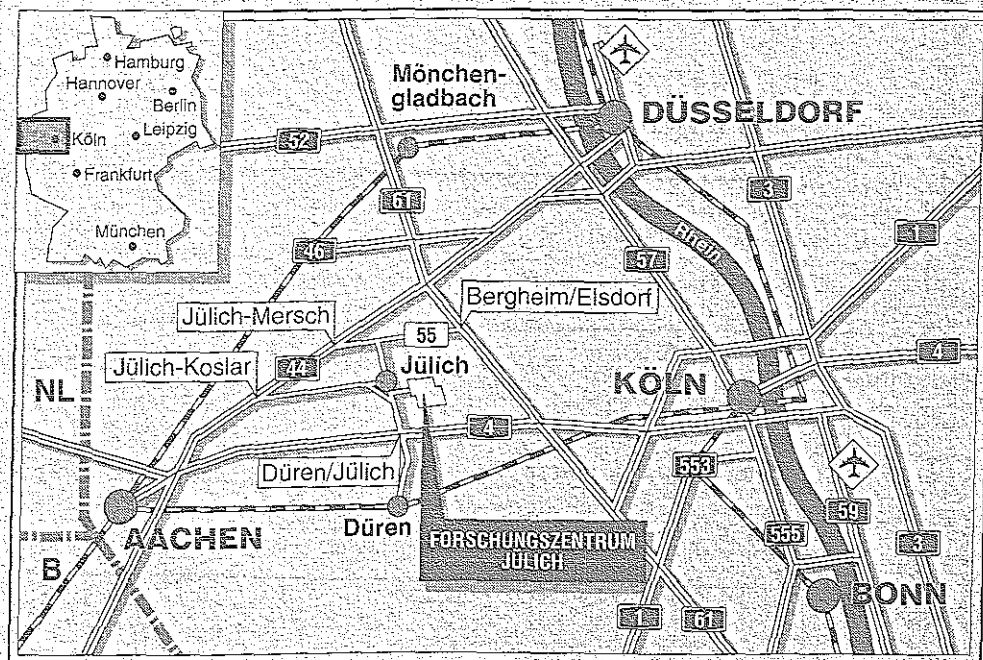


Institut für Kernphysik

**Pion- und
Photoninduzierte Reaktionen
an Kernen im Δ -Resonanzbereich**

Bernd Körfgen

1



Berichte des Forschungszentrums Jülich ; 2991

ISSN 0944-2952

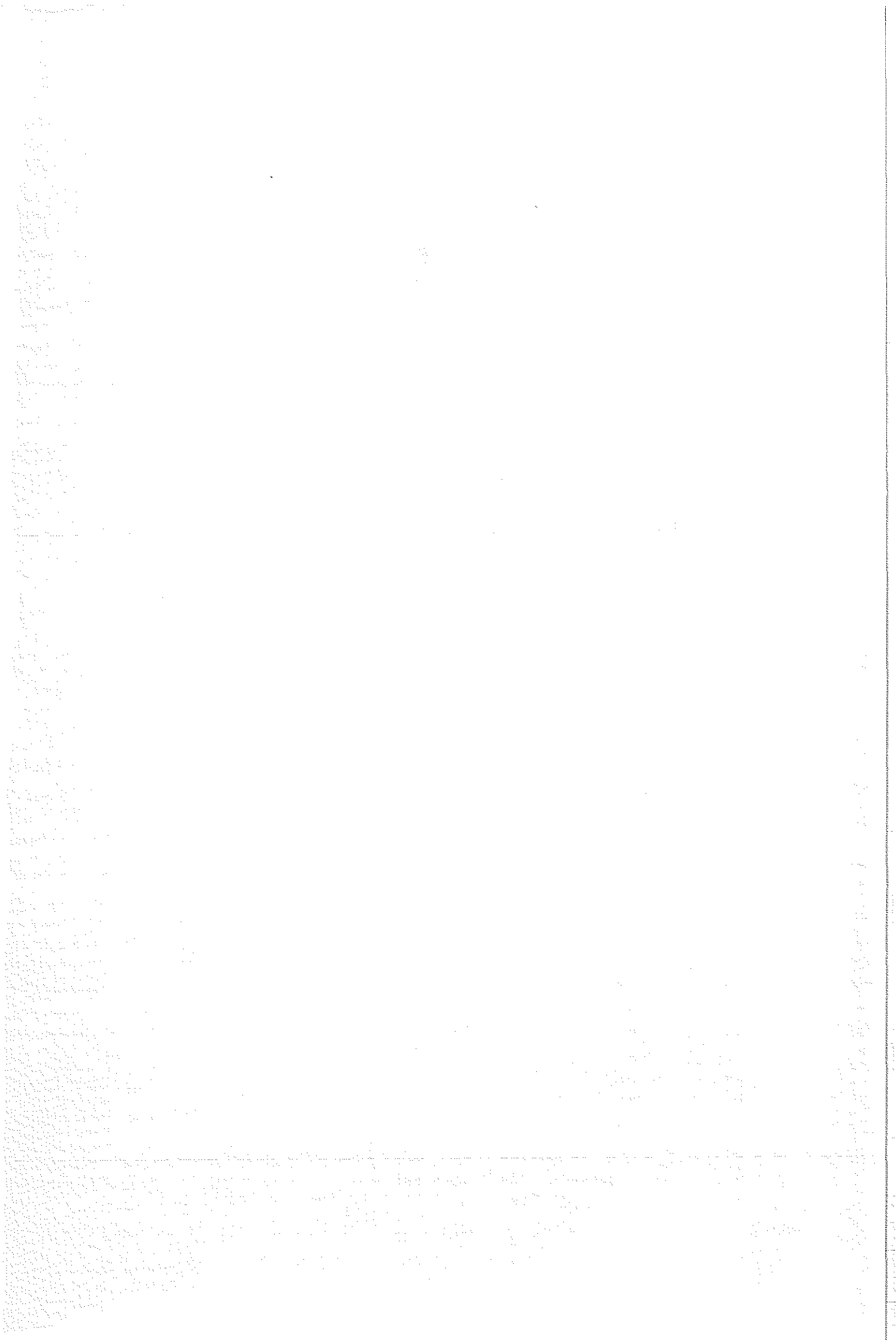
Institut für Kernphysik Jülich-2991

D 5 (Diss. Universität Bonn)

Zu beziehen durch: Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek

D-52425 Jülich · Bundesrepublik Deutschland

Telefon: 02461/61-6102 · Telefax: 02461/61-6103 · Telex: 833556-70 kfa d



Pion- und Photoninduzierte Reaktionen an Kernen im Δ -Resonanzbereich

Bernd Korfgen

Abstract

In the present work pion- and photoinduced nuclear reactions in the Δ resonance energy region are studied. In particular, we investigate the propagation of the Δ inside the nucleus. It is found that the propagation of the Δ in the medium can be interpreted in terms of a coherent pion wave. The behaviour of the Δ resonance in the nucleus is studied by means of various inclusive and exclusive processes. These different reactions give complementary information on the properties of the Δ in nuclei. Elastic pion-scattering, coherent pion photoproduction and elastic Compton-scattering allow us to study the spin-longitudinal and spin-transverse channels, their mixing and their influence on the coherent medium effect. The quasi-free decay reaction and the 2-nucleon-knockout reaction give information on the damping mechanisms of the coherent pion wave inside the nucleus. Additionally, they allow us to study the momentum distribution of the nucleons and the Δ in the nucleus. Our model describes consistently the pion- and photoinduced reactions as well as charge exchange reactions.

The various reactions differ in their spin-structure and kinematics. The excitation of the Δ by a pion has a spin-longitudinal coupling, whereas the excitation of the Δ by a photon has a spin-transverse coupling. As a consequence one observes different medium effects in pion- and photon-nucleus cross sections. A spin-longitudinal excited Δ couples strongly to the coherent pion-wave in the nucleus and this leads to an energy shift of the Δ peak position to lower energies. For a spin-transverse excited Δ the coupling to the coherent pion-wave is suppressed and one observes only effects due to Fermi-motion and the Δ -nucleus mean field.

Abstract

In der vorliegenden Arbeit werden die pion- und photoinduzierten Reaktionen an Kernen im Energiebereich der Δ -Resonanz studiert. Insbesondere untersuchen wir die Propagation des Δ 's im Kern. Es stellt sich heraus, daß die Propagation des Δ 's im Medium als kohärente Pionwelle interpretiert werden kann. Wir untersuchen das Verhalten der Δ -Resonanz bzw. der Pionwelle im Kern mit Hilfe verschiedener inklusiver und exklusiver Prozesse. Diese verschiedenen Reaktionen geben komplementäre Informationen über das Verhalten der Δ -Resonanz in Kernen: Elastische Pionstreuung, kohärente Pionphotoproduktion und elastische Compton-Streuung erlauben es, gezielt die spin-longitudinalen und spin-transversalen Kanäle, ihre Mischung und ihre Bedeutung für die kohärenten Mediumeffekte zu studieren. Der quasifreie Zerfall des Δ 's und die 2-Nukleon-Knockout - Reaktion liefern Informationen über die Dämpfung der kohärenten Pionwelle im Kern. Diese Reaktionen erlauben es außerdem, die Impulsverteilung der Nukleonen und die Impulsverteilung des Δ 's im Kern zu studieren. Das zur Beschreibung dieser Reaktionen entwickelte Modell leistet nicht nur eine konsistente Beschreibung der pion- und photoinduzierten Prozesse, sondern es ist auch konsistent mit den Ladungsaustauschreaktionen.

Die verschiedenen Reaktionen unterscheiden sich in ihrer Spin-Struktur und Reaktionskinematik. Die Anregung des Δ 's durch ein Pion hat eine spin-longitudinale Kopplung, während die Anregung des Δ 's durch ein Photon eine spin-transversale Kopplung besitzt. Dies führt zu unterschiedlichen Mediumeffekten, die in Pion- und Photon-Kern-Wirkungsquerschnitten beobachtet werden können. Das spin-longitudinal angeregte Δ koppelt stark an die kohärente Pionwelle im Kern, und dies führt zu einer Verschiebung der Δ -Peakposition zu niedrigeren Energien hin. Für das spin-transversal angeregte Δ ist diese Ankopplung an die kohärente Pionwelle unterdrückt, und man beobachtet nur die Effekte der Fermibewegung und des mittleren Δ -Kern-Potentials.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Der Δ-Loch-Formalismus	6
2.1	Kernreaktionstheorie	6
2.2	Der Quelltermformalismus	9
2.3	Propagation des Δ 's im Kern	11
2.4	Das Modell der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung	15
2.5	Elastische Pionstreuung	21
2.6	Kohärente Pionphotoproduktion	22
2.7	Elastische Compton-Streuung	23
2.8	Der quasifreie Zerfall	24
2.9	Die 2-Nukleon-Knockout - Reaktion	25
3	Diskussion der Ergebnisse	27
3.1	Der totale Wirkungsquerschnitt für Pion- und Photon-Streuung am Kern	27
3.2	Elastische Pion-Kernstreuung	28
3.3	Kohärente Pionphotoproduktion am Kern	31
3.4	Reelle vs. virtuelle Pionstreuung	33
3.5	Elastische Compton-Streuung am Kern	35
3.6	Der quasifreie Zerfall	36
3.6.1	Der photoinduzierte quasifreie Zerfall	36
3.6.2	Der pioninduzierte quasifreie Zerfall	40
3.7	Die 2-Nukleon-Knockout - Reaktion	43
4	Zusammenfassung	48
A	Berechnung der Wirkungsquerschnitte	51
B	Berechnung der Quellfunktion für Photoabsorption	54
C	Berechnung der Quellfunktion für Pionabsorption	62
D	Das Übergangsmatrixelement für den Zerfall in kohärente Pionen und Photonen	65

E	Berechnung des Matrixelements der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung	69
F	Berechnung der geometrischen Faktoren	74
G	Multipol-Entwicklung der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung	76
H	Das Übergangsmatrixelement für den quasifreien Zerfall	80
I	Das Übergangsmatrixelement für die 2-Nukleon-Knockout - Reaktion	83

Kapitel 1

Einleitung

In den vergangenen 20 Jahren sind $\Delta(1232)$ -Anregungen in Kernen mit so verschiedenen Anregungsmechanismen wie Pion- und Photoabsorption, inelastischer Elektronstreuung und Ladungsaustauschreaktionen intensiv untersucht worden [1, 2]. Das Ziel dieser Studien ist, Aussagen über das Verhalten der Δ -Resonanz im Medium zu erhalten, d.h. ob und inwieweit sich die Masse und die Zerfallsbreite des Δ 's im Kern aufgrund der Wechselwirkung mit den Nachbarnukleonen ändert. Da die Δ -Anregung als eine Pion-Nukleon-Resonanz mit Spin $J = \frac{3}{2}$ und Isospin $I = \frac{3}{2}$ interpretiert werden kann, ist diese Fragestellung auch direkt mit der Frage nach der Propagation des Pions im Medium verknüpft.

Experimentell findet man, daß der totale Photon-Kern-Wirkungsquerschnitt pro Nukleon im Δ -Resonanzbereich nahezu unabhängig von der Massenzahl A ist [3, 4, 5], während die pioninduzierten Prozesse eine starke A -Abhängigkeit zeigen [6, 7, 8]. Insbesondere ist die Peak-Position der Δ -Resonanz im totalen Pion-Kern-Wirkungsquerschnitt relativ zum totalen Pion-Nukleon-Wirkungsquerschnitt zu niedrigeren Energien hin verschoben ($\Delta E \approx -15 A^{\frac{1}{3}}$). Die unterschiedliche Energieabhängigkeit der totalen Pion- und Photon-Kern-Wirkungsquerschnitte kann im Rahmen des Δ -Loch-Modells erklärt werden. Das Δ -Loch-Modell beschreibt die Wechselwirkung zwischen Pion-, Nukleon- und Δ -Freiheitsgraden [1, 2, 9, 10, 11, 12]. Es stellt sich heraus, daß die Absorption eines Pions am Kern alternativ als eine kohärente Überlagerung von Δ -Loch-Zuständen oder als kohärente Pionwelle interpretiert werden kann. Die Mischung der Δ -Loch- und Pion-Freiheitsgrade führt zu einem Zustand mit reduzierter Resonanzenergie. Dies hat eine starke Energieverschiebung und Verbreiterung des elastischen Pion-Kern-Wirkungsquerschnitts und eine Verbreiterung der Δ -Resonanz in den verschiedenen Reaktionskanälen zur Folge [13, 14]. Bei den photoinduzierten Reaktionen wird dieser Effekt nicht beobachtet, da in diesem Fall die kohärente Vielfachstreuung des Pions stark unterdrückt ist [15, 16, 17]. Daher mißt das Photon nur die Verbreiterung der Δ -Resonanz aufgrund der Fermi-Bewegung und des mittleren Δ -Kern-Potentials.

Die Tatsache, daß pion- und photoinduzierte Experimente unterschiedliche Informationen über das Verhalten der Δ -Resonanz im Medium enthalten, ist das Ergebnis der unterschiedlichen Spin-Struktur der $\pi N\Delta$ - und $\gamma N\Delta$ -Kopplungen. Die $\pi N\Delta$ -Kopplung

ist rein spin-longitudinal (LO) und proportional zu $\vec{S} \cdot \vec{q} \vec{T}$, während die $\gamma N \Delta$ -Kopplung rein spin-transversal (TR) und proportional zu $\vec{S} \times \vec{q} \vec{T}$ ist. Dabei bezeichnen $\vec{S}$ und $\vec{T}$ die Spin- und Isospin-Übergangsoperatoren, die ein Spin-Isospin $\frac{1}{2}$ Nukleon in ein Spin-Isospin $\frac{3}{2}$ Δ überführen und $\vec{q}$ ist der Pion- bzw. Photon-Impuls. Die spin-longitudinalen und spin-transversalen Kopplungen sind orthogonal zueinander. Daher ist in photoinduzierten Prozessen die kohärente π -Propagation in Richtung des Impulsübertrags $\vec{q}$ stark unterdrückt.

In den letzten Jahren hat man neue Informationen über das Verhalten der Δ -Resonanz im Medium durch das Studium der (p,n) und (^3He ,t) Ladungsaustauschreaktionen gewonnen [18, 19, 20]. Die inklusiven Wirkungsquerschnitte für diese Reaktionen zeigen ebenfalls eine deutliche Verschiebung der Peak-Position der Δ -Resonanz im Kern im Vergleich zur Δ -Anregung des Protons [21, 22, 23, 24]. Für Kerne mit $A \geq 12$ beträgt diese Energieverschiebung ~ 70 MeV [23]. Allerdings sind nur ~ 30 MeV dieser Verschiebung das Ergebnis eines kohärenten Mediumeffekts [25, 26, 27, 28, 29]. Die restlichen ~ 40 MeV der Verschiebung sind ein Effekt der Fermi-Bewegung der Nukleonen im Kern und des mittleren Δ -Kern-Potentials. Im Gegensatz zu pion- und photoinduzierten Reaktionen bilden die Ladungsaustauschreaktionen eine gemischt spin-longitudinale und spin-transversale Probe. Daher setzt sich der inklusive Wirkungsquerschnitt aus zwei Teilen mit unterschiedlichem Verhalten zusammen: der LO oder pionartigen Komponente, die durch den kohärenten Mediumeffekt zu niedrigeren Energien verschoben ist, und der TR oder photonartigen Komponente, die von dem Mediumeffekt nicht beeinflusst wird. In Referenz [27] wurde gezeigt, daß die spin-longitudinalen und spin-transversalen Komponenten in den (p,n) und (^3He ,t) Ladungsaustauschreaktionen von vergleichbarer Größe sind. Daher beträgt die Energieverschiebung aufgrund des Mediumeffekts bei den inklusiven Ladungsaustauschreaktionen nur 30 MeV anstatt der 60 MeV, die in pioninduzierten Prozessen beobachtet werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wollen wir pion- und photoinduzierte Reaktionen an Kernen im Energiebereich der Δ -Resonanz studieren. Wir beschreiben sowohl die inklusiven Prozesse, als auch die verschiedenen exklusiven Zerfallskanäle. Zu den exklusiven Prozessen gehören die elastische Pionstreuung, die kohärente Pionphotoproduktion und die Compton-Streuung. Dies sind 2-Teilchen-Reaktionen, bei denen sich der Kern nach der Reaktion wieder in seinem Grundzustand befindet. Wir behandeln aber auch Reaktionen mit 3-Teilchen-Endzuständen wie den quasifreien Zerfall des Δ 's und die 2-Nukleon-Knockout - Reaktion. Beim quasifreien Zerfall zerfällt das Δ in ein Pion und ein Nukleon. Beide Teilchen verlassen den Kern und lassen den Restkern entweder im Grundzustand oder in einem angeregten Zustand zurück. Die Zerfallsteilchen werden in Koinzidenz beobachtet. Bei der 2-Nukleon-Knockout - Reaktion wechselwirkt das Δ mit einem anderen Nukleon des Kerns und 2 Nukleonen werden emittiert. Der Restkern bleibt auch dabei im Grundzustand oder in einem angeregten Zustand zurück.

Alle diese verschiedenen Reaktionen geben komplementäre Informationen über das Verhalten der Δ -Resonanz in Kernen: Elastische Pionstreuung, kohärente Pionphotoproduktion und elastische Compton-Streuung erlauben es, gezielt die LO und TR

Kanäle, ihre Mischung und ihre Bedeutung für die kohärenten Mediumeffekte zu studieren. Der quasifreie Zerfall des Δ 's und die 2-Nukleon-Knockout - Reaktion liefern, wie wir sehen werden, Informationen über die Dämpfung der kohärenten Pionwelle im Kern. Diese Reaktionen erlauben es außerdem, die Impulsverteilung der Nukleonen und die Impulsverteilung des Δ 's im Kern zu studieren.

Wir beschreiben die verschiedenen pion- und photoinduzierten Reaktionen und die Ladungsaustauschreaktionen [27, 31, 36] konsistent in einem Δ -Loch-Modell. Der Unterschied in den Reaktionen liegt in der Spin-Struktur und Kinematik ihrer Anregungsmechanismen. Bei Ladungsaustauschreaktionen ist der Energieübertrag immer kleiner als der Impulsübertrag ($\omega < |\vec{q}|$), während bei pion- und photoinduzierten Reaktionen die Energie-Impuls-Beziehungen $\omega = \sqrt{\vec{q}^2 + m_\pi^2}$ bzw. $\omega = |\vec{q}|$ gelten. Von der Spin-Struktur her beinhalten pion- und photoinduzierte Reaktionen ähnliche Informationen wie die LO und TR Komponenten der inklusiven Ladungsaustauschreaktionen. Diese Analogie kann sogar auf die exklusiven Prozesse erweitert werden. Die kohärenten Pionen aus der Reaktion $^{12}\text{C}(^3\text{He}, t\pi^+)^{12}\text{C}(\text{g.s.})$ [30, 31, 32, 33, 34, 35] zeigen z.B. ein ähnliches Verhalten wie elastisch gestreute, reelle Pionen.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert: In Kapitel 2 stellen wir das Modell für die Beschreibung der pion- und photoinduzierten Reaktionen an Kernen vor. Das Modell basiert auf dem Δ -Loch-Formalismus. Dabei verwenden wir den sogenannten Quelltermformalismus zur Lösung des Kernstruktur-Problems. Anschließend entwickeln wir das Modell für die Δ -Loch-Restwechselwirkung. Daran schließt sich die Beschreibung der verschiedenen Reaktionen an: elastische Pionstreuung, kohärente Pionphotoproduktion, quasifreier Zerfall und 2-Nukleon-Knockout - Reaktion. In Kapitel 3 stellen wir die Ergebnisse für die pion- und photoinduzierten Reaktionen vor. Dabei vergleichen wir insbesondere unsere Ergebnisse mit den Ladungsaustauschreaktionen und zeigen Ähnlichkeiten und Unterschiede auf. Kapitel 4 enthält eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse.

Kapitel 2

Der Δ -Loch-Formalismus

In dieser Arbeit studieren wir pion- und photoinduzierte Reaktionen an Atomkernen im Δ -Resonanzbereich. Wir behandeln die verschiedenen Anregungsprozesse des Δ 's im Kern und seine verschiedenen Zerfallsprozesse in einem einheitlichen Modell. Bei den Zerfallsprozessen treten bis zu 3 Teilchen im Endzustand auf. Deshalb entwickeln wir zunächst den Reaktionsmechanismus für eine 2-Teilchen-Streuung mit n Teilchen im Endzustand.

2.1 Kernreaktionstheorie

Die Streuung zweier Teilchen mit n Teilchen im Endzustand ist in Abb. 2.1 schematisch dargestellt. Wir bezeichnen die Viererimpulse der einlaufenden Teilchen mit $(E_i, \vec{p}_i)$ ($i = 1, 2$) und die der auslaufenden Teilchen mit $(\omega_i, \vec{q}_i)$ ($i = 1, \dots, n$). Der allgemeine Ausdruck für den differentiellen Wirkungsquerschnitt hat dann folgende Form (Bjorken und Drell [37, Anhang B]):

$$d\sigma = \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \left(\frac{1}{2E_1} \right) \left(\frac{1}{2E_2} \right) \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3 2\omega_1} \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3 2\omega_2} \cdots \frac{d^3 q_n}{(2\pi)^3 2\omega_n} \\ \times (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^n q_i \right) |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (2.1)$$

Dabei haben wir die Annahme gemacht, daß die ein- und auslaufenden Teilchen Bosonen sind; für Fermionen ersetzt man die Faktoren $1/2E_i$ und $1/2\omega_i$ durch m_i/E_i und m_i/ω_i , aufgrund der gewählten Normierung der Dirac-Spinoren (Bjorken-Drell-Konvention). Das Übergangsmatrixelement $\mathcal{M}_{fi}$ gibt die Wahrscheinlichkeit für den Übergang vom Anfangszustand i zum Endzustand f an.

In Abb. 2.2 sind die verschiedenen Typen von Reaktionen, die wir in dieser Arbeit betrachten wollen, schematisch dargestellt. Dabei haben wir uns in Abb. 2.2 auf die pioninduzierten Prozesse beschränkt; die entsprechenden photoinduzierten Prozesse erhält man, indem man die einlaufende Pionwelle durch eine Photonwelle ersetzt. Abb.

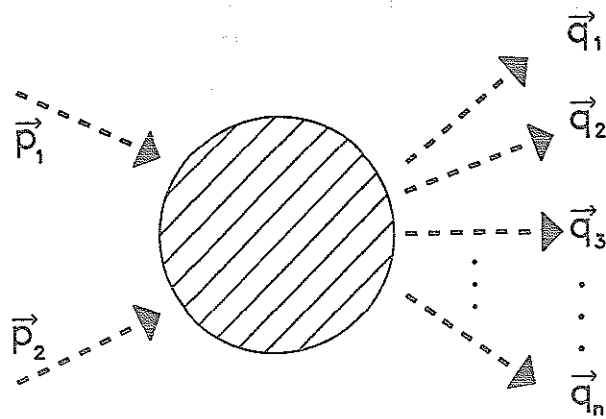


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung der 2-Teilchen-Streuung mit n Teilchen im Endzustand

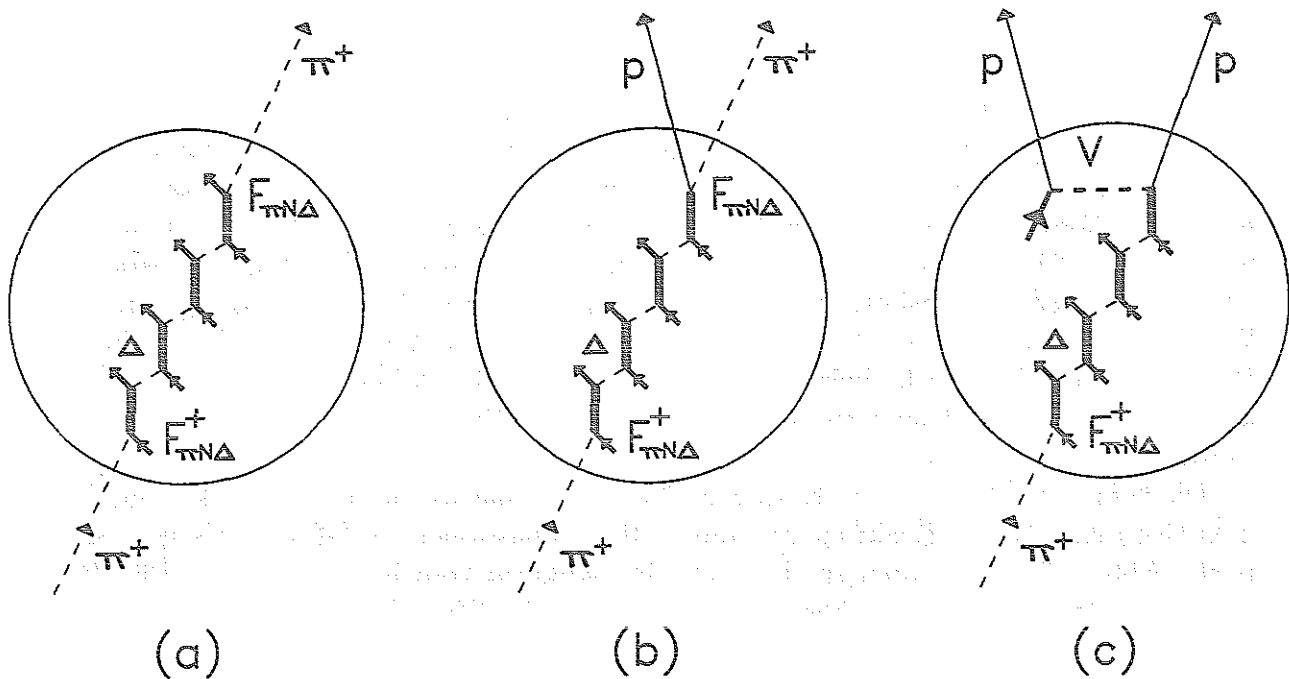


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung der elastischen Pion-Kernstreuung (a), des quasifreien Zerfall des Δ 's im Kern (b) und der 2-Nukleon-Knockout - Reaktion (c)

2.2 (a) zeigt die elastische Pionstreuung am Kern, Abb. 2.2 (b) zeigt den quasifreien Zerfall des Δ 's im Kern und (c) stellt die 2-Nukleon-Knockout - Reaktion dar.

Wir beschränken uns bei unseren Untersuchungen auf resonante Prozesse mit einem intermediären Δ . Im Falle der pioninduzierten Prozesse führen diese resonanten Prozesse, wie wir sehen werden, zu einer sehr guten Beschreibung der Daten im hier betrachteten Energiebereich. Im Falle der photoinduzierten Reaktionen können zusätzlich zum resonanten Prozeß nichtresonante Untergrund-Beiträge auftreten. Diesen Untergrund berücksichtigen wir für die Compton-Streuung und diskutieren ihn bei der expliziten Berechnung der Matrixelemente (Abschnitt 2.7).

Bei der in Abb. 2.2 (a) skizzierten elastischen Pionstreuung befindet sich der Restkern nach der Reaktion wieder im Grundzustand. Für den Wirkungsquerschnitt der elastischen Pionstreuung erhalten wir dann aus Gl. 2.1:

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\vec{v}_A - \vec{v}_\pi|} \frac{1}{2E_\pi} \frac{m_A}{E_A} \int \frac{d^3 q'_\pi}{2E'_\pi} d^3 q_B \frac{m_B}{E_B} \delta^4(q_\pi + q_A - q'_\pi - q_B) \left| \mathcal{M}_{\pi,\pi} \right|^2. \quad (2.2)$$

Hier bezeichnen $(E_\pi, \vec{q}_\pi)$ und $(E'_\pi, \vec{q}'_\pi)$ die Viererimpulse des ein- bzw. auslaufenden Pions, und $(E_A, \vec{q}_A)$, $(E_B, \vec{q}_B)$ sind die Viererimpulse des Kerns vor und nach der Reaktion. Das Übergangsmatrixelement für die elastische Pionstreuung hat dann die Form:

$$\mathcal{M}_{\pi,\pi} = \langle \Phi_A | F_{\pi N \Delta}(\vec{q}'_\pi) G F_{\pi N \Delta}^\dagger(\vec{q}_\pi) | \Phi_A \rangle. \quad (2.3)$$

Dabei ist $|\Phi_A\rangle$ der Grundzustand des Kerns und $F_{\pi N \Delta}^\dagger(\vec{q}_\pi)$ ist der Anregungsoperator, der das Nukleon an das äußere Pion-Feld koppelt und in ein Δ überführt. Entsprechend beschreibt $F_{\pi N \Delta}(\vec{q}'_\pi)$ die Abregung des Kerns zurück in den Grundzustand unter Emission eines Pions. Bei der Anregung des Nukleons zum Δ wird ein Δ -Loch-Zustand im Kern erzeugt. Der Propagator G beschreibt dann die Propagation des Δ -Loch-Zustands (ΔN^{-1}) im Medium. Insbesondere berücksichtigt G , wie in Abb. 2.2 angedeutet, die Wechselwirkung des Δ 's mit den anderen Nukleonen über die ΔN^{-1} -Restwechselwirkung $V_{\Delta N^{-1}, \Delta N^{-1}}$. Die Restwechselwirkung koppelt die einzelnen Δ -Loch-Zustände zu einem kollektiven Zustand. Dieser kann auch als kollektive Pionwelle im Kern interpretiert werden.

Die kohärente Pionwelle im Kern wird durch den quasifreien Zerfall des Δ 's und die 2-Nukleon-Knockout - Reaktion gedämpft. Beim quasifreien Zerfall des Δ 's im Kern (siehe Abb. 2.2 (b)) werden ein Pion und ein Nukleon vom Kern emittiert. Für das Übergangsmatrixelement machen wir analog zu Gl. 2.3 folgenden Ansatz:

$$\mathcal{M}_{\pi p, \pi} = \langle \Phi_{A-1}; \vec{q}'_p \frac{1}{2} m'_s | F_{\pi N \Delta}(\vec{q}'_\pi) G F_{\pi N \Delta}^\dagger(\vec{q}_\pi) | \Phi_A \rangle, \quad (2.4)$$

wobei $\langle \Phi_{A-1} |$ den Restkern-Zustand bezeichnet und das auslaufende Proton den Impuls $\vec{q}'_p$ und den Spin $|\frac{1}{2} m'_s\rangle$ hat. Wie bei der elastischen Pionstreuung wird der quasifreie

Zerfall des Δ 's durch den Operator $F_{\pi N \Delta}(\vec{q}'_\pi)$ beschrieben. Allerdings verlässt das Nukleon hier den Kern, während es bei der elastischen Pionstreuung in seinen Loch-Zustand zurückstreut.

Das Übergangsmatrixelement der 2-Nukleon-Knockout - Reaktion hat folgende Form:

$$\mathcal{M}_{2N,\pi} = \langle \Phi_{A-2}; \vec{q}'_{p1} \frac{1}{2} m'_{s1}; \vec{q}'_{p2} \frac{1}{2} m'_{s2} | V_{2N} G F_{\pi N \Delta}^\dagger(\vec{q}'_\pi) | \Phi_A \rangle . \quad (2.5)$$

Hier ist $\langle \vec{q}'_{p1} \frac{1}{2} m'_{s1}; \vec{q}'_{p2} \frac{1}{2} m'_{s2} |$ der Produktzustand der beiden auslaufenden Nukleonen, und $\langle \Phi_{A-2} |$ repräsentiert den Restkern. Der Zweikörperoperator V_{2N} beschreibt die Wechselwirkung des Δ 's mit einem weiteren Nukleon unter Emission von 2 Nukleonen.

Beim Vergleich der drei Übergangsmatrixelemente aus den Gleichungen 2.3, 2.4 und 2.5 stellen wir fest, daß wir die Übergangsmatrixelemente für die verschiedenen Reaktionen aus Abb. 2.2 in folgender allgemeinen Weise zusammenfassen können:

$$\mathcal{M} = \langle \Phi_B | F_{Ab} G F_{An}^\dagger | \Phi_A \rangle . \quad (2.6)$$

Dabei ist $\langle \Phi_B |$ der Endzustand des A -Nukleonen-Systems. Im Falle von elastischer Pionstreuung ist $\langle \Phi_B | = \langle \Phi_A |$, im Falle des quasifreien Zerfalls ist $\langle \Phi_B | = \langle \Phi_{A-1}; \vec{q}'_{p2} \frac{1}{2} m'_{s2} |$, und es gilt $\langle \Phi_B | = \langle \Phi_{A-2}; \vec{q}'_{p1} \frac{1}{2} m'_{s1}; \vec{q}'_{p2} \frac{1}{2} m'_{s2} |$ für die 2-Nukleon-Knockout - Reaktion.

Der Operator $F_{An}^\dagger$ beschreibt die Ankopplung an das äußere Feld im Eingangskanal. Bei den pioninduzierten Prozessen ist, wie wir gesehen hatten, $F_{An}^\dagger = F_{\pi N \Delta}^\dagger(\vec{q}'_\pi)$, während bei den photoinduzierten Reaktionen $F_{An}^\dagger = F_{\gamma N \Delta}^\dagger(\vec{k}_\gamma)$ gilt. Die explizite Form der Anregungsoperatoren diskutieren wir in den Abschnitten 2.5 und 2.6, wenn wir die Übergangsmatrixelemente für die verschiedenen Reaktionen berechnen.

Der Operator F_{Ab} beschreibt die Abregung des Kerns. Für elastische Pionstreuung und den quasifreien Zerfall des Δ 's ist $F_{Ab} = F_{\pi N \Delta}(\vec{q}'_\pi)$ (siehe Gl. 2.3 und 2.4), während im Falle der 2-Nukleon-Knockout - Reaktion $F_{Ab} = V_{2N}$ (Gl. 2.5) ist. Die verschiedenen Abregungsoperatoren diskutieren wir bei der Berechnung der Übergangsmatrixelemente für die verschiedenen Reaktionen in Abschnitt 2.5 ff. .

Im nächsten Abschnitt beschreiben wir den Quelltermformalismus, mit dessen Hilfe wir das Übergangsmatrixelement aus Gl. 2.6 berechnen werden. Dieser Formalismus ist besonders geeignet zur Behandlung der Propagation des Δ 's im Kern, da er die relevanten Freiheitsgrade, nämlich die Δ -Loch-Zustände, als Basis zur Lösung des Vielteilchen-Problems benutzt.

2.2 Der Quelltermformalismus

Der Ausgangspunkt zur Berechnung der Propagation des Δ 's im Kern ist der Doorway-Zustand $|\rho\rangle$. Dieser ist als der Zustand definiert, der durch Wirkung des Pion- bzw. Photonfeldes auf den Grundzustand des Kerns entsteht:

$$|\rho\rangle := F_{\text{An}}^\dagger |\Phi_A\rangle . \quad (2.7)$$

Der Doorway-Zustand beschreibt eine Überlagerung von angeregten Δ -Loch-Zuständen. Den kohärenten Δ -Loch-Zustand $|\psi_\Delta\rangle$ erzeugen wir durch Anwendung der Green's Funktion G auf den Doorway-Zustand:

$$|\psi_\Delta\rangle := G |\rho\rangle . \quad (2.8)$$

Mit dieser Definition können wir das Übergangsmatrixelement 2.6 umschreiben in:

$$\mathcal{M} = \langle \Phi_B | F_{\text{Ab}} | \psi_\Delta \rangle . \quad (2.9)$$

Das Kernstruktur-Problem lösen wir im Rahmen des sogenannten Quelltermformalismus. Dazu formen wir die Integro-Differentialgleichung 2.8 um in:

$$G^{-1} |\psi_\Delta\rangle = |\rho\rangle . \quad (2.10)$$

Im Ortsraum folgt für Gleichung 2.10:

$$\int \frac{d^3 r'}{\sqrt{2\pi}^3} \langle \vec{r} | G^{-1} | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' | \psi_\Delta \rangle = \langle \vec{r} | \rho \rangle . \quad (2.11)$$

Nun entwickeln wir $|\rho\rangle$ und $|\psi_\Delta\rangle$ nach Teilchen-Loch-Zuständen mit Gesamtdrehimpuls (j_t, m_t) :

$$|\rho\rangle = \sum_{j_t m_t} \sum_{ph}^{N_c} \rho_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) \frac{1}{r} | [Y_p \Phi_h]_{j_t m_t} \rangle , \quad (2.12)$$

$$\rho_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) = r ([Y_p \Phi_h]_{j_t m_t} | \rho \rangle \quad (2.13)$$

und

$$|\psi_\Delta\rangle = \sum_{j_t m_t} \sum_{ph}^{N_c} \psi_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) \frac{1}{r} | [Y_p \Phi_h]_{j_t m_t} \rangle , \quad (2.14)$$

$$\psi_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) = r ([Y_p \Phi_h]_{j_t m_t} | \psi \rangle . \quad (2.15)$$

Dabei haben wir die Teilchen-Loch-Zustände $| [Y_p \Phi_h]_{j_t m_t} \rangle$ eingeführt, die folgendermaßen definiert sind:

$$| [Y_p \Phi_h]_{j_t m_t} \rangle = \sum_{m_p, m_h} (j_p m_p j_h m_h | j_t m_t) | Y_{j_p m_p} \Phi_{j_h m_h} \rangle . \quad (2.16)$$

$Y_{j_p m_p}$ bezeichnet hier die Spin-Winkel-Wellenfunktion des Δ 's, und $\Phi_{j_h m_h}$ bezeichnet die Lochwellenfunktion. Aus Gl. 2.10 folgt damit für die Radialwellenfunktionen:

$$\int \frac{dr'}{\sqrt{2\pi^3}} G^{-1}(r, r') r' \psi_{(ph)}^{(j_i m_i)}(r') = \frac{1}{r} \rho_{(ph)}^{(j_i m_i)}(r) . \quad (2.17)$$

Die Multipolentwicklung von $|\rho\rangle$ und $|\psi_\Delta\rangle$ wird in den Anhängen B und C bzw. in Anhang D explizit ausgeführt.

Gl. 2.17 ist eine Integralgleichung für $\psi_{(ph)}^{(j_i m_i)}(r')$ mit der Inhomogenität $\rho_{(ph)}^{(j_i m_i)}(r)$. Man nennt $\rho_{(ph)}^{(j_i m_i)}(r)$ die Quellfunktion, da sie die Wahrscheinlichkeitsdichte der durch die Absorption eines Photons oder Pions erzeugten Δ 's im Kern beschreibt und so die "Quelle" für die Propagation der Δ -Loch-Zustände darstellt.

Um das Kernstruktur-Problem (Gl. 2.17) zu lösen, entwickeln wir im Abschnitt 2.3 unser Modell für den Propagator G und legen in Abschnitt 2.4 das Modell für die ΔN^{-1} -Restwechselwirkung fest.

2.3 Propagation des Δ 's im Kern

Das Kernstruktur-Problem haben wir in Gleichung 2.8 mit einem allgemeinen Propagator G formuliert. Um die ΔN^{-1} -Zustände konkret berechnen zu können, müssen wir einen Ansatz für G machen und damit unser Modell für die Wechselwirkung des Δ 's mit dem Restkern festlegen.

Dieser Propagator setzt sich zusammen aus dem mittleren Δ -Kern-Potential U_Δ , dem komplexen Spreading-Potential W_{Spread} und der Zweikörperrestwechselwirkung $V_{\Delta N^{-1}, \Delta N^{-1}}$. Wir machen daher für den Propagator den folgenden Ansatz [27]:

$$G = \frac{1}{E_\Delta + i/2 \Gamma_\Delta - H_B - T_\Delta - U_\Delta - W_{\text{Spread}} - V_{\Delta N^{-1}, \Delta N^{-1}}} , \quad (2.18)$$

wobei E_Δ die Gesamtenergie des ΔN^{-1} -Zustands, H_B der Hamiltonoperator des Restkerns, Γ_Δ die freie Zerfallsbreite des Δ 's und T_Δ die kinetische Energie des Δ 's ist. Für die freie Zerfallsbreite des Δ 's benutzen wir folgende Parametrisierung [2]:

$$\Gamma_\Delta(E_\Delta) = \frac{2}{3} \frac{f_{\pi N \Delta}^2}{4\pi} \frac{|\vec{q}_\pi|^3}{m_\pi^2} \left(\frac{\omega_\Delta}{\omega_\pi} \right) . \quad (2.19)$$

Dabei sind ω_π und $\vec{q}_\pi$ Energie und Impuls des Pions im Ruhesystem des Δ 's, und ω_Δ ist die zur Resonanzenergie $E_\Delta = 1232$ MeV gehörende Pionenergie.

$D(E) = E - E_R(E) + i/2\Gamma_\Delta$ ist der Energienenner für ein freies Δ . Der Ansatz in Gl. 2.18 ergibt sich durch Verallgemeinerung von $D(E)$ auf ein Δ im Kern:

$$\frac{1}{D(E)} \longrightarrow G = \frac{1}{D(E - H_\Delta) - H_B - W_{\text{Spread}} - V_{\Delta N^{-1}, \Delta N^{-1}}} \quad (2.20)$$

$$= \frac{1}{D(E) - \gamma(E) H_\Delta - H_B - W_{\text{Spread}} - V_{\Delta N^{-1}, \Delta N^{-1}}}, \quad (2.21)$$

wobei $H_\Delta = T_\Delta + U_\Delta$ der Einteilchen-Hamiltonian des Δ 's ist und:

$$\gamma(E) := \left. \frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=E} = \left(1 - \frac{dE_R(\varepsilon)}{d\varepsilon} + \frac{i}{2} \frac{d\Gamma_\Delta(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=E}. \quad (2.22)$$

Dabei haben wir $D(E - H_\Delta)$ durch eine Taylor-Entwicklung linearisiert. Da im interessanten Energie-Bereich nahe der Resonanz $\gamma(E) \approx 1$ ist, liegt es nahe, den Ansatz 2.18 für G zu machen.

Das mittlere Δ -Kern-Potential und das Spreading-Potential sind schon bei Rechnungen zur Pion- und Photon-Kern-Streuung untersucht worden [13, 14, 15, 16]. Wir übernehmen den in diesen Arbeiten gemachten Ansatz und parametrisieren U_Δ und W_{Spread} durch Woods-Saxon-Potentiale:

$$U_\Delta(R) = \frac{U_0}{1 + \exp\left(\frac{R-R_0}{a}\right)} \quad (2.23)$$

und

$$W_{\text{Spread}}(R) = \frac{W_0}{1 + \exp\left(\frac{R-R_S}{a_S}\right)}. \quad (2.24)$$

Dabei bezeichnen U_0 und W_0 die Potential-Tiefen, $R_0 = r_0 A^{1/3}$ und R_S die Potential-Radien und a_0 und a_S die "Diffuseness" der Potentiale. Die konkrete Wahl der Parameter hängt natürlich von dem zu untersuchenden Kern und den weiteren Modellannahmen, wie z.B. der benutzten ΔN^{-1} -Restwechselwirkung, ab.

Wir machen bei unseren Rechnungen für ^{12}C die Annahme, daß sich das Δ im gleichen mittleren Feld befindet wie das Nukleon. Daher wählen wir $U_0 = -65 \text{ MeV}$, $R_0 = 2.52 \text{ fm}$ und $a = 0.53 \text{ fm}$.

Das Spreading-Potential beschreibt den Verlust an Fluß in Reaktionskanäle. Diese Prozesse beeinflussen die Zerfallsbreite des Δ 's im Kern und führen zu einem komplexen Spreading-Potential. Horikawa, Thies und Lenz [14] haben in ihren Untersuchungen zur Pion-Streuung an ^{12}C festgestellt, daß man für $W_0 = 30 - i40 \text{ MeV}$, $R_S = R_0$ und

$a_S = a$ im Rahmen des Isobar-Loch-Modells eine gute Beschreibung der Daten erreicht. Wir übernehmen diese Parameter für das Spreading-Potential.

Zur Lösung des Kernstruktur-Problems definieren wir den Propagator

$$G_0 := \frac{1}{E_\Delta + i/2\Gamma_\Delta - H_B - T_\Delta - U_\Delta - W_{\text{Spread}}} , \quad (2.25)$$

der die ΔN^{-1} -Restwechselwirkung nicht enthält. Mit Hilfe von G_0 erhalten wir die folgende Integralgleichung für G :

$$G = G_0 + G_0 V_{\Delta N^{-1}, \Delta N^{-1}} G . \quad (2.26)$$

Mit dieser Identität können wir Gleichung 2.8 in ein System von zwei gekoppelten Integro-Differentialgleichungen überführen:

$$|\Lambda\rangle = |\rho\rangle + V G_0 |\Lambda\rangle , \quad (2.27)$$

$$|\psi_\Delta\rangle =: G_0 |\Lambda\rangle , \quad (2.28)$$

wobei wir abkürzend für $V_{\Delta N^{-1}, \Delta N^{-1}}$ nun V geschrieben haben. Dieses Gleichungssystem hat den Vorteil, daß in ihm die ΔN^{-1} -Restwechselwirkung nur noch multiplikativ auftritt.

Wir lösen die Kernstruktur-Integralgleichung (Gl. 2.27) durch Einführen eines biorthogonalen Basissystems

$$\{ |D_0\rangle, |D_1\rangle, |D_2\rangle, \dots, \langle\tilde{D}_0|, \langle\tilde{D}_1|, \langle\tilde{D}_2|, \dots \} , \quad (2.29)$$

wobei die Basiszustände laut Definition die Eigenschaft $\langle\tilde{D}_i|D_j\rangle = \delta_{i,j}$ haben. Ein biorthogonales Basissystem unterscheidet sich von einem üblicherweise benutzten Orthogonalsystem dadurch, daß:

$$\langle\tilde{D}_i| \neq |D_i\rangle^\dagger . \quad (2.30)$$

Der Grund für das Auftreten eines Biorthogonalsystems liegt darin, daß V und G_0 nicht-hermitesche Operatoren sind ($V^\dagger \neq V$) und sich diese Eigenschaft auf die im folgenden zu konstruierenden Basiszustände überträgt.

Man kann leicht zeigen [38], daß für einen Operator der Form $H = T + V + iW$ gilt:

$$H\chi = \varepsilon\chi , \quad H^\dagger\xi = \varepsilon\xi \quad \Rightarrow \quad \xi^* = \chi . \quad (2.31)$$

Wenn man nun einen Zustand $|D_i\rangle$ als Produkt von Radial- und Drehimpulswellenfunktion schreibt, so gilt wegen 2.31:

$$|D_i\rangle = \sum_{jm} f(r) |j m\rangle \quad \text{und} \quad \langle\tilde{D}_i| = \sum_{jm} \langle j m | f(r) . \quad (2.32)$$

Das biorthogonale Basissystem konstruieren wir mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens [39]:

$$|D_0\rangle = \frac{1}{N_0} |\rho\rangle, \quad (2.33)$$

$$|D_1\rangle = \frac{1}{N_1} \left(|V_0\rangle - |D_0\rangle \alpha_{0,0} \right), \quad (2.34)$$

$\vdots$

$$|D_i\rangle = \frac{1}{N_i} \left(|V_{i-1}\rangle - \sum_{j=0}^{i-1} |D_j\rangle \alpha_{j,i-1} \right). \quad (2.35)$$

Dabei ist $|V_i\rangle = V G_0 |D_i\rangle$ und N_i ist die Normierungskonstante, die durch $N_i := \sqrt{\langle \tilde{D}_i | D_i \rangle}$ definiert ist. Die Matrixelemente $\alpha_{j,i}$ sind wie folgt definiert:

$$\alpha_{j,i} = \langle \tilde{D}_j | V_i \rangle = \langle \tilde{D}_j | V G_0 | D_i \rangle. \quad (2.36)$$

Aufgrund der speziellen Konstruktion der Basiszustände ist die Matrix $(\alpha_{j,i})$ von unterer Dreiecksform (mit einer zusätzlichen Nebendiagonalen). Durch Auflösen von 2.35 nach $|V_i\rangle$ erhalten wir

$$|V_i\rangle = N_{i+1} |D_{i+1}\rangle + \sum_{j=0}^i |D_j\rangle \alpha_{j,i}, \quad (2.37)$$

und durch Einsetzen von 2.37 in das Matrixelement 2.36 ergibt sich:

$$\begin{aligned} \alpha_{k,i} &= \langle \tilde{D}_k | V G_0 | D_i \rangle = N_{i+1} \langle \tilde{D}_k | D_{i+1} \rangle + \sum_{j=0}^i \langle \tilde{D}_k | D_j \rangle \alpha_{j,i} \\ &= 0 \quad \text{für: } k \geq i+2. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Die Matrixelemente der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung $\alpha_{j,i}$ berechnen wir in Anhang E.

Nun entwickeln wir den gesuchten Zustand $|\Lambda\rangle$ nach den Basiszuständen

$$|\Lambda\rangle = \sum_i c_i |D_i\rangle \quad (2.39)$$

und setzen Gl. 2.39 in die Integralgleichung 2.27 ein:

$$\sum_i c_i |D_i\rangle = N_0 |D_0\rangle + \sum_i c_i V G_0 |D_i\rangle. \quad (2.40)$$

Multiplikation dieser Gleichung von links mit $\langle \tilde{D}_j |$ führt zu einem gekoppelten Gleichungssystem:

chungssystem für die c_i :

$$c_j = N_0 \delta_{0,j} + \sum_{i=0} c_i \alpha_{j,i} \quad \Leftrightarrow \quad (2.41)$$

$$\sum_i c_i (\delta_{j,i} - \alpha_{j,i}) = N_0 \delta_{0,j} \quad . \quad (2.42)$$

In Matrixschreibweise hat das gekoppelte Gleichungssystem die folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha_{n,n} & -\alpha_{n,n-1} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ -\alpha_{n-1,n} & 1-\alpha_{n-1,n-1} & -\alpha_{n-1,n-2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_{n-2,n} & -\alpha_{n-2,n-1} & 1-\alpha_{n-2,n-2} & -\alpha_{n-2,n-3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{1,n} & -\alpha_{1,n-1} & -\alpha_{1,n-2} & -\alpha_{1,n-3} & \cdots & -\alpha_{1,0} \\ -\alpha_{0,n} & -\alpha_{0,n-1} & -\alpha_{0,n-2} & -\alpha_{0,n-3} & \cdots & 1-\alpha_{0,0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ c_{n-2} \\ \vdots \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ N_0 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Aufgrund der Dreiecksform der Matrix läßt sich das Gleichungssystem leicht lösen, indem man die Matrix auf Zeilenstufenform bringt und dann rekursiv löst wie beim Gauß'schen Eliminationsverfahren .

Das hier dargestellte Verfahren ist eine Erweiterung des Lanczos-Verfahrens [40]. Das Lanczos-Verfahren ist für hermitesche Propagatoren entwickelt worden und führt daher zu einer tridiagonalen Matrix.

2.4 Das Modell der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung

Wir wollen die ΔN^{-1} -Restwechselwirkung $V_{\Delta N^{-1}, \Delta N^{-1}}$ ausgehend von einem Ein-Meson-Austausch-Modell beschreiben. Dabei bauen wir auf Modellen auf, die Speth *et al.* [41], Anastasio und Brown [42] und andere für die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung entwickelt haben. Bei diesen Untersuchungen hat sich herausgestellt, daß man mit Ein-Meson-Austauschpotentialen allein die Experimente nicht beschreiben kann, sondern den kurzreichweitigen Anteil der Wechselwirkung phänomenologisch behandeln muß.

Da das Δ Spin und Isospin $\frac{3}{2}$ hat, können zum Matrixelement der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung nur die leichten Isektor-Mesonen π und ρ beitragen. Austausch-Graphen müssen nicht berücksichtigt werden, da in der $\Delta N^{-1} \Delta N^{-1}$ - Wechselwirkung die Teilchen stets unterscheidbar sind.

Die direkten π - und ρ - Austausch-Potentiale sind:

$$V_{\pi}(\omega, \vec{q}) = \hbar c \frac{f_{\pi N\Delta}^2}{m_{\pi}^2} \left(\frac{\Lambda_{\pi}^2 - m_{\pi}^2}{\Lambda_{\pi}^2 - t} \right)^2 \frac{1}{t - m_{\pi}^2} (\vec{S}_2^{\dagger} \cdot \vec{q})(\vec{S}_1 \cdot \vec{q})(\vec{T}_2^{\dagger} \cdot \vec{T}_1), \quad (2.44)$$

$$V_{\rho}(\omega, \vec{q}) = \hbar c \frac{f_{\rho N\Delta}^2}{m_{\rho}^2} \left(\frac{\Lambda_{\rho}^2 - m_{\rho}^2}{\Lambda_{\rho}^2 - t} \right)^2 \frac{1}{t - m_{\rho}^2} (\vec{S}_2^{\dagger} \times \vec{q}) \cdot (\vec{S}_1 \times \vec{q})(\vec{T}_2^{\dagger} \cdot \vec{T}_1), \quad (2.45)$$

wobei $t = \omega^2 - \vec{q}^2$ der Viererimpulsübertrag ist. Die Größe $(\Lambda_{\pi}^2 - m_{\pi}^2) / (\Lambda_{\pi}^2 - t)$ ist der $\pi N\Delta$ -Formfaktor, $f_{\pi N\Delta}$ ist die $\pi N\Delta$ -Kopplungskonstante, Λ_{π} der Cutoff-Parameter des $\pi N\Delta$ -Formfaktors und m_{π} die Pion-Masse. Entsprechendes gilt für das ρ -Meson. Für die Kopplungs-Parameter haben wir dabei folgende Werte angenommen:

$f_{\pi N\Delta}^2/4\pi$	0.324	$f_{\rho N\Delta}^2/4\pi$	16.63
Λ_{π}	1200 MeV	Λ_{ρ}	2000 MeV
m_{π}	140 MeV	m_{ρ}	770 MeV

wobei wir "pionische Einheiten"

$$\hbar c \frac{f_{\pi NN}^2}{m_{\pi}^2} \approx 400 \text{ MeV fm}^3 \quad (2.46)$$

benutzt haben.

Für die spin-longitudinalen $(\vec{S}_2^{\dagger} \cdot \hat{q})(\vec{S}_1 \cdot \hat{q})$ und spin-transversalen $(\vec{S}_2^{\dagger} \times \hat{q}) \cdot (\vec{S}_1 \times \hat{q})$ Spinoperatoren gelten die folgenden Relationen:

$$(\vec{S}_2^{\dagger} \cdot \hat{q})(\vec{S}_1 \cdot \hat{q}) = \frac{1}{3} (\vec{S}_2^{\dagger} \cdot \vec{S}_1) + \frac{1}{3} S_{12}(\hat{q}), \quad (2.47)$$

$$(\vec{S}_2^{\dagger} \times \hat{q}) \cdot (\vec{S}_1 \times \hat{q}) = \frac{2}{3} (\vec{S}_2^{\dagger} \cdot \vec{S}_1) - \frac{1}{3} S_{12}(\hat{q}), \quad (2.48)$$

wobei $S_{12}(\hat{q})$ der Tensoroperator

$$S_{12}(\hat{q}) := 3(\vec{S}_2^{\dagger} \cdot \hat{q})(\vec{S}_1 \cdot \hat{q}) - (\vec{S}_2^{\dagger} \cdot \vec{S}_1) \quad (2.49)$$

ist. Mit Hilfe der Relationen 2.47 und 2.48 können wir die π - und ρ -Austauschpotentiale in Zentralkraft (C) und Tensorkraft (T) zerlegen:

$$V_\pi(\omega, \vec{q}) = \left[V_\pi^C(q) (\vec{S}_2^\dagger \cdot \vec{S}_1) + V_\pi^T(q) S_{12}(\hat{q}) \right] (\vec{T}_2^\dagger \cdot \vec{T}_1) , \quad (2.50)$$

$$V_\rho(\omega, \vec{q}) = \left[V_\rho^C(q) (\vec{S}_2^\dagger \cdot \vec{S}_1) - V_\rho^T(q) S_{12}(\hat{q}) \right] (\vec{T}_2^\dagger \cdot \vec{T}_1) , \quad (2.51)$$

wobei:

$$V_\pi^C(q) = V_\pi^T(q) = \frac{1}{3} \alpha_\pi \frac{(\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2)^2}{(\Lambda_\pi^2 + q^2)^2} \frac{q^2}{(\omega^2 - m_\pi^2) - q^2} , \quad (2.52)$$

$$V_\rho^C(q) = 2 V_\rho^T(q) = \frac{2}{3} \alpha_\rho \frac{(\Lambda_\rho^2 - m_\rho^2)^2}{(\Lambda_\rho^2 + q^2)^2} \frac{q^2}{(\omega^2 - m_\rho^2) - q^2} , \quad (2.53)$$

$$\alpha_\pi = \hbar c \frac{f_{\pi N \Delta}^2}{m_\pi^2} , \quad (2.54)$$

$$\alpha_\rho = \hbar c \frac{f_{\rho N \Delta}^2}{m_\rho^2} \quad (2.55)$$

ist.

Wir wollen unser Modell der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung analog den Modellen für die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung im Medium entwickeln. Aus der Untersuchung der NN^{-1} -Restwechselwirkung ist bekannt, daß die direkten π - und ρ - Austausch-Prozesse nicht ausreichen, um die experimentellen Daten zu reproduzieren. Der Grund dafür liegt darin, daß die π - und ρ -Austauschpotentiale für $q \rightarrow 0$ verschwinden, während das Experiment eine stark repulsive Wechselwirkung für $q = 0$ fordert. Die kurzreichweitigen Korrelationen, die ihre Ursache in Prozessen höherer Ordnung haben, modifizieren die Potentiale für kleine q wesentlich. Der Grund dafür wird deutlich, wenn wir den Zentralteil des π -Austauschpotentials in der folgenden Weise umformen:

$$V_\pi^C(q) = \frac{1}{3} \alpha_\pi \frac{(\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2)^2}{(\Lambda_\pi^2 + q^2)^2} \left(\frac{(\omega^2 - m_\pi^2)}{(\omega^2 - m_\pi^2) - q^2} - 1 \right) . \quad (2.56)$$

Der zweite, attraktive Term in Gleichung 2.56 geht aufgrund seiner schwachen Energieabhängigkeit bei Fourier-Transformation in den Ortsraum in ein sehr kurzreichweitiges, δ -funktionsartiges Potential über. Die kurzreichweitigen Korrelationen zwischen den Nukleonen verhindern nun, daß sich die Nukleonen auf kleine Abstände nähern, und sorgen so dafür, daß der attraktive kurzreichweitige Anteil nicht wirksam werden kann. In einem ersten einfachen Modell [43, 44] hat man die kurzreichweitigen Korrelationen einfach dadurch berücksichtigt, daß man den kurzreichweitigen (attraktiven) Anteil von Gleichung 2.56 aus dem π -Austauschpotential entfernt hat.

Eine andere Möglichkeit, die kurzreichweitigen Korrelationen effektiv zu berücksichtigen, ist die Addition einer phänomenologischen δ -Kraft, die den kurzreichweitigen Anteil des π -Austauschpotentials kompensiert. Udagawa *et al.* [27] haben dieses Konzept auf die Beschreibung der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung übertragen und haben

dabei folgenden Ansatz für die phänomenologische kurzreichweitige Kraft, im folgenden abkürzend auch δ -Kraft genannt, gemacht:

$$V_\delta(\omega, \vec{q}) = \hbar c \frac{f_{\pi N \Delta}^2}{m_\pi^2} \frac{(\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2)^2}{(\Lambda_\pi^2 - t)^2} g'_{\Delta\Delta} (\vec{S}_2^\dagger \cdot \vec{S}_1) (\vec{T}_2^\dagger \cdot \vec{T}_1) . \quad (2.57)$$

Dabei wird der sogenannte Landau-Migdal-Parameter $g'_{\Delta\Delta}$ an das Experiment angepaßt. Der Zentralteil des ρ -Austauschpotentials ist ebenfalls sehr kurzreichweitig. Udagawa *et al.* [27] berücksichtigen deshalb nur den Tensoranteil des ρ -Austauschpotentials explizit, in der Annahme, daß der Zentralteil des ρ -Austauschpotentials bereits effektiv durch die phänomenologische δ -Kraft berücksichtigt wird. In ihrem Modell setzt sich die ΔN^{-1} -Restwechselwirkung daher in der folgenden Weise zusammen:

$$V_{\Delta N^{-1}, \Delta N^{-1}} = V_\pi(\omega, \vec{q}) + V_\rho^T(\omega, \vec{q}) + V_\delta(\omega, \vec{q}) . \quad (2.58)$$

Bei der Beschreibung von Ladungsaustauschreaktionen haben sie den Parameter $g'_{\Delta\Delta} = \frac{1}{3}$ gefunden. Durch Vergleich mit Gleichung 2.56 stellen wir fest, daß bei diesem Wert des Landau-Migdal-Parameters der kurzreichweitige Anteil des π -Austauschpotentials genau kompensiert wird. Deshalb nennt man $g'_{\Delta\Delta} = 1/3$ auch "minimal short range correlation".

Eine alternative Methode zur Berücksichtigung der kurzreichweitigen Korrelationen ist die Multiplikation der π - und ρ -Austauschpotentiale im Ortsraum mit einer Zweikörper-Korrelationsfunktion $g(r)$ [20]. Im Impulsraum ergibt dies für die Potentiale ($i = \pi, \rho$) :

$$\hat{V}_i(\omega, \vec{q}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V_i(\omega, \vec{k}) g(\vec{q} - \vec{k}) , \quad (2.59)$$

wobei $g(\vec{q})$ die Fourier-Transformierte von $g(r)$ ist:

$$g(\vec{q}) = \int d^3 r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} g(r) . \quad (2.60)$$

Da im Mesonaustauschbild die kurzreichweitigen Korrelationen vom, für kleine Abstände repulsiven, ω -Austauschpotential herrühren, sollte die Reichweite der Korrelationsfunktion vergleichbar mit der Compton-Wellenlänge $q_c = 3.93 \text{ fm}^{-1}$ des ω -Mesons sein.

Anastasio und Brown [42] haben daher bei der Beschreibung der NN^{-1} -Restwechselwirkung die folgende Parametrisierung der Korrelationsfunktion benutzt, die an eine mit dem "Reid soft-core potential" berechnete realistische Korrelationsfunktion angepaßt worden ist:

$$g(r) = 1 - j_0(q_c r) . \quad (2.61)$$

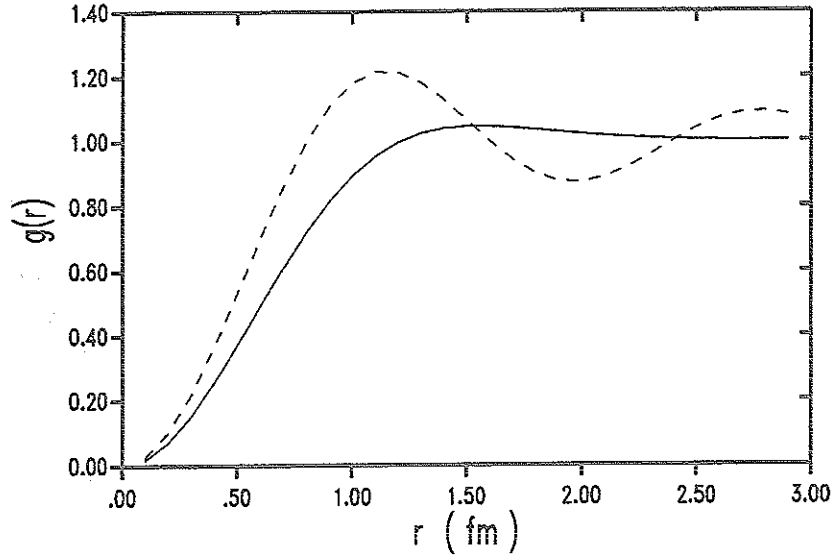


Abbildung 2.3: Korrelationsfunktion $g(r)$ im Bereich von 0 bis 3 fm. Die gestrichelte Kurve zeigt die Korrelationsfunktion $g(r) = 1 - j_0(q_c r)$, wobei $q_c = 3.93 \text{ fm}^{-1}$ die Comptonwellenlänge des ω -Mesons ist. Die durchgezogene Kurve beschreibt die Korrelationsfunktion, die durch Gleichung 2.64 gegeben ist.

Hier bezeichnet $j_0(z)$ die sphärische Besselfunktion der Ordnung $l = 0$. Bei Fouriertransformation in den Impulsraum geht $g(r)$ über in:

$$g(\vec{q}) = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{q}) - (2\pi^2) \frac{1}{q_c^2} \delta(|\vec{q}| - q_c) . \quad (2.62)$$

Einsetzen von 2.62 in Gleichung 2.59 liefert für das korrelierte Potential:

$$\hat{V}_i(\omega, \vec{q}) \approx V_i(\omega, \vec{q}) - V_i(|\vec{q}_c|) . \quad (2.63)$$

Neben der von Anastasio und Brown eingeführten Parametrisierung der Korrelationsfunktion (2.61) findet man in der Literatur, z.B. bei Towner [45], noch andere Parametrisierungen, die in verschiedenen Modellen der NN^{-1} -Restwechselwirkung benutzt worden sind. In Abb. 2.3 sind die Korrelationsfunktion aus Gleichung 2.61 und die Korrelationsfunktion

$$\tilde{g}(r) = 1 - e^{-ar^2} (1 - br^2) \quad (2.64)$$

aufgetragen, wobei $a = 1.1 \text{ fm}^{-1}$ und $b = 0.68 \text{ fm}^{-2}$ ist.

Wir haben in Ref. [46] diese Methode zur Berücksichtigung der kurzreichweitigen Korrelationen auf die Beschreibung der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung übertragen. Dabei haben

wir die ΔN^{-1} -Restwechselwirkung im Ortsraum als Produkt von π -Austauschpotential und Korrelationsfunktion angesetzt:

$$V_{\Delta N^{-1}, \Delta N^{-1}} = \hat{V}_\pi(\omega, \vec{r}) = V_\pi(\omega, \vec{r}) g(r) . \quad (2.65)$$

Das ρ -Austauschpotential wurde zunächst nicht berücksichtigt, da wenig experimentelle Informationen über die Stärke der $\rho N \Delta$ - Kopplung vorliegen.

Beim Vergleich der verschiedenen Methoden haben wir festgestellt, daß beide Ansätze für die Restwechselwirkung zu ähnlichen Ergebnissen führen. In dieser Arbeit beschränken wir uns daher auf das Modell von Udagawa *et al.* (Gl. 2.58) für die ΔN^{-1} -Restwechselwirkung.

Bei der Berechnung der Fourier-Transformation der Potentiale müssen wir beachten, daß in dem von uns untersuchten Energiebereich das π -Austauschpotential (Gl. 2.52) für $\omega \geq m_\pi$ einen Pol hat. Wir müssen daher die Transformation für die verschiedenen ω -Bereiche getrennt durchführen:

Für $\omega \geq m_\pi$ erhalten wir:

$$V_\pi^C(r) = \frac{\alpha_\pi}{3} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_\pi^2}{r} [e^{-\Lambda'_\pi r} - e^{i\kappa_\pi r}] - \frac{1}{2} (\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2) \Lambda'_\pi e^{-\Lambda'_\pi r} \right) \quad (2.66)$$

$$V_\pi^T(r) = \frac{\alpha_\pi}{3} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_\pi^2}{r} [e^{-\Lambda'_\pi r} - e^{i\kappa_\pi r}] - \frac{1}{2} (\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2) \Lambda'_\pi e^{-\Lambda'_\pi r} - \frac{3}{2} (\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2) \frac{e^{-\Lambda'_\pi r}}{r} - \frac{3}{r^2} [i\kappa_\pi e^{i\kappa_\pi r} + \Lambda'_\pi e^{-\Lambda'_\pi r}] + \frac{3}{r^3} [e^{i\kappa_\pi r} - e^{-\Lambda'_\pi r}] \right) , \quad (2.67)$$

und für $\omega < m_\pi$ ergibt sich:

$$V_\pi^C(r) = \frac{\alpha_\pi}{3} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_\pi^2}{r} [-e^{-\Lambda'_\pi r} + e^{-\kappa_\pi r}] - \frac{1}{2} (\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2) \Lambda'_\pi e^{-\Lambda'_\pi r} \right) \quad (2.68)$$

$$V_\pi^T(r) = \frac{\alpha_\pi}{3} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_\pi^2}{r} [-e^{-\Lambda'_\pi r} + e^{-\kappa_\pi r}] - \frac{1}{2} (\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2) \Lambda'_\pi e^{-\Lambda'_\pi r} - \frac{3}{2} (\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2) \frac{e^{-\Lambda'_\pi r}}{r} + \frac{3}{r^2} [\kappa_\pi e^{-\kappa_\pi r} - \Lambda'_\pi e^{-\Lambda'_\pi r}] + \frac{3}{r^3} [e^{-\kappa_\pi r} - e^{-\Lambda'_\pi r}] \right) . \quad (2.69)$$

Für das ρ -Austauschpotential erhalten wir:

$$V_\rho^C(r) = 2 \frac{\alpha_\rho}{3} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_\rho^2}{r} [-e^{-\Lambda'_\rho r} + e^{-\kappa_\rho r}] - \frac{1}{2} (\Lambda_\rho^2 - m_\rho^2) \Lambda'_\rho e^{-\Lambda'_\rho r} \right) \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} V_\rho^T(r) = & \frac{\alpha_\rho}{3} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_\rho^2}{r} [-e^{-\Lambda'_\rho r} + e^{-\kappa_\rho r}] - \frac{1}{2} (\Lambda_\rho^2 - m_\rho^2) \Lambda'_\rho e^{-\Lambda'_\rho r} \right. \\ & - \frac{3}{2} (\Lambda_\rho^2 - m_\rho^2) \frac{e^{-\Lambda'_\rho r}}{r} \\ & \left. + \frac{3}{r^2} [\kappa_\rho e^{-\kappa_\rho r} - \Lambda'_\rho e^{-\Lambda'_\rho r}] + \frac{3}{r^3} [e^{-\kappa_\rho r} - e^{-\Lambda'_\rho r}] \right) . \quad (2.71) \end{aligned}$$

Dabei sind $\kappa_{\pi,\rho}$ und $\Lambda_{\pi,\rho}$ wie folgt definiert:

$$\kappa_\pi^2 = \begin{cases} \omega^2 - m_\pi^2 & \text{für: } \omega \geq m_\pi \\ m_\pi^2 - \omega^2 & \text{für: } \omega < m_\pi \end{cases} \quad (2.72)$$

$$\kappa_\rho^2 = m_\rho^2 - \omega^2 \quad (2.73)$$

$$\Lambda_\pi'^2 = \Lambda_\pi^2 - \omega^2 \quad (2.74)$$

$$\Lambda_\rho'^2 = \Lambda_\rho^2 - \omega^2 . \quad (2.75)$$

Bei der Berechnung des Matrixelements der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung in Anhang E benutzen wir, daß das Potential in Form einer Multipol-Entwicklung vorliegt, wie sie in Anhang G hergeleitet wird. Um diese Multipol-Entwicklung analytisch durchführen zu können, müssen die Potentiale entweder vom Yukawa-Typ oder Gauß-Typ sein. Dies zwingt uns, für Teile der π - und ρ - Austauschpotentiale die Multipol-Entwicklung (Gl. G.13 und G.21) numerisch durchzuführen.

2.5 Elastische Pionstreuung

Bei der elastischen Pionstreuung befindet sich der Kern nach der Reaktion wieder in seinem Grundzustand. Da der Grundzustand von ^{12}C Spin und Parität $J^\pi = 0^+$ hat,

können wir im folgenden $|\Phi_A\rangle = |0^+\rangle$ benutzen. Das Übergangsmatrixelement für elastische Pionstreuung haben wir schon in Abschnitt 2.1 (Gl. 2.3) angegeben:

$$\mathcal{M}_{\pi,\pi}(\vec{q}'_\pi, \vec{q}_\pi) = \langle 0^+ | F_{\pi N\Delta}(\vec{q}'_\pi) G F_{\pi N\Delta}^\dagger(\vec{q}_\pi) | 0^+ \rangle . \quad (2.76)$$

Der Anregungsoperator für die Absorption eines Pions im π -Kern-CMS ist [2, 47, 48]:

$$F_{\pi N\Delta}^\dagger(\vec{q}_\pi) = \frac{f_{\pi N\Delta}}{m_\pi} \left(\vec{q}_\pi \cdot \vec{S}^\dagger \right) T_\alpha^\dagger e^{-i\vec{q}_\pi \cdot \vec{r}} . \quad (2.77)$$

Dabei sind $\vec{S}^\dagger$ und $\vec{T}^\dagger$ die Spin- und Isospin-Übergangsoperatoren, die den Übergang von einem Spin(Isospin)- $\frac{1}{2}$ Nukleon zu einem Spin(Isospin)- $\frac{3}{2}$ Δ beschreiben [49]. Die $\pi N\Delta$ -Kopplungskonstante ist bei der Beschreibung von Pion-Nukleon-Streuexperimenten bestimmt worden [2] und hat den Wert $f_{\pi N\Delta}^2/4\pi = 0.324$. Der Index $\alpha = \pm 1$ schließlich gibt die Isospinprojektion des absorbierten Pions an. Den Anregungsoperator $F_{\pi N\Delta}$ erhalten wir aus Gl. 2.77 durch hermitesche Adjungation.

Den zur Absorption eines Pions gehörigen Doorway-Zustand $|\rho_\pi\rangle$ (Gl. 2.7) und die entsprechende Radialwellenfunktion $\rho_{(ph)}^{(j_i m_i)}(r)$ (Gl. 2.17) geben wir in Anhang C explizit an. Das Übergangsmatrixelement für elastische Pionstreuung leiten wir in Anhang D her.

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt im π -Kern-CMS gilt dann (siehe Anhang A):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CMS} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{m_A^2}{s} \left| \mathcal{M}_{\pi,\pi}(\vec{q}'_\pi, \vec{q}_\pi) \right|^2 . \quad (2.78)$$

Hier ist m_A die Masse des Targetkerns (^{12}C) und $\sqrt{s}$ ist die Gesamtenergie des π -Kern-Systems. Mit Hilfe des optischen Theorems [50] können wir dann den totalen π -Kern Wirkungsquerschnitt angeben:

$$\sigma_{tot} = \frac{m_A}{|\vec{q}_\pi| \sqrt{s}} \text{Im} \left[-\mathcal{M}_{\pi,\pi}(\vec{q}_\pi, \vec{q}_\pi) \right] . \quad (2.79)$$

2.6 Kohärente Pionphotoproduktion

Im Falle der kohärenten Pionphotoproduktion $^{12}\text{C}(\gamma, \pi^0)^{12}\text{C}(\text{g.s.})$ befindet sich der Restkern nach der Reaktion im Grundzustand. Aus Gl. 2.6 folgt für das Übergangsmatrixelement:

$$\mathcal{M}_{\pi,\gamma}(\vec{q}'_\pi, \vec{k}_\gamma) = \langle 0^+ | F_{\pi N\Delta}(\vec{q}'_\pi) G F_{\gamma N\Delta}^\dagger(\vec{k}_\gamma) | 0^+ \rangle . \quad (2.80)$$

Der $\gamma N\Delta$ -Anregungsoperator hat die folgende Form im γ -Kern-CMS [2, 47, 48]:

$$F_{\gamma N\Delta}^\dagger(\vec{k}_\gamma) = \frac{f_{\gamma N\Delta}}{m_\Delta} \left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}_\lambda} \times \vec{k}_\gamma \right) \cdot \vec{S}^\dagger T_0^\dagger e^{-i\vec{k}_\gamma \cdot \vec{r}} , \quad (2.81)$$

wobei $\hat{\varepsilon}_{\vec{k}_\lambda}$ der Polarisationsvektor des Photons mit Impuls $\vec{k}_\gamma$ und Helizität $\lambda = \pm 1$ ist; die $\gamma N\Delta$ -Kopplungskonstante ist $f_{\gamma N\Delta} = 1.03$ [16]. Gl. 2.81 beschreibt die dominante magnetische Dipolanregung M_{1+} des Δ 's. Der kleine Beitrag von elektrischer Quadrupolanregung E_{1+} ist hier vernachlässigt worden.

Die expliziten Formeln für den photoinduzierten Doorway-Zustand $|\rho_\gamma\rangle$ und die entsprechende Radialwellenfunktion sind in Anhang B gegeben. Das Übergangsmatrixelement für kohärente Pionphotoproduktion erhalten wir dann durch Einsetzen dieser Radialwellenfunktion in Gl. D.9.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für kohärente Pionphotoproduktion ist gegeben durch (siehe Anhang A):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CMS} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{m_A^2}{s} \frac{|\vec{q}_\pi'|}{|\vec{k}_\gamma|} \frac{1}{2} \sum_\lambda \left| \mathcal{M}_{\pi,\gamma}(\vec{q}_\pi', \vec{k}_\gamma) \right|^2 . \quad (2.82)$$

2.7 Elastische Compton-Streuung

Unter der Annahme, daß die Compton-Streuung $^{12}\text{C}(\gamma,\gamma)^{12}\text{C}(\text{g.s.})$ allein über ein intermediäres Δ abläuft, ergibt sich für das Übergangsmatrixelement der elastischen Compton-Streuung (siehe Gl. 2.6):

$$\mathcal{M}_{\gamma,\gamma}(\vec{k}_\gamma', \vec{k}_\gamma) = \langle 0^+ | F_{\gamma N\Delta}(\vec{k}_\gamma') G F_{\gamma N\Delta}^\dagger(\vec{k}_\gamma) | 0^+ \rangle . \quad (2.83)$$

Von Untersuchungen der Compton-Streuung am Nukleon ist bekannt, daß der resonante Prozeß über das Δ alleine nicht ausreicht, um eine gute Beschreibung der experimentellen Daten zu erreichen [15]. Es gibt noch weitere nichtresonanten Beiträge zur Compton-Streuung, die über ein intermediäres π -Nukleon-System mit Gesamtdrehimpuls $J = \frac{1}{2}$ ablaufen. Dies entspricht der s-Wellen Pionphotoproduktion, die wir mit Hilfe des Kroll-Ruderman (KR)-Ansatzes beschreiben [51, 50]. Das Übergangsmatrixelement für diesen Untergrund-Term ist gegeben durch:

$$\mathcal{M}_\gamma^{KR} = \langle 0^+ | F_{KR}^*(\vec{k}_\gamma', \lambda') G_{KR} F_{KR}(\vec{k}_\gamma, \lambda) | 0^+ \rangle , \quad (2.84)$$

wobei

$$F_{KR}(\vec{k}_\gamma, \lambda) = \sqrt{2\alpha} (4\pi) \frac{f_{\pi NN}}{m_\pi} h(E) (\hat{\varepsilon}_{\vec{q}_\lambda} \cdot \vec{\sigma}) e^{i\vec{k}_\gamma \cdot \vec{r}} \quad (2.85)$$

der Operator der s-Wellen Pionphotoproduktion ist. $h(E)$ ist ein Parameter, der die Energieabhängigkeit des Prozesses beschreibt. Er wird durch die Compton-Streuung

am Nukleon festgelegt [15]. Da dieser Prozeß sehr kurzreichweitig ist, können wir den Propagator G_{KR} des intermediären π -Nukleon-Systems näherungsweise durch eine δ -Funktion ersetzen. Die Größe von G_{KR} ist durch die Größe der s-Wellen Pionphoto-
produktion am Nukleon bestimmt [15]:

$$G_{KR}(E, \vec{r}', \vec{r}) \approx \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}) \int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{q'}} \frac{m_N}{\varepsilon_{q'}} \left| \frac{v(q')}{v(q)} \right|^2 \frac{1}{E - (\omega_{q'} + \varepsilon_{q'}) + i\varepsilon} . \quad (2.86)$$

Dabei ist E die Gesamtenergie des π -Nukleon-Systems, q' ist der CMS-Impuls des Pions, und $v(q) = (1 + q^2/\beta^2)^{-1}$ ist der π -Nukleon-Formfaktor mit $\beta = 300 \text{ MeV}/c$ [15].

Das Übergangsmatrixelement für elastische Compton-Streuung besteht nun aus der Summe von resonantem und nichtresonantem Beitrag. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für elastische Compton-Streuung ist dann gegeben durch (siehe Anhang A):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CMS} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{m_A^2}{s} \frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'} \left| \mathcal{M}_{\gamma,\gamma}(\vec{k}'_\gamma, \vec{k}_\gamma) + M_\gamma^{KR}(\vec{k}'_\gamma, \vec{k}_\gamma) \right|^2 . \quad (2.87)$$

Die expliziten Ausdrücke für die beiden Beiträge zum Übergangsmatrixelement haben wir in Anhang D hergeleitet. Der totale γ -Kern-Wirkungsquerschnitt ist mit Hilfe des optischen Theorems gegeben durch:

$$\sigma_{tot} = \frac{m_A}{|\vec{k}_\gamma| \sqrt{s}} \text{Im} \left[-\mathcal{M}_{\gamma,\gamma}(\vec{k}_\gamma, \vec{k}_\gamma) - M_\gamma^{KR}(\vec{k}_\gamma, \vec{k}_\gamma) \right] . \quad (2.88)$$

2.8 Der quasifreie Zerfall

Beim quasifreien Zerfall (siehe Abb. 2.2 (b)) zerfällt das Δ in ein Pion und ein Nukleon. Beide Teilchen verlassen den Kern. Der $(A-1)$ -Kern bleibt in einem Zustand mit Gesamtdrehimpuls J'_h und Projektion M'_h zurück. Das Übergangsmatrixelement für diesen Prozeß ist gegeben durch (siehe Gl. 2.4):

$$\mathcal{M}_{\pi p, X}(J'_h M'_h \varepsilon'_h; \vec{q}'_p \frac{1}{2} m'_s; \vec{q}'_\pi, \vec{q}) = \langle J'_h M'_h \varepsilon'_h; \vec{q}'_p \frac{1}{2} m'_s | F_{\pi N \Delta}(\vec{q}'_\pi) | \psi_\Delta \rangle . \quad (2.89)$$

ε'_h ist die Anregungsenergie des Restkerns; sie beträgt $\sim -16.0 \text{ MeV}$ für ein $p_{3/2}$ -Nukleon und $\sim -28.7 \text{ MeV}$ für ein $s_{1/2}$ -Nukleon. Das vom Kern emittierte Nukleon hat den Impuls $\vec{q}'_p$ und den Spin $|\frac{1}{2} m'_s\rangle$. Den Abregungsoperator $F_{\pi N \Delta}$ haben wir schon bei der Berechnung der elastischen Pionstreuung eingeführt.

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der photoinduzierten $^{12}\text{C}(\gamma, p\pi^-)^{11}\text{C}$ Reaktion gilt dann im Laborsystem (siehe Anhang A):

$$\left(\frac{d\sigma}{dE'_p d\Omega'_p d\Omega'_\pi} \right)_{LAB} = \frac{1}{4(2\pi)^5} \frac{1}{|\vec{k}_\gamma|} \frac{m_p m_{A-1} |\vec{q}'_p| |\vec{q}'_\pi|}{\left| E_\gamma + m_A - E'_p - \frac{E'_\pi}{|\vec{q}'_\pi|} (|\vec{k}_\gamma| \cos \vartheta_{\pi'\gamma} - |\vec{q}'_p| \cos \vartheta_{\pi'p'}) \right|} \times \frac{1}{2} \sum_{\lambda m'_s M'_h} \left| \mathcal{M}_{\pi p, \gamma} (J'_h M'_h \varepsilon'_h; \vec{q}'_p \frac{1}{2} m'_s; \vec{q}'_\pi, \vec{k}_\gamma) \right|^2. \quad (2.90)$$

Entsprechend ergibt sich für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der pioninduzierten Reaktion $^{12}\text{C}(\pi^+, p\pi^+)^{11}\text{B}$:

$$\left(\frac{d\sigma}{dE'_p d\Omega'_p d\Omega'_\pi} \right)_{LAB} = \frac{1}{4(2\pi)^5} \frac{1}{|\vec{q}_\pi|} \frac{m_p m_{A-1} |\vec{q}'_p| |\vec{q}'_\pi|}{\left| E_\pi + m_A - E'_p - \frac{E'_\pi}{|\vec{q}'_\pi|} (|\vec{q}_\pi| \cos \vartheta_{\pi'\pi} - |\vec{q}'_p| \cos \vartheta_{\pi'p'}) \right|} \times \sum_{m'_s M'_h} \left| \mathcal{M}_{\pi p, \pi} (J'_h M'_h \varepsilon'_h; \vec{q}'_p \frac{1}{2} m'_s; \vec{q}'_\pi, \vec{q}_\pi) \right|^2. \quad (2.91)$$

Den expliziten Ausdruck für das Übergangsmatrixelement des quasifreien Zerfalls leiten wir in Anhang H her.

2.9 Die 2-Nukleon-Knockout - Reaktion

Im Falle der 2-Nukleon-Knockout - Reaktion (siehe Abb. 2.2 (c)) wechselwirkt das Δ mit einem weiteren Nukleon des Kerns. Energie und Impuls des Δ 's werden auf zwei Nukleonen übertragen, die als freie Teilchen den Kern verlassen. Der zurückbleibende $(A-2)$ -Restkern hat Gesamtdrehimpuls J'_h und Projektion M'_h . Die Anregungsenergie ε'_h des Restkerns wird durch die Bindungsenergien der beiden Nukleonen bestimmt. Sie liegt zwischen -34.8 MeV (zwei $p_{3/2}$ Nukleonen) und -54.7 MeV (zwei $s_{1/2}$ Nukleonen).

Das Übergangsmatrixelement für die 2-Nukleon-Knockout - Reaktion haben wir schon in Abschnitt 2.1 angegeben:

$$\mathcal{M}_{2N, X} (J'_h M'_h \varepsilon'_h; \vec{q}'_{p^1} \frac{1}{2} m'_{s^1}; \vec{q}'_{p^2} \frac{1}{2} m'_{s^2}, \vec{q}) = \langle J'_h M'_h \varepsilon'_h; \vec{q}'_{p^1} \frac{1}{2} m'_{s^1}; \vec{q}'_{p^2} \frac{1}{2} m'_{s^2} | V_{2N} | \psi_\Delta \rangle. \quad (2.92)$$

Die beiden auslaufenden Nukleonen p^1 und p^2 haben die Impulse $\vec{q}'_{p^1}$ und $\vec{q}'_{p^2}$ und die Spins $|\frac{1}{2} m'_{s^1}\rangle$ und $|\frac{1}{2} m'_{s^2}\rangle$. Für die Wechselwirkung zwischen dem Δ und dem zweiten Nukleon machen wir folgenden einfachen Ansatz:

$$V_{2N} = V_0 \delta^3(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{S}_1) (\vec{r}_2 \cdot \vec{T}_1). \quad (2.93)$$

Dies bedeutet, daß wir die Wechselwirkung im Ortsraum als punktförmig annehmen. Im Impulsraum entspricht dies einer impulsunabhängigen Wechselwirkung. Diese Näherung

ist zunächst durch das Prinzip der Einfachheit motiviert. Von den Mesonaustauschpotentialen für die NN -Wechselwirkung ist bekannt, daß diese bei hohen Impulsüberträgen als nahezu konstant angenommen werden können. Wir machen hier für die Zerfallswechselwirkung V_{2N} eine entsprechende Annahme. Der Parameter V_0 in Gl. 2.93 gibt die Stärke der Wechselwirkung V_{2N} an. Bei der Untersuchung des 2-Nukleon-Knockout - Prozesses, induziert durch die Ladungsaustauschreaktion ($^3\text{He}, t$), hat P. Oltmanns für diesen Parameter folgenden Wert gefunden[36]:

$$V_0 = 220 \text{ MeV fm}^3 . \quad (2.94)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die photoinduzierte Reaktion $^{12}\text{C}(\gamma, pn)^{10}\text{B}$ ist im Laborsystem (siehe Anhang A):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d\sigma}{dE'_{p1} d\Omega'_{p1} d\Omega'_{p2}} \right)_{LAB} \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^5} \frac{1}{|\vec{k}_\gamma|} \frac{m_p^2 m_{A-2} |\vec{q}'_{p1}| |\vec{q}'_{p2}|}{\left| E_\gamma + m_A - E'_{p1} - \frac{E'_{p2}}{|\vec{q}'_{p2}|} (|\vec{k}_\gamma| \cos \vartheta_{p2\gamma} - |\vec{q}'_{p1}| \cos \vartheta_{p2p1}) \right|} \\ & \times \frac{1}{2} \sum_{\lambda m'_{s1} m'_{s2} M'_h} \left| \mathcal{M}_{pn,\gamma}(J'_h M'_h \varepsilon'_h; \vec{q}'_{p1} \frac{1}{2} m'_{s1}; \vec{q}'_{p2} \frac{1}{2} m'_{s2}, \vec{k}_\gamma) \right|^2 . \end{aligned} \quad (2.95)$$

Für die pioninduzierte Reaktion $^{12}\text{C}(\pi^+, pp)^{10}\text{B}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d\sigma}{dE'_{p1} d\Omega'_{p1} d\Omega'_{p2}} \right)_{LAB} \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^5} \frac{1}{|\vec{q}_\pi|} \frac{m_p^2 m_{A-2} |\vec{q}'_{p1}| |\vec{q}'_{p2}|}{\left| E_\pi + m_A - E'_{p1} - \frac{E'_{p2}}{|\vec{q}'_{p2}|} (|\vec{q}_\pi| \cos \vartheta_{p2\pi} - |\vec{q}'_{p1}| \cos \vartheta_{p2p1}) \right|} \\ & \times \sum_{m'_{s1} m'_{s2} M'_h} \left| \mathcal{M}_{pp,\pi}(J'_h M'_h \varepsilon'_h; \vec{q}'_{p1} \frac{1}{2} m'_{s1}; \vec{q}'_{p2} \frac{1}{2} m'_{s2}, \vec{q}_\pi) \right|^2 . \end{aligned} \quad (2.96)$$

Das Übergangsmatrixelement für die 2-Nukleon-Knockout - Reaktion geben wir in Anhang I an.

Kapitel 3

Diskussion der Ergebnisse

3.1 Der totale Wirkungsquerschnitt für Pion- und Photon-Streuung am Kern

In den Abb. 3.1(a) und (b) analysieren wir die Daten für die totalen Wirkungsquerschnitte von Pion- und Photon-Streuung an ^{12}C . Die strichpunktierten Kurven zeigen die Summe der freien Pion-Nukleon Wirkungsquerschnitte ($A \times \bar{\sigma}_{\pi N}$) und der freien Photon-Nukleon Wirkungsquerschnitte ($A \times \bar{\sigma}_{\gamma N}$), wobei A die Massenzahl des Kerns ist und $\bar{\sigma} = 1/2(\sigma_p + \sigma_n)$ der über Proton und Neutron gemittelte Wirkungsquerschnitt ist. Im Falle der Pion-Streuung beobachtet man eine starke Reduktion und Verbreiterung des Wirkungsquerschnitts am Kern gegenüber dem Wirkungsquerschnitt am Nukleon. Diese Verbreiterung und Reduktion wird im Falle der Photon-Streuung nicht beobachtet. Der Grund für dieses unterschiedliche Verhalten ist bekannt. Der Grund ist die Vielfachstreuung des Pions im Kern. Die ΔN^{-1} -Restwechselwirkung koppelt stark an den Pion-Kanal (LO), aber nur schwach an den Photon-Kanal (TR). Daher wird das Pion vor allem an der Oberfläche gestreut, während das Photon auch das Kerninnere erreicht. Die Richtigkeit dieser Erklärung kann bewiesen werden durch den Vergleich von Rechnungen mit und ohne Einschluß der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung $V_{\Delta N, \Delta N}$. Unsere Ergebnisse für diese Rechnungen sind in Abb. 3.1 durch die durchgezogenen ($V_{\Delta N, \Delta N} \neq 0$) und die gestrichelten ($V_{\Delta N, \Delta N} = 0$) Kurven dargestellt. Da $V_{\Delta N, \Delta N} = 0$ gewählt ist, beinhaltet die gestrichelte Kurve nur noch Effekte des mittleren Δ -Kern-Potentials und der Fermi-Bewegung. Durch Vergleich dieser Kurven mit den (mit A multiplizierten) Wirkungsquerschnitten am Nukleon stellt man fest, daß sowohl für Pion- als auch für Photon-Streuung der berechnete Wirkungsquerschnitt am Kern um einen Faktor ~ 1.4 reduziert und aufgrund der Fermi-Bewegung verbreitert ist. Einschluß der Restwechselwirkung bei der Rechnung reduziert den Wirkungsquerschnitt für das Pion noch weiter, das Photon dagegen wird davon kaum beeinflusst. Zusätzlich wird die Peakposition im Pion-Wirkungsquerschnitt aufgrund der Attraktion der Pion-Vielfachstreuung zu niedrigeren Anregungsenergien hin verschoben. Der geringe Einfluß der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung auf Form und Größe des totalen Photon-Kern Wirkungsquerschnitts zeigt, daß man hier-

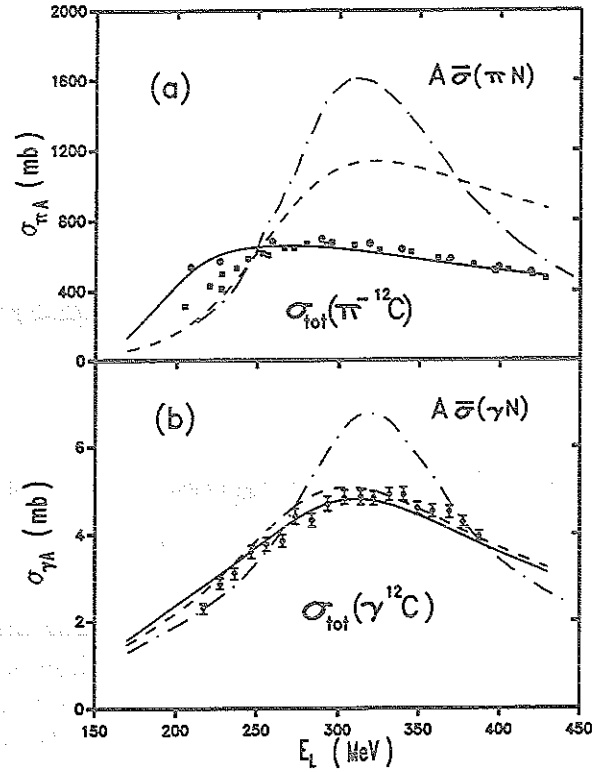


Abbildung 3.1: Totaler Wirkungsquerschnitt für Pion- und Photon-Streuung an ^{12}C . Die Photon-Daten sind aus Ref. [3] und die Pion-Daten sind aus [8] (Quadrate) und [6] (Punkte). Die strichpunktierte Kurve zeigt in (a) die inkohärente Summe der totalen π -Nukleon Wirkungsquerschnitte ($A \times \bar{\sigma}_{\pi N}$) und in (b) die inkohärente Summe der totalen γ -Nukleon Wirkungsquerschnitte ($A \times \bar{\sigma}_{\gamma N}$). Die durchgezogenen und die gestrichelten Kurven stellen Rechnungen mit und ohne Einschluß der Restwechselwirkung dar.

mit die Parameter des mittleren Δ -Kern-Potentials festlegen kann. Deshalb deutet die gute Beschreibung der Daten durch unsere Rechnung darauf hin, daß wir die richtigen Parameter für das mittlere Δ -Kern-Potential gewählt haben. Gleichzeitig gibt uns der große Effekt von $V_{\Delta N, \Delta N}$ auf den Pion-Wirkungsquerschnitt die Möglichkeit, die Stärke der Restwechselwirkung im LO Kanal festzulegen.

3.2 Elastische Pion-Kernstreuung

Da die Pion-Nukleon Wechselwirkung im Δ -Resonanzbereich sehr stark ist, ist die mittlere freie Weglänge des Pions im Kern in diesem Energiebereich auf weniger als 1 fm reduziert. Dies hat zur Konsequenz, daß der differentielle Wirkungsquerschnitt für elastische Pion-Kern-Streuung sich effektiv wie Streuung an einer schwarzen Scheibe

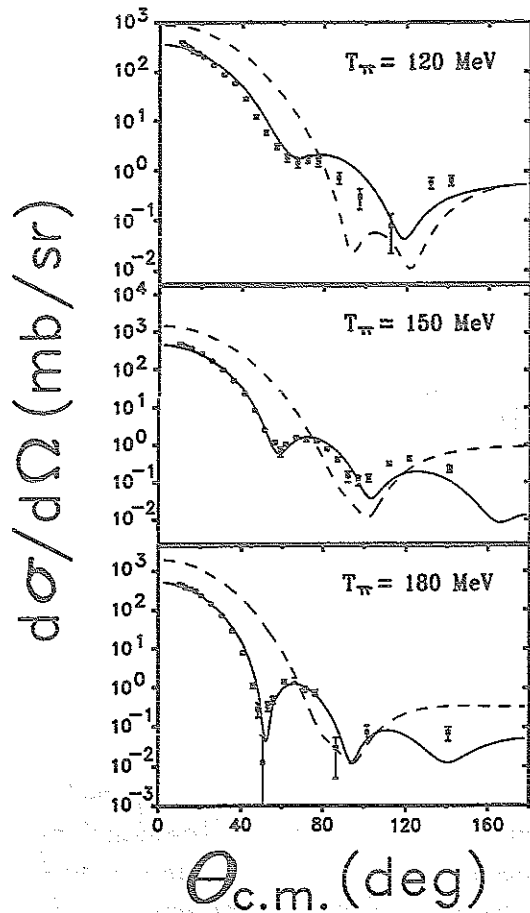


Abbildung 3.2: Differentieller Wirkungsquerschnitt für elastische π^- -Streuung an ^{12}C bei kinetischen Einschüßenergien des Pions von $T_\pi = 120$ MeV, $T_\pi = 150$ MeV und $T_\pi = 180$ MeV [6]. Die durchgezogenen und gestrichelten Kurven zeigen die Ergebnisse unserer Rechnungen mit und ohne Einschluß der Restwechselwirkung.

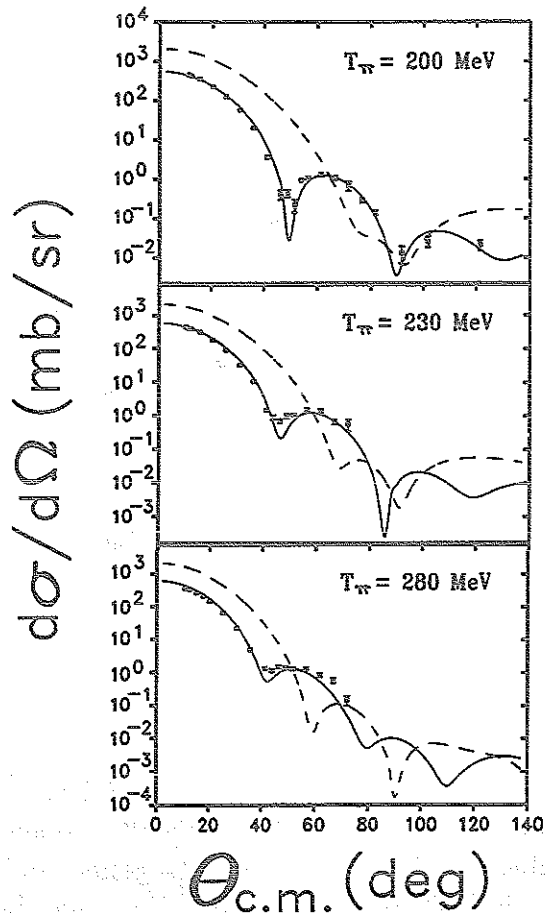


Abbildung 3.3: Wie in Abb. 3.2 aber hier für kinetische Einschüßenergien des Pions von $T_\pi = 200$ MeV, $T_\pi = 230$ MeV und $T_\pi = 280$ MeV.

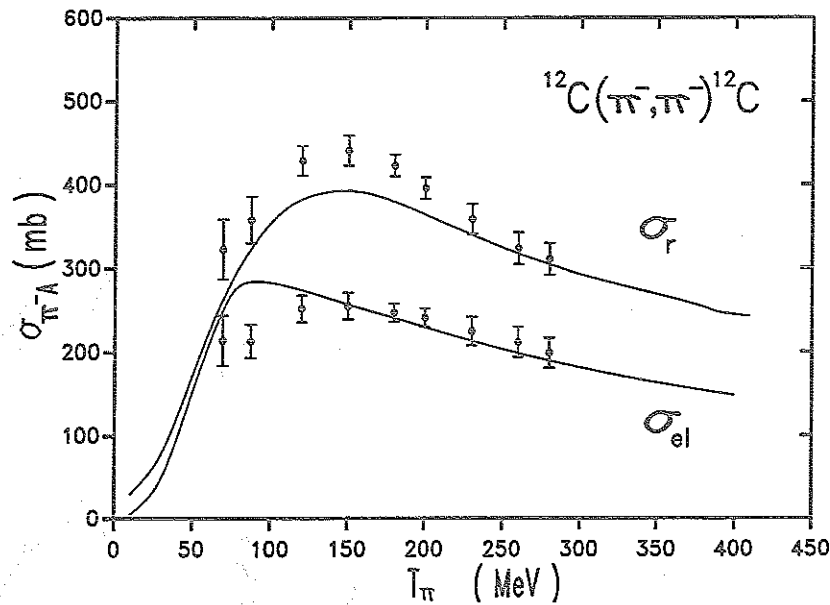


Abbildung 3.4: Integrierter elastischer und Reaktions-Wirkungsquerschnitt für π^- -Streuung an ^{12}C . Die Kurven zeigen unsere Ergebnisse im Vergleich mit den Daten aus Ref. [6].

verhält. In den Abb. 3.2 und 3.3 zeigen wir die differentiellen Wirkungsquerschnitte für sechs verschiedene Einschüßenergien des Pions, die den ganzen Δ -Resonanzbereich überstreichen. Die durchgezogenen und gestrichelten Kurven sind mit und ohne Einschluß der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung berechnet worden. Man kann erkennen, daß die Restwechselwirkung zur Beschreibung der experimentellen Daten wesentlich ist. Insbesondere reduziert die Restwechselwirkung die Wirkungsquerschnitte unter Vorwärtswinkeln um einen Faktor ~ 4 und schiebt die Minima und Maxima an die richtigen Stellen im Diffraktionsmuster.

In Abb. 3.4 vergleichen wir den berechneten integrierten elastischen Wirkungsquerschnitt und den integrierten Reaktions-Wirkungsquerschnitt ($\sigma_r = \sigma_{tot} - \sigma_{el}$) mit den Daten. Die Wirkungsquerschnitte sind aufgetragen als Funktion der Pion-Einschüßenergie. Sowohl der elastische als auch der Reaktions-Wirkungsquerschnitt werden durch unsere Rechnungen gut beschrieben. Die Verbreiterung und die Verschiebung des elastischen Wirkungsquerschnitts zu niedrigeren Anregungsenergien hin ist ein Effekt der attraktiven Pion-Austausch-Wechselwirkung im Kern. Dieser Vielfachstreuprozess des Pions im Kern führt zu einer starken Ankopplung an die Reaktions-Kanäle und damit auch zu einem großen Reaktions-Wirkungsquerschnitt.

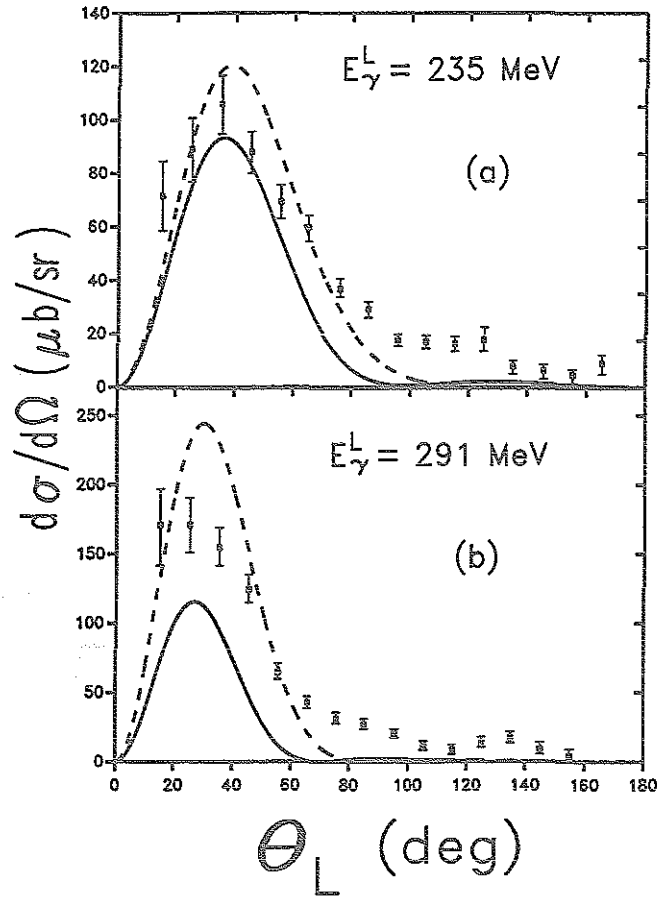


Abbildung 3.5: Differentielle Wirkungsquerschnitte für kohärente Pionphotoproduktion bei Einschußenergien des Photons von (a) $E_\gamma^L = 235 \text{ MeV}$ und (b) $E_\gamma^L = 291 \text{ MeV}$ im Vergleich mit den Daten [4]. Die durchgezogenen und gestrichelten Kurven sind Wirkungsquerschnitte, die mit und ohne Restwechselwirkung berechnet wurden.

3.3 Kohärente Pionphotoproduktion am Kern

Mit Hilfe der kohärenten Pionphotoproduktion untersuchen wir die Mischung von spin-transversalem und spin-longitudinalem Kanal im Kern. In einem unendlich ausgedehnten System, wie z.B. Kernmaterie, sind beide Kanäle völlig entkoppelt, aber im endlichen Kern sind sie aufgrund von Oberflächeneffekten schwach gekoppelt. Die Spinstruktur von Anregungs- ($\vec{S}^\dagger \times \vec{q}_\gamma$) und Abregungsoperator ($\vec{S} \cdot \vec{q}'_\pi$) bei der kohärenten Pionphotoproduktion führt zu einer Proportionalität des Übergangsmatrixelements zu $|\vec{q}_\gamma \times \vec{q}'_\pi| = q_\gamma q'_\pi \sin \theta_\pi$. Damit verschwindet das Produkt von Anregungs- und Abregungsoperator für $\theta_\pi = 0^\circ$ und hat sein Maximum bei $\theta_\pi = 90^\circ$. Ein zusätzlicher impulsabhängiger Faktor kommt vom Überlappintegral in Gl. D.9. Dieser verschiebt die Peakposition der Winkelverteilung zu kleineren Winkeln. In Abb. 3.5 vergleichen wir die berechneten Wirkungsquerschnitte für Pionphotoproduktion bei zwei verschiedenen Photonenergien mit den Daten. Die Rechnungen für die Photonenergie $E_\gamma^L = 235 \text{ MeV}$ (Abb. 3.5(a)) beschreiben die experimentelle Winkelverteilung recht gut. Die

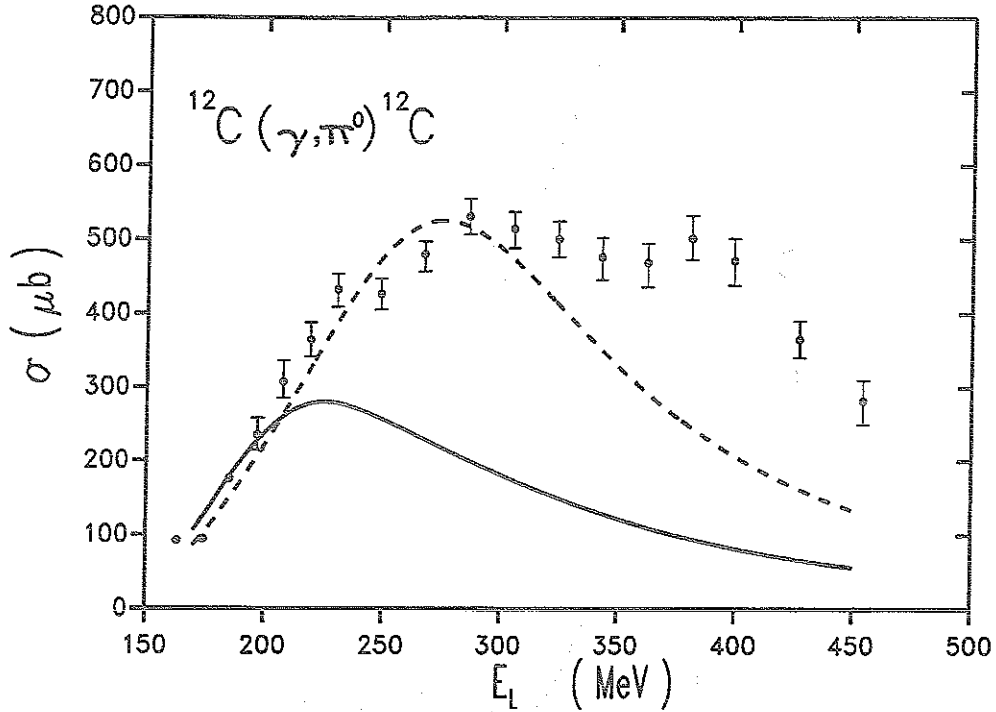


Abbildung 3.6: Integrierter Wirkungsquerschnitt für kohärente Pionphotoproduktion an ^{12}C . Die Daten sind von J. Arends *et al.* [4]. Die durchgezogene und gestrichelte Kurve zeigen unsere Ergebnisse, die mit und ohne Restwechselwirkung berechnet wurden.

entsprechende Rechnung für die Photonenergie $E_\gamma^L = 291$ MeV unter Einschluß der Restwechselwirkung in Abb. 3.5(b) unterschätzt die absolute Größe des Wirkungsquerschnitts. Der Grund für diese Unterschätzung liegt hauptsächlich in der experimentellen Energieauflösung von nur ≈ 15 MeV. Daher beinhalten die Daten neben den kohärenten Pionen auch Pionen, die von anderen Prozessen herrühren, bei denen der Restkern in einem angeregten Zustand zurückgelassen wird. Der Vergleich der gestrichelten mit der durchgezogenen Kurve zeigt, daß es einen Effekt der Pionvielfachstreuung im Kern gibt, der mit steigender Photonenergie größer wird. Dies sieht man noch deutlicher in Abb. 3.6. Man erkennt, daß sich die Rechnungen mit und ohne Einschluß der Restwechselwirkung sowohl in der Größe als auch in der Form unterscheiden. Die Reduktion und die Verschiebung der Peakposition um ca. 80 MeV in der Rechnung bei Einschluß der Restwechselwirkung (durchgezogene Kurve) relativ zu der Rechnung ohne Restwechselwirkung (gestrichelte Kurve) sind Effekte der attraktiven Restwechselwirkung im spin-longitudinalen Kanal.

Neue Daten für die kohärente Pionphotoproduktion an ^{12}C bei einem Streuwinkel $\theta_\pi^L = 60^\circ$ des auslaufenden Pions sind mit dem Spektrometer CATS bei MAMI B in Mainz gemessen worden. Das Spektrometer CATS erlaubt aufgrund seiner guten Energieauflösung zwischen kohärenten und inelastischen Pionen zu unterscheiden. Diese vorläufigen Daten scheinen zu beweisen, daß die Daten in Abb. 3.6 oberhalb des Photonimpulses $E_\gamma^L \approx 250$ MeV von inelastischen Pionen dominiert werden [52].

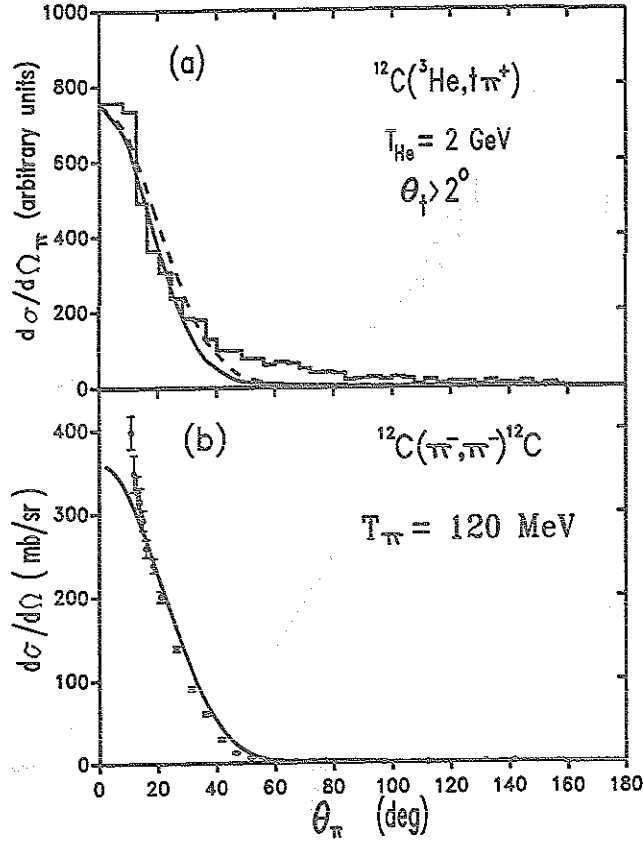


Abbildung 3.7: Winkelverteilung der kohärenten Pionen aus der $^{12}\text{C}(^3\text{He}, t\pi^+)^{12}\text{C}(\text{g.s.})$ Reaktion für $T_{\text{He}} = 2 \text{ GeV}$ (a) und (b) differentieller Wirkungsquerschnitt für elastische π^- -Streuung an ^{12}C bei $T_\pi = 120 \text{ MeV}$. (a) Die gestrichelte Kurve zeigt das Ergebnis unserer Rechnung. Die durchgezogene Kurve beschreibt den Beitrag der LO Anregung zur kohärenten Pionproduktion. Die Daten sind aus Ref. [30]. (b) Die durchgezogene Kurve zeigt den berechneten Wirkungsquerschnitt im Vergleich mit den Daten [6].

3.4 Reelle vs. virtuelle Pionstreuung

In den Ladungsaustauschreaktionen wird der Targetkern durch die vom Projektil-Ejektil-System erzeugten virtuellen Pion- und Rho-Meson-Felder angeregt. Die pionartige Wechselwirkung regt die LO Responsefunktion im Kern an, während die Rho-Mesonartige Wechselwirkung die TR Responsefunktion anregt. Aufgrund der Kinematik gehorchen die virtuellen Mesonfelder der Energie-Impuls-Beziehung $\omega < |\vec{q}|$ und regen daher die LO und TR Responsefunktion in einem $(\omega, \vec{q})$ Bereich an, der der reellen Pion- und Photonstreuung nicht zugänglich ist. Von der Analyse der inklusiven Reaktion $^{12}\text{C}(^3\text{He}, t)$ bei einer Einschußenergie von $E=2 \text{ GeV}$ wissen wir [27], daß die LO und TR Responsefunktionen in dieser Reaktion mit vergleichbarer Stärke angeregt werden. Die beiden Kanäle können experimentell durch Messung der exklusiven Reaktion $^{12}\text{C}(^3\text{He}, t\pi^+)^{12}\text{C}(\text{g.s.})$ getrennt werden, denn diese Reaktion wird von dem LO

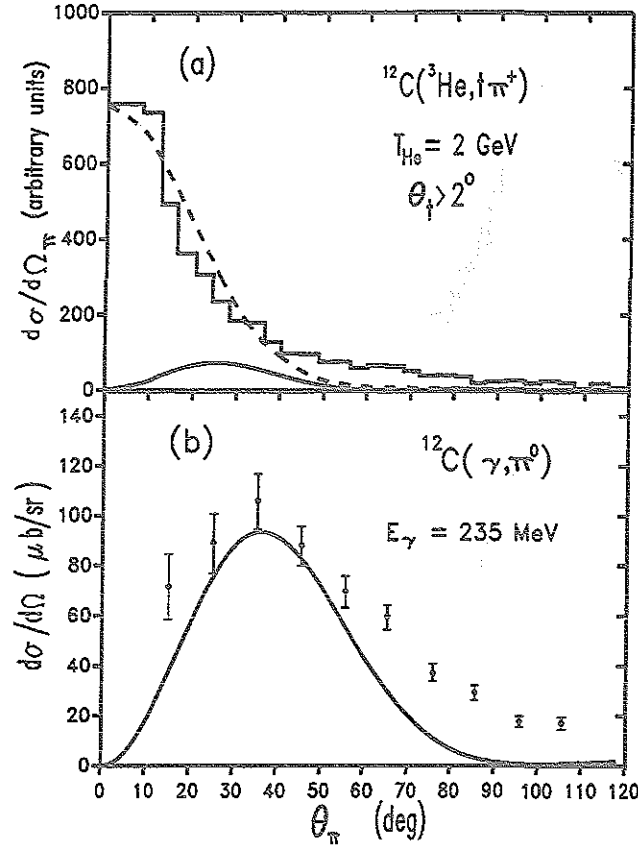


Abbildung 3.8: Winkelverteilung der kohärenten Pionen aus der $^{12}\text{C}(^3\text{He}, t\pi^+)^{12}\text{C}(\text{g.s.})$ Reaktion (a) für $T_{\text{He}} = 2 \text{ GeV}$ und (b) aus der kohärenten Pionphotoproduktion bei $E_\gamma = 235 \text{ MeV}$. (a) Die gestrichelte Kurve zeigt das Ergebnis unserer Rechnung. Die durchgezogene Kurve beschreibt den Beitrag der TR Anregung zur kohärenten Pionproduktion. (b) Die Daten sind aus Ref. [4]. Die durchgezogene Kurve zeigt den berechneten Wirkungsquerschnitt.

Kanal dominiert. In Abb. 3.7(a) zeigen wir die gemessenen Daten von Hennino [30] und vergleichen diese mit der berechneten Winkelverteilung. Die gestrichelte Kurve zeigt die Summe von LO und TR Anregung, während die durchgezogene Kurve die LO Anregung allein zeigt. Der kleine Unterschied zwischen beiden Kurven zeigt die Dominanz der LO über die TR Anregung in dieser Reaktion. Die TR Anregung ist wegen der schwachen Mischung von LO und TR Kanal bei kohärenter Pionproduktion unterdrückt. Die Winkelverteilung ihr Maximum bei $\theta_\pi = 0^\circ$. Dies resultiert aus der Spin-Struktur der Anregungs- ($\vec{S}^\dagger \cdot \vec{q}$) und Abregungsoperatoren ($\vec{S} \cdot \vec{q}'_\pi$). Das Produkt der beider Operatoren ist proportional zu $qq'_\pi \cos \theta_\pi$ und hat sein Maximum bei $\theta_\pi = 0^\circ$. In Abb. 3.7(b) zeigen wir zum Vergleich den Wirkungsquerschnitt für elastische Pion-Streuung bei einer entsprechend gewählten Pioneinschußenergie. Man erkennt die direkte Proportionalität zwischen dem Wirkungsquerschnitt für die kohärente Pionproduktion in Abb. 3.7(a) und dem elastischen Wirkungsquerschnitt für Pionstreuung in

Abb. 3.7(b). Die kohärente Pionproduktion in der $^{12}\text{C}(^3\text{He}, t \pi^+)^{12}\text{C}(\text{g.s.})$ Reaktion kann auch als virtuelle Pion-Streuung an ^{12}C aufgefaßt werden, wobei das virtuelle Pion der Ladungsaustauschreaktion aufgrund der Vielfachstreuung im Kern auf seine Massenschale gehoben und in ein reelles Pion verwandelt wird. Der dafür notwendige Impuls wird vom Restkern zur Verfügung gestellt.

In Abb. 3.8 zeigen wir die Winkelverteilungen für die spin-transversal erzeugten kohärenten Pionen im Falle einer Ladungsaustauschreaktion (a) und für Pionphotoproduktion (b). Aufgrund der Spin-Struktur ($\vec{S}^\dagger \times \vec{q}$) des Anregungsoperators ist der berechnete Wirkungsquerschnitt (durchgezogene Kurve) nun proportional zu $(qq'_\pi)^2 \sin^2 \theta_\pi$ und verschwindet für $\theta_\pi = 0^\circ$. Auch hier kann man wieder die Proportionalität zwischen reeller (in der Pionphotoproduktion) und virtueller TR Anregung (in der Ladungsaustauschreaktion) beobachten. Die berechnete TR Winkelverteilung in Abb. 3.8(a) hat ihr Maximum bei einem etwas kleineren Winkel als die Winkelverteilung für kohärente Pionphotoproduktion in Abb. 3.8(b). Dafür gibt es zwei Gründe: Erstens führt die Ladungsaustauschreaktion zu einem größeren Impulsübertrag als die Pionphotoproduktion. Daher unterdrückt der Kernformfaktor den Wirkungsquerschnitt in der Ladungsaustauschreaktion für höhere Pionwinkel stärker. Zweitens führt der $(^3\text{He}, t)$ Formfaktor zu einer zusätzlichen Unterdrückung des Wirkungsquerschnitts für hohe Impulsüberträge, während die $\gamma N \Delta$ -Kopplung für reelle Photonen keinen Formfaktor beinhaltet.

3.5 Elastische Compton-Streuung am Kern

Bei Compton-Streuung am Kern sind sowohl Anregungs- als auch Abregungsoperator spin-transversal. Daher kann man bei dieser Reaktion studieren, inwieweit Effekte der Pionwechselwirkung im Medium im TR-TR Kanal noch auftreten. In Abb. 3.9 zeigen wir den Wirkungsquerschnitt für elastische Compton-Streuung an ^{12}C bei einem festen Winkel des ausgehenden Photons von $\theta_\gamma^L = 40^\circ$. Die strichpunktierte Kurve repräsentiert das Ergebnis einer Rechnung, bei der wir nur den resonanten Reaktionsprozeß über das intermediäre Δ berücksichtigen. Bei der Berechnung der gestrichelten und durchgezogenen Kurve haben wir neben dem Δ -Beitrag auch noch den nichtresonanten Beitrag aus Gl. 2.84 berücksichtigt. Die durchgezogene und gestrichelte Kurve zeigen unsere Ergebnisse mit und ohne Einschluß der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung. Offensichtlich gibt es sogar bei der Compton-Streuung und damit im TR-TR Kanal noch einen Effekt der Pionwechselwirkung im Medium. Bei Einschluß der Restwechselwirkung erreichen wir eine gute Beschreibung der Daten für Photonenergien oberhalb von 250 MeV. Bei niedrigeren Photonenergien wird der Untergrund relativ groß und unser einfaches Modell zur Beschreibung des Untergrunds führt zu einer Diskrepanz zwischen unserer Rechnung und den Daten.

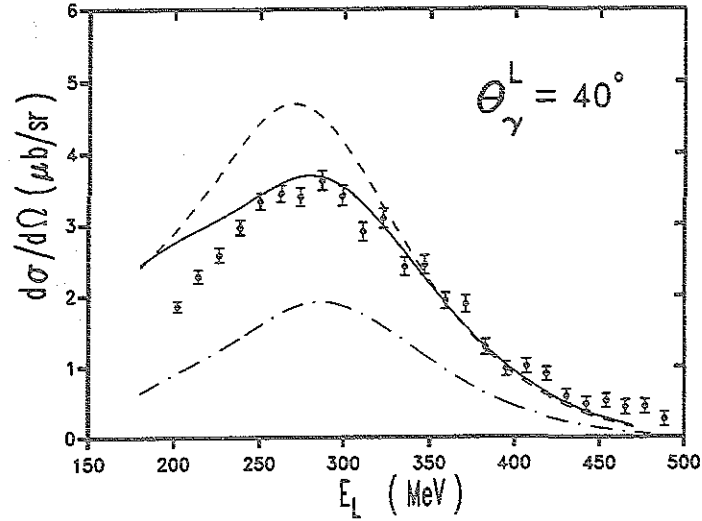


Abbildung 3.9: Differentieller Wirkungsquerschnitt für elastische Compton-Streuung an ^{12}C als Funktion der Energie des eingeschossenen Photons bei einem Streuwinkel des ausgehenden Photons von $\theta_\gamma^L = 40^\circ$. Die strichpunktierte Kurve zeigt eine Rechnung, bei der nur der resonante Beitrag berücksichtigt wurde. Die durchgezogene und gestrichelte Kurve repräsentieren Rechnungen mit und ohne Einschluß der Restwechselwirkung bei Berücksichtigung des im Text beschriebenen Untergrunds. Die Daten sind von F. Wissmann [53].

3.6 Der quasifreie Zerfall

3.6.1 Der photoinduzierte quasifreie Zerfall

In Abb. 3.10 haben wir die Daten für die Reaktion $^{12}\text{C}(\gamma, p\pi^-)^{11}\text{C}$ bei einer Einschüßenergie des Photons von $E_\gamma = 380$ MeV aufgetragen. Die Winkel für das auslaufende Proton und Pion waren bei dieser Messung fest vorgegeben ($\vartheta_p = 20^\circ$, $\vartheta_\pi = -120^\circ$) und der dreifach differentielle Wirkungsquerschnitt ist als Funktion der kinetischen Energie des auslaufenden Protons angegeben. Die gestrichelten Kurven zeigen die Ergebnisse unserer Rechnungen ohne Einschluß der Restwechselwirkung. Die durchgezogenen und strichpunktierten Kurven zeigen unsere Rechnungen unter Einschluß der Restwechselwirkung. Bei der Berechnung der strichpunktierten Kurven wurden zusätzlich Proton und Pion als distortierte Wellen behandelt.

Im oberen Teil von Abb. 3.10 ist das Photon von einem $p_{3/2}$ -Neutron und im unteren Teil von einem $s_{1/2}$ -Neutron absorbiert worden. Die Unterscheidung dieser beiden Prozesse ist experimentell möglich, da aufgrund von Energie- und Impulserhaltung

$$E_\gamma + m_A = E'_p + E'_\pi + E'_{A-1} - E_B, \quad (3.1)$$

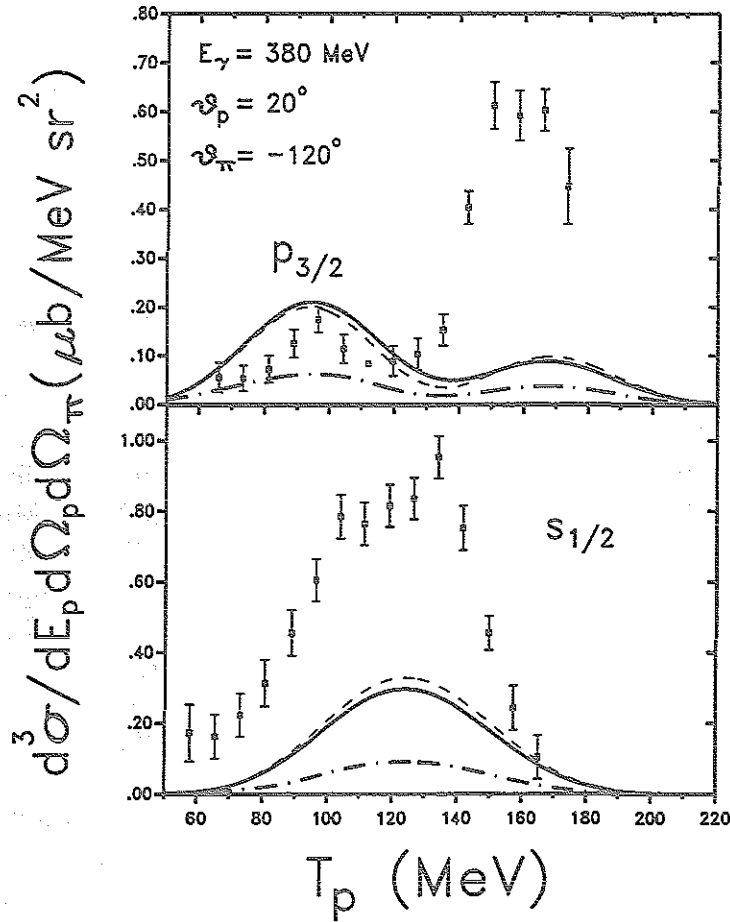


Abbildung 3.10: Dreifach differentieller Wirkungsquerschnitt der $^{12}\text{C}(\gamma, p\pi^-)^{11}\text{C}$ Reaktion als Funktion der kinetischen Energie des auslaufenden Protons, bei vorgegebener Photoneinschussenergie, Proton- und Pionwinkel. Im oberen Teil der Abbildung wurde das Photon von einem $p_{3/2}$ -, im unteren von einem $s_{1/2}$ -Neutron absorbiert. Die Daten sind aus Ref. [54]. Die gestrichelten Kurven zeigen die Ergebnisse unserer Rechnungen ohne Restwechselwirkung und die durchgezogenen und strichpunktierten Kurven unsere Rechnungen unter Einschluß der Restwechselwirkung. Bei der Berechnung der strichpunktierten Kurven wurden zusätzlich das auslaufende Proton und Pion als distortierte Wellen behandelt.

$$\vec{k}_\gamma = \vec{q}'_p + \vec{q}'_\pi + \vec{p}_{miss} \quad (3.2)$$

die Bindungsenergie des Neutrons berechnet werden kann. In Gl. 3.1 und 3.2 ist E'_{A-1} die Energie und $\vec{p}_{miss}$ der nicht beobachtete Impuls des Restkerns.

In Impulsapproximation ist der nicht beobachtete Impuls des Restkerns gleich dem negativen Impuls des Nukleons vor der Absorption des Photons: $\vec{p}_{miss} = -\vec{p}_i$. Daher können wir Gl. 3.2 auch in der folgenden Weise schreiben:

$$\vec{k}_\gamma + \vec{p}_i = \vec{q}_\Delta = \vec{q}'_p + \vec{q}'_\pi . \quad (3.3)$$

Für eine gegebene kinetische Energie T_p des auslaufenden Protons folgt wegen $E_{A-1} \approx m_{A-1}$ aus Gl. 3.1 für die Energie des auslaufenden Pions: $E'_\pi \approx E_\gamma - T_p + E_B$. Deshalb entspricht die Variation der kinetischen Energie des auslaufenden Protons bei fest vorgegebenen Pion- und Protonwinkeln der Variation von $\vec{p}_{miss}$ und damit von $\vec{p}_i$. Abb. 3.11 zeigt diesen Zusammenhang zwischen $|\vec{p}_{miss}|$ und T_p für das hier untersuchte Experiment. Man erkennt, daß $\vec{p}_{miss}$ für $T_p \approx 125$ MeV ein Minimum hat und für kleinere und größere kinetische Energien stark ansteigt. Diesem Minimum für $\vec{p}_{miss}$ entspricht genau das Maximum in den Daten und in unseren Rechnungen für den Fall der Reaktion am $s_{1/2}$ -Neutron. Diese Tatsache wird sofort verständlich, wenn wir die $s_{1/2}$ -Lochwellenfunktion als Funktion des Impulses (Abb. 3.12) betrachten. Die $s_{1/2}$ -Wellenfunktion hat ihr Maximum bei $q = 0$ MeV/c und daher ist der Wirkungsquerschnitt für einen minimalen Impuls des Nukleons vor dem Stoß und damit minimales $\vec{p}_{miss}$ am größten.

Im Falle der Reaktion am $p_{3/2}$ -Neutron ist die Situation komplizierter, da diese Lochwellenfunktion ihr Maximum für $q \approx 110$ MeV/c erreicht (siehe Abb. 3.12). Der Abb. 3.11 können wir entnehmen, daß dieser Impuls des Neutrons sowohl für $T_p \approx 90$ MeV als auch für $T_p \approx 180$ MeV besonders günstig ist. Entsprechend beobachten wir auch in den Daten und unseren Rechnungen Maxima für diese beiden Werte von T_p . Dabei sind bei $T_p \approx 90$ MeV der Impuls $\vec{p}_i$ des Neutrons und der Impuls $\vec{k}_\gamma$ des Photons entgegengesetzt gerichtet, und es wird ein Δ mit kleinem 3-Impuls erzeugt; im Maximum bei $T_p \approx 180$ MeV zeigen $\vec{k}_\gamma$ und $\vec{p}_i$ in die gleiche Richtung und es wird ein Δ mit großem 3-Impuls erzeugt.

Unsere Rechnungen im Δ -Loch-Modell zeigen, daß bei Berücksichtigung der Propagation des Δ 's im Medium offensichtlich der quasifreie Zerfall eines Δ 's mit kleinem 3-Impuls ($T_p \approx 90$ MeV) gegenüber dem quasifreien Zerfall eines Δ 's mit großem 3-Impuls ($T_p \approx 180$ MeV) bevorzugt ist. Dagegen scheinen die Daten und DWIA-Rechnungen von Xiaodong Li *et al.* [55] genau das Gegenteil zu behaupten. Die Lösung dieses scheinbaren Widerspruchs liegt darin, daß wir hier nur den resonanten Beitrag zum quasifreien Zerfall betrachtet haben. Von Studien der quasifreien Pionproduktion von Xiaodong Li *et al.* [55] und Johansson und Sherif [56] ist bekannt, daß bei Anregung durch das Photon neben den Prozessen über das Δ noch andere Prozesse große Beiträge liefern. Daher müssen vor einem endgültigen Vergleich mit den Daten diese Prozesse in die Rechnungen eingeschlossen werden.

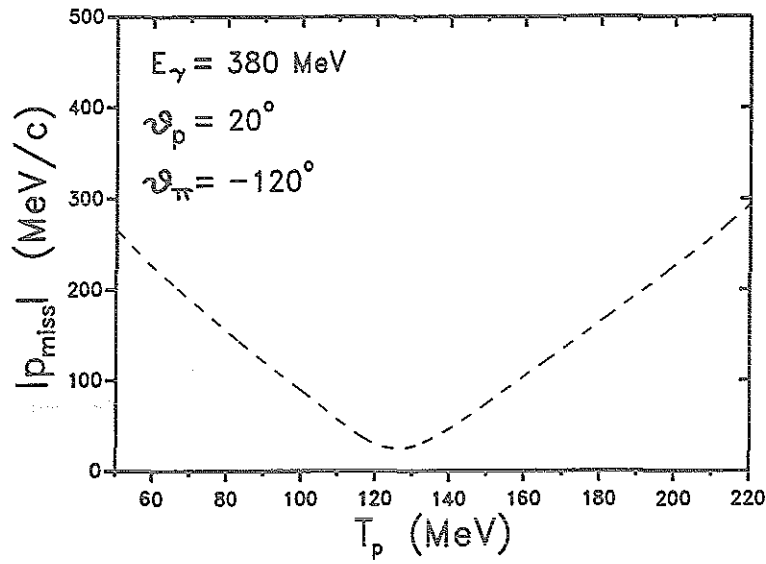


Abbildung 3.11: $|\vec{p}_{miss}|$ als Funktion der kinetischen Energie T_p des auslaufenden Protons für die Reaktion $^{12}\text{C}(\gamma, p\pi^-)^{11}\text{C}$ bei vorgegebener Photoneinschussenergie, Proton- und Pionwinkel. $\vec{p}_{miss}$ wird mit Hilfe von Gl. 3.2 berechnet.

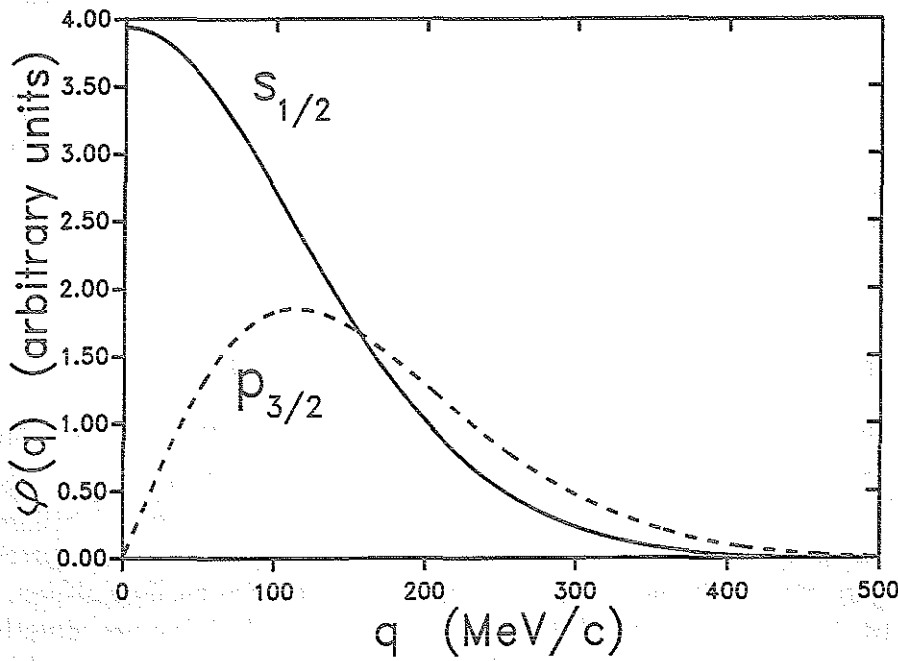


Abbildung 3.12: Die Radialwellenfunktionen der $s_{1/2}$ - und $p_{3/2}$ -Löcher in ^{12}C als Funktion des Impulses. Die durchgezogene Kurve zeigt die $s_{1/2}$ und die gestrichelte Kurve die $p_{3/2}$ -Lochwellenfunktion.

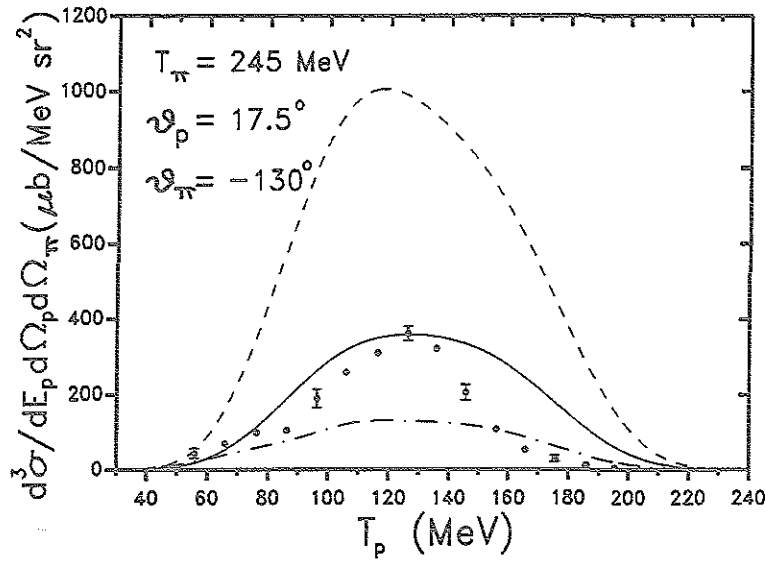


Abbildung 3.13: Dreifach differentieller Wirkungsquerschnitt der $^{12}\text{C}(\pi^+, p\pi^+)^{11}\text{B}$ Reaktion als Funktion der kinetischen Energie des auslaufenden Protons, bei vorgegebener Pioneinschußenergie, Proton- und Pionwinkel. Die Daten sind aus Ref. [57]. Die gestrichelte Kurve zeigt das Ergebnis unserer Rechnung ohne Restwechselwirkung, die durchgezogene und strichpunktierte Kurve zeigen unsere Rechnungen unter Einschluß der Restwechselwirkung. Bei der Berechnung der strichpunktierten Kurve wurden zusätzlich das auslaufende Proton und Pion als distorbierte Wellen behandelt.

Schließlich können wir durch Vergleich unserer Rechnungen in Abb. 3.10 feststellen, daß der photoinduzierte quasifreie Zerfall durch die ΔN^{-1} -Restwechselwirkung kaum beeinflußt wird. Die Distorsion der beiden auslaufenden Teilchen führt zu einer Reduktion des Wirkungsquerschnitts um einen Faktor ~ 3 gegenüber den Rechnungen, bei denen wir für die auslaufenden Teilchen ebene Wellen angenommen haben.

3.6.2 Der pioninduzierte quasifreie Zerfall

Im vorhergehenden Abschnitt hatten wir festgestellt, daß im Falle des photoinduzierten quasifreien Zerfalls neben dem Δ noch andere Prozesse zum Wirkungsquerschnitt nennenswert beitragen. Im Falle des pioninduzierten quasifreien Zerfalls jedoch sollten solche Prozesse aufgrund der dominanten $\pi N \Delta$ -Kopplung keine Rolle spielen und wir sollten eine gute Beschreibung der Daten erreichen. Um dies zu überprüfen, haben wir in Abb. 3.13 die Daten für die Reaktion $^{12}\text{C}(\pi^+, p\pi^+)^{11}\text{B}$ bei einer kinetischen Einschußenergie des Pions von $T_\pi = 245$ MeV im Vergleich mit unseren Rechnungen aufgetragen. Die Winkel für das auslaufende Proton und Pion waren bei dieser Messung fest vorgegeben ($\vartheta_p = 17.5^\circ$, $\vartheta_\pi = -130^\circ$), und der dreifach differentielle Wirkungsquerschnitt ist als Funktion der kinetischen Energie des auslaufenden Protons angegeben. Die gestrichelte Kurve zeigt das Ergebnis unserer Rechnung ohne Restwechselwirkung,

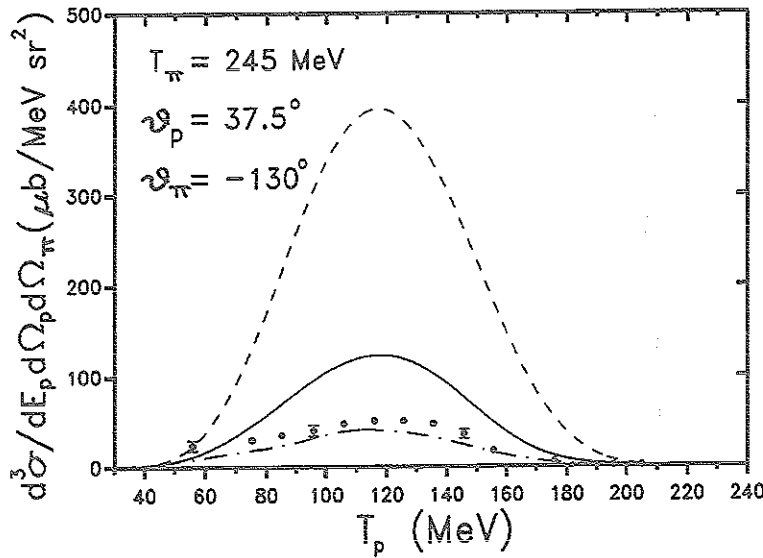


Abbildung 3.14: Wie in Abb. 3.13, aber hier für fest vorgegebene Proton- und Pionwinkel $\vartheta_p = 37.5^\circ$ und $\vartheta_\pi = -130^\circ$.

die durchgezogene und strichpunktierte Kurve zeigen unsere Rechnungen unter Einschluß der Restwechselwirkung. Bei der Berechnung der strichpunktierten Kurve wurden zusätzlich das auslaufende Proton und Pion als distortierte Wellen behandelt. Im Gegensatz zu Abb. 3.10 wurden bei diesem Experiment Prozesse, bei denen das Pion von einem $p_{3/2}$ -Proton absorbiert wurde, nicht von denen getrennt, bei denen das Pion von einem $s_{1/2}$ -Proton absorbiert wurde.

Beim Vergleich unserer Rechnungen mit und ohne Restwechselwirkung stellen wir fest, daß beim pioninduzierten quasifreien Zerfall ein starker Effekt der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung auftritt. Die Rechnung unter Einschluß der Restwechselwirkung ist um einen Faktor ~ 2.5 gegenüber der Rechnung ohne Restwechselwirkung reduziert, und wir erhalten so eine gute Übereinstimmung mit den Daten. Die Tatsache der starken Reduktion für $T_\pi = 245$ MeV ist nicht so überraschend, wenn man die starke Reduktion im totalen π -Kern-Wirkungsquerschnitt (Abb. 3.1) und in der elastischen Pionstreuung (Abbildungen 3.2 und 3.3) bedenkt. Berücksichtigung der Distorsion der auslaufenden Teilchen führt zu einer weiteren Reduktion um einen Faktor ~ 3 . Da die optischen Potentiale zur Berechnung der auslaufenden distortierten Wellen nicht bekannt sind, haben wir die optischen Potentiale aus Studien der elastischen Proton-Kern-Streuung [58] und der elastischen Pion-Kern-Streuung [59] benutzt. Damit überschätzen wir sicherlich die Absorption der auslaufenden Teilchen, und daher stellt unsere Rechnung unter Berücksichtigung der Distorsion nur eine untere Grenze für den "wirklichen" Wirkungsquerschnitt dar.

In Abb. 3.14 zeigen wir den dreifach differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $^{12}\text{C}(\pi^+, p\pi^+)^{11}\text{B}$. Der Winkel des auslaufenden Protons beträgt $\vartheta_p = 37.5^\circ$.

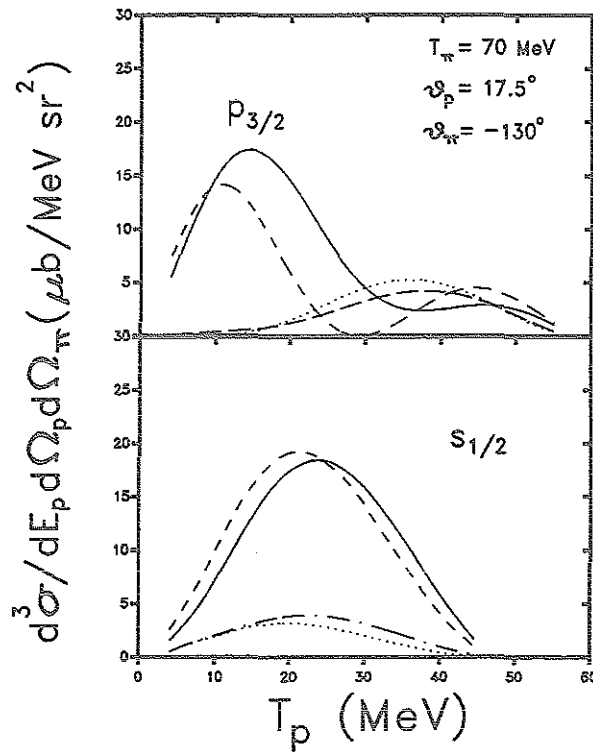


Abbildung 3.15: Dreifach differentieller Wirkungsquerschnitt der $^{12}\text{C}(\pi^+, p\pi^+)^{11}\text{B}$ Reaktion als Funktion der kinetischen Energie des auslaufenden Protons, bei vorgegebener Pioneinschußenergie, Proton- und Pionwinkel. Im oberen Teil der Abbildung wurde das Pion von einem $p_{3/2}$ -, im unteren von einem $s_{1/2}$ -Proton absorbiert. Die gestrichelten und gepunkteten Kurven zeigen die Ergebnisse unserer Rechnungen ohne Restwechselwirkung und die durchgezogenen und strichpunktierten Kurven unsere Rechnungen unter Einschluß der Restwechselwirkung. Bei der Berechnung der strichpunktierten und gepunkteten Kurven wurden zusätzlich das auslaufende Proton und Pion als distorbierte Wellen behandelt.

Auch hier beobachten wir wieder eine Reduktion im Wirkungsquerschnitt aufgrund der Restwechselwirkung um einen Faktor ~ 3 und eine Reduktion aufgrund der Distorsion um einen Faktor ~ 2 . Da sich der Wirkungsquerschnitt bei realistischer Berücksichtigung der Distorsion zwischen der durchgezogenen (ohne Distorsion) und der strichpunktierten Kurve (maximale Distorsion) befindet, sind wir auch bei dieser Kombination von Proton- und Pionwinkel wieder in guter Übereinstimmung mit den Daten, obwohl wir uns gegenüber Abb. 3.13 schon aus dem Maximum der Winkelkorrelation heraus bewegt haben.

Da die Effekte der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung im totalen π -Kern-Wirkungsquerschnitt stark von der Einschußenergie des Pions abhängen, wollen wir den pioninduzierten quasifreien Zerfall noch bei einer weiteren Pion-Einschußenergie studieren. Der totale π -Kern-Wirkungsquerschnitt zeigt eine Vergrößerung des Wirkungsquerschnitts

aufgrund der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung bei $T_\pi = 70$ MeV. Daher zeigen wir in Abb. 3.15 den pioninduzierten quasifreien Zerfall bei dieser Einschüßenergie. Die Winkel für das auslaufende Proton und Pion waren auch bei diesen Rechnungen wieder fest vorgegeben ($\vartheta_p = 17.5^\circ$, $\vartheta_\pi = -130^\circ$), und der dreifach differentielle Wirkungsquerschnitt ist wieder als Funktion der kinetischen Energie des auslaufenden Protons angegeben. Wie in Abb. 3.10 haben wir Prozesse an einem $p_{3/2}$ -Proton und an einem $s_{1/2}$ -Proton getrennt untersucht. Analog zum photoinduzierten quasifreien Zerfall beobachten wir in unseren Rechnungen unter Vernachlässigung der Restwechselwirkung und der Distorsion (gestrichelte Kurven) wieder für eine Reaktion am $p_{3/2}$ -Proton zwei Maxima im Wirkungsquerschnitt, während für eine Reaktion am $s_{1/2}$ -Proton nur ein Maximum auftritt. Die Maxima entsprechen Werten $|\vec{p}_i| \approx 110$ MeV/c für die $p_{3/2}$ -Nukleonen bzw. $|\vec{p}_i| \approx 0$ MeV/c für die $s_{1/2}$ -Nukleonen. Die Rechnungen unter Einschluß der Restwechselwirkung (durchgezogene Kurven) zeigen im Vergleich zu den Ergebnissen ohne ΔN^{-1} -Restwechselwirkung (gestrichelte Kurven) eine Verschiebung zu größeren Werten von T_p und für die Reaktion am $p_{3/2}$ -Proton eine Vergrößerung des Wirkungsquerschnitts. Auch diese Effekte werden durch die Distorsion der auslaufenden Teilchen ausgewaschen.

3.7 Die 2-Nukleon-Knockout - Reaktion

Bei der Berechnung des Übergangsmatrixelements für die 2-Nukleon-Knockout - Reaktion haben wir den Parameter V_0 , der die Stärke dieses Zerfalls bestimmt, mit dem Wert $V_0 = 220$ MeVfm³ angenommen. Dieser Wert wurde bei der Analyse der Reaktion $^{12}\text{C}(^3\text{He}, \text{tpp})^{10}\text{B}$ gefunden [36]. Der Verleichen unserer Ergebnisse mit den Daten erlaubt uns, diese Wahl für V_0 quantitativ zu überprüfen. In Abb. 3.16 haben wir den doppelt differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $^{12}\text{C}(\pi^+, \text{pp})^{10}\text{B}$ bei einer kinetischen Einschüßenergie des Pions von $T_\pi = 165$ MeV aufgetragen. Der Winkel eines Protons wurde mit $\vartheta_{p1} = 130^\circ$ fest vorgegeben und der Wirkungsquerschnitt dann als Funktion des Winkels des zweiten Protons gemessen. Die gestrichelte Kurve zeigt das Ergebnis unserer Rechnung ohne ΔN^{-1} -Restwechselwirkung, die durchgezogene und die strichpunktierte Kurve zeigen die Rechnungen unter Einschluß der Restwechselwirkung. Bei der Berechnung der strichpunktierten Kurve ist zusätzlich die Distorsion der beiden auslaufenden Protonen berücksichtigt worden.

Die Restwechselwirkung führt zu einer Reduktion des Wirkungsquerschnitts um einen Faktor ~ 4 . Dies ist keine Überraschung, da die Δ -Wellenfunktion im hier untersuchten Energiebereich eine starke Reduktion aufgrund der Wechselwirkung des Δ 's mit dem Medium erfährt. Die Distorsion der beiden auslaufenden Protonen bewirkt eine weitere Reduktion um einen Faktor ~ 2 . Wie mehrfach erläutert, stellt die Rechnung mit Distorsion eine untere Grenze für den Wirkungsquerschnitt dar. Daher zeigt die gute Übereinstimmung unserer Rechnungen mit den Daten, daß die Wahl von $V_0 = 220$ MeVfm³ in den Ladungsaustauschreaktionen von den pioninduzierten 2-Nukleon-Knockout - Reaktionen bestätigt wird.

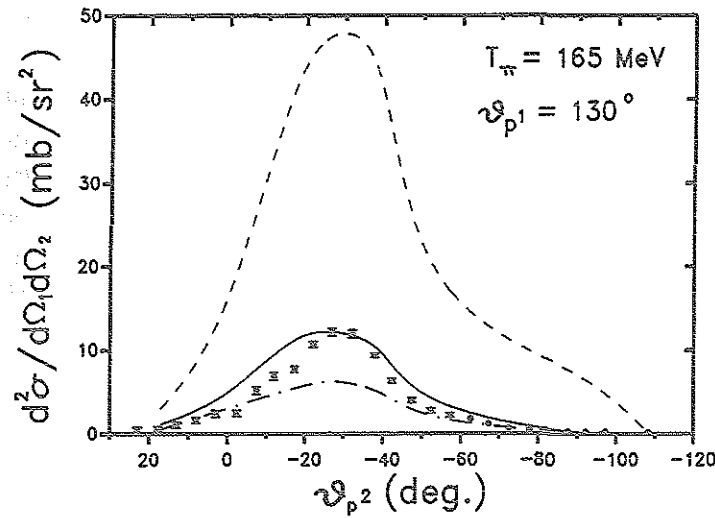


Abbildung 3.16: Doppelt differentieller Wirkungsquerschnitt der $^{12}\text{C}(\pi^+, pp)^{10}\text{B}$ Reaktion als Funktion des Winkels des zweiten Protons bei vorgegebener Pioneinschußenergie und Winkel des ersten Protons ($\vartheta_{p1} = 130^\circ$). Die Daten sind aus Ref. [60]. Die gestrichelte Kurve zeigt das Ergebnis unserer Rechnung ohne Restwechselwirkung, die durchgezogene und strichpunktierte Kurve zeigen unsere Rechnungen unter Einfluß der Restwechselwirkung. Bei der Berechnung der strichpunktierten Kurve wurden zusätzlich die auslaufenden Protonen als distortierte Wellen behandelt.

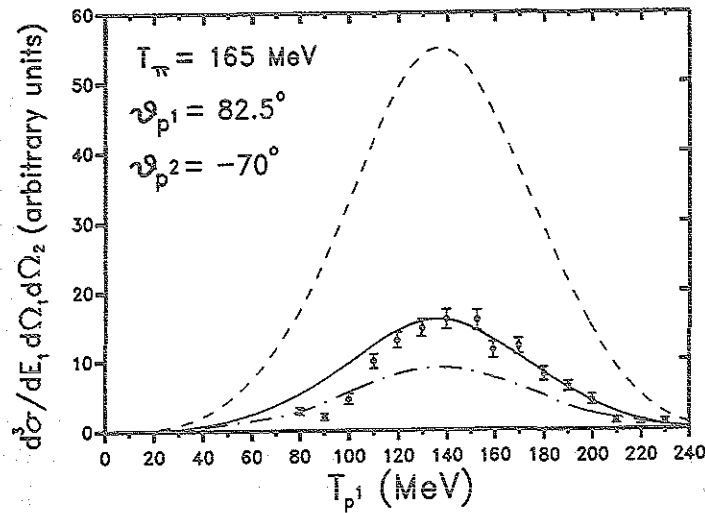


Abbildung 3.17: Dreifach differentieller Wirkungsquerschnitt der $^{12}\text{C}(\pi^+, pp)^{10}\text{B}$ Reaktion als Funktion der kinetischen Energie des unter $\vartheta_{p1} = 82.5^\circ$ beobachteten Protons, bei vorgegebener Pioneinschußenergie und $\vartheta_{p2} = -70^\circ$. Unsere Rechnung unter Einfluß der Restwechselwirkung (durchgezogene Kurve) ist auf die Zählrate aus Ref. [60] normiert. Für die Bedeutung der anderen Kurven siehe Abb. 3.16.

In Abb. 3.17 vergleichen wir die Zählrate für die Reaktion $^{12}\text{C}(\pi^+, \text{pp})^{10}\text{B}$ bei einer kinetischen Einschußenergie des Pions von $T_\pi = 165$ MeV mit den Ergebnissen unserer Rechnungen. Die Winkel für die auslaufenden Protonen waren bei dieser Messung fest vorgegeben ($\vartheta_{p1} = 82.5^\circ$, $\vartheta_{p2} = -70^\circ$). Der dreifach differentielle Wirkungsquerschnitt ist als Funktion der kinetischen Energie des unter $\vartheta_{p1} = 82.5^\circ$ beobachteten Protons angegeben. Die gestrichelte Kurve zeigt das Ergebnis unserer Rechnung ohne Restwechselwirkung, die durchgezogene und strichpunktierte Kurve zeigen unsere Rechnungen unter Einschluß der Restwechselwirkung. Bei der Berechnung der strichpunktierten Kurve wurden zusätzlich die auslaufenden Protonen durch distortierte Wellen beschrieben.

Da die Daten nicht normiert sind, können wir über die absolute Übereinstimmung unserer Rechnung mit den Daten nichts aussagen. Die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der kinetischen Energie T_{p1} des Protons, das unter dem Streuwinkel von $\vartheta_{p1} = 82.5^\circ$ ausläuft, reproduzieren wir jedoch sehr gut.

Bei der 2-Nukleon-Knockout - Reaktion nimmt die Impulserhaltung folgende Form an:

$$\vec{q}_\pi = \vec{q}'_{p1} + \vec{q}'_{p2} + \vec{p}_{\text{miss}} . \quad (3.4)$$

Dabei ist $\vec{p}_{\text{miss}}$ der nicht beobachtete Impuls des Restkerns. Dieses $\vec{p}_{\text{miss}}$ wird bestimmt von den ursprünglichen Impulsen der beiden emittierten Nukleonen: $\vec{p}_{\text{miss}} = -(\vec{p}_{i1} + \vec{p}_{i2})$. Daher können wir Gl. 3.4 in der folgenden Weise umschreiben:

$$\vec{q}_\pi + \vec{p}_{i1} = \vec{q}_\Delta = \vec{q}'_{p1} + (\vec{q}'_{p2} - \vec{p}_{i2}) . \quad (3.5)$$

In Abb. 3.18 zeigen wir $|\vec{p}_{\text{miss}}|$ als Funktion von T_{p1} für eine spezielle Wahl der beiden Protonwinkel ($\vartheta_{p1} = 20^\circ$, $\vartheta_{p2} = -160^\circ$) und $T_\pi = 70$ MeV. $|\vec{p}_{\text{miss}}|$ hat für $T_{p1} \approx 120$ MeV ein Minimum. Im Bereich dieses Minimums ($T_{p1} \approx 120$ MeV) beobachten wir in den beiden oberen Teilen von Abb. 3.19 das Maximum im Wirkungsquerschnitt. Im Falle von zwei herausgeschlagenen $s_{1/2}$ - Nukleonen ist dies leicht zu erklären, da die s -Lochwellenfunktionen für $|\vec{p}_{i1}| = |\vec{p}_{i2}| \approx 0$ MeV/c ihr Maximum haben, wie wir schon beim quasifreien Zerfall gesehen hatten. Daher ist ein kleines $\vec{p}_{\text{miss}}$ im Wirkungsquerschnitt offenbar bevorzugt.

Im Falle von zwei herausgeschlagenen $p_{3/2}$ - Nukleonen haben die p -Lochwellenfunktionen ihr Maximum für $|\vec{p}_{i1}| = |\vec{p}_{i2}| \approx 110$ MeV/c. Da der Wirkungsquerschnitt sein Maximum wieder für ein minimales $\vec{p}_{\text{miss}}$ hat, weist dies darauf hin, daß die Impulse der beiden Nukleonen offenbar bevorzugt entgegengesetzt orientiert sind: $\vec{p}_{i1} \approx -\vec{p}_{i2}$.

Im unteren Teil von Abb. 3.19 werden ein $p_{3/2}$ und ein $s_{1/2}$ - Nukleon aus dem Kern geschlagen. Hier können sich die beiden Nukleon-Impulse nicht zu einem minimalen $\vec{p}_{\text{miss}}$ addieren, da das $s_{1/2}$ - Nukleon vorzugsweise einen Impuls von 0 MeV/c und das $p_{3/2}$ - Nukleon vorzugsweise einen Impuls von ≈ 110 MeV/c hat. Entsprechend beobachten wir auch im Wirkungsquerschnitt zwei Maxima bei $T_{p1} = 90$ und 150 MeV; dies entspricht einem $|\vec{p}_{\text{miss}}| \approx 150$ MeV/c (siehe Abb. 3.18).

Beim Vergleich unserer Rechnungen ohne (gestrichelte Kurven) und mit Einschluß der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung (durchgezogene Kurven) stellen wir fest, daß auch bei

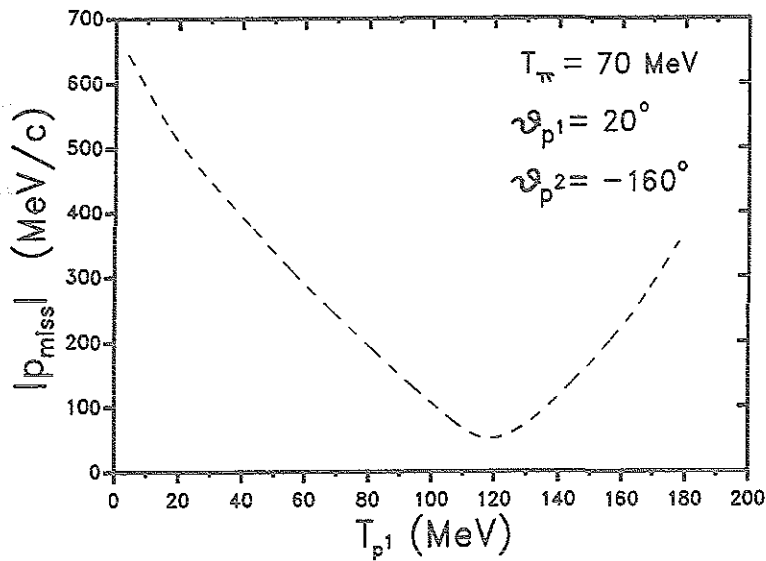


Abbildung 3.18: $|\vec{p}_{miss}|$ aus Gl. 3.4 als Funktion der kinetischen Energie T_{p1} des unter $\vartheta_{p1} = 20^\circ$ auslaufenden Protons für die Reaktion $^{12}\text{C}(\pi^+, pp)^{10}\text{B}$ bei vorgegebener Pion-einschußenergie und $\vartheta_{p2} = -160^\circ$.

den 2-Nukleon-Knockout - Reaktionen ein Effekt der Restwechselwirkung zu beobachten ist, und zwar schiebt die Restwechselwirkung das Maximum zu größeren Werten von T_{p1} und führt zu einem größeren Wirkungsquerschnitt. Berücksichtigung der Distorsion der beiden auslaufenden Protonen (strichpunktierte Kurven) führt hingegen zu einer Reduktion um einen Faktor ~ 1.5 im Wirkungsquerschnitt.

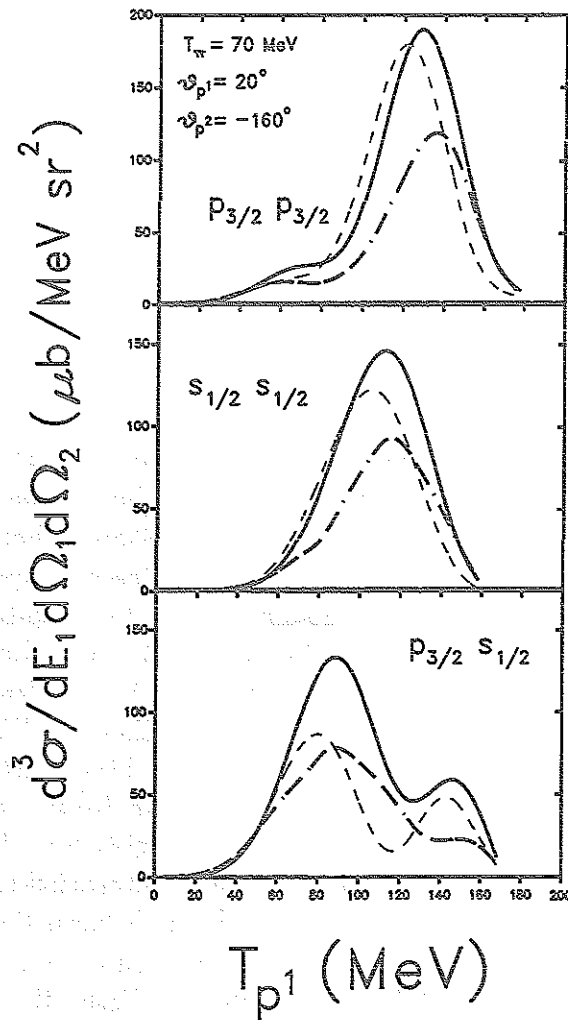


Abbildung 3.19: Dreifach differentieller Wirkungsquerschnitt der $^{12}\text{C}(\pi^+, pp)^{10}\text{B}$ Reaktion als Funktion der kinetischen Energie des unter $\vartheta_{p1} = 20^\circ$ auslaufenden Protons, bei vorgegebener Pioneinschußenergie und $\vartheta_{p2} = -160^\circ$. Im oberen Teil der Abb. sind zwei $p_{3/2}$ -Nukleonen, im mittleren Teil zwei $s_{1/2}$ -Nukleonen und im unteren Teil ein $p_{3/2}$ - und ein $s_{1/2}$ -Nukleon aus dem Kern herausgeschlagen worden. Die gestrichelten Kurven zeigen die Ergebnisse unserer Rechnungen ohne Restwechselwirkung und die durchgezogenen und strichpunktiierten Kurven unsere Rechnungen unter Einfluß der Restwechselwirkung. Bei der Berechnung der strichpunktiierten Kurven wurde die Distorsion der beiden Protonen berücksichtigt.

Kapitel 4

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit haben wir pion- und photoinduzierte Reaktionen an Kernen im Energiebereich der Δ -Resonanz studiert. Dabei haben wir sowohl inklusive Prozesse als auch die verschiedenen exklusiven Zerfallskanäle betrachtet. Das von uns entwickelte Modell leistet nicht nur eine konsistente Beschreibung der pion- und photoinduzierten Prozesse, sondern es ist auch konsistent mit den Ladungsaustauschreaktionen. Die verschiedenen Reaktionen unterscheiden sich in ihrer Spin-Struktur und Kinetik. Die $\pi N\Delta$ -Kopplung ist spin-longitudinal (LO), während die $\gamma N\Delta$ -Kopplung spin-transversal (TR) ist. Dies führt zu unterschiedlichen Mediumeffekten, die in den totalen Pion- und Photon-Kern-Wirkungsquerschnitten beobachtet werden. Das LO angeregte Δ koppelt stark an die kohärente Pionwelle im Kern, und dies führt zu einer Verschiebung der Δ -Peakposition zu niedrigeren Energien hin. Für das TR angeregte Δ ist diese Ankopplung an die kohärente Pionwelle unterdrückt, und man beobachtet nur die Effekte der Fermibewegung und des mittleren Δ -Kern-Potentials.

In elastischer Pionstreuung sind sowohl der Anregungsprozeß als auch der Abregungsprozeß spin-longitudinal. Daher sieht man in dieser Reaktion auch die stärksten Mediumeffekte auf das Pion. Aufgrund der gleichen Spin-Struktur der Reaktionen zeigen die Winkelverteilungen der in Ladungsaustauschreaktionen erzeugten kohärenten Pionen und der elastisch gestreuten Pionen ein sehr ähnliches Verhalten. Jedoch stellt sich heraus, daß die Streuquerschnitte beider Reaktionen unterschiedlich stark von der Größe der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung abhängen [66, 67]. Die Energieverschiebung der Δ -Resonanz in Ladungsaustauschreaktionen zeigt eine lineare Abhängigkeit von der Stärke der Restwechselwirkung, während in der elastischen Pionstreuung keine direkte Proportionalität beobachtet wird. Der Grund dafür liegt darin, daß beide Reaktionen die spin-longitudinale Responsefunktion in unterschiedlichen kinematischen Bereichen messen. Aus theoretischen Untersuchungen der spin-longitudinalen Responsefunktion im Δ -Resonanzbereich [18, 28] ist bekannt, daß die attraktive Pion austauschwechselwirkung ihr Maximum bei $\omega = 210$ MeV und $q = 230$ MeV/c hat. Dieser kinematische Bereich ist für die Ladungsaustauschreaktionen zugänglich, für die reellen Pionen aber kinematisch nicht erreichbar. Die Ladungsaustauschreaktion mißt die Stärke der spin-longitudinalen Responsefunktion tatsächlich in ihrem Maximum.

In der kohärenten Pionphotoproduktion tritt eine Mischung von spin-transversaler Anregung und spin-longitudinaler Abregung auf. In einem unendlich ausgedehnten Medium, wie z.B. Kernmaterie, sind LO und TR Kanal völlig entkoppelt. Deshalb würde man in der Pionphotoproduktion eigentlich keinen Mediumeffekt erwarten. Im endlichen Kern jedoch sind die beiden Kanäle aufgrund von Oberflächeneffekten schwach gekoppelt, und wir beobachten tatsächlich Mediumeffekte. In der Compton-Streuung sind sowohl Anregung als auch Abregung spin-transversal. Trotzdem beobachten wir auch in dieser Reaktion einen Effekt der kohärenten Pionwelle.

Der Δ -Loch-Formalismus beschreibt explizit die Dynamik der Δ -Resonanz im Kern und berücksichtigt die Wechselwirkung des Δ 's mit den anderen Nukleonen über die Δ -Loch-Restwechselwirkung. Wir nehmen an, daß sich das Δ in einem mittleren Δ -Kern-Potential bewegt, das sich aus dem mittleren Nukleon-Kern-Potential und einem komplexen Spreading-Potential zusammensetzt. Die Δ -Loch-Restwechselwirkung beschreiben wir im Mesonaustauschbild. Die Wechselwirkung setzt sich zusammen aus π - und ρ -Austauschpotentialen und einem kurzreichweitigen Anteil, der durch eine phänomenologische δ -Kraft vom Landau-Migdal-Typ beschrieben wird. Den Landau-Migdal-Parameter wählen wir wie Udagawa *et al.* [27, 31, 35] bei der Analyse von Ladungsaustauschreaktionen gleich $g'_{\Delta\Delta} = 1/3$.

Im Folgenden wollen wir die wichtigsten Beobachtungen aus der Diskussion der verschiedenen Prozesse zusammenfassen:

- Die Daten für die Winkelverteilung der elastischen Pionstreuung am Kern zeigen eine Diffraktionsstruktur, die nur bei Einschluß der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung durch die Rechnungen beschrieben werden kann.
- Beim Vergleich der kohärenten Pionen aus der Reaktion $^{12}\text{C}(^3\text{He}, t\pi^+)^{12}\text{C}(\text{g.s.})$ mit entsprechenden Pionen aus elastischer Pionstreuung beobachtet man aufgrund der gleichen Spin-Struktur der Anregungs- und Abregungsmechanismen qualitativ gleiches Verhalten der differentiellen Wirkungsquerschnitte: Die Wirkungsquerschnitte haben ihre Maxima bei $\theta_\pi = 0^\circ$ und skalieren mit einem Faktor.
- Beim Vergleich der spin-transversalen Komponente der kohärenten Pionen aus der $^{12}\text{C}(^3\text{He}, t\pi^+)^{12}\text{C}(\text{g.s.})$ Reaktion mit den Pionen aus der kohärenten Pionphotoproduktion $^{12}\text{C}(\gamma, \pi^0)^{12}\text{C}(\text{g.s.})$ stellt man fest, daß die Wirkungsquerschnitte auch im wesentlichen skalieren. Die Maxima der Winkelverteilungen liegen bei $\theta_\pi \approx 30^\circ$.
- Die Wirkungsquerschnitte für den pioninduzierten quasifreien Zerfall des Δ 's zeigen, abhängig vom Energieübertrag des Pions, Effekte der Δ -Loch-Restwechselwirkung. Die photoinduzierten Prozesse hingegen zeigen keine Effekte der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung. Beide Wirkungsquerschnitte werden durch die Distorsion des auslaufenden Protons und Pions allerdings stark reduziert. Eine experimentelle Verifikation der Effekte wird daher möglicherweise schwierig sein.

- In der Analyse der pioninduzierten Reaktion $^{12}\text{C}(\pi^+, pp)^{10}\text{B}$ findet man für die Stärke der Zerfallswechselwirkung $V_0 = 220 \text{ MeVfm}^3$. Dies stimmt mit dem in der Analyse der Ladungsaustauschreaktionen gefundenen Wert für die Stärke der 2-Nukleon-Knockout - Reaktion überein.

Zusammenfassend können wir sagen, daß unser Modell für die Propagation und den Zerfall der Δ -Resonanz in Kernen eine konsistente Beschreibung von pion- und photoinduzierten Prozessen und Ladungsaustauschreaktionen leistet.

Anhang A

Berechnung der Wirkungsquerschnitte

Der allgemeine Ausdruck für den differentiellen Wirkungsquerschnitt für eine Streuung von Bosonen lautet (siehe Bjorken und Drell [37, Anhang B]):

$$d\sigma = \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \left(\frac{1}{2E_1} \right) \left(\frac{1}{2E_2} \right) \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3 2\omega_1} \frac{d^3q_2}{(2\pi)^3 2\omega_2} \cdots \frac{d^3q_n}{(2\pi)^3 2\omega_n} \times (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^n q_i \right) |\mathcal{M}|^2. \quad (\text{A.1})$$

Dabei sind E_1, E_2 ($\vec{p}_1, \vec{p}_2$) und $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ die Energien (Impulse) und Geschwindigkeiten der beiden einlaufenden Teilchen; $\omega_1, \dots, \omega_n$ und $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$ sind die Energien und Impulse der n auslaufenden Teilchen. $\mathcal{M}$ ist die invariante Amplitude dieser Reaktion.

Für Fermionen ersetzt man die Faktoren $1/2E_i$ und $1/2\omega_i$ durch m_i/E_i und m_i/ω_i aufgrund der gewählten Normierung der Dirac-Spinoren (Bjorken-Drell-Konvention).

Im Falle von 2 Teilchen im Endzustand, wie z.B. bei elastischer Pionstreuung, kohärenter Pionphotoproduktion oder Compton-Streuung am Kern ergibt sich für den Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\vec{v}_A - \vec{v}_i|} \frac{1}{2E_i} \frac{m_A}{E_A} \int \frac{d^3q_f}{2E_f} d^3q_B \frac{m_B}{E_B} \delta^4(q_i + q_A - q_f - q_B) |\mathcal{M}|^2. \quad (\text{A.2})$$

Hier sind E_i, E_f und $\vec{q}_i, \vec{q}_f$ die Energien und Impulse der ein- und auslaufenden Photonen bzw. Pionen und E_A, E_B und $\vec{q}_A, \vec{q}_B$ sind die Energien und Impulse des ein- und auslaufenden Kerns.

Im Laborsystem ($\vec{q}_A = 0, E_A = m_a$) und im Schwerpunktsystem ($\vec{q}_i + \vec{q}_A = 0$) gelten für die Relativgeschwindigkeit der beiden einlaufenden Teilchen:

$$\frac{1}{|\vec{v}_A - \vec{v}_i|} = \frac{E_i}{|\vec{q}_i|} \quad \text{im LAB ,} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{1}{|\vec{v}_A - \vec{v}_i|} = \frac{E_i E_A}{|\vec{q}| \sqrt{s}} \quad \text{im CMS ,} \quad (\text{A.4})$$

wobei $\vec{q} = \vec{q}_i = -\vec{q}_A$ ist und $\sqrt{s}$ die Gesamtenergie des 2-Teilchen-Systems. Das Phasenraumintegral in Gl. A.2 können wir in der folgenden Weise umschreiben:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 q_f}{2E_f} d^3 q_B \frac{m_B}{E_B} \delta^4(q_i + q_A - q_f - q_B) |\mathcal{M}|^2 &= \\ \int \frac{d^3 q_f}{2E_f} d^4 q_B 2m_B \delta(q_B^2 - m_B^2) \Theta(E_B) \delta^4(q_i + q_A - q_f - q_B) |\mathcal{M}|^2 &= \\ \int d\Omega_f dE_f |\vec{q}_f| m_B \delta((q_i + q_A - q_f)^2 - m_B^2) |\mathcal{M}|^2 &= \\ \int d\Omega_f \frac{|\vec{q}_f| m_B}{2 |E_i + E_A - |\vec{q}_i + \vec{q}_A| \frac{E_f}{|\vec{q}_f|} \cos \vartheta_{fi}} |\mathcal{M}|^2 , \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

wobei ϑ_{fi} der Winkel zwischen einlaufendem und auslaufendem Teilchen ist. Der Nenner in Gl. A.5 ergibt im LAB bzw. CMS:

$$\left| E_i + E_A - |\vec{q}_i + \vec{q}_A| \frac{E_f}{|\vec{q}_f|} \cos \vartheta_{fi} \right| = \left| E_i + m_A - E_f \frac{|\vec{q}_i|}{|\vec{q}_f|} \cos \vartheta_{fi} \right| \quad \text{im LAB, (A.6)}$$

$$= |E_i + E_f| = \sqrt{s} \quad \text{im CMS. (A.7)}$$

Damit ergibt sich für den differentiellen Wirkungsquerschnitt aus Gl. A.2 im CMS:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right)_{CMS} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{m_A^2}{s} \frac{|\vec{q}_f|}{|\vec{q}_i|} |\mathcal{M}|^2 \quad (\text{A.8})$$

und im LAB:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right)_{LAB} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\vec{q}_f|}{|\vec{q}_i|} \frac{m_A}{|E_i + m_A - E_f \frac{|\vec{q}_i|}{|\vec{q}_f|} \cos \vartheta_{fi}} |\mathcal{M}|^2 . \quad (\text{A.9})$$

Dabei haben wir $m_B = m_A$ benutzt.

Beim quasifreien Zerfall des Δ 's und beim 2-Nukleon-Knockout treten 3 auslaufende Teilchen auf. Wir betrachten zunächst den quasifreien Zerfall des Δ 's. Dabei besteht der Endzustand aus einem Pion, einem Proton und dem Restkern. Entsprechend folgt aus Gl. A.1 für den Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{|\vec{v}_A - \vec{v}_i|} \frac{1}{2E_i} \frac{m_A}{E_A} \int \frac{d^3 q_\pi}{2E_\pi} d^3 q_p \frac{m_p}{E_p} d^3 q_B \frac{m_B}{E_B} \times \delta^4(q_i + q_A - q_\pi - q_p - q_B) \left| \mathcal{M} \right|^2. \quad (\text{A.10})$$

Analog zur Rechnung in Gl. A.5 ergibt sich für das Phasenraumintegral:

$$\int \frac{d^3 q_\pi}{2E_\pi} d^3 q_p \frac{m_p}{E_p} d^3 q_B \frac{m_B}{E_B} \delta^4(q_i + q_A - q_\pi - q_p - q_B) \left| \mathcal{M} \right|^2 = \int dE_p d\Omega_p d\Omega_\pi \frac{m_p m_B |\vec{q}_p| |\vec{q}_\pi|}{2 \left| E_i + E_A - E_p - \frac{E_\pi}{|\vec{q}_\pi|} (|\vec{q}_i| \cos \vartheta_{\pi i} + |\vec{q}_A| \cos \vartheta_{\pi A} - |\vec{q}_p| \cos \vartheta_{\pi p}) \right|} \left| \mathcal{M} \right|^2. \quad (\text{A.11})$$

Hieraus folgt für den differentiellen Wirkungsquerschnitt des quasifreien Zerfalls im LAB mit $m_B = m_{A-1}$:

$$\left(\frac{d\sigma}{dE_p d\Omega_p d\Omega_\pi} \right)_{LAB} = \frac{1}{4(2\pi)^5} \frac{1}{|\vec{q}_i|} \frac{m_p m_{A-1} |\vec{q}_p| |\vec{q}_\pi|}{\left| E_i + m_A - E_p - \frac{E_\pi}{|\vec{q}_\pi|} (|\vec{q}_i| \cos \vartheta_{\pi i} - |\vec{q}_p| \cos \vartheta_{\pi p}) \right|} \left| \mathcal{M} \right|^2. \quad (\text{A.12})$$

Für den 2-Nukleon-Knockout folgt aus Gl. A.1:

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{|\vec{v}_A - \vec{v}_i|} \frac{1}{2E_i} \frac{m_A}{E_A} \int d^3 q_{p^1} \frac{m_p}{E_{p^1}} d^3 q_{p^2} \frac{m_p}{E_{p^2}} d^3 q_B \frac{m_B}{E_B} \times \delta^4(q_i + q_A - q_{p^1} - q_{p^2} - q_B) \left| \mathcal{M} \right|^2. \quad (\text{A.13})$$

Damit ergibt sich für den differentiellen Wirkungsquerschnitt des 2-Nukleon-Knockouts im LAB:

$$\left(\frac{d\sigma}{dE_{p^1} d\Omega_{p^1} d\Omega_{p^2}} \right)_{LAB} = \frac{1}{4(2\pi)^5} \frac{1}{|\vec{q}_i|} \frac{m_p^2 m_{A-2} |\vec{q}_{p^1}| |\vec{q}_{p^2}|}{\left| E_i + m_A - E_{p^1} - \frac{E_{p^2}}{|\vec{q}_{p^2}|} (|\vec{q}_i| \cos \vartheta_{p^2 i} - |\vec{q}_{p^1}| \cos \vartheta_{p^2 p^1}) \right|} \left| \mathcal{M} \right|^2, \quad (\text{A.14})$$

wobei wir $m_B = m_{A-2}$ eingesetzt haben.

Anhang B

Berechnung der Quellfunktion für Photoabsorption

In diesem Anhang leiten wir den expliziten Ausdruck der Quellfunktion $\rho_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r)$ für die Photoabsorption her. $\rho_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r)$ ist die Radialwellenfunktion des Teilchen-Loch-Zustands (ph) mit Gesamtdrehimpuls j_t und zugehöriger Projektion m_t . Diese erhalten wir durch Entwicklung des Doorway-Zustands $|\rho_\gamma\rangle$ nach Teilchen-Loch-Zuständen:

$$|\rho_\gamma\rangle = \sum_{j_t m_t} \sum_{ph}^{N_c} \rho_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) \frac{1}{r} | [Y_p \Phi_h]_{j_t m_t} \rangle . \quad (\text{B.1})$$

$$\rho_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) = r \langle [Y_p \Phi_h]_{j_t m_t} | \rho_\gamma \rangle . \quad (\text{B.2})$$

Der Doorway-Zustand für Photoabsorption ist in der folgenden Weise definiert:

$$|\rho_\gamma\rangle := F_{\gamma N\Delta}^\dagger |0^+\rangle . \quad (\text{B.3})$$

Dabei ist $|0^+\rangle$ der Grundzustand des Kerns mit Gesamtdrehimpuls $J^\pi = 0^+$ und Isospin $I = 0$. $F_{\gamma N\Delta}^\dagger$ ist der Anregungsoperator für die Absorption eines Photons. Die Teilchen-Loch-Zustände $| [Y_p \Phi_h]_{j_t m_t} \rangle$ können wir in 2. Quantisierung schreiben als:

$$| [Y_p \Phi_h]_{j_t m_t} \rangle = \sum_{m_p, m_h} (j_p m_p j_h m_h | j_t m_t) | Y_{j_p m_p} \Phi_{j_h m_h} \rangle \quad (\text{B.4})$$

$$= \sum_{m_p, m_h} (j_p m_p j_h m_h | j_t m_t) a_{(l_p \frac{3}{2}) j_p m_p}^\dagger b_{n_h (l_h \frac{1}{2}) j_h m_h}^\dagger |0^+\rangle , \quad (\text{B.5})$$

wobei $a_{(l_p \frac{3}{2}) j_p m_p}^\dagger$ und $b_{n_h (l_h \frac{1}{2}) j_h m_h}^\dagger$ die Teilchen- bzw. Locherzeugungsoperatoren sind.

Diese Erzeugungsoperatoren weichen insofern von der üblichen Konvention (siehe Bohr und Mottelson [61]) ab, als die Teilchenerzeugungsoperatoren $a_{(l_p \frac{3}{2}) j_p m_p}^\dagger$ nur durch die Drehimpulsquantenzahlen und nicht durch die Radialquantenzahlen [61, Anhang 3A] charakterisiert sind:

$$\langle \vec{r} | a_{(l_p \frac{3}{2}) j_p m_p}^\dagger | 0^+ \rangle = \left[i^{l_p} Y_{l_p}(\hat{r}) \chi^{\frac{3}{2}} \right]_{(l_p \frac{3}{2}) j_p m_p} . \quad (\text{B.6})$$

Die Locherzeugungsoperatoren $b_{n_h (l_h \frac{1}{2}) j_h m_h}^\dagger$ sind dagegen auch in der Radialquantenzahl n_h festgelegt. Die vollständige Wellenfunktion schreibt sich dann als

$$\langle \vec{r} | b_{n_h (l_h \frac{1}{2}) j_h m_h}^\dagger | 0^+ \rangle = (-1)^{j_h+m_h} \langle \vec{r} | a_{n_h (l_h \frac{1}{2}) j_h -m_h} | 0^+ \rangle \quad (\text{B.7})$$

$$= (-1)^{j_h+m_h} \phi_{n_h (l_h \frac{1}{2}) j_h}(r) \left[i^{l_h} Y_{l_h}(\hat{r}) \chi^{\frac{1}{2}} \right]_{(l_h \frac{1}{2}) j_h -m_h} , \quad (\text{B.8})$$

wobei $\phi_{n_h (l_h \frac{1}{2}) j_h}(r)$ die Loch-Radialwellenfunktion ist. Gleichung B.7 ergibt sich aus folgender Beziehung zwischen Locherzeugungsoperator $b_{n_h (l_h \frac{1}{2}) j_h m_h}^\dagger$ und Teilchenvernichtungsoperator $a_{n_h (l_h \frac{1}{2}) j_h -m_h}$:

$$b_{n_h (l_h \frac{1}{2}) j_h m_h}^\dagger = (-1)^{j_h+m_h} a_{n_h (l_h \frac{1}{2}) j_h -m_h} . \quad (\text{B.9})$$

Diese Relation gilt nur, da wir als Phasenkonvention die Zeitumkehrphase (wie in [61, Anhang 3]) gewählt haben.

Einsetzen von Gleichung B.5 in die Definition der Radialwellenfunktion (Gl. B.2) liefert mit Hilfe von B.9:

$$\rho_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) = \sum_{m_p, m_h} (-1)^{j_h+m_h} (j_p m_p j_h m_h | j_t m_t) r \langle 0^+ | a_{n_h (l_h \frac{1}{2}) j_h -m_h} a_{(l_p \frac{3}{2}) j_p m_p}^\dagger F_{\gamma N \Delta}^\dagger | 0^+ \rangle . \quad (\text{B.10})$$

Den Anregungsoperator $F_{\gamma N \Delta}^\dagger$ schreiben wir nun in zweiter Quantisierung:

$$F_{\gamma N \Delta}^\dagger = \sum_{j'_p, m'_p} \sum_{j'_h, m'_h} \sum_{l'_p, l'_h} \langle (l'_p \frac{3}{2}) j'_p m'_p | F_{\gamma N \Delta}^\dagger | (l'_h \frac{1}{2}) j'_h m'_h \rangle a_{(l'_p \frac{3}{2}) j'_p m'_p}^\dagger a_{(l'_h \frac{1}{2}) j'_h m'_h} . \quad (\text{B.11})$$

Einsetzen in B.10 und Kontraktion der Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren ergibt schließlich:

$$\rho_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) = \sum_{m_p, m_h} (-1)^{j_h + m_h} (j_p m_p j_h m_h | j_t m_t) \langle (l_p \frac{3}{2}) j_p m_p | F_{\gamma N \Delta}^\dagger | (l_h \frac{1}{2}) j_h -m_h \rangle r \phi_{n_h}(l_h \frac{1}{2}) j_h(r) \quad . \quad (\text{B.12})$$

Bei der Berechnung der Quellfunktion haben wir bis hierher den Isospin nicht berücksichtigt. Diesen behandeln wir in der ungekoppelten Form und können ihn daher direkt in das Matrixelement B.12 einführen und erhalten so für die Radialwellenfunktion:

$$\rho_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) = \sum_{m_p, m_h} \sum_{\tau_p, \tau_h} (-1)^{j_h + m_h} (j_p m_p j_h m_h | j_t m_t) \langle (l_p \frac{3}{2}) j_p m_p, \frac{3}{2} \tau_p | F_{\gamma N \Delta}^\dagger | (l_h \frac{1}{2}) j_h -m_h, \frac{1}{2} \tau_h \rangle r \phi_{n_h}(l_h \frac{1}{2}) j_h(r) \quad . \quad (\text{B.13})$$

Dabei ist $\overline{|\frac{1}{2} \tau_h\rangle} = (-1)^{\frac{1}{2} + \tau_h} |\frac{1}{2} - \tau_h\rangle$. In Abschnitt 2.6 haben wir den Anregungsoperator $F_{\gamma N \Delta}^\dagger$ im γ -Kern-CMS in der folgenden Form festgelegt:

$$F_{\gamma N \Delta}^\dagger(\vec{k}_\gamma) = \frac{f_{\gamma N \Delta}}{m_\Delta} \left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}_\lambda} \times \vec{k}_\gamma \right) \cdot \vec{S}^\dagger T_0^\dagger e^{-i \vec{k}_\gamma \cdot \vec{r}} \quad , \quad (\text{B.14})$$

wobei $\vec{k}_\gamma$ der Impuls des Photons im γ -Kern-CMS ist. Einsetzen des Anregungsoperators $F_{\gamma N \Delta}^\dagger$ in Gl. B.13 ergibt schließlich für die Radialwellenfunktion:

$$\rho_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) = \sum_{m_p, m_h} \sum_{\tau_p, \tau_h} (-1)^{j_h + m_h} (j_p m_p j_h m_h | j_t m_t) \langle (l_p \frac{3}{2}) j_p m_p, \frac{3}{2} \tau_p | e^{-i \vec{k}_\gamma \cdot \vec{r}} \left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}_\lambda} \times \vec{k}_\gamma \right) \cdot \vec{S}^\dagger T_0^\dagger | (l_h \frac{1}{2}) j_h -m_h, \frac{1}{2} \tau_h \rangle \frac{f_{\gamma N \Delta}}{m_\Delta} r \phi_{n_h}(l_h \frac{1}{2}) j_h(r) \quad . \quad (\text{B.15})$$

Für die ebene Welle gilt die folgende Zerlegung in Kugelflächenfunktionen Y_{lm} [62, Gl. 5.8.3]:

$$e^{-i \vec{k}_\gamma \cdot \vec{r}} = 4\pi \sum_l (-i)^l j_l(k_\gamma r) (-1)^l \hat{l} \left[Y_l(\hat{k}_\gamma) \otimes Y_l(\hat{r}) \right]_{(00)} \quad , \quad (\text{B.16})$$

wobei $j_l(k_\gamma r)$ die sphärische Besselfunktion erster Art ist und $\hat{l} := \sqrt{2l+1}$. Außerdem haben wir das Tensorprodukt $\otimes$ für sphärische Tensoren eingeführt [63]:

$$[T_{l_1} \otimes T_{l_2}]_{(j\ m)} := \sum_{m_1, m_2} (l_1\ m_1\ l_2\ m_2 \mid j\ m) T_{l_1\ m_1} T_{l_2\ m_2} . \quad (\text{B.17})$$

Da ein Vektor ein Tensor 1. Stufe ist, können wir die Skalar- bzw. Vektorprodukte in B.15 als gekoppelte sphärische Tensoren schreiben:

$$\vec{k}_\gamma = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} k_\gamma Y_1(\hat{k}_\gamma) , \quad (\text{B.18})$$

$$\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \times \vec{k}_\gamma = (-i\sqrt{2}) [\varepsilon_{\vec{k}\lambda(1)} \otimes k_{\gamma(1)}]_{(1)} , \quad (\text{B.19})$$

$$(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \times \vec{k}_\gamma) \cdot \vec{S}^\dagger = (-\sqrt{3}) [(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \times \vec{k}_\gamma)_{(1)} \otimes S_{(1)}^\dagger]_{(00)} . \quad (\text{B.20})$$

Aus B.18 - B.20 folgt:

$$(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \times \vec{k}_\gamma) \cdot \vec{S}^\dagger = (i\sqrt{8\pi}) k_\gamma \left[[\varepsilon_{\vec{k}\lambda(1)} \otimes Y_1(\hat{k}_\gamma)]_{(1)} \otimes S_{(1)}^\dagger \right]_{(00)} . \quad (\text{B.21})$$

Multiplikation von B.21 mit B.16 und umkoppeln der Operatoren liefert [62, Kapitel 6.4]:

$$\begin{aligned} e^{-i\vec{k}_\gamma \cdot \vec{r}} (\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \times \vec{k}_\gamma) \cdot \vec{S}^\dagger &= (i\sqrt{8\pi}) 4\pi k_\gamma \sum_{l,j} (-i)^l j_l(k_\gamma r) (-1)^l \hat{l} \hat{j}^2 \left\{ \begin{matrix} l & 1 & j \\ l & 1 & j \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\} \\ &\quad \left[\left[Y_l(\hat{k}_\gamma) \otimes [\varepsilon_{\vec{k}\lambda(1)} \otimes Y_1(\hat{k}_\gamma)]_{(1)} \right]_{(j)} \otimes \left[Y_l(\hat{r}) \otimes S_{(1)}^\dagger \right]_{(j)} \right]_{(00)} . \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Für das 9j-Symbol gilt:

$$\left\{ \begin{matrix} l & 1 & j \\ l & 1 & j \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\hat{j} \hat{1} \hat{l}} \quad \text{für: } l = j, j \pm 1 . \quad (\text{B.23})$$

Umkopplung der Tensoroperatoren in B.22 liefert [62, Kapitel 6.1]:

$$\left[Y_l(\hat{k}_\gamma) \otimes \left[\varepsilon_{\vec{k}\lambda(1)} \otimes Y_1(\hat{k}_\gamma) \right]_{(1)} \right]_{(j)} = \sum_{l'} (-1)^{\hat{l}} \hat{l}' W(l1j1, l'1) \left[\left[Y_l(\hat{k}_\gamma) \otimes Y_1(\hat{k}_\gamma) \right]_{(l')} \otimes \varepsilon_{\vec{k}\lambda(1)} \right]_{(j)} . \quad (\text{B.24})$$

Die Kugelflächenfunktionen können zusammengefaßt werden zu:

$$\left[Y_l(\hat{k}_\gamma) \otimes Y_1(\hat{k}_\gamma) \right]_{(l' m')} = \frac{\hat{l} \hat{1}}{\sqrt{4\pi} \hat{l}'} (l010 | l'0) Y_{l' m'}(\hat{k}_\gamma) . \quad (\text{B.25})$$

Einsetzen von B.23 - B.25 in Gleichung B.22 ergibt schließlich:

$$e^{-i\vec{k}_\gamma \cdot \vec{r}} \left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \times \vec{k}_\gamma \right) \cdot \vec{S}^\dagger = (-i\sqrt{2}) 4\pi k_\gamma \sum_{l,j,l'} i^l j_l(k_\gamma r) (l010 | l'0) W(l1j1, l'1) \hat{j} \hat{l} \hat{1} \left[\left[Y_{l'}(\hat{k}_\gamma) \otimes \varepsilon_{\vec{k}\lambda(1)} \right]_{(j)} \otimes \left[Y_l(\hat{r}) \otimes S_{(1)}^\dagger \right]_{(j)} \right]_{(00)} \quad (\text{B.26})$$

Gleichung B.26 kann man noch weiter vereinfachen, indem man zwei Tensorprodukte explizit ausschreibt:

$$e^{-i\vec{k}_\gamma \cdot \vec{r}} \left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \times \vec{k}_\gamma \right) \cdot \vec{S}^\dagger = (-i\sqrt{2}) 4\pi k_\gamma \sum_{l,j,l'} i^l j_l(k_\gamma r) (l010 | l'0) W(l1j1, l'1) \hat{j} \hat{l} \hat{1} \sum_{m,m'} (j-mj m | 00) (l' m' 1 -m -m' | j-m) Y_{l' m'}(\hat{k}_\gamma) \varepsilon_{\vec{k}\lambda(1-m-m')} \left[Y_l(\hat{r}) \otimes S_{(1)}^\dagger \right]_{(jm)} . \quad (\text{B.27})$$

Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems gilt für die Kugelflächenfunktion $Y_{l' m'}(\hat{k}_\gamma)$:

$$Y_{l' m'}(\hat{k}_\gamma) = \frac{\hat{l}'}{\sqrt{4\pi}} \delta_{m',0} \quad \text{für: } \hat{k}_\gamma \parallel z\text{-Achse} \quad (\text{B.28})$$

und für das reelle Photon $\lambda = \pm 1$. Damit folgt für B.27:

$$e^{-i\vec{k}_\gamma \cdot \vec{r}} \left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \times \vec{k}_\gamma \right) \cdot \vec{S}^\dagger = (-i\sqrt{2}) 4\pi k_\gamma \sum_{l,j,l'} i^l j_l(k_\gamma r) \hat{j} \hat{l} \hat{1} (l010 | l'0) W(l1j1, l'1) (j\lambda j -\lambda | 00) (l'01\lambda | j\lambda) \frac{\hat{l}'}{\sqrt{4\pi}} \varepsilon_{\vec{k}\lambda(1\lambda)} \left[Y_l(\hat{r}) \otimes S_{(1)}^\dagger \right]_{(j-\lambda)} . \quad (\text{B.29})$$

Einsetzen von B.29 in die Gleichung B.15 für die Radialwellenfunktion ergibt:

$$\begin{aligned}
\rho_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) = & \sum_{m_p, m_h} \sum_{\tau_p, \tau_h} (-1)^{j_h + m_h} (j_p m_p j_h m_h | j_t m_t) \frac{f_{\gamma N \Delta}}{m_{\Delta}} \\
& \left(-i\sqrt{2} \right) 4\pi k_{\gamma} \sum_{l, j, l'} i^l j_l(k_{\gamma} r) \hat{j} \hat{l} \hat{1} (l 0 1 0 | l' 0) W(l 1 j 1, l' 1) \\
& (j \lambda j -\lambda | 0 0) (l' 0 1 \lambda | j \lambda) \frac{\hat{l}'}{\sqrt{4\pi}} \varepsilon_{\vec{k} \lambda (1 \lambda)}^r \phi_{n_h(l_h \frac{1}{2}) j_h}(r) \\
& \langle (l_p \frac{3}{2}) j_p m_p, \frac{3}{2} \tau_p | \left[Y_l(\hat{r}) \otimes S_{(1)}^{\dagger} \right]_{(j -\lambda)} T_0^{\dagger} | (l_h \frac{1}{2}) j_h -m_h, \frac{1}{2} \tau_h \rangle .
\end{aligned} \tag{B.30}$$

Das zu berechnende Matrixelement in B.30 können wir in einen Spin- und einen Isospin-anteil aufspalten. Das Isospin-Matrixelement führt gemäß der Definition des Isospin-Übergangsoperators $\vec{T}^{\dagger}$ zu folgendem Beitrag zur Quellfunktion:

$$\begin{aligned}
\langle \frac{3}{2} \tau_p | T_0^{\dagger} | \frac{1}{2} \tau_h \rangle &= (-1)^{\frac{1}{2} + \tau_h} (1 0 \frac{1}{2} -\tau_h | \frac{3}{2} \tau_p) \\
&= (-1)^{\frac{1}{2} + \tau_h} \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{für } \tau_p = -\tau_h = \pm \frac{1}{2} .
\end{aligned} \tag{B.31}$$

Zur Berechnung des Spin-Matrixelementes benutzen wir das Wigner-Eckart-Theorem und Gleichung 7.1.5 aus [62]:

$$\begin{aligned}
& \langle (l_p \frac{3}{2}) j_p m_p | \left[Y_l(\hat{r}) \otimes S_{(1)}^{\dagger} \right]_{(j -\lambda)} | (l_h \frac{1}{2}) j_h -m_h \rangle = \\
& \frac{1}{\hat{j}_p} (j_h -m_h j -\lambda | j_p m_p) \langle (l_p \frac{3}{2}) j_p || \left[Y_l(\hat{r}) \otimes S_{(1)}^{\dagger} \right]_{(j)} || (l_h \frac{1}{2}) j_h \rangle = \\
& \frac{1}{\hat{j}_p} (j_h -m_h j -\lambda | j_p m_p) \hat{j} \hat{j}_p \hat{j}_h \left\{ \begin{matrix} l_p & \frac{3}{2} & j_p \\ l_h & \frac{1}{2} & j_h \\ l & 1 & j \end{matrix} \right\} \langle \frac{3}{2} || S^{\dagger} || \frac{1}{2} \rangle \langle l_p || Y_l(\hat{r}) || l_h \rangle .
\end{aligned} \tag{B.32}$$

Für das reduzierte Spin-Matrixelement gilt nach der Definition des Spin-Übergangsoperators :

$$\langle \frac{3}{2} || S^{\dagger} || \frac{1}{2} \rangle = 2 . \tag{B.33}$$

Für das Bahndrehimpuls-Matrixelement ergibt sich nach [62, Gl. 5.4.5] :

$$\langle l_p || Y_l(\hat{r}) || l_h \rangle = \frac{\hat{l} \hat{l}_h}{\sqrt{4\pi}} i^{l_h-l_p} (l_h 0 l 0 | l_p 0) . \quad (\text{B.34})$$

Der Phasenfaktor $i^{l_h-l_p}$ tritt hier aufgrund der gewählten Phasenkonvention der Zeitumkehrphase auf.

Insgesamt ergibt sich so für die Radialwellenfunktion $\rho_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r)$:

$$\begin{aligned} \rho_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) &= \sum_{m_p, m_h} \sum_{\tau_h} (-1)^{j_h+m_h} (j_p m_p j_h m_h | j_t m_t) \\ &\quad (-i\sqrt{2}) 4\pi \frac{f_{\gamma N \Delta}}{m_{\Delta}} k_{\gamma} \sum_{l, j, l'} i^l j_l(k_{\gamma} r) \hat{l} \hat{l}' (l 0 l 0 | l' 0) W(l 1 j 1, l' 1) \\ &\quad (j \lambda j -\lambda | 0 0) (l' 0 1 \lambda | j \lambda) \frac{\hat{l}'}{\sqrt{4\pi}} \varepsilon_{\vec{k} \lambda (1 \lambda)} (-1)^{\frac{1}{2}+\tau_h} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ &\quad (j_h - m_h j -\lambda | j_p m_p) \hat{j} \hat{j}_h 2 \frac{\hat{l} \hat{l}_h}{\sqrt{4\pi}} i^{l_h-l_p} (l_h 0 l 0 | l_p 0) \\ &\quad \left\{ \begin{matrix} l_p & \frac{3}{2} & j_p \\ l_h & \frac{1}{2} & j_h \\ l & 1 & j \end{matrix} \right\} r \phi_{n_h(l_h \frac{1}{2}) j_h}(r) . \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Kontraktion des ersten und des fünften Clebsch-Gordan-Koeffizienten führt zu der Bedingung, daß $j_t = j$ und $m_t = -\lambda$ sein muß:

$$\begin{aligned} \rho_{(ph)}^{(j_t m_t=-\lambda)}(r) &= \sum_{\tau_h} (-4i) \frac{f_{\gamma N \Delta}}{m_{\Delta}} k_{\gamma} i^{l_h-l_p} \hat{j}_t \hat{j}_p \hat{j}_h \hat{l}_h (-1)^{\frac{1}{2}+\tau_h} \\ &\quad (j_t \lambda j_t -\lambda | 0 0) r \phi_{n_h(l_h \frac{1}{2}) j_h}(r) \varepsilon_{\vec{k} \lambda (1 \lambda)} \\ &\quad \sum_l i^l j_l(k_{\gamma} r) \hat{l}^2 (l_h 0 l 0 | l_p 0) \left\{ \begin{matrix} l_p & \frac{3}{2} & j_p \\ l_h & \frac{1}{2} & j_h \\ l & 1 & j_t \end{matrix} \right\} \\ &\quad \sum_{l'} \hat{l}' (l 0 l 0 | l' 0) W(l 1 j_t 1, l' 1) (l' 0 1 \lambda | j_t \lambda) . \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Damit haben wir unser Ziel erreicht, eine Quellfunktion herzuleiten, die die “Dichte” des Δ ’s im Kern beschreibt und alle quantenmechanisch erlaubten Δ -Loch-Konfigurationen berücksichtigt. Da wir dabei die Integration über den Winkelanteil ausgeführt haben, hängt die Quellfunktion nur noch vom Abstand r , der Energie des einlaufenden Photons und dem Gesamtdrehimpuls ($j_t m_t$) ab.

Anhang C

Berechnung der Quellfunktion für Pionabsorption

In diesem Anhang wird die Radialwellenfunktion für die Pionabsorption berechnet. Da die Vorgehensweise vollkommen analog zu der bei der Berechnung der Quellfunktion für die Photoabsorption in Anhang B ist, können wir uns darauf beschränken, nur den Anregungsoperator für Photoabsorption durch den Anregungsoperator für Pionabsorption, $F_{\pi N\Delta}^\dagger$, zu ersetzen. In Kapitel 2.5 haben wir gezeigt, daß für den Anregungsoperator im π -Kern-CMS gilt:

$$F_{\pi N\Delta}^\dagger(\vec{q}_\pi) = \frac{f_{\pi N\Delta}}{m_\pi} \left(\vec{q}_\pi \cdot \vec{S}^\dagger \right) T_\alpha^\dagger e^{-i\vec{q}_\pi \cdot \vec{r}} . \quad (\text{C.1})$$

Für die Radialwellenfunktion erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} \rho_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) &= \sum_{m_p, m_h} \sum_{\tau_p, \tau_h} (-1)^{j_h + m_h} (j_p m_p j_h m_h | j_t m_t) \\ &\langle (l_p \frac{3}{2}) j_p m_p, \frac{3}{2} \tau_p | e^{-i\vec{q}_\pi \cdot \vec{r}} \left(\vec{q}_\pi \cdot \vec{S}^\dagger \right) T_\alpha^\dagger | (l_h \frac{1}{2}) j_h -m_h, \frac{1}{2} \tau_h \rangle \\ &\frac{f_{\pi N\Delta}}{m_\pi} r \phi_{n_h (l_h \frac{1}{2}) j_h}(r) . \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Wir formen nun das Skalarprodukt in C.2 wie in Anhang B um und erhalten anstelle von B.26:

$$\begin{aligned} e^{-i\vec{q}_\pi \cdot \vec{r}} \left(\vec{q}_\pi \cdot \vec{S}^\dagger \right) &= (-4\pi) q_\pi \sum_{l,j} i^l j_l(q_\pi r) \hat{l} (l 0 1 0 | j 0) \\ &\left[Y_j(\hat{q}_\pi) \otimes \left[Y_l(\hat{r}) \otimes S_{(1)}^\dagger \right]_{(j)} \right]_{(00)} . \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Geeignete Wahl des Koordinatensystems und Umformungen analog zu denen in B.27 - B.29 liefern uns schließlich:

$$e^{-i\vec{q}_\pi \cdot \vec{r}} \left(\vec{q}_\pi \cdot \vec{S}^\dagger \right) = \left(-\sqrt{4\pi} \right) q_\pi \sum_{l,j} i^l j_l(q_\pi r) \hat{l} \hat{j} (l 0 1 0 | j 0) \\ (j 0 j 0 | 0 0) \left[Y_l(\hat{r}) \otimes S_{(1)}^\dagger \right]_{(j 0)} . \quad (\text{C.4})$$

Durch Einsetzen von C.4 in C.2 folgt für die Radialwellenfunktion:

$$\rho_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) = \sum_{m_p, m_h} \sum_{\tau_p, \tau_h} (-1)^{j_h+m_h} (j_p m_p j_h m_h | j_t m_t) \\ (-\sqrt{4\pi}) \frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\pi} q_\pi \sum_{l,j} i^l j_l(q_\pi r) \hat{l} \hat{j} (l 0 1 0 | j 0) (j 0 j 0 | 0 0) \\ \langle (l_p \frac{3}{2}) j_p m_p, \frac{3}{2} \tau_p | \left[Y_l(\hat{r}) \otimes S_{(1)}^\dagger \right]_{(j 0)} T_\alpha^\dagger | (l_h \frac{1}{2}) j_h -m_h, \frac{1}{2} \tau_h \rangle \\ r \phi_{n_h (l_h \frac{1}{2}) j_h}(r) . \quad (\text{C.5})$$

Das Spin-Matrixelement in Gleichung C.5 haben wir schon in Anhang B berechnet (Siehe B.32 - B.34.). Für das Isospin-Matrixelement gilt:

$$\langle \frac{3}{2} \tau_p | T_\alpha^\dagger | \frac{1}{2} \tau_h \rangle = (-1)^{\frac{1}{2}+\tau_h} (1 \alpha \frac{1}{2} - \tau_h | \frac{3}{2} \tau_p) \quad (\text{C.6})$$

mit $\alpha = +1, 0, -1$ für π^+, π^0, π^- -Absorption.

Mit C.6 und B.32 - B.34 ergibt sich dann für die Radialwellenfunktion:

$$\rho_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) = \sum_{m_p, m_h} \sum_{\tau_p, \tau_h} (-1)^{j_h+m_h} (j_p m_p j_h m_h | j_t m_t) \\ (-\sqrt{4\pi}) \frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\pi} q_\pi \sum_{l,j} i^l j_l(q_\pi r) \hat{l} \hat{j} (l 0 1 0 | j 0) (j 0 j 0 | 0 0) \\ (j_h -m_h j 0 | j_p m_p) \hat{j} \hat{j}_h 2 \frac{\hat{l} \hat{l}_h}{\sqrt{4\pi}} i^{l_h-l_p} (l_h 0 l 0 | l_p 0) \\ \left\{ \begin{matrix} l_p & \frac{3}{2} & j_p \\ l_h & \frac{1}{2} & j_h \\ l & 1 & j \end{matrix} \right\} (-1)^{\frac{1}{2}+\tau_h} (1 \alpha \frac{1}{2} - \tau_h | \frac{3}{2} \tau_p) r \phi_{n_h (l_h \frac{1}{2}) j_h}(r) \quad (\text{C.7})$$

Durch Kontraktion des ersten und vierten Clebsch-Gordan-Koeffizienten folgt $j_t = j$,
 $m_t = 0$ und:

$$\begin{aligned} \rho^{(j_t m_t=0)}(\vec{r}) &= \sum_{\tau_h} (-2) \frac{f_{\pi N \Delta}}{m_{\pi}} q_{\pi} i^{l_h-l_p} \hat{j}_t \hat{j}_p \hat{j}_h \hat{l}_h \\ &\quad (j_t 0 \ j_t 0 \mid 0 0) (-1)^{\frac{1}{2}+\tau_h} (1 \propto \frac{1}{2} - \tau_h \mid \frac{3}{2} - \tau_h + \alpha) \ r \phi_{n_h}(l_h \frac{1}{2}) j_h(r) \\ &\quad \sum_l i^l j_l(q_{\pi} r) \hat{l}^2 (l 0 \ 1 0 \mid j_t 0) (l_h 0 \ l 0 \mid l_p 0) \left\{ \begin{matrix} l_p & \frac{3}{2} & j_p \\ l_h & \frac{1}{2} & j_h \\ l & 1 & j_t \end{matrix} \right\} . \quad (\text{C.8}) \end{aligned}$$

Anhang D

Das Übergangsmatrixelement für den Zerfall in kohärente Pionen und Photonen

In Abschnitt 2.5 haben wir gezeigt, daß das Übergangsmatrixelement für den Zerfall des Δ 's in kohärente Pionen durch den folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\mathcal{M}_{\pi,X} = \langle 0^+ | F_{\pi N \Delta} | \psi_{\Delta} \rangle \quad . \quad (D.1)$$

Dabei ist $|\psi_{\Delta}\rangle$ der kohärente Δ -Loch-Zustand aus Gleichung 2.8. Der Doorway-Zustand $|\rho\rangle$ ist im Falle der kohärenten Pionphotoproduktion durch $|\rho_{\gamma}\rangle$ gegeben und die entsprechende Quellfunktion $\rho_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r)$ haben wir in Anhang B hergeleitet. Im Falle der elastischen Pionstreuung haben wir die zu $|\rho_{\pi}\rangle$ gehörige Radialwellenfunktion in Anhang C hergeleitet.

Um den expliziten Ausdruck für das Übergangsmatrixelement $\mathcal{M}_{\pi,X}$ herzuleiten, entwickeln wir den Δ -Loch-Zustand $|\psi_{\Delta}\rangle$ nach den Spin-Winkel-Wellenfunktionen des Teilchen-Loch-Zustandes:

$$|\psi_{\Delta}\rangle = \sum_{j_t m_t} \sum_{ph}^{N_c} \psi_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) \frac{1}{r} | [Y_p \Phi_h]_{j_t m_t} \rangle , \quad (D.2)$$

wobei

$$\psi_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) = r ([Y_p \Phi_h]_{j_t m_t} | \psi \rangle \quad . \quad (D.3)$$

Entwickeln wir $\langle \tilde{\rho}_{\pi} | = \langle 0^+ | F_{\pi N \Delta}$ wie den Δ -Loch-Zustand $|\psi_{\Delta}\rangle$ nach Teilchen-Loch-Zuständen, so erhalten wir analog zu Gl. C.2 für die Radialwellenfunktion von $\langle \tilde{\rho}_{\pi} |$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) &= \sum_{m_p, m_h} \sum_{\tau_p, \tau_h} (-1)^{j_h + m_h} (j_p m_p j_h m_h | j_t m_t) \\
&\quad \langle (l_h \frac{1}{2}) j_h - m_h, \frac{1}{2} \tau_h | e^{i \vec{q}'_\pi \cdot \vec{r}} \left(\vec{q}'_\pi \cdot \vec{S} \right) T_{\alpha'} | (l_p \frac{3}{2}) j_p m_p, \frac{3}{2} \tau_p \rangle \\
&\quad \frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\pi} r \phi_{n_h(l_h \frac{1}{2}) j_h}(r) \quad , \quad (D.4)
\end{aligned}$$

wobei wir für den Abregungsoperator $F_{\pi N \Delta}$ den expliziten Ausdruck:

$$F_{\pi N \Delta}(\vec{q}'_\pi) = \frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\pi} \left(\vec{q}'_\pi \cdot \vec{S} \right) T_{\alpha'} e^{i \vec{q}'_\pi \cdot \vec{r}} \quad (D.5)$$

eingesetzt haben. Nach einer weiteren Rechnung wie in Anhang C erhalten wir für die Radialwellenfunktion:

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) &= \sum_{\tau_h} (2\sqrt{4\pi}) \frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\Delta} i^{l_h - l_p} \frac{\hat{j}_p \hat{j}_h}{\hat{j}_t} \hat{l}_h q'_\pi Y_{j_t m_t}(\hat{q}'_\pi) r \phi_{n_h(l_h \frac{1}{2}) j_h}(r) \\
&\quad \sum_l (-i)^l j_l(q'_\pi r) \hat{l}^2 (l 0 1 0 | j_t 0) (l_h 0 l 0 | l_p 0) \left\{ \begin{matrix} l_p & \frac{3}{2} & j_p \\ l_h & \frac{1}{2} & j_h \\ l & 1 & j_t \end{matrix} \right\} \\
&\quad (-1)^{\frac{1}{2} + \tau_h} (1 - \alpha' \frac{1}{2} - \tau_h | \frac{3}{2} - \alpha' - \tau_h) \quad . \quad (D.6)
\end{aligned}$$

Dabei haben wir folgende Relationen für die Spin- und Isospinmatrixelemente benutzt:

$$\langle \frac{1}{2} || S || \frac{3}{2} \rangle = -2 \quad , \quad (D.7)$$

$$\langle \frac{1}{2} \tau_h | T_{\alpha'} | \frac{3}{2} \tau_p \rangle = (-1)^{\frac{1}{2} + \tau_h} (1 - \alpha' \frac{1}{2} - \tau_h | \frac{3}{2} \tau_p) \quad . \quad (D.8)$$

Für das Zerfallsmatrixelement in kohärente Pionen gilt dann:

$$\mathcal{M}_{\pi, X} = \sum_{j_t m_t} \sum_{ph}^{N_c} \int dr \tilde{\rho}_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) \psi_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) \quad . \quad (D.9)$$

Für das Übergangsmatrixelement der elastischen Comptonstreuung im Δ -Loch-Modell gilt:

$$\mathcal{M}_{\gamma, X} = \langle 0^+ | F_{\gamma N \Delta}(\vec{k}'_\gamma) | \psi_\Delta \rangle = \langle \tilde{\rho}_\gamma | \psi_\Delta \rangle . \quad (\text{D.10})$$

Setzen wir den Abregungsoperator

$$F_{\gamma N \Delta}(\vec{k}'_\gamma) = \frac{f_{\gamma N \Delta}}{m_\Delta} \left(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}'_\gamma}^* \times \vec{k}'_\gamma \right) \cdot \vec{S} T_0 e^{i \vec{k}'_\gamma \cdot \vec{r}} \quad (\text{D.11})$$

ein und entwickeln den Endzustand $\langle \tilde{\rho}_\gamma |$ analog zu $\langle \tilde{\rho}_\pi |$, so erhalten wir schließlich für das Übergangsmatrixelement:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\gamma, X} = & \sum_{j_t m_t} \sum_{ph}^{N_c} \sum_{\tau_h} (4i) \frac{f_{\gamma N \Delta}}{M_\Delta} i^{l_h - l_p} \hat{j}_p \hat{j}_h \hat{l}_h k'_\gamma d_{-\lambda' m_t}^{j_t}(\vartheta'_\gamma) (-1)^{\frac{1}{2} + \tau_h} \\ & \sum_{l, l'} (-i)^l \hat{l}^2 \hat{l}' W(l 1 j_t 1, l' 1) (l 0 1 0 | l' 0) \\ & \times (l_h 0 1 0 | l_p 0) \int dr r j_l(k'_\gamma r) \psi_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) \phi_{n_h (l_h \frac{1}{2}) j_h}(r) \\ & (l' 0 1 - \lambda' | j_t - \lambda') \left\{ \begin{matrix} l_p & \frac{3}{2} & j_p \\ l_h & \frac{1}{2} & j_h \\ l & 1 & j_t \end{matrix} \right\} . \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Dabei haben wir die D-Funktion [62, Gl. 4.1.12]:

$$D_{m' m}^j(\alpha, \beta, \gamma) = e^{im'\alpha} d_{m' m}^j(\beta) e^{im\gamma} \quad (\text{D.13})$$

eingeführt, da wir den Polarisationsvektor $\hat{\varepsilon}_{\vec{k}'_\gamma}$ des auslaufenden Photons bezüglich der z -Achse unseres Koordinatensystems ($\hat{k}_\gamma \parallel z$ -Achse) auswerten müssen. Daher gilt:

$$\left[Y_{l'}(\hat{k}'_\gamma) \otimes \varepsilon_{\vec{k}'_\gamma}^* \right]_{(j m)} = \sum_{m'} \left[Y_{l'}(\hat{k}_\gamma) \otimes \varepsilon_{\vec{k}_{\lambda' (1)}}^* \right]_{(j m')} D_{m' m}^j(0, \vartheta'_\gamma, 0) \quad (\text{D.14})$$

$$= (l' 0 1 - \lambda' | j - \lambda') \frac{\hat{l}'}{\sqrt{4\pi}} d_{-\lambda' m}^j(\vartheta'_\gamma) , \quad (\text{D.15})$$

wobei wir Gl. B.28 und $(\varepsilon_{\vec{k}_{\lambda'}}^*)_{1 m'} = \delta_{m', -\lambda'}$ benutzt haben.

Im Falle der Comptonstreuung tritt zusätzlich zu dem Prozess über das intermediäre Δ noch ein weiterer nichtresonanter Prozess auf. Das Übergangsmatrixelement für diesen Untergrund haben wir in Abschnitt 2.7 definiert. Wir führen auch hier Zustände $|\rho_{\text{KR}}\rangle$ und $\langle \tilde{\rho}_{\text{KR}} |$ ein und können daher das Übergangsmatrixelement in der folgenden Weise umschreiben:

$$\mathcal{M}_\gamma^{KR} = \langle 0^+ | F_{KR}^*(\vec{k}'_\gamma, \lambda') G_{KR} F_{KR}(\vec{k}_\gamma, \lambda) | 0^+ \rangle = \langle \tilde{\rho}_{KR} | G_{KR} | \rho_{KR} \rangle. \quad (D.16)$$

Setzen wir den Anregungsoperator für diesen Untergrundprozeß aus Gl. 2.85 ein, so können wir analog zu Anhang B die Radialwellenfunktion für den Doorway-Zustand $|\rho_{KR}\rangle$ herleiten und erhalten:

$$\begin{aligned} \rho_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) &= (-\sqrt{6}) \sqrt{2\alpha} (4\pi) \frac{f_{\pi NN}}{m_\pi} h(E) i^{l_h - l_p} \hat{j}_t \hat{j}_p \hat{j}_h \hat{l}_h (j_t - m_t j_t m_t | 00) \\ &\quad r \phi_{n_h (l_h \frac{1}{2}) j_h}(r) \sum_l i^l j_l(k_\gamma r) \hat{l}^2 (l 0 1 \lambda | j_t - m_t) (l_h 0 l 0 | l_p 0) \\ &\quad \begin{Bmatrix} l_p & \frac{1}{2} & j_p \\ l_h & \frac{1}{2} & j_h \\ l & 1 & j_t \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (D.17)$$

Für das Übergangsmatrixelement ergibt sich schließlich nach einer Rechnung analog zur Herleitung von $\mathcal{M}_\pi$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\gamma^{KR} &= \sqrt{2\alpha} (4\pi) \frac{f_{\pi NN}}{m_\pi} h(E) \sum_{j_t m_t} \sum_{ph}^{N_c} \sqrt{6} i^{l_h - l_p} \hat{j}_p \hat{j}_h \hat{l}_h d_{-\lambda' m_t}^{j_t}(\vartheta'_\gamma) \\ &\quad \sum_l (-i)^l \hat{l}^2 (l 0 1 - \lambda' | j_t - \lambda') (l_h 0 l 0 | l_p 0) \\ &\quad \times \int dr' r' \int d^3r j_l(k'_\gamma r') \phi_{n_h (l_h \frac{1}{2}) j_h}(r') G_{KR}(\vec{r}', \vec{r}) \rho_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) \\ &\quad \begin{Bmatrix} l_p & \frac{1}{2} & j_p \\ l_h & \frac{1}{2} & j_h \\ l & 1 & j_t \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (D.18)$$

Anhang E

Berechnung des Matrixelements der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung

In Abschnitt 2.3 haben wir in Gleichung 2.36 das Matrixelement der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung definiert:

$$\alpha_{j,i} = \langle \tilde{D}_j | V_i \rangle = \langle \tilde{D}_j | V G_0 | D_i \rangle . \quad (\text{E.1})$$

Um den Zweikörperoperator V auf den Zustand $G_0 | D_i \rangle$ anwenden zu können, spalten wir $G_0 | D_i \rangle$ in seine einzelnen Drehimpuls-Komponenten auf:

$$G_0 | D_i \rangle =: \sum_{j'_t, m'_t} \sum_{\nu_{p_1}, \nu_{h_1}} | \Phi_{\nu_{p_1} \nu_{h_1}} j'_t m'_t \rangle , \quad (\text{E.2})$$

wobei $\nu_{p_1} = \left(\left(\frac{3}{2} l_{p_1} \right) j_{p_1} \right)$ und $\nu_{h_1} = \left(n_{h_1} \left(\frac{1}{2} l_{h_1} \right) j_{h_1} \right)$ sind. Den zu berechnenden Zustand zerlegen wir ebenfalls in Drehimpuls-Komponenten:

$$V G_0 | D_i \rangle =: \sum_{j_t, m_t} \sum_{\nu_{p_2}, \nu_{h_2}} \frac{1}{r_2} \lambda_{\nu_{p_2} \nu_{h_2}}^{(j_t m_t)}(r_2) | [\nu_{p_2} \nu_{h_2}] j_t m_t \rangle . \quad (\text{E.3})$$

Diese Zerlegung erlaubt es uns durch Projektion auf die Drehimpulse Gl. E.3 umzuschreiben:

$$\lambda_{\nu_{p_2} \nu_{h_2}}^{(j_t m_t)}(r_2) = r_2 ([\nu_{p_2} \nu_{h_2}] j_t m_t | V G_0 | D_i \rangle . \quad (\text{E.4})$$

Durch Einsetzen von (E.2) in (E.4) erhalten wir folgenden Ausdruck für die Radialwellenfunktion des Zustands $V G_0 | D_i \rangle$:

$$\lambda_{\nu_{p_2} \nu_{h_2}}^{(j_t m_t)}(r_2) = \sum_{\nu_{p_1}, \nu_{h_1}} r_2 ([\nu_{p_2} \nu_{h_2}] j_t m_t | V | \Phi_{\nu_{p_1} \nu_{h_1}} j'_t m'_t \rangle . \quad (\text{E.5})$$

Die runde Klammer in Gleichung E.5 deutet an, daß nur auf die Drehimpuls-Zustände projiziert wird und daher nur die Winkelintegration bei der Berechnung des Matrixelements durchgeführt wird.

Zur Berechnung des Matrixelements

$$(j_t m_t | V | \Phi_1) := ([\nu_{p_2} \nu_{h_2}] j_t m_t | V | \Phi_{\nu_{p_1} \nu_{h_1}} j_t m_t) \quad (E.6)$$

schreiben wir den Zweikörperoperator V in zweiter Quantisierung [61, Anhang 3B]:

$$V = \frac{1}{4} \sum \langle \nu_3 \nu_4 | V | \nu_1 \nu_2 \rangle_a a_{\nu_4}^\dagger a_{\nu_3}^\dagger a_{\nu_1} a_{\nu_2} \quad (E.7)$$

$$= \sum_{\nu_1 < \nu_2, \nu_3 < \nu_4} \langle \nu_3 \nu_4 | V | \nu_1 \nu_2 \rangle_a a_{\nu_4}^\dagger a_{\nu_3}^\dagger a_{\nu_1} a_{\nu_2} \quad (E.8)$$

mit:

$$\langle \nu_3 \nu_4 | V | \nu_1 \nu_2 \rangle_a := \langle \nu_3 \nu_4 | V | \nu_1 \nu_2 \rangle - \langle \nu_3 \nu_4 | V | \nu_2 \nu_1 \rangle \quad (E.9)$$

und

$$\langle \nu_3 \nu_4 | V | \nu_1 \nu_2 \rangle := \int \varphi_{\nu_3}^\dagger(\vec{r}_1) \varphi_{\nu_4}^\dagger(\vec{r}_2) V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \varphi_{\nu_1}(\vec{r}_1) \varphi_{\nu_2}(\vec{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2 . \quad (E.10)$$

Die Operatoren $a_{\nu_i}^\dagger$ und a_{ν_j} sind die Teilchenerzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren zu den Quantenzahlen $\nu_i = (n_i (s_i l_i) j_i m_i)$ und die $\varphi_{\nu_i}(\vec{r}_{1,2})$ sind die zugehörigen Wellenfunktionen.

Da in unserem Modell der Δ -Loch-Restwechselwirkung nur direkte Mesonaustauschgraphen auftreten, vernachlässigen wir im weiteren die Austausch-Matrixelemente, d.h. wir schreiben

$$V = \sum_{\nu_1 < \nu_2, \nu_3 < \nu_4} \langle \nu_3 \nu_4 | V | \nu_1 \nu_2 \rangle a_{\nu_4}^\dagger a_{\nu_3}^\dagger a_{\nu_1} a_{\nu_2} . \quad (E.11)$$

Den Teilchen-Loch-Zustand $|\Phi_{\nu_{p_1} \nu_{h_1}} j_t m_t\rangle$ schreiben wir ebenfalls in zweiter Quantisierung:

$$|\Phi_{\nu_{p_1} \nu_{h_1}} j_t m_t\rangle = \left[a_{(\frac{3}{2} l_{p_1}) j_{p_1}}^\dagger b_{n_{h_1} (\frac{1}{2} l_{h_1}) j_{h_1}}^\dagger \right]_{(j_t m_t)} |0\rangle \quad (E.12)$$

$$= \sum_{m_{p_1}, m_{h_1}} (j_{p_1} m_{p_1} j_{h_1} m_{h_1} | j_t m_t) (-1)^{j_{h_1} + m_{h_1}} a_{(\frac{3}{2} l_{p_1}) j_{p_1} m_{p_1}}^\dagger a_{n_{h_1} (\frac{1}{2} l_{h_1}) j_{h_1} -m_{h_1}} |0\rangle , \quad (E.13)$$

wobei wir die folgende Beziehung zwischen dem Locherzeugungsoperator $b^\dagger$ und dem Teilchenvernichtungsoperator a benutzt haben:

$$b_{n_{h_1} (\frac{1}{2} l_{h_1}) j_{h_1} m_{h_1}}^\dagger = (-1)^{j_{h_1} + m_{h_1}} a_{n_{h_1} (\frac{1}{2} l_{h_1}) j_{h_1} -m_{h_1}}. \quad (\text{E.14})$$

Für den Zustand $([\nu_{p_2} \nu_{h_2}] j_t m_t |$ gilt:

$$([\nu_{p_2} \nu_{h_2}] j_t m_t | = \langle 0 | \left[b_{n_{h_2} (\frac{1}{2} l_{h_2}) j_{h_2}} a_{(\frac{3}{2} l_{p_2}) j_{p_2}} \right]_{(j_t m_t)}. \quad (\text{E.15})$$

Durch Einsetzen von (E.11), (E.13) und (E.15) in das Matrixelement (E.6) und Ausnutzen der Kommutatorrelationen für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

$$\begin{aligned} & a_{n_{h_2} (\frac{1}{2} l_{h_2}) j_{h_2} -m_{h_2}}^\dagger a_{(\frac{3}{2} l_{p_2}) j_{p_2} m_{p_2}} a_{\nu_4}^\dagger a_{\nu_3}^\dagger a_{\nu_1} a_{\nu_2} a_{(\frac{3}{2} l_{p_1}) j_{p_1} m_{p_1}}^\dagger a_{n_{h_1} (\frac{1}{2} l_{h_1}) j_{h_1} -m_{h_1}} \\ &= \delta_{\nu_4, (\frac{3}{2} l_{p_2}) j_{p_2} m_{p_2}} \delta_{\nu_1, (\frac{3}{2} l_{p_1}) j_{p_1} m_{p_1}} \delta_{\nu_2, n_{h_2} (\frac{1}{2} l_{h_2}) j_{h_2} -m_{h_2}} \delta_{\nu_3, n_{h_1} (\frac{1}{2} l_{h_1}) j_{h_1} -m_{h_1}} \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

erhalten wir für $(j_t m_t | V | \Phi_1)$:

$$\begin{aligned} (j_t m_t | V | \Phi_1) &= \sum_{m_{p_1}, m_{p_2}, m_{h_1}, m_{h_2}} (-1)^{j_{h_1} + m_{h_1} + j_{h_2} + m_{h_2}} \\ &\quad (j_{p_1} m_{p_1} j_{h_1} m_{h_1} | j_t m_t) (j_{p_2} m_{p_2} j_{h_2} m_{h_2} | j_t m_t) \\ &\quad \langle n_{h_1} (\frac{1}{2} l_{h_1}) j_{h_1} -m_{h_1} (\frac{3}{2} l_{p_2}) j_{p_2} m_{p_2} | V | (\frac{3}{2} l_{p_1}) j_{p_1} m_{p_1} n_{h_2} (\frac{1}{2} l_{h_2}) j_{h_2} -m_{h_2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

Nun entwickeln wir den Zweikörperoperator nach Multipolen (siehe Anhang G):

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{J, M, l_1, l_2} v_{l_1, l_2, J}(r_1, r_2) [i^{l_1} Y_{l_1}(\hat{r}_1) \otimes S_1]^{(\widetilde{JM})} [i^{l_2} Y_{l_2}(\hat{r}_2) \otimes S_2^\dagger]^{(JM)}. \quad (\text{E.18})$$

Dann können wir die Integrationen über $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ wie folgt ausführen:

$$\begin{aligned} (j_t m_t | V | \Phi_1) &= \sum_{J, M, l_1, l_2} g_{\nu_{p_1} \nu_{h_1}} g_{\nu_{p_2} \nu_{h_2}} \int dr_1 r_1^2 v_{l_1, l_2, J}(r_1, r_2) \\ &\quad \phi_{n_{h_1} l_{h_1} j_{h_1} -m_{h_1}}^*(r_1) \psi_{l_{p_1} j_{p_1} m_{p_1}}(E_{p_1}, r_1) \phi_{n_{h_2} l_{h_2} j_{h_2} -m_{h_2}}(r_2). \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Dabei beschreiben die $\psi(r)$ und $\phi(r)$ die Radialwellenfunktionen der entsprechenden Teilchen- und Loch-Zustände $\varphi(\vec{r})$ aus Gleichung E.10. Die geometrischen Faktoren $g_{\nu_{p_1} \nu_{h_1}}$ und $g_{\nu_{p_2} \nu_{h_2}}$, die aus der Winkelintegration resultieren, werden in Anhang F explizit berechnet.

Bei der Berechnung des Matrixelements (E.6) wurden bis jetzt nur die Drehimpuls-Matrixelemente berücksichtigt. Da die Herleitung der Isospin-Matrixelemente vollkommen analog verläuft, soll sie hier nur kurz skizziert werden. In zweiter Quantisierung gilt für den Zweikörper-Isospinoperator V^I :

$$V^I = - \sum_{\nu_1 < \nu_2, \nu_3 < \nu_4} \langle \bar{\nu}_1 \nu_4 | \vec{T}_2^\dagger \cdot \vec{T}_1 | \bar{\nu}_3 \nu_2 \rangle a_{\nu_4}^\dagger b_{\nu_3}^\dagger b_{\nu_1} a_{\nu_2} \quad (\text{E.20})$$

$$= - \sum_{\nu_1 < \nu_2, \nu_3 < \nu_4} \sum_m \langle \nu_4 | T_m^\dagger(2) | \bar{\nu}_3 \rangle a_{\nu_4}^\dagger b_{\nu_3}^\dagger \langle \bar{\nu}_1 | (-1)^m T_{-m}(1) | \nu_2 \rangle b_{\nu_1} a_{\nu_2} . \quad (\text{E.21})$$

Dabei ist $\bar{\nu}$ der zu ν zeitumgekehrte Zustand, d.h. $\overline{(j m)} = (-1)^{j+m} (j - m)$; für V^I sind schon die Isospin-Operatoren eingesetzt worden, die sich aus den in Abschnitt 2.4 angegebenen Ein-Meson-Austauschpotentialen ergeben. Die Isospin-Teilchen-Loch-Zustände schreiben wir analog zu E.12:

$$| \Phi_{(\frac{3}{2} \tau_2), (\frac{1}{2} \tau_1)}^\tau \rangle = | \overline{\frac{1}{2} \tau_1} \frac{3}{2} \tau_2 \rangle = a_{\frac{3}{2} \tau_2}^\dagger b_{\frac{1}{2} \tau_1}^\dagger | 0 \rangle , \quad (\text{E.22})$$

$$\langle \Phi_{(\frac{3}{2} \tau_4), (\frac{1}{2} \tau_3)}^\tau | = \langle \overline{\frac{1}{2} \tau_3} \frac{3}{2} \tau_4 | = \langle 0 | b_{\frac{1}{2} \tau_3} a_{\frac{3}{2} \tau_4} . \quad (\text{E.23})$$

Entsprechend E.16 - E.17 folgt damit für das Isospin-Matrixelement:

$$\langle \Phi_{(\frac{3}{2} \tau_4), (\frac{1}{2} \tau_3)}^\tau | V^I | \Phi_{(\frac{3}{2} \tau_2), (\frac{1}{2} \tau_1)}^\tau \rangle = - \sum_m g_{(\frac{3}{2} \tau_2), (\frac{1}{2} \tau_1)}^I g_{(\frac{3}{2} \tau_4), (\frac{1}{2} \tau_3)}^I \quad (\text{E.24})$$

mit

$$g_{(\frac{3}{2} \tau_2), (\frac{1}{2} \tau_1)}^I = \langle \overline{\frac{1}{2} \tau_1} | (-1)^m T_{-m}(1) | \frac{3}{2} \tau_2 \rangle , \quad (\text{E.25})$$

$$g_{(\frac{3}{2} \tau_4), (\frac{1}{2} \tau_3)}^I = \langle \frac{3}{2} \tau_4 | T_m^\dagger(2) | \overline{\frac{1}{2} \tau_3} \rangle . \quad (\text{E.26})$$

Diese "iso-geometrischen" Faktoren $g_{(\frac{3}{2} \tau_2), (\frac{1}{2} \tau_1)}^I$ und $g_{(\frac{3}{2} \tau_4), (\frac{1}{2} \tau_3)}^I$ werden ebenfalls in Anhang F berechnet.

Für das Matrixelement $([\nu_{p_2} \nu_{h_2}] j_t m_t | V_{\Delta N-1, \Delta N-1} | \Phi_{\nu_{p_1} \nu_{h_1}} j_t m_t \rangle$ ergibt sich also insgesamt:

$$\begin{aligned}
 (j_t m_t | V | \Phi_1) = & - \sum_{J, M, l_1, l_2} \sum_{\tau_4, \tau_3, \tau_2, \tau_1, m} g_{\nu_{p_1} \nu_{h_1}} g_{\nu_{p_2} \nu_{h_2}} g_{(\frac{3}{2} \tau_2), (\frac{1}{2} \tau_1)}^I g_{(\frac{3}{2} \tau_4), (\frac{1}{2} \tau_3)}^I \\
 & \int dr_1 r_1^2 v_{l_1, l_2, J}(r_1, r_2) \\
 & \phi_{n_{h_1} l_{h_1} j_{h_1} -m_{h_1}}^*(r_1) \psi_{l_{p_1} j_{p_1} m_{p_1}}(E_{p_1}, r_1) \phi_{n_{h_2} l_{h_2} j_{h_2} -m_{h_2}}(r_2) .
 \end{aligned} \tag{E.27}$$

Für die Radialwellenfunktion des Zustands $V G_0 | D_i \rangle$ gilt daher:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\nu_{p_2} \nu_{h_2}}^{(j_t m_t)}(r_2) = & - \sum_{\nu_{p_1}, \nu_{h_1}} \sum_{J, M, l_1, l_2} \sum_{\tau_4, \tau_3, \tau_2, \tau_1, m} r_2 \phi_{n_{h_2} l_{h_2} j_{h_2} -m_{h_2}}(r_2) \\
 & g_{\nu_{p_1} \nu_{h_1}} g_{\nu_{p_2} \nu_{h_2}} g_{(\frac{3}{2} \tau_2), (\frac{1}{2} \tau_1)}^I g_{(\frac{3}{2} \tau_4), (\frac{1}{2} \tau_3)}^I \\
 & \int dr_1 r_1^2 v_{l_1, l_2, J}(r_1, r_2) \phi_{n_{h_1} l_{h_1} j_{h_1} -m_{h_1}}^*(r_1) \psi_{l_{p_1} j_{p_1} m_{p_1}}(E_{p_1}, r_1)
 \end{aligned} \tag{E.28}$$

Anhang F

Berechnung der geometrischen Faktoren

In diesem Anhang werden die geometrischen Faktoren $g_{\nu_{p_1} \nu_{h_1}}$ und $g_{\nu_{p_2} \nu_{h_2}}$ berechnet, die in Anhang E eingeführt worden sind:

$$g_{\nu_{p_1} \nu_{h_1}} = \sum_{m_{h_1}} \sum_{m_{p_1}} (-1)^{j_{h_1}+m_{h_1}} (j_{p_1} m_{p_1} j_{h_1} m_{h_1} | j_t m_t) \langle (\frac{1}{2} l_{h_1}) j_{h_1} - m_{h_1} | [i^{l_1} Y_{l_1}(\hat{r}_1) \otimes S_1]^{(\widetilde{JM})} | (\frac{3}{2} l_{p_1}) j_{p_1} m_{p_1} \rangle \quad (\text{F.1})$$

$$= \sum_{m_{h_1}} \sum_{m_{p_1}} (-1)^{j_{h_1}+m_{h_1}} (j_{p_1} m_{p_1} j_{h_1} m_{h_1} | j_t m_t) i^{l_1} (-1)^{J+M} \frac{1}{\hat{j}_{h_1}} (j_{p_1} m_{p_1} J - M | j_{h_1} - m_{h_1}) \langle (\frac{1}{2} l_{h_1}) j_{h_1} || [Y_{l_1}(\hat{r}_1) \otimes S_1]_J || (\frac{3}{2} l_{p_1}) j_{p_1} \rangle . \quad (\text{F.2})$$

Durch Kontraktion der beiden Clebsch-Gordan-Koeffizienten folgt aus F.2:

$$g_{\nu_{p_1} \nu_{h_1}} = i^{l_1} (-1)^{j_{h_1}+m_{h_1}+j_{p_1}-m_{p_1}+J+M} \frac{1}{\hat{J}} \delta_{J, j_t} \delta_{M, m_t} \hat{j}_{h_1} \hat{j}_{p_1} \hat{j}_t \langle l_{h_1} || Y_{l_1} || l_{p_1} \rangle \langle \frac{1}{2} || S_1 || \frac{3}{2} \rangle \begin{Bmatrix} l_{h_1} & \frac{1}{2} & j_{h_1} \\ l_{p_1} & \frac{3}{2} & j_{p_1} \\ l_1 & 1 & J \end{Bmatrix} . \quad (\text{F.3})$$

Für die reduzierten Matrixelemente gilt:

$$\langle \frac{1}{2} || S_1 || \frac{3}{2} \rangle = -2 , \quad (\text{F.4})$$

$$\langle l_{h_1} || Y_{l_1} || l_{p_1} \rangle = \frac{\hat{l}_{p_1} \hat{l}_{h_1}}{\sqrt{4\pi}} (-1)^{l_1+l_{h_1}} i^{l_{p_1}-l_{h_1}} (l_{h_1} 0 l_{p_1} 0 | l_1 0) . \quad (\text{F.5})$$

Der Phasenfaktor $i^{l_{p_1}-l_{h_1}}$ stammt von der gewählten Phasenkonvention der Zeitumkehrphase [61]. Damit ergibt sich für den geometrischen Faktor $g_{\nu_{p_1} \nu_{h_1}}$:

$$g_{\nu_{p_1} \nu_{h_1}} = \frac{-2}{\sqrt{4\pi}} i^{l_{p_1}+l_{h_1}-l_1} \hat{j}_{h_1} \hat{j}_{p_1} \hat{l}_{h_1} \hat{l}_{p_1} (l_{h_1} 0 l_{p_1} 0 | l_1 0) \delta_{J,j_t} \delta_{M,m_t} \begin{pmatrix} l_{p_1} & \frac{3}{2} & j_{p_1} \\ l_{h_1} & \frac{1}{2} & j_{h_1} \\ l_1 & 1 & j_t \end{pmatrix} . \quad (\text{F.6})$$

Analog folgt aus $\langle \frac{1}{2} || S_1^\dagger || \frac{3}{2} \rangle = 2$ für den geometrischen Faktor $g_{\nu_{p_2} \nu_{h_2}}$:

$$g_{\nu_{p_2} \nu_{h_2}} = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} i^{l_{p_2}+l_{h_2}-l_2} \hat{j}_{h_2} \hat{j}_{p_2} \hat{l}_{h_2} \hat{l}_{p_2} (l_{h_2} 0 l_{p_2} 0 | l_2 0) \delta_{J,j_t} \delta_{M,m_t} \begin{pmatrix} l_{p_2} & \frac{3}{2} & j_{p_2} \\ l_{h_2} & \frac{1}{2} & j_{h_2} \\ l_2 & 1 & j_t \end{pmatrix} . \quad (\text{F.7})$$

Für die "iso-geometrischen" Faktoren $g_{(\frac{3}{2}\tau_2),(\frac{1}{2}\tau_1)}^I$ und $g_{(\frac{3}{2}\tau_4),(\frac{1}{2}\tau_3)}^I$ ergibt sich:

$$g_{(\frac{3}{2}\tau_2),(\frac{1}{2}\tau_1)}^I = \langle \frac{1}{2}\tau_1 | (-1)^m T_{-m}(1) | \frac{3}{2}\tau_2 \rangle \quad (\text{F.8})$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}+\tau_1} \langle \frac{1}{2} - \tau_1 | (-1)^m T_{-m}(1) | \frac{3}{2}\tau_2 \rangle \quad (\text{F.9})$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}+\tau_1} (1 m \frac{1}{2} - \tau_1 | \frac{3}{2}\tau_2) \quad (\text{F.10})$$

und

$$g_{(\frac{3}{2}\tau_4),(\frac{1}{2}\tau_3)}^I = \langle \frac{3}{2}\tau_4 | T_m^\dagger(2) | \frac{1}{2}\tau_3 \rangle \quad (\text{F.11})$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}+\tau_3} (1 m \frac{1}{2} - \tau_3 | \frac{3}{2}\tau_4) . \quad (\text{F.12})$$

Anhang G

Multipol-Entwicklung der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung

Um eine Trennung der Variablen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ in der Δ -Loch-Restwechselwirkung zu erreichen, entwickeln wir die im Anhang 2.4 festgelegten Ein-Meson-Austauschpotentiale nach Multipolen. Die Vorgehensweise ist die gleiche wie bei Horie und Sasaki [64] und soll hier nur skizziert werden.

Zur Vorbereitung der Multipolentwicklung von $V_{\Delta N^{-1}, \Delta N^{-1}}$ spalten wir das Potential in seinen Zentral- ($\kappa = 0$) und Tensoranteil ($\kappa = 2$) auf:

$$V_{\Delta N^{-1}, \Delta N^{-1}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{\kappa=0,2} \tilde{v}^{(\kappa)}(\vec{r}) \quad , \quad (\text{G.1})$$

$$\tilde{v}^{(0)}(\vec{r}) = V_C(r) \vec{S}_2^\dagger \cdot \vec{S}_1 = V_0(r) (-\sqrt{3}) C^{(0)}(\hat{r}) [S_1 \otimes S_2^\dagger]^{(0)} \quad , \quad (\text{G.2})$$

$$\tilde{v}^{(2)}(\vec{r}) = V_T(r) S_{12}(\hat{r}) = V_2(r) \sqrt{30} [C^{(2)}(\hat{r}) \otimes [S_1 \otimes S_2^\dagger]^{(2)}]^{(0)} \quad . \quad (\text{G.3})$$

Dabei ist $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ und

$$C^{(\kappa)}(\hat{r}) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\kappa+1}} Y_\kappa(\hat{r}) \quad . \quad (\text{G.4})$$

Fourier-Transformation in den Impulsraum ergibt für das Potential:

$$v^{(\kappa)}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r V_\kappa(r) C^{(\kappa)}(\hat{r}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \quad (\text{G.5})$$

$$= \frac{1}{4\pi} i^\kappa v_\kappa(p) C^{(\kappa)}(\hat{p}) \quad (\text{G.6})$$

mit

$$v_\kappa(p) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dr r^2 j_\kappa(pr) V_\kappa(r) \quad , \quad (\text{G.7})$$

wobei $j_\kappa(pr)$ die sphärische Besselfunktion der Ordnung κ ist. Rücktransformation in den Ortsraum liefert:

$$\begin{aligned} V_\kappa(r) C^{(\kappa)}(\hat{r}) &= \frac{1}{4\pi} i^\kappa \int d^3p v^{(\kappa)}(\vec{p}) C^{(\kappa)}(\hat{p}) e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)} \\ &= \sum_{k_1, k_2} i^{k_1-k_2+\kappa} \frac{\hat{k}_1^2 \hat{k}_2^2}{\hat{\kappa}^2} (k_1 0 k_2 0 | \kappa 0) [C_1^{(k_1)} \otimes C_2^{(k_2)}]^{(\kappa)} v^{(k_1, k_2, \kappa)}(r_1, r_2) \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

mit

$$v^{(k_1, k_2, \kappa)}(r_1, r_2) = \int_0^\infty dp p^2 j_{k_1}(pr_1) j_{k_2}(pr_2) v_\kappa(p) \quad (\text{G.9})$$

und $\hat{\kappa} := \sqrt{2\kappa+1}$. In Gleichung G.8 ist $[C_1^{(k_1)} \otimes C_2^{(k_2)}]^{(\kappa)}$ das Tensorprodukt der beiden sphärischen Tensoren der Ordnung k_1 und k_2 , gekoppelt zum Tensor mit Drehimpuls κ .

Für den Zentralteil $\tilde{v}^{(\kappa=0)}(\vec{r}) = V_C(r) \vec{S}_2^\dagger \cdot \vec{S}_1$ folgt daraus:

$$V_C(r) \vec{S}_2^\dagger \cdot \vec{S}_1 = \sum_l (-1)^{l+1} \hat{l}^3 \sqrt{3} v_l(r_1, r_2) [[C^{(l)}(\hat{r}_1) \otimes C^{(l)}(\hat{r}_2)]^{(0)} [S_1 \otimes S_2^\dagger]^{(0)}]^{(0)} \quad (\text{G.10})$$

$$= 4\pi \sum_{l,j} (-1)^{l+1} \hat{j} v_l(r_1, r_2) [[Y_l(\hat{r}_1) \otimes S_1]^{(j)} [Y_l(\hat{r}_2) \otimes S_2^\dagger]^{(j)}]^{(0)} \quad (\text{G.11})$$

$$= -4\pi \sum_{j,m,l} v_l(r_1, r_2) [i^l Y_l(\hat{r}_1) \otimes S_1]^{(\widetilde{j m})} [i^l Y_l(\hat{r}_2) \otimes S_2^\dagger]^{(j m)} \quad (\text{G.12})$$

mit

$$v_l(r_1, r_2) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) V_C(r) P_l(\cos \theta) . \quad (\text{G.13})$$

θ ist hier der Winkel zwischen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ und $(\widetilde{j m})$ ist der zeitumgekehrte Zustand zu $(j m)$, d.h. :

$$[\dots]^{(\widetilde{j m})} = (-1)^{j+m} [\dots]^{(j-m)} . \quad (\text{G.14})$$

Für den Tensorteil $\tilde{v}^{(\kappa=2)}(\vec{r}) = V_T(r) S_{12}(\hat{r})$ ergibt sich analog:

$$\begin{aligned} V_T(r) S_{12}(\hat{r}) &= \sqrt{30} \sum_{l_1, l_2} i^{l_1-l_2+2} \frac{\hat{l}_1^2 \hat{l}_2^2}{\hat{2}^2} (l_1 0 l_2 0 | 2 0) v^{(l_1, l_2, 2)}(r_1, r_2) \\ &\quad [[C^{(l_1)}(\hat{r}_1) \otimes C^{(l_2)}(\hat{r}_2)]^{(2)} [S_1 \otimes S_2^\dagger]^{(2)}]^{(0)} \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

$$= \sqrt{30} \sum_{l_1, l_2, j} i^{l_1 - l_2 + 2} \frac{\hat{l}_1^2 \hat{l}_2^2 \hat{j}}{2} (-1)^{j+1+l_2} (l_1 0 l_2 0 | 20) W(l_1 1 l_2 1; j 2) \\ v^{(l_1, l_2, 2)}(r_1, r_2) [[C^{(l_1)}(\hat{r}_1) \otimes S_1]^{(j)} [C^{(l_2)}(\hat{r}_2) \otimes S_2^\dagger]^{(j)}]^{(0)} \quad (\text{G.16})$$

$$= \sqrt{6} \sum_{l_1, l_2, j} (-1)^j 4\pi \hat{l}_1 \hat{l}_2 (l_1 0 l_2 0 | 20) W(l_1 1 l_2 1; j 2) \\ v^{(l_1, l_2, 2)}(r_1, r_2) [i^{l_1} Y_{l_1}(\hat{r}_1) \otimes S_1]^{(\widetilde{j m})} [i^{l_2} Y_{l_2}(\hat{r}_2) \otimes S_2^\dagger]^{(j m)} \quad (\text{G.17})$$

Für die $v^{(l_1, l_2, 2)}(r_1, r_2)$ gilt:

$$v^{(l, l, 2)}(r_1, r_2) = r_1 r_2 \left\{ \frac{2l+3}{2l+1} w^{(l-1)}(r_1, r_2) + \frac{2l-1}{2l+1} w^{(l+1)}(r_1, r_2) \right\} \\ - (r_1^2 + r_2^2) w^{(l)}(r_1, r_2) \quad (\text{G.18})$$

$$v^{(l, l+2, 2)}(r_1, r_2) = r_2^2 w^{(l)}(r_1, r_2) - 2r_1 r_2 w^{(l+1)}(r_1, r_2) + r_1^2 w^{(l+2)}(r_1, r_2) \quad (\text{G.19})$$

$$v^{(l_2, l_1, 2)}(r_1, r_2) = v^{(l_1, l_2, 2)}(r_2, r_1) \quad (\text{G.20})$$

wobei

$$w^{(l)}(r_1, r_2) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \frac{V_T(r)}{r^2} P_l(\cos \theta) \quad (\text{G.21})$$

Damit haben wir eine allgemeine Multipol-Entwicklung sowohl für den Zentral- als auch den Tensorteil gewonnen:

$$\hat{v}^{(\kappa)}(\vec{r}) = \sum_{j, m, l_1, l_2} v_{l_1, l_2, j}^{(\kappa)}(r_1, r_2) [i^{l_1} Y_{l_1}(\hat{r}_1) \otimes S_1]^{(\widetilde{j m})} [i^{l_2} Y_{l_2}(\hat{r}_2) \otimes S_2^\dagger]^{(j m)} \quad (\text{G.22})$$

Für $\hat{v}^{(\kappa)}(\vec{r})$ gilt im Falle der Zentralkraft:

$$\hat{v}^{(\kappa)}(\vec{r}) = -4\pi v_l(r_1, r_2) \delta_{l, l_1} \delta_{l, l_2} \quad (\text{G.23})$$

und im Falle der Tensorkraft:

$$\hat{v}^{(\kappa)}(\vec{r}) = 4\pi \sqrt{6} (-1)^j \hat{l}_1 \hat{l}_2 (l_1 0 l_2 0 | 20) W(l_1 1 l_2 1; j 2) \\ v^{(l_1, l_2, 2)}(r_1, r_2) \quad (\text{G.24})$$

Die Integrationen in den Gleichungen G.13 und G.21 sind analytisch nur für bestimmte Klassen von Potentialen ausführbar, z.B. für Potentiale von Yukawa- oder Gaußform. Diese Potentiale können in der folgenden Form analytisch in Legendre-Polynome entwickelt werden [65, Kapitel 16]:

$$\frac{e^{-k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -k \sum_l (2l+1) j_l(ikr_<) h_l^1(ikr_>) P_l(\cos \theta) \quad , \quad (G.25)$$

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = ik \sum_l (2l+1) j_l(kr_<) h_l^1(kr_>) P_l(\cos \theta) \quad . \quad (G.26)$$

Dabei sind $r_<$, bzw. $r_>$ der betragsmäßig kleinere, bzw. größere der beiden Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{r}'$, $j_l(kr_<)$ ist die sphärische Besselfunktion erster Art und $h_l^1(kr_>)$ ist die sphärische Hankelfunktion erster Art, definiert wie in Jackson [65].

Die Orthogonalitätsrelationen der Legendre-Polynome lauten:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) P_l(\cos \theta) P_k(\cos \theta) = \frac{1}{2k+1} \delta_{l,k} \quad . \quad (G.27)$$

Mit Hilfe von (G.27) lassen sich die Integrale in den Gleichungen G.13 und G.21 leicht analytisch lösen, wenn die Potentiale von Yukawa- oder Gaußform sind und wir daher die Entwicklungen in Legendre-Polynome (G.25) - (G.26) benutzen können.

Anhang H

Das Übergangsmatrixelement für den quasifreien Zerfall

Das Übergangsmatrixelement für den quasifreien Zerfall des Δ 's haben wir in Abschnitt 2.8 in der folgenden Weise definiert:

$$\mathcal{M}_{\pi p, X}(J'_h M'_h \varepsilon'_h; \vec{q}'_p \frac{1}{2} m'_s; \vec{q}'_\pi, \vec{q}) = \langle J'_h M'_h \varepsilon'_h; \vec{q}'_p \frac{1}{2} m'_s | F_{\pi N \Delta}(\vec{q}'_\pi) | \psi_\Delta \rangle \quad . \quad (\text{H.1})$$

Entwickeln wir nun den kohärenten Δ -Loch-Zustand $|\psi_\Delta\rangle$ wie in Gl. D.2 und D.3 nach Teilchen-Lochzuständen, so können wir mit Hilfe des Endzustands

$$\langle \hat{\rho}_{\pi p} | = \langle J'_h M'_h \varepsilon'_h; \vec{q}'_p \frac{1}{2} m'_s | F_{\pi N \Delta}(\vec{q}'_\pi) \quad (\text{H.2})$$

und der zugehörigen Radialwellenfunktion $\hat{\rho}_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r)$ das Übergangsmatrixelement in der folgenden Form schreiben:

$$\mathcal{M}_{\pi p, X}(J'_h M'_h \varepsilon'_h; \vec{q}'_p \frac{1}{2} m'_s; \vec{q}'_\pi, \vec{q}) = \sum_{j_t m_t} \sum_{ph}^{N_c} \int dr \hat{\rho}_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) \psi_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) \quad . \quad (\text{H.3})$$

Im Folgenden werden wir $\hat{\rho}_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r)$ explizit herleiten. Dazu entwickeln wir die Protonenwellenfunktion nach Multipolen:

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}'_p \frac{1}{2} m'_s | \vec{r} \rangle &= e^{i\vec{q}'_p \cdot \vec{r}} \chi_{\frac{1}{2} m'_s}^\dagger \\ &= 4\pi \sum_{l_p m_{l_p}} i^{l_p} j_{l_p}(q'_p r) Y_{l_p m_{l_p}}(\hat{q}'_p) Y_{l_p m_{l_p}}^*(\hat{r}) \chi_{\frac{1}{2} m'_s}^\dagger \\ &= 4\pi \sum_{\substack{l_p m_{l_p} \\ j_p m_p}} i^{l_p} j_{l_p}(q'_p r) (l_p m_{l_p} \frac{1}{2} m'_s | j_p m_p) Y_{l_p m_{l_p}}(\hat{q}'_p) \left[Y_{l_p}^*(\hat{r}) \otimes \chi_{\frac{1}{2}}^\dagger \right]_{j_p m_p} \end{aligned}$$

$$= 4\pi \sum_{\substack{l_p m_{l_p} \\ j_p m_p}} i^{l_p} j_{l_p}(q'_p r) (l_p m_{l_p} \frac{1}{2} m'_s | j_p m_p) Y_{l_p m_{l_p}}(\hat{q}'_p) \langle (l_p \frac{1}{2}) j_p m_p | \hat{r} \rangle. \quad (\text{H.4})$$

Für den Abregungsoperator folgt aus Gl. C.3:

$$F_{\pi N \Delta}(\vec{q}'_\pi) = (-4\pi) \frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\pi} q'_\pi T_{\alpha'} \sum_{l_\pi, j_\pi} (-i)^{l_\pi} j_{l_\pi}(q'_\pi r) \hat{l}_\pi (l_\pi 0 1 0 | j_\pi 0) \left[Y_{j_\pi}(\hat{q}'_\pi) \otimes \left[Y_{l_\pi}(\hat{r}) \otimes S_{(1)} \right]_{(j_\pi)} \right]_{(00)}. \quad (\text{H.5})$$

Durch Einsetzen von Gl. H.4 und H.5 in die Definition des Endzustands erhalten wir für die Radialwellenfunktion:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) &= \langle \tilde{\rho}_{\pi p} | [Y_p \Phi_h]_{j_t m_t} r \\ &= \sum_{m_\Delta m_h} \sum_{\tau_\Delta \tau_p} (j_\Delta m_\Delta j_h m_h | j_t m_t) \langle J'_h M'_h | j_h m_h \rangle \\ &= 4\pi \sum_{\substack{l_p m_{l_p} \\ j_p m_p}} i^{l_p} j_{l_p}(q'_p r) (l_p m_{l_p} \frac{1}{2} m'_s | j_p m_p) Y_{l_p m_{l_p}}(\hat{q}'_p) \\ &\quad (-4\pi) \frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\pi} (q'_\pi r) \sum_{l_\pi, j_\pi, m_\pi} (-i)^{l_\pi} j_{l_\pi}(q'_\pi r) \hat{l}_\pi (l_\pi 0 1 0 | j_\pi 0) \\ &\quad (j_\pi m_\pi j_\pi - m_\pi | 00) Y_{j_\pi m_\pi}(\hat{q}'_\pi) \\ &\quad \langle (l_p \frac{1}{2}) j_p m_p, \frac{1}{2} \tau_p | \left[Y_{l_\pi}(\hat{r}) \otimes S_{(1)} \right]_{(j_\pi - m_\pi)} T_{\alpha'} | (l_\Delta \frac{3}{2}) j_\Delta m_\Delta, \frac{3}{2} \tau_\Delta \rangle. \end{aligned} \quad (\text{H.6})$$

Analog zu Anhang B (Gl. B.32 - B.34) gilt für das Matrixelement in Gl. H.6:

$$\begin{aligned} \langle (l_p \frac{1}{2}) j_p m_p, \frac{1}{2} \tau_p | \left[Y_{l_\pi}(\hat{r}) \otimes S_{(1)} \right]_{(j_\pi - m_\pi)} T_{\alpha'} | (l_\Delta \frac{3}{2}) j_\Delta m_\Delta, \frac{3}{2} \tau_\Delta \rangle &= \\ (-2) i^{l_\Delta} \hat{j}_\Delta \hat{j}_\pi \frac{\hat{l}_\Delta \hat{l}_\pi}{\sqrt{4\pi}} (l_\Delta 0 l_\pi 0 | l_p 0) (j_\Delta m_\Delta j_\pi - m_\pi | j_p m_p) \\ (1 - \alpha' \frac{1}{2} \tau_p | \frac{3}{2} \tau_\Delta) \begin{Bmatrix} l_p & \frac{1}{2} & j_p \\ l_\Delta & \frac{3}{2} & j_\Delta \\ l_\pi & 1 & j_\pi \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{H.7})$$

Damit ergibt sich schließlich für die Radialwellenfunktion:

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r) = & 2\sqrt{4\pi}^3 \sum_{m_\Delta m_h} \sum_{\tau_\Delta \tau_p} \sum_{l_p m_{l_p}} \sum_{l_\pi, j_\pi, m_\pi} (j_\Delta m_\Delta j_h m_h | j_t m_t) \delta_{J'_h j_h} \delta_{M'_h m_h} \\
& i^{l_\Delta + l_p - l_\pi} \frac{f_\pi N \Delta}{m_\pi} (q'_p r) \hat{j}_\Delta \hat{l}_\Delta \hat{l}_\pi^2 j_{l_p}(q'_p r) j_{l_\pi}(q'_\pi r) (-1)^{j_\pi - m_\pi} \\
& (l_\Delta 0 l_\pi 0 | l_p 0) (l_\pi 0 1 0 | j_\pi 0) (l_p m_{l_p} \frac{1}{2} m'_s | j_p m_p) \\
& (j_\Delta m_\Delta j_\pi - m_\pi | j_p m_p) Y_{l_p m_{l_p}}(\hat{q}'_p) Y_{j_\pi m_\pi}(\hat{q}'_\pi) (1 - \alpha' \frac{1}{2} \tau_p | \frac{3}{2} \tau_\Delta) \\
& \left\{ \begin{matrix} l_p & \frac{1}{2} & j_p \\ l_\Delta & \frac{3}{2} & j_\Delta \\ l_\pi & 1 & j_\pi \end{matrix} \right\} . \tag{H.8}
\end{aligned}$$

Bei der Herleitung von Gl. H.8 haben wir das Proton und das Pion als ebene Wellen behandelt. Daher treten in Gl. H.8 auch die Besselfunktionen $j_{l_p}(q'_p r)$ und $j_{l_\pi}(q'_\pi r)$ auf. Bei einer realistischen Behandlung der auslaufenden Teilchen müssen das Proton und das Pion distortiert werden. Wir erhalten die distortierten Wellenfunktionen des Protons und Pions $\chi_{l_p}(q'_p, r)$ und $\chi_{l_\pi}(q'_\pi, r)$, indem wir die zugehörigen Schrödingergleichungen mit einem optischen Potential lösen [36]. Die Parameter der optischen Potentiale entnehmen wir für das Proton einer Studie der elastischen Proton-Kern-Streuung [58] und für das Pion dem Programm PIRK [59] zur Berechnung der elastischen Pion-Kern-Streuung. Die Distorsion der auslaufenden Teilchen berücksichtigen wir in Gl. H.8 durch Einsetzen der entsprechenden distortierten Wellenfunktionen statt der Besselfunktionen.

Anhang I

Das Übergangsmatrixelement für die 2-Nukleon-Knockout - Reaktion

In Abschnitt 2.9 haben wir das Übergangsmatrixelement für die 2-Nukleon-Knockout - Reaktion angegeben:

$$\mathcal{M}_{2N,x}(J'_h M'_h \varepsilon'_h; \vec{q}'_{p1} \frac{1}{2} m'_{s1}; \vec{q}'_{p2} \frac{1}{2} m'_{s2}, \vec{q}) = \langle J'_h M'_h \varepsilon'_h; \vec{q}'_{p1} \frac{1}{2} m'_{s1}; \vec{q}'_{p2} \frac{1}{2} m'_{s2} | V_{2N} | \psi_\Delta \rangle . \quad (\text{I.1})$$

Wie in Anhang H führen wir den Endzustand $\langle \hat{\rho}_{2N} |$ ein und können deshalb das Übergangsmatrixelement in der folgenden Form schreiben:

$$\mathcal{M}_{2N,x}(J'_h M'_h \varepsilon'_h; \vec{q}'_{p1} \frac{1}{2} m'_{s1}; \vec{q}'_{p2} \frac{1}{2} m'_{s2}, \vec{q}) = \sum_{j_t m_t} \sum_{ph}^{N_c} \int dr_1 \hat{\rho}_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r_1) \psi_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r_1) , \quad (\text{I.2})$$

$$\hat{\rho}_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r_1) = \langle \hat{\rho}_{2N} | [Y_p \Phi_h]_{j_t m_t} r_1 . \quad (\text{I.3})$$

Im Folgenden bestimmen wir die zu $\langle \hat{\rho}_{2N} |$ gehörende Radialwellenfunktion $\hat{\rho}_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r_1)$. Dazu geben wir zunächst die Protonenzustände im Ortsraum an (siehe Gl. H.4):

$$\langle \vec{q}'_{p1} \frac{1}{2} m'_{s1} | \vec{r}_1 \rangle = 4\pi \sum_{\substack{l_{p1} m_{l_{p1}} \\ j_{p1} m_{p1}}} i^{l_{p1}} j_{l_{p1}}(q'_{p1} r_1) (l_{p1} m_{l_{p1}} \frac{1}{2} m'_{s1} | j_{p1} m_{p1}) Y_{l_{p1} m_{l_{p1}}}(\hat{q}'_{p1}) \langle (l_{p1} \frac{1}{2}) j_{p1} m_{p1} | \hat{r}_1 \rangle , \quad (\text{I.4})$$

$$\langle \vec{q}'_{p2} \frac{1}{2} m'_{s2} | \vec{r}_2 \rangle = 4\pi \sum_{\substack{l_{p2} m_{l_{p2}} \\ j_{p2} m_{p2}}} i^{l_{p2}} j_{l_{p2}}(q'_{p2} r_2) (l_{p2} m_{l_{p2}} \frac{1}{2} m'_{s2} | j_{p2} m_{p2}) Y_{l_{p2} m_{l_{p2}}}(\hat{q}'_{p2}) \langle (l_{p2} \frac{1}{2}) j_{p2} m_{p2} | \hat{r}_2 \rangle . \quad (\text{I.5})$$

Den Produktzustand der beiden Nukleonen können wir damit in der folgenden Weise schreiben:

$$\begin{aligned}
& \langle J'_h M'_h \varepsilon'_h; \vec{q}'_{p^1} \frac{1}{2} m'_{s^1}; \vec{q}'_{p^2} \frac{1}{2} m'_{s^2} \mid \vec{r}_1; \vec{r}_2 \rangle = \\
& (4\pi)^2 \sum_{\substack{l_{p^1} m_{l_{p^1}} \\ j_{p^1} m_{p^1}}} \sum_{\substack{l_{p^2} m_{l_{p^2}} \\ j_{p^2} m_{p^2}}} i^{l_{p^1}+l_{p^2}} j_{l_{p^1}}(q'_{p^1} r_1) j_{l_{p^2}}(q'_{p^2} r_2) Y_{l_{p^1} m_{l_{p^1}}}(\hat{q}'_{p^1}) Y_{l_{p^2} m_{l_{p^2}}}(\hat{q}'_{p^2}) \\
& \quad (l_{p^1} m_{l_{p^1}} \frac{1}{2} m'_{s^1} \mid j_{p^1} m_{p^1}) (l_{p^2} m_{l_{p^2}} \frac{1}{2} m'_{s^2} \mid j_{p^2} m_{p^2}) \\
& \quad \langle (l_{p^1} \frac{1}{2}) j_{p^1} m_{p^1}; (l_{p^2} \frac{1}{2}) j_{p^2} m_{p^2}; J'_h M'_h \varepsilon'_h \mid \hat{r}_1; \hat{r}_2 \rangle = \\
& (4\pi)^2 \sum_{\substack{l_{p^1} m_{l_{p^1}} \\ j_{p^1} m_{p^1}}} \sum_{\substack{l_{p^2} m_{l_{p^2}} \\ j_{p^2} m_{p^2}}} \sum_{\substack{j'_{h^1} j'_{h^2} \\ J_p M_p \\ JM}} i^{l_{p^1}+l_{p^2}} j_{l_{p^1}}(q'_{p^1} r_1) j_{l_{p^2}}(q'_{p^2} r_2) Y_{l_{p^1} m_{l_{p^1}}}(\hat{q}'_{p^1}) Y_{l_{p^2} m_{l_{p^2}}}(\hat{q}'_{p^2}) \\
& \quad (l_{p^1} m_{l_{p^1}} \frac{1}{2} m'_{s^1} \mid j_{p^1} m_{p^1}) (l_{p^2} m_{l_{p^2}} \frac{1}{2} m'_{s^2} \mid j_{p^2} m_{p^2}) \\
& \quad (j_{p^1} m_{p^1} j_{p^2} m_{p^2} \mid J_p M_p) (J_p M_p J'_h M'_h \mid JM) \\
& \quad \langle (j_{p^1} j_{p^2}) J_p (j'_{h^1} j'_{h^2}) J'_h, JM \mid \hat{r}_1; \hat{r}_2 \rangle = \\
& (4\pi)^2 \sum_{\substack{l_{p^1} m_{l_{p^1}} \\ j_{p^1} m_{p^1}}} \sum_{\substack{l_{p^2} m_{l_{p^2}} \\ j_{p^2} m_{p^2}}} \sum_{\substack{j'_{h^1} j'_{h^2} \\ J_p M_p \\ JM}} i^{l_{p^1}+l_{p^2}} j_{l_{p^1}}(q'_{p^1} r_1) j_{l_{p^2}}(q'_{p^2} r_2) Y_{l_{p^1} m_{l_{p^1}}}(\hat{q}'_{p^1}) Y_{l_{p^2} m_{l_{p^2}}}(\hat{q}'_{p^2}) \\
& \quad (l_{p^1} m_{l_{p^1}} \frac{1}{2} m'_{s^1} \mid j_{p^1} m_{p^1}) (l_{p^2} m_{l_{p^2}} \frac{1}{2} m'_{s^2} \mid j_{p^2} m_{p^2}) \\
& \quad (j_{p^1} m_{p^1} j_{p^2} m_{p^2} \mid J_p M_p) (J_p M_p J'_h M'_h \mid JM) \\
& \quad \sum_{J_1 J_2} \hat{J}_1 \hat{J}_2 \hat{J}_p \hat{J}'_h \begin{Bmatrix} j_{p^1} & j'_{h^1} & J_1 \\ j_{p^2} & j'_{h^2} & J_2 \\ J_p & J'_h & J \end{Bmatrix} \langle (j_{p^1} j'_{h^1}) J_1 (j_{p^2} j'_{h^2}) J_2, JM \mid \hat{r}_1; \hat{r}_2 \rangle.
\end{aligned} \tag{I.6}$$

Dabei haben wir die Drehimpulse von Proton p^1 und p^2 zum Gesamtdrehimpuls J_p gekoppelt. Die Drehimpulse j'_{h^1} und j'_{h^2} der beiden Löcher waren schon ursprünglich zum Gesamtdrehimpuls des Restkernzustandes J'_h gekoppelt. Anschließend haben wir die Proton- und Loch-Drehimpulse mit Hilfe des $9J$ -Symbols zu den Drehimpulsen von Vertex 1 und 2 J_1 und J_2 umgekoppelt.

Nun entwickeln wir die Wechselwirkung V_{2N} zwischen dem Δ und einem weiteren Nu-

kleon des Kerns aus Gl. 2.93 nach Multipolen. In Anhang G führen wir die Multipolentwicklung der ΔN^{-1} -Restwechselwirkung durch; die dabei erhaltenen Ergebnisse können wir auf die Entwicklung von V_{2N} übertragen. Da V_{2N} nur einen Zentralanteil hat gilt:

$$V_{2N}(r) \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{S}_1 = -4\pi \sum_{j,m,l} v_l(r_1, r_2) (-1)^{j+m} [i^l Y_l(\hat{r}_1) \otimes S_1]_{(j-m)} [i^l Y_l(\hat{r}_2) \otimes \sigma_2]_{(jm)}. \quad (I.7)$$

Setzen wir den Radialteil der Wechselwirkung $V_{2N}(r)$ in Gl. G.13 ein, so erhalten wir für $v_l(r_1, r_2)$:

$$V_{2N}(r) = V_0 \delta^3(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = V_0 \frac{\delta(r_2 - r_1)}{r_1 r_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} P_k(\cos \theta) \Rightarrow \quad (I.8)$$

$$v_l(r_1, r_2) = \frac{1}{4\pi} V_0 \frac{\delta(r_2 - r_1)}{r_2 r_1}. \quad (I.9)$$

Dabei haben wir die Orthonormalitätsrelation der Legendre Polynome (Gl. G.27) benutzt.

Schreiben wir nun den Zustand $\langle (j_{p1} j'_{h1}) J_1 (j_{p2} j'_{h2}) J_2, JM |$ aus Gl. I.6, die Wechselwirkung V_{2N} und den Teilchen-Loch-Zustand $| [Y_p \Phi_h]_{j_t m_t} \rangle$ wie in Anhang E in 2. Quantisierung, so ergibt sich nach Kontraktion der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

$$\begin{aligned} & \langle (j_{p1} j'_{h1}) J_1 (j_{p2} j'_{h2}) J_2, JM | V_{2N} | [Y_p \Phi_h]_{j_t m_t} \rangle = \\ & \sum_{m_\Delta m_h} \sum_{\substack{M_1 M_2 \\ m_{p1} m'_{h1} \\ m_{p2} m'_{h2}}} (j_\Delta m_\Delta j_h m_h | j_t m_t) (J_1 M_1 J_2 M_2 | j_t m_t) (j_{p1} m_{p1} j'_{h1} m'_{h1} | J_1 M_1) \\ & (-1)^{j'_{h1} + m'_{h1}} (-1)^{j'_{h2} + m'_{h2}} (-1)^{j_h + m_h} \delta_{j'_{h1}, j_h} \delta_{m'_{h1}, m_h} (j_{p2} m_{p2} j'_{h2} m'_{h2} | J_2 M_2) \\ & \delta_{J, j_t} \delta_{M, m_t} \langle j_{p2} m_{p2} j_{p1} m_{p1} | V_{2N} | j'_{h2} - m'_{h2} j_\Delta m_\Delta \rangle. \quad (I.10) \end{aligned}$$

Setzen wir jetzt die nach Multipolen entwickelte Wechselwirkung (Gl. I.7) in das Matrixelement aus Gl. I.10 ein, so gilt:

$$\begin{aligned}
& \langle j_{p^2} m_{p^2} j_{p^1} m_{p^1} | V_{2N} | j'_{h^2} - m'_{h^2} j_{\Delta} m_{\Delta} \rangle = \\
& -4\pi \sum_{j, m, l} v_l(r_1, r_2) (-1)^{j+m} \langle (l_{p^1} \frac{1}{2}) j_{p^1} m_{p^1} | [i^l Y_l(\hat{r}_1) \otimes S_1]_{(j-m)} | (l_{\Delta} \frac{3}{2}) j_{\Delta} m_{\Delta} \rangle \\
& \langle (l_{p^2} \frac{1}{2}) j_{p^2} m_{p^2} | [i^l Y_l(\hat{r}_2) \otimes \sigma_2]_{(jm)} | (l'_{h^2} \frac{1}{2}) j'_{h^2} - m'_{h^2} \rangle = \\
& 2\sqrt{6} \sum_{j, m, l} v_l(r_1, r_2) (-1)^{j+m} i^{2l+l'_{h^2}+l_{\Delta}} \hat{j}^2 \hat{j}'_{h^2} \hat{j}_{\Delta} \hat{l}^2 \hat{l}'_{h^2} \hat{l}_{\Delta} (j_{\Delta} m_{\Delta} j - m | j_{p^1} m_{p^1}) \\
& (j'_{h^2} - m'_{h^2} j m | j_{p^2} m_{p^2}) (l_{\Delta} 0 l 0 | l_{p^1} 0) (l'_{h^2} 0 l 0 | l_{p^2} 0) \left\{ \begin{matrix} l_{p^1} & \frac{1}{2} & j_{p^1} \\ l_{\Delta} & \frac{3}{2} & j_{\Delta} \\ l & 1 & j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_{p^2} & \frac{1}{2} & j_{p^2} \\ l'_{h^2} & \frac{1}{2} & j'_{h^2} \\ l & 1 & j \end{matrix} \right\} \\
& \hspace{15cm} (I.11)
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Matricelemente an Vertex 1 und 2 ausgewertet und eingesetzt. Für das Matricelement an Vertex 1 gilt:

$$\begin{aligned}
& \langle (l_{p^1} \frac{1}{2}) j_{p^1} m_{p^1} | [i^l Y_l(\hat{r}_1) \otimes S_1]_{(j-m)} | (l_{\Delta} \frac{3}{2}) j_{\Delta} m_{\Delta} \rangle = \\
& \frac{-2}{\sqrt{4\pi}} i^{l+l_{\Delta}} \hat{j} \hat{j}_{\Delta} \hat{l} \hat{l}_{\Delta} (j_{\Delta} m_{\Delta} j - m | j_{p^1} m_{p^1}) (l_{\Delta} 0 l 0 | l_{p^1} 0) \left\{ \begin{matrix} l_{p^1} & \frac{1}{2} & j_{p^1} \\ l_{\Delta} & \frac{3}{2} & j_{\Delta} \\ l & 1 & j \end{matrix} \right\} \\
& \hspace{15cm} (I.12)
\end{aligned}$$

und an Vertex 2:

$$\begin{aligned}
& \langle (l_{p^2} \frac{1}{2}) j_{p^2} m_{p^2} | [i^l Y_l(\hat{r}_2) \otimes \sigma_2]_{(jm)} | (l'_{h^2} \frac{1}{2}) j'_{h^2} - m'_{h^2} \rangle = \\
& \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4\pi}} i^{l+l'_{h^2}} \hat{j} \hat{j}'_{h^2} \hat{l} \hat{l}'_{h^2} (j'_{h^2} - m'_{h^2} j m | j_{p^2} m_{p^2}) (l'_{h^2} 0 l 0 | l_{p^2} 0) \left\{ \begin{matrix} l_{p^2} & \frac{1}{2} & j_{p^2} \\ l'_{h^2} & \frac{1}{2} & j'_{h^2} \\ l & 1 & j \end{matrix} \right\} . \\
& \hspace{15cm} (I.13)
\end{aligned}$$

Einsetzen von Gl. I.11 in Gl. I.10 ergibt schließlich:

$$\begin{aligned}
& \langle (j_{p^1} j'_{h^1}) J_1 (j_{p^2} j'_{h^2}) J_2, JM | V_{2N} | [Y_p \Phi_h]_{j_t m_t} \rangle = \\
& \sum_{m_\Delta m_h} \sum_{\substack{M_1 M_2 \\ m_{p^1} \\ m_{p^2} m'_{h^2}}} (j_\Delta m_\Delta j_h m_h | j_t m_t) (J_1 M_1 J_2 M_2 | j_t m_t) (j_{p^1} m_{p^1} j_h m_h | J_1 M_1) \\
& (-1)^{j'_{h^2} + m'_{h^2}} \delta_{j'_{h^1}, j_h} (j_{p^2} m_{p^2} j'_{h^2} m'_{h^2} | J_2 M_2) 2\sqrt{6} \sum_{j, m, l} v_l(r_1, r_2) (-1)^{j+m} i^{2l+l'_{h^2}+l_\Delta} \\
& \delta_{J, j_t} \delta_{M, m_t} \hat{j}^2 \hat{j}'_{h^2} \hat{j}_\Delta \hat{l}^2 \hat{l}'_{h^2} \hat{l}_\Delta (j_\Delta m_\Delta j - m | j_{p^1} m_{p^1}) (j'_{h^2} - m'_{h^2} j m | j_{p^2} m_{p^2}) \\
& (l_\Delta 0 l 0 | l_{p^1} 0) (l'_{h^2} 0 l 0 | l_{p^2} 0) \left\{ \begin{matrix} l_{p^1} & \frac{1}{2} & j_{p^1} \\ l_\Delta & \frac{3}{2} & j_\Delta \\ l & 1 & j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_{p^2} & \frac{1}{2} & j_{p^2} \\ l'_{h^2} & \frac{1}{2} & j'_{h^2} \\ l & 1 & j \end{matrix} \right\} = \\
& \sum_{m_\Delta m_h} \sum_{\substack{M_1 M_2 \\ m_{p^1}}} (j_\Delta m_\Delta j_h m_h | j_t m_t) (J_1 M_1 J_2 M_2 | j_t m_t) (j_{p^1} m_{p^1} j_h m_h | J_1 M_1) \\
& \delta_{j'_{h^1}, j_h} \delta_{J, j_t} \delta_{M, m_t} 2\sqrt{6} \sum_l v_l(r_1, r_2) (-1)^{J_2+M_2} i^{2l+l'_{h^2}+l_\Delta} \hat{j}_2 \hat{j}'_{h^2} \hat{j}_{p^1} \hat{j}_{p^2} \hat{l}^2 \hat{l}'_{h^2} \hat{l}_\Delta \\
& (j_\Delta m_\Delta J_2 - M_2 | j_{p^1} m_{p^1}) (l'_{h^2} 0 l 0 | l_{p^2} 0) (l_\Delta 0 l 0 | l_{p^1} 0) \\
& \left\{ \begin{matrix} l_{p^1} & \frac{1}{2} & j_{p^1} \\ l_\Delta & \frac{3}{2} & j_\Delta \\ l & 1 & J_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_{p^2} & \frac{1}{2} & j_{p^2} \\ l'_{h^2} & \frac{1}{2} & j'_{h^2} \\ l & 1 & J_2 \end{matrix} \right\} = \\
& \delta_{j'_{h^1}, j_h} \delta_{J, j_t} \delta_{M, m_t} 2\sqrt{6} \sum_l v_l(r_1, r_2) (-1)^{J_2+M_2} i^{2l+l'_{h^2}+l_\Delta} \hat{j}_2 \hat{j}'_{h^2} \hat{j}_{p^1} \hat{j}_{p^2} \hat{l}^2 \hat{l}'_{h^2} \hat{l}_\Delta \\
& (-1)^{J_1+J_2-j_t} (l'_{h^2} 0 l 0 | l_{p^2} 0) (l_\Delta 0 l 0 | l_{p^1} 0) \left((J_2 j_{p^1}) j_\Delta j_h j_t | J_2 (j_{p^1} j_h) J_1 j_t \right) \\
& \left\{ \begin{matrix} l_{p^1} & \frac{1}{2} & j_{p^1} \\ l_\Delta & \frac{3}{2} & j_\Delta \\ l & 1 & J_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_{p^2} & \frac{1}{2} & j_{p^2} \\ l'_{h^2} & \frac{1}{2} & j'_{h^2} \\ l & 1 & J_2 \end{matrix} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_{j'_{h1}, j_h} \delta_{J, j_t} \delta_{M, m_t} 2\sqrt{6} \sum_l v_l(r_1, r_2) (-1)^{J_2+M_2} i^{2l+l'_{h2}+l_\Delta} \hat{J}_1 \hat{J}_2 \hat{J}'_{h2} \hat{J}_{p1} \hat{J}_{p2} \hat{J}_\Delta \hat{l}^2 \hat{l}'_{h2} \hat{l}_\Delta \\
& (-1)^{J_1+J_2-j_t} (l'_{h2} 0 l 0 | l_{p2} 0) (l_\Delta 0 l 0 | l_{p1} 0) W(J_2 j_{p1} j_t j_h; j_\Delta J_1) \\
& \left\{ \begin{matrix} l_{p1} & \frac{1}{2} & j_{p1} \\ l_\Delta & \frac{3}{2} & j_\Delta \\ l & 1 & J_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_{p2} & \frac{1}{2} & j_{p2} \\ l'_{h2} & \frac{1}{2} & j'_{h2} \\ l & 1 & J_2 \end{matrix} \right\} .
\end{aligned} \tag{I.14}$$

Analog zur Herleitung von I.10 ergibt sich für das Isospinmatrixelement:

$$\begin{aligned}
& \langle \frac{1}{2} \tau_{p2} \frac{1}{2} \tau_{p1} | \vec{\tau}_2 \cdot \vec{T}_1 | \frac{1}{2} \tau'_{h2} \frac{3}{2} \tau_\Delta \rangle \\
& = (-1)^{\frac{1}{2}+\tau'_{h2}} \sum_{m=-1}^1 \langle \frac{1}{2} \tau_{p2} | \tau_m | \frac{1}{2} - \tau'_{h2} \rangle \langle \frac{1}{2} \tau_{p1} | (-1)^m T_{-m} | \frac{3}{2} \tau_\Delta \rangle \\
& = (-\sqrt{3}) (-1)^{\frac{1}{2}+\tau'_{h2}} \sum_{m=-1}^1 (1 m \frac{1}{2} \tau_{p1} | \frac{3}{2} \tau_\Delta) (1 m \frac{1}{2} - \tau'_{h2} | \frac{3}{2} \tau_{p2}) .
\end{aligned} \tag{I.15}$$

Damit gilt dann für die Radialwellenfunktion $\tilde{\rho}_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{(ph)}^{(j_t m_t)}(r_1) & = \langle J'_h M'_h \epsilon'_h; \vec{q}'_{p1} \frac{1}{2} m'_{s1}; \vec{q}'_{p2} \frac{1}{2} m'_{s2} | V_{2N} | [Y_p \Phi_h]_{j_t m_t} \rangle r_1 \\
& = (4\pi)^2 \sum_{\substack{l_{p1} m_{l_{p1}} \\ j_{p1} m_{p1}}} \sum_{\substack{l_{p2} m_{l_{p2}} \\ j_{p2} m_{p2}}} \sum_{\substack{j'_{h2} \\ J_p M_p}} \sum_{J_1 J_2} i^{l_{p1}+l_{p2}} \sum_{\substack{\tau_\Delta \tau'_{h2} \\ \tau_{p1} \tau_{p2}}} \hat{J}_1 \hat{J}_2 \hat{J}_p \hat{J}'_h \\
& (j_{p1} m_{p1} j_{p2} m_{p2} | J_p M_p) (J_p M_p J'_h M'_h | j_t m_t) Y_{l_{p1} m_{l_{p1}}}(\hat{q}'_{p1}) Y_{l_{p2} m_{l_{p2}}}(\hat{q}'_{p2}) \\
& (l_{p1} m_{l_{p1}} \frac{1}{2} m'_{s1} | j_{p1} m_{p1}) (l_{p2} m_{l_{p2}} \frac{1}{2} m'_{s2} | j_{p2} m_{p2}) \left\{ \begin{matrix} j_{p1} & j'_{h1} & J_1 \\ j_{p2} & j'_{h2} & J_2 \\ J_p & J'_h & j_t \end{matrix} \right\} \\
& 2\sqrt{6} \sum_l \frac{V_0}{4\pi} (-1)^{J_2+M_2} i^{2l+l'_{h2}+l_\Delta} \hat{J}_1 \hat{J}_2 \hat{J}'_{h2} \hat{J}_{p1} \hat{J}_{p2} \hat{J}_\Delta \hat{l}^2 \hat{l}'_{h2} \hat{l}_\Delta \\
& (-1)^{J_1+J_2-j_t} (l'_{h2} 0 l 0 | l_{p2} 0) (l_\Delta 0 l 0 | l_{p1} 0) W(J_2 j_{p1} j_t j_h; j_\Delta J_1) \\
& \left\{ \begin{matrix} l_{p1} & \frac{1}{2} & j_{p1} \\ l_\Delta & \frac{3}{2} & j_\Delta \\ l & 1 & J_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_{p2} & \frac{1}{2} & j_{p2} \\ l'_{h2} & \frac{1}{2} & j'_{h2} \\ l & 1 & J_2 \end{matrix} \right\}
\end{aligned}$$

$$(-\sqrt{3})(-1)^{\frac{1}{2}+\tau'_{h^2}} \sum_{m=-1}^1 (1\ m\ \frac{1}{2}\ \tau_{p^1} \mid \frac{3}{2}\ \tau_{\Delta}) (1\ m\ \frac{1}{2} - \tau'_{h^2} \mid \frac{3}{2}\ \tau_{p^2})$$

$$r_1 \int dr_2 \delta(r_2 - r_1) j_{l_{p^1}}(q'_{p^1} r_1) j_{l_{p^2}}(q'_{p^2} r_2) \phi_{n'_{h^2} (l'_{h^2} \frac{1}{2}) j'_{h^2}}(r_2) . \quad (I.16)$$

Wie in Anhang H erhalten wir das Übergangsmatrixelement unter Berücksichtigung der Distorsion der auslaufenden Nukleonen, indem wir die Besselfunktionen $j_{l_{p^1}}(q'_{p^1} r_1)$ und $j_{l_{p^2}}(q'_{p^2} r_2)$ durch die entsprechenden distortierten Wellenfunktionen $\chi_{l_{p^1}}(q'_{p^1}, r_1)$ und $\chi_{l_{p^2}}(q'_{p^2}, r_2)$ ersetzen.

Literaturverzeichnis

- [1] Eine Übersicht über die experimentelle und theoretische Kenntnis des Verhaltens des Δ 's in Kernen geben z.B.:
J. Hüfner, Phys. Rep. **21** (1975), 1
G. E. Brown and W. Weise, Phys. Rep. **22** (1975), 279
E. J. Moniz, in *Nuclear physics with heavy ions and mesons* (A. Balian, M. Rho, and G. Ripka, Eds.), Vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 433
J. M. Eisenberg and D. S. Koltun, *Theory of Meson Interactions with Nuclei* Wiley, New York, 1980
- [2] T. E. O. Ericson und W. Weise, *Pions and Nuclei*, Oxford University Press, 1988
- [3] H. Rost, Bonn Report IR-80-10 (1980)
- [4] J. Arends, N. Floss, A. Hegerath, B. Mecking, G. Nöldeke and R. Stenz, Z. Phys. **A 311** (1983), 367
- [5] J. Ahrens, Nucl. Phys. **A 446** (1985), 229c
- [6] F. Binon *et al.*, Nucl. Phys. **B17** (1970), 168
- [7] A. S. Clough, *et al.*, Nucl. Phys. **B 76** (1974), 15
- [8] A. S. Carroll, *et al.*, Phys. Rec. **C 14** (1976), 635
- [9] F. Lenz, Ann. of Phys. **95** (1975), 348
- [10] M. Hirata, F. Lenz und K. Yazaki, Ann. of Phys. **108** (1977), 116
- [11] E. Oset und W. Weise, Nucl. Phys. **A 368** (1981), 375
- [12] K. Klingenberg und M. G. Huber, J. Phys. **G 6** (1980), 961
- [13] M. Hirata, J. H. Koch, F. Lenz und E. J. Moniz, Ann. of Phys. **120** (1979), 205
- [14] Y. Horikawa, M. Thies und F. Lenz, Nucl. Phys. **A 345** (1980), 386
- [15] J. H. Koch und E. J. Moniz, Phys. Rev. **C 27** (1983), 751

- [16] J. H. Koch, E. J. Moniz und N. Ohtsuka, *Ann. of Phys.* **154** (1984), 99
- [17] J. H. Koch and N. Ohtsuka, *Nucl. Phys. A* **435** (1985), 765
- [18] J. Delorme und P. A. M. Guichon, in *Proc., 10e Biennale de Physique Nucleaire (Aussois)*, 1989, IPN Lycen report LYCEN 8906, p. C-1
- [19] C. Gaarde, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **41** (1991), 187
- [20] F. Osterfeld, *Reviews of Modern Physics* **64**, No. 2 (1992), 491
- [21] B. E. Bonner, *et al.*, *Phys. Rev. C* **18** (1978), 1418
- [22] V. G. Ableev, *et al.*, *Sov. Phys. JETP. Lett.* **40** (1984), 763
- [23] D. Contardo *et al.*, *Phys. Lett. B* **168** (1986), 331
- [24] D. A. Lind, *et al.*, *Can. J. Phys.* **65** (1987), 637
- [25] G. Chanfray and M. Ericson, *Phys. Lett. B* **141** (1984), 163
- [26] V. F. Dmitriev and T. Suzuki, *Nucl. Phys. A* **438** (1985), 697
- [27] T. Udagawa, S. W. Hong und F. Osterfeld, *Phys. Lett. B* **245** (1990), 1
- [28] M. Ericson, *Nucl. Phys. A* **518** (1990), 116
- [29] J. Delorme und P. A. M. Guichon, *Phys. Lett. B* **263** (1991), 157
- [30] T. Hennino *et al.*, *Phys. Lett. B* **283** (1992), 42
- [31] P. Oltmanns, F. Osterfeld, and T. Udagawa, *Phys. Lett. B* **299** (1993), 194
- [32] E. Oset, P. F. de Cordoba, J. Nieves, and M. J. Vicente-Vacas, *Phys. Scr.* **47** (1993), 793
- [33] F. Osterfeld, B. Körfggen, P. Oltmanns, and T. Udagawa, *Phys. Scr.* **48** (1993), 95
- [34] T. E. O. Ericson, *Nucl. Phys. A* **560** (1993), 458
- [35] T. Udagawa, P. Oltmanns, F. Osterfeld, and S. W. Hong, *Phys. Rev. C* **49** (1994), 3162
- [36] P. Oltmanns, Dissertation, Universität Bonn, 1994
- [37] J. D. Bjorken und S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1964
- [38] D. Robson, *Phys. Rev. C* **7** (1973), 1

- [39] W. Klingenberg, *Lineare Algebra und Geometrie*, Springer Hochschultext, Springer, 1984
- [40] R. R. Whitehead, A. Watt, B. J. Cole und I. Morrison, *Advances in Nuclear Physics* (M. Baranger and E. Vogt, Eds.), Vol. 9, Plenum Press, New York, 1977, 123
- [41] J. Speth, *et al.*, Nucl. Phys. A **343** (1980), 382
- [42] M. R. Anastasio und G. E. Brown, Nucl. Phys. A **285** (1977), 516
- [43] M. Ericson und T. E. O. Ericson, Ann. Phys. **36** (1966), 323
- [44] G. E. Brown und W. Weise, Phys. Rev. C **22** (1975), 280
- [45] I. S. Towner, Phys. Rep. **155** No. 5 (1987), 263
- [46] B. Körfgen, Diplomarbeit, Universität Bonn, 1991
- [47] E. Oset, H. Toki and W. Weise, Phys Rep. **83**, No. 4 (1982), 281
- [48] I. Laktineh, W. M. Alberico, J. Delorme, and M. Ericson, Nucl. Phys. A **555** (1993), 237
- [49] H. Sugawara und F. von Hippel, Phys. Rev. **172** (1968), 1764
- [50] H. Pilkuhn, *Relativistic Particle Physics*, Springer, 1979
- [51] N. M. Kroll und M. A. Ruderman, Phys. Rev. C **93** (1954), 233
- [52] M. Schmitz, Jahresbericht 1992/93, Institut für Kernphysik, Universität Mainz.
- [53] F. Wissmann, Dissertation, Universität Mainz, 1993
- [54] I. V. Glavanakov and V. N. Stibunov, Sov. J. Nucl. Phys. **30** (1979), 465
- [55] Xiaodong Li, L. E. Wright, and C. Bennhold, Phys. Rev. C **48** (1993), 816
- [56] J. I. Johansson and H. S. Sherif, Nucl. Phys. A **575** (1994), 477
- [57] E. Piasetzky *et al.*, Phys. Rev. C **25** (1982), 2687
- [58] F. D. Becchetti, Jr. and G. W. Greenlees, Phys. Rev. **182** (1969), 1190
- [59] R.A. Eisenstein and G. A. Miller, Comp. Phys. Comm. **8** (1974), 130
- [60] A. Altman *et al.*, Phys. Rev. Lett. **50** (1983), 1187
- [61] A. Bohr und B. Mottelson, *Nuclear Structure*, Vol. I, Benjamin, New York, 1969

- [62] E. R. Edmonds, *Angular Momenta in Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1974
- [63] A. de-Shalit und I. Talmi, *Nuclear Shell Theory*, Academic Press, New York, 1963
- [64] H. Horie und K. Sasaki, Prog. Theor. Phys. **25** (1961), 475
- [65] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1975
- [66] F. Osterfeld, B. K rfg n, P. Oltmanns, and T. Udagawa, Nucl. Phys. A **577** (1994), 237c
- [67] B. K rfg n, F. Osterfeld, and T. Udagawa, Phys. Rev. C **50** (1994), 1637

Schlußwort

Ich möchte mich zuerst bei Herrn Prof. Dr. J. Speth bedanken, der mir die vorliegende Arbeit durch Aufnahme in das hiesige Institut erst ermöglicht hat und sie jederzeit wohlwollend unterstützt hat.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. F. Osterfeld für das Engagement und die Zeit, die er für die Betreuung meiner Doktorarbeit aufbrachte. Insbesondere möchte ich mich für seine stete Bereitschaft bedanken, auftretende Fragen zu beantworten und Probleme zu diskutieren.

Herrn Prof. Dr. T. Udagawa möchte ich für die Diskussionen während seiner Aufenthalte in Jülich danken und für seine Hilfe bei Fragen zu unseren Computer-Programmen.

Den Angehörigen des Instituts möchte ich für die angenehme und freundliche Arbeitsatmosphäre danken.

Schließlich möchte ich der Friedrich-Ebert-Stiftung und dem Graduierten-Kolleg "Die Erforschung der subnuklearen Struktur der Materie" danken für die durch sie erfahrene Förderung während meines Studiums und meiner Promotion.

Jül-2991
November 1994
ISSN 0944-2952