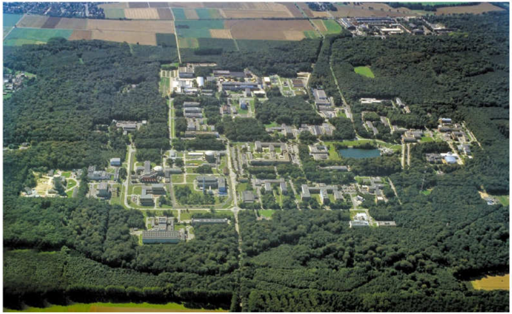


WOZU BRAUCHT MAN ABLEITUNGEN?

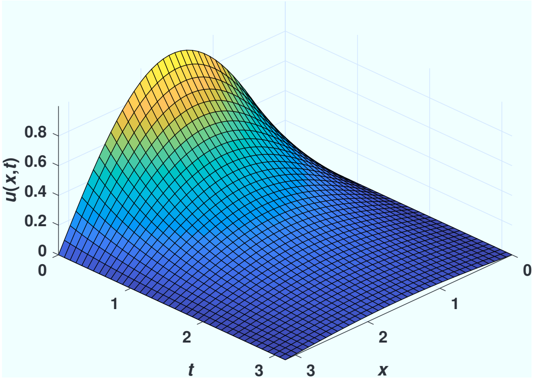
1. Tag der Mathematik | 11. Mai 2019 | Andreas Kleefeld | Jülich Supercomputing Centre

WOZU BRAUCHT MAN ABLEITUNGEN?

Wärmeleitung in einem Stab

- Länge $L = \pi$.
- Anfangstemperatur im Stab: $\sin(x)$.
- Stabenden werden auf 0 gekühlt.
- Wärmeleitkoeffizient ist 1.
- Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

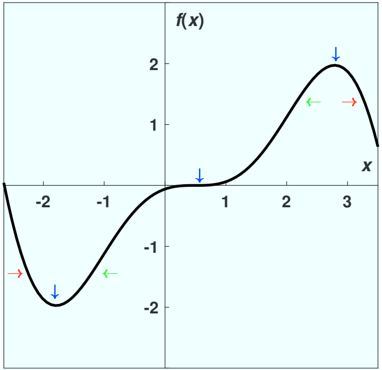


ABLEITUNG

Was ist das?

- **Ableitung** einer Funktion f an der Stelle x ist **Steigung des Graphen der Funktion** an dieser Stelle.
- Notation: $f'(x)$ oder $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$.

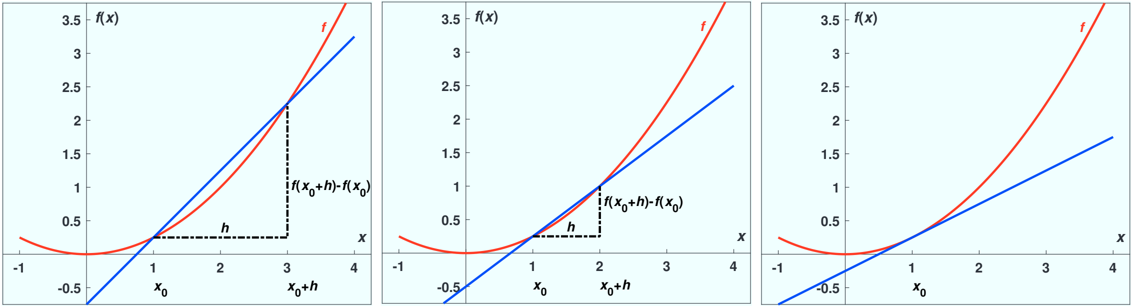
- $f'(x) > 0$: positive Steigung
- $f'(x) < 0$: negative Steigung
- $f'(x) = 0$: Steigung gleich Null



ABLEITUNG

Mathematische Definition

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ (falls Grenzwert existiert)}$$



ABLEITUNG

Berechnungsformeln

$$f(x) = x^n \quad \rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = c \cdot g(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = c \cdot g'(x)$$

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$f(x) = g(h(x)) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

ABLEITUNG

Beispiel und höhere Ableitungen

$$f(x) = x^2 + y^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2 + y^2\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2\right) \\ &= 2x + 0 = 2x \end{aligned}$$

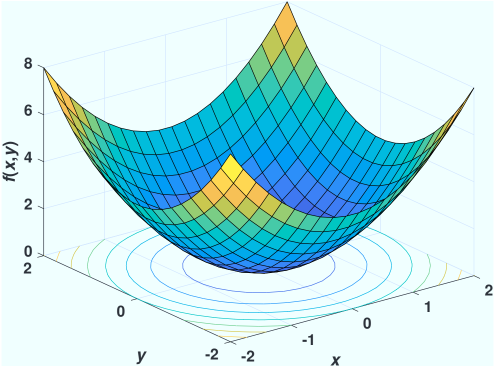
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x) = 2 \end{aligned}$$

JÜLICH Forschungszentrum   JÜLICH SUPERCOMPUTING CENTRE

PARTIELLE ABLEITUNG

Definition und Notation

- Funktion mit mehreren Variablen, Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2$.
- Ableiten nach einer bestimmten Variablen (**partielle Ableitung**).
- Hier zwei Möglichkeiten.
- Notation $f_x(x,y)$ und $f_y(x,y)$.
- Oder: $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ und $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$.
- Beispiel:



$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2\right) = 2x + 0 = 2x\,, \\
\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2\right) = 0 + 2y = 2y\,.
\end{aligned}
$$

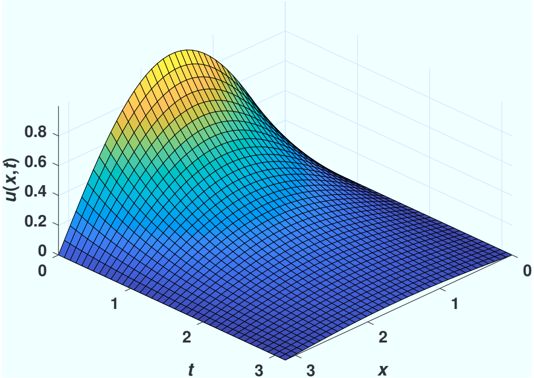
GLEICHUNG MIT PARTIELLEN ABLEITUNGEN

Diffusionsgleichung in 1D

- Wärmeleitung im Ort $x \in [0, \pi]$ über Zeit $t \in [0, T]$.

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

- Anfangsbedingung: $u(x,t) = \sin(x)\,, 0 \leq t \leq T$.
- Randbedingung: $u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, 0 \leq t \leq T$.
- Allgemeine Lösung: $u(x,t) = \exp(-\kappa t) \sin(x)$.



GLEICHUNG MIT PARTIELLEN ABLEITUNGEN

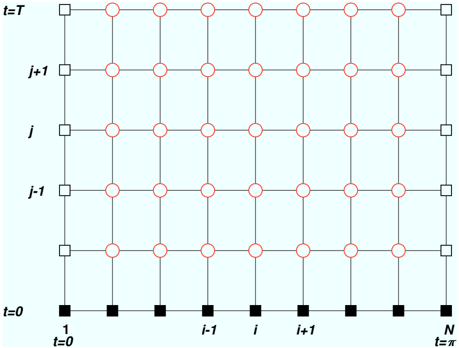
Diffusionsgleichung in 1D (numerische Lösung)

- Erzeuge Gitterpunkte im Raum: $x_i = (i-1)\Delta x\,, i = 1, \ldots, N$ mit $\Delta x = \pi/(N-1)\,.$
- In der Zeit: $t_j = (j-1)\Delta t\,, j = 1, \ldots, M$ mit $\Delta t = T/(M-1)\,.$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{(\Delta x)^2}$$

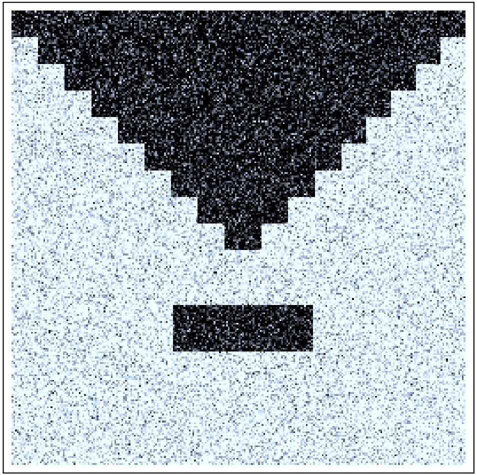
$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_j) \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}$$

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \kappa \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \left(u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j \right)$$



GLEICHUNG MIT PARTIELLEN ABLEITUNGEN

Diffusionsgleichung in 2D (Entrauschen eines Bildes)

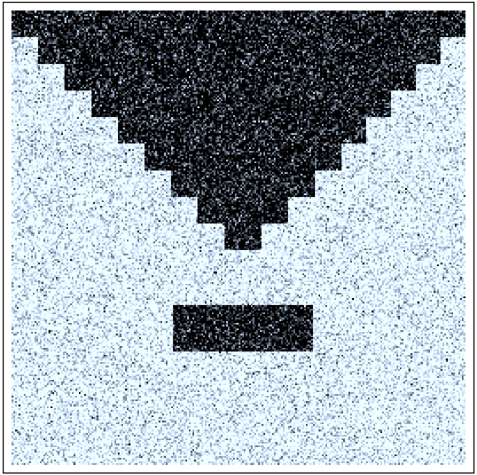


Verrauschtes Bild

Anwendung Diffusionsgleichung

GLEICHUNG MIT PARTIELLEN ABLEITUNGEN

Kohärenzverbesserte Diffusion in 2D (Entrauschen eines Bildes)



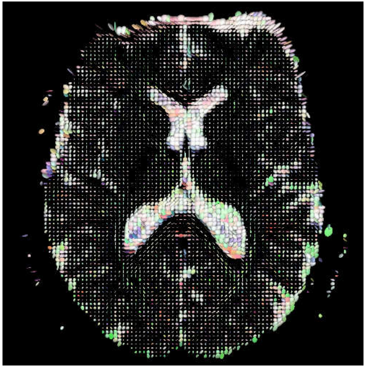
Verrauschtes Bild

Anwendung KVD

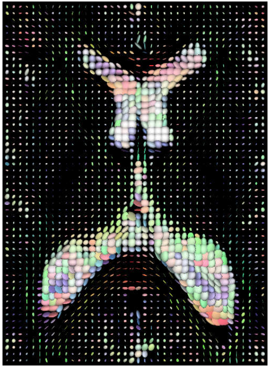
AKTUELLE FORSCHUNG

Kleiner Einblick

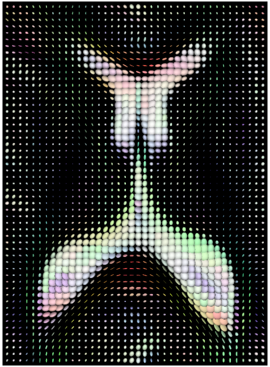
- Was wenn die Daten vektorwertig sind? Farbbilder, Satellitenbilder.
- Was wenn die Daten matrixwertig sind? DT-MRI.



Echte DT-MRI Daten



Auschnitt



MKVD

AKTUELLE FORSCHUNG

Kleiner Einblick

- Was wenn die Ableitung von folgender Form ist?

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \text{ mit } \alpha \in (0,2)$$

- Modellierung von anomaler Diffusion in 2D:

$$\frac{{}^C\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(x,y,t) = \kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y,t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y,t) \right) .$$

- Fraktionale Ableitung nach Caputo:

$$\frac{{}^C\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(x,y,t) = \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)} \int_0^t \frac{u^{(m+1)}(x,y,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m}} \, \mathrm{d}\tau$$

mit $m = \lfloor \alpha \rfloor$, $0 < \alpha < 2$ und Γ der Gammafunktion.

ABTEILUNG MATHEMATIK UND AUSBILDUNG

im Forschungszentrum Jülich GmbH, Jülich Supercomputing Centre

Leiter: Prof. Dr. Johannes Grotendorst

Gruppe: Numerische und statistische Methoden

Daniel Abele

Dr. Andreas Kleefeld

Christof Päßler

Lukas Pieronek

MEINE AUFGABEN

neben Forschung im Bereich numerische und statistische Methoden

- Lehre für *Mathematisch-technische Softwareentwickler* (MATSE) in Kombination mit dualem FH-Studium *Angewandte Mathematik und Informatik* im JSC.
- Betreuung von Bachelor- und Masterstudenten.
- Betreuung von Doktoranden in Kooperation mit der Fakultät 1 der

Brandenburgische Technische Universität Cottbus - Senftenberg

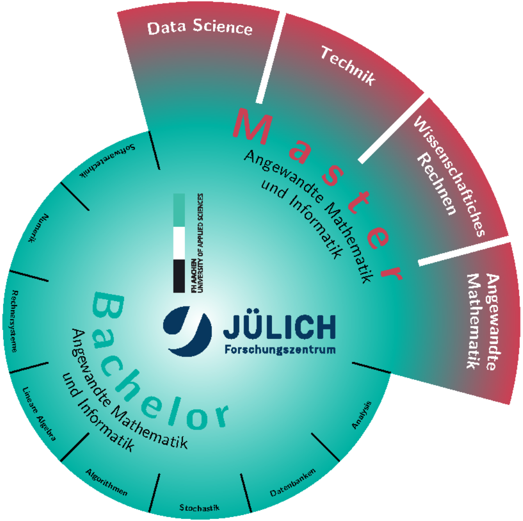
Studium und Ausbildung

Theorie und Praxis

http://www.fz-juelich.de/matse

WEITERE INFOS

http://www.fz-juelich.de/matse



JÜLICH Forschungszentrum | JÜLICH SUPERCOMPUTING CENTRE