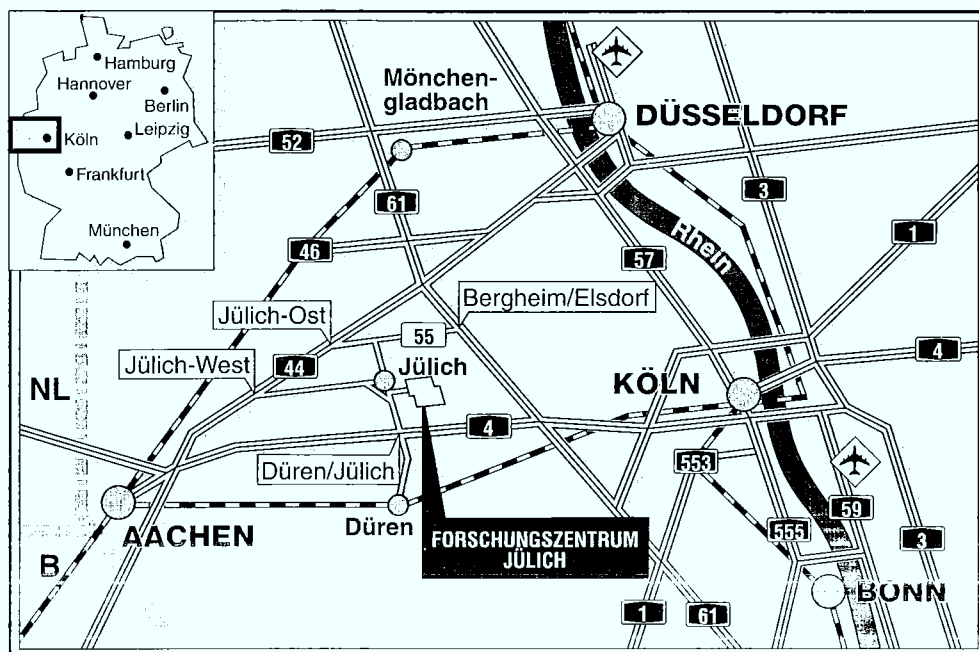


Institut für Festkörperforschung

Auswirkungen periodischer Inhomogenitäten auf Konvektionsstrukturen

Rainer Schmitz



Berichte des Forschungszentrums Jülich ; 3332

ISSN 0944-2952

Institut für Festkörperforschung Jül-3332

D82 (Diss. RWTH Aachen)

Zu beziehen durch: Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek
D-52425 Jülich · Bundesrepublik Deutschland

Telefon: 024 61/61-61 02 · Telefax: 024 61/61-61 03 · Telex: 833 556-70 kfa d

Auswirkungen periodischer Inhomogenitäten auf Konvektionsstrukturen

Rainer Schmitz

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Strukturbildung	1
1.2	Inhomogenitäten	2
1.3	Aufbau der Arbeit	4
2	Eindimensionale Effekte	7
2.1	Rayleigh-Bénard-Konvektion	8
2.1.1	Bewegungsgleichungen	8
2.1.2	Randbedingungen	11
2.1.3	Grundzustand	12
2.1.4	Prinzip der linearen Stabilitätsanalyse	12
2.1.5	Amplitudengleichung	13
2.1.5.1	Ansatz	13
2.1.5.2	Trennung der Skalen	14
2.1.5.3	Berechnung von $\vec{u}_0$	17
2.1.5.4	Normierung von $\vec{u}_0$	19
2.1.5.5	Berechnung der adjungierten Lösung $\vec{u}_0^\dagger$	21
2.1.5.6	Berechnung von $\vec{u}_1$	21
2.1.5.7	Berechnung der Koeffizienten	23
2.1.5.8	Reskalierung der Amplitudengleichung	24
2.2	Modulierte Rayleigh-Bénard-Konvektion	24
2.2.1	Geometrische Modulation	25
2.2.2	Modulation der Temperaturprofile	26
2.2.3	Grundzustand	27
2.2.4	Ableitung der Amplitudengleichung	27
2.2.5	Lineare Stabilitätsanalyse	30
2.2.5.1	Lineare Stabilitätsanalyse der Amplitudengleichung	30
2.2.5.2	Hopf-Bifurkation durch frustrierte Drifts	31
2.2.5.3	Phasendiagramme	33
2.2.6	Einfluß der Prandtl-Zahl	36

2.2.7	Schwach nichtlineares Lösungsverhalten	38
2.2.7.1	Entartete Hopf-Bifurkation	38
2.2.7.2	Vierfach entartete Hopf-Bifurkation	40
2.2.7.3	Komplexes Konvektionsverhalten und Wanderwellen	42
2.2.7.4	Raumzeitliche Dynamik in einem längeren System	50
2.2.7.5	Verhalten der Nusselt-Zahl	54
2.2.7.6	Experimentelle Realisierbarkeit	56
2.3	Nicht-Boussinesq-Effekt und Temperaturmodulationen	56
2.3.1	Einleitung	56
2.3.2	Bewegungsgleichung und Randbedingungen	57
2.3.3	Grundzustand	58
2.3.4	Lineare Stabilitätsanalyse	60
2.3.4.1	Eigenwertproblem	60
2.3.4.2	Konvergenztest	62
2.3.4.3	Phasendiagramme	63
2.3.5	Schwach nichtlineares Verhalten	64
2.3.5.1	Ableitung der Amplitudengleichung	64
2.3.5.2	Lineare Stabilitätsanalyse	66
2.3.5.3	Nichtlineares Verhalten	68
2.4	Das eindimensionale Swift-Hohenberg-Modell	68
2.4.1	Motivation	68
2.4.2	Modell und Amplitudengleichung	69
2.4.3	Hopf-Bifurkation durch frustrierte Drifts	69
2.4.3.1	Driftende Lösungen	69
2.4.3.2	Räumlich periodisch modulierte Drifts	70
2.4.3.3	Amplitudengleichungen	70
2.4.3.4	Lineare Stabilitätsanalyse	71
2.4.4	Simulation der Bewegungsgleichung	72
2.4.4.1	Die Spektralmethode	72
2.4.4.2	Nichtlineares Verhalten	73
2.4.5	Chaotische Lösungen	74
3	2D Effekte im anisotropen System	75
3.1	Einleitung	75
3.2	Elektrokonvektion mit Pretilt	76
3.3	Modellgleichung	78
3.4	Schwellen und Eigenlösungen	79
3.5	Nichtlineare Lösungen	82
3.6	Zusammenfassung	85

4	2D Effekte im isotropen System	87
4.1	Das zweidimensionale Swift-Hohenberg-Modell	88
4.1.1	Bewegungsgleichung	88
4.1.2	Simulation der Bewegungsgleichung	89
4.1.3	Lineare Stabilitätsanalyse	89
4.1.4	Das Potential	89
4.1.5	Ableitung der Amplitudengleichung	90
4.1.5.1	Rollenmuster	90
4.1.5.2	Vergleich mit der Simulation	93
4.1.5.3	Hexagonmuster	94
4.1.6	Stabilitätsbereiche	95
4.1.6.1	Stabilität der Rollenmuster	95
4.1.6.2	Stabilität des Hexagonmusters	96
4.1.6.3	Vergleich mit der Simulation	97
4.2	Externe räumlich periodische Inhomogenitäten	98
4.2.1	Einfluß des Driftterms	98
4.2.2	Räumlich periodisch modulierter Kontrollparameter	99
4.2.2.1	Lineare Stabilität und Schwellen	99
4.2.2.2	Nichtlineare Strukturen	101
4.3	Schwache interne Anisotropie	104
4.3.1	Modellgleichung	105
4.3.2	Schwellen	105
4.3.3	Schwach nichtlineares Verhalten	106
4.3.4	Ergebnisse	107
5	Spiralturbulenz	111
5.1	Übersicht	112
5.1.1	Experimentelle Arbeiten	112
5.1.2	Theoretische Arbeiten	112
5.1.3	Simulation durch das Swift-Hohenberg Modell	113
5.2	Modell	114
5.2.1	Beschreibung	114
5.2.2	Simulation der Bewegungsgleichungen	115
5.3	Lineare Stabilitätsanalyse	116
5.3.1	Theorie der linearen Stabilitätsanalyse	116
5.3.1.1	Berechnung des Grundzustands	116
5.3.1.2	Lineare Stabilität des Grundzustands	117
5.3.1.3	Art der Instabilitäten	118
5.3.2	Stabilität periodischer Lösungen im SH-Modell	119

5.3.3	Einfluß des Mean-Flow auf die Zig-Zag-Stabilität	121
5.3.4	Stabilität periodischer Lösungen mit Mean-Flow	122
5.3.5	Lineare Stabilität mit Modulation	123
5.3.6	Lineare Stabilitätsanalyse aus der vollen Numerik	123
5.4	Transientes Verhalten	126
5.5	Domänenstraßen	129
6	Simulation der Rayleigh-Bénard-Konvektion	137
7	Zusammenfassung	141
A	Adam-Bashforth-Algorithmus	145
B	Operatoren, Projektionen und Konstanten	147
B.1	Linearer Zeitoperator	147
B.2	Linearer Operator	147
B.3	Nichtlineare Terme	149
B.4	Projektionen	149
B.5	Konstanten	150
C	Nusselt-Zahl und Wärmestrom im SH-Modell	153
D	Projektionsintegrale	155

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Strukturbildung

Strukturen sind ein überall in der Natur zu beobachtendes Phänomen, und ihre Entstehung zu verstehen ist eine große Herausforderung an die Naturwissenschaften. In der Physik wird versucht, an einfachen experimentellen und theoretischen Systemen den Mechanismus der Strukturbildung zu verstehen. Dabei ist es natürlich unmöglich, so komplexe Strukturen wie die Streifen eines Zebras zu verstehen, denn biologische Strukturen dieser Art sind durch Evolution selektiert und dadurch teilweise genetisch festgelegt. In einfachen Experimenten sind diese komplexen biologischen Strukturen daher sicher nicht reproduzierbar. Trotzdem sind die Physik und ihre benachbarten Gebiete in der Lage, viele in der Natur vorkommende Strukturen

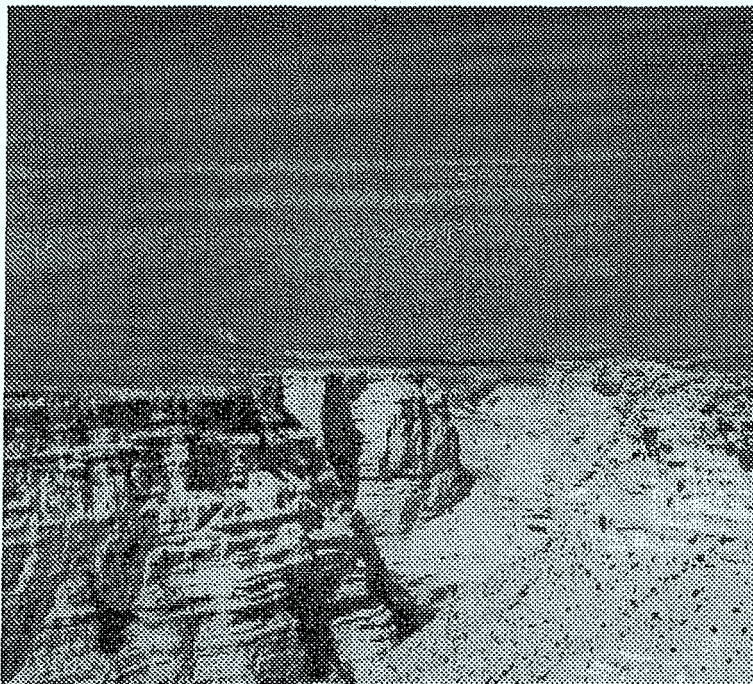


Abb. 1.1: Wolkenstraßen über der Negev-Wüste in Israel. Das Bild entstand während der Deutsch-Israelischen Winterschule über Musterbildung, Turbulenz und Biologie im Frühjahr 1995 am Weizmann-Institut in Rehovot.

wie z.B. die in Abb. 1.1 gezeigten Wolkenstraßen oder Eiskristalle zu beschreiben und einfache Erklärungen und Modelle für ihre Entstehung zu liefern. Die untersuchten strukturbildenden Systeme befinden sich alle außerhalb des thermischen Gleichgewichts und sind offene Systeme mit einem ständigen Energiedurchfluß. Durch diesen Energiefluß ist das System in der Lage, einen strukturierten Zustand aufzubauen und aufrecht zu erhalten. Die Bewegungsgleichungen dieser Systeme sind, sofern sie überhaupt bekannt sind, immer nichtlinear. Im einfachsten Fall entsteht dabei aus einem homogenen Grundzustand eine räumliche Struktur, die sehr oft periodisch ist. Der Übergang findet im allgemeinen an einem scharfen Wert eines Kontrollparameters statt, der ein Maß für die dem System zugeführte Energie ist. Physikalische Beispiele für strukturbildende Systeme dieser Art sind eine Flüssigkeit zwischen zwei rotierenden Zylindern (Taylor-Vortex-Flow), Konvektionsstrukturen in einer von unten geheizten Flüssigkeit (Rayleigh-Bénard-Konvektion), Elektrokonvektion in nematischen Flüssigkristallen, gerichtete Erstarrung (Dendriten) oder chemische Reaktions-Diffusions-Systeme (Turing-Strukturen). Das Verständnis der Strukturbildung und ihrer Dynamik in diesen Systemen fernab vom thermischen Gleichgewicht ist in den letzten Jahren durch eine Vielzahl von aufregenden experimentellen und theoretischen Arbeiten vorangebracht worden [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

1.2 Inhomogenitäten

Die Entstehung von Wolkenstraßen kann in der Natur offensichtlich nicht experimentell untersucht werden. Der wesentliche Mechanismus kann allerdings sehr wohl an der Rayleigh-Bénard-Konvektion im Labor studiert werden. Bei der Übertragung von Naturphänomenen in Laborexperimente werden die Rahmenbedingungen idealisiert, um sich auf die wesentlichen Eigenschaften des zu untersuchenden Mechanismus zu konzentrieren. Für die Rayleigh-Bénard-Konvektion bedeutet dies z.B., daß im Labor ideal glatte und gut wärmeleitende Behälterwände verwendet werden. Diese Annahmen sind eine Verfälschung des Naturphänomens, in dem es sicherlich keine ebenen Begrenzungsflächen gibt. Diese Idealisierungen ermöglichen dann eine einfache mathematische Beschreibung des Systems. Trotzdem haben die Idealisierungen zwei entscheidende Konsequenzen auf die experimentellen Ergebnisse:

- 1) Die experimentellen Auflösungen werden im Laufe der Zeit immer besser. Einflüsse von Rauigkeiten an den Behälterwänden einer Konvektionszelle oder der Einfluß von temperaturabhängigen Stoffparametern werden dadurch detektiert, ohne daß diese in den Modellen zur Beschreibung des Systems enthalten sind. Des weiteren werden gerade in der thermischen Konvektion die Konvektionszellen bei Verwendung von Gasen unter Hochdruck anstatt einer herkömmlichen Flüssigkeit wie Wasser immer flacher und die Anforderungen an die Glattheit der Behälterwände immer höher. Daraus entsteht die Herausforderung, den Einfluß von Inhomogenitäten an den Rändern im Hinblick auf die Interpretation der experimentellen Ergebnisse zu untersuchen.

- 2) Werden die Idealisierungen durch Inhomogenitäten zerstört, kommt es zu Symme-

triebrüchen. Diese können die gesamte Dynamik eines Strukturbildungsprozesses beeinflussen. Durch gezielte Untersuchungen der Auswirkungen von Inhomogenitäten können neue Strukturen und Dynamiken gefunden werden. Diese können zur Klärung von experimentellen Beobachtungen beitragen, bei denen die mit idealisierten Randbedingungen durchgeführten Beschreibungen versagen.

Neben dem von experimenteller Seite her motiviertem Interesse an den Auswirkungen von Inhomogenitäten auf die Strukturbildung, können diese auch Anlaß zu interessanten theoretischen Fragestellungen sein. Es existieren eine ganze Reihe universeller Modelle für die Strukturbildung, in denen die Auswirkungen von Inhomogenitäten untersucht werden können. Diese können dann auf verschiedenste reale System übertragen werden, deren Mechanismus durch das Modell qualitativ beschrieben wird. In dieser Arbeit werden einige Modellrechnungen durchgeführt. Der Blickwinkel bei allen Untersuchungen liegt dabei immer auf der experimentellen Realisierbarkeit der gefundenen Effekte.

Ein wichtiges Merkmal von Inhomogenitäten ist ihre relative Schwankung um einen Mittelwert, wobei diese Schwankungen im räumlichen Mittel verschwinden. Diese Eigenschaft besitzen stochastische, aber auch periodische Inhomogenitäten. Letztere sind in vielerlei Hinsicht theoretisch leichter zu beschreiben. Während die für stochastische Inhomogenitäten charakteristischen Lokalisierungseffekte [10] durch periodische Approximationen nur schlecht modellierbar sind, sind die Auswirkungen periodischer Inhomogenitäten auf die Strukturbildung denen stochastischen Ursprungs im allgemeinen sehr ähnlich. Wegen des analytisch einfacheren Zugangs konzentrieren sich auch frühere Arbeiten auf periodische Modulationen, wie z.B. die von Kelly und Pal zur thermischen Konvektion [11]. Andere Arbeiten zum Einfluß periodischer Inhomogenitäten betonen mehr den Aspekt des Wellenzahlenwettstreits zwischen den Periodizitäten der Konvektionsstrukturen und der Modulation. Dabei kommt es in quasi ein-dimensionalen Systemen zu interessanten kommensurablen/inkommensurablen Übergängen [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. In zweidimensionalen Systemen werden durch diesen Wettstreit interessante, neuartige Strukturen induziert [21, 22, 23]. Neben diesen statischen Effekten kann es durch doppelperiodische Modulation zu dynamischen Effekten wie beispielsweise driftenden Konvektionsrollen kommen [24]. Auch mit nichtperiodischen Inhomogenitäten, in Form von sogenannten Rampen, kommt es zu einer Reihe von statischen und dynamischen Effekten, wie z.B. der Wellenlängenselektion und driftenden Mustern [25, 26, 25, 27, 28, 29] bis hin zu chaotischem Verhalten [30].

Diese nur kleine und unvollständige Aufzählung zeigt die vielseitigen Ansätze zur Untersuchung von Inhomogenitäten. Diese Arbeit widmet sich zwei wesentlichen Typen von Inhomogenitäten, wobei in einem Fall eine stationäre periodische Konvektionsstruktur durch Inhomogenitäten induziertes raumzeitlich irreguläres Verhalten zeigt, und im anderen Fall die Inhomogenität gerade die Umkehrung, nämlich das Einfrieren einer raumzeitlich komplexen Struktur, bewirkt.

1.3 Aufbau der Arbeit

Diese Arbeit enthält unterschiedliche Aspekte des Einflusses von Inhomogenitäten auf Konvektionsstrukturen. Die Anordnung der einzelnen Bereiche folgt einem einfachen Grundgedanken:

Vom Einfachen zum Komplexen

Hier eine kurze Beschreibung der einzelnen Kapitel, charakterisiert nach der Lage des Wellenvektors der Konvektionsstruktur $\mathbf{q}$ zu der Lage des Wellenvektors der periodischen Inhomogenität $\mathbf{k}$.

$$\mathbf{q} \parallel \mathbf{k}$$

In **Kapitel 2** werden am Beispiel der Rayleigh-Bénard-Konvektion eindimensionale Konvektionsstrukturen behandelt. Durch langwellige, räumlich periodische Modulation der Geometrie der Ränder und der Temperaturprofile entsteht ein dynamisches Verhalten der sonst stationären Konvektionsrollen. Der dazu führende Mechanismus ist die Hopf-Bifurkation durch frustrierte Drifts. Im nichtlinearen Bereich oberhalb der linearen Schwelle kann erstmals für ein reales System nachgewiesen werden, daß diese Dynamik zu oszillierenden, wandernden und sich irregulär verhaltenden Konvektionsstrukturen führt. Weiter wird eine Realisierung der zu dieser Dynamik nötigen Symmetribrüche ohne Veränderung der Geometrie aber unter Berücksichtigung eines temperaturabhängigen Stoffparameters vorgestellt. Abschließend werden die wesentlichen Ergebnisse mit einem einfachen Modell zur thermischen Konvektion, dem erweiterten Swift-Hohenberg-Modell, reproduziert.

$$\mathbf{q} \parallel \mathbf{k} \text{ und } \mathbf{q} \perp \mathbf{k}$$

In **Kapitel 3** wird mit der Elektrokonvektion in nematischen Flüssigkristallen ein weiteres reales System vorgestellt, in dem es durch periodische Inhomogenitäten, hier ein Neigungswinkel des Direktors an den Zellwänden, zu einem oszillatorischen Verhalten von Konvektionsstrukturen kommt. Der im vorigen Kapitel am eindimensionalen System beschriebene Mechanismus der Hopf-Bifurkation durch frustrierte Drifts führt in diesem zweidimensionalen anisotropen System zu Orientierungsoszillationen, wenn die Wellenvektoren der Modulation und der intrinsischen Rollenlösung senkrecht aufeinander stehen.

$$\angle(\mathbf{q}, \mathbf{k}) \text{ beliebig}$$

In **Kapitel 4** wird die thermische Konvektion in Zellen mit großem Aspektverhältnis in zwei Raumrichtungen untersucht. Durch den weiteren räumlichen Freiheitsgrad können komplexere Strukturen wie Hexagone entstehen. Die in diesem isotropen System auftretenden Strukturen werden gut durch das zweidimensionale Swift-Hohenberg-Modell beschrieben. An diesem Modell und im Rahmen einer analytischen, schwach nichtlinearen Theorie wird

der Übergang zwischen Rollen und Hexagonen untersucht. Inhomogenitäten werden durch einen räumlich periodischen Kontrollparameter eingeführt. Eine periodische Struktur weicht in diesem isotropen System einer langwelligen Modulationen aus und der Wellenvektor der periodischen Struktur stellt sich senkrecht zum Modulationswellenvektor. Kurzwellige Modulationen induzieren in bestimmten Parameterbereichen Rechteckstrukturen. Abschließend wird gezeigt, daß Rechteckstrukturen auch durch schwache intrinsische Anisotropie mit gleichzeitig gebrochener Up-Down-Symmetrie über einen völlig unerwarteten Mechanismus entstehen können.

k , „chaotisches“ q

In **Kapitel 5** wird der Einfluß von periodischen Inhomogenitäten auf ein raumzeitlich chaotisches System behandelt. Das untersuchte reale System ist die vor kurzem entdeckte Spiralturbulenz in der Rayleigh-Bénard-Konvektion. Diese wird durch ein Swift-Hohenberg-Modell mit angekoppeltem Wirbelfeld erfolgreich reproduziert. Räumlich periodische Modulation des Kontrollparameters führt zum Einfrieren der Spiralturbulenz in eine glasartige Struktur mit kleinen lokalen Oszillationen in der sonst statischen Konvektionsstruktur. Anschließend werden noch neuartige Domänenstrukturen untersucht, welche nach Reduktion der Modulationsstärke in Spiralstraßen münden. Darüber hinaus werden durch Simulation dieses Modells ohne Modulation für lange Simulationszeiten in bisherigen Arbeiten übersehene Schwächen des Modells diskutiert, die aber für die Ergebnisse mit Modulation keine wesentlichen Auswirkungen haben.

In **Kapitel 6** werden einige im Rahmen von Modellen und mit analytischen Rechnungen gefundene Ergebnisse durch Simulation der vollen dreidimensionalen Bewegungsgleichungen für die Rayleigh-Bénard-Konvektion überprüft. Die wesentlichen Ergebnisse der Modellrechnungen können dabei durch die volle Simulation bestätigt werden.

In **Kapitel 7** werden die Auswirkungen von periodischen Inhomogenitäten auf Konvektionsstrukturen zusammengefaßt.

Kapitel 2

Eindimensionale Effekte

In diesem Kapitel wird mit der Rayleigh-Bénard-Konvektion ein strukturbildendes physikalisches System als Prototyp für die Bifurkation eines räumlich homogenen Grundzustands in eine räumlich periodische Nichtgleichgewichtsstruktur vorgestellt. Das Kapitel gliedert sich in vier Teile. Im ersten Abschnitt werden die makroskopischen Bewegungsgleichungen eingeführt, die Randbedingungen definiert und dann detailliert die Amplitudengleichung zur Beschreibung des schwach nichtlinearen Verhaltens abgeleitet, um ein Gefühl für die Operator- und Projektionstechnik zu entwickeln. In den darauffolgenden Abschnitten werden diese Methoden auf modifizierte Konvektionszellen angewandt.

Nach dieser eher didaktisch angelegten Einleitung wird im zweiten Abschnitt das modulierte Rayleigh-Bénard-System untersucht und eine oszillatorische Verzweigung nachgewiesen, die durch frustrierte Drifts induziert wird. Oberhalb weiterer sekundärer Verzweigungen tritt dabei überraschend ein durch externe Modulationen erzwungenes raumzeitliches Chaos auf. Die für die oszillatorische Verzweigung nötige Veränderung an der Geometrie der Konvektionszelle kann allerdings vermieden werden, wenn Flüssigkeiten mit temperaturabhängigen Stoffparametern verwendet werden, wie im dritten Abschnitt gezeigt wird. Als Vorschlag für die Realisierung eines solchen Experimentes wird eine herkömmliche Rayleigh-Bénard-Zelle mit planaren Behälterwänden und räumlich periodisch modulierten Temperaturen an der oberen und unteren Platte untersucht, in der sich ein sogenanntes Nicht-Boussinesq-Fluid, hier eine Flüssigkeit mit einem nichtlinearen Wärmeausdehnungsverhalten, befindet.

Die in der modulierten Rayleigh-Bénard-Konvektion gefundenen Effekte werden im letzten Abschnitt durch ein einfaches Modell erfolgreich reproduziert. Der Amplitudengleichungsmechanismus wird bei diesem erweiterten Swift-Hohenberg Modell einfach und kann vollständig analytisch durchgeführt werden [31]. Sowohl die oszillatorische Verzweigung als auch das chaotische Verhalten werden im Modellsystem gefunden. Motiviert durch die mit dem Modell reproduzierten Ergebnisse, werden in den folgenden Kapiteln weitere Phänomene in realen Systemen durch symmetrieangepaßte Modelle untersucht. Des weiteren sind die aus dem Modell gewonnenen Ergebnisse charakteristisch für eine Klasse von Strukturbildungssystemen

und von daher universeller und nicht auf ein spezielles strukturbildendes System wie die Rayleigh-Bénard-Konvektion eingeschränkt.

2.1 Rayleigh-Bénard-Konvektion

In Abb. 2.1 ist schematisch eine Rayleigh-Bénard-Konvektionszelle dargestellt [32, 33, 34, 35]. Eine Flüssigkeit zwischen zwei planaren, parallelen Platten wird im Gravitationsfeld von unten geheizt. Die Flüssigkeit im unteren Bereich dehnt sich aus und wird dadurch leichter als die darüber liegende kühlere Flüssigkeit. Ein kleines Flüssigkeitselement an der unteren Platte ist daher bestrebt aufzusteigen, ein kühleres an der oberen Platte abzusinken. Die Viskosität, also die Reibung bei der Bewegung eines relativen Flüssigkeitsvolumens, unterbindet allerdings den Transport bei kleinen Temperaturdifferenzen zwischen den Platten. Daher wird die Wärme nur durch Diffusion von der unteren Platte zur oberen transportiert. Wird die Heizung an

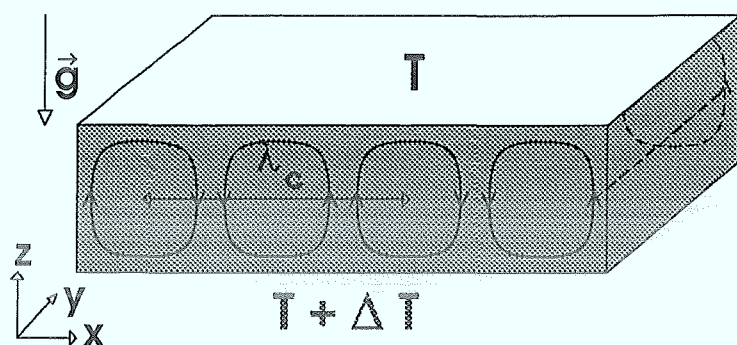


Abb. 2.1: Darstellung einer einfachen Rayleigh-Bénard-Konvektionszelle. Die untere Platte wird gleichmäßig geheizt. Überschreitet die Temperaturdifferenz ΔT einen kritischen Wert, setzt Konvektion in Form von parallelen Konvektionsrollen mit einer Wellenzahl λ_c ein, die in der Größenordnung der Flüssigkeitsschicht liegt.

der unteren Platte erhöht und überschreitet die Temperaturdifferenz zwischen den Platten einen kritischen Wert, kann sich die Temperaturschichtung von kalter schwerer über leichter warmer Flüssigkeit nicht mehr halten und es setzt Konvektion ein, um den Wärmetransport zu erhöhen. Diese organisiert sich in Form von parallelen Konvektionsrollen, zwischen denen alternierend warme Flüssigkeit von unten aufsteigt und kalte Flüssigkeit von oben absinkt. Die Rollen haben dabei einen Durchmesser in der Größe der Schichtdicke, charakterisiert durch die Wellenlänge λ_c .

2.1.1 Bewegungsgleichungen

Für die theoretische Beschreibung der Bewegung der Flüssigkeit in der Konvektionszelle müssen einige idealisierende Annahmen gemacht werden. Der Einfluß der lateralen Wände soll unberücksichtigt bleiben, daher wird die Zelle horizontal als unendlich ausgedehnt betrachtet. Des weiteren sollen die Begrenzungsplatten ideal wärmeleitend sein und somit eine homogene Temperatur besitzen. Die Flüssigkeit wird als inkompressibel angenommen. Damit

ist das hier behandelte physikalische System eine von unten beheizte Flüssigkeitsschicht der Dicke d zwischen zwei parallelen, unendlich ausgedehnten Platten im Gravitationsfeld g . Die raum- und zeitabhängigen Beschreibungsgrößen der Flüssigkeit sind die Temperatur T , die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, der Druck p und die Dichte ρ . Die untere Platte habe die Temperatur T_u , die obere die Temperatur T_o . Das Koordinatensystem wird so gelegt, daß die y -Achse parallel zu den Konvektionsrollen und damit das System translationsinvariant entlang dieser Achse ist. Für diesen Fall ist eine Beschreibung der Konvektion in Abhängigkeit der Koordinaten x und z hinreichend. Alle Stoffparameter der Flüssigkeit sollen temperaturunabhängig sein, d.h. es wird die Boussinesq-Approximation verwendet. Eine Ausnahme bildet die Dichte im Auftriebsterm. Diese habe eine lineare Temperaturabhängigkeit

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_M)), \quad (2.1)$$

wobei α der lineare Ausdehnungskoeffizient und ρ_0 die mittlere Dichte der Flüssigkeit ist. Die Temperatur T_M in der Zellenmitte ist durch die beiden Plattentemperaturen bestimmt:

$$T_M = \frac{T_u + T_o}{2}. \quad (2.2)$$

Die Bewegungsgleichungen folgen aus den Erhaltungssätzen von Masse, Impuls und Energie. Die Massenerhaltung liefert die Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_t \rho + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.3)$$

Die in der Flüssigkeit auftretenden Geschwindigkeiten sind klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit, so daß Inkompressibilität der Flüssigkeit vorausgesetzt werden kann:

$$\partial_t \rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \mathbf{v} = 0. \quad (2.4)$$

Dies erlaubt die Einführung eines skalaren Geschwindigkeitspotentials:

$$v_x = \partial_z \Psi, \quad v_z = -\partial_x \Psi. \quad (2.5)$$

Die Impulsbilanz wird durch die Navier-Stokes-Gleichung einer inkompressiblen Flüssigkeit mit Viskosität η beschrieben:

$$\rho \partial_t \mathbf{v} + \rho(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \rho g + \eta \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (2.6)$$

Nach Einsetzen der Dichteentwicklung (2.1) in den Auftriebsterm ρg ergeben sich folgende skalare Gleichungen für den zweidimensionalen Fall:

$$\partial_t v_x + v_x \partial_x v_x + v_z \partial_z v_x = \frac{1}{\rho_0} (-\partial_x p + \eta \Delta v_x), \quad (2.7a)$$

$$\partial_t v_z + v_x \partial_x v_z + v_z \partial_z v_z = \frac{1}{\rho_0} (-\partial_z p + \eta \Delta v_z) - g (1 - \alpha(T - T_M)). \quad (2.7b)$$

Der Druck kann durch partielle Ableitung der ersten Gleichung nach z und der zweiten nach x sowie anschließender Addition der beiden Gleichungen eliminiert werden. Unter Beachtung der Definition des Geschwindigkeitspotentials (2.5) folgt

$$\partial_t \Delta \Psi + (\partial_z \Psi \partial_x - \partial_x \Psi \partial_z) \Delta \Psi = \nu \Delta^2 \psi - g \alpha \partial_x T, \quad (2.8)$$

wobei $\nu = \frac{\eta}{\rho_0}$ die kinematische Viskosität ist. Die Wärmetransportgleichung folgt aus der Energieerhaltung und lautet in der Boussinesq-Approximation für eine Flüssigkeit mit Temperaturleitfähigkeit κ :

$$\partial_t T + (\mathbf{v} \nabla) T = \kappa \Delta T, \quad (2.9)$$

bzw. nach Einführen des Geschwindigkeitspotentials (2.5):

$$\partial_t T + (\partial_z \Psi \partial_x - \partial_x \Psi \partial_z) T = \kappa \Delta T. \quad (2.10)$$

Durch Entdimensionalisierung der Größen mit

$$x = x' \frac{d}{}, \quad (2.11a)$$

$$t = t' \frac{d^2}{\kappa}, \quad (2.11b)$$

$$v = v' \frac{\kappa}{d}, \quad (2.11c)$$

$$T = T' \frac{\kappa \nu}{\alpha g d^3}, \quad (2.11d)$$

treten in den Gleichungen noch zwei dimensionslose Konstanten auf:

$$P = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (2.12a)$$

$$R = \frac{\alpha g d^3}{\kappa \nu} (T_u - T_o). \quad (2.12b)$$

Die Prandtl-Zahl P ist charakteristisch für die Materialeigenschaften der verwendeten Flüssigkeit, und die Rayleigh-Zahl R ist das Maß für die äußere treibende Kraft des Systems. Die Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$\partial_t \Delta \Psi + (\partial_z \Psi \partial_x - \partial_x \Psi \partial_z) \Delta \Psi = P (\Delta^2 \Psi - \partial_x T), \quad (2.13a)$$

$$\partial_t T + (\partial_z \Psi \partial_x - \partial_x \Psi \partial_z) T = \Delta T. \quad (2.13b)$$

In dimensionsloser Form ist die Rayleigh-Zahl einfach die Temperaturdifferenz

$$R = T_u - T_o. \quad (2.14)$$

Viele Experimente werden mit hochviskosen Flüssigkeiten, wie z.B. Wasser oder Öl, durchgeführt. Diese besitzen eine große Prandtl-Zahl P , z.B. im Konvektionsexperiment von Wesfreid et al., Öl mit $P \sim 490$ [36]. Die weiteren Rechnungen vereinfachen sich im Grenzfall

$P \rightarrow \infty$ enorm, denn dann fällt die linke Seite der Bewegungsgleichung (2.13a) weg, und es bleibt:

$$\Delta^2 \psi = \partial_x T, \quad (2.15a)$$

$$\Delta T = \partial_t T + (\partial_z \Psi \partial_x - \partial_x \Psi \partial_z) T. \quad (2.15b)$$

Dieser einfache Grenzfall trifft auf eine Reihe realer Flüssigkeiten zu und wird daher gerne in einem ersten Schritt zur Berechnung der wesentlichen Effekte herangezogen. In dieser Arbeit wird er in einzelnen Abschnitten aus Gründen der Übersichtlichkeit verwendet (Abschnitt 2.3.2), im Rahmen der Amplitudengleichung wird allerdings der Einfluß der Prandtl-Zahl auch quantitativ untersucht (Abschnitt 2.2.6).

2.1.2 Randbedingungen

Zur theoretischen Beschreibung der Rayleigh-Bénard-Konvektion ist neben der Angabe der Bewegungsgleichungen die Definition der Randbedingungen für die Feldgrößen an den Behälterwänden notwendig. Die beiden Begrenzungsplatten sollen vertikal bei $z = 0$ und $z = 1$ liegen und sich horizontal in x unendlich ausdehnen, d.h. es existieren keine lateralen Begrenzungswände. Die Flüssigkeit kann die Platten nicht durchdringen. Daher muß die vertikale Komponente der Geschwindigkeit an den Platten verschwinden, $v_z(z = 0, 1) = 0 \Rightarrow \partial_x \Psi(z = 0, 1) = 0$. Das Geschwindigkeitspotential ist also in horizontaler Richtung an den Platten homogen und kann durch die Freiheit der additiven Konstante eines Potentials an diesen zu Null gewählt werden:

$$\Psi = 0 \quad \text{bei} \quad z = 0, 1. \quad (2.16)$$

Für die horizontale Komponente der Geschwindigkeit werden zwei Arten von Randbedingungen unterschieden:

1. *Freie Randbedingungen:* Die Flüssigkeit kann an den Platten entlanggleiten. Diese Randbedingung ist zwar eigentlich unphysikalisch, aber rechentechnisch wesentlich einfacher zu handhaben. Allerdings müssen die nichtdiagonalen Elemente des Spannungstensors verschwinden, was bedeutet, daß

$$\partial_z v_x + \partial_x v_z = 0 \Rightarrow \partial_z^2 \Psi = 0 \quad \text{bei} \quad z = 0, 1. \quad (2.17)$$

2. *Feste Randbedingungen:* Die Flüssigkeit haftet an den Platten. Für das Geschwindigkeitspotential gilt in diesem Fall:

$$v_x = 0 \Rightarrow \partial_z \Psi = 0 \quad \text{bei} \quad z = 0, 1. \quad (2.18)$$

Beide Arten von Randbedingungen werden im weiteren parallel betrachtet. Die Temperatur hat an den Platten folgende Werte:

$$T = T_o \quad \text{bei} \quad z = 1, \quad T = T_u \quad \text{bei} \quad z = 0. \quad (2.19a)$$

2.1.3 Grundzustand

Wenn die Rayleigh-Zahl R unterhalb eines kritischen Wertes R_c liegt, findet der Wärmetransport von der unteren zur oberen Platte nur durch Diffusion statt. Da dies ein linearer Prozeß ist, schichtet sich kalte Flüssigkeit über warmer mit linearem Temperaturgradienten zwischen der oberen und unteren Platte. Das Geschwindigkeitspotential muß verschwinden, da keine makroskopische Bewegung der Flüssigkeit vorliegt. Dieser Zustand wird als Grund- oder Primärzustand bezeichnet, und die Felder werden mit einem Querstrich gekennzeichnet:

$$\bar{\Psi} = 0, \quad (2.20a)$$

$$\bar{T} = T_u - z R. \quad (2.20b)$$

2.1.4 Prinzip der linearen Stabilitätsanalyse

Bei der Lösung der Bewegungsgleichungen (2.13) für die Randbedingungen aus Abschnitt 2.1.2 sind die ersten Fragen, bei welcher kritischen Rayleigh-Zahl R_c die Verzweigung vom Grundzustand in den Sekundärzustand stattfindet, und welche Wellenzahl q_c die auftretende Rollenstruktur hat. Eine Antwort darauf gibt die lineare Stabilitätsanalyse des räumlich homogenen Grundzustands gegen kleine inhomogene Störungen [34]. Hierzu müssen die Bewegungsgleichungen (2.13) bezüglich kleiner Störungen $v(x, z, t)$ um den wärmeleitenden Zustand (2.20) linearisiert werden. Die resultierenden linearen Gleichungen in den Störungen mit konstanten Koeffizienten können mit dem Ansatz

$$v(x, z, t) = e^{\sigma t + i q x} U(z) + cc \quad (2.21)$$

gelöst werden. Besitzt der Eigenwert $\sigma = \lambda + i\omega$ bei gegebenen Parametern wie der Wellenzahl q und der Rayleigh-Zahl R einen positiven Realteil λ , so ist der Grundzustand gegen diese Störung instabil, für $\lambda < 0$ stabil. Die Störungen können nach ihrer Wachstumsrate λ aufsteigend sortiert werden. Gegen die Störung mit größtem λ wird der Grundzustand zuerst instabil.

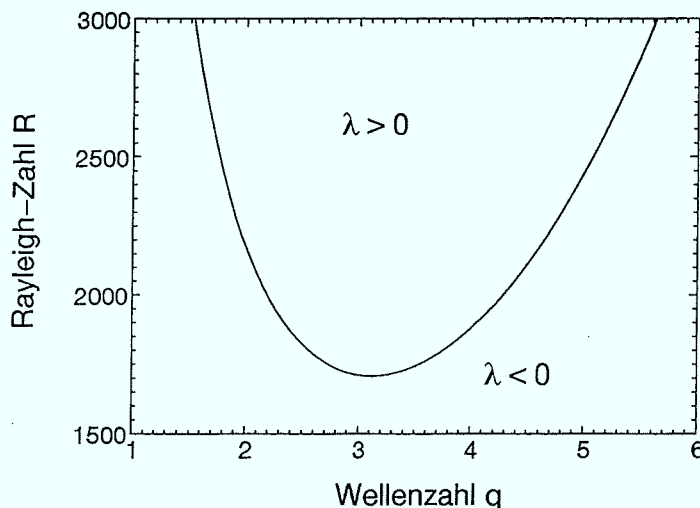


Abb. 2.2: Neutrale Kurve für die Rayleigh-Bénard-Konvektion mit festen Randbedingungen, berechnet aus der linearen Stabilitätsanalyse. Oberhalb der Kurve wachsen Störungen an, unterhalb klingen sie ab.

Verschwindet ihr Imaginärteil ω , so ist die entstehende Struktur zeitlich stationär. Ist er von Null verschieden, entstehen driftende Lösungen, sind die beiden größten Eigenwerte komplex konjugiert zueinander, kommt es zu einer sogenannten Hopf-Bifurkation und die Struktur ist zeitlich oszillierend. Die neutrale Stabilität $\lambda(R, q) = 0$ ist eine Bedingung zur Bestimmung von $R(q)$, der sogenannten neutralen Kurve. Für die Rayleigh-Bénard-Konvektion mit festen Randbedingungen ist diese in Abb. 2.2 dargestellt. Das Minimum der neutralen Kurve liefert die kleinste Rayleigh-Zahl R_c , für die eine Bifurkation in eine Struktur mit Wellenzahl q_c auftritt. Für Rayleigh-Bénard-Konvektion liegt das Minimum von $R(q)$ bei $R_c = 1708$ und $q_c = 3.116$. Diese Werte sind universell für alle verwendeten Flüssigkeiten. Für freie Randbedingungen sind die Werte mit $R_c = 657$ und $q_c = 2.21$ etwas kleiner, können allerdings analytisch berechnet werden.

2.1.5 Amplitudengleichung

Hat eine auf den Grundzustand addierte Störung eine positive Wachstumsrate λ , würde sie in den linearen Bewegungsgleichungen unendlich anwachsen. Die nichtlinearen Terme in den Bewegungsgleichungen sättigen allerdings dieses Wachstum, so daß sich eine Struktur mit endlicher Amplitude einstellt. Über die Größe dieser Amplitude kann die lineare Stabilitätsanalyse keine Aussage machen. In diesem Abschnitt wird eine Gleichung zur Beschreibung des schwach nichtlinearen Verhaltens der Amplituden abgeleitet, die sogenannte Amplitudengleichung, auch komplexe Ginzburg-Landau- oder Ordnungsparameter-Gleichung genannt [37, 38]. Die Ableitung ist für freie Randbedingungen analytisch möglich, weil in diesem Fall die z -Abhängigkeit $U(z)$ durch eine einfache Sinusfunktion gelöst wird. Für feste Randbedingungen kann eine Entwicklung der z -Abhängigkeit des Geschwindigkeitspotentials in einem speziellen Funktionensystem, das die Randbedingungen (2.18) erfüllt [34], vorgenommen oder, wie es hier gemacht wird, die z -Abhängigkeit vollkommen numerisch behandelt werden. Das Verfahren wird numerisch für beide Randbedingungen durchgeführt, was eine gute Fehlerabschätzung zu den bekannten analytischen Ergebnissen für freie Randbedingungen erlaubt.

Das Konzept der Amplitudengleichungen in der Strukturbildung hat sich seit der Einführung vor fast 30 Jahren [37, 38] als schlagkräftiges Instrument bewährt [2]. Zuerst wurden die Koeffizienten für freie Randbedingungen und unendliche Prandtl-Zahlen berechnet [39], dann auch für feste Randbedingungen und endlicher Prandtl-Zahlen [40]. Die analytischen Werte ihrer linearen Koeffizienten wie der Zeitskalierung τ_0 und der Kohärenzlänge ξ_0 stimmen gut mit entsprechenden Experimenten überein [36].

2.1.5.1 Ansatz

Das Temperaturfeld und das Geschwindigkeitspotential werden in den Grundzustand und kleine Störungen aufgespalten:

$$T(x, z, t) = \bar{T}(x, z) + \Theta(x, z, t), \quad (2.22a)$$

$$\Psi(x, z, t) = \underbrace{\bar{\Psi}(x, z)}_{\text{Grundzustand}} + \underbrace{\Phi(x, z, t)}_{\text{Störung}}. \quad (2.22b)$$

Die Felder Θ und Φ beschreiben kleine Abweichungen vom Grundzustand. Sie werden also erst aktiv, wenn die Rayleigh-Zahl den kritischen Wert überschritten hat, $R > R_c$. Sie enthalten dann die räumlich periodische Struktur der Konvektionsrollen. Ihre Bewegungsgleichungen ergeben sich durch Einsetzen des Ansatzes (2.22) in die Bewegungsgleichungen (2.15):

$$\partial_t \Theta - \Delta \Theta + R \partial_x \Phi = -(\partial_z \Phi \partial_x - \partial_x \Phi \partial_z) \Theta, \quad (2.23a)$$

$$\frac{1}{P} \partial_t \Delta \Phi + \partial_x \Theta - \Delta^2 \Phi = -\frac{1}{P} (\partial_z \Phi \partial_x - \partial_x \Phi \partial_z) \Delta \Phi. \quad (2.23b)$$

Um die Struktur der Gleichungen zu verdeutlichen, werden beide Felder in einem Vektor zusammengefaßt,

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \Theta \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

und die Bewegungsgleichung in Matrixform,

$$\mathcal{M} \partial_t \vec{u} + \mathcal{L} \vec{u} = \vec{N}(\vec{u}), \quad (2.25)$$

geschrieben. Links stehen dabei die linearen Terme, rechts die nichtlinearen. Die linearen Operatoren haben folgende Gestalt:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\Delta & R \partial_x \\ \partial_x & -\Delta^2 \end{pmatrix}, \quad (2.26) \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{P} \Delta \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

und die Nichtlinearität lautet:

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} (\partial_x \Phi \partial_z - \partial_z \Phi \partial_x) \Theta \\ \frac{1}{P} (\partial_x \Phi \partial_z - \partial_z \Phi \partial_x) \Delta \Phi \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

2.1.5.2 Trennung der Skalen

Die kleinste Rayleigh-Zahl R_c , bei der eine Verzweigung vom Grundzustand in den Konvektionszustand erfolgt, liegt am Minimum der kritischen Kurve. Die dort entstehende Rollenstruktur hat eine Wellenlänge q_c . Die x -Abhängigkeit der Felder hat daher die Form $(e^{iq_c x} + cc)$. Liegt die Rayleigh-Zahl R etwas oberhalb von R_c , kann ein ganzes Band von Wellenlängen $(q_c - \Delta q \cdots q_c + \Delta q)$ angeregt werden. Aus der Entwicklung der kritischen Kurve im Minimum,

$$R(q_c - \Delta q) = \underbrace{R(q_c)}_{R_c} + \underbrace{\frac{\partial R}{\partial q}}_0 \bigg|_{q_c} \Delta q + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial q^2} \bigg|_{q_c} (\Delta q)^2, \quad (2.29)$$

ist zu erkennen, daß das mögliche Wellenlängenband mit der Wurzel der Abweichung von der Rayleigh-Zahl skaliert:

$$R - R_c \cong \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial q^2} \bigg|_{q_c} (\Delta q)^2. \quad (2.30)$$

Diese Abweichung wird in der dimensionslosen kleinen Größe

$$\epsilon = \frac{R - R_c}{R_c} \quad (2.31)$$

gemessen und Kontrollparameter genannt. Da also $\Delta q \propto \epsilon^{\frac{1}{2}}$ ist, gilt für die x -Abhängigkeit der Felder:

$$e^{i(q_c x + \Delta q x)} = e^{i(q_c x + \epsilon^{\frac{1}{2}} Q x)} = e^{i(q_c x + Q X)}, \quad (2.32)$$

wobei Q von der Größenordnung eins ist. Die neue Ortsvariable

$$X = \epsilon^{\frac{1}{2}} x \quad (2.33)$$

variiert sehr viel langsamer als x . Das zeitliche Verhalten der Lösung wird durch $e^{i\sigma t}$ beschrieben, mit $\sigma = \lambda + i\omega$. Die kritische Kurve ist die Menge der Parameterkombinationen von q und R , deren Wachstumsrate λ gerade Null ist, $\lambda(q, R) = 0$. Da dies für alle q gilt, verschwindet auch die Ableitung nach q :

$$\frac{d\lambda}{dq} = \frac{\partial \lambda}{\partial q} + \frac{\partial \lambda}{\partial R} \frac{dR}{dq} = 0. \quad (2.34)$$

Im Minimum der kritischen Kurve,

$$\frac{dR}{dq} \bigg|_{q_c} = 0, \quad (2.35)$$

ist $\sigma = \omega_c$. Die Entwicklung von ω_c im Minimum,

$$\omega(q_c - \Delta q) = \underbrace{\omega(q_c)}_{\omega_c} + \underbrace{\frac{\partial \omega}{\partial q} \bigg|_{q_c}}_{v_q} \Delta q + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial q^2} \bigg|_{q_c}}_{\Omega} (\Delta q)^2, \quad (2.36)$$

zeigt für das Zeitverhalten:

$$e^{i\omega t} \cong e^{i(\omega_c t + v_q \Delta q t + \Omega (\Delta q)^2 t)} = e^{i(\omega_c t + v_q \epsilon^{\frac{1}{2}} t + \Omega \epsilon t)} = e^{i(\omega_c t + v_q T_1 + \Omega T)}. \quad (2.37)$$

Hier wurden zwei Zeitvariablen,

$$T_1 = \epsilon^{\frac{1}{2}} t, \quad T = \epsilon t, \quad (2.38)$$

eingeführt, die wieder verglichen mit der Zeit t langsam skalieren. Bei der hier vorliegenden stationären Verzweigung ist $\omega_c = 0$ entlang der kritischen Kurve. Daher ist in deren Minimum

$$\frac{d\omega_c}{dq} = \frac{\partial \omega_c}{\partial q} + \frac{\partial \omega_c}{\partial R} \frac{dR}{dq} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \omega_c}{\partial q} \bigg|_{q_c} = 0, \quad (2.39)$$

und eine explizite Zeitabhängigkeit von T_1 entfällt. Dies ist bei den oszillatorischen Verzweigungen in Systemen mit Modulationen in den nächsten Abschnitten nicht mehr gegeben.

Die Entwicklung der Lösung in der Nähe des kritischen Punktes erfolgt also sowohl zeitlich als auch räumlich auf langsamen Skalen. Es liegt daher nahe, die Lösung nach diesen Zeitskalen zu trennen. Dies geschieht, indem die Lösung am kritischen Punkt mit einer langsam variierenden Amplitude versehen wird:

$$\vec{u}(x, z, t, X, T) = A(X, T)e^{iq_c x + \omega t} \vec{U}(z) + cc. \quad (2.40)$$

Die z -Abhängigkeit der Lösung wird dabei nicht verändert. Für freie Randbedingungen läßt sie sich sofort angeben:

$$\vec{U}(z) = \begin{pmatrix} \sin(\pi z) \\ \sin(\pi z) \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Die Gleichung, die das Verhalten der Amplitude $A(X, T)$ beschreibt, wird *Amplitudengleichung* genannt. Für ihre Herleitung wird die Lösung $\vec{u}$ nach dem kleinen Parameter ϵ entwickelt:

$$\vec{u} = \epsilon^{\frac{1}{2}} \vec{u}_0 + \epsilon \vec{u}_1 + \epsilon^{\frac{3}{2}} \vec{u}_2 + \dots \quad (2.42)$$

Diese Entwicklung wird in die Bewegungsgleichung (2.25) eingesetzt. Die schnellen Variablen (x, t) werden als unabhängig von den langsamen Variablen (X, T) angenommen. Die auf die schnellen Variablen wirkenden Operatoren in den Bewegungsgleichungen (2.25) wirken wegen der Kettenregel auch auf die langsamen Variablen [41]:

$$\partial_x \rightarrow \partial_x + \epsilon^{\frac{1}{2}} \partial_X, \quad \partial_t \rightarrow \partial_t + \epsilon \partial_T. \quad (2.43)$$

Daher können die Operatoren auch nach Potenzen von ϵ sortiert werden:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \epsilon^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_1 + \epsilon \mathcal{L}_2 + \dots, \quad (2.44a)$$

$$\vec{N}(\vec{u}) = \epsilon \vec{N}_1(\vec{u}_0) + \epsilon^{\frac{3}{2}} (\vec{N}_{2a}(\vec{u}_0) + \vec{N}_{2b}(\vec{u}_0, \vec{u}_1)) + \dots \quad (2.44b)$$

Sie haben folgende Form:

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} -2\partial_x \partial_X & R_c \partial_X \\ \partial_X & -4\partial_x \Delta \partial_X \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_2 = \begin{pmatrix} -\partial_X^2 & R_c \partial_x \\ 0 & -6\partial_x^2 \partial_X^2 - 2\partial_z^2 \partial_X^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \vec{N}_1(\vec{u}_0) &= \begin{pmatrix} (\partial_x \Phi_0 \partial_z - \partial_z \Phi_0 \partial_x) \Theta_0 \\ \frac{1}{P} (\partial_x \Phi_0 \partial_z - \partial_z \Phi_0 \partial_x) \Delta \Phi_0 \end{pmatrix}, \\ \vec{N}_{2a}(\vec{u}_0) &= \begin{pmatrix} (\partial_X \Phi_0 \partial_z - \partial_z \Phi_0 \partial_X) \Theta_0 \\ \frac{1}{P} \left[\partial_X \Phi_0 \partial_z \Delta \Phi_0 \right. \\ \left. - \partial_z \Phi_0 (3\partial_x^2 \partial_X \Phi_0 + \partial_z^2 \partial_X \Phi_0) \right. \\ \left. + 2\partial_x \Phi_0 \partial_x \partial_z \partial_X \Phi_0 \right] \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\vec{N}_{2b}(\vec{u}_0, \vec{u}_1) = \begin{pmatrix} (\partial_x \Phi_0 \partial_z - \partial_z \Phi_0 \partial_x) \Theta_1 \\ + (\partial_x \Phi_1 \partial_z - \partial_z \Phi_1 \partial_x) \Theta_0 \\ \frac{1}{P} \left[(\partial_x \Phi_0 \partial_z - \partial_z \Phi_0 \partial_x) \Delta \Phi_1 \right. \\ \left. + (\partial_x \Phi_1 \partial_z - \partial_z \Phi_1 \partial_x) \Delta \Phi_0 \right] \end{pmatrix}.$$

Für die Rayleigh-Zahl gilt nach (2.31):

$$R = R_c + \epsilon R_c \quad (2.45)$$

Die Bewegungsgleichung zerfällt in ein hierarchisches Gleichungssystem nach Potenzen von ϵ :

$$\epsilon^{\frac{1}{2}} : (\mathcal{M} \partial_t + \mathcal{L}_0) \vec{u}_0 = 0 \quad (2.46a)$$

$$\epsilon : (\mathcal{M} \partial_t + \mathcal{L}_0) \vec{u}_1 = \vec{N}_1(\vec{u}_0) - \mathcal{L}_1 \vec{u}_0 \quad (2.46b)$$

$$\epsilon^{\frac{3}{2}} : (\mathcal{M} \partial_t + \mathcal{L}_0) \vec{u}_2 = \vec{N}_{2a}(\vec{u}_0) - \mathcal{L}_1 \vec{u}_1 - \mathcal{M} \partial_T \vec{u}_0 - \mathcal{L}_2 \vec{u}_0 + \vec{N}_{2b}(\vec{u}_0, \vec{u}_1) \quad (2.46c)$$

Die erste Gleichung beschreibt gerade die Struktur am Verzweigungspunkt $\vec{u}_0$ und kann leicht berechnet werden. Aus der zweiten Gleichung kann dann $\vec{u}_1$ bestimmt werden. Die Berechnung von $\vec{u}_2$ aus der dritten Gleichung ist nicht nötig [41, 2]. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, kann diese Gleichung auf die adjungierte Lösung von $\vec{u}_0$ projiziert werden. Daraus folgt dann eine Lösbarkeitsbedingung für $A(X, T)$.

2.1.5.3 Berechnung von $\vec{u}_0$

Da die Entwicklungen im vorherigen Abschnitt im Minimum der kritischen Kurve gemacht wurden, stellt $\vec{u}_0$ gerade die stationäre Lösung am kritischen Punkt dar. Für freie Randbedingungen kann diese sofort angegeben werden. Da hier auch feste Randbedingungen betrachtet werden, wird ein numerischer Algorithmus zur Berechnung herangezogen [42]. Die Struktur ist zeitlich stationär ist, so daß lediglich

$$\mathcal{L}_0 \vec{u}_0 = 0 \quad (2.47)$$

gelöst werden muß. Dazu kann der zeit- und x -abhängige Anteil mit folgendem Ansatz absepariert werden:

$$\Theta_0(x, z, t) = A_0 e^{\sigma t} e^{iqx} \Theta_0(z) + cc, \quad (2.48a)$$

$$\Phi_0(x, z, t) = A_0 e^{\sigma t} e^{iqx} \Phi_0(z) + cc. \quad (2.48b)$$

Die komplexen partiellen Differentialgleichungen aus (2.23) werden mit folgenden neuen Variablen

$$y_{1,2} = \text{Re}, \text{Im} (\Theta_0(z)), \quad (2.49a)$$

$$y_{3,4} = \text{Re}, \text{Im} (\partial_z \Theta_0(z)), \quad (2.49b)$$

$$y_{5,6} = \operatorname{Re}, \operatorname{Im} (\Phi_0(z)), \quad (2.49c)$$

$$y_{7,8} = \operatorname{Re}, \operatorname{Im} (\partial_z \Phi_0(z)), \quad (2.49d)$$

$$y_{9,10} = \operatorname{Re}, \operatorname{Im} (\partial_z^2 \Phi_0(z)), \quad (2.49e)$$

$$y_{11,12} = \operatorname{Re}, \operatorname{Im} (\partial_z^3 \Phi_0(z)), \quad (2.49f)$$

d.h. mit ungeradem Index für den Realteil und geradem Index für den Imaginärteil, in ein System von einfachen partiellen Differentialgleichungen überführt:

$$\partial_z y_1 = y_3, \quad (2.50a) \quad \partial_z y_7 = y_9, \quad (2.50g)$$

$$\partial_z y_2 = y_4, \quad (2.50b) \quad \partial_z y_8 = y_{10}, \quad (2.50h)$$

$$\partial_z y_3 = -q_c R_c y_6 + q_c^2 y_1, \quad (2.50c) \quad \partial_z y_9 = y_{11}, \quad (2.50i)$$

$$\partial_z y_4 = q_c R_c y_5 + q_c^2 y_2, \quad (2.50d) \quad \partial_z y_{10} = y_{12}, \quad (2.50j)$$

$$\partial_z y_5 = y_7, \quad (2.50e) \quad \partial_z y_{11} = -q_c y_2 - q_c^4 y_5 + 2q_c^2 y_9, \quad (2.50k)$$

$$\partial_z y_6 = y_8, \quad (2.50f) \quad \partial_z y_{12} = q_c y_1 - q_c^4 y_6 + 2q_c^2 y_{10}. \quad (2.50l)$$

Es kann nun eine Menge von Indizes der $y_j(z)$ angegeben werden, die die Randbedingungen enthalten:

$$I = \{1, 2, 5, 6, 9, 10\} \quad \text{freie Randbedingungen,} \quad (2.51a)$$

$$I = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\} \quad \text{feste Randbedingungen.} \quad (2.51b)$$

Die Randbedingungen lauten dann:

$$y_j(0) = 0, \quad y_j(1) = 0, \quad \forall j \in I. \quad (2.52)$$

Die Gleichungen (2.50) stellen mit den Randbedingungen (2.51, 2.52) ein Randwertproblem dar. Dieses läßt sich aber durch eine einfache Annahme in ein Anfangswertproblem überführen. Die Startlösung an der unteren Platte bei $z = 0$ wird als Linearkombination von 12 linear unabhängigen Vektoren dargestellt:

$$\vec{y}(0) = \sum_{j=1}^{12} \alpha_j \vec{y}_j(0). \quad (2.53)$$

Als Basissystem werden die zwölf Einheitsvektoren verwendet:

$$\vec{y}_j(0) = \vec{e}_j. \quad (2.54)$$

Um die Randbedingungen (2.51, 2.52) zu erfüllen, müssen die Koeffizienten der Einheitsvektoren, die in den Randbedingungen enthalten sind, verschwinden:

$$\alpha_j = 0 \quad \forall j \in I. \quad (2.55)$$

Dadurch vereinfacht sich die Startlösung zu

$$\vec{y}(0) = \sum_{j \notin I} \alpha_j \vec{y}_j(0). \quad (2.56)$$

Alle in dieser Startlösung enthaltenen Vektoren werden nun einzeln mit einem Runge-Kutta-Verfahren bis $z = 1$ aufintegriert. Dies ist erlaubt, da $\mathcal{L}$ ein linearer Operator ist. Die Lösung dort lautet dann:

$$\vec{y}(1) = \sum_{j \notin I} \alpha_j \vec{y}_j(1). \quad (2.57)$$

Die Randbedingungen (2.51, 2.52) verlangen, daß die in der Startlösung ausgeschlossenen Vektoren auch an der oberen Platte ausgeschlossen werden müssen. Dies liefert ein Gleichungssystem für die α_j :

$$\sum_{j_1 \notin I} \alpha_{j_1} \vec{y}_{j_1}^{(j_2)}(1) = 0 \quad \forall j_2 \in I, \quad (2.58)$$

wobei der hochgestellte Index das Element des entsprechenden Vektors bezeichnet. Dieses homogene Gleichungssystem hat nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Determinante verschwindet. Diese hängt noch von der Wellenzahl q und der Rayleigh-Zahl R ab. Bei vorgegebenen q kann die Nullstelle der Determinante durch Variation von R berechnet werden. Das liefert die kritische Kurve $R_0(q)$. Die kritische Wellenzahl ist dann die Wellenzahl am Minimum dieser Kurve, $q_c = \min(R_0(q))$.

Dieser Algorithmus wurde für beide Randbedingungen durchgeführt und die kritischen Werte auf 14 Stellen genau bestimmt:

$$\text{frei :} \quad q_c = 2.2214414708 \quad R_c = 657.5113645 \quad (2.59a)$$

$$\text{fest :} \quad q_c = 3.1163235616 \quad R_c = 1707.7617771 \quad (2.59b)$$

Die Werte für freie Randbedingungen lassen sich mit den analytisch exakt berechenbaren Werten vergleichen. Eine Abweichung ergibt sich erst in der neunten Nachkommastelle.

2.1.5.4 Normierung von $\vec{u}_0$

Die nichttriviale Lösung des linearen Gleichungssystems (2.58) ist bis auf einen beliebigen Faktor bestimmt. Bei den linearen Koeffizienten spielt dieser Faktor keine Rolle. Über die nichtlinearen Terme trägt er allerdings zur Skalierung der Amplitude A_0 bei. Daher muß die aus dem Lösungsvektor resultierende Lösung für $\vec{u}_0$ normiert werden. Prinzipiell ist jede Normierung möglich. Um aber den Bezug zu einer experimentell faßbaren Größe zu erlauben, soll das Betragsquadrat der Amplitude A_0 proportional zum dimensionslosen konvektiven Wärmestrom sein [40]:

$$j = (Nu - 1) \frac{R}{R_c} = |A_0|^2. \quad (2.60)$$

Die dimensionslose Nusselt-Zahl ist definiert als

$$Nu = \frac{\text{Gesamtwärmestrom}}{\text{Wärmeleitungsstrom}}. \quad (2.61)$$

Da sich der Gesamtwärmestrom aus einem wärmeleitenden und konvektiven Anteil zusammensetzt, entspricht $Nu - 1$ gerade dem Verhältnis von konvektivem zu diffusivem Wärmestrom. Die Berechnung erfolgt über die Dichtedefinition:

$$\partial_t T + \nabla \vec{j} = 0. \quad (2.62)$$

Die Zeitableitung der Temperatur folgt aus der Energieerhaltung (2.9). Da nur inkompressible Flüssigkeiten betrachtet werden und es im unendlich ausgedehnten System keinen horizontalen Wärmestrom geben darf, gilt für den vertikalen Wärmestrom:

$$j_z = -\partial_x \Psi T - \partial_z T. \quad (2.63)$$

Der stationäre Wärmestrom ergibt sich aus dem Grundzustand (2.20):

$$j_z^{stat.} = R = \text{const.} \quad (2.64)$$

Der konvektive Wärmestrom berechnet sich aus dem Sekundärzustand:

$$j_z^{konv.} = -\partial_x \Phi \Theta - \partial_z \Theta. \quad (2.65)$$

In die Nusselt-Zahl gehen nicht die Ströme selbst, sondern ihr Mittelwert durch eine Einheitsfläche,

$$\langle j_z^{konv.} \rangle_x = \frac{q}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{q}} dx (-\partial_x \Phi \Theta - \partial_z \Theta) = iq(\Phi \Theta^* - \Phi^* \Theta), \quad (2.66)$$

ein. Beide müssen noch vertikal mit

$$\langle \rangle_z = \int_0^1 dz, \quad (2.67)$$

gemittelt werden. Dann ist

$$Nu = \frac{\langle j_z^{stat.} \rangle_{x,z} + \langle j_z^{konv.} \rangle_{x,z}}{\langle j_z^{stat.} \rangle_{x,z}} = 1 + \frac{\langle iq(\Phi_0 \Theta_0^* - \Phi_0^* \Theta_0) \rangle_z}{R_c}. \quad (2.68)$$

Die Normierung für $\vec{u}_0$ erfolgt in zwei Schritten. Zuerst wird $\vec{u}_0$ auf 1 normiert,

$$\vec{u}_0^{tmp} = \vec{u}_0^{alt} \frac{1}{\sqrt{\langle |\Phi_0|^2 + |\Theta_0|^2 \rangle_z}}, \quad (2.69)$$

dann so, daß bei der Amplitudengleichung die Nusselt-Zahl richtig herauskommt:

$$\vec{u}_0 = \vec{u}_0^{tmp} \sqrt{\frac{R_c}{\langle iq(\Phi_0 \Theta_0^* - \Phi_0^* \Theta_0) \rangle_z}}. \quad (2.70)$$

2.1.5.5 Berechnung der adjungierten Lösung $\vec{u}_0^\dagger$

Das zu (2.47) adjungierte Problem,

$$\mathcal{L}_0^\dagger \vec{u}_0^\dagger = 0, \quad (2.71)$$

mit

$$\mathcal{L}_0^\dagger = \begin{pmatrix} -\Delta & -\partial_x \\ -R_c \partial_x & -\Delta^2 \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

läßt sich mit dem in Abschnitt 2.1.5.3 vorgestellten Algorithmus leicht lösen. Mit dieser Lösung kann unter der Verwendung von

$$\langle \vec{a} | \mathcal{L} \vec{b} \rangle = \langle \mathcal{L}^\dagger \vec{a} | \vec{b} \rangle \quad (2.73)$$

bei der Skalarproduktbildung aus der Gleichung (2.46c) eine Lösbarkeitsbedingung für A_0 gewonnen werden, ohne $\vec{u}_2$ selbst zu bestimmen:

$$\langle \vec{u}_0^\dagger | \vec{f}(\vec{u}_0, \vec{u}_1) \rangle = \langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{L}_0 \vec{u}_2 \rangle = \langle \mathcal{L}_0^\dagger \vec{u}_0^\dagger | \vec{u}_2 \rangle = 0. \quad (2.74)$$

Diese Möglichkeit ist in der Mathematik unter dem Begriff *Fredholmsche Alternative* [43] bekannt und bedeutet hier, daß Lösungen zu den Gleichungen niedriger Potenzen in ϵ nicht durch Lösungen in höheren Potenzen beeinflusst werden dürfen, da die Lösungsräume orthogonal sein müssen. Die adjungierte Lösung $\vec{u}_0^\dagger$ braucht im Gegensatz zu $\vec{u}_0$ nicht normiert zu werden, da sie nur bei der Skalarproduktbildung auftritt und sich die Koeffizienten aus Quotienten von Skalarprodukten berechnen. Das Skalarprodukt zwischen zwei Funktionen $\vec{a}(x, z)$ und $\vec{b}(x, z)$ ist hier als

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^1 dz (a_1^* b_1 + a_2^* b_2) \quad (2.75)$$

definiert. Da die x -Abhängigkeit bei den Funktionen nur in Termen von $e^{inq_c x}$ mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ auftritt, ergeben sich bei der Integration δ -Funktionen. Es überleben dann nur Skalarprodukte, bei denen sich die Exponentialterme $e^{inq_c x}$ im Integranden wegheben.

2.1.5.6 Berechnung von $\vec{u}_1$

Nachdem aus der Gleichung (2.46a) in der Ordnung $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ die Grundlösung $\vec{u}_0$ berechnet wurde, kann damit aus der folgenden Gleichung (2.46b) in Ordnung ϵ der nächste Entwicklungsterm von $\vec{u}$ bestimmt werden:

$$(\mathcal{M} \partial_t + \mathcal{L}_0) \vec{u}_1 = \vec{N}_1(\vec{u}_0) - \mathcal{L}_1 \vec{u}_0. \quad (2.76)$$

Auf der rechten Seite tauchen dabei nur von $\vec{u}_0$ abhängige Terme auf. Da $\vec{u}_0$ unabhängig von t ist, entfällt die Zeitableitung auf der linken Seite. Die Terme der linken Seite ergeben eine Summe von strukturell verschiedenen Termen in Abhängigkeit von x und A_0 , jeweils versehen mit einer z -abhängigen Funktion $\vec{f}_i(z)$, die aus der Aufintegration von $\vec{u}_0$ berechnet werden kann:

$$\mathcal{L}_0 \vec{u}_1 = \vec{f}_1(z) |A_0|^2 + \vec{f}_2(z) A_0^2 e^{i2q_c x} + \vec{f}_3(z) \partial_X A_0 e^{iq_c x} + cc. \quad (2.77)$$

Die beiden ersten Terme stammen aus der Nichtlinearität, der dritte vom linearen Operator. Von daher muß $\vec{u}_1$ folgende Struktur haben:

$$\vec{u}_1 = \vec{g}_1(z) |A_0|^2 + \vec{g}_2(z) A_0^2 e^{i2q_c x} + \vec{g}_3(z) \partial_X A_0 e^{iq_c x} + cc. \quad (2.78)$$

Die Berechnung der $\vec{g}_i(z)$ erfolgt durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \partial_z^2 & 0 \\ 0 & \partial_z^4 \end{pmatrix} \vec{g}_1(z) &= \vec{f}_1(z), \\ \begin{pmatrix} -(-4q_c^2 + \partial_z^2) & i2q_c R_c \\ i2q_c & -(-4q_c^2 + \partial_z^2)^2 \end{pmatrix} \vec{g}_2(z) &= \vec{f}_2(z), \\ \begin{pmatrix} -(-q_c^2 + \partial_z^2) & iq_c R_c \\ iq_c & -(-q_c^2 + \partial_z^2)^2 \end{pmatrix} \vec{g}_3(z) &= \vec{f}_3(z). \end{aligned}$$

Alle drei Gleichungen sind von gleicher Form:

$$\mathcal{G}\vec{g}(z) = \vec{f}(z). \quad (2.79)$$

Die partiellen Differentialgleichungen werden mit dem Ansatz (2.49) in ein System von partiellen Differentialgleichungen umgeschrieben:

$$\vec{g}_i(z) \Rightarrow \vec{y}(z). \quad (2.80)$$

Aus dem Operator $\mathcal{G}$ folgt dann die Ableitung:

$$\mathcal{G} \Rightarrow \partial_z \vec{y}(z). \quad (2.81)$$

Die Lösung setzt sich aus einem homogenen und einem inhomogenen Anteil zusammen:

$$\vec{y}(z) = \vec{y}^{hom}(z) + \vec{y}^{inh}(z). \quad (2.82)$$

Das homogene System kann nach demselben Algorithmus wie in Abschnitt 2.1.5.3 gelöst werden. Die homogene Lösung wird an der unteren Platte als Linearkombination von Einheitsvektoren geschrieben und diese werden einzeln bis zur oberen Platte aufintegriert:

$$\vec{y}^{hom}(0) \rightarrow \mathcal{G}\vec{g}(z) = 0 \rightarrow \vec{y}^{hom}(1). \quad (2.83)$$

Dabei ergibt sich folgendes Gleichungssystem für die Koeffizienten des homogenen Anteils von $\vec{y}(z)$:

$$\sum_{j_1 \notin I} \alpha_{j_2} \vec{y}_{j_2}^{hom(j_1)}(1) = 0 \quad \forall j_2 \in I. \quad (2.84)$$

Zur Berechnung der inhomogenen Lösung wird der Startvektor $\vec{y}^{inh}(0)$ als Nullvektor angenommen und die Inhomogenität beim Aufintegrieren abgezogen:

$$\vec{y}^{inh}(0) \rightarrow \mathcal{G}\vec{g}(z) - \vec{f}(z) = 0 \rightarrow \vec{y}^{inh}(1). \quad (2.85)$$

Das Gleichungssystem für die Koeffizienten des inhomogenen Anteils von $\vec{y}(z)$ lautet dann:

$$\sum_{j_1 \notin I} \alpha_{j_1} \vec{y}_{j_1}^{hom(j_2)}(1) = -\vec{y}^{inh(j_2)}(1) \quad \forall j_2 \in I. \quad (2.86)$$

Der homogene Anteil der Lösung entspricht der Lösung $\vec{u}_0$ und braucht daher nicht betrachtet zu werden. Bei der Lösung des Terms $\mathcal{L}_1 \vec{u}_0$ ist die Lösung des Gleichungssystems nicht eindeutig, da die Matrix singular ist. Der frei wählbare Parameter sorgt lediglich dafür, daß in der Lösung Anteile enthalten sind, die bei der späteren Projektion auf $\vec{u}_0^\dagger$ herausfallen. Daher wird dieser freie Parameter im folgenden immer zu Null gewählt. Technisch werden die überbestimmten Gleichungen aus dem Gleichungssystem eliminiert und das reduzierte System gelöst.

2.1.5.7 Berechnung der Koeffizienten

Wie in Abschnitt 2.1.5.5 erwähnt, folgt aus der Projektion der Gleichung (2.46c) in Ordnung $\epsilon^{\frac{3}{2}}$ auf $\vec{u}_0^\dagger$ eine Lösbarkeitsbedingung für A_0 . Da weder $\vec{u}_0$ noch $\vec{u}_1$ von t abhängt, hat diese Gleichung folgende Form:

$$\mathcal{L}_0 \vec{u}_2 = \vec{N}_{2a}(\vec{u}_0) + \vec{N}_{2b}(\vec{u}_0, \vec{u}_1) - \mathcal{L}_1 \vec{u}_1 - \mathcal{M} \partial_T \vec{u}_0 - \mathcal{L}_2 \vec{u}_0. \quad (2.87)$$

In die rechte Seite werden die Lösungen für $\vec{u}_0$ und $\vec{u}_1$ eingesetzt. Die dabei auftretenden Terme werden auf $\vec{u}_0^\dagger$ projiziert und liefern so Konstanten, aus denen die Koeffizienten der Amplitudengleichung berechnet werden können:

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{L}_2 \vec{u}_0 \rangle &= c_1 A_0 + c_2 \partial_X^2 A_0, \\ \langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{M} \partial_T \vec{u}_0 \rangle &= c_3 \partial_T A_0, \\ \langle \vec{u}_0^\dagger | \vec{N}_{2a}(\vec{u}_0) \rangle &= 0, \\ \langle \vec{u}_0^\dagger | \vec{N}_{2b}(\vec{u}_0, \vec{u}_1) \rangle &= c_4 \partial_X^2 A_0 + c_5 |A_0|^2 A_0. \end{aligned}$$

Bei der Berechnung von $\vec{N}_{2a}(\vec{u}_0)$ treten nur Terme $\propto A_0^* \partial_X A_0$ und $\propto A_0 \partial_X A_0 e^{i2q_c x}$ auf. Diese sind in ihrer x -Abhängigkeit orthogonal zu $\vec{u}_0^\dagger$, und ihr Skalarprodukt ist Null (siehe auch Abschnitt 2.1.5.5). Die Konstante c_5 setzt sich ihrer Herkunft nach aus den Termen $\propto |A_0|^2$ und $\propto A_0^2$ von $\vec{u}_1$ zusammen. Da auch alle komplex konjugierten Terme in den Gleichungen enthalten sind, ergibt sich in beiden Fällen mit dem entsprechenden Teil aus $\vec{u}_0$ ein Term $\propto |A_0|^2 A_0 e^{iq_c x}$. Die durch Projektion entstandene Gleichung enthält zwei identische Amplitudengleichungen für A_0 und A_0^* . Die Gleichung für A_0^* wird im weiteren nicht explizit angegeben. Alle Terme zusammengefaßt ergeben die Amplitudengleichung:

$$\tau_0 \partial_T A_0 = A_0 + \xi_0^2 \partial_X^2 A_0 - g_0 |A_0|^2 A_0. \quad (2.88)$$

Die Koeffizienten berechnen sich aus:

$$\tau_0 = \frac{c_3}{c_1}, \quad \xi_0^2 = \frac{c_2 + c_4}{c_1}, \quad g_0 = \frac{c_5}{c_1}, \quad (2.89)$$

und werden als Relaxationszeit, Kohärenzlänge und nichtlinearer Koeffizient bezeichnet. Die numerischen Werte lauten im Grenzfall unendlich großer Prandtl-Zahlen ($P \rightarrow \infty$):

$$\tau_{0, frei} = 0.06754745578, \quad (2.90a) \quad \tau_{0, fest} = 0.0508928347, \quad (2.91a)$$

$$\xi_{0, frei}^2 = 0.27018982305, \quad (2.90b) \quad \xi_{0, fest}^2 = 0.1480344521, \quad (2.91b)$$

$$g_{0, frei} = -0.50000000002, \quad (2.90c) \quad g_{0, fest} = -0.6992747003. \quad (2.91c)$$

Die Genauigkeit des Algorithmus läßt sich am besten an den Werten für freie Randbedingungen ablesen, da diese auch analytisch berechnet werden können. Alle drei Konstanten haben zu diesen Werten $\tau_0 = \frac{2}{3\pi^3}$, $\xi_0 = \frac{8}{3\pi^2}$, $g_0 = \frac{1}{2}$, einen Fehler kleiner als 10^{-11} . Die Werte für die festen Randbedingungen stimmen sehr gut mit bekannten Rechnungen überein [40, 42].

2.1.5.8 Reskalierung der Amplitudengleichung

Die im letzten Abschnitt abgeleitete Amplitudengleichung (2.88) enthält die von den langsamen Variablen abhängige Amplitude $A_0(X, T)$. Diese kann wieder auf die schnellen Variablen x und t reskaliert werden. Dazu wird die Umkehrung der Operatordefinition (2.43) verwendet:

$$A_0 = \epsilon A \quad \partial_X = \frac{1}{\epsilon^{1/2}} \partial_x \quad \partial_T = \frac{1}{\epsilon} \partial_t.$$

Damit lautet die Amplitudengleichung:

$$\tau_0 \partial_t A = \epsilon A + \xi_0^2 \partial_x^2 A - g_0 |A|^2 A. \quad (2.92)$$

2.2 Rayleigh-Bénard-Konvektion mit modulierten Rändern

Nachdem im vorherigen Abschnitt die Rayleigh-Bénard-Konvektion in einer Konvektionszelle mit ideal planaren und wärmeleitenden Behälterwänden berechnet wurde, wird nun der Einfluß von Inhomogenitäten an diesen Wänden auf die Konvektion untersucht. Es werden dabei zwei unterschiedliche Quellen für die Inhomogenitäten unterschieden, die aber auf jeden Fall zeitunabhängig sein sollen: Zum einen können die Begrenzungsplatten Rauigkeiten enthalten, d.h. es tritt eine Veränderung in der Geometrie auf. Zum anderen müssen die Platten nicht ideal wärmeleitend sein, wodurch ein inhomogenes Temperaturprofil entstehen kann. In beiden Fällen setzt aufgrund der Inhomogenitäten bereits im Grundzustand Konvektion ein, die als Primärkonvektion bezeichnet wird [11, 44]. Im Fourierspektrum der Inhomogenitäten treten dann verschiedene Wellenlängen auf. Zur Untersuchung des Einflusses auf den Einsatz der Konvektion sind aber vor allem jene Inhomogenitäten einer bestimmten Wellenlänge λ_M relevant, die von der Größenordnung der Wellenlänge der Konvektionsrollen λ_c oder größer

sind. Über sehr kurzwellige Störungen würden die Konvektionsrollen schlicht hinwegmitteln [10]. Im Bereich $\lambda_M \approx \lambda_c$ ist mit Resonanzeffekten zu rechnen [11, 15, 17, 45], die zu einer komplizierten Wechselwirkung zwischen Primär- und Sekundärkonvektion führen. Für langwellige Modulationen separieren die Längenskalen der beiden Konvektionen und können getrennt berechnet werden. Dabei beeinflusst die Primärkonvektion den Einsatz der Sekundärkonvektion, erhält diesen jedoch als scharfen Verzweigungspunkt, also perfekte Bifurkation. Daher werden die folgenden Rechnungen im langwelligen Limes $\lambda_M \gg \lambda_c$ durchgeführt.

2.2.1 Geometrische Modulation

Die obere Platte der Konvektionszelle sei nun gewellt mit der Wellenlänge λ_0 , wie in Abb. 2.3 skizziert. Geometrische Inhomogenitäten an beiden Platten würden im weiteren zu einer sehr komplexen Koordinatentransformation führen, ohne daß qualitativ neue Effekte zu erwarten wären. Das Koordinatensystem wird so gelegt, daß die Platten bei

$$z = 0 \quad (\text{untere Platte}) \quad \text{und} \quad z = 1 + H_0(x) \quad (\text{obere Platte}) \quad (2.93)$$

liegen. Der Modulationsterm hat die Form:

$$H_0(x) = F_0 \cos(n_0 k x). \quad (2.94)$$

Als Wellenzahl werden ganzzahlige Vielfache einer kleinen Wellenzahl k zugelassen. Die Bewegungsgleichungen (2.13) werden durch die Änderungen am Rand nicht beeinflusst. Es wird jedoch sehr schwierig, die Randbedingungen für das Geschwindigkeitspotential (2.17, 2.18) an der oberen Platte einzuhalten. Daher wird das ganze System der Koordinatentransformation

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{z}{1 + H_0(\xi)}, \quad (2.95)$$

unterworfen. Die Platten liegen nun wieder planar bei $\eta = 0$ und $\eta = 1$. Als Preis dafür werden die Operatoren in den Bewegungsgleichungen (2.13) durch die Transformation komplizierter.

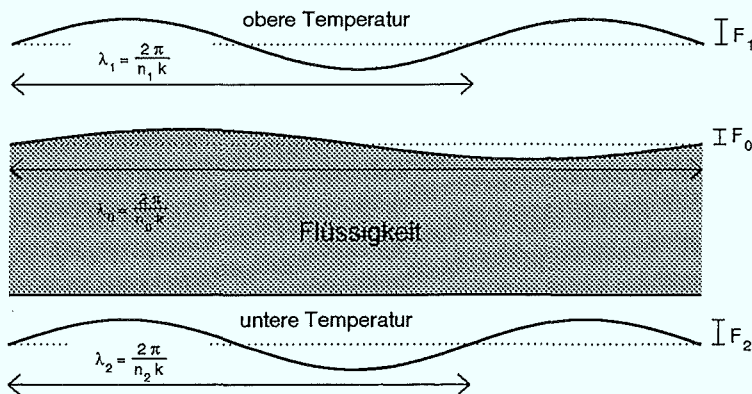


Abb. 2.3: Modulationen an der Rayleigh-Bénard-Zelle. Die obere Platte ist mit Wellenlänge λ_0 und Amplitude F_0 gewellt. An der unteren und oberen Platte wird eine zusätzliche Heizung mit Wellenlängen λ_2 bzw. λ_1 und entsprechenden Amplituden F_2 und F_1 angebracht.

Für eine einfachere Schreibweise werden zwei Funktionen eingeführt:

$$C(\xi) = \frac{1}{1 + H_0(\xi)} = \frac{1}{1 + F_0 \cos(k\xi)}, \quad (2.96a)$$

$$D(\xi) = \frac{-\partial_\xi H_0(\xi)}{1 + H_0(\xi)} = \frac{F_0 n_0 k \sin(n_0 k \xi)}{1 + F_0 \cos(n_0 k \xi)}. \quad (2.96b)$$

In den neuen Koordinaten ξ und η werden die Bewegungsgleichungen (2.13) umfangreicher und sind in führender Ordnung der kleinen Wellenzahl k von der Form:

$$\begin{aligned} \partial_t (\partial_\xi^2 + C^2 \partial_\eta^2 + 2 \eta D \partial_\xi \partial_\eta) \Psi = & \\ & - \left((C \partial_\eta) \Psi (\partial_\xi + \eta D \partial_\eta) - (\partial_\xi + \eta D \partial_\eta) \Psi (C \partial_\eta) \right) (\partial_\xi^2 + C^2 \partial_\eta^2 + 2 \eta D \partial_\xi \partial_\eta) \Psi \\ & + P (\partial_\xi^4 + C^4 \partial_\eta^4 + 4 \eta D \partial_\xi^3 \partial_\eta + 2 C^2 \partial_\xi^2 \partial_\eta^2 + 8 C^2 D \partial_\xi \partial_\eta^2 + 4 C^2 D \eta \partial_\xi \partial_\eta^3) \Psi \\ & - P (\partial_\xi + \eta D \partial_\eta) T + \mathcal{O}(k^2), \end{aligned} \quad (2.97a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t T = & - \left((C \partial_\eta) \Psi (\partial_\xi + \eta D \partial_\eta) - (\partial_\xi + \eta D \partial_\eta) \Psi (C \partial_\eta) \right) T \\ & + (\partial_\xi^2 + C^2 \partial_\eta^2 + 2 \eta D \partial_\xi \partial_\eta) T + \mathcal{O}(k^2). \end{aligned} \quad (2.97b)$$

Dabei sind schon alle Terme höherer Ordnung in k vernachlässigt worden. Dennoch ist es technisch einfacher, viele Terme in den Bewegungsgleichungen zu behandeln, als komplizierte Randbedingungen zu erfüllen. Der Umfang dieser Gleichungen macht aber auch klar, warum die geometrische Modulation nur an einer Platte untersucht wird: Die gleichzeitige Koordinatentransformation von zwei krummlinigen Rändern würde die Anzahl der Terme in den Gleichungen drastisch erhöhen. Diese Transformation wurde in dem einfacheren Fall der freien Konvektion in einem porösen Medium bei resonanter Modulation ausgeführt und findet sich in Ref. [18].

2.2.2 Modulation der Temperaturprofile

Die Modulation der Temperaturprofile schlägt sich lediglich in den Randbedingungen nieder. Daher können hier, anders als bei der geometrischen Modulation, beide Ränder betrachtet werden:

$$T(\eta = 1) = T_o + H_1(\xi), \quad (2.98a)$$

$$T(\eta = 0) = T_u + H_2(\xi). \quad (2.98b)$$

Die beiden Modulationsterme

$$H_1(\xi) = F_1 \cos(n_1 k \xi), \quad (2.99a)$$

$$H_2(\xi) = F_2 \cos(n_2 k \xi), \quad (2.99b)$$

enthalten wie die geometrische Modulation ganzzahlige Vorfaktoren n_1 und n_2 für die gemeinsame Wellenzahl k . Damit können alle drei Modulationen in kommensurable Verhältnisse gesetzt werden. Im Grunde würde die Betrachtung einer Temperaturmodulation ausreichen, für

die Behandlung von Nicht-Boussinesq-Fluiden werden jedoch beide benötigt und deshalb in die folgenden Betrachtungen aufgenommen. Die Randbedingungen für das Geschwindigkeitspotential ändern sich durch die Temperaturmodulationen nicht. Somit ist nun mit den Bewegungsgleichungen (2.97) und den Temperaturrandbedingungen (2.98) das System vollständig beschrieben, welches im weiteren näher untersucht wird.

2.2.3 Grundzustand

Durch die Modulationen ist bereits im Grundzustand eine schwache Konvektion auf der Längenskala $\lambda_M = 2\pi/k$ zu beobachten. Im Limes großer Modulationswellenlängen λ_M können die Felder des Grundzustands $\bar{T}$ und $\bar{\Psi}$ nach Potenzen von $k \ll 1$ entwickelt und analytisch berechnet werden [44, 45]:

$$\bar{T}(\xi, \eta) = T_u + H_2(\xi) + \eta \left(H_1(\xi) - H_2(\xi) - R \right) + \mathcal{O}(k^2), \quad (2.100a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(\xi, \eta) = & \frac{1}{C^4} \left(P_1(\eta) \partial_\xi H_2(\xi) + \right. \\ & \left. P_2(\eta) \left(\partial_\xi (H_1(\xi) - H_2(\xi)) + D(\xi)(-R + H_1(\xi) - H_2(\xi)) \right) \right) \mathcal{O}(k^2). \end{aligned} \quad (2.100b)$$

Der Grundzustand ist in dieser Ordnung unabhängig von der Prandtl-Zahl. Die beiden Polynome,

freie Randbedingungen

feste Randbedingungen

$$P_1(\eta) = \frac{1}{360}(15\eta - 30\eta^3 + 15\eta^4), \quad P_1(\eta) = \frac{1}{120}(5\eta^2 - 10\eta^3 + 5\eta^4), \quad (2.101a)$$

$$P_2(\eta) = \frac{1}{360}(7\eta - 10\eta^3 + 3\eta^5), \quad P_2(\eta) = \frac{1}{120}(2\eta^2 - 3\eta^3 + \eta^5), \quad (2.101b)$$

sorgen dabei für die richtigen Anschlußbedingungen des Geschwindigkeitspotentials und unterscheiden sich natürlich für beide Randbedingungen.

2.2.4 Ableitung der Amplitudengleichung

Die Ableitung der Amplitudengleichung kann nach dem gleichen Prinzip wie für das unmodulierte System aus Abschnitt 2.1.5 erfolgen. Allerdings müssen ein paar wesentliche Punkte bei der Trennung der Skalen beachtet werden. Für die Ortskoordinate wird die langsame Längenskala X eingeführt, und in der Zeit muß nun auch die T_1 -Abhängigkeit berücksichtigt werden, da die Verzweigung oszillatorisch werden kann, d.h. $\omega_c \neq 0$ in (2.39):

$$X = \epsilon^{\frac{1}{2}} \xi, \quad T_1 = \epsilon^{\frac{1}{2}} t, \quad T = \epsilon t. \quad (2.102)$$

Dem entsprechend sind aufgrund der Kettenregel [41] folgende Ersetzungen für die Ableitung vorzunehmen:

$$\partial_\xi \rightarrow \partial_\xi + \epsilon^{\frac{1}{2}} \partial_X, \quad \partial_t \rightarrow \partial_t + \epsilon^{\frac{1}{2}} \partial_{T_1} + \epsilon \partial_T. \quad (2.103)$$

Der lineare Zeitoperator $\mathcal{M}$ (2.27) entwickelt sich nach den drei Zeitskalen t, T_1 und T :

$$\mathcal{M}\partial_t = \mathcal{M}_0\partial_t + \epsilon^{\frac{1}{2}}(\mathcal{M}_0\partial_{T_1} + \mathcal{M}_1\partial_t) + \epsilon(\mathcal{M}_0\partial_T + \mathcal{M}_1\partial_{T_1} + \mathcal{M}_2\partial_t), \quad (2.104)$$

wobei die explizite Form in Anhang B angegeben ist. Da die Modulationswellenlänge groß ist, liegen die Modulationsterme auf der langsamen Längenskala. Damit die Modulationen an den Rändern in einer Amplitudengleichung relevant werden, werden kleine Modulationsamplituden,

$$F_i = \epsilon^{\frac{1}{2}}\bar{F}_i \Rightarrow H_i(X) = \epsilon^{\frac{1}{2}}\bar{F}_i \cos(n_i k X) = \epsilon^{\frac{1}{2}}\bar{H}_i(X), \quad (2.105)$$

angenommen. Die $\bar{F}_i$ sind dann von der Ordnung eins. Bei den späteren Berechnungen zur Amplitudengleichung und im Vergleich mit direkten Lösungen [44] wird sich zeigen, daß diese Annahme sinnvoll und gerechtfertigt ist. Durch die Koordinatentransformation (2.95) wurden die Bewegungsgleichungen sehr kompliziert. Mit der zusätzlichen Annahme kleiner Modulationsamplituden werden viele Terme in (2.97) von höherer Ordnung und somit irrelevant für die Amplitudengleichung. Dies ermöglicht wieder eine einfache Operatorentwicklung und Projektion. Die Hilfsfunktionen (2.96) enthalten Modulationsterme im Nenner und werden in ϵ entwickelt:

$$\bar{C}(X) = \frac{1}{1 + \epsilon^{\frac{1}{2}}\bar{H}_0(X)} = 1 - \epsilon^{\frac{1}{2}}\bar{H}_0(X) + \epsilon\bar{H}_0^2(X) \dots, \quad (2.106a)$$

$$\bar{D}(X) = \frac{-\epsilon\partial_X\bar{H}_0(X)}{1 + \epsilon^{\frac{1}{2}}\bar{H}_0(X)} = -\epsilon\partial_X\bar{H}_0(X) + \epsilon^{\frac{3}{2}}\bar{H}_0(X)\partial_X\bar{H}_0(X) \dots \quad (2.106b)$$

Temperaturfeld und Geschwindigkeitspotential werden entsprechend (2.22) in Grund- und Sekundärzustand aufgespalten. Hier muß jetzt der erweiterte Grundzustand (2.100), der unabhängig von der Prandtl-Zahl, ist beachtet werden. Die Prandtl-Zahl-abhängigen Terme sind insgesamt von höherer Ordnung in ϵ . Beide Felder werden wieder in einem Vektor $\vec{u}$ (2.24) zusammengefaßt, der aus einer langsam variierenden Amplitude A und einer schnellen Ortsfunktion zusammengesetzt ist:

$$\vec{u}(x, z, t, X, T, T_1) = A(X, T, T_1)e^{iq_0x + \omega t}\vec{U}(z) + cc. \quad (2.107)$$

Um Fehler zu vermeiden und Arbeit zu sparen, werden die nun folgenden Entwicklungen von u in ϵ (2.42) mit einem Computeralgebrasystem (MAPLE) [46] durchgeführt. Hier reicht es, die Operatoren und Ansätze zu definieren und geschickt die verschiedenen Ordnungen in ϵ zu sammeln. In der symbolischen Schreibweise hat das Gleichungssystem in den verschiedenen Hierarchien folgende Form:

$$\epsilon^{\frac{1}{2}} : (\mathcal{M}_0\partial_t + \mathcal{L}_0) \vec{u}_0 = 0 \quad (2.108a)$$

$$\epsilon : (\mathcal{M}_0\partial_t + \mathcal{L}_0) \vec{u}_1 = \vec{N}_1(\vec{u}_0, \vec{u}_0) - \mathcal{L}_1\vec{u}_0 - \mathcal{M}_1\partial_t\vec{u}_0 - \mathcal{M}_0\partial_{T_1}\vec{u}_0 \quad (2.108b)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{\frac{3}{2}} : (\mathcal{M}_0\partial_t + \mathcal{L}_0) \vec{u}_2 = & \vec{N}_{2a}(\vec{u}_0, \vec{u}_0) + \vec{N}_{2b}(\vec{u}_0, \vec{u}_1) + \bar{H}_0\vec{N}_{2c}(\vec{u}_0, \vec{u}_0) - \mathcal{L}_1\vec{u}_1 - \mathcal{L}_2\vec{u}_0 \\ & - \mathcal{M}_0\partial_T\vec{u}_0 - \mathcal{M}_1\partial_{T_1}\vec{u}_0 - \mathcal{M}_2\partial_t\vec{u}_0 - \mathcal{M}_0\partial_{T_1}\vec{u}_1 - \mathcal{M}_1\partial_t\vec{u}_1 \end{aligned} \quad (2.108c)$$

Die genaue Form der Operatoren ist aus Übersichtsgründen in Anhang B angegebenen. Der lineare Operator $\mathcal{L}_0$ wird durch Modulationen nicht berührt, da diese von der Ordnung $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ sind. Die Lösung der ersten Gleichung (2.108a) kann dann wie in Abschnitt 2.1.5.3 berechnet und wie in 2.1.5.4 normiert werden:

$$\vec{u}_0(x, z, X, T, T_1) = A_0(X, T, T_1)e^{iq_c x}\vec{u}_0(z) + cc. \quad (2.109)$$

In der zweiten Gleichung (2.108b) treten nun in $\mathcal{L}_1\vec{u}_0$ Modulationsterme auf. Die Struktur von $\vec{u}_1$ enthält deshalb einen neuen, vierten Term:

$$\vec{u}_1 = \vec{g}_1(z)|A_0|^2 + \vec{g}_2(z)A_0^2e^{i2q_c x} + \vec{g}_3(z)\partial_X A_0e^{iq_c x} + \vec{g}_4(z)\bar{H}_0 A_0e^{iq_c x} + cc. \quad (2.110)$$

Außerdem treten Terme auf, die von diesem Ansatz nicht gelöst werden. Deshalb werden diese als T_1 -Abhängigkeit von A_0 aufgefaßt:

$$\mathcal{M}_0\partial_{T_1}\vec{u}_0 = -(\bar{H}_2 - \bar{H}_1)\mathcal{L}_{1b}\vec{u}_0 - \vec{g}_5(z)\bar{H}_0 A_0e^{iq_c x}. \quad (2.111)$$

In $\mathcal{L}_1\vec{u}_0$ tritt der Term $\propto \bar{H}_0 A_0$ auf. Dieser kann nicht mit dem Ansatz (2.110) aus $\mathcal{L}_0\vec{u}_1$ erzeugt werden. Daher wird der Ansatz (2.110) eingesetzt und der unlösbare Anteil in die T_1 -Dynamik verlagert. In der analytischen Ableitung für freie Randbedingungen [47] ist dieser Schritt problemlos durchführbar. Bei der numerischen Behandlung muß ein entsprechender Anteil aus $\mathcal{L}_1\vec{u}_0$ herausgezogen werden, so daß (2.110) die Gleichung (2.108b) löst. Dieser Anteil wird numerisch bestimmt und legt damit die Vektoren $\vec{g}_4(z)$ und $\vec{g}_5(z)$ fest. Für freie Randbedingungen liefert dieser Algorithmus exakt dieselbe Zerlegung wie der analytische Ansatz [47]. Die Lösungen (2.109) und (2.110) für $\vec{u}_0$ und $\vec{u}_1$ können nun in die letzte Gleichung (2.108c) eingesetzt und auf die adjungierte Lösung $\vec{u}_0^\dagger$ projiziert werden. Dies liefert wieder die Lösbarkeitsbedingung für A_0 . Die T_1 -Abhängigkeit von $\vec{u}_1$ in dieser Gleichung läßt sich dabei wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{M}_0 \partial_{T_1} \vec{u}_1 \right\rangle &= \left\langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{M}_0 \partial_{T_1} (\vec{g}_3(z)\partial_X A_0e^{iq_c x} + \vec{g}_4(z)\bar{H}_0 A_0e^{iq_c x}) \right\rangle, \\ &\left\langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{M}_0 \vec{g}_3(z)e^{iq_c x} \partial_{T_1} \partial_X A_0 + \mathcal{M}_0 \vec{g}_4(z)e^{iq_c x} \bar{H}_0 \partial_{T_1} A_0 \right\rangle, \\ &\left\langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{M}_0 \vec{g}_3(z)e^{iq_c x} \right\rangle \partial_X \partial_{T_1} A_0 + \left\langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{M}_0 \vec{g}_4(z)e^{iq_c x} \right\rangle \bar{H}_0 \partial_{T_1} A_0. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Die Zeitableitung $\partial_{T_1} A_0$ ist aus (2.111) bekannt. Dadurch treten weitere Terme in der Amplitudengleichung auf. Bei der Reskalierung der Amplitudengleichung muß ebenfalls die T_1 -Abhängigkeit resubstituiert werden. Alles in allem treten nun 29 Konstanten durch die Projektionen auf, die zu neuen Termen mit Konstanten k_j in der Amplitudengleichung führen. In Anhang B sind das Projektionsschema und die Zusammensetzung der Konstanten angegeben. Die Amplitudengleichung hat in reskalierter Form (siehe Abschnitt 2.1.5.8) schließlich folgendes Aussehen:

$$\tau_0 \partial_t A = \left(\epsilon + k_1 H_0 + k_2 H_0^2 + k_3 \frac{H_2 - H_1}{R_c} + k_4 H_0 \frac{H_2 - H_1}{R_c} \right) A \quad (2.113)$$

$$+ \left(k_5 \partial_\xi H_0 + k_6 \frac{\partial_\xi H_1}{R_c} + k_7 \frac{\partial_\xi H_2}{R_c} \right) iA + \left(k_8 H_0 + k_9 \frac{H_2 - H_1}{R_c} \right) i \partial_\xi A \\ + \xi_0^2 \partial_\xi^2 A + g |A|^2 A.$$

Alle Konstanten wurden auch für freie Randbedingungen analytisch bestimmt [47] und sind in Tabelle 2.1 im Grenzfall unendlich großer Prandtl-Zahlen für feste und freie Randbedingungen zusammengefaßt. Die Prandtl-Zahl-Abhängigkeit kann bis auf die nichtlineare Konstante analytisch angegeben werden. Ihr Einfluß ist jedoch sehr gering und wird in einem späteren Abschnitt (2.2.6) diskutiert. Die Symmetrien in den Konstanten bei freien Randbedingungen bleiben bei festen Randbedingungen erhalten. Insbesondere ist die gesamte Gleichung nur von der Differenz der beiden Temperaturmodulationen ($H_2 - H_1$) abhängig.

	Randbedingungen			
	frei (analytisch)	frei (analytisch)	frei (numerisch)	fest (numerisch)
τ_0	$\frac{2}{3\pi^2}$	0.0675475	0.0675475	0.0508928
ξ_0^2	$\frac{8}{3\pi^2}$	0.2701898	0.2701899	0.1480345
g	$-\frac{1}{2}$	-0.5000000	-0.5000001	-0.6992747
k_1	3	3.0000000	3.0000000	2.9999999
k_2	$-\frac{7}{3}$	-2.3333333	-2.3333333	-1.4335770
k_3	1	1.0000000	1.0000000	1.0000000
k_4	$\frac{5}{3}$	1.6666667	1.6666667	1.9991505
k_5	$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{271}{576}$	0.2117932	0.2117887	-0.2298986
k_6	$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{5}{192}$	0.0117229	0.0117184	0.1922520
k_7	$-\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{5}{192}$	-0.0117229	-0.0117228	-0.1922521
k_8	$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{2}{3}$	0.3001054	0.3001054	-0.0331828
k_9	$-\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{2}{3}$	-0.3001054	-0.3001054	-0.3179035

Tabelle 2.1: Konstanten in der Amplitudengleichung im Grenzfall unendlich großer Prandtl-Zahlen. Die nichtlineare Konstante hängt von der Normierung von $\vec{u}_0$ ab. Für die Ableitung der Konstanten k_j siehe Anhang B.

2.2.5 Lineare Stabilitätsanalyse

2.2.5.1 Lineare Stabilitätsanalyse der Amplitudengleichung

Die Amplitudengleichung (2.113) beschreibt das nichtlineare Verhalten der Rollenlösung in der Nähe der Verzweigung für kleine Amplituden und langwellige Modulationen. Ihr linearer Anteil gibt Aufschluß über die Stabilität des Grundzustands $A = 0$. Da alle Koeffizienten entweder konstant oder periodisch sind, ist die gesamte Gleichung periodisch in der Modulationswellenzahl k . Daher kann für die Lösung ein Floquet-Ansatz ähnlich dem aus

der Festkörperphysik bekannten Bloch-Ansatz für die Elektronenwellenfunktionen im periodischen Gitter [48] gemacht werden:

$$A(\xi, t) = e^{\sigma t} e^{iQ\xi} \sum_{l=-N}^N A_l e^{i\frac{lk\xi}{2}} + cc, \quad (2.114)$$

wobei durch die Entwicklung in $k/2$ bei geradem N der subharmonische Lösungsraum einbezogen wird. Dessen Lösungen sind periodisch in π/k , die des harmonischen Raums periodisch in $2\pi/k$. Da der Wachstumsparameter σ komplex sein kann, wird die komplex konjugierte Lösung addiert. Die Modulationsfunktionen H_i werden als Exponentialfunktionen geschrieben und die Gleichung mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-i\frac{l_0 k \xi}{2}} \odot \quad (2.115)$$

auf die Moden l_0 projiziert. Dadurch entstehen zwei lineare Gleichungssysteme in den konstanten Amplituden A_l für den harmonischen und den subharmonischen Ansatz oder durch entsprechendes Anordnen und Abschneiden an den Rändern zwei Eigenwertprobleme im Zeitentwicklungsparameter σ :

$$\mathcal{A}_h \vec{A}_h = \sigma \vec{A}_h, \quad \text{mit} \quad \vec{A}_h = (A_{-N}, A_{-N+2}, \dots, A_N), \quad (2.116a)$$

$$\mathcal{A}_s \vec{A}_s = \sigma \vec{A}_s, \quad \text{mit} \quad \vec{A}_s = (A_{-N+1}, A_{-N+3}, \dots, A_{N-1}). \quad (2.116b)$$

Beide Matrizen $\mathcal{A}_s$ und $\mathcal{A}_h$ haben eine Bandstruktur, und aus dem Vorzeichen der Realteile ihrer Eigenwerte kann abgelesen werden, ob die entsprechende Eigenlösung anwächst (positiv) oder abklingt (negativ). Werden die Eigenwertspektren nach aufsteigendem Realteil sortiert, geben die negativen Werte der beiden größten Realteile gerade die Schwellen ϵ_c für die Instabilität an. Diese hängen natürlich noch von den Modulationsamplituden, Wellenzahlen und Phasenverschiebungen sowie der Wellenzahl Q der entstehenden Struktur ab, woraus sich die kritischen Kurven $\epsilon_c(Q)$ berechnen lassen. An deren Minima liegen die Schwellen und die Wellenzahlen der zuerst einsetzenden Konvektion. Sind die Imaginärteile ω_c der beiden größten Eigenwerte komplex konjugiert, ist die Verzweigung oszillatorisch mit Frequenz ω_c . Im anderen Fall entstehen driftende Lösungen mit Driftgeschwindigkeit $v_D = \omega_c/Q_c$, oder, wenn der Imaginärteil ganz verschwindet, stationäre Strukturen.

Die Anzahl der Moden muß relativ groß gewählt werden. Bei der Berechnung der Phasendiagramme trat eine Konvergenz oberhalb $N \geq 20$ auf. Das Minimum der kritischen Kurve liegt allerdings sehr nahe bei der kritischen Wellenzahl $Q_c = 0$, so daß auf eine zeitlich aufwendige Minimumberechnung der kritischen Kurven bei den meisten Rechnungen verzichtet werden konnte.

2.2.5.2 Hopf-Bifurkation durch frustrierte Drifts

Im unmodulierten Fall ist die Verzweigung stets stationär [34]. Zwei Modulationen können zu driftenden Rollenlösungen führen [24, 45, 44]. Dabei sind nahezu beliebige Kombinationen

n_0	n_2	F_0	F_2	φ_2	ω	Randbedingung
1	2	0.05	0.1	π	0.002192	frei
2	1	0.05	0.1	$\pi/2, 3\pi/2$	0.002153	frei
2	3	0.05	0.1	$\pi/2, 3\pi/2$	0.003105	frei
3	2	0.05	0.1	π	0.002880	frei
1	2	0.05	0.1	π	0.000965	fest
2	1	0.05	0.1	$\pi/2, 3\pi/2$	0.000818	fest
2	3	0.05	0.1	$\pi/2, 3\pi/2$	0.001247	fest
3	2	0.05	0.1	π	0.001073	fest

Tabelle 2.2: Übersicht der möglichen Wellenzahlkombinationen und Phasenverschiebungen für das Auftreten einer Hopf-Bifurkation für das Wellenzahlverhältnis 1:2 und 2:3 bei $k = 0.2$. Wird die Temperaturmodulation H_1 an der oberen Platte statt H_2 an der unteren Platte verwendet, muß beim 1:2 und 3:2 Verhältnis die Phasenverschiebung φ_2 um π verschoben werden, alle anderen Werte bleiben gleich.

kommensurabler Wellenzahlen mit Phasenverschiebungen für die Temperaturmodulationen wählbar, wie bereits in Ref. [44] gezeigt wurde. Werden aber eine geometrische und eine Temperaturmodulation in einem kommensurablen Verhältnis mit entsprechender Phasenverschiebung dem System aufgeprägt, kommt es zum Phänomen der Hopf-Bifurkation durch frustrierte Drifts [49, 44, 50, 47, 31]. Während in den Arbeiten [44, 45, 47, 31] die lineare Stabilität für das Wellenzahlverhältnis $n_0/n_2 = 2/3$ ausführlich diskutiert wurde, sollen zusätzlich noch das experimentell eventuell einfacher zu realisierende Wellenzahlverhältnis 1:2 und das nichtlineare Verhalten oberhalb der Schwelle behandelt werden. Eine Übersicht, bei welchen Wellenzahlkombinationen und Phasenverschiebungen die Hopf-Bifurkation durch frustrierte Drifts auftritt, ist in Tabelle 2.2 gegeben. Die angegebenen Werte für die Hopf-Frequenz beziehen sich dabei auf die Wellenzahl $k = 0.2$. Die Phasenwinkel müssen exakt bei den angegebenen Werten liegen, weil bei genau diesen Werten ein Wechsel der beiden Eigenwerte mit größtem Realteil im Eigenwertspektrum stattfindet [45, 44]. Die Temperaturmodulationen H_1 und H_2 an der unteren bzw. oberen Platte treten in der Amplitudengleichung (2.113) immer als Differenz auf. Wenn also statt H_2 aus Tabelle 2.2 H_1 verwendet werden soll, muß die Phasenverschiebung φ_2 um π verschoben werden, was zu einem Vorzeichenwechsel im Modulationsterm führt. Dies ist nur für das Wellenzahlverhältnis $n_0/n_2 = 1/2$ und $n_0/n_2 = 3/2$ relevant.

Die Verwendung einer Temperaturmodulation an der oberen oder unteren Platte ist also äquivalent, wie auch schon bei der linearen Stabilitätsanalyse der vollen Bewegungsgleichungen [45, 44] gefunden wurde. Im folgenden werden Systeme mit festen Randbedingungen, geometrischer Modulation der oberen Platte und Temperaturmodulation an der unteren Platte

untersucht, um einen möglichst einfachen Vorschlag für die Realisierung eines Experiments zu machen.

Bei zwei Temperaturmodulationen H_1 und H_2 ($H_0 = 0$) ist die Up-Down- $(\pm\eta)$ -Symmetrie in den Bewegungsgleichungen (2.97) nicht gebrochen, und es kommt nicht zum Phänomen der Hopf-Verzweigung durch frustrierte Drifts [44]. Wenn allerdings z.B. durch Nicht-Boussinesq-Effekte die Up-Down-Symmetrie gebrochen wird, kann eine Hopf-Verzweigung durch frustrierte Drifts auch mit zwei Temperaturmodulationen induziert werden, wie ausführlich in Abschnitt 2.3 diskutiert wird.

2.2.5.3 Phasendiagramme

Die oszillatorische Verzweigung in der Rayleigh-Bénard-Konvektion mit modulierten Rändern tritt nur bei bestimmten Kombinationen der Parameter der Modulationsterme auf. Neben dem richtigen Wellenzahlverhältnis und entsprechender Phasenverschiebung nach Tab. 2.2 spielen die gemeinsame Wellenzahl k und die Modulationsamplituden F_i eine entscheidende Rolle. Daher sollen in diesem Abschnitt die Parameter für eine Hopf-Bifurkation bestimmt werden.

Für die Bewegungsgleichungen (2.97) kann ebenfalls eine lineare Stabilitätsanalyse durchgeführt und die Phasendiagramme bestimmt werden [44]. Daher wird diese kurz vorgestellt und im weiteren die Resultate beider Rechnungen verglichen.

Die lineare Stabilitätsanalyse der vollen Bewegungsgleichungen basiert auf einer Modenzerlegung des Temperaturfeldes Θ und des Geschwindigkeitspotentials Φ (2.155). Dabei wird die ξ -Abhängigkeit wegen der in k periodischen Koeffizienten nach Floquet mit N Moden entwickelt. Die Entwicklung in η erfolgt für Θ wegen der Randbedingungen in N_T Sinusmoden. Für Φ werden bei festen Randbedingungen die ersten N_P Chandrasekhar-Funktionen [34] und bei freien Rändern Sinusfunktionen verwendet. Der mit dem Reihenabbruch verbundene Fehler läßt keine exakte Übereinstimmung der Ergebnisse mit denen der linearen Stabilitätsanalyse der Amplitudengleichung erwarten.

Um die Ergebnisse der beiden linearen Stabilitätsanalysen vergleichen zu können, sollte die Anzahl der Entwicklungsmoden in beiden Fällen gleich sein. Für die ξ -Entwicklung ist dies kein Problem. Da die η -Abhängigkeit in der Amplitudengleichung exakt ist, tritt bei festen Randbedingungen durch die Approximation durch Chandrasekhar Funktionen ein Fehler auf. Für die Vergleiche wurden $N = 20$ Moden in ξ und $N_T = N_P = 5$ Moden in η berücksichtigt, also einige Moden mehr als in früheren Rechnungen [45, 44]. Um die Rechenzeit in einem realistischen Rahmen zu halten, wurde bei der linearen Stabilitätsanalyse auf eine Minimumsbestimmung der kritischen Kurve verzichtet und mit der kritischen Wellenzahl des unmodulierten Systems gerechnet, da in allen nachgeprüften Fällen das Minimum durch die Modulationen nahezu unverschoben blieb.

Wie im letzten Abschnitt angedeutet, scheint ein experimentell einfach zugängliches System aus einer Rayleigh-Bénard-Zelle mit geometrisch modulierter oberer Platte und zusätzlicher räumlich periodischer Heizung an der unteren Platte zu bestehen. Im folgenden wird

daher ein Wellenzahlverhältnis von $n_0/n_2 = 2/1$ gewählt, wohingegen in Ref. [44] alternativ das Verhältnis $n_0/n_2 = 3/2$ gewählt wurde. Die Phasenverschiebung zwischen den beiden Modulationen für eine oszillatorische Verzweigung muß nach Tab. 2.2 dann $\varphi_2 = \pi/2$ betragen.

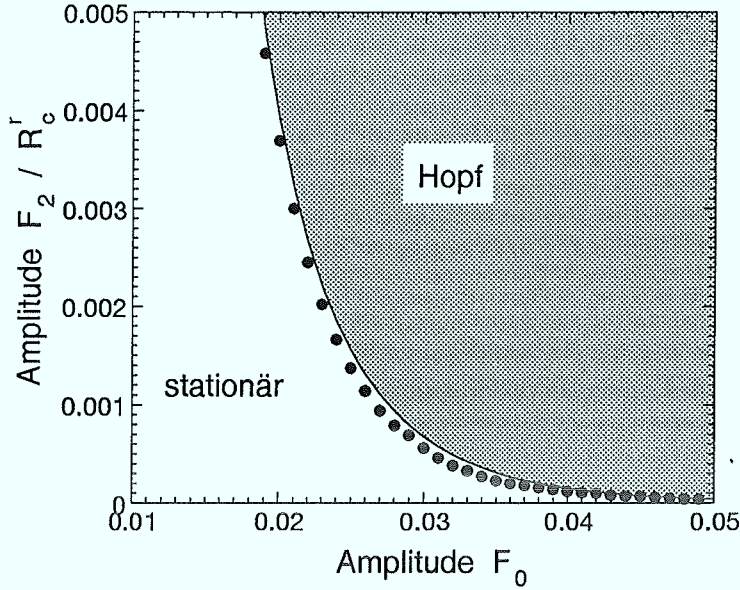


Abb. 2.4: Phasendiagramm in der Amplitudenebene. Bei festem $k = 0.2$ und einem Wellenzahlverhältnis von $n_0/n_2 = 2/1$ mit Phasenverschiebung $\varphi_2 = \pi/2$ kommt es bei einer geometrischen Modulation mit Amplitude F_0 an der oberen Platte und einer Temperaturmodulation mit Amplitude F_2 an der unteren Platte im grauschattierten Bereich zur Hopf-Bifurkation. Die Punkte sind Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse der vollen Bewegungsgleichungen.

Wenn die Wellenzahl bei $k = 0.2$ eingestellt wird, kommt es nur bei bestimmten Amplitudenstärken zur Hopf-Bifurkation. Dieser Bereich ist in der $F_0 - F_2$ -Amplitudenebene in Abb. 2.4 grauschattiert dargestellt. Für kleine Modulationsstärken verschwinden die Imaginärteile der beiden größten Eigenwerte und die Verzweigung ist stationär. Im grauschattierten Bereich sind die beiden Eigenwerte komplex konjugiert, und die Verzweigung ist oszillatorisch. Bei starker geometrischer Modulation ist eine nur ganz schwache Temperaturmodulation erforderlich. Umgekehrt muß bei schwacher geometrischer Modulation die Temperaturmodulation erheblich stärker sein. Die geometrische Modulation wirkt also wesentlich massiver, was auch schon in Berechnungen der Driftgeschwindigkeiten in diesem System beobachtet wurde [44].

Die in Abb. 2.4 eingezeichneten Punkte sind die Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse der vollen Bewegungsgleichungen. Sie stimmen sehr gut mit den Ergebnissen der Amplitudengleichung überein. Für freie Randbedingungen sind die Abweichungen wesentlich kleiner [31], weil die η -Abhängigkeit bei freien Rändern in beiden Fällen durch Sinusfunktionen ausgedrückt werden kann. Bei festen Randbedingungen muß die exakte η -Abhängigkeit in der Amplitudengleichung durch Chandrasekhar-Funktionen im Ansatz bei den vollen Bewegungsgleichungen approximiert werden. Eine Erhöhung der η -Modenzahl würde die Abweichungen verkleinern, die Rechenzeit aber unvertretbar groß werden lassen.

Bei der Berechnung des Phasendiagramms in Abb. 2.4 wurde die Verzweigung mit niedrigster Schwelle aus dem subharmonischem und harmonischem Lösungsraum (2.116) untersucht. Die Schwellen wurden auf einem senkrechten Schnitt bei $F_0 = 0.02$ vom stationären in den oszillatorischen Bereich getrennt berechnet und sind in Abb. 2.5 dargestellt. Für kleine Am-

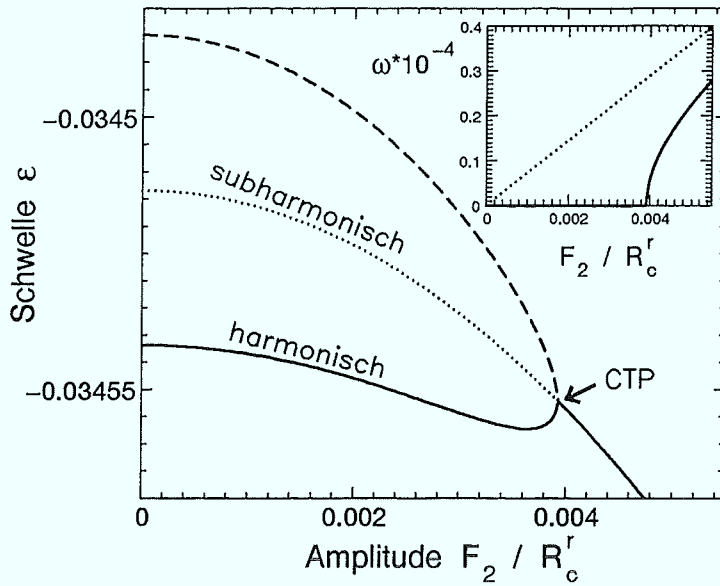


Abb. 2.5: Einsatzschwellen. Bei fester Amplitude $F_0 = 0.02$ der geometrischen Modulation wurden Einsatzschwellen der harmonischen (durchgezogene und gestrichelte Linie) und subharmonischen Lösungen (gepunktete Linie) in Abhängigkeit von der Temperaturmodulation F_2 berechnet. Im Phasendiagramm in Abb. 2.4 entspricht dies einem senkrechten Schnitt vom stationären in den oszillatorischen Bereich. Am Kodimension-Zwei-Punkt (CTP) wird die Verzweigung oszillatorisch (siehe Text).

plituden F_2 hat die harmonische Lösung die niedrigste Schwelle (durchgezogene Linie) und ist stationär. Am Kodimension-Zwei-Punkt (CTP) schneidet der harmonische den subharmonischen Ast (gepunktete Linie). Letzterer ist immer oszillatorisch, und seine Frequenz ist im inneren Bild von 2.5 aufgetragen. Knapp oberhalb des CTP laufen die beiden harmonischen Äste (durchgezogene und gestrichelte Linie) zusammen und bilden einen oszillatorischen Ast, dessen Frequenz als durchgezogene Linie eingetragen ist. Der subharmonische Ast liegt knapp unterhalb des oszillatorisch harmonischen Astes, wobei die Differenz in der Schwelle im Bereich 10^{-3} liegt. Daher sind die entstehenden Strukturen dieser Bifurkation subharmonisch [44]. Für größere Amplituden wird die Schwelle der beiden Äste allerdings gleich, und es kommt zu einer vierfachen Entartung im Eigenwertspektrum. Im inneren Bild von Abb. 2.5 sind die zu den oszillatorischen Ästen gehörenden Frequenzen dargestellt. Die subharmonische Frequenz (gepunktete Linie) wächst fast linear mit der Amplitude, während sich die harmonische Frequenz (durchgezogene Linie) wie die Wurzel der Amplitude am CTP entwickelt. Für größere Amplituden laufen die Frequenzen wie die Schwellen selbst schnell zusammen, so daß sie im schattierten Bereich des Phasendiagramms in Abb. 2.4 nicht zu unterscheiden sind. Allerdings sind die Lösungen in diesem Bereich dann vierfach entartet, was Konsequenzen auf das nichtlineare Verhalten oberhalb der Schwelle hat, wie in den nächsten Abschnitten gezeigt wird.

Wenn die Modulationswellenlänge $\lambda_M = 2\pi/k$ klein wird, mittelt das System quasi über die Modulationen hinweg [10]. Die Hopf-Bifurkation muß also für große Wellenzahlen k verschwinden. Dies ist in Abb. 2.6 gezeigt, wo die geometrische Modulationsamplitude bei $F_0 = 0.02$ festgehalten und die Wellenzahl durchgestimmt wurde. Der grauschattierte Bereich zeigt wieder an, bei welchen Modulationswellenzahlen und Temperaturmodulationen es zu ei-

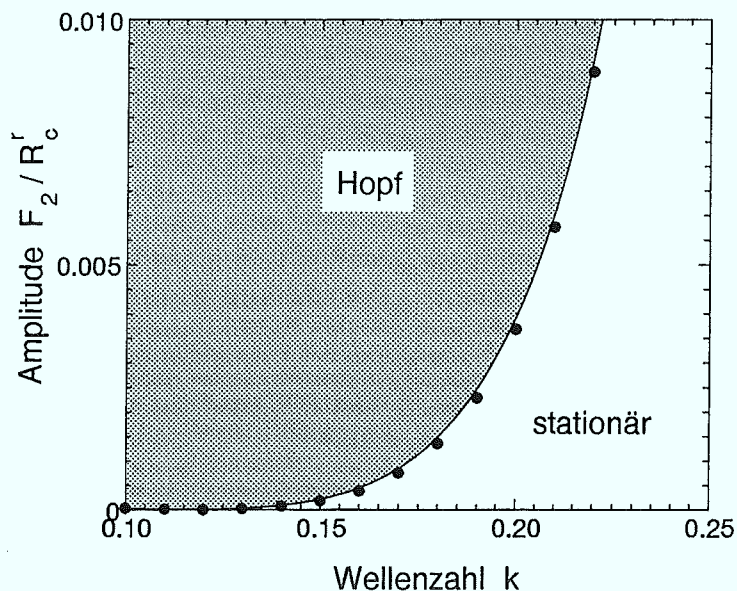


Abb. 2.6: Phasendiagramm in der Wellenzahl-Amplitudenebene.

Bei gleichen Parametern wie in Abb. 2.4, aber fester geometrischer Modulationsamplitude $F_0 = 0.02$ und variierter Wellenzahl k , ist im grauschattierten Bereich die Verzweigung oszillatorisch. Das Minimum der Kurve liegt bei $F_{2min} = 1.5 \cdot 10^{-5}$.

ner Hopf-Bifurkation kommt. Wie erwartet endet der Bereich recht steil, wenn die Wellenzahl ansteigt.

2.2.6 Einfluß der Prandtl-Zahl

Wie schon bei der Ableitung in Abschnitt 2.2.4 angesprochen, sind die Konstanten der Amplitudengleichung (2.113) von der Prandtl-Zahl abhängig. Die analytische Abhängigkeit für alle linearen Koeffizienten ist in Anhang B angegeben. Mit dem verwendeten Algorithmus kann auch die nichtlineare Konstante zu endlichen Prandtl-Zahlen berechnet werden. Zur Untersuchung des Verhaltens bei endlichen Prandtl-Zahlen wurde in Abb. 2.7 das Phasendiagramm in der $F_0 - F_2$ -Ebene für verschiedene Prandtl-Zahlen wie in Abb. 2.4 berechnet. Die dazu verwendeten Konstanten stehen in Tabelle 2.3. Offensichtlich ist der Einfluß nur qualitativ und sehr schwach. Der grauschattierte Bereich kennzeichnet die Amplitudenverhältnisse, bei denen im Grenzfall unendlicher Prandtl-Zahlen eine Hopf-Bifurkation stattfindet. Dieser wird bei abnehmenden Prandtl-Zahlen zu den angegebenen Kurven ausdehnt. Für sehr kleine Prandtl-Zahlen sinken also die kritischen Amplituden für den Einsatz der Hopf-Bifurkation. Die Prandtl-Zahl-Abhängigkeit der Zeitkonstanten τ_0 und des nichtlinearen Koeffizienten g_0 kann mit Werten aus der Literatur verglichen werden [40]. Diese stimmen

$$\tau_0^{Lit} = 0.0508906 + \frac{1}{P} 0.0260407 \quad \text{und} \quad \tau_0 = 0.0508928 + \frac{1}{P} 0.0260390 \quad (2.117)$$

hervorragend überein. Dieser Wert wurde im realen Experiment mit Öl ($P \approx 490$) bestätigt [36]. Eine Prandtl-Zahl-Abhängigkeit des nichtlinearen Koeffizienten

$$g_0^{Lit} = -0.6995 + 0.0047 \frac{1}{P} - 0.0084 \frac{1}{P^2}, \quad (2.118)$$

	P = 100	P = 7 (Wasser)	P = 1	P = 0.7
τ_0	0.0511532253	0.0546127032	0.0769319158	0.0880915221
ξ_0^2	0.1480344528	0.1480344528	0.1480344528	2.9999999774
g	-0.6992283696	-0.6987708068	-0.7028817905	-0.7095236469
k_1	2.9999999774	2.9999999774	2.9999999774	2.9999999774
k_2	-1.4791985078	-2.0440288801	-4.4670255537	-5.2180989554
k_3	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000
k_4	1.9839433698	1.7956665776	0.9880010137	0.7376432113
k_5	-0.2296579871	-0.2263597906	-0.2020933022	-0.1888334576
k_6	0.1909058484	0.1729870837	0.0563862161	-0.0022897512
k_7	-0.1909058705	-0.1729871057	-0.0563862380	0.0022897294
k_8	-0.0332946027	-0.0346766697	-0.0406054298	-0.0424432094
k_9	-0.3179406657	-0.3184013547	-0.3203776080	-0.3209902013

Tabelle 2.3: Konstanten in der Amplitudengleichung für verschieden Prandtl-Zahlen.

kann hier nicht angegeben, sondern nur die numerischen Werte gegenübergestellt werden:

$$P = 100 \quad g_0^{Lit} = -0.69945 \quad g_0 = -0.69923$$

$$P = 7 \quad g_0^{Lit} = -0.69911 \quad g_0 = -0.69877$$

$$P = 1 \quad g_0^{Lit} = -0.70310 \quad g_0 = -0.70288$$

$$P = 0.7 \quad g_0^{Lit} = -0.70973 \quad g_0 = -0.70952.$$

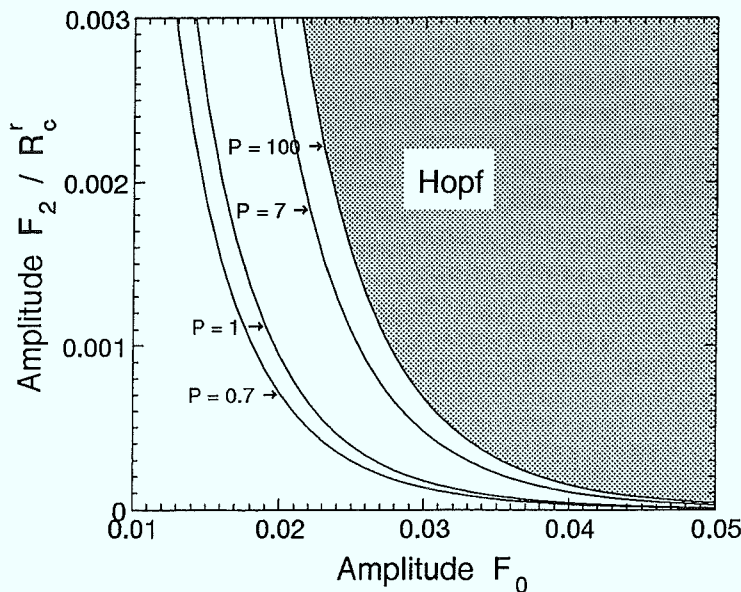


Abb. 2.7: Phasendiagramm in der Amplitudenebene für verschiedene Prandtl-Zahlen. Die Parameter sind identisch mit denen aus Abb. 2.4. Im grauschattierten Bereich findet eine Hopf-Bifurkation im Grenzfall unendlicher Prandtl-Zahlen statt, der sich bei abnehmenden Prandtl-Zahlen zu den angegebenen Kurven ausdehnt.

Auch hier ist die Übereinstimmung hervorragend. Diese Betrachtungen zeigen, daß der häufig verwendete Grenzwert unendlich großer Prandtl-Zahlen durchaus gerechtfertigt ist und sinnvolle, nur qualitativ verschiedene, Aussagen liefert.

2.2.7 Schwach nichtlineares Lösungsverhalten

Die lineare Stabilitätsanalyse liefert die Parameterkonfigurationen, in denen es zur Hopf-Bifurkation kommt. Sie kann aber keine Aussage über das nichtlineare Verhalten oberhalb der kritischen Rayleigh-Zahl machen. Dazu wird in diesem Abschnitt die Amplitudengleichung (2.113) einschließlich des nichtlinearen Terms untersucht. Es ist eine interessante Frage, ob oberhalb der Hopf-Bifurkation Wanderwellen (TW - traveling waves) oder stehende Wellen (SW - standing waves) bevorzugt werden, und ob die Verzweigung in diesen Zustand super- oder subkritisch erfolgt. Bei der Konvektion in binären Mischungen tritt in bestimmten Parameterbereichen ebenfalls eine Hopf-Bifurkation auf, bei der Wanderwellen entstehen. Allerdings ist die Verzweigung unstetig [51], wie bei der Berechnung der Amplitudengleichung [52, 42] und aus direkten Simulationen [53, 54] gefunden wurde. Diese Eigenschaft schränkt die Anwendbarkeit von Amplitudengleichungen zur Beschreibung des nichtlinearen Verhaltens von TW's in binären Mischungen drastisch ein. Ähnlich verhält es sich in der Elektrokonvektion in nematischen Flüssigkristallen [55].

Der nichtlineare Koeffizient der Amplitudengleichung (2.113) wird durch die Modulationen nicht beeinflusst und bleibt negativ, d.h. die Verzweigung ist stetig. Die Hopf-Bifurkation durch frustrierte Drifts in TW oder SW wird daher stetig sein, und das störungstheoretische Konzept der Amplitudengleichung bleibt anwendbar, im Gegensatz zu den obigen Beispielen der binären Mischungen und Elektrokonvektion in nematischen Flüssigkristallen. Die Amplitudengleichung mit periodischen Koeffizienten (2.113) wird oberhalb einer Hopf-Verzweigung auf Amplitudengleichungen mit konstanten Koeffizienten reduziert. Dabei werden die Bifurkationen auf dem subharmonischen und harmonischen Ast (siehe Abb. 2.5) zuerst getrennt betrachtet. In einem weiteren Schritt werden die Gleichungen für die vierfach entartete Hopf-Verzweigung abgeleitet und diskutiert.

2.2.7.1 Entartete Hopf-Bifurkation

Die lineare Lösung der Amplitudengleichung (2.113) auf dem harmonischen Ast kann an der Hopf-Bifurkation aus den Eigenfunktionen zu den beiden komplex konjugierten Eigenwerten $(\lambda \pm \omega_H)$ zusammengesetzt werden:

$$A(\xi, t) = B_{1H} e^{(\lambda_H + i\omega_H)t} F_H^+(\xi) + B_{2H}^* e^{(\lambda_H - i\omega_H)t} F_H^-(\xi). \quad (2.119)$$

In den Gleichungen für den subharmonischen Ast muß lediglich der Index H durch S ersetzt werden. Die beiden Eigenfunktionen $F_{H,S}^\pm(\xi)$ sind räumlich periodisch subharmonisch (S)

bzw. harmonisch (H) zu den Modulationsfunktionen $H_i(\xi)$:

$$F_S^{+/-}(\xi) = \sum_{l=-N/2+1}^{N/2-1} A_l^{+/-} e^{i \frac{(2l-1)k\xi}{2}}, \quad (2.120a)$$

$$F_H^{+/-}(\xi) = \sum_{l=-N/2+1}^{N/2-1} A_l^{+/-} e^{ilk\xi}, \quad (2.120b)$$

je nachdem ob die Hopf-Bifurkation auf dem subharmonischen oder harmonischen Ast betrachtet wird. Die Nullstellen der links- und rechts-laufenden Wanderwellen sind für die subharmonische TW um π/k und für die harmonische TW um $2\pi/k$ verschoben [31, 44] (siehe auch Abb. 2.8a). Im Ortsraum stellt die Mode $B_{1H,S}$ eine nach links laufende Wanderwelle (LTW) und die Mode $B_{2H,S}$ eine nach rechts laufende Wanderwelle (RTW) dar.

Werden die Amplituden $B_{1,2H,S}$ als sich langsam im Ort und in der Zeit ändernde Funktionen aufgefaßt, so kann für diese ein System von zwei gekoppelten Amplitudengleichungen abgeleitet werden [56, 2]. Dazu wird der Ansatz (2.119) in die Amplitudengleichung (2.113) eingesetzt und auf die Eigenfunktionen $F^{+/-}$ projiziert:

$$\tau_0 \partial_t B_{1H} = [\nu - i\tau_0 \omega_H + \xi_H^2 (1 + c_{1H}) \partial_\xi^2] B_{1H} - [g_{0H} |B_{1H}|^2 + \gamma_{1H} |B_{2H}|^2] B_{1H}, \quad (2.121a)$$

$$\tau_0 \partial_t B_{2H} = [\nu - i\tau_0 \omega_H + \xi_H^2 (1 + c_{1H}) \partial_\xi^2] B_{2H} - [g_{0H} |B_{2H}|^2 + \gamma_{1H} |B_{1H}|^2] B_{2H}. \quad (2.121b)$$

Für das System des subharmonischen Astes müssen wieder die Indizes H durch S ersetzt werden. ν ist der relative Abstand des Kontrollparameters von der Schwelle der Hopf-Bifurkation, $\nu = \epsilon - \epsilon_c$. Da diese Schwelle im Minimum der kritischen Kurve liegt, verschwindet nach (2.36) die Gruppengeschwindigkeit v_g . Die linearen Koeffizienten, d.h. die Relaxationszeit τ_0 , die Kohärenzlänge ξ_0 und die lineare Frequenzdispersion $c_1 \xi_0^2$, können nach Standardformeln [41, 57, 56] aus der kritischen Kurve der linearen Stabilitätsanalyse berechnet werden:

$$\tau_0 = \frac{1}{\epsilon_c \frac{\partial \text{Re}(\sigma)}{\partial \epsilon}}, \quad \xi_0^2 = \frac{1}{2\epsilon_c} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial Q^2}, \quad c_1 = -\frac{\tau_0}{2\xi_0^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial Q^2}. \quad (2.122)$$

Die nichtlinearen Koeffizienten $g_{0H,S}$ und Kopplungskonstanten $\gamma_{1H,S}$ werden numerisch aus der Projektion bestimmt und sind in Tab. 2.4 angegeben. Beide zusammen beschreiben die Stärke der nichtlinearen Wechselwirkung zwischen der LTW und RTW. In binären Mischungen und in der Elektrokonvektion stehen die beiden Koeffizienten in der Regel im Wettbewerb, und nur eine Wanderwelle kann lokal überleben.

Lösungen dieses Typs von gekoppelten Amplitudengleichungen (2.121) und ihre lineare Stabilität sind in Ref. [58, 2] beschrieben. An dieser Stelle soll nur auf das Verhältnis der nichtlinearen Koeffizienten eingegangen werden. Auf beiden Ästen ist der nichtlineare Koeffizient $g_{0H,S} > 0$, daher verzweigen die Wanderwellen in beiden Fällen superkritisch aus dem Grundzustand. Zusätzlich ist das Verhältnis g_{0S}/γ_{1S} auf dem subharmonischen Ast, wie auch das Verhältnis g_{0H}/γ_{1H} auf dem harmonischen Ast für stärkere Modulation wesentlich größer

als eins (siehe Tab. 2.4). Als Konsequenz koexistieren LTW und RTW in diesem System auf beiden Lösungsästen und bilden modulierte stehende Wellen. Dies wird durch numerische Simulation der Amplitudengleichung (2.113) bestätigt, wie in Abb. 2.8a) zu sehen ist. Alle nichtlinearen Koeffizienten sind reell, so daß keine Benjamin-Feir ähnliche Resonanzphänomene erwartet werden. Der nichtlineare Koeffizient g_{0S} des subharmonischen Astes ist größer als der des harmonischen Astes.

2.2.7.2 Vierfach entartete Hopf-Bifurkation

In Abb. 2.5 sind beide Schwellen oberhalb des Kodimension-Zwei-Punktes (CTP) oszillatorisch, also existieren sowohl auf dem harmonischen wie auf dem subharmonischen Ast entartete Eigenwerte. Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, daß dort in beiden Fällen stehende Wellen bevorzugt werden. Wenn die Realteile der beiden komplex konjugierten Eigenwertpaare zusammenlaufen, stellt sich die Frage, ob bei dieser vierfach entarteten Hopf-Bifurkation die subharmonischen und harmonischen stehenden Wellen koexistieren können. Zur Beantwortung dieser Frage wird ein System von nun vier gekoppelten Amplitudengleichungen nach dem Schema des vorigen Abschnitts abgeleitet. Der Ansatz für die Amplitudengleichung (2.113) setzt sich aus den harmonischen und subharmonischen Eigenfunktionen $F_{H,S}^{\pm}(\xi)$ (2.120) zusammen:

$$\begin{aligned} A(\xi, t) = & B_{1S} e^{(\lambda_S + i\omega_S)t} F_S^+(\xi) + B_{2S}^* e^{(\lambda_S - i\omega_S)t} F_S^-(\xi) \\ & B_{1H} e^{(\lambda_H + i\omega_H)t} F_H^+(\xi) + B_{2H}^* e^{(\lambda_H - i\omega_H)t} F_H^-(\xi). \end{aligned} \quad (2.123)$$

Im Inneren der Abb. 2.5 sind die Frequenzen $\omega_{H,S}$ in Abhängigkeit von der Temperaturmodulation F_2 dargestellt. Für mittlere Modulationsstärken ist die subharmonische Frequenz ω_S gerade doppelt so groß wie die harmonische ω_H . Für größere Amplituden F_2 laufen die beiden Kurven zusammen, und die Frequenzen werden gleich. Es können für das nichtlineare Verhalten drei verschiedene Fälle für die Frequenzen in Betracht gezogen werden. Im ersten Fall ist $\omega_S \neq \omega_H$, im zweiten $\omega_S = 2\omega_H$ und im dritten ist $\omega_S = \omega_H$. In allen drei Fällen ergeben sich durch die Projektionen Amplitudengleichungen mit unterschiedlicher Anzahl von nichtlinearen Termen.

Eine vierfach entartete Hopf-Bifurkation wurde bereits in der Elektrokonvektion untersucht. Die entsprechenden vier Gleichungen wurden in [59] vorgestellt und das nichtlineare Verhalten in [60] untersucht, wohl unter Vernachlässigung der räumlichen Freiheitsgrade. Für die modulierte Rayleigh-Bénard-Konvektion können durch Einsetzen des Ansatzes (2.123) in die Amplitudengleichung (2.113) und Projektion auf die Eigenfunktionen im Fall $\omega_S = \omega_H$ die vier folgenden gekoppelten Amplitudengleichungen abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} \tau_0 \partial_t B_{1S} = & \left[\nu - i\tau_0 \omega_S + \xi_S^2 (1 + i c_{1S}) \partial_x^2 - g_{0S} |B_{1S}|^2 - \gamma_{1S} |B_{2S}|^2 \right] B_{1S} \\ & - \left[\gamma_{2S} |B_{1H}|^2 + \gamma_{3S} |B_{2H}|^2 \right] B_{1S} - \gamma_4 B_{2S} B_{1H} B_{2H}^* - \gamma_5 B_{1H}^2 B_{1S}^* - \gamma_6 B_{2S}^* B_{1H} B_{2H} \end{aligned} \quad (2.124a)$$

Raum	Koeff.	Amplitude $F_0 = 0.02$		
		$F_2 = 0.004$ (CTP)	$F_2 = 0.0046$ ($\omega_S \approx 2\omega_H$)	$F_2 = 0.05$ ($\omega_S \approx \omega_H$)
sub harmoni- sch	g_{0S}	$4.88010 + 0.00000i$	$4.87921 + 0.00000i$	$4.16260 + 0.00000i$
	γ_{1S}	$0.25532 + 0.00000i$	$0.25669 + 0.00000i$	$1.50702 + 0.00000i$
	γ_{2S}	$5.09930 + 0.00000i$	$7.49251 + 0.00000i$	$8.31645 + 0.00000i$
	γ_{3S}	$4.91624 + 0.00000i$	$2.52263 + 0.00000i$	$1.51578 + 0.00000i$
harmoni- sch	g_{0H}	$2.50477 + 0.00000i$	$3.15367 + 0.00000i$	$4.15386 + 0.00000i$
	γ_{1H}	$5.00602 + 0.00000i$	$3.70784 + 0.00000i$	$1.52452 + 0.00000i$
	γ_{2H}	$5.09930 + 0.00000i$	$7.49251 + 0.00000i$	$8.31645 + 0.00000i$
	γ_{3H}	$4.91624 + 0.00000i$	$2.52263 + 0.00000i$	$1.51578 + 0.00000i$
Kopp- lungs- terme	γ_4	—	—	$0.00000 + 1.51574i$
	γ_5	—	—	$-2.79631 + 3.07758i$
	γ_6	—	$0.84370 + 0.48978i$	$1.12181 + 1.01932i$

Tabelle 2.4: Nichtlineare Koeffizienten und Kopplungsparameter der Amplitudengleichungen (2.124) berechnet durch Projektion auf die Eigenfunktionen. Parameter: $k = 0.2, n_0 = 2, n_2 = 1, \varphi_2 = \pi/2$.

$$\tau_0 \partial_t B_{2S} = \left[\nu - i\tau_0 \omega_S + \xi_S^2 (1 + ic_{1S}) \partial_x^2 - g_{0S} |B_{2S}|^2 - \gamma_{1S} |B_{1S}|^2 \right] B_{2S} \quad (2.124b)$$

$$- \left[\gamma_{3S} |B_{1H}|^2 + \gamma_{2S} |B_{2H}|^2 \right] B_{2S} - \gamma_4 B_{1S} B_{1H}^* B_{2H} - \gamma_5 B_{2H}^2 B_{2S}^* - \gamma_6 B_{1S}^* B_{1H} B_{2H}$$

$$\tau_0 \partial_t B_{1H} = \left[\nu - i\tau_0 \omega_h + \xi_h^2 (1 + ic_{1H}) \partial_x^2 - g_{0H} |B_{1H}|^2 - \gamma_{1H} |B_{2H}|^2 \right] B_{1H} \quad (2.124c)$$

$$- \left[\gamma_{2H} |B_{1S}|^2 + \gamma_{3H} |B_{2S}|^2 \right] B_{1H} - \gamma_4 B_{1S} B_{2S}^* B_{2H} - \gamma_5 B_{1S}^2 B_{1H}^* - \gamma_6 B_{1S} B_{2S} B_{2H}^*$$

$$\tau_0 \partial_t B_{2H} = \left[\nu - i\tau_0 \omega_h + \xi_h^2 (1 + ic_{1H}) \partial_x^2 - g_{0H} |B_{2H}|^2 - \gamma_{1H} |B_{1H}|^2 \right] B_{2H} \quad (2.124d)$$

$$- \left[\gamma_{3H} |B_{1S}|^2 + \gamma_{2H} |B_{2S}|^2 \right] B_{2H} - \gamma_4 B_{1S}^* B_{2S} B_{1H} - \gamma_5 B_{2S}^2 B_{2H}^* - \gamma_6 B_{1S} B_{2S} B_{1H}^*$$

Im speziellen Fall $\omega_S = 2\omega_H$ sind $\gamma_4 = \gamma_5 = 0$ und die nichtlinearen Kopplungen zwischen den Gleichungen sind ähnlich wie in Ref. [8, 61]. Für $\omega_S \neq 2\omega_H$ und $\omega_S \neq \omega_H$ verschwindet zusätzlich der Kopplungsparameter γ_6 . Die nichtlinearen Koeffizienten und Kopplungsterme waren in den früheren Arbeiten [59, 60] freie unbekannte Konstanten, wohingegen sie hier unmittelbar mit der Amplitudengleichung (2.113) und der beschriebenen Projektionstechnik direkt aus den Bewegungsgleichungen als Funktion der Modulationsterme berechenbar sind. In Tab. 2.4 sind für die drei oben diskutierten charakteristischen Parametersätze alle Koeffizienten angegeben.

Im letzten Abschnitt war zu sehen, daß oberhalb der Hopf-Verzweigung auf dem harmonischen wie auf dem subharmonischen Ast stehende Wellen bevorzugt werden. Das Gleichungssystem (2.124) zusammen mit den Werten für die nichtlinearen Koeffizienten aus Tab. 2.4 erlaubt nun die Bestimmung der bevorzugten stehenden Welle oberhalb einer vierfach entarteten Verzweigung. Hierzu wird $B_{1S} = B_{2S}$ und $B_{1H} = B_{2H}$ gesetzt und die beiden

gekoppelten Gleichungen für $B_{1S,H}$ berechnet:

$$\begin{aligned} \tau_0 \partial_t B_{1S} = & [\nu - i\tau_0 \omega_c + \xi_h^2 \partial_x^2 - (g_{1S} + \gamma_{1S}) |B_{1S}|^2] B_{1S} \\ & - [\gamma_{2S} + \gamma_{3S} + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6] |B_{1H}|^2 B_{1S}, \end{aligned} \quad (2.125a)$$

$$\begin{aligned} \tau_0 \partial_t B_{1H} = & [\nu - i\tau_0 \omega_c + \xi_h^2 \partial_x^2 - (g_{1H} + \gamma_{1H}) |B_{1H}|^2] B_{1H} \\ & - [\gamma_{2H} + \gamma_{3H} + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6] |B_{1S}|^2 B_{1H}, \end{aligned} \quad (2.125b)$$

Diese Amplitudengleichungen beschreiben die stehenden Wellen auf dem harmonischen und subharmonischen Ast. Die Kreuzkopplungskonstanten $\gamma_{2S,H} + \gamma_{3S,H} + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6$ haben in beiden Gleichungen denselben Wert und die Verhältnisse $(g_{1S} + \gamma_{1S})/(\gamma_{2S,H} + \gamma_{3S,H} + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6)$ sind kleiner eins. Daher kommt es zum Wettbewerb beider stehenden Wellen und nur eine davon ist stabil. Der nichtlineare Koeffizient der subharmonischen stehenden Welle $g_{1S} + \gamma_{1S}$ ist in allen drei Fällen in Tab. 2.4 kleiner der der harmonischen stehenden Welle, $g_{1H} + \gamma_{1H}$ und daher ist die subharmonische die stabilere von beiden. Knapp oberhalb der Schwelle der vierfach entarteten Hopf-Bifurkation werden immer subharmonisch modulierte stehende Wellen erwartet. Die direkte numerische Simulation der Amplitudengleichung (2.113) bestätigt dieses störungstheoretische Resultat eindeutig unmittelbar oberhalb der Schwelle, wobei aber mit anwachsendem Kontrollparameter sehr schnell eine Mischung beider stehenden Wellen feststellbar ist. In diesem Bereich ist dann die Modenanalyse (2.124) nicht mehr anwendbar.

2.2.7.3 Komplexes Konvektionsverhalten und Wanderwellen

Die Amplitudengleichung (2.113) zeigt oberhalb der oszillatorischen Verzweigung, d.h. in den grauschattierten Flächen der Phasendiagramme in Abb.2.4 und 2.6, ein reichhaltiges Lösungsverhalten. Einige typische Beispiele sind in Abb.2.8 dargestellt, in der die zeitliche Entwicklung des realen Felds

$$\vec{u}(\xi, \eta, t) = A(\xi, t) e^{iq_0 \xi + \omega t} \vec{U}_0(\eta) + cc \quad (2.126)$$

als Funktion der Zeit aufgetragen ist. Die η -Abhängigkeit ist in der Amplitudengleichung nicht explizit enthalten. Sie steckt implizit in den Koeffizienten, die sich deshalb auch für feste und freie Randbedingungen unterscheiden. Daher ist die Berechnung der Zeitentwicklung einfacher, da es ein eindimensionales System ist. Das reale Feld $u(\xi, t)$ ist nach (2.40) mit der Amplitudengleichung verbunden. Die Verzweigung ist für konstantes $A(\xi, t)$ immer stationär, d.h. $\omega = 0$. Die Dynamik des Systems kommt über die Zeitabhängigkeit der Amplitude ins Spiel. Werden die Felder nur in der Zellenmitte betrachtet, entfällt die η -Abhängigkeit, so daß aus dem Vektor $\vec{u}$ eine skalare Größe wird. $u(\xi, t)$ entspricht dann sowohl dem Temperaturfeld Θ als auch dem Geschwindigkeitspotential Φ in der Zellenmitte. Die Kurven von $u(\xi)$ wurden mit zunehmender Zeit nach oben verschoben hintereinander dargestellt und schattiert. Die Amplitudengleichung (2.113) wurde mit einem einfachen Euler-Verfahren aufintegriert. Zur Analyse des zeitlichen Verhaltens reichte eine Diskretisierung von 128 Punkten im Ort für ein

System der Länge $L = 4\pi/k$. Die verwendete Systemlänge ist also subharmonisch bzgl. der Modulationswellenzahl k .

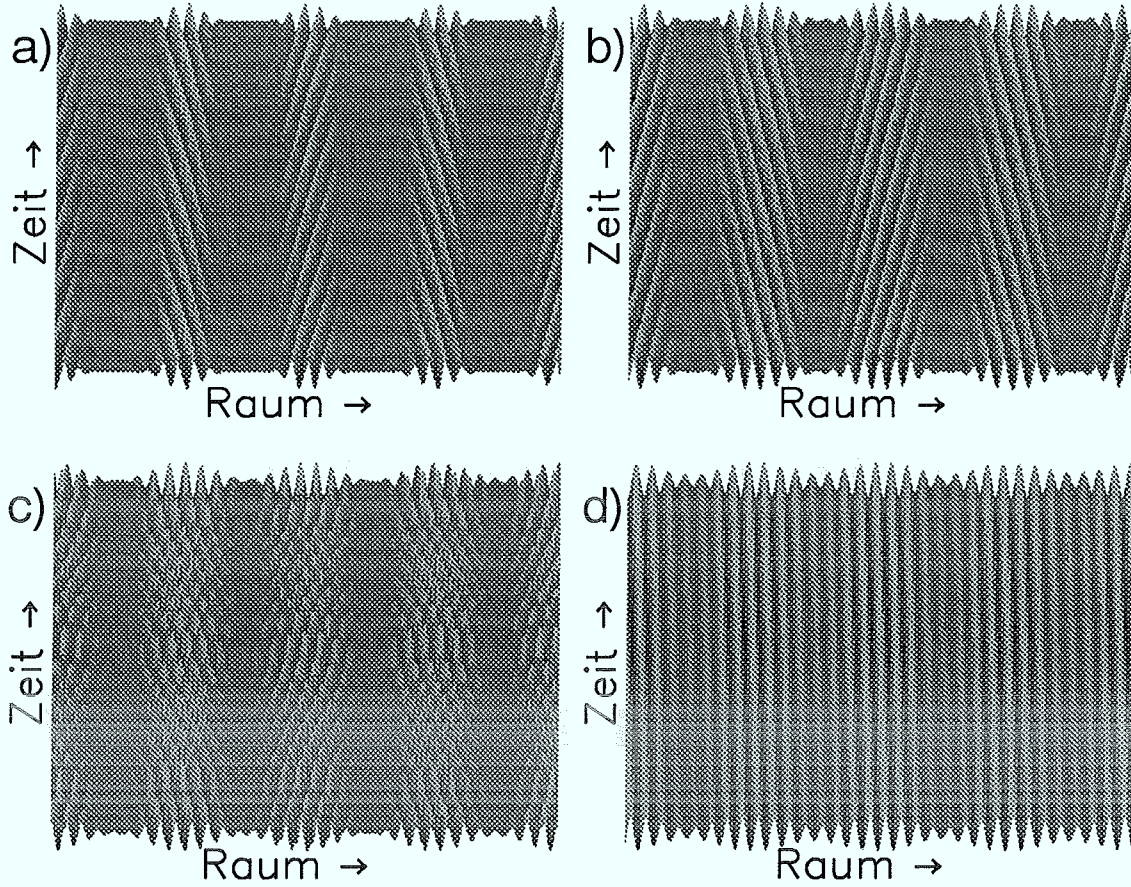


Abb. 2.8: Nichtlineare Lösungen der Amplitudengleichung (2.113) im Ortsraum mit periodischen Randbedingungen. In a) bei $\epsilon = -0.1$ stehende Wellen (SW), in b) bei $\epsilon = 0.05$ zeitlich anharmonisches Verhalten der stehenden Wellen, in c) bei $\epsilon = 0.072$ zeitlich komplexes Verhalten und in d) bei $\epsilon = 0.17$ Wanderwellen (TW). In a) und b) wurde bis $t = 10000$ in c) bis $t = 30000$ und in d) bis $t = 100000$ simuliert. Modulation: $n_0 = 2, n_2 = 1, k = q_c/16 \approx 0.2, F_0 = 0.05, F_2 = 0.01/R_c^r, \varphi_2 = \pi/2$. Zur besseren Auflösung des Felds $u(\xi, t)$ im Ortsraum wurde auf einem Gitter mit 320 Stützstellen gerechnet.

Das System wurde für eine geometrische Modulation mit $n_0 = 2$ an der unteren Platte und einer Temperaturmodulation mit $n_2 = 1$ simuliert. Für die Parameter $k = 0.2, F_0 = 0.05, F_2 = 0.01R_c^r$ und $\varphi_2 = \pi/2$ tritt als Ergebnis der linearen Stabilitätsanalyse bei $q_c = 3.12682$ und $R_c = 1525.58$ eine Hopf-Bifurkation mit $\omega_c = 0.0000856$ auf. Für die Amplitudengleichung liegt damit die Einsatzschwelle für die oszillatorische Verzweigung bei $\epsilon_c = -0.107$.

Knapp oberhalb dieser kritischen Schwelle kommt es zu einer Überlagerung von modulierten links- (LTW) und rechtslaufenden Wellen (RTW), die zusammen als modulierte stehende Wellen (SW) erscheinen, wie in Abb.2.8 bei $\epsilon = -0.1$ zu sehen ist. Die modulierten LTW und

RTW bewirken Gebiete mit kleinen Konvektionsamplituden. Mit zunehmendem Kontrollparameter wird der Einfluß der Modulationen schwächer und die zeitliche Oszillation wird anharmonischer, siehe b) bei $\epsilon = 0.05$. Für noch größere Werte $\epsilon = 0.072$ in c) entstehen in der zeitlichen Entwicklung verschieden lange, stationäre Intervalle. Deutlicher ist das anharmonische Verhalten in Abb. 2.9 zu sehen, in der für die drei Parametersätze aus Abb. 2.8 a)-c) das Feld $u(\xi = 0, t)$ an einem festen Ortspunkt über einen Zeitbereich von $t = 30000$ dargestellt ist. Die Verteilung der Länge der Intervalle zwischen zwei Nulldurchgängen $u(\xi = 0, t)$ von positiv nach negativ ist Inhalt des nächsten Abschnitts, in dem gezeigt wird, daß es sich in c) um ein irreguläres Verhalten handelt.

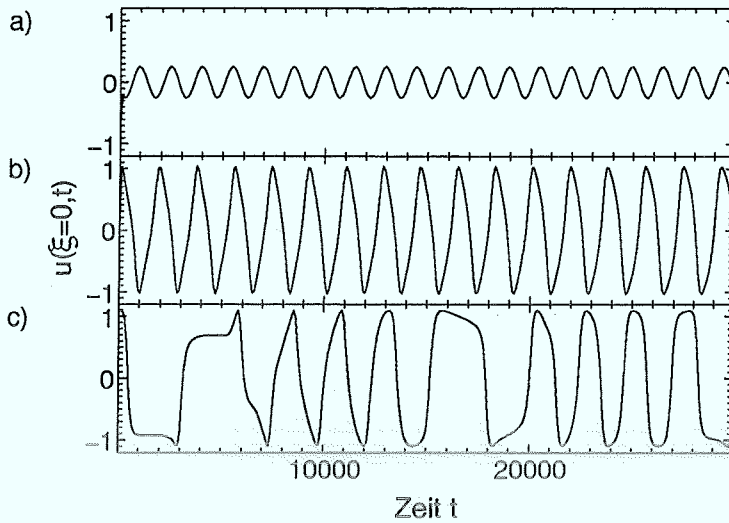


Abb. 2.9: Zeitverhalten eines Ortspunktes. In c) ist das Zeitverhalten des Ortspunktes $u(\xi = 0, t)$ aus der Simulation in Abb. 2.8 c) bei $\epsilon = 0.072$ im chaotischen Bereich zu sehen. In a) wurde bei $\epsilon = -0.1$ dieser Punkt an der Schwelle und in b) bei $\epsilon = 0.05$ im anharmonischen Bereich dargestellt.

Die stehenden Wellen in Abb. 2.8a) direkt oberhalb der Schwellen scheinen zwei räumliche Perioden zu enthalten, wodurch sie bei einer Systemlänge von $L = 4\pi/k$ harmonisch bzgl. der Wellenzahl k wären. In Abb. 2.10 ist das zeitliche Verhalten der Lösung bei $\xi = 0$ und $\xi = 2\pi/k$ dargestellt. Die deutlich zu erkennende Phasenverschiebung zwischen den beiden Kurven belegt eindeutig, daß die Lösung nicht harmonisch, sondern wie durch die störungstheoretischen Überlegungen vorhergesagt subharmonisch bzgl. k ist. Eine harmonische Lösung hat eine Periodizität von $2\pi/k$ und müßte daher an beiden Punkten in Phase laufen. Die Ursache für das nur leicht verschiedene räumliche Erscheinungsbild der harmonischen und subharmonischen Lösungen liegt in der räumlichen Struktur ihrer Eigenfunktionen, welche in Abb. 2.11 dargestellt sind. Die Gebiete der maximalen Amplituden der subharmonischen LTW in a) und der RTW b) liegen gerade in den Bereichen, in denen die andere Eigenfunktion eine schwach ausgeprägte Amplitude hat. Die Überlagerung beider Eigenfunktionen führt dann zu den stehenden Wellen.

Auf den ersten Blick scheinen diese Eigenfunktionen in Abb. 2.11 a) und b) zwei räumliche Perioden auf der Länge $4\pi/k$ zu besitzen. Werden sie allerdings um $\xi \rightarrow \xi + 2\pi/k$ verschoben werden, sind sie nicht zur Deckung zu bringen. Im Vergleich der subharmonischen RTW in b)

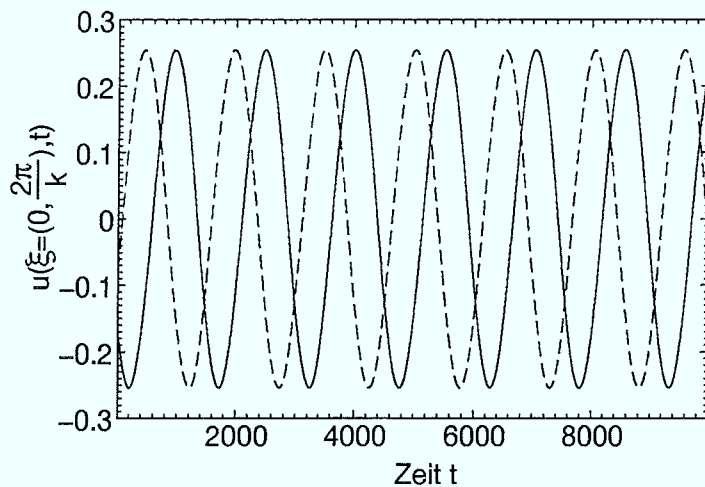


Abb. 2.10: Subharmonisches Verhalten. Für die stehenden Wellen aus Abb. 2.8 a) bei $\epsilon = -0.1$ ist das Verhalten des realen Felds $u(\xi, t)$ bei $\xi = 0$ (durchgezogene Linie) und bei $\xi = 2\pi/k$ (gestrichelt) dargestellt. Die Phasenverschiebung zeigt deutlich, daß die Lösung subharmonisch bzgl. der Wellenzahl k ist.

zu der harmonischen RTW in c) wird dies deutlicher. Während die harmonische RTW an den um $2\pi/k$ verschobenen gestrichelten Hilfslinien, gleiche Phase hat, ist in der subharmonischen RTW ein Phasensprung zu erkennen.

Die irregulären Lösungen aus Abb. 2.8c) sind ebenfalls subharmonisch, wie in der Darstellung der ortsabhängigen Amplitude $A(\xi)$ in Abb. 2.12 zu sehen ist. Die Gesamtlösung ist aber bei diesen Kontrollparameterwerten schon eine Superposition von harmonischen und subharmonischen Anteilen. Das Verhalten des Amplitudenquadrats in b) wirkt harmonisch, Real- und Imaginär-Teil zeigen allerdings gleichermaßen subharmonisches Verhalten.

Knapp oberhalb von $\epsilon = 0.072$ bricht das irreguläre Verhalten zusammen. In der Am-

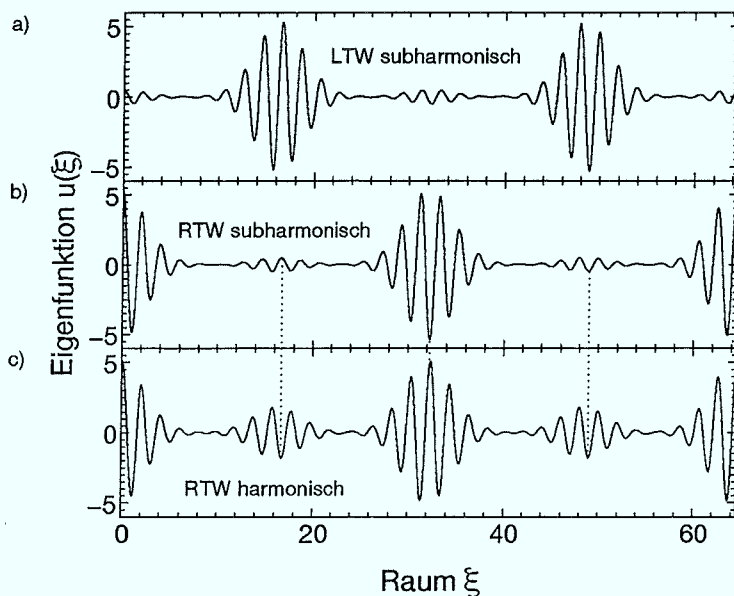


Abb. 2.11: Eigenfunktionen im Ortsraum. In a) und b) sind die subharmonischen Eigenfunktionen im Ortsraum dargestellt, die dort links (LTW) und rechts (RTW) laufende Wellen sind. In c) ist die RTW der harmonischen Lösung zum Vergleich eingezeichnet. Die gestrichelten Hilfslinien verbinden die Extrema, an denen deutlich die Phasenverschiebung in den subharmonischen Eigenfunktionen zu sehen ist. Parameter: $F_0 = 0.02$, $F_2 = 0.005$, $n_0/n_2 = 2/1$, $\varphi_2 = \pi/2$, $k = q_c/16 \approx 0.2$. Systemlänge $L = 4\pi/k$

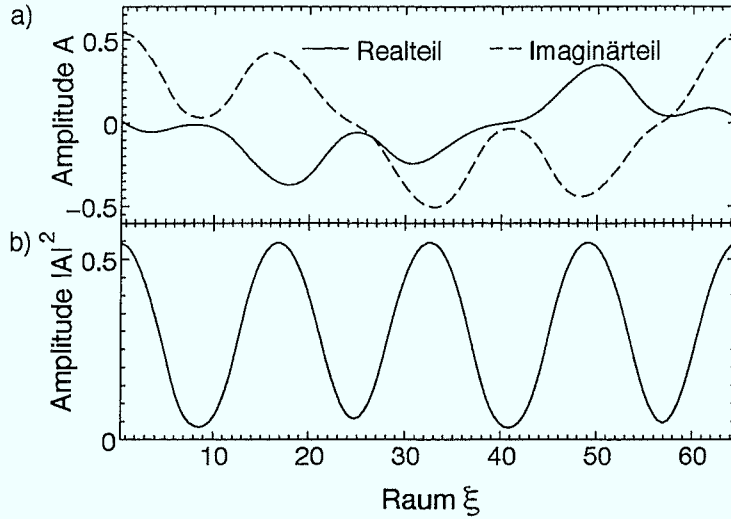


Abb. 2.12: Darstellung der ortsabhängigen Amplitude $A(\xi)$ für die chaotische Lösung bei $\epsilon = 0.07$. Real- und Imaginärteil zeigen deutlich subharmonisches Verhalten mit harmonischen Anteilen. Letzteres ist deutlicher in b) für das Betragsquadrat der Amplitude zu sehen. Dargestellt ist die Systemlänge $L = 4\pi/k$. Modulation: $n_0 = 2, n_2 = 1, k = q_c/16 \approx 0.2, F_0 = 0.05, F_2 = 0.01R_c^r, \varphi_2 = \pi/2$.

plitudengleichung (2.113) dominiert nun der Kontrollparameter gegenüber den Modulationstermen, und es scheinen stationäre Konvektionsrollen zu entstehen. Auf langen Zeitskalen ist allerdings zu erkennen, daß es sich um Wanderwellen (TW) mit sehr langer Oszillationsfrequenz handelt, wie in Abb.2.8d) für $\epsilon = 0.17$ zu sehen ist. Zu beachten ist dabei, daß die Zeitskala in d) mit $t = 10^5$ um einen Faktor 10 größer ist als in a) und b). In Abb. 2.13 wurde die Oszillationsfrequenz zu verschiedenen Werten des Kontrollparameters gemessen. Die Simulation in Abb.2.8d) wurde gerade im Minimum dieser Kurve durchgeführt, um möglichst kurze Simulationszeiten einhalten zu können. Für wachsenden Kontrollparameter wächst auch die Oszillationsfrequenz und für sehr große Werte treten stationäre Konvektionsrollen auf. Die Entstehung von Wanderwellen oberhalb des chaotischen Regimes ist in diesem räumlich periodischen System erstaunlich, denn die Ausbildung einer Wanderwelle verlangt einen spontanen Symmetriebruch, also eine Entscheidung zwischen den gleichberechtigten

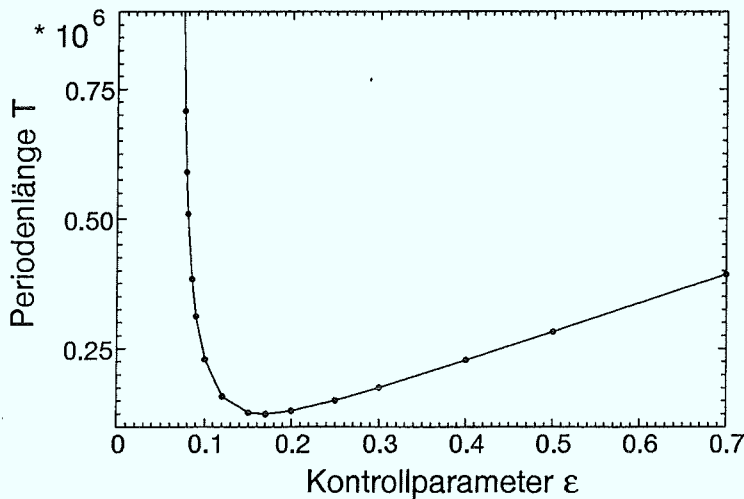


Abb. 2.13: Periodenlängen der Wanderwellen (TW). Für Kontrollparameter $\epsilon \gtrsim 0.072$ bricht das irreguläre Verhalten zusammen, und es entstehen Wanderwellen mit langen Periodenlängen. Modulation: $n_0 = 2, n_2 = 1, k = 0.2, F_0 = 0.05, F_2 = 0.01/R_c^r, \varphi_2 = \pi/2$.

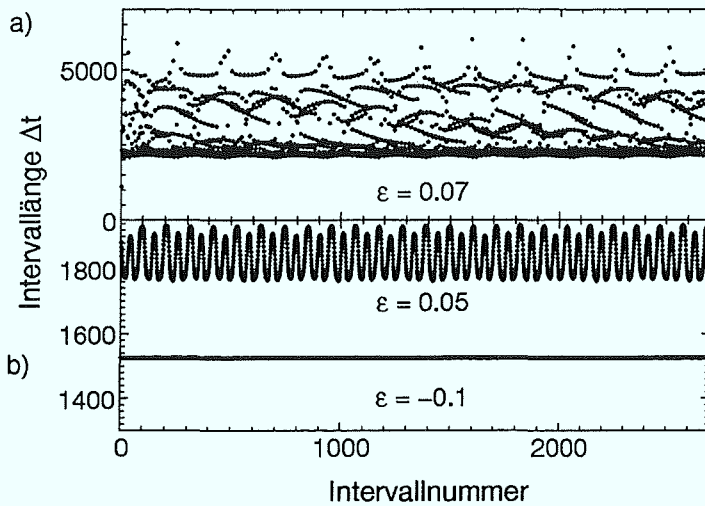


Abb. 2.14: Intervalllängen in den drei Bereichen. Über einen langen Zeitraum wurden die Intervalllängen Δt für drei verschiedene Werte des Kontrollparameters bestimmt und als Punkte fortlaufend eingezeichnet. Modulation: $n_0 = 2, n_2 = 1, k = q_c/16 \approx 0.2, F_0 = 0.05, F_2 = 0.01/R_c^r, \varphi_2 = \pi/2$.

LTW und RTW.

Der essentielle Unterschied zwischen den vier Lösungen in Abb. 2.8 ist ihr zeitliches Verhalten. Zur Charakterisierung dieses Verhaltens werden die Zeitintervalle Δt zwischen den Vorzeichenwechsel von positiv nach negativ des Felds $u(\xi = 0, t)$ an einem festen Punkt bestimmt. In Abb. 2.8 ist die Verteilung der Intervalllängen zu gleichen Parametern wie in Abb. 2.8 a)-c) dargestellt. Direkt an der Schwelle existiert eine feste Intervalllänge, zu erkennen an der horizontalen Linie in b). Für anwachsende Kontrollparameter beginnt die Intervalllänge um einen festen Mittelwert zu oszillieren, wie an den oberen Punkten in b) zu sehen ist, wobei die Oszillationsamplitude wie der Mittelwert mit steigendem ϵ größer werden. Das oszillatorische Verhalten der Intervalllängen deutet auf ein multiperiodisches oder quasiperiodisches Verhalten hin. Im Fourierspektrum zu diesen Parametern in Abb. 2.15 b) sind in der Tat eine Reihe von Frequenzen mit endlicher Amplitude angeregt.

Für Werte des Kontrollparameters im Bereich $\epsilon = 0.07$ sind die Intervalllängen unregelmäßig verteilt, wie für eine kleine Anzahl in Abb. 2.14 a) zu sehen ist. Dieses irreguläre Verhalten wird in Abb. 2.16 a) durch einen sehr viel längeren Simulationslauf bestätigt. Der Mittelwert aus 12500 aufgezeichneten Intervalllängen ist $\Delta t = 2781$, wobei sich die Simulation über eine Zeit von $t = 3.5 \cdot 10^7$ erstreckt. Die gefundenen Zeitintervalle unterscheiden sich. Beispielsweise wurde während der Simulation ein Intervall der Länge $\Delta t = 2851.924$ gefunden. Über die gesamte Simulationszeit wurden als nächste Nachbarn zu dieser Länge zwei Intervalle mit $\Delta t = 2849.944$ und $\Delta t = 2853.084$ gefunden. Die Differenz zwischen den benachbarten Werten ist wesentlich größer als die zeitliche Auflösung von $dt = 0.0254$ als Integrationsschritt im Euler-Verfahren. Das Verhalten von $u(\xi, t)$ ist offensichtlich aperiodisch.

Zu den Simulationen aus Abb. 2.14 sind in Abb. 2.15 die Fourierspektren der zeitlichen Entwicklung eines festen Punktes $u(\xi = 0, t)$ dargestellt. Für $\epsilon = 0.05$ scheinen die mit großer Amplitude angeregten Frequenzen äquidistant zu sein. Dies ist allerdings nicht der Fall.

Zusätzliche Frequenzen zwischen diesen sind angeregt, was auf ein quasiperiodisches Verhalten von $u(\xi = 0, t)$ hindeutet. Diese Beobachtung wird durch die zerfallende Korrelation zwischen den Intervalllängen unterstützt.

Für $\epsilon = 0.07$ zeigen die Fourierspektren in Abb. 2.15 a) und 2.16 b) eine Anzahl von äquidistant liegenden angeregten Frequenzen. Allerdings sind eine Reihe von starken Peaks zwischen diesen zu erkennen. Die in der Intervalllängenverteilung in Abb. 2.16 b) zu beobachtenden Strukturen haben ihre Ursache möglicherweise in den äquidistanten Peaks. Die starke Streuung und nicht vorhandene Wiederholung der Δt -Werte mögen als Ursache die nicht äquidistant liegenden Peaks im Fourierspektrum haben. Dies unterstützt die Annahme, daß das zeitliche Verhalten von $u(\xi = 0, t)$ quasiperiodisch oder sogar chaotisch ist.

Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Intervalllängen aus Abb. 2.16 kann in einem zweidimensionalen Koordinatensystem eingetragen werden. Der so erhaltene Poincaré-Schnitt ist in Abb. 2.17 zu sehen. Die deutlich zu erkennenden Spiralbahnen deuten auf ein quasiperiodisches Verhalten zwischen zwei Frequenzen, deutliche Unregelmäßigkeiten sowie die Ausdehnung in der Fläche eher auf ein chaotisches Verhalten hin. In einem dreidimensionalen Poincaré-Schnitt ist das chaotische Verhalten deutlicher zu beobachten. In Abb. 2.18 wurden die Verhältnisse dreier aufeinanderfolgender Geschwindigkeitsbeträge beim Vorzeichenwechsel des Felds $u(\xi = 0, t)$ von positiv nach negativ aus demselben Lauf berechnet und als Punkte eingetragen. Die dreidimensionale Ausdehnung des so erhaltenen Gebildes legt den Schluß auf eine chaotische Bewegung nahe.

Mit zunehmendem Kontrollparameter ϵ werden die Intervalllängen Δt über einen immer größer werdenden Bereich gestreut, wie schon an den drei Beispielen in Abb. 2.14 zu sehen ist. Daher liegt es nahe, den Bereich der Intervalllängen als Maß für die Komplexität der Dynamik aufzufassen. In Abb. 2.19 wurde dieser Bereich für eine große Anzahl äquidistant liegender Werte des Kontrollparameters bestimmt. Aus der konstanten Intervalllänge bei klei-

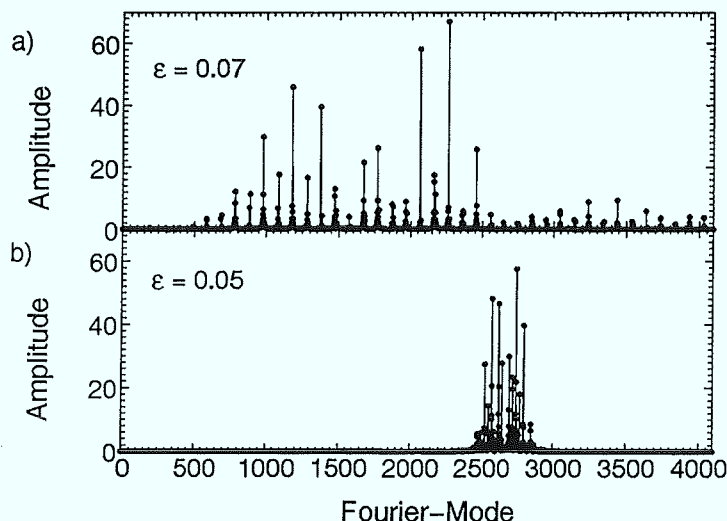


Abb. 2.15: Fourierspektren von $u(\xi = 0, t)$ zu gleichen Parametern wie in Abb. 2.14. Aufgenommen wurde das $u(x = 0)$ zu 2^{16} Zeiten im Abstand von $dt = 75.0103$, d.h. Schwingungen des Feldes wurden mit ca. 25 Punkten aufgelöst. Dargestellt sind die Amplitudenbeträge der ersten 4096 Fourier-Moden, also ein Viertel des Spektrums. a) bezieht sich auf den chaotischen, b) auf den anharmonischen Bereich.

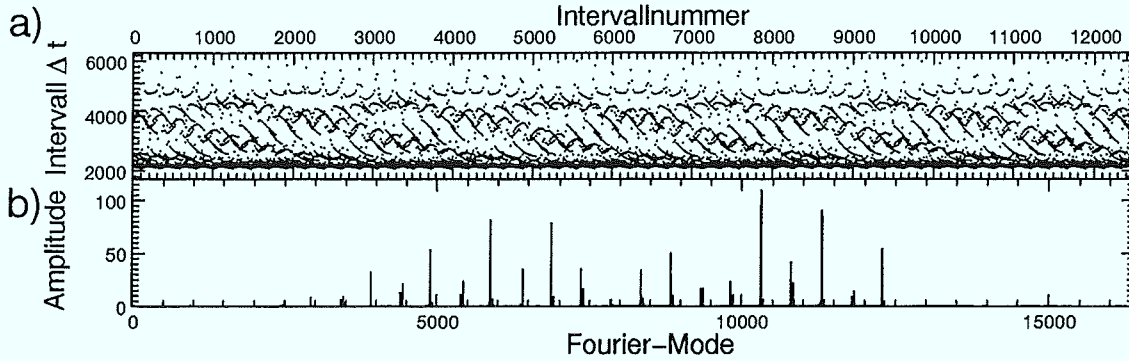


Abb. 2.16: Verlängerter Lauf zu Abb. 2.14 a). Im oberen Bild sind 12.500 Intervallängen im Zeitbereich bis $t = 3.5 \cdot 10^7$ registriert worden. Die mittlere Intervalllänge ist 2781. Die Punkte liegen nicht dicht, insbesondere konnte keine Periodizität festgestellt werden. Beispiel: Die Intervalllänge 2851.924 taucht im gesamten Datensatz nur einmal auf. Die nächsten Nachbarn sind 2849.944 und 2853.084. Die Differenz zwischen diesen Werten überschreitet bei weitem den Zeitschritt der Integration von $dt = 0.02541$. Im unteren Bild sind die Amplituden der ersten 2^{14} Moden der Fouriertransformation mit 2^{18} Punkten dargestellt. Die Meßpunkte wurden alle $dt = 93.76$ aufgenommen, um die kurzen Oszillationen des u -Felds mit etwa 20 Punkten auflösen zu können. Das für die Fourieranalyse ausgewertete Zeitintervall ist also $t = 2.45 \cdot 10^7$.

nen ϵ wächst kontinuierlich ein immer breiter werdendes Band von Intervallängen heraus. Diese liegen allerdings bei den endlichen Simulationszeiten nicht dicht, wie in Abb. 2.16 zu sehen und bereits diskutiert wurde. Der Übergang vom anharmonischen zum chaotischen Gebiet kann mit dieser Darstellung nicht exakt bestimmt und definiert werden. Offensichtlich ist allerdings, daß es keine Art von Periodenverdopplung in diesem System gibt.

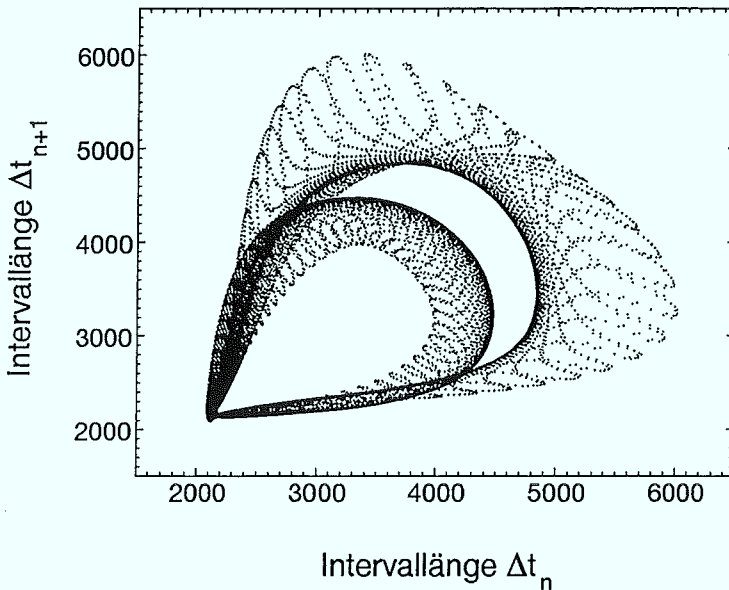


Abb. 2.17: Poincaré-Schnitt für aufeinanderfolgende Intervallängen. Für alle Intervallängen aus Abb. 2.16 wurde das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Intervallängen in ein zweidimensionales Koordinatensystem eingetragen.

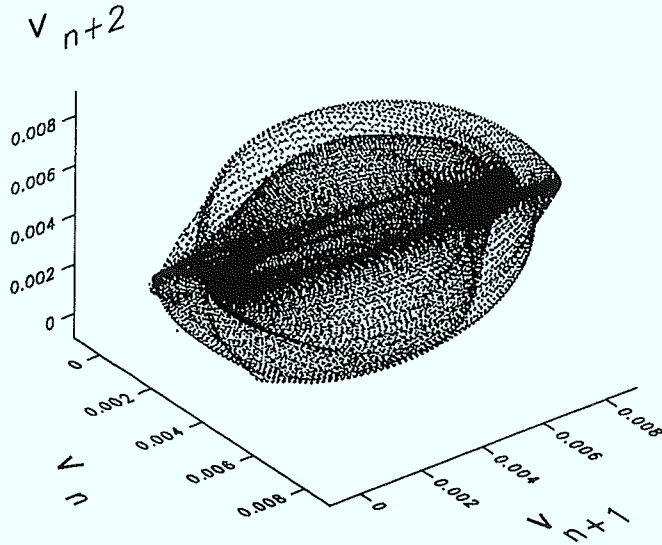


Abb. 2.18: Poincaré-Schnitt. In dem langen Lauf aus Abb. 2.16 wurde die Geschwindigkeit $v_n = \partial_t u_n(\xi = 0, t)$ an den Stellen des Vorzeichenwechsels von positiv nach negativ berechnet, und die Verhältnisse der Geschwindigkeiten an drei aufeinanderfolgenden Nullstellen in einem dreidimensionalen Koordinatensystem eingezeichnet.

2.2.7.4 Raumzeitliche Dynamik in einem längeren System

Für ein längeres System, etwa vierfacher Länge $4L$ mit $L = 4\pi/k$, stellt sich die Frage, ob die Lösungen einfach eine räumlich periodische Fortsetzung des kurzen Systems der Länge L sind, oder ob sich $u(\xi, t)$ an verschiedenen Punkten im Abstand von L unabhängig voneinander in der Zeit entwickelt. Knapp oberhalb der Schwelle werden räumlich kohärente, regelmäßige stehende Wellen beobachtet. Bleibt also die Korrelation im Ort bei Erhöhung des Kontrollparameters erhalten? Zur Beantwortung dieser Frage wurde ein System der Länge $4L$ simuliert und die zeitliche Entwicklung des Felds $u(\xi, t)$ und den Orten $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = L$, $\xi_3 = 2L$ und

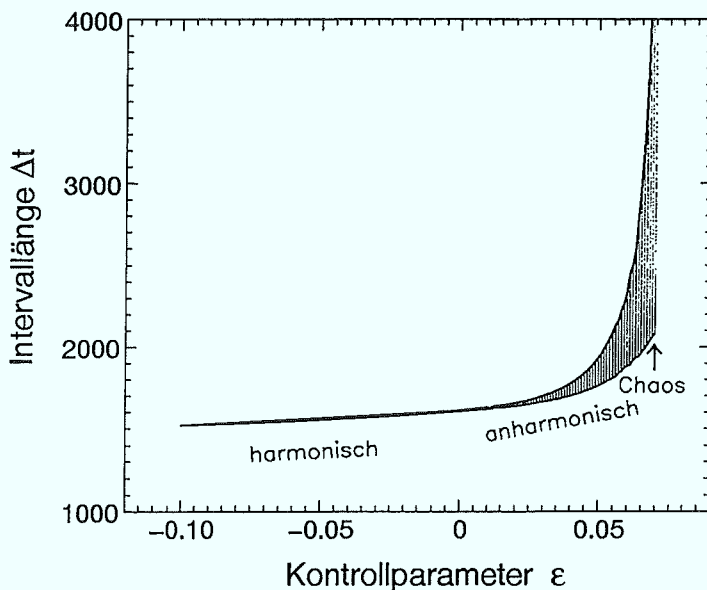


Abb. 2.19: Intervallängen Δt für verschiedene Werte von ϵ . Bei jedem Wert wurde die Dynamik über eine Zeit von $t = 10^6$ analysiert. Der anharmonische Bereich entwickelt sich kontinuierlich aus dem harmonischen, insbesondere findet keine Periodenverdopplung statt. Modulation: $n_0 = 2, n_2 = 1, k = q_c/16 \approx 0.2, F_0 = 0.05, F_2 = 0.01/R_c^r, \varphi_2 = \pi/2$.

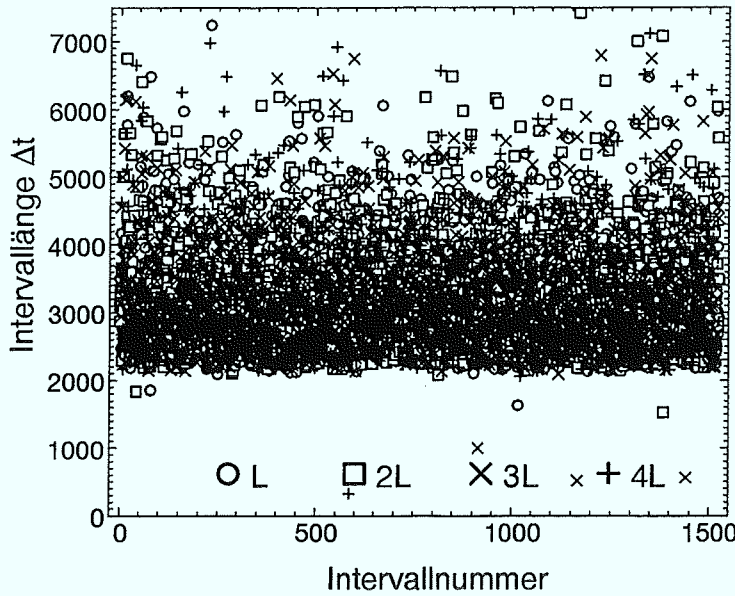


Abb. 2.20: Raumzeitlich komplexe Lösung. In einem System vierfacher Länge sind die einzelnen Bereiche unkorreliert. In einem Zeitbereich von $t = 5 \cdot 10^7$ wurden an vier äquidistanten Stellen die Intervalllängen bestimmt und mit verschiedenen Symbolen eingezeichnet. Kontrollparameter: $\epsilon = 0.072$. Modulation: $n_0 = 2, n_2 = 1, k = q_c/16 \approx 0.2, F_0 = 0.05, F_2 = 0.01/R_c^r, \varphi_2 = \pi/2$. Systemlänge $4L = 16\pi/k$ mit einer Auflösung von 512 Punkten.

$\xi_4 = 3L$, aufgezeichnet. Für $\epsilon = 0.072$ wurde aus einer kohärenten Struktur gestartet und die Intervalllängen an den vier Ortspunkten bestimmt. Die Verteilung der Intervalllänge ist in Abb. 2.20 mit verschiedenen Symbolen für die vier Punkte dargestellt. An jedem Punkt ist die Verteilung unregelmäßig wie in dem kurzen System, insbesondere ist keinerlei Korrelation zwischen den vier Symbolen zu erkennen. Die Fourierspektren für $u(\xi = 0, t)$ an den vier Punkten in Abb. 2.21 unterscheiden sich ebenfalls deutlich. Die unterschiedliche Dynamik an den vier Punkten basiert also nicht auf einer Phasenverschiebung zwischen den zeitlichen Entwicklungen an den vier Punkten, da die Amplituden der einzelnen Frequenzen in den Spektren

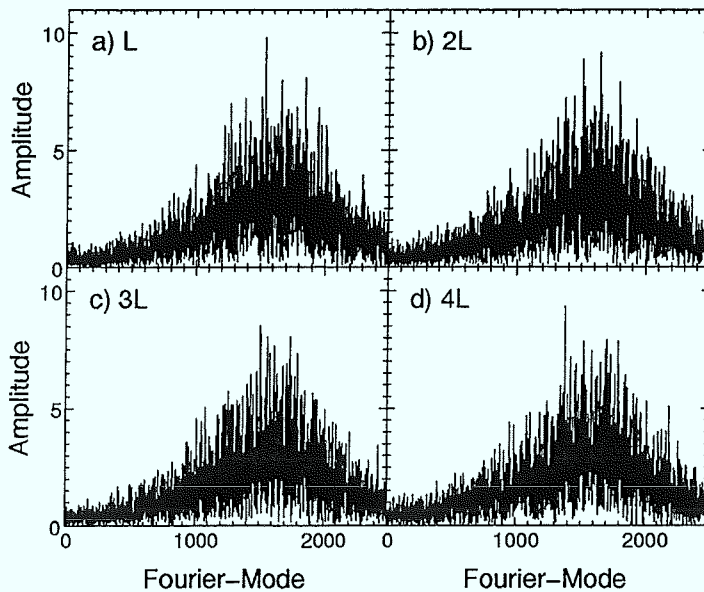


Abb. 2.21: Fourierspektren des langen Systems aus Abb. 2.20. Dargestellt sind die Amplitudenbeträge des ersten Viertels der Spektren, die aus 20000 Aufzeichnungen des u -Felds an den vier Punkten im Abstand von $2\pi/k$ über eine Zeit von $t = 5 \cdot 10^6$ berechnet wurden.

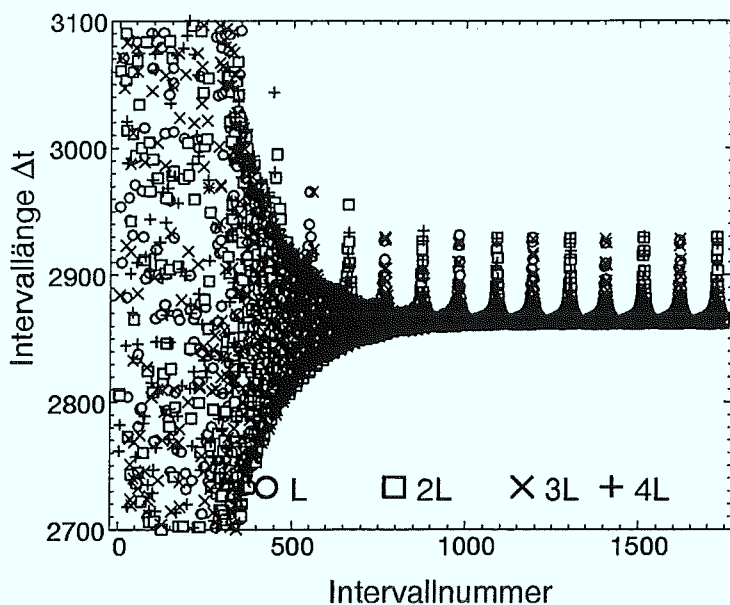


Abb. 2.22: Synchronisation. Gestartet wurde aus der raumzeitlich komplexen Lösung aus Abb. 2.20 mit gleichen Parametern bis auf einen verkleinerten Kontrollparameter von $\epsilon = 0.070$. Das komplexe Verhalten löst sich auf und die Schwingungen an den vier Punkte synchronisieren sich. Dabei sind die benachbarten Punkte um jeweils ein halbe Schwingungsperiode phasenverschoben.

unterschiedlich sind. Die Intervalllängenverteilung und die Fourierspektren deuten darauf hin, daß es in der modulierten thermischen Konvektion raumzeitlich komplexes Lösungsverhalten gibt. Dadurch wird dieses reale System sehr attraktiv, denn es gibt zwar viele Modelle, die raumzeitliches Chaos zeigen, aber wenig reale Systeme. Dieses System erlaubt zusätzlich über die Modulationsparameter einen kontrollierten Zugang zur Untersuchung von zeitlich komplexem sowie raumzeitlich komplexem Lösungsverhalten.

Wird der Kontrollparameter aus der raumzeitlich komplexen Lösung in Abb. 2.20 auf $\epsilon = 0.07$ gesenkt, kommt es zu einer räumlichen Synchronisation, wie an der Intervalllängenverteilung in Abb. 2.22 zu sehen ist. Für $\epsilon = 0.072$ war die Lösung periodisch zur Systemlänge $4L$. Bei Verringerung auf $\epsilon = 0.07$ tritt eine Oszillation in der Intervalllänge auf. Dabei stellt sich eine Periodizität von $2L$ ein, d.h. die Intervalllängen bei $\xi = 0$ und $\xi = 2L$ schwingen mit gleicher Frequenz, bei $\xi = L$ und $\xi = 3L$ ebenfalls gleich aber zu den anderen beiden Orten um eine halbe Periodizität phasenverschoben. Diese Synchronisation ist allerdings nicht perfekt, denn die Schwankungen der Intervalllängen an den einzelnen Orten liegen in einem größeren Bereich als dem durch die Zeitauflösung vorgegebenen Intervall von $dt = 0.02541$.

Oberhalb der raumzeitlich komplexen Lösungen existieren wie im kurzen System stabile Wanderwellen. In Abhängigkeit von den Startbedingungen können allerdings interessante lokalisierte, wandernde Störungen beobachtet werden, wie in Abb. 2.24 gezeigt ist. Zwischen den modulierten stationären Bereichen läuft eine oszillatorische Störung durch das gesamte System. Auf den ersten Blick sieht dieser propagierende Puls wie eine „solitary mode“ aus, wie sie in der gerichteten Erstarrung beobachtet wird [62, 63, 64, 65, 66]. Wie bereits erwähnt, läßt sich die Gesamtlösung als Überlagerung eines symmetrischen $u_s(\xi + 2\pi/k, t) = u_s(\xi, t)$

und eines antisymmetrischen $u_a(\xi + 2\pi/k, t) = -u_a(\xi, t)$ Anteils auffassen:

$$u(\xi, t) = C_s(\xi, t) u_s(\xi, t) + C_a(\xi, t) u_a(\xi, t). \quad (2.127)$$

Wenn $C_a(\xi, t)$ Pulscharakter besitzt, wird aufgrund der Phasendynamik erwartet, daß dieser Puls propagiert [64, 65]. Dieser Mechanismus für paritätsbrechende Pulse scheint in diesem Beispiel zur Anwendung zu kommen. Um dieses zu verdeutlichen, können die einzelnen Anteile der Lösungen über

$$u_s(\xi, t) = (u(\xi, t) + u(\xi + 2\pi/k, t))/2 \quad (2.128)$$

$$u_a(\xi, t) = (u(\xi, t) - u(\xi + 2\pi/k, t))/2 \quad (2.129)$$

berechnet werden. Diese Transformation erlaubt keine exakte Trennung der Lösung $u(\xi, t)$ in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil, weil $u(\xi, t)$ nicht perfekt periodisch in $4\pi/k$ ist. Diese Zerlegung zeigt allerdings die wesentlichen Charakteristika des propagierenden Pulses. Die raumzeitlichen Entwicklungen von $u_{s,a}(\xi, t)$ sind in Abb. 2.24 dargestellt. Diese Zerlegung zeigt deutlich, daß der propagierende Puls antisymmetrisch bzgl. der Verschiebung $\xi \rightarrow \xi + 2\pi/k$ ist, sich durch die symmetrische harmonische Lösung bewegt, genau wie in anderen Beispielen beobachtet wird [62, 21].

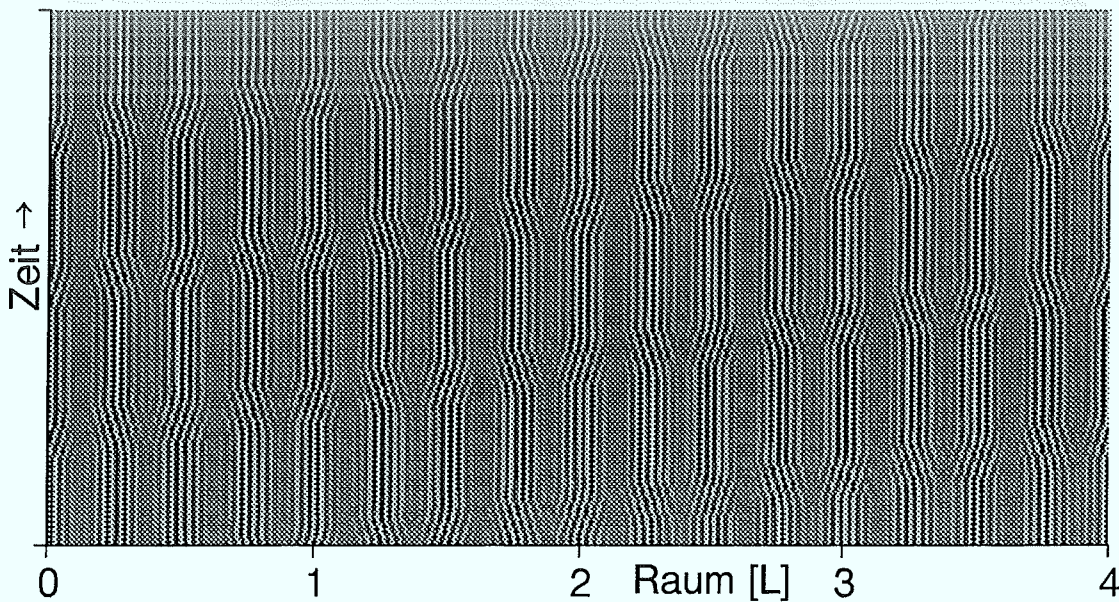


Abb. 2.23: Soliton. Dargestellt ist das u -Feld in einem System der Länge $4L = 16\pi/k$. Die Minima sind schwarz, die Maxima sind weiß gefärbt. Deutlich ist zu sehen, wie eine Störung in der sonst stationären Struktur, zu erkennen an den parallelen Streifen, über die subharmonischen Periodizitätslängen L wie ein Soliton hinweg läuft. Zeit: $t = 50000$. Kontrollparameter: $\epsilon = 0.075$. Modulation: $n_0 = 2, n_2 = 1, k = q_c/16 \approx 0.2, F_0 = 0.05, F_2 = 0.01/R_c^*, \varphi_2 = \pi/2$. Auflösung: $4L = 16\pi/k$ mit 512 Punkten.

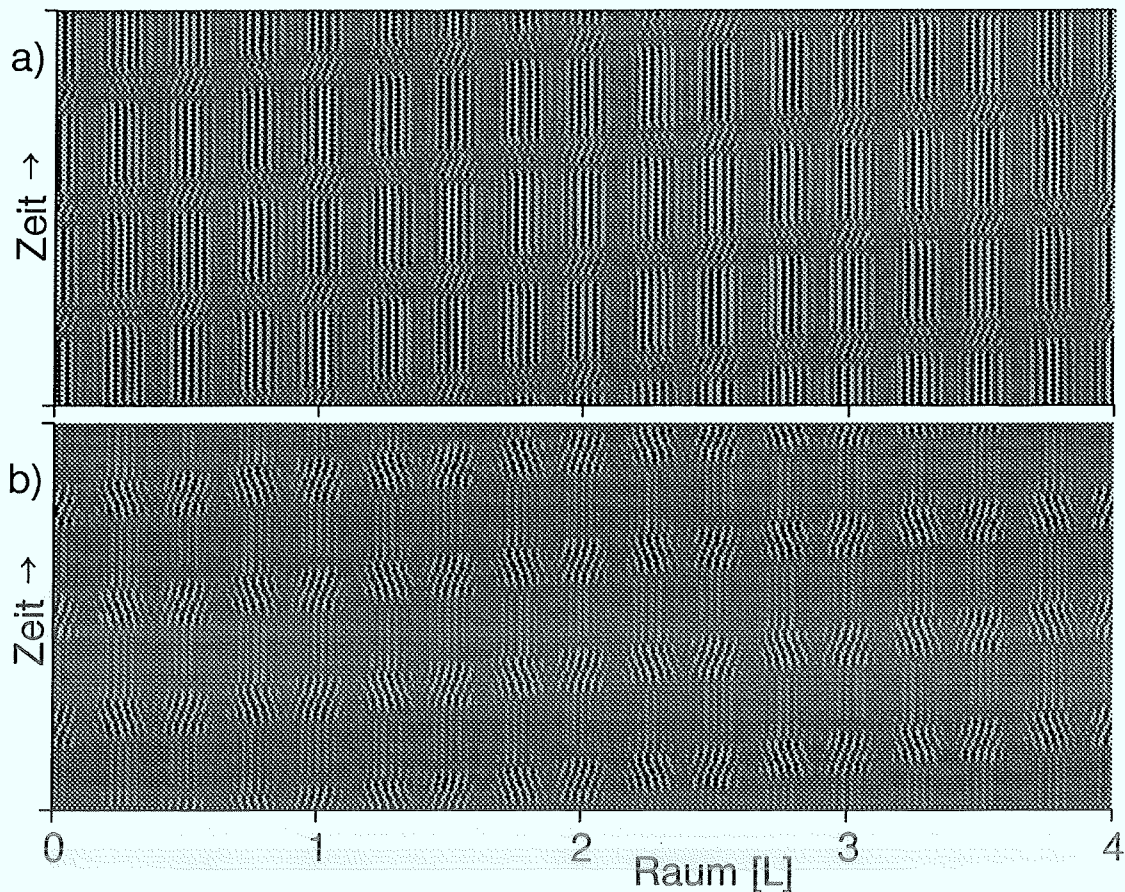


Abb. 2.24: Trennung von a) antisymmetrischer und b) symmetrischer Lösung aus der Zeitentwicklung in 2.23

2.2.7.5 Verhalten der Nusselt-Zahl

Zur Charakterisierung des chaotischen Verhaltens wurden in den vorigen Abschnitten überwiegend die Vorzeichenwechsel im u -Feld von positiv nach negativ an einem festen Ortspunkt berechnet und die sich daraus ergebenden Zeitintervalle untersucht. Experimentell ist diese Meßgröße schwer zu realisieren. Geeigneter sind globale skalare Meßgrößen wie die experimentell zugängliche Nusselt-Zahl oder der konvektive Wärmestrom. Allerdings erlauben diese nicht die Untersuchung des raumzeitlichen Chaos, sondern liefern im allgemeinen nur ein Rauschen um einen Mittelwert [67]. Trotzdem werden diese Größen hier kurz vorgestellt, weil sie einen guten Vergleich zu Modellrechnungen ermöglichen und in einem späteren Kapitel bei der Untersuchung der Spiralturbulenz (Kap. 5) eine wichtige Rolle spielen. Die theoretische Berechnung dieser Größen ist in einer modulierten Rayleigh-Bénard-Zelle nicht trivial [68]. In dieser Arbeit werden sie mit Näherungen um das unmodulierte System abgeleitet. Der dabei entstehende Fehler hat sicher keine Auswirkungen auf die qualitativen Effekte, die in dieser Arbeit im Vordergrund stehen.

Die Nusselt-Zahl (2.61) und der dimensionslose konvektive Wärmestrom (2.60) lassen sich aus dem Feld (2.126) berechnen. Der Zusammenhang der in $\vec{u}$ enthaltenen Größen Θ und Φ folgt bei konstantem z leicht aus der Bewegungsgleichung (2.23a):

$$\Theta = -i \frac{R}{q} \Phi. \quad (2.130)$$

Das skalare Feld u kann mit dem Geschwindigkeitspotential identifiziert werden, $u = \Phi$. Dann ergibt sich für den konvektiven Wärmestrom aus (2.65):

$$j^{konv.} = -\partial_\xi \Phi \Theta - \partial_\eta \Theta = R\Phi^2 = Ru^2. \quad (2.131)$$

Nun ist die ξ -Abhängigkeit von u nicht so trivial, wie hier mit konstantem A angenommen. Da in den Wärmestrom aber nur die über ein Flächenelement gemittelten Werte eingehen, kann zur Berechnung u einfach aufintegriert werden. Für den dimensionslosen konvektiven Wärmestrom gilt dann,

$$j(t) = (1 + \epsilon) \frac{1}{L} \int_0^L d\xi u^2(\xi, t), \quad (2.132)$$

bzw. für die Nusselt-Zahl

$$Nu - 1 = \frac{1}{L} \int_0^L d\xi u^2(\xi). \quad (2.133)$$

Diese Zusammenhänge werden später bei der Diskussion des Swift-Hohenberg-Modells noch einmal benötigt. Das Zeitverhalten der Nusselt-Zahl im oszillatorischen Bereich ist in Abb. 2.25 dargestellt. In a) bei $\epsilon = -0.1$ oszilliert die Nusselt-Zahl vollkommen harmonisch. Mit zunehmendem Kontrollparameter wird das Verhalten anharmonisch, d.h. die Periodizität bleibt erhalten, aber die Form der Schwingung wird unregelmäßiger, wie in b) bei $\epsilon = 0.065$. Für

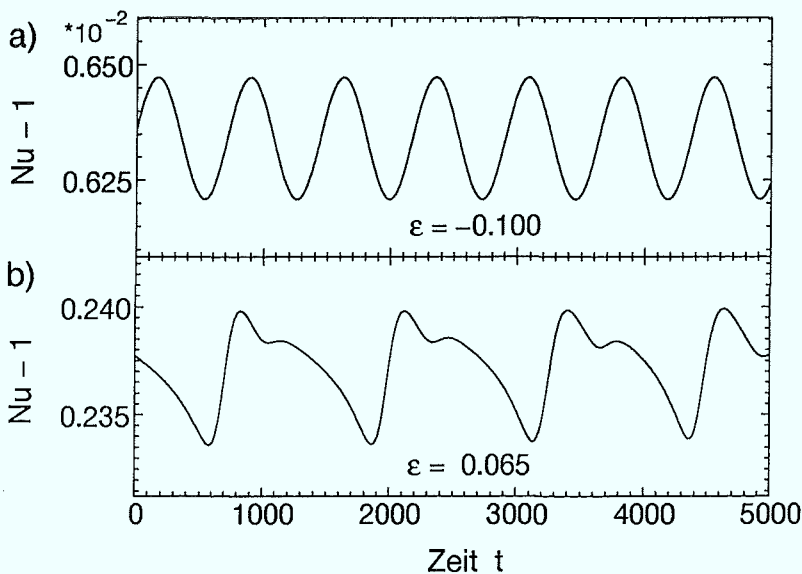


Abb. 2.25: Zeitverhalten der Nusselt-Zahl. Für kleine $\epsilon = -0.1$ in a) knapp oberhalb der Schwelle ist die Verzweigung oszillatorisch und harmonisch. Mit wachsendem ϵ wird die Lösung immer anharmonischer, in b) bei $\epsilon = 0.065$, bevor sie kurz vor dem Übergang sogar chaotisch wird.

noch größere Werte des Kontrollparameters zeigt die Nusselt-Zahl ein chaotisches Verhalten, auf das aus Platzgründen an dieser Stelle allerdings nicht weiter eingegangen wird.

2.2.7.6 Experimentelle Realisierbarkeit

Die Intervalllängen im chaotischen Bereich liegen in der Größenordnung von $t \approx 2000$. Es stellt sich die berechnete Frage, ob diese Zeiten in einem Experiment überhaupt realisierbar sind. Im Konvektionsexperiment von Wesfreid et al. [36] wurde eine Zelle mit 18cm Länge, 3cm Breite und 0.6cm Höhe verwendet. An einem Öl mit Prandtl-Zahl $P = 490$ wurden die linearen Koeffizienten der Amplitudengleichung experimentell bestätigt. Die vertikale Diffusionszeit in diesem System betrug $d/\kappa = 320s$, woraus sich eine Relaxationszeit

$$\tau_0 = \frac{d^2}{\kappa} \frac{1 + 1.954P}{38.442P} = 16s \quad (2.134)$$

ergibt. Die Simulationen der Amplitudengleichung wurden in Einheiten der Relaxationszeit τ_0 durchgeführt. Damit würde die Beobachtung eines Intervalls in Realzeit etwa neun Stunden dauern. Im Experiment von Ciliberto et al. [69], mit einer 2 mm hohen runden Zelle mit 72 mm Radius und einer Prandtl-Zahl $P = 5.81$ ist die vertikale Diffusionszeit $d^2/\kappa = 1237s$ und somit $\tau_0 = 64.4s$, was die Zeit auf 38 Stunden erhöht. Die Analyse eines chaotischen Systems ist auf dieser Zeitskala absolut unmöglich. In den letzten Jahren wurden allerdings Rayleigh-Bénard-Experimente in flachen großen Zellen mit Gasen unter Hochdruck durchgeführt. Bei dem Experiment von Bodenschatz et al. [70] ist die Zelle nur noch 0.5 mm dick. Dadurch sinkt die vertikale Diffusionszeit auf $d^2/\kappa = 0.8s$. Gase unter Hochdruck haben eine kleine Prandtl-Zahl von ungefähr eins, daher ist $\tau_0 \approx 0.06s$. Die daraus folgende reale Intervalllänge von etwa 120s läßt in diesem Experiment also durchaus die Untersuchung des chaotischen Systems zu.

2.3 Nicht-Boussinesq-Effekt und Temperaturmodulationen

2.3.1 Einleitung

Für das Auftreten der Hopf-Bifurkation durch frustrierte Drifts in der Rayleigh-Bénard-Konvektion wurden durch eine geometrische Modulation des Randes und einer Modulation des Temperaturfelds an einer der beiden Platten die kontinuierliche Translationssymmetrie in x-Richtung und die Up-Down-Symmetrie in z-Richtung gebrochen. Zwei Temperaturmodulationen alleine führen zu keiner Brechung der Up-Down-Symmetrie in den Bewegungsgleichungen. Allerdings erscheint es von experimenteller Seite her einfacher, die Geometrie der Zelle nicht zu verändern und nur mit Temperaturmodulationen zu arbeiten. Wie kann dann aber die Up-Down-Symmetrie gebrochen werden? Ein Vorschlag dazu ist die Temperaturabhängigkeit der Stoffparameter zu berücksichtigen, also mit sogenannten Nicht-Boussinesq-Fluiden zu arbeiten. Dieser Idee wird in diesem Abschnitt nachgegangen. Es wird eine Flüssigkeit wie

z.B. Wasser in der Nähe der Anomalie bei etwa 4° C betrachtet, wo die Dichte nicht mehr linear mit einem Temperaturanstieg sinkt, sondern ein quadratischer Ausdehnungskoeffizient auftritt. Für dieses System wird durch eine lineare Stabilitätsanalyse der Bewegungsgleichungen nachgewiesen, daß die erste Bifurkation oszillatorisch werden kann. In einem zweiten Schritt wird für das schwach nichtlineare Verhalten eine Amplitudengleichung abgeleitet, die in ihrem linearen Verhalten die Hopf-Bifurkation bestätigt. Beim quantitativen Vergleich der beiden linearen Stabilitätsanalysen treten Abweichungen auf, die durch die Stärke der zu verwendenden Temperaturmodulationen und der somit verbundenen Verletzung der Annahme kleiner Amplituden bei der Ableitung der Amplitudengleichung verständlich sind. Oberhalb der Hopf-Bifurkation wird das Lösungsverhalten mit zunehmendem Kontrollparameter anharmonischer, bevor stationäre Lösungen entstehen. Ein Parametersatz für diesen Bereich wird angegeben, das Szenario kann aus Platzgründen allerdings nicht in der Ausführlichkeit des geometrisch modulierten Systems diskutiert werden.

2.3.2 Bewegungsgleichung und Randbedingungen

Die Ableitung der Bewegungsgleichungen ändert sich nur geringfügig unter Beachtung eines nichtquadratischen Ausdehnungskoeffizienten β . Dieser tritt zusätzlich in der Dichteentwicklung (2.1) auf:

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_M) - \beta(T - T_M)^2 + \dots). \quad (2.135)$$

Da diese lediglich in den Auftriebsterm eingeht, erscheint nur in der Navier-Stokes Gleichung ein dichteabhängiger Term:

$$\partial_t \Delta \Psi + (\partial_z \Psi \partial_x - \partial_x \Psi \partial_z) \Delta \Psi = \nu \Delta^2 \psi - g \alpha \partial_x T - 2g \beta (T - T_M) \partial_x T. \quad (2.136)$$

In entdimensionalisierter Form (2.11) wird der Einfluß des quadratischen Ausdehnungskoeffizienten durch die dimensionslose Größe [71]

$$\gamma = \frac{\beta}{\alpha} (T_u - T_o) \quad (2.137)$$

beschrieben. Die erweiterten Bewegungsgleichungen

$$\partial_t \Delta \Psi + (\partial_z \Psi \partial_x - \partial_x \Psi \partial_z) \Delta \Psi = P \left(\Delta^2 \Psi - \partial_x T - \frac{2\gamma}{R} (T - T_M) \partial_x T \right), \quad (2.138a)$$

$$\partial_t T + (\partial_z \Psi \partial_x - \partial_x \Psi \partial_z) T = \Delta T \quad (2.138b)$$

enthalten nun explizit die Rayleigh-Zahl und die Temperatur in der Zellenmitte:

$$R = T_u - T_o \quad \text{und} \quad T_M = \frac{T_u + T_o}{2} = T_o + \frac{1}{2} R. \quad (2.139)$$

Der Einfluß der Prandtl-Zahl wurde ausführlich in Abschnitt 2.2.6 diskutiert. Dort wurde gezeigt, daß ihr Einfluß sehr gering und nur qualitativer Natur ist. Daher wird die lineare

Stabilitätsanalyse im Grenzfall unendlich großer Prandtl-Zahlen berechnet. Die Bewegungsgleichungen vereinfachen sich dann zu:

$$\Delta^2 \psi = \partial_x T - \gamma \left(1 - \frac{2(T - T_o)}{R} \right) \partial_x T, \quad (2.140a)$$

$$\Delta T = \partial_t T + (\partial_z \Psi \partial_x - \partial_x \Psi \partial_z) T. \quad (2.140b)$$

Bei der Ableitung der Amplitudengleichung werden wieder endliche Prandtl-Zahlen berücksichtigt. Die Randbedingungen des Geschwindigkeitspotentials und des Temperaturfeldes ändern sich nicht gegenüber dem letzten Abschnitt. Es werden freie (2.17) und feste Ränder (2.18) sowie Temperaturmodulationen H_1 und H_2 an der unteren und oberen Platte (2.99) berücksichtigt.

2.3.3 Grundzustand

Durch die Temperaturmodulationen wird bereits bei beliebigen Rayleigh-Zahlen ein Grundfluß angeworfen. Dieser Primärfluß, $\bar{T}$ und $\bar{\Psi}$, soll nun berechnet werden. Der Primärzustand muß natürlich die Bewegungsgleichungen (2.140) erfüllen. Da die Modulationswellenlängen groß sind, können die Felder in dem kleinen Parameter k entwickelt

$$\bar{T}(x, z) = \bar{T}^0(x, z) + k \bar{T}^1(x, z) + \mathcal{O}(k^2), \quad (2.141a)$$

$$\bar{\Psi}(x, z) = \bar{\Psi}^0(x, z) + k \bar{\Psi}^1(x, z) + \mathcal{O}(k^2), \quad (2.141b)$$

und wegen der in k periodischen Koeffizienten in den Bewegungsgleichungen nach Fourier zerlegt werden:

$$\bar{T}^{0,1}(x, z) = \sum_{l=-N}^N \bar{T}_l^{0,1}(z) e^{iklx}, \quad (2.142a)$$

$$\bar{\Psi}^{0,1}(x, z) = \sum_{l=-N}^N \bar{\Psi}_l^{0,1}(z) e^{iklx}. \quad (2.142b)$$

Dadurch entsteht ein Gleichungssystem in den verschiedenen Ordnungen von k , aus dem sukzessiv unter Beachtung der Randbedingungen der Primärzustand berechnet werden kann. In Ordnung $\mathcal{O}(k^0)$ liefern die Bewegungsgleichungen (2.140)

$$\partial_z^4 \bar{\Psi}^0(x, z) = 0, \quad (2.143a)$$

$$\partial_z^2 \bar{T}^0(x, z) = 0. \quad (2.143b)$$

Diese können leicht in z integriert werden:

$$\bar{\Psi}^0(x, z) = c_1 + c_2 z + c_3 z^2 + c_4 z^3, \quad (2.144a)$$

$$\bar{T}^0(x, z) = c_1 + c_2 z. \quad (2.144b)$$

Sowohl bei festen als auch bei freien Randbedingungen verschwindet $\bar{\Psi}^0$ und eine Ableitung davon an den Rändern bei $z = 0$ und $z = 1$. Damit ist

$$\bar{\Psi}^0(x, z) = 0. \quad (2.145)$$

Die Randbedingungen für das Temperaturfeld enthalten in dieser Ordnung die Modulationsterme:

$$\bar{T}^0(x, 1) = T_o + H_1(x), \quad (2.146a)$$

$$\bar{T}^0(x, 0) = T_u + H_2(x), \quad (2.146b)$$

die bei der Integration in z beachtet werden müssen:

$$\bar{T}^0(x, z) = T_u + H_2(x) - z(R + H_2(x) - H_1(x)). \quad (2.147)$$

Die nächste Ordnung $\mathcal{O}(k)$ der Bewegungsgleichungen (2.140) liefert:

$$k\partial_z^4 \bar{\Psi}^1 = \left(\partial_x H_2 - z(\partial_x H_2 - \partial_x H_1) \right) \left(1 - \gamma \left(1 - \frac{2}{R}(R + H_2 - z(R + H_2 - H_1)) \right) \right), \quad (2.148a)$$

$$k\partial_z^2 \bar{T}^1 = \partial_z \bar{\Psi}^0 \partial_x \bar{T}^0 - \partial_x \bar{\Psi}^0 \partial_z \bar{T}^0. \quad (2.148b)$$

Wegen (2.145) ist

$$\bar{T}^1(x, z) = 0. \quad (2.149)$$

Die erste Gleichung von (2.148a) muß nach Potenzen von z sortiert und anschließend integriert werden. Da Terme bis zur zweiten Ordnung in z auftauchen, besteht die Lösung aus drei Termen:

$$\bar{\Psi}^1(x, z) = \sum_{i=1}^3 M_i(x) P_i(z). \quad (2.150)$$

dabei stehen in M_1 die zu z^0 , in M_2 die zu z^1 und in M_3 die zu z^2 gehörenden Terme:

$$M_1(x) = \partial_x H_2 \left(1 + \gamma \left(1 + 2 \frac{H_2}{R} \right) \right), \quad (2.151a)$$

$$M_2(x) = -2 \gamma \partial_x H_2 \left(1 + \frac{H_2 - H_1}{R} \right) - (\partial_x H_2 - \partial_x H_1) \left(1 + \gamma \left(1 + 2 \frac{H_2}{R} \right) \right), \quad (2.151b)$$

$$M_3(x) = 2 \gamma (\partial_x H_2 - \partial_x H_1) \left(1 + \frac{H_2 - H_1}{R} \right). \quad (2.151c)$$

Die z -abhängigen Faktoren P_i werden durch die Randbedingungen des Geschwindigkeitspotentials festgelegt:

freie Randbedingungen

feste Randbedingungen

$$P_1(x) = \frac{1}{720} (30z - 60z^3 + 30z^4)$$

$$P_1(x) = \frac{1}{720} (30z^2 - 60z^3 + 30z^4) \quad (2.152a)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{720} (14z - 20z^3 + 6z^5)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{720} (12z^2 - 18z^3 + 6z^5) \quad (2.152b)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{720} (4z - 5z^3 + z^6)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{720} (3z^2 - 4z^3 + z^6) \quad (2.152c)$$

Der Primärzustand lautet bis zur Ordnung $\mathcal{O}(k)$ zusammengefaßt:

$$\bar{T}(x, z) = T_u + H_2 - z(R + H_2 - H_1), \quad (2.153a)$$

$$\bar{\Psi}(x, z) = \sum_{i=1}^3 M_i(x) P_i(z). \quad (2.153b)$$

2.3.4 Lineare Stabilitätsanalyse

2.3.4.1 Eigenwertproblem

Mit dem Ansatz (2.22) wurden die Felder in einen Grundzustand $\bar{T}$ und $\bar{\Phi}$, dessen Berechnung im vorigen Abschnitt erfolgte, und kleine Störungen Θ und Φ zerlegt. Diese Ansatz wird in die Bewegungsgleichungen (2.140) eingesetzt und linearisiert:

$$\begin{aligned} \Delta^2 \Phi &= \partial_x \Theta + \gamma \frac{2\Theta}{R} \left(\partial_x H_2 - z(\partial_x H_2 - \partial_x H_1) \right) \Theta \\ &\quad + \gamma \left(1 + 2 \left(\frac{H_2}{R} - z \left(1 + \frac{H_2 - H_1}{R} \right) \right) \right) \partial_x \Theta, \end{aligned} \quad (2.154a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \Theta &= \Delta \Theta - \sum_{i=1}^3 M_i(x) \partial_z P_i(z) \partial_x \Theta - (R + H_2 - H_1) \partial_x \Phi \\ &\quad - \left(\partial_x H_2 - z(\partial_x H_2 - \partial_x H_1) \right) \partial_z \Phi. \end{aligned} \quad (2.154b)$$

Diese zwei Differentialgleichungen in Φ und Θ separieren in den Variablen x, z und t . Daher bietet sich folgender Lösungsansatz an:

$$\Phi(x, z, t) = e^{\sigma t + i q x} \sum_{l=-N}^N \sum_{m=1}^{M_P} P_{l,m} e^{i l k x} f_m(z) + cc \quad (2.155a)$$

$$\Theta(x, z, t) = e^{\sigma t + i q x} \sum_{l=-N}^N \sum_{m=1}^{M_T} T_{l,m} e^{i l k x} \sin(m\pi z) + cc. \quad (2.155b)$$

Die z -Abhängigkeit für Φ muß für die zwei möglichen Randbedingungen unterschiedlich angesetzt werden. Für freie Randbedingungen ist ein einfacher Ansatz mit Sinusfunktionen möglich:

$$f_m(\eta) = \sin(m\pi\eta), \quad (2.156)$$

für feste Randbedingungen werden die Chandrasekhar-Funktionen benutzt [34]:

$$f_m(z) = \frac{\cosh(\lambda_m(z - \frac{1}{2}))}{\cosh(\frac{1}{2}\lambda_m)} - \frac{\cos(\lambda_m(z - \frac{1}{2}))}{\cos(\frac{1}{2}\lambda_m)} \quad m \text{ gerade}, \quad (2.157a)$$

$$f_m(z) = \frac{\sinh(\mu_m(z - \frac{1}{2}))}{\sinh(\frac{1}{2}\mu_m)} - \frac{\sin(\mu_m(z - \frac{1}{2}))}{\sin(\frac{1}{2}\mu_m)} \quad m \text{ ungerade}, \quad (2.157b)$$

deren Konstanten die Bedingungen

$$\tanh(\frac{1}{2}\lambda_m) + \tan(\frac{1}{2}\lambda_m) = 0 \quad (2.158a)$$

$$\coth(\frac{1}{2}\mu_m) + \cot(\frac{1}{2}\mu_m) = 0 \quad (2.158b)$$

erfüllen. Nach Einsetzen des Separationsansatzes (2.155) in die linearisierten Bewegungsgleichungen, kann die erste Gleichung (2.154a) mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^1 dz e^{-ikl} f_{m_0}(z) \quad (2.159)$$

auf die Φ Moden, die zweite (2.154b) mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^1 dz e^{-ikl} \sin(m_0 \pi z) \quad (2.160)$$

auf die Θ Moden projiziert werden. Dies erfolgt in zwei Schritten. Zuerst wird die z -Integration ausgeführt. Mit den in Anhang D angegebenen Konstanten enthalten die Bewegungsgleichungen für die Störungen (2.154) nur noch x -abhängige Terme:

$$\begin{aligned} \left(\text{ff}_{k_0} \partial_x^4 + 2\text{ff}_{d_2} \partial_x^2 + \text{ff}_{d_4} \right) \Phi &= \left(\text{fs}_{k_0} \partial_x + \gamma \frac{2\Theta}{R} (\text{fs}_{k_0} \partial_x H_2 - \text{fs}_{k_1} (\partial_x H_2 - \partial_x H_1)) \right. \\ &\quad \left. + \gamma (\text{fs}_{k_0} (1 + 2\frac{H_2}{R}) + 2\text{fs}_{k_1} (1 + \frac{H_2 - H_1}{R})) \partial_x \right) \Theta \end{aligned} \quad (2.161a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ss}_{k_0}} \Theta &= \left(\text{ss}_{k_0} \partial_x^2 + \text{ss}_{d_2} \partial_x^2 - \sum_{i=1}^3 M_i(x) \text{ss}_{p_i} \partial_x \right) \Theta \\ &\quad + \left(-\text{sf}_{k_0} (R + H_2 - H_1) \partial_x - (\text{sf}_{z_0} \partial_x H_2 - \text{sf}_{z_1} (\partial_x H_2 - \partial_x H_1)) \right) \Phi \end{aligned} \quad (2.161b)$$

Diese Gleichungen müssen nun noch auf die x -Moden projiziert werden. Da dieses zur Kopplung einzelner Moden führt, und außerdem eine zeitaufwendige Arbeit ist, wird ein Computeralgebra Programm (MAPLE) [46] für diese Aufgabe herangezogen. Werden die x -Entwicklungskoeffizienten zu einer z -Mode m in Vektoren

$$\vec{\Phi}^m = \begin{pmatrix} P_{m,N} \\ \vdots \\ P_{m,-N} \end{pmatrix}, \quad \vec{\Theta}^m = \begin{pmatrix} T_{m,N} \\ \vdots \\ T_{m,-N} \end{pmatrix} \quad (2.162)$$

abgelegt, und diese Vektoren in

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \vec{\Phi}^1 \\ \vdots \\ \vec{\Phi}^{M_P} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\Theta} = \begin{pmatrix} \vec{\Theta}^1 \\ \vdots \\ \vec{\Theta}^{M_T} \end{pmatrix} \quad (2.163)$$

zusammengefaßt, dann führt (2.161) auf zwei Matrixgleichungen:

$$\mathcal{A}_1 \vec{\Phi} = i \mathcal{A}_2 \vec{\Theta} \quad (2.164a)$$

$$\sigma \vec{\Theta} = \mathcal{B}_1 \vec{\Theta} + i \mathcal{B}_2 \vec{\Phi} \quad (2.164b)$$

Die beiden Imaginärkonstanten i resultieren dabei aus ungeraden Anzahlen von partiellen Ableitungen nach x . Durch die Phasenwinkel ϕ_i werden wegen

$$\begin{aligned} H_i(x) &= F_i \cos(n_i k x + \phi_i) = \frac{1}{2} F_i (e^{i(n_i k x + \phi_i)} + e^{-i(n_i k x + \phi_i)}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{in_i k x} \bar{F}_i + e^{-in_i k x} \bar{F}_i^*) \end{aligned} \quad (2.165)$$

die Amplituden komplex:

$$\bar{F}_i = F_i e^{i\varphi_i} = F_i (\cos \varphi_i + i \sin \varphi_i). \quad (2.166)$$

Dadurch werden auch die Matrizen $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ komplex. Die erste Gleichung (2.164a) kann nach Φ aufgelöst und in die zweite eingesetzt werden. Dies führt auf ein lineares Eigenwertproblem:

$$\sigma \vec{\Theta} = \mathcal{C} \vec{\Theta} \quad (2.167)$$

Die Matrix $\mathcal{C}$ besteht dabei, getrennt nach Real- und Imaginärteil, aus:

$$\mathcal{C}^{(r)} = \mathcal{B}_1^{(r)} - \mathcal{B}_2^{(r)} \mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{(r)} + \mathcal{B}_2^{(i)} \mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{(i)} \quad (2.168a)$$

$$\mathcal{C}^{(i)} = \mathcal{B}_1^{(i)} - \mathcal{B}_2^{(r)} \mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{(i)} - \mathcal{B}_2^{(i)} \mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{(r)} \quad (2.168b)$$

Das Eigenwertproblem (2.167) kann nun numerisch gelöst werden und ergibt ein zu den Parametern gehörendes Eigenwertspektrum:

$$\sigma_n = \lambda_n + i\omega_n \quad \text{mit} \quad n = 1 \dots M_T(2N + 1) \quad (2.169)$$

Dabei wird die Rayleigh-Zahl R so variiert, daß ein Eigenwert einen verschwindenden Realteil hat, alle anderen aber einen negativen. Die so bestimmte Rayleigh-Zahl ist die kritische Rayleigh-Zahl R_c zu den gegebenen Parametern. Der Imaginärteil des Eigenwerts mit Realteil Null gibt an, ob es sich um eine stationäre ($\omega = 0$) oder driftende Lösung ($\omega \neq 0$) handelt. Haben zwei Eigenwerte verschwindenden Realteil, und sind diese komplex konjugiert, dann handelt es sich um eine mit Frequenz ω zeitlich oszillierende Lösung, also eine Hopf-Bifurkation.

2.3.4.2 Konvergenztest

Alle weiteren Rechnungen werden bei festen Randbedingungen durchgeführt. Die Probleme bei der Festlegung der Anzahl der Moden bei der linearen Stabilitätsanalyse wurde schon in Abschnitt 2.2.5.3 für das geometrisch modulierte System diskutiert. Hier liegen keine Vergleichsdaten aus der linearen Stabilitätsanalyse der Amplitudengleichung vor. Daher wird zur Bestimmung der notwendigen Anzahl der Moden ein spezieller Zustand für verschiedene Anzahlen von Moden gerechnet und bestimmt, wann der Zustand konvergent ist. Die Anzahl der Moden in z wurde auf $M_T = M_P = 5$ festgelegt. Für $n_1 = 1, n_2 = 2, F_1 = F_2 = 0.05R_c^*$, $k = 0.2, \gamma = 0.2$ und $\varphi_2 = \pi$ kommt es zu einer Hopf-Bifurkation. In Abb. 2.26 sind die kritische Wellenzahl, die kritische Rayleigh-Zahl und die benötigte CPU-Zeit zur Berechnung des Minimums der kritischen Kurve auf einer IBM SP2 dargestellt. Ab etwa 9 Moden in x ist auch die Wellenzahl q_c konvergent, so daß dieser Wert für alle weiteren Rechnungen verwendet wurde. Eine Erhöhung der Moden in z bringt keine weitere Genauigkeit, wie bei der geometrischen Modulation schon gezeigt wurde.

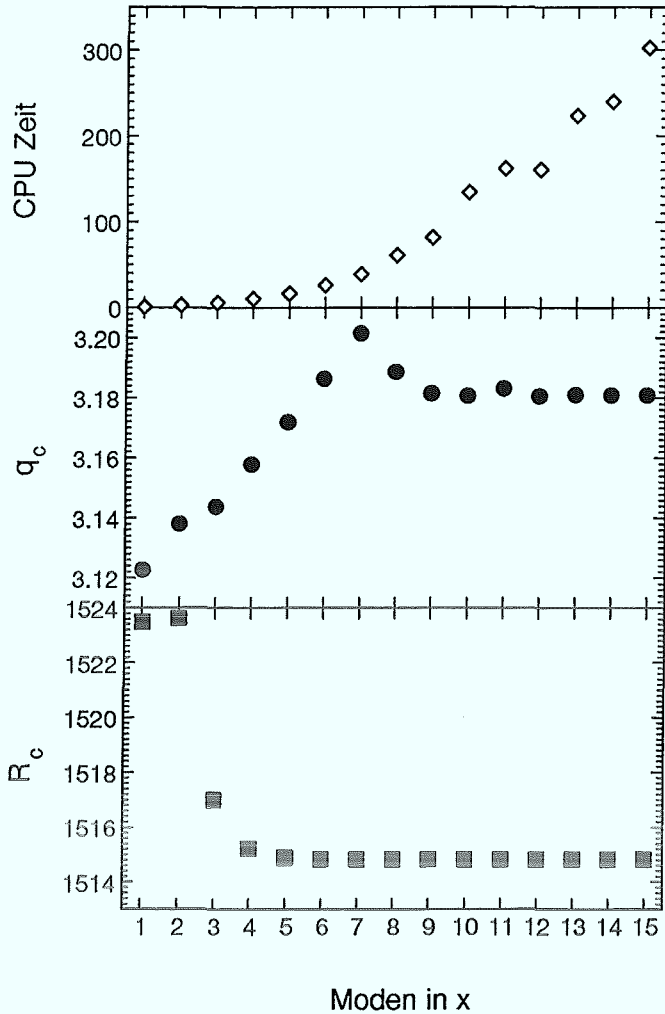


Abb. 2.26: Konvergenztest. Für eine feste Parameterkonfiguration, $n_1 = 1, n_2 = 2, F_1 = F_2 = 0.05 R_c^r, k = 0.2, \gamma = 0.2$ und $\varphi_2 = \pi$ bei festen Randbedingungen, wurde bei einer Modenzahl in z mit $M_T = M_P = 5$ das Minimum der neutralen Kurve berechnet. Aufgetragen sind die kritische Rayleigh-Zahl R_c und die kritische Wellenlänge q_c im Minimum der neutralen Kurve sowie die CPU Zeit auf einer IBM SP2.

Die Anzahl der Moden in x darf nicht beliebig hoch gewählt werden. Der langwellige Grenzfall für die Modulationen sorgt für eine Trennung der Zeitskalen des Primär- und Sekundärzustands. Außerdem wurde durch $q_c \gg k$ Resonanzeffekte vermieden. Allerdings werden in dem Reihenansatz (2.155) Wellenzahlen bis zu $N \cdot k_{\max}(n_1, n_2)$ berücksichtigt. Für beliebig große N kann es dann zu Resonanztermen mit q_c kommen, die in der Rechnung nicht enthalten sind.

2.3.4.3 Phasendiagramme

Für jede Parameterkonfiguration kann untersucht werden, auf welche Weise der Primärzustand in den Sekundärzustand verzweigt. Dazu wird für jede Parameterkonfiguration das Minimum der kritischen Kurve bestimmt. Die Verschiebung des Minimums von der kritischen Wellenzahl des unmodulierten Systems ist allerdings gering, so daß bei der Berechnung der Phasendiagramme die kritischen Kurve bei q_c ausgewertet wurde. Sind die beiden

größten Eigenwerte aus dem Spektrum an diesem Wert dabei komplex konjugiert, liegt eine oszillatorische Bifurkation vor. Durch Variation zweier Parameter kann so ein zweidimensionales Phasendiagramm berechnet werden. Das Wellenzahlverhältnis ist in allen Rechnungen $n_1/n_2 = 1/2$, bei einer Phasenverschiebung von φ_2 und $\varphi_1 = 0$. Wie bei der geometrischen Modulation tritt eine Hopf-Bifurkation auch bei 2:3 Wellenzahlverhältnissen auf, die aber keine qualitativ neuen Ergebnisse liefern und daher hier nicht diskutiert werden.

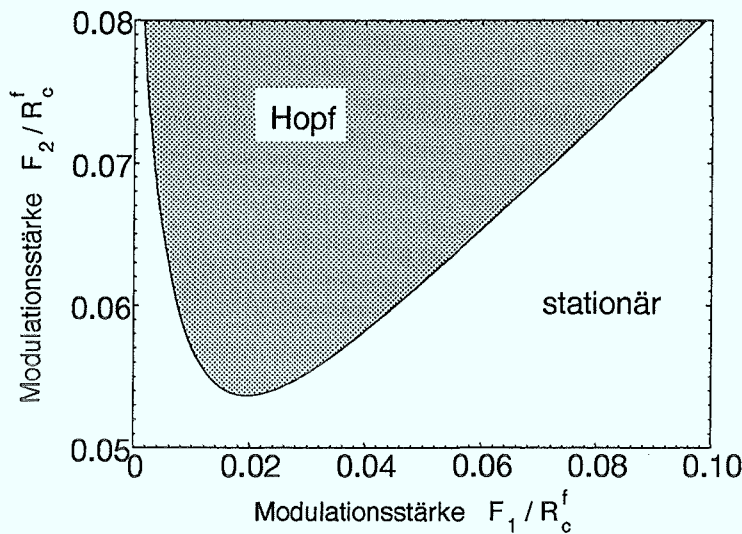


Abb. 2.27: Phasendiagramm in der $F_1 - F_2$ - Ebene. Bei fester Wellenzahl $k = 0.2$ mit $n_1/n_2 = 1/2$ und $\varphi_2 = \pi$ sind für die Amplituden der Temperaturmodulationen an den Platten kritische Stärken nötig, um die Verzweigung statt stationär (weiß) oszillatorisch (schattiert) werden zu lassen. Der notwendige quadratische Ausdehnungskoeffizient ist $\gamma = 0.01$.

In Abb. 2.27 ist das Phasendiagramm in der Ebene der Modulationsstärken dargestellt. Für kleine Amplituden ist die Verzweigung stationär, für größere wird sie oszillatorisch.

Den Einfluß des quadratischen Entwicklungsterms γ in der Dichteentwicklung auf das Bifurkationsverhalten zeigt Abb. 2.28. Für $\gamma = 0$ tritt eine stationäre Verzweigung auf. Für $\gamma \neq 0$ tritt oberhalb einer bestimmten Schwelle für die Modulationsamplituden eine Hopf-Bifurkation auf.

2.3.5 Schwach nichtlineares Verhalten

Zur Beschreibung des schwach nichtlinearen Verhaltens kann wie für das geometrisch modulierte System eine Amplitudengleichung abgeleitet werden. Diese enthält wesentlich weniger Terme und gibt in ihrem linearen Verhalten die Ergebnisse des letzten Abschnitts qualitativ richtig wieder. Darüber hinaus wird auch dieses System oberhalb der Hopf-Verzweigung immer anharmonischer, bis bei es sehr großen Werten des Kontrollparameters wieder stationär wird.

2.3.5.1 Ableitung der Amplitudengleichung

Die Ableitung der Amplitudengleichung erfolgt nach demselben Algorithmus wie für das geometrisch modulierte System in Abschnitt 2.2.4. Deshalb wird dieser hier nicht mehr beschrieben, sondern lediglich die Abweichungen diskutiert. Als wichtigster Punkt entfällt die

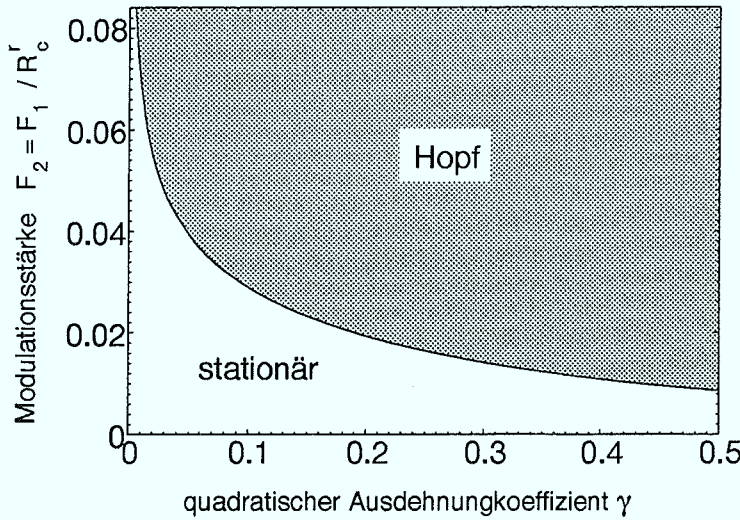


Abb. 2.28: Phasendiagramm in der $\gamma - F_1 = F_2$ - Ebene. Auch für den quadratischen Ausdehnungskoeffizienten γ ist zum Erreichen der Hopf-Bifurkation durch frustrierte Drifts eine kritische Stärke notwendig (grauschattierter Bereich). Die Wellenzahl ist $k = 0.2$ mit $n_1/n_2 = 2/1$.

Koordinatentransformation, was ja die Ausgangsmotivation für die Behandlung des Rayleigh-Bénard-Systems in planarer Geometrie mit zwei Temperaturmodulationen war. Der lineare Zeitoperator $\mathcal{M}$ braucht deshalb nicht mehr in ϵ entwickelt werden. Der quadratische Ausdehnungskoeffizient ist klein und wird in Ordnung $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ bei der Ableitung berücksichtigt:

$$\gamma = \epsilon^{\frac{1}{2}} \bar{\gamma}. \quad (2.170)$$

Dadurch tritt im nichtlinearen Operator der Ordnung ϵ in der zweiten Komponente von Teil $\vec{N}_{2a}(\vec{u}_0)$ (2.44b) ein γ -abhängiger Term auf,

$$\frac{1}{P} \frac{2\bar{\gamma}}{R_c} \Theta_0 \partial_x \Theta_0, \quad (2.171)$$

der aber im weiteren keine Konsequenzen auf die Amplitudengleichung hat, da nichtlineare Terme von $(\vec{u}_0, \vec{u}_0)$ bei der Projektion auf $\vec{u}_0^\dagger$ entfallen. Weiterhin entfällt der von der geometrischen Modulation H_0 abhängige Teil in $\vec{N}_{2c}(\vec{u}_0)$. Aus der Entwicklung der linearen Operatoren in Anhang B fallen die von der geometrischen Modulation H_0 abhängigen Terme heraus, dafür müssen die durch γ neu entstehenden berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \mathcal{L}_{1a} + (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) \mathcal{L}_{1b} + \bar{\gamma} \mathcal{L}_{1d} \\ \mathcal{L}_2 &= \mathcal{L}_{2a} + (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) \mathcal{L}_{2b} + \partial_X \bar{H}_1 \mathcal{L}_{2c} + \partial_X \bar{H}_2 \mathcal{L}_{2d} + \bar{\gamma} \mathcal{L}_{2i} \\ &\quad + \frac{2\bar{\gamma}}{R_c} \bar{H}_1 \mathcal{L}_{2j} + \frac{2\bar{\gamma}}{R_c} \bar{H}_2 \mathcal{L}_{2k} \end{aligned} \quad (2.172)$$

mit

$$\mathcal{L}_{1c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (1-2z)\partial_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.173a)$$

$$\mathcal{L}_{2i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (1-2z)\partial_X & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.173b)$$

$$\mathcal{L}_{2j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z\partial_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.173c)$$

$$\mathcal{L}_{2k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (1-z)\partial_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.173d)$$

Die Skalarprodukte dieser Operatoren sind für feste und freie Randbedingungen identisch:

$$\langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{L}_{1d} \vec{u}_0 \rangle = 0 \quad (2.174a)$$

$$\langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{L}_{2i} \vec{u}_0 \rangle = \frac{1}{2R_c} \quad (2.174b)$$

$$\langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{L}_{2j} \vec{u}_0 \rangle = \frac{1}{2R_c} \quad (2.174c)$$

$$\langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{L}_{2k} \vec{u}_0 \rangle = 0 \quad (2.174d)$$

$$(2.174e)$$

In der Amplitudengleichung tritt lediglich ein vom quadratischen Ausdehnungskoeffizienten abhängiger neuer Term auf:

$$\begin{aligned} \tau_0 \partial_t A = & A \left(\epsilon + \frac{H_2 - H_1}{R_c} + \gamma \frac{H_2 + H_1}{R_c} \right) + iA k_6 \left(\frac{\partial_x H_2}{R_c} - \frac{\partial_x H_1}{R_c} \right) \\ & + i\partial_x A k_9 \frac{H_2 - H_1}{R_c} + \xi_0^2 \partial_x^2 A - g_0 |A|^2 A. \end{aligned} \quad (2.175)$$

Die Konstanten sind in Tabelle 2.1 angegeben, wobei hier der besseren Übersicht wegen $k_3 = 1$ und $k_7 = -k_6$ explizit in die Gleichung eingesetzt wurden, die damit nur noch zwei von den Randbedingungen abhängige Konstanten enthält. Die Amplitudengleichung des geometrisch modulierten Systems (2.113) ist nur von der Differenz der Temperaturmodulationen $H_2 - H_1$ abhängig. Diese Symmetrie ist durch den Nicht-Boussinesq-Term in Gleichung (2.175) offensichtlich gebrochen.

2.3.5.2 Lineare Stabilitätsanalyse

Die lineare Stabilitätsanalyse der Amplitudengleichung wurde ausführlich in Abschnitt 2.2.5.1 für das geometrisch modulierte System vorgestellt. Unter Beachtung des zusätzlichen γ -abhängigen Terms in der Amplitudengleichung (2.175) kann das dort beschriebene Verfahren auf dieses System voll übertragen werden. Das Phasendiagramm in der $F_1 - F_2$ -Ebene aus Abb. 2.27 wurde mit gleichen Parametern aus der Amplitudengleichung berechnet und ist in Abb. 2.29 dargestellt. Die Modulationsstärken der Temperaturmodulation an der unteren Platte F_2 müssen bei gleichem F_1 an der unteren Platte um fast einen Faktor zwei höher als in Abb. 2.27 gewählt werden, um eine Hopf-Bifurkation zu erhalten. Gleiches gilt für den Einfluß des quadratischen Ausdehnungskoeffizienten in Abb. 2.30.

Die durch zwei Temperaturmodulationen erzeugten Drifts haben eine um Faktor 1000 niedrigere Driftgeschwindigkeit, als Drifts aus einer geometrischen und einer Temperaturmodulation bei gleichen Amplituden [45, 44]. D.h. eine geometrische Modulation greift viel

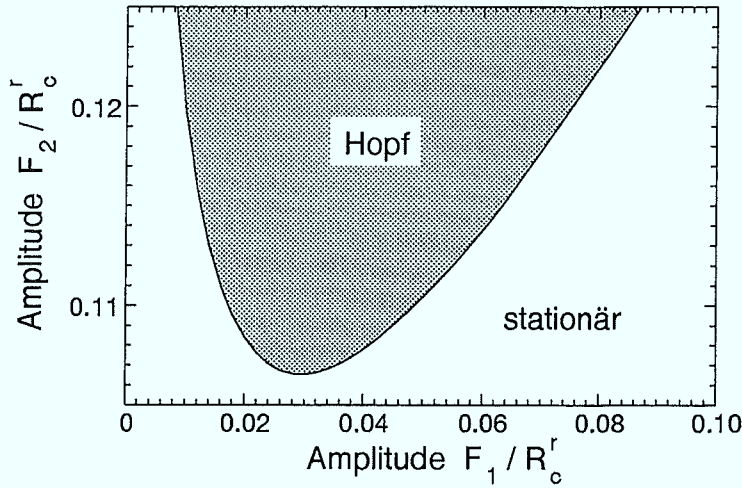


Abb. 2.29: Phasendiagramm in der $F_1 - F_2$ - Ebene. Die lineare Stabilitätsanalyse der Amplitudengleichung liefert ein qualitativ gleiches Verhalten wie die lineare Stabilitätsanalyse der vollen Bewegungsgleichungen. Parameter wie in Abb 2.27.

stärker in das Konvektionsverhalten ein, als eine Temperaturmodulation. Die Modulationsamplituden zur Erzeugung der Hopf-Bifurkation durch frustrierte Drifts mit zwei Temperaturmodulationen und unter Brechung der Up-Down-Symmetrie durch Nicht-Boussinesq-Fluide müssen daher wesentlich größer sein, als bei einem geometrisch modulierten System. Damit ist die Annahme kleiner Modulationsamplituden bei der Ableitung der Amplitudengleichung allerdings verletzt, und die Amplitudengleichung nur noch näherungsweise gültig, was die in diesem Abschnitt beobachteten Abweichungen erklärt. Einen zusätzlichen Einfluß könnte die Vernachlässigung weiterer γ -abhängiger Terme durch die Skalierung $\gamma = \epsilon^{\frac{1}{2}} \tilde{\gamma}$ enthalten. Durch entsprechende Vernachlässigung dieser Terme in der linearen Stabilitätsanalyse der vollen Bewegungsgleichung wurde nachgewiesen, daß diese Terme nicht entscheidend für die Abweichungen sind.

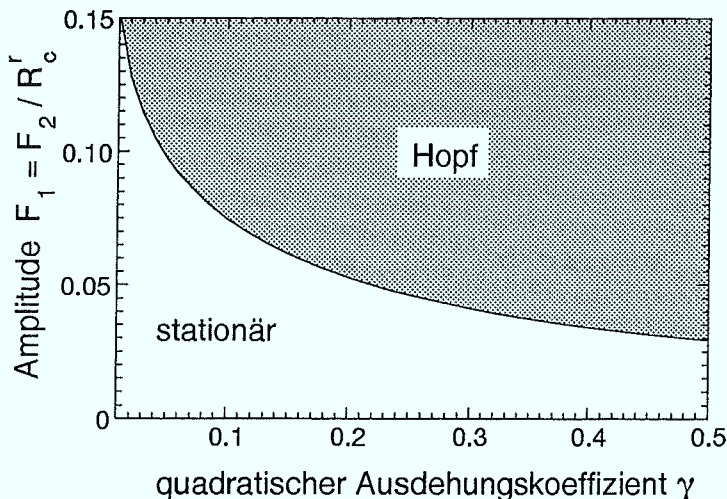


Abb. 2.30: Phasendiagramm in der $\gamma - F_1 = F_2$ - Ebene. Die Parameter wurden wie in Abb 2.28 gewählt.

2.3.5.3 Nichtlineares Verhalten

Das nichtlineare Verhalten wird durch drei Kurven eines Punktes $u(\xi = 0, t)$ im Ortsraum in Abb. 2.31 gut beschrieben (vgl. Abb. 2.9). Mit den angegebenen Parametern sagt die lineare Stabilitätsanalyse der Amplitudengleichung eine Hopf-Verzweigung bei $\epsilon_c = -0.0877$ voraus. Knapp oberhalb dieser Schwelle ist die Lösung, wie in a) zu sehen ist, oszillatorisch. Sie oszilliert harmonisch in einem sehr großen Bereich für den Kontrollparameter bis $\epsilon \approx 1.6$. Darüber hinaus ändert sie ihre Form, wie in b) bei $\epsilon = 1.83$ zu sehen ist. In diesem Bereich sind die Amplituden der Lösungen um 10^4 größer, als an der Schwelle. Sie wird bei $\epsilon = 1.839$ in c) völlig anharmonisch, bevor sie für $\epsilon > 1.84$ in Wanderwellen mit sehr langen Perioden übergeht. Die Analysen der Poincaré-Schnitte zeigen allerdings ein immer noch periodisches Verhalten. Trotzdem ist nicht auszuschließen, daß es für andere Parameterkombinationen in diesem System zu einem dem geometrisch modulierten System ähnlichen chaotischen Verhalten kommen kann.

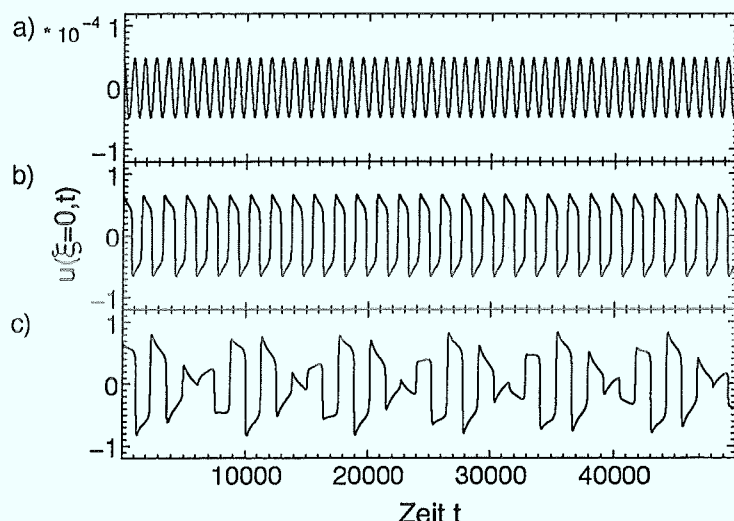


Abb. 2.31: Nichtlineares Verhalten an einem Ortspunkt. Die Amplitudengleichung wurde auf 128 Stützstellen mit den Parametern $F_1 = 0.03$, $F_2 = 0.12$, $\gamma = 0.01$, $n_1/n_2 = 1/2$, $k = q_c/16 \approx 2$ und $\varphi_2 = \pi$ simuliert. In a) bei $\epsilon = -0.08$ knapp oberhalb der Schwelle ist Lösung oszillierend, ändert in b) bei $\epsilon = 1.83$ ihre Form und wird bei $\epsilon = 1.839$ völlig anharmonisch.

2.4 Das eindimensionale Swift-Hohenberg-Modell

2.4.1 Motivation

In den vorherigen Abschnitten hat sich gezeigt, daß das schwach nichtlineare Verhalten der Rayleigh-Bénard-Konvektion sehr gut mit der Amplitudengleichung beschrieben werden kann. Diese ist wiederum universell für die Art der Bifurkation, hier von einem räumlich homogenen Grundzustand in einen räumlich periodischen Zustand oder in Verbindung mit Modulationen von einem räumlich periodischen Grundzustand in einen oszillatorischen Sekundärzustand. Andere strukturbildende Systeme, wie z.B. eine Flüssigkeit zwischen zwei rotierenden Zylindern (Taylor-Cuette) oder auch chemische Reaktions-Diffusionssysteme liefern für die

Beschreibung der Bifurkation eine Amplitudengleichung von gleicher Struktur aber anderen Koeffizienten. Es stellt sich nun die Frage, ob nicht durch ein Modell mit denkbar einfachem Grundzustand, d.h. $u = 0$, dieser Strukturbildungsprozess beschrieben werden kann. Und in der Tat existiert eine einfache eindimensionale reelle Bewegungsgleichung für das Feld $u(x, t)$, das die Bifurkation in einen räumlich periodischen Zustand beschreibt und bei der schwach nichtlinearen Beschreibung auf die gleiche Amplitudengleichung wie bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion führt. Dies ist das Swift-Hohenberg-Modell, im weiteren mit SH-Modell bezeichnet.

2.4.2 Modell und Amplitudengleichung

Das eindimensionale SH-Modell beschreibt die Bifurkation eines Systems mit Grundzustand $u = 0$ in eine räumlich periodische Struktur und hat folgende Bewegungsgleichung [39]:

$$\partial_t u = \epsilon u - (q_0^2 + \partial_x^2)^2 u - u^3. \quad (2.176)$$

Es besitzt alle Charakteristika der aus der Rayleigh-Bénard-Konvektion bekannten Verzweigung, d.h. eine definierte Wellenzahl q_0 der Struktur, Translationsinvarianz und eine nichtlineare Sättigung des Amplitudenwachstums. Wie bereits erwähnt, kann für dieses System eine Amplitudengleichung nach demselben Schema wie im vorigen Abschnitt abgeleitet werden. Eine explizite Ableitung für das zweidimensionale System ist in Abschnitt 4.1.5.1 gegeben. Im eindimensionalen System hat sie die Form:

$$\partial_t A = \epsilon A + 4q_0^2 \partial_x^2 A - 3|A|^2 A. \quad (2.177)$$

Die Relaxationskonstante τ_0 ist reskaliert, die Kohärenzlänge ist $\xi_0 = 2q_0$. Das SH-Modell kann so skaliert werden, daß die Koeffizienten der Amplitudengleichung zu denen der Rayleigh-Bénard-Konvektion passen [2]. Daher dient es als einfaches Modellsystem für qualitative Untersuchungen in der Strukturbildung, wie z.B. stochastische Einflüsse auf den Kontrollparameter sowie der Einfluß von thermischen Fluktuationen [10].

2.4.3 Hopf-Bifurkation durch frustrierte Drifts

Kommt es auch im SH-Modell zu einer oszillatorischen Verzweigung, wenn driftende Lösungen in verschiedenen Bereichen aufeinander zulaufen? Die Antwort ist ja, und dieser Effekt läßt sich im SH-Modell viel einfacher und analytisch zeigen.

2.4.3.1 Driftende Lösungen

Das SH-Modell (2.176) verzweigt in eine räumlich periodische Struktur:

$$u(x, t) = A e^{iq_0 x} + cc. \quad (2.178)$$

Wird diese Lösung in die Bewegungsgleichung eingesetzt, begrenzt der nichtlineare Term das Wachstum der Amplitude:

$$A = \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}. \quad (2.179)$$

Eine nach links oder rechts laufende Struktur hat die Form

$$u(x, t) = Ae^{iq_0(x+vt)} + cc, \quad (2.180)$$

wobei die Richtung durch das Vorzeichen und die Geschwindigkeit durch den Betrag der Driftgeschwindigkeit v bestimmt wird. Diese Lösung erfüllt aber nicht die Bewegungsgleichung (2.176). Der durch die Zeitableitung entstehende Term kann allerdings durch einen Driftterm im Modell eliminiert werden:

$$\partial_t u = \epsilon u + (q_0^2 + \partial_x^2)^2 u + v \partial_x u - u^3. \quad (2.181)$$

Zur Erinnerung, in der Rayleigh-Bénard-Konvektion waren alleine zwei Modulationen nötig, um driftende Lösungen zu erzeugen. Hier genügt ein einzelner Term in der Modellgleichung.

2.4.3.2 Räumlich periodisch modulierte Drifts

Durch eine geschickte Wahl der Wellenzahlverhältnisse der Modulationen in der Rayleigh-Bénard-Konvektion entstehen Bereiche unterschiedlich driftender Lösungen und die Verzweigung wird bei geeigneter Phasenverschiebung oszillatorisch. Im SH-Modell ist die Driftrichtung durch das Vorzeichen der Driftgeschwindigkeit festgelegt. Wird diese räumlich periodisch moduliert,

$$\partial_t u = \epsilon u + (q_0^2 + \partial_x^2)^2 u + M(x) \partial_x u - u^3, \quad (2.182)$$

mit

$$M(x) = 2G \cos(kx), \quad (2.183)$$

entsteht dieselbe Situation. In diesem Modell ist die kontinuierliche Translationsinvarianz in eine diskrete Translationsinvarianz gebrochen und es ist Grundlage für die weiteren Untersuchungen.

2.4.3.3 Amplitudengleichungen

Für das Modell (2.182) kann eine Amplitudengleichung abgeleitet werden [47]. Die Modulationswellenlänge $2\pi/k$ soll wieder groß gegen die Wellenlänge der Struktur $2\pi/q_0$ sein. Dann ist k klein und skaliert mit dem Kontrollparameter:

$$k = \epsilon^{\frac{1}{2}} \bar{k}, \quad (2.184)$$

wobei $\bar{k}$ dann wieder von der Ordnung eins ist. Für die Amplitude der Modulation werden zwei Fälle unterschieden. Wenn $G \propto \epsilon$ ist, lautet die Amplitudengleichung:

$$\partial_t A = \epsilon A + 4q_0^2 \partial_x^2 A + iq_0 M(x) A - 3|A|^2 A \quad (A1). \quad (2.185)$$

Wird der Modulationsterm eine Ordnung niedriger bei der Ableitung der Amplitudengleichung beachtet, d.h. $G \propto \epsilon^{\frac{1}{2}}$, tritt im Modulationsterm eine zusätzliche Ortsableitung auf:

$$\partial_t A = \epsilon A + 4q_0^2 \partial_x^2 A + iq_0 M(x)A + M(x)\partial_x A - 3|A|^2 A \quad (\text{A2}). \quad (2.186)$$

Beide Terme treten auch in der Amplitudengleichung der Rayleigh-Bénard-Konvektion mit modulierten Rändern (2.113) auf.

2.4.3.4 Lineare Stabilitätsanalyse

Eine Aussage über die Art der Verzweigung liefert nun wieder die lineare Stabilitätsanalyse. Am SH-Modell sowie den beiden Amplitudengleichungen (A1) und (A2) kann ein qualitatives Ergebnis analytisch mit einem Zweimodenansatz,

$$u, A = e^{\sigma t} \left(F_+ e^{i(q+k)x} + F_- e^{i(q-k)x} \right) + cc. \quad (2.187)$$

gewonnen werden [47]. Wird dieser in die Gleichungen eingesetzt, kann die Wachstumsrate berechnet werden:

$$\sigma_{\pm, SH} = \epsilon - 4k^2 - k^4 \pm \sqrt{16k^6 - G^2(1 - k^2)}, \quad (2.188a)$$

$$\sigma_{\pm, A1} = \epsilon - 4k^2 \pm \sqrt{-G^2}, \quad (2.188b)$$

$$\sigma_{\pm, A2} = \epsilon - 4k^2 \pm \sqrt{k^2 - G^2}. \quad (2.188c)$$

In allen drei Fällen kommt es zu einer Hopf-Bifurkation durch frustrierte Drifts. In der Amplitudengleichung (A1) setzt diese für beliebig kleine Amplituden ein. In den anderen beiden Gleichungen existiert eine Schwelle für den Einsatz. In der Rayleigh-Bénard-Konvektion wurde auf die Ableitung der Amplitudengleichungen mit den Modulationstermen in Ordnung ϵ verzichtet, weil dort keine oszillatorische Verzweigung auftritt [47]. Hier reicht diese Ordnung zur Beschreibung des qualitativen Verhaltens aus und die Amplitudengleichung (A1) wird im nächsten Kapitel zur Beschreibung zweidimensionaler Effekte herangezogen. Die Analyse der Amplitudengleichung bringt am SH-Modell keinen wesentlichen Vorteil, weil die Bewegungsgleichung von ähnlicher Struktur und Komplexität ist. Daher werden alle weiteren Untersuchungen direkt am SH-Modell durchgeführt.

Der Zweimodenansatz (2.187) liefert nur die Wachstumsraten für die erste ungerade Mode. Der Lösungsraum ist für die geraden und ungeraden Moden jedoch unterschiedlich. Die geraden Moden sind harmonisch zur Modulationswellenzahl, d.h. sie ändern ihr Vorzeichen nicht bei Verschiebung um eine Wellenlänge, $u_h(x) = u_h(x + \pi/k)$. Im Gegensatz dazu bilden die ungeraden Moden den subharmonischen Lösungsraum mit $u_s(x) = -u_s(x + \pi/k)$. Zur Berechnung der kritischen Kontrollparameter ϵ auf der neutralen Kurve bei $\text{Min}(Re(\sigma) = 0)$ werden alle Moden berücksichtigt,

$$u = e^{\sigma t} e^{iqx} \sum_{l=-N}^N F_l e^{ilk/2x} + cc, \quad (2.189)$$

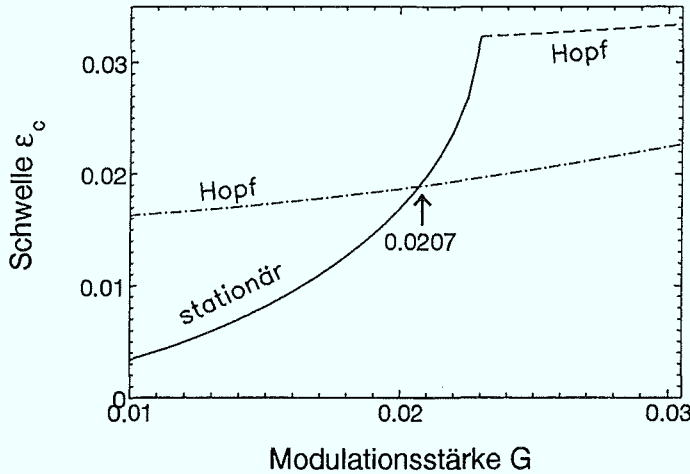


Abb. 2.32: Bei fester Modulationswellenzahl $k = 0.125$ wurden die kritischen Werte des Kontrollparameters ϵ in Abhängigkeit von der Modulationsamplitude G berechnet. Die Strichpunkt-Linie ist die Schwelle der subharmonischen Lösungen. Diese Verzweigung ist immer oszillatorisch, wohingegen die harmonischen Lösungen erst stationär, durchgezogene Linie, dann oszillatorisch, gestrichelte Linie, verzweigen.

mit $-k/2 < q - q_0 < k/2$ und die Lösungsräume getrennt berechnet. In Abb. 2.32 sind die Äste der Schwellen bei festem $k = 0.125$ in Abhängigkeit der Modulationsstärke dargestellt. Die harmonische Lösung ist erst stationär (durchgezogene Linie) und wird bei einer kritischen Modulationsamplitude oszillatorisch (gestrichelte Linie). Die dritte Linie ist die Schwelle für die subharmonischen Lösungen, die immer oszillatorisch sind. Zur Berechnung wurden $N = 10$ Moden benutzt. Am Schnittpunkt der Kurven bei $G_{CTP} = 0.0207$ liegt ein Kodimension-Zweipunkt (CTP) vor. Dort sind beide Lösungsäste instabil und die Nichtlinearität entscheidet, welcher Lösungsraum gewählt wird. Das nichtlineare Verhalten wird im nächsten Abschnitt besprochen.

2.4.4 Simulation der Bewegungsgleichung

Im Gegensatz zur Rayleigh-Bénard-Konvektion ist beim SH-Modell die Bewegungsgleichung vom Aufwand her genauso einfach zu simulieren, wie die Amplitudengleichung. Daher werden in diesem Abschnitt die Lösungsmethode und die Meßgrößen für die Bewegungsgleichungen vorgestellt, die sich dann in einem späteren Kapitel leicht auf ein zweidimensionales System erweitern lassen.

2.4.4.1 Die Spektralmethode

Die Berechnung der zeitlichen Entwicklung der Lösung des SH-Modells (2.182) erfolgt in dieser Arbeit nach einer Pseudo-Spektralmethode [72]. Dabei wird der lineare Anteil im Fourier-Raum und der nichtlineare Anteil im Ortsraum gelöst. Die Zeitintegration der linearen Terme kann dann analytisch ausgeführt werden, die Integration der nichtlinearen Terme erfolgt mit einem expliziten Euler-Schritt zweiter Ordnung (Adam-Bashforth, siehe Anhang A). Der Modulationsterm $M(x)\partial_x u$ wird als Nichtlinearität behandelt und im Ortsraum gelöst.

Zur skalaren Beschreibung der Strukturen und als Meßgröße für Experimente wurden in der Rayleigh-Bénard-Konvektion die Nusselt-Zahl Nu und der dimensionslose konvektive

Wärmestrom j betrachtet. Beide Größen lassen sich durch die Spektralmethode ohne viel Aufwand im Fourierraum berechnen (Anhang C).

Durch die für die Spektralmethode notwendigen periodischen Randbedingungen kommt es zu keiner Wellenlängenselektion auf Grund der Systemlänge L [73], es stellt sich vielmehr immer eine Rollenstruktur mit $q = q_0$ ein.

2.4.4.2 Nichtlineares Verhalten

Die Simulation der Bewegungsgleichungen erlaubt eine direkte Beobachtung des nichtlinearen Verhaltens, Abb. 2.33. Die Lösungen $u(x, t)$ werden mit laufender Zeit hintereinander gezeichnet und geben so einen optisch guten Eindruck der Dynamik. Oberhalb der Schwelle in a) oszilliert das Feld. Allerdings tritt keine so starke Lokalisierung wie bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion auf (vgl. Abb. 2.19). Trotzdem sind die Bereiche der links- und rechtslaufenden Wellenzüge zu erkennen. Für größere Kontrollparameter werden auch hier die Lösungen im Zeitverhalten anharmonischer. Die Dynamik des Systems läßt sich gut an der Nusselt-Zahl beobachten, Abb. 2.34. Knapp oberhalb der Schwelle oszilliert diese harmonisch, wie in a) für $G = 0.03$ mit $\epsilon = 0.025$ zu sehen ist. Allerdings relaxiert das System erst langsam nach etwa $t = 5000$ in diesen Zustand. Wird der Kontrollparameter wie in b) auf $\epsilon = 0.350$ erhöht, ist das Verhalten anharmonischer. Für noch größere Werte wie z.B. $\epsilon = 0.5$ bifurkiert das System in einen stationären Zustand mit konstanter Nusselt-Zahl. Das Verhalten der Nusselt-Zahl im SH-Modell in Abb. 2.34 ist qualitativ ähnlich zu dem in der Rayleigh-Bénard-Konvektion in Abb. 2.25.

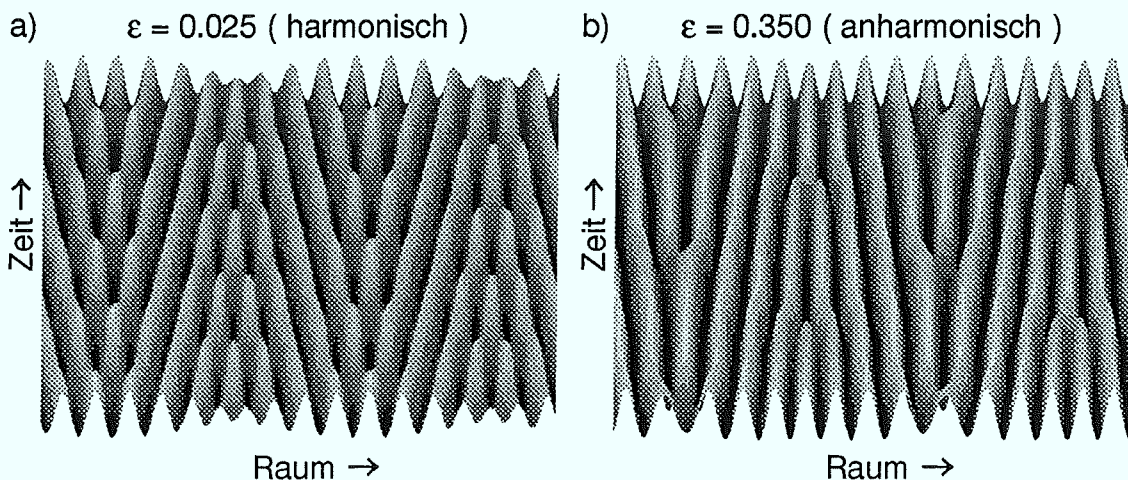


Abb. 2.33: Nichtlineares Lösungsverhalten. Dargestellt ist das reelle Feld $u(x, t)$. Die Systemlänge entspricht der doppelten Modulationswellenlänge $L = \pi/k$, $k = 0.125$. Bei a) $\epsilon = 0.025$ und $G = 0.03$ knapp oberhalb des kritischen Kontrollparameters ist die Verzweigung oszillatorisch. Für große Kontrollparameter b) $\epsilon = 0.350$ wird das Verhalten anharmonischer.

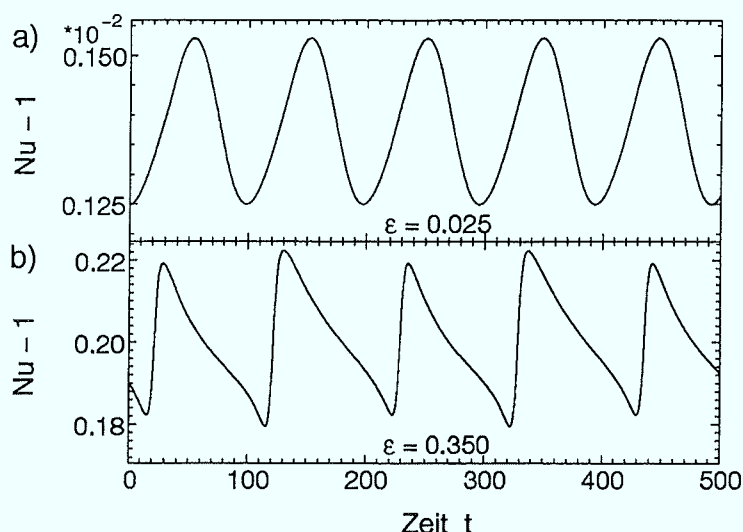


Abb. 2.34: Zeitverhalten der Nusselt-Zahl. Knapp oberhalb der Schwelle in a) bei $\epsilon = 0.025$ oszilliert die Nusselt-Zahl harmonisch. Dieses Verhalten wird für größere $\epsilon = 0.350$ in b) immer anharmonischer, bis sich schließlich ein stationärer Zustand mit konstanter Nusselt-Zahl einstellt. Die Modulationsamplitude ist in allen Fällen $G = 0.03$.

2.4.5 Chaotische Lösungen

In der Rayleigh-Bénard-Konvektion wurde bei großen Kontrollparametern kurz vor der Verzweigung in die stationäre Lösung ein chaotisches Verhalten beobachtet (siehe Abb. 2.5). Im SH-Modell ist dieses Verhalten nicht zu beobachten. Grund dafür kann sein, daß zur Erzeugung von driftenden Lösungen in der Rayleigh-Bénard-Konvektion zwei Modulationen nötig waren, die sich gegenseitig beeinflussen und so zum chaotischen Verhalten führen können. Zur Erzeugung dieses „Wettbewerbs“ in dem SH-Modell liegt es nahe, den periodischen Modulationsterm (2.183) durch einen doppelperiodischen Modulationsterm zu ersetzen:

$$M(x) = 2G \cos(2kx + \varphi) + 2G_2 \cos(3kx + \varphi_2). \quad (2.190)$$

Durch geeignete Wahl konnte so im SH Modell ein chaotisches Verhalten erzeugt werden [47]. Die Analyse des Chaos, z.B. durch Zeitreihenanalyse, Poincaré Schnitte und Bestimmung der Attraktordimension, gestaltet sich in diesem Modell wegen der schnelleren Dynamik und der reellen Bewegungsgleichung einfacher als in der Rayleigh-Bénard-Konvektion.

Kapitel 3

Zweidimensionale Effekte im anisotropen System

3.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden drei unterschiedliche Aspekte in der Strukturbildung verbunden:

1.) In der Elektrokonvektion in nematischen Flüssigkristallen wurde in jüngsten Arbeiten sowohl theoretisch [74, 59, 75] als auch experimentell [74, 76] gezeigt, daß eine Neigung des Direktors an den Behälterwänden [77] die Reflexionssymmetrie in der Flüssigkristallebene bricht und zu driftenden periodischen Rollenstrukturen führt.

2.) Räumlich variierende Drifts können, wie im vorigen Kapitel an der eindimensionalen Rayleigh-Bénard-Konvektion gezeigt, über eine Hopf-Bifurkation durch frustrierte Drifts zu zeitabhängigen Strukturen führen.

3.) Wenn die an den Behälterwänden angebrachten Elektroden nicht homogen sind, sondern Bereiche mit unterschiedlichen Randbedingungen und somit unterschiedlichen Strukturen entstehen, kann es zu interessanten Wechselwirkung zwischen den Strukturen in benachbarten Bereichen kommen [14, 78].

Der technologische Stand in der Flüssigkristallanzeigetechnik [79] und neue optische Methoden zum Ausrichten des Direktors [80, 81] eröffnen die Möglichkeit, nematische Flüssigkristallanzeigen statt mit einem homogenen Neigungswinkel des Direktors an den Zellwänden mit einem räumlich modulierten Neigungswinkel zu bauen. Diese Situation wird an dieser Stelle theoretisch untersucht. Ein räumlich periodisch modulierter Neigungswinkel des Direktors an den Zellwänden bricht die Translationssymmetrie und lokal die Reflexionssymmetrie in der Zelle. Daher werden auch in diesem System über die Hopf-Bifurkation durch frustrierte Drifts zeitabhängige Strukturen erwartet, wenn der Neigungswinkel eine bestimmte Größe überschreitet. Dieser Schluß basiert auf der Untersuchung einer symmetriangepaßten Amplitudengleichung. Da in diesem System der Wellenvektor der Modulation und der Wellenvektor der Rollenstruktur des anisotropen Systems nicht unbedingt parallel liegen müssen, kann es

zu neuartigen Orientierungssoszillationen der Rollenstruktur kommen.

Die in diesem Kapitel durchgeführten Untersuchungen sind unabhängig von einem speziellen technisch realisierbaren System. Es wird lediglich ein anisotropes strukturbildendes System mit gebrochener Translations- und lokal gebrochener Reflexions-Symmetrie vorausgesetzt. Damit allerdings ein realer Bezug zu einem Experiment vorhanden ist, werden die Untersuchungen immer in Hinblick auf die Realisierbarkeit durch die Elektrokonvektion in nematischen Flüssigkristallen mit Neigungswinkel des Direktors an den Platten diskutiert (siehe Abb. 3.1 - 3.3).

3.2 Elektrokonvektion mit Pretilt

Elektrokonvektion mit Neigungswinkel des Direktors an den Platten Elektrokonvektion in nematischen Flüssigkristallen ist ein gut verstandenes Strukturbildungssystem [77, 9, 8, 82]. Der Versuchsaufbau ist ähnlich dem der Rayleigh-Bénard-Konvektion (Abb. 2.1), nur mit dem Unterschied daß statt einer Flüssigkeit ein nematischer Flüssigkristall die Zelle füllt und statt einer Heizung von unten eine Wechselspannung angelegt wird. Überschreitet diese einen kritischen Wert, so entstehen Konvektionsstrukturen, wie in Abb. 3.1 angedeutet. Der Nemat ist anisotrop und besitzt ein Orientierungsfeld, den Direktor $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n} = -\mathbf{n}$). In den am häufigsten untersuchten Systemen liegt dieser am Rand parallel zu den Platten. In diesem Fall führt die erste Instabilität zu gewöhnlich stationären, räumlich periodischen Konvektionsrollen.

Ein Neigungswinkel zwischen dem Direktor und einer der beiden Begrenzungsplatten, wie in Abb. 3.2 angedeutet, ist für die Funktionsweise kommerzieller Flüssigkristallanzeigen unerlässlich [79]. Der Einfluß des Neigungswinkels auf die Strukturbildung wurde allerdings erst kürzlich untersucht [74, 59, 75, 76]. Durch einen homogenen Neigungswinkel θ entlang

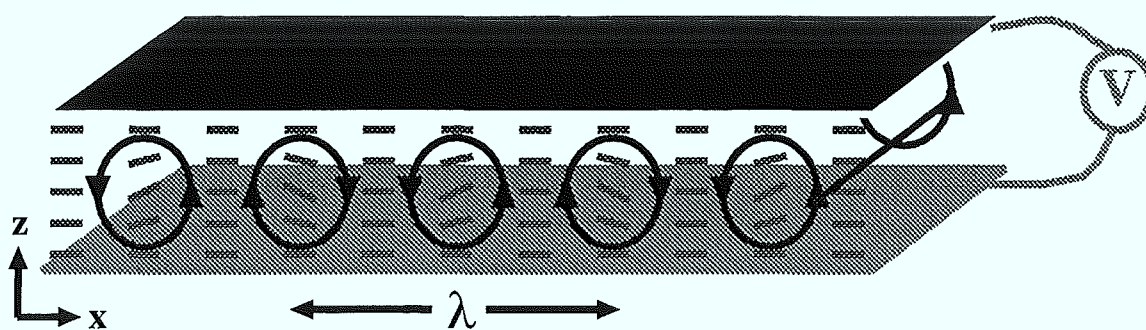


Abb. 3.1: Schematische Darstellung einer Elektrokonvektionszelle, die mit einem nematischen Flüssigkristall gefüllt ist. Der Direktor $\mathbf{n}$ ist durch die dunklen Balken angedeutet. Ohne angelegte Spannung V ist die Richtung des Direktors in der Zelle homogen und wegen der Fixierung an den Platten parallel zur x-Achse. Wenn die angelegte Wechselspannung einen kritischen Wert überschreitet, setzt Konvektion ein, und der Direktor wird periodisch aus der parallelen Lage ausgelenkt.

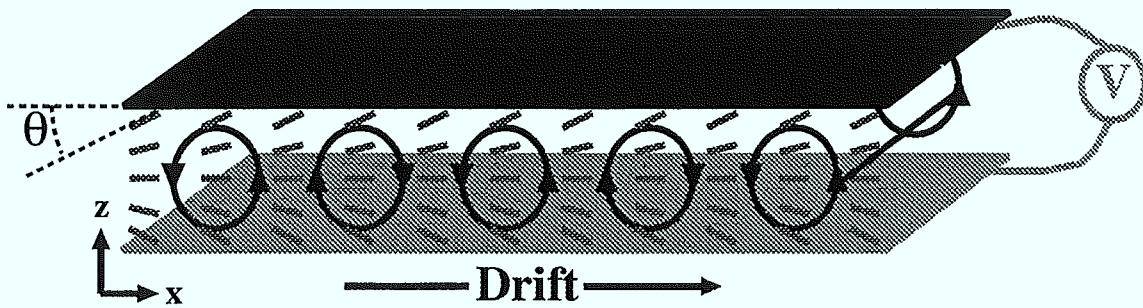


Abb. 3.2: Wenn der Direktor an den Platten nicht mehr parallel adjustiert wird, sondern, wie angezeigt, in einem Winkel $\pm\theta$ anliegt, kommt es zu einer Bewegung der Konvektionsrollen. Sie driften in Abhängigkeit vom Vorzeichen des Winkels θ nach links oder rechts. Die Driftgeschwindigkeit hängt vom Betrag des Winkels ab. Die leichten Verdrehungen des Direktors durch die Konvektion sind in dieser Abbildung nicht zu sehen.

der Begrenzungsplatten ist, wie in Abb. 3.2 zu sehen, die Spiegelsymmetrie entlang der x-Achse gebrochen. Als Konsequenz davon bewegen sich die Konvektionsrollen entlang der x-Achse, wie theoretisch vorhergesagt [74, 59, 75] und experimentell bestätigt wurde [76]. Die Driftgeschwindigkeit wird dabei in der Richtung vom Vorzeichen und in der Stärke vom Betrag des Neigungswinkels θ bestimmt.

Was passiert nun, wenn dieser Neigungswinkel nicht homogen an den Platten verteilt ist? Wirken sich Inhomogenitäten an den Platten auf die Lage des Direktors aus? Diese Fragestel-

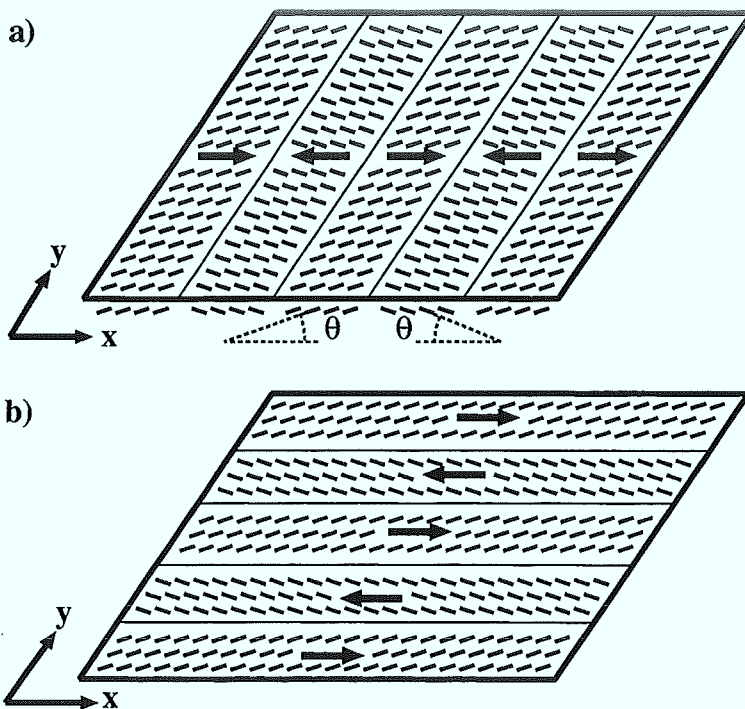


Abb. 3.3: Der Neigungswinkel θ des Direktors an den Platten aus Abb. 3.2 wurde für die Driftbewegung als homogen angenommen. In dieser Abbildung sind zwei Beispiele für eine inhomogene Verteilung der Direktorneigung dargestellt: in a) periodisch in x-Richtung und in b) periodisch in y-Richtung. In den einzelnen Bereichen mit gleicher Direktorneigung entstehen lokale driftende Konvektionsrollen, deren Driftrichtungen durch die Pfeile angedeutet sind.

lungen sollen hier anhand zweier experimentell realisierbarer Situationen untersucht werden. Stochastische Inhomogenitäten, also auch eine stochastische Verteilung des Pretiltwinkels, verschwinden im Mittel, deswegen liegt es nahe, als Näherung die Verteilung des Neigungswinkels räumlich periodisch zu variieren. Dazu können in diesem anisotropen System im einfachsten Fall zwei Situationen unterschieden werden, die in Abb. 3.3 dargestellt sind. Werden die Platten so präpariert, daß der Neigungswinkel θ wie in a) sein Vorzeichen in Streifen parallel zur y-Achse ändert, werden die Spiegelsymmetrie und die kontinuierliche Translationsinvarianz entlang der x-Achse des Systems gebrochen. Im zweiten Fall b) werden die Streifen parallel zur x-Achse präpariert, wodurch dann die kontinuierliche Translationsinvarianz in y-Richtung gebrochen ist. Beide Modifikationen führen zu unterschiedlichem Verhalten des Systems.

3.3 Modellgleichung

Die durch den räumlich periodisch variierenden Neigungswinkel des Direktors an den Platten auftretenden Effekte sollen hier nur qualitativ untersucht werden. Daher werden auch nicht die Bewegungsgleichungen der Elektrokonvektion in einem nematischen Flüssigkristall [77, 83] mit diesen Randbedingungen gelöst. Vielmehr soll das System auf dem Niveau des im vorigen Kapitel vorgestellten Amplitudengleichungsformalismus behandelt werden. Die Bifurkation der Rollenlösung in der Elektrokonvektion ist superkritisch und kann durch eine einfache Amplitudengleichung beschrieben werden [84]. Die Rollen können dabei normal orientiert zu den Begrenzungswänden oder schräg dazu liegen, wie theoretisch gezeigt [85] und experimentell bestätigt wurde [86]. Für normal orientierte Konvektionsrollen kann die Struktur, wie aus der Rayleigh-Bénard-Konvektion bekannt, formal in folgender Form geschrieben werden:

$$\vec{u}(x, y, z, t) = [A(x, y, t)e^{iq_c x} + cc] \vec{u}_0(z, q_c). \quad (3.1)$$

Auch hier beschreiben die Komponenten von $\vec{u}(x, y, z, t)$ die physikalischen Größen wie das Geschwindigkeitspotential, das angelegte elektrische Feld und die Direktorauslenkung der Struktur und $\vec{u}_0(z, q_c)$ die Variation der Felder in z-Richtung durch den Flüssigkristall. Die Struktur hat eine kritische Wellenzahl $q_c = 2\pi/\lambda$ (siehe Abb. 3.1). Die Amplitudengleichung beschreibt die Dynamik der Einhüllenden $A(x, y, t)$ der periodischen Struktur (3.1) und lautet in reskaliert Form [84]:

$$\partial_t A = \epsilon A + \Delta A - |A|^2 A. \quad (3.2)$$

Wie im vorherigen Kapitel soll A nur langsam auf der typischen Längenskala $\lambda = 2\pi/q_c$ variieren. Es handelt sich also wieder um einen Strukturbildungsprozeß aus einem homogenen Grundzustand in eine räumlich periodische Struktur. Daher ist diese Amplitudengleichung von gleicher Struktur wie die des eindimensionalen Swift-Hohenberg-Modells (2.177). Lediglich die Kohärenzlänge und der lineare Glättungsterm ist anders, weil hier ein zweidimensionales Anisotropes System vorliegt. In Abschnitt 2.4.3 wurde die Konsequenz einer driftenden Lösung auf die Amplitudengleichung diskutiert. In Gleichung (2.185) tritt ein zusätzlicher Driftterm

$iq_0 M(x)A$ auf. Dieser wird nun in das Modell eingebaut, um den durch die Neigung des Direktors am Rand erzeugten driftenden Lösungen gerecht zu werden:

$$\partial_t A = \epsilon A + iM(x, y)A + \Delta A - |A|^2 A. \quad (3.3)$$

Der Modulationsterm kann analog zu Abb. 3.3 in zwei Richtungen wirken:

$$M(x) = 2G \cos(kx), \quad (3.4a)$$

$$M(y) = 2G \cos(ky). \quad (3.4b)$$

Damit die Modulation auf die Einhüllende wirkt, muß $k \ll q_c$ sein. Der Lösungsraum von (3.3) zerfällt wie im eindimensionalen Fall in harmonische und subharmonische Lösungen (siehe Abschnitt 2.4.3).

3.4 Schwellen und Eigenlösungen

Der Modulationsterm $M(x, y)$ beeinflusst bereits die erste Bifurkation vom Grundzustand $\vec{u} = A = 0$. Wie im vorigen Kapitel ausführlich gezeigt, kann sich diese in Abhängigkeit von der Modulationsstärke G von einer stationären in eine Hopf-Bifurkation ändern.

Im homogenen Grenzfall, d.h. $M(x, y) = 0$, wird der lineare Teil der Amplitudengleichung (3.3) durch

$$A = F e^{\sigma t + i(Kx + Ly)} \quad (3.5)$$

gelöst. Die Bedingung für neutrale Stabilität, $Re(\sigma) = 0$, liefert einen Ausdruck für die neutrale Fläche,

$$\epsilon(K, L) = K^2 + L^2. \quad (3.6)$$

Diese trennt den Bereich, in dem der Zustand $A = 0$ linear stabil ist, von dem Bereich, in dem kleine Störungen anwachsen. Die neutrale Fläche hat offensichtlich ein absolutes Minimum bei $K_0 = L_0 = 0$ mit $\epsilon(K_0, L_0) = \epsilon_0 = 0$. Die Verzweigung erfolgt also bei $\epsilon = 0$ in eine Struktur mit Wellenlänge $q = q_c$.

Die Diskussion der linearen Stabilität der Amplitudengleichung (3.3) ist äquivalent für die beiden Modulationsterme aus (3.4). Daher wird nur der Modulationsterm (3.4b) behandelt, für (3.4a) müssen dann x und y in den entsprechenden Formeln geändert werden. Mit einer Modulation in y -Richtung kann die Amplitudengleichung wegen der periodischen Koeffizienten mit einem Floquet-Bloch-Ansatz für die Amplitude gelöst werden:

$$A(x, y, t) = e^{\sigma t + i(Kx + Ly)} \sum_{l=-N}^N A_l \exp(ilk y / 2) + cc. \quad (3.7)$$

Dies führt wieder auf ein lineares Eigenwertproblem, das numerisch behandelt werden muß. Für kleine G können die Schwellen durch eine systematische Störungsentwicklung gewonnen

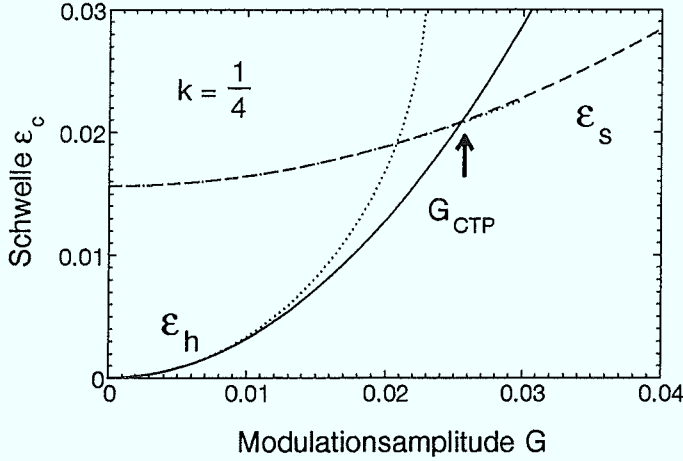


Abb. 3.4: Kritische Schwellen des Kontrollparameters in Abhängigkeit von der Modulationsstärke für die harmonischen (durchgezogene Linie) und die subharmonischen Lösungen (gestrichelte Linie). Für Modulationsstärken unterhalb des Kodimension-Zwei-Punktes G_{CTP} ist die Verzweigung erst stationär, bei Überschreiten der gestrichelten Kurve dann oszillatorisch. Die gepunkteten Linien sind Ergebnisse der vollen numerischen linearen Stabilitätsanalyse.

werden. Da die Ergebnisse qualitativen Charakter haben, wird diese hier kurz vorgestellt und auf die numerische Behandlung verzichtet. Die Amplitudengleichung (3.3) wird mit dem Ansatz

$$A = e^{\sigma t} B, \quad \text{mit} \quad \sigma = \lambda \pm i\omega \quad (3.8)$$

in eine Gleichung für B transformiert. Sei δ ein kleiner Entwicklungsparameter, so kann für kleine Modulationsamplituden $G = \delta \tilde{G}$ eine Störungsentwicklung vorgenommen werden:

$$\epsilon(\delta, k) = \epsilon^{(0)}(k) + \delta \epsilon^{(1)}(k) + \delta^2 \epsilon^{(2)}(k) + \dots \quad (3.9a)$$

$$\omega(\delta, k) = \delta \omega^{(1)}(k) + \delta^2 \omega^{(2)}(k) + \dots \quad (3.9b)$$

$$B(x) = B_0(x) + \delta B_1(x) + \delta^2 B_2(x) + \dots \quad (3.9c)$$

Wird die Gleichung für $B(x)$ nach Potenzen von δ sortiert, so ergeben sich durch Koeffizientenvergleich in den Ordnungen δ^1 und δ^2 Lösbarkeitsbedingungen für die Schwellen des Kontrollparameters ϵ und die Oszillationsfrequenzen ω . Für die harmonischen Lösungen ist

$$\epsilon_h = \frac{2G^2}{k^2} + O(G^4), \quad \omega_h = 0, \quad (3.10)$$

und für die subharmonischen Lösungen ergibt sich:

$$\epsilon_s = k^2/4 + \frac{G^2}{2k^2} + O(G^4), \quad \omega_s = G + O(G^3). \quad (3.11)$$

Die Schwellen sind für zwei verschiedene Werte der Modulationswellenzahl in Abb. 3.4 für $k = 1/4$ und in Abb. 3.5 für $k = 1/8$ dargestellt. Die harmonischen Lösungen (durchgezogene Linien) verzweigen stationär, bei den subharmonischen Lösungen (gestrichelte Linien) kommt es zur Hopf-Bifurkation. Beide Linien treffen sich bei einer speziellen Modulationsstärke G_{CTP} , an dem ein Kodimension-Zwei-Punkt (CTP) vorliegt. Für $G > G_{CTP} = k^2 \sqrt{8/3}$ ist die Verzweigung immer oszillatorisch mit einer Hopf-Frequenz ω von der Ordnung der

Modulationsstärke G . Links vom CTP ist die Schwelle der harmonischen Lösung kleiner als die der subharmonischen, $\epsilon_h < \epsilon_s$, daher ist die Verzweigung zunächst stationär.

In beiden Bildern sind die Kurven der numerischen linearen Stabilitätsanalyse gepunktet eingezeichnet. Es wurden 20 Moden berücksichtigt und jeweils die Schwellen der harmonischen und subharmonischen Anteile aus dem Ansatz (3.7) bestimmt. Bis etwa $G \approx G_{CTP}$ stimmt die analytische Rechnung gut mit der vollen numerischen Rechnung überein. Die Abweichungen bei der harmonischen Lösung ist dabei deutlich größer als bei der subharmonischen Lösung. Für große Modulationsstärken wird auch der harmonische Ast oszillatorisch. Dies ist in der analytischen Rechnung nicht enthalten, da es zu einem Zusammenlaufen der beiden Eigenwerte der zwei kleinsten Moden kommt, die dann komplex konjugiert werden. In Abb. 3.5 ist dieser Punkt aber am Knick der gepunkteten unteren Linie zu erkennen.

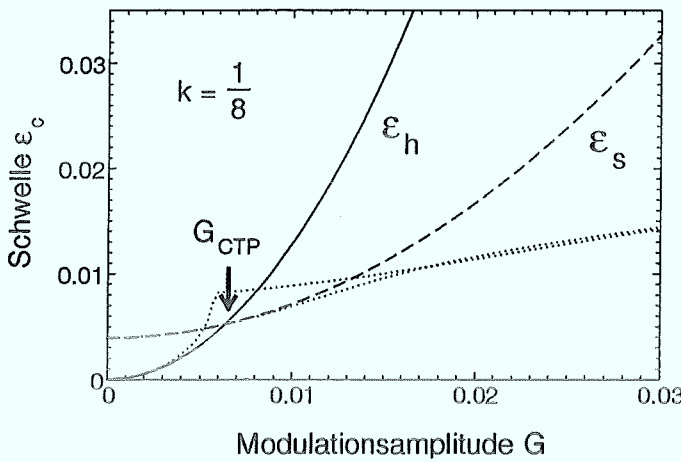


Abb. 3.5: Kritische Schwellen des Kontrollparameters wie in Abb. 3.4, jedoch für eine langwelligere Modulation mit $k = 1/8$. Diese verschiebt den Kodimension-Zwei-Punkt (CTP) weit nach links zu kleineren Modulationsstärken. Gleichzeitig werden die Schwellen deutlich erniedrigt.

Für kleinere $k = 1/8$, wie in Abb. 3.5 zu sehen ist, wird der Kodimension-Zwei-Punkt (CTP) weit nach links zu kleineren Modulationsstärken verschoben. Gleichzeitig werden die Schwellen deutlich erniedrigt. Dadurch kann bei einer kleinen Schwelle mit einer größeren Amplitude moduliert werden, was die Oszillationsfrequenz erhöht, die notwendige lange Kohärenzlänge durch kleine Kontrollparameter aber erhält.

Die harmonischen und subharmonischen Lösungen der Amplitudengleichung (3.3) haben nach Rücktransformation über (3.1) im Ortsraum folgende Gestalt:

$$\vec{u}_h = A_0 \left[\cos(q_c x) \pm \frac{2G}{k^2} \cos(ky) \sin(q_c x) + O(G^2) \right] \vec{u}_0(z, q_c), \quad (3.12a)$$

$$\vec{u}_s = \left[A_1 \cos\left(\frac{k}{2} y\right) \cos(q_c x + \omega_c t) + A_2 \sin\left(\frac{k}{2} y\right) \cos(q_c x - \omega_c t) + O(G) \right] \vec{u}_0(z, q_c). \quad (3.12b)$$

Die Amplituden A_i sind konstant und $\omega_c = G$. Die subharmonische Lösung ist eine Überlagerung zweier entgegengerichteter Wanderwellen. Ihr zeitliches Verhalten zeigt Orientierungsozillationen, die in Abb. 3.8 dargestellt und im nächsten Abschnitt ausführlicher diskutiert werden.

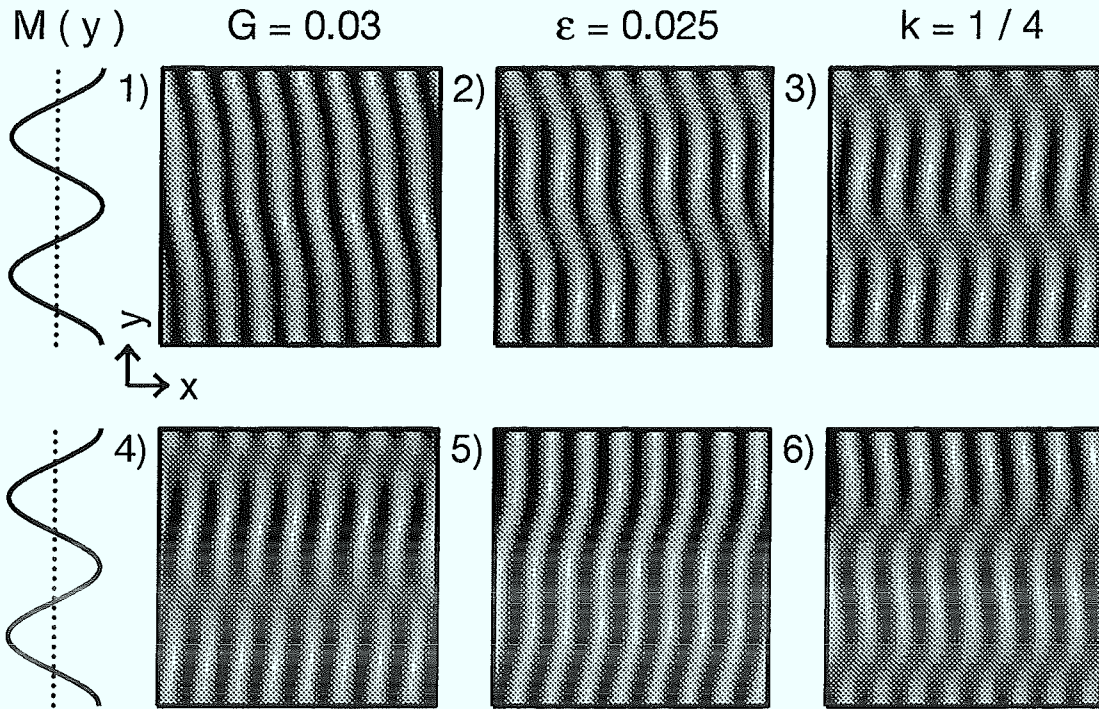


Abb. 3.6: Schnappschüsse der Konvektionsstrukturen. Durch die Modulation in y -Richtung laufen die Konvektionsrollen in den Maxima der Modulation (rechte Spitzen in der Modulationskurve $M(y)$) nach links, in den Minima nach rechts. In den ersten fünf Bildern ist die erste Halbperiode der Dynamik dargestellt. Die Konvektionsrollen schieben sich nicht aneinander vorbei, sondern neigen sich in allen Bereichen gleich und wechseln bei Umkehrung der Neigungsrichtung die Partner an jeder zweiten Nullstelle der Modulation. In der zweiten Halbperiode wechseln sie die Partner an den anderen Nullstellen der Modulation, wie in Bild 6 zu sehen ist.

Die lineare Lösung der Amplitudengleichung (3.3) mit einer Modulation $M(x)$ aus (3.4a) können durch einfaches Ersetzen von y durch x erhalten werden. Dadurch wird das System quasi eindimensional und es verhält sich wie das Swift-Hohenberg-Modell aus Abschnitt 2.4.3.

3.5 Nichtlineare Lösungen

Aufgrund der kubischen Nichtlinearität in der Amplitudengleichung (3.2) ist sowohl die harmonische als auch die subharmonische Bifurkation stetig, also superkritisch. Da die Nichtlinearität in der modulierten Amplitudengleichung (3.3) durch den Modulationsterm nicht beeinflusst wird, bleiben die Verzweigungen stetig.

Im nichtlinearen Regime wechselwirken die links- und rechtslaufenden subharmonischen linearen Lösungen (3.12b) und es entstehen Orientierungssoszillationen eines periodischen Rollenmusters. Diese Dynamik wurde durch Simulation der Amplitudengleichung in den Abb.

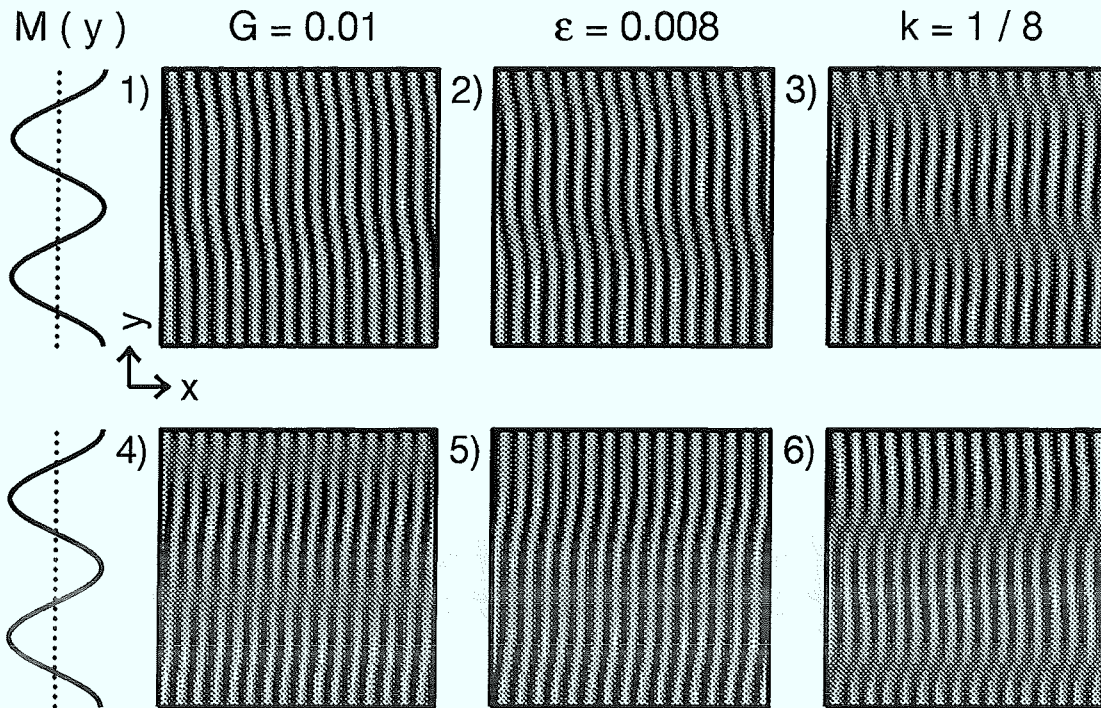


Abb. 3.7: Das Szenario in Abb. 3.6 ist hier für eine langwelligere Modulation dargestellt. Bei gleichen Parametern für die Modulationsstärke G und den Kontrollparameter ϵ würde es zu einer einfachen Driftbewegung in den horizontalen Streifen kommen. Durch eine kleinere Modulationsstärke kann der Kontrollparameter aber stark gesenkt werden (siehe Abb. 3.5). Dadurch vergrößert sich die Kohärenzlänge und es kommt wieder zu Orientierungssoszillationen.

3.6 und 3.7 zu sechs verschiedenen Zeitpunkten für zwei unterschiedliche Modulationswellenlängen dargestellt. Die ersten fünf Bilder sind jeweils eine zeitliche Abfolge der ersten Halbperiode. Die nach links geneigten parallelen Rollen wechseln an jeder zweiten Nullstelle der links dargestellten Modulation $M(y)$ ihre Partner und neigen sich nach rechts. Im sechsten Bild ist zu sehen, daß in der zweiten Halbperiode dieser Wechsel gerade bei den anderen Nullstellen von $M(y)$ stattfindet. Die Bewegung ist also subharmonisch zur Modulationswellenlänge.

Bei einer langwelligeren Modulation, wie in Abb. 3.7 mit $k = 1/8$, ist zu beachten, daß der CTP zu kleinen Modulationsstärken und Schwellen verschoben ist. Bei großen Modulationsstärken, z.B. im Bereich des CTP bei $k = 1/4$ in Abb. 3.6, liegen dann die Schwellen für den oszillatorischen Einsatz sehr hoch. Dieser verkleinert allerdings die Kohärenzlänge im System. Es kommt so zu keiner Wechselwirkung zwischen den linearen Wanderwellen, und diese schieben sich in ihren Bereichen mit unterschiedlichen Driftrichtungen parallel aneinander vorbei. Dabei wechseln sie ständig an den Nullstellen der Modulation die Partner,

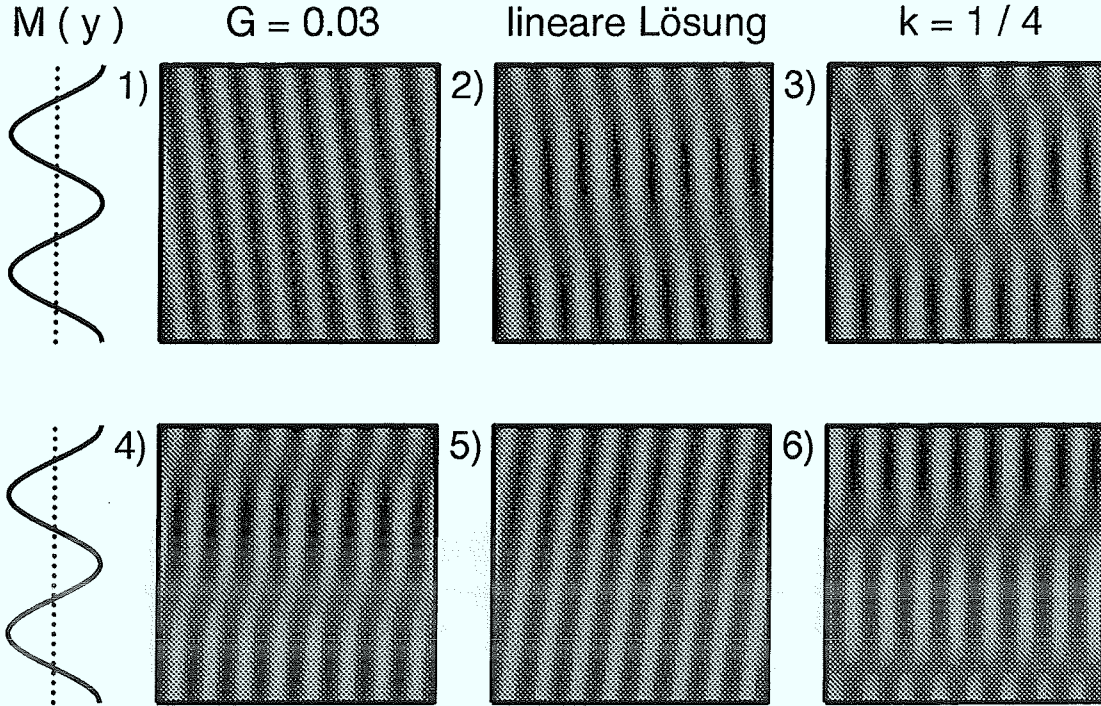


Abb. 3.8: Die Orientierungssoszillationen sind schon in den linearen Lösungen (3.12b) enthalten. Dargestellt sind Schnappschüsse nach dem gleichen Schema wie in Abb. 3.6. Die Modulationswellenzahl hat hier keinen Einfluß auf die Dynamik.

die Bewegung ist also harmonisch zur Modulationswellenlänge. Wird eine kleinere Modulationswellenlänge knapp oberhalb des CTP und somit auch ein kleinerer Kontrollparameter gewählt, reicht die Kohärenzlänge wieder aus, und es kommt zu Orientierungssoszillationen.

Interessant ist auch die zeitliche Entwicklung der analytischen, linearen subharmonischen Lösungen (3.12b), dargestellt in Abb. 3.8, die qualitativ gut mit der numerischen Lösung übereinstimmt.

Die nichtlinearen Simulationen wurden knapp oberhalb der Schwellen für den subharmonischen Ast in Abb. 3.4 und 3.5 gewonnen. Für größere Werte des Kontrollparameters ϵ existiert ein kritischer Wert $\epsilon_{bif}(k)$, der von der Wellenzahl der Modulation k abhängt, bei dem der Einfluß des Modulationsterms für eine oszillatorische Verzweigung zu gering ist. Das System verzweigt dann oberhalb von $\epsilon_{bif}(k)$ in eine stationäre Lösung.

Wie schon erwähnt, verhält sich das System bei Modulation in x -Richtung quasi eindimensional und somit wie das eindimensionale Swift-Hohenberg-Modell. Daher ist auch in diesem System bei komplexerer Modulierung, z.B. durch Überlagerung harmonischer Modulationen mit verschiedenen Wellenzahlen, ein chaotisches Verhalten zu erwarten (siehe Abschnitt 2.4.5 und [47]).

3.6 Zusammenfassung

Basierend auf einer Modellrechnung wurde ein Experiment vorgeschlagen, in dem zum ersten Mal Orientierungsoszillationen eines Rollenmusters beobachtet werden können. Die Modellgleichung (3.3) wurde durch ein spezielles Design einer Elektrokonvektionszelle motiviert (siehe Abb. 3.1 und Abb. 3.2). Allerdings tritt diese Amplitudengleichung in ähnlicher Form bei der Behandlung gekoppelter van der Pol Oszillatoren mit ausreichend starker Kopplung und nicht zu sehr verschiedenen Amplituden auf [87]. Daher kann spekuliert werden, ob sich Phänomene aus der reichhaltigen Literatur dieses Gebietes durch die hier vorgeschlagenen Experimente modellieren lassen. Durch doppelperiodische oder anharmonische Modulationsterme $M(x, y)$ sind außerdem quasiperiodische und chaotische Dynamiken sehr wahrscheinlich.

Wenn in einer Elektrokonvektionszelle für einen nematischen Flüssigkristall der Neigungswinkel am Rand wie vorgeschlagen eingestellt werden kann, stellt sich die Frage, wie die Driftgeschwindigkeit der Rollen durch externe Felder gesteuert werden kann. Durch ein magnetisches Feld in x-Richtung sollte die Driftgeschwindigkeit gesenkt werden [9, 8, 82, 59, 75], was einer Reduktion der Modulationsamplitude G entspräche. Als eine andere Möglichkeit, G zu verändern, kann die Variation der angelegten Spannung an die Konvektionszelle in Betracht gezogen werden [9, 8, 82, 88].

Kapitel 4

Zweidimensionale Effekte im isotropen System

In den beiden vorangegangenen Kapiteln wurden Strukturbildungsprozesse aus einem räumlich homogenen oder einem durch externe Modulationen räumlich periodisch gewordenen Grundzustand behandelt. Die Konvektion, die sich aus diesen Grundzuständen entwickelte, war entweder stationär oder zeitabhängig. In beiden Systemen war die Richtung des Wellenvektors der Rollenstruktur eindeutig festgelegt, und zwar in der Rayleigh-Bénard-Konvektion durch die Einschränkung auf zwei Dimensionen und in der Elektrokonvektion durch die Ausrichtung des Direktors an den Platten. Wird ein Rayleigh-Bénard-Experiment in einer Zelle mit großem Aspektverhältnis in beiden Raumrichtungen durchgeführt, entstehen bei kleinen Rayleigh-Zahlen parallele Konvektionsrollen. Die Lage des Wellenvektors ist allerdings in der Ebene beliebig, solange Randeffekte klein bleiben. In diesem Kapitel wird an dem zweidimensionalen Swift-Hohenberg-Modell der Einfluß von Inhomogenitäten auf ein isotropes System untersucht, welche die Rotations- und kontinuierliche Translations-Invarianz brechen.

Das Kapitel gliedert sich in drei Teile. Zuerst werden in einem technischen Abschnitt das Modell, der Lösungsalgorithmus und die relevanten physikalischen Größen vorgestellt. Dann wird durch Simulationen und durch analytische Rechnungen im Rahmen der Amplitudengleichung der bei Nicht-Boussinesq Fluiden zu beobachtende Übergang zwischen Rollen und Hexagonen untersucht. Durch externe Modulationen wird neben der Rotations- auch die kontinuierliche Translations-Invarianz gebrochen. Dadurch kann es zu völlig neuen Strukturen wie Rechtecken kommen, was im zweiten Abschnitt gezeigt wird. Diese externen Modulationen treten als Inhomogenitäten im linearen Term des Modells auf. Die Brechung der Invarianzen kann allerdings z.B. in chemischen Strukturbildungssystemen durch ein äußeres elektrisches Feld erfolgen. Dies äußert sich durch zusätzliche lineare Terme im SH2D-Modell und ist Inhalt des letzten Abschnitts.

4.1 Das zweidimensionale Swift-Hohenberg-Modell

In der Rayleigh-Bénard-Konvektion werden bei Verwendung von Nicht-Boussinesq-Fluiden [71, 35, 89, 69, 70, 90] oder unter dem Einfluß eines externen zeitlich modulierten Temperaturfelds [91] Hexagonmuster beobachtet. Diese Struktur kann nicht mehr wie die Rollenstrukturen aus Kap. 2 in einem zweidimensionalen Koordinatensystem beschrieben werden. Da die Lösung der Bewegungsgleichungen für die dreidimensionale Konvektion sehr aufwendig ist, wird gerne auf einfache Modelle zur Beschreibung der Dynamik zurückgegriffen. In diesem Abschnitt wird mit dem erweiterten zweidimensionalen Swift-Hohenberg-Modell ein Modell zur Beschreibung von Hexagonstrukturen vorgestellt. Dieses Modell wird auch für andere strukturbildende Systeme wie z.B. Turing-Strukturen in chemischen Reaktionen [92] oder Faraday-Experimenten herangezogen [93]. Zuerst wird das Modell vorgestellt und dann die Amplitudengleichungen für Rollen und Hexagone abgeleitet. Durch lineare Stabilitätsuntersuchungen wird der Übergangsbereich zwischen den Strukturen berechnet und die Aussagen mit Simulationen und Potentialberechnungen des Modells verglichen.

4.1.1 Bewegungsgleichung

Zur Beschreibung von Hexagonlösungen muß das zweidimensionale Swift-Hohenberg-Modell um einen quadratischen Term, der die Up-Down Symmetrie bricht, erweitert werden [94, 95]:

$$\partial_t u = \left(\epsilon - (q_0^2 + \Delta)^2 \right) u + bu^2 - u^3. \quad (4.1)$$

Im Vergleich zum eindimensionalen Modell (2.176) wird einfach die zweifache räumliche Ableitung nach x durch den Laplace-Operator ersetzt.

In der Originalversion [39] wurde das Swift-Hohenberg-Modell ohne quadratischen Term zuerst als Modellsystem für Rollenlösungen in thermischer Konvektion vorgestellt, an dem der Einfluß von thermischen Fluktuationen auf die konvektive Instabilität studiert wurde. Da es so skaliert werden kann, daß es die Amplitudengleichung der Rayleigh-Bénard-Konvektion für feste Randbedingungen wiedergibt [40], wurde ein Vergleich der Simulation des Modells mit Experimenten in Systemen mit großem Aspektverhältnis versucht [96]. Weitere Simulationen [97] wurden zur Untersuchung von Fluktuationen [98] durchgeführt.

Starkes Interesse gab es am Übergang von Rollen zu Hexagonen [99, 94, 69, 70], Keimbildung und Wachstum von Hexagonen [100] sowie Defekten im Übergangsbereich [101]. Das Anwachsen dieser Strukturen aus einer kohärenten Rollenstruktur mit kleinen Störungen wurde mathematisch in [102] untersucht. Für einen großen quadratischen Koeffizienten können Rollen und Hexagone gleichzeitig existieren [103, 104], wie in neuesten Experimenten beobachtet wurde [105]. Durch Variation der mittleren Temperatur kann nicht nur die Prandtl-Zahl verändert werden. Es gibt Flüssigkeiten, die in diesem Bereich einen Erster-Ordnung Phasenübergang vollziehen, z.B. in einem Flüssigkristall von der isotropen zur nematischen Phase. In solchen Systemen existieren dann Hexagone, inverse Hexagone und Rollen [106].

4.1.2 Simulation der Bewegungsgleichung

Für die Simulation der zeitlichen Entwicklung der SH-Gleichung (4.1) kann der eindimensionale Pseudospektralalgorithmus aus Abschnitt 2.4.4.1 einfach auf zwei Dimensionen erweitert werden. Dem diskreten zweidimensionalen Ortsraum für das u -Feld ist nun ein ebenfalls zweidimensionales Bild im Fourierraum zugeordnet. Dabei sind die Fouriermoden räumlich diskretisiert. Die Darstellung einer absolut parallelen Rollenlösung im Fourierraum besteht aus scharfen Peaks an zwei gegenüberliegenden Punkten auf einem Kreis mit Radius q_0 . Durch die Isotropie des Systems ist kein Punkt auf dem Kreis ausgezeichnet. Wegen der Diskretisierung liegen die Moden einer bestimmten Rollenlösung allerdings nicht unbedingt auf diesem Kreis. Dadurch wird die Isotropie des Systems beeinflusst. Bei Verwendung von großen Systemen mit 128 oder 256 Fouriermoden ist dieser Einfluß allerdings zu vernachlässigen.

Wird die Simulation bei kleinen Werten für den Kontrollparameter ϵ für ein Boussinesq-Fluid, also $b = 0$, mit kleinen Störungen im u -Feld gestartet, bilden sich schnell Bereiche mit parallelen Konvektionsrollen. Im allgemeinen werden mehrere Moden auf dem Kreis angeregt, und es dauert sehr lange, bis sich ein Modenpaar durchsetzt. Für größere Werte des Kontrollparameters kann sich keine der Moden durchsetzen und es entstehen Labyrinthmuster (siehe Abb. 5.9a).

Die Nusselt-Zahl Nu und der dimensionslose konvektive Wärmestrom j können analog zur Rayleigh-Bénard-Konvektion berechnet werden (Anhang C).

4.1.3 Lineare Stabilitätsanalyse

Im Nicht-Boussinesq-Fall $b = 0$ entsteht in der Simulation bei kleinen Werten des Kontrollparameters eine Rollenstruktur. Diese muß nicht unbedingt die kritische Wellenzahl q_0 haben, sondern ihre Wellenzahl liegt in einem mit zunehmendem Kontrollparameter breiter werdenden Wellenzahlband. Dieses Band wird durch verschiedene Instabilitäten begrenzt, die sich durch die Lage ihrer anwachsenden Moden im Fourierraum unterscheiden. Der Stabilitätsbereich wird Busse-Ballon genannt. In diesem Abschnitt spielen diese unterschiedlichen linearen Stabilitäten keine entscheidende Rolle. Ausführliche Berechnungen der Stabilitätsdiagramme zum SH-Modell mit verschiedenen Formen des nichtlinearen Terms wurden bereits durchgeführt [96, 107] und mit dem Busse-Ballon der thermischen Konvektion verglichen [108]. Im nächsten Kapitel werden die auftretenden Instabilitäten vorgestellt und der Busse-Ballon auch für das hier behandelte System ausführlich berechnet (siehe Abschnitt 5.3.2).

4.1.4 Das Potential

Die Bewegungsgleichung des zweidimensionalen SH-Modells (4.1) kann als Lösung eines Minimierungsproblems für ein Funktional $\mathcal{F}$ aufgefaßt werden. Dabei soll

$$\mathcal{F} = \int dx \int dy f(x, y, u) \quad (4.2)$$

minimiert werden. Da die Bewegungsgleichung weder einfache Ableitungen nach x noch nach y enthält, ist die zugehörige Funktionalableitung

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} = \frac{\partial f}{\partial u} - \underbrace{\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u_x}}_{=0} - \underbrace{\frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial u_y}}_{=0} \quad (4.3)$$

die partielle Ableitung nach u , woraus sich leicht

$$f(x, y, u) = \frac{1}{2} \left(-\epsilon u^2 + \left\{ (q_0^2 + \nabla^2)^2 u \right\}^2 + \frac{1}{2} u^4 - \frac{2}{3} b u^3 \right) \quad (4.4)$$

konstruieren läßt, um

$$\partial_t u = - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \quad (4.5)$$

zu erfüllen. Die Existenz des Funktional $\mathcal{F}$ besagt, daß das System versuchen wird, denjenigen Zustand anzunehmen, der das Funktional minimiert. Deshalb wird das SH-Modell auch als Relaxationsmodell bezeichnet [109]. Insbesondere wird bei konkurrierenden Strukturen diejenige mit dem kleineren Potential bevorzugt.

Das Potential $\mathcal{F}$ läßt sich während der Simulation über die Integration (4.2) leicht im Ortsraum berechnen. Aber auch hier ist die Isotropie des Systems nur bei großer Modenzahl gewährleistet, da über eine rechteckige Fläche integriert wird, und diese Fläche zwei Richtungen auszeichnet.

4.1.5 Ableitung der Amplitudengleichung

Die lineare Stabilitätsanalyse macht Aussagen darüber, in welchen Bereichen Lösungen instabil werden. Das nichtlineare Verhalten in diesen Bereichen kann durch sie nicht bestimmt werden, insbesondere kann keine Aussage über den Betrag der durch die nichtlinearen Terme im Wachstum eingeschränkten Moden gemacht werden. Diese Frage kann durch eine Entwicklung der langsamen Moden um den Grundzustand im Rahmen einer Mehrskalenanalyse, die auf die Amplitudengleichung hinausläuft, oder durch direkte Simulation des Modells beantwortet werden. Die Ergebnisse der Amplitudengleichung stellen auch einen sehr guten Test für die Numerik dar und schränken durch ihre lineare Stabilitätsanalyse wiederum den Lösungsraum erheblich ein, was die Parameterwahl bei der Simulation enorm erleichtert. Daher wird hier zuerst sehr ausführlich auf die Amplitudengleichung und ihre Ergebnisse eingegangen.

4.1.5.1 Rollenmuster

Die einfachste räumlich periodische Struktur in den zweidimensionalen Konvektionsexperimenten sind parallele Rollen. Für diese wird in diesem Abschnitt die Amplitudengleichung abgeleitet. Komplexere Strukturen wie Hexagone oder Rechtecke lassen sich dann als Überlagerung von mehreren Rollenlösungen darstellen.

Der Übergang vom eindimensionalen zum zweidimensionalen SH-Modell erfolgte formell durch Ersetzen der eindimensionalen Raumableitung durch den zweidimensionalen Gradienten. Wird dieses auch für die eindimensionale Amplitudengleichung (2.177) gemacht, so ist die daraus entstehende Amplitudengleichung nicht mehr isotrop. Daher wird nun zunächst die Ableitung der zweidimensionalen Amplitudengleichung für die Rollenlösung vorgestellt.

Der lineare Anteil der SH-Gleichung (4.1),

$$\partial_t u = \left(\epsilon - (q_0^2 + \nabla^2)^2 \right) u, \quad (4.6)$$

kann mit dem Ansatz

$$u = F e^{\sigma t + i \mathbf{q} \mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \sigma = \lambda + i\omega, \quad (4.7)$$

gelöst werden. Für den Wachstumsparameter σ gilt $\omega = 0$, da das Rollenmuster zeitlich stationär ist. Aus der Stabilitätsgrenze $\lambda = 0$ folgt dann die Dispersionsrelation:

$$\epsilon(\mathbf{q}) = (q_0^2 - \mathbf{q}^2)^2. \quad (4.8)$$

Das Minimum dieser Kurve liegt bei $\epsilon = 0$ und $|\mathbf{q}| = q_0$. Da das System rotationsinvariant ist, darf eine beliebige Lage des Wellenvektors gewählt werden. Liegt dieser parallel zur x-Achse, d.h. die Rollen parallel zur y-Achse, so kann die Stabilität der Lösung mit folgendem Ansatz ausgerechnet werden:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

wobei K und L kleine Störungen sind. In die Dispersionsrelation (4.8) eingesetzt,

$$\epsilon(\mathbf{q}) = 4q_0^2 L^2 + 4q_0^2 L K^2 + 4q_0 L^3 + 2L^2 K^2 + L^4 + K^4 \quad (4.10)$$

folgt aus den führenden Termen, daß

$$\epsilon \propto 4q_0^2 L^2 \Rightarrow L \propto \epsilon^{1/2}, \quad (4.11)$$

$$\epsilon \propto 4q_0^2 L K^2 \Rightarrow K \propto \epsilon^{1/4}. \quad (4.12)$$

Die Zeit skaliert mit ϵ . Es werden nun langsame Variablen zur Beschreibung der Dynamik der Einhüllenden eingeführt:

$$T = \epsilon t, \quad X = \epsilon^{1/2} x, \quad Y = \epsilon^{1/4} y. \quad (4.13)$$

Durch diese Skalentrennung hat die Lösung die Form:

$$u(x, t, X, Y, T) = A(X, Y, T) e^{i(q_0 x + \omega_0 t)} + cc. \quad (4.14)$$

Die Operatoren werden durch die Kettenregel erweitert:

$$\partial_t \rightarrow \partial_t + \epsilon \partial_T, \quad \partial_x \rightarrow \partial_x + \epsilon^{1/2} \partial_X, \quad \partial_y \rightarrow \epsilon^{1/4} \partial_Y. \quad (4.15)$$

In y -Richtung entfällt die schnelle Ableitung, da die Rollen parallel zu ihr liegen. Der Einfluß des quadratischen Koeffizienten b soll klein sein und wird mit ϵ skaliert:

$$b = \epsilon^{1/2} \bar{b}. \quad (4.16)$$

Mit der Entwicklung der Lösung nach dem Kontrollparameter:

$$u = \epsilon^{1/2} u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^{3/2} u_2, \quad (4.17)$$

folgt ein hierarchisches Gleichungssystem in den Ordnungen von ϵ :

$$(q_0^2 + \partial_x^2)^2 u_0 = 0 \quad (4.18a)$$

$$(q_0^2 + \partial_x^2)^2 u_1 = -2 (q_0^2 + \partial_x^2) (2\partial_x \partial_X + \partial_Y^2) u_0 \quad (4.18b)$$

$$(q_0^2 + \partial_x^2)^2 u_2 = -2 (q_0^2 + \partial_x^2) (2\partial_x \partial_X + \partial_Y^2) u_1 - \left(2 (q_0^2 + \partial_x^2) \partial_X^2 + (2\partial_x \partial_X + \partial_Y^2)^2 \right) u_0 - \partial_T u_0 - u_0^3 + \bar{b} u_0^2. \quad (4.18c)$$

Da das Rollenmuster im Minimum der kritischen Kurve stationär ist, entfallen sukzessiv alle schnellen Zeitableitungen und damit $\omega_0 = 0$. Die erste Gleichung enthält nur den linearen Operator und hat die Lösung:

$$u_0(x, X, Y, T) = A_0(X, Y, T) e^{iq_0 x} + cc. \quad (4.19)$$

Der zusätzliche Term in der zweiten Gleichung verschwindet wegen dieser Lösung und u_1 nimmt die gleiche Form wie u_0 an:

$$u_1(x, X, Y, T) = A_1(X, Y, T) e^{iq_0 x} + cc. \quad (4.20)$$

Da der lineare Operator selbstadjungiert ist, folgt aus der Projektion der letzten Gleichung auf u_0 eine Lösbarkeitsbedingung für A_0 :

$$0 = - (2iq_0 \partial_X + \partial_Y^2)^2 A_0 + A_0 - \partial_T A_0 - 3|A_0|^2 A_0 \quad (4.21)$$

Der Koeffizient vor dem nichtlinearen Term hängt dabei von der Normierung von u_0 ab. In diesem Fall wurde

$$\langle u_0, u_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx u_0^* u_0 = 1 \quad (4.22)$$

gewählt. Der quadratische Term liefert keinen Beitrag, weil daraus keine Terme $\propto e^{\pm iq_0 x}$ entstehen, die bei der Projektion erhalten blieben. Mit der Rückskalierung auf die schnellen Variablen,

$$A(x, y, t) = \epsilon^{1/2} A_0(X, Y, T), \quad (4.23)$$

folgt die bekannte [2, 1] Amplitudengleichung:

$$\partial_t A = \epsilon A + (2q_0 \partial_x - i \partial_y^2)^2 A - 3|A|^2 A. \quad (4.24)$$

Die Koeffizienten können durch geeignete Koordinatentransformationen bzw. Skalierung von A zu eins werden. Darauf wird hier jedoch verzichtet, da ein direkter Vergleich zu den numerischen Ergebnissen erwünscht ist und deshalb in den dem System angepaßten Koordinaten gerechnet werden soll.

4.1.5.2 Vergleich mit der Simulation

Rollen parallel zur y -Achse werden durch

$$u(x, y) = 2F \cos(q_0 x) \quad (4.25)$$

beschrieben. Die reelle Amplitude läßt sich leicht aus (4.24) berechnen:

$$F = \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \quad (4.26)$$

da sowohl die zeitliche als auch die Ortsableitung nach y entfällt. Der dimensionslose konvektive Wärmestrom (3.1) folgt aus einfacher analytischer Integration:

$$j = 2F^2(1 + \epsilon) = \frac{2}{3}\epsilon(1 + \epsilon). \quad (4.27)$$

Hier ergeben sich die ersten Probleme im Vergleich der numerischen Ergebnisse mit denen der Amplitudengleichung. In der hier abgeleiteten Form ist der konvektive Wärmestrom unabhängig von dem Nicht-Boussinesq-Parameter b . Dies gilt sicher nicht für eine reales Experiment, und auch der numerische Algorithmus zeigt eine deutliche Abhängigkeit, wie in Abb. 4.1 dargestellt. Eine Abhängigkeit des Wärmestroms vom Nicht-Boussinesq-Parameter b tritt allerdings auf, wenn dieser in der Ableitung der Amplitudengleichung eine Ordnung höher angenommen wird, also in (4.16) $b = \bar{b}$ gesetzt wird. In der Amplitudengleichung schlägt

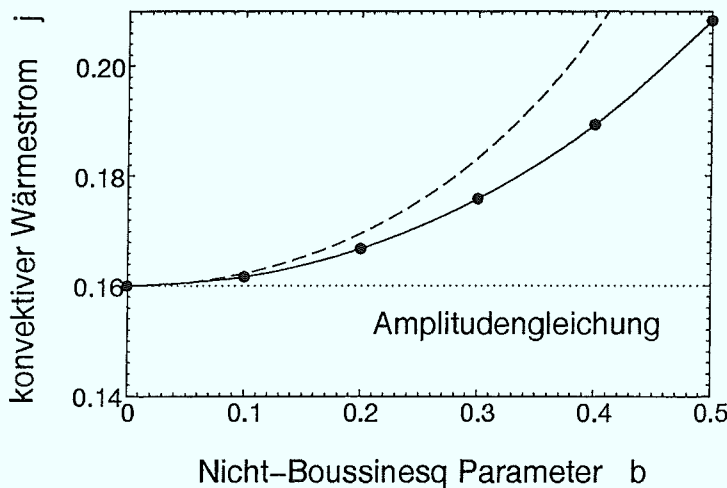


Abb. 4.1: Abhängigkeit des konvektiven Wärmestroms beim Rollenmuster von dem Nicht-Boussinesq-Parameter b . Obwohl die Amplitudengleichung keine Abhängigkeit in dieser Ordnung von b angibt, steigt der Wärmestrom mit zunehmendem b . Die gestrichelte Kurve ist der Wärmestrom aus der Amplitudengleichung für $b \approx 1$. Gerechnet wurde auf einem 128 Punkt Gitter mit $\Gamma = 16$ bei $\epsilon = 0.2$.

sich dieses lediglich im nichtlinearen Koeffizienten nieder, der nun von b abhängt (siehe auch [104]):

$$\partial_t A = \epsilon A + (2q_0 \partial_x - i \partial_y^2)^2 A - \left(3 - \frac{38}{9} b^2\right) |A|^2 A. \quad (4.28)$$

Der dimensionslose konvektive Wärmestrom,

$$j = \frac{2}{3 - \frac{38}{9} b^2} \epsilon (1 + \epsilon), \quad (4.29)$$

wächst dann wie in der Simulation mit b und ist als gestrichelte Kurve in Abb. 4.1 eingezeichnet. Für die weiteren Ableitungen wird der Einfachheit halber mit der Amplitudengleichung (4.24) weiter gerechnet und diese Diskrepanz ignoriert.

4.1.5.3 Hexagonmuster

Die Lösung für Hexagone ist eine Überlagerung von drei Rollenlösungen unter einem Winkel von jeweils $2\pi/3$. Alle drei Wellenvektoren haben dabei den gleichen Betrag q_0 . Wird einer der drei Vektoren parallel zur x -Achse gewählt, so kann für die Lösung der SH-Gleichung (4.1) mit

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_2 = \frac{q_0}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \mathbf{q}_3 = \frac{q_0}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

folgende Überlagerung angesetzt werden:

$$u = A_1 e^{i\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{r}} + A_2 e^{i\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{r}} + A_3 e^{i\mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{r}} + cc. \quad (4.31)$$

Die Lage der Vektoren $\mathbf{q}_i$ ist in Abb. 4.2 dargestellt. Die Ableitung der Amplitudengleichung erfolgt in gleicher Weise wie in Abschnitt 4.1.5.1. Da sich jetzt aber die Lösung aus einer Überlagerung von einzelnen Lösungen darstellt, wird die Gesamtlösung auf jede einzelne Lösung

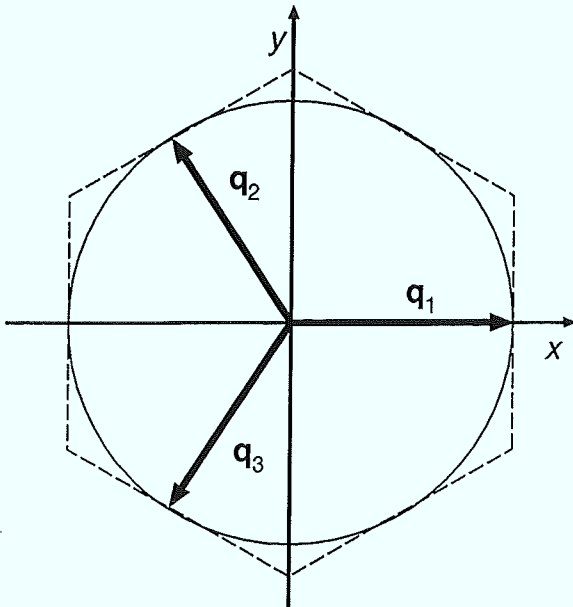


Abb. 4.2: Geometrie des Hexagonmusters und die Lage der Wellenvektoren. Das Hexagon entsteht aus einer Überlagerung von drei Rollenlösungen im Winkel von jeweils $2\pi/3$.

des adjungierten linearen Problems projiziert. Diese sind räumlich homogen in der Amplitude, und daher entfallen die Ortsableitungen. Es folgt ein partielles Differentialgleichungssystem mit drei Gleichungen [110]:

$$\partial_t A_1 = \epsilon A_1 + 2b A_2^* A_3^* - 3(2|A_2|^2 + 2|A_3|^2 + |A_1|^2) A_1, \quad (4.32a)$$

$$\partial_t A_2 = \epsilon A_2 + 2b A_1^* A_3^* - 3(2|A_1|^2 + 2|A_3|^2 + |A_2|^2) A_2, \quad (4.32b)$$

$$\partial_t A_3 = \epsilon A_3 + 2b A_1^* A_2^* - 3(2|A_1|^2 + 2|A_2|^2 + |A_3|^2) A_3. \quad (4.32c)$$

Die Mischterme zwischen den Amplituden aus den nichtlinearen Termen durch einfaches Ausmultiplizieren und Projektion zustande. Zu beachten ist dabei lediglich, daß sich wegen $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0$ die Exponenten zum Teil eliminieren und somit in der Amplitudengleichung auftauchen. Diese Gleichungen wurden schon früh für die Rayleigh-Bénard-Konvektion abgeleitet [111].

4.1.6 Stabilitätsbereiche

Das im vorletzten Abschnitt abgeleitete Amplitudengleichungssystem erlaubt eine einfache Abschätzung für die Stabilitätsbereiche der einzelnen Muster. In beiden Fällen sind die Amplituden räumlich konstant und die Amplitudengleichungen (4.32) können mit reellen Amplituden geschrieben werden:

$$\partial_t A_1 = \epsilon A_1 + 2b A_2 A_3 - 3(2A_2^2 + 2A_3^2 + A_1^2) A_1, \quad (4.33a)$$

$$\partial_t A_2 = \epsilon A_2 + 2b A_1 A_3 - 3(2A_1^2 + 2A_3^2 + A_2^2) A_2, \quad (4.33b)$$

$$\partial_t A_3 = \epsilon A_3 + 2b A_1 A_2 - 3(2A_1^2 + 2A_2^2 + A_3^2) A_3. \quad (4.33c)$$

4.1.6.1 Stabilität der Rollenmuster

Für ein Rollenmuster parallel zur y-Achse gilt:

$$A_1 = F, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0. \quad (4.34)$$

Das Differentialgleichungssystem reduziert sich also auf den eindimensionalen Fall, und die Lösung ist:

$$u(x, y) = 2F \cos(q_0 x), \quad (4.35)$$

mit bekannter Amplitude (4.26) und konvektivem Wärmestrom (4.27). Es handelt sich also um eine subkritische Verzweigung bei $\epsilon = 0$.

Die Rollenlösung ist aber nicht für alle Werte des Kontrollparameters stabil. Mit einer linearen Stabilitätsanalyse kann der Bereich der stabilen Lösungen bestimmt werden. Dazu wird untersucht, bei welchen Werten des Kontrollparameters kleine Störungen verschwinden oder anwachsen. Zur Rollenlösung für die Rollen wird daher ein Störterm addiert:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} e^{\lambda t}. \quad (4.36)$$

In die Amplitudengleichung (4.33a) eingesetzt und in den kleinen Amplituden a_i linearisiert, folgt daraus ein homogenes lineares Gleichungssystem in den a_i . Die Lösbarkeit ist gegeben, wenn von diesem die Determinante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} \epsilon - \lambda - 9F^2 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon - \lambda - 6F^2 & 2bF^2 \\ 0 & 2bF^2 & \epsilon - \lambda - 6F^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.37)$$

Auf der Stabilitätsgrenze $\lambda = 0$ und mit der Amplitude (4.26) kann der Grenzwert für den Kontrollparameter berechnet werden:

$$\epsilon > \epsilon_r \quad \text{mit} \quad \epsilon_r = \frac{4}{3}b^2. \quad (4.38)$$

4.1.6.2 Stabilität des Hexagonmusters

Das Hexagonmuster entsteht aus der Überlagerung von drei gleichen Rollenmustern unter einem Winkel von $2\pi/3$. Dies ist gegeben, wenn

$$A_1 = F, \quad A_2 = F \quad \text{und} \quad A_3 = F. \quad (4.39)$$

Das reale Feld hat dann die Lösung

$$u(x, y) = 2F \sum_{j=1}^3 \cos(k_{x_j}x + k_{y_j}y), \quad (4.40)$$

mit den Wellenvektoren aus (4.30). Die drei Amplitudengleichungen (4.33) haben somit eine einheitliche Form:

$$\partial_t F = \epsilon F - 15F^3 + 2bF^2. \quad (4.41)$$

Für den zeitlich stationären Fall folgt:

$$F = \frac{1}{15} \left(b \pm \sqrt{b^2 + 15\epsilon} \right). \quad (4.42)$$

Offensichtlich ist die Verzweigung hier subkritisch. Der Sattelnknoten der Verzweigung liegt bei

$$\epsilon_a = -\frac{1}{15}b^2. \quad (4.43)$$

Im Bereich $\epsilon_a < \epsilon < 0$ ist sowohl die Hexagonlösung als auch die Grundlösung $u = 0$ linear stabil.

Wie bei der Rollenlösung muß auch hier die Stabilität der Lösung überprüft werden. Dazu wird wieder ein Ansatz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ F \\ F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \quad (4.44)$$

in die Amplitudengleichung (4.33) eingesetzt und linearisiert. Die Lösbarkeitsbedingung lautet:

$$\begin{vmatrix} \epsilon - \lambda - 21F^2 & 2bF^2 - 12F^2 & 2bF^2 - 12F^2 \\ 2bF^2 - 12F^2 & \epsilon - \lambda - 21F^2 & 2bF^2 - 12F^2 \\ 2bF^2 - 12F^2 & 2bF^2 - 12F^2 & \epsilon - \lambda - 21F^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.45)$$

Mit der Amplitude (4.42) zeigt sich, daß die Hexagonlösung nur bis zu einem bestimmten Wert für den Kontrollparameter stabil ist:

$$\epsilon_a < \epsilon < \epsilon_h \quad \text{mit} \quad \epsilon_h = \frac{16}{3}b^2. \quad (4.46)$$

Bei der Berechnung des konvektiven Wärmestroms muß über die ganze Grundfläche integriert werden. Da die Integration über die drei Richtungen $\mathbf{q}_i$ dasselbe Ergebnis liefert, ist

$$j = 6F^2(1 + \epsilon) = \frac{6}{225} \left(b \pm \sqrt{b^2 + 15\epsilon} \right)^2 (1 + \epsilon). \quad (4.47)$$

4.1.6.3 Vergleich mit der Simulation

Die Amplitudengleichungen (4.33) sind aus einer Störungsrechnung gewonnen und haben somit einen Gültigkeitsbereich um den Entwicklungspunkt $\epsilon = 0$. Trotzdem sind die aus Amplitudengleichungen gewonnenen Resultate häufig auch in einem Bereich für große ϵ sinnvoll. Daher wurde mit dem numerischen Algorithmus die SH-Gleichung für verschiedene Werte von ϵ gelöst und mit den Aussagen der Amplitudengleichung verglichen. Dazu wurde die exakte analytische Lösung für Rollen und Hexagone dem Algorithmus als Startlösung vorgegeben und die zeitliche Entwicklung bis zu einem konstanten Wärmefluß beobachtet. In Abb. 4.3 ist das Ergebnis dargestellt. Die Wärmeströme für Rollen (Kreise) und für Hexagone (Vierecke) liegen in guter Näherung auf den Kurven der Amplitudengleichung.

Die aus der Amplitudengleichung berechneten Stabilitätsbereiche stimmen mit Experimenten nicht sehr gut überein [69, 70] und konnten nur mit phänomenologischen Argumenten

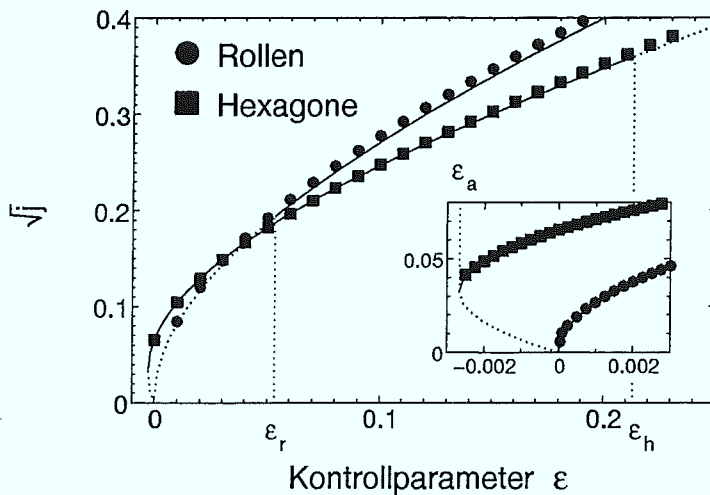


Abb. 4.3: Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Aussagen der Amplitudengleichung. Die durchgezogenen Linien sind die dimensionslosen konvektiven Wärmeströme aus der Amplitudengleichung, die Symbole Ergebnisse der Simulation der Bewegungsgleichung. Gerechnet wurde auf einem 128 Punkte Gitter mit $\Gamma = 16$ bei $\epsilon = 0.2$. Der Nicht-Boussinesq-Parameter ist $b = 0.2$.

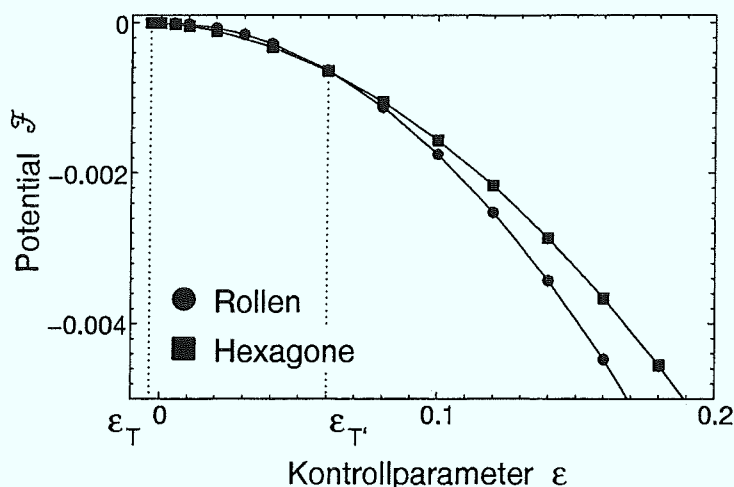


Abb. 4.4: Potential zu der Rechnung aus Abb. 4.3. Der Schnittpunkt der beiden Kurven liegt bei etwa $\epsilon_{T'} \approx 0.06$. Für kleinere ϵ haben die Hexagone ein kleineres Potential und werden bevorzugt, für größere ϵ ist die Rollenlösung günstiger. Allerdings wird für $\epsilon = \epsilon_T \approx -0.0033$ das Potential für die Hexagone positiv, so daß die konduktive Lösung bevorzugt wird. Der Nicht-Boussinesq-Parameter ist $b = 0.2$.

bezüglich der Finite-Size Effekte angepaßt werden [112]. Eine bessere Übereinstimmung wurde durch Potentialrechnungen zur Amplitudengleichung erreicht [70]. Die sich daraus ergebende Schranke ϵ_T für den Stabilitätsbereich der Hexagone gegenüber dem konduktiven Bereich und $\epsilon_{T'}$ gegenüber den Rollen läßt sich leicht aus den Potentialkurven in Abb. 4.4 ablesen. Für $b = 0.2$ ist $\epsilon_r = 0.0533$, $\epsilon_h = 0.2133$ und $\epsilon_{T'} = 0.06$, d.h. $\epsilon_{T'}$, bei dem das Potential für Rollen und Hexagone gleich ist, liegt im Überlappungsbereich der Stabilitätsbereiche für Rollen und Hexagone, $\epsilon_r < \epsilon_{T'} < \epsilon_h$. Auf einen quantitativen Vergleich mit den Experimenten wird verzichtet, da einerseits der Schwerpunkt der Arbeit auf qualitativ neuen Effekten durch Inhomogenitäten liegt, andererseits die recht willkürliche Anpassung der Parameter an die Experimente keine gute Übereinstimmung ergab und das Modell in diesem Punkt nicht überstrapaziert werden sollte.

4.2 Externe räumlich periodische Inhomogenitäten

4.2.1 Einfluß des Driftterms

Für die eindimensionale Rayleigh-Bénard-Konvektion wurde sehr ausführlich das Auftreten von driftenden Lösungen, Hopf-Bifurkation durch frustrierte Drifts und chaotisches Lösungsverhalten durch langwellige räumlich periodische Modulation der Geometrie oder der Temperaturprofile diskutiert. Im SH-Modell konnten diese Effekte durch Einbau eines einfachen Driftterms realisiert werden (siehe Abschnitt 2.4.3). Im zweidimensionalen System treten diese Effekte nicht auf. Das System nutzt die ihm neu angebotene Freiheit im Ortsraum aus, und stellt die Konvektionsrollen einfach senkrecht zur Modulationsrichtung. Durch einen langwelligen Driftterm wird also die Rotationssymmetrie gebrochen und das System anisotrop. Es tritt aber keine Dynamik auf, da durch das Ausweichen die Wellenlänge der intrinsischen Struktur nicht in Wettstreit mit der aufgeprägten Wellenzahl tritt.

4.2.2 Räumlich periodisch modulierter Kontrollparameter

Eine Wechselwirkung zwischen der intrinsischen Wellenlänge und einer aufgeprägten Wellenlänge ist zu erwarten, wenn beide von der gleichen Größenordnung sind. Im Fall des räumlich periodisch modulierten Driftterms wurde diese Situation gerade vermieden, um Resonanzen auszuschließen und die Bifurkation scharf zu halten. In der Rayleigh-Bénard-Konvektion wurden driftende Rollen z.B. durch zwei externe Modulationen im 1:2 Verhältnis mit entsprechender Phasenverschiebung erzeugt. Für die Modulation des Systems mit Modulationswellenzahlen im Bereich der kritischen Wellenzahl ist eine viel einfachere experimentelle Vorgehensweise denkbar. Werden, wie in Abb. 4.5 gezeigt, an der unteren Platte zusätzliche

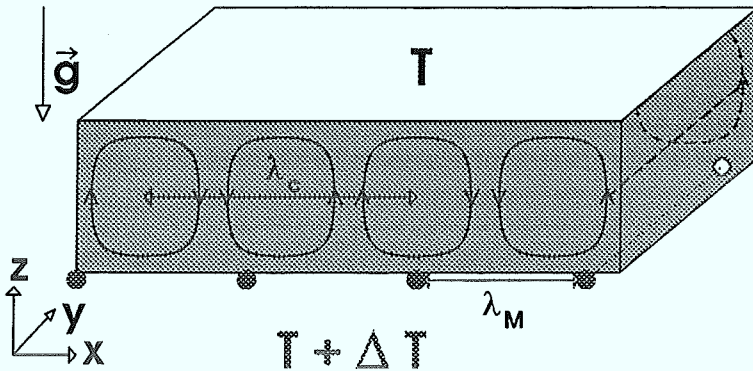


Abb. 4.5: Räumlich periodische Modulation des Kontrollparameters. In einem Rayleigh-Bénard-Konvektionsexperiment kann diese z.B. durch zusätzliche Heizdrähte in einem Abstand von λ_M realisiert werden.

Heizdrähte im Abstand von $\lambda_M \approx \lambda_c$ angebracht, entspricht dies einer einfachen räumlich periodischen Modulation des Temperaturprofils. Da die Rayleigh-Zahl direkt proportional zur angelegten Temperaturdifferenz ist, kann diese Modulation im SH-Modell in einfachster Ordnung durch eine räumlich periodische Modulation des Kontrollparameters erzeugt werden. Daher wird das SH-Modell um einen linearen periodischen Modulationsterm erweitert:

$$\partial_t u = \left(\epsilon - (q_0^2 + \Delta)^2 \right) u + M(x, y)u - u^3. \quad (4.48)$$

Auf den Nicht-Boussinesq-Term wird in diesem Abschnitt verzichtet, d.h. $b = 0$. Für den Modulationsterm wird zunächst eine Richtung festgelegt:

$$M(x, y) = 2G \cos(kx). \quad (4.49)$$

Durch ihn werden die Rotationssymmetrie sowie die kontinuierliche Translationssymmetrie in x -Richtung gebrochen.

4.2.2.1 Lineare Stabilität und Schwellen

Ohne Modulationsterm $M(x, y) = 0$ kann der lineare Anteil der Bewegungsgleichung (4.48) durch den Ansatz

$$u(x, y) = F e^{\sigma t + i(qx + py)} + cc \quad (4.50)$$

gelöst werden. Dies führt wie in Abschnitt 4.1.5.1 für den linear stabilen Fall $\sigma = 0$ auf einen Ausdruck für die neutrale Fläche:

$$\epsilon_0(q, p) = (q_0^2 - q^2 - p^2)^2. \quad (4.51)$$

Dieses Paraboloid hat absolute Minima für $q^2 + p^2 = q_0^2$, d.h. in der $p - q$ -Ebene auf einem Kreis mit Radius q_0 . Anders ausgedrückt kann sich die Rollenlösung in diesem isotropen System in jeder beliebigen Lage anordnen. Diese Isotropie wird durch den Modulationsterm (4.49) zerstört. Für die Berechnung der neutralen Fläche wird die Rollenlösung (4.50) nach Floquet entwickelt:

$$u(x, y) = e^{\sigma t} e^{i(qx + py)} \sum_{l=-N}^N F_l e^{ik/2 l x} + cc, \quad (4.52)$$

mit $-k/2 < q - q_0 < k/2$. Wie im eindimensionalen Fall muß die subharmonische Lösung mit berücksichtigt werden. Die numerisch berechnete neutrale Fläche für eine Modulation mit Wellenzahl $k = 5/4$ und Amplitude $G = 0.15$ ist in Abb. 4.6 dargestellt. Es werden vier absolute Minima ausgezeichnet, die an den schwarzen Punkten in Abb. 4.6 berechnet wurden. Diese liegen alle vier auf dem Kreis mit Radius q_0 und haben in q -Richtung den Betrag der halben Modulationswellenzahl, q steht also in Resonanz mit der externen Modulation.

Einige Aussagen über den Einfluß des Modulationsterms können analytisch durch einfache Modenansätze gewonnen werden. Als erstes wird der Zwei-Moden-Ansatz

$$u(x, y) = e^{\sigma t} e^{iqx} (B_1 e^{ipy} + B_2 e^{-ipy}) + cc \quad (4.53)$$

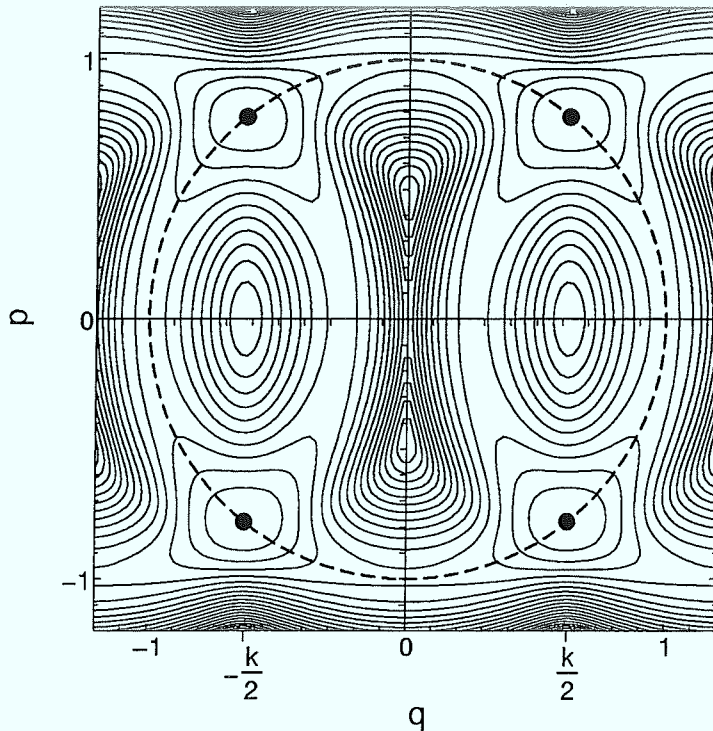


Abb. 4.6: Neutrale Fläche mit Modulationsterm. Eingezeichnet sind die Höhenlinien der neutralen Fläche, d.h. die Fläche der Kontrollparameter, bei der die Wachstumsrate des größten Eigenwerts gerade Null ist. Die Punkte sind die numerisch bestimmten Minima. Auf dem gestrichelten Kreis mit Radius q_0 liegen die Vektoren des unmodulierten Systems. Durch die Modulation werden vier Minima ausgezeichnet. Parameter: Wellenzahl $k = 5/4$, $G = 0.15$, 8 Moden.

untersucht, dem im Ortsraum ein durch Überlagerung von zwei Rollenlösungen entstandenes Rechteckmuster entspricht. Damit es zu einer Kopplung mit dem Modulationsterm kommt, müssen die Bedingungen

$$q = k/2, \quad p = \sqrt{q_0^2 - k^4/4}, \quad 0 < k < 2q_0, \quad (4.54)$$

erfüllt sein. In diesem Fall folgt für die Schwelle:

$$\epsilon_c^\square = -G. \quad (4.55)$$

Für kleine Modulationswellenzahlen werden allerdings senkrecht zur Modulation stehende Rollen bevorzugt. Deren Schwelle kann durch den Drei-Moden-Ansatz

$$u(x, y) = e^{\sigma t} e^{iq_0 y} \left(B_0 + B_1 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx} \right) + cc \quad (4.56)$$

berechnet werden und lautet:

$$\epsilon_c^\perp = \frac{1}{2} \left(k^4 \pm \sqrt{k^8 + 16G^2} \right). \quad (4.57)$$

Für $k^4 < G$ ist $\epsilon_c^\perp < \epsilon_c^\square$, was bedeutet, daß im Grenzfall $k \rightarrow 0$ die Schwelle gegen $-2G$ strebt. Diese analytischen Rechnungen werden durch die numerische Stabilitätsanalyse bestätigt. In Abb. 4.7 ist die Einsatzschwelle in Abhängigkeit von der Modulationswellenzahl dargestellt. Das Plateau $1 < k < 2$ entspricht gerade der Schwelle $\epsilon_c^\square$. Für kleine k läuft die Schwelle auf das Minimum $\epsilon_c = -2G$. Für große Modulationswellenzahlen, also sehr kurzwellige Modulation, mittelt sich die Modulation weg und die Schwelle nähert sich im Grenzfall der Schwelle für das unmodulierte System bei $\epsilon_c = 0$ [10].

4.2.2.2 Nichtlineare Strukturen

In Abschnitt 4.1.5.3 wurde das schwach nichtlineare Verhalten der Hexagone durch ein Amplitudengleichungssystem aus der Überlagerung von drei Rollenlösungen berechnet. Die Ergeb-

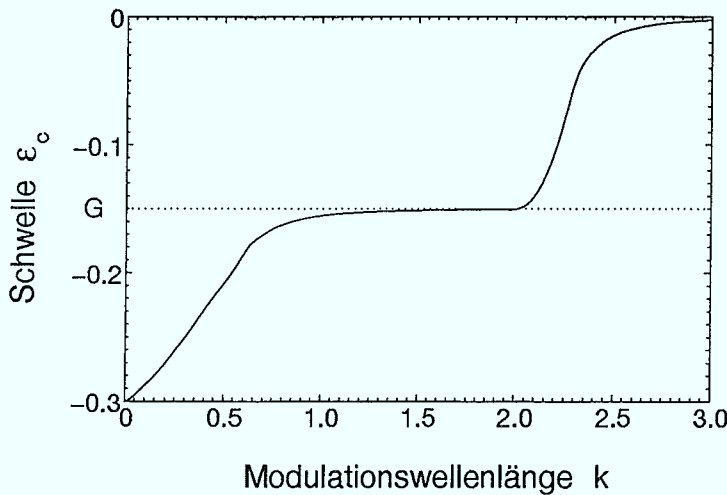


Abb. 4.7: Einsatzschwelle in Abhängigkeit von der Modulationswellenzahl. Die Schwellen wurden aus der numerischen linearen Stabilitätsanalyse mit $N = 8$ Moden bei einer Modulationsamplitude von $G = 0.15$ berechnet.

nisse der linearen Stabilitätsanalyse des vorigen Abschnitts legen nahe, die Rechtecklösung als Überlagerung von zwei Rollenlösungen anzusetzen:

$$u = A_1 e^{i\mathbf{q}_1 \mathbf{r}} + A_2 e^{i\mathbf{q}_2 \mathbf{r}}. \quad (4.58)$$

Die Lage der beiden Wellenvektoren,

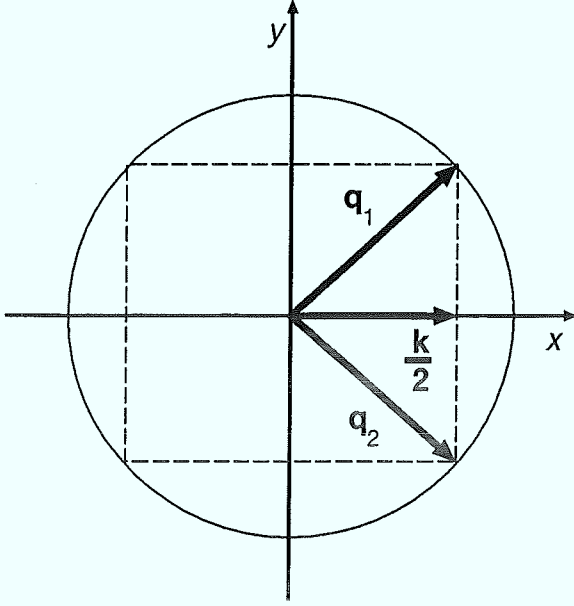


Abb. 4.8: Lage der Wellenvektoren bei dem Rechteckmuster.

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} k/2 \\ \sqrt{q_0^2 - k^2/4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} k/2 \\ -\sqrt{q_0^2 - k^2/4} \end{pmatrix}, \quad (4.59)$$

ist in Abb. 4.8 dargestellt. In der Ableitung der Amplitudengleichung wird die Modulationsamplitude in der Ordnung ϵ berücksichtigt:

$$G = \epsilon \bar{G}. \quad (4.60)$$

Die Kopplungsterme bei den Hexagonen entstanden dadurch, daß sich alle drei Wellenvektoren der einzelnen Rollen kompensierten. Durch den Modulationsterm kommt es auch bei den Rechtecken zu Kopplungstermen, da

$$\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 = 0, \quad \text{mit} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

Daher lauten die zwei gekoppelten Amplitudengleichungen unter Vernachlässigung der räumlichen Ableitungen:

$$\partial_t A_1 = \epsilon A_1 + G A_2^* - 3(2|A_2|^2 + |A_1|^2) A_1, \quad (4.62a)$$

$$\partial_t A_2 = \epsilon A_2 + G A_1^* - 3(2|A_1|^2 + |A_2|^2) A_2. \quad (4.62b)$$

Mit räumlichen Ableitungen und unter Beachtung von Eckhaus-Instabilitäten wurden diese Gleichungen für die Vorhersage von Rechtecklösungen in einem anisotropen System wie der Elektrokonvektion aus Kapitel 3 abgeleitet [22, 23]. Für eine Rechteckstruktur sind beide Amplituden gleich und reell, d.h. $A_1 = A_2 = F$. Im stationären Fall läßt sich dann aus den Amplitudengleichungen sofort die Amplitude berechnen:

$$F = \frac{1}{3}\sqrt{\epsilon + G}. \quad (4.63)$$

Offensichtlich ist die Lösung nur für $\epsilon > -G$ definiert. Daher wird der Stabilitätsbereich für kleine Werte des Kontrollparameters durch

$$\epsilon_a^{\square} = -G \quad (4.64)$$

nach unten begrenzt. Mit dem Ansatz,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \quad (4.65)$$

wird die Rechtecklösung auf Stabilität gegen die Rollenlösung untersucht. Linearisierung führt wieder auf eine Lösbarkeitsdeterminante:

$$\begin{vmatrix} \epsilon - \lambda - 15F^2 & G - 12F^2 \\ G - 12F^2 & \epsilon - \lambda - 15F^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.66)$$

Im neutral stabilen Fall und mit der bekannten Amplitude (4.63) folgt die Schwelle:

$$\epsilon_b^{\square} = 2G. \quad (4.67)$$

Die lineare Stabilitätsanalyse des Amplitudengleichungssystems (4.62) liefert ein Phasendia-

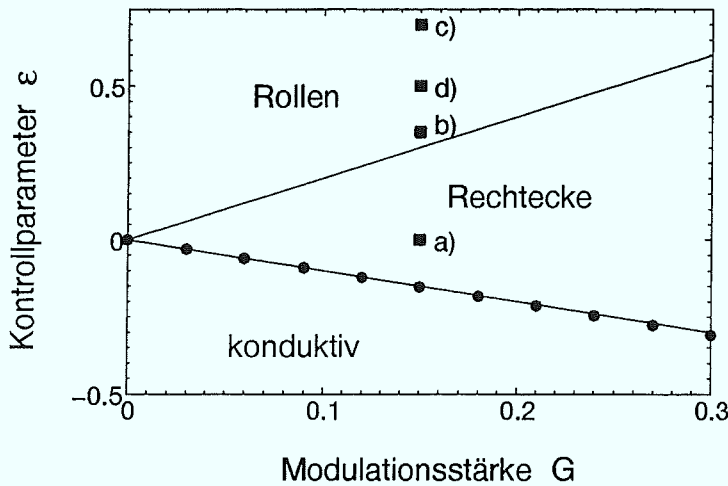


Abb. 4.9: Phasendiagramm der Rechtecke. Im Bereich zwischen den beiden eingezeichneten Geraden sind die Rechtecke linear stabil. Die Verzweigung in die Rechtecklösung erfolgt oberhalb von $G = -\epsilon$. Für größere Werte des Kontrollparameters bei $\epsilon > 2G$ ist wieder die Rollenlösung stabil. Die Punkte sind Ergebnisse der Simulation. Die Strukturen an den quadratischen Punkten sind in Abb. 4.10 dargestellt. Parameter: Wellenzahl $k = 5/4$, 8 Moden.

gramm, das in Abb. 4.9 dargestellt ist. Die untere Gerade ist die Phasengrenze zur Grundlösung $u = 0$, $\epsilon_a^\square = -G$, die obere Gerade die Phasengrenze zu modulierten Rechtecken mit $A_1 \neq A_2$, $\epsilon_b^\square = 2G$. Die runden Symbole sind die Schwellen aus der Simulation der Bewegungsgleichung, bei denen die Rechtecke gerade noch stabil sind, bevor die Lösung ausstirbt, also der konduktive Zustand einsetzt. An den quadratischen Symbolen im Phasendiagramm

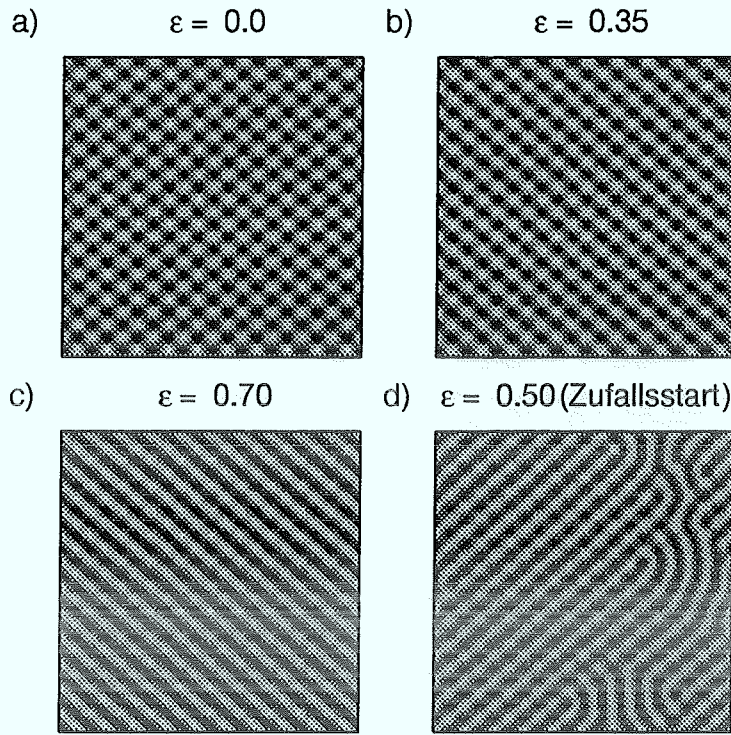


Abb. 4.10: Simulationen. An vier markanten Stellen im Phasendiagramm aus Abb. 4.9 wurde das SH2D-Modell simuliert. In a) bis c) als Fortsetzung mit steigendem Kontrollparameter, in d) mit kleinen Störungen im u -Feld. Parameter: Wellenzahl $k = 5/4$, $G = 0.15$. Simulation: 128×128 Punkte, $dt = 0.5$, Laufzeit a) bis c) jeweils bis $t=5000$, d) bis $t=500000$.

wurden Simulationsläufe durchgeführt, deren Strukturen in Abb. 4.10 dargestellt sind. In a) ist ein sauberes Rechteckmuster zu sehen. Ohne Modulation würde an dieser Stelle bei $\epsilon = 0$ jede Lösung aussterben. In b) ist knapp oberhalb der linearen Stabilitätsgrenze zu sehen, daß sich eine der beiden Amplituden verstärkt und sich dann bei weiterer Erhöhung des Kontrollparameters in c) als Rollenlösung etabliert. In d) wurde mit kleinen Störungen im u -Feld gestartet. Diesmal setzt sich die andere Amplitude durch, und es entstehen zur anderen Seite geneigte Rollen. Die Neigung der Rollen ist durch die Modulationswellenzahl k , die die Lage der Wellenvektoren (4.59) bestimmt, vorgegeben.

4.3 Schwache interne Anisotropie und gleichzeitig gebrochene Up-Down Symmetrie

Die Brechung der Up-Down Symmetrie führt zur Entstehung von Hexagonstrukturen, die in Abschnitt 4.1 ausführlich diskutiert wurden. Im vorigen Abschnitt entstanden als Konsequenz der Brechung der Rotations- und Translations-Invarianz Rechteckstrukturen. Eine

interessante Frage ist nun, was passiert, wenn die Rotationssymmetrie gleichzeitig mit der Up-Down Symmetrie gebrochen wird. Als Experiment wäre dazu eine räumlich periodisch modulierte Rayleigh-Bénard Zelle mit einem Nicht-Boussinesq-Fluid denkbar. Es gibt allerdings einfachere Systeme, bei denen die Rotationssymmetrie nicht extern gebrochen werden muß, sondern die von Natur aus eine Anisotropie besitzen. Experimentelle Systeme, in denen beide Symmetrien gleichzeitig gebrochen sind, sind z.B. chemische Reaktionen mit einem angelegten elektrischen Feld [113, 114, 115] oder die in Kapitel 3 vorgestellte Elektrokonvektion in Flüssigkristallen im Nicht-Boussinesq-Bereich [116] oder mit einem „Pretilt“ des Direktors.

4.3.1 Modellgleichung

Durch den u^2 Term wird die Up-Down Symmetrie im zweidimensionalen SH-Modell gebrochen (siehe Abschnitt 4.1). Die schwache Anisotropie wird im Modell durch kleine Terme im linearen Operator realisiert. Von allen denkbaren möglichen Ergänzungen bis zur zweiten Ordnung fallen eine ganze Reihe durch Reskalierung heraus, und es verbleiben zwei Zusatzterme [117]:

$$\partial_t u = \left(\epsilon - (q_0^2 + \Delta)^2 + 2(\alpha_1 \partial_x^2 - \alpha_2 \partial_x^2 \partial_y^2) \right) u + bu^2 - u^3. \quad (4.68)$$

Für $b \neq 0$ wird also die Up-Down Symmetrie, für $\alpha_i \neq 0$ die Rotationssymmetrie gebrochen. Weitere nichtlineare Terme, wie sie z.B. in der Kuramoto-Sivashinski Gleichung [118, 119] auftreten, können auch zu einer Anisotropie des Systems führen. Da hier allerdings nur die qualitativen Aspekte des Wechselspiels der beiden Symmetriebrechungen untersucht werden, wird das Modell so einfach wie möglich gehalten und auf weitere nichtlineare Terme verzichtet.

4.3.2 Schwellen

Durch die beiden Anisotropieterme wird die neutrale Fläche des Grundzustands $u = 0$ (4.51) verändert:

$$\epsilon_0(q, p) = (q_0^2 - q^2 - p^2)^2 + 2\alpha_1 q^2 + 2\alpha_2 q^2 p^2. \quad (4.69)$$

Diese Fläche hat für verschiedene Bereiche der Anisotropieterme unterschiedliche Minima und Sattelpunkte. Im Fall $\alpha_2 = 0$ ist:

α_1	q_s	p_s	$\epsilon_0(q_s, p_s)$	Art
$\alpha_1 < 0$	$\sqrt{q_0^2 - \alpha_1}$	0	$2\alpha_1 q_0^2 - \alpha_1^2$	globales Minimum
$0 < \alpha_1 < 1$	$\sqrt{q_0^2 - \alpha_1}$	0	$2\alpha_1 q_0^2 - \alpha_1^2$	Sattelpunkt
$\alpha_1 < 0$	0	q_0	0	Sattelpunkt
$0 < \alpha_1 < 1$	0	q_0	0	globales Minimum

Für $\alpha_2 > 0$ werden die Sattelpunkte zu lokalen Minima, die globalen Minima zu Sattelpunkten. Für den besonderen Fall $-1 < \alpha_2 < 0$ und $\alpha_1 > \alpha_2/(1 + \alpha_2)$ ist

$$q_s^2 = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2 q_0^2}{1 - (1 + \alpha_2)^2}, \quad p_s^2 = \frac{\alpha_1(1 + \alpha_2) - q_0^2 \alpha_2}{1 - (1 + \alpha_2)^2} \quad (4.70)$$

und es tritt eine sogenannte Schrägrolleninstabilität [8, 9, 117, 85] auf.

4.3.3 Schwach nichtlineares Verhalten

Das Verhalten der periodischen Strukturen mit konstanter Amplitude in der Nähe der Einsetzungsschwelle wird durch einen Dreimodenansatz,

$$u = A_1 e^{i\mathbf{q}_1 \mathbf{r}} + A_2 e^{i\mathbf{q}_2 \mathbf{r}} + A_3 e^{i\mathbf{q}_3 \mathbf{r}}, \quad (4.71)$$

untersucht. Für die Lage der Wellenvektoren wird im Gegensatz zur reinen Hexagonlösung (4.30) eine beliebige Wellenlänge q in x und eine leichte Abweichung L in den y -Komponenten zugelassen,

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_2 = \frac{q}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3}(1+L) \end{pmatrix}, \mathbf{q}_3 = \frac{q}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3}(1+L) \end{pmatrix}, \quad (4.72)$$

was zu schwach deformierten Hexagonlösungen führt [90]. Wird nur eine der Amplituden A_i angeregt, entsteht ein einfaches Rollenmuster.

Analog zu Abschnitt 4.1.5.3 kann ein gekoppeltes System von drei Amplitudengleichung für die Bewegungsgleichung (4.69) abgeleitet werden:

$$\partial_t A_1 = \eta_a A_1 + 2b A_2^* A_3^* + f(A_1) A_1, \quad (4.73a)$$

$$\partial_t A_2 = \eta_b A_2 + 2b A_1^* A_3^* + f(A_2) A_2, \quad (4.73b)$$

$$\partial_t A_3 = \eta_b A_3 + 2b A_1^* A_2^* + f(A_3) A_3, \quad (4.73c)$$

mit den Abkürzungen

$$f(A_i) = 3 |A_i|^2 + 6 \sum_{j \neq i} |A_j|^2 \quad (4.74a)$$

$$\eta_a = \varepsilon - (q_0^2 - q^2)^2 - 2\alpha_1 q^2, \quad (4.74b)$$

$$\eta_b = \varepsilon - \left(q_0^2 - \frac{q^2}{4} (1 + 3(1+L)^2) \right)^2 - \alpha_1 \frac{q^2}{2} - 3 \frac{\alpha_2 q^4}{8} (1+L)^2. \quad (4.74c)$$

Das SH-Modell ist ein Relaxationsmodell und besitzt ein Potential (siehe Abschnitt 4.1.4). Die Amplitudengleichungen lassen sich ebenfalls als Zeitentwicklung eines Funktionals schreiben:

$$\partial_t A_i = - \frac{\delta \mathcal{F}_3}{\delta A_i^*}, \quad (4.75)$$

wobei das dazugehörige Potential folgende Form hat:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3 = \frac{1}{2} \int dx \int dy \Bigg[& \sum_{i=1,2,3} \frac{3}{2} |A_i|^4 - \eta_a |A_1|^2 - \eta_b (|A_2|^2 + |A_3|^2) \\ & - 2b (A_1 A_2 A_3 + A_1^* A_2^* A_3^*) + 6 (|A_1|^2 (|A_2|^2 + |A_3|^2) + |A_2|^2 |A_3|^2) \Bigg]. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Für die reine Hexagonlösung mit $q = q_0$ und $L = 0$ sind alle drei Amplituden gleich groß $A_i = F$, wie in Gleichung (4.42) gezeigt, und das Potential vereinfacht sich zu:

$$\mathcal{F}_H = \frac{1}{2} \int dx \int dy \left[\epsilon F^2 - \frac{15}{2} F^4 + \frac{4}{3} b F^3 \right]. \quad (4.77)$$

Für $\eta_a \neq \eta_b$ haben die Amplitudengleichungen (4.73) weiterhin Lösungen mit konstanten Amplituden, die für $A_1 \ll A_2, A_3$ zu Rechteckstrukturen und für $A_1 > A_2, A_3$ zu deformierten Hexagonstrukturen führen (vgl. Abb 4.14).

4.3.4 Ergebnisse

Die Bifurkation der Hexagone ist, wie in Abb. 4.3 deutlich zu sehen, subkritisch. Daher hat die Struktur bereits am Einsatzzpunkt $\epsilon_c = 0$ eine definierte Amplitude $F = 2b^2/15$. Das dazugehörige Potential (4.77) ist dort negativ und daher niedriger als für den konduktiven Zustand $F = 0$. Die Bifurkation der Rollenlösung ist superkritisch, allerdings nur bis $b > 28/39$ [71, 69], wovon hier allerdings immer ausgegangen wird. Daher verschwindet für die Rollenlösung das Potential am Einsatzzpunkt $\epsilon_c = 0$, und Hexagonlösungen werden in einem begrenzten Bereich um diesen herum bevorzugt. Für größere ϵ sinkt das Potential der Rollenlösung schneller als das der Hexagonlösung (siehe Abb. 4.4) und oberhalb des Schnittpunktes bei $\epsilon_{T'}$ wird die Rollenlösung bevorzugt [70].

In anisotropen System, wie z.B. in der Elektrokonvektion in planar ausgerichteten nematischen Flüssigkeiten [8, 9], werden keine Hexagonstrukturen beobachtet. Daher kann erwartet werden, daß in dem hier behandelten Modell (4.68) für starke Anisotropien α_i die Bildung von Hexagonen unterdrückt wird. Durch die Anisotropien wird das Potential der Hexagonlösung $\mathcal{F}_H$ durch das Dreimodenpotential $\mathcal{F}_3$ ersetzt. Für kleine α_i verschiebt sich der Bifurkationspunkt $\epsilon_{T'}$ zu kleineren Werten, und die Konstanten η_a und η_b sowie die Amplituden $A_1 \neq A_2 = A_3$ werden unterschiedlich.

Wenn für eine bestimmte Parameterkombination (α_1, α_2, b) das Potential $\mathcal{F}_3$ bei $\epsilon_c = 0$ verschwindet, wird $\epsilon_{T'} = 0$, und somit werden oberhalb der Schwelle sofort Rollen bevorzugt. Daher trennt die Linie, im Parameterraum (α_1, α_2, b) , für die $\mathcal{F}_3 = 0$ ist, den Bereich, in dem Hexagone bevorzugt werden von dem, in dem Rollen die favorisierte Struktur sind, zumindest in einem kleinen Bereich für ϵ .

Wird der Anisotropieterm $\alpha_2 = 0$ festgehalten, kann aus der Bedingung $\mathcal{F}_3 = 0$ der kritische Wert für α_1 in Abhängigkeit vom Nicht-Boussinesq-Parameter b berechnet werden. Die beiden Kurven $\alpha_1(b)$ sind in Abb. 4.11 dargestellt. Die grauschattierte Fläche zwischen ihnen ist der Bereich, in dem die Dreimodenlösung für kleine ϵ bevorzugt wird. Wird $b = 0.5$ festgehalten, kann auf gleiche Weise das Phasendiagramm in der $\alpha_1 - \alpha_2$ -Ebene gewonnen werden (Abb. 4.12). Außerhalb des schattierten Bereichs werden immer Einzelmodeslösungen der Amplitudengleichung (4.73) bevorzugt. In den Rechnungen zu den Abb. 4.11-4.13 wurde das Funktional $\mathcal{F}_3$ bezüglich der Wellenzahlen q und L minimiert. Diese Minima lagen allerdings

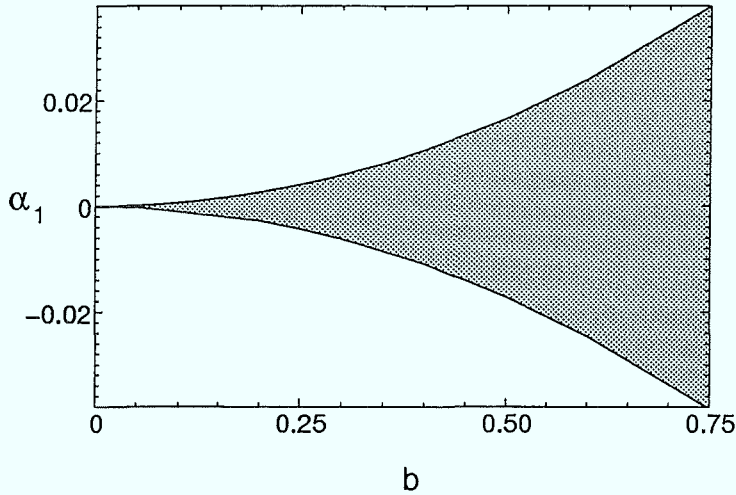


Abb. 4.11: Entlang der durchgezogenen Linie verschwindet das Potential für die Drei-Moden-Lösung (4.76) $\mathcal{F}_3$ am Einsatzpunkt bei $\epsilon_c = 0$. Für die Parameterkombinationen der Anisotropie α_1 und des Nicht-Boussinesq-Parameters b im grauschattierten Bereich existiert ein begrenzter Bereich für ϵ , in dem die Dreimodenlösung bevorzugt wird. Im ungeschattierten Bereich ist immer die Einmodenlösung dominant ($\alpha_2 = 0$).

immer sehr nahe bei $q = q_0$ und $L = 0$, also den Wellenzahlen der reinen Hexagonlösung.

Abb. 4.13 zeigt die Variation des Amplitudenverhältnisses $A_1/A_2 = A_3$ als Funktion von α_1 bei festem $b = 0.5$. Die durchgezogene Kurve gehört zu $\alpha_2 = 0$, die unterbrochene Kurve zu $\alpha_2 = -2\alpha_1$. Diese beiden Kurven geben einen Eindruck über das Verhältnis $A_1/A_2 = A_3$ in einem senkrechten Schnitt durch die Fläche in Abb. 4.11 und einen fast diagonalen Schnitt durch die Fläche in Abb. 4.12. An den äußeren Rändern der Bereiche laufen die Amplituden am deutlichsten auseinander.

In Abb. 4.14 sind einige Strukturen aus der Simulation der Modellgleichung (4.68) dargestellt. Die Dreimodenlösung der Amplitudengleichung (4.73) zeigt in a) Hexagone für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ und somit $A_1 = A_2 = A_3$, in b) deformierte Hexagone für $A_1 > A_2 = A_3$ und in c) Rechtecke für $A_1 \ll A_2 = A_3$. In allen Fällen wurden die Simulationen an der Schwelle $\epsilon = 0$

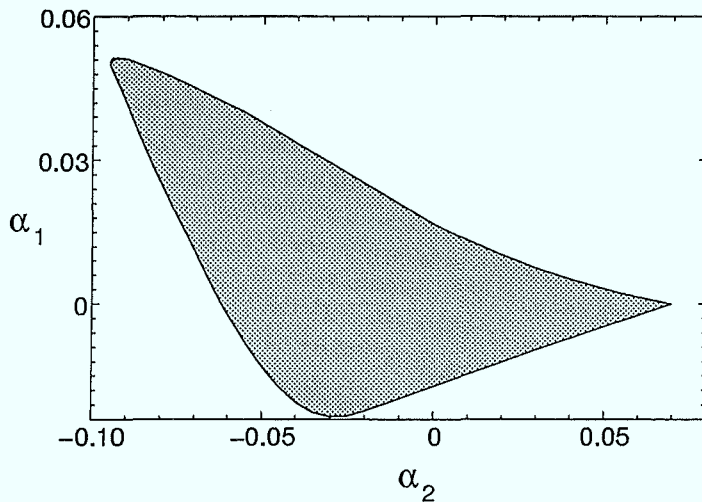


Abb. 4.12: Für die Parameterkombination (α_1, α_2) im grauschattierten Bereich existiert ein begrenzter Bereich für den Kontrollparameter, in dem das Potential das absolute Minimum bei der Dreimodenlösung hat ($b = 0.5$).

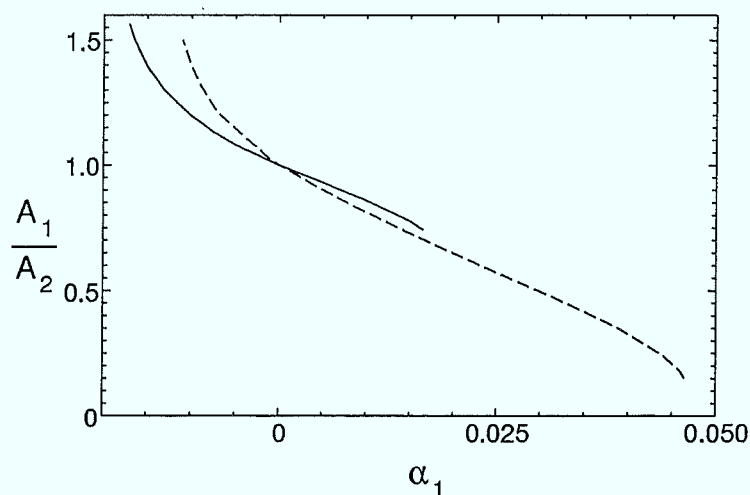


Abb. 4.13: Dargestellt ist das Verhältnis der Amplituden $A_1/A_{2,3}$. Entlang der durchgezogenen Kurve ist $\alpha_2 = 0$, entlang der gestrichelten ist $\alpha_2 = 2\alpha_1$. ($b = 0.5$)

bei $b = 0.5$ durchgeführt. Aus der Lage der Minima in der neutralen Fläche (4.69) ist zu sehen, daß bei festem $\alpha_2 = 0$ für $\alpha_1 = 0.1$ Rollen parallel zur x-Achse und für $\alpha_1 = -0.1$ Rollen parallel zur y-Achse entstehen. Für Abb. 4.14d) wurde α_1 entlang der x-Achse, also im Bild horizontal von links nach rechts, mit einer linearen Rampe von $\alpha_1 = 0.1$ vom linken Rand abfallend bis $\alpha_1 = 0.0$ in der Mitte und wieder ansteigend zum rechten Rand bis $\alpha_1 = 0.1$ variiert, bei festem $b = 0.5$ und $\epsilon = 0.1$. Dadurch werden am Rand horizontale Rollen, in der Mitte aber Hexagone bevorzugt. Und in der Tat zeigt die Simulation eine nichttransiente Koexistenz von Rollen und Hexagonen, ähnlich wie sie in Experimenten beobachtet wurden [120].

Rechteckstrukturen entstehen z.B. in thermischer Konvektion in planar ausgerichteten Flüssigkristallen [116, 121] oder unter externer räumlicher Anregung [22]. Das schwach nicht-lineare Verhalten dieser Systeme wird durch zwei gekoppelte Amplitudengleichungen,

$$\partial_t A_1 = \epsilon A_1 - c_1 |A_2|^2 A_1 + c_2 |A_1|^2 A_1, \quad (4.78a)$$

$$\partial_t A_2 = \epsilon A_2 - c_1 |A_1|^2 A_2 + c_2 |A_2|^2 A_2, \quad (4.78b)$$

beschrieben, die leicht aus (4.73) mit $\alpha_1 = \alpha_2 = b = A_3 = 0$ abgeleitet werden können. Diese Rechtecke sind allerdings nur stabil, wenn der Koeffizient des Kopplungsterms c_1 größer als der nichtlineare Koeffizient c_2 ist, $c_1 > c_2$. Wenn für ein Strukturbildungssystem mit zwei wechselwirkenden Moden die Amplitudengleichung berechnet wird, passiert es häufig, daß $c_1 > c_2$ wird. In diesem Fall ist dann die Zweimodenlösung instabil und nur eine Mode wird überleben [111, 2]. In Abb. 4.14 b) ist das Ergebnis der Simulation zu den Parametern $b = 0.5$, $\alpha_1 = 0.05$ und $\alpha_2 = -0.094$ gezeigt, bei dem es sich offensichtlich um ein Rechteckmuster handelt, wie es aus typischer Überlagerung von zwei Rollenlösungen erwartet wird. Allerdings ist es das Resultat einer Dreimodenlösung mit zwei stark ausgeprägten Amplituden $A_2 = A_3$ und einer stark gedämpften A_1 . Zusätzlich ist in diesem Beispiel $c_1 = 6 > 3 = c_2$. Obwohl die Stabilitätsbedingung $c_1 < c_2$ nicht erfüllt ist, werden Rechtecklösungen durch schwaches

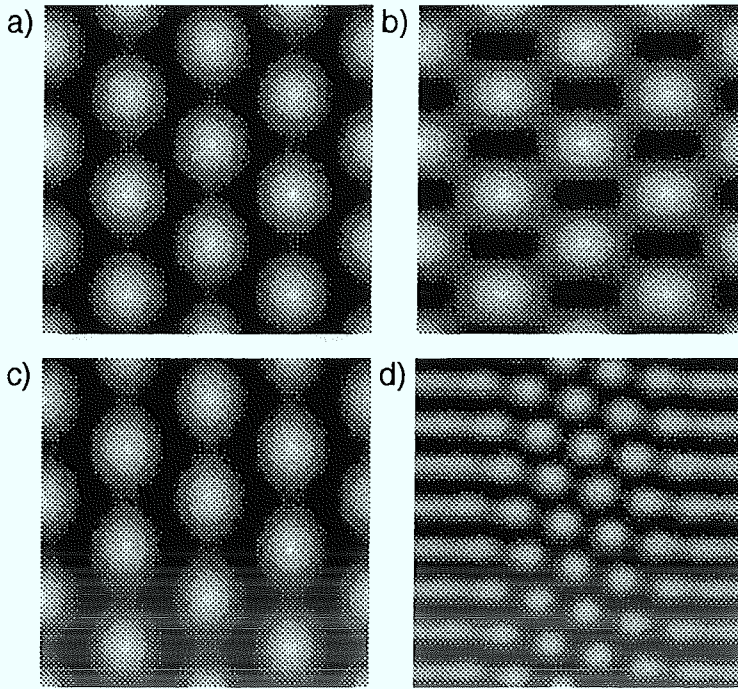


Abb. 4.14: Darstellung der räumlichen Strukturen der Dreimodenlösung. Bei festem $b = 0.5$ und $\epsilon = 0$ sind in a) bei $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ Hexagone, in b) bei $\alpha_1 = 0.05$ und $\alpha_2 = -0.094$ Rechtecke und in c) bei $\alpha_1 = -0.022$ und $\alpha_2 = 0.02$ deformierte Hexagone zu sehen. In d) wurde bei $\epsilon = 0.1$ und $\alpha_2 = 0$ der Anisotropieterm α_1 entlang der horizontalen Achse durch eine lineare Rampe mit Minimum in der Zellenmitte variiert. Dadurch entsteht eine Koexistenz von Rollen und Hexagonen.

Anregen einer dritten Mode A_1 favorisiert. In diesem Fall dient die Mode A_1 der Kopplung der beiden starken Moden A_2 und A_3 .

Noch ein Wort zu den Rechteckstrukturen in der Rayleigh-Bénard-Konvektion mit einem räumlich variierenden Kontrollparameter aus dem vorigen Abschnitt. Diese wurden auch durch zwei gekoppelte Amplitudengleichungen (4.62) beschrieben, die ebenfalls nicht das Stabilitätskriterium $c_1 < c_2$ erfüllen. Hier liegt allerdings eine lineare Kopplung vor, die aus der externen Modulation kommt, GA_i^* . Ohne Modulation, d.h. $G = 0$, zerfallen die Rechtecklösungen sofort zu Rollen.

Es ist eine interessante Frage, ob die experimentell zu beobachtenden Rechtecklösungen immer zu einer Zweimodenlösung gehören, oder zu einer Dreimodenlösung mit einer schwach ausgeprägten dritten Mode, wofür allerdings eine gebrochene Up-Down-Symmetrie nötig ist. Obwohl sich die Strukturen sehr ähnlich sehen (vgl. Abb. 4.14 b) mit Abb. 4.10 a)), sind die Mechanismen für ihre Entstehung sehr unterschiedlich. Dieser hier vorgestellte alternative Zugang zu Rechteckstrukturen mag für Systeme relevant sein, in denen Rechtecke experimentell beobachtet werden, Ab-Initio Rechnungen für das System aber instabile Rechtecke vorhersagen.

Kapitel 5

Spiralturbulenz

Es war eine allgemein akzeptierte und durch Experimente und theoretische Rechnungen gestützte Aussage, daß in einem weiten Bereich oberhalb des Einsatzpunkts der thermischen Konvektion parallele Konvektionsrollen die bevorzugte stabile Konvektionsstruktur ist. In jüngsten Experimenten, in denen die horizontale Ausdehnung wesentlich größer als die vertikale Ausdehnung ist, also Experimente mit großem Aspektverhältnis, wurde für Flüssigkeiten oder Gasen unter Hochdruck mit kleinen Prandtl-Zahlen mit der Spiralturbulenz eine zweite Konvektionsform gefunden, und zwar in Parameterbereichen, in denen gerade Konvektionsrollen stabil sind. In dem entsprechenden Parameterbereich liegt eine Koexistenz von geraden Rollen und der raumzeitlich komplexen Spiralturbulenz vor. Die Spiralturbulenz ist auch eine Lösung der Bewegungsgleichungen für thermische Konvektion, wie durch ausgiebige Simulationen gezeigt wurde. Wichtig für die Spiralturbulenz ist der konvektive Ableitungsterm in der Navier-Stokes Gleichung, dessen Wirkung bei großen Prandtl-Zahlen unterdrückt, für kleine Prandtl-Zahlen aber für eine Krümmung der Konvektionsrollen sorgt, und durch ein ausge dehntes Wirbelfeld, dem sogenannten Mean-Flow, die raumzeitlich komplexe Spiralturbulenz anfacht.

Im ersten Abschnitt wird eine kurze Übersicht der Experimente und theoretischen Arbeiten zur Spiralturbulenz gegeben. Im zweiten Abschnitt wird das Swift-Hohenberg Modell mit angekoppeltem Mean-Flow vorgestellt, das in der Lage ist, die Spiralturbulenz zu reproduzieren. Die lineare Stabilitätsanalyse dieses Modells ist Inhalt des folgenden Abschnitts, in dem der vollständige „Busse-Ballon“ für das Modell angegeben wird. Die Reproduktion der Spiralturbulenz durch das Swift-Hohenberg Modell mit angekoppeltem Mean-Flow ist allerdings nur auf mittleren Zeitskalen in Übereinstimmung mit dem Experiment, wie im vierten Abschnitt gezeigt wird. In den folgenden Abschnitten werden die Auswirkungen der Brechung der Rotations- und kontinuierlichen Translationsinvarianz durch räumlich periodische Modulation des Kontrollparameters auf die Spiralturbulenz untersucht. Es tritt dabei der umgekehrte Effekt wie in Kap. 2 auf. Dort sorgte die periodische Modulation für raumzeitliches Chaos, hier wird durch die Modulation die Spiralturbulenz eingefroren.

5.1 Übersicht

5.1.1 Experimentelle Arbeiten

Beobachtet wurde die Spiralturbulenz zuerst in CO_2 Konvektion mit großem Aspektverhältnis [122]. Konvektion in SF_6 erlaubt in der Nähe des Gas-Flüssigkeitspunktes eine Variation der Prandtl-Zahl durch die Wahl der mittleren Temperatur in der Konvektionszelle [123]. In diesem System wurde ebenfalls die Spiralturbulenz gefunden [123, 124] und für größere Prandtl-Zahlen insbesondere Targetmuster beobachtet. Da auch bei großen Prandtl-Zahlen die Spiralturbulenz entstand, wurde als Ursache der Einfluß des Mean-Flows abgeschwächt, da dieser mit $1/P$ skaliert [125]. Daher wurden Nicht-Boussinesq Effekten eine große Rolle zugeschrieben.

Die Spiralturbulenz erlangte allgemeines Interesse, da es als System für raumzeitliches Chaos sowohl gut experimentell als auch theoretisch zugänglich ist [126]. Durch zeitliches Mitteln der Strukturen in diesem System wurden geordnete räumliche und zeitliche Mittelwerte gefunden und eine Korrelation zwischen den Fluktuationen in der Struktur und im Wärmestrom [127]. Der kritische Wert des Kontrollparameters ϵ für den Einsatz der Spiralturbulenz sinkt mit zunehmendem Aspektverhältnis Γ [128].

Die Bewegung eines Targetmusters und der Übergang in eine Rollenstruktur wurde in Ref. [129] untersucht, wo durch zusätzliche Heizung der Ränder in zirkularer Geometrie Targets entstehen, da durch das Heizen der Drang der Konvektionsrollen parallel zum Rand zu liegen dem natürlichen, d.h. senkrecht auf den Rändern, überwiegt. Für große Kontrollparameter wurde hier bereits ein Übergang in das Spiralchaos beobachtet. Ausführlich wurde auch die Phasendynamik der Targetmuster in Ref. [130, 131] untersucht.

Neben den System mit großem Aspektverhältnis, in dem es durch den angeworfenen Mean-Flow kein Potential mehr gibt, in dem sonst das System in einen Zustand minimaler Energie relaxiert, vernichtet die Corioliskraft in einer rotierenden Konvektionszelle ebenfalls dieses Potential und es kommt zu einem chaotisch dynamischen Verhalten [132]. Die dabei neu auftretende Instabilität ist die Küppers-Lortz Instabilität. Sie diente vor dem Auftreten der Spiralturbulenz als geeignetes System zur Analyse des Übergangs einer kohärenten Struktur in einen chaotischen Zustand. Da sich in der Natur die Konvektionsvorgänge unter Einfluß der erdeigenen Corioliskraft abspielen, wurde dieses System schon früh theoretisch untersucht [133] und die Stabilitätsbereiche berechnet [134].

5.1.2 Theoretische Arbeiten

Anfang der sechziger Jahre wurden erste Rechnungen zur Stabilität der in der Rayleigh-Bénard Konvektion auftretenden Strukturen ausgeführt. Das daraus resultierende Stabilitätsdiagramm wurde wegen der von ihm angestellten Analysen Busse-Ballon genannt. Neben der Stabilität der zweidimensionalen Rollenlösung [135] wurde auch der Übergang von Rollen zu

Hexagonen beschrieben [71]. Alle möglichen Instabilitäten wurden zuerst für kleine Prandtl-Zahlen berechnet [136], dann durch Parametrisierung der Prandtl-Zahl der dreidimensionale Busse-Ballon vorgestellt [133]. Die bei kleinen Prandtlzahlen am ehesten auftauchende Instabilität ist die Skewed-Varicose Instabilität. Diese erhält zwar die Rollenstruktur, ändert aber die Wellenzahl und krümmt die Rollen.

Im Rahmen der Amplitudengleichung wurde ein vertikales Wirbelfeld erstmals in Ref. [125] eingeführt, nachdem sie zuerst das Verhalten von Defekten untersucht hatten [137]. Mit diesem konnte für kleine Prandtl-Zahlen und freie Randbedingungen die Skewed-Varicose Instabilität nachgewiesen werden. Im Grenzfall großer Prandtlzahlen gibt es keine vertikalen Wirbel, der dazu nötige Term $(\mathbf{v} \nabla \mathbf{v})$ fällt aus den Bewegungsgleichungen heraus. Daher gibt es die Spiralturbulenz nur in Konvektion mit kleinen Prandtlzahlen.

Eine weitere Ableitung der Bewegungsgleichungen des Mean-Flow findet sich in Ref. [138], der auch eine qualitative Diskussion für feste Randbedingungen durchführt.

In einem kleinen System wurde schon vorher die durch den Mean-Flow angeworfene Dynamik bis hin zum Chaos untersucht, wobei für den Mean-Flow künstliche Randbedingungen konstruiert wurden [139, 140].

Die Lösung der vollen dreidimensionalen Navier-Stokes Gleichung mit Nachweis der Spiralturbulenz gelang Decker, Pesch und Weber [141, 142].

5.1.3 Simulation durch das Swift-Hohenberg Modell

Im SH-Modell wurde schon vor der Entdeckung der Spiralturbulenz der Mean-Flow berücksichtigt. In einer umfangreichen Arbeit wurden die Ansätze aus den Amplitudengleichungen [125, 138] in das SH-Modell umgesetzt und der Busse-Ballon für verschiedene Modelle des Mean-Flow berechnet [107]. Am Einsatzpunkt der Konvektion für kleine Prandtl-Zahlen (z.B. $\sigma = 0.7$) wurde chaotisches Verhalten gefunden [143]. In all diesen Modellen hat der Mean-Flow keine eigene Dynamik.

Zuerst wurde die Spiralturbulenz im SH-Modell von Xi und Gunton gefunden [144, 145]. In ihrem Modell hatten sie noch einen quadratischen Term für nicht Boussinesq Effekte, der aber für die Entstehung der Spiralturbulenz nicht nötig ist, wie Bestehorn et al. zeigten [146] und nachdrücklich betonten [147].

In Ref. [144, 145] entstehen Spiralen beim Übergang von Hexagonen zu Rollen in zirkularer Geometrie mit einem „forced field“ zur Erzeugung geeigneter Randbedingungen. Ziel ist es, die spontane Entstehung einer Spirale zu beobachten. Ohne den Hexagon-Parameter, d.h. den quadratischen Term im SH-Modell, zerfallen die Spiralen in Targets.

Mit einer weiteren Arbeit wurde versucht, dem Mechanismus der Spiralturbulenz auf die Spur zu kommen [148].

Die Dynamik der Labyrinthmuster, Bewegung der Defekte und Versetzungen in den Rollenstrukturen wurden simuliert und mit der Cross-Newell Phasengleichung beschrieben [149].

Im SH-Modell ist der Übergang von Spiralen zu Targets vom Kopplungsparameter g_m des Mean-Flow abhängig ($g_m \leq 10$ Targets, sonst Spiralen) [150].

Cross versucht die Spiralturbulenz über Wellenvektorfrustration zu erklären [150]. Dazu integriert er die Phasengleichung auf.

Er untersuchte weiterhin das Coarsening, d.h. die Vergrößerung in der zeitlichen Entwicklung der Spiralturbulenz. Er verwendet nur große Systeme (1024 Fouriermoden, $n = 2048$), und rechnet diese mit einem Zeitschritt $dt = 0.2$ sehr schnell auf einer Cray C90 (1 sek pro Iteration). Durch doppeltlogarithmische Auftragung der Breite der Strukturfunktion gegen die Zeit erhält er die kritischen Exponenten [151]. Im Gegensatz zu dieser Arbeit wird der Mean-Flow adiabatisch angepaßt, was die schnellere Rechenzeit erklärt [152]. In neusten Experimenten der Übergang von Spiralen zu Hexagonen experimentell untersucht und mit dem Swift-Hohenberg Modell reproduziert [153].

5.2 Modell

5.2.1 Beschreibung

Die Auswirkungen einer räumlich periodischen Modulation des Kontrollparameters auf die Spiralturbulenz wird mit zweidimensionalen Swift-Hohenberg-Modell mit angekoppeltem Wirbelfeld (Mean Flow) [144, 145, 146] und moduliertem Kontrollparameter untersucht:

$$\partial_t u + \mathbf{v} \nabla u = \left[\epsilon - (q_0^2 + \Delta)^2 + M(\mathbf{x}) \right] u - u^3 \quad (5.1a)$$

$$\begin{aligned} [\partial_t - P(\Delta - c^2)] \Delta \zeta &= g_m [\nabla(\Delta u) \times \nabla u] \hat{z} \\ &= g_m [(\partial_x \Delta u)(\partial_y u) - (\partial_y \Delta u)(\partial_x u)], \end{aligned} \quad (5.1b)$$

Das Wirbelfeld ζ mit vertikaler Achse koppelt über die Wirbelgeschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial_y \zeta \\ -\partial_x \zeta \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

an das Feld u , das der Temperatur in der Zellenmitte eines Konvektionsexperiments entspricht. Die Konstante g_m legt die Stärke der Koppelung fest, P ist die Prandtl-Zahl der Flüssigkeit. Wenn die Bewegungsgleichung für den Mean-Flow durch die Prandtl-Zahl dividiert wird, ist sofort sichtbar, daß sich für große Prandtlzahlen die Dynamik des Mean-Flows verlangsamt und die Ankopplung schwächer wird. Dies ist konform mit den experimentellen Beobachtungen, daß die Spiralturbulenz nur bei kleinen Prandtlzahlen auftritt und wurde schon bei der Herleitung der Mean-Flow-Gleichung explizit betont [125].

Mit der unbekannten Konstante c können die Randbedingungen für das Fluid an den Platten festgelegt werden. Der Term $c^2 \Delta \zeta$ wirkt wie ein Dämpfungsterm in der Bewegungsgleichung für das Wirbelfeld. Für $c = 0$ tritt keine Dämpfung von Wirbeln in der $x - y$ Ebene

auf, d.h. diese haften oder reiben nicht an den Begrenzungsplatten, was freien Randbedingungen entspricht. Mit zunehmenden c werden die realen festen Randbedingungen simuliert, d.h. die Wirbel werden in ihrer Bewegung von den Platten gebremst. Diese Größe sollte den Experimenten angepaßt werden, da sie umgekehrt proportional zur Kohärenzlänge der Wirbeldynamik ist, $\xi \propto 1/c$. In dieser Arbeit wird in Anlehnung an Experimente wie in vorherigen Simulationen [148] $c^2 = 2$ für feste Randbedingungen gewählt.

Die Modulation des Kontrollparameters erfolgt in Richtung der x -Achse mit der Amplitude G und der Wellenzahl k :

$$M(\mathbf{x}) = 2G \cos(kx). \quad (5.3)$$

Für das Modell (5.1) existiert kein Potential. Als globale Meßgröße wird der dimensionslose konvektive Wärmestrom betrachtet (siehe Anhang C).

5.2.2 Simulation der Bewegungsgleichungen

Im Gegensatz zum vorherigen Kapitel müssen nun zwei Differentialgleichungen simultan gelöst werden. Die linearen und nichtlinearen Terme der Bewegungsgleichungen (5.1) können in $\mathcal{L}$ und $\vec{N}$ zusammengefaßt werden:

$$\partial_t u = \mathcal{L}_u u + N_u(u, \zeta), \quad (5.4a)$$

$$\partial_t \zeta = \mathcal{L}_\zeta \zeta + N_\zeta(u). \quad (5.4b)$$

Eine Kopplung der Gleichungen findet nur im nichtlinearen Term statt. Im Fourierraum gehen dann die linearen Operatoren in Faktoren über:

$$\partial_t \tilde{u} = \sigma_u \tilde{u} + \tilde{N}_u(u, \zeta), \quad (5.5a)$$

$$\partial_t \tilde{\zeta} = \sigma_\zeta \tilde{\zeta} + \tilde{N}_\zeta(u). \quad (5.5b)$$

Mit den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\zeta} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{N} = \begin{pmatrix} \tilde{N}_u \\ \tilde{N}_\zeta \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

schreibt sich die Bewegungsgleichung symbolisch:

$$\partial_t \vec{a} = \mathcal{S} \vec{a} + \vec{N} \quad \text{mit} \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} \sigma_u & 0 \\ 0 & \sigma_\zeta \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Da die Matrix $\mathcal{S}$ wegen der Entkopplung der linearen Operatoren diagonal ist, läßt sie sich einfach invertieren und insbesondere kann über den Ansatz

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} e^{-\sigma_u t} & 0 \\ 0 & e^{-\sigma_\zeta t} \end{pmatrix} \vec{a} \quad (5.8)$$

die Bewegungsgleichung vereinfacht werden:

$$\partial_t \hat{a} = \begin{pmatrix} e^{-\sigma_u t} & 0 \\ 0 & e^{-\sigma_\zeta t} \end{pmatrix} \vec{N} \quad (5.9)$$

In dieser Form läßt sich der in Anhang A beschriebene Adam-Bashford Algorithmus auf die beiden einzelnen Gleichungen anwenden. Der Nichtlineare Term hängt dann von beiden Feldern u und ζ ab. Er wird im Ortsraum berechnet und fouriertransformiert. Die Zeitintegration ist für die linearen Operatoren im Fourierraum exakt und für die nichtlinearen Terme wird ein expliziter Euler-Schritt zweiter Ordnung verwendet. Ohne die Entkopplung der linearen Operatoren müßte die Bewegungsgleichung über ein implizites Verfahren mit Invertierung der Matrix S erfolgen. Die Nusselt-Zahl Nu und der dimensionslose konvektive Wärmestrom j können analog zur Rayleigh-Bénard Konvektion berechnet werden (Anhang C)

5.3 Lineare Stabilitätsanalyse

5.3.1 Theorie der linearen Stabilitätsanalyse

In der Bewegungsgleichung für das Mean-Flow Feld ζ (5.1b) koppelt das u Feld nur über partielle Ableitungen in y an. Daher kann der Mean-Flow nicht an Strukturen angreifen, die in y -Richtung konstant sind. Die einfachste Struktur, die dies erfüllt, sind Rollen parallel zur y -Achse. In diesem Abschnitt wird die Stabilität dieser Rollen untersucht.

5.3.1.1 Berechnung des Grundzustands

Zuerst muß der Grundzustand u_0 berechnet werden, wobei der Mean-Flow nicht angeworfen wird, $\zeta_0 = 0$. Dieser ist in x periodisch und wird mit Kosinusfunktionen angesetzt. Da der nichtlineare Term wegen

$$\cos^3(qx) = 3 \cos(qx) + \cos(3qx) \quad (5.10)$$

im ungeraden Kosinusraum bleibt, genügt ein Ansatz mit ungeraden Funktionen:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^N a_n \cos((2n-1)qx). \quad (5.11)$$

Dieser muß die stationäre Bewegungsgleichung

$$0 = \epsilon u_0 + (q_0^2 + \partial_x^2)^2 u_0 - u_0^3 + M(x)u_0 \quad (5.12)$$

erfüllen. Über den Modulationsterm wird die Wellenzahl der Grundlösung eingestellt,

$$k = 2q. \quad (5.13)$$

Als Startwert wird die analytische Einmodenlösung

$$a(1) = \sqrt{\epsilon - (q_0^2 - q^2)^2 + g} \quad (5.14)$$

verwendet, und die übrigen Koeffizienten numerisch bestimmt. Diese stimmen hervorragend mit den Werten der Amplituden aus den Simulationen der vollen Bewegungsgleichungen (5.1)

überein. Es wurden einfache Rollenlösungen mit und ohne Modulation berechnet. Die Realteile der Amplituden des u-Feldes im Fourierraum entsprechen dabei den Koeffizienten der Kosinusfunktionen des Grundzustands und stimmten bis auf neun Stellen hinter dem Komma überein.

5.3.1.2 Lineare Stabilität des Grundzustands

Diese Grundlösung u_0 wird nun auf Stabilität gegen kleine Störungen $v, z \ll u_0$ untersucht, die zur Grundlösung addiert werden:

$$u = u_0 + v, \quad (5.15a)$$

$$\zeta = z. \quad (5.15b)$$

Dieser Ansatz wird in die Bewegungsgleichungen (5.1) eingesetzt und in v und z linearisiert:

$$\partial_t v = -\partial_y z \partial_x u_0 + \epsilon v - (q_0^2 + \Delta)^2 v + M(\mathbf{x})v - 3u_0^2 v, \quad (5.16a)$$

$$\partial_t \Delta z = P(\Delta - c^2) \Delta z + g_m (\partial_x^3 u_0 \partial_y v - \partial_x u_0 \Delta \partial_y v). \quad (5.16b)$$

Die linearen Gleichungen haben periodische Koeffizienten in q , da sowohl der Grundzustand als auch die Modulation durch die Festlegung der Wellenzahl (5.13) in q periodisch sind. Deswegen können die Störungen v und z mit den Wellenzahl K in x und L in y nach Floquet entwickelt, sowie mit einem Wachstumsparameter σ versehen werden:

$$v(x, y, t) = e^{\sigma t + i(Kx + Ly)} \sum_{n=-N}^N v_n e^{inqx} + cc, \quad (5.17a)$$

$$z(x, y, t) = e^{\sigma t + i(Kx + Ly)} \sum_{n=-N}^N z_n e^{inqx} + cc. \quad (5.17b)$$

Die Störungen müssen reell bleiben. Mit $v_{-n} = v_n^*$ und $z_{-n} = z_n^*$ stehen in der Summe nur reelle Kosinusfunktionen. Die Addition der komplex konjugierten Terme zu der ersten Exponentialfunktion ist formal nötig. Bei der Projektion auf die einzelnen Moden entstehen aber für $e^{\pm i(Kx + Ly)}$ zwei Lösungsräume mit identischen Eigenwerten. Der zweite Eigenraum gehört zu den Störungen mit negativen Wellenzahlen. Für die Stabilitätsrechnungen reicht es daher aus, sich auf einen der beiden Lösungsräume zu beschränken. Diese Beschränkung ist allerdings nur zulässig, wenn der Wachstumsparameter σ reell bleibt, es also zu keinen driftenden Lösungen oder einer Hopf-Bifurkation kommt, was bei dieser linearen Stabilitätsanalyse allerdings

vorausgesetzt wird. Die Koeffizienten der Störungen werden in einem Vektor gesammelt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} v_{-n} \\ \vdots \\ v_n \\ z_{-n} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Die linearisierten Bewegungsgleichungen (5.16) werden auf einzelnen Moden $e^{-i(Kx+Ly+n_0qx)}$ projiziert. Daraus ergibt sich ein $4N + 2$ dimensionales Eigenwertproblem:

$$\mathcal{A}\vec{x} = \sigma\vec{x}. \quad (5.19)$$

Je nach Vorzeichen von σ klingen dann die Störungen ab ($\sigma < 0$) oder wachsen an ($\sigma > 0$), was Stabilität bzw. Instabilität der Grundlösung bedeutet. Für $Re(\sigma) = 0$ können die neutralen Kurven $\epsilon_0(q)$ bestimmt werden.

5.3.1.3 Art der Instabilitäten

Es werden in Abhängigkeit von den Wellenzahlen K und L verschiedene Instabilitäten untersucht:

$K < (q - q_0)$	$L = 0$	Eckhaus-Instabilität
$K = 0$	$L \ll q_0$	Zig-Zag-Instabilität
$K = 0$	$L \sim q_0$	Cross-Roll-Instabilität
$K \ll q_0$	$L \ll q_0$	Skewed-Varicose-Instabilität

Abb. 5.1 zeigt die einzelnen Instabilitäten am Einsatzzpunkt. Zur Berechnung wurde ein Rauschen auf die Startrollenlösung addiert. In a) ist die zu untersuchende Rollenlösung dargestellt. Die Eckhaus-Instabilität bewirkt ein einfaches Einschieben oder Eliminieren einer oder mehrerer Rollen und ist nicht dargestellt. Die Skewed-Varicose-Instabilität b) bewirkt eine unterschiedliche Krümmung der einzelnen Rollen („gekrümmte Krampfadern“). Die Zig-Zag-Instabilität knickt die Rollen gleichmäßig.

In der $q - \epsilon$ -Ebene wird auf einem Gitter der Grundzustand und die dazugehörigen Wachstumsparameter der verschiedenen Instabilitäten berechnet. Die Vorzeichenwechsel werden durch Interpolation bestimmt und durch die Verbindung von diesen entstehen die Stabilitätskurven. Der Wachstumsparameter ist der Eigenwert mit größtem Realteil aus dem Eigenwertproblem 5.19. Er ist von den Wellenzahlen K und L abhängig. Da die Wellenzahl anwachsen wird, welche die größte Wachstumsrate besitzt wird diese bezüglich den Wellenzahlen maximiert. Bei der Skewed-Varicose-Instabilität ist dazu eine zweidimensionale, sonst eine eindimensionale Extremumbestimmung notwendig. Zum Teil überlagern sich einzelne

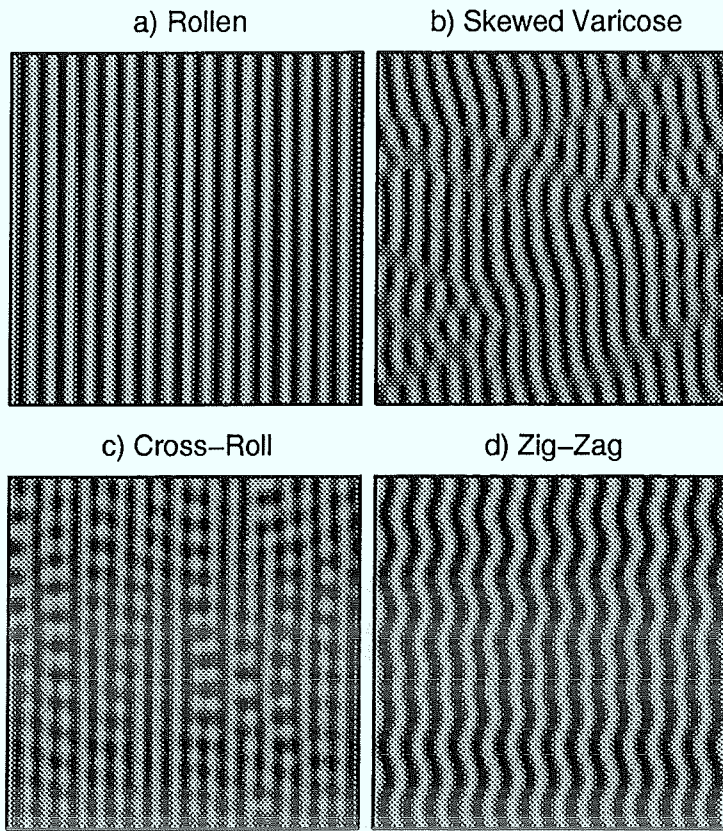


Abb. 5.1: Bilder der einzelnen Instabilitäten: a) die Rollenlösung in der Form, wie sie auf Stabilität untersucht wird. b) Skewed-Varicose-Instabilität nach $t = 850$ bei $q_r = 1.0588$, $\epsilon = 0.05$ und $g_m = 50$. c) Cross-Roll-Instabilität nach $t = 37$ bei $q_r = 1.118$, $\epsilon = 0.6$ und $g_m = 50$. d) Zig-Zag-Instabilität nach $t = 850$ bei $q_r = 0.9441$, $\epsilon = 0.8$ und $g_m = 0$.

Instabilitäten, so daß das Verhalten des zweiten Eigenwerts mit berücksichtigt werden muß [107]. Durch geschickte Eingrenzung der Suchgebiete konnten die Stabilitätskurven jedoch sauber berechnet werden. Nur bei der Cross-Roll-Instabilität wurde zum Teil $K = q_0$ gesetzt, ansonsten immer bezüglich der Wellenzahlen maximiert.

5.3.2 Stabilität periodischer Lösungen im SH-Modell

Als erster Test des Verfahrens kann die Stabilität des einfachen, unmodulierten SH-Modells ohne Mean-Flow berechnet und mit bekannten Ergebnissen verglichen werden ([96]). Es zeigt sich, daß ein Ansatz von $N = 3$ Moden für die numerische Konvergenz ausreichend ist. Die Kurven sind in Abb. 5.2 dargestellt. Es tritt keine Skewed-Varicose-Instabilität auf. Der Stabilitätsbereich wird durch die Zig-Zag-Instabilität für $q < q_0$ und durch die Eckhaus-Instabilität für $q > q_0$ begrenzt. Die Zig-Zag-Instabilität sollte bei kleinen Wellenzahlen L auftreten. In der Tat liegt das Maximum der Kurve $Re[\sigma_{max}](L)$ im Bereich des Vorzeichenwechsels bei $q \sim q_0$ in der Nähe von Null. Für kleiner werdende q verschiebt sich das Maximum jedoch zu größeren Wellenzahlen. Dies hat eine Kollision mit dem Maximum der Cross-Roll-Instabilität zur Folge. Diese läßt sich am zweitgrößten Eigenwert beobachten. Da eine Maximumberechnung in dem Bereich, wo die Maxima etwa gleich groß sind, äußerst aufwendig ist, wurde die

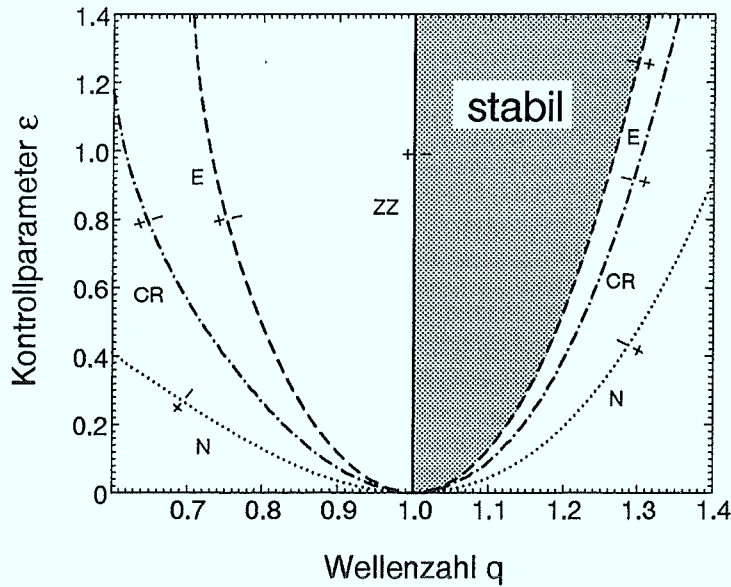


Abb. 5.2: Stabilitätsdiagramm des unmodulierten Swift-Hohenberg Modells ohne Mean-Flow. Im schraffierten Bereich ist die Rollenlösung gegen alle Störungen stabil. Die Vorzeichen kennzeichnen die Richtung des Vorzeichwechsels des Realteils des größten Eigenwerts. Eine Skewed-Varicose-Instabilität tritt nicht auf (ZZ - Zig-Zag-, E - Eckhaus-, CR - Cross-Roll-Instabilität, N - Neutrale Kurve).

Cross-Roll-Instabilität bei festen $L = q_0$ berechnet. Diese Instabilität ist für $q < q_0$ allerdings nicht beobachtbar, weil der Eigenwert der Zig-Zag-Instabilität immer größer ist. Für $q > q_0$ kann sie allerdings in der Simulation der Bewegungsgleichungen beobachtet werden, wenn mit dem Kontrollparameter aus dem stabilen Bereich direkt unter die Eckhaus-Kurve gesprungen wird.

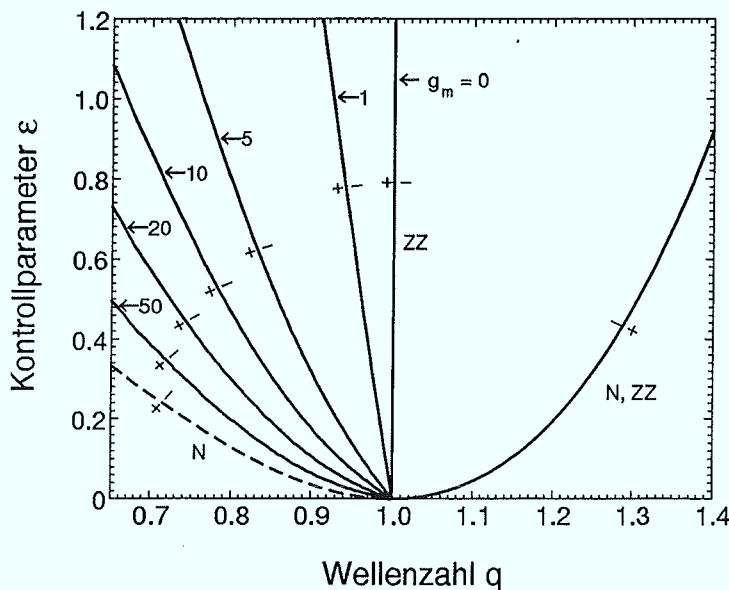


Abb. 5.3: Die linke Zig-Zag-Instabilitätsgrenze wird für ansteigende Werte der Kopplungsstärke g_m des Mean-Flows aus der Bandmitte zu kleinen Wellenzahlen verschoben (gleiche Bezeichnungen wie in Abb. 5.2).

5.3.3 Einfluß des Mean-Flow auf die Zig-Zag-Stabilität

Wie in der Einleitung zum letzten Abschnitt bereits gesagt, sind Rollenlösungen stabile Lösungen des SH-Modells mit Mean-Flow. Einen direkten Übergang zwischen ihnen und dem Spiralchaos wurde für Wellenzahlen links neben der Bandmitte erwartet. Dort sollten die Rollen auf Grund der Zig-Zag-Instabilität eine Krümmung erfahren, an die der Mean-Flow angreift. Zur Überraschung blieben die Rollenlösungen in allen Richtungen jedoch stabil.

Der Mean-Flow verschiebt also die Stabilitätsgrenze der Zig-Zag-Instabilität nach links. In Abb. 5.3 sind die Stabilitätsbereiche für verschiedene Kopplungsstärken des Mean-Flows dargestellt. Die linke Grenze wird dabei mit zunehmendem g_m immer weiter zu kleineren Wellenzahlen verschoben, bis sie fast an die neutrale Kurve herankommt. Für die weiteren Simulationen wurden wie in anderen Arbeiten [148, 150] meistens Kopplungsstärken von $g_m = 50$ verwendet, was bedeutet, daß die Zig-Zag-Instabilität nicht mehr eine direkt beobachtbare Instabilität ist.

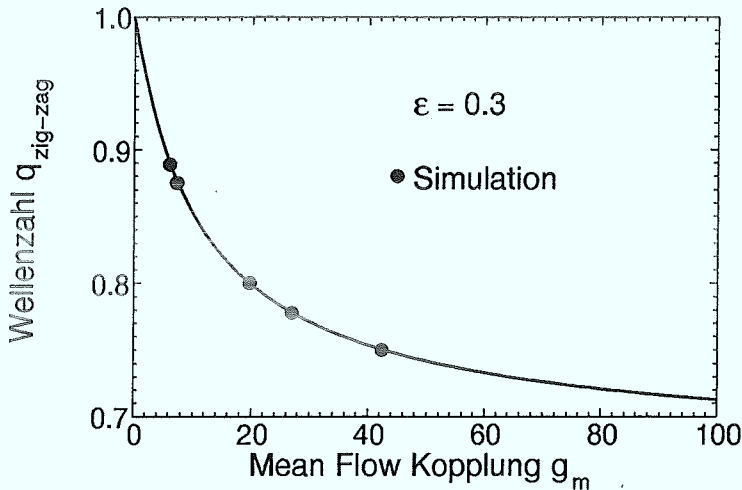


Abb. 5.4: Kleinste stabile Wellenzahl gegen die Zig-Zag-Instabilität in Abhängigkeit von der Mean-Flow Kopplung g_m . Ohne Mean-Flow liegt diese in der Bandmitte, d.h. $q_{zig-zag} = q_0 = 1$. Für stärkere Mean-Flow Kopplung wird sie nach links herausgeschoben. Die Punkte sind Ergebnisse der Simulation der Bewegungsgleichungen.

Wie sich die Stabilitätsgrenze der Zig-Zag-Instabilität bei einem festen Wert des Kontrollparameters mit immer stärker angekoppelten Mean-Flow verschiebt, ist in Abb. 5.4 dargestellt. Ohne Mean-Flow liegt die kleinste Wellenzahl, bei der Rollen stabil bleiben, in der Bandmitte bei $q_{zig-zag} = q_0 = 1$. Für zunehmende Kopplungsstärke sinkt die Wellenzahl, d.h. die Stabilitätsgrenze wird nach links geschoben (siehe auch Abb. 5.3). Diese Kurve wurde mit Simulationen der vollen Bewegungsgleichungen verglichen. Es wurde eine Rollenlösung mit Wellenzahl q_r links von der Bandmitte berechnet, und Störungen mit Wellenzahl $q_{st} = (q_r, 0..q_r/2)$ addiert. Wenn diese Abklingen, ist die Lösung stabil, wenn sie anwachsen instabil. Es genügt nicht, die kleinste Mode in y-Richtung auf dem diskreten Gitter im Fourierraum anzuregen, da die Zig-Zag-Instabilität nur in der Nähe der Stabilitätsgrenze eine langwellige Instabilität ist, weit weg von der Stabilitätsgrenze aber ihr Stabilitätsmaximum zu größeren Wellenzahlen hin verschiebt (siehe Abschnitt 5.3.1.3). Die Übereinstimmung der

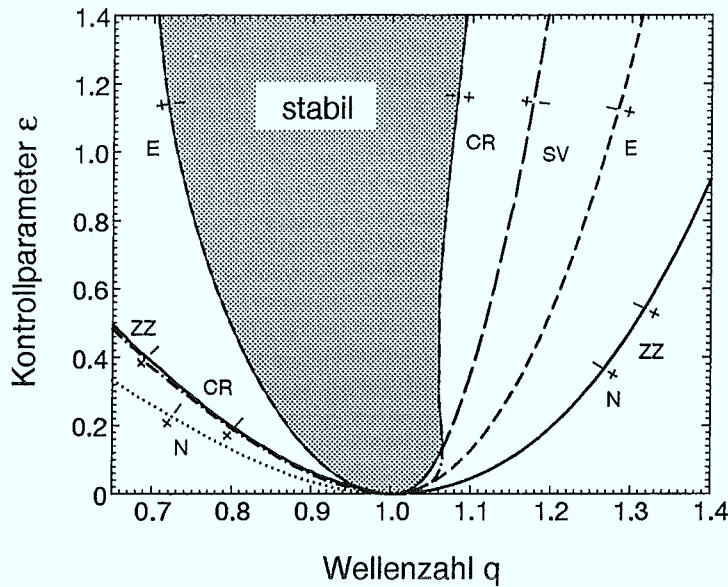


Abb. 5.5: Stabilitätsdiagramm für eine gerade Rollenlösung bei $g_m = 50$. Es tritt nun eine Skewed-Varicose-Instabilität (SV) auf. Der stabile Bereich wird nun von links durch die Eckhaus und Skewed-Varicose-Instabilität und von rechts durch die Cross-Roll-Instabilität beschränkt (gleiche Bezeichnungen wie in Abb. 5.2).

Ergebnisse zwischen linearer Stabilitätsanalyse und Simulation der Bewegungsgleichungen ist hervorragend.

5.3.4 Stabilität periodischer Lösungen mit Mean-Flow

In Abb. 5.5 ist das Stabilitätsdiagramm für $g_m = 50$ dargestellt. Auf der rechten Seite tritt nun eine Skewed-Varicose-Instabilität auf, die das stabile Gebiet für kleine Kontrollparameter ϵ und $q > q_0$ beschränkt. Links der Bandmitte tritt sie nicht auf. Für größere ϵ begrenzt die Cross-Roll-Instabilität den Stabilitätsbereich nach rechts, nach links ist nun durch die verschobene Zig-Zag- die Eckhaus-Instabilität begrenzend.

Die Zig-Zag-Instabilität ist wie zu erwarten in der Nähe der kritischen Wellenzahl die begrenzende Instabilität. Dies zeigt sich bei Vergrößerung des Ausschnitts für kleine q in Abb. 5.6.

Simulationen der vollen Bewegungsgleichungen bestätigen den Stabilitätsbereich. Dazu wurde ein numerisches Rauschen bei jedem Zeitschritt auf die Lösung addiert. Für kleine $\epsilon = 0.06, 0.08$ wurde rechts von q_0 bei $q_r = 1.0588$ eine Skewed-Varicose-Instabilität beobachtet (Abb. 5.1 b)). Für ein größeres $\epsilon = 0.6$ wurde bei $q_r = 1.118$ eine Cross-Roll-Instabilität gefunden (Abb. 5.1 c)), bei kleineren Wellenzahlen $q_r = 1.0667, 1.0625$ blieben die Rollen jedoch stabil.

Die Begrenzung durch Skewed-Varicose- und Eckhaus-Instabilität für kleine ϵ und Prandtl-Zahl $P = 0.71$ existiert in gleicher Form in der Rayleigh-Bénard Konvektion [136], auch unter Berücksichtigung des Mean-Flows [108]. Dort wurde aber die hier dominierende Cross-Roll-Instabilität nicht beobachtet, die aber im vollen Busse-Ballon enthalten ist [133]. Insgesamt ist ein quantitativer Vergleich zwischen den Stabilitätsdiagrammen des SH-Modells

mit Mean-Flow und dem der Rayleigh-Bénard Konvektion nicht anzustreben. Die lineare Stabilitätsanalyse dient im Rahmen dieser Arbeit nur zur Kontrolle der stabilen Bereiche der Rollenlösung in der Spiralturbulenz.

5.3.5 Lineare Stabilität mit Modulation

Die Modulation des Kontrollparameters (5.3) kann wie in Abschnitt 5.3.1.1 besprochen nur mit der Wellenzahl $k = 2q$ erfolgen. Wie beim Mean-Flow verschiebt sich die Zig-Zag-Instabilität mit zunehmender Modulationsstärke weiter nach links. Sie behält aber ihre Form bei, d.h. zu jeder Modulationsstärke existiert eine kritische Wellenzahl $q_{zig-zag}$, so daß für alle $q < q_{zig-zag}$ die Lösung instabil wird (daher sind die Kurven hier nicht dargestellt). Wie sich dies kritische Wellenzahl verhält, ist in Abb. 5.7 dargestellt. Wieder konnten die Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse mit denen der Simulation bestätigt werden. Das vollständige Stabilitätsdiagramm für $G = 0.1$ ist in Abb. 5.8 dargestellt. Es tritt keine Skewed-Varicose-Instabilität auf. Die begrenzenden Instabilitäten sind wie im unmodulierten Fall nach links die Zig-Zag- und nach rechts die Eckhaus-Instabilität.

5.3.6 Lineare Stabilitätsanalyse aus der vollen Numerik

Durch die Modulation oder durch geeignet präparierte Startlösungen existieren auch in dem chaotischen System stationäre Lösungen. Deren Stabilität soll in diesem Abschnitt numerisch untersucht werden. Die Felder u und ζ werden räumlich diskretisiert, und zwar auf einem quadratischen Gitter der Größe N mit periodischen Randbedingungen. Für die Stabilitätsanalyse werden die einzelnen Ortspunkte der Felder zu einem eindimensionalen Vektor zusammenge-

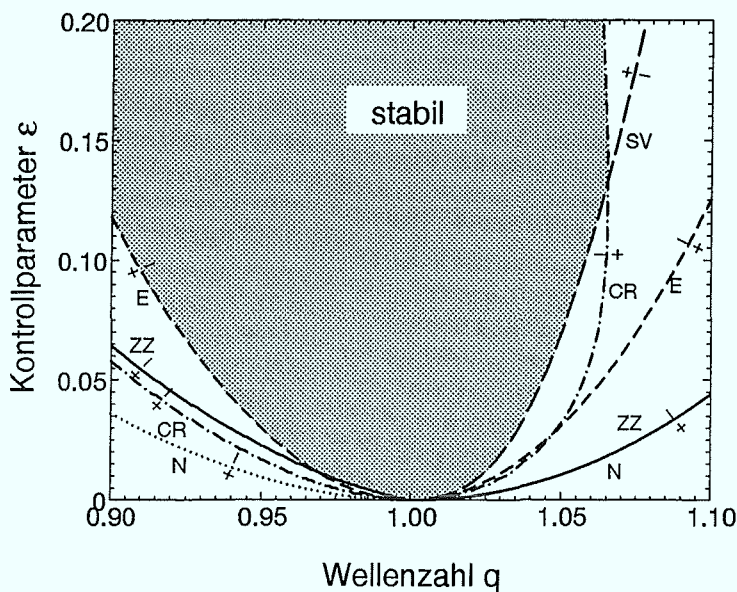


Abb. 5.6: Ausschnitt aus dem Stabilitätsdiagramm bei $g_m = 50$ für kleine Wellenzahlen aus Abb. 5.5. Nahe der Bandmitte begrenzen die Zig-Zag von links und die Skewed-Varicose-Instabilität von rechts den stabilen Bereich. Für größere ϵ sind die Eckhaus von links und die Cross-Roll von rechts die begrenzenden Instabilitäten.

faßt. Auf die stationäre Lösung,

$$\partial_t(\vec{u}_0, \vec{\zeta}_0) = 0, \quad (5.20)$$

wird ein kleiner Störterm der Form

$$(\vec{u}_1, \vec{\zeta}_1)(t) = e^{\lambda t} \vec{f}, \quad \vec{f} = \text{const} \quad (5.21)$$

addiert:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_1, \quad \vec{\zeta} = \vec{\zeta}_0 + \vec{\zeta}_1. \quad (5.22)$$

Die Modellgleichungen (5.1) können in lineare und nichtlineare Anteile aufgespalten werden:

$$\partial_t \vec{u} = \mathcal{L}_u \vec{u} + \vec{N}_u(\vec{u}, \vec{\zeta}) \quad (5.23)$$

$$\partial_t \vec{\zeta} = \mathcal{L}_\zeta \vec{\zeta} + \vec{N}_\zeta(\vec{u}) \quad (5.24)$$

Die linearen Anteile sind in den Operatoren $\mathcal{L}$ zusammengefaßt, die nichtlinearen Terme in den Vektoren $\vec{N}$. Im k-Raum werden aus den linearen Operatoren Matrizen:

$$\partial_t \tilde{u} = L_u \tilde{u} + \tilde{N}_u(\tilde{u}, \tilde{\zeta}) \quad (5.25)$$

$$\partial_t \tilde{\zeta} = L_\zeta \tilde{\zeta} + \tilde{N}_\zeta(\tilde{u}). \quad (5.26)$$

In diese Gleichungen wird nun der Ansatz (5.21) eingesetzt:

$$\partial_t \tilde{u}_1 = L_u(\tilde{u}_0 + \tilde{u}_1) + \tilde{N}_u(\tilde{u}_0 + \tilde{u}_1, \tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1) \quad (5.27)$$

$$\partial_t \tilde{\zeta}_1 = L_\zeta(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1) + \tilde{N}_\zeta(\tilde{u}_0 + \tilde{u}_1). \quad (5.28)$$

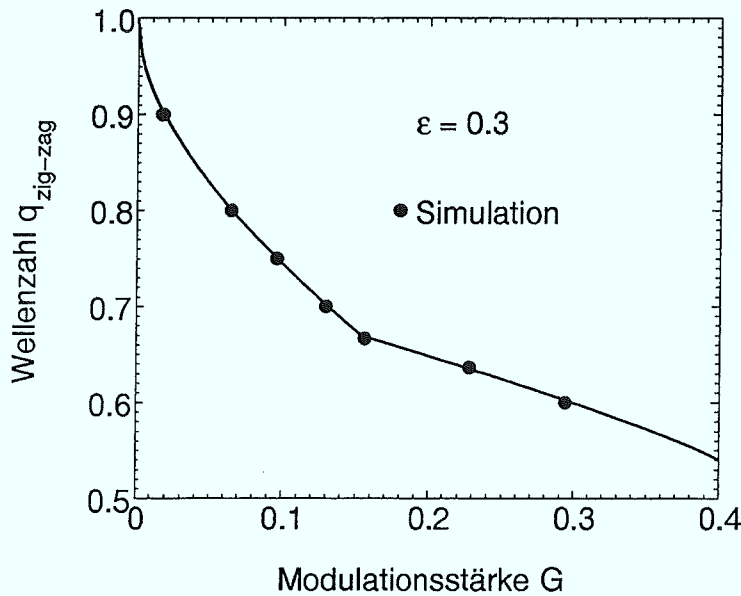


Abb. 5.7: Kleinste stabile Wellenzahl gegen die Zig-Zag-Instabilität in Abhängigkeit von der Modulationsstärke G . Ohne Modulation liegt diese in der Bandmitte, d.h. $q_{\text{zig-zag}} = q_0 = 1$. Für stärkere Modulation wird sie wie durch den Mean-Flow nach links herausgeschoben. Dabei bleibt in diesem Fall allerdings der senkrechte Anstieg der Stabilitätskurve erhalten. Die Punkte sind Ergebnisse der Simulation der Bewegungsgleichungen.

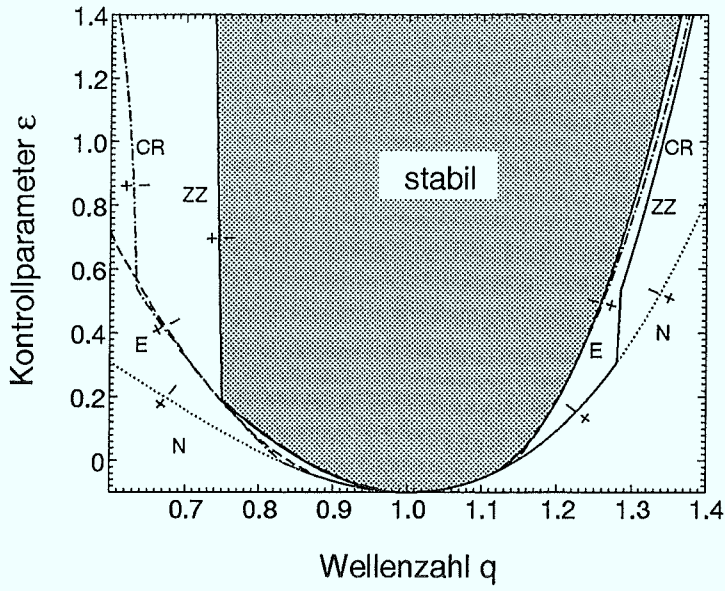


Abb. 5.8: Stabilitätsdiagramm für eine gerade Rollenlösung bei $G = 0.1$ und $k = 2q$. Es tritt keine Skewed-Varicose-Instabilität auf (gleiche Bezeichnungen wie in Abb. 5.2).

Da die Störterme $\tilde{u}_1$ und $\tilde{\zeta}_1$ klein sind, können die nichtlinearen Vektoren nach Taylor entwickelt werden:

$$\tilde{N}_u(\tilde{u}_0 + \tilde{u}_1, \tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1) = \tilde{N}_u(\tilde{u}_0, \tilde{\zeta}_0) + A\tilde{u}_1 + B\tilde{\zeta}_1 \quad (5.29)$$

$$\tilde{N}_\zeta(\tilde{u}_0 + \tilde{u}_1) = \tilde{N}_\zeta(\tilde{u}_0) + C\tilde{u}_1 \quad (5.30)$$

$$(5.31)$$

mit den Jakobimatrizen:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{N}_u^{(1)}}{\partial \tilde{u}^{(1)}} \Big|_{u_0} & \cdots & \frac{\partial \tilde{N}_u^{(1)}}{\partial \tilde{u}^{(N*N)}} \Big|_{u_0} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{N}_u^{(N*N)}}{\partial \tilde{u}^{(1)}} \Big|_{u_0} & \cdots & \frac{\partial \tilde{N}_u^{(N*N)}}{\partial \tilde{u}^{(N*N)}} \Big|_{u_0} \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{N}_u^{(1)}}{\partial \tilde{\zeta}^{(1)}} \Big|_{u_0} & \cdots & \frac{\partial \tilde{N}_u^{(1)}}{\partial \tilde{\zeta}^{(N*N)}} \Big|_{u_0} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{N}_u^{(N*N)}}{\partial \tilde{\zeta}^{(1)}} \Big|_{u_0} & \cdots & \frac{\partial \tilde{N}_u^{(N*N)}}{\partial \tilde{\zeta}^{(N*N)}} \Big|_{u_0} \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{N}_\zeta^{(1)}}{\partial \tilde{u}^{(1)}} \Big|_{u_0} & \cdots & \frac{\partial \tilde{N}_\zeta^{(1)}}{\partial \tilde{u}^{(N*N)}} \Big|_{u_0} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{N}_\zeta^{(N*N)}}{\partial \tilde{u}^{(1)}} \Big|_{u_0} & \cdots & \frac{\partial \tilde{N}_\zeta^{(N*N)}}{\partial \tilde{u}^{(N*N)}} \Big|_{u_0} \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

Die stationäre Lösung fällt somit aus dem Gleichungssystem (5.27) heraus, und es bleibt:

$$\partial_t \tilde{u}_1 = L_u \tilde{u}_1 + A\tilde{u}_1 + B\tilde{\zeta}_1 \quad (5.35)$$

$$\partial_t \tilde{\zeta}_1 = L_\zeta \tilde{\zeta}_1 + C \tilde{u}_1. \quad (5.36)$$

Das Zusammenfassen der Vektoren der Felder zu einem Vektor $\vec{x} = (\tilde{u}_1, \tilde{\zeta}_1)$ führt auf ein einfaches Eigenwertproblem:

$$\lambda \vec{x} = D \vec{x}, \quad (5.37)$$

mit der Matrix:

$$D = \left(\begin{array}{c|c} L_u + A & B \\ \hline C & L_\zeta \end{array} \right). \quad (5.38)$$

Die Eigenwerte dieser Matrix zeigen an, welche Fouriermode in den Feldern durch die Störung anwachsen oder abklingen.

Die Störungen $\vec{x}$ sind natürlich komplex, da die gesamte Berechnung im Fourier-Raum erfolgt. Rein reelle Störungen entsprechen daher Anregungen der Kosinusmoden, komplexe denen der Sinusmoden. Die Matrix D enthält im allgemeinen für beide Arten der Störung komplexe Werte, $D(\vec{x}) = D_r + iD_i$. Es können also durch eine Störung im Kosinusraum Moden im Sinusraum und umgekehrt angeregt werden. Daher werden die beiden Störungen getrennt betrachtet:

$$\lambda \vec{x}_r = (D_r^I + iD_i^I) \vec{x}_r, \quad (5.39a)$$

$$\lambda i \vec{x}_i = (D_r^{II} + iD_i^{II}) i \vec{x}_i. \quad (5.39b)$$

Wird die untere Gleichung (5.39b) durch i geteilt, können die Vektoren $\vec{x}_i$ und $\vec{x}_r$ zu einem reellen Vektor zusammengefaßt werden. Beim Aufstellen des Eigenwertproblems für diesen Vektor müssen die Einzelmatrizen wie folgt einsortiert werden:

$$\lambda \begin{pmatrix} \vec{x}_r \\ \vec{x}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_r^I & D_i^I \\ -D_i^{II} & D_r^{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_r \\ \vec{x}_i \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

Nur durch diese getrennte Analyse der Störungsmoden liefert diese lineare Stabilitätsanalyse die rotationsinvariante Stabilität der Rollenlösung des einfachen SH-Modells.

5.4 Transientes Verhalten

Die bisherigen in Ref. [145, 150] zum Modell (5.1) durchgeführten Simulationen zeigen eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit einigen Aspekten der experimentellen Untersuchungen zum Spiralchaos. Allerdings werden die in diesem Kapitel diskutierten Resultate zeigen, daß die bisherigen Simulationen auf ein transientes Zeitfenster beschränkt waren.

Cross und Tu untersuchten mit dem Swift-Hohenberg-Modell mit angekoppeltem Mean-Flow die Defektdynamik im Spiralchaos der Rayleigh-Bénard Konvektion [150]. In Abb. 2 ihrer Arbeit stellen sie Simulationsergebnisse für vier verschiedene Parametersätze vor, die hier erfolgreich für die angegebene Simulationszeit bis $t = 4000$ reproduziert werden konnten,

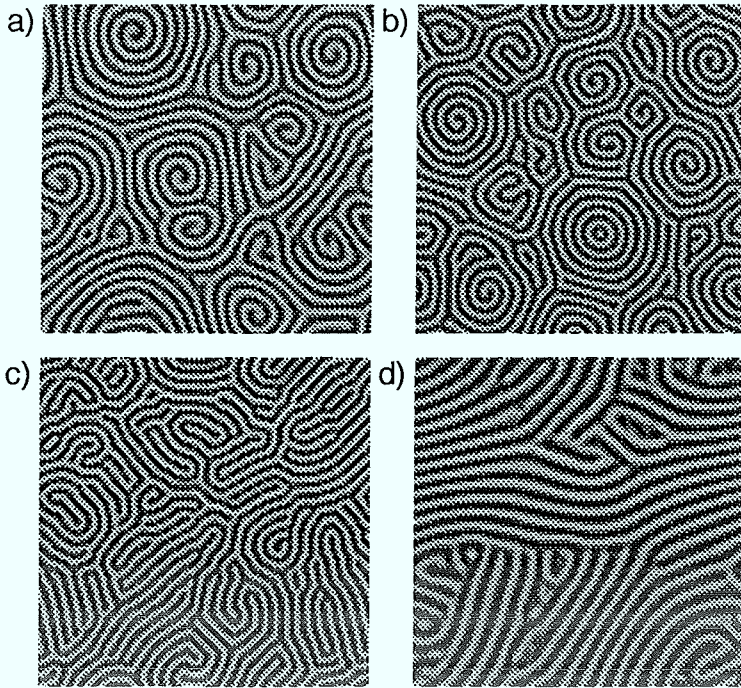


Abb. 5.9: Vergleichslauf zu Cross [150]. Die Simulation der Gleichungen (5.1) ergibt bei $\epsilon = 0.7$, $P = 1$, $c^2 = 2$ und g_m Spiralchaos. Bei geänderten Kopplungsparameter $g_m = 10$ treten in b) Zielscheibenmuster (Targets) auf, und bei noch kleineren Werten g_m entsteht in c) eine Labyrinthstruktur. In d) ist eine Struktur gezeigt, die sich unter Berücksichtigung eines modifizierten nichtlinearen Terms $-0.2u^3 + 2.4(\nabla u)^2 \nabla^2 u$ bei $g_m = 50$ ergibt. Alle Läufe wurden bis $t = 4000$ mit 128 Fouriermoden und dem Aspektverhältnis $\Gamma = 32$ durchgeführt.

wie in Abb. 5.9 zu sehen ist. In a) ist die bei $\epsilon = 0.7$, $P = 1$, $g_m = 50$ und $c^2 = 2$ auftretende Spiralturbulenz zu sehen. In b) sind die bei geänderten Kopplungsparameter $g_m = 10$ auftretenden Zielscheibenmustern (Targets) zu erkennen und bei noch kleinerem Kopplungsparameter $g_m = 2$ werden in c) Labyrinthmuster beobachtet. Für das in d) gezeigte Muster wurde die Gleichung wie in Ref.[150] mit einem modifizierten nichtlinearen Term der Form $-0.2u^3 + 2.4(\nabla u)^2 \nabla^2 u$ bei $g_m = 50$ gelöst. Alle vier in Abb.5.9 gezeigten Strukturen stimmen hervorragend mit denen von Cross in Referenz [150] gezeigten Mustern überein.

Startend mit einer zufälligen Anfangsbedingung wurden die Gleichungen (5.1) in den bisherigen Arbeiten bis zu den maximalen Zeiten $t = 4000$ [150] bzw. $t = 6000$ [145] simuliert. Ob bei diesen Zeiten schon ein stationäres Verhalten des Spiralchaos eingesetzt hat, wurde dabei nicht systematisch überprüft. Das zeitliche Verhalten des Wärmestroms $j(t)$ kann als Maß für die Stationarität dienen. Fluktuiert $j(t)$ um einen zeitunabhängigen Mittelwert, so kann von einem stationären Verhalten des Spiralchaos gesprochen werden. Ist $j(t)$ im Mittel anwachsend oder abnehmend, so liegt wohl keine Stationarität vor.

Um dies zu überprüfen wurde $j(t)$ für längere Simulationszeiten als in den Arbeiten [145, 150] untersucht. Startend von „Random-Initial conditions“ wurde das System (5.1) für die Parameter $c^2 = 2$, $g_m = 50$ und $\epsilon = 0.7$ aufintegriert und $j(t)$, wie in Abb. 5.11 gezeigt, berechnet. Die in Abb. 5.11 gezeigten Daten zeigen sehr deutlich, daß $j(t)$ bei $t = 4000$, bis zu dieser Zeit wurde von Cross und Tu numerisch gerechnet, im Mittel noch anwächst und erst oberhalb von $t = 40000$ in etwa davon gesprochen werden kann, daß $j(t)$ um einen Mittelwert fluktuiert. Beim Vergleich der Struktur aus Abb.5.9a), wie sie von Cross berechnet wurde,

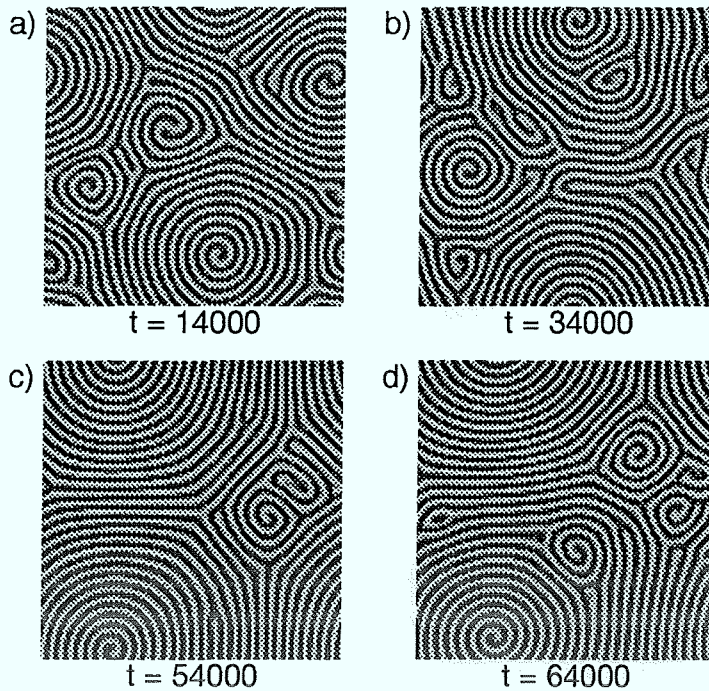


Abb. 5.10: Fortsetzung des Spiralchaos aus Abb. 5.9 a). Die Spiralen werden mit zunehmender Zeit größer, aber sie rotieren langsam weiter und der Zustand friert nicht ein, wie dies bei Systemen mit kleinerem Aspektverhältnis $\Gamma = 8$ und $\Gamma = 16$ der Fall ist. Durch die ständige Erzeugung und Vernichtung kleinerer Tochtspiralen (Defekte) bleibt die Struktur allerdings weiterhin dynamisch. Die Dynamik friert aber nicht ein wie an der Drehung der Spirale in c) und d) zu sehen ist.

mit denen zu sehr viel späteren Zeitpunkten der Simulation erhaltenen Strukturen, wie sie in Abb. 5.10 zu sehen sind, werden erhebliche Unterschiede in den Strukturen deutlich. Offensichtlich geht mit dem weiteren Anwachsen des Wärmestroms $j(t)$ auch eine Vergrößerung der Muster einher.

Die in Abb. 5.10b)-d) gezeigten Spiralen rotieren. Die Dynamik, welche die Fluktuation in $j(t)$ verursacht, kommt durch die ständige Erzeugung und Vernichtung kleinerer in Abb. 5.10 zu sehenden Tochtspiralen zustande. Dieser dynamische Zustand erweist sich als sehr beständig. Diese Spiralen haben aber einen wesentlich größeren Durchmesser als die in

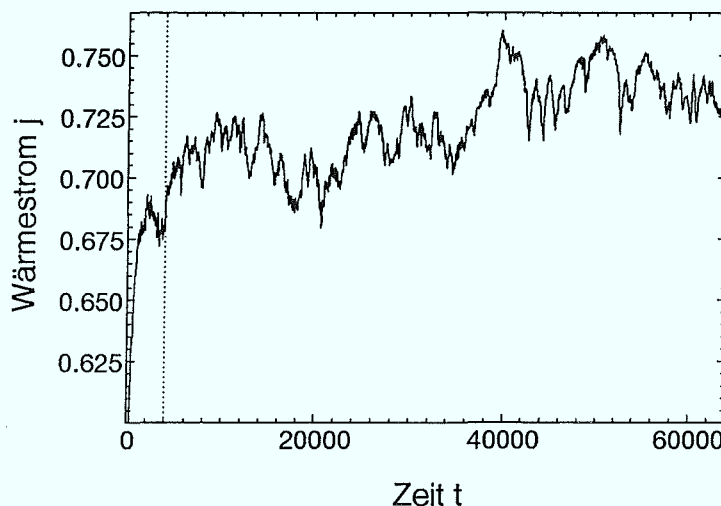


Abb. 5.11: Konvektiver Wärmestrom zu Abb. 5.10. Der Wärmestrom steigt deutlich an, bis er im Bereich der großen Spiralen stochastisch um einen Mittelwert oszilliert. Die gepunktete Linie zeigt, an welcher Stelle Cross und Tu ihre Rechnungen durchgeführt haben.

Experimenten beobachteten Strukturen. Weitere Simulationen bei gleichen Parametern aber bei drei verschiedenen Aspektverhältnissen $\Gamma = 8, 16, 64$ zeigen die gleiche Tendenz zur Vergrößerung der Strukturen. Bei $\Gamma = 8$ wurde $j(t)$ bei $t \sim 500$ völlig zeitunabhängig und das Muster ist sogar eingefroren. Gleiches geschah für $\Gamma = 16$ bei $t \sim 4500$. Offensichtlich wächst mit zunehmenden Aspektverhältnis die kritische Zeit an, bei welcher der Wärmestrom um einen zeitunabhängigen Mittelwert zu fluktuieren beginnt. Beim größerem Aspektverhältnis, $\Gamma = 64$, wurde diese Vergrößerungstendenz auch beobachtet, allerdings hatte der Mittelwert von $j(t)$, wie aufgrund der Ergebnisse für die kleineren Systeme zu erwarten, bei der maximalen Simulationszeit $t = 55000$ noch nicht ein stationäres Niveau erreicht.

In einer weiteren Arbeit [145] wurde vermutet, daß die zusätzliche Nichtlinearität, bu^2 , in Gl. (5.1) wichtig sei, um im Rahmen des erweiterten SH-Modells Spiralchaos zu erhalten. Dieses konnte durch eigene Simulationen nicht bestätigt werden. Zwar ist für endliche Werte von b die kritische Zeit, bei der der Wärmestrom im Mittel weder wächst noch fällt, größer als bei $b = 0$, die Vergrößerung findet aber ebenfalls statt. Wird alternativ für $b \neq 0$ mit einer Struktur gestartet, wie sie in Abb. 5.10d) für $b = 0$ erhalten wurde, so wird unter Berücksichtigung der Nichtlinearität bu^2 kein Zerfallen der groben Strukturen in kleinskaligere Strukturen beobachtet. Dieses ist ein zusätzlicher Beleg dafür, daß dieser Term für die Spiralturbulenz nicht entscheidend ist.

Das erweiterte SH-Modell ist offensichtlich ein instruktives Modell, das eine Reihe von Einsichten über die Spiralturbulenz erlaubt [150], aber die in diesem Abschnitt vorgestellten Langzeitsimulationen weisen auf die Grenzen des Modells hin und sind eine Warnung vor Überinterpretationen.

5.5 Domänenstraßen

Die bereits in Kap. 4.2 eingeführte räumlich periodische Modulation des Kontrollparameters bricht die kontinuierliche Translationsinvarianz und die Rotationsinvarianz. Wie sich diese Symmetriebrüche auf die Spiralturbulenz im Swift-Modell mit angekoppeltem auswirken wird in diesem Abschnitt beschrieben. Vorweg sei aber noch eine Motivation dieser Untersuchung erläutert.

Beim gegenwärtigen Stand der Untersuchungen zum Spiralchaos kann noch kein befriedigendes Bild vom Mechanismus, der zu diesem raumzeitlich komplexen Phänomen führt, gegeben werden. Wie oft in solchen Phasen des Suchens wird in der physikalischen Forschung versucht, ein äußeres Feld einzuführen, um das zu untersuchende Phänomen weiter zu charakterisieren. Daher wirkt es attraktiv, die Reaktion von Spiralchaos auf ein äußeres Feld zu studieren, welches Symmetrien bricht. Zudem könnte die hier untersuchte Modulation z.B. durch eine Modulation des Temperaturfelds in der thermischen Konvektion realisiert werden (siehe Abb. 4.5).

In Abb. 5.12 wird für ein System mit kleinen Aspektverhältnis von $\Gamma = 16$ die Entste-

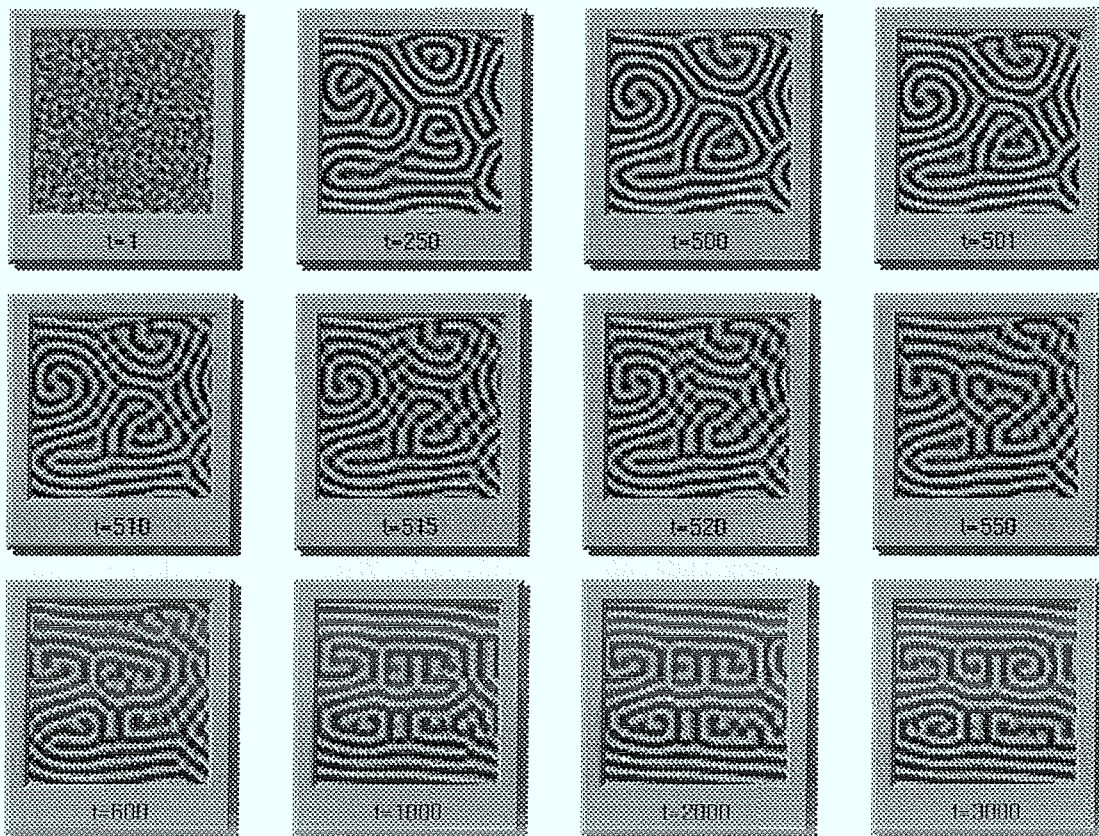


Abb. 5.12: Entstehung der Domänenstraßen. Gestartet wurde bei $t = 0$ mit kleinen Störungen im u -Feld. Bei $t = 500$ wurde die Modulation mit $k = 5/4q_0$ und $G = 0.2$ eingeschaltet. Die Simulationen wurden mit einem Aspektverhältnis von $\Gamma = 16$ bei $\epsilon = 0.5$ und $g_m = 50$ auf einem Gitter mit 64×64 Fouriermoden durchgeführt.

hung der Spiralturbulenz und die Auswirkungen der periodischen Modulation demonstriert. Ausgehend von kleinen zufälligen Störungen im u -Feld bei $t = 0$ entwickelt sich bis zur Zeit $t = 500$ für $\epsilon = 0.5$ und einem Kopplungsparameter $g_m = 50$ die Spiralturbulenz. Ab $t = 500$ wird der Kontrollparameter räumlich periodisch mit $k = 5/4q_0$ und $G = 0.2$ moduliert. Die Konvektionsrollen spüren diese Modulation nach sehr kurzer Zeit, wie bei $t = 501$ durch die „Rasterung“ der Struktur zu erkennen ist. Die Spiraldynamik friert mit zunehmender Zeit ein, wie zwischen $t = 2000$ und $t = 3000$ zu sehen ist. Es sind nur noch kleine lokale Oszillationen in der Struktur zu beobachten.

In größeren System entstehen diese Domänenstraßen in ähnlicher zeitlicher Abfolge. In Abb. 5.13 a) und c) sind zwei Schnappschüsse aus der Spiralturbulenz für $\Gamma = 32$ und $\Gamma = 64$ nach $t = 34000$ zu sehen. Wenn für beide Beispiele der Kontrollparameter mit $k = 5/4q_0$ und $G = 0.2$ räumlich periodisch moduliert wird, entstehen nach dem gleichen Mechanismus wie in Abb. 5.12 Domänenstraßen. Die Anzahl der im Bild waagerecht liegenden Streifen bringt

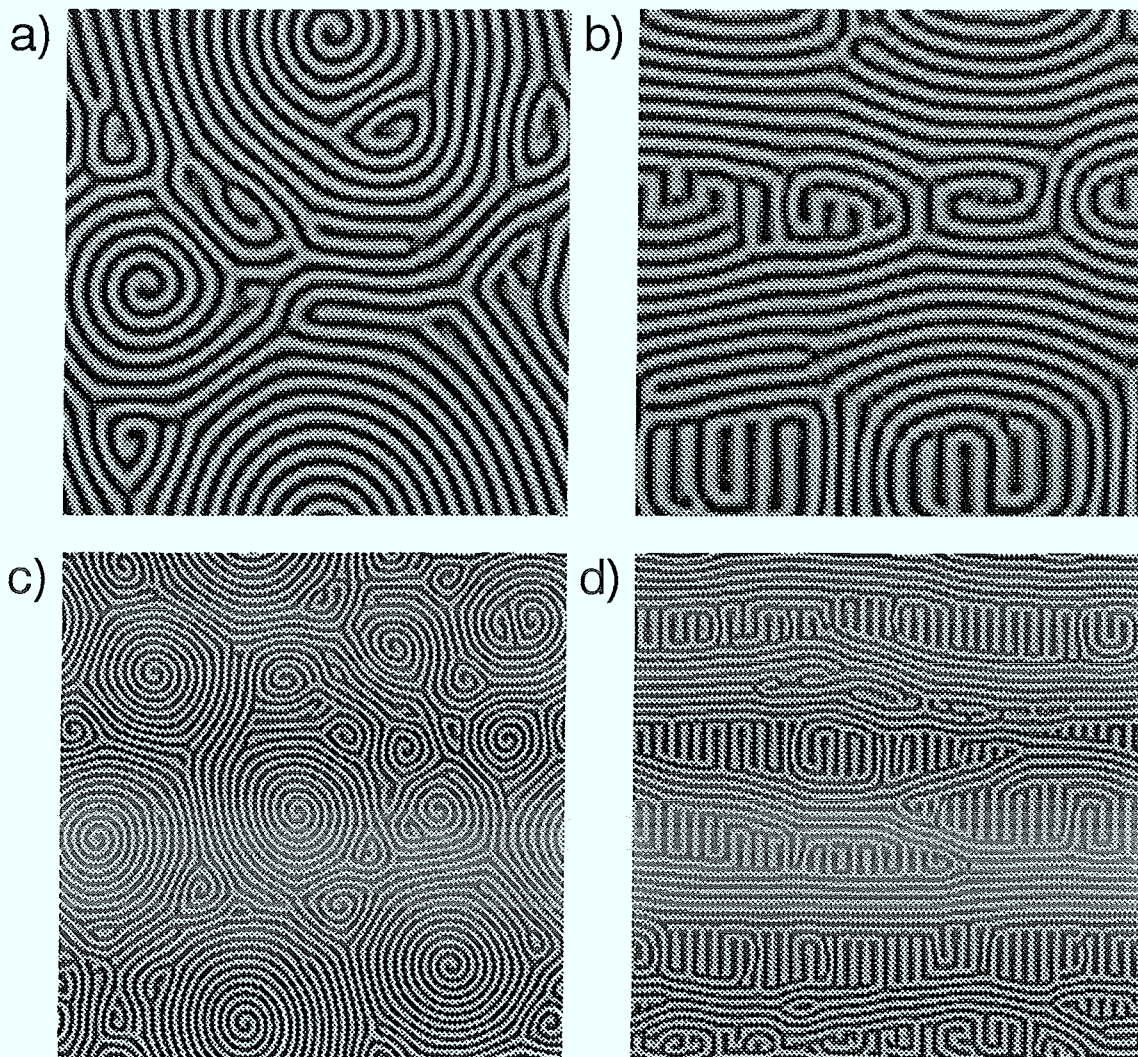


Abb. 5.13: Spiralchaos und Domänenstraßen. In a) Spiraltrubulenz bei $\epsilon = 0.7$ und einer Mean-Flow Ankopplung von $g_m = 50$. In b) sind Domänen zu sehen die sich bei zusätzlicher Modulation mit $k = 5/4q_0$ und $G = 0.2$ aus a) entwickeln. Die Simulationen wurden mit einem Aspektverhältnis von $\Gamma = 32$ auf einem Gitter mit 128×128 Fouriermoden durchgeführt. Die Strukturen wurden bei $t = 34000$ aufgenommen. In c) und d) wurde mit den gleichen Parametern in einem doppelt so großem System, $\Gamma = 64$ und 256×256 Fouriermoden, simuliert.

eine neue bisher noch unverstandene Wellenlänge ins Spiel.

Wie in den in Abb. 5.13b) und d) zu sehenden Strukturen, beschränkt sich die von der Spiraltrubulenz des unmodulierten Systems verbleibende Dynamik auf kleine lokale Oszillationen in horizontalen Domänen. Diese kleinen Oszillationen erinnern an lokale Oszillationen in Gläsern. Die Wellenlänge q des Feldes u in den Domänen in Abb. 5.13b) und d) ist in Resonanz mit der äußeren Modulation $q = k/2 = 5/8q_0$, und damit weit von der kritischen

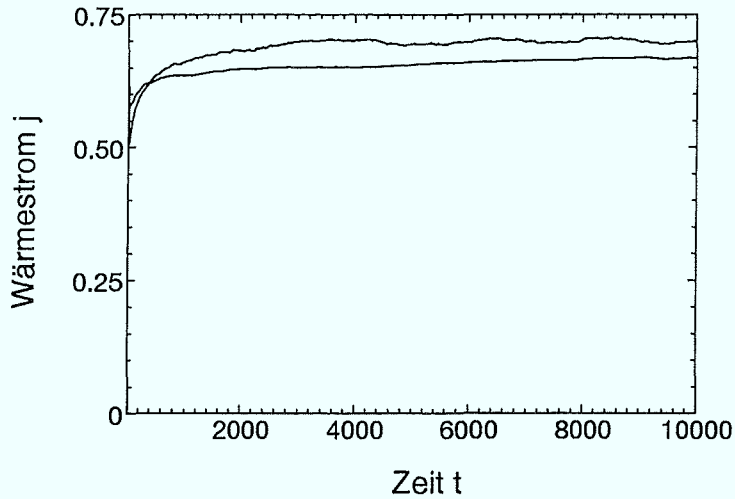


Abb. 5.14: Wärmestrom zu Abb. 5.13 bei der Entwicklung der Startlösung mit kleinen Störungen im u -Feld. Die untere Kurve gehört zu den Domänenstraßen in 5.13 d) und die obere Kurve zum Spiralchaos 5.13c).

Wellenzahl q_0 entfernt, während die Wellenzahl der horizontalen Streifen ungefähr q_0 entspricht. Dementsprechend ist die Amplitude des Feldes u im Bereich der horizontalen Streifen in Abb. 5.13b) und d) (senkrecht zur Modulation) größer als in den Domänen.

Der Unterschied zwischen der Spiralturbulenz und den Domänenstraßen in Abb. 5.13b) und d) wird nochmals in den Wärmeströmen j deutlich, die in Abb. 5.14 gezeigt sind.

Der Wärmestrom j in den Domänen liegt deutlich unter dem der Spiralturbulenz. Die untere Kurve in Abb. 5.14 ist der Wärmestrom der Domänenstraßen, der sich wesentlich ruhiger entwickelt als der chaotische Wärmestrom der Spiralturbulenz. Dies wird in einer feineren Auflösung in einem späteren Zeitintervall in Abb. 5.15 noch deutlicher.

Die Erzeugung der Domänenstraßen durch die Modulation ist nicht auf eine spezielle Wahl der Modulationsparameter k und G beschränkt. In Abb. 5.16 sind Domänenstraßen zu sehen, wie sie für verschiedene Modulationsstärken G bei festem $k = 5/4q_0$ entstehen. Dabei wurde die Simulation für jede Parameterkombination mit zufälligen Anfangsbedingungen neu

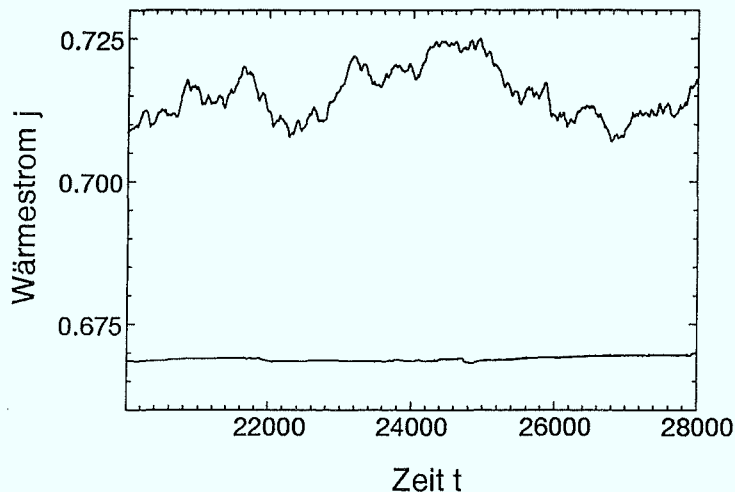


Abb. 5.15: Wärmestrom zu Abb. 5.13 zu einem späteren Zeitpunkt. Die untere Kurve gehört wieder zur Domänenstraßen in Abb. 5.13d) und die obere zum Spiralchaos in Abb. 5.13c).

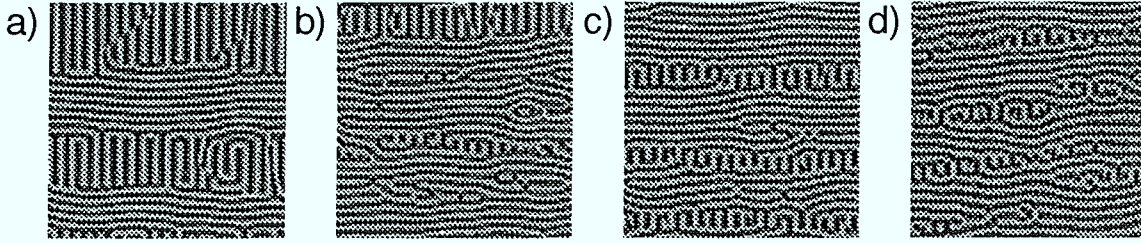


Abb. 5.16: Domänenstraßen. Bei fester Wellenzahl $k = 5/4q_0$ mit zunehmender Modulationsstärke, a) $G = 0.2$, b) $G = 0.3$, c) $G = 0.4$ und d) $G = 0.5$. Die Simulationen wurden mit einem Aspektverhältnis von $\Gamma = 32$ bei $\epsilon = 0.7$ und $g_m = 50$ auf einem Gitter mit 128×128 Fouriermoden durchgeführt. Die Strukturen wurden bis ca. $t = 20000$ aufgenommen.

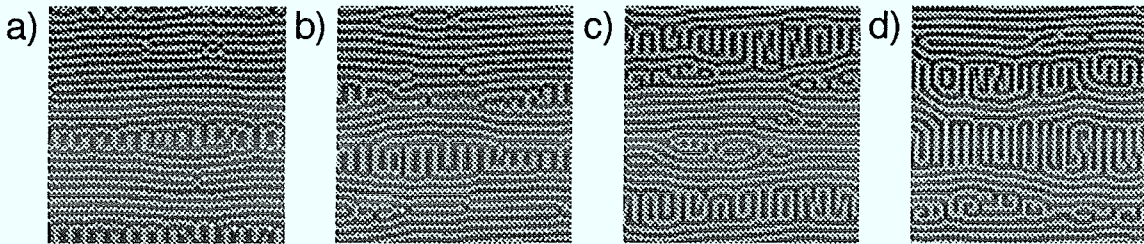


Abb. 5.17: Domänenstraßen. Bei fester Modulationsamplitude $G = 0.4$ wurde die Modulationswellenzahl variiert: a) $k = q_0$, b) $k = 9/8q_0$, c) $k = 11/8q_0$ und d) $k = 12/8q_0$. Die Simulationen wurden mit einem Aspektverhältnis von $\Gamma = 32$ bei $\epsilon = 0.7$ und $g_m = 50$ auf einem Gitter mit 128×128 Fouriermoden durchgeführt. Die Strukturen wurden bis ca. $t = 20000$ aufgenommen.

gestartet. Die Breite der Domänenstraße nimmt mit zunehmender Modulationsstärke ab.

Wie in Abb. 5.17 zu sehen, entstehen Domänenstraßen für ganz verschiedene Werte der Modulationswellenzahl k , solange die Modulationswellenzahl auf den Bereich $q_0 < k < 2q_0$ beschränkt bleibt. Für $k > 2q_0$ kommt es zu bekannten quasi eindimensionalen Phänomenen wie den kommensurablen/inkommensurablen Übergängen [14, 16], und für sehr kleine Modulationswellenzahlen $k \ll q_0$ stellt sich zwar die Periodizitätsrichtung senkrecht zur Modulation ein, aber es entstehen keine Domänenstraßen mehr.

Die Strukturen, wie sie in Abb. 5.13d), Abb. 5.16a) und in Abb. 5.16d) gezeigt sind, legen die Vermutung nahe, daß es sich dabei um durch Defekte „verunreinigte“ kohärente Strukturen handelt. Diese kohärente Strukturen könnten eine periodische Aneinanderreihung von periodischen Strukturen sein, wobei die eine Struktur mit ihren Streifen parallel zu y -Achse liegt und mit einer Wellenlänge $q = k/2$ in Resonanz mit der Modulation steht, und die andere Struktur mit ihren Streifen senkrecht zu Modulation mit Wellenzahl $q = q_0$ steht. Eine derartige Struktur ist in Abb. 5.18a) zu sehen.

Eine der bemerkenswerten Eigenschaften dieser analytischen Straßen ist, daß sie für verschwindende Kopplungskonstanten $g_m = 0$ instabil sind und nur durch die Ankopplung von

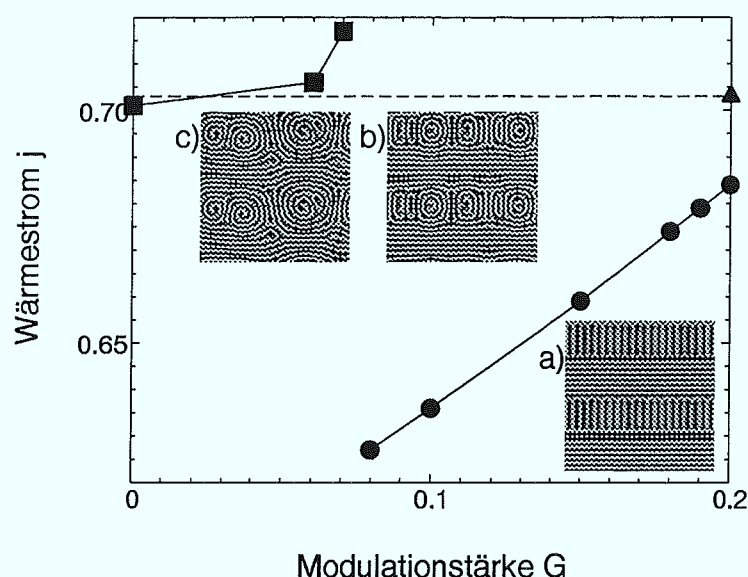


Abb. 5.18: Wärmeströme beim Zerfall der analytischen Straßen. a) $G = 0.2$ analytische Straßen, b) $G = 0.07$ Spiralstraßen c) $G = 0.06$ Spiralchaos im Ansatz. Der Wärmestrom wurde über $t = 5000$ gemittelt. Die Simulationen wurden mit $\Gamma = 32$ und $k = 5/4q_0$ durchgeführt.

$\zeta(\mathbf{r}, t)$ stabilisiert werden. Denn im SH-Modell ohne Kopplung an $\zeta(\mathbf{r}, t)$ korrespondiert zu den beiden Bereichen in Abb. 5.18a) ein unterschiedlicher Wert des Funktional und der Zustand mit dem niedrigsten Wert des Funktional gewinnt. In diesem Falle gewinnen die Streifen senkrecht zur Modulation. Durch Ankopplung des Felds $\zeta(\mathbf{r}, t)$ wird aber das Potentialargument ungültig. Diese analytische Straße ist demnach eine durch das Wirbelfeld stabilisierte neue kohärente Struktur.

Eine interessante Frage ist nun, ob sich aus dieser Struktur ein direkter Übergang in die Spiralturbulenz beobachten läßt. Denn möglicherweise läßt sich aus dem Typ der Instabilität der analytischen Straße der Mechanismus der Spiralturbulenz besser aufklären.

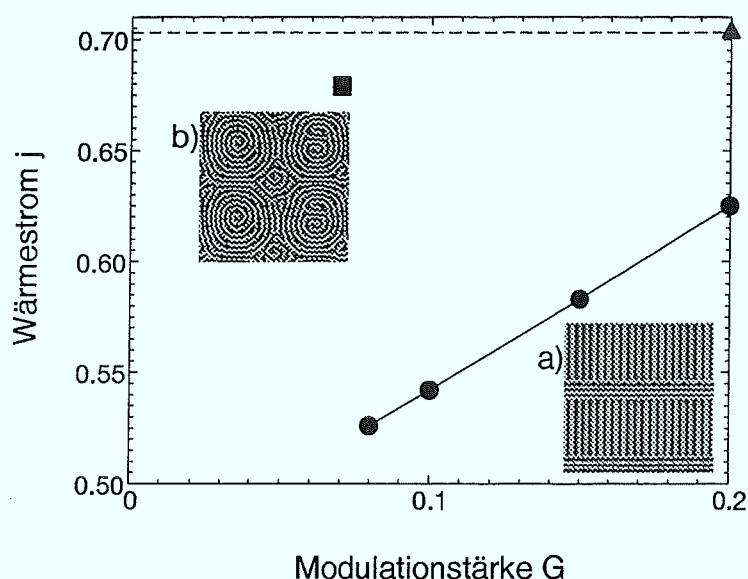


Abb. 5.19: Wärmeströme beim Zerfall analytischer Straßen, wobei die instabilen Bereiche gegenüber Abb. 5.18 vergrößert wurden. a) $G = 0.2$ analytische Straßen, b) $G = 0.07$ Spiralchaos.

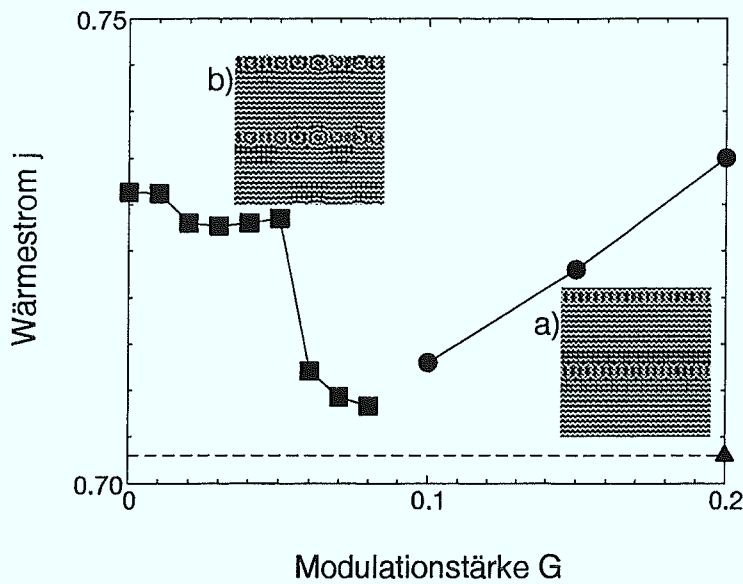


Abb. 5.20: Wärmeströme beim Zerfall analytischer Straßen, wobei die instabilen Bereiche gegenüber Abb. 5.18 verkleinert wurden. a) $G = 0.2$ analytische Straßen und b) im Bereich $0.85 > G > 0.0$ eingeschlossene Oszillationen.

In Abb. 5.18 wird daher die Modulationsstärke reduziert und der Wärmestrom über ein Zeitintervall von $t = 5000$ gemittelt. Im Bereich $0.075 < G < 0.2$ sind diese analytischen Straßen stabil und der Wärmestrom nimmt linear mit G ab. Aus diesen analytischen Straßen entwickeln sich für $G = 0.07$ die in Abb. 5.18b) gezeigten Spiralstraßen. Dabei sind nun verschiedene beobachtete Szenarien möglich. Die zwischen den horizontalen Streifen eingeschlossenen Spiralen frieren ein, oder in diesen Streifen entwickelt sich Spiralchaos, ohne daß die dazwischenliegenden Streifen in den längsten Simulationen verdrängt werden.

Interessant ist nun, daß sowohl die senkrechten Streifen, wie auch die horizontalen Streifen für sich genommen stabile Lösungen sind. Die Spiralen in den Spiralstraßen entwickeln sich aus den Grenzbereichen, den Domänen heraus. Offensichtlich sind aber die Gebiete mit den horizontalen Streifen, welche die Wellenzahl $q \sim q_0$ besitzen, wesentlich stabiler.

Erst bei weiterer Reduzierung, hier auf $G = 0.06$, lösen sich die Spiralstraßen auf und die Spirturbulenz erobert wieder die gesamte Zelle, wie in Abb. 5.18c) im Anfangsstadium zu erkennen ist. Die Wärmeströme j sind für die Strukturen in Abb. 5.18b) und Abb. 5.18c) deutlich höher als für die analytischen Straßen. Das Dreieck in Abb. 5.18 entspricht dem Wärmestrom der aus den zufälligen Anfangsbedingungen entstandenen Domänenstraße, wie sie in Abb. 5.13b) gezeigt ist. Die in Abb. 5.18c) verbliebene Periodizität in vertikaler Richtung, geht auf die periodische Anordnung der analytischen Straßen zurück.

Ein interessanter freier Parameter dieser analytischen Straßen ist die relative Breite der Domänen. Die Gebiete in den analytischen Straßen mit den senkrechten instabilen Streifen können weiter ausgedehnt werden, so wie dies in Abb. 5.19 zu sehen ist. Die analytische Straße ist bei Reduktion der Modulationsamplitude bis zu ähnlichen Werten von G stabil, aber es entwickelt sich aus der analytischen Straße direkt das Spiralchaos. Allerdings besitzen diese Spiralen dann relativ großen Durchmesser.

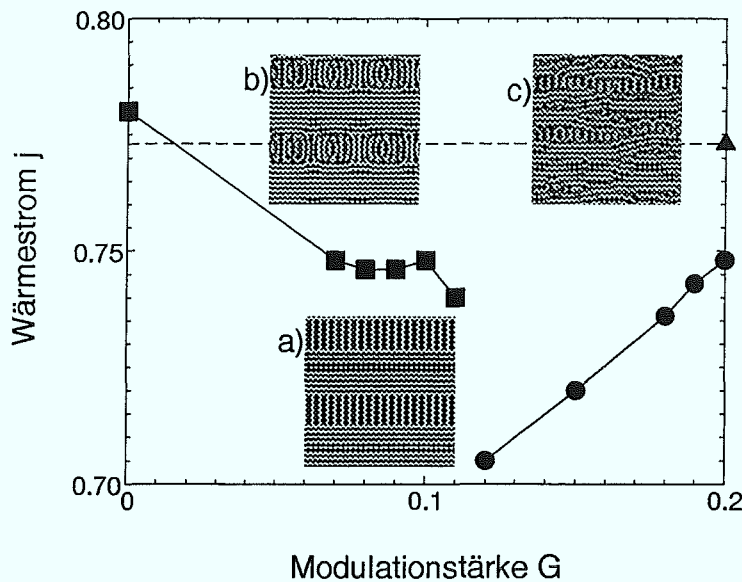


Abb. 5.21: Wärmeströme beim Zerfall der analytischen Straßen. a) $G = 0.2$ analytische Straßen, b) $G = 0.1$ eingeschlossene Oszillationen, c) $G = 0.2$ Chaos bei Random Start. In dieser Simulation wurde der Nicht-Boussinesq-Term bu^2 mit $b = 0.35$ in das Modell mit aufgenommen.

Nach dieser Beobachtung sind analytische Straßen mit sehr schmalen Bereichen horizontaler Streifen ein Kandidat für einen direkten Übergang, also eine Instabilität, in die Spiral turbulence. Um eine derartige direkte Instabilität ins Spiralchaos nachzuweisen, müssen noch einige weitere aufwendige numerische Untersuchungen durchgeführt werden. Die Gebiete der analytischen Straßen mit senkrechten instabileren Streifen können verkleinert werden, wie in Abb. 5.20 zu sehen ist. Die analytische Straße ist bei Reduktion der Modulationsamplitude bis zu ähnlichen Werten von $G \sim 0.85$ stabil, woraus sich durch weitere Reduktion von G die in Abb. 5.20b) gezeigten Straßen mit lokalen Oszillationen entwickeln. Diese bleiben dann auch ohne Modulation $G = 0$ zur Überraschung über sehr lange Zeiten stabil.

Werden diese Szenarien für die analytischen Straßen und deren Destabilisierung durch zusätzliche quadratische Nichtlinearitäten bu^2 verändert? Wie in Abb. 5.21 zu sehen ist, treten durch diese zusätzliche Nichtlinearität keine qualitativen Änderungen ein, sondern nur quantitative. Wird mit analytischen Straßen wie in Abb. 5.18 gestartet, so bilden sich auch hier bei Reduktion von G zuerst Spiralstraßen aus, aus denen erst bei weiterer Reduktion von G Spiralchaos entsteht. Die in Abb. 5.21c) gezeigten Domänenstraßen unterscheiden sich ebenfalls nicht wesentlich von denen für $b = 0$.

Abschließend kann hier angemerkt werden, daß die Einführung des äußeren Felds, der Modulation $M(x)$, weitere interessante Phänomene zum Spiralchaos ergeben hat, deren weitere Charakterisierung zum Verständnis von Spiralchaos hilfreich scheint. Wie im folgenden Kapitel noch gezeigt wird, können die Domänenstraßen auch in den Simulationen der vollen Bewegungsgleichungen für thermische Konvektion mit periodisch moduliertem Temperaturfeld an den Rändern gefunden werden.

Kapitel 6

Simulation der Bewegungsgleichungen der Rayleigh-Bénard-Konvektion

Einige der bisher durch Symmetrieüberlegungen und Simulation von Modellen gewonnenen Ergebnisse werden in diesem Kapitel durch eine Simulation der vollen dreidimensionalen Bewegungsgleichungen für die thermische Konvektion überprüft. Dazu gab es zweierlei Motivationen. Zum einen soll damit die Robustheit der im Rahmen von erweiterten Swift-Hohenberg-Modellen untersuchten und vorhergesagten Phänomene untermauert werden, zum anderen soll Relevanz für Experimente betont werden. Hierfür wurde von Prof. Pesch freundlicherweise ein Computerprogramm zur Lösung der dreidimensionalen Bewegungsgleichungen [141, 142] zur

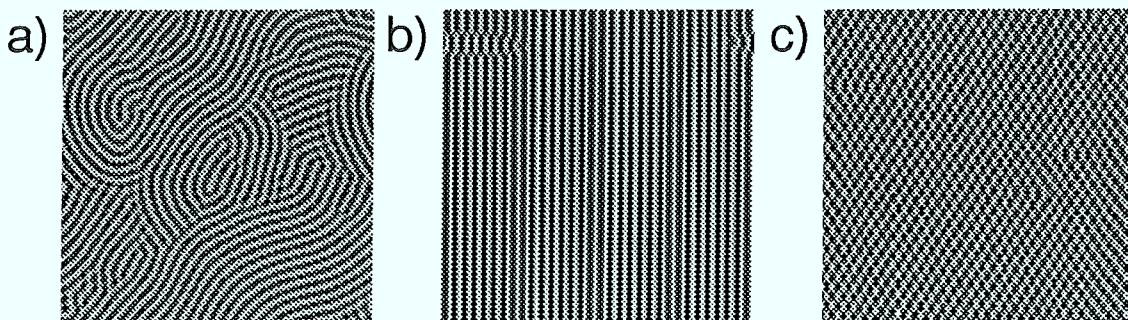


Abb. 6.1: Simulation der Bewegungsgleichungen. Aus kleinen Störungen entwickelt sich bei $\epsilon = 0.1$ nach $\tau = 10000$ in a) eine Rollenstruktur. Wird eine Modulation des Kontrollparameters mit $k = 2q_c$ und $G = 0.2$ eingeschaltet, richten sich die Rollen nach $\tau = 10000$ in b) parallel zur Modulation aus, wodurch die durch die Modulation aufgeprägte Vorzugsrichtung zum Vorschein kommt. Für $k = 7/4q_c$ und $G = 0.3$ entstehen nach $\tau = 20000$ Rechteckstrukturen. Gerechnet wurde auf einem quadratischen Gitter mit 128 Fouriermoden.

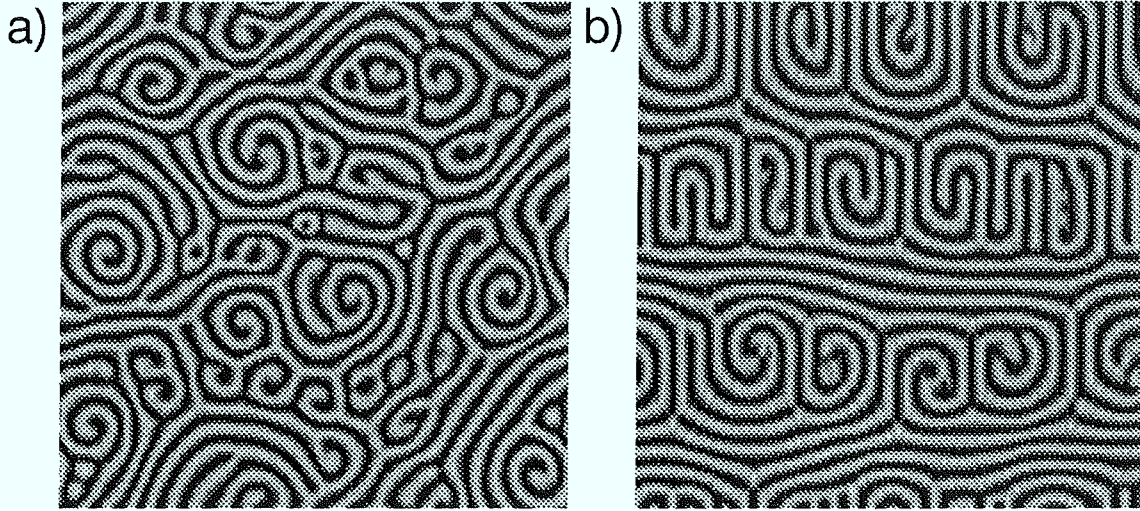


Abb. 6.2: Simulation der Bewegungsgleichungen. Ohne Modulation entsteht bei $\epsilon = 0.9$ spontan die Spiralturbulenz in a) nach $\tau = 100000$. Durch eine Modulation mit $k = 7/8q_c$ und $G = 0.45$ entstehen die Domänenstraßen. Gerechnet wurde auf einem quadratischen Gitter mit 128 Fouriermoden.

Verfügung gestellt. Dieses wurde dann um die Modulationsterme erweitert und für die Ziele dieser Arbeit angepaßt.

Alle Simulationen wurden bei kleinen Prandtl-Zahlen $P = 1$ mit einem Aspektverhältnis von $\Gamma = 32$ auf einem Gitter mit 128×128 Fouriermoden durchgeführt. Ziel dieser Simulationen war die mit dem Swift-Hohenberg-Modell berechneten Rechtecke für Rayleigh-Bénard-Konvektion zu bestätigen, und außerdem das Einfrieren der Spiralturbulenz zu beobachten.

Für Rayleigh-Zahlen $\epsilon = \frac{R-R_c}{R} \ll 1$ spielen die sogenannten Mean-Flow Effekte in den vollen Bewegungsgleichungen [125, 141] nur eine untergeordnete Rolle. Daher sind in diesem Bereich die Resultate der Simulation mit denen des Swift-Hohenberg-Modells ohne Mean-Flow (4.1) vergleichbar. Aus kleinen Störungen in den Fouriermoden entwickelt sich bei $\epsilon = 0.1$ eine nicht perfekte Rollenstruktur, wie in Abb. 6.1 a) zu sehen ist, und auch im Swift-Hohenberg-Modell beobachtet wird. Für eine Modulationswellenzahl $k = 2q_c$ mit Modulationsamplitude $G = 0.3$ ist im wesentlichen die durch die Modulation induzierte Vorzugsrichtung sichtbar, denn die Konvektionsrollen richten sich, wie in Abb. 6.1 b) gezeigt, parallel zur Modulation aus. Die Amplitude T_1 der Temperaturmodulation wird in Einheiten der kritischen Temperaturdifferenz angegeben, $G = T_1/\Delta T_c$. Für Modulationen mit $k = 7/4q_c$ entstehen nach den gleichen Argumenten wie beim Swift-Hohenberg-Modell im Bereich $-G < \epsilon < 2G$ Rechtecke, wie in Abb. 6.1 c) für $G = 0.3$ gezeigt.

Mean Flow Effekte werden in den vollen Bewegungsgleichungen erst bei größeren Werten des Kontrollparameters ab $\epsilon \approx 0.7$ wichtig. Insbesondere bei kleinen Werten für die Prandtl-Zahl P wird der Einfluß groß. Daher werden für die Simulationen im Bereich der

Spiralturbulenz $P = 1$ und $\epsilon = 0.9$ gewählt. In Abb. 6.2 a) ist die Spiralturbulenz nach einem Zeitraum von $\tau = 100000$ dargestellt. Deutlich zu sehen ist, daß die Spiralen trotz der langen Simulationszeit klein bleiben, was experimentellen Beobachtungen entspricht [154]. Anschließend wurde in der Simulation die Spiralturbulenz einer Modulation mit Modulationsamplitude $G = 0.45$ und $k = 7/4q_c$ ausgesetzt, um zu sehen, ob sich das gleiche Szenario wie für das Swift-Hohenberg-Modell ergibt. Und in der Tat treten, wie in Abb. 6.2 b) gezeigt, ähnliche, eingefrorene Strukturen mit langsamer Dynamik auf.

Die präsentierten Ergebnisse unterstreichen die Robustheit der durch Modellrechnungen und vor allen durch störungstheoretische Ansätze gewonnenen Ergebnisse eindrucksvoll. Durch weitere Simulationen können nun für Experimente weitergehende quantitative Resultate vorhergesagt werden. Vergleiche mit weiteren experimentellen Resultaten aus den Gruppen Steinberg (Weizmann Institut, Israel), Bodenschatz (Cornell University, USA) und Ahlers (Santa Barbara, USA) lassen dann ein tieferes Verständnis der Spiralturbulenz erwarten.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Strukturbildung ist ein in fast allen Naturwissenschaften und in vielen technischen Prozessen auftretendes Phänomen. Zur Untersuchung der Mechanismen werden in der Physik eine Vielzahl von Experimenten durchgeführt und Theorien entwickelt. In diesen Experimenten und Theorien bleiben Inhomogenitäten an Randbedingungen meistens unbeachtet, um theoretische Beschreibungen möglichst einfach zu halten und in Experimenten wesentliche Effekte voneinander zu trennen. Die Beachtung der in der Realität immer vorhandenen Inhomogenitäten kann allerdings für die Erklärung des Strukturbildungsprozesses essentiell sein und ihr gezielter Einbau in Experimente zu völlig neuen Strukturen führen. Daher wird in dieser Arbeit mit analytischen und numerischen Methoden untersucht, welche Auswirkungen periodische Inhomogenitäten auf die Strukturbildung haben.

Aus der Vielzahl der Systeme, die eine Verzweigung in eine periodische Struktur zeigen, wird konkret die Rayleigh-Bénard-Konvektion als einfaches und gut verstandenes Beispiel untersucht. In einer von unten geheizten Flüssigkeitsschicht entstehen dabei aus der ruhenden Flüssigkeit bei Überschreiten einer kritischen Heiztemperatur Konvektionsrollen. Ansatzpunkte für die Inhomogenitäten sind die Rauigkeit und ungleichmäßige Wärmeleitung der Begrenzungsplatten. Durch räumlich periodische Modulation der Geometrie der Zelle und der Temperaturprofile können gezielt Inhomogenitäten eingebracht und ihre Auswirkungen untersucht werden. Dabei wird erstmals für ein reales System gezeigt, wie durch die mit Inhomogenitäten verbundenen Symmetriebrüche raumzeitliches Chaos induziert wird. Die vor kurzen erst entdeckte Spiralturbulenz in der Rayleigh-Bénard-Konvektion ist ein Beispiel für einen chaotischen Strukturbildungsprozess. Für dieses System wird gerade die Umkehrung demonstriert, indem durch Inhomogenitäten raumzeitliches Chaos einfriert und neuartige Strukturen entstehen. Darüber hinaus werden in der Arbeit neuartige, durch periodische Inhomogenitäten hervorgerufene Orientierungsoszillationen vorgestellt und ein entsprechendes realisierbares Experiment beschrieben, sowie ein unerwarteter Mechanismus diskutiert, der zu rechteckigen Strukturen führt.

Durch langwellige räumlich periodische Modulation der Geometrie einer Rayleigh-Bénard-

Zelle oder der Temperaturprofile an den Begrenzungsplatten kann die Bifurkation aus einem räumlich homogenen Grundzustand in einen räumlich periodischen Sekundärzustand oszillatorisch werden. Dieser Effekt wird Hopf-Bifurkation durch frustrierte Drifts genannt. Zur Beschreibung des schwach nichtlinearen Verhaltens wird in dieser Arbeit eine Amplitudengleichung für das modulierte System abgeleitet, und ihre Koeffizienten sowohl für freie als auch für realistische Randbedingungen berechnet. Durch lineare Stabilitätsanalyse werden aus dieser Amplitudengleichung die Parameterbereiche zur Entstehung der Hopf-Bifurkation durch frustrierte Drifts bestimmt, welche qualitativ und quantitativ mit einer Analyse der vollen Bewegungsgleichungen übereinstimmen. Das nichtlineare Verhalten oberhalb der oszillatorischen Verzweigung wird durch eine Bifurkationsanalyse und numerische Simulation der Amplitudengleichung untersucht. Die zeitlichen Oszillationen der Struktur werden dabei mit zunehmendem Kontrollparameter immer anharmonischer, bis ein Bereich mit irregulären Lösungen erreicht wird und schließlich Wanderwellen mit kleinen Geschwindigkeiten entstehen. Diese irregulären Lösungen werden durch Bestimmung der Schwingungsintervalle, der Fourierspektren und Poincaré-Schnitte charakterisiert. Durch Betrachtung verschiedener Systemlängen wird nachgewiesen, daß raumzeitliches Chaos entstehen kann. Das diskutierte Beispiel beschreibt erstmals ein reales System, in dem durch Inhomogenitäten raumzeitlich komplexes Lösungsverhalten induziert wird. Andere raumzeitlich komplexe Strukturbildungsvorgänge unter ähnlichen inhomogenen Bedingungen können die gleichen Ursachen haben, vor allem wenn dieses Verhalten durch Beschreibungen mit idealisierenden Annahmen nicht erklärt werden kann. Im Parameterbereich der Wanderwellen entsteht in diesem langen System eine oszillatorische Störung, die wie ein Soliton durch die sonst stationäre periodische Struktur läuft. In einem weiteren Schritt wird gezeigt, daß ähnliche raumzeitlich komplexe Strukturen auftreten können, wenn auf eine geometrische Modulation der Behälterwände verzichtet wird, statt dessen aber ein Nicht-Boussinesq-Fluid, hier eine Flüssigkeit mit einem quadratischen Ausdehnungskoeffizienten, verwendet wird, was zu einer Brechung der Up-Down-Symmetrie führt. Die wesentlichen Resultate werden mit einem eindimensionalen Swift-Hohenberg Modell qualitativ reproduziert.

In der Elektrokonvektion in nematischen Flüssigkristallen kommt es durch einen homogenen „Pretilt“-Winkel des Direktors an den Begrenzungsplatten, welcher z.B. für die Funktionsweise von Flüssigkristallanzeigen essentiell ist, zu driftenden Konvektionsrollen. Für dieses anisotrope System wird ein symmetrieangepaßtes Modell für einen räumlich periodisch variierenden Pretiltwinkel vorgestellt. Sind die Wellenvektoren der Modulation und der Rollenstruktur für eine experimentell realisierbare Versuchsanordnung parallel, verhält sich das System quasi eindimensional und es tritt eine Hopf-Bifurkation durch frustrierte Drifts auf. Stehen die Wellenvektoren senkrecht aufeinander, werden bisher noch nicht beobachtete Orientierungsozillationen vorhergesagt.

In der Rayleigh-Bénard-Konvektion in ausgedehnten Konvektionszellen ist der Wellenvektor der Konvektionsrollen in seiner Richtung nicht festgelegt. Diese System ist also rotations-

invariant. Durch eine zusätzliche periodische Heizung kann die Rotationssymmetrie und die kontinuierliche Translationssymmetrie gebrochen werden. Auswirkungen einer solchen periodischen Inhomogenität werden am zweidimensionalen Swift-Hohenberg-Modell untersucht. Für Modulationswellenzahlen kleiner als die doppelte Wellenzahl der Rollenstruktur werden durch analytische Rechnungen Rechteckstrukturen vorhergesagt, die in Übereinstimmung mit Simulationen des Modells stehen. Die experimentellen Parameter für die Rechteckstrukturen werden angegeben. Das rotationsinvariante Swift-Hohenberg-Modell wird aber auch durch kleine Zusatzterme im linearen Operator mit konstanten Koeffizienten schwach anisotrop. In Verbindung mit Beiträgen, die die Up-Down-Symmetrie brechen, kommt es in diesem System durch einen neuartigen Mechanismus zu stabilen Rechtecklösungen. Der Mechanismus ist möglicherweise für Systeme relevant, in denen zwar bei Experimenten Rechtecke gefunden werden, aber die theoretische Analyse der entsprechenden Bewegungsgleichungen unter Aufrechterhaltung der Up-Down-Symmetrie für das Konvektionsfeld keine stabilen Rechtecke liefert. Ein Kandidat dafür ist thermische Konvektion in planar orientierten nematischen Flüssigkristallen.

Wie eingangs besprochen, können langwellige räumlich periodische Inhomogenitäten eine Dynamik bei räumlich periodischen Strukturen induzieren. In dieser Arbeit wird für das reale System der thermischen Konvektion erstmals die Umkehrung gezeigt: eine raumzeitlich komplexe Struktur kann durch Inhomogenitäten eingefroren werden und zu neuen Strukturen mit hoher Symmetrie führen. In der Rayleigh-Bénard-Konvektion bei großen Rayleigh- und kleinen Prandtl-Zahlen und in Zellen mit großem Aspektverhältnis tritt die sogenannte Spiralturbulenz auf. Die sonst parallelen Konvektionsrollen werden durch den bei großen Prandtl-Zahlen unterdrückten konvektiven Term in der Navier-Stokes-Gleichung gekrümmt. Dadurch kommt es zu einer chaotischen Entstehung und Vernichtung von Spiralen in der Konvektionszelle. Diese Spiralturbulenz und die parallelen Konvektionsrollen sind koexistierende Attraktoren im Lösungsraum der Bewegungsgleichungen, wie sich zur allgemeinen Überraschung in jüngsten Experimenten herausstellte. Die Dynamik wie auch diese Koexistenz werden hier erfolgreich durch das zweidimensionale Swift-Hohenberg-Modell mit angekoppeltem vertikalen Wirbelfeld mit einem pseudospektralen Algorithmus simuliert. Erstmals wird das vollständige Stabilitätsdiagramm, der sogenannte Busse-Ballon, für dieses System angegeben und mit der Simulation verglichen.

Der Mechanismus, der zur Spiralturbulenz führt, ist noch weitgehend unverstanden. In dieser Arbeit werden durch äußere symmetriebrechende Felder weitere Eigenschaften der Spiralturbulenz charakterisiert. Die mit der periodischen Modulation des Kontrollparameters einhergehende Brechung der Rotations- und der kontinuierlichen Translationssymmetrie führt zu einem Einfrieren der Spiralturbulenz und zur Entstehung neuer Domänenstrukturen. Diese in der Simulation beobachteten kohärenten Strukturen bestehen aus Bereichen senkrecht und parallel zur Modulation liegender Konvektionsrollen, können analytisch ohne Defekte erzeugt werden und sind stabile Lösungen des Swift-Hohenberg-Modells mit angekoppeltem Wirbel-

feld. Bei abnehmender Modulationsstärke kommt es zu einem Schmelzen der parallel zur Modulation liegenden Streifen. Allerdings schränken die senkrecht zur Modulation stehenden Rollen, die wesentlich stabiler sind, den Bewegungsraum dieser Dynamik ein, und es kann zu Spiralstraßen kommen. Eine Erhöhung der Modulationsstärke führt nicht mehr zurück in die defektfreie, kohärente Struktur, sondern in eine ungeordnete glasartige Struktur mit lokalen Oszillationen.

Bei längeren Simulationen des zweidimensionalen Swift-Hohenberg-Modells mit angekoppeltem Wirbelfeld stellt sich eine bisher in der Literatur nicht erkannte Schwäche des Modells heraus. Auf mittlerer Zeitskala weisen die Lösungen in ihren Eigenschaften große Ähnlichkeiten mit den experimentell beobachteten Konvektionsstrukturen auf. Allerdings wird in dieser Arbeit gezeigt, daß diese Ähnlichkeit nur in einem transienten Stadium besteht, und dieses Modell im Langzeitverhalten zu große Spiralen als Lösung bevorzugt. Dabei müssen die Simulationen ungefähr zehnmal länger als in den bisherigen Arbeiten durchgeführt werden, um das Langzeitverhalten zu erreichen. Bei der zusätzlich durchgeführten Simulation der Bewegungsgleichungen für thermische Konvektion tritt diese Schwäche nicht auf und die Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen bleibt auch für sehr lange Simulationszeiten erhalten.

Die in dieser Arbeit gefundenen Auswirkungen von räumlich periodischen Inhomogenitäten auf Konvektionsstrukturen wurden immer im Hinblick auf experimentell realisierbare Systeme untersucht. Aus diesem Grund wurden einige Aspekte zur periodischen Modulation, die vorwiegend auf Modellebene untersucht wurden, durch Simulation der Bewegungsgleichungen für thermische Konvektion überprüft. In den durch die Modellrechnungen vorhergesagten Parameterbereichen wurden in der Tat in der Simulation der vollen Bewegungsgleichungen Rechtecke, Domänenstreifen und eingefrorenes Spiralchaos gefunden, was die Robustheit der Phänomene und der Symmetrieargumente bestätigt. Experimente zum vorhergesagten raumzeitlichen Chaos unter periodischen, inhomogenen Bedingungen sind an der Duke-University / North Carolina (USA) im Aufbau.

Anhang A

Adam-Bashforth-Algorithmus

Ein großer Vorteil der Spektralmethoden ist, daß der lineare Anteil der Bewegungsgleichung analytisch aufintegriert werden kann, was zu einer drastischen Vergrößerung der Zeitdiskretisierung und somit zu einem enormen Geschwindigkeitsgewinn führt. Dies wird in diesem Anhang anhand einer eindimensionalen Bewegungsgleichung für ein reales Feld $u(x, t)$ erläutert.

Die Bewegungsgleichung wird in lineare und nichtlineare Terme aufgespalten:

$$\partial_t u(x, t) = \mathcal{L}u + \mathcal{N}(u, x, t) \quad (1.1)$$

Nach Fouriertransformation,

$$\tilde{u}(q, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{iqx} u(x, t), \quad (1.2)$$

lautet die Bewegungsgleichung im q -Raum:

$$\partial_t \tilde{u}(q, t) = \sigma(q) \tilde{u} + \tilde{\mathcal{N}}(u, q, t). \quad (1.3)$$

Der nichtlineare Term $\tilde{\mathcal{N}}(u, q, t)$ wird im Ortsraum berechnet und numerisch mit einer FFT transformiert. Der lineare Anteil geht in eine Multiplikation mit dem Polynom $\sigma(q)$ über. Durch Einführung eines Hilfsfelds

$$\hat{u} = e^{-\sigma t} \tilde{u} \Leftrightarrow \tilde{u} = e^{\sigma t} \hat{u}, \quad (1.4)$$

vereinfacht sich für dieses die Bewegungsgleichung zu

$$\partial_t \hat{u}(q, t) = e^{-\sigma t} \tilde{\mathcal{N}}(u, q, t). \quad (1.5)$$

Diese Gleichung wird zeitlich diskretisiert und aufintegriert:

$$\hat{u}(t + \Delta t) = \hat{u}(t) + \int_t^{t+\Delta t} dt' e^{-\sigma t'} \tilde{\mathcal{N}}(t'). \quad (1.6)$$

Die Zeitintegration über den nichtlinearen Anteil kann nicht exakt ausgeführt werden. Er wird daher als konstant im Zeitintervall Δt angenommen. Für die Berechnung des nichtlinearen Terms in der Mitte des Zeitintervalls wird ein expliziter Euler-Schritt zweiter Ordnung verwendet:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{N}}(t + \frac{\Delta t}{2}) &= \tilde{\mathcal{N}}(t) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\tilde{\mathcal{N}}(t) - \tilde{\mathcal{N}}(t - \Delta t)}{\Delta t} \\ &= \frac{3}{2}\tilde{\mathcal{N}}(t) - \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{N}}(t - \Delta t).\end{aligned}\tag{1.7}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\hat{u}(t + \Delta t) &= \hat{u}(t) + \int_t^{t+\Delta t} dt' e^{-\sigma t'} \tilde{\mathcal{N}}(t + \frac{\Delta t}{2}) \\ &= \hat{u}(t) + \tilde{\mathcal{N}}(t + \frac{\Delta t}{2}) \int_t^{t+\Delta t} dt' e^{-\sigma t'},\end{aligned}\tag{1.8}$$

und die Zeitintegration kann analytisch ausgeführt werden:

$$\begin{aligned}\hat{u}(t + \Delta t) &= \hat{u}(t) + \frac{1}{\sigma} e^{-\sigma t} (1 - e^{-\sigma \Delta t}) \\ &\quad \left(\frac{3}{2}\tilde{\mathcal{N}}(t) - \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{N}}(t - \Delta t) \right).\end{aligned}\tag{1.9}$$

Nach Rücksubstitution des Hilfsfelds ergibt sich für die Zeitintegration im q-Raum:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t + \Delta t) &= e^{\sigma \Delta t} \tilde{u}(t) + \frac{1}{\sigma} (e^{\sigma \Delta t} - 1) \\ &\quad \left(\frac{3}{2}\tilde{\mathcal{N}}(t) - \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{N}}(t - \Delta t) \right).\end{aligned}\tag{1.10}$$

Die gesamte Berechnung erfolgt also im q-Raum, lediglich die Berechnung der nichtlinearen Terme erfolgt im Ortsraum.

Anhang B

Operatoren, Projektionen und Konstanten

Dieser Anhang enthält die Darstellung der Entwicklung der Operatoren, der notwendigen Projektionen und die Zusammensetzung der Konstanten bei der Ableitung der Amplitudengleichung für die Rayleigh-Bénard-Konvektion mit geometrisch modulierter oberer Platte und zusätzlichen Temperaturmodulationen. Die einzelnen Größen sind in Abschnitt 2.2 definiert.

B.1 Linearer Zeitoperator

$$\mathcal{M}\partial_t = \mathcal{M}_0\partial_t + \epsilon^{\frac{1}{2}}(\mathcal{M}_0\partial_{T_1} + \mathcal{M}_1\partial_t) + \epsilon(\mathcal{M}_0\partial_T + \mathcal{M}_1\partial_{T_1} + \mathcal{M}_2\partial_t) + \dots \quad (2.1)$$

mit

$$\mathcal{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{P}\Delta \end{pmatrix}, \quad (2.2a)$$

$$\mathcal{M}_1 = \frac{1}{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\bar{H}_0\partial_\eta^2 \end{pmatrix}, \quad (2.2b)$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{1}{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3\bar{H}_0^2\partial_\eta^2 - 2\eta\partial_X\bar{H}_0\partial_\xi\partial_\eta \end{pmatrix}. \quad (2.2c)$$

B.2 Linearer Operator

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \epsilon^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}_1 + \epsilon\mathcal{L}_2 + \dots \quad (2.3)$$

Terme der Ordnung $\epsilon^{\frac{1}{2}}$:

$$\mathcal{L}_0 = \begin{pmatrix} -\Delta & R\partial_\xi \\ \partial_\xi & -\Delta^2 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Terme der Ordnung ϵ :

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{1a} + (\bar{H}_2 - \bar{H}_1)\mathcal{L}_{1b} + \bar{H}_0\mathcal{L}_{1c} \quad (2.5)$$

mit

$$\mathcal{L}_{1a} = \begin{pmatrix} -2\partial_\xi & R_c \\ 1 & -4\partial_\xi\Delta \end{pmatrix} \partial_X, \quad (2.6a)$$

$$\mathcal{L}_{1b} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_\xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.6b)$$

$$\mathcal{L}_{1c} = \begin{pmatrix} 2\partial_\eta^2 & -R_c\partial_\xi \\ 0 & 4\partial_\eta^2\Delta \end{pmatrix}. \quad (2.6c)$$

Terme der Ordnung $\epsilon^{\frac{3}{2}}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & \mathcal{L}_{2a} + (\bar{H}_2 - \bar{H}_1)\mathcal{L}_{2b} + \partial_X\bar{H}_1\mathcal{L}_{2c} + \partial_X\bar{H}_2\mathcal{L}_{2d} \\ & + \bar{H}_0\mathcal{L}_{2e} + \bar{H}_0^2\mathcal{L}_{2f} + \partial_X\bar{H}_0\mathcal{L}_{2g} + \bar{H}_0(\bar{H}_2 - \bar{H}_1)\mathcal{L}_{2h} \end{aligned} \quad (2.7)$$

mit

$$\mathcal{L}_{2a} = \begin{pmatrix} -\partial_X^2 & R_c\partial_\xi \\ 0 & -6\partial_\xi^2\partial_X^2 - 2\partial_\eta^2\partial_X^2 \end{pmatrix}, \quad (2.8a)$$

$$\mathcal{L}_{2b} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.8b)$$

$$\mathcal{L}_{2c} = \begin{pmatrix} \partial_\eta P_2 \partial_\xi & \eta \partial_\eta \\ 0 & \frac{1}{P}(\partial_\eta P_2 \partial_\xi \Delta - \partial_\eta^3 P_2 \partial_\xi) \end{pmatrix}, \quad (2.8c)$$

$$\mathcal{L}_{2d} = \begin{pmatrix} \partial_\eta(P_1 - P_2)\partial_\xi & (1 - \eta)\partial_\eta \\ 0 & \frac{1}{P}(\partial_\eta(P_1 - P_2)\partial_\xi \Delta - \partial_\eta^3(P_1 - P_2)\partial_\xi) \end{pmatrix}, \quad (2.8d)$$

$$\mathcal{L}_{2e} = \begin{pmatrix} 0 & -R_c \\ 0 & 8\partial_\xi\partial_\eta^2 \end{pmatrix} \partial_X, \quad (2.8e)$$

$$\mathcal{L}_{2f} = \begin{pmatrix} -3\partial_\eta^2 & -R_c\partial_\xi \\ 0 & -10\partial_\eta^4 - 6\partial_\xi^2\partial_\eta^2 \end{pmatrix}, \quad (2.8f)$$

$$\mathcal{L}_{2g} = \begin{pmatrix} 2\eta\partial_\xi\partial_\eta + \partial_\eta P_2 R_c \partial_\xi & 0 \\ -\eta\partial_\eta & 8\partial_\xi\partial_\eta^2 + 4\eta\partial_\xi\partial_\eta\Delta + \frac{R_c}{P}(\partial_\eta P_2 \partial_\xi \Delta - \partial_\eta^3 P_2 \partial_\xi) \end{pmatrix}, \quad (2.8g)$$

$$\mathcal{L}_{2h} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_\xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8h)$$

Dabei sind P_1 und P_2 die η -abhängigen Polynome (2.101). Die η -Ableitungen vor ihnen beziehen sich nur auf die Polynome selbst und nicht über die Kettenregel auf die Argumente der Operatoren.

B.3 Nichtlineare Terme

$$\vec{N}(\vec{u}, \vec{u}) = \epsilon \vec{N}_1(\vec{u}_0) + \epsilon^{\frac{3}{2}} \left(\vec{N}_{2a}(\vec{u}_0) + \vec{N}_{2b}(\vec{u}_0, \vec{u}_1) + \vec{H}_0 \vec{N}_{2c}(\vec{u}_0) \right) + \dots \quad (2.9)$$

Die ersten drei Terme, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_{2a}$ und $\vec{N}_{2b}$ sind in Abschnitt 2.1.5.2 für den unmodulierten Fall angegeben und ändern sich nicht. Neu ist der Anteil:

$$\vec{N}_{2c}(\vec{u}_0) = \begin{pmatrix} \partial_\eta \Theta_0 \partial_\xi \Phi_0 - \partial_\xi \Theta_0 \partial_\eta \Phi_0 \\ \partial_\eta \Phi_0 \left(3 \partial_\eta^2 \partial_\xi \Phi_0 + \partial_\xi^3 \Phi_0 \right) - 3 \partial_\xi \Phi_0 \partial_\eta \Delta \Phi_0 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

B.4 Projektionen

In der folgenden Liste sind die verwendeten Konstanten, die dazugehörenden Projektionen, die analytischen Werte für freie Randbedingungen und die Terme der Amplitudengleichung, in die sie mit eingehen, angegeben. Die Werte der Konstanten sind dabei auf die Konstante c_3 , d.h. den Faktor vor dem Term ϵA , normiert.

$c_1 = \langle \vec{u}_0^\dagger \vec{N}_{2a} \propto A_0 ^2 \rangle =$	$-\frac{1}{2}$	$\rightarrow$	$ A_0 ^2 A_0$
$c_2 = \langle \vec{u}_0^\dagger \vec{N}_{2a} \propto A_0^2 \rangle =$	0	$\rightarrow$	$ A_0 ^2 A_0$
$c_3 = \langle \vec{u}_0^\dagger \mathcal{L}_{2a} \vec{u}_0 \rangle =$	1	$\rightarrow$	A_0 (Normierung !)
$c_4 = \langle \vec{u}_0^\dagger \mathcal{L}_{2a} \vec{u}_0 \rangle =$	$\frac{26}{9\pi^2}$	$\rightarrow$	$\partial_X^2 A_0$
$c_5 = \langle \vec{u}_0^\dagger \mathcal{L}_{2b} \vec{u}_0 \rangle =$	$-\frac{i\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{R_c}$	$\rightarrow$	$(H_2 - H_1) \partial_X A_0$
$c_6 = \langle \vec{u}_0^\dagger \mathcal{L}_{2c} \vec{u}_0 \rangle =$	$\frac{i\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{R_c} \frac{23}{64}$	$\rightarrow$	$\partial_X H_1 A_0$
$c_7 = \langle \vec{u}_0^\dagger \mathcal{L}_{2c} \vec{u}_0 \rangle =$	$\frac{i\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{R_c} \frac{33}{64}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{P} \partial_X H_1 A_0$
$c_8 = \langle \vec{u}_0^\dagger \mathcal{L}_{2d} \vec{u}_0 \rangle =$	$-\frac{i\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{R_c} \frac{23}{64}$	$\rightarrow$	$\partial_X H_2 A_0$
$c_9 = \langle \vec{u}_0^\dagger \mathcal{L}_{2d} \vec{u}_0 \rangle =$	$-\frac{i\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{R_c} \frac{33}{64}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{P} \partial_X H_2 A_0$
$c_{10} = \langle \vec{u}_0^\dagger \mathcal{L}_{2e} \vec{u}_0 \rangle =$	$-\frac{i\sqrt{2}}{\pi} \frac{7}{9}$	$\rightarrow$	$H_0 \partial_X A_0$
$c_{11} = \langle \vec{u}_0^\dagger \mathcal{L}_{2f} \vec{u}_0 \rangle =$	$-\frac{61}{9}$	$\rightarrow$	$H_0^2 A_0$
$c_{12} = \langle \vec{u}_0^\dagger \mathcal{L}_{2g} \vec{u}_0 \rangle =$	$-\frac{i\sqrt{2}}{\pi} \frac{817}{576}$	$\rightarrow$	$\partial_X H_0 A_0$
$c_{13} = \langle \vec{u}_0^\dagger \mathcal{L}_{2g} \vec{u}_0 \rangle =$	$\frac{i\sqrt{2}}{\pi} \frac{135}{576}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{P} \partial_X H_0 A_0$
$c_{14} = \langle \vec{u}_0^\dagger \mathcal{L}_{2h} \vec{u}_0 \rangle =$	$-\frac{1}{R_c}$	$\rightarrow$	$H_0 (H_2 - H_1) A_0$
$c_{15} = \langle \vec{u}_0^\dagger \mathcal{M}_0 \vec{u}_0 \rangle =$	$-\frac{2}{3\pi^2}$	$\rightarrow$	$\partial_T A_0$
$c_{16} = \langle \vec{u}_0^\dagger \mathcal{M}_0 \vec{u}_0 \rangle =$	$-\frac{2}{3\pi^2}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{P} \partial_T A_0$

$$\begin{aligned}
c_{17} &= \langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{M}_0 \vec{g}_3 e^{iqx} \rangle = \frac{3\pi i}{\sqrt{2}} \frac{1}{R_c} \rightarrow \partial_{T_1} \propto \partial_X A_0 \\
c_{18} &= \langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{M}_0 \vec{g}_3 e^{iqx} \rangle = 0 \rightarrow \frac{1}{P} \partial_{T_1} \propto \partial_X A_0 \\
c_{19} &= \langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{M}_1 e^{iqx} \rangle = 0 \rightarrow \frac{1}{P} ((H_2 - H_1) H_0 A_0 + H_0^2 A_0) \\
c_{20} &= \langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{L}_{1b} \vec{u}_0 \rangle = \frac{1}{R_c} \rightarrow (H_2 - H_1) A_0 \\
c_{21} &= \langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{L}_{1a} \vec{g}_3 e^{iqx} \rangle = -\frac{9}{2\pi^2} \rightarrow \partial_X^2 A_0 \\
c_{22} &= \langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{L}_{1b} \vec{g}_3 e^{iqx} \rangle = 0 \rightarrow (H_2 - H_1) \partial_X A_0 \\
c_{23} &= \langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{L}_{1c} \vec{g}_3 e^{iqx} \rangle = -\frac{\sqrt{2}i}{\pi} \frac{4}{9} \rightarrow H_0 \partial_X A_0 \\
c_{24} &= \langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{L}_{1a} \vec{g}_4 e^{iqx} \rangle = \frac{\sqrt{2}i}{\pi} \frac{8}{9} \rightarrow H_0 \partial_X A_0 \\
c_{25} &= \langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{L}_{1b} \vec{g}_4 e^{iqx} \rangle = 0 \rightarrow H_0 (H_2 - H_1) A_0 \\
c_{26} &= \langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{L}_{1c} \vec{g}_4 e^{iqx} \rangle = -\frac{32}{9} \rightarrow H_0^2 A_0 \\
c_{27} &= \langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{M}_0 \vec{g}_4 e^{iqx} \rangle = \frac{16}{9\pi^2} \rightarrow \partial_{T_1} \propto H_0 A_0 \\
c_{28} &= \langle \vec{u}_0^\dagger | \mathcal{M}_0 \vec{g}_4 e^{iqx} \rangle = 0 \rightarrow \frac{1}{P} \partial_{T_1} \propto H_0 A_0 \\
c_{29} &= \langle \vec{u}_0^\dagger | \vec{g}_5 e^{iqx} \rangle = 3 \rightarrow H_0 A_0
\end{aligned}$$

B.5 Konstanten

Die Projektionen, die auf gleiche Terme in der Amplitudengleichung führen, und die Terme die aus der T_1 -Abhängigkeit sowie der Reskalierung resultieren, werden zu folgenden Konstanten zusammengefaßt:

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= -\frac{1}{c_3} (c_{15} + \frac{1}{P} c_{16}) = \frac{2}{3\pi^2} \rightarrow \partial_t A \\
\xi_0^2 &= \frac{1}{c_3} (c_4 + c_{21}) = \frac{8}{3\pi^2} \rightarrow \partial_\xi^2 A \\
g_0 &= \frac{1}{c_3} (c_1 - c_2) = -\frac{1}{2} \rightarrow |A|^2 A \\
k_1 &= \frac{1}{c_3} c_{29} = 3 \rightarrow H_0 A \\
k_2 &= \frac{1}{c_3} (c_{11} + c_{26} + h_2 c_{29}) = -\frac{7}{3} \rightarrow H_0^2 A \\
k_3 &= \frac{1}{c_3} c_{20} = \frac{1}{R_c} \rightarrow (H_2 - H_1) A \\
k_4 &= \frac{1}{c_3} (-c_{14} + c_{25} + h_2 c_{20}) = \frac{5}{3} \frac{1}{R_c} \rightarrow H_0 (H_2 - H_1) A \\
k_5 &= \frac{1}{c_3} (c_{12} + \frac{1}{P} c_{13} + h_1 c_{29} + c_{24}) = \frac{\sqrt{2}i}{\pi} \frac{271}{576} \rightarrow \partial_\xi H_0 A \\
k_6 &= \frac{1}{c_3} (c_6 + \frac{1}{P} c_7 - h_1 c_{20}) = \frac{\sqrt{2}i}{\pi} \frac{1}{R_c} \frac{5}{192} \rightarrow \partial_\xi H_1 A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_7 &= \frac{1}{c_3} (c_8 + \frac{1}{P}c_9 + h_1c_{20}) &= -\frac{\sqrt{2}i}{\pi} \frac{1}{R_c} \frac{5}{192} &\rightarrow \partial_\xi H_2 A \\
k_8 &= \frac{1}{c_3} (c_{10} + c_{23} + c_{24} + h_1c_{29}) &= \frac{2\sqrt{2}i}{3\pi} &\rightarrow H_0 \partial_\xi A \\
k_9 &= \frac{1}{c_3} (c_5 + c_{22} + h_1c_{20}) &= -\frac{2\sqrt{2}i}{3\pi} \frac{1}{R_c} &\rightarrow (H_2 - H_1) \partial_\xi A
\end{aligned}$$

Für die bessere Übersicht wurden dazu zwei Hilfst Terme definiert:

$$h_1 = \frac{1}{\tau_0} \left(c_{17} + \frac{1}{P}c_{18} \right) \quad (2.11a)$$

$$h_2 = \frac{1}{\tau_0} \left(c_{27} + \frac{1}{P}c_{28} \right) \quad (2.11b)$$

Bis auf den nichtlinearen Faktor g_0 kann die Prandtl-Zahl Abhängigkeit der Konstanten direkt abgelesen werden. Die in der Tabelle angegebenen Werte sind im Grenzfall $P \rightarrow \infty$ für freie Randbedingungen gerechnet. Die Rayleigh-Zahl tritt als reziproker Faktor bei allen Temperaturmodulationstermen auf und wird aus den Konstanten herausgezogen und in die Amplitudengleichung (2.113) geschrieben. Ebenso wurde die Imaginärkonstante i zur Verdeutlichung der Struktur aus den Konstanten herausgezogen.

Anhang C

Nusselt-Zahl und Wärmestrom im Swift-Hohenberg-Modell

Das Swift-Hohenberg-Modell kann so skaliert werden, daß das Feld u gerade den Feldern der Rayleigh-Bénard-Konvektion in Zellenmitte, d.h. ohne z -Abhängigkeit entspricht (2.103) [2]. Dann können die physikalischen Größen wie der dimensionslose konvektive Wärmestrom und die Nusselt-Zahl wie in Abschnitt 2.2.7 berechnet werden.

$$j = (Nu - 1) \frac{R}{R_c} = (1 + \epsilon) \frac{1}{L} \int_0^L dx u^2(x), \quad (3.1)$$

wobei Nu die Nusselt-Zahl ist. Diese Integration ist bei der Simulation im Ortsraum nicht exakt, sondern nur numerisch möglich und der numerische Fehler hängt von der Auflösung des Ortsraum ab. Bei der in dieser Arbeit verwendeten Spektralmethode steht zu jedem Zeitschritt auch die Darstellung im Fourierraum zur Verfügung. Die Integration über das periodische Auswertintervall kann im q -Raum exakt ausgeführt werden, und es liegt nahe, diese während der Zeitintegration dort zu berechnen. Das reelle Feld $u(x)$ berechnet sich aus den komplexen Fourierkoeffizienten $a(k)$ über

$$u(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} a(k) e^{ikx}, \quad (3.2)$$

wobei $a(-k) = a^*(k)$ gelten muß. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} Nu - 1 &= \frac{1}{L} \int_0^L dx u^2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx \left(\frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} a(k) e^{ikx} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2\pi N^2} \sum_{k_1, k_2=-N/2}^{N/2-1} a(k_1) a(k_2) \int_0^{2\pi} dx e^{i(k_1+k_2)x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi N^2} \sum_{k_1, k_2 = -N/2}^{N/2-1} a(k_1) a(k_2) 2\pi \delta(k_1 + k_2) \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{k = -N/2}^{N/2-1} a(k) a(-k) = \frac{1}{N^2} \sum_{k = -N/2}^{N/2-1} |a(k)|^2
\end{aligned}$$

einfach als Summe der Fourierkoeffizientenquadrate.

Diese Rechnung läßt sich einfach auf das zweidimensionale Swift-Hohenberg-Modell übertragen. Dort ist Die Nusselt-Zahl wie folgt definiert:

$$Nu - 1 = \frac{1}{L_x} \frac{1}{L_y} \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy u^2(x, y) \quad (3.3)$$

Die Berechnung ist hier genauso einfach wie im Eindimensionalen. Es ist lediglich zu beachten, daß die Darstellung des realen Feldes $u(x, y)$ nun durch eine 2D FFT geschieht:

$$u(x, y) = \frac{1}{N_x} \frac{1}{N_y} \sum_{k_x = -N_x/2}^{N_x/2-1} \sum_{k_y = 0}^{N_y-1} a(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)}. \quad (3.4)$$

Mit der analogen Rechnung wie oben folgt dann:

$$Nu - 1 = \frac{1}{N_x^2} \frac{1}{N_y^2} \sum_{k_x = -N_x/2}^{N_x/2-1} \sum_{k_y = 0}^{N_y-1} |a(k_x, k_y)|^2. \quad (3.5)$$

Die Nusselt-Zahl stellt somit eine besser zu berechnende Größe dar als z.B. der Maximalwert des u Felds, da die Fourierkoeffizienten alle exakt vorliegen, das Maximum aber durch eine Interpolation auf dem grob aufgelösten Ortsgitter berechnet werden muß. Der dimensionslose konvektive Wärmestrom berechnet sich dann nach (3.1).

Anhang D

Projektionsintegrale

In Abschnitt 2.3.4 wird die lineare Stabilitätsanalyse der Bewegungsgleichungen der Rayleigh-Bénard-Konvektion mit quadratischem Ausdehnungskoeffizienten und Temperaturmodulationen an beiden Platten berechnet. Bei der Elimination der z -Abhängigkeit treten dabei folgende Integrale bei der Projektion der Mode m_0 auf die Mode m auf:

Φ auf Φ	$\text{sf}_{z_1} = \int_0^1 dz \sin(m_0 \pi z) \, c \, z \partial_z f_m(z)$
$\text{ff}_{k_0} = \int_0^1 dz f_{m_0}(z) \, c \, f_m(z)$	Θ auf Θ
$\text{ff}_{d_2} = \int_0^1 dz f_{m_0}(z) \, c \, \partial_z^2 f_m(z)$	$\text{ss}_{k_0} = \int_0^1 dz \sin(m_0 \pi z) \, c \, \sin(m \pi z)$
$\text{ff}_{d_4} = \int_0^1 dz f_{m_0}(z) \, c \, \partial_z^4 f_m(z)$	$\text{ss}_{d_2} = \int_0^1 dz \sin(m_0 \pi z) \, c \, \partial_z^2 \sin(m \pi z)$
Θ auf Φ	$\text{ss}_{d_4} = \int_0^1 dz \sin(m_0 \pi z) \, c \, \partial_z^4 \sin(m \pi z)$
$\text{fs}_{k_0} = \int_0^1 dz f_{m_0}(z) \, c \, \sin(m \pi z)$	$\text{ss}_{p_1} = \int_0^1 dz \sin(m_0 \pi z) \, c \, \partial_z P_1 \sin(m \pi z)$
$\text{fs}_{k_1} = \int_0^1 dz f_{m_0}(z) \, c \, z \sin(m \pi z)$	$\text{ss}_{p_2} = \int_0^1 dz \sin(m_0 \pi z) \, c \, \partial_z P_2 \sin(m \pi z)$
Φ auf Θ	$\text{ss}_{p_3} = \int_0^1 dz \sin(m_0 \pi z) \, c \, \partial_z P_3 \sin(m \pi z)$
$\text{sf}_{k_0} = \int_0^1 dz \sin(m_0 \pi z) \, c \, f_m(z)$	
$\text{sf}_{z_0} = \int_0^1 dz \sin(m_0 \pi z) \, c \, \partial_z f_m(z)$	

wobei c eine beliebige x abhängige Funktion meint, und die P_i die Polynome aus (2.101) sind.

Literaturverzeichnis

- [1] P. Manneville, *Dissipative Structures and Weak Turbulence*, Academic Press, London 1990
- [2] M. C. Cross und P. C. Hohenberg, *Pattern formation outside of equilibrium*, *Rev. Mod. Phys.*, **65**:851 1993
- [3] P. Cladis und P. Palffy-Muhoray, Herausgeber, *Spatio-Temporal Patterns in Nonequilibrium Complex Systems*, Band XXI von *Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity*, Addison-Wesley, New York 1995
- [4] J. E. Wesfreid, H. R. Brand, P. Manneville, G. Albinet und N. Boccara, Herausgeber, *Propagation in Systems far from Equilibrium*, Springer, New York 1988
- [5] H. L. Swinney und J. P. Gollub, Herausgeber, *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, Topics in Applied Physics, Berlin 1981, Springer
- [6] P. Coulet und P. Huerre, Herausgeber, *New Trends in Nonlinear Dynamics and Pattern-Forming Phenomena: The Geometry of Nonequilibrium*, New York 1990, Plenum Press
- [7] H. Müller-Krumbhaar und W. Kurz, *Solidification*, in P. H. R. W. Cahn und E. J. Kramer, Herausgeber, *Materials Science and Technology*, S. 553, Weinheim 1991, VCH Verlagsgesellschaft
- [8] W. Zimmermann, *Pattern Formation in Electrohydrodynamic Convection*, *Mat. Res. Bulletin*, **16**:46 1991
- [9] L. Kramer und W. Pesch, *Convection instabilities in nematic liquid crystals*, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **27**:515 1995
- [10] W. Zimmermann, M. Sesselberg und F. Petruccione, *Effects of disorder in Pattern Formation*, *Phys. Rev. E*, **48**:2699 1993
- [11] R. E. Kelly und D. Pal, *Thermal convection with spatially periodic boundary conditions; resonant wavelength excitation*, *J. Fluid Mech.*, **86**:433 1978

- [12] M. Lowe, J. P. Gollub und T. Lubensky, *Commensurate and incommensurate structures in a nonequilibrium system*, *Phys. Rev. Lett.*, **51**:786 1983
- [13] M. Lowe und J. P. Gollub, *Solitons and the commensurate-incommensurate transition in a convecting nematic fluid*, *Phys. Rev. A*, **31**:3893 1985
- [14] M. Lowe, B. S. Albert und J. P. Gollub, *Convective flows with multiple spatial periodicities*, *J. Fluid Mech.*, **173**:253 1986
- [15] P. Couillet und P. Huerre, *Resonance and phase solutions in spatially-forced thermal convection*, *Physica (Nonlinear Phenomena) D*, **23**:27 1986
- [16] P. Couillet, *Commensurate-incommensurate transition in nonequilibrium systems*, *Phys. Rev. Lett.*, **56**:724 1986
- [17] P. Couillet und D. Repaux, *Strong Resonances of Periodic Patterns*, *Europhys. Lett.*, **3**:573 1987
- [18] D. A. S. Rees und D. S. Riley, *Free convection in an undulating saturated porous layer: Resonant wavelength excitation*, *J. Fluid Mech.*, **166**:503 1986
- [19] D. A. S. Rees und D. S. Riley, *The effects of boundary imperfections on convection in a saturated porous layer: Non-resonant wavelength excitation*, *Proc. R. Soc. London, A* **421**:303 1989
- [20] D. A. S. Rees und D. S. Riley, *The effects of boundary imperfections on convection in a saturated porous layer: Near-resonant wavelength excitation*, *J. Fluid Mech.*, **199**:133 1989
- [21] P. Couillet und D. Walgraef, *Spatial forcing of 2D wave patterns*, *Europhys. Lett.*, **10**:525 1989
- [22] W. Zimmermann, A. Ogawa, S. Kai, K. Kawasaki und T. Kawakatsu, *Wavelength Competition in Convective Systems*, *Europhys. Lett.*, **24**:217 1993
- [23] A. Ogawa, W. Zimmermann, K. Kawasaki und T. Kawakatsu, *Forced Periodic and Quasi-Periodic Patterns in Anisotropic Systems*, *J. Phys. II (Paris)*, **6**:305 1996
- [24] G. Hartung, F. H. Busse und I. Rehberg, *Time-Dependent Convection Induced by Broken Spatial Symmetries*, *Phys. Rev. Lett.*, **66**:2741 1991
- [25] L. Kramer, E. Ben-Jacob, H. R. Brand und M. C. Cross, *Wavelength selection in systems far from equilibrium*, *Phys. Rev. Lett.*, **49**:1891 1982
- [26] L. Kramer und H. Riecke, *Wavelength selection in Rayleigh-Bénard convection*, *Z. Physik B*, **59**:245 1985

- [27] I. Rehberg, E. Bodenschatz, B. Winkler und F. H. Busse, *Forced Phase diffusion in a convection experiment*, *Phys. Rev. Lett.*, **59**:282 1987
- [28] L. Ning, G. Ahlers und D. S. Cannell, *Wave-Number selection and Traveling Vortex Waves in Spatially Ramped Taylor-Couette Flow*, *Phys. Rev. Lett.*, **64**:1235 1990
- [29] H. Riecke und H. G. Paap, *Perfect Wave-Number Selection and Drifting Patterns in Ramped Taylor Vortex Flow*, *Phys. Rev. Lett.*, **59**:2570 1987
- [30] H. Riecke und H. G. Paap, *Spatio-Temporal Chaos through Ramp-induced Eckhaus Instability*, *Europhys. Lett.*, **14**:433 1991
- [31] W. Zimmermann und R. Schmitz, *Hopf bifurcation by frustrated drifts*, *Phys. Rev. E*, **53**:R1321 1996
- [32] L. Rayleigh, *On the dynamics of evolving fluids*, *Proc. R. Soc. London. Ser. A*, **93**:148 1916
- [33] H. Bénard, *Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportent de la chaleur par convection en regime permanent*, *Ann. Chim. Phys.*, **23**:62 1902
- [34] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford University Press, London 1961
- [35] F. H. Busse, *Transition to Turbulence in Rayleigh-Bénard Convection*, in H. L. Swinney und J. P. Gollub, Herausgeber, *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, Band 45 von *Topic in Applied Physics*, New York 1981, Springer
- [36] J. Wesfreid, Y. Pomeau, M. Dubois, C. Normand und P. Bergé, *Critical effects in Rayleigh-Bénard convection*, *J. Phys. (Paris)*, **39**:725 1978
- [37] L. A. Segel, *Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection*, *J. Fluid Mech.*, **38**:203 1969
- [38] A. C. Newell und J. A. Whitehead, *Finite bandwidth finite amplitude convection*, *J. Fluid Mech.*, **38**:279 1969
- [39] J. B. Swift und P. C. Hohenberg, *Hydrodynamic fluctuations at the convective instability*, *Phys. Rev. A*, **15**:315 1977
- [40] M. C. Cross, *Derivation of the amplitude equation at the Rayleigh-Bénard instability*, *Phys. Fluids*, **23**:1727 1980
- [41] A. C. Newell, *Envelope equations*, Lectures in Applied Mathematics, S. 157, Providence, RI 1974, American Math. Soc.

- [42] W. Schöpf und W. Zimmermann, *Convection in binary fluids: Amplitude equations, codimension-2 bifurcation, and thermal fluctuations*, *Phys. Rev. E*, **47**:1739 1993
- [43] I. Stakgold, *Green's Function and boundary value problems*, Wiley, New York 1979
- [44] R. Schmitz und W. Zimmermann, *Spatially periodic modulated Rayleigh-Bénard convection*, *Phys. Rev. E*, **53**:5993 1996
- [45] R. Schmitz, Diplom-Arbeit, RWTH Aachen 1993
- [46] M. Kofler, *Maple V Release 3, Einführung und Leitfaden für den Benutzer*, Addison-Wesley, Bonn, Paris 1994
- [47] W. Zimmermann, *Effects of Inhomogeneities in Pattern Formation*, Habilitationsschrift, RWTH Aachen (unpublished) 1994
- [48] N. W. Ashcroft und N. D. Mermin, *Solid State Physics*, Saunders College, Philadelphia 1976
- [49] W. Zimmermann und R. Schmitz, *Hopf bifurcation by frustrated drifts*, in P. Cladis und P. Palffy-Muhoray, Herausgeber, *Spatio-Temporal Patterns in Nonequilibrium Complex Systems*, S. 273, New York 1994, Addison-Wesley
- [50] W. Zimmermann und P. Fromherz, unpublished 1994
- [51] M. C. Cross und K. Kim, *Existence of a codimension-2 point at the threshold of binary-fluid convection between rigid, impermeable boundaries*, *Phys. Rev. A*, **38**:529 1988
- [52] W. Schöpf und W. Zimmermann, *Multicritical Behavior in Binary Fluid Convection*, *Europhys. Lett.*, **8**:41 1989
- [53] W. Barten, M. Lücke, M. Kamps und R. Schmitz, *Convection in binary fluid mixtures. I. Extended traveling-wave and stationary states*, *Phys. Rev. E*, **51**:5636 1995
- [54] W. Barten, M. Lücke, M. Kamps und R. Schmitz, *Convection in binary fluid mixtures. II. Localized traveling waves*, *Phys. Rev. E*, **51**:5662 1995
- [55] I. Rehberg, S. Rasenat, M. de la Torre Juárez, W. Schöpf, F. Hörner, G. Ahlers und H. Brand, *Thermally Induced Hydrodynamic Fluctuations below the Onset of Electroconvection*, *Phys. Rev. Lett.*, **67**:596 1991
- [56] A. C. Newell, T. Passot und J. Lega, *Order parameter equations for patterns*, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **25**:399 1992
- [57] H. R. Brand, P. Lomdahl und A. C. Newell, *Benjamin-Feir turbulence in convective binary fluid mixtures*, *Physica (Nonlinear Phenomena) D*, **23**:345 1986

- [58] P. Coulet, S. Fauve und E. Tirapequi, *Large scale instability of nonlinear standing waves*, *J. Phys. (Paris), Lett.*, **46**:L787 1985
- [59] W. Zimmermann, *On traveling Waves in Electrohydrodynamic Convection in Nematics*, in J. M. Coron, J. M. Ghidaglia und F. Helein, Herausgeber, *Defects, Singularities in Nematic Liquid Crystals: Mathematical and Physical Aspects*, Band 332 von NATO ASI Series C, S. 401, Dordrecht 1991, Kluwer
- [60] M. Silber, H. Riecke und L. Kramer, *Symmetry-breaking Hopf-bifurcation in anisotropic systems*, *Physica (Nonlinear Phenomena) D*, **61**:260 1992
- [61] H. Riecke, *Ginzburg-Landau equation coupled to a concentration field in binary-mixture convection*, *Physica (Nonlinear Phenomena) D*, **61**:253 1992
- [62] A. J. Simon, J. Bechhoefer und A. Libchaber, *Solitary Modes and the Eckhaus Instability in Directional Solidification*, *Phys. Rev. Lett.*, **61**:2574 1988
- [63] G. Faivre, S. deCheveigné und C. Guthmann, *Solitary tilt waves in thin lamellar eutectics*, *Europhys. Lett.*, **9**:779 1989
- [64] P. Coulet, R. Goldstein und G. H. Gunaratne, *Parity-Breaking Transition of Modulated Patterns in Hydrodynamics Systems*, *Phys. Rev. Lett.*, **63**:1954 1989
- [65] R. E. Goldstein, G. H. Gunaratne, L. Gil und P. Coulet, *Hydrodynamic and interfacial patterns with broken space-time symmetry*, *Phys. Rev. A*, **43**:6700 1991
- [66] K. Kassner und C. Misbah, *Coupling between crystalline anisotropy and spontaneous parity breaking in lamellar eutectic growth*, *Phys. Rev. A*, **45**:7372 1992
- [67] M. Neufeld und R. Friedrich, *Statistical properties of the heat transport in a model of rotating Bénard convection*, *Phys. Rev. E*, **51**:2033 1995
- [68] G. Ahlers, M. C. Cross, P. C. Hohenberg, und S. Safran, *The amplitude equation near the convective threshold: Application to time-dependent heating experiments*, *J. Fluid Mech.*, **110**:297 1981
- [69] S. Ciliberto, E. Pampaloni und C. Perez-Garcia, *Competition between different symmetries in convective systems*, *Phys. Rev. Lett.*, **61**:1198 1988
- [70] E. Bodenschatz, J. R. DeBruyn, G. Ahlers und D. S. Cannell, *Transitions between patterns in thermal convection*, *Phys. Rev. Lett.*, **67**:3078 1991
- [71] F. H. Busse, *The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle*, *J. Fluid Mech.*, **30**:625 1967

- [72] C. Canuto, M. Hassaini, A. Quarteroni und T. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin 1988
- [73] Y. Pomeau und P. Manneville, *Wavelength selection in cellular flow*, *Phys. Lett.*, **75** A:296 1980
- [74] V. A. Raghunathan, P. R. M. Murthy und N. V. Madhusudana, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, **199**:239 1991
- [75] A. Hertrich, A. Krekhov und W. Pesch, *Electrohydrodynamic Convection in Nematics: Hybrid and Tilted Alignment*, *J. Phys. (Paris) II*, **5**:733 1995
- [76] O. Ahmetshin, V. Delev und O. Scaldin, *Electrohydrodynamics of Hybrid aligned Nematics*, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, **265**:315 1995
- [77] P. G. de Gennes und J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, Clarendon, Oxford 1993
- [78] Y. Hidaka, H. Orihara und Y. Ishibashi, *The Transition from Quasi-Periodicity to Chaos in the Electro-Hydrodynamic Instability of a Nematic Liquid Crystal*, *J. Phys. Soc. Japan*, **61**:3950 1992
- [79] B. Bahadur, *LIQUID CRYSTALS, Applications and Uses*, World Scientific, Singapore 1993
- [80] M. Schadt, H. Seiberle und A. Schuster, *Optical patterning of multidomain liquid-crystal displays with wide viewing angles*, *Nature (London)*, **381**:212 1996
- [81] J. van Haaren, *Liquid crystal tilted by light*, *Nature (London)*, **381**:190 1996
- [82] S. Kai und W. Zimmermann, *Pattern Dynamics in the Electrohydrodynamics of Nematic Liquid Crystals*, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **99**:458 1989
- [83] H. Pleiner und H. R. Brand, *Hydrodynamics and Electrohydrodynamics in Liquid Crystals*, in A. Buka und L. Kramer, Herausgeber, *Pattern Formation in Liquid Crystals*, Berlin 1995, Springer
- [84] E. Bodenschatz, W. Zimmermann und L. Kramer, *On electrically driven pattern-forming instabilities in planar nematics*, *J. Phys. (Paris)*, **49**:1875 1988
- [85] W. Zimmermann und L. Kramer, *The Oblique-Roll Electrohydrodynamic Instability in Nematics*, *Phys. Rev. Lett.*, **55**:402 1985
- [86] R. Ribotta, A. Joets und L. Lei, *Oblique roll instability in an electroconvective anisotropic fluid*, *Phys. Rev. Lett.*, **56**:1595 1986

- [87] G. B. Ermentrout, *Oscillator death in populations of all-to-all coupled nonlinear oscillators*, *Physica (Nonlinear Phenomena) D*, **41**:219 1990
- [88] S. Rasenat, V. Steinberg und I. Rehberg, *Experimental studies of defect dynamics and interaction in electrohydrodynamic convection*, *Phys. Rev. A*, **42**:5998 1990
- [89] M. S. Heutmaker und J. P. Gollub, *Wave-vector field of convective flow patterns*, *Phys. Rev. A*, **35**:242 1987
- [90] G. Gunaratne, Q. Quyang und H. L. Swinney, *Pattern formation in the presence of symmetries*, *Phys. Rev. E*, **50**:2802 1994
- [91] P. C. Hohenberg und J. B. Swift, *Hexagons and rolls in periodically modulated Rayleigh-Bénard convection*, *Phys. Rev. A*, **35**:3855 1987
- [92] J. Verdasca, A. de Wit, G. Dewel und P. Brockmans, *Reentrant hexagonal Turing structures*, *Phys. Lett. A*, **168**:194 1992
- [93] H. W. Müller, *Model equations for two-dimensional quasipatterns*, *Phys. Rev. E*, **49**:1273 1994
- [94] M. Bestehorn und H. Haken, *Transient Patterns of the Convection Instability: A Model-Calculation*, *Z. Physik B*, **57**:329 1984
- [95] H. Haken, *Advanced Synergetics*, Springer, Berlin 1987
- [96] H. Greenside und W. C. Jr., *Nonlinear pattern formation near the onset of Rayleigh-Bénard convection*, *Phys. Rev. A*, **30**:398 1984
- [97] H. W. Xi, J. Vinals und J. D. Gunton, *Numerical solution of the Swift-Hohenberg equation in two dimensions*, *Physica A*, **177**:356 1991
- [98] J. Vinals, H. W. Xi und J. D. Gunton, *Numerical study of the influence of forcing terms and fluctuations near onset on the roll pattern in Rayleigh-Bénard convection in a simple fluid*, *Phys. Rev. A*, **46**:918 1992
- [99] M. Bestehorn und H. Haken, *A Calculation of transient solutions describing roll and hexagon formation in the convection instability*, *Phys. Lett. A*, **99**:265 1983
- [100] H. W. Xi, J. Vinals und J. D. Gunton, *Numerical study of pattern formation following a convective instability in non-Boussinesq fluids*, *Phys. Rev. A*, **46**:R4483 1992
- [101] S. Ciliberto, P. Coulet, J. Lega, E. Pampaloni und C. Perez-Garcia, *Defects in Roll-Hexagon Competition*, *Phys. Rev. Lett.*, **65**:2370 1990

- [102] K. A. Gorshkov, L. N. Korzinov, M. I. Rabinovich und L. S. Tsimring, *Random Pinning of Localized States and the Birth of Deterministic Disorder within Gradient Models*, *J. Stat. Phys.*, **74**:1033 1994
- [103] G. Dewel, S. Métens, M. Hilali und P. Brockmans, *Resonant Patterns through Coupling with a Zero Mode*, *Phys. Rev. Lett.*, **74**:4657 1995
- [104] M. F. Hilali, S. Métens, P. Brockmans und G. Dewel, *Pattern selection in the generalized Swift-Hohenberg model*, *Phys. Rev. E*, **51**:2046 1995
- [105] M. Assenheimer und V. Steinberg, *Observation of Coexisting Upflow and Downflow Hexagons in Boussinesq Rayleigh-Bénard convection*, *Phys. Rev. Lett.*, **76**:756 1996
- [106] G. Ahlers, L. I. Berge und D. S. Cannell, *Thermal Convection in the presence of a First-Order Phase Change*, *Phys. Rev. Lett.*, **70**:2399 1993
- [107] H. S. Greenside und M. C. Cross, *Stability analysis of two-dimensional models of three-dimensional convection*, *Phys. Rev. A*, **31**:2492 1985
- [108] W. Decker und W. Pesch, *Order parameter and amplitude equations for the Rayleigh-Bénard convection*, *J. de Physique II*, **4**:419 1994
- [109] H. S. Greenside, W. M. C. Jr. und N. L. Schryer, *Nonlinear pattern formation near the onset of Rayleigh-Bénard convection*, *Phys. Rev. Lett.*, **49**:726 1982
- [110] H. Brand, *Envelope Equations Near the Onset of a Hexagonal Pattern*, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **99**:442 1989
- [111] L. A. Segel, *The non-linear interaction of a finite number of disturbances to a layer of fluid heated from below*, *J. Fluid Mech.*, **21**:359 1965
- [112] C. Perez-Garcia, E. Pampaloni und S. Ciliberto, *Finite-Size Effects on the Transition from Hexagons to Rolls in Convective Systems*, *Europhys. Lett.*, **12**:51 1990
- [113] S. L. Schmidt und P. Ortoleva, *Electric field effects on propagating BZ waves: Predictions of an Oregonator and new pulse supporting models*, *J. Chem. Phys.*, **74**:4488 1981
- [114] H. Sevcikova und M. Mareck, *Physica (Nonlinear Science)*, **13 D**:379 1984
- [115] A. F. Münster, P. Hasal, D. Snita und M. Marek, *Charge distribution and electric field effects on spatiotemporal patterns*, *Phys. Rev. E*, **50**:546 1994
- [116] L. I. Berge, G. Ahlers und D. S. Cannell, *Thermal convection in a planar nematic liquid crystal with a stabilizing magnetic field*, *Phys. Rev. E*, **48**:3236 1993

- [117] W. Pesch und L. Kramer, *Nonlinear analysis of spatial structures in two-dimensional anisotropic pattern forming systems*, *Z. Physik B*, **63**:121 1986
- [118] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer, Berlin 1984
- [119] G. I. Sivashinsky, *Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames*, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **15**:1983 1983
- [120] M. Watzl und A. F. Münster, *Turing-like spatial patterns in a polyacrylamide-methylene blue-sulfide-oxygen system*, *Chem. Phys. Lett.*, **242**:273 1995
- [121] G. Ahlers, *Experiments on Thermally Driven Convection*, in A. Buka und L. Kramer, Herausgeber, *Pattern Formation in Liquid Crystals*, Berlin 1996, Springer
- [122] S. W. Morris, E. Bodenschatz, D. S. Cannell und G. Ahlers, *Spiral Defect Chaos in Large Aspect Ratio Rayleigh-Bénard Convection*, *Phys. Rev. Lett.*, **71**:2036 1993
- [123] M. Assenheimer und V. Steinberg, *Rayleigh-Bénard Convection near the Gas-Liquid Critical Point*, *Phys. Rev. Lett.*, **70**:3888 1993
- [124] M. Assenheimer und V. Steinberg, *Transition between spiral and target states in Rayleigh-Bénard convection*, *Nature (London)*, **367**:345 1994
- [125] E. D. Siggia und A. Zippelius, *Pattern Selection in Rayleigh-Bénard Convection near Threshold*, *Phys. Rev. Lett.*, **47**:835 1981
- [126] M. C. Cross und P. C. Hohenberg, *Spatiotemporal Chaos*, *Science*, **263**:1569 1994
- [127] L. Ning, Y. Hu und R. E. E. G. Ahlers, *Spatial and Temporal Averages in Chaotic Patterns*, *Phys. Rev. Lett.*, **71**:2216 1993
- [128] Y. Hu, R. E. Ecke und G. Ahlers, *Transition to Spiral-Defect Chaos in Low Prandtl Number Convection*, *Phys. Rev. Lett.*, **74**:391 1995
- [129] Y. Hu, R. E. Ecke und G. Ahlers, *Convection near threshold for Prandtl numbers near 1*, *Phys. Rev. E*, **48**:4399 1993
- [130] A. C. Newell, T. Passot und M. Souli, *Convection at Finite Rayleigh Numbers in Large-Aspect-Ratio Containers*, *Phys. Rev. Lett.*, **64**:2378 1990
- [131] Y. Hu, R. E. Ecke und G. Ahlers, *Behavior of Focus Patterns in Low Prandtl Number Convection*, *Phys. Rev. Lett.*, **72**:2191 1994
- [132] Y. Tu und M. C. Cross, *Chaotic Domain Structure in Rotating Convection*, *Phys. Rev. Lett.*, **69**:2515 1992
- [133] F. H. Busse, *Nonlinear properties of convection*, *Rep. Prog. Phys.*, **41**:1929 1978

- [134] R. M. Clever und F. H. Busse, *Nonlinear properties of convection rolls in a horizontal layer rotating about a vertical axes*, *J. Fluid Mech.*, **94**:609 1979
- [135] A. Schlüter, D. Lortz und F. H. Busse, *On the stability of steady finite amplitude convection*, *J. Fluid Mech.*, **23**:129 1965
- [136] F. H. Busse und R. M. Clever, *Instabilities of convection rolls in a fluid of moderate Prandtl numbers*, *J. Fluid Mech.*, **91**:319 1978
- [137] E. D. Siggia und A. Zippelius, *Dynamics of defects in Rayleigh-Bénard convection*, *Phys. Rev. A*, **24**:1036 1981
- [138] P. Manneville, *A two-dimesional model for three-dimesional convective patterns in wide containers*, *J. Phys. (Paris)*, **44**:759 1983
- [139] F. Daviaud und A. Pocheau, *Inhibition of Phase Turbulence Close to Onset of Convection by Permeable Lateral Boundary Conditions for the Mean Flow*, *Europhys. Lett.*, **9**:675 1989
- [140] A. Pocheau, *Phase dynamics attractors in an extended cylindrical convective layer*, *J. Phys. (Paris)*, **50**:2059 1989
- [141] W. Decker, W. Pesch und A. Weber, *Spiral Defect Chaos in Rayleigh-Bénard Convection*, *Phys. Rev. Lett.*, **73**:648 1994
- [142] W. Pesch, *Complex spatio-temporal convection patterns*, Preprint 1996
- [143] H. S. Greenside, M. C. Cross und W. M. C. Jr., *Mean Flows and the Onset of Chaos in Large-Cell Convection*, *Phys. Rev. Lett.*, **60**:2269 1988
- [144] H. W. Xi, J. D. Gunton und J. Vinals, *Spiral-pattern formation in Rayleigh-Bénard Convection*, *Phys. Rev. E*, **47**:R2987 1993
- [145] H. W. Xi und J. D. Gunton, *Spiral Defect Chaos in a Model of Rayleigh-Bénard Convection*, *Phys. Rev. Lett.*, **71**:2030 1993
- [146] M. Bestehorn, M. Fantz, R. Friedrich und H. Haken, *Hexagonal and spiral patterns of thermal convection*, *Phys. Lett. A*, **174**:48 1993
- [147] M. Bestehorn, M. Neufeld, R. Friedrich und H. Haken, *Comment on spiral-pattern formation in Rayleigh-Bénard convection*, *Phys. Rev. E*, **50**:625 1994
- [148] H. W. Xi und J. D. Gunton, *Spatiotemporal chaos in a model of Rayleigh-Bénard convection*, *Phys. Rev. E*, **52**:4963 1995

- [149] A. C. Newell, T. Passot, N. Ercolani und R. Indik, *Elementary and Composite Defects of Striped Patterns*, *J. Phys. II (France)*, **5**:1863 1995
- [150] M. C. Cross und Y. Tu, *Defect Dynamics for Spiral Chaos in Rayleigh-Bénard Convection*, *Phys. Rev. Lett.*, **75**:834 1995
- [151] M. C. Cross und D. I. Meiron, *Domain Coarsening in Systems Far from Equilibrium*, *Phys. Rev. Lett.*, **75**:2152 1995
- [152] M. C. Cross, D. Meiron und Y. Tu, *Chaotic Domains: A numerical investigation*, *CHAOS*, **4**:607 1994
- [153] I. Aranson, M. Assenheimer, V. Steinberg und S. Tsimring, *Large-Scale Flow and Spiral Core Instability in Rayleigh-Bénard Convection*, Preprint 1996
- [154] E. Bodenschatz, Private Mitteilung 1996

Während dieser Arbeit wurde ich von vielen Personen unterstützt und motiviert. Ihnen allen gilt mein Dank.

Herrn Professor Dr. H. Müller-Krumbhaar gilt mein besonderer Dank für die Möglichkeit an seinem Institut diese Arbeit anfertigen zu dürfen und für seine Unterstützung gerade in der Endphase der Arbeit.

Bei Herrn PD Dr. W. Zimmermann bedanke ich mich für die hervorragende und intensive Betreuung. Seine Begeisterung und Ideen haben die Arbeit weit voran gebracht. Durch seine Initiativen wurde mir die Teilnahme an vielen Konferenzen und Tagungen auch auf internationaler Ebene ermöglicht.

Für die freundliche Bereitstellung seiner Simulationsprogramme und große Hilfe beim Erlernen der Spektralmethode gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. W. Pesch.

Herrn Prof. Dr. M. Lücke danke ich für sein Interesse an dieser Arbeit und seine Unterstützung im Rahmen einer Zusammenarbeit, die sich hervorragend mit der Thematik dieser Arbeit ergänzte.

Die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) förderte diese Arbeit und ermöglichte durch viele Schwerpunkttagungen einen regen Austausch mit auf diesem Arbeitsgebiet tätigen Kollegen an den Universitäten und anderen Forschungseinrichtungen.

Den Mitarbeitern des Instituts Theorie III und der Gruppe Numerische Methoden und Datenverarbeitung des Instituts für Festkörperforschung gilt mein Dank für die angenehme Arbeitsatmosphäre. Insbesondere gilt mein Dank Frau L. Gerken für die stets optimale Bewältigung aller technischen Probleme und organisatorischen Dinge.

Vielen Dank an W. Kromen und G. Jansen für das Aufspüren der vielen kleinen Tippfehler dieser Arbeit.

Jül-3332
Dezember 1996
ISSN 0944-2952