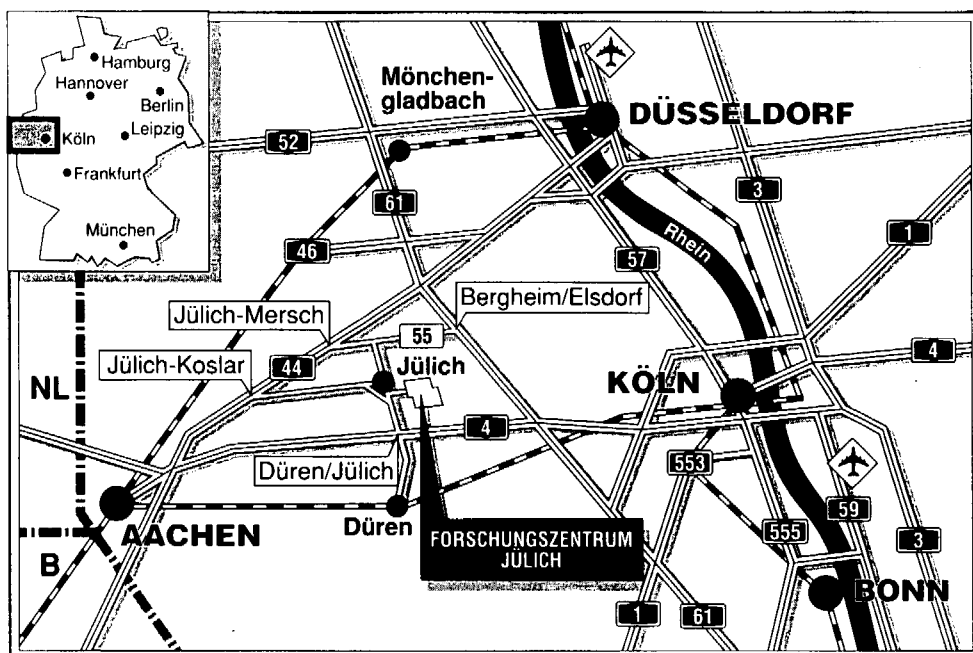


Institut für Chemische Technologie

**Messung mechanischer Eigenschaften
von Salzgrus und Überlegungen zur
semihydrostatischen Einlagerung von
Abfallgebinden in tiefen Bohrlöchern**

Walter Feuser



Berichte des Forschungszentrums Jülich ; 2782

ISSN 0944-2952

Institut für Chemische Technologie Jül-2782

D 82 (Diss. RWTH Aachen)

Zu beziehen durch: Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek

Postfach 19 13 · D-5170 Jülich · Bundesrepublik Deutschland

Telefon: 02461/61-6102 · Telefax: 02461/61-6103 · Telex: 833556-70 kfa d

Jül-2782

Juni 1993

ISSN 0944-2952

**Messung mechanischer Eigenschaften
von Salzgrus und Überlegungen zur
semihydrostatischen Einlagerung von
Abfallgebinden in tiefen Bohrlöchern**

Walter Feuser

Kurzfassung

Messung mechanischer Eigenschaften von Salzgrus und Überlegungen zur semihydrostatischen Einlagerung von Abfallgebinden in tiefen Bohrlöchern

von Walter Feuser

Bei der semihydrostatischen Einlagerung von Abfallgebinden in unverrohrten, vertikalen Bohrlöchern in Salzstöcken werden die Gebinde unkontrolliert im Bohrloch abgesetzt und jeweils vollkommen von Salzgrus umhüllt. Zur Berechnung der Druckverteilung im verfüllten Teil des Bohrlochs wird im theoretischen Modell die aus Gebinden und Salzgrus bestehende Füllung des Bohrlochs näherungsweise als homogenes Medium behandelt. Einlagertypische Salzgrusparameter wurden experimentell bestimmt. Die Berechnungen zeigen, daß nach dem semihydrostatischen Modell der maximale Druck im Bohrloch für ein 400-l-Abfallgebinde 110 kPa nicht übersteigt.

Abstract

Measurements of mechanical properties of crushed salt and considerations on the semihydrostatic disposal technique for waste packages in deep boreholes

by Walter Feuser

The semihydrostatic disposal technique for waste packages in unlined vertical boreholes in a salt repository envisages to emplace the packages undefined in the borehole and thereby embedding them totally in crushed salt backfill. For the analysis of the pressure distribution in the filled borehole it is assumed in the theoretical model that the filling consisting of packages and crushed salt can be considered as a homogeneous medium approximately. Typical disposal parameters of crushed salt were measured. Numerical evaluations show that in the semihydrostatic model the maximum pressure in the borehole for a 400-l-waste-package does not exceed 110 kPa.

Im Forschungszentrum Jülich (KFA) wird seit 1983 an einem Vorhaben zur "Weiterentwicklung der Bohrlochtechnologie für die Endlagerung radioaktiver Abfälle im Salz am Beispiel von Feedklärschlamm, Brennelementhülsen, Strukturteilen und HTR-Brennelementen" gearbeitet. Das Projekt wird vom Bundesminister für Forschung und Technologie unter dem Kennzeichen KWA 5302 B6 gefördert und trägt den Kurztitel **"MAW- und HTR-BE-Versuchseinlagerung in Bohrlöchern"** (Projekt MHV).

Gesamtziel des Vorhabens ist die Entwicklung geeigneter Methoden für die Endlagerung der genannten Abfälle in Bohrlöchern im Salz und deren Erprobung in der Schachtanlage Asse.

Die wissenschaftliche und organisatorische Leitung des Projekts liegt beim **Institut für Chemische Technologie (ICT)** der KFA - Forschungszentrum Jülich GmbH.

Das Institut für Tieflagerung (IfT) der GSF - Forschungszentrum für Umwelt und Gesundheit GmbH ist für die geomechanischen und bergmännischen Arbeiten im Projekt zuständig, es betreut die in situ-Versuche und ist als Eigner der Schachtanlage Asse Antragsteller für die Versuche gegenüber den Genehmigungsbehörden.

Geomechanische Rechnungen werden von der Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe (BGR) durchgeführt.

Das Bundesamt für Strahlenschutz (BfS), die Gesellschaft für Nuklear-Service (GNS), die Deutsche Gesellschaft zum Bau und Betrieb von Endlagern für Abfallstoffe (DBE) sowie das Projekt Hochtemperaturreaktor-Brennstoffkreislauf (HBK) beraten die Projektleitung und tragen dafür Sorge, daß die Randbedingungen der Abfallverursacher und des Abfallbeseitigers (Gorlebenplanung) berücksichtigt werden.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	III
Tabellenverzeichnis	VII
Verwendete Formelzeichen	IX
1 Einleitung	1
1.1 Die technische Aufgabe	1
1.2 Einlagervarianten	3
1.2.1 Gebindestapelung ohne Lastabtragung	3
1.2.2 Stützelemente	3
1.2.3 Salzgruspfropfen	5
1.2.4 Ringspaltverfüllung	6
1.2.5 Semihydrostatische Einlagerung	6
2 Der Drucktensor	9
2.1 Der Drucktensor auf Hauptachsen	9
2.2 Die Eigenwerte und die Eigenvektoren des Drucktensors	10
2.3 Geometrische Deutung	11
2.4 Die Eigenwerte des Transformationstensors	13
2.5 Die Mohr-Coulombsche Bruchbedingung	14
2.6 Der Seitendruckbeiwert	15
2.7 Übersicht über die Literatur	16
2.7.1 Experimentelle Untersuchungen	16
2.7.2 Analytische Ansätze	19
2.8 Schüttgüter bei wechselnder Beanspruchung	21
3 Experimentelle Untersuchungen zum Seitendruckbeiwert	25
3.1 Der Prüfstand zur Ermittlung des Seitendruckbeiwertes	25
3.2 Der Seitendruckbeiwert bei gleichbleibender Druckrichtung	27
3.3 Der Seitendruckbeiwert bei Wechsel der Druckrichtungen	33
3.3.1 Die Problemstellung	33
3.3.2 Durchführung und Ergebnisse der Messungen	33
3.3.3 Interpretation der Ergebnisse	37

4	Reibungsbeiwerte	41
4.1	Die Reihenfolge der Lastaufbringung	41
4.2	Der Prüfstand zur Ermittlung des Reibungsbeiwertes	44
4.3	Ergebnisse der Zugversuche	46
4.3.1	Die Kraft-Weg-Diagramme	46
4.3.2	Der Reibungsbeiwert als Funktion des Porengehaltes	47
4.3.3	Das Produkt aus Reibungs- und Seitendruckbeiwert	50
5	Das Scheibenmodell	53
5.1	Die Janssen-Theorie	53
5.2	Modifikationen der Janssen-Formel	58
6	Das Ringmodell	61
6.1	Kräftebilanz	61
6.2	Lösung der Differentialgleichung für den Vertikaldruck	63
6.3	Rand- und Nebenbedingungen	64
6.4	Die vertikale Druckkomponente	69
6.5	Die Kompressibilitäten	72
6.6	Der optimale Bohrlochradius	73
7	Zusammenfassung	77
	Literaturverzeichnis	81
	Anhang	
A	Kräfte- und Momentengleichgewicht	85
A.1	Kräftegleichgewicht in kartesischen Koordinaten	85
A.2	Momentengleichgewicht in kartesischen Koordinaten	87
A.3	Kräfte- und Momentengleichgewicht in Zylinderkoordinaten	88
B	Der Seitendruckbeiwert und der innere Reibungswinkel	91

Abbildungsverzeichnis

1.1	Unverrohrte vertikale Bohrlöcher für die Einlagerung von wärmeentwickelnden, radioaktiven Abfällen in unterirdischen Steinsalzformationen	2
1.2	400-l-Standardgebinde mit zementierten Brennelementhülsen	3
1.3	Gebindestapelung ohne Lastabtragung	4
1.4	Stützelement, das sich bei zunehmender Beladung mit Gebinden in die Wand krallt und bei steigender Belastung von dem darunter liegenden Gebinde abhebt	4
1.5	Salzgruspfropfen, der soviel Gewichtskraft in die Bohrlochwand abträgt, daß die Beanspruchung der Gebinde unter dem zugelassenen Wert bleibt	5
1.6	Ringspaltverfüllung, bei der eine Lastabtragung über Mantelreibung auf das Verfüllmaterial und über Scherverbund auf das umgebende Salzgebirge erfolgen soll	6
1.7	Semihydrostatische Einlagerung der Abfallgebinde, bei der Gebinde mit unterschiedlichen geometrischen Abmessungen ungeordnet und schief im Bohrloch abgesetzt werden können	7
2.1	Kräfte auf einen Körper beim Übergang aus Haft- in Gleitreibung; p_{zz} ist die vertikale Druckkomponente, p_a die aus Gewichtskraft und äußerer Kraft resultierende Druckkomponente; erst wenn der Winkel zwischen der aus Gewichtskraft plus äußeren Kräften resultierenden Druckkomponente p_a und der Richtung der ins Innere des Bodens weisenden Flächennormalen einen Grenzwert $\alpha = \delta$ überschreitet, beginnt der Körper zu rutschen	14
2.2	Meßgerät zur Bestimmung des Seitendruckbeiwertes nach SUNDARAM und COWIN	18
2.3	Der Seitendruckbeiwert als Funktion des Winkels der inneren Reibung nach den Modellen von JAKY, HENDRON und COULOMB	20
2.4	Die relative Volumenabnahme von Sand als Funktion des aufgegebenen vertikalen Drucks p_{zz} in einem Kompressions- und Entlastungsversuch bei einem Verhältnis Probenhöhe zu Probendurchmesser $\simeq 0,3$	22

2.5	Druck-Setzungskurven für Sand während wiederholter Be- und Entlastung in einem Ödometertest bei einem Verhältnis Probenhöhe zu Probendurchmesser von $\simeq 0,3$	23
2.6	Gemessener zeitlicher Verlauf der Setzung für ein Schüttgut in einem Kompressionsversuch mit konstanter Belastung	24
3.1	Aufsicht auf den Prüfstand zur experimentellen Bestimmung des Seitendruckbeiwertes bei gleichbleibender Druckrichtung	26
3.2	Körnungsspektrum des bei den Versuchen eingesetzten Salzgruses	27
3.3	Gemessener Seitendruckbeiwert von Salzgrus als Funktion eines einseitig aufgegebenen Drucks bei drei unterschiedlichen Anfangsprobenhöhen ($I \doteq H_{Probe} = 47 \text{ mm}$, $II \doteq H_{Probe} = 68 \text{ mm}$, $III \doteq H_{Probe} = 100 \text{ mm}$)	28
3.4	Gemessene Dichte von Salzgrus als Funktion eines einseitig aufgegebenen Drucks bei drei unterschiedlichen Anfangsprobenhöhen ($I \doteq H_{Probe} = 47 \text{ mm}$, $II \doteq H_{Probe} = 68 \text{ mm}$, $III \doteq H_{Probe} = 100 \text{ mm}$)	29
3.5	Gemessener Seitendruckbeiwert von Salzgrus als Funktion eines einseitig aufgegebenen Drucks bei gleichen Anfangsprobenhöhen von $H_{Probe} = 68 \text{ mm}$	30
3.6	Gemessener Seitendruckbeiwert von Salzgrus in Relation zum Porenanteil, der mit dem aufgegebenen Druck p_{zz} abnimmt	32
3.7	Zeitliche Abfolge der Stempelfunktionen zur Ermittlung des Seitendruckbeiwertes bei wechselnden Druckrichtungen	34
3.8	Gemessene Drücke in zwei zueinander senkrechten Richtungen bei Wechsel der Druckrichtungen mit $(p_{xx,a}; p_{zz,a}) = (0,037 \text{ MN/m}^2; 0,132 \text{ MN/m}^2)$ und $(p_{xx,c}; p_{zz,c}) = (0,72 \text{ MN/m}^2; 0,14 \text{ MN/m}^2)$ (Bereich I: p_{zz} wird erhöht, p_{xx} gemessen; Bereich II und III: p_{xx} wird erhöht, p_{zz} gemessen)	35
3.9	Der von den Stempeln in z - und in x -Richtung zurückgelegte Weg bei einem Abstand der Stempel von der Nullebene von 1,3 mm in Relation zum jeweiligen Druck p_{zz} und p_{xx} in halblogarithmischer Auftragung; an den mit einem senkrechten Pfeil gekennzeichneten Stellen wurden die Stempel in z -Richtung arretiert und die Stempel in x -Richtung druckbeaufschlagt (Kurvenäste 1: p_{zz} wird erhöht, p_{xx} gemessen; Kurvenäste 2: p_{xx} wird erhöht, p_{zz} gemessen)	36
3.10	Gemessene Drücke in zwei zueinander senkrechten Richtungen bei unterschiedlichen Verfüllungen und damit unterschiedlichem Druckaufbau, d. h. unterschiedlichen Erstbelastungen $p_{zz,a}$, beim Einschieben der Stempel bis zur Nullebene (Bereich I: p_{zz} wird erhöht, p_{xx} gemessen; Bereich II und III: p_{xx} wird erhöht, p_{zz} gemessen)	37

3.11	Der gemessene Seitendruckbeiwert bei Wechsel der Druckrichtungen über dem Druck p_{xx} ; an der mit einem senkrechten Pfeil gekennzeichneten Stelle wurden die zunächst druckführenden Stempel in z -Richtung arretiert und die Stempel in x -Richtung mit Druck beaufschlagt; für $0 \leq p_{xx} \leq 0,037 \text{ MN/m}^2$ gilt: $k = p_{xx}/p_{zz}$ und für $p_{xx} \geq 0,037 \text{ MN/m}^2$: $k = p_{zz}/p_{xx}$	38
3.12	Der gemessene Seitendruckbeiwert bei Wechsel der Druckrichtungen über dem Druck p_{xx} ; an der mit einem senkrechten Pfeil gekennzeichneten Stelle wurden die zunächst druckführenden Stempel in z -Richtung arretiert und die Stempel in x -Richtung mit Druck beaufschlagt; für $0 \leq p_{xx} \leq 0,053 \text{ MN/m}^2$ gilt: $k = p_{xx}/p_{zz}$ und für $p_{xx} \geq 0,053 \text{ MN/m}^2$: $k = p_{zz}/p_{xx}$	39
3.13	Der gemessene Seitendruckbeiwert bei Wechsel der Druckrichtungen in Relation zum Druck p_{xx} ; an der mit einem senkrechten Pfeil gekennzeichneten Stelle wurden die zunächst druckführenden Stempel in z -Richtung arretiert und die Stempel in x -Richtung mit Druck beaufschlagt; für $0 \leq p_{xx} \leq 0,068 \text{ MN/m}^2$ gilt: $k = p_{xx}/p_{zz}$ und für $p_{xx} \geq 0,068 \text{ MN/m}^2$: $k = p_{zz}/p_{xx}$	40
4.1	Kräfte auf die Wandungen eines Ringspaltes vor und nach dem Verfüllen mit einem Schüttgut	41
4.2	Verteilung der Kräfte auf die Wandungen vor und nach dem Einbringen eines inneren Zylinders	42
4.3	Verteilung der Kräfte auf die Wandungen vor und nach dem Durchziehen eines inneren Zylinders durch ein Schüttgut	42
4.4	Seitenansicht des Prüfstandes zur experimentellen Bestimmung des Reibungsbeiwertes	45
4.5	Gemessene Reibungskraft als Funktion des Querhauptweges beim Durchziehen einer Platte durch Salzgrus mit konstanter Geschwindigkeit für drei unterschiedliche Normalkräfte; die normaldruckbeaufschlagte Fläche beträgt 202 cm^2	46
4.6	Gemessener Haftreibungsbeiwert zwischen Salzgrus und Stahl in Relation zum Porengehalt, der mit dem aufgegebenen Druck abnimmt . .	48
4.7	Gemessener Gleitreibungsbeiwert zwischen Salzgrus und Stahl in Relation zum Porengehalt, der mit dem aufgegebenen Druck abnimmt .	49
4.8	Das Produkt μk aus Reibungs- und Seitendruckbeiwert für Salzgrus, das aus den Messungen des Reibungs- und des Seitendruckbeiwertes bestimmt wurde, als Funktion des Porengehaltes, der aus unterschiedlichen Normaldrücken p_{zz} resultiert	51
5.1	Mechanische Ersatzkonstruktion für eine Scheibe des JANSSEN-Modells	54
5.2	Bohrlochgeometrie	54
5.3	Der normierte vertikale Druck p_{zz}/p_c nach JANSSEN als Funktion der bezogenen Tiefe $\eta = \mu k z / R_B$ mit $p_0 = 0,5 p_c$	56

5.4	Der vertikale Druck p_{zz} nach JANSSEN als Funktion der Tiefe z mit $R_B = 0,5 \text{ m}$, $\mu k = 0,054$, $\gamma_m = 23,21 \text{ kN/m}^3$, $p_c = 107,46 \text{ kN/m}^2$ und $p_0 = 0,5p_c$	57
6.1	Mechanische Ersatzkonstruktion für das Ringmodell	61
6.2	Oberflächenkräfte in axialer Richtung auf ein herausgegriffenes Volumenelement des Ringes	62
6.3	Die Kegelkoordinaten (ϱ, ω) mit $\varrho = r/R_B$ und $\tan \omega = z/r$	66
6.4	Nach dem Ringmodell berechneter normierter vertikaler Druck p_{zz}/p_c als Funktion der bezogenen Tiefe $\eta = \mu k z/R_B$ für verschiedene normierte Radien $\varrho = r/R_B$	67
6.5	Nach dem Ringmodell berechneter normierter vertikaler Druck p_{zz}/p_c als Funktion des normierten Radius $\varrho = r/R_B$ für verschiedene bezogene Tiefen $\eta = \mu k z/R_B$	68
6.6	Nach dem Ringmodell berechnete Isobaren $p_{zz}/p_c = \Phi = \text{const.}$ in einem zentralen Längsschnitt des Bohrlochs	69
6.7	Nach dem Ringmodell berechnete vertikale Druckkomponente p_{zz} als Funktion der Tiefe z für verschiedene Radien r mit $\mu k = 0,054$, $R_B = 0,5 \text{ m}$ und $\gamma_m = 23,21 \text{ kN/m}^3$	70
6.8	Nach dem Ringmodell berechnete vertikale Druckkomponente p_{zz} als Funktion des Radius r für verschiedene Tiefen z mit $\mu k = 0,054$, $R_B = 0,5 \text{ m}$ und $\gamma_m = 23,21 \text{ kN/m}^3$	71
A.1	Volumenelement in Zylinderkoordinaten	89
B.1	Das Produkt $k\mu$ als Funktion des Winkels der inneren Reibung	93

Tabellenverzeichnis

2.1	Seitendruckbeiwert von Sand nach den Versuchen von BERNATZIK . .	16
2.2	Seitendruckbeiwerte verschiedener Materialien bei unterschiedlichen Porenanteilen, die aus unterschiedlichen Normaldrücken resultieren, nach den Versuchen von ANDRAWES und EL-SOHBY	17
2.3	Seitendruckbeiwerte für Haldensalz bei unterschiedlichen Schüttwichten γ , die durch unterschiedliche Normaldrücke p_{zz} realisiert wurden; der innere Reibungswinkel δ wurde mit einem Schergerät bestimmt . .	18
3.1	Zusammenstellung der Ergebnisse aus Messungen des Seitendruckbeiwertes bei wechselnden Druckrichtungen mit jeweils unterschiedlichen Anfangsbedingungen, d. h. unterschiedlichen Abständen von der Null-ebene (Drücke in kN/m^2)	39
6.1	Das optimale Verhältnis R_B/R_F für verschiedene Faßwichten γ_F und verschiedene Höhen H_S der Salzgrusüberdeckung bei Einsatz von Fässern mit $H_F = 1,1$ m und einer Salzgruswichte von $\gamma_S = 13 \text{ kN/m}^3$; den in Klammern gesetzten Werten kommt keine physikalische Bedeutung zu, da hier $R_B/R_F \leq 1$ wäre	75

Verwendete Formelzeichen

Variable	Dimension	Bedeutung
a	N/m^2	Attraktion
$\tilde{\mathbf{A}}$	-	Matrix einer linearen Abbildung
$A(z)$	m^2	Querschnitt
b	-	Produkt aus Reibungs- und Seitendruckbeiwert
$\tilde{\mathbf{B}}$	-	Matrix einer linearen Abbildung
$B(z)$	-	Hilfsgröße nach Gl. (5.33)
c	N/m^2	Kohäsion
$\tilde{\mathbf{D}}$	-	Drehmatrix
$D(p_k)$	$(\text{N/m}^2)^3$	charakteristische Determinante
$\underline{\mathbf{e_x}}, \underline{\mathbf{e_y}}, \underline{\mathbf{e_z}}$	-	Einheitsvektoren
E	N/m^2	Elastizitätsmodul
$\tilde{\mathbf{E}}$	-	Einheitstensor
f_{max}	m	maximale Durchbiegung der gleichmäßig belasteten Kreisplatte
f_r	N/m^3	radiale Kraftdichte
f_z	N/m^3	vertikale Kraftdichte
f_ϕ	N/m^3	azimutale Kraftdichte
$\underline{\mathbf{F}}$	N	Kraftvektor
F_a	N	äußere Kraft

Variable	Dimension	Bedeutung
F_{gleit}	N	Gleitreibungskraft
F_k	N	Kraftkomponente in k -Richtung
F_N	N	Normalkraft
$F_{N,\text{max}}$	N	maximale Normalkraft
F_{oben}	N	Vertikalkraft auf die Oberseite der Scheibe bzw. des Ringes im Scheiben- und im Ringmodell
F_R	N	Reibungskraft
F_{unten}	N	Vertikalkraft auf die Unterseite der Scheibe bzw. des Ringes im Scheiben- und im Ringmodell
F_{zz}	N	Vertikalkraft
g	kgm/s ²	Erdbeschleunigung
G_{eigen}	N	Eigengewicht der Salzsäule
G_F	N	Faßgewicht
G_G	N	Gewichtskraft einer Scheibe im Scheibenmodell
h_B	m	Bohrlochhöhe
H_F	m	Faßhöhe
I_1	N/m ²	Spur des Drucktensors $\tilde{\mathbf{P}}$; erste Invariante des Drucktensors
I_2	N/m ²	zweite Invariante des Drucktensors
I_3	N/m ²	Determinante des Drucktensors $\tilde{\mathbf{P}}$; dritte Invariante des Drucktensors
J	-	Hilfsgröße nach Gl. (5.33)
k	-	Seitendruckbeiwert
k_0	-	Seitendruckbeiwert bei $p_{zz} = 0$
k_1, k_2	-	Seitendruckbeiwerte vor und nach dem Wechsel von Druck- und Meßrichtung
K_1, K_2	m ⁻¹	Konstanten
l	m	Hilfsgröße nach Gl. (5.33)
l_0	m	Hilfsgröße nach Gl. (5.33)

Variable	Dimension	Bedeutung
m	m^3/N	empirische Konstante
$\widetilde{\mathbf{M}} = \underline{M^a}$	mN	Drehmomententensor
n	-	Porenanteil
$\underline{n}$	-	Hauptnormalenvektor
p_0	N/m^2	Auflast bei $z = 0$
p_a	N/m^2	resultierender Druck
p_c	N/m^2	maximaler vertikaler Druck
p_I, p_{II}	N/m^2	Hilfsgrößen nach Gl. (5.33)
p_{ik}	N/m^2	Komponenten des Drucktensors
p_k	N/m^2	Eigenwerte des Drucktensors $\widetilde{\mathbf{P}}$
p_{rr}	N/m^2	radialer Druck auf die Zylinderfläche $r = \text{const.}$
p_{rz}	N/m^2	radialer Druck auf die Ebene $z = \text{const.}$
$p_{r\phi}$	N/m^2	radialer Druck auf die Ebene $\phi = \text{const.}$
p_{zr}	N/m^2	vertikaler Druck auf die Zylinderfläche $r = \text{const.}$
p_{zz}	N/m^2	vertikaler Druck auf die Ebene $z = \text{const.}$
$\overline{p_{zz}}(z)$	N/m^2	über den Querschnitt gemittelter vertikaler Druck
$\overline{p_{zz}^\infty(q, m)}$	N/m^2	Grenzwert des vertikalen Drucks im Cowin-Modell
p_{zz}^{max}	N/m^2	maximaler Vertikaldruck
$p_{z\phi}$	N/m^2	vertikaler Druck auf die Ebene $\phi = \text{const.}$
$p_{\phi r}$	N/m^2	azimutaler Druck auf die Zylinderfläche $r = \text{const.}$
$p_{\phi z}$	N/m^2	azimutaler Druck auf die Ebene $z = \text{const.}$
$p_{\phi\phi}$	N/m^2	azimutaler Druck auf die Ebene $\phi = \text{const.}$
P	-	Hilfsgröße nach Gl. (6.8)
$\widetilde{\mathbf{P}}$	N/m^2	Drucktensor
q	m^2/N	empirische Konstante
Q	m^2	zweidimensionale Tensorfläche im dreidimensionalen Raum

Variable	Dimension	Bedeutung
r	m	Radialkoordinate
R_B	m	Bohrlochradius
R_F	m	Faßradius
$\underline{R}_i$	m	Eigenvektor in i -Richtung
s	m	Querhauptweg in den Zugversuchen
$\tilde{\mathbf{T}}$	-	Matrix einer linearen Abbildung
u	-	Verhältnis Bohrlochradius zu Faßradius
u_{opt}	-	optimales Verhältnis Bohrlochradius zu Faßradius
$U(z)$	m	Umfang
v	-	Quadrat der vertikalen Komponente des Richtungsvektors
v_{max}	-	Stelle des Maximums der Funktion nach Gl. (B.15)
V_F	m ³	Faßvolumen
V_{gesamt}	m ³	Gesamtvolumen des Schüttgutes
V_{Korn}	m ³	Kornvolumen
V_S	m ³	Salzspaltvolumen
w	m	Wandstärke der gleichmäßig belasteten Kreisplatte
x_i	m	kartesische Koordinaten
$X_{k \sim j}$	m	k -Komponente des j -ten Eigenvektors
γ_0	N/m ³	Wichte bei $z = 0$
γ_F	N/m ³	Faßwichte
γ_m	N/m ³	mittlere Wichte
γ_S	N/m ³	Salzwichte
$\overline{\gamma_S(z)}$	N/m ³	ortsabhängige, über den Querschnitt gemittelte Schüttwichte
Γ	-	Hilfsgröße nach Gl. (6.48)
δ	-	Winkel der inneren Reibung
δ_W	-	Wandreibungswinkel

Variable	Dimension	Bedeutung
ε	-	Porengehalt
ϵ_{nmk}	-	antisymmetrischer Einheitstensor
η	-	Verhältnis aus dem Produkt bz und R_B
μ	-	Haftreibungsbeiwert
$\mu(z)$	-	ortsabhängiger Reibungsbeiwert
μ_F	-	Reibungsbeiwert zwischen Salzgrus und Faßoberfläche
μ_{gleit}	-	Gleitreibungsbeiwert
μ_i	-	innerer Reibungsbeiwert
Π	-	Hilfsgröße nach Gl. (6.10)
ϱ	-	Verhältnis Radialkoordinate r zu Bohrlochradius R_B
$\varrho(F_N)$	kg/m ³	druckabhängige Schüttgutdichte
ϱ_{Korn}	kg/m ³	Korndichte
σ_{ik}	N/m ²	Komponenten des Spannungstensors $\tilde{\Sigma}$
$\sigma_{\text{Zug}}^{\text{max}}$	N/m ²	maximal zulässige Zugspannung
$\tilde{\Sigma}$	N/m ²	Spannungstensor
Φ	-	Verhältnis Vertikaldruck p_{zz} zu maximalem Vertikaldruck p_c
ω	-	Winkel zwischen dem Ortsvektor zum Punkt (r_0, z_0) und der r -Richtung

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Die technische Aufgabe

Bei der Herstellung und dem Verbrauch von Gütern entstehen Abfälle, die schadlos beseitigt werden müssen. Dies gilt auch für die friedliche Nutzung der Kernenergie und die Anwendung radioaktiver Stoffe in Industrie, Forschung und Medizin. Die dabei anfallenden radioaktiven Abfälle sollen in der Bundesrepublik Deutschland so behandelt, gelagert und beseitigt werden, daß der Mensch und seine Umwelt vor ihren Gefahren möglichst geschützt sind.

Wärmeentwickelnde Abfälle sollen in der Bundesrepublik Deutschland in unterirdischen Steinsalzformationen, räumlich getrennt von solchen mit vernachlässigbarer Wärmeentwicklung, in unverrohrten vertikalen Bohrlöchern endgelagert werden. Zu den wärmeentwickelnden Abfällen zählen die mittlradioaktiven Abfälle (MAW = **Medium Active Waste**) wie Hülsen, Strukturteile und Feedklärschlamm aus der Wiederaufarbeitung von Leichtwasserreaktor-Brennelementen. Dazu gehören aber auch die verbrauchten Brennelemente aus Hochtemperaturreaktoren (HTR-BE), die ohne Wiederaufarbeitung direkt endgelagert werden sollen.

Die bei der Wiederaufarbeitung anfallenden mittlradioaktiven Abfälle werden in Zementstein fixiert, indem das Abfallgut in Einsatzbehältern mit dünnflüssigem Zementleim vergossen wird. Sobald der Zementstein abgebunden ist, werden die Einsatzbehälter in Rollensickenfässer eingesetzt und anschließend mit einem Deckel verschlossen.

Nachdem es anfänglich für notwendig gehalten wurde, bindemittelverfestigten Versatz für die Wiederverfüllung der erstellten Hohlräume im Salzstock einzusetzen, steht nunmehr für das Konzept einer großräumigen Verfüllung die Verwendung von locker eingebrachtem Versatzmaterial im Vordergrund. Während ein schnell abbindender und anschließend starrer Versatz durch Gebirgskonvergenz schädliche Spannungsumlagerungen für die Abfallbinde erzeugen kann, ermöglicht ein Lockermaterial (Salzgrus) einen langsam anwachsenden Kraftschluß zwischen umgebendem Gebirge und eingebrachtem Versatzmaterial. Die geforderte Steifigkeit des Versatzes baut sich im Laufe der Zeit durch Kompressionswirkung von außen auf.

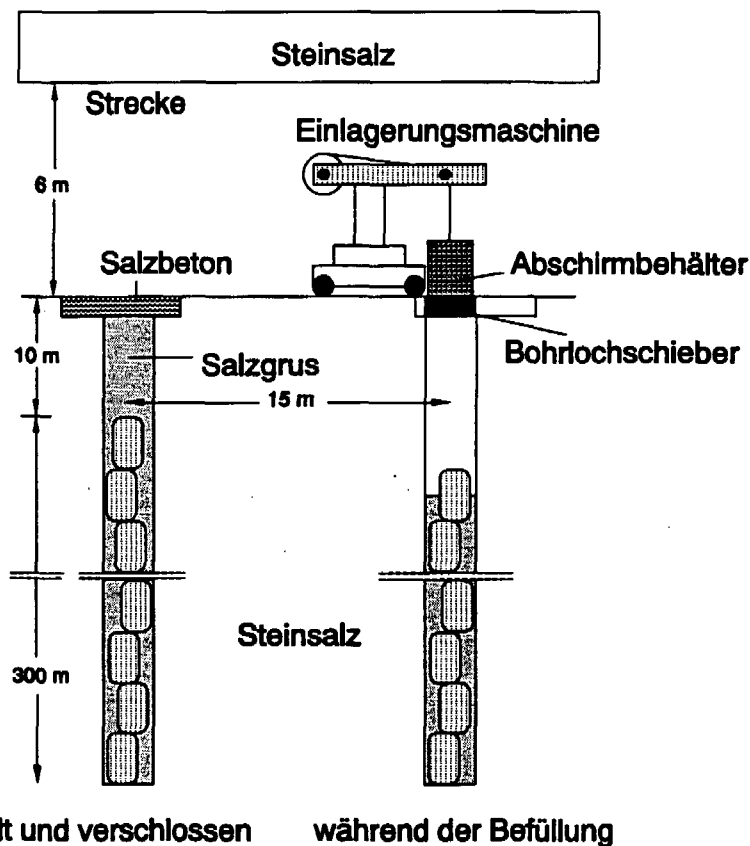


Abb. 1.1: Unverrohrte vertikale Bohrlöcher für die Einlagerung von wärmeentwickelnden, radioaktiven Abfällen in unterirdischen Steinsalzformationen

Die Gebinde sollen von einer Sohle des Salzgebirges aus in senkrechte Bohrlöcher mit Tiefen von etwa 300 - 600 m abgesetzt und jeweils mit Salzgrus umhüllt werden (Abb. 1.1).

Zur Einlagerung der Abfallgebinde existieren fünf verschiedene Varianten, die detailliert in Abschnitt 1.2 vorgestellt werden. Hier soll zunächst zum besseren Verständnis auf die Einlagertechnik eingegangen werden.

Die Abfallgebinde werden die Strecke vom Abfallhersteller bis zum Endlager in Sammel- oder Einzeltransportbehältern transportiert. Das derzeitige Referenzgebinde für die Abfälle ist ein 400-l-Standard-Rollsickenfaß mit Innenbehälter zur Aufnahme der zementierten Wiederaufbereitungsabfälle (Abb. 1.2 nach [32]).

Untertage erfolgt der Transport in Abschirmbehältern. Ein Hubwagen nimmt das Gebinde auf und setzt es auf dem Bohrlochschieber des zur Befüllung vorgesehenen Bohrlochs ab. Dann werden gleichzeitig der Bodenschieber des Abschirmbehälters und der Bohrlochschieber geöffnet und das Gebinde kontrolliert in das Bohrloch abgelassen. Nach dem Aufsetzen des Gebindes unten im Bohrloch wird der Gebin-

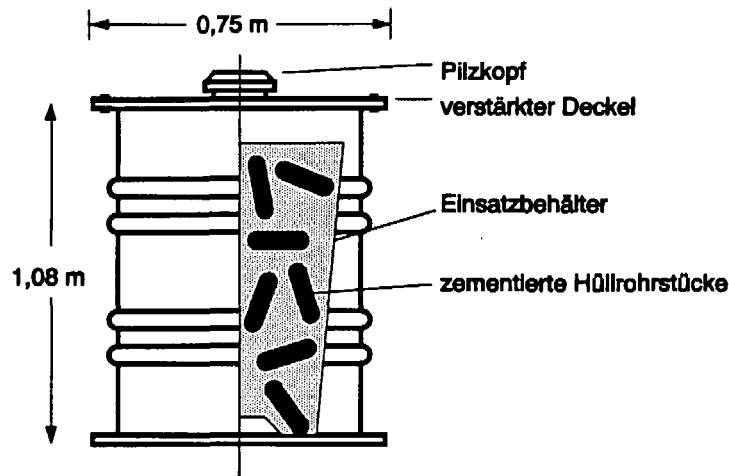


Abb. 1.2: 400-l-Standardgebinde mit zementierten Brennelementhülsen

degreifer gelöst und wieder in den Abschirmbehälter zurückgezogen. Bodenschieber und Bohrlochschieber werden gemeinsam verschlossen und der leere Abschirmbehälter entfernt, so daß der nächste Abschirmbehälter mit Gebinde auf dem Bohrlochschieber abgesetzt werden kann.

1.2 Einlagervarianten

1.2.1 Gebindestapelung ohne Lastabtragung

Die technisch einfachste Lösung zur Einlagerung von Abfallgebinden in unverrohrten Bohrlöchern stellt die Variante "Gebindestapelung ohne Lastabtragung" dar (Abb. 1.3). Bei ihr werden die Gebinde unkontrolliert aufeinander gestapelt. Die Anwendung dieser Technik stellt aber an die Gebinde hohe Anforderungen. Die Gebinde müssen so stabil sein, daß sie während der Einlagerungsphase durch die Stapelkräfte nicht undicht werden. Eine instantane Freisetzung von radiolytisch gebildetem Wasserstoff in das Bohrloch darf nur gering sein, damit während der Betriebsphase im Bohrloch nie eine so hohe H_2 -Konzentration erreicht wird, daß eine Explosionsgefahr entsteht.

1.2.2 Stützelemente

Zur Reduzierung der Beanspruchung für die unteren Gebinde sind mechanische Stützelemente (Abb. 1.4) denkbar. Das Stützelement wird am Pilzkopf mit dem Gebindegreifer gefaßt und mit der Einlagerungsmaschine in das Bohrloch abgelassen. Beim Aufsetzen auf das zuvor eingelagerte Gebinde spreizt sich das Stützelement durch

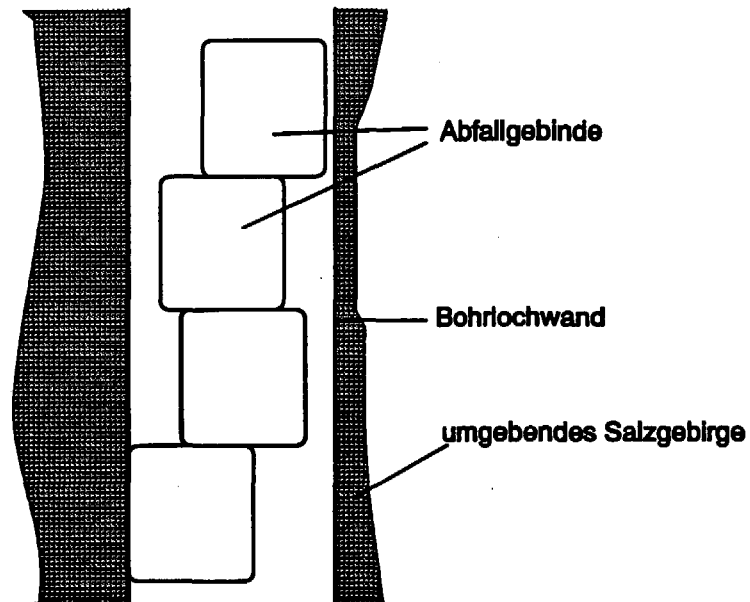


Abb. 1.3: Gebindestapelung ohne Lastabtragung

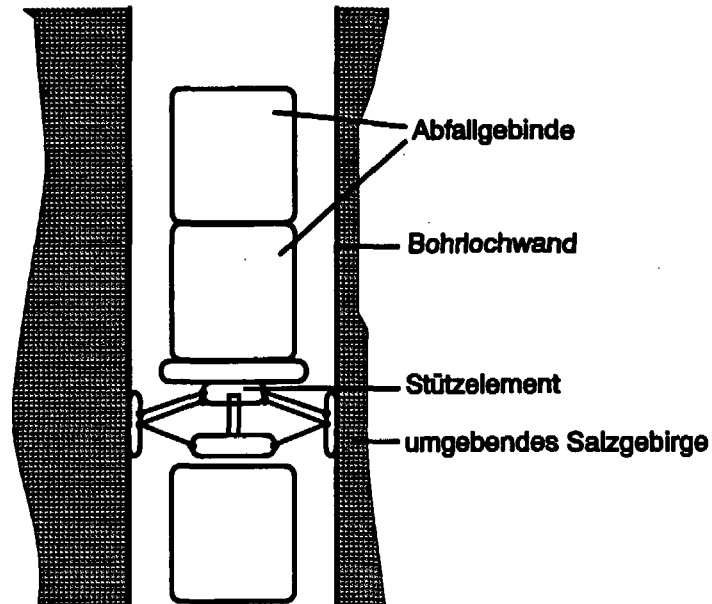


Abb. 1.4: Stützelement, das sich bei zunehmender Beladung mit Gebinden in die Wand krallt und bei steigender Belastung von dem darunter liegenden Gebinde abhebt

sein Eigengewicht, bis die Spannpratzen sich in die Bohrlochwand festklemmen. Bei

weiterer Belastung durch eingelagerte Behälter hebt die Aufsetzplatte vom unteren Gebinde ab, so daß eine Entkopplung von der unteren Behältersäule erreicht wird. Mit diesem Konzept kann das Bohrloch abschnittsweise verfüllt werden. Ein Abschnitt besteht aus einem Stützelement und einer gewissen Anzahl von Gebinden. Die Anzahl richtet sich nach der Tragkraft des untersten Behälters eines Abschnittes. Die zulässige Anzahl der Gebinde eines Stapels ist bei gegebener Gebindeauslegung von der Art der Stapelung abhängig. Sie ist umso größer, je exakter und gleichmäßiger die Gebinde gestapelt werden. Für eine optimale Bohrlochausnutzung sowie eine Minimierung der Anzahl der Stützelemente müssen bei dieser Variante die Gebinde kontrolliert gestapelt werden. Ein großer Nachteil dieser Art der Stapelung der Gebinde ist, daß die Gewichtsabtragung der Stapelkräfte durch Fremdkörper im Bohrloch erfolgt und daß deren Verhalten bei Gebirgskonvergenz ungeklärt bleibt.

1.2.3 Salzgruspfropfen

Bei der Einlagervariante mit Salzgruspfropfen (Abb. 1.5) wird die Behältersäule eben-

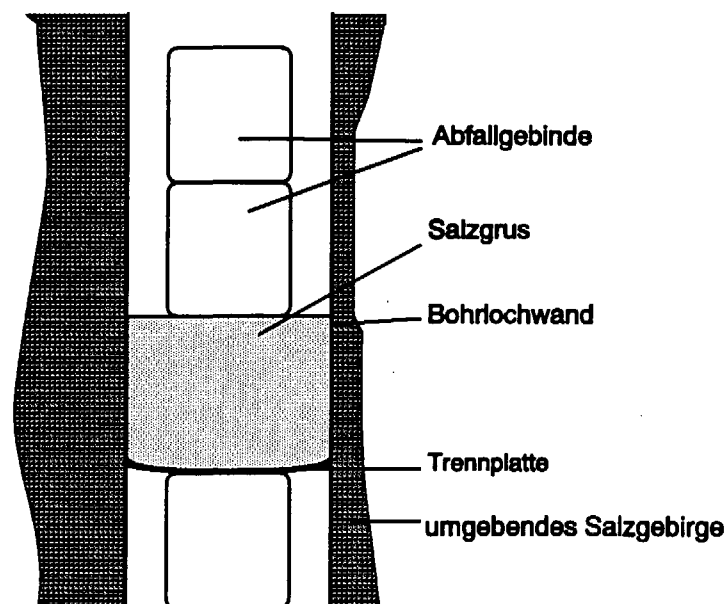


Abb. 1.5: Salzgruspfropfen, der soviel Gewichtskraft in die Bohrlochwand abträgt, daß die Beanspruchung der Gebinde unter dem zugelassenen Wert bleibt

falls wie bei der Stützelementmethode in Abschnitte (Schüsse) mit begrenzter Stapelhöhe eingeteilt. Die Schüsse sind voneinander durch Schichten aus Salzgrus (Pfropfen) getrennt, die die Funktion der Stützelemente übernehmen. Infolge Eigengewicht und Auflast soll der Pfropfen eine Querdehnung erhalten, durch die ein horizontaler Druck auf die Bohrlochwand entsteht. Dieser Druck in radialer Richtung aktiviert

mit der Befüllung eine Wandschubspannung entgegengesetzt zur Gravitation und damit ein Mittragen des umgebenden Salzgebirges. Alternativ zur oben beschriebenen Variante können auch die Trennplatten entfallen.

1.2.4 Ringspaltverfüllung

Einen ähnlichen Bohrlochnutzungsgrad wie die Gebindestapelung ohne Lastabtragung weist die Variante Ringspaltverfüllung auf (Abb. 1.6). Die Lastabtragung soll

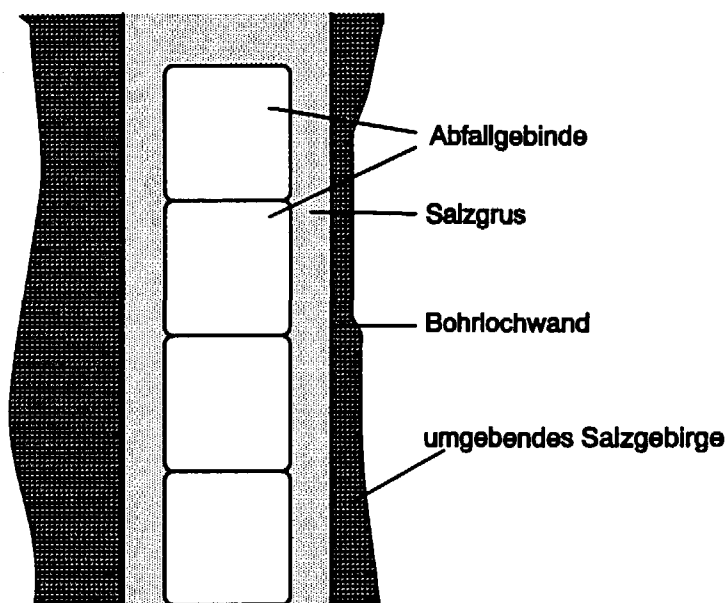


Abb. 1.6: Ringspaltverfüllung, bei der eine Lastabtragung über Mantelreibung auf das Verfüllmaterial und über Scherverbund auf das umgebende Salzgebirge erfolgen soll

dabei über Mantelreibung auf das Verfüllmaterial und über Scherverbund auf das umgebende Salzgebirge erfolgen. Grundsätzlich sind die Gebinde mittig im Bohrloch zu positionieren, um einen radial und axial gleichmäßigen Ringspalt zwischen Gebinde und Bohrlöchwand zu erhalten. Damit sich in vertikaler Richtung Scherkräfte im Versatz aufbauen, muß eine axiale Relativbewegung der Behälter zum umgebenden Salzgrus und von diesem relativ zur Bohrlöchwand stattfinden.

1.2.5 Semihydrostatische Einlagerung

Bei der semihydrostatischen Einlagerung werden die Gebinde ungeordnet im Bohrloch abgesetzt und jeweils vollkommen in Salzgrus eingebettet (Abb. 1.7). An die Genauigkeit der Positionierung werden dabei keine besonderen Anforderungen gestellt. Abfallgebinde mit unterschiedlichen geometrischen Abmessungen können im

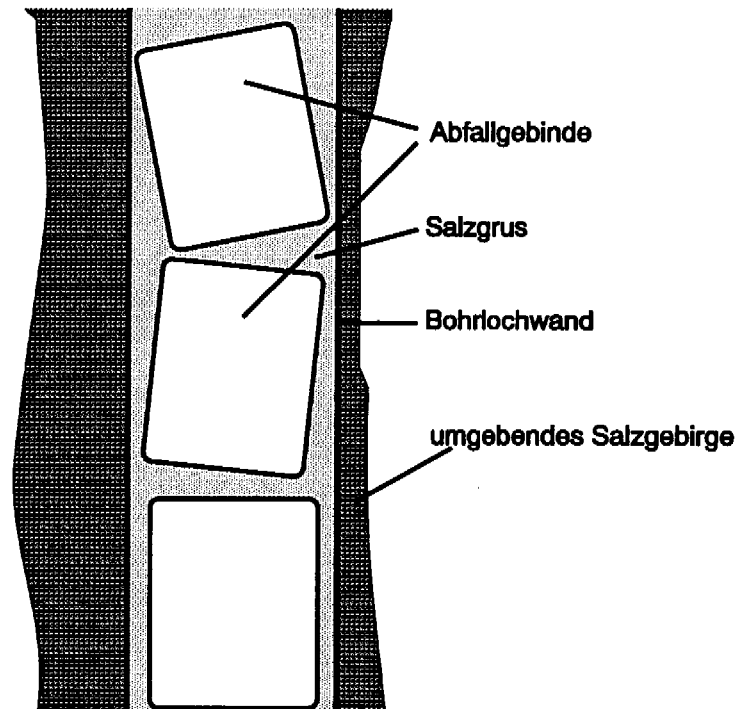


Abb. 1.7: Semihydrostatische Einlagerung der Abfallgebinde, bei der Gebinde mit unterschiedlichen geometrischen Abmessungen ungeordnet und schief im Bohrloch abgesetzt werden können

selben Bohrloch deponiert werden. Ziel dieser Arbeit ist es, die Beanspruchung der Abfallgebinde bei dieser Art der Einlagerung im Salzstock abzuschätzen.

Bei der theoretischen Behandlung wird in erster Näherung von einem homogenen Stoff ausgegangen und dessen Drucktensorverteilung an Hand von Modellen betrachtet. Dabei wird angenommen, daß Rotationssymmetrie vorliegt und keine Kräfte in azimuthaler Richtung vorkommen. Die Hauptachsen liegen dann jeweils in axialer, radialer und azimuthaler Richtung. Die Eigenwerte des Drucktensors hängen von der Tiefe z im Bohrloch und dem radialen Abstand r von der Bohrlochmitte ab. Diese Art der Einlagerung wird semihydrostatisch genannt.

Kapitel 2

Der Drucktensor

2.1 Der Drucktensor auf Hauptachsen

Im folgenden werden einige Gleichungen und Funktionen, die zur Berechnung von Drücken in Schüttgütern nötig sind und auf die in weiteren Abschnitten zurückgegriffen wird, zusammengefaßt.

Den äußeren Kräften und Momenten auf eine Schüttung halten im Inneren der Schüttung entsprechende Reaktionskräfte das Gleichgewicht. Durch jeden Punkt in der Schüttung lassen sich unter unendlich vielen Richtungen elementare ebene Schnittflächen legen, deren Richtung jeweils durch den Normaleneinheitsvektor $\underline{n} = n_x \underline{e}_x + n_y \underline{e}_y + n_z \underline{e}_z$ gekennzeichnet wird.

Zur Beschreibung des Druckzustandes verwendet man den Drucktensor $\tilde{\mathbf{P}}$ oder den Spannungstensor $\tilde{\mathbf{\Sigma}}$:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} = -\tilde{\mathbf{\Sigma}} = - \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Hier wird der Drucktensor bevorzugt, da im Salzgrus seine Eigenwerte alle positiv definit sind. Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander, zu vielfachen Eigenwerten können sie senkrecht aufeinander gewählt werden.

Aus den normierten Eigenvektoren läßt sich eine Drehmatrix:

$$\tilde{\mathbf{D}} = (\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3) \quad (2.2)$$

bilden. In dem gedrehten System $\tilde{\mathbf{D}}\underline{x}' = \underline{x}$ mit $\underline{x}' = \tilde{\mathbf{D}}^T \underline{x}$ - wobei T auf den transponierten Tensor hinweist - sind der Tensor und die zugehörige quadratische Form:

$$Q = \underline{x}, \tilde{\mathbf{P}}\underline{x} = \tilde{\mathbf{D}}\underline{x}', \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{D}}\underline{x}' = \underline{x}', \tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{D}}\underline{x}' \quad (2.3)$$

mit:

$$\widetilde{\mathbf{D}}^T \widetilde{\mathbf{P}} \widetilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

auf Hauptachsen [13, 42].

2.2 Die Eigenwerte und die Eigenvektoren des Drucktensors

Im folgenden soll gezeigt werden, daß alle Eigenwerte von $\widetilde{\mathbf{P}}$ reell sind, und daß die drei reellen Richtungen der Eigenvektoren orthogonal zueinander sind oder orthogonal gewählt werden können. Es sei $X_{k \sim j}$ ¹ die k -Komponente des j -ten Eigenvektors von $\widetilde{\mathbf{P}}$. Die Eigenwertgleichung lautet dann mit dem Eigenwert p_j :

$$\sum_k p_{ik} X_{k \sim j} = p_j X_{i \sim j}. \quad (2.5)$$

Multipliziert man Gl. (2.5) von links mit dem Komplexkonjugierten $X_{i \sim l}^*$ und summiert über den Index i , so erhält man:

$$\sum_{i,k} X_{i \sim l}^* p_{ik} X_{k \sim j} = p_j \sum_i X_{i \sim l}^* X_{i \sim j}. \quad (2.6)$$

Die Summe auf der rechten Seite ist gleich $\mathbf{R}_l^* \mathbf{R}_j$, dem Skalarprodukt des Komplexkonjugierten des l -ten Eigenvektors mit dem j -ten Eigenvektor. Das Komplexkonjugierte von Gl. (2.5) der entsprechenden Eigenwertgleichung für p_l ist:

$$\sum_i p_{ki}^* X_{i \sim l}^* = p_l^* X_{k \sim l}^*. \quad (2.7)$$

Multipliziert man jetzt mit $X_{k \sim j}$ und summiert über k , so erhält man:

$$\sum_{i,k} X_{i \sim l}^* p_{ki}^* X_{k \sim j} = p_l^* \sum_k X_{k \sim l}^* X_{k \sim j}. \quad (2.8)$$

Sie Summe auf der rechten Seite ist wieder $\mathbf{R}_l^* \mathbf{R}_j$. Da der Tensor $\widetilde{\mathbf{P}}$ reell und symmetrisch ist, folgt $p_{ik} = p_{ki}^*$. Die linken Seiten der Gl. (2.6) und Gl. (2.8) sind daher gleich. Somit folgt für die Differenz der zwei Gleichungen:

$$(p_j - p_l^*) \mathbf{R}_l^* \mathbf{R}_j = 0. \quad (2.9)$$

¹Anm.: Indizes, die sich nicht auf die Koordinaten beziehen, sind durch $\sim$ getrennt

Wenn l gleich j ist, dann gilt $\mathbf{R}_l^* \mathbf{R}_j = |\mathbf{R}_j|^2 \geq 0$. Demnach kann Gl. (2.9) in diesem Fall nur dann erfüllt werden, wenn $p_j = p_j^*$ ist. Das beweist, daß die Eigenwerte von $\tilde{\mathbf{P}}$ reell sind.

Im anderen Fall, wenn l und j verschieden sind und für die Eigenwerte $p_j \neq p_l^*$ gilt, kann Gl. (2.9) nur dann erfüllt werden, wenn $\mathbf{R}_l \mathbf{R}_j = 0$, d. h. wenn $\mathbf{R}_l$ und $\mathbf{R}_j$, die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten, senkrecht aufeinander stehen.

Für den Fall, daß zwei der drei Eigenwerte gleich sind, brauchen die entsprechenden Eigenvektoren nicht orthogonal zueinander zu sein. Aber jede Linearkombination dieser zwei Eigenvektoren ist auch ein Eigenvektor zu $\tilde{\mathbf{P}}$ zum gleichen Eigenwert. Daraus folgt, daß alle Vektoren in der Ebene, in der die beiden ursprünglichen Vektoren liegen, ebenfalls Eigenvektoren zum entsprechenden Eigenwert sind. Derjenige Eigenvektor, der zum dritten, von den beiden ersten verschiedenen, Eigenwert gehört, muß deshalb senkrecht zu der aufgespannten Ebene liegen. Wählt man nun in dieser Ebene zwei beliebige, senkrecht zueinander stehende Vektoren, so ergeben diese mit dem dritten zu der Ebene senkrechten Vektor die drei gesuchten orthogonalen Achsen.

Sind alle Eigenwerte gleich, dann sind alle Vektoren im Raum Eigenvektoren. Dann ist aber $\tilde{\mathbf{P}}$ von Anfang an diagonal, und eine Diagonalisierung ist nicht mehr nötig.

2.3 Geometrische Deutung

Im dreidimensionalen Raum stellt die Gleichung:

$$Q = \underline{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{x}} = \text{const.} \quad (2.10)$$

eine Fläche zweiten Grades dar. Den Drucktensor kann man sich geometrisch mit Hilfe der Tensorfläche $Q = 1 = \underline{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{x}} = \sum_{k,n} x_k p_{kn} x_n$ veranschaulichen. Auf ein Flächenelement auf der Oberfläche eines Gebietes, dessen Normale ins Innere weist,

$$dA \frac{\underline{\mathbf{x}}}{|\underline{\mathbf{x}}|} \quad (2.11)$$

ergibt sich die Kraft $d\underline{\mathbf{F}}$ zu:

$$d\underline{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{P}} \frac{\underline{\mathbf{x}}}{|\underline{\mathbf{x}}|} dA, \quad (2.12)$$

oder in Koordinatenschreibweise zu:

$$dF_i = \sum_k p_{ik} \frac{x_k}{\sqrt{\sum_n x_n^2}} dA. \quad (2.13)$$

Andererseits gilt:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = \sum_{k,n} \frac{\partial}{\partial x_i} x_k p_{kn} x_n = 2 \sum_n p_{in} x_n, \quad (2.14)$$

oder anders geschrieben:

$$\nabla Q = 2\tilde{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{x}}. \quad (2.15)$$

Einsetzen in Gl. (2.12) ergibt:

$$d\mathbf{F} = \nabla Q \frac{dA}{2|\underline{\mathbf{x}}|}. \quad (2.16)$$

Der Gradient $\nabla Q = 2\tilde{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{x}}$ steht auf der Fläche $Q = 1$ senkrecht. Die Kraft $d\mathbf{F}$ wirkt also jeweils in Richtung der Normalen der Tensorfläche im Punkt $\underline{\mathbf{x}}$. Eine Fläche zweiten Grades besitzt im dreidimensionalen Raum drei aufeinander senkrecht stehende Hauptachsen, die dadurch gekennzeichnet sind, daß auf ihnen der Ortsvektor $\underline{\mathbf{x}}$ und der Normalenvektor $\tilde{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{x}}$ in die gleiche Richtung fallen. Es ist also die Aufgabe gestellt, in der Gleichung:

$$\tilde{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{x}} = p_k \underline{\mathbf{x}} \quad (2.17)$$

die noch unbestimmten Parameter p_k zu bestimmen. Gesucht sind jene der Matrix $\tilde{\mathbf{P}}$ eigentümlichen Richtungen $\underline{\mathbf{x}}$, für die der transformierte Vektor $\tilde{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{x}}$ nur auf das p_k -fache gestreckt wird, also seine alte Richtung beibehält. Anders geschrieben lautet die vorangegangene Gleichung:

$$(\tilde{\mathbf{P}} - p_k \tilde{\mathbf{E}})\underline{\mathbf{x}} = 0, \quad (2.18)$$

wobei $\tilde{\mathbf{E}}$ für den Einheitstensor steht. Als homogenes Gleichungssystem besitzt Gl. (2.18) genau dann nichttriviale, d. h. nicht identisch verschwindende Lösungen $\underline{\mathbf{x}}$, wenn seine Koeffizientendeterminante verschwindet. Diese sogenannte charakteristische Determinante:

$$D(p_k) = \det(\tilde{\mathbf{P}} - p_k \tilde{\mathbf{E}}) \quad (2.19)$$

ist ein Polynom 3-ten Grades in p_k :

$$D(p_k) = -p_k^3 + I_1 p_k^2 - I_2 p_k + I_3 \quad (2.20)$$

mit:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{sp}(\tilde{\mathbf{P}}) = p_1 + p_2 + p_3, \\ I_2 &= p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3, \\ I_3 &= \det(\tilde{\mathbf{P}}) = p_1 p_2 p_3. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Die Größen I_i ($i = 1, 2, 3$) sind Invarianten des Drucktensors $\tilde{\mathbf{P}}$, da sie für alle Bezugssysteme den selben Wert annehmen.

Damit läßt sich nun die Fläche zweiten Grades $Q = \underline{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{x}} = 1$ schreiben als:

$$Q = \sum_i p_i x_i^2 = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 = 1, \quad (2.22)$$

woraus man durch Vergleich mit der Gleichung eines Ellipsoids:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 \quad (2.23)$$

mit den reellen Halbachsen a_i die anschauliche Deutung der Eigenwerte p_i als Kehrwerte der Halbachsenquadrate, $p_i = 1/a_i^2$, ablesen kann. Die Eigenwerte bestimmen die Länge der Achsen des Ellipsoids nach Gl. (2.23). Wenn zwei der drei Eigenwerte gleich sind, dann hat das Ellipsoid zwei gleiche Achsen und ist ein Rotationsellipsoid (achsensymmetrischer Fall). Wenn alle Eigenwerte gleich sind, entartet das Ellipsoid zur Kugel (isotroper Fall). Ist einer der Eigenwerte gleich Null, wird das Ellipsoid zur Ellipse und das Problem reduziert sich auf den ebenen Fall.

2.4 Die Eigenwerte des Transformationstensors

Eine quadratische Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ läßt sich als lineare Abbildung:

$$\underline{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{x}} \quad (2.24)$$

in einem bestimmten Koordinatensystem verstehen. Werden nun die Vektoren $\underline{\mathbf{x}}$ und $\underline{\mathbf{y}}$ durch eine neue Transformation $\tilde{\mathbf{T}}$ mit:

$$\underline{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{T}} \hat{\underline{\mathbf{x}}} \quad (2.25)$$

und

$$\underline{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{T}} \hat{\underline{\mathbf{y}}} \quad (2.26)$$

transformiert, dann transformiert sich Gl. (2.24) mit $\tilde{\mathbf{T}} \hat{\underline{\mathbf{y}}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{T}} \hat{\underline{\mathbf{x}}}$ auf:

$$\hat{\underline{\mathbf{y}}} = \tilde{\mathbf{B}} \hat{\underline{\mathbf{x}}} \quad (2.27)$$

mit der neuen Abbildungsmatrix $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{T}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{T}}$. Zu zeigen bleibt nun, daß bei einer solchen Transformation die charakteristische Gleichung und die Eigenwerte p_k der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ unverändert bleiben. Es gilt:

$$\det(\tilde{\mathbf{B}} - p_k \tilde{\mathbf{E}}) = \det(\tilde{\mathbf{T}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{T}} - p_k \tilde{\mathbf{E}}) = \det[\tilde{\mathbf{T}}^{-1} (\tilde{\mathbf{A}} - p_k \tilde{\mathbf{E}}) \tilde{\mathbf{T}}] \quad (2.28)$$

$$= \det(\tilde{\mathbf{T}}^{-1}) \det(\tilde{\mathbf{T}}) \det(\tilde{\mathbf{A}} - p_k \tilde{\mathbf{E}}) = \det(\tilde{\mathbf{A}} - p_k \tilde{\mathbf{E}}). \quad (2.29)$$

Damit ist gezeigt, daß sowohl die charakteristische Gleichung als auch die Eigenwerte kennzeichnende Eigenschaften der durch die Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ dargestellten linearen Abbildung sind. Damit erweisen sich also, wie bereits in Abschnitt 2.3 erwähnt, die Koeffizienten I_i als gegenüber Koordinatentransformationen invariante Größen.

2.5 Die Mohr-Coulombsche Bruchbedingung

Bei der semihydrostatischen Behandlung des Problems wird davon ausgegangen, daß das Bohrloch systematisch von oben gefüllt wird. Innerhalb der Schüttung kann daher der Vertikaldruck nach unten immer nur zunehmen. Nur für eine stetige Füllung dürfen stetige Zusammenhänge angenommen werden, insbesondere zwischen den vertikalen und den radialen Komponenten des Drucktensors und dem Scherdruck, und nur dann lassen sich analytische Berechnungsmethoden verwenden.

Innerhalb einer Schüttung stellt sich im allgemeinen die Druckverteilung unsteigig ein. Es existieren verschiedene, metastabile Gleichgewichtszustände. Erst wenn innerhalb einer Schüttung die Scherspannung eine Schwelle überschreitet, setzt eine Relativbewegung ein, die in einem neuen Gleichgewichtszustand endet. Die Schwelle ergibt sich näherungsweise aus dem Coulombschen Gesetz. So setzt beim bekannten Scherversuch in einer Scherzelle die Bewegung des aufgelegten oberen Ringes, der mit Sand gefüllt ist, erst ein, wenn die Scherspannung einen vom Normaldruck abhängigen Wert p_{xz} überschritten hat. Im einfachsten Fall lautet das Coulombsche Gesetz:

$$p_{xz} = p_{zz} \tan \delta. \quad (2.30)$$

Hierbei bezeichnen p_{zz} den in Richtung der Normalen der Gleitebene wirkenden Druck und δ den Winkel der inneren Reibung. Man kann sich das Coulombsche Gesetz an einem einfachen Experiment (Abb. 2.1) veranschaulichen. Ein Körper auf einer

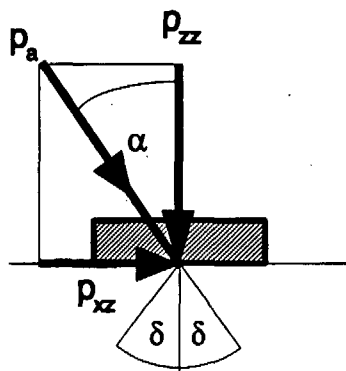


Abb. 2.1: Kräfte auf einen Körper beim Übergang aus Haft- in Gleitreibung; p_{zz} ist die vertikale Druckkomponente, p_a die aus Gewichtskraft und äußerer Kraft resultierende Druckkomponente; erst wenn der Winkel zwischen der aus Gewichtskraft plus äußeren Kräften resultierenden Druckkomponente p_a und der Richtung der ins Innere des Bodens weisenden Flächennormalen einen Grenzwert $\alpha = \delta$ überschreitet, beginnt der Körper zu rutschen

planen Ebene rutscht erst dann, wenn der Winkel α zwischen der aus Gewichtskraft plus äußeren Kräften resultierenden Druckkomponente p_a und der ins Innere der

Ebene weisenden Normalen einen Grenzwert δ überschreitet. Erst bei $\alpha = \delta$ ist der Grenzzustand des Übergangs aus Haft- in Gleitreibung erreicht. Für diesen Fall gilt dann das Coulombsche Gesetz $\tan \alpha = \tan \delta = p_{xz}/p_{zz}$. Sobald $\alpha \geq \delta$ wird, setzt eine Bewegung auf der Ebene ein.

Im allgemeinen Fall lautet das Gesetz:

$$p_{xz} = c + p_{zz} \tan \delta = (a + p_{zz}) \tan \delta \quad (2.31)$$

Der Ausdruck c wird gewöhnlich Kohäsion genannt. Das ist die Scherspannung zwischen den Schüttgutpartikeln für den Fall $p_{zz} = 0$, die sich allein aufgrund der Haftkräfte zwischen den Schüttgutteilchen ergibt. In der zweiten, weniger gebräuchlichen Formulierung des Coulombschen Gesetzes wird $a = c/\tan \delta$ als sogenannte Attraktion bezeichnet und stellt den Normaldruck in einer Schüttgutprobe ohne äußerliche Belastung ($p_{zz} = 0$) dar.

2.6 Der Seitendruckbeiwert

Die Beschreibung der Druckverteilung in Schüttungen setzt die Kenntnis der Drücke und Verformungen innerhalb der Stoffe voraus. Aufgrund der Vielzahl der Parameter, die die mechanischen Eigenschaften der Stoffe bestimmen, ist aber eine systematische und analytische Beschreibung bisher noch nicht möglich.

Der einfachste Fall ist der, daß auf eine Schüttgutprobe, die sich in einem oben offenen, würfelförmigen Kasten mit starren Seitenwänden befindet, von oben mit Hilfe eines Druckstempels, der bündig mit den Seitenwänden des Kastens abschließt, ein Normaldruck aufgebracht wird. Bei starren Wänden des Kastens erfolgt die Verformung nur in Richtung des wirkenden Normaldrucks. Aus dem Normaldruck p_{zz} in vertikaler Richtung resultiert ein Druck p_{xz} in horizontaler Richtung. Alle senkrecht zur Druckrichtung auf die Wandungen des Kastens sich einstellenden Horizontaldrücke sind gleich groß. Das Verhältnis zwischen den Drücken p_{xz} und p_{zz} :

$$k = \frac{p_{xz}}{p_{zz}} \quad (2.32)$$

wird Seitendruck- oder auch Ruhedruckbeiwert genannt.

In der Literatur existiert eine Reihe von Arbeiten über den Seitendruckbeiwert, die sich aber in der überwiegenden Mehrheit mit der experimentellen Bestimmung der Gesetzmäßigkeit für ein bestimmtes Schüttgut befassen. Ein allgemeingültiger Zusammenhang zwischen Seitendruckbeiwert und innerem Reibungswinkel ist im Anhang B zu finden.

2.7 Übersicht über die Literatur

2.7.1 Experimentelle Untersuchungen

Bereits in der älteren Literatur sind Werte für den Seitendruckbeiwert in Abhängigkeit von dem Porenanteil n zu finden. So hat TERZAGHI 1925 [40] für losen Sand $k = 0,45 - 0,5$ und für dichten Sand $k = 0,4 - 0,45$ ermittelt.

KJELLMAN [20] beschreibt in seiner Arbeit ein Gerät, mit dem die drei Hauptspannungen gleichzeitig und unabhängig voneinander auf eine würfelförmige Probe aufgebracht werden können. Bei seinen mit Sand durchgeführten Versuchen war der Seitendruckbeiwert beim Entlasten ($k = 1,5$) wesentlich größer als beim Belasten ($k = 0,5$).

MUHS [29] führte an einer rund 24 m hohen, starren Wand, die mit Sand hinterfüllt war, Erddruckmessungen durch. Er fand für $k = 0,44$.

BERNATZIK [3] gibt aufgrund von durchgeführten Versuchen die in Tabelle 2.1 enthaltenen Werte für Sand an.

Tabelle 2.1: Seitendruckbeiwert von Sand nach den Versuchen von BERNATZIK

Porenanteil n	Seitendruckbeiwert k
0,375	0,49
0,411	0,52
0,444	0,64

BISHOP [4] und SIMONS [36] verwendeten bei ihren Untersuchungen ein sogenanntes Triaxialgerät. Das ist ein Doppelmantelrohr, bei dem im Ringspalt der Druck so vergrößert werden kann, daß der innere Zylinder sich nicht verformt. Mittels elektrischer Kontakte wurde versucht, horizontale Probenverformungen festzustellen und durch geeignetes Nachfahren der Belastung zu eliminieren.

JÄNKE, MARTIN und PLEHM [16], die ebenfalls ein Triaxialgerät einsetzten, unterdrückten die horizontale Verformung der Probe durch eine die Probe umgebende Flüssigkeit, deren Volumen konstant gehalten wurde. Für Sand mit Porenanteilen zwischen $n = 0,33$ und $n = 0,42$ wurden k -Werte von 0,23 bis 0,36 angegeben.

KJELLMAN und JAKOBSON [21] entwarfen ein Gerät, in dem grobkörnige Schüttgüter bei verhinderter Seitendehnung untersucht werden können. Für vier verschiedene Kiese wurden k -Werte zwischen 0,39 und 0,46 gemessen.

HENDRON [14] entwickelte ein Gerät, bei dem sich das Schüttgut innerhalb einer dehnbaren Haut befindet. Diese ist von einem Metallring umgeben. Die Dehnung des Ringes bzw. die seitliche Verformung der Probe wird über Dehnungsmeßstreifen

Tabelle 2.2: Seitendruckbeiwerte verschiedener Materialien bei unterschiedlichen Porenanteilen, die aus unterschiedlichen Normaldrücken resultieren, nach den Versuchen von ANDRAWES und EL-SOHBY

Material	Porenanteil n	Seitendruckbeiwert k
Glaskugeln	0,411	0,502
Glaskugeln	0,364	0,375
Sand	0,411	0,425
Sand	0,352	0,343
gebr. Feldspat	0,495	0,424
gebr. Feldspat	0,407	0,360
Kupferpartikel	0,439	0,435
Kupferpartikel	0,376	0,341

registriert und durch Öldruck in einer den Ring umgebenden Kammer rückgängig gemacht. Der Öldruck entspricht dabei unmittelbar dem Seitendruck.

ANDRAWES und EL-SOHBY [1] haben ebenfalls verschiedene granulare Materialien bei unterschiedlichen Porenanteilen, die sie durch unterschiedliche Drücke auf die Materialien realisierten, mit Hilfe eines Triaxialgerätes untersucht. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2.2 zusammengefaßt.

SUNDARAM und COWIN [38] haben mit einem aus zwei Halbschalen bestehenden zylindrischen Stahlgefäß (Abb. 2.2) die Änderung des Seitendruckbeiwertes k für verschiedene Schüttgüter als Funktion des aufgegebenen Normaldrucks p_{zz} untersucht. Die Halbschalen wurden durch Spangen zusammengehalten und über deren Dehnung mittels Dehnmeßstreifen die Verformungen und die Drücke registriert. Sie ermittelten für verschiedene Getreidesorten eine lineare Zunahme von k mit p_{zz} , d. h. für $0 \leq p_{zz} \leq 168 \text{ kN/m}^2$:

$$k(p_{zz}) = k_0(1 + mp_{zz}). \quad (2.33)$$

Dabei sind k_0 der Seitendruckbeiwert bei $p_{zz} = 0$ und m eine materialtypische Konstante, die, je nach Getreidesorte, im Bereich von $5,43$ bis $9,19 \text{ MPa}^{-1}$ liegt. Für Kohle fanden sie im Bereich bis etwa 40 kN/m^2 einen stärkere Zunahme von k mit dem aufgegebenen vertikalen Druck p_{zz} als im Bereich $40 \text{ kN/m}^2 \leq p_{zz} \leq 168 \text{ kN/m}^2$, wo sie für $m = 0,8 \text{ MPa}^{-1}$ ermittelten.

Bei Scherversuchen mit Haldensalz [19] in einer einfachen Scherzelle wurden bei unterschiedlichen vertikalen Drücken p_{zz} Winkel der inneren Reibung δ für verschiedene Wichten γ ermittelt. Mit dem häufig in der Schüttgutmechanik verwendeten

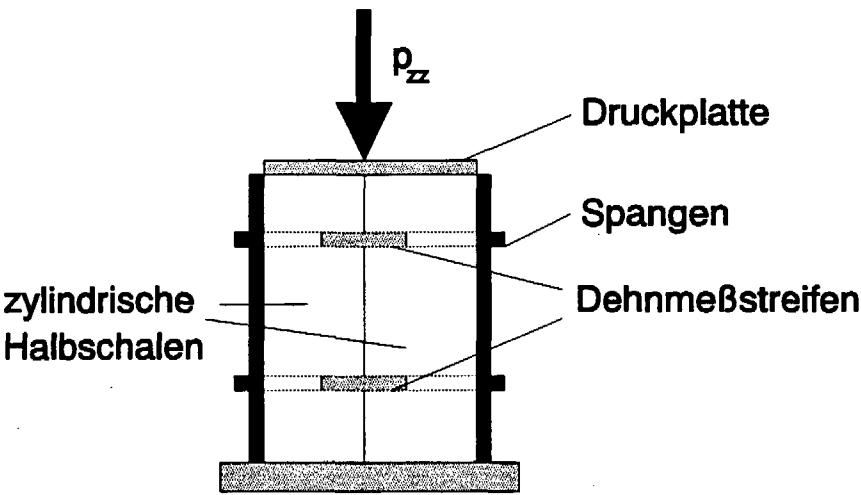


Abb. 2.2: Meßgerät zur Bestimmung des Seitendruckbeiwertes nach SUNDARAM und COWIN

Zusammenhang zwischen k und δ , den JAKY hergeleitet hat (vgl. Abschnitt 2.7.2), ergaben sich die Werte nach Tabelle 2.3.

Tabelle 2.3: Seitendruckbeiwerte für Haldensalz bei unterschiedlichen Schüttwichten γ , die durch unterschiedliche Normaldrücke p_{zz} realisiert wurden; der innere Reibungswinkel δ wurde mit einem Schergerät bestimmt

p_{zz} [kN/m ²]	γ [kN/m ³]	n [-]	innerer Reibungswinkel δ [Grad]	$k = 1 - \sin \delta$
70	10,00	0,48	48	0,257
150	11,28	0,41	48	0,257
210	11,87	0,38	52	0,212

SUNDARAM und COWIN [37] haben die Ergebnisse experimenteller Untersuchungen weiterer Autoren zusammengefaßt.

Fazit der auszugsweise aus der Literatur zusammengestellten Ergebnisse ist folgendes: wenn nicht geräte- oder versuchstechnische Mängel für die zum Teil beträchtlichen Streuungen der Werte für k verantwortlich gemacht werden können, muß der Schluß gezogen werden, daß eine allgemeingültige Abhängigkeit des Seitendruckbeiwertes allein von dem Porenanteil n oder dem Kornspektrum nicht angegeben werden kann. Man kann z. B. gleiche Porenanteile entweder durch unterschiedliche Normaldrücke auf ein Schüttgut oder aber durch unterschiedliche Kornspektren realisieren, und dennoch wird der Seitendruckbeiwert bei beiden Versuchen nicht der gleiche

sein. Um auf empirischem Weg einer Klärung der Zusammenhänge näherzukommen, sind systematische Untersuchungen in großem Umfang erforderlich.

2.7.2 Analytische Ansätze

Einen Zusammenhang zwischen k und dem inneren Reibungswinkel δ hat JAKY [17] hergeleitet. Er betrachtet einen keilförmig angehäuften Sand. Der Keil ist in der dritten Raumrichtung unendlich ausgedehnt, die Betrachtung erfolgt also für den zweidimensionalen Fall. Zur Herleitung wird die ad-hoc-Annahme gemacht, daß die Schubspannung quadratisch mit der x -Koordinate zunimmt. Der Wert der JAKY-Formel resultiert vornehmlich daraus, daß über Übereinstimmungen mit experimentellen Untersuchungen in der Literatur (vgl. [4, 14, 21, 36]) berichtet wird. Die Formel lautet:

$$k = \frac{1 - \sin \delta}{1 + \sin \delta} \left[1 + \frac{2}{3} \sin \delta \right]. \quad (2.34)$$

Der Faktor:

$$\frac{1 + \frac{2}{3} \sin \delta}{1 + \sin \delta} = 1 - \frac{\sin \delta}{3 + 3 \sin \delta} \quad (2.35)$$

wird im üblichen Bereich des inneren Reibungswinkels von $\delta \simeq 20^\circ - 40^\circ$ nicht kleiner als 0,87. Wird dieser Faktor durch eins ersetzt, so wird der relative Fehler bei der Berechnung von k nicht größer als 13 %. Näherungsweise gilt also:

$$k = 1 - \sin \delta. \quad (2.36)$$

Das JAKY-Modell zur Berechnung des Seitendruckbeiwertes k behandelt das körnige Material als Kontinuum. Für das Material werden ideale Eigenschaften wie Homogenität und Isotropie vorausgesetzt. Außerdem werden Volumenänderungen vernachlässigt und eventuelle Formänderungen erfolgen nur durch Gleitungen. Als einzige einschränkende Bedingung wird angenommen, daß im Material der Winkel zwischen der größten und kleinsten Hauptspannung einen bestimmten Wert, den Winkel der inneren Reibung, nicht überschreitet.

Neben diesem Kontinuumsansatz von JAKY existieren in der Literatur eine Reihe von Arbeiten, bei denen bei der theoretischen Behandlung versucht wird, die Eigenschaften eines Schüttgutes anhand der Eigenschaften der einzelnen Körner und deren geometrischer Anordnung zu beschreiben, d. h. hier steht die diskrete Struktur der Körner im Vordergrund. Um aber die Eigenschaften der Schüttgüter mit mathematisch vertretbarem Aufwand darzustellen, werden Ersatzmodelle, etwa Schüttungen aus gleich großen, elastischen Kugeln betrachtet. Hierzu seien vor allem die Untersuchungen von LEUSSINK und WITKE [25], ROWE [33] sowie THURSTON und DERESIEWICS [41] aufgeführt.

HENDRON [14] versucht ebenfalls anhand von idealisierten Erdstoffmodellen eine Relation zwischen dem Seitendruckbeiwert k und dem Winkel der inneren Reibung δ aufzufinden. Er untersucht Kugelpackungen aus elastischen, gleichgroßen Kugeln,

die kubisch flächenzentriert angeordnet sind. Grundlage seiner Herleitung sind die Arbeiten von HERTZ [15], MINDLIN [27] sowie MINDLIN und DERESIEWICS [28], in denen die Drücke und Verformungen in den Berührungspunkten zweier Kugeln, die durch Normal- und Tangentialkräfte beansprucht sind, beschrieben werden. Er erhielt folgende Beziehung zwischen k und dem Winkel der inneren Reibung δ (Abb. 2.3):

$$k = \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{\sqrt{6}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \sin \delta}{1 - \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \sin \delta}. \quad (2.37)$$

Zur Überprüfung seiner analytischen Ergebnisse führte HENDRON Versuche an vier

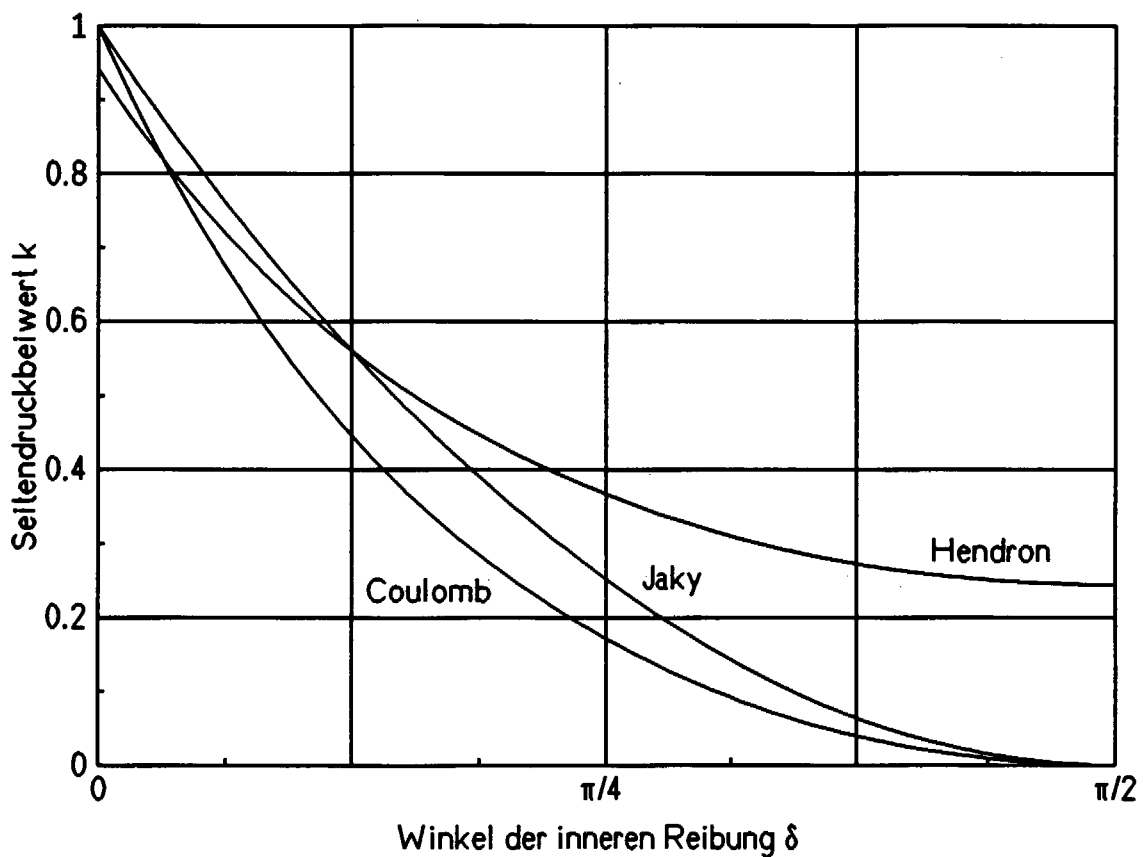


Abb. 2.3: Der Seitendruckbeiwert als Funktion des Winkels der inneren Reibung nach den Modellen von JAKY, HENDRON und COULOMB

verschiedenen Sanden durch, und fand bei rundkörnigem Sand, der dem Rechenmodell bezüglich der Kornform am nächsten kommt, eine im Hinblick auf die Idealisierung bei der analytischen Behandlung erstaunliche Übereinstimmung mit der Kennlinie nach

Gl. (2.37). In Abb. 2.3 sind die Seitendruckbeiwerte nach JAKY (Gl. (2.34)) und HENDRON (Gl. (2.37)) als Funktion des Winkels der inneren Reibung zum Vergleich dargestellt. Mit wachsendem Reibungswinkel δ wächst der Unterschied der Seitendruckbeiwerte nach den Modellen von JAKY und HENDRON und ist für $\delta = \pi/2$ maximal. Es sollte aber berücksichtigt werden, daß, wie oben bereits erwähnt, der innere Reibungswinkel im Bereich $\delta \simeq 20^\circ - 40^\circ$ liegt.

Der Zusammenhang zwischen dem Reibungswinkel und dem Seitendruckbeiwert,

$$k = \frac{1 - \sin \delta}{1 + \sin \delta}, \quad (2.38)$$

der im Rahmen der klassischen Mechanik ohne zusätzliche Annahmen allein aus den Erfahrungssätzen, die zum Coulombschen Reibungsgesetz und zum Begriff des Seitendruckbeiwertes führen, hergeleitet wird (s. Anhang B), ist ebenfalls in Abb. 2.3 eingezeichnet.

2.8 Schüttgüter bei wechselnder Beanspruchung

Experimentelle Untersuchungen bestätigen einen Zusammenhang zwischen dem Winkel der inneren Reibung δ und dem Seitendruckbeiwert k . Sie stimmen aber nur näherungsweise mit der Formel nach Gl. (2.34), die JAKY für kohäsionslosen Sand hergeleitet hat, überein.

Das Erscheinungsbild des verminderten Horizontaldrucks bei gegebenem Vertikaldruck unterscheidet sich grundlegend von der Druckausbreitung in Flüssigkeiten. Da die Flüssigkeitsmoleküle leicht gegeneinander verschiebbar sind, können hier auch keine Scherkräfte bei vertikaler Kompression übertragen werden. Dies erklärt bei Flüssigkeiten, daß die Druckausbreitung isotrop und hydrostatisch erfolgt, denn es gilt immer Vertikaldruck = Horizontaldruck, so daß sich für Flüssigkeiten immer $k = 1$ ergibt.

Andere experimentelle Untersuchungen aus der Literatur zeigen, daß der Seitendruckbeiwert k von der Vorbehandlung des Schüttgutes abhängt. So kann bei einem Material, das stark komprimiert und anschließend wieder entlastet wurde (z. B. die Bodenschichten unter einem abschmelzenden Gletscher), der Horizontaldruck den Vertikaldruck übersteigen, d. h. $k \geq 1$. Nach den Theorien von JAKY, HENDRON und COULOMB kann k maximal den Wert 1 erreichen. Für einen lockeren Boden, etwa Sedimentationen, wird man den Horizontaldruck kleiner als den Vertikaldruck erwarten dürfen. Sogar für das gleiche Material ist der Seitendruckbeiwert abhängig von der vorausgegangenen Behandlung des Stoffes. Wird die Oberfläche eines mit Sand gefüllten Halbraumes gleichmäßig belastet, dann steigen auch die Horizontaldrücke. Nach einer Entlastung vermindert sich der Horizontaldruck auf den ursprünglichen Wert. Sobald aber in dem Sand die elastische Grenze bei der erstmaligen Kompression überschritten worden ist, vermindert sich der horizontale Druck bei Entlastung nicht oder nur in geringem Maße.

In Abb. 2.4 ist die relative Volumenabnahme über dem Vertikaldruck p_{zz} für den Fall wiederholter Be- und Entlastung dargestellt. Es zeigt sich, daß nach einer Be-

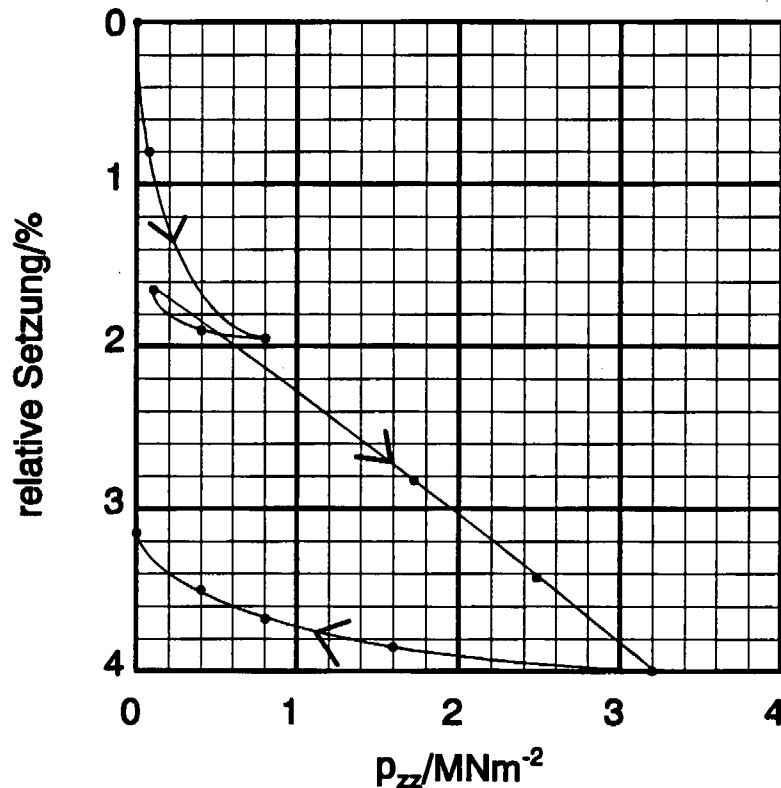


Abb. 2.4: Die relative Volumenabnahme von Sand als Funktion des aufgegebenen vertikalen Drucks p_{zz} in einem Kompressions- und Entlastungsversuch bei einem Verhältnis Probenhöhe zu Probendurchmesser $\simeq 0,3$

lastung das Material bei Entlastung nicht in den Ausgangszustand zurückkehrt, daß also Verformungsenergie im Material gespeichert bleibt. Diese plastische Verformung wird durch eine irreversible Verschiebung der einzelnen Partikel gegeneinander und durch Zerkleinerung verursacht. Bei erneuter Belastung über die Erstbelastung hinaus geht die Setzungskurve näherungsweise wieder in den Ast der Erstbelastung über, so, als wäre der Sand nie entlastet worden. Nach einer weiteren Entlastung bleibt wiederum ein Teil der zur Verformung aufgebrauchten Energie als plastische Verformung im Material zurück.

Abb. 2.5 zeigt Druck-Setzungskurven eines Sandes, der zyklisch in einem Ödometer be- und entlastet worden ist. Der aufgebrachte Druck wurde dabei zwischen 50 kN/m^2 und 750 kN/m^2 wiederholt erhöht und gesenkt. Die bleibende Höhenabnahme wird mit jedem Belastungs- und Entlastungszyklus größer. Bei zyklischer Wiederholung von Be- und Entlastung sind, um die gleiche Verformung wie bei den

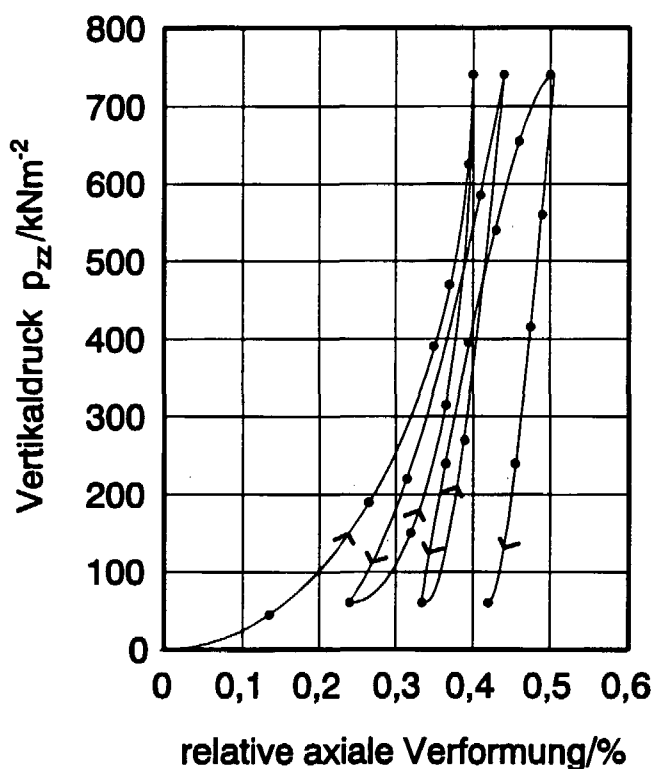


Abb. 2.5: Druck-Setzungskurven für Sand während wiederholter Be- und Entlastung in einem Ödometertest bei einem Verhältnis Probenhöhe zu Probendurchmesser von $\simeq 0,3$

vorhergehenden Belastungen zu erzielen, immer kleiner werdende Drücke aufzubringen.

Wie sich anhand von Druck-Setzungskurven (Abb. 2.6) feststellen läßt, wird bei einer Kompression eines Materials mit konstanter Belastung der Endzustand nicht augenblicklich erreicht. Nach einer anfänglich raschen Setzung, in der bereits rund 90 % der Endsetzung erreicht werden, schließt sich ein nahezu stationäres Kriechen an, das sich über Stunden oder Tage erstreckt. In diesem Zeitraum wird dann die Endsetzung asymptotisch erreicht. Für die meisten Anwendungen kann aber davon ausgegangen werden, daß die primären Setzungserscheinungen bereits abgeschlossen sind.

Quintessenz aus den oben beispielhaft gezeigten Ergebnissen experimenteller Untersuchungen ist, daß sich der Quotient aus Horizontaldruck und Vertikaldruck keineswegs durch eine einfache Konstante ausdrücken läßt. Da aber gerade dieses Verhältnis darüber Auskunft gibt, welcher Anteil einer vertikalen Belastung horizontal in die umgebende Wand abgeleitet wird, ist eine Apparatur entwickelt und gebaut worden, mit

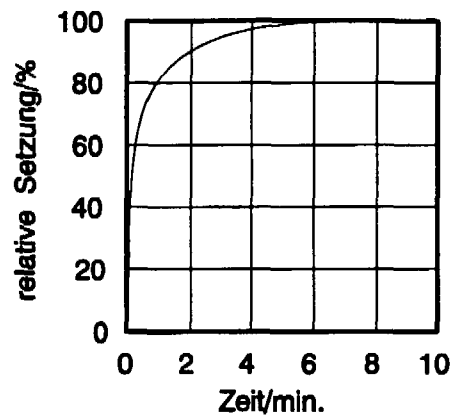


Abb. 2.6: Gemessener zeitlicher Verlauf der Setzung für ein Schüttgut in einem Kompressionsversuch mit konstanter Belastung

der sich dieses Verhältnis unter Variation verschiedener Parameter bestimmen läßt. Diese Apparatur soll im nächsten Abschnitt vorgestellt werden.

Kapitel 3

Experimentelle Untersuchungen zum Seitendruckbeiwert

3.1 Der Prüfstand zur Ermittlung des Seitendruckbeiwertes

Wie im vorangegangenen Kapitel dargelegt wurde, gibt es zur Ermittlung des Seitendruckbeiwertes für ein bestimmtes Schüttgut nur den Weg der direkten Messung, da keine allgemeingültige Berechnungsmethode existiert, die alle materialtypischen Parameter berücksichtigt. Daher wurden eine Apparatur zur direkten experimentellen Bestimmung des Seitendruckbeiwertes aufgebaut und Messungen an Salzgrus durchgeführt. Der Salzgrus wurde freundlicherweise vom Institut für Chemische Technologie des Forschungszentrums Jülich zur Verfügung gestellt.

Zwischen zwei zur Gewichtseinsparung kreuzförmig ausgeschnittene Stahlplatten wurden ebene, senkrecht stehende Stahlplatten verschraubt (Abb. 3.1). Die Wandstärke der verwendeten Stahlplatten beträgt 30 mm, für die Schraubverbindungen wurden M16-Schrauben verwendet, so daß bei den in Frage kommenden Kräften von einem Durchbiegen oder einem Verziehen der Meßapparatur abgesehen werden kann. Das Kreuz hat eine lichte Weite von 142 mm, in seinem Zentrum befindet sich zwischen vier seitlichen Druckstempeln der Salzgrus. Die Druckzylinder besitzen eine maximale Druckkraft von 100 kN und einen maximalen Hub von 25 mm. Mittels einer Ölhydraulikpumpe können die zwei in z -Richtung liegenden Zylinder gemeinsam mit Druck beaufschlagt werden, ebenso mit einer zweiten Pumpe die in x -Richtung liegenden Zylinder. Die Belastung wird jeweils über zwei elektronische Kraftaufnehmer und die Verformung über zwei Wegaufnehmer gemessen.

Bei sich in z -Richtung aufeinanderzu bewegendem Stempeln 1 und 3 (Stempelpaar I) und feststehenden Stempeln 2 und 4 (Stempelpaar II) wird eine eingefüllte Schüttgutprobe komprimiert. Der Schwerpunkt der Schüttgutprobe bleibt dabei bei einer synchronen Bewegung der Stempel 1 und 3 raumfest. Mit den zwischen Hydraulikzylinder und Stempel eingebauten Kraftaufnehmer können die Kräfte bzw. Drücke

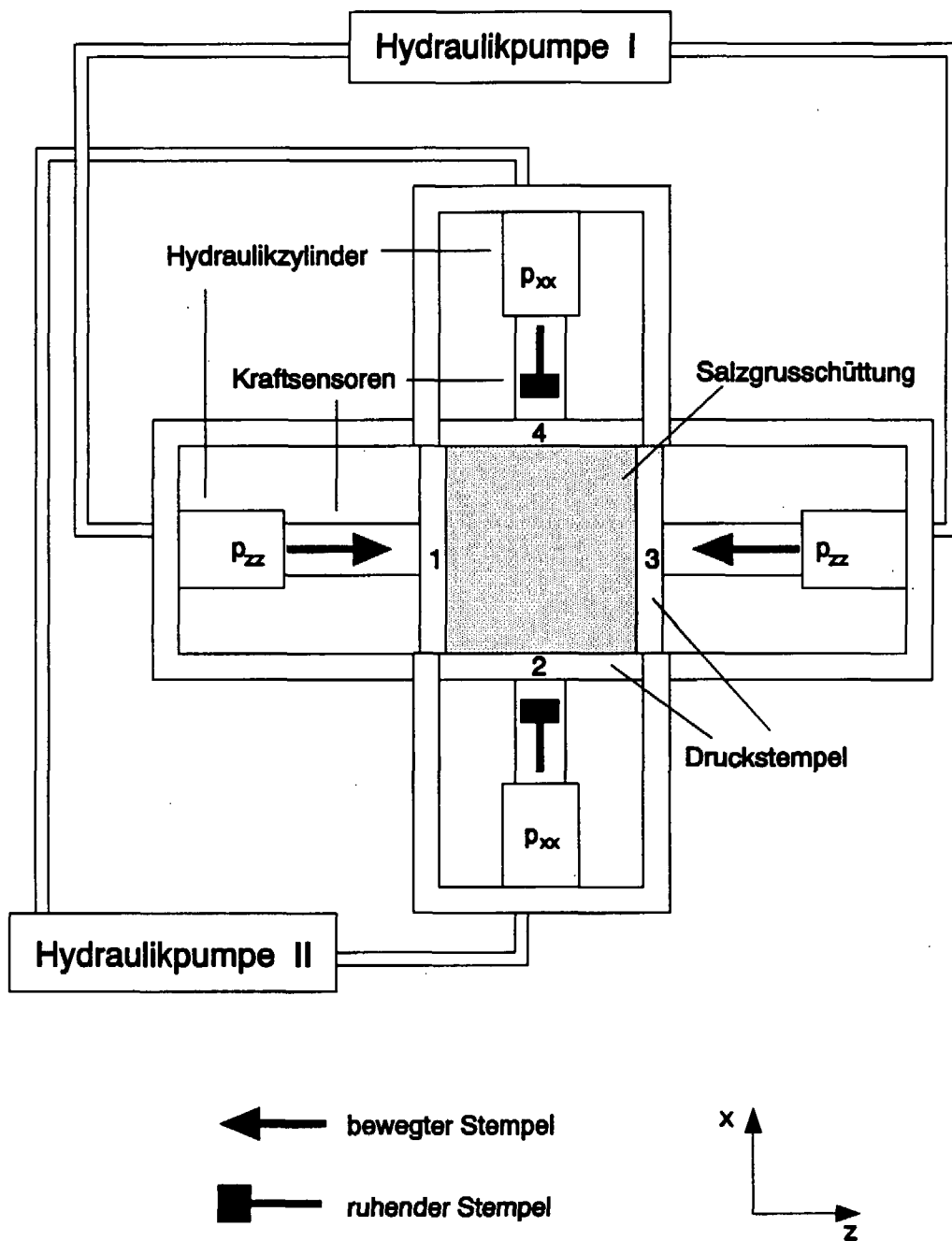


Abb. 3.1: Aufsicht auf den Prüfstand zur experimentellen Bestimmung des Seitendruckbeiwertes bei gleichbleibender Druckrichtung

auf die Schüttgutprobe gemessen werden. Mit den an den Stempeln angebrachten Wegaufnehmern können die Verformung und damit bei bekannter Masse und bekannt-

tem Ausgangsvolumen die Dichte als Funktion der aufgebrachten Kräfte bestimmt werden.

3.2 Der Seitendruckbeiwert bei gleichbleibender Druckrichtung

Für die im folgenden beschriebenen experimentellen Untersuchungen ist der Salzgrus in der Form eingesetzt worden, wie er später für die Endlagerung im Salzstock Verwendung finden soll. Abb. 3.2 zeigt das Körnungsspektrum.

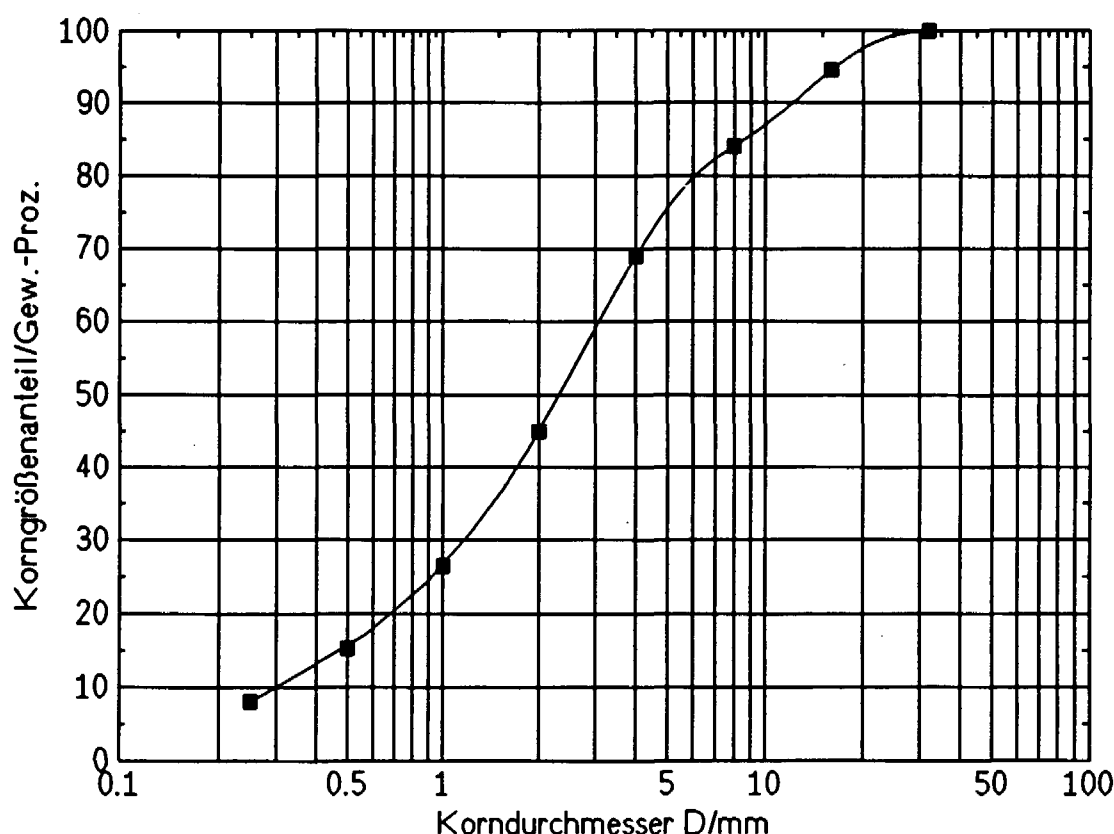


Abb. 3.2: Körnungsspektrum des bei den Versuchen eingesetzten Salzgruses

Nachdem der Prüfstand für ein bestimmtes Ausgangsvolumen eingestellt ist, wird der Salzgrus bei abgeschraubter Deckplatte in den Druckraum zwischen die Stempel eingefüllt. Der Salzgrus wird gleichmäßig im Druckraum verteilt, so daß beim Auflegen der Deckplatte keine Hohlräume im Salzgrus zurückbleiben. Er soll bündig mit den oberen Kanten der Stempel abschließen. Nach dem Verschließen des Druckraums können über die zwei gegenläufigen Stempel in z -Richtung in beliebigen Schrittweiten

Drücke p_{zz} auf die Salzgrusprobe aufgebracht und die in x -Richtung resultierenden Drücke p_{xx} gemessen werden.

In Abb. 3.3 ist das Verhältnis $k = p_{xx}/p_{zz}$ und in Abb. 3.4 die Dichte ρ als Funktion des aufgegebenen Drucks p_{zz} für drei verschiedene Probenhöhen H_{Probe} aufgetragen. Der k -Wert nimmt in einem Druckbereich, der sich von 120 kN/m² bis

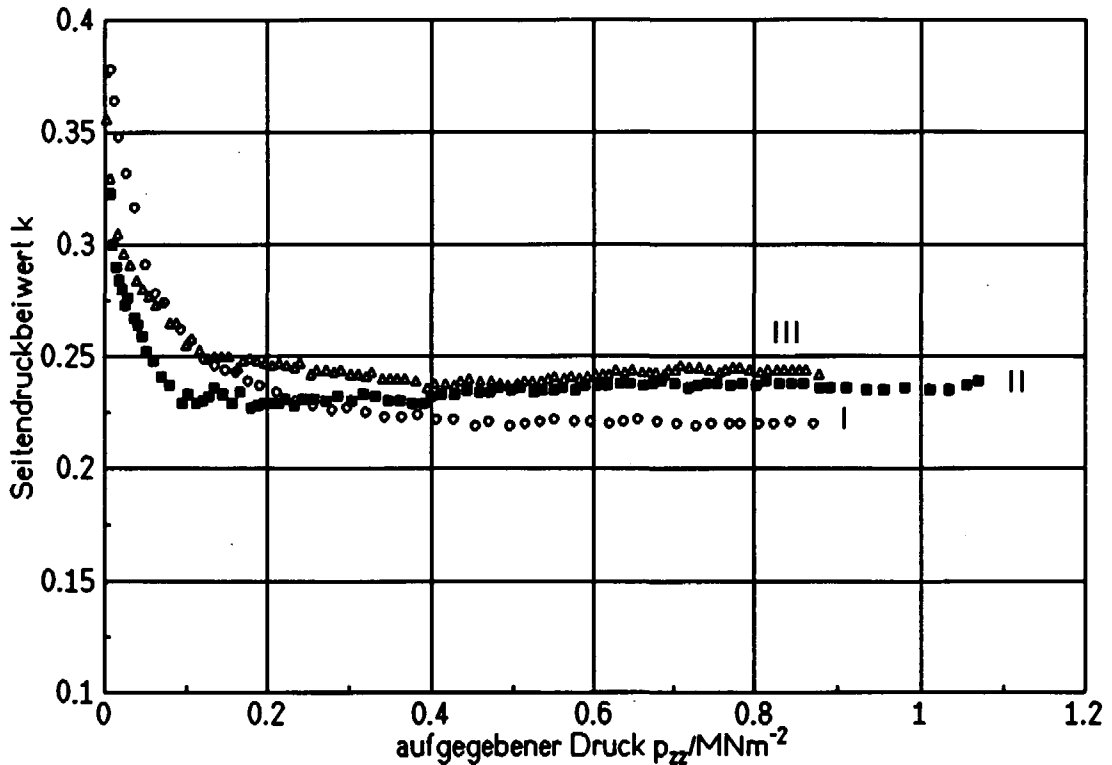


Abb. 3.3: Gemessener Seitendruckbeiwert von Salzgrus als Funktion eines einseitig aufgegebenen Drucks bei drei unterschiedlichen Anfangsprobenhöhen (I $\doteq H_{Probe} = 47$ mm, II $\doteq H_{Probe} = 68$ mm, III $\doteq H_{Probe} = 100$ mm)

etwa 170 kN/m² erstreckt, von $k = 0,38$ stetig ab. In diesem Druckbereich ist auch die Änderung der Dichte mit dem aufgegebenen Druck am größten. Die Abnahme von k im unteren Druckbereich ist wohl auf folgendes zurückzuführen: bei den zu Beginn der Messung noch kleinen Kräften rutschen die einzelnen Körner aneinander vorbei in neue Gleichgewichtspositionen. Dabei verringert sich der mittlere Abstand der Körner, da die von außen aufgebrachten Kräfte ausreichen, die Reibung zwischen den Salzpartikeln zu überwinden und sie in die nach dem Verfüllen noch übriggebliebenen Zwischenräume zu schieben. Das heißt, die von außen aufgebrachten Kräfte bewirken durch Gleiten und Rollen des einen Korns auf dem anderen auch Kräfte in andere

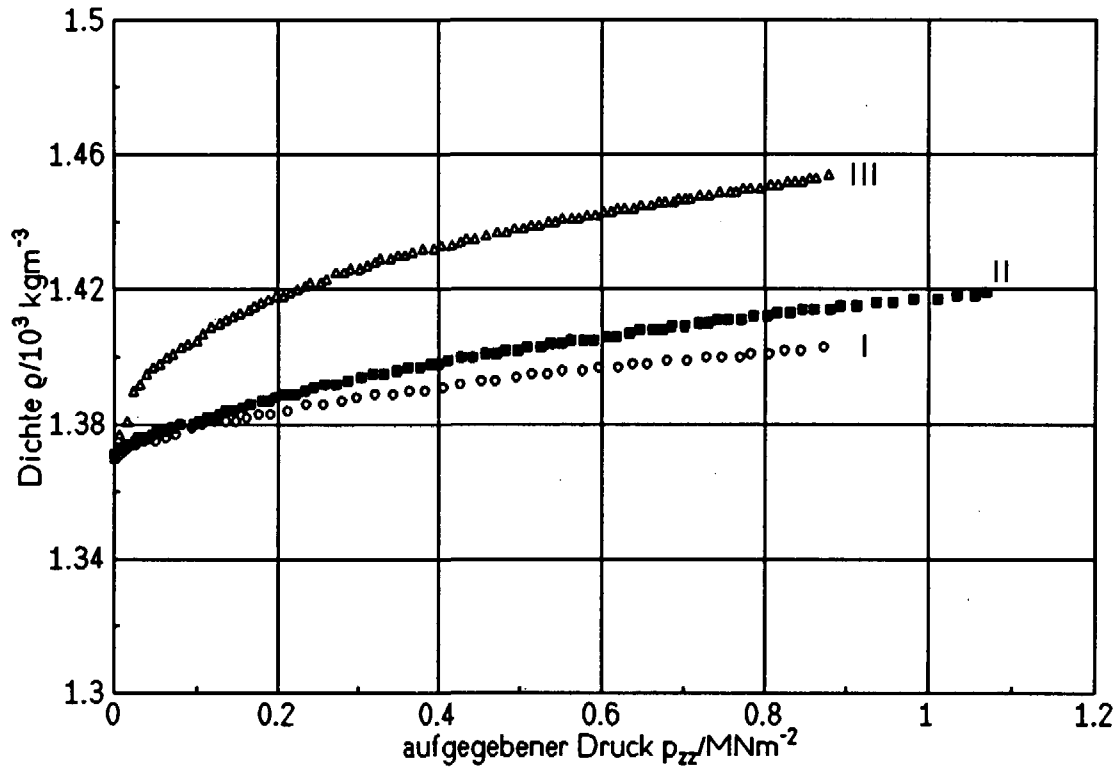


Abb. 3.4: Gemessene Dichte von Salzgrus als Funktion eines einseitig aufgegebenen Drucks bei drei unterschiedlichen Anfangsprobenhöhen (I $\doteq H_{Probe} = 47 \text{ mm}$, II $\doteq H_{Probe} = 68 \text{ mm}$, III $\doteq H_{Probe} = 100 \text{ mm}$)

Richtungen. Als Schmiermittel zwischen den Salzkristallen dient feiner Salzabrieb, der sich in die Spalten und Ritzen der größeren Kristalle setzt und so den Scherwiderstand der einzelnen Körner aneinander durch Abrunden der äußeren Oberfläche verringert. Aufgrund der leichten Verschiebbarkeit der Salzkörner relativ zueinander kann auch der aufgebraute Druck p_{zz} leicht in die Meßrichtung p_{xx} weitergegeben werden. Daraus ergibt sich ein zunächst größeres k im unteren Druckbereich (bis $120\text{--}170 \text{ kN/m}^2$). Mit diesem Gleiten und Rollen, d. h. mit wachsenden Kräften, vergrößern sich die Anzahl der Kontakte und damit die Kontaktflächen zwischen den Salzgruskörnern. Die Körner verzahnen sich stärker und sorgen für einen festeren Gefügewiderstand. In die jetzt in weit geringerer Anzahl vorhandenen Hohl- und Zwischenräume können einzelne Körner nicht mehr allein dadurch gelangen, daß sie sich aneinander vorbeischieben, sondern sie müssen sich drehen, heben und senken. Die hierzu notwendigen Kräfte sind wesentlich höher als die, die nur ein Rutschen verursachen. Die anfänglich steil abfallenden Kurven des Seitendruckbeiwertes über

dem aufgegebenen Druck verlaufen nun horizontal. Mit den höheren Kräften tritt eine Kornzerkleinerung durch Kornbrüche auf. Die Kornzerkleinerung kündigte sich während des Versuches durch ein Knirschen innerhalb der Salzgrusschüttung an. Die kleineren Bruchstücke setzen sich in die noch zwischen den größeren Körnern übriggebliebenen Lücken.

In Abb. 3.5 sind die Seitendruckbeiwerte aus zwei Meßreihen mit gleichen Anfangsprobenhöhen aufgetragen. Es zeigt sich, daß sich die Werte für k im gewählten Druckbereich gut reproduzieren lassen. Die maximalen relativen Abweichungen der gemessenen Seitendruckbeiwerte betragen rund 10 %, wobei die Abweichung bei den kleineren Drücken größer ist als im oberen Druckbereich.

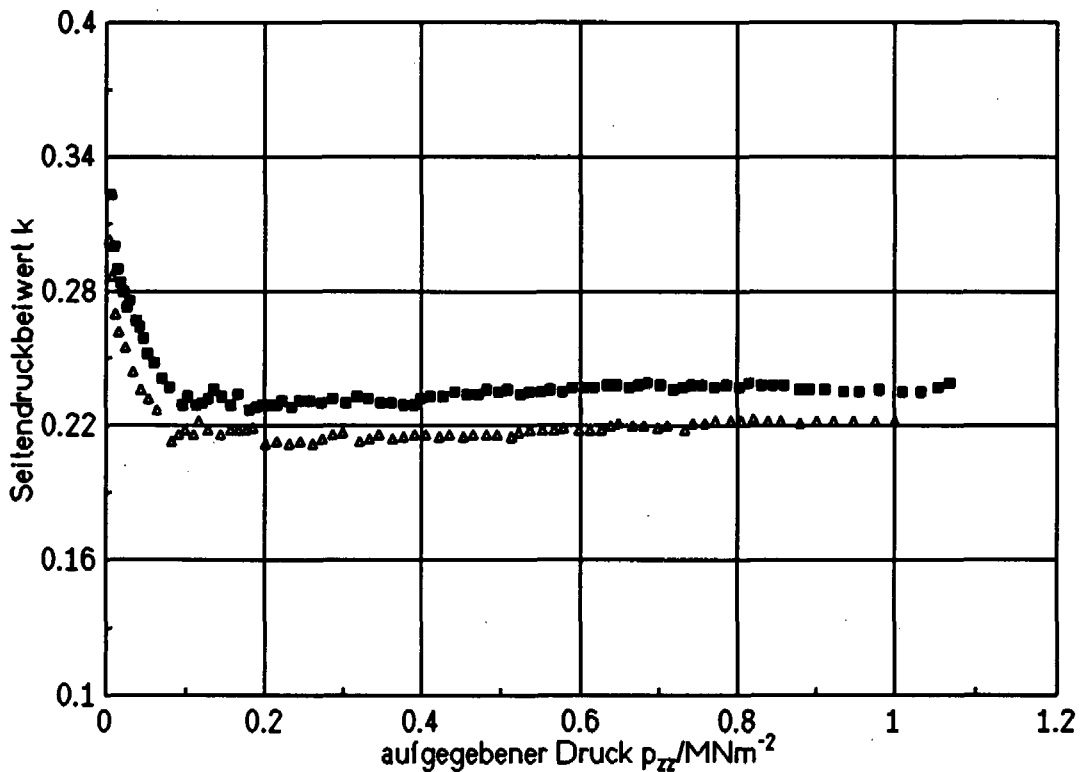


Abb. 3.5: Gemessener Seitendruckbeiwert von Salzgrus als Funktion eines einseitig aufgegebenen Drucks bei gleichen Anfangsprobenhöhen von $H_{Probe} = 68 \text{ mm}$

Eine Abhängigkeit des Seitendruckbeiwertes vom Verhältnis Probenhöhe zu Probendurchmesser H_{Probe}/D_{Probe} war im Rahmen der Meßgenauigkeit nicht festzustellen (Abb. 3.3). Auf der einen Seite ist ein kleines Verhältnis ($H_{Probe}/D_{Probe} \leq 0,3$ laut Literatur) vorteilhafter, da sich mit wachsender Probenhöhe die Wandreibung mehr und mehr bemerkbar macht und die Messung des Seitendruckbeiwertes verfälscht.

Auf der anderen Seite muß aber berücksichtigt werden, daß der minimale Abstand der Druckstempel, d. h. die minimale Probenhöhe H_{Probe} , nicht kleiner als der maximale Korndurchmesser D_{Korn} von etwa 32 mm (Abb. 3.2) sein kann. Als minimaler Abstand wurden hier 47 mm und als maximaler Abstand 100 mm gewählt. Damit ergeben sich die während der experimentellen Untersuchungen gewählten Kombinationen von H_{Probe}/D_{Probe} und H_{Probe}/D_{Korn} :

$$\bullet \quad 0,165 \leq \left(\frac{H_{Probe}}{D_{Probe}} \right) \leq 0,35;$$

$$\bullet \quad 0,73 \leq \left(\frac{H_{Probe}}{D_{Korn}} \right) \leq 1,56.$$

Zu bemerken ist noch, daß es sich bei den in der Literatur beschriebenen Meßgeräten für den Seitendruckbeiwert um zylindrische Gefäße zur Aufnahme des Schüttgutes handelt, daß also D_{Probe} den Durchmesser des Zylinders bzw. der Probe darstellt. Bei den eigenen Messungen wurde der Druckraum quadratisch gewählt, um den Druck auch aus wechselnden Richtungen auf die Schüttung aufbringen zu können. Hier ist also D_{Probe} die Seitenlänge des quadratischen Querschnittes. Der Unterschied liegt aber nur darin, daß beim Zylinder die Mantelfläche proportional zu πD_{Probe} und beim Prisma proportional zu $4D_{Probe}$ ist. Bei gleichem D_{Probe} ist daher die Mantelreibung im zylindrischen Gefäß um den Faktor $\pi/4$ kleiner.

Der theoretisch maximal im Bohrloch vorkommende Druck ergibt sich bei Vernachlässigung jedweder Wandreibung und Lastabtragung in die Bohrlochwand bei einer Bohrlochhöhe von $h_B = 600$ m und einer Wichte der Salzgrusschüttung von $\gamma_S = 13$ kN/m³ auf der Bohrlochsohle zu 7,8 MN/m². Der während der Messungen für den Seitendruckbeiwert erfaßte Druckbereich erstreckt sich bis etwa 1 MN/m². Da sich aber, wie in Abschnitt 6.4 noch gezeigt wird, durch Lastabtragung ein um eine Größenordnung geringerer Vertikaldruck einstellt, ist der erfaßte Druckbereich bis 1 MN/m² als ausreichend anzusehen.

Die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen können wie folgt zusammengefaßt werden:

1. Das Verhältnis Horizontaldruck zu Vertikaldruck ist im Rahmen der Meßgenauigkeit im untersuchten Bereich von $0,165 \leq H_{Probe}/D_{Probe} \leq 0,35$ unabhängig von dem Verhältnis Probenhöhe zu Probendurchmesser.
2. Für kleine Drücke ($0 \text{ kN/m}^2 \leq p_{zz} \leq 120\text{-}170 \text{ kN/m}^2$) nimmt der Seitendruckbeiwert stetig mit dem aufgegebenen Druck ab.
3. Für höhere Drücke ($p_{zz} \geq 120\text{-}170 \text{ kN/m}^2$) stellt sich ein vom aufgegebenen Druck unabhängiger Seitendruckbeiwert ein.

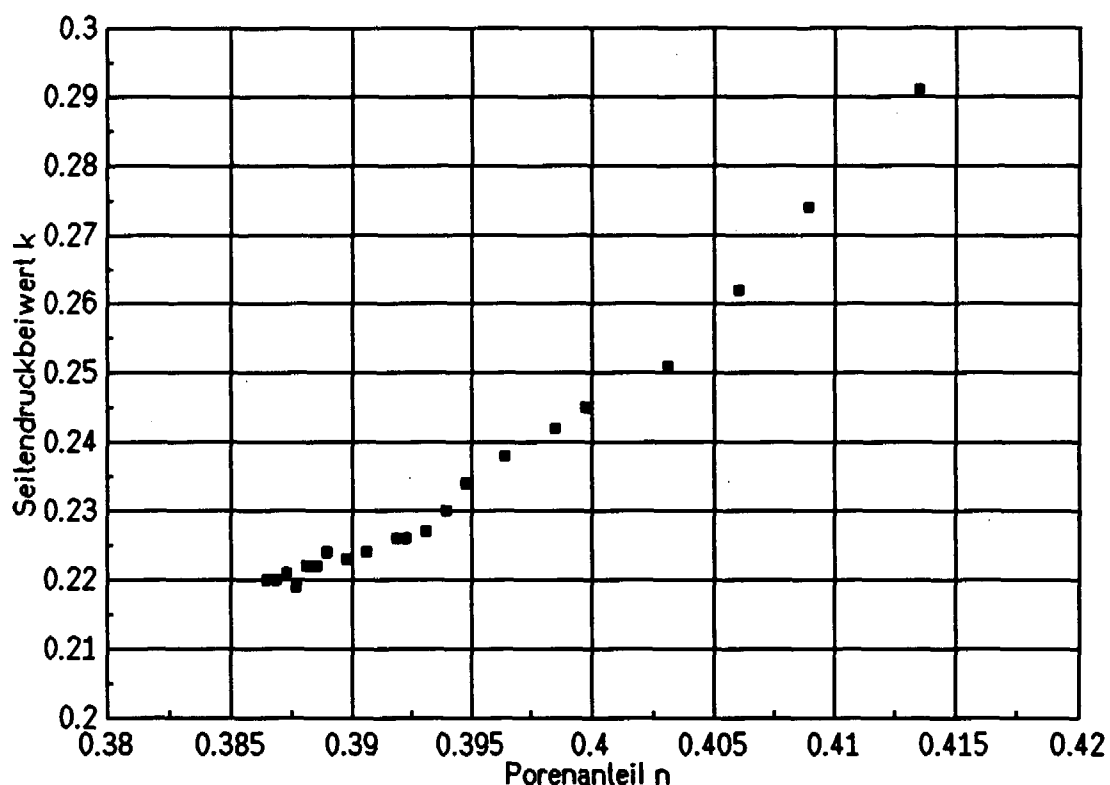


Abb. 3.6: Gemessener Seitendruckbeiwert von Salzgrus in Relation zum Porenanteil, der mit dem aufgegebenen Druck p_{zz} abnimmt

In Abb. 3.6 sind für einen Vergleich mit den Literaturwerten aus Abschnitt 2.8 der aus den eigenen experimentellen Untersuchungen ermittelte Seitendruckbeiwert als Funktion des Porenanteils:

$$n = \frac{V_{gesamt} - V_{Korn}}{V_{gesamt}} \quad (3.1)$$

aufgetragen. Dabei bedeuten V_{gesamt} das Gesamtvolumen und V_{Korn} das Kornvolumen des Salzgruses. Die Messungen an Salzgrus bestätigen die in der Literatur beschriebene Abnahme von k mit abnehmendem Porenanteil. Als Einwand gegen die hier vorgestellte experimentelle Bestimmung von k kann geltend gemacht werden, daß bei der Messung ein Teil Δp_{zz} des aufgebrachten Drucks p_{zz} durch Reibung an den Wänden des Prüfstandes abgetragen wird, der Druck also von den Druckstempeloberflächen zur zentralen Ebene hin abnimmt. Da hierdurch aber das gemessene k nur klein werden kann, befindet man sich mit der Messung auf der sicheren Seite, da damit der vertikale Druck im Bohrloch und damit die Beanspruchung der eingelagerten Fässer zu groß abgeschätzt wird.

3.3 Der Seitendruckbeiwert bei Wechsel der Druckrichtungen

3.3.1 Die Problemstellung

In Abschnitt 3.2 ist experimentell untersucht worden, welche Abhängigkeiten sich für den Seitendruckbeiwert k als Funktion der Probenabmessungen, der Dichte und des beaufschlagten Drucks ergeben. In Abschnitt 2.8 ist aber bereits an Beispielen aus der Literatur herausgestellt worden, daß k nicht nur von der Größe des herrschenden Vertikaldrucks, sondern auch von der Vorgeschichte der Schüttung abhängt. Es stellt sich die zentrale Frage, welche Seitendruckbeiwerte sich bei wechselnden Druckrichtungen einstellen. Es ist daher zu klären, ob die Beziehung:

$$p_{xx} = k_1 p_{zz}, \quad (3.2)$$

wobei p_{zz} den aufgebrachten und p_{xx} den auf die Fläche $x = \text{const.}$ resultierenden Normaldruck darstellen, auch dann noch Gültigkeit besitzt, wenn nach einer ersten Belastung aus z -Richtung zusätzlicher Druck nun aus x -Richtung aufgebracht wird und auf der Stempelfläche $z = \text{const.}$ der resultierende Normaldruck gemessen wird. Was mit Sicherheit nicht stattfinden wird, ist ein plötzlicher Wechsel der Zuordnung, daß also statt Gl. (3.2):

$$p_{zz} = k_1 p_{xx} \quad (3.3)$$

gilt. Um die gestellten Fragen zu klären, sind mit dem in Abschnitt 3.1 vorgestellten Prüfstand Belastungsversuche mit Salzgrus durchgeführt worden, bei denen die Kraft aus wechselnden Richtungen auf die Salzgrusprobe aufgebracht wurde.

3.3.2 Durchführung und Ergebnisse der Messungen

Vor Füllung des Druckraums mit Salzgrus werden die Stempel in z -Richtung in eine solche Position gebracht, daß sie, je nach Versuchsbedingung, noch maximal bis zu 1,3 mm ausgefahren werden können, ehe sie mit den Seitenwänden bündig stehen. Die Stempel aus x -Richtung stehen von Anfang an bündig mit den Seitenwänden. Auf diese Weise werden Scherbewegungen des Salzgruses um Ecken der Seitenwände herum unterdrückt. Die Messung der Kräfte erfolgt wieder mit Hilfe von Kraftaufnehmern, die zwischen Stempel und Hydraulikzylinder angebracht waren. Zu Beginn wird bei den Messungen der Druck kontinuierlich aus z -Richtung auf die Salzgrusprobe aufgebracht und der resultierende Druck in x -Richtung gemessen. Nach Erreichen der Nullebene, d. h., sobald die Stempel in z -Richtung bündig mit den Wänden stehen, wird das Stempelpaar in z -Richtung mechanisch arretiert und der Druck p_{xx} mit der zweiten Ölpumpe kontinuierlich erhöht. Eine Druckerhöhung in z -Richtung kann jetzt nur aus einem erhöhten Druck in der Salzgrusschüttung resultieren. In Abb. 3.7 ist die zeitliche Abfolge der Stempelfunktionen skizziert. Bei dem einmaligen Wechsel von Druck- und Meßrichtung kann analysiert werden, wie sich das Druckverhältnis k

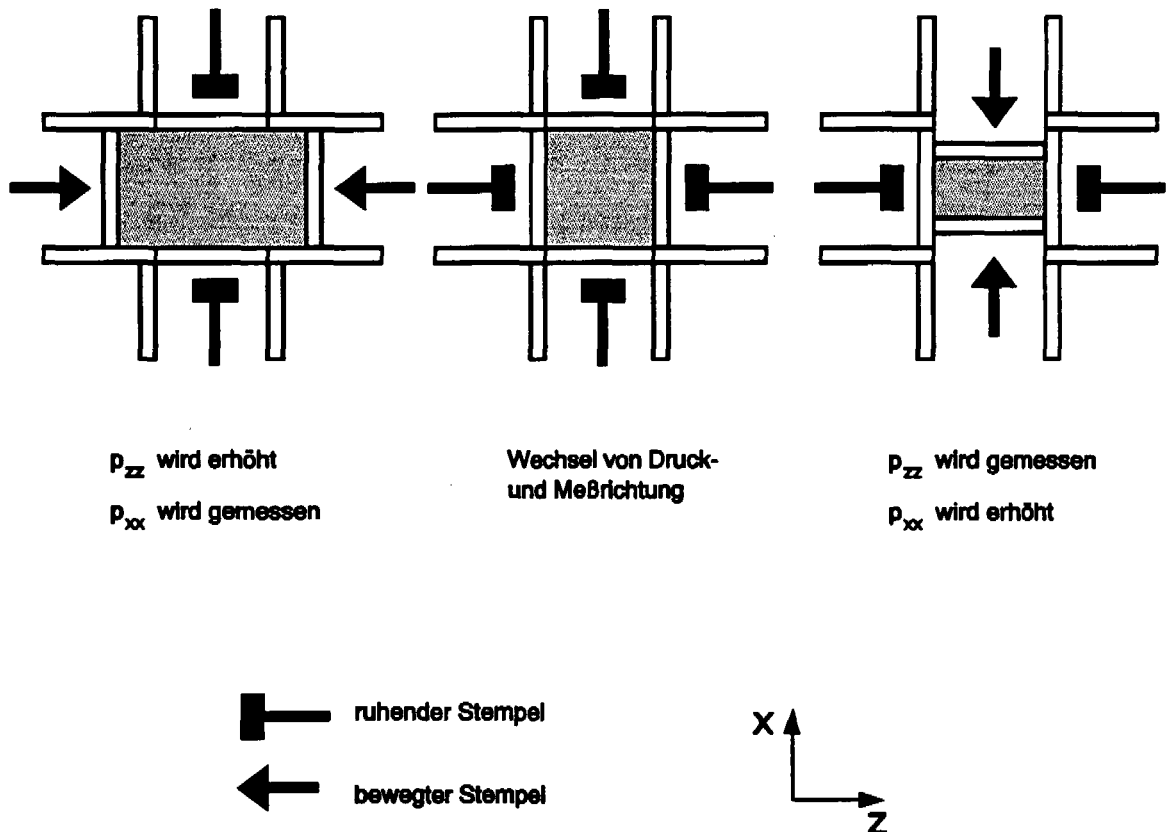


Abb. 3.7: Zeitliche Abfolge der Stempelfunktionen zur Ermittlung des Seitendruckbeiwertes bei wechselnden Druckrichtungen

ändert, wenn die Rollen der Stempel - als druckführender und als druckaufnehmender - vertauscht werden.

In Abb. 3.8 sind die Drücke p_{zz} und p_{xx} gegeneinander aufgetragen. Zunächst wird p_{zz} erhöht. Ab etwa $p_{zz} = 100 \text{ kN/m}^2$ ist das Verhältnis $k_1 = p_{xx}/p_{zz}$ auf den konstanten Wert $k_1 = 0,28$ gefallen. Nachdem p_{zz} bis auf etwa $p_{zz,a} = 132 \text{ kN/m}^2$ (Bereich I) hochgefahren worden ist und dabei von den Stempeln gerade die Nullebene erreicht wurde, werden die Stempel in z -Richtung festgeklemt. In x -Richtung resultiert jetzt ein Druck $p_{xx,a} = 37 \text{ kN/m}^2$. Mit der zweiten Hydraulikpumpe wird die Kraft auf die x -Stempel, auf die bereits 37 kN/m^2 lasten, nun kontinuierlich erhöht. Trotz zunehmender Belastung auf die Stempel in x -Richtung verharrt der Druck in z -Richtung auf $132 - 134 \text{ kN/m}^2$ (Bereich II), und das, obwohl sich, wie anhand der Wegaufnehmer für die Stempel festzustellen war, das Probenvolumen mit zunehmender Kraft beständig verringerte, die Dichte monoton anstieg. Nachdem p_{xx} den Wert von p_{zz} überstiegen hat, beginnt p_{zz} sich mit wachsendem p_{xx} zu erhöhen.

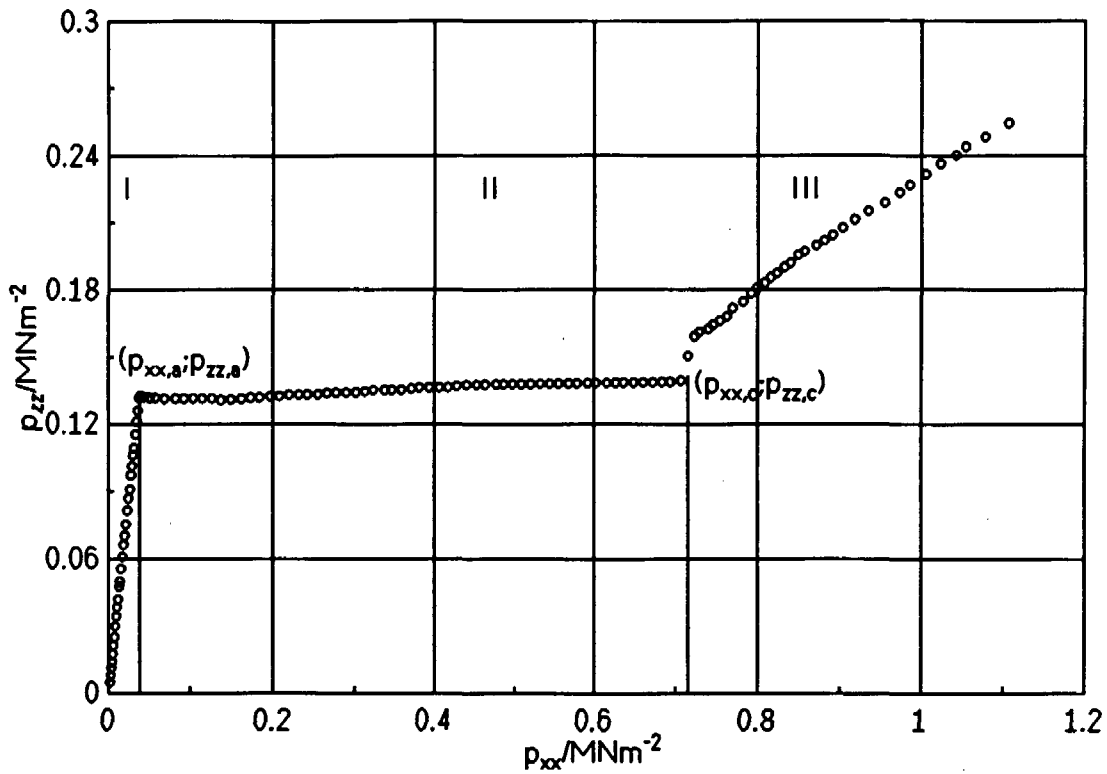


Abb. 3.8: Gemessene Drücke in zwei zueinander senkrechten Richtungen bei Wechsel der Druckrichtungen mit $(p_{xx,a}; p_{zz,a}) = (0,037 \text{ MN/m}^2; 0,132 \text{ MN/m}^2)$ und $(p_{xx,c}; p_{zz,c}) = (0,72 \text{ MN/m}^2; 0,14 \text{ MN/m}^2)$ (Bereich I: p_{zz} wird erhöht, p_{xx} gemessen; Bereich II und III: p_{xx} wird erhöht, p_{zz} gemessen)

Dieser langsame Anstieg setzt sich bis $p_{xx} = p_{xx,c} = 720 \text{ kN/m}^2$ fort, während p_{zz} bis dahin den Wert $p_{zz} = p_{zz,c} = 140 \text{ kN/m}^2$ erreicht hat. Ab etwa $p_{xx} = 720 \text{ kN/m}^2$ steigt p_{zz} proportional mit an (Abb. 3.8). Das proportionale Anwachsen bleibt bis zum maximal während der Messung erreichten Druck von $p_{xx,max} = 1,11 \text{ MN/m}^2$ bestehen. Dabei hat sich der Seitendruckbeiwert:

$$k_2 = \frac{p_{zz}}{p_{xx}} \quad (3.4)$$

von 0,28 im Bereich I auf 0,23 im Bereich III verringert.

In Abb. 3.9 ist der von den Stempeln jeweils zurückgelegte Weg in Relation zum Druck aufgezeichnet. Anhand der zurückgelegten Wege kann die Verdichtung der Salzgrusprobe beim jeweils herrschenden Druck berechnet werden. Es kann folgendes festgehalten werden:

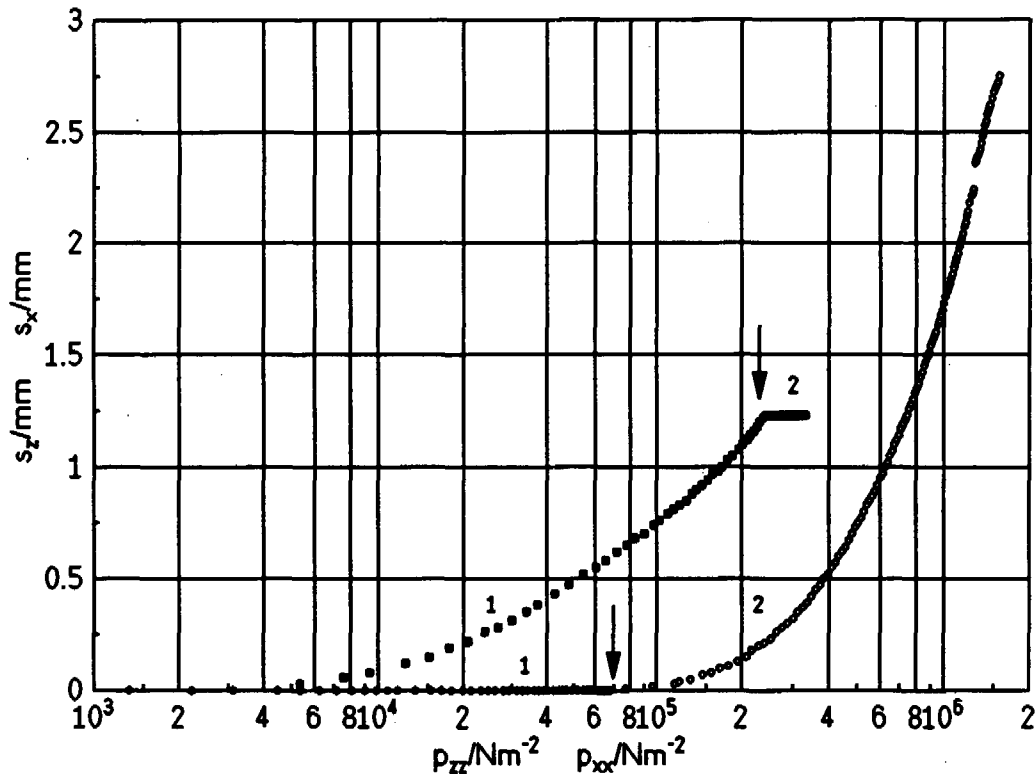


Abb. 3.9: Der von den Stempeln in z - und in x -Richtung zurückgelegte Weg bei einem Abstand der Stempel von der Nullebene von 1,3 mm in Relation zum jeweiligen Druck p_{zz} und p_{xx} in halblogarithmischer Auftragung; an den mit einem senkrechten Pfeil gekennzeichneten Stellen wurden die Stempel in z -Richtung arretiert und die Stempel in x -Richtung druckbeaufschlagt (Kurvenäste 1: p_{zz} wird erhöht, p_{xx} gemessen; Kurvenäste 2: p_{xx} wird erhöht, p_{zz} gemessen)

1. Im Bereich I, in dem p_{zz} von außen auf die Schüttung aufgebracht wird, wächst p_{xx} proportional mit p_{zz} an: $p_{xx} = k_1 p_{zz}$.
2. Bei einem Wechsel von Druck- und Meßrichtung (Bereich II) bleibt p_{zz} trotz einer Erhöhung von p_{xx} zunächst konstant.
3. Ab einem Schwellwert $p_{xx,c}$ ergibt sich wieder ein proportionaler Anstieg des resultierenden Drucks p_{zz} mit dem aufgegebenen Druck p_{xx} (Bereich III): $p_{zz} = k_2 p_{xx}$.

3.3.3 Interpretation der Ergebnisse

Wie ist nun die Abhängigkeit des Seitendruckbeiwertes vom aufgebrauchten Druck bei wechselnden Druckrichtungen, vor allem in den Bereichen II und III, zu erklären?

In Abb. 3.10 sind die Ergebnisse aus drei Meßreihen mit unterschiedlichen

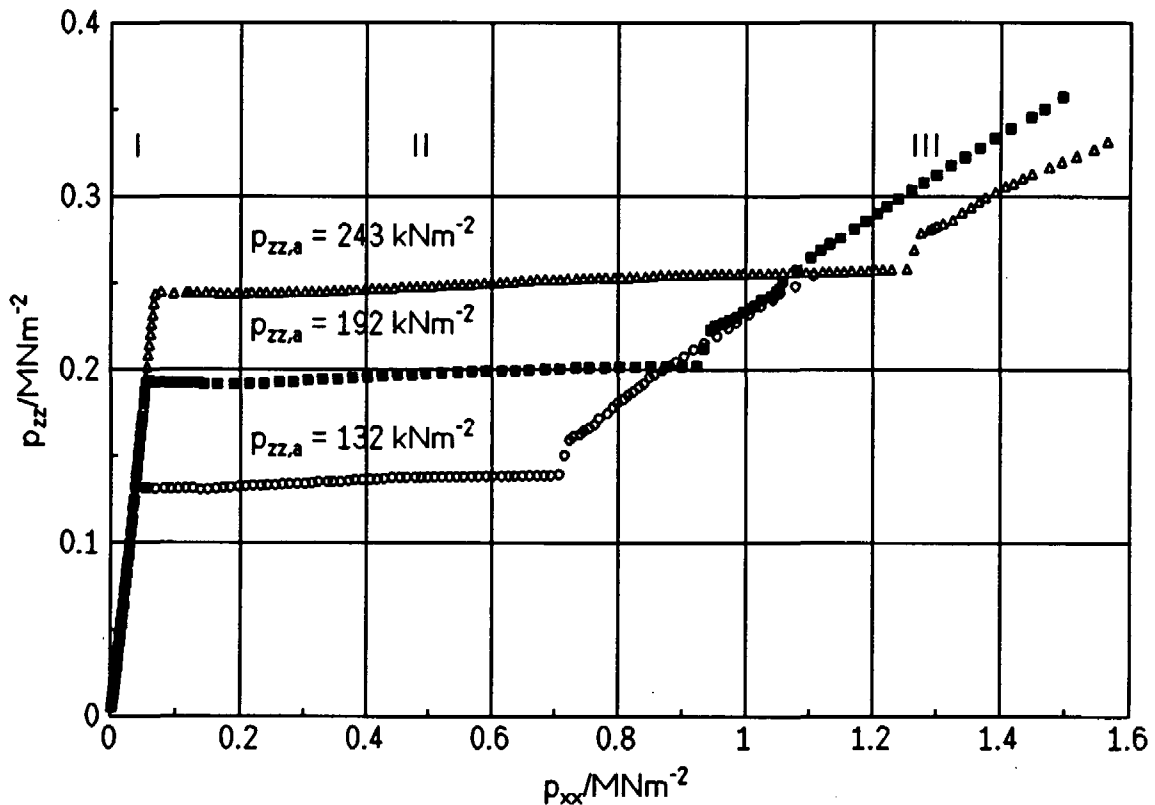


Abb. 3.10: Gemessene Drücke in zwei zueinander senkrechten Richtungen bei unterschiedlichen Verfüllungen und damit unterschiedlichem Druckaufbau, d. h. unterschiedlichen Erstbelastungen $p_{zz,a}$, beim Einschieben der Stempel bis zur Nullebene (Bereich I: p_{zz} wird erhöht, p_{xx} gemessen; Bereich II und III: p_{xx} wird erhöht, p_{zz} gemessen)

Abständen der Stempel von der Nullebene beim Verfüllen und damit unterschiedlichen Anfangsdrücken $p_{zz,a}$ dargestellt.

Zu Beginn der Messung, wenn der Druck aus z -Richtung aufgebracht wird, sind die Salzgruskörner noch leicht gegeneinander verschiebbar. Aufgrund der Bewegung der beiden Druckstempel in z -Richtung werden die Salzgruskörner im Druckraum verschoben und die anfängliche Isotropie ist zerstört, denn jetzt ist in die z -Richtung der Salzgrus vorverdichtet worden. Werden Druck- und Meßrichtung vertauscht,

muß das Stempelpaar II die Salzgruskörner gegen eine in z -Richtung verdichtete Schüttung schieben. Der jetzt in z -Richtung resultierende Druck p_{zz} steigt erst dann wieder mit dem aufgegebenen Druck p_{xx} an, wenn das Verhältnis zwischen ihm und dem treibenden Druck p_{xx} näherungsweise bis auf den Seitendruckbeiwert gefallen ist.

In den Abb. 3.11 - 3.13 sind die Seitendruckbeiwerte, die sich aus Abb. 3.10 ergeben, über dem Druck p_{xx} aufgetragen. An der mit einem senkrechten Pfeil gekennzeichneten Stelle fand der Wechsel von Druck- und Meßrichtung statt. Hier wurden die zunächst druckführenden Stempel in z -Richtung arretiert und die Stempel in x -Richtung mit Druck beaufschlagt.

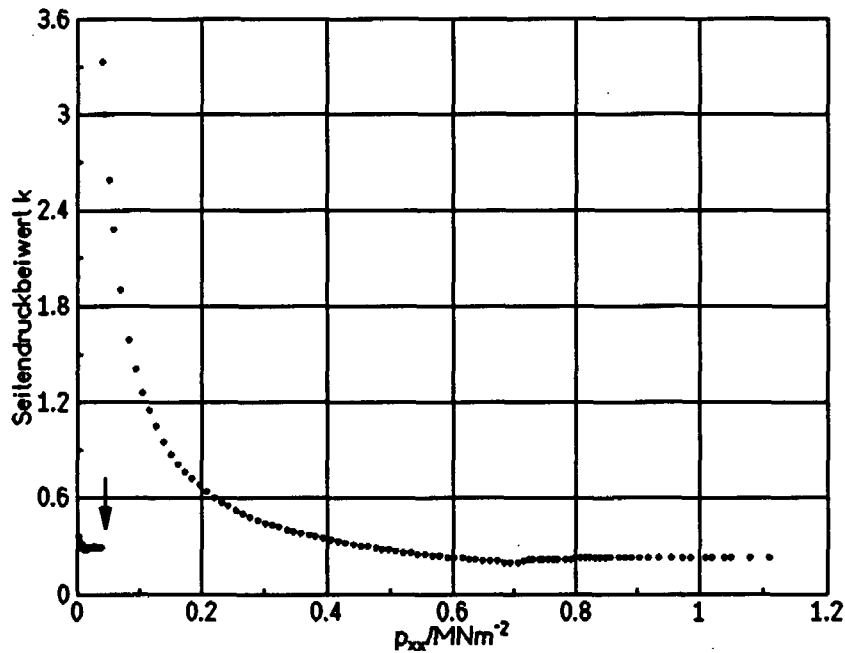


Abb. 3.11: Der gemessene Seitendruckbeiwert bei Wechsel der Druckrichtungen über dem Druck p_{xx} ; an der mit einem senkrechten Pfeil gekennzeichneten Stelle wurden die zunächst druckführenden Stempel in z -Richtung arretiert und die Stempel in x -Richtung mit Druck beaufschlagt; für $0 \leq p_{xx} \leq 0,037 \text{ MN/m}^2$ gilt: $k = p_{xx}/p_{zz}$ und für $p_{xx} \geq 0,037 \text{ MN/m}^2$: $k = p_{zz}/p_{xx}$

Für $0 \leq p_{xx} \leq 0,037 \text{ MN/m}^2$ ($0,053 \text{ MN/m}^2$; $0,068 \text{ MN/m}^2$) gilt:

$$k = \frac{p_{xx}}{p_{zz}} \quad (3.5)$$

und für $p_{xx} \geq 0,037 \text{ MN/m}^2$ ($0,053 \text{ MN/m}^2$; $0,068 \text{ MN/m}^2$):

$$k = \frac{p_{zz}}{p_{xx}}. \quad (3.6)$$

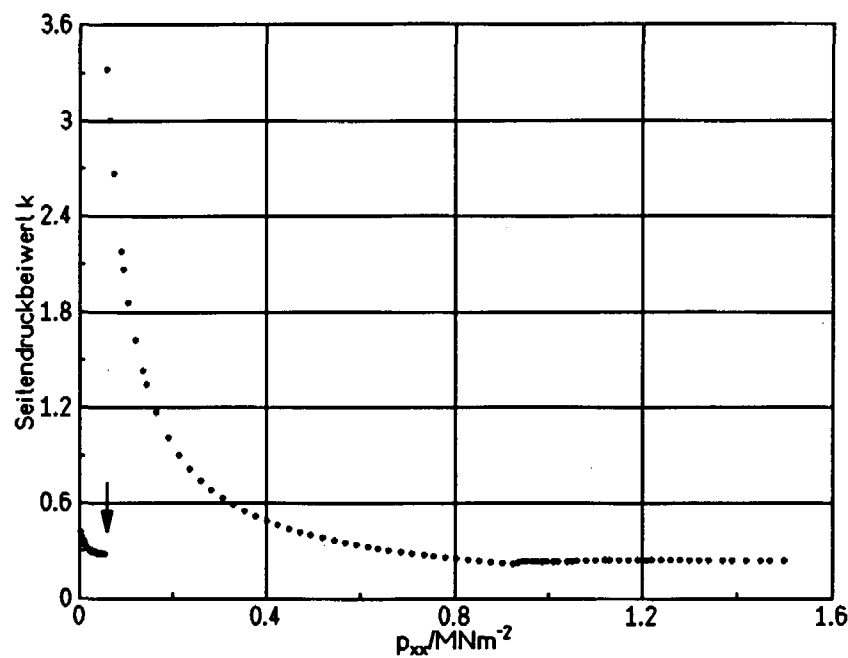


Abb. 3.12: Der gemessene Seitendruckbeiwert bei Wechsel der Druckrichtungen über dem Druck p_{xx} ; an der mit einem senkrechten Pfeil gekennzeichneten Stelle wurden die zunächst druckführenden Stempel in z -Richtung arretiert und die Stempel in x -Richtung mit Druck beaufschlagt; für $0 \leq p_{xx} \leq 0,053 \text{ MN/m}^2$ gilt: $k = p_{xx}/p_{zz}$ und für $p_{xx} \geq 0,053 \text{ MN/m}^2$: $k = p_{zz}/p_{xx}$

Tabelle 3.1: Zusammenstellung der Ergebnisse aus Messungen des Seitendruckbeiwertes bei wechselnden Druckrichtungen mit jeweils unterschiedlichen Anfangsbedingungen, d. h. unterschiedlichen Abständen von der Nullebene (Drücke in kN/m^2)

Meßreihe	$p_{zz,a}$	$p_{xx,a}$	$p_{zz,c}$	$p_{xx,c}$	$k_1 [-]$	$k_2 [-]$
I	132	37	140	720	0,28	0,23
II	192	53	205	947	0,28	0,22
III	243	68	270	1265	0,28	0,21

Alle drei Kurven zeigen einen ähnlichen Verlauf: vor dem Wechsel von Druck- und Meßrichtung fällt der Seitendruckbeiwert $k = p_{xx}/p_{zz}$ mit wachsendem Druck p_{zz} und geht anschließend in einen konstanten Wert $k_1 = 0,28$ über. Nach dem Wechsel von Druck- und Meßrichtung nimmt das Verhältnis p_{zz}/p_{xx} aus resultierendem Druck

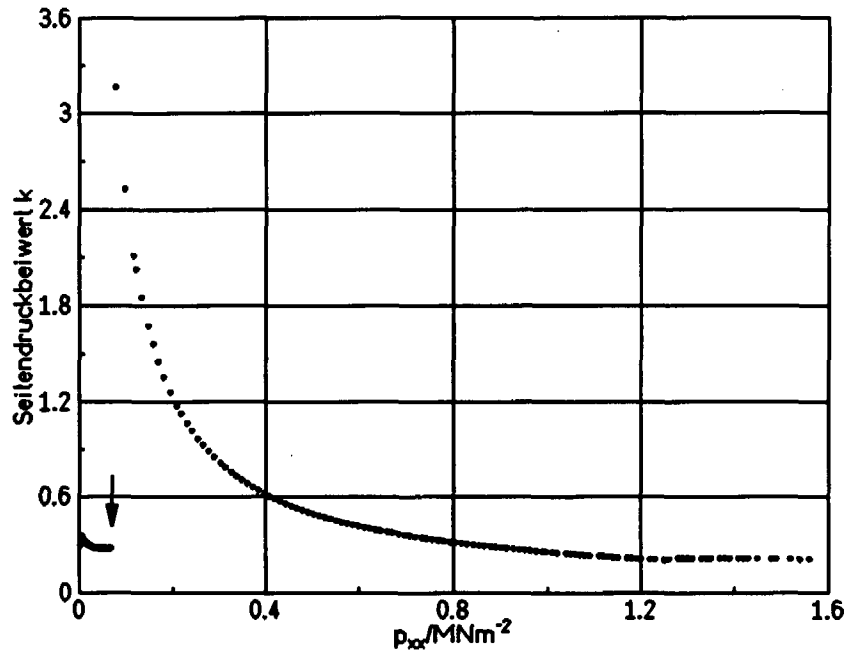


Abb. 3.13: Der gemessene Seitendruckbeiwert bei Wechsel der Druckrichtungen in Relation zum Druck p_{xx} ; an der mit einem senkrechten Pfeil gekennzeichneten Stelle wurden die zunächst druckführenden Stempel in z -Richtung arretiert und die Stempel in x -Richtung mit Druck beaufschlagt; für $0 \leq p_{xx} \leq 0,068 \text{ MN/m}^2$ gilt: $k = p_{xx}/p_{zz}$ und für $p_{xx} \geq 0,068 \text{ MN/m}^2$: $k = p_{zz}/p_{xx}$

und treibendem Druck soweit ab, bis es näherungsweise auf den Seitendruckbeiwert $k_1 \approx k_2$ gefallen ist.

In Tabelle 3.1 sind einige Daten aus den zuvor beschriebenen Messungen zusammengestellt.

Die hier vorgestellten Ergebnisse belegen eindeutig, daß die Druckverteilung in Schüttungen, d. h. der Drucktensor, nicht nur vom Material, sondern auch von der Vorgeschichte und insbesondere von der Reihenfolge und der Richtung der wirkenden Kräfte abhängt.

Kapitel 4

Reibungsbeiwerte

4.1 Die Reihenfolge der Lastaufbringung

Ein grundlegendes Problem für die Berechnung des Drucktensors innerhalb einer Schüttung ergibt sich daraus, daß dieser nicht nur von der vorliegenden Massenverteilung, sondern auch von der zeitlichen Abfolge des Aufbringens der Kräfte abhängt (vgl. BLOCK und FEUSER [5]). So ergibt sich zum Beispiel beim Verfüllen eines Ringspaltes zwischen zwei coaxialen Zylindern, daß sich die Füllung an beiden Wänden abstützt (Abb. 4.1).

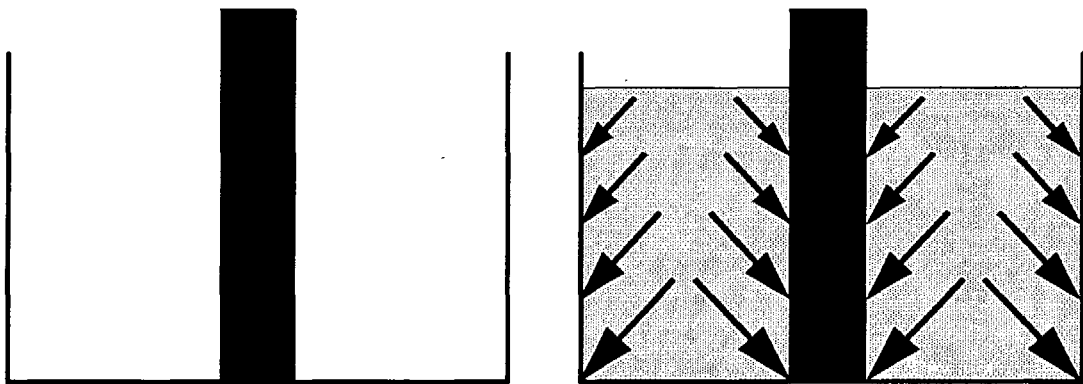


Abb. 4.1: Kräfte auf die Wandungen eines Ringspaltes vor und nach dem Verfüllen mit einem Schüttgut

Auf beide Wände wirken Kräfte, die auch eine Tangentialkomponente nach unten haben.

Wird die Reihenfolge des Einbringens vertauscht, also zuerst die Schüttung und dann der zentrale Zylinder eingebracht, so ergeben sich Tangentialkräfte auf die Wan-

dungen des zentralen Zylinders, die sich von denen aus dem ersten Fall nicht nur nach ihrem Betrag, sondern teils auch in der Richtung unterscheiden (Abb. 4.2).

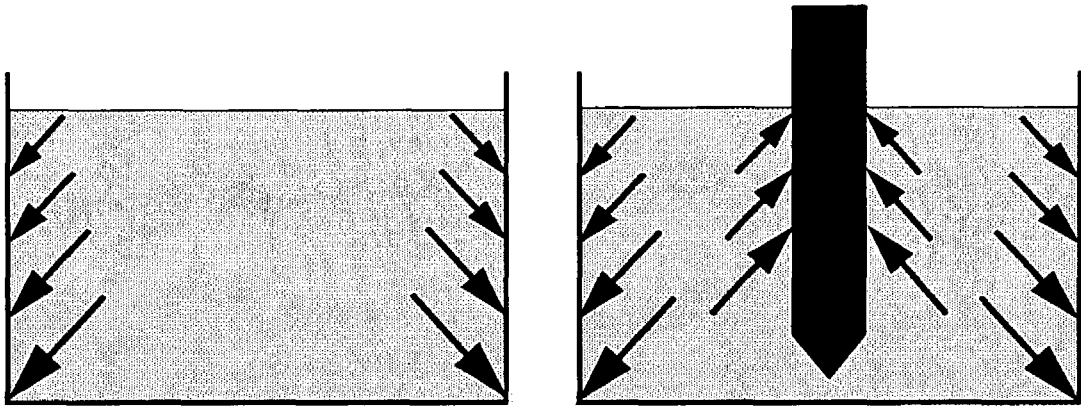


Abb. 4.2: Verteilung der Kräfte auf die Wandungen vor und nach dem Einbringen eines inneren Zylinders

Wird in der zuvor beschriebenen Anordnung (Abb. 4.1) der mittlere Zylinder ein Stück durch den Boden gezogen, so dreht sich am inneren Zylinder die Richtung der Tangentialkräfte um (Abb. 4.3).

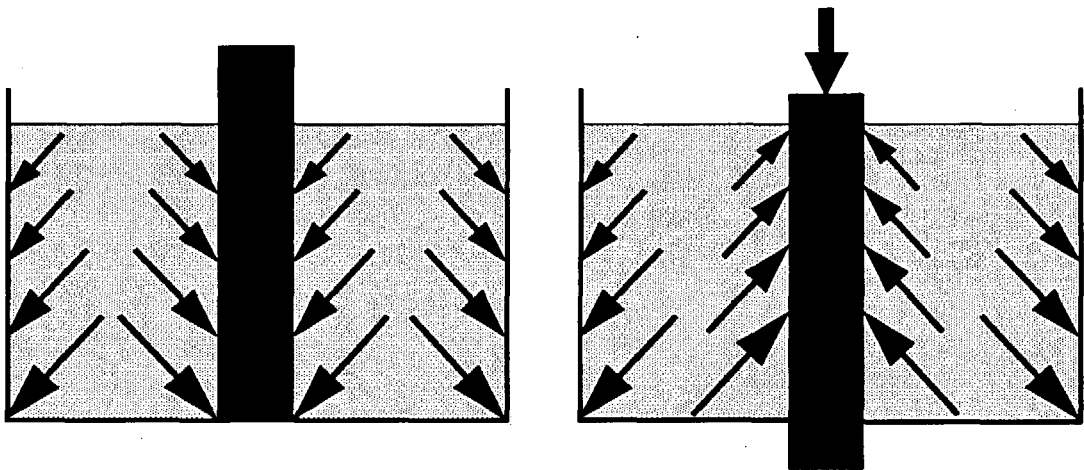


Abb. 4.3: Verteilung der Kräfte auf die Wandungen vor und nach dem Durchziehen eines inneren Zylinders durch ein Schüttgut

Die Druckkomponenten im Medium hängen also entscheidend davon ab, in welchem zeitlichen Verlauf Kräfte gewirkt und Verschiebungen stattgefunden haben. Sie

können innerhalb des Mediums nicht allein aus der Dichteverteilung bestimmt werden. Ähnlich wie die Reibungskräfte bei der Bewegung eines Körpers durch ein Fluid der Bewegungsrichtung stets entgegengesetzt sind, wirken auch im Bohrloch die Reibungskräfte der Bewegung nur entgegen. Vorangegangene Relativbewegungen sind notwendig, damit Reibungskräfte auftreten können. In dem unten und zu den Seiten hin abgeschlossenen Bohrloch finden während der weiteren Beladung innerhalb des bereits gefüllten Raumes, der abgesehen von der oberen Seitenfläche fest begrenzt ist, um so stärkere Relativbewegungen zwischen den Gebinden und dem Salzgrus statt, je mehr sich die Kompressibilitäten der beiden Medien unterscheiden. Der ungünstigste Fall ist der, daß die Fässer zentral übereinander stehen und eine nur wenig kompressible Säule bilden. Läßt sich das Salz im Ringspalt stärker komprimieren, wird bei weiterem Eintrag von oben das Salz im Ringspalt nach unten zusammengedrückt und sich dabei auch noch auf der wenig komprimierten Säule aus Fässern abstützen. Zur Vermeidung einer zu großen Beanspruchung der Gebinde muß aber die Last in umgekehrter Richtung übertragen werden, d. h. von den Fässern über den Salzgrus in die Bohrlochwand.

Wird durch technische Vorkehrungen, wie etwa kompressible Kissen an den Faßböden, erreicht, daß sich die Gebinde stärker stauchen lassen als der umgebende Salzgrus, dann ist es sogar möglich, die einzelnen Gebinde selbsttragend einzulagern. Der hierzu hinreichende vertikale Druck im Salzgrus zwischen Behältermantel und Bohrlochwand ergibt sich aus der Bedingung, daß die über die Mantelfläche des Fasses $2\pi R_F H_F$, wobei R_F der Radius und H_F die Höhe des Fasses bedeuten, übertragene Reibungskraft größer als das Faßgewicht ist. Werden die üblichen Ansätze aus der Literatur übernommen, daß der Wandreibungsdruck p_{zr} proportional zum Normaldruck p_{rr} ist, also

$$p_{zr} = \mu_F p_{rr}, \quad (4.1)$$

und daß bei, wohlgemerkt, einseitig aufgebrachtem Druck p_{zz} in senkrechter Richtung ein proportionaler Druck:

$$p_{rr} = k p_{zz} \quad (4.2)$$

herrscht, so gilt im Gleichgewicht:

$$\mu_F k p_{zz} 2\pi R_F H_F = G_F. \quad (4.3)$$

Damit folgt:

$$p_{zz} = \frac{G_F}{2\pi R_F H_F \mu_F k}. \quad (4.4)$$

Hierbei sind p_{zr} die Reibungskraft pro Fläche in z -Richtung, die auf eine Zylinderfläche $r = \text{const.}$ wirkt, μ_F der Reibungsbeiwert zwischen Faß und Salzgrus, p_{rr} die Normalkraft pro Fläche in r -Richtung, k der Seitendruckbeiwert, p_{zz} die Normalkraft pro Fläche in z -Richtung und G_F das Faßgewicht. Über die vertikale Druckkomponente p_{zz} wird bei einer vertikalen Füllung auch die radiale Druckkomponente p_{rr} vorgegeben. Die Reibungskräfte auf eine Bohrlochwand und auf den Faßmantel ergeben sich dann jeweils entsprechend der vorangegangenen Relativbewegung.

Nach Gl. (4.4) muß also zwischen Faß und Salzgrus eine hinreichend große Reibung bestehen, um bei vorgegebenem Faßvolumen das Gewicht in die Bohrlochwand abzutragen. Der Reibungsbeiwert μ_F ließe sich im Prinzip durch Faßsicken oder Aufrauhern der Gebindeoberfläche steigern. Da es sich aber bei den für die Einlagerung vorgesehenen Behältern um Stahlfässer aus gewöhnlichem Baustahl mit glatten Oberflächen handelt, ist zu erwarten, daß ein Abscheren zuerst an den Faßoberflächen und nicht im Salzgrus erfolgt. Zur Abschätzung der maximalen Beanspruchung für die Fässer liefert ein kleiner Reibungskoeffizient, nämlich der zwischen Salzgrus und glattem Stahl, eine obere Schranke für den zum vollständigen "Tragen" der Fässer notwendigen vertikalen Druck. Deshalb ist ein Prüfstand aufgebaut worden, der es erlaubt, den Reibungsbeiwert zwischen Salzgrus und Stahl bei unterschiedlichen Normalkräften zu bestimmen. In der Literatur [11] ist für die Berechnung der maximalen Beanspruchung der Behälter für den Reibungsbeiwert der Wert des inneren Reibungskoeffizienten von Salzgrus $\mu_i = 0,47$ angenommen worden.

4.2 Der Prüfstand zur Ermittlung des Reibungsbeiwertes

Für die experimentellen Untersuchungen wurde der bereits in Abschnitt 3.1 vorgestellte Prüfstand in modifizierter Form verwendet. Das Stempelpaar II wurde durch starre, unbewegliche Stahlplatten ersetzt. Durch rechteckige Öffnungen in Deck- und Bodenplatte, die bei der Messung des Seitendruckbeiwertes durch aufgeschraubte Stahlflansche verschlossen waren (Abb. 4.4), wurde bei angelifteter Abdeckplatte eine Zugprobe aus Stahl (St37) geschoben, die auf beiden Seiten glatt geschliffen war. Zwischen Zugprobe und Deck- und Bodenplatte sind nach Ausrichtung an allen vier Seiten noch jeweils 0,5 mm Luft. Dieser Abstand reicht aus, damit beim Zugversuch zum einen kein Salzgrus herausrieselt und zum anderen die Zugprobe nicht am Rand der Öffnung schleift. Die Zugprobe unterteilt den Druckraum zwischen dem Stempelpaar I in zwei gleichgroße Hälften, die jetzt beide mit Salzgrus gefüllt werden. Die ebene Salzgrusoberfläche schließt bündig mit den Oberkanten der seitlichen Wände ab. Anschließend wird die Abdeckplatte aufgeschraubt.

Das Stahlblech wurde mit dem verfahrbaren Querhaupt einer Instron 1382-Universal-Zug-Prüfmaschine über eine Gewindestange verschraubt. Zwischen Gewindestange und Querhaupt sitzt ein elektronischer Kraftaufnehmer mit Widerstands-Dehnungsmeßstreifen (DMS), die zur Temperaturkompensation zur Wheatstoneschen Vollbrücke zusammengeschaltet sind. Die Wheatstonesche Brücke wird mit Wechselspannung gespeist. Solche sogenannten Trägerfrequenzbrücken, die einen Oszillator zur Erzeugung der Speisespannung, eine Schaltung für den Betrags- und Phasenabgleich und einen Wechselspannungsverstärker enthalten, zeichnen sich durch eine hohe Meßgenauigkeit und einen stabilen Nullpunkt aus. Die Frequenz der Speisespannung für die Instron beträgt 8 kHz. Die analogen Spannungswerte der Instron

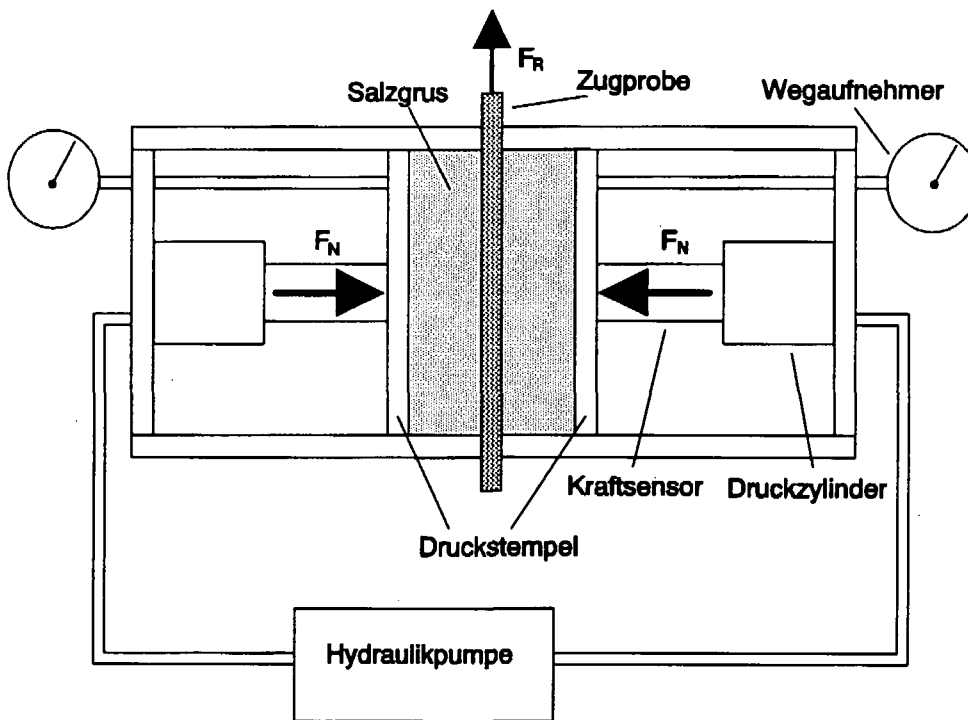


Abb. 4.4: Seitenansicht des Prüfstandes zur experimentellen Bestimmung des Reibungsbeiwertes

für Kraft und Fahrweg des Querhauptes werden über eine A/D-Karte in einen PC eingelesen, weiterverarbeitet und auf eine Festplatte gespeichert.

Über das Stempelpaar kann die Schüttung im Druckraum mit einstellbaren Normalkräften F_N beaufschlagt und gegen die Zugprobe gepreßt werden. Wird das Querhaupt samt Druckkasten mit konstanter Geschwindigkeit nach unten gefahren und die Stahlplatte aus der Schüttung gezogen, ergeben sich Reibungskraft-Querhauptweg-Diagramme bei unterschiedlichen Normalkräften F_N . Zur Ermittlung des Reibungsbeiwertes wurden die Normalkräfte in 1 kN-Schritten erhöht und für jede Kraft jeweils ein Zugkraft-Querhauptweg-Diagramm aufgenommen. Hard- und softwaremäßig bedingt, kann der PC etwa 500 Werte pro Sekunde einlesen, digitalisieren, die Digitalwerte in physikalische Größen umrechnen und im RAM ablegen. Am Ende der Messung erfolgt die Speicherung der im RAM abgelegten Werte auf einen Massenspeicher. Wie sich herausgestellt hat, liefert bei einer Zuggeschwindigkeit von 0,0067 mm/s eine Mittelung über 50 eingelesene Digitalwerte eine ausreichende Auflösung, um auch mit höherer Frequenz ablaufende Vorgänge, etwa Amplitudenschwankungen der Zugkraft, noch zu erfassen. Damit werden also pro Sekunde 10 Kraft- und Wegmeßwerte vom Rechner eingelesen, oder, anders ausgedrückt, zwischen zwei Messungen für Kraft und

Weg rutscht die Zugprobe um $0,67 \mu\text{m}$ weiter durch die Schüttung.

4.3 Ergebnisse der Zugversuche

4.3.1 Die Kraft-Weg-Diagramme

Die Normalkräfte für die Zugversuche lagen im Bereich 1 kN bis 11 kN. Das entsprach bei einer Stempelfläche von 202 cm^2 Schüttungsdrücken von $49,5 \text{ kN/m}^2$ bis 544 kN/m^2 . In Abb. 4.5 sind beispielhaft drei Kraft-Querhauptweg-Diagramme bei drei unterschiedlichen Normalkräften F_N dargestellt.

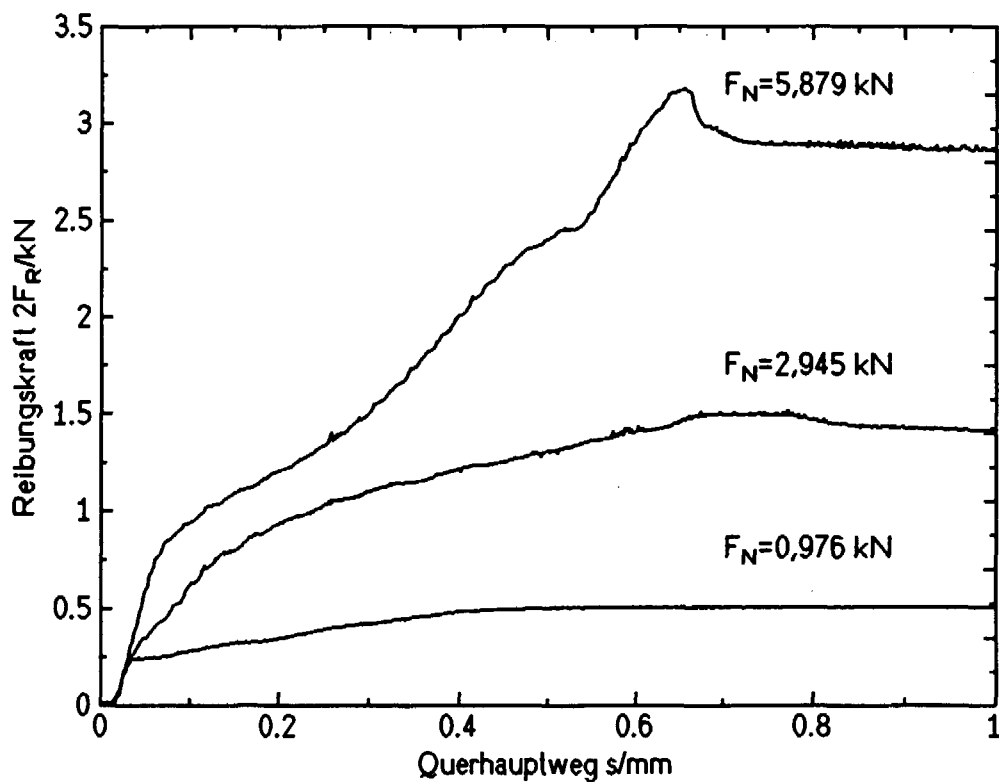


Abb. 4.5: Gemessene Reibungskraft als Funktion des Querhauptweges beim Durchziehen einer Platte durch Salzgrus mit konstanter Geschwindigkeit für drei unterschiedliche Normalkräfte; die normaldruckbeaufschlagte Fläche beträgt 202 cm^2

Zu Beginn der Messung muß die Zugmaschine die Wege, die durch Spiel im Gewinde und in der Aufhängung zwischen Querhaupt und Zugprobe vorhanden sind, zurücklegen. Dann werden beim weiteren Verfahren des Querhauptes ein Zug und

die Reibungskraft $2F_R$ aufgebaut, bis plötzlich das Rutschen der Zugprobe im Salzgrus einsetzt. Die Versuche wurden mit verschiedenen Normalkräften durchgeführt. Abb. 4.5 zeigt die Ergebnisse bei den drei Normalkräften $F_N = 0,976 \text{ kN}$, $2,945 \text{ kN}$ und $5,879 \text{ kN}$. Alle drei Kurven liegen bei kleinen Querhauptwegen noch zunächst deckungsgleich übereinander ($s = 0 - 0,03 \text{ mm}$) und knicken dann mehr oder weniger stark ab. Bei der kleinsten Normalkraft $F_N = 0,976 \text{ kN}$ ergibt sich ein plateauähnlicher Verlauf bis zum Ende des Zugweges. Bei der mittleren Kurve mit $F_N = 2,945 \text{ kN}$ bildet sich ein breites und flaches Maximum heraus, das dann bei $F_N = 5,879 \text{ kN}$, wesentlich schmaler und höher geworden, deutlich in Erscheinung tritt. Hinter diesem Maximum verlaufen die Kurven parallel zur Zugachse.

Ein Maximum läßt sich physikalisch durch den Übergang von der Haft- zur Gleitreibung erklären. Bei kleinen Normalkräften rutscht die Zugprobe auf einer durch Abrieb erzeugten Salzschrift durch die Salzgrusschüttung. Dabei ist ein Übergang von der Haft- zur Gleitreibung nicht festzustellen. Wird die Normalkraft gesteigert, verzahnen sich die Salzkristalle sowohl untereinander als auch mit mikrofeinen Rillen in der Zugprobe und bewirken eine größere Haftung auf der Metalloberfläche. Der Verzahnungswiderstand wird erst bei einer gewissen Zugkraft überwunden, und der Übergang zum Gleiten erfolgt dann plötzlich. Dabei werden die Verzahnungsbrücken zwischen Stahlplatte und Salzkristallen zerstört, so daß jetzt wieder ein Rutschen auf einer feinen Salzabriebschicht stattfindet und die Zugkraft konstant bleibt. Weiterhin zeigt Abb. 4.5, daß die Zugkräfte jenseits des Maximums, d. h. für $s \geq 0,8 \text{ mm}$, kleinen Amplitudenschwankungen unterliegen, die mit wachsender Normalkraft deutlich zunehmen. Die Oszillationen um einen Mittelwert sind als kurzzeitig aufeinanderfolgende Haft- und Gleitzustände zu deuten, im englischen Schrifttum auch als slip-stick-Verhalten bezeichnet.

4.3.2 Der Reibungsbeiwert als Funktion des Porengehaltes

Zur Ermittlung des Haftreibungsbeiwertes zwischen Salzgrus und Stahl wird der maximale Wert der Reibungskraft aus dem Kraft-Weg-Diagramm herangezogen, d. h.:

$$\mu = \frac{F_{R,max}}{F_N}. \quad (4.5)$$

Da dieser Punkt im Kraft-Weg-Diagramm den Übergang von Haft- zu Gleitreibung signalisiert, stellt das so berechnete μ den Haftreibungswert dar.

In Abb. 4.6 ist μ als Funktion des Porengehaltes ε , also des Verhältnisses Zwischenvolumen zu Kornvolumen:

$$\varepsilon = \frac{V_{gesamt} - V_{Korn}}{V_{Korn}} = \frac{\rho_{Korn}}{\rho(F_N)} - 1, \quad (4.6)$$

dargestellt. Hierbei bedeuten ρ_{Korn} die Kornmassendichte und $\rho(F_N)$ die bei der jeweiligen Normalkraft F_N gemessene Massendichte der Schüttung. Bei Abnahme des Porengehaltes, d. h. bei Zunahme des Normaldrucks, steigt μ an. Verursacht wird

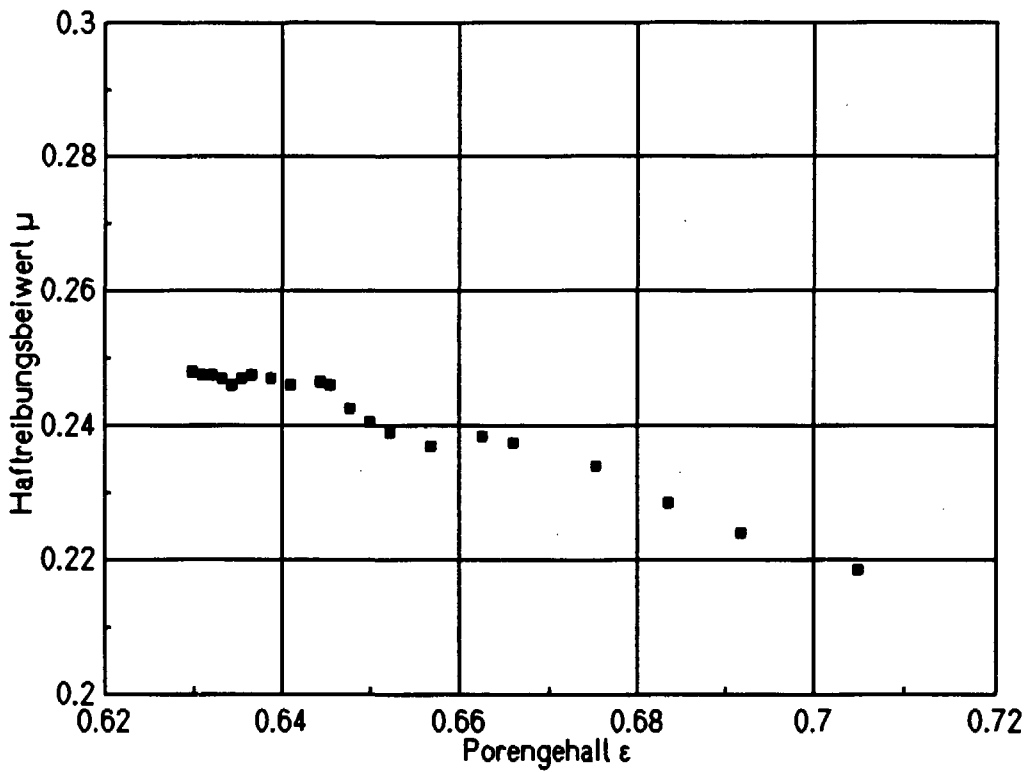


Abb. 4.6: Gemessener Haftreibungsbeiwert zwischen Salzgrus und Stahl in Relation zum Porengehalt, der mit dem aufgegebenen Druck abnimmt

dies durch eine Zunahme der Anzahl der Salzgruspartikel-Zugprobe-Kontakte und eine bessere Haftung der Salzkristalle auf der Metalloberfläche. Das Anwachsen der Adhäsionskräfte zwischen Metalloberfläche und Partikel bedeutet eine Zunahme des zu überwindenden Reibungswiderstandes, wenn eine Bewegung längs der Oberfläche einsetzen soll.

Werden die Verzahnungswiderstände zwischen den Salzkristallen und der Oberfläche der Zugprobe gebrochen (Übergang von Haft- zur Gleitreibung), rutscht die Zugprobe auf feinem Salzabrieb. Abb. 4.7 zeigt den Gleitreibungsbeiwert μ_{gleit} zwischen Salzgrus und Stahl in Relation zum Porengehalt. Der Unterschied zwischen den Werten der Haft- und der Gleitreibung ist, wie sich bei den Versuchen herausgestellt hat, gering. Er wächst mit steigenden Normalkräften F_N .

Eine Änderung der Höhe H_{Probe} der Salzgrusschichten zwischen Druckstempel und Zugprobe, die im Bereich zwischen 36 mm und 142 mm variierte, hatte im gewählten Druckbereich keine Änderung der Reibungsbeiwerte μ und μ_{gleit} zur Folge. Für die Zugeschwindigkeit des Joches wurden minimal 0,5 mm/min und maximal

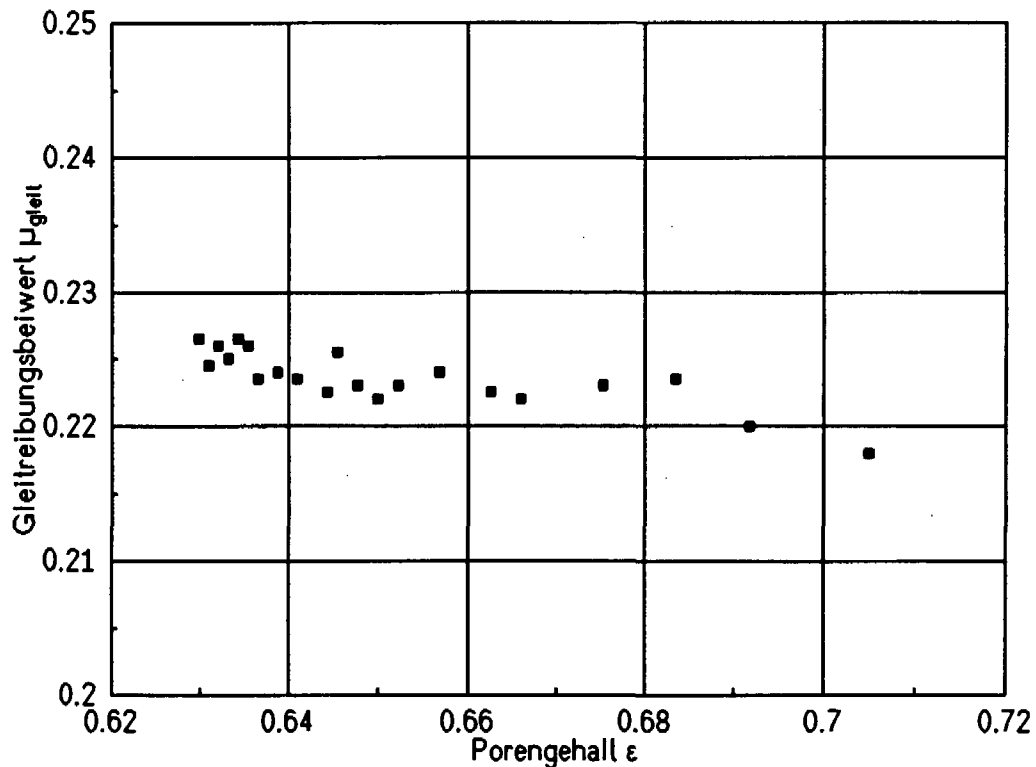


Abb. 4.7: Gemessener Gleitreibungsbeiwert zwischen Salzgrus und Stahl in Relation zum Porengehalt, der mit dem aufgegebenen Druck abnimmt

20 mm/min gewählt. Damit wird der bei einfachen Scherversuchen im Translations- oder im Ringschergerät empfohlene Geschwindigkeitsbereich von 2-5 mm/min sicher abgedeckt. Eine Änderung der Reibungsbeiwerte konnte dabei nicht festgestellt werden. Dies steht mit Angaben aus der Literatur im Einklang. Die experimentellen Ergebnisse lassen sich daher wie folgt zusammenstellen:

1. Der Haftreibungsbeiwert μ steigt bei einer Abnahme des Porengehaltes von 70,5 % auf 63 %, die Folge einer Druckerhöhung ist, von 0,219 auf 0,248.
2. Bei kleinen Normalkräften F_N ist kein Unterschied zwischen den Haft- und Gleitreibungsbeiwerten μ und μ_{gleit} festzustellen, der Übergang zur Gleitreibung erfolgt hier stetig.
3. Der Gleitreibungskoeffizient μ_{gleit} ist im untersuchten Porengehaltintervall von 63 % bis 70,5 % nahezu konstant.

Zu Punkt 1 muß jedoch noch folgendes bemerkt werden: die relative Abnahme des Haftreibungskoeffizienten μ beträgt im untersuchten Porengehaltintervall nur rund 12 %. Die Streubreite der Einzelmeßwerte liegt bei rund 11 %. Die Abnahme von μ kann also im Porengehaltintervall zwischen 63 % und 70,5 % in Relation zur Meßgenauigkeit nicht als bedeutend angesehen werden.

Werden jeweils für μ die extremalen Werte herangezogen, so ergibt sich im Rahmen der durchgeführten Untersuchungen, daß bei einer Änderung des Porengehaltes von 63 % auf 70,5 % als Folge einer Druckerhöhung der Haftreibungsbeiwert im Bereich zwischen 0,183 und 0,277 liegt. Für eine sicherheitstechnische Beurteilung wird der kleinste Reibungsbeiwert zugrunde gelegt, der hier an einer völlig glatten und polierten Metalloberfläche bestimmt wurde. Durch Aufrauen der Gebindeoberfläche läßt sich der Haftreibungsbeiwert wesentlich steigern. DAU [10] hat festgestellt, daß Oberflächenbehandlungen an St37-Stahl, etwa Lackieren, Polieren oder Verchromen, gegenüber walzrauhem, unbehandeltem Stahlblech für die verschiedensten Schüttgüter (mit Ausnahme von Quarzsand) den Reibungsbeiwert senken können. Falls an den Einsatz solcher Maßnahmen gedacht wird, sind weitere Experimente durchzuführen. Bei einem höheren Haftreibungsbeiwert zwischen Gebinde und Salzgrus kann eine größere Lastabtragung über den Salzgrus in die Bohrlochwand erfolgen. Für sicherheitstechnische Abschätzungen ist daher der kleinste Wert, hier also $\mu = 0,183$ zu wählen. Der in der Literatur [11] zur Berechnung des maximalen vertikalen Drucks angegebene Wert $\mu_i = 0,47$ als Reibungsbeiwert der inneren Reibung ist 2,6-fach so groß und liefert damit in Modellen mit einer vollständigen Lastabtragung in die Bohrlochwand einen 2,6-fach kleineren Wert für den maximalen vertikalen Druck.

4.3.3 Das Produkt aus Reibungs- und Seitendruckbeiwert

Über experimentelle Untersuchungen des Produktes aus Reibungsbeiwert μ und Seitendruckbeiwert k berichtet W. K. LEE [24]. Er mißt die Kräfte, die gerade nötig sind, um eine Platte aus einer Schüttung, die sich in einem zylindrischen Behälter befindet, herauszuziehen. Durch verschiedene Einbautiefen der Platte realisiert er unterschiedliche Vertikalkomponenten p_{zz} des Drucks in der Umgebung der Platte. Das Produkt μk erhält er durch Vergleich seiner je Fläche gemessenen Zugkräfte mit der nach der JANSSEN-Formel [18] ermittelten Vertikalkomponente p_{zz} des Drucktensors. Nach seinen Messungen fällt das Produkt μk mit dem Durchmesser des Versuchsbehälters. Dies ist aber ein fragwürdiges Ergebnis, denn der Reibungs- und der Seitendruckbeiwert sind Materialgrößen des eingesetzten Schüttgutes, die nicht von der geometrischen Größe des Untersuchungsgerätes abhängen. Die Messungen können daher allenfalls dazu dienen, die Gültigkeit der JANSSEN-Formel in Frage zu stellen.

Eine ähnliche Technik beschreibt B. L. LEE [23]. Aus Zugkraft-Weg-Diagrammen, die er durch Herausziehen einer Stahlplatte aus einer Schüttung gewinnt, ermittelt er, ebenfalls für verschiedene Einbautiefen, das Produkt μk durch Vergleich mit der

JANSSEN-Formel. Für alle untersuchten Materialien fand er eine Abnahme von μk mit dem Porengehalt ε . Unterschiedliche Porengehalte realisierte er aber durch unterschiedliche Kornmischungen und nicht, wie bei den vorliegenden Versuchen, durch unterschiedliche Drücke auf die Schüttung.

Für Salzgrus wird aus den hier vorgestellten Messungen eine lineare Zunahme von μk mit dem Porengehalt im untersuchten ε -Intervall von 63 % bis 70,5 % um 16 % (Abb. 4.8) festgestellt. Zu den Versuchen von LEE ist allerdings zweierlei zu bemer-

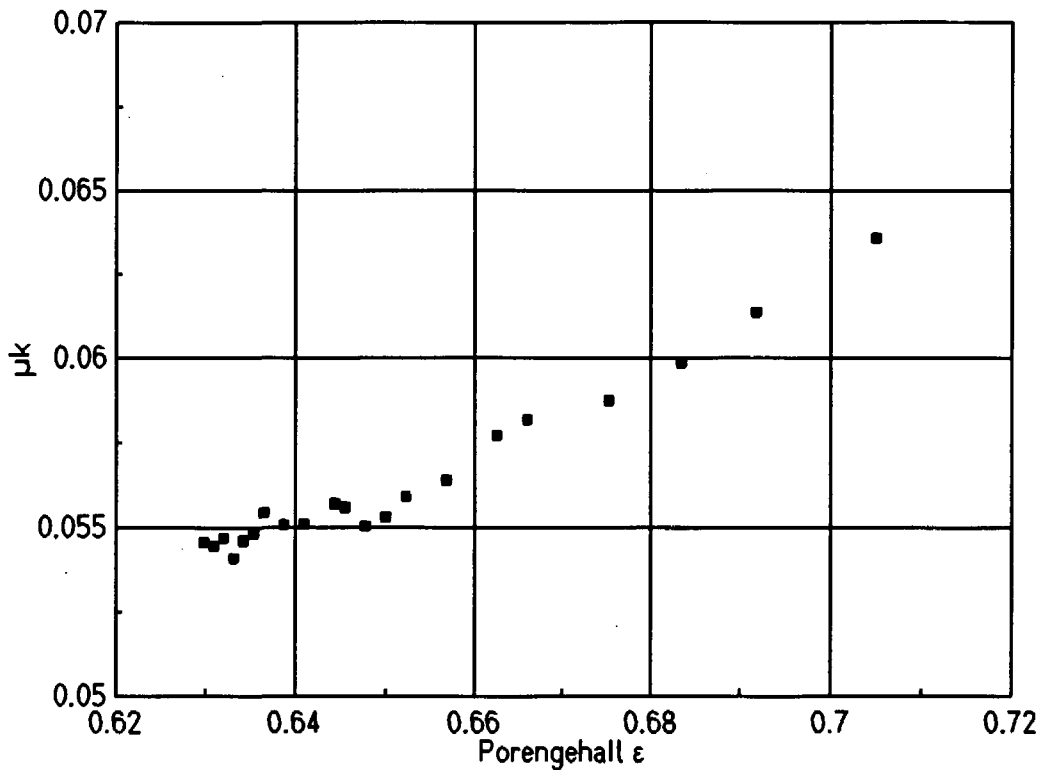


Abb. 4.8: Das Produkt μk aus Reibungs- und Seitendruckbeiwert für Salzgrus, das aus den Messungen des Reibungs- und des Seitendruckbeiwertes bestimmt wurde, als Funktion des Porengehaltes, der aus unterschiedlichen Normaldrücken p_{zz} resultiert

ken: zum einen lockert beim Herausziehen der Platte aus dem oben offenen Behälter das Material auf und es ergeben sich völlig andere Bedingungen als zu Versuchsbeginn, zum anderen ist die Kraft, die er zur Ermittlung von μk heranzieht, die Gleitreibungskraft, die nötig ist, um die Bewegung der Platte aufrecht zu erhalten. Er erhält also aus seinen Kraft-Weg-Diagrammen nicht μk , sondern vielmehr das Produkt $\mu_{\text{gleit}} k$ aus Gleitreibungs- und Seitendruckbeiwert. Bei dem in Abschnitt 3.1 vorgestellten, nach oben hin geschlossenen Prüfstand hingegen herrschen von Anfang bis Ende der

Zugversuche gleiche Bedingungen. Ein weiterer Nachteil von LEE's Technik besteht darin, daß er die primäre in der Ebene der Zugplatte vorhandene Druckkomponente anhand der JANSSEN-Theorie gewinnt, während bei den vorliegenden Messungen μ und k direkt und unabhängig voneinander bestimmt wurden. Allein diese beiden genannten Gründe lassen diese Messungen als eine verlässlichere Grundlage erscheinen.

Kapitel 5

Das Scheibenmodell

5.1 Die Janssen-Theorie

Der Vertikaldruck p_{zz} und der Horizontaldruck p_{rr} , den körnige Schüttgüter auf un-nachgiebige lotrechte Wände, etwa von Silos, ausüben, werden heute noch oft nach der einfachen Theorie von JANSSEN [18] berechnet. Diese Theorie geht davon aus, daß die vertikalen Drücke auf der Querschnittsfläche gleichmäßig verteilt sind. An den Seitenflächen wirkt zwischen Schüttgut und Wand die volle Reibung und das Verhältnis Horizontal- zu Vertikaldruck wird gleich einer empirischen Konstanten angenommen. JANSSEN zerlegt die Schüttung in Scheibenelemente und bilanziert die Kräfte, die auf die Scheibe wirken. Darauf, daß der Drucktensor auch Scherkomponenten p_{zr} hat, p_{zz} und p_{rr} also keine Hauptspannungen sind, wird im JANSSEN-Modell nicht eingegangen.

In Abb. 5.1 ist ein Modellkörper für das JANSSEN-Modell dargestellt. Die Schüttung wird simuliert durch einzelne Schichten, die zwischen starren Platten liegen. In dem Raum zwischen den Platten und den Wänden befindet sich ein kompressibles Fluid. Bei zunehmender Belastung von oben auf die starre Platte wächst der Fluiddruck auf die umgebenden Wände und damit die zugehörige Reibungskraft. Bei der folgenden mathematischen Behandlung des Problems werden die radiale und die azimutale Ausdehnung der Scheibe beibehalten, während die Höhe infinitesimal wird.

Zur Herleitung der Grundgleichungen für ein rotationssymmetrisches Problem in Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) wird eine Scheibe mit der Höhe Δz und dem Radius R_B des Bohrlochs betrachtet, die sich im Inneren der Schüttung befindet. Die Koordinate z wird positiv von der Oberfläche der Schüttung nach unten gezählt (Abb. 5.2). Für die Scheibe ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung für alle in z -Richtung wirkenden Kräfte aus folgenden Betrachtungen: Auf die Oberseite der Scheibe wirkt in z -Richtung die Kraft:

$$F_{oben} = p_{zz}(z)\pi R_B^2 \quad (5.1)$$

und auf die Unterseite die Kraft:

$$F_{unten} = -p_{zz}(z + \Delta z)\pi R_B^2. \quad (5.2)$$

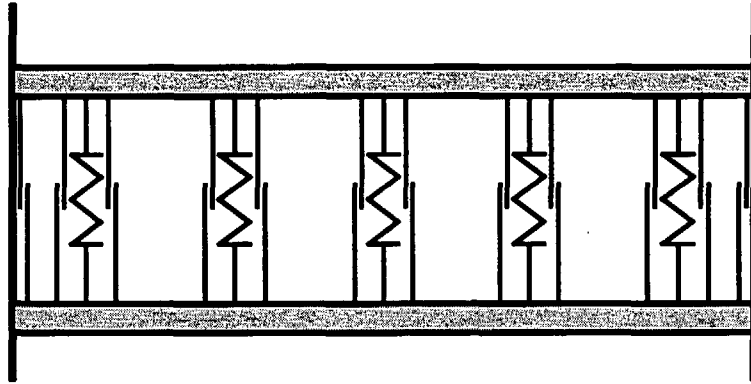


Abb. 5.1: Mechanische Ersatzkonstruktion für eine Scheibe des JANSSEN-Modells

Die Gewichtskraft der betrachteten Scheibe beträgt:

$$G_G = \gamma_S \pi R_B^2 \Delta z, \quad (5.3)$$

wobei γ_S Wichte des Schüttgutes bedeutet. Vertikaldruck p_{zz} und Radialdruck p_{rr} stehen in einem festen Verhältnis zueinander:

$$p_{rr} = k p_{zz}, \quad (5.4)$$

wobei k den Seitendruckbeiwert darstellt. Der gegen Verschiebungen wirkende Wandreibungsdruck p_{zr} hängt wiederum linear vom Radialdruck ab, so daß die Gleichung:

$$p_{zr} = \mu p_{rr} \quad (5.5)$$

gilt. Der Reibungsbeiwert μ wird als konstant angenommen. Für die Wandreibung ergibt sich somit:

$$p_{zr} = \mu k p_{zz}, \quad (5.6)$$

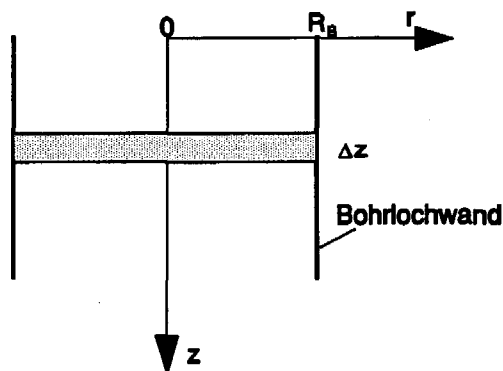


Abb. 5.2: Bohrlochgeometrie

und für die Reibungskraft an der Wand einer Scheibe mit dem Radius R_B und der Höhe Δz :

$$F_R = -\mu k p_{zz} 2\pi R_B \Delta z. \quad (5.7)$$

Aus der Bedingung, daß die Summe der lotrechten Komponenten der auf die Scheibe wirkenden Kräfte gleich Null sein muß, ergibt sich die Gleichung:

$$F_{oben} + F_{unten} + G_G + F_R = 0, \quad (5.8)$$

oder eingesetzt:

$$R_B [p_{zz}(z) - p_{zz}(z + \Delta z)] + \gamma_S R_B \Delta z - 2\mu k \Delta z p_{zz}(z) = 0. \quad (5.9)$$

Aus einer Taylorentwicklung bis zu linearen Termen erhält man folgende Differentialgleichung für den Vertikaldruck $p_{zz}(z)$:

$$\frac{dp_{zz}}{dz} + 2\mu k \frac{p_{zz}}{R_B} = \gamma_S. \quad (5.10)$$

Mit der Bedingung einer gleichmäßig verteilten Auflast p_0 an der Oberfläche:

$$p_{zz}(z = 0) = p_0 \quad (5.11)$$

erhält man durch Integration die Lösung:

$$p_{zz}(z) = p_0 e^{-2\mu k \frac{z}{R_B}} + \frac{R_B}{2\mu k} \gamma_S \left[1 - e^{-2\mu k \frac{z}{R_B}} \right]. \quad (5.12)$$

Der Vertikaldruck setzt sich aus einem exponentiell auf Null abklingenden Anteil aus der Auflast und einem gegen den Grenzwert p_c :

$$p_{zz}(z \rightarrow \infty) = \frac{R_B}{2\mu k} \gamma_S = p_c \quad (5.13)$$

strebenden Anteil aus dem Eigengewicht der Schüttung zusammen. Mit den Abkürzungen:

$$\mu k = b, \quad (5.14)$$

$$\frac{bz}{R_B} = \eta \quad (5.15)$$

läßt sich Gl. (5.12) auch schreiben als:

$$p_{zz}(\eta) = p_c - (p_c - p_0) e^{-2\eta}. \quad (5.16)$$

Der Druck als Funktion der Tiefe wird in der Abb. 5.3 in dimensionslosen Größen veranschaulicht. Als Beispiel wird $p_0 = 0,5p_c$ angenommen.

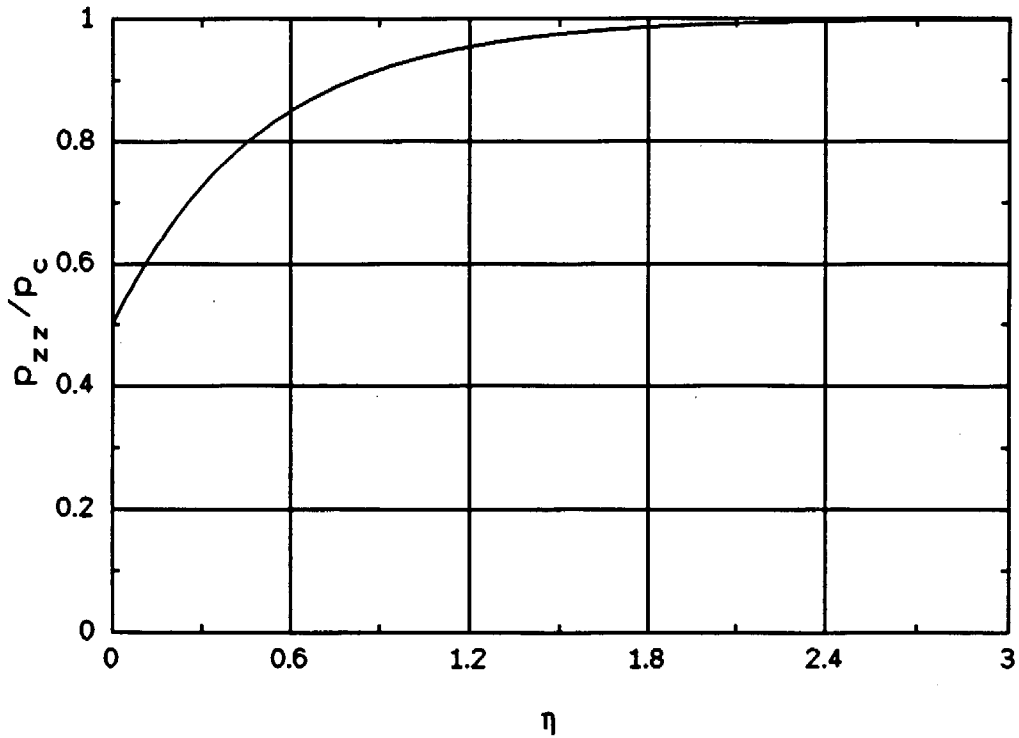


Abb. 5.3: Der normierte vertikale Druck p_{zz}/p_c nach JANSSEN als Funktion der bezogenen Tiefe $\eta = \mu kz/R_B$ mit $p_0 = 0,5p_c$

Wenn weiterhin angenommen werden kann, daß die Gebinde in der Schüttung fest eingebettet sind und wie ein Teil der Schüttung behandelt werden können, kann eine mittlere Wichte:

$$\gamma_m = \frac{V_S}{V_S + V_F} \gamma_S + \frac{V_F}{V_S + V_F} \gamma_F \quad (5.17)$$

zugrunde gelegt werden. Hierbei stellen V_S den Volumenanteil des Salzgruses, V_F den Volumenanteil des Fasses und γ_F seine Wichte dar.

Für den Reibungsbeiwert an der Bohrlochwand wird vorausgesetzt, daß dieser sich durch die Einbettung der Gebinde im Mittel nicht ändert. Dies ist in der Regel eine Abschätzung zur sicheren Seite hin, denn wenn die im Verhältnis zur Salzgrusschüttung starren Gebinde sich gegen die Wand verkanten, ist zu erwarten, daß der mittlere Wandreibungsbeiwert ansteigt.

In Abb. 5.4 ist der Verlauf des vertikalen Drucks p_{zz} für ein technisches Beispiel veranschaulicht. Dabei werden die Werte eines 400-l-Gebindes angesetzt mit:

R_B	$= 0,5 \text{ m}$	Bohrlochradius
H_F	$= 1,1 \text{ m}$	Behälterhöhe
R_F	$= 0,375 \text{ m}$	Behälterradius
V_F	$= 0,475 \text{ m}^3$	Behältervolumen
G_F	$= 15 \text{ kN}$	Behältergewicht
γ_F	$= 31,58 \text{ kN/m}^3$	Behälterwichte
V_S	$= 0,389 \text{ m}^3$	Salzspaltvolumen in der Umgebung eines Behälters
γ_S	$= 13 \text{ kN/m}^3$	Salzgrusschüttwichte
μk	$= 0,054$	Produkt aus Reibungsbeiwert und Seitendruckbeiwert nach den vorliegenden Messungen

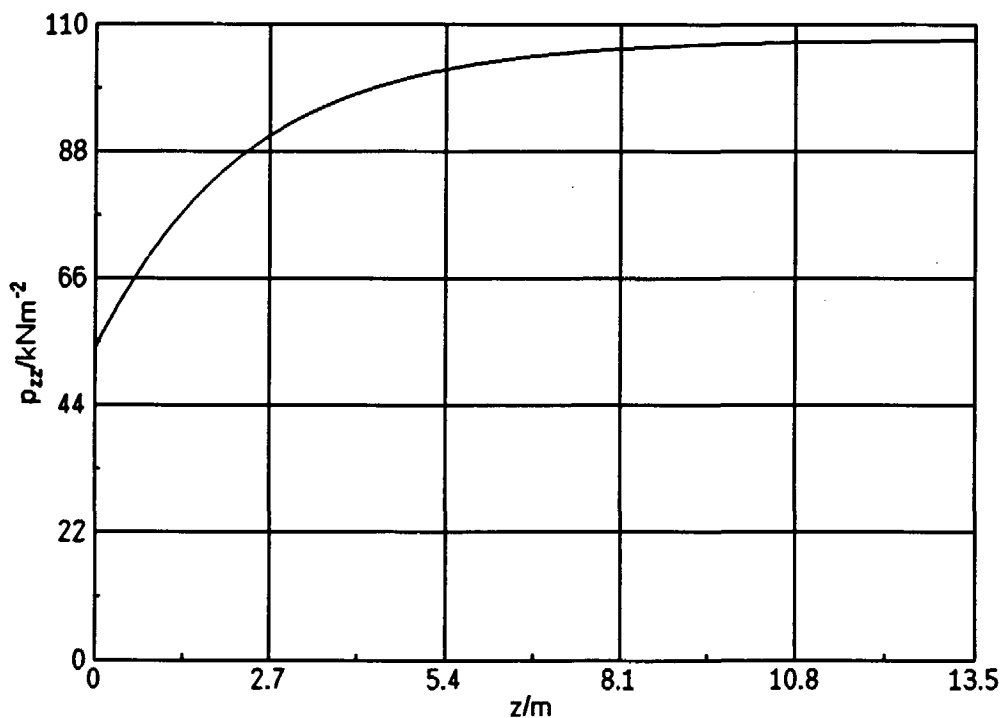


Abb. 5.4: Der vertikale Druck p_{zz} nach JANSSEN als Funktion der Tiefe z mit $R_B = 0,5 \text{ m}$, $\mu k = 0,054$, $\gamma_m = 23,21 \text{ kN/m}^3$, $p_c = 107,46 \text{ kN/m}^2$ und $p_0 = 0,5 p_c$

Damit ergeben sich aus Gl. (5.13):

$$p_c = 107,46 \text{ kN/m}^2 \quad (5.18)$$

und aus Gl. (5.17):

$$\gamma_m = 23,21 \text{ kN/m}^3. \quad (5.19)$$

Für die horizontalen Komponenten des Drucktensors gilt in Zylinderkoordinaten:

$$p_{rr} = p_{\phi\phi} = kp_{zz}. \quad (5.20)$$

Beide Komponenten sind also nur von der z -Koordinate abhängig und proportional zum vertikalen Druck.

5.2 Modifikationen der Janssen-Formel

Als Erweiterung zum JANSSEN-Modell wird von verschiedenen Autoren die Zunahme der Dichte mit dem Druck berücksichtigt. Je nachdem, welcher Zusammenhang zugrunde gelegt wird, läßt sich die Differentialgleichung für den Vertikaldruck p_{zz} geschlossen oder nur numerisch integrieren.

LATINCSICS [22] nimmt an, daß in dem üblichen Bereich die Schüttdichte linear mit dem Vertikaldruck p_{zz} zunimmt:

$$\gamma(p_{zz}) = \gamma_s + K_1 p_{zz}. \quad (5.21)$$

An die Stelle von:

$$\frac{2\mu k}{R_B} \quad (5.22)$$

tritt dann:

$$\frac{2\mu k}{R_B} - K_1 = K_2. \quad (5.23)$$

Die Lösung für $p_{zz}(z)$ lautet:

$$p_{zz}(z) = p_0 e^{-K_2 z} + \frac{\gamma_s}{K_2} (1 - e^{-K_2 z}). \quad (5.24)$$

Hierbei ist der konstante Term K_2 von den Materialeigenschaften μ , k , K_1 und vom Bohrlochradius R_B abhängig. Dies muß hier erwähnt werden, da LATINCSICS versucht, diese Größe zur Materialcharakterisierung heranzuziehen. Eine Materialeigenschaft, hier in diesem Fall die Kompressibilität, die von den geometrischen Abmessungen abhängen soll, ist aber in der Art, wie der Autor sie interpretiert, zumindest fragwürdig.

Auch andere Querschnittsformen lassen sich mit den Grundannahmen aus dem JANSSEN-Modell behandeln. SHAHINPOOR [35] verallgemeinert das Modell von JANSSEN, indem er statt des Radius den Umfang $U(z)$ und den Querschnitt $A(z)$ als Variable einführt. Mit einer über den Querschnitt gemittelten Wichte:

$$\overline{\gamma_s(z)} = \frac{1}{A(z)} \iint_{A(z)} \gamma_s(x, y) dx dy \quad (5.25)$$

schreibt sich dann die Differentialgleichung für den mittleren Vertikaldruck $\overline{p_{zz}}$:

$$\frac{d\overline{p_{zz}}}{dz} + \frac{\mu(z)U(z)k(z)}{A(z)}\overline{p_{zz}} = \overline{\gamma_s(z)}. \quad (5.26)$$

Die allgemeine Lösung:

$$\overline{p_{zz}}(z) = p_0 \exp \left(- \int_0^z \frac{\mu(\tau)U(\tau)k(\tau)}{A(\tau)} d\tau \right) + \int_0^z \overline{\gamma_s(\xi)} \exp \left(- \int_\xi^z \frac{\mu(\tau)U(\tau)k(\tau)}{A(\tau)} d\tau \right) d\xi \quad (5.27)$$

hängt vom Verlauf von:

$$\frac{\mu(z)U(z)k(z)}{A(z)} \quad (5.28)$$

mit der Vertikalkoordinate z ab.

COWIN [7, 8, 9] stellt eine Differentialgleichung für den über den Querschnitt gemittelten Vertikaldruck $\overline{p_{zz}}$ auf, läßt aber die Einschränkung fallen, daß Seitendruckbeiwert und Wichte des Schüttgutmaterials während der Füllung konstant bleiben. Er setzt an:

$$\begin{aligned} k &= k_0[(1 + m\overline{p_{zz}}) + f_1], \\ \gamma &= \gamma_s[(1 + q\overline{p_{zz}}) + f_2], \end{aligned} \quad (5.29)$$

wobei k_0 und γ_s Seitendruckbeiwert und Wichte für das unbelastete Schüttgut und m sowie q (beide größer Null) Materialkonstanten und f_1 sowie f_2 Funktionen von z darstellen. Mit der Abkürzung:

$$\frac{R_B}{2\mu k_0} = l_0 \quad (5.30)$$

lautet die Differentialgleichung für den mittleren Vertikaldruck $\overline{p_{zz}}(z)$:

$$\frac{d\overline{p_{zz}}}{dz} + \frac{1 + f_1 - \gamma_s l_0 q}{l_0} \overline{p_{zz}} + \frac{m}{l_0} \overline{p_{zz}}^2 - \gamma_s = f_2. \quad (5.31)$$

Dabei wird:

$$q \geq (\gamma_s l_0)^{-1} \quad (5.32)$$

vorausgesetzt, da sonst für $f_1 \rightarrow 0$ und $m \rightarrow 0$ die vertikale Druckkomponente p_{zz} nach unten hin abnehmen würde.

Für $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ lautet mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} &= \frac{1}{l_0} \sqrt{(1 - \gamma_s l_0 q)^2 + 4 \gamma_s l_0 m}, \\ p_I &= \frac{l_0}{2ml}, \\ p_{II} &= \frac{1}{2m} (1 - \gamma_s l_0 q), \\ \overline{p_{zz}}(z=0) &= p_0, \\ -1 \leq J &= \frac{p_I - p_{II} - p_0}{p_I + p_{II} + p_0}, \\ B(z) &= \frac{1 - J e^{-z/l}}{1 + J e^{-z/l}} \end{aligned} \quad (5.33)$$

die Lösung der Riccati-Differentialgleichung (5.31):

$$\overline{p_{zz}}(z) = p_I B(z) - p_{II}. \quad (5.34)$$

Der Unterschied zwischen $\overline{p_{zz}}$ (Gl. (5.34)) und p_{zz} (Gl. (5.12)) wächst mit zunehmendem Bohrlochradius R_B . Die Differentialgleichung stimmt für $q = 0$, $m = 0$ oder für $q = m$ mit der von JANSSEN nach Gl. (5.10) überein und es ergibt sich:

$$\overline{p_{zz}^\infty}(0,0) = \gamma_s l_0 = \frac{\gamma_s R_B}{2\mu k}. \quad (5.35)$$

Im Falle gleicher Konstanten $q = m$ kompensieren sich die Beiträge von $k(\overline{p_{zz}})$ und $\gamma(\overline{p_{zz}})$. Eine allgemeine Lösung von Gl. (5.31) läßt sich aber nur dann angeben, wenn f_1 und f_2 als Funktion von z bekannt sind, denn je nachdem, wie die beiden Funktionen von z abhängen, ergeben sich völlig andere Lösungen.

Die Annahme, daß einzelne Schichten, wie beim JANSSEN-Modell erläutert wurde, als Einheiten beschrieben werden dürfen, ist nur solange zutreffend, wie Schüttungen in schlanken, starren Behältern betrachtet werden. Es ist daher die Frage zu stellen, ob eine JANSSEN-Formel nicht auch für beliebige koaxiale Zylinder gelten muß und ob dann jeweils auch noch die Bedingung gilt, daß am Rand der Schüttung die maximale Tangentialkraft herrscht. Dabei kommt man leicht an die Grenzen einer physikalisch noch konsistenten Lösung. Deshalb ist es nicht verwunderlich, daß verschiedene Autoren Korrekturen an der JANSSEN-Theorie vorgenommen haben. Die Vielfalt der Ansätze ist groß. Hier soll aber darauf verzichtet werden, sie im einzelnen zu diskutieren. Meist werden ad-hoc-Annahmen getroffen [6, 31, 39], allgemeine Rechnungen durchgeführt und dann die Parameter an experimentelle Ergebnisse angepaßt. Auf diese Weise können Meßergebnisse beschrieben werden, aber nicht, wie hier gefordert, die Zusammenhänge ohne, meist einschränkende, ad-hoc-Annahmen hergeleitet und damit allgemeine Erkenntnisse gewonnen werden.

Kapitel 6

Das Ringmodell

6.1 Kräftebilanz

Die Einschränkung sowohl im JANSSEN-Modell als auch in den erweiterten Modellen, daß der vertikale Druck $p_{zz}(z)$ in allen horizontalen Ebenen einer homogenen Schüttung konstant ist, gilt nur in erster Näherung und nur bei sehr schlanken Silos. Die Annahme, daß Rotationssymmetrie vorliegt, ist jedoch allgemein näherungsweise erfüllt. Im folgenden wird daher das Scheibenmodell zu einem Ringmodell [5] erweitert. Bei diesem werden konzentrisch angeordnete Ringe mit infinitesimaler Höhe Δz betrachtet, bei denen über die Mantelseiten Kräfte in radialer und in azimuthaler Richtung übertragen werden können. In Abb. 6.1 ist eine mechanische Ersatzkonstruktion des Ringmodells zu sehen. Die einzelnen Ringe haben jeweils feste Deckel und Böden.

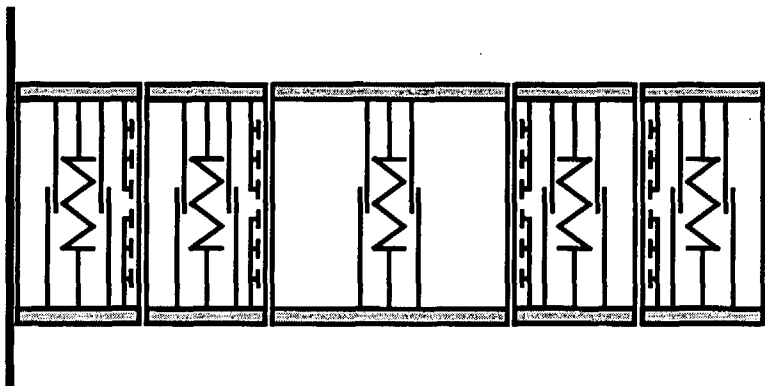


Abb. 6.1: Mechanische Ersatzkonstruktion für das Ringmodell

Die Mantelinnenseiten der Ringe lassen sich in axialer Richtung dehnen, sind aber in radialer Richtung starr. Zwischen den Ringen können daher über die Mantelseiten Reibungskräfte nur in axialer Richtung übertragen werden. Ein Fluid im Inneren

der Ringe stellt sicher, daß der Druck, der über die Mantelflächen übertragen wird, proportional zum vertikalen Druck ist. Zusätzlich wirken in vertikaler Richtung wie beim Scheibenmodell zwischen Deckel und Boden jeden Ringes innere Federn.

Die schon von JANSSEN getroffenen Annahmen werden im Ringmodell nur auf kleinere Bereiche übertragen, so daß das Modell als Fortentwicklung ohne grundsätzlich neue Annahmen angesehen werden kann.

Im Ringmodell wird zugelassen, daß sich der Vertikaldruck mit der axialen und mit der radialen Koordinate ändert:

$$p_{zz} = p_{zz}(r, z). \quad (6.1)$$

Zur Ableitung der Kräftebilanz (Abb. 6.2) werden statt einer Scheibe koaxiale Ringe betrachtet [26]. Für ein infinitesimal kleines Volumenelement eines solchen Ringes lautet die Kräftebilanz in z -Richtung:

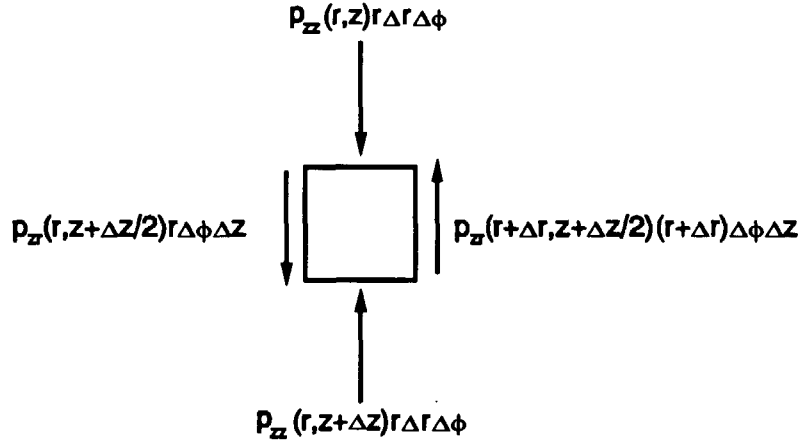


Abb. 6.2: Oberflächenkräfte in axialer Richtung auf ein herausgegriffenes Volumenelement des Ringes

$$\begin{aligned} & r dr d\phi [p_{zz}(r, z) - p_{zz}(r, z + dz)] \\ & + r d\phi dz p_{zr}(r, z + dz/2) - [r + dr] d\phi dz p_{zr}(r + dr, z + dz/2) \\ & + r dr d\phi dz \gamma_s = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Werden die Funktionen in ihre Taylorreihen entwickelt und Differentiale vierter und höherer Ordnung vernachlässigt, so ergibt sich die partielle Differentialgleichung:

$$r \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + p_{zr} + r \frac{\partial p_{zr}}{\partial r} = r \gamma_s. \quad (6.3)$$

Analog zum JANSSEN-Modell wird nun angenommen, daß sich an den Mantelseiten der Ringe jeweils die volle Scherspannung ausbildet:

$$p_{zr} = \mu p_{rr} = \mu k p_{zz}. \quad (6.4)$$

Aus den Scherkräften ergibt sich eine Tragkraft, die bei gegebenem Normaldruck auf die Wände nicht überschritten werden kann. Mit der Annahme Gl. (6.4) vereinfacht sich Gl. (6.3) zu einer partiellen Differentialgleichung für die vertikale Druckkomponente p_{zz} :

$$r \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \mu k \left[p_{zz} + r \frac{\partial p_{zz}}{\partial r} \right] = r \gamma_S. \quad (6.5)$$

Neben den schon in Abschnitt 5.1 eingeführten Abkürzungen:

$$\begin{aligned} b &= \mu k, \\ p_c &= \frac{\gamma_S R_B}{2b}, \\ \eta &= \frac{bz}{R_B} \end{aligned} \quad (6.6)$$

werden zur Vereinfachung der Schreibweise die dimensionslosen Größen:

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{r}{R_B}, \\ \Phi &= \frac{p_{zz}}{p_c} \end{aligned} \quad (6.7)$$

eingeführt. Mit der neuen unabhängigen Variablen:

$$P = \varrho \Phi = \varrho \frac{p_{zz}}{p_c} \quad (6.8)$$

lautet die Differentialgleichung für die vertikale Druckkomponente Gl. (6.3) in dimensionsloser Form:

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{\partial P}{\partial \varrho} = 2\varrho. \quad (6.9)$$

Sie wird im nächsten Abschnitt gelöst.

6.2 Lösung der Differentialgleichung für den Vertikaldruck

Die allgemeine Lösung der im vorigen Abschnitt hergeleiteten Differentialgleichung lautet:

$$P(\varrho, \eta) = \varrho^2 + \Pi(\eta - \varrho), \quad (6.10)$$

oder in den ursprünglichen Koordinaten:

$$\frac{p_{zz}(r, z)}{p_c} = \frac{r}{R_B} + \frac{R_B}{r} \Pi \left(\frac{bz}{R_B} - \frac{r}{R_B} \right). \quad (6.11)$$

Sie setzt sich zusammen aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$\frac{R_B}{r} \Pi \left(\frac{bz}{R_B} - \frac{r}{R_B} \right), \quad (6.12)$$

die eine beliebige Funktion Π enthält, die nur von der Differenz der bezogenen Tiefen- und der normierten Radialkoordinate abhängt, und einer partikulären Lösung:

$$\frac{r}{R_B} \quad (6.13)$$

der inhomogenen Differentialgleichung. Die Funktion $\Pi(\eta - \rho)$ muß anhand von Rand- und Nebenbedingungen bestimmt werden.

6.3 Rand- und Nebenbedingungen

Je nachdem, wie auf eine Schüttung Kräfte aufgebracht werden, ergeben sich, wie bereits diskutiert, ganz unterschiedliche Druckverteilungen. Entsprechend der gestellten technischen Aufgabe der Einlagerung der Gebinde ist hier jedoch eine Abfolge der Vorgänge vorgegeben: Einzelne Lastabschnitte werden sukzessive eingebracht. Jeder Lastabschnitt besteht aus einem Faß und Salzgrus, der in die Hohlräume verfüllt wird und das Gebinde überdeckt. Doch soll hier im Modell die gesamte Füllung ersatzweise als ein homogenes Medium behandelt werden. Damit sind zugleich auch die Randbedingungen festgelegt. An der Bohrlochwand und am Boden ist die Form der Schüttung vorgegeben. Sie wird durch die als starr angenommene Bohrlochwand und den festen Bohrlochboden begrenzt.

An der Oberfläche einer freien Schüttung gilt die natürliche Randbedingung, daß der Druck gleich Null ist. Hier wird der Fall betrachtet, daß die freie Oberfläche eben ist, also:

$$p_{zz}(r, z = 0) = 0 \quad (6.14)$$

gilt. Die Vorgabe eines konstanten Druckes ungleich Null an der Oberfläche soll hier nicht betrachtet werden, da hierzu Kräfte in anderer Reihenfolge und in anderer Richtung eingeleitet werden müssen. An der ebenen Oberfläche kann nur der Druck Null vorgegeben werden. Im folgenden wird daher davon ausgegangen, daß auf die Oberfläche keine zusätzliche Kraft wirkt, daß also $p_0 = 0$ gilt.

Bei der technischen Aufgabe der Füllung des Bohrlochs ist die Oberfläche der Schüttung natürlich nicht immer eben. Die Belastung ist ungleichmäßig. Dadurch können im Inneren der Schüttung Gleit- und Rutschbewegungen ausgelöst werden. Es ergeben sich Druckverteilungen, die nur bei einer vollständigen Analyse des Füll- und Einlagerungsvorgangs bestimmt werden können. Da zusätzliche Verfestigungen während des Einbringens der Fässer die Lastabtragung erhöhen, ergibt das Modell eine sichere Abschätzung für die Maximalwerte des Vertikaldrucks.

Mit der ersten Randbedingung an der Oberfläche der Schüttung $p_{zz}(r, z = 0) = 0$ liefert Gl. (6.11):

$$0 = \frac{r}{R_B} + \frac{R_B}{r} \Pi \left(-\frac{r}{R_B} \right). \quad (6.15)$$

Hieraus folgt:

$$\Pi \left(-\frac{r}{R_B} \right) = - \left(\frac{r}{R_B} \right)^2. \quad (6.16)$$

Die allgemeine Lösung lautet damit:

$$\Phi = \varrho - \frac{1}{\varrho}(\eta - \varrho)^2, \quad (6.17)$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{p_{zz}(r, z)}{p_c} = \frac{r}{R_B} - \frac{r}{R_B} \left(\frac{bz}{r} - 1 \right)^2. \quad (6.18)$$

Ersetzt man:

$$\frac{\eta}{\varrho} = \frac{bz}{r} = b \tan \omega, \quad (6.19)$$

so ergibt sich mit Gl. (6.7) eine zweite anschauliche Darstellung:

$$\frac{p_{zz}(\varrho, \omega)}{p_c} = \varrho b \tan \omega (2 - b \tan \omega). \quad (6.20)$$

Das ist eine Darstellung der Lösung als Zahlenwertgleichung in Kegelkoordinaten (ϱ, ω) , bei denen die Abstände in Vielfachen des Bohrlochradius gemessen werden. Der Winkel ω stellt den Winkel zwischen dem Ortsvektor zu einem Punkt eines Kegelmantels und seiner Projektion auf die ebene Oberfläche der Schüttung dar (Abb. 6.3). Aus der Darstellung Gl. (6.20) läßt sich ablesen, daß auf jedem Kegelmantel der Druck proportional zum Radius und damit auch proportional zum Abstand vom Ursprung des Koordinatensystems ist. Der Gültigkeitsbereich dieser Lösung ist durch weitere Nebenbedingungen beschränkt. Als allgemeine Nebenbedingung ist zu fordern, daß der Druck für endliche Tiefen auch endlich bleibt. Entsprechend der hier angenommenen Füllung des Bohrlochs von oben kann der vertikale Druck p_{zz} in einer festen Tiefe des Bohrlochs bei weiterer Füllung nur zunehmen:

$$\frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \geq 0. \quad (6.21)$$

Diese Bedingung ist auch an die nahe der Oberfläche gültige Lösung Gl. (6.18) zu stellen. Aus ihr folgt:

$$- \left(\frac{bz}{r} - 1 \right) \geq 0. \quad (6.22)$$

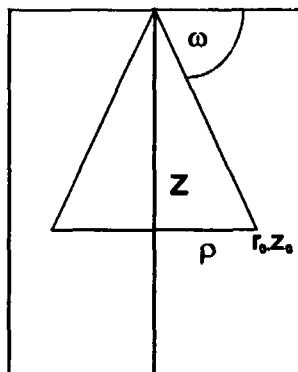


Abb. 6.3: Die Kegelkoordinaten (ϱ, ω) mit $\varrho = r/R_B$ und $\tan \omega = z/r$

Die verschiedenen Darstellungen der Lösung nach Gl. (6.18) oder Gl. (6.20) können also nur für:

$$\frac{\eta}{\varrho} = b \tan \omega = \frac{bz}{r} \leq 1 \quad (6.23)$$

gelten. Für $b \tan \omega \geq 1$ verliert die Lösung ihre Gültigkeit und der Term:

$$\frac{R_B}{r} \Pi \left(\frac{bz}{R_B} - \frac{r}{R_B} \right) \quad (6.24)$$

in Gl. (6.11) muß neu bestimmt werden. Dabei sind die folgenden Forderungen an die Funktion zu stellen:

1. auf dem Kegelmantel $\tan \omega = \frac{1}{b}$ muß sie verschwinden und
2. überall, also auch bei $r = 0$, beschränkt sein.

Aus 2. folgt unmittelbar:

$$\Pi \left(\frac{bz}{R_B} \right) \equiv 0. \quad (6.25)$$

Die Lösung im Bereich $b \tan \omega \geq 1$ ergibt sich damit zu:

$$\frac{p_{zz}(\varrho, \omega)}{p_c} = \varrho \quad (6.26)$$

und ist unabhängig von der Tiefe z im Bohrloch.

Die Druckverteilung lautet also allgemein in den Größen ϱ und η :

$$\frac{p_{zz}}{p_c} = \begin{cases} 2\eta - \frac{\eta^2}{\varrho} & \text{für } \eta \leq \varrho \text{ (Bereich A),} \\ \varrho & \text{für } \eta \geq \varrho \text{ (Bereich B),} \end{cases} \quad (6.27)$$

oder in den ursprünglichen Größen:

$$\frac{p_{zz}}{p_c} = \begin{cases} \frac{2\mu k}{R_B} z - \frac{(\mu k)^2}{R_B} \frac{z^2}{r} & \text{für } bz \leq r, \\ \frac{r}{R_B} & \text{für } bz \geq r. \end{cases} \quad (6.28)$$

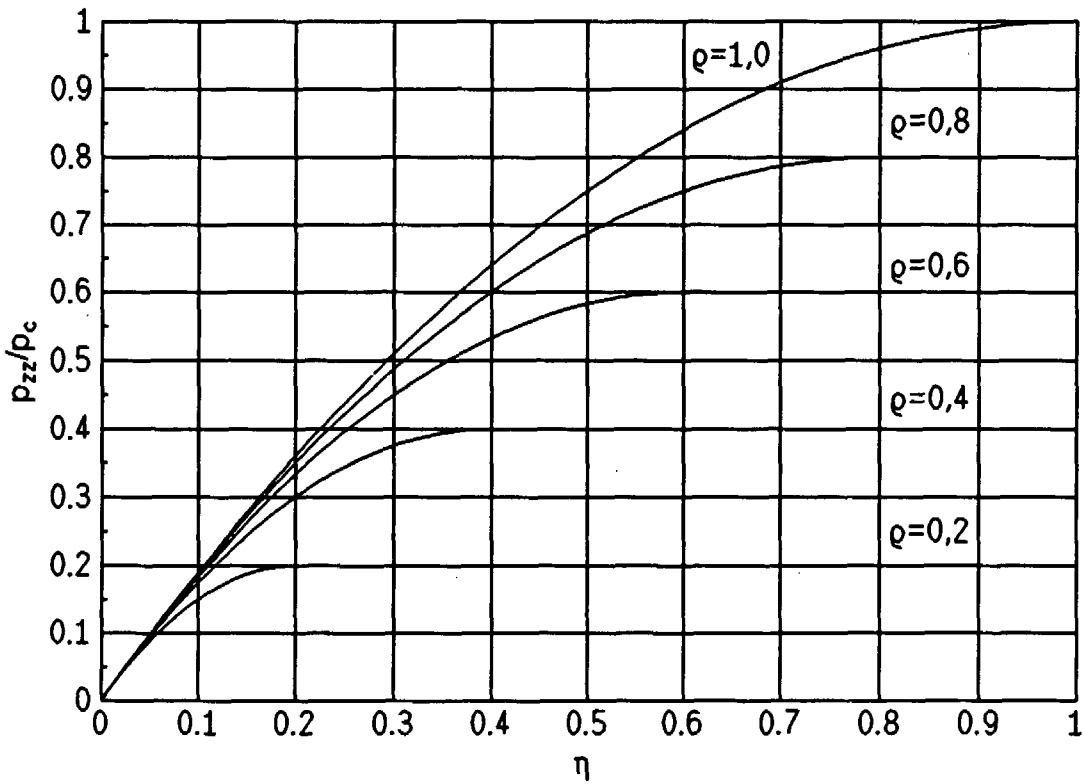


Abb. 6.4: Nach dem Ringmodell berechneter normierter vertikaler Druck p_{zz}/p_c als Funktion der bezogenen Tiefe $\eta = \mu kz/R_B$ für verschiedene normierte Radien $\varrho = r/R_B$

Im Bereich $\eta \leq \varrho$ lautet die Gleichung der Isobaren $\Phi = \text{const.}$:

$$\frac{p_{zz}}{p_c} = \Phi = \eta \left(2 - \frac{\eta}{\varrho} \right), \quad (6.29)$$

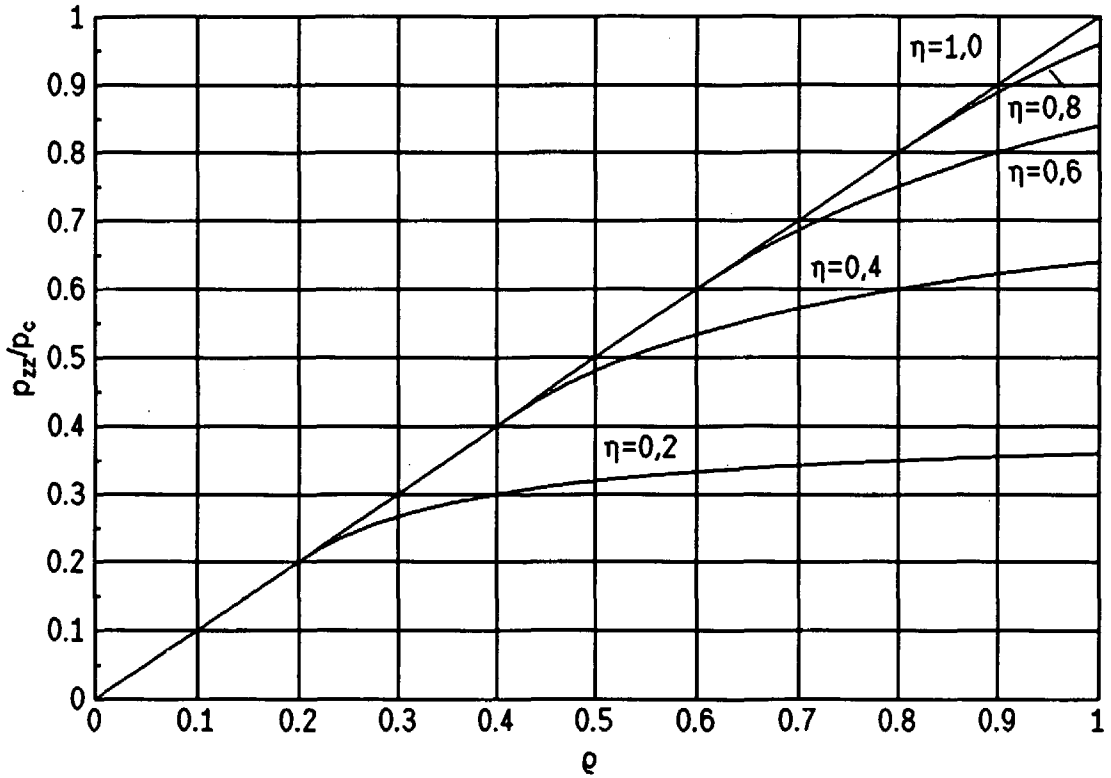


Abb. 6.5: Nach dem Ringmodell berechneter normierter vertikaler Druck p_{zz}/p_c als Funktion des normierten Radius $\rho = r/R_B$ für verschiedene bezogene Tiefen $\eta = \mu kz/R_B$

oder aufgelöst nach ρ :

$$\rho = \frac{\eta^2}{2\eta - \Phi}. \quad (6.30)$$

Im Bereich $\eta \geq \rho$ gilt hingegen:

$$\rho = \Phi. \quad (6.31)$$

In Abb. 6.4 ist der normierte vertikale Druck p_{zz}/p_c als Funktion der bezogenen Tiefe $\eta = \mu kz/R_B$ für verschiedene, normierte Radien $\rho = r/R_B$ aufgetragen und in Abb. 6.5 als Funktion des normierten Radius ρ für verschiedene, bezogene Tiefen η . Abb. 6.6 zeigt die Isobaren.

In axialer Richtung ($r = \text{const.}$) steigt nach Abb. 6.4 der Druck unterlinear an und geht an der Stelle $\eta = \rho$ in einen konstanten Wert über. In radialer Richtung ($z = \text{const.}$) steigt, wie Abb. 6.5 zeigt, der Druck für $\rho \leq \eta$ linear an. Im Bereich $\eta \leq \rho \leq 1$ wird der Anstieg mit zunehmendem ρ kleiner.

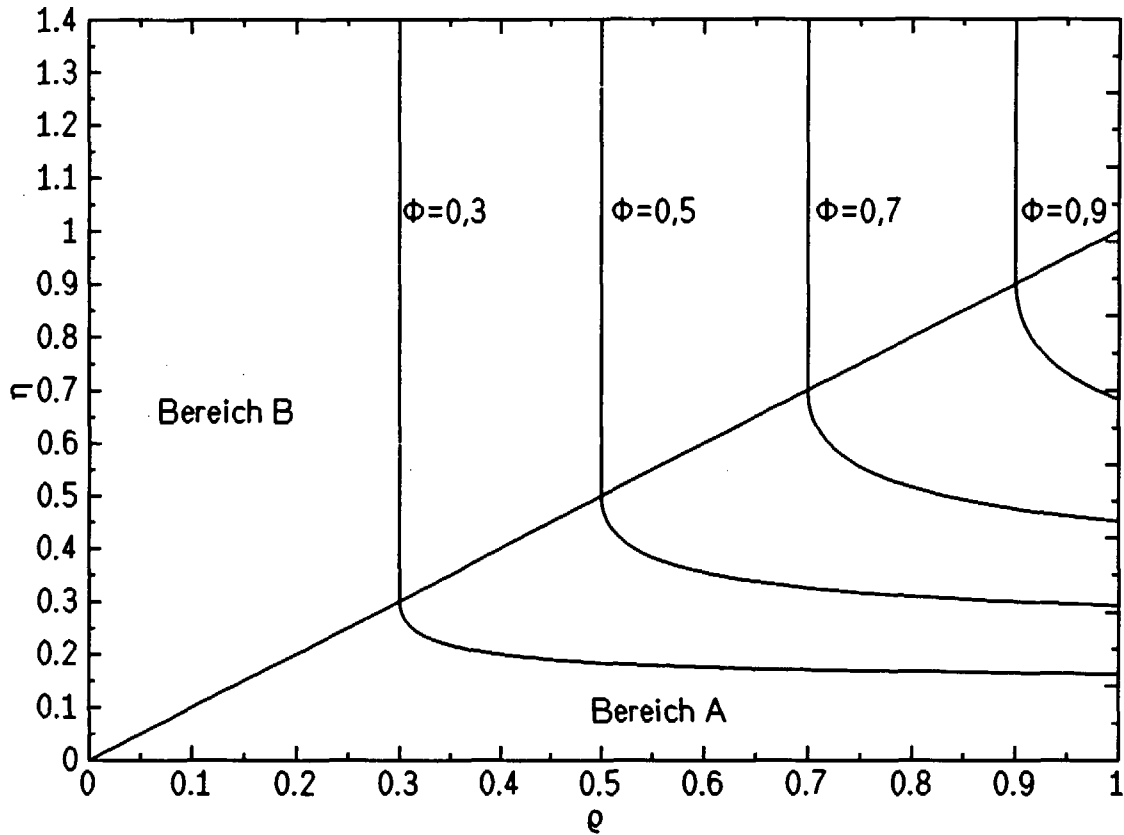


Abb. 6.6: Nach dem Ringmodell berechnete Isobaren $p_{zz}/p_c = \Phi = \text{const.}$ in einem zentralen Längsschnitt des Bohrlochs

Nach Abb. 6.6 verlaufen die Isobaren in größerer Tiefe in vertikaler Richtung und biegen auf dem Kegelmantel $\eta = \rho$ zur Wand ab. Auf dieser Grenzfläche gehen die beiden Druckverläufe aus den Bereichen $\eta \leq \rho$ und $\eta \geq \rho$ stetig differenzierbar ineinander über und besitzen den Wert:

$$p_{zz} = \frac{\gamma s}{2\mu k} r = \frac{\gamma s}{2} z. \quad (6.32)$$

Diese Formel gilt natürlich nur für den Kegelmantel im Inneren des Bohrlochs bis zur Bohrlochwand.

6.4 Die vertikale Druckkomponente

Im Gegensatz zur JANSSEN-Theorie zeigt die Lösung des Ringmodells die Existenz zweier Bereiche A und B, in denen der Vertikaldruck in Abhängigkeit von Radial- und Tiefenkoordinate einen unterschiedlichen Verlauf aufweist. Abb. 6.7 zeigt den Verlauf

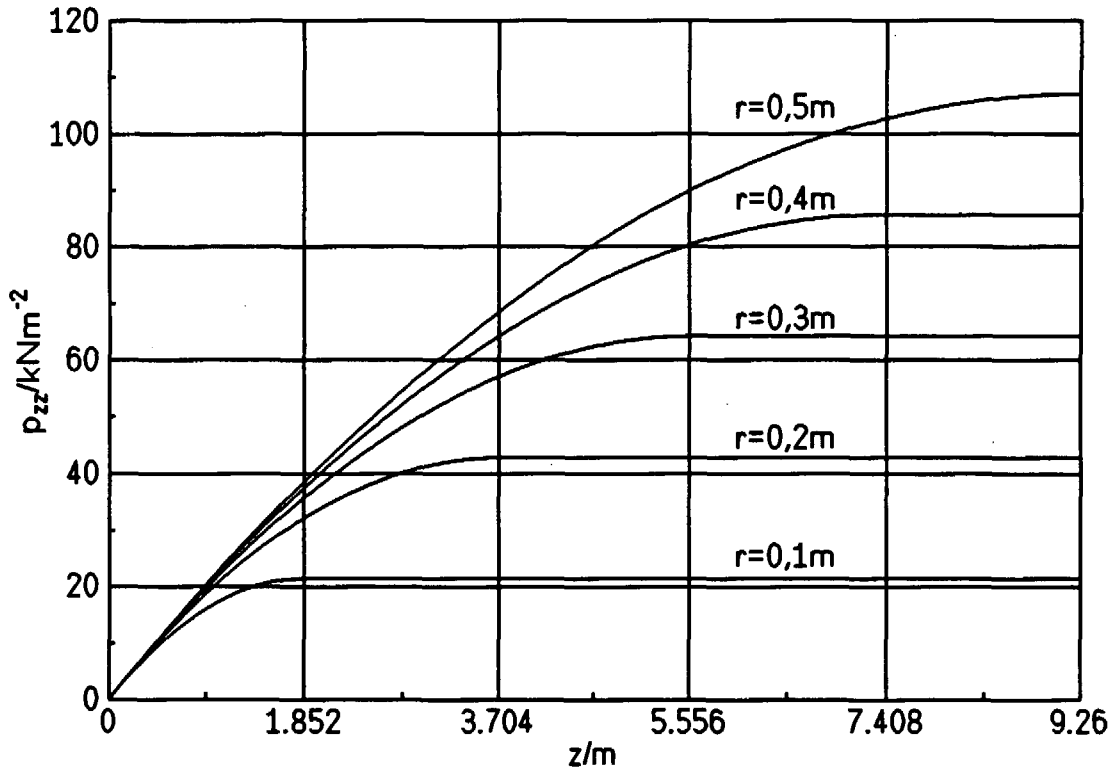


Abb. 6.7: Nach dem Ringmodell berechnete vertikale Druckkomponente p_{zz} als Funktion der Tiefe z für verschiedene Radien r mit $\mu k = 0,054$, $R_B = 0,5$ m und $\gamma_m = 23,21$ kN/m³

von p_{zz} als Funktion der Tiefe z im Bohrloch für verschiedene Radien r und Abb. 6.8 als Funktion des Radius r für verschiedene Tiefen z mit $\mu k = 0,054$, $R_B = 0,5$ m und $\gamma_m = 23,21$ kN/m³.

Für einen Vergleich beider Modelle genügt es, aus dem Ringmodell nur den größten Wert des vertikalen Drucks in einem Querschnitt, den Wert an der Bohrlochwand, zugrunde zu legen. An der Bohrlochwand $\varrho = r/R_B = 1$ ergibt sich für $\eta = \mu k z / R_B \leq \varrho = r/R_B$ die vertikale Druckkomponente p_{zz} nach Gl. (6.28) zu:

$$p_{zz} = 2p_c \mu k \frac{z}{R_B} \left(1 - \frac{\mu k}{2R_B} z \right). \quad (6.33)$$

Im Bereich $\eta \geq \varrho$ bleibt die vertikale Druckkomponente an der Wand auf dem konstanten und zugleich maximalen Wert:

$$p_{zz} = p_{zz}^{max} = p_c = \frac{\gamma_S R_B}{2\mu k}. \quad (6.34)$$

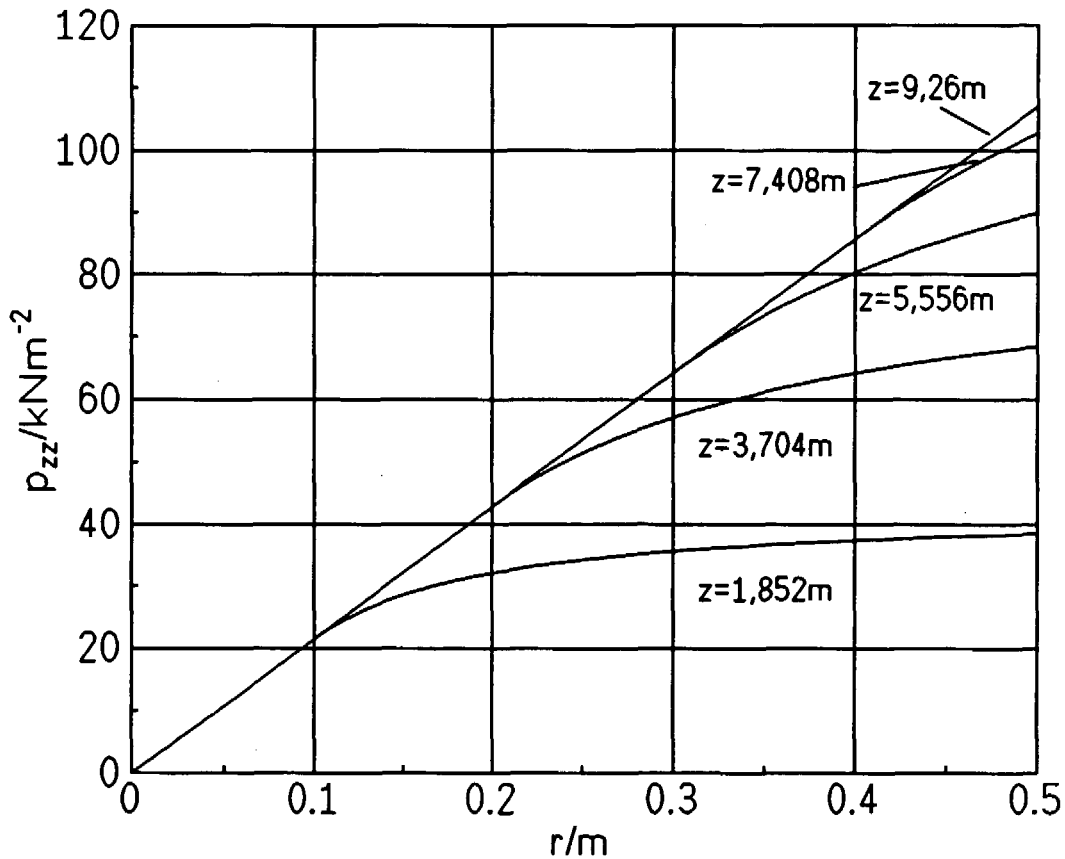


Abb. 6.8: Nach dem Ringmodell berechnete vertikale Druckkomponente p_{zz} als Funktion des Radius r für verschiedene Tiefen z mit $\mu k = 0,054$, $R_B = 0,5$ m und $\gamma_m = 23,21$ kN/m³

Wird zur Abschätzung der maximalen Beanspruchung für die Gebinde in Gl. (6.34) statt der Salzgruswichte γ_s die mittlere Wichte γ_m der Schüttung samt eingeschlossenen Gebinden und für das Produkt μk der aus den experimentellen Untersuchungen kleinste ermittelte Wert von 0,054 eingesetzt, so ergibt sich für den maximalen vertikalen Druck ein Wert von:

$$p_{zz}^{max} = 1,07 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2. \quad (6.35)$$

Das ist ein Druck, der sich technisch beherrschen läßt. Selbst wenn zur Abschätzung die Behälterwichte $\gamma_F = 31,58$ kN/m³ statt der mittleren Wichte angesetzt wird, ergibt sich der maximale Druck zu nur $1,46 \cdot 10^5$ N/m².

Der Wert p_c wird nach der JANSSEN-Theorie erst für $\eta = \infty$ erreicht. Somit ist im unteren Bereich des Bohrlochs für $\eta \geq 1$, also für $z \geq R_B/\mu k$ und $r = R_B$ der nach der JANSSEN-Theorie ermittelte Druck immer kleiner als p_c . Das Ringmodell

liefert also in diesem Bereich eine höhere Beanspruchung der Fässer. Der maximale Druck p_{zz}^{max} wird bereits in der endlichen Tiefe $z_0 = R_B/\mu k = 9,26$ m erreicht.

6.5 Die Kompressibilitäten

Bereits in Abschnitt 4.1 ist festgestellt worden, daß sich eine Lastabtragung der Behältergewichte über den Salzgrus in die umgebende starre Bohrlochwandung bei der vorgesehenen Art des Einlagerns nur dann entwickeln kann, wenn die Kompressibilität der Faßsäule wesentlich größer als die Kompressibilität der Salzsäule ist. Der Salzgrus muß bei Verdichtung, d. h. bei weiterem Eintrag von oben in das Bohrloch, eine hinreichende Tragfähigkeit entwickeln, ohne daß eine zu große Setzung stattfindet. Die Fässer hingegen sollen sich wesentlich besser als der Salzgrus stauchen lassen, damit sie sich in den umgebenden Salzgrus einhängen können.

Zur Abschätzung der Kompressibilitäten wird nun ein zentrisch im Bohrloch stehendes Gebinde betrachtet, das vollkommen von Salzgrus umhüllt ist. Die Höhen des Gebindes und des ringförmigen Salzgrusringes betragen $H_F = 1,1$ m. Auf das Gebinde und den ringförmigen Salzgrusspalt wirke der in Abschnitt 6.4 ermittelte maximale vertikale Druck von:

$$p_{zz}^{max} = 1,46 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2. \quad (6.36)$$

Aus den Druck-Dichte-Messungen an Salzgrus ergab sich bei diesem Druck eine relative Setzung von 6 %. Der ringförmige Salzspalt mit einer Höhe von 1,1 m würde um 66 mm gestaucht. Bei dem Material der Gebinde handelt es sich um gewöhnlichen St37-Stahl, für den nach DIN 17100 eine maximale Zugfestigkeit von etwa:

$$\sigma_{Zug}^{max} = 400 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 \quad (6.37)$$

angenommen werden kann. Zwischen Faßdeckel und den zementierten Abfällen besitzen die Gebinde ein freies Volumen, in das radioaktive Gase und Radiolysegase aus dem Zementsteinprodukt freigesetzt werden können. Bei einer gleichmäßigen Belastung mit $p_{zz}^{max} = 1,46 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ wird sich also im einfachsten Fall der Faßdeckel nach innen in das freie Volumen einwölben. Nach der Theorie der dünnen Schalen [30] beträgt die minimale Wandstärke w für eine am Rand eingespannte, kreisförmige Platte mit Radius R_F , die einer Belastung von p_{zz}^{max} ohne Zerstörung standhält,

$$w = \sqrt{\frac{0,488 p_{zz}^{max} R_F^2}{\sigma_{Zug}^{max}}}. \quad (6.38)$$

Mit dem Faßradius $R_F = 0,375$ m und den oben angegebenen Werten für p_{zz}^{max} und σ_{Zug}^{max} erhält man aus Gl. (6.38):

$$w = 5 \text{ mm}. \quad (6.39)$$

Für einen St37-Stahl mit 5 mm Wandstärke errechnet sich eine maximale Durchbiegung f_{max} in Plattenmitte bei Belastung mit $p_{zz}^{max} = 1,46 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ nach [30] von:

$$f_{max} = \frac{0,171 p_{zz}^{max} R_F^4}{E w^3}. \quad (6.40)$$

Bei einem für gewöhnlichen Baustahl angenommenen E -Modul von $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ergibt Gl. (6.40):

$$f_{max} = 20 \text{ mm}. \quad (6.41)$$

Nach diesen Betrachtungen würde sich also bei dem maximal im Bohrloch auftretenden Druck von $p_{zz}^{max} = 1,46 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ der ringförmige Salzgrusspalt um rund 46 mm stärker stauchen lassen als das eingebettete Gebinde. Für eine Lastabtragung ist aber eine größere Kompressibilität der Fässer gefordert, da sonst der Ringspalt aus Salzgrus die Faßsäule belastet.

Um nun diesem grundsätzlichen Nachteil Rechnung zu tragen, muß entweder der Salzgrus beim Einbringen jeweils verdichtet werden oder aber die Kompressibilität der Fässer erhöht werden. Hierzu kann an Kissen zwischen den Behältern gedacht werden, die ihre Festigkeit erst bei einem Grenzdruck verlieren und dann ein Setzen der Behälter innerhalb des Salzgruses ermöglichen. Dadurch wird im Prinzip, ähnlich wie in Abb. 4.3, eine Veränderung der Tangentialkräfte erreicht und damit die notwendige Lastabtragung.

6.6 Der optimale Bohrlochradius

Aus dem Verlauf des vertikalen Drucks im Bereich B,

$$p_{zz}(r, z) = \frac{\gamma_S}{2\mu k} r, \quad (6.42)$$

geht hervor, daß der Bohrlochradius R_B bei konstanter Schüttwichte γ_S möglichst eng zu wählen ist, da der maximale Druck proportional zu R_B ist:

$$p_{zz}^{max} = \frac{\gamma_S R_B}{2\mu k}. \quad (6.43)$$

Bei der semihydrostatischen Einlagerung der Fässer wird im Modell von einer Schüttung mit einer mittleren Wichte ausgegangen. Die mittlere Wichte setzt sich entsprechend den Volumenanteilen der Schüttwichte des Salzgruses γ_S und der Wichte der eingelagerten Fässer γ_F zusammen. Auch wenn die Fässer bei der semihydrostatischen Einlagerung ungleichmäßig im Salzgrus ruhen, wird im folgenden für die Berechnung der Volumenanteile zur Veranschaulichung und zugleich als spezieller Grenzfall eine senkrechte Stapelung zugrunde gelegt.

Stehen die Fässer aufeinander, so gilt:

$$\gamma_m = \gamma_S + (\gamma_F - \gamma_S) \left(\frac{R_F}{R_B} \right)^2. \quad (6.44)$$

Beträgt die Höhe des einzelnen Fasses H_F und die der Salzgrusüberdeckung H_S , so gilt:

$$\gamma_m = \gamma_S + \left(\frac{R_F}{R_B} \right)^2 \frac{H_F}{H_F + H_S} (\gamma_F - \gamma_S). \quad (6.45)$$

Da nun diese mittlere Schüttwichte γ_m selbst eine Funktion des Radius R_B ist, bleibt zu untersuchen, ob es einen optimalen Radius R_B gibt, für den:

$$p_{zz}^{max} = \frac{\gamma_m R_B}{2\mu k} \quad (6.46)$$

und damit die Beanspruchung der Fässer minimal wird. Mit den Abkürzungen:

$$\frac{R_B}{R_F} = u, \quad (6.47)$$

$$\frac{H_F}{H_F + H_S} (\gamma_F - \gamma_S) = \Gamma \quad (6.48)$$

erhält man aus Gl. (6.46) durch Einsetzen von γ_m aus Gl. (6.45):

$$p_{zz}^{max} = \frac{R_F}{2\mu k} \left(\gamma_S + \frac{\Gamma}{u^2} \right) u. \quad (6.49)$$

Ein Extremum ergibt sich aus:

$$\frac{\partial p_{zz}^{max}}{\partial u} = 0. \quad (6.50)$$

Dies führt auf:

$$u_{opt} = \frac{\Gamma}{\gamma_S}. \quad (6.51)$$

Da $\frac{\partial^2 p_{zz}^{max}}{\partial u^2} \geq 0$ ist, liegt ein Minimum vor.

Das optimale Verhältnis Bohrlochradius zu Faßradius beträgt also mit Gl. (6.47) und Gl. (6.48):

$$\frac{R_B}{R_F} = \frac{\gamma_F - \gamma_S}{\gamma_S} \frac{H_F}{H_F + H_S}. \quad (6.52)$$

Damit die Stelle des Minimums außerhalb des Faßbereiches liegt, muß:

$$\gamma_F \geq \gamma_S \left(2 + \frac{H_S}{H_F} \right) \quad (6.53)$$

gelten. Anderenfalls ist nach dieser Betrachtung R_B möglichst eng zu wählen. Hier ergibt sich dann eine andere Schranke: der Spalt zwischen Gebinde und Bohrlochwand muß sich noch zuverlässig mit Salzgrus füllen lassen.

In Tabelle 6.1 sind bei einer Schüttwichte des Salzgruses von $\gamma_S = 13 \text{ kN/m}^3$ - die Schüttwichte hängt natürlich stark vom Kornspektrum ab - und einer Faßhöhe von $H_F = 1,1 \text{ m}$ Werte für das optimale Verhältnis Bohrlochradius zu Faßradius nach

Tabelle 6.1: Das optimale Verhältnis R_B/R_F für verschiedene Faßwichten γ_F und verschiedene Höhen H_S der Salzgrusüberdeckung bei Einsatz von Fässern mit $H_F = 1,1$ m und einer Salzgruswichte von $\gamma_S = 13$ kN/m³; den in Klammern gesetzten Werten kommt keine physikalische Bedeutung zu, da hier $R_B/R_F \leq 1$ wäre

		γ_F [kN/m ³]			
		21,05	25	30	42,1
H_S [m]	0	(0,62)	(0,92)	1,31	2,24
	0,1	(0,57)	(0,85)	1,20	2,05
	0,2	(0,52)	(0,78)	1,11	1,89
	0,3	(0,49)	(0,73)	1,03	1,76
	0,4	(0,45)	(0,68)	(0,96)	1,64
	0,5	(0,43)	(0,63)	(0,90)	1,54
	0,6	(0,40)	(0,56)	(0,85)	1,45

Gl. (6.52) für verschiedene Höhen der Salzgrusüberdeckung H_S zusammengestellt. Bei einem vorgegebenen Behältergewicht G_F zwischen 10 kN und 20 kN und einem Faßvolumen $V_F = 0,475$ m³ (400-l-Gebinde) sind für die Faßwichte 21,05 kN/m³ bis 42,1 kN/m³ zugrunde zu legen. Bei Einsatz anderer Gebindetypen (200-l-Gebinde, Cogema-Gebinde oder BNFL-Gebinde), die sich in Gewicht, Höhe und damit in der Faßwichte γ_F unterscheiden, ergeben sich entsprechend andere Werte für das optimale Verhältnis Bohrlochradius zu Faßradius. Da der Bohrlochradius R_B nicht kleiner als der Faßradius werden kann, kommen, wie bereits oben erwähnt, nur die Werte $R_B/R_F \geq 1$ in Betracht.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Die in dieser Arbeit vorgelegten Untersuchungen sind als Grundlagenstudie zur Vorbereitung technischer Entscheidungen zu verstehen. Sie gelten zur Abschätzung der Abtragung der Stapelkräfte von Abfallgebinden, die in senkrechte unverrohrte Bohrlöcher abgelassen und vollkommen von Salzgrus umhüllt werden.

Werden Fässer mit mindestens gleich großer Kompressibilität wie der umgebende Salzgrus und in richtiger Reihenfolge mit der Salzhülle in das Bohrloch eingebracht, so kann das Gesamtsystem näherungsweise wie eine einheitliche Schüttung behandelt werden.

Zwei theoretische Modelle, das Scheibenmodell und das Ringmodell, werden zugrunde gelegt. Die zugehörigen Stoffeigenschaften sind der Literatur entnommen oder experimentell bestimmt worden.

Bei der Herleitung der JANSSEN-Formel wird angenommen, daß am äußeren Mantel einer Scheibe jeweils eine Scherkraft proportional zur radialen Druckkomponente herrscht. Im Ringmodell wird vorausgesetzt, daß eine solche Beziehung für die äußere Mantelfläche jeden Ringes gilt.

Der maximale vertikale Druck ergibt sich nach beiden Modellen zu:

$$p_{zz}^{max} = p_c = \frac{\gamma_m R_B}{2\mu k}. \quad (7.1)$$

Er wird nach dem Scheibenmodell asymptotisch mit der Tiefe z im Bohrloch angestrebt, nach dem Ringmodell aber schon in relativ geringer Tiefe erreicht. Er herrscht am Rand des Bohrlochs, wohin die Gebinde nur gelangen können, wenn sie exzentrisch eingelagert werden. Damit ist auch die maximale Beanspruchung der Gebinde definiert.

Sowohl in das Scheiben- als auch in das Ringmodell gehen geometrische Abmessungen, Form, mittlere Wichte und elastische Eigenschaften der Abfallgebinde ein. Sie können aber, wie die Untersuchungen zeigen, in weiten Grenzen frei gewählt werden, ohne daß die Gebinde zu stark beansprucht werden.

Die maximale Beanspruchung steigt mit der Faßwichte an. Da diese aber in jedem Fall beschränkt ist, läßt sich mit einer oberen Abschätzung auch eine obere Schranke für die Beanspruchung angeben.

Kritischer sind die elastischen Eigenschaften der Gebinde. Die vertikale Kompressibilität der Fässer einschließlich einer unmittelbaren Überdeckung aus Salzgrus soll größer als die des umgebenden Salzgruses sein.

Die Oberflächenstruktur der Gebinde spielt keine Rolle, solange z. B. durch Sicken oder eine größere Rauigkeit der Faßoberfläche gewährleistet ist, daß Abscherungen eher im Salzgrus als an der Faßoberfläche erfolgen.

Die geometrische Lage der Gebinde nach dem Absetzen - zentrisch, exzentrisch, schief, verkantet - geht in das Ringmodell nicht ein, wenn sichergestellt werden kann, daß die Fässer als Teil einer einheitlichen Schüttung behandelt werden können.

Von den Eigenschaften des Salzgruses gehen im wesentlichen die Dichte, die Kompressibilität und das Produkt aus Reibungsbeiwert und Seitendruckbeiwert ein. Zur genauen Bestimmung dieser drei Parameter wurde ein Prüfstand aufgebaut, mit dem alle drei separat als Funktion des Drucks untersucht wurden. Dabei wurden folgende Erkenntnisse gewonnen:

1. Der Seitendruckbeiwert $k = p_{xx}/p_{zz}$ nimmt bei gleichbleibender Druckrichtung mit zunehmenden Vertikaldruck zunächst ab und bleibt dann bis zum Ende des untersuchten Druckintervalls konstant.
2. Bei wechselnden Druckrichtungen hängt das Verhältnis $p_{xx}/p_{zz} = k$ von der Vorgeschichte ab, d. h. bei unterschiedlichen Belastungen ergeben sich unterschiedliche Relationen zwischen Horizontaldruck und Vertikaldruck.
3. Der Reibungsbeiwert μ zwischen einer glatten Metalloberfläche und Salzgrus fällt im untersuchten Druckbereich mit wachsendem Normaldruck monoton ab.
4. Das Produkt μk nimmt im untersuchten Druckbereich mit wachsendem Druck um 16% ab und erreicht einen minimalen Wert von $(\mu k)_{min} = 0,054$. Er ist damit nur halb so groß wie der in der Literatur diskutierte Wert von $(\mu k)_{Lit} = 0,108$ [11].

Im Modell wurde ein gleichmäßiges Aufbringen der Füllung zugrunde gelegt. Bei Aufbringung eines Normaldrucks p_{zz} nur aus einer Richtung wurden für die beiden anderen dazu senkrechten Druckkomponenten die phänomenologischen Beziehungen

$$p_{rr} = kp_{zz} \quad (7.2)$$

und

$$p_{\phi\phi} = kp_{zz} \quad (7.3)$$

angesetzt. Dieser Zusammenhang darf nur für das Hauptachsensystem und nur bei Druckaufbringung in stets der gleichen Richtung angenommen werden. Selbst bei

Beibehaltung des Hauptachsensystems und einem Aufbringen eines Drucks aus abwechselnden Richtungen können die anschließenden Druckverteilungen nicht allgemein vorausgesagt werden, da, wie unter 2. aufgeführt, die Druckkomponenten in den Richtungen senkrecht zum eingeleiteten Druck von der Vorgeschichte abhängen.

Doch auch mit den ungünstigsten Stoffparametern läßt sich, wie aus der Arbeit hervorgeht, die Beanspruchung der Gebinde im technisch beherrschbaren Rahmen halten, wenn die Reihenfolge der Beschickung eingehalten wird und die Kompressibilität der Gebinde in Relation zur Kompressibilität des Salzgruses hinreichend groß ist.

Literaturverzeichnis

- [1] ANDRAWES Z. K., EL-SOHBY M. A.: *Factors affecting coefficient of earth pressure k_0* ; Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, Vol. 99, No. SM 7, July, 1973, S. 527-539.
- [2] BARNERT E. (Hrsg.): *Einlagerungs- und Bohrlochverschlußtechnik*; 1. Statusbericht "MAW- und HTR-BE-Versuchseinlagerung in Bohrlöchern", Bericht Jül-Conf-60 der KFA Jülich GmbH, Juli 1987.
- [3] BERNATZIK W.: *Baugrund und Physik*; Zürich: Schweizer Druck- und Verlags-haus 1947.
- [4] BISHOP A. W.: *Test requirements for measuring the coefficient of earth pressure at rest*; Proceedings, Brussels Conference on Earth Pressure Problems, Vol. 1, 1958, S. 2-14.
- [5] BLOCK F. R., FEUSER W.: *Druckverteilung auf der Oberfläche von nach der Bohrlochtechnik eingelagerten und vollkommen in Salzgrus eingebetteten Ab-fallgebinden*; Berichte des Forschungszentrums Jülich; Institut für Chemische Technologie, Jül-2481, Mai 1991.
- [6] BUEVICH YU. A.: *Equilibrium of a loose medium between vertical walls*; Journal of Engineering Physics, Vol. 28, S. 331, 1975.
- [7] COWIN S. C.: *The theory of static loads in bins*; J. Appl. Mech., Vol. 44, 1977, S. 409-412.
- [8] COWIN S. C.: *The pressure ratio in the theory of bin pressures*; Transactions of the ASME, Vol. 46, 1979, S. 524-528.
- [9] COWIN S. C.: *Compensating corrections which enhance the accuracy of Janssen's formulas for static bin pressures*; Powder Technology, Vol. 43, 1985, S. 169-173.
- [10] DAU G.: *Messung des Wandreibungswinkels von Schüttgütern an verschiedenen Wandmaterialien*; Aufbereitungs-Technik, Vol. 24, 1983, 11, S. 633-646.
- [11] DUDDECK H., KIELBASSA S.: *Lastabtragung durch Verfüllung mit Salzgrus - Statische Berechnung*; Technischer Bericht ICT-TB-6/87.

- [12] GEIGER H., SCHEEL K. (Hrsg.): *Handbuch der Physik*; Band 6, Julius-Springer-Verlag, Berlin 1928.
- [13] GOLDSTEIN H.: *Klassische Mechanik*; 11. Auflage, AULA-Verlag, Wiesbaden 1991.
- [14] HENDRON A. F.: *The behavior of sand in one dimensional compression*; Thesis, University of Illinois (USA), 1963.
- [15] HERTZ H.: *Über die Berührung fester elastischer Körper*; Journal für reine und angewandte Mathematik, Vol. 92, 1881.
- [16] JÄNKE S., MARTIN H., PLEHM H.: *Dreiaxiales Druckgerät zur Bestimmung der Ruhedruckbeiwerte und des Gleitwiderstandes von Erdstoffen*; Bauplanung - Bautechnik, Heft 10, 1955.
- [17] JAKY J.: *The coefficient of earth pressure at rest*; Journal of the Society of Hungarian Architects and Engineers, 1944, S. 355-358.
- [18] JANSSEN H. A.: *Versuche über Getreidedruck in Silozellen*; Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Vol. 39, 1895, S. 1045-1049.
- [19] KAPPEL G.: *Ermittlung bodenmechanischer Eigenschaften von Salzhaufwerken als mögliche Versatzmaterialien in einem untertägigen Endlager*; Institut für Tief Lagerung - Projektteilung, GSF-Bericht 1/88.
- [20] KJELLMAN W.: *Report on an apparatus for consumate investigation of the mechanical properties of soils*; Proc. First Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Vol. II, 1936.
- [21] KJELLMAN W., JAKOBSON B.: *Some relations between stress and strain in coarse grained cohesionless materials*; Royal Swedish Geotechnical Institute, Proc. Nr. 9, 1955.
- [22] LATINCSICS N. K.: *Silos and storage vessels - The effect of compressibility of stored, solid bulk materials*; Part 1, Proceedings of the Technical Program - International Powder and Bulk Solids Handlind and Processing, Chicago 1983, S. 338-359.
- [23] LEE B. L.: *Low pressure rheology of granular powders using a drawing plate technique*; Polymer Engineering and Science, Vol. 28, No. 7, 1988, S. 469-476.
- [24] LEE W. K.: *The rheological nature of solid pressures of granular media*; Powder Technology, Vol. 51, 1987, S. 261-266.
- [25] LEUSSINK H., WITTKE W.: *Difference in triaxial and plane strain shear strength*; Proc. Symposium on "Laboratory shear testing of soils" at Ottawa, Canada, ASTM Special Technical Publication Nr. 361, 1963.

- [26] LVIN J. B.: *Analytical evaluation of pressures of granular material on silo walls*; Powder Technology, Vol. 4, 1970/71, S. 280-285.
- [27] MINDLIN R. D.: *Compliance of elastic bodies in contact*; J. Appl. Mech., Vol. 20, Trans. ASME, Vol. 71, 1949.
- [28] MINDLIN R. D., DERESIEWISC H.: *Elastic spheres in contact under varying oblique forces*; J. Appl. Mech., Vol. 20, Trans. ASME, Vol. 75, 1953.
- [29] MUHS H.: *Erddruckmessungen an einer 24 m hohen starren Wand*; Bauplanung und Baustatik, Heft 1, 1947.
- [30] NADAI A.: *Die elastischen Platten*; Berlin: Springer 1925.
- [31] NEGI S. C., OGILVIE J. R.: *Silage pressures in tower silos. Part 1. Theoretical and design considerations*; Canadian Agricultural Engineering, Vol. 19, No. 2, 1977, S. 92-97.
- [32] NIEPHAUS D. et al.: *MAW- und HTR-BE-Versuchseinlagerung in Bohrlöchern*; Jahresbericht 1987, (Förderkennzeichen KWA 5302 3), ICT-TB-1/88, September 1988.
- [33] ROWE P. W.: *The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact*; Proceedings of the Royal Society (London), series A, Vol. 269, 1962, S. 500-527.
- [34] SCOTT R. F.: *Principles of soil mechanics*; Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1963.
- [35] SHAHINPOOR M.: *Exact bounds on average granular pressures in a general bin model*; Appl. Math. Modelling, Vol. 5, 1981, S. 185-188.
- [36] SIMONS N.: *Discussion*; Brussels Conference on Earth Pressure Problems, Vol. III, 1958.
- [37] SUNDARAM V., COWIN S. C.: *A reassessment of static bin pressure experiments*; Powder Technology, Vol. 22, 1979, S. 23-32.
- [38] SUNDARAM V., COWIN S. C.: *The experimental evaluation of the effect of material consolidation on static bin pressures*; Powder Technology, Vol. 42, 1985, S. 241-247.
- [39] TAKAMI A., OKA S.: *A theory of the pressure distribution in powder equilibrium in a cylindrical vessel*; Powder Technology, Vol. 10, 1974, S. 295-301.
- [40] VON TERZAGHI K.: *Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage*; Leipzig u. Wien, Deuticke, 1925.

- [41] THURSTON C. W., DERESIEWICS H.: *Analysis of a compression test of a face-centered cubic array of elastic spheres*; J. Appl. Mech., Vol. 26, Trans. ASME, Vol. 81, 1959.
- [42] ZURMÜHL R.: *Matrizen und ihre technischen Anwendungen*; 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1964.

Anhang A

Kräfte- und Momentengleichgewicht

A.1 Kräftegleichgewicht in kartesischen Koordinaten

Im Hinblick darauf, daß alle Annahmen oder Vernachlässigungen bei der Behandlung des vorliegenden Problems nachvollziehbar und überprüfbar sein sollen, werden im folgenden die Grundlagen zusammengestellt. Dabei wird die Schüttung als Kontinuum behandelt und die diskrete Struktur der Partikel außer acht gelassen.

In jedem beliebigen Teil einer Schüttung herrscht nur dann Gleichgewicht, wenn die Resultierende aller angreifenden Kräfte und die Resultierende aller Drehmomente gleich Null sind. Auf einen beliebig herausgegriffenen Teil einer Schüttung wirken Oberflächenkräfte dF_i^S und Volumenkräfte dF_i^V . Als Kraft, die im Volumen angreift, kommt nur die Schwerkraft:

$$dF_i^V = \varrho g_i dV \quad (\text{A.1})$$

in Betracht, so daß sich die Kräftebilanz:

$$\oint dF_i^S + \int dF_i^V = 0 \quad (\text{A.2})$$

hier als:

$$- \oint_{\partial G} p_{ik} dA_k + \int_G \varrho g_i dV = 0 \quad (\text{A.3})$$

schreibt ¹. Dabei sind p_{ik} die Komponenten des Drucktensors, dA_k die Komponenten des ins Äußere weisenden Oberflächenelementes des betrachteten Gebietes G , ϱ die Schüttdichte des Gutes, g_i die Komponente der Erdbeschleunigung in i -Richtung und

¹Anm.: Nach der Einsteinschen Summationskonvention ist über doppelt auftretende Indizes zu summieren.

dV ein Volumenelement. Es wird angenommen, daß die Komponenten des Drucktensors p_{ik} sowie die ersten partiellen Ableitungen stetige Ortsfunktionen sind. Mit Hilfe des Gaußschen Satzes läßt sich das Oberflächenintegral als Volumenintegral darstellen:

$$\iint_S p_{ik} dA_k = \iiint_V \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} dV. \quad (\text{A.4})$$

Damit folgt für die Kräftebilanz die Gleichung:

$$\iiint_G \left(\varrho g_i - \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \right) dV = 0. \quad (\text{A.5})$$

Da das Integrationsvolumen beliebig gewählt werden kann, folgt wegen der Stetigkeit der Integranden:

$$\varrho g_i - \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (\text{A.6})$$

oder anders geschrieben:

$$\varrho \underline{g} - \nabla \cdot \tilde{\mathbf{p}} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Hierbei ist $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{p}}$ die Divergenz des Drucktensors $\tilde{\mathbf{p}}$. Ausgeschrieben lauten die Gleichungen für die Kräftebilanzen:

$$\begin{aligned} \varrho g_x - \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \varrho g_y - \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \varrho g_z - \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Wird das Koordinatensystem so gelegt, daß die z -Achse in Richtung der Erdbeschleunigung zeigt, und der Spannungstensor $\sigma_{ik} = -p_{ik}$ eingeführt, so erhält man die Kräftebilanzen in der Form, in der sie gewöhnlich in der Literatur angegeben werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \varrho g &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Im ebenen Fall sind bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems die partiellen Ableitungen nach y gleich Null und die Scherspannungen σ_{xy} und σ_{zy} , die auf Flächen $y = \text{const.}$ wirken, ebenfalls. Für den ebenen Fall lauten die Gleichgewichtsbedingungen also:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \varrho g &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

A.2 Momentengleichgewicht in kartesischen Koordinaten

Greift eine Kraft $\underline{\mathbf{F}}$ mit dem Hebelarm $\underline{\mathbf{r}}$ an, so ergibt sich ein Drehmoment:

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{M}}^a = \underline{\mathbf{r}} \times \underline{\mathbf{F}}. \quad (\text{A.11})$$

Hierbei ist $\widetilde{\mathbf{M}}$ ein schiefsymmetrischer Tensor zweiter Stufe, der auch als axialer Vektor $\underline{\mathbf{M}}^a$ repräsentiert werden kann. Für die Komponenten gilt:

$$M_n^a = \epsilon_{nmk} x_m F_k, \quad (\text{A.12})$$

wobei der völlig antisymmetrische Einheitstensor (Levi-Civita-Tensor) ϵ_{nmk} definiert wird gemäß:

$$\epsilon_{nmk} = \begin{cases} 1, & \text{falls die Anzahl der Permutationen von } \{nmk\} \text{ gerade ist;} \\ -1, & \text{falls die Anzahl der Permutationen von } \{nmk\} \text{ ungerade ist;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Gleichgewicht muß das Drehmoment aller Oberflächenkräfte:

$$dF_i^S = -p_{ik} dA_k \quad (\text{A.13})$$

und aller Volumenkräfte:

$$dF_i^V = \rho g_i dV \quad (\text{A.14})$$

gleich Null sein:

$$\oint \underline{\mathbf{r}} \times d\underline{\mathbf{F}}^S + \int \underline{\mathbf{r}} \times d\underline{\mathbf{F}}^V = \mathbf{0}. \quad (\text{A.15})$$

Mit Gl. (A.12) läßt sich Gl. (A.15) in der Form:

$$- \iint_S \epsilon_{nml} x_m p_{li} dA_i + \iiint_V \epsilon_{nml} x_m \rho g_l dV = 0 \quad (\text{A.16})$$

darstellen. Mit dem Gaußschen Satz:

$$\begin{aligned} & \iint_S \epsilon_{nml} x_m p_{li} dA_i = \\ & \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\epsilon_{nml} x_m p_{li}) dV = \\ & \iiint_V \epsilon_{nml} \left(\frac{\partial x_m}{\partial x_i} p_{li} + x_m \frac{\partial p_{li}}{\partial x_i} \right) dV = \\ & \iiint_V \epsilon_{nml} \left(\delta_{mi} p_{li} + x_m \frac{\partial p_{li}}{\partial x_i} \right) dV = \\ & \iiint_V \epsilon_{nml} \left(p_{lm} + x_m \frac{\partial p_{li}}{\partial x_i} \right) dV \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

folgt:

$$\iiint_V \epsilon_{nml} \left(x_m \varrho g_l - p_{lm} - x_m \frac{\partial p_{li}}{\partial x_i} \right) dV = 0. \quad (\text{A.18})$$

Mit der Kräftebilanz Gl. (A.6) führt dies auf:

$$\iiint_V \epsilon_{nml} p_{lm} dV = 0. \quad (\text{A.19})$$

Da Gl. (A.19) für jedes beliebige Volumenelement gelten muß, ergibt sich wegen der Stetigkeit des Integranden:

$$\epsilon_{nml} p_{lm} = 0. \quad (\text{A.20})$$

Gl. (A.20) besagt, daß der Drucktensor symmetrisch sein muß und daß von den neun Komponenten nur sechs Komponenten voneinander unabhängig sind. Die Symmetrie ist eine Folge des Drehmomentengleichgewichts.

Sieht man die Dichte als gegeben an, so bleibt die Aufgabe, diese sechs Komponenten zu bestimmen. Hierfür liefert die Gl. (A.6) lediglich drei Bestimmungsgleichungen.

A.3 Kräfte- und Momentengleichgewicht in Zylinderkoordinaten

Da das Problem der Druckverteilung im Bohrloch rotationssymmetrisch ist, werden die Grundgleichungen aus Anhang A.1 und A.2 im folgenden in Zylinderkoordinaten dargestellt. Dabei wird die z -Achse in Richtung der Erdbeschleunigung gelegt. Dann wird aus Gl. (A.6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{1k}}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial p_{2k}}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial p_{3k}}{\partial x_k} &= \gamma_s. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Der Drucktensor p_{ik} ordnet jedem Flächenelement homogen linear ein Kraftelement zu:

$$d\mathbf{F} = -\tilde{\mathbf{p}} d\mathbf{A}. \quad (\text{A.22})$$

In Zylinderkoordinaten lautet Gl. (A.22):

$$\begin{pmatrix} dF_r \\ dF_\phi \\ dF_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p_{rr} & p_{r\phi} & p_{rz} \\ p_{\phi r} & p_{\phi\phi} & p_{\phi z} \\ p_{zr} & p_{z\phi} & p_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dA_r \\ dA_\phi \\ dA_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A.23})$$

In Zylinderkoordinaten sind die Richtungen ortsabhängig. Daher wirken Kräfte, die in unterschiedlichen, gleichnamigen Koordinatenebenen angreifen, nicht in jedem Fall in die gleiche Richtung.

Für die Aufstellung der Kräftebilanzen werden die Richtungen im zentralen Punkt des Volumenelementes, auf den das Volumen zusammengezogen werden soll, zugrunde gelegt (Abb. A.1). In die r -Richtung an diesen zentralen Punkt wirken auch Kräfte,

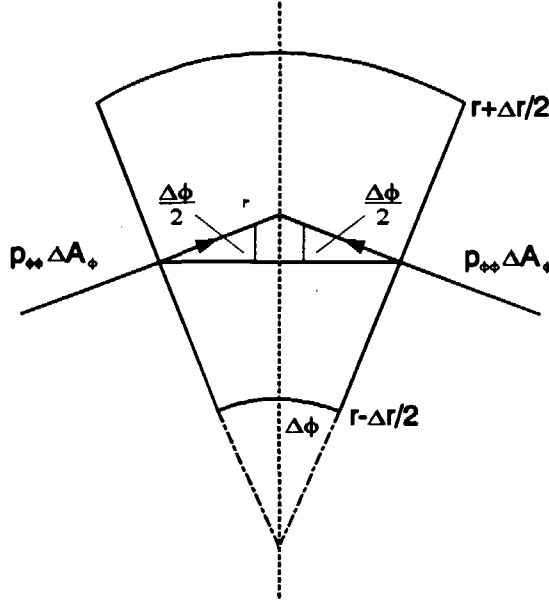


Abb. A.1: Volumenelement in Zylinderkoordinaten

die nominell in ihren Angriffspunkten keine Komponenten in r -Richtung haben. Für die zentrale r -Richtung gilt folgende Bilanz der Kräfte:

$$\begin{aligned}
 & [p_{rr}(r - \Delta r/2, \phi, z)(r - \Delta r/2) - p_{rr}(r + \Delta r/2, \phi, z)(r + \Delta r/2)] \Delta \phi \Delta z \\
 & + [p_{r\phi}(r, \phi - \Delta \phi/2, z) - p_{r\phi}(r, \phi + \Delta \phi/2, z)] \cos(\Delta \phi/2) \Delta r \Delta z \\
 & + [p_{rz}(r, \phi, z - \Delta z/2) - p_{rz}(r, \phi, z + \Delta z/2)] r \Delta r \Delta \phi \\
 & + [p_{\phi\phi}(r, \phi - \Delta \phi/2, z) + p_{\phi\phi}(r, \phi + \Delta \phi/2, z)] \sin(\Delta \phi/2) \Delta r \Delta z \\
 & + r \Delta r \Delta \phi \Delta z f_r = 0.
 \end{aligned}$$

Hierbei ist f_r die im Inneren in radialer Richtung wirkende Kraftdichte. Nach Taylorentwicklungen bis zum linearen Glied folgt:

$$-\frac{1}{r} p_{rr} - \frac{\partial p_{rr}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial p_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\partial p_{rz}}{\partial z} + \frac{p_{\phi\phi}}{r} + f_r = 0. \quad (\text{A.24})$$

Die Kräftebilanz in ϕ -Richtung lautet:

$$\begin{aligned}
 & [p_{\phi r}(r - \Delta r/2, \phi, z)(r - \Delta r/2) - p_{\phi r}(r + \Delta r/2, \phi, z)(r + \Delta r/2)] \Delta \phi \Delta z \\
 & + [p_{\phi \phi}(r, \phi - \Delta \phi/2, z) - p_{\phi \phi}(r, \phi + \Delta \phi/2, z)] \cos(\Delta \phi/2) \Delta r \Delta z \\
 & + [p_{\phi z}(r, \phi, z - \Delta z/2) - p_{\phi z}(r, \phi, z + \Delta z/2)] r \Delta r \Delta \phi \\
 & - [p_{r \phi}(r, \phi - \Delta \phi/2, z) - p_{r \phi}(r, \phi + \Delta \phi/2, z)] \sin(\Delta \phi/2) \Delta r \Delta z \\
 & + r \Delta r \Delta \phi \Delta z f_{\phi} = 0.
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

Hieraus folgt unter Verwendung der Symmetrie des Drucktensors:

$$-\frac{\partial p_{\phi r}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial p_{\phi \phi}}{\partial \phi} - \frac{\partial p_{\phi z}}{\partial z} - 2 \frac{p_{\phi r}}{r} + f_{\phi} = 0. \tag{A.26}$$

Die Kräftebilanz für die Kraftdichte in z -Richtung lautet:

$$\begin{aligned}
 & [p_{zr}(r - \Delta r/2, \phi, z)(r - \Delta r/2) - p_{zr}(r + \Delta r/2, \phi, z)(r + \Delta r/2)] \Delta \phi \Delta z \\
 & + [p_{z \phi}(r, \phi - \Delta \phi/2, z) - p_{z \phi}(r, \phi + \Delta \phi/2, z)] \Delta r \Delta z \\
 & + [p_{zz}(r, \phi, z - \Delta z/2) - p_{zz}(r, \phi, z + \Delta z/2)] r \Delta r \Delta \phi \\
 & + r \Delta r \Delta \phi \Delta z f_z = 0.
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

Hieraus folgt wie oben:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r p_{zr}) - \frac{1}{r} \frac{\partial p_{z \phi}}{\partial \phi} - \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + f_z = 0. \tag{A.28}$$

Zu den drei partiellen Differentialgleichungen (A.24), (A.26) und (A.28), die auch in der Literatur [12] angegeben sind, müssen noch Randbedingungen definiert werden, damit das System eindeutige, technisch interessante Lösungen liefern kann. Beim vorliegenden Problem gelten folgende Vereinfachungen:

1. Es liegt Rotationssymmetrie vor, so daß die Ableitungen nach dem Winkel ϕ verschwinden.
2. Die vektorielle Kraftdichte hat nur eine z -Komponente, d. h.
 $f_z = \rho g$.
3. Aus Symmetriegründen sind die Komponenten $p_{\phi r}$ und $p_{\phi z}$ gleich Null.

Damit reduziert sich der Drucktensor auf vier unabhängige Komponenten.

Anhang B

Der Seitendruckbeiwert und der innere Reibungswinkel

Die experimentelle Erfahrung lehrt, daß aus einem vertikalen Druck $p_v = p_{zz}$ innerhalb einer Schüttung oder einer Flüssigkeit ein horizontaler Druck $p_h = p_{xx} = p_{yy} = k p_{zz}$ resultiert. In erster Näherung ist der Proportionalitätsfaktor k für jedes Material eine Konstante und wird Seitendruckbeiwert genannt. Die Kraftausbreitung in den Richtungen senkrecht zum eingeleiteten Druck findet in Schüttungen durch Gleiten innerhalb der Schüttung statt. Dabei erfolgt immer gerade dann ein Rutschen, wenn an einer Fläche die Coulombsche Bedingung:

$$p_{xz} = p_{zz} \tan \delta \quad (\text{B.1})$$

erfüllt ist.

Herrscht in der Schüttung auf ein Gebiet, dessen Normaleneinheitsvektor $\underline{n}$ ins Innere des Gebietes weist, der Drucktensor p_{ik} , dann wirkt über das Flächenelement:

$$dA_k = dA n_k \quad (\text{B.2})$$

die Kraft:

$$dF_i = dA p_{ik} n_k. \quad (\text{B.3})$$

Die Kraft auf das Flächenelement läßt sich in eine Komponente parallel zur inneren Normalen der Fläche:

$$dN_i = dA p_{ik} n_k n_i n_i \quad (\text{B.4})$$

und in eine Komponente in tangentialer Richtung zur Fläche:

$$dT_i = dF_i - dN_i \quad (\text{B.5})$$

zerlegen. Ein Gleiten innerhalb der Schüttung findet immer dann statt, wenn das Verhältnis des Betrages aus Tangentialkraft zu Normalkraft größer als der Reibungsbeiwert wird, mit anderen Worten, falls

$$\frac{(\underline{dF} - \underline{dN})^2}{(\underline{dN})^2} \geq \tan^2 \delta \quad (\text{B.6})$$

gilt. Da $\underline{dF}$ senkrecht auf $\underline{dN}$ steht, gilt für das Produkt $\underline{dF} \cdot \underline{dN} = 0$. Damit vereinfacht sich Gleichung (B.6) zu:

$$\frac{(\underline{dF})^2 - (\underline{dN})^2}{(\underline{dN})^2} \geq \tan^2 \delta. \quad (\text{B.7})$$

Wirkt auf eine unbeschränkt ausgedehnte, zuvor druckfreie Schüttung ein Druck in vertikaler Richtung, dann ist die vertikale Richtung Hauptachsenrichtung mit dem Eigenwert:

$$p_3 = p_v, \quad (\text{B.8})$$

und zwei aufeinander senkrecht stehende, horizontale Richtungen zum gemeinsamen Eigenwert:

$$p_1 = p_2 = p_h \quad (\text{B.9})$$

können als weitere Hauptachsenrichtungen gewählt werden. Der Quotient:

$$\frac{p_h}{p_v} = k \quad (\text{B.10})$$

definiert den Seitendruckbeiwert k . Legt man zur Vereinfachung für die weiteren Rechnungen das lokale Hauptachsensystem zugrunde, d. h.:

$$p_{ik} = \begin{cases} p_i & \text{für } i = k, \\ 0 & \text{für } i \neq k, \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

so folgt:

$$(\underline{dF})^2 = dA^2(p_{ik}n_k)^2 = dA^2(p_1^2n_1^2 + p_2^2n_2^2 + p_3^2n_3^2) \quad (\text{B.12})$$

und

$$(\underline{dN})^2 = dA^2(p_{ik}n_kn_i)^2 = dA^2(p_1^2n_1^2 + p_2^2n_2^2 + p_3^2n_3^2)^2. \quad (\text{B.13})$$

Für den Fall einer ausgedehnten, einseitig belasteten Schüttung, in der die Gleichungen (B.8), (B.9) und (B.10) gelten, folgt damit mit der Coulombschen Bedingung (B.7), daß für:

$$\frac{k^2(n_1^2 + n_2^2) + n_3^2}{[k(n_1^2 + n_2^2) + n_3^2]^2} \leq \tan^2 \delta + 1 \quad (\text{B.14})$$

kein Gleiten erfolgt. Diese Bedingung muß im Gleichgewicht an jeder Stelle und für jede Richtung in der Schüttung erfüllt sein. Da $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, folgt mit $v = n_3^2 = 1 - (n_1^2 + n_2^2)$ aus (B.14):

$$f(v) = \frac{k^2 + (1 - k^2)v}{[k + (1 - k)v]^2} \leq \tan^2 \delta + 1. \quad (\text{B.15})$$

Innerhalb der Schüttung findet solange Gleiten statt, bis an allen Stellen diese Bedingung gilt. Sie ist allgemein erfüllt, wenn sie auch für das Maximum von $f(v)$ gilt. Die Ableitung:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{(1 - k^2)[k - (1 + k)v]}{[k + (1 - k)v]^3} \quad (\text{B.16})$$

verschwindet für

$$v_{max} = \frac{k}{1+k}. \quad (\text{B.17})$$

Da die zweite Ableitung an der Stelle v_{max} negativ ist, liegt ein Maximum vor. Im Maximum gilt:

$$f(v_{max}) = \tan^2 \delta + 1. \quad (\text{B.18})$$

Einsetzen von v_{max} aus (B.17) liefert:

$$k = \frac{1 - \sin \delta}{1 + \sin \delta}. \quad (\text{B.19})$$

Der Seitendruckbeiwert fällt also monoton mit dem inneren Reibungswinkel (Abb. 2.3).

Für das Produkt aus Seitendruckbeiwert k und Reibungsbeiwert $\mu = \tan \delta$ (Abb. B.1) ergibt sich:

$$k\mu = \frac{1 - \sin \delta}{1 + \sin \delta} \tan \delta. \quad (\text{B.20})$$

Die Funktion steigt von 0 bei $\delta = 0$ bis zu seinem Maximalwert $\sqrt{3}/9$ bei $\delta = \pi/6$ und fällt dann wieder auf 0 bei $\delta = \pi/2$. Da die Lastabtragung monoton mit μk steigt, gibt es einen Reibungswinkel δ , bei dem die Lastabtragung maximal ist.

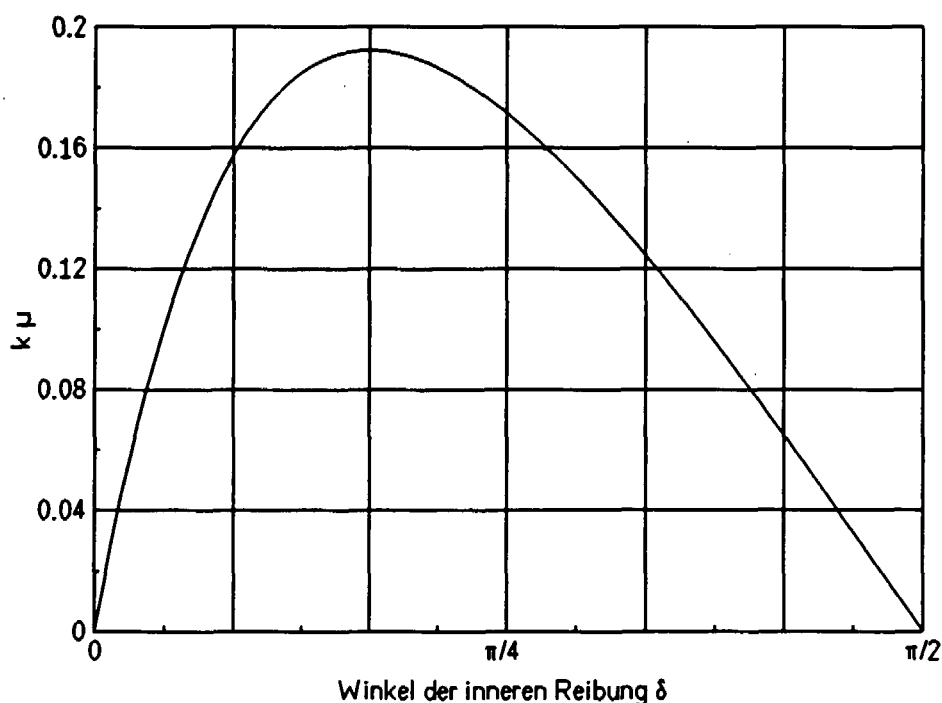


Abb. B.1: Das Produkt $k\mu$ als Funktion des Winkels der inneren Reibung

Danksagung

Die vorliegende Arbeit wurde am Institut für Eisenhüttenkunde der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen in der Zeit von April 1989 bis Juni 1992 durchgeführt und am 10. August 1992 bei der Fakultät für Bergbau, Hüttenwesen und Geowissenschaften eingereicht. Das Promotionsverfahren wurde am 16. Oktober 1992 eröffnet.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Priv. Doz. Dr. rer. nat. F. R. Block für seine Unterstützung und für die kritischen Hinweise bei der Abfassung des Manuskripts.

Herrn Prof. Dr. rer. nat. W. Dahl und Herrn Prof. Dr. rer. nat. E. Merz danke ich für das Interesse an der Arbeit und für die Übernahme eines Korreferates.

Allen Mitarbeitern des Institutes, die mich bei der Durchführung meiner Arbeit unterstützt haben, insbesondere Herrn E. Gerhards, danke ich für die gute Zusammenarbeit.

Herrn Dr. E. Barnert (Forschungszentrum Jülich GmbH (KFA)) sei gedankt für die Erteilung des Forschungsauftrags und die damit verbundene finanzielle Unterstützung.