

Institute for Advanced Simulation (IAS)  
Jülich Supercomputing Centre (JSC)

# Numerische Berechnung von elastischen Streuproblemen in 2D

Ann-Cathrin Weger

**Jül-4413**





Institute for Advanced Simulation (IAS)  
Jülich Supercomputing Centre (JSC)

# **Numerische Berechnung von elastischen Streuproblemen in 2D**

Ann-Cathrin Weger

Berichte des Forschungszentrums Jülich  
Jül-4413 · ISSN 0944-2952  
Institute for Advanced Simulation (IAS)  
Jülich Supercomputing Centre (JSC)

(Master, FH Aachen, Campus Jülich, 2018)

Vollständig frei verfügbar über das Publikations-  
portal des Forschungszentrums Jülich (JuSER)  
unter [www.fz-juelich.de/zb/openaccess](http://www.fz-juelich.de/zb/openaccess)

Forschungszentrum Jülich GmbH · 52425 Jülich  
Zentralbibliothek, Verlag  
Tel.: 02461 61-5220 · Fax: 02461 61-6103  
[zb-publikation@fz-juelich.de](mailto:zb-publikation@fz-juelich.de)  
[www.fz-juelich.de/zb](http://www.fz-juelich.de/zb)

This is an Open Access publication distributed under the  
terms of the [Creative Commons Attribution License 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/),  
which permits unrestricted use, distribution, and



reproduction in any medium, provided the  
original work is properly cited.

## Zusammenfassung

Die Masterarbeit befasst sich mit der numerischen Berechnung von elastischen Streuproblemen in  $2D$  mit der Randintegralgleichungsmethode. Elastische Streuprobleme spielen beispielsweise bei der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung eine wichtige Rolle, da sie zur Untersuchung der inneren Beschaffenheit eines Objektes von Nutzen sind. Dabei können anhand des am Objekt gestreuten Feldes von elastischen Wellen Rückschlüsse auf die Beschaffenheit des Objektes gezogen werden.

In der Arbeit wird zunächst die Randintegralgleichungsmethode mit den entstehenden Randintegralgleichungen und Operatoren beschrieben. Im Anschluss daran wird die Diskretisierung der Operatoren erläutert und der Integralalgorithmus von Beyn vorgestellt.

Den Hauptteil der Arbeit bildet die Bestimmung der Randintegraloperatoren für den statischen und dynamischen Fall mit besonderer Behandlung der Diagonalelemente und ihrer Singularitäten. In diesem Zusammenhang wird eine Singularitäten-Subtraktion durchgeführt und verschiedene Integrale werden als *Cauchyscher Hauptwert* oder *Hadamard finite part integral* bestimmt.

Die in MATLAB implementierten Operatoren werden für verschiedene Punkte im betrachteten Gebiet getestet und auf Konvergenz untersucht. Außerdem erfolgt eine Anwendung der Operatoren bei der Bestimmung der Eigenwerte von elastischen Streuproblemen bzw. Transmissionsproblemen mithilfe des Integralalgorithmus von Beyn.

The master thesis deals with the numerical calculation of elastic scattering problems in  $2D$  using the boundary integral equation method. Elastic scattering problems, for example, play an important role in nondestructive material testing because they are useful for studying the internal structure of an object. The field of elastic waves scattered on the object can be used to draw conclusions about the condition of the object.

In this thesis the boundary integral equation method with the resulting boundary integral equations and operators is described. Afterwards the discretization of the operators is explained and the integral algorithm of Beyn is introduced.

The main part of the thesis is the calculation of the boundary integral operators for the static and dynamic case with special treatment of the diagonal element and their singularities. In this context, a singularity subtraction is performed and various integrals are determined as *Cauchy principle value* or *Hadamard finite part integral*.

The operators implemented in MATLAB are tested for various points in the considered domain and examined for convergence. In addition, the operators are used to determine the eigenvalues of elastic scattering problems or transmission problems using Beyn's integral algorithm.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1	Randintegralgleichungsmethode . . . . .	5
2.2	Diskretisierung . . . . .	8
2.3	Integralalgorithmus von Beyn . . . . .	12
2.3.1	Lösungsansatz zur Lösung des nichtlinearen Eigenwertproblems	14
2.3.2	Der Algorithmus . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Randintegraloperatoren</b>	<b>21</b>
3.1	Statischer Fall . . . . .	21
3.1.1	Einfachschichtpotential . . . . .	21
3.1.2	Doppelschichtpotential . . . . .	24
3.1.3	Traktion des Einfachschichtpotentials . . . . .	35
3.1.4	Traktion des Doppelschichtpotentials . . . . .	39
3.2	Dynamischer Fall . . . . .	49
3.2.1	Einfachschichtpotential . . . . .	51
3.2.2	Doppelschichtpotential . . . . .	60
3.2.3	Traktion des Einfachschichtpotentials . . . . .	71
3.2.4	Traktion des Doppelschichtpotentials . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Numerische Tests</b>	<b>97</b>
4.1	Statischer Fall . . . . .	98
4.2	Dynamischer Fall . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Eigenwertprobleme als Anwendung</b>	<b>105</b>
5.1	Beispiele für nichtlineare Eigenwertprobleme . . . . .	105
5.2	Transmissionsproblem . . . . .	111
<b>6</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>115</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>118</b>



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Die einfallende Welle trifft auf das Objekt $\Omega$ und es entsteht das gestreute Feld $u$ aus Longitudinal- und Transversalwellen. . . . .	1
1.2	Links dargestellt: Exemplarisches Gebiet für ein Innenraumproblem. Rechts dargestellt: Exemplarisches Gebiet für ein Außenraumproblem.	2



# Tabellenverzeichnis

4.1	Für den Testfall (A) berechnete Lösung $u_n$ im Punkt $(5, 5)^\top$ sowie die entsprechenden absoluten Fehler und die Konvergenzordnung. . . . .	99
4.2	Für den Testfall (B) im Punkt $(-2.5, -2.5)^\top$ berechnete Lösung $u_n$ unter Verwendung des statischen Doppelschichtpotentials sowie die dazugehörigen absoluten Fehler und die Konvergenzordnung. . . . .	100
4.3	Für den Testfall (C) berechnete Lösung $u_n$ im Punkt $(5, 5)^\top$ sowie die entsprechenden absoluten Fehler und Konvergenzordnungen. . . . .	101
4.4	Die für den Testfall (A) berechnete Lösung $u_n$ , die dazugehörigen absoluten Fehler und die Konvergenzordnung. . . . .	102
4.5	Die berechnete Lösung $u_n$ im Punkt $(-2.5, -2.5)^\top$ für den Testfall (B) sowie die dazugehörigen absoluten Fehler und Konvergenzordnungen. . . . .	103
4.6	Für den Testfall (C) berechnete Lösung $u_n$ im Punkt $(5, 5)^\top$ unter Verwendung der Traktion des dynamischen Einfachschichtpotentials sowie die dazugehörigen absoluten Fehler und Konvergenzordnungen. . . . .	104
5.1	Nichtlinearer Eigenwert des mit dem dynamischen Einfachschichtpotential gelösten Streuproblems, die dazugehörigen relativen Fehler und Konvergenzordnungen für den Parameter $\sigma = 1$ . . . . .	106
5.2	Nichtlinearer Eigenwert des mit dem dynamischen Einfachschichtpotential gelösten Streuproblems sowie die entsprechenden relativen Fehler und Konvergenzordnungen für den Parameter $\sigma = 4$ . . . . .	106
5.3	Nichtlinearer Eigenwert des mit dem dynamischen Doppelschichtpotential gelösten Streuproblems, die dazugehörigen relativen Fehler und Konvergenzordnungen für den Parameter $\sigma = 1$ . . . . .	107
5.4	Nichtlinearer Eigenwert des mit dem dynamischen Doppelschichtpotential gelösten Streuproblems, die dazugehörigen relativen Fehler und Konvergenzordnungen für den Parameter $\sigma = 4$ . . . . .	108
5.5	Die ersten 5 reellen Eigenwerte des elastischen Streuproblems aus Navier-Gleichung und Dirichlet-Randbedingung unter Verwendung des dynamischen Einfach- bzw. Doppelschichtpotentials mit den Parametern $\sigma = 1$ sowie $\sigma = 4$ . . . . .	108
5.6	Nichtlinearer Eigenwert des mit der Traktion des dynamischen Einfachschichtpotentials gelösten Streuproblems, die dazugehörigen relativen Fehler und Konvergenzordnungen für den Parameter $\sigma = 1$ . . . . .	110

5.7	Nichtlinearer Eigenwert des mit der Traktion des dynamischen Einfachschichtpotentials gelösten Streuproblems sowie die entsprechenden relativen Fehler und Konvergenzordnungen für den Parameter $\sigma = 4$ .	111
5.8	Die ersten 5 reellen Eigenwerte des elastischen Streuproblems unter Verwendung der Traktion des dynamischen Einfachschichtpotentials mit den Parameter $\sigma = 1$ bzw. $\sigma = 4$ .	111
5.9	Reeller Eigenwert des Transmissionsproblems für den Parameter $\sigma = 4$ unter Verwendung des Einheitskreises als Streuobjekt.	112
5.10	Die ersten 5 reellen Eigenwerte des Transmissionsproblems für den Parameter $\sigma = 4$ unter Verwendung des Einheitskreises als Streuobjekt.	113
5.11	Die ersten 5 reellen Eigenwerte des Transmissionsproblems für den Parameter $\sigma = 4$ unter Verwendung einer Ellipse mit den Parameter $a = 1$ und $b = 0.8$ als Streuobjekt.	113

# 1 Einleitung

Das Ziel der Werkstoffprüfung ist es, die innere Beschaffenheit eines Werkstoffes zerstörungsfrei zu untersuchen. Dazu wird der Aspekt ausgenutzt, dass auf ein Objekt treffende Wellen gestreut werden (siehe Abbildung 1.1), wodurch Rückschlüsse auf die Beschaffenheit des Objektes gezogen werden können. Werden zeitharmonische, elastische Wellen zur Untersuchung verwendet, handelt es sich um das in dieser Arbeit thematisierte elastische Streuproblem in  $2D$ .

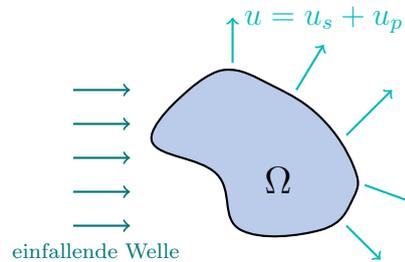


Abbildung 1.1: Die einfallende Welle trifft auf das Objekt  $\Omega$  und es entsteht das gestreute Feld  $u$  aus Longitudinal- und Transversalwellen.

Das gestreute Feld  $u$  von zeitharmonischen, elastischen Wellen ist eine Überlagerung von Longitudinal-  $u_p$  und Transversalwellen  $u_s$

$$u_p = -\frac{1}{k_p^2} \text{grad div } u \quad \text{und} \quad u_s = u - u_p ,$$

mit den dazugehörigen Wellenzahlen

$$k_p^2 = \frac{\omega^2}{\lambda + 2\mu} \quad \text{und} \quad k_s^2 = \frac{\omega^2}{\mu} .$$

Dabei sind  $\mu$  und  $\lambda$  die Lamé-Konstanten, die die Elastizität eines Materials beschreiben und den Bedingungen

$$\lambda > -\mu \quad \text{und} \quad \mu > 0$$

genügen. Der Parameter  $\omega$  steht für die Frequenz der Welle.

Ein solches gestreutes Feld ist Lösung des elastischen Streuproblems, das aus der Navier-Gleichung

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \text{grad div } u + \omega^2 \sigma u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

und den entsprechenden Randbedingungen besteht. Der Parameter  $\sigma$  beschreibt hierbei die Dichte des Objekts. Es wird sowohl der statische ( $\omega = 0$ ) als auch der dynamische Fall ( $\omega \neq 0$ ) betrachtet. Das Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ist ein offenes, zusammenhängendes Gebiet mit dem Rand  $\partial\Omega \in C^2$ . Dabei lässt sich zwischen einem Innen- und einem Außenraumproblem unterscheiden (siehe Abbildung [1.2](#)).

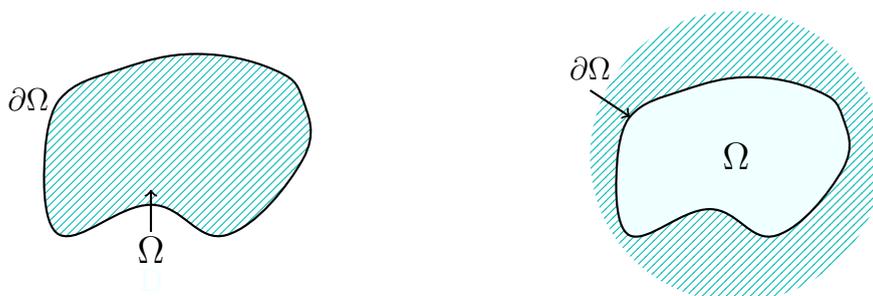


Abbildung 1.2: Links dargestellt: Exemplarisches Gebiet für ein Innenraumproblem. Rechts dargestellt: Exemplarisches Gebiet für ein Außenraumproblem.

Ist das Gebiet  $\Omega$  unbeschränkt (Außenraumproblem), so muss das gestreute Feld zusätzlich die Kupradze Ausstrahlungsbedingungen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u_p}{\partial r} - ik_p u_p \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u_s}{\partial r} - ik_s u_s \right) = 0, \quad r = |x|$$

erfüllen. Die Bedingungen können als Randbedingungen im Unendlichen interpretiert werden und sichern die Eindeutigkeit der Lösung [5](#).

Als Randbedingung des elastischen Streuproblems wird zum einen

$$u = f \quad \text{auf } \partial\Omega$$

und zum anderen die Randbedingung

$$T(u) = g \quad \text{auf } \partial\Omega$$

mit dem Traktionsoperator

$$T(z) = \lambda \operatorname{div}(z) \nu + 2\mu (\nu^\top \operatorname{grad}) z + \mu \operatorname{div}(Qz) Q\nu$$

gewählt. Hierbei ist  $\nu$  der normierte, nach außen gerichtete Normalenvektor auf  $\partial\Omega$  und  $Q$  die Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

Für die Lösung des elastischen Streuproblems wird in dieser Arbeit die Randintegralgleichungsmethode verwendet, bei der das Randwertproblem, unter Verwendung der jeweiligen Fundamentallösung, auf eine Randintegralgleichung zurückgeführt wird. Die Methode reduziert somit das ursprüngliche  $2D$ -Problem auf den Rand und damit auf ein  $1D$ -Problem. Daher muss lediglich der Rand diskretisiert werden, während bei der Finite Elemente Methode eine Diskretisierung des gesamten Gebietes nötig ist. Durch diese Reduzierung ist es außerdem einfach möglich unbeschränkte, beliebig geformte (solange  $\partial\Omega \in C^2$  gilt) Gebiete zu betrachten. Auch dies stellt einen wesentlichen Vorteil gegenüber den Finiten Differenzen und der Finite Elemente Methode dar.

In dieser Arbeit wird, neben der numerischen Berechnung von elastischen Streuproblemen, die Anwendung der Randintegralgleichungsmethode bei der Bestimmung von inneren, elastischen Transmissionseigenwerten beschrieben. Innere Transmissionseigenwerte können dazu genutzt werden, die Integrität (Unversehrtheit) eines homogenen Materials zu prüfen. Die numerische Berechnung dieser Eigenwerte ist allerdings schwierig, da das Problem weder elliptisch noch selbstadjungiert ist (vgl. [10]). Für das akustische und elektromagnetische Transmissionsproblem wurden bereits verschiedene Methoden zur Berechnung der inneren Transmissionsprobleme erforscht (vgl. [13, 14]). Das elastische Transmissionsproblem wurde bisher jedoch nicht in diesem Umfang untersucht und es gibt nach jetzigem Kenntnisstand noch keine Veröffentlichungen dazu. Es ist kürzlich ein Preprint erschienen, der sich mit dieser Thematik befasst [10].

Das innere elastische Transmissionsproblem besteht darin, nichttriviale Lösungen  $(u, v) \in L^2(D, \mathbb{C}^2)$  für das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \mu\Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \omega^2 u &= 0 && \text{in } D, \\ \mu\Delta v + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} v + \omega^2 \sigma v &= 0 && \text{in } D, \\ u &= v && \text{auf } \partial D, \\ T(u) &= T(v) && \text{auf } \partial D \end{aligned}$$

zu finden, bei denen  $\omega$  der entsprechende Transmissionseigenwert ist. Für die Differenz der Lösungen gilt zusätzlich

$$u - v \in H_0^2(D, \mathbb{C}^2)$$

mit

$$H_0^2(D, \mathbb{C}^2) = \{u \in H^2(D, \mathbb{C}^2); u = 0 \text{ und } T(u) = 0 \text{ auf } \partial\Omega\} .$$

Das Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^2$  ist dabei offen und zusammenhängend mit dem Rand  $\partial D$ . Um die Transmissionseigenwerte zu bestimmen, wird das von Cossonnière und Hadjars [7] aufgestellte System von Randintegralgleichungen verwendet und das resultierende nichtlineare Eigenwertproblem mit dem Integralalgorithmus von Beyn [3] gelöst. Dabei wird das nichtlineare Eigenwertproblem mittels des Keldysh Theorem

auf ein lineares Eigenwertproblem kleinerer Dimension reduziert und gelöst.

In Kapitel [2](#) wird sowohl die Randintegralgleichungsmethode für das elastische Streuproblem als auch die Diskretisierung der erhaltenen Randintegralgleichungen beschrieben. Außerdem wird der Integralalgorithmus von Beyn vorgestellt. Im folgenden Kapitel werden die aus der Randintegralgleichungsmethode ermittelten Operatoren jeweils für den statischen und dynamischen Fall hergeleitet und approximiert. Im vierten Kapitel werden die in MATLAB implementierten Operatoren exemplarisch getestet und auf Konvergenz untersucht. Das darauffolgende Kapitel beinhaltet einige Anwendungsbeispiele für die Berechnung einer Lösung  $u$  und anschließender Bestimmung der dazugehörigen Eigenwerte. Dazu gehört auch ein Beispiel für ein elastisches Transmissionsproblem. Eine Zusammenfassung mit Fazit und Ausblick schließt die Arbeit ab.

## 2 Grundlagen

In diesem Kapitel wird die Lösungsmethode für das elastische Streuproblem im statischen und dynamischen Fall beschrieben. Anschließend folgt die Erläuterung der Diskretisierung der erhaltenen Randintegralgleichungen. Zusätzlich wird der Integralalgorithmus von Beyn vorgestellt, der zur Lösung von nichtlinearen Eigenwertproblemen genutzt wird.

### 2.1 Randintegralgleichungsmethode

Die Idee der Randintegralgleichungsmethode besteht darin ein Randwertproblem in eine Randintegralgleichung zu überführen. Dazu muss das entsprechende Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  einfach zusammenhängend, der Rand  $\partial\Omega$  glatt genug (im Folgenden ist  $\partial\Omega \in C^2$ ) und die Fundamentallösung des Differentialoperators bekannt sein. Im Falle des elastischen Streuproblems ist der Differentialoperator gerade die linke Seite der Navier-Gleichung

$$L(u) = \mu\Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \omega^2 \sigma u$$

mit konstanter Frequenz  $\omega$ . Sowohl für den statischen, das heißt  $\omega = 0$ , als auch für den dynamischen Fall ist die Fundamentallösung bekannt (vgl. [5]). Die Fundamentallösung für den statischen Fall ist gegeben durch

$$\Phi_0(x, y) = \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \Psi(x, y) I + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} J(x - y) \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

mit

$$\Psi(x, y) = \log \left( \frac{1}{\|x - y\|_2} \right), \quad x \neq y.$$

Die Matrix  $I$  ist die Einheitsmatrix und  $J$  das dyadische Produkt von  $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  und der zugehörigen Transponierten  $w^\top$ :

$$J(w) = \frac{w \cdot w^\top}{\|w\|_2^2}.$$

Entsprechend gilt für die Fundamentallösung des dynamischen Falls:

$$\begin{aligned} \Phi_\omega(x, y) &= \frac{i}{4\mu} \mathbb{H}_0^{(1)}(k_s \|x - y\|_2) I \\ &+ \frac{i}{4\omega^2} \operatorname{grad}_x \operatorname{grad}_x^\top \left[ \mathbb{H}_0^{(1)}(k_s \|x - y\|_2) - \mathbb{H}_0^{(1)}(k_p \|x - y\|_2) \right] \in \mathbb{C}^{2 \times 2}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $H_0^{(1)}$  die Hankel-Funktion 1. Art der Ordnung 0 und  $I$  die Einheitsmatrix. Die Wellenzahlen  $k_s$  und  $k_p$  hängen im Wesentlichen von der Frequenz  $\omega \neq 0$  der Welle ab:

$$k_s^2 = \frac{\omega^2}{\mu} \quad \text{und} \quad k_p^2 = \frac{\omega^2}{\lambda + 2\mu} .$$

Eine Lösung für das Randwertproblem kann sowohl aus dem Einfach- als auch aus dem Doppelschichtpotentialansatz der Potentialtheorie bestimmt werden (vgl. [15], Seite 25). Für den Einfachschichtpotentialansatz der Navier-Gleichung mit der Dichte  $\psi$  gilt:

$$u(x) = (SL_k\psi)(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi_k(x, y)\psi(y) \, ds(y) , \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega , \quad k \in \{0, \omega\} .$$

Es kann gezeigt werden, dass  $u$  für  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega$  Lösung der jeweiligen Gleichung ist (vgl. [2], Seite 105 ff.). Analog gilt für den Doppelschichtpotentialansatz der Navier-Gleichung

$$u(x) = (DL_k\psi)(x) = \int_{\partial\Omega} [T_y(\Phi_k(x, y))]^\top \psi(y) \, ds(y) , \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega , \quad k \in \{0, \omega\}$$

mit der Dichte  $\psi$ . Der Traktionsoperator  $T$  ist gegeben durch

$$T_y(z) = \lambda \operatorname{div}(z) \nu + 2\mu (\nu^\top \operatorname{grad}) z + \mu \operatorname{div}(Qz) Q\nu$$

und wird an dieser Stelle bezüglich  $y$  gebildet. Hierbei ist  $\nu$  der normierte Normalenvektor auf  $\partial\Omega$  und  $Q$  die Matrix:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Auch in diesem Fall ist  $u$  für  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega$  Lösung der jeweiligen Navier-Gleichung (vgl. [5]).

Zur Bestimmung der Lösung  $u$  muss für beide Ansätze zunächst die Dichte  $\psi$  ermittelt werden. Dazu wird, unter Verwendung einer entsprechenden Randbedingung,  $x$  an den Rand  $\partial\Omega$  angenähert. Mit dem Ansatz des Einfachschichtpotentials und der Randbedingung

$$u = f \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$$

ergibt sich bei Annäherung von  $x$  an den Rand die folgende Randintegralgleichung:

$$(S_k\psi)(x) = f(x) ,$$

die zur Bestimmung von  $\psi$  gelöst werden muss. Dabei ist

$$(S_k\psi)(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi_k(x, y)\psi(y) \, ds(y) \quad \text{mit} \quad k \in \{0, \omega\}$$

das Einfachschichtpotential auf dem Rand. Für den Doppelschichtpotentialansatz muss bei Annäherung von  $x$  an den Rand die Sprungrelation von  $\psi$  berücksichtigt werden. Dabei wird zwischen den beiden Fällen

$$S^- = \Omega \ni x \rightarrow x \in \partial\Omega \quad \text{bzw.} \quad S^+ = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega \ni x \rightarrow x \in \partial\Omega$$

unterschieden [2, Seite 105 ff.]. Bei den betrachteten Integralen handelt es sich im Folgenden um *Cauchysche Hauptwerte* (CH). Mit der Definition des Doppelschichtpotentials auf dem Rand

$$(D_k\psi)(x) = CH \int_{\partial\Omega} [T_y(\Phi_k(x, y))]^\top \psi(y) \, ds(y)$$

ergeben sich die folgenden Randintegralgleichungen:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\psi(x) + (D_k\psi)(x) &= f(x), \quad \text{f.a. } x \in S^-, \\ \frac{1}{2}\psi(x) + (D_k\psi)(x) &= f(x), \quad \text{f.a. } x \in S^+. \end{aligned}$$

Handelt es sich hingegen um die folgende Randbedingung

$$T(u) = g \quad \text{auf} \quad \partial\Omega,$$

wird bei der Verwendung des Einfachschichtpotentialansatzes

$$u(x) = (SL_k\psi)(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega$$

und Annäherung von  $x$  an den Rand  $\partial\Omega$  die Unterscheidung notwendig:

$$S^- = \Omega \ni x \rightarrow x \in \partial\Omega \quad \text{bzw.} \quad S^+ = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega \ni x \rightarrow x \in \partial\Omega.$$

Auf dem Rand gilt daher der Zusammenhang:

$$T_x(u(x)) = T_x(S_k\psi(x)) \pm \frac{1}{2}\psi(x).$$

Die Traktion des Einfachschichtpotentials kann aufgrund von  $\psi \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{C}^2)$  wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} (D_k^\top\psi)(x) &= T_x(S_k\psi(x)) = T_x\left(\int_{\partial\Omega} \Phi_k(x, y)\psi(y) \, ds(y)\right) \\ &= CH \int_{\partial\Omega} T_x(\Phi_k(x, y))\psi(y) \, ds(y). \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Randintegralgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\psi(x) + (D_k^\top \psi)(x) &= g(x) , \quad \text{f.a. } x \in S^- , \\ -\frac{1}{2}\psi(x) + (D_k^\top \psi)(x) &= g(x) , \quad \text{f.a. } x \in S^+ , \end{aligned}$$

die zur Berechnung von  $\psi$  dienen.

Für den Doppelschichtpotentialansatz

$$u(x) = (DL_k \psi)(x) , \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega$$

ergibt sich bei Annäherung von  $x$  an den Rand  $\partial\Omega$  die Gleichung:

$$T_x(u(x)) = T_x(D_k \psi(x)) .$$

Die Traktion des Doppelschichtpotentials hat die folgende Form

$$(N_k \psi)(x) = T_x(D_k \psi(x)) = T_x \left( CH \int_{\partial\Omega} [T_y(\Phi_k(x, y))]^\top \psi(y) \, ds(y) \right)$$

und ergibt die Randintegralgleichung:

$$(N_k \psi)(x) = g(x) .$$

Für eine übersichtlichere Darstellung werden die *Cauchyschen Hauptwerte* im Folgenden als einfache Integrale geschrieben.

## 2.2 Diskretisierung

Es werden im weiteren Verlauf Integralgleichungen der Form

$$s\psi(x) + \int_{\partial\Omega} K(x, y)\psi(y) \, ds(y) = f(x)$$

mit dem Kern  $K(x, y)$  betrachtet. Dabei handelt es sich für  $s = 0$  um eine Integralgleichung erster Art und für  $s \neq 0$  um eine Integralgleichung zweiter Art. Der Faktor  $s$  ist abhängig von dem betrachteten Potential und stellt im Fall des Doppelschichtpotentials bzw. der Traktion des Einfachschichtpotentials die Sprungrelation dar. Für das Einfachschichtpotential und die Traktion des Doppelschichtpotentials hat  $s$  den Wert 0 (vgl. Seite [8](#)).

Zur Lösung der genannten Integralgleichung muss der Gebietsrand  $\partial\Omega$  mit  $n$  Stützpunkten diskretisiert werden.

Wird als Gebiet ein Kreis bzw. eine Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  gewählt, kann die Parameterform

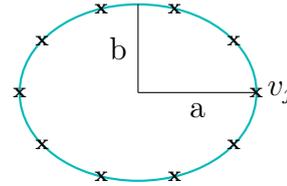
$$r(\varphi) = \begin{pmatrix} a \cos(\varphi) \\ b \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad a, b \in \mathbb{R}_{>0}$$

zur Diskretisierung genutzt werden. Dazu wird der Parameter  $\varphi$  diskretisiert

$$\varphi_j = \frac{2\pi}{n} j$$

und für die Stützpunkte auf dem Rand gilt:

$$v_j = r(\varphi_j) = \begin{pmatrix} a \cos(\varphi_j) \\ b \sin(\varphi_j) \end{pmatrix}.$$

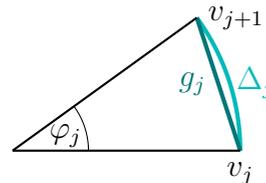


Der jeweilige Kreisbogen wird mit  $\Delta_j$  bezeichnet und für die ursprüngliche Integralgleichung gilt:

$$s\psi(x) + \int_{\partial\Omega} K(x, y)\psi(y) ds(y) = s\psi(x) + \sum_{j=1}^n \int_{\Delta_j} K(x, y)\psi(y) ds(y) = f(x).$$

Jeder Kreisbogen  $\Delta_j$  wird als Gerade

$$g_j = (1 - t)v_j + tv_{j+1}$$



durch den Anfangs- und Endpunkt des jeweiligen Kreisbogens approximiert:

$$s\psi(x) + \sum_{j=1}^n \int_{g_j} K(x, y)\psi(y) ds(y) \approx f(x).$$

Für die weitere Betrachtung wird angenommen, dass die gesuchte Dichte  $\psi$  auf der Geraden  $g_j$  konstant ist:

$$\psi(y)|_{g_j} \approx \psi(\hat{v}_j) \quad \text{mit } \hat{v}_j \text{ Mittelpunkt von } g_j.$$

Somit handelt es sich um eine konstante Interpolation der Dichte und sie ist unabhängig von der Integrationsvariable  $y$ :

$$s\psi(x) + \sum_{j=1}^n \int_{g_j} K(x, y) ds(y) \psi(\hat{v}_j) \approx f(x).$$

Anschließend wird das Integral über die Gerade  $g_j$  als Linienintegral auf ein Integral über den Bereich  $[0, 1]$  transformiert:

$$\int_{g_j} K(x, y) ds(y) \psi(\hat{v}_j) = \int_0^1 K(x, g_j(t)) \|g_j'(t)\|_2 dt \psi(\hat{v}_j).$$

Mit der Ableitung der Geraden  $g_j$

$$\|g'_j(t)\|_2 = \sqrt{(v_{j+1,x} - v_{j,x})^2 + (v_{j+1,y} - v_{j,y})^2} = \|v_{j+1} - v_j\|_2 = J_j$$

ergibt sich für die ursprüngliche Gleichung der Zusammenhang:

$$s\psi(x) + \sum_{j=1}^n \int_0^1 K(x, (1-t)v_j + tv_{j+1}) J_j dt \psi(\hat{v}_j) \approx f(x) .$$

Für die Bestimmung der Dichte  $\psi(\hat{v}_j)$  werden  $n$  verschiedene Integralgleichungen aufgestellt. Als Kollokationspunkte  $x$  werden dazu die Mittelpunkte  $\hat{v}_i$  der Segmente genutzt. Daraus ergibt sich für  $i = 1, \dots, n$  das System:

$$s\psi(\hat{v}_i) + \sum_{j=1}^n \int_0^1 K(\hat{v}_i, (1-t)v_j + tv_{j+1}) J_j dt \psi(\hat{v}_j) = f(\hat{v}_i) .$$

Da der Kern  $K(x, y)$  eine  $2 \times 2$  Matrix ist, müssen für jedes  $i$  bzw.  $j$  vier Integrale berechnet werden. Wird das System als lineares Gleichungssystem dargestellt, erhält man eine quadratische Matrix der Dimension  $2n \times 2n$ . Die Funktion  $f(x)$  auf dem Rand muss entsprechend vektorwertig sein. Zur Verdeutlichung wurde für den ersten Kern  $K(\hat{v}_1, g_1)$  die Matrix eingetragen und mit einem Kasten als solche hervorgehoben:

$$sI_{2n} + \left[ \begin{array}{cccc} \boxed{\int_0^1 K^{11}(\hat{v}_1, g_1(t)) J_1 dt} & \int_0^1 K^{12}(\hat{v}_1, g_1(t)) J_1 dt & \cdots & \int_0^1 K^{12}(\hat{v}_1, g_n(t)) J_n dt \\ \int_0^1 K^{21}(\hat{v}_1, g_1(t)) J_1 dt & \int_0^1 K^{22}(\hat{v}_1, g_1(t)) J_1 dt & \cdots & \int_0^1 K^{22}(\hat{v}_1, g_n(t)) J_n dt \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 K^{11}(\hat{v}_n, g_1(t)) J_1 dt & \int_0^1 K^{12}(\hat{v}_n, g_1(t)) J_1 dt & \cdots & \int_0^1 K^{12}(\hat{v}_n, g_n(t)) J_n dt \\ \int_0^1 K^{21}(\hat{v}_n, g_1(t)) J_1 dt & \int_0^1 K^{22}(\hat{v}_n, g_1(t)) J_1 dt & \cdots & \int_0^1 K^{22}(\hat{v}_n, g_n(t)) J_n dt \end{array} \right] \\ \underbrace{A \in \mathbb{K}^{2n \times 2n}} \\ \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1(\hat{v}_1) \\ \psi_2(\hat{v}_1) \\ \vdots \\ \psi_1(\hat{v}_n) \\ \psi_2(\hat{v}_n) \end{pmatrix}}_{z \in \mathbb{K}^{2n}} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(\hat{v}_1) \\ f_2(\hat{v}_1) \\ \vdots \\ f_1(\hat{v}_n) \\ f_2(\hat{v}_n) \end{pmatrix}}_{b \in \mathbb{K}^{2n}} .$$

Mit  $\mathbb{K}$  wird im statischen Fall der Körper der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  und im dynamischen Fall der Körper der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  bezeichnet.

Die Berechnung der Diagonalelemente der Matrix  $A$  wird für jedes Potential beschrieben, während die Nebendiagonalelemente für alle Operatoren mithilfe der MATLAB-Methode *quadgk* berechnet werden. Die Methode basiert auf der adaptiven Gauss-Kronrod-Quadratur, einer Variante der Gauss-Quadratur. Durch Hinzunahme zusätzlicher Stützstellen ist eine Schrittweitensteuerung bei dieser Methode möglich (vgl. [16]).

Die gesuchten Werte  $\psi(\hat{v}_j)$  sind in dem Vektor  $z$  enthalten und ergeben sich als Lösung des Gleichungssystems:

$$(sI_{2n} + A)z = b .$$

Dabei ist die Matrix  $I_{2n}$  eine Einheitsmatrix der Dimension  $2n$ .

In Abhängigkeit des gewählten Ansatzes kann nun  $u(x)$  approximativ bestimmt werden. Dazu wird der Gebietsrand, wie bereits zuvor, diskretisiert und die Integrale über die Gerade  $g_j$  auf Integrale über das Intervall  $[0, 1]$  transformiert.

Für den Einfachschichtpotentialansatz ergibt sich damit der folgende Zusammenhang

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial D} \Phi_k(x, y) \psi(y) \, ds(y) \approx \sum_{j=1}^n \int_{g_j} \Phi_k(x, y) \, ds(y) \underbrace{\psi(\hat{v}_j)}_z \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 \Phi_k(x, (1-t)v_j + tv_{j+1}) J_j \, dt \underbrace{\psi(\hat{v}_j)}_z , \end{aligned}$$

der sich auch als Matrix-Vektor-Multiplikation schreiben lässt:

$$u(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} \int_0^1 \Phi_k^{11}(x, g_1(t)) \, dt J_1 & \cdots & \int_0^1 \Phi_k^{12}(x, g_n(t)) \, dt J_n \\ \int_0^1 \Phi_k^{21}(x, g_1(t)) \, dt J_1 & \cdots & \int_0^1 \Phi_k^{22}(x, g_n(t)) \, dt J_n \end{pmatrix}}_{C \in \mathbb{K}^{2 \times 2n}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1(\hat{v}_1) \\ \psi_2(\hat{v}_1) \\ \vdots \\ \psi_1(\hat{v}_n) \\ \psi_2(\hat{v}_n) \end{pmatrix}}_{z \in \mathbb{K}^{2n}} .$$

Wird der Ansatz mit dem Doppelschichtpotential verwendet, gilt für die Berechnungsvorschrift von  $u(x)$ :

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial D} [T_y(\Phi_k(x, y))]^\top \psi(y) \, ds(y) \approx \sum_{j=1}^n \int_{g_j} [T_y(\Phi_k(x, y))]^\top \, ds(y) \underbrace{\psi(\hat{v}_j)}_z \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 [T_y(\Phi_k(x, (1-t)v_j + tv_{j+1}))]^\top J_j \, dt \underbrace{\psi(\hat{v}_j)}_z . \end{aligned}$$

Diese kann auch als Matrix-Vektor-Produkt geschrieben werden:

$$u(x) = \underbrace{\left( \int_0^1 [T_y(\Phi_k(x, g_1(t)))]_{11}^\top dt J_1 \cdots \int_0^1 [T_y(\Phi_k(x, g_n(t)))]_{12}^\top dt J_n \right)}_{C \in \mathbb{K}^{2 \times 2n}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1(\hat{v}_1) \\ \psi_2(\hat{v}_1) \\ \vdots \\ \psi_1(\hat{v}_n) \\ \psi_2(\hat{v}_n) \end{pmatrix}}_{z \in \mathbb{K}^{2n}}.$$

Die auftretenden Normalenvektoren bezüglich  $y$  lassen sich mithilfe der jeweiligen Gerade

$$g_j = (1-t)v_j + tv_{j+1} = t \underbrace{\begin{pmatrix} v_{j+1,x} - v_{j,x} \\ v_{j+1,y} - v_{j,y} \end{pmatrix}}_p + \begin{pmatrix} v_{j,x} \\ v_{j,y} \end{pmatrix}$$

berechnen. Da der Normalenvektor senkrecht auf der Geraden  $g_j$  steht, muss das Skalarprodukt aus Normalen- und Richtungsvektor den Wert 0 haben:

$$\langle p, n_y \rangle \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad n_y = \begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{j+1,y} - v_{j,y} \\ v_{j,x} - v_{j+1,x} \end{pmatrix}.$$

Der Normalenvektor wird zusätzlich noch normiert:

$$\begin{aligned} n_y &= \frac{1}{\sqrt{(v_{j+1,y} - v_{j,y})^2 + (v_{j,x} - v_{j+1,x})^2}} \cdot \begin{pmatrix} v_{j+1,y} - v_{j,y} \\ v_{j,x} - v_{j+1,x} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|v_{j+1} - v_j\|} \cdot \begin{pmatrix} v_{j+1,y} - v_{j,y} \\ v_{j,x} - v_{j+1,x} \end{pmatrix} = \frac{1}{J_j} \cdot \begin{pmatrix} v_{j+1,y} - v_{j,y} \\ v_{j,x} - v_{j+1,x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Normalenvektoren bezüglich  $x$  gilt der gleiche Zusammenhang, da der Normalenvektor  $n_x$  senkrecht auf dem jeweiligen Mittelpunkt der Segmente und damit der Geraden steht:

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{1}{\sqrt{(v_{i+1,y} - v_{i,y})^2 + (v_{i,x} - v_{i+1,x})^2}} \cdot \begin{pmatrix} v_{i+1,y} - v_{i,y} \\ v_{i,x} - v_{i+1,x} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|v_{i+1} - v_i\|} \cdot \begin{pmatrix} v_{i+1,y} - v_{i,y} \\ v_{i,x} - v_{i+1,x} \end{pmatrix} = \frac{1}{J_i} \cdot \begin{pmatrix} v_{i+1,y} - v_{i,y} \\ v_{i,x} - v_{i+1,x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 2.3 Integralalgorithmus von Beyn

Der Integralalgorithmus von Beyn dient zur Lösung von nichtlinearen Eigenwertproblemen. Dabei sei  $m \geq 1$ ,  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ein zusammenhängendes Gebiet und  $T$  eine lineare, komplexwertige Funktion. Ein nichtlineares Eigenwertproblem lässt sich dann wie folgt definieren:

**Definition 2.1 (Nichtlineares Eigenwertproblem):**

Sei  $T : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$  eine holomorphe Abbildung.

Gesucht ist ein  $\lambda \in \Omega$ , sodass

$$T(\lambda)v = 0 \quad \text{für ein } v \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\} \quad (2.1)$$

gilt.

**Bemerkung:**

Dabei ist  $\lambda$  ein Eigenwert von  $T$  und  $v$  der dazugehörige (Rechts-)Eigenvektor. Die Menge aller Eigenwerte, auch Spektrum von  $T$  genannt, wird mit  $\sigma(T)$  bezeichnet. Als Komplement des Spektrums bzgl.  $\Omega$  wird  $\rho(T) = \Omega \setminus \sigma(T)$  bezeichnet, man spricht auch von der Resolventenmenge.

Eine holomorphe Abbildung ist eine matrixwertige Funktion, die in jeder Komponente holomorph ist. Das heißt, jede Komponente ist in jedem Punkt aus  $\Omega$  komplex differenzierbar.

Im weiteren Verlauf werden nur einfache Eigenwerte in die Betrachtung einbezogen.

**Definition 2.2 (Einfache Eigenwerte):**

Ein Eigenwert  $\lambda$  von  $T$  heißt einfach, falls

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T(\lambda)) &= \text{span}\{v\}, \quad v \neq 0 \quad \text{und} \\ T'(\lambda)v &\notin \mathcal{R}(T(\lambda)) \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Mit  $\mathcal{N}(T(\lambda)) = \{u \in \mathbb{C}^m : T(\lambda)u = 0\}$  wird der Nullraum von  $T$  an der Stelle  $\lambda$  und mit  $\mathcal{R}(T(\lambda)) = \{o \in \mathbb{C}^m : \exists u \in \mathbb{C}^m, T(\lambda)u = o\}$  das Bild von  $T$  an der Stelle  $\lambda$  bezeichnet.

Die Ableitung  $T'$  ist hier komponentenweise zu verstehen.

Über die adjungierte Matrix  $T^H$  ist es möglich für einfache Eigenwerte die Linkseigenvektoren von  $T$  zu bestimmen:

**Definition 2.3 (Linkseigenvektor):**

Sei  $\lambda \in \Omega$  ein Eigenwert von  $T$  und  $v \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$  der zugehörige (Rechts-)Eigenvektor. Falls

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T^H(\lambda)) &= \text{span}\{w\}, \quad w \neq 0 \quad \text{und} \\ w^H T'(\lambda)v &\neq 0 \end{aligned}$$

für einen Vektor  $w \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$  gilt, heißt er Linkseigenvektor.

Es ist möglich, die Links- und Rechtseigenvektoren so zu wählen, dass sie ein normiertes Paar bilden. Dann gilt:

$$w^H T'(\lambda)v = 1.$$

Für das weitere Vorgehen ist die folgende Eigenschaft der Eigenwerte, die aus [3] Theorem 2.2] entnommen wird, notwendig.

**Satz 2.4 (Getrennte Eigenwerte):**

Jeder Eigenwert  $\lambda$  von  $T$  ist isoliert, das heißt für alle Eigenwerte  $\lambda \in \sigma(T)$  existiert eine Umgebung  $\mathcal{U} \subset \Omega$ , sodass

$$\lambda \in \mathcal{U} \quad \text{und} \quad \mathcal{U} \setminus \{\lambda\} \subset \rho(T).$$

### 2.3.1 Lösungsansatz zur Lösung des nichtlinearen Eigenwertproblems

Im Folgenden wird das nichtlineare Eigenwertproblem auf ein lineares Eigenwertproblem reduziert.

Die Überlegungen basieren auf den Ergebnissen von Keldysh ([11], [12]) und führen zunächst zu folgendem Theorem, welches aus [3] Theorem 2.4] entnommen wurde:

**Theorem 2.5.** *Sei  $\mathcal{C} \subset \Omega$  kompakt und enthalte nur einfache Eigenwerte  $\lambda_n$  von  $T$  für  $n = 1, \dots, k$ . Die zugehörigen Rechtseigenvektoren  $v_n$  und Linkseigenvektoren  $w_n$  sollen jeweils ein normiertes Paar bilden.*

*Dann existiert eine holomorphe Funktion  $\mathcal{R} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$  auf einer Umgebung  $\mathcal{U} \subset \Omega$  von  $\mathcal{C}$ , sodass*

$$T(z)^{-1} = \sum_{n=1}^k \frac{1}{z - \lambda_n} v_n w_n^H + R(z) \tag{2.2}$$

für  $z \in \mathcal{U} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  gilt.

Mithilfe des Theorems lässt sich das folgende Theorem zu einem Konturintegral beweisen.

**Theorem 2.6.** *Zusätzlich zu den Voraussetzungen aus dem vorherigen Theorem sei  $\Gamma \subset \Omega$  eine Kontur auf der keine Eigenwerte von  $T$  liegen, d.h.  $\Gamma \cap \sigma(T) = \emptyset$ . Die Eigenwerte  $\lambda_n, n = 1, \dots, k$  liegen im Inneren von  $\Gamma$  und die Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph.*

*Dann gilt:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) T(z)^{-1} dz = \sum_{n=1}^k f(\lambda_n) v_n w_n^H. \tag{2.3}$$

Hierbei ist die Integration komponentenweise zu verstehen.

*Beweis.* Die Gleichung (2.2) wird mit  $f$  multipliziert und es gilt der Zusammenhang:

$$f(z)T(z)^{-1} = \sum_{n=1}^k \frac{f(z)}{z - \lambda_n} v_n w_n^H + f(z)R(z) .$$

Wird die erhaltene Gleichung durch  $2\pi i$  dividiert und anschließend entlang der Kontur  $\Gamma$  integriert, ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)T(z)^{-1} dz = \sum_{n=1}^k \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \lambda_n} v_n w_n^H dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)R(z) dz .$$

Summation und Integration können in diesem Fall vertauscht werden, da es sich um eine endliche Reihe handelt. Das Integral in der Summe kann mittels der Cauchyschen Integralformel (vgl. [6] Seite 83 ff.) für jedes  $n = 1, \dots, k$  berechnet werden, da die Integration in der Summe unabhängig von  $v_n w_n^H$  ist:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \lambda_n} dz = f(\lambda_n) .$$

Im zweiten Summanden wird in jeder Komponente eine Integration über das Produkt zweier holomorpher Funktionen ausgeführt. Da das Produkt holomorpher Funktionen ebenfalls holomorph ist, es sich um ein zusammenhängendes Gebiet (Elementargebiet)  $\Omega$  und eine geschlossene Kurve  $\Gamma$  handelt, gilt nach dem Residuensatz (vgl. [6] Seite 112 ff.):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)R(z) = 0 .$$

Damit ergibt sich die gesuchte Formel. □

Aus der Formel (2.3) geht hervor, dass in der Summe bereits alle Informationen über die Eigenwerte und -vektoren implizit enthalten sind. Wie diese aus der Summe gefiltert werden und eine Funktion  $f$  gewählt wird, gilt es im weiteren Verlauf zu klären.

### Annahmen

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Anzahl  $k$  der in der Kontur  $\Gamma$  enthaltenen Eigenwerte kleiner ist als die Dimension  $m$  des Problems. Für große Probleme soll sogar  $k \ll m$  gelten.

Die Rechtseigenvektoren  $v_n$  und Linkseigenvektoren  $w_n$  werden in den Matrizen  $V \in \mathbb{C}^{m \times k}$  bzw.  $W \in \mathbb{C}^{m \times k}$  als Spalten zusammengefasst:

$$V = (v_1 \cdots v_k) \text{ und } W = (w_1 \cdots w_k) .$$

Außerdem wird eine Zufallsmatrix  $\hat{V} \in \mathbb{C}^{m \times \ell}$ , mit  $\ell \in \mathbb{N}$  und  $k \leq \ell \leq m$  gewählt, sodass

$$W^H \hat{V} \in \mathbb{C}^{k \times \ell} \quad \text{mit} \quad \text{rank}(W^H \hat{V}) = k$$

gilt und der Rang von  $W$  demzufolge  $k$  ist. Es kann ebenso angenommen werden, dass  $\text{rank}(V) = k$  ist.

Beyn [3, Abschnitt 3] gibt an, dass es zwar einfach ist nichtlineare Eigenwertprobleme zu konstruieren, für die  $W$  rangdefizient ist, diese im Allgemeinen jedoch nicht in typischen Anwendungen auftreten.

### Reduktion auf ein lineares Problem

Als holomorphe Funktionen  $f$  werden zum einen  $f(z) = 1$  und zum anderen  $f(z) = z$  für das Konturintegral (2.3) gewählt. Zusätzlich werden diese von rechts mit  $\hat{V}$  multipliziert und man erhält:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T(z)^{-1} \hat{V} dz = \sum_{n=1}^k v_n w_n^H \hat{V} = V W^H \hat{V} ,$$

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z T(z)^{-1} \hat{V} dz = \sum_{n=1}^k \lambda_n v_n w_n^H \hat{V} = V \Lambda W^H \hat{V} .$$

Dabei ist  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^{k \times k}$  die Diagonalmatrix mit den gesuchten Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  auf der Diagonalen und  $A_0 \in \mathbb{C}^{m \times \ell}$  sowie  $A_1 \in \mathbb{C}^{m \times \ell}$ .

Da die Matrizen  $V$  und  $W^H \hat{V}$  jeweils den Rang  $k$  haben, folgt für die Matrix  $A_0$ :

$$\text{rank}(A_0) = k .$$

Wird die (reduzierte) Singulärwertzerlegung auf  $A_0$  angewendet, ergibt sich

$$V W^H \hat{V} = A_0 = V_0 \Sigma_0 W_0^H$$

mit  $V_0 \in \mathbb{C}^{m \times k}$ ,  $\Sigma_0 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in \mathbb{C}^{k \times k}$  und  $W_0 \in \mathbb{C}^{\ell \times k}$ . Da die Matrix  $A_0$  den Rang  $k$  hat, gilt für die Eigenwerte:

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_k > 0 = \sigma_{k+1} = \dots = \sigma_l .$$

Unter Berücksichtigung der orthonormalen Spalten von  $V_0$  und  $W_0$  gelten die Zusammenhänge:  $V_0^H V_0 = I_k$  und  $W_0^H W_0 = I_k$ . Aus der Rangbedingung folgt zusätzlich:

$$\mathcal{R}(V) = \mathcal{R}(A_0) = \mathcal{R}(V_0) .$$

Daher lässt sich eine Transformationsmatrix  $S \in \mathbb{C}^{k \times k}$  mit  $\det(S) \neq 0$  finden, sodass

$$V = V_0 S$$

und unter Verwendung der orthonormalen Spalten von  $V_0$

$$S = V_0^H V$$

gilt.

Wird die Transformation  $V = V_0 S$  genutzt, so gilt für die Matrix  $A_0$ :

$$A_0 = V_0 S W^H \hat{V} = V_0 \Sigma_0 W_0^H .$$

Bei der Multiplikation dieser Gleichung von links mit  $V_0^H$  sowie der Inversen von  $S$  und Ausnutzung des Zusammenhangs  $V_0^H V_0 = I_k$  ergibt sich:

$$W^H \hat{V} = S^{-1} \Sigma_0 W_0^H . \quad (2.4)$$

Für die Matrix  $A_1$  gilt unter Verwendung von  $V = V_0 S$  der Zusammenhang:

$$A_1 = V \Lambda W^H \hat{V} = V_0 S \Lambda W^H \hat{V} .$$

Wird die Gleichung (2.4) eingesetzt, ergibt sich die Vorschrift

$$A_1 = V_0 S \Lambda S^{-1} \Sigma_0 W_0^H ,$$

die mit  $V_0^H$  von links multipliziert werden kann:

$$V_0^H A_1 = S \Lambda S^{-1} \Sigma_0 W_0^H .$$

Abschließend wird die Multiplikation von rechts mit  $W_0 \Sigma_0^{-1}$  durchgeführt

$$S \Lambda S^{-1} = V_0^H A_1 W_0 \Sigma_0^{-1} ,$$

wobei  $\Sigma_0$  invertierbar ist, da  $\text{rank}(A_0) = k$ .

Die erhaltene Matrix  $B = S \Lambda S^{-1} = V_0^H A_1 W_0 \Sigma_0^{-1} \in \mathbb{C}^{k \times k}$  kann direkt aus  $A_1$  und der Singulärwertzerlegung von  $A_0$  berechnet werden. Sie ist offensichtlich diagonalisierbar und hat dieselben Eigenwerte wie  $\Lambda$  und damit wie  $T$ .

Somit wurde das nichtlineare Eigenwertproblem auf ein lineares reduziert und kann theoretisch berechnet werden. Zur numerischen Berechnung des linearen Eigenwertproblems ist es jedoch nötig, die Konturintegrale auszuwerten.

### Numerische Berechnung der Konturintegrale

Die Auswertung der Konturintegrale erfolgt numerisch und wird im Folgenden näher beschrieben. Es wird davon ausgegangen, dass die Parametrisierung der Kontur  $\Gamma$  glatt und  $2\pi$ -periodisch ist. Dies soll durch

$$\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \varphi(t + 2\pi) = \varphi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

gegeben sein. Entsprechend werden  $N + 1$  äquidistante Punkte

$$t_j = \frac{2\pi}{N}j \quad \text{mit } j = 0, \dots, N$$

im Parameterbereich entlang der Kontur gewählt.

Wird  $z$  durch  $\varphi(t)$  sowie  $dz = \varphi'(t)dt$  ersetzt und der Integrationsbereich an die Parametrisierung angepasst, folgt für das Konturintegral  $A_0$ :

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T(z)^{-1} \hat{V} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} T(\varphi(t))^{-1} \hat{V} \varphi'(t) dt .$$

Wird die summierte Trapezregel (vgl. [4] Seite 200) auf das parametrische Konturintegral angewendet und die Periodizität der Parametrisierung  $\varphi$  beachtet, es gilt  $\varphi(t_0) = \varphi(t_N)$ , ergibt sich die folgende Näherung:

$$A_0 \approx A_{0,N} = \frac{1}{iN} \sum_{j=0}^{N-1} T(\varphi(t_j))^{-1} \hat{V} \varphi'(t_j) .$$

Die Approximation des Konturintegrals  $A_1$

$$A_1 \approx A_{1,N} = \frac{1}{iN} \sum_{j=0}^{N-1} T(\varphi(t_j))^{-1} \hat{V} \varphi(t_j) \varphi'(t_j)$$

ergibt sich durch ein analoges Vorgehen.

### 2.3.2 Der Algorithmus

Die zuvor beschriebene Lösung und Berechnung des nichtlinearen Eigenwertproblems lässt sich in die folgenden sieben Schritte gliedern:

Schritt 1: Einen Index  $\ell \leq m$  auswählen

Schritt 2: Zufällige Matrix  $\hat{V} \in \mathbb{C}^{m \times \ell}$  anlegen

Schritt 3:  $A_{0,N}$  und  $A_{1,N}$  berechnen

Schritt 4: Singulärwertzerlegung (SVD)  $A_{0,N} = V\Sigma W^H$  berechnen

Schritt 5: Rang Test:  $k$  bestimmen für das gilt:

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_k > \text{tol}_{\text{rank}} > \sigma_{k+1} \approx \dots \sigma_l = 0$$

→ Falls  $k = \ell$ :  $\ell$  erhöhen und bei Schritt 1 starten

$$\rightarrow \text{sonst: } V_0 = V(1 : m, 1 : k) , \quad W_0^H = W^H(1 : \ell, 1 : k) , \\ \Sigma_0 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$$

Schritt 6: Matrix  $B = V_0^H A_{1,N} W_0^H \Sigma_0^{-1}$  berechnen

Schritt 7: Eigenwerte von  $B$  berechnen

**Bemerkung:**

Da es im Allgemeinen numerisch nicht möglich ist für die Singulärwerte  $\sigma_n$  mit  $n > k$  von  $A_{0,N}$  exakt den Wert 0 zu erreichen, wird eine Rangtoleranz  $\text{tol}_{\text{rank}} > 0$  vorgegeben.

**Bemerkung:**

Aus den Eigenvektoren  $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{C}^k$  von  $B$  können die Eigenvektoren mittels der Transformation

$$v_n = V_0 s_n , \quad n = 1, \dots, k$$

berechnet werden.

Der Aufwand des Algorithmus setzt sich im Wesentlichen aus drei Komponenten zusammen:

- Berechnung von  $A_{0,N}$  und  $A_{1,N}$   
 $\rightarrow N \cdot \ell$  lineare Gleichungssysteme lösen für  $A_{0,N}$ :  $N$  verschiedene Matrizen  $T(\varphi(t_j))$  und  $\ell$  verschiedene rechte Seiten.  
 $\rightarrow$  Lösungen der Gleichungssysteme für die Berechnung von  $A_{1,N}$  verwenden.
- Berechnung der Singulärwertzerlegung für  $A_{0,N} \in \mathbb{C}^{m \times \ell}$ .
- Berechnung der Eigenwerte von  $B \in \mathbb{C}^{k \times k}$ .



# 3 Randintegraloperatoren

Dieses Kapitel dient zur Beschreibung der in Kapitel [2.1](#) aufgestellten Operatoren für den statischen und dynamischen Fall. In diesem Zusammenhang wird der Kern des jeweiligen Operators bestimmt und die Elemente der aus der Diskretisierung resultierenden Matrix ermittelt. Ein besonderes Augenmerk wird dabei auf die Diagonalelemente der Matrix gelegt.

## 3.1 Statischer Fall

Im statischen Fall ist der Differentialoperator gegeben durch

$$L(u) = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u$$

und für die dazugehörige Fundamentallösung gilt (vgl. Seite [5](#)):

$$\Phi_0(x, y) = \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \Psi(x, y) I + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} J(x - y) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} .$$

### 3.1.1 Einfachschichtpotential

Das Einfachschichtpotential auf dem Rand

$$(S_0\psi)(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi_0(x, y) \psi(y) \, ds(y)$$

hat nach der Diskretisierung mit  $n$  Stützstellen die folgende Form:

$$\sum_{j=0}^n \left[ \int_0^1 \Phi_0(\hat{v}_i, (1-t)v_j + tv_{j+1}) J_j \, dt \psi(\hat{v}_j) \right] .$$

Für die Zeilen  $i$  und Spalten  $j$  der resultierenden Matrix müssen die entsprechenden Integrale berechnet werden, bevor das Gleichungssystem nach  $\psi$  aufgelöst werden kann.

Da die Funktion  $\Phi_0(x, y)$  eine  $2 \times 2$  Matrix liefert, werden jeweils vier Integrale berechnet und in die Matrix  $A$  eingetragen (vgl. Seite [10](#)). Aus der Definition der

Funktion

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, y) &= \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \log \left( \frac{1}{\|x - y\|_2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{\|x - y\|_2^2} \begin{pmatrix} (x_1 - y_1)^2 & (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \\ (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) & (x_2 - y_2)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ergibt sich für die vier Integrale und damit für die Einträge in die Matrix  $A$ :

$$\begin{aligned} A_{2i-1, 2j-1} &= \int_0^1 \Phi_0^{11}(\hat{v}_i, g_j) J_j \, dt = J_j \int_0^1 \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \log \left( \frac{1}{\|\hat{v}_i - g_j\|_2} \right) \\ &\quad + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{(\hat{v}_{i,x} - g_{j,x})^2}{\|\hat{v}_i - g_j\|_2^2} \, dt , \\ A_{2i-1, 2j} &= \int_0^1 \Phi_0^{12}(\hat{v}_i, g_j) J_j \, dt = J_j \int_0^1 \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{(\hat{v}_{i,x} - g_{j,x})(\hat{v}_{i,y} - g_{j,y})}{\|\hat{v}_i - g_j\|_2^2} \, dt , \\ A_{2i, 2j-1} &= \int_0^1 \Phi_0^{21}(\hat{v}_i, g_j) J_j \, dt = J_j \int_0^1 \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{(\hat{v}_{i,x} - g_{j,x})(\hat{v}_{i,y} - g_{j,y})}{\|\hat{v}_i - g_j\|_2^2} \, dt , \\ A_{2i, 2j} &= \int_0^1 \Phi_0^{22}(\hat{v}_i, g_j) J_j \, dt = J_j \int_0^1 \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \log \left( \frac{1}{\|\hat{v}_i - g_j\|_2} \right) \\ &\quad + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{(\hat{v}_{i,y} - g_{j,y})^2}{\|\hat{v}_i - g_j\|_2^2} \, dt . \end{aligned}$$

Daraus lässt sich erkennen, dass die Nebendiagonalelemente von  $\Phi_0(x, y)$  identisch sind und das entsprechende Integral nur einmal berechnet werden muss.

### Diagonalelemente

Bei der Berechnung der Matrixelemente werden insbesondere die Diagonalelemente, das heißt der Zeilen- und Spaltenindex stimmen überein, näher betrachtet. In diesem Fall liegen die Kollokationspunkte

$$\hat{v}_i = \frac{1}{2}(v_i + v_{i+1}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_{i,x} + v_{i+1,x} \\ v_{i,y} + v_{i+1,y} \end{pmatrix} \quad (\text{a})$$

auf der Geraden  $g_j$ , für die der Wert des Integrals bestimmt wird. Für die Differenz  $\hat{v}_i - g_i$  mit  $g_i = (1 - t)v_i + tv_{i+1}$  ergibt sich daher:

$$\hat{v}_i - g_i = \frac{1}{2}(v_i + v_{i+1}) - v_i(1 - t) - v_{i+1}t = \left( \frac{1}{2} - t \right) (v_{i+1} - v_i) . \quad (\text{b})$$

Unter Verwendung von

$$\|v_{i+1} - v_i\|_2 = J_i \quad (\text{c})$$

gilt für die Norm entsprechend:

$$\|\hat{v}_i - g_i\|_2 = \left\| \left( \frac{1}{2} - t \right) (v_{i+1} - v_i) \right\|_2 = \left| \frac{1}{2} - t \right| \|v_{i+1} - v_i\|_2 = \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i . \quad (d)$$

Wird dieser Zusammenhang in der Funktion  $\Phi_0(\hat{v}_i, g_i)$  ersetzt, gilt:

$$\begin{aligned} \Phi_0(\hat{v}_i, g_i) &= \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \log \left( \frac{1}{\left| \frac{1}{2} - t \right| \cdot J_i} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \\ &\cdot \frac{\left( \frac{1}{2} - t \right)^2}{\left| \frac{1}{2} - t \right|^2 \cdot J_i^2} \begin{pmatrix} (v_{i+1,x} - v_{i,x})^2 & (v_{i+1,x} - v_{i,x})(v_{i+1,y} - v_{i,y}) \\ (v_{i+1,x} - v_{i,x})(v_{i+1,y} - v_{i,y}) & (v_{i+1,y} - v_{i,y})^2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Mit den Umformungen

$$\frac{\left( \frac{1}{2} - t \right)^2}{\left| \frac{1}{2} - t \right|^2} = 1, \quad \log \left( \frac{1}{\left| \frac{1}{2} - t \right| J_i} \right) = -\log \left( \left| \frac{1}{2} - t \right| \right) - \log(J_i) \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1$$

können die Integrale des Diagonalelementes vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} A_{2i-1,2i-1} &= \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} J_i \int_0^1 -\log \left( \left| \frac{1}{2} - t \right| \right) - \log(J_i) dt \\ &\quad + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} J_i \int_0^1 \frac{(v_{i+1,x} - v_{i,x})^2}{J_i^2} dt \\ A_{2i-1,2i} &= \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} J_i \int_0^1 \frac{(v_{i+1,x} - v_{i,x})(v_{i+1,y} - v_{i,y})}{J_i^2} dt = A_{2i,2i-1} \\ A_{2i,2i} &= \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} J_i \int_0^1 -\log \left( \left| \frac{1}{2} - t \right| \right) - \log(J_i) dt \\ &\quad + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} J_i \int_0^1 \frac{(v_{i+1,y} - v_{i,y})^2}{J_i^2} dt . \end{aligned}$$

Der Integrand von

$$\int_0^1 \log \left( \left| \frac{1}{2} - t \right| \right) dt$$

ist an der Stelle  $t = \frac{1}{2}$  singulär, sodass eine Grenzwertbetrachtung durchgeführt wird:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \log \left( \left| \frac{1}{2} - t \right| \right) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \log \left( \left| \frac{1}{2} - t \right| \right) dt + \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \log \left( \left| \frac{1}{2} - t \right| \right) dt \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \log \left( \frac{1}{2} - t \right) \cdot \left( t - \frac{1}{2} \right) - t + \frac{1}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \\
 &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \log \left( t - \frac{1}{2} \right) \cdot \left( t - \frac{1}{2} \right) - t + \frac{1}{2} \right]_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (-2 \log(\varepsilon)\varepsilon + 2\varepsilon - \log(2) - 1) \\
 &= -\log(2) - 1 .
 \end{aligned}$$

Die verbleibenden Integrale können analytisch gelöst werden, da der jeweilige Integrand eine Konstante ist. Für die Diagonaleinträge der Matrix gilt daher:

$$\begin{aligned}
 A_{2i-1,2i-1} &= \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} [\log(2) + 1 - \log(J_i)] J_i + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{(v_{i+1,x} - v_{i,x})^2}{J_i} , \\
 A_{2i-1,2i} &= \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{(v_{i+1,x} - v_{i,x})(v_{i+1,y} - v_{i,y})}{J_i} = A_{2i,2i-1} , \\
 A_{2i,2i} &= \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} [\log(2) + 1 - \log(J_i)] J_i + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{(v_{i+1,y} - v_{i,y})^2}{J_i} .
 \end{aligned}$$

### 3.1.2 Doppelschichtpotential

Für das Doppelschichtpotential auf dem Rand

$$(D_0\psi)(x) = \int_{\partial D} [T_y(\Phi_0(x, y))]^\top \psi(y) ds(y)$$

gilt nach der Diskretisierung mit  $n$  Stützstellen der Zusammenhang:

$$\sum_{j=1}^n \left[ \int_0^1 [T_y(\Phi_0(x, (1-t)v_j + tv_{j+1}))]^\top J_j dt \psi(\hat{v}_j) \right] .$$

Bevor das Gleichungssystem nach  $\psi$  aufgelöst werden kann, muss die Berechnungsvorschrift für den Kern  $T_y(\Phi_0(x, y))$  bestimmt werden.

Der Traktionsoperator  $T$  ist gegeben durch

$$T_y(z) = \lambda \operatorname{div}(z) \nu + 2\mu (\nu^\top \operatorname{grad}) z + \mu \operatorname{div}(Qz) Q\nu$$

und wird an dieser Stelle bezüglich  $y$  angewendet. Die Matrix  $Q$  hat die Form

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und  $\nu$  ist der normierte, nach außen gerichtete Normalenvektor auf  $\partial\Omega$ .

Wird der Traktionsoperator auf die Fundamentallösung der Navier-Gleichung angewendet, ergibt sich die folgende Berechnungsvorschrift:

$$T_y(\Phi_0(x, y)) = \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} T_y(\Psi(x, y)I) + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} T_y(J(x - y)) .$$

Da es sich jeweils um Matrizen handelt, ist die Auswertung des Traktionsoperators spaltenweise zu verstehen.

Die Berechnung von  $T_y(\Phi_0(x, y))$  orientiert sich an [5] Seite 604] und wird an dieser Stelle durch Beweise und ergänzende Rechenschritte vervollständigt.

Zunächst werden einige Rechenregeln mit den entsprechenden Beweisen für den Traktionsoperator aufgestellt und anschließend die Bestimmung von  $T_y(\Phi_0(x, y))$  durchgeführt.

**Regel 3.1.** Für eine stetig differenzierbare Funktion  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  gilt:

$$\begin{aligned} T_x(f(\|x - y\|_2)I) &= \frac{f'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} [\lambda\nu(x)(x - y)^\top + \mu(x - y)\nu(x)^\top \\ &\quad + \mu\nu(x)^\top(x - y)I] \\ &= \frac{f'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} U_1(x, y) . \end{aligned}$$

*Beweis.* Für die Ableitung von  $f : r \in D \rightarrow f(r) \in W$  gilt:

$$f'(r) = \frac{\partial f}{\partial r} .$$

Im Folgenden wird für eine einfachere Darstellung

$$a = x_1 - y_1 \quad \text{und} \quad b = x_2 - y_2$$

gewählt, wodurch

$$\|x - y\|_2^2 = \left( \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \right)^2 = a^2 + b^2$$

gilt.

Mit  $r = \|x - y\|_2$  gilt für die Ableitung nach  $x_1$ :

$$f_{x_1}(\|x - y\|_2) = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_1} = f'(\|x - y\|_2) \frac{a}{\|x - y\|_2}$$

bzw. nach  $x_2$ :

$$f_{x_2}(\|x - y\|_2) = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_2} = f'(\|x - y\|_2) \frac{b}{\|x - y\|_2}.$$

Bei der Bestimmung von  $T_x(f(\|x - y\|_2)I)$  muss berücksichtigt werden, dass der Traktionsoperator spaltenweise angewendet wird:

$$T_x(f(\|x - y\|_2)I) = \left[ T_x \begin{pmatrix} f(\|x - y\|_2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad T_x \begin{pmatrix} 0 \\ f(\|x - y\|_2) \end{pmatrix} \right].$$

Für die erste Spalte ergibt sich der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} & T_x \begin{pmatrix} f(\|x - y\|_2) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \operatorname{div} \begin{pmatrix} f(\|x - y\|_2) \\ 0 \end{pmatrix} \nu(x) + 2\mu \left[ \nu(x)^\top \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} f(\|x - y\|_2) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \mu \operatorname{div} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\|x - y\|_2) \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nu(x) \\ &= \lambda \frac{f'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} a \begin{pmatrix} \nu_1(x) \\ \nu_2(x) \end{pmatrix} - \mu \frac{f'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} b \begin{pmatrix} \nu_2(x) \\ -\nu_1(x) \end{pmatrix} \\ &+ 2\mu \begin{pmatrix} \nu_1(x) \frac{\partial f(\|x - y\|_2)}{\partial x_1} + \nu_2(x) \frac{\partial f(\|x - y\|_2)}{\partial x_2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \frac{f'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} \begin{pmatrix} \nu_1(x)a \\ \nu_2(x)a \end{pmatrix} - \mu \frac{f'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} \begin{pmatrix} \nu_2(x)b \\ -\nu_1(x)b \end{pmatrix} \\ &+ 2\mu \frac{f'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} \begin{pmatrix} \nu_1(x)a + \nu_2(x)b \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analog gilt für die zweite Spalte der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} & T_x \begin{pmatrix} 0 \\ f(\|x - y\|_2) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \frac{f'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} \begin{pmatrix} \nu_1(x)b \\ \nu_2(x)b \end{pmatrix} + \mu \frac{f'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} \begin{pmatrix} \nu_2(x)a \\ -\nu_1(x)a \end{pmatrix} \\ &+ 2\mu \frac{f'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_1(x)a + \nu_2(x)b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Werden die beiden Spalten in eine Matrix geschrieben und der Faktor  $\frac{f'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2}$

ausgeklammert, gilt:

$$\begin{aligned} & T_x(f(\|x-y\|_2)I) \\ = & \frac{f'(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2} \left[ \lambda \begin{pmatrix} \nu_1(x)a & \nu_1(x)b \\ \nu_2(x)a & \nu_2(x)b \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\nu_2(x)b & \nu_2(x)a \\ \nu_1(x)b & -\nu_1(x)a \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + 2\mu \begin{pmatrix} \nu_1(x)a + \nu_2(x)b & 0 \\ 0 & \nu_1(x)a + \nu_2(x)b \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Die zweite Matrix kann wie folgt zerlegt werden:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\nu_2(x)b & \nu_2(x)a \\ \nu_1(x)b & -\nu_1(x)a \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \nu_1(x)a & \nu_1(x)b \\ \nu_2(x)a & \nu_2(x)b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nu_1(x)a + \nu_2(x)b & 0 \\ 0 & \nu_1(x)a + \nu_2(x)b \end{pmatrix} \\ = & (x-y) \cdot \nu(x)^\top - \nu(x)^\top (x-y)I. \end{aligned}$$

Setzt man diesen Zusammenhang in die obige Darstellung ein und formt die verbleibenden Matrizen um, so gilt:

$$\begin{aligned} T_x(f(\|x-y\|_2)I) &= \frac{f'(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2} [\lambda \nu(x)(x-y)^\top + 2\mu \nu(x)^\top (x-y)I \\ &+ \mu(x-y)\nu(x)^\top - \mu \nu(x)^\top (x-y)I] \\ &= \frac{f'(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2} [\lambda \nu(x)(x-y)^\top + \mu \nu(x)^\top (x-y)I \\ &+ \mu(x-y)\nu(x)^\top]. \end{aligned}$$

□

**Regel 3.2.** Für  $x \in \mathbb{R}^2$  gilt:

$$T(x \cdot x^\top) = 3\lambda \nu(x) \cdot x^\top + 2\mu \nu(x) \cdot x^\top + \mu x \cdot \nu(x)^\top + \mu \nu(x)^\top xI.$$

*Beweis.* In diesem Fall muss ebenfalls spaltenweise vorgegangen werden:

$$T(x \cdot x^\top) = T \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \left[ T \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \right].$$

Für die erste Spalte gilt der Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
 & T \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} \\
 &= \lambda \operatorname{div} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} \nu(x) + 2\mu \left( \nu_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \nu_2(x) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} \\
 &+ \mu \operatorname{div} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu_2(x) \\ -\nu_1(x) \end{pmatrix} \\
 &= \lambda(2x_1 + x_1) \begin{pmatrix} \nu_1(x) \\ \nu_2(x) \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} 2\nu_1(x)x_1 \\ \nu_1(x)x_2 + \nu_2(x)x_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \nu_2(x)x_2 \\ -\nu_1(x)x_2 \end{pmatrix} \\
 &= 3\lambda \begin{pmatrix} \nu_1(x)x_1 \\ \nu_2(x)x_1 \end{pmatrix} + 2\mu \left[ \begin{pmatrix} \nu_1(x)x_1 \\ \nu_2(x)x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_1(x)x_1 \\ \nu_1(x)x_2 \end{pmatrix} \right] + \mu \begin{pmatrix} \nu_2(x)x_2 \\ -\nu_1(x)x_2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Analog ergibt sich für die zweite Spalte:

$$\begin{aligned}
 & T \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \\
 &= 3\lambda \begin{pmatrix} \nu_1(x)x_2 \\ \nu_2(x)x_2 \end{pmatrix} + 2\mu \left[ \begin{pmatrix} \nu_1(x)x_2 \\ \nu_2(x)x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_2(x)x_1 \\ \nu_2(x)x_2 \end{pmatrix} \right] + \mu \begin{pmatrix} -\nu_2(x)x_1 \\ \nu_1(x)x_1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Werden die Ergebnisse in einer Matrix zusammengefasst, ergibt sich die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
 T(x \cdot x^\top) &= 3\lambda \begin{pmatrix} \nu_1(x)x_1 & \nu_1(x)x_2 \\ \nu_2(x)x_1 & \nu_2(x)x_2 \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} \nu_1(x)x_1 & \nu_1(x)x_2 \\ \nu_2(x)x_1 & \nu_2(x)x_2 \end{pmatrix} \\
 &+ 2\mu \begin{pmatrix} \nu_1(x)x_1 & \nu_2(x)x_1 \\ \nu_1(x)x_2 & \nu_2(x)x_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \nu_2(x)x_2 & -\nu_2(x)x_1 \\ -\nu_1(x)x_2 & \nu_1(x)x_1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Mit der folgenden Zerlegung der letzten Matrix

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \nu_2(x)x_2 & -\nu_2(x)x_1 \\ -\nu_1(x)x_2 & \nu_1(x)x_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \nu_1(x)x_1 + \nu_2(x)x_2 & 0 \\ 0 & \nu_1(x)x_1 + \nu_2(x)x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nu_1(x)x_1 & \nu_2(x)x_1 \\ \nu_1(x)x_2 & \nu_2(x)x_2 \end{pmatrix} \\
 &= \nu(x)^\top x I - x \nu(x)^\top
 \end{aligned}$$

ergibt sich für  $T(x \cdot x^\top)$ :

$$\begin{aligned}
 T(x \cdot x^\top) &= 3\lambda \nu(x)x^\top + 2\mu \nu(x)x^\top + 2\mu x \nu(x)^\top + \mu [\nu(x)^\top x I - x \nu(x)^\top] \\
 &= 3\lambda \nu(x)x^\top + 2\mu \nu(x)x^\top + \mu x \nu(x)^\top + \mu \nu(x)^\top x I.
 \end{aligned}$$

□

Mithilfe der ersten Regel kann nun  $T_y(\Psi(\|x - y\|_2)I)$  berechnet werden. Die Funktion

$$\Psi(r) = \log\left(\frac{1}{r}\right)$$

ist stetig differenzierbar und für die Ableitung gilt:

$$\Psi'(r) = -\frac{1}{r} .$$

Wird dies in die erste Regel eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} & T_y(\Psi(\|x - y\|_2)I) \\ = & \frac{\Psi'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} U_1(y, x) \\ = & -\frac{1}{\|x - y\|_2^2} [\lambda\nu(y)(y - x)^\top + \mu(y - x)\nu(y)^\top + \mu\nu(y)^\top(y - x)I] . \end{aligned}$$

Die Berechnung von  $T_y(J(x - y))$  gestaltet sich komplizierter. In diesem Fall muss die Produktregel des Traktionsoperators für eine Funktion  $f$  und eine Matrix  $G$  angewendet werden:

$$T(fG) = T(fI)G + fT(G) .$$

Aus der Definition von

$$J(x - y) = \frac{(x - y)(x - y)^\top}{\|x - y\|_2^2}$$

geht hervor, dass für die Funktion  $f$  und die Matrix  $G$  gelten muss

$$f = \frac{1}{\|x - y\|_2^2} , \quad G = (x - y)(x - y)^\top = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

mit

$$a = x_1 - y_1 \quad , \quad b = x_2 - y_2 \quad \text{und} \quad \|x - y\|_2^2 = a^2 + b^2 .$$

Mithilfe der ersten Regel und der Ableitung von  $f$

$$f(r) = \frac{1}{r^2} , \quad f'(r) = -\frac{2}{r^3}$$

kann  $T_x(fI)$  berechnet werden:

$$\begin{aligned} & T_x\left(\frac{1}{\|x - y\|_2^2}I\right) \\ = & -\frac{2}{\|x - y\|_2^3} \frac{1}{\|x - y\|_2} U_1(x, y) \\ = & -\frac{2}{\|x - y\|_2^4} [\lambda\nu(x)(x - y)^\top + \mu(x - y)\nu(x)^\top + \mu\nu(x)^\top(x - y)I] . \end{aligned}$$

Aus der zweiten Regel ergibt sich für  $T(G)$ :

$$\begin{aligned} & T_x((x-y)(x-y)^\top) \\ &= 3\lambda\nu(x)(x-y)^\top + 2\mu\nu(x)(x-y)^\top + \mu(x-y)\nu(x)^\top + \mu\nu(x)^\top(x-y)I. \end{aligned}$$

Somit gilt aufgrund der Produktregel:

$$\begin{aligned} T_x(J(x-y)) &= -\frac{2}{\|x-y\|_2^4} U_1(x,y)(x-y)(x-y)^\top \\ &+ \frac{1}{\|x-y\|_2^2} [3\lambda\nu(x)(x-y)^\top + 2\mu\nu(x)(x-y)^\top \\ &+ \mu(x-y)\nu(x)^\top + \mu\nu(x)^\top(x-y)I]. \end{aligned}$$

Um die gleichen Nenner zu erhalten, wird der erste Teil näher betrachtet. Für den ersten Summanden ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{\nu(x)(x-y)^\top}{\|x-y\|_2^2} (x-y)(x-y)^\top \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \nu_1(x)a & \nu_1(x)b \\ \nu_2(x)a & \nu_2(x)b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \nu_1(x)a^3 + \nu_1(x)ab^2 & \nu_1(x)a^2b + \nu_1(x)b^3 \\ \nu_2(x)a^3 + \nu_2(x)ab^2 & \nu_2(x)a^2b + \nu_2(x)b^3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} (a^2+b^2) \begin{pmatrix} \nu_1(x)a & \nu_1(x)b \\ \nu_2(x)a & \nu_2(x)b \end{pmatrix} = \nu(x)(x-y)^\top \end{aligned}$$

und die verbleibenden Summanden können zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} & \frac{(x-y)\nu(x)^\top + \nu(x)^\top(x-y)I}{\|x-y\|_2^2} (x-y)(x-y)^\top \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} \left[ \begin{pmatrix} a\nu_1(x) & a\nu_2(x) \\ b\nu_1(x) & b\nu_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\nu_1(x) + b\nu_2(x) & 0 \\ 0 & a\nu_1(x) + b\nu_2(x) \end{pmatrix} \right] \\ & \cdot \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} 2a^3\nu_1(x) + 2a^2b\nu_2(x) & 2a^2b\nu_1(x) + 2ab^2\nu_2(x) \\ 2a^2b\nu_1(x) + 2ab^2\nu_2(x) & 2ab^2\nu_1(x) + 2b^3\nu_2(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{2(a\nu_1(x) + b\nu_2(x))}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} = 2\nu(x)^\top(x-y)J(x-y). \end{aligned}$$

Werden diese beiden Zusammenhänge substituiert, so gilt:

$$\begin{aligned} T_x(J(x-y)) &= \frac{1}{\|x-y\|_2^2} [(\lambda+2\mu)\nu(x)(x-y)^\top + \mu(x-y)\nu(x)^\top \\ &\quad + \mu\nu(x)^\top(x-y)(I-4J(x-y))] \\ &= \frac{1}{\|x-y\|_2^2} U_2(x,y) . \end{aligned}$$

Nun lässt sich die Berechnungsvorschrift für  $T_y(\Phi_0(x,y))$  aus den beiden Teilen  $T_y(\Psi(x,y)I)$  und  $T_y(J(x-y))$  aufstellen:

$$\begin{aligned} &T_y(\Phi_0(x,y)) \\ &= \frac{\lambda+3\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)} T_y(\Psi(x,y)I) + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)} T_y(J(x-y)) \\ &= \frac{1}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)} \left( -\frac{\lambda+3\mu}{\|x-y\|_2^2} [\lambda\nu(y)(y-x)^\top + \mu(y-x)\nu(y)^\top \right. \\ &\quad \left. + \mu\nu(y)^\top(y-x)I] + \frac{\lambda+\mu}{\|x-y\|_2^2} [(\lambda+2\mu)\nu(y)(y-x)^\top + \mu(y-x)\nu(y)^\top \right. \\ &\quad \left. + \mu\nu(y)^\top(y-x)(I-4J(x-y))] \right) . \end{aligned}$$

Nach dem Kürzen und Zusammenfassen der Terme ergibt sich der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} T_y(\Phi_0(x,y)) &= \frac{1}{2\pi(\lambda+2\mu)\|x-y\|_2^2} [ \mu\nu(y)(y-x)^\top - \mu(y-x)\nu(y)^\top \\ &\quad - \mu\nu(y)^\top(y-x)I - 2(\lambda+\mu)\nu(y)^\top(y-x)J(x-y) ] . \end{aligned}$$

Zur Vereinheitlichung werden an dieser Stelle

$$c = y_1 - x_1 = -a \quad \text{und} \quad d = y_2 - x_2 = -b$$

definiert.

Es kann gezeigt werden, dass

$$\nu(y)(y-x)^\top - (y-x)\nu(y)^\top = \theta(y)^\top(y-x)Q \quad \text{mit} \quad \nu = Q\theta = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ -\theta_1 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\begin{aligned}
 \nu(y)(y-x)^\top - (y-x)\nu(y)^\top &= \begin{pmatrix} \nu_1(y)c & \nu_1(y)d \\ \nu_2(y)c & \nu_2(y)d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nu_1(y)c & \nu_2(y)c \\ \nu_1(y)d & \nu_2(y)d \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \nu_1(y)d - \nu_2(y)c \\ \nu_2(y)c - \nu_1(y)d & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \theta_2(y)d + \theta_1(y)c \\ -\theta_1(y)c - \theta_2(y)d & 0 \end{pmatrix} \\
 &= [\theta_1(y)(y_1 - x_1) + \theta_2(y)(y_2 - x_2)] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \theta(y)^\top (y-x)Q .
 \end{aligned}$$

Der Vektor  $\theta$  kann als Tangentenvektor auf dem Rand  $\partial\Omega$  interpretiert werden. Wird der obige Zusammenhang in  $T_y(\Phi_0(x, y))$  substituiert, gilt:

$$\begin{aligned}
 T_y(\Phi_0(x, y)) &= \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)\|x-y\|_2^2} [\mu\theta(y)^\top (y-x)Q - \mu\nu(y)^\top (y-x)I \\
 &\quad - 2(\lambda + \mu)\nu(y)^\top (y-x)J(x-y)] .
 \end{aligned}$$

Da für die Normalenableitung von  $\Psi(x, y)$

$$\frac{\partial\Psi(x, y)}{\partial\nu(y)} = \nu(y)^\top \cdot \nabla_y \Psi(x, y) = -\frac{1}{\|x-y\|_2^2} \nu(y)^\top (y-x)$$

und für die Tangentenableitung

$$\frac{\partial\Psi(x, y)}{\partial\theta(y)} = \theta(y)^\top \cdot \nabla_y \Psi(x, y) = -\frac{1}{\|x-y\|_2^2} \theta(y)^\top (y-x)$$

gilt, ergibt sich für  $T_y(\Phi_0(x, y))$ :

$$T_y(\Phi_0(x, y)) = \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \left( [\mu I + 2(\lambda + \mu)J(x-y)] \frac{\partial\Psi(x, y)}{\partial\nu(y)} - \mu Q \frac{\partial\Psi(x, y)}{\partial\theta(y)} \right) .$$

Für die Lösung der Integralgleichung ist es nötig, die Transponierte von  $T_y(\Phi_0(x, y))$  zu bestimmen. Dabei wird berücksichtigt, dass die Transponierte einer Summe die Summe der einzelnen Transponierten ist und sowohl die Normalen- als auch die Tangentenableitung skalare Werte sind:

$$\begin{aligned}
 [T_y(\Phi_0(x, y))]^\top &= \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \left( [\mu I^\top + 2(\lambda + \mu)J(x-y)^\top] \frac{\partial\Psi(x, y)}{\partial\nu(y)} \right. \\
 &\quad \left. - \mu Q^\top \frac{\partial\Psi(x, y)}{\partial\theta(y)} \right) .
 \end{aligned}$$

Da die Einheitsmatrix  $I$  und das dyadische Produkt  $J(x-y)$  symmetrische Matrizen sind, kann auf das Transponieren verzichtet werden. Für die Transponierte der Matrix  $Q$  gilt:

$$Q^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -Q .$$

Wird dieser Zusammenhang in die obige Gleichung eingesetzt, so gilt:

$$\begin{aligned} [T_y(\Phi_0(x, y))]^\top &= \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \left( [\mu I + 2(\lambda + \mu)J(x - y)] \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right. \\ &\quad \left. + \mu Q \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial \theta(y)} \right) . \end{aligned}$$

Aus der Berechnungsvorschrift ergibt sich mit den approximierten Kreissegmenten und zugehörigen Normalenvektoren (vgl. Seite [12](#)) für die Einträge der Matrix  $A$  (vgl. Seite [10](#)):

$$\begin{aligned} A_{2i-1, 2j-1} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0(\hat{v}_i, g_j))]_{11}^\top J_j \, dt \\ &= \frac{J_j}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \int_0^1 \left[ \mu + 2(\lambda + \mu) \frac{(\hat{v}_{i,x} - g_{j,x})^2}{\|\hat{v}_i - g_j\|_2^2} \right] \frac{\partial \Psi(\hat{v}_i, g_j)}{\partial n_y} \, dt , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2i-1, 2j} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0(\hat{v}_i, g_j))]_{12}^\top J_j \, dt \\ &= \frac{J_j}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \int_0^1 2(\lambda + \mu) \frac{(\hat{v}_{i,x} - g_{j,x})(\hat{v}_{i,y} - g_{j,y})}{\|\hat{v}_i - g_j\|_2^2} \frac{\partial \Psi(\hat{v}_i, g_j)}{\partial n_y} \\ &\quad + \mu \frac{\partial \Psi(\hat{v}_i, g_j)}{\partial t_y} \, dt , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2i, 2j-1} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0(\hat{v}_i, g_j))]_{21}^\top J_j \, dt \\ &= \frac{J_j}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \int_0^1 2(\lambda + \mu) \frac{(\hat{v}_{i,x} - g_{j,x})(\hat{v}_{i,y} - g_{j,y})}{\|\hat{v}_i - g_j\|_2^2} \frac{\partial \Psi(\hat{v}_i, g_j)}{\partial n_y} \\ &\quad - \mu \frac{\partial \Psi(\hat{v}_i, g_j)}{\partial t_y} \, dt , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2i, 2j} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0(\hat{v}_i, g_j))]_{22}^\top J_j \, dt \\ &= \frac{J_j}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \int_0^1 \left[ \mu + 2(\lambda + \mu) \frac{(\hat{v}_{i,y} - g_{j,y})^2}{\|\hat{v}_i - g_j\|_2^2} \right] \frac{\partial \Psi(\hat{v}_i, g_j)}{\partial n_y} \, dt . \end{aligned}$$

### Diagonalelemente

Mit den bekannten Zusammenhängen (a) – (d) (vgl. Seite 22 f.) für die Diagonalelemente ergibt sich für  $T_y(\Phi_0(\hat{v}_i, g_j))$ :

$$\begin{aligned} T_y(\Phi_0(\hat{v}_i, g_i)) &= \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \left( \left[ \mu I + 2(\lambda + \mu) \frac{(t - \frac{1}{2})^2}{|\frac{1}{2} - t|^2 J_i^2} (v_{i+1} - v_i) \cdot (v_{i+1} - v_i)^\top \right] \right. \\ &\quad \cdot \frac{t - \frac{1}{2}}{|\frac{1}{2} - t|^2 J_i^2} (v_{i+1} - v_i)^\top \frac{1}{J_i} \begin{pmatrix} v_{i+1,y} - v_{i,y} \\ v_{i,x} - v_{i+1,x} \end{pmatrix} \\ &\quad \left. - \mu Q \frac{t - \frac{1}{2}}{|\frac{1}{2} - t|^2 J_i^2} (v_{i+1} - v_i)^\top \frac{1}{J_i} (v_{i+1} - v_i) \right). \end{aligned}$$

Wird

$$\frac{(\frac{1}{2} - t)^2}{|\frac{1}{2} - t|^2} = 1, \quad \frac{t - \frac{1}{2}}{|\frac{1}{2} - t|^2} = \frac{1}{t - \frac{1}{2}} \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1$$

verwendet, lässt sich die Berechnung von  $T_y(\Phi_0(\hat{v}_i, g_i))$  vereinfachen zu:

$$\begin{aligned} T_y(\Phi_0(\hat{v}_i, g_i)) &= \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \left( \left[ \mu I + \frac{2(\lambda + \mu)}{J_i^2} (v_{i+1} - v_i)(v_{i+1} - v_i)^\top \right] \right. \\ &\quad \cdot \frac{1}{(t - \frac{1}{2}) J_i^3} (v_{i+1} - v_i)^\top \begin{pmatrix} v_{i+1,y} - v_{i,y} \\ v_{i,x} - v_{i+1,x} \end{pmatrix} \\ &\quad \left. - \mu Q \frac{1}{(t - \frac{1}{2}) J_i^3} (v_{i+1} - v_i)^\top (v_{i+1} - v_i) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{(t - \frac{1}{2}) J_i^3} \left( \left[ \mu I + \frac{2(\lambda + \mu)}{J_i^2} (v_{i+1} - v_i)(v_{i+1} - v_i)^\top \right] \right. \\ &\quad \cdot (v_{i+1} - v_i)^\top \begin{pmatrix} v_{i+1,y} - v_{i,y} \\ v_{i,x} - v_{i+1,x} \end{pmatrix} - \mu Q (v_{i+1} - v_i)^\top (v_{i+1} - v_i) \left. \right). \end{aligned}$$

Aus der letzten Darstellung ergibt sich, dass bei der Integration lediglich der Term

$$\frac{1}{t - \frac{1}{2}}$$

berücksichtigt werden muss, da die anderen Terme unabhängig von  $t$  sind. Da der Integrand an der Stelle  $t = \frac{1}{2}$  eine Singularität besitzt, wird der Wert des

Integrals als *Cauchyscher Hauptwert* ermittelt (vgl. [8] Seite 155 ff.):

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt + \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \left[ \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| \right) \right]_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} + \left[ \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| \right) \right]_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \right\} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \log(\varepsilon) - \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log(\varepsilon) \right] \\
&= 0 .
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Da das Integral den Wert 0 annimmt, haben die Diagonalelemente der Matrix  $A$  ebenfalls den Wert 0:

$$A_{2i-1,2i-1} = A_{2i-1,2i} = A_{2i,2i-1} = A_{2i,2i} = 0 .$$

### 3.1.3 Traktion des Einfachschichtpotentials

Die Traktion des Einfachschichtpotentials auf dem

$$(D_0^\top \psi)(x) = T_x((S_0 \psi)(x)) = \int_{\partial\Omega} T_x(\Phi_0(x, y)) \psi(y) \, ds(y)$$

hat nach der Diskretisierung des Randes  $\partial\Omega$  mit  $n$  Stützstellen die folgende Form:

$$\sum_{j=1}^n \left[ \int_0^1 T_x(\Phi_0(x, (1-t)v_j + tv_{j+1})) J_j \, dt \psi(\hat{v}_j) \right] .$$

Zunächst wird die Berechnungsvorschrift für den Kern  $T_x(\Phi_0(x, y))$  bestimmt, um anschließend das Gleichungssystem nach  $\psi$  aufzulösen.

Der mit  $T_x$  bezeichnete Traktionsoperator

$$T_x(z) = \lambda \operatorname{div}(z) \nu + 2\mu (\nu^\top \operatorname{grad}) z + \mu \operatorname{div}(Qz) Q\nu$$

wird an dieser Stelle bezüglich  $x$  angewendet. Die Matrix  $Q$  hat die Form

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und  $\nu$  ist der normierte Normalenvektor des Kollokationspunktes  $x$ , der ins Außengebiet zeigt.

Bei der Anwendung des Traktionsoperators auf die Fundamentallösung der Navier-Gleichung ergibt sich der folgende Zusammenhang:

$$T_x(\Phi_0(x, y)) = \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} T_x(\Psi(x, y)I) + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} T_x(J(x - y)) .$$

Die Berechnung von  $T_x(\Phi_0(x, y))$  erfolgt auf die gleiche Art und Weise, wie die Berechnung von  $T_y(\Phi_0(x, y))$  für das Doppelschichtpotential der Navier-Gleichung. Mithilfe der Regel 3.1 lässt sich  $T_x(\Psi(x, y)I)$  bestimmen. Die Funktion

$$\Psi(r) = \log\left(\frac{1}{r}\right)$$

ist stetig differenzierbar und für die Ableitung gilt:

$$\Psi'(r) = -\frac{1}{r} .$$

Wird dies in die erste Regel eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} & T_x(\Psi(\|x - y\|_2)I) \\ &= \frac{\Psi'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} [\lambda\nu(x)(x - y)^\top + \mu(x - y)\nu(x)^\top + \mu\nu(x)^\top(x - y)I] \\ &= -\frac{1}{\|x - y\|_2^2} [\lambda\nu(x)(x - y)^\top + \mu(x - y)\nu(x)^\top + \mu\nu(x)^\top(x - y)I] . \end{aligned}$$

Der Term  $T_x(J(x - y))$  wurde bereits für das Doppelschichtpotential hergeleitet und es gilt:

$$\begin{aligned} T_x(J(x - y)) &= \frac{1}{\|x - y\|_2^2} [(\lambda + 2\mu)\nu(x)(x - y)^\top + \mu(x - y)\nu(x)^\top \\ &\quad + \mu\nu(x)^\top(x - y)(I - 4J(x - y))] . \end{aligned}$$

Aus den beiden Teilen kann nun die Berechnungsvorschrift für  $T_x(\Phi_0(x, y))$  aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} T_x(\Phi_0(x, y)) &= \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} T_x(\Psi(x, y)I) + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} T_x(J(x - y)) \\ &= \frac{1}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left( -\frac{\lambda + 3\mu}{\|x - y\|_2^2} [\lambda\nu(x)(x - y)^\top + \mu(x - y)\nu(x)^\top \right. \\ &\quad \left. + \mu\nu(x)^\top(x - y)I] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda + \mu}{\|x - y\|_2^2} [(\lambda + 2\mu)\nu(x)(x - y)^\top + \mu(x - y)\nu(x)^\top \right. \\ &\quad \left. + \mu\nu(x)^\top(x - y)(I - 4J(x - y))] \right) . \end{aligned}$$

Nach dem Kürzen und Zusammenfassen der Terme ergibt sich der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} T_x(\Phi_0(x, y)) &= \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)\|x - y\|_2^2} [\mu\nu(x)(x - y)^\top - \mu(x - y)\nu(x)^\top \\ &\quad - \mu\nu(x)^\top(x - y)I - 2(\lambda + \mu)\nu(x)^\top(x - y)J(x - y)] . \end{aligned}$$

Analog zu

$$\nu(y)(y - x)^\top - (y - x)\nu(y)^\top = \theta(y)^\top(y - x)Q \quad \text{mit } \nu = Q\theta = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ -\theta_1 \end{pmatrix}$$

kann gezeigt werden, dass

$$\nu(x)(x - y)^\top - (x - y)\nu(x)^\top = \theta(x)^\top(x - y)Q \quad \text{mit } \nu = Q\theta = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ -\theta_1 \end{pmatrix}$$

gilt. Dabei kann der Vektor  $\theta$  als Tangentenvektor in dem Kollokationspunkt  $x$  interpretiert werden.

Der obige Zusammenhang wird in  $T_x(\Phi_0(x, y))$  substituiert und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} T_x(\Phi_0(x, y)) &= \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)\|x - y\|_2^2} [\mu\theta(x)^\top(x - y)Q - \mu\nu(x)^\top(x - y)I \\ &\quad - 2(\lambda + \mu)\nu(x)^\top(x - y)J(x - y)] . \end{aligned}$$

Wird berücksichtigt, dass für die Normalenableitung von  $\Psi(x, y)$

$$\frac{\partial\Psi(x, y)}{\partial\nu(x)} = \nu(x)^\top \cdot \nabla_x\Psi(x, y) = -\frac{1}{\|x - y\|_2^2}\nu(x)^\top(x - y)$$

und für die Tangentenableitung

$$\frac{\partial\Psi(x, y)}{\partial\theta(x)} = \theta(x)^\top \cdot \nabla_x\Psi(x, y) = -\frac{1}{\|x - y\|_2^2}\theta(x)^\top(x - y)$$

gilt, so ergibt sich für  $T_x(\Phi_0(x, y))$ :

$$T_x(\Phi_0(x, y)) = \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \left( [\mu I + 2(\lambda + \mu)J(x - y)] \frac{\partial\Psi(x, y)}{\partial\nu(x)} - \mu Q \frac{\partial\Psi(x, y)}{\partial\theta(x)} \right) .$$

Mit der aufgestellten Berechnungsvorschrift gilt für die Integrale und damit für die Einträge in die Matrix  $A$  (vgl. Seite [10](#)):

$$\begin{aligned} A_{2i-1,2j-1} &= \int_0^1 T_x^{11}[\Phi_0(\hat{v}_i, g_j)] J_j dt \\ &= \frac{J_j}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \int_0^1 \left[ \mu + 2(\lambda + \mu) \frac{(\hat{v}_{i,x} - g_{j,x})^2}{\|\hat{v}_i - g_j\|_2^2} \right] \frac{\partial \Psi(\hat{v}_i, g_j)}{\partial n_x} dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2i-1,2j} &= \int_0^1 T_x^{12}[\Phi_0(\hat{v}_i, g_j)] J_j dt \\ &= \frac{J_j}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \int_0^1 2(\lambda + \mu) \frac{(\hat{v}_{i,x} - g_{j,x})(\hat{v}_{i,y} - g_{j,y})}{\|\hat{v}_i - g_j\|_2^2} \frac{\partial \Psi(\hat{v}_i, g_j)}{\partial n_x} \\ &\quad - \mu \frac{\partial \Psi(\hat{v}_i, g_j)}{\partial t_x} dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2i,2j-1} &= \int_0^1 T_x^{21}[\Phi_0(\hat{v}_i, g_j)] J_j dt \\ &= \frac{J_j}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \int_0^1 2(\lambda + \mu) \frac{(\hat{v}_{i,x} - g_{j,x})(\hat{v}_{i,y} - g_{j,y})}{\|\hat{v}_i - g_j\|_2^2} \frac{\partial \Psi(\hat{v}_i, g_j)}{\partial n_x} \\ &\quad + \mu \frac{\partial \Psi(\hat{v}_i, g_j)}{\partial t_x} dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2i,2j} &= \int_0^1 T_x^{22}[\Phi_0(\hat{v}_i, g_j)] J_j dt \\ &= \frac{J_j}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \int_0^1 \left[ \mu + 2(\lambda + \mu) \frac{(\hat{v}_{i,y} - g_{j,y})^2}{\|\hat{v}_i - g_j\|_2^2} \right] \frac{\partial \Psi(\hat{v}_i, g_j)}{\partial n_x} dt. \end{aligned}$$

### Diagonalelemente

Unter Verwendung der Zusammenhänge (a) – (d) (vgl. Seite [22](#) f.) für die Diagonalelemente ergibt sich für  $T_x(\Phi_0(x, y))$ :

$$\begin{aligned} T_x(\Phi_0(\hat{v}_i, g_i)) &= \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \left( \left[ \mu I + 2(\lambda + \mu) \frac{\left(\frac{1}{2} - t\right)^2}{\left|\frac{1}{2} - t\right|^2 J_i^2} (v_{i+1} - v_i) \cdot (v_{i+1} - v_i)^\top \right] \right. \\ &\quad \cdot \left( -\frac{\frac{1}{2} - t}{\left|\frac{1}{2} - t\right|^2 J_i^2} \right) (v_{i+1} - v_i)^\top \frac{1}{J_i} \begin{pmatrix} v_{i+1,y} - v_{i,y} \\ v_{i,x} - v_{i+1,x} \end{pmatrix} \\ &\quad \left. - \mu Q \left( -\frac{\frac{1}{2} - t}{\left|\frac{1}{2} - t\right|^2 J_i^2} \right) (v_{i+1} - v_i)^\top \frac{1}{J_i} (v_{i+1} - v_i) \right). \end{aligned}$$

Werden die Zusammenhänge

$$\frac{\left(\frac{1}{2} - t\right)^2}{\left|\frac{1}{2} - t\right|^2} = 1, \quad \frac{\frac{1}{2} - t}{\left|\frac{1}{2} - t\right|^2} = \frac{1}{\frac{1}{2} - t} \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1$$

verwendet, lässt sich die Berechnung von  $T_x(\Phi_0(x, y))$  vereinfachen zu:

$$\begin{aligned} T_x(\Phi_0(\hat{v}_i, g_i)) &= \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \left( \left[ \mu I + \frac{2(\lambda + \mu)}{J_i^2} (v_{i+1} - v_i) \cdot (v_{i+1} - v_i)^\top \right] \right. \\ &\quad \cdot \left( -\frac{1}{\left(\frac{1}{2} - t\right) J_i^3} \right) (v_{i+1} - v_i)^\top \begin{pmatrix} v_{i+1,y} - v_{i,y} \\ v_{i,x} - v_{i+1,x} \end{pmatrix} \\ &\quad - \mu Q \left( -\frac{1}{\left(\frac{1}{2} - t\right) J_i^3} \right) (v_{i+1} - v_i)^\top (v_{i+1} - v_i) \left. \right) \\ &= \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{\left(t - \frac{1}{2}\right) J_i^3} \left( \left[ \mu I + \frac{2(\lambda + \mu)}{J_i^2} (v_{i+1} - v_i) (v_{i+1} - v_i)^\top \right] \right. \\ &\quad \cdot (v_{i+1} - v_i)^\top \begin{pmatrix} v_{i+1,y} - v_{i,y} \\ v_{i,x} - v_{i+1,x} \end{pmatrix} - \mu Q (v_{i+1} - v_i)^\top (v_{i+1} - v_i) \left. \right) . \end{aligned}$$

Aus dieser Vorschrift ergibt sich, dass bei der Integration lediglich der Term

$$\frac{1}{t - \frac{1}{2}}$$

berücksichtigt werden muss, da die anderen Terme unabhängig von  $t$  sind. Aufgrund des Zusammenhangs

$$\frac{1}{t - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{\frac{1}{2} - t}$$

kann das beim Doppelschichtpotential berechnete Integral (3.1) verwendet werden. Da das Integral den Wert 0 hat, gilt für die Diagonalelemente der Matrix  $A$ :

$$A_{2i-1,2i-1} = A_{2i-1,2i} = A_{2i,2i-1} = A_{2i,2i} = 0 .$$

### 3.1.4 Traktion des Doppelschichtpotentials

Für die Traktion des Doppelschichtpotentials auf dem Rand

$$(N_0\psi)(x) = T_x(D_0\psi(x)) = T_x \left( \int_{\partial\Omega} [T_y(\Phi_0(x, y))]^\top \psi(y) \, ds(y) \right)$$

kann unter bestimmten Voraussetzungen (siehe dazu [5, Theorem 2]) die Vertauschung

$$T_x \left( \int_{\partial\Omega} [T_y(\Phi_0(x, y))]^\top \psi(y) \, ds(y) \right) = \int_{\partial\Omega} T_x \left( [T_y(\Phi_0(x, y))]^\top \right) \psi(y) \, ds(y)$$

vorgenommen werden. Nach der Diskretisierung des Randes  $\partial\Omega$  mit  $n$  Stützstellen gilt daher der Zusammenhang:

$$\sum_{j=1}^n \left[ \int_0^1 T_x \left( [T_y(\Phi_0(\hat{v}_i, (1-t)v_j + tv_{j+1}))]^\top \right) J_j \, dt \psi(\hat{v}_j) \right].$$

Der mit  $T_x$  bzw.  $T_y$  bezeichnete Traktionsoperator

$$T_x(z) = \lambda \operatorname{div}(z) \nu + 2\mu (\nu^\top \operatorname{grad}) z + \mu \operatorname{div}(Qz) Q\nu$$

wird an dieser Stelle sowohl bezüglich  $x$  als auch bezüglich  $y$  verwendet. Der Vektor  $\nu$  ist der entsprechende normierte Normalenvektor, der ins Außengebiet gerichtet ist und  $Q$  die Matrix:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für  $[T_y(\Phi_0(x, y))]^\top$  wurde bereits beim Doppelschichtpotential eine Berechnungsvorschrift hergeleitet

$$[T_y(\Phi_0(x, y))]^\top = \frac{1}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left[ (\lambda + 3\mu) \frac{\Psi'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} U_1(y, x) + \frac{\lambda + \mu}{\|x - y\|_2^2} U_2(y, x) \right]$$

mit

$$\begin{aligned} \Psi'(r) &= -\frac{1}{r}, \\ U_1(y, x) &= \lambda\nu(y)(y - x)^\top + \mu(y - x)\nu(y)^\top + \mu\nu(y)^\top(y - x)I \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} U_2(y, x) &= (\lambda + 2\mu)\nu(y)(y - x)^\top + \mu(y - x)\nu(y)^\top \\ &\quad + \mu\nu(y)^\top(y - x) [I - 4J(x - y)]. \end{aligned}$$

Die Berechnung von  $T_x([T_y(\Phi_0(x, y))]^\top)$  orientiert sich an [5, Seite 607] und wird durch Beweise und ergänzende Rechenschritte vervollständigt. Dabei werden bereits

bekannte Regeln aus Kapitel [3.1.2](#) verwendet und später durch eine weitere Regel ergänzt.

Mit der Produktregel des Traktionsoperators für eine Funktion  $f$  und eine Matrix  $G$

$$T_x(fG) = T_x(fI)G + fT_x(G)$$

gilt für die Anwendung des Traktionsoperators bzgl.  $x$  auf die obige Vorschrift:

$$\begin{aligned} & T_x ([T_y (\Phi_0(x, y))]^\top) \\ &= \frac{1}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left( (\lambda + 3\mu) \left[ T_x \left( \frac{\Psi'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} I \right) U_1(y, x)^\top \right. \right. \\ &+ \left. \frac{\Psi'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} T_x (U_1(y, x)^\top) \right] + (\lambda + \mu) \left[ T_x \left( \frac{1}{\|x - y\|_2^2} I \right) U_2(y, x)^\top \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{\|x - y\|_2^2} T_x (U_2(y, x)^\top) \right] \right) . \end{aligned}$$

Mithilfe der Regel [3.1](#)

$$\begin{aligned} & T_x (f(\|x - y\|_2)I) \\ &= \frac{f'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} [\lambda\nu(x)(x - y)^\top + \mu(x - y)\nu(x)^\top + \mu\nu(x)^\top(x - y)I] \\ &= \frac{f'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} U_1(x, y) \end{aligned}$$

können die Terme

$$T_x \left( \frac{\Psi'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} I \right) \quad \text{bzw.} \quad T_x \left( \frac{1}{\|x - y\|_2^2} I \right)$$

berechnet werden. Für die Ableitung von

$$\frac{\Psi'(r)}{r}$$

mit  $r = \|x - y\|_2$  gilt:

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\Psi(r)}{r} = \frac{\Psi''(r)}{r} - \frac{\Psi'(r)}{r^2} .$$

Dies bedeutet für den ersten Term:

$$T_x \left( \frac{\Psi'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} I \right) = \left( \frac{\Psi''(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} - \frac{\Psi'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2^2} \right) \frac{U_1(x, y)}{\|x - y\|_2} .$$

Werden die Ableitungen durch

$$\Psi'(r) = -\frac{1}{r} \quad \text{bzw.} \quad \Psi''(r) = \frac{1}{r^2}$$

ersetzt, so ergibt sich:

$$T_x \left( \frac{\Psi'(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2} I \right) = \left( \frac{1}{\|x-y\|_2^3} + \frac{1}{\|x-y\|_2^3} \right) \frac{U_1(x,y)}{\|x-y\|_2} = \frac{2}{\|x-y\|_2^4} U_1(x,y) .$$

Die Berechnung des zweiten Terms wurde bereits für das Doppelschichtpotential durchgeführt und lieferte

$$T_x \left( \frac{1}{\|x-y\|_2^2} I \right) = -\frac{2}{\|x-y\|_2^4} U_1(x,y) .$$

als Ergebnis.

Für die Berechnung von  $T_x (U_1(y, x)^\top)$  und  $T_x (U_2(y, x)^\top)$  wird an dieser Stelle eine weitere Regel vorgestellt und bewiesen.

**Regel 3.3.** Für einen konstanten Vektor  $a \in \mathbb{R}^2$  und einen beliebigen Vektor  $x \in \mathbb{R}^2$  gilt:

$$i) T_x (x a^\top) = 2(\lambda + \mu)\nu(x)a^\top ,$$

$$ii) T_x (a x^\top) = \lambda\nu(x)a^\top + \mu a\nu(x)^\top + \mu\nu(x)^\top aI ,$$

$$iii) T_x (a^\top xI) = T_x (ax^\top) .$$

*Beweis.* (i) Die Matrix  $xa^\top$  hat die Form:

$$xa^\top = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a_1 & x_1 a_2 \\ x_2 a_1 & x_2 a_2 \end{pmatrix} .$$

Für die Anwendung des Traktionsoperators auf die erste Spalte ergibt sich:

$$\begin{aligned} T_x \begin{pmatrix} x_1 a_1 \\ x_2 a_1 \end{pmatrix} &= a_1 T_x \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= a_1 \left[ \lambda \operatorname{div} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \nu(x) + 2\mu \left( \nu(x)^\top \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \mu \operatorname{div} \left( Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \nu(x) \right] \\ &= a_1 [2\lambda \nu(x) + 2\mu \nu(x)] . \end{aligned}$$

Analog gilt für die zweite Spalte

$$T_x \begin{pmatrix} x_1 a_2 \\ x_2 a_2 \end{pmatrix} = a_2 T_x \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_2 [2\lambda \nu(x) + 2\mu \nu(x)] .$$

Damit ergibt sich für die Anwendung des Traktionsoperators auf die gesamte Matrix:

$$T_x (xa^\top) = 2(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} a_1\nu(x) & a_2\nu(x) \end{pmatrix} = 2(\lambda + \mu)\nu(x)a^\top .$$

(ii) Für die Matrix  $ax^\top$  gilt:

$$ax^\top = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1 & a_1x_2 \\ a_2x_1 & a_2x_2 \end{pmatrix} .$$

Wird der Traktionsoperator auf die erste Spalte angewendet, ergibt sich:

$$\begin{aligned} T_x \begin{pmatrix} a_1x_1 \\ a_2x_1 \end{pmatrix} &= \lambda \operatorname{div} \begin{pmatrix} a_1x_1 \\ a_2x_1 \end{pmatrix} \nu(x) + 2\mu \left( \nu(x)^\top \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a_1x_1 \\ a_2x_1 \end{pmatrix} \\ &+ \mu \operatorname{div} \left( Q \begin{pmatrix} a_1x_1 \\ a_2x_1 \end{pmatrix} \right) \nu(x) \\ &= \lambda a_1\nu(x) + \mu\nu_1(x)a + \mu[a_1\nu_1(x) + a_2\nu_2(x)] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Analog gilt für die Anwendung auf die zweite Spalte

$$\begin{aligned} T_x \begin{pmatrix} a_1x_2 \\ a_2x_2 \end{pmatrix} &= \lambda \operatorname{div} \begin{pmatrix} a_1x_2 \\ a_2x_2 \end{pmatrix} \nu(x) + 2\mu \left( \nu(x)^\top \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a_1x_2 \\ a_2x_2 \end{pmatrix} \\ &+ \mu \operatorname{div} \left( Q \begin{pmatrix} a_1x_2 \\ a_2x_2 \end{pmatrix} \right) \nu(x) \\ &= \lambda a_2\nu(x) + \mu\nu_2(x)a + \mu[a_1\nu_1(x) + a_2\nu_2(x)] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit insgesamt:

$$T_x (ax^\top) = \lambda\nu(x)a^\top + \mu a\nu(x)^\top + \mu\nu(x)^\top aI .$$

(iii) Für die Matrix  $a^\top xI$  gilt:

$$a^\top xI = \begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 & 0 \\ 0 & a_1\nu_1(x) + a_2\nu_2(x) \end{pmatrix} .$$

Bei der Anwendung des Traktionsoperators auf die erste Spalte ergibt sich:

$$\begin{aligned} &T_x \begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \operatorname{div} \begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \nu(x) + 2\mu \left( \nu(x)^\top \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \mu \operatorname{div} \left( Q \begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \nu(x) \\ &= \lambda a_1\nu(x) + \mu \nu_1(x)a + \mu [a_1\nu_1(x) + a_2\nu_2(x)] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T_x \begin{pmatrix} a_1x_1 \\ a_2x_1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Für die zweite Spalte gilt analog

$$\begin{aligned}
 & T_x \begin{pmatrix} 0 \\ a_1x_1 + a_2x_2 \end{pmatrix} \\
 = & \lambda \operatorname{div} \begin{pmatrix} 0 \\ a_1x_1 + a_2x_2 \end{pmatrix} \nu(x) + 2\mu \left( \nu(x)^\top \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ a_1x_1 + a_2x_2 \end{pmatrix} \\
 + & \mu \operatorname{div} \left( Q \begin{pmatrix} 0 \\ a_1x_1 + a_2x_2 \end{pmatrix} \right) \nu(x) \\
 = & \lambda a_2 \nu(x) + \mu \nu_2(x) a + \mu [a_1 \nu_1(x) + a_2 \nu_2(x)] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T_x \begin{pmatrix} a_1x_2 \\ a_2x_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

und daher insgesamt

$$T_x (a^\top x I) = T_x (ax^\top) .$$

□

Wird der Traktionsoperator auf

$$U_1(y, x)^\top = \lambda(y - x)\nu(y)^\top + \mu\nu(y)(y - x)^\top + \mu\nu(y)^\top(y - x)I$$

mit  $a = \nu(y)$  angewendet, so gilt unter Verwendung der vorgestellten Regel der Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
 T_x (U_1(y, x)^\top) &= -\lambda T_x((x - y)\nu(y)^\top) - \mu T_x(\nu(y)(x - y)^\top) - \mu T_x(\nu(y)^\top(x - y)) \\
 &= -2\lambda(\lambda + \mu)\nu(x)\nu(y)^\top - 2\mu [\lambda\nu(x)\nu(y)^\top + \mu\nu(y)\nu(x)^\top \\
 &\quad + \mu\nu(x)^\top\nu(y)I] \\
 &= -2\lambda(\lambda + 2\mu)\nu(x)\nu(y)^\top - 2\mu^2 [\nu(y)\nu(x)^\top + \nu(x)^\top\nu(y)I] .
 \end{aligned}$$

Für die Anwendung des Traktionsoperators auf

$$\begin{aligned}
 & U_2(y, x)^\top \\
 = & (\lambda + 2\mu)(y - x)\nu(y)^\top + \mu\nu(y)(y - x)^\top + \mu\nu(y)^\top(y - x) [I - 4J(x - y)]
 \end{aligned}$$

ergibt sich der Term:

$$\begin{aligned}
 T_x (U_2(y, x)^\top) &= -(\lambda + 2\mu)T_x((x - y)\nu(y)^\top) - \mu T_x(\nu(y)(x - y)^\top) \\
 &\quad - \mu T_x(\nu(y)^\top(x - y)^\top I) + 4\mu T_x(\nu(y)^\top(x - y)J(x - y)) \\
 &= -2(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)\nu(x)\nu(y)^\top \\
 &\quad - 2\mu [\lambda\nu(x)\nu(y)^\top + \mu\nu(y)\nu(x)^\top + \mu\nu(x)^\top\nu(y)I] \\
 &\quad + 4\mu [\lambda\nu(x)\nu(y)^\top + \mu\nu(y)\nu(x)^\top + \mu\nu(x)^\top\nu(y)I] J(x - y) \\
 &\quad + 4\mu\nu(y)^\top(x - y)T_x(J(x - y)) .
 \end{aligned}$$

Beim Doppelschichtpotential wurde gezeigt, dass

$$T_x(J(x-y)) = \frac{1}{\|x-y\|_2^2} U_2(x,y)$$

mit

$$\begin{aligned} & U_2(x,y) \\ = & (\lambda + 2\mu)\nu(x)(x-y)^\top + \mu(x-y)\nu(x)^\top + \mu\nu(x)^\top(x-y) [I - 4J(x-y)] \end{aligned}$$

gilt. Mit diesem Zusammenhang ergibt sich für den obigen Term:

$$\begin{aligned} T_x(U_2(y,x)^\top) &= -4\mu\nu(y)^\top(y-x) \frac{U_2(x,y)}{\|x-y\|_2^2} - 2(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)\nu(x)\nu(y)^\top \\ &\quad - 2\mu [\lambda\nu(x)\nu(y)^\top + \mu\nu(y)\nu(x)^\top + \mu\nu(x)^\top\nu(y)] [I - 2J(x-y)] . \end{aligned}$$

Im Folgenden werden die berechneten Terme nicht durch ihre Berechnungsvorschrift ersetzt, da dies zu einer länglichen Darstellung von  $T_x([T_y(\Phi_0(x,y))]^\top)$  führen würde. Insgesamt ergibt sich mit  $r = \|x-y\|_2$  der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} T_x([T_y(\Phi_0(x,y))]^\top) &= (\lambda + 3\mu) \left[ \frac{2}{r^4} U_1(x,y)U_1(y,x)^\top - \frac{1}{r^2} T_x(U_1(y,x)^\top) \right] \\ &\quad + (\lambda + \mu) \left[ -\frac{2}{r^4} U_1(x,y)U_2(y,x)^\top + \frac{1}{r^2} T_x(U_2(y,x)^\top) \right] \\ &= \frac{2}{r^4} U_1(x,y) [(\lambda + 3\mu)U_1(y,x)^\top - (\lambda + \mu)U_2(y,x)^\top] \\ &\quad - \frac{1}{r^2} [(\lambda + 3\mu)T_x(U_1(y,x)^\top) - (\lambda + \mu)T_x(U_2(y,x)^\top)] . \end{aligned}$$

Für die Einträge in Matrix  $A$  (vgl. Seite 10) gilt:

$$\begin{aligned} A_{2i-1,2j-1} &= J_j \int_0^1 T_x^{11}([T_y(\Phi_0(\hat{v}_i, g_j))]^\top) dt , \\ A_{2i-1,2j} &= J_j \int_0^1 T_x^{12}([T_y(\Phi_0(\hat{v}_i, g_j))]^\top) dt , \\ A_{2i,2j-1} &= J_j \int_0^1 T_x^{21}([T_y(\Phi_0(\hat{v}_i, g_j))]^\top) dt , \\ A_{2i,2j} &= J_j \int_0^1 T_x^{22}([T_y(\Phi_0(\hat{v}_i, g_j))]^\top) dt . \end{aligned}$$

### Diagonalelemente

Für das Skalarprodukt  $n_y^\top(y - x)$  bzw.  $n_x^\top(x - y)$  gilt aufgrund der Zusammenhänge (a) – (d) (vgl. Seite 22 f.) und den aus der Diskretisierung resultierenden Normalenvektoren  $n_y$  und  $n_x$  (vgl. Seite 12):

$$\begin{aligned} n_y^\top(g_i - \hat{v}_i) &= \frac{1}{J_i} \begin{pmatrix} v_{i+1,y} - v_{i,y} \\ v_{i,x} - v_{i+1,x} \end{pmatrix}^\top \left( t - \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} v_{i+1,x} - v_{i,x} \\ v_{i+1,y} - v_{i,y} \end{pmatrix} \\ &= -n_x^\top(\hat{v}_i - g_i) = 0 . \end{aligned}$$

Damit können die auftretenden Matrizen wie folgt vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} U_1(\hat{v}_i, g_i) &= \lambda n_x(\hat{v}_i - g_i)^\top + \mu(\hat{v}_i - g_i)n_x^\top , \\ U_1(g_i, \hat{v}_i) &= \lambda n_y(g_i - \hat{v}_i)^\top + \mu(g_i - \hat{v}_i)n_y^\top , \\ U_2(g_i, \hat{v}_i) &= (\lambda + 2\mu)n_y(g_i - \hat{v}_i)^\top + \mu(g_i - \hat{v}_i)n_y^\top , \\ T_x(U_1(g_i, \hat{v}_i)^\top) &= -2\lambda(\lambda + 2\mu)n_x n_y^\top - 2\mu^2 [n_y n_x^\top + n_x^\top n_y I] , \\ T_x(U_2(g_i, \hat{v}_i)^\top) &= -2(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)n_x n_y^\top - 2\mu [\lambda n_x n_y^\top + \mu n_y n_x^\top + \mu n_x^\top n_y I] \\ &\quad + 4\mu [\lambda n_x n_y^\top + \mu n_y n_x^\top + \mu n_x^\top n_y I] J(\hat{v}_i - g_i) . \end{aligned}$$

Die Berechnungsvorschrift wird im Folgenden in zwei Teile zerlegt

$$\begin{aligned} \text{i) } t_1 &= \frac{2}{r^4} U_1(\hat{v}_i, g_i) [(\lambda + 3\mu)U_1(g_i, \hat{v}_i)^\top - (\lambda + \mu)U_2(g_i, \hat{v}_i)^\top] , \\ \text{ii) } t_2 &= -\frac{1}{r^2} [(\lambda + 3\mu)T_x(U_1(g_i, \hat{v}_i)^\top) - (\lambda + \mu)T_x(U_2(g_i, \hat{v}_i)^\top)] , \end{aligned}$$

die jeweils integriert werden.

Zunächst wird der erste Term umgeformt

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{2}{r^4} U_1(\hat{v}_i, g_i) [(\lambda + 3\mu)U_1(g_i, \hat{v}_i)^\top - (\lambda + \mu)U_2(g_i, \hat{v}_i)^\top] \\ &= \frac{2}{r^4} U_1(\hat{v}_i, g_i) [\lambda (U_1(g_i, \hat{v}_i)^\top - U_2(g_i, \hat{v}_i)^\top) + \mu (3U_1(g_i, \hat{v}_i)^\top - U_2(g_i, \hat{v}_i)^\top)] \end{aligned}$$

und anschließend die Definitionen der jeweiligen Funktionen eingesetzt:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \frac{2}{r^4} U_1(\hat{v}_i, g_i) \left[ -2\lambda\mu(g_i - \hat{v}_i)n_y^\top \right. \\
 &\quad \left. + \mu(2\lambda(g_i - \hat{v}_i)n_y^\top + 2\mu n_y(g_i - \hat{v}_i)^\top - 2\mu(g_i - \hat{v}_i)n_y^\top) \right] \\
 &= \frac{2}{r^4} \left[ \lambda n_x(\hat{v}_i - g_i)^\top + \mu(\hat{v}_i - g_i)n_x^\top \right] 2\mu^2 \left[ n_y(g_i - \hat{v}_i)^\top - (g_i - \hat{v}_i)n_y^\top \right] \\
 &= \frac{4\mu^2}{r^4} \left[ \lambda n_x \underbrace{(\hat{v}_i - g_i)^\top n_y}_{=0} (g_i - \hat{v}_i)^\top - \lambda n_x(\hat{v}_i - g_i)^\top (g_i - \hat{v}_i)n_y^\top \right. \\
 &\quad \left. + \mu(\hat{v}_i - g_i)n_x^\top n_y (g_i - \hat{v}_i)^\top - \mu(\hat{v}_i - g_i) \underbrace{n_x^\top (g_i - \hat{v}_i)}_{=0} n_y^\top \right] \\
 &= \frac{4\mu^2}{r^4} \left[ \mu(\hat{v}_i - g_i)n_x^\top n_y (g_i - \hat{v}_i)^\top - \lambda n_x(\hat{v}_i - g_i)^\top (g_i - \hat{v}_i)n_y^\top \right] .
 \end{aligned}$$

Da die Normalenvektoren  $n_x$  und  $n_y$  normiert und für das Diagonalelement identisch sind, gilt:

$$n_x^\top n_y = 1 .$$

Außerdem gilt der Zusammenhang

$$(\hat{v}_i - g_i)^\top (\hat{v}_i - g_i) = \|\hat{v}_i - g_i\|_2^2 = r^2 ,$$

womit sich die obige Funktion weiter vereinfachen lässt:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \frac{4\mu^2}{r^4} \left[ \lambda r^2 n_x n_y^\top - \mu(\hat{v}_i - g_i)(g_i - \hat{v}_i)^\top \right] \\
 &= \frac{4\mu^2}{\|\hat{v}_i - g_i\|_2^2} \left[ \lambda n_x n_y^\top - \mu \frac{(\hat{v}_i - g_i)(\hat{v}_i - g_i)^\top}{\|\hat{v}_i - g_i\|_2^2} \right] \\
 &= \frac{4\mu^2}{\|\hat{v}_i - g_i\|_2^2} \left[ \lambda n_x n_y^\top - \mu J(\hat{v}_i - g_i) \right] .
 \end{aligned}$$

Da die Matrix

$$J(\hat{v}_i - g_i) = \frac{(\hat{v}_i - g_i)(\hat{v}_i - g_i)^\top}{\|\hat{v}_i - g_i\|_2^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} - t\right)^2 (v_{i+1} - v_i)(v_{i+1} - v_i)^\top}{\left|\frac{1}{2} - t\right|^2 \|v_{i+1} - v_i\|_2^2} = J(v_{i+1} - v_i)$$

nicht vom Parameter  $t$  abhängt, liegt in diesem Fall für  $t = \frac{1}{2}$  eine  $\frac{1}{t^2}$ -Singularität vor:

$$t_1 = \frac{4\mu^2}{\left|\frac{1}{2} - t\right|^2 J_i^2} \left[ \lambda n_x n_y^\top - \mu J(v_{i+1} - v_i) \right] .$$

Das entsprechende Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\left|\frac{1}{2} - t\right|^2} dt$$

kann als *Hadamard finite part integral* berechnet werden, da der *Cauchysche Hauptwert* von

$$\int_0^1 \frac{1}{\left|\frac{1}{2} - t\right|} dt$$

existiert (vgl. [9]):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\left|t - \frac{1}{2}\right|^2} dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \frac{1}{\left|t - \frac{1}{2}\right|^2} dt + \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \frac{1}{\left|t - \frac{1}{2}\right|^2} dt - \frac{2}{\varepsilon} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \left[ -\frac{1}{t - \frac{1}{2}} \right]_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} + \left[ -\frac{1}{t - \frac{1}{2}} \right]_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 - \frac{2}{\varepsilon} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\varepsilon} - 2 - 2 + \frac{1}{\varepsilon} - \frac{2}{\varepsilon} \right) \\ &= -4 . \end{aligned}$$

Für den zweiten Term

$$t_2 = -\frac{1}{r^2} [(\lambda + 3\mu)T_x(U_1(g_i, \hat{v}_i)^\top) - (\lambda + \mu)T_x(U_2(g_i, \hat{v}_i)^\top)]$$

ergibt sich aus der Definition von  $T_x(U_1(g_i, \hat{v}_i)^\top)$  und  $T_x(U_2(g_i, \hat{v}_i)^\top)$ , dass nur der Vorfaktor

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\left|\frac{1}{2} - t\right|^2 J_i^2}$$

von  $t$  abhängt. Der Wert des Integrals über den zweiten Teil ist entsprechend:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{1}{\left|\frac{1}{2} - t\right|^2 J_i^2} dt [ -(\lambda + 3\mu)T_x(U_1(g_i, \hat{v}_i)^\top) + (\lambda + \mu)T_x(U_2(g_i, \hat{v}_i)^\top) ] \\ &= -\frac{4}{J_i^2} [ -(\lambda + 3\mu)T_x(U_1(g_i, \hat{v}_i)^\top) + (\lambda + \mu)T_x(U_2(g_i, \hat{v}_i)^\top) ] . \end{aligned}$$

Damit gilt für das Diagonalelement insgesamt:

$$\begin{aligned} &J_j \int_0^1 T_x([T_y(\Phi_0(\hat{v}_i, g_i))]^\top) dt \\ &= -\frac{16\mu^2}{J_i^2} [\lambda n_x n_y^\top - \mu J(v_{i+1} - v_i)] J_i \\ &+ \frac{4}{J_i^2} [(\lambda + 3\mu)T_x(U_1(g_i, \hat{v}_i)^\top) - (\lambda + \mu)T_x(U_2(g_i, \hat{v}_i)^\top)] J_i . \end{aligned}$$

## 3.2 Dynamischer Fall

Der Differentialoperator für den dynamischen Fall hat die Form

$$L(u) = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \omega^2 \sigma u$$

und für die dazugehörige Fundamentallösung gilt:

$$\begin{aligned} \Phi_\omega(x, y) &= \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_s \|x - y\|_2) I \\ &+ \frac{i}{4\omega^2} \operatorname{grad}_x \operatorname{grad}_x^\top \left[ H_0^{(1)}(k_s \|x - y\|_2) - H_0^{(1)}(k_p \|x - y\|_2) \right] \in \mathbb{C}^{2 \times 2}. \end{aligned}$$

Hierbei ist  $H_0^{(1)}$  die Hankel-Funktion 1. Art der Ordnung 0 und  $I$  die Einheitsmatrix. Die Wellenzahlen  $k_s$  und  $k_p$  hängen im Wesentlichen von der Frequenz  $\omega$  der Welle ab:

$$k_s^2 = \frac{\omega^2}{\mu} \quad \text{und} \quad k_p^2 = \frac{\omega^2}{\lambda + 2\mu}.$$

Für das weitere Vorgehen wird zunächst die Funktion  $\Phi_\omega(x, y)$  näher betrachtet. Die zweifache Anwendung des Gradienten kann mit folgender Matrix

$$\operatorname{grad}_x \operatorname{grad}_x^\top = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

als Matrixmultiplikation dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} \left[ H_0^{(1)}(k_s \|x - y\|_2) - H_0^{(1)}(k_p \|x - y\|_2) \right].$$

Als erstes werden die Ableitungen für  $H_0^{(1)}(k \|x - y\|_2)$  für ein beliebiges  $k$  bezüglich  $x_1$  bzw.  $x_2$  bestimmt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} H_0^{(1)}(k \|x - y\|_2) &= -\frac{k(x_1 - y_1) H_1^{(1)}(k \|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2}, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} H_0^{(1)}(k \|x - y\|_2) &= -\frac{k(x_2 - y_2) H_1^{(1)}(k \|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2}. \end{aligned}$$

Daraus können nun die zweiten Ableitungen unter Verwendung der Produkt-

$$(z_1 \cdot z_2)' = z_1' \cdot z_2 + z_1 \cdot z_2'$$

und Quotientenregel

$$\left( \frac{z}{n} \right)' = \frac{z' \cdot n - z \cdot n'}{n^2}$$

berechnet werden.

Für die doppelte Ableitung nach  $x_1$  gilt mit  $r = \|x - y\|_2$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} H_0^{(1)}(k r) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{k(x_1 - y_1) H_1^{(1)}(kr)}{r} \right) \\
 &= \frac{k}{r} \left( -H_1^{(1)}(kr) - \frac{(x_1 - y_1)^2}{r} \left( kH_0^{(1)}(kr) - \frac{H_1^{(1)}(kr)}{r} \right) \right) \\
 &+ k \frac{(x_1 - y_1)^2}{r^3} H_1^{(1)}(kr) \\
 &= \frac{2k(x_1 - y_1)^2 H_1^{(1)}(kr)}{r^3} - \frac{k^2(x_1 - y_1)^2 H_0^{(1)}(kr)}{r^2} - \frac{kH_1^{(1)}(kr)}{r}.
 \end{aligned}$$

Analog ergibt sich für die zweifache Ableitung nach  $x_2$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} H_0^{(1)}(k r) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( -\frac{k(x_2 - y_2) H_1^{(1)}(kr)}{r} \right) \\
 &= \frac{2k(x_2 - y_2)^2 H_1^{(1)}(kr)}{r^3} - \frac{k^2(x_2 - y_2)^2 H_0^{(1)}(kr)}{r^2} - \frac{kH_1^{(1)}(kr)}{r}.
 \end{aligned}$$

Die gemischten Ableitungen sind identisch und haben die Form:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} H_0^{(1)}(kr) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( -\frac{k(x_1 - y_1) H_1^{(1)}(kr)}{r} \right) \\
 &= \frac{k(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \left( kH_0^{(1)}(kr) - H_1^{(1)}(kr) \frac{1}{r} \right)}{r^2} \\
 &+ \frac{k(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) H_1^{(1)}(kr)}{r^3} \\
 &= \frac{2k(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) H_1^{(1)}(kr)}{r^3} - \frac{k^2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) H_0^{(1)}(kr)}{r^2} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{k(x_2 - y_2) H_1^{(1)}(kr)}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} H_0^{(1)}(kr) \right).
 \end{aligned}$$

Somit ergeben sich für die Matrix

$$g = \text{grad}_x \text{grad}_x^\top \left[ H_0^{(1)}(k_s \|x - y\|_2) - H_0^{(1)}(k_p \|x - y\|_2) \right]$$

die folgenden Einträge:

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} + \frac{(x_1 - y_1)^2 (k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r))}{r^2} \\
 &+ \frac{2(x_1 - y_1)^2 (k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r))}{r^3}, \\
 g_{12} &= g_{21} = \frac{(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) (k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r))}{r^2} \\
 &+ \frac{2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) (k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r))}{r^3}, \\
 g_{22} &= \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} + \frac{(x_2 - y_2)^2 [k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r)]}{r^2} \\
 &+ \frac{2(x_2 - y_2)^2 [k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r)]}{r^3}.
 \end{aligned}$$

Mit der Matrix

$$J(x - y) = \frac{1}{\|x - y\|_2^2} \begin{pmatrix} (x_1 - y_1)^2 & (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \\ (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) & (x_2 - y_2)^2 \end{pmatrix}$$

und der Einheitsmatrix  $I$  kann  $g$  geschrieben werden als:

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} I \\
 &+ \left[ k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) + \frac{2(k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r))}{r} \right] J(x - y).
 \end{aligned}$$

Für die Funktion  $\Phi_\omega(x, y)$  ergibt sich mit  $r = \|x - y\|_2$ :

$$\begin{aligned}
 \Phi_\omega(x, y) &= \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_s r) I + \frac{i}{4\omega^2} \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} I \\
 &+ \frac{i}{4\omega^2} [k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r)] J(x - y) \\
 &+ \frac{i}{2\omega^2 r} [k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r)] J(x - y) \\
 &= \tilde{\Phi}_1(r) I + \tilde{\Phi}_2(r) J(x - y).
 \end{aligned}$$

### 3.2.1 Einfachschichtpotential

Das Einfachschichtpotential auf dem Rand

$$(S_\omega \psi)(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi_\omega(x, y) \psi(y) \, ds(y)$$

kann nach der Diskretisierung des Randes  $\partial\Omega$  mit  $n$  Stützstellen folgendermaßen berechnet werden:

$$\sum_{j=0}^n \left[ \int_0^1 \Phi_\omega(\hat{v}_i, (1-t)v_j + tv_{j+1}) J_j dt \psi(\hat{v}_j) \right].$$

Für die Lösung des Gleichungssystems nach  $\psi$  ist es nötig die Integrale und damit die Einträge der Matrix  $A$  zu berechnen.

Aus der Definition der Funktion

$$\Phi_\omega(\hat{v}_i, g_j) = \tilde{\Phi}_1(\|\hat{v}_i - g_j\|_2)I + \tilde{\Phi}_2(\|\hat{v}_i - g_j\|_2)J(\hat{v}_i - g_j)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1(r) &= \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_s r) - \frac{i}{4\omega^2 r} \left[ k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r) \right], \\ \tilde{\Phi}_2(r) &= \frac{i}{2\omega^2 r} \left[ k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r) \right] + \frac{i}{4\omega^2} \left[ k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) \right] \end{aligned}$$

und

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J(x - y) = \frac{1}{\|x - y\|_2^2} \begin{pmatrix} (x_1 - y_1)^2 & (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \\ (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) & (x_2 - y_2)^2 \end{pmatrix}$$

ergibt sich für die vier Integrale und damit für die Einträge in die Matrix  $A$  (vgl. Seite [10](#)):

$$\begin{aligned} A_{2i-1,2j-1} &= \int_0^1 \Phi_\omega^{11}(\hat{v}_i, g_j) J_j dt = J_j \int_0^1 \tilde{\Phi}_1(\hat{v}_i, g_j) + \tilde{\Phi}_2(\hat{v}_i, g_j) \frac{(\hat{v}_{i,x} - g_{j,x})^2}{\|\hat{v}_i - g_j\|_2^2} dt, \\ A_{2i-1,2j} &= \int_0^1 \Phi_\omega^{12}(\hat{v}_i, g_j) J_j dt = J_j \int_0^1 \tilde{\Phi}_2(\hat{v}_i, g_j) \frac{(\hat{v}_{i,x} - g_{j,x})(\hat{v}_{i,y} - g_{j,y})}{\|\hat{v}_i - g_j\|_2^2} dt, \\ A_{2i,2j-1} &= \int_0^1 \Phi_\omega^{21}(\hat{v}_i, g_j) J_j dt = J_j \int_0^1 \tilde{\Phi}_2(\hat{v}_i, g_j) \frac{(\hat{v}_{i,x} - g_{j,x})(\hat{v}_{i,y} - g_{j,y})}{\|\hat{v}_i - g_j\|_2^2} dt, \\ A_{2i,2j} &= \int_0^1 \Phi_\omega^{22}(\hat{v}_i, g_j) J_j dt = J_j \int_0^1 \tilde{\Phi}_1(\hat{v}_i, g_j) + \tilde{\Phi}_2(\hat{v}_i, g_j) \frac{(\hat{v}_{i,y} - g_{j,y})^2}{\|\hat{v}_i - g_j\|_2^2} dt. \end{aligned}$$

Daraus lässt sich erkennen, dass die Nebendiagonalelemente von  $\Phi_\omega(x, y)$  identisch sind und das entsprechende Integral nur einmal berechnet werden muss. Für die Einträge in der Matrix  $A$  gilt daher:

$$A_{2i-1,2j} = A_{2i,2j-1} = J_j \int_0^1 \tilde{\Phi}_2(\hat{v}_i, g_j) \frac{(\hat{v}_{i,x} - g_{j,x})(\hat{v}_{i,y} - g_{j,y})}{\|\hat{v}_i - g_j\|_2^2} dt.$$

### Diagonalelemente

Es werden wieder die für das statische Einfachschichtpotential bestimmten Zusammenhänge (a) – (d) (vgl. Seite 22 f.) bei der Berechnung der Diagonalelemente berücksichtigt.

Die Betrachtung der Diagonalelemente wird durch separate Analyse der Integrale

$$\int_0^1 \Phi_\omega(\hat{v}_i, g_i) dt = \int_0^1 \tilde{\Phi}_1(\|\hat{v}_i - g_i\|_2) I dt + \int_0^1 \tilde{\Phi}_2(\|\hat{v}_i - g_i\|_2) J(\hat{v}_i - g_i) dt$$

durchgeführt. Für die Funktion

$$\tilde{\Phi}_1(r) = \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_s r) + \frac{i}{4\omega^2 r} \left[ k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r) \right]$$

mit

$$r = \|\hat{v}_i - g_i\|_2 = \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i$$

wird das Integral zerlegt in:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \tilde{\Phi}_1 \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt \\ &= \frac{i}{4\mu} \int_0^1 H_0^{(1)} \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt \\ &+ \frac{i}{4\omega^2 J_i} \int_0^1 \frac{k_p}{\left| t - \frac{1}{2} \right|} H_1^{(1)} \left( k_p \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - \frac{k_s}{\left| t - \frac{1}{2} \right|} H_1^{(1)} \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt . \end{aligned}$$

Die Hankel-Funktionen erster Art können als Linearkombination der Bessel-Funktionen erster und zweiter Art

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x)$$

formuliert werden. Diese Darstellung wird im Folgenden zur Bestimmung der Integrale genutzt. Für das Integral gilt daher:

$$\begin{aligned} & \frac{i}{4\mu} \int_0^1 H_0^{(1)} \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt \\ &= \frac{i}{4\mu} \int_0^1 J_0 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) + iY_0 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt \\ &= \frac{1}{4\mu} \int_0^1 iJ_0 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - Y_0 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt . \end{aligned}$$

Die Bessel-Funktion erster Art  $J_0$  ist an der Stelle  $t = \frac{1}{2}$  glatt und kann daher problemlos integriert werden. Die Bessel-Funktion zweiter Art  $Y_0$  besitzt an der

Stelle  $t = \frac{1}{2}$  jedoch eine Unstetigkeitsstelle und das Integral muss entsprechend angenähert werden.

Für die Bessel-Funktion zweiter Art gilt für  $x \rightarrow 0$  die Näherung (vgl. [1] Seite 360))

$$Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \log(x) .$$

Wird dies auf den ursprünglichen Integranden übertragen, gilt:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\mu} Y_0 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) \\ \approx & -\frac{1}{2\pi\mu} \log \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) \\ = & -\frac{1}{2\pi\mu} \left[ \log(k_s) + \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) \right] . \end{aligned}$$

Der von  $t$  abhängige Term

$$-\frac{1}{2\pi\mu} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right)$$

wird als Singularität vom ursprünglichen Integranden subtrahiert und anschließend wieder addiert:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\mu} \int_0^1 Y_0 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt \\ = & \int_0^1 -\frac{1}{4\mu} Y_0 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - \left[ -\frac{1}{2\pi\mu} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) \right] \\ & + \left[ -\frac{1}{2\pi\mu} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) \right] dt \\ = & \int_0^1 -\frac{1}{4\mu} Y_0 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) + \frac{1}{2\pi\mu} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt \\ & - \int_0^1 \frac{1}{2\pi\mu} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt . \end{aligned}$$

Der erste Integrand ist aufgrund der oben genannten Näherung glatt und kann numerisch, mittels der Methode *quadgk*, integriert werden. Das zweite Integral wurde bereits für das Einfachschichtpotential des statischen Falls berechnet:

$$-\frac{1}{2\pi\mu} \int_0^1 \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt = -\frac{1}{2\pi\mu} (\log(J_i) - \log(2) - 1) .$$

Für den ersten Teil von  $\tilde{\Phi}_1$  gilt damit:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \frac{i}{4\mu} \int_0^1 H_0^{(1)} \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt \\
 &= \frac{1}{4\mu} \int_0^1 iJ_0 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - \left[ Y_0 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - \frac{2}{\pi} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) \right] dt \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^1 \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt \\
 &= \frac{i}{4\mu} \int_0^1 H_0^{(1)} \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - \frac{2i}{\pi} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi\mu} (\log(J_i) - \log(2) - 1) .
 \end{aligned}$$

Bei der Bestimmung des zweiten Integrals

$$s_2 = \frac{i}{4\omega^2 J_i} \int_0^1 \frac{k_p}{\left| t - \frac{1}{2} \right|} H_1^{(1)} \left( k_p \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - \frac{k_s}{\left| t - \frac{1}{2} \right|} H_1^{(1)} \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt$$

wird wieder die Linearkombination für die Hankel-Funktion erster Art genutzt:

$$\begin{aligned}
 s_2 &= \frac{i}{4\omega^2 J_i} \int_0^1 \frac{k_p}{\left| t - \frac{1}{2} \right|} J_1 \left( k_p \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - \frac{k_s}{\left| t - \frac{1}{2} \right|} J_1 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt \\
 &\quad - \frac{1}{4\omega^2 J_i} \int_0^1 \frac{k_p}{\left| t - \frac{1}{2} \right|} Y_1 \left( k_p \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - \frac{k_s}{\left| t - \frac{1}{2} \right|} Y_1 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt .
 \end{aligned}$$

Mit der Reihendarstellung für die Bessel-Funktion erster Art (vgl. [1] Seite 360])

$$J_1(x) = \left( \frac{1}{2} x \right)^1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left( -\frac{1}{4} x^2 \right)^m}{m!(m+1)!}$$

kann gezeigt werden, dass der erste Integrand auf dem Intervall  $[0, 1]$  glatt ist:

$$\begin{aligned}
 &\frac{k_p J_1 \left( k_p \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - k_s J_1 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right)}{\left| t - \frac{1}{2} \right| J_i} \\
 &= \frac{k_p^2 \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i}{2 \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left( -\frac{1}{4} k_p^2 J_i^2 \left| t - \frac{1}{2} \right|^2 \right)^m}{m!(m+1)!} - \frac{k_s^2 \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i}{2 \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left( -\frac{1}{4} k_s^2 J_i^2 \left| t - \frac{1}{2} \right|^2 \right)^m}{m!(m+1)!} \\
 &= \frac{k_p^2}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left( -\frac{1}{4} k_p^2 J_i^2 \left| t - \frac{1}{2} \right|^2 \right)^m}{m!(m+1)!} - \frac{k_s^2}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left( -\frac{1}{4} k_s^2 J_i^2 \left| t - \frac{1}{2} \right|^2 \right)^m}{m!(m+1)!} .
 \end{aligned}$$

Da die Bessel-Funktion zweiter Art an der Stelle  $t = \frac{1}{2}$  eine Unstetigkeitsstelle besitzt, ist der zweite Integrand nicht glatt und muss durch eine Singularitäten-Subtraktion geglättet werden. Für die Bessel-Funktion zweiter Art gilt der Zusammenhang (vgl. [1] Seite 360])

$$Y_1(x) \sim -\frac{2}{\pi x} + \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{x}{2}\right) J_1(x) - \frac{x}{2\pi} c + \mathcal{O}(x^3),$$

wobei  $c$  konstant ist. Wird dieser Zusammenhang in die Differenz eingesetzt und  $r = |t - \frac{1}{2}| J_i$  zur einfacheren Darstellung verwendet, ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \frac{k_s Y_1(k_s r) - k_p Y_1(k_p r)}{r} \\ & \sim \frac{1}{r} \left[ k_s \left( -\frac{2}{\pi k_s r} + \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{k_s r}{2}\right) J_1(k_s r) - \frac{k_s r}{2\pi} c \right) \right. \\ & \quad \left. - k_p \left( -\frac{2}{\pi k_p r} + \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{k_p r}{2}\right) J_1(k_p r) - \frac{k_p r}{2\pi} c \right) \right] \\ & = \frac{2}{\pi} \left[ \log(r) \frac{k_s J_1(k_s r) - k_p J_1(k_p r)}{r} + k_s \log\left(\frac{k_s}{2}\right) \frac{J_1(k_s r)}{r} \right. \\ & \quad \left. - k_p \log\left(\frac{k_p}{2}\right) \frac{J_1(k_p r)}{r} \right] - \frac{c}{2\pi} (k_s - k_p). \end{aligned}$$

Wie oben gezeigt ist der Term

$$\frac{k_s J_1(k_s r) - k_p J_1(k_p r)}{r}$$

auf dem Intervall  $[0, 1]$  glatt und mit der obigen Reihendarstellung für  $J_1$  gilt dies auch für den Term:

$$\frac{J_1(k_s r)}{r} \quad \text{bzw.} \quad \frac{J_1(k_p r)}{r}.$$

Da der letzte Summand unabhängig von  $r$  und damit von  $t$  ist, liegt für den betrachteten Term

$$\frac{k_s J_1(k_s r) - k_p J_1(k_p r)}{r}$$

eine logarithmische Singularität vor. Für die Singularitäten-Subtraktion genügt es das erste Element der Reihendarstellung der Bessel-Funktionen erster Art zu be-

trachten:

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{\pi} \log(r) \frac{1}{r} \left[ \frac{k_s^2 r}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4} k_s^2 r^2)^m}{m!(m+1)!} - \frac{k_p^2 r}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4} k_p^2 r^2)^m}{m!(m+1)!} \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \log(r) \left[ \frac{k_s^2}{2} + \frac{k_s^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4} k_s^2 r^2)^m}{m!(m+1)!} - \frac{k_p^2}{2} - \frac{k_p^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4} k_p^2 r^2)^m}{m!(m+1)!} \right] \\
 &\sim \frac{2}{\pi} \log(r) \left[ \frac{k_s^2}{2} - \frac{k_p^2}{2} \right] = \frac{1}{\pi} \log(r) [k_s^2 - k_p^2] .
 \end{aligned}$$

Durch Subtraktion und anschließender Addition dieser Singularität

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \frac{k_s Y_1(k_s |t - \frac{1}{2}| J_i) - k_p Y_1(k_p |t - \frac{1}{2}| J_i)}{|t - \frac{1}{2}| J_i} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{k_s Y_1(k_s |t - \frac{1}{2}| J_i) - k_p Y_1(k_p |t - \frac{1}{2}| J_i)}{|t - \frac{1}{2}| J_i} - \frac{k_s^2 - k_p^2}{\pi} \log\left(\left|t - \frac{1}{2}\right| J_i\right) dt \\
 &+ \frac{k_s^2 - k_p^2}{\pi} \int_0^1 \log\left(\left|t - \frac{1}{2}\right| J_i\right) dt
 \end{aligned}$$

ist der erste Integrand nun glatt und der Wert des Integrals kann numerisch berechnet werden. Das zweite Integral wurde bereits berechnet und für den ursprünglichen Term gilt:

$$\begin{aligned}
 s_2 &= \frac{i}{4\omega^2 J_i} \int_0^1 \frac{k_p}{|t - \frac{1}{2}|} H_1^{(1)}\left(k_p \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i\right) - \frac{k_s}{|t - \frac{1}{2}|} H_1^{(1)}\left(k_s \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i\right) dt \\
 &= \frac{i}{4\omega^2 J_i} \int_0^1 \frac{k_p}{|t - \frac{1}{2}|} H_1^{(1)}\left(k_p \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i\right) - \frac{k_s}{|t - \frac{1}{2}|} H_1^{(1)}\left(k_s \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i\right) \\
 &\quad - \frac{i(k_p^2 - k_s^2)}{\pi} \log\left(\left|t - \frac{1}{2}\right| J_i\right) dt + \frac{i}{4\omega^2 J_i} \frac{i(k_p^2 - k_s^2)}{\pi} [\log(J_i) - \log(2) - 1] .
 \end{aligned}$$

Somit kann das Integral über  $\tilde{\Phi}_1(r)$  berechnet werden als:

$$\int_0^1 \tilde{\Phi}_1\left(\left|t - \frac{1}{2}\right| J_i\right) dt = s_1 + s_2 .$$

Nun wird das Integral

$$\int_0^1 \tilde{\Phi}_2(\|\hat{v}_i - g_i\|_2) J(\hat{v}_i - g_i) dt$$

mit

$$\tilde{\Phi}_2(r) = \frac{i}{2\omega^2 r} \left[ k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r) \right] + \frac{i}{4\omega^2} \left[ k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) \right],$$

$$r = \|\hat{v}_i - g_i\|_2$$

und

$$\begin{aligned} J(\hat{v}_i - g_i) &= \frac{(\hat{v}_i - g_i)(\hat{v}_i - g_i)^\top}{r^2} = \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 (v_{i+1} - v_i)(v_{i+1} - v_i)^\top}{\left|t - \frac{1}{2}\right|^2 J_i^2} \\ &= \frac{(v_{i+1} - v_i)(v_{i+1} - v_i)^\top}{J_i^2} = J(v_{i+1} - v_i) \end{aligned}$$

näher betrachtet. Dazu wird die Darstellung der Hankel-Funktionen als Linearkombination der Bessel-Funktionen erster und zweiter Art verwendet. Außerdem wird sowohl für die Bessel-Funktion zweiter Art der Ordnung 0 als auch der Ordnung 1 die entsprechende Näherung subtrahiert und anschließend addiert. Das Integral kann ebenfalls zerlegt werden:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \tilde{\Phi}_2 \left( \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i \right) J \left( \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i \right) dt \tag{3.2} \\ &= \int_0^1 \tilde{\Phi}_2 \left( \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i \right) dt J(v_{i+1} - v_i) \\ &= \left[ \frac{i}{4\omega^2} \int_0^1 k_p^2 H_0^{(1)} \left( k_p \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i \right) - k_s^2 H_0^{(1)} \left( k_s \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i \right) dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2\omega^2 J_i} \int_0^1 \frac{k_s H_1^{(1)} \left( k_s \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i \right) - k_p H_1^{(1)} \left( k_p \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i \right)}{\left|t - \frac{1}{2}\right|} dt \right] J(v_{i+1} - v_i). \end{aligned}$$

Dabei lässt sich das erste Integral schreiben als:

$$\begin{aligned} s_3 &= \frac{i}{4\omega^2} \int_0^1 k_p^2 H_0^{(1)} \left( k_p \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i \right) - k_s^2 H_0^{(1)} \left( k_s \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i \right) dt \\ &= \frac{i}{4\omega^2} \int_0^1 k_p^2 J_0 \left( k_p \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i \right) - k_s^2 J_0 \left( k_s \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i \right) dt \\ &\quad + \frac{i}{4\omega^2} \int_0^1 k_p^2 Y_0 \left( k_p \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i \right) - k_s^2 Y_0 \left( k_s \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i \right) dt. \end{aligned}$$

Da die Bessel-Funktion erster Art an der Stelle  $t = \frac{1}{2}$  glatt ist, kann das Integral numerisch bestimmt werden. Zur Integration der Bessel-Funktion zweiter Art wird wieder die Subtraktion und Addition der Näherung

$$Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \log(x)$$

für  $x \rightarrow 0$  verwendet. Für  $k = k_p$  bzw.  $k = k_s$  gilt:

$$Y_0 \left( k \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) \approx \frac{2}{\pi} \log \left( k \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) = \frac{2}{\pi} \left[ \log(k) + \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) \right].$$

Es wird lediglich der von  $t$  abhängige Term

$$\frac{2}{\pi} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right)$$

für die Singularitäten-Subtraktion genutzt und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 k_p^2 Y_0 \left( k_p \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - k_s^2 Y_0 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt \\ &= \int_0^1 k_p^2 \left[ Y_0 \left( k_p \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - \frac{2}{\pi} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) + \frac{2}{\pi} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) \right] \\ &- k_s^2 \left[ Y_0 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - \frac{2}{\pi} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) + \frac{2}{\pi} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) \right] dt \\ &= k_p^2 \int_0^1 Y_0 \left( k_p \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - \frac{2}{\pi} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt \\ &- k_s^2 \int_0^1 Y_0 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - \frac{2}{\pi} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt \\ &+ \frac{2k_p^2}{\pi} \int_0^1 \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt - \frac{2k_s^2}{\pi} \int_0^1 \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt. \end{aligned}$$

Die Integrale über die Bessel-Funktion zweiter Art können nun numerisch berechnet werden, da der Integrand aufgrund der eingefügten Näherung ausreichend glatt ist. Das Integral

$$\int_0^1 \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt = \log(J_i) - \log(2) - 1$$

wurde bereits berechnet und kann entsprechend ersetzt werden. Unter Verwendung des Zusammenhangs

$$k_s^2 = \frac{\omega^2}{\mu} \quad \text{und} \quad k_p^2 = \frac{\omega^2}{\lambda + 2\mu}$$

ergibt sich mit dem Vorfaktor  $\frac{i}{4\omega^2}$ :

$$\begin{aligned} s_3 &= \frac{i}{4\omega^2} \int_0^1 k_p^2 H_0^{(1)} \left( k_p \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - k_s^2 H_0^{(1)} \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt \\ &= \frac{k_p^2}{4\omega^2} \int_0^1 iJ_0 \left( k_p \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - Y_0 \left( k_p \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) + \frac{2}{\pi} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{k_s^2}{4\omega^2} \int_0^1 iJ_0 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - Y_0 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) + \frac{2}{\pi} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt \\
& + \frac{i}{4\omega^2} (k_p^2 - k_s^2) \int_0^1 \frac{2i}{\pi} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt \\
& = \frac{i}{4\omega^2} \left[ k_p^2 \int_0^1 H_0^{(1)} \left( k_p \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - \frac{2i}{\pi} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt \right. \\
& - \left. k_s^2 \int_0^1 H_0^{(1)} \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - \frac{2i}{\pi} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt \right] \\
& + \frac{\lambda + \mu}{2\pi\mu(\lambda + 2\mu)} (\log(J_i) - \log(2) - 1) .
\end{aligned}$$

Das zweite Integral der Gleichung (3.2) wurde bereits im ersten Teil berechnet und kann nun eingesetzt werden. Für das Integral über  $\tilde{\Phi}_2$  gilt daher:

$$\int_0^1 \tilde{\Phi}_2 \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) dt = s_3 - 2s_2 .$$

Setzt man die beiden Teile zusammen, ergibt sich für die Diagonalelemente:

$$\begin{aligned}
& J_i \int_0^1 \Phi_\omega(\hat{v}_i, g_i) dt \\
& = J_i \int_0^1 \tilde{\Phi}_1(\|\hat{v}_i - g_i\|_2) dt I + J_i \int_0^1 \tilde{\Phi}_2(\|\hat{v}_i - g_i\|_2) dt J(v_{i+1} - v_i) \\
& = J_i [s_1 + s_2] I + J_i [s_3 - 2s_2] J(v_{i+1} - v_i) .
\end{aligned}$$

### 3.2.2 Doppelschichtpotential

Für das Doppelschichtpotential auf dem Rand

$$(D_\omega \psi)(x) = \int_{\partial D} [T_y(\Phi_\omega(x, y))]^\top \psi(y) ds(y)$$

gilt nach der Diskretisierung des Randes  $\partial\Omega$  mit  $n$  Stützstellen der Zusammenhang:

$$\sum_{j=1}^n \left[ \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega(x, (1-t)v_j + tv_{j+1}))]^\top J_j dt \psi(\hat{v}_j) \right] .$$

Vor der Bestimmung von  $\psi$  wird die Berechnungsvorschrift für den Kern  $T_y(\Phi_\omega(x, y))$  ermittelt. Der durch

$$T_y(z) = \lambda \operatorname{div}(z) \nu + 2\mu (\nu^\top \operatorname{grad}) z + \mu \operatorname{div}(Qz) Q\nu$$

gegebene Traktionsoperator  $T$  wird an dieser Stelle bezüglich  $y$  angewendet. Dabei ist  $\nu$  der nach außen gerichtete, normierte Normalenvektor auf dem Rand  $\partial\Omega$  und  $Q$  die Matrix:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Bei der Anwendung des Traktionsoperators auf die Fundamentallösung der Navier-Gleichung ergibt sich die folgende Berechnungsvorschrift:

$$[T_y(\Phi_\omega(x, y))]^\top = [T_y(\tilde{\Phi}_1(\|x - y\|_2)I)]^\top + [T_y(\tilde{\Phi}_2(\|x - y\|_2)J(x - y))]^\top .$$

Mithilfe der Produktregel des Traktionsoperators für eine Funktion  $f$  und eine Matrix  $G$

$$T(fG) = T(fI)G + fT(G)$$

lässt sich die Berechnungsvorschrift umformen zu:

$$\begin{aligned} [T_y(\Phi_\omega(x, y))]^\top &= [T_y(\tilde{\Phi}_1(\|x - y\|_2)I)]^\top + [T_y(\tilde{\Phi}_2(\|x - y\|_2)J(x - y))]^\top \\ &+ \tilde{\Phi}_2(\|x - y\|_2) [T_y(J(x - y))]^\top . \end{aligned}$$

Für die Berechnung der ersten beiden Summanden wird die in Kapitel [3.1.2](#) für stetig differenzierbare Funktionen bewiesene Regel [3.1](#)

$$\begin{aligned} T_x(f(\|x - y\|_2)I) &= \frac{f'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} [\lambda\nu(x)(x - y)^\top + \mu(x - y)\nu(x)^\top \\ &+ \mu\nu(x)^\top(x - y)I] \end{aligned}$$

verwendet. Daher genügt es die Ableitungen von  $\tilde{\Phi}_1$  und  $\tilde{\Phi}_2$  zu bestimmen, um die Anwendung des Traktionsoperators zu berechnen. Dabei gilt für die Ableitung der Hankel-Funktion 1. Art der Ordnung 0 bzw. 1:

$$\frac{\partial H_0^{(1)}(kx)}{\partial x} = -kH_1^{(1)}(kx) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial H_1^{(1)}(kx)}{\partial x} = k \left( H_0^{(1)}(kx) - \frac{H_1^{(1)}(kx)}{kx} \right) .$$

Für die Ableitung von  $\tilde{\Phi}_1$  ergibt sich unter Verwendung der Quotientenregel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Phi}_1(r)}{\partial r} &= -\frac{ik_s}{4\mu} H_1^{(1)}(k_s r) - \frac{i}{4\omega^2 r} \left[ 2 \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} \right. \\ &\left. - k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) + k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) \right] . \end{aligned}$$

Analog gilt für die Ableitung von  $\tilde{\Phi}_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2(r)}{\partial r} &= \frac{i}{2\omega^2 r} \left[ k_s^2 \mathbf{H}_0^{(1)}(k_s r) - k_p^2 \mathbf{H}_0^{(1)}(k_p r) + 2 \frac{k_p \mathbf{H}_1^{(1)}(k_p r) - k_s \mathbf{H}_1^{(1)}(k_s r)}{r} \right] \\ &+ \frac{i}{4\omega^2} \left[ k_s^3 \mathbf{H}_1^{(1)}(k_s r) - k_p^3 \mathbf{H}_1^{(1)}(k_p r) \right]. \end{aligned}$$

Mit der Matrix:

$$U_1(y, x) = \lambda \nu(y)(y-x)^\top + \mu(y-x)\nu(y)^\top + \mu\nu(y)^\top(y-x)I$$

und  $r = \|x - y\|_2$  ergibt sich für die ersten beiden Summanden:

$$\begin{aligned} &\left[ T_y \left( \tilde{\Phi}_1(r) I \right) \right]^\top \\ &= \frac{\tilde{\Phi}_1'(r)}{r} U_1(y, x)^\top \\ &= \left( -\frac{ik_s}{4\mu r} \mathbf{H}_1^{(1)}(k_s r) - \frac{i}{4\omega^2 r^2} \left[ 2 \frac{k_p \mathbf{H}_1^{(1)}(k_p r) - k_s \mathbf{H}_1^{(1)}(k_s r)}{r} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - k_p^2 \mathbf{H}_0^{(1)}(k_p r) + k_s^2 \mathbf{H}_0^{(1)}(k_s r) \right] \right) U_1(y, x)^\top, \\ &\left[ T_y \left( \tilde{\Phi}_2(r) I \right) J(x-y) \right]^\top \\ &= \frac{\tilde{\Phi}_2'(r)}{r} [U_1(y, x) J(x-y)]^\top \\ &= \left( \frac{i}{2\omega^2 r^2} \left[ k_s^2 \mathbf{H}_0^{(1)}(k_s r) - k_p^2 \mathbf{H}_0^{(1)}(k_p r) + 2 \frac{k_p \mathbf{H}_1^{(1)}(k_p r) - k_s \mathbf{H}_1^{(1)}(k_s r)}{r} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{4\omega^2 r} \left[ k_s^3 \mathbf{H}_1^{(1)}(k_s r) - k_p^3 \mathbf{H}_1^{(1)}(k_p r) \right] \right) [U_1(y, x) J(x-y)]^\top. \end{aligned}$$

Dabei gilt für das Matrix-Produkt:

$$[U_1(y, x) J(x-y)]^\top = J(x-y)^\top U_1(y, x)^\top.$$

Da die Matrix

$$J(x-y) = \frac{(x-y)(x-y)^\top}{\|x-y\|_2^2}$$

jedoch symmetrisch ist, lässt sich das Produkt vereinfachen zu:

$$[U_1(y, x) J(x-y)]^\top = J(x-y) U_1(y, x)^\top.$$

Mit dem Zusammenhang

$$\begin{aligned} [T_y(J(x-y))]^\top &= \frac{1}{r^2} [(\lambda + 2\mu)\nu(y)(y-x)^\top + \mu(y-x)\nu(y)^\top \\ &\quad + \mu\nu(y)^\top(y-x)(I - 4J(x-y))]^\top \\ &= \frac{1}{r^2} U_2(y, x)^\top, \end{aligned}$$

der bereits für den statischen Fall hergeleitet wurde, kann auch der dritte Summand bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2(r) [T_y(J(x-y))]^\top &= \frac{\tilde{\Phi}_2(r)}{r^2} U_2(y, x)^\top \\ &= \frac{1}{r^2} \left( \frac{i}{2\omega^2 r} [k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{4\omega^2} [k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r)] \right) U_2(y, x)^\top. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Anwendung des Traktionsoperators auf die Fundamentallösung:

$$\begin{aligned} &[T_y(\Phi_\omega(x, y))]^\top \\ &= \left( -\frac{ik_s}{4\mu r} H_1^{(1)}(k_s r) - \frac{i}{4\omega^2 r^2} \left[ 2 \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) + k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) \right] \right) U_1(y, x)^\top \\ &\quad + \left( \frac{i}{2\omega^2 r^2} \left[ k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) - k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) + 2 \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{4\omega^2 r} [k_s^3 H_1^{(1)}(k_s r) - k_p^3 H_1^{(1)}(k_p r)] \right) J(x-y) U_1(y, x)^\top \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \left( \frac{i}{2\omega^2 r} [k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{4\omega^2} [k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r)] \right) U_2(y, x)^\top. \end{aligned}$$

Aufgrund der komplexen Berechnungsvorschrift von  $[T_y(\Phi_\omega(x, y))]^\top$  wird lediglich die Einordnung der Einträge in die Matrix  $A$  (vgl. Seite [10](#)) dargestellt:

$$\begin{aligned} A_{2i-1, 2j-1} &= J_j \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega(\hat{v}_i, g_j))]_{11}^\top dt, & A_{2i-1, 2j} &= J_j \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega(\hat{v}_i, g_j))]_{12}^\top dt, \\ A_{2i, 2j-1} &= J_j \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega(\hat{v}_i, g_j))]_{21}^\top dt, & A_{2i, 2j} &= J_j \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega(\hat{v}_i, g_j))]_{22}^\top dt. \end{aligned}$$

### Diagonalelemente

Aufgrund der Zusammenhänge (a) – (d) (vgl. Seite 22 f.) und der Definition des Normalenvektors  $n_y$  (vgl. Seite 12) gilt für das Skalarprodukt  $n_y^\top(y - x)$ :

$$n_y^\top(g_i - \hat{v}_i) = \frac{1}{J_i} \begin{pmatrix} v_{i+1,y} - v_{i,y} \\ v_{i,x} - v_{i+1,x} \end{pmatrix}^\top \left(t - \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} v_{i+1,x} - v_{i,x} \\ v_{i+1,y} - v_{i,y} \end{pmatrix} = 0 .$$

Damit können die Matrizen  $U_1(y, x)$ ,  $U_2(y, x)$  und  $U_1(y, x)J(x - y)$  zu

$$\begin{aligned} U_1(y, x) &= \lambda n_y (g_i - \hat{v}_i)^\top + \mu (g_i - \hat{v}_i) n_y^\top \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right) \left[ \lambda n_y (v_{i+1} - v_i)^\top + \mu (v_{i+1} - v_i) n_y^\top \right] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2(y, x) &= (\lambda + 2\mu) n_y (g_i - \hat{v}_i)^\top + \mu (g_i - \hat{v}_i) n_y^\top \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right) \left[ (\lambda + 2\mu) n_y (v_{i+1} - v_i)^\top + \mu (v_{i+1} - v_i) n_y^\top \right] \end{aligned}$$

und

$$U_1(y, x)J(x - y) = \lambda n_y (g_i - \hat{v}_i)^\top = \left(t - \frac{1}{2}\right) \lambda n_y (v_{i+1} - v_i)^\top .$$

vereinfacht werden. Nach dem Ersetzen der obigen Definitionen und Vereinfachungen in der Berechnungsvorschrift für  $[T_y(\Phi_\omega(\hat{v}_i, g_i))]^\top$  und anschließender Sortierung der Terme, gilt:

$$\begin{aligned} & [T_y(\Phi_\omega(\hat{v}_i, g_i))]^\top \\ &= -\frac{\mathfrak{i}k_s H_1^{(1)}(k_s |t - \frac{1}{2}| J_i)}{4\mu |t - \frac{1}{2}| J_i} \left(t - \frac{1}{2}\right) \left[ \lambda n_y (v_{i+1} - v_i)^\top + \mu (v_{i+1} - v_i) n_y^\top \right]^\top \\ & - \frac{\mathfrak{i}\mu k_p H_1^{(1)}(k_p |t - \frac{1}{2}| J_i) - k_s H_1^{(1)}(k_s |t - \frac{1}{2}| J_i)}{\omega^2 |t - \frac{1}{2}|^3 J_i^3} \left(t - \frac{1}{2}\right) \\ & \cdot \left[ (v_{i+1} - v_i) n_y^\top + n_y (v_{i+1} - v_i)^\top \right]^\top \\ & + \frac{\mathfrak{i}\mu k_p^2 H_0^{(1)}(k_p |t - \frac{1}{2}| J_i) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s |t - \frac{1}{2}| J_i)}{2\omega^2 |t - \frac{1}{2}|^2 J_i^2} \left(t - \frac{1}{2}\right) \\ & \cdot \left[ (v_{i+1} - v_i) n_y^\top + n_y (v_{i+1} - v_i)^\top \right]^\top \\ & + \frac{\mathfrak{i} k_s^3 H_1^{(1)}(k_s |t - \frac{1}{2}| J_i) - k_p^3 H_1^{(1)}(k_p |t - \frac{1}{2}| J_i)}{4\omega^2 |t - \frac{1}{2}| J_i} \left(t - \frac{1}{2}\right) \left[ \lambda n_y (v_{i+1} - v_i)^\top \right]^\top . \end{aligned}$$

Da die Berechnungsvorschrift sehr länglich ist, werden im Folgenden die Summanden einzeln betrachtet.

Für den ersten Summanden muss das Integral

$$\int_0^1 \mathrm{H}_1^{(1)} \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) \frac{t - \frac{1}{2}}{\left| t - \frac{1}{2} \right|} dt$$

bestimmt werden. Dazu wird die Darstellung der Hankel-Funktion  $\mathrm{H}_1^{(1)}$  als Linearkombination der Bessel-Funktionen erster und zweiter Art

$$\mathrm{H}_1^{(1)}(x) = \mathrm{J}_1(x) + i\mathrm{Y}_1(x)$$

genutzt.

Aufgrund der Reihendarstellung der Bessel-Funktion erster Art (vgl. [1] Seite 360)

$$\mathrm{J}_1(x) = \left( \frac{1}{2}x \right)^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4}x^2)^k}{k!(k+1)!}$$

besitzt der Integrand von

$$\int_0^1 \mathrm{J}_1 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) \frac{t - \frac{1}{2}}{\left| t - \frac{1}{2} \right|} dt$$

keine Singularität an der Stelle  $t = \frac{1}{2}$ . Mithilfe der Aufteilung des Integrationsbereichs und anschließender Substitution von  $t = 1 - s$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \mathrm{J}_1 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) \frac{t - \frac{1}{2}}{\left| t - \frac{1}{2} \right|} dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{J}_1 \left( k_s \left( \frac{1}{2} - t \right) J_i \right) \frac{t - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - t} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{J}_1 \left( k_s \left( t - \frac{1}{2} \right) J_i \right) \frac{t - \frac{1}{2}}{t - \frac{1}{2}} dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{J}_1 \left( k_s \left( s - \frac{1}{2} \right) J_i \right) (-1)(-1) ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{J}_1 \left( k_s \left( t - \frac{1}{2} \right) J_i \right) dt \\ &= - \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{J}_1 \left( k_s \left( s - \frac{1}{2} \right) J_i \right) ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{J}_1 \left( k_s \left( t - \frac{1}{2} \right) J_i \right) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da die Bessel-Funktion zweiter Art an der Stelle  $t = \frac{1}{2}$  eine Singularität besitzt wird die Näherung (vgl. [1] Seite 360)

$$\mathrm{Y}_1(x) \approx -\frac{2}{\pi x}$$

vom Integranden subtrahiert und anschließend wieder addiert:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 Y_1 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) \frac{t - \frac{1}{2}}{\left| t - \frac{1}{2} \right|} dt \\
 = & \int_0^1 \left[ Y_1 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) + \frac{2}{k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| \pi J_i} \right] \frac{t - \frac{1}{2}}{\left| t - \frac{1}{2} \right|} dt \\
 - & \int_0^1 \frac{2}{k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| \pi J_i} \frac{t - \frac{1}{2}}{\left| t - \frac{1}{2} \right|} dt .
 \end{aligned}$$

Das Integral

$$\int_0^1 \frac{2}{k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| \pi J_i} \frac{t - \frac{1}{2}}{\left| t - \frac{1}{2} \right|} dt = \frac{2}{k_s \pi J_i} \int_0^1 \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt$$

wurde für das Doppelschichtpotential des statischen Falls als *Cauchyscher Hauptwert* berechnet und hat den Wert 0.

Durch Subtraktion der Näherung ist die Bessel-Funktion zweiter Art ausreichend glatt und der Wert des Integrals kann ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \left[ Y_1 \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) + \frac{2}{k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \pi} \right] \frac{t - \frac{1}{2}}{\left| t - \frac{1}{2} \right|} dt \\
 = & \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ Y_1 \left( k_s \left( \frac{1}{2} - t \right) J_i \right) + \frac{2}{k_s \left( \frac{1}{2} - t \right) J_i \pi} \right] \frac{t - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - t} dt \\
 + & \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[ Y_1 \left( k_s \left( t - \frac{1}{2} \right) J_i \right) + \frac{2}{k_s \left( t - \frac{1}{2} \right) J_i \pi} \right] \frac{t - \frac{1}{2}}{t - \frac{1}{2}} dt \\
 = & \int_1^{\frac{1}{2}} \left[ Y_1 \left( k_s \left( s - \frac{1}{2} \right) J_i \right) + \frac{2}{k_s \left( s - \frac{1}{2} \right) J_i \pi} \right] (-1)(-1) ds \\
 + & \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[ Y_1 \left( k_s \left( t - \frac{1}{2} \right) J_i \right) + \frac{2}{k_s \left( t - \frac{1}{2} \right) J_i \pi} \right] dt \\
 = & - \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[ Y_1 \left( k_s \left( t - \frac{1}{2} \right) J_i \right) + \frac{2}{k_s \left( t - \frac{1}{2} \right) J_i \pi} \right] dt \\
 + & \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[ Y_1 \left( k_s \left( t - \frac{1}{2} \right) J_i \right) + \frac{2}{k_s \left( t - \frac{1}{2} \right) J_i \pi} \right] dt \\
 = & 0 .
 \end{aligned}$$

Das Integral des ersten Summanden nimmt somit den Wert 0 an und für den ersten Summanden gilt damit:

$$s_1 = 0 .$$

Für den zweiten Summanden

$$s_2 = -\frac{i\mu k_p H_1^{(1)}(k_p |t - \frac{1}{2}| J_i) - k_s H_1^{(1)}(k_s |t - \frac{1}{2}| J_i)}{\omega^2 |t - \frac{1}{2}|^3 J_i^3} \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right) [(v_{i+1} - v_i)n_y^\top + n_y(v_{i+1} - v_i)^\top]^\top$$

wird im Folgenden der Wert des Integrals

$$\int_0^1 \left[ \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p |t - \frac{1}{2}| J_i) - k_s H_1^{(1)}(k_s |t - \frac{1}{2}| J_i)}{|t - \frac{1}{2}|} \right] \frac{t - \frac{1}{2}}{|t - \frac{1}{2}|^2} dt$$

bestimmt. Für den ersten Bruch wurde bereits beim Einfachschichtpotential des dynamischen Falls gezeigt, dass er lediglich eine logarithmische Singularität besitzt (vgl. Seite 55 ff.). Daher kann der Bruch durch Subtraktion und anschließender Addition von

$$\frac{1}{\pi} \log(r) k^2$$

mit  $k = k_p$  bzw.  $k = k_s$  geglättet werden. Nach dem Kürzen des zweiten Bruchs

$$\frac{t - \frac{1}{2}}{|t - \frac{1}{2}|^2} = \frac{1}{t - \frac{1}{2}}$$

gilt für das Integral:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left[ \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p |t - \frac{1}{2}| J_i) - k_s H_1^{(1)}(k_s |t - \frac{1}{2}| J_i)}{|t - \frac{1}{2}|} \right] \frac{t - \frac{1}{2}}{|t - \frac{1}{2}|^2} dt \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p |t - \frac{1}{2}| J_i) - k_s H_1^{(1)}(k_s |t - \frac{1}{2}| J_i)}{|t - \frac{1}{2}|} \right. \\ & \quad \left. - \frac{i(k_p^2 - k_s^2)}{\pi} \log \left( J_i \left| t - \frac{1}{2} \right| \right) \right] \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt \\ & \quad + \frac{i(k_p^2 - k_s^2)}{\pi} \int_0^1 \log \left( J_i \left| t - \frac{1}{2} \right| \right) \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt . \end{aligned}$$

Da der erste Integrand lediglich eine  $\frac{1}{r}$ -Singularität besitzt, kann das Integral als *Cauchyscher Hauptwert* berechnet werden:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left[ \frac{k_p \mathbf{H}_1^{(1)}(k_p |t - \frac{1}{2}| J_i) - k_s \mathbf{H}_1^{(1)}(k_s |t - \frac{1}{2}| J_i)}{|t - \frac{1}{2}|} \right. \\
& \quad \left. - \frac{i(k_p^2 - k_s^2)}{\pi} \log \left( J_i \left| t - \frac{1}{2} \right| \right) \right] \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt \\
= & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \left[ \frac{k_p \mathbf{H}_1^{(1)}(k_p (\frac{1}{2} - t) J_i) - k_s \mathbf{H}_1^{(1)}(k_s (\frac{1}{2} - t) J_i)}{\frac{1}{2} - t} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{i(k_p^2 - k_s^2)}{\pi} \log \left( J_i \left( \frac{1}{2} - t \right) \right) \right] \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt \right. \\
& \quad \left. + \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \left[ \frac{k_p \mathbf{H}_1^{(1)}(k_p (t - \frac{1}{2}) J_i) - k_s \mathbf{H}_1^{(1)}(k_s (t - \frac{1}{2}) J_i)}{t - \frac{1}{2}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{i(k_p^2 - k_s^2)}{\pi} \log \left( J_i \left( t - \frac{1}{2} \right) \right) \right] \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt \right\} \\
= & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_1^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \left[ \frac{k_p \mathbf{H}_1^{(1)}(k_p (s - \frac{1}{2}) J_i) - k_s \mathbf{H}_1^{(1)}(k_s (s - \frac{1}{2}) J_i)}{s - \frac{1}{2}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{i(k_p^2 - k_s^2)}{\pi} \log \left( J_i \left( s - \frac{1}{2} \right) \right) \right] \frac{-1}{\frac{1}{2} - s} ds \right. \\
& \quad \left. + \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \left[ \frac{k_p \mathbf{H}_1^{(1)}(k_p (t - \frac{1}{2}) J_i) - k_s \mathbf{H}_1^{(1)}(k_s (t - \frac{1}{2}) J_i)}{t - \frac{1}{2}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{i(k_p^2 - k_s^2)}{\pi} \log \left( J_i \left( t - \frac{1}{2} \right) \right) \right] \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt \right\} \\
= & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ - \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \left[ \frac{k_p \mathbf{H}_1^{(1)}(k_p (s - \frac{1}{2}) J_i) - k_s \mathbf{H}_1^{(1)}(k_s (s - \frac{1}{2}) J_i)}{s - \frac{1}{2}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{i(k_p^2 - k_s^2)}{\pi} \log \left( J_i \left( s - \frac{1}{2} \right) \right) \right] \frac{1}{s - \frac{1}{2}} ds \right. \\
& \quad \left. + \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \left[ \frac{k_p \mathbf{H}_1^{(1)}(k_p (t - \frac{1}{2}) J_i) - k_s \mathbf{H}_1^{(1)}(k_s (t - \frac{1}{2}) J_i)}{t - \frac{1}{2}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{i(k_p^2 - k_s^2)}{\pi} \log \left( J_i \left( t - \frac{1}{2} \right) \right) \right] \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt \right\} \\
= & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 = 0 .
\end{aligned}$$

Für das zweite Integral kann ebenfalls der *Cauchysche Hauptwert* berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \log \left( J_i \left| t - \frac{1}{2} \right| \right) \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \log \left( J_i \left( \frac{1}{2} - t \right) \right) \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt + \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \log \left( J_i \left( t - \frac{1}{2} \right) \right) \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt \right\} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_1^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \log \left( J_i \left( s - \frac{1}{2} \right) \right) \frac{(-1)}{\frac{1}{2} - s} ds + \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \log \left( J_i \left( t - \frac{1}{2} \right) \right) \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt \right\} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ - \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \log \left( J_i \left( s - \frac{1}{2} \right) \right) \frac{1}{s - \frac{1}{2}} ds + \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \log \left( J_i \left( t - \frac{1}{2} \right) \right) \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt \right\} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 = 0 .
 \end{aligned}$$

Somit nimmt das gesamte Integral des zweiten Summanden den Wert 0 an und daher auch der Summand selbst.

Für den dritten Summanden

$$\begin{aligned}
 s_3 &= \frac{i\mu}{2\omega^2} \frac{k_p^2 H_0^{(1)}(k_p |t - \frac{1}{2}| J_i) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s |t - \frac{1}{2}| J_i)}{|t - \frac{1}{2}|^2 J_i^2} \\
 &\cdot \left( t - \frac{1}{2} \right) \left[ (v_{i+1} - v_i) n_y^\top + n_y (v_{i+1} - v_i)^\top \right]^\top
 \end{aligned}$$

gilt es den Wert des folgenden Integrals zu bestimmen:

$$\int_0^1 \left[ k_p^2 H_0^{(1)} \left( k_p \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - k_s^2 H_0^{(1)} \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) \right] \frac{t - \frac{1}{2}}{|t - \frac{1}{2}|^2} dt .$$

Die Hankel-Funktion 1. Art der Ordnung 0 kann als Linearkombination aus den Bessel-Funktionen erster und zweiter Art dargestellt werden:

$$H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + iY_0(x) .$$

Wie für das Einfachschichtpotential gezeigt, kann die Singularität der Bessel-Funktion zweiter Art durch Subtraktion und Addition des Terms

$$\frac{2}{\pi} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right)$$

ausgeglichen werden. Damit gilt für das ursprüngliche Integral mit  $k = k_p, k_s$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 k^2 \mathbf{H}_0^{(1)} \left( k \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) \frac{t - \frac{1}{2}}{\left| t - \frac{1}{2} \right|^2} dt \\ &= k^2 \int_0^1 \left[ \mathbf{H}_0^{(1)} \left( k \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - \frac{2i}{\pi} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) \right] \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt \\ &+ \frac{2ik^2}{\pi} \int_0^1 \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt . \end{aligned}$$

Da der Integrand des ersten Integrals nach der Singularitäten-Subtraktion nur noch eine  $\frac{1}{r}$ -Singularität besitzt, kann der *Cauchysche Hauptwert* des Integrals bestimmt werden:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left[ \mathbf{H}_0^{(1)} \left( k \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - \frac{2i}{\pi} \log \left( \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) \right] \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \left[ \mathbf{H}_0^{(1)} \left( k \left( \frac{1}{2} - t \right) J_i \right) - \frac{2i}{\pi} \log \left( \left( \frac{1}{2} - t \right) J_i \right) \right] \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \left[ \mathbf{H}_0^{(1)} \left( k \left( t - \frac{1}{2} \right) J_i \right) - \frac{2i}{\pi} \log \left( \left( t - \frac{1}{2} \right) J_i \right) \right] \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_1^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \left[ \mathbf{H}_0^{(1)} \left( k \left( s - \frac{1}{2} \right) J_i \right) - \frac{2i}{\pi} \log \left( \left( s - \frac{1}{2} \right) J_i \right) \right] \frac{1}{\frac{1}{2} - s} (-1) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \left[ \mathbf{H}_0^{(1)} \left( k \left( t - \frac{1}{2} \right) J_i \right) - \frac{2i}{\pi} \log \left( \left( t - \frac{1}{2} \right) J_i \right) \right] \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ - \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \left[ \mathbf{H}_0^{(1)} \left( k \left( s - \frac{1}{2} \right) J_i \right) - \frac{2i}{\pi} \log \left( \left( s - \frac{1}{2} \right) J_i \right) \right] \frac{1}{s - \frac{1}{2}} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \left[ \mathbf{H}_0^{(1)} \left( k \left( t - \frac{1}{2} \right) J_i \right) - \frac{2i}{\pi} \log \left( \left( t - \frac{1}{2} \right) J_i \right) \right] \frac{1}{t - \frac{1}{2}} dt \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 = 0 . \end{aligned}$$

Das zweite Integral wurde bereits als *Cauchyscher Hauptwert* ermittelt und ist ebenfalls 0. Da beide Integrale den Wert 0 annehmen, hat das gesamte Integral und damit der dritte Summand den Wert 0.

Aus dem vierten Summanden

$$s_4 = \frac{i}{4\omega^2} \frac{k_s^3 \mathbf{H}_1^{(1)} \left( k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right) - k_p^3 \mathbf{H}_1^{(1)} \left( k_p \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i \right)}{\left| t - \frac{1}{2} \right| J_i} \left( t - \frac{1}{2} \right) \left[ \lambda n_y (v_{i+1} - v_i)^\top \right]^\top$$

muss der Term

$$\frac{k_s^3 \mathbf{H}_1^{(1)}\left(k_s \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i\right) - k_p^3 \mathbf{H}_1^{(1)}\left(k_p \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i\right)}{\left|t - \frac{1}{2}\right|} \left(t - \frac{1}{2}\right)$$

über das Intervall  $[0, 1]$  integriert werden. Wird die Differenz auseinander gezogen, ergibt sich der folgende Zusammenhang:

$$k_s^3 \int_0^1 \mathbf{H}_1^{(1)}\left(k_s \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i\right) \frac{t - \frac{1}{2}}{\left|t - \frac{1}{2}\right|} dt - k_p^3 \int_0^1 \mathbf{H}_1^{(1)}\left(k_p \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i\right) \frac{t - \frac{1}{2}}{\left|t - \frac{1}{2}\right|} dt .$$

Für den ersten Summanden wurde bereits gezeigt, dass mit  $k = k_s$

$$\int_0^1 \mathbf{H}_1^{(1)}\left(k \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i\right) \frac{t - \frac{1}{2}}{\left|t - \frac{1}{2}\right|} dt = 0$$

gilt. Somit gilt der gleiche Zusammenhang auch für  $k = k_p$  und das Integral des vierten Summanden nimmt den Wert 0 an. Daher hat auch der vierte Summand den Wert 0.

Somit nehmen alle Summanden den Wert 0 an und für die Einträge in die Matrix  $A$  ergibt sich:

$$A_{2i-1,2i-1} = A_{2i-1,2i} = A_{2i,2i-1} = A_{2i,2i} = 0 .$$

### 3.2.3 Traktion des Einfachschichtpotentials

Die Traktion des Einfachschichtpotentials auf dem Rand

$$(D_\omega^\top \psi)(x) = T_x((S_\omega \psi)(x)) = \int_{\partial\Omega} T_x(\Phi_\omega(x, y)) \psi(y) ds(y)$$

hat nach der Diskretisierung des Randes  $\partial\Omega$  mit  $n$  Stützstellen die folgende Form:

$$\sum_{j=1}^n \left[ \int_0^1 T_x(\Phi_\omega(x, (1-t)v_j + tv_{j+1})) J_j dt \psi(\hat{v}_j) \right] .$$

Der bereits bekannte Traktionsoperator

$$T(z) = \lambda \operatorname{div} z \nu + 2\mu (\nu^\top \operatorname{grad})z + \mu \operatorname{div}(Q z)Q \nu$$

wird an dieser Stelle bezüglich  $x$  angewendet. Dabei ist  $\nu$  der nach außen gerichtete, normierte Normalenvektor des Kollokationspunktes  $x$  und  $Q$  die Matrix:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Bevor das lineare Gleichungssystem nach  $\psi$  aufgelöst werden kann, wird die Berechnungsvorschrift für den Kern  $T_x(\Phi_\omega(x, y))$  bestimmt.

Bei der Anwendung des Traktionsoperators auf die Fundamentallösung der Navier-Gleichung ergibt sich der folgende Zusammenhang:

$$\begin{aligned} T_x(\Phi_\omega(x, y)) &= T_x\left(\tilde{\Phi}_1(\|x-y\|_2)I\right) + T_x\left(\tilde{\Phi}_2(\|x-y\|_2)I\right) J(x-y) \\ &+ \tilde{\Phi}_2(\|x-y\|_2) T_x(J(x-y)) . \end{aligned}$$

Für die Berechnung der ersten beiden Summanden wird die Regel [3.1](#) für stetig differenzierbare Funktionen, die bereits in Kapitel [3.1.2](#) bewiesen wurde, verwendet:

$$\begin{aligned} T_x(f(\|x-y\|_2)I) &= \frac{f'(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2} [\lambda\nu(x)(x-y)^\top + \mu(x-y)\nu(x)^\top \\ &+ \mu\nu(x)^\top(x-y)I] . \end{aligned}$$

Die Ableitungen von  $\tilde{\Phi}_1$  und  $\tilde{\Phi}_2$  wurden bereits für das Doppelschichtpotential berechnet und können an dieser Stelle genutzt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{\Phi}_1(r)}{\partial r} &= -\frac{ik_s}{4\mu}H_1^{(1)}(k_s r) - \frac{i}{4\omega^2 r} \left[ 2\frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} \right. \\ &\quad \left. - k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) + k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) \right] , \\ \frac{\partial\tilde{\Phi}_2(r)}{\partial r} &= \frac{i}{2\omega^2 r} \left[ k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) - k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) + 2\frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} \right] \\ &+ \frac{i}{4\omega^2} \left[ k_s^3 H_1^{(1)}(k_s r) - k_p^3 H_1^{(1)}(k_p r) \right] . \end{aligned}$$

Mit der Definition der Matrix

$$U_1(x, y) = \lambda\nu(x)(x-y)^\top + \mu(x-y)\nu(x)^\top + \mu\nu(x)^\top(x-y)I$$

und  $r = \|x - y\|_2$  ergibt sich für die ersten beiden Summanden:

$$\begin{aligned}
 & T_x \left( \tilde{\Phi}_1(r) I \right) \\
 = & \frac{\tilde{\Phi}_1'(r)}{r} U_1(x, y) \\
 = & \left( -\frac{\mathbf{i} k_s}{4\mu r} \mathbf{H}_1^{(1)}(k_s r) - \frac{\mathbf{i}}{4\omega^2 r^2} \left[ 2 \frac{k_p \mathbf{H}_1^{(1)}(k_p r) - k_s \mathbf{H}_1^{(1)}(k_s r)}{r} \right. \right. \\
 & \left. \left. - k_p^2 \mathbf{H}_0^{(1)}(k_p r) + k_s^2 \mathbf{H}_0^{(1)}(k_s r) \right] \right) U_1(x, y) , \\
 & T_x \left( \tilde{\Phi}_2(r) I \right) J(x - y) \\
 = & \frac{\tilde{\Phi}_2'(r)}{r} U_1(x, y) J(x - y) \\
 = & \left( \frac{\mathbf{i}}{2\omega^2 r^2} \left[ k_s^2 \mathbf{H}_0^{(1)}(k_s r) - k_p^2 \mathbf{H}_0^{(1)}(k_p r) + 2 \frac{k_p \mathbf{H}_1^{(1)}(k_p r) - k_s \mathbf{H}_1^{(1)}(k_s r)}{r} \right] \right. \\
 & \left. + \frac{\mathbf{i}}{4\omega^2 r} \left[ k_s^3 \mathbf{H}_1^{(1)}(k_s r) - k_p^3 \mathbf{H}_1^{(1)}(k_p r) \right] \right) U_1(x, y) J(x - y) .
 \end{aligned}$$

Da für den statischen Fall der Zusammenhang

$$\begin{aligned}
 T_x (J(x - y)) &= \frac{1}{r^2} [(\lambda + 2\mu)\nu(x)(x - y)^\top + \mu(x - y)\nu(x)^\top \\
 &+ \mu\nu(x)^\top(x - y) (I - 4J(x - y))] \\
 &= \frac{1}{r^2} U_2(x, y)
 \end{aligned}$$

bereits hergeleitet wurde, kann auch der dritte Summand bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Phi}_2(r) T_x (J(x - y)) &= \frac{\tilde{\Phi}_2(r)}{r^2} U_2(x, y) \\
 &= \frac{1}{r^2} \left( \frac{\mathbf{i}}{2\omega^2 r} \left[ k_s \mathbf{H}_1^{(1)}(k_s r) - k_p \mathbf{H}_1^{(1)}(k_p r) \right] \right. \\
 &+ \left. \frac{\mathbf{i}}{4\omega^2} \left[ k_p^2 \mathbf{H}_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 \mathbf{H}_0^{(1)}(k_s r) \right] \right) U_2(x, y) .
 \end{aligned}$$

Damit gilt für die Anwendung des Traktionsoperators auf die Fundamentallösung:

$$\begin{aligned}
 & T_x(\Phi_\omega(x, y)) \\
 = & \left( -\frac{ik_s}{4\mu r} H_1^{(1)}(k_s r) - \frac{i}{4\omega^2 r^2} \left[ 2 \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} \right. \right. \\
 & \left. \left. - k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) + k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) \right] \right) U_1(x, y) \\
 + & \left( \frac{i}{2\omega^2 r^2} \left[ k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) - k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) + 2 \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} \right] \right. \\
 & \left. + \frac{i}{4\omega^2 r} \left[ k_s^3 H_1^{(1)}(k_s r) - k_p^3 H_1^{(1)}(k_p r) \right] \right) U_1(x, y) J(x - y) \\
 + & \frac{1}{r^2} \left( \frac{i}{2\omega^2 r} \left[ k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r) \right] \right. \\
 & \left. + \frac{i}{4\omega^2} \left[ k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) \right] \right) U_2(x, y) .
 \end{aligned}$$

Aufgrund der komplexen Berechnungsvorschrift wird an dieser Stelle lediglich die Einordnung der Einträge in die Matrix  $A$  dargestellt:

$$\begin{aligned}
 A_{2i-1, 2j-1} &= J_j \int_0^1 T_x^{11}[\Phi_\omega(\hat{v}_i, g_j)] dt , & A_{2i-1, 2j} &= J_j \int_0^1 T_x^{12}[\Phi_\omega(\hat{v}_i, g_j)] dt , \\
 A_{2i, 2j-1} &= J_j \int_0^1 T_x^{21}[\Phi_\omega(\hat{v}_i, g_j)] dt , & A_{2i, 2j} &= J_j \int_0^1 T_x^{22}[\Phi_\omega(\hat{v}_i, g_j)] dt .
 \end{aligned}$$

### Diagonalelemente

Das Skalarprodukt  $n_x^\top(\hat{v}_i - g_i)$  nimmt aufgrund der Zusammenhänge (a) – (d) (vgl. Seite [22](#) f.) den folgenden Wert an:

$$n_x^\top(\hat{v}_i - g_i) = \frac{1}{J_i} \begin{pmatrix} v_{i+1, y} - v_{i, y} \\ v_{i, x} - v_{i+1, x} \end{pmatrix}^\top \left( \frac{1}{2} - t \right) \begin{pmatrix} v_{i+1, x} - v_{i, x} \\ v_{i+1, y} - v_{i, y} \end{pmatrix} = 0 .$$

Damit vereinfachen sich die Matrizen zu

$$\begin{aligned}
 U_1(x, y) &= \lambda n_x(\hat{v}_i - g_i)^\top + \mu(\hat{v}_i - g_i)n_x^\top \\
 &= \left( \frac{1}{2} - t \right) [\lambda n_x(v_{i+1} - v_i)^\top + \mu(v_{i+1} - v_i)n_x^\top] , \\
 U_2(x, y) &= (\lambda + 2\mu)n_x(\hat{v}_i - g_i)^\top + \mu(\hat{v}_i - g_i)n_x^\top \\
 &= \left( \frac{1}{2} - t \right) [(\lambda + 2\mu)n_x(v_{i+1} - v_i)^\top + \mu(v_{i+1} - v_i)n_x^\top]
 \end{aligned}$$

und

$$U_1(x, y)J(x - y) = \lambda n_x(\hat{v}_i - g_i)^\top = \left(\frac{1}{2} - t\right) \lambda n_x(v_{i+1} - v_i)^\top .$$

Werden die obigen Definitionen und Vereinfachungen in der Berechnungsvorschrift für  $T_x(\Phi_\omega(\hat{v}_i, g_i))$  ersetzt und die Terme sortiert, so gilt:

$$\begin{aligned} & T_x(\Phi_\omega(\hat{v}_i, g_i)) \\ = & -\frac{ik_s}{4\mu \left|\frac{1}{2} - t\right| J_i H_1^{(1)}(k_s \left|\frac{1}{2} - t\right| J_i)} \left(\frac{1}{2} - t\right) [\lambda n_x(v_{i+1} - v_i)^\top + \mu(v_{i+1} - v_i)n_x^\top] \\ & - \frac{i\mu k_p H_1^{(1)}(k_p \left|\frac{1}{2} - t\right| J_i) - k_s H_1^{(1)}(k_s \left|\frac{1}{2} - t\right| J_i)}{\omega^2 \left|\frac{1}{2} - t\right|^3 J_i^3} \\ & \cdot \left(\frac{1}{2} - t\right) [(v_{i+1} - v_i)n_x^\top + n_x(v_{i+1} - v_i)^\top] \\ + & \frac{i\mu k_p^2 H_0^{(1)}(k_p \left|\frac{1}{2} - t\right| J_i) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s \left|\frac{1}{2} - t\right| J_i)}{2\omega^2 \left|\frac{1}{2} - t\right|^2 J_i^2} \\ & \cdot \left(\frac{1}{2} - t\right) [(v_{i+1} - v_i)n_x^\top + n_x(v_{i+1} - v_i)^\top] \\ + & \frac{i k_s^3 H_1^{(1)}(k_s \left|\frac{1}{2} - t\right| J_i) - k_p^3 H_1^{(1)}(k_p \left|\frac{1}{2} - t\right| J_i)}{4\omega^2 \left|\frac{1}{2} - t\right| J_i} \left(\frac{1}{2} - t\right) \lambda n_x(v_{i+1} - v_i)^\top . \end{aligned}$$

Da die Berechnungsvorschrift sehr länglich ist, werden im Folgenden die Summanden einzeln betrachtet.

Für die Berechnungen werden der folgende Zusammenhang

$$\left|\frac{1}{2} - t\right| = \left|t - \frac{1}{2}\right|$$

und die Umformung

$$\frac{1}{2} - t = (-1) \left(t - \frac{1}{2}\right)$$

verwendet.

Für das Integral des ersten Summanden gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 H_1^{(1)}\left(k_s \left|\frac{1}{2} - t\right| J_i\right) \frac{\frac{1}{2} - t}{\left|\frac{1}{2} - t\right|} dt &= (-1) \int_0^1 H_1^{(1)}\left(k_s \left|t - \frac{1}{2}\right| J_i\right) \frac{t - \frac{1}{2}}{\left|t - \frac{1}{2}\right|} dt \\ &= (-1) \cdot 0 . \end{aligned}$$

Dies wurde bereits bei der Berechnung des Doppelschichtpotentials bewiesen. Das Integral des zweiten Summanden kann durch Umformung ebenfalls auf ein beim Doppelschichtpotential verwendetes Integral zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \frac{k_p H_1^{(1)}\left(k_p \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i\right) - k_s H_1^{(1)}\left(k_s \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i\right)}{\left| \frac{1}{2} - t \right|} \frac{\frac{1}{2} - t}{\left| \frac{1}{2} - t \right|^2} dt \\
 = & (-1) \int_0^1 \frac{k_p H_1^{(1)}\left(k_p \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i\right) - k_s H_1^{(1)}\left(k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i\right)}{\left| t - \frac{1}{2} \right|} \frac{t - \frac{1}{2}}{\left| t - \frac{1}{2} \right|^2} dt \\
 = & (-1) \cdot 0 .
 \end{aligned}$$

Für das Integral des dritten Summanden gilt die Umformung

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \left[ k_p^2 H_0^{(1)}\left(k_p \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i\right) - k_s^2 H_0^{(1)}\left(k_s \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i\right) \right] \frac{\frac{1}{2} - t}{\left| \frac{1}{2} - t \right|^2} dt \\
 = & (-1) \int_0^1 \left[ k_p^2 H_0^{(1)}\left(k_p \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i\right) - k_s^2 H_0^{(1)}\left(k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i\right) \right] \frac{t - \frac{1}{2}}{\left| t - \frac{1}{2} \right|^2} dt .
 \end{aligned}$$

Das erhaltene Integral wurde bereits für das Doppelschichtpotential berechnet und hat den Wert 0 (vgl. Seite 70). Das Integral des letzten Summanden

$$\int_0^1 \left[ k_s^3 H_1^{(1)}\left(k_s \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i\right) - k_p^3 H_1^{(1)}\left(k_p \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i\right) \right] \frac{\frac{1}{2} - t}{\left| \frac{1}{2} - t \right|} dt$$

hat nach der Umformung die Form

$$(-1) \int_0^1 \left[ k_s^3 H_1^{(1)}\left(k_s \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i\right) - k_p^3 H_1^{(1)}\left(k_p \left| t - \frac{1}{2} \right| J_i\right) \right] \frac{t - \frac{1}{2}}{\left| t - \frac{1}{2} \right|} dt$$

und nimmt, wie bei dem Diagonalelement des Doppelschichtpotentials gezeigt, den Wert 0 an.

Da alle Integrale den Wert 0 annehmen, haben die zugehörigen Summanden und damit die gesamte  $2 \times 2$  Matrix den Wert 0. Für die Einträge in die Matrix  $A$  gilt daher:

$$A_{2i-1,2i-1} = A_{2i-1,2i} = A_{2i,2i-1} = A_{2i,2i} = 0 .$$

### 3.2.4 Traktion des Doppelschichtpotentials

Die Traktion des Doppelschichtpotentials auf dem Rand hat die Form

$$(N_\omega \psi)(x) = T_x (D_\omega \psi(x)) = T_x \left( \int_{\partial\Omega} [T_y(\Phi_\omega(x, y))]^\top \psi(y) ds(y) \right)$$

und kann auch mithilfe der Traktion des statischen Doppelschichtpotentials beschrieben werden:

$$(N_\omega\psi)(x) = (N_\omega\psi)(x) - (N_0\psi)(x) + (N_0\psi)(x) .$$

Da die Differenz  $(N_\omega\psi)(x) - (N_0\psi)(x)$  nach [5, Seite 611] eine logarithmische Singularität besitzt, kann eine Vertauschung von Integration und Differentiation vorgenommen werden. Für den verbleibenden Term  $(N_0\psi)(x)$  ist unter bestimmten Voraussetzungen (vgl. [5, Theorem 2]) eine solche Vertauschung ebenfalls möglich. Im weiteren Verlauf wird die Differenz

$$(N_{\omega_2}\psi)(x) - (N_{\omega_1}\psi)(x)$$

betrachtet und gezeigt, dass eine logarithmische Singularität vorliegt. Zunächst wird lediglich  $N_\omega\psi$  betrachtet, um den Kern herzuleiten. Nach der Diskretisierung des Randes  $\partial\Omega$  mit  $n$  Stützstellen gilt daher der Zusammenhang:

$$\sum_{j=1}^n \left[ \int_0^1 T_x \left( [T_y (\Phi_\omega(\hat{v}_i, (1-t)v_j + tv_{j+1}))]^\top \right) J_j dt \psi(\hat{v}_j) \right] .$$

Der Traktionsoperator

$$T_x(z) = \lambda \operatorname{div}(z) \nu + 2\mu (\nu^\top \operatorname{grad}) z + \mu \operatorname{div}(Qz) Q\nu$$

wird an dieser Stelle sowohl bezüglich  $y$  als auch bezüglich  $x$  angewendet. Dabei ist  $Q$  die Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und  $\nu$  der entsprechende, normierte Normalenvektor, der ins Außengebiet gerichtet ist.

Die Berechnungsvorschrift für  $[T_y (\Phi_\omega(x, y))]^\top$  wurde bereits beim Doppelschichtpotential hergeleitet und es gilt

$$\begin{aligned} [T_y (\Phi_\omega(x, y))]^\top &= \frac{\tilde{\Phi}_1'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} U_1(y, x)^\top + \frac{\tilde{\Phi}_2'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} J(x - y) U_1(y, x)^\top \\ &+ \frac{\tilde{\Phi}_2(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2^2} U_2(y, x)^\top \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_1'(r) &= -\frac{ik_s}{4\mu}H_1^{(1)}(k_s r) - \frac{i}{4\omega^2 r} \left[ 2\frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} \right. \\ &\quad \left. - k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) + k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) \right] , \\ \tilde{\Phi}_2'(r) &= \frac{i}{2\omega^2 r} \left[ k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) - k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) + 2\frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} \right] \\ &\quad + \frac{i}{4\omega^2} \left[ k_s^3 H_1^{(1)}(k_s r) - k_p^3 H_1^{(1)}(k_p r) \right]\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}U_1(y, x) &= \lambda\nu(y)(y-x)^\top + \mu(y-x)\nu(y)^\top + \mu\nu(y)^\top(y-x)I , \\ U_2(y, x) &= (\lambda + 2\mu)\nu(y)(y-x)^\top + \mu(y-x)\nu(y)^\top + \mu\nu(y)^\top(y-x)[I - 4J(x-y)] .\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Produktregel für eine Funktion  $f$  und eine Matrix  $G$

$$T(fG) = T(fI)G + fT(G)$$

gilt für die Anwendung des Traktionsoperators auf die obige Vorschrift:

$$\begin{aligned}& T_x ([T_y(\Phi_\omega(x, y))]^\top) \\ &= T_x \left( \frac{\tilde{\Phi}_1'(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2} I \right) U_1(y, x)^\top + \frac{\tilde{\Phi}_1'(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2} T_x (U_1(y, x)^\top) \\ &+ T_x \left( \frac{\tilde{\Phi}_2'(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2} I \right) J(x-y)U_1(y, x)^\top \\ &+ \frac{\tilde{\Phi}_2'(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2} T_x (J(x-y)U_1(y, x)^\top) \\ &+ T_x \left( \frac{\tilde{\Phi}_2(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2^2} I \right) U_2(y, x)^\top + \frac{\tilde{\Phi}_2(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2^2} T_x (U_2(y, x)^\top) .\end{aligned}$$

Die Berechnung von  $T_x ([T_y(\Phi_\omega(x, y))]^\top)$  orientiert sich an [5, Seite 607] und wird durch weitere Rechenschritte ergänzt. Dabei werden die in Kapitel 3.1.2 und 3.1.4 bewiesenen Rechenregeln und Ergebnisse verwendet.

Bei der Bestimmung der Traktion des Doppelschichtpotentials für den statischen Fall wurden bereits die Zusammenhänge

$$\begin{aligned}T_x (U_1(y, x)^\top) &= -2\lambda(\lambda + 2\mu)\nu(x)\nu(y)^\top - 2\mu^2 [\nu(y)\nu(x)^\top + \nu(x)^\top\nu(y)I] , \\ T_x (U_2(y, x)^\top) &= -4\mu\nu(y)^\top(y-x)\frac{U_2(x, y)}{\|x-y\|_2^2} - 2(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)\nu(x)\nu(y)^\top \\ &\quad - 2\mu [\lambda\nu(x)\nu(y)^\top + \mu\nu(y)\nu(x)^\top + \mu\nu(x)^\top\nu(y)I] [I - 2J(x-y)]\end{aligned}$$

mit

$$U_2(x, y) = (\lambda + 2\mu)\nu(x)(x - y)^\top + \mu(x - y)\nu(x)^\top + \mu\nu(x)^\top(x - y) [I - 4J(x - y)]$$

hergeleitet (vgl. Seite 44). Das Produkt

$$\begin{aligned} & U_1(y, x)J(x - y) \\ &= [\lambda\nu(y)(y - x)^\top + \mu(y - x)\nu(y)^\top + \mu\nu(y)^\top(y - x)I] \frac{(x - y)(x - y)^\top}{\|x - y\|_2^2} \end{aligned}$$

kann, wie für das Doppelschichtpotential im statischen Fall gezeigt (vgl. Seite 30), vereinfacht werden zu:

$$U_1(y, x)J(x - y) = \lambda\nu(y)(y - x)^\top + 2\mu\nu(y)^\top(y - x)J(x - y) .$$

Nach dem Transponieren

$$J(x - y)U_1(y, x)^\top = \lambda(y - x)\nu(y)^\top + 2\mu\nu(y)^\top(y - x)J(x - y)$$

kann der Traktionsoperator angewendet werden und es gilt:

$$\begin{aligned} & T_x (J(x - y)U_1(y, x)^\top) \\ &= -\lambda T_x ((x - y)\nu(y)^\top) - 2\mu T_x (\nu(y)(x - y)I) J(x - y) \\ &+ 2\mu\nu(y)^\top(y - x)T_x(J(x - y)) \\ &= -2\lambda(\lambda + \mu)\nu(x)\nu(y)^\top + 2\mu\nu(y)^\top(y - x) \frac{U_2(x, y)}{\|x - y\|_2^2} \\ &- 2\mu [\lambda\nu(x)\nu(y)^\top + \mu\nu(y)\nu(x)^\top + \mu\nu(x)^\top\nu(y)I] J(x - y) . \end{aligned}$$

Für die Bestimmung von

$$T_x \left( \frac{\tilde{\Phi}_i'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} I \right) \quad \text{für } i = 1, 2 \quad \text{bzw.} \quad T_x \left( \frac{\tilde{\Phi}_2(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2^2} I \right)$$

wird die in Kapitel 3.1.2 vorgestellte Regel 3.1

$$\begin{aligned} T_x (f(\|x - y\|_2)I) &= \frac{f'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} [\lambda\nu(x)(x - y)^\top + \mu(x - y)\nu(x)^\top \\ &+ \mu\nu(x)^\top(x - y)I] \\ &= \frac{f'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} U_1(x, y) \end{aligned}$$

für stetig differenzierbare Funktionen verwendet. Die Terme haben daher die Form

$$\begin{aligned} T_x \left( \frac{\tilde{\Phi}_i'(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2} I \right) &= \left( \frac{\tilde{\Phi}_i'(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2} \right)' \frac{U_1(x,y)}{\|x-y\|_2} \\ &= \left[ \frac{\tilde{\Phi}_i''(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2} - \frac{\tilde{\Phi}_i'(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2^2} \right] \frac{U_1(x,y)}{\|x-y\|_2}, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} T_x \left( \frac{\tilde{\Phi}_2(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2^2} I \right) &= \left( \frac{\tilde{\Phi}_2(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2^2} \right)' \frac{U_1(x,y)}{\|x-y\|_2} \\ &= \left[ \frac{\tilde{\Phi}_2'(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2^2} - \frac{2\tilde{\Phi}_2(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2^3} \right] \frac{U_1(x,y)}{\|x-y\|_2}. \end{aligned}$$

Für die Berechnung der zweiten Ableitungen wird die Ableitung der Hankel-Funktion 1. Art der Ordnung 0 bzw. 1

$$\frac{\partial H_0^{(1)}(kx)}{\partial x} = -kH_1^{(1)}(kx) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial H_1^{(1)}(kx)}{\partial x} = k \left( H_0^{(1)}(kx) - \frac{H_1^{(1)}(kx)}{kx} \right).$$

verwendet. Unter Anwendung der Quotientenregel und des Zusammenhangs  $\mu = \frac{\omega^2}{k_s^2}$  ergibt sich für die benötigten Ableitungen

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1''(r) &= \frac{\partial \tilde{\Phi}_1'(r)}{\partial r} \\ &= -\frac{ik_s^4}{4\omega^2} H_0^{(1)}(k_s r) - \frac{i}{4\omega^2} \left( \frac{1}{r} \left[ k_p^3 H_1^{(1)}(k_p r) - 2k_s^3 H_1^{(1)}(k_s r) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{r^2} \left[ k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) \right] - \frac{6}{r^3} \left[ k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r) \right] \right) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2''(r) &= \frac{\partial \tilde{\Phi}_2'(r)}{\partial r} \\ &= \frac{i}{4\omega^2} \left( k_s^4 H_0^{(1)}(k_s r) - k_p^4 H_0^{(1)}(k_p r) + \frac{3}{r} \left[ k_p^3 H_1^{(1)}(k_p r) - k_s^3 H_1^{(1)}(k_s r) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{6}{r^2} \left[ k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) \right] - \frac{12}{r^3} \left[ k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r) \right] \right). \end{aligned}$$

Im Folgenden werden die Ableitungen jedoch nicht durch ihre Berechnungsvorschrift ersetzt, da dies zu einer sehr komplexen Darstellung von  $T_x \left( [T_y(\Phi_\omega(x,y))]^\top \right)$

führen würde.

Insgesamt ergibt sich mit  $r = \|x - y\|_2$  die Berechnungsvorschrift:

$$\begin{aligned}
 & T_x \left( [T_y(\Phi_\omega(x, y))]^\top \right) \\
 = & \left[ \frac{\tilde{\Phi}_1''(r)}{r} - \frac{\tilde{\Phi}_1'(r)}{r^2} \right] \frac{U_1(x, y)}{r} U_1(y, x)^\top + \frac{\tilde{\Phi}_1'(r)}{r} T_x (U_1(y, x)^\top) \\
 + & \left[ \frac{\tilde{\Phi}_2''(r)}{r} - \frac{\tilde{\Phi}_2'(r)}{r^2} \right] \frac{U_1(x, y)}{r} J(x - y) U_1(y, x)^\top \\
 + & \frac{\tilde{\Phi}_2'(r)}{r} T_x (J(x - y) U_1(y, x)^\top) \\
 + & \left[ \frac{\tilde{\Phi}_2'(r)}{r^2} - \frac{2\tilde{\Phi}_2(r)}{r^3} \right] \frac{U_1(x, y)}{r} U_2(y, x)^\top + \frac{\tilde{\Phi}_2(r)}{r^2} T_x (U_2(y, x)^\top) .
 \end{aligned}$$

Diese wird zusammengefasst zu:

$$\begin{aligned}
 T_x \left( [T_y(\Phi_\omega(x, y))]^\top \right) &= \frac{\tilde{\Phi}_1'(r)}{r} W_1^{(1)}(x, y) + \tilde{\Phi}_1''(r) W_1^{(2)}(x, y) \\
 &+ \frac{\tilde{\Phi}_2(r)}{r^2} W_2^{(0)}(x, y) + \frac{\tilde{\Phi}_2'(r)}{r} W_2^{(1)}(x, y) + \tilde{\Phi}_2''(r) W_2^{(2)}(x, y)
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 W_1^{(2)}(x, y) &= \frac{1}{r^2} U_1(x, y) U_1(y, x)^\top , \\
 W_1^{(1)}(x, y) &= T_x (U_1(y, x)^\top) - W_1^{(2)}(x, y) , \\
 W_2^{(2)}(x, y) &= \frac{1}{r^2} U_1(x, y) J(x, y) U_1(y, x)^\top , \\
 W_2^{(1)}(x, y) &= T_x (J(x - y) U_1(y, x)^\top) + \frac{1}{r^2} U_1(x, y) U_2(y, x)^\top - W_2^{(2)}(x, y) , \\
 W_2^{(0)}(x, y) &= T_x (U_2(y, x)^\top) - \frac{2}{r^2} U_1(x, y) U_2(y, x)^\top .
 \end{aligned}$$

Es wird lediglich die Einordnung der Einträge in die Matrix  $A$  (vgl. Seite [10](#)) dargestellt, da die Berechnungsvorschrift sehr komplex ist:

$$A_{2i-1,2j-1} = J_j \int_0^1 T_x^{11} \left( [T_y(\Phi_\omega(\hat{v}_i, g_j))]^\top \right) dt ,$$

$$A_{2i-1,2j} = J_j \int_0^1 T_x^{12} \left( [T_y(\Phi_\omega(\hat{v}_i, g_j))]^\top \right) dt ,$$

$$A_{2i,2j-1} = J_j \int_0^1 T_x^{21} \left( [T_y(\Phi_\omega(\hat{v}_i, g_j))]^\top \right) dt ,$$

$$A_{2i,2j} = J_j \int_0^1 T_x^{22} \left( [T_y(\Phi_\omega(\hat{v}_i, g_j))]^\top \right) dt .$$

### Diagonalelemente

Da die Indizes  $i$  und  $j$  identisch sind, sind die aus der Diskretisierung resultierenden Normalenvektoren  $n_x$  und  $n_y$  (vgl. Seite [12](#)) im Diagonalfall ebenfalls identisch. Für die Skalarprodukte  $n_y^\top(g_i - \hat{v}_i)$  bzw.  $n_x^\top(\hat{v}_i - g_i)$  gilt aufgrund der Zusammenhänge (a) – (d) (vgl. Seite [22](#) f.):

$$n_y^\top(g_i - \hat{v}_i) = \frac{1}{J_i} \cdot \begin{pmatrix} v_{i+1,y} - v_{i,y} \\ v_{i,x} - v_{i+1,x} \end{pmatrix}^\top \left( t - \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} v_{i+1,x} - v_{i,x} \\ v_{i+1,y} - v_{i,y} \end{pmatrix} = -n_x^\top(\hat{v}_i - g_i) = 0 .$$

Damit können die zur Darstellung der Berechnungsvorschrift verwendeten Funktionen

$$W_j^{(k)}(x, y) \quad j = 1, 2, \quad k = 0, 1, 2$$

vereinfacht werden. So gilt für die Funktion

$$W_1^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\|x - y\|_2^2} U_1(x, y) U_1(y, x)^\top$$

mit

$$\begin{aligned} U_1(y, x)^\top &= \lambda(y - x)n_y^\top + \mu n_y(y - x)^\top + \mu n_y^\top(y - x)I , \\ U_1(x, y) &= \lambda n_x(x - y)^\top + \mu(x - y)n_x^\top + \mu n_x^\top(x - y)I \end{aligned}$$

der Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
 & W_1^{(2)}(\hat{v}_i, g_i) \\
 &= \frac{1}{\|\hat{v}_i - g_i\|_2^2} U_1(\hat{v}_i, g_i) U_1(g_i, \hat{v}_i)^\top \\
 &= \frac{1}{\|\hat{v}_i - g_i\|_2^2} [\lambda n_x(\hat{v}_i - g_i)^\top + \mu(\hat{v}_i - g_i) n_x^\top] \\
 &\quad \cdot [\lambda(g_i - \hat{v}_i) n_y^\top + \mu n_y(g_i - \hat{v}_i)^\top] \\
 &= \frac{1}{\|\hat{v}_i - g_i\|_2^2} \left[ \lambda^2 n_x(\hat{v}_i - g_i)^\top (g_i - \hat{v}_i) n_y^\top + \lambda \mu n_x \underbrace{(\hat{v}_i - g_i)^\top n_y (g_i - \hat{v}_i)^\top}_{=0} \right. \\
 &\quad \left. + \mu \lambda (\hat{v}_i - g_i) \underbrace{n_x^\top (g_i - \hat{v}_i) n_y^\top}_{=0} + \mu^2 (\hat{v}_i - g_i) n_x^\top n_y (g_i - \hat{v}_i)^\top \right] \\
 &= -\frac{1}{\|\hat{v}_i - g_i\|_2^2} [\lambda^2 n_x(\hat{v}_i - g_i)^\top (\hat{v}_i - g_i) n_y^\top \\
 &\quad + \mu^2 (\hat{v}_i - g_i) n_x^\top n_y (\hat{v}_i - g_i)^\top] .
 \end{aligned}$$

Da die Normalenvektoren  $n_x$  und  $n_y$  normiert und für das Diagonalelement identisch sind, gilt:

$$n_x^\top n_y = 1 .$$

Außerdem gilt der Zusammenhang

$$(\hat{v}_i - g_i)^\top (\hat{v}_i - g_i) = \|\hat{v}_i - g_i\|_2^2 ,$$

womit sich die obige Funktion weiter vereinfachen lässt:

$$W_1^{(2)}(\hat{v}_i, g_i) = -\lambda^2 n_x n_y^\top - \mu^2 \frac{(\hat{v}_i - g_i)(\hat{v}_i - g_i)^\top}{\|\hat{v}_i - g_i\|_2^2} = -\lambda^2 n_x n_y^\top - \mu^2 J(\hat{v}_i - g_i) .$$

Die Funktion

$$W_1^{(1)}(x, y) = T_x (U_1(y, x)^\top) - W_1^{(2)}(x, y)$$

mit

$$T_x (U_1(y, x)^\top) = -2\lambda(\lambda + 2\mu) n_x n_y^\top - 2\mu^2 [n_y n_x^\top + n_x^\top n_y I]$$

kann mit den oben gemachten Annahmen ebenfalls vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
 & W_1^{(1)}(\hat{v}_i, g_i) \\
 &= T_x (U_1(g_i, \hat{v}_i)^\top) - W_1^{(2)}(\hat{v}_i, g_i) \\
 &= -2\lambda(\lambda + 2\mu) n_x n_y^\top - 2\mu^2 [n_y n_x^\top + n_x^\top n_y I] + \lambda^2 n_x n_y^\top + \mu^2 J(\hat{v}_i - g_i) \\
 &= -\lambda^2 n_x n_y^\top - 4\lambda \mu n_x n_y^\top - 2\mu^2 \left[ n_y n_x^\top + I - \frac{1}{2} J(\hat{v}_i - g_i) \right] .
 \end{aligned}$$

Für die Funktion  $W_2^{(2)}(x, y)$  gilt analog:

$$\begin{aligned}
 W_2^{(2)}(\hat{v}_i, g_i) &= \frac{1}{\|\hat{v}_i - g_i\|_2^2} U_1(\hat{v}_i, g_i) J(\hat{v}_i - g_i) U_1(g_i, \hat{v}_i)^\top \\
 &= \frac{1}{\|\hat{v}_i - g_i\|_2^2} [\lambda n_x(\hat{v}_i - g_i)^\top + \mu(\hat{v}_i - g_i) n_x^\top] \frac{(\hat{v}_i - g_i)(\hat{v}_i - g_i)^\top}{\|\hat{v}_i - g_i\|_2^2} \\
 &\quad \cdot [\lambda(g_i - \hat{v}_i) n_y^\top + \mu n_y(g_i - \hat{v}_i)^\top] \\
 &= -\lambda^2 n_x n_y^\top .
 \end{aligned}$$

Die Funktion

$$W_2^{(1)}(x, y) = T_x (J(x - y) U_1(y, x)^\top) + \frac{1}{\|x - y\|_2^2} U_1(x, y) U_2(y, x)^\top - W_2^{(2)}(x, y)$$

mit

$$\begin{aligned}
 T_x (J(x - y) U_1(y, x)^\top) &= -2\lambda(\lambda + \mu) n_x n_y^\top + 2\mu n_y^\top (y - x) \frac{U_2(x, y)}{\|x - y\|_2^2} \\
 &\quad - 2\mu [\lambda n_x n_y^\top + \mu n_y n_x^\top + \mu n_x^\top n_y I] J(x - y) \\
 U_2(y, x)^\top &= (\lambda + 2\mu)(y - x) n_y^\top + \mu n_y (y - x)^\top + \mu n_y^\top (y - x) [I - 4J(x - y)]
 \end{aligned}$$

kann ebenfalls vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
 W_2^{(1)}(\hat{v}_i, g_i) &= T_x (J(\hat{v}_i - g_i) U_1(g_i, \hat{v}_i)^\top) + \frac{1}{\|\hat{v}_i - g_i\|_2^2} U_1(\hat{v}_i, g_i) U_2(g_i, \hat{v}_i)^\top \\
 &\quad - W_2^{(2)}(\hat{v}_i, g_i) \\
 &= -2\lambda(\lambda + \mu) n_x n_y^\top - 2\mu [\lambda n_x n_y^\top + \mu n_y n_x^\top + \mu n_x^\top n_y I] J(\hat{v}_i - g_i) \\
 &\quad + \frac{1}{\|\hat{v}_i - g_i\|_2^2} [\lambda n_x(\hat{v}_i - g_i)^\top + \mu(\hat{v}_i - g_i) n_x^\top] \\
 &\quad \cdot [(\lambda + 2\mu)(g_i - \hat{v}_i) n_y^\top + \mu n_y(g_i - \hat{v}_i)^\top] + \lambda^2 n_x n_y^\top \\
 &= -2\lambda^2 n_x n_y^\top - 6\lambda\mu n_x n_y^\top - 3\mu^2 J(\hat{v}_i - g_i) .
 \end{aligned}$$

Für die letzte Funktion  $W_2^{(0)}(x, y)$  gilt mit

$$\begin{aligned}
 T_x (U_2(y, x)^\top) &= -4\mu n_y^\top (y - x) \frac{U_2(x, y)}{\|x - y\|_2^2} - 2(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu) n_x n_y^\top \\
 &\quad - 2\mu [\lambda n_x n_y^\top + \mu n_y n_x^\top + \mu n_x^\top n_y I] [I - 2J(x - y)]
 \end{aligned}$$

der Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
 W_2^{(0)}(\hat{v}_i - g_i) &= T_x (U_2(g_i, \hat{v}_i)^\top) - \frac{2}{\|\hat{v}_i - g_i\|_2^2} U_1(\hat{v}_i, g_i) U_2(g_i, \hat{v}_i)^\top \\
 &= -2(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu) n_x n_y^\top - 2\mu [\lambda n_x n_y^\top + \mu n_y n_x^\top + \mu n_x^\top n_y I] \\
 &\quad \cdot [I - 2J(\hat{v}_i - g_j)] - \frac{2}{\|\hat{v}_i - g_i\|_2^2} [\lambda n_x (\hat{v}_i - g_i)^\top + \mu (\hat{v}_i - g_i) n_x^\top] \\
 &\quad \cdot [(\lambda + 2\mu)(g_i - \hat{v}_i) n_y^\top + \mu n_y (g_i - \hat{v}_i)^\top] \\
 &= -4\lambda \mu n_x n_y^\top - 6\mu^2 n_x n_y^\top - 2\mu^2 I + 6\mu^2 J(\hat{v}_i - g_i) .
 \end{aligned}$$

Da der Term

$$\begin{aligned}
 J(\hat{v}_i - g_i) &= \frac{(\hat{v}_i - g_i)(\hat{v}_i - g_i)^\top}{\|\hat{v}_i - g_i\|_2^2} = \frac{(\frac{1}{2} - t)^2 (v_{i+1} - v_i)(v_{i+1} - v_i)^\top}{|\frac{1}{2} - t|^2 J_i^2} \\
 &= \frac{(v_{i+1} - v_i)(v_{i+1} - v_i)^\top}{J_i^2}
 \end{aligned}$$

unabhängig von  $t$  ist, sind alle  $W$ -Funktionen unabhängig von  $t$  und müssen bei der Integration nicht berücksichtigt werden.

Da die Traktion des Doppelschichtpotentials starke Singularitäten besitzt, wird im Folgenden die Differenz

$$(N_{\omega_2} \psi)(x) - (N_{\omega_1} \psi)(x)$$

für zwei verschiedene Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  betrachtet:

$$\begin{aligned}
 (N_{\omega_2} \psi)(x) - (N_{\omega_1} \psi)(x) &= \int_0^1 T_x \left( [T_y(\Phi_{\omega_2}(\hat{v}_i, (1-t)v_j + tv_{j+1}))]^\top \right) J_j \\
 &\quad - T_x \left( [T_y(\Phi_{\omega_1}(\hat{v}_i, (1-t)v_j + tv_{j+1}))]^\top \right) J_j dt .
 \end{aligned}$$

Es genügt diese Differenz zu betrachten, da bei der späteren Anwendung beim Transmissionsproblem eine solche Differenz benötigt wird.

Zwischen den Frequenzen gilt dabei der Zusammenhang:

$$\omega_2 = \sqrt{\sigma} \omega_1 \quad \text{mit} \quad \sigma > 1 .$$

Für die Wellenzahlen ergibt sich damit:

$$k_{s_2}^2 = \frac{\omega_2^2}{\mu} = \frac{\sigma \omega_1^2}{\mu} = \sigma k_{s_1}^2 \quad \text{bzw.} \quad k_{p_2}^2 = \frac{\omega_2^2}{\lambda + 2\mu} = \frac{\sigma \omega_1^2}{\lambda + 2\mu} = \sigma k_{p_1}^2 .$$

Da die  $W$ -Funktionen unabhängig von der Frequenz  $\omega$  sind, kann mithilfe der Berechnungsvorschrift

$$\begin{aligned}
 T_x ([T_y(\Phi_\omega(x, y))]^\top) &= \frac{\tilde{\Phi}_1'(r)}{r} W_1^{(1)}(x, y) + \tilde{\Phi}_1''(r) W_1^{(2)}(x, y) \\
 &\quad + \frac{\tilde{\Phi}_2(r)}{r^2} W_2^{(0)}(x, y) + \frac{\tilde{\Phi}_2'(r)}{r} W_2^{(1)}(x, y) + \tilde{\Phi}_2''(r) W_2^{(2)}(x, y)
 \end{aligned}$$

der Integrand der obigen Differenz wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
& T_x \left( [T_y(\Phi_{\sqrt{\sigma\omega}}(x, y))]^\top \right) - T_x \left( [T_y(\Phi_\omega(x, y))]^\top \right) \\
&= \left[ \frac{\tilde{\Phi}_{\sqrt{\sigma\omega},1}'(r) - \tilde{\Phi}_{\omega,1}'(r)}{r} \right] W_1^{(1)}(x, y) + \left[ \tilde{\Phi}_{\sqrt{\sigma\omega},1}''(r) - \tilde{\Phi}_{\omega,1}''(r) \right] W_1^{(2)}(x, y) \\
&+ \left[ \frac{\tilde{\Phi}_{\sqrt{\sigma\omega},2}(r) - \tilde{\Phi}_{\omega,2}(r)}{r^2} \right] W_2^{(0)}(x, y) + \left[ \frac{\tilde{\Phi}_{\sqrt{\sigma\omega},2}'(r) - \tilde{\Phi}_{\omega,2}'(r)}{r} \right] W_2^{(1)}(x, y) \\
&+ \left[ \tilde{\Phi}_{\sqrt{\sigma\omega},2}''(r) - \tilde{\Phi}_{\omega,2}''(r) \right] W_2^{(2)}(x, y) .
\end{aligned}$$

Für die Differenzen der Funktionen gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{\tilde{\Phi}_{\sqrt{\sigma\omega},1}'(r) - \tilde{\Phi}_{\omega,1}'(r)}{r} \\
&= -\frac{ik_s^3}{4\omega^2 r} \left[ \sqrt{\sigma} H_1^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_s r) \right] \\
&- \frac{ik_p}{2\omega^2 r^3} \left[ \frac{1}{\sqrt{\sigma}} H_1^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_p r) \right] + \frac{ik_s}{2\omega^2 r^3} \left[ \frac{1}{\sqrt{\sigma}} H_1^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_s r) \right] \\
&+ \frac{ik_p^2}{4\omega^2 r^2} \left[ H_0^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_p r) \right] - \frac{ik_s^2}{4\omega^2 r^2} \left[ H_0^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_s r) \right] , \\
& \tilde{\Phi}_{\sqrt{\sigma\omega},1}''(r) - \tilde{\Phi}_{\omega,1}''(r) \\
&= -\frac{ik_s^4}{4\omega^2} \left[ \sigma H_0^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_s r) \right] \\
&- \frac{ik_p^3}{4\omega^2 r} \left[ \sqrt{\sigma} H_1^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_p r) \right] + \frac{ik_s^3}{2\omega^2 r} \left[ \sqrt{\sigma} H_1^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_s r) \right] \\
&+ \frac{3ik_s^2}{4\omega^2 r^2} \left[ H_0^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_s r) \right] - \frac{3ik_p^2}{4\omega^2 r^2} \left[ H_0^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_p r) \right] \\
&+ \frac{3ik_p}{2\omega^2 r^3} \left[ \frac{1}{\sqrt{\sigma}} H_1^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_p r) \right] - \frac{3ik_s}{2\omega^2 r^3} \left[ \frac{1}{\sqrt{\sigma}} H_1^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_s r) \right] , \\
& \frac{\tilde{\Phi}_{\sqrt{\sigma\omega},2}(r) - \tilde{\Phi}_{\omega,2}(r)}{r^2} \\
&= \frac{ik_s}{2\omega^2 r^3} \left[ \frac{1}{\sqrt{\sigma}} H_1^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_s r) \right] - \frac{ik_p}{2\omega^2 r^3} \left[ \frac{1}{\sqrt{\sigma}} H_1^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_p r) \right] \\
&+ \frac{ik_p^2}{4\omega^2 r^2} \left[ H_0^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_p r) \right] - \frac{ik_s^2}{4\omega^2 r^2} \left[ H_0^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_s r) \right] ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\tilde{\Phi}_{\sqrt{\sigma}\omega,2}'(r) - \tilde{\Phi}_{\omega,2}'(r)}{r} \\
 &= \frac{ik_s^2}{2\omega^2 r^2} \left[ H_0^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_s r) \right] - \frac{ik_p^2}{2\omega^2 r^2} \left[ H_0^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_p r) \right] \\
 &+ \frac{ik_p}{\omega^2 r^3} \left[ \frac{1}{\sqrt{\sigma}} H_1^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_p r) \right] - \frac{ik_s}{\omega^2 r^3} \left[ \frac{1}{\sqrt{\sigma}} H_1^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_s r) \right] \\
 &+ \frac{ik_s^3}{4\omega^2 r} \left[ \sqrt{\sigma} H_1^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_s r) \right] - \frac{ik_p^3}{4\omega^2 r} \left[ \sqrt{\sigma} H_1^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_p r) \right], \\
 \\
 & \tilde{\Phi}_{\sqrt{\sigma}\omega,2}''(r) - \tilde{\Phi}_{\omega,2}''(r) \\
 &= \frac{ik_s^4}{4\omega^2} \left[ \sigma H_0^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_s r) \right] - \frac{ik_p^4}{4\omega^2} \left[ \sigma H_0^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_p r) \right] \\
 &+ \frac{3ik_p^3}{4\omega^2 r} \left[ \sqrt{\sigma} H_1^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_p r) \right] - \frac{3ik_s^3}{4\omega^2 r} \left[ \sqrt{\sigma} H_1^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_s r) \right] \\
 &+ \frac{3ik_p^2}{2\omega^2 r^2} \left[ H_0^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_p r) \right] - \frac{3ik_s^2}{2\omega^2 r^2} \left[ H_0^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_s r) \right] \\
 &+ \frac{3ik_s}{\omega^2 r^3} \left[ \frac{1}{\sqrt{\sigma}} H_1^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_s r) \right] - \frac{3ik_p}{\omega^2 r^3} \left[ \frac{1}{\sqrt{\sigma}} H_1^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_p r) \right].
 \end{aligned}$$

Die Terme des Integranden werden nun mithilfe der zuvor angegebenen Differenzen zusammengefasst und sortiert. Mit  $r = \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i$  gilt:

$$\begin{aligned}
 & T_x \left( [T_y(\Phi_{\sqrt{\sigma}\omega}(x, y))]^\top \right) - T_x \left( [T_y(\Phi_\omega(x, y))]^\top \right) \\
 &= \frac{ik_s^3}{4\omega^2} \frac{\sqrt{\sigma} H_1^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_s r)}{r} \left[ -W_1^{(1)}(x, y) + 2W_1^{(2)}(x, y) \right. \\
 &+ \left. W_2^{(1)}(x, y) - 3W_2^{(2)}(x, y) \right] \\
 &+ \frac{ik_p^3}{4\omega^2} \frac{\sqrt{\sigma} H_1^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_p r)}{r} \left[ -W_1^{(2)}(x, y) - W_2^{(1)}(x, y) + 3W_2^{(2)}(x, y) \right] \\
 &+ \left( \frac{ik_p^2}{4\omega^2} \frac{H_0^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_p r)}{r^2} - \frac{ik_s^2}{4\omega^2} \frac{H_0^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_s r)}{r^2} \right) \\
 &\cdot \left[ W_1^{(1)}(x, y) - 3W_1^{(2)}(x, y) + W_2^{(0)}(x, y) - 2W_2^{(1)}(x, y) + 6W_2^{(2)}(x, y) \right] \\
 &+ \left( \frac{ik_s}{4\omega^2} \frac{\frac{1}{\sqrt{\sigma}} H_1^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_s r)}{r^3} - \frac{ik_p}{4\omega^2} \frac{\frac{1}{\sqrt{\sigma}} H_1^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_p r)}{r^3} \right) \\
 &\cdot \left[ 2W_1^{(1)}(x, y) - 6W_1^{(2)}(x, y) + 2W_2^{(0)}(x, y) - 4W_2^{(1)}(x, y) + 12W_2^{(2)}(x, y) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ik_s^4}{4\omega^2} \left[ \sigma H_0^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_s r) \right] \left[ -W_1^{(2)}(x, y) + W_2^{(2)}(x, y) \right] \\
& + \frac{ik_p^4}{4\omega^2} \left[ \sigma H_0^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_p r) \right] \left[ -W_2^{(2)}(x, y) \right] \\
& = \frac{ik_s^4}{4\omega^2} \left[ \sigma H_0^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_s r) \right] \left[ -W_1^{(2)}(x, y) + W_2^{(2)}(x, y) \right] \\
& + \frac{ik_p^4}{4\omega^2} \left[ \sigma H_0^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_p r) \right] \left[ -W_2^{(2)}(x, y) \right] \\
& + \frac{ik_s^3}{4\omega^2} \frac{\sqrt{\sigma} H_1^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_s r)}{r} \left[ -W_1^{(1)}(x, y) + 2W_1^{(2)}(x, y) \right. \\
& + \left. W_2^{(1)}(x, y) - 3W_2^{(2)}(x, y) \right] \\
& + \frac{ik_p^3}{4\omega^2} \frac{\sqrt{\sigma} H_1^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_p r)}{r} \left[ -W_1^{(2)}(x, y) - W_2^{(1)}(x, y) + 3W_2^{(2)}(x, y) \right] \\
& + \left( \frac{ik_p^2}{4\omega^2} \frac{H_0^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_p r)}{r^2} - \frac{ik_s^2}{4\omega^2} \frac{H_0^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_0^{(1)}(k_s r)}{r^2} \right. \\
& + \left. \frac{2ik_s}{4\omega^2} \frac{\frac{1}{\sqrt{\sigma}} H_1^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_s r)}{r^3} - \frac{2ik_p}{4\omega^2} \frac{\frac{1}{\sqrt{\sigma}} H_1^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} r) - H_1^{(1)}(k_p r)}{r^3} \right) \\
& \cdot \left[ W_1^{(1)}(x, y) - 3W_1^{(2)}(x, y) + W_2^{(0)}(x, y) - 2W_2^{(1)}(x, y) + 6W_2^{(2)}(x, y) \right] .
\end{aligned}$$

Da die  $W$ -Funktionen unabhängig von  $t$  sind und somit bei der Integration nicht berücksichtigt werden müssen, genügt es die von  $r = |\frac{1}{2} - t| J_i$  abhängigen Terme zu betrachten.

Für die Hankel-Funktionen erster Art gilt die Linearkombination der Bessel-Funktionen erster und zweiter Art

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x) ,$$

die im Folgenden zur Bestimmung der Integrale genutzt wird.

Für die ersten beiden Terme gilt daher mit  $k = k_s$  bzw.  $k = k_p$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{ik^4}{4\omega^2} \left[ \sigma H_0^{(1)} \left( k \sqrt{\sigma} \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) - H_0^{(1)} \left( k \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) \right] \\
& = \frac{ik^4}{4\omega^2} \left[ i \left( \sigma J_0 \left( k \sqrt{\sigma} \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) - J_0 \left( k \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) \right) \right. \\
& - \left. \left( \sigma Y_0 \left( k \sqrt{\sigma} \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) - Y_0 \left( k \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) \right) \right] .
\end{aligned}$$

Die Bessel-Funktion erster Art  $J_0$  ist an der Stelle  $t = \frac{1}{2}$  glatt und kann daher problemlos integriert werden. Die Bessel-Funktion zweiter Art  $Y_0$  besitzt an der Stelle  $t = \frac{1}{2}$  jedoch eine Unstetigkeitsstelle und das Integral über die Differenz muss entsprechend angenähert werden.

Wie für das Einfachschichtpotential gezeigt (vgl. Seite 54), kann die Singularität der Bessel-Funktion zweiter Art durch Subtraktion und Addition des Terms

$$\frac{2}{\pi} \log \left( \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right)$$

ausgeglichen werden. Für das Integral über die ursprüngliche Differenz ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sigma Y_0 \left( k\sqrt{\sigma} \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) - Y_0 \left( k \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) dt \\ &= \int_0^1 \sigma Y_0 \left( k\sqrt{\sigma} \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) - Y_0 \left( k \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) - \frac{2}{\pi} \log \left( \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) (\sigma - 1) dt \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^1 \log \left( \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) (\sigma - 1) dt . \end{aligned}$$

Der Integrand des ersten Integrals ist nun glatt und kann numerisch berechnet werden. Der Wert des zweiten Integrals wurde bereits für das Einfachschichtpotential des statischen Falls berechnet (vgl. Seite 24):

$$\int_0^1 \log \left( \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) dt = \log(J_i) - \log(2) - 1 .$$

Für das Integral über den ersten Term der ursprünglichen Gleichung gilt mit  $k = k_s, k_p$ :

$$\begin{aligned} I_1(k) &= \frac{ik^4}{4\omega^2} \int_0^1 \sigma H_0^{(1)} \left( k\sqrt{\sigma} \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) - H_0^{(1)} \left( k \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) dt \\ &= \frac{ik^4}{4\omega^2} \int_0^1 \sigma H_0^{(1)} \left( k\sqrt{\sigma} \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) - H_0^{(1)} \left( k \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) \\ &- \frac{2i}{\pi} \log \left( \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) (\sigma - 1) dt + \frac{ik^4}{4\omega^2} \frac{2i}{\pi} (\sigma - 1) [\log(J_i) - \log(2) - 1] . \end{aligned}$$

Für den dritten und vierten Term mit  $k = k_s$  bzw.  $k = k_p$  ergibt sich unter Verwendung der Linearkombination für die Hankel-Funktion erster Art:

$$\begin{aligned} & \frac{ik^3}{4\omega^2} \frac{\sqrt{\sigma} H_1^{(1)}(k\sqrt{\sigma} \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i) - H_1^{(1)}(k \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i)}{\left| \frac{1}{2} - t \right| J_i} \\ &= \frac{ik^3}{4\omega^2} \left[ i \frac{\sqrt{\sigma} J_1(k\sqrt{\sigma} \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i) - J_1(k \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i)}{\left| \frac{1}{2} - t \right| J_i} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sqrt{\sigma} Y_1(k\sqrt{\sigma} \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i) - Y_1(k \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i)}{\left| \frac{1}{2} - t \right| J_i} \right]. \end{aligned}$$

Der erste Term ist dabei für  $t = \frac{1}{2}$  glatt. Dies wurde bereits bei der Berechnung des Einfachschichtpotentials unter Verwendung der Reihendarstellung für die Bessel-Funktion erster Art gezeigt (vgl. Seite 55).

Da die Bessel-Funktion zweiter Art an der Stelle  $t = \frac{1}{2}$  eine Unstetigkeitsstelle besitzt, ist der zweite Term nicht glatt und muss durch Singularitäten-Subtraktion geglättet werden. Da bei der Bestimmung des Einfachschichtpotentials ein ähnlicher Term betrachtet wurde, können die Ergebnisse auf den vorliegenden Term übertragen werden und es gilt der Zusammenhang:

$$\frac{\sqrt{\sigma} Y_1(k\sqrt{\sigma} r) - Y_1(kr)}{r} \sim \frac{k}{\pi} \log(r) [\sigma - 1].$$

Durch Subtraktion und anschließender Addition dieser Singularität

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\sqrt{\sigma} Y_1(k\sqrt{\sigma} \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i) - Y_1(k \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i)}{\left| \frac{1}{2} - t \right| J_i} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\sigma} Y_1(k\sqrt{\sigma} \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i) - Y_1(k \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i)}{\left| \frac{1}{2} - t \right| J_i} - \frac{k}{\pi} \log \left( \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) [\sigma - 1] dt \\ &+ \frac{k}{\pi} \int_0^1 \log \left( \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) [\sigma - 1] dt \end{aligned}$$

ist der erste Integrand nun glatt und der Wert des Integral kann numerisch berechnet werden. Das zweite Integral wurde zuvor bereits berechnet und für das Integral über den ursprünglichen Term gilt mit  $k = k_s, k_p$ :

$$\begin{aligned} I_2(k) &= \frac{ik^3}{4\omega^2} \int_0^1 \frac{\sqrt{\sigma} H_1^{(1)}(k\sqrt{\sigma} \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i) - H_1^{(1)}(k \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i)}{\left| \frac{1}{2} - t \right| J_i} dt \\ &= \frac{ik^3}{4\omega^2} \int_0^1 \frac{\sqrt{\sigma} H_1^{(1)}(k\sqrt{\sigma} \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i) - H_1^{(1)}(k \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i)}{\left| \frac{1}{2} - t \right| J_i} \\ & \quad - \frac{ik}{\pi} \log \left( \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) [\sigma - 1] dt + \frac{ik^3}{4\omega^2} \frac{ik}{\pi} (\sigma - 1) [\log(J_i) - \log(2) - 1]. \end{aligned}$$

Der verbleibende Term

$$\begin{aligned} & \frac{ik_p^2}{4\omega^2} \frac{H_0^{(1)}(k_p\sqrt{\sigma}r) - H_0^{(1)}(k_pr)}{r^2} - \frac{ik_s^2}{4\omega^2} \frac{H_0^{(1)}(k_s\sqrt{\sigma}r) - H_0^{(1)}(k_sr)}{r^2} \\ & + \frac{2ik_s}{4\omega^2} \frac{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}H_1^{(1)}(k_s\sqrt{\sigma}r) - H_1^{(1)}(k_sr)}{r^3} - \frac{2ik_p}{4\omega^2} \frac{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}H_1^{(1)}(k_p\sqrt{\sigma}r) - H_1^{(1)}(k_pr)}{r^3} \end{aligned} \quad (3.3)$$

mit  $r = \left|\frac{1}{2} - t\right| J_i$  wird zunächst mithilfe der Rekursionsbeziehung (vgl. [1] Seite 361))

$$H_{\nu+1}^{(1)}(x) = \frac{2\nu}{x} H_{\nu}^{(1)}(x) - H_{\nu-1}^{(1)}(x)$$

umgeformt. Mit  $\nu = 1$  und  $x = k\sqrt{\sigma}r$  bzw.  $x = kr$  sowie dem Vorfaktor

$$\frac{ik^2}{4\omega^2 r^2}$$

gilt für den ursprünglichen Term:

$$\frac{ik_s^2}{4\omega^2} \frac{H_2^{(1)}(k_s\sqrt{\sigma}r) - H_2^{(1)}(k_sr)}{r^2} - \frac{ik_p^2}{4\omega^2} \frac{H_2^{(1)}(k_p\sqrt{\sigma}r) - H_2^{(1)}(k_pr)}{r^2} .$$

Wird dieser Zusammenhang als Linearkombination der Bessel-Funktionen dargestellt, so ergibt sich mit  $r = \left|\frac{1}{2} - t\right| J_i$ :

$$\begin{aligned} & \frac{ik_s^2}{4\omega^2} \frac{J_2(k_s\sqrt{\sigma}r) - J_2(k_sr)}{r^2} - \frac{ik_p^2}{4\omega^2} \frac{J_2(k_p\sqrt{\sigma}r) - J_2(k_pr)}{r^2} \\ & - \frac{k_s^2}{4\omega^2} \frac{Y_2(k_s\sqrt{\sigma}r) - Y_2(k_sr)}{r^2} + \frac{k_p^2}{4\omega^2} \frac{Y_2(k_p\sqrt{\sigma}r) - Y_2(k_pr)}{r^2} . \end{aligned}$$

Mithilfe der Reihendarstellung für die Bessel-Funktion erster Art (vgl. [1] Seite 360))

$$J_2(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^m}{m!(2+m)!}$$

kann gezeigt werden, dass der entsprechende Anteil aus der Linearkombination für  $t = \frac{1}{2}$  mit  $k = k_s, k_p$  glatt ist:

$$\begin{aligned} \frac{J_2(k\sqrt{\sigma} \left|\frac{1}{2} - t\right| J_i)}{\left|\frac{1}{2} - t\right|^2 J_i^2} &= \frac{k^2 \sigma \left|\frac{1}{2} - t\right|^2 J_i^2}{4 \left|\frac{1}{2} - t\right|^2 J_i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}k^2 \sigma J_i^2 \left|\frac{1}{2} - t\right|^2\right)^m}{m!(2+m)!} \\ &= \frac{k^2 \sigma}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}k^2 \sigma J_i^2 \left|\frac{1}{2} - t\right|^2\right)^m}{m!(2+m)!} . \end{aligned}$$

Der Anteil der Bessel-Funktion zweiter Art besitzt an der Stelle  $t = \frac{1}{2}$  jedoch eine Unstetigkeitsstelle und muss daher durch eine entsprechende Singularitäten-Subtraktion geglättet werden. Für die Bessel-Funktion zweiter Art gilt die Darstellung (vgl. [1] Seite 360]):

$$Y_2(x) = -\frac{4}{x^2\pi} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right) + \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{x}{2}\right) J_2(x) - \frac{x^2}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Psi(m+1) + \Psi(m+3)}{m!(2+m)!} \left(-\frac{1}{4}x^2\right)^m.$$

Dabei ist  $\Psi(j)$  die Digamma-Funktion, für die gilt

$$\Psi(1) = -\gamma \quad \text{bzw.} \quad \Psi(j+1) = \Psi(j) + \frac{1}{j}$$

und  $\gamma = 0.5772156649$  die Euler-Mascheroni-Konstante ist (vgl. [1] Seite 258]). Verwendet man die obige Darstellung für den ursprünglichen Term, so ergibt sich nach einigen Vereinfachungen und Umformungen:

$$\begin{aligned} & \frac{k_p^2}{4\omega^2} \frac{Y_2(k_p\sqrt{\sigma}r) - Y_2(k_pr)}{r^2} - \frac{k_s^2}{4\omega^2} \frac{Y_2(k_s\sqrt{\sigma}r) - Y_2(k_sr)}{r^2} \tag{3.4} \\ &= \frac{k_p^2}{4\omega^2} \left[ -\frac{4}{k_p^2\sigma r^4\pi} \left(1 + \frac{k_p^2\sigma r^2}{4}\right) + \frac{2}{\pi r^2} \log\left(\frac{k_p\sqrt{\sigma}r}{2}\right) J_2(k_p\sqrt{\sigma}r) \right. \\ & \quad - \frac{k_p^2\sigma r^2}{4\pi r^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Psi(m+1) + \Psi(m+3)}{m!(m+2)!} \left(-\frac{1}{4}k_p^2\sigma r^2\right)^m + \frac{4}{k_p^2 r^4\pi} \left(1 + \frac{k_p^2 r^2}{4}\right) \\ & \quad \left. - \frac{2}{\pi r^2} \log\left(\frac{k_pr}{2}\right) J_2(k_pr) + \frac{k_p^2 r^2}{4\pi r^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Psi(m+1) + \Psi(m+3)}{m!(m+2)!} \left(-\frac{1}{4}k_p^2 r^2\right)^m \right] \\ & \quad - \frac{k_s^2}{4\omega^2} \left[ -\frac{4}{k_s^2\sigma r^4\pi} \left(1 + \frac{k_s^2\sigma r^2}{4}\right) + \frac{2}{\pi r^2} \log\left(\frac{k_s\sqrt{\sigma}r}{2}\right) J_2(k_s\sqrt{\sigma}r) \right. \\ & \quad - \frac{k_s^2\sigma r^2}{4\pi r^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Psi(m+1) + \Psi(m+3)}{m!(m+2)!} \left(-\frac{1}{4}k_s^2\sigma r^2\right)^m + \frac{4}{k_s^2 r^4\pi} \left(1 + \frac{k_s^2 r^2}{4}\right) \\ & \quad \left. - \frac{2}{\pi r^2} \log\left(\frac{k_sr}{2}\right) J_2(k_sr) + \frac{k_s^2 r^2}{4\pi r^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Psi(m+1) + \Psi(m+3)}{m!(m+2)!} \left(-\frac{1}{4}k_s^2 r^2\right)^m \right] \\ &= \frac{2k_p^2}{4\omega^2\pi r^2} \left[ \log\left(\frac{k_p\sqrt{\sigma}r}{2}\right) J_2(k_p\sqrt{\sigma}r) - \log\left(\frac{k_pr}{2}\right) J_2(k_pr) \right] \\ & \quad - \frac{2k_s^2}{4\omega^2\pi r^2} \left[ \log\left(\frac{k_s\sqrt{\sigma}r}{2}\right) J_2(k_s\sqrt{\sigma}r) - \log\left(\frac{k_sr}{2}\right) J_2(k_sr) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{k_p^4}{16\pi\omega^2} \left[ \sigma \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Psi(m+1) + \Psi(m+3)}{m!(m+2)!} \left( -\frac{1}{4}k_p^2\sigma r^2 \right)^m \right. \\
 & - \left. \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Psi(m+1) + \Psi(m+3)}{m!(m+2)!} \left( -\frac{1}{4}k_p^2r^2 \right)^m \right] \\
 & + \frac{k_s^4}{16\pi\omega^2} \left[ \sigma \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Psi(m+1) + \Psi(m+3)}{m!(m+2)!} \left( -\frac{1}{4}k_s^2\sigma r^2 \right)^m \right. \\
 & - \left. \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Psi(m+1) + \Psi(m+3)}{m!(m+2)!} \left( -\frac{1}{4}k_s^2r^2 \right)^m \right].
 \end{aligned}$$

In diesem Fall tritt in den ersten beiden Termen eine Singularität auf, während die restlichen Terme bei der Singularitäten-Subtraktion vernachlässigt werden können. Da bereits gezeigt wurde, dass

$$\frac{J_2(k\sqrt{\sigma}r)}{r^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{J_2(kr)}{r^2}$$

glatt ist, liegt eine logarithmische Singularität vor. Entsprechend muss der erste Teil des Terms

$$\begin{aligned}
 & \frac{2k_p^2}{4\omega^2\pi r^2} \left[ \log\left(\frac{k_p\sqrt{\sigma}r}{2}\right) J_2(k_p\sqrt{\sigma}r) - \log\left(\frac{k_p r}{2}\right) J_2(k_p r) \right] \\
 & - \frac{2k_s^2}{4\omega^2\pi r^2} \left[ \log\left(\frac{k_s\sqrt{\sigma}r}{2}\right) J_2(k_s\sqrt{\sigma}r) - \log\left(\frac{k_s r}{2}\right) J_2(k_s r) \right] \\
 & = \frac{2k_p^2}{4\omega^2\pi} \log(r) \frac{J_2(k_p\sqrt{\sigma}r) - J_2(k_p r)}{r^2} - \frac{2k_s^2}{4\omega^2\pi} \log(r) \frac{J_2(k_s\sqrt{\sigma}r) - J_2(k_s r)}{r^2} \\
 & + \frac{2k_p^2}{4\omega^2\pi r^2} \left[ \log\left(\frac{k_p\sqrt{\sigma}}{2}\right) J_2(k_p\sqrt{\sigma}r) - \log\left(\frac{k_p}{2}\right) J_2(k_p r) \right] \\
 & - \frac{2k_s^2}{4\omega^2\pi r^2} \left[ \log\left(\frac{k_s\sqrt{\sigma}}{2}\right) J_2(k_s\sqrt{\sigma}r) - \log\left(\frac{k_s}{2}\right) J_2(k_s r) \right]
 \end{aligned}$$

betrachtet werden. Wie bei den vorherigen Berechnungen wird jeweils nur das erste Element der Reihendarstellung für die Singularitäten-Subtraktion verwendet. Dies bedeutet in diesem Fall, dass der Term

$$\begin{aligned}
 & \frac{2k_p^2}{4\omega^2\pi} \log(r) \left[ \frac{\frac{1}{2}k_p^2\sigma r^2}{4r^2} - \frac{\frac{1}{2}k_p^2r^2}{4r^2} \right] - \frac{2k_s^2}{4\omega^2\pi} \log(r) \left[ \frac{\frac{1}{2}k_s^2\sigma r^2 \frac{1}{2}}{4r^2} - \frac{\frac{1}{2}k_s^2r^2}{4r^2} \right] \\
 & = \frac{1}{16\omega^2\pi} \log(r) (\sigma - 1) (k_p^4 - k_s^4)
 \end{aligned}$$

subtrahiert und anschließend wieder addiert werden muss. Für die Integration des ursprünglichen Terms gilt damit:

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_0^1 \frac{ik_s^2 \text{H}_2^{(1)}(k_s \sqrt{\sigma} \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i) - \text{H}_2^{(1)}(k_s \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i)}{4\omega^2 \left| \frac{1}{2} - t \right|^2 J_i^2} \\
 &\quad - \frac{ik_p^2 \text{H}_2^{(1)}(k_p \sqrt{\sigma} \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i) - \text{H}_2^{(1)}(k_p \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i)}{4\omega^2 \left| \frac{1}{2} - t \right|^2 J_i^2} \\
 &\quad - \frac{\sigma - 1}{16\omega^2 \pi} \log \left( \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) (k_p^4 - k_s^4) dt \\
 &\quad + \frac{\sigma - 1}{16\omega^2 \pi} \int_0^1 \log \left( \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) dt (k_p^4 - k_s^4).
 \end{aligned}$$

Der erste Integrand ist nun glatt, kann jedoch aufgrund von Rundungsfehlern nicht mit *quadgk* numerisch integriert werden. Daher wird an dieser Stelle für die Bessel-Funktion zweiter Art die obige Darstellung (3.4) mit  $q + 1$  Summengliedern verwendet, bei der die endlichen Reihen zu einer Reihe zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}
 &\frac{k_p^2}{4\omega^2} \frac{Y_2(k_p \sqrt{\sigma} r) - Y_2(k_p r)}{r^2} - \frac{k_s^2}{4\omega^2} \frac{Y_2(k_s \sqrt{\sigma} r) - Y_2(k_s r)}{r^2} \\
 &\approx \frac{2k_p^2}{4\omega^2 \pi r^2} \left[ \log \left( \frac{k_p \sqrt{\sigma} r}{2} \right) J_2(k_p \sqrt{\sigma} r) - \log \left( \frac{k_p r}{2} \right) J_2(k_p r) \right] \\
 &\quad - \frac{2k_s^2}{4\omega^2 \pi r^2} \left[ \log \left( \frac{k_s \sqrt{\sigma} r}{2} \right) J_2(k_s \sqrt{\sigma} r) - \log \left( \frac{k_s r}{2} \right) J_2(k_s r) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{16\pi \omega^2} \left[ \sum_{m=0}^q \frac{\Psi(m+1) + \Psi(m+3)}{m!(m+2)!} \left( -\frac{1}{4} r^2 \right)^m (\sigma^{m+1} - 1) (k_p^{2m+4} - k_s^{2m+4}) \right].
 \end{aligned}$$

Das zweite Integral wurde für die vorherigen Terme bereits berechnet und es gilt:

$$\int_0^1 \log \left( \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) dt = \log(J_i) - \log(2) - 1.$$

Damit wurden alle Terme soweit umgeformt bzw. durch eine Singularitäten-Subtraktion geglättet, dass eine Berechnung von

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 T_x \left( [T_y(\Phi_{\sqrt{\sigma}\omega}(\hat{v}_i, (1-t)v_i + tv_{i+1}))]^\top \right) \\
 &\quad - T_x \left( [T_y(\Phi_\omega(\hat{v}_i, (1-t)v_i + tv_{i+1}))]^\top \right) dt
 \end{aligned}$$

möglich ist:

$$\begin{aligned}
 I &= I_1(k_s) \left[ -W_1^{(2)}(x, y) + W_2^{(2)}(x, y) \right] \\
 &+ I_1(k_p) \left[ -W_2^{(2)}(x, y) \right] \\
 &+ I_2(k_s) \left[ -W_1^{(1)}(x, y) + 2W_1^{(2)}(x, y) + W_2^{(1)}(x, y) - 3W_2^{(2)}(x, y) \right] \\
 &+ I_2(k_p) \left[ -W_1^{(2)}(x, y) - W_2^{(1)}(x, y) + 3W_2^{(2)}(x, y) \right] \\
 &+ I_3 \left[ W_1^{(1)}(x, y) - 3W_1^{(2)}(x, y) + W_2^{(0)}(x, y) - 2W_2^{(1)}(x, y) + 6W_2^{(2)}(x, y) \right] .
 \end{aligned}$$

Hierbei muss berücksichtigt werden, dass das letzte Integral mit der oben vorgestellten Variante approximiert wird:

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_0^1 \frac{ik_s^2}{4\omega^2} \frac{H_2^{(1)}(k_s\sqrt{\sigma} \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i) - H_2^{(1)}(k_s \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i)}{\left| \frac{1}{2} - t \right|^2 J_i^2} \\
 &- \frac{ik_p^2}{4\omega^2} \frac{H_2^{(1)}(k_p\sqrt{\sigma} \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i) - H_2^{(1)}(k_p \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i)}{\left| \frac{1}{2} - t \right|^2 J_i^2} \\
 &- \frac{\sigma - 1}{16\omega^2\pi} \log \left( \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) (k_p^4 - k_s^4) dt \\
 &\approx \int_0^1 \frac{ik_s^2}{4\omega^2} \frac{J_2(k_s\sqrt{\sigma} \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i) - J_2(k_s \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i)}{\left| \frac{1}{2} - t \right|^2 J_i^2} \\
 &- \frac{ik_p^2}{4\omega^2} \frac{J_2(k_p\sqrt{\sigma} \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i) - J_2(k_p \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i)}{\left| \frac{1}{2} - t \right|^2 J_i^2} dt \\
 &+ \int_0^1 \frac{2k_p^2}{4\omega^2\pi r^2} \left[ \log \left( \frac{k_p\sqrt{\sigma}r}{2} \right) J_2(k_p\sqrt{\sigma}r) - \log \left( \frac{k_p r}{2} \right) J_2(k_p r) \right] \\
 &- \frac{2k_s^2}{4\omega^2\pi r^2} \left[ \log \left( \frac{k_s\sqrt{\sigma}r}{2} \right) J_2(k_s\sqrt{\sigma}r) - \log \left( \frac{k_s r}{2} \right) J_2(k_s r) \right] \\
 &- \frac{1}{16\pi\omega^2} \left[ \sum_{m=0}^q \frac{\Psi(m+1) + \Psi(m+3)}{m!(m+2)!} \left( -\frac{1}{4}r^2 \right)^m (\sigma^{m+1} - 1) (k_p^{2m+4} - k_s^{2m+4}) \right] \\
 &- \frac{\sigma - 1}{16\omega^2\pi} \log \left( \left| \frac{1}{2} - t \right| J_i \right) (k_p^4 - k_s^4) dt = \tilde{I}_3(q) .
 \end{aligned}$$



## 4 Numerische Tests

Im Folgenden wird die Implementierung der verschiedenen Operatoren in MATLAB getestet. Dazu wird in Abhängigkeit von der Randbedingung eine Funktion auf dem Rand  $\partial\Omega$  vorgegeben. Handelt es sich um die Randbedingung

$$u = f$$

wird die erste Spalte der Fundamentallösung der Navier-Gleichung als rechte Seite  $f$  verwendet. Hat die Randbedingung die folgende Form

$$T(u) = g$$

wird die erste Spalte der Traktion der Fundamentallösung für  $g$  verwendet. Zusätzlich wird als Gebiet  $\Omega$  der Einheitskreis festgelegt. Für einen gewählten Punkt  $x$  wird zunächst eine Referenzlösung  $s$ , hier die erste Spalte der Fundamentallösung der Navier-Gleichung, bestimmt. Die Referenzlösung wird anschließend mit der berechneten Lösung  $u_n(x)$  für verschiedene  $n$  verglichen. Mit  $n$  wird in diesem Fall die bei der Diskretisierung des Gebietsrandes verwendete Anzahl von Stützstellen bezeichnet. Die Berechnung der Lösung erfolgt in zwei Schritten. Zunächst wird die jeweilige diskretisierte Randintegralgleichung als Gleichungssystem nach  $\psi$  aufgelöst (vgl. Kapitel [2.2](#)). Für einen beliebigen Punkt  $x$  kann anschließend mit dem gewählten, diskretisierten Ansatz die gesuchte Lösung  $u_n(x)$  bestimmt werden. Der absolute Fehler wird mittels der Vorschrift

$$\varepsilon_n = \|u_n(x) - s\|_2$$

berechnet. Außerdem wird die Konvergenzordnung über den Zusammenhang

$$\frac{1}{\log(2)} \log \left( \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}} \right)$$

bestimmt.

Es werden sowohl für den statischen als auch für den dynamischen Fall die folgenden drei Problemstellungen betrachtet:

- (A) Test des Einfachschichtpotentials:  
Zunächst wird das Gleichungssystem

$$S_k z = b, \quad k \in \{0, \omega\} \tag{A.1}$$

gelöst, bei dem  $S_k$  die aus der Diskretisierung resultierende Matrix darstellt, der Vektor  $z$  die gesuchte Dichte  $\psi(\hat{v}_i)$  und der Vektor  $b$  die Dichte  $f(\hat{v}_i)$  in den Kollokationspunkten  $\hat{v}_i$  (vgl. Seite 10) beinhaltet.

Für den Punkt  $(5, 5)^\top$  im Außengebiet  $(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega})$  wird anschließend die Lösung berechnet:

$$u_n(x) = (SL_k z)(x) . \quad (\text{A.2})$$

(B) Test des Doppelschichtpotentials:

Da der Punkt  $(0.5, 0.5)^\top$  im Gebiet  $\Omega$  gewählt wird, gilt für das zu lösende Gleichungssystem (vgl. Seite 8):

$$(D_k - \frac{1}{2}I_{2n})z = b , \quad k \in \{0, \omega\} . \quad (\text{B.1})$$

Entsprechend ergibt sich für die Berechnung der Lösung:

$$u_n(x) = (DL_k z)(x) . \quad (\text{B.2})$$

(C) Test der Traktion des Einzelschichtpotentials:

Für das zu lösende Gleichungssystem gilt

$$(D_k^\top - \frac{1}{2}I_{2n})z = b , \quad k \in \{0, \omega\} , \quad (\text{C.1})$$

da der Punkt  $(5, 5)^\top$  im Außengebiet gewählt wird (vgl. Seite 8). Die Lösung lässt sich dann mittels des Zusammenhangs

$$u_n(x) = (SL_k z)(x) \quad (\text{C.2})$$

berechnen.

## 4.1 Statischer Fall

Im statischen Fall gilt für die Fundamentallösung der Navier-Gleichung

$$\Phi_0(x, y) = \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \Psi(x, y)I + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} J(x - y)$$

mit

$$\Psi(x, y) = \log \left( \frac{1}{\|x - y\|_2} \right) \quad \text{und} \quad J(w) = \frac{ww^\top}{\|w\|_2^2} .$$

Hierbei wird für  $x$  die erste Koordinate und für  $y$  die zweite Koordinate des gewählten Punktes verwendet. Für die Lamé-Konstanten werden für die folgenden Tests

die Werte  $\lambda = 1$  und  $\mu = 1$  gewählt.

Für den Testfall (A) wird als Referenzlösung die erste Spalte von

$$\frac{1 + 3 \cdot 1}{4\pi(1 + 2 \cdot 1)} \log \left( \frac{1}{\|(5, 5)^\top\|_2} \right) I + \frac{1 + 1}{4\pi(1 + 2 \cdot 1)} \frac{(5, 5)^\top(5, 5)}{\|(5, 5)^\top\|_2}$$

verwendet, die den Wert

$$s = \begin{pmatrix} -1.8101 \times 10^{-1} \\ 2.6526 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

hat. Es wird das Gleichungssystem (A.1) gelöst und die Lösung mittels (A.2) berechnet. Daraus resultiert die folgende Fehlerentwicklung, die quadratische Konvergenz vermuten lässt.

n	$u_n((5, 5)^\top)^\top$	abs. Fehler $\varepsilon_n$	Konvergenzordnung
10	$(-1.8557 \times 10^{-1}, 2.7176 \times 10^{-2})$	$4.6005 \times 10^{-3}$	2.2492
20	$(-1.8197 \times 10^{-1}, 2.6664 \times 10^{-2})$	$9.6766 \times 10^{-4}$	2.1635
40	$(-1.8123 \times 10^{-1}, 2.6557 \times 10^{-2})$	$2.1600 \times 10^{-4}$	2.0948
80	$(-1.8106 \times 10^{-1}, 2.6533 \times 10^{-2})$	$5.0567 \times 10^{-5}$	2.0511
160	$(-1.8103 \times 10^{-1}, 2.6528 \times 10^{-2})$	$1.2202 \times 10^{-5}$	2.0266
320	$(-1.8102 \times 10^{-1}, 2.6526 \times 10^{-2})$	$2.9948 \times 10^{-6}$	2.0135
640	$(-1.8101 \times 10^{-1}, 2.6526 \times 10^{-2})$	$7.4172 \times 10^{-7}$	2.0068
1280	$(-1.8101 \times 10^{-1}, 2.6526 \times 10^{-2})$	$1.8455 \times 10^{-7}$	2.0034
2560	$(-1.8101 \times 10^{-1}, 2.6526 \times 10^{-2})$	$4.6029 \times 10^{-8}$	2.0017
5120	$(-1.8101 \times 10^{-1}, 2.6526 \times 10^{-2})$	$1.1493 \times 10^{-8}$	

Tabelle 4.1: Für den Testfall (A) berechnete Lösung  $u_n$  im Punkt  $(5, 5)^\top$  sowie die entsprechenden absoluten Fehler und die Konvergenzordnung.

Da für den Testfall (B) im Inneren des Kreises eine Singularität vorliegt, wird der Punkt in beiden Koordinaten um 3 Einheiten nach links bzw. unten verschoben und die Referenzlösung ist die erste Spalte von

$$\frac{1 + 3}{4\pi(1 + 2)} \log \left( \frac{1}{\|(-2.5, -2.5)^\top\|_2} \right) I + \frac{1 + 1}{4\pi(1 + 2)} \frac{(-2.5, -2.5)^\top(-2.5, -2.5)}{\|(-2.5, -2.5)^\top\|_2},$$

die den Wert

$$s = \begin{pmatrix} -1.0747 \times 10^{-1} \\ 2.6526 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

annimmt. Nach dem Lösen des Gleichungssystems (B.1) kann die Lösung mit (B.2) bestimmt werden. Die vierte Spalte der Tabelle zeigt, dass lineare Konvergenz vorliegt.

$n$	$u_n((-2.5, -2.5)^\top)^\top$	abs. Fehler $\varepsilon_n$	Konvergenzordnung
10	$(-1.0897 \times 10^{-1}, 2.6258 \times 10^{-2})$	$1.5248 \times 10^{-3}$	1.8355
20	$(-1.0783 \times 10^{-1}, 2.6298 \times 10^{-2})$	$4.2722 \times 10^{-4}$	1.2677
40	$(-1.0761 \times 10^{-1}, 2.6420 \times 10^{-2})$	$1.7743 \times 10^{-4}$	1.2225
80	$(-1.0753 \times 10^{-1}, 2.6478 \times 10^{-2})$	$7.6034 \times 10^{-5}$	1.1255
160	$(-1.0749 \times 10^{-1}, 2.6503 \times 10^{-2})$	$3.4850 \times 10^{-5}$	1.0669
320	$(-1.0748 \times 10^{-1}, 2.6515 \times 10^{-2})$	$1.6636 \times 10^{-5}$	1.0345
640	$(-1.0747 \times 10^{-1}, 2.6520 \times 10^{-2})$	$8.1214 \times 10^{-6}$	1.0175
1280	$(-1.0747 \times 10^{-1}, 2.6523 \times 10^{-2})$	$4.0116 \times 10^{-6}$	1.0088
2560	$(-1.0747 \times 10^{-1}, 2.6524 \times 10^{-2})$	$1.9935 \times 10^{-6}$	1.0044
5120	$(-1.0747 \times 10^{-1}, 2.6525 \times 10^{-2})$	$9.9370 \times 10^{-7}$	

Tabelle 4.2: Für den Testfall (B) im Punkt  $(-2.5, -2.5)^\top$  berechnete Lösung  $u_n$  unter Verwendung des statischen Doppelschichtpotentials sowie die dazugehörigen absoluten Fehler und die Konvergenzordnung.

Für den Testfall (C) wird als Funktion auf dem Rand die Traktion der Fundamentallösung vorgegeben und für die Referenzlösung im Punkt  $x = (5, 5)^\top$  gilt:

$$s = \begin{pmatrix} -1.8101 \times 10^{-1} \\ 2.6526 \times 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

Die Tabelle 4.3 zeigt für die Parameter  $\lambda = 1$  und  $\mu = 1$  die mit (C.1) und (C.2) berechnete Lösung, die dazugehörigen absoluten Fehler und die Konvergenzordnung 1.

Die Traktion des Doppelschichtpotentials konnte aufgrund der starken Singularität – Berechnung der Integrale als *Hadamard finite part integrals* – nicht getestet werden.

$n$	$u_n((5, 5)^\top)^\top$	abs. Fehler $\varepsilon_n$	Konvergenzordnung
10	$(-1.8835 \times 10^{-1}, 2.7621 \times 10^{-2})$	$7.4213 \times 10^{-3}$	1.4029
20	$(-1.8379 \times 10^{-1}, 2.6949 \times 10^{-2})$	$2.8066 \times 10^{-3}$	1.2024
40	$(-1.8222 \times 10^{-1}, 2.6712 \times 10^{-2})$	$1.2196 \times 10^{-3}$	1.1019
80	$(-1.8157 \times 10^{-1}, 2.6613 \times 10^{-2})$	$5.6820 \times 10^{-4}$	1.0512
160	$(-1.8128 \times 10^{-1}, 2.6568 \times 10^{-2})$	$2.7419 \times 10^{-4}$	1.0257
320	$(-1.8115 \times 10^{-1}, 2.6547 \times 10^{-2})$	$1.3468 \times 10^{-4}$	1.0129
640	$(-1.8108 \times 10^{-1}, 2.6536 \times 10^{-2})$	$6.6740 \times 10^{-5}$	1.0064
1280	$(-1.8105 \times 10^{-1}, 2.6531 \times 10^{-2})$	$3.3221 \times 10^{-5}$	1.0032
2560	$(-1.8103 \times 10^{-1}, 2.6528 \times 10^{-2})$	$1.6574 \times 10^{-5}$	1.0016
5120	$(-1.8102 \times 10^{-1}, 2.6527 \times 10^{-2})$	$8.2776 \times 10^{-6}$	

Tabelle 4.3: Für den Testfall (C) berechnete Lösung  $u_n$  im Punkt  $(5, 5)^\top$  sowie die entsprechenden absoluten Fehler und Konvergenzordnungen.

## 4.2 Dynamischer Fall

Für den dynamischen Fall gilt für die Fundamentallösung der Navier-Gleichung:

$$f(x) = \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_s \|x\|_2) I + \frac{i}{4\omega^2} \text{grad}_x \text{grad}_x^\top \left[ H_0^{(1)}(k_s \|x\|_2) - H_0^{(1)}(k_p \|x\|_2) \right].$$

Wird für die Frequenz der Welle der Wert  $\omega = 2\sqrt{2}$  und für die Lamé-Konstanten die Werte  $\lambda = 3$  sowie  $\mu = 2$  gewählt, so gilt für die Wellenzahlen:

$$k_p = \frac{\omega}{\sqrt{\lambda + 2\mu}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \quad \text{und} \quad k_s = \frac{\omega}{\sqrt{\mu}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2.$$

Für den Testfall (A) wird als Referenzlösung die erste Spalte von

$$\begin{aligned} & \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_s \|(5, 5)^\top\|_2) I \\ & + \frac{i}{4\omega^2} \text{grad}_x \text{grad}_x^\top \left[ H_0^{(1)}(k_s \|(5, 5)^\top\|_2) - H_0^{(1)}(k_p \|(5, 5)^\top\|_2) \right] \end{aligned}$$

verwendet, die den Wert

$$s = \begin{pmatrix} -1.1702 \times 10^{-2} + 1.4015 \times 10^{-2} i \\ 7.0784 \times 10^{-3} - 4.1433 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$$

hat. Es wird das Gleichungssystem (A.1) gelöst und die Lösung  $u_n$  mittels (A.2) bestimmt. Aus der Tabelle 4.4 lässt sich erkennen, dass quadratische Konvergenz vorliegt.

n	$u_n((5, 5)^\top)$	abs. Fehler $\varepsilon_n$	Ordnung
10	$\begin{pmatrix} -1.1510 \times 10^{-2} + 1.3998 \times 10^{-2} i \\ 7.0047 \times 10^{-3} - 4.0822 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$	$2.1543 \times 10^{-4}$	2.3565
20	$\begin{pmatrix} -1.1661 \times 10^{-2} + 1.4011 \times 10^{-2} i \\ 7.0718 \times 10^{-3} - 4.1439 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$	$4.2065 \times 10^{-5}$	2.0988
40	$\begin{pmatrix} -1.1692 \times 10^{-2} + 1.4014 \times 10^{-2} i \\ 7.0780 \times 10^{-3} - 4.1453 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$	$9.8201 \times 10^{-6}$	2.0234
80	$\begin{pmatrix} -1.1700 \times 10^{-2} + 1.4015 \times 10^{-2} i \\ 7.0784 \times 10^{-3} - 4.1440 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$	$2.4155 \times 10^{-6}$	2.0050
160	$\begin{pmatrix} -1.1701 \times 10^{-2} + 1.4015 \times 10^{-2} i \\ 7.0784 \times 10^{-3} - 4.1435 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$	$6.0180 \times 10^{-7}$	2.0008
320	$\begin{pmatrix} -1.1702 \times 10^{-2} + 1.4015 \times 10^{-2} i \\ 7.0784 \times 10^{-3} - 4.1434 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$	$1.5036 \times 10^{-7}$	2.0000
640	$\begin{pmatrix} -1.1702 \times 10^{-2} + 1.4015 \times 10^{-2} i \\ 7.0784 \times 10^{-3} - 4.1434 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$	$3.7590 \times 10^{-8}$	1.9999
1280	$\begin{pmatrix} -1.1702 \times 10^{-2} + 1.4015 \times 10^{-2} i \\ 7.0784 \times 10^{-3} - 4.1433 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$	$9.3983 \times 10^{-9}$	2.0008
2560	$\begin{pmatrix} -1.1702 \times 10^{-2} + 1.4015 \times 10^{-2} i \\ 7.0784 \times 10^{-3} - 4.1433 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$	$2.3483 \times 10^{-9}$	1.9954
5120	$\begin{pmatrix} -1.1702 \times 10^{-2} + 1.4015 \times 10^{-2} i \\ 7.0784 \times 10^{-3} - 4.1433 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$	$5.8895 \times 10^{-10}$	

Tabelle 4.4: Die für den Testfall (A) berechnete Lösung  $u_n$ , die dazugehörigen absoluten Fehler und die Konvergenzordnung.

Für den Testfall (B) wird der Punkt um 3 Einheiten nach links bzw. unten verschoben, um die Singularität im Inneren des Gebietes zu umgehen. Als Referenzlösung wird die erste Spalte von

$$\tilde{\Phi}_1(\|(-2.5, -2.5)^\top\|_2)I + \tilde{\Phi}_2(\|(-2.5, -2.5)^\top\|_2)J((-2.5, -2.5)^\top)$$

verwendet, die den Wert

$$s = \begin{pmatrix} -1.0212 \times 10^{-3} + 1.1546 \times 10^{-2} i \\ 7.6527 \times 10^{-3} - 2.5817 \times 10^{-2} i \end{pmatrix}$$

annimmt. Die Berechnung von  $u_n$  erfolgt nach dem Lösen des Gleichungssystems (B.1) mit der Vorschrift (B.2). Die entsprechende Fehlerentwicklung kann der Tabelle 4.5 entnommen werden. Die vierte Spalte zeigt, dass lineare Konvergenz vorliegt.

n	$u_n((-2.5, -2.5)^\top)$	abs. Fehler $\varepsilon_n$	Ordnung
10	$\begin{pmatrix} -2.1713 \times 10^{-3} + 1.1413 \times 10^{-2} i \\ 7.5787 \times 10^{-3} - 2.5637 \times 10^{-2} i \end{pmatrix}$	$1.1740 \times 10^{-3}$	1.4508
20	$\begin{pmatrix} -1.2907 \times 10^{-3} + 1.1547 \times 10^{-2} i \\ 7.8007 \times 10^{-3} - 2.5517 \times 10^{-2} i \end{pmatrix}$	$4.2949 \times 10^{-4}$	1.4542
40	$\begin{pmatrix} -1.1109 \times 10^{-3} + 1.1553 \times 10^{-2} i \\ 7.6878 \times 10^{-3} - 2.5694 \times 10^{-2} i \end{pmatrix}$	$1.5674 \times 10^{-4}$	1.2662
80	$\begin{pmatrix} -1.0569 \times 10^{-3} + 1.1549 \times 10^{-2} i \\ 7.6602 \times 10^{-3} - 2.5763 \times 10^{-2} i \end{pmatrix}$	$6.5168 \times 10^{-5}$	1.1484
160	$\begin{pmatrix} -1.0367 \times 10^{-3} + 1.1547 \times 10^{-2} i \\ 7.6538 \times 10^{-3} - 2.5792 \times 10^{-2} i \end{pmatrix}$	$2.9398 \times 10^{-5}$	1.0772
320	$\begin{pmatrix} -1.0283 \times 10^{-3} + 1.1547 \times 10^{-2} i \\ 7.6526 \times 10^{-3} - 2.5805 \times 10^{-2} i \end{pmatrix}$	$1.3934 \times 10^{-5}$	1.0390
640	$\begin{pmatrix} -1.0246 \times 10^{-3} + 1.1546 \times 10^{-2} i \\ 7.6524 \times 10^{-3} - 2.5811 \times 10^{-2} i \end{pmatrix}$	$6.7808 \times 10^{-6}$	1.0196
1280	$\begin{pmatrix} -1.0229 \times 10^{-3} + 1.1546 \times 10^{-2} i \\ 7.6525 \times 10^{-3} - 2.5814 \times 10^{-2} i \end{pmatrix}$	$3.3447 \times 10^{-6}$	1.0098
2560	$\begin{pmatrix} -1.0220 \times 10^{-3} + 1.1546 \times 10^{-2} i \\ 7.6526 \times 10^{-3} - 2.5816 \times 10^{-2} i \end{pmatrix}$	$1.6610 \times 10^{-6}$	1.0049
5120	$\begin{pmatrix} -1.0216 \times 10^{-3} + 1.1546 \times 10^{-2} i \\ 7.6526 \times 10^{-3} - 2.5816 \times 10^{-2} i \end{pmatrix}$	$8.2768 \times 10^{-7}$	

Tabelle 4.5: Die berechnete Lösung  $u_n$  im Punkt  $(-2.5, -2.5)^\top$  für den Testfall (B) sowie die dazugehörigen absoluten Fehler und Konvergenzordnungen.

Für die Referenzlösung des Testfalls (C) gilt:

$$s = \begin{pmatrix} -1.1702 \times 10^{-2} + 1.4015 \times 10^{-2} i \\ 7.0784 \times 10^{-3} - 4.1433 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$$

und die Lösung des Gleichungssystems (C.1) wird zur Berechnung von  $u_n$  verwendet (vgl. (C.2)). Aus der Tabelle 4.6 geht hervor, dass für die Parameter  $\lambda = 3$ ,

$\mu = 2$  und  $\omega = 2\sqrt{2}$  fast lineare Konvergenz vorliegt. Bei der Traktion des Einfachschichtpotentials im statischen Fall hat sich lineare Konvergenz gezeigt. Dies wurde auch für den dynamischen Fall erwartet, konnte hier aber unerklärlicherweise nicht bestätigt werden.

n	$u_n((5, 5)^\top)$	abs. Fehler $\varepsilon_n$	Ordnung
10	$\begin{pmatrix} -1.1574 \times 10^{-2} + 1.4704 \times 10^{-2} i \\ 7.4247 \times 10^{-3} - 4.4887 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$	$8.5468 \times 10^{-4}$	0.9262
20	$\begin{pmatrix} -1.1657 \times 10^{-2} + 1.4335 \times 10^{-2} i \\ 7.3086 \times 10^{-3} - 4.3552 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$	$4.4978 \times 10^{-4}$	0.9571
40	$\begin{pmatrix} -1.1685 \times 10^{-2} + 1.4169 \times 10^{-2} i \\ 7.2064 \times 10^{-3} - 4.2584 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$	$2.3168 \times 10^{-4}$	0.9801
80	$\begin{pmatrix} -1.1695 \times 10^{-2} + 1.4091 \times 10^{-2} i \\ 7.1453 \times 10^{-3} - 4.2029 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$	$1.1745 \times 10^{-4}$	0.9907
160	$\begin{pmatrix} -1.1699 \times 10^{-2} + 1.4052 \times 10^{-2} i \\ 7.1126 \times 10^{-3} - 4.1736 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$	$5.9103 \times 10^{-5}$	0.9956
320	$\begin{pmatrix} -1.1701 \times 10^{-2} + 1.4034 \times 10^{-2} i \\ 7.0957 \times 10^{-3} - 4.1586 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$	$2.9643 \times 10^{-5}$	0.9979
640	$\begin{pmatrix} -1.1701 \times 10^{-2} + 1.4024 \times 10^{-2} i \\ 7.0871 \times 10^{-3} - 4.1510 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$	$1.4844 \times 10^{-5}$	0.9989
1280	$\begin{pmatrix} -1.1702 \times 10^{-2} + 1.4020 \times 10^{-2} i \\ 7.0828 \times 10^{-3} - 4.1472 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$	$7.4273 \times 10^{-6}$	0.9995
2560	$\begin{pmatrix} -1.1702 \times 10^{-2} + 1.4017 \times 10^{-2} i \\ 7.0806 \times 10^{-3} - 4.1453 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$	$3.7150 \times 10^{-6}$	0.9997
5120	$\begin{pmatrix} -1.1702 \times 10^{-2} + 1.4016 \times 10^{-2} i \\ 7.0795 \times 10^{-3} - 4.1443 \times 10^{-3} i \end{pmatrix}$	$1.8579 \times 10^{-6}$	

Tabelle 4.6: Für den Testfall (C) berechnete Lösung  $u_n$  im Punkt  $(5, 5)^\top$  unter Verwendung der Traktion des dynamischen Einfachschichtpotentials sowie die dazugehörigen absoluten Fehler und Konvergenzordnungen.

Aufgrund der starken Singularität bei der Traktion des Doppelschichtpotentials wurde bei den Diagonalelementen lediglich die Differenz betrachtet und implementiert, wodurch ein Test des Operators nicht möglich ist.

# 5 Eigenwertprobleme als Anwendung

In diesem Kapitel werden verschiedene Beispiele vorgestellt, bei denen für die Lösung des Problems zunächst die Randintegralgleichungsmethode und somit die vorgestellten Operatoren verwendet werden müssen.

## 5.1 Beispiele für nichtlineare Eigenwertprobleme

### Beispiel 1

Für das Randwertproblem auf einem offenen, zusammenhängenden Gebiet  $D$  mit Rand  $\partial D$

$$\begin{aligned} \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \omega^2 \sigma u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial D \end{aligned}$$

werden die ersten Eigenwerte  $\omega$  gesucht. Dabei ist  $\sigma$  ein vorgegebener Parameter, der die Dichte des Objekts beschreibt. Für die Funktion  $u$  wird das Einfachschichtpotential ( $SL_{\sqrt{\sigma\omega}}$ )

$$u(x) = (SL_{\sqrt{\sigma\omega}}\psi)(x), \quad x \in D$$

gewählt. Wird  $x$  an den Rand  $\partial D$  angenähert, gilt der Zusammenhang:

$$0 = u(x) = (S_{\sqrt{\sigma\omega}}\psi)(x), \quad x \in \partial D .$$

Bevor die Eigenwerte berechnet werden können, wird das Einfachschichtpotential diskretisiert. Dazu erfolgt die Diskretisierung des Gebietsrandes mit  $n$  Stützstellen und für die daraus resultierende Matrix gilt:

$$T(\omega) = S_{\sqrt{\sigma\omega}} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n} .$$

Somit werden die Eigenwerte des nichtlinearen Eigenwertproblems

$$T(\omega)v = 0$$

gesucht (vgl. Definition [2.1](#)). Für die Lamé-Konstanten werden die Werte  $\mu = 2$  und  $\lambda = 3$  und als Gebiet  $D$  wird der Einheitskreis gewählt.

Zur Lösung des nichtlinearen Eigenwertproblems wird der Integralalgorithmus von Beyn verwendet und als Kontur ein Kreis mit dem Radius 0.5 und dem Mittelpunkt 10 gewählt. Dieser genügt der Parametrisierung:

$$\varphi(t) = 10 + 0.5e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Die Auswertung der Konturintegrale wird mit  $N = 40$  Stützstellen durchgeführt und eine Rangtoleranz von  $\text{tol}_{\text{rank}} = 10^{-4}$  gewählt.

Als Referenzlösung kann die Nullstelle der Lösung der Besselschen Differentialgleichung

$$J_1(a) \quad \text{mit} \quad a = \omega \sqrt{\frac{\sigma}{2\mu + \lambda}}$$

verwendet werden [10, Seite 13]. Für  $\sigma = 1$  hat die Nullstelle den Wert 10.1377411 und die Tabelle 5.1 zeigt, in Abhängigkeit von der Anzahl der Stützstellen  $n$ , den nichtlinearen Eigenwert(NLE), die relativen Fehler und die Konvergenzordnungen.

$n$	NLE $\omega$	rel. Fehler	Konvergenzordnung
40	10.1639662 + 0.0000101i	$2.5869 \times 10^{-3}$	2.0054
80	10.1442728 + 0.0000006i	$6.4430 \times 10^{-4}$	2.0021
160	10.1393716 + 0.0000000i	$1.6083 \times 10^{-4}$	2.0008
320	10.1381485 + 0.0000000i	$4.0186 \times 10^{-5}$	2.0007
640	10.1378429 + 0.0000000i	$1.0042 \times 10^{-5}$	

Tabelle 5.1: Nichtlinearer Eigenwert des mit dem dynamischen Einfachschichtpotential gelösten Streuproblems, die dazugehörigen relativen Fehler und Konvergenzordnungen für den Parameter  $\sigma = 1$ .

Wird  $\sigma = 4$  gewählt, ergibt sich die Nullstelle 9.2807488 und als Mittelpunkt der Kontur wird 9.5 gewählt. Die berechneten Werte werden in Tabelle 5.2 dargestellt.

$n$	NLE $\omega$	rel. Fehler	Konvergenzordnung
40	9.3047530 + 0.0000172i	$2.5865 \times 10^{-3}$	2.0052
80	9.2867283 + 0.0000011i	$6.4429 \times 10^{-4}$	2.0021
160	9.2822415 + 0.0000001i	$1.6084 \times 10^{-4}$	2.0011
320	9.2811217 + 0.0000000i	$4.0180 \times 10^{-5}$	2.0004
640	9.2808420 + 0.0000000i	$1.0042 \times 10^{-5}$	

Tabelle 5.2: Nichtlinearer Eigenwert des mit dem dynamischen Einfachschichtpotential gelösten Streuproblems sowie die entsprechenden relativen Fehler und Konvergenzordnungen für den Parameter  $\sigma = 4$ .

Die Berechnung der Eigenwerte für verschiedene  $n$  bestätigt die beim Test des Einfachschichtpotentials festgestellte Konvergenzordnung 2.

Alternativ kann für die Funktion  $u$  das Doppelschichtpotential ( $DL_{\sqrt{\sigma\omega}}$ ) genutzt werden:

$$u(x) = (DL_{\sqrt{\sigma\omega}}\psi)(x), \quad x \in D.$$

Bei Annäherung von  $x$  an den Rand  $\partial D$  ergibt sich der Zusammenhang:

$$0 = u(x) = (D_{\sqrt{\sigma\omega}}\psi)(x) - \frac{1}{2}\psi(x), \quad x \in \partial D.$$

Daher werden in diesem Fall die Eigenwerte zur Abbildung

$$Z(\omega) = D_{\sqrt{\sigma\omega}} - \frac{1}{2}I$$

gesucht, mit  $I$  als Einheitsmatrix der entsprechenden Dimension. Die Diskretisierung für  $D_{\sqrt{\sigma\omega}}$  wird mit den gleichen Parametern wie zuvor durchgeführt und die resultierende Matrix mit  $D_{\sqrt{\sigma\omega}}$  bezeichnet. Somit werden die Eigenwerte  $\omega$  zur Abbildung

$$T(\omega) = D_{\sqrt{\sigma\omega}} - \frac{1}{2}I \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$$

innerhalb der oben angegebenen Kontur berechnet.

Die Tabelle [5.3](#) zeigt, in Abhängigkeit von der Anzahl der Stützstellen  $n$ , den nichtlinearen Eigenwert des mit dem Doppelschichtpotential gelösten Streuproblems für den Parameter  $\sigma = 1$ .

$n$	NLE $\omega$	rel. Fehler	Konvergenzordnung
40	10.1695313 + 0.0156160i	$3.4937 \times 10^{-3}$	1.7330
80	10.1457459 + 0.0070320i	$1.0510 \times 10^{-3}$	1.4236
160	10.1397821 + 0.0034073i	$3.9179 \times 10^{-4}$	1.1676
320	10.1382722 + 0.0016865i	$1.7441 \times 10^{-4}$	1.0528
640	10.1378844 + 0.0008402i	$8.4075 \times 10^{-5}$	

Tabelle 5.3: Nichtlinearer Eigenwert des mit dem dynamischen Doppelschichtpotential gelösten Streuproblems, die dazugehörigen relativen Fehler und Konvergenzordnungen für den Parameter  $\sigma = 1$ .

Analog ergibt sich für den Parameter  $\sigma = 4$  die in Tabelle [5.4](#) dargestellte Entwicklung.

$n$	NLE $\omega$	rel. Fehler	Konvergenzordnung
40	9.3096233 + 0.0100270i	$3.2935 \times 10^{-3}$	1.9132
80	9.2879579 + 0.0037269i	$1.1784 \times 10^{-3}$	1.7050
160	9.2825582 + 0.0017093i	$2.6820 \times 10^{-4}$	1.3883
320	9.2812056 + 0.0008340i	$1.0246 \times 10^{-4}$	1.1447
640	9.2808653 + 0.0004140i	$4.6341 \times 10^{-5}$	

Tabelle 5.4: Nichtlinearer Eigenwert des mit dem dynamischen Doppelschichtpotential gelösten Streuproblems, die dazugehörigen relativen Fehler und Konvergenzordnungen für den Parameter  $\sigma = 4$ .

Auch in diesem Fall wird die in Kapitel 4 festgestellte lineare Konvergenz bestätigt. Die Werte der beiden Ansätze stimmen überein und bestätigen damit die Realisierung der beiden Operatoren im MATLAB.

Für jedes  $\sigma$  lassen sich neben dem zu vergleichszwecken genutzten Eigenwert weitere Eigenwerte (für  $n = 320$  Diskretisierungspunkte) finden. In Tabelle 5.5 werden jeweils die ersten 5 reellen Eigenwerte des elastischen Streuproblems angegeben (in Abhängigkeit des zur Lösung verwendeten Randintegraloperators). Dabei wird in der ersten und dritten Spalte der Imaginärteil weggelassen, da die ersten sieben Nachkommastellen den Wert 0 haben.

$\sigma = 1$		$\sigma = 4$	
$S_\omega$	$D_\omega$	$S_{\sqrt{4\omega}}$	$D_{\sqrt{4\omega}}$
5.0246646	5.0250995 + 0.0016149i	2.5123323	2.5125852 + 0.0008633i
5.0246646	5.0250995 + 0.0016149i	2.5123323	2.5125852 + 0.0008633i
5.4190683	5.4194090 + 0.0007300i	2.7094429	2.7096536 + 0.0003565i
7.6420372	7.6422537 + 0.0003705i	3.8210186	3.8213521 + 0.0000734i
7.6420372	7.6422537 + 0.0003705i	3.8210186	3.8213521 + 0.0000734i

Tabelle 5.5: Die ersten 5 reellen Eigenwerte des elastischen Streuproblems aus Navier-Gleichung und Dirichlet-Randbedingung unter Verwendung des dynamischen Einfach- bzw. Doppelschichtpotentials mit den Parametern  $\sigma = 1$  sowie  $\sigma = 4$ .

### Beispiel 2

Als nächstes werden für das Randwertproblem auf einem offenen, zusammenhängenden Gebiet  $D$  mit Rand  $\partial D$

$$\begin{aligned} \mu\Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \omega^2 \sigma u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \\ T(u) &= 0 \quad \text{auf } \partial D \end{aligned}$$

die ersten Eigenwerte  $\omega$  gesucht. Der Parameter  $\sigma$  wird dabei vorgegeben. Für die Funktion  $u$  wird der Einfachschichtpotentialansatz ( $SL_{\sqrt{\sigma\omega}}$ ) verwendet:

$$u(x) = (SL_{\sqrt{\sigma\omega}}\psi)(x), \quad x \in D.$$

Wird  $x$  an den Rand  $\partial D$  angenähert, gilt der Zusammenhang:

$$0 = T(u(x)) = (D_{\sqrt{\sigma\omega}}^\top \psi)(x) + \frac{1}{2}I, \quad x \in \partial D.$$

Damit werden die Eigenwerte zur Abbildung

$$Z(\omega) = D_{\sqrt{\sigma\omega}}^\top + \frac{1}{2}I$$

gesucht.

Für das Gebiet  $D$  wird der Einheitskreis und für die Lamé-Konstanten die Werte  $\mu = 2$  und  $\lambda = 3$  gewählt. Zur Berechnung der Traktion des Einfachschichtpotentials wird der Kreisrand mit  $n$  Stützstellen diskretisiert und für  $D_{\sqrt{\sigma\omega}}^\top$  eine entsprechende Diskretisierung berechnet. Die daraus erhaltene Matrix wird mit  $D_{\sqrt{\sigma\omega}}^\top$  bezeichnet und es werden die Eigenwerte  $\omega$  zur Abbildung

$$T(\omega) = D_{\sqrt{\sigma\omega}}^\top + \frac{1}{2}I \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$$

innerhalb einer Kontur berechnet.

Als Kontur wird für dieses Beispiel ein Kreis mit Radius 0.5 und dem Mittelpunkt 5.5 gewählt. Dieser genügt der Parametrisierung:

$$\varphi(t) = 5.5 + 0.5e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Nach der Auswertung der Konturintegrale mit  $N = 40$  Stützstellen und einer Rangtoleranz von  $\operatorname{tol}_{\operatorname{rank}} = 10^{-4}$  ergibt sich unter anderem der in Tabelle [5.6](#) angegebene Eigenwert. Als Referenzlösung wird die Nullstelle von

$$(\lambda + \mu)aJ_1'(a) + \lambda J_1(a) \quad \text{mit } J_1'(a) = \frac{1}{2} [J_0(a) - J_2(a)], \quad a = \omega \sqrt{\frac{\sigma}{2\mu + \lambda}}$$

verwendet. Unter Verwendung der Rekursionsbeziehung für die Bessel-Funktionen

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x) - J_{\nu-1}$$

wird die Nullstelle von

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)aJ_1'(a) + \lambda J_1(a) &= (\lambda + \mu)\frac{a}{2} [J_0(a) - J_2(a)] + \lambda J_1(a) \\ &= a(\lambda + \mu)J_0(a) - \mu J_1(a) \end{aligned}$$

genutzt [10, Seite 13].

Für  $\sigma = 1$  hat die Nullstelle den Wert 5.6242030 und der Tabelle 5.6 können der berechnete Eigenwert des mit der Traktion des Einfachschichtpotentials gelösten Streuproblems, die relativen Fehler und Konvergenzordnungen entnommen werden.

$n$	NLE $\omega$	rel. Fehler	Konvergenzordnung
40	5.6434542 - 0.0286388i	$6.1356 \times 10^{-3}$	1.1505
80	5.6295120 - 0.0146096i	$2.7638 \times 10^{-3}$	1.0428
160	5.6257795 - 0.0073786i	$1.3415 \times 10^{-3}$	1.0110
320	5.6247217 - 0.0037079i	$6.6570 \times 10^{-4}$	1.0027
640	5.6243949 - 0.0018586i	$3.3222 \times 10^{-4}$	

Tabelle 5.6: Nichtlinearer Eigenwert des mit der Traktion des dynamischen Einfachschichtpotentials gelösten Streuproblems, die dazugehörigen relativen Fehler und Konvergenzordnungen für den Parameter  $\sigma = 1$ .

Wird entsprechend  $\sigma = 4$  gewählt, so ergibt sich für die Nullstelle der Wert 7.1619097 und als Mittelpunkt der Kontur wird der Punkt 7 gewählt. Die Tabelle 5.7 zeigt den berechneten Eigenwert, die jeweiligen relativen Fehler und Konvergenzordnungen.

In diesem Fall kann lineare Konvergenz beobachtet werden, wie es schon bei dem Test der Operatoren in Kapitel 4 erwartet wurde.

Die ersten 5 reellen Eigenwerte des mit der Traktion des dynamischen Einfachschichtpotentials gelösten elastischen Streuproblems werden für  $n = 320$  Stützstellen für die Parameter  $\sigma = 1$  bzw.  $\sigma = 4$  in Tabelle 5.8 dargestellt.

$n$	NLE $\omega$	rel. Fehler	Konvergenzordnung
40	7.1841821 - 0.0124731i	$3.5643 \times 10^{-3}$	1.5732
80	7.1675275 - 0.0064833i	$1.1978 \times 10^{-3}$	1.2579
160	7.1633406 - 0.0032893i	$5.0085 \times 10^{-4}$	1.0808
320	7.1622805 - 0.0016548i	$2.3679 \times 10^{-4}$	1.0211
640	7.1620089 - 0.0008297i	$1.1667 \times 10^{-4}$	

Tabelle 5.7: Nichtlinearer Eigenwert des mit der Traktion des dynamischen Einfachschichtpotentials gelösten Streuproblems sowie die entsprechenden relativen Fehler und Konvergenzordnungen für den Parameter  $\sigma = 4$ .

$\sigma = 1$	$\sigma = 4$
3.3210024 - 0.0015335i	2.5575310 - 0.0001425i
3.3210024 - 0.0015335i	2.5575310 - 0.0001425i
5.1150622 - 0.0002834i	3.3398638 + 0.0002074i
5.1150622 - 0.0002834i	3.3398637 + 0.0002076i
5.6247217 - 0.0037079i	4.0750286 + 0.0004875i

Tabelle 5.8: Die ersten 5 reellen Eigenwerte des elastischen Streuproblems unter Verwendung der Traktion des dynamischen Einfachschichtpotentials mit den Parameter  $\sigma = 1$  bzw.  $\sigma = 4$ .

## 5.2 Transmissionsproblem

Für das Randwertproblem

$$\begin{aligned}
 \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \omega^2 u &= 0 && \text{in } D, \\
 \mu \Delta v + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} v + \omega^2 \sigma v &= 0 && \text{in } D, \\
 u &= v && \text{auf } \partial D, \\
 T(u) &= T(v) && \text{auf } \partial D
 \end{aligned}$$

auf einem offenen, zusammenhängenden Gebiet  $D$  mit Rand  $\partial D$  werden die Eigenwerte  $\omega$  gesucht. Analog zu der in [13] vorgestellten Abbildung für das akustische Transmissionsproblem ergibt sich in diesem Fall unter Verwendung anderer Be-

zeichnungen die folgende Abbildung:

$$Z(k) = \begin{pmatrix} S_{k\sqrt{\sigma}} - S_k & -D_{k\sqrt{\sigma}} + D_k \\ D_{k\sqrt{\sigma}}^\top - D_k^\top & -N_{k\sqrt{\sigma}} + N_k \end{pmatrix}.$$

Für dieses Beispiel wird als Gebiet  $D$  der Einheitskreis und für die Lamé-Konstanten die Werte  $\mu = 2$  und  $\lambda = 3$  gewählt. Die Integraloperatoren in  $Z$  werden mit  $n$  Stützstellen diskretisiert. Die daraus resultierenden Matrizen ergeben die Abbildung

$$T(\omega) = \begin{pmatrix} S_{\omega\sqrt{\sigma}} - S_\omega & -D_{\omega\sqrt{\sigma}} + D_\omega \\ D_{\omega\sqrt{\sigma}}^\top - D_\omega^\top & -N_{\omega\sqrt{\sigma}} + N_\omega \end{pmatrix},$$

für die innerhalb einer Kontur die Eigenwerte bestimmt werden sollen.

Als Kontur wird ein Kreis mit Radius 0.5 um den Punkt 4 gewählt. Für die Parametrisierung gilt daher:

$$\varphi(t) = 4 + 0.5e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Zur Auswertung der Konturintegrale werden  $N = 40$  Stützstellen und eine Rangtoleranz von  $\text{tol}_{\text{rank}} = 10^{-4}$  genutzt.

Ein Vergleichswert wird mit der *Method of Fundamental Solution* bestimmt und es ergibt sich:

$$s = 4.1049075 + 0.0000001i.$$

Die Tabelle [5.9](#) zeigt, in Abhängigkeit der verwendeten Anzahl von Stützstellen  $n$ , den ausgewählten Eigenwert sowie den dazugehörigen relativen Fehler und die Konvergenzordnung mit den Parametern  $\lambda = 3$ ,  $\mu = 2$ ,  $\sigma = 4$  und  $N = 40$ .

$n$	Eigenwert	rel. Fehler	Konvergenzordnung
40	4.1151789 + 0.0000096i	$2.5022 \times 10^{-3}$	1.9808
80	4.1075097 + 0.0000006i	$6.3407 \times 10^{-4}$	1.9924
160	4.1055615 + 0.0000002i	$1.5932 \times 10^{-4}$	1.8473
320	4.1047511 - 0.0000925i	$4.4278 \times 10^{-5}$	

Tabelle 5.9: Reeller Eigenwert des Transmissionsproblems für den Parameter  $\sigma = 4$  unter Verwendung des Einheitskreises als Streuobjekt.

Bei der Berechnung des Eigenwertes für eine Diskretisierung mit  $n \geq 160$  Stützstellen lieferte der Integralalgorithmus eine Vielzahl von möglichen Eigenwerten, sodass der Rang auf  $k = 5$  festgelegt wurde (vgl. Seite [18](#) f.). Diese Unschärfe wurde so nicht erwartet und ist möglicherweise die Ursache für die Schwankungen der Konvergenzordnung.

Es lassen sich weitere Transmissionseigenwerte mittels der Abbildung  $T(\omega)$  und verschiedener Konturen finden, die für  $n = 160$  in Tabelle 5.10 dargestellt werden. Für die Berechnung der Eigenwerte zwei bis fünf wurde jeweils der Rang  $k = 20$  vorgegeben. Im Imaginärteil der Eigenwerte spiegelt sich wieder, dass eine Genauigkeit von drei Stellen vorliegt, da alle folgenden Stellen größer 0 sind und ursprünglich reelle Eigenwerte gesucht wurden. Die Wahl des Rangs ist möglicherweise die Ursache für die geringe Genauigkeit der Eigenwerte.

$i$	Eigenwert
1	$4.1055615 + 0.0000002i$
2	$4.8138571 + 0.0026324i$
3	$4.8138574 + 0.0026325i$
4	$5.5656357 + 0.0050193i$
5	$5.5656358 + 0.0050194i$

Tabelle 5.10: Die ersten 5 reellen Eigenwerte des Transmissionsproblems für den Parameter  $\sigma = 4$  unter Verwendung des Einheitskreises als Streuobjekt.

Es ist außerdem möglich ein anderes Streuobjekt  $D$  zu wählen. In diesem Fall wurde eine Ellipse mit den Achsen  $a = 1$  und  $b = 0.8$  als Gebiet  $D$  festgelegt. Die entsprechenden ersten reellen Eigenwerte für  $n = 160$  und dem Rang  $k = 20$  können der Tabelle 5.11 entnommen werden. Auch in diesem Fall liegt eine Genauigkeit von maximal drei Stellen vor.

$i$	Eigenwert
1	$4.7724825 - 0.0002473i$
2	$5.2217403 + 0.0039273i$
3	$5.7777265 + 0.0030119i$
4	$6.1796439 - 0.0045633i$
5	$6.3421354 + 0.0060658i$

Tabelle 5.11: Die ersten 5 reellen Eigenwerte des Transmissionsproblems für den Parameter  $\sigma = 4$  unter Verwendung einer Ellipse mit den Parameter  $a = 1$  und  $b = 0.8$  als Streuobjekt.

Die berechneten Eigenwerte zeigen, dass weitere Parameterstudien nötig sind, um die vorgestellte Methodik zu testen und zufriedenstellende Ergebnisse zu erhalten.



## 6 Fazit und Ausblick

Für die Bestimmung der inneren elastischen Transmissionseigenwerte war es zunächst nötig das elastische Streuproblem mithilfe der Randintegralgleichungsmethode zu lösen. Dazu wurde unter Verwendung der jeweiligen Fundamentallösung das elastische Streuproblem im statischen und dynamischen Fall auf eine Randintegralgleichung zurückgeführt. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen ergaben sich mit dem Einfach- und Doppelschichtpotentialansatz vier Randintegraloperatoren, die zur Bestimmung der Lösung des jeweiligen Randwertproblems benötigt wurden. Dazu wurde zunächst der Gebietsrand mit  $n$  Stützstellen diskretisiert und die Dichte  $\psi$  (konstant) interpoliert. Daraus ergab sich ein lineares Gleichungssystem, bei dem jedes Element ein Integral beinhaltete, welches berechnet werden musste. Während die Integrale der Nebendiagonalelemente mit der Methode *quadgk* numerisch bestimmt wurden, wurden die Integrale der Diagonalelemente genauer betrachtet, da dort sowohl logarithmische als auch  $\frac{1}{r}$  bzw.  $\frac{1}{r^2}$ -Singularitäten auftraten. Diese wurden mithilfe von Singularitäten-Subtraktionen und der Integralberechnung als *Cauchyscher Hauptwert* bzw. *Hadamard finite part integral* behandelt. Nach der Bestimmung aller Matrixelemente konnte das lineare Gleichungssystem bezüglich der interpolierten Dichte  $\psi$  aufgelöst und daraus die Lösung des Randwertproblems berechnet werden.

Nach der Diskretisierung und Bestimmung der Diagonalelemente wurden die Operatoren in MATLAB implementiert und getestet. Bei den Tests wurde ein Punkt im Innen- oder Außengebiet gewählt und die berechnete Lösung mit der Fundamentallösung als vorgegebene Referenzlösung verglichen. Für das Einfachschichtpotential ergab sich sowohl für den statischen als auch für den dynamischen Fall quadratische Konvergenz. Für das Doppelschichtpotential lag in beiden Fällen lineare Konvergenz vor. Die Traktion des Einfachschichtpotentials zeigte im statischen Fall lineare und im dynamischen Fall fast-lineare Konvergenz. Für die Traktion des Doppelschichtpotentials war aufgrund der  $\frac{1}{r^2}$ -Singularität im statischen Fall keine Konvergenz erkennbar. Im dynamischen Fall wurde wegen der Singularität lediglich die Differenz zweier Operatoren betrachtet, da diese Differenz für die spätere Anwendung beim Transmissionsproblem genügte.

Als Beispiele für die Verwendung der numerisch bestimmten Lösung des elastischen (dynamischen) Streuproblems wurde die Bestimmung der ersten Eigenwerte eines solchen Randwertproblems beschrieben. Dabei wurde für die Berechnung der Lösung  $u$  im ersten Fall sowohl der Einfach- als auch der Doppelschichtpotentialansatz gewählt. Nach der Diskretisierung des entsprechenden Operators konnte das ent-

standene nichtlineare Eigenwertproblem mithilfe des Integralalgorithmus von Beyn gelöst werden. Dafür wurde jeweils eine passende Kontur gewählt und der erhaltene Eigenwert mit der dazugehörigen Referenzlösung verglichen. Bei diesem Beispiel war – wie zuvor bei den Tests – für das Einfachschichtpotential quadratische und für das Doppelschichtpotential lineare Konvergenz erkennbar. Zusätzlich wurden die ersten 5 errechneten Eigenwerte für das betrachtete Randwertproblem angegeben. Im zweiten Fall wurde die Traktion des Einfachschichtpotentials verwendet, um die Lösung des Randwertproblems zu bestimmen. Die mit dem Integralalgorithmus erhaltenen Eigenwerte wurden ebenfalls mit einer entsprechenden Referenzlösung verglichen und zeigten lineare Konvergenz. Auch für diesen Fall wurden die ersten 5 Eigenwerte angegeben. Da für die Traktion des Doppelschichtpotentials im dynamischen Fall lediglich die Differenz betrachtet wurde, war eine Anwendung dieses Operators in der beschriebenen Form nicht möglich. Als abschließendes Beispiel wurde das innere elastische Transmissionsproblem gewählt. Dabei wurden die Integraloperatoren diskretisiert und anschließend der Integralalgorithmus auf die resultierende Abbildung angewendet. Ein Vergleichswert wurde mit der *Method of Fundamental Solution* berechnet und eine entsprechende Fehlerentwicklung dargestellt. Bei der Berechnung der Transmissionseigenwerte zeigte sich, dass der Integralalgorithmus bei einer Rangtoleranz von  $10^{-4}$  eine Vielzahl von möglichen Eigenwerten liefert und so eine gewisse Unschärfe entsteht. Daher wurde für die Diskretisierungen  $n = 160$  und  $n = 320$  der Rang auf  $k = 5$  gesetzt. Außerdem war die Berechnung für höhere Frequenzen (z.B.  $\omega \geq 7$ ) mit  $n = 320$  ungenau und konnte nicht durch andere Ergebnisse bestätigt werden.

Die Ergebnisse des Transmissionsproblems zeigen, dass weitere Parameterstudien zur Untersuchung der vorgestellten Methodik nötig sind. In diesem Zusammenhang sollte außerdem nach Möglichkeiten gesucht werden die Traktion des Doppelschichtpotentials zu testen. Im Rahmen der Parameterstudien sollten verschiedene Lamé-Konstanten und Streuobjekte gewählt werden. Auch die Erhöhung von  $n$  sollte Teil der Studien sein, da eine höhere Genauigkeit der Eigenwerte zu erwarten ist. Da die Laufzeit der Implementierung in MATLAB sehr hoch ist (z.B. bei  $n = 160$  ein Tag), sollten die Operatoren und die Berechnung der Transmissionseigenwerte parallelisiert werden. Durch die Parallelisierung wären Parameterstudien mit größeren  $n$  deutlich einfacher durchzuführen.

Nach einer zufriedenstellenden Umsetzung des Transmissionsproblems in  $2D$  bietet sich außerdem die Möglichkeit, das Transmissionsproblem in  $3D$  zu betrachten und die entsprechenden Operatoren zu bestimmen.

# Literaturverzeichnis

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions - with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Courier Corporation, New York, 2012.
- [2] H. Ammari, J. Garnier, H. Kang, L.H. Nguyen, and L. Seppecher. *Multi-wave Medical Imaging - Mathematical Modelling & Imaging Reconstruction*. World Scientific, Singapur, 2017.
- [3] W.-J. Beyn. An integral method for solving nonlinear eigenvalue problems. *Linear Algebra and its Applications*, 436:3839–3863, 2012.
- [4] R.L. Burden and J.D. Faires. *Numerical Analysis*. THOMSON, Belmont, 8 edition, 2005.
- [5] R. Chapko, R. Kress, and L. Mönch. On the numerical solution of a hypersingular integral equation for elastic scattering from a planar crack. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 20:601–619, 2000.
- [6] J.B. Conway. *Functions of One Complex Variable I*. Springer Science & Business Media, New York, 2 edition, 1978.
- [7] A. Cossonnière and H. Haddar. Surface integral formulation of the interior transmission problem. *J. Integral Equations Applications*, 25(3):341–376, 09 2013.
- [8] K. Fritzsche. *Grundkurs Funktionentheorie - Eine Einführung in die komplexe Analysis und ihre Anwendungen*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2008.
- [9] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press, New Haven, London, 1923.
- [10] X. Ji, P. Li, and J. Sun. Computation of transmission eigenvalues for elastic waves, 2018, arXiv:1802.03687.
- [11] M.V. Keldysh. On the characteristic values and characteristic functions of certain classes of non-self-adjoint equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S)*, 77:11–14, 1951.

- [12] M.V. Keldysh. On the completeness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators. *Uspekhi Mat. Nauk*, 26, 1971.
- [13] A. Kleefeld. A numerical method to compute interior transmission eigenvalues. *Inverse Problems*, 29(10):104012, 2013.
- [14] A. Kleefeld and L. Pieronek. The method of fundamental solutions for computing acoustic interior transmission eigenvalues. *Inverse Problems*, 34(3):035007, 2018.
- [15] V.D. Kupradze. *Potential Methods in the Theory of Elasticity*. Translated from the Russian by H. Gutfreund. Translation edited by I. Meroz. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem; Daniel Davey & Co., Inc., New York, 1965.
- [16] D.P. Laurie. Calculation of Gauss–Kronrod quadrature rules. *Mathematics of Computation*, 66(219):1133–1145, 1997.



**Jül-4413 • Juli 2018**  
**ISSN 0944-2952**

Mitglied der Helmholtz-Gemeinschaft

