

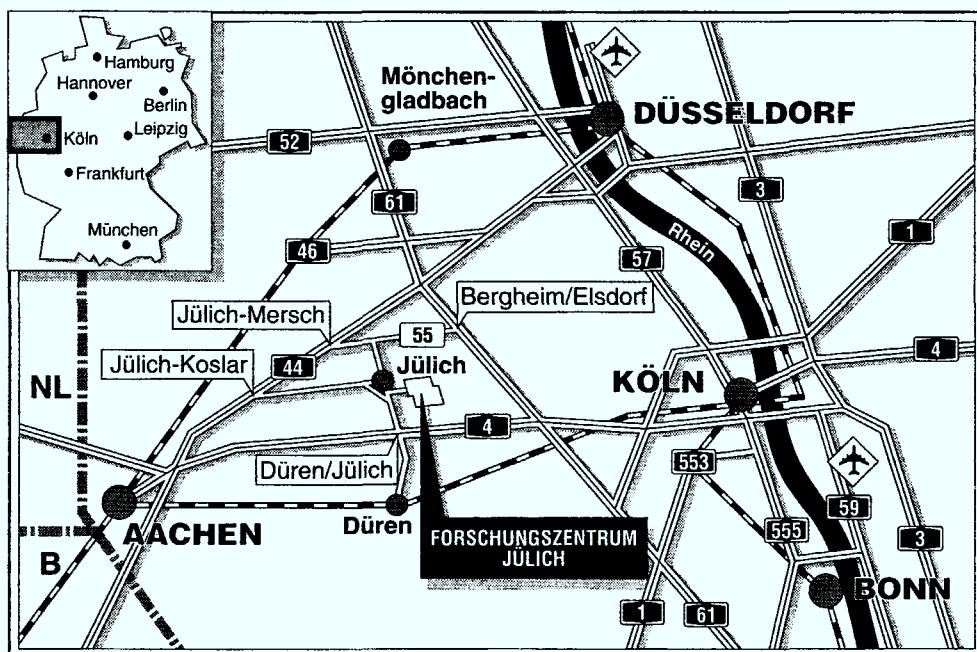
Institut für Werkstoffe der Energietechnik

**Implementierung eines
strukturabhängigen Werkstoffmodells
für die Superlegierung IN738LC in das
Finite Elemente Programm ABAQUS**

J. Wolters

J. Betten

H. J. Penkalla



Berichte des Forschungszentrums Jülich ; 2907

ISSN 0944-2952

Institut für Werkstoffe der Energietechnik Jül-2907

Zu beziehen durch: Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek

D-52425 Jülich · Bundesrepublik Deutschland

Telefon: 024 61 / 61-61 02 · Telefax: 024 61 / 61-61 03 · Telex: 8 335 56-70 kfa d

Jül-2907

Mai 1994

ISSN 0944-2952

Implementierung eines strukturabhängigen Werkstoffmodells für die Superlegierung IN738LC in das Finite Elemente Programm ABAQUS

J. Wolters¹⁾

J. Betten²⁾

H. J. Penkalla

¹⁾ Diplomarbeit

²⁾ RWTH Aachen, Fakultät für Maschinenwesen
Lehr- und Forschungsgebiet: Mathematische Modelle in der Werkstoffkunde

Implementation of a Structural Dependent Model for the Superalloy IN738LC in ABAQUS-Code

by

J. Wolters *

J. Betten

H. J. Penkalla

Abstract

Superalloys, mainly consisting of nickel, are used for applications in aerospace as well as in stationary gas turbines. In the temperature range above 800°C the blades, which are manufactured of these superalloys, are subjected to high centrifugal forces and thermal induced loads. For computer based analysis of the thermo-mechanical behaviour of the blades models for the stress-strain behaviour are necessary. These models have to give a reliable description of the stress-strain behaviour, with emphasis on inelastic effects. The implementation of the model in finite element codes requires a numerical treatment of the constitutive equations with respect to the given interface of the used code.

In this paper constitutive equations for the superalloy IN738LC are presented and the implementation in the finite element code ABAQUS with the numerical preparation of the model is described. In order to validate the model calculations were performed for simple uniaxial loading conditions as well as for a complete cross section of a turbine blade under combined thermal and mechanical loading. The achieved results were compared with those of additional calculations by using ABAQUS, including Norton's law, which was already implemented in this code.

Implementierung eines strukturabhängigen Werkstoffmodells für die Superlegierung IN738LC in das Finite Elemente Programm ABAQUS

von

J. Wolters *

J. Betten

H. J. Penkalla

Kurzfassung

Als Werkstoff für Turbinenschaufeln, sowohl in der Luftfahrt als auch bei stationären Gasturbinen, kommen Superlegierungen zum Einsatz, die überwiegend aus Nickel bestehen. Die aus ihnen gefertigten Schaufeln werden im Temperaturbereich über 800°C hohen Fliehkraftbelastungen und thermisch induzierten Beanspruchungen ausgesetzt. Zur rechnergestützten Analyse des thermomechanischen Verhaltens der Schaufeln sind Werkstoffmodelle erforderlich. Diese Modelle müssen das Spannungs-Verzerrungsverhalten zuverlässig beschreiben. Hierbei kommt es vor allem auf die Erfassung inelastischer Effekte an. Die Implementierung des Werkstoffmodells in ein FE-Programm erfordert eine numerische Aufbereitung der konstitutiven Gleichungen. Sie muß unter Beachtung von Schnittstellendefinitionen des vorliegenden FE-codes durchgeführt werden.

In der folgenden Arbeit wird das Werkstoffmodell für die Superlegierung IN738LC vorgestellt und die Implementierung in ABAQUS mit der damit verbundenen numerischen Aufbereitung des Modells beschrieben. Zur Validierung wurden Testrechnungen sowohl für einfache einachsige Belastungsfälle als auch für ein Turbinenschaufelprofil unter thermischer und mechanischer Belastung durchgeführt. Die erzielten Ergebnisse wurden mit den Resultaten weiterer ABAQUS-Rechnungen verglichen, bei denen das bereits implementierte Norton-Gesetz verwendet wurde.

Inhaltsverzeichnis

<u>1. Hintergrund und Problemstellung</u>	<u>5</u>
<u>2. Aufgaben</u>	<u>6</u>
2.1. Werkstoff	6
2.2. Finite Elemente Methode	6
2.3. Numerische Bearbeitung des Werkstoffmodells zum Einsatz in ABAQUS	6
2.4. Programmierung	6
2.5. Durchführung von Testrechnungen	6
2.6. Strukturmechanische Analyse eines Turbinenschaufelmodells	7
<u>3. Werkstoff</u>	<u>8</u>
3.1. Werkstoffbeschreibung	8
3.2. "back stress"-Modell	13
3.2.1. Einachsige Formulierung	13
3.2.2. Mehrachsige Formulierung	17
3.2.3. Parameter	20
3.3. Vergleich mit anderen Werkstoffmodellen	26
3.3.1. Robinson Modell	26
3.3.2. Hart-Modell	28
3.3.2. Chaboche-Modell	31
<u>4. Die Methode der Finiten Elemente</u>	<u>33</u>
4.1. Grundlagen	33
4.1.1. Gleichgewichtsbedingung für ein Element und kinematische Approximation	33
4.1.2. Stoffgleichung	37
4.1.3. Verknüpfung von Stoffgesetz, Gleichgewichtsbeziehung und kinematischer Approximation	38
4.1.4. Globale Gleichgewichtsbedingung	39
4.2. Einbinden eines Werkstoffmodells in ABAQUS	46
<u>5. Numerische Bearbeitung des Werkstoffmodells zum Einsatz in ABAQUS</u>	<u>51</u>
5.1. Integrationsverfahren	51
5.2. Inkrementelle Form des Stoffgesetzes	53
<u>6. Programmierung der Umat-Routinen</u>	<u>57</u>
6.1. VISCU1	57
6.2. VISCU2	64
6.3. VISCU3	65

6.4. VISCU4	69
<u>7. Durchführung von Testrechnungen</u>	<u>73</u>
7.1. Konstante Last.....	74
7.2. Spannungsrampe	76
7.3. Relaxation	79
7.4. Konstante Dehnrate	82
<u>8. Strukturmechanische Analyse eines Turbinenschaufelmodells.....</u>	<u>85</u>
<u>9. Zusammenfassung</u>	<u>100</u>
<u>10. Literaturverzeichnis</u>	<u>101</u>
<u>11. Anhang</u>	<u>105</u>
11.1. Gleichgewichtsiteration beim Explizit-Euler-Integrationsverfahren	
11.2. Programmlisting Viscu 4	
11.3. Verwendete Formelsymbole	

1. Hintergrund und Problemstellung

Als Werkstoffe für Turbinenschaufeln, sowohl in der Luftfahrt als auch bei stationären Gasturbinenanlagen, kommen Superlegierungen zum Einsatz, die überwiegend aus Nickel bestehen. Sie besitzen auch bei hohen Temperaturen noch hervorragende Festigkeitseigenschaften. Die aus ihnen gefertigten Schaufeln werden im Temperaturbereich über 800°C hohen Fliehkraftbelastungen ausgesetzt. Zusätzlich kommt es zu beträchtlichen thermisch induzierten Beanspruchungen. Zur Analyse des thermomechanischen Verhaltens der Schaufeln sind Werkstoffgesetze erforderlich, die das Spannungs- Verzerrungsverhalten zuverlässig beschreiben. Hierbei kommt es vor allem auf die Erfassung inelastischer Effekte an. Die Art der Werkstoffgesetze hat sich inzwischen etabliert, es handelt sich dabei um die Beschreibung zeitabhängigen Materialverhaltens. Zur Beschreibung des inelastischen Anteils der Verzerrung werden heute überwiegend Formulierungen herangezogen, die die inelastische Verzerrungsrate mit dem Spannungszustand, dem Verzerrungszustand und geeignet definierten Zustandsgrößen verknüpfen (z.B. Robinson-Werkstoffmodell). Der Ausgangspunkt der Werkstoffgesetze sind einachsige Gleichungssysteme für Spannung und Verzerrung. Für strukturelle Untersuchungen sind die Gesetze zur Beschreibung mehrachsiger Zustände zu erweitern. Sie bilden dann die Grundlage für die Modellierung des Werkstoffverhaltens in Finite-Elemente-Programmen. Die Implementierung eines mehrachsigen Stoffgesetzes in ein FE-Programm erfordert eine numerische Aufbereitung der entsprechenden Differentialgleichungen. Sie muß unter Beachtung von Schnittstellendefinitionen des vorliegenden FE-Codes durchgeführt werden.

2. Aufgaben

2.1. Werkstoff

Bei dem zugrundeliegenden Werkstoff handelt es sich um die Superlegierung IN738LC, die überwiegend aus Nickel besteht mit 16 Gew% Cr, 8.5 Gew% Co, jeweils 3.5 Gew% Al und Ti, 2.6 Gew% W, jeweils 1.6 Gew% Ta und Mo, 0.8 Gew% Nb und weniger als 0.1 Gew% C. Das Werkstoffverhalten ist überwiegend in einachsigen Versuchen untersucht und beschrieben worden. Eine mehrachsige Formulierung ist in der Bearbeitungsphase, wobei eine an Minimalforderungen der Tensorrechnung orientierte Version im wesentlichen vorliegt. Erster Teil der Aufgabe ist eine Beschreibung der Werkstoffgesetze, eine kurze Diskussion der Gesetzstruktur (Parameter, Zustandsgrößen) mit der Angabe von einachsigen und mehrachsigen Differentialgleichungen.

2.2. Finite Elemente Methode

Es sind kurz die Grundzüge der FE-Methode zu skizzieren. Dann sind die Vorgehensweisen zu beschreiben, nach denen in FE-Programmen inelastische Effekte behandelt werden. Als FE-Programm steht der ABAQUS-CODE zur Verfügung.

2.3. Numerische Bearbeitung des Werkstoffmodells zum Einsatz in ABAQUS

Zur Verwendung in ABAQUS ist das mehrachsige Stoffgesetz in eine inkrementelle Form zu überführen. Die verschiedenen Möglichkeiten der numerischen Umsetzung sind zu diskutieren (unter Umständen an einfachen Stoffgesetzen).

2.4. Programmierung

Die Programmierung erfolgt in dieser Arbeit in FORTRAN in einem speziellen Unterprogramm (UMAT-Subroutine) unter Beachtung der in ABAQUS definierten Schnittstelle. Im wesentlichen handelt es sich um die Umsetzung der inkrementellen Gleichungen. Ein wichtiger Gesichtspunkt ist die Organisation und die Dokumentation des Unterprogramms (bzw. der Unterprogramme, falls verschiedene Modifikationen vorliegen).

2.5. Durchführung von Testrechnungen

Zur Verifizierung und Kontrolle sind Rechnungen an einfachen einachsigen Geometrien (Eielementstrukturen) und Belastungsfällen durchzuführen, für die bereits auf anderem Wege Lösungen erarbeitet worden sind, so daß man Vergleichsrechnungen durchführen kann.

2.6. Strukturmechanische Analyse eines Turbinenschaufelmodells

Das Stoffgesetz ist auf ein Schaufelmodell anzuwenden und die Anwendbarkeit zu demonstrieren.

3. Werkstoff

3.1. Werkstoffbeschreibung

Die Superlegierung IN738LC, die überwiegend aus Nickel besteht, ist ein typischer Hochtemperaturwerkstoff, der hauptsächlich bei stationären Gasturbinenanlagen eingesetzt wird. Die hohen Festigkeitswerte bei hohen Temperaturen über 700°C bis ca. 1000°C ergeben sich hauptsächlich aus der intermetallischen γ' -Phase (NiAl, Ti-Phase), die durch Übersättigung bei der Erstarrung aus der Matrix ausgeschieden wird [1]. Diese zweite Phase behindert die Versetzungen, die für die Verformung eines metallischen Körpers unter thermomechanischer Beanspruchung verantwortlich sind, in ihrer Beweglichkeit, so daß zur Überwindung der Hindernisse im Gefüge für eine Versetzungsbewegung höhere Spannungen notwendig sind. Dies äußert sich schließlich in einer Erhöhung der Streckgrenze des Werkstoffes um einen Betrag $\Delta\sigma_y$. Bestimmt wird das Überwinden der kohärenten Ausscheidungsteilchen durch folgende Mechanismen [2]:

1 - Schneiden der Teilchen mit

- schwacher Kopplung von Versetzungspaaren
- starker Kopplung von Versetzungspaaren

2 - Umgehen von Teilchen (Orowan-Mechanismus)

3 - Wechseln der Gleitebene

- diffusionsgesteuertes Klettern für Stufenversetzungen
- Quergleiten für Schraubenversetzungen

Welcher dieser Mechanismen für die Versetzungen der energetisch günstigste ist, hängt von der Temperatur, der Spannung und der Teilchengröße ab. Für homologe Temperaturen $T_h < 0.4$ bestimmen die ersten beiden Mechanismen die Wechselwirkung zwischen Versetzungen und Teilchen. Abb. 3.1 zeigt für diese Temperaturen die Zunahme der Streckgrenze in Abhängigkeit vom mittleren Teilchenradius bei konstantem γ' -Volumenanteil.

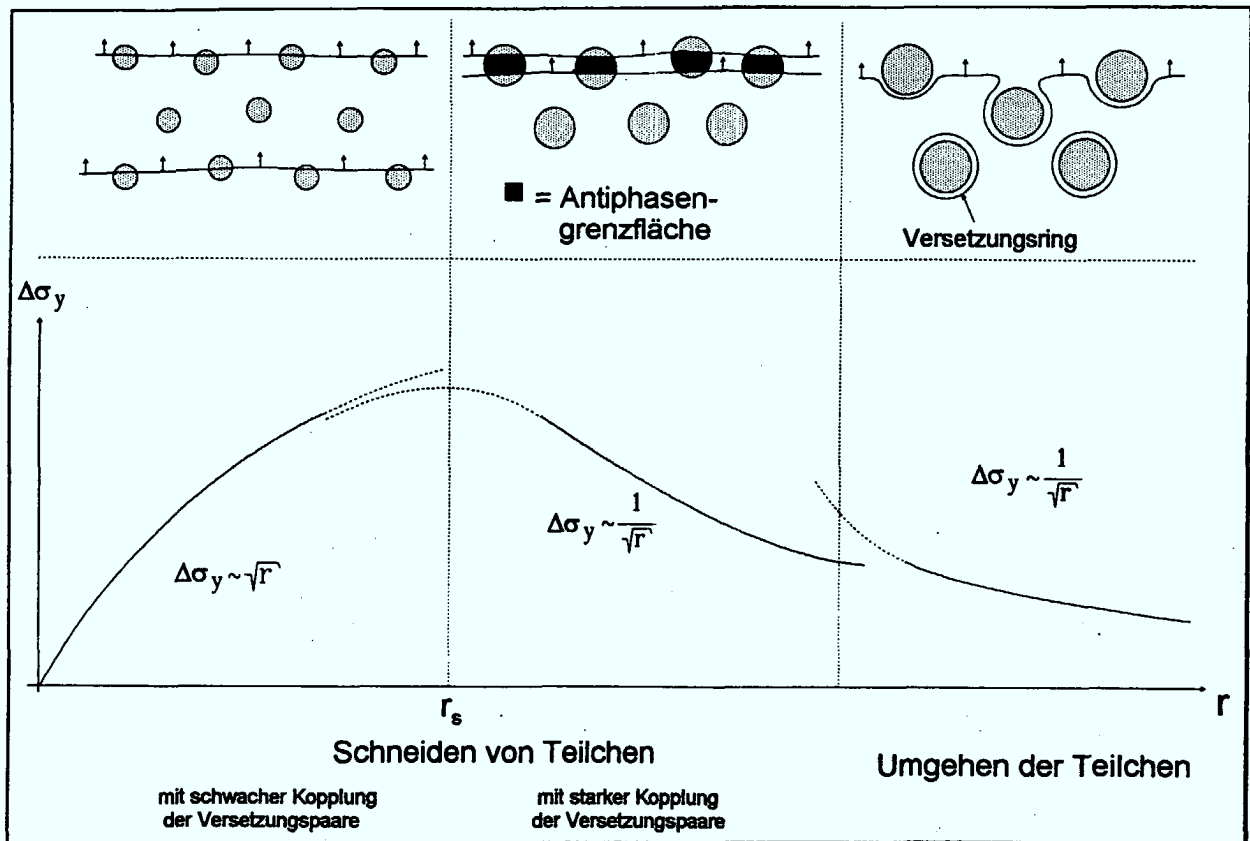


Abb. 3.1: Zunahme der Streckgrenze in Abhängigkeit vom mittleren γ' -Teilchenradius [2]

Schneidet eine Versetzung ein γ' -Teilchen, so erzeugt sie im Teilchen eine Antiphasengrenze, für die eine gewisse Energie aufgebracht werden muß (Antiphasengrenzenergie)[3]. Die Größe der Energie steigt mit zunehmendem Teilchenradius, so daß große Teilchen von einer einzigen Versetzung nicht mehr geschnitten werden können (Schneiden mit schwacher Kopplung von Versetzungspaaren). Läuft jedoch auf der Gleitebene der ersten Versetzung eine zweite Versetzung, die die Antiphasengrenze wieder aufhebt, so wird die Antiphasenenergie reduziert (Schneiden mit starker Kopplung von Versetzungspaaren). Versetzungspaare können unter diesen Umständen auch größere γ' -Teilchen schneiden. Die Abnahme der Antiphasenenergie ist jedoch begrenzt, da jede Versetzungen von einem Spannungsfeld umgeben ist, und somit der Paarabstand nicht beliebig verkleinert werden kann. Dies bedeutet, daß es auch für stark gekoppelte Versetzungspaare einen oberen kritischen Teilchenradius gibt, oberhalb dessen die Teilchen nicht mehr geschnitten werden können. An dieser Stelle kommt eine weitere Wechselwirkung zum Tragen; das Umwandern von γ' -Teilchen[3]. Bei dieser Art der Wechselwirkung zwischen Versetzung und γ' -Teilchen legt die Versetzung eine "Schleife" um das zu überwindende Teilchen (Abb. 3.1). Die so entstehende Krümmung der Versetzung übt eine rücktreibende Kraft aus, die von der Versetzung überwunden werden muß. Ist die Versetzung schließlich zum Halbkreis durchgebogen, können sich die benachbarten Versetzungsbögen vereinigen. Es bleibt ein das Teilchen umschließender Versetzungsring zurück, dessen

Linien­spannung von der Versetzung aufgebracht werden mußte. Bei gegebenem γ' -Volumenanteil erniedrigt sich die global aufzubringende Linien­spannung mit $1/r$.

Das Wechseln der Gleitebene ist die dritte Art von Wechselwirkung zwischen Versetzung und Teilchen, wobei das diffusionsgesteuerte Klettern von Stufenversetzungen mit zunehmender Temperatur ($T > 700^\circ\text{C}$) immer mehr an Bedeutung gegenüber den anderen Mechanismen gewinnt. Beim Klettern wird die Stufenversetzung durch Leerstellendiffusion so lange auf höhere Gleitebenen gehoben, bis ihre Beweglichkeit nicht mehr durch das γ' -Teilchen blockiert wird. Der Diffusionsmechanismus ist in Abb.3.2 vereinfacht dargestellt [2/4]. Die Abbildung zeigt ein schubver­zerrtes Gitter mit einer Stufenversetzung. Das untere Atom der eingeschobenen Ebene wird von einem γ' -Teilchen blockiert (Abb. 3.2.a). Die Versetzung kann in der Gleitebene 1 nicht weiterwandern. Erst nachdem durch Diffusionsmechanismen das untere Atom der eingeschobenen Ebene seiner ursprünglichen Lage verlassen, und das Versetzungszentrum damit in eine benachbarte Gleitebene geklettert ist, kann die Versetzung weitergleiten (Abb.3.2.b).

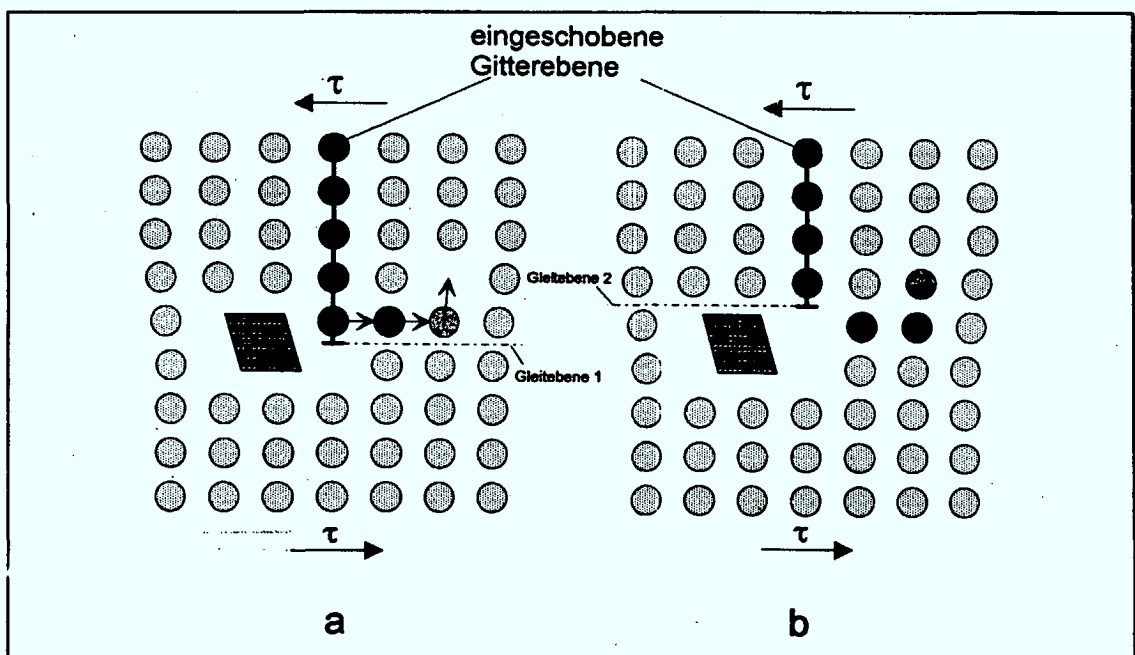


Abb. 3.2: Diffusionsgesteuertes Wechseln der Gleitebene einer Stufenversetzung

Insgesamt zeigt sich aber auch für die hohen Temperaturen, bei denen das diffusionsgesteuerte Überklettern von Teilchen die Versetzungsbewegung mitbestimmt, ab einem Übergangsradius r_s eine Abnahme der Festigkeit mit dem Ausscheidungsradius.

Bei Kriechversuchen unter konstanter Last wird die Abnahme der Festigkeit durch eine Proportionalität der Kriechrate zum Ausscheidungs­durchmesser sichtbar. Unterhalb des Übergangsradius r_s nimmt die Festigkeit der Teilchen mit dem Teilchenradius zu. In

diesem Fall ist bei einem Kriechversuch unter konstanter Last eine Proportionalität der Kriechrate zum reziproken Ausscheidungsradius zu erkennen:

$$\dot{\epsilon} \sim \begin{cases} 1/r & \text{für } r < r_s \\ r & \text{für } r \geq r_s \end{cases}$$

r : Radius der Ausscheidungsteilchen

r_s : Übergangsradius der Ausscheidungsteilchen

$\dot{\epsilon}$: viskoplastische Dehnrates

Ein weiterer wichtiger Aspekt für die Werkstoffbeschreibung ist die sich mit zunehmender Verformung einstellende Verfestigung im Werkstoff. Dies wird so gedeutet, daß mit der zunehmenden Verformung des Werkstoffes die Zahl der unbeweglichen Versetzungen zunimmt [5]. Die beweglichen Versetzungen machen schließlich nur noch einen Bruchteil der Gesamtversetzungen aus und werden aufgrund der Wechselwirkung der Versetzungen untereinander mit zunehmender Versetzungsdichte in ihrer Beweglichkeit immer mehr behindert. Die Kriechgeschwindigkeit nimmt somit mit wachsender Versetzungsdichte ab. In einem Zugversuch unter konstanter Last wird daher die Kriechgeschwindigkeit im Bereich des primären Kriechens (Übergangskriechen), in dem dieser Verfestigungsmechanismus überwiegt, zunächst abnehmen (Abb. 3.3).

Für hohe Temperaturen treten zusätzlich zu den Verfestigungsmechanismen Erholungsvorgänge auf [6]. Diese Erholungsmechanismen hängen neben Temperatur und anliegender Spannung auch von der Verfestigung bzw. der Versetzungsdichte ab. Je größer die Verfestigung ist, um so mehr kommt der Erholungsmechanismus zum Tragen. Es kommt schließlich mit zunehmender Verfestigung zu einem dynamischen Gleichgewicht zwischen Verfestigung und Erholung, so daß die Kriechgeschwindigkeit annähernd konstant bleibt (sekundäres bzw. stationäres Kriechen).

Gegen Ende dieses Kriechbereiches sind als Folge der Verformung so viele Poren und Risse entstanden, daß sich der tragende Querschnitt verkleinert. Durch diese sogenannte innere Einschnürung wird die wirksame Spannung entsprechend höher, wodurch die Kriechgeschwindigkeit wiederum zunimmt (Bereich des tertiären Kriechens). Durch zunehmende innere und äußere Einschnürung wird die Spannung schließlich so groß, daß die Probe bricht [4,7].

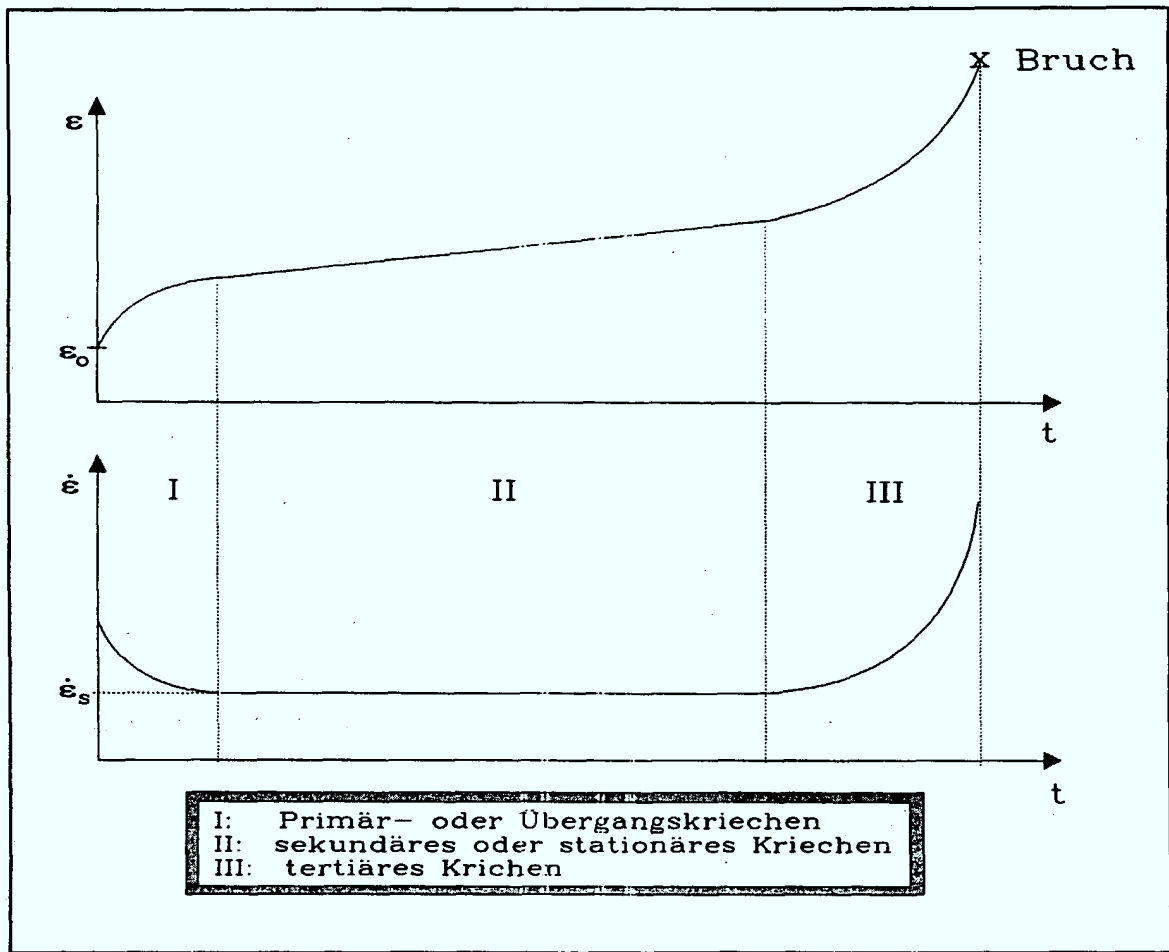


Abb.3.3: Verlauf der Dehnung und der Kriechrate mit der Zeit

Die Nickelbasissuperlegierungen zeigen in Langzeitkriechversuchen bei hohen Temperaturen aufgrund von Gefügeveränderungen oft keine konstante Kriechgeschwindigkeit im stationären Kriechbereich. Kleine γ' -Teilchen lösen sich zu großen wachstumsfähigen γ' -Ausscheidungen, wodurch sich der mittlere Ausscheidungsdurchmesser ständig vergrößert. Diese Vergrößerung der γ' -Teilchen bewirkt unterhalb des Übergangsradius r_s eine Zunahme, und oberhalb von r_s eine Abnahme des Widerstandes gegen Kriechen¹. Bei einem Kriechversuch unter konstanter Last wird sich daher die Kriechgeschwindigkeit auch im Bereich des sekundären Kriechens ständig ändern.

¹siehe hierzu auch Abb. 3.1

3.2. "back stress"-Modell

3.2.1. Einachsige Formulierung

In der folgenden Beschreibung der einachsigen Formulierung wird zunächst davon ausgegangen, daß sämtliche Spannungen positiv sind. Um in der allgemeinen Formulierung auch die Druckspannungen mit einzubeziehen, werden in den ermittelten Gleichungen die Spannungen durch ihren Absolutwert ersetzt und ihr Vorzeichen mit Hilfe der Signum-Funktion (sgn) berücksichtigt.

Das "back stress"-Modell beruht auf der Annahme, daß die Dehnungen sehr klein sind und sich die Gesamtdehnung in einen elastischen, einen viskoplastischen und einen thermischen Anteil zerlegen läßt:

$$\varepsilon = e_{\varepsilon} + i_{\varepsilon} + t_{\varepsilon} \quad (3.1)$$

ε : Gesamtdehnung

e_{ε} : elastischer Anteil der Dehnung

i_{ε} : viskoplastischer Anteil der Dehnung

t_{ε} : thermischer Anteil der Dehnung; $t_{\varepsilon} = {}^w\alpha \cdot (T - T_0)$

${}^w\alpha$: Wärmeausdehnungskoeffizient

T : Temperatur

T_0 : Bezugstemperatur (20°C)

Der elastische Anteil der Dehnung ist über das Hooke'sche Gesetz mit der Spannung verknüpft:

$$\sigma = E \cdot e_{\varepsilon} = E \cdot (\varepsilon - i_{\varepsilon} - t_{\varepsilon}) \quad (3.2)$$

σ : Spannung

E : Elastizitätsmodul

Die Berechnung der viskoplastischen Dehnung erfolgt mit Hilfe des "back stress"-Modells. Die Ausgangsgleichung für das "back stress"-Modell ist der Norton'sche Ansatz für die viskoplastische Dehnrate ($i_{\dot{\varepsilon}} = K' \sigma^N$). Die äußere Spannung σ wird hierbei im Modell durch die für das Kriechen verantwortliche Effektivspannung (bzw. wirksame Spannung) ${}^w\sigma$, die sich aus der Differenz von äußerer und innerer Spannung ergibt, ersetzt:

$$\dot{\epsilon}^{\text{in}} = K \cdot (\sigma^{\text{w}})^N = K \cdot (\sigma - \sigma^{\text{i}})^N \quad (3.3)$$

σ^{w} : Effektivspannung

σ^{i} : innere Spannung

K: Koeffizient im "back stress"-Modell

N: Exponent im "back stress"-Modell

Die innere Spannung wird durch den Widerstand gegen Kriechen bestimmt. Sie setzt sich aus zwei Anteilen zusammen:

$$\sigma^{\text{i}} = \rho + b\sigma \quad (3.4)$$

ρ : Anteil der inneren Spannung durch Teilchenhärtung

$b\sigma$: "back stress"

Der erste Anteil ρ beschreibt dabei den Widerstand des Materials gegen Kriechen aufgrund der Wechselwirkung der Versetzungen mit den γ' -Teilchen. ρ hängt nur von der anliegenden Spannung und der Größe der Ausscheidungsteilchen ab.

Der zweite Anteil $b\sigma$ beschreibt den Widerstand gegen Kriechen aufgrund der Wechselwirkung der Versetzungen untereinander. Da die Zahl der unbeweglichen Versetzungen, und damit auch der Widerstand gegen Kriechen, bei konstanter Spannung mit zunehmender Verformung zunächst zunimmt, gegen Ende des primären Kriechbereiches jedoch durch verstärkt auftretende Erholungsvorgänge einen Grenzwert erreicht, muß auch $b\sigma$ verformungsabhängig einem Grenzwert $b\bar{\sigma}$ entgegenlaufen. Dieser Grenzwert hängt im Gegensatz zu ρ nicht vom Radius der Ausscheidungsteilchen ab, sondern nur vom Verhältnis des Matrixvolumens zum Ausscheidungsvolumen. Für die Entwicklung von $b\sigma$ wird dabei folgender Ansatz verwendet:

$$\dot{b\sigma} = \lambda_0 \cdot \dot{\epsilon}^{\text{in}} \cdot (b\bar{\sigma} - b\sigma) \quad (3.5)$$

$b\bar{\sigma}$: stationärer Wert des "back stress"

λ_0 : Parameter in Entwicklungsgleichung des "back stress"

Ist der Grenzwert erreicht, so beginnt der Bereich des stationären Kriechens. Für diesen Bereich wurde für die viskoplastische Dehnrates durch Anpassung von Versuchsergebnissen ein Ansatz ermittelt, der für $r_0 \geq r_s$ die Proportionalität zu r , und für

$r_0 < r_s$ zunächst die Proportionalität zu $1/r$, und schließlich ab dem Übergangsradius r_s ebenfalls die Proportionalität zu r , berücksichtigt:

Für $r_0 \geq r_s$ wurde der Ansatz nach Gleichung (3.6a)

$$\dot{\epsilon}_s^{\text{in}} = k \cdot \frac{r}{r_0} \cdot \sigma^n \cdot e^{\alpha\sigma} \quad (3.6a)$$

und für $r_0 < r_s$ der Ansatz nach Gl.(3.6b, c) genutzt.

$$\dot{\epsilon}_s^{\text{in}} = k \cdot \frac{r_0}{r} \cdot \sigma^n \cdot e^{\alpha\sigma} \quad \text{für } r < r_s \quad (3.6b)$$

$$\dot{\epsilon}_s^{\text{in}} = k \cdot \frac{r_0 \cdot r}{r_s^2} \cdot \sigma^n \cdot e^{\alpha\sigma} \quad \text{für } r \geq r_s \quad (3.6c)$$

mit

$$r_s = r_0 \cdot \left[Z + \left| \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma^*} \right|^\beta \right] \quad (3.7)$$

$\dot{\epsilon}_s^{\text{in}}$:	stationäre viskoplastische Dehnrates
r_0 :	Radius der Ausscheidungsteilchen des Ausgangsgefüges
k, α :	Parameter in Bestimmungsgl. für stationäre Kriechrate
n :	Exponent in Bestimmungsgl. für stationäre Kriechrate
Z, σ^* :	Parameter in Bestimmungsgl. für r_s
σ_y :	Streckgrenze

Dieser Ansatz ermöglicht nun die Bestimmung von ${}^b\bar{\sigma}$ und ρ . Da der stationäre "back stress"-Wert nicht vom Teilchenradius r abhängen soll, wird der Ansatz für die viskoplastische Dehnrates im "back stress"-Modell zunächst mit dem Ansatz nach Gl.(3.6a) bzw. Gl.(3.6b) unter Vernachlässigung des Teilchenwachstums ($r=r_0 \Rightarrow \rho=\rho_0$) verglichen:

$$\dot{\epsilon}_s^{\text{in}} = K \cdot (\sigma - {}^b\bar{\sigma} - \rho_0)^n = k \cdot \sigma^n \cdot e^{\alpha\sigma} \quad (3.8)$$

ρ_0 : Teilchenhärtung des Ausgangsgefüges

Das Verhältnis des stationären "back stress"-Wertes ${}^b\bar{\sigma}$ zu dem Anteil ρ_0 der inneren Spannung kann durch einen empirischen Ansatz bestimmt werden:

$$\frac{b_{\bar{\sigma}}}{\rho_0} = \frac{1-q_0}{q_0} \quad (3.9)$$

$$\text{mit } q_0 = 1 - A \left(\frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^p \quad (3.10)$$

q_0 : Parameter in Bestimmungsgleichung des stationären "back stress"- Wertes

A: Koeffizient in Bestimmungsgleichung für q_0

p: Exponent in Bestimmungsgleichung für q_0

Damit ergibt sich für den stationären "back stress"-Wert:

$$b_{\bar{\sigma}} = (1-q_0) \cdot \sigma \cdot \left[1 - \left(\frac{k}{K} \sigma^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma} \right)^{1/N} \right] \quad (3.11)$$

Das diffusionsbedingte Wachstum der γ' -Teilchen wird in dem Anteil ρ der inneren Spannung berücksichtigt. Für die stationäre Kriechrate gilt wiederum der Ansatz nach Gl.(3.6a) bzw. Gl.(3.6b, c). Liegt der Teilchenradius des Ausgangsgefüges über dem Übergangsradius r_s , so ergibt sich durch Vergleich von Gl.(3.6.a) mit dem Ansatz nach Gl.(3.3):

$$k \cdot \frac{r}{r_0} \cdot \sigma^n \cdot e^{\alpha \sigma} = K \cdot (\sigma - b_{\bar{\sigma}} - \rho)^N \quad (3.12)$$

$$\Rightarrow \rho = \sigma \cdot \left[1 - \left(\frac{k \cdot r}{K \cdot r_0} \sigma^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma} \right)^{1/N} \right] - b_{\bar{\sigma}} \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow \rho = \sigma \cdot \left[1 - \left(\frac{k \cdot r}{K \cdot r_0} \sigma^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma} \right)^{1/N} - (1-q_0) \cdot \left[1 - \left(\frac{k}{K} \sigma^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma} \right)^{1/N} \right] \right]; \quad (3.14)$$

Liegt der Teilchenradius des Ausgangsgefüges dagegen unterhalb des Übergangsradius r_s , so muß zunächst die Proportionalität der viskoplastischen Dehnrates zu $1/r$ nach Gl.(3.6.b), und für $r \geq r_s$ die Proportionalität zu r nach Gl.(3.6.c) berücksichtigt werden. Die Teilchenhärtung ρ läßt sich für Teilchenradien kleiner (bzw. größer) r_s durch Vergleich von Gl.(3.6.b) (bzw. Gl.(3.6.c)) mit dem Ansatz nach Gl.(3.3) ermitteln:

$$\rho = \sigma \cdot \left[1 - \left(\frac{k \cdot r_0}{K \cdot r} \sigma^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma} \right)^{1/N} \right] - b_{\bar{\sigma}} \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow \rho = \sigma \cdot \left[1 - \left(\frac{k \cdot r_0}{K \cdot r} \sigma^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma} \right)^{1/N} - (1-q_0) \cdot \left[1 - \left(\frac{k}{K} \sigma^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma} \right)^{1/N} \right] \right] \text{ für } r_0 < r_s \text{ und } r < r_s \quad (3.14)$$

bzw.

$$\rho = \sigma \cdot \left[1 - \left(\frac{k \cdot r_0 \cdot r}{K \cdot r_s^2} \sigma^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma} \right)^{1/N} \right] - b \bar{\sigma} \quad (3.15)$$

$$\Rightarrow \rho = \sigma \cdot \left[1 - \left(\frac{k \cdot r_0 \cdot r}{K \cdot r_s^2} \sigma^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma} \right)^{1/N} - (1-q_0) \cdot \left[1 - \left(\frac{k}{K} \sigma^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma} \right)^{1/N} \right] \right] \text{ für } r_0 < r_s \text{ und } r \geq r_s \quad (3.16)$$

Der aktuelle Teilchenradius zum Zeitpunkt t kann für die Bestimmung von ρ mit Hilfe der Volumenwachstumsrate $\dot{V}$, die nur von der Temperatur abhängt, berechnet werden:

$$r = \left[r_0^3 + \frac{3}{4\pi} \int_{t_0}^t \dot{V} dt \right]^{1/3} \quad (3.17)$$

$\dot{V}$: Volumenwachstumsrate

3.2.2. Mehrachsige Formulierung

Zunächst gilt für den Zusammenhang zwischen elastischem Verzerrungstensor und Spannungstensor das Hooke'sche Gesetz:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl} = E_{ijkl} (\epsilon_{kl} - \alpha \epsilon_{kl} - \theta \epsilon_{kl}) \quad (3.18)$$

Hierbei ist zu beachten, daß nach der Einstein'schen Summationsvereinbarung über einen doppelt auftretenden Index in einem Produkt bzw. allgemeiner in einem Monom summiert wird.

Im isotropen Fall kann der Elastizitätstensor in Gl.(3.18) durch die Lamé'schen Konstanten ausgedrückt werden [8/9]:

$$E_{ijkl} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{kl} + \mu \cdot (\delta_{ik} \cdot \delta_{jl} + \delta_{il} \cdot \delta_{jk}) \quad (3.19)$$

mit
$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \quad (3.20)$$

und
$$\mu = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \quad (3.21)$$

δ_{ij} : Kronecker Tensor

λ, μ : Lamé'sche Konstanten

Hiermit ergibt sich Gl.(3.18) zu:

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \epsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu \cdot \epsilon_{ij} = \lambda \cdot (\epsilon_{kk} - {}^{in}\epsilon_{kk} - {}^{th}\epsilon_{kk}) \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu \cdot (\epsilon_{ij} - {}^{in}\epsilon_{ij} - {}^{th}\epsilon_{ij}) \quad (3.22)$$

Die Umsetzung des einachsigen "back stress"-Modells in eine mehrdimensionale Formulierung erfolgt mit Hilfe der Invariantentheorie [10].

Die Verformung eines dreidimensionalen Elementes setzt sich aus zwei Anteilen zusammen; der Distorsion (Gestaltänderung) und der Dilatation (Volumenänderung) [8]. Für kleine Verzerrungen können diese beiden Anteile durch additive Aufspalten des Verzerrungstensors in seinen Deviator und seinen Kugeltensor ermittelt werden, wobei der Deviator der Distorsion und der Kugeltensor der Dilatation zuzuordnen ist. Da die viskoplastische Verformung eines Körpers mit einer sehr geringen Volumenzunahme verbunden ist [9], die gegenüber der Volumenzunahme durch elastische Verformung vernachlässigt werden kann, wird in der mehrachsigen Formulierung der inelastische Verzerrungstensor als deviatorische Größe angesetzt:

$${}^{in}\epsilon_{ij} = {}^{in}\epsilon'_{ij} \quad (3.23)$$

${}^{in}\epsilon_{ij}$: inelastischer Verzerrungstensor

${}^{in}\epsilon'_{ij}$: Deviator des inelastischen Verzerrungstensors

Die viskoplastische Dehnrates kann somit als Funktion der Spannungsdeviatoren festgelegt werden. Bei Isotropie läßt sich Gl.(3.3) in die folgende mehrachsige Formulierung überführen:

$${}^{in}\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \cdot K \cdot w_{\sigma_{VM}}^{N-1} \cdot w_{\sigma'_{ij}} \quad (3.24)$$

mit

$$w_{\sigma_{VM}} = \sqrt{3 \cdot J_2(\sigma'_{ij} - {}^l\sigma'_{ij})} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot (\sigma'_{ij} - {}^l\sigma'_{ij}) \cdot (\sigma'_{ij} - {}^l\sigma'_{ij})} \quad (3.25)$$

${}^w\sigma_{ij}$:	Effektivspannung; ${}^w\sigma_{ij} = \sigma_{ij} - {}^i\sigma_{ij}$
${}^w\sigma_{VM}$:	effektive Vergleichsspannung nach Mises
$J_2(\sigma'_{ij} - {}^i\sigma'_{ij})$:	zweite Invariante des Deviators der Effektivspannung
${}^i\sigma_{ij}$:	Tensor der inneren Spannungen; ${}^i\sigma_{ij} = \rho_{ij} + {}^b\sigma_{ij}$
σ' :	Deviator des zugehörigen Tensors (hier: ${}^w\sigma'_{ij} = {}^w\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \cdot {}^w\sigma_{kk}$)

Der Tensor der inneren Spannung ${}^i\sigma_{ij}$ läßt sich durch Tensoraddition von "back stress"-Tensor ${}^b\sigma_{ij}$ und Tensor der Teilchenhärtung ρ_{ij} ermitteln:

$${}^i\sigma_{ij} = {}^b\sigma_{ij} + \rho_{ij} \quad (3.26)$$

Zur Bestimmung des "back stress"-Tensors wird die Entwicklungsgleichung (3.5) auf jede Komponente des Tensors angewendet, wobei die inelastische Dehnrates durch die Vergleichsdehnrates, die sich auf der Basis des von Mises'schen plastischen Potentials zu

$$\text{in}\dot{\epsilon}_V = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \text{in}\dot{\epsilon}_{ij} \cdot \text{in}\dot{\epsilon}_{ij}} \quad (3.27)$$

ergibt [8], ersetzt wird:

$${}^b\dot{\sigma}_{ij} = \lambda_0 \cdot \text{in}\dot{\epsilon}_V \cdot ({}^b\bar{\sigma}_{ij} - {}^b\sigma_{ij}) \quad (3.28)$$

Durch Umsetzung von Gleichung (3.11) in eine mehrachsige Formulierung läßt sich der stationäre "back stress"-Wert ermitteln:

$${}^b\bar{\sigma}_{ij} = (1-q_0) \cdot \sigma_{ij} \cdot \left[1 - \left(\frac{k}{K} \sigma_{VM}^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma_{VM}} \right)^{1/N} \right] \quad (3.29)$$

Bei der Umsetzung der Bestimmungsgleichung für die Teilchenhärtung muß wiederum eine Fallunterscheidung bezüglich des Teilchenradius beachtet werden:

$$\rho_{ij} = \sigma_{ij} \cdot \left[1 - \left(\frac{k \cdot r}{K \cdot r_0} \sigma_{VM}^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma_{VM}} \right)^{1/N} \right] - (1-q_0) \cdot \left[1 - \left(\frac{k}{K} \sigma_{VM}^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma_{VM}} \right)^{1/N} \right] \quad \text{für } r_0 > r_s \quad (3.30)$$

$$\rho_{ij} = \sigma_{ij} \cdot \left[1 - \left(\frac{k \cdot r_0}{K \cdot r} \sigma_{VM}^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma_{VM}} \right)^{1/N} - (1-q_0) \cdot \left[1 - \left(\frac{k}{K} \sigma_{VM}^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma_{VM}} \right)^{1/N} \right] \right] \quad \begin{matrix} \text{für } r_0 < r_s \\ \text{und } r < r_s \end{matrix} \quad (3.31)$$

$$\rho_{ij} = \sigma_{ij} \cdot \left[1 - \left(\frac{k \cdot r_0 \cdot r}{K \cdot r_s^2} \sigma_{VM}^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma_{VM}} \right)^{1/N} - (1-q_0) \cdot \left[1 - \left(\frac{k}{K} \sigma_{VM}^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma_{VM}} \right)^{1/N} \right] \right] \quad \begin{matrix} \text{für } r_0 < r_s \\ \text{und } r \geq r_s \end{matrix} \quad (3.32)$$

Die Berechnung der skalaren Größen r_s und r erfolgt nach den Gleichungen Gl.(3.7) und (3.17) wobei in Gl.(3.7) die Spannung durch die von Mises-Vergleichsspannung ersetzt wird:

$$r_s = r_0 \cdot \left[Z + \left| \frac{\sigma_{VM} - \sigma_y}{\sigma^*} \right|^\beta \right] \quad \text{und} \quad r = \left[r_0^3 + \frac{3}{4\pi} \int_{t_0}^t \dot{V} dt \right]^{1/3} \quad (3.33)$$

3.2.3. Parameter

Das "back stress"-Modell besitzt neben dem Elastizitätsmodul, der Querkontraktionszahl, der Streckgrenze und dem Wärmeausdehnungskoeffizienten noch weitere 13 Parameter, die für das zu beschreibende Material bestimmt werden müssen. Für IN738LC ergaben sich für die Parameter durch Anpassung an eine Reihe von Versuchsergebnissen dabei die folgenden Werte bzw. temperaturabhängigen Verläufe:

- Koeffizienten k und K des Kriechgesetzes (Abb. 3.4):

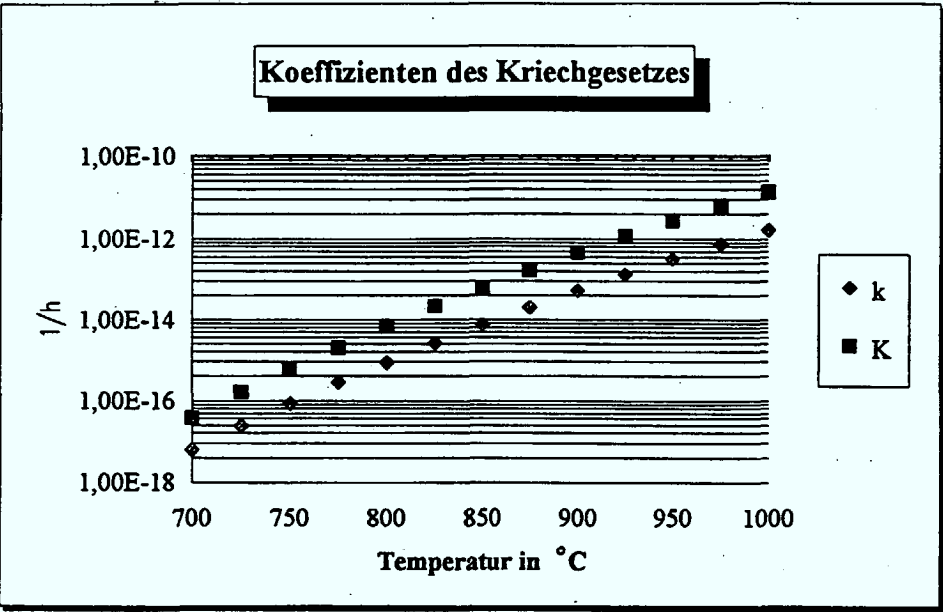


Abb. 3.4: Koeffizienten des Kriechgesetzes

- Exponenten n und N des Kriechgesetzes (Abb. 3.5):

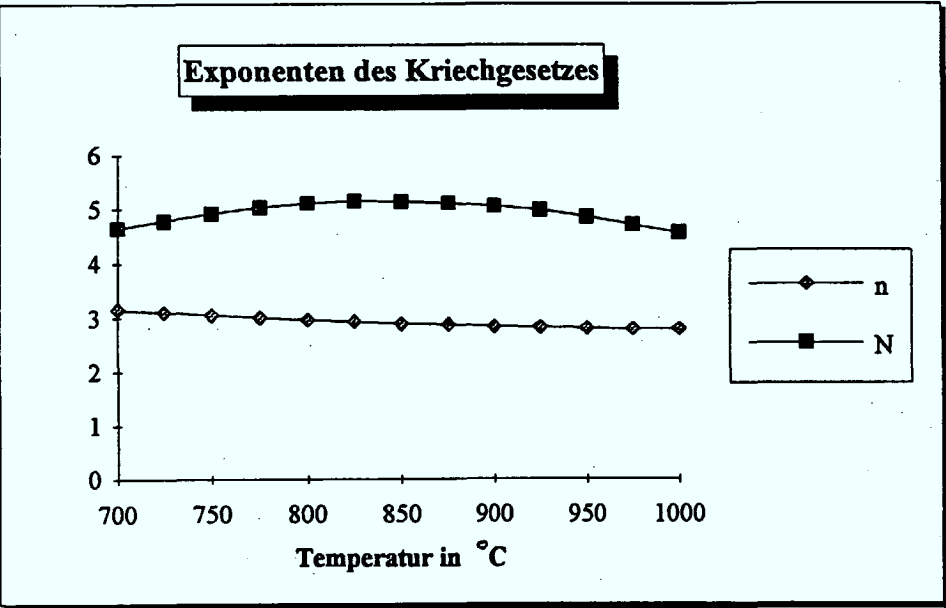


Abb. 3.5: Exponenten des Kriechgesetzes

- Parameter α des Kriechgesetzes (Abb. 3.6):

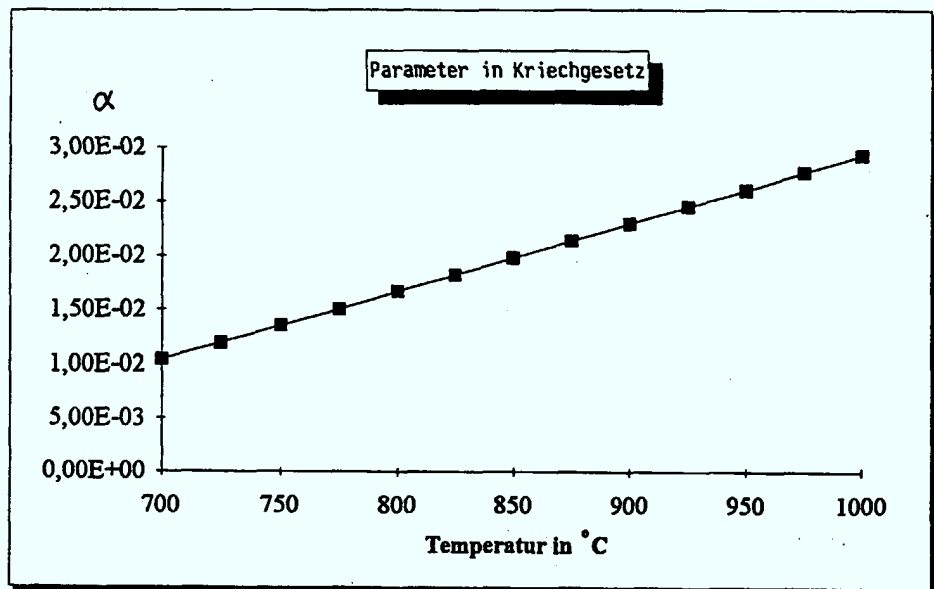


Abb. 3.6: Parameter α des Kriechgesetzes

- Koeffizient λ_0 in der Entwicklungsgleichung für "back stress" (Abb. 3.7):

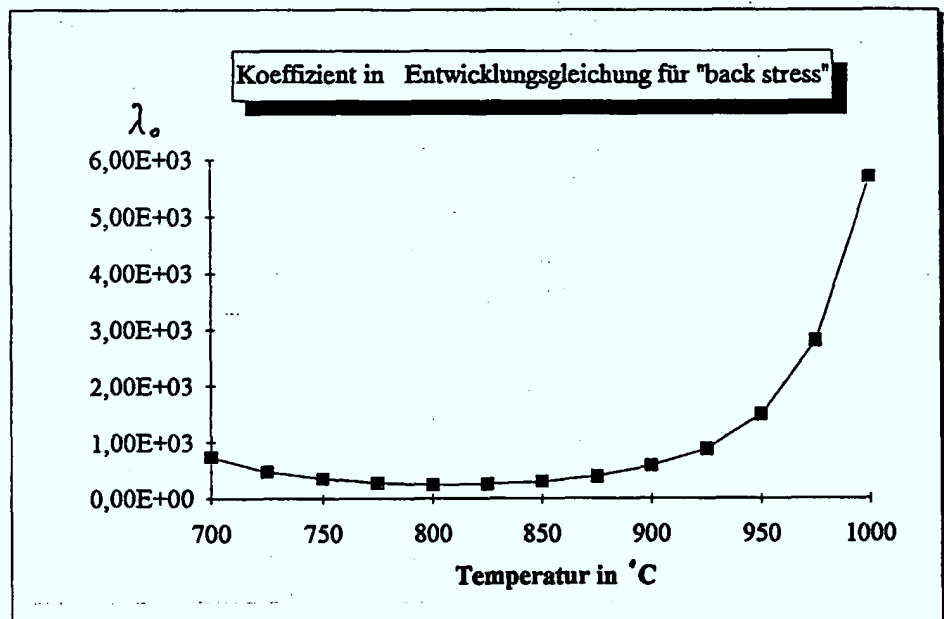


Abb. 3.7: Koeffizient in der Entwicklungsgleichung für "back stress"

- Parameter p und A in Bestimmungsgleichung für q_0 (Abb. 3.8):

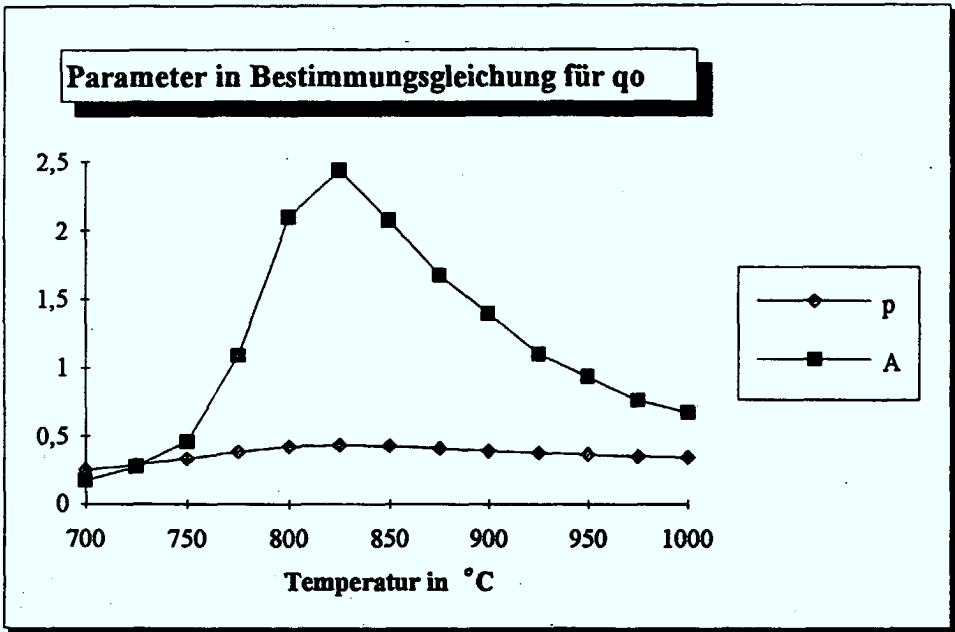


Abb. 3.8: Parameter in Bestimmungsgleichung für q_0

- Volumenwachstumsrate $\dot{V}$ (Abb. 3.9):

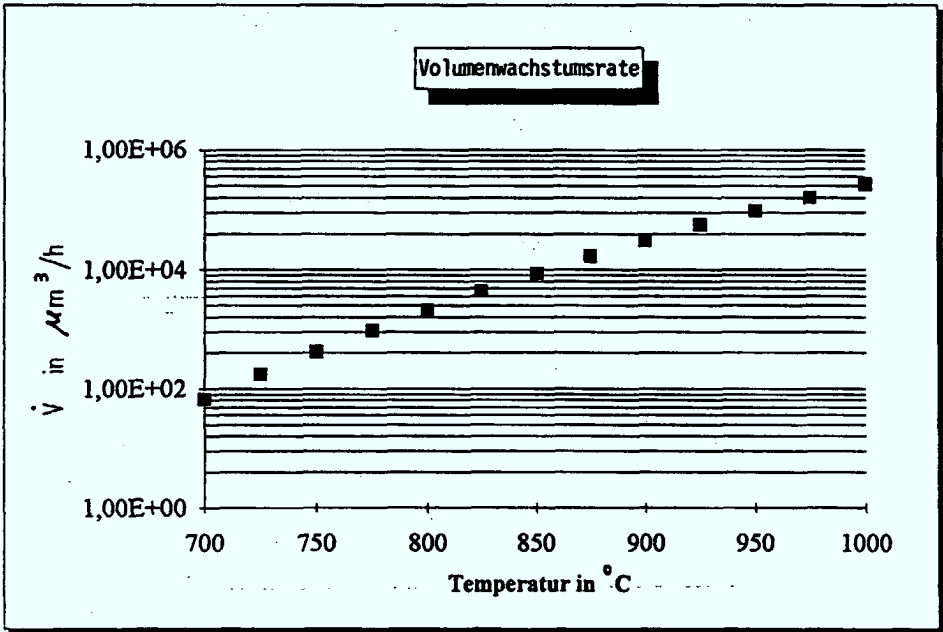


Abb. 3.9: Volumenwachstumsrate

- Teilchenradius des Ausgangsgefüges r_0 :

$$r_0 = 0.0175 \mu\text{m} = \text{konst}$$

- Parameter in Bestimmungsgleichung für Übergangsradius z , β , σ^* :

$$z = 1.0 = \text{konst}$$

$$\beta = 2.789 = \text{konst}$$

$$\sigma^* = 902 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \text{konst}$$

Der Verlauf des Elastizitätsmoduls, der Streckgrenze und des Wärmeausdehnungskoeffizienten über der Temperatur ist in den Abbildungen 3.10, 3.11 und 3.12 dargestellt. Die Querkontraktionszahl ist wiederum eine Konstante mit dem Wert $\nu=0,3$.

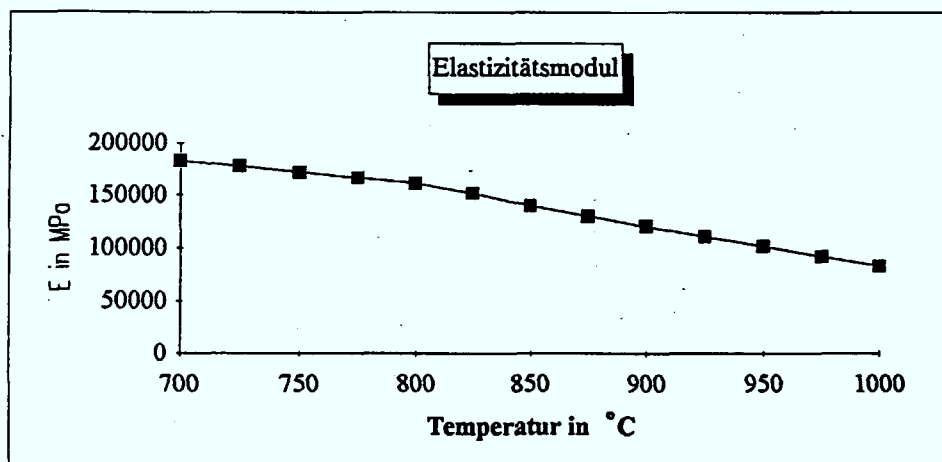


Abb. 3.10: Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls

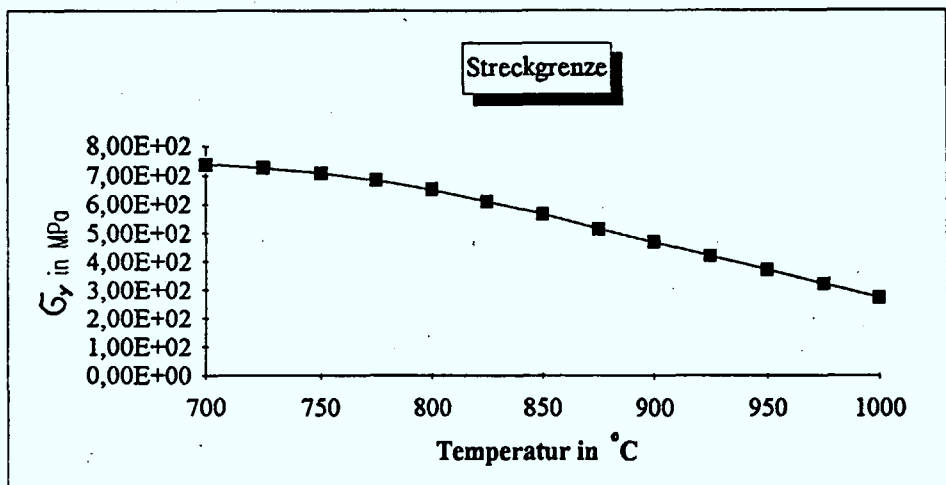


Abb. 3.11: Temperaturabhängigkeit der Streckgrenze

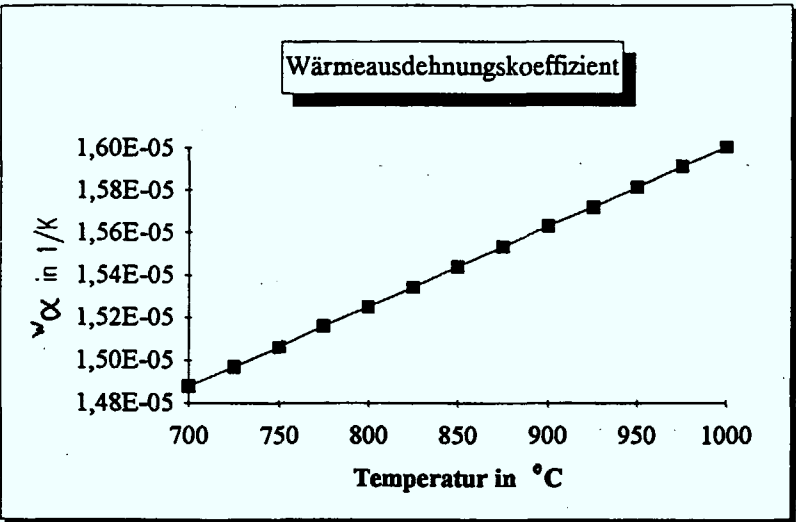


Abb. 3.12: Temperaturabhängigkeit des Wärmeausdehnungskoeffizienten

3.3. Vergleich mit anderen Werkstoffmodellen

3.3.1. Robinson Modell

Robinson unterteilt sein Modell [11/12/13] in einen rein elastischen Bereich, in dem eine materialabhängige kritische Schwellspannung χ_0 nicht überschritten wird, und einen viskoplastischen Bereich. Für den zweiten Bereich ergibt sich beim Robinson Modell die Gleichung für die viskoplastische Dehnrates als Gradient einer Potentialfunktion Ω im Spannungsraum, was der allgemeinen Theorie des plastischen Potentials entspricht. Die Übertragbarkeit einer plastischen Dehnung auf die inelastische Dehnrates ist die Hoff'sche Analogie.

$$\ln \dot{\epsilon}_{ij} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} \right) \quad (3.34)$$

Ω : Potentialfunktion

Die Potentialfunktion Ω im Robinson Modell wird dabei wie folgt angesetzt:

$$\Omega = \chi_0^2 \cdot \left(\int \frac{1}{2\mu} \cdot f(F) \, dF + \int \frac{R}{H} \cdot g(G) \, dg \right) \quad (3.35)$$

χ_0, μ, R, H : Materialkonstanten

f, g : Funktionen

F : skalare Funktion des Deviators der Effektivspannung (bzw. wirksamen Spannung) Σ_{ij}

G : skalare Funktion des Deviators der inneren Spannung a_{ij}

Im isotropen Fall hat das Fließgesetz die folgende Form [14]:

$$\ln \dot{\epsilon}_{ij} = \begin{cases} A \left(\frac{J_2(\Sigma)}{K} - 1 \right)^n \cdot \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{2 \cdot J_2(\Sigma)}} & \text{falls } s_{ij} \cdot \Sigma_{ij} > 0 \text{ und } J_2(\Sigma) > K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.36)$$

A, n : Materialkonstanten

$J_2(\Sigma)$: zweite Invariante des Deviators der Effektivspannung

Σ_{ij} : Deviator der Effektivspannung

s_{ij} : Deviator der anliegenden Spannung

K : isotrope Verfestigungsvariable

Ähnlich wie im "back stress"-Modell berechnet sich der Deviator der Effektivspannung aus der Differenz der Deviatoren von anliegender Spannung s_{ij} und innerer Spannung a_{ij} . Die innere Spannung berücksichtigt allerdings im Gegensatz zum "back stress"-Modell nur die kinematische Ver- bzw. Entfestigung. Die isotrope Ver- bzw. Entfestigung beschreibt Robinson in seinem Modell mit Hilfe der skalaren isotropen Verfestigungsvariablen K .

Die Evolutionsgleichung für die kinematische Verfestigung lautet:

$$\dot{a}_{ij} = \begin{cases} H \cdot G^{-\beta} \ln \dot{\epsilon}_{ij}^p - R \cdot G^{m-\beta} \frac{a_{ij}}{\sqrt{J_2(a)}} & \text{falls } s_{ij} a_{ij} > 0 \text{ und } G > G_0 \\ H \cdot G_0^{-\beta} \ln \dot{\epsilon}_{ij}^p - R \cdot G_0^{m-\beta} \frac{a_{ij}}{\sqrt{J_2(a)}} & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\text{mit} \quad G = \frac{J_2(a_{ij})}{\chi_0^2} \quad (3.38)$$

β, m, G_0 : Materialkonstanten

Der erste Term in der Entwicklungsgleichung für a_{ij} beschreibt dabei die dehnungsabhängige Verfestigung des Werkstoffes, während der zweite Term die thermischen Erholungsvorgänge berücksichtigt und daher stark temperaturabhängig ist. Für niedrige Temperaturen kann er vernachlässigt werden.

Mit Hilfe des "Abschneide-Parameters" G_0 wird verhindert, daß für $G \rightarrow 0$ die Funktion nach Gl.(3.37) singulär wird.

Für die skalare isotrope Verfestigungsvariable K gilt das folgende Entwicklungsgesetz:

$$\dot{K} = \Gamma(\dot{W}, T) \cdot \ln \dot{W} + \Theta(\ln W, T) \cdot \dot{T} \quad (3.39)$$

Der erste Term in Gl.(3.39) beschreibt dabei die Verfestigung durch die Dissipationsleistung ("work hardening"), während im zweiten Term der Einfluß einer nichtisothermen Belastung berücksichtigt wird.

Die materialspezifischen Funktionen Γ und Θ sind hierbei gegeben durch:

$$\Gamma = \frac{K_s - K_l}{3 \cdot W_0} e^{-\frac{\ln W}{W_0}} \quad (3.40)$$

$$\Theta = -\frac{Q_0}{3 \cdot T^2} e^{-Q_0 \cdot (1/T_0 - 1/T)} \quad (3.41)$$

$\ln W$: inelastische Verformungsarbeit

K_1, K_2, Q_0, W_0, T_0 : Materialkonstanten

Der wesentliche Unterschied zum "back stress"-Modell ist der, daß Robinson in seinem Modell eine Schwellspannung eingeführt hat, unterhalb der keine inelastischen Verformungen stattfinden. Dieser Ansatz ist jedoch zur Beschreibung von Hochtemperaturwerkstoffen, die bei hohen Temperaturen auch bei geringen Spannungen kriechen, nicht geeignet. Ein weiteres Phänomen, das bei IN738LC in Versuchen zu beobachten ist und das mit dem Robinson-Modell nicht beschrieben werden kann, ist die inelastische Rückdehnung bei Entlastung (wird eine in x-Richtung auf Zug belastete Probe schlagartig entlastet, so kann eine viskoplastische Dehnrates in negative x-Richtung gemessen werden). Dieses Phänomen wird im "back stress"-Modell mit Hilfe des "back stress" $^b\sigma$ beschrieben, der bei schlagartiger Entlastung der Probe zu einer Rückspannung im Werkstoff, und damit zum Rückdehnen durch Kriechen führt, wobei $^b\sigma$ langsam gegen Null relaxiert. Im Robinsonmodell wird die Effektivspannung in diesem Fall zwar auch negativ, jedoch verhindert die Fallunterscheidung in Gl.(3.36), daß eine viskoplastische Dehnung in Richtung dieser Rückspannung stattfindet.

3.3.2. Hart-Modell

Hart geht in seinem Modell [15/16] davon aus, daß sich die inelastische Dehnrates aus zwei Anteilen zusammensetzt; einem reversiblen und einem irreversiblen Anteil:

$$^{\text{in}}\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{a}_{ij} + \dot{\alpha}_{ij} \quad (3.42)$$

$\dot{a}_{ij}$: reversibler Anteil der inelastischen Dehnrates

$\dot{\alpha}_{ij}$: irreversibler Anteil der inelastischen Dehnrates

Zur Bestimmung der inelastischen Dehnrates führt Hart für die deviatorischen Tensoren σ'_{ij} , $^a\sigma'_{ij}$, $^f\sigma'_{ij}$, $\dot{\alpha}_{ij}$, $^{\text{in}}\dot{\epsilon}_{ij}$ zunächst skalare Invarianten der Form

$$c = \sqrt{c'_{ij} \cdot c'_{ij}} \quad \text{ein.} \quad (3.43)$$

c'_{ij} : Deviator eines Tensors zweiter Stufe

c : skalare Invariante des Deviators c'_{ij}

σ'_{ij} : Deviator der anliegenden Spannung

$^a\sigma'_{ij}$, $^f\sigma'_{ij}$: zwei Anteile des Spannungsdeviators: $\sigma'_{ij} = ^a\sigma'_{ij} + ^f\sigma'_{ij}$

Sind zu einem bestimmten Zeitpunkt die Werte von Spannungsdeviator σ'_{ij} , reversiblen Anteil der inelastischen Dehnung a_{ij} , Hilfsspannung σ^* und Temperatur T gegeben, so läßt sich die inelastische Dehnrates und deren irreversibler Anteil wie folgt berechnen.

Zunächst kann der erste Anteil $^a\sigma'_{ij}$ des Spannungsdeviators aus Gl.(3.44) und Gl.(3.45) berechnet werden:

$$^a\sigma'_{ij} = \frac{^a\sigma}{a} \cdot a_{ij} = \mu \cdot a_{ij} \quad (3.44)$$

$$\text{mit } ^a\sigma = \mu \cdot a \quad (3.45)$$

μ : Materialkonstante

Der zweite Anteil des Spannungsdeviator ergibt sich damit zu:

$$^f\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij} - ^a\sigma'_{ij} \quad (3.46)$$

Mit Hilfe dieses zweiten Anteils wird nun die viskoplastische Dehnrates bestimmt:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\sigma}} \cdot ^f\sigma_{ij} \quad (3.47)$$

$$\text{mit } \dot{\epsilon} = \dot{\alpha}^*(T) \cdot \left(\frac{^f\sigma}{\mu} \right)^M \quad (3.48)$$

$\dot{\alpha}^*(T)$: schwach temperaturabhängige Funktion

M : Materialkonstante

Für die Rate des irreversiblen Anteils gilt:

$$\dot{\alpha}_{ij} = \frac{\dot{\alpha}}{^a\sigma} \cdot ^a\sigma_{ij} \quad (3.49)$$

$$\text{mit } \dot{\alpha} = \frac{\left(\frac{\sigma^*}{G} \right)^m \cdot f \cdot e^{-\frac{Q}{R \cdot T}}}{\left[\ln \left(\frac{\sigma^*}{^a\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{\lambda}}} \quad (3.50)$$

m, f, λ : Materialkonstanten

G : Schermodul

Q: Aktivierungsenergie
R: Gaskonstante

Die Hilfsspannung σ^* beschreibt dabei die Ver- bzw. Entfestigung des Werkstoffes. Für sie wird folgender Entwicklungsansatz angegeben:

$$\frac{d \ln(\sigma^*)}{dt} = \Gamma(\sigma^*, {}^a\sigma) \cdot \dot{\alpha} - \Re(\sigma^*, T) \quad (3.51)$$

Hierbei beschreibt die Funktion Γ die isotrope Verfestigung aufgrund der mechanischen Verformung, und die Funktion $\Re$ die temperaturabhängige Erholung des Werkstoffes.

In Abb. 3.13 sind die Beziehungen zwischen den einzelnen Größen graphisch dargestellt. Element 1 ist ein elastisches Element, Element 2 ist durch Gl.(3.49) und (3.50) bestimmt und Element 3 ist ein nichtlineares viskoses Element.

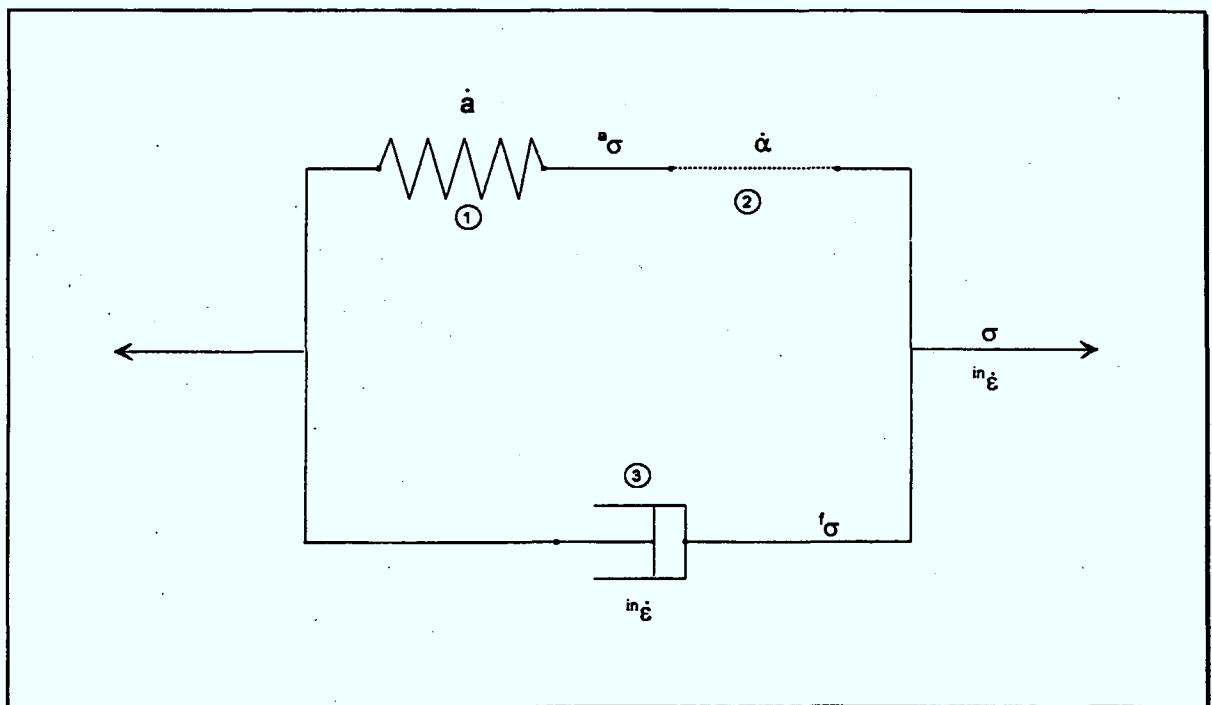


Abb. 3.13: Schematische Darstellung des Werkstoffmodells von Hart [15]

Das Hart-Modell ist für die Beschreibung des Verhaltens von Hochtemperaturwerkstoffen gut geeignet, da beim Hart-Modell keine Schwellspannung existiert, unterhalb der die viskoplastische Dehnrage zu Null wird. Außerdem kann mit dem Hart-Modell das in Kapitel 3.3.1 beschriebene Phänomen der inelastischen Rückdehnung bei Entlastung gut wiedergegeben werden. Wird z.B. das in Abb. 3.13 gezeigte Werkstoffmodell schlagartig entlastet ($\sigma=0$), so stellt sich aufgrund des reversiblen Anteils der viskoplastischen Dehnung a eine Rückspannung

$$\dot{\epsilon}_{\sigma} = -\dot{\epsilon}_{\sigma} = -\mu \cdot a \quad (3.52)$$

ein, die wiederum zum Kriechen des Materials führt.

Der wesentliche Unterschied zwischen dem Hart- und dem "back stress"-Modell ist, daß im "back stress"-Modell die Ver- bzw. Entfestigung im direkten Zusammenhang mit dem Radius der γ' -Teilchen steht. Es können somit Gefügeveränderungen, die bei hohen Temperaturen auch ohne äußere Belastung stattfinden (Wachstum der γ' -Teilchen), berücksichtigt werden.

3.3.3. Chaboche-Modell

Für die Bestimmung der inelastischen Dehnrates führt Chaboche in seinem Modell [17/18] ebenso wie im "back stress"-Modell eine wirksame Spannung $^w\sigma_{ij}$ ein, die sich aus der Differenz von anliegender Spannung σ_{ij} und Pseudospannung X_{ij} ergibt:

$$^w\sigma_{ij} = \sigma_{ij} - X_{ij} \quad (3.53)$$

$^w\sigma_{ij}$: Effektivspannung

X_{ij} : Pseudospannung

Die viskoplastische Dehnrates wird im Chaboche-Modell nach Gl.(3.54) berechnet,

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{in} = \left\langle \frac{\sqrt{^w\sigma_{kl} \cdot ^w\sigma_{kl}} - R(\dot{\epsilon}_{ij}^{in})}{K} \right\rangle^n \cdot \frac{^w\sigma_{ij}}{\sqrt{^w\sigma_{kl} \cdot ^w\sigma_{kl}}} \quad (3.54)$$

K, n : viskose Konstanten

$R(\dot{\epsilon}_{ij}^{in})$: Funktion der akkumulierten inelastischen Dehnung

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{in} = \int_0^t \dot{\epsilon}_{ij}^{in} d\tau = \int_0^t \left| \frac{d\sqrt{\epsilon_{kl}^{in} \cdot \epsilon_{kl}^{in}}}{dt} \right| d\tau \quad (3.55)$$

wobei für die Funktion $\langle u \rangle$ gilt: $\langle u \rangle = u$ für $u > 0$

und $\langle u \rangle = 0$ für $u < 0$ (3.56)

Die Funktion R in Gl.(3.54) beschreibt die isotrope Verfestigung. Sie wirkt wie eine Schwellspannung, unterhalb der keine viskoplastischen Verformungen stattfinden. Die kinematische Verfestigung wird mit Hilfe der Pseudospannung X_{ij} beschrieben. Für die Entwicklung der Pseudospannung verwendet Chaboche den folgenden Ansatz:

$$\dot{X}_{ij} = c \cdot \left[A \cdot \ln \dot{\varepsilon}_{ij} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \ln \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} \cdot X_{ij} \right] \cdot F(\ln \tilde{\varepsilon}_{ij}) - B \cdot \sqrt{X_K \cdot X_K}^{m-1} \cdot X_{ij} + Q(\ln \tilde{\varepsilon}_{ij}) \cdot X_{ij} \cdot \dot{T} \quad (3.57)$$

A, B, c : temperaturabhängige Materialkonstanten

F, Q : temperaturabhängige Funktion

Der erste Term in Gl.(3.57) ermöglicht dabei die Modellierung des 'strain hardening'- und des Bauschinger-Effektes, während der zweite Term die zeitliche Erholung des Werkstoffes kennzeichnet. Der letzte Term in Gl.(3.57) beschreibt die Änderung der Pseudospannung unter nichtisothermen Bedingungen.

Für die Beschreibung von Hochtemperaturwerkstoffen besitzt das Chaboche-Modell gegenüber dem "back stress"-Modell den Nachteil, daß Chaboche in seinem Modell eine Schwellspannung einführt, unterhalb der es nicht zum Kriechen des Werkstoffes kommt.

4. Die Methode der Finiten Elemente

4.1. Grundlagen

Die Methode der Finiten Elemente ist ein besonders leistungsstarkes numerisches Verfahren für die Bewältigung komplexer Aufgaben aus der Natur- und Ingenieurwissenschaft. Die Lösung von Aufgaben aus der Festkörpermechanik wird dabei in mehrere Lösungsschritte untergliedert [19]. Zunächst wird die kontinuierlich zusammenhängende Struktur durch Unterteilung in finite Elemente diskretisiert. Der Verlauf der Feldvariablen innerhalb eines Elementes wird durch elementspezifische Interpolationsfunktionen und durch Werte in den Elementknotenpunkten approximiert. Durch Einsetzen der Ansätze in die das Problem beschreibenden Gleichungen, die im allgemeinen als Integralausdrücke gegeben sind, wird auf Elementebene die numerische Auswertung vorgenommen. Sodann werden die elementbezogenen Gleichungen zu globalen Systembeziehungen zusammengefaßt. Die Auflösung dieser Systembeziehungen liefert die Approximation der gesuchten Feldgrößen für die gesamte zu analysierende Struktur.

4.1.1. Gleichgewichtsbedingung für ein Element und kinematische Approximation

Die grundlegende Gleichung für die Spannungs- Verformungsanalyse eines Kontinuums im Rahmen der Finiten Elemente Methode ist die Gleichgewichtsgleichung bzw. die auf ihr basierenden Energiethoreme [19/20]. Der heute übliche Ausgangspunkt, von dem aus die meisten kommerziellen FE-Computerprogramme entwickelt sind, ist das Prinzip der virtuellen Arbeit (bzw. das Prinzip der virtuellen Verrückungen). Es besagt, daß in einer Gleichgewichtssituation für jedes virtuelle, mit den Randbedingungen verträgliche Verschiebungsfeld $\delta u_i(x_j)$, das einem Element aufgeprägt wird, die innere Arbeit $\delta^i W$ gleich der Arbeit der äußeren Kräfte $\delta^a W$ am Element ist:

$$\delta^i W = \delta^a W \quad (4.1)$$

Die innere Arbeit berechnet sich gemäß:

$$\delta^i W = \int_{\overset{(o)}{V}} \delta \varepsilon_{ij} \cdot \sigma_{ij} dV = \int_{\overset{(o)}{V}} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \cdot \sigma_{ij} dV \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

- $\delta \varepsilon_{ij}$: Virtueller Verzerrungstensor (Koordinaten des Verzerrungstensors)
 σ_{ij} : Spannungstensor
 δu_i : Virtueller Verschiebungsvektor
 x_j : Koordinatenrichtung
 $\overset{(e)}{V}$: Volumen des Elementes

Im Rahmen der Finiten Elemente Methode ist es gängige Praxis, die Koordinaten des virtuellen Verzerrungstensors und des Spannungstensors aufgrund ihrer Symmetrie ($\delta \varepsilon_{ij} = \delta \varepsilon_{ji}$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) zu einem virtuellen Verzerrungsvektor bzw. einem Spannungsvektor zusammenzufassen:

$$\delta \varepsilon_p = \begin{pmatrix} \delta \varepsilon_1 \\ \delta \varepsilon_2 \\ \delta \varepsilon_3 \\ \delta \varepsilon_4 \\ \delta \varepsilon_5 \\ \delta \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \varepsilon_{11} \\ \delta \varepsilon_{22} \\ \delta \varepsilon_{33} \\ \delta \varepsilon_{12} + \delta \varepsilon_{21} \\ \delta \varepsilon_{13} + \delta \varepsilon_{31} \\ \delta \varepsilon_{23} + \delta \varepsilon_{32} \end{pmatrix}, \quad \sigma_p = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Damit läßt sich die innere Arbeit auch in der folgenden Form schreiben:

$$\delta^i W = \int_{\overset{(e)}{V}} \delta \varepsilon_p \cdot \sigma_p \, dV \quad p = 1, \dots, 6 \quad (4.4)$$

Für die äußere virtuelle Arbeit gilt:

$$\delta^a W = \int_{\overset{(e)}{V}} \delta u_i \cdot \overset{(e)}{b}_i \, dV + \int_{\overset{(e)}{O}} \delta u_i \cdot \overset{(e)}{p}_i \, dO \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.5)$$

$\overset{(e)}{b}_i = \overset{(e)}{b}_i$: Volumenkraft (bezogen auf Einheitsvolumen)

$\overset{(e)}{p}_i$: Oberflächenkraft (bezogen auf Einheitsfläche)

$\overset{(e)}{O}$: Elementoberfläche

Die Verschiebungsgrößen innerhalb eines Elementes werden mit Hilfe von Formfunktionen $N_{ir}^{(e)}$ (i.A. Polynome) und Knotenpunktwerten ermittelt. Die Formfunktionen sind dabei so konstruiert, daß jede von ihnen an genau einem Knotenpunkt den Wert eins annimmt, während sie an allen anderen Knoten den Wert Null hat (Interpolationsfunktion):

$$\delta u_i = N_{ir}^{(e)} \cdot \delta U_r \quad i = 1, 2, 3$$

$$r = 1, \dots, N_E \quad (4.6)$$

$N_{ir}^{(e)}$: Verschiebeinterpolationsmatrix bzw. Formfunktionsmatrix

$$N_{ir}^{(e)} = N_{ir}(x_p)$$

$\delta U_r^{(e)}$: Virtuelle Verschiebung der Elementknotenpunkte

N_E : Anzahl der Freiheitsgrade des Elementes (für ein dreidimensionales Vollkörperelement ist $N = 3 \cdot \text{Anzahl der Knotenpunkte}$)

Die virtuellen Verschiebungen sind für ein dreidimensionales Element üblicherweise in der folgenden Form organisiert:

Die zum g-ten Knotenpunkt gehörenden virtuellen Verschiebungskomponenten sind $\delta U_{3g-2}^{(e)}$, $\delta U_{3g-1}^{(e)}$ und $\delta U_{3g}^{(e)}$.

Für das Beispiel eines einfachen würfelförmigen 8-Knoten-Elementes ergibt sich die folgende Formfunktionsmatrix $N_{ir}^{(e)}$, wenn der Koordinatenursprung in der Elementmitte liegt und die Koordinaten der Eckpunkte bzw. Knotenpunkte mit (a_g, b_g, c_g) bezeichnet werden, wobei $a_g, b_g, c_g = \pm 1$ sind (Abb. 4.1):

$$N_{ir}^{(e)} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 & F_2 & 0 & 0 & F_3 & 0 & 0 & F_4 & 0 & 0 & F_5 & 0 & 0 & F_6 & 0 & 0 & F_7 & 0 & 0 & F_8 & 0 & 0 \\ 0 & F_1 & 0 & 0 & F_2 & 0 & 0 & F_3 & 0 & 0 & F_4 & 0 & 0 & F_5 & 0 & 0 & F_6 & 0 & 0 & F_7 & 0 & 0 & F_8 & 0 \\ 0 & 0 & F_1 & 0 & 0 & F_2 & 0 & 0 & F_3 & 0 & 0 & F_4 & 0 & 0 & F_5 & 0 & 0 & F_6 & 0 & 0 & F_7 & 0 & 0 & F_8 \end{bmatrix}$$

wobei F_g wie folgt definiert ist:

$$F_g = \frac{1}{8} \cdot (1 + a_g \cdot x_1) \cdot (1 + b_g \cdot x_2) \cdot (1 + c_g \cdot x_3)$$

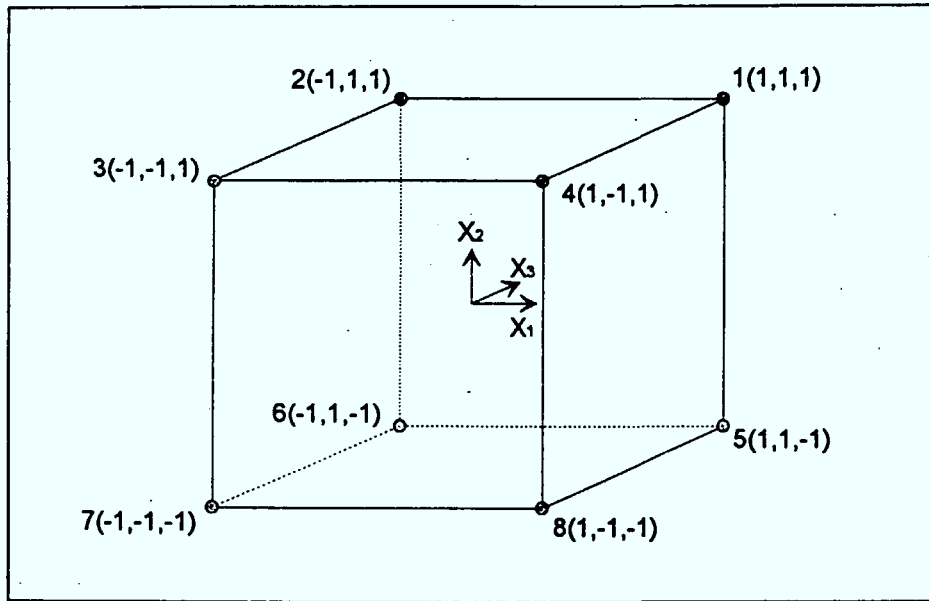


Abb. 4.1: 8-Knoten-Hexaederelement mit Seitenlänge 2

Der virtuelle Verzerrungstensor lässt sich mit Gl.(4.6) wie folgt ausdrücken:

$$\delta \epsilon_p = \begin{pmatrix} \partial N_{1r}^{(e)} / \partial x_1 \\ \partial N_{2r}^{(e)} / \partial x_2 \\ \partial N_{3r}^{(e)} / \partial x_3 \\ \partial N_{1r}^{(e)} / \partial x_2 + \partial N_{2r}^{(e)} / \partial x_1 \\ \partial N_{1r}^{(e)} / \partial x_3 + \partial N_{3r}^{(e)} / \partial x_1 \\ \partial N_{2r}^{(e)} / \partial x_3 + \partial N_{3r}^{(e)} / \partial x_2 \end{pmatrix} \cdot \delta U_r = B_{pr}^{(e)} \delta U_r \quad \begin{matrix} p = 1, \dots, 6 \\ r = 1, \dots, N \end{matrix} \quad (4.7)$$

$B_{pr}^{(e)}$: elementspezifische Dehnungs-Verschiebungs-Matrix

Durch Einsetzen dieser kinematischen Approximationen in Gl.(4.4) und Gl.(4.5) schreibt sich das Prinzip der virtuellen Arbeit in der folgenden numerisch aufbereiteten Form:

$$\int_V^{(e)} B_{pr}^{(e)} \cdot \sigma_p \, dV = \int_V^{(e)} N_{pr}^{(e)} \cdot b_p \, dV + \int_O^{(e)} N_{pr}^{(e)} \cdot p_p \, dO = P_r^{(e)} \quad (4.8)$$

$P_r^{(e)}$: Elementbelastung

Die virtuellen, im Rahmen der Randbedingungen willkürlich wählbaren Verschiebungen $\delta U_r^{(e)}$ kürzen sich hierbei heraus.

4.1.2. Stoffgleichung

Stoffgesetze oder Stoffgleichungen ("constitutive equations") verknüpfen Spannungs- und Verzerrungsgrößen. Der hier betrachtete Werkstoff läßt sich charakterisieren durch eine Kombination von näherungsweise linear elastischen und viskoplastischen Reaktionen. Vom Festigkeits- und Verformungsverhalten, sowie von den Belastungssituationen her gesehen, kann davon ausgegangen werden, daß die Verzerrungen klein bleiben. Die Annahme kleiner Verzerrungen erlaubt die additive Zusammensetzung von elastischen und inelastischen Beiträgen. Im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie [8] gilt das verallgemeinerte Hooke'sche Gesetz, das den elastischen Verzerrungstensor und den Spannungstensor linear verknüpft:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \cdot {}^e\epsilon_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (4.9)$$

$$\text{mit } {}^e\epsilon_{kl} = \epsilon_{kl} - {}^{in}\epsilon_{kl} - {}^{th}\epsilon_{kl} ; \quad \epsilon_{kl} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (4.10)$$

E_{ijkl} : Elastizitätstensor

ϵ_{kl} : Verzerrungstensor

${}^e\epsilon_{kl}$: elastische Verzerrungen

${}^{in}\epsilon_{kl}$: viskoplastische Verzerrungen

${}^{th}\epsilon_{kl}$: thermische Verzerrungen

u_k : Verschiebungsvektor

Da sowohl der Spannungs- als auch der Verzerrungstensor symmetrisch sind, muß auch der Elastizitätstensor bezüglich der beiden ersten und letzten Indizes symmetrisch sein. Die Komponenten des Elastizitätstensors können somit in einer quadratischen Matrix zusammengefaßt werden, so daß sich das Gleichungssystem (4.9) auf 6 voneinander unabhängige Gleichungen reduziert:

$$\sigma_p = E_{pq} \cdot {}^e\epsilon_q = E_{pq} \cdot (\epsilon_q - {}^{in}\epsilon_q - {}^{th}\epsilon_q) \quad (4.11)$$

Im Falle der Isotropie nimmt die Elastizitätsmatrix dabei die folgende Form an, wobei mit E der Elastizitätsmodul und ν die Poissonzahl bezeichnet sind:

$$E_{pq} = \begin{pmatrix} \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

4.1.3. Verknüpfung von Stoffgesetz, Gleichgewichtsbeziehung und kinematischer Approximation

Neben den virtuellen Verschiebungsgrößen werden auch die im Rahmen der Belastung wirklich auftretenden Verschiebungen im Element über den Formfunktion-Knotenwert-Ansatz approximiert. Bezeichnet man die im belasteten Element auftretenden Knotenpunktverschiebungen mit $\overset{(e)}{U}_s$ (sie mögen in gleicher Weise aufgereiht sein, wie die virtuellen Größen (Abschnitt 4.1.1)), so ist das Verschiebungsfeld u_i durch

$$u_i = N_{is} \cdot \overset{(e)}{U}_s \quad (4.13)$$

und die q-te Komponente des totalen Verzerrungsvektors durch den Ausdruck

$$\varepsilon_q = B_{qs} \cdot \overset{(e)}{U}_s \quad (4.14)$$

gegeben.

Durch Einsetzen dieser Terme in Gl.(4.11) erhält man die folgende Form der Stoffgleichung:

$$\sigma_p = E_{pq} \cdot (B_{qs} \cdot \overset{(e)}{U}_s - {}^{in}\varepsilon_q - {}^{th}\varepsilon_q) \quad (4.15)$$

Wird dieser Ausdruck in Gl.(4.8) eingefügt, so läßt sich die Gleichgewichtsbedingung wie folgt schreiben:

$$\int_V \overset{(e)}{B}_{pr} \cdot E_{pq} \cdot \overset{(e)}{B}_{qs} \cdot \overset{(e)}{U}_s dV - \int_V \overset{(e)}{B}_{pr} \cdot E_{pq} \cdot ({}^{p}\varepsilon_q + {}^{th}\varepsilon_q) dV = \overset{(e)}{P}_r \quad (4.16)$$

Wird an dieser Stelle die zu einer Matrix C_{ij} transponierte bzw. konjugierte Matrix

$$C_{ij}^T = C_{ji} \quad (4.17)$$

eingeführt, so ergibt sich aus Gl.(4.16):

$$\int_{(e)V} B_{rp}^{(e)T} \cdot E_{pq} \cdot B_{qs}^{(e)} dV \cdot U_s^{(e)} - \int_{(e)V} B_{rp}^{(e)T} \cdot E_{pq} \cdot (p\varepsilon_q + {}^{th}\varepsilon_q) dV = P_r^{(e)} \quad (4.18)$$

Das Integral $\int_{(e)V} B_{rp}^{(e)T} \cdot E_{pq} \cdot B_{qs}^{(e)} dV$ wird im Rahmen der Finiten Elemente Methode als elastische Elementsteifigkeitsmatrix $K_{rs}^{(e)}$ bezeichnet:

$$K_{rs}^{(e)} = \int_{(e)V} B_{rp}^{(e)T} \cdot E_{pq} \cdot B_{qs}^{(e)} dV \quad (4.19)$$

Die Gleichgewichtsbedingung lautet somit:

$$K_{rs}^{(e)} U_s^{(e)} = P_r^{(e)} + \int_{(e)V} B_{rp}^{(e)T} \cdot E_{pq} \cdot (p\varepsilon_q + {}^{th}\varepsilon_q) dV \quad \begin{matrix} p, q = 1, \dots, 6 \\ r, s = 1, \dots, N \end{matrix} \quad (4.20)$$

$K_{rs}^{(e)}$: elastische Elementsteifigkeitsmatrix

4.1.4. Globale Gleichgewichtsbedingung

Die Betrachtungen bisher haben sich auf ein einzelnes herausgegriffenes Element der Struktur bezogen. Ein solches Element besitzt eine individuelle Numerierung der Freiheitsgrade, unter Umständen sogar ein eigenes lokales Koordinatensystem, in dem die Integrale des Prinzips der virtuellen Arbeit ausgewertet werden. Nun können aber z.B. aus Gründen der Stetigkeit die Verschiebungsfelder in den Elementen nicht völlig losgelöst voneinander betrachtet werden. Vielmehr ist es so, daß zusammenhängende Elemente mit gemeinsamen Knotenpunkten in diesen gleiche Verschiebungsgrößen besitzen. Aus diesem Grunde muß ein Zusammenhang zwischen der elementbezogenen Beschreibung der Verschiebungsfreiheitsgrade und ihrer Beschreibung auf Strukturebene hergestellt werden. Auf Strukturebene werden dazu unabhängig von der

Elementanordnung sämtliche mit den Knotenpunkten verknüpfte Freiheitsgrade ("globale Freiheitsgrade") durchnummeriert.

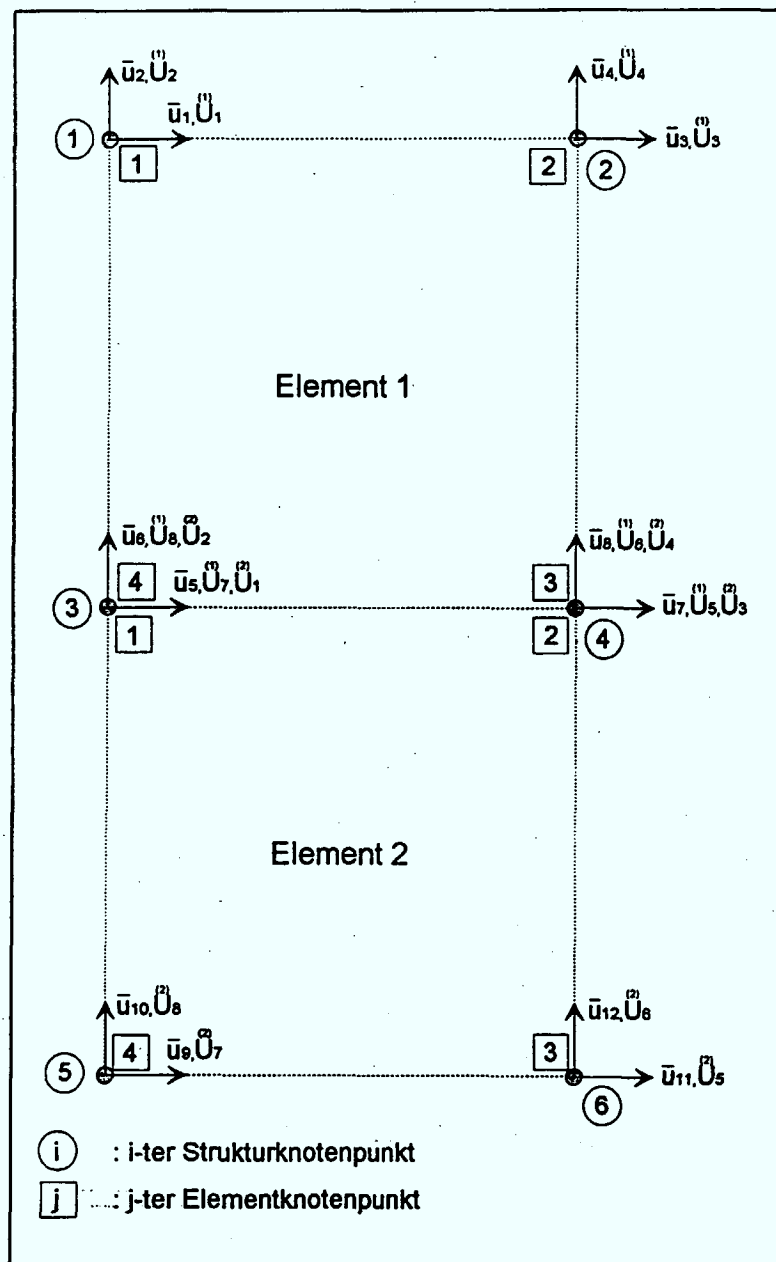


Abb.4.2: Ebene Struktur bestehend aus zwei Elementen und sechs Knoten;
jeder Knoten trägt zwei Freiheitsgrade

In Abb.4.2 ist ein ebenes Beispiel zur Verdeutlichung aufgeführt. Es enthält 2 Elemente und 6 Knotenpunkte, von denen jeder zwei Freiheitsgrade besitzt. Die elementspezifische Knotenpunkt- bzw. Freiheitsgradnummerierung läuft in beiden Elementen jeweils von 1 bis 8, die globalen Freiheitsgrade von 1 bis 12. Die Zuordnung von Elementfreiheitsgrad zum entsprechenden globalen Freiheitsgrad, bzw. die Zuordnung der entsprechenden Feldwerte (Verschiebungen), wird über eine Boole'sche Matrix vorgenommen [21/22]:

$$\overset{(e)}{U}_r = \overset{(e)}{A}_{rt} \bar{u}_t \quad t = 1, \dots, n_s \quad (4.21)$$

$\overset{(e)}{A}_{rt}$: elementspezifische Boole'sche Matrix

$\bar{u}_t$: Strukturknotenpunktverschiebungen

n_s : Freiheitsgrade der Struktur

Für das Beispiel in Abb.(4.2) ergibt sich die folgende Zuordnung von Element- und Strukturknotenpunktverschiebungen:

Element 1:

$$\begin{pmatrix} \overset{(1)}{U}_1 \\ \overset{(1)}{U}_2 \\ \overset{(1)}{U}_3 \\ \overset{(1)}{U}_4 \\ \overset{(1)}{U}_5 \\ \overset{(1)}{U}_6 \\ \overset{(1)}{U}_7 \\ \overset{(1)}{U}_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{U}_3 \\ \bar{U}_4 \\ \bar{U}_5 \\ \bar{U}_6 \\ \bar{U}_7 \\ \bar{U}_8 \\ \bar{U}_9 \\ \bar{U}_{10} \\ \bar{U}_{11} \\ \bar{U}_{12} \end{pmatrix}$$

Element 2:

$$\begin{pmatrix} \overset{(2)}{U}_1 \\ \overset{(2)}{U}_2 \\ \overset{(2)}{U}_3 \\ \overset{(2)}{U}_4 \\ \overset{(2)}{U}_5 \\ \overset{(2)}{U}_6 \\ \overset{(2)}{U}_7 \\ \overset{(2)}{U}_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{U}_3 \\ \bar{U}_4 \\ \bar{U}_5 \\ \bar{U}_6 \\ \bar{U}_7 \\ \bar{U}_8 \\ \bar{U}_9 \\ \bar{U}_{10} \\ \bar{U}_{11} \\ \bar{U}_{12} \end{pmatrix}$$

Durch Einführung der Boole'schen Matrix wird nun der Weg vorgezeichnet, auf dem die Summation der Integrale über die gesamte Struktur ausgeführt werden kann. Für die innere virtuelle Arbeit gilt:

$$\delta^I W = \int_V \delta \varepsilon_p \cdot \sigma_p \, dV = \sum_e \int_V^{(e)} \mathbf{B}_{pr}^{(e)} \cdot \sigma_p \cdot \delta \mathbf{U}_r^{(e)} \, dV = \sum_e \int_V^{(e)} \mathbf{B}_{pr}^{(e)} \cdot \sigma_p \cdot \mathbf{A}_{rt}^{(e)} \cdot \delta \bar{u}_t \, dV \quad (4.22)$$

V : Strukturvolumen

$\delta \bar{u}_t$: virtueller Verschiebungsvektor der Strukturknotenpunkte

Für die Arbeit der Oberflächenlasten und Volumenkräfte an der Struktur gilt bei einer virtuellen Verschiebung dementsprechend:

$$\begin{aligned} \delta^a W &= \int_V \delta u_i \cdot b_i \, dV + \int_O \delta u_i \cdot p_i \, dO = \sum_e \left\{ \int_V^{(e)} \mathbf{N}_{pr}^{(e)} \cdot b_p \cdot \delta \mathbf{U}_r^{(e)} \, dV + \int_O^{(e)} \mathbf{N}_{pr}^{(e)} \cdot p_p \cdot \delta \mathbf{U}_r^{(e)} \, dO \right\} \\ &= \sum_e \left\{ \int_V^{(e)} \mathbf{N}_{pr}^{(e)} \cdot b_p \cdot \mathbf{A}_{rt}^{(e)} \cdot \delta \bar{u}_t \, dV + \int_O^{(e)} \mathbf{N}_{pr}^{(e)} \cdot p_p \cdot \mathbf{A}_{rt}^{(e)} \cdot \delta \bar{u}_t \, dO \right\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

O : Strukturoberfläche

Zuerst wird der Ausdruck für $\delta^I W$ ausgewertet, aus dem sich die Struktursteifigkeitsmatrix ergibt.

Einsetzen von σ_p nach Gl.(4.15) in Gl.(4.22) liefert die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \delta^I W &= \sum_e \int_V^{(e)} \mathbf{B}_{pr}^{(e)} \cdot E_{pq} \cdot (\mathbf{B}_{qs}^{(e)} \cdot \mathbf{U}_s^{(e)} - \ln \varepsilon_q - th \varepsilon_q) \cdot \mathbf{A}_{rt}^{(e)} \cdot \delta \bar{u}_t \, dV \\ &= \sum_e \int_V^{(e)} \mathbf{B}_{pr}^{(e)} \cdot E_{pq} \cdot (\mathbf{B}_{qs}^{(e)} \cdot \mathbf{A}_{su}^{(e)} \cdot \bar{u}_u - \ln \varepsilon_q - th \varepsilon_q) \cdot \mathbf{A}_{rt}^{(e)} \cdot \delta \bar{u}_t \, dV \quad u=1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \delta^I W = & \sum_e \int_{V^{(e)}} A_{tr}^{(e)T} \cdot B_{rp}^{(e)T} \cdot E_{pq} \cdot B_{qs}^{(e)} \cdot A_{su}^{(e)} \cdot \bar{u}_u \cdot \delta \bar{u}_t dV \\
& - \sum_e \int_{V^{(e)}} A_{tr}^{(e)T} \cdot B_{rp}^{(e)T} \cdot E_{pq} \cdot (\ln \varepsilon_q + th \varepsilon_q) \cdot \delta \bar{u}_t dV
\end{aligned} \quad (4.25)$$

Da die Boole'sche Matrix $A_{ij}^{(e)}$ bei der Integration über das Elementvolumen eine Konstante ist, kann sie aus dem Integralausdruck herausgezogen werden:

$$\sum_e \int_{V^{(e)}} A_{tr}^{(e)T} \cdot B_{rp}^{(e)T} \cdot E_{pq} \cdot B_{qs}^{(e)} \cdot A_{su}^{(e)} \cdot \bar{u}_u \cdot \delta \bar{u}_t dV = \left\{ \sum_e A_{tr}^{(e)T} \cdot \int_{V^{(e)}} B_{rp}^{(e)T} \cdot E_{pq} \cdot B_{qs}^{(e)} dV \cdot A_{su}^{(e)} \right\} \cdot \bar{u}_u \cdot \delta \bar{u}_t \quad (4.26)$$

Mit der Definition der elastischen Elementsteifigkeitsmatrix nach Gl.(4.19) gilt weiter:

$$\left\{ \sum_e A_{tr}^{(e)T} \cdot \int_{V^{(e)}} B_{rp}^{(e)T} \cdot E_{pq} \cdot B_{qs}^{(e)} dV \cdot A_{su}^{(e)} \right\} \cdot \bar{u}_u \cdot \delta \bar{u}_t = \left\{ \sum_e A_{tr}^{(e)T} \cdot K_{rs}^{(e)} \cdot A_{su}^{(e)} \right\} \cdot \bar{u}_u \cdot \delta \bar{u}_t = K_{tu} \cdot \bar{u}_u \cdot \delta \bar{u}_t \quad (4.27)$$

K_{tu} : elastische Struktursteifigkeitsmatrix

$$K_{tu} = \sum_e A_{tr}^{(e)T} \cdot K_{rs}^{(e)} \cdot A_{su}^{(e)} \quad (4.28)$$

Die virtuelle innere Arbeit ergibt sich somit zu:

$$\delta^I W = K_{tu} \cdot \bar{u}_u \cdot \delta \bar{u}_t - \left\{ \sum_e \int_{V^{(e)}} A_{tr}^{(e)T} \cdot B_{rp}^{(e)T} \cdot E_{pq} \cdot (\ln \varepsilon_q + th \varepsilon_q) dV \right\} \cdot \delta \bar{u}_t \quad (4.29)$$

Die Summe der Elementvolumenintegrale kann in einem weiteren Schritt durch ein Integral über das Gesamtvolumen der Struktur ersetzt werden:

$$\delta^I W = K_{tw} \cdot \bar{u}_u \cdot \delta \bar{u}_t - \int_V \bar{A}_{tr}^{(e)T} \cdot \bar{B}_{rp}^{(e)T} \cdot E_{pq} \cdot (\ln \varepsilon_q + {}^{th} \varepsilon_q) dV \cdot \delta \bar{u}_t \quad (4.30)$$

In gleicher Weise kann mit den Elementvolumenintegralen in der Gleichung der äußeren virtuellen Arbeit (Gl.(4.23)) verfahren werden. Die Summe der Elementoberflächenintegrale ist durch ein Integral über die Strukturoberfläche ersetzbar. Hierbei wird von folgendem Sachverhalt Gebrauch gemacht. Im Strukturinneren liegende Flächen von zwei zusammenstoßenden Elementen weisen Oberflächenbelastungen entgegengesetzten Vorzeichens auf (actio = reactio). Bei vorausgesetzter Stetigkeit der virtuellen Verschiebungen heben sich deshalb die Integrationsbeiträge der innenliegenden Elementoberflächen paarweise auf. Bei einer Summation auf Elementebene bleiben somit nur die Beiträge der Elementoberflächen übrig, die Teil der Strukturoberfläche sind.

$$\begin{aligned} \delta^a W &= \sum_e \left\{ \int_V \bar{N}_{pr}^{(e)} \cdot b_p \cdot \bar{A}_{rt}^{(e)} \cdot \delta \bar{u}_t dV + \int_O \bar{N}_{pr}^{(e)} \cdot p_p \cdot \bar{A}_{rt}^{(e)} \cdot \delta \bar{u}_t dO \right\} \\ &= \int_V \bar{N}_{pr}^{(e)} \cdot b_p \cdot \bar{A}_{rt}^{(e)} dV \cdot \delta \bar{u}_t + \int_O \bar{N}_{pr}^{(e)} \cdot p_p \cdot \bar{A}_{rt}^{(e)} dO \cdot \delta \bar{u}_t \end{aligned} \quad (4.31)$$

Die globale Gleichgewichtsbedingung lautet somit:

$$K_{tw} \cdot \bar{u}_u - \int_V \bar{A}_{tr}^{(e)T} \cdot \bar{B}_{rp}^{(e)T} \cdot E_{pq} \cdot (\ln \varepsilon_q + {}^{th} \varepsilon_q) dV = \int_V \bar{N}_{pr}^{(e)} \cdot b_p \cdot \bar{A}_{rt}^{(e)} dV + \int_O \bar{N}_{pr}^{(e)} \cdot p_p \cdot \bar{A}_{rt}^{(e)} dO \quad (4.32)$$

$$\Rightarrow K_{tw} \cdot \bar{u}_u = \int_V \bar{N}_{pr}^{(e)} \cdot \bar{A}_{rt}^{(e)} \cdot b_p dV + \int_O \bar{N}_{pr}^{(e)} \cdot \bar{A}_{rt}^{(e)} \cdot p_p dO + \int_V \bar{A}_{tr}^{(e)T} \cdot \bar{B}_{rp}^{(e)T} \cdot E_{pq} \cdot (\ln \varepsilon_q + {}^{th} \varepsilon_q) dV \quad (4.33)$$

Hierbei muß berücksichtigt werden, daß bei der Integration über das Strukturvolumen bzw. die Strukturoberfläche jeweils die Dehnungs-Verschiebungs-Matrix, Boole'sche Matrix und Formfunktion desjenigen Elementes eingesetzt werden muß, das den aktuellen Integrationspunkt enthält.

Das Produkt von Dehnungs-Verschiebungs-Matrix $B_{pr}^{(e)}$ und Boole'scher Matrix $A_{rt}^{(e)}$ bzw. von Formfunktionsmatrix $N_{pr}^{(e)}$ und Boole'scher Matrix $A_{rt}^{(e)}$ soll im Folgenden zu einer Dehnungs-Verschiebungs-Matrix auf Strukturebene B_{pt} bzw. einer Formfunktionsmatrix auf Strukturebene N_{pt} zusammengefaßt werden:

$$B_{pt} = B_{pr}^{(e)} \cdot A_{rt}^{(e)} \quad (4.34)$$

$$N_{pt} = N_{pr}^{(e)} \cdot A_{rt}^{(e)} \quad (4.35)$$

Für die Gleichgewichtsbedingung folgt damit:

$$\begin{aligned} K_{tu} \cdot \bar{u}_u &= \int_V N_{tp}^T \cdot b_p \, dV + \int_O N_{tp}^T \cdot p_p \, dO + \int_V B_{tp}^T \cdot E_{pq} \cdot ({}^{ln}\epsilon_q + {}^{th}\epsilon_q) \, dV \\ &= P_t + \int_V B_{tp}^T \cdot E_{pq} \cdot ({}^{ln}\epsilon_q + {}^{th}\epsilon_q) \, dV \end{aligned} \quad (4.36)$$

P_t : Strukturbelastung

Für die weiteren Ausführungen wird ebenfalls die noch nicht mit dem Stoffgesetz verknüpfte Form der globalen Gleichgewichtsbedingung benötigt:

$$\int_V B_{tp}^T \cdot \sigma_p \, dV = P_t \quad (4.37)$$

Da in Gleichung (4.36) die ${}^{ln}\epsilon_q$ von den Knotenpunktverschiebungen abhängen, stellt (4.36) im allgemeinen ein nichtlineares Gleichungssystem in den Knotenpunktverschiebungen $\bar{u}_u$ dar. Die Lösung erfolgt am günstigsten schrittweise. Hängt die Lösung des strukturmechanischen Problems, wie es hier der Fall ist, von der Zeit ab, so wird der zu analysierende Zeitschritt in kleine Zeitinkremente Δt aufgeteilt. Die Gleichgewichtsgleichung zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ wird bei bekanntem Zustand zur Zeit t folgendermaßen formuliert:

$$(K_{tu} + \Delta K_{tu}) \cdot \bar{u}_u = P_t + \Delta P_t + \int_V B_{tp}^T \cdot (E_{pq} + \Delta E_{pq}) \cdot ({}^{ln}\epsilon_q + \Delta {}^{ln}\epsilon_q + {}^{th}\epsilon_q + \Delta {}^{th}\epsilon_q) \, dV \quad (4.38)$$

$$\text{bzw.} \quad \int_V B_{tp}^T \cdot (\sigma_p + \Delta \sigma_p) \, dV = P_t + \Delta P_t \quad (4.39)$$

Beachtet man die zum Zeitpunkt t als erfüllt vorausgesetzte Gleichgewichtslösung, so folgt aus Gl.(4.39) die inkrementelle Form der Gleichgewichtsbedingung, die für die folgende Beschreibung der Arbeitsweise von ABAQUS noch benötigt wird:

$$\int_V \mathbf{B}_p^T \cdot \Delta \sigma_p \, dV = \Delta P_t \quad (4.40)$$

Die Integrale der Gleichgewichtsbedingung werden numerisch mit Hilfe der Gauß'schen Integration ausgewertet, so daß im Rahmen von FE-Programmen die Feldwerte nur an den Stützstellen der numerischen Integration (Gaußpunkte) zu berechnen sind.

4.2. Einbinden eines Werkstoffmodells in ABAQUS

Im FE-Programm ABAQUS kann der Benutzer ein spezielles Unterprogramm (Subroutine UMAT) erstellen, das ihm das Einfügen eigener Werkstoffmodelle ermöglicht. Die Schnittstelle Stoffgesetzunterprogramm - Hauptprogramm ist klar beschrieben [14/23]. Im Prinzip benötigt der Programmierer keinerlei Kenntnisse darüber, wie die an das Unterprogramm übergebenen Daten erzeugt wurden und die an das Hauptprogramm zu übergebenden Daten weiterverarbeitet werden. Die hier zugrunde liegende Philosophie ist die im folgenden beschriebene. Das FE-Hauptprogramm übergibt neben dem vollständigen Satz der Zustandsgrößen zum Zeitpunkt t das Inkrement der totalen Verzerrung $\Delta \epsilon$, sowie das Zeitinkrement Δt . Damit ist der Programmierer in der Lage, unter Verwendung seines Stoffgesetzes die Spannung und Zustandsgrößen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ zu berechnen. Das Unterprogramm wird dabei an jedem Gaußpunkt der Struktur aufgerufen. Die vom Unterprogramm zurückgegebenen Spannungen werden vom FE-Hauptprogramm auf Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung überprüft. Damit wird die "Arbeitsteilung" von Umat-Unterprogramm und ABAQUS-Hauptprogramm deutlich. Der Benutzer kümmert sich um die Integration des Stoffgesetzes, während ABAQUS sich um die statische Verträglichkeit des Spannungsfeldes sorgt.

Dieses Prinzip der konsistenten Ermittlung eines Spannungsfeldes, bei dem Stoffgesetz und Gleichgewichtsbedingung im Einklang sind, erfordert ein iteratives Vorgehen, das dem Programmierer noch eine weitere Aufgabe stellt. Sind nämlich die Spannungen im Rahmen gegebener Fehlertoleranzen nicht statisch verträglich, so hat eine Korrektur zu erfolgen. Ausgehend von Gl.(4.40) ist das Vorgehen wie folgt:

Nach der i -ten Iteration liege ein verbesserungsbedürftiges inkrementelles Spannungsfeld $\Delta \sigma_p^{(i)}$ vor. Für dieses Feld kann nun eine Korrektur $\delta \Delta \sigma_p$ gefunden werden, so daß Gl.(4.40) erfüllt ist:

$$\int_V B_{tp}^T \cdot (\Delta \sigma_p^{(l)} + \delta \Delta \sigma_p) dV = \Delta P_t \quad (4.41)$$

Das Korrekturfeld $\delta \Delta \sigma_p$ kann im weiteren durch eine entsprechende Korrektur der Inkremente der Knotenpunktverschiebungen ausgedrückt werden, wobei die Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden:

$$\delta \Delta \sigma_p \approx \frac{\partial \Delta \sigma_p}{\partial \Delta \varepsilon_q} \cdot \frac{\partial \Delta \varepsilon_q}{\partial \Delta \bar{u}_r} \cdot \delta \Delta \bar{u}_r = \frac{\partial \Delta \sigma_p}{\partial \Delta \varepsilon_q} \cdot B_{qr} \cdot \delta \Delta \bar{u}_r \quad (4.42)$$

Einsetzen von Gl.(4.42) in Gl.(4.41) führt zu folgendem:

$$\int_V B_{tp}^T \cdot \frac{\partial \Delta \sigma_p}{\partial \Delta \varepsilon_q} \cdot B_{qr} dV \cdot \delta \Delta \bar{u}_r \approx \Delta P_t - \int_V B_{tp}^T \cdot \Delta \sigma_p^{(l)} dV \quad (4.43)$$

Hierbei wird die Größe

$$D_{pq} = \frac{\partial \Delta \sigma_p}{\partial \Delta \varepsilon_q} = \frac{\partial \sigma_p^{t+\Delta t}}{\partial \varepsilon_q^{t+\Delta t}} \quad (4.44)$$

als Tangentenmodul bezeichnet, so daß sich Gl.(4.43) folgendermaßen schreiben läßt:

$$\int_V B_{tp}^T \cdot D_{pq} \cdot B_{qr} dV \cdot \delta \Delta \bar{u}_r \approx \Delta P_t - \int_V B_{tp}^T \cdot \Delta \sigma_p^{(l)} dV \quad (4.45)$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich nun nach der gesuchten Korrekturgröße $\delta \Delta \bar{u}_r$ auflösen. Hierzu muß allerdings der stoffspezifische Tangentenmodul vom Anwender zur Verfügung gestellt werden.

Die Wechselwirkung des Unterprogramms UMAT mit dem FE-Hauptprogramm ist in Abb.4.3 dargestellt [14]. Zunächst werden für den neuen Zeitschritt die Änderungen der äußeren Lasten ΔP_t vom Hauptprogramm bestimmt. Der erste Schätzwert für die Änderung der Knotenpunktverschiebungen wird von ABAQUS zu Null gesetzt ($\Delta \bar{u}_t^{(0)} = 0_p$). Damit werden auch alle Verzerrungsinkremente an den Integrationspunkten zu Null:

$$\Delta \varepsilon_p^{(0)} = B_{pt} \cdot \Delta \bar{u}_t^{(0)} = 0_p \quad (4.46)$$

Dieser Wert, die Zustandsgrößen zum Zeitpunkt t und das Zeit- und Temperaturinkrement wird nun für jeden Integrationspunkt an das UMAT-Unterprogramm übergeben. In UMAT werden die Spannungsinkremente über die inkrementelle Stoffgleichung $\Delta\sigma_p^{(l)} = E_{pq} \cdot \Delta\epsilon_q^{(l)} + \Delta E_{pq} \cdot \epsilon_q$ berechnet. Außerdem werden die zeitabhängigen Hilfsgrößen ξ_p über den Zeitschritt Δt integriert und der Tangentenmodul D_{pq} berechnet. Liegen alle Größen an den Iterationspunkten vor, so wird vom Hauptprogramm das Residuum aus dem Ungleichgewicht der rechten und linken Seite der Gleichgewichtsbedingung ermittelt:

$$R_t^{(l)} = \Delta P_t - \int_V B_{pt}^T \cdot \Delta\sigma_p^{(l)} dV \quad (4.47)$$

Ist der Wert der betragsmäßig größten Komponente des Residuums kleiner als die geforderte Toleranz PTOL, so werden vom Hauptprogramm die berechneten Werte zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ übernommen und ein neuer Zeitschritt begonnen. Hat eine der Komponenten des Residuums einen betragsmäßig größeren Wert als PTOL, so wird über das Residuum und die tangentiellen Steifigkeitsmatrix

$$\hat{K}_t = \int_V B_{tp}^T \cdot D_{pq} \cdot B_{qu} dV \quad (4.48)$$

eine Verbesserung des Schätzwertes für die Änderung der Knotenpunktverschiebungen nach Gl.(4.49) berechnet:

$$\Delta\bar{u}_u^{(l+1)} = \Delta\bar{u}_u^{(l)} + \delta\Delta\bar{u}_u \quad \text{mit} \quad \delta\Delta\bar{u}_u = \hat{K}_t^{-1} \cdot R_t^{(l)} \quad (4.49)$$

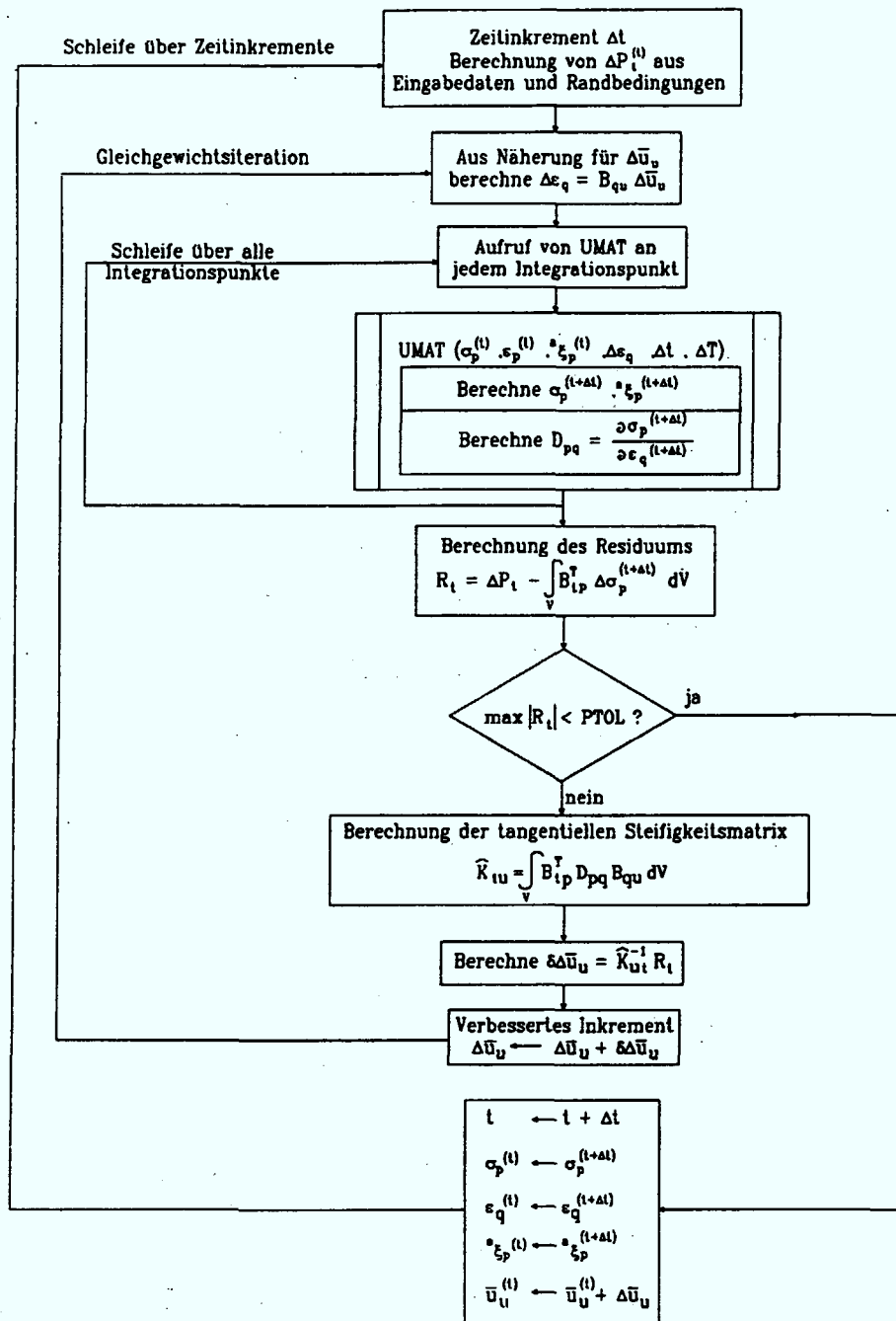


Abb.(4.3): Flußdiagramm der FE-Analyse in ABAQUS bei nichtlinearem Materialgesetz

Mit diesem neuen Schätzwert für die Änderung der Knotenpunktverschiebungen wird die Gleichgewichtsiteration fortgesetzt. Die Anzahl der Iterationsschritte bestimmt die Zeitschrittsteuerung. Ist die Konvergenz der Iteration schlecht, so wird vom Hauptprogramm die Zeitschrittweite Δt verkleinert und die Berechnung erneut durchgeführt. Ist die Konvergenz dagegen sehr gut, so wird für den folgenden Zeitschritt eine größere Zeitschrittweite gewählt. Dem Benutzer ist es nicht möglich, die Zeitschrittweite direkt vorzugeben.

Der Abbildung (4.3) ist zu entnehmen, daß das Unterprogramm UMAT innerhalb von drei Schleifen liegt. Eine effektive Programmierung der UMAT-Routine kann somit eine entscheidende Verringerung der Rechenzeit bewirken. Außerdem wird durch die Wahl des numerischen Integrationsverfahrens die Anzahl der Gleichgewichtsiterationen und somit auch die Zeitschrittsteuerung beeinflusst.

5. Numerische Bearbeitung des Werkstoffmodells zum Einsatz in ABAQUS

Der Einbau des "back stress"-Modells in das Finite Elemente Programm ABAQUS erfordert die Überführung des mehrachsigen Stoffgesetzes in eine inkrementelle Form. Die Differentialgleichungen müssen hierzu numerisch über ein Zeitinkrement Δt integriert werden. Die Wahl eines geeigneten Integrationsverfahrens ist dabei für die Berechnung besonders wichtig, da sie sowohl Einfluß auf die Genauigkeit, als auch auf die Rechenzeit hat. Bei der Überführung des Stoffgesetzes in eine inkrementelle Form muß außerdem die für Finite Elemente Programme typische Anordnung der Komponenten von Spannungstensor und Dehnungstensor zu Vektoren berücksichtigt werden.

5.1. Integrationsverfahren:

Die Bewertung der unterschiedlichen Integrationsverfahren soll nach den folgenden Kriterien durchgeführt werden [14]:

- Genauigkeit
- numerische Stabilität
- Rechenzeitbedarf
- Aufwand und Zuverlässigkeit der Implementierung

Von besonderem Interesse sind hierbei die ersten beiden Punkte, die die Qualität des Ergebnisses bestimmen.

Die einfachste Integrationsmethode ist die Explizit-Euler-Methode [24]. Ausgehend von einer Differentialgleichung der Form

$$\dot{y} = f(y,t) \quad (5.1)$$

wird die Lösung wie folgt approximiert:

$$y^{t+\Delta t} = y^t + f(y^t, t) \cdot \Delta t \quad (5.2)$$

Diese Methode hat gegenüber den anderen Integrationsmethoden den Vorteil, daß keine Gleichgewichtsiteration durchgeführt werden muß, da das Residuum nach dem ersten Iterationsschritt immer Null wird². Ein Nachteil des Integrationsverfahren ist allerdings, daß es nur bis zu einem bestimmten kritischen Zeitinkrement stabil ist. Der Benutzer

² siehe Anhang Kapitel 11.1

muß somit ständig in die Zeitschrittsteuerung eingreifen, selbst dann, wenn die Lösung stationär wird und somit beliebig große Zeitschrittweiten bei stabilen Integrationsverfahren möglich wären. Ein weiterer Nachteil ist, daß das Verfahren die Fehlerordnung 1 hat. Somit wird die maximale Zeitschrittweite durch einen vorgegebenen maximalen lokalen Fehler klein gegenüber Integrationsmethoden höherer Fehlerordnung. Besonders ineffektiv wird diese Integrationsmethode dann, wenn in einer großen FE-Struktur die Zeitschrittweite durch wenige Elemente, welche durch starke Nichtlinearität gekennzeichnet sind, bestimmt wird.

Abhilfe schafft hier die Subinkrementtechnik, bei der das vom FE-Programm vorgegebene Zeitinkrement Δt in n Subinkremente unterteilt wird. Die Lösung der Differentialgleichung (5.1) wird durch folgende Formel approximiert:

$$y^{t+\Delta t} = y^t + \sum_{i=0}^{n-1} f(y^{t+i \cdot d\Delta t}, t+i \cdot d\Delta t) \cdot d\Delta t \quad (5.3)$$

$$\text{mit } d\Delta t = \frac{\Delta t}{n} \quad (5.4)$$

Die Anzahl der Subinkremente n kann nun aufgrund einer Fehlerabschätzung oder eines Stabilitätskriteriums für jeden Integrationspunkt einer FE-Struktur individuell vorgegeben werden. Allerdings hat die Subinkrementtechnik den Nachteil, daß die Gleichgewichtsiteration durchgeführt werden muß (siehe Anhang A1) und somit an dieser Stelle keine Aussage über die Verringerung der Rechenzeit gemacht werden kann. Während bei der Explizit-Euler-Methode der Tangentenmodul durch den Elastizitätsmodul gegeben ist, läßt sich für die Subinkrementtechnik kein geschlossener Ausdruck für den Tangentenmodul angeben. Daher wird in diesem Fall der Elastizitätsmodul als Näherung für den Tangentenmodul benutzt.

Hornberger [14] untersuchte in seiner Arbeit andere explizite Integrationsmethoden (Milne, Runge-Kutta 4. Ordnung, modifiziertes Euler-Verfahren) in Bezug auf Genauigkeit und Rechenzeitbedarf. Er stellte hierbei fest, daß die Explizit-Euler-Methode in Verbindung mit einer indirekten Zeitschrittsteuerung die höchste Effektivität besitzt. Daher wird auf die Untersuchung der anderen expliziten Integrationsmethoden verzichtet.

Dahlquist [25] zeigte, daß uneingeschränkt stabile lineare Mehrschrittverfahren notwendigerweise implizit sein müssen. Daher wird zusätzlich zur Explizit-Euler-Methode die Trapezregel (Adams-Moulton-Formel vom Grad 1), deren Stabilität in [24] gezeigt

wurde, als weitere Integrationsmethode untersucht. Bei der Trapezregel wird die Lösung der Differentialgleichung (5.1) durch folgende Formel approximiert:

$$y^{t+\Delta t} = y^t + \left\{ \frac{f(y^{t+\Delta t}, t+\Delta t) + f(y^t, t)}{2} \right\} \cdot \Delta t \quad (5.5)$$

Die Trapezregel hat die globale Fehlerordnung 2, so daß bei diesem Integrationsverfahren die maximale Zeitschrittweite Δt durch eine Fehlerabschätzung weniger stark beschränkt ist, wie bei der Explizit-Euler-Methode. Die Schwierigkeiten der impliziten Integrationsverfahren liegen allerdings in der Bestimmung des Tangentenmoduls. Um in der Gleichgewichtsiteration die quadratische Konvergenz der Newton-Methode nutzen zu können, muß der Tangentenmodul durch Linearisierung des Integrationsalgorithmus bestimmt werden [14]. Da jedoch hierdurch der Aufwand der Implementierung sehr groß würde, wird für das implizite Integrationsverfahren im Rahmen dieser Arbeit wiederum der Elastizitätstensor als Näherung für den Tangentenmodul benutzt.

5.2. Inkrementelle Form des Stoffgesetzes

Die Umsetzung des mehrachsigen Stoffgesetzes in eine inkrementelle Form soll zunächst für die Explizit-Euler-Methode dargestellt werden.

Die differentielle Form des Hooke'schen Gesetzes lautet:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} = & \lambda \cdot (\dot{\epsilon}_{kk} - \ln \dot{\epsilon}_{kk} - \text{th} \dot{\epsilon}_{kk}) \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu \cdot (\dot{\epsilon}_{ij} - \ln \dot{\epsilon}_{ij} - \text{th} \dot{\epsilon}_{ij}) \\ & + \lambda \cdot (\dot{\epsilon}_{kk} - \ln \dot{\epsilon}_{kk} - \text{th} \dot{\epsilon}_{kk}) \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu \cdot (\dot{\epsilon}_{ij} - \ln \dot{\epsilon}_{ij} - \text{th} \dot{\epsilon}_{ij}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Die numerische Integration über ein Zeitinkrement Δt mit Hilfe der Explizit-Euler-Methode liefert damit:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{ij} = & \Delta \lambda \cdot (\epsilon_{kk}^t - \ln \epsilon_{kk}^t - \text{th} \epsilon_{kk}^t) \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \Delta \mu \cdot (\epsilon_{ij}^t - \ln \epsilon_{ij}^t - \text{th} \epsilon_{ij}^t) \\ & + \lambda^t \cdot (\Delta \epsilon_{kk} - \Delta \ln \epsilon_{kk} - \Delta \text{th} \epsilon_{kk}) \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu^t \cdot (\Delta \epsilon_{ij} - \Delta \ln \epsilon_{ij} - \Delta \text{th} \epsilon_{ij}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Faßt man die Komponenten der Tensoren in der in Kapitel 4.1 beschriebenen Weise zu Vektoren zusammen, so ergibt sich für das Inkrement des Spannungsvektors:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_p = & \Delta \lambda \cdot (\text{Sp}(\epsilon^t) - \text{Sp}(\ln \epsilon^t) - \text{Sp}(\text{th} \epsilon^t)) \cdot 1_p + 2 \cdot \Delta \mu \cdot (\epsilon_p^t - \ln \epsilon_p^t - \text{th} \epsilon_p^t) \\ & + \lambda^t \cdot (\text{Sp}(\Delta \epsilon) - \text{Sp}(\Delta \ln \epsilon) - \text{Sp}(\Delta \text{th} \epsilon)) \cdot 1_p + 2 \cdot \mu^t \cdot (\Delta \epsilon_p - \Delta \ln \epsilon_p - \Delta \text{th} \epsilon_p) \quad \text{für } p=1, \dots, 3 \end{aligned} \quad (5.8a)$$

und

$$\Delta\sigma_p = \Delta\mu \cdot (\varepsilon_p^t - \text{in}\varepsilon_p^t - \text{th}\varepsilon_p^t) + \mu^t \cdot (\Delta\varepsilon_p - \Delta^{\text{in}}\varepsilon_p - \Delta^{\text{th}}\varepsilon_p) \text{ für } p=4, \dots, 6 \quad (5.8b)$$

$$\text{mit } \Delta^{\text{th}}\varepsilon_p = ({}^w\alpha^{t+\Delta t} \cdot (T+\Delta T - T_0) - {}^w\alpha^t \cdot (T - T_0)) \cdot 1_p \text{ für } p=1, \dots, 3 \text{ und } \Delta^{\text{th}}\varepsilon_p = 0_p \text{ sonst} \quad (5.9)$$

z^t : Größe z zum Zeitpunkt t

1_p : Einsvektor

An dieser Stelle soll nochmals darauf hingewiesen werden, daß sich die Scherkomponenten des Verzerrungsvektors ε_p aus der Summe zweier Komponenten des Verzerrungstensors zusammensetzt (Gl.(4.3)). Bei der Bestimmung der Komponenten $\Delta\sigma_4$, $\Delta\sigma_5$ und $\Delta\sigma_6$ des Spannungsincrementvektors entfällt somit der Faktor 2 vor der Lamé'schen Konstanten μ .

Das Inkrement des inelastischen Verzerrungsvektors kann mit Hilfe der Explizit-Euler-Methode wie folgt bestimmt werden:

$$\Delta^{\text{in}}\varepsilon_p = \text{in}\dot{\varepsilon}_p^t \cdot \Delta t \quad (5.10)$$

$$\Rightarrow \Delta^{\text{in}}\varepsilon_p = \frac{3}{2} \cdot K \cdot {}^w\sigma_{\text{VM}}^{t, N-1} \cdot {}^w\sigma_p^t \cdot \Delta t \quad \text{für } p=1, \dots, 3 \quad (5.11a)$$

$$\text{und } \Delta^{\text{in}}\varepsilon_p = 3 \cdot K \cdot {}^w\sigma_{\text{VM}}^{t, N-1} \cdot {}^w\sigma_p^t \cdot \Delta t \quad \text{für } p=4, \dots, 6 \quad (5.11b)$$

Die von Mises Effektivspannung berechnet sich hierzu aus Gl.(5.12):

$${}^w\sigma_{\text{VM}}^t = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \left[\sum_{p=1}^3 {}^w\sigma_p^{t^2} + 2 \cdot \sum_{p=4}^6 {}^w\sigma_p^{t^2} \right]} \quad (5.12)$$

$$\text{mit } {}^w\sigma_p^{t^2} = \sigma_p^t - \text{I}\sigma_p^t = \begin{cases} \sigma_p^t - \frac{1}{3} \cdot \text{Sp}(\sigma) \cdot 1_p - \text{I}\sigma_p^t + \frac{1}{3} \cdot \text{Sp}(\text{I}\sigma) \cdot 1_p & \text{für } p=1, \dots, 3 \\ \sigma_p^t - \text{I}\sigma_p^t & \text{für } p=4, \dots, 6 \end{cases} \quad (5.13a,b)$$

$\text{Sp}(\chi)$ = Spur des Tensors χ

$$\text{Sp}(\chi) = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3$$

In gleicher Weise wie für das Inkrement der inelastischen Dehnung gilt für das Inkrement des "back stress"-Vektors:

$$\Delta^b\sigma_p = {}^b\dot{\sigma}_p^t \cdot \Delta t \quad (5.14)$$

$$\Rightarrow \Delta^b \sigma_p = \lambda_o \cdot \ln \dot{\varepsilon}_V^t \cdot (\bar{b} \sigma_p^t - b \sigma_p^t) \cdot \Delta t \quad (5.15)$$

$$\text{mit } \ln \dot{\varepsilon}_V^t = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \left[\sum_{p=1}^3 \ln \dot{\varepsilon}_p^t^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{p=4}^6 \ln \dot{\varepsilon}_p^t^2 \right]} \quad (5.16)$$

Die letzte Größe, die mit Hilfe des Explizit-Euler-Verfahrens über den Zeitschritt Δt integriert werden muß, ist das Teilchenvolumen V . Für das Inkrement ΔV gilt:

$$\Delta V = \dot{V} \cdot \Delta t \quad (5.17)$$

Über die Inkrement können nun die Spannung, der "back stress" und das Teilchenvolumen zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ ermittelt werden,

$$\sigma_p^{t+\Delta t} = \sigma_p^t + \Delta \sigma_p \quad (5.18)$$

$$b \sigma_p^{t+\Delta t} = b \sigma_p^t + \Delta^b \sigma_p \quad (5.19)$$

$$V^{t+\Delta t} = V^t + \Delta V \quad (5.20)$$

die für die nachfolgende Bestimmung der übrigen Größen notwendig sind:

- stationärer "back stress"

$$\bar{b} \sigma_p^{t+\Delta t} = (1-q_0) \cdot \sigma_p^{t+\Delta t} \cdot \left[1 - \left(\frac{k}{K} \sigma_{VM}^{t+\Delta t}{}^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma_{VM}^{t+\Delta t}} \right)^{1/N} \right] \quad (5.21)$$

$$\text{mit } q_0 = 1 - A \cdot \left(\frac{\sigma_{VM}}{\sigma_y} \right)^p \quad (5.22)$$

- Teilchenhärtung

$$\rho_p^{t+\Delta t} = \sigma_p^{t+\Delta t} \cdot \left[1 - \left(\frac{k \cdot r}{K \cdot r_0} \sigma_{VM}^{t+\Delta t}{}^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma_{VM}^{t+\Delta t}} \right)^{1/N} - (1-q_0) \cdot \left[1 - \left(\frac{k}{K} \sigma_{VM}^{t+\Delta t}{}^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma_{VM}^{t+\Delta t}} \right)^{1/N} \right] \right] \text{ für } r_0 \geq r_s \quad (5.23)$$

$$\rho_p^{t+\Delta t} = \sigma_p^{t+\Delta t} \cdot \left[1 - \left(\frac{k \cdot r_0}{K \cdot r} \sigma_{VM}^{t+\Delta t}{}^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma_{VM}^{t+\Delta t}} \right)^{1/N} - (1-q_0) \cdot \left[1 - \left(\frac{k}{K} \sigma_{VM}^{t+\Delta t}{}^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma_{VM}^{t+\Delta t}} \right)^{1/N} \right] \right] \text{ für } r_0 < r_s \text{ und } r < r_s \quad (5.24)$$

$$\rho_p^{t+\Delta t} = \sigma_p^{t+\Delta t} \cdot \left[1 - \left(\frac{k \cdot r_0 \cdot r}{K \cdot r_s^2} \sigma_{VM}^{t+\Delta t}{}^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma_{VM}^{t+\Delta t}} \right)^{1/N} - (1-q_0) \cdot \left[1 - \left(\frac{k}{K} \sigma_{VM}^{t+\Delta t}{}^{n-N} \cdot e^{\alpha \sigma_{VM}^{t+\Delta t}} \right)^{1/N} \right] \right] \text{ für } r_0 < r_s \text{ und } r \geq r_s \quad (5.25)$$

-Übergangsradius und Teilchenradius

$$r_s = r_0 \cdot \left[Z + \left| \frac{\sigma_{VM}^{t+\Delta t} - \sigma_y}{\sigma^*} \right|^\beta \right] \quad \text{und} \quad r = \left[r_0^3 + \frac{3}{4\pi} V^{t+\Delta t} \right]^{1/3} \quad (5.26)$$

Verwendet man für die numerische Integration der Differentialgleichungen des "back stress"-Modells die Trapezregel als implizites Integrationsverfahren, so läßt sich das Inkrement der inelastischen Dehnung und das Inkrement des Teilchenvolumens wie folgt bestimmen:

$$\Delta^{in} \epsilon_p = \left[\frac{\frac{3}{2} \cdot K \cdot w_{\sigma_{VM}}^{tN-1} \cdot w_{\sigma_p}^t + \frac{3}{2} \cdot K \cdot w_{\sigma_{VM}}^{t+\Delta tN-1} \cdot w_{\sigma_p}^{t+\Delta t}}{2} \right] \cdot \Delta t \quad \text{für } p=1, \dots, 3 \quad (5.27a)$$

$$\Delta^{in} \epsilon_p = \left[\frac{3 \cdot K \cdot w_{\sigma_{VM}}^{tN-1} \cdot w_{\sigma_p}^t + 3 \cdot K \cdot w_{\sigma_{VM}}^{t+\Delta tN-1} \cdot w_{\sigma_p}^{t+\Delta t}}{2} \right] \cdot \Delta t \quad \text{für } p=4, \dots, 6 \quad (5.27b)$$

$$\text{und} \quad \Delta V = \frac{\dot{V}^{t+\Delta t} + \dot{V}^t}{2} \Delta t \quad (5.28)$$

Die numerische Integration der "back stress"-Differentialgleichung kann in gleicher Weise implizit durchgeführt werden. In Kapitel 6.2 wird jedoch gezeigt, daß unter bestimmten Vereinfachungen eine exakte Lösung der Differentialgleichung gefunden werden kann, so daß an dieser Stelle auf die numerische Integration mit Hilfe der Trapezregel verzichtet werden kann.

6. Programmierung der UMAT-Routinen:

Die Programmierung der UMAT-Routine kann auf verschiedene Art durchgeführt werden. Da bei der Anwendung auf große Strukturen die Effizienz der Routine von großer Bedeutung ist, sollen mehrere Varianten des Unterprogramms untersucht werden. In dem folgenden Kapitel werden nun die unterschiedlichen Varianten der UMAT-Routine vorgestellt.

6.1. VISCUI

Die erste Unterprogrammversion Viscu1 benutzt für die Integration aller zeitabhängigen Differentialgleichungen das Explizit-Euler-Verfahren. Der Ablaufplan des Unterprogramms ist in Abb. 6.1.a und Abb. 6.1.b dargestellt.

Zu Beginn des UMAT-Unterprogramms werden die Spannung, die inelastische und gesamte Dehnung, der Schätzwert für das Dehnungsinkrement, die Zeit und das Zeitinkrement, die Temperatur und das Temperaturinkrement sowie das aktuelle Teilchenvolumen zum Zeitpunkt t vom ABAQUS-Hauptprogramm übernommen. Aus der Spannung σ , dem "back stress" $^b\sigma$ und der Teilchenhärtung p werden in dem Unterprogramm INVAR der Spannungsdeviator (σ') sowie die Deviatoren der inneren und der effektiven Spannung (σ' , $^w\sigma'$) berechnet. Außerdem wird die Spur des Dehnungsinkrementtensors $Sp(\Delta\epsilon)=\Delta\epsilon_{kk}$, wie auch die Spur des Dehnungstensors $Sp(\epsilon)=\epsilon_{kk}$ und des Tensors der thermischen Dehnung $Sp(^{th}\epsilon)=^{th}\epsilon_{kk}$ im Unterprogramm bestimmt. Anschließend wird die thermische Dehnung zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ aus dem Temperaturinkrement ermittelt. Mit Hilfe der Deviatoren von Spannung, Effektivspannung und innerer Spannung kann im nächsten Schritt das Inkrement der inelastischen Dehnung berechnet werden, das zur nachfolgenden Bestimmung der Spannungen zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ benötigt wird. Für eine spätere Fehlerabschätzung wird außerdem die inelastische Vergleichsdehnrates zum Zeitpunkt t ermittelt. Bei der Berechnung der neuen Spannungen zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ wird eine Fallunterscheidung gemacht. Ist die relative Änderung des Elastizitätsmoduls kleiner als eine vorgegebene Toleranz TOL_{E1} , so werden die Spannungsinkrement mit Hilfe der Explizit-Euler-Methode ermittelt. Dies hat den Vorteil, daß vom Hauptprogramm keine Gleichgewichtsiteration durchgeführt werden muß. Liegt jedoch aufgrund von starken Temperaturänderungen der Wert von $\Delta E/E$ über der vorgegebenen Toleranz, so werden die Spannungen zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ exakt berechnet.

Sind die Spannungen zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ bekannt, so wird im Falle des ersten Durchlaufs im Inkrement mit der Bestimmung des Tangentenmoduls fortgefahren. Die Ermittlung der inneren Spannung zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ kann und die Fehlerabschätzung muß in diesem

VISCU 1

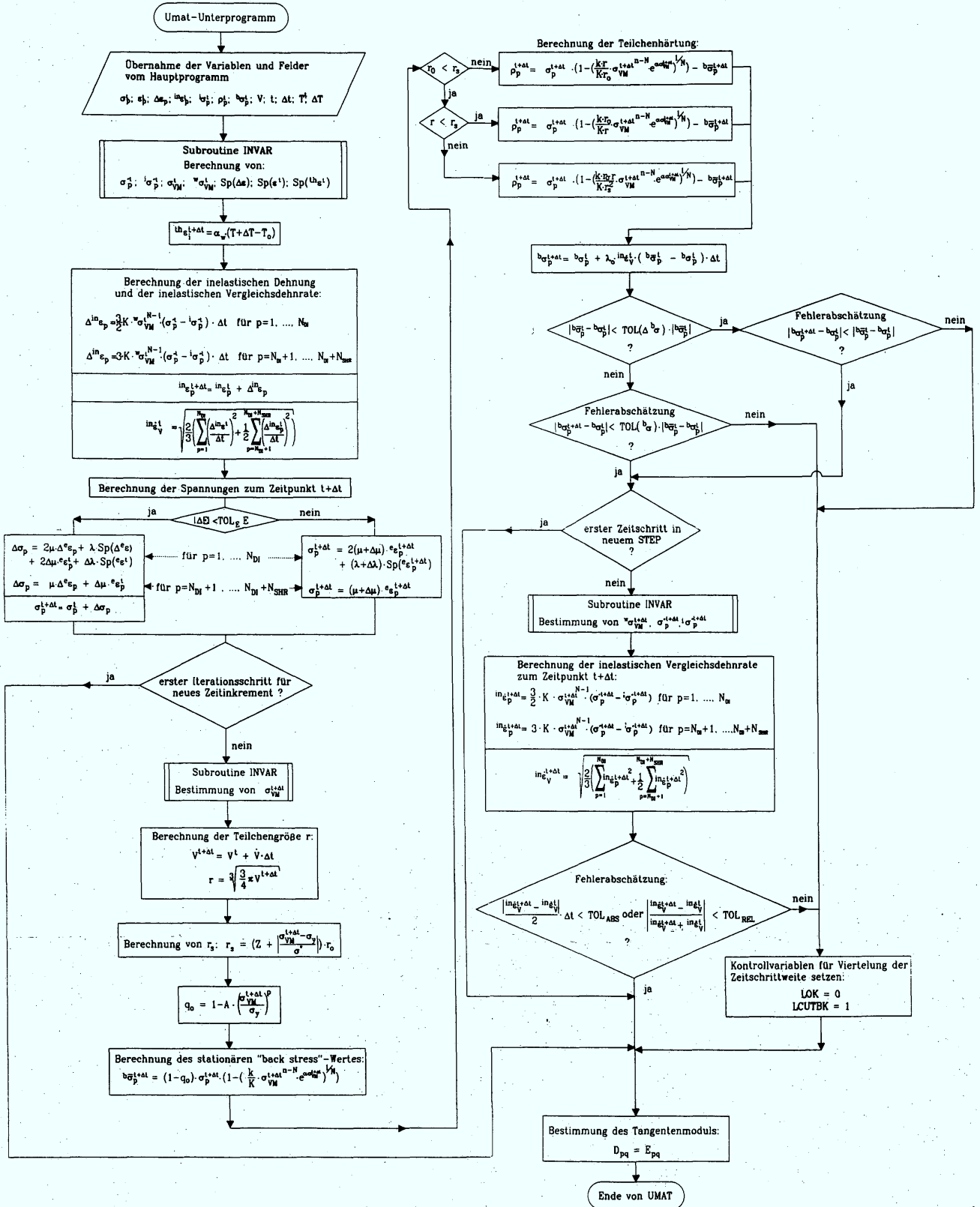


Abb. 6.1.a: Ablaufplan VISCU1

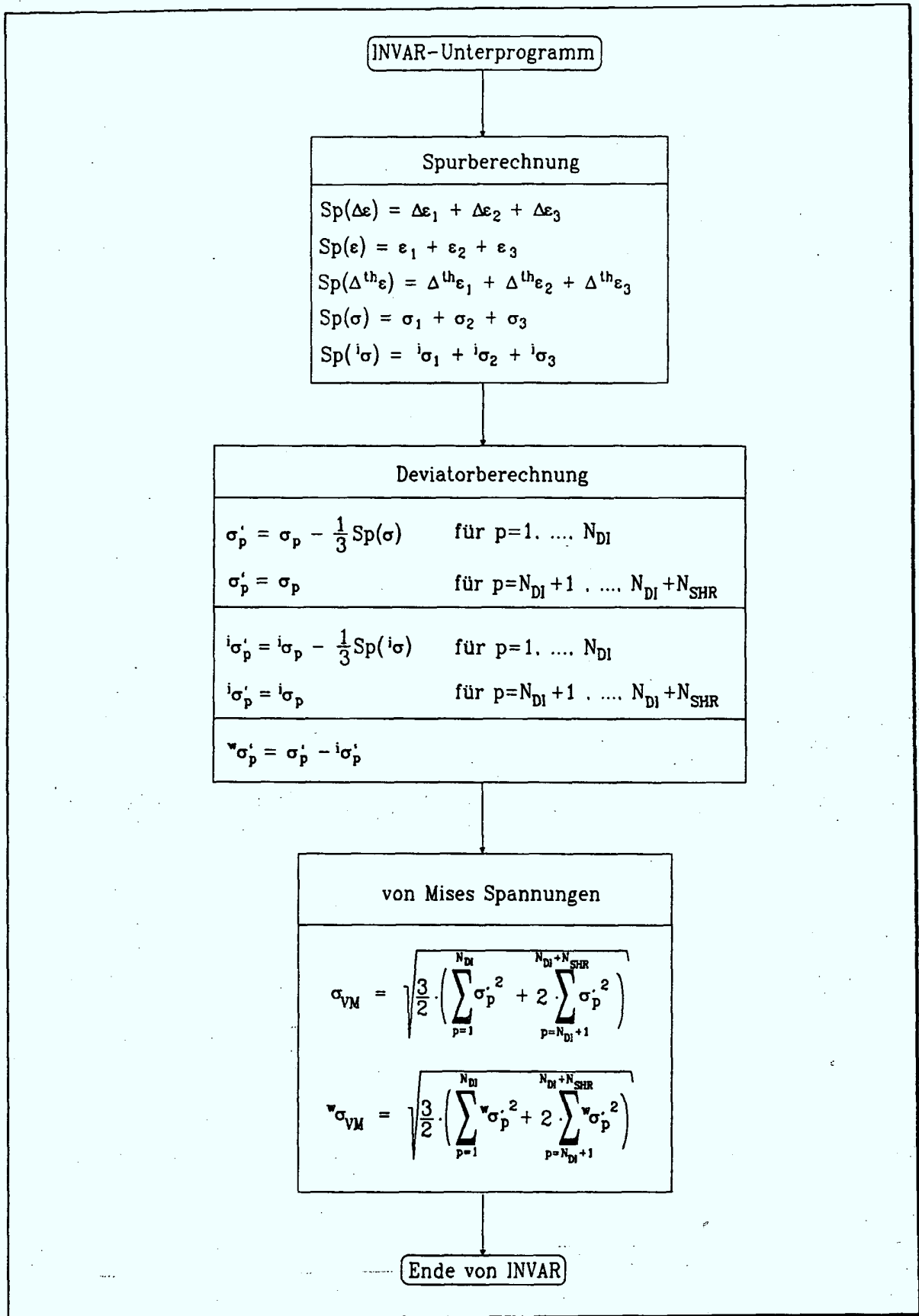


Abb. 6.1.b: Ablaufplan des Unterprogramms INVAR

Fall übersprungen werden, da der erste Iterationsschritt eines neuen Zeitinkrementes nur dazu dient, einen Schätzwert für die Knotenpunktverschiebungen $\Delta \bar{u}_s$ zu ermitteln.

Die Abfrage, ob es sich bei dem momentan durchgeführten Iterationsdurchlauf um den ersten oder zweiten handelt, ist in ABAQUS nicht ohne weiteres möglich. So wird zwar von ABAQUS eine Variable KITER, in der die Anzahl der Gleichgewichtsiterationen festgehalten wird, mitgeführt, allerdings wird der erste Iterationsschritt, in dem der Schätzwert für die Knotenpunktverschiebung ermittelt wird, in diesem Zähler von ABAQUS nicht berücksichtigt. Aus diesem Grund wird in der UMAT-Routine ein Feld ELINF angelegt, in dem für jedes Element die aktuelle Zeitinkrementnummer (KINC) und der erste Integrationspunkt (KINTK) festgehalten wird:

ELINF (Element, 1) = aktuelle Zeitinkrementnummer

ELINF (Element, 2) = erster Integrationspunkt des Elementes

Hat sich die Inkrementnummer des ersten Integrationspunktes eines Elementes seit der letzten Abfrage um eins erhöht, so wird vom ABAQUS Hauptprogramm der erste Durchlauf der Gleichgewichtsiteration durchgeführt. Der Zähler AZITER wird für die nachfolgenden Integrationspunkte des Elementes auf Null gesetzt. Hat sich dagegen die Inkrementnummer des ersten Integrationspunktes seit der letzten Abfrage nicht verändert, so wird vom UMAT-Unterprogramm der Zähler AZITER um eins erhöht. Auf diese Weise kann durch einfache Abfrage des Wertes von AZITER die Anzahl der Durchläufe der Gleichgewichtsiteration bestimmt werden.

Wird vom ABAQUS-Hauptprogramm der zweite Iterationsschritt durchgeführt, so müssen vor der Bestimmung des Tangentenmoduls alle mitgeführten Hilfsgrößen aktualisiert werden. Hierzu wird zunächst aus den Spannungen zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ im Unterprogramm INVAR die neue von Mises Vergleichsspannung berechnet. Anschließend erfolgt die Bestimmung der aktuellen Teilchengröße r , sowie die Bestimmung der kritischen Teilchengröße r_s , die für die Entwicklung der Teilchenhärtung mit bestimmend ist. Nachfolgend können der stationäre "back stress"-Wert $\bar{\sigma}$ und die Teilchenhärtung p zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ ermittelt werden. Bei der Teilchenhärtung müssen dabei die in Kapitel 3.2 aufgeführten drei Fälle unterschieden werden.

Im Anschluß daran wird mit Hilfe der Vergleichsdehnrates und des stationären "back stress"-Wertes zum Zeitpunkt t der "back stress"-Wert zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ berechnet. Da für die Integration der Differentialgleichung des "back stress"-Wertes das Explizit-Euler-Verfahren für große Zeitschrittweiten instabil wird, muß an dieser Stelle des UMAT-Unterprogramms eine Abfrage bezüglich der Stabilität und auch der Genauigkeit der numerischen Integration erfolgen. Hierzu wird die Differenz der "back stress"-Werte zum

Zeitpunkt $t+\Delta t$ und t mit der Differenz vom stationären und vom "back stress"-Wert zum Zeitpunkt t verglichen:

$${}^b\sigma_p^{t+\Delta t} - {}^b\sigma_p^t < \text{TOL}({}^b\sigma) \cdot \left[{}^b\bar{\sigma}_p^t - {}^b\sigma_p^t \right] \quad (6.1)$$

Überschreitet das Verhältnis der beiden Differenzen einen bestimmten Wert $\text{TOL}({}^b\sigma)$, so werden die Steuervariablen für die Viertelung der Zeitschrittweite gesetzt.

Um die Stabilität der numerischen Integration zu gewährleisten, muß $\text{TOL}({}^b\sigma)$ kleiner als zwei gewählt werden. Ein Überspringen des "back stress"-Wertes über den stationären Wert hinaus, kann mit einem $\text{TOL}({}^b\sigma)$ -Wert kleiner als eins verhindert werden. Die Wahl eines für die Rechnung sinnvollen Wertes hängt neben der Stabilität aber auch von dem Fehler der numerischen Integration ab. Für einen konstanten stationären "back stress"-Wert ist eine Fehlerbetrachtung in Abb. 6.2 dargestellt. Es zeigt sich, daß $\text{TOL}({}^b\sigma)$ kleiner als 0.1 gewählt werden muß, um die numerische Integration mit einem relativen Fehler kleiner als 0.5% durchzuführen. Der relative Fehler des einfachen Euler-Vorwärtsschritt-Verfahrens wird allerdings dann uninteressant für die Genauigkeit der Gesamtrechnung, wenn der "back stress"-Wert annähernd seinen stationären Wert erreicht hat, da dann seine absoluten Änderungen sehr klein werden. Daher wurde vor die eigentliche Fehlerabfrage eine Abfrage bezüglich der Differenz von stationärem und aktuellem "back stress"-Wert gesetzt. Ist die Differenz bezogen auf den stationären Wert von ${}^b\sigma$ kleiner als eine vorgegebene Toleranz $\text{TOL}(\Delta {}^b\sigma)$, so wird die oben beschriebene Fehlerabfrage mit einem $\text{TOL}({}^b\sigma)$ von 1 statt 0.1 durchgeführt, da in diesem Fall nicht der relative Fehler, sondern nur die Stabilität von Bedeutung ist.

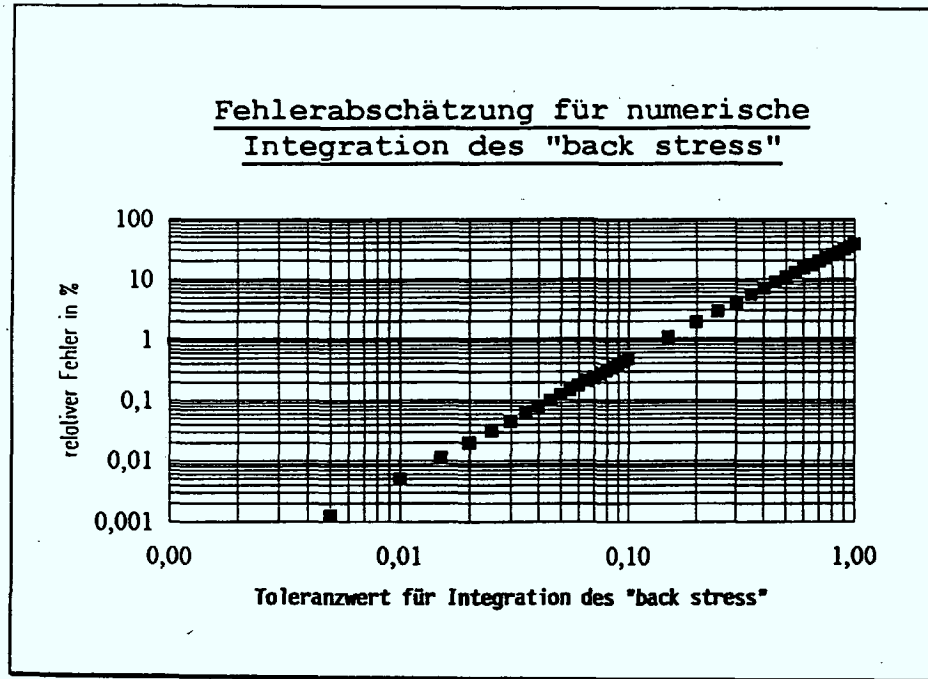


Abb. 6.2: Fehler der numerische Integration des "back stress" in Abhängigkeit vom Toleranzwert $TOL(\sigma)$

Nach Berechnung des "back stress"-Wertes sind alle Größen und Hilfsvariablen zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ bekannt und der Fehler des Euler-Schrittes kann abgeschätzt werden. Eine sinnvolle Größe, mit der der Fehler der Berechnung abgeschätzt werden kann, ist die viskoplastische Vergleichsdehnrate $\ln \dot{\epsilon}$, da sowohl die Entwicklung der Spannung als auch die Entwicklung der inneren Spannung im wesentlichen von der viskoplastischen Dehnung und den äußeren Randbedingungen abhängt. Daher wird zunächst die Vergleichsdehnrate zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ mit Hilfe der Deviatoren von Spannungstensor σ und Tensor der inneren Spannung ${}^I\sigma$, die zuvor im INVAR-Unterprogramm berechnet wurden, bestimmt. Unter Vernachlässigung von Fehlern höherer Ordnung ergibt sich der absolute Fehler des Euler-Schrittes aus Gleichung (6.2) (Abb. 6.3):

$$F_{\text{abs}} = \left| \frac{\ln \dot{\epsilon}_V^t + \ln \dot{\epsilon}_V^{t+\Delta t}}{2} \cdot \Delta t - \ln \dot{\epsilon}_V^t \cdot \Delta t \right| = \left| \frac{\ln \dot{\epsilon}_V^{t+\Delta t} - \ln \dot{\epsilon}_V^t}{2} \right| \cdot \Delta t \quad (6.2)$$

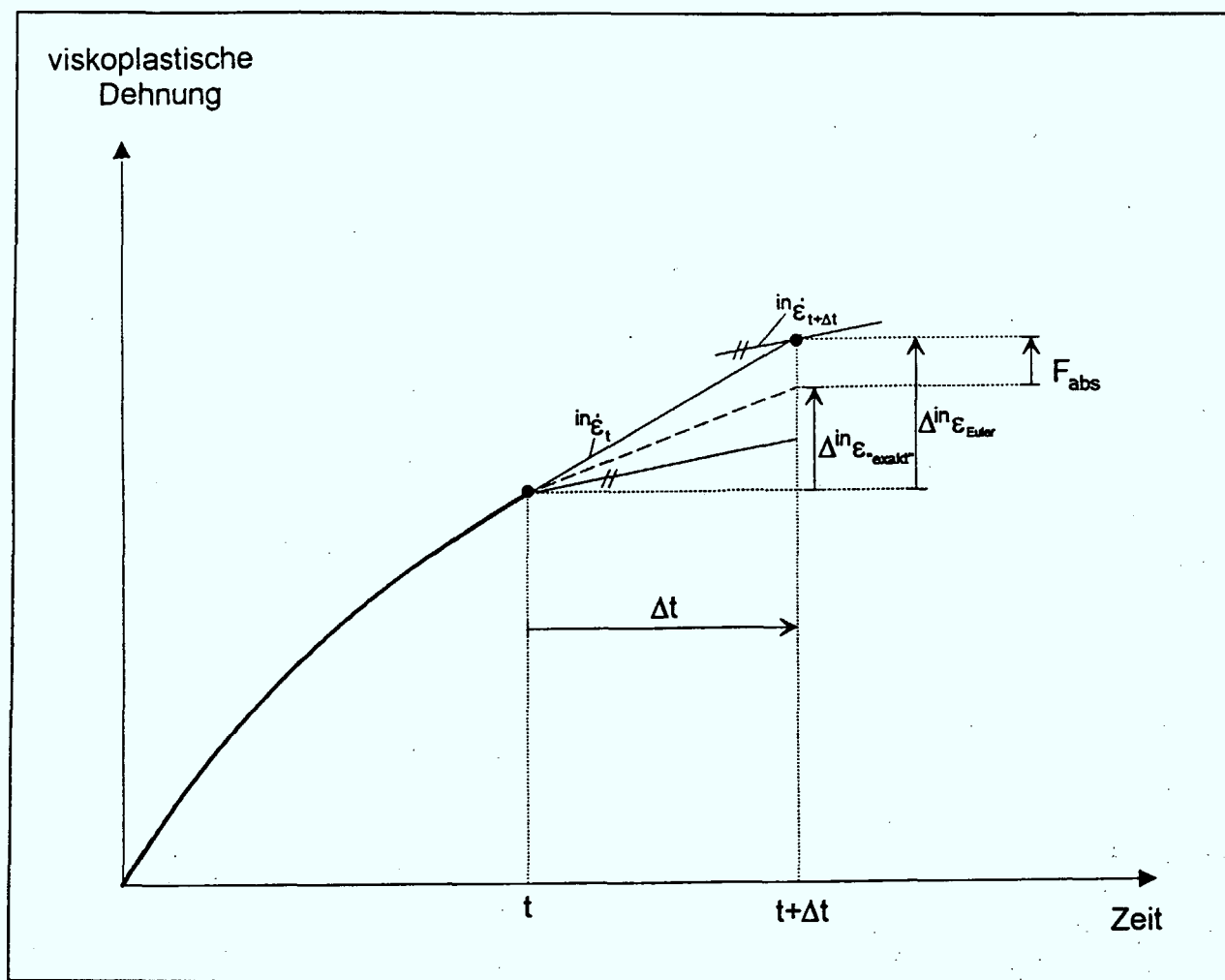


Abb. 6.3: Bestimmung des absoluten Fehlers von $\Delta^{\text{in}} \epsilon$ unter Vernachlässigung von Fehlern höherer Ordnung

Der relative Fehler ergibt sich damit zu:

$$F_{\text{rel}} = \left| \frac{\text{in}^{\cdot} \epsilon_V^{t+\Delta t} - \text{in}^{\cdot} \epsilon_V^t}{\text{in}^{\cdot} \epsilon_V^{t+\Delta t} + \text{in}^{\cdot} \epsilon_V^t} \right| \quad (6.3)$$

Im Regelfall würde eine Abfrage des relativen Fehlers für die Fehlerabschätzung ausreichen. Allerdings kann unter bestimmten Randbedingungen (z.B. Lastrampe mit kleiner Lastanstiegsgeschwindigkeit) die viskoplastische Dehnrates für die ersten Zeitinkremente nahe Null bleiben, ehe sie einen absoluten Wert merklich größer als Null annimmt. Da in diesem Fall die absoluten Werte der viskoplastischen Dehnrates vernachlässigbar klein sind, der relative Fehler jedoch nur für sehr kleine Zeitschrittweiten unterhalb der vorgegebenen Toleranz liegen würde, muß zusätzlich zum relativen Fehler auch der absolute Fehler für die Fehlerabschätzung herangezogen

werden. Wenn sowohl absoluter, als auch relativer Fehler größer als eine vorgegebene Toleranz

$$F_{abs} > TOL_{abs} \text{ und } F_{rel} > TOL_{rel} \quad (6.4)$$

sind, werden die Kontrollvariablen für die Viertelung der Zeitschrittweite gesetzt, im anderen Fall wird direkt mit der Bestimmung des Tangentenmoduls fortgefahren.

Ein weiterer wichtiger Aspekt bei der Fehlerabschätzung für den einfachen EULER-Schritt ist, daß die Abschätzung nicht für das erste Zeitinkrement nach einer STEP-Anweisung im FE-Hauptprogramm durchgeführt werden kann, da z.B. bei einem vorgegebenen Spannungssprung die viskoplastische Vergleichsdehnrate immer von Null auf einen relativ großen Wert ansteigen würde. Der relative Fehler wäre damit immer gleich eins, und der absolute Fehler würde nur für sehr kleine Zeitschrittweiten unterhalb der Toleranz TOL_{abs} liegen. Eine Fehlerabfrage würde in diesem Fall also dazu führen, daß die Zeitschrittweiten zu Beginn eines neuen STEPs viel zu klein würden, was wiederum einen erheblichen Mehraufwand an Rechenzeit zur Folge hätte. Es ist daher sinnvoller, die Festlegung der Anfangszeitrittweite in die Verantwortlichkeit des ABAQUS Anwenders zu legen und die Fehlerabfrage zu Beginn eines neuen STEPs zu überspringen.

6.2. VISCU2

Die ersten Testrechnungen mit der einfachsten Version der UMAT-Routine zeigten, daß die Zeitschrittweite Δt für einige Lastfälle aufgrund der Fehlerabfrage für die Integration des "back stress" nach oben hin stark beschränkt wird. Daher wurde für die Bestimmung des "back stress" eine andere Lösung gesucht. Unter der Annahme, daß sich der stationäre "back stress"-Wert während des Zeitschrittes Δt linear ändert, und die viskoplastische Vergleichsdehnrate annähernd konstant bleibt, was durch die Fehlerabfrage nach Gl.(6.4) gewährleistet ist, kann eine analytische Lösung der "back stress"-Differentialgleichung, die sich unter diesen Voraussetzungen zu

$$\dot{\sigma}_p + \lambda_0 \cdot \ln \varepsilon_V^t \cdot \sigma_p = \lambda_0 \cdot \ln \varepsilon_V^t \cdot \left[\sigma_p^t + \frac{\sigma_p^{t+\Delta t} - \sigma_p^t}{\Delta t} \cdot t \right] \quad t = 0 \dots \Delta t \quad (6.5)$$

ergibt, gefunden werden [26]:

$$b_{\sigma_p}^{t+t'} = \frac{\lambda_o \cdot \dot{\epsilon}_V^t}{e^{\lambda_o \cdot \dot{\epsilon}_V^t \cdot t'}} \cdot \left(b_{\sigma_p}^t \cdot \int_0^{t'} e^{\lambda_o \cdot \dot{\epsilon}_V^t \cdot t^*} \cdot dt^* + \frac{b_{\sigma_p}^{t+\Delta t} - b_{\sigma_p}^t}{\Delta t} \cdot \int_0^{t'} e^{\lambda_o \cdot \dot{\epsilon}_V^t \cdot t^*} \cdot dt^* + C \right) \quad (6.6)$$

Für $t'=0$ kann die Konstante C bestimmt werden:

$$C = \frac{b_{\sigma_p}^t}{e^{\lambda_o \cdot \dot{\epsilon}_V^t}} \quad (6.7)$$

Somit ergibt sich für die Berechnung des "back stress"-Wertes zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ die folgende Bestimmungsgleichung:

$$b_{\sigma_p}^{t+\Delta t} = \frac{1}{e^{\lambda_o \cdot \dot{\epsilon}_V^t \cdot \Delta t}} \left[b_{\sigma_p}^t \cdot \left(e^{\lambda_o \cdot \dot{\epsilon}_V^t \cdot \Delta t} - 1 \right) \right] + \frac{1}{e^{\lambda_o \cdot \dot{\epsilon}_V^t \cdot \Delta t}} \left[\frac{b_{\sigma_p}^{t+\Delta t} - b_{\sigma_p}^t}{\lambda_o \cdot \dot{\epsilon}_V^t \cdot \Delta t} \left\{ e^{\lambda_o \cdot \dot{\epsilon}_V^t \cdot \Delta t} \cdot \left(\lambda_o \cdot \dot{\epsilon}_V^t \cdot \Delta t - 1 \right) + 1 \right\} + b_{\sigma_p}^t \right] \quad (6.8)$$

Die Fehlerabfrage bezüglich der numerischen Integration des "back stress"-Wertes in der einfachsten Version des UMAT-Unterprogramms kann nun bei dieser Lösung entfallen (Abb. 6.4). In einigen Belastungsfällen wird damit der Rechenzeitbedarf deutlich verringert.

6.3. VISCUS

In der dritten Variante der UMAT-Routine wird für die numerische Integration ebenso wie in Viscu1 und Viscu2 das Explizit-Euler Verfahren verwendet, allerdings mit dem Unterschied, daß das Zeitinkrement Δt nach Durchführung einer Fehlerabschätzung in mehrere Subinkremente $d\Delta t$ unterteilt wird.

Im Regelfall sind bei dieser Version zwei Programmdurchläufe notwendig; der erste Durchlauf dient der Bestimmung der Subinkrementanzahl, der zweite zur genaueren Berechnung der aktuellen Werte von Spannung, inelastischer Dehnung und der Hilfsgrößen (Abb. 6.5).

VISCU 2

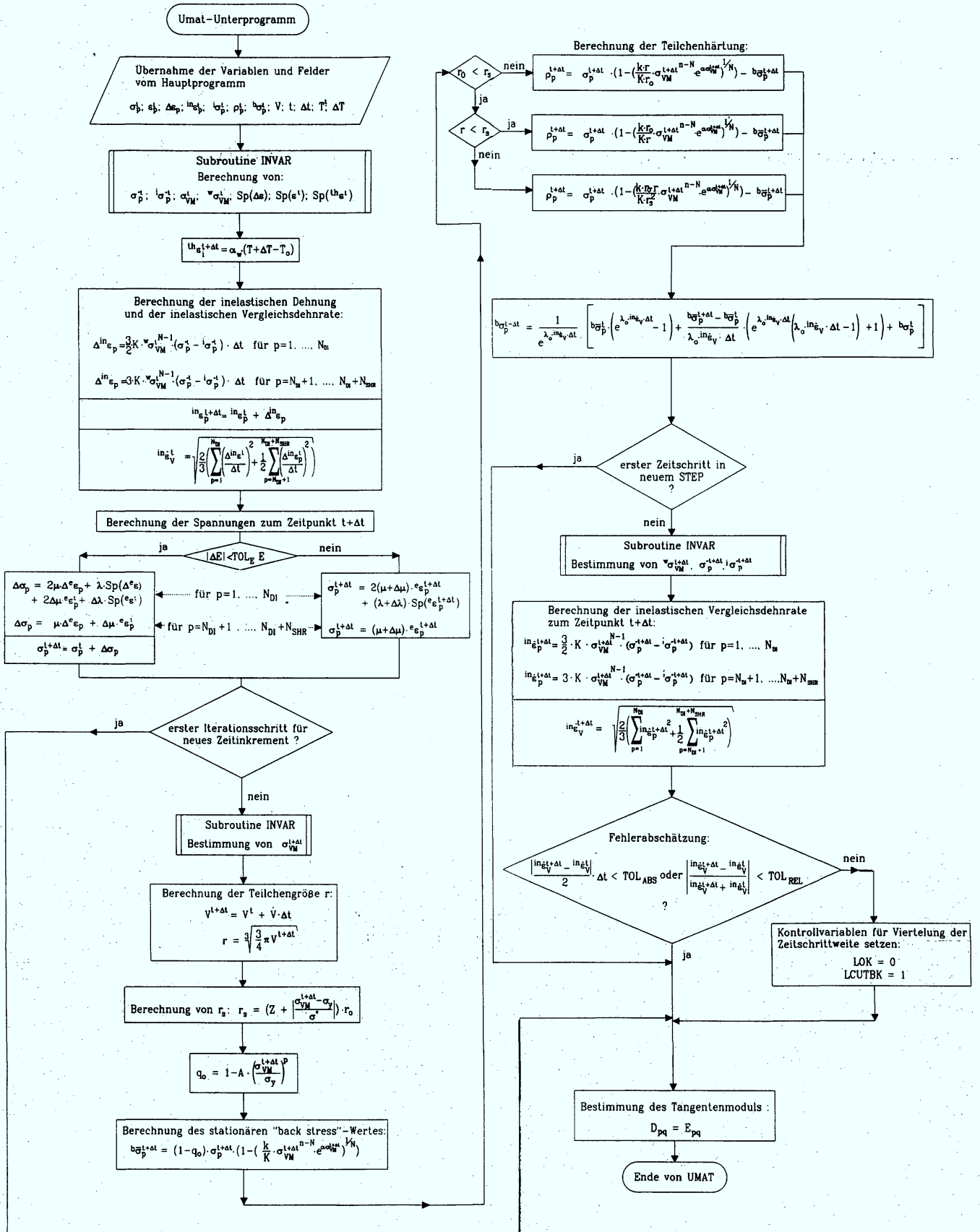


Abb. 6.4: Ablaufplan VISCU2

VISCU 3

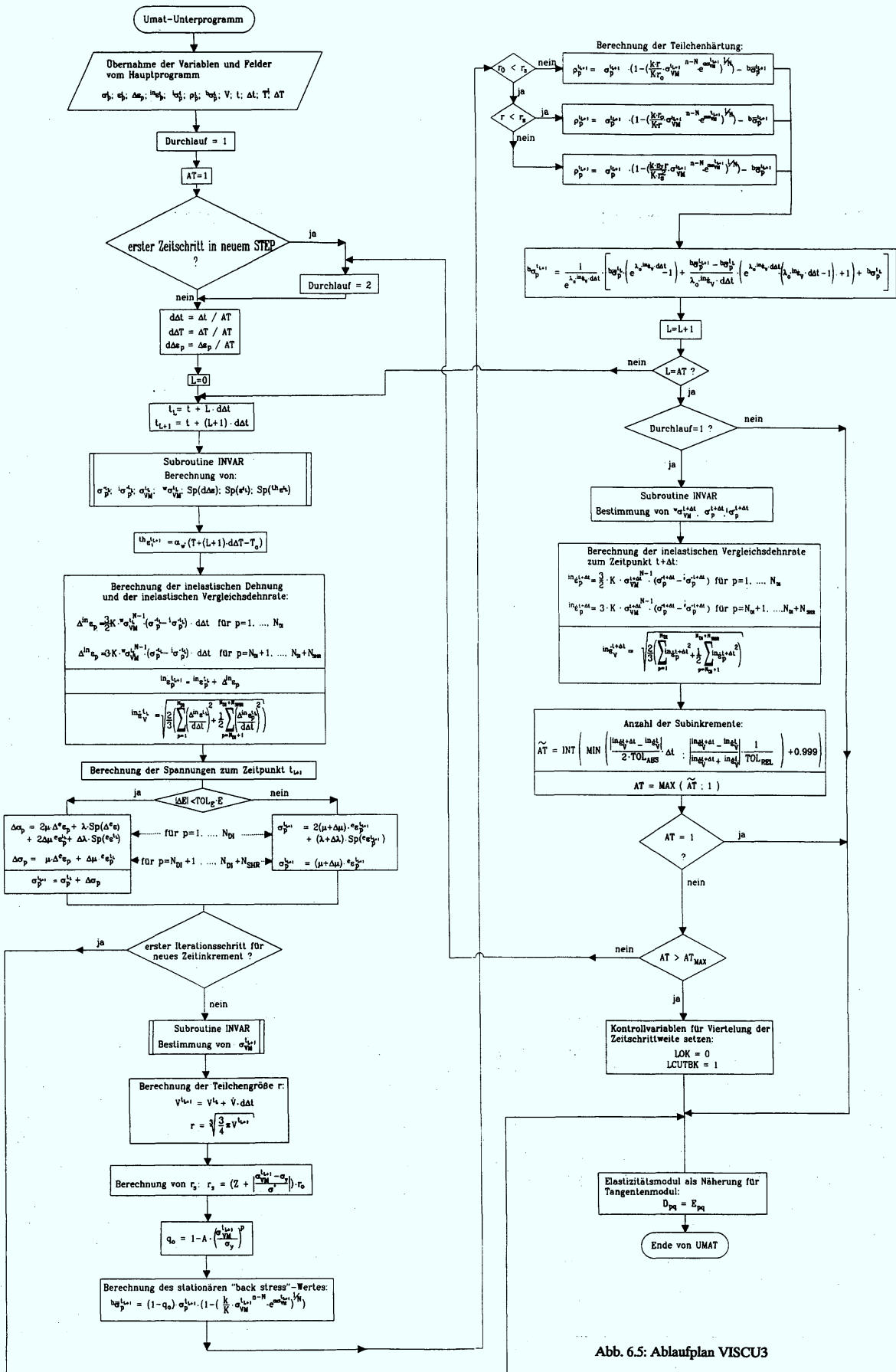


Abb. 6.5: Ablaufplan VISCU3

Bei dem ersten Programmdurchlauf wird die Anzahl der Subinkremente AT und die Steuervariable $DURCHLAUF$ auf eins gesetzt. Anschließend werden die viskoplastische Vergleichsdehnrate zum Zeitpunkt t , sowie die inelastische Dehnung und die Spannung zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ berechnet. Für den Fall, daß ABAQUS den ersten Durchlauf der Gleichgewichtsiteration durchführt, wird mit der Bestimmung des Tangentenmoduls fortgefahren, da der erste Iterationsdurchlauf nur zur Bestimmung eines ersten Schätzwertes für die Knotenpunktverschiebungen dient. Im anderen Fall wird die Berechnung mit der Bestimmung der Teilchengröße sowie der inneren Spannung fortgesetzt. Da die Steuervariable $DURCHLAUF$ noch den Wert eins besitzt, wird anschließend die viskoplastische Vergleichsdehnrate zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ aus der von Mises Vergleichsspannung wie auch den Deviatoren von Spannung und innerer Spannung berechnet. Über die Fehlerabschätzung nach Gl.(6.4) kann nun die Anzahl der Subinkremente so festgelegt werden, daß der relative bzw. absolute Fehler im Mittel für jedes Subinkrement kleiner als die vorgegebene Toleranz ist. Ist die Anzahl der Subinkremente gleich eins, so kann wiederum mit der Bestimmung des Tangentenmoduls fortgefahren werden, da in diesem Fall die zu bestimmenden Größen bereits mit der geforderten Genauigkeit berechnet wurden. Im anderen Fall wird festgestellt, ob die Anzahl der Subinkremente einen vorgegebene maximalen Wert AT_{max} nicht überschreitet. Diese Abfrage ist erforderlich, da bei der anschließenden Unterteilung des Zeitschrittes in Subinkremente unterstellt wird, daß sich das Inkrement der Knotenpunktverschiebungen in gleich große Subinkremente aufspalten läßt. Für starke Änderungen der inelastischen Dehnrate über den Zeitschritt Δt ist diese Annahme jedoch nicht mehr richtig. Daher muß die Anzahl der Subinkremente, und damit auch die Änderung der viskoplastischen Dehnrate begrenzt werden. Überschreitet die Anzahl der Subinkremente den zulässigen Höchstwert, so werden die Kontrollvariablen für die Viertelung der Zeitschrittweite gesetzt und das Unterprogramm wird beendet, andernfalls wird mit dem zweiten Durchlauf begonnen. Hierzu wird zunächst die Steuervariable $DURCHLAUF$ auf den Wert zwei gesetzt. Die Anzahl der Subinkremente ist in der Variablen AT gespeichert. Die Zeitschrittweite des Subinkrementes $d\Delta t$ ergibt sich durch Division der Zeitschrittweite Δt durch die Anzahl der Subinkremente AT . Ebenso wird die Temperaturänderung und die Änderung der Dehnung über ein Subinkrement berechnet. Basierend auf den Größen zum Zeitpunkt $t+L \cdot d\Delta t$ werden schließlich die viskoplastische Dehnung, die Spannung und die innere Spannung zum Zeitpunkt $t+(L+1) \cdot d\Delta t$ bestimmt. L durchläuft dabei in einer Schleife die Werte 0 bis $AT-1$. Nach dem letzten Durchlauf der Schleife sind alle Größen zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ bekannt. Da nun die Steuervariable $DURCHLAUF$ den Wert zwei besitzt, wird der Programmteil, der die Fehlerabschätzung und die Bestimmung der Subinkrementanzahl beinhaltet, übersprungen. Am Ende der UMAT-Routine wird der Elastizitätsmodul als Näherung für den Tangentenmodul und die Berechnungsergebnisse an das Hauptprogramm übergeben.

Wird von ABAQUS ein neuer Zeitschritt nach einer STEP-Anweisung bearbeitet, so kann die Fehlerabschätzung in einigen Belastungsfällen (z.B. Spannungssprung) zu einem nicht sinnvollen Ergebnis führen³. Daher wird in diesem Fall die Steuervariable DURCHLAUF zu Beginn der UMAT-Routine auf den Wert zwei gesetzt, wodurch die Fehlerabschätzung und die Bestimmung der Subinkrementanzahl übersprungen, und ein einfacher Euler Vorwärtsschritt durchgeführt wird.

Der Vorteil der Subinkrementtechnik liegt darin, daß gegenüber dem einfachen Explizit-Euler Verfahren größere Zeitschrittweiten verwendet werden. Der wesentliche Nachteil ist jedoch, daß die Gleichgewichtsiteration des ABAQUS-Hauptprogramms nicht automatisch nach dem zweiten Iterationsdurchlauf beendet ist⁴.

6.4. VISCU4

Als Alternative zum Explizit-Euler Verfahren wurde zusätzlich ein implizites Integrationsverfahren programmiert (Abb. 6.6), bei dem sich das viskoplastische Dehnungsinkrement aus dem Mittelwert von viskoplastischer Dehnrates zum Zeitpunkt t und viskoplastischer Dehnrates zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ berechnet.

Zunächst werden bei dieser Version der UMAT-Routine wieder die Deviatoren von Spannung und innerer Spannung, sowie die effektive Vergleichsspannung ermittelt, mit deren Hilfe die viskoplastische Vergleichsdehnrates zum Zeitpunkt t berechnet werden kann. Anschließend erfolgt die Berechnung des viskoplastischen Dehnungsinkrements aus der mittleren viskoplastischen Dehnrates. Der erste Schätzwert für die Effektivspannung σ zum Zeitpunkt $t+\Delta t$, der für die Ermittlung der mittleren viskoplastischen Dehnrates notwendig ist, wird hierzu gleich dem Wert der Effektivspannung zum Zeitpunkt t gesetzt. Somit ergibt sich bei der anschließenden Berechnung von Spannung und innerer Spannung zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ nach dem ersten Programmdurchlauf bei dieser Version der UMAT-Routine das gleiche Ergebnis wie bei dem einfachen Euler-Vorwärtsschritt.

Bei der Bearbeitung des ersten Gleichgewichtsiterationsschrittes für ein neues Zeitinkrement wird ebenso wie in den vorher beschriebenen Programmversionen auch in dieser Version der UMAT-Routine die Bestimmung der inneren Spannung, sowie die

³siehe hierzu auch Kapitel 6.1

⁴siehe Herleitung in Anhang Kapitel 11.1

VISCU 4

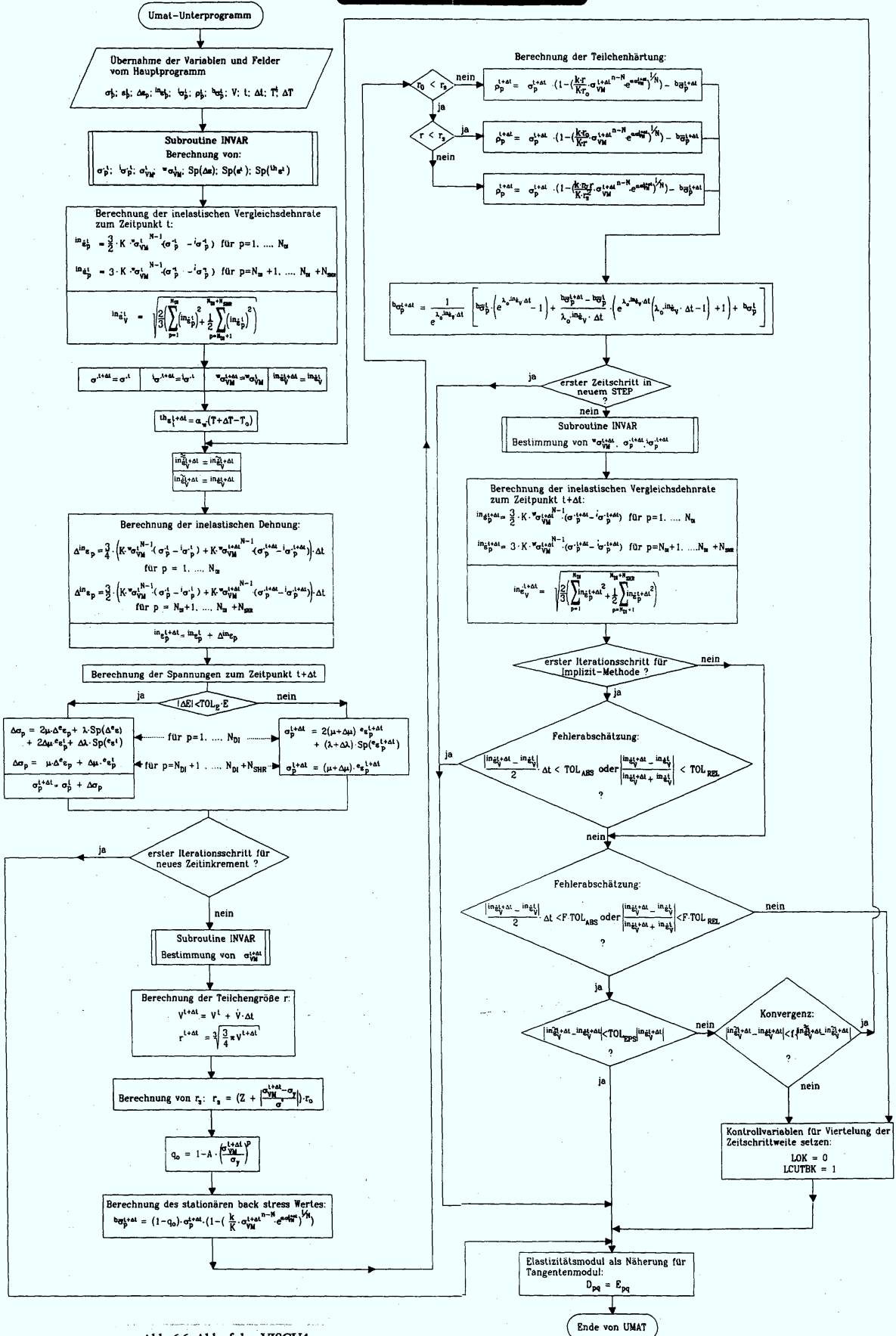


Abb. 6.6: Ablaufplan VISCU4

Fehlerabschätzung übersprungen, so daß nach der Berechnung der neuen Spannungen direkt mit der Ermittlung des Tangentenmoduls fortgefahren wird. Für den Fall, daß das erste Zeitinkrement nach einer Step-Anweisung im FE-Hauptprogramm bearbeitet wird, wird die Fehlerabfrage ebenfalls übersprungen.

In allen anderen Fällen wird nach der Berechnung der inneren Spannung die viskoplastische Vergleichsdehnrate zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ ermittelt, mit deren Hilfe wiederum die Fehlerabschätzung nach Gl(6.4) durchgeführt wird. Liegen absoluter oder relativer Fehler unterhalb der vorgegebenen Werte TOL_{abs} bzw. TOL_{rel} , so wird die Berechnung mit der Bestimmung des Tangentenmoduls fortgesetzt. Die Implizit-Methode kommt in diesem Fall nicht zur Anwendung. Sind sowohl absoluter als auch relativer Fehler größer als die vorgegebenen maximalen Toleranzwerte, so wird eine zweite Fehlerabfrage durchgeführt, bei der die Toleranzwerte um einen Faktor F vergrößert sind. Liegt nun der relative und absolute Fehler erneut oberhalb der neuen Toleranz, so werden die Kontrollvariablen für die Viertelung der Zeitschrittweite gesetzt. Ansonsten kommt das Implizit-Verfahren zum Tragen. Hierzu wird mit dem neuen Wert der Effektivspannung an die Stelle des Unterprogramms zurückgesprungen, an der das viskoplastische Dehnungsinkrement berechnet wird. Mit diesem verbesserten Wert der viskoplastischen Dehnung wird nun erneut die Spannung und die Effektivspannung zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ bestimmt. Auf diese Weise nähert man sich iterativ dem "genauen" Wert der aktuellen Effektivspannung. Das Iterationsverfahren wird abgebrochen, wenn sich der Wert der viskoplastischen Vergleichsdehnrate zwischen zwei Iterationen nur noch geringfügig ändert, bzw. die Konvergenz der Iteration sehr schlecht ist. Im zweiten Fall werden vor Verlassen des Unterprogramms die Kontrollvariablen für die Viertelung der Zeitschrittweite gesetzt. Zur Überprüfung der Konvergenz der Iteration wird die Änderung der viskoplastischen Vergleichsdehnrate des letzten Iterationsdurchlaufes mit der Änderung des vorletzten Durchlaufes verglichen:

$$\left| \tilde{\dot{\epsilon}}_V^{t+\Delta t} - \dot{\epsilon}_V^{t+\Delta t} \right| < f \cdot \left| \tilde{\dot{\epsilon}}_V^{t+\Delta t} - \tilde{\dot{\epsilon}}_V^{t+\Delta t} \right| \quad (6.9)$$

$\tilde{\dot{\epsilon}}_V^{t+\Delta t}$: viskoplastische Vergleichsdehnrate zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ vor dem letzten Iterationsschritt

$\tilde{\dot{\epsilon}}_V^{t+\Delta t}$: viskoplastische Vergleichsdehnrate zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ vor dem aktuellen Iterationsschritt

$\dot{\epsilon}_V^{t+\Delta t}$: viskoplastische Vergleichsdehnrate zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ nach dem aktuellen Iterationsschritt

f : Konvergenzgüteparameter

Dem Parameter f in dieser Konvergenzabfrage sollte dabei ein Wert zwischen 0.1 und 0.95 zugewiesen werden.

Ist der Iterationsprozess abgeschlossen, muß der Tangentenmodul ermittelt werden. Da bei den impliziten numerischen Integrationsverfahren die Bestimmung des Tangentenmoduls mit einem sehr großen Programmieraufwand verbunden ist [14], wurde in dieser Version der UMAT-Routine der Elastizitätstensor als grobe Näherung für den Tangentenmodul benutzt. Hierdurch verschlechtert sich allerdings die Konvergenz der Gleichgewichtsiteration.

7. Durchführung von Testrechnungen

Die Kontrolle und Verifizierung der Umat-Routinen erfolgte an einfachen Geometrien (Einelementstrukturen) und einachsigen Belastungsfällen für einen zur Temperatur 850°C gehörenden Werkstoffparametersatz, für den bereits auf anderem Wege Lösungen erarbeitet wurden. Bei der Bewertung der Routinen wurde besonders Wert auf die numerische Stabilität, die Genauigkeit des Ergebnisses und die Rechenzeit gelegt. Die Toleranz- und Einstellwerte der verschiedenen Umat-Versionen sind in Tabelle 7.1 dargestellt:

	Bezeichnung	Variablen-name	V1	V2	V3	V4
Toleranzwert für Rundung von σ	/	TOLRU	1.E-7	1.E-7	1.E-7	1.E-7
max. relativer Fehler von ${}^{\text{in}}\Delta\varepsilon$	TOL_{rel}	TOLFE	1.E-3	1.E-3	1.E-3	1.E-3
max. absoluter Fehler von ${}^{\text{in}}\Delta\varepsilon$	TOL_{abs}	TOLEPS	1.E-7	1.E-7	1.E-7	1.E-7
Toleranzwert für vereinfachte "back stress" Fehlerabfrage	$\text{TOL}(\Delta^b\sigma)$	TOLSIGB	0.005	/	/	/
Toleranzwert für numerische Integration des "back stress"	$\text{TOL}({}^b\sigma)$	TOLSB	0.1	/	/	/
maximale Anzahl Subinkremente	AT_{max}	ATMAX	/	/	20	/
Faktor F in Fehlerabfrage der Implizit-Methode	F	GF	/	/	/	20
Konvergenzgüteparameter	f	RF	/	/	/	0.95
max. rel. Fehler von ${}^{\text{in}}\Delta\varepsilon$ bei Implizit-Iteration	/	TOLE	/	/	/	1.E-4

Tabelle 7.1: Toleranz und Einstellwerte der Umat-Routinen

Der Toleranzwert für die Bestimmung der Spannungsinkremente mit Hilfe der Explizit-Euler-Methode TOL_E spielt für die Testrechnungen keine Rolle, da keine Temperaturänderungen stattfinden und somit der Elastizitätsmodul eine Konstante ist.

Für die Testrechnungen wurden die folgenden Belastungsfälle ausgewählt:

- konstante Last mit 100MPa, 200 MPa, 300 MPa und 400 MPa Anfangsspannung
- Spannungsrampe auf 300 MPa mit einer Lastanstiegsgeschwindigkeit von 1MPa/h, 3 MPa/h, 10 MPa/h, 30MPa/h
- Relaxation mit 0.1%, 0.2%, 0.3%, 0.4% und 0.5% Anfangsdehnung
- 1%/h, 3%/h, 10%/h und 30%/h konstante Dehnrate bis auf 3% Gesamtdehnung

In den folgenden Kapiteln werden die einzelnen Belastungsfälle beschrieben.

7.1. Konstante Last

Bei dieser Belastungsart wird zum Zeitpunkt $t=0$ schlagartig eine Last aufgebracht, die unter Berücksichtigung der elastischen Verformung eine vorgegebene Anfangsspannung im Element erzeugt. Da sich mit fortschreitender viskoplastischer Verformung der Querschnitt des Elementes aufgrund der Querkontraktion zunehmend verkleinert, steigt die Spannung stetig an. In Abb.7.1 ist der Verlauf der Spannung (Kurve 1), der Dehnung (Kurve 5), der viskoplastischen Dehnung (Kurve 4) und der Hilfsgrößen beispielhaft für 300MPa Anfangsspannung dargestellt. Interessant für die nachfolgende Fehlerbetrachtung ist, daß die Kurve der viskoplastische Dehnrate überwiegend linksgekrümmt, und die "back stress"-Kurve rechtsgekrümmt ist. Die numerische Integration der viskoplastischen Dehnrate mit Hilfe des Explizit-Euler-Verfahrens (Viscu1, 2 und 3) liefert somit Werte für die viskoplastische Dehnung, die gegenüber der exakten Lösung zu klein sind. Die numerische Integration der "back stress"-Differentialgleichung mit Hilfe des einfachen Euler-Vorwärtsschrittes (Viscu1) ergibt zusätzlich zu große "back stress"-Werte, so daß die viskoplastische Dehnrate gegenüber der exakten Dehnrate zu klein berechnet wird. Die numerischen Fehler der Umat-Routine sind somit bei der einfachsten Version Viscu1 am größten, während die Implizit-Methode für diesen Belastungsfall wie zu erwarten das genaueste Ergebnis liefert. In Abb.7.2 ist der relative Fehler der Umat-Routinen bezogen auf den Endwert der viskoplastischen Dehnung dargestellt. Der "exakte" Wert der viskoplastischen Enddehnung wurde für die Bestimmung des relativen Fehlers mit Hilfe einer Rechnung, bei der die Toleranzwerte um den Faktor 100 verkleinert wurden, ermittelt. Die Unterschiede bezüglich der Rechengenauigkeit zwischen Viscu2 und Viscu3 sind so zu deuten, daß der Fehler, der bei der Subinkrementtechnik durch die Gleichgewichtsiteration (bei Viscu2 ist die Gleichgewichtsbedingung nach der ersten Iteration "exakt" erfüllt, während bei Viscu3

die Gleichgewichtsiteration abgebrochen wird, wenn die betragsmäßig größte Komponente des Residuums kleiner als die Toleranz PTOL ist⁵⁾ und durch die Aufteilung des Dehnungsinkrementes in gleich große Subinkremente entsteht, den Fehler der numerischen Integration teilweise kompensiert.

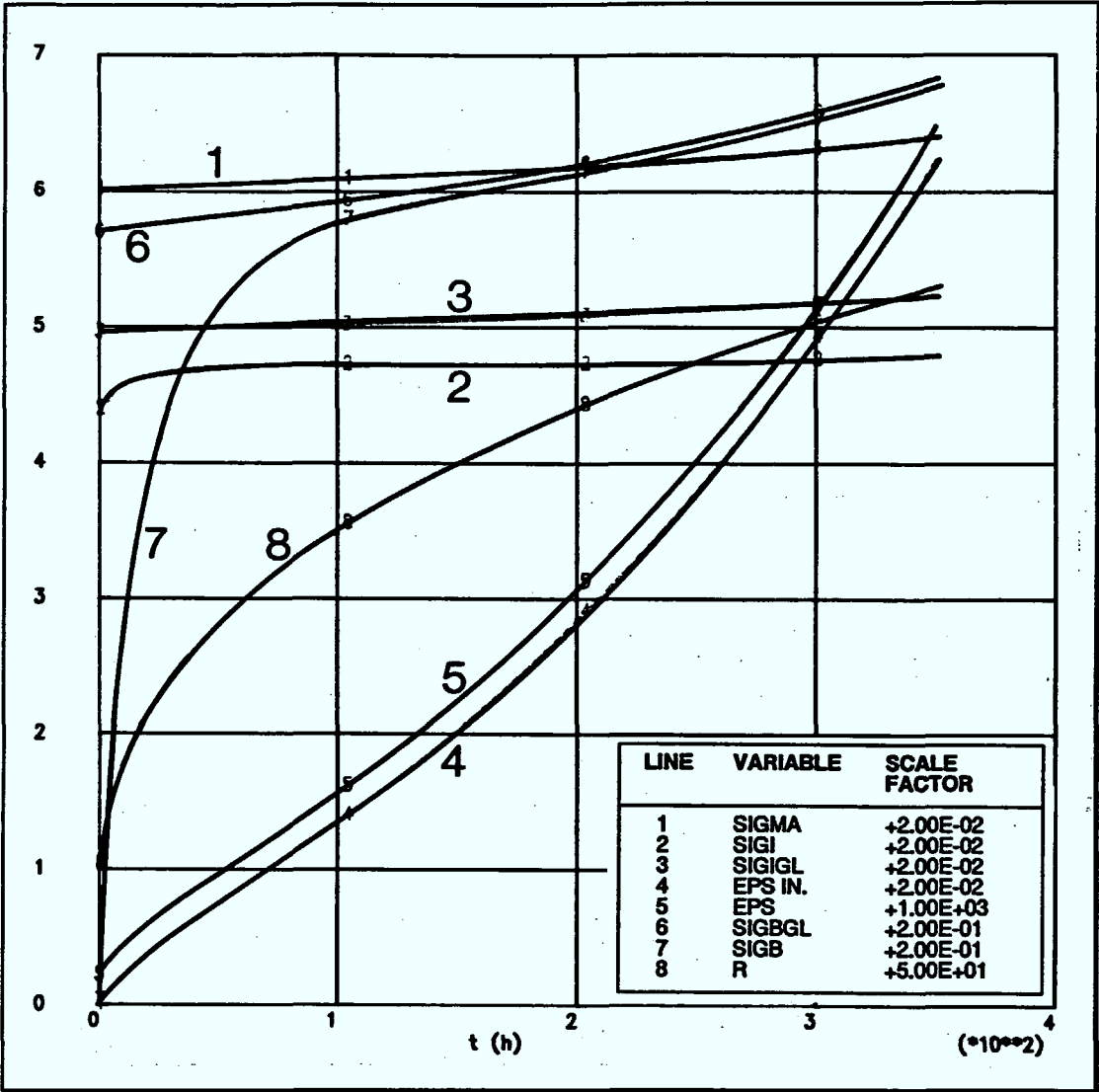


Abb. 7.1: Zeitlicher Verlauf der wichtigsten Größen bei konstanter Last (300MPa Anfangsspannung)

⁵siehe hierzu auch Kapitel 4.2

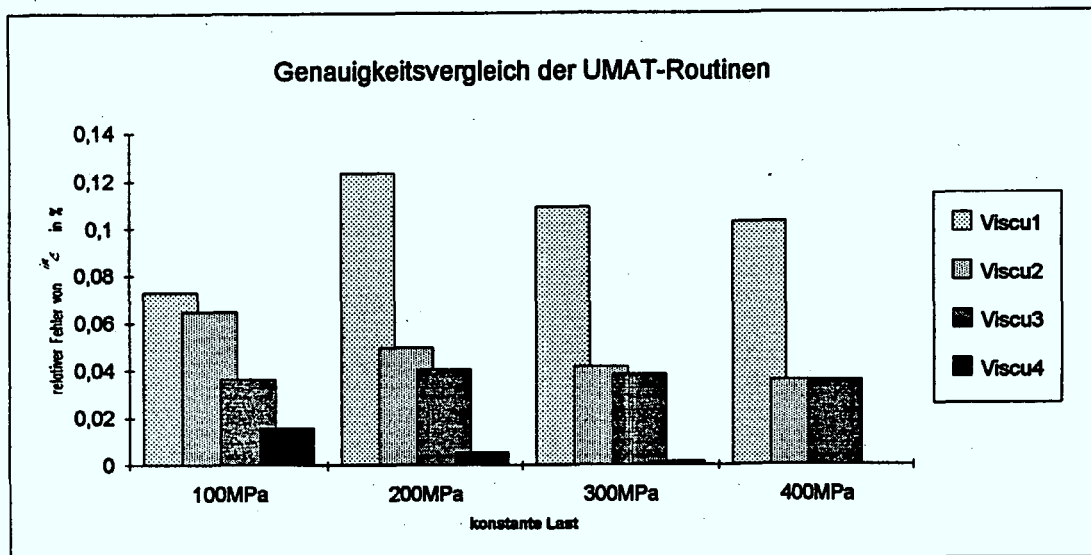


Abb. 7.2: Genauigkeitsvergleich der Umat-Routinen - konstante Last

(Für alle Umat-Routinen wurde das Anfangszeitinkrement auf 0.001h und PTOL auf 0.001 festgelegt)

Der Rechenzeitvergleich der Umat-Routinen ist in Abb. 7.3 dargestellt. Für die hier beschriebene Belastungsart stellte sich die Subinkrementtechnik als besonders effektiv heraus. Sie benötigte in allen Fällen weniger als 50% der Rechenzeit der einfachen Versionen Viscu1 und Viscu2 und weniger als 65% der Rechenzeit von Viscu4.

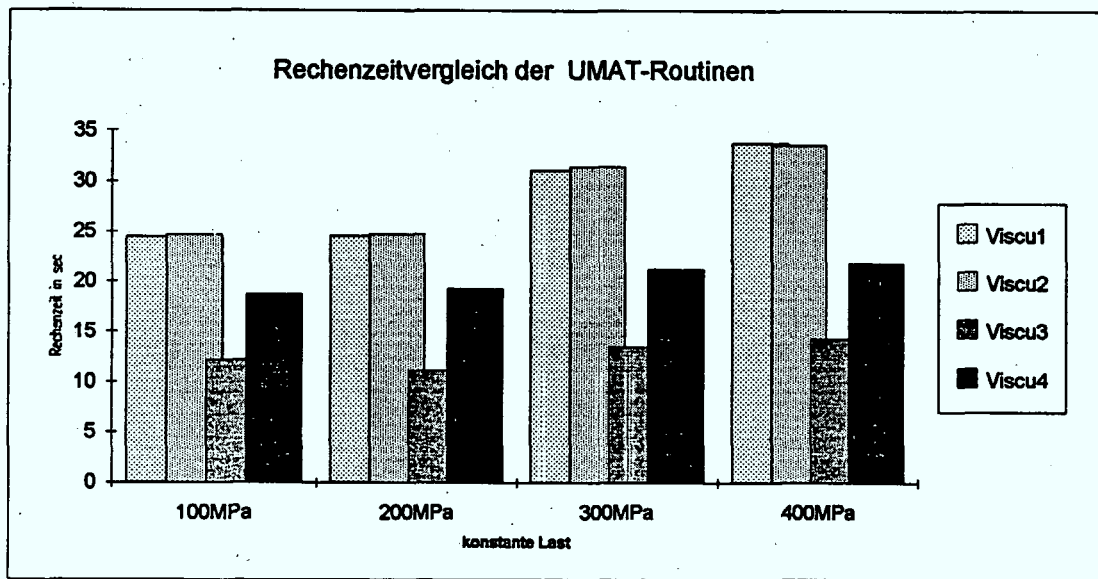


Abb. 7.3: Rechenzeitvergleich der Umat-Routinen - konstante Last

7.2. Spannungsrampe

Für diesen Lastfall wurde die Spannung in verschiedenen Zeiten linear auf einen Endwert von 300MPa erhöht. In Abb. 7.4 sind beispielhaft die Verläufe der wichtigsten Größen dargestellt. Die Besonderheit dieses Lastfalls liegt darin, daß die viskoplastische

Dehnrates zunächst lange Zeit verschwindend klein bleibt, und gegen Ende der Berechnung stark ansteigt. Durch die starke Krümmung, die sich hier bei der Kurve der inelastischen Verformung (Kurve 4) aufgrund des starken Anstiegs der Dehnrates zeigt, wird der Fehler der numerischen Integration in diesem Bereich für zu große Zeitschrittweiten sehr groß. Dieser Lastfall ist daher zur Überprüfung der Umat-Routinen besonders geeignet. In Abb. 7.5 sind die relativen Fehler bezüglich der viskoplastischen Dehnung, die sich für die unterschiedlichen Spannungsrampen bei den vier Unterprogrammversionen ergeben haben, dargestellt. Wie erwartet, traten auch in diesem Lastfall beim Implizit-Verfahren die geringsten Fehler auf. Die Rechengenauigkeit der beiden einfachen Umat-Routinen Viscu1 und Viscu2 sind nahezu identisch. Dies ist so zu erklären, daß in dem Bereich, in dem sich der "back stress" im wesentlichen entwickelt, die Kurve der inelastischen Dehnung eine sehr starke Krümmung aufweist. Daher wird die Zeitschrittweite aufgrund der Fehlerabfrage bezüglich der viskoplastischen Dehnung sehr klein, so daß auch der Fehler der numerischen Integration der "back stress"-Differentialgleichung so gering wird, daß er einen vernachlässigbar kleinen Einfluß auf die viskoplastische Dehnrates hat. Bei der Subinkremententechnik wird der Fehler der numerischen Integration wiederum teilweise durch den Fehler, der sich durch die Gleichgewichtsiteration und durch die Unterteilung des Dehnungsincrementes in gleichgroße Subinkremente ergibt, kompensiert.

Es fällt weiterhin auf, daß die relativen Fehler mit steigender Rampengeschwindigkeit bei allen Versionen der Umat-Routine stark zunehmen. So erreicht der relative Fehler bei einer Spannungsrampe von 30MPa/h für die einfachsten Unterprogrammversionen Viscu1 und Viscu2 einen Wert größer als 1.2%. Das auftreten solch großer Fehler ist so zu erklären, daß der Endwert der viskoplastischen Dehnung für eine große Rampengeschwindigkeit sehr klein bleibt ($\ln \epsilon_{\text{end}} = 0.033\%$ für eine Rampengeschwindigkeit von 30MPa/h gegenüber $\ln \epsilon_{\text{end}} = 0.9\%$ für eine Rampengeschwindigkeit von 1MPa/h), da das Material in der kurzen Zeit nur geringfügig kriechen kann. Ein kleiner absoluter Fehler führt somit in diesem Fall, aufgrund des kleinen Endwertes der viskoplastischen Dehnung, auf den er bezogen wird, zu einem großen relativen Fehler. Es ist daher zu empfehlen, die Toleranzwerte der Fehlerabfragen für Rechnungen, bei denen der Wert der viskoplastischen Dehnung sehr gering bleibt, zu verkleinern.

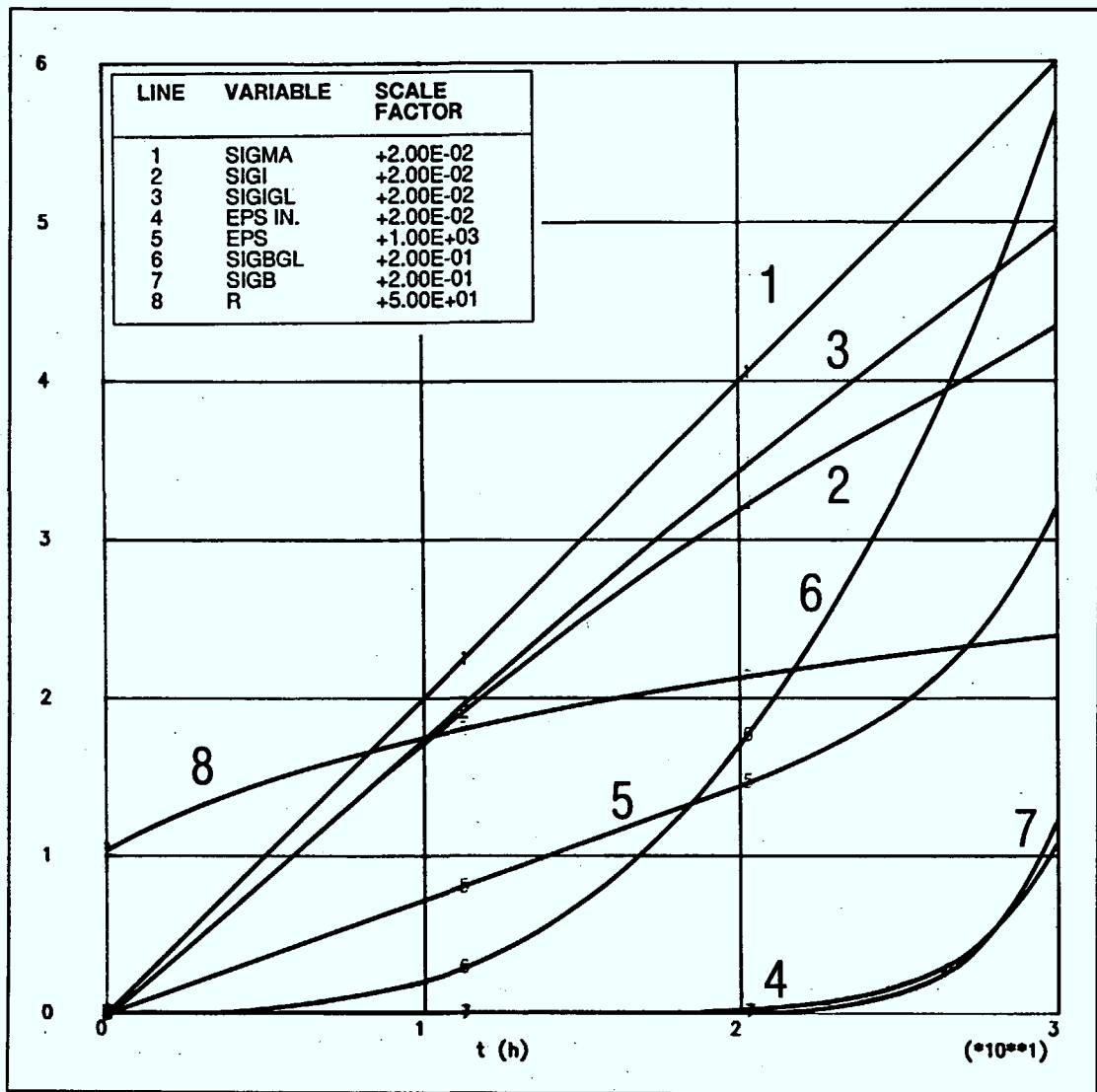


Abb. 7.4: Zeitlicher Verlauf der wichtigsten Größen bei einer Spannungsrampe von 10MPa/h

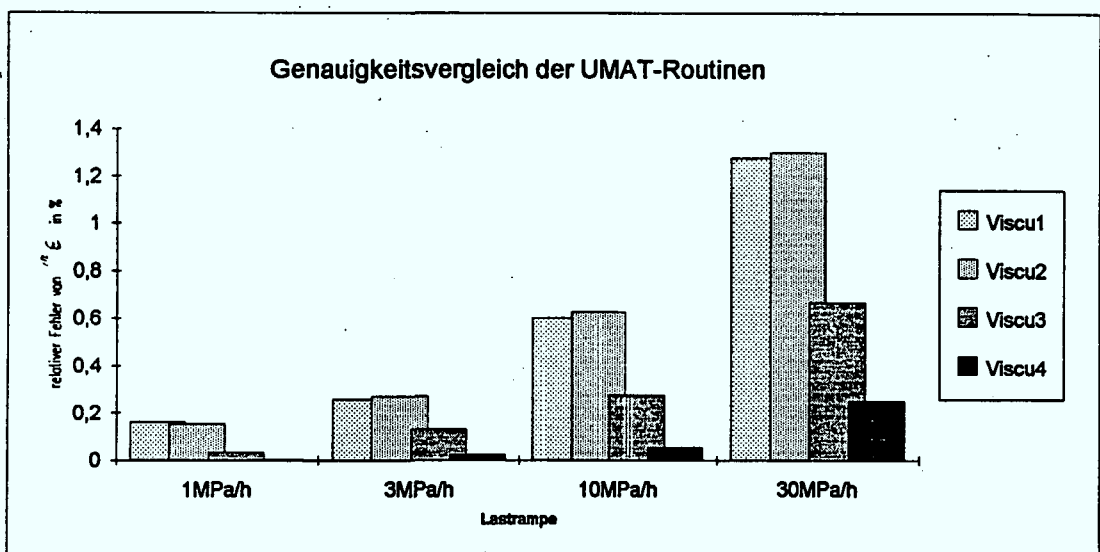


Abb. 7.5: Genauigkeitsvergleich der Umat-Routinen - Spannungsrampe

(Für alle Umat-Routinen wurde das Anfangszeitinkrement auf 0.001h und PTOl auf 0.001 festgelegt)

Der Rechenzeitvergleich der Umat-Routinen (Abb. 7.6) zeigt, daß das Implizit-Verfahren bei einer Spannungsrampe nicht nur das mit Abstand genaueste Integrationsverfahren ist, sondern auch die geringste Rechenzeit benötigt. So ist die Unterprogrammversion Viscu4 in allen Fällen mehr als 50% schneller als die einfachen Versionen Viscu1 und Viscu2, die beide in etwa die gleiche Rechenzeit benötigten, und ca. 20% schneller als Viscu3 (Subinkrementtechnik).

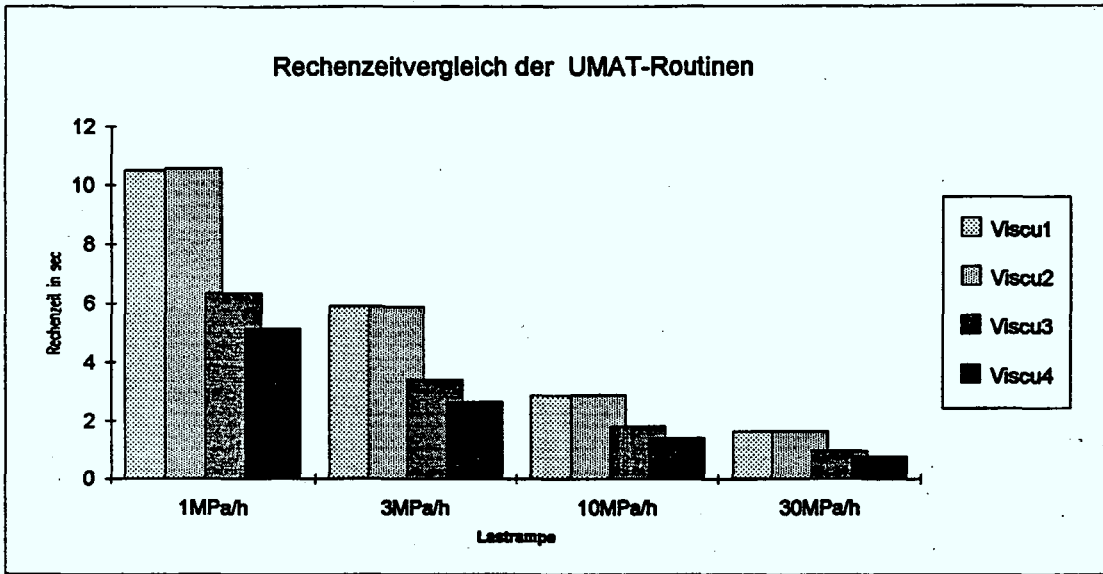


Abb. 7.6: Rechenzeitvergleich der Umat-Routinen - Spannungsrampe

7.3. Relaxation

Bei der Relaxation wird das Element zum Zeitpunkt Null auf einen vorgegebenen Wert gedehnt. Diese Dehnung ist zunächst rein elastisch und erzeugt im Querschnitt eine Spannung, die sich aus dem Hooke'schen Gesetz ermitteln läßt. Durch zunehmende viskoplastische Verformung nimmt der elastische Anteil der Dehnung ab, wodurch sich die Spannung kontinuierlich abbaut (Kurve 1, Abb.7.7). Interessant für die nachfolgende Fehlerbetrachtung ist, daß sowohl die Kurve der viskoplastischen Dehnung, als auch die "back stress"-Kurve rechtsgekrümmt ist. Die numerische Integration der viskoplastischen Dehnrates mit Hilfe des Explizit-Euler Verfahrens (Viscu1, 2, 3) liefert daher zu große Werte für die inelastische Dehnung. Bei der einfachsten Version des Umat-Unterprogramms Viscu1 liefert die numerische Integration der "back stress"-Differentialgleichung allerdings ebenfalls zu große "back stress"-Werte, so daß die Dehnrates in diesem Fall unter dem exakten Wert liegt. Hierdurch wird der numerische Fehler bei der Ermittlung der inelastischen Dehnung teilweise kompensiert, so daß die einfachste Version der Umat-Routine teilweise sogar genauere Ergebnisse als alle

anderen Versionen liefert (Abb.7.8). Generell kann aber auch bei diesem Lastfall festgestellt werden, daß bezüglich der Genauigkeit das implizite Integrationsverfahren (Viscu4) den anderen vorzuziehen ist.

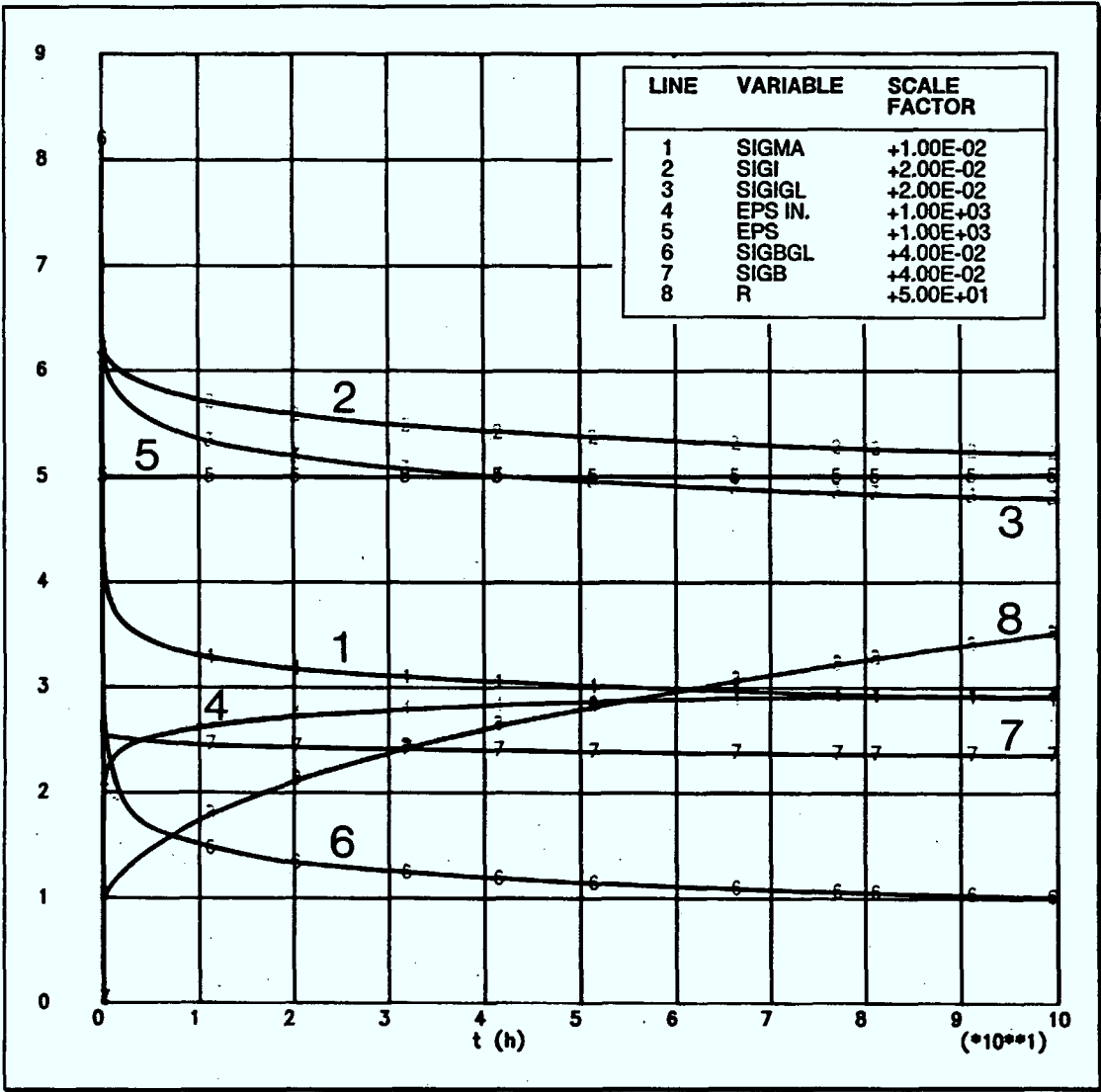


Abb. 7.7: Zeitlicher Verlauf der wichtigsten Größen - Relaxation mit 0.5% Anfangsdehnung

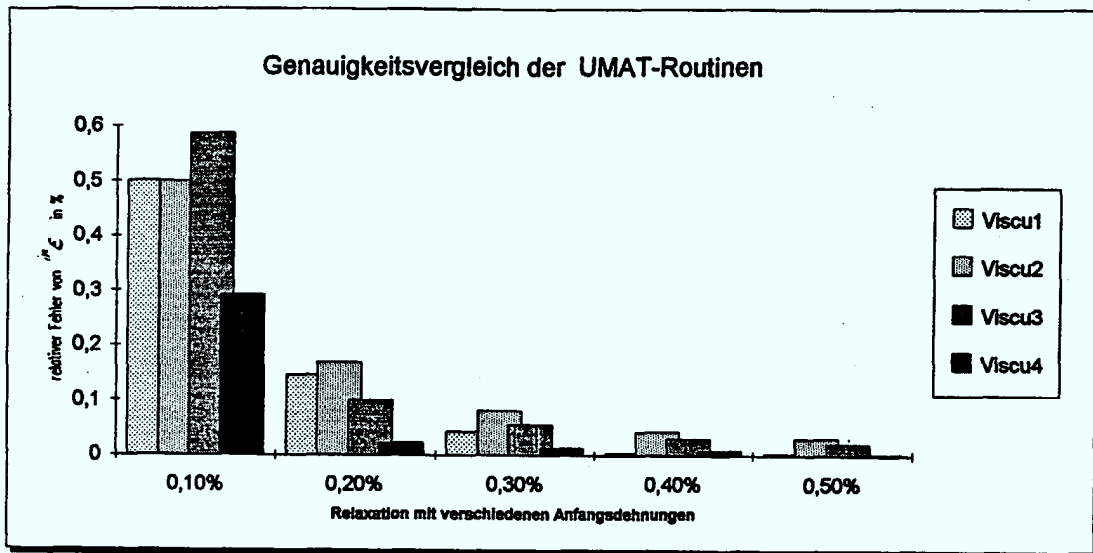


Abb. 7.8: Genauigkeitsvergleich der Umat-Routinen - Relaxation

(Für alle Umat-Routinen wurde das Anfangszeitinkrement auf 0.0001h und PTOL auf 0.01 festgelegt)

Der Vergleich der Rechenzeiten (Abb. 7.9) zeigt, daß ähnlich dem Lastfall der Spannungsrampe, die vierte Version der Umat-Routine nicht nur das genaueste, sondern auch das schnellste Unterprogramm ist. So benötigte sie bei fast allen Rechnungen weniger als 50% der Rechenzeit der einfachen Umat-Routinen Viscu1 und Viscu2, und war geringfügig schneller als das Unterprogramm Viscu3.

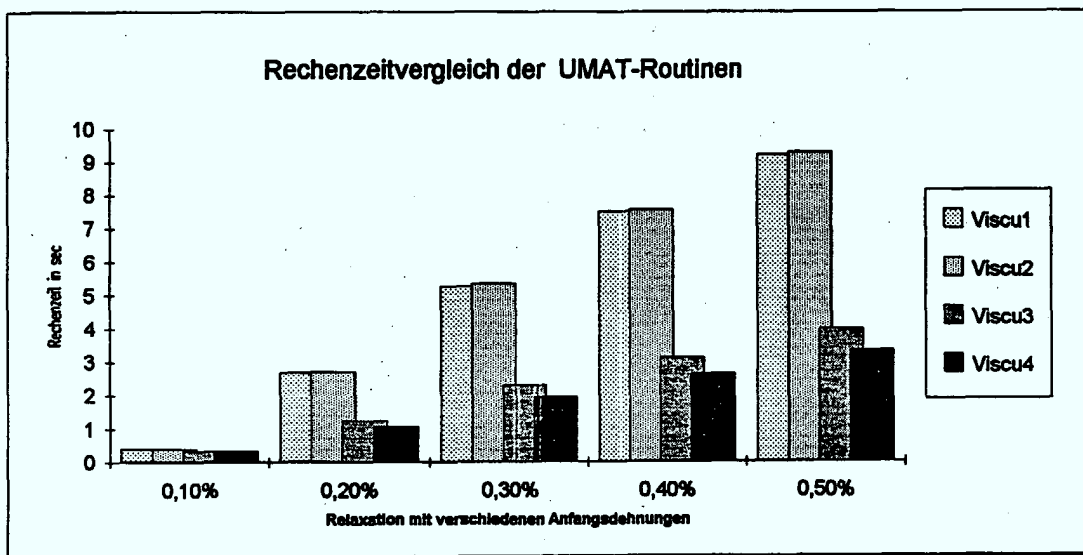


Abb. 7.9: Rechenzeitvergleich der Umat-Routinen - Relaxation

7.4. Konstante Dehnrates

Der letzte Lastfall, der im Rahmen der Testrechnungen untersucht wurde, war die konstante Dehnrates. Hierbei wurde das Element mit unterschiedlichen Abzugsgeschwindigkeiten auf eine Gesamtdehnung von 3% gebracht. Abb.7.10 zeigt die zeitlichen Verläufe der wichtigen Größen am Beispiel der Dehnrates von 1%/h. Bei diesem Fall ist für die Fehlerbetrachtung interessant, daß die viskoplastische Dehnrates zunächst Null bleibt, ehe sie dann innerhalb kurzer Zeit annähernd den Wert der vorgegebenen Gesamtdehnrates erreicht. Nach diesem Übergangsbereich bleibt die Dehnrates schließlich näherungsweise konstant, so daß in diesem Bereich der Fehler der numerischen Integration verschwindend klein wird. Nur im Übergangsbereich, in dem die Kurve der viskoplastischen Dehnung (Kurve 4) eine starke Krümmung aufweist, wird sich ein relativ großer numerischer Fehler ergeben. Da jedoch die viskoplastische Dehnung am Ende dieses Bereiches sehr gering gegenüber der viskoplastischen Dehnung am Ende der Berechnung ist, hat der numerische Fehler im Übergangsbereich keinen erkennbaren Einfluß auf das Gesamtergebnis. Ein weiterer Aspekt bei der Fehlerbetrachtung ist, daß die "back stress"-Kurve im Übergangsbereich, in dem die Zeitschrittweite aufgrund der starken Änderung der viskoplastischen Dehnrates stark eingeschränkt wird, eine starke, und anschließend eine schwache Krümmung aufweist. Daher wird der numerische Fehler der "back stress"-Integration bei der einfachsten Version der Umat-Routine Viscu1 ebenfalls vernachlässigbar klein, so daß alle Versionen der Umat-Routine für diesen Belastungsfall das gleiche Ergebnis lieferten.

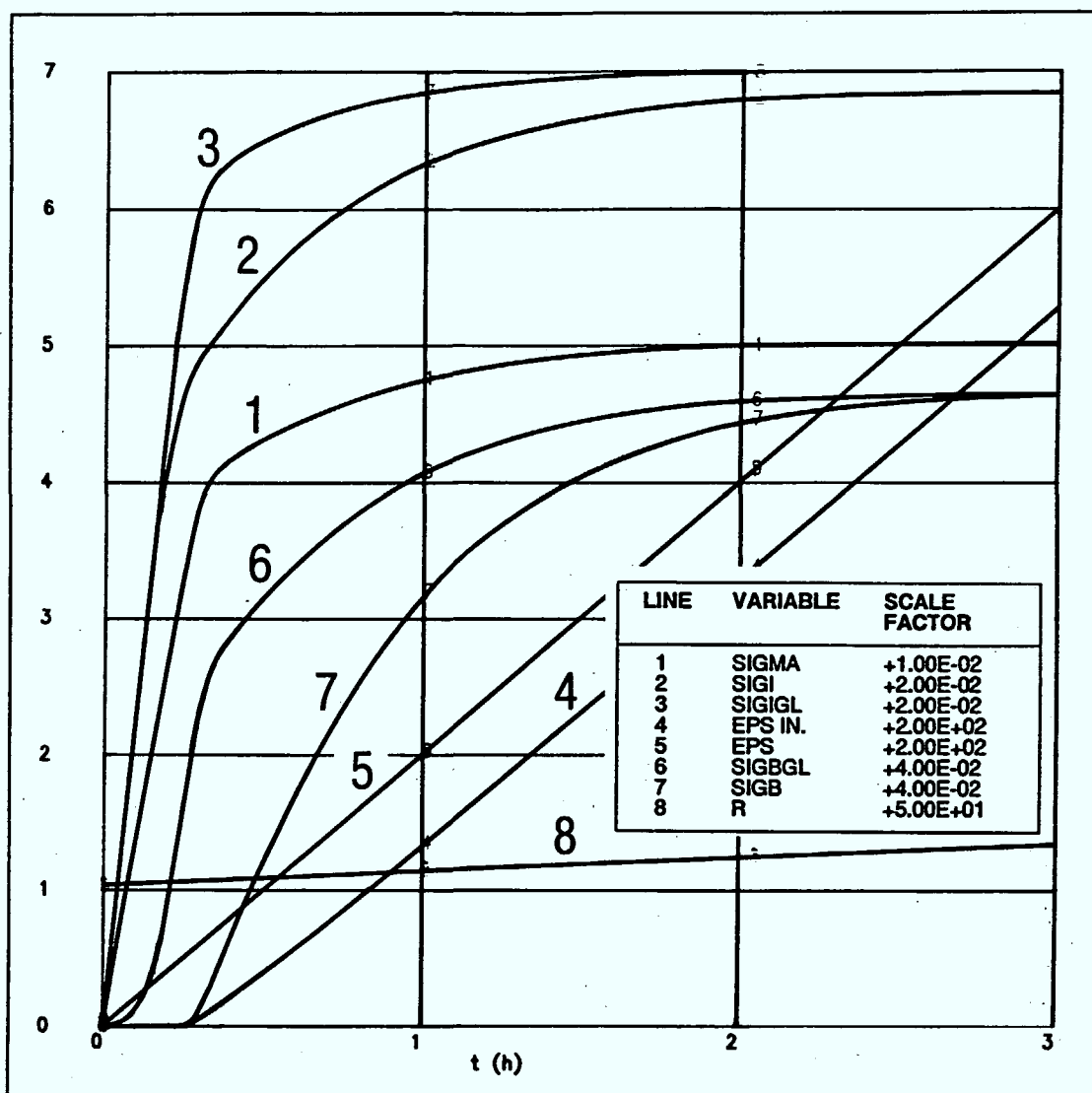


Abb. 7.10: Zeitlicher Verlauf der wichtigsten Größen bei 1%/h konstante Dehnrates

Der Rechenzeitvergleich der Umat-Routinen (Abb. 7.11) zeigt für den hier untersuchten Lastfall zum ersten mal deutliche Unterschiede zwischen den einfachsten Unterprogrammversionen Viscu1 und Viscu2. Dies ist so zu erklären, daß bei den Unterprogrammversionen, bei denen die "back stress"-Differentialgleichung exakt integriert wird, bei konstanter Dehnrates keine Zeitschrittweitenbeschränkung notwendig ist, während dagegen die numerische Integration der "back stress"-Differentialgleichung mit Hilfe des Explizit-Euler-Verfahrens in diesem Fall eine Zeitschrittsteuerung unumgänglich macht.

Die Unterprogrammversion Viscu3 ist bei diesem Lastfall um mehr als 60% schneller als Viscu2 und um ca. 30% schneller als Viscu4.

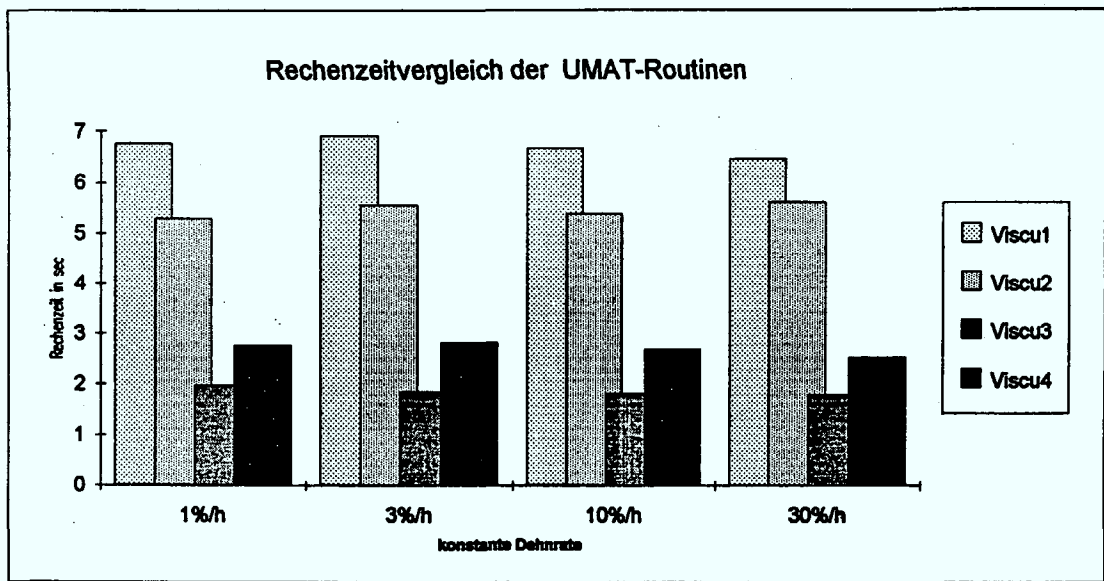


Abb. 7.11: Rechenzeitvergleich der Umat-Routinen - konstante Dehnrates

(Für alle Umat-Routinen wurde das Anfangszeitinkrement auf 0.001h und PTOL auf 0.01 festgelegt)

8. Strukturmechanische Analyse eines Turbinenschaufelmodells

Bislang beschränkten sich sämtliche Testrechnungen auf Einelementstrukturen und einen konstanten Parametersatz. Zur Demonstration der generellen Anwendbarkeit der Umat-Routinen sollten deshalb zusätzlich Testrechnungen an einem Turbinenschaufelmodell mit einer inhomogenen Temperaturverteilung durchgeführt werden.

Das Schaufelmodell ist in Abb. 8.1 dargestellt. Bei sämtlichen Elementen der Schaufel handelt es sich um "Generalized Plane Strain"-Elemente [27], die eine Modellierung von Strukturen erlauben, die unter Belastung bezogen auf ihre Achse eine konstante Krümmung aufweisen. Die "Generalized Plain Strain"-Theorie geht dabei folgendermaßen vor. Zunächst wird von dem Querschnitt der Struktur ein zweidimensionales Modell erstellt. Zusätzlich zu diesem Modell werden zwei Extraknoten angegeben. Der erste Knoten ist Träger eines Verschiebungsfreiheitsgrades für die Abstandsänderung paralleler Ebenen der Struktur. Der zweite Knoten beinhaltet zwei Rotationsfreiheitsgrade, die sich auf eine Verdrehung der Ebenen bezüglich der x- und y-Achse beziehen. Für das hier verwendete Turbinenschaufelmodell wurden die Rotationsfreiheitsgrade der Ebenen gefesselt, so daß zwischen ihnen kein Kippen stattfinden kann.

Die Temperaturverteilung in der Schaufel wurde für die Testrechnungen mit Hilfe eines bereits bestehenden ABAQUS-Datensatzes ermittelt. Das Ergebnis der Berechnung ist in Abb. 8.2 dargestellt. Die höchsten Temperaturen treten an der Anströmkante, an der Saugseite der Schaufel und an der Abströmkante auf (ca.850°C). Die tiefsten Temperaturen sind in den beiden Stegen zwischen den Kühlkanälen zu finden (ca.700-730°C).

Die Verifizierung der Umat-Routinen wird an zwei Belastungsfällen durchgeführt. In beiden Fällen wird die Schaufel 1000h in Achsrichtung mit einer Kraft von 100KN auf Zug belastet, wobei im ersten Fall die Thermospannungen vernachlässigt und im zweiten Fall berücksichtigt werden. Die so erzielten Ergebnisse werden mit den Ergebnissen einer weiteren Rechnung, bei der der Norton'sche Ansatz

$$\dot{\epsilon}_i = K \cdot \sigma^{N'} \quad (8.1)$$

für die inelastische Dehnrage verwendet wird, verglichen. Der Koeffizient und der Exponent im Norton'schen Ansatz wurden dabei durch Anpassung an Versuchsergebnisse bestimmt (Abb. 8.3 und Abb. 8.4).

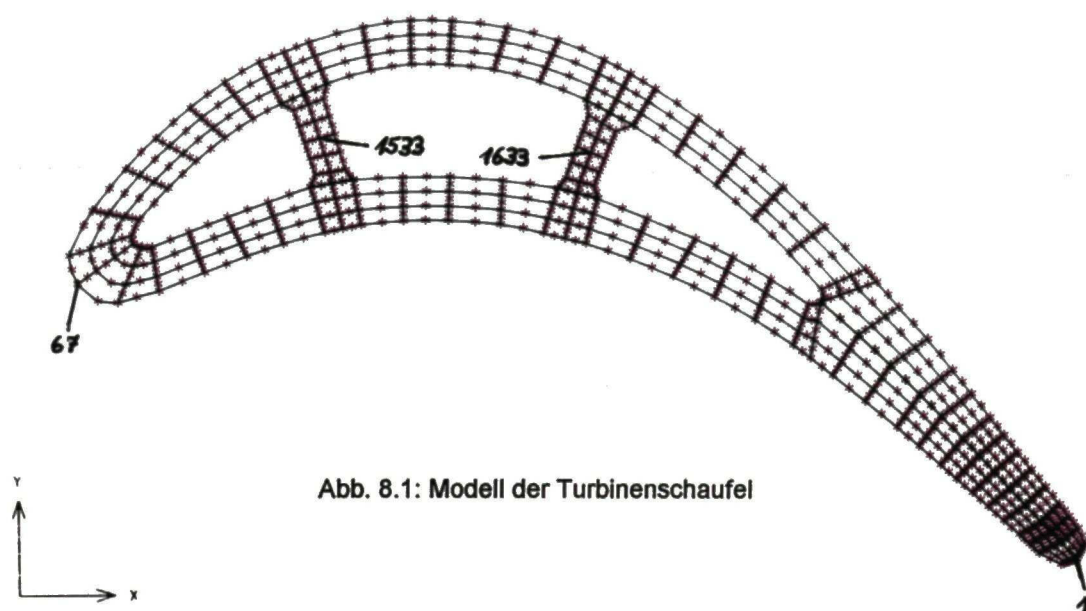


Abb. 8.1: Modell der Turbinenschaufel

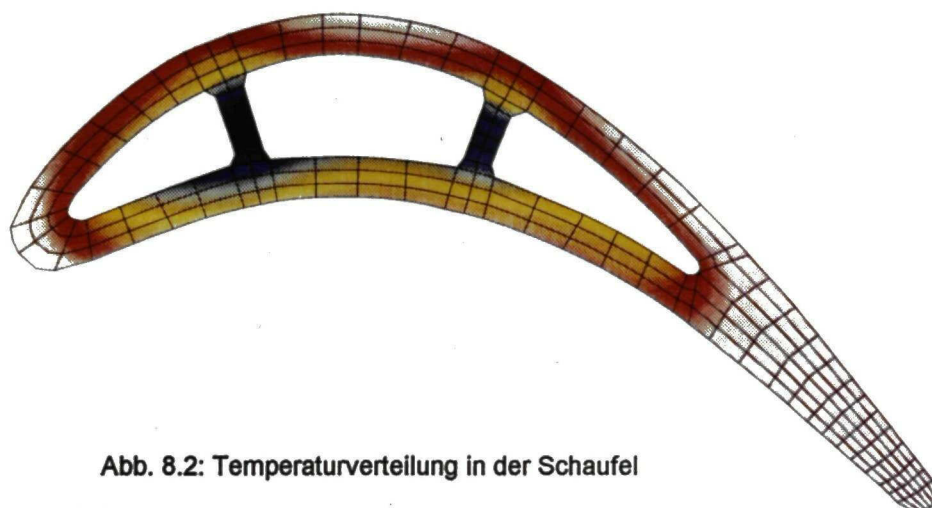


Abb. 8.2: Temperaturverteilung in der Schaufel

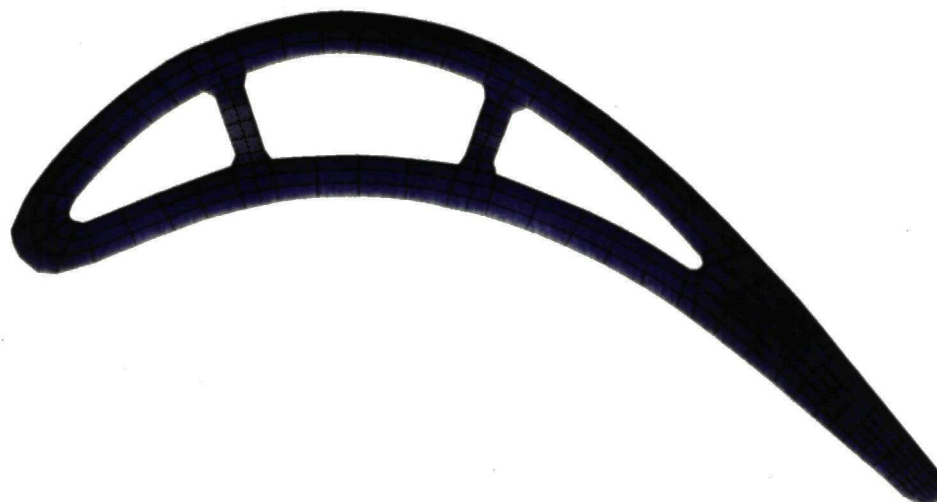
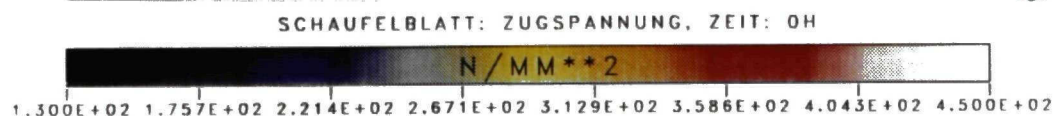


Abb. 8.5: Hauptspannungen in Achsrichtung bei einer Zugkraft von 1E5 N nach 0h, unter Vernachlässigung der Thermospannungen

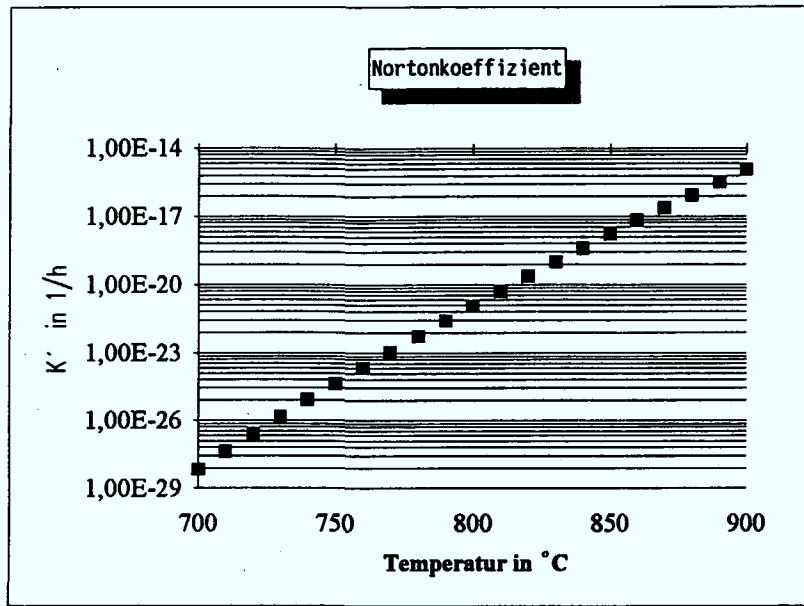


Abb. 8.3: Temperaturabhängigkeit des Nortonkoeffizienten

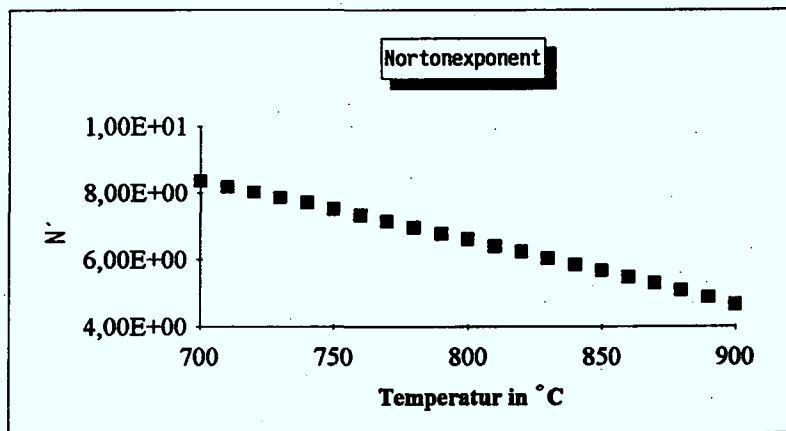


Abb. 8.4: Temperaturabhängigkeit des Nortonexponenten

Da die Berechnung der beiden beschriebenen Lastfälle sehr zeitintensiv ist, soll sie mit nur einer Version der Umat-Routine durchgeführt werden, wobei sich die implizite Version Viscu4 bei ersten Testrechnungen als besonders effektiv herausstellte. So benötigt die Berechnung einer über 100h auf Zug belasteten Schaufel, unter Berücksichtigung der Thermospannungen, für die unterschiedlichen Umat-Routinen die in Tabelle 8.1 aufgeführten Rechenzeiten. Für die bei diesem Belastungsfall erzielten Ergebnisse zeigt sich dabei eine sehr gute Übereinstimmung (relativen Abweichungen liegen unterhalb von 0.1%).

Umat Routine	Rechenzeit in sec
Viscu2	1187
Viscu3	1211
Viscu4	694

Tabelle 8.1: Rechenzeitvergleich der Umat-Routinen Viscu2, 3 und 4 für die Berechnung der über 100h mit 100kN in Achsrichtung belasteten Schaufel

Zunächst soll nun die reine Zugbelastung der Schaufel näher betrachtet werden. Für die Rechnung wird hierzu die sich durch das aufbringen des Temperaturprofils einstellenden Thermospannungen vernachlässigt, indem der Wärmeausdehnungskoeffizient des Materials zu Null gesetzt wird. Zum Zeitpunkt $t=0$ wird die Schaufel in Achsrichtung mit einer Kraft von 100kN auf Zug belastet. Da die Schaufel eine Querschnittsfläche von ca. 500mm^2 besitzt, stellt sich in Achsrichtung eine mittlere Spannung von 200N/mm^2 ein, wobei die kältesten Stellen der Schaufel (Stege) aufgrund des größeren Elastizitätsmoduls um ca. 35N/mm^2 über, und die heißesten Stellen (Anströmkante und Abströmkante) um ca. 25N/mm^2 unter der mittleren Spannung liegen (Abb. 8.5). Insgesamt ist die Spannungsverteilung jedoch noch annähernd homogen. Nach einer Belastungsdauer von 1000h hat schließlich eine deutliche Umlagerung der Spannungen stattgefunden (Abb. 8.6). In den Stegen hat sich die Spannung bis auf 448N/mm^2 erhöht, während die Spannung in den heißen Stellen der Schaufel bis auf 137N/mm^2 abgebaut wurde. Diese Spannungsumlagerung ist so zu erklären, daß die Freiheitsgrade der beiden Ebenen, die das Schaufelmodell in Achsrichtung einschließen, so eingegrenzt sind, daß die Ebenen ständig parallel zueinander bleiben. Dies bedeutet wiederum, daß die Dehnung in Achsrichtung in jedem Punkt des Schaufelquerschnittes gleich sein muß. Daher wird sich im Schaufelprofil mit der Zeit eine Spannungsverteilung derart einstellen, daß die viskoplastische Dehnraten in Richtung der Achse für jeden Punkt der Schaufel gleich ist.

In Abb. 8.7 ist der zeitliche Verlauf der Spannung für die Abströmkante (Knoten 1), die Anströmkante (Knoten 67), den vorderen Steg (Knoten 1533) und den hinteren Steg (Knoten 1633) dargestellt. Es ist zu erkennen, daß die Spannungsumlagerung nach 1000h noch nicht abgeschlossen ist. Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem Ergebnis einer Rechnung mit dem Norton'schen Ansatz (Abb. 8.8), so wird deutlich, daß die Spannungsumlagerung bei der Rechnung mit Norton'schem Ansatz, bei der sich schon nach einer Zeit von 600h eine stationäre Lösung einstellte, wesentlich schneller stattfindet. Dies bedeutet, daß die inelastischen Dehnraten bei der Rechnung mit Norton'schem Ansatz größer sind, als bei der Rechnung mit dem "back stress"-Modell.

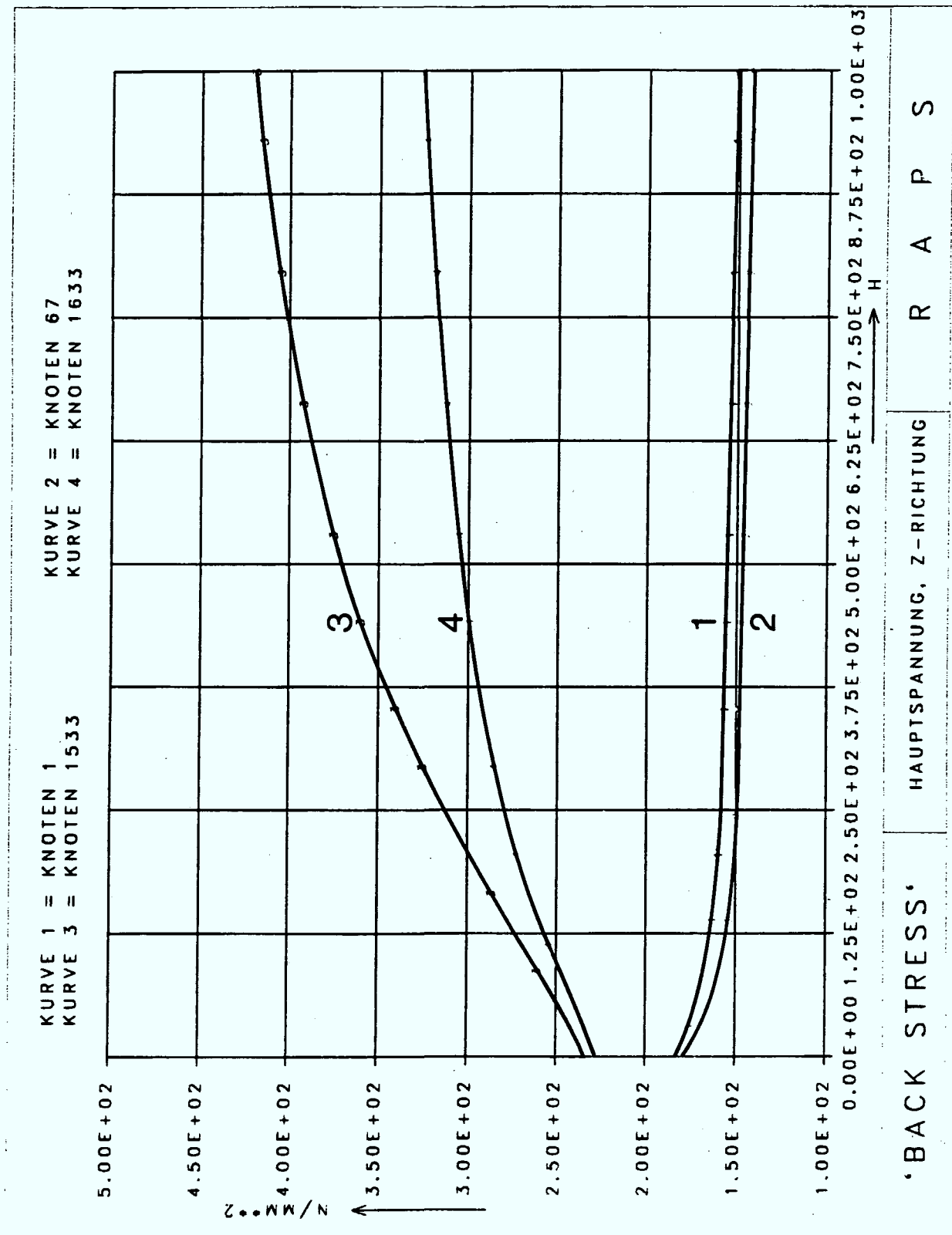


Abb. 8.7: Zeitlicher Verlauf der Hauptspannung in Achsrichtung für den Schaufelschwanz, die Schaufelspitze und die beiden Schaufelstege (Zugspannung); berechnet mit dem "back stress"-Modell

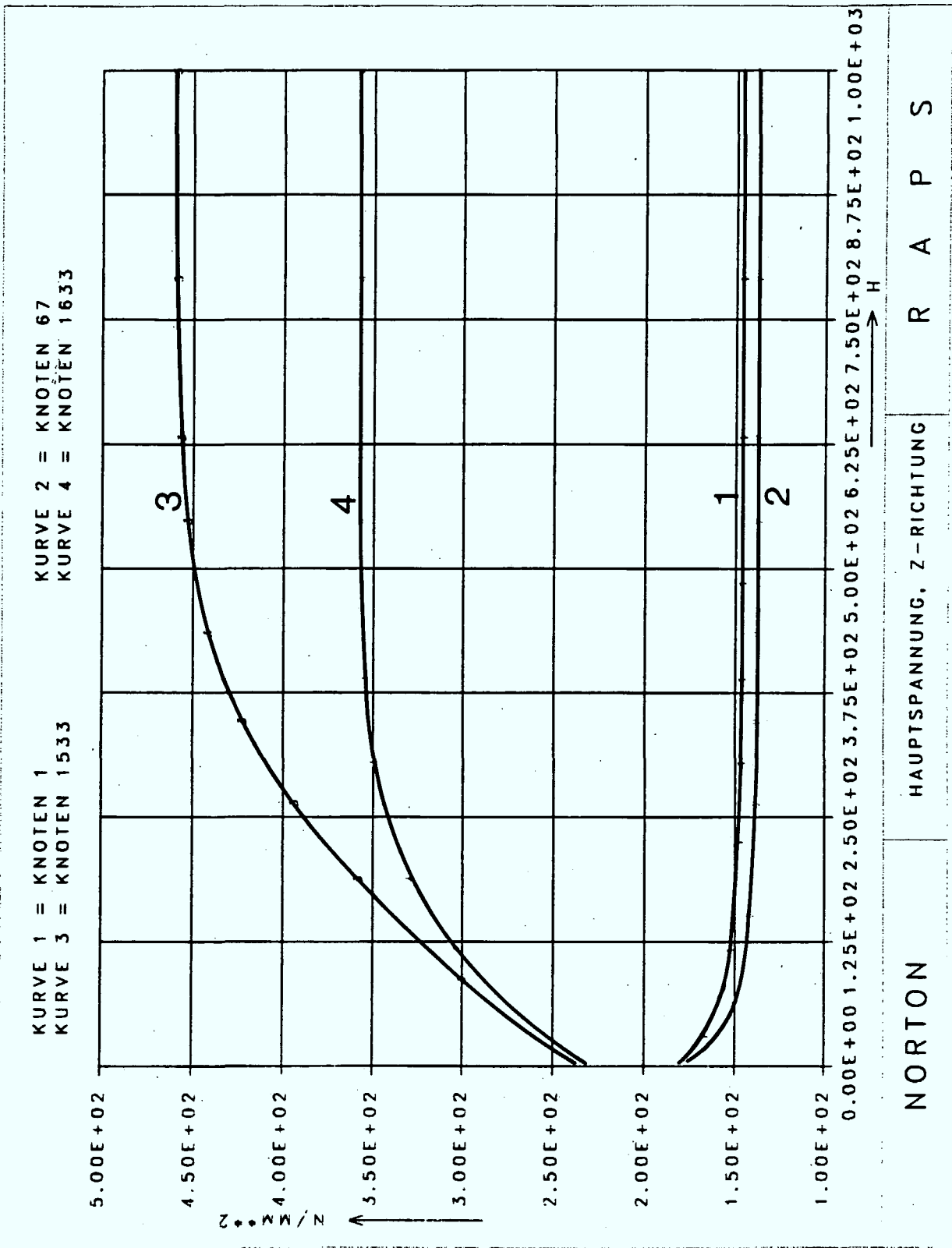


Abb. 8.8: Zeitlicher Verlauf der Hauptspannung in Achsrichtung für den Schaufelschwanz, die Schaufelspitze und die beiden Schaufelstege (Zugspannung); berechnet mit Norton'schem Ansatz

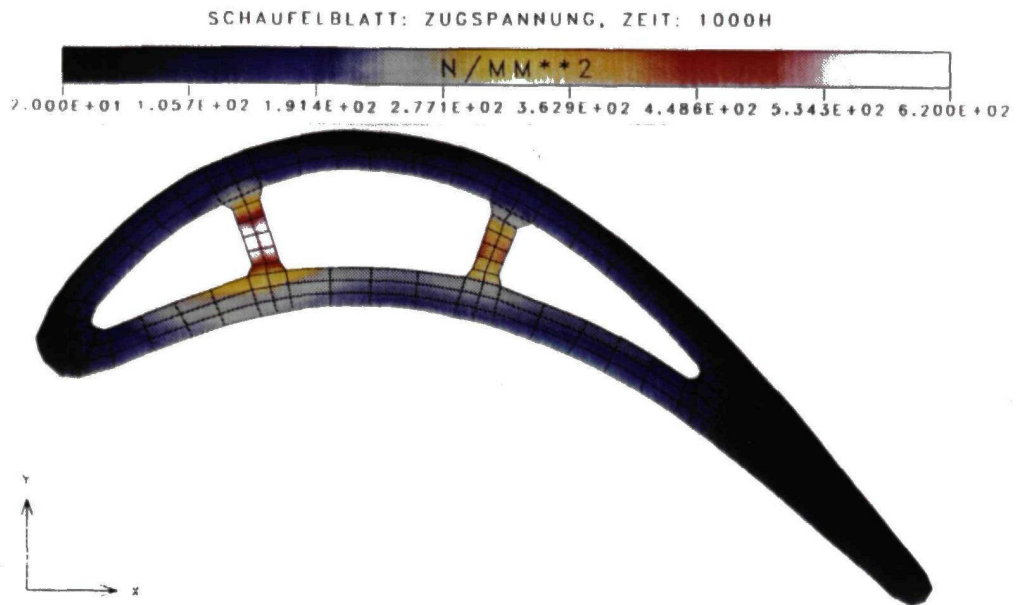


Abb. 8.6: Hauptspannungen in Achsrichtung bei einer Zugkraft von 1E5 N nach 1000h, unter Vernachlässigung der Thermospannungen

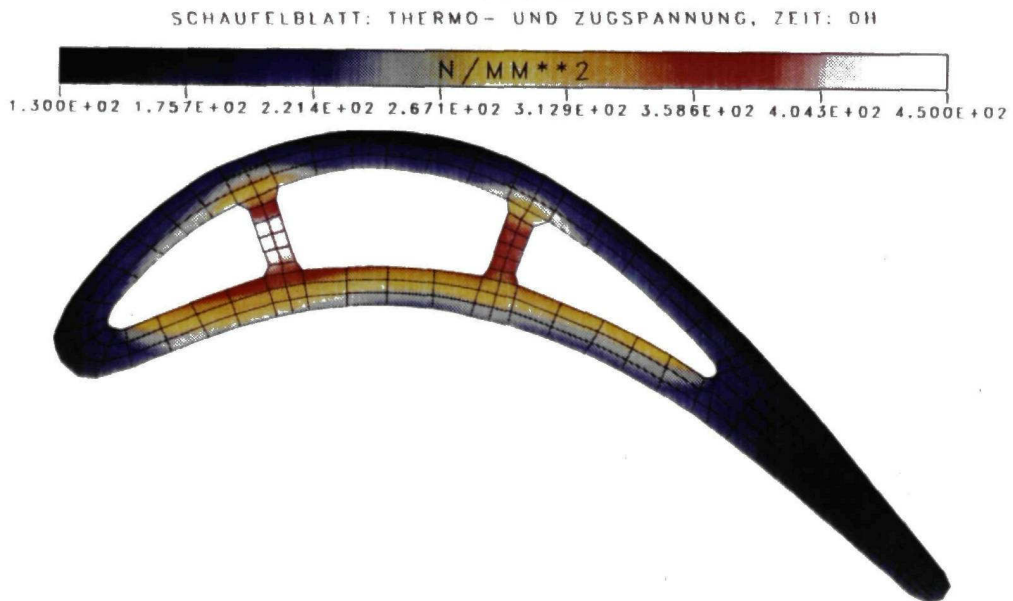


Abb. 8.10: Hauptspannungen in Achsrichtung bei einer Zugkraft von 1E5 N nach 0h, unter Berücksichtigung der Thermospannungen

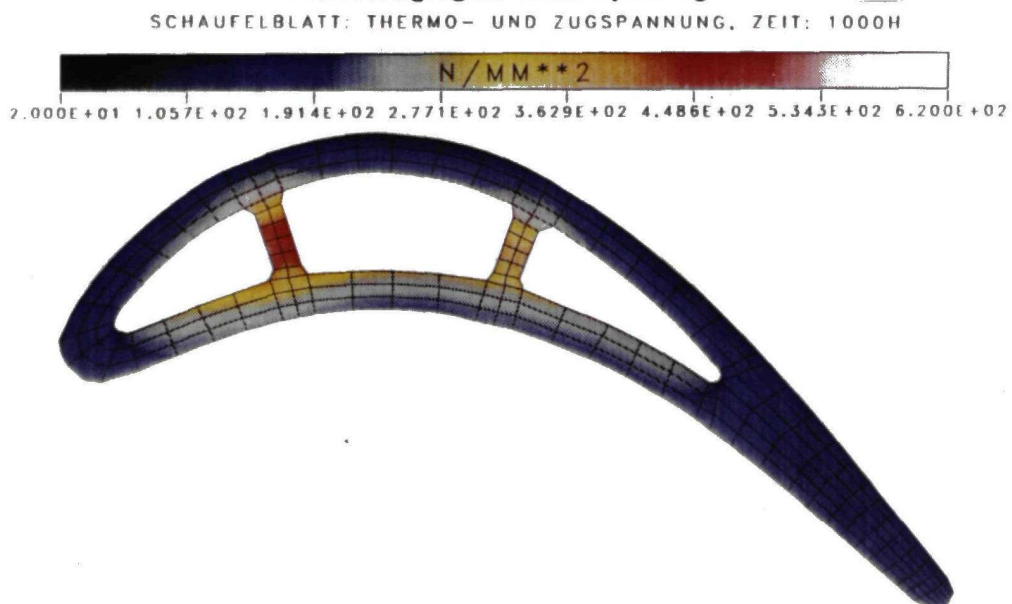


Abb. 8.11: Hauptspannungen in Achsrichtung bei einer Zugkraft von 1E5 N nach 1000h, unter Berücksichtigung der Thermospannungen

Der Vergleich der inelastischen Dehnung in Achsrichtung nach 1000h macht dies deutlich:

$$\ln \epsilon_{\text{Norton}}^{t=1000h} = 3.23 \cdot 10^{-3} ; \quad \ln \epsilon_{\text{"back stress"}}^{t=1000h} = 1.29 \cdot 10^{-3}$$

Der Grund für diese Unterschiede liegt in der Anpassung des Norton'schen Koeffizienten und Exponenten. Durch Logarithmieren von Gl(8.1) erhält man für das Norton'sche Kriechgesetz den folgenden linearen Zusammenhang zwischen Logarithmus der inelastischen Dehnrates und Logarithmus der Spannung:

$$\ln(\dot{\epsilon}) = \ln(K') + N' \cdot \ln(\sigma) \quad (8.2)$$

Für die in den Versuchen gemessenen stationären inelastischen Dehnrates zeigt sich dieser Zusammenhang allerdings nur für hohe Spannungen. Werden die Norton'schen Werkstoffparameter nun anhand der Versuchsergebnisse bei hohen Spannungen angepaßt, so wird die inelastische Dehnrates bei niedrigen Spannungen überschätzt (Abb. 8.9).

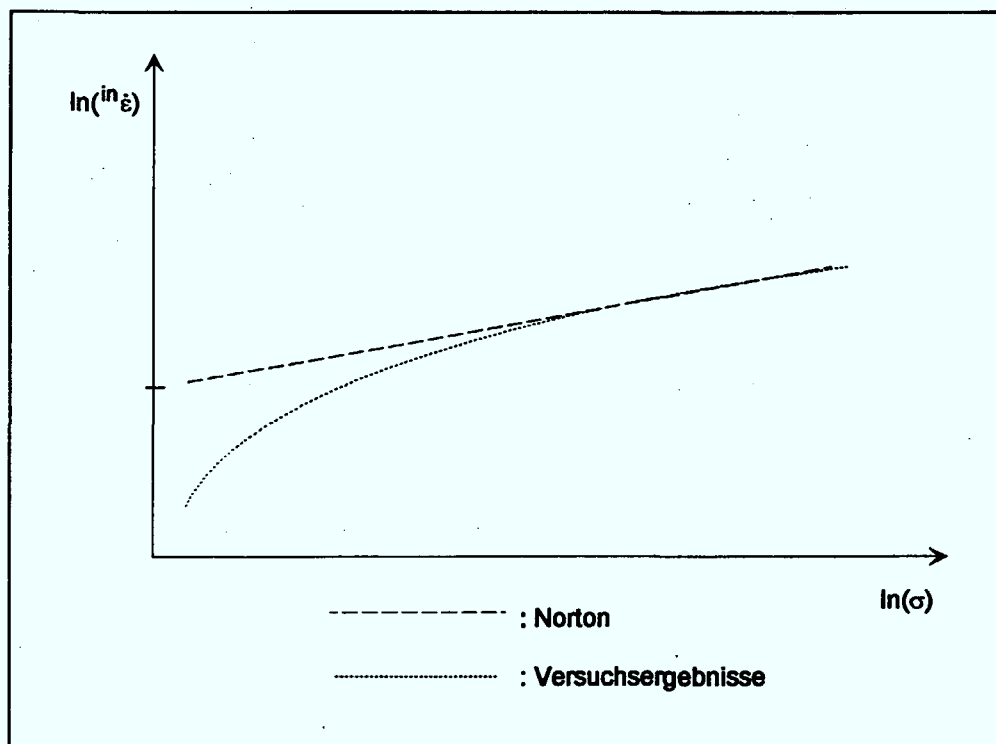


Abb. 8.9: Anpassung der Norton'schen Parameter

Im zweiten Lastfall wird zusätzlich zu der aufgetragenen Last von 100kN auch die Thermospannung, die sich aufgrund der inhomogenen Temperaturverteilung einstellt, berücksichtigt. Im Gegensatz zur reinen Zugbelastung, bei der die Spannungen senkrecht

zur Achsrichtung nur eine untergeordnete Rolle spielt, treten bei diesem Lastfall neben den Hauptspannungen in Achsrichtung (Abb. 8.10) auch hohe Spannungen in allen anderen Koordinatenrichtungen auf, die die inelastische Dehnung in Achsrichtung mit bestimmen. Nach einer Belastungsdauer von 1000h hat wiederum eine starke Spannungsumlagerung stattgefunden (Abb. 8.11). Die hohen Zugspannungen in den beiden Schaufelstegen, die sich aufgrund der geringeren thermischen Ausdehnung gegenüber den heißen Stellen der Schaufel einstellen, sind um mehr als 100N/mm^2 gesunken, während an der Anströmkante und an der Abströmkante ein Anstieg der Spannungen in Achsrichtung stattgefunden hat. In Abb. 8.12 ist der zeitliche Verlauf der Spannung in Achsrichtung für die Anströmkante, die beiden Stege und die Abströmkante dargestellt. Interessant ist, daß sich bereits nach ca. 370h ein quasistationärer Zustand, vergleichbar dem stationären Zustand der Norton-Rechnung bei reiner Zugbelastung, einstellt. Die geringen Spannungsumlagerungen die anschließend auftreten sind mit den im Material stattfindenden Gefügeveränderungen zu erklären. Da das Wachstum der γ' -Teilchen in den heißen Teilen der Turbinenschaufel besonders groß ist, und somit der Widerstand gegen Kriechen dort geringer wird, wird die Spannung zunehmend auf die kälteren Stellen der Schaufel verlagert. Ein Vergleich dieses Ergebnisses mit dem Ergebnis einer Rechnung mit Norton'schem Ansatz für die inelastische Dehnrates (Abb. 8.13) zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse, wobei jedoch anzumerken ist, daß die Rechnung mit dem Norton'schen Ansatz im Gegensatz zum "back stress"-Modell zu einem stationären Ergebnis führt.

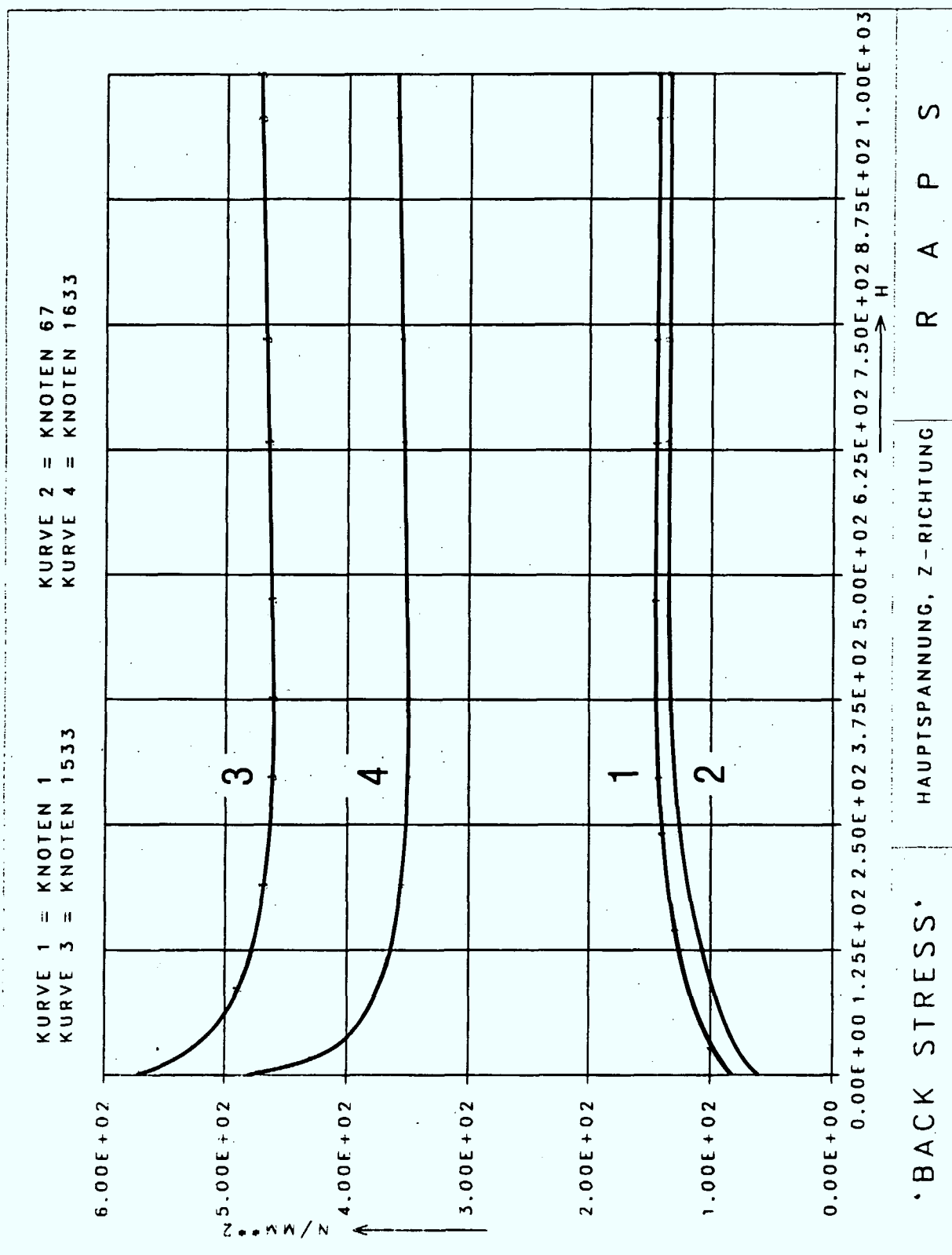


Abb. 8.12: Zeitlicher Verlauf der Hauptspannung in Achsrichtung für den Schaufelschwanz, die Schaufelspitze und die beiden Schaufelstege (Zug- und Thermospannung); berechnet mit dem "back stress"-Modell

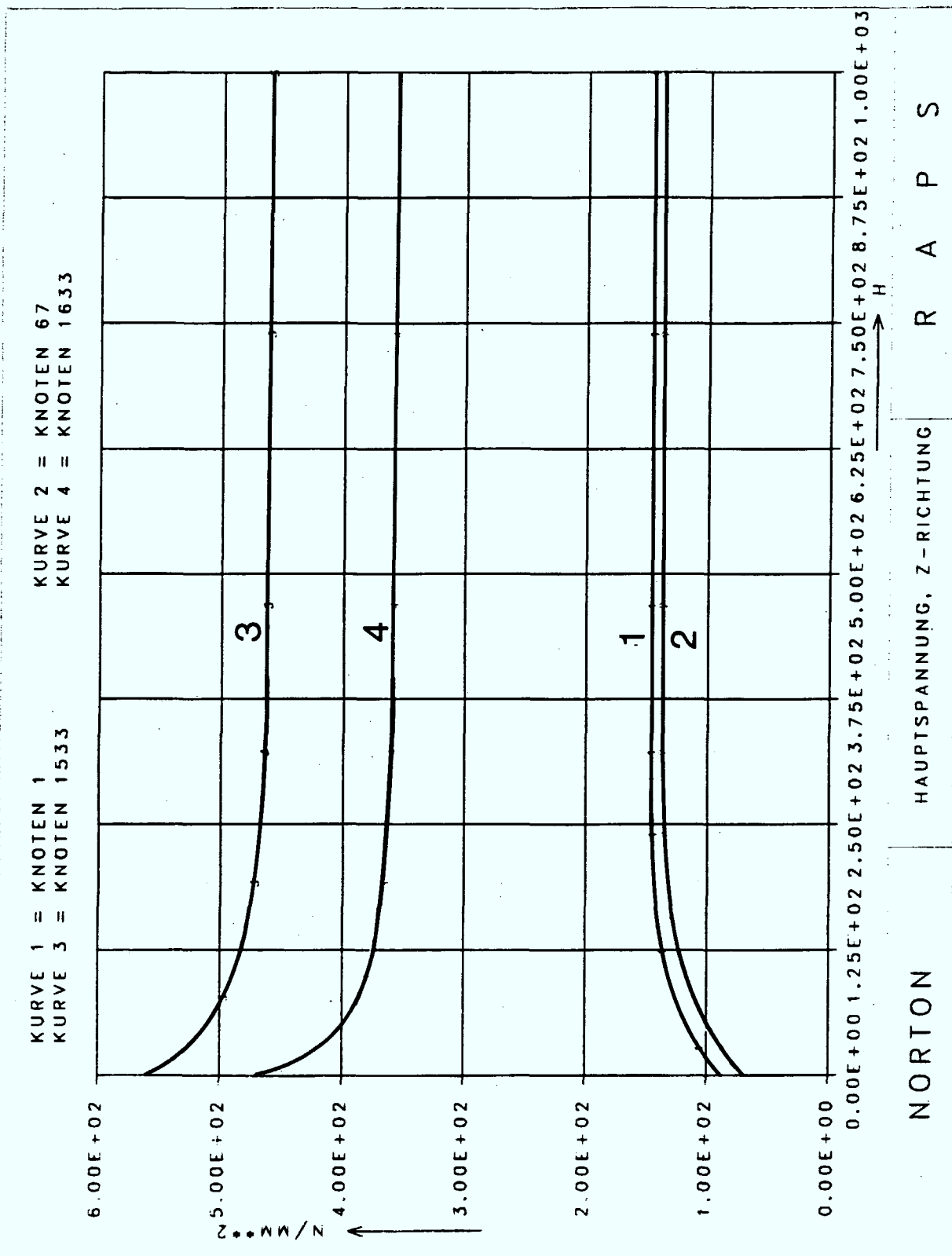


Abb. 8.13: Zeitlicher Verlauf der Hauptspannung in Achsrichtung für den Schaufelschwanz, die Schaufelspitze und die beiden Schaufelstege (Zug- und Thermospannung); berechnet mit Norton'schem Ansatz

9. Zusammenfassung

Die Nickelbasislegierung IN738LC ist ein Hochtemperaturwerkstoff, der überwiegend im Gasturbinenbau zum Einsatz kommt. Zur Analyse des thermomechanischen Verhaltens der aus IN738LC gefertigten Schaufeln wurde ein Werkstoffmodell ("back stress"-Modell") entwickelt, das die viskoplastische Dehnrates mit dem Spannungszustand, dem Verzerrungszustand und geeignet definierten Zustandsgrößen verknüpft. Aufgabe der Arbeit war die Programmierung des Stoffgesetzes in einem Unterprogramm (Umat-Routine) und das Einbinden dieses Unterprogramms in ABAQUS. Für die numerische Umsetzung der Differentialgleichungen des Stoffgesetzes wurden hierzu drei verschiedene Methoden untersucht (Explizit-Euler-Methode, Subinkrementtechnik, Trapezregel). Zur Verifizierung und Kontrolle der Umat-Routinen wurden Rechnungen an einfachen Geometrien und einachsigen Belastungsfällen durchgeführt, für die bereits auf anderem Wege Lösungen erarbeitet wurden. Die generelle Anwendbarkeit der Stoffgesetz-Unterprogramme wurde schließlich durch Anwendung auf ein Schaufelmodell demonstriert, wobei die erzielten Lösungen mit den Ergebnissen einer Rechnung mit Norton'schem Ansatz für die viskoplastische Dehnrates verglichen wurden.

10. Literaturverzeichnis

- [1] F. Schubert**
Mechanische Eigenschaften von Superlegierungen und ihren Verbunden
VDI Bericht Nr. 600.4, 1987

- [2] B. Lonschien u.a.**
Erarbeitung einer gefügeabhängigen Beschreibung des
Hochtemperatur- verformungsverhaltens des Turbinenwerkstoffes IN738LC
Dissertation, Aachen 1991

- [3] E. Hornbogen**
Festigkeitssteigerung durch Ausscheidung
in
Grundlagen des Festigkeits- und Bruchverhaltens
Herausgeber W. Dahl
Verlag Stahleisen mbH, Düsseldorf 1974

- [4] A. Troost**
Einführung in die allgemeine Werkstoffkunde metallischer Werkstoffe I
Wissenschaftsverlag Mannheim; Wien; Zürich 1984

- [5] K. Lück, G. Gottstein**
Die atomistischen Grundvorgänge der Plastizität der Metalle
in
Grundlagen des Festigkeits- und Bruchverhaltens
Herausgeber W. Dahl
Verlag Stahleisen mbH, Düsseldorf 1974

- [6] W. Schmidt**
Prüfverfahren und Auswertung
in
Kontaktstudium: Werkstoffkunde Eisen und Stahl IV
Festigkeits- und Bruchverhalten bei höheren Temperaturen
Herausgegeben von W. Dahl und W. Pitsch
Verlag Stahleisen mbH, Düsseldorf 1980

- [7] H. Bems
Übertragung von Zeitstandergebnissen auf mehrachsig beanspruchte Bauteile
in
Kontaktstudium: Werkstoffkunde Eisen und Stahl IV
Festigkeits- und Bruchverhalten bei höheren Temperaturen
Herausgegeben von W. Dahl und W. Pitsch
Verlag Stahleisen mbH, Düsseldorf 1980
- [8] J. Betten
Elastizitäts- und Plastizitätslehre
F. Vieweg&Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1986
- [9] J. Lemaitre, J.-I. Chaboche
Mechanics of Solid Materials
Press Syndicate of the University of Cambridge, New York
Originally published in French as
Mécanique des matériaux solides
Dunod, Paris 1985 and Bordas, Paris 1985
- [10] J. Betten
Tensormechnung für Ingenieure
B. G. Teubner Stuttgart 1987
- [11] D. N. Robinson
Constitutive Relationships for Anisotropic High-Temperature Alloys
Nuclear Engineering and Design 83
North-Holland, Amsterdam 1984
- [12] C. E. Pugh, D. N. Robinson
Some Trends in Constitutive Equation Model Development for High-Temperature Behavior of Fast-Reactor Structural Alloys
Nuclear Engineering and Design
North-Holland Publishing Company 1978

- [13] R. Rohrmann
Fitting Parameters of Constitutive Equations (Robinson Modell) to Experimental Data for IN738LC and Implementation of Constitutive Equations in a Finite Element Code
COST 501/II, WP1, Prediction-of-lifetime (Pol) activity, Project no. 5D3, Report on Pol 7/89-II
- [14] K. Hornberger
Anwendung viskoplastischer Stoffgesetze in Finite Element Programmen
Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe genehmigte Dissertation, 1988
- [15] E. W. Hart
Constitutive Relations for the Nonelastic Deformation of Metals
Trans. ASME Journal of Engineering Materials and Technology 98, 1976
- [16] E. W. Hart
Constitutive Relations for Non-Elastic Deformation
Nuclear Engineering and Design 46
North-Holland Publishing Company, 1978
- [17] J. L. Chaboche
Viscoplastic Constitutive Equations for the Description of Cyclic and Anisotropic Behaviour of Metals
Bulletin De L'Académie des Sciences
Série des Sciences Techniques Volume XXV, 1977
- [18] J. Olschewski, R. Sievert
Anwendung des viskoplastischen Chaboche-Modells bei der Modellierung des inelastischen Verhaltens von IN738LC bei 850°C unter einachsiger Beanspruchung und Vergleich mit Experiment
Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM)
- [19] J. Altenbach, A. S. Sacharov
Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik
Carl Hanser Verlag - München, Wien 1982
- [20] J. N. Reddy
An introduction to the finite element method
Mc Graw - Hill, Inc., 1984

- [21] J. S. Przemieniecki
Theory of Matrix Structural Analysis
Carl Hanser Verlag München-Wien 1975
- [22] J. Argyris, H.-P. Mlejnek
Die Methode der finiten Elemente
Band 1: Verschiebungsmethode in der Statik
Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH
Braunschweig 1986
- [23] R. J. Anthes, V. B. Kötting, H. Amstutz, T. Seeger
Implementation des Werkstoffmodells von Mróz als User-Subroutine in ABAQUS
Technische Hochschule Darmstadt, Fachgebiet Werkstoffmechanik
- [24] R. Jeltsch
Numerische Mathematik I für Ingenieure, Teil B
Vorlesungsskriptum Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen 1985
- [25] Dahlquist
A Special Stability Problem for Linear Multistep Methods
BIT, 3, 27 1963
- [26] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew
Taschenbuch der Mathematik
19. Auflage, herausgegeben von G. Grosche und V. Ziegler
Gemeinschaftsausgabe: Verlag Nauka, Moskau / BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1979
- [27] ABAQUS User's Manual
Hibbit, Karlsson & Soensen, Inc. 1989

11. Anhang

11.1. Gleichgewichtsiteration beim Explizit-Euler-Integrationsverfahren

Für jedes Zeitinkrement muß die inkrementelle Gleichgewichtsbedingung erfüllt sein:

$$\int_V B_{ps} \cdot \Delta \sigma_p \, dV = \Delta P_s \quad (11.1)$$

Die Gleichgewichtsiteration wird so lange von ABAQUS durchgeführt, bis das Ungleichgewicht zwischen rechter und linker Seite der inkrementellen Gleichgewichtsbedingung (Residuum) kleiner als eine vorgegebenen Toleranz ist:

$$|R_s| = \left| \Delta P_s - \int_V B_{ps} \cdot \Delta \sigma_p \, dV \right| < PTOL \quad (11.2)$$

$|R_s|$: Betrag der s-ten Komponente des Residuums

Das Spannungsinkrement $\Delta \sigma$ läßt sich hierzu aus dem inkrementellen Stoffgesetz ermitteln:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_p &= E_{pq} \cdot \Delta^e \varepsilon_q + \Delta E_{pq} \cdot {}^e \varepsilon \\ &= E_{pq} \cdot (\Delta \varepsilon_q - \Delta^{in} \varepsilon_q - \Delta^{th} \varepsilon_q) + \Delta E_{pq} \cdot {}^e \varepsilon_q = E_{pq} \cdot (\Delta \varepsilon_q - F_q^{(1)}) + \Delta E_{pq} \cdot {}^e \varepsilon_q \end{aligned} \quad (11.3)$$

Die Funktion F ist dabei beim Explizit-Euler-Verfahren eine Funktion der Größen zum Zeitpunkt t und dem Temperaturinkrement ΔT . Bei anderen Integrationsmethoden kommt zusätzlich noch eine Abhängigkeit der Funktion F vom Schätzwerte für die Gesamtdehnung $\Delta \varepsilon$ hinzu.

Im ersten Schritt der Gleichgewichtsiteration wird die Knotenpunktverschiebung von ABAQUS zu Null gesetzt:

$$\Delta \bar{u}_t^{(1)} = 0_t \Rightarrow \Delta \varepsilon_q^{(1)} = 0_q \quad (11.4)$$

Damit ergibt sich das Spannungsinkrement zu:

$$\Delta\sigma_p = E_{pq} \cdot \Delta\varepsilon_q - E_{pq} \cdot F_q - \Delta E_{pq} \cdot {}^e\varepsilon_q = - E_{pq} \cdot F_q^{(1)} - \Delta E_{pq} \cdot {}^e\varepsilon_q \quad (11.5)$$

Für das von ABAQUS berechnete Residuum gilt dann:

$$R_s = \Delta P_s - \int_V B_{ps}^T \cdot \Delta\sigma_p \, dV = \Delta P_s + \int_V B_{sp}^T \cdot E_{pq} \cdot F_q^{(1)} \, dV + \int_V B_{sp}^T \cdot \Delta E_{pq} \cdot {}^e\varepsilon_q \, dV \quad (11.6)$$

Der erste Schätzwert für die Knotenpunktverschiebungen läßt sich nun aus dem Residuum errechnen:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{u}_t^{(2)} &= \Delta \bar{u}_t^{(1)} + \delta \Delta \bar{u}_t^{(1)} \\ &= \hat{K}_{ts}^{-1} \cdot R_s = \hat{K}_{ts}^{-1} \cdot \text{formel} \left[\Delta P_s - \int_V B_{ps}^T \cdot \Delta\sigma_p \, dV \right] \\ &= \hat{K}_{ts}^{-1} \cdot \left[\Delta P_s + \int_V B_{sp}^T \cdot E_{pq} \cdot F_q^{(1)} \, dV + \int_V B_{sp}^T \cdot \Delta E_{pq} \cdot {}^e\varepsilon_q \, dV \right] \end{aligned} \quad (11.7)$$

Mit diesem neuen Schätzwert kann nun der zweite Durchlauf der Gleichgewichtsiteration durchgeführt werden. Hierzu werden zunächst die neuen Dehnungen aus den Knotenpunktverschiebungen berechnet:

$$\Delta\varepsilon_m^{(2)} = B_{mt} \cdot \Delta \bar{u}_t^{(2)} = B_{mt} \cdot \hat{K}_{ts}^{-1} \cdot \left[\Delta P_s + \int_V B_{sp}^T \cdot E_{pq} \cdot F_q^{(1)} \, dV + \int_V B_{sp}^T \cdot \Delta E_{pq} \cdot {}^e\varepsilon_q \, dV \right] \quad (11.8)$$

Damit kann nun wiederum das neue Spannungsinkrement bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_n &= E_{nm} \cdot \Delta\varepsilon_m^{(2)} - E_{nm} \cdot F_m^{(2)} - \Delta E_{nm} \cdot {}^e\varepsilon_m \\ &= E_{nm} \cdot B_{mt} \cdot \hat{K}_{ts}^{-1} \cdot \left[\Delta P_s + \int_V B_{sp}^T \cdot E_{pq} \cdot F_q^{(1)} \, dV + \int_V B_{sp}^T \cdot \Delta E_{pq} \cdot {}^e\varepsilon_q \, dV \right] - E_{nm} \cdot F_m^{(2)} - \Delta E_{nm} \cdot {}^e\varepsilon_m \end{aligned} \quad (11.9)$$

Für das Residuum gilt:

$$R_u = \Delta P_u - \int_V B_{ns} \cdot \Delta \sigma_n dV \quad (11.10)$$

$$= \Delta P_u - \int_V B_{nu} \cdot \left[E_{nm} \cdot B_{mt} \cdot \hat{K}_{ts}^{-1} \cdot \left(\Delta P_s + \int_V B_{sp}^T \cdot E_{pq} \cdot F_q^{(1)} dV + \int_V B_{sp}^T \cdot \Delta E_{pq} \cdot {}^e \varepsilon_q dV \right) - E_{nm} \cdot F_m^{(2)} - \Delta E_{nm} \cdot {}^e \varepsilon_m \right] dV \quad (11.11)$$

$$= \delta_{su} \cdot \Delta P_s - \hat{K}_{ts}^{-1} \cdot \Delta P_s \cdot \int_V B_{un}^T \cdot E_{nm} \cdot B_{mt} dV - \int_V B_{un}^T \cdot E_{nm} \cdot B_{mt} dV \cdot \hat{K}_{ts}^{-1} \cdot \int_V B_{sp}^T \cdot E_{pq} \cdot F_q^{(1)} dV \\ - \int_V B_{un}^T \cdot E_{nm} \cdot B_{mt} dV \cdot \hat{K}_{ts}^{-1} \cdot \int_V B_{sp}^T \cdot \Delta E_{pq} \cdot {}^e \varepsilon_q dV + \int_V B_{un}^T \cdot E_{nm} \cdot F_m^{(2)} dV + \int_V B_{un}^T \cdot \Delta E_{nm} \cdot {}^e \varepsilon_m dV \quad (11.12)$$

$$= \delta_{su} \cdot \Delta P_u - \hat{K}_{ts}^{-1} \cdot \Delta P_s \cdot \int_V B_{un}^T \cdot E_{nm} \cdot B_{mt} dV - \int_V B_{un}^T \cdot E_{nm} \cdot B_{mt} dV \cdot \hat{K}_{ts}^{-1} \cdot \int_V B_{sp}^T \cdot E_{pq} \cdot F_q^{(1)} dV \\ - \int_V B_{un}^T \cdot E_{nm} \cdot B_{mt} dV \cdot \hat{K}_{ts}^{-1} \cdot \int_V B_{sp}^T \cdot \Delta E_{pq} \cdot {}^e \varepsilon_q dV + \int_V B_{sp}^T \cdot E_{pq} \cdot F_q^{(2)} dV \cdot \delta_{su} + \int_V B_{sp}^T \cdot \Delta E_{pq} \cdot {}^e \varepsilon_q dV \cdot \delta_{su} \quad (11.13)$$

$$= \delta_{su} \cdot \left(\Delta P_s + \int_V B_{sp}^T \cdot E_{pq} \cdot F_q^{(2)} dV + \int_V B_{sp}^T \cdot \Delta E_{pq} \cdot {}^e \varepsilon_q dV \right) \\ - \int_V B_{un}^T \cdot E_{nm} \cdot B_{mt} dV \cdot \hat{K}_{ts}^{-1} \cdot \left(\Delta P_s + \int_V B_{sp}^T \cdot E_{pq} \cdot F_q^{(1)} dV + \int_V B_{sp}^T \cdot \Delta E_{pq} \cdot {}^e \varepsilon_q dV \right) \quad (11.14)$$

Für den Fall, daß die beiden Funktionen $F_k^{(1)}$ und $F_k^{(2)}$ übereinstimmen (dies ist beim Explizit-Euler-Verfahren der Fall) folgt aus Gleichung (11.14):

$$R_u = \left(\delta_{su} - \int_V B_{un}^T \cdot E_{nm} \cdot B_{mt} dV \cdot \hat{K}_{ts}^{-1} \right) \cdot \left(\Delta P_s + \int_V B_{sp}^T \cdot E_{pq} \cdot F_q^{(1)} dV + \int_V B_{sp}^T \cdot \Delta E_{pq} \cdot {}^e \varepsilon_q dV \right) \quad (11.15)$$

Der Tangentenmodul ergibt sich für das Explizit-Euler-Verfahren zu:

$$D_{nm} = E_{nm}, \quad (11.16)$$

so daß Gl.(11.15) noch weiter zusammengefaßt werden kann.

$$\text{Mit } \int_V B_{un}^T \cdot E_{nm} \cdot B_{mt} \, dV = \int_V B_{un}^T \cdot D_{nm} \cdot B_{mt} \, dV = \hat{K}_{ut} \quad (11.17)$$

gilt:

$$\begin{aligned} R_u &= (\delta_{su} - \hat{K}_{ut} \cdot \hat{K}_{ts}^{-1}) \cdot \left[\Delta P_s + \int_V B_{sp}^T \cdot E_{pq} \cdot F_q^{(1)} \, dV + \int_V B_{sp}^T \cdot \Delta E_{pq} \cdot {}^e \varepsilon_q \, dV \right] \\ &= (\delta_{su} - \delta_{us}) \cdot \left[\Delta P_s + \int_V B_{sp}^T \cdot E_{pq} \cdot F_q^{(1)} \, dV + \int_V B_{sp}^T \cdot \Delta E_{pq} \cdot {}^e \varepsilon_q \, dV \right] = 0_u \end{aligned} \quad (11.18)$$

Dies bedeutet, daß beim Explizit-Euler-Verfahren (F ist keine Funktion von $\Delta \varepsilon$), bei dem sich der Tangentenmodul nach Gl(11.16) ermitteln läßt, die Gleichgewichtsiteration automatisch nach dem zweiten Iterationsschritt beendet ist.

11.2. Programmlisting Viscu 4


```
C STATEV(8) : Vergleichsdehnungsrate
C STATEV(9-11) : Waermeausdehnung (Normalkomp.)
C STATEV(12-17): innere Spannung "SIGI"
C STATEV(18-23): Teilchenverfestigungsanteil "RHO"
C STATEV(24-29): Gleichgewichtsspannung von "SIGI"
C STATEV(30-35): Backstress
C STATEV(36-41): Gleichgewichtsspannung von "SIGB"
C STATEV(42) : Teilchenradius
C STATEV(43) : Teilchenvolumen
C SSTATEV( 1-43): Zwischenspeicher fuer STATEV-Feld
```

~~C***** sonstige Variablen *****~~

```

C STRESS( 1- 6): Spannungen
C DSTRES( 1- 6): Spannungsinkremente
C SIGVM      : von Mises Vergleichsspannung
C SIGDEV( 1- 6): Spannungsdeviator
C SIGIDEV(1- 6): Deviator der inneren Spannungen
C SWIRKVM    : wirksame von Mises Vergleichsspannung
C STRAN ( 1- 6): Dehnungen
C DSTRAN( 1- 6): Dehnungsinkremente
C EPSIP ( 1- 6): viscoplastische Dehnrate
C EPSIPV     : viscoplastische Vergleichsdehnrate
C SPDEPS     : Spur des Dehnungsinkrementes
C SPEPS      : Spur der Dehnungen
C SPEPSTH    : Spur der thermischen Dehnungen
C SPSIG      : Spur des Spannungstensors
C SPSIGI     : Spur der inneren Spannung
C TEMP       : Temperatur
C DTEMP      : Temperaturinkrement
C ELINF ( x, 1): Inkrementnummer des x-ten Elementes
C ELINF ( x, 2): erster Integrationspunkt des x-ten Elementes
C NDI        : Anzahl der Normalkomponenten
C NSHR       : Anzahl der Scherkomponenten
C KEL        : aktuelles Element
C KINTK      : Aktueller Integrationspunkt des Elementes
C KINC       : Nummer des Inkrementes
C LOK (= 1/0) : Sperrung/Freigabe der Zeitschrittviertelung
C LCUTBK (=1) : Viertelung der Zeitschrittweite
C DDSDE     : elastische Steifigkeitsmatrix
C DDSDDT    : tangentielle Steifigkeitsmatrix

```

[illegible]

CI		I
CI	H A U P T P R O G R A M M	I
CI		I

[illegible]

```

SUBROUTINE UMAT(STRESS,STATEV,DDSDDE,SSE,SPD,SCD,RPL,DDSDDT,
& DRPLDE,DRPLDT,STRAN,DSTRAN,TIME,DTIME,TEMP,DTEMP,PRED,DPRED,
& CMNAME,NDI,NSHR,NTENS,NSTATV,PROPS,NPROPS,COORDS,DROT)

```

C

[illegible]

CCCCCCCCCCCCCCCC VEREINBARUNGSANWEISUNGEN CCCCCCCCCCCCCCCCCC

[illegible]

 CHARACTER*8 CMNAME

```

1 DIMENSION STRESS(NTENS),STATEV(NSTATV),
2 DDSDDDE(NTENS,NTENS),DDSDDT(NTENS),DRPLDE(NTENS),
3 STRAN(NTENS),DSTRAN(NTENS),PREDEF(1),DPRED(1),
4 PROPS(NPROPS),COORDS(3),DROT(3,3),DSTRES(6),
5 SIGDEV(6),SIGIDEV(6),DSTATV(6),SIGIGL(6)
6 DIMENSION EPSIP(6),SSTATEV(45),SSTRESS(6),SSTRAN(6),SIGB(6)
7 DIMENSION SSIGD(6),SSIGID(6)
8 DIMENSION EPSP(3)

```

C ! A C H T U N G: ELINF muss mit der Anzahl der vorhandenen Elemente
C dimensioniert werden !

INTEGER ELINF(600,2)
INTEGER AZITER, CONPARA
REAL PARA(16,13)

C

C***** COMMON - BLOCK *****

C

COMMON/CGM/LCGM,NNOD,NELS,NMATP, IDU1(17),MINTK, IDU2(71)
COMMON/CEL/IDU3(3),KEL,KINTK, IDU4(2),KSPT, IDU5(10),IDU6(3),
& NHR,NINTK, IDU7(3),NMP, IDU8(48)
COMMON/COUNT/ KINC,MINC,KITER,MITER,DU1(13),EXTRPF,KSTEP,KCUTS,
& MCUTS,NUMBER,LSHAF1,LCUTBK,DTNEWS, IDU9(2),DU2(3),IDU10(2),
& DU3(6),IDU11(8),DU4(4),IDU12(2),DU5(3)
COMMON/CONTRO/IDU13(7),LOK, IDU14(89)
COMMON/STEUER/ELINF,AZITER,PARA,CONPARA

C

C***** Temperaturabhaengige Werkstoffparameter *****

IF (CONPARA.EQ.0) THEN

C ---Temperatur---

DATA (PARA(1,J),J=1,13)/700,725,750,775,800,825,850,875,
& 900,925,950,975,1000/

C --- E ---

DATA (PARA(2,J),J=1,13)/183000,178000,172000,166750,161280,
& 151500,140000,130000,120000,110500,
& 102000, 92400, 83300/

C --- n ---

DATA (PARA(3,J),J=1,13)/3.162,3.107,3.050,2.999,2.957,2.923,
& 2.891,2.862,2.837,2.817,2.803,2.787,2.780/

C --- N ---

DATA (PARA(4,J),J=1,13)/4.650,4.788,4.913,5.025,5.100,5.145,
& 5.135,5.100,5.038,4.963,4.838,4.688,4.538/

C --- ALPHA ---

DATA (PARA(5,J),J=1,13)/1.040E-2,1.195E-2,1.350E-2,1.505E-2,
& 1.667E-2,1.820E-2,1.980E-2,2.135E-2,
& 2.295E-2,2.455E-2,2.603E-2,2.767E-2,
& 2.931E-2/

C --- k ---

DATA (PARA(6,J),J=1,13)/6.333E-18,2.388E-17,8.437E-17,
& 2.807E-16,8.830E-16,2.636E-15,7.498E-15,
& 2.037E-14,5.305E-14,1.327E-13,3.199E-13,
& 7.442E-13,1.675E-12/

C --- K ---

DATA (PARA(7,J),J=1,13)/3.846E-17,1.629E-16,6.142E-16,
& 1.951E-15,6.718E-15,2.191E-14,5.830E-14,
& 1.612E-13,4.526E-13,1.143E-12,2.801E-12,
& 6.442E-12,1.331E-11/

C --- lamb0 ---

DATA (PARA(8,J),J=1,13)/ 735, 470, 350, 272, 240, 255, 300,
& 395, 582, 878,1500,2800,5700/

C --- A ---

DATA (PARA(9,J),J=1,13)/0.250,0.287,0.333,0.382,0.423,0.434,
& 0.426,0.408,0.390,0.376,0.364,0.350,0.340/

C --- P ---

DATA (PARA(10,J),J=1,13)/0.173,0.275,0.459,1.090,2.095,2.440,
& 2.075,1.675,1.400,1.102,0.935,0.765,0.675/

C --- VP ---

DATA (PARA(11,J),J=1,13)/66E-9,172E-9,418E-9,961E-9,2098E-9,
& 4365E-9,8700E-9,16667E-9,30799E-9,55054E-9,
& 95448E-9,160875E-9,264165E-9/

C --- SIGY ---

DATA (PARA(12,J),J=1,13)/740,726,709,683,650,609,565,513,466,
& 419,370,320,273/

[illegible]

[illegible]

[illegible]

C

```
SUM3 = 1.0E-40  
DO 50 I = 1,NDI  
    SUM3 = SUM3 + DSTATV(I)*DSTATV(I)  
50 CONTINUE  
DO 60 I = 1,NSHR  
    II = NDI + I  
    SUM3 = SUM3 + 0.5*DSTATV(II)*DSTATV(II)  
60 CONTINUE  
DSTATV(7) = SQRT(2.0*SUM3/3.0)  
STATEV(7) = SSTATEV(7) + DSTATV(7)  
STATEV(8) = DSTATV(7)/DTIME  
IF (K.EQ.1) THEN  
    STATEV(44)=STATEV(8)  
    EPSP(1)=STATEV(8)  
END IF  
EPSP(3)=EPSP(2)  
EPSP(2)=EPSP(1)
```

IIIIIIIIII Berechnung der Spannungskremente und IIIIIIIIIII

IIIIIIIIII der neuen Spannungen IIIIIIIIIII

IIIIIIIIII Normalkomponenten *****

```
DO 70 I = 1,NDI  
IF (ABS(EMOD2-EMOD1).LT.TOLEM*EMOD1) THEN  
    DSTRES(I)=2.0*RMUE1*(DSTRAN(I) - DSTATV(I))  
& + RLAM1*SPDEPS-(2.*RMUE1 + 3.*RLAM1)  
& *(ALPHAW2*(TEMP+DTEMP-20)-ALPHAW1*(TEMP-20))  
& + (RLAM2-RLAM1)*(SPEPS-SPEPSTH)  
& + 2.*(RMUE2-RMUE1)  
& *(STRAN(I)-SSTATEV(I)-SSTATEV(8+I))  
ELSE  
    DSTRES(I)=2.0*RMUE2*(STRAN(I)+DSTRAN(I)-STATEV(8+I)-STATEV(I))  
& +RLAM2*(SPEPS+SPDEPS-3*STATEV(8+I))  
& -(2.0*RMUE1*(STRAN(I)-SSTATEV(8+I)-SSTATEV(I)))  
& +RLAM1*(SPEPS-3*SSTATEV(8+I)))  
ENDIF  
IF (ABS(SSTRESS(I)).GT.0.) THEN  
    IF (ABS(DSTRES(I)).LT.TOLRU*ABS(SSTRESS(I))) THEN  
        DSTRES(I)=0  
    ENDIF  
ENDIF  
STRESS(I)=SSTRESS(I)+DSTRES(I)  
IF (ABS(STRESS(I)).LT.TOLRU) THEN  
    STRESS(I)=0  
ENDIF  
70 CONTINUE  
DO 80 I = 1,NSHR  
    II = NDI + I  
    IF (ABS(EMOD2-EMOD1).LT.TOLEM*EMOD1) THEN  
        DSTRES(II) = RMUE1*(DSTRAN(II) - DSTATV(II))  
& +(RMUE2-RMUE1)*(STRAN(II)-SSTATEV(II))  
    ELSE  
        DSTRES(II)=RMUE2*(STRAN(II)+DSTRAN(II)-STATEV(II))  
& -RMUE1*(STRAN(II)-SSTATEV(II))  
    END IF  
    IF (ABS(SSTRESS(II)).GT.0.0) THEN  
        IF (ABS(DSTRES(II)).LT.TOLRU*ABS(SSTRESS(II))) THEN  
            DSTRES(II)=0
```


[illegible]

```

C      WRITE(*,*) 'Viertelung der Zeitschrittweite'
      GO TO 2222
    END IF
    IF (ABS(EPSP(2)-EPSP(1)).GT.TOLE*EPSP(1)) THEN
C***** 'IMPLIZIT' *****
      IF (K.GT.1) THEN
      IF (ABS(EPSP(2)-EPSP(1)).GT.RF*ABS(EPSP(3)-EPSP(2))) THEN
        LOK=0
        LCUTBK=1
C      WRITE (*,*) 'keine Konvergenz'
        GO TO 2222
      END IF
    END IF
    GO TO 3210
  END IF
END IF
END IF
END IF

C
C
C
      STATEV(45)=DTIME
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      DO 400 J1=1,NTENS
      DO 500 J2=1,NTENS
        500 DDSDE(J1,J2)=0.D0
        400 DDSDE(J1,J1)=RMUE1
      DO 600 J1=1,NDI
      DO 700 J2=1,NDI
        700 DDSDE(J1,J2)=DDSDE(J1,J2)+RLAM1
        600 DDSDE(J1,J1)=DDSDE(J1,J1)+RMUE1
      2222 RETURN
      END
C*****ENDE VON UMAT*****
      SUBROUTINE INVAR (NDI,NSHR,DSTRAN,STRESS,STATEV,SIGDEV,
&      SIGIDEV,STRAN,SIGVM,SWIRKVM,SPDEPS,SPEPS,SPEPSTH)
      INTEGER*4 NDI,NSHR
      REAL SIGVM,SWIRKVM,SPDEPS,SPSIG,SPSIGI,SPEPS,SPEPSTH
      DIMENSION DSTRAN(6),STRESS(6),STATEV(6),SIGDEV(6),SIGIDEV(6)
&      ,STRAN(6)

C
C***** Spurberechnung *****
      SPDEPS = 0.0
      SPSIG = 0.0
      SPSIGI = 0.0
      SPEPS = 0.0
      SPEPSTH = 0.0

C
      DO 1000 I = 1,NDI
        SPDEPS = SPDEPS + DSTRAN(I)
        SPEPS = SPEPS + STRAN(I)
        SPEPSTH = SPEPSTH + STATEV(8+I)
        SPSIG = SPSIG + STRESS(I)
        SPSIGI = SPSIGI + STATEV(11+I)
      1000 CONTINUE
C
C*****
C      Berechnung der Deviatoren SIGDEV(I) und SIGIDEV(I)
C*****
C

```


11.3. Verwendete Formelsymbole

α :	Parameter im "back stress"-Modell
$^w\alpha$:	Wärmeübergangskoeffizient
δ_{ij} :	Kronecker Tensor
ε :	Gesamtdehnung
$^e\varepsilon$:	elastischer Anteil der Dehnung
$^{th}\varepsilon$:	thermischer Anteil der Dehnung
$^{in}\varepsilon$:	viskoplastischer Anteil der Dehnung
$^{in}\dot{\varepsilon}$:	viskoplastische Dehnrage
$^{in}\dot{\varepsilon}_s$:	stationäre viskoplastische Dehnrage
$^{in}\dot{\varepsilon}_v$:	viskoplastische Vergleichsdehnrage
λ :	Lamé'sche Konstante
λ_0 :	Parameter in Entwicklungsgleichung des "back stress"
μ :	Lamé'sche Konstante
ρ :	Teilchenhärtung
ρ_0 :	Teilchenhärtung des Ausgangsgefüges
σ^* :	Bezugsspannung in Bestimmungsgleichung des Übergangsradius
σ :	Spannung
σ_{VM} :	von Mises Vergleichsspannung
σ_y :	Streckgrenze
$^i\sigma$:	innere Spannung
$^b\sigma$:	"back stress"
$^b\bar{\sigma}$:	stationärer Wert des "back stress"
$^w\sigma$:	Effektivspannung
A :	Koeffizient in Bestimmungsgleichung für q_0
A_{π} :	Boole'sche Matrix
b_i :	Volumenkraft
B_{pr} :	Dehnungs-Verschiebungs-Matrix
D_{pq} :	Tangentenmodul

K :	Koeffizient im "back stress" Modell
k :	Koeffizient in Bestimmungsgleichung für stationäre Dehnrates
K' :	Koeffizient im Norton'schen Ansatz für die inelastische Dehnrates
K_{Ts} :	elastische Steifigkeitsmatrix
$\hat{K}_{ut}$:	tangentielle Steifigkeitsmatrix
N :	Exponent im "back stress" Modell
n :	Exponent in Bestimmungsgleichung für stationäre Dehnrates
N' :	Exponent im Norton'schen Ansatz für die inelastische Dehnrates
N_E :	Anzahl der Freiheitsgrade eines Elementes
N_{ir} :	Verschiebeinterpolationsmatrix
n_s :	Anzahl der Freiheitsgrade der Struktur
p :	Exponent in Bestimmungsgleichung für q_0
p_i :	Oberflächenkraft
P_t :	Belastung
q_0 :	Parameter in Bestimmungsgleichung des stationären "back stress"-Wertes
r :	Radius der Ausscheidungsteilchen
r_0 :	Radius der Ausscheidungsteilchen des Ausgangsgefüges
r_s :	Übergangsradius der Ausscheidungsteilchen
T :	Temperatur
T_h :	homologe Temperatur
T_0 :	Bezugstemperatur (20°C)
$u_i(x_j)$:	Verschiebungsfeld
$\bar{u}_i$:	Strukturknotenpunktverschiebungen
U_r :	Verschiebung der Elementknotenpunkte
$\dot{V}$:	Volumenwachstumsrate
aW :	äußere Arbeit
iW :	innere Arbeit
x_j :	Koordinatenrichtung
$^{(e)}X$:	elementspezifische GröÙe
$X^{(l)}$:	GröÙe X nach i -tem Iterationsschritt
X'_{ij} :	Deviator des Tensors X_{ij}
X_i, X :	Vektor

- X_{ij} , $\mathbf{X}$: Tensor zweiter Stufe
- X_{ijkl} , $\mathbf{X}$: Tensor vierter Stufe
- X^t : Größe X zum Zeitpunkt t
- Z : Parameter in Bestimmungsgleichung des Übergangsradius

Formelsymbole im Robinson-Modell

- χ_0 : Schwellspannung
- Γ : materialspezifische Funktion in Entwicklungsgesetz für isotrope Verfestigung
- Θ : materialspezifische Funktion in Entwicklungsgesetz für isotrope Verfestigung
- Σ_{ij} : Effektivspannung
- Ω : Potentialfunktion
- A : Materialkonstante
- a_{ij} : Deviator der inneren Spannung (beschreibt kinematische Verfestigung)
- B : Materialkonstante
- $f(F)$: materialspezifische Funktion von F
- F : skalare Funktion des Deviators der Effektivspannung
- $g(G)$: materialspezifische Funktion von G
- G : Funktion der inneren Spannung und der Schwellspannung
- G_0 : Abschneideparameter
- H : Materialkonstante
- K : isotrope Verfestigungsvariable
- K_i : Materialkonstante
- K_s : Materialkonstante
- m : Materialkonstante
- n : Materialkonstante
- Q_0 : Materialkonstante
- R : Materialkonstante
- s_{ij} : Deviator der anliegenden Spannung
- T_0 : Bezugstemperatur

${}^{\text{in}}W$: inelastische Verformungsarbeit

W_0 : Bezugsarbeit

Formelsymbole im Hart-Modell

α^* : Funktion in Bestimmungsgleichung für inelastische Dehnrage

α : irreversibler Anteil der inelastischen Dehnung

Γ : materialspezifische Funktion (beschreibt isotrope Verfestigung)

λ : Materialkonstante

μ : Materialkonstante

μ : Materialkonstante

$\mathfrak{R}$: materialspezifische Funktion (beschreibt temperaturabhängige Erholung)

σ^* : Hilfsspannung

${}^a\sigma$: erster Anteil des Spannungsdeviators

${}^f\sigma$: zweiter Anteil des Spannungsdeviators

a : reversibler Anteil der inelastischen Dehnung

f : Materialkonstante

m : Materialkonstante

Q : Materialkonstante

R : Gaskonstante

Formelsymbole im Chaboche-Modell

${}^w\sigma$: Effektivspannung

${}^{\text{in}}\tilde{e}_{\text{II}}$: akkumulierte inelastische Dehnung

A : Materialkonstante

B : Materialkonstante

c : Materialkonstante

F : materialspezifische Funktion

K : Materialkonstante

n : Materialkonstante

Q : materialspezifische Funktion

R : Funktion der akkumulierten inelastischen Dehnung

X : Pseudospannung

Für die Themenstellung und Betreuung der Arbeit danke ich Herrn Prof. Dr. J. Betten.

Herrn Prof. Dr. H. Nickel danke ich für die Aufnahme in sein Institut.

Besonderer Dank gilt Herrn Dr. G. Breitbach für die wissenschaftliche Betreuung der Arbeit.

Für die gute Zusammenarbeit und die hilfreiche Anregung durch Diskussion danke ich den Herren Dr. F. Schubert (Gesamtleiter des Vorhabens "Strukturabhängiges Werkstoffmodell") und S. Beckmöller, sowie Frau M. Offermann recht herzlich.

J. Wolters