

Zentralinstitut für Engineering, Elektronik und Analytik
(ZEA) · Systeme der Elektronik (ZEA-2)

Analyse des Synchronisations- verhaltens mechanischer Oszillatoren bei variabler Verzögerung in der Kopplung

David Genender

Jül-4415

Zentralinstitut für Engineering, Elektronik und Analytik
(ZEA) · Systeme der Elektronik (ZEA-2)

Analyse des Synchronisations- verhaltens mechanischer Oszillatoren bei variabler Verzögerung in der Kopplung

David Genender

Berichte des Forschungszentrums Jülich
Jül-4415 · ISSN 0944-2952
Zentralinstitut für Engineering,
Elektronik und Analytik (ZEA)
Systeme der Elektronik (ZEA-2)
(Master, FH Aachen, Campus Jülich, 2018)

Vollständig frei verfügbar über das Publikations-
portal des Forschungszentrums Jülich (JuSER)
unter www.fz-juelich.de/zb/openaccess

Forschungszentrum Jülich GmbH · 52425 Jülich
Zentralbibliothek, Verlag
Tel.: 02461 61-5220 · Fax: 02461 61-6103
zb-publikation@fz-juelich.de
www.fz-juelich.de/zb

This is an Open Access publication distributed under the
terms of the **Creative Commons Attribution License 4.0**,
which permits unrestricted use, distribution, and



reproduction in any medium, provided the
original work is properly cited.

Kurzfassung

Diese Arbeit thematisiert die Analyse der Synchronisation mechanischer Oszillatoren. Hierfür werden Metronome verwendet und elektrotechnisch miteinander gekoppelt. Der besondere Fokus liegt hierbei darauf, ob sich ein Chimära-Zustand herstellen lässt. Die Umsetzung der Software erfolgte in MATLAB Simulink Realtime.

Aufbauend auf der Masterarbeit *Kontaktlose Messung und Kopplung mechanischer Oszillatoren zur Analyse von Chimära-Zuständen* von Adrian Klein wird nach einer Einleitung zunächst der dafür notwendige Versuchsaufbau erklärt. Zunächst wird auf die theoretischen Grundlagen eingegangen und anschließend wird erläutert, wie von den gemessenen Spannungswerten der vorhandenen Sensoren auf die Auslenkung des Oszillators zurückgeschlossen werden kann.

Im Anschluss wird die Realisierung in MATLAB Simulink thematisiert, sowie die erstellte Anwendung, die Kopplung der Oszillatoren entsprechend des Kuramoto-Modells und die Verifikation erklärt. Im letzten Kapitel dieser Arbeit werden verschiedene Synchronisationszustände der Oszillatoren analysiert.

Durch diese Arbeit sind die Grundlagen geschaffen worden, ein System von Oszillatoren im Echtzeit-Betrieb miteinander zu koppeln und zu analysieren. Hierbei kann die Kopplungsstärke, die Kopplungsrichtung, sowie die Verzögerung während des Echtzeit-Betriebs individuell eingestellt werden. Letztlich ist es im Rahmen dieser Arbeit gelungen, drei Oszillatoren durch die Kopplung in einen synchronen Zustand zu bringen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	13
1.1	Zentralinstitut für Engineering, Elektronik und Analytik	13
1.2	Synchronisationszustände in Systemen gekoppelter Oszillatoren	14
1.2.1	Chimära-Zustand	15
1.2.2	Kuramoto-Modell	16
1.3	Motivation	17
2	Versuchsaufbau	19
2.1	Hall-Sensoren	19
2.2	Hardware	21
2.3	Anforderungen und Verifikationsplan	25
3	Algorithmik	27
3.1	Problemstellung	27
3.2	Methodiken	27
3.2.1	Kalman-Filter	28
3.2.2	Lineare Abbildung	34
3.2.3	Vergleich des Kalman-Filters und der linearen Abbildung im Bezug auf die Bestimmung der Auslenkung des Oszillators	34
3.2.4	Bestimmung der Instantanphase	35
3.2.5	Nachweis und Quantifizierung der Phasensynchronisation	36
3.3	Konfiguration	39
3.3.1	Nulldurchgang	39
3.3.2	Extremstellen	42
3.3.3	Segmentierung	43
3.4	Bestimmung der aktuellen Auslenkung	44
3.4.1	Bestimmung durch eine Lookup-Tabelle	44
3.4.2	Bestimmung durch eine lineare Abbildung	52
4	Implementierung	59
4.1	Simulink Realtime	59
4.2	Phasenbestimmung	65
4.3	Kopplung	68
4.4	Verifikation	70
4.4.1	Software	71
4.4.2	Kopplung	73

5	Analyse von Synchronisationszuständen	77
5.1	Erster Versuch	77
5.2	Zweiter Versuch	79
6	Zusammenfassung und Ausblick	81

Abbildungsverzeichnis

1.1	Skulptur der Chimära [5]	15
2.1	Seitenansicht eines Metronoms mit Messvorrichtung [8]	20
2.2	Spannungsverlauf eines Hall-Sensors [8]	20
2.3	Frontalansicht eines Metronoms inklusive Messvorrichtung [8]	21
2.4	Übersicht der Positionierung Spulen und Magnete [8]	23
2.5	Skizzenhafte Darstellung der Datenströme eines Versuchsaufbaus mit zwei Metronomen [8]	24
3.1	Verknüpfung von den Normalverteilungen $f(x)$ und $g(x)$ zu $h(x)$	29
3.2	Darstellung des Kalman-Filters [11]	32
3.3	Beispielhafte Bestimmung der Position durch einen Kalman-Filter [11]	33
3.4	Beispielsignal und seine Betragseinhüllung aus Gleichung (3.22) [13]	36
3.5	Beispielhafte Auslenkung und Phasendifferenz bei unterschiedlicher Frequenz	37
3.6	Histogramm der Phasendifferenz zweier Signale mit unterschiedlicher Frequenz	37
3.7	Histogramm der Phasendifferenz zweier Signale mit gleicher Frequenz	38
3.8	Spannungsverlauf eines Hall-Sensors [8]	40
3.9	Rekonstruktion der Schwingung ausschließlich anhand der Nulldurchgänge	41
3.10	Spannungswerte mit markierten Nullstellen und Extrema	43
3.11	Visualisierung der messbaren Punkte der Hall-Sensoren	44
3.12	Nicht rauschende Punkte (Ansatz 1)	46
3.13	Bestimmung der aktuellen Auslenkung ohne Vorhersage	47
3.14	Vorhersage mit drei, vier und fünf Referenzpunkten	49
3.15	Vorhersage mit fünf Referenzpunkten, $x_0 = [10, 10, 10]$	50
3.16	Vorhersage ohne Restriktion der Sensoren 1 und 7	51
3.17	Lineare Abbildung mit $N = 7$	52
3.18	Aneinanderhängen der linearen Abbildungen für jedes Gebiet mit $N = 2$	54
3.19	Nicht rauschende Punkte (Ansatz 2)	56
3.20	Besondere Punkte, welche die Schwellwerte übersteigen	58
4.1	Aufbau eines Beispielsystems in Simulink	60
4.2	Simulink Block für das Einlesen der Spannungswerte	62
4.3	Simulink Block zur Berechnung der Auslenkung des Metronoms	62
4.4	Zuweisung eines Busses in Simulink	65

4.5	Simulink Block für den Hilbert-Filter	66
4.6	Bestimmung der Phase durch den Hilbert-Filter	66
4.7	Vergleich der Phasenbestimmung durch den Hilbert-Filter und die Hilbert-Transformation	67
4.8	Simulink Unterblock zur Bestimmung der Auslenkung und Phase eines Metronoms	68
4.9	Simulink Unterblock für die Kopplung	70
4.10	Codeausschnitt zur Errechnung der Kopplung nach dem Kuramoto-Modell ohne Verzögerung des Hilbert-Filters	70
4.11	Simulink Modell für das Bestimmen der Auslenkung und Phase der drei Metronome und Realisierung der Kopplung	71
4.12	Rekonstruktion einer sich aufschaukelnden Schwingung	72
4.13	Phasenbestimmung einer sich aufschaukelnden Schwingung	73
4.14	Phasendifferenz mit Kopplung	74
4.15	Histogramm der Phasendifferenz mit Kopplung	75
4.16	Phasendifferenz ohne Kopplung	75
4.17	Histogramm der Phasendifferenz ohne Kopplung	76
5.1	Darstellung der Auslenkung und Phasendifferenz (Versuch 1) - Desynchronisation	78
5.2	Darstellung der Auslenkung und Phasendifferenz (Versuch 1) - Synchronisation	79
5.3	Darstellung der Phasendifferenzen (Versuch 2)	80
6.1	Lissajous-Figuren synchroner Signale in Abhängigkeit ihres $n : m$ Verhalten der Frequenzen [19]	83

Tabellenverzeichnis

3.1	Positionen der Sensoren (Ansatz 1)	40
3.2	Schwellwerte der Sensoren zur Rauscherkennung (Ansatz 1)	45
3.3	Toleranzbereiche der Sensoren (Ansatz 1)	46
3.4	Schwellwerte der Sensoren zur Rauscherkennung (Ansatz 2)	54
3.5	Zuweisung der Gebiete anhand der Änderungsraten	55
3.6	Positionen der Sensoren (Ansatz 2)	56
3.7	Zuweisung des Gebiets für Sensor 4	57
3.8	Toleranzbereiche der Sensoren (Ansatz 2)	57
3.9	Schwellwerte der Spannungsänderung	58
4.1	Bedeutung der Spalten der MATLAB-Struktur „area“	63
5.1	Frequenzen der Metronome (Versuch 1)	77
5.2	Frequenzen der Metronome (Versuch 2) - ohne Kopplung	79
5.3	Frequenzen der Metronome (Versuch 2) - Kopplung	80

1 Einleitung

In diesem Kapitel wird zunächst das *Zentralinstitut für Engineering, Elektronik und Analytik* des Forschungszentrums Jülich vorgestellt. Daraufhin werden mögliche Synchronisationszustände in einem System beschrieben und schließlich folgt die Motivation dieser Arbeit.

1.1 Zentralinstitut für Engineering, Elektronik und Analytik

Das Zentralinstitut für Engineering, Elektronik und Analytik des Forschungszentrum Jülich ist für die Entwicklung von Geräten, Experimenten, Prozessen, Analyseverfahren, Mess-, Analyse- und Regelungsanlagen, Detektorsysteme und computergestützte Werkzeuge sowie bildgebende Verfahren zuständig, welche in Zusammenarbeit mit anderen Instituten des Forschungszentrum Jülich, oder mit externen Partnern, erarbeitet werden. Vor allem steht hier der technische und naturwissenschaftliche Schwerpunkt im Fokus der Entwicklungen [1].

Insgesamt setzt sich das Institut aus drei Bereichen zusammen.

1. Engineering und Technologie (ZEA-1)
2. Systeme der Elektronik (ZEA-2)
3. Analytik (ZEA-3)

Diese Arbeit wurde im ZEA-2 angefertigt, deshalb wird dieser Institutsbereich im Folgenden kurz vorgestellt.

Systeme der Elektronik (ZEA-2)

Speziell das ZEA-2 beschäftigt sich mit der Entwicklung von integrierten Systemen, Hardware- und Softwaresystemen. Dort werden komplexe elektronische und informationstechnische Systemlösungen für die Forschung entwickelt. Diese Systeme reichen von der Erfassung des physikalischen Ereignisses bis zur Informationsextraktion. Die anwendungsübergreifenden Konzepte basieren auf existierenden, sowie selbst entwickelten, Technologien [2].

1.2 Synchronisationszustände in Systemen gekoppelter Oszillatoren

In diesem Unterkapitel wird zunächst erklärt, was ein System gekoppelter Oszillatoren ist, wie sich eine Kopplung im System auswirken kann und welche Synchronisationszustände bei gekoppelten Oszillatoren möglich sind. Darauf folgend wird speziell der Chimära-Zustand erklärt und schließlich wird auf das Kuramoto-Modell eingegangen.

Ein System gekoppelter Oszillatoren beschreibt ein System, in welchem die Oszillatoren miteinander gekoppelt sind und sich so gegenseitig in ihrem Schwingungsverhalten beeinflussen können.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.1)$$

x : Auslenkung eines Oszillators

ω_0 : Kreisfrequenz der Schwingung

Der Verlauf eines harmonischen Oszillators wird im allgemeinen durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung angegeben. Dieser Verlauf, ohne Berücksichtigung der Reibung, ist in Gleichung (1.1) aufgeführt. Die Lösung dieser Schwingung kann durch eine Sinus-Funktion beschrieben werden, dessen allgemeine Darstellung in Gleichung (1.2) angegeben ist. Bei konstanter Amplitude y_0 , Kreisfrequenz ω und Phasenverschiebung φ_0 ergibt sich eine harmonische Schwingung. Durch eine Kopplung können jedoch, zum Beispiel durch eine Beschleunigung des gekoppelten Oszillators, auch nicht harmonische Schwingungen entstehen, sodass diese Parameter dann nicht konstant sind.

$$x(t) = y_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t - \varphi_0) \quad (1.2)$$

y_0 : Amplitude der Schwingung

ω_0 : Kreisfrequenz der Schwingung

φ_0 : Phasenverschiebung

t : Verstrichene Zeit

Allgemein besteht ein System aus Oszillatoren, die unabhängig voneinander agieren und zum Beispiel durch den Einfluss von Rauschen auch bei identischer Kreisfrequenz im Phasengang auseinander laufen. Nur durch eine Kopplung kann eine Synchronisation dieser Oszillatoren hergestellt werden. Diese Synchronisation ist durch eine konstante Phasendifferenz definiert [3]. Anschaulich bedeutet dies auf Grundlage der Gleichung (1.2), dass die Oszillatoren eine unterschiedliche Amplitude haben können, aber dennoch synchron schwingen, sofern die Kreisfrequenzen durch die Kopplung identisch werden. Diese Aussage gilt nur, wenn die anfänglichen Frequenzen der Oszillatoren ähnlich sind.

1.2 Synchronisationszustände in Systemen gekoppelter Oszillatoren

Bei größeren Abweichungen der Frequenzen kann sich ein synchrones Verhältnis entsprechend der Gleichung (1.3) einstellen. Je größer diese Unterschiede sind, desto stärker muss die Kopplung für das Erreichen der Synchronisation werden [3]. Bei ähnlichen Frequenzen gilt $n = m = 1$.

$$n\omega = m\Omega, \quad n, m \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

ω, Ω : Frequenzen der Oszillatoren

In der Praxis lässt sich jedoch nur sehr schwer eine konstante Phasendifferenz durch eine Kopplung herstellen. Oszillatoren sind stets bemüht, in ihrer Eigenfrequenz zu schwingen [3]. Kleinste Störungen einer Phasenbestimmung, beziehungsweise Rauschen, kann die Detektion der Phase verfälschen. Dementsprechend werden physikalische Oszillatoren als synchron angesehen, wenn sich ihre Phasendifferenz in einem Toleranzbereich verändert, sie muss also nicht konstant sein. Die Gleichung (1.4) gibt folglich das Kriterium für Synchronisation an [4].

$$|n\phi_1(t) - m\phi_2(t)| < c, \quad \pi/2 > c > 0 \quad (1.4)$$

ϕ : Phasen der Oszillatoren
 t : Verstrichene Zeit
 n, m : Verhältnis der Frequenzen

1.2.1 Chimära-Zustand

Ein besonderer Zustand in einem gekoppelten System ist der sogenannte *Chimära-Zustand*¹. Den Namen hat der Zustand aus der griechischen Mythologie erhalten. Dort ist die *Chimära* ein Mischwesen aus Löwe, Ziege und Schlange [5]. Die Abbildung 1.1 zeigt eine Skulptur einer Chimära.



Abbildung 1.1: Skulptur der Chimära [5]

¹Englisch: „chimera state“

1 Einleitung

Ein Zustand bei dem sich eine Gruppe von Oszillatoren bildet, welche sich synchron verhält, während alle anderen asynchron schwingen, wird als Chimära-Zustand bezeichnet. Das System besteht folglich aus einer Mischung von Synchronisation und Desynchronisation. Um einen solchen Zustand erreichen zu können, werden mindestens drei Oszillatoren benötigt [6].

Die Erforschung des Chimära-Zustandes könnte neue Erkenntnisse über in der Natur vorkommende Systeme geben, in denen eine von sich selbst ausgehende Synchronisation auftaucht. Zur Stabilisierung des Stromnetzes ist es interessant, mehr über diesen Chimära-Zustand herauszufinden. Das Auftreten eines solchen Zustandes könnte zu einem Zusammenbruch des Stromnetzes führen. Asynchrone, beziehungsweise phasenverschobene, Schwingungszustände können die Energieversorgung, aufgrund von Blindströmen, zusammenbrechen lassen. Ein Blindstrom beschreibt die Energie, welche nicht bei einem Verbraucher wahrgenommen wird. Dies bedeutet, dass der Verbraucher keine Leistung erhält, obwohl Ströme vorhanden sind. Es ist also notwendig, viele kleine regenerative Energieerzeuger, wie zum Beispiel Windkraftwerke, phasengleich im Stromnetz zu vernetzen. Das Verständnis der Entstehung eines Chimära-Zustandes in diesen Netzen kann helfen, die Stromnetze der Zukunft zu stabilisieren und Blindströme zu verhindern.

1.2.2 Kuramoto-Modell

Für eine realisierbare Kopplung der Oszillatoren wird ein Modell benötigt, welche die Abhängigkeit der Phasen realistisch mit der Kopplung des Systems beschreibt.

Das Kuramoto-Modell ist ein mathematisches Modell zur Beschreibung von Synchronisation, welches die Phasen der Oszillatoren in einem System mit Reibung und einer systeminternen Kopplung beschreibt [7]. Die Gleichung (1.5) beschreibt das vorgestellte Modell. Es besteht aus einem System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welches die Schwingung des Oszillators beschreibt. Der Summenterm der rechten Seite modelliert die Kopplung des Systems. Sind die Phasen der Oszillatoren gleich, so hat die Kopplung keinen Einfluss auf die Gleichung, sodass es sich nur um eine harmonische Schwingung mit Reibung handelt. Die Stärke der Kopplung lässt sich mit μ einstellen.

$$m\ddot{\psi}_i + \epsilon\dot{\psi}_i = \omega_i + \frac{\mu}{2N+1} \sum_{j=1}^N \sin(\psi_j - \psi_i) \quad (1.5)$$

m : Trägheit

ϵ : Reibungskonstante

μ : Kopplungsstärke

N : Anzahl der gekoppelten Oszillatoren

ω_i : Instantanfrequenz des Oszillators i

ψ_i : Phase des Oszillators i

1.3 Motivation

Die Motivation dieser Arbeit ist die Entwicklung eines physikalischen Systems, mit dem unterschiedliche Synchronisationszustände in Abhängigkeit von der Kopplungsstärke, Kopplungsrichtung und Kopplungsverzögerung erzeugt und analysiert werden können. Dabei werden die Oszillatoren in Echtzeit miteinander gekoppelt. Eine allgemeine Untersuchung dynamischer Systeme soll ermöglicht werden.

Durch die Vorarbeit von Adrian Klein wurde eine Möglichkeit geschaffen, die Auslenkung eines Metronoms als Oszillator messen zu können. Im Rahmen dessen ist eine Software entwickelt worden, welche eine Steuerung der vorhandenen Hardware ermöglicht. Hierbei können gezielt Daten der Sensoren aufgezeichnet und im Nachgang analysiert werden. Eine Echtzeit-Anwendung zur Bestimmung der Auslenkung und Realisierung einer Kopplung bestand jedoch nicht.

Damit die zuvor angesprochene Entwicklung des Systems möglich ist, muss im Rahmen dieser Arbeit eine Software entwickelt werden, welche die Auslenkungen der Oszillatoren in Echtzeit bestimmt und diese miteinander mittels des Kuramoto-Modells koppelt. Zur Bestimmung der Kopplung nach Kuramoto, sowie zum Nachweis einer Synchronisation, muss die Phase der Oszillatoren bestimmt werden können.

2 Versuchsaufbau

Dieses Kapitel erklärt den Versuchsaufbau zur Messung der Auslenkung eines Oszillators, welcher durch ein Metronom repräsentiert wird.

Hierbei wird in Kapitel 2.1 auf die verwendeten Sensoren eingegangen und die Hardware in Kapitel 2.2 beschrieben. Zum Abschluss des Kapitels wird in 2.3 auf die Anforderungen des zu erstellenden Systems eingegangen und wie dieser verifiziert wird.

Ausgangspunkt dieser Arbeit sind die Ergebnisse der Masterarbeit von Adrian Klein [8]. Der von ihm entwickelte Aufbau zur kontaktlosen Messung und Beeinflussung mechanischer Metronome wird im Folgenden erläutert. Verwendet wurden Metronome der Firma *Wittner* des Typs 845111.

2.1 Hall-Sensoren

Um die Auslenkung des Metronoms messen zu können, werden Hall-Sensoren eingesetzt. Verwendet wurden die analogen HE144P Hall-Sensoren der Firma *A-sensor Technology AB*. Diese Sensoren werden entlang der Pendelstrecke des Metronoms positioniert. In Abhängigkeit eines sich in der Nähe befindenden Magnetfeldes geben diese Sensoren einen Spannungswert aus. Hierzu wird der sogenannte Hall-Effekt benutzt. Dieser Effekt beschreibt, dass durch einen stromdurchflossenen Leiter, der sich in einem Magnetfeld befindet, eine elektrische Spannung entsteht. Die Gleichung (2.1) gibt die Formel des Hall-Effekts an.

$$U_H = A_H \frac{IB}{d} \quad (2.1)$$

U_H : Hall-Spannung

A_H : Hall-Konstante

I : Stromstärke

B : Magnetische Flussdichte

d : Dicke des Sensors

Um den in Gleichung (2.1) beschriebenen Hall-Effekt nutzen zu können, wird am Pendel selbst ein Magnet befestigt, welcher während der Bewegung, aus Sicht der Hall-Sensoren, ein sich veränderndes Magnetfeld erzeugt. Die Abbildung 2.1 verdeutlicht diesen Aufbau.

2 Versuchsaufbau

Dort sind in der Vergrößerung beispielhaft die Sensoren, sowie das Pendel mit einem zusätzlich montierten Magneten, zu erkennen.

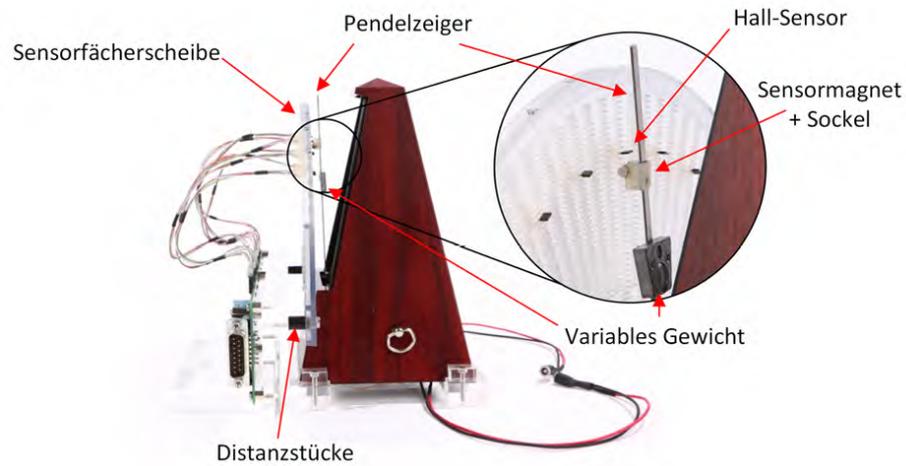


Abbildung 2.1: Seitenansicht eines Metronoms mit Messvorrichtung [8]

Die Abbildung 2.2 veranschaulicht beispielhaft den ausgegebenen Spannungswert eines Sensors in Abhängigkeit zur Position des Magneten. Der ausgegebene Spannungswert wird durch die orange Kurve dargestellt. Der Magnet befindet sich fest im Ursprung und der Sensor läuft entlang der gekennzeichneten Geraden. Im verwendeten Versuchsaufbau ist der Hall-Sensor fest montiert und der Magnet beweglich, das Verhalten, wie in der Abbildung 2.2 dargestellt, bleibt jedoch identisch.

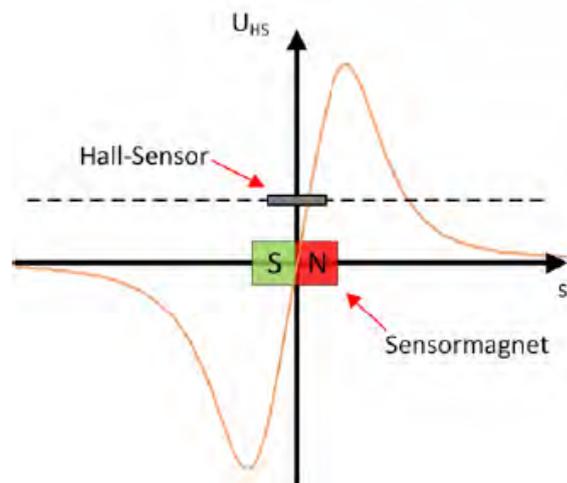


Abbildung 2.2: Spannungsverlauf eines Hall-Sensors [8]

Es ist zu erkennen, dass sich die ausgegebene Spannung am Rand asymptotisch einer Konstanten annähert. Nähert sich der Sensor dem Magneten, dann läuft das Signal zu einem Extremum und anschließend durch die Null zum entgegengesetzten Extremum. Das Signal kann von links nach rechts, oder umgekehrt, interpretiert werden. Wenn sich der Magnet auf einer Höhe mit dem Sensor befindet, dann ist der ausgegebene Spannungswert Null.

2.2 Hardware

Damit das Metronom und die Messvorrichtung möglichst stabil und kompakt sind, wurde ein spezielles Stativ für den Aufbau erstellt. Dieses ist aus PMMA¹ gedruckt. Es sorgt dafür, dass alle Sensoren und das Metronom fest positioniert sind. Hierdurch sind die Messwerte der Sensoren reproduzierbar.

Für die Hall-Sensoren sind Reihen mit Steckplätzen freigelassen. Die Winkelreihen weisen einen Abstand von 4.3° auf. Innerhalb dieser Reihen können die Sensoren beliebig in der Höhe platziert werden. Im derzeitigen Aufbau sind sieben Sensoren pro Metronom verwendet worden. Die Abbildung 2.3 veranschaulicht den Aufbau, bestehend aus einem Metronom, dem Stativ und der Messvorrichtung aus einer frontalen Perspektive.

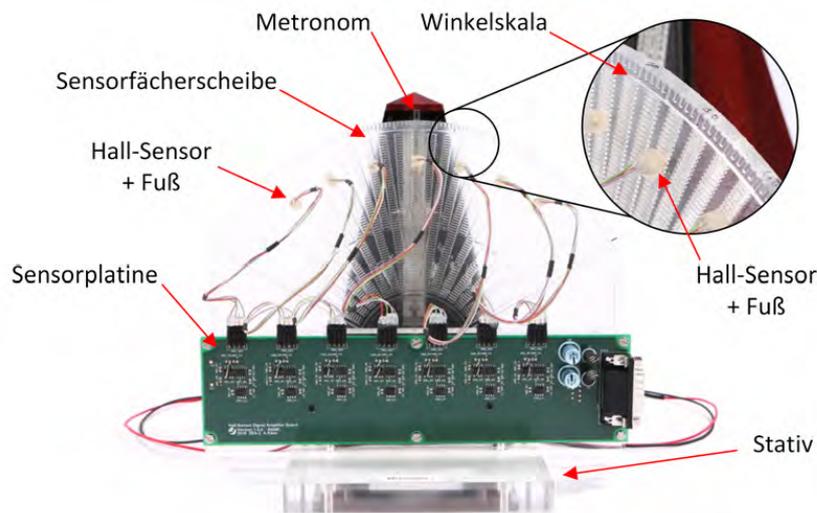


Abbildung 2.3: Frontalansicht eines Metronoms inklusive Messvorrichtung [8]

¹Polymethylmethacrylat (Acrylglas)

2 Versuchsaufbau

Zur Erfassung der einzelnen Signale der Hall-Sensoren wird eine eigenständige Ausleseelektronik benötigt. Diese ist im Stativ integriert und sorgt dafür, dass die Signale der Sensoren erfasst und verstärkt werden. Des Weiteren sorgt diese für eine konstante Stromzufuhr der Sensoren, da diese einen Betriebsstrom von 0.1 – 2 Milliampere benötigen.

Neben dieser Funktionalität dient sie der Weitergabe aller Signale. Als Anschluss besitzt die Platine eine D-Sub-Buchse. An dieser liegt die Stromzufuhr der Sensoren an und gleichzeitig gibt diese die Signale der Sensoren weiter. In Abbildung 2.3 ist diese Ausleseelektronik in Form der grünen Platine zu erkennen. Dort ist rechts die Buchse, und oben die Anschlüsse für die sieben Hall-Sensoren zu sehen.

Als zentrale Datenerfassung dient das SCB-68 von *National Instruments*. Diese Hardware stellt 68 Steckerverbinder bereit. Mittels der D-Sub-Buchse können diese Hardware-Geräte miteinander verbunden werden.

An diese SCB-68 Hardware ist der Messcomputer angeschlossen. Dieser besitzt eine PCI-6071E-Karte von *National Instruments*, welche für die Datenerfassung der Hall-Signale zuständig ist. Diese Karte kann bis zu 64 Kanäle synchron mit 1.25 MS/s mit einer 12 Bit Auflösung erfassen [9]. Mit Hilfe eines spezifischen Kabels² ist der Messcomputer mit der zentralen Datenerfassung verbunden. Mit entsprechenden Treibern können diese Daten am Messcomputer ausgelesen und ausgewertet werden. Die Abbildung 2.5 veranschaulicht mit dem grünen Signal den groben Datenfluss von den Sensoren über den Anschlussblock bis zum Messcomputer. Ein Netzteil sorgt für die benötigten Spannungen und Ströme der Sensoren.

Magnete / Spulen

Damit eine elektrotechnische Kopplung realisiert werden kann, sind unten im Gehäuse des Metronoms Spulen angebracht. Diese sind so befestigt, dass das Pendel ungestört schwingen kann. Zusätzlich wird ein weiterer Magnet an das untere Ende des Pendels montiert, der in die Öffnungen der Spulen schwingen kann, falls die Auslenkung groß genug ist. Ein kontaktfreies Schwingen des Pendels ist so gewährleistet. Liegt Strom an den Spulen an, dann wird der Magnet angezogen, oder abgestoßen³ und eine Manipulation der Auslenkung kann dadurch realisiert werden. Die Abbildung 2.4 veranschaulicht die Positionierung dieser Spulen und der Magnete.

Die verbaute PCI-6071E-Karte besitzt, neben den 64 Eingängen, zusätzlich 2 Ausgänge [9]. An jedem Metronom sind zwei Spulen montiert, sodass bei Verwendung dieser Karte nur zwei Spulen mit diesen Ausgängen verbunden werden können. Die ausgegebene Leistung der Karte ist zudem nicht ausreichend, sodass ein Verstärker speziell für diese

²National Instruments Kabel 187406A-01

³Abhängig der Wickelrichtung der Spule und anliegender Spannung

Signale benötigt wird. Der Verstärker sorgt dafür, dass die Ausgangssignale des Messcomputers verstärkt an die Spulen geleitet werden und so eine Manipulation der Auslenkung erreicht werden kann. Die benötigte Spannung der Spulen liegt bei ± 10 Volt, der Strom bei ± 0.5 Ampere. In Abbildung 2.5 ist das Signal für die Spulen mit dem roten Aktuierungssignal dargestellt. Die Datenerfassung der Hall-Spannungswerte ist mit dem grünen Signal verdeutlicht. Das Netzteil versorgt ebenfalls den Verstärker und die Sensoren.

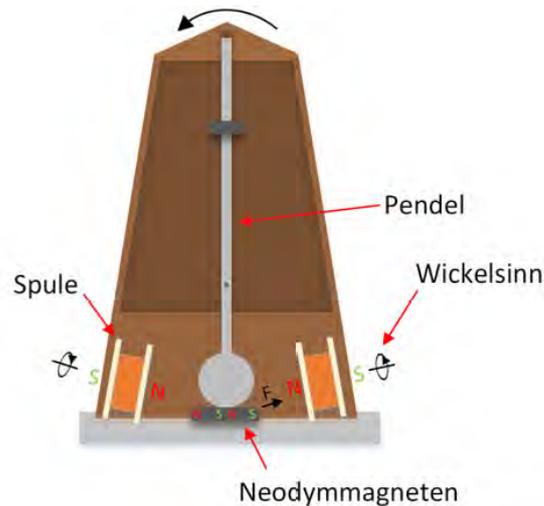


Abbildung 2.4: Übersicht der Positionierung Spulen und Magnete [8]

Erweiterung des Versuchsaufbaus

Wie bereits erwähnt, ist mit der bisher verwendeten PCI-6071E-Karte nur das Ansteuern von zwei Spulen möglich. Da jedoch mehr Spulen angesteuert werden müssen, wurde zur Umsetzung dieser Arbeit zusätzlich eine PCI-6713-Karte von *National Instruments* in den Messcomputer eingebaut. Diese stellt insgesamt 8 Analogausgänge zur Verfügung [10]. Insgesamt sind also vier Metronome, mit jeweils zwei Spulen, ansteuerbar. Für diese Karte wurde ein weiterer SCB-Anschlussblock verwendet, welcher über den Verstärker mit den Anschlüssen der Spulen verbunden wird. In Abbildung 2.5 ist zur kompakteren Darstellung nur ein Anschlussblock aufgeführt.

2 Versuchsaufbau

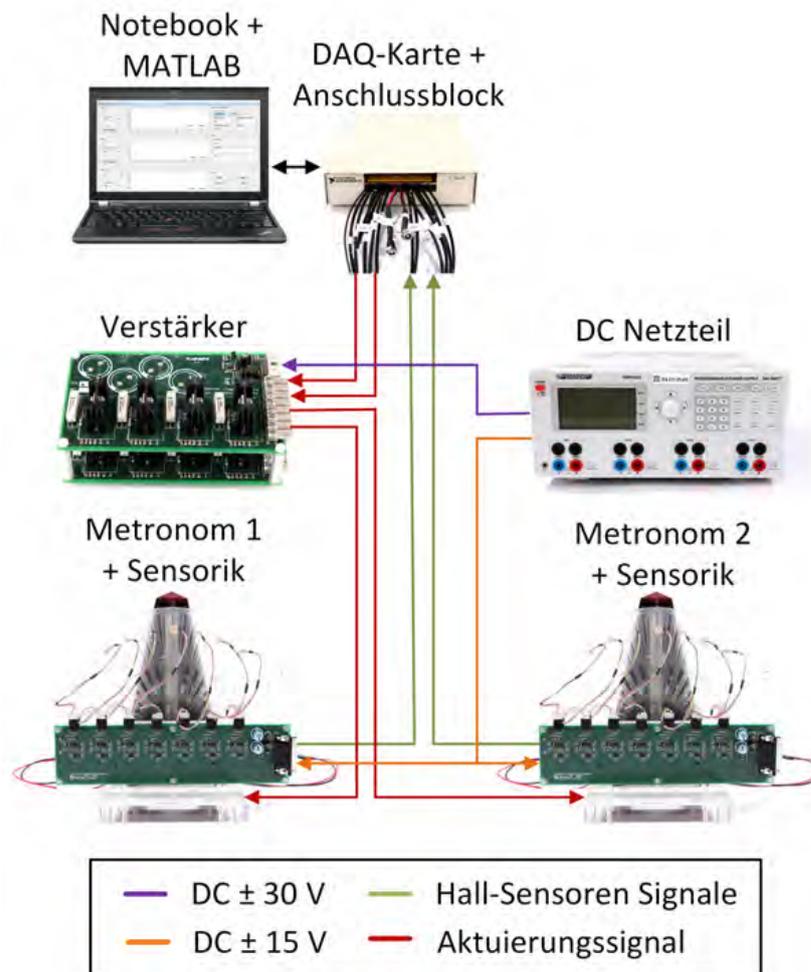


Abbildung 2.5: Skizzenhafte Darstellung der Datenströme eines Versuchsaufbaus mit zwei Metronomen [8]

2.3 Anforderungen und Verifikationsplan

In diesem Unterkapitel werden die Anforderungen für diese Arbeit zusammengefasst und ein Verifikationsplan definiert.

Anforderungen

Es gilt eine geeignete Methode zur Bestimmung der Auslenkung eines Oszillators zu entwickeln, diese Bestimmung muss möglichst exakt sein. Hierbei sind gewisse Toleranzen erlaubt, in denen das Signal „springen“ darf. Durch eventuelle Messungenauigkeiten können diese Sprünge auftreten.

Des Weiteren soll eine Kopplung der Oszillatoren untereinander realisiert werden. Diese Kopplung soll hinsichtlich der Kopplungsrichtung, Kopplungsstärke und Kopplungsverzögerung frei konfigurierbar sein. Das Ziel ist es, dass mit diesem System die Synchronisationszustände in Abhängigkeit von den Kopplungsparametern⁴ analysiert und mit rein numerischen Modellen verglichen werden kann.

Wie beschrieben werden in diesem Versuchsaufbau die Oszillatoren durch Metronome dargestellt, die mit der in Kapitel 2 erklärten Hardware ausgewertet werden sollen. Drei Metronome müssen in Echtzeit miteinander gekoppelt und analysiert werden können. Besondere Betrachtung liegt hierbei auf der Entstehung des Chimära-Zustandes. Unter Echtzeit versteht man, dass ein Modell innerhalb eines fest definierten Zeitraums reagiert. Im vorliegenden Aufbau ist dies im Bereich von Millisekunden.

Aus den Anforderungen geht heraus, dass drei Ziele erfüllt werden müssen:

- Bestimmung der Auslenkung des Oszillators
- Realisierung der Kopplung
 - Variable Änderungen der Kopplungsparameter⁴
- Umsetzung in Echtzeit

Verifikationsplan

Die Implementierung der Software zur Bestimmung der Auslenkung des Pendels, sowie die Kopplung, wird im Echtzeit-Betrieb verifiziert. Hierbei wird, sowohl mit aufgezeichneten Daten, als auch nach Augenmaß während dem Echtzeit-Betrieb, auf eine glatte Schwingung der Rekonstruktion geprüft. Große Sprünge und „Zacken“ weisen hier auf ungenaue Rückschlüsse der Auslenkung hin, weil bei kleinen Zeitschritten nur kleine Änderungen der Auslenkung möglich sind.

⁴Richtung, Stärke und Verzögerung

2 Versuchsaufbau

Anhand einer aufgezeichneten, nicht harmonischen Schwingung soll verifiziert werden, dass die Bestimmung der Auslenkung des Oszillators auch auf nicht harmonische Schwingungen reagieren kann. So kann gezeigt werden, dass das System auf externe Störungen des Metronoms reagiert.

Zur Verifikation der Kopplung soll in einem System mit zwei Metronomen, ein Metronom einseitig gekoppelt werden. Dies bedeutet, dass nur ein Metronom das andere beeinflusst, umgekehrt jedoch nicht. Bei korrekter Umsetzung sollte sich das gekoppelte Metronom dem frei schwingenden angleichen.

Damit die Echtzeit-Bedingungen erfüllt sind, muss die entwickelte Software innerhalb von Millisekunden agieren. Hierfür müssen die Ausführungszeiten der verschiedenen Methoden, sowie Antwortzeiten der Hardware, bekannt sein.

3 Algorithmetik

In diesem Kapitel wird die Algorithmetik zur Bestimmung der Auslenkung der Metronome thematisiert. Zunächst wird die Problemstellung kurz aufgeführt. Danach werden in Kapitel 3.2 zwei Verfahren verglichen, mit denen, anhand der Spannungen der in Kapitel 2.1 beschriebenen Sensoren, eine Aussage über die tatsächliche Auslenkung des Metronoms getroffen werden kann. Darauf folgt die Konfiguration des Systems und zwei Ansätze, mit denen die Auslenkung des Pendels bestimmt werden kann.

3.1 Problemstellung

Die Auslenkung des Pendels wird mit den Hall-Sensoren erfasst. Diese liefern, wie in Kapitel 2 beschrieben, einen Spannungswert in Abhängigkeit zur Position des Pendels. Die Ausgabe der Messdaten ist kontinuierlich. Aus diesen Spannungswerten soll unter Echtzeit-Anforderungen die Auslenkung des Pendels bestimmt werden können.

Für eine Kopplung nach dem Kuramoto-Modell müssen die Instantanphasen der Oszillatoren bekannt sein. Auch diese sollen im Echtzeit-Betrieb bestimmt werden können.

Für die hier geschilderten Aufgabenbereiche gilt es, geeignete Algorithmen zu finden.

3.2 Methodiken

In diesem Kapitel werden zunächst geeignete Algorithmen vorgestellt, mit welchen auf die Auslenkung des Oszillators zurückgeschlossen werden kann. Hierfür wird zunächst der Kalman-Filter und das Prinzip einer linearen Abbildung thematisiert. Schließlich wird ein für diese Arbeit geeignetes Verfahren ausgewählt.

Zusätzlich wird die Hilbert-Transformation erklärt, mit der auf die Instantanphase eines Oszillators geschlossen werden kann. Zum Schluss folgt eine Beschreibung, wie ein synchroner Zustand zwischen diesen Oszillatoren detektiert werden kann.

3.2.1 Kalman-Filter

Der Kalman-Filter ist ein mathematisches Verfahren, welches Vorhersagen für nicht direkt messbare Systemgrößen liefert. Anhand der Sensoren kann allerdings auf diese Systemgröße geschlossen werden. Die Messwerte der Sensoren können jedoch gestört oder fehlerhaft sein. Anhand von Wahrscheinlichkeiten werden Vorhersagen/Schätzungen für die Systemgröße getroffen. Zusätzlich ist es möglich, dass die Systemgröße durch verschiedene Sensoren bestimmt werden kann. Der Kalman-Filter ermöglicht es, Daten verschiedener Sensoren so zu verknüpfen, sodass eine optimale Schätzung für die Systemgröße getroffen werden kann. Ein Beispiel hierfür ist die Bestimmung der Position eines Autos durch GPS¹. Wird das Signal nur schwach empfangen, oder fällt dieses sogar aus, dann werden Hilfsdaten² herbeigezogen um die Bestimmung der Position zu korrigieren.

Besteht ein direkter Zusammenhang zwischen den Daten der Sensoren und der zu messenden Systemgröße, dann herrscht eine direkte Relation zwischen den Sensordaten und der Systemgröße. Liefern die Sensoren nun exakte und störungsfreie Daten, dann ist die Systemgröße einfach zu bestimmen. Sollte der Sensor jedoch rauschen oder ungenau messen, nimmt die Genauigkeit dieses Sensors und damit die Genauigkeit der bestimmten Größe ab. Die Genauigkeit eines Sensors kann durch eine Normalverteilung angegeben werden. Je größer die zugehörige Varianz³ des Sensors ist, desto unpräziser wird die Vorhersage des Schätzverfahrens. Eine große Varianz bedeutet, dass die Gauß-Glocke sehr breit ist, sodass die Wahrscheinlichkeit, dass der Erwartungswert⁴ tatsächlich eintritt, geringer ist. Zusätzlich liegen die Messwerte in einem System nur zu diskreten Zeitpunkten an, sodass die gemessenen Sensordaten für den gesamten, verstrichenen Zeitraum Δt angenommen werden. Diese Annahme kann Ungenauigkeiten mit sich führen.

Zu einem gegebenen Startwert der Systemgröße, welcher zum Beispiel exakt gemessen oder angegeben werden kann, wird folglich anhand der Normalverteilung eine Schätzung der Systemgröße für den nächsten Zeitschritt getroffen. Zu jedem Zeitschritt wird eine Aktualisierung auf den vorherigen Wert getroffen. Der Filter besteht also aus einem Wechsel zwischen Messen und Aktualisieren zu jedem Zeitschritt. Hierbei werden die Normalverteilungen zum aktuellen Wert der Systemgröße, sowie die der bestimmten Größe durch die Sensoren miteinander verknüpft und so eine neue Normalverteilung für den Wert der Systemgröße berechnet. Die Gleichungen in (3.1) geben die Formeln für die neuen Parameter dieser Verteilung an. Der Erwartungswert gibt nun den neuen Wert der Systemgröße an, wobei die Varianz die Genauigkeit dieser Schätzung angibt.

¹Global Positioning System

²Drehzahlsensor, Beschleunigungssensor...

³ σ^2 der Normalverteilung

⁴ μ der Normalverteilung

$$\mu_n = \frac{\sigma_1^2 \mu_1 + \sigma_2^2 \mu_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (3.1)$$

$$\sigma_n = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}$$

μ_i : Erwartungswert der Normalverteilungen

σ_i : Varianz der Normalverteilungen

In der Abbildung 3.1 ist diese Verknüpfung veranschaulicht. Die Normalverteilungen $f(x)$, welche zum Beispiel durch eine Positionsbestimmung durch GPS gegeben sein kann, und $g(x)$, welche zum Beispiel eine unsichere Vorhersage durch die Sensoren im Auto angibt, werden wie in Gleichung (3.1) gezeigt miteinander verknüpft und ergeben $h(x)$, was der geschätzten Position nach dem ersten Zeitschritt entspricht. Dazu wurden die Sensordaten verarbeitet und eine Aussage über den neuen Zustand getroffen. Es ist zu erkennen, dass die Genauigkeit von $h(x)$ besser ist, als bei $f(x)$, obwohl die Varianz von $g(x)$ relativ hoch ist. Dies bedeutet, dass die Sicherheit, dass der Wert der Systemgröße μ ist, trotz einer relativ ungenauen Messung, hoch ist.

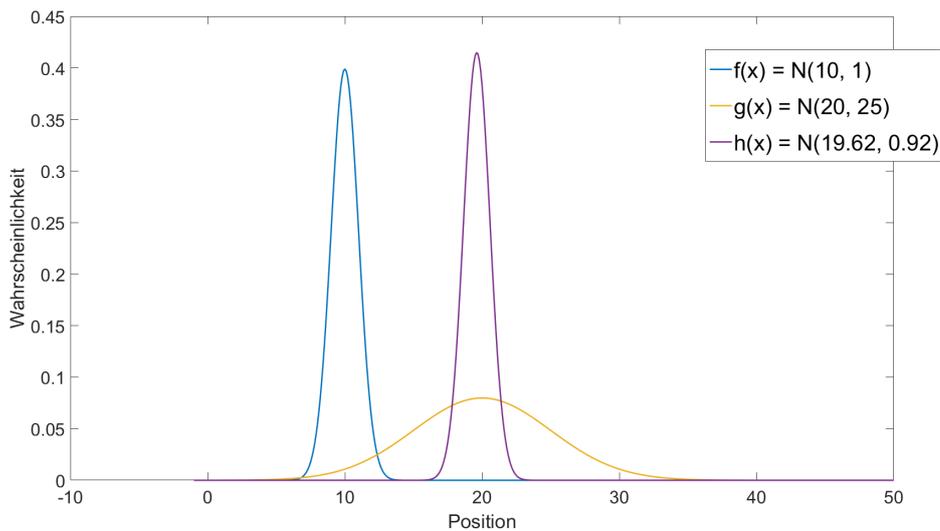


Abbildung 3.1: Verknüpfung von den Normalverteilungen $f(x)$ und $g(x)$ zu $h(x)$

Diese Veranschaulichung des Kalman-Filters entspricht bisher nur der Anwendung im eindimensionalen Fall. Da sich die meisten Probleme nicht ins Eindimensionale übertragen lassen, muss der Filter erweitert werden. Die zu bestimmende Systemgröße ist also nicht nur von einer Variable abhängig, sondern von mehreren.

Im mehrdimensionalen Fall muss der Startzustand in der entsprechenden Dimension des Systems angegeben werden. Falls diese nicht bekannt sein sollen, können beliebige Werte

3 Algorithmik

eingetragen werden. Der Filter benötigt dann jedoch unter Umständen länger, bis eine genaue Schätzung getroffen werden kann. Des Weiteren werden die Varianzen der Dimensionen für den Startzustand in einer quadratischen Matrix P angegeben. Ist der Startzustand unklar, dann können große Werte eingetragen werden, sodass die Gauß-Glocke der Normalverteilung breit ist. Diese Varianzen werden bei fortschreitenden Iterationen verändert.

Neben der Varianz-Matrix P wird noch eine Dynamik-Matrix benötigt, welche die physikalischen Zusammenhänge des Systems beschreibt. Diese definiert die Verknüpfung zwischen den Sensordaten und der zu bestimmenden Größe. Differentialgleichungen können, mitunter, durch eine solche Matrix beschrieben werden. Die Gleichungen (3.2) bis (3.5) zeigen eine beispielhafte Herleitung dieser Matrix anhand einer gleichmäßigen Bewegungsgleichung in einer Ebene [11]. Hierbei sind x und y die Positionen und \dot{x} sowie \dot{y} die Geschwindigkeiten in die jeweilige Richtung. Die Matrix A in Gleichung (3.5) entspricht der Dynamik-Matrix dieses Systems.

$$x_{t+1} = \dot{x}_t \cdot t + x_t \quad (3.2)$$

$$y_{t+1} = \dot{y}_t \cdot t + y_t \quad (3.3)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dt & 0 \\ 0 & 1 & 0 & dt \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}_t \quad (3.4)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}_{t+1} = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}_t \quad (3.5)$$

Aufgrund der Annahme, dass die Geschwindigkeiten während des Zeitschrittes Δt konstant bleiben, wird dieses Modell auch „Constant Velocity“ genannt [11]. Durch Hinzufügen einer weiteren Dimension, der Beschleunigung, könnte diese Annahme verändert werden. Alternativ zur Geschwindigkeit kann die Beschleunigung als konstant angesehen werden. Dieses Modell wird „Constant Acceleration“ genannt.

Um die Genauigkeit des Filters zu erhöhen, wird eine weitere Matrix benötigt. Diese gibt an, wie sich die Größe des Systems sprunghaft verändern kann. Störungen durch äußere Einflüsse werden, zum Beispiel bei der zuvor angegebenen Bewegungsgleichung⁵, nicht mit beschrieben. Diese Matrix beschreibt nun die Kovarianzen für verschiedene Messgrößen. Durch sie wird der Zusammenhang der beiden Zufallsvariablen bestimmt. Die Gleichungen (3.6) bis (3.9) zeigen das Erstellen dieser Matrix Q beispielhaft für eine physikalische Beschleunigung. In den Gleichungen ist dies nur für x aufgeführt, für y läuft dies äquivalent ab. Das σ_a entspricht dort der Erdbeschleunigung.

⁵Lenken, Beschleunigen, Windstoß, Schlagloch oder ähnliches

$$x = \frac{1}{2} dt^2 \cdot \ddot{x} \quad (3.6)$$

$$\dot{x} = dt \cdot \ddot{x} \quad (3.7)$$

$$G = [0.5 \Delta t^2 \quad 0.5 \Delta t^2 \quad \Delta t \quad \Delta t]^T \quad (3.8)$$

$$Q = G \cdot G^T \cdot \sigma_a^2 \quad (3.9)$$

$$\sigma_a = 8$$

Funktionsweise

Anhand der erstellten Matrizen kann eine Vorhersage für den nächsten Zeitschritt bestimmt werden. Dieser entspricht Gleichung (3.5) und wird zunächst vorgemerkt. Als nächstes wird die Matrix der Varianzen P , wie in Gleichung (3.10) gezeigt, aktualisiert.

$$\tilde{P}_{t+1} = A \cdot P_t \cdot A^T + Q \quad (3.10)$$

Darauf folgend wird der Zeitschritt dt abgewartet und erneut gemessen. Die Messdaten werden verarbeitet und mit dem vorhergesagten Wert verglichen. Es handelt sich demnach um eine a priori Schätzung. Falls die Werte übereinstimmen, dann werden die Varianzen in P reduziert, andernfalls erhöht [11]. Des Weiteren muss überprüft werden, welcher der Werte der realistischere ist. Dies kann entweder der aus den gestörten Messwerten resultierende Wert sein, oder der vorhergesagte. Hierfür muss der sogenannte „Kalman-Gain“ bestimmt werden. Wie dieser berechnet werden kann, ist in Gleichung (3.11) angegeben. Wird dieser im Vergleich zu dem letzten Zeitschritt geringer, dann ähneln sich die Werte. Bei Diskrepanzen wird dieser größer. Bei genauen Messdaten der Sensoren wird dementsprechend angenommen, dass der gemessene Wert der tatsächlichen Systemgröße entspricht.

$$K_{t+1} = \frac{\tilde{P}_{t+1} \cdot H^T}{S} \quad (3.11)$$

$$S = H \cdot \tilde{P}_{t+1} \cdot H^T + R \quad (3.12)$$

H : Messmatrix

R : Messrauschkovarianzmatrix

Die Messmatrix H gibt an, in welchem Verhältnis die Messwerte zu der zu messenden Systemgröße stehen. Die Messrauschkovarianzmatrix R teilt dem Filter die Messunsicherheiten der Sensoren, also die σ , mit. Es ist eine quadratische Matrix, die der Anzahl der Sensoren entspricht.

3 Algorithmmik

$$x_{t+1} = x_t + (K_{t+1} \cdot w) \quad (3.13)$$

$$w = Z_t - (H \cdot x_t) \quad (3.14)$$

$$P_{t+1} = (I - (K_{t+1} \cdot H)) \cdot \tilde{P}_{t+1} \quad (3.15)$$

x_t : Angenommener Wert der Systemgröße

Z_t : Messdaten der Sensoren

Nach diesen Berechnungen wird der Systemzustand aktualisiert und anschließend die Matrix P verändert. Die Gleichungen (3.13) bis (3.15) geben an, wie diese Aktualisierung vollzogen wird. Abbildung 3.2 verdeutlicht den Ablauf und die Funktionsweise des Filters. Gilt zum Beispiel $\lim_{R \rightarrow 0} K = \frac{1}{H} = H^{-1}$ sodass der bestimmte Wert der Systemgröße x_{t+1} nur aus den Sensordaten entsteht.

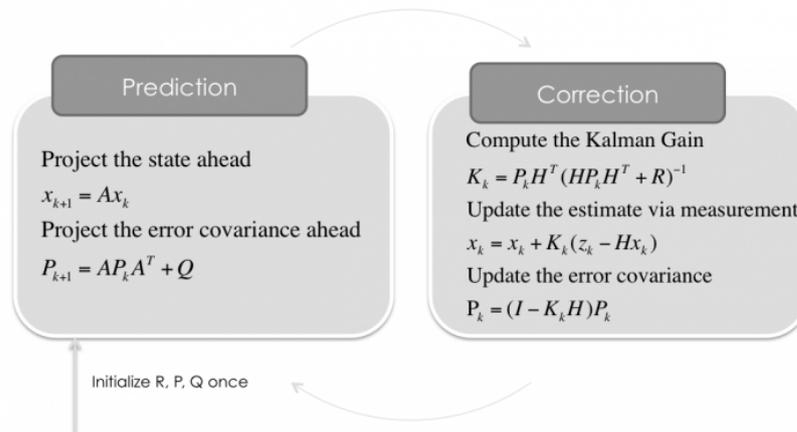


Abbildung 3.2: Darstellung des Kalman-Filters [11]

Zusammenfassung

Nach der Initialisierung⁷ des Systems wird die zu bestimmende Messgröße a priori geschätzt. Nach einem fest definierten Zeitschritt werden die Messdaten der Sensoren erfasst, verarbeitet und mit dem vorhergesagten Wert verglichen. Beide Daten bringen Störungen mit sich. Anhand dieses Vergleichs werden die Matrizen des Filters aktualisiert. Fällt nun die direkte Messung der Systemgröße aus⁸ dann wird die Vorhersage der

⁶Die Daten der Sensoren sind sehr genau

⁷Zum Beispiel die Position durch GPS

⁸Zum Beispiel der Verlust des GPS-Empfangs durch einen Tunnel

Systemgröße durch die Sensoren übernommen. Mittels der stetigen Aktualisierungen des Filters kann bestimmt werden, wie zuverlässig die vorhergesagten Daten sind.

In Abbildung 3.3 ist ein solches Beispiel mit GPS aufgeführt. Die roten Punkte stellen die gemessenen Positionen durch GPS, welche gewisse Ungenauigkeiten mit sich führen, dar. Die schwarze Kurve repräsentiert den exakten Positionsverlauf, die blaue die Vorhersage durch den Filter. Hierbei wird die a priori Schätzung durch die Sensoren⁹ im Auto getroffen und hiernach mit der Messung durch das GPS-Signal verglichen. Der durch den Vergleich resultierende Wert entspricht der blauen Kurve. Es ist zu erkennen, dass sich der Filter nach einer anfänglichen Ungenauigkeit, dem tatsächlichen Wert nähert und die Ungenauigkeiten durch das GPS ausgleicht. Mit jedem Zeitschritt sinkt dadurch die Varianz des Systems.

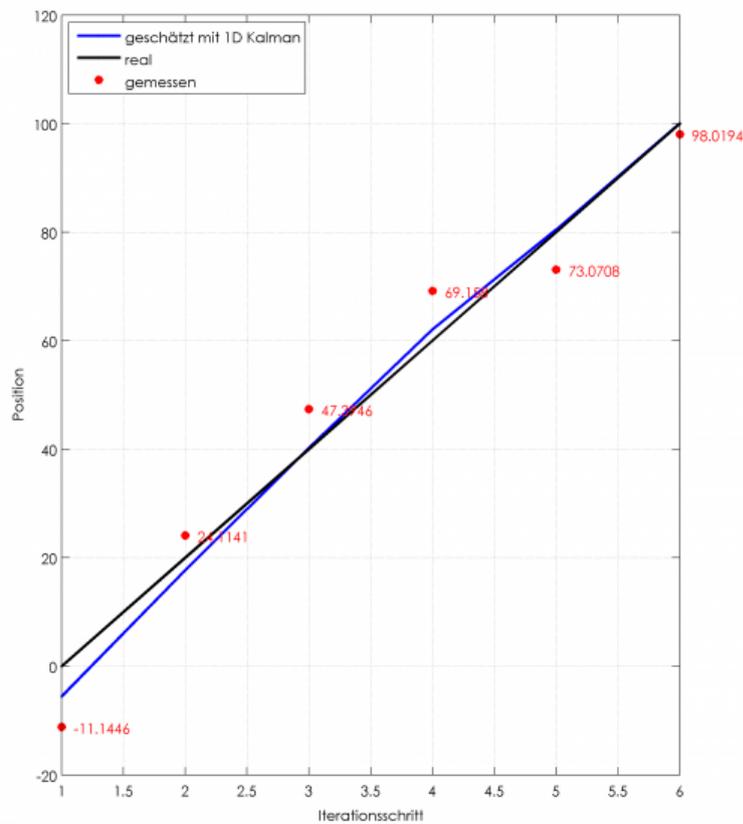


Abbildung 3.3: Beispielhafte Bestimmung der Position durch einen Kalman-Filter [11]

⁹Drehzahlsensor, Beschleunigungssensor...

3.2.2 Lineare Abbildung

Eine weitere mögliche Methodik ist es, die Spannungswerte der Sensoren direkt auf die Auslenkung des Pendels abzubilden um so zu jedem Zeitpunkt eine direkte Relation zwischen den Messdaten der Sensoren und der Auslenkung gewährleisten zu können. Die ausgegebenen Spannungswerte der Hall-Sensoren sind von der Position des Magneten abhängig, daher ist eine direkte Relation möglich. Die Gleichung (3.16) veranschaulicht die allgemeine Linearkombination der Spannungswerte $v(t)$ um so auf die Auslenkung $a(t)$ schließen zu können.

Es wird ein N -dimensionaler Raum aufgespannt, bei dem jede Dimension einem Spannungswert eines Sensors entspricht. Wenn die Parameter α_i und c bekannt sind, dann kann zu jedem Zeitpunkt t die Auslenkung des Pendels ausgerechnet werden. Entscheidend ist also die Bestimmung der hier aufgeführten Parameter.

$$a(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i v_i(t) + c, \quad \alpha_i, c \in \mathbb{R}, \quad N \in \mathbb{N} \quad (3.16)$$

$a(t)$: Auslenkung des Pendels

N : Anzahl der Sensoren

α_i : Konstante für Sensor i

$v_i(t)$: Spannungswert des Sensors i

c : Additionskonstante

3.2.3 Vergleich des Kalman-Filters und der linearen Abbildung im Bezug auf die Bestimmung der Auslenkung des Oszillators

Der Kalman-Filter bietet die Möglichkeit, Messungenauigkeiten durch Rauschen oder zeitweisen Ausfall der Sensoren auszugleichen. Zudem ist es möglich, mehrere a priori Schätzungen der zu messenden Systemgröße, aufgrund von verschiedenen Sensoren, in die Bestimmung mit einfließen zu lassen. Eine höhere Genauigkeit kann so erreicht werden. Damit von den Spannungswerten der Hall-Sensoren auf die Auslenkung geschlossen werden kann, muss eine entsprechende Auswertung erstellt werden.

Eine Möglichkeit, auf diese Auslenkung schließen zu können, ist die Verwendung einer linearen Abbildung. Die Schätzung des Kalman-Filters könnte dementsprechend mit diesen Daten verglichen werden. Die Sensordaten sind jedoch zu jedem Zeitpunkt vorhanden, sodass keine Vorhersage durch den Kalman-Filter getroffen werden muss. Zusätzlich ist nur eine Grundlage von Sensordaten zur Berechnung der Auslenkung vorhanden, sodass keine Verknüpfung mehrerer Sensoren notwendig ist. Weil es sich um ein zyklisches System handelt, treten immer wieder gleiche oder ähnliche Zustände ein.

Aus diesen Gründen ist eine Realisierung der linearen Abbildung zur Bestimmung der Auslenkung, im Rahmen dieser Arbeit, ausreichend.

3.2.4 Bestimmung der Instantanphase

Ist die Auslenkung des Pendels mit der linearen Abbildung bestimmt worden, so kann dieses als Signal interpretiert werden. Für eine Kopplung nach dem Kuramoto-Modell werden die Instantanphasen der Oszillatoren benötigt. Eine Möglichkeit zur Bestimmung der Phase eines Signals ist die Verwendung der Hilbert-Transformation.

Die Gleichung (3.17) gibt die Definition der Hilbert-Transformation an. Diese kann außerdem als eine Faltung, in Gleichung (3.18) gezeigt, gedeutet werden [12]. Hierbei entspricht $f(x)$, beziehungsweise $f(t)$, dem zu transformierenden Signal.

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{t-x} dx \quad (3.17)$$

$$F(t) = \frac{1}{\pi t} * f(t) \quad (3.18)$$

In der Signalverarbeitung wird die Transformation dazu verwendet, ein reelles Signal in ein analytisches umzuwandeln. Dieses analytische Signal ist eine komplexwertige Funktion, woraus sich der Imaginärteil aus der Hilbert-Transformation ergibt. Anders als im reellen Signal treten im analytischen keine negativen Frequenzen auf. Die Gleichung (3.19) zeigt, wie man aus einem reellen Signal $x(t)$ das analytische Signal $x_a(t)$ ausrechnen kann. Dort ist ebenfalls die Hilbert-Transformation in Form der Faltung zu erkennen.

$$x_a(t) = x(t) + j \cdot \left(x(t) * \frac{1}{\pi t} \right) \quad (3.19)$$

$$= x(t) + j \cdot \hat{x}(t) \quad (3.20)$$

Sobald das analytische Signal errechnet wurde, lässt sich dieses in komplexer Polardarstellung angeben. Diese Darstellung entspricht der Gleichung (3.21). Die in Gleichung (3.22) formulierte Hülle $A(t)$ entspricht einer betragseinhüllenden Funktion, während $\varphi(t)$ die Momentanphase des Signals angibt. In Abbildung 3.4 ist diese Hülle beispielhaft in rot zu einem blauen Signal verdeutlicht.

$$x_a(t) = A(t) \exp^{j\varphi(t)} \quad (3.21)$$

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)} \quad (3.22)$$

$$\varphi(t) = \arg(x_a(t)) \quad (3.23)$$

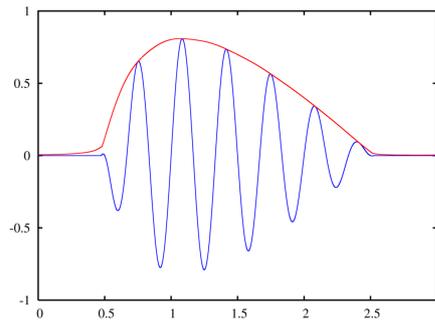


Abbildung 3.4: Beispielsignal und seine Betragseinhüllung aus Gleichung (3.22) [13]

3.2.5 Nachweis und Quantifizierung der Phasensynchronisation

Eine Synchronisation der Oszillatoren kann durch das in Kapitel 1.2 erwähnte Kriterium der Synchronisation detektiert werden. Die Gleichung (3.24) gibt dieses Kriterium für Synchronisation erneut an [4]. Weil die Frequenzen der Oszillatoren annähernd gleich sind gilt hier $n = m = 1$. Ist dieses Kriterium über einen gewissen Zeitraum erfüllt, so gelten die Oszillatoren als synchron schwingend.

$$|n\phi_1(t) - m\phi_2(t)| < c, \quad \pi/2 > c > 0 \quad (3.24)$$

ϕ : Phasen der Oszillatoren

t : Verstrichene Zeit

n, m : Verhältnis der Frequenzen

Mittels eines Histogramms kann dieses Kriterium visuell überprüft werden. Bei einer Synchronisation sind in diesem ein oder zwei Ausschläge zu erkennen. So gilt bei einer konstanten Verschiebung, dass eine eingipflige (unimodale) Verteilung beobachtet wird. Variieren die Phasendifferenzen jedoch, dann wird eine mehrgipflige (multimodale) Verteilung angenommen. Ist keine Synchronisation vorhanden, so entspricht das Histogramm einer Gleichverteilung.

In Abbildung 3.5 ist eine solche Desynchronisation dargestellt. Es ist in der oberen Abbildung zu erkennen, dass die Signale unterschiedliche Frequenzen aufweisen. In der unteren Grafik sind die Phasen, welche aus der Hilbert-Transformation resultieren, und die Phasendifferenz der Oszillatoren dargestellt. Es ist zu erkennen, dass diese Differenz nicht konstant bleibt, also keine Synchronisation vorliegt. In Abbildung 3.6 ist das entsprechende Histogramm gezeigt. Dort ist kein Peak erkenntlich, sodass auch hier die Desynchronisation zu erkennen ist. Die Abbildung 3.7 verdeutlicht zum Vergleich ein Histogramm von zwei Signalen, welche die gleiche Frequenz¹⁰ aufweisen, jedoch um $\pi/2$ verschoben sind. Dort ist ein Peak zu erkennen, sodass diese synchron schwingen.

¹⁰Auf beide Signale wurde eine Störung gegeben, da sonst kein Histogramm erzeugt werden kann

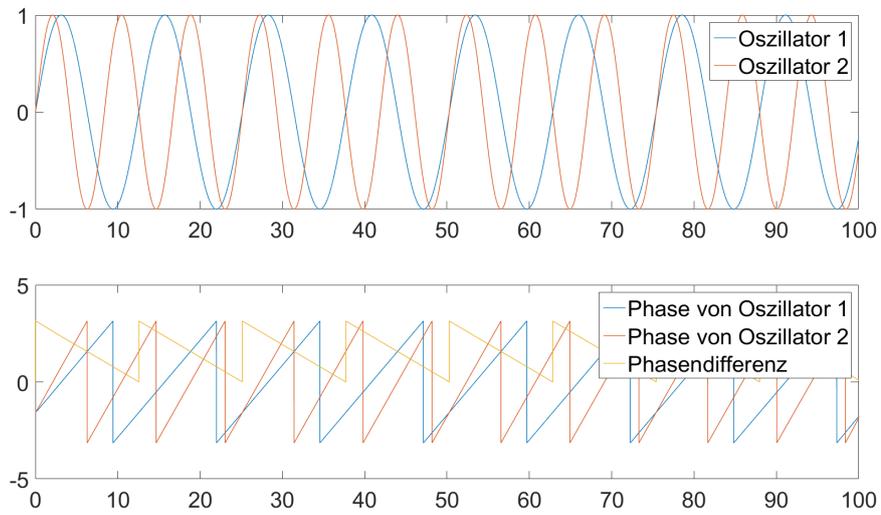


Abbildung 3.5: Oberer Plot: Auslenkung der Oszillatoren
 Unterer Plot: Phasendifferenz zweier Signale mit unterschiedlicher Frequenz

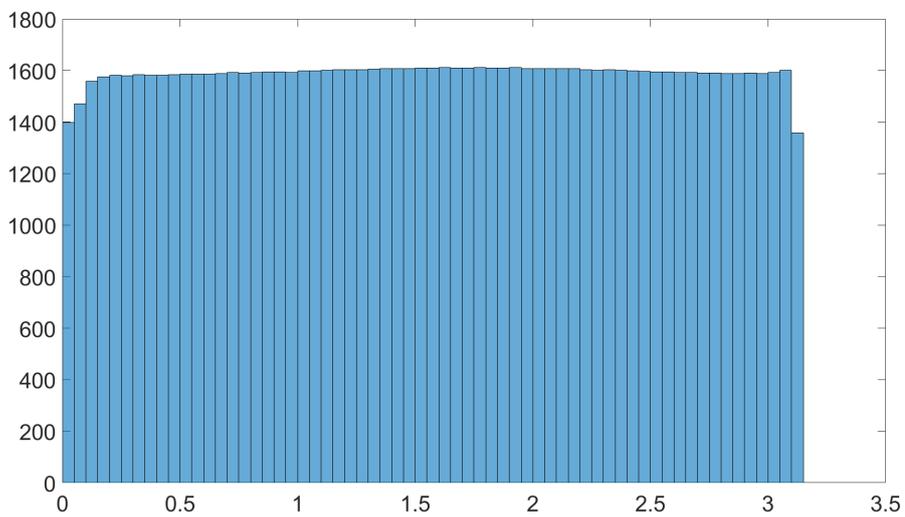


Abbildung 3.6: Histogramm der Phasendifferenz zweier Signale mit unterschiedlicher Frequenz

3 Algorithmik

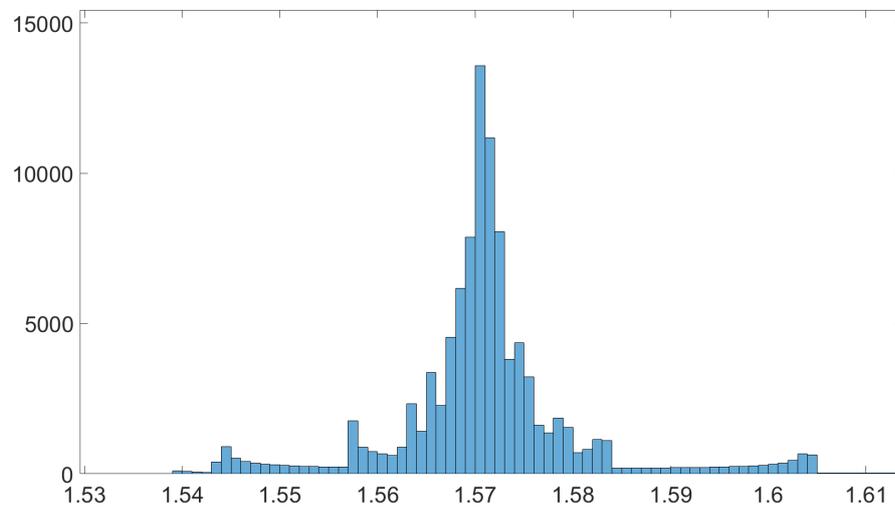


Abbildung 3.7: Histogramm der Phasendifferenz zweier Signale mit gleicher Frequenz

3.3 Konfiguration

Die Hauptaufgabe der Software ist es, die Position des Pendels eines Metronoms möglichst genau und unter Echtzeit-Bedingungen zu bestimmen. Hierzu werden die Daten der Hall-Sensoren verwendet.

Die Hardware des Messcomputers ermöglicht eine Messung der Spannungswerte nach einem definierten Zeitschritt. Nach dieser verstrichenen Zeit werden die sieben Spannungen der jeweiligen Sensoren ausgelesen. Dementsprechend entscheidet die Laufzeit des Systems über die schnellst mögliche Abtastrate des Programms. Je schneller diese Rate ist, desto genauer ist die Rekonstruktion und damit die Kopplung der Metronome untereinander (Kapitel 4.3), weil wesentlich zeitnaher auf die Phasendifferenzen reagiert werden kann.

Für die Entwicklung und Verifikation der Algorithmen wurden im Vorfeld aufgezeichnete Messdaten verwendet. Damit war das Ergebnis der jeweiligen Algorithmen reproduzierbar und eine Verbesserung dieser nachweisbar. Erst die erfolgreich getesteten Algorithmen wurden in das Echtzeit-System überführt.

Dementsprechend wurde eine harmonische Schwingung eines frei schwingenden Metronoms ohne Kopplung aufgezeichnet. Mit dieser Aufzeichnung wurden Parameter konfiguriert, mit denen eine spätere Auswertung entwickelt wurde, die auf das Echtzeit-System übertragen werden kann. Die Software kann in zwei Teile gegliedert werden, die Konfiguration und die Bestimmung der Auslenkung.

Während der Entwicklung wurden zwei verschiedene Ansätze für die Bestimmung der Auslenkung des Metronoms entwickelt. Die folgenden Unterkapitel thematisieren die Konfiguration der Parameter, die für diese zwei Ansätze benötigt werden. Dies geschieht mit den zuvor aufgezeichneten Daten.

3.3.1 Nulldurchgang

Zu verschiedenen Positionen des Magneten gibt der Hall-Sensor unterschiedliche Spannungswerte aus. Befindet sich der Magnet auf einer Höhe mit dem Sensor, so ist dieser Spannungswert 0. Die Abbildung 3.8 verdeutlicht erneut diesen Spannungsverlauf in Abhängigkeit eines sich in der Nähe befindenden Magneten. Die Funktionsweise eines solchen Sensors ist in Kapitel 2.1 beschrieben.

Ein Teil der Konfiguration besteht darin, diese Nulldurchgänge zu detektieren und anhand dieser die harmonische Schwingung zu rekonstruieren. Da die Positionen der einzelnen Sensoren im Stativ bekannt sind, kann so ein genauer Referenzwert der Auslenkung gekennzeichnet werden. Tabelle 3.1 gibt die Positionen der Sensoren im Stativ für den ersten Ansatz an. Steht das Metronom in Ruhelage, so ist die Position bei 0° . Ein negatives Vorzeichen bedeutet eine Auslenkung nach links.

3 Algorithmik

Ein Nulldurchgang wird mit Hilfe des Vorzeichenwechselkriteriums detektiert, weil nur eine diskrete Auswertung der Messdaten vorliegt. Für dieses werden die Messwerte des jeweiligen Sensorsignals des letzten Zeitschritts benötigt. Ist die Gleichung (3.25) erfüllt, so existiert mindestens eine Nullstelle zwischen diesen beiden Zeitschritten.

$$y_1 \cdot y_2 \leq 0 \quad (3.25)$$

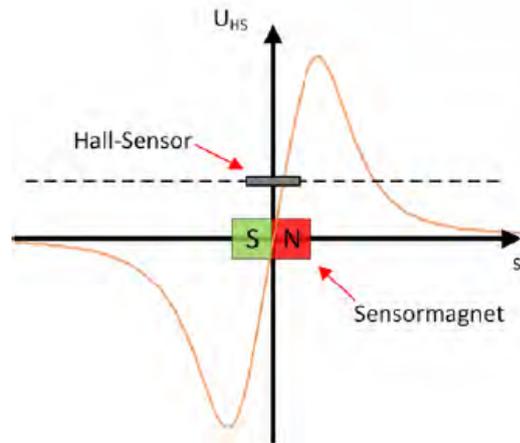


Abbildung 3.8: Spannungsverlauf eines Hall-Sensors [8]

Sensor-Nummer:	Sensor-Position [°]:
1	-30.1
2	-25.8
3	-12.9
4	0
5	12.9
6	25.8
7	30.1

Tabelle 3.1: Positionen der Sensoren (Ansatz 1)

Ist ein Nulldurchgang erkannt worden, dann wird dieser Punkt mit der entsprechenden Auslenkung in einer Liste abgespeichert. Die Tabelle 3.1 liefert anhand des entsprechenden Sensors die genaue Auslenkung des Pendels zu diesem Zeitpunkt. In Abbildung 3.9 ist eine Rekonstruktion der Schwingung gezeigt, bei der nur die Nulldurchgänge betrachtet wurden. Der obere Plot dieser Abbildung 3.9 stellt die Spannungswerte aller Sensoren dar, zusätzlich sind alle erkannten Nulldurchgänge durch blaue Kreuze markiert. Der untere Graph zeigt die entsprechend rekonstruierte Schwingung. Die Nulldurchgänge sind mit

ihren entsprechenden Auslenkungen eingetragen. Zur Wiederholung wird in Gleichung 3.26 erneut angegeben, wie diese harmonische Schwingung beschrieben werden kann.

$$x(t) = y_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t - \varphi_0) \quad (3.26)$$

y_0 : Amplitude der Schwingung

ω_0 : Kreisfrequenz der Schwingung

φ_0 : Phasenverschiebung

t : Verstrichene Zeit

Anhand der detektierten Nullstellen wird ein Fit der Sinusschwingung aus Gleichung 3.26 mit drei Parametern durchgeführt. Durch die abgespeicherten X-Koordinaten der Nullstellen, sowie den dazugehörigen Y-Koordinaten der Positionen der Sensoren, kann auf diese drei unbekannt Parameter y_0 , ω und φ_0 zurück geschlossen werden. Mit Hilfe der kleinsten Fehlerquadrate wird eine optimale Annäherung der drei Parameter ermittelt. MATLAB bietet eine Näherung mittels der „fminsearch“ Funktion an.

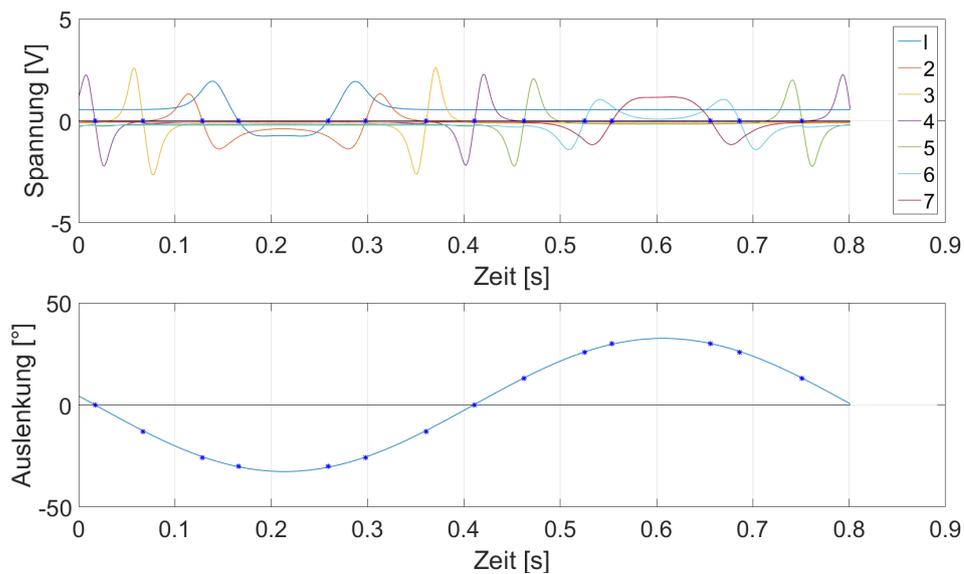


Abbildung 3.9: Rekonstruktion der Schwingung ausschließlich anhand der Nulldurchgänge

Die Optimierungsmethode „fminsearch“ verwendet den *Nelder-Mead* Algorithmus. Dieser iterative Algorithmus minimiert eine nicht lineare Funktion mit verschiedenen Parametern. Hierbei werden nur Funktionswerte verwendet, keine Ableitungen, sodass dieser Algorithmus als *direct search method* klassifiziert werden kann [14].

3.3.2 Extremstellen

Neben den Nulldurchgängen sind die Extremstellen der Spannungswerte ebenfalls interessante Punkte. Wie die Abbildungen 3.8 und 3.9 verdeutlichen, haben die Sensoren eine vorgegebene Ausgangsspannung, sofern sich der Magnet nicht in der messbaren Umgebung des Sensors befindet. Zusätzlich zeigt der obere Plot aus Abbildung 3.9, dass diese Ausgangsspannung für jeden Sensor unterschiedlich sein kann. So ist diese bei Sensor 1 ab Sekunde 0.35 zum Beispiel bei ungefähr 0.5 Volt, wobei es bei Sensor 6 seit Beginn ungefähr bei -0.2 Volt liegt.

Nähert sich der Magnet dem messbaren Bereich des Sensors, so wird zunächst ein Extremum¹¹ des Spannungswertes angestrebt. Schwingt das Pendel von links nach rechts, dann wird zunächst ein Maximum erreicht. Sollte es umgekehrt schwingen, dann wird als erstes ein Minimum angenommen. Nachdem eine Extremstelle erreicht wurde, läuft das Signal kontinuierlich bis zum entgegengesetzten Extremum. Alle Messwerte zwischen diesen Extrema, einschließlich des Nulldurchgangs, können eindeutig einem Winkelwert¹² zugeordnet werden. Dies definiert den messbaren Bereich des Sensors. Alle anderen Positionen zählen als „undefiniert“ oder nicht messbar.

Besondere Betrachtung galt den äußersten Sensoren¹³. Diese besitzen nur eine Extremstelle, weil sich das Pendel im messbaren Bereich dieser Sensoren in seiner Richtung ändert. Aus diesem Grunde wird bei Sensor 1 der Nullpunkt als Minimum definiert, und bei Sensor 7 wird der Nullpunkt als Maximum festgelegt.

Für die Konfiguration des ersten Ansatzes in Kapitel 3.4.1 werden zunächst aus allen Messdaten die Minima und Maxima der einzelnen Sensoren gesucht. Daraufhin werden alle dazwischenliegenden Messwerte als Referenz für die Rekonstruktion in einer Liste gespeichert. Zur Bestimmung der entsprechenden Auslenkung dient die bereits rekonstruierte Schwingung aus den Nullstellen, welche in Abbildung 3.9 zu sehen ist.

Erkennung der Extremstellen

Zur Erkennung einer Extremstelle wird nur die Steigung und ein Grenzwert in Betracht gezogen. Alle Spannungswerte der Minima befinden sich für Metronom 1 unterhalb von $y = -1$, daher werden nur Werte betrachtet, die diese Bedingung erfüllen. Für die Maxima dieses Metronoms gilt $y > 0.5$. Für die anderen Metronome können die Messdaten der Sensoren abweichen. Des Weiteren muss bei den Minima die Steigung, bevor dieser Punkt erreicht wird, negativ sein und bei Maxima positiv. Sind beide Bedingungen erfüllt, dann wird bei einer iterativen Auswertung der aufgezeichneten Spannungswerte der aktuelle Messwert als eine dieser Extremstellen vorgemerkt. Sobald eine Bedingung nicht

¹¹Minimum oder Maximum

¹²Auslenkung des Pendels

¹³Sensor 1 & 7

mehr erfüllt ist, wird der zuletzt gefundene Wert als Extremum hinterlegt. In Abbildung 3.10 sind die detektierten Extrema in grün, und Nullstellen in blau, dargestellt.

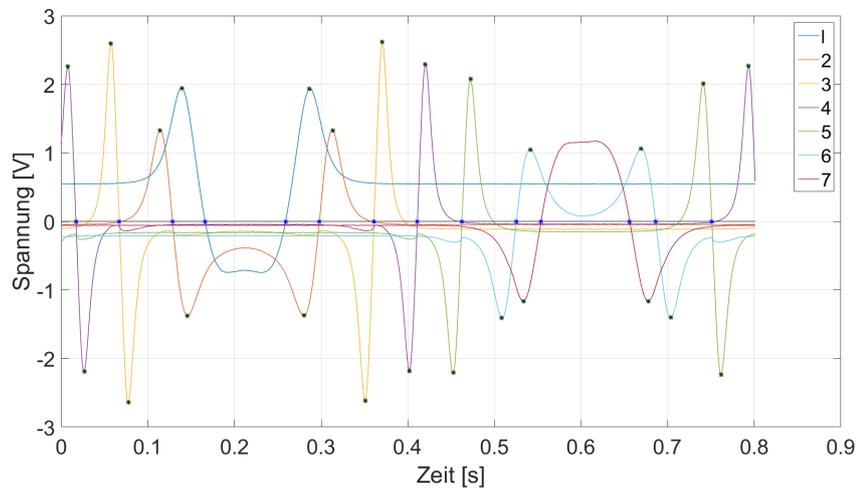


Abbildung 3.10: Spannungswerte mit markierten Nullstellen und Extrema

3.3.3 Segmentierung

Als Grundlage für den Ansatz, der in Kapitel 3.4.2 erklärt wird, muss eine harmonische Schwingung in Teilgebiete segmentiert werden. Hierzu wird zwischen messbaren und nicht messbaren Bereichen unterschieden. Messbare Bereiche sind diejenigen, die zwischen zwei Extrema eines Sensor-Signals liegen. Nicht messbare Bereiche sind demzufolge die Bereiche, welche sich zwischen Extremstellen von zwei verschiedenen Sensoren befinden. In Abbildung 3.10 wäre das erste Gebiet¹⁴ ein messbares, das zweite¹⁵ ein nicht messbares. Zu jedem Gebiet werden nun die relevanten Sensoren, sowie die jeweiligen Steigungen¹⁶ gespeichert. Für das zuvor genannte erste Gebiet wäre dies Sensor 4 mit einer fallenden Steigung, und für das zweite Gebiet Sensor 4 & 3 mit einer positiven Änderungsrate.

¹⁴ $x = 0.0075$ bis $x = 0.027$

¹⁵ $x = 0.027$ bis $x = 0.057$

¹⁶Unterscheidung ob steigend oder fallend

3.4 Bestimmung der aktuellen Auslenkung

Die Auswertung der Daten im Echtzeit-Betrieb beschäftigt sich damit, die aktuelle Auslenkung des Pendels anhand der Spannungswerte in Echtzeit zu bestimmen. Hierbei wird nicht der komplette Messverlauf betrachtet, sondern nur der zuletzt gemessene Zeitschritt. Die hinterlegten Messwerte aus Kapitel 3.3 spielen dabei eine sehr wichtige Rolle.

3.4.1 Bestimmung durch eine Lookup-Tabelle

In Abbildung 3.11 sind alle zuverlässig messbaren Punkte, die in der Konfiguration für jedes Sensor-Signal bestimmt wurden, als rote Punkte dargestellt. Es sind also die Punkte, die sich zwischen Extremstellen des gleichen Sensors befinden. Die zeitliche Differenz für jeden Zeitschritt, also die „Sample-Rate“, beträgt 0.0015 Sekunden. In der oberen Grafik wurden diese Punkte auf die einzelnen Sensor-Signale gelegt, während die untere Grafik zu jedem dieser Messwerte die entsprechende Auslenkung darstellt. Diese Werte werden in einer Lookup-Tabelle gespeichert und in der Auswertung als Referenzwert herangezogen. Jeder eingehende Messwert wird mit den hinterlegten Messwerten der Lookup-Tabelle abgeglichen. Befindet sich der gemessene Spannungswert innerhalb eines messbaren Bereichs, dann wird die hinterlegte Auslenkung für die aktuelle Position des Pendels angenommen.

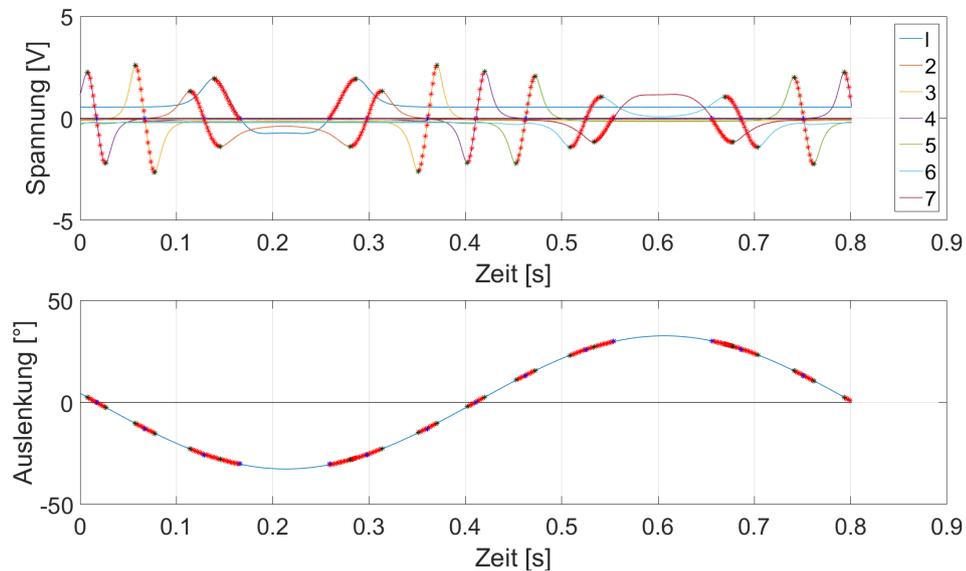


Abbildung 3.11: Visualisierung der messbaren Punkte der Hall-Sensoren

Rauscherkennung

Um unterscheiden zu können, ob die Signale eines Sensors relevant sind, muss zu jedem Zeitschritt eine Rauscherkennung durchgeführt werden. Gibt ein Sensor seine vorgegebene Spannung aus, so befindet er sich im Rauschen¹⁷. Dieser vorgegebene Spannungswert kann jedoch durchaus auch in einer legitimen Messung auftauchen, dementsprechend ist diese Spannung auch in den Referenzwerten aus der Konfiguration vorhanden. Es muss also unterschieden werden können, ob es sich tatsächlich um Rauschen handelt, oder ob sich das Pendel im messbaren Bereich des Sensors befindet, obwohl der Spannungswert dem vorgegebenen Wert gleicht.

Damit dies unterschieden werden kann, wird die momentane Änderungsrate benötigt. Für jeden Sensor wird nacheinander und individuell pro Zeitschritt entschieden, ob sich dieser im Rauschen befindet. Dazu wird zu jedem Sensor ein Schwellwert für die Änderungsrate hinterlegt. Ist die Änderung kleiner als dieser Wert, dann befindet sich der Sensor im Rauschen und dieser wird für die aktuelle Messung nicht weiter betrachtet. Die Tabelle 3.2 führt die Schwellwerte für jeden Sensor auf. Diese Werte sind während der Entwicklung entstanden, sodass eine präzise Auswertung möglich ist. In der Abbildung 3.12 sind alle Punkte für jeden Sensor aufgeführt, die in der aufgezeichneten Messung als nicht rauschend erkannt werden.

Sensor-Nummer:	Schwellwert [V]:
1	0.05
2	0.07
3	0.15
4	0.15
5	0.15
6	0.06
7	0.045

Tabelle 3.2: Schwellwerte der Sensoren zur Rauscherkennung (Ansatz 1)

Zuweisung

Falls eine Messung eines Sensors nicht als Rauschen erkannt wird, so ist diese vermutlich verwertbar zur Bestimmung der aktuellen Position des Pendels. Wie jedoch in der Abbildung 3.12 zu erkennen ist, werden Messwerte als nicht rauschend angenommen, obwohl diese nicht zwischen zwei Extremstellen des gleichen Sensors liegen und daher undefiniert sind. Dies kommt zustande, weil die Änderungsrate in diesem Punkt den Schwellwerten aus Tabelle 3.2 entspricht, aber das Pendel sich erst dem messbaren Bereich des Sensors annähert. Der Magnet befindet sich also noch nicht im messbaren Bereich des Sensors.

¹⁷Englisch: „noise“

3 Algorithmik

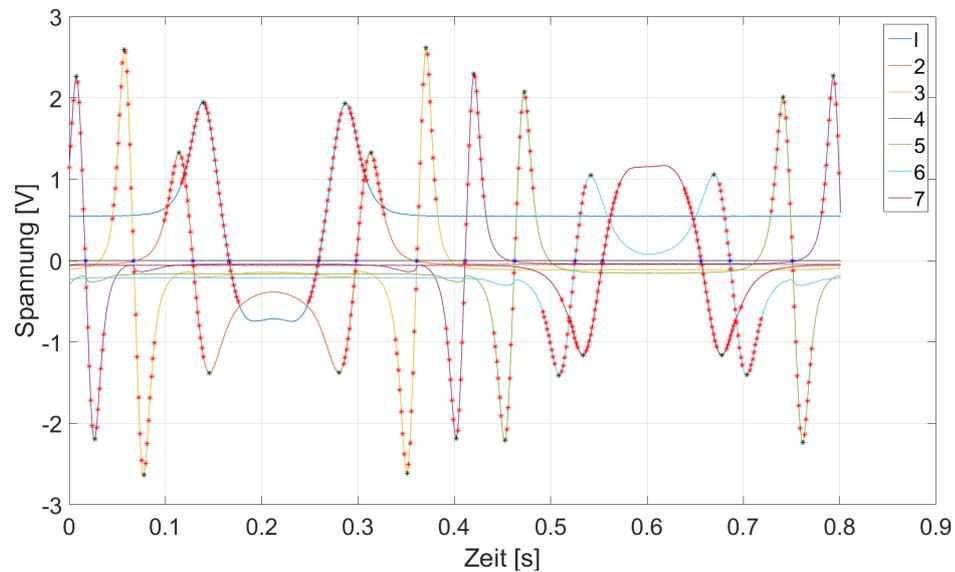


Abbildung 3.12: Nicht rauschende Punkte (Ansatz 1)

Damit diese Werte nicht fälschlicherweise in die Auswertung mit einbezogen werden, gibt es eine weitere Einschränkung bezüglich der Messwerte. Zunächst wird der vermeintlich gültige Spannungswert in der Liste der hinterlegten, gültigen Messwerte gesucht und die entsprechende hinterlegte Auslenkung vorgemerkt. Um bestimmen zu können, ob dieser Punkt tatsächlich im messbaren Bereich des Sensors ist, wird die Differenz zur letzten bestimmten Auslenkung genutzt. Eine Änderung der Auslenkung des Pendels kann nicht beliebig groß sein. Eine kleine Änderung in der Zeit führt auch nur eine kleine Änderung der Auslenkung mit sich. Aus diesem Grund wird zu jedem Sensor ein Toleranzbereich definiert, der die erlaubte Differenz zur vorherigen Auslenkung festlegt. Die Tabelle 3.3 führt die erlaubten Differenzen der einzelnen Sensoren auf. Ist die Differenz zur letzten detektierten Auslenkung also kleiner als diese Toleranz, dann gilt dieser Messwert als gültig und die hinterlegte Auslenkung wird als die aktuelle Auslenkung angenommen.

Sensor-Nummer:	Toleranzbereich [°]:
1	2
2	8.348
3	9
4	9.2
5	9.2
6	8.5
7	2

Tabelle 3.3: Toleranzbereiche der Sensoren (Ansatz 1)

3.4 Bestimmung der aktuellen Auslenkung

Damit der erste Messwert möglichst exakt ist, muss zunächst ein Nulldurchgang detektiert werden. Andernfalls kann anhand der Differenzen keine genaue Aussage getroffen werden. Ist ein Nulldurchgang detektiert worden, dann wird die Position des Pendels wie beschrieben bestimmt.

Blockierte Sensoren

Es besteht weiterhin das Problem, dass Messwerte einem gültigen Bereich zugeordnet werden, obwohl sich diese im nicht-gültigen Kurvenbereich befinden. Aus diesem Grunde werden Messwerte eines Sensors ignoriert, die nach Erreichen der zweiten Extremstelle, sich also außerhalb des gültigen Kurvenbereichs befinden, auftauchen. In der Konfiguration (Kapitel 3.3) sind diese Extremstellen bereits detektiert worden und in einer Liste hinterlegt. Da es für einen Sensor mehrere Extremstellen in der Konfiguration geben kann, wird als Referenzwert das größte Minimum, sowie das kleinste Maximum verwendet. Ist ein Messwert nah¹⁸ genug an einer Extremstelle, dann wird dieser Sensor ab diesem Zeitpunkt für die weitere Auswertung blockiert, sodass alle folgenden Spannungswerte nicht berücksichtigt werden.

Ein besonderes Augenmerk gilt hier wieder den Sensoren 1 und 7. Nachdem ein Sensor blockiert wurde, tritt meist ein anderer Sensor in Kraft, der diese Blockade aufhebt. Bei den außen liegenden Sensoren gilt dies jedoch nicht. Aus diesem Grund muss die Blockade für diese Sensoren „manuell“ aufgehoben werden.

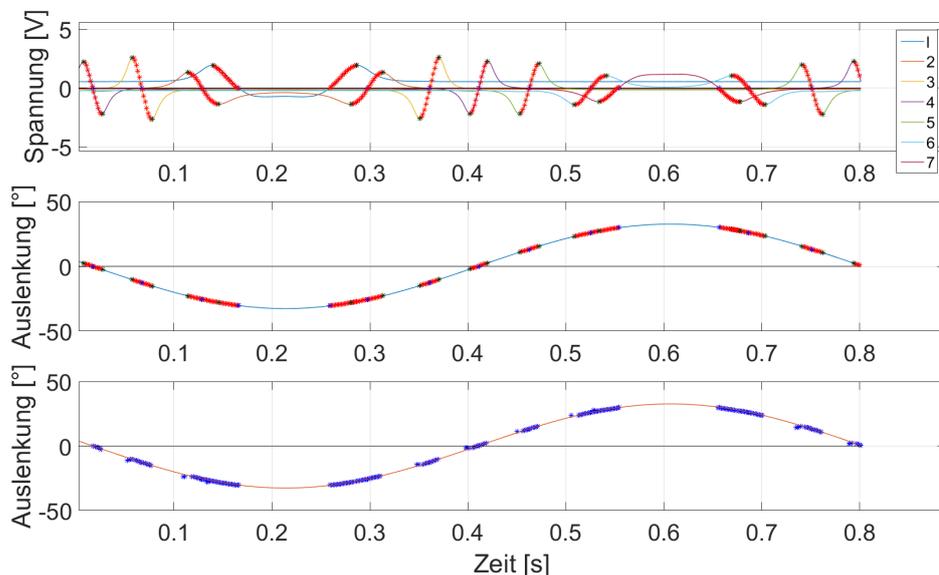


Abbildung 3.13: Bestimmung der aktuellen Auslenkung ohne Vorhersage

¹⁸Abstand ≤ 0.1

Auswertung

In Abbildung 3.13 ist die Auswertung der aufgezeichneten harmonischen Schwingung dargestellt, in der nur die letzte Messung der Spannungswerte zur Berechnung der Steigung mit berücksichtigt wird. Die obere Grafik zeigt erneut alle Spannungswerte der einzelnen Sensoren mit eingetragenen gültigen Punkten zwischen den Extremstellen. In der mittleren Grafik ist in blau die rekonstruierte Schwingung durch die Nullstellen zu erkennen. Auf dieser Kurve sind ebenfalls alle messbaren Punkte aufgetragen. Die Auswertung mit Hilfe des letzten Messwertes ist in der letzten Grafik zu erkennen. Dort ist erneut die harmonische Schwingung in braun eingetragen. Diese spielt für die ausgewerteten Daten keine Rolle. Die blauen Punkte entsprechen den Auslenkungen, die durch den Algorithmus bestimmt wurden. Im Optimalfall liegen alle Punkte genau auf der braunen Kurve und entsprechen so der exakten Auslenkung des Pendels.

Trotz der zuvor erwähnten Einschränkungen, können nicht alle Messwerte ausgeschlossen werden, die nicht im gültigen Kurvenbereich eines Sensors liegen. Es ist zu erkennen, dass einzelne Punkte¹⁹ vor einem Messbereich erkannt und ausgewertet werden, aber nicht der exakten Lösung entsprechen. Der Fehler zur braunen Kurve ist klein²⁰, sodass diese zusätzlichen Punkte toleriert werden.

Durch diesen Ansatz ist eine genaue Bestimmung der Auslenkung innerhalb eines gültigen Bereichs gewährleistet. Es gibt jedoch Gebiete, die zwischen den messbaren Bereichen der Sensoren liegen und nicht ausgewertet werden. Durch eine Vorhersage anhand der letzten Bestimmungen der Auslenkung, soll hierfür eine möglichst genaue Vorhersage für diese erfolgen, damit zu jedem Zeitpunkt die Position des Pendels bekannt ist, auch wenn sich der Magnet nicht in einem messbaren Bereich eines Sensors befindet.

Vorhersage

Um für die Zwischenräume der nicht messbaren Auslenkungen dennoch Aussagen über die Position des Pendels treffen zu können, wird anhand der zuvor gemessenen Auslenkungen eine Vorhersage getroffen. Wie bereits in Kapitel 3.3.1 beschrieben, wird auch hier die MATLAB Funktion „fminsearch“ für die Sinusschwingung mit drei zu bestimmenden Parametern verwendet. Als Referenzwerte wird eine spezielle Anzahl an Messwerten benutzt, die zuvor innerhalb der messbaren Bereiche bestimmt wurden.

Anzahl der Messwerte

Für die Genauigkeit der Annäherung durch „fminsearch“ kann die Anzahl der verwendeten Messwerte variiert werden. In der Theorie gilt: Je mehr Messpunkte vorhanden sind, desto genauer wird die Annäherung. Jedoch ist die Laufzeit des Systems dadurch höher,

¹⁹Erster bestimmter Punkt nach 0.1 Sekunden

²⁰Fehler $< 3^\circ$

3.4 Bestimmung der aktuellen Auslenkung

weil mehr Punkte verwendet werden und die Aussage bezüglich der Genauigkeit trifft aufgrund von Messungenauigkeiten nicht voll und ganz auf das System zu. Die Abbildung 3.14 zeigt die verschiedenen Ergebnisse der Rekonstruktion für drei, vier oder fünf betrachtete Referenzwerte. Die Zwischenräume sind durch die braunen Punkte aufgefüllt worden. Je näher diese an der Kurve liegen, desto besser war die Vorhersage. Es ist in der untersten Grafik zu erkennen, dass fünf Messwerte das genaueste Ergebnis liefern.

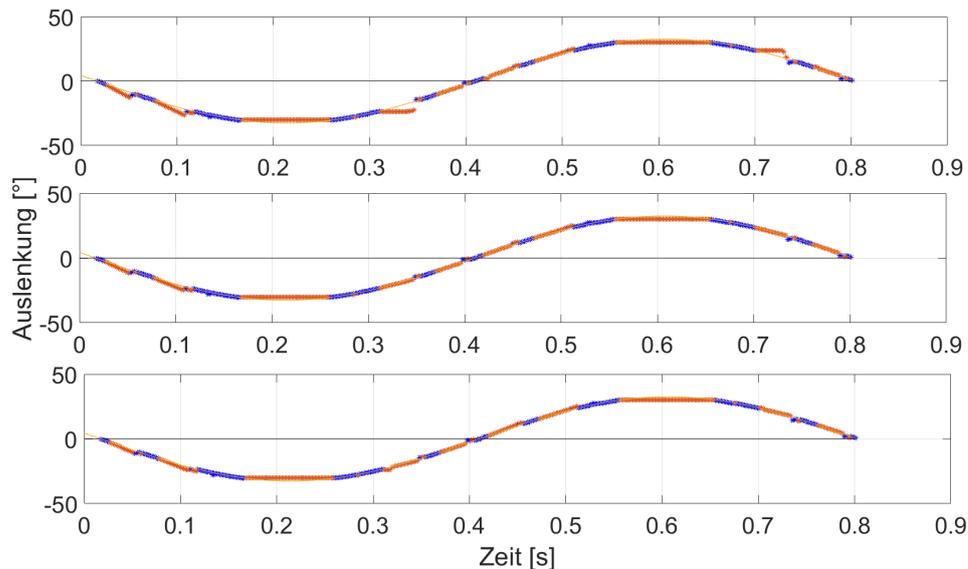


Abbildung 3.14: Vorhersage mit drei, vier und fünf Referenzpunkten

Startwert

Zur Bestimmung der zu optimierenden Parametern der Sinusschwingung, benötigt die MATLAB Methode „fminsearch“ einen Startwert für diese Parameter. Ist dieser Startwert ungünstig gewählt, dann liefert das System, selbst für viele Referenzwerte, kein akzeptables Ergebnis. Für die Ergebnisse in Abbildung 3.14 wurden bereits optimierte Startwerte verwendet.

Der Startwert legt fest, mit welchem Wert das iterative Optimierungsverfahren beginnt. Dieser Wert wird stetig verbessert, bis ein Minimum gefunden wurde oder die maximale Anzahl an Iterationen erreicht wurde. Liegt ein solcher Startwert bereits „nah“ am Optimum, dann wird dieses schneller und präziser erreicht. Bei den vorhandenen Messwerten gibt es allerdings keinen solchen optimalen Messwert, weil ein quadratischer Fehler von null, aufgrund von Messungenauigkeiten, nicht erreichbar ist. Da sich die Schwingung im Verlauf der Messung aber nicht schlagartig zwischen den Messpunkten ändern kann, wird davon ausgegangen, dass das neue Optimum dem alten ähnelt. Aus diesem Grund

3 Algorithmik

wird der Methode der vorherige optimale Wert als Startwert übergeben. Diese liefern das Ergebnis der Kurven aus Abbildung 3.14.

Die Abbildung 3.15 zeigt das Ergebnis der Vorhersagen, bei dem der Startvektor für jeden Messpunkt auf $x_0 = [10, 10, 10]$ gesetzt wird. Die Anzahl der zum Annähern verwendeten Punkte beträgt ebenfalls fünf, genau wie in der unteren Kurve aus Abbildung 3.14. Es ist zu erkennen, dass die ermittelten Auslenkungen zwischen 0.4 und 0.5 Sekunden stark von der tatsächlichen Position des Pendels abweichen, bei einem optimierten Startwert jedoch nicht.

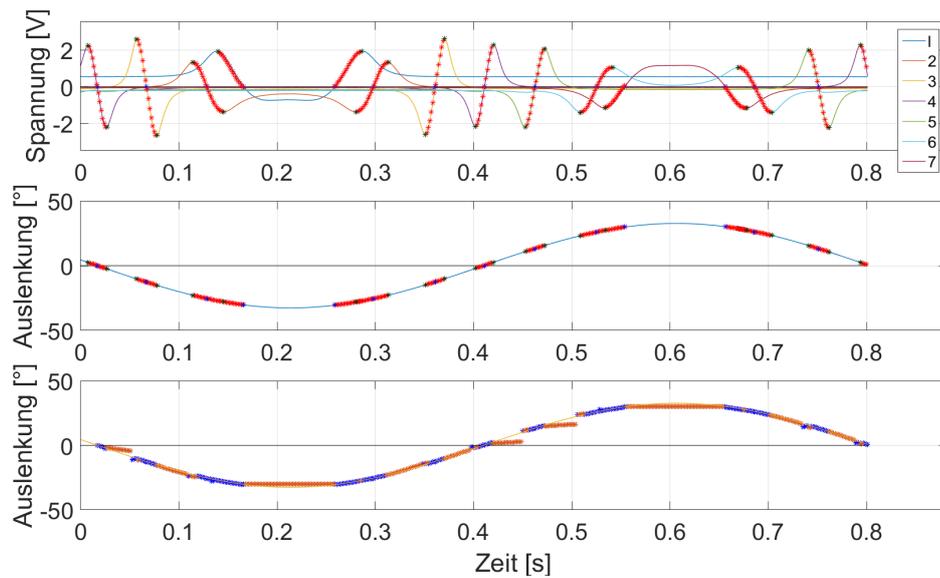


Abbildung 3.15: Vorhersage mit fünf Referenzpunkten, $x_0 = [10, 10, 10]$

Festlegung bei Sensor 1 und 7

Wie bereits bei den Extremstellen in Kapitel 3.3.2 thematisiert, bereiten die Sensoren 1 und 7 gewisse Probleme bei der Rekonstruktion. In Abbildung 3.13 zu erkennen ist, ist die zeitliche Differenz, bis sich das Pendel wieder im messbaren Bereich der Sensoren befindet, verhältnismäßig groß. Zum Zeitschritt in Sekunde 0.1661 wird das Minimum von Sensor 1 erreicht und das Pendel verlässt den gültigen Bereich. Erst bei Sekunde 0.259, also 0.0929 Sekunden später, befindet sich das Pendel wieder im messbaren Bereich. Bei Sekunde 0.5539 tritt dasselbe Ereignis bei Sensor 7 ein.

Da eine Vorhersage für diesen großen Zeitraum zu ungenau ist, werden diese Zwischenräume von der Vorhersage ausgenommen. Aus mechanischen Gründen ist die Amplitude der Schwingung begrenzt. Deshalb wird für Auslenkungen über 30° , der letzte gemessene Wert verwendet. Ein gewisser Fehler bezüglich der tatsächlichen Auslenkung wird

dadurch in Kauf genommen. Die Abbildung 3.16 veranschaulicht eine nicht akzeptable Vorhersage für diese Zwischenräume bei fünf Referenzpunkten und optimiertem Startwert. Die anderen Zwischenräume sind, wie zuvor, in einer akzeptablen Umgebung zur tatsächlichen Auslenkung.

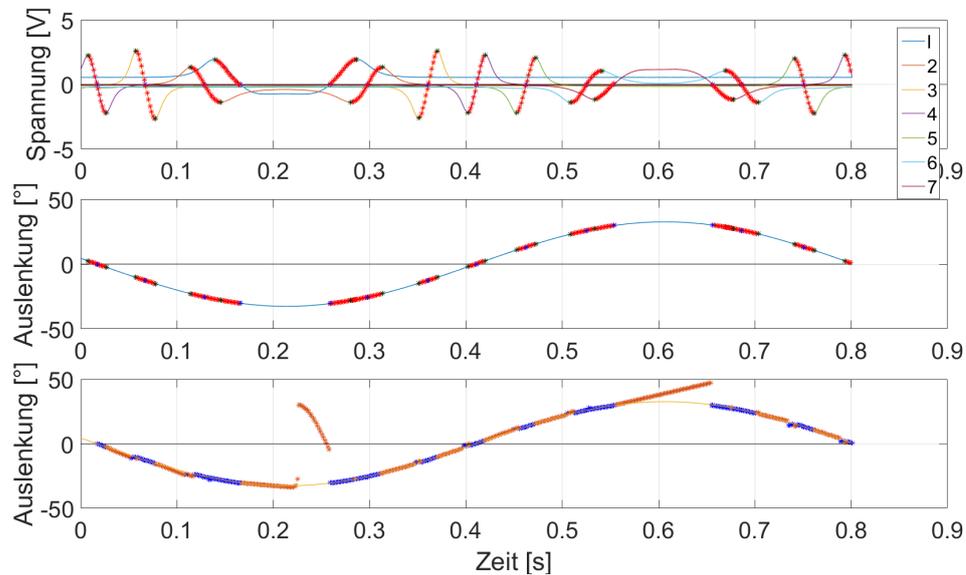


Abbildung 3.16: Vorhersage ohne Restriktion der Sensoren 1 und 7

Nachteil der Lookup-Tabelle

Für die Positionsbestimmung innerhalb eines gültigen Bereichs eines Sensors liefert dieser Ansatz durch die Lookup-Tabelle gute Werte, die in Echtzeit bestimmt werden können. Die Bestimmung der Zwischenräume mittels „fminsearch“ kann durch das Iterationsverfahren jedoch viel Zeit in Anspruch nehmen und bremst daher die Echtzeit-Berechnung aus. Des Weiteren werden, bei einer späteren Kopplung, Änderungen der Frequenz des Pendels in diesen Zwischenräumen möglicherweise nicht erkannt, weil dieser Ansatz unabhängig von den Spannungswerten der Sensoren geschieht. Alternativ könnte der in Kapitel 3.2.1 thematisierte Kalman-Filter verwendet werden. Dennoch sind die Spannungswerte der Sensoren vorhanden und können verwendet werden. Der Kalman-Filter würde Vorhersagen anhand der Bewegungsgleichung treffen und vorhandene Informationen, in Form der Spannungen, würden nicht verwertet werden.

Aufgrund dieser Nachteile wurde ein zweiter Ansatz entwickelt. Dieser Ansatz bestimmt die Auslenkungen des Pendels zu jedem Zeitschritt anhand der Spannungswerte, um so die Position des Pendels mit Kopplung zu jedem Zeitpunkt genau bestimmen zu können.

3 Algorithmik

Für den ersten Ansatz wurden die Sensoren so positioniert, dass sich die Messbereiche nicht überlappen. Für den zweiten Ansatz ist diese Überlappung jedoch gewollt, weshalb die Sensoren anders positioniert wurden.

3.4.2 Bestimmung durch eine lineare Abbildung

Für diesen Ansatz wird die in Kapitel 3.2.2 beschriebene lineare Abbildung verwendet. Dazu müssen die benötigten Parameter in Gleichung (3.27) bestimmt werden, damit die Auslenkung des Pendels ausgerechnet werden kann. Dies bietet den Vorteil zum ersten Ansatz, dass dauerhaft eine direkte Relation zwischen den Spannungswerten und der Auslenkung herrscht. Nicht harmonische Einflüsse, zum Beispiel durch die Kopplung, können so direkt erkannt werden.

$$a(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i v_i(t) + c, \quad \alpha_i, c \in \mathbb{R}, \quad N \in \mathbb{N} \quad (3.27)$$

$a(t)$: Auslenkung des Pendels

N : Anzahl der Sensoren

α_i : Konstante für Sensor i

$v_i(t)$: Spannungswert des Sensors i

c : Additionskonstante

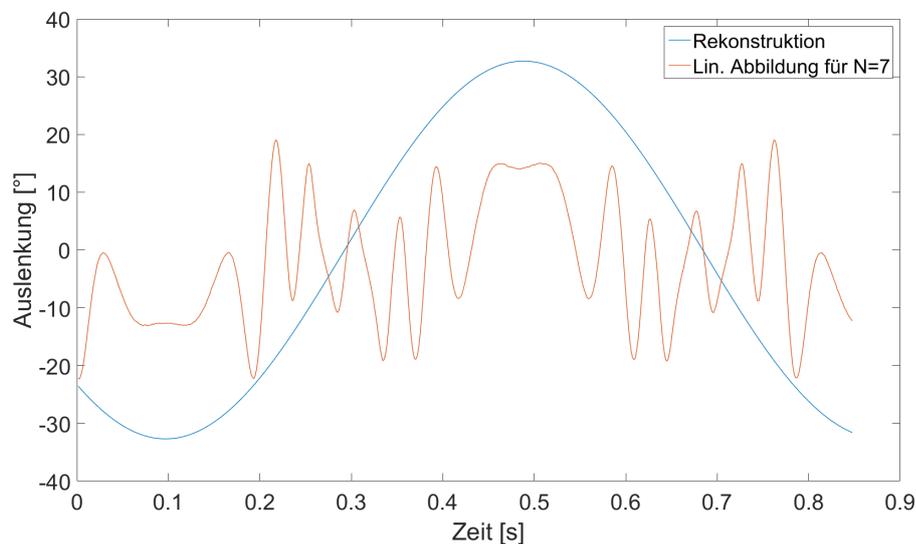


Abbildung 3.17: Lineare Abbildung mit $N = 7$

Bestimmung der Parameter

Zunächst wurde versucht, die Parameter aus Gleichung (3.27) für $N = 7$ zu bestimmen. Dies bedeutet, dass jeder Spannungswert eines Sensors zu jedem Zeitpunkt in die Bestimmung der Auslenkung des Pendels mit einfließt.

Damit die Parameter bestimmt werden können, wurde erneut eine Parameter-Optimierung mit „fminsearch“ durchgeführt. Hierzu wird die aufgenommene, harmonische Schwingung als Referenz genommen, um so eine möglichst gute Annäherung erzielen zu können. Durch die Rekonstruktion der Nulldurchgänge ist der „exakte“ Verlauf der Sinusschwingung bekannt. In Abbildung 3.17 ist die Rekonstruktion für $N = 7$ gezeigt. Die blaue Kurve entspricht der tatsächlichen Schwingung, die orange der aus der Abbildung resultierende Rekonstruktion. Es ist zu erkennen, dass diese Kurven deutliche Differenzen aufweisen. Diese schlechte Rekonstruktion ist nicht überraschend, weil die Messdaten der einzelnen Sensoren nur für einen kleinen Bereich gültig sind, aber bei dieser Rekonstruktion überall mit einfließen. Anhand der konstanten α_i lässt sich ein Sensor nicht für weit entfernte Bereiche deaktivieren.

Aus diesem Grunde wurde die Dimension der linearen Abbildung auf $N = 2$ reduziert. Dies bedeutet, dass nur zwei Sensoren zur Berechnung der Auslenkung verwendet werden. Wie in Kapitel 3.3.3 beschrieben, wird die harmonische Schwingung in Gebiete eingeteilt. Für jedes Gebiet, egal ob „messbar“ oder „nicht messbar“, wurden die beiden Relevanten Sensoren abgespeichert. Diese werden folglich für die lineare Abbildung in Gleichung (3.28) herbeigezogen. Der i -te Sensor ist einer, der für dieses Gebiet relevant ist. Anhand dessen können für jedes Gebiet die optimalen Parameter für α_1, α_2 und c bestimmt werden. Die Rekonstruktion für jedes Gebiet ist in Abbildung 3.18 aufgeführt. Die blaue Kurve entspricht erneut der tatsächlichen Schwingung. Die rote Kurve resultiert aus dem Aneinanderhängen der Abbildungen von jedem einzelnen Gebiet. Für den gesamten Verlauf ist diese Abbildung akzeptabel nah an der tatsächlichen Lösung. Die Fehlinterpretation am Anfang kommt daher zustande, weil in dieser Zeit noch kein Gebiet zuweisbar ist.

$$a(t) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i v_i(t) + c, \quad \alpha_i, c \in \mathbb{R} \quad (3.28)$$

$a(t)$: Auslenkung des Pendels

α_i : Konstante für Sensor i

$v_i(t)$: Spannungswert des Sensors i

c : Additionskonstante

Zuweisung des Gebietes

Das Programm muss anhand der anliegenden Spannungen folglich entscheiden, in welchem Gebiet sich das Pendel momentan befindet. Nach dieser Zuordnung kann die Auslenkung des Pendels mit den hinterlegten Parametern ausgerechnet werden. Genau wie beim ersten Ansatz, muss auch hier, wie in Kapitel 3.4.1 beschrieben, eine Rauscherkennung durchgeführt werden. Dazu wird wieder die Änderung der Spannungswerte zum letzten Zeitschritt betrachtet. In Tabelle 3.4 sind die Schwellwerte für diesen Ansatz angegeben. Diese Werte sind ebenfalls während der Entwicklung festgelegt und angepasst worden.

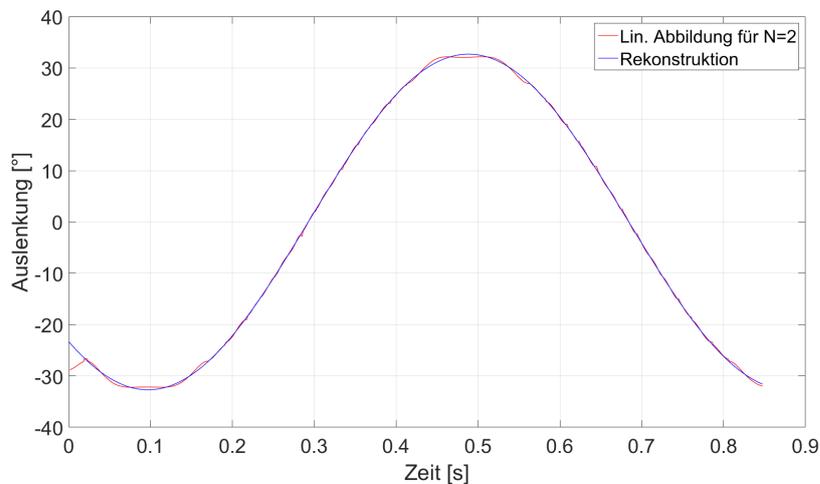


Abbildung 3.18: Aneinanderhängen der linearen Abbildungen für jedes Gebiet mit $N = 2$

Sensor-Nummer:	Schwellwert [V]:
1	0.006
2	0.007
3	0.0175
4	0.0175
5	0.035
6	0.007
7	0.006

Tabelle 3.4: Schwellwerte der Sensoren zur Rauscherkennung (Ansatz 2)

Im Vergleich zum ersten Ansatz sind die Werte aus Tabelle 3.4 geringer gewählt, damit mehr Sensoren pro Zeitschritt betrachtet werden, weil eine eindeutige Zuordnung, wenn nur die Spannungswerte betrachtet werden, nicht möglich ist. Stattdessen werden alle möglichen Gebiete, in denen sich das Pendel mit diesen Spannungswerten befinden kann, gespeichert und das ausgewählt, welches am wahrscheinlichsten ist.

3.4 Bestimmung der aktuellen Auslenkung

Wenn sich ein Sensor also nicht im Rauschen befindet, dann werden die daneben liegenden Sensoren mit betrachtet. Für diese wird ebenfalls die Änderung der Spannungswerte gespeichert. Mittels der Steigungen aller drei Sensoren kann entschieden werden, in welchem Gebiet sich das Pendel befindet. Die Nachbarn dürfen sich ebenfalls nicht im Rauschen befinden. Anhand dessen wird ausgewählt, von welchem Sensor das linke und rechte Extremum eines Gebietes ist. Die Tabelle 3.5 gibt an, wie die linken und rechten Extrema für die Gebietszuweisung ausgewählt werden. Hierbei entspricht mx der Änderungsrate des Sensors, der gerade betrachtet wird. Die Variablen mx_l und mx_r stehen für den jeweils linken und rechten Sensor. Die Sensoren 1 und 7 besitzen keinen linken oder rechten Nachbarn, bei diesen wird der entsprechende Wert auf 0 gesetzt.

mx	mx_l	mx_r	linkes Extremum	rechtes Extremum
> 0	> 0		betrachteter Sensor	linker Sensor
> 0	≤ 0		betrachteter Sensor	betrachteter Sensor
> 0		> 0	rechter Sensor	betrachteter Sensor
> 0		≤ 0	betrachteter Sensor	betrachteter Sensor
< 0	> 0		betrachteter Sensor	betrachteter Sensor
< 0	≤ 0		linker Sensor	betrachteter Sensor
< 0		> 0	betrachteter Sensor	betrachteter Sensor
< 0		≤ 0	betrachteter Sensor	rechter Sensor

Tabelle 3.5: Zuweisung der Gebiete anhand der Änderungsraten

Bestimmung der Auslenkung

Nachdem herausgefunden wurde, in welchen Gebieten sich das Pendel befinden kann, also von welchen Sensoren die linken und rechten Extrema sind, wird dieses Gebiet in der hinterlegten Liste gesucht. Ist dies gefunden, können die entsprechenden Parameter für die lineare Abbildung geladen werden und die Auslenkung ist auszurechnen. Damit diese Zuweisung zuverlässig erfolgen kann, müssen sich die nicht rauschenden Punkte der Sensoren überlappen, weil die Bedingungen aus Tabelle 3.5 sonst nicht erfüllt wären. Aus diesem Grunde wurden die Sensoren anders positioniert, als im ersten Ansatz aus Kapitel 3.4.1. Die Tabelle 3.6 gibt an, wie die Sensoren positioniert sind.

In Abbildung 3.19 ist verdeutlicht, welche Punkte bei der aufgezeichneten, harmonischen Schwingung, als nicht rauschend angenommen werden. Es ist zu erkennen, dass zu fast jedem Zeitschritt mindestens ein Punkt als nicht rauschend angenommen wird. Sollte jedoch eine Messung auftauchen, in der kein Sensor als nicht rauschend gilt, dann werden die vorherigen Parameter und Sensoren für die lineare Abbildung verwendet. Dies funktioniert, weil für kleine Zeitschritte auch nur kleine Änderungen des Ausschlags möglich sind.

Eine besondere Betrachtung gilt dem Sensor in der Mitte. Für langsames Schwingen des Pendels überlappen sich die Bereiche mit den Nachbar-Sensoren nicht. Der Abstand

3 Algorithmik

zu Sensor 3 und 5 beträgt 12.9° . Aus diesem Grund werden für diesen Sensor weitere Möglichkeiten in die Liste möglicher Positionen hinzugefügt. Kleinere Schwellwerte für die Änderungsrate der linken und rechten Nachbarn bestimmen hier, welches Gebiet ausgewählt wird. Die möglichen Entscheidungen sind in Tabelle 3.7 aufgeführt.

Sensor-Nummer:	Sensor-Position [°]:
1	-30.1
2	-21.5
3	-12.9
4	0
5	12.9
6	21.5
7	30.1

Tabelle 3.6: Positionen der Sensoren (Ansatz 2)

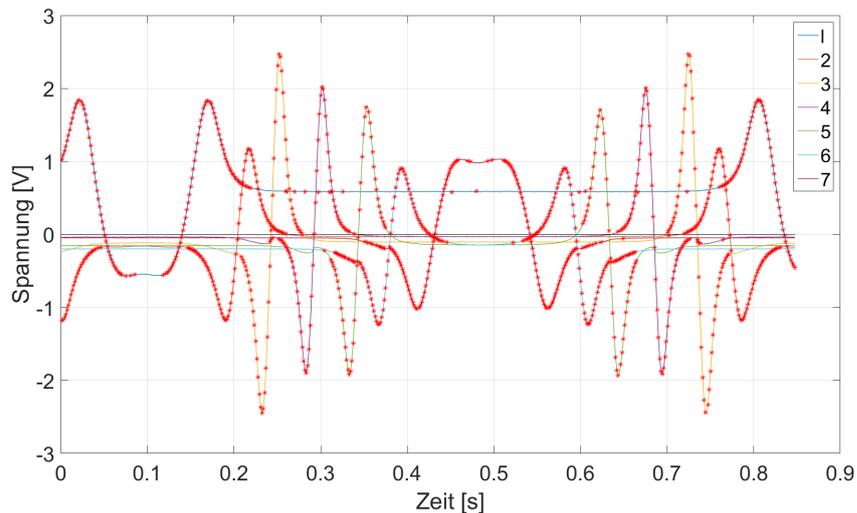


Abbildung 3.19: Nicht rauschende Punkte (Ansatz 2)

Sobald alle möglichen Positionen in der Liste gespeichert sind, wird ausgewählt, welche Positionen möglich sein können. Dazu wird für jedes mögliche Gebiet ausgerechnet, welchen Ausschlag das Pendel bei dieser Zuweisung hätte. Da sich die Ausschläge innerhalb eines Zeitschrittes nicht beliebig verändern können, wird hier ebenfalls anhand von Toleranzwerten entschieden, ob der ausgerechnete Wert realistisch ist. Die Differenz zur letzten bestimmten Position darf diesen Toleranzwert nicht überschreiten. In Tabelle 3.8 sind diese Toleranzen für jeden Sensor aufgeführt. Werden diese Werte zu hoch gewählt, dann werden Positionen zugelassen, die nicht dem tatsächlichen Wert entsprechen sodass Sprünge zustande kommen. Sind die Toleranzen zu klein, dann werden manche Positionen durch Messungenauigkeiten nicht akzeptiert, obwohl diese richtig sind.

3.4 Bestimmung der aktuellen Auslenkung

mx	mx_l	mx_r	linkes Extremum	rechtes Extremum
> 0	> 0.004		4	3
> 0	≤ 0.004		5	4
< 0		> 0.0123	5	4
< 0		< -0.0123	4	5

Tabelle 3.7: Zuweisung des Gebiets für Sensor 4

Es ist jedoch auch möglich, dass keine der möglichen Zuweisungen akzeptiert werden, weil zum Beispiel die Differenz zum letzten Zeitschritt nicht klein genug ist. Sollte dies eintreten, dann wird die letzte lineare Abbildung mit den neuen Spannungswerten der entsprechenden Sensoren ausgeführt. Eine Berechnung der Auslenkung ist so zu jedem Zeitschritt gewährleistet.

Sensor-Nummer:	Toleranzbereich [°]:
1	2.0
2	3.0
3	3.0
4	3.3
5	3.0
6	3.0
7	2.0

Tabelle 3.8: Toleranzbereiche der Sensoren (Ansatz 2)

Besonderheiten

Es gibt jedoch auch Situationen, für die eine sichere Zuweisung getroffen werden kann. Wie bereits bei der Rekonstruktion in Kapitel 3.3.1 durch die Nulldurchgänge, kann auch hier ein Nulldurchgang ausgenutzt werden. Wird ein solcher detektiert, dann entsprechen die linken und rechten Extrema dem eigenen Sensor und das zuzuweisende Gebiet ist damit sicher bekannt.

Zusätzlich sind die Kurven jedes Sensors in einem gültigen Bereich relativ steil. Dies kann ebenfalls ausgenutzt werden. Falls die Steigung einen speziellen Schwellwert übersteigt, kann davon ausgegangen werden, dass sich das Pendel in dem gültigen Bereich dieses Sensors befindet. Die Tabelle 3.9 gibt diese Schwellwerte an. Liegt eine fallende Flanke vor, dann muss die Flanke des rechten Nachbarn steigen. Bei einer steigenden Flanke muss die Flanke des linken Nachbarn fallen. Andernfalls kann sich das Pendel nicht in einem messbaren Bereich befinden. Dennoch kann diese Zuweisung durch Messungenauigkeiten falsch geschehen, wird aber durch die Toleranzabweichungen aus Tabelle 3.8

3 Algorithmik

abgefangen²¹. Die Abbildung 3.20 veranschaulicht alle Punkte und Nulldurchgänge, die diesen Kriterien entsprechen.

Für jedes Metronom muss eigenständig eine Segmentierung der aufgezeichneten, harmonischen Schwingung, sowie die Errechnung der Parameter, durchgeführt werden. Sollte die „sample-rate“ des Systems geändert werden, dann müssen unter Umständen die Schwellwerte und Toleranzbereiche angepasst werden.

Sensor-Nummer:	Schwellwert [V]:
1	0.04
2	0.05
3	0.1
4	0.1
5	0.075
6	0.05
7	0.045

Tabelle 3.9: Schwellwerte der Spannungsänderung

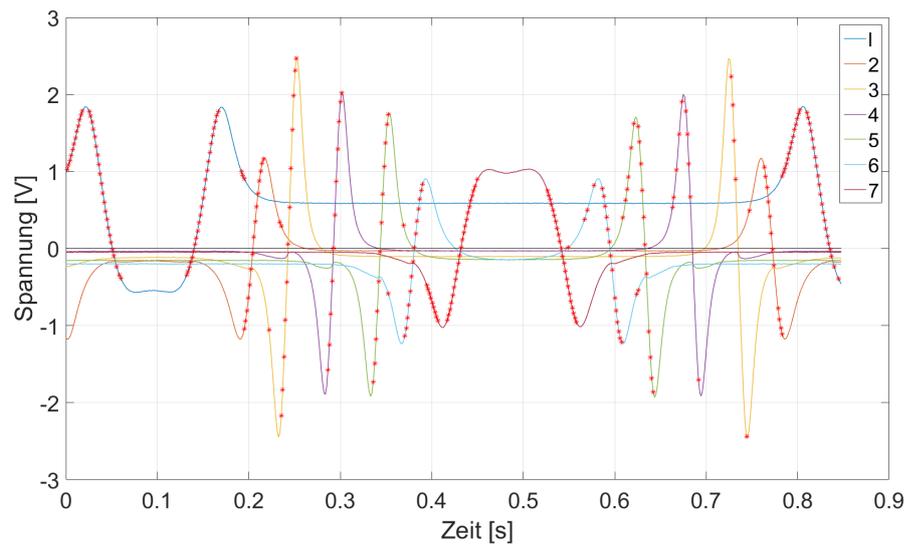


Abbildung 3.20: Besondere Punkte, welche die Schwellwerte aus Tabelle 3.9 übersteigen

²¹Zum Beispiel bei Sekunde 0.4 bei Sensor 7 in Abbildung 3.20

4 Implementierung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Implementierung eines geeigneten Programms zur Bestimmung der Auslenkung und Kopplung eines Metronoms. Zunächst wird Simulink Realtime als Echtzeit-Umgebung vorgestellt und anschließend erläutert, wie eine Phasenbestimmung in Echtzeit realisiert werden kann. Hiernach wird darauf eingegangen, wie eine Kopplung umgesetzt wurde und eine korrekte Bestimmung der Auslenkung, sowie die Kopplung, verifiziert wurde.

4.1 Simulink Realtime

Simulink Realtime ist eine von *The MathWorks, Inc.* erstellte Erweiterung für MATLAB. Diese ermöglicht das Erstellen von Echtzeit-Programmen, welche auf einem „target computer“¹ ausgeführt werden können. Es erweitert Simulink-Modelle mit speziellen Blöcken zur Hardware-Ansteuerung in Echtzeit. Ein Modell setzt sich aus Blöcken zusammen, die kombiniert ein lauffähiges System erzeugen [15]. In Abbildung 4.1a ist ein beispielhaftes System abgebildet. Dieses erzeugt eine Sinusschwingung, welche dann abgezweigt wird und mit dem Faktor zwei multipliziert wird. Für diese modifizierte Schwingung wird eine Sättigung bei 0.5 hinzugefügt. Das „Scope“ dient der Darstellung der Daten. Die Abbildung 4.1b zeigt die entsprechende Ausgabe des „Scope“. Die ursprüngliche Sinuskurve wird in orange dargestellt, während die um zwei multiplizierte blau ist. Die Sättigung ist durch die gelben Geraden zu erkennen.

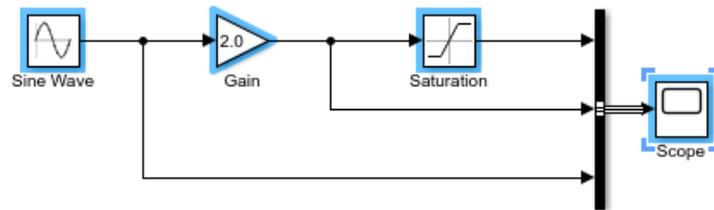
Echtzeit-System

Unter einem „Echtzeit-System“ versteht man ein System, welches sein Ergebnis innerhalb eines fest definierten Zeitraums liefert. Auf einem „target computer“ läuft eine Echtzeit-Anwendung mit einem Echtzeit-Kernel. Dieser führt alle Befehle innerhalb eines vordefinierten Zeitraumes aus, sodass eine Echtzeit-Umgebung realisiert werden kann. Simulink Realtime kann so für jeden Block, und damit für das komplette System, eine Aussage über die Laufzeit treffen, da jeder Block eine fest definierte Laufzeit besitzt. Werden eigene Blöcke erstellt, so müssen diese zeitlich analysiert werden können. Dynamische Speicherzugriffe, zum Beispiel durch eine Matrix-Erweiterung, sind daher nicht erlaubt. Bei dieser Erweiterung wird eine bereits gespeicherte Matrix, oder Vektor, um eine Zeile

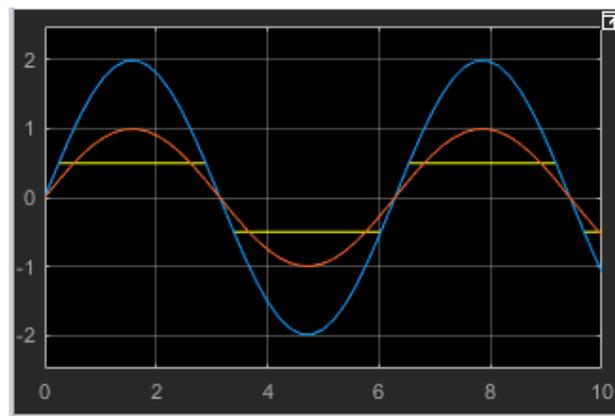
¹Messcomputer

4 Implementierung

oder Spalte erweitert. Demzufolge muss das Betriebssystem neuen Speicher für die Daten allozieren und die bereits eingetragenen Daten dorthin kopieren. Die Ausführungszeit des Allozieren und Kopieren ist jedoch nicht bekannt, daher müssen alle Speicherbelegungen von Beginn an feste Größen haben, sodass die Ausführungszeit bestimmt werden kann. Nach dieser Zeit orientiert sich die maximale *Sample-Rate*, also in welchem Zeitintervall das Modell ausgeführt werden kann. Diese muss größer als die längste Ausführungszeit² des Modells sein.



(a) System in Simulink



(b) Ausgabe des Systems

Abbildung 4.1: Aufbau eines Beispielsystems in Simulink

Simulink Realtime ermöglicht das Erzeugen eines Echtzeit-Kernels, welcher spätere Programme unter Echtzeit-Bedingungen ausführt. Mittels des Befehls „`slrtexpl`“ lässt sich der *Simulink Real-Time Explorer* öffnen. Hier können für den „target computer“ alle nötigen Einstellungen getroffen werden. Anschließend kann der Kernel mit diesen Einstellungen, unter anderem, auf eine CD gebrannt werden oder ein bootfähiger USB-Stick erstellt werden. Für den späteren Zugriff auf den Messcomputer lassen sich die benötigten Konfigurationen für das Netzwerk³ einstellen. Mit diesem erstellten Medium kann

²Verschiedene Laufzeiten durch Pfade im Programm möglich

³IP-Adresse, Subnetzmaske, Port, Gateway

folglich ein beliebiger Computer gestartet werden, der die benötigte Hardware für das zu erstellende System bereitstellt und Simulink Realtime Anwendungen in Echtzeit ausführt.

Mittels des Netzwerkzugriffs können erstellte Echtzeit-Programme in Simulink auf den Messcomputer geladen werden, welcher diese dann in einer Echtzeit-Umgebung ausführt.

Software

Die Implementierung der Software basiert auf dem in Abschnitt 3.4.2 thematisierten Ansatz. Dieser ist in zwei Teile unterteilt. Der erste Teil ist die Bestimmung der Parameter der linearen Abbildung anhand der aufgezeichneten Schwingungen für jedes Metronom und schließlich die Bestimmung der Auslenkung im Echtzeit-Betrieb⁴. Während die Segmentierung und Bestimmung der Parameter auf aufgezeichneten Daten ablaufen, muss die Festlegung der Position in Echtzeit geschehen. Hierfür wird Simulink Realtime verwendet. Der beschriebene Algorithmus in Kapitel 3.4.2 muss dementsprechend in einem ausführbaren Block in Simulink realisiert werden.

Messdaten

Die Spannungswerte der Hall-Sensoren aus Kapitel 2.1 liegen, wie im Versuchsaufbau in Kapitel 2 beschrieben, an der eingebauten PCI-6071E Karte von *National Instruments* an.

Mittels des in Abbildung 4.2 gezeigten Blocks in Simulink können die analogen Spannungswerte der Sensoren ausgelesen werden. Jedes Metronom besitzt sieben Hall-Sensoren, dementsprechend sind für jedes Metronom sieben Eingänge an der Karte vorgesehen. Die Eingänge 1 – 7 sind für das erste Metronom, 8 – 14 für das zweite und 15 – 21 für das dritte. Da ein solcher Block in Simulink nur einmal verwendet werden darf, muss dieser insgesamt 21 Ports bei drei Metronomen haben. Die Anzahl an Eingängen muss entsprechend im Simulink-Block eingestellt werden.

Für diesen Block wird zusätzlich eine „sample-rate“ eingestellt. Gleichzeitig bestimmt diese auch die maximale Ausführungszeit des Systems, da alles Weitere auf diesen Daten beruht. Diese Rate legt fest, in welchen festen Zeitabständen das Programm ausgeführt wird. In diesen Zeitabständen werden dann die anliegenden Spannungswerte gemessen und stehen damit für das System für weitere Berechnungen zur Verfügung.

⁴Ausführung des Simulink Realtime Modells

4 Implementierung

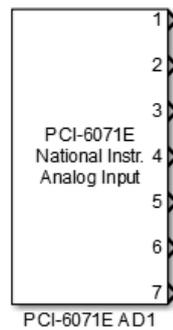


Abbildung 4.2: Simulink Block für das Einlesen der Spannungswerte

Bestimmung der Auslenkung

Nachdem die Spannungswerte der Sensoren ausgelesen wurden, kann mit Hilfe der linearen Abbildung die aktuelle Position des Pendels bestimmt werden. Die zuvor bestimmten Gebiete, sowie deren Parameter, werden als konstante Variablen aus der MATLAB-Umgebung an das Simulink-Programm mitgegeben. Des Weiteren werden die Schwellwerte und Toleranzbereiche benötigt und ebenfalls mitgegeben.

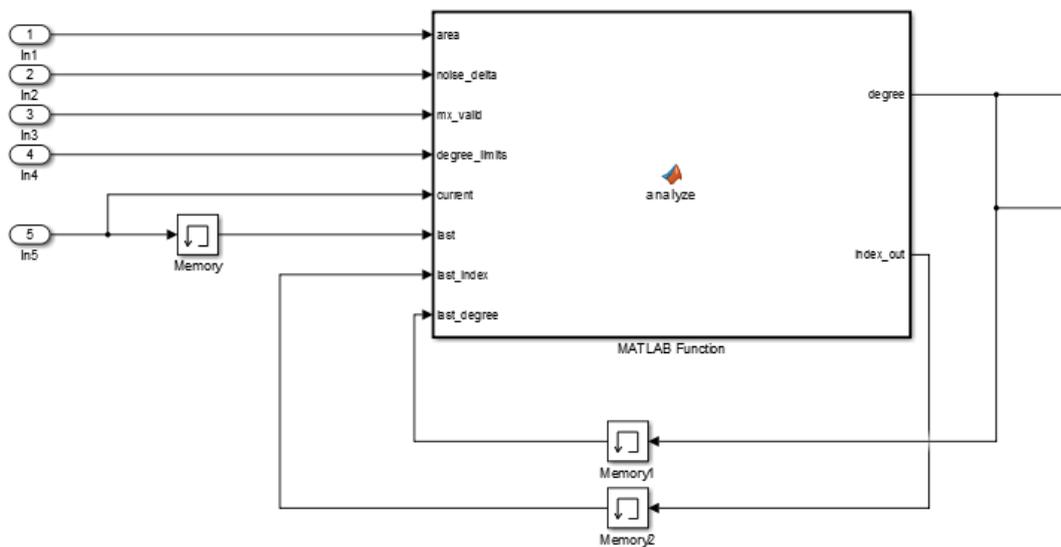


Abbildung 4.3: Simulink Block zur Berechnung der Auslenkung des Metronoms

In Abbildung 4.3 ist der Unterblock⁵ eines Metronoms für die Bestimmung der Auslenkung gezeigt. Insgesamt hat das System drei dieser Unterblöcke. Die Eingänge „In1“ bis „In4“ in Abbildung 4.3 sind für die Konstanten aus der MATLAB-Umgebung vorhanden. Der Eingang 5 steht hier für die jeweiligen Spannungswerte der relevanten Sensoren. Dieser ist ein 1×7 Vektor. Ein „memory“-Block steht für das Zwischenspeichern von Daten. Da zur Berechnung der Änderungsraten die zuletzt gemessenen Spannungen benötigt werden, müssen diese zwischengespeichert werden. Dasselbe gilt für die zuletzt gemessene Gradzahl zur Überprüfung, ob die Toleranzen eingehalten werden. Zusätzlich wird der letzte Index aus der Struktur, falls keine Zuweisung eines Gebiets in der Funktion akzeptiert wurde, gespeichert.

Der zentrale Block „analyze“ steht für den in Kapitel 3.4.2 beschriebenen Ansatz. Es ist eine MATLAB-Methode in welcher, die möglichen Auslenkungen durch eine lineare Abbildung bestimmt werden. Dort wird, abhängig von den anliegenden Spannungswerten der Sensoren, das Pendel einem Gebiet zugewiesen und die entsprechende Auslenkung durch die lineare Abbildung ausgerechnet. Der Ausgang „degree“ gibt dementsprechend die errechnete Auslenkung aus. Für jeden Zeitschritt ist eine solche Bestimmung vorhanden. Der Ausgang „index_out“ steht dabei für den letzten Index aus der Struktur der das Gebiet zuweist.

MATLAB-Struktur

Der Input „area“ steht für die Struktur, welche die definierten Gebiete, sowie deren Parameter für die lineare Abbildung, enthält. Diese Struktur beinhaltet zwei Felder, „areas“ und „params“. Das Feld „areas“ hat zum Beispiel eine Größe von 26×7 . Dies bedeutet, dass die aufgezeichnete, harmonische Schwingung in 26 Gebiete segmentiert wurde. Für jedes Gebiet sind 7 Informationen gespeichert. In Tabelle 4.1 ist aufgeführt, welche Spalten der Struktur welche Informationen enthalten.

Spalte:	Bedeutung:
1	Index des linken Extremum
2	Index des rechten Extremum
3	Sensor-Nummer des linken Extremum
4	Sensor-Nummer des rechten Extremum
5	Änderungsrate des linken und rechten Extremum
6	Steigung des linken Sensors
7	Steigung des rechten Sensors

Tabelle 4.1: Bedeutung der Spalten der MATLAB-Struktur „area“

⁵Zusammenfassung mehrerer Blöcke

4 Implementierung

Die im Programm ermittelten Sensoren für das linke und rechte Extremum werden mit den in der Struktur hinterlegten Daten verglichen. Dies definiert das zuzuweisende Gebiet. Dazu wird über die Zeilen iteriert und mit Spalte 3, 4 und 5 verglichen⁶. Hierbei müssen die Spalten 3 und 4 übereinstimmen und bei Spalte 5 wird mit der aktuellen Steigung des Sensor verglichen. Beides muss entweder > 0 oder < 0 sein. Stimmt alles überein, dann wird dieses Gebiet zugewiesen und der Index, beziehungsweise die Zeile, gespeichert.

Nachdem eine Zeile zwischengespeichert wurde, werden aus dem Feld „params“ die benötigten Parameter⁷ für die lineare Abbildung geholt. Dieses Feld hat die Größe 26×3 . Die Anzahl der Zeilen müssen mit der aus „areas“ übereinstimmen, da für jedes Gebiet Parameter hinterlegt sein müssen. In Spalte 1 und 2 stehen die jeweiligen α_i und in Spalte 3 das c . Anhand der Parameter und der gemessenen Spannungen kann nun die Auslenkung des Metronoms zu jedem Zeitschritt ausgerechnet werden.

In Simulink sind Blöcke vorhanden, mit denen Konstanten im Modell verwendet werden können. Damit eigene Strukturen als diese Konstanten nutzbar sind, muss ein extra Bus definiert werden. Dieser legt fest, wie die Daten in Simulink übertragen werden. Damit ein solcher Bus erstellt werden kann, bietet Simulink notwendige Methoden an.

```
busInfo1 = Simulink.Bus.createObject(area1);  
bus_area1 = eval(busInfo1.busName);
```

Diese Bus-Definitionen müssen, neben den Strukturen, in der MATLAB-Umgebung vorhanden sein. Hierbei steht „area1“ für die Struktur mit den notwendigen Informationen von Metronom 1 für die Gebiete. Der zu verwendende Bus in Simulink ist „bus_area1“. Für die Verwendung der Konstante muss Simulink mitgeteilt werden, dass dieser Bus zur Übertragung verwendet werden soll. Wie in 4.4 verdeutlicht kann dieser Bus anschließend in den Attributen des Blocks der Konstanten eingetragen werden.

Besonderheiten

Damit ein System in Simulink-Realtime umgesetzt werden kann, müssen alle Laufzeiten der verwendeten Blöcke bekannt sein. Zusätzlich müssen für alle Funktionen, die zum Beispiel in dem „analyze“-Block ausgeführt werden, die Rückgabetyperen jedes Aufrufs bekannt sein. Aus diesem Grund ist eine Verwendung der Hilbert-Transformation als Funktionsaufruf in diesem Block nicht möglich, sodass der Filter-Block verwendet werden muss.

⁶Die anderen Spalten wurden zu Debug-Zwecken verwendet

⁷ α_1 , α_2 und c

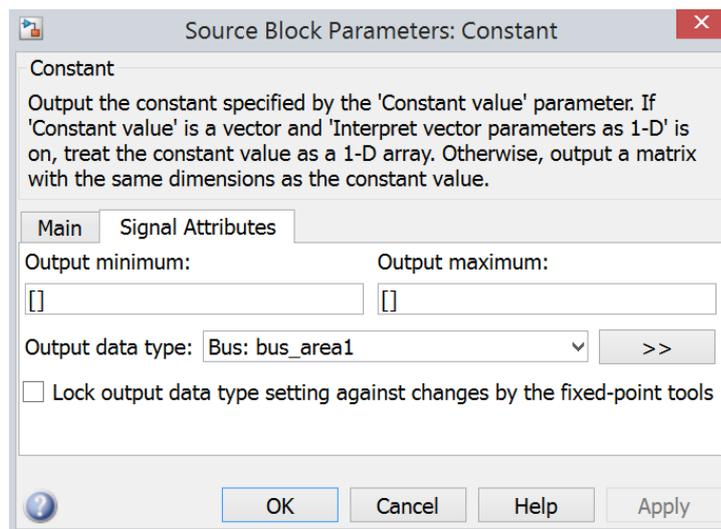


Abbildung 4.4: Zuweisung eines Busses in Simulink

4.2 Phasenbestimmung

Für jeden Zeitschritt ist nun die aktuelle Auslenkung des Pendels bekannt. Diese Informationen können als Signal interpretiert werden. Dieses Signal muss nicht harmonisch sein. Aufgrund der Kopplung können Änderungen der Frequenzen und Amplituden eintreten. Damit die Metronome dennoch realistisch gekoppelt werden können, werden diese anhand der Phase, wie beim Kuramoto-Modell in Kapitel 1.2.2 beschrieben, miteinander gekoppelt. Aus diesem Grund muss die Phase des Metronoms bekannt sein. Mit Hilfe der „Hilbert-Transformation“, welche in Kapitel 3.2.4 thematisiert wurde, lässt sich die Phase des Signals zu jedem Zeitschritt bestimmen.

In der digitalen Signalverarbeitung kann diese Hilbert-Transformation auch als Filter verstanden werden. Idealerweise werden dabei alle positiven Frequenzen um $-\pi/2$ Bogenmaß phasenverschoben und alle negativen um $\pi/2$. Die Hilbert-Transformation kann als ein FIR⁸ oder IIR⁹ Filter umgesetzt werden. Bei einem FIR-Filter ist eine Impulsantwort mit einer endlichen Länge garantiert, dadurch sind diese niemals instabil. Der IIR-Filter hingegen garantiert dieses nicht, sodass eine unendlich lange Antwort geliefert werden kann. Eine Impulsantwort beschreibt das Ausgangssignal des Filters bei einer Stoßfunktion als Eingangssignal. Bezogen auf die Hilbert-Transformation liefert der IIR-Filter eine Annäherung zur Phase, wohingegen sich der FIR-Filter der Stärke des Signals annähert [16]. Solch ein IIR-Filter kann durch zwei „all-pass systems“ realisiert werden. Deren Phasengang muss sich um $\pi/2$ unterscheiden. Ein Allpassfilter sorgt dafür, dass das Spektrum des Signals um $\pi/2$ gedreht wird [17]. Die Ausgänge dieser Filter werden

⁸Finite Impulse Response

⁹Infinite Impulse Response

4 Implementierung

nun als Real- und Imaginär-Anteil interpretiert, sodass beinahe alle negativen Frequenzen eliminiert werden. Daraus resultiert eine Lösung des Filters, welches nahezu der Hilbert-Transformation gleicht [16].

Ein IIR-Filter scheint aus diesem Grunde, trotz einer möglichen Instabilität, der für dieses System richtige Filter zu sein. Simulink stellt solch einen Hilbert-Filter als Block zur Verfügung. Die Verwendung dessen ist in Abbildung 4.5 gezeigt. Das Eingangssignal entspricht der berechneten Auslenkung des Metronoms aus dem „analyze“-Block, also der oberen Kurve aus Abbildung 4.6. Das ausgegebene, komplexe Signal wird schließlich in den entsprechenden Phasenwinkel umgerechnet. Für diesen gilt $-\pi < \varphi < \pi$. In Abbildung 4.6 ist die bestimmte Phase des Hilbert-Filters einer harmonischen Schwingung eines Metronoms verdeutlicht. Hierbei ist oben die harmonische Schwingung abgebildet, welche im Echtzeit-Betrieb bestimmt wurde und unten die bestimmte Phase des Filters, ebenfalls im Echtzeit-Betrieb, dargestellt.

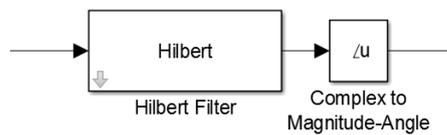


Abbildung 4.5: Simulink Block für den Hilbert-Filter

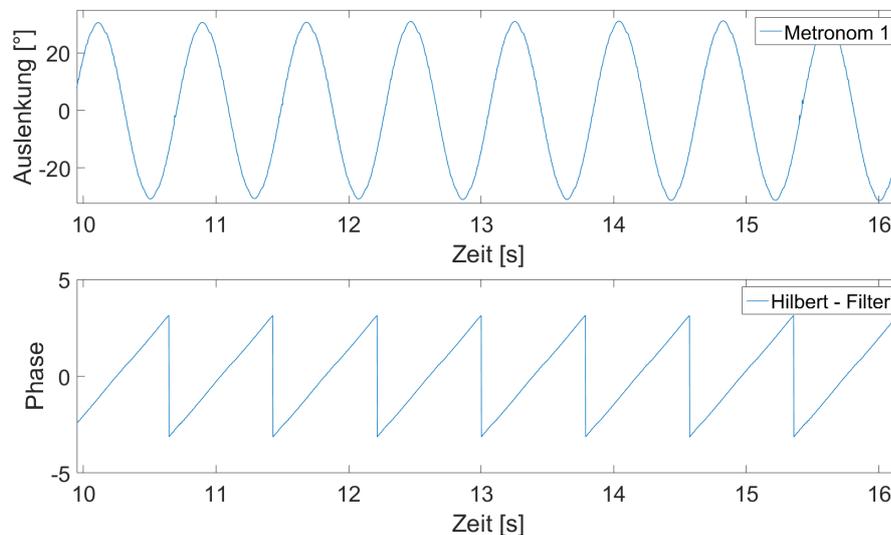


Abbildung 4.6: Bestimmung der Phase durch den Hilbert-Filter

Für diesen Block lässt sich die Art des Filters, also ob dieser FIR oder IIR ist, einstellen. Zusätzlich kann die Ordnung angegeben werden. Die Ordnung eines Filters bestimmt die Dämpfung von Frequenzen. Je höher diese Ordnung ist, desto länger benötigt der Filter

in Simulink nach Beginn der Messung, um einen korrekten Wert auszugeben. Vorher besteht das ausgegebene Signal aus undefinierten Ausschlägen. Eine Kopplung sollte also erst nach dieser „Anlernphase“ des Filters realisiert werden.

Wird die Phasenbestimmung des Hilbert-Filters mit der Bestimmung durch die Hilbert-Transformation verglichen, dann ist zu erkennen, dass diese nicht identisch sind. Ein Vergleich dieser Bestimmungen ist in Abbildung 4.7 gezeigt. Die Bestimmung durch den Filter eilt hinterher, welches durch eine Verzögerung des Filters begründet werden kann.

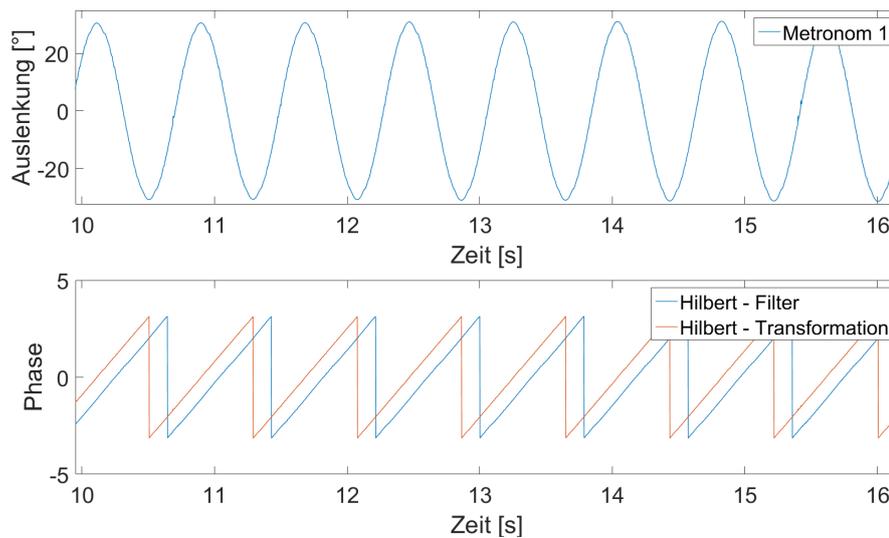


Abbildung 4.7: Vergleich der Phasenbestimmung durch den Hilbert-Filter und die Hilbert-Transformation

Der bis hier vorgestellte Softwareentwurf in Simulink Realtime ist in Abbildung 4.8 verdeutlicht. Dort steht der „analyze“-Block für die Berechnung der Auslenkung des Metronoms. Zu jedem Zeitschritt wird anschließend mit dem Hilbert-Filter das analytische Signal erstellt und daraus die Phase des Metronoms bestimmt.

4 Implementierung

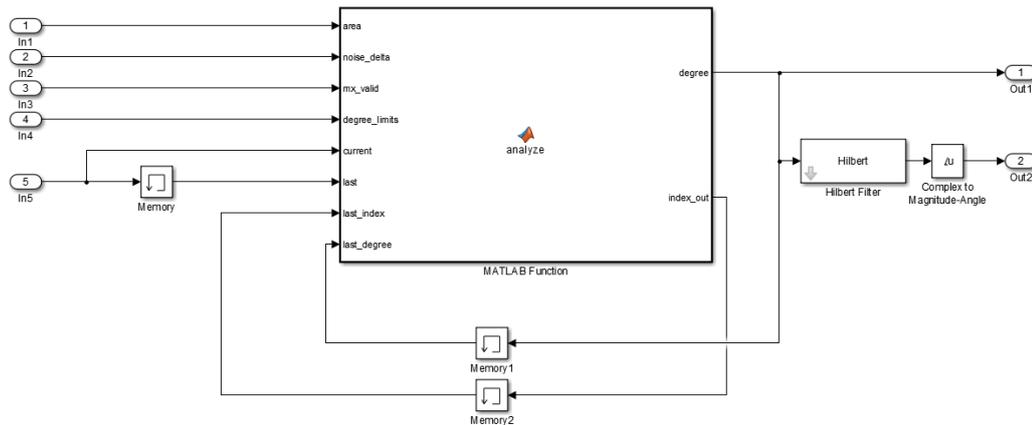


Abbildung 4.8: Simulink Unterblock zur Bestimmung der Auslenkung und Phase eines Metronoms

4.3 Kopplung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Kopplung der Metronome. Nachdem die Phasen dieser, wie in Kapitel 4.2 beschrieben, bestimmt wurden, können die Metronome miteinander gekoppelt werden. Laut den Anforderungen aus Kapitel 2.3, soll die Richtung, Stärke und Verzögerung der Kopplung variable sein.

In Gleichung (4.1) ist erneut das Kuramoto-Modell aus Kapitel 1.2.2 aufgeführt. Durch die Phasenbestimmung des Hilbert-Filters in Simulink ist jedoch eine gewisse Verzögerung vorhanden (Abbildung 4.7). Dementsprechend muss das Modell um diese Verzögerung erweitert werden. Die Gleichung (4.2) gibt diese entsprechende Erweiterung an. Der Parameter α steht dort für die Verzögerung durch den Filter. Auf die Bestimmung dieses Parameters wird im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht eingegangen und im Folgenden wird nur das Modell aus Gleichung (4.1) für eine Kopplung verwendet.

$$m\ddot{\psi}_i + \epsilon\dot{\psi}_i = \omega_i + \frac{\mu}{2N+1} \sum_{j=1}^N \sin(\psi_j - \psi_i) \quad (4.1)$$

m : Trägheit

ϵ : Reibungskonstante

μ : Kopplungsstärke

N : Anzahl der gekoppelten Oszillatoren

ω_i : Instantanfrequenz des Oszillators i

ψ_i : Phase des Oszillators i

$$m\ddot{\psi}_i + \epsilon\dot{\psi}_i = \omega_i + \frac{\mu}{2N+1} \sum_{j=1}^N \sin(\psi_j - \psi_i - \alpha) \quad (4.2)$$

Die durch die Differentialgleichung beschriebene Phase des Oszillators wird durch eine geeignete Methode gemessen. Die Lösung dieser Gleichung ist somit bekannt. Zur Kopplung der Oszillatoren ist damit nur noch die Summe, sowie der Vorfaktor dieser, relevant. Die Komponenten der Summe, also der Sinus aus den Differenzen der Phase zum gekoppelten Oszillator, sind bekannt und errechenbar. Für die ψ_j gilt $-\pi < \psi_j < \pi$. Schwingen zwei Oszillatoren folglich gleich, oder sind um π verschoben, dann beeinflussen sich diese untereinander nicht. Der Vorfaktor der Summe bestimmt nun, wie stark sich Phasenunterschiede auf die Schwingung auswirken.

Die Kopplung der Metronome wird, wie in Kapitel 2.2 beschrieben, mit Hilfe von Spulen realisiert. Anhand der Phasendifferenzen gilt es, diese Spulen entsprechend mit Strom zu versorgen, damit eine Kopplung realisiert werden kann. Je stärker der anliegende Strom ist, desto stärker ist das erzeugte Magnetfeld und damit die Störung der Schwingung des Metronoms. Der Faktor der Summe bestimmt also folglich die Spannungen, welche an die Spulen des gekoppelten Metronoms angelegt werden müssen. Die Wickelrichtung der Spule gibt hier an, welches Vorzeichen die anliegende Spannung haben muss. Dementsprechend muss für manche Spulen das Vorzeichen der anliegenden Spannung umgekehrt werden, damit eine Wechselwirkung von Anziehung und Abstoßung des Magneten herrscht.

In Abbildung 4.9 ist der Unterblock für die realisierte Kopplung gezeigt. Die drei Eingänge entsprechen hier den Phasen von Metronom 1, 2 und 3. Der Block der MATLAB-Funktion entspricht der Kopplung nach dem Kuramoto-Modell. Die Berechnung der Ausgänge y1 bis y3 ist in Abbildung 4.10 gezeigt. Diese werden individuell durch einen „Gain“-Block verstärkt und durch die PCI-6713-Karte ausgegeben. Mit diesen lässt sich die Kopplungsstärke einstellen. Die Spannungswerte werden folglich über den Verstärker an die Spulen geleitet. Bei Ausgang 2 muss das Vorzeichen umgekehrt werden, da diese Spule nicht umgekehrt zu Ausgang 1 gewickelt ist. Die oberen beiden Ausgänge sind für die Spulen von Metronom 1, Ausgang 3 & 4 für die Spulen von Metronom 2 und die Ausgänge 5 & 6 für Metronom 3. Mit dem unteren Block der Konstanten kann die Kopplung aktiviert oder deaktiviert werden. Dort sollte nur eine 0 zur Deaktivierung oder 1 zur Aktivierung eingetragen werden. Der Ausgang der Kuramoto-Funktion d12 gibt die Phasendifferenz von Metronom 1 & 2 aus, d13 gibt die Differenz von Metronom 1 & 3 aus und d23 folglich die Phasendifferenz von Metronom 2 & 3.

4 Implementierung

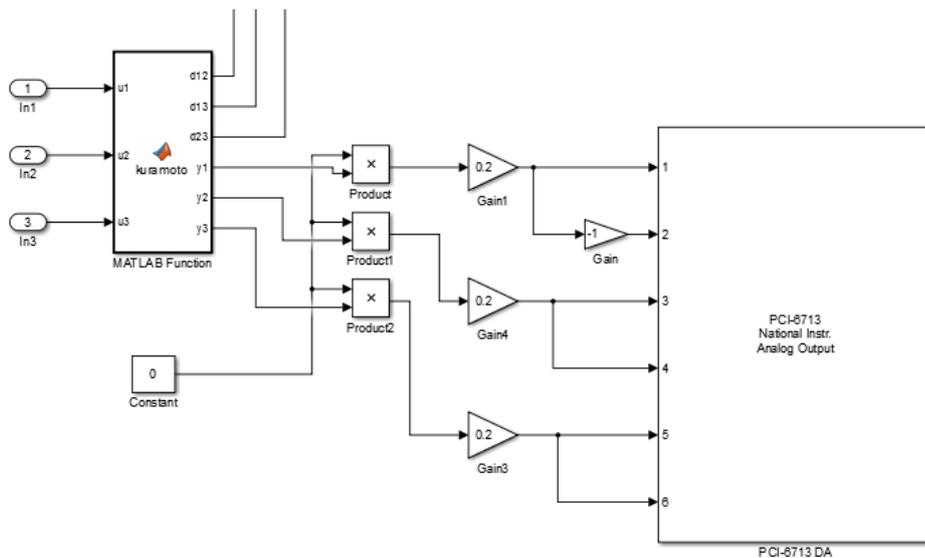


Abbildung 4.9: Simulink Unterblock für die Kopplung

```
%kopplung nach kuramoto  
y1=sin(u1-u1)+sin(u2-u1)+sin(u3-u1);  
y2=sin(u1-u2)+sin(u2-u2)+sin(u3-u2);  
y3=sin(u1-u3)+sin(u2-u3)+sin(u3-u3);
```

Abbildung 4.10: Codeausschnitt zur Errechnung der Kopplung nach dem Kuramoto-Modell ohne Verzögerung des Hilbert-Filters

4.4 Verifikation

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Verifikation der erstellten Software, sowie der Kopplung. Dabei wird zunächst der Algorithmus anhand von aufgezeichneten Daten verifiziert und anschließend im Echtzeit-Betrieb getestet. Danach wird auf die Kopplung eingegangen.

In Abbildung 4.11 ist eine Übersicht des erstellten Simulink Realtime Modells gezeigt. Dort ist in grün die PCI-Karte zu erkennen, welche die Spannungswerte der Hall-Sensoren zu einer festen Sample-Rate ausliest. In blau sind die Unterblöcke der drei Metronome gezeigt. In diesen Blöcken wird aus den Spannungswerten durch die lineare Abbildung die momentane Auslenkung und durch den Hilbert-Filter die Instantanphase bestimmt. Die Kopplung ist durch den roten Block dargestellt. Dort werden die Metronome anhand ihrer Phase nach dem Kuramoto-Modell miteinander gekoppelt und dementsprechend Strom an die Spulen angelegt.

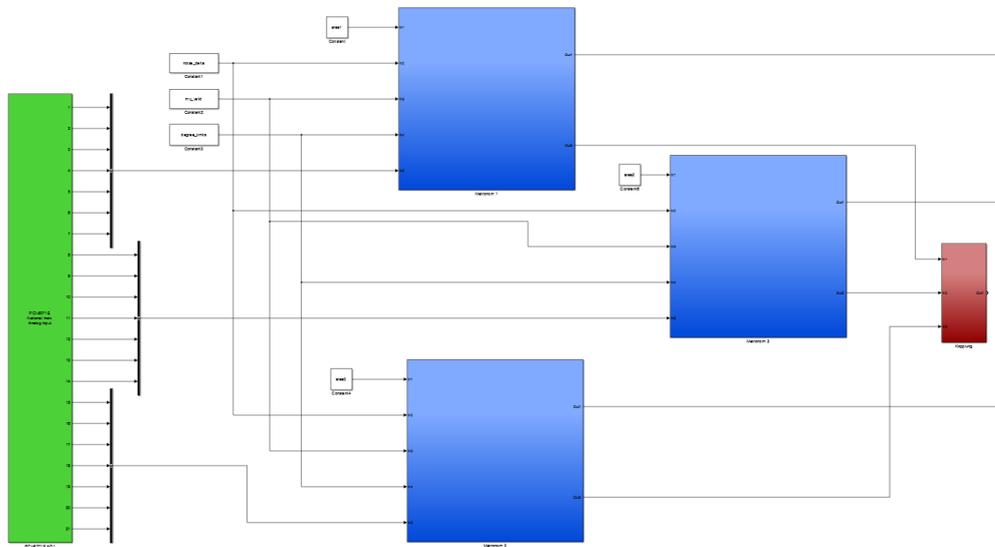


Abbildung 4.11: Simulink Modell für das Bestimmen der Auslenkung und Phase der drei Metronome und Realisierung der Kopplung

4.4.1 Software

Um sicher gehen zu können, dass die Bestimmung der Auslenkung korrekt in Simulink ausgeführt wird, muss die Implementierung der Algorithmen verifiziert werden. Der in Simulink erstellte Quellcode lässt sich ebenfalls in MATLAB ausführen und kann so mit den aufgezeichneten Daten getestet werden. Ein aufgezoogenes Metronom hat die Eigenschaft, dass sich dieses bei einer leichten anfänglichen Auslenkung, von selbst auf einen speziellen Ausschlag aufschauelt. Wird ein Metronom händisch auf ungefähr 20° ausgelenkt und losgelassen, dann fängt das Pendel an sich bis auf ungefähr 32° aufzuschwingen. Dieses entspricht also vorerst einer nicht harmonischen Schwingung, bis dieses harmonisch mit einer Amplitude von ungefähr 32° schwingt. Zur Verifikation, dass das System eine nicht harmonische Schwingung richtig abbildet, wurden die Spannungswerte der Sensoren während dieses Aufschwingen aufgezeichnet und der in dem „analyze“-Block stehende Quellcode hiermit ausgeführt. In Abbildung 4.12 ist die rekonstruierte Schwingung dieser aufgezeichneten, sich aufschaukelnden Schwingung illustriert.

Es ist in Abbildung 4.12 zu erkennen, dass das System in der Lage ist, nicht harmonische Schwingungen richtig abbilden zu können. In der Rekonstruktion sind keine Sprünge oder Zacken vorhanden, was die Genauigkeit des Systems unterstreicht. Sollten während des Echtzeit-Betriebs solche Sprünge auftreten, so kann dies durch eine genaue Bestimmung durch die Nulldurchgänge begründet werden. Nulldurchgänge der Hall-Sensoren bilden auf die exakte Position des Pendels ab. Ist die Auslenkung zuvor fehlerhaft bestimmt worden, so springt die Position schlagartig auf den richtigen Wert.

4 Implementierung

Gewisse Ungenauigkeiten sind jedoch an den Amplituden zu erkennen. Dies ist damit zu erklären, dass sich das Pendel dort umkehrt und damit die Änderungsraten der Spannungswerte beliebig klein werden können. Dennoch sind diese Ungenauigkeiten klein. Zusätzlich wird dieses Signal in den Hilbert-Filter gespeist, welcher diese Störungen ignoriert. Selbst eine ungenaue Bestimmung in der Amplitude hindert den Filter nicht daran, auf die richtige Phase zu schließen.

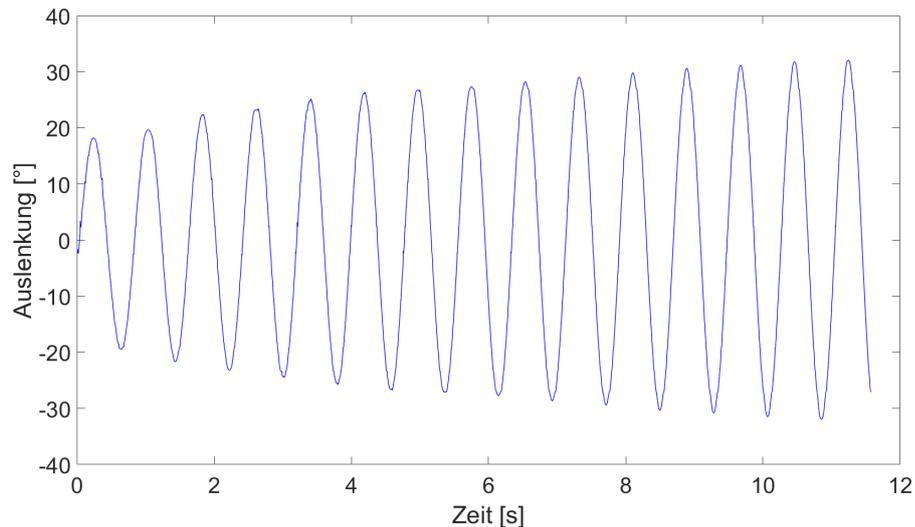


Abbildung 4.12: Rekonstruktion einer sich aufschaukelnden Schwingung

Anhand der aufgezeichneten Daten wurden die Schwellwerte und Toleranzen bestimmt. Diese wurden solange angepasst, bis die in Abbildung 4.12 gezeigte Schwingung rekonstruiert wurde. Der entsprechende Quellcode kann in Simulink übertragen werden. Das Echtzeit-System besitzt ein „Scope“ zur Visualisierung der durch diesen Quellcode bestimmten Auslenkung. Dort wurde erneut die aufschaukelnde Schwingung verwendet, um das System zu verifizieren. Diesmal wurden die Daten jedoch nicht aufgezeichnet, sondern nach Augenmaß überprüft. Die Ausgabe des „Scope“ entsprach der in der Abbildung gezeigten Kurve.

Zusätzlich wurde das Pendel während des Echtzeit-Betriebs schlagartig in seiner Richtung geändert. Ein Knick der Kurve hat dies optisch bestätigt, sodass davon ausgegangen werden kann, dass die Auslenkung anhand der Spannungswerte stetig korrekt bestimmt wird.

Zur Verifikation der Phasenbestimmung durch die Hilbert-Transformation wurde diese Transformation auf die sich aufschaukelnde Schwingung ausgeführt. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.13 abgebildet. Der obere Plot ist erneut die rekonstruierte Schwingung und der untere das Ergebnis der Phasenbestimmung durch die Hilbert-Transformation. Es

ist zu erkennen, dass die Phase geradlinig¹⁰ von $-\pi$ bis π verläuft. Sobald eine negative Amplitude erreicht wird, also der Phasenwinkel π annimmt, springt dieser auf $-\pi$. Der Rückschluss auf die Phase durch die Hilbert-Transformation ist dadurch korrekt. Ein „Scope“ im Echtzeit-Betrieb hat dieses Verhalten ebenfalls wiedergespiegelt, sodass auch der Hilbert-Filter-Block in Simulink korrekt mit dem rekonstruierten Signal funktioniert.

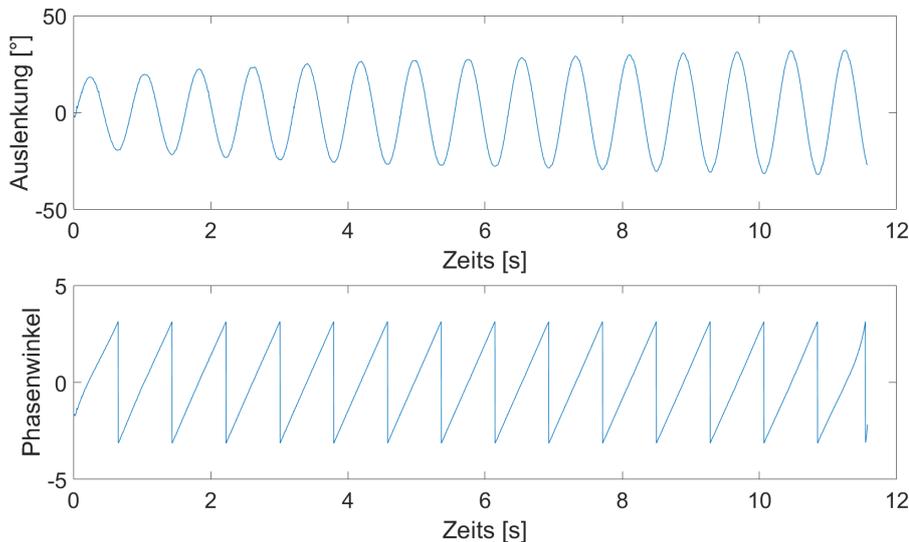


Abbildung 4.13: Phasenbestimmung einer sich aufschaukelnden Schwingung

4.4.2 Kopplung

Im Gegensatz zur Winkel- und Phasenbestimmung kann die Kopplung der Oszillatoren nur im Echtzeit-Betrieb getestet werden. Hierzu wurden zwei Metronome verwendet, wobei jedoch nur eine einseitige Kopplung angelegt wurde, sodass Metronom 1 zwar Metronom 2 beeinflusst, jedoch nicht umgekehrt. Dies bedeutet, dass Metronom 1 harmonisch schwingt, während das andere mit diesem gekoppelt ist. Bei nicht zu großen Frequenzunterschieden wird sich der Phasenverlauf von Metronom 2 an das von Metronom 1 angleichen, sofern die Kopplung stark genug ist.

In Abbildung 4.14 ist genau diese Synchronisation zu erkennen. In der oberen Grafik sind die Auslenkungen der Metronome gezeigt. Dort ist zu erkennen, dass die Metronome unterschiedliche Amplituden haben. Die orange Kurve hat eine größere Auslenkung in positiver Richtung, die blaue ab Sekunde 35 in negative. Trotz dieser Unterschiede sehen die Differenzen und der Verlauf beider Schwingungen über den betrachteten Zeitraum konstant aus. Dieses Verhalten wird auch durch die Differenz der Phasen ausgedrückt.

¹⁰Keine Änderung der Frequenz zwischen den Amplituden

4 Implementierung

In der unteren Grafik ist diese Phasendifferenz der beiden Oszillatoren verdeutlicht. Die blaue Kurve entspricht der Phasendifferenz der Metronome. Es ist zu erkennen, dass bei ausreichend starker Kopplung die Differenz um einen Wert schwingt. Die Abbildung 4.15 zeigt das entsprechende Histogramm dieser Differenz. Dort sind zwei Ausschläge zu erkennen, sodass bei diesem Verhalten das Kriterium der Synchronisation erfüllt ist.

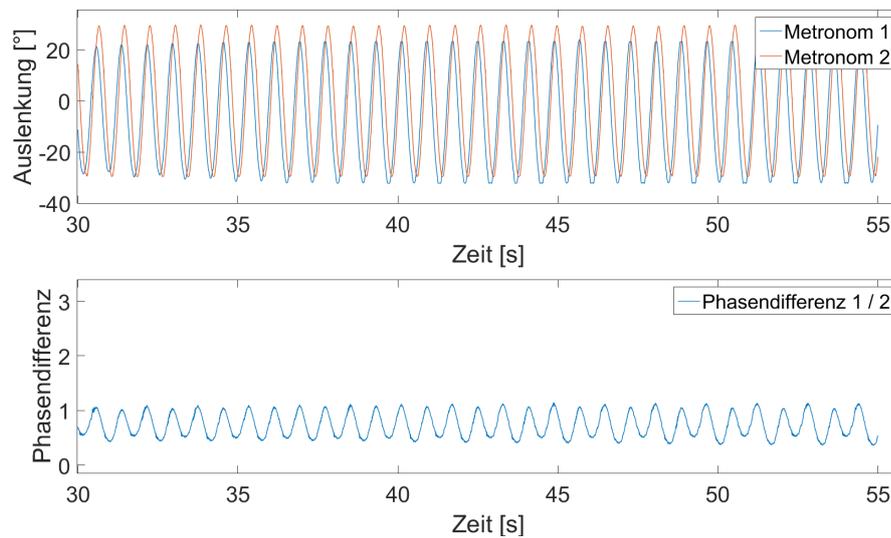


Abbildung 4.14: Phasendifferenz mit Kopplung

In Abbildung 4.16 ist nach dieser Synchronisation die Kopplung deaktiviert worden. In der oberen Grafik sind wieder die Auslenkungen der Metronome dargestellt. Diesmal ist zu erkennen, dass die Abstände zwischen den Amplituden mit der Zeit größer werden. Sie verhalten sich also nicht mehr synchron. Dies ist ebenfalls in der unteren Grafik zu erkennen. Hier pendelt die Phasendifferenz nicht mehr um einen Wert, sodass das Kriterium der Synchronisation nicht erfüllt ist. Stattdessen weist diese einen geradlinigen Verlauf auf. Dies rührt daher, dass sich die Phase beider Metronome unterschiedlich stark ändern. Dementsprechend nimmt diese Differenz bei fortschreitender Zeit linear zu. In Abbildung 4.17 ist das entsprechende Histogramm zu dieser Phasendifferenz dargestellt. Es ist kein Ausschlag zu sehen, sondern nur eine Art Plateau, sodass auch hier die Desynchronisation zu erkennen ist.

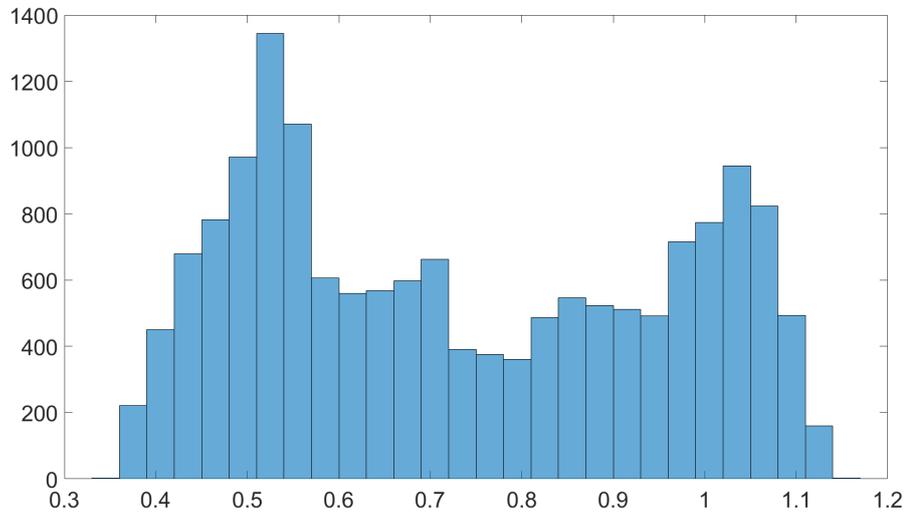


Abbildung 4.15: Histogramm der Phasendifferenz mit Kopplung

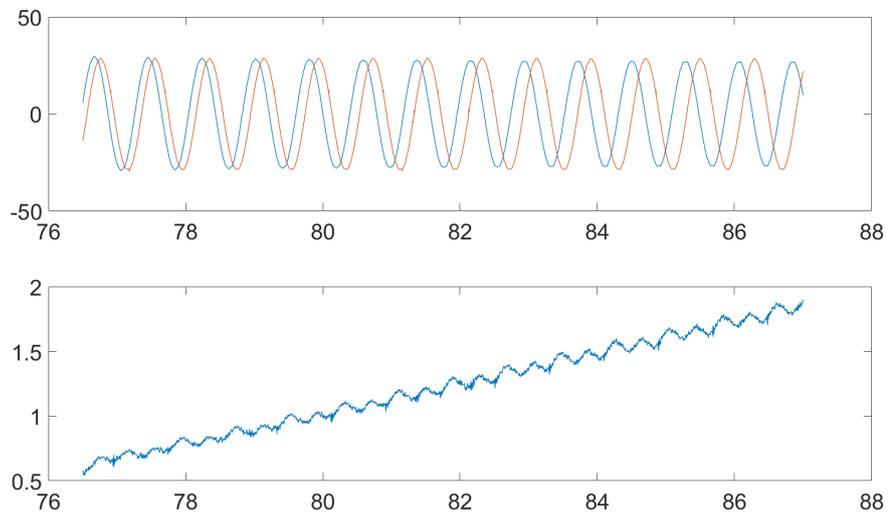


Abbildung 4.16: Phasendifferenz ohne Kopplung

4 Implementierung

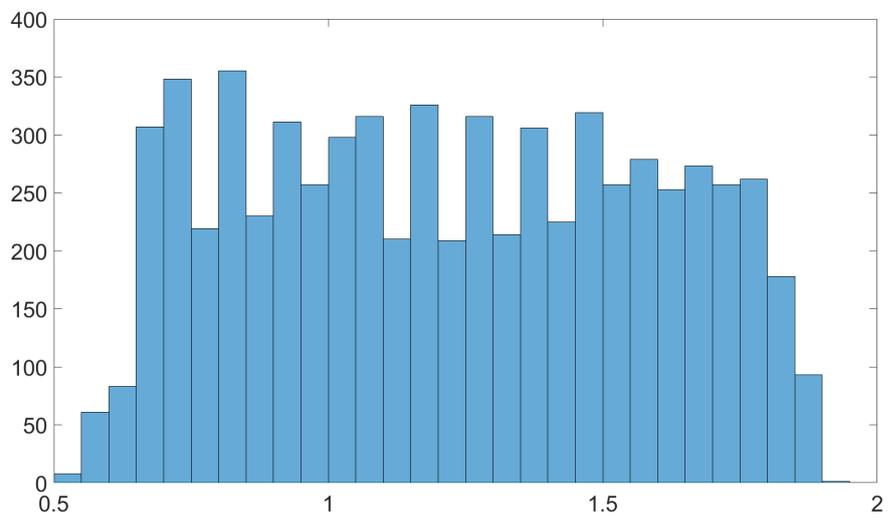


Abbildung 4.17: Histogramm der Phasendifferenz ohne Kopplung

5 Analyse von Synchronisationszuständen

In diesem Kapitel werden unterschiedliche Synchronisationszustände von drei mechanischer Oszillatoren untersucht. Dazu sind alle drei Metronome untereinander gekoppelt. Die Kopplungsstärke kann für jedes Metronom individuell eingestellt werden. Abhängig von der Kopplungsstärke wird untersucht, welche Oszillatoren sich synchronisieren und wie beständig diese Synchronisation im System ist.

5.1 Erster Versuch

Bei dem ersten Versuch wurden die Metronome nur leicht miteinander gekoppelt. Die maximal anliegende Spannung an den Spulen betrug 1.2 Volt. Dieser Spannungswert resultiert daraus, dass der maximale ausgegebene Wert aus dem Kuramoto-Modell in Abbildung 4.9, bei einer festen Anzahl an Oszillatoren, beschränkt ist¹. Dieser Wert wird mit der Kopplungsstärke 0.2 (Gain) multipliziert und über die PCI-6713 Karte ausgegeben. Der Verstärker verstärkt das ausgegebene Signal um das Dreifache, sodass maximal $|\pm 2 \cdot 0.2 \cdot 3| = 1.2$ Volt angelegt werden.

Metronom:	Frequenz [Hertz]:
1	~ 1.26
2	~ 1.38
3	~ 1.27

Tabelle 5.1: Frequenzen der Metronome (Versuch 1)

Mit dieser Realisierung der Kopplung ergeben sich die in Tabelle 5.1 angegebenen Frequenzen für die Metronome. Im oberen Plot aus Abbildung 5.1 ist der Verlauf der Auslenkungen dieser 3 Metronome verdeutlicht. Auf den ersten Blick ist keine Synchronisation erkennbar. Die Metronome 1 & 2 besitzen eine ähnliche Frequenz, sodass sich der zeitliche Abstand der Amplituden nur langsam ändert. Dies bedeutet, dass die Phasendifferenz dieser Metronome nicht konstant ist. Der untere Plot der Abbildung zeigt die Phasendifferenzen der Metronome untereinander. Dort ist die Desynchronisation zu erkennen, weil

¹ $\sum_{j=1}^N |\sin(\psi_j - \psi_i)| \leq N - 1$

5 Analyse von Synchronisationszuständen

keine der Kurven konstant erscheint. Die blaue und gelbe Kurve, welche die Phasendifferenz mit Metronom 2 verdeutlichen, weisen eine stärkere Änderung auf, als die orange Kurve. Dies ist mit der zuvor angesprochenen Ähnlichkeit der Frequenzen zu begründen, weil dort nur eine kleine Änderung in der Differenz vorliegt.

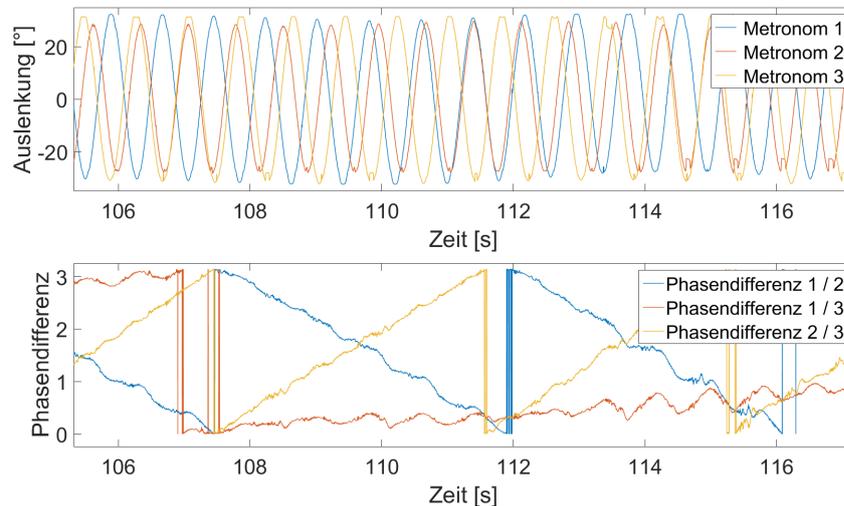


Abbildung 5.1: Darstellung der Auslenkung und Phasendifferenz (Versuch 1) - Desynchronisation

Die Sprünge in den Kurven des oberen Plots kommen durch fehlerhafte Bestimmungen der Auslenkung zu Stande. Diese werden durch die Kopplung hervorgerufen. Eine Manipulation der Auslenkung, gerade bei der Umkehrung der Schwingrichtung, verringert die Änderungsrate pro Zeitschritt, sodass diese Fehler entstehen können, weil das Gebiet nicht mehr korrekt zugewiesen werden kann. Bei voranschreitender Schwingung wird das Metronom erneut schneller, sodass wieder richtig gemessen wird. Ein weiterer Störfaktor ist die mechanische Beschränkung des Metronoms. Bei einer zu großen Auslenkung stößt das Pendel an die Begrenzung und der Magnet wackelt, sodass die gemessenen Spannungswerte der Sensoren nicht richtig interpretiert werden. Dennoch ist diese Ungenauigkeit nicht sonderlich relevant, da der Hilbert-Filter weiterhin korrekt die Phase bestimmt.

Wie im oberen Plot in Abbildung 5.2 zu erkennen ist, wurde anschließend das Metronom 3 angehalten. Dies hat herbeigeführt, dass sich die Metronome 1 & 2 synchronisiert haben. Diese Synchronisation ist im unteren Plot zu erkennen. Die Phasendifferenz dieser Metronome, welche durch die blaue Kurve dargestellt ist, schwingt im aufgeführten Zeitraum um einen festen Wert und das Kriterium der Synchronisation ist damit erfüllt. Die Phasendifferenzen der anderen Metronome wurden ausgeblendet. Sobald das dritte Metronom wieder angeregt wird und schwingt, verfällt das ganze System erneut in einen desynchronisierten Zustand. Ein ähnliches Verhalten, wie in Abbildung 5.1 gezeigt, wird durchweg angenommen.

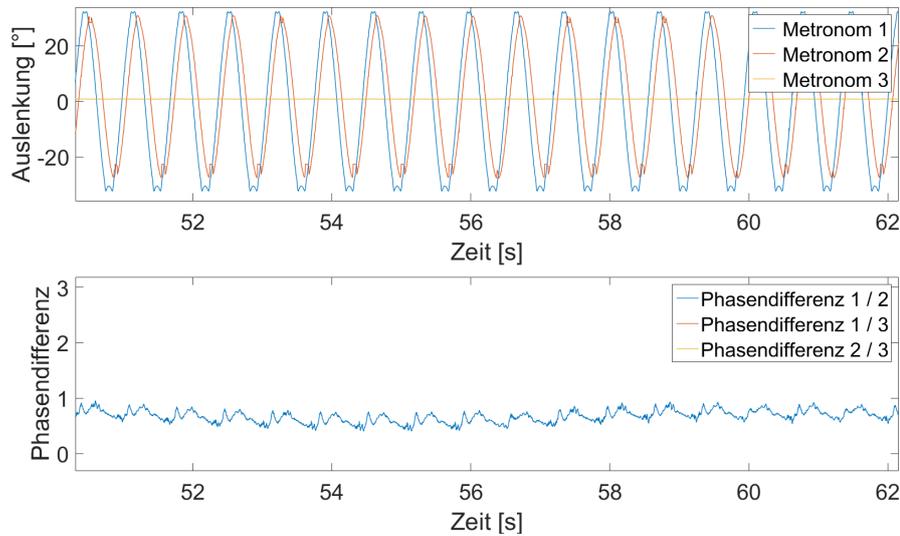


Abbildung 5.2: Darstellung der Auslenkung und Phasendifferenz (Versuch 1) - Synchronisation

5.2 Zweiter Versuch

Da aufgrund des relativ großen Frequenzunterschieds von Metronom 2 im ersten Versuch kein geordneter Zustand erreicht werden konnte, wenn alle Oszillatoren aktiv schwingen, wurde die Frequenz dieses Metronoms angeglichen. In Tabelle 5.2 sind die Frequenzen angegeben, mit denen die Metronome ohne eingeschaltete Kopplung schwingen. Die Abbildung 5.3 veranschaulicht anfänglich ein Schwingen der Metronome ohne aktivierte Kopplung². Für die Anschaulichkeit sind nur noch die Phasendifferenzen aufgeführt. Bei anfänglich keiner Kopplung bleibt der Phasenunterschied dementsprechend nicht konstant, oder schwingt nicht um einen festen Wert. Da die Frequenzunterschiede im Vergleich zum ersten Versuch geringer sind, ist die geradlinige Änderung dieser Kurven deutlich geringer bezüglich des zweiten Metronoms³.

Metronom:	Frequenz [Hertz]:
1	~ 1.27
2	~ 1.25
3	~ 1.26

Tabelle 5.2: Frequenzen der Metronome (Versuch 2) - ohne Kopplung

²Bis ungefähr Sekunde 45

³Blaue und gelbe Kurve aus den Abbildungen 5.1 und 5.3

5 Analyse von Synchronisationszuständen

Wird bei diesem Schwingungsverhalten mit ähnlichen Frequenzen der Oszillatoren die Kopplung aktiviert, so synchronisieren sich alle drei Metronome über einen gewissen Zeitraum. In Abbildung 5.3 wurde die Kopplung ungefähr bei Sekunde 45 eingeschaltet. Ab Sekunde 50 scheinen die Metronome bereits synchron zu schwingen. Der benötigte Zeitraum zur Synchronisation ist, je nach anfänglicher Phasendifferenz und Kopplungsstärke, unterschiedlich. Es ist in Abbildung 5.3 zu erkennen, dass die Phasendifferenzen zwischen Sekunde 50 und 85 um einen Wert schwingen und die drei Metronome daher als synchron schwingend angesehen werden können.

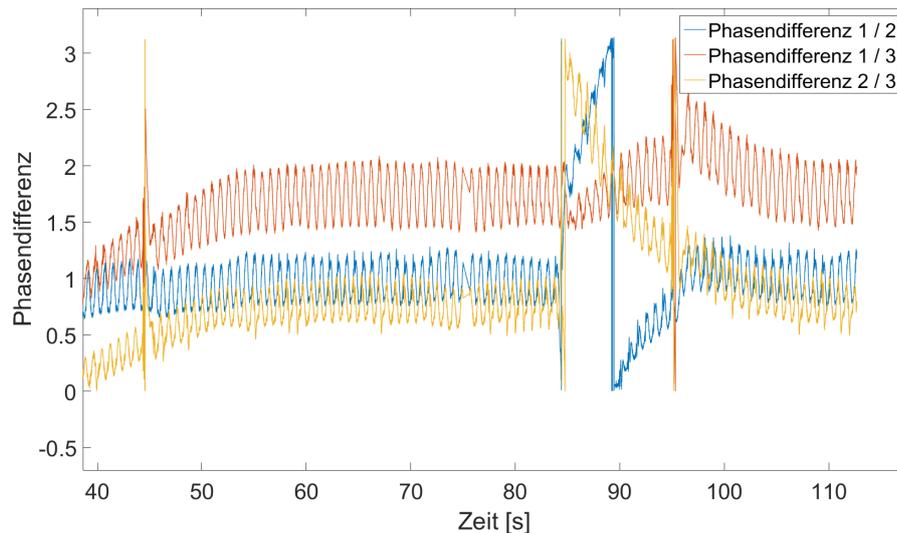


Abbildung 5.3: Darstellung der Phasendifferenzen (Versuch 2)

Bei Sekunde 85 ungefähr wurde der synchrone Zustand, bei eingeschalteter Kopplung, gestört und so wurde erneut ein desynchroner Zustand hervorgerufen. Ab Sekunde 100 ist eine erneute Synchronisation zu erkennen. Es lässt sich daraus schließen, dass das System aktiv auf Änderungen der Phasen reagiert und sich, zumindest mit dieser Konfiguration, ein synchroner Zustand automatisch bildet. Die jeweiligen Frequenzen bei eingeschalteter Kopplung sind in Tabelle 5.3 aufgeführt. Ein Zustand, in dem alle drei Oszillatoren synchron schwingen, ist demnach reproduzierbar. Jegliche Änderungen der Auslenkungen werden durch die Kopplung kompensiert und ein neuer synchroner Zustand ergibt sich.

Metronom:	Frequenz [Hertz]:
1	~ 1.25
2	~ 1.24
3	~ 1.24

Tabelle 5.3: Frequenzen der Metronome (Versuch 2) - Kopplung

6 Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit ist eine Software entwickelt worden, welche in MATLAB Simulink Realtime unter Echtzeit-Bedingungen die Auslenkung eines Metronoms bestimmt und mehrere dieser Oszillatoren, in Abhängigkeit der Phase, miteinander koppelt. Der erste Ansatz hierfür war ein direktes Mapping von den Spannungswerten der Hall-Sensoren auf die Auslenkung. Hierzu musste erkannt werden, wann sich eine Messung in einem messbaren Bereich eines Sensors befindet. Schließlich wurde aus einer Lookup-Tabelle die entsprechende Auslenkung geholt. Für die Zwischenräume, beziehungsweise die nicht gültigen Kurvenbereiche, liefert dieser Ansatz zu ungenaue Werte.

Der zweite Ansatz segmentiert eine aufgezeichnete, harmonische Schwingung in Gebiete, die durch die Extremstellen der Spannungswerte eingegrenzt werden. Für jedes Gebiet werden anschließend die benötigten Parameter für eine lineare Abbildung bestimmt. Im Echtzeit-Betrieb wird entschieden, in welchem Gebiet sich der Magnet am Pendel befindet. Hiernach kann anhand der relevanten Spannungswerte zweier Sensoren mit Hilfe einer linearen Abbildung auf die Auslenkung geschlossen werden. Eine schnelle und genaue Zuweisung der aktuellen Auslenkung ist so zu jedem Zeitpunkt möglich.

Dieser Ansatz wurde schließlich in MATLAB Simulink Realtime implementiert und eine Kopplung der Metronome realisiert. Die Kopplung basiert auf dem Kuramoto-Modell, welches die Oszillatoren anhand ihrer Phase koppelt. Durch die Hilbert-Transformation wird, nach Bestimmung der Auslenkung eines Metronoms, die aktuelle Phase bestimmt. Synchronisation kann, trotz unterschiedlicher Frequenz der Metronome, durch diese Kopplung hergestellt werden. Anhand von Spulen, welche sich unten im Metronom-Gehäuse befinden, kann die Auslenkung der Oszillatoren manipuliert werden.

Die in Kapitel 2.3 spezifizierten Anforderungen waren:

- Bestimmung der Auslenkung des Oszillators
- Realisierung der Kopplung
 - Variable Änderungen der Kopplungsparameter (Richtung, Stärke und Verzögerung)
- Umsetzung in Echtzeit

6 Zusammenfassung und Ausblick

Wie beschrieben konnten die Anforderungen 1 & 3 vollständig realisiert werden. Ausschließlich bei der Realisierung der Kopplung wurde die Bestimmung des Faktors zur Verzögerung durch den Hilbert-Filter im Rahmen dieser Arbeit nicht thematisiert.

Nach dieser Entwicklung wurde versucht, einen Chimära-Zustand mit drei Metronomen herbeizuführen. Es konnte jedoch nur beobachtet werden, wie sich alle Metronome synchronisierten, sofern die anfänglichen Frequenzen ähnlich waren. Weichen diese Frequenzen stark voneinander ab, so konnte kein synchrones Muster erkannt werden.

Ausblick

Ein Chimära-Zustand konnte bisher nicht mit drei Metronomen hergestellt werden. Ein Grund hierfür könnte eine nicht ausreichend schnelle Reaktion des Systems sein. Damit die Kopplung schneller auf Phasendifferenzen reagieren kann, könnte die Sample-Rate erhöht werden, sodass das Simulink-Modell öfters ausgeführt wird. Sollte die Sample-Rate verändert werden, dann ist es möglich, dass die eingestellten Parameter zur Auswertung¹ angepasst werden müssen, weil die Software sonst nicht korrekt auf die Auslenkung schließt. Des Weiteren könnten die Kopplungsparameter im Simulink-Block weiter verfeinert werden und deren Auswirkung für jedes Metronom individuell untersucht werden. Zusätzlich wäre es denkbar, die Anzahl der Metronome zu erhöhen. Eine Inbetriebnahme ist, bei ausreichenden Stecker-Anschlüssen, realisierbar.

Eine weitere Anpassung zur Steigerung der Genauigkeit zur Bestimmung der Auslenkung könnte eine Erweiterung der linearen Abbildung sein. Es wäre zum Beispiel denkbar, hier einen quadratischen, oder sogar kubischen, Ansatz zu verwenden. Besonders an den Rändern könnte dies zu einer verbesserten Genauigkeit führen. Außerdem kann eine erhöhte Anzahl an verwendeten Sensoren pro Metronom dazu führen, dass ein größerer Schwingungsbereich genauer erfasst werden kann.

Durch die Verwendung des Hilbert-Filters zur Phasenbestimmung ist eine gewisse Verzögerung vorhanden. Die momentane Realisierung der Kopplung berücksichtigt diese Verzögerung jedoch nicht. Damit die Oszillatoren genauer gekoppelt werden können, kann die Kopplung um diese Verzögerung erweitert werden. Eine Bestimmung des entsprechenden Parameters muss untersucht und verifiziert werden.

Die Ungleichmäßigkeiten in den Phasendifferenzen, welche um einen Grenzwert schwingen, könnten durch die nicht lineare Kraftwirkung eines Magnetfeldes begründet werden. Dies bedeutet, dass der Magnet am Pendel, bei gleichbleibender Leistung an den Spulen, stärker angezogen oder abgestoßen wird, je näher sich dieser an den Spulen befindet. Es wäre demnach wünschenswert, einen gleichmäßigen Krafteinfluss auf das Pendel zu haben, wenn die Phasendifferenz konstant bleibt. In Abhängigkeit zum Abstand des Magneten am Pendel zu den Spulen muss demnach die Leistung reduziert oder verstärkt werden.

¹Schwellwerte und Toleranzen

Neben diesen Verbesserungen der Funktionalität, könnte die Visualisierung der Phasendifferenz, beziehungsweise der Frequenzen, mit sogenannten *Lissajous-Figuren* geschehen. Diese erzeugen eine Grafik, in der das Verhältnis der Signale zueinander erkennbar ist. Die Gleichungen (6.1) und (6.2) geben die X- und Y-Koordinaten der entstehenden Grafik an [18].

$$x(t) = y_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t - \varphi_1) \quad (6.1)$$

$$y(t) = y_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t - \varphi_2) \quad (6.2)$$

Beispielhafte *Lissajous-Figuren* sind in Abbildung 6.1 gezeigt. Die entstehenden Kurven sind sowohl von der Phasendifferenz, als auch von ihrem $n : m$ Verhältnis der Synchronisation, abhängig. Die Zeilen geben in dieser Abbildung unterschiedlichen Phasendifferenzen in Grad an. In den Spalten sind die Grafiken für verschiedene Verhältnisse der Frequenzen zu erkennen. Falls kein synchrones Verhalten vorliegt, dann entsteht keine geschlossene *Lissajous-Figur*.

	Frequenzverhältnis		
	1:1	1:2	1:3
0°			
45°			
90°			
135°			
180°			

Abbildung 6.1: Lissajous-Figuren synchroner Signale in Abhängigkeit ihres $n : m$ Verhalten der Frequenzen [19]

Literatur

- [1] *Systeme der Elektronik*.
http://www.fz-juelich.de/portal/DE/Institute/ZentralinstitutEngineering/_node.html, 12.06.2018.
- [2] *Systeme der Elektronik (ZEA-2)*.
https://www.fz-juelich.de/zea/zea-2/DE/Home/home_node.html, 16.07.2018.
- [3] Michael Rosenblum und Jürgen Kurths Ulrich Parlitz Arkady Pikovsky. *Schwingungen im Gleichtakt*. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2006.
- [4] G. Mayer-Kress H. Kantz J. Kurths. *Nonlinear Analysis of Physiological Data*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.
- [5] *Chimära*. <https://de.wikipedia.org/wiki/Chimära>, 12.06.2018.
- [6] *Die Chimäre im Oszillator-Netzwerk*.
http://www.pro-physik.de/details/news/4915661/Die_Chimaere_im_Oszillator-Netzwerk.html. Jan. 2016.
- [7] H. Araki Kuramoto Yoshiki. *Lecture Notes in Physics, International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*. New York: Springer-Verlag, 1975, S. 420.
- [8] Adrian Klein. *Kontaktlose Messung und Kopplung mechanischer Oszillatoren zur Analyse von Chimära-Zuständen*. Jülich, 2016.
- [9] *NI PCI-6071E (vorherige Generation)*.
<http://sine.ni.com/nips/cds/view/p/lang/de/nid/1042>, 17.07.2018.
- [10] *PCI-6713*.
<http://www.ni.com/de-de/support/model.pci-6713.html>, 06.07.2018.
- [11] *Das Kalman-Filter einfach erklärt*.
<http://www.cbcity.de/das-kalman-filter-einfach-erkluert-teil-1>, 25.06.2018.
- [12] *Hilbert Transform*.
<https://www.wavemetrics.com/products/igorpro/dataanalysis/signalprocessing/hilberttransform.htm>, 30.06.2018.
- [13] *Analytisches Signal*.
https://de.wikipedia.org/wiki/Analytisches_Signal, 30.06.2018.

Literatur

- [14] Margaret H. Wright Paul E. Wright Jeffrey C. Lagarisa James A. Reeds. *CONVERGENCE PROPERTIES OF THE NELDER-MEAD SIMPLEX METHOD IN LOW DIMENSIONS*. SIAM J. OPTIM, 1998, S. 112–147.
- [15] *Simulink Real-Time - Simulink - MATLAB & Simulink - MathWorks*.
<https://de.mathworks.com/products/simulink-real-time.html>, 16.06.2018.
- [16] David Ernesto Troncoso Romero und Gordana Jovanovic Dolecek. *Digital FIR Hilbert Transformers: Fundamentals and Efficient Design Methods*.
- [17] *Allpassfilter*.
<https://de.wikipedia.org/wiki/Allpassfilter>, 02.07.2018.
- [18] *Lissajous-Figuren*.
<http://www.mathematische-basteleien.de/lissajous.html>, 13.07.2018.
- [19] *Lissajous-Figuren*.
<https://www.spektrum.de/lexikon/physik/lissajous-figuren/9114>, 26.07.2018.

Jül-4415 • Oktober 2018
ISSN 0944-2952

Mitglied der Helmholtz-Gemeinschaft

