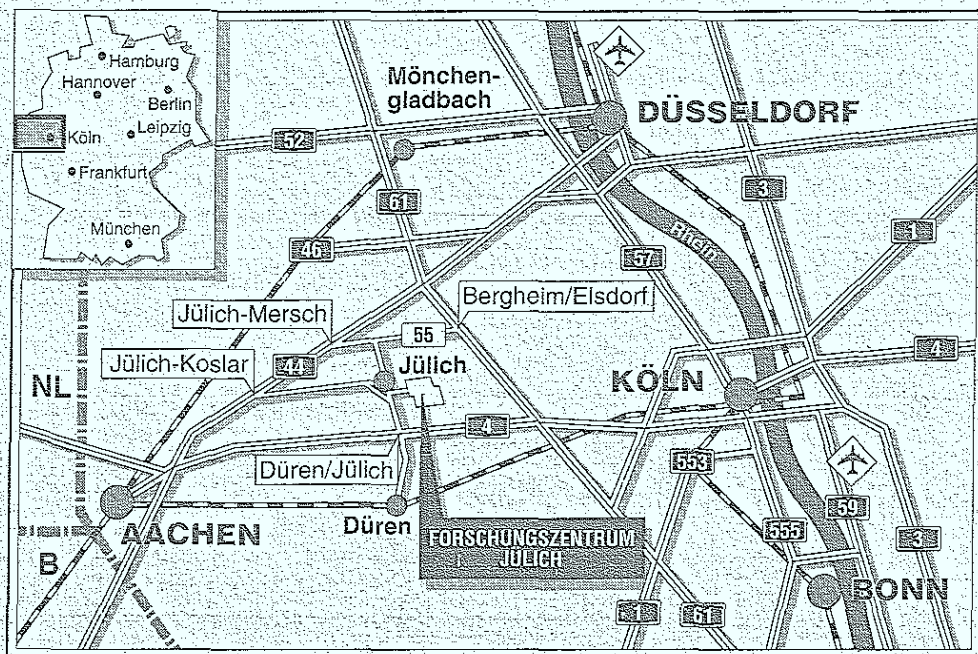


Institut für Festkörperforschung

**Qualitatives Verständnis und
quantitative Behandlung
nichtlinearer getriebener
Oszillatoren vom Duffing Typ**

Klaus Schmidt



Berichte des Forschungszentrums Jülich ; 2861

ISSN 0944-2952

Institut für Festkörperforschung Jülich-2861

D 38 (Diss. Universität Köln)

Zu beziehen durch: Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek

D-52425 Jülich · Bundesrepublik Deutschland

Telefon: 024 61 / 61-61 02 · Telefax: 024 61 / 61-61 03 · Telex: 833 556-70 kfa d

Qualitatives Verständnis und quantitative Behandlung nichtlinearer getriebener Oszillatoren vom Duffing Typ

Klaus Schmidt¹

¹ Firma EDS, D-65403 Rüsselsheim

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Übersicht	3
Übersicht über die Kapitel	11
1 Duffing Gleichung mit Rechteck-Anregung	13
1.1 Transformation in ein hamiltonsches System	15
1.2 Wirkungs-Winkel-Variablen	17
1.3 Herleitung der Poincaré-Abbildung	20
1.4 Numerik	22
1.5 Globales Verhalten, Phasendiagramme	25
2 Der Referenzzyklus x_0	33
2.1 Transformation der Duffing-Gleichung in ein hamiltonsches System	33
2.2 Der Mechanismus des Referenzzyklus	35
2.3 Asymptotik für kleine Ω	37
2.3.1 Numerik	40
2.4 Der Orbit $x_0(t)$ für endliche r und Ω	41
2.4.1 Die LEVIN Transformation	43
2.4.2 Numerik	44
3 Die Poincaré-Abbildung der allgemeinen Duffing Gleichung	50
3.1 Bestimmung der Abbildungsformeln	50
3.2 Adiabaticität und Homogenität des Systems	54
3.3 Bestimmung der universellen Konstanten	57
3.4 Diskussion der Abbildungsformeln	60
3.5 Phasendiagramme	60
4 Die Poincaré-Abbildung für Parameterwerte außerhalb der Asymptotik	70
4.1 Bestimmung der Abbildungs-Koeffizienten	71
4.2 Numerische Ergebnisse	74

5 Zeitabhängige Wirkungs-Winkel-Transformation	82
5.1 Formulierung der zeitabhängigen Transformation	83
5.2 Bestimmung der Transformation WW_{ξ}	85
5.3 Bestimmung der Transformation WW_e	88
Zusammenfassung	90
Anhang	92
1 Die Zeitentwicklung des Winkels im homogenen Fall	92
2 Eich-tabelle	94

Einleitung und Übersicht

Viele schwingende Systeme (mechanische Maschinen, elektrische Schwingkreise...) lassen sich erfolgreich mit dem harmonischen Oszillator

$$\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_0^2 x = a \sin \Omega t$$

beschreiben. Seine Lösung

$$x(t) = A \sin(\Omega t + \phi) + B e^{-rt} \sin(\omega t + \chi)$$

mit der Eigenfrequenz

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - r^2} \quad (0.1)$$

ist analytisch gegeben, wodurch seine Dynamik vollständig bekannt ist. Für alle Parameterwerte und alle Anfangsbedingungen, welche die Größen A , B , ϕ und χ festlegen, läuft das System in einen Grenzyklus dessen Frequenz gleich der Anregungsfrequenz Ω ist. Liegt die Anfangsbedingung nicht auf dem Grenzyklus, stirbt die Abweichung exponentiell mit dem Faktor e^{-rt} aus. Während dieses Einschwingvorgangs besteht die Bewegung aus der linearen Überlagerung zweier Schwingungen mit der Eigenfrequenz ω bzw. der Anregungsfrequenz Ω .

Diese Beschreibung setzt voraus, daß –wenn man ein mechanisches System vor Augen hat– die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist, was dazu führt, daß das System eine von der Amplitude unabhängige Eigenfrequenz besitzt. Diese Annahme ist in der Realität oft nicht erfüllt, die rücktreibende Kraft ist dann eine nichtlineare Funktion der Auslenkung.

In diesem Fall kann die Gleichung nicht mehr analytisch gelöst werden. Das System besitzt keine feste Eigenfrequenz mehr und die Lösung kann ein sehr komplexes Verhalten aufweisen.

Im Rahmen technischer Anwendungen wurde dieses Verhalten erstmals von dem Berliner Ingenieur GEORG DUFFING am Anfang des 20. Jahrhunderts studiert [1], der sich u.a. mit schnell laufenden Generatoren beschäftigt hat:

Jene synchronen Drehstrommaschinen waren durch Gasmaschinen angetrieben. Die Frequenz der Antriebsimpulse und die sogenannte Eigenfrequenz waren genügend auseinander, so daß nur mäßige Pendelungen auftraten, wenn die Antriebsmaschinen im Beharrungszustand waren. Wurde dieser Beharrungszustand jedoch nur durch einige wenige heftigere Zündungen gestört, so wurden, auch nachdem die Verbrennung wieder regelmäßig geworden war, die Pendelungen immer noch größer und größer, so daß die Maschinen schließlich außer Tritt kamen...

Duffing glaubte, das Problem analog zum reibungsfreien mathematischen Pendel, mit elliptischen Funktionen lösen zu können, hatte hierbei aber keinen Erfolg. Er beschrieb die von ihm gefundenen Phänomene, konnte sie aber nicht mit der Gleichung in Beziehung setzen und somit keine Voraussagen über das Verhalten des Systems bei bestimmten Parametern machen.

Diese Phänomene treten bei allen Oszillatoren mit nichtlinearer Rückstellkraft,¹ linearer Reibungskraft² und periodischer Anregung auf. *Das Verständnis des Langzeitverhaltens in Abhängigkeit der Parameter dieser Klasse von Oszillatoren ist das Thema der vorliegenden Arbeit.*

Wir betrachten zunächst ein einfaches System dieser Klasse, bei dem die rücktreibende Kraft eine Potenzfunktion mit der Potenz q ist und die Anregungskraft sinusförmig ist:

$$\ddot{x} + 2r\dot{x} + x^q = \sin \Omega t \quad (0.2)$$

Die beiden einzigen Parameter sind die Reibungskonstante r und die Anregungsfrequenz Ω , bei festem Potentialtyp. Alle weiteren möglichen Vorfaktoren sind durch geeignetes Umskalieren eliminiert worden.

Der Ausdruck x^q gilt so für ungerade $q > 1$, für beliebige $q > 1$ müßte er durch $\text{sgn}(x)|x|^q$ ersetzt werden, um sicherzustellen, daß die Kraft immer rücktreibend ist (z.B. auch bei $q = 2$) und für alle x definiert ist (z.B. $q = 1.1$, $x < 0$). Der Einfachheit wegen wird im folgenden immer x^q geschrieben, alle Überlegungen gelten aber für beliebige $q > 1$.

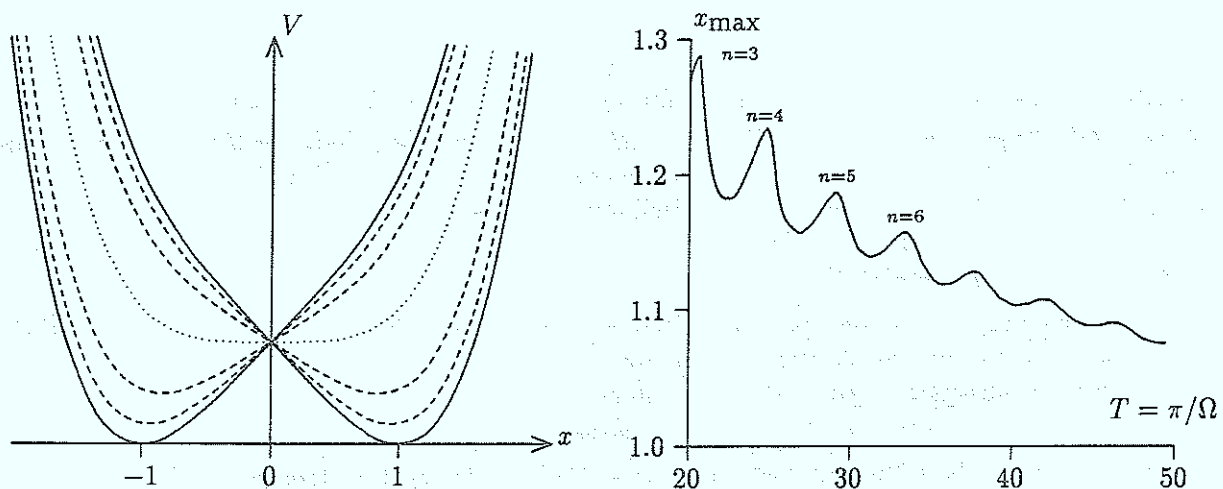


Abbildung 0.1: Links: Gesamtpotential der Duffing-Gleichung zu verschiedenen Zeiten. Die durchgezogenen Linien entsprechen den Maximalwerten der Anregungskraft, bei der gepunkteten Linie ist die Anregungskraft Null.

Rechts: Nichtlineare Resonanzen. Die maximale Auslenkung in x -Richtung in Abhängigkeit der Umlaufzeit der anregenden Kraft $T = \pi/\Omega$ bei festem r . Bei jedem weiteren Maximum führt das System eine Oszillation mehr um das Minimum links bzw. rechts aus. Das größte Maximum der "linearen" Resonanz liegt im Bereich $T = 0 \dots 20$, dort folgt das System der Anregungsfrequenz.

Diese Duffing-Gleichung³ zeigt folgende Phänomene gegenüber dem harmonischen Oszillator:

¹Eine Rückstellkraft wirkt immer der Auslenkung entgegen, d.h. $V''(x, t) > 0$. Wir betrachten also nur Potentiale mit genau einem Minimum.

²Systeme mit nichtlinearer Reibungskraft –wie etwa der van-der-Pol Oszillator– bilden eine eigene Klasse, die in dieser Arbeit nicht betrachtet wird.

³DUFFING betrachtete verschiedene Gleichungen dieses Typs, wir bezeichnen (0.2) als Duffing-Gleichung.

Nichtlineare Resonanzen Beim harmonischen Oszillator ist die Amplitude A der Schwingung in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz eine Funktion vom Typ $((\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4r^2\Omega^2)^{-1/2}$, also eine Funktion mit *einem* Maximum; die zugehörige Frequenz heißt Resonanzfrequenz.

Im nichtlinearen Fall besitzt diese Kurve viele Maxima (*nichtlineare Resonanzen*), die mit abnehmender Anregungsfrequenz bei konstantem r immer flacher werden (Abbildung 0.1, [13, Reso]).

Um das Auftreten dieser Resonanzen zu verstehen, betrachten wir die Differentialgleichung als Modell eines Massenpunktes, der sich im zeitabhängigen Potential der Duffing-Gleichung

$$V(x, t) = \frac{1}{q+1} x^{q+1} - x \sin(\Omega t)$$

bewegt (Abbildung 0.1). Wenn die Schwingung dieses Punktes im Potentialtopf (für die jeweilige Amplitude) deutlich schneller ist als die Bewegung des Potentialminimums, so wird er in den Zeitintervallen um die Maximalwerte von $\sin \Omega t$, an denen sich das Potential am langsamsten ändert, mehrere Schwingungen ausführen, bevor das Potentialminimum sich wieder auf die andere Seite bewegt hat. Je nach Anregungsfrequenz besitzt er beim Nulldurchgang des Potentials eine bestimmte Phasenlage, was zu einer neuen Anfangsbedingung für die Schwingungen auf der anderen Seite führt. Das Zusammenwirken dieser beiden Bewegungsmoden führt so zu einer Gesamtschwingung unterschiedlicher Amplitude.

Die Differentialgleichung ist aufgrund ihrer Punktsymmetrie der Halbperioden invariant gegenüber der Transformation $(x, \dot{x}, t) \rightarrow (-x, -\dot{x}, t + \pi/\Omega)$. Die relevante Periodendauer, die wir ab jetzt immer betrachten werden ist daher

$$T := \pi/\Omega,$$

die Zeit, in der sich das Potentialminimum auf jeweils einer Seite bewegt.

Die Resonanzkurve in Abbildung 0.1 kann in Frequenzintervalle zerlegt werden, in denen das System n Schwingungen während jeder Halbperiode T ausführt. In jedem Intervall liegt ein Maximum der Resonanzamplitude, die n -te nichtlineare Resonanz.

In Abbildung 0.2, oben links führt das System 3 Schwingungen auf jeder Seite aus, es gehört also in das Intervall $n = 3$, das um das erste Maximum in Abbildung 0.1 liegt. Abbildung 0.2, oben rechts gehört zum Intervall $n = 4$.

Bifurkationen Bei gewissen Parameterwerten schließt sich die Bahnkurve nicht nach einer Anregungsperiode, sondern erst nach M Anregungsperioden, die im wesentlichen dem Feigenbaumszenario folgen, d.h. $M = 2^m$. Durch eine geeignete Änderung der Parameter kann aus einem Orbit der sich nach einer Halbperiode schließt ($m = 0$) ein Orbit werden, der sich erst nach zwei ($m = 1$)⁴ und bei einer weiteren Änderung der Parameter nach 4, 8, 16, ... ($m = 2, 3, 4, \dots$) Anregungsperioden schließt (Abbildung 0.2, unten links).

Chaos Diese Bifurkationen liegen für höhere m immer dichter im Parameterraum bis zu einem Häufungspunkt mit $m = \infty$. Wenn dieser überschritten wird, verläuft die Bewegung nicht mehr periodisch, sondern chaotisch (Abbildung 0.2 unten rechts) mit periodischen Fenstern (Feigenbaumszenario).

⁴Diese erste Bifurkation ist die Symmetrietrübbifurkation bei der Betrachtung voller Anregungsperioden $2T = 2\pi/\Omega$. Wurde die Symmetrie des Systems bereits genutzt, um T als Periode zu definieren, ist diese erste Bifurkation eine Periodenverdopplung.

Koexistierende Attraktoren Nach der ersten Bifurkation ist es möglich, daß das Langzeitverhalten nicht nur von den Parametern, sondern auch von den Anfangsbedingungen abhängt. Je nach Wahl der Anfangsbedingung kann die Bewegung in unterschiedlichen Attraktoren enden (während beim harmonischen Oszillator der Einfluß der Anfangsbedingung exponentiell abnimmt und die Bewegung für *jede* Anfangsbedingung im selben Grenzyklus endet).

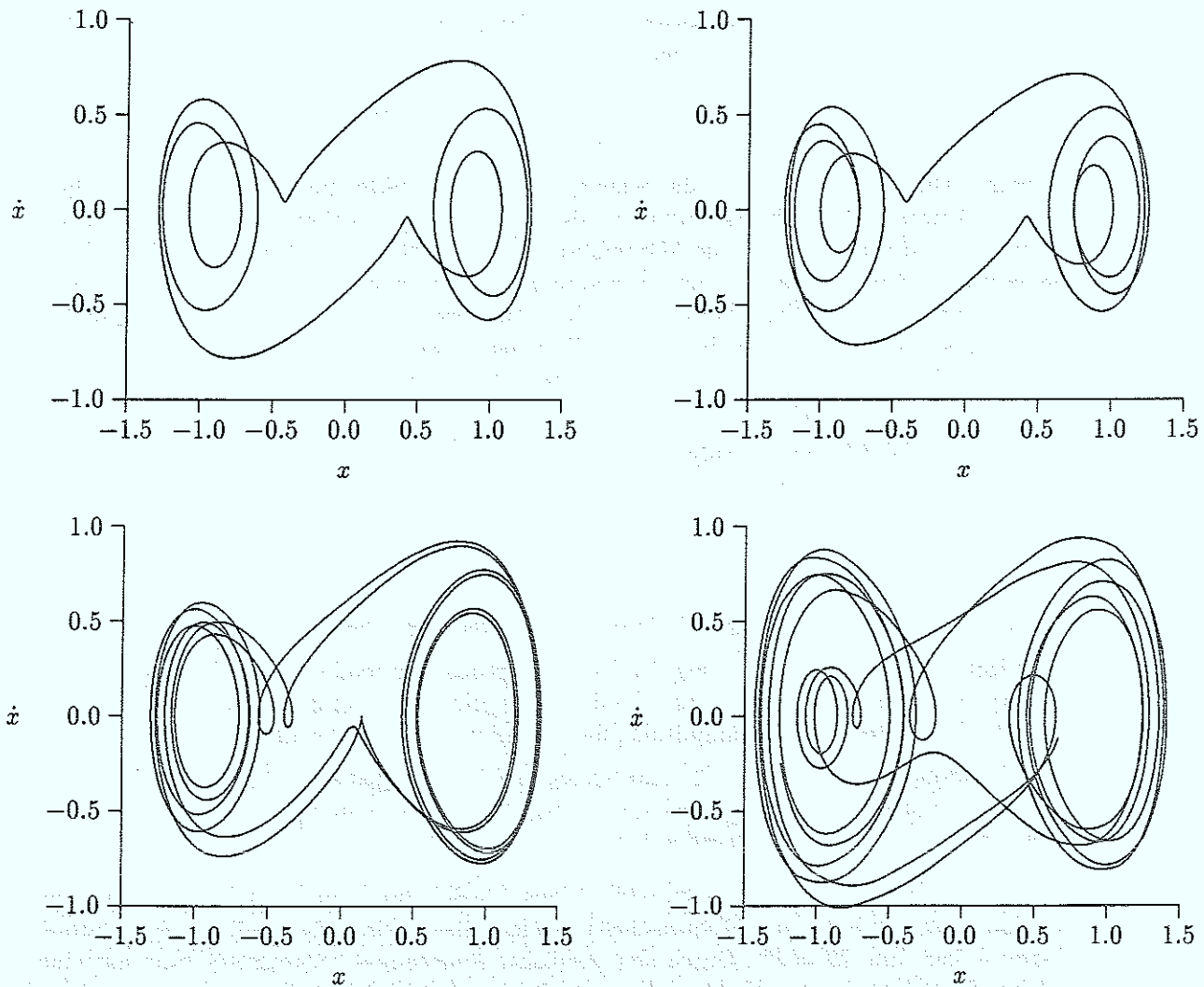


Abbildung 0.2: Phasenraumportraits für 4 verschiedene Parameterwerte. Oben links: $n = 3$, $m = 0$, Oben rechts: Derselbe Zustand wie oben links, jedoch die nächste Resonanz. $n = 4$, $m = 0$. Unten links: Dieselbe Resonanz wie oben links, jedoch nach der zweiten Bifurkation (Symmetriebruch- und Periodenverdopplungs-Bifurkation). $n = 3$, $m = 1$. Unten rechts: Chaos. $n = 3$, m ist nicht definiert.

DUFFING stellte fest, daß die von ihm beobachteten Phänomene (wobei ihm die Begriffe Bifurkation und Chaos noch nicht bekannt waren) in einem Parameterbereich auftraten, in dem die Anregungsfrequenz Ω kleiner als die Frequenz der Schwingung für die jeweilige Amplitude ist. Die Eigenfrequenz der von

ihm betrachteten "Drehstrommaschine" war höher als die der Antriebsimpulse der "Gasmaschine". Im umgekehrten Fall großer Anregungsfrequenzen folgt das System der Anregung mit abnehmender Amplitude bei zunehmender Frequenz. Darüber hinaus darf die Reibungskraft die Eigenschwingungen nicht zu stark dämpfen, um überhaupt Eigenschwingungen zu ermöglichen.

Der uns interessierende Parameterbereich liegt also bei

$$r < 1 < T, \quad (0.3)$$

wobei die Frequenzen des nicht getriebenen Systems (d.h. ohne den Term $\sin \Omega t$ im Potential) und die zugehörigen Umlaufzeiten für die im getriebenen System betrachteten Amplituden von der Größenordnung 1 sind.

Neben den Untersuchungen von DUFFING wurden Methoden zur sukzessiven Approximation der Lösungen entwickelt [5]. Voraussagen, bei welchen Parametern die einzelnen Phänomene auftreten, konnten damit jedoch nicht erzielt werden.

Durch den Einsatz leistungsfähiger Computer konnten Lösungen für viele Parameterwerte numerisch berechnet, und so empirische Phasendiagramme angefertigt werden [3, 7], d.h. "Landkarten" des Parameterraums, auf denen die Bereiche der einzelnen Phänomene eingezeichnet sind. In Abbildung 0.3, rechts ist ein solches Phasendiagramm für die Gleichung $\ddot{x} + 0.2\dot{x} + x + x^3 = f \cos \omega t$ gezeigt. Dieses Phasendiagramm ist typisch für die betrachtete Systemklasse, Abbildung 0.3, links zeigt schematisch die wesentlichen Eigenschaften: Die dicken Linien trennen Streifen ab, die man unterschiedlichen Resonanzen ($n = \text{konst.}$) zuordnen kann, (im rechten Teilbild nicht gezeigt). Beim Überschreiten der (dünnen) Linien finden Bifurkationen statt. Die Bifurkationslinien werden aufgrund ihrer Form auch "Resonanzungen" genannt. Die Punkte a, b, c, d geben die Parameter der Zyklen aus Abbildung 0.2 an (zwischen c und d ist die Bifurkationskaskade nicht weiter aufgeschlüsselt). Das Ziel, den Mechanismus für die oben beschriebenen Phänomene zu verstehen und ihr Auftreten in Abhängigkeit der Parameter quantitativ vorauszusagen, wurde durch jene Untersuchungen nicht erreicht. Die offensichtliche sehr exakte geometrische Ähnlichkeit verschiedener Zungen der Phasendiagramme hat den ursprünglichen Anstoß für die vorliegende Untersuchung gegeben.

Der bis dahin vorliegende Kenntnisstand, auf dem diese Arbeit aufbaut, läßt sich in folgende Punkte zusammenfassen:

- Bei Parametern außerhalb des Bereichs $r < 1 < T$ ist das Verhalten unkompliziert, das System folgt hier im wesentlichen der Anregungskraft. Der Fall $T \approx 1$ ist von linearer Resonanz geprägt und ist gesondert zu behandeln. Im interessanten Bereich $r < 1 < T$ treten die oben beschriebenen Phänomene auf.
- Die Gebiete nichtlinearer Resonanzen (d.h. $n = \text{konst.}$) sind streifenförmige Bereiche im Parameterraum. Innerhalb der Streifen verlaufen Bifurkationslinien, die verschiedene Bifurkationsbereiche (d.h. $m = \text{konst.}$) voneinander trennen. Je weiter oben innerhalb einer Zunge der Abbildung 0.3 die betrachteten Parameterpunkte liegen, desto höher ist der Bifurkationszustand m , bis bei $m = \infty$ chaotische Bewegung und darüber hinaus die bekannten Phänomene des Feigenbaumszenarios einsetzen.

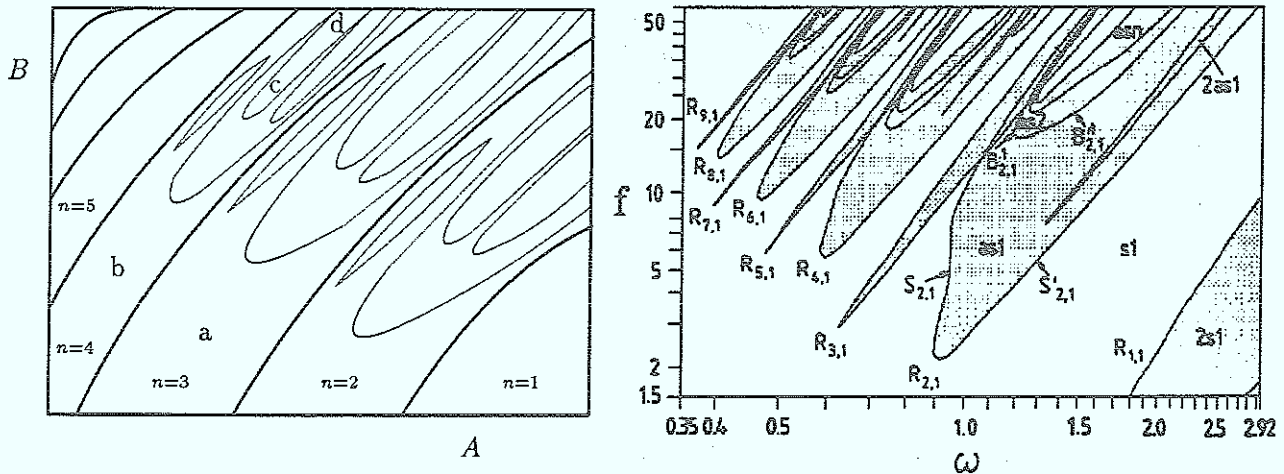


Abbildung 0.3: Rechts: Beispiel für ein numerisch bestimmtes Phasendiagramm (aus [3], dort sind auch die hier nicht interessierenden Bezeichnungen erklärt), das typisch für die betrachteten Oszillatoren ist. Links: Typisches Phasendiagramm (schematisch).

- Geht man zu Resonanzstreifen mit immer höheren Werten n , werden im Parameterraum benachbarte Zungen immer ähnlicher. Auch die Unterschiede zwischen den Orbits, die zu korrespondierenden⁵ Punkten in benachbarten Zungen gehören, werden immer geringer.
- Innerhalb eines Streifens zu festem n (Abbildung 0.3), nimmt nach rechts oben hin die Anzahl der koexistierenden Attraktoren zu. Um das Bifurkationsdiagramm vollständig zu beschreiben, müßte dann eine immer größer werdende Anzahl übereinander liegender Bätter des Phasendiagramms verwendet werden. Auf dieses Phänomen wird in der vorliegenden Arbeit nicht explizit eingegangen.
- Die so beschriebenen Phänomene treffen für eine große, Klasse nichtlinearer Oszillatoren mit periodischer Anregung und überall rücktreibender Kraft zu. Diese Oszillatoren besitzen ähnliche Phasendiagramme, die Resonanzzungen haben lediglich etwas unterschiedliche Formen.

Bevor nun ein Überblick über den Aufbau dieser Arbeit gegeben wird, betrachten wir grob den Mechanismus der nichtlinearen Resonanzen. Wir nehmen vereinfachend an, das Minimum des Potentials (Abbildung 0.1) ruhe links oder rechts während einer halben Anregungsperiode, um dann instantan zur jeweils anderen Seite zu kippen. Zusätzlich ignorieren wir die Abhängigkeit der Schwingungsfrequenz ω von der Amplitude (harmonischer Oszillator). Dann wird die Anzahl der Umläufe n ausschließlich von dem Verhältnis der dafür zur Verfügung stehenden Zeit $T = \pi/\Omega$ in der das Potentialminimum auf einer Seite ruht, und der Zeit für eine Eigenschwingung π/ω bestimmt. Die Schwingungsamplitude hängt dabei neben der Stärke der Reibung r , vom Zustand am Anfang der Halbperiode T ab, der sich – als Funktion von T – aus dem Zustand am Ende der vorherigen Halbperiode ergibt. In diesem Bild wäre das r - T -Phasendiagramm perfekt periodisch, alle Resonanzstreifen wären identisch, hätten die Breite π/ω und verliefen im wesentlichen parallel zur r -Achse.

⁵Dieser Begriff ist bis jetzt nur anschaulich – beim Betrachten des Phasendiagramms – klar: Durch eine geeignete Transformation können die einzelnen Resonanzzungen so entzerrt werden, daß sie alle dieselbe Form besitzen. Die Punkte, die dann an der gleichen Stelle in unterschiedlichen Zungen liegen, korrespondieren. Die Orbits zweier korrespondierender Parameterpunkte besitzen gleiche Eigenschaften (das wird später genauer definiert), bis auf die Anzahl der Umläufe.

Der entscheidende Punkt ist, daß auch im allgemeinen Fall die Resonanzungen eine quantitative geometrische Ähnlichkeit aufweisen.

Es ist nun weniger interessant *einzelne* Resonanzungen zu untersuchen, als ihre *allgemeine Form im Parameterraum* zu kennen und *korrespondierende Punkte* in den einzelnen Zungen zu identifizieren. So kann das gesamte Phasendiagramm durch die charakteristische Struktur der einzelnen Resonanzungen beschrieben werden.

Mit anderen Worten besteht das Problem darin, die Form der Resonanzungen in Abhängigkeit der Systemparameter (r, Ω) zu finden. Mit dieser Information können bei gegebenen Parametern (r, Ω) die Attraktoreigenschaften bestimmt werden, ohne die Differentialgleichung zu integrieren. Oder –unter Nutzung dieser Information in umgekehrter Richtung– die Systemparameter für ein gewünschtes Verhalten können berechnet werden, um z.B. Chaos oder Resonanzen zu verhindern oder aufzusuchen. Auf diese Weise hätte DUFFING seine Maschinen gezielt verbessern können.

Zur Realisierung dieser Zielsetzung ist unter anderem das Konzept der Poincaré-Abbildung (siehe [6] für eine Einführung) entscheidend: Statt einen gesamten Zyklus als Lösung der Differentialgleichung zu untersuchen, betrachten wir die Abbildung

$$(x(t_0), \dot{x}(t_0)) \xrightarrow{\mathcal{P}} (x(t_0 + T), \dot{x}(t_0 + T)), \quad (0.4)$$

die für die beschriebenen Systeme eine kompakte und im wesentlichen komplette Beschreibung der Dynamik darstellt (unter Benutzung der Periodizität und Inversionssymmetrie von 0.2 kann dem Phasenraum $(x, \dot{x}, t)$ die Topologie $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{S}$ zugeschrieben werden). Die Integration über eine Halbperiode T entspricht dann einer Iteration

$$\underline{x}_{n+1} = \mathcal{P}(\underline{x}_n).$$

Für die Beschreibung des globalen Verhaltens ist es sinnvoll, sich auf einen bestimmten (zunächst beliebigen) Referenzzeitpunkt t_0 festzulegen, um die Untersuchung zu vereinfachen. Wir suchen also die Poincaré-Abbildung des Systems, die genau wie die Differentialgleichung zwei Parameter (r, Ω) besitzt, und deren Iteration die Lösung der Differentialgleichung über eine Halbperiode zusammenfaßt. Ein Grenzzyklus der Differentialgleichung entspricht einem anziehenden Fixpunkt der Poincaré-Abbildung, der nach der Symmetriebrechung zu einem Zweierzyklus wird, bei der nächsten Periodenverdopplung dann zu einem Viererzyklus usw.

In dieser Arbeit wird eine analytische Methode zur Bestimmung der Poincaré-Abbildung entwickelt. Sie liefert die dem Problem angemessene analytische Form mit geeignet zu bestimmenden numerischen Konstanten, sowie die geeigneten Koordinaten des Parameterraums, die den Zusammenhang zu den Differentialgleichungs-Parametern herstellt. Die Betrachtung der Abbildung 0.3 läßt hier schon plausibel erscheinen, daß dies Koordinaten sein sollten, in denen das Phasendiagramm periodisch ist.

Das Vorgehen beruht auf folgender Idee: Wie zuvor beschrieben, werden sowohl die Resonanzungen im Parameterraum, als auch die Zyklen der zugehörigen Lösungen für wachsende n immer ähnlicher. Bei Benutzung der Koordinaten $(x, \dot{x})$ und der Parameter (r, Ω) ist diese Information schwer auszuwerten (die numerische Integration wird im Gegenteil immer aufwendiger), da diese Größen, wie wir sehen werden, dem physikalischen Verhalten nicht optimal angepaßt sind. Die Grundidee besteht in der Formulierung der Dynamik in Wirkungs-Winkel-Variablen (I, φ) und der Verwendung eines neuen Parametersatzes (α, β) (statt der alten (r, Ω)), sowie der Betrachtung des Systems im asymptotischen Bereich $n \rightarrow \infty$. Dort ändert sich die antreibende Kraft beliebig langsam und das System führt in jeder Halbperiode beliebig viele Eigenschwingungen durch, wobei es bei jeder einzelnen nur wenig Energie verliert. Beschreibt man die Lösung in diesem Bereich in Wirkungs-Winkel-Koordinaten, ergibt sich eine *eindimensionale* Poincaré-Abbildung. Eine Entwicklung um diesen asymptotischen Bereich (die, wie wir sehen werden, einer

Entwicklung nach dem Parameter e^{-rT} entspricht), liefert darüber hinaus die dem Problem angepaßten Parameterkoordinaten (α, β) , mit der Umrechnung $(\alpha, \beta) \leftrightarrow (r, \Omega)$, sowie Zusatzterme höherer Ordnung in e^{-rT} , welche die dann schwach zweidimensionale Poincaré-Abbildung für Zungen mit endlichem, nicht zu kleinem n auf übersichtliche Weise parametrisieren.

Diese Poincaré-Abbildung hat die Form

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \alpha(r, \Omega) + \beta(r, \Omega) \cos \varphi_n + o(e^{-2rT}) \\ I_{n+1} &= I_n + f(\varphi_n) e^{-rT} + o(e^{-2rT}), \end{aligned} \quad (0.5)$$

mit folgenden Eigenschaften:

- Die Variablen I und φ sind der Zeitentwicklung des Systems angepaßt, in ihnen reduziert sich die Poincaré Abbildung im asymptotischen Limes auf eine Dimension (die Koordinate I wirkt in erster Ordnung e^{-rT} nicht auf φ zurück). Deshalb können sie als "natürliche" Variablen bezeichnet werden. In diesem Sinn erhalten wir mit α und β auch "natürliche" *Parameter*, in denen die Phasendiagramme darzustellen sind.
- Durch Invertieren von $\alpha(r, \Omega), \beta(r, \Omega)$ erhalten wir die Funktionen $r(\alpha, \beta), \Omega(\alpha, \beta)$ und damit auch die Differentialgleichung in diesen neuen Parametern.
- Das Phasendiagramm in den neuen Parameterkoordinaten (α, β) ist 2π -periodisch in α . Jeder 2π -Streifen im Parameterraum entspricht einer Resonanzzunge. Auf diese Weise sind korrespondierende Punkte der verschiedenen Zungen bestimmt. Die eindimensionale Poincaré-Abbildung 0.5 beschreibt also die asymptotische Gestalt der Resonanzzunge, die Funktionen $\alpha(r, \Omega), \beta(r, \Omega)$ liefern die Information, wie alle Resonanzzungen der Differentialgleichung auf diese abzubilden sind. Genauer: Die Poincaré-Abbildung beschreibt das vollständige Bifurkationsdiagramm in *einem* Streifen im asymptotischen Limes.
- Durch die einfache Form der Poincaré-Abbildung können etliche Phänomene im Lösungsverhalten der Differentialgleichung erklärt, und *analytisch* in Abhängigkeit der Parameter beschrieben werden. Es wird beispielsweise erklärt, warum die Resonanzzungen die vorliegende Form, bestehend aus jeweils einem breiten und einem schmalen Streifen, besitzen und bei welchen Parameterwerten die erste Bifurkation in den einzelnen Resonanzen auftritt.
- Die funktionale Form der Poincaré-Abbildung mit höheren Entwicklungstermen (von denen die niedrigste Ordnung explizit angegeben wird) bestimmt den der Bewegung angepaßten funktionalen Ansatz für numerische Simulationen. In die Theorie gehen keine empirischen Fitparameter ein.
- Im Rahmen der Herleitung dieser Ergebnisse werden einige universelle (d.h. von den Parametern r und Ω unabhängige) Konstanten definiert, die *numerisch* bestimmt werden müssen. Der gesamte Einfluß der Nichtlinearität auf die Lösung wird also auf einen endlichen Satz fester numerischer Konstanten zurückgeführt, die nur vom Potentialtyp (bei der Duffing-Gleichung also nur von q) abhängen.

Übersicht über die Kapitel

- 1. Kapitel** Bei der Herleitung der Poincaré-Abbildung sind zwei Hürden zu überwinden: Die amplitudenabhängige Schwingungsfrequenz des Systems und die zeitliche Änderung der Anregungskraft. In diesem Kapitel wird die zweite Komplikation außer Acht gelassen und die Duffing-Gleichung mit *Rechteck-Anregung* betrachtet. Hier springt die Kraft zwischen $x^q + 1$ und $x^q - 1$ hin und her.

Das Kapitel hat vorrangig didaktischen Charakter, die Grundideen der Theorie werden zunächst an dem einfachsten möglichen System beschrieben. Es wird sich herausstellen, daß die damit bestimmte Poincaré-Abbildung dieselbe ist, wie die für die allgemeinere Duffing-Gleichung, lediglich Vorfaktoren sind andere.

- 2. Kapitel** Dieses Kapitel führt ein neues, und für die folgenden Überlegungen entscheidendes Konzept ein: Die Referenzlösung $x_0(t)$. Dieses Konzept dürfte über die Anwendungen in dieser Arbeit hinausgehend von Interesse für die Behandlung nichtlinearer Oszillatoren sein. Die Referenzlösung ist eine Verallgemeinerung des Grenzzyklus beim harmonischen Oszillator (d.h. für den Spezialfall $q = 1$ vereinfacht sich $x_0(t)$ zu diesem Grenzzyklus).

Eine solche Referenzlösung existiert für alle Parameterwerte im Bereich $r < 1 < T$. Sie ist eine spezielle Lösung der Differentialgleichung, nämlich eine solche, die keine Eigenschwingungen ausführt (wie auch im linearen Fall). Im Gegensatz zu letzterem hängen die Referenzlösungen für aufeinanderfolgende Halbzyklen aber nicht zusammen.

Diese Lösung vermittelt insbesondere neue Erkenntnisse über den Einfluß der Nichtlinearität auf die Lösung der Differentialgleichung (z.B. warum bei der Erhöhung von $q = 1$ nach $q = 1.01$, die ja nur eine minimale Änderung der Potentialform darstellt, eine chaotische Bewegung möglich ist).

- 3. Kapitel** Mit den Informationen aus dem 2. Kapitel kann die im ersten Kapitel entwickelte Theorie auf die Duffing-Gleichung übertragen werden. Eine Methode, die Poincaré-Abbildung für beliebig hohe Ordnungen in e^{-rT} zu bestimmen, wird beschrieben und bis zur zweiten Ordnung angewendet. Die so erzielte zweidimensionale I - φ -Poincaré-Abbildung deckt einen auch für technische Anwendungen interessanten Parameterbereich ab.

Die Vorschrift zur Bestimmung der schon erwähnten universellen Konstanten wird angegeben und einige Sätze (für verschiedene Potentialtypen) dieser Konstanten werden bestimmt. Die Ergebnisse werden quantitativ mit Lösungen der Differentialgleichung verglichen und der Gültigkeitsbereich der Theorie im Parameterraum überprüft.

- 4. Kapitel** Die im dritten Kapitel eingeführten Konstanten sind nur in einem asymptotischen Sinn, nämlich für Resonanzungen zu großen Indizes n , "universell", für niedrig indizierte Resonanzungen werden sie abhängig von den Systemparametern. Wenn eine Poincaré-Abbildung bestimmt werden soll, die für kleine Werte von n sehr gut mit der Differentialgleichung übereinstimmt, müssen Konstanten bestimmt werden, die für diesen Bereich gelten.

Hier ist zu unterscheiden zwischen einer quantitativ guten Approximation der Phasendiagramme für einen Bereich des Parameterraums und der Näherung einer einzelnen Trajektorie für einen festgehaltenen Punkt im Parameterraum. Eine minimale Abweichung in den Phasendiagrammen, die aus kleinen Abweichungen bei der Bestimmung der Parameter resultiert, kann an kritischen Parameterbereichen zu großen Abweichungen in den Lösungen führen,

die nichts mit der theoriebedingten Ungenauigkeit zu tun hat (extreme Parameterempfindlichkeit bei chaotischen Systemen).

In diesem Kapitel wird eine Methode zur Bestimmung dieser parameterabhängigen Koeffizienten entwickelt. Die Ergebnisse der vorigen Kapitel stellen sicher, daß die funktionale Form der dort entwickelten Poincaré-Abbildung die geeignete Modellierung der Differentialgleichung darstellt.

5. Kapitel Zur Beschreibung des Systems in Wirkungs-Winkel-Variablen (I, φ) muß die Transformation $(x, \dot{x}) \leftrightarrow (I, \varphi)$ bestimmt werden. Im Fall der allgemeinen Duffing Gleichung ist dies eine explizit zeitabhängige kanonische Transformation, die in diesem Kapitel hergeleitet und als Reihenentwicklungen formuliert wird. Sie wird zur Bestimmung der universellen Abbildungskonstanten und der im 4. Kapitel eingeführten parameterabhängigen Koeffizienten benutzt.

1 Duffing Gleichung mit Rechteck-Anregung

Die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2r\dot{x} + x^q = 2\theta(\sin \Omega t) - 1 = \pm 1 \quad (1.1)$$

ist durch die rechteckförmige Zeitabhängigkeit der Anregungskraft eine Vereinfachung der Duffing Gleichung mit Sinus-Anregung. Durch die nichtlineare rücktreibende Kraft x^q ist die Schwingungsfrequenz amplitudenabhängig. Diese Eigenschaft ist für die in der Einleitung beschriebenen Phänomene verantwortlich, unabhängig von der Form der periodischen Anregung. Die Gleichung 1.1 zeigt deshalb im hier betrachteten asymptotischen Parameterbereich

$$e^{-rT} \ll 1 \quad (1.2)$$

$$r \ll 1 \ll T = \pi/\Omega \quad (1.3)$$

das gleiche qualitative Lösungsverhalten wie die Duffing Gleichung. Diese Tatsache ist numerisch aus Phasendiagrammen ersichtlich, sie wird später aus der Theorie verständlich.

Die Anregungskraft wechselt jede Halbperiode T ihr Vorzeichen, was einem Wechsel zwischen den beiden Potentialen V_+ und V_- in Abbildung 1.1 entspricht:

$$V_{\pm}(x) = \frac{1}{q+1} x^{q+1} \pm x + \frac{q}{q+1} \quad (1.4)$$

Die an sich irrelevante Konstante $q/(q+1)$ wurde so gewählt, daß die potentielle Energie im Minimum immer verschwindet.

Zwischen den Umschaltzeitpunkten ist das System zeitunabhängig, so daß wir uns in diesem Kapitel ausschließlich auf den Einfluß von Nichtlinearität und Dissipation konzentrieren können.

In dem durch (1.2) und (1.3) definierten Parameterbereich führt das System in jeder Halbperiode viele Oszillationen (die Zeit für eine Oszillation hat die Größenordnung $1 \ll T$) mit jeweils schwach abfallender Amplitude ($r \ll 1$) aus, wobei am Ende der Halbperiode die Amplitude klein geworden ist ($e^{-rT} \ll 1$). Dann wird durch das Umschalten des Potentials (*Kick*)¹ dem System schlagartig Energie zugeführt und eine weitere Dissipationsphase beginnt. Die Bedingung (1.3) bewirkt also, daß wir Parameter im Bereich hoher Resonanzen betrachten, (1.2) wird später als natürlicher Entwicklungsparameter in Erscheinung treten.

Im folgenden werden wir zunächst durch geeignete Koordinatentransformationen das System in problemangepaßten Größen formulieren. In diesen Koordinaten wird die Poincaré-Abbildung hergeleitet. Ein zusätzliches Ergebnis der Herleitung ist die Einführung problemangepaßter *Parameterkoordinaten*, sowie

¹Unter dem Kick wird in diesem System ein Zuwachs an potentieller Energie verstanden, im Gegensatz zum gekickten Rotator [9], wo beim Kick kinetische Energie zugeführt wird.

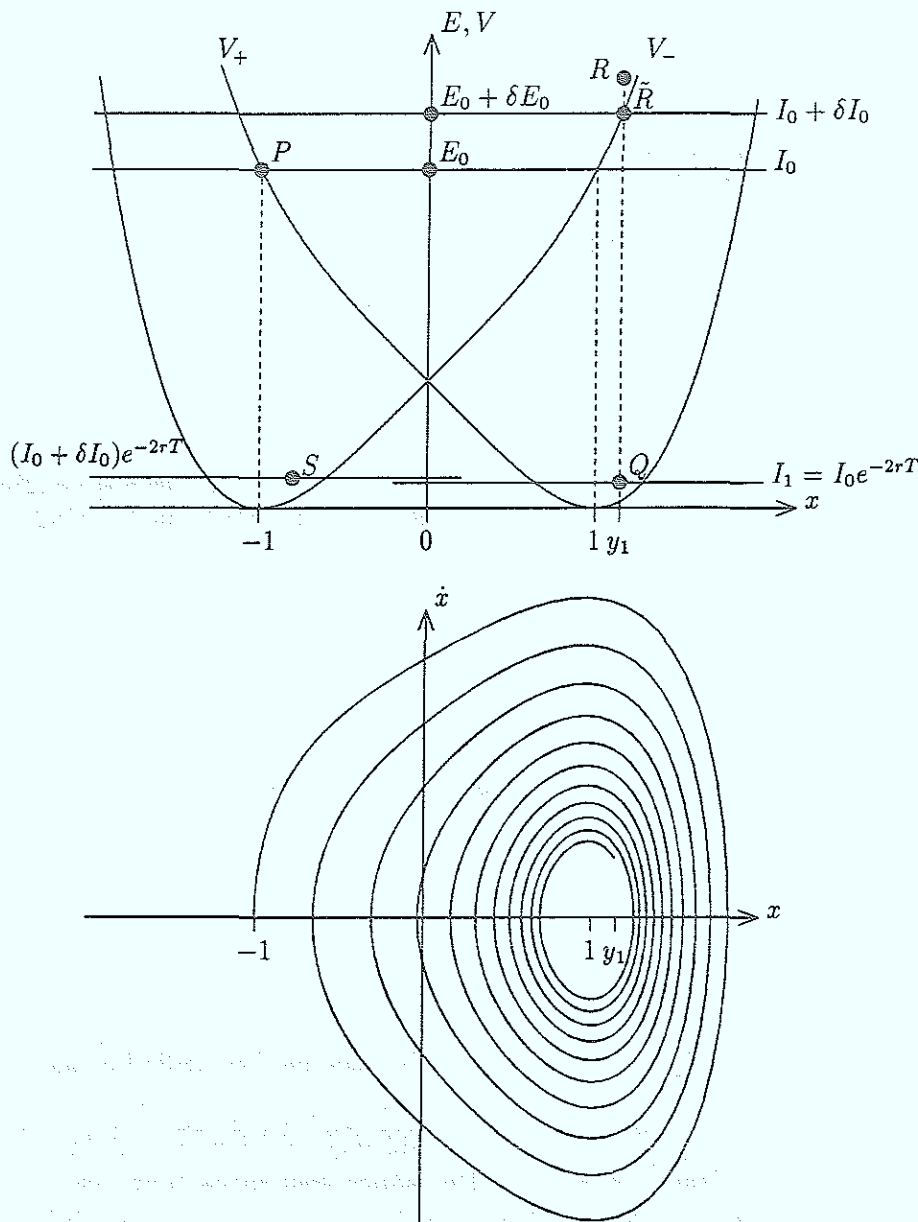


Abbildung 1.1: Ein Zyklus beginne im Punkt P des Potentials V_+ . Er ende zur Zeit T in einem Punkt Q bei $x = 1 + y_1$. Durch den Kick wird die Bewegung im Potential V_- fortgesetzt, was einer Erhöhung der Energie auf den Punkt R entspricht. $R - \tilde{R}$ ist die kinetische Energie, die durch den Kick nicht geändert wird. Der nächste Zyklus ende im Punkt S . Parameter: $q = 3$, $r = 0.0375$, $\Omega = 0.07$, $T = 45$, $e^{-rT} = 0.18$.

Umrechnungsformeln zu den Parametern (r, Ω) der Differentialgleichung. Diese Ergebnisse können dann auf die Differentialgleichung angewendet und der Gültigkeitsbereich der asymptotisch exakten Theorie überprüft werden, indem die Übereinstimmung des Verhaltens der Poincaré-Abbildung und der Lösungen der Differentialgleichung für endliche (r, Ω) verglichen wird. Am Ende des Kapitels werden Phasendiagramme mit den neu eingeführten Parametern gezeigt sowie (als Beispiel für die Leistungsfähigkeit

unserer Beschreibung durch Poincaré-Abbildungen) die Korrektheit einiger einfacher Ergebnisse, die mit der Poincaré-Abbildung erzielt werden, für die Differentialgleichung mit entsprechenden Parameterwerten demonstriert.

Durch die Aufteilung in Dissipationsphase und Energiegewinn ist bei dem System (1.1) der zur diskreten Abbildung führende Mechanismus leicht zu verstehen: Die Energiemenge, die beim Kick dem System zugeführt wird, hängt von der Koordinate x unmittelbar vor dem Kick ab:

$$\Delta E = V_+(x) - V_-(x),$$

es wird also nicht bei jedem Kick dieselbe Energiemenge zugeführt. Die Koordinaten am Ende jeder Halbperiode werden in Abhängigkeit von r und Ω bestimmt und daraus die Größe des Kicks und die Anfangsbedingung für die nächste Halbperiode berechnet. So ist der Zyklus geschlossen und die Poincaré-Abbildung, mit der das Phasendiagramm vollständig beschrieben wird, kann angegeben werden.

1.1 Transformation in ein hamiltonsches System

Die Bedeutung der Bedingungen (1.2) und (1.3) läßt sich durch die Transformation in ein hamiltonsches System präzisieren. Zuerst wird die Ersetzung

$$y := x - x_0; \quad x_0 := 2\theta(\sin \Omega t) - 1 = \pm 1 \quad (1.5)$$

durchgeführt. In y -Koordinaten bewegt sich das System in einem Potential, dessen Minimum *immer* bei $y = 0$ liegt, und das *keinen* linearen Term enthält:

$$\begin{aligned} V_{\pm}(y) &= \frac{1}{q+1}(y \pm 1)^{q+1} \mp (y \pm 1) + \frac{q}{q+1} \\ &= \frac{q}{2}y^2 \pm \frac{q(q-1)}{6}y^3 + \frac{q(q-1)(q-2)}{24}y^4 \pm \dots, \end{aligned} \quad (1.6)$$

Jetzt kann mit der weiteren Transformation

$$z := e^{rt}y \quad (1.7)$$

der Dissipationsterm eliminiert werden. Der Phasenraum wird um das Minimum in dem Maße vergrößert, in dem sich der Radius der Spirale in Abbildung 1.1 verkleinert: Wir betrachten das System während einer Halbperiode T durch ein exponentiell stärker werdendes Vergrößerungsglas.

Einsetzen in (1.1) liefert die Gleichung

$$\begin{aligned} \ddot{z} + (q - r^2)z + a_3 e^{-rt} z^2 + a_4 e^{-2rt} z^3 + \dots &= 0, \\ a_3 &= \pm \frac{q(q-1)}{2}, \quad a_4 = \pm \frac{q(q-1)(q-2)}{6}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Sie stellt ein hamiltonsches System $\ddot{z} + W'(z, t) = 0$ dar mit dem Potential

$$W_{\pm}(z, t) = \frac{1}{2}(q - r^2)z^2 + \frac{a_3}{3}e^{-rt}z^3 + \frac{a_4}{4}e^{-2rt}z^4 + \dots \quad (1.9)$$

und der Hamiltonfunktion

$$F(z, \dot{z}, t) = \frac{1}{2}\dot{z}^2 + W(z, t). \quad (1.10)$$

In diesen Koordinaten ist das System reibungsfrei, aber mit einem *zeitabhängigen* Potential versehen, dessen nichtquadratische Anteile exponentiell mit Potenzen von e^{-rt} aussterben.

Der Faktor vor dem quadratischen Term ist um r^2 kleiner als in y -Koordinaten, dies spiegelt die reduzierte *harmonische* Eigenfrequenz (0.1) im Potentialminimum des dissipativen Systems (1.1) wieder.

Die Transformation auf y -Koordinaten ist essentiell für das Folgende. Ohne sie enthielte das Potential $W(z, t)$ noch einen exponentiell *anwachsenden* Term $a_1 e^{+rt} z$, der die weiteren Schritte undurchführbar machen würde. Im Fall der Rechteck-Anregung ist diese Transformation trivial (da $x_0 = \pm 1$), später wird sie durch eine Funktion $x_0(t)$ zu ersetzen sein.

Abbildung 1.2 zeigt die Trajektorie aus Abbildung 1.1 in z -Koordinaten.

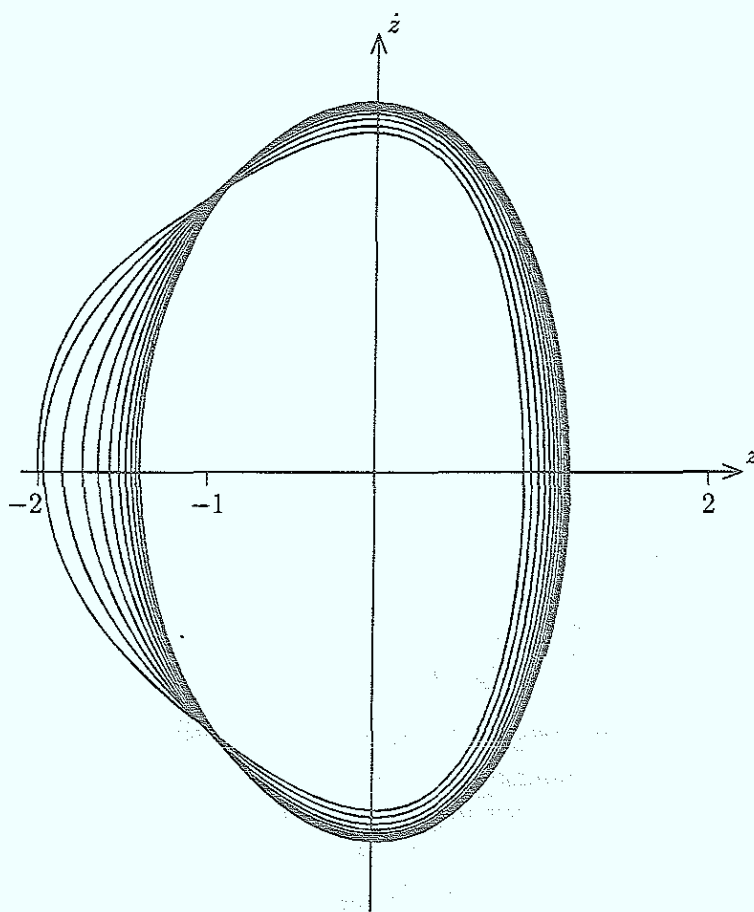


Abbildung 1.2: Zyklus in z -Koordinaten. Durch das exponentielle Aussterben der Nichtlinearität nähert sich der Zyklus einer Ellipse (=harmonische Bewegung) an. Parameter wie in Abbildung 1.1: $q = 3$, $r = 0.0375$, $\Omega = 0.07$, $T = 45$, $e^{-rT} = 0.18$.

Die Bedingungen (1.2), (1.3) haben in dieser Sichtweise folgende Bedeutung: Wegen $e^{-rT} \ll 1$ ist das System spätestens jeweils am Ende einer Halbperiode praktisch harmonisch. In den folgenden Schritten kann immer nach Potenzen dieser Größe sortiert werden. Im Fall, daß (1.2) gut erfüllt ist, kann man sich auf die niedrigsten Potenzen beschränken; darüber hinaus liefert die Theorie eine systematische Entwicklung in e^{-rT} . Der Anwendbarkeitsbereich dieser Theorie ist etwa durch $e^{-rT} < 0.3$ begrenzt.

Der Kick in z -Koordinaten wird durch das Zurücksetzen der Zeit $t = T$ nach jeder Halbperiode auf den Wert $t = 0$ realisiert, durch den Kick wird auch die Nichtlinearität des (mittlerweile linearen) Systems schlagartig wieder eingeschaltet.

1.2 Wirkungs-Winkel-Variablen

Wegen der mit (1.3) vorausgesetzten langsamen expliziten Zeitabhängigkeit des Potentials kann das Adiabathentheorem benutzt werden, das folgenden Inhalt hat (eine vollständige Herleitung ist in [2, S. 294 ff] gegeben): Wir bezeichnen die explizite Zeitabhängigkeit mit τ , um sie von der impliziten Zeitabhängigkeit zu unterscheiden. Für jeden festen τ -Wert ist die Wirkung als die Fläche definiert, die von der dann geschlossenen Trajektorie eingeschlossen wird:

$$J(z, \dot{z}, \tau) := \oint \dot{z} dz = \frac{1}{\pi} \int \sqrt{2(F - W(\zeta, \tau))} d\zeta. \quad (1.11)$$

Die Wirkung hängt also von z und $\dot{z}$ nur über den Wert der Hamiltonfunktion $F(z, \dot{z}, \tau)$ ab, deren konstanter Wert zugleich die geschlossene Integrationstrajektorie festlegt.

Bei mitlaufendem $\tau = t$ ist diese Definition nicht mehr anwendbar, da die Trajektorie nicht mehr geschlossen ist und somit auch keine Fläche einschließt (Abbildung 1.2). Jedem Punkt $(z(t_0), \dot{z}(t_0))$ der Trajektorie des zeitabhängigen Systems kann dann die geschlossene Trajektorie des zeitunabhängigen Systems mit festem $\tau = t_0$ und der Hamiltonfunktion $F(z(t_0), \dot{z}(t_0), t_0)$ zugeordnet und deren Wirkung bestimmt werden. So kann mit der Definition (1.11) $J(z, \dot{z}, t)$ für die gesamte Trajektorie berechnet werden. Das Adiabathentheorem besagt, daß diese Größe eine adiabatische Invariante des zeitabhängigen Systems ist.

Wir betrachten also eine Folge geschlossener Trajektorien. Für jedes t durchstößt die Trajektorie des zeitabhängigen Systems diejenige geschlossene Trajektorie zum Parameter $\tau = t$. Diese Folge geschlossener Trajektorien deformiert sich mit fortschreitendem τ , was zu Änderungen in F führt, die eingeschlossene Fläche bleibt aber nach Ausweis des Adiabathentheorems konstant, wenn $\frac{\partial W}{\partial \tau}$ klein ist.

Genauer: Schreibt man W als Potenzreihe in ϵ : $W = W_0 + \epsilon t W_1 + \dots$, wobei ϵ ein Maß für die Zeitabhängigkeit des Systems ist (im durch Gleichung (1.9) definierten System entspricht ϵ der Größe r), so garantiert das Adiabathentheorem die *mittlere* Konstanz von J bis zur Ordnung ϵ^2 : $\dot{J} = a\epsilon + O(\epsilon^2)$, wobei a eine mit φ oszillierende Funktion ohne konstanten Anteil in ihrer Fourierreihe ist. Das ist der Grund für die ausgezeichnete Stellung der Wirkungs-Winkel-Koordinaten (J, φ) .

Wir rechnen jetzt die Wirkung in x - bzw y -Koordinaten um. Wegen der zeitabhängigen Transformation (1.7) ist E , die auf x -Koordinaten transformierte Hamiltonfunktion F , nicht gleich der Gesamtenergie $\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x, \tau)$. $I(E)$ berechnet sich entsprechend der Definition (1.11)

$$I(E, \tau) := e^{-2r\tau} J(F, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2(E - \tilde{V}(\zeta, \tau))} d\zeta, \quad (1.12)$$

wobei sowohl die kinetische- als auch die potentielle Energie Zusatzterme erhalten, mit denen die adiabatische Konstanz der Wirkung erzielt wird:

$$E := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + rx\dot{x} + \tilde{V}(x, \tau), \quad (1.13)$$

$$\tilde{V} := V(x, \tau) - \frac{1}{2}r^2x^2. \quad (1.14)$$

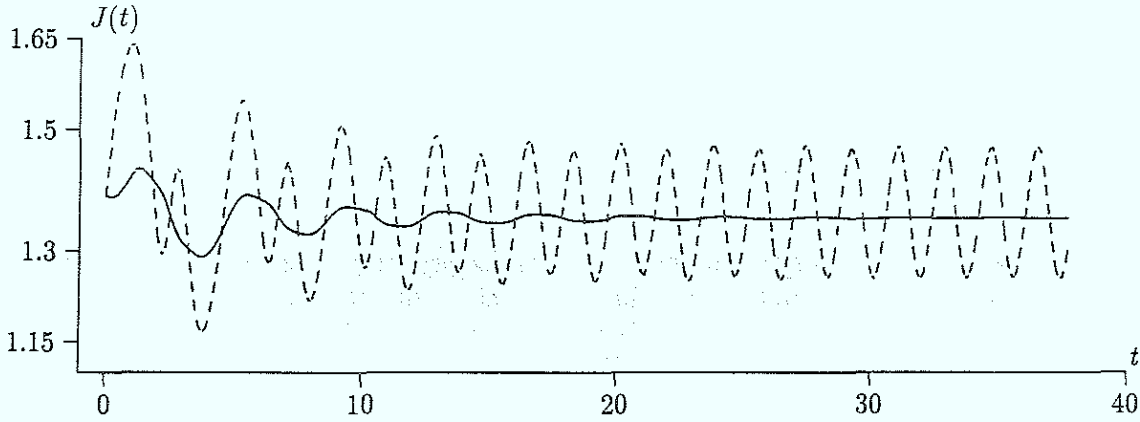


Abbildung 1.3: Die Wirkungsfunktion in Abhängigkeit der Zeit. Durchgezogen: Ein Zyklus mit den Parametern $r = 0.14$, $T = 37$ wurde numerisch integriert und zu verschiedenen Zeiten E und daraus J berechnet (1.12). Nähert man sich dem asymptotischen Bereich (1.3), verkleinern sich die Schwankungen von J am Anfang der Periode. Gestrichelt: Zum Vergleich diese Größe jedoch ohne den Term $r\dot{x}\ddot{x}$, d.h. statt der Hamiltonfunktion wurde die Energie in (1.12) verwendet. Hier treten Oszillationen mit doppelter Eigenfrequenz auf.

Die Integrationsgrenzen x_l , x_r sind die Umkehrpunkte der Trajektorie, $E = \tilde{V}(x_l) = \tilde{V}(x_r)$.

Würde man statt der Größe E die Energie verwenden, erhielte man eine oszillierende Funktion, die nicht die oben beschriebene adiabatische Konstanz besitzt. Dieser Effekt ist in Abbildung 1.3 gezeigt. Die korrekt berechnete Wirkung oszilliert mit der jeweiligen Schwingungsfrequenz und exponentiell abnehmender Amplitude, entsprechend der abnehmenden Zeitabhängigkeit des Systems.

Auch in (1.12) wird natürlich die implizite Zeitabhängigkeit (τ) von der expliziten Zeitabhängigkeit (t) separiert. $V(x, \tau)$ ist zwar im Fall der Rechteckanregung nicht explizit zeitabhängig (deshalb wird ja dieses System als besonders einfaches Beispiel betrachtet), die mögliche Zeitabhängigkeit macht die Formel aber auch für den allgemeinen Fall gültig.

Die Kreisfrequenz ist durch die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen gegeben:

$$\omega = \frac{\partial F(J, \tau)}{\partial J} = \frac{\partial E(I, \tau)}{\partial I}, \quad (1.15)$$

mit der Umkehrung der Funktionen zu $J(F, \tau)$ und $I(E, \tau)$ aus (1.11) und (1.12). Wir erhalten so:

$$\frac{1}{\omega(E)} = \frac{1}{\dot{\varphi}(E)} = \frac{dI(E)}{dE} = \frac{1}{\pi} \int_{x_l}^{x_r} \frac{d\zeta}{\sqrt{2(E - \tilde{V}(\zeta))}}, \quad (1.16)$$

und den Winkel als Bruchteil eines Umlaufs (Abbildung 1.5), [2, S. 284]:

$$\varphi(E, x) = \omega(E) \int_{x_l}^x \frac{d\zeta}{\sqrt{2(E - \tilde{V}(\zeta))}}. \quad (1.17)$$

$\omega(I)$ und $\varphi(I, x)$ können hieraus durch Einsetzen von $E(I)$ bestimmt werden.

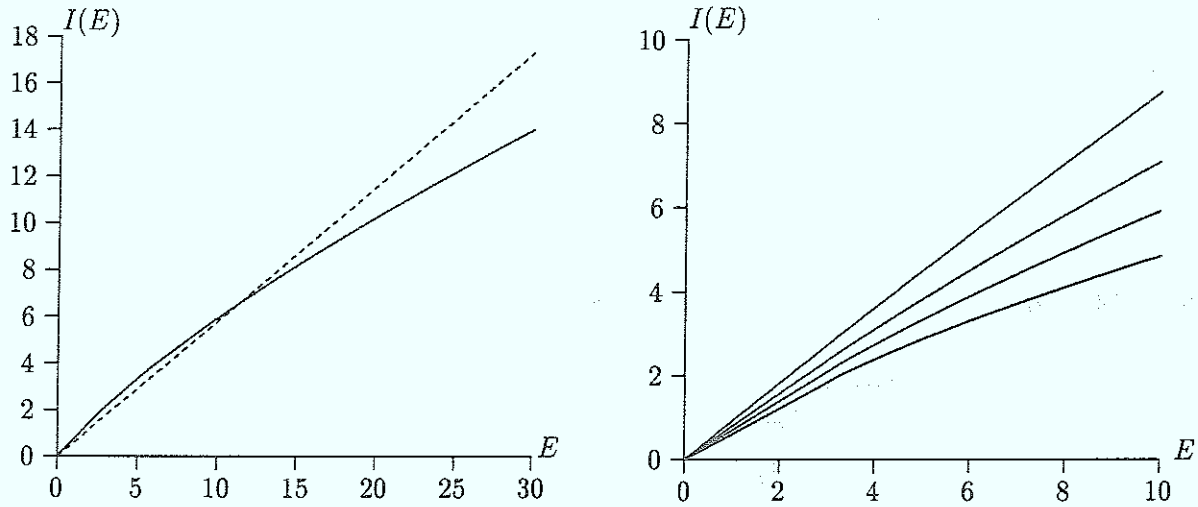


Abbildung 1.4: Die Funktion $I(E)$ nach (1.12) [13, IOmPhi]. Links: Vergleich von $I(E)$ mit der harmonischen Größe $I_h = E/\omega_1$ (gestrichelt) für $q = 3$. Rechts: $I(E)$ für verschiedene q . Von oben: $q = 1.3, 2, 3, 5$.

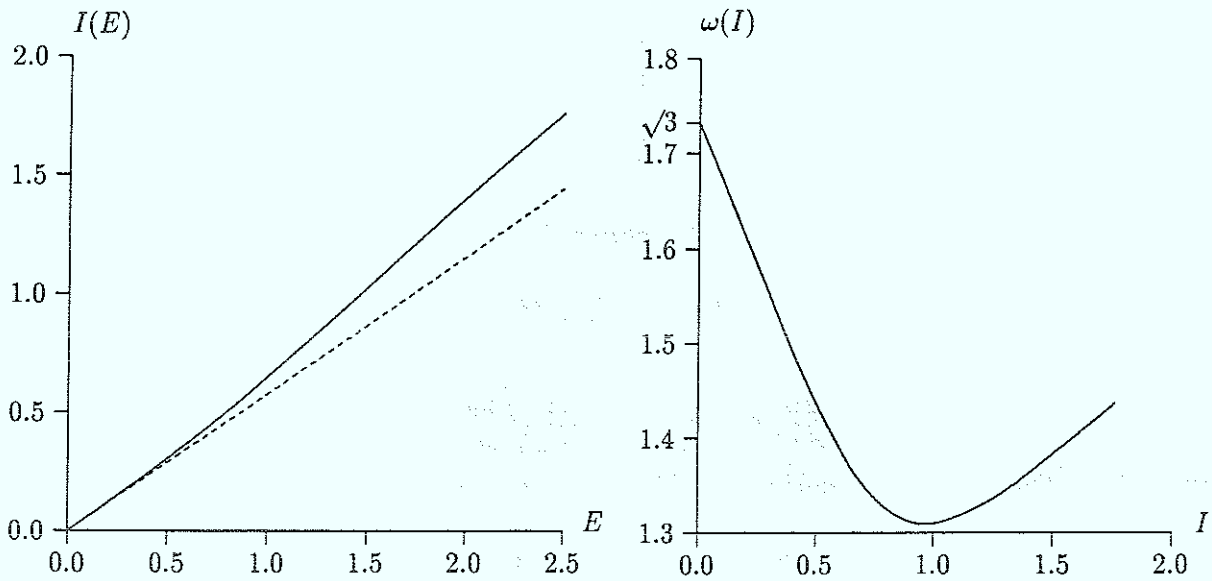


Abbildung 1.5: $I(E)$ und $\omega(I)$ im für die Bewegung relevanten Bereich bei $q = 3$. $I_0 = I(E_0) = I(2) = 1.4013$, $\omega(0) = \omega_1 = \sqrt{q}$. Für kleine E (harm. Bereich) gilt $E = I\omega_1$.

Aus der oben beschriebenen adiabatischen Konstanz der Größe J folgt

$$I(t) = e^{-2\pi t} I(0) = e^{-2\pi t} J(0). \quad (1.18)$$

Diese Beziehung ist naheliegend auf Grund der Divergenz $-2r$ des Flusses im Phasenraum, wonach die mittlere Änderung der Wirkung durch $\dot{I} = -2rI$ gegeben sein sollte.

Die Zeitentwicklung des Winkels ist nach dem Adiabathentheorem durch $\omega(I)$ allein gegeben:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \omega(I(t)) dt = \varphi(0) + \frac{1}{2r} \int_{I(t)}^{I(0)} \omega(I) \frac{dI}{I}, \quad (1.19)$$

letzteres mit Hilfe von $t(I) = -\frac{1}{2r} \log\left(\frac{I(t)}{I(0)}\right)$.

1.3 Herleitung der Poincaré-Abbildung

Bei unseren späteren Überlegungen werden Entwicklungen nach Potenzen von e^{-rT} durchgeführt, in diesem Kapitel nur bis zur ersten Ordnung.

Wir betrachten die Zeitentwicklung beginnend bei $t = 0$ im Punkt P (Abbildung 1.1), mit $E_0 = 2$, $I_0 := I(E_0)$. Die Trajektorie läuft in einer Spirale auf das Minimum bei $+1$ zu, bis sie bei $t = T$ einen Punkt Q im harmonischen Bereich erreicht hat. Hier ist $I = I_1 = I_0 e^{-2rT}$ und

$$y_1 = -\sqrt{\frac{2I_1}{\omega_1}} \cos \varphi_1, \quad \dot{y}_1 = \sqrt{2I_1 \omega_1} \sin \varphi_1 \quad (1.20)$$

proportional zu e^{-rT} mit einem Endwinkel φ_1 entsprechend (1.19) ($\omega_1 = \sqrt{q}$ ist die harmonische Frequenz). In diesem Moment schaltet das Potential zu V_- um, wodurch die Energie auf den Wert R angehoben wird. Die Differenz zu $\bar{R}$ rührt von der restlichen kinetischen Energie her, die proportional zu $\dot{y}^2 \sim e^{-2rT}$ ist und somit gegenüber der potentiellen Energie vernachlässigt werden kann. Die Anfangsenergie des nächsten Zyklus ist $E = E_0 + \delta E_0$ mit

$$\delta E_0 = y_1 V'_-(y = 2) \sim e^{-rT} \quad (1.21)$$

in niedrigster Ordnung e^{-rT} . Der nächste Zyklus beginnt bei $\varphi(0) = \delta\varphi_0$, $I(0) = I_0 + \delta I_0$, $\omega_0 = \omega(I_0)$ mit

$$\delta\varphi_0 = -\omega_0 \frac{\dot{y}_1}{V'_-(2)} = -\frac{\omega_0}{2} \sqrt{2I_0 \omega_1} e^{-rT} \sin \varphi_1 \quad (1.22)$$

und

$$\delta I_0 = \frac{\partial I}{\partial E}(E_0) y_1 V'_-(2) = -\frac{2}{\omega_0} \sqrt{\frac{2I_0}{\omega_1}} e^{-rT} \cos \varphi_1. \quad (1.23)$$

φ_1 ist die zum Endpunkt der Trajektorie zur Zeit $t = T$ gehörende Winkel-Variable gemäß Gleichung (1.17)²

Dieser zweite Zyklus endet etwa in einem Punkt S zu dem Winkel (siehe (1.19))

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \delta\varphi_0 + \int_0^T \omega(I(t)) dt \\ &= \delta\varphi_0 + \omega_1 T + \frac{1}{2r} \Phi(I(0)), \end{aligned} \quad (1.24)$$

²Die untere Integrationsgrenze ist hier x_l . Um die Spiegelsymmetrie des Systems (Abbildung 1.1) auszunutzen, definieren wir $\delta\varphi_0$ (als Winkelvariable im Potential V_-) mit der unteren Integrationsgrenze x_r .

wobei $\frac{1}{2r}\Phi(I(0))$ die Differenz zum rein harmonischen Winkelinkrement $\Delta\varphi \sim \omega_1 T$ ist. Wenn die Integration mit $I(0) = I_0$ beginnt, erhält man für diese Größe

$$\begin{aligned}\Phi(I_0) &= \int_{I(T)}^{I_0} (\omega(I) - \omega_1) \frac{dI}{I} \\ &= \int_0^{I_0} (\omega(I) - \omega_1) \frac{dI}{I}.\end{aligned}\quad (1.25)$$

Die untere Integrationsgrenze darf Null gesetzt werden, weil der Integrand um 0 regulär ist ($\omega(I) = \omega_1 + a_1 I + \dots$, siehe Abbildung 1.5) und $I(T)$ von zweiter Ordnung in e^{-rT} ist.

Da der Zyklus nicht exakt bei I_0 beginnt, wird um die obere Integrationsgrenze entwickelt:

$$\Phi(I(0)) = \Phi(I_0) + \frac{\omega_0 - \omega_1}{I_0} \delta I_0 \quad (1.26)$$

Der Winkel im Punkt S hat also den Wert

$$\varphi_1 = \delta\varphi_0 + \omega_1 T + \frac{1}{2r} \Phi(I_0) + \frac{1}{2r} \frac{\omega_0 - \omega_1}{I_0} \delta I_0. \quad (1.27)$$

Der Winkel $\delta\varphi_0$ hat die Größenordnung e^{-rT} ; wir vernachlässigen ihn gegenüber den anderen Terme von der Größenordnung T bzw. $\frac{1}{r}e^{-rT} \approx 1$.

Betrachtet man die Wirkung am Ende des zweiten Zyklus, $I_1 + \delta I_1 = e^{-2rT}(I_0 + \delta I_0)$, so ist δI_1 jetzt um eine Ordnung e^{-rT} kleiner als I_1 und kann wieder vernachlässigt werden. Dies ist der entscheidende Schritt, der in der niedrigsten Ordnung e^{-rT} die Poincaré-Abbildung in I - φ -Koordinaten zu einer eindimensionalen Abbildung in der Variablen φ reduziert. Dieser Schritt kann so veranschaulicht werden, daß in der Relaxationsphase die Kontraktion im (I, φ) -Phasenraum zu der Linie $I = I_1$ so stark ist, daß am Ende der Periode $I = I_1$ unabhängig vom Anfangswert angenommen werden darf.

Ein Zyklus verläuft also in den Phasen (wobei wir jetzt den Wert der Winkelvariablen am Ende des n -ten Zyklus von φ_1 in φ_n umbenennen)

$$\begin{array}{ccccc} nT - \epsilon & \longrightarrow & nT + \epsilon & \longrightarrow & (n+1)T - \epsilon \\ I_1 & \longrightarrow & I_0 + \delta I_0(\varphi_n) & \longrightarrow & I_1 \\ \varphi_n & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \varphi_{n+1}(\delta I_0) \end{array}$$

Die gesuchte Poincaré Abbildung $\varphi_n \rightarrow \varphi_{n+1}$ folgt durch Einsetzen des Ausdrucks für δI_0 aus Gleichung (1.23) in Gleichung (1.27):

$$\boxed{\varphi_{n+1} = \alpha + \beta \cos \varphi_n} \quad (1.28)$$

wobei die neuen Parameter α und β in jeweils niedrigster Ordnung e^{-rT} als Funktionen von r und Ω gegeben sind:

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= \omega_1 T + \Phi(I_0) \frac{1}{2r}, \\ \beta &= \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} \sqrt{\frac{2}{I_0 \omega_1}} \frac{1}{r} e^{-rT}. \end{aligned}} \quad (1.29)$$

Die Gleichungen (1.28), (1.29) sind das zentrale Ergebnis dieses Kapitels.

Beim harmonischen Oszillator wäre $\omega_0 = \omega_1 = \sqrt{q - r^2}$, $\Phi(I_0) = 0$ und $I_0 = 2$. Die zugehörige Poincaré-Abbildung ist konstant $\varphi_{n+1} = \varphi_1$.

Die Poincaré-Abbildung (1.28) enthält 3 "universelle" Konstanten, d.h. Konstanten, die nur vom Potentialtyp, nicht aber von den Parametern r und T abhängen. Sie beschreiben den gesamten Einfluß der Nichtlinearität auf die Zeitentwicklung:

$\Phi(I_0)$ ist die Winkelkorrektur (gegenüber dem harmonischen Referenzpotential) für die Relaxationsphase. In Abbildung 1.2 durchläuft das System zunächst den nichtlinearen Bereich, wobei der Winkelzuwachs von der Beziehung $\varphi \sim \omega_1 T$ abweicht. $\Phi(I_0)$ ist die kumulierte Abweichung vom harmonischen Verhalten (Gleichung (1.2) garantiert, daß der harmonische Bereich auch erreicht wird).

I_0 ist die Wirkung, die vom Potentialminimum ausgehend durch den Kick erreicht wird, also die Wirkung des Systems im Punkt P in Abbildung 1.1.

ω_0 ist die zur Wirkung I_0 gehörende Umlauffrequenz $\omega(I_0)$.

1.4 Numerik

Die eben beschriebenen Konstanten sind nicht analytisch berechenbar, sie müssen numerisch bestimmt werden, was leicht mit Standardprogrammen möglich ist [13, IOmPhi],[11]. Abbildung 1.6 zeigt die Konstanten für verschiedene q .

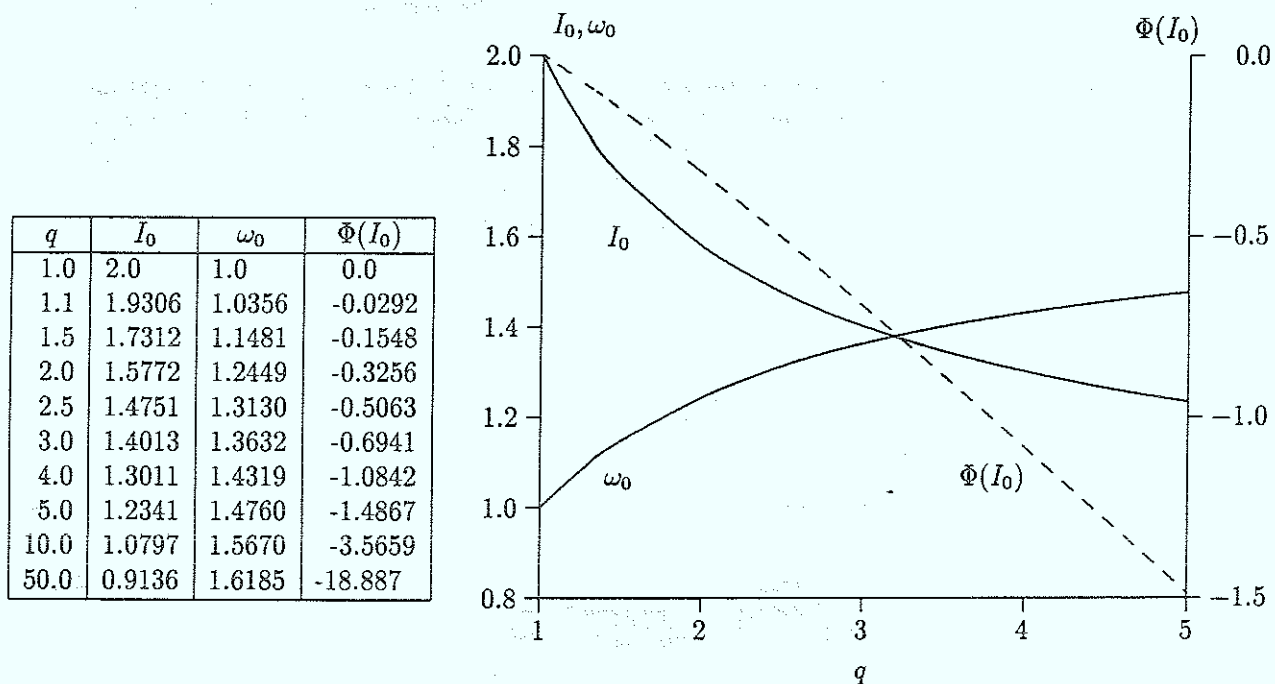


Abbildung 1.6: Links: Numerische Konstanten für verschiedene q -Werte. Rechts: Die Größen I_0 , ω_0 und $\Phi(I_0)$ in Abhängigkeit von q .

Um die Poincaré-Abbildung mit der Differentialgleichung vergleichen zu können, muß letztere in den Parameterkoordinaten (α, β) vorliegen. Hierfür muß (1.29) invertiert werden, was nur numerisch möglich ist. Das kann durch Auflösen der Gleichung für α nach T und Einsetzen in die Gleichung für β geschehen. Diese Gleichung kann dann mit einem eindimensionalen Nullstellenprogramm gelöst werden [13, Koord2].

Auf diese Weise kann die *exakte* Poincaré Abbildung zur Differentialgleichung (die durch Integration der Differentialgleichung über eine Halbperiode T numerisch bestimmt wird und die wir deshalb als *empirische*

Abbildung bezeichnen) mit der Abbildung (1.28) verglichen und die Theorie überprüft werden, was wir im folgenden mit drei verschiedenen Parametersätzen durchführen werden.

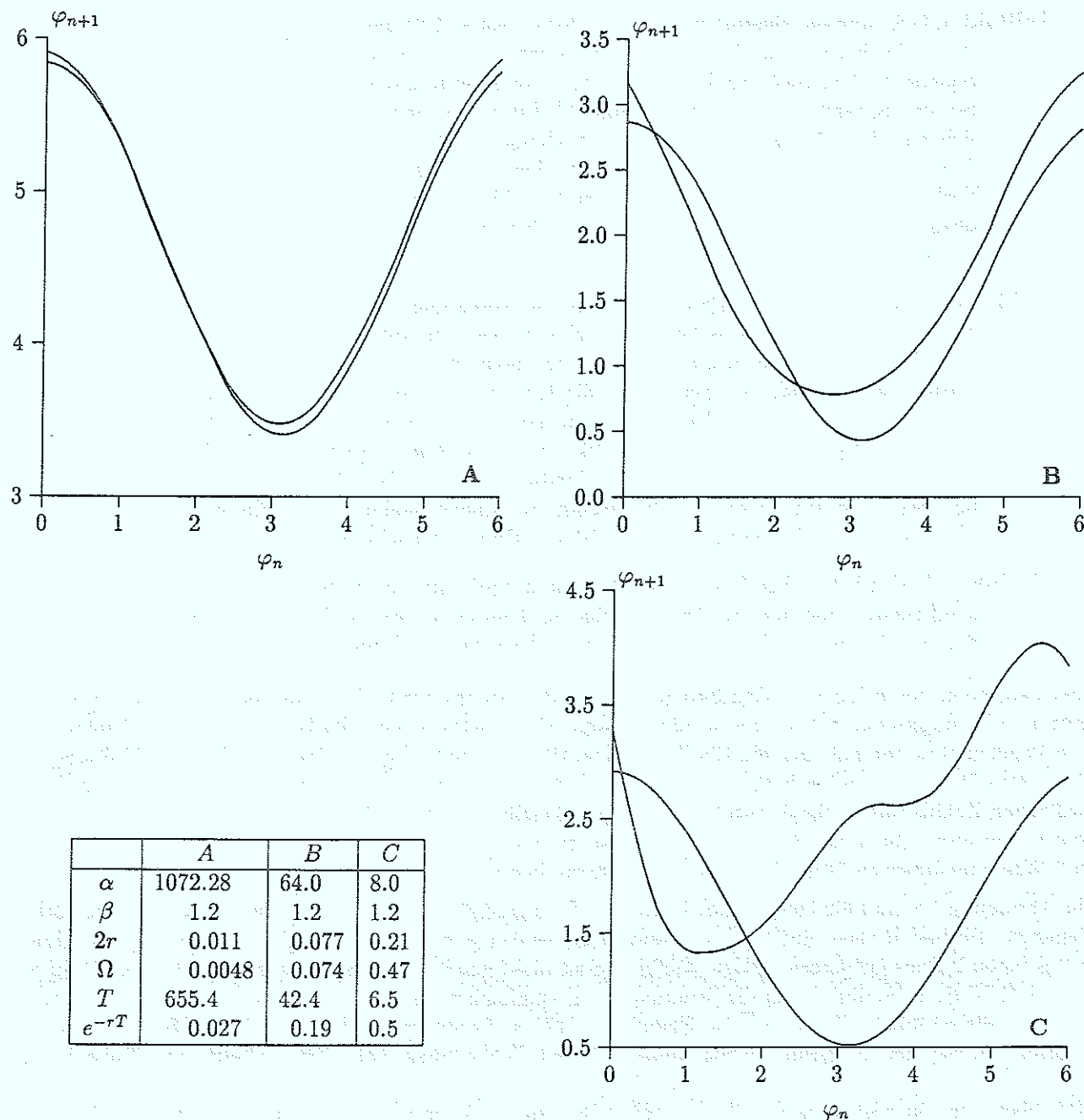


Abbildung 1.7: Vergleich der Poincaré Abbildung zur Differentialgleichung (1.1) mit der theoretischen Abbildung (1.28). Teilbild A: Parameter innerhalb des Gültigkeitsbereichs der Theorie. Teilbild B: Parameter wie in Abbildungen (1.1), (1.2), Einzelheiten siehe Text. Teilbild C: Parameter, bei denen die Theorie nicht anwendbar ist.

Abbildung 1.7 [13, Map] zeigt diesen Vergleich. Hier wurden für 20 φ_n -Werte im Bereich $[0 \dots 2\pi]$ Anfangswerte für die Differentialgleichung mit Gleichung (1.20) bestimmt, und nach Integration über eine halbe Periode (inklusive dem "Kick") der Winkel φ_{n+1} als geometrischer Winkel berechnet (im harmonischen Bereich sind Wirkungs-Winkel und geometrischer Winkel identisch).

In Teilbild 1.7-A sind die Bedingungen für die Asymptotik (1.2) und (1.3) sehr gut erfüllt. Die Abweichung der Kurven voneinander entsteht durch eine Abweichung in der empirischen Abbildung gegenüber dem theoretischen Wert von α , diese muß mit dem Gesamtwert von $\alpha \approx 1000$ in Beziehung gesetzt werden: nach rund 170 Eigenschwingungen stimmt der Endwinkel, welcher sich aus der Lösung der Differentialgleichung ergibt, auf einen winzigen Bruchteil mit dem durch die Theorie vorausgesagten Wert überein. Diese Abweichung ändert am prinzipiellen Verhalten nichts, sie führt nur zu einer Verschiebung korrespondierender Punkte im Parameterraum, also zu einer Verschiebung, jedoch nicht zu einer Verzerrung des Phasendiagramms in diesem Parameterbereich.

Teilbild 1.7-B benutzt dieselben Parameterwerte wie Abbildung 1.1 und 1.2. Amplitude und Phase der empirischen und theoretischen Kosinuskurve stimmen gut überein, jedoch sind zusätzlich zu einer Verschiebung auch höhere Fourierkomponenten in der empirischen Abbildung sichtbar. Diese könnten erfaßt werden, wenn die Korrekturen höherer Ordnung³ nicht vernachlässigt würden. Die Abbildung hätte dann die Form $\varphi_{n+1} = \alpha + \beta \cos \varphi_n + \gamma \cos(2\varphi_n + \chi)$. Die Korrekturen durch höhere Fourierkoeffizienten wären jedoch von gleicher Größenordnung, wie die vernachlässigten Terme, die zur Eindimensionalität geführt haben. Wenn diese Terme berücksichtigt werden sollen, muß mit der zweidimensionalen I - φ -Abbildung gearbeitet werden (das wird später im interessanteren Fall der Duffing Gleichung mit Sinus-Anregung getan).

In Teilbild 1.7-C ist die Theorie (zumindest in dieser Ordnung) nicht anwendbar, die höheren Fourierkoeffizienten dominieren. Die Abweichung kommt im Wesentlichen von einem $\cos 2\varphi_n$ -Term der Amplitude $\approx 1/2$ sowie einer kleinen Phasenverschiebung.

Bei dem eben beschriebenen Vergleich wurde nur der Anfangswert von φ variiert, für I wurde immer mit $I = I_0$ begonnen, d.h. es wurde nicht untersucht, inwieweit eine Variation in I einen Einfluß auf die Winkelabbildung hat, der die Eindimensionalität der Abbildung zerstören würde. In Abbildung 1.8 wird diese Annahme dadurch überprüft, daß auch der Anfangswert von I variiert wurde. Dazu beginnen wir jeden Zyklus mit Anfangswerten $I_1 + \delta I_1$ (unmittelbar vor dem "Kick") und prüfen die Auswirkung dieser Variation von I auf den Winkel am Ende des nächsten Zyklus. Für 100 φ_n -Werte werden jeweils 5 I -Werte im Intervall 20% um I_1 als Anfangswerte benutzt.

In Abbildung 1.8 sind die entsprechenden φ_{n+1} -Werte gezeigt, es wurden dieselben Parameter wie vorher benutzt. Teilbild B zeigt eine geringe Streuung der φ -Werte, d.h. die Vernachlässigung von δI_1 am Ende eines jeden Zyklus ist gerechtfertigt. Teilbild A ist nicht gezeigt, hier ist die Streuung noch geringer als bei Teilbild B. In Teilbild C ist die Streuung nur geringfügig höher. Der entscheidende Parameter hierfür ist $e^{-\gamma T}$, die Absolutgröße von $\sqrt{I}$ am Ende eines Zyklus. Er unterscheidet sich zwischen B und C um den Faktor 1.5, was der Zunahme der Streuung im Wesentlichen entspricht (siehe Tabelle, Abbildung 1.7).

Die bisherigen Vergleiche zeigen die Übereinstimmung zwischen analytischer und empirischer Poincaré-Abbildung, machen aber keine Aussage darüber, welchen Einfluß die Abweichungen auf die Zeitentwicklung haben, da immer nur ein Iterationsschritt betrachtet wurde. Das *Langzeitverhalten* wird im

³das sind unter anderem die kinetische Energie ($\dot{y}^2$ -Term) und der V'' -Koeffizient bei der Entwicklung des Potentials um den Punkt R in Abbildung 1.1

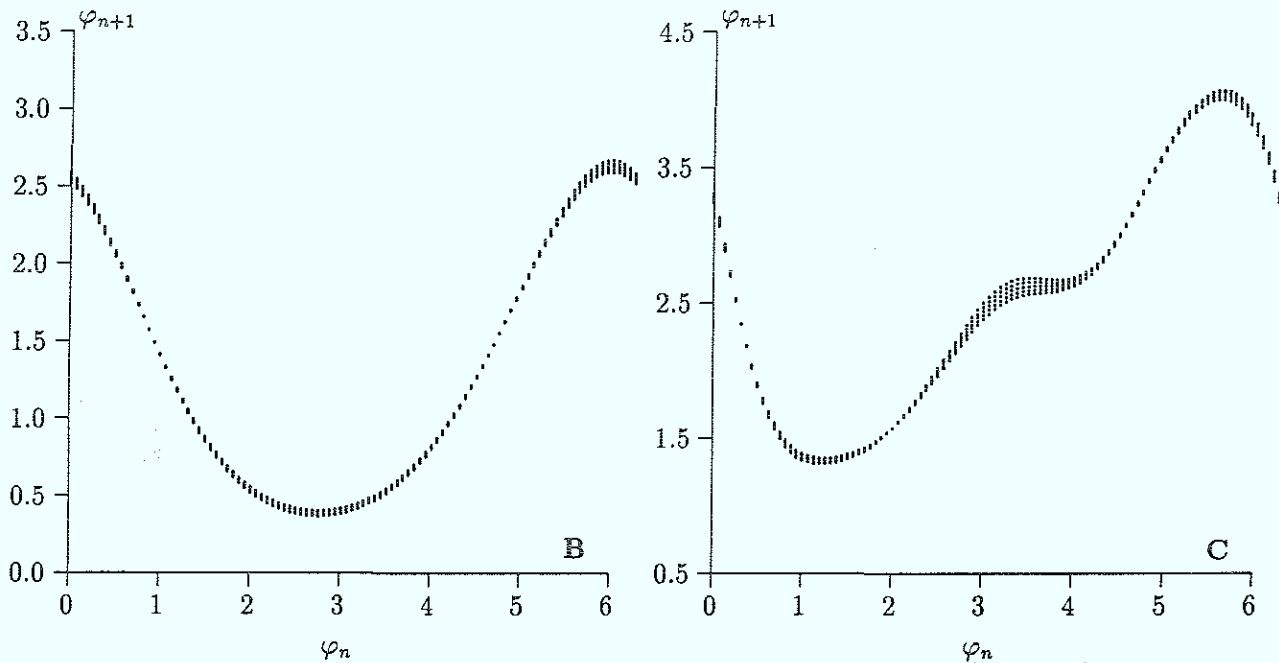


Abbildung 1.8: Test der Eindimensionalität. Parameter wie in Abbildung 1.7.

folgenden Test betrachtet: Hierfür werden 164 Iterationen der Abbildung (1.28) durchgeführt und die letzten 64 φ -Werte jeweils in Abhängigkeit von β aufgetragen (Abbildung 1.9). Entsprechend wurde die Differentialgleichung über 164 Perioden integriert und für die letzten 64 Punkte der geometrische Winkel bestimmt und ebenfalls in Abbildung 1.9 ausgegeben. Die Werte stimmen bis $\beta = 1.8$ sehr gut überein, d.h. die Theorie kann mit Hilfe der diskreten Abbildung globale Eigenschaften des Systems, wie z.B. Bifurkationspunkte quantitativ voraussagen.

Die Abweichungen oberhalb $\beta = 1.5$ treten auf, obwohl auch in diesem Bereich die Voraussetzungen für die Theorie (1.2, 1.3) gut erfüllt sind. Die Ursache für die Abweichung liegt in den für größer werdende β immer feiner werdenden Strukturen des Phasendiagramms (das im nächsten Abschnitt gezeigt wird).

1.5 Globales Verhalten, Phasendiagramme

Eines der Hauptziele der Theorie besteht darin, globale Eigenschaften der Lösungsmannigfaltigkeit der Differentialgleichung mit Hilfe der diskreten Abbildung quantitativ zu beschreiben und vorausszusagen. Zu diesen Eigenschaften gehört insbesondere das Langzeitverhalten des Systems, d.h. Eigenschaften der Attraktoren, von denen es u.U. an einem Parameterpunkt mehrere geben kann. Um die quantitative Übereinstimmung zwischen den Folgerungen aus der Differentialgleichung und der hier hergeleiteten diskreten Abbildung zu prüfen, sind Phasendiagramme ein geeignetes Mittel, da sie einen guten Überblick über das Verhalten in Abhängigkeit von den Systemparametern geben.

Eine aussagekräftige Größe für das Langzeitverhalten der Trajektorien sowohl der Differentialgleichung

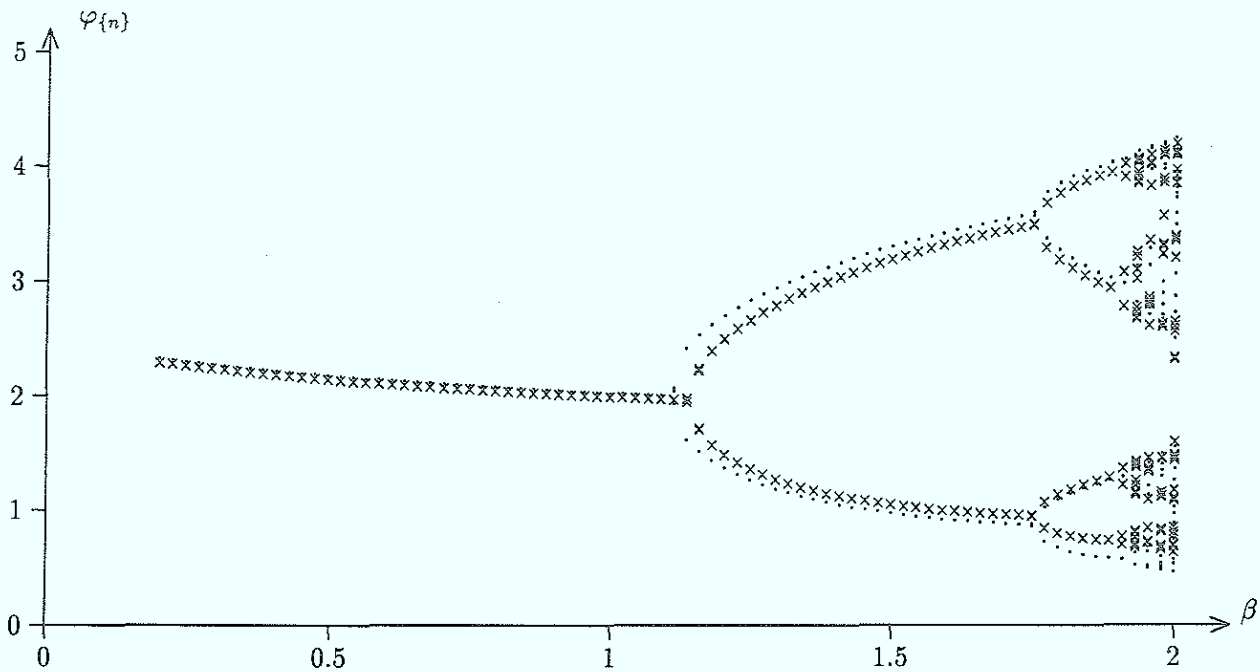


Abbildung 1.9: Iterationen der diskreten Abbildung (·) und der Differentialgleichung (×) für verschiedene β -Werte. Der Wert für $\alpha = 1691$ wurde festgehalten, die Variation des Parameters β von 0.2 bis 2.0 entspricht Variationen $r = 0.0048 \dots 0.0078$, $e^{-rT} = 0.0041 \dots 0.063$, $T = 647 \dots 662$.

als auch der Abbildung ist der größte Liapunovexponent

$$\lambda(\underline{x}(0)) := \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{|\underline{\epsilon}(0)| \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \frac{|\underline{\epsilon}(t)|}{|\underline{\epsilon}(0)|} \quad (1.30)$$

($\underline{\epsilon}(t) = \underline{x}_1(t) - \underline{x}_2(t)$ für zwei verschiedene Trajektorien), der es gestattet, Bifurkationslinien $\lambda = 0$ und chaotische Gebiete $\lambda > 0$ im Parameterraum abzulesen [7, 9]. Seine Dimension 1/Zeit erlaubt auch einen quantitativen Vergleich zwischen Abbildung und Differentialgleichung.

Ein Nachteil des auf Liapunovexponenten bezogenen Phasendiagramms ist, daß es keine Information über den Charakter nichtchaotischer Attraktoren enthält. $\lambda < 0$ bedeutet zwar das Vorliegen eines periodischen Attraktors, jedoch ist die Periode aus dem Wert von λ nicht abzulesen. Das ist aber wegen der Struktur der hier betrachteten Phasendiagramme nicht notwendig, wie gleich gezeigt wird. Zu beachten ist, daß der Liapunovexponent sich jeweils auf einen bestimmten Attraktor bezieht, und insofern davon abhängt, in welchem Attraktorbassin die Anfangsbedingung $x(0)$ liegt. Liegen in einem Parameterbereich mehrere Attraktoren zugleich vor (dies kommt mit zunehmender Größe von β immer häufiger vor), so wäre für eine saubere Darstellung eine Klassifizierung der Attraktoren notwendig, die aber bisher noch nicht erfolgt ist. Mit den hier erzielten Ergebnissen könnte dies durch Benutzung der diskreten Abbildung erfolgen.

In den bisher veröffentlichten Phasendiagrammen [3] wurden als unabhängige Variablen die Parameter der Differentialgleichung benutzt. Auf diese Weise sind Regelmäßigkeiten und Symmetrien zwar zu erkennen, sie werden jedoch verzerrt dargestellt, weil die "natürlichen" Parameter α und β nichtlinear von r und Ω abhängen.

Im folgenden werden nun zunächst Phasendiagramme der Poincaré-Abbildung (1.28) betrachtet, und einige Eigenschaften der Diagramme beispielhaft mit Hilfe dieser Abbildung erklärt und quantitativ beschrieben. Dann werden Phasendiagramme der Differentialgleichung betrachtet und die Übereinstimmung mit der Poincaré-Abbildung untersucht [13, Scale5].

Benutzt man zur Parametrisierung des zur Differentialgleichung gehörenden Phasendiagramms die Parameterkoordinaten (α, β) , so erhält man ein periodisches Phasendiagramm, das mit dem der diskreten Abbildung sehr gut übereinstimmt.

Die Parameter haben folgende Bedeutung:

$\beta \approx e^{-rT}/r$ steuert die "Stärke" der Nichtlinearität. Ab $\beta = 1$ kann die erste Bifurkation stattfinden. Mit steigendem β werden alle Bifurkationskaskaden des Feigenbaumszenarios durchlaufen. Im Gegensatz zur bloßen Verkleinerung von r wird bei der Erhöhung von β bei konstantem α der Resonanzzustand nicht geändert, d.h. das System führt bei Vorliegen eines periodischen Attraktors eine bestimmte, nur von α abhängende Anzahl von Umläufen durch.

$\alpha \approx \omega_1 T$ legt den Resonanzzustand fest. An den Punkten (α, β) und $(\alpha + 2\pi, \beta)$ ist das System im selben Bifurkationszustand, es führt lediglich einen Umlauf mehr aus. Auf diese Weise enthält eine Resonanzzunge im wesentlichen alle Informationen des Phasendiagramms (für nicht zu kleine α), alle weiteren ergeben sich durch $\alpha \rightarrow \alpha + n \cdot 2\pi$.

Hierbei muß beachtet werden, daß die Theorie (abhängig von α) nur bis zu einem bestimmten β -Wert gültig ist: Die Bedingungen (1.2), (1.3) müssen erfüllt sein. Das kann für beliebig große β nur bei jeweils hinreichend großem α erzielt werden. Wieweit die Theorie in dem für Anwendungen interessanten Bereich kleiner α -Werte gilt, wird in dem Kapitel über die Duffing-Gleichung mit Sinus-Anregung genauer betrachtet.

Verfolgen wir das eben Gesagte am Phasendiagramm der diskreten Abbildung (Abbildung 1.10 oben). Es zeigt Liapunovexponenten in Abhängigkeit der Parameter (α, β) , die eine zungenförmige Struktur bilden. Jeder Schraffurtyp bezeichnet Werte in einem Intervall, dessen Grenzen in der Zeile unter dem Diagramm abzulesen sind. Um diese Struktur zu erklären, betrachten wir zwei verschiedene Pfade durch das Diagramm:

$\beta = 1.0 = \text{const.}$, $\alpha/2\pi = 170.6 \dots 171.6$: An jedem Punkt dieser Linie, mit Ausnahme der Stellen $\alpha \bmod \pi = \frac{\pi}{2}$, befindet sich das System in einem stabilen Fixpunkt, der bei der Abbildung dem Schnittpunkt zwischen dem Graphen der Abbildungsfunktion und der Winkelhalbierenden in Abbildung 1.11 entspricht. Das Durchlaufen der Linie entspricht der horizontalen Verschiebung der Kosinuskurve; der Fixpunkt variiert dabei wie $\cos(\alpha + \alpha_0)$. Daraus folgt die 2π -Periodizität des Phasendiagramms in α -Richtung.

Der Übergang von n Umläufen zu $n + 1$ Umläufen des kontinuierlichen Systems ist im Phasendiagramm nicht sichtbar. Er wird beim Durchlaufen des α -Intervalls durch eine stetige Verformung des Orbits realisiert. Die Definition wann n bzw. $n + 1$ Umläufe vorliegen, ist deshalb mit einer gewissen Willkür behaftet. Sie bestimmt, wo der Übergang in das Phasendiagramm einzuzeichnen wäre.

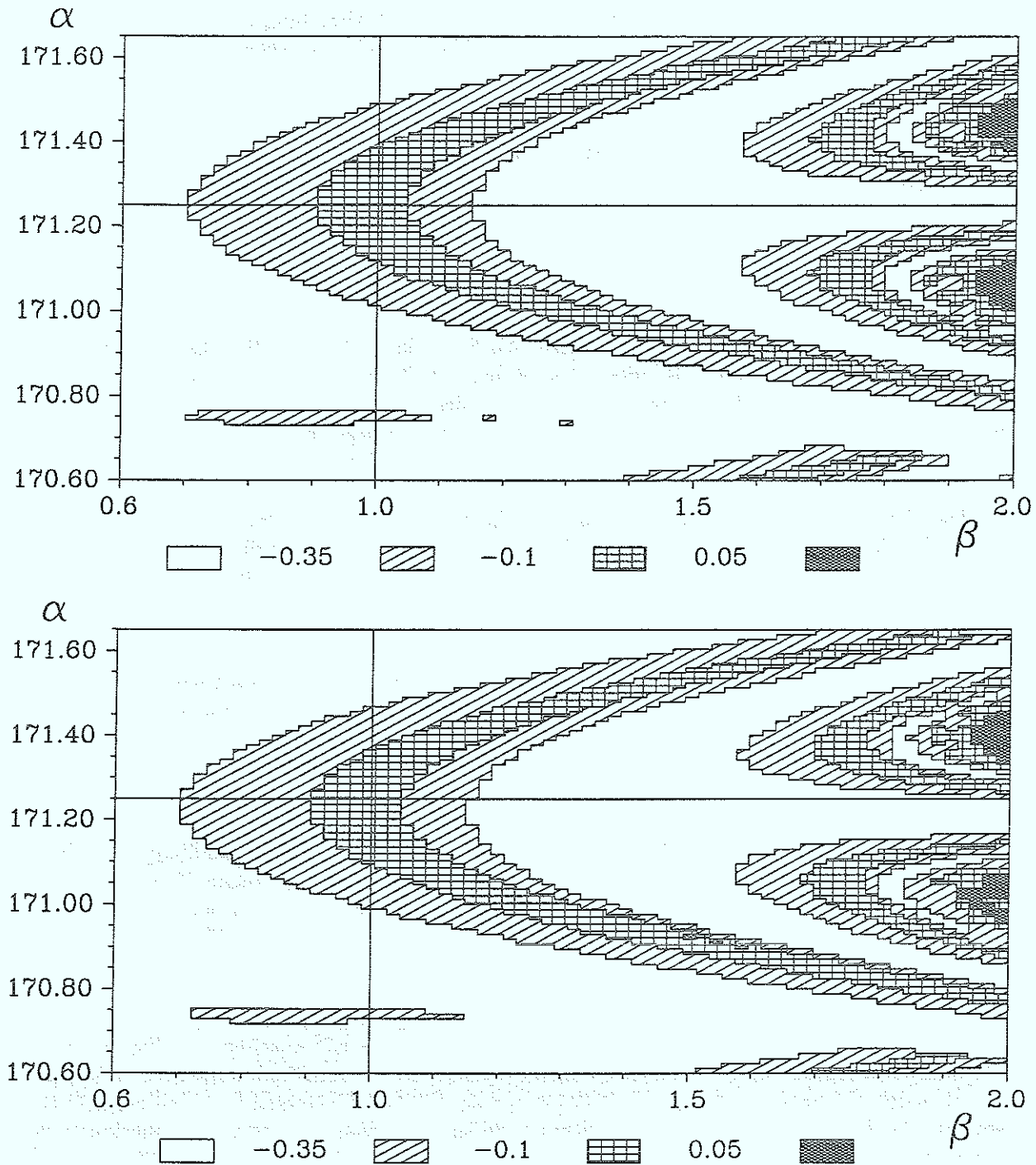


Abbildung 1.10: Phasendiagramm der diskreten Abbildung (oben) und der Differentialgleichung (unten). α -Skala in 2π -Einheiten. Die Hilfslinien liegen bei $\alpha = 171.25$, $\beta = 1$. Hier sagt die Theorie das Maximum der ersten Bifurkationslinie voraus. Abbildung 1.7 A auf S. 23 liegt bei $(170.66, 1.2)$.

$\alpha = 2\pi(n + 1/4) = \text{const.}$, $\beta = 0.6 \dots 2.0$: Dieser Pfad entspricht einer Amplitudenänderung der Kosi-

nusfunktion in Abbildung 1.11. Die Abbildung besitzt bei jedem β -Wert einen Fixpunkt

$$\varphi^* = \alpha + \beta \cos \varphi^* \quad (1.31)$$

bei $\varphi^* = \pi/2$. Dieser Fixpunkt wird bei $\beta = 1$ instabil, da der Liapunovexponent dort Null ist:

$$\lambda = \log |\beta \sin \varphi^*| = 0 \quad (1.32)$$

Beim Überschreiten von $\beta = 1$ findet eine Bifurkation statt. Der kleinstmögliche β -Wert, an dem λ verschwindet, liegt also bei $\beta = 1$, $\varphi^* = \pi/2$ und bestimmt das Maximum der Resonanzzunge in β -Richtung:

$$(\beta = 1, \alpha = \pi/2 + n \cdot 2\pi). \quad (1.33)$$

Durchläuft man eine Linie α nicht exakt bei $\alpha = \pi/2$, liegt der Fixpunkt φ^* nicht am steilsten Punkt der Kosinuskurve. Dies führt dazu, daß die Bifurkation erst bei größerem β stattfinden kann. Das erklärt die parabolische Form der Bifurkationslinie im Phasendiagramm.

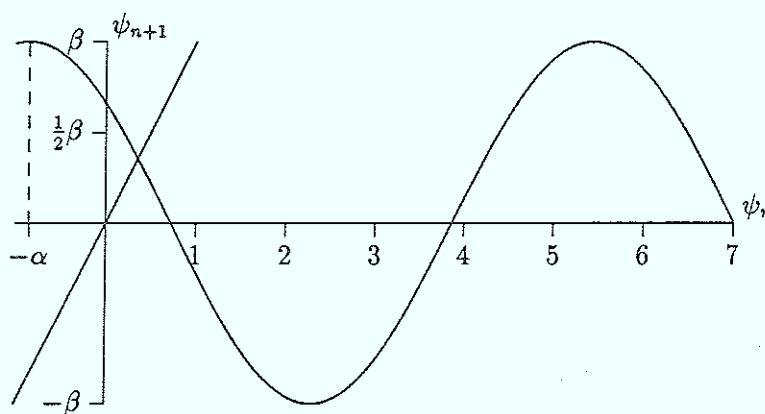


Abbildung 1.11: Diskrete Abbildung und Winkelhalbierende. Die Fixpunkte der Abbildung liegen an den Schnittpunkten des Abbildungsgraphen mit der Winkelhalbierenden. Zur Untersuchung des Verhaltens der Abbildung in Abhängigkeit der Parameter ist es zweckmäßig, die Abbildung $\varphi_{n+1} = \alpha + \beta \cos \varphi_n$ in der Form $\psi_{n+1} = \beta \cos(\psi_n + \alpha)$ mit $\psi = \varphi - \alpha$ zu schreiben. Dann kann die Variation von α als eine horizontale Verschiebung des Funktionsgraphen angesehen werden.

Die Stabilität der Fixpunkte ist gegeben durch die Steigung des Graphen der Abbildungsfunktion an den jeweiligen Schnittpunkten. Bei der Verschiebung der Kosinuskurve in Abbildung 1.11 um ein 2π -Intervall werden 2 Maxima in der Steigung durchlaufen: das zugehörige α -Intervall besitzt eine unterschiedliche Länge, je nachdem ob der Fixpunkt auf der an- oder absteigenden Flanke des Kosinus liegt (Abbildung 1.12). Das erklärt das Vorhandensein jeweils einer breiten und schmalen Zungen in jedem 2π -Intervall.

Bei den Fixpunkten mit den Werten

$$\varphi_{1,2}^* = 0, \pi$$

ist $\lambda = -\infty$, d.h. hier liegen *superstabile Fixpunkte* vor. Diese liegen auf den Geraden

$$\alpha_1 = -\beta, \quad \alpha_2 = \beta + \pi. \quad (1.34)$$

Diese "superstabilen Geraden" zweier Resonanzungen treffen sich bei $\beta = \pi/2$ (in Abbildung 1.10 würden diese Geraden mit der Steigung $\pm \frac{1}{2\pi}$ die schmale Resonanzung umschließen). Die schmale Resonanzung wird also mit größer werdendem β immer schmaler, bis sie bei $\beta = \pi/2$ verschwunden ist.

In Abbildung 1.12 betrachten wir den Liapunovexponenten entlang des Schnittes $\beta = 1$. Sie ist spiegelsymmetrisch bezüglich der Punkte $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$. Diese Punkte entsprechen in Abbildung 1.11 dem Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit dem Funktionsgraphen beim Nulldurchgang der Kosinuskurve. Aus der Konstruktion der Abbildung 1.11 geht die Symmetrie der Fixpunkte hervor: $\varphi^*(\frac{1}{4}\pi - \alpha) = -\varphi^*(\frac{1}{4}\pi + \alpha)$, bzw. $\varphi^*(\frac{3}{4}\pi - \alpha) = -\varphi^*(\frac{3}{4}\pi + \alpha)$. Diese Eigenschaft bleibt auch bei Iterationen der Abbildungsfunktion erhalten, das Phasendiagramm besitzt diese Symmetrie also auch bei den höheren Bifurkationslinien.

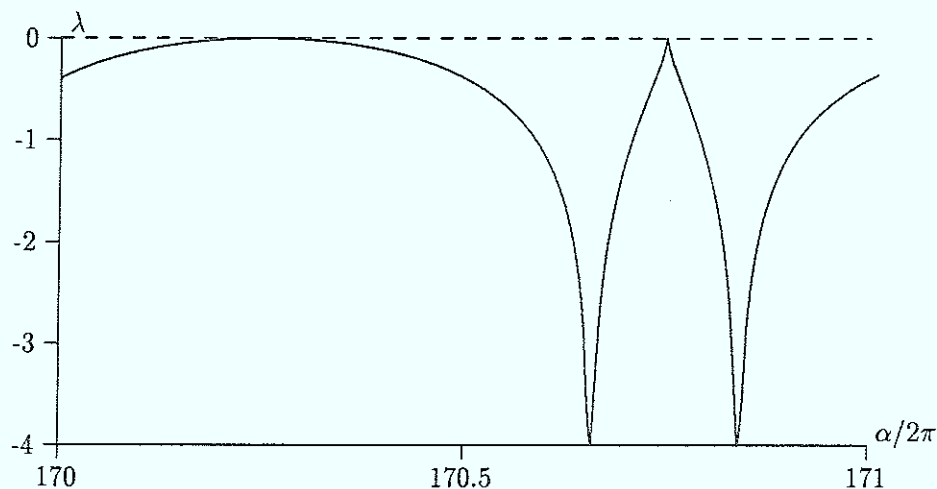


Abbildung 1.12: Liapunovexponent beim Schnitt $\beta = 1$ durch eine Resonanzung. Bei diesem β -Wert liegt für jedes α ein Fixpunkt vor. Zur Bestimmung von λ wurde φ^* mit der Fixpunktgleichung berechnet und damit $\lambda = \log |\sin \varphi^*|$ bestimmt. Das schmale Maximum ist bei $\beta = 1$ spitz, weil die ansteigende Flanke des Abbildungsgraphen dieselbe Steigung wie die Winkelhalbierende besitzt. Die λ -Skala wurde bei -4 abgeschnitten. Die Minima entsprechen superstabilen Fixpunkten, d.h. sie reichen bis $-\infty$.

Wenn β weiter erhöht wird, durchläuft das System die Bifurkationskaskaden des Feigenbaumszenarios. Außerdem werden koexistierende Attraktoren möglich. Dies folgt unter anderem aus der mit β zunehmenden Anzahl der Schnittpunkte zwischen der Diagonalen und dem Graphen der Abbildung. Diese immer feiner werdenden Strukturen innerhalb der Resonanzung werden in dieser Arbeit nicht untersucht.

Bei der Einschätzung dieser Art von Diagramm ist das Verfahren ihrer Erstellung zu berücksichtigen: Es wurden jeweils für 10000 Parameterwerte (100×100 Punkte Auflösung) die Liapunovexponenten bestimmt und das Spektrum der ermittelten Werte in Intervalle eingeteilt, die unterschiedlichen Schraffurmuster zugeordnet wurden. Die Intervallgrenzen sind jeweils unter den Abbildungen angegeben. Auf diese Weise werden artefizielle Strukturen vermieden, die durch Interpolation bei der Bestimmung von Konturlinien entstehen könnten. Diese Darstellung kann also nur Strukturen richtig wiedergeben, deren typische Skala den Abstand benachbarter Berechnungspunkte erheblich übersteigt. Deshalb sind die schmalen Resonanzungen nicht durchgängig erkennbar. Darüber hinaus muß beachtet werden, daß zur Berechnung der Liapunovexponenten eine bestimmte Anfangsbedingung verwendet wurde. Beim Vorhandensein koexistierender Attraktoren wird daher der Liapunovexponent desjenigen Attraktors bestimmt,

in dessen Attraktionsgebiet diese jeweilige Anfangsbedingung liegt. Dies führt bei größeren β -Werten zu irregulären Strukturen, die sich also als Folge des Vorhandenseins koexistierender Attraktoren erklären.

Die Anfangsbedingungen zur Bestimmung der Liapunovexponenten bei Benutzung der Differentialgleichung für die einzelnen Parameterwerte wurden wie folgt bestimmt: Für den jeweiligen Satz von Parametern wurden mit dem willkürlich, aber ein für alle Mal fest gewählten Anfangswert $\varphi_0 = 0.1$ jeweils 10000 Iterationen der Abbildung durchgeführt, um auf den zu diesem Anfangswert gehörenden Attraktor zu gelangen. Aus dem so ermittelten φ_n , $n = 10000$ wurden mit der Gleichung (1.20) die zugehörigen x -Koordinaten bestimmt, die dann als Anfangswerte für die Integration der Differentialgleichung verwendet wurden. Diese Anfangswerte sollten in der Nähe des entsprechenden Attraktors der Differentialgleichung liegen, so daß nur über wenige Anregungsperioden integriert werden muß, um vollends auf den Attraktor zu gelangen. Welcher Attraktor hierbei erreicht wird, hängt bei großen β -Werten sicherlich von der Wahl des φ_0 -Wertes ab.

Betrachten wir jetzt das so bestimmte Phasendiagramm der Differentialgleichung, Abbildung 1.10 unten. Die Lage der Bifurkationslinien stimmen sehr gut mit denen im Diagramm der diskreten Abbildung überein. Ab $\beta = 1.7$ liegt eine kleine Verschiebung (Promille-Bereich) in α -Richtung vor. Diese Verschiebung korrespondiert zu der Verschiebung in Abbildung (1.7-A), die Abweichung wächst mit steigendem β . Die Parameter der Differentialgleichung liegen im Bereich: $e^{-rT} = 0.04 \dots 0.01$, $r = 0.0048 \dots 0.0064$, $T = 664.2 \dots 650.4$. Das System führt in diesem Bereich 171 Oszillationen in jeder Anregungsperiode durch, der Abfall der Wirkung auf 1% bis 4% verteilt sich auf 171 Umläufe. Die Bedingungen für die Theorie sind im gesamten abgebildeten Parameterbereich gut erfüllt.

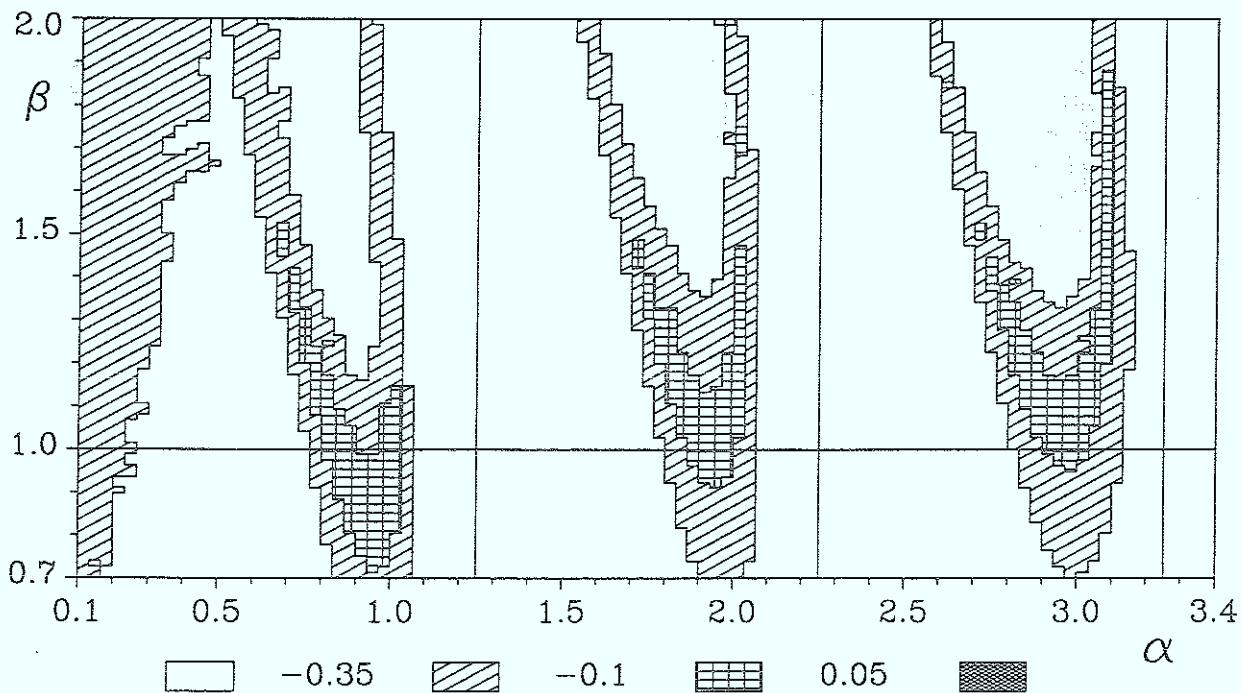


Abbildung 1.13: Phasendiagramm der Differentialgleichung. $r = 0.053 \dots 0.26$, $T = 1.13 \dots 16.2$. α -Achse in 2π -Einheiten.

Für technische Anwendungen wäre wohl eher ein Parameterbereich interessant, in dem das System nur wenige Umläufe pro Anregungsperiode durchführt. Abbildung 1.13 und Abbildung 1.14 zeigen Beispiele

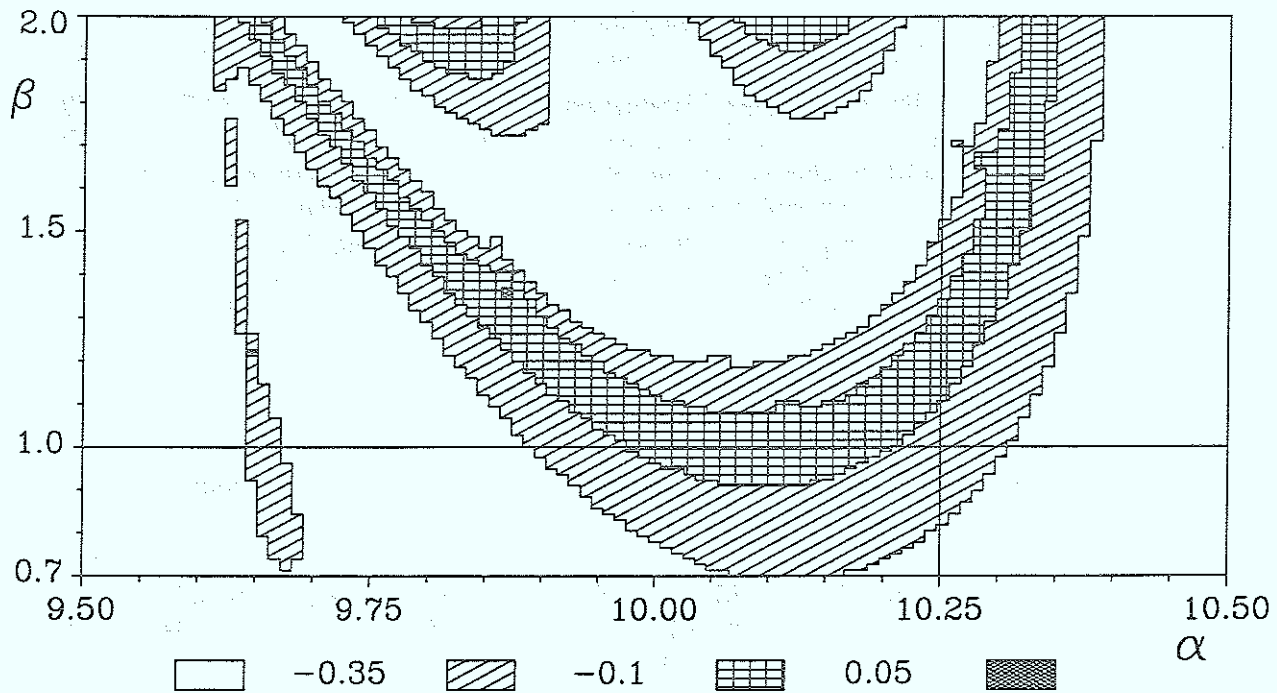


Abbildung 1.14: Phasendiagramm der Differentialgleichung. $r = 0.031 \dots 0.05$, $T = 38.4 \dots 44.6$ α -Achse in 2π -Einheiten.

für die ersten Zungen, in denen das System weniger als zehn Umläufe durchführt. In diesem Bereich sind die Voraussetzungen (1.2), (1.3) auf Seite 13 für die Anwendbarkeit der Theorie nur schlecht erfüllt. Die Abweichungen von der Gestalt der asymptotischen Zungen sind in α -Richtung besonders ausgeprägt, der β -Wert 1.0 für die erste Bifurkation wird schon bei den ersten Zungen sehr gut getroffen. Die zu höheren Bifurkationen gehörenden Konturlinien nähern sich mit steigendem α dagegen recht langsam denen der asymptotischen Abbildung (1.28) an.

2 Der Referenzzyklus x_0

2.1 Transformation der Duffing-Gleichung in ein hamiltonsches System

In den folgenden Kapiteln werden wir eine Form der Poincaré-Abbildung zur Duffing-Gleichung

$$\ddot{x} + 2r\dot{x} + x^q = x^l \sin^p \Omega t \quad (2.1)$$

bestimmen, die derjenigen des Kapitels 1 völlig analog ist. Die hier gegebene, gegenüber Gleichung (0.2) auf Seite 4 allgemeinere Form der Anregungskraft wird von der Theorie ohne großen Aufwand abgedeckt, falls $2p < q - l$ ist, für das Verständnis des Folgenden kann man sich immer $l = 0$, $p = 1$ vorstellen. Auch nichtganzzahlige Exponenten q , p und l sind zugelassen, wobei mit x^q dann die Größe $\text{sgn}(x)|x|^q$ gemeint ist, etc.

Auch bei dieser verallgemeinerten Duffing-Gleichung werden wir uns die ausgezeichneten Eigenschaften der Wirkungs-Winkel-Variablen zunutze machen und die Poincaré-Abbildung in diesen Koordinaten formulieren. Hierfür ist die Transformation in ein hamiltonsches System erforderlich. Wir betrachten zunächst eine Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2r\dot{x} + V'(x, t) = 0 \quad (2.2)$$

mit dem allgemeinen Potential

$$V(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} a_{\nu}(t) x^{\nu}. \quad (2.3)$$

Um zu einem hamiltonschen System zu kommen wird –genau wie im ersten Kapitel– die Transformation auf exponentiell expandierende Koordinaten durchgeführt, wodurch der Dissipationsterm eliminiert wird:

$$z(t) = e^{rt} x(t). \quad (2.4)$$

Das so erhaltene System $\ddot{z} + W'(z, t) = 0$ besitzt das Potential

$$\begin{aligned} W(z, t) &= e^{2rt} V(e^{-rt} z, t) - \frac{1}{2} r^2 z^2 \\ &= a_1(t) e^{rt} z + \frac{1}{2} (a_2(t) - r^2) z^2 + \frac{1}{3} a_3(t) e^{-rt} z^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Um die Rechnung weiterführen zu können, muß dieses Potential zwei Eigenschaften besitzen:

1. Alle nicht-quadratischen Terme müssen exponentiell aussterben, damit die harmonischen Näherungen am Ende jeder Halbperiode angewendet werden können. Daraus folgt, daß der Term $a_1(t)$ verschwinden muß, da er ein exponentiell anwachsendes Potential hervorrufen würde. Dieser Term, der dem linearen Term im Potential V entspricht, wurde im Fall der Rechteckanregung durch die Transformation auf y -Koordinaten eliminiert. Das Fehlen des linearen Terms bedeutete dort, daß als y -Koordinate der Abstand vom Potentialminimum bei ± 1 gewählt wurde.

Um den analogen Effekt bei dem hier vorliegenden, sich kontinuierlich ändernden, Potential der Duffing-Gleichung zu erzielen, muß die Transformation auf y -Koordinaten jetzt offensichtlich ebenfalls zeitabhängig sein:

$$y(t) = x(t) - x_0(t) \quad (2.6)$$

Genauer: Zur Festlegung des Koordinatenursprungs darf eine Funktion $x_0(t)$ mit beliebiger Zeitabhängigkeit verwendet werden. Diese Freiheit werden wir ausnützen, um ein Potential mit den gewünschten Eigenschaften zu erhalten. Die "naive" Wahl für die Funktion $x_0(t)$, der Ort des Potentialminimums

$$x_a(t) = \sin^{\delta} \Omega t \quad (2.7)$$

mit dem Exponenten

$$\delta = \frac{p}{q-l} < \frac{1}{2} \quad (2.8)$$

führt deshalb nicht zum Ziel, weil beim Einsetzen in die Differentialgleichung Ableitungen von $x_0(t)$ auftreten, die für $t \rightarrow 0$ singulär werden:

$$\ddot{y} + 2r\dot{y} + (y + x_0)^q - x_0^q - [(y + x_0)^l - x_0^l] \sin^p \Omega t = -(\ddot{x}_0 + 2r\dot{x}_0 + x_0^q - x_0^l \sin^p \Omega t) \quad (2.9)$$

Wenn wir aber fordern, daß $x_0(t)$ selbst eine Lösung der Differentialgleichung (2.1) ist, verschwindet die rechte Seite, und wir erhalten eine Differentialgleichung, deren Potentialminimum bei $y = 0$ ruht:

$$\begin{aligned} V(y, x_0) &= \frac{1}{q+1} [(y + x_0)^{q+1} - (q+1)yx_0^q - x_0^{q+1}] \\ &\quad - \frac{\sin^p \Omega t}{l+1} [(y + x_0)^{l+1} - (l+1)yx_0^l - x_0^{l+1}] \\ &= \frac{1}{2} [qx_0^{q-1} - l \sin^p(\Omega t)x_0^{l-1}] y^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} [q(q-1)x_0^{q-2} - l(l-1) \sin^p(\Omega t)x_0^{l-2}] y^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

2. Um das Adiabatentheorem nutzen können, darf sich das Potential nur auf einer Zeitskala ändern, die viel größer ist als 1 (Schwingungsdauer des Systems). Das bedeutet, daß sich auch die Funktion $x_0(t)$ nur langsam ändern darf, d.h., keine Schwingungen um das Potentialminimum ausführen sollte.

Wie wir sehen werden, gibt es eine ganz bestimmte Lösung $x_0(t)$ (wir nennen sie die "Schleichlösung"), die in hinreichender zeitlicher Entfernung der Nulldurchgänge tatsächlich in $x_a(t)$ nach Gleichung (2.7) übergeht. $V(y, x_0)$ wird dort zu einer homogenen Funktion der Ordnung $q+1$ in $x_0 = x_a(t)$ und y :

$$V(y, x_0) = \frac{q-l}{2} x_0^{q-1} y^2 + \frac{(q+l-1)(q-l)}{6} x_0^{q-2} y^3 + \dots \quad (2.11)$$

Der Inhalt dieses Kapitels besteht in der Konstruktion dieser Schleichlösung $x_0(t)$.

2.2 Der Mechanismus des Referenzzyklus

Die Konstruktion und Nutzung dieser nicht oszillierenden Schleichlösung $x_0(t)$ der Duffing Gleichung ist eine der zentralen Ideen dieser Arbeit. Sie kann aufgefaßt werden als eine von zwei ganz unterschiedlich zu interpretierenden Analogien des Grenzzyklus beim harmonischen Oszillator, dessen Einschwingvorgang wir zunächst betrachten (Abbildung 2.1). Wir bezeichnen im Folgenden den Punkt $(x(t), \dot{x}(t))$ mit $\mathbf{x}(t)$.

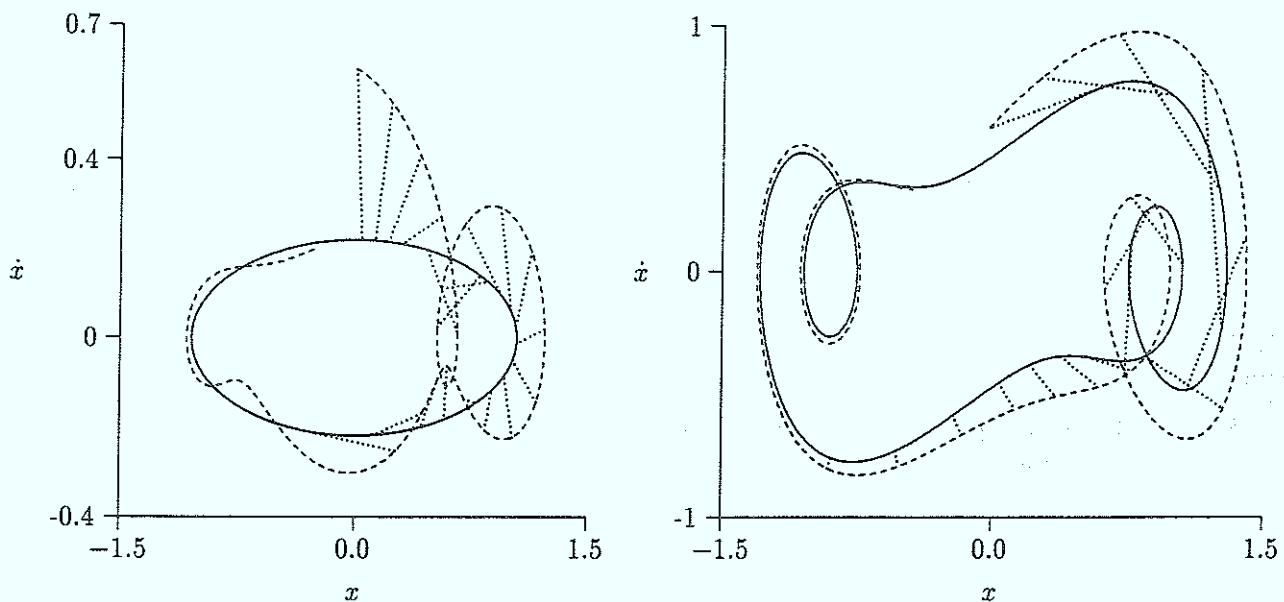


Abbildung 2.1: Links: Einschwingvorgang des harmonischen Oszillators. Parameter: $r = 0.1$, $T = 30$. Der Grenzzyklus ist durchgezogen, die Trajektorie im Einschwingvorgang gestrichelt. An einigen Zeitpunkten ist die Verbindungslinie $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_G(t)$ eingezeichnet. Der Abstand und die Phasenverschiebung oszillieren mit abnehmender Amplitude. Rechts: Das analoge Bild für den Duffing Oszillator. Für die hier benutzten Parameterwerte $r = 0.2$, $T = 18$ ist das Langzeitverhalten des Systems periodisch, alle Trajektorien laufen in einen wohldefinierten Grenzzyklus hinein, bei dem die Schwingungen –im Gegensatz zum harmonischen Fall– jedoch nicht ausgestorben sind.

Jeder Punkt $\mathbf{x}(t)$ auf der noch nicht eingeschwungenen Trajektorie nähert sich langfristig dem entsprechenden Punkt $\mathbf{x}_G(t)$ des Grenzzyklus. Mit dem Aussterben der Eigenschwingungen nähern sich die entsprechenden Punkte mehr und mehr, bis die Trajektorie $\mathbf{x}$ in den Grenzzyklus übergegangen ist: $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_G$.

Wenn $T \gg 1$ gilt, ändert sich das gesamte Potential sehr langsam in der Zeit. Im harmonischen Fall beschreibt der Grenzzyklus im wesentlichen die Bewegung des Potentials, d.h. nach Abklingen des Einschwingvorgangs folgt das System dem Potentialminimum (bis auf eine, mit Ω verschwindende, Phasenverschiebung). Dies ist beim Duffing-Oszillator so nicht der Fall, zumal es ja Parameterwerte gibt, bei denen sein Langzeitverhalten durch einen chaotischen oder mehrere gleichzeitig existierende Attraktoren, aber nicht durch einen wohldefinierten Grenzzyklus beschrieben wird.

Es stellt sich also die Frage, warum es beim langsam angetriebenen Duffing-Oszillator keine Lösung gibt, die der Bewegung des Potentialminimums auf Dauer folgt und auf die hin der Einschwingvorgang aller Trajektorien zuläuft.

Wir werden zeigen, daß es für eine Halbperiode T eine solche Lösung auch für den Duffing-Oszillator gibt, eben die schon genannte Schleichlösung. Diese stimmt jedoch *nicht* mit der Schleichlösung für die jeweils folgende Halbperiode überein, die aus anderen Anfangsbedingungen hervorgeht. Dies wäre eine zweite Analogie zum harmonischen Grenzzyklus und es ist zu klären, warum die Schleichlösung nicht mit dem Grenzzyklus identisch ist.

Betrachtet man die Bewegung des Potentialminimums, so erkennt man, warum eine dem Minimum folgende Schleichlösung nur für eine Halbperiode existieren kann. Für große T folgt die Schleichlösung, wie noch zu zeigen ist, tatsächlich im wesentlichen dem Potentialminimum:

$$x_a(t) := x_{\min}(t) = \sin^\delta \Omega t \quad (2.12)$$

Beim Nulldurchgang des Potentials bewegt sich das Minimum jedoch unendlich schnell, d.h. seine Geschwindigkeit $\dot{x}_{\min}$ wird singulär:

$$\dot{x}_{\min} = \delta \Omega (\sin^{\delta-1} \Omega t) \cos \Omega t \quad (2.13)$$

Die Schleichlösung kann dem Minimum nicht folgen und reißt auf. Dieser Effekt hat ähnliche Auswirkungen wie der Kick bei der Rechteckanregung, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

Die Schleichlösung $x_0(t)$ für eine volle Anregungsperiode $2T$ besteht also aus zwei Teilen, die durch Kicks bei $t = 0, \pi/\Omega$ getrennt sind. Bei großen T ist x_a über lange Zeiten eine sehr gute Approximation für x_0 , im Bereich der Nulldurchgänge des Potentials muß die Schleichlösung jedoch von x_a abweichen.

Die Existenz des x_0 -Zyklus als *nichtoszillierende Lösung der Differentialgleichung* innerhalb einer Halbperiode T kann man sich mit dem Modell der Kugel im Potentialtopf plausibel machen (Abbildung 2.2).

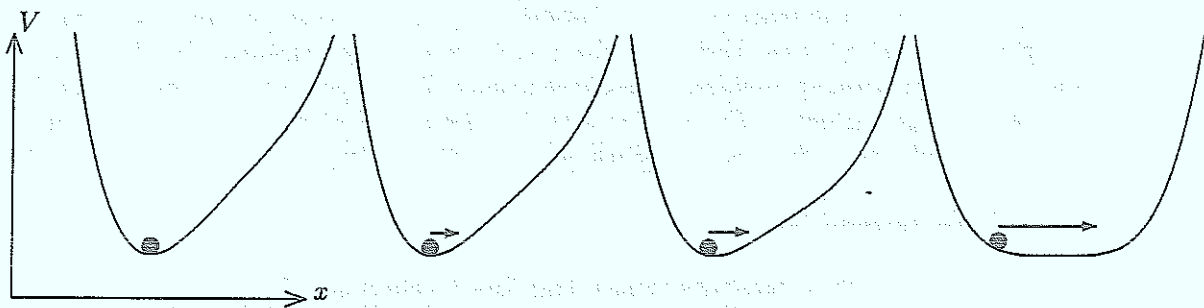


Abbildung 2.2: Potential der Duffing Gleichung zu den Zeiten $t = -0.5 \cdot T$, $t = -0.4 \cdot T$, $t = -0.3 \cdot T$, $t = 0$. Die Referenzlösung ist als Kugel in dem Potential dargestellt; deren Geschwindigkeit ist als Pfeil angegeben. Bei Vernachlässigung der Reibung, ergeben sich die anderen drei Viertel einer Anregungsperiode durch Spiegelung.

Betrachten wir zunächst den asymptotischen Fall $r = 0$, $T \gg 1$. Wir beginnen bei $t = -T/2$, wo das Minimum des Potentials den maximalen Ausschlag in die negative x -Richtung hat und sich am langsamsten bewegt (Abbildung 2.2).

$$x_0(-T/2) = -1, \quad \dot{x}_0(-T/2) = 0. \quad (2.14)$$

Die Schleichlösung folgt in diesem Zeitbereich dem Minimum. Zur Bestimmung von $(x_0(0), \dot{x}_0(0))$ betrachten wir die Zeitentwicklung von $t = -T/2$ nach $t = 0$. Das Potentialminimum wird aus seiner

Ruhelage $(x, \dot{x}) = (-1, 0)$ beschleunigt. Das System bleibt aufgrund der Trägheit hinter dem Minimum immer mehr zurück, um bei $t = 0$ an einer bestimmten Stelle links vom Minimum zu liegen.

$$x_0(0) = -x_{00} < 0 \quad \dot{x}_0(0) = \dot{x}_{00} > 0$$

Für das nachfolgende Zeitintervall von $t = 0 \dots T/2$ kann die Schleichlösung nicht bei $(-x_{00}, \dot{x}_{00})$ fortgesetzt werden, das würde zu Schwingungen führen. Sie muß bei $(x_{00}, \dot{x}_{00})$ weitergeführt werden und ergibt so die an der $\dot{x}$ -Achse gespiegelte Schleichlösung des Zeitintervalls $-T/2 \dots 0$ (bei $r = 0$ ist die Gleichung invariant bezüglich Zeitumkehr). Die restlichen Viertel einer Anregungsperiode ergeben sich durch Spiegelung an der x -Achse.

Durch das Beschleunigungsverhalten des Potentialminimums beim Nulldurchgang können die Abschnitte der Schleichlösung bei $t = 0, T$ nicht zusammenhängen. Versucht man, durch eine geeignete Wahl der Anfangsbedingungen bei $t = -T/2$ zu einem *geschlossenen* Zyklus zu kommen, so verliert man die Eigenschaft der Lösung "Schleichlösung" zu sein – man erhält einen (je nach Parameterwerten anziehenden oder abstoßenden) Grenzzzyklus; anders als beim harmonischen Oszillator schwingt dieser aber um das Potentialminimum (Abbildung 2.1, rechts).

Bei $r > 0$ verliert der Zyklus seine Symmetrie bezüglich Spiegelung an der x - und y -Achse, da die Reibung die Zeitumkehrinvarianz zerstört; die Inversionssymmetrie bleibt jedoch erhalten. Die qualitative Form des Referenzzyklus wird nicht geändert, der quantitative Einfluß von Reibungskonstanten r und endlichen Ω -Werten wird später in diesem Kapitel diskutiert.

Betrachten wir nun die Schleichlösung im Hinblick auf die im vorherigen Kapitel beschriebene Anwendung in der Transformation auf y -Koordinaten. Dort bewegt sich das System in einem Potential, dessen Minimum ruht und dessen nichtquadratische Anteile im Verlauf einer Halbperiode aussterben. Das Potentialminimum ist hier (genau wie im Fall der Kastenanziehung) der anziehende Punkt des Systems, den es nur deshalb nicht erreicht, weil es durch den Kick (wie in Kapitel 1) immer wieder davon entfernt wird.

Übersetzen wir diesen Vorgang zurück in x -Koordinaten. Hier bewegt sich das Minimum des Potentials $V(y)$ exakt auf der Trajektorie der Referenzlösung, welche alle anderen Trajektorien permanent anzieht. Während des Kicks, bei dem das Potentialminimum jetzt auf den anderen Zweig springt, wird der Systemzustand wieder von der Referenzlösung entfernt (Abbildung 2.3). Auf diese Weise werden die Schwingungen des Systems im sich bewegenden Potentialtopf immer wieder angeregt und die Lösungen der Duffing Gleichung bestehen im Gegensatz zum harmonischen Fall *immer* aus der Überlagerung von Drift des Potentialminimums und Schwingungen im Potentialtopf. Dem Abstand der Minima der Potentiale $V_{\pm}$ im Kapitel 1 entspricht hier die Größe $2x_{00}$.

Vergleichen wir jetzt den Einschwingvorgang des Duffing Oszillators mit dem harmonischen Fall, so sehen wir, daß bei ersterem die Lösungstrajektorie sich kurzfristig immer wieder auf die Schleichlösung zubewegt, aber langfristig auf dem Grenzzzyklus endet. Im harmonischen Fall sind beide identisch. Dieser Vorgang ist in Abbildung 2.3 gezeigt.

2.3 Asymptotik für kleine Ω

Unser nächstes Ziel ist die genaue Definition und Beschreibung der Schleichlösung und damit insbesondere auch die Bestimmung der Kick-Parameter, d.h. der Größen $(x_{00}, \dot{x}_{00})$. Hierzu betrachten wir den

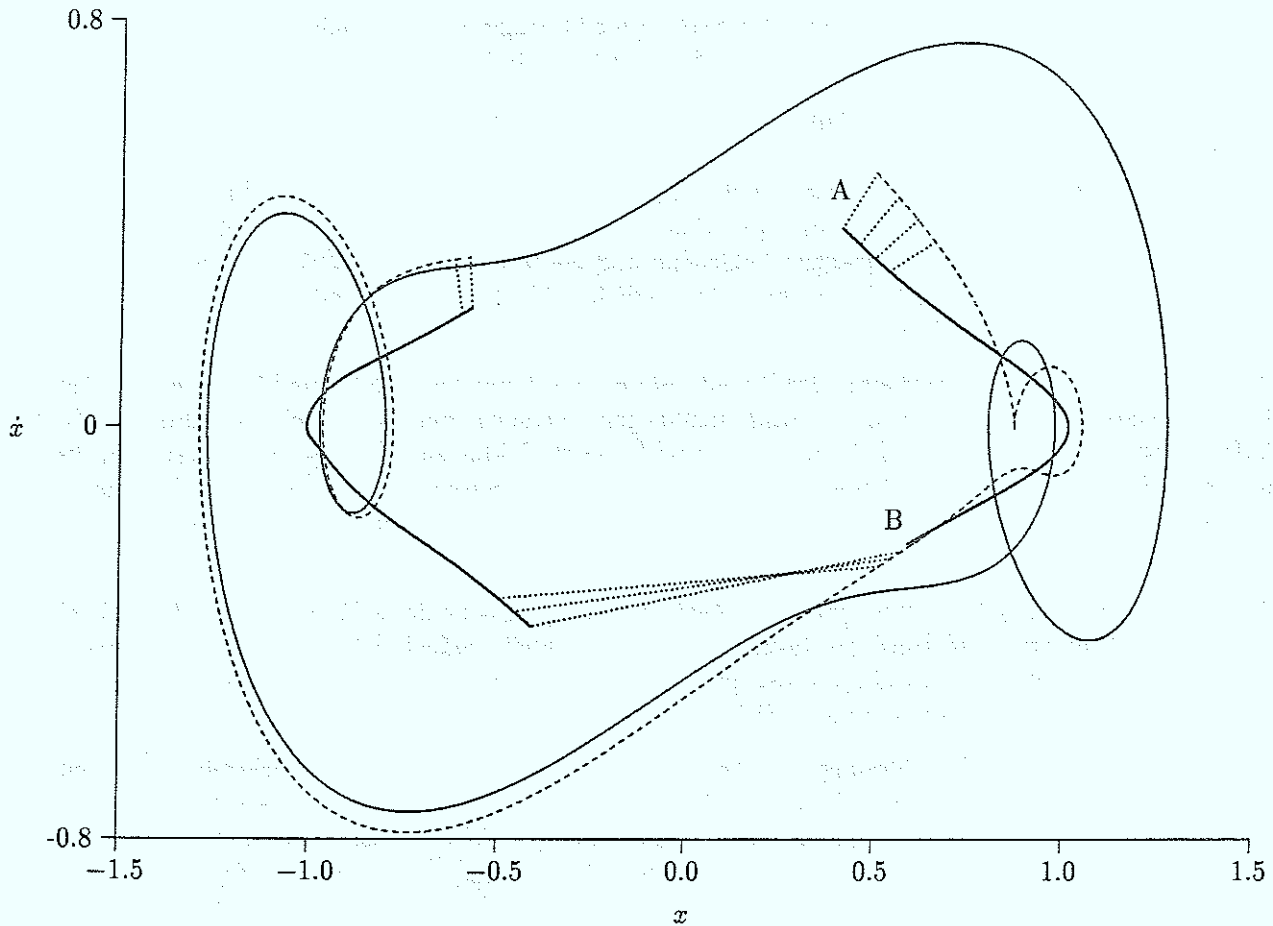


Abbildung 2.3: Drei Lösungen der Duffing-Gleichung. Gestrichelt: Einschwingende Lösung $\mathcal{E}$, durchgezogen: Grenzyklus $\mathcal{G}$, fett: Referenzlösung $x_0(t)$. Einige zeitlich korrespondierende Punkte von $\mathcal{E}$ und $x_0(t)$ sind mit punktierten Linien verbunden. Punkt A ($t = 0$): Der rechte Ast des x_0 -Zyklus beginnt. Die Lösung $\mathcal{E}$ wird von $x_0(t)$ angezogen, nicht von $\mathcal{G}$. Bei B ($t = T/2$) endet der rechte Ast des x_0 -Zyklus, der nächste Referenzpunkt für $\mathcal{E}$ liegt auf dem linken Ast, das ergibt den Kick. Bei $t = T/2 - \epsilon$ ist $\mathcal{E}$ schon weitgehend in $\mathcal{G}$ übergegangen. Parameter: $r = 0.275$, $\Omega = 0.35$, $q = 3$.

Zeitbereich um $t = 0$, in dem die Abweichung des x_0 -Zyklus von x_a erzeugt wird. Im asymptotischen Limes $\Omega \rightarrow 0$ geht die Bewegungsgleichung (2.1) in die einfachere Gleichung

$$\ddot{x} + 2r\dot{x} + x^q = x'(\Omega t)^p \quad (2.15)$$

über.

Durch Umskalen können wir hier den Parameter Ω eliminieren, es sei:

$$x(t) = \Omega^\gamma \xi(t), \quad t = \Omega^{-\eta} \tau. \quad (2.16)$$

Mit den Exponenten

$$\gamma = \frac{2\delta}{2 + (q-1)\delta}, \quad \delta = \frac{p}{q-1}, \quad \eta = \frac{(q-1)\delta}{2 + (q-1)\delta} \quad (2.17)$$

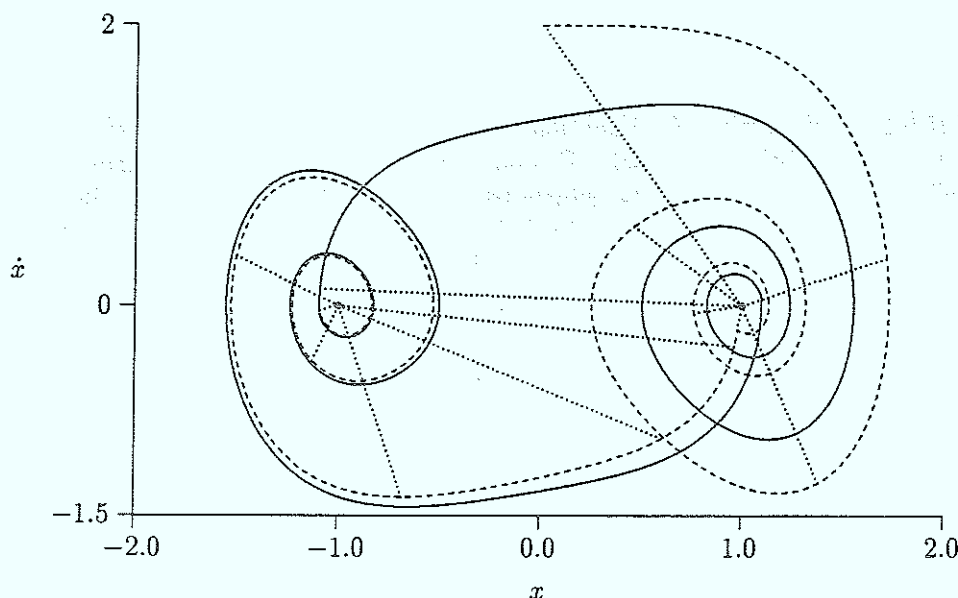


Abbildung 2.4: Das der Abbildung 2.3 entsprechende Bild für die Duffing-Gleichung mit Rechteck-Anregung. Die Referenzlösung degeneriert in diesem Fall zu den Punkten $(\pm 1, 0)$.

erhalten wir als neue Bewegungsgleichung

$$\ddot{\xi} + 2\rho\dot{\xi} + \xi^q = \xi^l \tau^p \quad (2.18)$$

mit dem einzigen Parameter

$$\rho = r\Omega^{-\eta}. \quad (2.19)$$

Wir suchen nun eine Schleichlösung *dieser* Gleichung, die sich langfristig, *ohne zu oszillieren*, der Asymptotik τ^δ nähert. Ein plausibles Iterationsverfahren hierfür ist

$$\xi_{n+1}(\tau) = [\tau^p - \xi_n^{-l}(\ddot{\xi}_n + 2\rho\dot{\xi}_n)]^{\frac{1}{q-l}}. \quad (2.20)$$

Mit der bezüglich τ asymptotischen Lösung $\xi_1(\tau) = \tau^\delta$ als Startfunktion ergibt sich eine Lösung des Typs

$$\xi_0(\tau) = \tau^\delta \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\rho\tau) \tau^{-n\lambda} \right) \quad (2.21)$$

mit

$$\lambda = 2 + (q-1)\delta \quad (2.22)$$

und Polynomen n-ter Ordnung P_n .

Diese Entwicklung ist eine asymptotische Reihe und unbrauchbar für kleine τ . Sie ist gültig für große τ und kann dort benutzt werden, um Anfangsbedingungen für eine numerische Integration zu $\tau = 0$ zu bestimmen.

Für kleine ρ kann die ρ -Abhängigkeit vernachlässigt werden, da dann der $2\rho\dot{\xi}$ -Term in Gleichung (2.18) immer klein gegenüber den anderen Termen ist: Für große τ bewegt sich das Potentialminimum so langsam, daß die Reibungskraft vernachlässigt werden kann, für $|\tau| < 1$ ist die Beschleunigung so groß, daß $\ddot{x}/\dot{x} \gg r$ gilt. Wie wir später sehen werden, ist der interessante Parameterbereich durch $r \approx \Omega$

gegeben, dort ist also $\rho \approx \Omega^{1-\eta} \ll 1$. Die Referenzlösung $x_0(t)$ für $\Omega \rightarrow 0$ kann deshalb mit $r = 0$ bestimmt werden.

Gleichung (2.21) zeigt, daß sich $\xi_0(\tau)$ algebraisch der Funktion τ^δ annähert. In x, t -Variablen passiert dies auf der Zeitskala $\Omega^{-\eta}$, während für die Differenz zwischen Ωt und $\sin \Omega t$ die Zeitskala Ω^{-1} maßgebend ist. Wenn wir also $\Omega t = \epsilon$ so klein vorgeben, daß eine vorgegebene Genauigkeitsanforderungen bezüglich der Differenz zwischen Ωt und $\sin \Omega t$ erfüllt ist, kann durch Verkleinern von Ω die Größe $\tau = \Omega^{\eta-1}$ beliebig groß gemacht werden und somit der relevante Bereich der Entwicklung (2.21) aufgesucht werden. Diese Abschätzung zeigt, daß die betrachtete Funktion auch die Referenzlösung der vollen Duffing Gleichung für einen bestimmten Zeitbereich beschreibt (Abbildung 2.10), der mit $\Omega \rightarrow 0$ immer größer wird.

Wir erhalten also als Darstellung von x_0 im ersten Quadranten der $(x, \dot{x})$ Ebene (die anderen Teile erhält man durch Spiegelung an der x - und $\dot{x}$ -Achse)

$$x_0(t) = \sin^\delta \Omega t + \Delta x_0(t) \quad (2.23)$$

mit

$$\Delta x_0(t) = \Omega^\gamma (\xi_0(\tau) - \tau^\delta), \quad \tau = \Omega^\eta t \quad (2.24)$$

und ξ_0 als Lösung der Gleichung

$$\ddot{\xi}_0 + \xi_0^q = \xi_0^l \tau^p. \quad (2.25)$$

Als Anfangsbedingung wird für große τ die Entwicklungslösung (2.21) bei $\rho = 0$ verwendet. Durch numerische Integration der Differentialgleichung können so die Größen

$$\xi_1 := \xi_0(0) \quad \xi_2 := \dot{\xi}_0(0) \quad (2.26)$$

bestimmt werden. Diese Konstanten sind als Anfangsbedingungen auch für die Bestimmung der Referenzlösung der vollen Duffing Gleichung für kleine r und Ω brauchbar. Sie gehören (wie im ersten Kapitel I_0 und ω_0) zu einem Satz numerisch zu bestimmender Größen, mit denen im nächsten Kapitel die Poincaré-Abbildung formuliert wird und sind unabhängig von den Parametern r und Ω , hängen aber von den Exponenten l , p und q ab.

2.3.1 Numerik

Zur Bestimmung von ξ_1 und ξ_2 wurde Gleichung (2.21) bis $n = 1$ bestimmt und bei einem τ -Wert ausgewertet, welcher der gewünschten Genauigkeit entspricht:

$$\begin{aligned} \xi_0(\tau) &\approx \tau^\delta \left(1 - \frac{\delta(\delta-1)}{q-l} \tau^{-\lambda} \right), \\ \dot{\xi}_0(\tau) &\approx \delta \tau^{\delta-1} \left(1 - \frac{(\lambda-\delta)(1-\delta)}{q-l} \tau^{-\lambda} \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Mit dieser Anfangsbedingung erhält man durch Rückintegration der Gleichung (2.25) bis $\tau = 0$ die gesuchten Größen ξ_1 und ξ_2 , die in Tabelle (2.1) für einige Sätze von Exponenten l, p, q angegeben sind [13, Xi12, PortXi]. In Abbildung 2.5 sind einige zugehörige Orbits gezeigt.

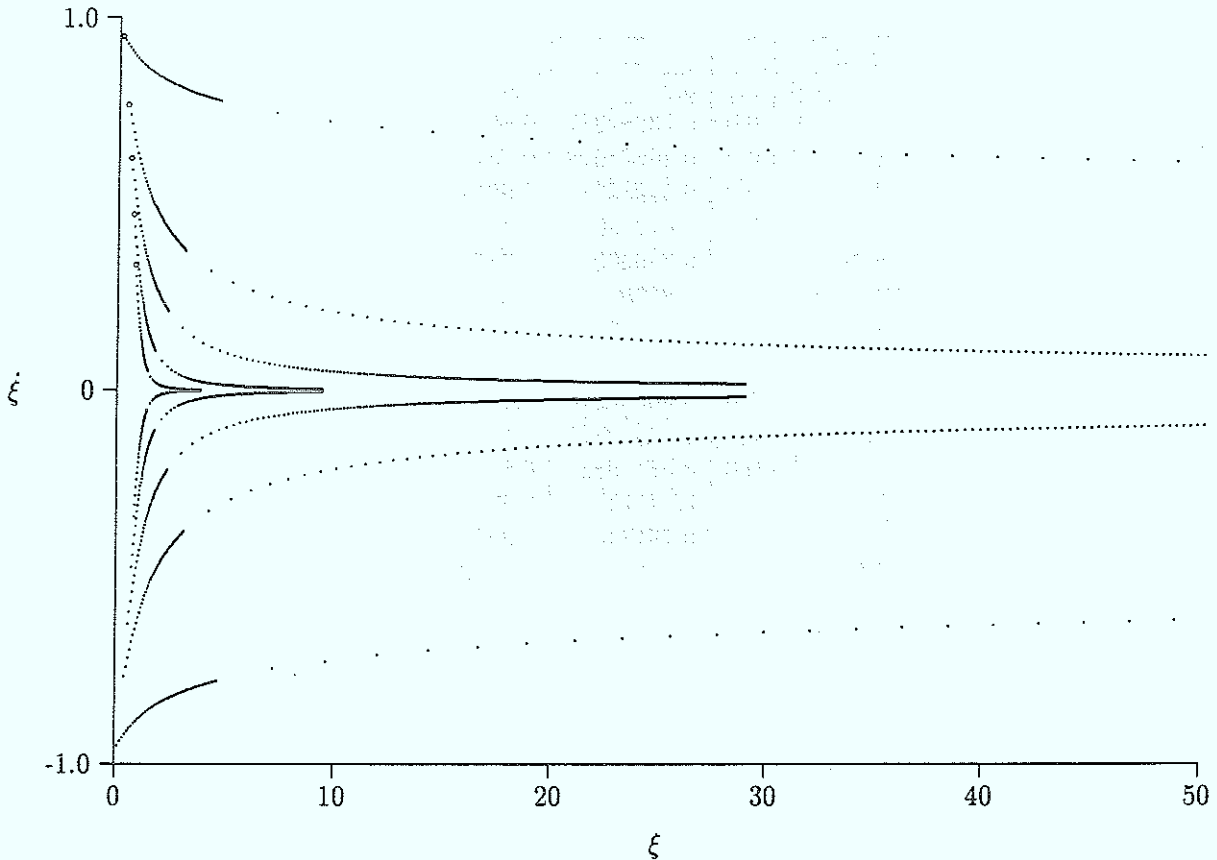


Abbildung 2.5: Orbits $\xi_0(t)$ für verschiedene q , bei $p = 1$, $l = 0$. q von außen nach innen: 1.1, 1.5, 2, 3, 5. Die Werte (ξ_1, ξ_2) sind als Kreise gezeichnet. Die ersten 50 Punkte sind jeweils im zeitlichen Abstand von $\Delta\tau = 0.1$ gezeichnet, die restlichen Punkte im Abstand $\Delta\tau = 3$.

2.4 Der Orbit $x_0(t)$ für endliche r und Ω

Im Fall endlicher r, Ω ist eine Eliminierung des Parameters Ω durch Umskalierung auf ξ -Koordinaten nicht möglich. Statt dessen wird die volle Differentialgleichung

$$\ddot{x}_0 + 2\Omega\tilde{p}\dot{x}_0 + x_0^2 - \sin^p(\Omega t)x_0' = 0 \quad (2.28)$$

durch eine Iteration analog zu Gleichung (2.20) approximiert, die so gewonnene Approximationslösung an der Stelle $t = T/2$ ausgewertet (dort gibt das Iterationsverfahren die besten für jeden Parametersatz überhaupt erreichbaren Werte) und die dort ermittelten Anfangswerte für die numerische Bestimmung der Referenzlösung im Intervall $[0, T]$ benutzt. In der einleitenden Veranschaulichung der Referenzlösung sind wir davon ausgegangen, daß diese bei $t = T/2$ den Wert $(x, \dot{x}) = (0, 1)$ besitzt, also in diesem Punkt dem Potentialminimum exakt folgt. Dies trifft nur näherungsweise zu. Bei endlichen r und Ω muß mit einer kleinen Verschiebung zwischen der Bewegung des Potentialminimums und der Schleichlösung dafür gesorgt werden, daß keine Oszillationen auftreten. Durch diese Verschiebung wirkt ständig eine Beschleunigung auf das System, durch welche die Geschwindigkeit des Orbits $x_0(t)$ während einer Halbperiode ständig der Geschwindigkeit des Potentialminimums nachgeführt wird, ohne daß Oszillationen auftreten. Diese Verschiebung ist –im Gegensatz zur analogen Phasenverschiebung beim Grenzyklus im

q	p	l	ξ_1	ξ_2
1.0	1.0	0.0	0.0	1.0
1.1	1.0	0.0	0.13282387	0.95075248
1.5	1.0	0.0	0.40625079	0.76716172
2.0	1.0	0.0	0.54956335	0.62434681
3.0	1.0	0.0	0.67703038	0.47217376
5.0	1.0	0.0	0.78032061	0.33671393
10.0	1.0	0.0	0.86902155	0.21483042
3.0	1.0	1.0	0.55872062	0.57307547
5.0	1.0	1.0	0.74631391	0.36612919
10.0	1.0	1.0	0.86036116	0.22135447
1.5	1.1	0.0	0.33307478	0.81572328
2.0	1.1	0.0	0.50179587	0.66280436
3.0	1.1	0.0	0.64715372	0.49905740
5.0	1.1	0.0	0.76184672	0.35397729
10.0	1.1	0.0	0.85868542	0.22433719
3.0	2.0	0.0	0.36864149	0.71609674
5.0	2.0	0.0	0.60318934	0.48440366
10.0	2.0	0.0	0.77472196	0.29152087

Tabelle 2.1: Numerisch bestimmte Werte (ξ_1, ξ_2) , berechnet durch Integration der Gleichung (2.25). Die Anfangsbedingungen wurden mit (2.27) bei $\tau = 1000$ bestimmt. Dort ist die Ungenauigkeit bei den hier verwendeten l, p, q, τ Werten geringer als 10^{-8} .

harmonischen Fall- zeitabhängig und hat ihren kleinsten Wert an den Umkehrpunkten des Minimums bei $t = -T/2, t = T/2$.

Die so erhaltenen Anfangsbedingungen hängen von r und Ω ab, sind also nicht universell; sie werden auch in der asymptotischen Theorie nicht benutzt. Wir werden jedoch später auch untersuchen, wie die asymptotisch gültige Poincaré-Abbildung beim Durchlaufen des Parameterraums erreicht wird. Hierzu benötigen wir die Referenzlösungen bei endlichen Parameterwerten.

Da die Durchführung der Iterationen sehr aufwendig sind, wurde ein Reduce-Programm [1, Getxv12] entwickelt, mit dem die entsprechenden Koeffizienten mittels Formelmanipulationen bestimmt werden können. Wir benutzen als Startwert für die Iteration die Funktion $\sin^\delta(\Omega t)$ und lösen Gleichung (2.28) mit dem Ansatz

$$x(t) = s^\delta \left(1 + \sum_{n=1}^N a_n \Omega^{2n} s^{-n\lambda} \right) \quad (2.29)$$

wobei $a_n(c, s, \tilde{\rho})$ ein Polynom in c, s und $\tilde{\rho}$ ist, mit

$$s = \sin \Omega t, \quad c = \cos \Omega t.$$

Der Ansatz (2.29) wurde in die Differentialgleichung (2.28) eingesetzt und die Größen a_n durch Koeffizientenvergleich für die Ω -Potenzen ermittelt. Dabei treten nur gerade Potenzen von Ω auf, weil $\ddot{x}$ und $\Omega \dot{x}$ jeweils einen Faktor Ω^2 erzeugen.

Da der Ansatz (2.29) vermutlich nur eine (für $\Omega \rightarrow 0$) asymptotische aber keine konvergierende Reihe ergibt, ist festzustellen, daß für endliche r und Ω die Definition der Anfangsbedingungen für die Referenzlösung eine gewisse Willkür enthält. Während die Bedingung, daß die Referenzfunktion eine Lösung der Differentialgleichung sein muß durch die numerische Integration von $t = T/2$ ausgehend immer erfüllt wird, legt die weitere Bedingung, daß diese Lösung nicht oszillierend sein soll, die Lösung für endliche Werte der Parameter r und Ω nicht eindeutig fest.

Die Rechtfertigung des gewählten Vorgehens besteht im wesentlichen darin, daß die Approximationslösung im Limes $\Omega \rightarrow 0$ in die asymptotische Lösung $x_a(t)$ übergehen muß. Deshalb wurde als Ansatz (2.29) eine Entwicklung nach Ω -Potenzen gewählt, die für $\Omega \rightarrow 0$ diese Bedingung erfüllt.

Die Koeffizienten a_n können mit unserem Verfahren prinzipiell bis zu beliebiger Ordnung N bestimmt werden. Da es sich aber, wie anzunehmen ist, um eine asymptotische Entwicklung handelt, wachsen die Summanden $a_n \Omega^{2n}$ mit n über alle Grenzen. Die maximal erzielbare Genauigkeit der Entwicklung wird erreicht, wenn bis zu demjenigen n summiert wird, an dem die Folge der $a_n \Omega^{2n}$ ihr Minimum besitzt. Die erzielbare Genauigkeit hängt also von Ω ab und wird mit wachsendem Ω immer geringer.

Damit im Zusammenhang steht das Problem, daß sich beim Überschreiten bestimmter Ω -Werte die Struktur der Entwicklungsglieder so ändert, daß entsprechend der obigen Regel ein Term mehr oder weniger aufsummiert werden müßte. Das hätte dann Sprünge bei den x_0 -Werten zur Folge, die ein Artefakt der Approximationsmethode wären.

Beide Schwierigkeiten können durch die Methode der LEVIN-Transformation weitgehend eliminiert werden, der wir uns im folgenden Abschnitt zuwenden.

2.4.1 Die LEVIN Transformation

LEVIN beschreibt in [8] konvergenzerzeugende Transformationen, mit welchen der Konvergenzbereich einer Reihe vergrößert, ihre Konvergenzgeschwindigkeit erhöht werden, bzw. -bei asymptotischen Reihen- eine Konvergenz unter Umständen herbeigeführt werden kann.

Betrachten wir die Folge $\{a_i\}$ der ersten N Summanden einer Reihe. Wenn dies eine *asymptotische* Reihe in einer Variablen x ist, so liefern die Teilsummen

$$A_n = \sum_{i=0}^n a_i, \quad a_i = b_i x^i \quad (2.30)$$

Approximationen für eine (wie man unterstellt, wohldefinierte) Funktion $f(x)$ mit unterschiedlicher Genauigkeit in Abhängigkeit von n und x . Diese Genauigkeit ist im allgemeinen dann am größten, wenn bis zu dem N_0 summiert wird, bei dem die Folge der $|a_i|$ ihr Minimum hat. Selbst wenn eine größere Zahl N von Summanden praktisch zur Verfügung steht, kann der Fall eintreten, daß nur eine viel kleinere Zahl $N_0 < N$ der Summanden zur Berechnung der Approximation sinnvoll verwendet werden kann; die eventuell in den anderen Summanden verschlüsselte "Information" über $f(x)$ also unbeachtet bleibt.

In der von LEVIN beschriebenen Methode werden nicht einfach die ersten N_0 Folgenglieder aufsummiert, sondern es wird folgende nichtlineare Transformation benutzt, in die alle N zur Verfügung stehenden Glieder eingehen:

$$T_n = \frac{\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{1}{i} (1+i)^{n-1} \frac{A_i}{a_i}}{\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{1}{i} (1+i)^{n-1} \frac{1}{a_i}} \quad (2.31)$$

T_n ist die Approximation der Summe $\sum a_n$ für $n \rightarrow \infty$.

Als einen Test für die Leistungsfähigkeit dieser Methode, die von LEVIN nicht erschöpfend mathematisch sondern heuristisch begründet wird, betrachten wir die Folge $a_n = (-1)^n n!$, die man als eine Entwicklung des Integrals $\int_0^\infty e^{-t} dt / (1+t)$ erhält. Die Anwendung der Transformation (2.31) auf die ersten sieben Folgenglieder $\{a_i\} = \{1, -1, 2, -6, 24, -120, 720\}$ liefert als Ergebnis den Wert 0.59633, welches nur um 10^{-5} vom exakten Wert abweicht!

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die LEVIN Transformation auf die Approximationslösung (2.29) angewendet. Die so berechneten Anfangsbedingungen für Referenzlösungen $x_0(t)$ sind sehr gut brauchbar für $\Omega < 0.3$ und $r < 1$, d.h. die Lösungen führen keine Schwingungen aus und ändern sich stetig bei Variation der Parameter; wir verwenden sie hier zur empirischen Definition der Referenzlösung für endliche Parameterwerte, wobei $n = 10$ benutzt wurde.

2.4.2 Numerik

In den folgenden Abbildungen wird der Einfluß verschiedener Potenzen q, p, l , sowie der Einfluß endlicher Parameterwerte r und Ω auf die Gestalt der Referenzlösungen gezeigt. Tabelle 2.2 gibt die charakteristischen Daten der Referenzlösungen jeweils bei $t = 0$ und $t = T/2$ an.

Bei der Betrachtung der Abbildung 2.8 ist besonders bemerkenswert, daß für die Fälle $p = q, l = 0$ und $l = q - 1, p = 0$, d.h. die Fälle, in denen wegen $\delta = 1$ die Trajektorie des Potentialminimums (2.12) nicht singulär wird, die Referenzlösung nahezu, wenn nicht vollständig, geschlossen ist. Das hier vertretene Konzept, wonach eine singuläre Bewegung des Potentialminimums und der damit verbundene Kick-Mechanismus entscheidend ist für die Entstehung komplexer Lösungstypen, wird hierdurch eindrucksvoll unterstrichen.

q	1	1.1	2	3	4	5
$x_0(0)\Omega^{-\gamma}$	0.00	0.132861425	0.549649940	0.677095450	0.740596299	0.780356823
$\dot{x}_0(0)\Omega^{-\gamma-\eta}$	1.00	0.950835291	0.624374558	0.472170668	0.389792284	0.336700811
$x_0(0)$	0.00	0.002422526	0.087113645	0.214116382	0.320586458	0.404183840
$\dot{x}_0(0)$	0.01	0.014191174	0.039395371	0.047217067	0.048055415	0.046784426
$x_0(T/2)\Omega^{-\gamma}$	100.010	54.848698337	6.309731184	3.162312797	2.310144138	1.930705452
$\dot{x}_0(T/2)\Omega^{-\gamma-\eta}$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$x_0(T/2)$	1.0001	1.000082645	1.000025000	1.000011111	1.000006250	1.000004000
$\dot{x}_0(T/2)$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabelle 2.2: Numerisch bestimmte charakteristische Daten von Referenzlösungen für verschiedene q -Werte am Anfang und in der Mitte einer Halbperiode, jeweils in ξ -Eichung (in der die Werte für $\Omega \rightarrow 0$ "universell" werden) und in x -Eichung, in der die Werte $x_0(T/2)$ praktisch bei 1 liegen. Die Parameter sind $r = 0$, $\Omega = 0.01$, die Exponenten $l = 0$, $p = 1$. Die zugehörigen Trajektorien sind in den entsprechenden Eichungen in den Abbildungen 2.6 und 2.7 gezeigt.

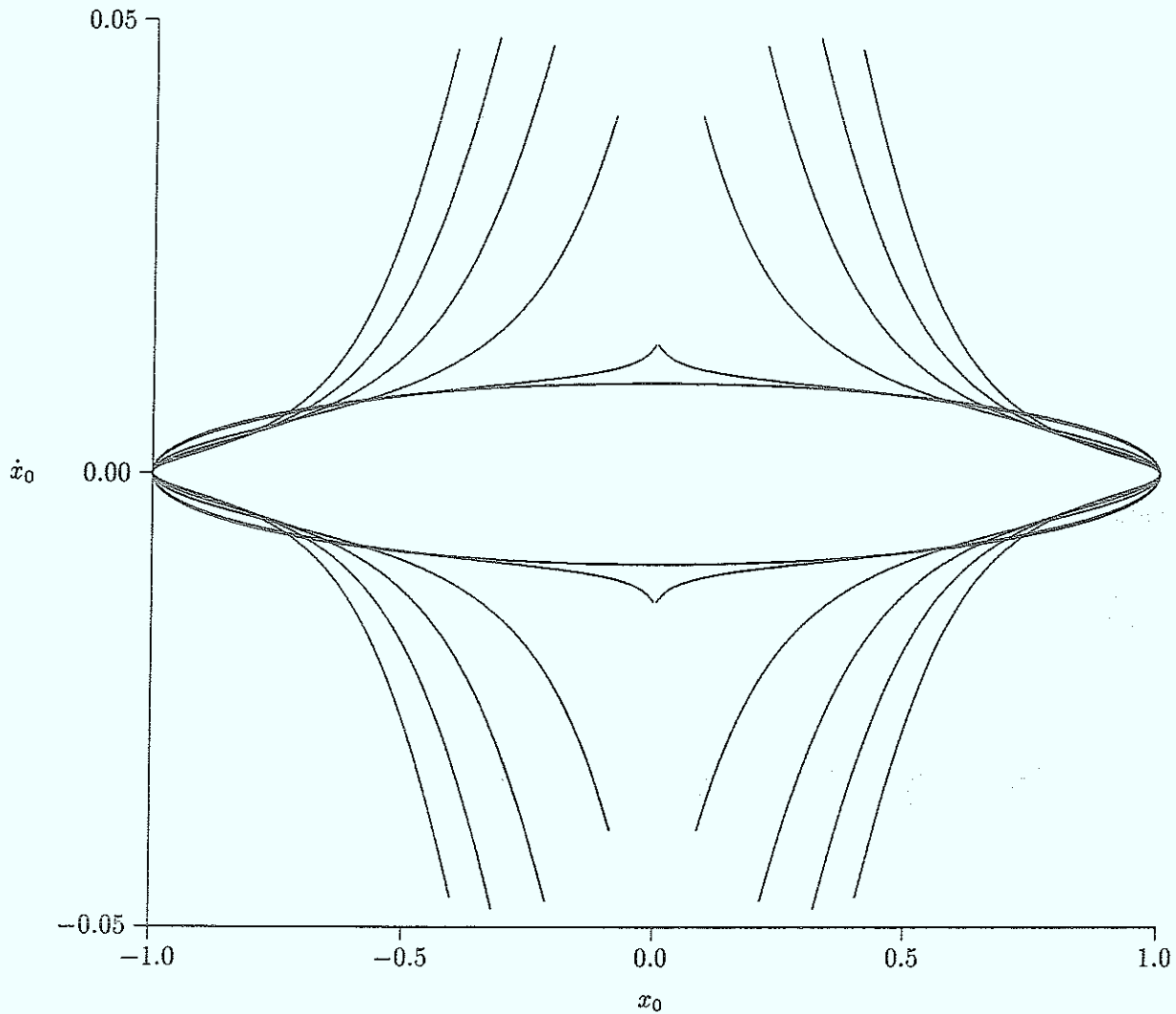


Abbildung 2.6: Referenzlösungen $x_0(t)$ für verschiedene q , bei $p = 1$, $l = 0$, $r = 0$, $\Omega = 0.01$, skaliert in x -Koordinaten. Von außen: $q = 5, 4, 3, 2, 1.1, 1$. Beim Wert $q = 1.1$, der nahe beim Wert $q = 1$ für den harmonischen Oszillator liegt, ist die Abweichung von dessen Lösung noch gering und der "Kick" klein. Für wachsende q -Werte reißt der x_0 -Zyklus immer weiter auf und der "Kick" wird größer.

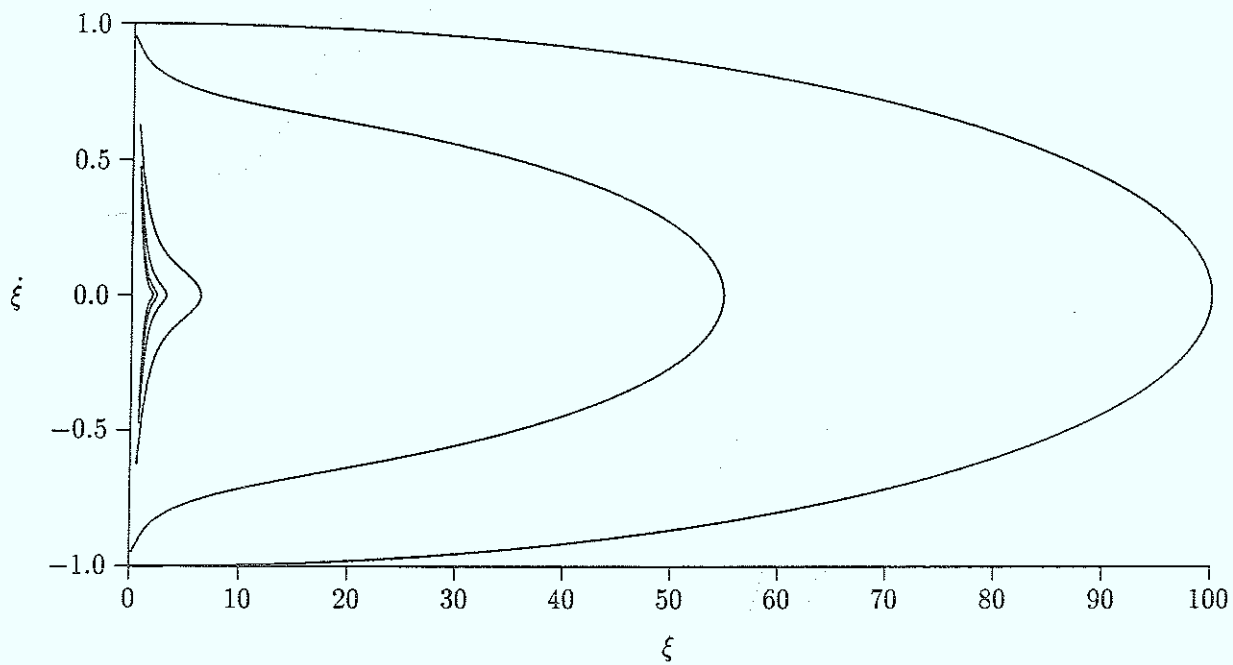


Abbildung 2.7: Die Referenzlösungen aus Abbildung 2.6 skaliert in ξ -Koordinaten. Von außen: $q = 1, 1.1, 2, 3, 4, 5$.

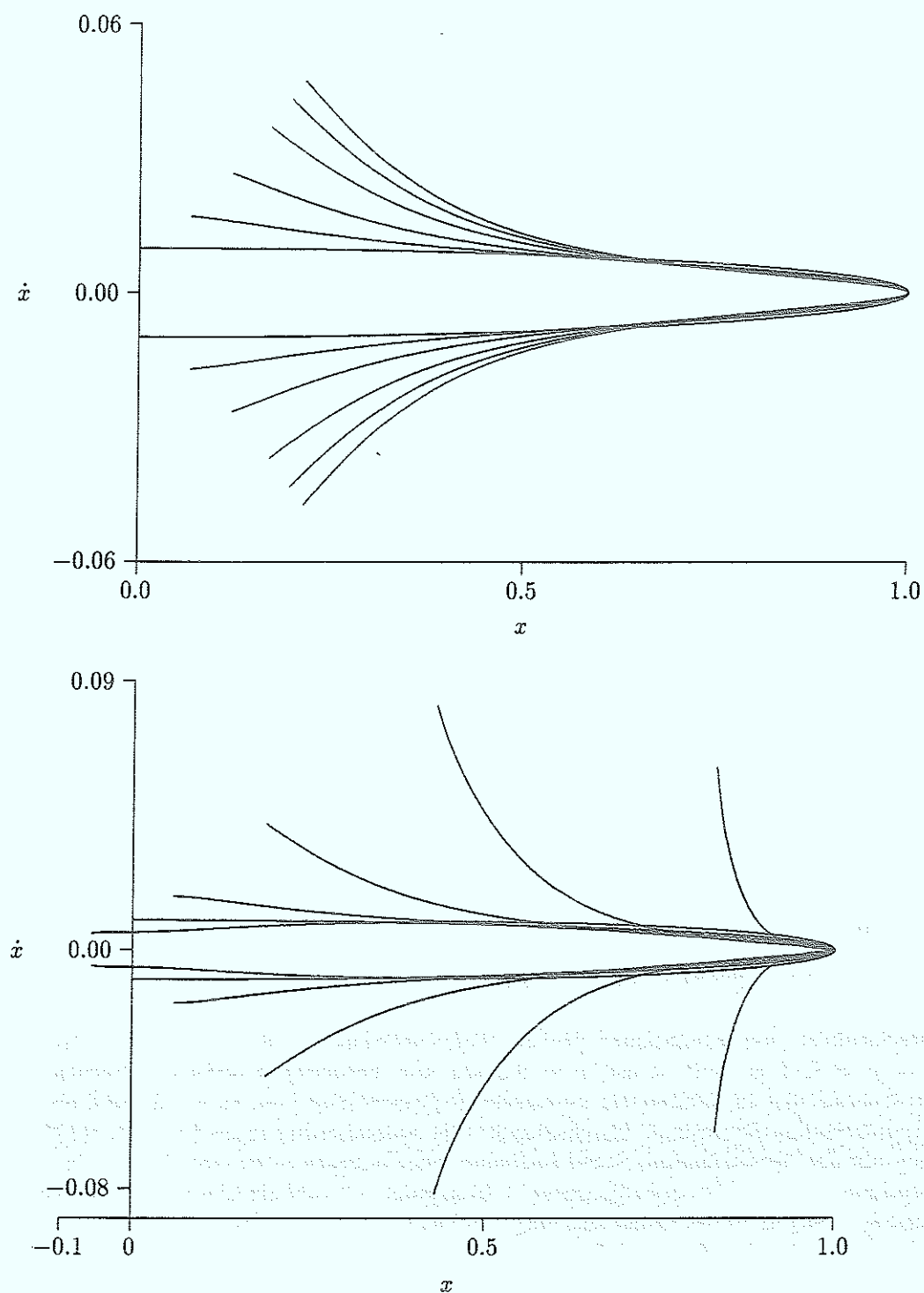


Abbildung 2.8: Oben: Referenzlösungen für verschiedene l -Werte. Von außen: $l = 0, 0.2, 0.5, 1, 1.5, 2$, $q = 3$, $p = 1$, $r = 0$, $\Omega = 0.01$. Unten: Referenzlösungen für verschiedene p -Werte. Von außen: $p = 0.1, 0.5, 1.1, 2, 3, 5$, $q = 3$, $l = 0$, $r = 0$, $\Omega = 0.01$.

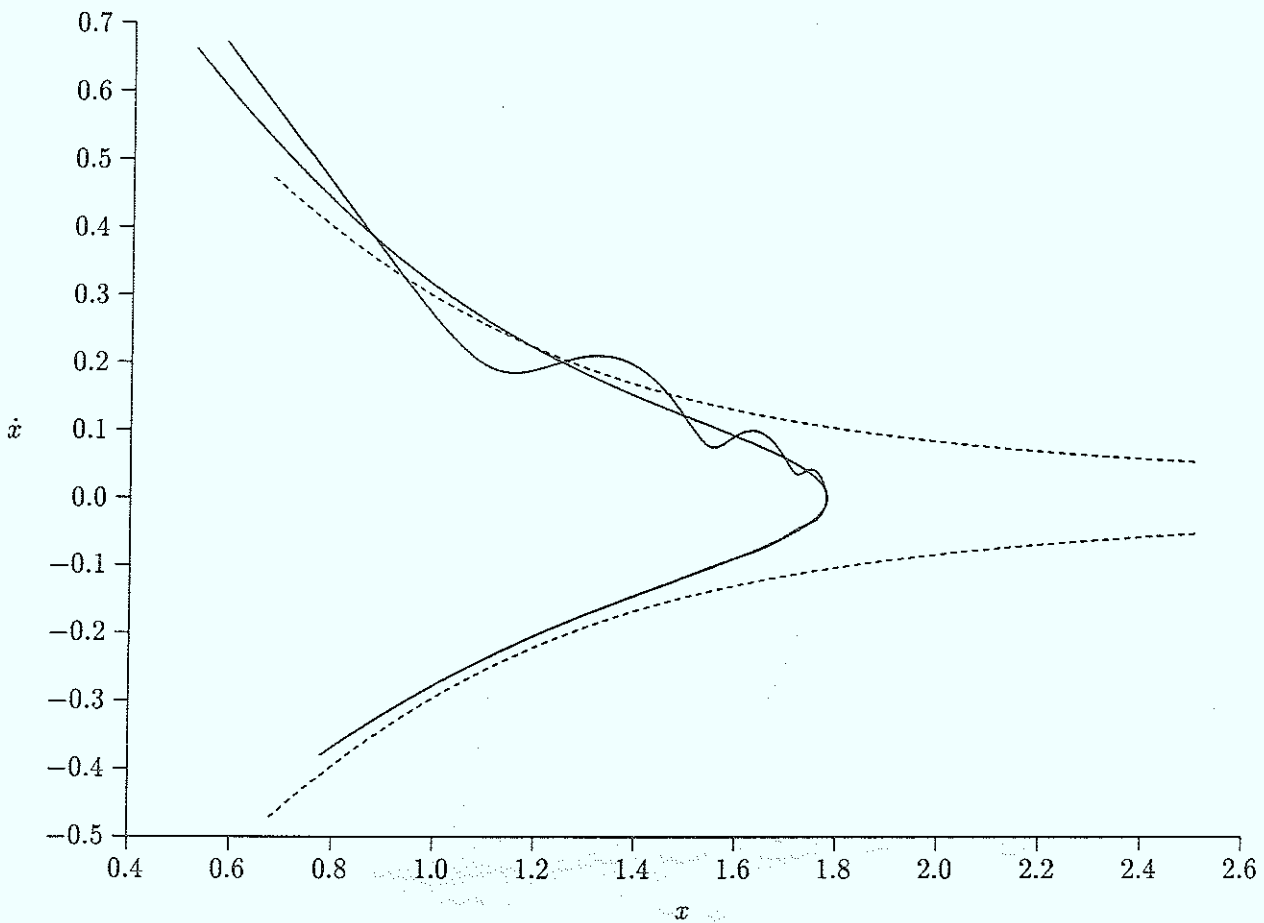


Abbildung 2.9: Unterschiedliche Approximationen für die Referenzlösung x_0 für die Parameterwerte $q = 3$, $p = 1$, $l = 0$, $\Omega = 0.1$, $r = 0.2$ mit drei Verfahren berechnet: Gestrichelt: Auf x -Koordinaten zurückskalierte universelle Referenzlösung (d.h. zu $r = 0$, und linearer Approximation für $\sin \Omega t$). Durchgezogen: Die Anfangsbedingungen $(x(T/2), \dot{x}(T/2))$ wurden mit der Approximation (2.29) bestimmt. Durchgezogen, oszillierend: Für die Anfangsbedingungen $(x(T/2), \dot{x}(T/2))$ wurde $(1, 0)$ gewählt. Obwohl die letztgenannten Koordinaten bei $t = T/2$ nur minimal auseinanderliegen, führt diese Abweichung zu größeren Oszillationen. Für $\Omega \rightarrow 0$, $r \approx \Omega$ fallen alle drei Trajektorien schließlich zusammen.

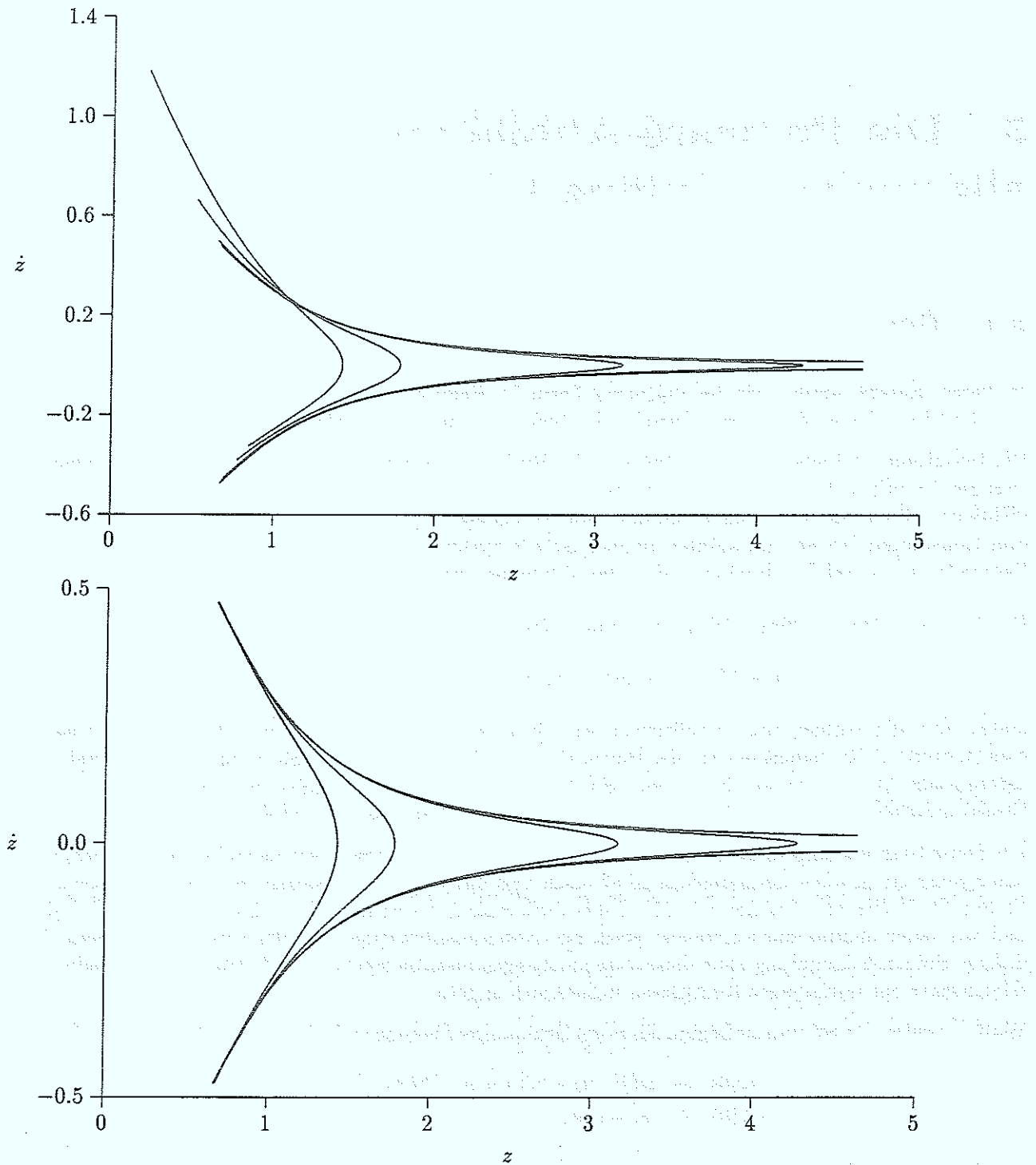


Abbildung 2.10: Referenzlösungen x_0 für die Parameterwerte $q = 3$, $p = 1$, $l = 0$. Oben: Von links: $r = 1, 0.4, 0.04, 0.012$, $\Omega = 0.25, 0.1, 0.01, 0.003$, diese Parameter entsprechen dem Wert $\rho = 2$. Unten: Dieselben Ω -Werte bei $r = 0$. Die Trajektorien sind in ξ -Skalierung ausgegeben. Die nicht geschlossene Kurve ist jeweils $\xi_0(\tau)$.

3 Die Poincaré-Abbildung der allgemeinen Duffing Gleichung

3.1 Bestimmung der Abbildungsformeln

In diesem Kapitel werden wir die allgemeine Form der Poincaré-Abbildung bis zur zweiten Ordnung in e^{-rT} herleiten. Sie wird im asymptotischen Grenzfall $\Omega \rightarrow 0$, $r \sim \Omega$ exakt.

Die Herleitung ist teilweise analog zum Fall der Rechteckanregung. Dort hatten wir die Halbzyklen in zwei Zeitbereiche unterteilt: $[0 \dots t_1]$ und $[t_1 \dots T]$, wobei $e^{-rt_1} \ll 1$ war. Im ersten Bereich ist das System nichtharmonisch, die Abweichung von der Zeitentwicklung des harmonischen Systems aber universell in drei Konstanten faßbar. Im zweiten Bereich ist das System harmonisch, wir konnten den Einfluß der Parameter analytisch beschreiben und so die Abbildungsformeln bestimmen.

Bei der allgemeinen Duffing Gleichung, die in y -Koordinaten geschrieben

$$\ddot{y} + 2r\dot{y} + (y + x_0)^q - x_0^q - ((y + x_0)^l - x_0^l) \sin^p \Omega t = 0 \quad (3.1)$$

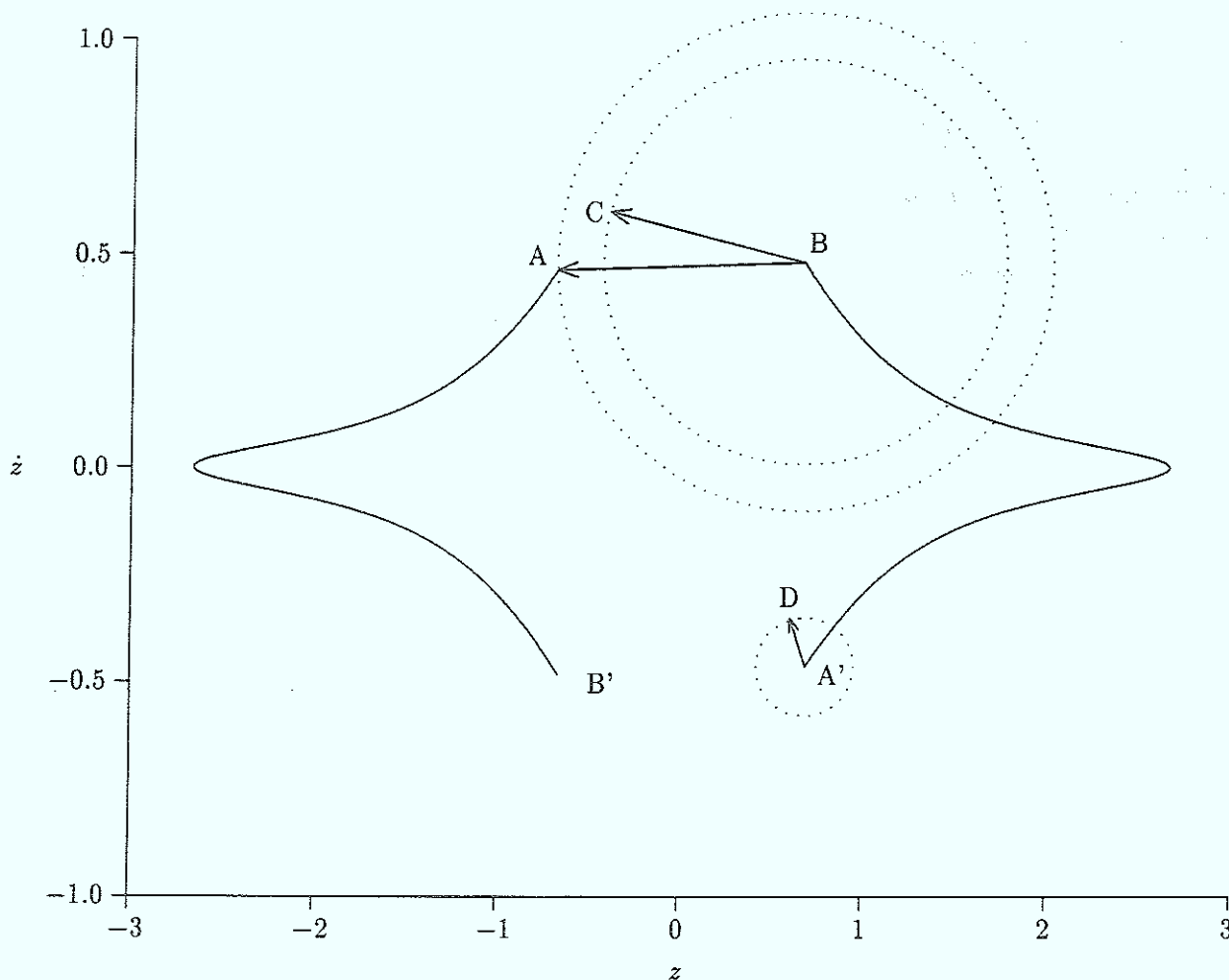
lautet, sind die Verhältnisse komplizierter, weil durch die $x_0(t)$ -Terme das System (in z -Koordinaten) eine (weitere) Zeitabhängigkeit erhält. Die $x_0(t)$ -Terme führen unter anderem dazu, daß das Adiabatentheorem am Anfang und am Ende jeder Halbperiode nicht mehr anwendbar ist, weil dort die relative Geschwindigkeit $\dot{x}_0/x_0$ nicht klein ist, *unabhängig* von den Parametern r und Ω .

Zur Herleitung der allgemeinen Form der Poincaré-Abbildung nehmen wir zunächst vereinfachend an, das System sei in *allen* Zeitbereichen adiabatisch und das Potential homogen (d.h. $x_0 = x_a$) sowie am Ende jedes Halbzyklus harmonisch. Mit diesen Annahmen entspricht es dem Fall der Rechteckanregung und wir leiten hierfür die allgemeine Form der Abbildungsfunktion her. Es wird sich herausstellen, daß die Poincaré-Abbildung ohne diese Vereinfachungen dieselbe algebraische Form besitzt, lediglich die Zahlenwerte der universellen Konstanten werden sich ändern.

Wir betrachten das System zu Beginn des n -ten Zyklus. Dort besitze es die Wirkungs-Winkel-Koordinaten

$$\begin{aligned} I_n(0) &= \Omega^{2\gamma+\eta}(I_a + \delta I_n) = \Omega^{2\gamma+\eta} I_a (1 + e^{-rT} i_n), \\ \varphi_n(0) &= \varphi_a + \delta \varphi_n. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Die Größen (I_a, φ_a) entsprechen $(I_0, 0)$ im Fall der Rechteckanregung (in ξ - τ -Eichung). Der Punkt $(y_{n-1}, \dot{y}_{n-1}) = (0, 0)$ (bezogen auf den *linken* Ast der Referenzkurve) am Ende des $(n-1)$ -ten Zyklus wird durch den Kick auf (I_a, φ_a) abgebildet; bei allgemeinen Werten $(y, \dot{y})$ wird die Differenz zu (I_a, φ_a) durch $(i_n, \delta \varphi_n)$ beschrieben (Abbildung 3.1). Durch Herausziehen des Faktors e^{-rT} erhält i_n die Größenordnung 1.

Abbildung 3.1: Verschiedene Punkte auf dem Referenzzyklus mit endlichen r und Ω .

A : $(y(2T), \dot{y}(2T)) = (0, 0)$ bezüglich linker Referenzkurve, $(I(0), \varphi(0)) = (I_a, \varphi_a)$ bezüglich rechter Referenzkurve.

C : $(y(2T), \dot{y}(2T)) = (\text{Linearkombinationen in } u_1 \text{ und } u_2, \text{ siehe 3.5})$ bezüglich linker Kurve, $(I(0), \varphi(0)) = (I_a(1 + e^{-rT}i), \varphi_a + \delta\varphi)$ bezüglich rechter Kurve.

D : $(I(T), \varphi(T)) = (e^{-2rT}I_a(1 + e^{-rT}i), \varphi_a + \delta\varphi + \int \omega dt)$ bezüglich rechter Kurve.

Nach Durchlaufen einer Halbperiode T erreicht das System den Zustand

$$\begin{aligned} I_n(T) &= e^{-2rT} I_n(0), \\ \varphi_n(T) &= \varphi_a + \delta\varphi_n + \int_0^T \omega(I_n(t), t) dt, \end{aligned} \quad (3.3)$$

wobei wir für die Zeitentwicklung den Adiabatensatz benutzt haben. Bei $t \approx T$ ist das System nahezu harmonisch, es kann deshalb in "harmonischen" Koordinaten

$$u_1 = e^{-rT} (1 + e^{-rT} i_n)^{1/2} e^{i\varphi_n}, \quad u_2 = u_1^* \quad (3.4)$$

mit der bequemen Konvention

$$y(t) = \sqrt{\frac{I_a}{2\omega_1}} \Omega^{\gamma+\eta/2} (u_1 + u_2), \quad \dot{y}(t) = \sqrt{2I_a\omega_1} \Omega^{\gamma+\eta/2} \frac{1}{2i} (u_1 - u_2) \quad (3.5)$$

beschrieben werden, dies entspricht (1.20) auf Seite 20.

Durch eine Punktspiegelung, die die Inversionssymmetrie der Duffing-Gleichung ausnutzt (so daß wir nur eine Bewegung in der rechten Halbebene des Phasenraums betrachten müssen), wird der Punkt $(y(T), \dot{y}(T))$ in die Nähe des Punktes bei $t = 2T$ (Abbildung 3.1) transferiert. Der jetzt folgende Kick, durch den das System wieder auf den Beginn des rechten Zweiges bezogen wird, führt zu den Koordinaten $(i_{n+1}, \delta\varphi_{n+1})$, die wir in zweiter Ordnung in Abhängigkeit der Koordinaten (u_1, u_2) vor dem Kick entwickeln (Summationskonvention):

$$\begin{aligned} e^{-rT} i_{n+1} &= K_\nu u_\nu + \frac{1}{2} K_{\nu\mu} u_\nu u_\mu \\ \delta\varphi_{n+1} &= P_\nu u_\nu + \frac{1}{2} P_{\nu\mu} u_\nu u_\mu \end{aligned} \quad (3.6)$$

Da I und φ reelle Größen sind, ist es zweckmäßig, die komplexen Koeffizienten K und P durch Amplituden und Phasen auszudrücken:

$$\begin{aligned} K_1 &= K_2^* = \frac{1}{2} B_1 e^{i\chi_1}, & P_1 &= P_2^* = \frac{1}{2} C_1 e^{i\psi_1}, \\ K_{11} &= K_{22}^* = \frac{1}{2} B_2 e^{i\chi_2}, & P_{11} &= P_{22}^* = \frac{1}{2} C_2 e^{i\psi_2}, \\ K_{12} &= K_{21}^* = \frac{1}{2} B_3, & P_{12} &= P_{21}^* = \frac{1}{2} C_3. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die Transformation $(y, \dot{y}) \leftrightarrow (I, \varphi)$ ist kanonisch, d.h. es gilt die Beziehung

$$\frac{\partial I}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial I}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial I}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} - \frac{\partial I}{\partial u_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = i\Omega^{2\gamma+\eta} I_a. \quad (3.8)$$

Daraus folgt:

$$2\Im(K_1 P_2) = \frac{1}{2} B_1 C_1 \sin(\chi_1 - \psi_1) = 1, \quad (3.9)$$

$$K_{11} P_2 + K_1 P_{12} = P_{11} K_2 + P_1 K_{12}. \quad (3.10)$$

Es wird sich im Folgenden herausstellen, daß die Größen der Gleichung (3.7) im asymptotischen Grenzfall $\Omega \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$ *unabhängig* von den Systemparametern sind. Wir bezeichnen sie deshalb als "universelle Konstanten" unserer Abbildung. Sie hängen von den Exponenten q , p und l ab.

Zur Bestimmung des Integrals $\int_0^T \omega(I_n(t), t) dt$ aus Gleichung (3.3) verwenden wir zunächst die Beziehung, $x_0(t) = x_a(t) = \sin^\delta(t)$ (die eine später zu korrigierende Approximation an den beiden Enden des Referenzzyklus enthält). Für das Weitere entscheidend ist die hieraus folgende Homogenität des Potentials (2.11), welche Skalenrelationen für den Zusammenhang von E und I gemäß Gleichung (1.12) und damit einen analytischen Ausdruck für $\omega(I)$ bedingt:

$$L^{q+1} E(I, x_0) = E(L^{\frac{q+1}{2}} I, L x_0) \quad (3.11)$$

mit der Entwicklung

$$E(I, x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_0^{q+1-\frac{n}{2}(q+3)} I^n \quad (3.12)$$

ergibt

$$\omega(I, x_0) = \frac{\partial E}{\partial I} = c_1 x_0^{\frac{q-1}{2}} + 2c_2 x_0^{-2} I + \dots, \quad (3.13)$$

wobei

$$c_1 = \sqrt{q-l}, \quad c_2 = -\frac{1}{48}(2q^2 + 7ql + 2l^2 - q - l - 1) \quad (3.14)$$

gilt und die harmonische Frequenz für kleine Amplituden durch

$$\omega_1 = x_0^{\frac{q-1}{2}} \sqrt{q-l}. \quad (3.15)$$

gegeben ist. Es ist dabei ein glücklicher Umstand, daß die Entwicklung von ω nach Potenzen von I zugleich auch eine Entwicklung nach inversen (i.A. nicht ganzzahligen) Potenzen von x_0 ist. Durch Benutzung dieser Entwicklung ergibt sich das Winkelinkrement als

$$\int_0^T \omega dt = A_1 T + \sum_{\nu=2}^N \nu c_\nu (I_a + \delta I)^{\nu-1} F_\nu(r, \Omega), \quad (3.16)$$

mit

$$A_1 = \pi \int_0^\pi \sin^\delta t dt = \frac{c_1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\kappa_1}{2})}{\Gamma(\frac{\kappa_1+1}{2})},$$

und

$$F_\nu(r, \Omega) = \Omega^{(\eta-1)\kappa_\nu} F\left(\delta_\nu, (\nu-1)\frac{r}{\Omega}\right) \quad (3.17)$$

wobei wir als zweckmäßige Abkürzungen

$$A_\nu = \nu c_\nu I_a^{\nu-1}, \quad \nu > 1 \quad (3.18)$$

und

$$\delta_\nu = \frac{\delta}{2} \left[\frac{\nu}{2}(q+3) - (q+1) \right], \quad \kappa_\nu = 1 - 2\delta_\nu, \quad (3.19)$$

eingeführen. Die Berechnung der Funktion F , und die Bedeutung der oberen Summationsgrenze $N \geq 2$ wird im Anhang (S. 92) dargestellt. Eine wichtige Eigenschaft der Formel (3.16) ist die Trennung der parameterabhängigen Faktoren F_ν von den universellen Konstanten; ihre Möglichkeit beruht entscheidend auf der Homogenität des Potentials (2.11).

Durch Kombination der Formeln (3.3) bis (3.7), insbesondere durch Einsetzen des Ausdrucks (3.16) für das Winkelinkrement (welches als ein Schlüsselresultat dieser Arbeit angesehen werden muß) erhält man jetzt eine vollständige Parametrisierung der Poincaré-Abbildung:

$$i_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2}e^{-rT}i_n\right) B_1 \cos(\varphi_n + \chi_1) + e^{-rT} [B_2 \cos(2\varphi_n + \chi_2) + B_3], \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_{n+1}(0) + \int_0^T \omega(I_{n+1}(t), t) dt \\ &= \varphi_a + e^{-rT} \left(1 + \frac{1}{2}e^{-rT}i_n\right) C_1 \cos(\varphi_n + \psi_1) + e^{-2rT} [C_2 \cos(2\varphi_n + \psi_2) + C_3] \\ &\quad + A_1 T + \sum_{\nu=2}^N A_\nu F_\nu(r, \Omega) (1 + e^{-rT}i_{n+1})^{\nu-1}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Sortieren nach Potenzen von e^{-rT} ergibt

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \Phi_0 + e^{-rT}\Phi_1 + e^{-2rT}\Phi_2, \\ i_{n+1} &= W_1 + e^{-rT}W_2, \end{aligned} \quad (3.22)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \varphi_a + A_1 T + \sum_{\nu=2}^N A_\nu F_\nu(r, \Omega), \\ \Phi_1 &= B_1 \sum_{\nu=2}^N (\nu-1) A_\nu F_\nu(r, \Omega) \cos(\varphi_n + \chi_1) + C_1 \cos(\varphi_n + \psi_1), \\ \Phi_2 &= \sum_{\nu=2}^N (\nu-1) A_\nu F_\nu(r, \Omega) [B_2 \cos(2\varphi_n + \chi_2) + B_3 \\ &\quad + \frac{1}{2}(\nu-2) B_1^2 \cos^2(\varphi_n + \chi_1) + \frac{1}{2} B_1 i_n \cos(\varphi_n + \chi_1)] \\ &\quad + \frac{1}{2} C_1 i_n \cos(\varphi_n + \psi_1) + C_2 \cos(2\varphi_n + \psi_2) + C_3, \\ W_1 &= B_1 \cos(\varphi_n + \chi_1), \\ W_2 &= \frac{1}{2} B_1 i_n \cos(\varphi_1 + \chi_1) + B_2 \cos(2\varphi_n + \chi_2) + B_3. \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.2 Adiabaticizität und Homogenität des Systems

Wir gehen jetzt zum Anfang unserer Überlegungen zurück und untersuchen die Korrekturen, die sich durch die Abweichungen von der (zunächst vereinfachend vorausgesetzten) Adiabaticizität des Systems und Homogenität des Potentials am Anfang und Ende jedes Halbzyklus ergeben.

Die Poincaré-Abbildung (3.20) ist eine systematische Entwicklung bis zur zweiten Ordnung in e^{-rT} . Die als fest anzunehmende Größe e^{-rT} ist also klein, aber endlich. Durch diese Bedingung ist auch $r \sim \Omega$ festgelegt. Die Koeffizienten (3.23) der Poincaré-Abbildung sind asymptotisch, d.h. im Grenzwert $\Omega \rightarrow 0$ exakt. Könnten wir die Poincaré-Abbildung auch bei *endlichen* Werten von r und Ω durch eine Potenzreihenentwicklung nach e^{-rT} analytisch darstellen, so erhielten wir für die Koeffizienten in (3.23) Ausdrücke der Form

$$\sum_{\nu} q_{\nu}(\Omega, r(\Omega, e^{-rT})) p_{\nu}(\Omega, r) e^{-\nu r T}. \quad (3.24)$$

Die Koeffizienten q_{ν} gehen im Limes $\Omega \rightarrow 0$ in eindeutig definierte numerische Konstanten (eben die B_{ν} , C_{ν} etc.) über, während die r - Ω -Abhängigkeit der p_{ν} ja schon analytisch bekannt ist. Es ist im folgenden zu demonstrieren, daß diese universellen Konstanten für $\Omega \rightarrow 0$ tatsächlich auch unabhängig von r sind. In einem späteren Abschnitt werden wir dann prüfen, wie weit ihr Gültigkeitsbereich für endliche r , Ω reicht.

Im Folgenden wird e^{-rT} festgehalten, also $r \sim \Omega$ angenommen. Wir definieren die Zeitpunkte

$$\begin{aligned} t_1 &:= \Omega^{-\eta-\epsilon}, & \tilde{t}_1 &:= T - t_1 \\ t_2 &:= \Omega^{-1+\epsilon}, & \tilde{t}_2 &:= T - t_2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

mit

$$\epsilon = \frac{(1-\eta)}{3} > 0. \quad (3.26)$$

Diese Wahl wurde so getroffen, daß im Grenzfall $\Omega \rightarrow 0$ folgende Eigenschaften für die Zeiten in ξ - τ -Eichung bestehen:

$$\tau_1 = \Omega^{-\epsilon} \rightarrow \infty, \quad \tau_2 = \Omega^{-2\epsilon} \rightarrow \infty, \quad \frac{\tau_2}{\tau_1} = \Omega^{-\epsilon} \rightarrow \infty \quad (3.27)$$

$$\xi(\tau_1) \rightarrow \infty, \quad \xi(\tau_2) \rightarrow \infty, \quad \frac{\xi(\tau_2)}{\xi(\tau_1)} \rightarrow \infty, \quad (3.28)$$

$$\Omega t_2 = \Omega^\epsilon \rightarrow 0. \quad (3.29)$$

Für die zunächst von Ω und r abhängenden Referenzlösungen $\xi(\tau) = \Omega^{-\gamma} x_0(\Omega^\eta \tau)$ gilt gleichmäßig

$$\xi(\tau) \rightarrow \xi_0(\tau) \quad \text{für} \quad \tau < \tau_2 \quad \text{und} \quad \tilde{\tau}_2 < \tau, \quad (3.30)$$

$$\xi(\tau) \rightarrow \tau^\delta \quad \text{für} \quad \tau_1 < \tau < \tau_2 \quad \text{und} \quad \tilde{\tau}_2 < \tau < \tilde{\tau}_1 \quad (3.31)$$

$$\xi(\tau) \rightarrow \sin^\delta(\Omega^{1-\eta}\tau) \quad \text{für} \quad \tau_1 < \tau < \tilde{\tau}_1 \quad (3.32)$$

Obwohl der Effekt der Reibung über das *volle* Zeitintervall T durch das vorgegebene e^{-rT} festgehalten wird, gilt ferner

$$\begin{aligned} e^{-rt} &\rightarrow 1 & \text{für} & \quad 0 < t < t_2 & \text{und} \\ e^{-rt} &\rightarrow e^{-rT} & \text{für} & \quad \tilde{t}_2 < t < T \end{aligned} \quad (3.33)$$

so daß für die Behandlung der vier äußeren Zeitbereiche die Reibung keine Rolle mehr spielt.

Diese Zeitpunkte definieren fünf Zeitbereiche im Halbzyklus T mit unterschiedlichen Systemeigenschaften (Abbildung 3.2), die in Tabelle 3.1 zusammengefaßt sind.

	Universell $\sin \Omega t \rightarrow \Omega t$	Adiabatisch	Homogen $x_0 \approx x_a$	Harmonisch
I	×			
II	×	×	×	×
III		×	×	×
IV	×	×	×	×
V	×			

Tabelle 3.1: *Eigenschaften der Duffing Gleichung in verschiedenen Zeitbereichen.*

Die Existenz der Bereiche II und IV, in denen alle relevanten Eigenschaften *gleichzeitig* vorliegen, ist wesentlich für die in Abschnitt 3.3 folgende Konstruktion. Sie ist offensichtlich die Konsequenz der unterschiedlichen Zeitskalen $\Omega^{-\eta}$ und Ω^{-1} für das Erreichen der Asymptotik τ^δ der Referenzlösung bzw. das Einsetzen der Nichtlinearität der Sinusfunktion.

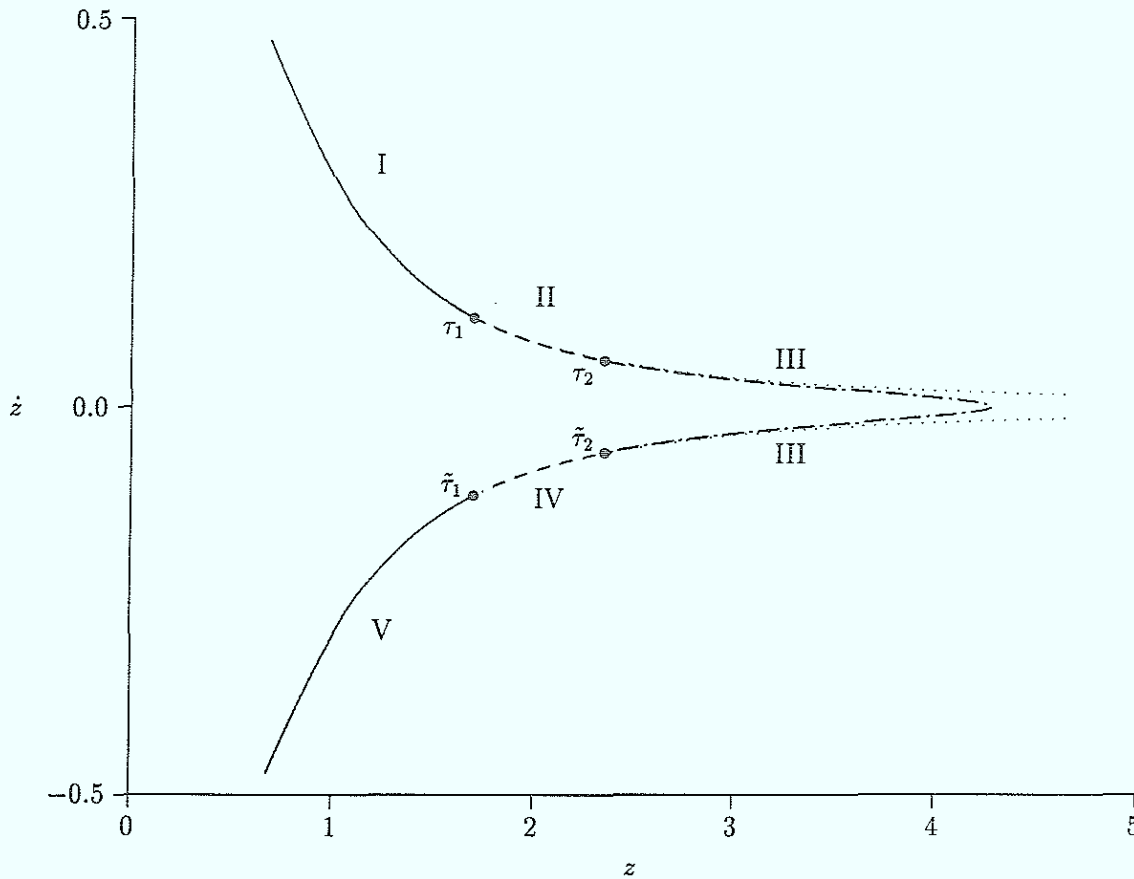


Abbildung 3.2: Zeitbereiche der verschiedenen Eigenschaften der Duffing Gleichung in ξ - τ -Eichung. Zusätzlich ist die Referenzlösung ξ_0 gepunktet angegeben.

Das System ist in den Bereichen II-IV harmonisch, weil dort durch das Anwachsen von $\xi_0(t)$ der relative Einfluß der nichtquadratischen Terme des Potentials abnimmt. Das wird sichtbar, wenn man die Differentialgleichung unter Vernachlässigung der Reibung in den temporären Zeiteinheiten $\omega(\tau)^{-1} = \xi^{(1-q)/2}$ schreibt:

$$y'' = -ay \left(1 + P \left(\frac{y}{\xi(t)} \right) \right). \quad (3.34)$$

Die Anharmonizität im Polynom P wird mit wachsendem $\xi(t)$ zunehmend irrelevant, sie ist nur in den Bereichen I und V zu beachten.

Ein subtiler Punkt ist der, daß sich im Limes $\Omega \rightarrow 0$ das System über jeden *endlichen* Zeitabschnitt innerhalb des Intervalls $\tau_1 < \tau < \tilde{\tau}_1$ zwar immer harmonischer verhält, daß aber der (über den dann divergierenden Zeitraum T) integrierte Effekt der Anharmonizität weiterhin für die Poincaré-Abbildung entscheidend bleibt. Entsprechendes gilt natürlich für den Abfall der Wirkung um den Faktor e^{-2rT} im Bereich III.

Im Fall der Rechteckanregung mußten wir nur zwei Zeitbereiche unterscheiden, die zu 3.1 entsprechende Tabelle besteht dort nur aus den ersten beiden Zeilen.

3.3 Bestimmung der universellen Konstanten

Wie im vorherigen Abschnitt begründet, wird das System in den Bereichen I, II, IV und V durch Gleichung (2.25)

$$\ddot{\xi} + \xi^q - \xi^l \tau^p = 0 \quad (3.35)$$

mit beliebiger Genauigkeit beschrieben, wenn man nur Ω hinreichend klein wählt.

Unser Ziel ist es jetzt, den Einfluß des Kicks sowie der Anharmonizität, Nichtadiabatizität und Inhomogenität des Potentials in den Bereichen I und V auf die Konstanten I_a , φ_a und die Entwicklungskoeffizienten P , K zu bestimmen [13, Init2].

Dazu müssen wir die Lösungen der Differentialgleichung, die in den Bereichen I und IV nur numerisch zu bestimmen sind, in den Bereichen II und IV an die Lösungen für $\tau_1 < \tau < \tilde{\tau}_1$, die auch in Bereich III gilt, anfitzen. Letztere sind analytisch verfügbar, da in den Bereichen II, III und IV das System im Grenzfall $\Omega \rightarrow 0$ harmonisch und adiabatisch wird, so daß die Transformation $(\xi, \dot{\xi}) \leftrightarrow (I, \varphi)$ dort *analytisch* bekannt ist. Für die Bereiche I, II und IV, V ist der Grenzfall insofern schon erreicht, als wir dort die Differentialgleichung (3.35) verwenden. Allerdings rücken für $\Omega \rightarrow 0$ auch die Bereiche II und IV (zeitlich und auf der ξ -Achse) ins Unendliche. Für die prinzipielle Diskussion dürfen wir daher die Zeitpunkte $\tau_{\pm}$ des Anschlußverfahrens (und damit seine Genauigkeit) beliebig groß annehmen. Für die *praktische* numerische Durchführung des Verfahrens kommt natürlich nur ein endliches τ in Frage, und wir werden im nächsten Kapitel behandeln, wie mittels einer explizit zeitabhängigen kanonischen Transformation trotzdem die erforderliche Genauigkeit erzielt werden kann. Zunächst das prinzipielle Verfahren.

Wir betrachten also Anfangs- und Endzeiten $\tau_- \ll -1$ und $\tau_+ \gg 1$, durch deren Wahl die Bewegung $\xi(\tau) - \xi_0(\tau)$ mit beliebiger Genauigkeit harmonisch und adiabatisch gemacht werden kann. Zur Bestimmung von (I_a, φ_a) betrachten wir die bei $(\xi(0), \dot{\xi}(0)) = (-\xi_1, \xi_2)$ beginnende Trajektorie bis $\tau = \tau_+$. Hier besitzt das System die (für $\tau \rightarrow \infty$ asymptotisch konstante) Wirkung I_a , und enthält so alle aus dem Bereich I stammenden Einflüsse. Der Winkel verhält sich als Funktion von τ wie

$$\varphi = \varphi_a + \Delta\varphi_+(\tau_+), \quad \Delta\varphi_+(\tau) = \int_0^{\tau_+} \omega_a(I_a, \tau) d\tau, \quad (3.36)$$

wobei $\Delta\varphi_+(\tau_+)$ das von $\tau = 0$ bis $\tau = \tau_+$ mit der Fiktion adiabatischen und homogenen Verhaltens bestimmte Winkelinkrement ist, und ω_a die in Gleichung (A.3) definierte Frequenz in ξ - τ -Eichung mit linearisierter Anregung. Die Größe φ_a enthält analog zu I_a neben dem Einfluß des Kicks alle aus Bereich I stammenden Winkelkorrekturen. Das bedeutet, daß für Zeiten $\tau > \tau_1$ alle diese Effekte in der Konstanten φ_a absorbiert sind. (entsprechend $\Phi(I_0)$ im Fall der Rechteckanregung).

Wir erhalten so bei $\tau = \tau_+$

$$\begin{aligned} \xi(\tau_+) &= \xi_0(\tau_+) - \sqrt{\frac{2I_a}{\omega_1(\tau_+)}} \cos(\varphi_a + \Delta\varphi_+(\tau_+)), \\ \dot{\xi}(\tau_+) &= \dot{\xi}_0(\tau_+) + \sqrt{2\omega_1(\tau_+)I_a} \sin(\varphi_a + \Delta\varphi_+(\tau_+)), \end{aligned} \quad (3.37)$$

und

$$\omega_1^2(\tau) = (q-1)\tau^{(q-1)\delta}. \quad (3.38)$$

Zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten K und P gemäß (3.6) betrachten wir Trajektorien, die bei $\tau = \tau_-$ in der Umgebung der Referenzkurve beginnen

$$\begin{aligned}\xi(\tau_-) &= -\xi_0(-\tau_-) + \sqrt{\frac{I_a}{2\omega_1(\tau_-)}} (u_1 e^{i\Delta\varphi_-} + u_2 e^{-i\Delta\varphi_-}), \\ \dot{\xi}(\tau_-) &= \dot{\xi}_0(-\tau_-) + i\sqrt{\frac{\omega_1(\tau_-)I_a}{2}} (u_1 e^{i\Delta\varphi_-} - u_2 e^{-i\Delta\varphi_-}).\end{aligned}\quad (3.39)$$

Dem kleinen Abstand $2|u_1|\cos(\varphi + \Delta\varphi_-) = u_1 e^{i\Delta\varphi_-} + u_2 e^{-i\Delta\varphi_-}$ entspricht der Wirkung bei $\tau = \tau_-$ zur Referenztrajektorie entspricht die Wirkung bei $\tau = \tau_-$

$$I_- = I_a |u_1|^2. \quad (3.40)$$

Die fiktive adiabatische Winkeländerung bis $\tau = 0$ ist wieder gegeben durch

$$\Delta\varphi_- = -\int_0^{\tau_-} \omega_a(I_-, \tau) d\tau. \quad (3.41)$$

Mit diesem Ansatz führt die Anfangsbedingung (3.39) zu "fiktiven Koordinaten" (u_1, u_2) bei $\tau = 0$, die wir erhalten würden, wenn das System im "gespiegelten" Bereich V harmonisch, adiabatisch und homogen wäre.

Integrieren wir weiter zu $\tau = \tau_+$, erhalten wir die Koordinaten

$$\begin{aligned}\xi(\tau_+) &= \xi_0(\tau_+) - \sqrt{\frac{2I_+}{\omega_1(\tau_+)}} \cos(\varphi_a + \Delta\varphi_+(\tau_+)), \\ \dot{\xi}(\tau_+) &= \dot{\xi}_0(\tau_+) + \sqrt{2\omega_1(\tau_+)I_+} \sin(\varphi_a + \Delta\varphi_+(\tau_+)),\end{aligned}\quad (3.42)$$

mit

$$I_+ = I_a + \delta I, \quad \Delta\varphi_+ = \delta\varphi + \int_0^{\tau_+} \omega_a(I_+, \tau) d\tau. \quad (3.43)$$

Somit werden den Koordinaten (u_1, u_2) die Differenzen in Wirkungs-Winkel-Koordinaten $(\delta I, \delta\varphi)$ zugeordnet und zwar so, daß die fiktiven Koordinaten (u_1, u_2) zur Zeit $\tau = 0$ vor dem Kick fiktive Wirkungs-Winkel-Inkmente $(\delta I, \delta\varphi)$ zur Zeit $\tau = 0$ nach dem Kick erzeugen, während die weitere Zeitentwicklung so behandelt werden kann, als verhielte sich das System in Bereich I adiabatisch und homogen und in Bereich V zusätzlich harmonisch.

Alle Effekte der Nichtadiabazität, Anharmonizität und der Abweichung $\omega \neq \omega_a$ in den Bereichen V und I sind somit in der Abbildung $(u_1, u_2) \rightarrow (\delta I, \delta\varphi)$ enthalten.

Die Trajektorien zu verschiedenen (u_1, u_2) und somit die Entwicklungskoeffizienten K, P in (3.6) können nun numerisch berechnet werden. Die Poincaré-Abbildung (3.22) ist damit vollständig bestimmt.

Bei der praktischen Durchführung dieses Verfahrens tritt das Problem auf, daß die Gleichungen (3.37) und (3.39) nur für das *harmonische* System eine Wirkungs-Winkel-Transformation darstellen, die zu einem konstanten $I(\tau)$ führt. Wollte man sie verwenden, müßte das Integrationsintervall $[-\tau_- \dots \tau_+]$ die Bereiche IV bis II umfassen, und wir müßten beispielsweise im Fall $p = 1, l = 0, q = 3$ für eine akzeptable Genauigkeit von 3 Stellen in den universellen Konstanten ein zeitliches Integrationsintervall von $[-10^7 \dots 10^7]$ verwenden. Da das praktisch nicht durchführbar ist, benutzen wir die im Kapitel 5 beschriebene Transformation WW_ξ , eine zeitabhängige Wirkungs-Winkel-Transformation, welche die

	$q = 3$ $p = 1$ $l = 0$	$q = 4$ $p = 1$ $l = 0$	$q = 2.1$ $p = 1$ $l = 0$	$q = 5$ $p = 1$ $l = 2$	$q = 4$ $p = 1.5$ $l = 0$
δ	0.333333	0.250000	0.476190	0.333333	0.375000
λ	2.666666	2.750000	2.523809	3.333333	3.125000
γ	0.250000	0.181818	0.377358	0.200000	0.240000
η	0.250000	0.272727	0.207547	0.400000	0.360000
ξ_1	0.677030	0.740548	0.568342	0.690634	0.629283
ξ_2	0.472173	0.389803	0.603279	0.412847	0.485961
I_a	0.643386	0.695257	0.520835	0.366509	0.577521
φ_a	0.590845	1.170859	2.252078	3.020047	1.874718
B_1	1.373153	1.289717	1.550786	1.455937	1.891013
B_2	0.630713	0.702156	0.576042	1.685496	1.332053
B_3	-0.179346	-0.488821	0.218103	-0.971862	-0.808882
C_1	1.547038	2.314061	3.402285	3.282775	3.780085
C_2	0.804548	1.639907	1.492144	4.576395	3.741357
C_3	1.275581	1.170801	1.420545	0.106784	0.268957
χ_1	-2.208157	-2.064884	-2.429117	-1.142350	-1.973212
χ_2	-3.134970	-3.045390	2.933932	-1.630484	3.034903
ψ_1	2.848043	-2.799271	-2.817896	-1.574090	-2.256788
ψ_2	2.157146	2.550070	2.602434	-1.720956	2.826991
A_0	-1.617312	-0.894025	-0.177039	1.877697	-0.098493
A_1	1.426348	1.614111	1.237579	1.235253	1.486087
A_2	-0.375308	-0.782164	-0.124132	-1.832548	-0.649711

Tabelle 3.2: Universelle Konstanten für verschiedene Kombinationen von p , q und l , die nach dem im Text erläuterten Verfahren berechnet wurden.

Zeitabhängigkeit der im Potential enthaltenen Funktion $\xi_0(\tau)$ explizit berücksichtigt, im Limes $t \rightarrow \infty$ in den harmonischen Zusammenhang (z.B. (3.37)) einmündet und so konstruiert ist, daß I konstant bleibt.

Die in Tabelle 3.2 angegebenen Konstanten besitzen eine Genauigkeit von 6 Stellen. Die Größen ($\xi_0(0)$, $\dot{\xi}_0(0)$) wurden durch Integration der Differentialgleichung (3.35) von $\tau = 4000$ bis $\tau = 0$ mit der Anfangsbedingung (2.27) (Seite 40) bestimmt. Als Toleranz der Integration [12] wurde hierbei und bei der folgenden Integration der Wert 10^{-18} verwendet. Zur Ermittlung der Koeffizienten K und P wurden 24 Trajektorien von $\tau_- = -200$ bis $\tau_+ = 200$ integriert. Die Anfangsbedingungen wurden entsprechend (3.39) mit $|u| = 0.01$ gewählt.

Der die Genauigkeit begrenzende Faktor ist hierbei die numerische Berechnung der Ableitungen zur Bestimmung der Koeffizienten $K_{\mu\nu}$ und $P_{\mu\nu}$. Sie könnte durch die Verwendung einer größeren Zahl von Trajektorien erhöht werden.

3.4 Diskussion der Abbildungsformeln

Wir betrachten nun die Abbildung (3.22), (3.23) zunächst in erster Ordnung e^{-rT} und schreiben sie um in die Form aus Kapitel 1:

$$\varphi_{n+1} = \alpha + \beta \cos \varphi_n. \quad (3.44)$$

Die hierfür notwendige Zusammenfassung der beiden Kosinusterme im Ausdruck Φ_1 der Formel (3.23) führt zu einer Phasenverschiebung Δ im Winkel φ :

$$\alpha = \varphi_a + A_1 T + \sum_{\nu=2}^N A_\nu F_\nu + \Delta, \quad (3.45)$$

$$\beta = e^{-rT} \sqrt{A^2 + B^2}, \quad (3.46)$$

mit

$$A = B_1 \sum_{\nu=2}^N (\nu-1) A_\nu F_\nu \cos \chi_1 + C_1 \cos \psi_1, \quad B = B_1 \sum_{\nu=2}^N (\nu-1) A_\nu F_\nu \sin \chi_1 + C_1 \sin \psi_1 \quad (3.47)$$

und

$$\Delta = \left| \arccos \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \text{sign}(B). \quad (3.48)$$

Die hierdurch definierten Koordinatenlinien der Parametertransformation $(\alpha, \beta) \rightarrow (r, \Omega)$ sind für die Exponenten $q = 3, p = 1, l = 0$ in den Abbildungen 3.3 und 3.4 gezeigt.

Wir vergleichen die r - Ω -Abhängigkeiten von β : Im Fall der Rechteckanregung wächst β mit r^{-1} , während bei der allgemeinen Duffing-Gleichung diese Größe durch F_ν gegeben ist, die sich im Parameterbereich $r \approx \Omega \ll 1$ wie $r^{(\eta-1)\kappa_\nu}$ verhält ((A.4) auf Seite 92), im Fall $q = 3, p = 1, l = 0$ also wie $r^{-0.25}$. Um, bei festgehaltenem e^{-rT} , in den interessanten Parameterbereich $\beta \geq 1$ zu gelangen, muß man bei der allgemeinen Duffing-Gleichung also weiter in die Asymptotik zu kleinen r (und damit großen T) gehen. Um den Gültigkeitsbereich unserer Theorie mit β -Werten oberhalb 2 zu erreichen (etwa mit $e^{-rT} < \frac{1}{3}$), wo voraussichtlich viele Attraktoren koexistieren, müßte man sogar extreme Perioden T betrachten.

Der Einfluß der parameterabhängigen Größen F_ν ist am Beispiel der Systemparameter $q = 3, p = 1, l = 0$ (hier tritt nur F_2 auf) in Abbildung 3.5 gezeigt. Für $\beta \geq 1$ wächst F_2 auf 20 an. In Φ_0 ist der Term $A_2 F_2$ zwar viel kleiner als der führende Term $A_1 T$, erzeugt aber durch seinen Einfluß auf $\alpha(r, \omega)$ die asymptotisch exakte 2π -Periodizität des Phasendiagramms in α - β -Koordinaten. In Φ_1 und Φ_2 sind die Terme mit den F_2 -Faktoren dominierend.

3.5 Phasendiagramme

Die hier gezeigten Phasendiagramme sind alle in den Koordinaten (α, β) nach den Gleichungen (3.45) und (3.46) gezeichnet, also den Parametern der eindimensionalen Poincaré-Abbildung erster Ordnung in e^{-rT} . Die Bedeutung der Schraffuren ist auf Seite 30 erläutert.

Wir vergleichen in Abbildung 3.6 zunächst Phasendiagramme zur Differentialgleichung und zur *eindimensionalen* Poincaré-Abbildung (3.44) für α -Werte um $1000 \cdot 2\pi$. Die Übereinstimmung in α -Richtung ist sehr gut. In β -Richtung ist bei der ersten Bifurkationslinie eine kleine Abweichung vorhanden, die zweiten

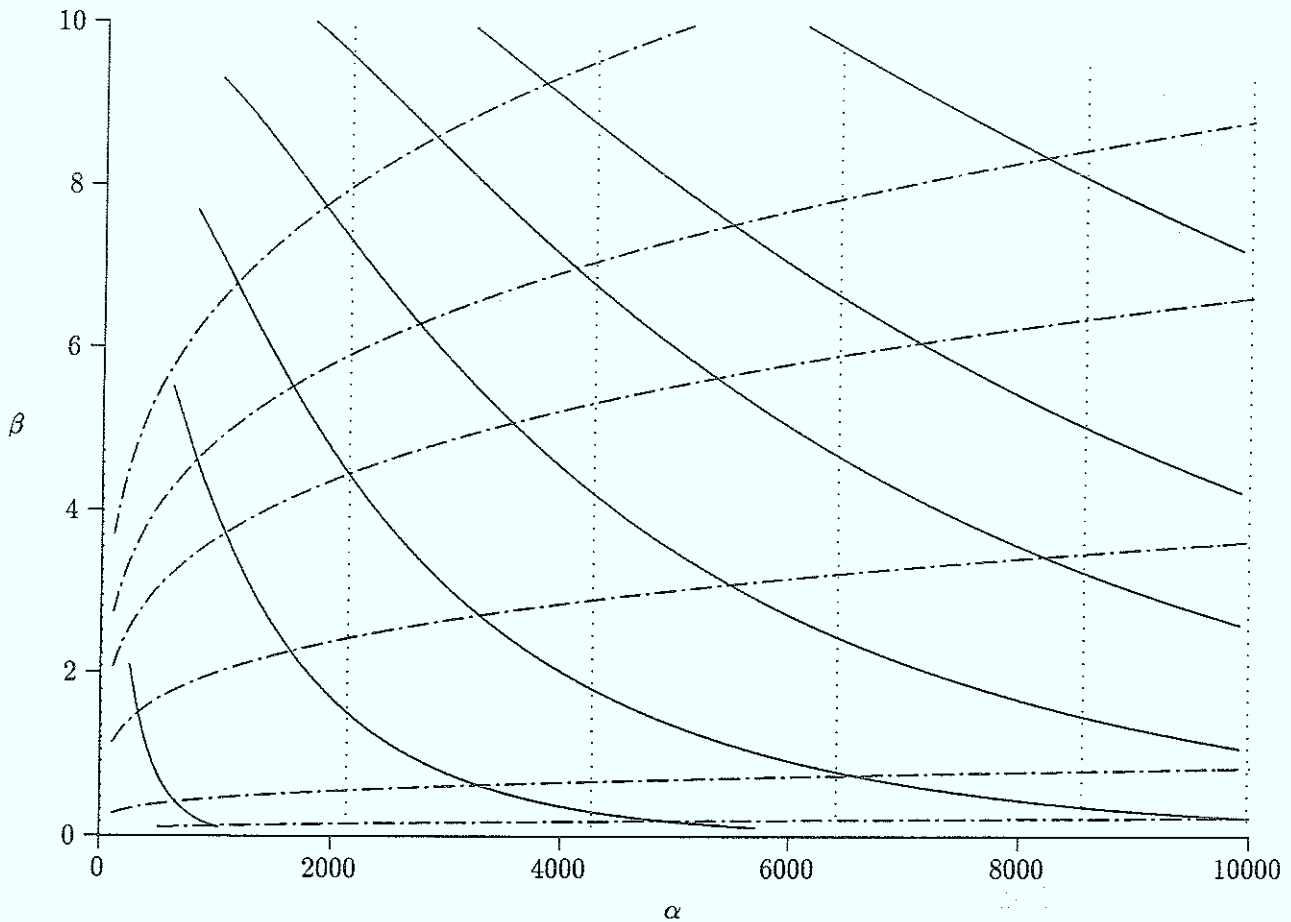


Abbildung 3.3: Koordinatenlinien der Parametertransformation $(\alpha, \beta) \rightarrow (r, T)$, $q = 3$, $p = 1$, $l = 0$.
 Gepunktet: $T = \text{konst.}$ Von links: $T = 1500, 3000, 4500, 6000, 7000$.
 Durchgezogen: $r = \text{konst.}$ Von links: $r = 5 \cdot 10^{-3}, 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-4}, 3 \cdot 10^{-4}, 2 \cdot 10^{-4}, 1.5 \cdot 10^{-4}, 10^{-4}$.
 Strichpunktiert: $e^{-rT} = \text{konst.}$ Von oben: $e^{-rT} = 0.65, 0.56, 0.47, 0.32, 0.1, 0.003$.

Bifurkationslinien des Duffing-Systems sind asymmetrisch gegenüber denen der Abbildung verschoben. Diese Asymmetrie kann offensichtlich durch die Abbildung in erster Ordnung e^{-rT} nicht realisiert werden (siehe Seite 30).

Nehmen wir die Terme zweiter Ordnung hinzu, so erhalten wir eine gekoppelte Abbildung in φ und i . Wir betrachten zunächst die Winkelabbildung. Φ_2 besteht aus Termen $\sim \cos 2\varphi_n$ und $\sim i_n \cos \varphi_n$. Die Terme $\sim i_n \cos(\varphi_n)$ bewirken durch den zusätzlichen Freiheitsgrad ein "Aufweichen" der Abbildungsfunktion, deren Einfluß auf die gesamte Abbildung später untersucht wird. Die Terme $\sim \cos 2\varphi_n$ führen zu einer Asymmetrie in der Abbildungsfunktion, deren Einfluß wir als nächstes betrachten. Dabei ignorieren wir zunächst die Terme $\sim i_n \cos \varphi_n$:

$$\varphi_{n+1} = \alpha_2 + \beta \cos \varphi_n + \gamma \cos(2\varphi_n + \Psi), \quad (3.49)$$

wobei die trigonometrischen Terme aus (3.23) auf die übliche Weise zusammengefaßt wurden (α_2 , γ und Ψ ergeben sich als Funktionen der $F_\nu(r, \Omega)$). Diese Darstellung ist natürlich keine konsequente

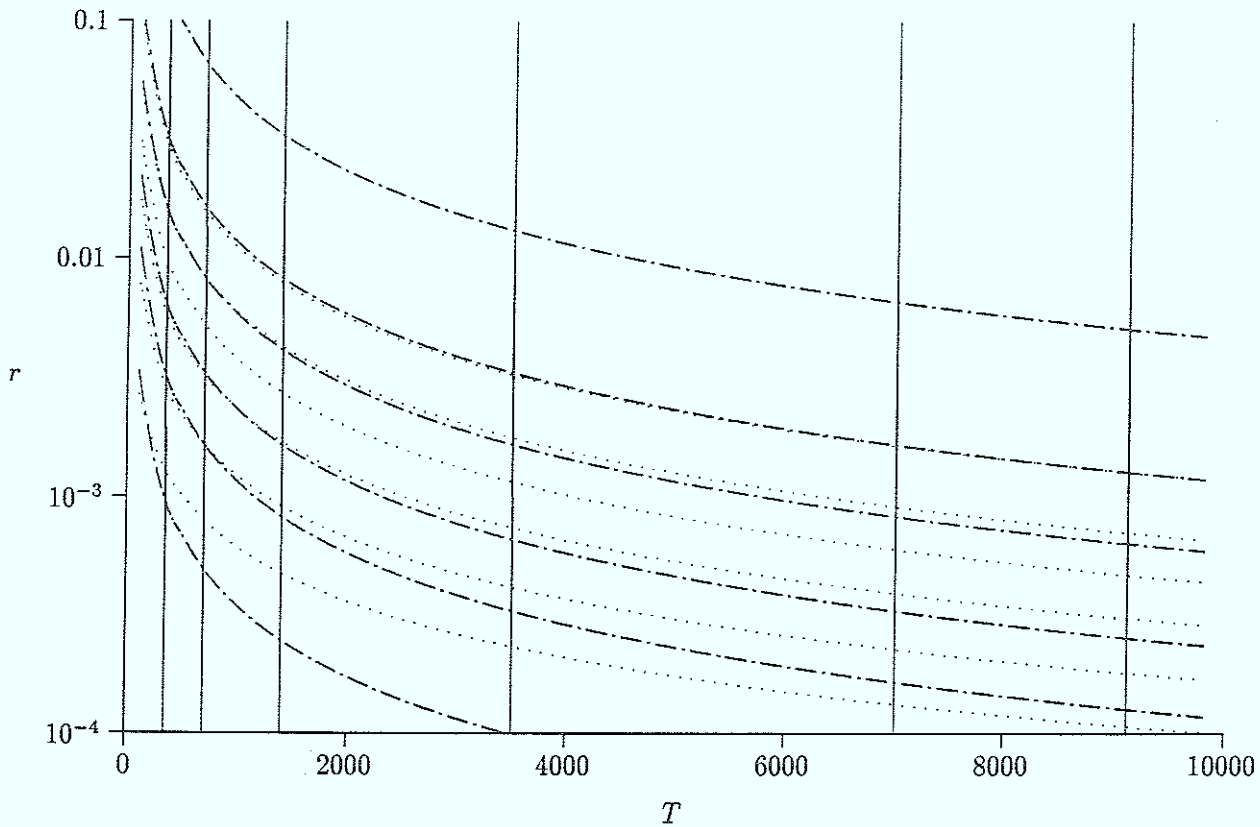


Abbildung 3.4: Koordinatenlinien der Parametertransformation $(r, T) \rightarrow (\alpha, \beta)$, $q = 3$, $p = 1$, $l = 0$.
 Durchgezogen: $\alpha = \text{konst.}$ Von links: $\alpha = 500, 1000, 2000, 5000, 10000, 13000$.
 Gepunktet: $\beta = \text{konst.}$ Von links: $\beta = 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 2, 5$.
 Strichpunktiert: $e^{-rT} = \text{konst.}$ Von oben: $e^{-rT} = 10^{-20}, 10^{-5}, 0.003, 0.1, 0.3, 0.8$.

Entwicklung der Poincaré-Abbildung, sie dient zur Untersuchung des jeweiligen Einflusses durch die Zweidimensionalität bzw. der höheren Fourierkomponenten der Winkelabbildung. Die Abbildung (3.49) besitzt nicht mehr die früher beschriebene Spiegelsymmetrie (vgl. Seite 30). Die an Hand der Abbildung (1.11) auf S. 29 beschriebene Konstruktion zur Bestimmung der Fixpunkte führt bei einer Variation von α_2 nicht mehr nur zu einer Verschiebung, sondern durch den Term $\gamma \cos(2\psi_n + \Psi)$ auch zu einer Änderung des Funktionsgraphen; dieser führt bereits zu einer Asymmetrie der Bifurkationslinien im Phasendiagramm, das in Abbildung 3.7 gezeigt ist. Die beschriebene Asymmetrie der Abbildung (3.49) ist erkennbar, die β -Werte der zweiten Bifurkationslinien sind gegenüber der Poincaré-Abbildung erster Ordnung in die richtige Richtung verschoben, jedoch stimmen sie nicht exakt mit denen der Differentialgleichung überein, obwohl das Phasendiagramm schon "nahe" der Asymptotik liegt, d.h. die asymptotischen Bedingungen (1.2), (1.3) sind recht gut erfüllt: $T \approx 4000$, $e^{-rT} \approx 0.1 \dots 0.22$, $r \approx 6 \cdot 10^{-3} \dots 10^{-2}$. Die Poincaré-Abbildung ist also in diesem Bereich noch nicht durch eine eindimensionale Abbildung zu beschreiben, die Variable i hat einen Einfluß auf die Form des Phasendiagramms. Dies ist im zweiten Phasendiagramm der Abbildung 3.7 zu sehen: hier ist die volle zweidimensionale Abbildung gezeigt. Diese Abbildung führt zu einer sehr guten quantitativen Übereinstimmung auch bei größeren Werten von β .

In Abbildung 3.8 [13, Scale6] sind die Phasendiagramme der Differentialgleichung und der zweidimensio-

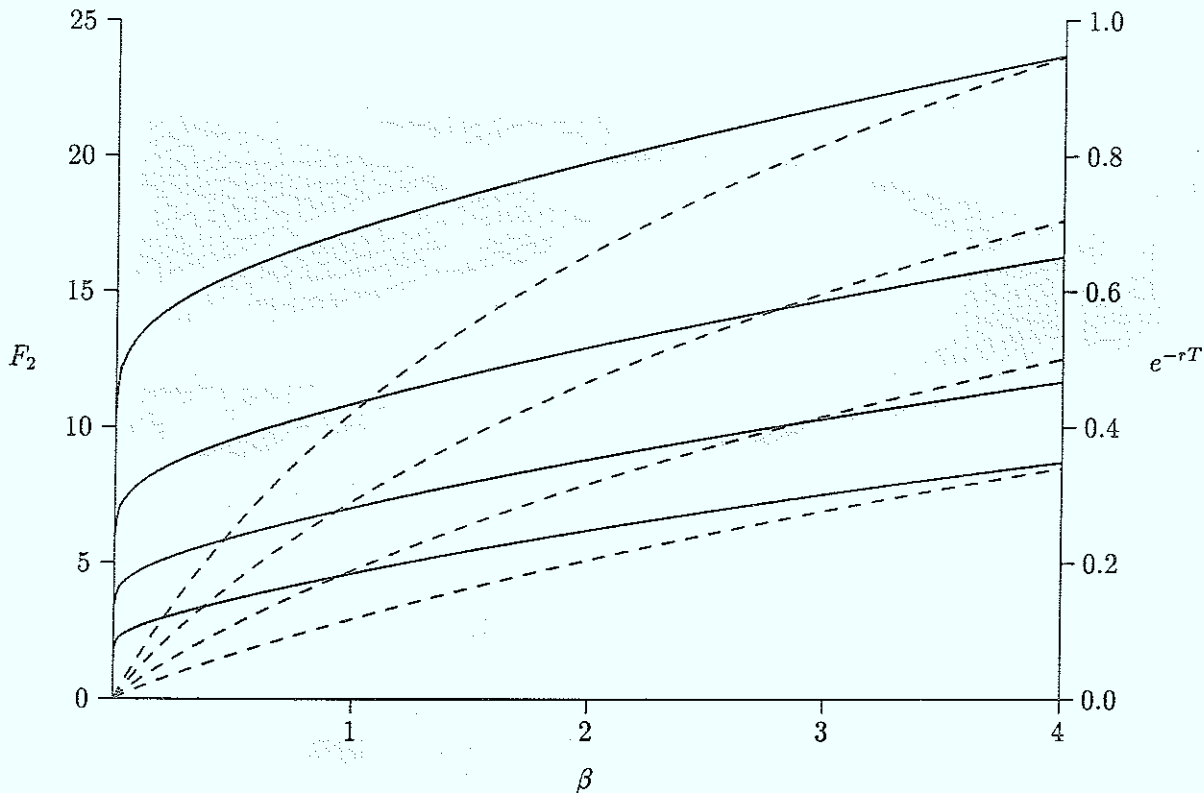


Abbildung 3.5: Durchgezogen: Die Größe F_2 in Abhängigkeit von β für folgende α -Werte (von unten): 10, 100, 1000, 10000. Gestrichelt: e^{-rT} in Abhängigkeit von β für die α -Werte (von oben): 10, 100, 1000, 10000. Systemparameter: $q = 3$, $p = 1$, $l = 0$.

nalen Poincaré-Abbildung gezeigt (die ab jetzt ausschließlich gezeigt werden, da ja das Phasendiagramm der eindimensionalen Poincaré-Abbildung exakt periodisch in α ist und die α -Abhängigkeit des Phasendiagramms der Abbildung (3.49) sehr gering ist), jedoch für niedriger indizierte Zungen. Wie zu erwarten war, wird die Übereinstimmung in β -Richtung mit kleineren Werten von α immer geringer.

In Abbildung 3.9 sind die Phasendiagramme der ersten Resonanzungen gezeigt. Auch hier ist die qualitative Übereinstimmung noch gut, quantitativ kommt zu einer Verschiebung in β -Richtung auch eine Abweichung in α -Richtung. Dieser Parameterbereich kann quantitativ nicht mit der *asymptotischen* Abbildung beschrieben werden.

In den Abbildungen 3.10 und 3.11 sind schließlich die Phasendiagramme für die Exponenten $q = 4$, $p = 1$, $l = 0$ sowie $q = 5$, $p = 1$, $l = 2$ gezeigt.

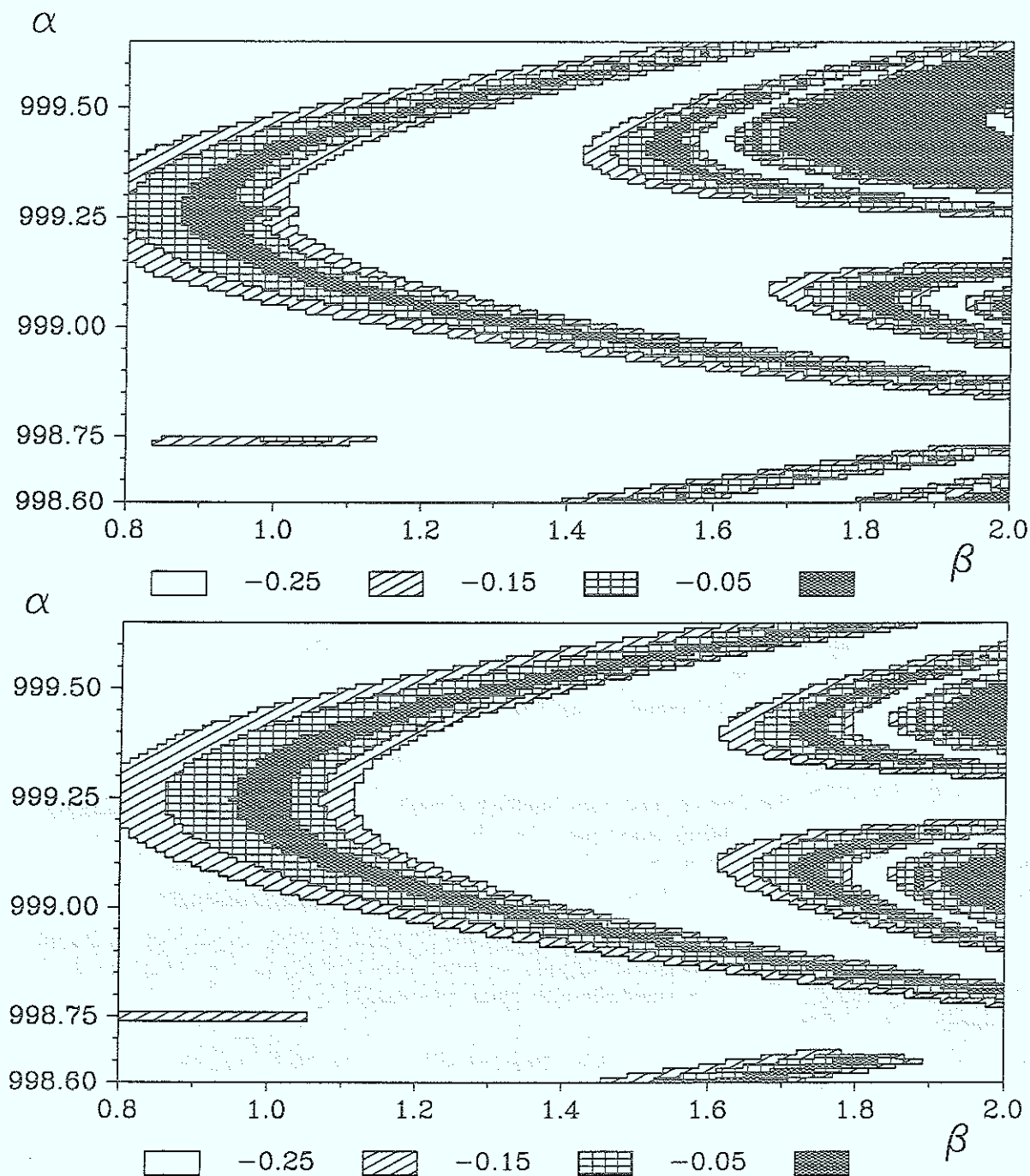


Abbildung 3.6: Phasendiagramm der allgemeinen Duffing-Gleichung und der zugehörigen Poincaré-Abbildung erster Ordnung. α -Achse in 2π -Einheiten. Parameter: $e^{-rT} = 0.10 \dots 0.22$, $r = 0.00033 \dots 0.00050$, $T = 4412 \dots 4418$.

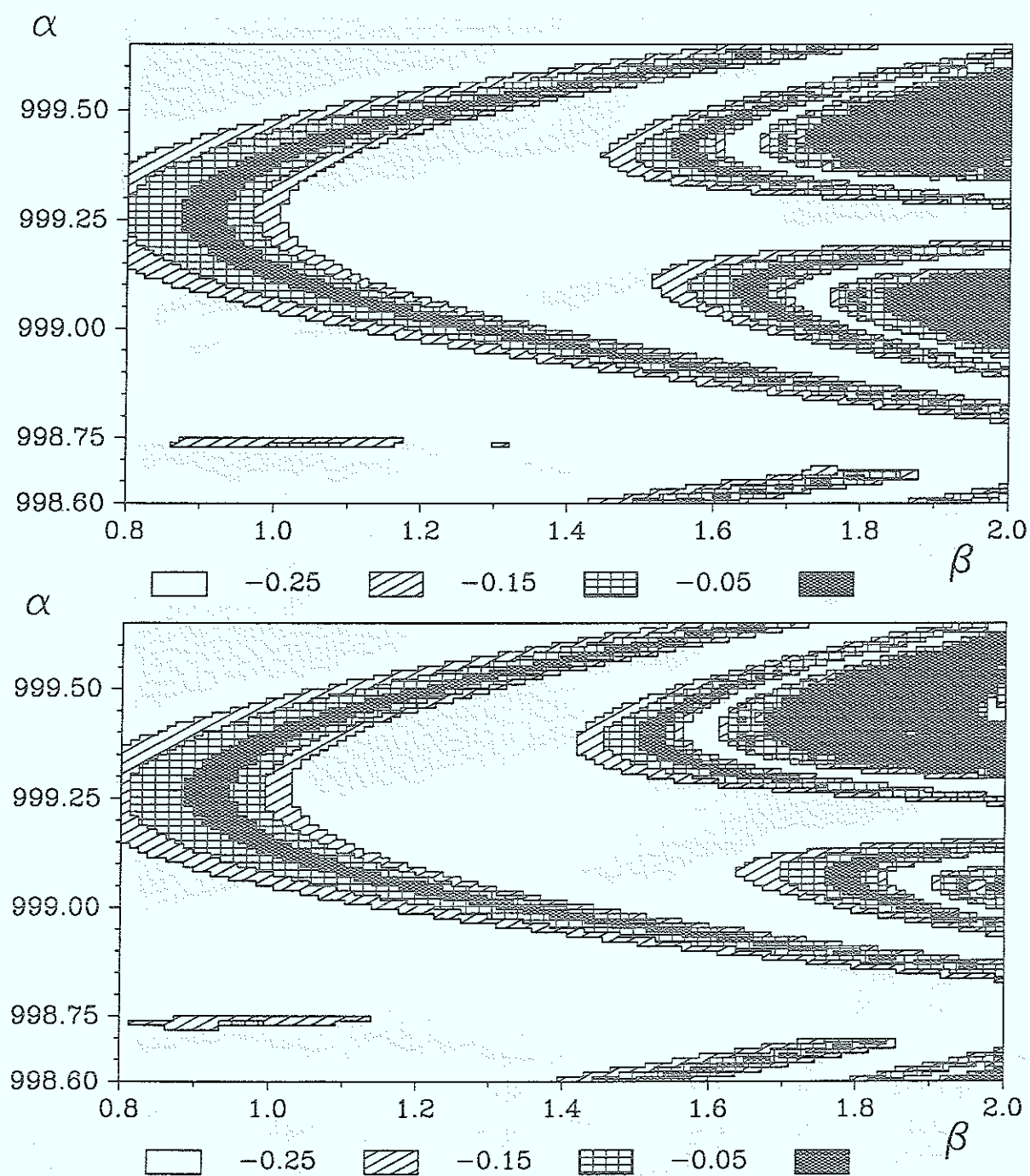


Abbildung 3.7: Phasendiagramm der Poincaré-Abbildung (3.49) und der zweidimensionalen Poincaré-Abbildung. α -Achse in 2π -Einheiten.

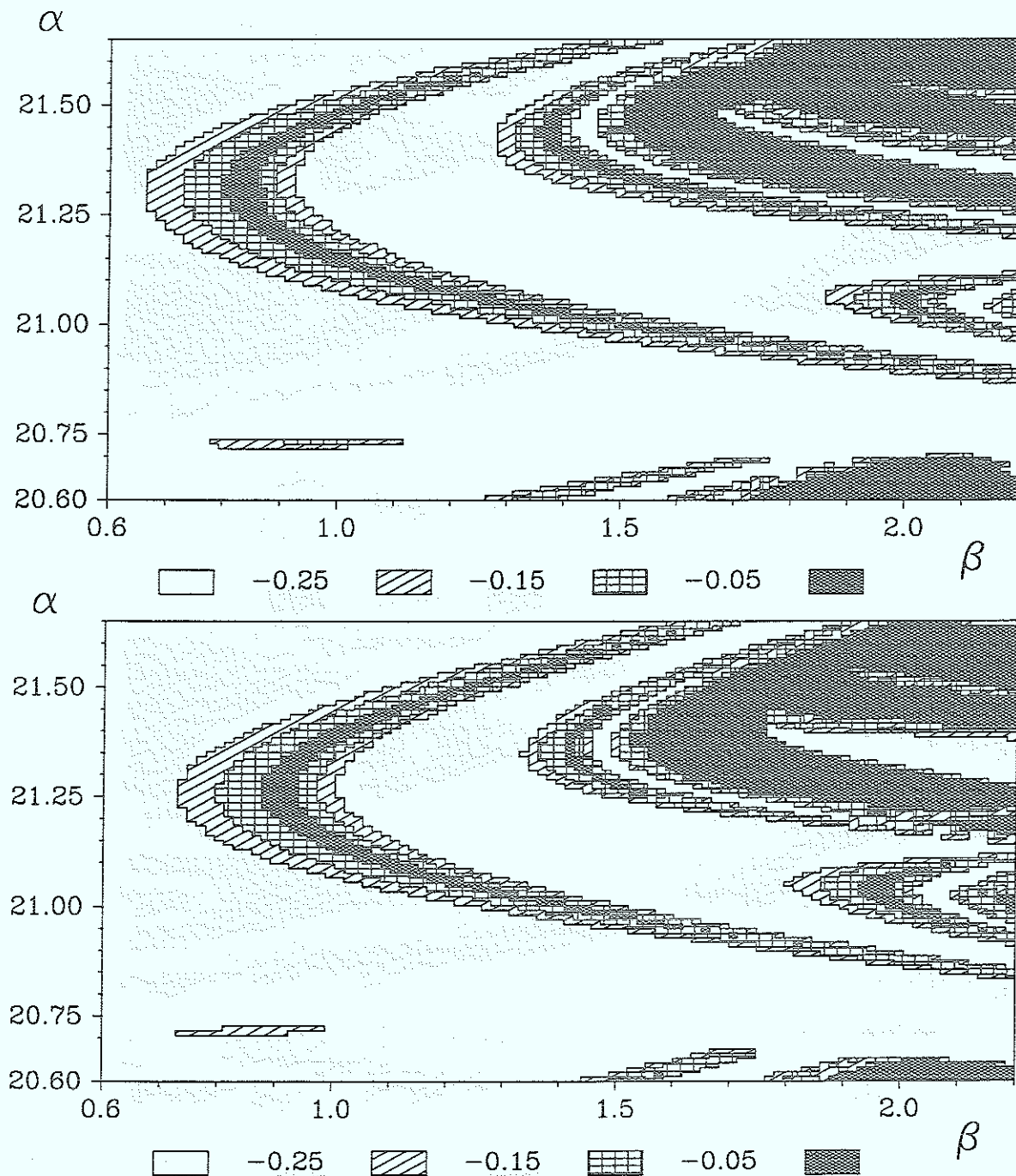


Abbildung 3.8: Phasendiagramm der allgemeinen Duffing-Gleichung und der zugehörigen Poincaré-Abbildung zweiter Ordnung. α -Achse in 2π -Einheiten. Parameter: $e^{-rT} = 0.17 \dots 0.49$, $r = 0.0077 \dots 0.018$, $T = 91 \dots 96$.

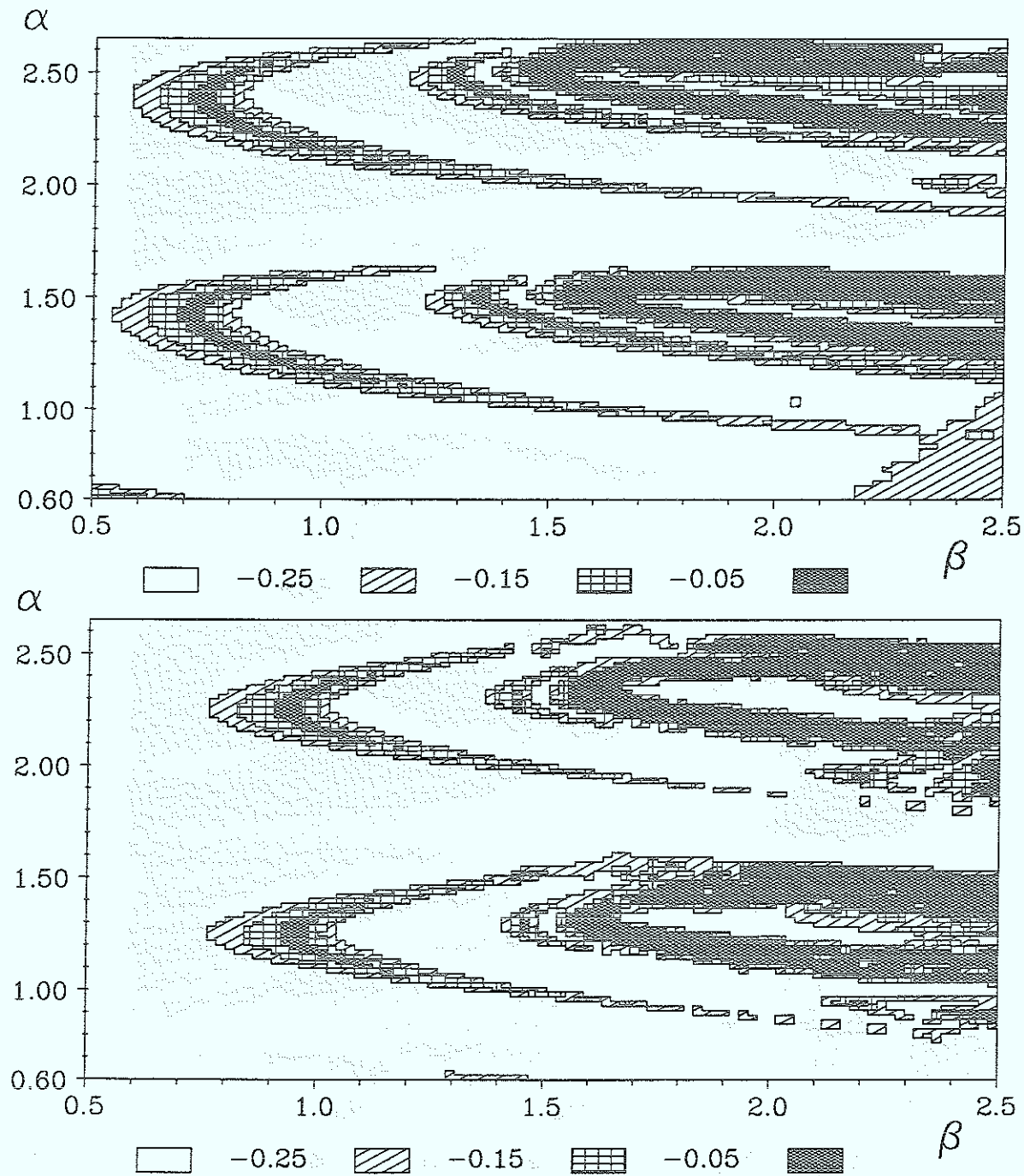


Abbildung 3.9: Phasendiagramm der allgemeinen Duffing-Gleichung und der zugehörigen Poincaré-Abbildung zweiter Ordnung für die ersten Resonanzungen. α -Achse in 2π -Einheiten.
Parameter: $e^{-rT} = 7 \cdot 10^{-5} \dots 0.77$, $r = 0.032 \dots 0.77$, $T = 1.5 \dots 12.3$.

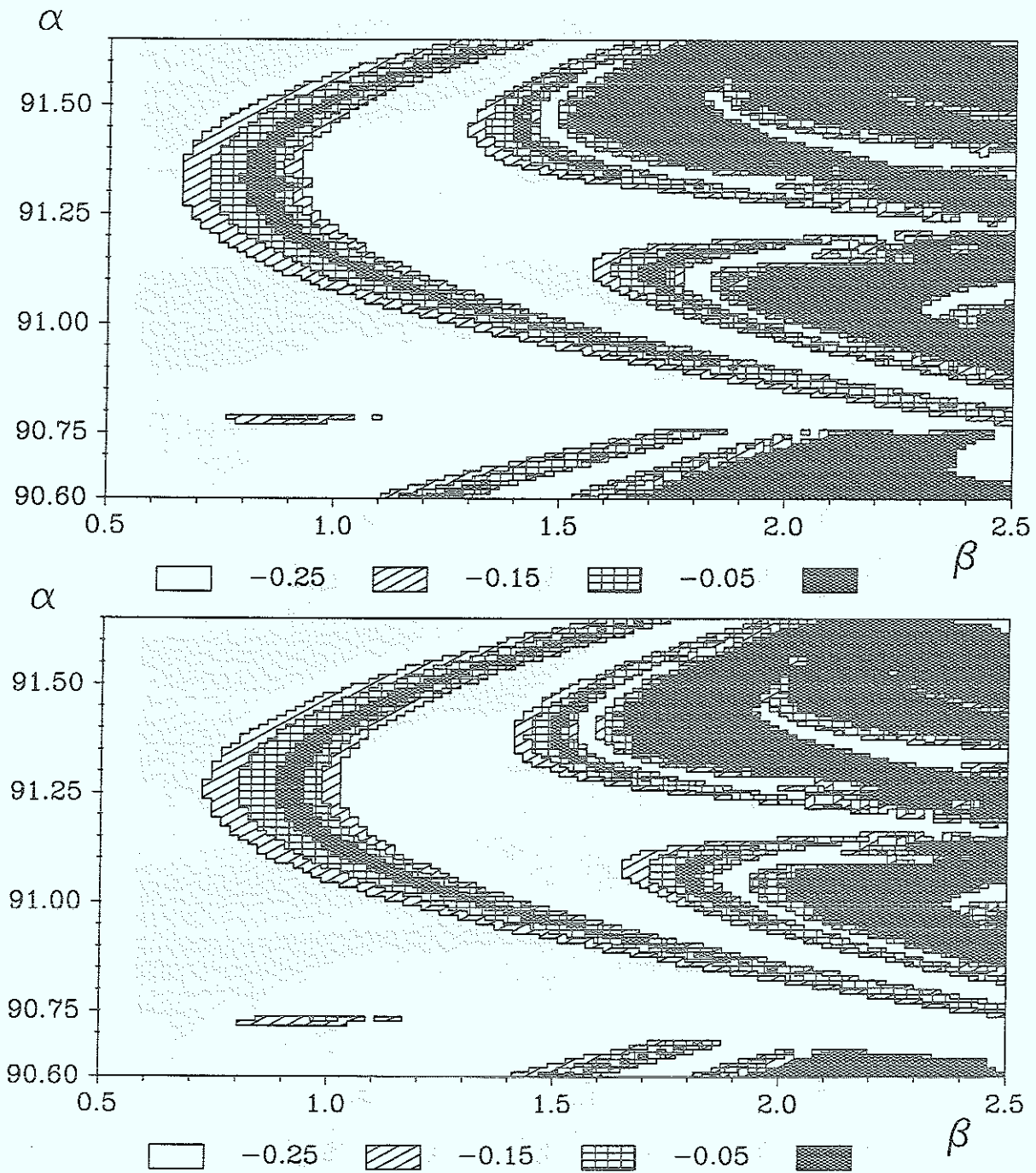


Abbildung 3.10: Phasendiagramm der allgemeinen Duffing-Gleichung mit den Exponenten $q = 4$, $p = 1$, $l = 0$ und der zugehörigen Poincaré-Abbildung zweiter Ordnung. α -Achse in 2π -Einheiten. Parameter: $e^{-rT} = 0.074 \dots 0.25$, $r = 0.0038 \dots 0.0072$, $T = 355 \dots 360$.

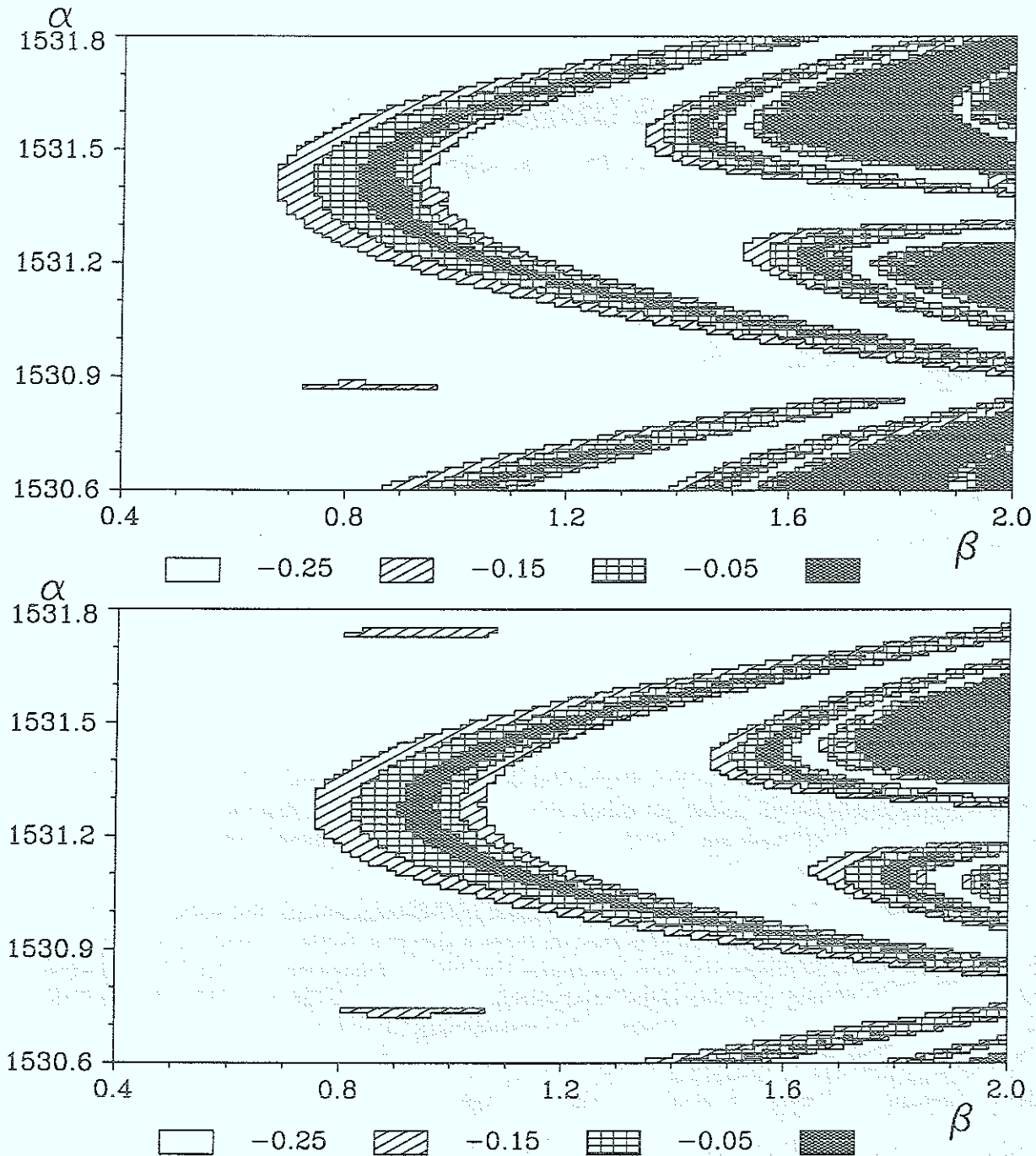


Abbildung 3.11: Phasendiagramm der allgemeinen Duffing-Gleichung mit den Exponenten $q = 5$, $p = 1$, $l = 2$ und der zugehörigen Poincaré-Abbildung zweiter Ordnung. α -Achse in 2π -Einheiten. Parameter: $e^{-rT} = 0.00032 \dots 0.0056$, $r = 0.00066 \dots 0.001$, $T = 7795.5 \dots 7799.4$. Bei diesen Exponenten wird die asymptotische Resonanzzone sehr langsam erreicht, deshalb sind trotz der hohen α -Werte noch Abweichungen sichtbar.

4 Die Poincaré-Abbildung für Parameterwerte außerhalb der Asymptotik

In der bisherigen –asymptotischen– Theorie hatten wir die Poincaré-Abbildung der Duffing-Gleichung als Entwicklung nach Potenzen von e^{-rT} für den asymptotischen Parameterbereich

$$r \ll 1 \ll T, \quad (4.1)$$

$$e^{-rT} \text{ klein, aber endlich} \quad (4.2)$$

hergeleitet. Als Ergebnisse erhielten wir

1. die funktionale Form der Poincaré-Abbildung,
2. die Parametertransformation $(r, \Omega) \leftrightarrow (\alpha, \beta)$ mit den
3. universellen Konstanten.

In diesem Kapitel untersuchen wir die Erweiterbarkeit der Theorie auf Parameterbereiche, in denen die Bedingungen (4.1) und (4.2) nur mäßig gut erfüllt sind. Wir werden zeigen, daß durch geeignete Modifikation der genannten Ergebnisse auch für den nichtasymptotischen Parameterbereich eine quantitativ korrekte Poincaré-Abbildung angegeben werden kann.

Der im 3. Kapitel durchgeführte Vergleich der asymptotischen Resonanzungen mit entsprechenden aus der Differentialgleichung gewonnenen Diagrammen im Bereich kleiner α -Werte (Abbildung 3.8, 3.9) zeigte auch für die ersten Resonanzungen eine gute *qualitative* Übereinstimmung zwischen den Phasendiagrammen der Poincaré-Abbildung und der Differentialgleichung, jedoch eine für praktische Anwendungen möglicherweise nicht ausreichende *quantitative* Übereinstimmung. Dieser nicht-asymptotische Parameterbereich wird für praktische Anwendungen besonders interessant sein.

Für diese Abweichungen kommen folgende Ursachen in Frage:

- Wenn e^{-rT} nicht hinreichend klein ist, haben höhere Potenzen in e^{-rT} einen größeren Einfluß auf die Poincaré-Abbildung. Dies ließe sich durch eine Weiterführung der Entwicklung in Abschnitt 3.3 zu höheren Ordnungen von e^{-rT} berücksichtigen. Damit erhöhte sich allerdings die Anzahl der zu bestimmenden Konstanten, wodurch die Abbildungsformeln umfangreicher und ihre Anwendung schwerfälliger werden. Eine Erweiterung der Theorie in diese Richtung wäre hauptsächlich für größere β -Werte unter Berücksichtigung der Bedingung (4.1) (siehe auch Abbildung 3.3 auf Seite 61), zweckmäßig.

- Wenn die Periodendauer T so klein ist, daß ein harmonischer Bereich III wie in Tabelle 3.1 bzw. Abbildung 3.2 nicht mehr existiert, ist die dort beschriebene Anpassung in den Zeitbereichen II und IV nicht mehr anwendbar. Diese war wesentlich für die Herleitung der Abbildungsformeln, so daß die Theorie auf diesen Fall *analytisch* nicht erweitert werden kann.
- Die "universellen Konstanten" waren ja per definitionem parameterunabhängig. Für Parameterwerte außerhalb des Gültigkeitsbereichs der asymptotischen Darstellung der Poincaré-Abbildung sollte aber die funktionale Form der Poincaré-Abbildung (mit modifizierten Konstanten) ihren Sinn behalten, solange die beiden oben genannten Defekte noch vernachlässigbar sind. Es ist aber zu erwarten, daß die numerischen Koeffizienten in den Abbildungsformeln dann von den Parametern (r, Ω) abhängig werden. Wir wollen diese parameterabhängigen Versionen der zuvor universellen Konstanten als Abbildungs-Koeffizienten bezeichnen und sie von den entsprechenden universellen Größen durch einen ' (z.B. B'_2 statt B_2) unterscheiden.
- Eine weitere Ursache der Parameterabhängigkeit liegt in der Deformation des Referenzzyklus: Will man Abweichungen von der Asymptotik vollständig in Betracht ziehen, so darf man auch in der Referenzlösung die Effekte der Endlichkeit von r und Ω nicht mehr außer Acht lassen.

Die genannten Quellen einer Abweichung von der asymptotischen Darstellung der Poincaré-Abbildung sind allesamt nicht analytisch faßbar, doch ist es möglich, die Koeffizienten für jeden festen Parameterpunkt numerisch zu bestimmen. Solange die Parameterabhängigkeit der Koeffizienten gering bleibt, kann mit *einem* Satz von Koeffizienten die Abbildung in einem ganzen Parameterbereich beschrieben werden. Auf diese Weise kann durch die Integration der Differentialgleichung an *einem* Parameterpunkt die Poincaré-Abbildung für einen Teil des Phasendiagramms bestimmt werden. Durch die dem System angepaßte funktionale Form der Poincaré-Abbildung ist diese Beschreibung eine sehr ökonomische. Insbesondere erhalten wir auf diese Weise auch eine quantitativ zutreffende Darstellung der Poincaré-Abbildung im Parameterbereich der niedrig indizierten Resonanzen.

Im folgenden werden wir eine Methode zur Bestimmung der genannten Koeffizienten angeben und ihre Parameterabhängigkeit untersuchen.

4.1 Bestimmung der Abbildungs-Koeffizienten

Die dynamischen Variablen (I, φ) der bisher diskutierten Poincaré-Abbildung waren fiktive Größen, die unter Annahme harmonischer und adiabatischer Zeitentwicklung durch Extrapolation aus dem Bereich III auf das Ende eines jeden Halbzyklus konstruiert wurden; die Abbildung war also

$$(I_n, \varphi_n) = (I(nT - \epsilon), \varphi(nT - \epsilon)) \Rightarrow (I_{n+1}, \varphi_{n+1}) = (I((n+1)T - \epsilon), \varphi((n+1)T - \epsilon)). \quad (4.3)$$

Alle Einflüsse des Kicks und der Bereiche I und V werden durch die Abbildungs-Koeffizienten berücksichtigt. Um diese nun unter voller Berücksichtigung des Einflusses der Endlichkeit von r, Ω zu bestimmen, ist jetzt durch Integration der Differentialgleichung über eine volle Halbperiode das Abbildungsverhalten numerisch zu bestimmen und in die fiktiven Koordinaten umzurechnen. Es sind hierfür jetzt die vollständige Duffing-Gleichung und der in Kapitel 2 beschriebene, von r und Ω abhängige Referenzzyklus $x_0(t)$ zu benutzen.

Die Integration erfolgt in den natürlichen Variablen $(x, \dot{x})$ und wir benötigen am Anfang und Ende des Integrationsintervalls die Transformation zwischen diesen und den Wirkungs-Winkel-Koordinaten als den

für die Poincaré-Abbildung adäquaten Variablen. Wir verwenden hierfür die im 4. Kapitel eingeführte *zeitabhängige* Transformation WW_e , bei der die e^{-rt} -Zeitabhängigkeit des Potentials berücksichtigt ist, die Werte $x_0(t)$ jedoch nur als Parameter eingehen. Diese Transformation ist so konstruiert, daß sie im asymptotischen Grenzfalle in die adiabatische Wirkungs-Winkel-Transformation übergeht, so daß dann auch die Abbildungs-Koeffizienten in die universellen Konstanten übergehen müssen. Wegen der zeitlichen Variation von $x_0(t)$ kann die Transformation WW_e also nicht zu einem völlig konstanten $I(t)$ führen. Eine Berücksichtigung dieser zeitlichen Variation wäre zwar im Prinzip möglich, der dafür notwendige technische Aufwand erscheint aber nicht lohnend. Wir wenden diese Transformation zu den Zeitpunkten $t = \pm \frac{T}{2}$ an, wo $\dot{x}_0(t)$ sehr klein (aber, wegen des Reibungseinflusses nicht exakt Null) ist.

Wir betrachten also die natürlichen Koordinaten $(x(\pm \frac{T}{2}), \dot{x}(\pm \frac{T}{2}))$, die wir nur zu *diesen* Zeiten in die Wirkungs-Winkel-Koordinaten $(I'(\pm \frac{T}{2}), \varphi'(\pm \frac{T}{2}))$ umrechnen können, weil dort die Zeitentwicklung dem Konzept des asymptotischen Verhaltens (Bereich III) am nächsten kommt. Diese sind dann in die fiktiven Wirkungs-Winkel-Koordinaten (i, φ) der Poincaré-Abbildung umzurechnen, die zu den Zeitpunkten $t = 0, T$ definiert sind.

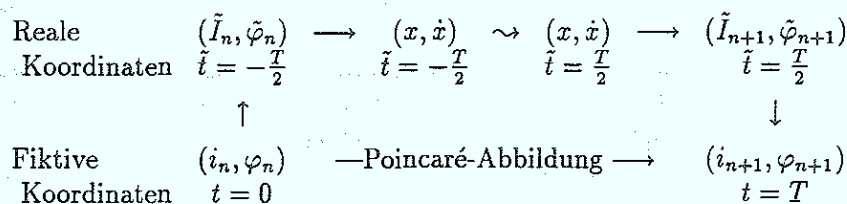


Abbildung 4.1: Bestimmung der Abbildungs-Koeffizienten (schematisch). " $\longrightarrow$ " bedeutet eine Koordinatentransformation, " $\rightsquigarrow$ " die Integration der Differentialgleichung.

Die Vorgehensweise folgt dem Schema der Abbildung 4.1 und stellt sich Schritt für Schritt so dar:

- Wir bestimmen die Größen (I'_a, φ'_a) in Analogie zum Vorgehen bei der asymptotischen Abbildung. Hierfür integrieren wir die Duffing-Gleichung mit den Anfangsbedingungen $(-x_0(T), -\dot{x}_0(T))$ von $t = 0$ bis $t = \frac{T}{2}$. Die r - und Ω -abhängige Referenzlösung $(x_0(t), \dot{x}_0(t))$ bestimmen wir mit dem in Kapitel 2 angegebenen Verfahren. Aus den Systemkoordinaten am Endpunkt ergeben sich mit der Transformation WW_e die Koordinaten (I'_a, φ'_a) .
- Für die Umrechnung zwischen den (realen) Wirkungs-Winkel-Koordinaten zu den Zeiten $t = \pm \frac{T}{2}$ und den (fiktiven) Koordinaten zu den Zeiten $t = 0$ und T benötigen wir die harmonische und adiabatische Extrapolation des Winkels in den Zeitintervallen $[0 \dots \frac{T}{2}]$ und $[\frac{T}{2} \dots T]$ bzw. $[-\frac{T}{2} \dots 0]$. Diese ist numerisch durch die Integrale

$$F_{2,1} = \int_0^{\pi/2} e^{-2rt/\Omega} (\sin t)^{-2\delta} dt, \quad F_{2,2} = \int_{\pi/2}^T e^{-2rt/\Omega} (\sin t)^{-2\delta} dt, \quad (4.4)$$

zu berechnen. Es gilt $F_{2,1} + F_{2,2} = F_2$ (wir betrachten hier nur den Fall $N = 2$).

- Statt eines Ensembles von Wertepaaren (u_1, u_2) wie im Fall der asymptotischen Abbildung wählen wir M fiktive Koordinaten auf einem Kreis um den Endpunkt der linken Referenzlösung (Abbildung 3.1 auf Seite 51) zu einer Wirkung $I'_a e^{-2rT}$. Es soll also zur Zeit $t = 0$ gelten:

$$I_n = e^{-2rT} I'_a, \quad \varphi_{n,j} = \frac{2\pi j}{M}, \quad (4.5)$$

d.h. es werden Punkte $(i_{n,j} = 0, \varphi_{n,j})$ in *fiktiven* Koordinaten betrachtet, und ihre Zeitentwicklung über eine Halbperiode bestimmt.

Wir wählen $i_{n,j} = 0$, da hier, im Gegensatz zu Kapitel 3, als unabhängige Variable der diskreten Abbildung *nur* der Winkel $\varphi_{n,j}$ fungiert. $i_{n,j} = 0$ legt so den i_n -Einfluß auf die Koeffizienten B'_1 und C'_1 als ungefähren φ -Mittelwert um 1 fest (siehe Gleichung (3.20) auf Seite 53).

4. Diese fiktiven Koordinaten entstehen durch die genannte Extrapolation aus realen Koordinaten zur Zeit $t = -\frac{T}{2}$ (wobei alle Wirkungen in der ξ - τ -Skalung betrachtet werden)

$$\begin{aligned}\tilde{I}_n &= I_n e^{-\tau t} = I'_a e^{-\tau T}, \\ \tilde{\varphi}_{n,j} &= \varphi_{n,j} + A_1 t - 2c_2 F_{2,2} I'_a.\end{aligned}\quad (4.6)$$

5. An dieser Stelle werden mit der Transformation WW_e die zugehörigen (z, p) -Werte berechnet. Aus technischen Gründen verwenden wir diese Transformation nur an der Stelle $t = +\frac{T}{2}$. Die Koordinaten zur Zeit $t = -\frac{T}{2}$ werden durch Spiegelung erzeugt:

$$\begin{aligned}x\left(-\frac{T}{2}\right) &= -(z + x_0\left(\frac{T}{2}\right)), \\ \dot{x}\left(-\frac{T}{2}\right) &= -(p + \dot{x}_0\left(\frac{T}{2}\right) - rz).\end{aligned}\quad (4.7)$$

Mit diesen Koordinaten als Anfangsbedingung wird die Differentialgleichung bis $t = \frac{T}{2}$ integriert.

6. Jede Trajektorie enthält jetzt, neben der adiabatischen Zeitentwicklung, die Einflüsse des Kicks und der nichtadiabatischen Bereiche I und V. Wir transformieren die Koordinaten mit der inversen Transformation WW_e zurück auf $(\tilde{I}_{n+1,j}, \tilde{\varphi}_{n+1,j})$.
7. Aus diesen Koordinaten werden die fiktiven Koordinaten (die jetzt zur Zeit $t = T$ gelten sollen) berechnet:

$$\begin{aligned}i_{n+1,j} &= \left(\frac{e^{\tau T} \tilde{I}_{n+1,j}}{I'_a} - 1 \right) e^{\tau T}, \\ \varphi_{n+1,j} &= \tilde{\varphi}_{n+1,j} + A_1 \frac{T}{2} + 2c_2 F_{2,2} e^{\tau T} \tilde{I}_{n+1,j}.\end{aligned}\quad (4.8)$$

8. Die Punkte $(i_{n+1,j}, \varphi_{n+1,j})$ sollen durch die gesuchte diskrete Abbildung (3.20) auf Seite 53 aus $(i_{n,j}, \varphi_{n,j})$ hervorgehen. Die Abbildungskoeffizienten werden mittels *Fouriertransformation* der jeweils i_{n+1} - und φ_{n+1} -Werte bestimmt.

Ein Maß für die Abweichung der so bestimmten Poincaré-Abbildung von den durch die Integration ermittelten, "exakten" Werten, ist die Norm der Summe der *unberücksichtigten* Fourierkoeffizienten

$$I_R = \sqrt{\frac{\sum_j (i_{n+1,j} - f(\varphi_{n,j}, 0))^2}{\sum_j (i_{n+1,j})^2}}, \quad \varphi_R = \sqrt{\frac{\sum_j (\varphi_{n+1,j} - g(\varphi_{n,j}, 0))^2}{\sum_j (\varphi_{n+1,j})^2}}. \quad (4.9)$$

f und g hierin sind die Abbildungsfunktionen nach Punkt 8. Die Größen I_R , φ_R sind ein Maß für den Einfluß höherer als zweiter Ordnung in $e^{-\tau T}$. Der ebenfalls in diese Größen eingehende Effekt durch Integrationsungenauigkeiten und Ungenauigkeiten in der Transformation WW_e kann durch entsprechenden

numerischen Aufwand vernachlässigbar klein gemacht werden. I_R und φ_R sollten von der Größenordnung e^{-3rT} sein.

Die so ermittelte Darstellung der Poincaré-Abbildung ist eine nach den Termen $e^{2i\varphi}$ abgebrochene Fourierentwicklung, *keine* konsequente Entwicklung nach Potenzen von e^{-rT} . Die Abbildungskoeffizienten enthalten deshalb auch Beiträge von höherer Ordnung in e^{-rT} . Das führt für die vorgegebene funktionale Form zu einer zusätzlichen Erhöhung der Genauigkeit.

4.2 Numerische Ergebnisse

In den Abbildungen 4.3 bis 4.8 sind die Anfangs- und Endwerte des Referenzzyklus, Abweichungen der Abbildungs-Koeffizienten von den entsprechenden asymptotischen Größen und die Größen I_R , φ_R in Abhängigkeit von T bei konstantem $e^{-rT} = 0.2$ für die Standardexponenten $q = 3$, $p = 1$, $l = 0$ gezeigt.

Es ist aus den Abbildungen zu entnehmen, daß für große Werte von T alle Koeffizienten tatsächlich in die jeweils asymptotischen Werte übergehen, obwohl sie nach einem ganz anderen Verfahren bestimmt wurden, als die universellen Konstanten. Dies ist ein befriedigender Konsistenztest für die Richtigkeit der Theorie und der darauf beruhenden Berechnungen. Zugleich erkennt man aber aus den Abbildungen auch, wie weit man wirklich in die Asymptotik gehen muß, um eine *sehr* genaue Darstellung der Poincaré-Abbildung durch die universellen Konstanten zu erhalten. Bei $T = 1000$ ist eine Abweichung schon zu erkennen.

Man möchte nun unter Benutzung der Abbildungs-Koeffizienten Phasendiagramme in Parameterkoordinaten (α, β) erstellen. Dazu sollte der begrifflichen Klarheit halber die Transformation $(r, \Omega) \leftrightarrow (\alpha, \beta)$ *immer* mit den universellen Konstanten erfolgen, auch wenn diese Wertepaare (α, β) dann *nicht mehr* die Koeffizienten der (auf die niedrigste Fourierkomponente reduzierten) φ -Abbildung darstellen, wie es bei der asymptotischen Abbildung der Fall ist.

Zwei unterschiedlich aufwendige Vorgehensweisen liegen nahe:

1. Man bestimmt *einen* Satz von Koeffizienten für einen "typischen" Parameterpunkt, etwa in der Mitte des zu betrachtenden Bereichs und benutzt diesen Satz für die Definition der Poincaré-Abbildung. Dies beschränkt die Parameter (r, Ω) auf einen Bereich, über den die Abbildungs-Koeffizienten nicht nennenswert variieren.
2. Man bestimmt für *jeden* Parameterpunkt (r, Ω) einen Satz von Abbildungs-Koeffizienten für die Poincaré-Abbildung. Bei diesem anspruchsvolleren Verfahren wird an jedem Parameterpunkt mit der zugehörigen Poincaré-Abbildung gearbeitet. Im Rahmen der Abschätzung (4.9) sollte man dann für einen weiten Bereich des Parameterraums sehr genaue Aussagen (z.B. über das Phasendiagramm) erhalten. Der Preis dafür ist allerdings hoch, denn man muß ja zuvor für einen nicht zu kleinen Satz von Anfangswerten die Differentialgleichung selbst über eine Halbperiode integrieren – und das für jeden Parameterpunkt.

In Abbildung 4.2 sind Phasendiagramme [13, Scalee] gezeigt, die mit dieser Methode bestimmt wurden. Bei den dort verwendeten Exponenten $q = 5$, $p = 1$, $l = 2$ wird die asymptotische Resonanzzunge sehr langsam erreicht (vergl. Abbildung 3.11 auf S. 69), selbst bei $\alpha = 20$ liegt die erste Zunge bei $\beta \approx 0.25$, wobei die Zunge auch gegenüber der asymptotischen deformiert ist (bei den Standardexponenten $q = 3$, $p = 1$, $l = 0$ wird die asymptotische Resonanzzunge viel schneller erreicht, dort liegt die erste Bifurkation für $\alpha \approx 20$ bei $\beta \approx 0.9$, also viel näher am

asymptotischen Wert 1). Das Phasendiagramm der Poincaré-Abbildung mit den hier beschriebenen Abbildungs-Koeffizienten stimmt ausgezeichnet mit dem der Differentialgleichung überein, das zeigt die Anwendbarkeit dieser Methode für sehr genaue Phasendiagramme in Parameterbereichen fern der Asymptotik.

Wie die Abbildungen (4.3) bis (4.7) zeigen, ändern sich die Abweichungen der Abbildungs-Koeffizienten von den jeweiligen universellen Konstanten für größere Werte von T (bei dem hier verwendeten Wert von $e^{-rT} = 0.2$ gilt das für T -Werte ab 20) nur sehr langsam, so daß in diesem T -Bereich die erste der beiden oben beschriebenen Vorgehensweisen anwendbar ist. Für kleinere Werte von T ändern sich die Werte der Abbildungs-Koeffizienten immer schneller bis zu dem Bereich, in dem das in dieser Arbeit betrachtete Schwingungsverhalten nicht mehr vorliegt und somit die Theorie auch nicht mehr anwendbar ist. Darüber hinaus steht für Werte $T \leq 10$ wegen des Verhaltens von $x_0(t)$ auch keine geeignete Transformation WW_e mehr zur Verfügung.

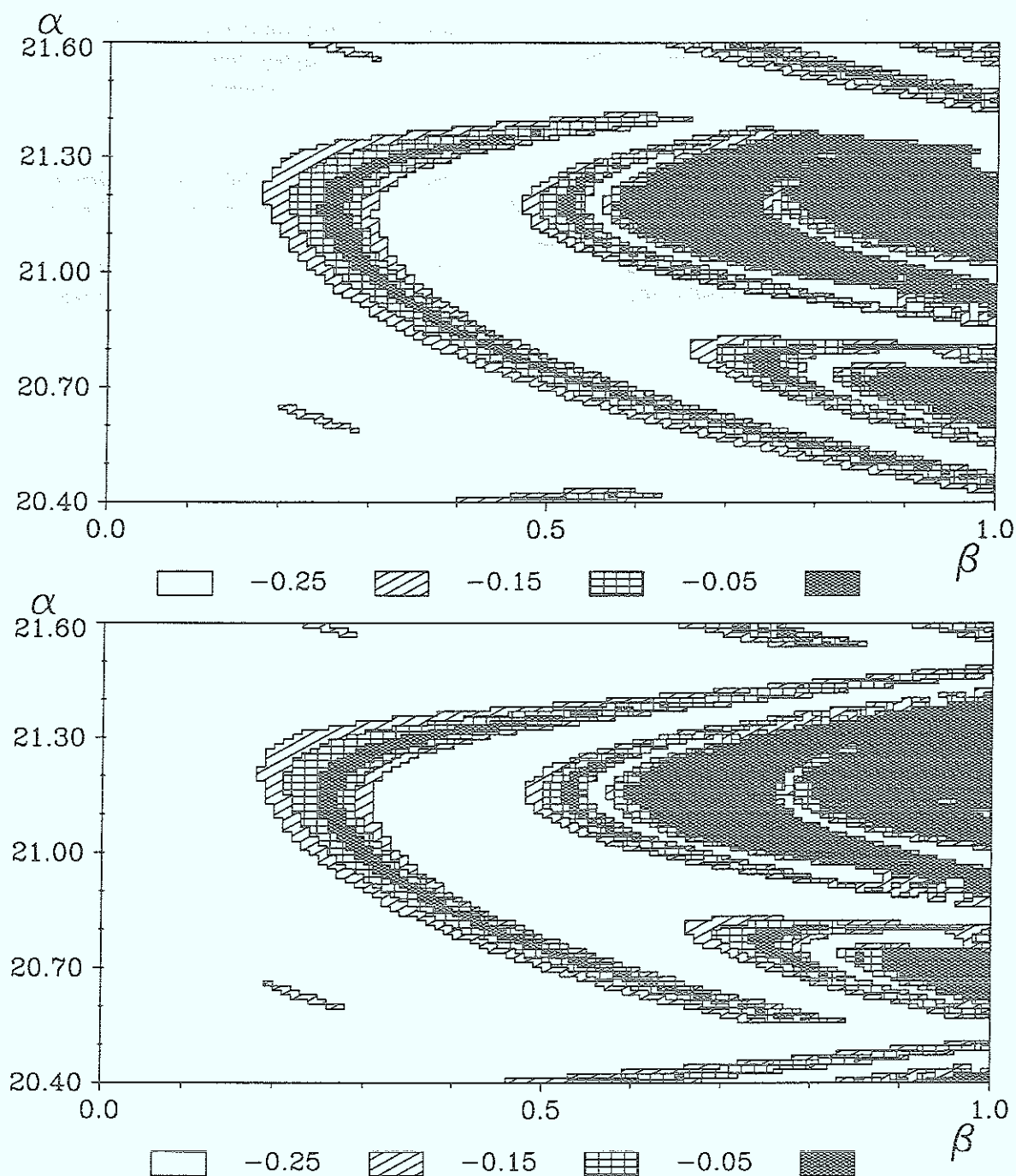


Abbildung 4.2: Phasendiagramm der allgemeinen Duffing-Gleichung mit den Exponenten $q = 5$, $p = 1$, $l = 2$ und der Poincaré-Abbildung zweiter Ordnung mit (α, β) -abhängigen Abbildungskoeffizienten. α -Achse in 2π -Einheiten. Die Form der Resonanzungen und deren Lage stimmen ausgezeichnet überein. Die Ursache für die Unterschiede zwischen den Linien der jeweils ersten Bifurkation bei großen Werten von β ist das Aufsuchen unterschiedlicher Attraktoren.

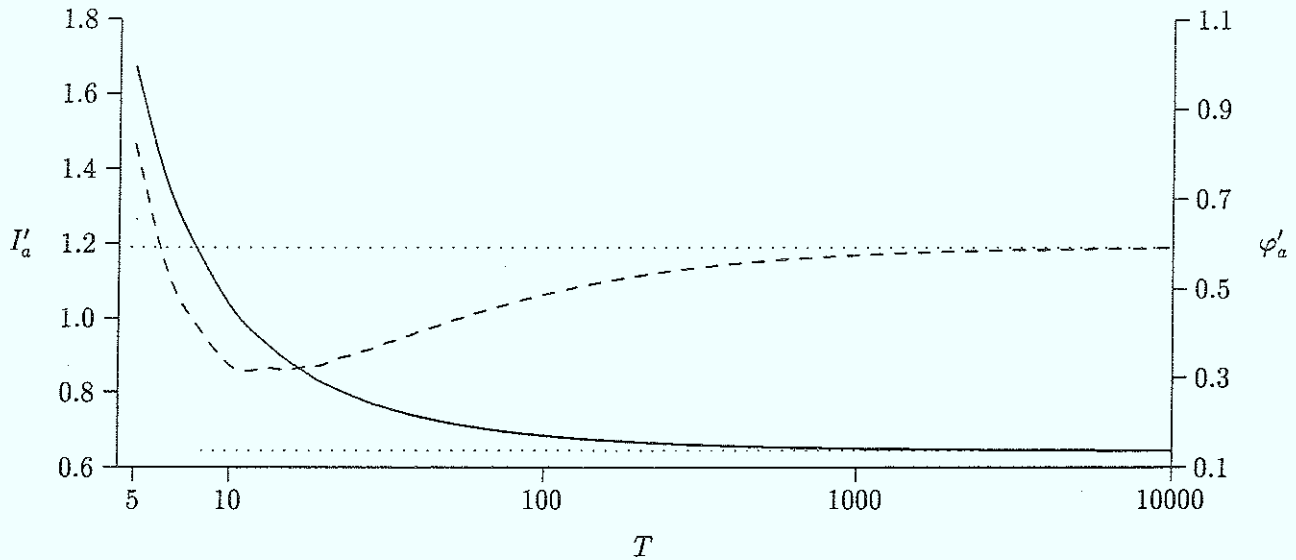


Abbildung 4.3: I'_a (durchgezogen) und φ'_a (gestrichelt) für verschiedene Werte T . Gepunktet sind die asymptotischen Werte I_a und φ_a angegeben. Der Wert von e^{-rT} wird festgehalten und bestimmt so r bei gegebenem T .

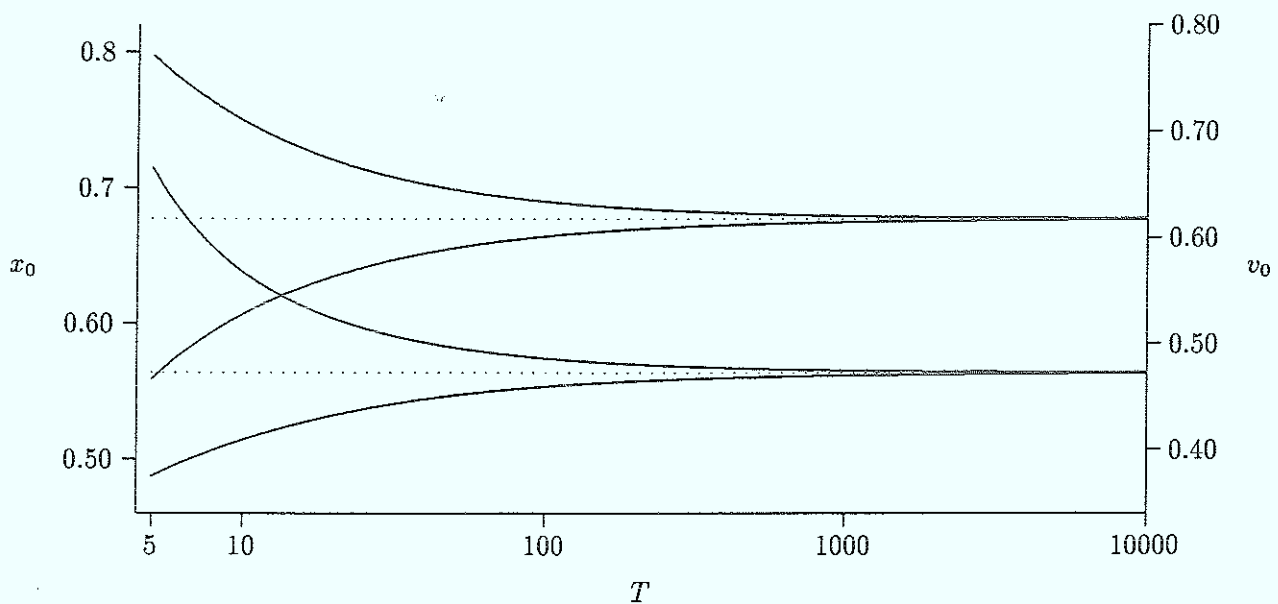


Abbildung 4.4: Anfangs- und Endpunkte des parameterabhängigen Referenzzyklus in ξ -Eichung. Von oben am linken Endpunkt T -Wert: $x_0(T)$, $v_0(0)$, $-v_0(T)$, $x_0(0)$. Gepunktet sind die asymptotischen Größen ξ_0 und $\dot{\xi}_0$ gezeigt.

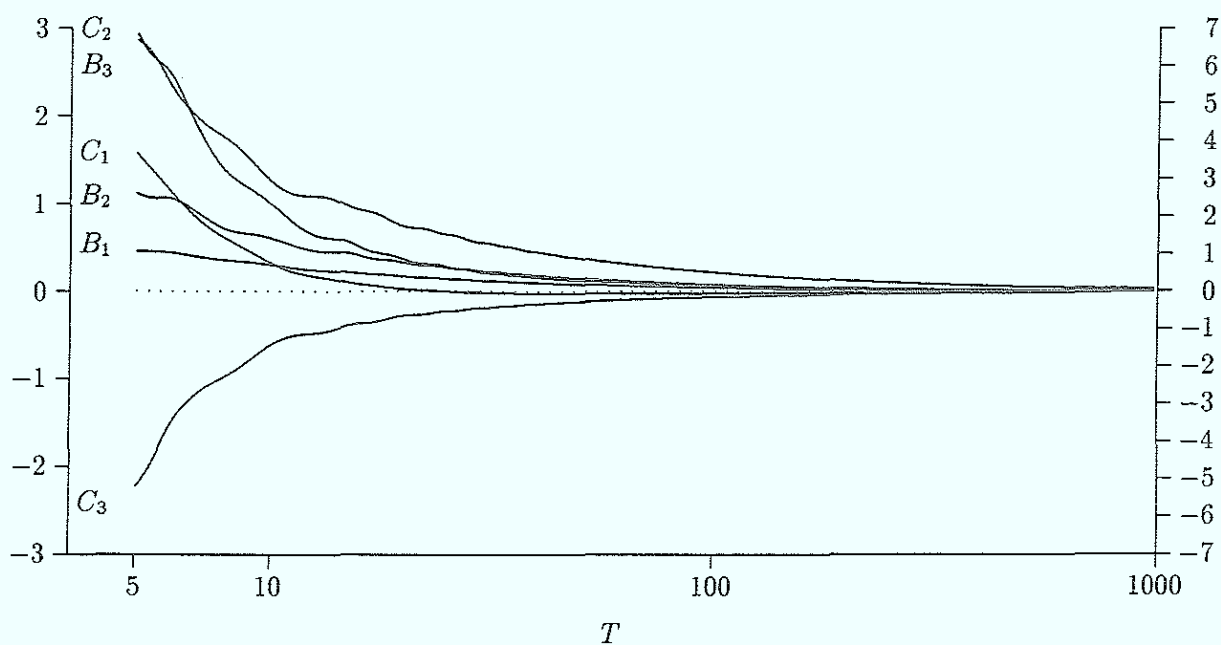


Abbildung 4.5: Abweichungen der Abbildungs-Koeffizienten von den universellen Konstanten in Abhängigkeit von T . Die rechte Achse gilt für B_3 .

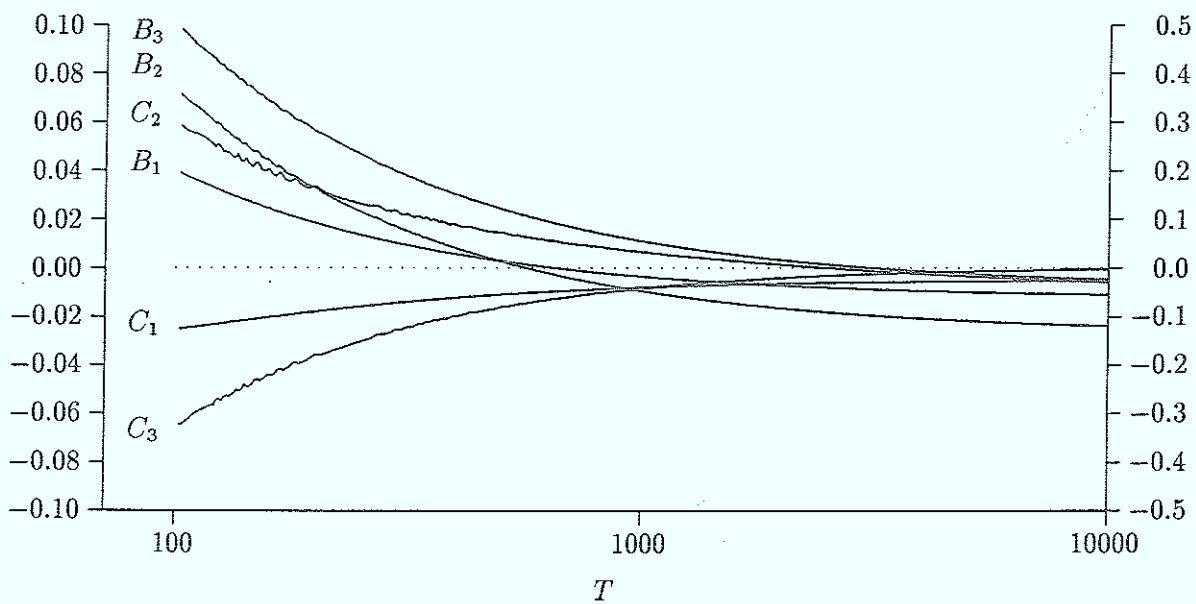


Abbildung 4.6: Abweichungen der Abbildungs-Koeffizienten von den universellen Konstanten in Abhängigkeit von T . Die rechte Achse gilt für B_3 . Die Werte erreichen für große T nicht exakt die jeweiligen universellen Konstanten, da bei endlichem e^{-rT} die höheren Potenzen dieser Größe zu den niedrig indizierten Fourierkomponenten der Winkelabhängigkeit beitragen.

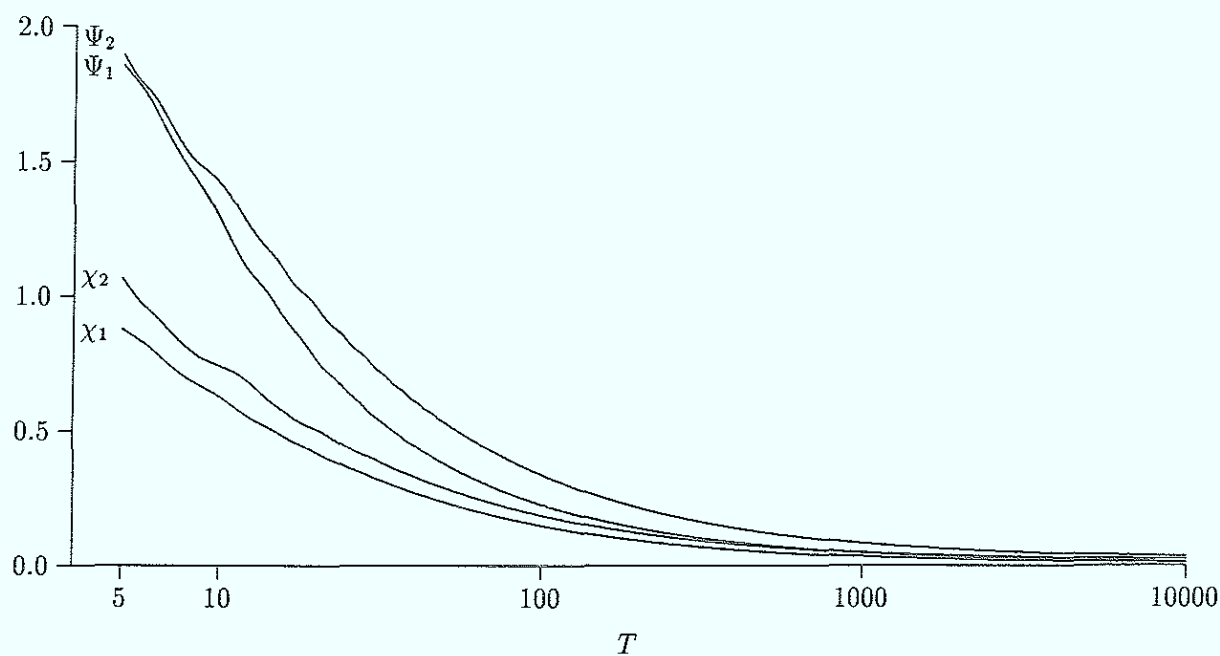


Abbildung 4.7: Abweichungen der Abbildungs-Koeffizienten von den universellen Konstanten in Abhängigkeit von T

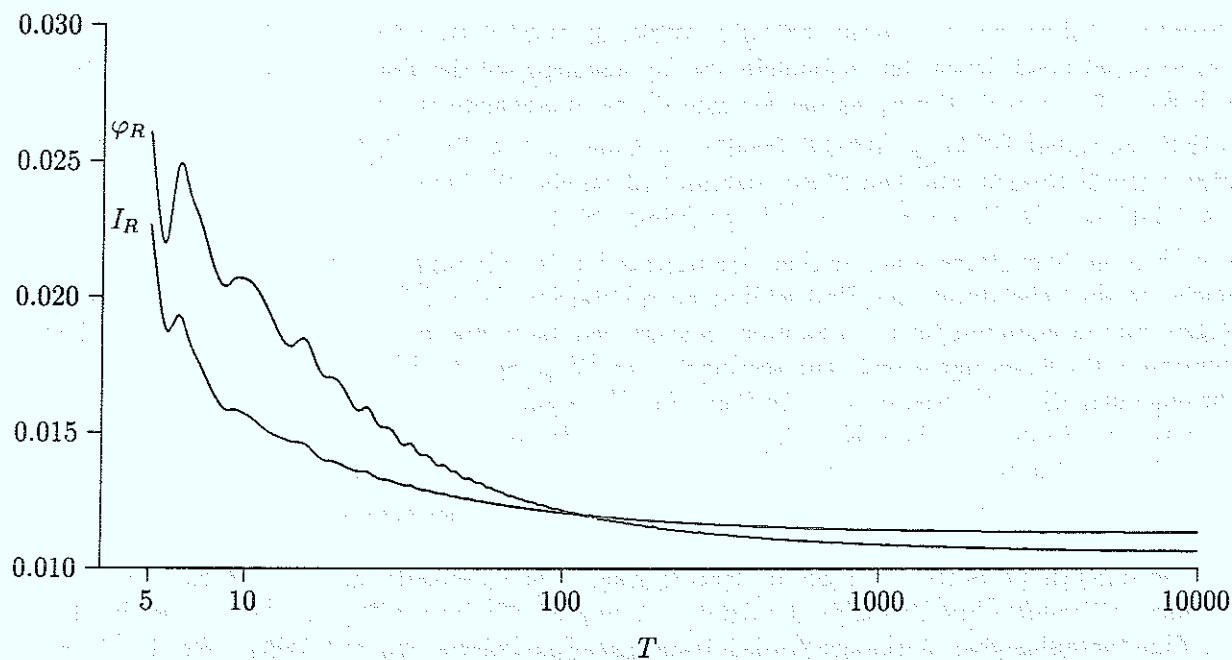


Abbildung 4.8: Norm der Summe der unberücksichtigten Fourierkomponenten in Abhängigkeit von T . Wegen des endlichen e^{-rT} sterben auch bei großen Werten T die höheren Fourierkomponenten nicht aus. Bemerkenswert ist, daß die Größen I_R und φ_R einen Maximalwert von 2.5% haben und nur um einen Faktor 2 gegenüber der Asymptotik ansteigen. Bei dem hier verwendeten Wert von $e^{-rT} = 0.2$ ist die Fourierentwicklung bis zur zweiten Ordnung also eine gute Darstellung der Poincaré-Abbildung des Systems bis zu Werten von $T \approx 5$.

5 Zeitabhängige Wirkungs-Winkel-Transformation

In Kapitel 1 haben wir eine zeitunabhängige Wirkungs-Winkel-Transformation für die Transformation $(x, \dot{x}) \leftrightarrow (J, \varphi)$ beschrieben. Sie behandelte die Zeitabhängigkeit des Potentials in parametrischer Weise und lieferte für die reale Bewegung des Systems ein zeitunabhängiges J nur im adiabatischen Limes.

Es existieren andere Wirkungs-Winkel-Transformationen, welche die zeitliche Abhängigkeit des Potentials *explizit* berücksichtigen, mit dem Effekt, daß im Prinzip eine Wirkung I definiert werden kann, die trotz Zeitabhängigkeit des Potentials exakt zeitunabhängig bleibt.

Die praktische Ermittlung einer solchen Transformation ist allerdings im Allgemeinen alles andere als einfach, sie wird hier durch eine Entwicklung nach Potenzen von $\sqrt{I}e^{i\varphi}$ (der harmonischen Koordinate) erfolgen, und deshalb nur für nicht zu große Anharmonizitäten und nicht zu starke Zeitabhängigkeit des Potentials wirklich verfügbar sein. Die zeitabhängigen Wirkungs-Winkel-Transformationen sind überdies nicht eindeutig, sie enthalten in jeder Ordnung der Entwicklung mehrere freie Konstanten. Bei unseren Anwendungen werden wir diese Konstanten so wählen, daß die Transformation im adiabatischen Limes in die schon definierte zeitunabhängige Wirkungs-Winkel-Transformation übergeht.

Wir benötigen zeitabhängige Wirkungs-Winkel-Transformationen an zwei Stellen:

1. Die numerische Berechnung der im letzten Kapitel beschriebenen universellen Konstanten. Hier kann man nicht ohne Genauigkeitsverlust über zu große Zeitintervalle $[\tau_-, \tau_+]$ numerisch integrieren. Eine zeitabhängige Wirkungs-Winkel-Transformation (welche wir mit WW_ξ bezeichnen), in der die Zeitabhängigkeit der Funktion $\xi_0(t)$ *explizit* berücksichtigt wird, ermöglicht, die in Kapitel 3 beschriebene Anpassung bei τ -Werten ($\tau \approx 100$) vorzunehmen, bei denen das System noch nicht extrem harmonisch und adiabatisch ist und trotzdem eine sehr akzeptable Genauigkeit zu erzielen (6 Dezimalen).
2. Die numerische Berechnung einer Darstellung der Poincaré-Abbildung für *endliche* Werte von r und Ω , die wir in Kapitel 4 beschrieben haben. Diese war ja eine Entwicklung nach Potenzen von e^{-rT} und Fourierkomponenten; jetzt aber mit von r und Ω *abhängigen* Fourierkoeffizienten, die erst im Limes $\Omega \rightarrow 0$ in unsere universellen Konstanten übergehen. Bei der hierfür benötigten Transformation werden wir nur die Zeitabhängigkeit von e^{-rt} *explizit* berücksichtigen, nicht jedoch die der Referenzlösung $x_0(t)$, diese wird nur als Parameter eingehen. Diese Transformation (wir bezeichnen sie mit WW_e) führt deshalb nur zu Zeiten, an denen sich die Referenzlösung sehr langsam verändert, verhält zu einer zeitunabhängigen Wirkung I .

Diese Bedingung ist natürlich am besten am Umkehrpunkt ($\dot{x}_0 = 0$) der Referenzlösung erfüllt. Während bei $r = 0$ dieser Punkt zur Zeit $t = T/2$ durchlaufen wird, ist die Referenzlösung für endliche Werte von r etwas deformiert, siehe Abbildung 2.10 auf Seite 49. Da es äußerst aufwendig wäre, diesen *sehr kleinen* Effekt zu berücksichtigen, betrachten wir $x_0(t)$ nur zur Zeit $t = T/2$, und nehmen dort die Referenzlösung als zeitunabhängig an.

5.1 Formulierung der zeitabhängigen Transformation

Wir suchen für die Hamiltonfunktion $H(z, p, t)$ neue Koordinaten $(I(z, p, t), \varphi(z, p, t))$. Die Koordinatentransformation $(z, p) \leftrightarrow (I, \varphi)$ soll also zeitlich veränderliche Koordinatenlinien derart definieren, daß die Wirkung I eine Konstante der Bewegung wird, also die neue Hamiltonfunktion $K(I, \varphi, t)$ nicht mehr von φ abhängt. Wir werden jetzt die dafür notwendigen Bestimmungsgleichungen herleiten und sie mit einem Reihenansatz lösen.

Die Poincaré-Cartansche Integralinvariante ω_1 [2] definiert die Lösungstrajektorien $(z(t), p(t))$ zur Hamiltonfunktion $H(z, p, t)$ (entlang des Hamiltonschen Vektorfeldes v im erweiterten Phasenraum (z, p, t)) durch die Gleichung

$$d\omega_1 \cdot v = (dp \wedge dz - dH \wedge dt) \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{z} \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (5.1)$$

Die Zweiform $d\omega_1$ transformieren wir in die Koordinaten $(I(z, p, t), \varphi(z, p, t))$ (mit $dz = z_I dI + z_\varphi d\varphi + z_t dt$, $dp = p_I dI + p_\varphi d\varphi + p_t dt$), so daß sich ergibt

$$dp \wedge dz - dH \wedge dt = (p_J z_\varphi - z_J p_\varphi) dI \wedge d\varphi - \{ [(H_p - z_t)p_I + (H_z + p_t)z_I] dI + [(H_p - z_t)p_\varphi + (H_z + p_t)z_\varphi] d\varphi \} \wedge dt \quad (5.2)$$

Aus der Bedingung, daß die rechte Seite der Gleichung wieder die kanonische Form $dI \wedge d\varphi - dK \wedge dt$ besitzt, folgt einmal die symplektische Bedingung

$$p_J z_\varphi - z_J p_\varphi = 1, \quad (5.3)$$

zum anderen für die neue Hamiltonfunktion K :

$$K_I = (H_p - z_t)p_I + (H_z + p_t)z_I, \quad (5.4)$$

$$K_\varphi = (H_p - z_t)p_\varphi + (H_z + p_t)z_\varphi. \quad (5.5)$$

Die beiden Beziehungen (5.4), (5.5) sind wegen (5.3) kompatibel und definieren so K . Die Bedingung, daß I zeitunabhängig sein soll, ist dann natürlich

$$(H_p - z_t)p_\varphi + (H_z + p_t)z_\varphi = 0. \quad (5.6)$$

Sie führt zusammen mit (5.3) zu möglichen Bestimmungsgleichungen für die Koordinatentransformation.

Zur praktischen Bestimmung der Transformationsformeln sind diese Gleichungen jedoch nur bedingt geeignet, hauptsächlich wegen der *Produkte* der partiellen Koordinatenableitungen in Gleichung (5.3). Günstiger ist es, statt dessen die Bewegungsgleichungen für $\dot{z}$ und $\dot{p}$ in I - φ -Wirkungs-Winkel-Koordinaten zu betrachten, wobei der Ansatz $\dot{I} = 0$, $\dot{\varphi} = \omega(I, t)$ der Bedingung (5.6) entspricht. Die in diese Gleichungen eingehende Nichtlinearität des Potentials erfordert einen Potenzreihenansatz in I für $\omega(I, t)$.

Die Bewegungsgleichungen lauten nun:

$$p - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \omega(I, t) - \frac{\partial z}{\partial t} = 0, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \omega(I, t) + \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = 0, \quad (5.8)$$

wobei $\omega(I, t)$ eine ebenfalls zu bestimmende Funktion ist.

Diese partiellen Differentialgleichungen können nun nicht ohne weiteres zur Bestimmung allgemeiner Transformationsformeln $z(I, \varphi, t)$, $p(I, \varphi, t)$ herangezogen werden, vielmehr benötigt man einen konkreten Ansatz für die funktionale Form von z und p .

Die nach der Betrachtung der adiabatischen Transformation (1.11) auf Seite 17 naheliegende Entwicklung in den Variablen $(Re^{i\varphi}, Re^{-i\varphi})$, $R = \sqrt{\frac{2I}{\omega_0}}$ um die harmonische Lösung lautet:

$$z = -\frac{1}{2} \sum_{n,k} R^n e^{ik\varphi} Q_{n,k}(t), \quad (5.9)$$

$$p = -\frac{i}{2} \omega_0 \sum_{n,k} R^n e^{ik\varphi} P_{n,k}(t), \quad (5.10)$$

$$\omega(R, t) = \omega_0 \left(1 + \sum_n \beta_{2n}(t) R^{2n} \right), \quad (5.11)$$

$$Q_{n,k} = Q_{n,-k}^*, \quad P_{n,k} = -P_{n,-k}^*, \quad (5.12)$$

mit

$$Q_{11}, Q_{1,-1}, P_{1,1}, P_{1,-1} \rightarrow 1. \quad (5.13)$$

Im adiabatischen Limes definieren (5.7) und (5.8) zwar die Abhängigkeit von φ im Sinne einer Fourierdarstellung; es bleiben jedoch gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit für die Koeffizienten P , Q und β . Diese sind *unterbestimmt*, die verbleibende Freiheit in der Wahl der Koeffizienten β ist insbesondere so zu nutzen, daß die Transformation im adiabatischen Grenzfall in die zeitunabhängige Transformation übergeht. In niedrigster Ordnung $n = 1$ sind die Koeffizienten der Lösung einer Gleichung der Form $\ddot{x} + \omega_0^2(t)x = 0$ äquivalent (was mit Hilfe der Funktion g [10, (2.25)] geschehen könnte); für die höheren Ordnungen $n > 1$ entkoppeln diese Gleichungen in einen Satz gewöhnlicher, linearer, inhomogener Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit, die im Prinzip eine explizite Integration (rekursiv in n) erlauben würden. Die wäre jedoch nur mit großem Aufwand durchführbar. Es erweist sich als übersichtlicher und einfacher, die Koeffizienten $Q_{n,k}$ und $P_{n,k}$ als Reihenentwicklungen in der Zeit darzustellen. Damit werden die Bewegungsgleichungen (5.7), (5.8) mit dem Ansatz (5.9)-(5.12) zu einem Gleichungssystem, das durch Koeffizientenvergleich rekursiv gelöst werden kann.

Zunächst separieren wir durch Einführen einer noch zu bestimmenden Größe $v(t)$ die führende asymptotische Zeitentwicklung des Systems ab und schreiben den Ansatz in der Form

$$z = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} v^{n-1} R^n \sum_{k=0}^n Q_{n,n-2k} e^{i(n-2k)\varphi} \quad (5.14)$$

$$p = -\frac{i}{2} \omega_0 \sum_{n=1}^{\infty} v^{n-1} R^n \sum_{k=0}^n P_{n,n-2k} e^{i(n-2k)\varphi} \quad (5.15)$$

$$\omega(R, t) = \omega_0 B, \quad B = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{2n}(vR)^{2n} \right) \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = \omega_0^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) (vz)^n \right), \quad (5.17)$$

wobei ω_0 die harmonische Frequenz ist.

Die Zeitabhängigkeit des Systems ist jetzt durch $v(t)$ und $b_n(t)$ gegeben. Wegen der Skaleninvarianz $z \rightarrow vz$, $R \rightarrow vR$ der Darstellung (5.14)-(5.17) ist $v(t)$ im Prinzip beliebig und kann so gewählt werden, daß die verbleibende Zeitabhängigkeit in Potenzreihen nur noch einer Zeitvariablen darstellbar ist.

Diese Potenzreihen für z , p und ω stellen ein *unterbestimmtes* Gleichungssystem für die Koeffizienten $P_{n,k}$, $Q_{n,k}$ und β_n dar. Dies ist die Konsequenz aus der Tatsache, daß der Nullpunkt des Winkels φ in Abhängigkeit von R und t beim Einsetzen des Ansatzes (5.9) bis (5.11) in die Bewegungsgleichungen (5.7), (5.8) unbestimmt bleibt.

Im Prinzip könnte die gesamte Zeitabhängigkeit des Systems durch eine entsprechende Definition dieses Nullpunktes ($\varphi \rightarrow \varphi + \Psi(R, t)$) eliminiert werden. Wir nutzen diese Freiheit jedoch, um eine Transformation zu bestimmen, die im adiabatischen Grenzfall in die zeitunabhängige Transformation übergeht. Hierfür wird zur Bestimmung der Koeffizienten P die lineare Gleichung (5.7) benutzt. Die Gleichung (5.8) dient dann zur rekursiven Bestimmung der Koeffizienten Q und β . Sind alle Koeffizienten $Q_{n,k}$, β_{n-1} bestimmt, liefert die Bedingung, daß der Faktor zum Term $R^{n+1} e^{ik\varphi}$ verschwindet, eine lineare Gleichung für $Q_{n+1,k}$, $k \neq 1$. Für ungerade $n+1$, und $k=1$ sind jedoch $Q_{n+1,1}$ und β_n aus einer Gleichung zu bestimmen. Wir verwenden hier das β_n der entsprechenden zeitunabhängigen Transformation. Der Nullpunkt der Winkelvariablen kann dann immer noch in Abhängigkeit von R verschoben werden. Man sieht leicht, daß dies eine Unbestimmtheit des *Imaginärteils* von $Q_{2n+1,1}$ zur Folge haben muß. Wir setzen diesen gleich Null.

In alle diese Umformungen geht die spezifische Form der Zeitabhängigkeit des Potentials $V(z, t)$ ein, wir müssen sie also für die Transformationen WW_ξ und WW_e getrennt betrachten.

5.2 Bestimmung der Transformation WW_ξ

In Kapitel 2 haben wir eine asymptotische Entwicklung für die Funktion $\xi_0(t)$ bestimmt, die jetzt die gesamte explizite Zeitabhängigkeit des Systems festlegt. Ihre asymptotische Entwicklung besteht aus dem führenden Term t^δ und Polynomen, die in der Variablen

$$w = \frac{i}{\tilde{\omega}_0} t^{-\kappa_1}, \quad \kappa_1 = 1 + \frac{q-1}{2} \delta \quad (5.18)$$

geschrieben werden können:

$$\xi_0(t) = t^\delta h(w), \quad h(w) = 1 + \sum h_n w^{2n}. \quad (5.19)$$

Der Vorfaktor $\frac{1}{\tilde{\omega}_0}$, mit $\tilde{\omega}_0^2 = q - l$, ist an dieser Stelle noch willkürlich, erweist sich aber im folgenden als zweckmäßig.

Damit ergibt sich für den Kraftterm ein Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} &= (z + \xi_0)^q - \xi_0^q - t^p ((z + \xi_0^l) - \xi_0^l) \\ &= \omega_0^2(t) z \left(1 + \sum_\nu b_\nu(t) \left(\frac{z}{\xi_0} \right)^\nu \right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

mit

$$\begin{aligned}\omega_0^2(t) &= q\xi_0^{q-1} - t^p l \xi_0^{l-1} \\ &= (q-l)t^{(q-1)\delta} (1 + w^2 S(w)),\end{aligned}\quad (5.21)$$

$$b_\nu(t) = \frac{1}{\omega_0^2} \left[\binom{q}{\nu+1} \xi_0^{q-1} - t^p \binom{l}{\nu+1} \xi_0^{l-1} \right]. \quad (5.22)$$

Die Größen S und b_ν sind (asymptotische) Reihen in w^2 , die jeweils mit konstanten Termen beginnen und durch (5.20) gegeben sind. Die explizite Zeitabhängigkeit der Kraft $-\frac{\partial V}{\partial z}$ – und als Konsequenz von (5.7) bis (5.10) der Größen z , p und ω – wird jetzt über algebraische Vorfaktoren (z.B. $t^{(q-1)\delta}$ in ω_0 , t^δ in ξ_0) und asymptotische Entwicklungen in Potenzen von $w \sim t^{-\kappa_1}$ vermittelt. Durch Herausziehen der Vorfaktoren gemäß

$$\omega_0 \sim \tilde{\omega}_0 t^{\frac{q-1}{2}\delta}, \quad \tilde{\omega}_0 = \sqrt{q-l} \quad (5.23)$$

$$z = t^{-\frac{q-1}{4}\delta} \tilde{z}, \quad p = t^{\frac{q-1}{4}\delta} \tilde{\omega}_0 \tilde{p},$$

$$R = t^{-\frac{q-1}{4}\delta} \tilde{R}, \quad \tilde{R} = \sqrt{\frac{2I}{\tilde{\omega}_0}},$$

und die Wahl

$$v = t^{-\mu}, \quad \mu = \frac{q+3}{4}\delta \quad (5.24)$$

für den Skalenfaktor v werden alle Vorfaktoren effektiv eliminiert und wir erhalten die neuen Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \varphi} B + \frac{t^{-\kappa_1}}{\tilde{\omega}_0} \left(t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{q-1}{4}\delta \right) \tilde{z} - \tilde{p} = 0, \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \varphi} B + \frac{t^{-\kappa_1}}{\tilde{\omega}_0} \left(t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{q-1}{4}\delta \right) \tilde{p} + \tilde{z} \left(\tilde{b}_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{b}_\nu (v\tilde{z})^\nu \right) = 0. \quad (5.26)$$

Die Operation

$$t \frac{\partial}{\partial t} = -\mu v \frac{\partial}{\partial v} - \kappa_1 w \frac{\partial}{\partial w} \quad (5.27)$$

ändert Exponenten von v und w nicht und wirkt in der Reihenentwicklung auf Terme $R^n v^{n-1} w^j$ als

$$t \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -\mu(n-1) - \kappa_1 j. \quad (5.28)$$

Danach tritt v nur noch als Skalenfaktor $(vR)^n$ auf und wird beim Koeffizientenvergleich eliminiert. Eine explizite Zeitabhängigkeit tritt jetzt effektiv in (5.26) nur noch in den Größen $\tilde{b}_\nu$ (als asymptotische Reihen in w^2) und im Faktor $t^{-\kappa_1}/\tilde{\omega}_0 = -i\omega$ auf. Deshalb können P und Q als Potenzreihen dieser Größe angesetzt werden:

$$P_{n,k} = \sum p_{n,k,j} w^j, \quad Q_{n,k} = \sum q_{n,k,j} w^j. \quad (5.29)$$

Hier ist die Beobachtung wichtig, daß die expliziten Zeitableitungen in den Bewegungsgleichungen (5.7), (5.8) (die den Unterschied zur Transformation in adiabatische Wirkungs-Winkel-Variable ausmachen) einen zusätzlichen Faktor w enthalten, im Limes sehr großer Zeiten t also keinen Beitrag mehr geben. Zugleich erkennt man, daß die Größe $\tilde{\omega}_0$ (ebenso wie das imaginäre Element i – vgl. (5.10)!) nur noch in diesem Faktor steht (dies begründet die zuvor getroffene Wahl des Vorfaktors $i\tilde{\omega}_0$ in w), so daß die noch

zu bestimmenden Koeffizienten in (5.29) jetzt *reell* sind. Diese können jetzt durch Koeffizientenvergleich für die Terme $R^n e^{ik\varphi} w^j$ in (5.26) rekursiv bestimmt werden.

Technisch ist der Koeffizientenvergleich für Ordnungen $n > 2, j > 3$ nur mittels Computeralgebra möglich [13, Kanint29], ebenso die Invertierung der Transformation in der Form

$$Re^{i\varphi} = \sum_{\mu, \nu, j} C_{\mu, \nu, j} \left(\frac{ip}{\omega_0} \right)^\nu z^\mu w^j. \quad (5.30)$$

Zur Bestimmung der universellen Konstanten wurden die Reihen (5.14), (5.15) und (5.16) bis zur Ordnung 10 in w und R entwickelt. Durch sie ist es möglich, mit der Integration über das kleine Zeitintervall $t = [-100, \dots, 100]$ die universellen Konstanten auf 6 Dezimalen zu bestimmen. Eine Demonstration der zeitlichen Konstanz von I zeigt Abbildung 5.1.

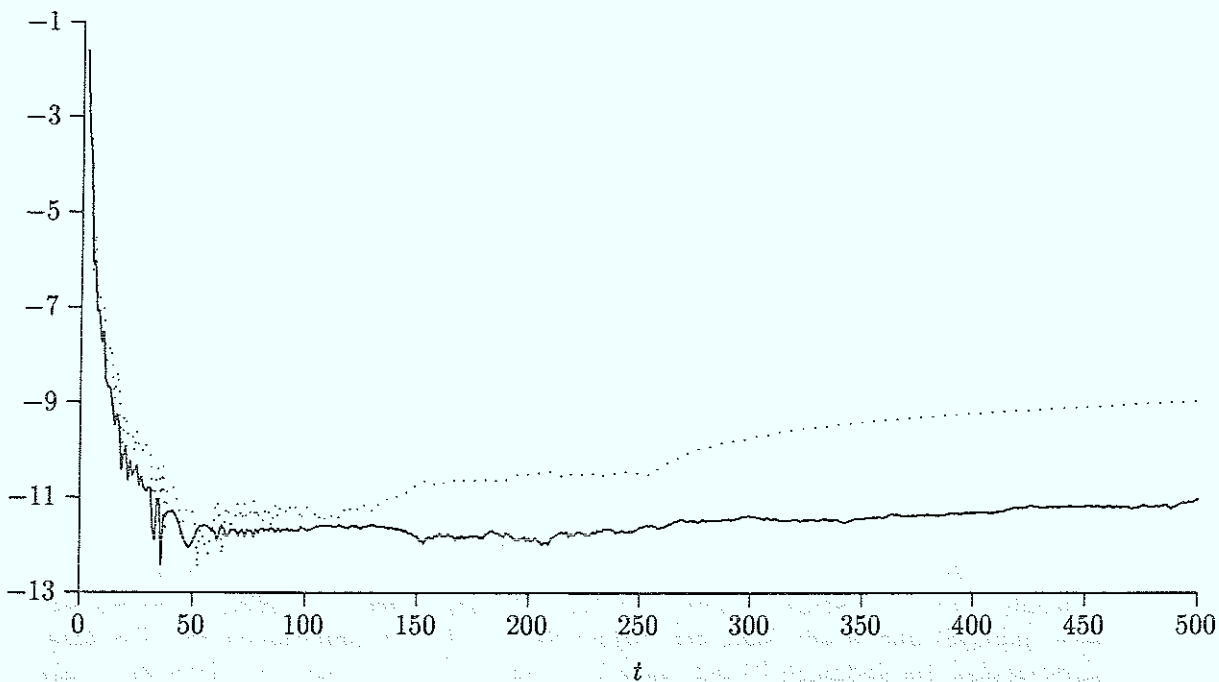


Abbildung 5.1: Zeitabhängigkeit der Größen I_a und φ_a durch Integration der Gleichung $\ddot{\xi} + \xi^3 + t = 0$ und WW_ξ -Transformation $(\xi(t), \dot{\xi}(t)) \rightarrow (I_\xi(t), \varphi_\xi(t))$ wie in Kapitel 3 erläutert. Es ist der Logarithmus der Abweichung $|I_a - I_\xi(t)|$ (durchgezogen) sowie $|\varphi_a - \varphi_\xi(t)|$ (gestrichelt) gezeichnet.

Die entscheidende Aussage dieser Abbildung ist, daß schon ab $t = 30$ die Größen (I_ξ, φ_ξ) auf 11 Dezimalen konstant sind. Das Anwachsen der Abweichungen für größere t ist eine Folge von Rundungsfehlern bei der Integration (Integrationsgenauigkeit 10^{-14}). Die Größen (I_a, φ_a) wurden mit einer Integrationsgenauigkeit von 10^{-18} bei $t = 200$ bestimmt, deshalb erreichen die Abweichungen hier auch nie den Wert Null.

5.3 Bestimmung der Transformation WW_e

Diese Transformation wird analog zum Vorgehen bei der Transformation WW_ξ durchgeführt. Hier ist das zeitabhängige Potential gegeben durch:

$$\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = \omega_0^2 z \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{e^{-rt}}{x_0} z \right)^n \right) \quad (5.31)$$

mit

$$\omega_0^2 = x_0^{q-1} (q - l x_0^{l-q}) - r^2 \quad (5.32)$$

und

$$b_n = \frac{\binom{q}{n} - \binom{l}{n} x_0^{l-q}}{q - l x_0^{l-q} - x_0^{1-q} r^2}. \quad (5.33)$$

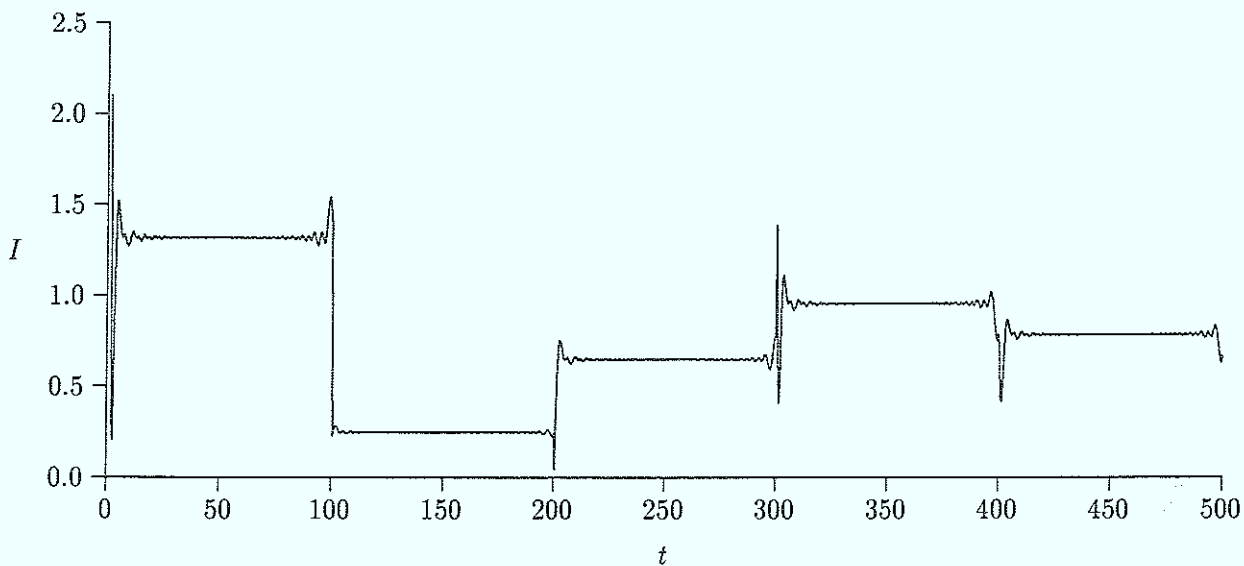


Abbildung 5.2: $I(t)$ nach der Transformation WW_e fuer die Duffing-Gleichung mit den Parametern $r = 0.01$, $T = 100$ bzw $\alpha = 140$, $\beta = 1.5$. Die Transformation WW_e ist so konstruiert, daß $I(t)$ nur in der Nähe der Zeitpunkte $(n + \frac{1}{2})T$ zeitunabhängig ist. Die besonders starken Oszillationen in der Nähe der "Kicks" bei nT sind eine Folge der großen Zeitabhängigkeit von $x_0(t)$ sowie der schlechten Konvergenz der Reihenentwicklungen der Transformationsformeln in diesen Zeitbereichen.

ω_0^2 und b_n werden hier als zeitunabhängige Größen angenommen.

Nach Einsetzen von

$$v = \frac{e^{-rt}}{x_0}, \quad t \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -rv \frac{\partial}{\partial v} \quad (5.34)$$

könnten die Koeffizienten Q und P im Prinzip rekursiv aus den Bewegungsgleichungen (5.7) und (5.8) bestimmt werden. Sie würden jedoch sehr komplizierte rationale Ausdrücke in r ergeben, was den technischen Aufwand ihrer Bestimmung selbst bei Verwendung von Computeralgebra für hohe Ordnungen

nicht akzeptabel erscheinen läßt. Statt dessen werden die Koeffizienten Q und P als Potenzreihen in der Größe

$$w = \frac{ir}{\omega_0} \quad (5.35)$$

geschrieben und können so in Analogie mit der bei der Transformation WW_ξ angewandten Methode bestimmt werden. Ein weiterer Vorteil dieses Ansatzes ist, daß die zu bestimmenden Koeffizienten wieder reell werden.

Abbildungen 5.2 und 5.3 zeigen diese Transformation für 2 Parameterkombinationen von (r, Ω) . Wie schon erläutert, ist I nur im adiabatischen Bereich, d.h. in der Umgebung der Zeitpunkte $t = 50, 150, \dots$ konstant. In der Umgebung der "Kicks" ist die Transformation nicht definiert, die I -Werte somit bedeutungslos. Die Bilder verdeutlichen aber das Konzept der Referenzlösung mit dem "Kick" zu den Zeiten $t = 0, T, 2T, \dots$

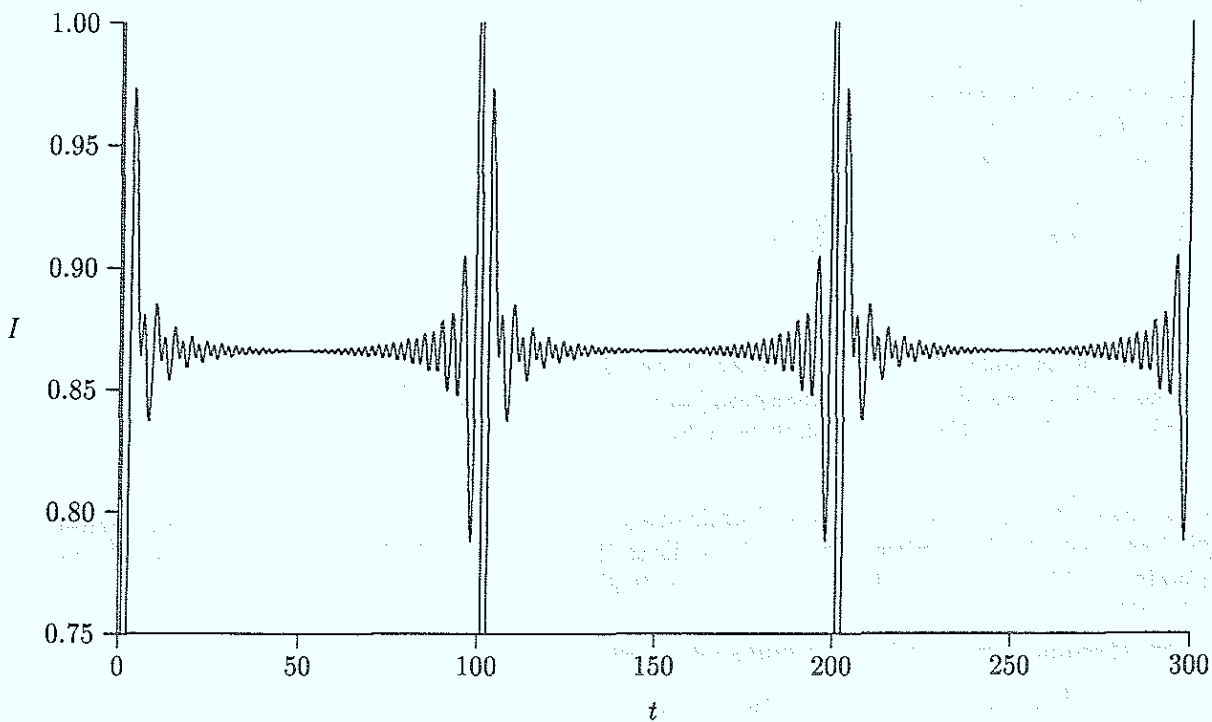


Abbildung 5.3: $I(t)$ nach der Transformation WW_e für die Duffing-Gleichung mit den Parametern $r = 0.019$, $T = 100$ bzw. $\alpha = 140$, $\beta = 0.5$. Hier hat die Abbildung einen Fixpunkt.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde das Verhalten nichtlinearer, periodisch getriebener Oszillatoren mit Reibung untersucht. Der Duffing-Oszillator

$$\ddot{x} + 2r\dot{x} + x^q = \sin \Omega t$$

gehört zu den denkbar einfachsten dieser Systeme: Die Anregungs- und Rücktriebskraft bilden ein Potential $V(x, t)$, dessen Minimum sich zeitperiodisch bewegt und so verhindert, daß das System aufgrund der Reibungskraft zur Ruhe kommt.

Während beim harmonischen Oszillator ($q = 1$) das Verhalten trivial ist (Einschwingen auf einen der Anregungskraft folgenden Zyklus), zeigt das nichtlineare System ($q > 1$) eine bemerkenswerte Vielfalt an Phänomenen wie mehrfache Resonanzen, Bifurkationen, Chaos und vielfache Attraktoren, deren Ursache lediglich in der Deformation des Potentialtopfs besteht.

Das Verhalten in Abhängigkeit der Parameter r und Ω weist eine für diese Systemklasse typische Systematik auf ("Resonanzzungen" im Phasendiagramm, der Auftragung des globalen Systemverhaltens in Abhängigkeit der Parameter), die durch diese Arbeit erstmalig verstanden und quantitativ erklärt werden konnte.

Ein wesentlicher Baustein hierfür war die Einführung einer speziellen, nichtoszillierenden Referenzlösung, die eine Erweiterung des harmonischen Zyklus darstellt, welche durch den Einfluß der Nichtlinearität jedoch nicht geschlossen ist. Im Bild des Relativsystems führt die Nichtlinearität deshalb zu zeitperiodischen "Kicks", die das Einschwingen auf den trivialen Grenzzyklus verhindern und so auf intuitive Weise das Zustandekommen der nichtlinearen Phänomene erklären.

Das entscheidende Werkzeug für die quantitative Behandlung war die Beschreibung des Systems in Wirkungs-Winkel-Koordinaten (I, φ) , in denen die nichtlinearen Bestandteile der Zeitentwicklung von der einfachen harmonischen Schwingung separiert werden konnte. Auf diese Weise wurde die Poincaré-Abbildung des Systems bestimmt, die die Zeitentwicklung von Kick zu Kick beschreibt.

Durch diese Beschreibungsweise genügen schon wenige Glieder der Fourierreihe im Winkel φ um eine sehr genaue Beschreibung des Zeitverhaltens zu erzielen. Für den Parameterbereich kleiner (r, Ω) geht diese Poincaré-Abbildung in die *eindimensionale* Abbildung des Winkels über, deren elementare funktionale Form

$$\varphi_{n+1} = \alpha + \beta \cos \varphi_n$$

einen ebenso einfachen wie detaillierten Zugang zum Verständnis des Phasendiagramms darstellt.

Die Parameter (α, β) der Poincaré-Abbildung konnten als Funktionen der Parameter (r, Ω) beschrieben werden, wodurch auch die Differentialgleichung in diesen natürlichen Parametern dargestellt werden kann. Durch den bildlichen Vergleich ihres Phasendiagramms mit dem der Poincaré-Abbildung konnte dann die

exzellente Genauigkeit der Poincaré-Abbildung für den Bereich kleiner Anregungsfrequenzen demonstriert werden.

Damit ist ein weitreichendes qualitatives wie quantitatives Verständnis einer für naturwissenschaftlich-technische Anwendungen interessanten Klasse von nichtlinearen Oszillatoren erreicht worden.

Weiterführende Problemstellungen, die mit Hilfe der hier erzielten Ergebnisse in Angriff genommen werden könnten sind

- die Untersuchung der Vielfachheit von Attraktoren und ihrer Abgrenzung im Phasen- und Parameterraum für große Werte von β ,
- die Betrachtung des Systems bei kleinen Werten von α und großen Werten von β . In diesem Bereich sind die in die Theorie eingehenden Voraussetzungen schlecht erfüllt und es wäre die Frage zu klären, ob weitere Bifurkationstypen auftreten können, die auch *qualitativ* von denen der Poincaré-Abbildung abweichen,
- die Erweiterung der Theorie auf beliebige Potentiale mit genau einem Minimum und periodischer Zeitabhängigkeit,
- die Untersuchung weiterer Oszillortypen, wie etwa den van-der-Pol Oszillator oder das Pendel mit sinusförmiger Potentialform. Diese Oszillatoren weisen ein qualitativ anderes Verhalten als der hier betrachtete Duffing Oszillator auf und bedürfen wohl einer grundlegenden Erweiterung der Theorie.

Bei Herrn Professor Gert Eilenberger möchte ich mich sehr bedanken. Er hat durch Diskussionen, Ideen und viele seiner Beiträge das Zustandekommen dieser Arbeit weit über das sonst übliche Maß unterstützt. In unseren vielen Diskussionen konnte ich sowohl fachlich als auch menschlich überaus viel von ihm lernen.

Weiterhin gilt mein Dank dem Management sowie vielen Kollegen der Firma EDS, deren Mitarbeiter ich seit 1987 bin. Die Arbeit wurde dort nicht nur wohlwollend geduldet, sondern auch aktiv unterstützt.

Anhang

1 Die Zeitentwicklung des Winkels im homogenen Fall

Wir bestimmen die Größe $\int_0^T \omega dt$, wobei wir annehmen, daß $x_0(t)$ durch $x_a(t) = \sin^\delta \Omega t$ ersetzt werden kann. Diese Annahme ist für t -Werte in den Bereichen I und V (Abb. 3.2 auf S. 56) nicht erfüllt, die hieraus resultierenden Korrekturen werden in Abschnitt 3.2 auf S. 54 diskutiert.

Die aus dem homogenen Potential (2.11) abgeleitete Reihenentwicklung (3.13) für $\omega(I, t)$ ergibt:

$$\omega_a(I(t), x_a(t)) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu c_\nu I^{\nu-1}(t) (\sin \Omega t)^{-2\delta_\nu}. \quad (\text{A.1})$$

Unter Benutzung der Skalierung (3.12) für I und mit den Exponenten

$$\delta_\nu = \frac{\delta}{2} \left(\frac{\nu}{2}(q+3) - (q+1) \right), \quad \kappa_\nu = 1 - 2\delta_\nu, \quad (\text{A.2})$$

ergibt sich

$$\omega_a = c_1 (\sin \Omega t)^{-2\delta_1} + \sum_{\nu>1}^N \nu c_\nu (I_a + \delta I)^{\nu-1} \Omega^{\eta \kappa_\nu} \left(\frac{\sin \Omega t}{\Omega} \right)^{-2\delta_\nu} e^{-2(\nu-1)r t}. \quad (\text{A.3})$$

(Hier wurde die Beziehung $(\nu-1)(2\gamma+\eta) - 2\delta_\nu = \eta \kappa_\nu$ benutzt). Zur Zeitintegration dieser Reihe betrachten wir zunächst den extrem asymptotischen Grenzfall $1 \gg r \gg \Omega$. Hier fällt der Faktor e^{-2rt} so schnell ab, daß die Sinusfunktion linearisiert werden darf. Das Integral des ν -ten Summanden ist für positive κ_ν proportional zu der Größe

$$F_{\nu, \text{asympt.}} = \Omega^{\eta \kappa_\nu} \int_0^\tau \tau^{-2\delta_\nu} e^{-2(\nu-1)r\tau} d\tau = \frac{\Gamma(\kappa_\nu)}{(\nu-1)^{\kappa_\nu}} \left(\frac{\Omega^\eta}{2r} \right)^{\kappa_\nu}. \quad (\text{A.4})$$

Bei negativem κ_ν divergiert das Integral an der unteren Grenze $\tau = 0$. Dieses Verhalten rührt von der Approximation $x_0 \approx x_a$ her, die dort ungültig wird. Wir summieren (A.3) deshalb nur bis zu dem $\nu_{\max} = N$, bei dem κ_ν noch positiv ist: $\kappa_N > 0$, $\kappa_{N+1} < 0$.

Die Bedingung $\delta < 1/2$ in Gleichung (2.8) (S. 34) garantiert $N > 1$ und damit eine I -Abhängigkeit von ω_a in (A.3). Bei Systemen, die diese Bedingung nicht erfüllen, kann mit der vorliegenden Theorie nicht der interessante β -Bereich $\beta \approx 1$ erreicht werden, bei gleichzeitigem $r \ll 1$, $\Omega \ll 1$ und $e^{-rT} \ll 1$.

Für endliche r und Ω erhalten wir

$$\int_0^T \omega_a dt = A_1 T + \sum_{\nu=2}^N \nu c_\nu (I_a + \delta I)^{(\nu-1)} F_\nu(r, \Omega), \quad (\text{A.5})$$

mit

$$A_1 = \frac{c_1}{\pi} F(\delta, 0) = \frac{c_1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\kappa_1}{2})}{\Gamma(\frac{\kappa_1+1}{2})} \quad (\text{A.6})$$

und

$$F_\nu(r, \Omega) = \Omega^{(\eta-1)\kappa_\nu} F\left(\delta_\nu, (\nu-1)\frac{r}{\Omega}\right), \quad (\text{A.7})$$

wobei F durch

$$\begin{aligned} F(\delta, \mu) &= \int_0^\pi e^{-2\mu t} (\sin t)^{-2\delta} dt \\ &= 2^{-\kappa} e^{-\pi\mu} \frac{2\pi\Gamma(\kappa)}{\Gamma(1-\delta+i\mu)\Gamma(1-\delta-i\mu)} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

gegeben ist.

Der dominierende Term in Gleichung (A.5) ist (bei kleinem r) durch die Periodendauer T gegeben, wobei die Größe A_1 einer effektiven Schwingungsfrequenz entspricht (analog zu ω_1 im Fall der Rechteckanregung) und somit im wesentlichen den Abstand der Resonanzungen bestimmt.

Es ist zu beachten, daß in Gleichung (A.5) nach Einsetzen der Größen (A.7) und (A.8) die Parameterabhängigkeit von der Koordinatenabhängigkeit getrennt ist. Nur durch diese Eigenschaft ist es möglich die Transformation $(r, \Omega) \leftrightarrow (\alpha, \beta)$ koordinatenunabhängig anzugeben.

2 Eich-tabelle

In der vorliegenden Arbeit werden hauptsächlich zwei Skalierungen benutzt: die x - bzw. y -Skalierung der Differentialgleichung und die z -Skalierung des hamiltonschen Systems. Da in den Betrachtungen oft zwischen den einzelnen Skalierungen gewechselt wird, sind in folgender Tabelle die entsprechenden Umrechnungen angegeben:

	x, x_0 $\dot{x}, \dot{x}_0$ t I_x	z, ξ $\dot{z}, \dot{\xi}$ τ I_z
$x =$ $x_0 =$		$\Omega^\gamma z$ $\Omega^\gamma \xi$
$\dot{x} =$ $\dot{x}_0 =$		$\Omega^{\gamma+\eta} \dot{z}$ $\Omega^{\gamma+\eta} \dot{\xi}$
$t =$ $I_x =$		$\Omega^{-\eta} \tau$ $\Omega^{2\gamma+\eta} I_z$
$z =$ $\xi_0 =$	$\Omega^{-\gamma} x$ $\Omega^{-\gamma} x_0$	
$\dot{z} =$ $\dot{\xi}_0 =$	$\Omega^{-\gamma-\eta} \dot{x}$ $\Omega^{-\gamma-\eta} \dot{x}_0$	
$\tau =$ $I_z =$	$\Omega^\eta t$ $\Omega^{-(2\gamma+\eta)} I_x$	

Literaturverzeichnis

- [1] Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Frequenz und ihre technische Bedeutung, Georg Duffing, Vieweg 1918
- [2] Mathematical Methods of klassical Mechanics, V. I. Arnold, Springer 1984.
- [3] Superstructure in the Bifurcation Set of the Duffing Equation, U. Parlitz und W. Lauterborn, Physics Letters Vol. 107A, Nr. 8, 1985
- [4] Two-dimensional maps modelling periodically driven strictly dissipative oscillators, U. Parlitz et al, International Series of Numerical Mathematics, Vol. 97, 1991
- [5] Nonlinear Oscillations in Physical Systems, Chihiro Hayashi, Princeton University Press 1985
- [6] Regular and Stochastic Motion, A.J. Lichtenberg und M.A. Lieberman, Springer 1983
- [7] Liapunovexponenten einfacher dynamischer Systeme und deren Skalenverhalten bei der Kreisabbildung, Diplomarbeit Klaus Schmidt, Frankfurt 1986
- [8] Development of Non-Linear Transformations for Improving Convergence of Sequences, David Levin, Intern. J. Computer Math. B 1973, Vol. 3
- [9] Deterministic Chaos, H. G. Schuster, Physik Verlag 1984
- [10] Poincaré maps of Duffing-type oscillators and their reduction to circle maps, G. Eilenberger, K. Schmidt, J. Phys. A, 25, 1992
- [11] Handbuch zur IMSL Bibliothek, Version 10 und 11, 1984, 1990
- [12] Dokumentation des Programms DIFEX1, ein auf dem BULIRSCH-STOER-Verfahren beruhendes Programm zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen, ZUSE-Institut, Berlin 1990
- [13] Programmdokumentation zur Duffing Gleichung, Klaus Schmidt 1993.

Index

A_1	53	Duffing-Gleichung	4, 33
F_ν	53	Eichtabelle	94
I_0, I_1	20	Eigenfrequenz	3
I_a	50	Einschwingvorgang	35
K	52	expandierende Koordinaten	15
P	52	explizite Zeitabhängigkeit	18
T	5	Feigenbaumszenario	5
$\Phi(I_0)$	21	fiktive Koordinaten	72
α	21	Formelmanipulationen	42
α, β	60	Fourierkoeffizienten	82
β	21	globales Verhalten	25
δ	34, 38	Grenzzyklus	35
δ_ν	53	hamiltonsches System	15
η	38	hamiltonsches Vektorfeld	83
γ	38	harmonische Frequenz	20
κ_3	53	harmonische Koordinate	51, 82
λ	39	harmonischer Bereich	20
ω_0	20	harmonischer Oszillator	3
ω_1	20, 53	homogen	50
φ_a	50	homogenes Potential	34
ξ_0	40	Homogenität	54
ξ_1, ξ_2	39, 42	implizite Zeitabhängigkeit	18
c_1, c_2	53	Iterationsverfahren	39
l	33	kanonische Transformation	52
p	33	Kick	14, 52
q	33	kinetische Energie	17
u_1, u_2	51	koexistierende Attraktoren	6
x_a	34	konvergenzerzeugende Transformation	43
WW_ζ, WW_e	82	Levin-Transformation	43
Abbildungs-Koeffizienten	71	Liapunovexponent	26
Adiabatentheorem	17	mathematisches Pendel	3
Adiabatizität	54	nichtlineare Resonanzen	4
asymptotische Reihe	39, 43	Phasendiagramm	7, 25
asymptotischer Parameterbereich	13		
Attraktorbassin	26		
Bifurkation	5, 27		
Chaos	5		

Poincaré-Abbildung	9, 21
allgemeine Form	54
Poincaré-Cartansche Integralinvariante	83
potentielle Energie	17
Punktsymmetrie	5
reale Koordinaten	72
Reduce	42
Referenzzyklus x_0	33
Resonanzstreifen	7
Resonanzzunge	7
Schleichlösung	34
Skalenrelation	52
Skalierungen	94
superstabiler Fixpunkt	29
symplektische Bedingung	83
universelle Konstanten	22, 52, 59, 82
Wirkungs-Winkel-Variablen	17
zeitabhängige Wirkungs-Winkel-Transf.	82
Zeitbereiche	55
Zweifform $d\omega_1$	83

1000 1000 1000 1000 1000 1000 1000 1000 1000 1000

1000 1000 1000 1000 1000 1000 1000 1000 1000 1000

1000 1000 1000 1000 1000 1000 1000 1000 1000 1000

Jül-2861
Januar 1994
ISSN 0944-2952