1)^{m'+N+n}(-2)\,(1n\,1m\,|T\,T_z)\,(1n'\,1m'\,|T\,T_z)\,\cdot \\
&\qquad\qquad (1-m'\,1N\,|1n')\,(1m\,1-N\,|1-n') \\
&= \begin{cases} 0 & \text{für T=0} \\ +2 & \text{für T=1} \\ 0 & \text{für T=2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

## B.3. Die Off-Shell-Struktur des Pseudopotentials

Die Off-Shell-Struktur des Potentials ergibt sich aus der Reduktion der Bethe-Salpeter-Gleichung. Für das einfache Modell der $\pi\rho$–Wechselwirkung verwenden wir den Propagator $\tilde{G}$ aus Gl. (3.29), aus dem sich folgendes Off-Shell-Verhalten ergibt:

- Die beteiligten Teilchen befinden sich nicht auf ihrer Massenschale, für die nullte Komponente der Viererimpulse gilt [61]

$$k'_0 = k_0 = \frac{s + m_\rho^2 - m_\pi^2}{2\sqrt{s}} \quad , \quad q'_0 = q_0 = \frac{s + m_\pi^2 - m_\rho^2}{2\sqrt{s}} \quad . \qquad (B.8)$$

  Diese Wahl ist allerdings nicht eindeutig, die in Kap.3 diskutierte Reduktion der Bethe-Salpeter-Gleichung liefert eine etwas andere Form der nullten Komponenten.

- Für den Propagator $d$ in $V$ erhält man

$$d = \frac{1}{Q^2 - m^2} \quad .$$

  und Q ergibt sich eindeutig aus der Viererimpulserhaltung. Unten wird $d$ für die einzelnen Graphen explizit ausgerechnet.

- Die Beziehung zwischen V und M lautet:

$$V^{BbS} = M \quad , \tag{B.9}$$

d.h. es sind keine zusätzlichen Normierungsfaktoren zu berücksichtigen.

- Für die Polarisationsvektoren $\epsilon_\mu(\vec{k},\lambda)$ der gestreuten $\rho$–Mesonen ist weiterhin die On-Mass-Shell-Definition Gl. $(A.1)$ und Gl. $(A.2)$ einzusetzen. Über die Vollständigkeitsrelation Gl. $(A.3)$ erzeugen diese den Zähler $-g_{\mu\nu} + (\vec{k}_\mu{}''\vec{k}_\nu{}'')/m_\rho^2$ des $\pi\rho$–Propagators in der Streugleichung. Für den Fall der $\pi N$–Streuung ist in [43] gezeigt, daß für die Impulse im Zähler des Propagators der Streugleichung die On-Mass-Shell-Werte einzusetzen sind, entsprechend der Verwendung der On-Mass-Shell-Spinore im Potential. Wir verfahren hier analog. Die Polarisationsvektoren der Austauschteilchen brauchen nicht spezifiziert zu werden. Sie dienen nur zur Generation des vollen Vektorpropagators, den wir dann entweder nähern (Gl. $(B.5)$, Austauschgraphen) oder in den wir die Off-Mass-Shell-Impulse einsetzen (Polgraphen).

Für die Propagatoren $d$ ergibt sich:

(a) $\pi$–Austausch

$$\begin{aligned} d = (Q^2 - m_\pi^2)^{-1} &= ((k-q')^2 - m_\pi^2)^{-1} \\ &= ((k_0 - q_0')^2 - (\vec{k} - \vec{q}\,')^2 - m_\pi^2)^{-1} \quad , \end{aligned}$$

wobei $k_0$ und $q_0'$ in Gl. $(B.8)$ definiert werden. Mit dieser Definition ergibt sich, daß $d$ singulär werden kann, solange $s < (m_\rho^2 - m_\pi^2)^2 m_\pi^{-2}$ , da dann $(k_0 - q_0')^2 - m_\pi^2 > 0$ ist. Diese Pole sind aber unphysikalisch, denn sie entsprechen keinem physikalischen Kanal. Um die Pole im Pion-Propagator zu umgehen, verwenden wir in unserem einfachen Modell (stabiles $\rho$) für $d$ die Näherung des statischen Propagators, d.h. wir vernachlässigen die nullte Komponente von $Q$:

$$d = (-(\vec{k} - \vec{q}\,')^2 - m_\pi^2)^{-1} = (-\omega_x^2)^{-1} \quad .$$

**(b) $\rho$–Austausch**

Für s-Kanal-Graphen liefert der BbS-Propagator automatisch den statischen Propagator

$$\begin{aligned} d &= (Q^2 - m_\rho^2)^{-1} = ((k' - k)^2 - m_\rho^2)^{-1} = \\ &= (-(\vec{k}' - \vec{k})^2 - m_\rho^2)^{-1} = (-\omega_x^2)^{-1} \quad , \end{aligned}$$

da $k_0' - k_0 = 0$ (vgl Gl. $(B.8)$).

**(c) $\omega$–Austausch**

$$d = ((k - q')^2 - m_\omega^2)^{-1} = ((k_0 - q_0')^2 - (\vec{k} - \vec{q}')^2 - m_\omega^2)^{-1} \quad .$$

Die Form von $d$ ist also ähnlich wie im Falle des $\pi$–Austauschs, da hier jedoch die größere $\omega$–Masse auftritt, hat $d$ keine Singularitäten und wir brauchen nicht mit dem statischen Propagator zu nähern.

**(d-f) Polgraphen**

Da für Polgraphen $Q = (\sqrt{s}, \vec{0}\,)$ gilt, folgt für $d$:

$$d_0 = (s - m_0^2) \quad ,$$

wobei m die Masse des Austauschteilchens ($\omega$, $A_1$) ist.

## B.4. Die Auswertung der invarianten Matrixelemente

In Abschnitt (2.3.2) haben wir die invarianten Matrixelemente zusammengefaßt. Die dabei auftretenden Viererprodukte und sonstigen Terme werden im folgenden unter Benutzung von $(A.1)$, $(A.2)$ und $(A.5)$ ausgerechnet.

| | $\langle 0 \mid V \mid 0 \rangle$ | $\langle 0 \mid V \mid 1 \rangle$ |
|---|---|---|
| $q \cdot \epsilon$ | $k\,(E_\pi + \omega_k)/m_\rho$ | $0$ |
| $q' \cdot \epsilon$ | $(kE'_\pi + k'\omega_k \cos\theta)/m_\rho$ | $\frac{-1}{\sqrt{2}}\,k' \sin\theta$ |
| $k \cdot \epsilon$ | $k\,(E_\rho - \omega_k)/m_\rho$ | $0$ |
| $k' \cdot \epsilon$ | $(kE'_\rho - k'\omega_k \cos\theta)/m_\rho$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}\,k' \sin\theta$ |
| $q \cdot \epsilon^*$ | $(k'E_\pi + k\omega'_k \cos\theta)/m_\rho$ | $(k'E_\pi + k\omega'_k \cos\theta)/m_\rho$ |
| $q' \cdot \epsilon^*$ | $k'\,(E'_\pi + \omega'_k)/m_\rho$ | $k'\,(E'_\pi + \omega'_k)/m_\rho$ |
| $k \cdot \epsilon^*$ | $(k'E_\rho - k\omega'_k \cos\theta)/m_\rho$ | $(k'E_\rho - k\omega'_k \cos\theta)/m_\rho$ |
| $k' \cdot \epsilon^*$ | $k'\,(E'_\rho - \omega'_k)/m_\rho$ | $k'\,(E'_\rho - \omega'_k)/m_\rho$ |
| $\epsilon \cdot \epsilon^*$ | $(kk' - \omega_k\omega'_k \cos\theta)/m_\rho^2$ | $\frac{1}{\sqrt{2}m_\rho}\,\omega'_k \sin\theta$ |
| $\epsilon_0$ | $k/m\rho$ | $0$ |
| $\epsilon_0^*$ | $k'/m\rho$ | $k'/m\rho$ |

| | $\langle 1 \mid V \mid 1 \rangle$ | $\langle 1 \mid V \mid -1 \rangle$ |
|---|---|---|
| $q \cdot \epsilon$ | $0$ | $0$ |
| $q' \cdot \epsilon$ | $\frac{-1}{\sqrt{2}}\,k' \sin\theta$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}\,k' \sin\theta$ |
| $k \cdot \epsilon$ | $0$ | $0$ |
| $k' \cdot \epsilon$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}\,k' \sin\theta$ | $\frac{-1}{\sqrt{2}}\,k' \sin\theta$ |
| $q \cdot \epsilon^*$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}\,k \sin\theta$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}\,k \sin\theta$ |
| $q' \cdot \epsilon^*$ | $0$ | $0$ |
| $k \cdot \epsilon^*$ | $\frac{-1}{\sqrt{2}}\,k \sin\theta$ | $\frac{-1}{\sqrt{2}}\,k \sin\theta$ |
| $k' \cdot \epsilon^*$ | $0$ | $0$ |
| $\epsilon \cdot \epsilon^*$ | $-\frac{1}{2}\,(\cos\theta + 1)$ | $\frac{1}{2}\,(\cos\theta - 1)$ |
| $\epsilon_0$ | $0$ | $0$ |
| $\epsilon_0^*$ | $0$ | $0$ |

*Tab. B.1: Die einzelnen Bestandteile der invarianten Matrixelemente*

$$
\begin{aligned}
q \cdot k &= q_0 k_0 + k^2 \\
q' \cdot k' &= q'_0 k'_0 + k'^2 \\
q \cdot q' &= q_0 q'_0 - k k' \cos\theta \\
k \cdot k' &= k_0 k'_0 - k k' \cos\theta \\
q' \cdot k &= q'_0 k_0 + k k' \cos\theta \\
q \cdot k' &= q_0 k'_0 + k k' \cos\theta
\end{aligned}
\tag{B.10}
$$

Dabei bezeichnen $q, k, ..$ auf der linken Seite stets Viererimpulse, während sie auf der rechten Seite für den Betrag des Dreierimpulses stehen.

## B.5. Partialwellenzerlegung und Transformation in die JLS-Basis

Für die Partialwellenzerlegung der vier von uns berechneten Helizitätsamplituden benötigen wir die Rotationsmatrizen $d^J_{\lambda\lambda'}(\theta)$. Die Symmetriebeziehungen für diese Matrizen wurden bereits in Gl. (2.25) aufgeführt, für die konkrete Durchführung der Partialwellenzerlegung drücken wir die $d$–Matrizen wie folgt durch die Legendre–Polynome aus [11]:

$$
\begin{aligned}
d^J_{00}(\theta) &= P_J(\cos\theta) \\
d^J_{10}(\theta) &= \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{J}{J+1}}\,(\cos\theta P_J(\cos\theta) - P_{J-1}(\cos\theta)) \\
d^J_{11}(\theta) &= \frac{1}{1+\cos\theta}\left(P_J(\cos\theta) + \frac{J}{J+1}\cos\theta P_J(\cos\theta) + \frac{1}{J+1}P_{J-1}(\cos\theta)\right) \\
d^J_{-11}(\theta) &= \frac{1}{1-\cos\theta}\left(-P_J(\cos\theta) + \frac{J}{J+1}\cos\theta P_J(\cos\theta) + \frac{1}{J+1}P_{J-1}(\cos\theta)\right)
\end{aligned}
\tag{B.11}
$$

Wir werden die Matrixelemente in der $LSJ$–Basis als Funktion von fünf Helizitätsmatrixelementen angeben, zusätzlich zu den bereits genannten vier Amplituden gehört dazu $\langle 1\ \vec{k}' \,|\, V^{JT} \,|\, 0\ \vec{k} \rangle$ , alle anderen lassen sich durch diese ausdrücken, und zwar ohne die Impulse zu vertauschen (s. Gl. (2.32)). Impuls- und Energieabhängigkeit werden daher im folgenden unterdrückt. Für die in der Transformationsmatrix $U$ benötigten Clebsch-Gordan-Koeffizienten (s. Gl. (2.31)) lassen sich durch Ausnutzung von Symmetrie- und Vollständigkeitsrelationen [62] analytische Ausdrücke

angeben. Man erhält:

$$
\begin{aligned}
(J0\,11|J1) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
(J0\,10|J0) &= 0 \\
(J{+}1\,0\,1\,1|J1) &= \sqrt{\frac{J}{2(2J+3)}} \\
(J{+}1\,0\,1\,0|J0) &= -\sqrt{\frac{J+1}{(2J+3)}} \\
(J{-}1\,0\,1\,0|J0) &= \sqrt{\frac{J}{(2J-1)}} \\
(J{-}1\,0\,1\,1|J1) &= \sqrt{\frac{J+1}{2(2J-1)}} \quad .
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich:

$$\langle L{=}J\ 1\,|\,V^{JT}\,|\,L{=}J\ 1\rangle \;=\; \Big\{\langle 1\,|\,V^{JT}\,|1\rangle - \langle 1\,|\,V^{JT}\,|-1\rangle\Big\}$$

$$
\begin{aligned}
&\langle L{=}J{+}1\ 1\,|\,V^{JT}\,|\,L{=}J{+}1\ 1\rangle \;= \\
&= \frac{1}{2J+1}\Big\{J\,(\langle 1\,|\,V^{JT}\,|1\rangle + \langle 1\,|\,V^{JT}\,|-1\rangle) \;- \\
&\qquad \sqrt{2J(J+1)}\,(\langle 0\,|\,V^{JT}\,|1\rangle + \langle 1\,|\,V^{JT}\,|0\rangle) \;+\; (J+1)\,\langle 0\,|\,V^{JT}\,|0\rangle\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle L{=}J{+}1\,|\,V^{JT}\,|\,L{=}J{-}1\rangle \;= \\
&= \frac{1}{2J+1}\Big\{\sqrt{J(J+1)}\,(\langle 1\,|\,V^{JT}\,|1\rangle + \langle 1\,|\,V^{JT}\,|-1\rangle) \;- \\
&\qquad \sqrt{2}(J+1)\,\langle 0\,|\,V^{JT}\,|1\rangle \;+\; \sqrt{2}J\,\langle 1\,|\,V^{JT}\,|0\rangle \;- \\
&\qquad \sqrt{J(J+1)}\,\langle 0\,|\,V^{JT}\,|0\rangle\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle L{=}J{-}1\ 1\,|\,V^{JT}\,|\,L{=}J{+}1\ 1\rangle \;= \\
&= \frac{1}{2J+1}\Big\{\sqrt{J(J+1)}\,(\langle 1\,|\,V^{JT}\,|1\rangle + \langle 1\,|\,V^{JT}\,|-1\rangle) \;+ \\
&\qquad \sqrt{2}J\,\langle 0\,|\,V^{JT}\,|1\rangle \;-\; \sqrt{2}(J+1)\,\langle 1\,|\,V^{JT}\,|0\rangle \;- \\
&\qquad \sqrt{J(J+1)}\,\langle 0\,|\,V^{JT}\,|0\rangle\Big\}
\end{aligned}
$$

$$\langle L{=}J{-}1\ 1 \,|\, V^{JT} \,|\, L{=}J{-}1\ 1 \rangle \ =$$
$$= \frac{1}{2J+1}\Big\{(J+1)\,(\langle 1 \,|\, V^{JT} \,|1\rangle + \langle 1 \,|\, V^{JT} \,|-1\rangle) \ +$$
$$\sqrt{2J(J+1)}\,(\langle 0 \,|\, V^{JT} \,|1\rangle + \langle 1 \,|\, V^{JT} \,|0\rangle) \ + \ J\,\langle 0 \,|\, V^{JT} \,|0\rangle\Big\} \tag{B.12}$$

Für $J = 0$ ist die Partialwellenzerlegung nur für das $\langle 0 \,|\, V^{J} \,|0\rangle$ Matrixelement definiert, der Rest verschwindet. Anhand von Gl. $(B.12)$ erkennt man, daß daher für $J = 0$ nur das $\langle L{=}J{+}1\ 1 \,|\, V^{JT} \,|\, L{=}J{+}1\ 1 \rangle$ Matrixelement existiert.

## B.6. Die Parameter unseres Modells

- $\pi$–Austausch:

  $g_1 = g_2 = g_{\pi\pi\rho} = g = 2.1$

  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_{\pi\pi\rho} = 1500\ MeV$ (Monopol)

- $\rho$–Austausch:

  $g_1 = g_2 = g = 2.1$

  $\Lambda_1 = \Lambda_{\pi\rho\pi} = 1700\ MeV$ (Monopol)

  $\Lambda_2 = \Lambda_{\rho\rho\rho} = 1700\ MeV$ (Monopol)

- $\omega$–Austausch:

  $g_1 = g_2 = g_{\omega\pi\rho}\, m_\omega^2 = 7.5$

  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_{\omega\pi\rho} = 2200\ MeV$ (Dipol)

- $\omega$–Polgraph:

  $g_1 = g_2 = g_{0_{\omega\pi\rho}}\, m_\omega^2 = 4.17$

  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_{\omega\pi\rho} = 1100\ MeV$ (Monopol)

- $A_1$–Polgraph:

  $g_1 = g_2 = g_0 = 1.5$

  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_{A_1\pi\rho} = 3400\ MeV$ (Dipol)

# Anhang C. Zerlegung der T-Matrix in separablen und nichtseparablen Anteil

Ausgangspunkt dieses Abschnittes ist ein Potential, daß sich in einen separablen und einen nichtseparablen Anteil zerlegen läßt

$$V = V^{ns} + V^{s} \quad .$$

Die folgenden Rechnungen orientieren sich an der in [63] durchgeführten Ableitung. Wir zerlegen die T-Matrix ebenfalls in einen separablen und einen nichtseparablen Anteil

$$\begin{aligned} T &= T^{ns} + T^{s} \\ \text{mit } T^{ns} &= V^{ns} + V^{ns}\tilde{G}T^{ns} \end{aligned}$$

und setzen diesen Ansatz in die Streugleichung

$$T = V + V\tilde{G}T$$

ein. $V$ kann dabei auch durch das Dreiteilchenpotential $B$ und $\tilde{G}$ durch $D$ ersetzt werden. Dann gilt:

$$\begin{aligned} T^{ns} + T^{s} &= (V^{ns} + V^{s}) + (V^{ns} + V^{s})\tilde{G}(T^{ns} + T^{s}) \\ &= T^{ns} + V^{s} + V^{ns}\tilde{G}T^{s} + V^{s}\tilde{G}(T^{ns} + T^{s}) \quad . \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad T^{s} = V^{s} + V^{s}\tilde{G}T + V^{ns}\tilde{G}T^{s}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{aligned} \textit{Nebenrechnung}: \quad & T^{ns}\tilde{G}V^{s} + T^{ns}\tilde{G}V\tilde{G}T \\ &= T^{ns}\tilde{G}V(1 + \tilde{G}T) - T^{ns}\tilde{G}V^{ns}(1 + \tilde{G}T) \\ &= T^{ns}\tilde{G}T - T^{ns}\tilde{G}T^{ns} - T^{ns}\tilde{G}V^{ns}\tilde{G}T^{s} \\ &= T^{ns}\tilde{G}T^{s} - T^{ns}\tilde{G}V^{ns}\tilde{G}T^{s} \\ &= (T^{ns} - T^{ns}\tilde{G}V^{ns})\tilde{G}T^{s} \\ &= V^{ns}\tilde{G}T^{s} \quad . \end{aligned}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\Rightarrow \quad T^{s} = V^{s} + T^{ns}\tilde{G}V^{s} + T^{ns}\tilde{G}V\tilde{G}T + V^{s}\tilde{G}T$$

$$\Rightarrow \qquad T \;=\; T^{ns} + (1 + T^{ns}\tilde{G})V^{s}(1 + \tilde{G}T) \tag{C.1}$$

An dieser Stelle wird von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß $V^s$ ein separables Potential ist

$$V \;=\; f_0\, d_0\, f_0 \qquad .$$

Man definiert eine 'dressed' Vertexfunktion durch:

$$f \;:=\; f_0 + T^{ns}\tilde{G}f_0 \qquad . \tag{C.2}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Nebenrechnung:

Mit der Definition Gl. $(C.2)$ erhält man für die Größe $f_0\tilde{G}T$ mit Hilfe von Gl. $(C.1)$:

$$\begin{aligned} f_0\tilde{G}T \;&=\; f_0\tilde{G}T^{ns} + f_0\tilde{G}\overbrace{(1 + T^{ns}\tilde{G})f_0}^{f}\, d_0\, f_0(1 + \tilde{G}T) \\ \Rightarrow\; (1 - f_0\tilde{G}fd_0)f_0\tilde{G}T \;&=\; f_0\tilde{G}(T^{ns} + fd_0f_0) \\ \Rightarrow\; f_0\tilde{G}T \;&=\; (1 - f_0\tilde{G}fd_0)^{-1}\, f_0\tilde{G}(T^{ns} + fd_0f_0) \qquad . \end{aligned} \tag{C.3}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Aus Gl. $(C.1)$ wird dann:

$$\begin{aligned} T \;&=\; T^{ns} + (1 + T^{ns}\tilde{G})f_0d_0f_0(1 + \tilde{G}T) \\ &=\; T^{ns} + fd_0(f_0 + f_0\tilde{G}T) \\ &=\; T^{ns} + fd_0\big\{f_0 + (1 - f_0\tilde{G}f)^{-1}f_0\tilde{G}(T^{ns} + fd_0f_0)\big\} \\ &=\; T^{ns} + fd_0(1 - f_0\tilde{G}fd_0)^{-1} \\ &\qquad\qquad \big\{f_0 - f_0\tilde{G}fd_0f_0 + f_0\tilde{G}T^{ns} + f_0\tilde{G}fd_0f_0\big\} \\ &=\; T^{ns} + fd_0(1 - f_0\tilde{G}fd_0)^{-1}f \\ &=\; T^{ns} + f[d_0^{-1} - f_0\tilde{G}f]^{-1}f \qquad . \end{aligned} \tag{C.4}$$

Zusammenfassend erhält man schließlich:

$$
\begin{aligned}
T &= T^{ns} + f\,\tilde{d}\,f \\
f &= f_0 + f_0 \tilde{G} T^{ns} \\
\tilde{d} &= (d_0^{-1} - \Sigma)^{-1} \\
\Sigma &= f_0 \tilde{G} f \quad .
\end{aligned}
\tag{C.5}
$$

# Anhang D. Das Dreiteilchensystem

## D.1. Berechnung von $disc(T)$ aus der Bethe-Salpeter-Gleichung

In diesem Anhang soll die Unstetigkeit der T-Matrix aus der Bethe-Salpeter-Gleichung berechnet werden. Wir gehen dabei von der für den Dreiteilchenfall modifizierten Gleichung Gl. (3.32) aus:

$$T(s) \;=\; B(s) + B(s)\tau(\sigma)T(s) \tag{D.1}$$

Für den Zweiteilchenfall braucht man nur $\tau(\sigma)$ durch $G(s)$ und $B$ durch $V$ zu ersetzen. Es läßt sich leicht zeigen, daß sich Gl. $(D.1)$ auch als

$$T(s) \;=\; B(s) + T(s)\tau(\sigma)B(s) \tag{D.2}$$

schreiben läßt.

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man für $B$:

$$B(s) = T(s)\,[1 + \tau(\sigma)T(s)]^{-1} \tag{D.3}$$

und

$$B(s) = [1 + T(s)\tau(\sigma)]^{-1}T(s) \quad . \tag{D.4}$$

Da wir die Unstetigkeit von $T$ berechnen wollen, betrachten wir nun Gl. $(D.3)$ an der Stelle $s^+ \equiv s + i\epsilon$ und Gl. $(D.4)$ an der Stelle $s^- \equiv s - i\epsilon$ und subtrahieren die beiden Gleichungen:

$$B(s^+) - B(s^-) \;=\; T(s^+)[1+\tau(\sigma^+)T(s^+)]^{-1} - [1+T(s^-)\tau(\sigma^-)]^{-1}T(s^-) \quad , \tag{D.5}$$

wobei $\sigma^\pm$ wie $s^\pm$ definiert ist. Multipliziert man Gl. $(D.5)$ schließlich von links mit $(1 + T(s^-)\tau(\sigma^-))$ und von rechts mit $(1 + \tau(\sigma^+)T(s^+))$, so erhält man:

$$\begin{aligned} T(s^+) - T(s^-) \;=\; & [B(s^+) - B(s^-)] \;+\; T(s^-)\tau(\sigma^-)[(B(s^-) - B(s^-)] \\ & +\; [B(s^+) - B(s^-)]\tau(\sigma^+)T(s^+) \;+\; T(s^-)[\tau(\sigma^+) - \tau(\sigma^-)]T(s^+) \\ & +\; T(s^-)\tau(\sigma^-)[B(s^+) - B(s^-)]\tau(\sigma^+)T(s^+) \quad . \end{aligned} \tag{D.6}$$

Ist nun $B$ ein reelle Größe, wie etwa im Zweiteilchenfall, so gilt $disc(B) = 0$ und aus Gl. $(D.6)$ wird Gl. (3.26) in Abschnitt 3.2:

$$disc(T(s)) \;=\; T(s^-)[G(s^+) - G(s^-)]T(s^+) \quad , \tag{D.7}$$

wobei wir schon $\tau$ durch $G$ ersetzt haben.

Im Dreiteilchenfall ist $disc(B)$ i.a. nicht Null, jedoch läßt sich zeigen, daß $disc(\langle q' \mid B(s) \mid q \rangle) = 0$ gilt, wenn $q'$ oder $q$ externe Impulse sind [13]. Dann wird aus Gl. $(D.6)$ :

$$\begin{aligned} disc(T(s)) &= T(s^-)[\tau(s^+) - \tau(s^-)]T(s^+) + \\ &+ T(s^-)\tau(\sigma^-)[B(s^+) - B(s^-)]\tau(\sigma^+)T(s^+) \quad . \end{aligned} \tag{D.8}$$

Dies ist die Gleichung für $disc(T)$, die in Abschnitt 3.3 für das Dreiteilchensystem benutzt wird.

## D.2. Das Potential des $\rho$–Polgraphen

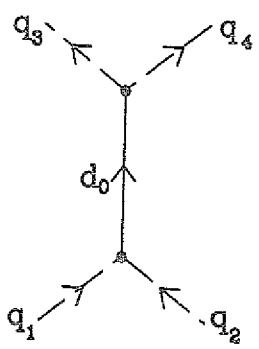



*Abb. D.1: Der $\rho$-Polgraph in der $\pi\pi$-Streuung*

Die $\pi\pi$–Wechselwirkung im $J = 1$–Kanal wird im wesentlichen durch den $\rho$–Polgraphen bestimmt. Allgemein gilt für das Potential eines Polgraphen

$$V(\vec{q}\,', \vec{q}; s) = f_0(\vec{q}\,'; s) \frac{1}{s - m_0^2} f_0(\vec{q}; s) \quad .$$

Durch Einsetzen der $\pi\pi\rho$–Vertexfunktion Gl. (2.11) erhält man:

$$V(\vec{q}\,', \vec{q}; s) = n\, I \sum_{\lambda_\rho} \left[ i g_0 (q_3^\mu - q_4^\mu) \epsilon_\mu \right] \frac{1}{s - m_{0_\rho}^2} \left[ i g_0 (q_2^\nu - q_1^\nu) \epsilon_\nu \right] \quad .$$

Dabei haben wir bereits den Isospinanteil abseperiert. Es gilt hier I=2, dies soll nicht mehr explizit vorgerechnet werden. $n$ ist ein Faktor, der berücksichtigt, daß die beiden Pionen identische Teilchen sind, $n = \frac{1}{2}$ [10].

Nach Ausführung der Summation über $\lambda_\rho$ und Einsetzen der Viererimpulse ergibt sich $V$ zu:

$$\begin{aligned} V &= g_0^2 nI\ 4\vec{q}\vec{q}'\ d_0 \\ &= g_0^2 nI\ 4qq'\ \cos\theta\ d_0 \qquad , \\ &\qquad \text{denn } q_1^0 = q_2^0 \text{ und } q_3^0 = q_4^0 \qquad . \end{aligned}$$

Die Partialwellenzerlegung lautet für die $\pi\pi$-Streuung:

$$V^J = 2\pi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) P_J(\cos\theta) V \qquad .$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} V^J &= g_0^2 F(q^2) F(q'^2) nI\ 4qq'\ d_0\ 2\pi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) P_J(\cos\theta) \cos\theta \\ &= g_0^2\ 4qq' F(q^2) F(q'^2)\, d_0\, 2\pi\, \frac{2}{2J+1} \delta_{J,1} \\ &= \frac{g_0^2}{4\pi} F(q^2) F(q'^2) (2\pi)^2 \frac{16}{3} qq' d_0 \delta_{J,1} \qquad . \end{aligned}$$

$F(q^2)$ ist dabei der Formfaktor am $\pi\pi\rho$–Vertex.

# Anhang E. Der $\pi NN$–Formfaktor

## E.1. Berechnung der Vertexfunktionen

Für die Berechnung des $\pi NN$–Formfaktors benötigen wir die Vertexfunktionen $f_{0N\bar{N}\to\pi}$ und $f_{0\pi\rho\to\pi}$ in der partialwellenzerlegten Form. Dazu berechnen wir die beiden Polgraphen $N\bar{N} \to \pi \to \pi\rho$ und $\pi\rho \to \pi \to \pi\rho$.

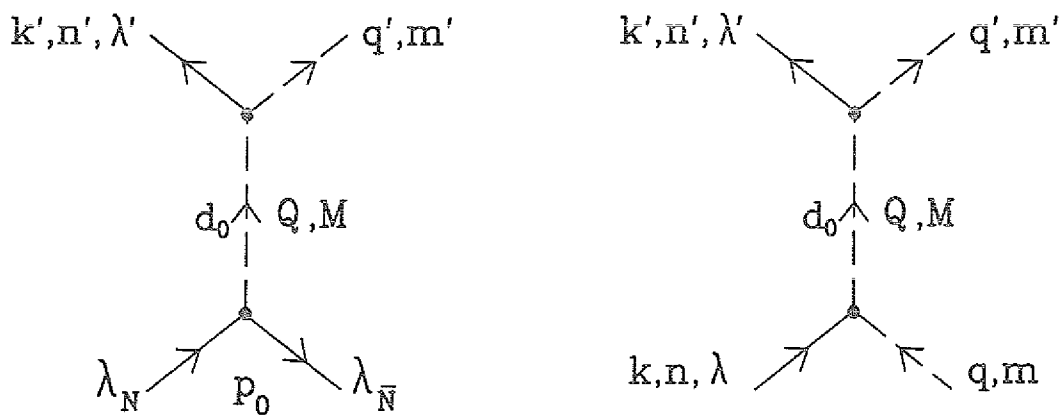



*Abb. E.1: $N\bar{N} \to \pi \to \pi\rho$ und $\pi\rho \to \pi \to \pi\rho$ Polgraphen*

(a) $N\bar{N} \to \pi \to \pi\rho$

Wir verwenden im folgenden für den $\pi NN$ Vertex stets Pseudovektorkopplung.

$$\mathcal{L}_{N\bar{N}\pi} = \frac{f}{m_\pi}\bar{\Psi}\gamma^5\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\pi \quad .$$

$\Psi$ ist dabei das (Anti-)Nukleonenfeld und $f$ ist die $N\bar{N}\pi$ Kopplungskonstante.

Durch Anwendung der Feynman-Regeln [33] ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad f_{0N\bar{N}\to\pi}(t, p_0, \lambda_N, \lambda_{\bar{N}}) &= -\frac{f}{m_\pi}\bar{v}(-\vec{p}_0, \lambda_{\bar{N}})\gamma^5\gamma^\mu iQ_\mu u(\vec{p}_0, \lambda_N) \\ &= -i\frac{f}{m_\pi}\sqrt{t}\;\bar{v}(-\vec{p}_0, \lambda_{\bar{N}})\gamma^5\gamma^0 u(\vec{p}_0, \lambda_N) \quad , \end{aligned}$$

$$\text{da } Q = (\sqrt{t}, \vec{0}) \quad .$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad f_{0N\bar{N}\to\pi}(t,p_0,\lambda_N,\lambda_{\bar{N}}) &= -i\frac{f}{m_\pi}\sqrt{t}\,\frac{\omega_{p_0}+m_N}{2\omega_{p_0}}\,\cdot \\
&\quad \left(\frac{p_0}{\omega_{p_0}+m_N},\,2\lambda_{\bar{N}}\right)\gamma^5\begin{pmatrix}1\\ \frac{-2\lambda_N p_0}{\omega_{p_0}+m_N}\end{pmatrix}\langle -\lambda_{\bar{N}}\,|\,\lambda_N\rangle \\
&= -i\frac{f}{m_\pi}\sqrt{t}\,\frac{\omega_{p_0}+m_N}{2\omega_{p_0}} \\
&\quad \left\{2\lambda_{\bar{N}}-2\lambda_N\frac{p_0^2}{(\omega_{p_0}+m_N)^2}\right\}\delta_{\lambda_N,\lambda_{\bar{N}}} \\
&= -i\frac{f}{m_\pi}\sqrt{t}\,\frac{\omega_{p_0}+m_N}{\omega_{p_0}}\lambda_N\left\{1-\frac{p_0^2}{(\omega_{p_0}+m_N)^2}\right\} \\
&= -4i\frac{f}{m_\pi}m_N\lambda_N \quad ,
\end{aligned}
$$

wobei folgendes benutzt wurde:

$$
\begin{aligned}
\langle -\lambda_{\bar{N}}\,|\,\lambda_N\rangle &= \langle \chi_{\lambda_{\bar{N}}}\,|\,\chi_{\lambda_N}\rangle \\
&= \delta_{\lambda_N,\lambda_{\bar{N}}}
\end{aligned}
$$

und

$$
\omega_{p_0} = \sqrt{p_0^2+m_N^2} = \frac{\sqrt{t}}{2} \quad .
$$

Wiederum unter Vernachlässigung der Isospinstruktur erhalten wir aus Gl. (2.11) die Vertexfunktion $f_{0\pi\to\pi\rho}$:

$$
\begin{aligned}
f_{0\pi\to\pi\rho}(t,\vec{k}',\lambda'_\rho) &= -ig(Q+q')^\mu\epsilon^*_\mu \\
&= -ig(\sqrt{t}\,\epsilon^*_0+q'\cdot\epsilon^*) \quad .
\end{aligned}
$$

Aus der Transformation in die LSJ-Basis (Gl. ($E$.3)) ergibt sich, daß wir zur Berechnung des Pion-Polgraphen nur $\lambda'=0$ betrachten müssen.

$$
\Rightarrow \qquad f_{0\pi\to\pi\rho}(t,\vec{k}',0) = -igk\frac{1}{m_\rho}(\sqrt{t}+q'_0+\omega_\rho(k')) \quad .
$$

$q'_0$ wird dabei in Übereinstimmung mit dem jeweils gewählten Modell gewählt, für das einfache $\pi\rho$-Modell gilt Gl. ($B$.8), für das Modell unter Einschluß der Dreiteilchendynamik ist $q'_0=\omega_\pi(q')$.

Das für die Transformation in die LSJ-Basis benötigte Helizitätsmatrixelement lautet also:

$$
\begin{aligned}
\langle \lambda_\rho = 0 \; \vec{k}' \,|\, V(t) \,|\, \lambda_N = +\frac{1}{2} \; \lambda_{\bar{N}} = +\frac{1}{2} \;\; \vec{p}_0 \rangle \;\equiv\; \langle 0 \,|\, V \,|\, ++ \rangle \;=& \\
= \left[ \left\{ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2\sqrt{\omega_\pi \omega_\rho}} \right\} (-ig) \, \frac{k'}{m_\rho} \, (\sqrt{t} + q_0' + \omega_\rho) \right] \frac{1}{Q^2 - m_\pi^2} & \\
\left[ \left\{ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \right\} (-2i) \, \frac{f}{m_\pi} \, m_N \right] \quad . &
\end{aligned}
\tag{E.1}
$$

Die Terme in geschweiften Klammern sind dabei TOPT-Normierungsfaktoren. Das bereits vorhandene Potential $V_{N\bar{N}\to\pi\rho}$ wurde im TOPT-Formalismus berechnet. In Abschnitt E.3 wird erläutert, wie sich dieses Potential für den BbS-Formalismus modifizieren läßt. Dazu benötigen wir die Vertexfunktionen teilweise in TOPT-Normierung.

Partialwellenzerlegung:

$$
\begin{aligned}
\langle 0 \,|\, V^J \,|\, ++ \rangle \;&=\; 2\pi \int_{-1}^{+1} dx \; d_{00}^J(x) \; \langle 0 \,|\, V \,|\, ++ \rangle \\
&=\; 4\pi \, \langle 0 \,|\, V \,|\, ++ \rangle \; \delta_{J,0} \quad .
\end{aligned}
\tag{E.2}
$$

Schließlich erfolgt die Transformation in die LSJ-Basis, diese ist in [8] angegeben. Dort ist auch angegeben, daß sich für $J = 0$ nur für den $S = 0$ $N\bar{N}$-Zustand ein von Null verschiedenes Matrixelement ergibt. Für dieses gilt:

$$
\begin{aligned}
\langle J{=}0 \; L{=}J{+}1 \; S{=}1 \,|\, V \,|\, J{=}0 \; L{=}0 \; S{=}0 \rangle \;&=\; -\sqrt{2} \, \langle 0 \,|\, V^J \,|\, + \; + \rangle \\
&=\; -\sqrt{2} \, 4\pi \, \langle 0 \,|\, V \,|\, + \; + \rangle \quad .
\end{aligned}
\tag{E.3}
$$

(b) $\pi\rho \to \pi \to \pi\rho$

Auch wenn es sich bei diesem Polgraphen um einen Prozeß im s-Kanal der $\pi\rho$–Wechselwirkung handelt, schreiben wir ihn als Funktion von $t$. Wir betrachten diesen Graphen ja nur, um die Vertexfunktionen für die Berechnung des Formfaktors zu erhalten. Dabei berechnen wir $\Gamma$ zunächst aus dem $N\bar{N} \to \pi$–Prozeß und dieser gehört nach unserer Definition der Mandelstam-Variablen zum $t$-Kanal.

$$\langle \lambda' \, \vec{k}' \,|\, V(t) \,|\, \lambda \, \vec{k} \rangle \;\equiv\; \langle \lambda' \,|\, V \,|\, \lambda \rangle \;=$$

$$= \left[ \left\{ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2\sqrt{\omega_\pi(k')\omega_\rho(k')}} \right\} (-ig)\,(Q+q')^\mu \epsilon^*_\mu \right] \frac{1}{Q^2 - m_\pi^2}$$

$$\left[ \left\{ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2\sqrt{\omega_\pi(k)\omega_\rho(k)}} \right\} (-ig)\,(Q+q)^\nu \epsilon_\nu \right] \quad .$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß für dieses Potential nur das $\langle 0 \,|\, V \,|\, 0 \rangle$ Matrixelement von Null verschieden ist. Für dieses gilt:

$$\langle 0 \,|\, V \,|\, 0 \rangle = \left[ \left\{ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2\sqrt{\omega_\pi(k')\omega_\rho(k')}} \right\} (-ig)\, \frac{k'}{m_\rho} \left(\sqrt{t} + q_0' + \omega_\rho(k')\right) \right] \frac{1}{Q^2 - m_\pi^2}$$

$$\left[ \left\{ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2\sqrt{\omega_\pi(k)\omega_\rho(k)}} \right\} (-ig)\, \frac{k}{m_\rho} \left(\sqrt{t} + q_0 + \omega_\rho(k)\right) \right] \quad . \tag{E.4}$$

Die Partialwellenzerlegung ergibt:

$$\begin{aligned} \langle 0 \,|\, V^J \,|\, 0 \rangle \;&=\; 2\pi \langle 0 \,|\, V \,|\, 0 \rangle \int_{-1}^{+1} d^J_{00}(x) \\ &=\; 4\pi \langle 0 \,|\, V \,|\, 0 \rangle \; \delta_{J,0} \quad , \end{aligned} \tag{E.5}$$

und schließlich gilt für die Transformation in die LSJ-Basis nach Gl. $(B.12)(J=0)$:

$$\langle J{=}0 \; L{=}J{+}1 \; S{=}1 \,|\, V \,|\, J{=}0 \; L{=}J{+}1 \; S{=}1 \rangle \;=\; \langle 0 \,|\, V^J \,|\, 0 \rangle \tag{E.6}$$

Aus den Gln. $(E.4)$, $(E.5)$ und $(E.6)$ läßt sich nun die $\pi \to \pi\rho$ Vertexfunktion in der partialwellenzerlegten Form ablesen, jedoch zunächst ohne jede Isospinabhängigkeit

$$f^J_{0\pi\to\pi\rho}(t,k) \;=\; -2\sqrt{\pi} \left\{ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2\sqrt{\omega_\pi(k)\omega_\rho(k)}} \right\} ig\, \frac{k}{m_\rho} \left(\sqrt{t} + q_0 + \omega_\rho(k)\right) \quad . \tag{E.7}$$

Mit dieser Beziehung und den Gln. $(E.1)$, $(E.2)$ und $(E.3)$ erhält man die $N\bar{N} \to \pi$ Vertexfunktion:

$$f^J_{0N\bar{N}\to\pi}(t,p_0) \;=\; 2\sqrt{2\pi} \left\{ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \right\} 2i \frac{f}{m_\pi} m_N \quad . \tag{E.8}$$

Abgesehen von der Isospinstruktur hat die Vertexfunktion $f^J_{0\pi\rho\to\pi}$ die gleiche Gestalt wie $f^J_{0\pi\to\pi\rho}$. Die Isospinabhängigkeit wird im folgenden Abschnitt behandelt.

## E.2. Isospinabhängigkeit des $\pi NN$–Formfaktors

Bei den in Anhang D.1 abgeleiteten Vertexfunktionen wurde die Isospinabhängigkeit unterdrückt. Nach Gl. (4.8) ergibt sich der Formfaktor aus dem Verhältnis von $F(t, p_0)$ zu $f(t, p_0)$. Für die Berechnung von $F$ benutzen wir das bereits vorhandene $N\bar{N} \to \pi\rho$ Potential, das in der Isospinbasis gegeben ist. Da der Gesamtisospin $T$ erhalten sein muß und wir den Übergang in ein Pion berechnen wollen, verwenden wir das $N\bar{N} \to \pi\rho$ Potential und die $\pi\rho \to \pi\rho$ T-Matrix für Isospin $T = 1$. Darin sind dann bereits die entsprechenden Isospinfaktoren enthalten. Bei der Berechnung von $F_{N\bar{N}\to\pi}$ muß also nur noch der Isospinanteil der $\pi\rho \to \pi$ Vertexfunktion berücksichtigt werden, wobei das $\pi$ und das $\rho$ zu einem Isospin-1-Zustand gekoppelt werden müssen.

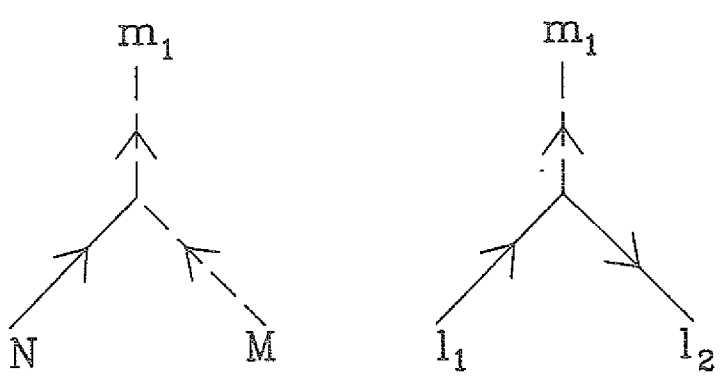



*Abb. E.2: Die $\pi\rho \to \pi$ und $N\bar{N} \to \pi$ Vertexfunktionen*

Man erhält:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{N,M} (1N\,1M|1T_z)\,[\phi_M \times \phi^*_{m_1}]\,\phi_N \\
&= \sum_{N,M} (1N\,1M|1T_z)\,(-1)^{m_1+N}\,i\sqrt{2}\,(1M\,1\,-m_1|1\,-N) \\
&= i\sqrt{2}\,\delta_{T_z,m_1} \qquad .
\end{aligned}
$$

Die Isospinabhängigkeit von $f_{N\bar{N}\to\pi}$ ist genauso zu behandeln:

$$\begin{aligned}
&\sum_{l_1,l_2} (\frac{1}{2}l_1\,\frac{1}{2}l_2|1T_z)\;\bar{\chi}^\dagger_{l_2}\tau\phi^*_{m_1}\chi_{l_1} \\
&= \sum_{l_1,l_2} (\frac{1}{2}l_1\,\frac{1}{2}l_2|1T_z)\;(-1)^{\frac{1}{2}+l_2}\sqrt{3}\,(\frac{1}{2}-l_2\,1m_1|\frac{1}{2}l_1) \\
&= \sqrt{2}\;\delta_{T_z,m_1} \qquad .
\end{aligned}$$

Abgesehen von den Isospinfaktoren, die bereits in $T$ und $V$ enthalten sind, führt die Isospinabhängigkeit von $F$ und $f$ also auf einen Faktor $\left(\frac{F_{N\bar{N}\to\pi}}{f_{N\bar{N}\to\pi}}\right)^{Iso} = i$.

## E.3. Transformation des TOPT Potentials $V_{N\bar{N}\to\pi\rho}$ in ein Potential mit BBS-Normierung

Das in der Jülicher Gruppe berechnete Potential $V_{N\bar{N}\to\pi\rho}$ liegt nur in einer TOPT-Version vor. Anstelle einer Neuberechnung im BbS-Formalismus modifizieren wir das vorhandene Potential. Im folgenden berechnen wir daher einen Faktor, der die '$\pi\rho$–Seite' des Potentials in BbS-Normierung überführt. Die Normierungsfaktoren, die von der $N\bar{N}$–Seite herrühren, kürzen sich bei der Berechnung des Formfaktors heraus, da wir die nackte $N\bar{N}\to\pi$–Vertexfunktion ebenfalls in TOPT-Normierung verwenden.

Gegeben sei der Propagator der BbS-Streugleichung. Dieser wird wie folgt umgeformt:

$$\begin{aligned}
\tilde{G}^B(t;k) &= \frac{\omega_\pi+\omega_\rho}{(2\pi)^3 2\omega_\pi\omega_\rho}\,\frac{1}{t-(\omega_\pi+\omega_\rho)^2} \\
&= \frac{\omega_\pi+\omega_\rho}{(2\pi)^3 2\omega_\pi\omega_\rho}\,\frac{1}{\sqrt{t}+\omega_\pi+\omega_\rho}\,\frac{1}{\sqrt{t}-\omega_\pi-\omega_\rho} \\
&= C(t;k)\,\tilde{G}^T(t;k)
\end{aligned}$$

mit

$$C(t;k) = \frac{\omega_\pi+\omega_\rho}{(2\pi)^3 2\omega_\pi\omega_\rho}\,\frac{1}{\sqrt{t}+\omega_\pi+\omega_\rho} \qquad .$$

Dabei ist $\tilde{G}^T$ der TOPT-Propagator. Für die Streugleichung gilt:

$$
\begin{aligned}
T^B(k',k) &= V^B(k',k) + \int dk'' k''^2 V^B(k',k'')\tilde{G}^B(k'')T^B(k'',k) \\
&= V^B(k',k) + \int dk'' k''^2 V^B(k',k'')C(k'')\tilde{G}^T(k'')T^B(k'',k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \sqrt{C(k')}T^B(k',k)\sqrt{C(k)} &= \sqrt{C(k')}V^B(k',k)\sqrt{C(k)} + \\
&+ \int dk'' k''^2 \left(\sqrt{C(k')}V^B(k',k'')\sqrt{C(k'')}\right)\tilde{G}^T(k'')\left(\sqrt{C(k'')}T^B(k'',k)\sqrt{C(k)}\right)
\end{aligned}
$$

Eine T-Matrix, die die BbS-Streugleichung löst, läßt sich daher durch folgende Transformation in eine Lösung der TOPT-Streugleichung überführen:

$$
T^T(t;k',k) = \sqrt{C(t;k')}T^B(t;k',k)\sqrt{C(t;k)} \quad .
$$

Die gleiche Transformation gilt für Potentiale.

LITERATURVERZEICHNIS


[1] H. Yukawa, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* **17** (1935) 48.

[2] G.E. Brown und M. Rho, *Phys. Lett.* **82 B** (1979) 177;
G.E. Brown, M. Rho und V. Vento, *Phys. Lett.* **84 B** (1979) 383.

[3] T. DeGrand, R.L. Jaffe, K. Johnson und J. Kiskis,
*Phys. Rev.* **D 12** (1975) 2060.

[4] A.W. Thomas, S.Théberge und G.A. Miller, *Phys. Rev.* **D 24** (1981) 216;
A.W. Thomas, Advances in Nucl. Phys. 13 (1983) 1.

[5] W.N. Cottingham, *Phys. Rev.* **D 8** (1973) 80;
M. Lacombe, *Phys. Rev.* **C 21** (1980) 861.

[6] M.M. Nagels, *Phys. Rev.* **D 17** (1978) 768.

[7] R. Machleidt, K. Holinde und Ch. Elster, *Phys. Rep.* **149** (1987) 1.

[8] T. Hippchen, Spezielle Berichte der Kernforschungsanlage Jülich Nr. 494, 1989;
T. Hippchen, J. Haidenbauer, K. Holinde & V. Mull, *Phys. Rev.* **C 44** (1991) 1323;
V. Mull, J. Haidenbauer, T. Hippchen & K. Holinde, *Phys. Rev.* **C 44** (1991) 1337.

[9] R. Büttgen, Spezielle Berichte der Kernforschungsanlage Jülich Nr. 459, 1988;
R. Büttgen, K. Holinde, A. Müller-Groeling, J. Speth & P. Wyborny,
*Nucl. Phys.* **A 506** (1990) 586;
A. Müller–Groeling, Spezielle Berichte der Kernforschungsanlage Jülich Nr. 527, 1989;
A. Müller–Groeling, K. Holinde & J. Speth, *Nucl. Phys.* **A 513** (1990) 557.

[10] D. Lohse, Spezielle Berichte der Kernforschungsanlage Jülich Nr. 526, 1989;
D. Lohse, J.W. Durso, K. Holinde & J. Speth, *Nucl. Phys.* **A 516** (1990) 513.

[11] B. Holzenkamp, Spezielle Berichte der Kernforschungsanlage Jülich Nr. 460, 1988;
B. Holzenkamp, K. Holinde & J. Speth, *Nucl. Phys.* **A 500** (1989) 485.

[12] Ch.J. Jochain, "Quantum Collision Theory", North Holland Publishing Company, Amsterdam 1975.

[13] R. Aaron, R.D. Amado und J.E. Young, *Phys. Rev.* **174** (1968) 2022;
R. Aaron, "Modern Three-Hadron Physics" (A.W. Thomas, Ed.), Springer Verlag, Heidelberg, 1976.

[14] C. Daum et al., *Nucl. Phys.* **B 182** (1981) 269.

[15] M.G. Bowler, *Phys. Lett.* **209 B** (1988) 99.

[16] J.A. Dankowych et al., *Phys. Rev. Lett.* **46** (1981) 580.

[17] R. Aaron, R.S. Longacre und J.E. Sacco, *Ann. of Phys.* **117** (1979) 56;
R.S. Longacre und R. Aaron, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 1509.

[18] K.Holinde, *Nucl. Phys.* **A 543** (1992) 143c.

[19] T. Ueda, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992).

[20] A.W. Thomas und K. Holinde, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 2026.

[21] S.A. Coon und M.D. Scadron, *Phys. Rev.* **C 23** (1981) 1150;
*Phys. Rev.* **C 42** (1990) 2256.

[22] H.A. Bethe, E.E. Salpeter, *Phys. Rev.* **84** (1951) 1232.

[23] R. Blankenbecler und R. Sugar, *Phys. Rev.* **142** (1966) 1051.

[24] R.K. Bhaduri, "Modells of the Nucleon", Addison Wesley, 1988.

[25] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B 72** (1974) 461;
E. Witten, *Nucl. Phys.* **B 160** (1979) 57.

[26] J. Wess und B. Zumino, *Phys. Rev.* **163** (1967) 1727.

[27] J. Sakurai, "Currents and Mesons", Chicago University Press, 1969;
M. Bando et al, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 1215.

[28] M. Bando et al, *Phys. Rep.* **164** (1988) 217.

[29] S. Gasiorowicz und D.A. Geffen, *Rev. of Mod. Phys.* **41** (1969) 531.

[30] J.W. Durso et al, *Nucl. Phys.* **A 430** (1984) 653.

[31] T. Fujiwara et al, *Prog. Theor. Phys.* **73** (1985) 286.

[32] J.W. Durso, *Phys. Lett.* **184 B** (1987) 348.

[33] J.D. Bjorken & S.D. Drell, "Relativistische Quantenmechanik",
Bibliographisches Institut A.G., Mannheim 1966.

[34] B.C. Pearce, private Kommunikation.

[35] A.R. Edmonds, "Angular Momentum in Quantum Mechanics", Princeton
University Press, Princeton, 1957.

[36] K. Erkelenz, *Phys. Rep.* **13C** (1974) 191.

[37] M. Jacob & G.C. Wick, *Ann. of Phys.* **7** (1959) 404.

[38] S.U. Chung, "Spin formalism",
Academic Training Programm of CERN, CERN 71-8 1971.

[39] S. Gasiorowicz, "Elementary Particle Physics",
John Wiley ans Sons, New York 1966.

[40] M.I. Haftel & F. Tabakin, *Nucl. Phys.* **A 158** (1970) 1.

[41] L.D. Faddeev, "Mathematical Aspects of the Three-Body-Problem", Daniel Davey and Co., Inc., New York 1965;
L.D. Faddeev, Soviet Physics JETP **12** (1961) 1014;
Doklady **6** (1961) 384;
Doklady **7** (1963) 600.

[42] E.O. Alt, P. Grassberger und W. Sandhas, *Nucl. Phys.* **B 2** (1967) 167.

[43] E.D. Cooper und B.K. Jennings, *Nucl. Phys.* **A 500** (1989) 553.

[44] E. Schmid und H. Ziegelmann, "The Quantum Mechanical Three-Body Problem", Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1974.

[45] W-Y.P. Hwang, J. Speth und G.E. Brown, *Z. Phys.* **A 339** (1991) 383.

[46] V. Mull, Diplomarbeit, Universität Bonn, 1990

[47] B.C. Pearce und I.R. Afnan, *Phys. Rev.* **C 34** (1986) 991.

[48] T.D. Lee, *Phys. Rev.* **95** (1954) 1329.

[49] M.G. Bowler, *Phys. Lett.* **182 B** (1986) 400.

[50] M. Zielinski et al., *Phys. Rev.* **D 30** (1984) 1855.

[51] H. Garcilazo et al., *Phys. Rev.* **C 42** (1990) 2315.

[52] H. Albrecht et al., *Z. Phys.* **C 33** (1986) 7.

[53] Particle Data Group, "Review of Particle Properties", *Phys. Rev.* **D 45** (1992) 100.

[54] B.C. Pearce, PhD–Thesis, unveröffentlicht.

[55] H. Pagels, *Phys. Rev.* **179** (1969) 1337.

[56] H.J. Braathen, *Nucl. Phys.* **B 44** (1972) 93.

[57] J.W. Durso, A.D. Jackson und B.J. Verwest, *Nucl. Phys.* **A 282** (1977) 404.

[58] J. Speth, K. Holinde, B.C. Pearce und R. Tegen, Few-Body Systems, Suppl.6 (1992) 50.

[59] V. Mull, K. Holinde und J. Speth, *Phys. Lett.* **275 B** (1992) 12.

[60] V. Mull, K. Holinde und J. Speth, *Phys. Lett.* **286 B** (1992) 13.

[61] B.C. Pearce und B.K. Jennings, *Nucl. Phys.* **A 528** (1991) 655.

[62] A. Messiah, "Quantenmechanik", Band 2,
de Gruyter, Berlin, New York, 2.Aufl., 1985.

[63] I.R. Afnan und A.T. Stelbovics, *Phys. Rev.* **C 23** (1981) 1384.

# DANKSAGUNG

Für die Unterstützung dieser Diplomarbeit danke ich zunächst Prof. Dr. J. Speth, der meine Arbeit mit regem Interesse und zahlreichen Anregungen begleitete.

Mein Dank gilt ebenfalls Prof. Dr. K. Holinde für die Betreuung und die Bereitschaft, auftretende Fragen sofort zu diskutieren.

Prof. Dr. John Durso fühle ich mich durch die angenehme und fruchtbare Zusammenarbeit sehr verbunden. Ich danke Prof. Dr. G.E. Brown für die freundliche Aufnahme an seinem Institut während meines Aufenthalts in Stony Brook. Für die Vermittlung dieses Aufenthalts danke ich Prof. Speth.

Bei Dr. B.C. Pearce möchte ich mich für seine Unterstützung bei der Lösung physikalischer Probleme bedanken, die ich häufig in Anspruch genommen habe. Durch sein Wissen und seine Diskussionsbereitschaft war er bei der Anfertigung dieser Arbeit eine wichtige Hilfe.

Bei allen Mitarbeitern des Instituts für Kernphysik möchte ich mich für ihre Hilfsbereitschaft und die Unterstützung bei auftretenden Problemen bedanken. Insbesondere bin ich Volker Mull für seine häufig geleistete Hilfe zu Dank verpflichtet.

Mein besonderer Dank gilt meinem Studienfreund Christian Schütz, mit dem mich seit Beginn unseres Studiums eine enge Zusammenarbeit und persönliche Freundschaft verbindet.

Ich danke der Friedrich-Ebert-Stiftung für die Förderung eines großen Teils meines Studiums.

Vor allem möchte ich mich hier bei meinen Eltern bedanken. Die Unterstützung und Förderung, die ich von ihnen erhalten habe, hat mir mein Studium erst ermöglicht.

Schließlich und ganz besonders danke ich meiner Frau Dörte für alles.

FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH GmbH

KFA

Jül-2734
Februar 1993
ISSN 0366-0885