

Institut für Kernphysik

Ein chiral symmetrisches Quark- modell ohne freie Quarks

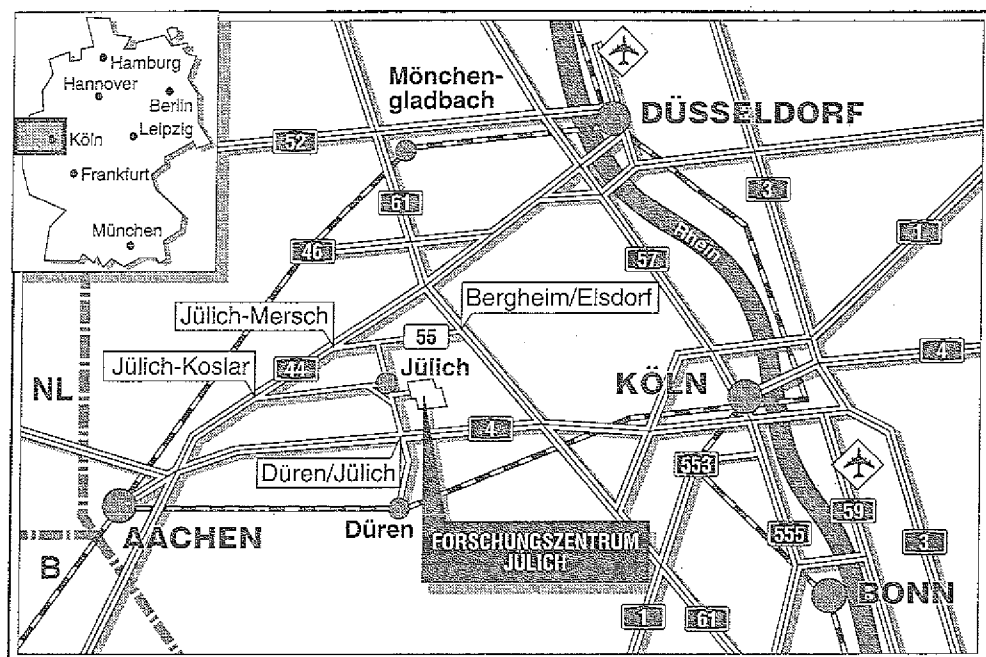
Michael Buballa

Handwritten text at the top of the page, possibly a header or title.

Handwritten text in the middle of the page, possibly a paragraph or a list.

Handwritten text in the lower middle of the page.

Handwritten text at the bottom of the page, possibly a footer or concluding remarks.



Berichte des Forschungszentrums Jülich ; 2788

ISSN 0944-2952

Institut für Kernphysik Jül-2788

D5 (Diss. Universität Bonn)

Zu beziehen durch: Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek

D-52425 Jülich · Bundesrepublik Deutschland

Telefon: 02461/61-6102 · Telefax: 02461/61-6103 · Telex: 833556-70 kfa d



THE
UNIVERSITY OF
THE SOUTH PACIFIC
SCHOOL OF
THEOLOGY

THE
UNIVERSITY OF
THE SOUTH PACIFIC
SCHOOL OF
THEOLOGY
THE
UNIVERSITY OF
THE SOUTH PACIFIC
SCHOOL OF
THEOLOGY
THE
UNIVERSITY OF
THE SOUTH PACIFIC
SCHOOL OF
THEOLOGY

Ein chirales symmetrisches Quarkmodell ohne freie Quarks

Michael Buballa

Abstract

A chirally symmetric quark model is presented which contrary to the Nambu Jona-Lasinio (NJL) model does not lead to the presence of free quarks. In the model a non-local effective interaction is used as a schematic parameterization of the quark antiquark scattering kernel. The non-locality can be interpreted as phenomenologically taking into account an infinite number of elementary scattering processes, like the sum of all multi-gluon exchange processes in the particle-particle channel. The basic Lagrangian of the interaction shares all global internal symmetries with QCD. In particular in the limit of vanishing current quark masses it is chirally symmetric.

Starting from the non-local scattering kernel the solution of the Dyson-Schwinger equation and the Bethe-Salpeter equation leads to a consistent description of the dressed quark propagators with the mesons as quark-antiquark states. Like in the NJL-model chiral symmetry is spontaneously broken. Because of the non-locality of the interaction, however, in our model the quarks do not acquire a constant constituent mass but a four momentum dependent selfenergy.

The interaction can be parameterized in such a way that the quark propagator is pole free. That means that the quark mass shell is not defined and the quarks do not exist as free real but only as virtual particles. The solutions of the two-body equation, the quark-antiquark T-matrix, however, have got poles and mesons as bound quark-antiquark states exist as real particles within the model. Different from the NJL-model these mesons cannot decay into free quarks.

It is shown that the description of mesons is consistent with the Goldstone theorem: In the chiral limit the pion is massless.

In order to describe the coupling of vector and axial vector fields to the model gauge invariant Lagrangians are constructed. Since the non-local interaction is not gauge invariant by itself one has to go beyond minimal substitution and to introduce gauge fields also to the interaction Lagrangian. This leads to additional diagrams which correspond to the direct coupling of the gauge bosons to the non-local strong vertex. It is shown that Ward-Takahashi identities as well as the Gell-Mann Oakes Renner relation and a generalized Goldberger Treiman relation hold.

Finally the extension of the model to three quark flavours is discussed.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung	5
2. Das Nambu – Jona-Lasinio – Modell	12
2.1. Symmetrien der QCD-Lagrangedichte	13
2.2. Die NJL-Lagrangedichte	16
2.3. Spontane Symmetriebrechung	17
2.4. Beschreibung von Mesonen	22
2.5. Meson-Zerfälle in freie Quarks	25
3. Ein nichtlokales, chiral symmetrisches Quarkmodell ohne freie Quarks . . .	28
3.1. Überlegungen zur Wahl der Metrik	34
3.2. Die Lagrangedichte des neuen Modells	36
3.3. Spontane Symmetriebrechung: Die Quark-Selbstenergie	42
3.4. Beschreibung von Mesonen	45
3.5. Die Wahl der Wechselwirkungsfunktion	57
3.6. Numerische Resultate	62
4. Ankopplung von Vektor- und Axialvektorfeldern an das nichtlokale Modell .	68
4.1. Eichinvariante Verallgemeinerungen der Lagrangedichte	71
4.2. Berechnung der Vektor-Vertizes und Herleitung von Ward-Takahashi- Identitäten	77
4.3. Axiale Felder und die Pion-Zerfallskonstante	87
5. Erweiterung des Modells auf drei Quark-Flavours	93
5.1. Die Lagrangedichte des Drei-Flavour-Modells	95

5.2. Herleitung der Gap-Gleichung	98
5.3. Beschreibung der pseudoskalaren Mesonen	102
6. Zusammenfassung und Ausblick	109
Anhang A. Quark-Antiquark-Polarisationsfunktionen mit zwei starken Vertizes	111
Anhang B. Quark-Antiquark-Polarisationsfunktionen mit einem starken und einem schwachen Vertex	117

1. Einleitung

Die Suche nach einer Theorie für die starke Wechselwirkung reicht zurück bis in die Anfänge dieses Jahrhunderts. Nach der Entdeckung, daß die Atomkerne aus Protonen und Neutronen aufgebaut sind, stellte sich die Frage nach der Kraft, die diese Teilchen zusammenhält. In diesem Zusammenhang postulierte Yukawa 1935 ein neues Teilchen, das in Analogie zum Photon in der elektromagnetischen Wechselwirkung die starke Kernkraft zwischen den Nukleonen vermittelt [1]. Tatsächlich wurde 1947 mit dem Pi-Meson ein Teilchen mit der von Yukawa vorhergesagten Masse gefunden [2].

Dieses einfache Bild einer aus wenigen elementaren Bausteinen zusammengesetzten Welt wurde jedoch in den 50er Jahren durch die Entdeckung einer großen Anzahl neuer Teilchen zunächst wieder zerstört. Auf der Suche nach einer neuen Klassifikation schlugen Gell-Mann und Zweig [3, 4] 1964 vor, daß Baryonen und Mesonen keine elementaren Teilchen, sondern aus Quarks zusammengesetzt sind, die in drei Flavours, „up“, „down“ und „strange“, vorkommen. Dieser Weg war bereits durch gruppentheoretische Überlegungen vorgezeichnet [5, 6]. Die Deutung der Quarks als „wirkliche“ Teilchen führte allerdings zu großen Problemen mit dem Pauli-Prinzip, die sich nur durch die Einführung eines neuen Freiheitsgrades, der „Farbe“, lösen ließen. Demnach existieren Quarks in drei Farbzuständen, während alle bekannten Hadronen farbneutral, d. h. Farb-Singulett-Zustände, sind [7, 8].

Hinweise anderer Art auf die nichtelementare Natur der Hadronen kamen aus der tief-inelastischen Elektronenstreuung am Proton [9]. Bei großen Impulsüberträgen zeigen die Strukturfunktionen ein Skalierungsverhalten, das sich am natürlichsten dadurch erklären läßt, daß das Proton aus mehreren Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, sogenannten Partonen, zusammengesetzt ist, an denen die Elektronen quasifrei gestreut werden [10]. Eine Identifizierung der Partonen mit den Quarks ist naheliegend, wenngleich das Proton im Parton-Modell neben den drei „Valenzquarks“ auch eine große Zahl von „Seequarks“ enthält und damit komplizierter aufgebaut ist als in den einfachen Quarkmodellen.

Vor zwanzig Jahren gipfelten die verschiedenen Versuche, die Theorie der Hadronen neu zu strukturieren, schließlich in der Entwicklung der Quantenchromodynamik (QCD), die inzwischen allgemein als die Theorie der starken Wechselwirkung akzep-

tiert ist [11, 12, 13]. Wie die Quantenelektrodynamik (QED) und deren Erweiterung zur Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung ist die QCD eine renormierbare Eichfeldtheorie. Die der Theorie zugrundeliegende Lagrangedichte ist invariant unter lokalen $SU(3)$ -Transformationen im Farbraum. Als Konsequenz aus der nicht-abelschen Struktur der Eichsymmetrie sind die Eichbosonen der QCD, die Gluonen, selbst farbtragende Teilchen. Sie vermitteln daher nicht nur die Wechselwirkung zwischen den Quarks, sondern können auch selbst miteinander wechselwirken.

Eng verknüpft mit dieser Eigenschaft der Gluonen ist die asymptotische Freiheit der QCD [13, 14, 15]: Für kleine Abstände (große Impulsüberträge) geht die Kopplungsstärke gegen null. Dieses Verhalten stimmt gut mit den experimentellen Beobachtungen aus der tief-inelastischen Elektronenstreuung überein.

Die zweite wichtige Eigenschaft der Quantenchromodynamik ist das sogenannte Confinement. Wie bereits angesprochen, sind alle in der Natur frei beobachtbaren Hadronen „farblose“ Teilchen, d. h. Farb-Singulett-Zustände, obwohl sie aus farbtragenden Quarks und Gluonen aufgebaut sind. Insbesondere ist es bisher nicht gelungen, einzelne Quarks als isolierte freie Teilchen zu beobachten. Man geht daher heute davon aus, daß es in der QCD einen Mechanismus gibt, der das Auftreten von freien farbigen Teilchen verbietet: das Confinement. Einen rigorosen Beweis, daß die QCD tatsächlich diese Eigenschaft besitzt, gibt es allerdings bis heute noch nicht.

Wie in allen Bereichen der Physik spielen auch in der QCD die Symmetrien eine besondere Rolle. Darunter ist vor allem die chirale Symmetrie $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ hervorzuheben, die in der QCD in der Näherung verschwindender Strommassen von „up“- und „down“-Quark gilt. Die physikalische Bedeutung dieser Symmetrie liegt darin, daß man die zugehörigen Noether-Ströme mit den Vektor- und Axialvektorströmen der elektroschwachen Wechselwirkung identifizieren kann. Daraus ergeben sich die Hypothesen vom erhaltenen Vektorstrom (CVC) [16] und vom teilweise erhaltenen Axialvektorstrom (PCAC) [17, 18, 19], aus denen sich insbesondere wichtige Eigenschaften des schwachen Zerfalls der Hadronen ableiten lassen. So folgt beispielsweise aus der CVC-Hypothese, daß beim Beta-Zerfall des Neutrons die Vektorkopplung auf der hadronischen Seite durch die starke Wechselwirkung nicht renormiert wird ($G_V^{\text{hadronisch}} = G_V^{\text{leptonisch}}$), während aus der PCAC-Hypothese z. B. die Goldberger-Treiman-Relation [20] für den schwachen Pion-Zerfall hergeleitet werden

kann.

Der Vektoranteil der chiralen Symmetrie, die $SU(2)$ -Isospin-Symmetrie, manifestiert sich in der Natur beispielsweise in den (fast) gleichen Massen von Proton und Neutron. Entsprechend würde man als Konsequenz aus dem axialen Anteil erwarten, daß die Hadronen als Paare jeweils zweier näherungsweise entarteter Teilchen mit entgegengesetzter Parität vorkommen. Solche Paritätsdubletts werden jedoch in der Natur nicht beobachtet. Man schließt daraus, daß der QCD-Vakuumzustand im Gegensatz zur Lagrangedichte nicht chiral symmetrisch ist: Die Symmetrie ist spontan gebrochen. Das bedeutet, daß sich „up“- und „down“-Quark, obwohl ihre Strommassen sehr klein sind und im Idealfall verschwinden, wie Teilchen mit einer viel größeren „Konstituentenmasse“ verhalten. Gleichzeitig gibt es nach dem Goldstone-Theorem [21, 22] drei masselose pseudoskalare Bosonen, die man mit den Pionen identifiziert. Die endliche Masse realistischer Pionen kommt von der kleinen expliziten Brechung der chiralen Symmetrie durch die endlichen Quarkmassen. Neben der asymptotischen Freiheit und dem Confinement gehört die chirale Symmetrie und ihre spontane Brechung zu $SU(2)_V$ zu den wichtigsten Eigenschaften der QCD. Es gibt allerdings bis heute keine direkte Begründung aus der Dynamik der QCD, warum die chirale Symmetrie in der spontan gebrochenen Phase („Nambu-Goldstone mode“) realisiert ist.

Als Folge der asymptotischen Freiheit kann die QCD im Bereich großer raumartiger Impulsüberträge perturbativ gelöst werden. Auf der relativ guten Übereinstimmung dieser Lösungen mit experimentellen Daten, z. B. aus der tief-inelastischen Elektronenstreuung, beruht die weite Akzeptanz, die die QCD heute als Theorie der starken Wechselwirkung erfährt. In dem für die Berechnung von Spektren und Zerfalleigenschaften der Hadronen relevanten Impulsbereich ist die starke Kopplungskonstante dagegen alles andere als klein, so daß eine Berechnung dieser besonders interessanten Größen im Rahmen der perturbativen QCD nicht möglich ist.

Mangels einfacher analytischer Lösungen wurden bereits große Anstrengungen unternommen, die Theorie wenigstens numerisch in den Griff zu bekommen, indem man versucht, die Bewegungsgleichungen der QCD auf einem diskreten Gitter zu lösen (Gitter-Eichtheorie) [23, 24]. Auf diesem Gebiet hat es in den letzten Jahren insbesondere durch die ständig besser werdenden Computer einige Fortschritte ge-

geben, so daß z. B. bei der Beschreibung der Vorgänge bei hohen Temperaturen oder Dichten den numerischen „Daten“ heute teilweise mehr Vertrauen entgegengebracht wird als den experimentellen. Eine zuverlässige Berechnung hadronischer Spektren und Zerfälle ist dagegen trotz enormer Rechenzeiten noch nicht möglich, da die Abstände der Gitterpunkte noch zu groß und das Gitter insgesamt zu klein ist. Auch wenn hier langfristig sicherlich mit weiteren Fortschritten zu rechnen ist, so bleibt doch am Ende immer noch die Frage, ob man auf diese Weise die Eigenschaften der Hadronen wirklich *verstanden* oder nur berechnet hat.

Daher stellen sogenannte effektive Theorien eine sinnvolle Ergänzung zu den Gitterrechnungen dar. Es handelt sich dabei um Modelle, die – wie man hofft – die für die betrachteten Energien relevanten Eigenschaften der QCD besitzen, insgesamt aber einfacher aufgebaut sind, so daß sie konkreten Rechnungen leichter zugänglich sind. Dies ist eine für die Physik keineswegs untypische Vorgehensweise: In einem Experiment versucht man auch, den komplexen Strukturen, wie sie in der Natur vorkommen, dadurch näherzukommen, daß man relativ einfache Situationen herauspräpariert, bei denen möglichst wenige Freiheitsgrade eine Rolle spielen. In der theoretischen Kernphysik verwendet man häufig phänomenologische optische Potentiale, um ein kompliziertes Vielteilchenproblem auf ein effektives Einteilchenproblem zu reduzieren. Bei den meisten effektiven hadronischen Modellen wird die Vereinfachung im Vergleich zur QCD in erster Linie dadurch erzielt, daß auf explizite gluonische Freiheitsgrade als selbstwechselwirkende Eichfelder verzichtet wird.

Die wichtigsten Eigenschaften der QCD sind die asymptotische Freiheit, das Confinement und die spontan gebrochene chirale Symmetrie. Im nichtperturbativen Impulsbereich, für den wir uns hier besonders interessieren, spielt die asymptotische Freiheit natürlich gerade keine große Rolle. Die spontane Brechung der chiralen Symmetrie ist dagegen z. B. für das Verständnis der niedrigen Masse des Pions entscheidend. Ebenso benötigen wir für eine realistische Beschreibung der etwas schwereren Hadronen einen Mechanismus, der ihren Zerfall in freie Quarks verhindert. Ein effektives hadronisches Modell sollte daher nach Möglichkeit diese beiden Eigenschaften auf sich vereinigen. Zumindest, was die reinen Quarkmodelle anbelangt, war dies allerdings lange Zeit nicht der Fall. Vielmehr wurde häufig der eine Aspekt, chirale Symmetrie oder Confinement, betont und der jeweils andere vernachlässigt.

Modelle, die die Bedeutung der chiralen Symmetrie und ihrer spontanen Brechung herausstellen, kamen bereits Anfang der 60er Jahre auf. Als Prototyp gilt das lineare Sigma-Modell von Gell-Mann und Lévi [19]. In diesem Modell wechselwirken zunächst masselose Fermionen (Nukleonen) über den Austausch von skalaren isoskalaren und pseudoskalaren isovektoriellen Mesonen, σ und π , miteinander. Die Lagrangedichte des Modells ist chiral symmetrisch. Als Konsequenz eines „mexican hat“-Potentials besitzt die klassische Energie des Systems für verschwindende Mesonfelder $\sigma = \vec{\pi} = 0$ ein lokales Maximum, so daß das Sigma-Feld einen nichtverschwindenden Grundzustandserwartungswert $\langle \sigma \rangle \neq 0$ hat. Anders als die Lagrangedichte ist daher der Grundzustand nicht invariant unter chiralen Symmetrietransformationen, die chirale Symmetrie ist spontan gebrochen. Um dies explizit zu verdeutlichen, kann man ein „verschobenes“ skalares Feld $\sigma' = \sigma - \langle \sigma \rangle$ mit verschwindendem Vakuumenergieerwartungswert definieren und in die Lagrangedichte einsetzen. In dieser dem Grundzustand angemesseneren Formulierung besitzen nun die Nukleonen einen Massenterm, der zu $\langle \sigma \rangle$ proportional ist. Gleichzeitig sind die Pionen masselos, wie es das Goldstone-Theorem besagt.

In der Tat war das lineare Sigma-Modell zusammen mit dem Nambu–Jona-Lasinio-Modell [25, 26], das wir im nächsten Kapitel ausführlicher besprechen werden, einer der Wegbereiter des Goldstone-Theorems, das erst 1961/62 allgemein bewiesen wurde [21, 22]. Die besondere Bedeutung dieser frühen chiralen Modelle bestand darin, daß sie über das Prinzip der spontanen Symmetriebrechung einerseits die relativ hohe Masse des Nukleons und gleichzeitig den phänomenologischen Erfolg der PCAC-Hypothese, die eine kleine Fermionmasse voraussetzt, erklären konnten. Nach Formulierung der QCD erfuhren diese Modelle eine neue Interpretation als effektive Quarkmodelle, indem man die Fermionfelder nun mit den Quarks und nicht mehr mit den Nukleonen identifiziert. Es ist jedoch nicht weiter verwunderlich, daß diese in ihrer ursprünglichen Form lange vor der QCD entwickelten Modelle keinen Mechanismus bereithalten, der das Auftreten freier Quarks verhindert.

Im Gegensatz zu den die chirale Symmetrie in den Vordergrund stellenden effektiven Modellen spielte bei der Entwicklung der Bag-Modelle das Confinement die zentrale Rolle. Im ältesten Modell dieser Art, dem Bag-Modell von Bogoliubov, bewegen sich die Quarks als freie masselose Teilchen innerhalb eines sphärischen „Bags“ mit Radius R [27]. Durch ein unendlich hohes Potential für Radien $r > R$ wird verhindert,

daß die Quarks den Bag verlassen können. Dieses Modell wurde in den 70er Jahren im Lichte der inzwischen formulierten QCD am MIT weiterentwickelt [28, 29, 30]. Um den Bag gegen den nach außen gerichteten „Gasdruck“ der an den Wänden reflektierten Quarks zu stabilisieren, führte die MIT-Gruppe einen nach innen gerichteten, dem Bag-Volumen proportionalen Vakuumdruck ein, der den komplizierten Vorgängen beim Schaffen eines Freiraums für farbtragende Teilchen im nichttrivialen QCD-Vakuum phänomenologisch Rechnung trägt. Durch Einführung einer vom Ein-Gluon-Austausch motivierten chromomagnetischen Wechselwirkung innerhalb des Bags konnte auch eine Massenaufspaltung von Nukleon und Delta erzielt werden. Das MIT-Bag-Modell besitzt also nach Konstruktion einen Confinement-Mechanismus. Genau dieser Mechanismus bricht jedoch gleichzeitig die chirale Symmetrie: Wenn die Quarks an den Bag-Wänden reflektiert werden, ändern sie zwar ihren Impuls, nicht aber ihren Spin. Dadurch kann sich die Helizität der Quarks ändern. Die Verletzung dieser wichtigen Eigenschaft der QCD hat zur Folge, daß das MIT-Bag-Modell, das ansonsten recht zufriedenstellende hadronische Spektren liefert, bei der Pionmasse völlig versagt.

In den chiralen Bag-Modellen [31, 32, 33] wird die Verletzung der chiralen Symmetrie an der Bag-Oberfläche dadurch aufgehoben, daß man ähnlich wie im Sigma-Modell Sigma- und Pion-Felder an die Quarks ankoppelt. Diese Modelle besitzen also beide im Mittlerenergiebereich relevanten Eigenschaften der QCD, chirale Symmetrie und Confinement, und stellen damit recht brauchbare effektive Theorien zur Beschreibung der Hadronen dar. Unbefriedigend ist allerdings, daß das Pion, das selbst aus Quarks und Antiquarks besteht, als elementares Feld in die Modelle eingeht. Zumindest zur Beschreibung des Pions sind die chiralen Bag-Modelle daher weniger gut geeignet.

Ziel dieser Arbeit ist es, ein chiral symmetrisches *reines* Quarkmodell ohne freie Quarks zu entwickeln. Ausgangspunkt stellt dabei das Nambu–Jona-Lasinio-Modell (NJL-Modell) dar. Im NJL-Modell wechselwirken Quarks über eine chiral symmetrische Kontaktkraft miteinander. Wie in der QCD ist die chirale Symmetrie spontan gebrochen. Das Modell besitzt jedoch kein Confinement, so daß z. B. die etwas schwereren Mesonen in freie Quarks zerfallen können. In dieser Hinsicht ist es also zum MIT-Bag-Modell komplementär.

In dieser Arbeit wollen wir das NJL-Modell so verallgemeinern, daß auch das Auftreten freier Quarks unterdrückt wird. Im Hinblick darauf wollen wir in Kapitel 2 zunächst einige Aspekte des NJL-Modells, insbesondere das fehlende Confinement, etwas genauer besprechen.

In Kapitel 3 führen wir dann unser neues Modell ein. Der entscheidende Unterschied zum NJL-Modell besteht darin, daß wir die punktförmige Wechselwirkung durch einen frei parametrisierten Quark-Antiquark-Streukern ersetzen. Aus der Vielteilchentheorie ist bekannt, daß eine Zweifermion-Streuamplitude im allgemeinen nichtlokal und energieabhängig ist, da sie durch Aufsummation einer unendlichen Reihe elementarer Streuprozesse entsteht. Wir verwenden daher einen nichtlokalen Streukern. Wir zeigen zunächst, daß die Symmetrieeigenschaften des NJL-Modells, vor allem die chirale Symmetrie, durch die Nichtlokalität der Wechselwirkung nicht zerstört werden. Insbesondere gilt für unser Modell das Goldstone-Theorem. Anschließend untersuchen wir die Möglichkeit, das Auftreten freier Quarks durch eine geeignete Wahl der Wechselwirkung zu unterbinden. In unserem nichtlokalen Modell besitzen die Quarks eine energie- und impulsabhängige Selbstenergie. Wächst diese mit der Energie stark genug an, ist es möglich, daß die Einteilchenpropagatoren polfrei werden. Physikalisch bedeutet das, daß Quarks nicht als reelle isolierte Teilchen im Vakuum existieren. Als einfache Anwendung berechnen wir Mesonenmassen und zeigen, daß die Mesonen tatsächlich gegenüber Quark-Antiquark-Zerfall stabil sind. In Kapitel 4 beschäftigen wir uns mit der Ankopplung elektromagnetischer und schwacher Felder an unser Modell. Dabei müssen Zusatzterme berücksichtigt werden, die infolge der nichtlokalen Wechselwirkung auftreten. Wir zeigen die Gültigkeit von Ward-Takahashi-Identitäten sowie der Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation und einer verallgemeinerten Goldberger-Treiman-Relation für unser Modell.

In Kapitel 5 diskutieren wir schließlich die Erweiterung des Modells auf drei Quark-Flavours.

* * * * *

In dieser Arbeit setzen wir $\hbar = c = 1$ und verwenden Bjorken-Drell-Konventionen für die Metrik und Gammamatrizen [34].

2. Das Nambu – Jona-Lasinio – Modell

Da weite Teile des neuen Quarkmodells, das in dieser Arbeit diskutiert werden soll, auf dem Nambu–Jona-Lasinio–Modell (NJL-Modell) basieren, wollen wir in diesem Kapitel einige Aspekte dieses Modells kurz besprechen. Das NJL-Modell wurde 1961 in Analogie zur BCS-Theorie der Supraleitung [35] entwickelt. Elementare Bausteine des Modells sind Fermionen, die damals – rund zehn Jahre vor der Formulierung der QCD – als Nukleonen interpretiert wurden. Heute verwendet man das NJL-Modell als effektives Quarkmodell. Dazu führt man die Quark-Farbe als zusätzlichen Freiheitsgrad ein. An der dynamischen Struktur des Modells ändert sich dadurch aber praktisch nichts.

Die zunächst masselosen Quarks wechselwirken über eine chirale symmetrische Kontaktkraft miteinander [25]. Wenn die Kopplungskonstante einen bestimmten kritischen Wert überschreitet, kommt es zum spontanen Bruch der chiralen Symmetrie und die Quarks erhalten eine endliche Masse. Gleichzeitig entsteht ein pseudoskalarer gebundener Quark-Antiquark-Zustand mit verschwindender Masse, den Nambu und Jona-Lasinio als idealisiertes Pion deuteten. Startet man mit einer kleinen, die chirale Symmetrie explizit brechenden, nackten Quarkmasse, bekommt die Pionmasse einen endlichen Wert [26].

Wir haben also eine ähnliche Situation vorliegen wie im linearen Sigma-Modell. Der Unterschied besteht darin, daß σ und π im NJL-Modell nicht als elementare Felder, sondern als Quark-Antiquark-Zustände auftreten. Dadurch wird die Bedingung, die zur spontanen Symmetriebrechung führt, nicht direkt in Form eines „mexican hat“-Potentials von außen vorgegeben, sondern ergibt sich aus der Dynamik der Wechselwirkung. Die Bestimmung der Quark- und Mesonmassen erfolgt daher auch nicht auf der Ebene der Lagrangedichte („tree level“), sondern durch explizite Auswertung von Feynman-Graphen. Wegen der großen Ähnlichkeit zur Landau-Migdal-Theorie [36] kann dabei auf Methoden aus der Kernphysik, insbesondere Hartree-Fock und RPA, zurückgegriffen werden.

Die Erfolge des NJL-Modells als effektives Quarkmodell beruhen im wesentlichen auf den gemeinsamen Symmetrieeigenschaften mit der QCD. Wir wollen deshalb zunächst die Symmetrien der QCD-Lagrangedichte besprechen, bevor wir im zweiten Abschnitt die Lagrangedichte des NJL-Modells einführen. Zur Vorbereitung auf

die analogen Prozesse in unserem neuen Modell behandeln wir anschließend die spontane Symmetriebrechung und die Beschreibung von Mesonen. Zuletzt diskutieren wir den Zerfall der Mesonen in freie Quarks als Konsequenz des fehlenden Confinements des Modells. Auf technische Details, die später noch einmal im Rahmen des neuen Modells diskutiert werden, wollen wir dabei, soweit sie für das allgemeine Verständnis unerheblich sind, verzichten.

2.1. SYMMETRIEN DER QCD-LAGRANGEDICHTE

Die Lagrangedichte der QCD lautet:

$$\mathcal{L}_{QCD}(x) = \bar{q}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - \hat{M})q(x) - \frac{1}{4}G^{\mu\nu k}(x)G_{\mu\nu}^k(x). \quad (2.1)$$

Hier ist $q(x)$ der Feldoperator für die Quarks. Er besitzt $4n_f n_c$ Komponenten, wobei $n_c = 3$ die Zahl der Quark-Farben und n_f die Zahl der Flavours ist. Bis heute sind fünf Flavours („up“, „down“, „strange“, „charm“ und „bottom“) experimentell bekannt. Aus Symmetrie zu den sechs bekannten Fermionen (e , μ , τ und zugehörige Neutrinos) erwartet man die Existenz eines weiteren Quarks („top“).

$\hat{M}$ ist eine diagonale, von der Quarkfarbe unabhängige Matrix für die Quarkmassen. Im Flavour-Raum besitzt sie die Struktur

$$\hat{M} = \text{diag}(m_o^u, m_o^d, m_o^s, \dots). \quad (2.2)$$

Die einzelnen Elemente m_o^i der Matrix $\hat{M}$, die sogenannten Strommassen der Quarks, sind keine direkten Observablen. Sie lassen sich aber indirekt aus Stromalgebra-Relationen abschätzen. Für die beiden leichtesten Quark-Flavours, „up“ und „down“, ergeben sich dabei Werte von unter 10 MeV^* .

Um eine gegenüber lokalen $SU(3_c)$ -Transformationen invariante Lagrangedichte zu erhalten, muß man die Ableitung ∂_μ , die in die Lagrangedichte für ein freies Dirac-Teilchen eingeht, durch die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\lambda_c^k}{2} A_\mu^k \quad (2.3)$$

*) Die Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation [37] liefert $\frac{1}{2}(m_o^u + m_o^d) = \frac{m_\pi^2 f_\pi^2}{\langle \bar{q}q \rangle} = 5.4 \text{ MeV}$ für $\langle \bar{q}q \rangle = 2(250 \text{ MeV})^3$.

ersetzen. Wie in der QED bekommt man auf diese Weise einen neuen Term, der die Kopplung der Fermionen (hier der Quarks) mit den Eichfeldern (Gluonen) beschreibt. Dabei sind λ_c^k die acht Generatoren der Gruppe $SU(3)$ („Gell-Mann-Matrizen“). Der Index c zeigt an, daß sie nur auf die Farb-Komponenten wirken. Die Eichfelder A_μ^k , $k = 1$ bis 8, sind die Gluonen.

Der Feldstärke-Tensor $G_{\mu\nu}^k$ hängt mit den Gluon-Feldern folgendermaßen zusammen:

$$G_{\mu\nu}^k(x) = \partial_\mu A_\nu^k(x) - \partial_\nu A_\mu^k(x) + g f_{klm} A_\mu^l(x) A_\nu^m(x). \quad (2.4)$$

Dabei sind f_{klm} die Strukturkonstanten der Gruppe $SU(3)$. Aufgrund der nicht-abelschen Struktur der Eichsymmetrie enthält $G_{\mu\nu}^k$ neben den beiden Ableitungstermen, die aus der Elektrodynamik bekannt sind, noch einen weiteren Term, in den die Eichfelder quadratisch eingehen. Der kontrahierte Ausdruck $G^{\mu\nu k} G_{\mu\nu}^k$ in Gl. (2.1) besteht also aus einem bilinearen, einem trilinearen und einem quadrilinearen Term in A_μ^k . Quantisierung des bilinearen Terms führt analog zur QED zum freien Gluon-Propagator. Die beiden anderen Terme beschreiben Selbstkopplungen der Gluonen und treten nur in nicht-abelschen Eichtheorien auf. Wie man aus Gl. (2.3) und Gl. (2.4) erkennt, besitzt die QCD nur eine Kopplungskonstante g , die sowohl die Quark-Gluon-Kopplung als auch die Gluon-Selbstkopplung beschreibt.

Die Lagrangedichte (Gl. (2.1)) ist nach Konstruktion invariant unter lokalen $SU(3_c)$ -Symmetrietransformationen:

$$\begin{aligned} q(x) &\longrightarrow e^{i\xi^k(x)\frac{\lambda_c^k}{2}} q(x) \\ A_\mu^i(x) &\longrightarrow [e^{i\xi^k(x)C^k}]^{ij} A_\mu^j(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \xi^i(x) \end{aligned} \quad (2.5)$$

mit $(C^k)^{ij} = -if_{kij}$.

Daneben besitzt $\mathcal{L}_{QCD}$ noch eine Reihe exakter oder approximativer *globaler* Symmetrien, die nach dem Noether-Theorem jeweils mit einem erhaltenen Strom verbunden sind. Diese Symmetrien sind in Tabelle 2.1 aufgelistet.

Neben der globalen $SU(3_c)$ -Symmetrie, die wir der Vollständigkeit halber mit aufgeführt haben, ist nur die $U(1)_V$ -Symmetrie exakt. Die zugehörige erhaltene Ladung $B = \int d^3x \mathcal{V}_0^0$ ist die Baryonenzahl.

<i>Symmetrie</i>	<i>Transformation</i>	<i>Strom</i>
$U(1)_V$:	$q(x) \longrightarrow e^{i\alpha} q(x)$	$\mathcal{V}_\mu^0 = \bar{q}(x) \gamma_\mu q(x)$
$U(1)_A$:	$q(x) \longrightarrow e^{i\beta \gamma_5} q(x)$	$\mathcal{A}_\mu^0 = \bar{q}(x) \gamma_\mu \gamma_5 q(x)$
$SU(2_f)_V$:	$q(x) \longrightarrow e^{i\vec{\rho} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}} q(x)$	$\mathcal{V}_\mu^k(x) = \bar{q}(x) \gamma_\mu \frac{\tau^k}{2} q(x)$
$SU(2_f)_A$:	$q(x) \longrightarrow e^{i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} \gamma_5} q(x)$	$\mathcal{A}_\mu^k(x) = \bar{q}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^k}{2} q(x)$
$SU(3_c)$:	$q(x) \longrightarrow e^{i\vec{\xi} \cdot \frac{\vec{\lambda}_c}{2}} q(x)$	$\mathcal{J}_\mu^a(x) = \bar{q}(x) \gamma_\mu \frac{\lambda_c^a}{2} q(x)$

Tabelle 2.1: Globale Symmetrien und erhaltene Ströme der QCD

Die Isospin-Symmetrie $SU(2_f)_V$ gilt nur im Limes gleicher Quarkmassen $m_o^u = m_o^d$ exakt. Dabei kommt es jedoch mehr auf den absoluten Wert der Massendifferenz $m_o^d - m_o^u$ im Vergleich zu typischen hadronischen Größenordnungen, wie z. B. der Nukleonenmasse, an als auf das relative Massenverhältnis $m_o^d : m_o^u$. In diesem Sinne ist $SU(2_f)_V$ eine recht gute Symmetrie und soll in dieser Arbeit in den meisten Fällen als exakt angenommen werden. Entsprechend ist der zugehörige Vektorstrom $\mathcal{V}_\mu^k$ erhalten

$$\partial^\mu \mathcal{V}_\mu^k(x) = 0, \quad (2.6)$$

und es gibt drei erhaltene Ladungen $Q^k = \int d^3x \mathcal{V}_0^k(x)$.

Die axiale $SU(2)$ -Flavour-Symmetrie ($SU(2_f)_A$) ist nur im Limes verschwindender Strommassen von „up“- und „down“-Quark exakt erfüllt. Unter Zuhilfenahme der aus Gl. (2.1) ableitbaren klassischen Bewegungsgleichungen folgt für $m_o^u = m_o^d =: m_o$:

$$\partial^\mu \mathcal{A}_\mu^k(x) = 2m_o \bar{q}(x) i \gamma_5 \frac{\tau^k}{2} q(x). \quad (2.7)$$

Im Limes $m_o = 0$ verschwindet die rechte Seite und der axiale Strom ist erhalten. In der Realität ist m_o zwar ungleich null, im Vergleich zur Nukleonenmasse z. B. aber relativ klein. $SU(2_f)_A$ ist daher eine gute approximative Symmetrie der QCD, und man spricht von einem teilweise erhaltenen Axialvektorstrom. Wegen der nicht-abgeschlossenen Gruppenstruktur der axialen $SU(2)$ -Transformation kombiniert man $SU(2_f)_V$ und $SU(2_f)_A$ im allgemeinen zu den „chiralen“ Gruppen $SU(2_f)_L$ und $SU(2_f)_R$. Der Name dieser Gruppen beruht darauf, daß die zugehörigen erhaltenen Ladungen Q_L^k und Q_R^k zu den Projektionsoperatoren auf links- und

rechtshändige Helizitäten, $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$, proportional sind. In der Natur ist die chirale Symmetrie spontan gebrochen.

Die fünfte in Tabelle 2.1 aufgelistete Symmetrie der QCD-Lagrangedichte, die $U(1)_A$ -Symmetrie, äußert sich in der Natur weder im Auftreten entsprechender Paritätsdoublets noch in der Existenz eines entsprechenden Goldstone-Bosons. Dieses sogenannte $U(1)_A$ -Problem wurde 1976 von t'Hooft auf Instantoneffekte zurückgeführt [38, 39].

2.2. DIE NJL-LAGRANGEDICHTE

Die Lagrangedichte des NJL-Modells [26] lautet unter Verwendung unserer Konventionen für die Metrik und die Dirac-Matrizen:

$$\mathcal{L}_{NJL}(x) = \bar{q}(x) (i\partial - m_0) q(x) + g_0 [(\bar{q}(x)q(x))^2 + (\bar{q}(x)i\gamma_5\vec{\tau}q(x))^2]. \quad (2.8)$$

Dabei ist q der Quark-Feldoperator. Der zugehörige Dirac-Spinor besitzt $4n_f n_c$ Komponenten, wobei n_f die Zahl der Quark-Flavours und $n_c = 3$ die Zahl der Farbfreiheitsgrade ist. Wir beschränken uns vorläufig auf zwei Flavours, „up“ und „down“, d.h. $n_f = 2$.

Die Kontaktkraft, über die die Quarks miteinander wechselwirken, besteht in Analogie zu den Sigma- und Pi-Feldern im Sigma-Modell aus einem skalaren - isoskalaren und einem pseudoskalaren - isovektoriellen Anteil. Die Kopplungskonstante g_0 , die für beide Anteile gleich groß ist, hat die Dimension $[\text{Masse}]^{-2}$, also die Dimension eines Bosonpropagators. Darin wird der effektive Charakter des Modells deutlich: Die punktförmige Quark-Quark-Wechselwirkung entspricht dem Austausch eines unendlich schweren Bosons. Physikalisch könnte man sich darunter ein effektives nicht-perturbatives Gluon mit einer näherungsweise konstanten Selbstenergie vorstellen, die im betrachteten Impulsintervall viel größer ist als der übertragene Impuls. Eine strenge Herleitung der NJL-Wechselwirkung aus der QCD gibt es aber bis heute noch nicht.

Eng verknüpft mit der Dimension der Kopplungskonstanten ist der Divergenzindex der Wechselwirkung [40]:

$$\delta = -\dim g_0 = 2. \quad (2.9)$$

Ein positiver Divergenzindex bedeutet, daß das Modell nicht renormierbar ist: Der oberflächliche Divergenzgrad eines Feynman-Graphen steigt mit der Anzahl der Ver-

tizes. Deshalb sind im Prinzip unendlich viele Counterterme erforderlich, um die Theorie zu renormieren. In der Praxis verwendet man statt dessen ein Regularisierungsverfahren, das die divergenten Integrale endlich macht. Am einfachsten ist es, die Integration bei einem vorgegebenen Abschneideparameter („Cutoff“) abbrechen. Der Cutoff gibt grob den Gültigkeitsbereich des effektiven Modells an. Im NJL-Modell liegt er in der Regel in der Gegend von einem GeV.

Die NJL-Wechselwirkung ist invariant unter globalen Symmetrietransformationen der Gruppe $U(1)_V \otimes SU(2_f)_L \otimes SU(2_f)_R \otimes SU(3_c)$, also unter den relevanten globalen Symmetrietransformationen der QCD. Die chirale Symmetrie wird durch die Strommasse m_o im kinetischen Anteil der NJL-Lagrangedichte explizit gebrochen. Wir haben jedoch gesehen, daß m_o im Vergleich zu der typischen hadronischen Skala von $m_N \approx 1\text{GeV}$ relativ klein ist, so daß das NJL-Modell im $SU(2_f)$ -Sektor in guter Näherung als chiral symmetrisch angesehen werden kann. Insbesondere gibt es wie in der QCD (vgl. Tabelle 2.1) einen erhaltenen Vektorstrom $V_\mu^k = \bar{q}\gamma_\mu \frac{\tau^k}{2} q$ und einen näherungsweise erhaltenen Axialvektorstrom $A_\mu^k = \bar{q}\gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^k}{2} q$, der Gl. (2.7) erfüllt.

2.3. SPONTANE SYMMETRIEBRECHUNG

Durch kanonische Quantisierung oder über Pfadintegraltechniken können Feynmanregeln für das NJL-Modell hergeleitet werden.

Der kinetische Anteil von $\mathcal{L}_{NJL}$ (Gl. (2.9)) beschreibt ein Dirac-Teilchen der Masse m_o . Der zugehörige freie Propagator ist also

$$iS_F^{(o)}(p) = \frac{i}{\not{p} - m_o + i\varepsilon} = i \frac{\not{p} + m_o}{p^2 - m_o^2 + i\varepsilon}. \quad (2.10)$$

Quantisierung des Wechselwirkungsanteils liefert einen skalaren-isoskalaren und einen pseudoskalaren-isovektoriellen Quark-Antiquark-Vertex:

$$\hat{V}_{ca,db}^{dir} = 2ig_o \{ (1 \ 1_f 1_c)_{ca} (1 \ 1_f 1_c)_{db} + \sum_k (i\gamma_5 \tau^k 1_c)_{ca} (i\gamma_5 \tau^k 1_c)_{db} \}. \quad (2.11)$$

Ein solcher Vertex ist in Abb. 2.1 diagrammatisch dargestellt. Die Indizes a bis d beziehen sich auf die entsprechenden Spinor- oder Propagatorkomponenten, die der Vierpunktvertex miteinander verbindet.

Wir haben nur den direkten Anteil der Wechselwirkung angegeben. Daneben gibt es noch Austauschterme, bei denen die beiden auslaufenden Teilchen gegenüber

Gl. (2.11) jeweils vertauscht sind:

$$\hat{V}_{ca,db}^{exc} = -\hat{V}_{da,cb}^{dir}. \quad (2.12)$$

Diese Terme sind im Vergleich zu den direkten Vertizes von der Größenordnung $\frac{1}{n_c}$ und sollen in diesem einleitenden Kapitel vernachlässigt werden. Im Prinzip können sie über eine Fierz-Transformation auf die Form der direkten Vertizes gebracht und in den Kopplungskonstanten absorbiert werden.

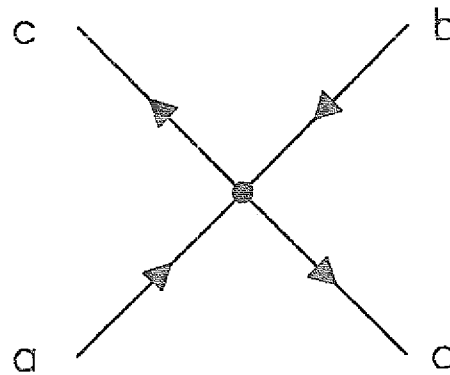


Abb. 2.1: Der Vierpunkt-Vertex des NJL-Modells.

Die nackten Quarks werden durch Wechselwirkung mit anderen Quarks und Antiquarks „gedresst“, d. h. sie erhalten eine Selbstenergie. In der Hartree-Näherung ist der gedresste Quarkpropagator durch eine Gleichung gegeben, die in Abb. 2.2 graphisch dargestellt ist:

$$iS_F(p) = iS_F^{(o)}(p) + iS_F^{(o)}(p) (-i\Sigma) iS_F(p). \quad (2.13)$$

Unter Anwendung der Feynman-Regeln erhalten wir für die Quark-Selbstenergie:

$$-i\Sigma = (-) 2ig_o \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr}[(1 \ 1_f 1_c) iS_F(k)] (1 \ 1_f 1_c). \quad (2.14)$$

Das Minuszeichen und die Spur sind eine Konsequenz der geschlossenen Fermionenschleife. Der pseudoskalare Vertex trägt nicht zur Selbstenergie bei. Außerdem

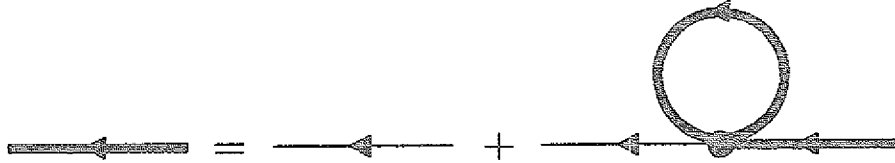


Abb. 2.2: Graphische Darstellung der Dyson-Schwinger-Gleichung in Hartree-Näherung für den gedressten Quark-Propagator (dicke Linien) im NJL-Modell. Die dünnen Linien stellen den nackten Quark-Propagator dar.

haben wir, wie angekündigt, den Beitrag der Austauschsterme (den „Fock-Term“) vernachlässigt.

Das Gleichungssystem Gl. (2.13) und Gl. (2.14) stellt offensichtlich ein Selbstkonsistenzproblem dar, da in die Selbstenergie der gedresste Propagator eingeht. Wir können dies in ein Selbstkonsistenzproblem für die gedresste Quarkmasse

$$m := m_o + \Sigma, \quad (2.15)$$

die sogenannte Konstituentenquarkmasse, umwandeln. Dazu lösen wir zunächst Gl. (2.13) nach dem Propagator $S_F(p)$ auf:

$$S_F(p) = [S_F^{(o)-1}(p) - \Sigma]^{-1} = \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon}. \quad (2.16)$$

Damit kann in Gl. (2.14) die Spur berechnet werden, und wir bekommen

$$m = m_o + m (2ig_o) (4n_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.17)$$

Betrachten wir zuerst den chiralen Grenzfall $m_o = 0$. In diesem Fall folgt aus Gl. (2.17)

$$m = 0 \quad (2.18)$$

oder

$$(2ig_o) (4n_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = 1. \quad (2.19)$$

Die triviale Lösung $m = 0$ entspricht dem Ergebnis einer störungstheoretischen Behandlung des Problems: Die perturbative Quark-Selbstenergie, die man analog zu Gl. (2.14) erhält, indem man dort den gedressten Propagator $S_F(k)$ durch den freien Propagator $S_F^{(o)}(k)$ ersetzt, verschwindet im chiralen Grenzfall.

Überschreitet die Kopplungskonstante g_o einen kritischen Wert

$$g_o^{crit} = [(8in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\epsilon}]^{-1}, \quad (2.20)$$

besitzt auch Gl. (2.19) reelle Lösungen für die Quarkmasse m . Im Gegensatz zum trivialen Fall sind diese Lösungen von null verschieden: Die chirale Symmetrie ist spontan gebrochen. Genauere Untersuchungen der Grundzustandsenergie zeigen, daß diese Lösungen energetisch niedriger liegen als die triviale Lösung $m = 0$ [41]. Sobald die Kopplung also stark genug ist, daß Gl. (2.19) eine reelle Lösung besitzt, liegt das System in einer Phase mit spontan gebrochener Symmetrie („Nambu-Goldstone-Mode“) vor.

Wie in der BCS-Theorie nennt man Gl. (2.19) auch „Gap-Gleichung“, weil aufgrund der endlichen Quarkmasse im Energiespektrum der Quarks im Bereich zwischen $-m$ und m eine Lücke existiert. In Anwesenheit einer nackten Quarkmasse $m_o \neq 0$ nimmt die Gleichung folgende verallgemeinerte Form an:

$$(2ig_o) (4n_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = 1 - \frac{m_o}{m}. \quad (2.21)$$

Die Gap-Gleichung stellt eine Beziehung zwischen der NJL-Kopplungskonstanten g_o und der Konstituentenquarkmasse m her. Da g_o – anders als beispielsweise die Elementarladung e in der QED – keine fundamentale Größe ist, gibt man in praktischen Rechnungen meistens die Masse m vor und berechnet die Kopplungskonstante aus Gl. (2.21). Das hat den Vorteil, daß man statt eines Selbstkonsistenzproblems nur ein Integral zu lösen hat. Außerdem hat man zumindest von der Größenordnung von m eine anschauliche Vorstellung, was bei g_o nicht der Fall ist.

Wir haben in Gl. (2.17) bis Gl. (2.21) die dort auftretenden Integrale wie konvergente Ausdrücke behandelt. In Wahrheit divergieren sie jedoch quadratisch und müssen

regularisiert werden. Dazu wollen wir hier zwei Verfahren angeben, die bereits in der Originalarbeit von Nambu und Jona-Lasinio vorgeschlagen wurden.

Bei der nicht-kovarianten Regularisierung mit dreidimensionalem scharfen Cutoff führt man zuerst die Integration über die Energievariable durch. Die Dreierimpulsintegration schneidet man dann bei einem bestimmten maximalen Betrag Λ ab.

Damit nimmt die Gap-Gleichung die folgende Form an:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{m_o}{m} &= (2g_o) (4n_f n_c) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{m^2 + \vec{k}^2}} \theta(\Lambda^2 - \vec{k}^2) \\ &= (g_o \Lambda^2) \left(\frac{n_f n_c}{\pi^2} \right) \left\{ \sqrt{1 + \frac{m^2}{\Lambda^2}} - \frac{m^2}{\Lambda^2} \ln \left(\frac{\Lambda}{m} + \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{m^2}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Bei der kovarianten Regularisierung mit vierdimensionalem scharfen Cutoff führt man das Integral zunächst durch eine Wick-Rotation vom Minkowski-Raum in den vierdimensionalen euklidischen Raum über. Dort integriert man dann bis zu einem maximalen Impulsübertrag Λ :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{m_o}{m} &= (2g_o) (4n_f n_c) \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_E^2 + m^2} \theta(\Lambda^2 - k_E^2) \\ &= (g_o \Lambda^2) \left(\frac{n_f n_c}{2\pi^2} \right) \left\{ 1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dieses Verfahren ist insofern kovariant, als es die vier euklidischen Impulskomponenten gleichbehandelt. Es ist jedoch zu beachten, daß die Stufenfunktion $\theta(\Lambda^2 - k_E^2)$ erst nach der Wick-Rotation eingeführt wurde. Da sie die Analytizität des Integranden zerstört, ist die Rücktransformation des euklidischen Integrals in ein kovariant regularisiertes Integral im Minkowski-Raum nicht ohne weiteres möglich.

Neben der Regularisierung mit drei- oder vierdimensionalem scharfen Cutoff findet man in der Literatur eine Reihe anderer Regularisierungsschemata, z. B. die Methode von Pauli und Villars [42], die Eigenzeit-Regularisierung [43] oder die dimensionale Regularisierung [44, 45]. Diese Verfahren sind teils technisch, teils begrifflich etwas aufwendiger als die Cutoff-Regularisierung, sie haben jedoch den Vorteil, daß sie die Eichinvarianz nicht verletzen.

2.4. BESCHREIBUNG VON MESONEN

Die elementaren Bausteine des NJL-Modells sind Quarks und Antiquarks, die über eine Kontaktkraft miteinander wechselwirken. Die punktförmige Wechselwirkung entspricht formal dem Austausch unendlich schwerer Bosonen. Durch den Austausch von Quark-Antiquark-Paaren können die Quarks jedoch auch über endliche Entfernungen miteinander in Wechselwirkung treten. Es ist naheliegend, diese Prozesse mit dem Austausch von Mesonen zu identifizieren.

Das Standard-Verfahren ist in Abb. 2.3 dargestellt: Analog zur „random-phase approximation“ (RPA) summiert man in den verschiedenen Kanälen der Wechselwirkung jeweils eine unendliche Reihe von Quark-Antiquark-Polarisationsgraphen auf. Das Ergebnis parametrisiert man dann durch den Propagator eines Mesons mit den entsprechenden Quantenzahlen und Meson-Quark-Kopplungskonstanten.

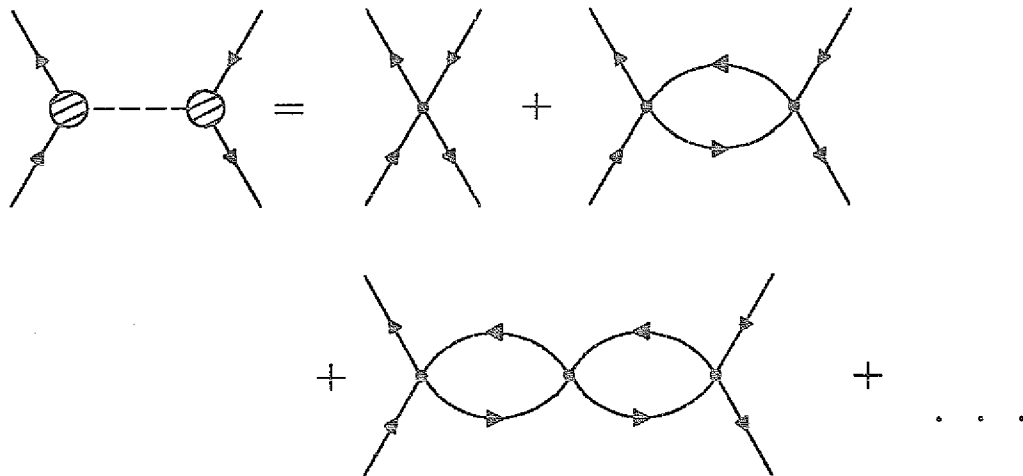


Abb. 2.3: Beschreibung von Mesonen im NJL-Modell. Die iterierten Quark-Antiquark-Polarisationsgraphen (rechte Seite der Gleichung) werden durch einen Meson-Propagator und Meson-Quark-Quark-Kopplungskonstanten parametrisiert (linke Seite der Gleichung).

Als Beispiel betrachten wir den pseudoskalaren Kanal: Durch Iteration der nackten Vertizes $2ig_0(i\gamma_5\tau^k\mathbf{1}_c) \otimes (i\gamma_5\tau^k\mathbf{1}_c)$ erhält man die T-Matrix

$$\hat{T}_P^k(q^2) = t_P(q^2) (i\gamma_5\tau^k\mathbf{1}_c) \otimes (i\gamma_5\tau^k\mathbf{1}_c) \quad (2.24)$$

mit

$$it_P(q^2) = 2ig_o + 2ig_o (-iJ_{PP}(q^2)) it_P(q^2) = \frac{2ig_o}{1 - 2g_o J_{PP}(q^2)}. \quad (2.25)$$

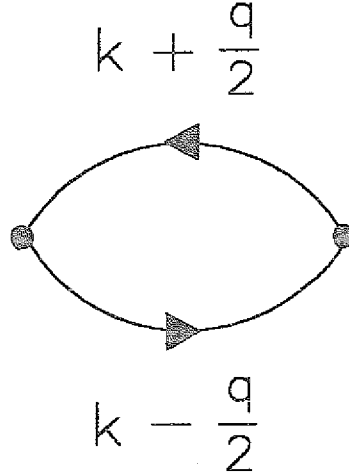


Abb. 2.4: Quark-Antiquark-Polarisationsgraph im NJL-Modell.

Die Funktion $J_{PP}(q^2)$ ist der in Abb. 2.4 dargestellte Polarisationsgraph, ausgewertet für pseudoskalare Kopplungen:

$$\begin{aligned} J_{PP}(q^2) &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} [(i\gamma_5 \tau^k 1_c) S_F(k + \frac{q}{2}) (i\gamma_5 \tau^k 1_c) S_F(k - \frac{q}{2})] \\ &= (4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - \frac{q^2}{4} - m^2}{[(k + \frac{q}{2})^2 - m^2 + i\varepsilon][(k - \frac{q}{2})^2 - m^2 + i\varepsilon]}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Interpretiert man nun das korrelierte Quark-Antiquark-Paar als Pion, wie es in Abb. 2.3 auf der linken Seite dargestellt ist, so gilt andererseits:

$$it_P(q^2) = \frac{-ig_{\pi qq}^2}{q^2 - m_\pi^2} \quad (2.27)$$

mit der Pionmasse m_π und der Pion-Quark-Kopplungskonstanten $g_{\pi qq}$.

Die Masse des Pions ist also durch die Polstelle der T-Matrix gegeben:

$$1 - 2g_o J_{PP}(q^2 = m_\pi^2) = 0. \quad (2.28)$$

Wir wollen nun zeigen, daß – in Übereinstimmung mit der Aussage des Goldstone-Theorems – die Pionmasse im chiralen Limes verschwindet, wenn die chirale Symmetrie spontan gebrochen ist. Dazu werten wir die Funktion J_{PP} an der Stelle $q = 0$ aus:

$$J_{PP}(0) = (4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} . \quad (2.29)$$

Unter Verwendung der Gap-Gleichung (Gl. (2.21)) folgt daraus:

$$1 - 2g_o J_{PP}(0) = \frac{m_o}{m} . \quad (2.30)$$

Somit ist im chiralen Limes ($m_o = 0$) Gl. (2.28) für $m_\pi = 0$ erfüllt, wenn die Konstituentenquarkmasse m endlich bleibt, d. h. solange sich das System im Nambu-Goldstone-Mode befindet:

$$m_o = 0 , \quad m \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m_\pi = 0 . \quad (2.31)$$

Auf ähnliche Weise kann man den skalaren-isoskalaren Kanal durch Austausch eines skalaren Mesons, des Sigma-Mesons, parametrisieren. Die entsprechende Polarisationsfunktion

$$\begin{aligned} J_{SS}(q^2) &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[(1 \ 1_f \ 1_c) S_F(k + \frac{q}{2}) (1 \ 1_f \ 1_c) S_F(k - \frac{q}{2}) \right] \\ &= (4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - \frac{q^2}{4} + m^2}{[(k + \frac{q}{2})^2 - m^2 + i\varepsilon][(k - \frac{q}{2})^2 - m^2 + i\varepsilon]} \end{aligned} \quad (2.32)$$

unterscheidet sich von Gl. (2.26) nur durch das Vorzeichen von m^2 im Zähler. Für $m = 0$, d. h. im Fall ungebrochener chiraler Symmetrie sind also σ und π entartet. Im Nambu-Goldstone-Mode liegt die Masse des Sigma-Mesons im chiralen Limes dagegen genau bei der doppelten Quarkmasse:

$$m_o = 0 , \quad m \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m_\sigma = 2m . \quad (2.33)$$

Im skalaren Kanal besitzt der korrelierte Quark-Antiquark-Zustand also die gleiche Energie wie zwei unkorrelierte Quarks.

2.5. MESON-ZERFÄLLE IN FREIE QUARKS

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, wie man im NJL-Modell die Pionen und das Sigma-Meson als Quark-Antiquark-Zustände beschreibt und wie man ihre Massen berechnen kann. Durch Berücksichtigung der bisher vernachlässigten Austausch-terme oder durch Hinzunahme weiterer Wechselwirkungsterme zur Lagrangedichte (siehe z. B. [46]) können auch Mesonen mit anderen Quantenzahlen, z. B. ρ , ω oder das a_1 -Meson, beschrieben werden. Die allgemeine Struktur der Gleichungen ist dabei dieselbe wie bei den beiden besprochenen Mesonen: Die Mesonenmasse m_M ergibt sich als Lösung einer Gleichung

$$1 - G J(q^2 = m_M^2) = 0 \quad (2.34)$$

mit einer Polarisationsfunktion

$$J(q^2) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\Theta(q; k)}{[(k + \frac{q}{2})^2 - m^2 + i\epsilon][(k - \frac{q}{2})^2 - m^2 + i\epsilon]}. \quad (2.35)$$

Die genaue Gestalt der Funktion $\Theta(q; k)$ hängt von den Quantenzahlen des Mesons ab. An dieser Stelle ist lediglich wichtig, daß es sich um eine Funktion handelt, die für reelle Impulse q und k reelle Werte annimmt und in die der Viererimpuls k , über den integriert wird, höchstens quadratisch eingeht. Damit ist das Integral zwar insgesamt divergent, die Integration über eine einzelne Komponente von k konvergiert aber, solange man die anderen drei festhält. Wir können also z. B. die Energieintegration ausführen. Im Ruhesystem des Mesons ($q = (\Omega, \vec{0})$) lautet das Ergebnis:

$$J(\Omega^2) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2\varepsilon_k}\right)^2 \left\{ \begin{aligned} &\Theta(\Omega, \vec{0}; \varepsilon_k - \frac{\Omega}{2}, \vec{k}) \frac{1}{\Omega - 2\varepsilon_k + i\epsilon} \\ &- \Theta(\Omega, \vec{0}; \varepsilon_k + \frac{\Omega}{2}, \vec{k}) \frac{1}{\Omega + 2\varepsilon_k - i\epsilon} \\ &+ \frac{\Theta(\Omega, \vec{0}; \varepsilon_k + \frac{\Omega}{2}, \vec{k}) - \Theta(\Omega, \vec{0}; \varepsilon_k - \frac{\Omega}{2}, \vec{k})}{\Omega} \end{aligned} \right\}. \quad (2.36)$$

Dabei ist $\varepsilon_k = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$ die On-shell-Energie eines Quarks mit Dreierimpuls $\vec{k}$.

Der Faktor i , der in Gl. (2.35) vor dem Integral steht, tritt in Gl. (2.36) nicht mehr auf. Er ist durch die Integration über einen einfachen Pol herausgefallen. Die Polarisationsfunktion $J(\Omega^2)$ ist also insgesamt reell, falls in Gl. (2.36) nicht über weitere Pole integriert wird. Dazu sehen wir uns den Integranden etwas genauer an:

Der letzte Term besitzt keinen Pol, sondern lediglich eine hebbare Singularität an der Stelle $\Omega = 0$. Dagegen existieren in den beiden ersten Termen bei $\varepsilon_k = \frac{\Omega}{2}$ bzw. $\varepsilon_k = -\frac{\Omega}{2}$ echte Pole. Der Integrand wird also für $\vec{k}^2 = \Omega^2 - 4m^2$ singulär. Da $\vec{k}^2$ stets größer oder gleich null ist, ist dies nur für $\Omega^2 \geq 4m^2$ möglich.

Die Funktion $J(\Omega^2)$ ist folglich für $\Omega^2 < 4m^2$ reell. Für $\Omega^2 > 4m^2$ hat sie dagegen einen von null verschiedenen Imaginärteil. Das hat zur Konsequenz, daß Gl. (2.34) oberhalb von $q^2 = 4m^2$ keine reellen Lösungen besitzt, die Mesonenmassen also komplex werden. Mesonen, deren Masse größer ist als die doppelte Konstituentenquarkmasse, haben demnach im NJL-Modell immer auch eine endliche Breite. Diese hängt offensichtlich damit zusammen, daß es in dem Modell keinen Mechanismus gibt, der das Auftreten freier Quarks unterbindet. Insbesondere können also Mesonen in Quark-Antiquark-Paare zerfallen, wenn dies energetisch möglich ist, d. h. für $Re\ m_M > 2m$. Dieser Zerfallsprozeß gibt den entsprechenden Mesonen eine endliche Breite (siehe z. B. das a_1 -Meson in Ref. [46]).

Das in Gl. (2.36) auftretende Integral divergiert und muß, z. B. durch Verwendung eines Cutoff-Parameters, regularisiert werden. Dieses Verfahren entspricht der im vorletzten Abschnitt besprochenen nicht-kovarianten Regularisierung, da wir zuvor die Energieintegration nicht abgeschnitten haben. Im Rahmen des kovarianten Regularisierungsschemas erhält man für $J(q^2)$ nach einer Wick-Rotation in den euklidischen Raum und Anwendung der Feynmanschen Parameterformel (s. Anh. A):

$$J(q^2) = (-) \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{\Theta(q; i\omega_E + (\frac{1}{2} - x)\Omega, \vec{k} + (\frac{1}{2} - x)\vec{q})}{[k_E^2 + m^2 - x(1-x)q^2 - i\varepsilon]^2}. \quad (2.37)$$

Berücksichtigt man, daß k_E^2 stets größer oder gleich null und $x(1-x)$ kleiner oder gleich $\frac{1}{4}$ ist, sieht man, daß auch hier der Integrand für $q^2 > 4m^2$ Pole besitzt, das Integral also komplex wird.

Das Auftreten der unphysikalischen Zerfälle in freie Quarks ist natürlich eine äußerst störende Eigenschaft des NJL-Modells, insbesondere, wenn man im Rahmen des Modells die tatsächlichen Zerfallsbreiten der Mesonen ausrechnen will, indem man ihre physikalischen Zerfallskanäle berücksichtigt. Gleichzeitig gibt das Modell aber auch schon erste Hinweise darauf, wie die Emission freier Quarks verhindert werden könnte: Wie wir gesehen haben, liegt die Quarkemissionsschwelle bei der doppelten Konstituentenquarkmasse m , also wesentlich höher, als man es von der Lagrange-

dichte her erwarten würde, die die viel kleinere nackte Quarkmasse m_0 enthält. Die spontane Brechung der chiralen Symmetrie hat demnach zwar noch kein absolutes Confinement zur Folge, aber sie setzt die Schwellenenergie, oberhalb der freie Quarks existieren können, drastisch herauf. Diesen Gedanken weiter ausbauend, werden wir das Modell im nächsten Kapitel so modifizieren, daß das Auftreten freier Quarks vollständig unterdrückt wird.

3. Ein nichtlokales, chiral symmetrisches Quarkmodell ohne freie Quarks

Wir haben im vorigen Kapitel gesehen, daß im NJL-Modell Mesonen, deren Masse größer ist als die doppelte Konstituentenquarkmasse m , in freie Quark-Antiquark-Paare zerfallen können. Mesonen mit einer geringeren Masse als $2m$ sind dagegen gegenüber Quark-Antiquark-Zerfällen stabil, da ihre Ruheenergie nicht ausreicht, um die beiden Quarks gleichzeitig auf ihre Massenschale zu setzen. Dabei wirkt die spontane Symmetriebrechung stabilisierend: Anstatt oberhalb der Energie $2m_0 \approx 10 \text{ MeV}$ treten die Zerfälle erst oberhalb der Energie $2m = 2(m_0 + \Sigma) \approx 600 \text{ MeV}$ bis 900 MeV auf.

Die Emission freier Quarks könnte also ganz unterdrückt werden, wenn man die Selbstenergie Σ gegen unendlich gehen ließe. Eine unendlich große konstante Selbstenergie würde allerdings die Quarkdynamik vollständig zerstören. Die Quarks wären unendlich schwere Teilchen mit einem im Ortsraum δ -artigen Propagator. Sie wären also praktisch an einem Punkt „festgenagelt“ und würden als explizite Freiheitsgrade des Modells de facto verlorengehen.

Wie jedoch z. B. aus der Quantenelektrodynamik bekannt ist, ist die Selbstenergie eines Teilchens im allgemeinen keine Konstante, sondern ein vom Viererimpuls des Teilchens abhängiger Operator. Der gedresste Propagator hat dementsprechend die Gestalt

$$S(p) = \frac{1}{\not{p} - m_0 - \Sigma(p) + i\epsilon} . \quad (3.1)$$

Die Massenschale des gedressten Teilchens ist durch die Impulse gegeben, bei denen der Propagator Pole besitzt:

$$m^2 = p_{pole}^2 \quad (3.2)$$

mit

$$\det [\not{p}_{pole} - m_0 - \Sigma(p_{pole})] = 0 . \quad (3.3)$$

Wenn sich die Quark-Selbstenergie Σ nun so verhielte, daß Gl. (3.3) *keine* Lösung besitzt, wäre die Quark-Massenschale gar nicht definiert. Die Quarks wären immer „off-shell“ und könnten zwar als gebundene Teilchen, z. B. in einem Meson, nicht jedoch als freie reelle Teilchen existieren. Der Zerfall von Mesonen in freie Quarks

wäre nicht möglich. Gleichzeitig blieben die Quarks – anders als im oben diskutierten Fall einer unendlich großen konstanten Selbstenergie – als dynamische Freiheitsgrade des Modells erhalten.

Bevor wir der Frage weiter nachgehen, wie ein solches Modell aussehen könnte, sollten wir uns einige generelle Gedanken zur Interpretation effektiver Modelle machen. In fundamentalen Theorien, wie der QED oder der QCD, geht man von einer bestimmten Eichsymmetrie und ganz allgemeinen Prinzipien, wie Lorentzinvarianz und Renormierbarkeit, aus. Dadurch ist die Gestalt der Lagrangedichte der Theorie bereits weitgehend festgelegt. Daraus ergeben sich nun Bewegungsgleichungen, die in keiner der heute bekannten Theorien exakt gelöst werden können. Solange die Kopplung aber schwach ist, ist eine Entwicklung der Lösungen nach der Kopplungskonstanten möglich, die naturgemäß umso besser wird, je mehr Entwicklungsterme (Feynman-Graphen) man berücksichtigt.

In effektiven Modellen liegt der eigentliche Ausgangspunkt dagegen viel näher bei den Lösungen. Man modelliert, wie der Name schon sagt, den Effekt. Dies wird bei den Bag-Modellen besonders deutlich: Ausgehend von der experimentellen Tatsache, daß es keine freien Quarks gibt, fordert man, daß der Quark-Strom durch die Bag-Wände verschwindet und leitet daraus die Form der Lagrangedichte ab.

Beim NJL-Modell und bei dem Modell, das wir in dieser Arbeit besprechen wollen, ist der Ansatz etwas weniger phänomenologisch, da man von den Symmetrien der QCD ausgeht. Dennoch handelt es sich bei diesen Modellen nicht um mikroskopisch vollständig begründete Theorien, sondern um effektive Parametrisierungen des Quark-Antiquark-Streukerns. Betrachten wir dazu die in Abb. 3.1 dargestellte Dyson-Schwinger-Gleichung für den Quark-Propagator, deren Lösung in Gl. (3.1) gegeben ist: Wenn der Operator Σ alle Einteilchen-irreduziblen Selbstenergieeinschübe der QCD enthält, liefert diese Gleichung den exakten gedressten Quark-Propagator. Wie in Abb. 3.2 dargestellt ist, gibt es einen Zusammenhang zwischen der Selbstenergie Σ und dem Quark-Antiquark-Streukern $\hat{K}$. Man kann die Selbstenergie berechnen, indem man, vom Streukern ausgehend, eine gedresste Quarkschleife schließt. Da der exakte Quark-Antiquark-Streukern jedoch eine unendliche Anzahl von Graphen enthält und daher nicht aus der QCD berechnet werden kann, hilft das allerdings zunächst nicht weiter. Wir sind auf Näherungen

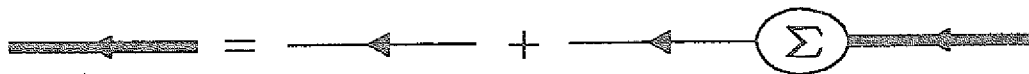


Abb. 3.1: Dyson-Schwinger-Gleichung für den gedressten Quark-Propagator (dicke Linie). Die dünne Linie stellt den nackten Quark-Propagator dar, Σ ist die Summe aller Einteilchen-irreduziblen Selbstenergieeinschübe.

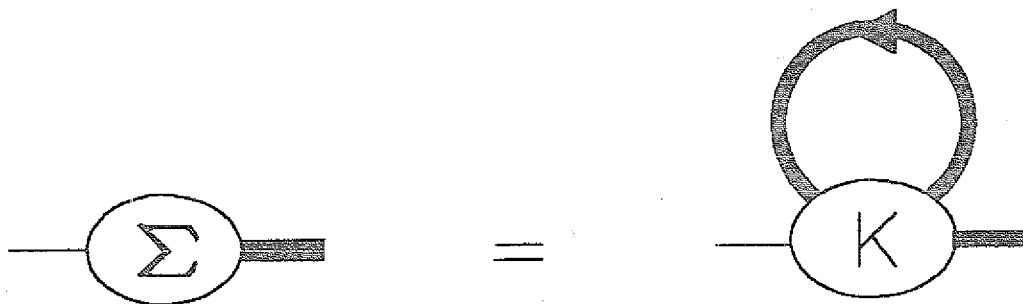


Abb. 3.2: Zusammenhang zwischen der Quark-Selbstenergie Σ und dem Quark-Antiquark-Streukern $\hat{K}$. Die dicke Linie stellt den gedressten Quark-Propagator dar. angewiesen.

Im NJL-Modell ersetzt man den Quark-Antiquark-Streukern, wie wir gesehen haben, einfach durch punktförmige Kopplungen. Die relativen Kopplungsstärken werden dabei so gewählt, daß die Konsequenzen der Symmetrien der QCD, also insbesondere der chiralen Symmetrie, erhalten bleiben. Das bedeutet z. B., daß die Kopplungen im skalaren-isoskalaren und im pseudoskalaren-isovektoriellen Kanal gleich stark sein müssen.

Es ist also möglich und durchaus sinnvoll, effektive Modelle wie das NJL-Modell rein technisch, d. h. durch die Vorgabe von Kopplungskonstanten und ungedressten Quarkpropagatoren, zu definieren, ohne eine Lagrangedichte einzuführen. Letzteres hat allein praktische Vorteile: Im allgemeinen zeigen sich die Konsequenzen von Symmetrien, wie z. B. das Goldstone-Theorem oder Ward-Identitäten, in allen Ordnungen eines Entwicklungsschemas. Ein mit den Symmetrien verträglicher Streukern läßt sich also sehr einfach dadurch finden, daß man für eine Modell-Lagrangedichte mit den entsprechenden Symmetrien die Vertizes in niedrigster Ordnung berechnet. Hier wird der Unterschied zu den fundamentalen Theorien deutlich: Die NJL-Lagrangedichte ist so konstruiert, daß sie in niedrigster Ordnung einen mit der chiralen Symmetrie konsistenten Satz von Quark-Quark-Vertizes liefert, den man dann als phänomenologische Parametrisierung des QCD-Streukerns verwenden kann. Dagegen kommt den exakten Bewegungsgleichungen des NJL-Modells keine besondere Bedeutung zu. Eine über das Hartree-Fock-Niveau hinausgehende Berechnung des gedressten Quark-Propagators sollte deshalb nicht als verbesserte Näherung zum NJL-Modell interpretiert werden, sondern als eine andere Parametrisierung des Streukerns, die nicht notwendigerweise besser ist als die alte. Aus dieser Sicht wird andererseits deutlich, warum uns bei effektiven Modellen die Nichtrenormierbarkeit nicht zu beunruhigen braucht. Die „Korrekturterme“ höherer Ordnung, die eine unendliche Zahl von Countertermen erforderlich machen würden, gehören nicht zum Modell.

Wir wollen nun auf die Frage zurückkommen, ob es möglich ist, Modelle mit polfreien Propagatoren zu konstruieren. Wenn wir im NJL-Modell eine im Impulsraum konstante Quark-Selbstenergie gefunden haben, so liegt das zum einen an der punktförmigen Wechselwirkung des Modells und zum anderen an dem verwendeten Hartree-Verfahren. Beides zusammen hat zur Folge, daß die Selbstenergieeinschübe im Ortsraum lokale Funktionen sind: Das Quark, das in Abb. 2.2 die durchgehende Quarklinie „dresst“, kehrt exakt an seinen Ausgangspunkt zurück. Die punktförmige Selbstenergie im Ortsraum spiegelt sich in einer konstanten Selbstenergie im Impulsraum wieder.

Würden wir über die Hartree-Fock-Näherung hinausgehen und auch andere Graphen, wie Abb. 3.3, berücksichtigen, bekämen wir auch im NJL-Modell eine impuls-

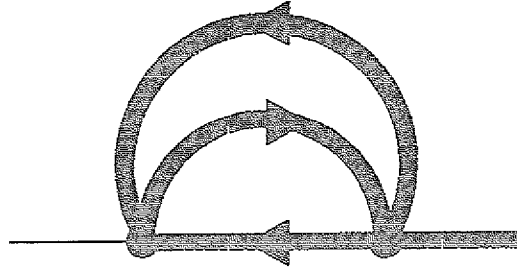


Abb. 3.3: Beitrag zur Quark-Selbstenergie im NJL-Modell, der in der Hartree-Fock-Näherung nicht enthalten ist.

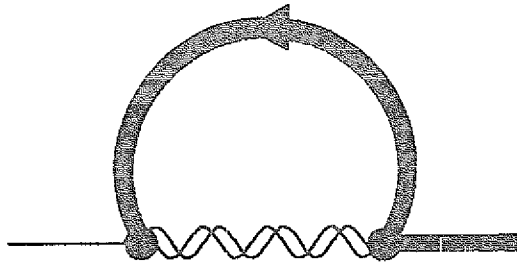


Abb. 3.4: Beitrag zur Quark-Selbstenergie in der QCD durch Emission und Reabsorption eines Gluons (doppelt gewellte Linie).

abhängige Selbstenergie. Wie wir jedoch gesehen haben, ist eine solche Erweiterung nicht unbedingt sinnvoll. Auf der anderen Seite bekommt man schon in Hartree-Fock-Näherung eine impulsabhängige Selbstenergie, wenn man von der Quark-Quark-Kontaktkraft zu einer realistischeren Wechselwirkung mit endlicher Reichweite übergeht. Als einfachstes Beispiel ist in Abb. 3.4 der Selbstenergiebeitrag durch Emission und Reabsorption eines Gluons dargestellt. Dieser Graph liefert nicht nur wegen der endlichen Reichweite der Wechselwirkung, d. h. durch den Gluon-Propagator, ein impulsabhängiges Ergebnis, sondern auch, weil die starke Kopplungskonstante α_S vom Gluonimpuls abhängt. Eine genauere Auswertung des analogen perturbativen Selbstenergiegraphen im Rahmen von Renormierungsgruppengleichungen zeigt z. B., daß den Quarks eine impulsabhängige effektive Masse

$$\bar{m}(q^2) \sim [\alpha_S(Q^2 = -q^2)]^{4/(11-\frac{2}{3}n_f)} \quad (3.4)$$

zugeordnet werden kann [47]. Für die starke Kopplungskonstante gilt:

$$\alpha_S(Q^2) = \frac{4\pi}{(11 - \frac{2}{3}n_f) \ln(\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2})} . \quad (3.5)$$

Dabei ist Λ_{QCD} der Renormierungspunkt-unabhängige Skalenparameter der QCD. Er liegt in der Gegend von einigen hundert MeV . Für große raumartige Impulsüberträge $Q^2 = -q^2 \rightarrow \infty$ verschwindet α_S : Die QCD ist asymptotisch frei. Für kleiner werdende raumartige Impulse wächst α_S und damit auch die effektive Quarkmasse zunächst langsam an. Bei $q^2 = -\Lambda_{QCD}^2$ divergieren die Ausdrücke schließlich. Die perturbative Herleitung ist jedoch nur im Bereich $\alpha_S \ll 1$ gültig. Es ist daher vorstellbar, daß die Quark-Selbstenergie mit steigendem q^2 immer weiter anwächst. Geschieht dies insbesondere im zeitartigen Bereich schnell genug, ist es möglich, daß Gl. (3.3) tatsächlich keine Lösungen besitzt, und, wie oben diskutiert, keine freien Quarks auftreten können.

Bisher ist es nicht möglich, die Quark-Selbstenergie für zeitartige Quarkimpulse auch nur näherungsweise aus der QCD herzuleiten. Dabei spielt nicht nur eine Rolle, daß die perturbative Berechnung der starken Kopplungskonstanten in diesem Bereich versagt. Sobald α_S die Größenordnung von eins erreicht, müssen neben Abb. 3.4 auch Prozesse mit mehr als einem Gluon berücksichtigt werden. Vermutlich muß man – ähnlich wie in der Brueckner-Theorie in der Kernphysik – eine unendliche Reihe von Gluonaustauschprozessen aufaddieren, um ein realistisches Ergebnis zu bekommen.

In dieser Arbeit wollen wir diese Prozesse auf schematische Weise beschreiben, indem wir die punktförmige Quark-Quark-Wechselwirkung des NJL-Modells durch einen nichtlokalen Streukern ersetzen. Die Nichtlokalität trägt gleichzeitig der endlichen Reichweite der Wechselwirkung und dem Multigluonaustausch Rechnung. Sie führt im Impulsraum zu impulsabhängigen Vertizes, die als Formfaktoren interpretiert werden können.

In diesem Kapitel wollen wir zunächst das neue Modell definieren und eine Gap-Gleichung für die Quark-Selbstenergie herleiten. Danach kommen wir zur Beschreibung von Mesonen. Dabei steht die Frage im Mittelpunkt, ob die Quarkemission durch geeignete Parametrisierung des Wechselwirkungskerns unterdrückt werden kann, ohne die chirale Symmetrie zu verletzen.

3.1. ÜBERLEGUNGEN ZUR WAHL DER METRIK

Bevor wir unser Modell formal definieren, müssen wir uns darüber Gedanken machen, in welcher Metrik dies geschehen soll. Es ist eine bekannte Tatsache aus dem Pfadintegralformalismus, daß das erzeugende Funktional im Minkowski-Raum nicht wohldefiniert ist und man deshalb von der euklidischen Wirkung ausgehen sollte [48]. In Theorien mit einer einfachen analytischen Struktur, z. B. für nichtwechselwirkende Teilchen, erhält man die euklidische Wirkung aus der Wirkung im Minkowski-Raum über eine einfache Wick-Rotation. Im allgemeinen ist die korrekte analytische Fortsetzung der Lagrangedichte auf die imaginäre Zeitachse jedoch ein nichttriviales Problem. Das ist sicherlich der Fall, wenn wir ein Modell mit einer relativ komplizierten nichtlokalen Wechselwirkung verwenden.

Wie im einleitenden Abschnitt besprochen, hat die Lagrangedichte in effektiven Modellen aber keine tiefliegende Bedeutung, sondern ist lediglich eine Ordnungsfunktion zur konsistenten Herleitung von Feynman-Regeln. Es besteht daher kein Grund, diese Funktion zunächst im Minkowski-Raum zu definieren und anschließend mühsam in den euklidischen Raum zu transformieren. Vielmehr können wir direkt von einer euklidischen Lagrangedichte ausgehen. Aus den gleichen Gründen brauchen wir uns keine Gedanken um die Probleme zu machen, die beim Übergang von der Hamiltonischen zur Lagrangeschen Formulierung der Pfadintegrale, d. h. beim Ausintegrieren der kanonisch konjugierten Impulse, auftreten können, wenn das Potential Zeitableitungen enthält [49]. Ausgangspunkt unseres Modells ist die effektive euklidische Lagrangedichte, so wie sie *nach* all diesen Manipulationen in das erzeugende Funktional eingeht.

Damit bleibt nur noch das Problem, am Ende die im euklidischen Raum erzielten Ergebnisse mit den im Minkowski-Raum gegebenen Observablen in Verbindung zu bringen. Auch das kann auf der euklidischen Seite geschehen. Zur Berechnung von Mesonmassen parametrisiert man z. B. die euklidische Quark-Antiquark-T-Matrix in der Umgebung ihrer Pole durch euklidische Mesonpropagatoren. Diese sind aus der Literatur bekannt [40] und lassen sich über eine Wick-Rotation in Minkowski-Raum-Propagatoren überführen.

Stainsby und Cahill haben in Ref. [50] ausgeführt, daß die euklidische Metrik die „richtige“ Metrik zur Definition von Theorien mit Confinement ist. Dabei verwiesen

sie auch auf interessante Parallelen zur Quantengravitation [51]. Daneben gibt es für uns jedoch noch einen ganz konkreten Grund, unser Modell im euklidischen Raum zu definieren. Betrachten wir dazu noch einmal die NJL-Gap-Gleichung im chiralen Limes (Gl. (2.19)):

$$(2ig_o) (4n_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} = 1. \quad (3.6)$$

Das Minkowski-Integral auf der linken Seite läßt sich durch eine Wick-Rotation in ein euklidisches Integral überführen. Man bekommt dann:

$$(2g_o) (4n_f n_c) \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_E^2 + m^2} = 1. \quad (3.7)$$

Gl. (3.6) und Gl. (3.7) können als Bestimmungsgleichungen für die NJL-Kopplungskonstante g_o bei vorgegebener Masse m angesehen werden. In Gl. (3.6) integriert man über einen Pol. Dadurch erhält man einen Faktor i , der zusammen mit dem Faktor i vor dem Integral bewirkt, daß die Lösung für g_o reell ist. In Gl. (3.7) sieht man das unmittelbar, da hier über keinen Pol integriert wird.

In unserem neuen Modell wollen wir, wie schon gesagt, die punktförmige NJL-Wechselwirkung durch einen nichtlokalen Streukern ersetzen. Im Impulsraum erhalten wir dadurch statt einer konstanten Kopplung einen impulsabhängigen Formfaktor. Wie wir in Abschnitt 3.3 sehen werden, ändert sich aber an der Struktur der Gap-Gleichung, außer daß auch die Massen impulsabhängig werden, nicht viel. Im euklidischen Fall finden wir also unter der Voraussetzung reeller Quarkmassen für reelle Impulse, daß auch die Kopplung für reelle Impulse reell sein muß. Der Minkowski-Fall ist dagegen problematisch: Wenn wir unser angestrebtes Ziel erreichen und tatsächlich einen polfreien Quarkpropagator bekommen, liefert die Integration keinen weiteren Faktor i mehr. Als Konsequenz hätte entweder die Kopplung oder die Quarkmasse für reelle Impulse einen nichtverschwindenden Imaginärteil. Darüber hinaus bekäme auch das Vakuumkondensat einen komplexen Wert. All das erscheint nicht besonders sinnvoll, so daß wir den euklidischen Ansatz eindeutig bevorzugen*).

*) Natürlich sollten eine euklidische Lagrangedichte und die sich daraus durch korrekte analytische Fortsetzung ergebende Lagrangedichte im Minkowski-Raum

Die konsequente euklidische Formulierung eines neuen Modells hat allerdings den Nachteil, daß sich die analytischen Ergebnisse nur schwer mit anderen Modellen vergleichen lassen, die im allgemeinen im Minkowski-Raum definiert sind. Wir wollen unser Modell deshalb in einer *formalen* Minkowski-Raum-Notation formulieren. Dabei gehen wir von einer Lagrangedichte im Minkowski-Raum aus und leiten daraus über Standard-Pfadintegraltechniken Minkowski-Raum-Feynman-Regeln her. Alle Integrale müssen jedoch im euklidischen Sinne ausgeführt werden:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f(k^0, \vec{k}) \longrightarrow i \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} f(-ik_E^0, \vec{k}_E). \quad (3.8)$$

In einfach strukturierten Theorien beschreibt Gl. (3.8) eine Wick-Rotation und beide Seiten sind identisch. Für unser Modell ist Gl. (3.8) dagegen nur eine Übersetzungsvorschrift. Dieses Verfahren ist absolut äquivalent zu einem vollständig im euklidischen Raum formulierten Modell (vgl. dazu Referenz [52]).

An dieser Stelle sei noch einmal daran erinnert, daß auch im NJL-Modell die Äquivalenz von Gl. (3.6) und Gl. (3.7) nur so lange besteht, wie die Integrale nicht regularisiert werden. Die Einführung eines scharfen vierdimensionalen Cutoffs in Gl. (3.7) macht die Rücktransformation in den Minkowski-Raum unmöglich. So gesehen sind alle NJL-Rechnungen mit kovariantem scharfen Cutoff euklidische Modelle, die nur formal im Minkowski-Raum formuliert werden.

3.2. DIE LAGRANGEDICHTE DES NEUEN MODELLS

Wir definieren unser Modell über die folgende effektive Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{eff}(x) = \mathcal{L}_o(x) + \mathcal{L}_{int}(x) \quad (3.9)$$

mit dem kinetischen Anteil

$$\mathcal{L}_o(x) = \bar{q}(x) (i\rlap{\not{D}} - m_o) q(x) \quad (3.10)$$

auf dieselben Ergebnisse führen. Diese analytische Fortsetzung ist aber, insbesondere wegen nichtverschwindender Kreisbogenbeiträge keine einfache Wick-Rotation. Das Beispiel im Text sollte verdeutlichen, daß es im euklidischen Raum leichter ist, ein NJL-artiges Modell ohne freie Quarks zu konstruieren als im Minkowski-Raum.

und einer nichtlokalen Wechselwirkung

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}(x) = & \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \alpha(x; x_3, x_4; x_1, x_2) \\ & \times \sum_{i=1}^2 G_i (\bar{q}(x_3) \Gamma_i^{\mu k} q(x_1)) (\bar{q}(x_4) \Gamma_{i\mu}^k q(x_2)) . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dabei haben wir die Quark-Feldoperatoren mit $q(x)$ bezeichnet. Vorläufig wollen wir uns weiterhin auf zwei Quark-Flavours beschränken, d. h. $q(x)$ besitzt die Isospinstruktur

$$q(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \end{pmatrix} . \quad (3.12)$$

Im allgemeinen geben wir den Quarks eine kleine Strommasse m_q . Das Modell besitzt wie das NJL-Modell keine expliziten gluonischen Freiheitsgrade, sondern eine effektive Wechselwirkung zwischen den Quarks, welche durch Gl. (3.11) beschrieben wird. Anders als in Gl. (2.8) ist diese Wechselwirkung nichtlokal: Die Feldoperatoren q und $\bar{q}$ hängen von unterschiedlichen Raumzeitpunkten x_i ab. Die genaue Form der Nichtlokalität wird durch eine Funktion α der Dimension $[Masse]^{16}$ festgelegt. Mit dieser Funktion parametrisieren wir schematisch die im einleitenden Abschnitt dieses Kapitels angesprochenen Multigluonaustauschprozesse. Ersetzen wir α durch das Produkt $\prod \delta^4(x - x_i)$, bekommen wir eine Kontaktkraft von der Art des NJL-Modells.

Für die Kopplungen verwenden wir einen anderen Satz von Operatoren als in Gl. (2.8):

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{\mu k} &= \gamma^\mu 1_f \lambda_c^k \\ \Gamma_2^{\mu k} &= \gamma^\mu \gamma_5 1_f \lambda_c^k . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die Indizes f und c zeigen an, daß die so gekennzeichneten Operatoren auf die Flavour- bzw. Farbfreiheitsgrade der Quarks wirken. Bei der Wahl von $\Gamma_1^{\mu k}$ haben wir uns vom Ein-Gluon-Austausch leiten lassen. Der Quark-Gluon-Vertex besitzt genau diese Struktur. Da wir jedoch nicht erwarten können, daß die effektive Quark-Quark-Wechselwirkung im Bereich zeitartiger Impulse allein in den Quantenzahlen des Ein-Gluon-Austauschs parametrisiert werden kann, haben wir noch einen zweiten Term eingeführt. Die Stärke der beiden Kanäle wird durch die Kopplungskonstanten G_1 und G_2 festgelegt, die wie die NJL-Kopplungskonstanten die

Dimension $[Masse]^{-2}$ besitzen*).

Wir haben die Wechselwirkung ausschließlich in Farb-Oktett-Kanälen definiert. Anders als im vorigen Kapitel wollen wir jetzt aber auch Austauschdiagramme berücksichtigen. Über diese wirkt die Kraft auch in den Farb-Singulett-Kanälen, so daß es möglich ist, farbneutrale Objekte, z. B. Mesonen, zu beschreiben.

Das Modell sollte invariant gegenüber räumlichen und zeitlichen Translationen sein. Für die Funktion α , die die Form der Nichtlokalität beschreibt, bedeutet das, daß gelten muß:

$$\alpha(x + \Delta x; x_3 + \Delta x, x_4 + \Delta x; x_1 + \Delta x, x_2 + \Delta x) = \alpha(x; x_3, x_4; x_1, x_2) \quad . \quad (3.14)$$

Die Funktion darf also nur von den Differenzen $(x - x_i)$, nicht aber von x oder x_i einzeln abhängen. Wir können daher schreiben:

$$\alpha(x; x_3, x_4; x_1, x_2) = \int \left(\prod_{j=1}^4 \frac{d^4 k_j}{(2\pi)^4} e^{-ik_j \cdot (x - x_j)} \right) \tilde{\alpha}(k_3, k_4; k_1, k_2) \quad . \quad (3.15)$$

Dabei ist $\tilde{\alpha}$ eine dimensionslose Funktion im Impulsraum. Um die Wirkung $I = \int d^4 x \mathcal{L}_{eff}(x)$ zu bekommen, müssen wir α über x integrieren. Dadurch erhält man einen Faktor $\delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$, der die Viererimpulserhaltung an den Vertizes garantiert.

Da die Wechselwirkung symmetrisch unter gleichzeitigem Vertauschen der beiden einlaufenden und der beiden auslaufenden Quarks sein sollte, können wir annehmen, daß gilt:

$$\tilde{\alpha}(k_3, k_4; k_1, k_2) = \tilde{\alpha}(k_4, k_3; k_2, k_1) \quad . \quad (3.16)$$

Außerdem sollten wir $\tilde{\alpha}$ noch irgendwie normieren, da sich die absolute Stärke der Wechselwirkung über die Kopplungskonstanten G_i festlegen läßt. Wir wählen

$$\tilde{\alpha}(0, 0; 0, 0) = 1 \quad . \quad (3.17)$$

*) In nichtlokalen Modellen kann man nicht direkt von der Dimension der Kopplungskonstanten auf die Divergenzstruktur schließen. Entwickelt man die Feldoperatoren in Gl. (3.11) in eine Taylorreihe um den Punkt x , bekommt man Ableitungsterme in allen Ordnungen, deren Kopplungskonstanten unterschiedliche Dimensionen besitzen.

Setzt man $\tilde{\alpha}$ konstant gleich eins, wird die Wechselwirkung lokal, und wir bekommen wieder ein Modell vom NJL-Typ.

Die Wechselwirkung $\mathcal{L}_{int}$ ist invariant unter allen in Tabelle 2.1 zusammengestellten globalen Symmetrietransformationen:

$$\begin{aligned}
U(1)_V : \quad q(x) &\longrightarrow e^{i\alpha} q(x) \\
U(1)_A : \quad q(x) &\longrightarrow e^{i\beta\gamma_5} q(x) \\
SU(2_f)_V : \quad q(x) &\longrightarrow e^{i\vec{\rho}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}} q(x) \\
SU(2_f)_A : \quad q(x) &\longrightarrow e^{i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\gamma_5} q(x) \\
SU(3_c) : \quad q(x) &\longrightarrow e^{i\vec{\xi}\cdot\frac{\vec{\lambda}_c}{2}} q(x) \quad ,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

also unter der Gruppe $U(2_f)_L \otimes U(2_f)_R \otimes SU(3_c)$. Im kinetischen Term $\mathcal{L}_o$ sind die axialen Symmetrien durch die Masse m_o explizit gebrochen. Unser Modell zeigt also dasselbe globale Symmetrieverhalten wie die QCD.

Für ein effektives Quarkmodell besitzt $\mathcal{L}_{int}$ eigentlich eine Symmetrie zuviel, da die $U(1)_A$ -Symmetrie, wie in Kapitel 2 erwähnt, nicht zu der Existenz eines weiteren Goldstone-Bosons im Mesonenspektrum führt. Solange wir uns auf zwei Quark-Flavours beschränken, ist es kein größeres Problem, eine Wechselwirkung zu konstruieren, die unter den Transformationen von Gl. (3.18) mit Ausnahme der $U(1)_A$ -Transformation symmetrisch bleibt. Wir könnten z. B. auf die Operatorstruktur des NJL-Modells zurückgreifen. Im Augenblick soll uns aber die zusätzliche Symmetrie nicht weiter stören. Wir werden auf diesen Punkt noch einmal zurückkommen, wenn wir das Modell auf drei Quark-Flavours erweitern.

Für die globalen Symmetrien spielt es keine Rolle, ob die Wechselwirkung lokal oder nichtlokal ist. Wichtig ist allein die Operatorstruktur. Allerdings sind die zugehörigen erhaltenen Ströme in nichtlokalen Theorien komplizierter. Eine einfache Methode, ihre Divergenz zu berechnen, ist in Referenz [53] dargestellt und soll hier kurz skizziert werden:

Aus dem Hamiltonschen Prinzip

$$\delta I = \delta \int d^4x \mathcal{L}_{eff}(x) = 0 \tag{3.19}$$

erhält man die klassischen Bewegungsgleichungen des Modells:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta I}{\delta \bar{q}(y)} &= (i\bar{\partial} - m_o) q(y) \\
&+ 2 \int d^4x \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \alpha(x; x_3, y; x_1, x_2) \\
&\times \sum_{i=1}^2 G_i (\bar{q}(x_3) \Gamma_i^{\mu k} q(x_1)) \Gamma_{i\mu}{}^k q(x_2) = 0 \\
\frac{\delta I}{\delta q(y)} &= \bar{q}(y) (-i\overleftarrow{\partial} - m_o) \\
&+ 2 \int d^4x \int d^4x_1 d^4x_3 d^4x_4 \alpha(x; x_3, x_4; x_1, y) \\
&\times \sum_{i=1}^2 G_i (\bar{q}(x_3) \Gamma_i^{\mu k} q(x_1)) \bar{q}(x_4) \Gamma_{i\mu}{}^k = 0.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Betrachten wir nun eine infinitesimale *lokale* Transformation

$$q(y) \longrightarrow (1 + i\xi^k(y) T^k) q(y) \tag{3.21}$$

mit einer beliebigen Funktion $\xi^k(y)$. Dadurch ändert sich im allgemeinen die Wirkung I :

$$I \longrightarrow I + \int d^4y \frac{\delta I}{\delta \xi^k(y)} \xi^k(y) + \mathcal{O}(\xi^2). \tag{3.22}$$

Wenn nun T^k der Generator einer *globalen* Symmetrie der Lagrangedichte ist, sollte sich jedoch die Wirkung für $\xi^k(y) = \text{const.}$ nicht ändern. Daraus folgt

$$\int d^4y \frac{\delta I}{\delta \xi^k(y)} = 0. \tag{3.23}$$

Nach dem Gaußschen Satz ist diese Beziehung immer erfüllt, wenn $\frac{\delta I}{\delta \xi^k}$ die Divergenz eines im Unendlichen verschwindenden Vektorfeldes ist:

$$\frac{\delta I}{\delta \xi^k(y)} = \partial^\mu \mathcal{J}_\mu{}^k(y). \tag{3.24}$$

Das gilt unabhängig davon, ob die in die Wirkung eingehenden Felder q und $\bar{q}$ die Bewegungsgleichungen (Gl. (3.20)) erfüllen oder nicht.

Andererseits ist die Wirkung nach dem Hamiltonschen Prinzip (Gl. (3.19)) unter *beliebigen* Transformationen stationär, wenn q und $\bar{q}$ Lösungen der Bewegungsgleichungen sind. Aus Gl. (3.22) folgt dann

$$\frac{\delta I}{\delta \xi^k(y)} = 0 \tag{3.25}$$

und damit

$$\partial^\mu \mathcal{J}_\mu^k(y) = 0. \quad (3.26)$$

$\mathcal{J}_\mu^k$ ist also der erhaltene Noether-Strom.

Als Beispiel betrachten wir die Symmetrien $SU(2)_V$ und $SU(2)_A$. Für die Divergenz des Vektorstroms ergibt sich nach Gl. (3.24):

$$\begin{aligned} \partial^\mu \mathcal{V}_\mu^k(y) = & \partial^\mu (\bar{q}(y) \gamma_\mu \frac{\tau^k}{2} q(y)) \\ & + 2i \int d^4x \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \alpha(x; x_3, x_4; x_1, x_2) \\ & \times [\delta^4(x_2 - y) - \delta^4(x_4 - y)] \\ & \times \sum_{i=1}^2 G_i (\bar{q}(x_3) \Gamma_i^{\nu\ell} q(x_1)) (\bar{q}(x_4) \Gamma_{i\nu}^\ell \frac{\tau^k}{2} q(x_2)) \end{aligned} \quad (3.27)$$

und für die Divergenz des Axialvektorstroms

$$\begin{aligned} \partial^\mu \mathcal{A}_\mu^k(y) = & \partial^\mu (\bar{q}(y) \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^k}{2} q(y)) \\ & + 2i \int d^4x \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \alpha(x; x_3, x_4; x_1, x_2) \\ & \times [\delta^4(x_2 - y) - \delta^4(x_4 - y)] \\ & \times \sum_{i=1}^2 G_i (\bar{q}(x_3) \Gamma_i^{\nu\ell} q(x_1)) (\bar{q}(x_4) \Gamma_{i\nu}^\ell \gamma_5 \frac{\tau^k}{2} q(x_2)). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Im Vergleich zu lokalen Theorien (siehe z. B. Tabelle 2.1) besitzen die Ströme im nichtlokalen Modell also Zusatzterme. Wenn wir im nächsten Kapitel die Ankopplung von Eichfeldern an unser Modell beschreiben, werden wir ähnliche Terme finden. Wir werden dann auch näher auf ihre physikalische Interpretation eingehen.

Setzt man die Lösungen der Bewegungsgleichungen (Gl. (3.20)) in Gl. (3.27) und Gl. (3.28) ein, erhält man – trotz der Zusatzterme – die gleichen Ergebnisse wie in Gl. (2.6) und Gl. (2.7):

$$\partial^\mu \mathcal{V}_\mu^k(x) = 0 \quad (3.29)$$

und

$$\partial^\mu \mathcal{A}_\mu^k(x) = 2m_0 \bar{q}(x) i\gamma_5 \frac{\tau^k}{2} q(x). \quad (3.30)$$

Wie im einleitenden Abschnitt zu diesem Kapitel diskutiert, wollen wir später versuchen, die Wechselwirkung so zu wählen, daß es für die Quarks keine „On-shell“-Lösungen gibt, daß also die Bewegungsgleichungen keine Lösungen besitzen. Bei der Ankopplung von Eichfeldern im nächsten Kapitel werden wir aber relativ ähnliche Strukturen finden, ohne auf die Bewegungsgleichungen zurückgreifen zu müssen.

3.3. SPONTANE SYMMETRIEBRECHUNG: DIE QUARK-SELBSTENERGIE

Die im vorigen Abschnitt definierte effektive Lagrangedichte $\mathcal{L}_{eff}$ (Gl. (3.9)) ist im Grenzfall einer verschwindenden nackten Quarkmasse m_o chiral symmetrisch. Da m_o in realistischen Rechnungen im Vergleich zur typischen hadronischen Energieskala ($\sim 1\text{GeV}$) recht klein ist, kann man $\mathcal{L}_{eff}$ in sehr guter Näherung als invariant unter chiralen Transformationen ansehen.

Wie im NJL-Modell kommt es zur spontanen Brechung der chiralen Symmetrie, wenn die Stärke der Wechselwirkung einen kritischen Wert übersteigt. Die Quarks erhalten dann eine endliche Selbstenergie, selbst wenn sie ursprünglich masselos waren. Die Selbstenergie ergibt sich wieder als Lösung eines Selbstkonsistenzproblems. Den Formalismus zur Herleitung dieser „Gap-Gleichung“ wollen wir in diesem Kapitel etwas deutlicher herausarbeiten.

Wir addieren und subtrahieren zunächst einen Term

$$\delta\mathcal{L}(x) = (-) \int d^4y \bar{q}(y) \tilde{\Sigma}(y-x) q(x) \quad (3.31)$$

von der effektiven Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{eff}(x) = (\mathcal{L}_o(x) + \delta\mathcal{L}(x)) + (\mathcal{L}_{int}(x) - \delta\mathcal{L}(x)) =: \mathcal{L}'_o(x) + \mathcal{L}'_{int}(x) \quad (3.32)$$

Der Operator $\tilde{\Sigma}$ wird später so gewählt, daß der neue Wechselwirkungsterm $\mathcal{L}'_{int}$ in erster Ordnung Störungstheorie keinen zusätzlichen Beitrag zur Quark-Selbstenergie liefert. Diese Bedingung entspricht genau der Hartree-Fock-Methode.

Mit dem inversen Quark-Propagator

$$\tilde{S}^{-1}(y-x) = -[(i\bar{\partial} + m_o) \delta^4(y-x) + \tilde{\Sigma}(y-x)] \quad (3.33)$$

läßt sich die zu der Lagrangedichte $\mathcal{L}'_o$ zugehörige Wirkung I'_o schreiben als

$$I'_o = \int d^4x \mathcal{L}'_o(x) = \int d^4y d^4x \bar{q}(y) \tilde{S}^{-1}(y-x) q(x) \quad (3.34)$$

Transformiert man Gl. (3.33) in den Impulsraum, erhält man

$$S^{-1}(p) = \not{p} - (m_o + \Sigma(p)) \quad (3.35)$$

Dabei sind S^{-1} und Σ die Fourier-Transformierten von $\tilde{S}^{-1}$ und $\tilde{\Sigma}$. Setzen wir voraus, daß $\Sigma(p)$ ein Lorentz-kovarianter Operator ist, der die Parität, die Isospin- und die Farbsymmetrie erhält, dann besitzt er die allgemeine Struktur

$$\Sigma(p) = \mathcal{F}(p^2) + \mathcal{G}(p^2) \not{p}, \quad (3.36)$$

wobei $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ skalare Funktionen sind. Damit können wir Gl. (3.35) invertieren und erhalten für den Quark-Propagator im Impulsraum:

$$S(p) = \frac{(1 - \mathcal{G}(p^2)) \not{p} + (m_o + \mathcal{F}(p^2))}{(1 - \mathcal{G}(p^2)) p^2 - (m_o + \mathcal{F}(p^2))^2} \quad (3.37)$$

Wenn wir nun die Wechselwirkung $\mathcal{L}'_{int}$ „einschalten“, bekommen wir in erster Ordnung Störungstheorie zum Propagator $S(p)$ einen Korrekturterm

$$i\delta S(p) = iS(p) (-i\delta\Sigma(p)) iS(p) \quad (3.38)$$

mit

$$\begin{aligned} -i\delta\Sigma(p) = & \sum_{i=1}^2 2iG_i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \{ \tilde{\alpha}(-p, -k; p, k) \Gamma_i^{\mu k} (-) \text{tr}[\Gamma_{i\mu}^k iS(k)] \\ & + \tilde{\alpha}(-k, -p; p, k) \Gamma_i^{\mu k} iS(k) \Gamma_{i\mu}^k \} \\ & + i\Sigma(p) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Die Forderung, daß die Korrektur zum Propagator in erster Ordnung Störungstheorie verschwinden soll, führt somit auf das folgende Selbstkonsistenzproblem

$$\begin{aligned} -i\Sigma(p) = & \sum_{i=1}^2 2iG_i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \{ \tilde{\alpha}(-p, -k; p, k) \Gamma_i^{\mu k} (-) \text{tr}[\Gamma_{i\mu}^k iS(k)] \\ & + \tilde{\alpha}(-k, -p; p, k) \Gamma_i^{\mu k} iS(k) \Gamma_{i\mu}^k \} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Dies ist die verallgemeinerte Gap-Gleichung. Unter Verwendung der expliziten Ausdrücke für die Operatoren $\Gamma_i^{\mu k}$ (Gl. (3.13)) und den Propagator (Gl. (3.37)) sieht man, daß der direkte Term (erste Zeile von Gl. (3.40)) verschwindet. Grund dafür ist

die Farb-Oktett-Struktur der Operatoren. Den Austauschterm (zweite Zeile) kann man z. B. über eine Fierz-Transformation auswerten. Man erhält

$$\begin{aligned}\Sigma(p) &= \mathcal{F}(p^2) + \mathcal{G}(p^2) \not{p} \\ &= (4infn_c) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{\alpha}(-k, -p; p, k) \frac{g_S (m_o + \mathcal{F}(k^2)) + g_V (1 - \mathcal{G}(k^2)) \not{k}}{(1 - \mathcal{G}(k^2))^2 k^2 - (m_o + \mathcal{F}(k^2))^2} .\end{aligned}\quad (3.41)$$

Die skalare Kopplungskonstante g_S und die Vektorkopplungskonstante g_V sind Linearkombinationen von G_1 und G_2 :

$$\begin{aligned}g_S &= -\frac{16}{9} (G_1 - G_2) \\ g_V &= \frac{8}{9} (G_1 + G_2) .\end{aligned}\quad (3.42)$$

Für eine beliebige vorgegebene Funktion $\tilde{\alpha}$ ist Gl. (3.41) im allgemeinen ein äußerst schwieriges Selbstkonsistenzproblem. Im Gegensatz zum NJL-Modell suchen wir nicht nach einer einzigen Zahl – der gedressten Quarkmasse –, sondern nach zwei Funktionen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$, deren Verlauf zunächst völlig offen ist. Wenn überhaupt, können die Lösungen sicherlich nur auf numerischem Wege gefunden werden. Hinzu kommt, daß $\tilde{\alpha}$ für Impulsüberträge, die außerhalb des perturbativen Bereichs liegen, bis jetzt noch nicht aus der QCD hergeleitet werden kann. Für analytische Diskussionen sowie für praktische Rechnungen ist es daher häufig sinnvoll, zu einem vereinfachten Modell mit einer separablen Wechselwirkung überzugehen:

$$\tilde{\alpha}(k_3, k_4; k_1, k_2) = \prod_{j=1}^4 f^{\frac{1}{2}}(k_j^2) .\quad (3.43)$$

Aus der Normierung von $\tilde{\alpha}$ (Gl. (3.17)) folgt, daß die Funktion f an der Stelle $p^2 = 0$ auf eins normiert ist:

$$f(0) = 1 .\quad (3.44)$$

Setzt man Gl. (3.43) in Gl. (3.41) ein, vereinfacht sich die Gleichung deutlich: Die gesamte Abhängigkeit vom äußeren Impuls p ist nun in einer Funktion $f(p^2)$ enthalten, die man vor das Integral ziehen kann. Außerdem trägt der Term proportional zu g_V nicht zum Integral bei, da er eine ungerade Funktion in k ist. Damit verschwindet die Funktion $\mathcal{G}$ identisch, und wir bekommen:

$$\Sigma(p) = \mathcal{F}(p^2) = f(p^2) g_S (4infn_c) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m_o + \mathcal{F}(k^2)}{k^2 - (m_o + \mathcal{F}(k^2))^2} f(k^2) .\quad (3.45)$$

Offensichtlich ist die Selbstenergie streng proportional zu der Funktion f ,

$$\mathcal{F}(p^2) = \mathcal{F}(0) f(p^2), \quad (3.46)$$

und wir bekommen ein Selbstkonsistenzproblem für die Selbstenergie an der Stelle $p^2 = 0$, das im wesentlichen dieselbe Struktur aufweist, wie die NJL-Gap-Gleichung:

$$\mathcal{F}(0) = g_S (4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m_o + \mathcal{F}(0) f(k^2)}{k^2 - (m_o + \mathcal{F}(0) f(k^2))^2} f(k^2) \quad (3.47)$$

Im chiralen Limes ($m_o = 0$) gibt es wieder eine triviale Lösung $\mathcal{F}(0) = 0$, d. h. $\mathcal{F} \equiv 0$. Daneben kann es aber – in Abhängigkeit von g_S und f – auch nicht-triviale Lösungen geben.

Unter Verwendung des Vakuumkondensats

$$\langle \bar{q}q \rangle = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr } iS(k) = - (4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m_o + \mathcal{F}(k^2)}{k^2 - (m_o + \mathcal{F}(k^2))^2} \quad (3.48)$$

kann die Gap-Gleichung auf die folgende Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} & g_S (4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f^2(k^2)}{k^2 - (m_o + \mathcal{F}(k^2))^2} \\ &= 1 - \frac{m_o}{\mathcal{F}(0)} g_S (4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f(k^2)}{k^2 - (m_o + \mathcal{F}(k^2))^2} \\ &= 1 + \frac{g_S}{\mathcal{F}(0)^2} m_o \langle \bar{q}q \rangle + \mathcal{O}(m_o^2). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Wie im NJL-Modell ist es in praktischen Rechnungen zweckmäßiger, die Selbstenergie $\mathcal{F}$ vorzugeben und die Kopplungsstärke aus der Gap-Gleichung zu berechnen.

3.4. BESCHREIBUNG VON MESONEN

Im vorigen Abschnitt haben wir die nichtperturbative Quark-Selbstenergie als Lösung eines Hartree-Fock-Problems hergeleitet. Dieses Verfahren ist äquivalent zur Lösung einer Dyson-Schwinger-Gleichung, wie sie in Abb. 3.6 dargestellt ist. Der Streukern $\hat{K}$, aus dem sich die Selbstenergie durch Schließen einer gedrehten Quarkschleife ergibt, ist die aus der nichtlokalen Wechselwirkung $\mathcal{L}_{int}$ (Gl. (3.11)) folgende Vier-Fermion-Vertexfunktion. Sie lautet im Impulsraum:

$$\begin{aligned} i\hat{K}_{ca;db}(p_1, p_3 | p_2, p_4) &= 2i\tilde{\alpha}(-p_3, -p_4; p_1, p_2) \sum_{i=1}^2 G_i (\Gamma_i^{\mu k})_{ca} (\Gamma_{i\mu}^k)_{db} \\ &\quad - 2i\tilde{\alpha}(-p_4, -p_3; p_1, p_2) \sum_{i=1}^2 G_i (\Gamma_i^{\mu k})_{da} (\Gamma_{i\mu}^k)_{cb}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

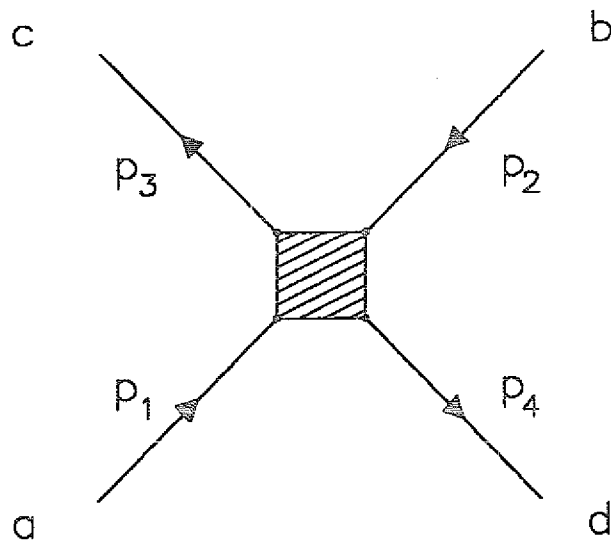


Abb. 3.5: Der nichtlokale Vierpunkt-Vertex unseres Modells. Die Indizes a bis d beziehen sich auf die in Gl. (3.50) verwendete Indizierung der Operatoren.

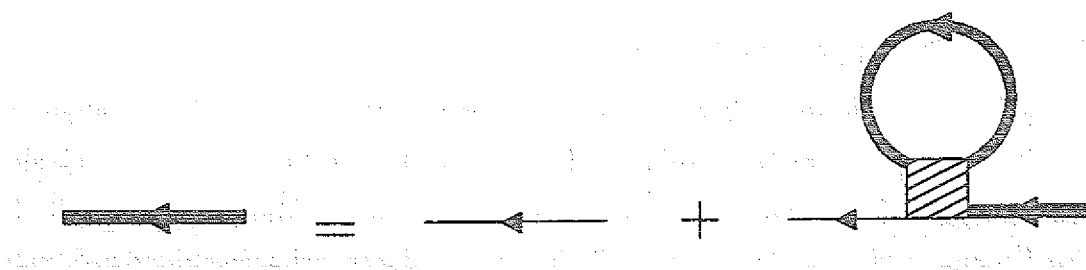


Abb. 3.6: Dyson-Schwinger-Gleichung für den gedressten Quark-Propagator (dicke Linien). Die dünnen Linien stellen die nackten Propagatoren dar.

Die Bedeutung der Indizes und der Impulse p_i ist aus Abb. 3.5 ersichtlich. Wie schon mehrfach betont, sind die Vertizes aufgrund der Nichtlokalität der Wechselwirkung impulsabhängig. Dies kann als Formfaktor gedeutet werden, mit dem die zugrunde

liegende gluonische Struktur phänomenologisch parametrisiert wird.

Durch eine Fierz-Transformation kann man den Austauschterm (zweite Zeile von Gl. (3.50) auf die Form des direkten Terms bringen. Auf diese Weise bekommt man

$$\begin{aligned}
& i\hat{K}(p_1, p_3 | p_2, p_4) \\
&= i\tilde{\alpha}(-p_4, -p_3; p_1, p_2) \\
& \{ g_S [(1 \, 1_f 1_c) \otimes (1 \, 1_f 1_c) + (i\gamma_5 1_f 1_c) \otimes (i\gamma_5 1_f 1_c) \\
& \quad (1 \, \tau^k 1_c) \otimes (1 \, \tau^k 1_c) + (i\gamma_5 \tau^k 1_c) \otimes (i\gamma_5 \tau^k 1_c)] \\
& + g_V [(\gamma^\mu 1_f 1_c) \otimes (\gamma_\mu 1_f 1_c) + (\gamma^\mu \gamma_5 1_f 1_c) \otimes (\gamma_\mu \gamma_5 1_f 1_c) \\
& \quad (\gamma^\mu \tau^k 1_c) \otimes (\gamma_\mu \tau^k 1_c) + (\gamma^\mu \gamma_5 \tau^k 1_c) \otimes (\gamma_\mu \gamma_5 \tau^k 1_c)] \} \\
& + \text{Farb - Oktett - Terme} ,
\end{aligned} \tag{3.51}$$

wobei die Kopplungskonstanten g_S und g_V die bereits in Gl. (3.42). definierten Linearkombinationen aus G_1 und G_2 sind.

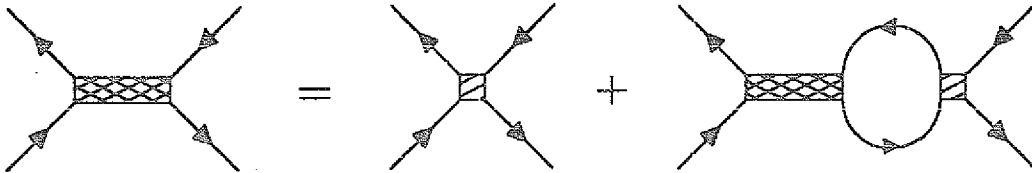


Abb. 3.7: Bethe-Salpeter-Gleichung für die Quark-Antiquark-T-Matrix (schraffiertes Rechteck). Das schraffierte Quadrat stellt den nichtlokalen Streukern dar.

Wir wollen uns nun mit der Beschreibung von Mesonen beschäftigen. Wie in Abschnitt 2.4 iterieren wir dazu wieder – jetzt allerdings im Rahmen unseres nichtlokalen Modells – Quark-Antiquark-Polarisationsdiagramme bis zu unendlicher Ordnung. Dabei wollen wir formal etwas sorgfältiger vorgehen und auch die Möglichkeit von Kanalkopplungen („ πa_1 -mixing“) berücksichtigen. Dies entspricht der Lösung

der der Gap-Gleichung entsprechenden Zweiteilchengleichung, der Bethe-Salpeter-Gleichung für die Quark-Antiquark-T-Matrix:

$$i\hat{T} = i\hat{K} + i\hat{K}(-i\hat{\Pi})i\hat{T} \quad (3.52)$$

Dabei ist $\hat{\Pi}$ der Quark-Antiquark-Polarisationsoperator. Die Gleichung ist in Abb. 3.7 graphisch dargestellt. Um sie etwas genauer zu formulieren, schreiben wir den Streukern in der Form

$$\hat{K}(p_1, p_3|p_2, p_4) = \sum_m k_m(p_1, p_3|p_2, p_4) \hat{\Gamma}_m \otimes \hat{\Gamma}_m, \quad (3.53)$$

wobei wir die verschiedenen Operatoren mit $\hat{\Gamma}_m$ bezeichnet haben. Die zugehörigen Koeffizienten k_m erhält man durch Vergleich mit Gl. (3.51). Für die T-Matrix machen wir einen ähnlichen Ansatz:

$$\hat{T}(p_1, p_3|p_2, p_4) = \sum_{mn} t_{mn}(p_1, p_3|p_2, p_4) \hat{\Gamma}_m \otimes \hat{\Gamma}_n. \quad (3.54)$$

Wie oben angekündigt, berücksichtigen wir auch die Möglichkeit von Kanalkopplungen. Das äußert sich darin, daß wir in Gl. (3.54) auch Nichtdiagonalelemente $\hat{\Gamma}_m \neq \hat{\Gamma}_n$ zulassen.

Damit können wir für Gl. (3.52) schreiben:

$$\begin{aligned} i t_{mn}(p_1, p_3|p_2, p_4) \\ = i k_m(p_1, p_3|p_2, p_4) \delta_{mn} + \sum_r \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i k_m(p_1, p_3|k + \frac{q}{2}, k - \frac{q}{2}) \\ \times (-) \text{tr}[\hat{\Gamma}_m i S(k + \frac{q}{2}) \hat{\Gamma}_r i S(k - \frac{q}{2})] \\ \times i t_{rn}(k - \frac{q}{2}, k + \frac{q}{2}|p_2, p_4). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Der übertragene Impuls q ist definiert als $q = p_3 - p_1 = p_2 - p_4$.

Erneut ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung ein äußerst schwieriges Problem, da der Verlauf der Funktion t_{rn} , die in den Integranden eingeht, unbekannt ist. Es kommt hinzu, daß zunächst die Gap-Gleichung Gl. (3.41) gelöst werden muß, um die Quark-Propagatoren $S(k \pm \frac{q}{2})$ zu berechnen. Das ist, wie wir gesehen haben, im Fall einer allgemeinen nichtlokalen Wechselwirkung ebenfalls sehr schwierig.

Das Problem vereinfacht sich aber wieder erheblich, wenn wir die separable Wechselwirkung (Gl. (3.43)) verwenden. In diesem Fall können wir schreiben:

$$k_m(p_1, p_3 | p_2, p_4) = g_m \prod_{j=1}^4 f^{\frac{1}{2}}(p_j^2) \quad (3.56)$$

Diese Struktur bleibt bei der Iteration erhalten, so daß sich die T-Matrix in ähnlicher Weise darstellen läßt:

$$t_{mn}(p_1, p_3 | p_2, p_4) = \tilde{T}_{mn}(q) \prod_{j=1}^4 f^{\frac{1}{2}}(p_j^2) \quad (3.57)$$

Damit reduziert sich das Problem auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\tilde{T}_{mn}(q) = g_m \delta_{mn} + \sum_r g_m J(\hat{\Gamma}_m, \hat{\Gamma}_r) \tilde{T}_{rn}(q) \quad (3.58)$$

mit der Polarisationsfunktion

$$J(\hat{\Gamma}_m, \hat{\Gamma}_r) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr}[\hat{\Gamma}_m S(k + \frac{q}{2}) \hat{\Gamma}_r S(k - \frac{q}{2})] f((k + \frac{q}{2})^2) f((k - \frac{q}{2})^2) \quad (3.59)$$

Die Nichtlokalität der Wechselwirkung macht sich jetzt nur noch in den Propagatoren $S(k \pm \frac{q}{2})$ und in den Funktionen $f((k \pm \frac{q}{2})^2)$ im Integranden von $J(\hat{\Gamma}_m, \hat{\Gamma}_r)$ bemerkbar. Die allgemeine Struktur der Gleichungen ist dagegen dieselbe wie im NJL-Modell, und wir können weitgehend der Vorgehensweise von Ref. [54] folgen.

Unter Verwendung von Gl. (3.37) für den Quark-Propagator und der Tatsache, daß die Funktion G im separablen Modell identisch verschwindet, können wir zunächst $J(\hat{\Gamma}_m, \hat{\Gamma}_r)$ für alle möglichen Operatoren $\hat{\Gamma}_m$ und $\hat{\Gamma}_r$ berechnen. Offensichtlich ist $J(\hat{\Gamma}_m, \hat{\Gamma}_r)$ diagonal in den Flavour- und in den Farboperatoren. Die nichtverschwindenden Polarisationsfunktionen in den Farb-Singulett-Kanälen können unter Berücksichtigung der Lorentz-Kovarianz auf die folgende Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} J(1 \, 1_f \, 1_c, 1 \, 1_f \, 1_c) &= J(1 \, \tau^k \, 1_c, 1 \, \tau^k \, 1_c) = J_{SS}(q^2) \\ J(i\gamma_5 \, 1_f \, 1_c, i\gamma_5 \, 1_f \, 1_c) &= J(i\gamma_5 \, \tau^k \, 1_c, i\gamma_5 \, \tau^k \, 1_c) = J_{PP}(q^2) \\ J(\gamma^\mu \, 1_f \, 1_c, \gamma^\nu \, 1_f \, 1_c) &= J(\gamma^\mu \, \tau^k \, 1_c, \gamma^\nu \, \tau^k \, 1_c) = J_{VV}^{(L)}(q^2) L^{\mu\nu} + J_{VV}^{(T)}(q^2) T^{\mu\nu} \\ J(\gamma^\mu \gamma_5 \, 1_f \, 1_c, \gamma^\nu \gamma_5 \, 1_f \, 1_c) &= J(\gamma^\mu \gamma_5 \, \tau^k \, 1_c, \gamma^\nu \gamma_5 \, \tau^k \, 1_c) = J_{AA}^{(L)}(q^2) L^{\mu\nu} + J_{AA}^{(T)}(q^2) T^{\mu\nu} \\ J(i\gamma_5 \, 1_f \, 1_c, \gamma^\mu \gamma_5 \, 1_f \, 1_c) &= J(i\gamma_5 \, \tau^k \, 1_c, \gamma^\mu \gamma_5 \, \tau^k \, 1_c) = J_{PA}(q^2) i\hat{q}^\mu \\ J(\gamma^\mu \gamma_5 \, 1_f \, 1_c, i\gamma_5 \, 1_f \, 1_c) &= J(\gamma^\mu \gamma_5 \, \tau^k \, 1_c, i\gamma_5 \, \tau^k \, 1_c) = - J_{PA}(q^2) i\hat{q}^\mu \end{aligned} \quad (3.60)$$

Dabei haben wir den Einheitsvierervektor in q -Richtung

$$\hat{q}^\mu = \frac{q^\mu}{\sqrt{q^2}} \quad (3.61)$$

und den longitudinalen und den transversalen Projektionsoperator

$$L^{\mu\nu} = \hat{q}^\mu \hat{q}^\nu \quad ; \quad T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \hat{q}^\mu \hat{q}^\nu \quad (3.62)$$

eingeführt. Die skalaren Funktionen J_{SS} , J_{PP} , $J_{VV}^{(L)}$, $J_{AA}^{(L)}$ und J_{PA} werden in Anhang A genauer angegeben.

Da $J(\hat{\Gamma}_m, \hat{\Gamma}_r)$ in den Flavour- und den Farboperatoren diagonal ist, ist auch die T-Matrix in diesen Operatoren diagonal. Sie kann also in 36 Untermatrizen zerlegt werden ((1 isoskalar $\oplus$ 3 isovektoriell) $\otimes$ (1 Farb-Singulett $\oplus$ 8 Farb-Oktett)). Jede dieser Untermatrizen $\hat{T}^{(k)}$ ist die Lösung einer Streugleichung

$$i\hat{T}^{(k)} = i\hat{K}^{(k)} + i\hat{K}^{(k)} (-i\hat{\Pi}) i\hat{T}^{(k)} , \quad (3.63)$$

die sich in ein lineares Gleichungssystem von der Art von Gl. (3.58) umwandeln läßt. Für die Farb-Singulett-Kanäle lautet der Streukern

$$\begin{aligned} \hat{K}^{(k)} = [& g_S (1 \hat{\Gamma}_f^{(k)} \otimes 1 \hat{\Gamma}_f^{(k)}) + g_S (i\gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)} \otimes (i\gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)})) \\ & + g_V (\gamma^\mu \hat{\Gamma}_f^{(k)} \otimes \gamma_\mu \hat{\Gamma}_f^{(k)}) + g_V (\gamma^\mu \gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)} \otimes (\gamma_\mu \gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)}))] \quad (3.64) \\ & \times \prod_{j=1}^4 f^{\frac{1}{2}}(p_j^2) . \end{aligned}$$

Dabei steht $\hat{\Gamma}_f^{(k)}$ für einen Isospinoperator (1_f oder τ^m). Die größte technische Schwierigkeit besteht darin, daß die T-Matrix – anders als der Streukern $\hat{K}$ – nicht diagonal in der Dirac-Operatorbasis $\{1, i\gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5, \sigma^{\mu\nu}\}$ ist. Durch die nichtverschwindende Polarisationsfunktion J_{PA} (s. Gl. (3.60)) kommt es zu einer Kopplung der $i\gamma_5$ -Terme mit den $\gamma^\mu \gamma_5$ -Termen („ πa_1 -mixing“). Wir folgen deshalb Ref. [54] und zerlegen $\hat{K}^{(k)}$ in vier Kanäle

$$\hat{K}^{(k)} = \hat{K}_S^{(k)} + \hat{K}_P^{(k)} + \hat{K}_V^{(k)} + \hat{K}_A^{(k)} , \quad (3.65)$$

indem wir die Identität $L^{\mu\nu} + T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ ausnutzen:

$$\begin{aligned}
\hat{K}_S^{(k)} &= [g_S (1 \hat{\Gamma}_f^{(k)} \otimes 1 \hat{\Gamma}_f^{(k)}) + g_V (-i \hat{\not{q}} \hat{\Gamma}_f^{(k)} \otimes i \hat{\not{q}} \hat{\Gamma}_f^{(k)})] \prod_{j=1}^4 f^{\frac{1}{2}}(p_j^2) \\
\hat{K}_P^{(k)} &= [g_S (i \gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)} \otimes i \gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)}) + g_V (-i \hat{\not{q}} \gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)} \otimes i \hat{\not{q}} \gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)})] \prod_{j=1}^4 f^{\frac{1}{2}}(p_j^2) \\
\hat{K}_V^{(k)} &= g_V T_{\mu\nu} (\gamma^\mu \hat{\Gamma}_f^{(k)} \otimes \gamma^\nu \hat{\Gamma}_f^{(k)}) \prod_{j=1}^4 f^{\frac{1}{2}}(p_j^2) \\
\hat{K}_A^{(k)} &= g_V T_{\mu\nu} (\gamma^\mu \gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)} \otimes \gamma^\nu \gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)}) \prod_{j=1}^4 f^{\frac{1}{2}}(p_j^2) \quad .
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Wir haben also die longitudinalen Anteile der vektoriellen bzw. axialen Kopplung mit den skalaren bzw. pseudoskalaren Kopplungen zusammengefaßt. Da der longitudinale zum transversalen Projektionsoperator orthogonal ist, d. h. $L_{\lambda\mu} T^{\mu\nu} = 0$, mischen diese vier Kanäle nicht:

$$\hat{K}_i^{(k)} \hat{\Pi} \hat{K}_j^{(k)} = 0 \quad \text{für } i \neq j. \tag{3.67}$$

Die T-Matrix $\hat{T}^{(k)}$ separiert deshalb in ähnlicher Weise in vier Kanäle, die jeweils Lösung einer Streugleichung

$$i \hat{T}_i^{(k)} = i \hat{K}_i^{(k)} + i \hat{K}_i^{(k)} (-i \hat{\Pi}) i \hat{T}_i^{(k)} \quad i = S, P, V, A \tag{3.68}$$

sind. Diese Untermatrizen der T-Matrix identifizieren wir wieder mit dem Austausch eines Mesons mit den entsprechenden Quantenzahlen. Da die pseudoskalaren Mesonen als Goldstone-Bosonen eine besondere Rolle spielen, wollen wir mit ihrer Diskussion beginnen:

Ausgehend von der allgemeinen Struktur von $\hat{K}_P^{(k)}$ (Gl. (3.66)) setzen wir $\hat{T}_P^{(k)}$ in der Form

$$\begin{aligned}
&\hat{T}_P^{(k)}(p_1, p_3 | p_2, p_4) \\
&= [t_{PP}(q^2) (i \gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)} \otimes i \gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)}) + t_{PA}(q^2) (i \gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)} \otimes i \hat{\not{q}} \gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)}) \\
&+ t_{AP}(q^2) (-i \hat{\not{q}} \gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)} \otimes i \gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)}) + t_{AA}^{(L)}(q^2) (-i \hat{\not{q}} \gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)} \otimes i \hat{\not{q}} \gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)})] \\
&\quad \times \prod_{j=1}^4 f^{\frac{1}{2}}(p_j^2)
\end{aligned} \tag{3.69}$$

an. Aus Gl. (3.68) ergibt sich dann ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten t_{PP} , t_{PA} , t_{AP} und $t_{AA}^{(L)}$. Die Lösungen lauten:

$$\begin{aligned} t_{PP}(q^2) &= \frac{g_S (1 - g_V J_{AA}^{(L)}(q^2))}{D_P(q^2)} \quad ; \quad t_{AA}^{(L)}(q^2) = \frac{g_V (1 - g_S J_{PP}(q^2))}{D_P(q^2)} \\ t_{PA}(q^2) &= t_{AP}(q^2) = \frac{g_S g_V J_{PA}(q^2)}{D_P(q^2)} , \end{aligned} \quad (3.70)$$

mit

$$D_P(q^2) = (1 - g_S J_{PP}(q^2)) (1 - g_V J_{AA}^{(L)}(q^2)) - g_S g_V J_{PA}^2(q^2) . \quad (3.71)$$

In der Nähe des Poles $D_P = 0$ können wir $\hat{T}_P$ in durch einen Mesonpropagator und zwei Meson-Quark-Kopplungskonstanten parametrisieren:

$$\begin{aligned} i\hat{T}_P^{(k)}(p_1, p_3 | p_2, p_4) \\ = \frac{i}{q^2 - m_\pi^2} \left[(-i) (g_{\pi qq}(p_3, p_1) i\gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)} - h_{\pi qq}(p_3, p_1) i\not{p}_3 \gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)}) \right. \\ \left. \otimes (-i) (g_{\pi qq}(p_4, p_2) i\gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)} + h_{\pi qq}(p_4, p_2) i\not{p}_4 \gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)}) \right] . \end{aligned} \quad (3.72)$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit Gl. (3.69) und Gl. (3.70), sehen wir, daß die Masse des pseudoskalaren Mesons durch die Bedingung

$$D_P(m_\pi^2) = 0 \quad (3.73)$$

gegeben ist. Für die Kopplungskonstanten bekommen wir

$$\begin{aligned} g_{\pi qq}(p_i, p_j) &= g_{\pi qq}^{(o)} f^{\frac{1}{2}}(p_i^2) f^{\frac{1}{2}}(p_j^2) \\ h_{\pi qq}(p_i, p_j) &= h_{\pi qq}^{(o)} f^{\frac{1}{2}}(p_i^2) f^{\frac{1}{2}}(p_j^2) , \end{aligned} \quad (3.74)$$

mit

$$g_{\pi qq}^{(o)2} = -g_S (1 - g_V J_{AA}^{(L)}(m_\pi^2)) \left(\frac{dD_P}{dq^2}(m_\pi^2) \right)^{-1} \quad (3.75)$$

$$h_{\pi qq}^{(o)} = \frac{1}{m_\pi} \frac{g_V J_{PA}(m_\pi^2)}{1 - g_V J_{AA}^{(L)}(m_\pi^2)} g_{\pi qq}^{(o)} . \quad (3.76)$$

Die Existenz der zweiten Kopplungskonstanten $h_{\pi qq}$ hängt mit der Mischung der $i\gamma_5$ -Terme mit den $\gamma^\mu \gamma_5$ -Termen zusammen und ist keine spezielle Eigenschaft unseres

nichtlokalen Modells. Wenn wir bei der Diskussion des NJL-Modells im vorigen Kapitel eine einfachere Lösung für das Pion gefunden haben, so liegt das daran, daß wir dort keine Vektorkopplung hatten. Setzen wir in unserem neuen Modell die Vektorkopplungskonstante g_V gleich null (d. h. $G_1 = G_2$), vereinfacht sich auch hier die Struktur. Insbesondere ergibt sich dann

$$\left. \begin{aligned} D_P(m_\pi^2) &= 1 - g_S J_{PP}(m_\pi^2) = 0 \\ g_{\pi qq}^{(o)2} &= \left(\frac{dJ_{PP}}{dq^2}(m_\pi^2) \right)^{-1} \\ h_{\pi qq}^{(o)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{für } g_V = 0 \quad (3.77)$$

Unser Modell besitzt eine chirale symmetrische Wechselwirkung (s. Gl. (3.18). Im Grenzfall $m_o = 0$ müssen also die pseudoskalaren Mesonen masselos sein, wenn die Beschreibung des Zweiteilchenproblems (Mesonen) zur Beschreibung des Einteilchenproblems (gedresste Quarks) konsistent ist. Unter Verwendung von Gl. (3.59) und Gl. (3.60) sowie des gedressten Quark-Propagators (Gl. (3.37)) mit $\mathcal{G} = 0$ erhalten wir die Polarisationsfunktionen

$$\begin{aligned} J_{PP}(q^2) &= (4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 + \frac{q^2}{4} - m_+ m_-}{[(k + \frac{q}{2})^2 - m_+^2][(k - \frac{q}{2})^2 - m_-^2]} f((k + \frac{q}{2})^2) f((k - \frac{q}{2})^2) \\ &\quad (3.78) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} J_{PA}(q^2) &= (4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\frac{\sqrt{q^2}}{2}(m_+ + m_-) - (m_+ - m_-)k \cdot \hat{q}}{[(k + \frac{q}{2})^2 - m_+^2][(k - \frac{q}{2})^2 - m_-^2]} f((k + \frac{q}{2})^2) f((k - \frac{q}{2})^2) . \\ &\quad (3.79) \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Abkürzung $m_\pm := m_o + \mathcal{F}((k \pm \frac{q}{2})^2)$ eingeführt. Unter Zuhilfenahme der Gap-Gleichung (Gl. (3.49)) bekommen wir also für $q^2 = 0$:

$$J_{PP}(0) = (4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f^2(k^2)}{k^2 - (m_o + \mathcal{F}(k^2))^2} = 1 + \frac{g_S}{\mathcal{F}^2(0)} m_o \langle \bar{q}q \rangle + \mathcal{O}(m_o^2), \quad (3.80)$$

und

$$J_{PA}(0) = 0 \quad (3.81)$$

und folglich

$$D_P(0) = -\frac{g_S}{\mathcal{F}^2(0)} m_o \langle \bar{q}q \rangle (1 - g_V J_{AA}^{(L)}(0)) + \mathcal{O}(m_o^2) . \quad (3.82)$$

Im chiralen Limes ($m_o = 0$) verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung, was nach Gl. (3.73) bedeutet, daß das pseudoskalare Meson masselos ist. Die Beschreibung von Quarks und Mesonen erfolgt also in unserem Modell in konsistenter Weise, so daß das Goldstone-Theorem gilt.

Es ist recht lohnend, noch einmal herauszuarbeiten, wie dieses Ergebnis formal zustande kommt. Wie im NJL-Modell ist der entscheidende Schritt, daß die pseudoskalare Polarisationsfunktion an der Stelle $q^2 = 0$,

$$J_{PP}(0) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} [i\gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)} S(k) i\gamma_5 \hat{\Gamma}_f^{(k)} S(k)] f^2(k^2) , \quad (3.83)$$

im chiralen Limes durch die Gap-Gleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(0) &= ig_S \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k) f(k^2) \\ &= g_S (4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{F}(k^2)}{k^2 - \mathcal{F}^2(k^2)} f(k^2) \end{aligned} \quad (3.84)$$

eliminiert werden kann. Das ist zunächst recht erstaunlich, da in Gl. (3.83) zwei Quark-Propagatoren und zwei Vertizes, in Gl. (3.84) hingegen nur ein Propagator und ein Vertex eingehen. Wenn wir in Gl. (3.83) die Spur ausfinden, finden wir

$$\begin{aligned} J_{PP}(0) &= (4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - \mathcal{F}(k^2)}{[k^2 - \mathcal{F}^2(k^2)]^2} f^2(k^2) \\ &= (4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \mathcal{F}^2(k^2)} f^2(k^2) \end{aligned} \quad (3.85)$$

Ein Faktor $(k^2 - \mathcal{F}^2(k^2))$ fällt also durch Kürzen heraus, so daß der Nenner trotz der zwei Propagatoren wie in der Gap-Gleichung nur eine einfache Potenz dieses Faktors ist. Soweit ist alles genauso wie im NJL-Modell.

In unserem Modell kommt jedoch noch ein zweiter Schritt hinzu: In Gl. (3.84) findet man im Zähler des Integranden die Quark-Selbstenergie $\mathcal{F}(k^2)$ und die Wechselwirkungsfunktion $f(k^2)$. Die Selbstenergie hat ihren Ursprung im Propagator, die Funktion f stammt vom Vertex. Da die Polarisationsfunktion zwei Vertizes enthält,

kommt $f(k^2)$ dagegen in Gl. (3.85) quadratisch vor. Andererseits enthält der Integrand hier, nachdem wir gekürzt haben, keinen Faktor $\mathcal{F}(k^2)$. Um die Gap-Gleichung zur Berechnung von $J_{PP}(0)$ heranziehen zu können, müssen wir also explizit ausnutzen, daß in unserem Modell die Selbstenergie $\mathcal{F}(k^2)$ und die Wechselwirkungsfunktion $f(k^2)$ zueinander proportional sind (s. Gl. (3.46)). Auf diese Weise bekommen wir

$$J_{PP}(0) = \frac{1}{\mathcal{F}(0)} (4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{F}(k^2)}{k^2 - \mathcal{F}^2(k^2)} f(k^2) = \frac{1}{g_S}. \quad (3.86)$$

Die gleiche Zählerstruktur der Integranden von $J_{PP}(0)$ und der Gap-Gleichung kommt also auf völlig unterschiedliche Weise zustande.

Wir wollen jetzt die Lösung von Gl. (3.73) für nichtverschwindende nackte Quarkmassen diskutieren. Für kleine Werte von m_o sollte auch die Pionmasse klein sein, und wir können $D_P(m_\pi^2)$ um $q^2 = 0$ in eine Taylorreihe entwickeln und nach der ersten Ordnung abbrechen:

$$0 = D_P(m_\pi^2) = D_P(0) + \frac{dD_P}{dq^2}(0) m_\pi^2 + \mathcal{O}(m_\pi^4). \quad (3.87)$$

Daraus folgt für die Pionmasse:

$$m_\pi^2 = -m_o \langle \bar{q}q \rangle C^{-2} + \mathcal{O}(m_o^2) \quad (3.88)$$

mit

$$C = \mathcal{F}(0) \left[\frac{dJ_{PP}}{dq^2}(0) + g_V \frac{(\frac{d}{dq^2} J_{PA}^2(q^2))|_{q^2=0}}{1 - g_V J_{AA}^{(L)}(0)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.89)$$

Wir werden später C mit der Pion-Zerfallskonstanten f_π identifizieren. Gl. (3.88) geht dann in die Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation [37] über.

Für eine andere wichtige Beziehung – eine verallgemeinerte Goldberger-Treiman-Relation – benötigen wir die Kopplungskonstante $g_{\pi qq}$ im chiralen Limes. Werten wir Gl. (3.75) für $m_\pi^2 = 0$ aus, finden wir

$$g_{\pi qq}^{(o)2} = \mathcal{F}^2(0) C^{-2} + \mathcal{O}(m_o). \quad (3.90)$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $C^2 f(p_f^2) f(p_i^2)$, folgt daraus

$$C^2 g_{\pi qq}^2(p_f, p_i) = \mathcal{F}(p_f^2) \mathcal{F}(p_i^2) + \mathcal{O}(m_o). \quad (3.91)$$

Die anderen Kanäle werden auf ganz ähnliche Weise behandelt:

Die skalare Untermatrix der T-Matrix besitzt die Struktur

$$\begin{aligned} \hat{T}_S(p_1, p_3 | p_2; p_4) \\ = [t_{SS}(q^2) (1 \hat{\Gamma}_f \otimes 1 \hat{\Gamma}_f) + t_{VV}^{(L)}(q^2) (-i \hat{\not{q}} \hat{\Gamma}_f \otimes i \hat{\not{q}} \hat{\Gamma}_f)] \\ \times \prod_{j=1}^4 f^{\frac{1}{2}}(p_j^2) \end{aligned} \quad (3.92)$$

mit

$$t_{SS}(q^2) = \frac{g_S}{1 - g_S J_{SS}(q^2)} \quad ; \quad t_{VV}^{(L)}(q^2) = \frac{g_V}{1 - g_V J_{VV}^{(L)}(q^2)} \quad (3.93)$$

Es gibt hier also – anders als in Gl. (3.69) keine Mischterme („ $\sigma\omega$ -mixing“). Im NJL-Modell kann man zeigen, daß $J_{VV}^{(L)}(q^2)$ identisch verschwindet, so daß nur die skalare Polarisationsfunktion J_{SS} für einen Pol der T-Matrix verantwortlich sein kann. Die skalare Meson-Masse ergibt sich daher aus der Gleichung

$$1 - g_S J_{SS}(m_\sigma^2) = 0. \quad (3.94)$$

Wie in Anhang A gezeigt wird, verschwindet die Funktion $J_{VV}^{(L)}(q^2)$ in unserem Modell nicht und könnte theoretisch einen zweiten Pol produzieren. Unsere numerischen Rechnungen ergeben jedoch keine weiteren Lösungen im zeitartigen Bereich.

Für die Vektormesonen finden wir

$$\hat{T}_V(p_1, p_3 | p_2; p_4) = t_{VV}^{(T)}(q^2) T_{\mu\nu} (\gamma^\mu \hat{\Gamma}_f \otimes \gamma^\nu \hat{\Gamma}_f) \prod_{j=1}^4 f^{\frac{1}{2}}(p_j^2) \quad (3.95)$$

mit

$$t_{VV}^{(L)}(q^2) = \frac{g_V}{1 - g_V J_{VV}^{(T)}(q^2)} \quad , \quad (3.96)$$

so daß ihre Masse durch die Gleichung

$$1 - g_V J_{VV}^{(T)}(m_\rho^2) = 0 \quad (3.97)$$

gegeben ist. In unserem Modell sind ρ und ω entartet.

Schließlich bekommen wir im axialen Kanal

$$\hat{T}_A(p_1, p_3 | p_2; p_4) = t_{AA}^{(T)}(q^2) T_{\mu\nu} (\gamma^\mu \gamma_5 \hat{\Gamma}_f \otimes \gamma^\nu \gamma_5 \hat{\Gamma}_f) \prod_{j=1}^4 f^{\frac{1}{2}}(p_j^2) \quad (3.98)$$

mit

$$t_{AA}^{(L)}(q^2) = \frac{g_V}{1 - g_V J_{AA}^{(T)}(q^2)} \quad , \quad (3.99)$$

und folglich

$$1 - g_V J_{AA}^{(T)}(m_{a_1}^2) = 0 \quad . \quad (3.100)$$

3.5. DIE WAHL DER WECHSELWIRKUNGSFUNKTION

Zu Beginn dieses Kapitels haben wir uns die Frage gestellt, ob es möglich ist, das NJL-Modell so zu modifizieren, daß die unphysikalische Emission freier Quarks unterdrückt wird, ohne dabei die Symmetrieeigenschaften zu zerstören. Wir haben uns überlegt, daß eine Möglichkeit, dieses Ziel zu erreichen, darin bestehen könnte, daß die Quarks eine impulsabhängige Selbstenergie besitzen, die im zeitartigen Bereich so stark anwächst, daß die On-shell-Bedingung (Gl. (3.3)) keine Lösung hat.

Grundvoraussetzung dafür, überhaupt eine impulsabhängige Selbstenergie zu bekommen, ist ein nichtlokaler Streukern. Wir haben deshalb in Abschnitt 3.2 eine sehr allgemeine chiral symmetrische Vierpunktwechselwirkung eingeführt und in den beiden folgenden Abschnitten die zugehörige Dyson-Schwinger-Gleichung (Gap-Gleichung) und die Bethe-Salpeter-Gleichung diskutiert. Für den Spezialfall einer separablen Wechselwirkung (Gl. (3.43)) haben wir das besonders einfache Ergebnis gefunden, daß die Quark-Selbstenergie $\Sigma(p^2) = \mathcal{F}(p^2)$ zu der Wechselwirkungsfunktion $f(p^2)$ proportional ist. Für diesen Fall konnten wir auch explizit zeigen, daß das Goldstone-Theorem gilt.

Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, wie die Wechselwirkung genau aussehen muß, damit keine freien Quarks emittiert werden können. Wir gehen dabei von der separablen Wechselwirkung aus. Wegen der Proportionalität der Funktionen $\mathcal{F}$ und f können wir direkt nach einer geeigneten Parametrisierung für die Selbstenergie $\mathcal{F}$ suchen.

Aus der Forderung, daß die On-shell-Bedingung Gl. (3.3) keine Lösungen besitzt, folgt, daß für alle Impulse p die folgende Ungleichung gelten muß:

$$(m_0 + \mathcal{F}(p^2))^2 \neq p^2 \quad . \quad (3.101)$$

Für reelle Impulse kann diese Bedingung z. B. dadurch erfüllt werden, daß wir eine positive Funktion $\mathcal{F}$ verwenden, deren Quadrat überall größer ist als p^2 . Dahinter

verbirgt sich das folgende anschauliche Bild: Die Quarks befinden sich als virtuelle Teilchen in einem homogenen energieabhängigen Potential. Um als freie Teilchen existieren zu können, fehlt ihnen – gemessen an der augenblicklichen Potentialtiefe – ein bestimmter Energiebetrag ΔE . Führt man ihnen aber diese Energie zu, verstärkt sich gleichzeitig das Potential, und die Quarks bleiben gebunden.

Es reicht jedoch nicht aus, die Gültigkeit von Gl. (3.101) auf reelle Impulse zu beschränken. Vielmehr müssen wir auch komplexe Polstellen des Propagators ausschließen, da diese der Existenz von freien Quarks mit endlicher Lebensdauer entsprechen. Analog zu Abschnitt 2.5 lassen sich die genauen Bedingungen für die Nichtexistenz freier Quarks am besten an den Quark-Antiquark-Polarisationsfunktionen untersuchen. In Anhang A wird gezeigt, daß diese Funktionen die folgende allgemeine Gestalt besitzen:

$$J_i(q^2) = (4in_f n_c) \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{\Theta_i(\ell, q)}{[(\ell_+^2 - m^2(\ell_+^2))x + (\ell_-^2 - m^2(\ell_-^2))(1-x)]^2} \times f(\ell_+^2) f(\ell_-^2) \quad (3.102)$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} \ell_+ &:= \ell + (1-x)q \\ \ell_- &:= \ell - xq \end{aligned} \quad (3.103)$$

und

$$m(\ell^2) := m_o + \mathcal{F}(\ell^2). \quad (3.104)$$

Wie in Abschnitt 3.1 dargelegt worden ist, muß die Impulsintegration in Gl. (3.102) im euklidischen Raum ausgeführt werden. Insbesondere müssen wir den Minkowski-Viererimpuls $\ell = (\ell^o, \vec{\ell})$ durch den Viererimpuls $(-i\ell_E^o, \vec{\ell})$ ersetzen. Damit ergibt sich für die Impulse ℓ_+ und ℓ_- :

$$\begin{aligned} \ell_+^2 &= -\ell_E^2 + (1-x)^2 q^2 - 2(1-x) \vec{\ell} \cdot \vec{q} - 2i(1-x) \ell_E^o q^o \\ \ell_-^2 &= -\ell_E^2 + x^2 q^2 + 2x \vec{\ell} \cdot \vec{q} + 2ix \ell_E^o q^o \end{aligned} \quad (3.105)$$

Für $q^o \neq 0$ können ℓ_+^2 und ℓ_-^2 während der Integration über den euklidischen Impuls ℓ_E also auch nichtreelle Werte annehmen. Das läßt erneut vermuten, daß die Beschränkung von Gl. (3.101) auf reelle Quarkimpulse nicht ausreicht, die Emission von freier Quarks zu verhindern. Wegen des komplizierten Zusammenspiels von zwei

Summanden im Nenner von Gl. (3.102) ist allerdings nicht leicht erkennbar, ob die Verallgemeinerung von Gl. (3.101) auf die gesamte komplexe Ebene tatsächlich genau die gesuchte Bedingung für das Nichtauftreten freier Quarks ist. Da die Faktoren x und $(1-x)$ stets größer oder gleich null sind, läßt sich jedoch zumindest eine hinreichende Bedingung finden. Sie lautet:

$$\operatorname{Re} m^2(p^2) = \operatorname{Re} (m_0 + \mathcal{F}(p^2))^2 > \operatorname{Re} p^2 \quad \text{für alle } p^2 \in \mathbb{C}. \quad (3.106)$$

Es ist leicht zu sehen, daß diese Bedingung auch bei Graphen mit mehr als zwei Quarkpropagatoren (z. B. Dreiecksgraphen) Pole ausschließt. In diesen Fällen besteht der Nenner aus entsprechend vielen Summanden $(\ell_i^2 - m^2(\ell_i^2))x_i$, wobei x_i ein positiver Feynman-Parameter ist.

Gl. (3.106) ist recht restriktiv. Da eine nichtkonstante analytische Funktion auf der komplexen Ebene maximal eine komplexe Zahl nicht als Wert annimmt, scheiden, die triviale, aber physikalisch nicht besonders sinnvolle Lösung $m^2(p^2) = p^2 + \text{const.}$ ausgenommen, alle analytischen Funktionen als Lösungen aus.

Die folgende Funktion [55] erfüllt Gl. (3.106) [56]:

$$\mathcal{F}(p^2) = \left[\frac{p^2 + a^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{p^2 + a^2}{2}\right)^2 + b^4} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.107)$$

Dabei sind a und b reelle Parameter der Dimension [Masse]. Für die komplexe Wurzel verwenden wir die Standarddefinition: Für positive reelle Argumente nehmen wir die positive Wurzel. Diese wird analytisch in die komplexe Ebene fortgesetzt. Um die Eindeutigkeit zu gewährleisten, legen wir entlang der negativen reellen Achse einen Schnitt. Entsprechend besitzt die Funktion $\mathcal{F}$ Verzweigungspunkte an den Stellen $p^2 = (-a^2, \pm 2ib^2)$ und Schnitte entlang der durch $\operatorname{Re} p^2 = -a^2$ und $|\operatorname{Im} p^2| > 2b^2$ definierten Linien (s. Abb. 3.8). Es ist recht bemerkenswert, daß Stainby und Cahill im Rahmen einer approximativen Lösung der QCD-Dyson-Schwinger-Gleichung im chiralen Limes auf numerischem Wege Verzweigungspunkte in der gleichen kinematischen Gegend gefunden haben [50].

In Abb. 3.9 ist die Funktion $\mathcal{F}^2(p^2)$ für reelle Impulse p^2 dargestellt. Für große positive und negative Werte von p^2 zeigt sie das folgende asymptotische Verhalten:

$$\mathcal{F}^2(p^2) \rightarrow \begin{cases} p^2 + a^2 & \text{für } p^2 \rightarrow +\infty \\ -\frac{2b^2}{p^2} & p^2 \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (3.108)$$

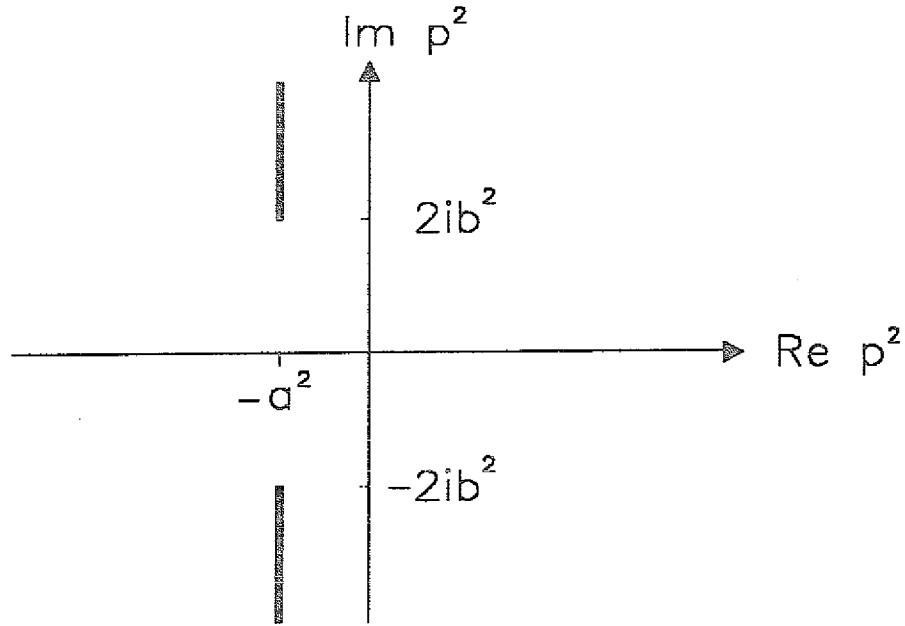


Abb. 3.8: Schnitte in der komplexen p^2 -Ebene zur eindeutigen Definition der Funktion $\mathcal{F}$. An den Stellen $p^2 = (-a^2, \pm 2ib^2)$ besitzt die Funktion Verzweigungspunkte.

Für große raumartige Impulse geht die Selbstenergie also gegen null und zeigt damit zumindest qualitativ das Verhalten der perturbativen Quarkmasse (Gl. (3.4)). Im zeitartigen Bereich wächst $\mathcal{F}^2$ dagegen stark genug an, um die Existenz von freien Quarks zu verhindern.

Das Verhalten der Selbstenergie $\mathcal{F}$ – und damit auch der Wechselwirkungsfunktion f – für große raumartige Impulse ist wichtig für das Divergenzverhalten des Modells. Betrachten wir dazu zunächst die Gap-Gleichung. Aus Gl. (3.47) folgt in explizit euklidischer Notation des Integrals nach Ausführung der Winkelintegration:

$$\mathcal{F}(0) = g_s \frac{n_f n_c}{2\pi^2} \int k_E^3 dk_E \frac{m_o + \mathcal{F}(0)f(-k_E^2)}{k_E^2 + (m_o + \mathcal{F}(0)f(-k_E^2))^2} f(-k_E^2). \quad (3.109)$$

Im NJL-Modell sind die Funktionen f konstant, und der Integrand wächst für große euklidische Impulse linear mit k_E an. Das Integral divergiert also quadratisch. In unserem Modell verhält sich die Funktion $f(-k_E^2)$ für $k_E \rightarrow \infty$ dagegen wie k_E^{-1} . Im chiralen Limes, $m_o = 0$, fällt dadurch der Integrand von Gl. (3.109) ebenfalls wie k_E^{-1} ab, und das Integral divergiert nur noch logarithmisch. Für $m_o \neq 0$ dominiert die

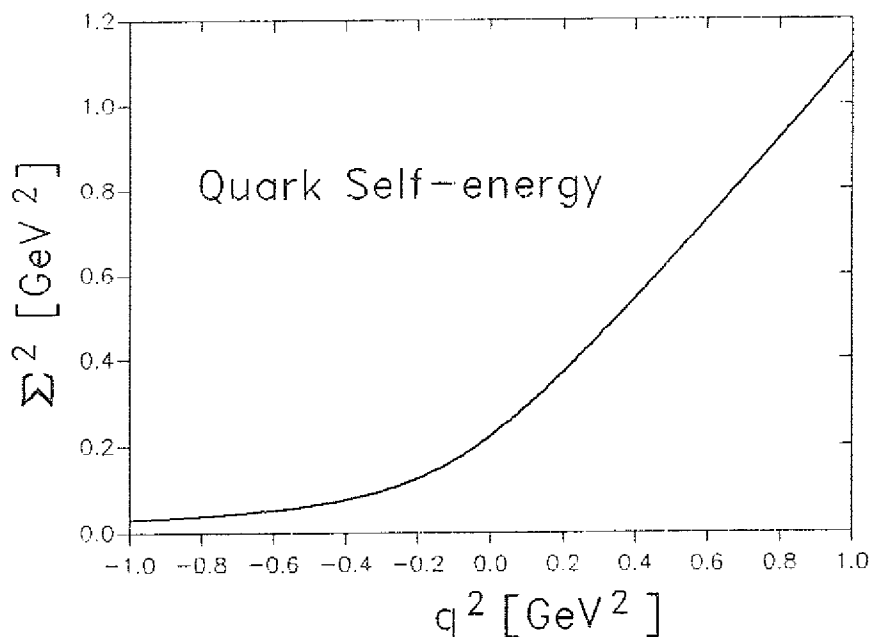


Abb. 3.9: Die quadrierte Quark-Selbstenergie $\mathcal{F}^2$ für reelle Viererimpulse q^2 .

Strommasse schließlich den Zähler des Propagators, und der Integrand konvergiert gegen eine Konstante. Das Integral divergiert dann also linear.

Bei den Quark-Antiquark-Polarisationsfunktionen ergibt sich ein ähnliches Bild. Die Wechselwirkungsfunktion f an den beiden Vertizes bewirkt, daß die meisten Polarisationsfunktionen nur noch logarithmisch, statt wie im NJL-Modell quadratisch, divergieren. Die Funktion $J_{PA}(q^2)$ konvergiert sogar.

Insgesamt rückt unser Modell in die Nähe einer renormierbaren Theorie. Der nichtlokale Vierpunktvertex verhält sich für große euklidische Impulse wie $f^2 \sim (\text{Impuls})^{-2}$, also ähnlich wie beispielsweise der Photonpropagator in der QED. Ein konsistentes Renormierungsprogramm wird allerdings dadurch erschwert, daß die Massen und Kopplungskonstanten in unserem Modell im Gegensatz zur Masse und Ladung des Elektrons keine direkten Observablen sind.

3.6. NUMERISCHE RESULTATE

In diesem Abschnitt geht es hauptsächlich darum, zu demonstrieren, daß das in dieser Arbeit entwickelte Modell auch zur Beschreibung konkreter experimenteller Daten herangezogen werden kann. Solange wir uns auf die Berechnung von Mesonenmassen im $SU(2)$ -Flavour-Sektor beschränken, stellt das Modell mehr freie Parameter zur Verfügung, als es Observable gibt. Die Aussagekraft einer Übereinstimmung von Theorie und Experiment ist daher auf diesem Niveau noch sehr gering.

Um die am Ende des letzten Abschnitts besprochenen Divergenzen zu regularisieren, verwenden wir der Einfachheit halber einen scharfen Cutoff im vierdimensionalen euklidischen Impulsraum. Dadurch stehen uns insgesamt fünf Parameter zur Verfügung: die Parameter a und b für die Selbstenergie, die Vektorkopplungskonstante g_V , die nackte Quarkmasse m_0 und der Cutoff Λ . Die skalare Kopplungskonstante g_S kann dagegen nicht frei gewählt werden, sondern ergibt sich aus der Gap-Gleichung. Auch von den fünf genannten Parametern ist im Grunde nur die Vektorkopplung wirklich frei wählbar. Von der Größenordnung der Quarkstrommasse m_0 hat man dagegen recht genaue Vorstellungen. Ebenso sollten a und b so gewählt werden, daß die Quark-Selbstenergie $\mathcal{F}(0)$ ungefähr in der Größenordnung von typischen Konstituentenquarkmassen, also etwa 300 bis 500 MeV, liegen. Der Cutoff schließlich stellt ein grobes Maß für den Gültigkeitsbereich des effektiven Modells dar und ist dadurch zumindest nach unten beschränkt.

Aus dem NJL-Modell ist bekannt, daß die Einführung eines scharfen Cutoff-Parameters die Eichinvarianz des Modells verletzt. Das ist auch in unserem Modell der Fall. Bei der Herleitung von Wardidentitäten im nächsten Kapitel müssen wir an einigen Stellen unter der Annahme verschwindender Oberflächenbeiträge den Koordinatenursprung verschieben oder partiell integrieren. Diese Annahme ist natürlich nicht erfüllt, wenn wir die Integration einfach bei einem bestimmten Maximalimpuls abschneiden.

In unserem Modell ist die Situation allerdings etwas günstiger als im NJL-Modell. Wie wir im letzten Abschnitt diskutiert haben, divergieren „unsere“ Polarisationsfunktionen höchstens logarithmisch, d. h. der Integrand fällt asymptotisch mindestens wie k_E^{-1} ab. Dadurch wird der Fehler, den wir durch Oberflächenbeiträge bekommen, mit größer werdendem Cutoff immer kleiner und nicht immer größer wie

im NJL-Modell.

Betrachten wir als Beispiel den longitudinalen Anteil der Polarisationsfunktion im Vektorkanal, $J_{VV}^{(L)}$. An der Stelle $q^2 = 0$ ergibt sich aus der Definition (Gl. (3.60)) in explizit euklidischer Notation:

$$J_{VV}^{(L)}(0) = (-4n_f n_c) \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2} \ell_E^2 + m^2(-\ell_E^2)}{[\ell_E^2 + m^2(-\ell_E^2)]^2} f^2(-\ell_E^2) =: A. \quad (3.110)$$

Wie in Anhang A gezeigt wird, läßt sich unter der Annahme, daß bei einer partiellen Integration keine Oberflächenterme auftreten, $J_{VV}^{(L)}(0)$ auch folgendermaßen darstellen:

$$J_{VV}^{(L)}(0) = (-4n_f n_c) \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \left(-\frac{1}{2} \ell_E^2\right) \frac{\ell_E^2 + m_o m(-\ell_E^2)}{[\ell_E^2 + m^2(-\ell_E^2)]^2} \left(\frac{d}{d\ell_E^2} f^2(-\ell_E^2)\right) =: B. \quad (3.111)$$

Unter Verwendung von Gl. (3.108) sieht man, daß sich die Integranden von Gl. (3.110) und Gl. (3.111) für große euklidische Impulse gleich verhalten:

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \ell_E^2 + m^2(-\ell_E^2) \right) f^2(-\ell_E^2) \\ & \left(-\frac{1}{2} \ell_E^2 \right) (\ell_E^2 + m_o m(-\ell_E^2)) \left(\frac{d}{d\ell_E^2} f^2(-\ell_E^2) \right) \end{aligned} \right\} \longrightarrow \frac{b^2}{\mathcal{F}^2(0)} \quad \text{für } \ell_E^2 \rightarrow \infty. \quad (3.112)$$

Für kleine Impulse sind die beiden Integranden dagegen recht unterschiedlich, wie man leicht sieht, wenn man die beiden Funktionen im chiralen Limes für $\ell_E = 0$ auswertet. Dadurch sind die regularisierten Integrale A und B in Wirklichkeit nicht identisch. Ihr relativer Unterschied $(A - B)/(A + B)$ wird jedoch mit wachsendem Cutoff immer kleiner, da die Differenz $A - B$ für $\Lambda \rightarrow \infty$ gegen einen endlichen Wert konvergiert, während die Summe divergiert. Im NJL-Modell ist der Unterschied gravierender: Für $f = \text{const.}$ ist A ein quadratisch divergierendes Integral, während B verschwindet.

In konkreten Rechnungen macht es aber natürlich auch in unserem Modell einen Unterschied, ob wir das Integral A oder das Integral B berechnen. Da J_{VV} im NJL-Modell auch die Quark-Antiquark-Polarisationen reeller Photonen beschreibt, hält man hier die Darstellung B für die „richtigere“. Andernfalls würde die Transversalität des Photonpropagators verletzt. Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, erfolgt die Ankopplung von Photonen in unserem Modell über andere Diagramme.

Um im Limes $f \rightarrow \text{const.}$ einen stetigen Übergang beider Modelle zu erhalten, bevorzugen wir jedoch ebenfalls die Darstellung B. Wir wollen daher in den numerischen Rechnungen von den Funktionen $J_{VV}^{(L)}$, $J_{VV}^{(T)}$, $J_{AA}^{(L)}$ und $J_{AA}^{(T)}$ – auch für $q^2 \neq 0$ – jeweils die Konstante

$$\Delta := A - B \quad (3.113)$$

subtrahieren.

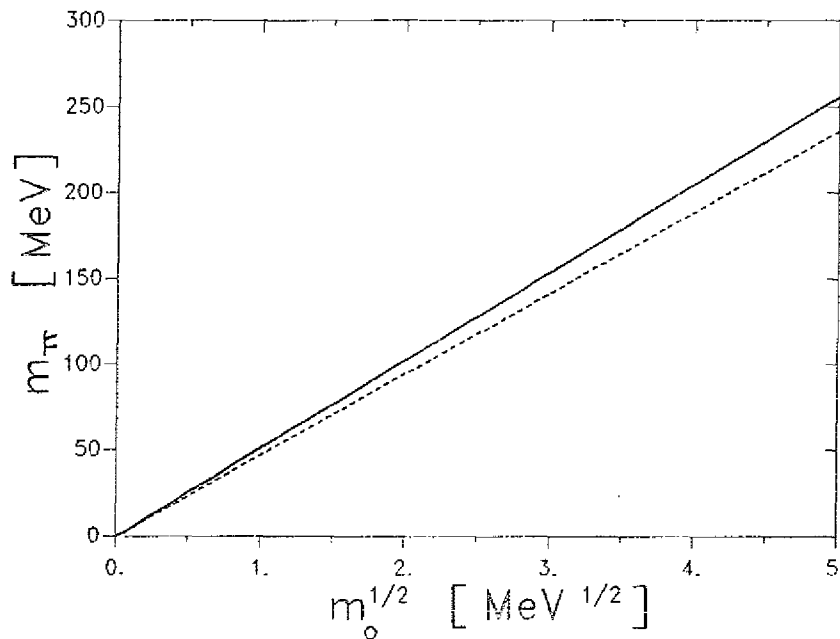


Abb. 3.10: Die Pionmasse als Funktion der Wurzel der nackten Quarkmasse m_0 . Die durchgezogene Linie zeigt das Ergebnis mit, die gestrichelte Linie das Ergebnis ohne „ πa_1 -mixing“. Für die Rechnung wurde der Parametersatz C aus Tabelle 3.1 verwendet, wobei natürlich der Wert für m_0 variiert wurde.

Abb. 3.10 zeigt die Pionmasse m_π als Funktion der nackten Quarkmasse m_0 . Alle anderen Parameter wurden dabei konstant gehalten. Die durchgezogene Linie zeigt das Ergebnis mit, die gestrichelte Linie ohne „ πa_1 -mixing“. Wie man sieht, hebt die Mischung mit dem axialen Kanal die Pionmasse um etwa 10% an. Im chiralen Limes verschwindet die Pionmasse, so wie es auch unsere analytischen Rechnungen ergeben haben. Darüber hinaus erkennt man, daß die in Abb. 3.10 dargestellten

Punkte nahezu perfekt auf einer Geraden liegen. Das Ergebnis des nächsten Kapitels vorwegnehmend, daß die in Gl. (3.88) auftretende Konstante C im chiralen Limes in die Pionzerfallskonstante f_π übergeht (Gell-Mann–Oakes–Renner–Relation), gibt uns das eine Möglichkeit, f_π zumindest näherungsweise zu bestimmen.

Damit stehen uns folgende Observable zur Berechnung zur Verfügung: Die Massen der Mesonen π , ρ (im Modell entartet mit dem ω -Meson) und a_1 , die Pionzerfallskonstante f_π und das Vakuumkondensat $\langle \bar{u}u \rangle$. Daneben wollen wir noch die Masse des Sigma-Mesons berechnen, das im Experiment nicht gesehen wird.

Wir wollen versuchen, diese Daten allein mit dem vom Ein-Gluon-Austausch motivierten Anteil der Wechselwirkung zu beschreiben, d. h. wir setzen in der Lagrange-dichte Gl. (3.11) $G_2 = 0$. Dadurch ist die Vektorkopplung g_V kein freier Parameter mehr, sondern durch die Beziehung

$$g_V = -\frac{1}{2} g_S \quad (3.114)$$

festgelegt.

Die mit den in Tabelle 3.1 gegebenen Parametersätzen A , B und C erzielten Ergebnisse sind in Tabelle 3.2 zusammengestellt.

Parametersatz	a / MeV	b / MeV	Λ / MeV	m_o / MeV
A	300.	305.	1200.	6.20
B	400.	260.	1200.	7.30
C	200.	420.	1000.	7.25

Tabelle 3.1: Definition der in den numerischen Rechnungen verwendeten Parametersätze.

Parameter	$\frac{m_\pi}{\text{MeV}}$	$\frac{m_\sigma}{\text{MeV}}$	$\frac{m_\rho}{\text{MeV}}$	$\frac{m_{a_1}}{\text{MeV}}$	$\frac{f_\pi}{\text{MeV}}$	$\frac{\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}}{\text{MeV}}$
A	138.4	505.	630.	1097.	93.3	-238.
B	138.4	542.	571.	1160.	93.5	-225.
C	138.1	639.	763.	1270.	106.6	-246.
Experiment	138.1	?	768.	1260.	93.3	$-240. \pm 25.$

Tabelle 3.2: Mesonenmassen, die Pionzerfallskonstante f_π und das Vakuumkondensat $\langle \bar{u}u \rangle$, berechnet unter Verwendung der in Tabelle 3.1 definierten Parametersätze A , B und C , im Vergleich mit den experimentellen Werten.

Die Parametersätze A und B ergaben sich durch Anpassung von m_π und f_π an die experimentellen Werte. Dabei zeigt es sich, daß für die Massen von ρ und a_1 zu niedrige Werte herauskommen. Wie ein Vergleich der mit diesen beiden Sätzen erzielten Ergebnisse zeigt, bewirkt eine Vergrößerung des Parameters a zwar, daß die a_1 -Masse größer wird, gleichzeitig sinkt jedoch die Masse des Rho-Mesons weiter ab. Das ist darauf zurückzuführen, daß die Vergrößerung des Parameters a durch eine Verringerung des Parameters b ausgeglichen werden muß, um f_π konstant zu halten. Auch die Variation des Cutoffs bringt keine Verbesserung der Ergebnisse.

Parametersatz C wurde durch Anpassung der Mesonenmassen an die experimentellen Werte gefunden. Hier wird die Pionzerfallskonstante um ungefähr 15% überschätzt. Da wir f_π nur näherungsweise – aus der Gell-Mann–Oakes–Renner-Relation – berechnet haben, kann dieses Ergebnis am ehesten akzeptiert werden.

Um alle in Tabelle 3.2 aufgelisteten Observablen gleichzeitig beschreiben zu können, muß man offensichtlich Gl. (3.114) und damit Forderung $G_2 = 0$ aufgeben und eine etwas schwächere Vektorkopplung verwenden. Im NJL-Modell benötigt man dagegen eine stärkere Vektorkopplung als durch Gl. (3.114) gegeben. Der Unterschied läßt sich dadurch erklären, daß die Wechselwirkung in unserem Modell mit der Energie anwächst und so für ρ und a_1 effektiv stärker ist als für das Pion.

Zuletzt wollen wir noch den Einfluß des oben beschriebenen Subtraktionsverfahrens untersuchen. Dazu vergleichen wir für den Parametersatz C Rechnungen mit und ohne Subtraktion der Konstanten Δ . Die Ergebnisse sind in Tabelle 3.3 zusammengestellt.

	m_π / MeV	m_ρ / MeV	m_{a_1} / MeV	f_π / MeV
<i>mit Subtraktion</i>	138.1	763.	1270.	106.6
<i>ohne Subtraktion</i>	142.3	725.	1235.	103.4

Tabelle 3.3: Mesonenmassen und die Pionzerfallskonstante f_π , berechnet unter Verwendung des in Tabelle 3.1 definierten Parametersatzes C , mit und ohne Subtraktion der Konstanten Δ von den vektoriellen und axialen Polarisationsfunktionen. Die Masse des Sigma-Mesons und das Vakuumkondensat werden nicht durch die Subtraktion beeinflusst.

Wie man sieht, werden die Massen von ρ und a_1 ungefähr 40 MeV geringer, wenn man keine Subtraktion durchführt. Über das „ πa_1 -mixing“ gibt es auch einen ge-

ringfügigen Einfluß auf die Pionmasse und damit auch auf f_π . Insgesamt hält sich der durch die Subtraktion erzielte Effekt aber in Grenzen, so daß wir annehmen können, daß auch die durch die Cutoff-Regularisierung bewirkte Verletzung der Eichinvarianz in einem vertretbaren Rahmen bleibt.

4. Ankopplung von Vektor- und Axialvektorfeldern an das nichtlokale Modell

Die elementaren Freiheitsgrade unseres Modells, so wie wir es in Gl. (3.9) definiert haben, sind Quarks und Antiquarks. Daraus haben wir im vorigen Kapitel Mesonen konstruiert, indem wir – in Analogie zur RPA in der Kernphysik – Quark-Antiquark-Polarisationsgraphen bis zu unendlicher Ordnung aufsummiert haben. Im Gegensatz zum NJL-Modell sind diese Mesonen gegenüber einem Zerfall in freie Quarks stabil; es gibt keine freien Quarks in unserem Modell. Alle Mesonen besitzen daher rein reelle Massen, ihre Zerfallsbreiten sind null.

In Wirklichkeit zerfallen die Mesonen natürlich und besitzen deshalb eine endliche Breite. Dabei unterscheidet man im allgemeinen zwischen den „stabilen“ Mesonen, die nur über die schwache oder die elektromagnetische Wechselwirkung zerfallen können, und Mesonen mit starken Zerfallskanälen. Da unser Modell ein effektives Modell für die starke Wechselwirkung ist, können wir ohne Erweiterung nur die starken Zerfälle beschreiben.

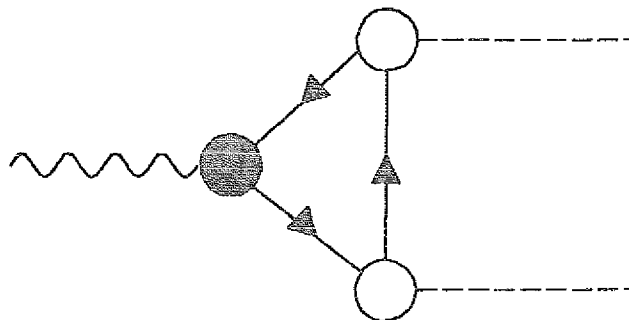


Abb. 4.1: Zerfall eines Rho-Mesons (gewellte Linie) über ein Quark-Dreiecksdiagramm in zwei Pionen (gestrichelte Linien).

Als Beispiel betrachten wir den Zerfall des Rho-Mesons in zwei Pionen. Die einfachste Möglichkeit, diesen Prozeß im Rahmen des Modells zu realisieren, besteht darin, den in Abb. 4.1 dargestellten Dreiecksgraphen auszuwerten. Diese Beschreibung,

die sich allein auf den sogenannten Doorway-Prozeß beschränkt, ist jedoch für starke Zerfälle nicht ausreichend. Vielmehr müssen auch Endzustandswechselwirkungen berücksichtigt werden. So können z. B. die beiden Pionen wieder in ein Rho-Meson übergehen, das anschließend wieder in zwei Pionen zerfällt. Dieser Prozeß kann sich beliebig oft wiederholen, und alle Ordnungen müssen berücksichtigt werden.

Dies ist äquivalent zu einer erweiterten Beschreibung des Rho-Mesons, bei dem neben den Quark-Antiquark-Polarisationsgraphen auch Zwei-Pion-Polarisationen berücksichtigt werden. Dieser Graph ist in Abb. 4.2 dargestellt. Oberhalb der Zwei-Pion-Emissionsschwelle $q^2 = 4m_\pi^2$ wird die zugehörige Polarisationsfunktion komplex. Auf diese Weise bekommt das Rho-Meson eine endliche Breite, die jedoch jetzt auf einen in der Natur beobachteten Zerfallsprozeß und nicht auf die unphysikalische Quark-Antiquark-Emission zurückzuführen ist.

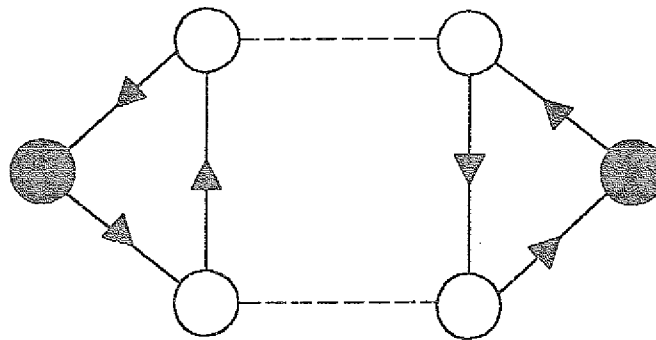


Abb. 4.2: Zwei-Pion-Polarisationsgraph des Rho-Mesons. Die ausgefüllten Kreise stellen wie in Abb. 4.1 die Rho-Quark-Quark-Kopplungskonstanten dar. Die gestrichelten Linien sind die Pionen.

Krewald et al. [57] haben im Rahmen des NJL-Modells den vom Rho-Meson dominierten zeitartigen elektromagnetischen Formfaktor des Pions untersucht. Die Emission freier Quarks wurde durch die Wahl einer relativ großen Konstituentenquarkmasse zumindest im Peakbereich unterdrückt. Dabei hat sich überraschenderweise gezeigt, daß die Zwei-Pion-Polarisationsfunktion mindestens genauso groß ist, wie die Quark-Antiquark-Polarisationsfunktion. Es ist sicherlich eine interessante Frage-

stellung, ob wir mit unserem neuen Modell ein ähnliches Ergebnis bekommen. Diese Rechnungen sind allerdings relativ aufwendig und gehen über den Rahmen dieser Arbeit hinaus.

Im Gegensatz zu den starken Zerfällen können elektromagnetische oder schwache Mesonzerfälle störungstheoretisch, d. h. unter Vernachlässigung von Endzustandswechselwirkungen, behandelt werden. Dies macht sie konkreten Rechnungen leichter zugänglich. Abgesehen von diesem rein praktischen Argument liegt ihre Bedeutung aber vor allem darin, daß sie eng mit Stromalgebra- oder Niederenergiethereomen verknüpft sind. Dabei handelt es sich um weitgehend modellunabhängige Beziehungen, die direkt aus den Symmetrien der Lagrangedichte, insbesondere der chiralen Symmetrie folgen. Als einfachstes Beispiel haben wir bereits das Goldstone-Theorem diskutiert. Die Erweiterung dieses Theorems auf kleine endliche nackte Quarkmassen m_0 , die Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation, haben wir in Gl. (3.88) vorbereitet. Es bleibt allerdings noch zu zeigen, daß der dort auftretende Faktor C mit der Pionzerfallskonstanten f_π identisch ist. Dazu müssen wir offensichtlich den schwachen Pionzerfall untersuchen.

Die Beschreibung elektromagnetischer oder schwacher Prozesse macht eine Erweiterung des Modells erforderlich. Insbesondere benötigen wir Zusatzterme für die Kopplung der Wechselwirkungsbosonen (z. B. Photonen) an die Quarks. Formal bekommen wir diese Terme über ein Eichprinzip. Es zeigt sich, daß die Ankopplung von Eichfeldern an das nichtlokale Modell komplizierter ist als in lokalen Theorien.

Das kann man sich leicht anhand der elektromagnetischen Wechselwirkung veranschaulichen: In die nichtlokalen Vertizes laufen jeweils zwei Quarks ein, die an zwei Raumzeitpunkten x_1 und x_2 vernichtet werden. An zwei anderen Punkten x_3 und x_4 werden zwei auslaufende Quarks erzeugt. Aus der Erhaltung der elektrischen Ladung folgt, daß es einen elektromagnetischen Strom durch den nichtlokalen Vertex geben muß. Die Photonen koppeln deshalb nicht nur an einzelne Quarks wie in lokalen Theorien, sondern auch an die nichtlokalen Vierpunkt-Vertizes. Ein solcher Graph ist in Abb. 4.3 dargestellt.

Wir wollen in diesem Kapitel zunächst die Lagrangedichte Gl. (3.9) so erweitern, daß sie invariant gegenüber vektoriellen oder axialen Eichtransformationen ist. Daraus leiten wir anschließend die entsprechenden Quark-Eichboson-Vertizes her und

untersuchen die Gültigkeit von Ward-Takahashi-Identitäten. Schließlich berechnen wir die Pionzerfallskonstante f_π .

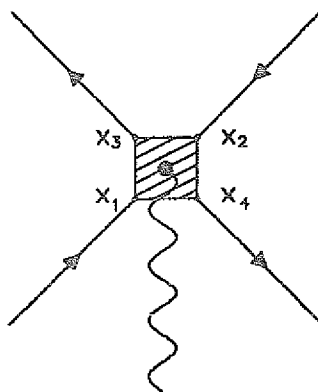


Abb. 4.3: Graph, der die direkte Kopplung des Eichbosons an den nichtlokalen starken Vertex beschreibt.

4.1. EICHINVARIANTE VERALLGEMEINERUNGEN DER LAGRANGEDICHTE

Man glaubt heute, daß alle fundamentalen Theorien Eichtheorien sind. In effektiven Quarkmodellen für die starke Wechselwirkung läßt man im allgemeinen die Forderung nach $SU(3_c)$ -Eichinvarianz fallen. Wie bereits diskutiert, mißt man der effektiven Lagrangedichte keine fundamentale Bedeutung mehr bei, sondern verwendet sie lediglich als Ausgangspunkt für die Herleitung eines konsistenten Satzes von Feynman-Regeln. Bei der Erweiterung dieser Modelle auf die Beschreibung von elektromagnetischen oder schwachen Prozessen versucht man dagegen, die entsprechenden Eichsymmetrien zu berücksichtigen. Auf diese Weise erreicht man, daß die Quark-Eichboson-Vertizes (verallgemeinerte) Ward-Takahashi-Identitäten erfüllen. Das ist deshalb sinnvoll, weil diese Identitäten in der exakten Theorie nicht durch Korrekturen höherer Ordnung zerstört werden. Sie sollten deshalb auch für die effektive Theorie gelten.

Betrachten wir eine lokale Symmetrietransformation

$$q(x) \longrightarrow e^{i\xi_k(x)\frac{T_k}{2}} q(x) \quad . \quad (4.1)$$

In lokalen Theorien, wie z. B. dem NJL-Modell, ist der Wechselwirkungsanteil der Lagrangedichte unter dieser Transformation genau dann invariant, wenn er unter der entsprechenden globalen Transformation mit $\xi_k \equiv \text{const.}$ invariant ist. Da die wechselwirkenden Felder alle vom gleichen Raumzeitpunkt x abhängen, spielt die x -Abhängigkeit von ξ_k für das Symmetrieverhalten keine Rolle. Um eine eichinvariante Lagrangedichte zu bekommen, brauchen wir also nur die Ableitung im kinetischen Term durch eine kovariante Ableitung zu ersetzen („minimale Substitution“).

In nichtlokalen Modellen ist die Situation anders. So läßt z. B. eine lokale $U(1)_V$ -Transformation

$$q(x) \longrightarrow e^{ie\varepsilon(x)} q(x) \quad (4.2)$$

unseren nichtlokalen Wechselwirkungsterm (Gl. (3.11)) nicht unverändert:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}(x) &\longrightarrow \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \alpha(x; x_3, x_4; x_1, x_2) e^{ie(\varepsilon(x_1)-\varepsilon(x_3)+\varepsilon(x_2)-\varepsilon(x_4))} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^2 G_i (\bar{q}(x_3) \Gamma_i^{\mu k} q(x_1)) (\bar{q}(x_4) \Gamma_{i\mu}^k q(x_2)) \\ &\neq \mathcal{L}_{int}(x) \quad , \end{aligned} \quad (4.3)$$

da die $\varepsilon(x_i)$ im allgemeinen unterschiedliche Werte annehmen. Um unser Modell eichinvariant zu machen, müssen wir also nicht nur den kinetischen Anteil, sondern auch den Wechselwirkungsanteil der Lagrangedichte modifizieren. Dazu multiplizieren wir jedes Quark-Feld $q(x_i)$ mit einem Faktor $\exp(i\chi(x-x_i))$ [53]. Dabei ist $\chi(x-x_i)$ ein Wegintegral über ein Eichfeld A_μ :

$$\chi(x-x_i) = \int_x^{x_i} d^\mu z A_\mu(z) \quad . \quad (4.4)$$

Die genaue Wahl des Integrationsweges ist für unsere momentanen Betrachtungen irrelevant.

Der oben gegebenen Vorschrift folgend, können wir von Gl. (3.11) ausgehend eine $U(1)_V$ -eichinvariante Wechselwirkung konstruieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{U(1)_V}(x) &= \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \alpha(x; x_3, x_4; x_1, x_2) \\ &\quad \times \sum_{i=1}^2 G_i (\bar{q}(x_3) e^{ie\chi(x_3-x)} \Gamma_i^{\mu k} e^{ie\chi(x-x_1)} q(x_1)) \\ &\quad \times (\bar{q}(x_4) e^{ie\chi(x_4-x)} \Gamma_{i\mu}^k e^{ie\chi(x-x_2)} q(x_2)) \quad . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Wie in der QED lautet die Vorschrift für die zusammen mit Gl. (4.2) auszuführende Transformation von A_μ :

$$A_\mu(z) \longrightarrow A_\mu(z) - \partial_\mu \varepsilon(z) \quad . \quad (4.6)$$

Daraus folgt für die Funktion χ :

$$\chi(x-x_i) \longrightarrow \chi(x-x_i) - \int_x^{x_i} d^\mu z \partial_\mu \varepsilon(z) = \chi(x-x_i) - (\varepsilon(x_i) - \varepsilon(x)) \quad , \quad (4.7)$$

und wir bekommen

$$\begin{aligned} e^{ie\chi(x-x_i)} q(x_i) &\longrightarrow e^{ie\varepsilon(x)} e^{ie\chi(x-x_i)} q(x_i) \\ \bar{q}(x_j) e^{ie\chi(x_j-x)} &\longrightarrow \bar{q}(x_j) e^{ie\chi(x_j-x)} e^{-ie\varepsilon(x)} \quad . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Anders als in Gl. (4.3) hängen die Phasenfaktoren $\exp(\pm ie\varepsilon(x))$ nun von demselben Raumzeitpunkt x ab und heben sich gegenseitig auf:

$$\mathcal{L}_{int}^{U(1)V}(x) \longrightarrow \mathcal{L}_{int}^{U(1)V}(x) \quad . \quad (4.9)$$

Auf dieselbe Weise können wir von Gl. (3.10) ausgehend einen eichinvarianten kinetischen Anteil der Lagrangedichte konstruieren. Dazu schreiben wir $\mathcal{L}_o$ formal in nichtlokaler Form, indem wir über δ -Funktionen integrieren:

$$\mathcal{L}_o(x) = \int d^4 x_1 d^4 x_2 \delta^4(x_1 - x) \delta^4(x_2 - x) \bar{q}(x_2) (i\cancel{\partial}_{x_1} - m_o) q(x_1) \quad . \quad (4.10)$$

Die eichinvariante Modifikation dieses Terms lautet also

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_o^{U(1)V}(x) &= \int d^4 x_1 d^4 x_2 \delta^4(x_1 - x) \delta^4(x_2 - x) \\ &\quad \bar{q}(x_2) e^{ie \int_{x_2}^x d^\mu z A_\mu(z)} (i\cancel{\partial}_{x_1} - m_o) e^{ie \int_x^{x_1} d^\nu z' A_\nu(z')} q(x_1) \\ &= \int d^4 x_1 d^4 x_2 \delta^4(x_1 - x) \delta^4(x_2 - x) \\ &\quad \bar{q}(x_2) e^{ie \int_{x_2}^{x_1} d^\mu z A_\mu(z)} (i\cancel{\partial}_{x_1} - e\cancel{A}(x_1) - m_o) q(x_1) \\ &= \bar{q}(x) (i\cancel{\partial} - e\cancel{A}(x) - m_o) q(x) \quad . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Angewandt auf den kinetischen Anteil der Wechselwirkung liefert die oben beschriebene Methode also genau das Ergebnis einer minimalen Substitution. Insbesondere ist $\mathcal{L}_o^{U(1)V}$ vom gewählten Integrationsweg unabhängig.

Die vollständige $U(1)_V$ -eichinvariante Lagrangedichte ist also gegeben durch

$$\mathcal{L}_{eff}^{U(1)_V}(x) = \mathcal{L}_o^{U(1)_V}(x) + \mathcal{L}_{int}^{U(1)_V}(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \quad (4.12)$$

Dabei beschreibt der letzte Term die freie Propagation des $U(1)_V$ -Eichfeldes. Es enthält den aus der Elektrodynamik bekannten Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad (4.13)$$

Für unsere spätere störungstheoretische Behandlung des Problems ist es zweckmäßig, Gl. (4.12) nach Potenzen der Kopplungskonstanten e zu entwickeln. Auf diese Weise können wir den Korrekturterm zur ursprünglichen Lagrangedichte $\mathcal{L}_{eff}$ Gl. (3.9) separieren:

$$\mathcal{L}_{eff}^{U(1)_V}(x) = \mathcal{L}_{eff}(x) + \Delta\mathcal{L}^{U(1)_V}(x) \quad (4.14)$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L}^{U(1)_V}(x) = & -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \\ & + e \{ -\bar{q}(x) \not{A}(x) q(x) \\ & + \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 2i\alpha(x; x_3, x_4; x_1, x_2) \\ & \quad \times \chi(x_4 - x_2) \\ & \quad \times \sum_{i=1}^2 G_i(\bar{q}(x_3) \Gamma_i^{\mu k} q(x_1)) (\bar{q}(x_4) \Gamma_{i\mu}^k q(x_2)) \} \\ & + \mathcal{O}(e^2) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dabei haben wir die Symmetrie der Funktion α (Gl. (3.16)) ausgenutzt.

Der Einfachheit halber haben wir mit der Diskussion der $U(1)_V$ -Symmetrie begonnen. Wenn wir die Ankopplung des elektromagnetischen Feldes an unser Modell beschreiben wollen, müssen wir jedoch berücksichtigen, daß u - und d -Quarks unterschiedliche Ladungen besitzen. Dazu ersetzen wir die Faktoren $\exp(i e \chi)$, mit denen wir die Quarkfelder bisher multipliziert haben, durch Faktoren $\exp(i e \hat{Q} \chi)$ mit dem Ladungsoperator

$$\hat{Q} = \left(\frac{1}{6} \mathbf{1}_f + \frac{\tau^3}{2} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Auf diese Weise erhalten wir die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{eff}^{e.m.}(x) = \mathcal{L}_{eff}(x) + \Delta\mathcal{L}^{e.m.}(x) \quad (4.17)$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L}^{e.m.}(x) = & -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \\ & + e \{ -\bar{q}(x) \not{A}(x) \hat{Q} q(x) \\ & + \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 2i\alpha(x; x_3, x_4; x_1, x_2) \\ & \times \chi(x_4 - x_2) \\ & \times \sum_{i=1}^2 G_i (\bar{q}(x_3) \Gamma_i^{\mu k} q(x_1)) (\bar{q}(x_4) \Gamma_{i\mu}^k \hat{Q} q(x_2)) \} \\ & + \mathcal{O}(e^2) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die geladenen Pionen zerfallen bekanntlich über ein intermediäres W -Boson in ein geladenes Lepton und das zugehörige (Anti-) Neutrino, z. B. $\pi^- \rightarrow W^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$. Auf der hadronischen Seite dieses Prozesses bewirkt das W -Boson also einen Übergang vom Pion zum Vakuum. Da das Pion ein pseudoskalares Teilchen ist und das Vakuum die Quantenzahlen 0^+ besitzt, kann dabei von der V-A-Kopplung der schwachen Wechselwirkung nur der axiale Anteil wirksam werden. Außerdem ändert sich beim Übergang der Isospin. Die hadronische Seite des schwachen Pionzerfalls wird also durch die Ankopplung eines axialen isovektoriellen Feldes beschrieben. Aus diesem Grund benötigen wir eine Lagrangedichte, die unter einer lokalen $SU(2)_A$ -Transformation invariant bleibt.

Leider kann die bisher angewendete Methode, bei der wir die Quarkfelder mit geeigneten Phasenfaktoren multipliziert haben, im allgemeinen nicht direkt auf nicht-abelsche Symmetrietransformationen übertragen werden. Der Grund dafür ist, daß für nichtkommutierende Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ die Beziehung $\exp(\hat{A} + \hat{B}) = \exp(\hat{A})\exp(\hat{B})$ nicht mehr gilt, wie man leicht verifiziert, wenn man die Exponentialfunktionen entwickelt:

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} \neq e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} \quad \text{für } [\hat{A}, \hat{B}] \neq 0. \quad (4.19)$$

Allerdings treten die Unterschiede erst in der quadratischen Ordnung auf. Solange wir nicht über die erste Ordnung in der Kopplungskonstanten hinausgehen, bleibt

unsere bisherige Methode daher anwendbar. Da es uns um die Beschreibung schwacher Prozesse geht, können wir diese Einschränkung in Kauf nehmen.

Die resultierende Lagrangedichte kann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\mathcal{L}_{eff}^{SU(2)_A}(x) = \mathcal{L}_{eff}(x) + \Delta\mathcal{L}^{SU(2)_A}(x) \quad (4.20)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L}^{SU(2)_A}(x) = & -\frac{1}{4} F_5^{k\mu\nu}(x) F_{5\mu\nu}^k(x) \\ & + g \left\{ -\bar{q}(x) A^k(x) \gamma_5 \frac{\tau^k}{2} q(x) \right. \\ & + \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 2i\alpha(x; x_3, x_4; x_1, x_2) \\ & \times \chi_5^n(x_4 - x_2) \\ & \left. \times \sum_{i=1}^2 G_i(\bar{q}(x_3) \Gamma_i^{\mu k} q(x_1)) (\bar{q}(x_4) \Gamma_{i\mu}^k \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} q(x_2)) \right\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

mit

$$\chi_5^n(x_4 - x_2) = \int_{x_4}^{x_2} d^4z A_{5\mu}^n(z) \quad (4.22)$$

und

$$F_{5\mu\nu}^k(x) = \partial_\mu A_{5\nu}^k(x) - \partial_\nu A_{5\mu}^k(x) \quad (4.23)$$

Normalerweise besitzt der Feldstärketensor in nicht-abelschen Eichtheorien auch einen in den Eichfeldern quadratischen Term, der zu Selbstkopplungen dieser Felder führt (vgl. Gl. (2.4)). Solche Terme können wir hier weglassen, da sie nicht in erster Ordnung zu den Quark-Eichfeld-Vertices beitragen können. Graphen, die eine Quark-Eichfeld-Kopplung und eine Selbstkopplung des axialen Feldes besitzen, sind von mindestens zweiter Ordnung in der Kopplungskonstanten.

Im Grenzfall verschwindender nackter Quarkmassen m_0 ist $\mathcal{L}_{eff}^{SU(2)_A}$ invariant unter den gleichzeitig durchgeführten Transformationen

$$\begin{aligned} q(x) & \longrightarrow \left(1 + ig\theta_k(x) \frac{\tau^k}{2} \gamma_5\right) q(x) \\ A_{5\mu}^k(x) & \longrightarrow A_{5\mu}^k(x) - \partial_\mu \theta_k(x) \end{aligned} \quad (4.24)$$

wenn wir quadratische Terme in g vernachlässigen.

4.2. BERECHNUNG DER VEKTOR-VERTIZES UND HERLEITUNG VON WARD-TAKAHASHI-IDENTITÄTEN

Ausgehend von der ursprünglichen effektiven Lagrangedichte $\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_o + \mathcal{L}_{int}$ (Gl. (3.9)) haben wir im vorigen Abschnitt drei modifizierte Lagrangedichten

$$\mathcal{L}_{eff}^\sigma(x) = \mathcal{L}_o(x) + \mathcal{L}_{int}(x) + \Delta\mathcal{L}^\sigma(x) \quad (4.25)$$

hergeleitet, die unter einer lokalen Symmetrietransformation σ invariant sind. Der zusätzliche Term $\Delta\mathcal{L}^\sigma$ beschreibt die Kopplung der Quarks an ein Eichfeld $A_\mu^{(\sigma)}$, z. B. an das elektromagnetische Feld, und die freie Propagation des Eichfeldes.

Wie der starke effektive Wechselwirkungsterm $\mathcal{L}_{int}$ kann natürlich auch $\Delta\mathcal{L}^\sigma$ zur Quark-Selbstenergie beitragen. Sehr interessant sind auch elektromagnetische Strahlungskorrekturen zu den Quark-Antiquark-Polarisationsgraphen, womit man die unterschiedlichen Massen der geladenen und der ungeladenen Pionen erklären kann [58]. All diese Prozesse treten aber erst in zweiter Ordnung in der Quark-Eichfeld-Kopplungskonstanten auf. Da wir uns in dieser Arbeit auf Effekte erster Ordnung, d. h. die Berechnung von Quark-Eichfeld-Vertizes, beschränken wollen, können wir unsere bisherigen Ergebnisse, insbesondere die Gap-Gleichung und die Mesonenmassen und -kopplungskonstanten, unverändert übernehmen.

Wir beginnen wieder mit dem einfachsten Fall, der $U(1)_V$ -eichinvarianten Lagrangedichte (Gl. (4.14)), und fassen danach kurz die Ergebnisse für die elektromagnetische Modifikation (Gl. (4.17)) zusammen. Aus Gründen der sprachlichen Vereinfachung wollen wir die auftretenden Eichfelder in beiden Fällen als „Photonen“ bezeichnen. Die Diskussion der axialen Felder folgt im nächsten Abschnitt.

Gemäß Gl. (4.15) können wir schreiben

$$\Delta\mathcal{L}^{U(1)_V}(x) = \Delta\mathcal{L}_o^{U(1)_V}(x) + \Delta\mathcal{L}_1^{U(1)_V}(x) + \Delta\mathcal{L}_2^{U(1)_V}(x) \quad (4.26)$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L}_o^{U(1)_V}(x) &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \\ \Delta\mathcal{L}_1^{U(1)_V}(x) &= -e \bar{q}(x) \not{A}(x) q(x) \end{aligned} \quad (4.27)$$

und

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L}_2^{U(1)V}(x) &= e \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 2i\alpha(x; x_3, x_4; x_1, x_2) \\ &\times \chi(x_4 - x_2) \\ &\times \sum_{i=1}^2 G_i(\bar{q}(x_3) \Gamma_i^{\mu k} q(x_1)) (\bar{q}(x_4) \Gamma_{i\mu}^k q(x_2)) \quad . \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dabei haben wir Terme höherer Ordnung in der Kopplungskonstanten e vernachlässigt. Die beiden ersten Anteile (Gl. (4.27)) sind mit den Eichtermen der QED oder lokaler Quarkmodelle identisch und führen auf den Photon-Propagator $iD^{\mu\nu}$ und den normalen Fermion-Photon-Vertex $-ie\gamma^\mu$. Der dritte Anteil (Gl. (4.28)) tritt nur in nicht-lokalen Modellen auf, da er von der Eichung der Wechselwirkungsterme herrührt. Er liefert den zusätzlichen Beitrag zum Quark-Photon-Vertex, den wir bereits im einleitenden Abschnitt dieses Kapitels angesprochen haben. Wir haben dort gesagt, daß zwischen den „Eckpunkten“ des nichtlokalen Vertex' ein Strom fließen muß, an den das Photon ankoppeln kann. Das kommt in Gl. (4.28) explizit durch die Funktion $\chi(x_4 - x_2)$ zum Ausdruck: Das Photon koppelt an alle Punkte auf einer vorgegebenen Verbindungslinie zwischen dem Punkt x_2 , an dem ein Quark einläuft, und dem Punkt x_4 , von wo aus ein Quark ausläuft. Ein zweiter Beitrag, der das Wegintegral $\chi(x_3 - x_1)$ enthält, also die beiden anderen Punkte verbindet, wurde unter Ausnutzung der Symmetrie Gl. (3.16) in einem Faktor zwei absorbiert.

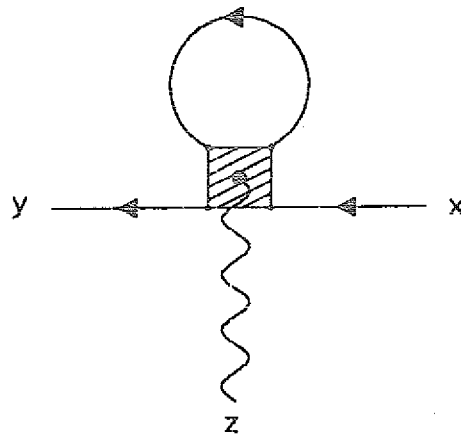


Abb. 4.4: Quark-Photon-Dreipunkt-Vertex, der sich aus der in Abb. 4.3 dargestellten Fünfpunktfunktion ergibt, wenn man eine Quarkschleife schließt.

Quantisierung von $\Delta\mathcal{L}_2^{U(1)\nu}$ liefert eine Fünfpunktfunktion, die in Abb. 4.3 dargestellt ist. Wir interessieren uns hier hauptsächlich für die Konstruktion der gedressten Quark-Photon-Vertexfunktion, d. h. für die Dreipunktgraphen, die den elementaren γ^μ -Vertex korrigieren. Wenn wir in Abb. 4.3 eine Quarkschleife schließen, erhalten wir im Ortsraum die folgende Dreipunktfunktion:

$$\begin{aligned}
G_\lambda^{(o)}(y, x; z) &= (-ie) \sum_{i=1}^2 2iG_i \int d^4v \int d^4v_1 d^4v_2 d^4v_3 d^4v_4 \alpha(v; v_3, v_4; v_1, v_2) \\
&\quad \times \{ (i\tilde{S}(y-v_3) \Gamma_i^{\mu k} i\tilde{S}(v_1-x)) (-) \text{tr}[\Gamma_{i\mu}^k i\tilde{S}(v_2-v_4)] \\
&\quad + (i\tilde{S}(y-v_3) \Gamma_i^{\mu k} i\tilde{S}(v_1-v_4) \Gamma_{i\mu}^k i\tilde{S}(v_2-x)) \\
&\quad + (i\tilde{S}(y-v_4) \Gamma_i^{\mu k} i\tilde{S}(v_2-x)) (-) \text{tr}[\Gamma_{i\mu}^k i\tilde{S}(v_1-v_3)] \\
&\quad + (i\tilde{S}(y-v_4) \Gamma_i^{\mu k} i\tilde{S}(v_2-v_3) \Gamma_{i\mu}^k i\tilde{S}(v_1-x)) \} \\
&\quad \times \int_{v_2}^{v_4} d^\nu w i\tilde{D}_{\nu\lambda}(w-z) \quad .
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Die Bedeutung der Raumzeitpunkte x , y und z kann Abb. 4.4 entnommen werden. Den Quark- und den Photon-Propagator im Ortsraum haben wir mit $\tilde{S}$ und $\tilde{D}_{\nu\lambda}$ bezeichnet.

Wir können nun das Wegintegral parametrisieren:

$$\int_{v_2}^{v_4} d^\nu w i\tilde{D}_{\nu\lambda}(w-z) = \int_0^1 dt \frac{\partial w^\nu}{\partial t}(v, v_j; t) i\tilde{D}_{\nu\lambda}(w(v, v_j; t) - z) \quad . \tag{4.30}$$

Dabei haben wir eine Funktion w eingeführt, die für $t=0$ gleich v_2 und für $t=1$ gleich v_4 ist. Im allgemeinen kann w von allen Integrationsvariablen v und v_j , $j=1$ bis 4, abhängen. Die einzige Einschränkung kommt von der Forderung nach Translationsinvarianz des Modells. Eine Verschiebung von v und aller v_j um eine bestimmte Konstante Δv sollte zu einem um dieselbe Konstante verschobenen Integrationsweg führen, ohne daß sich dessen Form verändert:

$$w(v + \Delta v, v_j + \Delta v; t) = w(v, v_j; t) + \Delta v \quad . \tag{4.31}$$

Das kann man explizit erreichen, indem man w in der Form

$$w(v, v_j; t) = v + r(v_j - v; t) \tag{4.32}$$

schreibt. Dabei erfüllt die Funktion $r(\tilde{v}_i = v_i - v, t)$ die Randbedingungen

$$r(\tilde{v}_j; 0) = \tilde{v}_2 \quad ; \quad r(\tilde{v}_j, 1) = \tilde{v}_4 \quad . \quad (4.33)$$

Wegen der Translationsinvarianz ist an den Quark-Photon-Vertizes der Viererimpuls erhalten, und die Funktion $G_\lambda^{(o)}$ kann in der Form

$$G_\lambda^{(o)}(y, x; z) = (-ie) \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-ip_f \cdot y} e^{ip_i \cdot x} e^{iq \cdot z} (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i - q) \\ \times (iS(p_f) \Lambda^{(o)\nu}(p_f, p_i) iS(p_i)) iD_{\nu\lambda}(q) \quad (4.34)$$

geschrieben werden. Die Vertexfunktion $\Lambda^{(o)\nu}$ lautet:

$$\Lambda^{(o)\nu}(p_f, p_i) \\ = \sum_{i=1}^2 2iG_i \int d^4 \tilde{v}_1 d^4 \tilde{v}_2 d^4 \tilde{v}_3 d^4 \tilde{v}_4 \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_4}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \\ e^{ik_1 \cdot \tilde{v}_1} e^{ik_2 \cdot \tilde{v}_2} e^{ik_3 \cdot \tilde{v}_3} e^{ik_4 \cdot \tilde{v}_4} \tilde{\alpha}(k_3, k_4; k_1, k_2) \\ \{ e^{ip_f \cdot \tilde{v}_3} e^{-ip' \cdot (\tilde{v}_2 - \tilde{v}_4)} e^{-ip_i \cdot \tilde{v}_1} \Gamma_i^{\mu k} (-) \text{tr}[\Gamma_{i\mu}^k iS(p')] \\ + e^{ip_f \cdot \tilde{v}_3} e^{-ip' \cdot (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_4)} e^{-ip_i \cdot \tilde{v}_2} \Gamma_i^{\mu k} iS(p') \Gamma_{i\mu}^k \\ + e^{ip_f \cdot \tilde{v}_4} e^{-ip' \cdot (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_3)} e^{-ip_i \cdot \tilde{v}_2} \Gamma_i^{\mu k} (-) \text{tr}[\Gamma_{i\mu}^k iS(p')] \\ + e^{ip_f \cdot \tilde{v}_4} e^{-ip' \cdot (\tilde{v}_2 - \tilde{v}_3)} e^{-ip_i \cdot \tilde{v}_1} \Gamma_i^{\mu k} iS(p') \Gamma_{i\mu}^k \} \\ \times \int_0^1 dt \frac{\partial r^\nu}{\partial t}(\tilde{v}_j; t) e^{-iq \cdot r(\tilde{v}_j; t)} \quad , \quad (4.35)$$

wobei wir hier und im folgenden den übertragenen Viererimpuls, der δ -Funktion in Gl. (4.34) entsprechend, als

$$q = p_f - p_i \quad (4.36)$$

definieren.

Um Gl. (4.35) weiter auswerten zu können, müssen wir den Integrationsweg $r(\tilde{v}_j; t)$ explizit vorgeben. Das Resultat für den Vertex $\Lambda^{(o)\nu}$ hängt von dieser Wahl ab. Die Funktion $r(\tilde{v}_j; t)$ muß daher als ein Teil des Modells angesehen werden.

Es stellt sich allerdings heraus, daß die longitudinale Komponente von $\Lambda^{(o)\nu}$ vom Integrationsweg unabhängig ist: Multipliziert man die letzte Zeile von Gl. (4.35) mit q_ν , bekommt man

$$\int_0^1 dt \frac{\partial q \cdot r}{\partial t}(\tilde{v}_j; t) e^{-iq \cdot r(\tilde{v}_j; t)} = i \int_0^1 dt \frac{\partial}{\partial t} e^{-iq \cdot r(\tilde{v}_j; t)} = i (e^{-iq \cdot \tilde{v}_4} - e^{-iq \cdot \tilde{v}_2}) \quad , \quad (4.37)$$

wobei wir die Randbedingung Gl. (4.33) verwendet haben. Wir finden also für die Vertexfunktion

$$\begin{aligned}
& q_\nu \Lambda^{(o)\nu}(p_f, p_i) \\
&= i \sum_{i=1}^2 2iG_i \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \{ [\tilde{\alpha}(-p_f, -p' + q; p_i, p') - \tilde{\alpha}(-p_f, -p'; p_i, p' + q)] \\
&\quad \times \Gamma_i^{\mu k} (-) \text{tr}[\Gamma_{i\mu}^k iS(p')] \\
&\quad + [\tilde{\alpha}(-p' + q, -p_f; p_i, p') - \tilde{\alpha}(-p', -p_f; p_f, p')] \\
&\quad \times \Gamma_i^{\mu k} iS(p') \Gamma_{i\mu}^k \\
&\quad + [\tilde{\alpha}(-p_i, -p'; p_i, p') - \tilde{\alpha}(-p_f, -p'; p_f, p')] \\
&\quad \times \Gamma_i^{\mu k} (-) \text{tr}[\Gamma_{i\mu}^k iS(p')] \\
&\quad + [\tilde{\alpha}(-p', -p_i; p_i, p') - \tilde{\alpha}(-p', -p_f; p_i, p' + q)] \\
&\quad \times \Gamma_i^{\mu k} iS(p') \Gamma_{i\mu}^k \} . \tag{4.38}
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Gap-Gleichung (Gl. (3.40)) können wir Teile dieser Formel durch die Quark-Selbstenergie Σ ersetzen:

$$\begin{aligned}
& q_\nu \Lambda^{(o)\nu}(p_f, p_i) \\
&= -(\Sigma(p_f) - \Sigma(p_i)) \\
&\quad + i \sum_{i=1}^2 2iG_i \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \{ \tilde{\alpha}(-p_f, -p'; p_i, p' + q) \\
&\quad \times \Gamma_i^{\mu k} (-) \text{tr}[\Gamma_{i\mu}^k (iS(p' + q) - iS(p'))] \\
&\quad + \tilde{\alpha}(-p', -p_f; p_i, p' + q) \\
&\quad \times \Gamma_i^{\mu k} (iS(p' + q) - iS(p')) \Gamma_{i\mu}^k \} . \tag{4.39}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung sieht schon fast wie eine Ward-Takahashi-Identität aus. Tatsächlich folgt aus ganz allgemeinen Überlegungen, daß für unser Modell Ward-Takahashi-Identitäten gelten müssen. Betrachten wir dazu das erzeugende Funktional $Z^{U(1)_V}$, aus dem die obigen Feynman-Regeln hergeleitet werden können:

$$\begin{aligned}
& Z^{U(1)_V}[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] \\
&= \mathcal{N} \int Dq D\bar{q} DA^\mu e^{i \int d^4 x \{ \mathcal{L}_{eff}^{U(1)_V}(x) + \mathcal{L}_{g.f.}^{(\alpha)}(x) + \bar{\eta}(x)q(x) + \bar{q}(x)\eta(x) + J_\mu(x)A^\mu(x) \}} . \tag{4.40}
\end{aligned}$$

Neben der effektiven Lagrangedichte enthält der Integrand im Exponenten einen Eichfixierungsterm

$$\mathcal{L}_{g.f.}^{(\alpha)} = -\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu(x))^2 \quad (4.41)$$

und Quellterme für Quarks, Antiquarks und Photonen. $\mathcal{N}$ ist eine Normierungskonstante. Wie in der QED (siehe z. B. [59]) folgen die Ward-Takahashi-Identitäten aus der Forderung, daß das erzeugende Funktional $Z^{U(1)_V}$ unter den Eichtransformationen Gl. (4.2) und Gl. (4.6) invariant bleibt. Da die effektive Lagrangedichte $\mathcal{L}_{eff}^{U(1)_V}$ ohnehin eichinvariant ist, gehen nur der Eichfixierungsterm und die Quellterme explizit in die Herleitung ein. Das Ergebnis ist daher für alle $U(1)_V$ eichinvarianten Lagrangedichten das gleiche [60]:

$$q_\nu \Lambda^{(ex)\nu}(p_f, p_i) = -(\Sigma^{(ex)}(p_f) - \Sigma^{(ex)}(p_i)) \quad (4.42)$$

Dabei sind $\Sigma^{(ex)}$ die exakte Quark-Selbstenergie und $\Lambda^{(ex)\nu}$ die exakte Quark-Photon-Vertexkorrektur.

Der zusätzliche Term in Gl. (4.39) macht deutlich, daß unsere approximative Vertexkorrektur $\Lambda^{(o)\nu}$ nicht zu der Hartree-Fock-Näherung Σ für die Selbstenergie konsistent ist. Den zu Σ konsistenten Vertex bekommt man, wenn man den in Abb. 4.5 a) dargestellten unendlichen Satz von Feynman-Graphen aufsummiert. Da die unendliche Reihe von Quark-Antiquark-Polarisationen gerade die im vorigen Kapitel definierte T-Matrix ist, kann der Vertex in der in Abb. 4.5 b) dargestellten Weise definiert werden. Wie wir gesehen haben, kann die T-Matrix durch Meson-Propagatoren und Vertizes parametrisiert werden. Der gedresste Vertex enthält also zusätzlich zur direkten Quark-Photon-Kopplung auch die Kopplung über intermediäre Mesonen.

Alternativ kann man die gedresste Vertexfunktion auch durch Lösen der in Abb. 4.5 c) diagrammatisch dargestellten Integralgleichung bekommen:

$$\hat{\Gamma}^\nu(p_f, p_i) = \gamma^\nu + \Lambda^\nu(p_f, p_i) \quad (4.43)$$

$$\text{Diagram (a)}: \text{Shaded circle with wavy line} = \text{Tree-level vertex} + \text{Quark loop} + \text{Gluon loop} + \text{Gluon self-energy} + \dots$$

(a)

$$\text{Diagram (b)}: \text{Tree-level vertex} + \text{Quark loop} + \text{Gluon loop} + \text{Gluon self-energy} + \dots$$

(b)

$$\text{Diagram (c)}: \text{Tree-level vertex} + \text{Quark loop} + \text{Gluon loop} + \text{Gluon self-energy} + \dots$$

(c)

Abb. 4.5: Die gedresste Eichboson-Quark-Vertexfunktion.

mit der Vertexkorrektur

$$\begin{aligned}
& \Lambda^\nu(p_f, p_i) \\
&= \Lambda^{(o)\nu}(p_f, p_i) \\
&+ \sum_{i=1}^2 2iG_i \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \{ \tilde{\alpha}(-p_f, -p'; p_i, p' + q) \\
&\quad \times \Gamma_i^{\mu k} (-) \text{tr}[\Gamma_{i\mu}^k iS(p' + q) (\gamma^\nu + \Lambda^\nu(p' + q, p')) iS(p')] \\
&\quad + \tilde{\alpha}(-p', -p_f; p_i, p' + q) \\
&\quad \times \Gamma_i^{\mu k} iS(p' + q) (\gamma^\nu + \Lambda^\nu(p' + q, p')) iS(p') \Gamma_{i\mu}^k \}.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit q_ν , erhält man unter Verwendung von Gl. (4.39):

$$\begin{aligned}
& q_\nu \Lambda^\nu(p_f, p_i) \\
&= -(\Sigma(p_f) - \Sigma(p_i)) \\
&- \sum_{i=1}^2 2iG_i \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \{ \tilde{\alpha}(-p_f, -p'; p_i, p' + q) \Gamma_i^{\mu k} (-) \text{tr}[\Gamma_{i\mu}^k \Delta(p' + q, p')] \\
&\quad + \tilde{\alpha}(-p', -p_f; p_i, p' + q) \Gamma_i^{\mu k} \Delta(p' + q, p') \Gamma_{i\mu}^k \}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

mit

$$\begin{aligned}
\Delta(p' + q, p') &:= S(p' + q) - S(p') + S(p' + q) (\not{q} + q_\nu \Lambda^\nu(p' + q, p')) S(p') \\
&= S(p' + q) (\Sigma(p' + q) - \Sigma(p') + q_\nu \Lambda^\nu(p' + q, p')) S(p') .
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Die zweite Zeile von Gl. (4.46) folgt aus der expliziten Form der Quark-Selbstenergie (Gl. (3.36)) und des Propagators (Gl. (3.37)).

Offensichtlich wird Gl. (4.45) durch die Ward-Takahashi-Identität gelöst:

$$q_\nu \Lambda^\nu(p_f, p_i) = -(\Sigma(p_f) - \Sigma(p_i)) . \tag{4.47}$$

Im Limes $q \rightarrow 0$ gilt die Ward-Identität [61]:

$$\Lambda^\nu(p, p) = -\frac{\partial \Sigma}{\partial p_\nu}(p) . \tag{4.48}$$

Im lokalen Grenzfall des Modells ist die Quark-Selbstenergie eine Konstante, so daß die rechten Seiten von Gl. (4.47) und Gl. (4.48) verschwinden. Der longitudinale Anteil der Vertexkorrektur und die Vertexkorrektur für verschwindenden Impulsübertrag sind in diesem Fall gleich null. Im nichtlokalen Modell sind $\Sigma(p_f)$ und

$\Sigma(p_i)$ dagegen im allgemeinen unterschiedlich, und es gibt longitudinale Beiträge zur Vertexkorrektur.

Schließt man in Abb. 4.3 zwei Quark-Schleifen, bekommt man eine Einpunktfunktion, die man mit dem Vakuumerwartungswert des Feldes A_λ identifizieren kann:

$$\begin{aligned}
 & \langle 0 | A_\lambda(z) | 0 \rangle \\
 &= (-ie) \sum_{i=1}^2 2iG_i \int d^4v \int d^4v_1 d^4v_2 d^4v_3 d^4v_4 \alpha(v; v_3, v_4; v_1, v_2) \\
 & \quad \times \{ (-) \text{tr}[\Gamma_i^{\mu k} i\tilde{S}(v_1 - v_3)] (-) \text{tr}[\Gamma_{i\mu}^k i\tilde{S}(v_2 - v_4)] \\
 & \quad + (-) \text{tr}[\Gamma_i^{\mu k} i\tilde{S}(v_1 - v_4) \Gamma_{i\mu}^k i\tilde{S}(v_2 - v_3)] \} \\
 & \quad \times \int_{v_2}^{v_4} d^\nu w i\tilde{D}_{\nu\lambda}(w - z) .
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

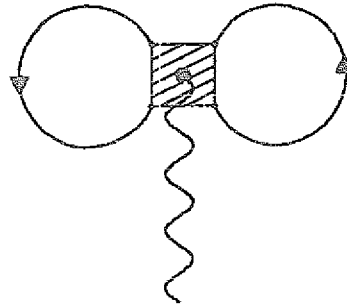


Abb. 4.6: Einpunktfunktion, die sich aus der in Abb. 4.3 dargestellten Fünfpunktfunktion ergibt, wenn man zwei Quarkschleifen schließt.

Dieser Graph ist in Abb. 4.6 dargestellt. Unter Berücksichtigung von Gl. (4.30) bis

Gl. (4.33) bekommt man nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | A_\lambda(z) | 0 \rangle \\
&= (-ie) \sum_{i=1}^2 2iG_i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \{ \left[i \left(\frac{\partial}{\partial k_{4\nu}} - \frac{\partial}{\partial k_{2\nu}} \right) \tilde{\alpha}(-p, k_4; p, k_2) \right]_{\substack{k_2=p' \\ k_4=-p'}} \\
&\quad \times (-) \operatorname{tr}[\Gamma_i^{\mu k} iS(p)] \quad (-) \operatorname{tr}[\Gamma_{i\mu}^k iS(p')] \\
&\quad + \left[i \left(\frac{\partial}{\partial k_{4\nu}} - \frac{\partial}{\partial k_{2\nu}} \right) \tilde{\alpha}(-p', k_4; p, k_2) \right]_{\substack{k_2=p' \\ k_4=-p}} \\
&\quad \times (-) \operatorname{tr}[\Gamma_i^{\mu k} iS(p) \Gamma_{i\mu}^k iS(p')] \} \\
&\quad \times D_{\nu\lambda}(0) .
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Das Ergebnis ist unabhängig von der Wahl des Integrationsweges. Wie es die Translationsinvarianz verlangt, hängt $\langle 0 | A_\lambda(z) | 0 \rangle$ auch nicht vom Raumzeitpunkt z ab. Wegen der damit verbundenen Viererimpulserhaltung ist der vom Photon übertragene Impuls überall gleich null.

Durch explizites Auswerten der Spuren und Verwendung der Tatsache, daß $\tilde{\alpha}$ eine skalare Funktion ist, kann man schließlich zeigen, daß der Integrand von Gl. (4.50) unter der Transformation $(p, p') \rightarrow (-p, -p')$ genau in sein Negatives übergeht. Das Integral und folglich der Vakuumerwartungswert des Feldes A_λ verschwinden daher erwartungsgemäß:

$$\langle 0 | A_\lambda | 0 \rangle = 0 . \tag{4.51}$$

Für die elektromagnetische Lagrangedichte (Gl. (4.17)) bekommt man sehr ähnliche Ergebnisse. Die in Abb. 4.4 dargestellte Dreipunktfunktion kann in der Form von Gl. (4.34) geschrieben werden, indem man die $U(1)_V$ -Vertexfunktion durch eine

elektromagnetische Vertexfunktion ersetzt:

$$\begin{aligned}
& \Lambda_{e.m.}^{(\circ)\nu}(p_f, p_i) \\
&= \sum_{i=1}^2 2iG_i \int d^4\tilde{v}_1 d^4\tilde{v}_2 d^4\tilde{v}_3 d^4\tilde{v}_4 \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_4}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \\
& \quad e^{ik_1 \cdot \tilde{v}_1} e^{ik_2 \cdot \tilde{v}_2} e^{ik_3 \cdot \tilde{v}_3} e^{ik_4 \cdot \tilde{v}_4} \tilde{\alpha}(k_3, k_4; k_1, k_2) \\
& \quad \left\{ \begin{aligned} & e^{ip_f \cdot \tilde{v}_3} e^{-ip' \cdot (\tilde{v}_2 - \tilde{v}_4)} e^{-ip_i \cdot \tilde{v}_1} \Gamma_i^{\mu k} (-) \text{tr}[\Gamma_{i\mu}^k \hat{Q} iS(p')] \\ & + e^{ip_f \cdot \tilde{v}_3} e^{-ip' \cdot (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_4)} e^{-ip_i \cdot \tilde{v}_2} \Gamma_i^{\mu k} S(p') \Gamma_{i\mu}^k \hat{Q} \\ & + e^{ip_f \cdot \tilde{v}_4} e^{-ip' \cdot (\tilde{v}_3 - \tilde{v}_1)} e^{-ip_i \cdot \tilde{v}_2} \Gamma_i^{\mu k} \hat{Q} (-) \text{tr}[\Gamma_{i\mu}^k iS(p')] \\ & + e^{ip_f \cdot \tilde{v}_4} e^{-ip' \cdot (\tilde{v}_2 - \tilde{v}_3)} e^{-ip_i \cdot \tilde{v}_1} \Gamma_i^{\mu k} \hat{Q} iS(p') \Gamma_{i\mu}^k \end{aligned} \right\} \\
& \quad \times \int_0^1 dt \frac{\partial r^\nu}{\partial t}(\tilde{v}_j; t) e^{-iq \cdot r(\tilde{v}_j; t)}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Der gedresste Vertex, den man durch Aufsummation der in Abb. 4.5 dargestellten Graphen erhält, lautet:

$$\hat{\Gamma}_{e.m.}^\nu(p_f, p_i) = \gamma^\nu \hat{Q} + \Lambda_{e.m.}^\nu(p_f, p_i) \tag{4.53}$$

mit einer Vertexkorrektur $\Lambda_{e.m.}^\nu$, die die verallgemeinerte Ward-Takahashi-Identität

$$q_\nu \Lambda_{e.m.}^\nu(p_f, p_i) = -(\Sigma(p_f) - \Sigma(p_i)) \hat{Q} \tag{4.54}$$

und die entsprechende Ward-Identität

$$\Lambda_{e.m.}^\nu(p, p) = -\frac{\partial \Sigma}{\partial p_\nu}(p) \hat{Q} \tag{4.55}$$

erfüllt.

4.3. AXIALE FELDER UND DIE PION-ZERFALLSKONSTANTE

Ausgehend von der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{eff}^{SU(2)_A}$ (Gl. (4.20)) können wir die Ankopplung axialer Felder an unser Modell beschreiben. Dabei bekommt man ähnliche Ergebnisse wie im vorigen Kapitel für die Vektorfelder. Der Hauptunterschied besteht darin, daß die Generatoren der $SU(2)_A$ -Symmetrie, $\gamma_5 \frac{\tau^k}{2}$, mit den Operatoren der starken Vertizes, Γ_i^μ , antikommutieren. Dadurch ergeben sich teilweise andere Vorzeichen.

Die in Abb. 4.4 dargestellte Dreipunktfunktion kann in Analogie zu Gl. (4.34) in der Form

$$G_5^{(o)m}{}_\lambda(y, x; z) = (-ig) \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-ip_f \cdot y} e^{ip_i \cdot x} e^{iq \cdot z} (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i - q) \\ \times (iS(p_f) \Lambda_5^{(o)\nu n}(p_f, p_i) iS(p_i)) iD_{\nu\lambda}^{nm}(q) \quad (4.56)$$

geschrieben werden. Dabei ist die Vertexfunktion gegeben durch:

$$\Lambda_5^{(o)\nu n}(p_f, p_i) \\ = \sum_{i=1}^2 2iG_i \int d^4 \tilde{v}_1 d^4 \tilde{v}_2 d^4 \tilde{v}_3 d^4 \tilde{v}_4 \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_4}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \\ e^{ik_1 \cdot \tilde{v}_1} e^{ik_2 \cdot \tilde{v}_2} e^{ik_3 \cdot \tilde{v}_3} e^{ik_4 \cdot \tilde{v}_4} \tilde{\alpha}(k_3, k_4; k_1, k_2) \\ \{ e^{ip_f \cdot \tilde{v}_3} e^{-ip' \cdot (\tilde{v}_2 - \tilde{v}_4)} e^{-ip_i \cdot \tilde{v}_1} \Gamma_i^{\mu k} (-) \text{tr}[\Gamma_{i\mu}^k \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} iS(p')] \\ + e^{ip_f \cdot \tilde{v}_3} e^{-ip' \cdot (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_4)} e^{-ip_i \cdot \tilde{v}_2} \Gamma_i^{\mu k} iS(p') \Gamma_{i\mu}^k \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} \\ + e^{ip_f \cdot \tilde{v}_4} e^{-ip' \cdot (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_3)} e^{-ip_i \cdot \tilde{v}_2} \Gamma_i^{\mu k} \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} (-) \text{tr}[\Gamma_{i\mu}^k iS(p')] \\ + e^{ip_f \cdot \tilde{v}_4} e^{-ip' \cdot (\tilde{v}_2 - \tilde{v}_3)} e^{-ip_i \cdot \tilde{v}_1} \Gamma_i^{\mu k} \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} iS(p') \Gamma_{i\mu}^k \quad \} \\ \times \int_0^1 dt \frac{\partial r^\nu}{\partial t}(\tilde{v}_j; t) e^{-iq \cdot \tau(\tilde{v}_j; t)} \quad (4.57)$$

Wie bei den Vektorfeldern hängt der longitudinale Anteil der Vertexkorrektur nicht vom Integrationsweg ab. Unter Verwendung der Gap-Gleichung erhalten wir:

$$q_\nu \Lambda_5^{(o)\nu n}(p_f, p_i) \\ = -(\Sigma(p_f) \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} + \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} \Sigma(p_i)) \\ + i \sum_{i=1}^2 2iG_i \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \{ \tilde{\alpha}(-p_f, -p'; p_i, p' + q) \\ \times \Gamma_i^{\mu k} (-) \text{tr}[\Gamma_{i\mu}^k (iS(p' + q) \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} + \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} iS(p'))] \\ + \tilde{\alpha}(-p', -p_f; p_i, p' + q) \\ \times \Gamma_i^{\mu k} (iS(p' + q) \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} + \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} iS(p')) \Gamma_{i\mu}^k \quad \}. \quad (4.58)$$

Der in Abb. 4.5 dargestellte gedresste Vertex

$$\hat{\Gamma}_5^{\nu n}(p_f, p_i) = \gamma^\nu \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} + \Lambda_5^{\nu n}(p_f, p_i) \quad (4.59)$$

löst die folgende Integralgleichung, die sich aus Abb. 4.5 c) ergibt:

$$\begin{aligned} q_\nu \Lambda_5^{\nu n}(p_f, p_i) &= -(\Sigma(p_f) \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} + \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} \Sigma(p_i)) \\ &- \sum_{i=1}^2 2iG_i \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \{ \tilde{\alpha}(-p_f, -p'; p_i, p' + q) \\ &\quad \times \Gamma_i^{\mu k}(-) \text{tr}[\Gamma_{i\mu}^k (iS(p' + q) \Delta_5^n(p' + q, p') iS(p'))] \\ &\quad + \tilde{\alpha}(-p', -p_f; p_i, p' + q) \\ &\quad \times \Gamma_i^{\mu k}(iS(p' + q) \Delta_5^n(p' + q, p') iS(p')) \Gamma_{i\mu}^k \} \end{aligned} \quad (4.60)$$

mit

$$\Delta_5^n(p' + q, p') = q_\nu \Lambda_5^{\nu n}(p_f, p_i) + \Sigma(p_f) \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} + \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} \Sigma(p_i) + 2m_o \gamma_5 \frac{\tau^n}{2}. \quad (4.61)$$

Im chiralen Limes ($m_o = 0$) wird diese Gleichung durch die axiale Ward-Takahashi-Identität gelöst:

$$q_\nu \Lambda_5^{\nu n}(p_f, p_i) = -(\Sigma(p_f) \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} + \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} \Sigma(p_i)). \quad (4.62)$$

Für $m_o \neq 0$ ist der axiale Strom nicht vollständig erhalten und man bekommt Zusatzterme der Ordnung m_o .

Wir haben die axialen Felder vor allem mit dem Ziel einer Beschreibung des schwachen Pionzerfalls an unser Modell angekoppelt. Wie bereits angesprochen, findet auf der hadronischen Seite dieses Zerfallsprozesses ein Übergang vom pseudoskalaren isovektoriellen Pionzustand zum (skalaren isoskalaren) Vakuum statt, der durch einen axialen isovektoriellen Strom $\mathcal{A}_\mu^m$ hervorgerufen wird. Unter der Annahme exakter $SU(2)$ -Isospinsymmetrie lautet das entsprechende Übergangsmatrixelement [40]:

$$\langle 0 | \mathcal{A}_\mu^m(0) | \pi^n(q) \rangle = if_\pi \delta^{m,n} q_\mu. \quad (4.63)$$

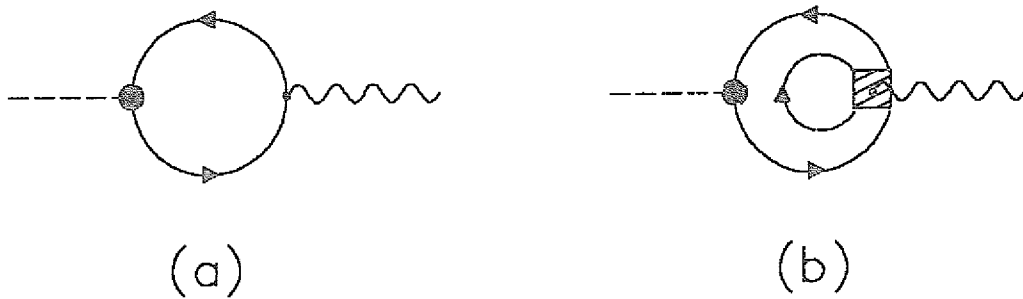


Abb. 4.7: Schwacher Zerfall des Pions (gestrichelte Linie). In (a) koppelt der axiale Strom (gewellte Linie) an den Quark-Propagator, in (b) an den nichtlokalen starken Vertex.

Die Struktur der rechten Seite dieser Gleichung folgt allein aus der Lorentz-Invarianz und der Isospinerhaltung.

Die Beschreibung dieses Prozesses im Rahmen unseres Modells ist in Abb. 4.7 dargestellt: Das Pion koppelt über einen Quark-Antiquark-Zustand an den axialen Strom. Da dieser, wie wir gerade diskutiert haben, nicht nur an den Quark-Propagator, sondern auch an den nichtlokalen starken Vertex koppelt, gibt es zwei Beiträge (Abb. 4.7 a) und b)). Den Pion-Quark-Vertex haben wir bereits in Kapitel 3 hergeleitet. Da dies im Rahmen des separablen Modells geschehen ist, wollen wir uns im folgenden ebenfalls auf die separable Wechselwirkung beschränken.

Wertet man Abb. 4.7 auf der Massenschale des Pions aus, bekommt man die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}
 & i f_{\pi} \delta^{mn} q^{\mu} |_{q^2=m_{\pi}^2} \\
 &= (-) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\hat{\Gamma}_5^{(o)\mu m} \left(k - \frac{q}{2}, k + \frac{q}{2} \right) i S \left(k + \frac{q}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left(g_{\pi qq} \left(k + \frac{q}{2}, k - \frac{q}{2} \right) i \gamma_5 \tau^n \right. \\
 &\quad \left. \left. - h_{\pi qq} \left(k + \frac{q}{2}, k - \frac{q}{2} \right) i \not{q} \gamma_5 \tau^n \right) i S \left(k - \frac{q}{2} \right) \right] |_{q^2=m_{\pi}^2}
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

mit

$$\hat{\Gamma}_5^{(o) \nu n}(p_f, p_i) = \gamma^\nu \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} + \Lambda_5^{(o) \nu n}(p_f, p_i) \quad (4.65)$$

Wir müssen also, ähnlich wie bei der Beschreibung der Mesonen, Quark-Antiquark-Polarisationsfunktionen berechnen, die jetzt jedoch jeweils einen starken und einen schwachen Vertex besitzen. In Analogie zu Gl. (3.59) und Gl. (3.60) definieren wir dazu

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\hat{\Gamma}_m, \hat{\Gamma}_n) &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} [\hat{\Gamma}_m(k - \frac{q}{2}, k + \frac{q}{2}) S(k + \frac{q}{2}) \hat{\Gamma}_n(k + \frac{q}{2}, k - \frac{q}{2}) S(k - \frac{q}{2})] \\ &\quad \times f^{\frac{1}{2}}((k + \frac{q}{2})^2) f^{\frac{1}{2}}((k - \frac{q}{2})^2) \end{aligned} \quad (4.66)$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{J}(i\gamma_5 \tau^n 1_c, \hat{\Gamma}_5^{(o) \mu n}) &= -\tilde{J}(\hat{\Gamma}^{(o) \mu n}, i\gamma_5 \tau^n 1_c) = \frac{1}{2} \tilde{J}_{PA}(q^2) i\hat{q}^\mu \\ \tilde{J}(\gamma^\mu \gamma_5 \tau^n 1_c, \hat{\Gamma}_5^{(o) \nu n}) &= \tilde{J}(\hat{\Gamma}^{(o) \mu n}, \gamma^\nu \gamma_5 \tau^n 1_c) = \frac{1}{2} (\tilde{J}_{AA}^{(L)}(q^2) L^{\mu\nu} + \tilde{J}_{AA}^{(T)}(q^2) T^{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Unter Verwendung von Gl. (3.74) ergibt sich dann für die Pion-Zerfallskonstante:

$$f_\pi = -\frac{1}{2m_\pi} g_{\pi qq}^{(o)} \tilde{J}_{PA}(m_\pi^2) - \frac{1}{2} h_{\pi qq}^{(o)} \tilde{J}_{AA}^{(L)}(m_\pi^2) \quad (4.68)$$

Wir interessieren uns besonders für den chiralen Grenzfall $m_\pi = 0$, in welchem, wie in Kapitel 3 gezeigt wurde, die Pionmasse m_π verschwindet. In Anh. B wird gezeigt, daß man im chiralen Limes die Polarisationsfunktion mit einem starken und einem schwachen Vertex, $\tilde{J}_{PA}$ und $\tilde{J}_{AA}^{(L)}$, für $q^2 \rightarrow 0$ teilweise durch die Polarisationsfunktionen mit zwei starken Vertizes ausdrücken kann:

$$\begin{aligned} \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{\tilde{J}_{PA}(q^2)}{\sqrt{q^2}} &= -2\mathcal{F}(0) \frac{dJ_{PP}}{dq^2}(0) - g_V \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{J_{PA}(q^2)}{\sqrt{q^2}} J_1 \\ \tilde{J}_{AA}^{(L)}(0) &= (1 - g_V J_{AA}^{(L)}(0)) J_1 - 2\mathcal{F}(0) \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{J_{PA}(q^2)}{\sqrt{q^2}} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Dabei ist

$$J_1 = (4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2}k^2}{k^2 - \mathcal{F}^2(k^2)} \frac{df}{dk^2}(k^2) \quad (4.70)$$

In lokalen Modellen ist die Wechselwirkungsfunktion f eine Konstante und J_1 verschwindet.

Setzen wir Gl. (4.69) in Gl. (4.68) ein, finden wir für die Pion-Zerfallskonstante im chiralen Grenzfall:

$$f_\pi = g_{\pi qq}^{(o)} (\mathcal{F}(0) \frac{dJ_{PP}}{dq^2}(0) + \frac{1}{2} g_V \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{J_{PA}(q^2)}{\sqrt{q^2}} J_1) + h_{\pi qq}^{(o)} (\mathcal{F}(0) \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{J_{PA}(q^2)}{\sqrt{q^2}} - \frac{1}{2} (1 - g_V J_{AA}^{(L)}(0)) J_1) \quad (4.71)$$

Schließlich können wir noch Gl. (3.76) (für $m_\pi \rightarrow 0$) verwenden, um $h_{\pi qq}^{(o)}$ zu eliminieren. Dabei fällt auch die Funktion J_1 heraus, und es folgt aus Gl. (3.90) zusammen mit der Definition Gl. (3.89)

$$f_\pi \equiv C = \mathcal{F}(0) \left[\frac{dJ_{PP}}{dq^2}(0) + g_V \frac{(\frac{d}{dq^2} J_{PA}^2(q^2))|_{q^2=0}}{1 - g_V J_{AA}^{(L)}(0)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.72)$$

(im chiralen Limes). Es ist zu beachten, daß sich $J_{PA}(q^2)$ für $q^2 \rightarrow 0$ wie $\sqrt{q^2}$ verhält, und wir $\frac{J_{PA}^2(q^2)}{q^2}$ durch die Ableitung $\frac{d}{dq^2} J_{PA}^2(q^2)$ ersetzen konnten.

Setzt man Gl. (4.72) in Gl. (3.88) ein, erhält man die Gell-Mann–Oakes–Renner-Relation [37]:

$$f_\pi^2 m_\pi^2 = -m_o \langle \bar{q}q \rangle + \mathcal{O}(m_o^2) \quad , \quad (4.73)$$

während aus Gl. (3.90) eine verallgemeinerte Goldberger-Treiman-Relation folgt:

$$g_{\pi qq}(p_f, p_i) f_\pi = \sqrt{\mathcal{F}(p_f^2) \mathcal{F}(p_i^2)} \equiv \sqrt{\Sigma(p_f) \Sigma(p_i)} \quad (4.74)$$

(im chiralen Limes). Im lokalen Grenzfall $f = \text{const.}$ sind sowohl $g_{\pi qq}$ als auch die Quark-Selbstenergie $\Sigma \equiv m$ konstant. Gl. (4.74) beschreibt die impulsabhängige Verallgemeinerung für die nichtlokale separable Wechselwirkung.

5. Erweiterung des Modells auf drei Quark-Flavours

Im Rahmen dieser Arbeit haben wir ein chirales symmetrisches Modell entwickelt, das den Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung dazu ausnutzt, das Auftreten freier Quarks zu verhindern. Dabei standen bis jetzt formale Aspekte im Vordergrund: Es war zunächst wichtig zu zeigen, daß bei der Modifikation der NJL-Wechselwirkung, von der wir ausgegangen sind, die mit den Symmetrien, insbesondere der chiralen Symmetrie, verknüpften Beziehungen nicht verloren gegangen sind. So haben wir gesehen, daß das Goldstone-Theorem, eine verallgemeinerte Goldberger-Treiman-Relation und die Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation in unserem Modell gelten.

Bei diesen Untersuchungen haben wir uns auf den $SU(2_f)$ -Sektor, d. h. auf die beiden leichtesten Quark-Flavours, „up“ und „down“, beschränkt. Das war insofern sinnvoll, als die oben genannten Relationen nur für verschwindende (Goldstone-Theorem, Goldberger-Treiman-Relation) oder sehr kleine (Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation) nackte Quarkmassen gelten und daher für den Sektor mit Strangeness nur noch eine bedingte Rolle spielen.

Die Einschränkung hatte aber vor allem auch praktische Gründe: Wie wir gesehen haben, ist $SU(2_f)_V$ in der Natur eine recht gute Symmetrie, was sich z. B. in den fast identischen Massen von Proton und Neutron zeigt. Der Grund dafür ist, daß m_o^u und m_o^d im Vergleich zu den Selbstenergien für das dynamische Verhalten der Quarks ohnehin von untergeordneter Bedeutung sind, so daß ihre Differenz so gut wie keine Rolle mehr spielt. Wir konnten daher, ohne einen allzu großen Fehler zu machen, in unserem Modell von einer exakten $SU(2_f)_V$ -Symmetrie ausgehen und eine mittlere Strommasse m_o verwenden. Dies hat den Formalismus etwas vereinfacht.

Die Möglichkeiten konkreter Anwendungen des Modells sind im $SU(2_f)$ -Raum allerdings sehr begrenzt. Im naiven Quarkmodell mit exakter $SU(3_f)$ -Symmetrie lassen sich nur die isovektoriellen Mesonen als Zustände ohne „strange“-Quarks beschreiben. Greift man auf die Mesonen mit den niedrigsten Massen und den entsprechenden Quantenzahlen zurück, wären dies π ($J^\pi = 0^-$), ρ (1^-), a_0 (0^+) und a_1 (1^+). Die Interpretation der skalaren Mesonen ist allerdings in der Praxis umstritten. Andererseits geht man davon aus, daß infolge „idealer“ Mischung der Singulett- und Oktett-Zustände ω_1 und ω_8 zu ω und ϕ das Omega-Meson kaum $s\bar{s}$ -Beimischungen

enthält. Für reine $SU(2_f)_V$ -Untersuchungen sind also praktisch nur π , ρ , ω und a_1 und deren Zerfälle geeignet.

Durch die Erweiterung des Modells auf drei Quark-Flavours kommen eine Reihe neuer Teilchen hinzu. Allein bei den pseudoskalaren Mesonen erhöht sich die Zahl der „Teilchensorten“ von eins (π) auf vier (π , K , η , η'). Diese Mesonen sind besonders interessant, da sie bei gleicher Spinstruktur sehr unterschiedliche Massen besitzen. Für eine konsistente Beschreibung sind daher sowohl die chirale Symmetrie als auch das Confinement wichtig. Insgesamt können wir hoffen, daß sich bei einer $SU(3_f)$ -Erweiterung durch die neu hinzukommenden Observablen die Aussagekraft des Modells erhöht. Allerdings bekommen wir, wie wir noch sehen werden, auch neue Parameter.

Die Lagrangedichte Gl. (3.9) zusammen mit Gl. (3.10) und Gl. (3.11) ist ohne weitere Zusätze symmetrisch unter beliebigen $SU(n_f)_V$ -Transformationen. Das Modell läßt sich also problemlos auf drei Flavours erweitern, indem wir Gl. (3.12) durch

$$q(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

ersetzen und die in Gl. (3.13) vorkommenden Einheitsmatrizen im Flavourraum als 3×3 -Matrizen interpretieren. Bis auf teilweise andere Konstanten bei der Spurbildung und der Fierztransformation ändert das an unseren bisherigen Ergebnissen nicht viel. In einem solchen Modell mit exakter $SU(3_f)$ -Symmetrie würden wir allerdings für alle Mesonen mit gleicher Spinstruktur, also z. B. für π und K , die gleiche Masse erhalten. Wir müssen daher, zumindest für „strange“- und „non-strange“-Quarks unterschiedliche nackte Massen zu verwenden. Dadurch werden die Rechnungen technisch insgesamt etwas komplizierter.

Wie bereits in Abschnitt 3.2 angesprochen, besitzt unsere Wechselwirkung mit der $U(1)_A$ -Invarianz eine Symmetrie, die sich in der Natur nicht durch die Existenz eines entsprechenden Goldstone-Bosons bemerkbar macht, und von der man heute glaubt, daß sie in der QCD durch Instanton-Effekte gebrochen wird [38, 39]. Im Zwei-Flavour-Modell gibt es daher ein mit den Pionen entartetes isoskalares Teilchen, das im experimentellen Mesonenspektrum nicht existiert. Für unsere bisherigen formalen Untersuchungen war das unerheblich. Da der isoskalare Partner des Pions,

das η -Meson, relativ starke $s\bar{s}$ -Beimischungen hat, wäre es auch gar nicht sinnvoll gewesen, das Problem im $SU(2_f)$ -Modell zu lösen.

Im Drei-Flavour-Fall haben wir eine analoge Situation vorliegen: Die $U(3_f)_L \otimes U(3_f)_R$ -invariante Wechselwirkung führt auf neun pseudoskalare Goldstone-Bosonen, die Flavour-Oktett-Mesonen π , K und η und das Flavour-Singulett-Meson η' , wobei η und η' auch eine Singulett- bzw. Oktett-Beimischung haben können. Experimentell findet man dagegen, daß das η' -Meson mit einer Masse von $958 MeV$ deutlich schwerer ist als die pseudoskalaren Flavour-Oktett-Mesonen. Daraus muß man schließen, daß die $U(1)_A$ -Symmetrie in der Natur gebrochen ist.

Im NJL-Modell führt man deshalb zusätzlich zur $U(3_f)_L \otimes U(3_f)_R$ -invarianten Vierpunkt-Wechselwirkung eine Sechspunkt-Wechselwirkung ein, die die $U(1)_A$ -Symmetrie explizit bricht [62, 54, 63]. Dieser neue Term – eine Determinante im Flavour-Raum – wurde 1976 von t'Hooft eingeführt, um Instanton-Effekten Rechnung zu tragen [38, 39]. In ähnlicher Weise kann man auch in unserem Modell durch Einführung einer Sechspunkt-Wechselwirkung die η' -Masse zu höheren Energien verschieben.

Ziel dieses abschließenden Kapitels ist es aufzuzeigen, wie sich die aus dem NJL-Modell bekannten Techniken der $SU(3_f)$ -Erweiterung auf unser Modell übertragen lassen. Ein sorgfältiger Fit und die numerische Berechnung von Observablen bleibt einer späteren Arbeit überlassen.

5.1. DIE LAGRANGEDICHTE DES DREI-FLAVOUR-MODELLS

Die Lagrangedichte des Drei-Flavour-Modells besteht aus einem kinetischen Anteil, einer Vierpunkt- und einer Sechspunkt-Wechselwirkung:

$$\mathcal{L}_{eff}(x) = \mathcal{L}_o(x) + \mathcal{L}^{(4)}(x) + \mathcal{L}^{(6)}(x). \quad (5.2)$$

Der kinetische Anteil lautet

$$\mathcal{L}_o(x) = \bar{q}(x) (i\hat{D} - \hat{m}_o) q(x) \quad (5.3)$$

mit den Quark-Feldoperatoren $q(x)$, deren Flavour-Struktur in Gl. (5.1) gegeben ist, und der Massenmatrix

$$\hat{m} = \text{diag}(m_o^u, m_o^d, m_o^s). \quad (5.4)$$

Wie in der Einleitung zu diesem Kapitel angesprochen, machen wir keinen großen Fehler, wenn wir wie bisher von einer exakten $SU(2_f)$ -Symmetrie $m_o^u = m_o^d$ ausgehen. Die nackte Masse des „strange“-Quarks muß dagegen deutlich höher angesetzt werden, um beispielsweise die im Vergleich zum Pion höhere Kaonmasse zu erklären*).

Da es uns in diesem Kapitel hauptsächlich darum geht, das Verhalten der pseudoskalaren Mesonen zu diskutieren, wollen wir der Einfachheit halber eine Vierpunktfunktion verwenden, die nur skalare und pseudoskalare Kanäle enthält:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(4)}(x) = & \frac{gS}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \alpha(x; x_3, x_4; x_1, x_2) \\ & \times \sum_{k=0}^8 \{ (\bar{q}(x_3) 1 \lambda_f^k 1_c q(x_1)) (\bar{q}(x_4) 1 \lambda_f^k 1_c q(x_2)) \\ & + (\bar{q}(x_3) i\gamma_5 \lambda_f^k 1_c q(x_1)) (\bar{q}(x_4) i\gamma_5 \lambda_f^k 1_c q(x_2)) \} . \end{aligned} \quad (5.5)$$

Wie in Kapitel 2 wollen wir dabei nur den direkten Anteil der Wechselwirkung berücksichtigen. Ein weitgehend äquivalentes Verfahren wäre es, von Gl. (3.10) (mit 3×3 -Flavour-Einheitsmatrizen) unter Berücksichtigung der Austauschsterme auszugehen und die Kopplungskonstanten $G_1 = -G_2$ zu setzen.

Die Flavour-Operatoren λ_f^k sind $\lambda_f^0 = \sqrt{\frac{2}{3}} 1_f$ und die Gell-Mann-Matrizen für $k = 1$ bis 8. Die Funktion α , die die Nichtlokalität der Wechselwirkung genauer bestimmt, setzen wir so an wie bisher. Insbesondere gelten Gl. (3.15) bis Gl. (3.17). Später werden wir auch wieder von der separablen Version Gl. (3.43) Gebrauch machen.

Offensichtlich ist $\mathcal{L}^{(4)}$ invariant unter den globalen Symmetrietransformationen

$$\begin{aligned} U(1)_V : & \quad q(x) \longrightarrow e^{i\alpha} q(x) \\ U(1)_A : & \quad q(x) \longrightarrow e^{i\beta\gamma_5} q(x) \\ SU(3_f)_V : & \quad q(x) \longrightarrow e^{i\vec{\rho} \cdot \frac{\vec{\lambda}}{2}} q(x) \\ SU(3_f)_A : & \quad q(x) \longrightarrow e^{i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\lambda}}{2}\gamma_5} q(x) \\ SU(3_c) : & \quad q(x) \longrightarrow e^{i\vec{\xi} \cdot \frac{\vec{\lambda}_c}{2}} q(x) , \end{aligned} \quad (5.6)$$

*) Aus der Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation [37] und den analogen Beziehungen für das η -Meson und das Kaon folgt unter der Annahme $f_\pi = f_K = f_\eta$ und gleicher Kondensate für alle drei Quark-Flavours: $\frac{m_o^u + m_o^d}{2m_o^s} = \frac{m_\pi^2}{2m_K^2 - m_\pi^2} \approx \frac{1}{25}$ [40]

also unter der Gruppe $U(3_f)_L \otimes U(3_f)_R \otimes SU(3_c)$. Um die unerwünschte $U(1)_A$ -Symmetrie unter gleichzeitiger Beibehaltung der $SU(3_f)_L \otimes SU(3_f)_R$ -Symmetrie zu brechen, muß man im Drei-Flavour-Modell eine Sechspunkt-Wechselwirkung einführen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(6)}(x) &= G_D \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 d^4x_5 d^4x_6 \frac{1}{6} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ijk} \beta(x; x_4, x_5, x_6; x_1, x_2, x_3) \\ &\quad \{ (\bar{q}^i(x_4) (1 + \gamma_5) q^a(x_1)) (\bar{q}^j(x_5) (1 + \gamma_5) q^b(x_2)) (\bar{q}^k(x_6) (1 + \gamma_5) q^c(x_3)) \\ &\quad + (\bar{q}^i(x_4) (1 - \gamma_5) q^a(x_1)) (\bar{q}^j(x_5) (1 - \gamma_5) q^b(x_2)) (\bar{q}^k(x_6) (1 - \gamma_5) q^c(x_3)) \}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Die Indizes a, b, c und i, j, k beziehen sich auf den Flavour-Raum. Da der total antisymmetrische Tensor ε_{lmn} nur dann ungleich null ist, wenn die Indizes l, m und n paarweise verschieden sind, führt $\mathcal{L}^{(6)}$ auf Sechspunkt-Vertizes, in die jeweils ein „up“-, ein „down“- und ein „strange“-Quark ein- und auslaufen (s. Abb. 5.1).

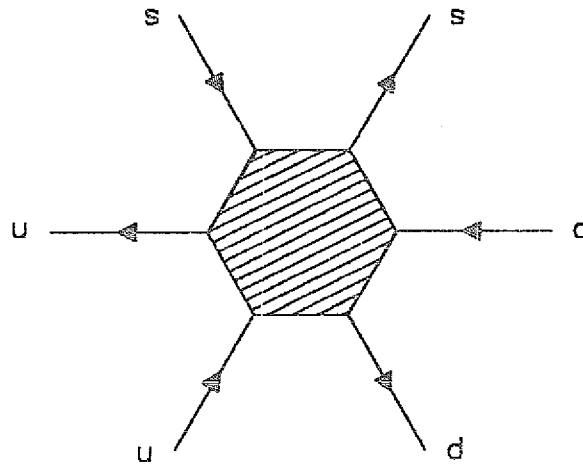


Abb. 5.1: Der nichtlokale Sechspunkt-Vertex.

Die Funktion β bestimmt analog zur Funktion α in Gl. (5.5) die Form der Nichtlokalität der Wechselwirkung. Damit das Modell translationsinvariant ist, muß gelten

$$\beta(x; x_4, x_5, x_6; x_1, x_2, x_3) = \int \left(\prod_{j=1}^6 \frac{d^4k_j}{(2\pi)^4} e^{-ik_j \cdot (x - x_j)} \right) \tilde{\beta}(k_3, k_4; k_1, k_2). \quad (5.8)$$

Außerdem sollte die Wechselwirkung invariant bleiben, wenn man die drei einlaufenden und die drei auslaufenden Quarks jeweils auf die gleiche Weise permutiert:

$$\beta(x; x_4, x_5, x_6; x_1, x_2, x_3) = \beta(x; x_{\sigma(1)+3}, x_{\sigma(2)+3}, x_{\sigma(3)+3}; x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) . \quad (5.9)$$

Dabei ist σ ein Element der Permutationsgruppe S_3 . Um zu zeigen, daß $\mathcal{L}^{(6)}$ tatsächlich das gewünschte Symmetrieverhalten besitzt, führt man folgende Umformungen des Integranden von Gl. (5.7) durch:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ijk} (\bar{q}^i(x_4) (1 \pm \gamma_5) q^a(x_1)) (\bar{q}^j(x_5) (1 \pm \gamma_5) q^b(x_2)) (\bar{q}^k(x_6) (1 \pm \gamma_5) q^c(x_3)) \\ &= (\bar{u}(x_4) (1 \pm \gamma_5) u(x_1)) (\bar{d}(x_5) (1 \pm \gamma_5) d(x_2)) (\bar{s}(x_6) (1 \pm \gamma_5) s(x_3)) \\ &+ \dots \quad (35 \text{ weitere Terme}) \\ &= (\bar{q}(x_4) (1 \pm \gamma_5) (\frac{1}{3} 1_f + \frac{1}{2} \lambda_f^3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \lambda_f^8) q(x_1)) \\ & \quad (\bar{q}(x_5) (1 \pm \gamma_5) (\frac{1}{3} 1_f - \frac{1}{2} \lambda_f^3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \lambda_f^8) q(x_2)) \\ & \quad (\bar{q}(x_6) (1 \pm \gamma_5) (\frac{1}{3} 1_f - \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_f^8) q(x_3)) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (5.10)$$

In dieser Form, in der nun die vollständigen Feldoperatoren und nicht einzelne Flavour-Komponenten auftreten, ist es zwar relativ aufwendig aber nicht schwierig zu beweisen, daß $\mathcal{L}^{(6)}$ unter $SU(3_f)_L \otimes SU(3_f)_R$ -Transformationen, nicht aber unter $U(1)_A$ -Transformationen invariant ist. Auch hier gilt wieder, daß die Nicht-lokalität der Wechselwirkung keinerlei Auswirkungen auf ihre globalen Symmetrien hat.

5.2. HERLEITUNG DER GAP-GLEICHUNG

Ähnlich wie in Abschnitt 3.3 können wir im Drei-Flavour-Modell eine Gap-Gleichung für die Quark-Selbstenergie Σ herleiten. Dazu addieren und subtrahieren wir wieder einen Term

$$\delta\mathcal{L}(x) = (-) \int d^4y \bar{q}(y) \hat{\Sigma}(y-x) q(x) \quad (5.11)$$

von der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{eff}$ und fordern, daß die Wechselwirkung $\mathcal{L}_{int}^I = \mathcal{L}^{(4)} + \mathcal{L}^{(6)} - \delta\mathcal{L}$ in erster Ordnung keinen Beitrag zum Propagator liefert. Wir müssen

dabei allerdings berücksichtigen, daß jetzt nicht mehr alle Quarks dieselbe Masse haben. Wir ersetzen daher Gl. (3.36) durch den folgenden Ansatz:

$$\Sigma(p) = \text{diag}(\Sigma^u(p), \Sigma^d(p), \Sigma^s(p)), \quad (5.12)$$

wobei die einzelnen Flavour-Komponenten wie zuvor die Struktur

$$\Sigma^a(p) = \mathcal{F}^a(p^2) + \mathcal{G}^a(p^2) \not{p} \quad (5.13)$$

besitzen. Für den Quark-Propagator

$$S(p) = [\not{p} - \hat{m}_0 - \Sigma(p)]^{-1} \quad (5.14)$$

gilt dann

$$S(p) = \text{diag}(S^u(p), S^d(p), S^s(p)) \quad (5.15)$$

mit

$$S^a(p) = \frac{(1 - \mathcal{G}^a(p^2)) \not{p} + (m_0^a + \mathcal{F}^a(p^2))}{(1 - \mathcal{G}^a(p^2)) p^2 - (m_0^a + \mathcal{F}^a(p^2))^2} \quad (5.16)$$

Wenn wir nun die Wechselwirkung $\mathcal{L}'_{int}$ „einschalten“ und fordern, daß die daraus resultierende Korrektur zum Propagator in erster Ordnung Störungstheorie verschwindet, bekommen wir in Analogie zu Gl. (3.40)

$$\begin{aligned} -i\Sigma^a(p) = & g_S \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i\tilde{\alpha}(-p, -k; p, k) \sum_{k=0}^8 (-) \text{tr}[(1 \lambda_f^k 1_c) iS(k)] (\lambda_f^k)^{aa} \\ & + 2G_D \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} i\tilde{\beta}(-p, -k, -k'; p, k, k') \\ & (-) \text{tr}[(1 1_c) iS^b(k)] (-) \text{tr}[(1 1_c) iS^c(k')], \end{aligned} \quad (5.17)$$

wobei a, b und c paarweise verschiedene Flavour-Indizes sind. Sowohl bei der Vierpunkt-Wechselwirkung (erster Term) als auch bei der Sechspunkt-Wechselwirkung (zweiter Term) haben wir nur den direkten Anteil berücksichtigt (Hartree-Näherung).

Wir wollen zunächst die Flavour-Spur des Vierpunkt-Anteils auswerten:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^8 \text{tr}_f[\lambda_f^k S(k)] (\lambda_f^k)^{aa} \\ & = \text{tr}_f[\lambda_f^0 S(k)] (\lambda_f^0)^{aa} + \text{tr}_f[\lambda_f^3 S(k)] (\lambda_f^3)^{aa} + \text{tr}_f[\lambda_f^8 S(k)] (\lambda_f^8)^{aa} \\ & = 2 S^a(k). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Damit wird aus Gl. (5.17):

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma^a(p) = & g_S \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i\tilde{\alpha}(-p, -k; p, k) (-) \text{tr}[(1 \ 1_c) iS^a(k)] \\
 & + 2G_D \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} i\hat{\beta}(-p, -k, -k'; p, k, k') \\
 & (-) \text{tr}[(1 \ 1_c) iS^b(k)] (-) \text{tr}[(1 \ 1_c) iS^c(k')]
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

mit $a \neq b \neq c \neq a$.

Die Vierpunkt- und die Sechspunkt-Wechselwirkung tragen also auf qualitativ unterschiedliche Weise zur Quark-Selbstenergie bei: Über die Vierpunkt-Wechselwirkung werden die Quarks nur durch Quarks vom gleichen Favour-Typ gedresst, während die Sechspunkt-Wechselwirkung die Flavours maximal mischt. Dieser Sachverhalt ist in Abb. 5.2 am Beispiel des „up“-Quarks dargestellt.

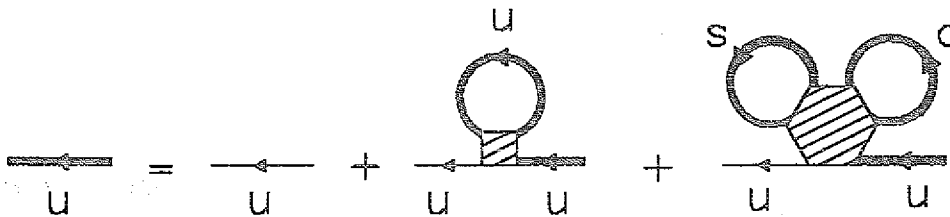


Abb. 5.2: Gap-Gleichung für das gedresste „up“-Quark.

Unter Verwendung von Gl. (5.16) können wir die Spuren in Gl. (5.19) explizit ausrechnen. Da wir in diesem Kapitel der Einfachheit halber keine Vektorkopplung in die Lagrangedichte eingebaut haben (s. Gl. (5.5)), verschwindet die Funktion $\mathcal{G}^a(p^2)$,

und wir bekommen

$$\begin{aligned}
\Sigma^a(p) &= \mathcal{F}^a(p^2) \\
&= g_S (8in_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{\alpha}(-p, -k; p, k) \frac{m_o^a + \mathcal{F}^a(k^2)}{k^2 - (m_o^a + \mathcal{F}^a(k^2))^2} \\
&\quad - \frac{1}{2} G_D (8in_c)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \tilde{\beta}(-p, -k, -k'; p, k, k') \\
&\quad \times \frac{m_o^b + \mathcal{F}^b(k^2)}{k^2 - (m_o^b + \mathcal{F}^b(k^2))^2} \frac{m_o^c + \mathcal{F}^c(k'^2)}{k'^2 - (m_o^c + \mathcal{F}^c(k'^2))^2}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

mit $a \neq b \neq c \neq a$.

Zur Vereinfachung der Struktur dieser Gleichung verwenden wir wieder den separablen Ansatz Gl. (3.43) für die Vierpunkt-Wechselwirkung und einen analogen Ansatz für die Sechspunkt-Wechselwirkung:

$$\tilde{\beta}(k_4, k_5, k_6; k_1, k_2, k_3) = \prod_{j=1}^6 f^{\frac{1}{2}}(k_j^2). \tag{5.21}$$

Wie im Zwei-Flavour-Modell ist die Selbstenergie wieder proportional zu der Wechselwirkungsfunktion f :

$$\mathcal{F}^a(p^2) = \mathcal{F}^a(0) f(p^2), \tag{5.22}$$

und wir bekommen ein gekoppeltes System von Selbstkonsistenzgleichungen für die Selbstenergien $\mathcal{F}^u$, $\mathcal{F}^d$ und $\mathcal{F}^s$ an der Stelle $p^2 = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^a(0) &= g_S (8in_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m_o^a + \mathcal{F}^a(k^2)}{k^2 - (m_o^a + \mathcal{F}^a(k^2))^2} f(k^2) \\
&\quad - \frac{1}{2} G_D (8in_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m_o^b + \mathcal{F}^b(k^2)}{k^2 - (m_o^b + \mathcal{F}^b(k^2))^2} f(k^2) \\
&\quad \times (8in_c) \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{m_o^c + \mathcal{F}^c(k'^2)}{k'^2 - (m_o^c + \mathcal{F}^c(k'^2))^2} f(k'^2)
\end{aligned} \tag{5.23}$$

mit $a \neq b \neq c \neq a$.

Im $SU(2_f)$ -symmetrischen Fall ($m_o^u = m_o^d \Rightarrow \mathcal{F}^u = \mathcal{F}^d$) führt das auf die beiden

folgenden gekoppelten Gleichungen:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^u(0) &= \mathcal{F}^d(0) \\ &= \left[g_S - \frac{1}{2} G_D (8in_c) \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{m_o^s + \mathcal{F}^s(k'^2)}{k'^2 - (m_o^s + \mathcal{F}^s(k'^2))^2} f(k'^2) \right] \\ &\quad \times (8in_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m_o^u + \mathcal{F}^u(k^2)}{k^2 - (m_o^u + \mathcal{F}^u(k^2))^2} f(k^2)\end{aligned}\quad (5.24)$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^s(0) &= g_S (8in_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m_o^s + \mathcal{F}^s(k^2)}{k^2 - (m_o^s + \mathcal{F}^s(k^2))^2} f(k^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} G_D \left[(8in_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m_o^u + \mathcal{F}^u(k^2)}{k^2 - (m_o^u + \mathcal{F}^u(k^2))^2} f(k^2) \right]^2.\end{aligned}\quad (5.25)$$

5.3. BESCHREIBUNG DER PSEUDOSKALAREN MESONEN

Grundbausteine unseres auf drei Flavours erweiterten Modells sind „up“- „down“- und „strange“-Quarks, die über nichtlokale Vierpunkt- und Sechspunkt-Vertizes miteinander wechselwirken. Daraus ergibt sich, wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, die Selbstenergie der Quarks, indem man ausgehend von der Vierpunkt-Kopplung eine Quarkschleife und ausgehend von der Sechspunkt-Kopplung zwei Quarkschleifen schließt. Entsprechend bekommt man zusätzlich zu den Vierpunkt-Vertizes von der Sechspunkt-Wechselwirkung durch Schließen einer Quarkschleife auch Beiträge zum Quark-Antiquark-Streukern. Wenn wir die Austauschsterme wieder weglassen, lautet er:

$$i\hat{K}_{cd;ab}(p_1, p_3|p_2, p_4) = i\hat{K}_{cd;ab}^{(4)}(p_1, p_3|p_2, p_4) + i\hat{K}_{cd;ab}^{(6)}(p_1, p_3|p_2, p_4) \quad (5.26)$$

mit

$$\begin{aligned}i\hat{K}_{cd;ab}^{(4)}(p_1, p_3|p_2, p_4) &= g_S i\tilde{\alpha}(-p_3, -p_4|p_1, p_2) \sum_{k=0}^8 \{ (1 \lambda_f^k 1_c)_{ca} (1 \lambda_f^k 1_c)_{db} \\ &\quad + (i\gamma_5 \lambda_f^k 1_c)_{ca} (i\gamma_5 \lambda_f^k 1_c)_{db} \}\end{aligned}\quad (5.27)$$

und

$$\begin{aligned}
 i\hat{K}_{cd;ab}^{(6)}(p_1, p_3|p_2, p_4) &= 2G_D \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i\tilde{\beta}(-p_3, -p_4, -k; p_1, p_2, k) \\
 &\quad \sum_{f_k} \varepsilon_{f_a f_b f_k} \varepsilon_{f_c f_d f_k} (-) \text{tr}[(1 \mathbf{1}_c) iS^{f_k}(k)] \\
 &\quad \{ (1 \mathbf{1}_c)_{\gamma\alpha} (1 \mathbf{1}_c)_{\delta\beta} - (i\gamma_5 \mathbf{1}_c)_{\gamma\alpha} (i\gamma_5 \mathbf{1}_c)_{\delta\beta} \}.
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Dieser effektive Streukern ist in Abb. 5.3 dargestellt. Die Indizes a bis d beziehen sich auf den vollen aus Dirac-, Farb- und Flavour-Anteil zusammengesetzten Raum der Quarkspinoren. Die zugehörigen Flavour-Komponenten haben wir mit f_a bis f_d indiziert, die Komponenten im kombinierten Dirac-Farb-Raum mit α bis δ . Das Quark aus der geschlossenen Schleife trägt den Flavour-Index f_k .

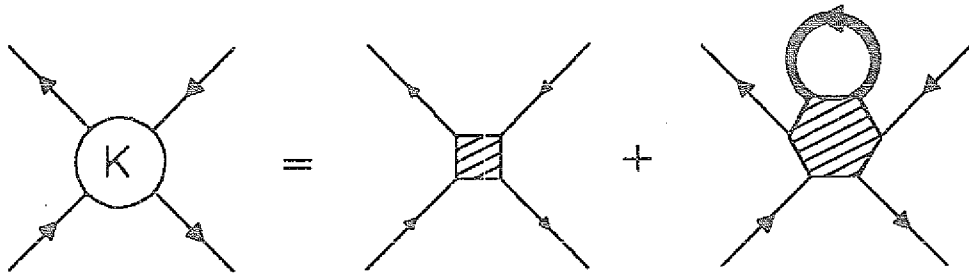


Abb. 5.3: Effektiver Streukern im Drei-Flavour-Modell.

Ähnlich wie wir es in Gl. (5.10) angedeutet haben, kann man die ε -Tensoren im Flavour-Raum dadurch ersetzen, daß man durch geeignete Kombinationen von Flavour-Operatoren die gewünschten Flavour-Komponenten herausprojiziert. Im allgemeinen bekommt man auf diese Weise jedoch einen recht langen Ausdruck, der

neben diagonalen Termen in λ_f^k , $k = 0$ bis 8, auch nichtdiagonale Kombinationen von λ_f^0 , λ_f^3 und λ_f^8 enthält. Der Grund dafür ist, daß der effektive Streukern $\hat{K}^{(6)}$ im Gegensatz zu der Lagrangedichte $\mathcal{L}^{(6)}$ im allgemeinen Fall nicht $SU(3_f)$ -symmetrisch ist, da der Faktor $\text{tr}[iS^{fk}(k)]$ für unterschiedliche Quark-Flavours unterschiedlich groß ist.

Entsprechend vereinfacht sich die Struktur etwas, wenn wir von einer exakten $SU(2_f)$ -Symmetrie ($m_o^u = m_o^d \Rightarrow S^u = S^d$) ausgehen:

$$\begin{aligned}
& i\hat{K}^{(6)}(p_1, p_3 | p_2, p_4) \\
&= 2G_D \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i\tilde{\beta}(-p_3, -p_4, -k; p_1, p_2, k) \\
& \quad \left\{ \frac{1}{3} (2(-)\text{tr}[(1\ 1_c) iS^u(k)] + (-)\text{tr}[(1\ 1_c) iS^s(k)]) \right. \\
& \quad \times [(1\ \lambda_f^0\ 1_c) \otimes (1\ \lambda_f^0\ 1_c) - (i\gamma_5\ \lambda_f^0\ 1_c) \otimes (i\gamma_5\ \lambda_f^0\ 1_c)] \\
& \quad - \frac{1}{2} (-)\text{tr}[(1\ 1_c) iS^s(k)] \\
& \quad \times \sum_{k=1}^3 [(1\ \lambda_f^k\ 1_c) \otimes (1\ \lambda_f^k\ 1_c) - (i\gamma_5\ \lambda_f^k\ 1_c) \otimes (i\gamma_5\ \lambda_f^k\ 1_c)] \\
& \quad - \frac{1}{2} (-)\text{tr}[(1\ 1_c) iS^u(k)] \\
& \quad \times \sum_{k=4}^7 [(1\ \lambda_f^k\ 1_c) \otimes (1\ \lambda_f^k\ 1_c) - (i\gamma_5\ \lambda_f^k\ 1_c) \otimes (i\gamma_5\ \lambda_f^k\ 1_c)] \\
& \quad - \frac{1}{6} (4(-)\text{tr}[(1\ 1_c) iS^u(k)] - (-)\text{tr}[(1\ 1_c) iS^s(k)]) \\
& \quad \times [(1\ \lambda_f^8\ 1_c) \otimes (1\ \lambda_f^8\ 1_c) - (i\gamma_5\ \lambda_f^8\ 1_c) \otimes (i\gamma_5\ \lambda_f^8\ 1_c)] \\
& \quad - \frac{1}{3\sqrt{2}} ((-)\text{tr}[(1\ 1_c) iS^u(k)] - (-)\text{tr}[(1\ 1_c) iS^s(k)]) \\
& \quad \times [(1\ \lambda_f^0\ 1_c) \otimes (1\ \lambda_f^8\ 1_c) - (i\gamma_5\ \lambda_f^0\ 1_c) \otimes (i\gamma_5\ \lambda_f^8\ 1_c) \\
& \quad + (1\ \lambda_f^8\ 1_c) \otimes (1\ \lambda_f^0\ 1_c) - (i\gamma_5\ \lambda_f^8\ 1_c) \otimes (i\gamma_5\ \lambda_f^0\ 1_c)] \left. \right\}. \tag{5.29}
\end{aligned}$$

Neben den diagonalen Termen enthält $\hat{K}^{(6)}$ in diesem Fall nur Mischterme mit λ_f^0 und λ_f^8 , die eng mit der Singulett-Oktett-Mischung zusammenhängen, die z. B. bei den Mesonen η und η' auftritt. Da λ_f^3 nur im $SU(2_f)$ -Unterraum ungleich null ist, gibt es im $SU(2_f)$ -symmetrischen Fall keine Mischterme mit dieser Matrix.

Im Fall exakter $SU(3_f)$ -Symmetrie ($m_o^u = m_o^d = m_o^s \Rightarrow S^u = S^d = S^s$) vereinfacht

sich Gl. (5.29) schließlich auf die Form:

$$\begin{aligned}
& i\hat{K}^{(6)}(p_1, p_3 | p_2, p_4) \\
& = 2G_D \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i\tilde{\beta}(-p_3, -p_4, -k; p_1, p_2, k) (-) \text{tr}[(1 \mathbf{1}_c) iS^u(k)] \\
& \quad \times \{ [(1 \lambda_f^o \mathbf{1}_c) \otimes (1 \lambda_f^o \mathbf{1}_c) - (i\gamma_5 \lambda_f^o \mathbf{1}_c) \otimes (i\gamma_5 \lambda_f^o \mathbf{1}_c)] \\
& \quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^8 [(1 \lambda_f^k \mathbf{1}_c) \otimes (1 \lambda_f^k \mathbf{1}_c) - (i\gamma_5 \lambda_f^k \mathbf{1}_c) \otimes (i\gamma_5 \lambda_f^k \mathbf{1}_c)] \} .
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Hier wird die prinzipielle Wirkungsweise der Sechspunkt-Wechselwirkung besonders deutlich: Der resultierende effektive Quark-Antiquark-Streukern hat einerseits in den skalaren und den pseudoskalaren Kanälen und andererseits in den Flavour-Singulett und den Flavour-Oktett-Kanälen jeweils das umgekehrte Vorzeichen. Die Wechselwirkung besitzt also im skalaren Flavour-Singulett-Kanal, der im $SU(3_f)$ -symmetrischen Fall allein zur Quark-Selbstenergie beiträgt, das gleiche Vorzeichen wie in den pseudoskalaren Flavour-Oktett-Kanälen (bei entsprechender Wahl von G_D attraktiv), und wir können, wie wir gleich sehen werden, wieder die Gap-Gleichung ausnutzen, um zu zeigen, daß die pseudoskalaren Flavour-Oktett-Mesonen Goldstone-Bosonen sind. Im pseudoskalaren Flavour-Singulett-Kanal wirkt die Sechspunkt-Wechselwirkung dagegen repulsiv und schiebt die η' -Masse nach oben. In den skalaren Kanälen ist die Massenaufspaltung genau umgekehrt: Das skalare Flavour-Singulett-Meson hat eine geringere Masse als die Oktett-Mesonen.

Wie in Abschnitt 3.4 im Rahmen des Zwei-Flavour-Modells diskutiert, erhält man ausgehend vom effektiven Streukern $\hat{K}$ (Gl. (5.26)) durch Iteration von Quark-Antiquark-Polarisationsgraphen eine T-Matrix, aus deren Polverhalten man Mesonenmassen und Kopplungskonstanten bestimmen kann. Dabei muß man die separable Wechselwirkung (Gl. (3.43) und Gl. (5.21)) verwenden, um die analytische Struktur einfach zu halten. Als Folge der unterschiedlichen Massen von „strange“- und „non-strange“-Quarks gibt es in realistischen Rechnungen eine Singulett-Oktett-Mischung, die ähnlich wie das „ πa_1 -mixing“ auf eine Matrix-Gleichung führt.

Wir wollen uns in dieser Arbeit darauf beschränken zu zeigen, daß die pseudoskalaren Flavour-Oktett-Mesonen tatsächlich die Goldstone-Bosonen des Modells sind. Da wir dazu am Ende den chiralen Limes ($m_u^d = m_d^d = m_s^d = 0$) betrachten, können wir direkt vom $SU(3_f)$ -symmetrischen Streukern (Gl. (5.30)) ausgehen. Im separablen

Modell lautet er:

$$\hat{K}(p_1, p_3 | p_2, p_4) = \left(\prod_{j=1}^4 f^{\frac{1}{2}}(k_j^2) \right) \sum_c G_c \hat{\Gamma}_c \otimes \hat{\Gamma}_c \quad (5.31)$$

mit

$$\begin{aligned} G_c &= G_S^{(1)} = g_S - G_D C^u & \text{für} & \quad \hat{\Gamma}_c = \hat{\Gamma}_S^{(1)} = (1 \lambda_f^0 1_c) \\ G_P^{(1)} &= g_S + G_D C^u & & \quad \hat{\Gamma}_P^{(1)} = (i\gamma_5 \lambda_f^0 1_c) \\ G_S^{(8)} &= g_S + \frac{1}{2} G_D C^u & & \quad \hat{\Gamma}_S^{(8)} = (1 \lambda_f^k 1_c), \quad k = 1, \dots, 8 \\ G_P^{(8)} &= g_S - \frac{1}{2} G_D C^u & & \quad \hat{\Gamma}_P^{(8)} = (i\gamma_5 \lambda_f^k 1_c), \quad k = 1, \dots, 8 \end{aligned} \quad (5.32)$$

und

$$C^u := (8in_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m_o^u + \mathcal{F}^u(k^2)}{k^2 - (m_o^u + \mathcal{F}^u(k^2))^2} f(k^2). \quad (5.33)$$

Die Gap-Gleichung (Gl. (5.24)) kann also im $SU(3_f)$ -symmetrischen Fall in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\mathcal{F}^a(0) = (g_S - \frac{1}{2} G_D C^u) C^u = G_P^{(8)} C^u, \quad (a = u, d, s). \quad (5.34)$$

Es erscheint auf den ersten Blick verwunderlich, daß nicht die skalare Flavour-Singulett-Kopplungskonstante $G_S^{(1)}$, sondern die pseudoskalare Flavour-Oktett-Kopplungskonstante $G_P^{(8)}$, die sich im Sechspunkt-Anteil durch einen Faktor $\frac{1}{2}$ von $G_S^{(1)}$ unterscheidet, in die Gap-Gleichung eingeht. Der Grund dafür ist aus Abb. 5.4 erkennbar: Der Graph Abb. 5.4 a), der zur „up“-Quark-Selbstenergie beiträgt, kann sowohl aus Abb. 5.4 b) durch Schließen einer „down“-Schleife als auch aus Abb. 5.4 c) durch Schließen einer „strange“-Schleife konstruiert werden. Diese Doppeltzählung wird durch den Faktor $\frac{1}{2}$ kompensiert.

Alles weitere geht völlig analog zum Zwei-Flavour-Modell. Die Massen der pseudoskalaren Mesonen ergeben sich aus den Gleichungen:

$$1 - G_P^{(1)} J_{PP}^{(1)} (m_P^{(1)})^2 = 0 \quad (5.35)$$

für den Flavour-Singulett-Fall und

$$1 - G_P^{(8)} J_{PP}^{(8)} (m_P^{(8)})^2 = 0 \quad (5.36)$$

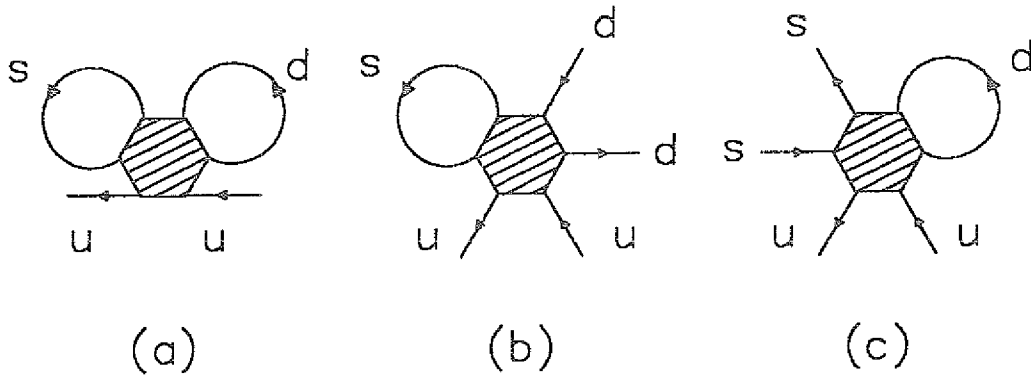


Abb. 5.4

für den Flavour-Oktett-Fall.

Dabei sind die Polarisationsfunktionen $J_{PP}^{(1)}$ und $J_{PP}^{(8)}$ definiert als

$$\begin{aligned}
 & J_{PP}^{(m)}(q^2) \\
 &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr}[i\gamma_5 \lambda_f^k 1_c S(k + \frac{q}{2}) i\gamma_5 \lambda_f^k 1_c S(k - \frac{q}{2})] f((k + \frac{q}{2})^2) f((k - \frac{q}{2})^2)
 \end{aligned} \quad (5.37)$$

mit $k = 0$ für $m = 1$ und $k \in \{1, \dots, 8\}$ für $m = 8$. Die Auswertung der Spuren ergibt:

$$\begin{aligned}
 & J_{PP}^{(1)}(q^2) = J_{PP}^{(8)}(q^2) \\
 &= (8in_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 + \frac{q^2}{4} - m_+^u m_-^u}{[(k + \frac{q}{2})^2 - m_+^u]^2 [(k - \frac{q}{2})^2 - m_-^u]^2} f((k + \frac{q}{2})^2) f((k - \frac{q}{2})^2)
 \end{aligned} \quad (5.38)$$

mit $m_{\pm}^u = m_o^u + \mathcal{F}^u((k \pm \frac{q}{2})^2)$. Für $q^2 = 0$ bekommen wir also

$$J_{PP}^{(1)}(0) = J_{PP}^{(8)}(0) = (8in_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - (m_o^u + \mathcal{F}^u(k^2))^2} f^2(k^2). \quad (5.39)$$

Folglich gilt im chiralen Limes

$$J_{PP}^{(1)}(0) = J_{PP}^{(8)}(0) = \frac{1}{\mathcal{F}^u(0)} C^u = \frac{1}{G_P^{(8)}}, \quad (5.40)$$

wobei wir im letzten Schritt die Gap-Gleichung verwendet haben. Wir erhalten also

$$1 - G_P^{(8)} J_{PP}^{(8)} = 0, \quad (5.41)$$

was nach Gl. (5.36) bedeutet, daß die pseudoskalaren Flavour-Oktett-Mesonen masselos sind. Das Goldstone-Theorem ist also erfüllt.

Für das Flavour-Singulett-Meson bekommt man dagegen

$$1 - G_P^{(1)} J_{PP}^{(1)} = \frac{G_P^{(8)} - G_P^{(1)}}{G_P^{(8)}} = -\frac{3}{2} G_D \frac{C^u}{G_P^{(8)}} \neq 0 \quad \text{für } G_D \neq 0. \quad (5.42)$$

Dieses Meson besitzt daher auch im chiralen Limes eine endliche Masse. Dabei wird noch einmal die Bedeutung der die $U(1)_A$ -Symmetrie brechenden Sechspunkt-Wechselwirkung deutlich. Im $U(3)_L \otimes U(3)_R$ -symmetrischen Fall ($G_D = 0$) wird auch das Singulett-Meson masselos.

6. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit haben wir ein relativistisches, chiral symmetrisches Quarkmodell entwickelt, in dem – anders als beispielsweise im Nambu–Jona-Lasinio-Modell (NJL-Modell) – keine freien Quarks existieren. In unserem Modell verwenden wir eine nichtlokale effektive Wechselwirkung als schematische Parametrisierung des Quark-Antiquark-Streukerns. Die Nichtlokalität kann als phänomenologische Berücksichtigung unendlich vieler elementarer Streuprozesse, etwa der Aufsummation aller Multiglunaustauschprozesse im Teilchen-Teilchen-Kanal, interpretiert werden. Die der Wechselwirkung zugrundeliegende Lagrangedichte besitzt alle globalen internen Symmetrien der QCD. Insbesondere ist sie im Grenzfall verschwindender Strommassen der Quarks chiral symmetrisch.

Ausgehend von dem nichtlokalen Streukern erzielen wir durch Lösen der Dyson-Schwinger-Gleichung und der Bethe-Salpeter-Gleichung eine konsistente Beschreibung des „gedressten“ Quark-Propagators und der Mesonen als Quark-Antiquark-Zustände. Wie im NJL-Modell ist die chirale Symmetrie spontan gebrochen. Wegen der Nichtlokalität der Wechselwirkung erhalten die Quarks in unserem Modell jedoch keine konstante Konstituentenmasse, sondern eine vom Viererimpuls abhängige Selbstenergie. Wenn wir die Wechselwirkung im Impulsraum separabel ansetzen, ergibt sich eine besonders einfache Struktur der Gleichungen. Insbesondere verhalten sich die Stärke der Wechselwirkung und die Quark-Selbstenergie proportional zueinander.

Bei einer geeigneten Parametrisierung der Wechselwirkung steigt die Selbstenergie im zeitartigen Impulsbereich so stark an, daß der Quark-Propagator polfrei ist. Das bedeutet, daß die Massenschale für die Quarks nicht definiert ist und die Quarks im Modell nur als virtuelle, nicht jedoch als freie reelle Teilchen existieren können. Die Lösung der Zweiteilchengleichung, die Quark-Antiquark-T-Matrix, besitzt dagegen durchaus Pole, so daß das Modell zu Mesonen gebundene Quark-Antiquark-Paare als reelle Teilchen zuläßt. Ein Zerfall dieser Mesonen in freie Quarks wie im NJL-Modell ist jedoch nicht mehr möglich.

Unsere Beschreibung der Mesonen ist mit dem Goldstone-Theorem konsistent: Im chiralen Limes ist das Pion masselos.

Die Ankopplung von Vektor- und Axialvektorfeldern an unser Modell erfordert etwas

mehr Aufwand. Anders als lokale Wechselwirkungen ist unsere nichtlokale Wechselwirkung zunächst nicht eichinvariant. Es war daher erforderlich, über die minimale Substitution hinauszugehen und auch in den Wechselwirkungsanteil der Lagrange-dichte Eichterme einzuführen. Dadurch treten in unserem Modell zusätzliche Diagramme auf, die der direkten Kopplung der Eichbosonen (z. B. Photonen) an den nichtlokalen starken Vertex entsprechen. Wir konnten zeigen, daß bei einer konsistenten Mitnahme dieser Graphen Ward-Takahashi-Identitäten erfüllt sind. Darüber hinaus gelten für die schwache Zerfallskonstante des Pions die Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation und eine verallgemeinerte Goldberger-Treiman-Relation.

Zuletzt haben wir diskutiert, wie das Modell auf drei Quark-Flavours erweitert werden kann. Um die im Mesonenspektrum nicht in Erscheinung tretende axiale $U(1)$ -Symmetrie zu brechen, führen wir ähnlich wie im NJL-Modell eine Sechspunktwechselwirkung ein, die wir jetzt jedoch nichtlokal ansetzen. Dadurch wird erreicht, daß nur die pseudoskalaren Flavour-Oktett-Mesonen die Goldstone-Bosonen des Modells sind.

Wegen der großen Bedeutung des Pions spielt die chirale Symmetrie in der Mittelenergiephysik eine entscheidende Rolle. Unser Modell erlaubt es nun, auch solche Prozesse in einem chiral symmetrischen Quarkmodell zu beschreiben, bei denen beispielsweise das NJL-Modell wegen der unphysikalischen Emission freier Quarks nicht mehr anwendbar ist. Insbesondere können nun auch Zerfälle und Formfaktoren der etwas schwereren Mesonen untersucht werden, ohne daß es eine Überlagerung von physikalisch möglichen mit Quark-Antiquark-Zerfallskanälen gibt.

Anhang A. Quark-Antiquark-Polarisationsfunktionen mit zwei starken Vertizes

Die in Abschnitt 3.4 eingeführten Polarisationsfunktionen mit zwei starken Vertizes sind folgendermaßen definiert:

$$J(\hat{\Gamma}_m, \hat{\Gamma}_r) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr}[\hat{\Gamma}_m S(k_+) \hat{\Gamma}_r S(k_-)] f(k_+^2) f(k_-^2) \quad , \quad (A.1)$$

Dabei sind

$$k_+ = k + \lambda q \quad (A.2)$$

und

$$k_- = k + (\lambda - 1) q \quad (A.3)$$

mit einer beliebigen Konstanten λ die Viererimpulse der beiden Quarks (s. Abb. A.1). In Gl. (3.59) haben wir den übertragenen Viererimpuls q symmetrisch auf das Quark-Antiquark-Paar aufgeteilt ($\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow k_{\pm} = k \pm \frac{q}{2}$). Wir wollen zunächst zeigen, daß $J(\hat{\Gamma}_m, \hat{\Gamma}_r)$ nicht von λ abhängt, wenn man eine Parameterintegration durchführt.

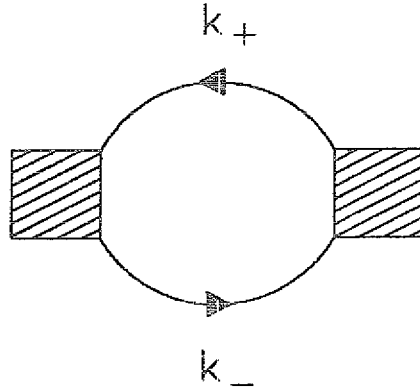


Abb. A.1: Quark-Antiquark-Polarisationsfunktion mit zwei starken Vertizes.

Im separablen Modell ist der gedresste Quark-Propagator durch Gl. (3.37) mit $\mathcal{G} = 0$ gegeben:

$$S(p) = \frac{\not{p} + (m_o + \mathcal{F}(p^2))}{p^2 - (m_o + \mathcal{F}(p^2))^2} 1_f 1_c = \frac{\not{p} + m(p^2)}{p^2 - m^2(p^2)} 1_f 1_c \quad (A.4)$$

Dabei haben wir die Abkürzung $m(p^2) = m_o + \mathcal{F}(p^2)$ eingeführt. Damit ergibt sich:

$$J(\hat{\Gamma}_m, \hat{\Gamma}_\tau) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}[\hat{\Gamma}_m (\not{k}_+ + m(k_+^2)) \hat{\Gamma}_\tau (\not{k}_- + m(k_-^2))]}{[k_+^2 - m^2(k_+^2)][k_-^2 - m^2(k_-^2)]} f(k_+^2) f(k_-^2) \quad (A.5)$$

Diesen Ausdruck formen wir unter Verwendung der Feynmanschen Parameterformel

$$\frac{1}{a b} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2} \quad (A.6)$$

weiter um. Im Nenner erhalten wir

$$\begin{aligned} & [(k_+^2 - m^2(k_+^2))x + (k_-^2 - m^2(k_-^2))(1-x)]^2 \\ &= [(k^2 - 2(1-\lambda-x)k \cdot q + ((1-\lambda-x)^2 + x(1-x))q^2 \\ &\quad - m^2(k_+^2)x - m^2(k_-^2)(1-x))]^2 \\ &= [(\ell^2 + x(1-x))q^2 - m^2(k_+^2)x - m^2(k_-^2)(1-x)]^2 \end{aligned} \quad (A.7)$$

mit

$$\ell := k - (1-\lambda-x)q \quad (A.8)$$

Mit dieser Definition bekommen wir für die Quarkimpulse k_+ und k_- :

$$\begin{aligned} k_+ &= \ell + (1-x)q =: \ell_+ \\ k_- &= \ell - xq =: \ell_- \end{aligned} \quad (A.9)$$

Wenn wir nun die Substitutionsregel anwenden und über die Variable ℓ statt über k integrieren, erhalten wir damit für die Polarisationsfunktionen:

$$\begin{aligned} & J(\hat{\Gamma}_m, \hat{\Gamma}_\tau) \\ &= i \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{\text{tr}[\hat{\Gamma}_m (\not{\ell}_+ + m(\ell_+^2)) \hat{\Gamma}_\tau (\not{\ell}_- + m(\ell_-^2))]}{[(\ell^2 + x(1-x))q^2 - m^2(\ell_+^2)x - m^2(\ell_-^2)(1-x)]^2} f(\ell_+^2) f(\ell_-^2). \end{aligned} \quad (A.10)$$

Offensichtlich hängt der Integrand nicht mehr von λ ab.

Für die Diskussion der Polstruktur ist es zweckmäßig, den Nenner auf eine Form zu bringen, die der ersten Zeile von Gl. (A.7) entspricht:

$$J(\hat{\Gamma}_m, \hat{\Gamma}_r) = i \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{\text{tr}[\hat{\Gamma}_m (\ell_+ + m(\ell_+^2)) \hat{\Gamma}_r (\ell_- + m(\ell_-^2))]}{[(\ell_+^2 - m^2(\ell_+^2))x + (\ell_-^2 - m^2(\ell_-^2))(1-x)]^2} f(\ell_+^2) f(\ell_-^2). \quad (\text{A.11})$$

Die Spur im Zähler besteht aus einem Dirac- einem Flavour- und einem Farbanteil. Die nichtverschwindenden Spuren im SU(2)-Flavour-Raum sind

$$\text{tr}[\mathbf{1}_f \mathbf{1}_f] = \text{tr}[\tau^k \tau^k] = 2 = n_f \quad (\text{A.12})$$

und im SU(3)-Farb-Raum:

$$\text{tr}[\mathbf{1}_c \mathbf{1}_c] = \frac{3}{2} \text{tr}[\lambda_c^k \lambda_c^k] = 3 = n_c. \quad (\text{A.13})$$

Nach Auswertung der Dirac-Spuren erhalten wir schließlich für die in Gl. (3.60) eingeführten skalaren Funktionen

$$\begin{aligned} J_{SS}(q^2) &= J(\mathbf{1} \mathbf{1}_f \mathbf{1}_c, \mathbf{1} \mathbf{1}_f \mathbf{1}_c) \\ J_{PP}(q^2) &= J(i\gamma_5 \mathbf{1}_f \mathbf{1}_c, i\gamma_5 \mathbf{1}_f \mathbf{1}_c) \\ J_{VV}^{(L)}(q^2) &= L_{\mu\nu} J(\gamma^\mu \mathbf{1}_f \mathbf{1}_c, \gamma^\nu \mathbf{1}_f \mathbf{1}_c) \\ J_{VV}^{(T)}(q^2) &= \frac{1}{3} T_{\mu\nu} J(\gamma^\mu \mathbf{1}_f \mathbf{1}_c, \gamma^\nu \mathbf{1}_f \mathbf{1}_c) \\ J_{AA}^{(L)}(q^2) &= L_{\mu\nu} J(\gamma^\mu \gamma_5 \mathbf{1}_f \mathbf{1}_c, \gamma^\nu \gamma_5 \mathbf{1}_f \mathbf{1}_c) \\ J_{AA}^{(T)}(q^2) &= \frac{1}{3} T_{\mu\nu} J(\gamma^\mu \gamma_5 \mathbf{1}_f \mathbf{1}_c, \gamma^\nu \gamma_5 \mathbf{1}_f \mathbf{1}_c) \\ J_{PA}(q^2) &= -i\hat{q}_\mu J(i\gamma_5 \mathbf{1}_f \mathbf{1}_c, \gamma^\mu \gamma_5 \mathbf{1}_f \mathbf{1}_c) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

das folgende Ergebnis:

$$J_i(q^2) = (4in_f n_c) \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{\Theta_i(\ell, q)}{[\ell^2 + q^2 x(1-x) - m^2(\ell_+^2)x - m^2(\ell_-^2)(1-x)]^2} \times f(\ell_+^2) f(\ell_-^2) \quad (\text{A.15})$$

mit

$$\begin{aligned}
\Theta_{SS}(q^2) &= \ell^2 + (1-2x)\ell \cdot q - x(1-x)q^2 + m(\ell_+^2)m(\ell_-^2) \\
\Theta_{PP}(q^2) &= \ell^2 + (1-2x)\ell \cdot q - x(1-x)q^2 - m(\ell_+^2)m(\ell_-^2) \\
\Theta_{VV}^{(L)}(q^2) &= -\ell^2 + 2(\ell \cdot \hat{q})^2 + (1-2x)\ell \cdot q - x(1-x)q^2 + m(\ell_+^2)m(\ell_-^2) \\
\Theta_{VV}^{(T)}(q^2) &= -\frac{1}{3}\ell^2 - \frac{2}{3}(\ell \cdot \hat{q})^2 - (1-2x)\ell \cdot q + x(1-x)q^2 + m(\ell_+^2)m(\ell_-^2) \\
\Theta_{AA}^{(L)}(q^2) &= -\ell^2 + 2(\ell \cdot \hat{q})^2 + (1-2x)\ell \cdot q - x(1-x)q^2 - m(\ell_+^2)m(\ell_-^2) \\
\Theta_{AA}^{(T)}(q^2) &= -\frac{1}{3}\ell^2 - \frac{2}{3}(\ell \cdot \hat{q})^2 - (1-2x)\ell \cdot q + x(1-x)q^2 - m(\ell_+^2)m(\ell_-^2) \\
\Theta_{PA}(q^2) &= \sqrt{q^2} \left[\frac{1}{2}(m(\ell_+^2) + m(\ell_-^2)) - \frac{m(\ell_+^2) - m(\ell_-^2)}{\sqrt{q^2}}(\ell \cdot \hat{q} + (\frac{1}{2} - x)\sqrt{q^2}) \right].
\end{aligned} \tag{A.16}$$

In Kapitel 4 benötigen wir insbesondere das Verhalten der Polarisationsfunktionen für kleine übertragene Impulse q . Unter Verwendung der Identität

$$\int d^4\ell \quad (\ell \cdot \hat{q})^2 \Phi(\ell^2) = \frac{1}{4} \int d^4\ell \quad \ell^2 \Phi(\ell^2) \tag{A.17}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
J_{SS}(0) &= (4in_f n_c) \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^2 + m^2(\ell^2)}{[\ell^2 - m^2(\ell^2)]^2} f^2(\ell^2) \\
J_{PP}(0) &= (4in_f n_c) \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2 - m^2(\ell^2)} f^2(\ell^2) \\
J_{VV}^{(L)}(0) &= (4in_f n_c) \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{-\frac{1}{2}\ell^2 + m^2(\ell^2)}{[\ell^2 - m^2(\ell^2)]^2} f^2(\ell^2) = J_{VV}^{(T)}(0) \\
J_{AA}^{(L)}(0) &= (4in_f n_c) \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{-\frac{1}{2}\ell^2 - m^2(\ell^2)}{[\ell^2 - m^2(\ell^2)]^2} f^2(\ell^2) = J_{AA}^{(T)}(0)
\end{aligned} \tag{A.18}$$

und

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{J_{PA}(q^2)}{\sqrt{q^2}} = (4in_f n_c) \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{m(\ell^2) - \frac{1}{2}\ell^2 \mathcal{F}'(\ell^2)}{[\ell^2 - m^2(\ell^2)]^2} f^2(\ell^2) \tag{A.19}$$

mit

$$\mathcal{F}'(\ell^2) = \frac{d\mathcal{F}}{d\ell^2}(\ell^2) \tag{A.20}$$

Die Ableitung von J_{PP} an der Stelle $q^2 = 0$ bekommt man, indem man den Integranden in eine Taylorreihe bis zur Ordnung q^2 entwickelt. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{PP}}{dq^2}(0) &= \frac{1}{\mathcal{F}(0)^2} (4in_f n_c) \\ &\times \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\frac{2}{3} \mathcal{F}(\ell^2) \mathcal{F}'(\ell^2) + \frac{1}{3} \ell^2 \mathcal{F}(\ell^2) \mathcal{F}''(\ell^2) - \frac{1}{6} \ell^2 \mathcal{F}'^2(\ell^2)}{\ell^2 - m^2(\ell^2)} \right. \\ &\quad + \frac{-\frac{1}{2} \mathcal{F}^2(\ell^2) + \frac{1}{6} \ell^2 \mathcal{F}(\ell^2) \mathcal{F}'(\ell^2) + \frac{1}{6} \ell^2 \mathcal{F}^2(\ell^2) \mathcal{F}'^2(\ell^2)}{[\ell^2 - m^2(\ell^2)]^2} \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} m_o \frac{\ell^2 \mathcal{F}(\ell^2) \mathcal{F}'^2(\ell^2)}{[\ell^2 - m^2(\ell^2)]^2} \right\} \end{aligned} \quad (A.21)$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Polarisationsfunktion $J_{VV}^{(L)}$ im nichtlokalen Modell – anders als beispielsweise im NJL-Modell – im allgemeinen nicht verschwindet. Wir beschränken uns auf den Fall $q^2 = 0$.

Unter Anwendung der Vorschrift Gl. (3.8) erhält man für den in Gl. (A.18) gegebenen Ausdruck:

$$\begin{aligned} J_{VV}^{(L)}(0) &= (-4n_f n_c) \int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2} \ell_E^2 + m^2(-\ell_E^2)}{[\ell_E^2 + m^2(-\ell_E^2)]^2} f^2(-\ell_E^2) \\ &= \frac{1}{\mathcal{F}^2(0)} (-4n_f n_c) \int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\mathcal{F}^2(-\ell_E^2)}{\ell_E^2 + m^2(-\ell_E^2)} - \frac{1}{2} \frac{\ell_E^2 \mathcal{F}^2(-\ell_E^2)}{[\ell_E^2 + m^2(-\ell_E^2)]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (A.22)$$

Der Integrand ist sphärisch symmetrisch, und wir können die Winkelintegration ausführen. Dadurch bekommen wir einen Faktor $\Omega_4 = (2\pi^2)$. Substituieren wir $z = \ell_E^2$, ergibt sich:

$$\begin{aligned} J_{VV}^{(L)}(0) &= \frac{1}{\mathcal{F}^2(0)} (-4n_f n_c) \frac{\Omega_4}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \int dz \left\{ \frac{\mathcal{F}^2(-z)}{z + m^2(-z)} z - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{F}^2(-z)}{[z + m^2(-z)]^2} z^2 \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\mathcal{F}^2(0)} (-4n_f n_c) \frac{\Omega_4}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \int dz \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mathcal{F}^2(-z)}{z + m^2(-z)} \frac{d}{dz} z^2 - \frac{\mathcal{F}^2(-z)}{[z + m^2(-z)]^2} z^2 \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\mathcal{F}^2(0)} (-4n_f n_c) \frac{\Omega_4}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \int dz \left(-\frac{1}{2} z^2 \right) \left\{ \frac{d}{dz} \frac{\mathcal{F}^2(-z)}{z + m^2(-z)} + \frac{\mathcal{F}^2(-z)}{[z + m^2(-z)]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (A.23)$$

Im letzten Schritt haben wir partiell integriert und angenommen, daß der Integrand für große z verschwindet, so daß keine Oberflächenterme auftreten.

Wir können nun die Ableitung ausrechnen, eine Resubstitution zur Integrationsvariablen ℓ_E durchführen und schließlich den Faktor Ω_4 wieder durch eine Winkelintegration ersetzen. Das Endergebnis lautet:

$$\begin{aligned} J_{VV}^{(L)}(0) &= (-4n_f n_c) \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \left(-\frac{1}{2} \ell_E^2\right) \frac{\ell_E^2 + m_o m(-\ell_E^2)}{[\ell_E^2 + m^2(-\ell_E^2)]^2} \left(\frac{d}{d\ell_E^2} f^2(-\ell_E^2)\right) \\ &= (4i n_f n_c) \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{2} \ell^2\right) \frac{\ell^2 - m_o m(\ell^2)}{[\ell^2 - m^2(\ell^2)]^2} \left(\frac{d}{d\ell^2} f^2(\ell^2)\right). \end{aligned} \quad (A.24)$$

Im lokalen Limes $f = \text{const.}$ verschwindet die Ableitung und $J_{VV}^{(L)}(0)$ ist gleich null. Im allgemeinen ergibt sich jedoch ein nichtverschwindendes Ergebnis. Die Eichinvarianz bleibt davon, wie in Kapitel 4 gezeigt wird, unberührt.

Auf ähnliche Weise kann man die Ableitung $\frac{dJ_{PP}}{dq^2}(0)$ im chiralen Limes auf eine Form bringen, die in Anhang B benötigt wird:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{PP}}{dq^2}(0) &= (4i n_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\mathcal{F}(k^2) - \frac{1}{2} k^2 \mathcal{F}'(k^2)}{[k^2 - \mathcal{F}^2(k^2)]^2} f(k^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k^2 - \mathcal{F}^2(k^2)} f(k^2) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{1}{2} k^2 \frac{\mathcal{F}'^2(k^2)}{\mathcal{F}(k^2)} - \mathcal{F}'(k^2) - \frac{1}{2} k^2 \mathcal{F}''(k^2) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (A.25)$$

Anhang B. Quark-Antiquark-Polarisationsfunktionen mit einem starken und einem schwachen Vertex

In diesem Anhang wollen wir das Verhalten der in Gl. (4.67) eingeführten skalaren-Polarisationsfunktionen mit einem starken und einem schwachen Vertex,

$$\tilde{J}_{PA}(q^2) = -2i\hat{q}_\mu \tilde{J}(i\gamma_5 \tau^n \mathbf{1}_c, \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} + \Lambda_5^{(\sigma)\mu n}) \quad (B.1)$$

und

$$\tilde{J}_{AA}^{(L)}(q^2) = 2\hat{q}_\mu \hat{q}_\nu \tilde{J}(\gamma^\mu \gamma_5 \tau^n \mathbf{1}_c, \gamma^\nu \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} + \Lambda_5^{(\sigma)\nu n}), \quad (B.2)$$

im Limes $m_o = 0$ und $q^2 \rightarrow 0$ diskutieren. Dabei wollen wir insbesondere Gl. (4.69) herleiten.

Die Funktion $\tilde{J}(\hat{\Gamma}_m, \hat{\Gamma}_n)$ wurde in Gl. (4.66) definiert:

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\hat{\Gamma}_m, \hat{\Gamma}_n) &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr}[\hat{\Gamma}_m(k - \frac{q}{2}, k + \frac{q}{2}) S(k + \frac{q}{2}) \hat{\Gamma}_n(k + \frac{q}{2}, k - \frac{q}{2}) S(k - \frac{q}{2})] \\ &\quad \times f^{\frac{1}{2}}((k + \frac{q}{2})^2) f^{\frac{1}{2}}((k - \frac{q}{2})^2). \end{aligned} \quad (B.3)$$

Die Auswertung von Gl. (4.58) für das separable Modell (Wechselwirkung Gl. (3.43), Quarkpropagator Gl. (3.37) mit $\mathcal{G} = 0$) ergibt:

$$\begin{aligned} & q_\nu \Lambda_5^{(\sigma)\nu n}(k + \frac{q}{2}, k - \frac{q}{2}) \\ &= [-(\mathcal{F}((k + \frac{q}{2})^2) + \mathcal{F}((k - \frac{q}{2})^2)) \\ &\quad + g_S (4i n_f n_c) f^{\frac{1}{2}}((k + \frac{q}{2})^2) f^{\frac{1}{2}}((k - \frac{q}{2})^2) \\ &\quad \times \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{m_o + \mathcal{F}(p'^2)}{p'^2 - (m_o + \mathcal{F}(p'^2))^2} f^{\frac{1}{2}}(p'^2) (f^{\frac{1}{2}}((p' + q)^2) + f^{\frac{1}{2}}((p' - q)^2)) \\ &\quad - g_V (4i n_f n_c) f^{\frac{1}{2}}((k + \frac{q}{2})^2) f^{\frac{1}{2}}((k - \frac{q}{2})^2) \\ &\quad \times \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{\not{p}'}{p'^2 - (m_o + \mathcal{F}(p'^2))^2} f^{\frac{1}{2}}(p'^2) (f^{\frac{1}{2}}((p' + q)^2) + f^{\frac{1}{2}}((p' - q)^2))] \\ &\quad \times \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} \end{aligned} \quad (B.4)$$

Nun entwickeln wir die rechte Seite bis zur zweiten Ordnung nach dem übertragenen

Viererimpuls q . Unter Verwendung der Gap-Gleichung (Gl. (3.45)) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& q_\nu \Lambda_5^{(\sigma)\nu n} \left(k + \frac{q}{2}, k - \frac{q}{2} \right) \\
&= \left[- \frac{\mathcal{F}'^2(k^2)}{\mathcal{F}(k^2)} (k \cdot q)^2 \right. \\
&\quad + g_S f(k^2) (4in_f n_c) \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{m_o + \mathcal{F}(p'^2)}{p'^2 - (m_o + \mathcal{F}(p'^2))^2} \\
&\quad \times \left(f'(p'^2) + \frac{1}{2} p'^2 f''(p'^2) - \frac{1}{4} p'^2 \frac{f'^2(p'^2)}{f(p'^2)} \right) q^2 \\
&\quad - g_V f(k^2) J_1 \not{q} \\
&\quad \left. + \mathcal{O}(q^3) \right] \gamma_5 \frac{\tau^n}{2} \quad (B.5)
\end{aligned}$$

mit

$$J_1 = (4in_f n_c) \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2} p'^2}{p'^2 - \mathcal{F}^2(p'^2)} f'(p'^2) \quad (B.6)$$

und

$$f'(p'^2) = \frac{df}{dp'^2}(p'^2) \quad (B.7)$$

Wenn wir Gl. (B.5) in Gl. (B.1) einsetzen, finden wir im chiralen Limes:

$$\begin{aligned}
& \tilde{J}_{PA}(q^2) \\
&= \sqrt{q^2} (4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\mathcal{F}(k^2) - \frac{1}{2} k^2 \mathcal{F}'(k^2)}{[k^2 - \mathcal{F}^2(k^2)]^2} f(k^2) (1 - g_V f(k^2) J_1) \right. \\
&\quad + \frac{1}{k^2 - \mathcal{F}^2(k^2)} f(k^2) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{2} k^2 \frac{\mathcal{F}'^2(k^2)}{\mathcal{F}(k^2)} - \mathcal{F}'(k^2) - \frac{1}{2} k^2 \mathcal{F}''(k^2) \right) \left. \right\} \\
&\quad + \text{höhere Ordnungen.} \quad (B.8)
\end{aligned}$$

Ein Vergleich mit Gl. (A.19) (im chiralen Limes) und Gl. (A.25) ergibt schließlich:

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{\tilde{J}_{PA}(q^2)}{\sqrt{q^2}} = -2\mathcal{F}(0) \frac{dJ_{PP}}{dq^2}(0) - g_V \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{J_{PA}(q^2)}{\sqrt{q^2}} J_1. \quad (B.9)$$

Das ist die erste der beiden zu zeigenden Beziehungen von Gl. (4.69).

Analog bekommen wir, wenn wir Gl. (B.5) in Gl. (B.2) einsetzen, im chiralen Limes:

$$\begin{aligned} j_{AA}^{(L)}(0) &= (4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-\frac{1}{2} k^2 - \mathcal{F}^2(k^2)}{[k^2 - \mathcal{F}^2(k^2)]^2} f(k^2) (1 - g_V f(k^2) J_1) \\ &= (4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-\frac{1}{2} k^2 - \mathcal{F}^2(k^2)}{[k^2 - \mathcal{F}^2(k^2)]^2} f(k^2) - g_V j_{AA}^{(L)}(0) J_1 \end{aligned} \quad (B.10)$$

Im zweiten Schritt haben wir Gl. (A.18) verwendet.

Um die zweite Relation von Gl. (4.69) zu beweisen, bleibt also noch zu zeigen, daß gilt:

$$(4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-\frac{1}{2} k^2 - \mathcal{F}^2(k^2)}{[k^2 - \mathcal{F}^2(k^2)]^2} f(k^2) = J_1 - 2\mathcal{F}(0) \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{J_{PA}(q^2)}{\sqrt{q^2}} \quad (B.11)$$

Dazu gehen wir ähnlich vor wie am Ende von Anhang A:

$$\begin{aligned} J_1 &= (4n_f n_c) \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2} k_E^2}{k_E^2 + \mathcal{F}^2(-k_E^2)} \frac{d}{dk_E^2} f(-k_E^2) \\ &= (4n_f n_c) \frac{\Omega_4}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \int z dz \frac{\frac{1}{2} z}{z + \mathcal{F}^2(-z)} \frac{d}{dz} f(-z) \\ &= (4n_f n_c) \frac{\Omega_4}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \int z dz \frac{-\frac{1}{2} z - \mathcal{F}^2(-z) + z \mathcal{F}(-z) \frac{d}{dz} \mathcal{F}(-z)}{[z + \mathcal{F}^2(-z)]^2} f(-z) \\ &= (4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-\frac{1}{2} k^2 + \mathcal{F}^2(k^2) - k^2 \mathcal{F}(k^2) \mathcal{F}'(k^2)}{[k^2 - \mathcal{F}^2(k^2)]^2} f(k^2) \end{aligned} \quad (B.12)$$

Die vorletzte Zeile erhält man durch partielle Integration unter der Annahme, daß die Oberflächenterme verschwinden.

Ein Vergleich mit Gl. (A.19) ergibt

$$J_1 = (4in_f n_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-\frac{1}{2} k^2 - \mathcal{F}^2(k^2)}{[k^2 - \mathcal{F}^2(k^2)]^2} f(k^2) + 2\mathcal{F}(0) \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{J_{PA}(q^2)}{\sqrt{q^2}} \quad (B.13)$$

Damit folgt schließlich aus Gl. (B.10) die zu beweisende Relation:

$$\tilde{j}_{AA}^{(L)}(0) = (1 - g_V j_{AA}^{(L)}(0)) J_1 - 2\mathcal{F}(0) \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{J_{PA}(q^2)}{\sqrt{q^2}} \quad (B.14)$$

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc. Jap. **17** (1935) 48
- [2] C. M. G. Lattes, H. Muirhead, C. F. Powell und G. P. Occhialini, Nature **159** (1947) 694
- [3] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8** (1964) 214
- [4] G. Zweig, CERN preprint (1964)
- [5] Y. Ne'eman, Nucl. Phys. **26** (1961) 222
- [6] M. Gell-Mann, Phys. Rev. **125** (1962) 1067
- [7] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 598
- [8] M. Y. Han und Y. Nambu, Phys. Rev. **139B** (1965) 1006
- [9] W. Panofski, Proc. 14th Int. Conf. on High Energy Physics, Wien, 1968
- [10] J. D. Bjorken, Phys. Rev. **179** (1969) 1547
- [11] H. Fritzsch, M. Gell-Mann und H. Leutwyler, Phys. Lett. **47B** (1973) 365
- [12] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **31** (1973) 494
- [13] D. Gross und F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343
- [14] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346
- [15] H. D. Politzer, Phys. Rep. **14C** (1974) 129
- [16] R. P. Feynman und M. Gell-Mann, Phys. Rev. **109** (1958) 193
- [17] Y. Nambu, Phys. Rev. Lett. **4** (1960) 380
- [18] K.-C. Chou, Soviet Phys. JETP **12** (1961) 492
- [19] M. Gell-Mann und M. Lévi, Nuovo Cimento **16** (1960) 705
- [20] M. L. Goldberger und S. B. Treiman, Phys. Rev. **110** (1958) 1178

- [21] J. Goldstone, *Nuovo Cimento* **19** (1961) 154
- [22] J. Goldstone, A. Salam und S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127** (1962) 965
- [23] J. B. Kogut, *Phys. Rep.* **67** (1980) 67
- [24] C. Rebbi, *Phys. Rep.* **137** (1986) 63
- [25] Y. Nambu und G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122** (1961) 345
- [26] Y. Nambu und G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **124** (1961) 246
- [27] P. N. Bogoliubov, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **8** (1967) 167
- [28] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn und V. F. Keisskopf, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 3471
- [29] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson und C. B. Thorn, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 2599
- [30] T. DeGrand, R. L. Jaffe, K. Johnson und J. Kiskis, *Phys. Rev.* **D12** (1975) 2060
- [31] A. Chodos und C. B. Thorn, *Phys. Rev.* **D12** (1975) 2733
- [32] G. E. Brown und M. Rho, *Phys. Lett.* **B82** (1979) 177 G. E. Brown und M. Rho, *Phys. Lett.* **B82** (1979) 177
- [33] G. A. Miller, A. W. Thomas und S. Th  berge, *Phys. Lett.* **B91** (1980) 192
- [34] J.D. Bjorken und S.D. Drell, *Relativistische Quantenmechanik*, BI, Mannheim 1966
- [35] J. Bardeen, L. N. Cooper und J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **106** (1957) 162
- [36] A. B. Migdal, *Theory of Finite Fermi Systems*, Interscience Publ., New York, 1967
- [37] M. Gell-Mann, R. J. Oakes und B. Renner, *Phys. Rev.* **175** (1968) 2195
- [38] G. t'Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 8

- [39] G. t'Hooft, Phys. Rev. **D14** (1976) 3432
- [40] T.-P. Cheng und L.-F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, Oxford, 1984
- [41] S. P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. **64** (1992) 649
- [42] W. Pauli und F. Villars, Rev. Mod. Phys. **21** (1949) 434
- [43] J. Schwinger, Phys. Rev. **82** (1951) 644
- [44] G. t'Hooft und M. Veltman, Nucl. Phys. **B44** (1972) 189
- [45] G. t'Hooft, Nucl. Phys. **B62** (1973) 444
- [46] V. Bernard und U.-G. Meissner, Nucl. Phys. **A489** (1988) 647
- [47] D. Flamm und F. Schöberl, Introduction to the quark model of elementary particles, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1982
- [48] E.S. Abers und B.W. Lee, Phys. Rep. **9C** (1973) 1
- [49] T. D. Lee und C. N. Yang, Phys. Rev. **128** (1962) 885
- [50] S.J. Stainsby und R.T. Cahill, Phys. Lett. **A146** (1990) 467
- [51] J. B. Hartle und S. W. Hawking, Phys. Rev. **D28** (1983) 2960
- [52] M. Buballa und S. Krewald, Phys. Lett. **B294** (1992) 19
- [53] J.W. Bos, J.H. Koch und H.W.L. Naus, Phys. Rev. **C44** (1991) 485
- [54] S. Klimt, M. Lutz, U. Vogl, und W. Weise, Nucl. Phys. **A516** (1990) 429
- [55] S. Krewald, private Mitteilung
- [56] S. Kopp, private Mitteilung
- [57] S. Krewald, K. Nakayama und J. Speth, Phys. Lett. **B272** (1991) 190
- [58] R. H. Lemmer, private Mitteilung

- [59] L. H. Ryder, Quantum Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1985
- [60] Y. Takahashi, Nuovo Cimento **6** (1957) 370
- [61] J. C. Ward, Phys. Rev. **78** (1950) 1824
- [62] V. Bernard, R. L. Jaffe und U. G. Meißner, Nucl. Phys. **B308** (1988) 753
- [63] U. Vogl, M. Lutz, S. Klimt, und W. Weise, Nucl. Phys. **A516** (1990) 469

Danksagung

Diese Arbeit entstand am Institut für Kernphysik des Forschungszentrums Jülich. Von Juli bis Dezember 1991 wurde ich auch vom Graduiertenkolleg „Die Erforschung subnuklearer Strukturen der Materie“ an der Universität Bonn finanziell unterstützt. An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

Bei Herrn Prof. Dr. J. Speth bedanke ich mich für sein Interesse an meiner Arbeit und seine Unterstützung und Förderung, die nicht allein auf mein eigentliches Thema begrenzt war, sondern mir darüber hinaus eine Erweiterung meines physikalischen Horizontes ermöglicht hat.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. S. Krewald. Ohne seinen Mut, mir ein Thema außerhalb des altbewährten Terrains anzuvertrauen, sowie die Vielzahl seiner Ideen wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen. Dabei war er ständig dazu bereit, über alle auftretenden Fragen und Probleme zu diskutieren, gab mir jedoch andererseits auch stets die nötige Zeit, eigenen Gedanken nachzugehen.

Ich möchte mich auch bei Herrn Prof. Dr. R. Lemmer und Herrn Dr. M. Takizawa bedanken, von denen ich viel über das Nambu–Jona-Lasinio-Modell gelernt habe.

Bei Monika Hoffmann und Sabine Kopp bedanke ich mich für einige nützliche Informationen zum Pfadintegralformalismus.

Ich bedanke mich bei Frau U. Burck für die ständige freundliche Hilfsbereitschaft in allen Verwaltungsangelegenheiten.

Allen Institutsangehörigen danke ich für die angenehme Atmosphäre im IKP.

Zuletzt bedanke ich mich bei meinen Eltern für die ideelle und materielle Unterstützung meines gesamten Studiums.

Handwritten text at the top of the page, possibly a title or header.

Handwritten text in the middle of the page.

Handwritten text on the right side of the page.

Handwritten text at the bottom of the page, possibly a conclusion or footer.

Jül-2788

Juni 1993

ISSN 0944-2952