

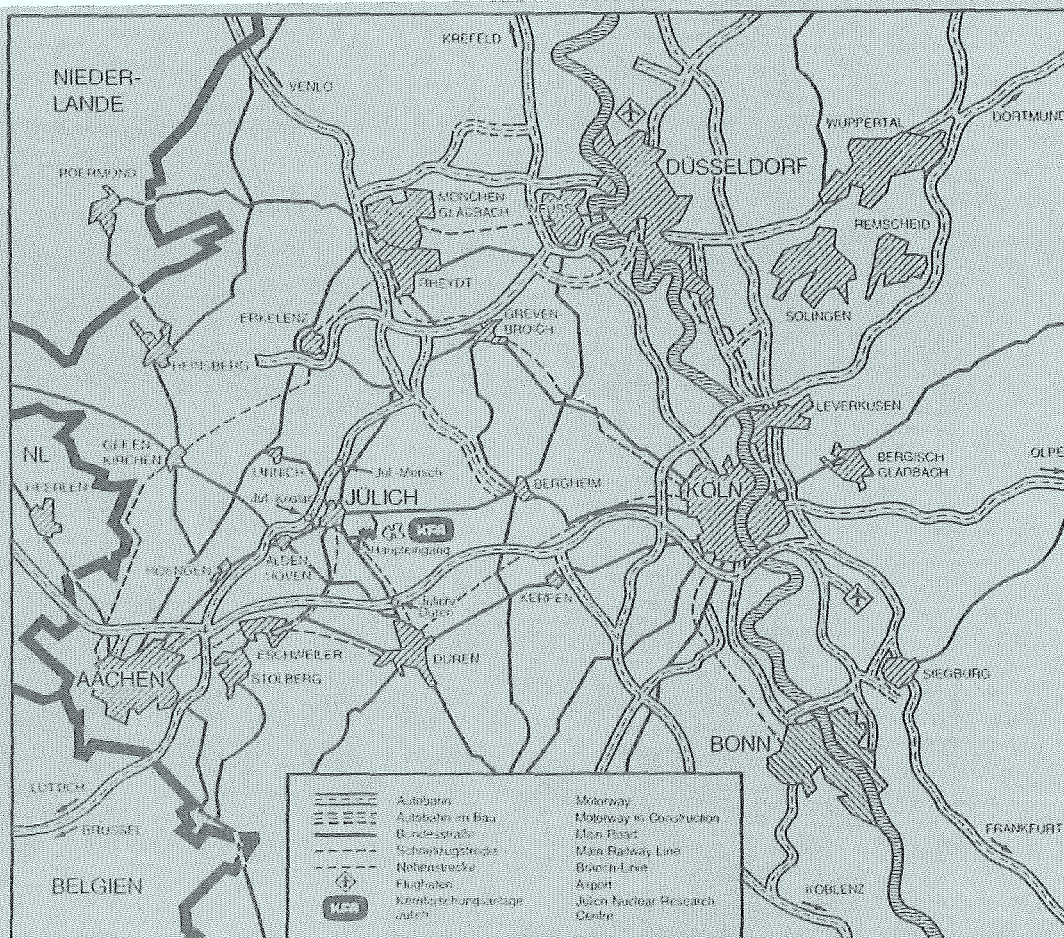


KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH GmbH
Institut für Kernphysik

**Pion-Pion- und
Pion-Kaon-Wechselwirkung
im Mesonaustauschbild**

von
Detlef Lohse

Jül-Spez-526
Oktober 1989
ISSN 0343-7639



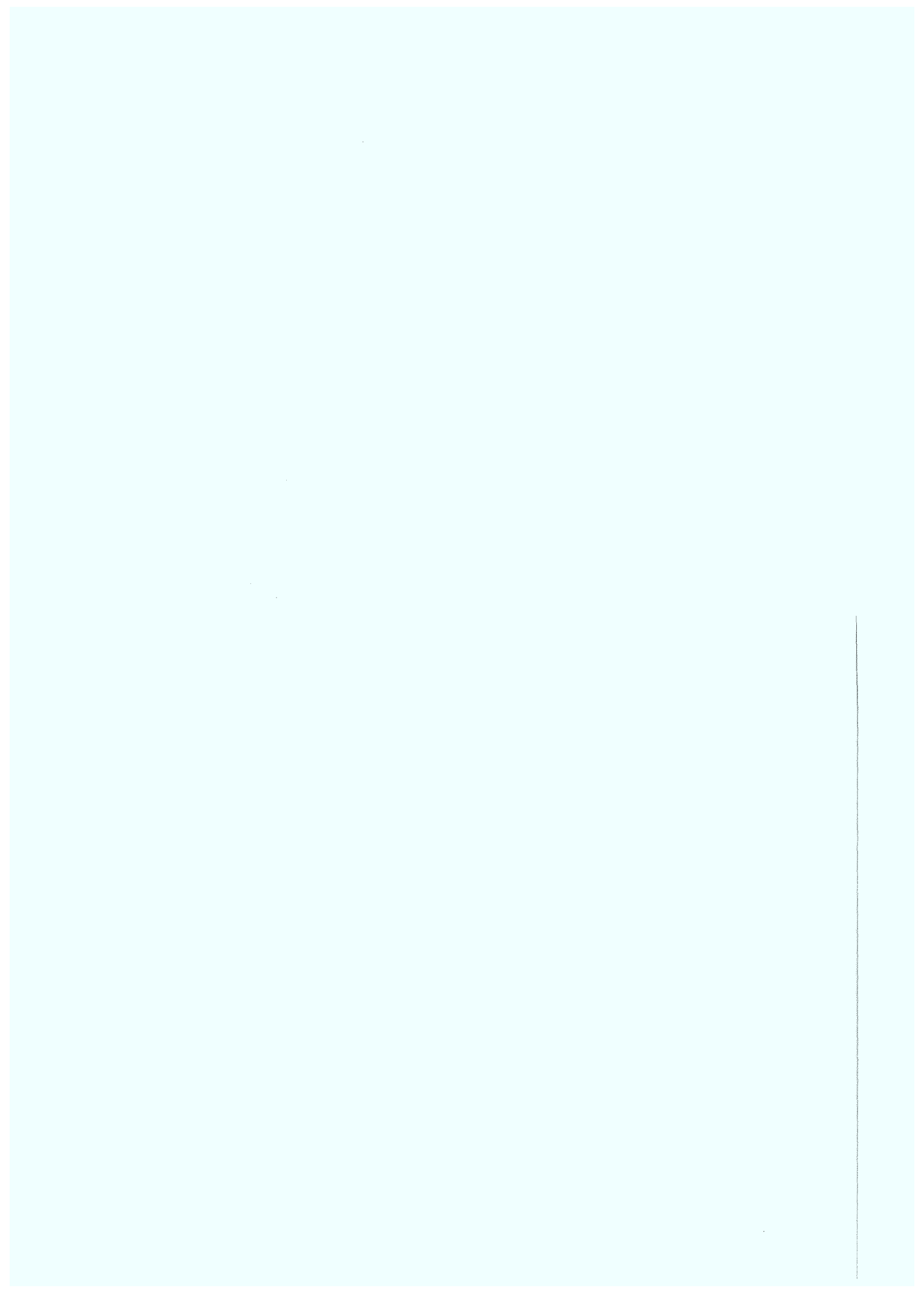
Als Manuskript gedruckt

Spezielle Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 526
 Institut für Kernphysik Jül-Spez-526

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH
 Postfach 1913 · D-5170 Jülich (Bundesrepublik Deutschland)
 Telefon: 02461/610 · Telex: 833556-0 kf d

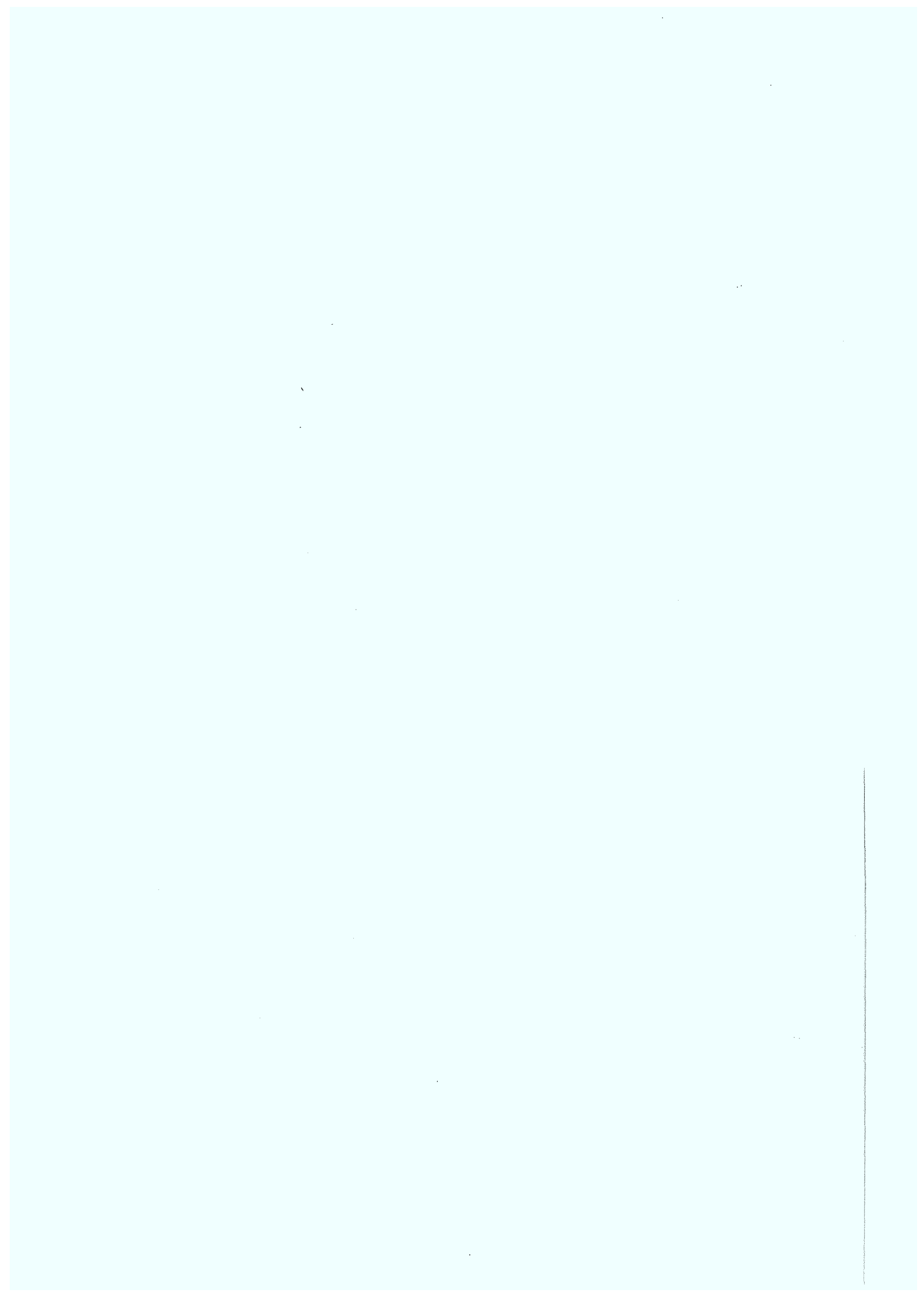
**Pion-Pion- und
Pion-Kaon-Wechselwirkung
im Mesonaustauschbild**

von
Detlef Lohse



Abstract:

Following the general line of the Bonn NN–interaction, a model for pseudoscalar–pseudoscalar meson interaction has been constructed and applied consistently to $\pi\pi$ and $K\pi$ scattering. The phases can be reproduced with vector meson t – and s –channel exchange up to 1 GeV. The bare masses of the vector mesons turn out to be in the range of 1.1 GeV, depending on the form factor. We use a coupled channel formalism, which is crucial to explain the $S^*(975)$ resonance as a bound $\bar{K}K$ state. Beyond 1 GeV the data require a pseudoscalar–pseudoscalar coupling to a scalar octet ($J^P = 0^+$) to fit the s –wave phases in the isospin–0 $\pi\pi$ and isospin– $\frac{1}{2}$ $K\pi$ channels. We apply both scalar coupling and derivative coupling. The latter avoids introducing additional degrees of freedom and produces an acceptable fit to the $J=0$ phase shift data.



INHALTSVERZEICHNIS

1. Einführung	5
1.1. Einleitende Bemerkungen	5
1.2. Das Modell im Abriß	7
2. Prinzip der Beschreibung der Wechselwirkung in der zeitgeordneten Störungstheorie	16
2.1. Herleitung der Iterationsgleichung	16
2.2. Feldtheoretische Beschreibung der Wechselwirkung	17
2.2.1. Bestimmung des freien Hamiltonoperators	18
2.2.2. Bestimmung des Wechselwirkungsanteils des Hamiltonoperators	19
2.3. Konstruktion des Pseudopotentials	21
3. Aufbau der Wechselwirkung	28
3.1. Ansatz für die Lagrangedichten und die daraus resultierenden nichtkovarianten Vertexfunktionen	28
3.2. Der $SU(3)$ -Teil der Wechselwirkung	30
3.2.1. Aufbau der Mesonen aus Quarks	30
3.2.2. Identifikation der $SU(3)$ -Zustände mit den physikalischen Mesonen	34
3.2.3. Konstruktion der $SU(3)$ -Lagrangefunktion	35
3.3. Berechnung der Pseudopotentiale	42
3.4. Symmetrieüberlegungen für identische Bosonen	51
4. Lösung der dynamischen Gleichung	56
4.1. Der coupled-channel Formalismus	56
4.2. Partialwellenzerlegung der Iterationsgleichung	58

5. Das Lee-Modell	61
5.1. Analytische Lösung der Iterationsgleichung	62
5.2. Beziehung zwischen Breite und Kopplungskonstante im Lee-Modell	67
6. Formfaktoren	73
7. Observable und Phasen	76
7.1. Experimentelle Situation	76
7.2. Parametrisierung der S-Matrix; Phasen, Inelastizitäten, Streulängen	78
7.3. Differentieller und totaler Wirkungsquerschnitt, optisches Theorem	82
8. Ergebnisse	88
8.1. Resonanzen im Lee-Modell	88
8.2. Modell I: Vektormeson OBE- und Vektormeson Polgraphen	94
8.2.1. Der skalare-isoskalare Kanal der $\pi\pi$ -Streuung	100
8.2.2. Die $\delta_J^T = \delta_1^1$ - und $\delta_J^T = \delta_2^0$ -Phasen der $\pi\pi$ -Streuung	102
8.2.3. Weitere Phasen der $\pi\pi$ -Streuung	106
8.2.4. Phasen der $K\pi$ -Streuung	106
8.3. Modell II: Addition eines $J^P = 0^+$ -Resonanzteilchens (skalare Kopplung)	109
8.4. Modell III: Addition eines $J^P = 0^+$ -Resonanzteilchens (Gradientenkopplung)	115
8.5. Einfluß weiterer Graphen	120
8.5.1. OBE-Graphen der skalaren und Tensormesonen	120

8.5.2. Das $\rho\rho$ -Boxpotential	120
8.5.3. Der $\eta\eta$ -Kanal	123
8.6. Observable	125
8.6.1. $\pi\pi$ -Fall	125
8.6.2. $K\pi$ -Fall	130
9. Zusammenfassung und Ausblick	131
Anhang A. Feldoperatoren: Definition und Hermitizität	133
A.1. Definitionen	133
A.2. Hermitizität der Feldoperatoren	137
A.3. Definitionen der Isektoren und ihrer Produkte	138
A.4. Hermitizität des SU(3)-Teils der Feldoperatoren	140
Anhang B. Konstruktion der Pseudopotentiale aus Abschnitt 2.3.	142
Anhang C. Herleitung der nichtkovarianten Vertexfunktionen	147
Anhang D. Berechnung der Pseudopotentiale im CM-System	150
Anhang E. Regularisierung des ρ -OBE-Potentials der $\pi\pi$ -Streuung	154
Anhang F. Numerische Lösung der Iterationsgleichung	156
F.1. Regularisierung des Zweiteilchenpropagators	157
F.2. Das erweiterte Haftel-Tabakin-Verfahren	159
Anhang G. Berechnung der $\rho\rho$ -Box	161

1. Einführung

1.1. EINLEITENDE BEMERKUNGEN

Es wird heute allgemein angenommen, daß die *Quantenchromodynamik* die Theorie der starken Wechselwirkung ist. Demnach ist die Wechselwirkung zwischen Hadronen prinzipiell durch die Dynamik ihrer Bestandteile, der Quarks und Gluonen, bestimmt.

Im Hochenergiebereich, in dem die Quarks asymptotisch frei sind, lassen sich die QCD-Feldgleichungen perturbativ lösen. In den Energiebereichen der Mittelenergie- und Kernphysik jedoch ist dies wegen des Quark-Confinements nicht mehr möglich. Die Forderung der QCD nach farbneutralen Quark-Gluon-Systemen gibt jedoch die Möglichkeit einer *effektiven Beschreibung* mit Hilfe der in diesen Energiebereichen relevanten Freiheitsgraden, nämlich den Baryonen und Mesonen.

Diese Überlegungen stellen heute die Grundlage der mesonentheoretischen Potentiale dar, deren Ursprünge in den Arbeiten (z.B. [1]) von Yukawa in den dreißiger Jahren liegen.

Ausgangspunkt eines solchen Modells sind Baryon-Baryon-Meson und Meson-Meson-Meson-Vertices bzw. ihre zugehörigen Wechselwirkungs-Lagrangedichten, die eine effektive Beschreibung der überaus komplizierten und mathematisch nicht mehr handhabbaren Viel-Quark- und Gluon-Austauschprozesse darstellen. Der Gültigkeitsbereich eines solchen Ansatzes ist natürlich zu kleiner werdenden Abständen hin beschränkt, dort erwartet man, daß die subhadronischen Freiheitsgrade sichtbar werden. Wo dies sein wird, ist allerdings unklar. Sicherlich wird der Gültigkeitsbereich mit der Größe der Hadronen verbunden sein, aber die Annahme einer Mesonwolke um das Hadron herum dehnt ihn möglicherweise über Abstände hinaus aus, die man naiverweise aus Messungen der Ladungs- oder Dichteverteilungen der Hadronen erwarten würde. Deswegen ist es wichtig, die Frage zu klären, *wieweit* eine konsequente Anwendung von mesonentheoretischen Modellen die empirischen Daten beschreiben kann. Der endlichen Ausdehnung der Hadronen tragen wir durch Einführung von Formfaktoren an den Vertices Rechnung.

Ein Potential, mit dem innerhalb dieses Modells eine zufriedenstellende Beschreibung der Observablen erreicht wurde, ist das Bonner Nukleon-Nukleon-Potential [2], das in den letzten Jahren auf Hadronen mit Strangeness erweitert wurde, so auf die $N\Lambda$ - und $N\Sigma$ -Streuung [3-4], sowie auf die K^+N -Streuung [5-6]. Ziel dieser Bemühungen ist eine *einheitliche* Beschreibung der Hadron-Hadron-Wechselwirkung mit *einem* Parametersatz, also Kopplungskonstanten und Formfaktoren, die auf Vertexebeane gegeben sind.

Die vorliegende Arbeit versteht sich als Fortsetzung dieser Bemühungen, indem wir das dem Bonn-Potential zugrunde liegende Konzept konsequent auf die Streuung von zwei Mesonen, speziell auf die Pion-Pion- und die Pion-Kaon-Streuung, anwenden.

Die Wechselwirkung zweier Mesonen ist von grundlegender Bedeutung für viele andere Prozesse stark wechselwirkender Teilchen. So ist seit langem bekannt [7], daß der langreichweitige Teil der $N\pi$ -Wechselwirkung im wesentlichen durch die $\pi\pi$ -Wechselwirkung bestimmt wird. Durso [8] hat mit Hilfe der empirischen $\pi\pi$ -Streuphasen ein phänomenologisches $\pi\pi$ -Potential konstruiert, wobei das off-shell Verhalten lediglich abgeschätzt wurde. Der isoskalare Anteil der Wechselwirkung wurde dabei durch ein isoskalares 0^+ -Austauschteilchen ("σ" mit $m \approx 550$ MeV) parametrisiert. Das Bonner NN-Potential [2] nimmt diese Parametrisierung zur Beschreibung des korrelierten 2-Pion-Austausches auf. Ähnliche Parametrisierungen wurden im $N\Sigma$ -, $N\Lambda$ -, NK - und im $N\bar{N}$ - Fall benutzt [3-6, 9].

Für diese Prozesse steht nun eine Pion-Pion- bzw. Pion-Kaon-Wechselwirkung mit einem sich aus der Mesonentheorie ergebendem off-shell Verhalten zur Verfügung.

Schließlich ist die Streuung zweier pseudoskalarer Mesonen für sich interessant, da sie direkt mit der Existenz der skalaren Mesonen ($J^P = 0^+$) verbunden ist. Das Oktett bzw. Nonett der skalaren Mesonen wird in einem Energiebereich von 1 GeV bzw. 1.4 GeV erwartet. Mögliche Kandidaten für das Nonett sind

$f_0(975)$, $a_0(980)$, $f_0(1400)$ und $K_0^*(1430)$. (Bezeichnungen nach [10], die alten Namen lauteten in dieser Reihenfolge S^* , δ , ϵ und κ . Wir werden beide Namen synonym verwenden.) Isgur und Weinstein [11] hingegen halten aufgrund von Quarkmodellrechnungen S^* und δ *nicht* für genuine $q\bar{q}$ -Paare, sondern für gebundene $K\bar{K}$ -"Moleküle", also für $qq\bar{q}\bar{q}$ -Zustände, in denen sich die Quarks und Antiquarks zu zwei *farbneutralen* Paaren gruppieren. Auch in unserem mesonen-theoretischen Modell wird sich S^* als ein $K\bar{K}$ -Bindungszustand ergeben.

Die Frage nach diesen Resonanzteilchen in den entsprechenden Partialwellen mit Spin $J=0$ und Isospin $T=0$ bzw. $T=\frac{1}{2}$ ist mit der möglichen Existenz von Glueballs eng verbunden. Aus einer $\delta_J^T = \delta_0^0$ -Phasenanalyse für die $\pi\pi$ -Streuung leitet Pennington [12] Hinweise für deren Existenz ab.

Wenn es sich bei S^* *nicht* um ein genuines 0^+ -Teilchen handelt, erhebt sich die Frage, in welchem Energiebereich das entsprechende 0^+ -Teilchen *dann* liegt. Ein Ergebnis dieser Arbeit ist, daß im Rahmen unseres Modells zur guten Beschreibung der Phasen δ_0^0 und $\delta_0^{1/2}$ im Energiebereich von $E_{CMS} > 1$ GeV jeweils ein skalares Resonanzteilchen mit einer physikalischen Masse von ungefähr 1.4 GeV notwendig ist. Dabei untersuchen wir zwei verschiedene Kopplungsarten für das skalare Teilchen an den pseudoskalaren Mesonenstrom. Für endgültige Aussagen ist jedoch eine Verbesserung der experimentellen Situation notwendig, weil Streudaten für $\pi\pi$ - und πK -Streuung z.Zt. nur indirekt gewonnen werden können. Voraussichtlich 1992 wird es Streumöglichkeiten mit intensiveren Hadronenstrahlen am COSY in der KFA in Jülich geben, und Experimente, die zu einer besseren $\pi\pi$ -Phasenanalyse führen sollen, sind geplant [13].

1.2. DAS MODELL IM ABRISS

Verwendete Teilchen

Bei der Konstruktion eines Modells für die Wechselwirkung zweier Pionen oder von Pion und Kaon im Rahmen von Mesonenaustauschtheorien ist eine Beschränkung

J^P	Meson	M/MeV	T	Y
0^-	π	138.03	1	0
	K	495.82	$\frac{1}{2}$	1
	\bar{K}	495.82	$\frac{1}{2}$	-1
	η	548.8	0	0
	η'	957.5	0	0
1^-	ρ	769.0	1	0
	K^*	895.0	$\frac{1}{2}$	1
	\bar{K}^*	895.0	$\frac{1}{2}$	-1
	ω	782.6	0	0
	ϕ	1020.0	0	0

Tab. 1.1.: Pseudoskalare und Vektormesonen mit ihren Quantenzahlen

auf "leichtere" Mesonen notwendig und auch sinnvoll, soweit wir in einem relativ niedrigen Energiebereich bleiben. Einigermaßen verlässliche Meßdaten liegen bis 1.5 GeV CM-Energie vor, deswegen beschränken wir uns auf Mesonen mit Massen bis zu ungefähr diesem Wert. Eine genaue Klassifikation aller von uns berücksichtigten Mesonen erfolgt im Abschnitt 3.2..

In Tab. 1.1. sind für die Mesonen unterhalb 1 GeV die über das jeweilige Isospin-Multiplett gemittelten Massen und ihre Quantenzahlen angegeben, namentlich der Spin J , die Parität P , der Isospin T und die Hyperladung Y , die im Falle der Mesonen, die eine Baryonenzahl von 0 haben, gleich der Strangeness ist.

Die $SU(3)$ -Flavor-Symmetrie ist offensichtlich bezüglich der Masse der Mesonen gebrochen. Die durch elektromagnetische Effekte nur sehr schwach gebrochene $SU(2)$ -Flavor-Symmetrie nehmen wir als exakt an.

Angekoppelte Teilchenkanäle

Betrachten wir die $\pi\pi - (K\pi-)$ Streuung, müssen wir ganz wesentlich beachten, daß andere *Teilchenkanäle* an die Eingangskanäle *angekoppelt* sein können. Denkbar wären der $K\bar{K}$ -Kanal, der $\eta\eta$ -Kanal, der $\omega\pi$ -Kanal, der $\rho\rho$ -Kanal, der $N\bar{N}$ -Kanal ... ($K^*\eta$, $K^*\rho$, $K^*\omega$, ...). Wichtig können nur diejenigen Kanäle sein, deren Öffnungsenergien $E_{CMS} = m_1 + m_2$ (m_1 und m_2 sind die Massen der Teilchen des Kanals) verhältnismäßig niedrig liegen.

Es ist allgemein anerkannt, daß bei der $\pi\pi$ -Sreuung für Energien $E_{CMS} < 1.4$ GeV lediglich der $K\bar{K}$ -Kanal eine wesentliche Rolle spielt. Er hat eine Öffnungsenergie von 992 MeV, wirkt jedoch durch die *virtuelle* Erzeugung von $K\bar{K}$ -Paaren bereits deutlich früher. Der $\omega\pi$ -Kanal wird als weniger wichtig angesehen. Obwohl ihm die geringere Öffnungsenergie von 921 MeV zukommt, wird er experimentell in den für uns relevanten Energiebereichen kaum beobachtet [14]. Er wirkt nur im Isospin-1 Kanal, der von der ρ -Resonanz dominiert wird, und hat keinen Einfluß auf die Phase der $\pi\pi$ -Sreuung mit der interessantesten Struktur, nämlich die δ_0^0 -Phase, der das größte Augenmerk der meisten Untersuchungen gilt [15-23]. Wir werden den $\omega\pi$ -Kanal nicht berücksichtigen. — Die Wirkung des $\eta\eta$ -Kanals (1098 MeV) untersuchen wir; sie stellt sich als klein heraus. Den $\rho\rho$ -Kanal berücksichtigen wir nur teilweise, indem wir den Prozeß $\pi\pi \rightarrow \rho\rho \rightarrow \pi\pi$ (jeweils mit π -Austausch) berechnen, die Wechselwirkung zwischen den ρ -Mesonen untereinander jedoch vernachlässigen (sog. Box-Diagramm). Eine vollständige Behandlung auch dieses Kanals würde den Aufwand erheblich vergrößern, weil das ρ -Meson spinbehaftet ist (Anhang G).

Im Falle der $K\pi$ -Sreuung koppeln wir keinen weiteren Kanal an, weil die in Frage kommenden erst im Bereich höherer Energien wichtig werden können oder die Kopplung an sie schwach ist (z.B. ηK -Kanal).

Wahl der Basis

Die von uns ausschließlich berücksichtigte starke Wechselwirkung erhält den Isospin. Es bietet sich also an, alle Rechnungen in der *Isospinbasis* durchzuführen, in der Potential und T-Matrix diagonal sind, und erst ganz am Ende in die Teilchenbasis zu transformieren, um mit den Observablen vergleichen zu können.

Bei der $\pi\pi$ -Streuung gibt es die drei Isospinkanäle $T = 0, 1, 2$, wobei der $K\bar{K}$ -Teilchenkanal natürlich nur an die Isospinkanäle mit $T=0$ oder $T=1$ ankoppeln kann. Die $K\pi$ -Streuung erfolgt in den Isospinkanälen $T=\frac{1}{2}$ und $T=\frac{3}{2}$.

Pol- und OBE-Graphen

Gegenüber der Baryon-Baryon-Streuung tritt bei der Meson-Meson-Streuung nun die Komplikation auf, daß einige Partialwellen durch Resonanzen dominiert werden, was dem Prozeß $MM \rightarrow R \rightarrow MM$ entspricht (M =Meson, R =Resonanz).

Wir berücksichtigen bei der $\pi\pi - (K\pi)$ Streuung die ρ -, $f_2(1270)$ - und $f_0(1400)$ - (K^* -, $K_0^*(1424)$ -) Resonanzen explizit als Polgraphen, die in den durch die Quantenzahlen bestimmten Phasen wirken ($\delta_J^T = \delta_1^1, \delta_2^0, \delta_0^0$ bzw. $\delta_J^T = \delta_1^{1/2}, \delta_0^{1/2}$ der Reihenfolge nach). Graphisch wird ein *Polgraph* wie in Fig 1.1.a dargestellt.

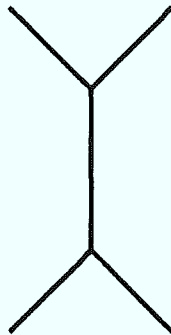


Fig. 1.1.a) Polgraph

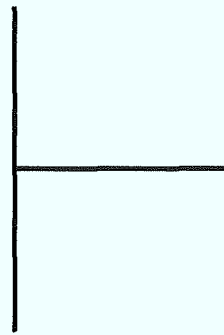


Fig.1.1.b) OBE-Graph

In Fig. 1.1.b stellen wir einen Ein-Meson-Austauschgraphen (*OBE-Graph* für One Boson Exchange) dar. Wir berücksichtigen stets den ρ -Austausch ($\pi\pi \rightarrow \pi\pi, K\pi \rightarrow K\pi, \bar{K}K \rightarrow \bar{K}K$) und den K^* -Austausch ($\pi\pi \rightarrow \bar{K}K, K\pi \rightarrow \pi K$). Bei dem Prozeß $\bar{K}K \rightarrow \bar{K}K$ ist zusätzlich noch ω - und ϕ -Austausch möglich. ϵ -, κ - und f_2 -Austausch spielen wegen ihrer großen Massen keine Rolle.

Alle diese Prozesse, zusammenfassend dargestellt in Fig. 1.2., definieren uns das sogenannte *Pseudopotential*. Es sei ausdrücklich bemerkt, daß für eine zufrie-

denstellende Beschreibung aller Phasen Pol- und OBE-Graphen notwendig sind. Wie jede feldtheoretisch motivierte Vorgehensweise bedingt dies eine Verletzung der *Dualität*, die aber kein Naturgesetz ist, sondern lediglich eine Eigenschaft dualer Modelle [24]. Sie haben sich im Hochenergiebereich bewährt; im Niederenergiebereich jedoch können sie die *Struktur* der Wirkungsquerschnitte *nicht* wiedergeben [25].

Iteration der Graphen, TOPT

Die Dynamik einer relativistischen Theorie wird durch die Bethe-Salpeter-Gleichung [26]

$$T(p', p) = K(p', p) + \int d^4q K(p', q)G(p', p, q)T(q, p) \quad (1.1)$$

beschrieben, wobei der Integralkern $K(p', p)$ *alle irreduziblen Prozesse* beliebiger Ordnung umfaßt. Dies macht eine exakte Lösung unmöglich. $T(p', p)$ ist die Übergangsmatrix und $G(p', p, q)$ der Zweiteilchenpropagator.

Die gebräuchlichen Näherungsmethoden zur Lösung der Bethe-Salpeter-Gleichung sind der von Blanckenbecler und Sugar [27] beschrittene Weg (siehe z.B. auch [28]) oder die zeitgeordnete Störungstheorie (TOPT für time ordered perturbation theory) [29–31]. Beide Methoden überführen die vierdimensionale Integralgleichung in eine dreidimensionale und ersetzen in erster Näherung den Integralkern K durch das Pseudopotential V , das i.a. nur die irreduziblen Diagramme 2. Ordnung umfaßt. Die vollständige Wechselwirkung wird dann durch Iteration aus dem Pseudopotential aufgebaut:

$$T(\vec{p}', \vec{p}) = V(\vec{p}', \vec{p}) + \int d^3q V(\vec{p}', \vec{q})G(\vec{p}', \vec{p}, \vec{q})T(\vec{q}, \vec{p}) \quad (1.2)$$

Wir werden wie im NN-Fall [2] von der zeitgeordneten Störungstheorie im Impulsraum Gebrauch machen, die es auf einfache Weise ermöglicht, sämtliche Nichtlokalitäten und Retardierungseffekte zu berücksichtigen. Zudem vermeidet diese Methode Vieldeutigkeiten, wie sie bei der Reduktion der vierdimensionalen Bethe-Salpeter-Gleichung auf die dreidimensionale Blanckenbecler-Sugar-Gleichung durch willkürliche Wahl der Energiekomponente entstehen.

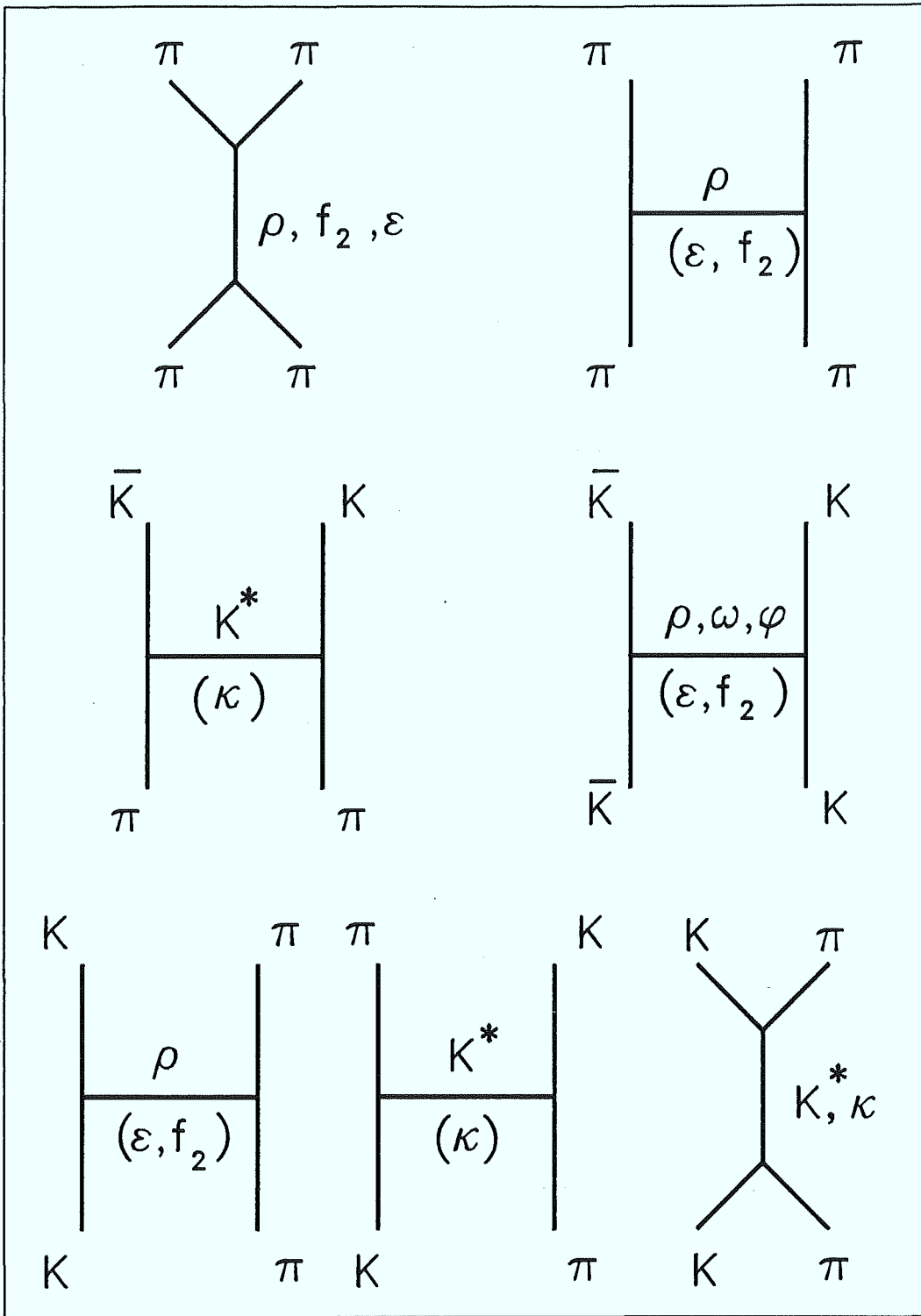


Fig. 1.2.: Berücksichtigte Graphen der $\pi\pi$ - und $K\pi$ -Wechselwirkung. Falls das Meson im Zwischenzustand eingeklammert ist, spielt der entsprechende Graph praktisch keine Rolle.

Andererseits wächst die Anzahl der zeitgeordneten Graphen sehr stark; für einen kovarianten Graphen n -ter Ordnung sind es bereits $n!$ [32]. Durch die daraus resultierende Notwendigkeit, die Auswahl der zeitgeordneten Graphen, die den Integralkern der Lippmann-Schwinger ähnlichen Gleichung konstituieren sollen, zu beschränken, geht die Kovarianz zwingend verloren. Daß die vernachlässigten Graphen nur kleine Beiträge liefern, wurde bei der NN-Streuung gezeigt [33].

Eine graphische Darstellung eines möglichen Beitrages zur T-Matrix der $\pi\pi$ -Streuung zeigt Fig. 1.3..

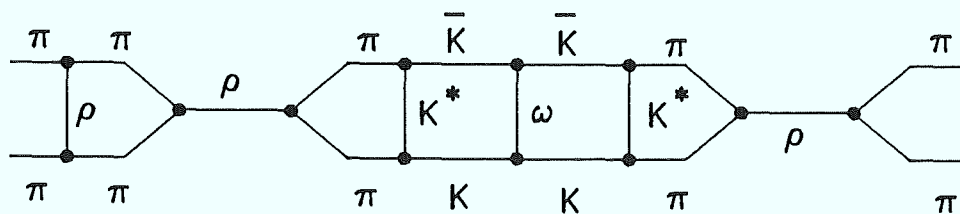


Fig. 1.3.: Möglicher Beitrag zur $\pi\pi$ -Streuung

Polgraph und physikalische Resonanz

Auf Ebene des Pseudopotentials liegt der Pol des Graphen der Fig. 1.1.a bei der *nackten* Masse m^0 . Die Iteration verschiebt ihn zur *physikalischen* Masse m , und die Resonanz erhält eine Breite Γ . m^0 wird so gewählt, daß die Lage der entstehenden Resonanz mit der experimentell beobachteten übereinstimmt und ist somit *modellabhängig*, hängt also beispielsweise von den berücksichtigten Graphen oder dem Formfaktor ab.

Falls nur das Pseudopotential des Polgraphen iteriert wird, so können m^0 und die Resonanzbreite Γ in Abhängigkeit von m mit dem Lee-Modell streng berechnet werden. Dies ist nicht mehr möglich, sobald wir auch OBE-Graphen im Pseudopotential berücksichtigen, die im Impulsraum nicht separabel sind. Die Festlegung von m^0 muß dann auf numerische Weise erfolgen.

Alle Mesonen wirken sowohl im t -Kanal (OBE-Graph) als auch im s -Kanal (Polgraph). Bei den (im Verhältnis zu den skalaren und Tensormesonen) verhältnismäßig leichten Vektormesonen sind *beide* Beiträge wichtig. Bei einem Austauschprozeß mit einem bezüglich der starken Wechselwirkung instabilen Meson (z.B. $\rho \rightarrow \pi\pi$) als Austauschteilchen kann dieses nun virtuell in seine Zerfallsprodukte zerfallen und sich wieder neu aus ihnen bilden. Deswegen ist es sinnvoll, den Austausch des Mesons mit der *physikalischen* Masse m anzunehmen.

Kopplungskonstanten

Um die Anzahl der zunächst freien Kopplungsparameter zu reduzieren, nehmen wir an, daß die $SU(3)$ -Symmetrie für die *Kopplungskonstanten* exakt erfüllt ist. Dadurch sind die Kopplungskonstanten für die Mesonen eines Oktetts miteinander verbunden. Vergleicht man das Verhältnis der sich im Lee-Modell aus den experimentellen Breiten von ρ und K^* ergebenden Kopplungskonstanten $g_{\pi\pi\rho}$ und $g_{\pi KK^*}$ mit dem $SU(3)$ -Symmetriewert, so stellt man fest, daß diese Annahme sehr gut erfüllt ist.

Wir gehen für die Kopplung dieses leichtesten und damit für uns wichtigsten Vektormesonen-Oktetts an den pseudoskalaren Mesonenstrom sowohl bei der $\pi\pi$ - als auch bei der $K\pi$ -Streuung von $g_{\pi\pi\rho}$ aus. Im reinen Lee-Modell folgt $G_\rho = \frac{g_{\pi\pi\rho}^2}{4\pi}$ aus $\Gamma_\rho = 153$ MeV zu $G_\rho = 2.94$. Da wir jedoch zusätzlich Austauschprozesse berücksichtigen, die in den meisten von uns betrachteten Fällen auf die Resonanz verbreiternd wirken, müssen wir diesen Wert reduzieren ($G_\rho = 2.1$).

Eine konsequente Durchführung des $SU(3)$ -Symmetriekonzeptes bedeutet, daß wir die Mesonen zunächst nur nach ihren Quantenzahlen J^P unterscheiden. Anders ausgedrückt: Die Mesonen eines Oktetts betrachten wir als identische Teilchen, die lediglich durch innere Freiheitsgrade (Hyperladung Y , Isospin T und seine dritte Komponente T_Z) unterschieden werden. Unterhalb von 1.4 GeV haben wir dann nur zwischen vier Mesonen zu unterscheiden: Dem pseudoskalaren Meson P ($J^P = 0^-$), dem Vektormeson V ($J^P = 1^-$), dem skalaren Meson S ($J^P = 0^+$) und dem Tensormeson T ($J^P = 2^+$).

Neben Y , T und T_Z sind der Impuls \vec{p} und die Helizität λ (bzw. die dritte Komponente des Spins, falls vorhanden) weitere innere Freiheitsgrade dieser vier Mesonen.

Wenn wir die oben betrachteten Prozesse berücksichtigen wollen, reichen somit zur Definition der Wechselwirkung drei Wechselwirkungs-Lagrangedichten aus, die den grundlegenden Ausgangspunkt des Modells darstellen:

$$\mathcal{L}_{PPS}, \mathcal{L}_{PPV} \text{ und } \mathcal{L}_{PPT}.$$

In den folgenden Kapiteln 2 – 7 erläutern wir das Modell im Detail:

Ohne die Gestalt des Wechselwirkungsoperators W zu konkretisieren, legen wir in Kapitel 2 die Prinzipien der zeitgeordneten Störungstheorie dar.

Kapitel 3 hat die Berechnung der relevanten Pseudopotentiale aus den Lagrangedichten zum Ziel.

In Kapitel 4 (und Anhang F) geben wir eine Lösungsmethode für die Iterationsgleichung an.

Das Lee-Modell wird in Kapitel 5 behandelt. Auch wenn wir in unserem Modell zusätzlich komplexere Prozesse berücksichtigen, so erlaubt es doch eine Abschätzung für die Kopplungskonstanten.

In Kapitel 6 beschäftigen wir uns mit den Formfaktoren und in Kapitel 7 schließlich damit, wie man aus der T-Matrix Observable und Phasenverschiebungen bestimmt.

Längere Rechnungen sind in den Anhang "verbannt", um die Lesbarkeit der Arbeit zu erhöhen. Gleiches gilt für Definitionen und Konventionen.

Unsere Ergebnisse im Vergleich mit dem Experiment stellen wir in Kapitel 8 vor, und Kapitel 9 gibt Zusammenfassung und Ausblick.

2. Prinzip der Beschreibung der Wechselwirkung in der zeitgeordneten Störungstheorie

In diesem Kapitel wollen wir die Prinzipien der zeitgeordneten Störungstheorie darlegen.

Zunächst werden wir eine Iterationsgleichung vom Lippmann–Schwinger–Typ herleiten (Abschnitt 2.1.). Mit den Methoden der *Vielteilchentheorie* entwickeln wir dann in den Abschnitten 2.2. und 2.3. eine näherungsweise Lösung für sie.

2.1. HERLEITUNG DER ITERATIONSGLEICHUNG

Eine allgemeine Theorie der Wechselwirkung geht aus von folgender (relativistischer) Wellengleichung:

$$(H_0 + W) |\psi\rangle = E |\psi\rangle, \quad (2.1)$$

wobei H_0 der freie Hamilton–Operator und W ein zunächst völlig beliebiger Wechselwirkungsoperator ist. $|\psi\rangle$ ist ein Mehrteilchenzustand.

Faßt man $W|\psi\rangle$ als Inhomogenität in einer Operatorgleichung auf,

$$(E - H_0) |\psi\rangle = W |\psi\rangle, \quad (2.2)$$

erhält man die allgemeine Lösung für $|\psi\rangle$ formal durch Addition der partikulären Lösung und der Lösung $|\phi\rangle$ der freien Gleichung:

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} W |\psi\rangle. \quad (2.3)$$

$G_0 = \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon}$ ist der Propagator oder die Greenfunktion.

Wir definieren die Übergangsmatrix T , die die gesamte Information über den Streuvorgang enthält, wie folgt:

$$\langle \phi_f | T | \phi_i \rangle := \langle \phi_f | W | \psi \rangle \quad (2.4)$$

Durch Anwendung des Operators W auf Gl. (3) — die Lippmann-Schwinger-Gleichung für die Wellenfunktion $|\psi\rangle$ — erhält man die Lippmann-Schwinger-Gleichung für die T-Matrix:

$$T = W + W \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} T \quad (2.5)$$

Ziel der Theorie muß es sein, aus einem Ansatz für W die T-Matrix zu bestimmen und daraus Observable, die mit den experimentellen Daten verglichen werden können.

2.2. FELDTHEORETISCHE BESCHREIBUNG DER WECHSELWIRKUNG

Grundlage jeder Feldtheorie ist die Lagrangedichte \mathcal{L} , die eine Funktion der Feldoperatoren der beteiligten Teilchen ist, in unserem Fall der pseudoskalaren Mesonen ϕ_P , der Vektormesonen ϕ_V^μ , der skalaren Mesonen ϕ_S und der Tensormesonen $\phi_T^{\mu\nu}$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_P, \phi_P^\dagger, \partial_\mu \phi_P, \partial_\mu \phi_P^\dagger, \dots) \quad (2.6)$$

Die Feldoperatoren für die freien Teilchen sind in Anhang A angegeben.

Die Lagrangedichte spalten wir in einen freien und in einen Wechselwirkungsanteil auf:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{WW}. \quad (2.7)$$

Dieselbe Aufspaltung überträgt sich auf den Hamiltonoperator, der mit der Lagrangedichte über eine Legendretransformation verbunden ist:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left\{ \dot{\phi}_P \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_P} + \dot{\phi}_P^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_P^\dagger} + \dots - \mathcal{L} \right\} \Big|_{t=0} \\ &= H_0 + W \end{aligned} \quad (2.8)$$

Wir behandeln zunächst den freien Hamiltonoperator H_0 , und zwar nur für die pseudoskalaren bzw. skalare Mesonen. Das Ergebnis Gl. (13) ist für alle Mesonen dasselbe, ihr jeweiliger freier Lagrangian \mathcal{L}_0 wird jedoch anders aussehen.

2.2.1. BESTIMMUNG DES FREIEN HAMILTONOPERATORS

Die freie Lagrangedichte \mathcal{L}_0 für (pseudo)skalare Teilchen ϕ der Masse m lautet:

$$\mathcal{L}_0 = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger - m^2 \phi \phi^\dagger \quad (2.9)$$

Mit der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \partial_\mu \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \phi} \quad (2.10)$$

ergibt sich aus Gl. (9) die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0, \quad (2.11)$$

deren allgemeine Lösung der in Anhang A dargestellte Feldoperator ϕ ist.

Aus der freien Lagrangedichte für das Vektormeson ergäbe sich die Proca-Gleichung.

Berechnet man mit Gl. (8) und Gl. (9) den freien Hamilton-Operator H_0 , so erhält man nach partieller Integration und unter Ausnutzung der Klein-Gordon-Gleichung Gl. (11) :

$$H_0 = \int d^3x \{ \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} - \phi^\dagger \ddot{\phi} \} \quad (2.12)$$

Einsetzen der freien Lösung ϕ führt mit den Vertauschungsrelationen Gl. (A.5) für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zu [34]:

$$H_0 = \sum_\alpha \omega_\alpha a_\alpha^\dagger a_\alpha$$

ω_α ist die Teilchenenergie. Außer bei TOPT Polgraphen ist bereits die renormierte Masse (Energie) gemeint. Zur Unterscheidung von bare und dressed masses siehe Kap. 5. Erweitern wir auf Mesonen aus verschiedenen Multipletts, so erhalten wir:

$$H_0 = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} + \sum_{\beta} \omega_{\beta} b_{\beta}^{\dagger} b_{\beta} + \dots, \quad (2.13)$$

wobei wir folgende Bezeichnungen einführen:

a_{α} :	pseudoskalare Mesonen,	$J^P = 0^{-}$
b_{α} :	Vektormesonen,	$J^P = 1^{-}$
c_{α} :	skalare Mesonen,	$J^P = 0^{+}$
d_{α} :	Tensormesonen,	$J^P = 2^{+}$

2.2.2. BESTIMMUNG DES WECHSELWIRKUNGSANTEILS DES HAMILTONOPERATORS

Völlig analog gehen wir für den Wechselwirkungsanteil W des Hamiltonoperators vor:

Läßt man pseudoskalar- pseudoskalar- Vektormeson- (Tensormeson-, ...) Vertices zu, dann läßt sich W wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} W = & \sum_{\alpha\beta\gamma} W_{\alpha\beta\gamma}^1 a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} b_{\gamma} + W_{\alpha\beta\gamma}^2 a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} b_{\gamma}^{\dagger} + \\ & W_{\alpha\beta\gamma}^3 a_{\alpha} a_{\beta}^{\dagger} b_{\gamma}^{\dagger} + W_{\alpha\beta\gamma}^4 a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} b_{\gamma}^{\dagger} + \\ & W_{\alpha\beta\gamma}^5 a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} b_{\gamma} + W_{\alpha\beta\gamma}^6 a_{\alpha} a_{\beta}^{\dagger} b_{\gamma}^{\dagger} + \\ & W_{\alpha\beta\gamma}^7 a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} b_{\gamma}^{\dagger} + W_{\alpha\beta\gamma}^8 a_{\alpha} a_{\beta} b_{\gamma} + \\ & W_{\alpha\beta\gamma}^{\prime 1} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} c_{\gamma} + \dots \\ & (\text{dito mit } c_{\gamma} \text{ und } d_{\gamma}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die $W_{\alpha\beta\gamma}^i$ nennen wir nichtkovariante Vertexfunktionen. Sie werden aus der Wechselwirkungs-Lagrangedichte \mathcal{L}_{WW} nach

$$W = \int d^3x \left\{ \dot{\phi}_P \frac{\partial \mathcal{L}_{WW}}{\partial \dot{\phi}_P} + \dot{\phi}_P^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}_{WW}}{\partial \dot{\phi}_P^\dagger} + \dots - \mathcal{L}_{WW} \right\} \Big|_{t=0} \quad (2.15)$$

bestimmt.

Im Rahmen des Bonn-Potentials werden die ersten beiden Summanden weggelassen.† Gl. (15) vereinfacht sich deswegen zu:

$$W = - \int d^3x \mathcal{L}_{WW} \Big|_{t=0} \quad (2.16)$$

\mathcal{L}_{WW} ist der grundlegende Ausgangspunkt der Theorie. In dieser Wechselwirkungs-Lagrangedichte parametrisieren wir die Viel-Quark-Gluon-Wechselwirkung durch die Mesonenfelder. Mögliche Ansätze für \mathcal{L}_{PPS} , \mathcal{L}_{PPV} ... stellen wir in Abschnitt 3.1. vor.

Die Invarianzen von \mathcal{L}_{WW} gegenüber bestimmten Symmetrietransformationen übertragen sich durch Gl. (16) auf den Wechselwirkungs-Hamiltonian W . Weil H und damit auch W hermitesch sein sollte, muß wegen der Näherung Gl. (16) \mathcal{L}_{WW} zusätzlich hermitesch sein, $\mathcal{L}_{WW} = \mathcal{L}_{WW}^\dagger$.

Dadurch ergeben sich zwischen den $W_{\alpha\beta\gamma}^i$ Relationen wie

$$W_{\alpha\beta\gamma}^5 = W_{\alpha\beta\gamma}^{6*}, \quad W_{\alpha\beta\gamma}^7 = W_{\alpha\beta\gamma}^{8*}, \quad \dots \quad (2.17)$$

Die $W_{\alpha\beta\gamma}^i$ werden in Abschnitt 3.1. aus \mathcal{L}_{WW} bestimmt. Wir setzen sie zunächst als bekannt voraus und geben eine näherungsweise Lösung der Lippmann-Schwinger ähnlichen Gleichung Gl. (5) an.

†Dieses Vorgehen ist Teil des Modells. Alternativ könnte man W als Ausgangspunkt der Theorie betrachten.

2.3. KONSTRUKTION DES PSEUDOPOTENTIALS

Wir betrachten die Wechselwirkung zweier pseudoskalarer Teilchen:

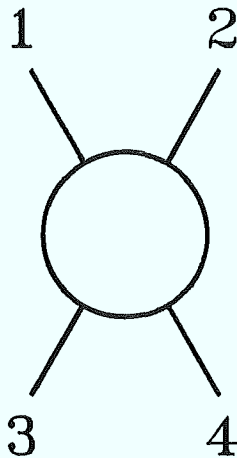


Fig. 2.1.: Bezeichnungskonvention der wechselwirkenden Mesonen

Anfangs- und Endzustand haben fest vorgegebene Quantenzahlen — symbolisiert durch die Indices 1,2,3,4 — und werden dargestellt durch

$$a_3^\dagger a_4^\dagger |0\rangle \text{ und}$$

$$a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle.$$

Gesucht ist der Erwartungswert der T-Matrix,

$$\langle 0 | a_1 a_2 T a_3^\dagger a_4^\dagger | 0 \rangle. \quad (2.18)$$

Es ist zu beachten, daß $a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle$ kein normierter Zustand ist, wenn die beiden Teilchen identisch bezüglich *aller* Quantenzahlen sind. Dann gilt nämlich

$$\langle 0 | a_1 a_1 a_1^\dagger a_1^\dagger | 0 \rangle = 2,$$

und der Zustand muß mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ normiert werden.

Setzt man für T die Lippmann-Schwinger-Iteration ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\langle 12|T|34\rangle &:= \langle 0|a_1 a_2 T a_3^\dagger a_4^\dagger|0\rangle = \\
&\langle 0|a_1 a_2 W a_3^\dagger a_4^\dagger|0\rangle + \langle 0|a_1 a_2 W \frac{1}{Z - H_0} W a_3^\dagger a_4^\dagger|0\rangle + \\
&\langle 0|a_1 a_2 W \frac{1}{Z - H_0} W \frac{1}{Z - H_0} W a_3^\dagger a_4^\dagger|0\rangle + \\
&\langle 0|a_1 a_2 W \frac{1}{Z - H_0} W \frac{1}{Z - H_0} W \frac{1}{Z - H_0} W a_3^\dagger a_4^\dagger|0\rangle + \dots,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

wobei mit $Z = E + i\epsilon$ die infinitesimal in die komplexe Ebene verschobene Startenergie gemeint ist.

Mit der Darstellung von W aus dem letzten Abschnitt verschwindet die 1., 3., 5. ... Ordnung im Vertex. Die 2., 4., ... Ordnung wird explizit berechnet:

Zunächst zur *zweiten Ordnung*, die als *Pseudopotential* $V^{(2)}$ (in Operatorschreibweise) bezeichnet wird:

$$\begin{aligned}
\langle 12|V^{(2)}|34\rangle &:= \langle 0|a_1 a_2 V^{(2)} a_3^\dagger a_4^\dagger|0\rangle := \\
&\langle 0|a_1 a_2 W \frac{1}{Z - H_0} W a_3^\dagger a_4^\dagger|0\rangle
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Weil dieser Vakuum-Erwartungswert nur Beiträge liefert, wenn die Anzahl der Erzeugungsoperatoren gleich der der Vernichtungsoperatoren ist, spaltet man W und damit auch $V^{(2)}$ sinnvollerweise in drei Teile auf:

$$\begin{aligned}
a) \quad W_a &: W_{\alpha\beta\gamma}^1 - W_{\alpha\beta\gamma}^4 \\
b) \quad W_b &: W_{\alpha\beta\gamma}^5 - W_{\alpha\beta\gamma}^6 \\
c) \quad W_c &: W_{\alpha\beta\gamma}^7 - W_{\alpha\beta\gamma}^8
\end{aligned}$$

Zu a) (OBE-Graphen)

$$\begin{aligned}
 \langle 12|V_a^{(2)}|34\rangle &:= \langle 0|a_1 a_2 W_a \frac{1}{Z - H_0} W_a a_3^\dagger a_4^\dagger|0\rangle \\
 &= \sum_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\xi} \langle 0|a_1 a_2 \{ W_{\alpha\beta\gamma}^1 a_\alpha^\dagger a_\beta b_\gamma + W_{\alpha\beta\gamma}^2 a_\alpha^\dagger a_\beta b_\gamma^\dagger + \\
 &\quad W_{\alpha\beta\gamma}^3 a_\alpha a_\beta^\dagger b_\gamma^\dagger + W_{\alpha\beta\gamma}^4 a_\alpha^\dagger a_\beta b_\gamma^\dagger \} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{Z - H_0} \cdot \\
 &\quad \{ W_{\delta\epsilon\xi}^1 a_\delta^\dagger a_\epsilon b_\xi + W_{\delta\epsilon\xi}^2 a_\delta^\dagger a_\epsilon b_\xi^\dagger + \\
 &\quad W_{\delta\epsilon\xi}^3 a_\delta a_\epsilon^\dagger b_\xi^\dagger + W_{\delta\epsilon\xi}^4 a_\delta^\dagger a_\epsilon b_\xi^\dagger \} a_3^\dagger a_4^\dagger|0\rangle
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Die Rechnung ist in Anhang B ausgeführt. Dort ist auch erläutert, wie sich die Ergebnisse graphisch darstellen lassen.

Beiträge, bei denen die beiden pseudoskalaren Mesonen nicht wirklich miteinander wechselwirken, sondern ein Teilchen frei propagiert und das andere ein Austauschteilchen emittiert und gleich darauf wieder absorbiert, heißen Selbstenergiebeiträge und werden nur *indirekt* berücksichtigt, nämlich dadurch, daß die Feldoperatoren der pseudoskalaren Mesonen mit den *physikalischen* Massen angesetzt werden und nicht mit den nackten.

In Abschnitt 3.3. werden wir zeigen, daß man die 16 Graphen aus Anhang B, a) zu vieren zusammenfassen kann, wenn man den SU(3)-Anteil der Wechselwirkung absepariert und explizit berechnet. Dieses sind dann:

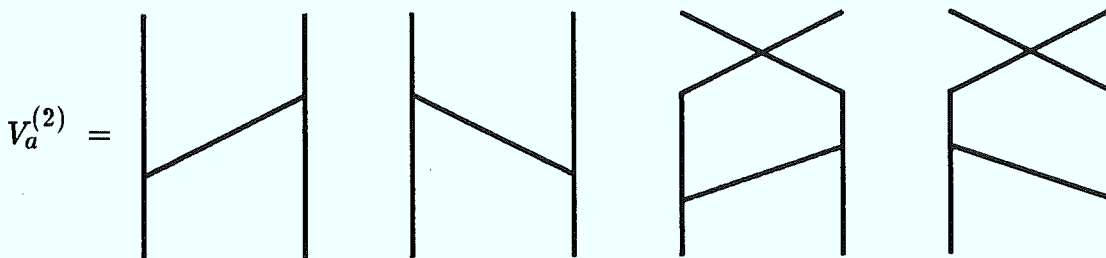


Fig. 2.2.: Zeitgeordnete OBE-Beiträge zum Pseudopotential

Die letzten beiden Graphen heißen Austauschgraphen. Sie sind eine direkte Folge der Ununterscheidbarkeit der ein- bzw. auslaufenden Teilchen. Betrachtet man die Streuung nicht vom SU(3)-Standpunkt, sondern vom SU(2)-Standpunkt, so werden beispielsweise Pionen und Kaonen unterscheidbar und diese beiden Graphen verschwinden (s. Abschnitt 3.3.).

Zu b) (TOPT Polgraphen)

$$\begin{aligned}
\langle 12|V_b^{(2)}|34\rangle &:= \langle 0|a_1a_2W_b\frac{1}{Z-H_0}W_b a_3^\dagger a_4^\dagger|0\rangle \\
&= \sum_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\xi} \langle 0|a_1a_2\{W_{\alpha\beta\gamma}^5 a_\alpha^\dagger a_\beta b_\gamma + W_{\alpha\beta\gamma}^6 a_\alpha^\dagger a_\beta b_\gamma^\dagger\} \\
&\quad \frac{1}{Z-H_0}\{W_{\delta\epsilon\xi}^5 a_\delta^\dagger a_\epsilon b_\xi + W_{\delta\epsilon\xi}^6 a_\delta^\dagger a_\epsilon b_\xi^\dagger\} a_3^\dagger a_4^\dagger|0\rangle
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Die Rechnung ist wieder im Anhang B durchgeführt. Wie bei a) lassen sich bei Abseparierung des SU(3)-Teils der Wechselwirkung die vier entstehenden Summanden zu einem zusammenfassen (Abschnitt 3.3.), graphisch dargestellt durch Fig. 2.3.a. Dieser Beitrag aus W_b ist in der TOPT der Hauptbeitrag zum kovarianten Polgraphen, Fig. 1.1.a.

Zu c) TOPT Restbeitrag zum kovarianten Polgraphen

Wir verfahren wie in b), siehe Anhang B. Der entsprechende Anteil des Pseudopotentials, $\langle 12|V_c^{(2)}|34\rangle$, wird graphisch durch Fig. 2.3.b dargestellt.

Die Beiträge von b) und c) *zusammen* konstituieren den *kovarianten* Polgraphen, Fig. 1.1.a.

Nun wenden wir uns der *vierten Ordnung* zu, die wir nur noch in der Graphendarstellung behandeln wollen.

In dieser Ordnung schlägt sich die Trennung von W in W_a , W_b und W_c nicht mehr auf die Ebene des Potentials,



Fig. 2.3.a) und b): TOPT-Anteile des kovarianten Polgraphen Fig. 1.1.a

$$\langle 12|V^{(4)}|34\rangle = \langle 0|a_1 a_2 W \frac{1}{Z - H_0} W \frac{1}{Z - H_0} W \frac{1}{Z - H_0} W a_3^\dagger a_4^\dagger |0\rangle, \quad (2.23)$$

nieder: Es gibt Prozesse, in die sowohl $W_{\alpha\beta\gamma}^1 - W_{\alpha\beta\gamma}^4$ als auch $W_{\alpha\beta\gamma}^5 - W_{\alpha\beta\gamma}^6$ und $W_{\alpha\beta\gamma}^7 - W_{\alpha\beta\gamma}^8$ eingehen (Fig. 2.4.).

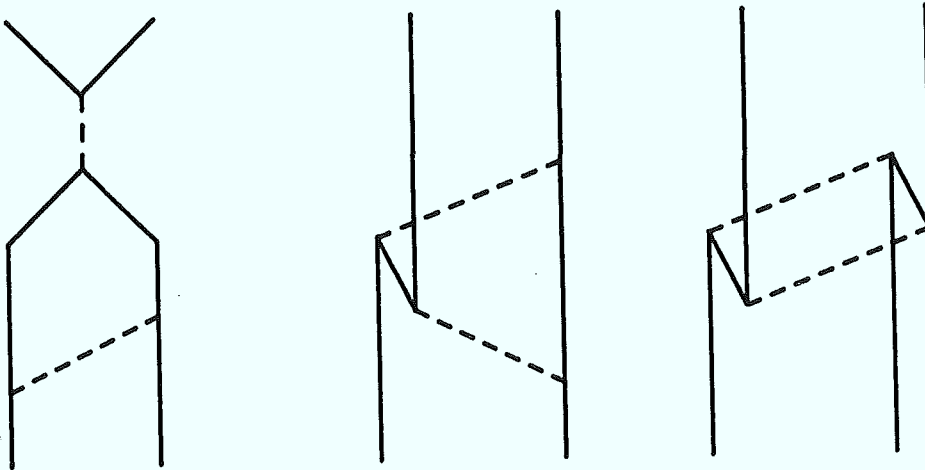


Fig. 2.4.: Mögliche Prozesse 4. Ordnung in der zeitgeordneten Störungstheorie

Der allein aus W_a resultierende Teil von $\langle 12|V^{(4)}|34\rangle$ ergibt bereits sechs Gra-

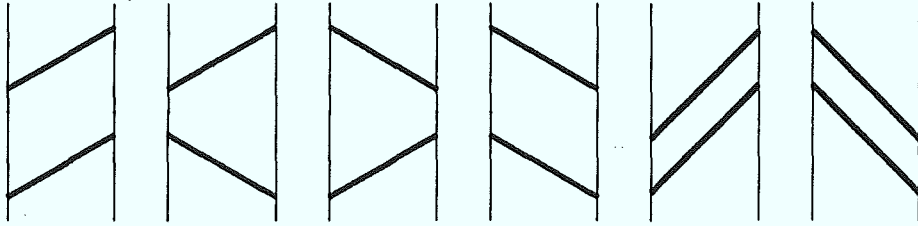


Fig. 2.5.: Diejenigen Prozesse 4. Ordnung, die sich nur aus W_a aufbauen (TOPT, direkte Graphen).

phen und die dazugehörigen Austauschgraphen (Selbstenergiegraphen wieder weglassen), Fig. 2.5..

Ebenso werden die höheren Glieder der Reihenentwicklung für die T-Matrix berechnet, die dann aus einer unendlichen Zahl reduzibler und irreduzibler Diagramme besteht. Eine exakte Lösung ist nicht mehr möglich.

Deswegen müssen wir Näherungen durchführen: Wir wollen nur diejenigen Diagramme berücksichtigen, die durch Iteration des Pseudopotentials $V^{(2)} = V_a^{(2)} + V_b^{(2)} + V_c^{(2)}$ entstehen. Das sind die Diagramme, bei denen stets nur ein Teilchen gleichzeitig ausgetauscht wird (im s- oder t-Kanal), die *reduziblen* Diagramme. In Fig. 2.4. und Fig. 2.5. wären dies der erste Graph bzw. die ersten vier. Die Lippmann-Schwinger ähnliche Gleichung Gl. (5) ,

$$T = W + W \frac{1}{Z - H_0} T,$$

geht dann über in die Näherungsgleichung

$$T = V^{(2)} + V^{(2)} G_0 T, \quad (2.24)$$

wobei $G_0 = \frac{1}{(Z-E)}$ der Propagator des Zweiteilchen-Zwischenzustandes ist und E dessen Gesamtenergie.

Die für die Vektormesonen $b_\gamma^\dagger|0\rangle$ hergeleiteten Beziehungen gelten natürlich ebenso für skalare und Tensormesonen, lediglich die in 3.1. zu berechnenden nicht-kovarianten Vertexfunktionen werden anders aussehen.

Unter dem Gesamt-Pseudopotential $V^{(2)}$ verstehen wir dann die Summe aller Prozesse zweiter Ordnung. Dieses Pseudopotential wird mit Gl. (24) iteriert.

3. Aufbau der Wechselwirkung

Dieses Kapitel hat die Berechnung der Pseudopotentiale $\langle 12|V^{(2)}|34\rangle$ zum Ziel. Wir geben die von uns verwendeten Lagrangedichten an und bestimmen daraus die nichtkovarianten Vertexfunktionen $W_{\alpha\beta\gamma}^i$ (Abschnitt 3.1.). Dabei sehen wir zunächst vom $SU(3)$ -Teil der Wechselwirkung ab, mit dem wir uns ausführlich in Abschnitt 3.2. beschäftigen. In Abschnitt 3.3. fassen wir die Ergebnisse aus 3.1. und 3.2. zusammen und erhalten so die Pseudopotentiale für die verschiedenen Prozesse, die im Anhang D im CM-System ausgewertet werden. Schließlich fügen wir noch den Abschnitt 3.4. an, in dem wir zeigen, wie wir uns durch Symmetrieüberlegungen für identische Bosonen die Berechnung der Pseudopotentiale im $\pi\pi$ -Fall vereinfachen können.

3.1. ANSATZ FÜR DIE LAGRANGEDICHTEN UND DIE DARAUS RESULTIERENDEN NICHTKOVARIANTEN VERTEXFUNKTIONEN

In Abschnitt 2.2. haben wir den Wechselwirkungsoperator aus einer beliebigen Lagrangedichte hergeleitet.

Die Lagrangedichte wird nun nach dem "heuristischen Prinzip der Einfachheit" angesetzt. Sie muß die Invarianzen gegenüber den Symmetrietransformationen zeigen, die von der starken Wechselwirkung gefordert werden, muß also im wesentlichen invariant gegen Lorentz-Transformationen (Poincaré-Gruppe) und $SU(3)$ -Flavor-Transformationen sein. Aus diesen und weiteren Symmetrien resultieren Erhaltungssätze für folgende Größen:

- a) Viererimpuls
- b) Drehimpuls
- c) Parität
- d) Isospin
- e) Strangeness
- f) Baryonenzahl
- g) ...

Wegen der Näherung Gl. (2.16) bei der Herleitung des Wechselwirkungsanteils des Hamiltonoperators aus der Lagrangedichte kommt hinzu, daß \mathcal{L} hermitesch sein muß, $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$.

Der einfachste denkbare Ansatz für die Lagrangedichte ist bei einer 3-Punkt-Wechselwirkung ein "Produkt" der drei Felder unter Beachtung der Symmetrieprinzipien a) – g), gewichtet mit einem Kopplungsparameter g. Dies ist tatsächlich der übliche Ansatz, der — auf SU(2) reduziert — mit dem von Nagels et al. [35] übereinstimmt:

$$\mathcal{L}_{PPS} = g_S m_\pi [\phi_P \phi_P \phi_S]_0^1 \quad (3.1)$$

$$\mathcal{L}_{PPV} = g_V [\phi_P \partial_\mu \phi_P \phi_V^\mu]_0^1 \quad (3.2)$$

$$\mathcal{L}_{PPT} = g_T \frac{2}{m_\pi} [\partial_\mu \phi_P \partial_\nu \phi_P \phi_T^{\mu\nu}]_0^1 \quad (3.3)$$

Für das skalare Meson diskutieren wir zusätzlich zur oben angegebenen skalaren Kopplung eine Gradientenkopplung:

$$\mathcal{L}'_{PPS} = g'_S \frac{1}{m_\pi} [\partial_\mu \phi_P \partial^\mu \phi_P \phi_S]_0^1 \quad (3.4)$$

Die Pionenmasse m_π wird jeweils eingefügt, damit die Kopplungskonstante dimensionslos ist.

Durch das Symbol $[\]_0^1$ drücken wir aus, daß die Mesonenfelder zu einem SU(3)-Skalar gekoppelt werden müssen. Mit dem SU(3)-Teil der Wechselwirkung beschäftigen wir uns ausführlich in den nächsten beiden Abschnitten. In Anhang C sehen wir zunächst von der SU(3)-Quantenzahl ab und berechnen nach Gl. (2.16) aus den Lagrangedichten Gl. (1) – Gl. (4) mit den freien Lösungen aus Anhang A nur den *Spin-Impuls-Teil* des Wechselwirkungsoperators Gl. (2.14) (d.h. die nichtkovarianten Vertexfunktionen $W_{\alpha\beta\gamma}^i, W'_{\alpha\beta\gamma}{}^i, \dots, i = 1 - 8$), der für die verschiedenen Mesonen eines Multipletts — abgesehen von der SU(3)-gebrochenen Masse — gleich ist.

3.2. DER SU(3)-TEIL DER WECHSELWIRKUNG

Bevor wir in Abschnitt 3.2.3. den SU(3)-Teil der Wechselwirkungs-Lagrangedichte konstruieren können, müssen wir in Abschnitt 3.2.2. eine konsistente Identifikation zwischen SU(3)-Wellenfunktionen und physikalischen Teilchen finden. Konsistent heißt, daß für Mesonen M , die ihre eigenen Antiteilchen sind, die Hermitizität $M = M^\dagger$ gelten muß, so daß die Phasenkonventionen nicht beliebig sind.

Zunächst jedoch in Abschnitt 3.2.1. einige Bemerkungen zu dem Aufbau der Mesonen aus Quarks.

3.2.1. AUFBAU DER MESONEN AUS QUARKS

Im einfachsten Quarkmodell sind die Baryonen aus drei Quarks und die Mesonen aus einem Quark-Antiquark-Paar aufgebaut.

Die drei leichtesten Quarks up (u), down (d) und strange (s) werden gruppentheoretisch als kleinste nichttriviale Darstellung der SU(3) interpretiert, vergl. Fig. 3.1..

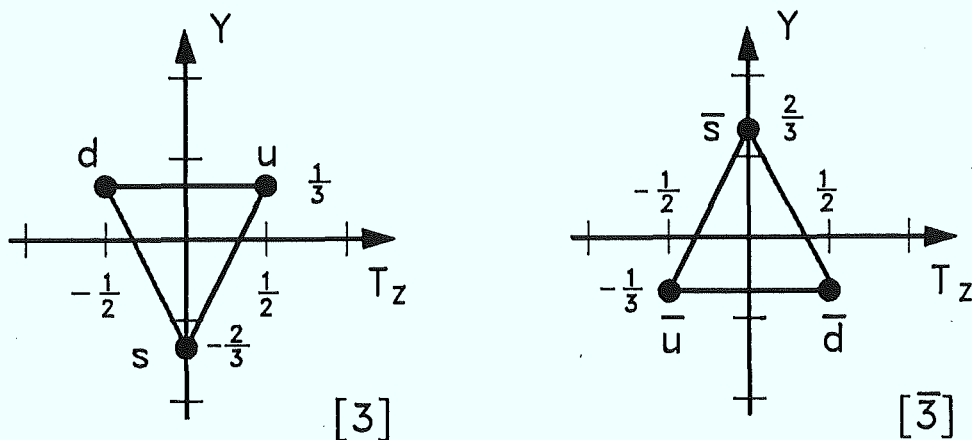


Fig. 3.1.: Fundamentale Darstellung der SU(3). T_z ist die dritte Komponente des Isospins T , und $Y = B + S$ ist die Hyperladung, B Baryonenzahl, S Strangeness.

Weitere Darstellungen der $SU(3)$ erhält man durch Kopplung der kleinsten nichttrivialen Darstellungen, so die Mesonen als Quark-Antiquark-Paar durch

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1.$$

Die Mitglieder der entstehenden Multiplikts werden als physikalische Teilchen interpretiert:

a) pseudoskalare Mesonen, $J^P = 0^-$

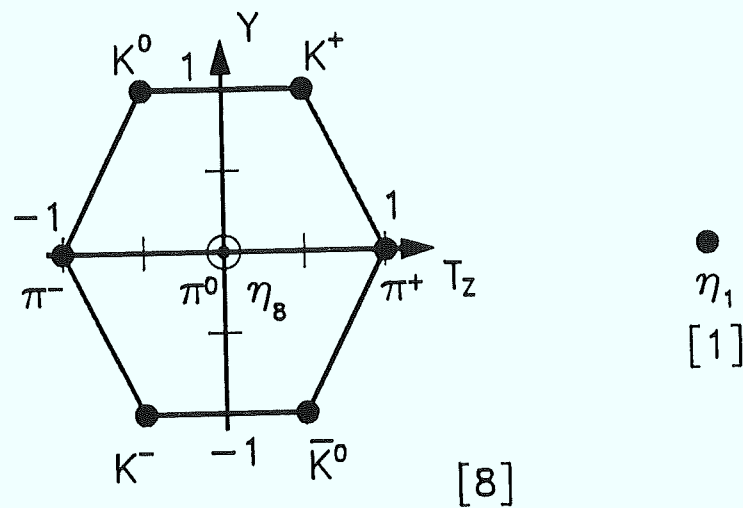


Fig. 3.2.: Pseudoskalares Mesonennonett. Quark und Antiquark sind in einem 1S_0 -Zustand.

In der Natur sind die Zustände η_1 und η_8 gemischt. Die physikalischen Teilchen sind das η und das η' :

$$\begin{aligned} \eta &= \cos\theta \eta_8 + \sin\theta \eta_1 \\ \eta' &= -\sin\theta \eta_8 + \cos\theta \eta_1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Der Mischungswinkel θ kann aus der Diagonalisierung der Massenmatrix bestimmt werden [36, 37]. Es ergibt sich [38]:

$$\theta \approx 10^\circ$$

Diese Mischung werden wir vernachlässigen und nur das $\eta \approx \eta_8$ in unsere Überlegungen einbeziehen.

b) Vektormesonen, $J^P = 1^-$

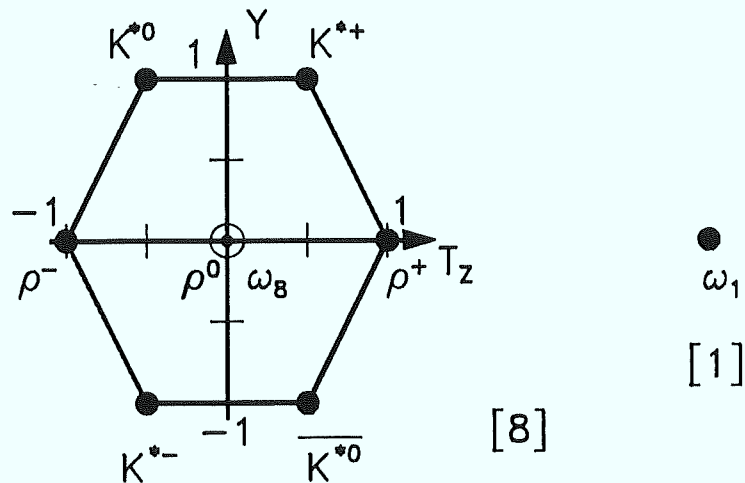


Fig. 3.3.: Vektormesonen-Nonett (3S_1 -Zustand).

ω^1 und ω^8 mischen zu den physikalischen Teilchen ω und ϕ :

$$\begin{aligned} \omega &= \cos\theta \omega_1 + \sin\theta \omega_8 \\ \phi &= -\sin\theta \omega_1 + \cos\theta \omega_8 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Der Mischungswinkel beträgt $\theta \approx 37^\circ$ [37] und ist somit fast "ideal", d.h. $\tan\theta \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\cos\theta \approx \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sin\theta \approx \sqrt{\frac{1}{3}}$), welches

$$\phi \approx s\bar{s}, \quad \omega \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$$

entspricht.

Die SU(3)-Symmetrie liefert die Kopplungskonstante für den Zustand ω_8 . Nimmt man an, daß die *physikalischen* Teilchen ω und ϕ ausgetauscht werden, ist die Mischung zu beachten.

c) skalare Mesonen, $J^P = 0^+$

Es ist umstritten, welche Teilchen zu diesem Nonett gehören. Ein Gegenstand unserer Untersuchungen ist herauszufinden, welche der 0^+ -Mesonen benötigt werden, um die $\pi\pi^-$ - und $K\pi^-$ -Streuphasen zu erklären. Üblich [13] war bisher eine Identifikation wie in Fig. 3.4., die wir allerdings — als ein Resultat unserer Arbeit — bezweifeln.

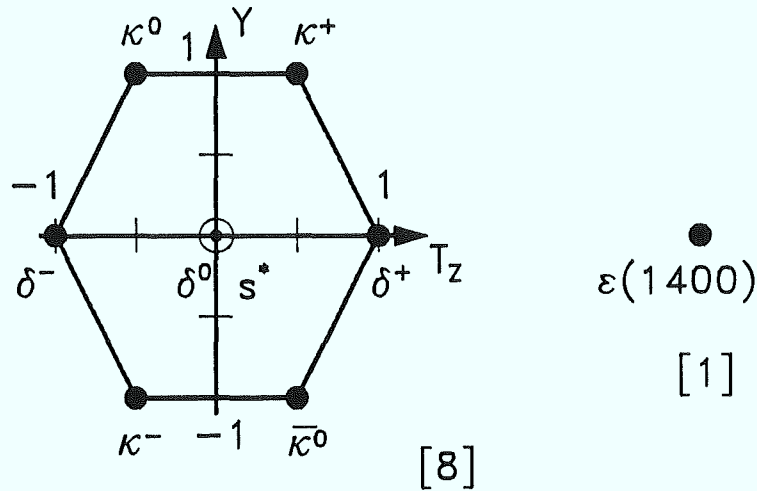


Fig. 3.4.: Mögliche Identifikation der $SU(3)$ -Zustände im skalaren Mesonennonett (3P_0 -Zustand).

Eine Mischung zwischen den beiden isoskalaren Teilchen ist denkbar.

d) Tensormesonen, $J^P = 2^+$ (3P_2 -Zustand)

Auch Tensormesonen lassen sich als Mitglieder eines Nonetts identifizieren [39].

Wir berücksichtigen nur das isoskalare f_2 -Meson.

3.2.2. IDENTIFIKATION DER SU(3)-ZUSTÄNDE MIT DEN PHYSIKALISCHEN MESONEN

Im letzten Abschnitt haben wir die Mesonen aufgrund ihrer Quantenzahlen mit den SU(3)-Zuständen identifiziert, dabei aber noch nicht auf mögliche Phasenfaktoren geachtet.

Die Wellenfunktionen der Mesonen innerhalb eines Oktetts seien durch $\phi(\{8}, \nu)$ bezeichnet, wobei $\nu = (T, T_Z, Y)$ und $-\nu := (T, -T_Z, -Y)$. Wir wählen die Phasenkonvention wie in [40] und treffen folgende Zuordnung:

$$\begin{aligned}
 M_1 &\equiv \phi(\{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) = K^+ && (K^{*+}) \\
 M_2 &\equiv \phi(\{8}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) = K^0 && (K^{*0}) \\
 M_3 &\equiv \phi(\{8}, 1, 1, 0) = -\pi^+ && (-\rho^+) \\
 M_4 &\equiv \phi(\{8}, 1, 0, 0) = \pi^0 && (\rho^0) \\
 M_5 &\equiv \phi(\{8}, 1, -1, 0) = \pi^- && (\rho^-) \\
 M_6 &\equiv \phi(\{8}, 0, 0, 0) = \eta && (\omega_8) \\
 M_7 &\equiv \phi(\{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1) = \bar{K}^0 && (\bar{K}^{*0}) \\
 M_8 &\equiv \phi(\{8}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1) = -K^- && (-K^{*-})
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Da die Mesonen ihre eigenen Antiteilchen sind, sind die Phasenkonventionen *nicht* willkürlich. Daß mit dieser Phasenwahl Gl. (7) $M = M^\dagger$ gilt, wird in Anhang A.4. gezeigt.

Es wird sich als zweckmäßig erweisen, die Teilchen der Isospinmultipletts zusammenzufassen:

Für pseudoskalare Mesonen definieren wir:

$$K := \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} \quad K_C := \begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ -K^- \end{pmatrix} \quad \vec{\pi} := \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix} \quad \eta := \eta \tag{3.8}$$

Mit K^\dagger ist gemeint:

$$K^\dagger = ((K^+)^\dagger, (K^0)^\dagger) = (K^-, \bar{K}^0) \quad (3.9)$$

Entsprechendes gilt für die anderen Mesonen.

Die Isektoren, ihre Skalarprodukte und Kreuzprodukte sind in Anhang A.3. definiert.

3.2.3. KONSTRUKTION DER SU(3)-LAGRANGEFUNKTION

Der Hamiltonoperator der starken Wechselwirkung soll invariant unter SU(3)-Transformationen sein. Diese Eigenschaft hat nur ein SU(3)-Skalar. Demnach müssen wir die drei Multipletts der an einem Vertex wechselwirkenden Teilchen zu einem SU(3)-Singulett koppeln. Wechselwirken drei Oktetts (zwei Oktetts und ein Singulett), so ist folgende Kopplung zu untersuchen:

$$\begin{aligned} 8 \otimes 8 \otimes 8 &\rightarrow 1 \\ (8 \otimes 8 \otimes 1) &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

Weil der zweite Fall mit im ersten enthalten ist, betrachten wir die Kopplung dreier Oktetts, beispielsweise die zweier pseudoskalarer Mesonen mit einem Vektormeson. Den SU(3)-Teil der Lagrangefunktion haben wir in Gl. (2) symbolisch als

$$\mathcal{L} = g_V [M_P M_P M_V]_0^1$$

geschrieben. Die Kopplung ist graphisch in Fig. 3.5. dargestellt, in der wir unsere Bezeichnungskonventionen festlegen.

Wir gehen in zwei Schritten vor:

a) Kopplung der beiden pseudoskalaren Mesonenoktetts:

$$8 \otimes 8 = 27 \oplus 10 \oplus 10^* \oplus 8^1 \oplus 8^2 \oplus 1$$

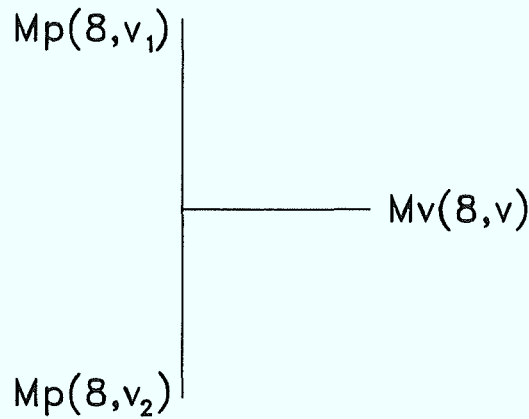


Fig. 3.5.: Kopplung des Vektormesonens-Oktetts an den pseudoskalaren Mesonenstrom

Die beiden Oktetts 8^1 und 8^2 bzw. Dekupletts 10 und 10^* unterscheiden sich durch ihr Symmetrieverhalten. Einzig die Oktetts können mit einem weiteren Oktett zu einem Singulett koppeln:

b) Kopplung des Vektormesonens-Oktetts an den pseudoskalaren Mesonenstrom:

$$8 \otimes 8^1 = 27 \oplus 10 \oplus 10^* \oplus 8^1 \oplus 8^2 \oplus 1$$

$$8 \otimes 8^2 = 27 \oplus 10 \oplus 10^* \oplus 8^1 \oplus 8^2 \oplus 1$$

Die beiden entstehenden Singulettts sind die gewünschten $SU(3)$ -Skalare.

Diese Kopplungen lassen sich mit sogenannten $SU(3)$ -Clebsch-Gordan-Koeffizienten durchführen [40]:

a)

$$J_P^\gamma(8, \nu) = \sum_{\nu_1 \nu_2} \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8^\gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} M_P(8, \nu_1) M_P(8, \nu_2), \quad \gamma = 1, 2 \quad (3.10)$$

b)

$$\mathcal{L}^\gamma(1, 0) = - \sum_\nu \begin{pmatrix} 8^\gamma & 8 & 1 \\ \nu & -\nu & 0 \end{pmatrix} J_P^\gamma(8, \nu) M_V(8, -\nu) \quad (3.11)$$

Jede der beiden Kopplungsarten ($\gamma = 1, 2$) ist durch einen Stärkeparameter g^γ zu gewichten, sodaß sich insgesamt für den SU(3)-Anteil des Wechselwirkungs-Lagrangians ergibt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(8, 8, 8) = & - \sum_{\gamma=1,2} g^\gamma \sum_{\nu_1 \nu_2 \nu} \begin{pmatrix} 8^\gamma & 8 & 1 \\ \nu & -\nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8^\gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} \\ & \cdot M_P(8, \nu_1) M_P(8, \nu_2) M_V(8, -\nu) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dieser Ausdruck enthält die volle Information, er kann jedoch in handlicherer Form geschrieben werden:

Die Abhängigkeit von der T_Z -Komponente des Isospins wird abgespalten:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8^\gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 & 8 & | & 8^\gamma \\ T_1 Y_1 & T_2 Y_2 & | & T Y \end{pmatrix} \langle T_1 T_{1Z} T_2 T_{2z} | T T_Z \rangle \\ \begin{pmatrix} 8^\gamma & 8 & 1 \\ \nu & -\nu & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8^\gamma & 8 & | & 1 \\ T Y & T - Y & | & 00 \end{pmatrix} \langle T T_Z T - T_Z | 00 \rangle \end{aligned} \quad (3.13)$$

Beim ersten Faktor handelt es sich um die isoskalaren Funktionen, die in [40] tabelliert sind. Der zweite Faktor ist ein gewöhnlicher SU(2)-Clebsch-Gordan-Koeffizient.

Statt nach den Koeffizienten g_1 und g_2 parametrisiert man üblicherweise nach den Koeffizienten g und α , die wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned} g &= \frac{\sqrt{30}}{40} g_1 + \frac{\sqrt{6}}{24} g_2 \\ \alpha &= \frac{\sqrt{6} g_2}{24 g} \end{aligned} \quad (3.14)$$

bzw.

$$\begin{aligned}
g_1 &= \frac{40}{\sqrt{30}}g(1 - \alpha) \\
g_2 &= \frac{24}{\sqrt{6}}g\alpha
\end{aligned}
\tag{3.15}$$

Mit diesen Definitionen, den oben getroffenen Phasenkonventionen Gl. (7) und der Kompaktschreibweise Gl. (8) kann man den SU(3)-Lagrangian Gl. (12) in einer Form schreiben, in der deutlich wird, daß die SU(2)-Transformationen eine Untergruppe der SU(3)-Transformationen bilden:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(8, 8, 8) &= g_{KK\rho}(K^\dagger\vec{\tau}K) \cdot \vec{\rho} + g_{K_C K_C \rho}(K_C^\dagger\vec{\tau}K_C) \cdot \vec{\rho} \\
&+ g_{\eta\pi\rho}(\eta\vec{\pi} + \vec{\pi}\eta) \cdot \vec{\rho} - ig_{\pi\pi\rho}(\vec{\pi} \times \vec{\pi}) \cdot \vec{\rho} \\
&+ g_{KK\omega_8}(K^\dagger K)\omega_8 + g_{K_C K_C \omega_8}(K_C^\dagger K_C)\omega_8 \\
&+ g_{\eta\eta\omega_8}(\eta\eta\omega_8) + g_{\pi\pi\omega_8}(\vec{\pi} \cdot \vec{\pi})\omega_8 \\
&+ g_{K\eta K^*} (K^\dagger K^* \eta + \eta K^{*\dagger} K) \\
&+ g_{K_C \eta K_C^*} (K_C^\dagger K_C^* \eta + \eta K_C^{*\dagger} K_C) \\
&+ g_{K\pi K^*} (\vec{\pi} \cdot (K^{*\dagger} \vec{\tau} K) + (K^\dagger \vec{\tau} K^*) \cdot \vec{\pi}) \\
&+ g_{K_C \pi K_C^*} (\vec{\pi} \cdot (K_C^{*\dagger} \vec{\tau} K_C) + (K_C^\dagger \vec{\tau} K_C^*) \cdot \vec{\pi})
\end{aligned}
\tag{3.16}$$

mit

$$\begin{aligned}
g_{KK\rho} &= g \\
g_{K_C K_C \rho} &= -g(1 - 2\alpha) = g \\
g_{\eta\pi\rho} &= \frac{2}{3}\sqrt{3}g(1 - \alpha) = 0 \\
g_{\pi\pi\rho} &= 2g\alpha = 2g \\
g_{KK\omega_8} &= \frac{1}{3}\sqrt{3}g(4\alpha - 1) = \sqrt{3}g \\
g_{K_C K_C \omega_8} &= \frac{-1}{3}\sqrt{3}g(2\alpha + 1) = -\sqrt{3}g \\
g_{\eta\eta\omega_8} &= \frac{-2}{3}\sqrt{3}g(1 - \alpha) = 0 \\
g_{\pi\pi\omega_8} &= \frac{2}{3}\sqrt{3}g(1 - \alpha) = 0 \\
g_{K\eta K^*} &= \frac{-1}{3}\sqrt{3}g(2\alpha + 1) = -\sqrt{3}g \\
g_{K_C \eta K_C^*} &= \frac{1}{3}\sqrt{3}g(4\alpha - 1) = \sqrt{3}g \\
g_{K\pi K^*} &= g(1 - 2\alpha) = -g \\
g_{K_C \pi K_C^*} &= -g
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Für die Kopplung zweier pseudoskalarer Mesonen mit einem Vektormeson ist $\alpha = 1$ [40], was wir in Gl. (17) eingesetzt haben. Dies ergibt sich zwingend daraus, daß wegen Erhaltung der G-Parität $g_{\pi\pi\omega_8} = 0$ ist, denn ω und π haben beide die G-Parität -1 , mithin ist ein Vertex $\pi\pi\omega_8$ nicht möglich.

De facto koppelt das Vektormeson also nur an das 8^2 -Oktett des pseudoskalaren Mesonenstromes,

$$g_1 = 0, \quad g_2 = \frac{24}{\sqrt{6}}g.$$

Die Kopplung an das 8^2 -Oktett heißt auch *symmetrische* Kopplung oder F-Kopplung, die an das 8^1 -Oktett *antisymmetrische* oder D-Kopplung [34]. Der

Mischungsparameter α gibt das Verhältnis zwischen F- und Gesamtkopplung an. $\alpha = 1$ bedeutet reine F-Kopplung, $\alpha = 0$ reine D-Kopplung.

Trotzdem haben wir die Rechnung für allgemeines α durchgeführt, um sofort auf die Kopplung anderer Oktetts schließen zu können. In [40] wurde ein pseudoskalares Meson an einen Baryonenstrom gekoppelt. Man erhält \mathcal{L}_{PPV} Gl. (16) auch, wenn man in der in [40] erhaltenen Lagrangefunktion \mathcal{L}_{BBP} folgende Ersetzungen durchführt:

$$B \rightarrow P, \quad P \rightarrow V,$$

wobei B für das Baryonenoktett und P(V) für das pseudoskalare (Vektor-) Mesonenoktett steht. Konkret:

$$\begin{aligned} N_1 &= \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \rightarrow K & K &\rightarrow K^* \\ N_2 &= \begin{pmatrix} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix} \rightarrow K_C & K_C &\rightarrow K_C^* \\ \vec{\Sigma} &= \begin{pmatrix} \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \end{pmatrix} \rightarrow \vec{\pi} & \vec{\pi} &\rightarrow \vec{\rho} \\ \Lambda &\rightarrow \eta & \eta &\rightarrow \omega_8 \end{aligned}$$

ω_8 ist immer das Oktett- ω . Für die Berechnung der Kopplungskonstanten des physikalischen ω ist die Mischung mit dem Singulett- ω , ω_1 , zu berücksichtigen. Dazu muß zunächst die Kopplung von ω_1 an einen pseudoskalaren Mesonenstrom errechnet werden. Die sieht nicht anders aus als die Kopplung des SU(2)-Singuletts ω_8 :

$$\mathcal{L}(8, 8, 1) = g' \left(K^\dagger K + \eta\eta + \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} + K_C^\dagger K_C \right) \omega_1 \quad (3.18)$$

Ein unitäres Singulett koppelt also mit gleicher Stärke an die verschiedenen pseudoskalaren Mesonenströme. Kopplungen an $\vec{\pi} \cdot \vec{\pi}$ oder $\eta\eta$ sind auch für ω_1 wegen der G-Paritätserhaltung nicht möglich, deswegen müssen die mittleren beiden Summanden entfallen.

Aufgrund der Mischung von ω_8 und ω_1 (Abschnitt 3.2.1., Gl. (6)) gilt für die Kopplungskonstante der physikalischen Teilchen ω und ϕ :

$$\begin{aligned} g_{KK\omega} &= \sqrt{\frac{2}{3}}g_{KK\omega_1} + \sqrt{\frac{1}{3}}g_{KK\omega_8} \\ g_{KK\phi} &= -\sqrt{\frac{1}{3}}g_{KK\omega_1} + \sqrt{\frac{2}{3}}g_{KK\omega_8} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$g_{KK\omega_8}$ folgt wie oben gezeigt unter Ausnutzung der SU(3)-Symmetrie Gl. (17) aus $g_{\pi\pi\rho}$:

$$g_{KK\omega_8} = \sqrt{3}g = \sqrt{3} \frac{1}{2} g_{\pi\pi\rho}$$

$g_{KK\phi}$ läßt sich aus der experimentellen Breite Γ_ϕ des in $K\bar{K}$ zerfallenden ϕ -Mesons bestimmen, siehe Kapitel 5 und Abschnitt 8.1..

Man erhält:†

$$g_{KK\phi} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}g_{\pi\pi\rho} \quad (3.20)$$

Damit lassen sich $g_{KK\omega_1}$ und $g_{KK\omega}$ berechnen:

$$\begin{aligned} g_{KK\omega_1} &= 0 \\ g_{KK\omega} &= \sqrt{\frac{1}{3}}g_{KK\omega_8} = g = g_{KK\rho} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Wir nehmen den Austausch der *physikalischen* Teilchen ω und ϕ an und gebrauchen entsprechend die Kopplungskonstanten:

$$\begin{aligned} g_{KK\phi} &= \frac{1}{\sqrt{2}}g_{\pi\pi\rho} \\ g_{KK\omega} &= \frac{1}{2}g_{\pi\pi\rho} \end{aligned} \quad (3.22)$$

†Die SU(6)-Symmetrie, die die drei Flavorfreiheitsgrade der Quarks mit ihren zwei Spinfreiheitsgraden verbindet, fordert, daß Gl. (20) exakt erfüllt ist.

Für die Kopplung des skalaren Mesons an den pseudoskalaren Mesonenstrom ist in Gl. (16) die Ersetzung $V \rightarrow S$ durchzuführen. Für diesen Fall ist $\alpha = 0$, was reine antisymmetrische oder D-Kopplung bedeutet, denn es muß gelten: $g_{\pi\pi\delta} = 0$, weil der Zerfall $\delta \rightarrow \pi\pi$ aus G-Paritätsgründen verboten ist ($G_\delta = G_\pi = -1$ für die G-Parität). Daraus folgt, daß $|g_{K\pi\kappa}| = |g_{K_C\pi\kappa_C}|$, was physikalisch zu erwarten ist. Der Mischungswinkel zwischen Oktett- ϵ und Singulett- ϵ ist unbekannt.

3.3. BERECHNUNG DER PSEUDOPOTENTIALE

In Abschnitt 2.3. und in Anhang B haben wir die allgemeine Form der Pseudopotentiale $\langle 0|a_1 a_2 V^{(2)} a_3^\dagger a_4^\dagger|0\rangle$ hergeleitet. Wir erhielten Ausdrücke in Abhängigkeit von den nichtkovarianten Vertexfunktionen $W_{\alpha\beta\gamma}^i, i = 1, \dots, 8$, deren Spin-Impulsabhängigkeit wir in Abschnitt 3.1. und Anhang C darlegten.

Wie für die noch fehlende Abhängigkeit der Pseudopotentiale von den SU(3)-Quantenzahlen zu verfahren ist, ist in Anhang B vorgezeichnet:† Die Ausdrücke dort sind ja noch so zu verstehen, daß mit den Quantenzahlen $\alpha, \beta, \dots, 1, 2, \dots$ auch die SU(3)-Quantenzahlen gemeint sind. Alle sich dort ergebenden Kontraktionsmöglichkeiten sind für den SU(3)-Teil auszuführen.

Wir müssen also berechnen:

$$\langle 0|a_1 a_2 V_{SU(3)}^{(2)} a_3^\dagger a_4^\dagger|0\rangle = \langle 0|a_1 a_2 W_{SU(3)} W_{SU(3)} a_3^\dagger a_4^\dagger|0\rangle, \quad (3.23)$$

denn der Propagator (d.h. H_0) wirkt nicht auf den SU(3)-Teil. Wegen der fehlenden Orts-Zeit-Abhängigkeit von $\mathcal{L}_{SU(3)}$ ist:

$$W_{SU(3)} \equiv \mathcal{L}_{SU(3)} \quad (3.24)$$

†Die Lösung der Probleme, die bei der Bestimmung des SU(3)-Teils des Pseudopotentials entstehen, geht teilweise auf [41] zurück.

Weil die starke Wechselwirkung den Isospin T erhält und $V^{(2)}$ deswegen in T diagonal ist, rechnen wir zweckmäßigerweise in der Isospinbasis. Als Basiszustände wählen wir die gestreckte Isospinkonfiguration $T_Z = T$. Wir hätten wegen der Invarianz der starken Wechselwirkung gegen Rotationen im Isospinraum auch jede andere T_Z -Komponente wählen können. Die für uns relevanten Isospin-Teilchen-Kanäle erhält man unter Beachtung der Phasenkonvention Gl. (7) durch einfache Clebsch-Gordan-Kopplung:

a) $\pi\pi$ -Streuung

$$\begin{aligned}
|\pi\pi\rangle^{T=2} &= |22\rangle = (\pi^+)^\dagger(\pi^+)^\dagger|0\rangle \\
|\pi\pi\rangle^{T=1} &= |11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{(\pi^0)^\dagger(\pi^+)^\dagger - (\pi^+)^\dagger(\pi^0)^\dagger\} |0\rangle \\
|\pi\pi\rangle^{T=0} &= |00\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}} \{(\pi^+)^\dagger(\pi^-)^\dagger + (\pi^-)^\dagger(\pi^+)^\dagger + (\pi^0)^\dagger(\pi^0)^\dagger\} |0\rangle \\
|\bar{K}K\rangle^{T=1} &= |11\rangle = (\bar{K}^0)^\dagger(K^+)^\dagger|0\rangle \\
|\bar{K}K\rangle^{T=0} &= |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{(\bar{K}^0)^\dagger(K^-)^\dagger + (\bar{K}^0)^\dagger(K^+)^\dagger\} |0\rangle
\end{aligned} \tag{3.25}$$

b) $K\pi$ -Streuung

$$\begin{aligned}
|\bar{K}\pi\rangle^{T=\frac{3}{2}} &= \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle = -(\bar{K}^0)^\dagger(\pi^+)^\dagger|0\rangle \\
|\bar{K}\pi\rangle^{T=\frac{1}{2}} &= \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{K}^0)^\dagger(\pi^0)^\dagger - \sqrt{\frac{2}{3}}(\bar{K}^-)^\dagger(\pi^+)^\dagger \right\} |0\rangle
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Wir wollen die Rechnung exemplarisch für den ρ -Polgraphen und den ρ -OBE-Graphen bei der $\pi\pi$ -Streuung durchführen. Die beiden zeitgeordneten Anteile unterscheiden sich nicht in ihrer jeweiligen $SU(3)$ -Struktur. Die übrigen Rechnungen verlaufen analog.

Der relevante Teil der SU(3)-Lagrangefunktion Gl. (16) lautet:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{SU(3)}^{\pi\pi\rho} &= -ig_{\pi\pi\rho}(\vec{\pi} \times \vec{\pi}) \cdot \vec{\rho} \\ &= g_{\pi\pi\rho} \left\{ \pi^+ \pi^0 \rho^- - \pi^0 \pi^+ \rho^- - \pi^+ \pi^- \rho^0 + \pi^- \pi^+ \rho^0 + \pi^0 \pi^- \rho^+ - \pi^- \pi^0 \rho^+ \right\}\end{aligned}\quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow V_{SU(3)}^{(2)} &= g_{\pi\pi\rho}^2 \left\{ \pi^+ \pi^0 \rho^- \pi^+ \pi^0 \rho^- - \pi^+ \pi^0 \rho^- \pi^0 \pi^+ \rho^- \right. \\ &\quad \left. + \dots (36 \text{ Terme}) + \dots \pi^- \pi^0 \rho^+ \pi^- \pi^0 \rho^+ \right\}\end{aligned}\quad (3.28)$$

Wir müssen nun mit den Basiszuständen Gl. (25) den Erwartungswert dieses Operators für jede der in Anhang B gegebenen Kontraktionsmöglichkeiten berechnen. Dies waren für den Polgraphen vier und für den OBE-Graphen sechzehn.

Es ergibt sich je nach Kontraktion für den Polgraphen (± 2) im Isospin-1 Kanal, sonst 0; und für die OBE-Graphen (± 1) in den Isospin-1 und Isospin-2 Kanälen und (± 2) im Isospin-0 Kanal mit genau dem gegenteiligen Vorzeichen wie im Isospin-2 Kanal.

Ganz allgemein können wir folgende Aussagen treffen: Die SU(3)-Faktoren der verschiedenen Kontraktionsbeiträge unterscheiden sich für festen Isospin T nur durch das Vorzeichen, es sei denn, sie verschwinden ganz. Dies ist bei den OBE-Austauschgraphen (an 1.,4.,5.,8.,9.,12.,13. und 16. Stelle in Gl. (B.2)) der Fall, wenn die ein- und auslaufenden Teilchen verschieden sind, beispielsweise bei der $K\pi$ -Streuung mit ρ -Austausch oder bei der $\bar{K}K$ -Streuung. Hierin spiegelt sich ihre Unterscheidbarkeit wider, oder, anders formuliert: Die Ununterscheidbarkeit der Teilchen schlägt sich in der Existenz der Austauschgraphen nieder. Zunächst hatten wir konsequent den SU(3)-Standpunkt eingenommen und alle pseudoskalaren Teilchen P als identisch angesehen. Wählen wir jetzt jedoch die SU(2)-Zustände Gl. (25) und Gl. (26) als Eingangs- und Ausgangszustände, sind die Austauschgraphen im Falle der Wechselwirkung *verschiedener* Isospinmultipletts nicht mehr möglich, was sich im Verschwinden des SU(3)-Faktors ausdrückt. (Im Falle der $K\pi$ -Streuung mit K^* -Austausch sind die Verhältnisse genau umgekehrt: Hier ist nur noch der OBE-Austauschgraph möglich, nicht mehr der direkte.)

Daß die SU(3)-Anteile des Pseudopotentials dem Betrage nach übereinstimmen, ist natürlich von der kovarianten Formulierung her zu erwarten, denn dort werden ja alle 16 (4) Kontraktionsmöglichkeiten im Pseudopotential der OBE-Graphen (Polgraphen) durch jeweils *einen* einzigen Graphen repräsentiert.

Auch wir wollen künftig nur noch von einem SU(3)-Faktor oder *Isospinfaktor* f sprechen, wobei wir die in Gl. (B.2) und Gl. (B.3) gekennzeichneten Kontraktionsmöglichkeiten auswählen. Diese Wahl ist nur eine *Konvention*. Entscheidend ist das *gemeinsame* Vorzeichen von Spin-Impuls und SU(3)-Teil, die wir deswegen zusammen angeben. Mit den nichtkovarianten Vertexfunktionen $W_{\alpha\beta\gamma}^i, \dots$ aus Anhang C und den SU(3)-Anteilen ergibt sich für die Pseudopotentiale des Prozesses $PP \rightarrow PP$ (Die Quantenzahlen des Mesons im Zwischenzustand seien durch ξ gekennzeichnet.):

skalares Meson, direkter OBE-Graph, skalare Kopplung

$$\begin{aligned} \langle 12|V|34 \rangle &= \frac{g_1 g_2}{(2\pi)^3} \cdot n f \cdot \frac{m_\pi^2}{8\omega_\xi \sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{Z - E_1 - E_4 - \omega_\xi} + \frac{1}{Z - E_2 - E_3 - \omega_\xi} \right\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

skalares Meson, direkter OBE-Graph, Gradientenkopplung

$$\begin{aligned} \langle 12|V|34 \rangle &= \frac{g_1 g_2}{(2\pi)^3} \cdot n f \cdot \frac{(p_1 + p_3)^2 (p_2 + p_4)^2}{8m_\pi^2 \omega_\xi \sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{Z - E_1 - E_4 - \omega_\xi} + \frac{1}{Z - E_2 - E_3 - \omega_\xi} \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Vektormeson, direkter OBE-Graph

$$\begin{aligned} \langle 12|V|34 \rangle &= \sum_{\lambda_\xi} \frac{g_1 g_2}{(2\pi)^3} \cdot n f \cdot \frac{\epsilon^\mu(p_\xi, \lambda_\xi) \epsilon^\nu(p_\xi, \lambda_\xi)^*}{8\omega_\xi \sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{Z - E_1 - E_4 - \omega_\xi} + \frac{1}{Z - E_2 - E_3 - \omega_\xi} \right\} \\ &\cdot (p_1 + p_3)_\mu (p_2 + p_4)_\nu \end{aligned} \quad (3.31)$$

Tensormeson, direkter OBE-Graph

$$\begin{aligned}
\langle 12|V|34 \rangle &= \sum_{\lambda_\xi} \frac{g_1 g_2}{(2\pi)^3} \cdot n f \cdot \frac{\epsilon^{\mu\nu}(p_\xi, \lambda_\xi) \epsilon^{\rho\sigma}(p_\xi, \lambda_\xi)^*}{8m_\pi^2 \omega_\xi \sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \\
&\cdot \left\{ \frac{1}{Z - E_1 - E_4 - \omega_\xi} + \frac{1}{Z - E_2 - E_3 - \omega_\xi} \right\} \\
&\cdot (p_1 + p_3)_\mu (p_1 + p_3)_\nu (p_2 + p_4)_\rho (p_2 + p_4)_\sigma
\end{aligned} \tag{3.32}$$

skalares Meson, Polgraph, skalare Kopplung

$$\begin{aligned}
\langle 12|V|34 \rangle &= \frac{g_1 g_2}{(2\pi)^3} \cdot n f \cdot \frac{m_\pi^2}{8\omega_\xi \sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \\
&\cdot \left\{ \frac{1}{Z - \omega_\xi^0} + \frac{1}{Z - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - \omega_\xi} \right\}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

skalares Meson, Polgraph, Gradientenkopplung

$$\begin{aligned}
\langle 12|V|34 \rangle &= \frac{g_1 g_2}{(2\pi)^3} \cdot n f \cdot \frac{(p_1 - p_2)^2 (p_3 - p_4)^2}{8m_\pi^2 \omega_\xi \sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \\
&\cdot \left\{ \frac{1}{Z - \omega_\xi^0} + \frac{1}{Z - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - \omega_\xi} \right\}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Vektormeson, Polgraph

$$\begin{aligned}
\langle 12|V|34 \rangle &= \sum_{\lambda_\xi} \frac{g_1 g_2}{(2\pi)^3} \cdot n f \cdot \frac{\epsilon^\mu(p_\xi, \lambda_\xi) \epsilon^\nu(p_\xi, \lambda_\xi)^*}{8\omega_\xi \sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \\
&\cdot \left\{ \frac{1}{Z - \omega_\xi^0} + \frac{1}{Z - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - \omega_\xi} \right\} \\
&\cdot (p_1 - p_2)_\mu (p_3 - p_4)_\nu
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
 \langle 12|V|34 \rangle = & \sum_{\lambda_\xi} \frac{g_1 g_2}{(2\pi)^3} \cdot n f \cdot \frac{\epsilon^{\mu\nu}(p_\xi, \lambda_\xi) \epsilon^{\rho\sigma}(p_\xi, \lambda_\xi)^*}{8m_\pi^2 \omega_\xi \sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \\
 & \cdot \left\{ \frac{1}{Z - \omega_\xi^0} + \frac{1}{Z - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - \omega_\xi} \right\} \quad (3.36) \\
 & \cdot (p_1 - p_2)_\mu (p_1 - p_2)_\nu (p_3 - p_4)_\rho (p_3 - p_4)_\sigma
 \end{aligned}$$

Das Integral $\int d^3\vec{p}_\xi$ ist bereits ausgeführt. Die dabei entstehende δ -Funktion $\delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4)$, die die Gesamtimpulserhaltung ausdrückt, haben wir der Einfachheit halber nicht mitgeschrieben.

ω_ξ^0 ist die nackte Masse des TOPT Polgraphen, siehe Kapitel 5..

Der Isospinfaktor f ist für die verschiedenen Isospinkanäle in den Tabellen 3.1. und 3.2. aufgeführt. Dort findet sich auch der Normierungsfaktor n für das Pseudopotential, der berücksichtigt, daß die Zustände $|a_3^\dagger a_4^\dagger\rangle, \dots$ nicht auf 1 normiert sind, wenn es sich um identische Teilchen handelt (vergl. Abschnitt 2.3.). Ebenso ist aufgeführt, ob der OBE-Austauschgraph zu berücksichtigen ist. Wie dies am einfachsten geschieht, erläutern wir in Abschnitt 3.4..

In Anhang D haben wir die Pseudopotentiale Gl. (29) – Gl. (36) im CM-System ausgewertet.

Vergleicht man ihre Gestalt Gl. (29) – Gl. (36) mit der allgemeinen Form aus Anhang B, Gl. (B.2) – Gl. (B.4), so erkennt man, daß sich die Pseudopotentiale auch allgemein einfacher schreiben lassen, wenn der Einfluß des SU(3)-Teils im Isospinfaktor f zusammengefaßt wird, und zwar als:

a) direkte OBE-Graphen

$$\langle 12|V|34 \rangle = n f \cdot \sum_{\xi} \tilde{W}_{13\xi} \tilde{W}_{24\xi}^* \cdot \left\{ \frac{1}{Z - E_1 - E_4 - \omega_\xi} + \frac{1}{Z - E_2 - E_3 - \omega_\xi} \right\} \quad (3.37)$$

mit den *undefinierten* Vertexfunktionen

$$\tilde{W}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{m_\pi}{\sqrt{8E_\alpha E_\beta \omega_\gamma}} \quad (3.38)$$

Prozeß	Meson	T	f	m/MeV	n	Ex-Graph
$\pi\pi \rightarrow \pi\pi$	ϵ -OBE	0	1	1400	$\frac{1}{2}$	ja, Fak. 2
		1	1			
		2	1			
$\pi\pi \rightarrow \pi\pi$	ρ -OBE	0	-2	769	$\frac{1}{2}$	ja, Fak. 2
		1	-1			
		2	1			
$\pi\pi \rightarrow \pi\pi$	f_2 -OBE	0	1	1270	$\frac{1}{2}$	ja, Fak. 2
		1	1			
		2	1			
$\pi\pi \rightarrow \bar{K}K$	K^* -OBE	0	$\sqrt{6}$	892	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	ja, Fak. 2
		1	2			
		2	0			
$\bar{K}K \rightarrow \bar{K}K$	ρ -OBE	0	-3	769	1	nein
		1	1			
		2	0			
$\bar{K}K \rightarrow \bar{K}K$	ω -OBE	0	1	783	1	nein
		1	1			
		2	0			
$\bar{K}K \rightarrow \bar{K}K$	ϕ -OBE	0	1	1020	1	nein
		1	1			
		2	0			
$\pi\pi \rightarrow \pi\pi$	ϵ -Pol	0	3	s.o.	$\frac{1}{2}$	
		1	0			
		2	0			
$\pi\pi \rightarrow \pi\pi$	ρ -Pol	0	0	s.o.	$\frac{1}{2}$	
		1	-2			
		2	0			
$\pi\pi \rightarrow \pi\pi$	f_2 -Pol	0	3	s.o.	$\frac{1}{2}$	
		1	0			
		2	0			

Prozeß	Meson	T	f	m/MeV	n	Ex-Graph
$K\pi \rightarrow K\pi$	ρ -OBE	$\frac{1}{2}$	-2	769	1	nein
		$\frac{3}{2}$	1			
$K\pi \rightarrow \pi K$	K^* -OBE	$\frac{1}{2}$	-1	892	1	nur Ex- Graph
		$\frac{3}{2}$	2			
$K\pi \rightarrow K\pi$	ϵ -OBE	$\frac{1}{2}$	1	1400	1	nein
		$\frac{3}{2}$	1			
$K\pi \rightarrow \pi K$	κ -OBE	$\frac{1}{2}$	-1	1429	1	nur Ex- Graph
		$\frac{3}{2}$	2			
$K\pi \rightarrow K\pi$	K^* -Pol	$\frac{1}{2}$	-3	s.o.	1	
		$\frac{3}{2}$	0			
$K\pi \rightarrow K\pi$	κ -Pol	$\frac{1}{2}$	3	s.o.	1	
		$\frac{3}{2}$	0			

Tab. 3.1. und 3.2.:

Isospinfaktoren f für die verschiedenen Graphen der $\pi\pi$ -Streuung (3.1.) und $K\pi$ -Streuung (3.2.). n ist der Normierungsfaktor für das Pseudopotential, der eingeführt werden muß, um Prozesse mit identischen Teilchen richtig zu berücksichtigen. Die letzte Spalte gibt an, ob der Austauschgraph (Ex-Graph) berücksichtigt werden muß. Bei den Polgraphen ist dies schon in den Pseudopotentialausdrücken Gl. (33) - Gl. (36) geschehen. ϵ - (κ -) Austausch für die Prozesse $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ ($\pi\pi \rightarrow \bar{K}K$) haben die gleiche Isospinstruktur wie ω - (K^* -) Austausch.

$$\tilde{W}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{(p_\alpha + p_\beta)^2}{m_\pi \sqrt{8E_\alpha E_\beta \omega_\gamma}} \quad (3.39)$$

$$\tilde{W}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{\epsilon^\mu(p_\gamma, \lambda_\gamma)}{\sqrt{8E_\alpha E_\beta \omega_\gamma}} \cdot (p_\alpha + p_\beta)_\mu \quad (3.40)$$

$$\tilde{W}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{\epsilon^{\mu\nu}(p_\gamma, \lambda_\gamma)}{m_\pi \sqrt{8E_\alpha E_\beta \omega_\gamma}} \cdot (p_\alpha + p_\beta)_\mu \cdot (p_\alpha + p_\beta)_\nu \quad (3.41)$$

b) Polgraphen

$$\langle 12|V|34 \rangle = nf \cdot \sum_{\xi} \tilde{W}_{12\xi} \tilde{W}_{34\xi}^* \cdot \left\{ \frac{1}{Z - \omega_\xi^0} + \frac{1}{Z - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - \omega_\xi} \right\} \quad (3.42)$$

Die Vertexfunktionen $\tilde{W}_{\alpha\beta\gamma}$ sind bis auf die Ersetzung $(p_\alpha + p_\beta)_\mu \rightarrow (p_\alpha - p_\beta)_\mu$ dieselben wie eben.

Bisher haben wir auf der Ebene des Pseudopotentials nur Graphen 2. Ordnung in g zugelassen, wobei irreduzible Graphen 4. Ordnung vernachlässigt werden.

Die nächstbessere Näherung wäre die, im Integralkern der Lippmann-Schwinger ähnlichen Integralgleichung auch Prozesse 4. Ordnung zuzulassen, die sogenannten Box-Diagramme. Dies wurde für den NN-Fall durchgeführt [2]. Dort wird der $N\Delta$ -Kanal wenigstens teilweise durch die $N\Delta$ -Boxen berücksichtigt. Auf gleiche Weise wollen wir den $\rho\rho$ -Kanal berücksichtigen. Weil das ρ -Meson spinbehaftet ist, ist eine strenge Berücksichtigung des $\rho\rho$ -Kanals durch Ankopplung an die $\pi\pi$ -, $\bar{K}K$ - und $\eta\eta$ -Kanäle erheblich aufwendiger. Wir berechnen nur die $\rho\rho$ -Box, die in Fig. 3.6. graphisch dargestellt ist.

Denkbar wäre neben π - auch ω -Austausch, aber wegen der größeren ω -Masse wird der daraus resultierende Beitrag deutlich kleiner sein.

Die Rechnung ist in Anhang G durchgeführt. Dort diskutieren wir auch, wie ein $\rho\rho$ -Kanal angekoppelt werden müßte. In Abschnitt 8.5.2. werden wir sehen, daß der Einfluß der Box klein ist.

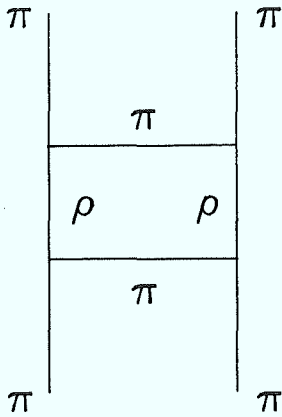


Fig. 3.6.: $\rho\rho$ -Boxpotential

3.4. SYMMETRIEÜBERLEGUNGEN FÜR IDENTISCHE BOSONEN

$\pi\pi$ ist ein System von zwei identischen Bosonen (vom $SU(2)$ -Standpunkt aus betrachtet).

Die Gesamtwellenfunktion $\psi_{ges} = \psi_{Ort} \cdot \psi_{Spin} \cdot \psi_{Isospin}$ zweier identischer Bosonen muß *gerade symmetrisch* sein; für den Gesamt-Bahndrehimpuls L , den Gesamt-Spin S und den Gesamt-Isospin T muß dann gelten:

$$(-)^{L+S+T} \stackrel{!}{=} 1 \quad (3.43)$$

Die Pionen sind Spin-0-Teilchen, deswegen $S = 0$, $J = L + S = L$ und

$$\begin{aligned} (-)^{J+T} &\stackrel{!}{=} 1 \\ \Leftrightarrow J + T &\stackrel{!}{=} \text{gerade} \end{aligned} \quad (3.44)$$

als Forderung an die Quantenzahlen des 2π -Zustandes. Mithin sind nur folgende

Zustände ${}^{2S+1}L_J$ mit ihren zugehörigen Phasen δ_J^T möglich:

$$\begin{array}{l}
 T = 0 : \quad {}^1S_0 \quad {}^1D_2 \quad {}^1G_4 \quad \dots \\
 \qquad \qquad \delta_0^0 \quad \delta_2^0 \quad \delta_4^0 \quad \dots \\
 T = 1 : \quad {}^1P_1 \quad {}^1F_3 \quad \dots \\
 \qquad \qquad \delta_1^1 \quad \delta_3^1 \quad \dots \\
 T = 2 : \quad {}^1S_0 \quad {}^1D_2 \quad {}^1G_4 \quad \dots \\
 \qquad \qquad \delta_0^2 \quad \delta_2^2 \quad \delta_4^2 \quad \dots
 \end{array}$$

Die Symmetriebeziehungen nutzen wir sowohl für OBE-Graphen als auch für Polgraphen aus. Dafür ist es zweckmäßig, das Potential $V(\vec{p}', \vec{p}, Z)$ nach Partialwellen zu entwickeln.

Wählen wir das Koordinatensystem so wie in Anhang A, dann kann folgende Entwicklung [28] nach Legendre-Polynomen $P_J(\cos\theta)$ durchgeführt werden:

$$\langle \vec{p}' | V(Z) | \vec{p} \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_J (2J+1) P_J(\cos\theta) V^J(p', p, Z) \quad (3.45)$$

Mit der Orthogonalitätsrelation der Legendre-Polynome erhält man die Umkehrung:

$$V^J(p', p, Z) = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) P_J(\cos\theta) \langle \vec{p}' | V(Z) | \vec{p} \rangle \quad (3.46)$$

OBE-Graphen

$\langle \vec{p}' | V(Z) | \vec{p} \rangle$ wurde im letzten Abschnitt für die *direkten* OBE-Graphen berechnet. Für den Impuls \vec{p}'_ξ des ausgetauschten Bosons gilt dort:

$$\vec{p}'_\xi{}^2 = (\vec{p} - \vec{p}')^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos\theta \quad (3.47)$$

Bei den OBE-Austauschgraphen ergibt sich:

$$\vec{p}_\xi^2 = (\vec{p} + \vec{p}')^2 = p^2 + p'^2 + 2pp' \cos\theta \quad (3.48)$$

Beide Pseudopotentiale hängen nur von \vec{p}_ξ^2 ab.

Ebenso einfach ist die Beziehung der Isospinfaktoren zwischen direktem OBE-Graphen und OBE-Austauschgraphen:

Den letzteren erhält man durch Umkopplung der Isospins im auslaufenden (oder einlaufenden) Kanal:

$$\langle T_1 T_{1Z} T_2 T_{2Z} | TM \rangle = (-)^{T_1 + T_2 - T} \langle T_2 T_{2Z} T_1 T_{1Z} | TM \rangle \quad (3.49)$$

$T_1 = T_2 = 1$ für die Pionen, mithin erhält man einen Vorzeichenwechsel des Isospinfaktors bei ungeradem Isospin, was natürlich auch aus der Bildung der Erwartungswerte von Gl. (23) direkt resultiert.

Das gesamte partialwellenzerlegte OBE-Potential ist die Summe aus direktem OBE- und OBE-Austauschpotential (V^D und V^A):

$$\begin{aligned} V^J(p', p, Z) &= 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) P_J(\cos\theta) \{ \langle \vec{p}' | V^D(Z) | \vec{p} \rangle + \langle \vec{p}' | V^A(Z) | \vec{p} \rangle \} \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) P_J(\cos\theta) \{ V^D(p', p, Z, \cos\theta) + \\ &\quad (-)^T V^D(p', p, Z, -\cos\theta) \} \\ &= \begin{cases} 2 \cdot 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) P_J(\cos\theta) V^D(p', p, Z, \cos\theta) & \text{falls } J+T \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } J+T \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.50)$$

weil $\{ V^D(p', p, Z, x) + (-)^T V^D(p', p, Z, -x) \}$ gerade (ungerade) symmetrisch in $x = \cos\theta$ für gerade (ungerade) T ist und $P^J(x)$ gerade (ungerade) symmetrisch für gerade (ungerade) J.

Die zu Beginn dieses Abschnittes skizzierten Auswahlregeln ergeben sich also ganz automatisch.

Der OBE-Austauschgraph läßt sich somit am einfachsten dadurch berücksichtigen, daß der direkte OBE-Graph in den erlaubten Zuständen mit dem Faktor 2 multipliziert wird (siehe Tab. 3.1.). Direkter und Austauschgraph der nicht erlaubten Zustände werden gar nicht erst berechnet, weil sie sich gegenseitig aufheben.

Überhalb der ρ -Erzeugungsschwelle ergibt sich bei der Partialwellenzerlegung des ρ -Austausches (im $\pi\pi$ -Fall) eine Schwierigkeit, die wir in Anhang E behandeln.

Polgraphen

Die folgenden Überlegungen gelten auch für die Streuung verschiedener Teilchen.

Führt man die Partialwellenentwicklung für die im letzten Abschnitt berechneten Polgraphen durch (dabei kommt es hier nur auf die Winkelabhängigkeit an, siehe Anhang D für die Pseudopotentiale im CM-System), so erhält man folgende Auswahlregeln:

skalare Mesonen

$V(\vec{p}', \vec{p}, Z)$ unabhängig von θ (Kugelsymmetrie)

$$\Rightarrow V^J(p', p, Z) \sim \int_{-1}^1 dx P^J(x) \sim \delta_{J0}$$

Resonanzen skalarer Mesonen tragen nur in s-Wellen bei.

Vektormesonen

$V(\vec{p}', \vec{p}, Z) \sim \cos\theta \sim P^1(\cos\theta)$

$$\Rightarrow V^J(p', p, Z) \sim \int_{-1}^1 dx P^J(x) \cdot x \sim \delta_{J1}$$

Vektormeson-Resonanzen tragen nur in p-Wellen bei.

Tensormesonen

$$V(\vec{p}', \vec{p}, Z) \sim 3\cos^2\theta - 1 \sim P^2(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow V^J(p', p, Z) \sim \int_{-1}^1 dx P^J(x) \cdot (3x^2 - 1) \sim \delta_{J2}$$

Tensormeson-Resonanzen tragen nur in d-Wellen bei.

Andererseits trägt ein Resonanzteilchen mit Isospin T nur im Isospin-T Kanal bei, siehe Tab.3.1. und Tab.3.2..

Zusammengefasst wirkt also eine Resonanz mit den Quantenzahlen J und T nur in der δ_J^T -Phase, wie nicht anders zu erwarten.

4. Lösung der dynamischen Gleichung

In Kapitel 2 haben wir die Lippmann–Schwinger ähnliche Gleichung Gl. (2.24) in Operatorform hergeleitet und in Kapitel 3 den wesentlichen Bestandteil dieser Integralgleichung, nämlich den Integralkern.

In diesem Kapitel entwickeln wir Lösungsmethoden für diese Gleichung.

Zunächst schreiben wir sie im Fall gekoppelter Kanäle in einer geeigneten Basisdarstellung. Dann überführen wir in Abschnitt 4.2. die Iterationsgleichung Gl. (2.24) für die T-Matrix $T(\vec{p}', \vec{p}, Z)$ in eine für eine partialwellenzerlegte T-Matrix $T^J(p', p, Z)$. Wie diese numerisch gelöst wird, nämlich durch Matrixinversion, zeigen wir in Anhang F.

4.1. DER COUPLED-CHANNEL FORMALISMUS

Um die volle Allgemeinheit zu wahren — insbesondere wegen der in Anhang G zu besprechenden Berücksichtigung des $\rho\rho$ -Kanals —, nehmen wir an, daß die Teilchen im Eingangs- und Ausgangszustand spinbehaftet sind.

Im Rahmen des Bonn-Potentials [2] ist es üblich, die Lippmann–Schwinger ähnliche Gleichung in der *Helizitätsdarstellung* zu lösen. Ein Zweiteilchenzustand ist dann im CM-System durch die Quantenzahlen $|\vec{p}, \lambda_1 \lambda_2 \alpha_1 \alpha_2\rangle$ charakterisiert, wobei $\alpha_i \dots$ die SU(3)-Quantenzahlen kennzeichnet und λ_i der Eigenwert des Helizitätsoperators $\vec{S}_i \cdot \vec{p}_i / |\vec{p}_i|$ ist (\vec{S}_i Spin von Teilchen i , $\vec{p}_i / |\vec{p}_i| = \pm \vec{p} / |\vec{p}|$ sein Einheitsimpuls im CM-System).

Die Lippmann–Schwinger ähnliche Gleichung lautet in dieser Darstellung:

$$\begin{aligned} \langle \lambda'_1 \lambda'_2 \alpha'_1 \alpha'_2 | T(\vec{p}', \vec{p}) | \lambda_1 \lambda_2 \alpha_1 \alpha_2 \rangle &= \langle \lambda'_1 \lambda'_2 \alpha'_1 \alpha'_2 | V(\vec{p}', \vec{p}) | \lambda_1 \lambda_2 \alpha_1 \alpha_2 \rangle \\ &+ \sum_{\beta_1 \beta_2} \sum_{h_1 h_2} \int d^3 \vec{q} \langle \lambda'_1 \lambda'_2 \alpha'_1 \alpha'_2 | V(\vec{p}', \vec{q}) | h_1 h_2 \beta_1 \beta_2 \rangle \frac{1}{Z - E_{\beta_1 \beta_2}(\vec{q})} \\ &\langle h_1 h_2 \beta_1 \beta_2 | T(\vec{q}, \vec{p}) | \lambda_1 \lambda_2 \alpha_1 \alpha_2 \rangle, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$E_{\beta_1\beta_2}(\vec{q})$ ist die Energie des Zweiteilchen-Zwischenzustandes. (Die Abhängigkeit der Matrixelemente von der Startenergie Z haben wir in Gl. (1) nicht explizit mitgeschrieben.)

Die hier geeigneten SU(3)-Quantenzahlen für den Zweiteilchenzustand sind der Gesamtsospin T mit seiner dritten Komponente T_Z und der Teilchenkanal in Isospindarstellung. Die Transformationen zwischen Teilchendarstellung und Isospindarstellung sind in Abschnitt 3.3. angegeben, Gl. (3.25) und Gl. (3.26).

Im Isospin T ist das Pseudopotential wegen der als exakt angenommenen SU(2)-Symmetrie diagonal, d.h. $\langle \lambda'_1 \lambda'_2 \alpha'_1 \alpha'_2 | V(\vec{p}', \vec{p}) | \lambda_1 \lambda_2 \alpha_1 \alpha_2 \rangle \sim \delta_{TT'}$. Deswegen kann das Problem für jeden Isospin T separat behandelt werden. Die SU(2)-Symmetrie bedingt zudem die Unabhängigkeit von T_Z . Wir werden den Isospin T als Index am Potential schreiben.

Im $\pi\pi$ -Fall betrachten wir die Kanäle $|\pi\pi\rangle$, $|K\bar{K}\rangle$ (und $|\eta\eta\rangle$), bei $K\pi$ hingegen keinen weiteren Kanal. Die Kanalindices bezeichnen wir mit μ, ν, κ, \dots

Die Erzeugung eines $K\bar{K}$ -Paares bei einem $\pi\pi$ -Stoß ist erst für eine Startenergie $Z = 2m_K = 992$ MeV möglich. Dementsprechend sind die Potentiale $\langle K\bar{K} | V(\vec{p}', \vec{p}, Z) | \pi\pi \rangle$ bzw. $\langle \pi\pi | V(\vec{p}, \vec{p}', Z) | K\bar{K} \rangle$ mit $p^2 = \frac{Z^2}{4} - m_\pi^2$ für eine Startenergie $Z < 2m_K$ identisch gleich 0 (half off (energy) shell und on (energy) shell Werte). Dasgleiche gilt für die entsprechenden Potentiale des Prozesses $K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$. Bei der Lippmann-Schwinger Gleichung handelt es sich jedoch um eine iterative Gleichung, und full off-shell Matrixelemente tragen durchaus bei.

Mit den oben eingeführten Bezeichnungsweisen schreibt sich Gl. (1) dann als:

$$\begin{aligned} \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | T_{\mu\nu}^T(\vec{p}', \vec{p}) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle &= \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V_{\mu\nu}^T(\vec{p}', \vec{p}) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \\ &+ \sum_{\kappa} \sum_{h_1, h_2} \int d^3\vec{q} \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V_{\mu\kappa}^T(\vec{p}', \vec{q}) | h_1 h_2 \rangle \frac{1}{Z - E_\kappa(\vec{q})} \\ &\langle h_1 h_2 | T_{\kappa\nu}^T(\vec{q}, \vec{p}) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle, \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.2. PARTIALWELLENZERLEGUNG DER ITERATIONSGLEICHUNG

Aus mehreren Gründen ist es zweckmäßig, die Lippmann–Schwinger ähnliche Gleichung Gl. (2) nach Partialwellen zu entwickeln:

- Die starke Wechselwirkung erhält den Gesamtdrehimpuls J , deswegen sind das Potential und die T -Matrix in J diagonal.
- Symmetriebeziehungen können ausgenutzt werden, Abschnitt 3.4..
- Numerische Gründe: Das Integral $\int d^3\vec{q}$ wird in $\int dq$ überführt. Da bei Axial-symmetrie $\int d\phi$ analytisch ausgeführt werden kann, verbleiben mit $\int d(\cos\theta)$ und $\int dq$ nur zwei numerische Integrationen, in der Iterationsgleichung in Partialwellenzerlegung sogar nur eine.

Die Partialwellenentwicklung von T -Matrix bzw. Potential lautet [28] in Verallgemeinerung des Ausdruckes Gl. (3.50) aus Abschnitt 3.4.:

$$\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V_{\mu\nu}^T(\vec{p}', \vec{p}) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_J (2J+1) d_{\lambda\lambda'}^J(\theta) \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V_{\mu\nu}^{JT}(p', p) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \quad (4.3)$$

mit $\lambda := \lambda_1 - \lambda_2, \lambda' := \lambda'_1 - \lambda'_2$ und den reduzierten Rotationsmatrizen $d_{\lambda\lambda'}^J(\theta)$.

Diese besitzen folgende Symmetrieeigenschaften [42]:

$$d_{\lambda\lambda'}^J(\theta) = d_{-\lambda' - \lambda}^J(\theta) = (-1)^{\lambda - \lambda'} d_{\lambda'\lambda}^J(\theta) \quad (4.4)$$

Mit ihrer Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) d_{\lambda\lambda'}^J(\cos\theta) d_{\lambda\lambda'}^{J'}(\cos\theta) = \frac{2}{2J+1} \delta_{JJ'} \quad (4.5)$$

ergibt sich für die Umkehrung von Gl. (3) :

$$\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V_{\mu\nu}^{JT}(p', p) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = 2\pi \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) d_{\lambda\lambda'}^J(\cos\theta) \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V_{\mu\nu}^T(\vec{p}', \vec{p}) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \quad (4.6)$$

Für den Spezialfall $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda'_1 = \lambda'_2 = \lambda = \lambda' = 0$ erhält man mit $d_{00}^J(\theta) = P^J(\cos\theta)$ wieder Gl. (3.46) .

Einsetzen der Entwicklung liefert:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi} \sum_J (2J+1) d_{\lambda\lambda'}^J(\theta) \langle \lambda_1' \lambda_2' | T_{\mu\nu}^{JT}(p', p) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_J (2J+1) d_{\lambda\lambda'}^J(\theta) \langle \lambda_1' \lambda_2' | V_{\mu\nu}^{JT}(p', p) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \\
&+ \int q^2 dq d\Omega_q \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{\kappa} \sum_{h_1 h_2} \sum_{J' J''} (2J'+1)(2J''+1) \langle \lambda_1' \lambda_2' | V_{\mu\kappa}^{J'T}(p', q) | h_1 h_2 \rangle \\
&\frac{1}{Z - E_{\kappa}(\vec{q})} \langle h_1 h_2 | T_{\kappa\nu}^{J''T}(p', p) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle d_{h\lambda'}^{J'}(\theta(\vec{p}', \vec{q})) \cdot d_{\lambda'h}^{J''}(\theta(\vec{q}, \vec{p}'))
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Die Winkelintegration kann ausgeführt werden. Mit den Symmetriebeziehungen für die d-Funktionen Gl. (4) ergibt sich [43]:

$$\int d\Omega_q d_{h\lambda'}^{J'}(\theta(\vec{p}', \vec{q})) \cdot d_{\lambda'h}^{J''}(\theta(\vec{q}, \vec{p}')) = \frac{4\pi}{2J'+1} d_{\lambda\lambda'}^{J'}(\theta(\vec{p}', \vec{p}')) \delta_{J' J''} \tag{4.8}$$

Man erhält für jedes J folgende Gleichung vom Lippmann-Schwinger-Typ:

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_1' \lambda_2' | T_{\mu\nu}^{JT}(p', p) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle &= \langle \lambda_1' \lambda_2' | V_{\mu\nu}^{JT}(p', p) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \\
&+ \sum_{\kappa} \sum_{h_1 h_2} \int q^2 dq \langle \lambda_1' \lambda_2' | V_{\mu\kappa}^{JT}(p', q) | h_1 h_2 \rangle \frac{1}{Z - E_{\kappa}(q)} \\
&\langle h_1 h_2 | T_{\kappa\nu}^{JT}(q, p) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Führt man eine orthogonale Transformation von der Helizitätsdarstellung in die $|JLS\rangle$ -Darstellung durch,

$$V_{\mu\nu}^{JTLS} = UV_{\mu\nu}^{JT, Hel}U^T, \quad UU^T = U^T U = 1, \tag{4.10}$$

kann man die Gleichung auch in dieser Darstellung formulieren:

$$\begin{aligned}
\langle JL'S' | T_{\mu\nu}^{JT}(p', p) | JLS \rangle &= \langle JL'S' | V_{\mu\nu}^{JT}(p', p) | JLS \rangle \\
&+ \sum_{\kappa} \sum_{L'' S''} \int q^2 dq \langle JL'S' | V_{\mu\kappa}^{JT}(p', q) | JL'' S'' \rangle \frac{1}{Z - E_{\kappa}(q)} \\
&\langle JL'' S'' | T_{\kappa\nu}^{JT}(q, p) | JLS \rangle
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Die Transformationsmatrix U ist gegeben durch [44]:

$$\langle JMLS | JM \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \sqrt{\frac{2L+1}{2J+1}} \langle L0S\lambda | J\lambda \rangle \langle S_1 \lambda_1 S_2 - \lambda_2 | S\lambda \rangle \quad (4.12)$$

wobei M die Komponente von J in Richtung der Quantisierungsachse ist (wegen der Rotationssymmetrie ist das Potential unabhängig von M), S_1 und S_2 die Spins der Teilchen und $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$.

In Anhang F wird gezeigt, wie man Gl. (9) oder Gl. (11) numerisch lösen kann. Wir haben uns dabei eines von Tabakin und Haftel [45] vorgeschlagenen Matrixinversionsverfahrens bedient.

5. Das Lee-Modell

Das Lee-Modell [46-48] berücksichtigt nur einen (beliebigen) Polgraphen, aber keinerlei OBE-Graphen. Unter dieser vereinfachenden Annahme ist es möglich, die durch die Lippmann-Schwinger ähnliche Gleichung implizit gegebene T-Matrix explizit auszurechnen. Man erhält ein reines Breit-Wigner Resonanzprofil und dadurch einen analytischen Ausdruck für die Beziehung zwischen Resonanzbreite und Kopplungskonstante.

Auch wenn wir in unserem Modell den aus den OBE-Graphen bestehenden Untergrund berücksichtigen, so liefern die sich aus dem Lee-Modell ergebenden Beziehungen doch eine Abschätzung für die Kopplungskonstanten.

Den Resonanzteilchen im Lee-Modell ist auf der Ebene des Pseudopotentials die nackte Masse m^0 zuzuschreiben. Erst durch Iteration des Pseudopotentials entsteht das physikalische Teilchen mit der beobachteten Masse m . Graphisch kann man dies in Anlehnung an die Lippmann-Schwinger-Gleichung wie in Fig. 5.1. darstellen.

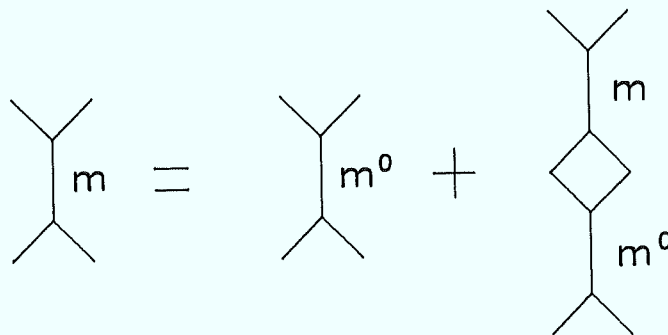


Fig. 5.1.: Iteration des Polgraphen führt zur physikalischen Resonanz.

Die Selbstenergiebeiträge (Fig. 5.2.) des Resonanzteilchens führen also zu einer Renormierung der Teilchenmasse. Die Massenverschiebung $\delta m = m - m^0$ kann im reinen Lee-Modell analytisch berechnet werden.

Renormierungseffekte auf die Kopplungskonstante werden wir nicht betrachten.

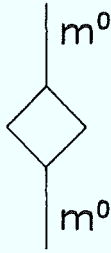


Fig. 5.2.: Selbstenergiebeitrag

In Abschnitt 5.2. wenden wir die in 5.1. erhaltenen Ausdrücke auf die Resonanzen unseres Modells an und kommen so zu den gewünschten Beziehungen zwischen Breite und Kopplungskonstante.

In Abschnitt 5.1. führen wir das Lee-Modell für eine in zwei verschiedene Teilchen zerfallende Resonanz ein, beispielsweise für das K^* oder das κ , die beide in π und K zerfallen. Für die in zwei identische Teilchen zerfallenden ϵ -, ρ - und f_2 -Resonanzen ergeben sich kleine Änderungen in der Rechnung, die sich im Ergebnis nur um einen Faktor $n = \frac{1}{2}$ auswirken.

In Abschnitt 5.2. wenden wir die in 5.1. erhaltenen Ausdrücke auf die Resonanzen unseres

5.1. ANALYTISCHE LÖSUNG DER ITERATIONSGLEICHUNG

Wir stellen uns von Anfang an auf den $SU(2)$ -Standpunkt und starten in leichter Abwandlung der Notation aus Kapitel 2 mit folgendem Hamiltonoperator: ($\tilde{W}_{\alpha\beta\gamma}$ sind die in Gl. (3.38) – Gl. (3.41) definierten Vertexfunktionen!)

$$H = H_0 + W \quad (5.1)$$

mit

$$H_0 = \sum_{\alpha} E_{\alpha}^0 \pi_{\alpha}^{\dagger} \pi_{\alpha} + \sum_{\beta} E_{\beta}^0 K_{\beta}^{\dagger} K_{\beta} + \sum_{\gamma} \epsilon_{\gamma}^0 b_{\gamma}^{\dagger} b_{\gamma}$$

$$W = \sum_{\alpha\beta\gamma} \tilde{W}_{\alpha\beta\gamma} \pi_{\alpha} K_{\beta} b_{\gamma}^{\dagger} + \tilde{W}_{\alpha\beta\gamma}^* \pi_{\alpha}^{\dagger} K_{\beta}^{\dagger} b_{\gamma}$$

wobei π_{α}^{\dagger} (K_{β}^{\dagger}) der Erzeugungsoperator für das Pion (Kaon) ist und b_{γ}^{\dagger} der für das K^* . In Abschnitt 2.2. hatten wir π und K durch die $SU(3)$ -Anteile der Quantenzahlen α unterschieden; hier unterscheiden wir — den $SU(2)$ -Standpunkt einnehmend — schon durch die Bezeichnungsweise des Operators. Die Quantenzahlen

α, β, γ beziehen sich mithin nur noch auf Impuls, Spin und die dritte Komponente des Isospins. E_α^0 , E_β^0 und ϵ_γ^0 sind die nackten = unrenormierten Massen der Teilchen.

Für Pionen und Kaonen gilt jedoch, daß aufgrund der Konstruktion des Hamiltonoperators im Lee-Modell nackte und physikalische Massen übereinstimmen. Anders ausgedrückt: Die π - bzw. K-Masse wird durch die Wechselwirkung nicht beeinflußt:

$$\begin{aligned} H\pi_\alpha^\dagger|0\rangle &= H^0\pi_\alpha^\dagger|0\rangle = E_\alpha^0\pi_\alpha^\dagger|0\rangle = E_\alpha\pi_\alpha^\dagger|0\rangle \\ HK_\beta^\dagger|0\rangle &= H^0K_\beta^\dagger|0\rangle = E_\beta^0K_\beta^\dagger|0\rangle = E_\beta K_\beta^\dagger|0\rangle \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \sqrt{m_\pi^2 + \vec{p}_\alpha^2} \\ E_\beta &= \sqrt{m_K^2 + \vec{p}_\beta^2} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dies gilt nicht für das Resonanzteilchen:

$$Hb_\gamma^\dagger|0\rangle \neq H^0b_\gamma^\dagger|0\rangle = \epsilon_\gamma^0 b_\gamma^\dagger|0\rangle, \quad (5.4)$$

denn

$$Wb_\gamma^\dagger|0\rangle = \sum_{\alpha\beta} \tilde{W}_{\alpha\beta\gamma}^* \pi_\alpha^\dagger K_\beta^\dagger|0\rangle \neq 0$$

Wie oben bereits erläutert, führt die Wechselwirkung also tatsächlich zu einer Modifikation der Teilchenmasse.

Ziel ist es nun, einen Eigenzustand zum Hamilton-Operator H mit der physikalischen Masse ϵ_γ als Eigenwert zu finden. Wir bezeichnen diesen Zustand als "dressed state" $|b_\gamma\rangle^d$ im Gegensatz zum "bare state" $|b_\gamma\rangle^b$.

Es ist:

$$H^0|b_\gamma\rangle^b = \epsilon_\gamma^0|b_\gamma\rangle^b \quad (5.5)$$

Es wird gefordert:

$$H|b_\gamma\rangle^d =! \epsilon_\gamma|b_\gamma\rangle^d \quad (5.6)$$

ϵ_γ ist experimentell bekannt, gesucht ist die (modellabhängige) nackte Masse ϵ_γ^0 bzw. der mass-shift

$$\delta\epsilon_\gamma := \epsilon_\gamma - \epsilon_\gamma^0 \quad (5.7)$$

Für $|b_\gamma\rangle^d$ setzen wir an:

$$|b_\gamma\rangle^d = b_\gamma^\dagger|0\rangle + \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}^\gamma \pi_\alpha^\dagger K_\beta^\dagger|0\rangle \quad (5.8)$$

Im folgenden berechnen wir zwei Übergangsmatrixelemente auf je zwei verschiedene Weisen und erhalten dabei zunächst einen Ausdruck für die Koeffizienten $c_{\alpha\beta}^\gamma$ und damit dann eine Formel für den mass-shift:

Zunächst:

$$\langle 0|\pi_\alpha K_\beta H|b_\gamma\rangle^d = \epsilon_\gamma c_{\alpha\beta}^\gamma$$

einerseits mit der Forderung Gl. (6) und dem Ansatz Gl. (8) ; andererseits mit dem Ansatz Gl. (1) für H und mit Gl. (8) :

$$= \tilde{W}_{\alpha\beta\gamma}^* + (E_\alpha + E_\beta) c_{\alpha\beta}^\gamma$$

Damit:

$$c_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{\tilde{W}_{\alpha\beta\gamma}^*}{\epsilon_\gamma - E_\alpha - E_\beta} \quad (5.9)$$

Ebenso verfahren wir für

$$\begin{aligned} \langle 0|b_{\gamma'} H|b_\gamma\rangle^d &= \epsilon_\gamma \delta_{\gamma\gamma'} \\ &= \epsilon_\gamma^0 \delta_{\gamma\gamma'} + \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}^\gamma \tilde{W}_{\alpha\beta\gamma'}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Damit:

$$\begin{aligned} \delta\epsilon_\gamma \delta_{\gamma\gamma'} &:= (\epsilon_\gamma - \epsilon_\gamma^0) \delta_{\gamma\gamma'} = \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}^\gamma \tilde{W}_{\alpha\beta\gamma'} \\ &= \sum_{\alpha\beta} \frac{\tilde{W}_{\alpha\beta\gamma'} \tilde{W}_{\alpha\beta\gamma}^*}{\epsilon_\gamma - E_\alpha - E_\beta} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Den mass-shift erhält man für $\gamma = \gamma'$ als Hauptwert:

$$\delta\epsilon_\gamma = (\epsilon_\gamma - \epsilon_\gamma^0) = P \sum_{\alpha\beta} \frac{\tilde{W}_{\alpha\beta\gamma} \tilde{W}_{\alpha\beta\gamma}^*}{\epsilon_\gamma - E_\alpha - E_\beta} \quad (5.12)$$

Nach diesen Vorüberlegungen wenden wir uns nun wieder der Lippmann-Schwinger ähnlichen Gleichung zu:

$$\begin{aligned} \langle \pi_1 K_2 | T | \pi_3 K_4 \rangle &= \langle \pi_1 K_2 | V | \pi_3 K_4 \rangle \\ &+ \sum_{\alpha'\beta'} \frac{\langle \pi_1 K_2 | V | \pi_{\alpha'} K_{\beta'} \rangle \langle \pi_{\alpha'} K_{\beta'} | T | \pi_3 K_4 \rangle}{Z - E_{\alpha'} - E_{\beta'}} \end{aligned}$$

mit dem Lee-Modell Pseudopotential

$$\langle \pi_1 K_2 | V | \pi_3 K_4 \rangle = \sum_{\gamma} \frac{\tilde{W}_{12\gamma}^* \tilde{W}_{34\gamma}}{Z - \epsilon_\gamma^0},$$

das wir Abschnitt 3.3. entnehmen können.

Für diese spezielle Form des Pseudopotentials kann man für die durch die Lippmann-Schwinger ähnliche Gleichung implizit gegebene T-Matrix einen analytischen Ausdruck angeben.

Dazu definieren wir in Anlehnung an Gl. (11) und Gl. (12)

$$\delta\epsilon_\gamma(\epsilon_\gamma) \cdot \delta_{\gamma\gamma'} = P \sum_{\alpha\beta} \frac{\tilde{W}_{\alpha\beta\gamma'} \tilde{W}_{\alpha\beta\gamma}^*}{\epsilon_\gamma - E_\alpha - E_\beta} \quad (5.13)$$

folgenden Ausdruck:

$$\delta\epsilon_\gamma(Z) \cdot \delta_{\gamma\gamma'} := \sum_{\alpha\beta} \frac{\tilde{W}_{\alpha\beta\gamma'} \tilde{W}_{\alpha\beta\gamma}^*}{Z - E_\alpha - E_\beta} \quad (5.14)$$

Die Iteration der Lippmann-Schwinger ähnlichen Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} \langle \pi_1 K_2 | T | \pi_3 K_4 \rangle &= \langle \pi_1 K_2 | V | \pi_3 K_4 \rangle \\ &+ \sum_{\alpha'\beta'} \langle \pi_1 K_2 | V | \pi_{\alpha'} K_{\beta'} \rangle \langle \pi_{\alpha'} K_{\beta'} | V | \pi_3 K_4 \rangle \frac{1}{Z - E_{\alpha'} - E_{\beta'}} \\ &+ \sum_{\alpha'\beta'\alpha''\beta''} \dots \\ &= \sum_\gamma \frac{\tilde{W}_{12\gamma}^* \tilde{W}_{34\gamma}}{Z - \epsilon_\gamma^0} + \sum_{\alpha'\beta'\gamma'\gamma} \frac{\tilde{W}_{12\gamma}^* \tilde{W}_{34\gamma'}}{Z - \epsilon_\gamma^0} \cdot \frac{\tilde{W}_{\alpha'\beta'\gamma}^* \tilde{W}_{\alpha'\beta'\gamma'}}{Z - E_{\alpha'} - E_{\beta'}} \cdot \frac{1}{Z - \epsilon_{\gamma'}^0} + \dots \\ &= \sum_\gamma \frac{\tilde{W}_{12\gamma}^* \tilde{W}_{34\gamma}}{Z - \epsilon_\gamma^0} \left\{ 1 + \frac{\delta\epsilon_\gamma(Z)}{Z - \epsilon_\gamma^0} + \dots \right\} \\ &= \sum_\gamma \frac{\tilde{W}_{12\gamma}^* \tilde{W}_{34\gamma}}{Z - \epsilon_\gamma^0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\delta\epsilon_\gamma(Z)}{Z - \epsilon_\gamma^0} \right)^n = \sum_\gamma \frac{\tilde{W}_{12\gamma}^* \tilde{W}_{34\gamma}}{Z - \epsilon_\gamma^0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\delta\epsilon_\gamma(Z)}{Z - \epsilon_\gamma^0}} \\ &= \sum_\gamma \frac{\tilde{W}_{12\gamma}^* \tilde{W}_{34\gamma}}{Z - \epsilon_\gamma^0 - \delta\epsilon_\gamma(Z)} = \sum_\gamma \frac{\tilde{W}_{12\gamma}^* \tilde{W}_{34\gamma}}{Z - \epsilon_\gamma + \delta\epsilon_\gamma(\epsilon_\gamma) - \delta\epsilon_\gamma(Z)} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Diese explizite Lösungsmöglichkeit beruht also darauf, daß die Iteration als eine geometrische Reihe aufgefaßt werden kann, deren Summe in geschlossener Form hingeschrieben wird.

Bei dem Zerfall einer Resonanz in zwei *identische* Teilchen erhält man dieselben Ausdrücke Gl. (11) – Gl. (15) mit dem Faktor $n = \frac{1}{2}$ für die richtige Normierung der Eingangs- und Ausgangszustände.

Wenn wir noch den jeweiligen Isospinfaktor f beachten, erhalten wir, die Ergebnisse dieses Kapitels zusammenfassend, folgenden Ausdruck für den full on-shell Wert der T-Matrix:

$$\begin{aligned} \langle \pi_1 K_2 | T | \pi_3 K_4 \rangle &= nf \cdot \sum_{\gamma} \frac{\tilde{W}_{12\gamma}^* \tilde{W}_{34\gamma}}{Z - m + \delta\epsilon_{\gamma}(m) - \delta\epsilon_{\gamma}(Z)} \\ &= \langle p | T(Z) | p \rangle \end{aligned} \quad (5.16)$$

mit

$$\begin{aligned} \delta\epsilon_{\gamma}(m) &= nf \cdot P \sum_{\alpha\beta} \frac{\tilde{W}_{\alpha\beta\gamma} \tilde{W}_{\alpha\beta\gamma}^*}{m - E_{\alpha} - E_{\beta}} = m - m^0 \\ \delta\epsilon_{\gamma}(Z) &= nf \cdot \sum_{\alpha\beta} \frac{\tilde{W}_{\alpha\beta\gamma} \tilde{W}_{\alpha\beta\gamma}^*}{Z - E_{\alpha} - E_{\beta}} \end{aligned}$$

5.2. BEZIEHUNG ZWISCHEN BREITE UND KOPPLUNGSKONSTANTE IM LEE-MODELL

Um die nur in einzelnen Phasen wirkenden Resonanzen untersuchen zu können, muß die on-shell T-Matrix nach Abschnitt 4.1. partialwellenzerlegt werden. Zudem wird sie normiert (Abschnitt 7.1.):

$$\tau_j^T(Z) = -\pi \frac{E_1 E_2 p}{Z} \cdot T^{JT}(p, p, Z),$$

wobei $E_1 = E_3$ und $E_2 = E_4$ die Energien der ein- bzw. auslaufenden Teilchen sind, $Z = E_1 + E_2 = E_3 + E_4$ die Startenergie und p der zugehörige Impuls,

$$Z = \sqrt{m_1^2 + p^2} + \sqrt{m_2^2 + p^2} = E(p).$$

Wir können auf die Ergebnisse bei der Berechnung des Pseudopotentials (Abschnitt 3.3.) zurückgreifen und erhalten, wenn m_R die Masse des Resonanzteilchens ist und $g = g_{R12} = g_{R34}$ die jeweilige Kopplungskonstante:

skalare Mesonen (skalare Kopplung)

$$\tau_0^T = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{m_\pi^2 p}{4m_R Z} \cdot \frac{n \cdot f}{Z - m_R + \delta\epsilon(m_R) - \delta\epsilon(Z)} \quad (5.17)$$

skalare Mesonen (Gradientenkopplung)

$$\tau_0^T = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{4p^5}{m_\pi^2 m_R Z} \cdot \frac{n \cdot f}{Z - m_R + \delta\epsilon(m_R) - \delta\epsilon(Z)} \quad (5.18)$$

Vektormesonen

$$\tau_1^T = +\frac{g^2}{4\pi} \frac{p^3}{3m_R Z} \cdot \frac{n \cdot f}{Z - m_R + \delta\epsilon(m_R) - \delta\epsilon(Z)} \quad (5.19)$$

Tensormesonen

$$\tau_2^T = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{8p^5}{15m_\pi^2 m_R Z} \cdot \frac{n \cdot f}{Z - m_R + \delta\epsilon(m_R) - \delta\epsilon(Z)} \quad (5.20)$$

Man beachte, daß für kleine Z der Realteil von $\tau_j^T(Z)$ stets positiv ist, siehe die Tabellen 3.1. und 3.2. der Isospinfaktoren.

Wir berechnen exemplarisch für das Vektormeson $\delta\epsilon(m_R)$, $\delta\epsilon(Z)$ und die Resonanzbreite Γ ; für die anderen Mesonen geben wir nur das Ergebnis an.

Wieder können wir dabei vom Pseudopotential ausgehen und erhalten für das Vektormeson:

$$\begin{aligned} \delta\epsilon(m_R) &= -nf P \int q^2 dq d(\cos\theta) d\phi \frac{g^2}{(2\pi)^3} \frac{q^2 \cos\theta}{2m_R E_1(q) E_2(q)} \frac{1}{m_R - E_1(q) - E_2(q)} \\ &= -nf \frac{g^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{3m_R} P \int_0^\infty q^2 dq \frac{q^2}{E_1(q) E_2(q)} \frac{1}{m_R - E_1(q) - E_2(q)} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Substituiere:

$$E(q) = E_1(q) + E_2(q) = \sqrt{m_1^2 + q^2} + \sqrt{m_2^2 + q^2}$$

$$\Rightarrow \delta\epsilon(m_R) = -nf \frac{g^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{3m_R} P \int_{m_1+m_2}^{\infty} \frac{q^3 dE}{E(m_R - E)} \quad (5.22)$$

Dieses Integral hat einen Pol bei

$$E = m_R \quad \text{bzw.} \quad (5.23)$$

$$q = q_0 = \frac{1}{2m_R} \cdot \sqrt{m_R^4 - 2m_R^2(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2}$$

und muß regularisiert werden. Man erhält:

$$\delta\epsilon(m_R) = -nf \frac{g^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{3m_R} \cdot \left\{ \int_0^{\infty} \frac{q(q^3 - q_0^3) dq}{E_1(q) E_2(q) (m_R - E_1(q) - E_2(q))} \right. \\ \left. + \frac{q_0^3}{m_R} \ln \left(\frac{m_R}{m_1 + m_2} - 1 \right) \right\} \quad (5.24)$$

Für die Berechnung von $\delta\epsilon(Z)$ müssen wir nur m_R durch Z und q_0 durch die zu $E(p) = Z$ gehörige Polstelle p ersetzen und den Imaginärteil berücksichtigen:

$$\delta\epsilon(Z) = -nf \frac{g^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{3m_R} \cdot \left\{ \int_0^{\infty} \frac{q(q^3 - p^3) dq}{E_1(q) E_2(q) (Z - E_1(q) - E_2(q))} \right. \\ \left. + \frac{p^3}{Z} \ln \left(\frac{Z}{m_1 + m_2} - 1 \right) + i\pi \frac{p^3}{Z} \right\} \quad (5.25)$$

Setzen wir in $\tau_1^T(Z)$ (Gl. (19)) ein, so läßt sich schreiben:

$$\tau_1^T(Z) = \frac{-\gamma(Z)}{a(Z) + i\gamma(Z)} \quad (5.26)$$

mit

$$\gamma(Z) := -\frac{g^2}{4\pi} \cdot \frac{p^3}{3m_R Z} \cdot nf \quad (> 0, \text{ weil } f < 0)$$

und

$$a(Z) = Z - m_R + \delta\epsilon(m_R) - \text{Re}(\delta\epsilon(Z))$$

Für $Z \approx m_R$ haben wir näherungsweise

$$\tau_1^T(Z) = \frac{-\frac{\Gamma}{2}}{(Z - m_R) + i\frac{\Gamma}{2}} \quad (5.27)$$

mit $\Gamma := 2\gamma(m_R)$ als Breite der Breit-Wigner-Resonanz, denn

$$\sigma_1^T(Z) \sim |\tau_1^T(Z)|^2 = \text{Im}(\tau_1^T(Z)) = \frac{\frac{\Gamma^2}{4}}{(Z - m_R)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (5.28)$$

für den Wirkungsquerschnitt der ersten Partialwelle. An der Stelle der Resonanz, $Z = m_R$, gilt dann:

$$\begin{aligned} \text{Im}(\tau_1^T(m_R)) &= 1 \\ \text{Re}(\tau_1^T(m_R)) &= 0 \\ \delta_1(m_R) &= 90^\circ, \quad \text{Phase, s. Kap. 7} \end{aligned}$$

Die Rechnung für skalare und Tensormesonen verläuft völlig analog. Wir geben jeweils nur $\delta\epsilon(Z)$ an, den mass-shift $\delta\epsilon(m_R)$ erhält man, indem man den Imaginärteil fortläßt und die Ersetzungen $p \rightarrow q_0$ und $Z \rightarrow m_R$ durchführt.

skalare Mesonen (skalare Kopplung)

$$\begin{aligned} \delta\epsilon(Z) = nf \frac{g^2}{(2\pi)^2} \frac{m_\pi^2}{4m_R} \cdot \left\{ \int_0^\infty \frac{q(q-p)dq}{E_1(q) E_2(q) (Z - E_1(q) - E_2(q))} \right. \\ \left. + \frac{p}{Z} \ln \left(\frac{Z}{m_1 + m_2} - 1 \right) + i\pi \frac{p}{Z} \right\} \end{aligned} \quad (5.29)$$

skalare Mesonen (Gradientenkopplung)

$$\begin{aligned} \delta\epsilon(Z) = nf \frac{g^2}{(2\pi)^2} \frac{4}{m_\pi^2 m_R} \cdot \left\{ \int_0^\infty \frac{q(q^5 - p^5)dq}{E_1(q) E_2(q) (Z - E_1(q) - E_2(q))} \right. \\ \left. + \frac{p^5}{Z} \ln \left(\frac{Z}{m_1 + m_2} - 1 \right) + i\pi \frac{p^5}{Z} \right\} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Tensormesonen

$$\delta\epsilon(Z) = nf \frac{g^2}{(2\pi)^2} \frac{8}{15m_\pi^2 m_R} \cdot \left\{ \int_0^\infty \frac{q(q^5 - p^5) dq}{E_1(q) E_2(q) (Z - E_1(q) - E_2(q))} + \frac{p^5}{Z} \ln \left(\frac{Z}{m_1 + m_2} - 1 \right) + i\pi \frac{p^5}{Z} \right\} \quad (5.31)$$

Die Beziehungen zwischen Resonanzbreiten und Kopplungskonstanten, die das Ziel dieses Abschnittes darstellten, lauten mithin:

skalare Mesonen (skalare Kopplung)

$$\Gamma = nf \cdot \frac{g^2}{4\pi} \frac{m_\pi^2}{2m_R^2} \cdot q_0 \quad (5.32)$$

skalare Mesonen (Gradientenkopplung)

$$\Gamma = nf \cdot \frac{g^2}{4\pi} \frac{8}{m_\pi^2 m_R^2} \cdot q_0^5 \quad (5.33)$$

Vektormesonen

$$\Gamma = n|f| \cdot \frac{g^2}{4\pi} \frac{2}{3m_R^2} \cdot q_0^3 \quad (5.34)$$

Tensormesonen

$$\Gamma = nf \cdot \frac{g^2}{4\pi} \frac{16}{15m_\pi^2 m_R^2} \cdot q_0^5 \quad (5.35)$$

wobei q_0 jeweils der Impuls der Zerfallsprodukte einer in ihrem Ruhesystem zerfallenden Resonanz ist, Gl. (23).

In Abschnitt 8.1. werden wir diese Gleichungen numerisch auswerten.

Die Möglichkeit, die τ -Matrix mit Gl. (17) – Gl. (20) und Gl. (24) – Gl. (25) bzw. Gl. (29) – Gl. (31) direkt berechnen zu können, bietet sich dafür an, die Computerprogramme zu überprüfen, denn für die nichtseparablen OBE-Potentiale

ist eine analytische Lösung der Lippmann-Schwinger ähnlichen Gleichung nicht möglich, und man ist auf das in Anhang F beschriebene numerische Haftel-Tabakin-Verfahren angewiesen.

6. Formfaktoren

Das Mesonaustauschbild verliert seine Gültigkeit für kleine Abstände der Hadronen (entsprechend großen Impulsüberträgen), weil diese als punktförmig angenommen werden, ihnen jedoch eine räumliche Ausdehnung zukommt. Hier ist es durch das Quark-Gluon-Austauschbild zu ersetzen.

Es müßte also prinzipiell möglich sein, mit Hilfe von an die QCD angelehnten Modellen Formfaktoren zu berechnen, die die Potentialbeiträge des Mesonaustauschbildes für hohe Impulsüberträge unterdrücken. Anstrengungen in diese Richtung werden unternommen [49, 50].

Gewöhnlicherweise werden im Rahmen von Mesonaustauschbildern diese von der zugrunde liegenden Quark-Gluon Struktur herrührenden Effekte durch einen *empirischen* Formfaktor parametrisiert.

Wir wählen für die Vertices der OBE-Graphen einen Monopol-Formfaktor:

$$F_\alpha(q^2) = \frac{\Lambda_\alpha^2 - m_\alpha^2}{\Lambda_\alpha^2 - q^2} \approx \frac{\Lambda_\alpha^2 - m_\alpha^2}{\Lambda_\alpha^2 + \vec{q}^2}, \quad (6.1)$$

wobei α das ausgetauschte Meson kennzeichnet, m_α seine Masse, q den Viererimpuls- und \vec{q} den Dreierimpulsübertrag. Λ_α ist die sogenannte Cut-off-Masse, mit der sich steuern läßt, wie schnell das Potential mit wachsendem Impulsübertrag abfallen soll. Die Vernachlässigung der 0-ten Komponente des Viererimpulsübertrages ist üblich [2], aber nicht notwendig. Beide Ansätze des Formfaktors führen mit nur geringfügig unterschiedlichem Cut-off Λ_α zu praktisch identischen Ergebnissen.

Für die Polgraphen der skalaren (skalare Kopplung) und Vektormesonen wählen wir

$$F_\alpha(q^2) = \frac{\Lambda_\alpha^2 + m_\alpha^2}{\Lambda_\alpha^2 + q^2} \quad (6.2)$$

als Formfaktor mit $q^2 = (E_1(\vec{q}) + E_2(\vec{q}))^2$, dem Quadrat des Viererimpulses des Zwischenzustandes.

Für die Tensormeson-Polgraphen und die skalaren Mesonen mit Gradientenkopplung müssen wir mit

$$F_\alpha(q^2) = \frac{\Lambda_\alpha^4 + m_\alpha^4}{\Lambda_\alpha^4 + q^4} \quad (6.3)$$

ein noch stärkeres Abschneideverhalten wählen, weil dort $V(\vec{p}, \vec{p}, Z) \sim p^2$ für $|\vec{p}| \sim \infty$ und anderenfalls das Integral der Lippmann-Schwinger ähnlichen Gleichung nicht konvergieren würde. Aus dem gleichen Grund müssen wir den Monopol-Formfaktor beim Austausch eines skalaren Teilchens mit Gradientenkopplung quadrieren.

Diese rein praktischen Konvergenzerwägungen sind der ursprüngliche Grund für die Einführung von Formfaktoren gewesen, doch durch die Entwicklungen der QCD kommt den Formfaktoren heute eine klare physikalische Bedeutung zu.

Das bedeutet aber auch, daß die Cut-offs keine völlig freien Fitparameter sind, sondern sich in einem physikalisch sinnvollen Rahmen bewegen müssen. Cut-offs, die kleiner sind als die Massen der ausgetauschten Teilchen, haben keinen Sinn, da dies bedeuten würde, daß die Reichweite der starken Wechselwirkung — entsprechend der reziproken Masse des Austauscheteilchens — kleiner wäre als die Ausdehnung der wechselwirkenden Teilchen — entsprechend dem reziproken Cut-off. Umgekehrt bedeuten große Cut-offs eine kleine Ausdehnung der Hadronen.

Für Baryon-Baryon-Meson-Vertices sind die Cut-offs im Bereich $\Lambda = 1.2 - 2.2$ GeV [2, 4], für 3-Meson-Vertices bis $\Lambda = 3.0$ GeV [6], was der Anschauung entspricht, daß dem 2-Quark-System "Meson" eine geringere Ausdehnung zukommt als dem 3-Quark-System "Baryon". Die Cut-offs unserer 3-Meson-Vertices der OBE-Graphen liegen im Bereich 1.7 GeV - 4.0 GeV, wobei durchaus kleinere Werte möglich sind, wenn wir auf den reinen SU(3)-Wert für Kopplungskonstanten — konkret für $g_{KK\rho}$ und $g_{KK^*\pi}$ — verzichteten und diese um bis zu 20 % vergrößerten (Abschnitt 8.2.).

Die Polgraphen sind verhältnismäßig unabhängig von den Cut-offs, wenn man die nackte Masse entsprechend anpaßt, siehe Abschnitt 8.1..

Um zu untersuchen, inwieweit die Ergebnisse von der Wahl des Formfaktortyps abhängig sind, haben wir neben den hier angegebenen Parametrisierungen einige

weitere getestet, wobei wir zu denselben physikalischen Aussagen kamen.

Ein noch allgemeinerer Ansatz für den Formfaktor würde berücksichtigen, daß alle drei am Vertex wechselwirkenden Teilchen off-shell sein können, also

$$F(p_1^2, p_2^2, p_3^2),$$

wobei $p_i, i = 1, 2, 3$, ihre Viererimpulse sind. Sind alle drei Teilchen on mass shell, ist der Formfaktor $F(m_1^2, m_2^2, m_3^2) = 1$. Ein Beispiel für einen solchen allgemeineren Ansatz ist der von Moussallam benutzte Formfaktor [51],

$$F(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = \prod_{i=1}^3 \exp \left\{ \frac{p_i^2 - m_i^2}{2\Lambda_i^2} \right\}. \quad (6.4)$$

Wir berücksichtigen mit unseren Parametrisierungen von vornherein nur das off-shell Verhalten des Austauschteilchens, obwohl die Pionen bzw. Kaonen durch die Iteration des Potentials auch off-shell sein können.

7. Observable und Phasen

Das vorläufige Ergebnis der Rechnung ist die full off-shell T-Matrix für die Prozesse $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, $\pi\pi \rightarrow \bar{K}K$, $\bar{K}K \rightarrow \bar{K}K$ bzw. $\pi K \rightarrow \pi K$ im jeweiligen Isospinkanal. Um die Ergebnisse mit dem Experiment vergleichen zu können, ist eine Transformation auf zumindest indirekt experimentell zugängliche Größen notwendig. Dies soll in diesem Kapitel in den Abschnitten 7.2. und 7.3. geschehen, in dem wir die Definition von Streudaten, Inelastizitäten und Streulängen angeben bzw. differentielle und totale Wirkungsquerschnitte berechnen.

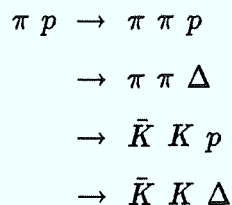
Zunächst jedoch einige kurze Bemerkungen zur experimentellen Situation bei der $\pi\pi$ - und πK -Streuung. Eine ausführliche Darstellung findet sich u.a. in [52].

7.1. EXPERIMENTELLE SITUATION

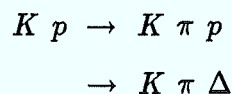
Zur Zeit besteht in keinem Laboratorium der Welt die Möglichkeit, zwei Pionenstrahlen (bzw. Pionen- und Kaonenstrahl) von ausreichender Intensität und Strahlqualität miteinander kollidieren zu lassen.

Man ist deshalb auf indirekte Schlüsse angewiesen. Zu diesem Thema gibt es umfangreiche Literatur insbesondere aus den siebziger Jahren (s.u.). Wir wollen nur grob die Prinzipien von zwei üblichen Schlußweisen wiedergeben:

(1) Analyse der Reaktionen



bzw.



In Fig. 7.1. ist einer der Prozesse graphisch veranschaulicht. I.a. wird nur Ein-Pion-Austausch im Eingangskanal angenommen.

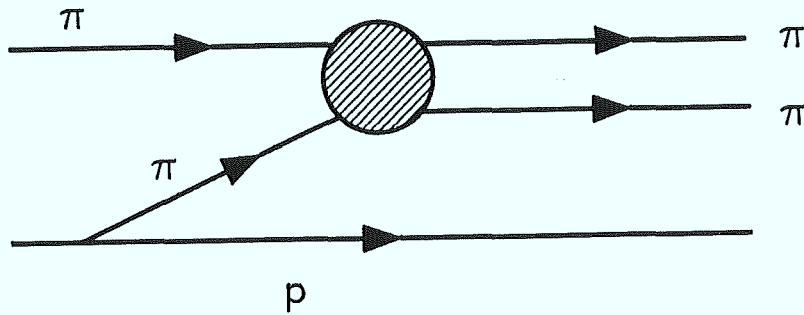


Fig. 7.1.: Zur Extraktion von $\pi\pi$ -Streuphasen geeignete Reaktion

Nach der Messung von differentiellen (und totalen) Wirkungsquerschnitten für verschiedene Energien extrapoliert man (linear oder quadratisch) von den Meßdaten für das off-shell Pion auf den on-shell Wert.

(2) Analyse des schwachen Zerfalls

$$K^+ \rightarrow \pi^+\pi^-e^+\nu_e$$

$$K^- \rightarrow \pi^+\pi^-e^-\bar{\nu}_e$$

Ist die Kopplungskonstante des schwachen Zerfalls bekannt, erhält man direkt Informationen über die $\pi\pi$ -Wechselwirkung. Diese Methode eignet sich für den Niederenergiebereich bis ~ 350 MeV, insbesondere für die s-Phasen und ihre Streulängen.

Aus den auf die eine oder andere Art und Weise erhaltenen on-shell Werten für die differentiellen und totalen Wirkungsquerschnitte berechnet man die Y-Momente (Abschnitt 7.3.), aus denen durch aufwendige Phasenanalysen die Streuphasen und Inelastizitäten bestimmt werden. Insbesondere wegen der Meßunsicherheit in den Daten sind die Phasen dabei nicht eindeutig, d.h. ein

Satz von Streudaten läßt verschiedene Sätze von Streuphasen und Inelastizitäten zu. Mit zunehmender Energie wird die Phasenanalyse unsicherer. Die bekanntesten Phasenanalysen sind die von Protopopescu et al. [53], Hyams et al. [54], Estabrooks und A. D. Martin [55], Froggatt und Petersen [56], Cohen [15], Cason [57] und Ochs [58] für die $\pi\pi$ -Streuung bzw. Estabrooks et al. [59], Jongejans et al. [60], Firestone [61], Matison et al. [62] und die neuste† von Aston et al. [63] für die πK -Streuung. Weitere Meßwerte, mit denen wir unsere theoretischen Ergebnisse vergleichen, entnehmen wir von Wicklund et al. [20], A. D. Martin et al. [64], Etkin et al. [21] (zitiert nach D. Krupa [22]), B. R. Martin et al. [52] und Lang [65, 66]. Die Meßpunkte in unseren Figuren in Kapitel 8 beziehen sich auf diese Quellen.

7.2. PARAMETRISIERUNG DER S-MATRIX; PHASEN, INELASTIZITÄTEN, STREULÄNGEN

Zur Berechnung von Phasen und Observablen geht man vom on-shell Wert der T-Matrix aus, da nur dieser dem beobachtbaren physikalischen Vorgang entspricht.

Mit $T_{\mu\nu}^T$ meinen wir in diesem Kapitel den on-shell Wert des entsprechenden Teilchenkanals in der jeweiligen Isospinbasis, also $\mu, \nu = |\pi\pi\rangle, |\bar{K}K\rangle, \dots$

Die Rechnungen werden übersichtlicher, wenn wir von der dimensionsbehafteten T-Matrix zur dimensionslosen S-Matrix übergehen [67], deren Elemente $S_{\mu\nu}^T$ durch die Überlappintegrale der asymptotischen ein- und auslaufenden Wellenfunktionen gegeben sind:

$$S_{\mu\nu}^T = \lim_{t \rightarrow +\infty, t' \rightarrow -\infty} \langle \psi_{\mu}^T(t) | \psi_{\nu}^T(t') \rangle$$

Die Erhaltung der Teilchenströme drückt sich in der Unitarität der S-Matrix aus (optisches Theorem),

$$SS^{\dagger} = S^{\dagger}S = 1. \quad (7.1)$$

†Für diesen Hinweis danken wir W. Dunwoodie.

Die Beziehung zwischen S- und T-Matrix lautet wie folgt [67]:

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu}^{JT} &= \delta_{\mu\nu} - 2\pi i \sqrt{\rho_\mu \rho_\nu} T_{\mu\nu}^{JT} \\ &=: \delta_{\mu\nu} + 2i\tau_{\mu\nu}^{JT} \end{aligned} \quad (7.2)$$

wobei

$$\begin{aligned} \rho_\nu &= q_\nu^2 \frac{dq_\nu}{dE_\nu} \quad \text{und} \\ \rho_\mu &= q_\mu^2 \frac{dq_\mu}{dE_\mu} \end{aligned} \quad (7.3)$$

die Dichten im Eingangs- und Ausgangszustand sind.

Die dimensionslose Größe

$$\tau_{\mu\nu}^{JT} =: -\pi \sqrt{\rho_\mu \rho_\nu} T_{\mu\nu}^{JT} \quad (7.4)$$

wird als τ -Matrix bezeichnet.

Die Berechnung der Dichten aus der Energie des Anfangszustandes

$$\begin{aligned} E_\nu(q_\nu) &= \sqrt{m_3^2 + q_\nu^2} + \sqrt{m_4^2 + q_\nu^2} \\ &= E_3 + E_4 = Z \end{aligned}$$

und der des Endzustandes

$$\begin{aligned} E_\mu(q_\mu) &= \sqrt{m_1^2 + q_\mu^2} + \sqrt{m_2^2 + q_\mu^2} \\ &= E_1 + E_2 = Z \end{aligned}$$

im CM-System ergibt:

$$\begin{aligned} \rho_\nu &= q_\nu \cdot \left(\frac{1}{E_3} + \frac{1}{E_4} \right)^{-1} \\ \rho_\mu &= q_\mu \cdot \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (7.5)$$

In beiden von uns betrachteten Fällen ergeben sich Vereinfachungen:

a) πK -Streuung

Hier koppeln wir keinen Kanal an. Damit ist stets $\mu = \nu$, $E_1 = E_3$ und $E_2 = E_4$.

Wir lassen die Kanalindices weg und schreiben:

$$\tau^{JT} = -\pi \frac{q E_1 E_2}{Z} T^{JT}$$

b) $\pi\pi$ -Streuung mit angekoppeltem $\bar{K}K$ -Kanal

Die Massen der beiden Teilchen in jedem Kanal ist gleich: $E_3 = E_4 = \frac{E_\mu}{2} = \frac{Z}{2}$, $E_1 = E_2 = \frac{E_\mu}{2} = \frac{Z}{2}$. Damit:

$$\tau_{\mu\nu}^{JT} = -\frac{\pi}{4} Z \sqrt{q_\mu q_\nu} T_{\mu\nu}^{JT}$$

In der Literatur sind meistens nicht S- oder τ -Matrizen angegeben, sondern Streuphasen δ und Inelastizitäten η . Für den Fall a) ist die Parametrisierung trivial:

$$S^{JT}(\eta^{JT}, \delta^{JT}) = \eta^{JT} e^{2i\delta^{JT}} \quad (7.6)$$

Aus der Unitarität Gl. (1) der S-Matrix folgt $\eta^{JT} = 1$, der Prozeß ist voll elastisch.

Für zwei gekoppelte Kanäle (Fall b)) parametrisiert man die unitäre S-Matrix wie folgt [15]:

$$S^{JT}(\eta^{JT}, \delta_1^{JT}, \delta_2^{JT}) = \begin{pmatrix} \eta^{JT} e^{2i\delta_1^{JT}} & i\sqrt{1 - (\eta^{JT})^2} e^{i\delta_{12}^{JT}} \\ i\sqrt{1 - (\eta^{JT})^2} e^{i\delta_{12}^{JT}} & \eta^{JT} e^{2i\delta_2^{JT}} \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

mit $\delta_{12}^{JT} := \delta_1^{JT} + \delta_2^{JT}$.

Der Index bezieht sich auf den Kanal: $1 = \pi\pi$, $2 = \bar{K}K$. Koppeln wir noch den $\eta\eta$ -Kanal als dritten Kanal an, dürfen wir streng genommen nicht mehr diese Parametrisierung der S-Matrix benutzen, da diese nicht mehr unitär ist: Ein Teil des Teilchenstromes fließt in den $\eta\eta$ -Kanal ab. Weil die Kopplung dieses Kanales an die anderen jedoch sehr schwach ist, vernachlässigen wir den Teilchenabfluß

und gehen nach wie vor von der Parametrisierung Gl. (7) für die S-Matrix der $\pi\pi$ -Streuung aus.

Für die Phasen und Inelastizitäten ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tan 2\delta_1^{JT} &= \frac{2\operatorname{Re}(\tau_{11}^{JT})}{1 - 2\operatorname{Im}(\tau_{11}^{JT})} \\ \tan 2\delta_2^{JT} &= \frac{2\operatorname{Re}(\tau_{22}^{JT})}{1 - 2\operatorname{Im}(\tau_{22}^{JT})} \\ \tan \delta_{12}^{JT} &= \frac{\operatorname{Im}(\tau_{12}^{JT})}{\operatorname{Re}(\tau_{12}^{JT})} \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} \eta^{JT} &= \sqrt{(2\operatorname{Re}(\tau_{11}^{JT}))^2 + (1 - 2\operatorname{Im}(\tau_{11}^{JT}))^2} \\ &= \sqrt{(2\operatorname{Re}(\tau_{22}^{JT}))^2 + (1 - 2\operatorname{Im}(\tau_{22}^{JT}))^2} \\ &= \sqrt{1 - 4|\tau_{12}^{JT}|^2} \end{aligned} \quad (7.9)$$

Wir werden die Kanalindices meistens nicht explizit mitschreiben. Wenn wir es nicht ausdrücklich anders bemerken, meinen wir mit δ_J^T die Phasen für den Prozeß $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, δ_{11}^{JT} . Gleiches gilt für die τ -Matrix.

Ein Parameter, der das Verhalten kurz oberhalb der Schwelle beschreibt, ist die *Streulänge* a_J^T . Sie ist sowohl für $\pi\pi$ -Streuung als auch für πK -Streuung definiert durch [35] :

$$a_J^T = \lim_{q \rightarrow 0} \left(\frac{m_\pi}{q} \right)^{2J+1} \operatorname{Re}(\tau_{11}^{JT}(q)) \quad (7.10)$$

7.3. DIFFERENTIELLER UND TOTALER WIRKUNGSQUERSCHNITT, OPTISCHES THEOREM

Bisher haben wir die T-Matrix in der $|JT\rangle$ -Basis berechnet, in der sie diagonal ist. In Experimenten wird man jedoch Observable beobachten, die sich von einer T-Matrix in Teilchenbasis herleiten. Deswegen werden wir a) von der gesamten T-Matrix als Summe ihrer Partialwellen ausgehen und sie b) von der Isospinbasis in die Teilchenbasis transformieren.

a) Mit Gl. (4.3) gilt:

$$T_{\mu\nu}^T = \frac{1}{4\pi} \sum_J (2J+1) P^J(\cos\theta) T_{\mu\nu}^{TJ}$$

b) Die meisten Experimente zur $\pi\pi^-$ ($K\pi^-$) Streuung gehen von $\pi^+\pi^-$ ($K^+\pi^-$) im Anfangszustand aus. Wir geben deswegen nur die Transformationen in T-Matrizen mit diesen Eingangszuständen an. Folgende Teilchenkanäle sind dann möglich:

$$\begin{aligned} \pi^+\pi^- &\rightarrow \pi^+\pi^- = -|11\rangle|1-1\rangle \\ &\rightarrow \pi^0\pi^0 = |10\rangle|10\rangle \\ &\rightarrow K^+K^- = -|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rangle \\ &\rightarrow K^0\bar{K}^0 = |\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle \end{aligned} \tag{7.11}$$

$$\begin{aligned} K^+\pi^- &\rightarrow K^+\pi^- = |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle|1-1\rangle \\ &\rightarrow K^0\pi^0 = |\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rangle|10\rangle \end{aligned} \tag{7.12}$$

Die Identifikation mit den Isospinzuständen erfolgte mit den Konventionen Gl. (3.7). Da bei der $K\pi$ -Streuung die beiden Teilchen im Anfangs- und Endzustand jeweils verschieden sind, erhält man hier die Transformationskoeffizienten

aus einer einfachen Clebsch-Gordan-Kopplung. Der Isospin ist wie stets mit T bezeichnet — Verwechslungen mit der T -Matrix sind wohl auszuschließen. Wegen der $SU(2)$ -Symmetrie ist die T -Matrix unabhängig von der T_Z -Komponente.

$$\begin{aligned}\langle K^+\pi^-|T|K^+\pi^- \rangle &= \sum_{T=\frac{1}{2},\frac{3}{2}} \langle K^+\pi^-|TT_Z \rangle \langle TT_Z|T|TT_Z \rangle \langle TT_Z|K^+\pi^- \rangle \\ &= \frac{2}{3}T^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}T^{\frac{3}{2}}\end{aligned}\quad (7.13)$$

$$\langle K^+\pi^-|T|K^0\pi^0 \rangle = \frac{1}{3}\sqrt{2} \left(-T^{\frac{1}{2}} + T^{\frac{3}{2}} \right)$$

Bei der $\pi\pi$ -Streuung ist hingegen zu beachten, daß in unserer Darstellung ein Zweiteilchenzustand zweier *identischer* Teilchen anders normiert ist als ein Zweiteilchenzustand zweier unterscheidbarer Teilchen. Nun stimmt die Eigenschaft "identisch" in der Isospinbasis nicht mit der in der Teilchenbasis überein: $|\pi\pi\rangle$ ist in der *Isospinbasis* ein Zustand zweier identischer Teilchen, in der *Teilchenbasis* hingegen ist dies nur $|\pi^0\pi^0\rangle$, nicht aber $|\pi^+\pi^- \rangle$. In unserer Normierung müssen wir deswegen für jeden Übergang (im Anfangs- oder Endzustand) von identischen zu unterscheidbaren Teilchen zu den Clebsch-Gordan-Koeffizienten einen Faktor $\sqrt{2}$ hinzufügen, so daß wir schließlich folgende Transformationen von der T -Matrix in Isospinbasis $\langle \pi\pi|T^T|\pi\pi \rangle = T_{11}^T$ usw. zur T -Matrix in der Teilchenbasis erhalten [53, 68]:

$$\begin{aligned}\langle \pi^+\pi^-|T|\pi^+\pi^- \rangle &= \frac{2}{3}T_{11}^0 + T_{11}^1 + \frac{1}{3}T_{11}^2 \\ \langle \pi^+\pi^-|T|\pi^0\pi^0 \rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3}T_{11}^0 - \frac{\sqrt{2}}{3}T_{11}^2 \\ \langle \pi^+\pi^-|T|K^+K^- \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}T_{12}^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}T_{12}^1 \\ \langle \pi^+\pi^-|T|K^0\bar{K}^0 \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}}T_{12}^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}T_{12}^1\end{aligned}\quad (7.14)$$

Alle folgenden Überlegungen zur Berechnung der Wirkungsquerschnitte gelten prinzipiell in *beiden* Basisdarstellungen. *Observable* sind natürlich nur die Wirkungsquerschnitte in der *Teilchenbasis*.

Sei wie im letzten Kapitel μ der Ausgangszustand mit den Teilchen 1 und 2 und ν der Eingangszustand mit den Teilchen 3 und 4 (wahlweise Isospin- oder Teilchenbasis).

Dann gilt [67] für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma_{\mu\nu}}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^4}{v_\nu} \rho_\mu \cdot |T_{\mu\nu}|^2, \quad (7.15)$$

wobei

$$v_\nu = \frac{dE_\nu}{dq_\nu} = q_\nu \left(\frac{1}{E_3} + \frac{1}{E_4} \right)$$

die relative Geschwindigkeit im Eingangszustand ist und ρ_μ die Dichte Gl. (5) im Ausgangszustand.

Nach Einsetzen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\mu\nu}}{d\Omega} &= (2\pi)^4 \frac{q^\mu}{q^\nu} \frac{E_1 E_2 E_3 E_4}{Z^2} |T_{\mu\nu}|^2 \\ &= (4\pi)^2 \frac{1}{q_\nu^2} |\tau_{\mu\nu}|^2 = \frac{q_\mu}{q_\nu} |f_{\mu\nu}|^2 \end{aligned} \quad (7.16)$$

mit der Streuamplitude

$$f_{\mu\nu} := \frac{4\pi}{\sqrt{q_\mu q_\nu}} \tau_{\mu\nu}. \quad (7.17)$$

Aus der Partialwellenentwicklung Gl. (3.45) für $\tau_{\mu\nu}$ resultiert:

$$\frac{d\sigma_{\mu\nu}}{d\Omega} = \frac{1}{q_\nu^2} \sum_{JJ'} (2J+1)(2J'+1) P^J(\cos\theta) P^{J'}(\cos\theta) \tau_{\mu\nu}^J \tau_{\mu\nu}^{J'*} \quad (7.18)$$

Der totale Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{\mu\nu} = \int \int \frac{d\sigma_{\mu\nu}}{d\Omega} d\Omega = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{d\sigma_{\mu\nu}}{d\Omega}(\cos\theta) \quad (7.19)$$

ergibt sich unter Ausnutzung der Orthogonalitätsrelation der Legendrepolynome

$$\int_{-1}^1 dx P^J(x) P^{J'}(x) = \frac{2}{2J+1} \delta_{JJ'}$$

zu:

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{q_\nu^2} \sum_J (2J+1) |\tau_{\mu\nu}^J|^2 \quad (7.20)$$

Oben hatten wir bemerkt, daß die Unitarität der S-Matrix direkt mit der Erhaltung der Teilchenströme zusammenhängt (optisches Theorem). Dies wollen wir noch etwas genauer ausführen, denn das optische Theorem bietet eine numerische Prüfungsmöglichkeit für unsere Programme und Transformationen Gl. (13) und Gl. (14) :

Aus der Unitarität $SS^\dagger = 1$ folgt für die (bei n geöffneten Kanälen $n \times n$) τ -Matrix:

$$\begin{aligned} 1 &= SS^\dagger = (1 + 2i\tau)(1 - 2i\tau^\dagger) \\ &= 1 + 2i(\tau - \tau^\dagger) + 4\tau\tau^\dagger \\ \Rightarrow \text{Im}(\tau) &= \tau\tau^\dagger \end{aligned} \quad (7.21)$$

Eine längere Rechnung [67] führt zu einer vertrauteren Schreibweise dieses optischen Theorems (1 sei der Eingangskanal, λ durchlaufe alle n geöffneten Kanäle):

$$\sigma_{tot} := \sum_{\lambda=1}^n \sigma_{1\lambda} = \frac{4\pi}{q_\nu} \text{Im}(f_{11}(\theta = 0)) \quad (7.22)$$

Der Imaginärteil der Streuamplitude des elastischen Kanals in Vorwärtsrichtung entspricht der Summe der totalen Wirkungsquerschnitte aller geöffneten Kanäle.

Da es unpraktisch ist, für jede Energie und jeden Winkel einen differentiellen Wirkungsquerschnitt anzugeben, drückt man die Winkelabhängigkeit mit Hilfe der sogenannten Y-Momente aus, die nur noch energieabhängig sind.

Ist die Streuung unabhängig von ϕ (Drehimpulserhaltung), setzen wir an:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\mu\nu}}{d\Omega}(\theta, Z) &= \frac{q_\mu}{q_\nu} |f_{\mu\nu}(\theta, Z)|^2 \\ &= \sum_J \langle Y_J^0 \rangle_{\mu\nu}(Z) \cdot Y^{J0}(\theta) \cdot \sigma_{\mu\nu}(Z), \end{aligned} \quad (7.23)$$

wobei die $Y^{J0}(\theta)$ die bekannten Kugelflächenfunktionen sind.

Andererseits hatten wir mit $P^J(\cos\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2J+1}} Y^{J0}(\theta)$ und Gl. (18) :

$$\frac{d\sigma_{\mu\nu}}{d\Omega} = \frac{4\pi}{q_\nu^2} \sum_{J_1 J_2} \sqrt{(2J_1+1)(2J_2+1)} Y^{J_1 0} Y^{J_2 0} \tau_{\mu\nu}^{J_1} \tau_{\mu\nu}^{J_2*} \quad (7.24)$$

Mit [69]

$$Y^{J_1 M_1}(\Omega) Y^{J_2 M_2}(\Omega) = \sum_{JM} \sqrt{\frac{(2J_1+1)(2J_2+1)}{(2J+1)4\pi}} \cdot \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle \langle J_1 0 J_2 0 | J0 \rangle Y^{JM}(\Omega) \quad (7.25)$$

erhält man:

$$\frac{d\sigma_{\mu\nu}}{d\Omega} = \frac{\sqrt{4\pi}}{q_\nu^2} \sum_{J J_1 J_2} \frac{(2J_1+1)(2J_2+1)}{\sqrt{2J+1}} \langle J_1 0 J_2 0 | J0 \rangle^2 \cdot \tau_{\mu\nu}^{J_1} \tau_{\mu\nu}^{J_2*} \cdot Y^{J0} \quad (7.26)$$

Ein Koeffizientenvergleich mit dem Ansatz Gl. (23) führt zu:

$$\langle Y_f^0 \rangle_{\mu\nu} = \frac{1}{q_\nu q_\mu} \frac{\sqrt{4\pi}}{\sigma_{\mu\nu}} \sum_{J_1 J_2} \frac{(2J_1+1)(2J_2+1)}{\sqrt{2J+1}} \langle J_1 0 J_2 0 | J0 \rangle^2 \cdot \tau_{\mu\nu}^{J_1} \tau_{\mu\nu}^{J_2*} \quad (7.27)$$

Für den Fall $\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$ geben wir die Momente explizit an. Die zu diesem Prozeß gehörigen τ_J -Matrizen bezeichnen wir mit:

$$\begin{aligned} \tau_0 &=: S, & \tau_1 &=: P, \\ \tau_2 &=: D, & \tau_3 &=: F. \end{aligned}$$

Alle τ_J mit $J \geq 4$ werden näherungsweise gesetzt:

$$\tau_J = 0$$

Dies ist möglich, weil höhere Partialwellen in dem von uns betrachteten Energiebereich kaum eine Rolle spielen. Mit größer werdenden Energien wird diese

Näherung schlechter.

Wir erhalten [53]:

$$\langle Y_0^0 \rangle = \frac{\sqrt{4\pi}}{q_\nu^2 \sigma_{\pi^+\pi^-}} SS^*$$

$$\langle Y_1^0 \rangle = \frac{4\sqrt{\pi}}{q_\nu^2 \sigma_{\pi^+\pi^-}} \sqrt{3} \cdot \{ \text{Re}(S^*P) + 2\text{Re}(P^*D) + 3\text{Re}(D^*F) \}$$

$$\langle Y_2^0 \rangle = \frac{4\sqrt{\pi}}{q_\nu^2 \sigma_{\pi^+\pi^-}} \sqrt{5} \cdot \left\{ \text{Re}(S^*D) + \frac{9}{5}\text{Re}(P^*F) + \frac{3}{5}\text{Re}(P^*P) \right. \\ \left. + \frac{5}{7}\text{Re}(D^*D) + \frac{14}{15}\text{Re}(F^*F) \right\}$$

$$\langle Y_3^0 \rangle = \frac{4\sqrt{\pi}}{q_\nu^2 \sigma_{\pi^+\pi^-}} \sqrt{7} \cdot \left\{ \text{Re}(S^*F) + \frac{9}{7}\text{Re}(D^*P) + \frac{4}{3}\text{Re}(D^*F) \right\}$$

$$\langle Y_4^0 \rangle = \frac{4\sqrt{\pi}}{q_\nu^2 \sigma_{\pi^+\pi^-}} \cdot \left\{ 4\text{Re}(F^*P) + \frac{15}{7}\text{Re}(D^*D) + \frac{21}{11}\text{Re}(F^*F) \right\}$$

$$\langle Y_5^0 \rangle = \frac{4\sqrt{\pi}}{q_\nu^2 \sigma_{\pi^+\pi^-}} \frac{50}{3\sqrt{11}} \cdot \text{Re}(D^*F)$$

$$\langle Y_6^0 \rangle = \frac{4\sqrt{\pi}}{q_\nu^2 \sigma_{\pi^+\pi^-}} \frac{350}{33\sqrt{13}} \cdot \text{Re}(F^*F)$$

8. Ergebnisse

In diesem Kapitel stellen wir die wesentlichen Ergebnisse unserer Rechnungen vor und vergleichen sie mit den experimentellen Werten.

Zunächst beschäftigen wir uns in Abschnitt 8.1. ausschließlich mit den *Resonanzen* (nur s-Kanal Polgraphen), die wir im Lee-Modell analytisch berechnen konnten. In Abschnitt 8.2. berücksichtigen wir zusätzlich die OBE-Graphen (t-Kanal) und geben ein Modell an, das für kleine bis mittlere Energien sämtliche Streudaten gut beschreibt. Insbesondere können wir das sogenannte S^* -Teilchen (975 MeV) mit den Quantenzahlen $J^P = 0^+$ als gebundenen $K\bar{K}$ -Zustand erklären.

Für Energien $Z > 1.0$ GeV ist die Beschreibung der δ_0^0 und $\delta_0^{1/2}$ -Phasen der $\pi\pi$ - bzw. $K\pi$ -Streuung nicht mehr zufriedenstellend. Dies führt uns zu den Modellen II und III, in denen wir zu den Graphen des Modells I noch die 0^+ -Resonanzteilchen mit $m \approx 1.4$ GeV hinzufügen, zunächst mit der skalaren Kopplung Gl. (3.1) (Abschnitt 8.3.), dann mit der Gradientenkopplung Gl. (3.4) (Abschnitt 8.4.). In Abschnitt 8.5. diskutieren wir den Einfluß weiterer Graphen, insbesondere den des $\rho\rho$ -Boxpotentials. Schließlich vergleichen wir in Abschnitt 8.6., inwieweit mit unserem Fit an die Phasen auch die verfügbaren Observablen gut wiedergegeben werden.

8.1. RESONANZEN IM LEE-MODELL

In Abschnitt 5.2. haben wir für eine reine Lee-Modell-Resonanz (TOPT) die Beziehung zwischen Resonanzbreite und Kopplungskonstante hergeleitet Gl. (5.32) – Gl. (5.35) .

Wir nehmen nun an, daß die experimentelle Resonanz tatsächlich nur aus den TOPT Polgraphen aufgebaut wird, um eine erste Abschätzung für die Kopplungskonstanten zu bekommen. Zudem nehmen wir an, daß nur ein Zerfallskanal offen ist und die partielle Breite für diesen Kanal deswegen mit der Gesamtbreite übereinstimmt. Außer für das ϕ , das nur zu 85 % in $\bar{K}K$ zerfällt, ist diese Näherung

sehr gut erfüllt [10]. Beim ϕ schätzen wir die partielle Breite aus der Gesamtbreite ab.

Mit den Isospinfaktoren f und den Normierungskonstanten n aus Tab. 3.1. und 3.2. und den experimentellen Daten aus [10] ergibt sich Tab.8.1..

Meson	J^P	Kanal	m	q_0	$n \cdot f$	Γ	$\frac{g^2}{4\pi}$
ϵ (S)	0^+	$\pi\pi$	1400	686	$\frac{1}{2} \cdot 3$	150–	30–
ϵ (G)						400	80
						150–	0.003–
						400	0.008
κ (S)	0^+	$K\pi$	1429	621	3	287	33
κ (G)							0.005
ρ	1^-	$\pi\pi$	769	359	$-\frac{1}{2} \cdot 2$	153	2.94
K^*	1^-	$K\pi$	892	288	3	51.3	0.85
ϕ	1^-	$\bar{K}K$	1020	127	-2	4.41	1.43
		85%				0.85	
f_2	2^+	$\pi\pi$	1274	622	$\frac{1}{2} \cdot 3$	185	0.038

Tab. 8.1.:

Kopplungskonstanten im Lee-Modell. Angegeben sind die Kopplungskonstanten für reine Lee-Modell Resonanzen, die aus der empirischen Breite Γ folgen (S skalare Kopplung, G Gradientenkopplung). m , Γ und q_0 , der Impuls der beiden Zerfallsprodukte einer im Ruhesystem zerfallenden Resonanz, sind in MeV angegeben.

Mit den so erhaltenen Kopplungskonstanten können wir im Rahmen dieses Modells die SU(3)-Symmetrierelationen wenigstens größenordnungsmäßig überprüfen.

a) *Vektormesonen*

Die SU(3)-Symmetrie fordert:

$$G_\rho = \frac{g_{\pi\pi\rho}^2}{4\pi} = 4 \cdot \frac{g_{K^*K\pi}^2}{4\pi} = 4 \cdot G_{K^*} \quad (8.1)$$

Gehen wir von der "experimentellen" Kopplungskonstante von $G_\rho = 2.94$ aus, heiße dies:

$$G_{K^*} = 0.735$$

statt der "experimentellen" von $G_{K^*} = 0.85$. Für $g_{K^*K\pi}$ ist dies eine Abweichung von ungefähr 7%. Dies bedeutet nicht, daß die SU(3)-Symmetrie gebrochen wäre, denn der Untergrund von ρ - bzw. K^* -Resonanz kann verschieden zur Breite beitragen.

Die Kopplung des reinen Singulett-Teilchens ω_1 , $g_{PP\omega_1}$, ist nicht über SU(3)-Symmetriebeziehungen mit der Oktettkopplung verbunden. Wie in Abschnitt 3.2. erläutert, ist $g_{\pi\pi\omega_1}$ aber aus $g_{\pi\pi\omega_8}$ und $g_{K_C K\phi}$ bei Kenntnis des Mischungswinkels

zwischen ω_1 und ω_8 zugänglich. Dort griffen wir bereits auf $G_\phi = \frac{g_{K_C K\phi}^2}{4\pi} \approx \frac{1}{2} G_\rho$ aus Tab. 8.1. zurück und hatten demnach gesetzt:

$$g_{K_C K\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} g_{\pi\pi\rho} \quad (8.2)$$

Dies ist auf 1% Genauigkeit erfüllt.†

b) *skalare Mesonen*

Für die skalaren Mesonen sind Aussagen über die Erfüllung der SU(3)-Symmetrierelationen spekulativer, weil der Mischungswinkel zwischen dem Oktett- ϵ_8 und einem möglichen Singulett- ϵ_1 nicht bekannt ist. Wir nehmen an: Bei dem ϵ -Meson handelt es sich um ein reines ϵ_8 . Dann ergeben die SU(3)-Symmetrierelationen Gl. (3.17) mit $\alpha = 0$ für die PPS-Kopplung:

$$g_{\pi\pi\epsilon} = \frac{2}{3}\sqrt{3}g, \quad |g_{\pi K\kappa}| = g$$

†Die SU(6)-Symmetrie fordert, daß Gl. (2) exakt erfüllt ist.

$$\Rightarrow \frac{\frac{g_{\pi\pi\epsilon}^2}{4\pi}}{\frac{g_{\pi K\kappa}^2}{4\pi}} = \frac{4}{3} \quad (8.3)$$

Gehen wir von der aus der experimentellen κ -Breite folgenden Kopplungskonstante $G_\kappa = 33.0$ (0.005) für skalare (Gradienten-) Kopplung aus, hieße dies:

$$G_\epsilon = 44 \text{ (0.007),}$$

was mit den Kopplungskonstanten, die aus den experimentell für ϵ angegebenen Breiten resultieren, sehr gut übereinstimmt.

Die Annahme, daß Singulett- und Oktett- ϵ nicht mischen, ist stark und spekulativ. Einige Autoren geben für den Mischungswinkel θ Werte an, jedoch identifizieren sie andere Resonanzen mit den Mesonen des pseudoskalaren Nonetts als wir. Morgan [70] z.B. gibt für ein nicht ideal gemischtes Nonett, bestehend aus $\delta(980)$, $S^*(980)$, $\kappa(1250)$ und $\epsilon(1300)$, $\theta = 68^\circ$ an.

Als weitere Anwendung des Lee-Modells wollen wir die Größenordnungen der nackten Massen m_0 und ihre Abhängigkeit vom Cut-off Parameter Λ betrachten (Tab. 8.2.). Eine stärkere Unterdrückung des off-shell Verhaltens der Graphen durch kleinere Cut-offs führt erwartungsgemäß zu kleineren Massenverschiebungen (ρ , K^* , f_2). Bei gleichem Cut-off Λ liegen die (nackten) Massen der genuinen Vektormesonen ρ und K^* noch näher zusammen als die Massen der physikalischen Teilchen. Wegen der Abhängigkeit vom Cut-off ist es jedoch nicht möglich, die nackte Masse genauer als 300 MeV festzulegen, und die Tabelle 8.2. soll nur den Bereich zeigen.

Die zugehörige Phasenverschiebung ist hingegen verhältnismäßig unabhängig vom Cut-off. Dies ist für die ρ -Resonanz in Fig. 8.1. gezeigt. In unseren Modellen können wir deswegen für die Cut-offs der Polgraphen durchgehend $\Lambda = 3$ GeV wählen, ohne daß dadurch die allgemeinen Aussagen eingeschränkt wären.

Bemerkenswert sind die großen Unterschiede in der nackten Masse für die zwei Kopplungsarten der skalaren Teilchen. Ebenso unterschiedlich sehen die Phasen und der Imaginärteil der τ -Matrix aus (Fig. 8.2.a und b). Beides liegt in den völlig

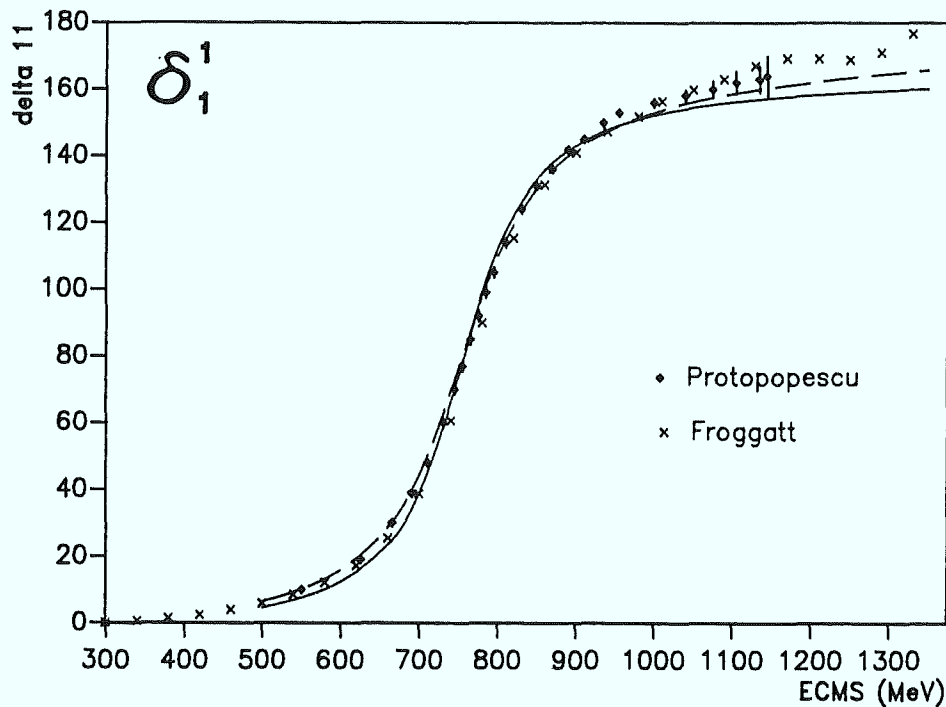


Fig. 8.1.: Einfluß des Cut-off Parameters Λ auf die Lee-Modell ρ -Resonanz. $G = 2.94$, m^0 im Lee-Modell berechnet. Wie in allen Figuren beziehen sich die Namen an den Meßdaten auf die in Abschnitt 7.1. angegebenen Quellen. durchgezogene Kurve: $\Lambda = 1.5 \text{ GeV}$; gestrichelte Kurve: $\Lambda = 3.0 \text{ GeV}$

unterschiedlichen Eigenschaften dieser zwei Kopplungsarten begründet: Durch die Gradientenkopplung werden die Beiträge bei kleinen Energien unterdrückt. Die Streulänge a_0^0 ist im Falle der Gradientenkopplung 0. Im Falle der skalaren Kopplung liegt sie weit über dem experimentellen Wert von $a_0^0 = 0.25 \pm 0.05$ [35], und diese viel zu starke Attraktion kann durch die in der δ_0^0 -Phase ebenfalls attraktiv wirkenden OBE-Graphen nicht kompensiert werden.

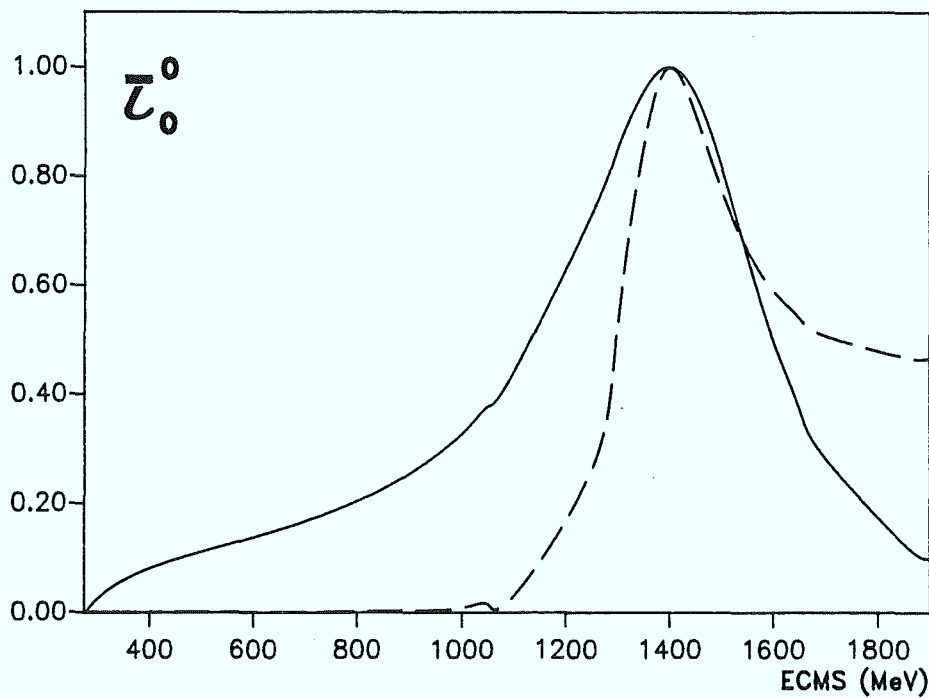
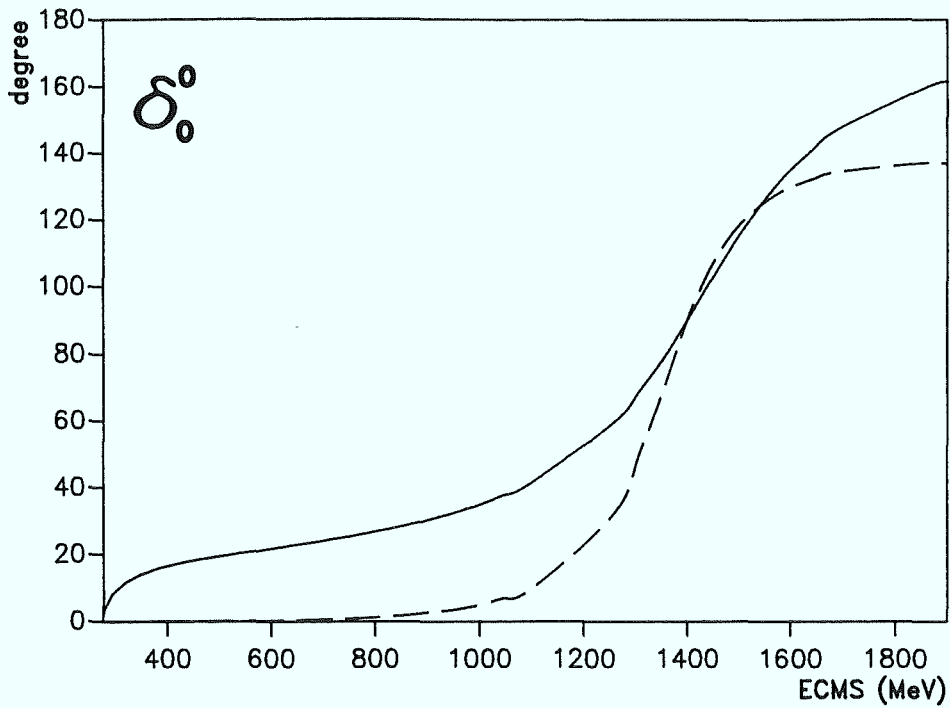


Fig. 8.2.: Skalare und Gradientenkopplung für die ϵ -Resonanz im Lee-Modell ($\Lambda = 3 \text{ GeV}$ jeweils, $G_\epsilon = 80$ bzw. $G_\epsilon = 0.008$ entsprechend $\Gamma = 400 \text{ MeV}$). durchgezogene Kurve: skalare Kopplung; gestrichelt: Gradientenkopplung
 a) δ_0^0 -Phase b) $\text{Im}(\tau_0^0)$

Meson	m	G	FF	m ⁰		
				2 GeV	3 GeV	4 GeV
ϵ (S)	1400	80	3	1301	1368	1406
ϵ (G)		0.008	4	1641	2241	3401
κ (S)	1429	33	3	1407	1446	1471
κ (G)		0.005	4	1680	2283	3645
ρ	769	2.94	3	966	1135	1350
K^*	892	0.85	3	1033	1152	1309
f_2	1274	0.038	4	1427	1787	2575

Tab. 8.2.:

Abhängigkeit der nackten Massen m^0 vom Cut-off Λ für TOPT Lee-Modell Resonanzen ($\Lambda = 2 \text{ GeV}$, 3 GeV und 4 GeV). FF kennzeichnet den Formfaktor-Typ. $FF=3$ bedeutet einen Formfaktor wie in Gl. (6.2), $FF=4$ einen wie in Gl. (6.3).

8.2. MODELL I: VEKTORMESON OBE- UND VEKTORMESON POLGRAPHEN

Ein realistischeres Modell als das Lee-Modell wird zusätzlich zu dem TOPT-Polgraphen Vektormeson OBE-Graphen und die Graphen der Fig. 2.3.b berücksichtigen. Ein solches Modell bezeichnen wir im folgenden als Modell I. Zunächst legen wir durch die ρ -Resonanz die g_{PPV} -Kopplungskonstante fest:

Die δ_1^1 -Phase wird eindeutig von der TOPT ρ -Resonanz dominiert, aber ρ -OBE-Graph und der Graph der Fig. 2.3.b mit einem ρ -Meson im Zwischenzustand wirken beide ebenfalls attraktiv und damit verbreiternd auf die sich insgesamt ergebende Resonanz. Deswegen müssen wir G_ρ von dem Lee-Modell Wert $G_\rho = 2.94$ auf $G_\rho = 2.1$ reduzieren, um nun mit der Summe aller drei Graphen die physikalische Breite von $\Gamma_\rho = 153 \text{ MeV}$ zu reproduzieren. Den Einfluß der einzelnen

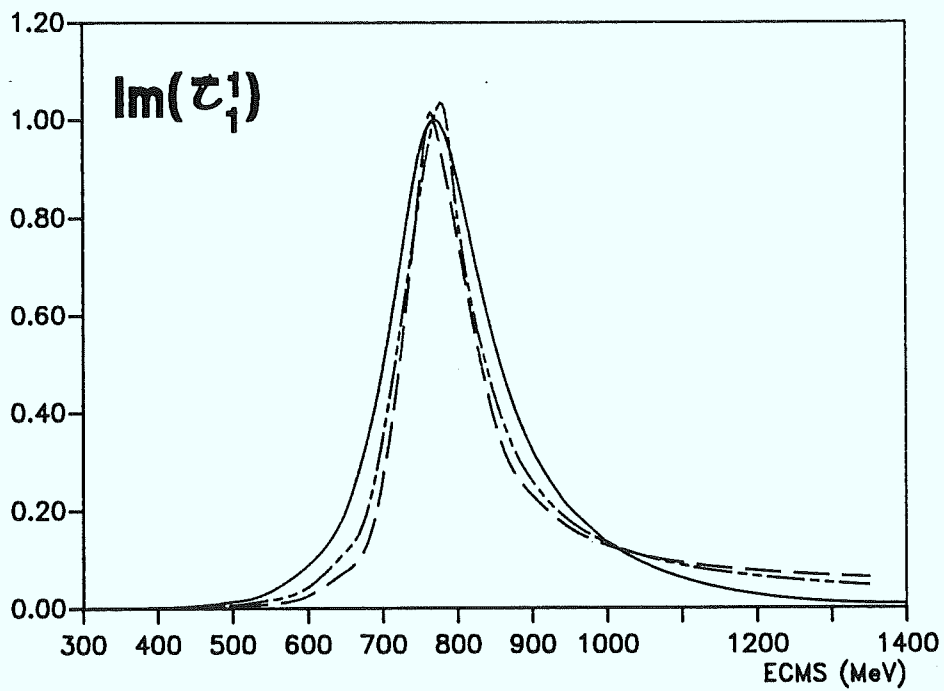
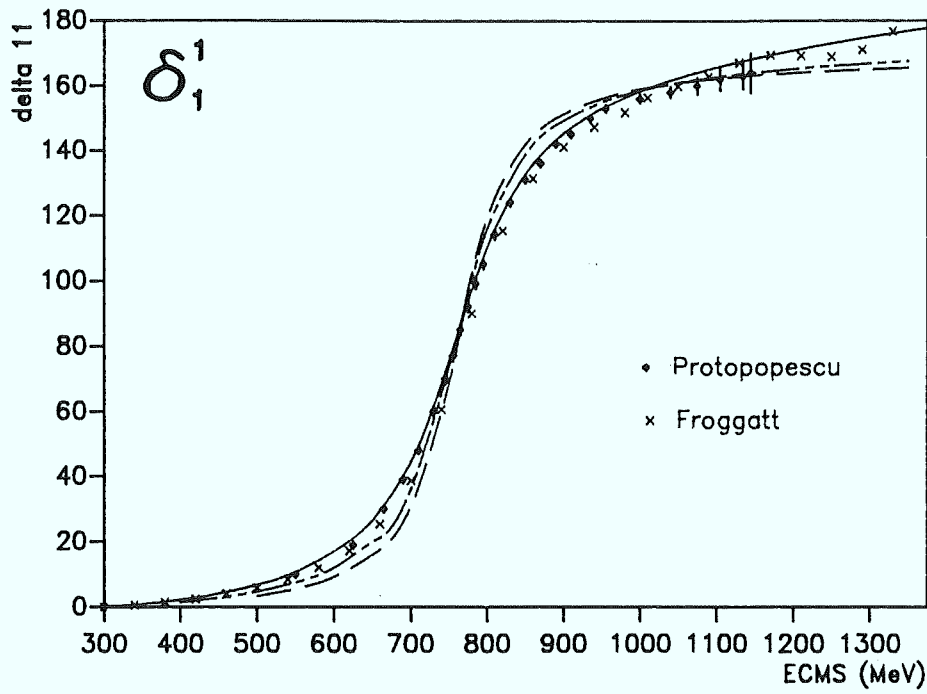


Fig. 8.3.: Einfluß des Untergrundes auf die Lee-Modell ρ -Resonanz
 ($G_\rho = 2.1$, $\Lambda = 3 \text{ GeV}$; m^0 wurde so gewählt, daß $\delta_1^1(m_R) = 90^\circ$).
 durchgezogene Kurve: Modell I; kurz-kurz-lang gestrichelte Kurve: kovarian-
 ter Polgraph; lang gestrichelte Kurve: TOPT Polgraph
 a) δ_1^1 -Phase b) $\text{Im}(\tau_1^1)$

Graphen auf die Phase δ_1^1 und auf $Im(\tau_1^1)$ zeigt Fig. 8.3.. Der angekoppelte Kanal $K\bar{K}$ wirkt in dieser Phase kaum, siehe Abschnitt 8.2.2.. Die nackte Masse m^0 wird so nachjustiert, daß die Phase bei der physikalischen Resonanzmasse m_R ihren 90° -Durchgang hat.

Meson	m	G_{Lee}	$G_{M_I/II/III}$	m_{Lee}^0	$m_{M_I}^0$	$m_{M_{II/III}}^0$
ϵ (S)	1400	80	120	1368	-	1300
ϵ (G)		0.008	0.013	2210	-	4000
κ (S)	1429	33	30	1446	-	1400
κ (G)		0.005	0.0008	2283	-	1600
ρ	769	2.94	2.1	1135	1080	1080
K^*	892	0.85	0.525	1152	1084	1084
f_2	1274	0.038	0.035	1787	1895	1895

Tab. 8.3.:

Modifikationen der Kopplungskonstanten und nackten Massen gegenüber dem Lee-Modell durch Berücksichtigung des "Untergrundes" in den Modellen I, II und III ($\Lambda = 3$ GeV, Massen in MeV).

Diese Nachjustierung wird auch bei den K^* - und f_2 -Resonanzen vorgenommen, die die $\delta_1^{1/2}$ -Phase der $K\pi$ -Streuung bzw. δ_2^0 -Phase der $\pi\pi$ -Streuung dominieren. In diesen drei Phasen ist der Einfluß der zusätzlichen Graphen ("Untergrund") auf die nackte Masse m^0 kleiner als der des Cut-offs des TOPT-Polgraphen. (Tab. 8.3., zu den skalaren Mesonen kommen wir in Abschnitt 8.3 und 8.4.)

Nachdem nun $g_{\pi\pi\rho}$ festliegt, folgen über die SU(3)-Symmetrie daraus *alle* anderen Kopplungskonstanten $\frac{g_1 g_2}{4\pi}$ in Modell I (abgesehen von der des Tensormeson-

Prozeß	Meson	$\frac{g_1 g_2}{4\pi}$	m_0	FF	Λ
$\pi\pi \rightarrow \pi\pi$	ρ -OBE	2.1		1	1700
	ρ -Pol	2.1	1080	3	3000
	f_2 -Pol	0.035	1895	4	3000
$\pi\pi \rightarrow \bar{K}K$	K^* -OBE	0.525		1	2750
$\bar{K}K \rightarrow \bar{K}K$	ρ -OBE	0.525		1	4000
	ω -OBE	-0.525		1	4000
	ϕ -OBE	-1.05		1	4000

Tab. 8.4.:

Parameter für Modell I: $\pi\pi$ -Streuung. Nackte Massen und Cut-offs in MeV. FF gibt den verwendeten Formfaktor an: FF=1 steht für den Monopol-Formfaktor Gl. (6.1), FF=3,4 wie in Tab. 8.2..

Polgraphen, die völlig analog festgelegt wird). Frei sind nur noch die Cut-off Parameter.

Wir gehen wie folgt vor: Gefittet werden die $\pi\pi$ -Streuphasen. Weil die Variation der Formfaktoren mit den Cut-off Parametern wesentliche Effekte ausschließlich in den J=0 Phasen zeigt, ist dies eigentlich nur die δ_0^0 -Phase, denn in der δ_0^2 -Phase verbleibt lediglich $\Lambda_{\pi\pi\rho}$ als Fitparameter, weil dort der angekoppelte Kanal nicht wirkt. Im zweiten Schritt wird der Parametersatz der $\pi\pi$ -Streuung (Tab. 8.4.) auf die $K\pi$ -Streuung übertragen (Tab. 8.5.): In diesem System haben wir also *keinen einzigen* freien Parameter. Die Phasen werden trotzdem sehr gut beschrieben (Abschnitt 8.2.4.), was für die Konsistenz des Modells spricht.

Die Cut-offs des angekoppelten Kanals mögen sehr groß erscheinen. Diese Größenordnung war jedoch notwendig, um den Phasensprung in der δ_0^0 -Phase bei 980 MeV zu reproduzieren (Fig. 8.4.). *Alternativ* hätten wir die Attraktion im T=0 $\bar{K}K$ -Kanal auch durch eine Vergrößerung der Kopplungskonstanten erhöhen

Prozeß	Meson	$\frac{g_1 g_2}{4\pi}$	m_0	FF	Λ
$K\pi \rightarrow K\pi$	ρ -OBE	1.05		1	$\Lambda_\pi = 1700$ $\Lambda_K = 4000$
	K^* -OBE	0.525		1	2750
	K^* -Pol	0.525	1084	3	3000

Tab. 8.5.:

Parameter für Modell I: $K\pi$ -Streuung: Alle Parameter sind durch die $\pi\pi$ -Streuung festgelegt. (Der Cut-off Λ_{K^*} ist wieder auf 3 GeV gesetzt.) Bezeichnungen wie in Tab. 8.4..

können. Dabei hätten wir allerdings die SU(3)-Symmetrie verletzt und uns einige neue freie Parameter eingehandelt. Dieses wollten wir vermeiden.

Im Abschnitt 8.1. hatten wir gesehen, daß die Lee-Modell Kopplungskonstante G_{K^*} im Vergleich zu G_ρ etwas oberhalb des SU(3)-Wertes liegt. Die Situation ändert sich *nicht*, wenn der Einfluß der OBE-Graphen berücksichtigt wird: Wenn wir die PPV-Kopplungskonstanten nicht über die ρ -Resonanz, sondern auf gleiche Weise über die K^* -Resonanz festlegen, kommen wir auf einen Wert von $G_{K^*} \approx 0.625$, was einer Reduktion von kapp 30% gegenüber dem Lee-Modell Wert von $G_{K^*} = 0.85$ entspricht. Dies stimmt prozentual fast genau mit der notwendigen Reduktion der Kopplungskonstanten G_ρ von 2.94 auf 2.1 überein.

Die SU(3)-Symmetrie scheint also bezüglich der Kopplungskonstanten auch in diesem gegenüber Abschnitt 8.1. verfeinerten Modell leicht gebrochen zu sein. Da wir trotzdem auf den SU(3)-Symmetriewerten beharren, sollte es nicht verwundern, daß wir bei den Vertices mit Kaonenbeteiligung Formfaktoren mit schwächerem Abschneideverhalten — entsprechend größerem Cut-off — wählen müssen, um der stärkeren Kopplung der Kaonen Rechnung zu tragen.

In Tab. 8.6. sind die Streulängen aufgeführt, die wir mit dem Parametersatz des Modells I erhalten. Die Übereinstimmung mit dem Experiment ist sehr gut. Modell I kann das Niederenergieverhalten der $\pi\pi$ - und $K\pi$ -Streuung voll beschreiben.

Prozeß	a_J^T	$a_J^T(\text{exp})$	Ref.	$a_J^T(\text{I})$	$a_J^T(\text{III})$
$\pi\pi \rightarrow \pi\pi$	a_0^0	0.26 ± 0.05	aus [35]	0.26	0.29
	a_0^2	-0.028 ± 0.012	aus [35]	-0.028	-0.028
	a_1^1	0.038 ± 0.002	aus [35]	0.40	0.40
	a_2^0	$(17 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	aus [35]	$9.3 \cdot 10^{-4}$	$9.3 \cdot 10^{-4}$
	a_2^2	$(1.3 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	aus [35]	$-2.7 \cdot 10^{-4}$	$-2.7 \cdot 10^{-4}$
$K\pi \rightarrow K\pi$	$a_0^{\frac{1}{2}}$	0.22 ± 0.04	[62]	0.24	0.27
		0.28 ± 0.06	[71]		
		0.24 ± 0.002	[72]		
		0.335 ± 0.014	[73]		
	$a_0^{\frac{3}{2}}$	-0.06	[62]	-0.064	-0.064
		-0.05	[72]		
		-0.144 ± 0.003	[73]		
$a_1^{\frac{1}{2}}$	0.018 ± 0.002	[72]	0.018	0.018	

Tab. 8.6.:

Streulängen a_J^T in Modell I und III im Vergleich mit dem Experiment.

In den folgenden Abschnitten diskutieren wir die einzelnen Phasenverschiebungen und Observablen im Detail. Der Einfluß der verschiedenen Graphen wird untersucht.

8.2.1. DER SKALARE-ISOSKALARE KANAL DER $\pi\pi$ -STREUUNG

Die δ_0^0 -Phase ist ohne Zweifel die interessanteste Phase der $\pi\pi$ -Streuung und Gegenstand der meisten Untersuchungen [15–23], insbesondere deswegen, weil sie Aufschluß über die Eigenschaften der skalaren Mesonen gibt. Sie zeigt bei $Z \approx 980$ MeV einen auffälligen Phasensprung, der mit einem Einbruch im Elastizitätsparameter η_0^0 einhergeht (Fig. 8.4.). Beides wird mit der Öffnung des $\bar{K}K$ -Kanals bei $Z = 992$ MeV in Verbindung gebracht.

Andere Autoren nehmen die Existenz eines genuinen 0^+ -Teilchens, meist S^* genannt, in diesem Bereich an [12, 74]. Schütte und Ferchländer [75] konnten mit solch einem genuinen 0^+ -Meson (skalare Kopplung) die τ -Matrix der Phasenanalyse von Ochs [58] reproduzieren.

Jaffe [76] hingegen interpretiert $S^*(975)$ ebenso wie $\delta(980)$ als 4-Quark Zustand ($qq\bar{q}\bar{q}$), während die genuinen skalaren $q\bar{q}$ -Paare einige hundert MeV höher lägen. Isgur und Weinstein [11] berechnen im Rahmen eines constituent quark Modells einen 4-Quark Bindungszustand mit den Quantenzahlen $J^P = 0^+$ im Bereich von 975 MeV, den sie mit dem S^* -Meson identifizieren. Dabei ist dieser 4-Quark Zustand aus zwei *farbneutralen* $q\bar{q}$ -Paaren aufgebaut; mithin ist das S^* als gebundener $\bar{K}K$ -Zustand zu interpretieren. Auch Durso, Jackson und Verwest [8] kommen zu demselben Schluß und geben ein phänomenologisches Potential für die $\pi\pi$ -Wechselwirkung an, mit dem sie die δ_0^0 -Phase parametrisieren können.

Im Rahmen des Mesonaustauschbildes können wir die δ_0^0 -Phase bis ungefähr 1.0 GeV *allein mit OBE-Graphen* erklären. Der Phasensprung resultiert aus der starken Bindung des $\bar{K}K$ -Systems: Alle drei OBE-Graphen der $\bar{K}K$ -Wechselwirkung sind stark attraktiv (vergl. Tab. 3.1. für die Isospinfaktoren und Tab. 8.4. für die Kopplungskonstanten), was zu einem $\bar{K}K$ -Bindungszustand bei 985 MeV, also einige MeV unterhalb der $\bar{K}K$ -Schwelle, mit einer Breite von $\Gamma \approx 30$ MeV (Fig. 8.12.a) führt. Wie wir Fig. 8.4.a entnehmen, ist die direkte Wechselwirkung im $\bar{K}K$ -Kanal dazu unbedingt notwendig. Eine Simulation des $\bar{K}K$ -Kanals durch Box-Diagramme, d.h. nur die Berücksichtigung des Prozesses $\pi\pi \rightarrow \bar{K}K \rightarrow \pi\pi$ (jeweils K^* -Austausch), führt zu keinem zufriedenstellenden Ergebnis: Die Attraktion ist nicht stark genug, einen gebundenen Zustand aus-

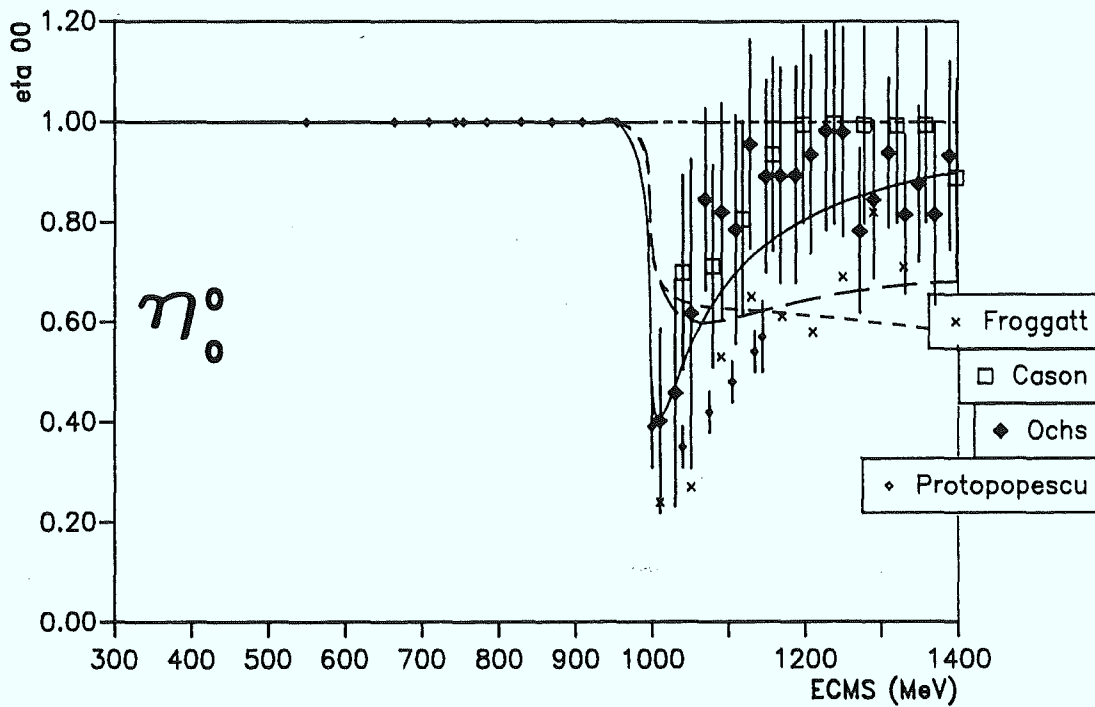
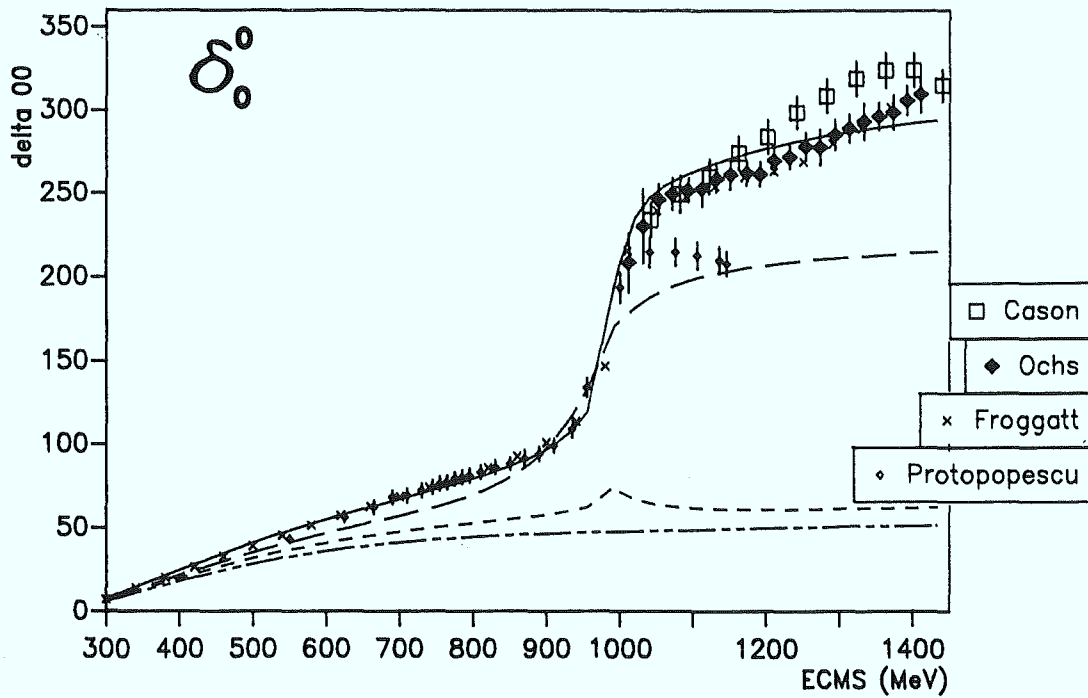


Fig. 8.4.: a) δ_0^0 -Phase b) η_0^0 -Inelastizität

kurz-kurz-lang gestrichelte Kurve: ρ -OBE-Graph; kurz gestrichelte Kurve: zusätzlich $K\bar{K}$ -Kanal ohne direkte $K\bar{K}$ -Wechselwirkung: Box-Potential; lang gestrichelte Kurve: Modell I; durchgezogene Kurve: Modell III

zubilden. Der Bindungszustand verschwindet bereits, wenn durch Reduktion der Cut-offs die Attraktion im $\bar{K}K$ -Kanal verkleinert wird. Ihr wichtigster Beitrag ist der ρ -Austausch, was bei einem Blick auf Tab. 3.1. (Massen und Isospinfaktoren) sofort verständlich ist.

Die Inelastizität η_0^0 (Fig. 8.4.b) erfordert natürlich einen angekoppelten Kanal, denn sie bleibt verständlicherweise auf dem Wert 1 (voll elastisch), falls nur ρ -Austausch und genuine Resonanzen im $\pi\pi$ -Kanal berücksichtigt werden. Die große Unsicherheit in den Meßdaten zeichnet jedoch die Kurve mit der direkten $\bar{K}K$ -Wechselwirkung nicht zwingend gegenüber der ohne $\bar{K}K$ -Wechselwirkung aus.

Für $Z > 1.0$ GeV können wir in diesem Modell I die Streuphase δ_0^0 nicht mehr zufriedenstellend beschreiben.

Zwei Interpretationsmöglichkeiten bieten sich an:

- (1) In diesem Bereich könnte schon der $\rho\rho$ -Kanal virtuell wirksam werden, der sich bei $Z = 1538$ MeV öffnet.
- (2) Man erwartet im Energiebereich von $Z \approx 1400$ MeV skalare Mesonen [11, 20, 10]. In den Modellen II und III werden wir solche skalare Mesonen zu unserem Modell I hinzufügen und damit dessen Schwächen beheben können.

8.2.2. DIE $\delta_J^T = \delta_1^1$ - UND $\delta_J^T = \delta_2^0$ -PHASEN DER $\pi\pi$ -STREUUNG

Diese Phasen sind durch die ρ - bzw. f_2 -Resonanz dominiert. Wie wir Fig. 8.5. entnehmen, ist der Einfluß der OBE-Graphen recht klein. Oben hatten wir über die Kopplungskonstante den Einfluß des OBE-Graphen *und* des Graphen der Fig. 2.3.b zu 30% abgeschätzt.

Der angekoppelte $\bar{K}K$ -Kanal wirkt in den J=1 und J=2 Phasen kaum. Schalten wir ihn ab, ergibt sich in Fig. 8.5. ein Unterschied im Bereich der Linienstärke. Die Inelastizitäten werden nie kleiner als 0.95. Der Hauptgrund dafür liegt in den verhältnismäßig großen Massen der Austauscheteilchen im angekoppelten Ka-

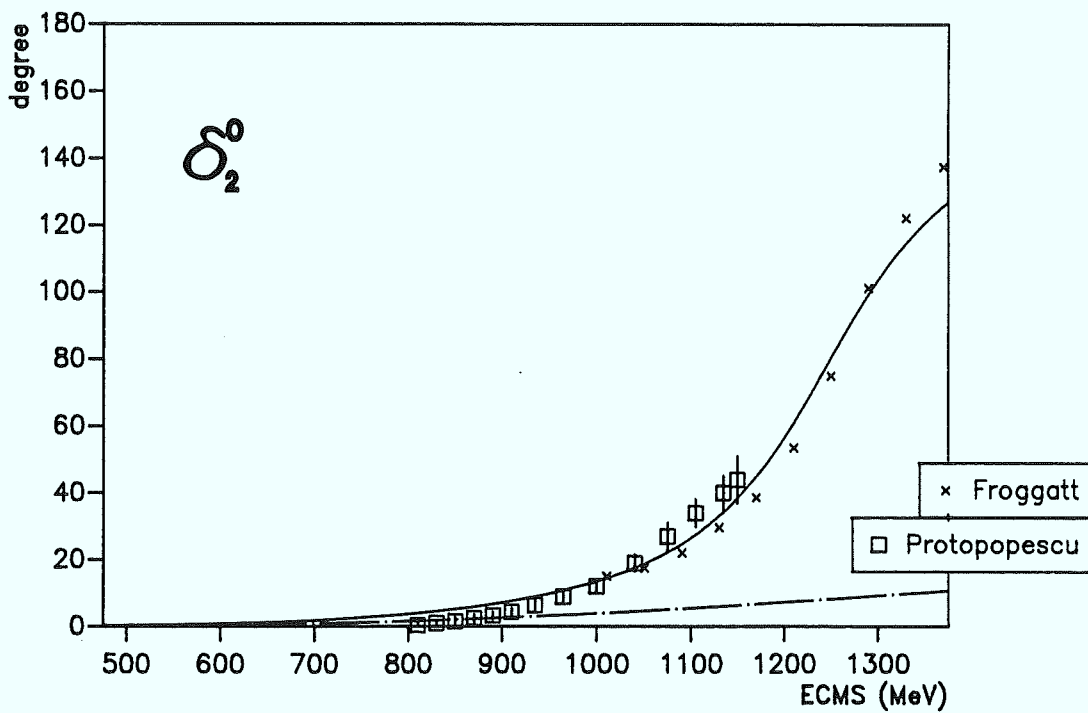
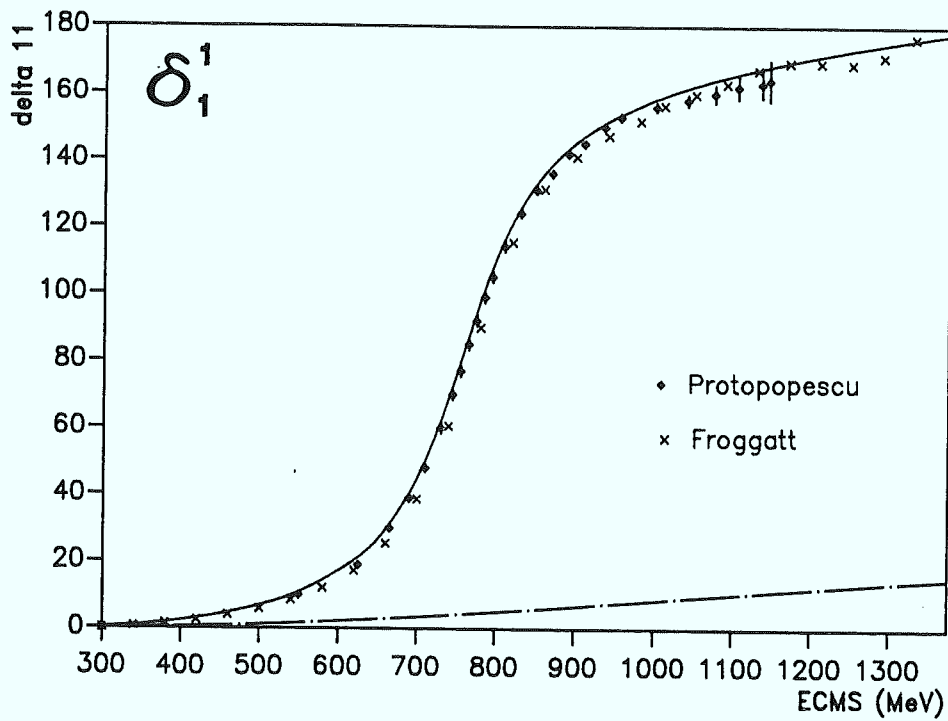


Fig. 8.5.: a) δ_1^1 -Phase b) δ_2^0 -Phase
 strichpunktierter Kurve: nur OBE-Graphen;
 durchgezogene Kurve: Modell I mit ρ - bzw. f_2 -Polgraphen

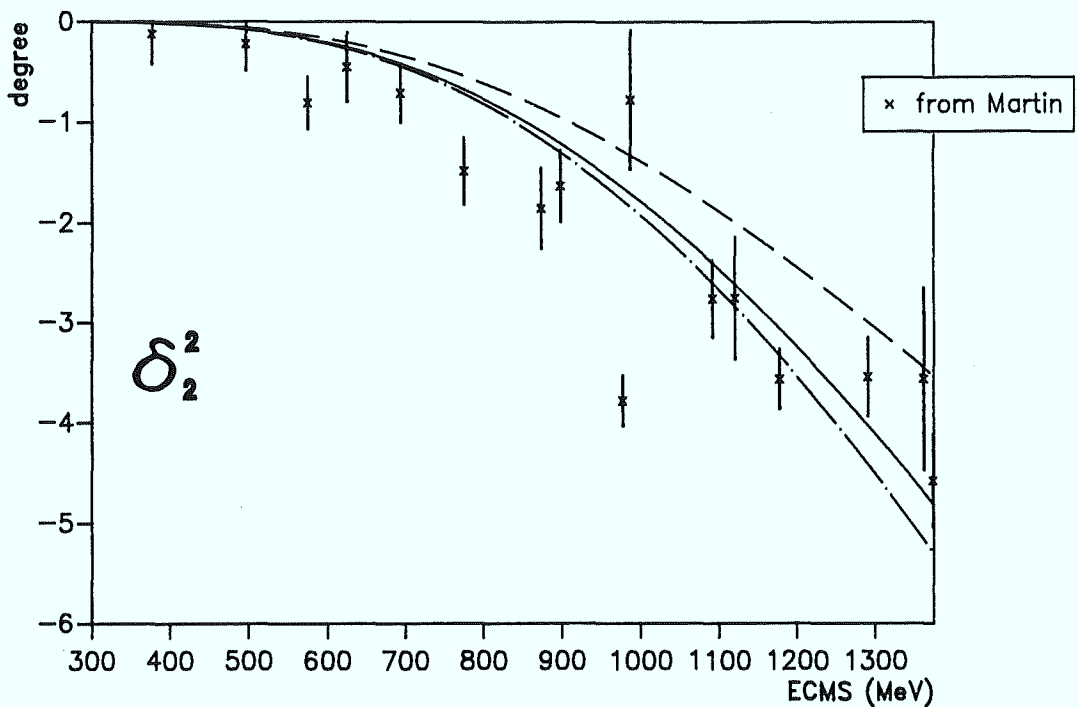
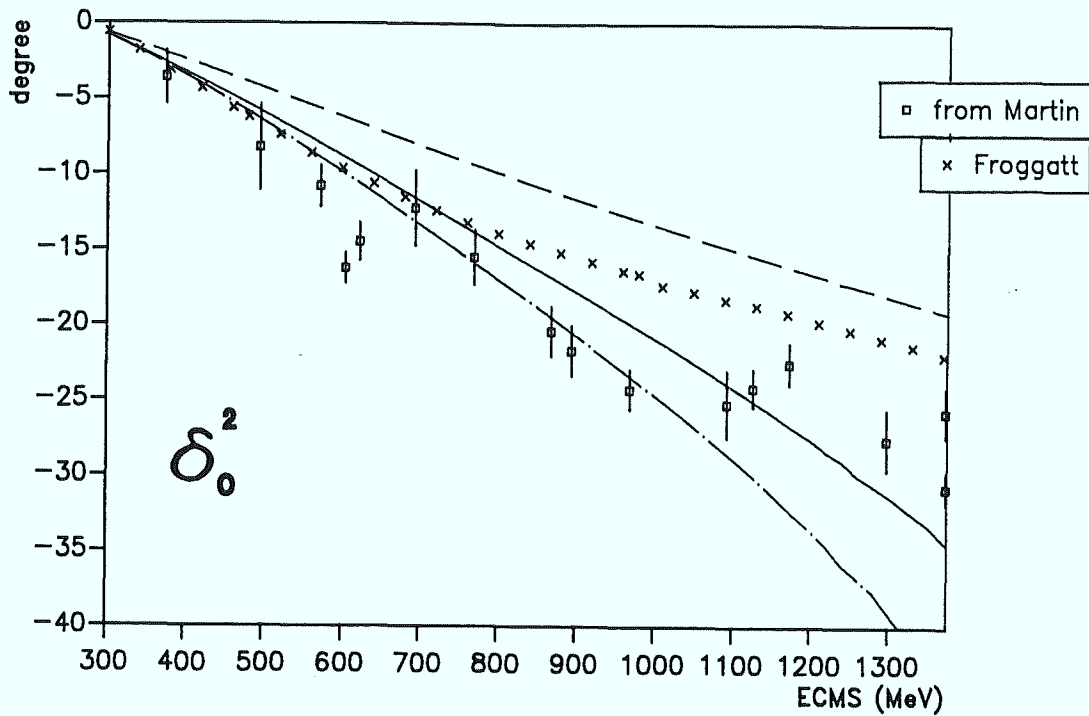


Fig. 8.6.: a) δ_0^2 -Phase b) δ_2^2 -Phase

Die Abhängigkeit des ρ -OBE-Graphen vom Cut-off Λ ist dargestellt.

durchgezogene Kurve: Modell I mit $\Lambda = 1.7 \text{ GeV}$;

gestrichelte Kurve: $\Lambda = 1.3 \text{ GeV}$; strichpunktierte Kurve: $\Lambda = 2.1 \text{ GeV}$

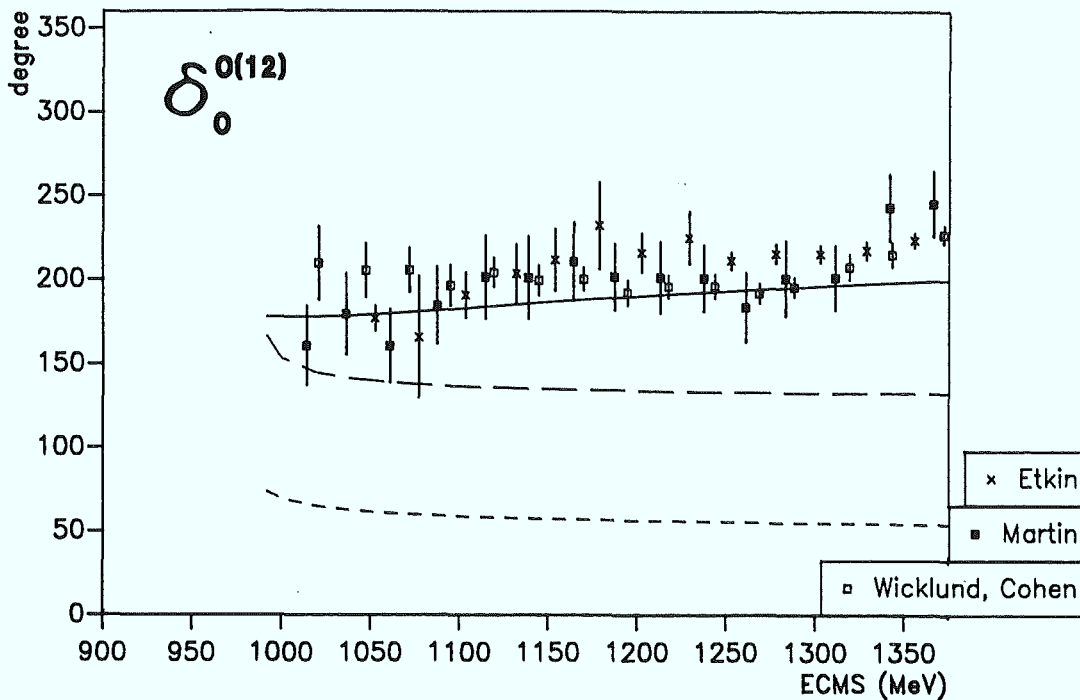


Fig. 8.7.: $\delta_0^{0(12)}$ -Phase für den Prozeß $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$. Bezeichnungen wie in Fig. 8.4.

nal (K^* , ρ , ω , ϕ), die einer so kurzreichweitigen Wechselwirkung entsprechen, daß die $J=1$ und $J=2$ Partialwellen nichts mehr von ihr bemerken können. Dazu kommt, daß \bar{K} und K kurz oberhalb ihrer Erzeugungsschwelle so niederenergetisch sind, daß sie nur im $J=0$ Zustand vorliegen können. Ein dritter Grund ist für den $T=1$ Kanal der kleinere (und ein repulsives Potential ergebende) Isospinfaktor des ρ -OBE-Graphen der $\bar{K}K$ -Wechselwirkung, der der Attraktion durch ω - und ϕ -Austausch entgegenwirkt.

8.2.3. WEITERE PHASEN DER $\pi\pi$ -STREUUNG

Weil \bar{K} und K nicht zu Isospin $T=2$ koppeln können, wirkt im $T=2$ Kanal nur der ρ -Austausch, und zwar repulsiv (Tab. 3.1.). Mit einem Cut-off von $\Lambda = 1.7$ GeV, den wir ja aus dem Fit der δ_0^0 -Phase erhielten, werden auch die δ_0^2 - und δ_2^2 -Phasen gut beschrieben (Fig. 8.6.). Es ist zusätzlich die Abhängigkeit vom Cut-off gezeigt, die für die $J=2$ Phase erwartungsgemäß sehr klein ist. Für Energien $Z > 1.0$ GeV zeigen beide Datensätze der δ_0^2 -Phase einen leichten Knick nach oben. Durch die Berücksichtigung des $\rho\rho$ -Kanals wird dieses Verhalten wiedergegeben, Abschnitt 8.5.2..

Die $\delta_0^{0(12)}$ -Phase für den Prozeß $\pi\pi \rightarrow \bar{K}K$ (Fig. 8.7.) wird mit dem Modell I noch nicht zufriedenstellend beschrieben. Die Abweichungen zwischen Daten und theoretischer Kurve sind jedoch bei einer Berücksichtigung der direkten Wechselwirkung im $\bar{K}K$ -Kanal kleiner.

8.2.4. PHASEN DER $K\pi$ -STREUUNG

Wir übertragen den Parametersatz der $\pi\pi$ -Streuung auf den $K\pi$ -Fall und haben deswegen hier *keinen* freien Parameter.

Die $K\pi$ -Streuphasen werden durchweg gut reproduziert, Fig. 8.8. – 8.9.; für die $\delta_0^{1/2}$ -Phase gilt dies jedoch nur bis $Z \approx 1.0$ GeV. Die Situation ist völlig analog zu der δ_0^0 -Phase der $\pi\pi$ -Streuung. Auch hier wird ein genuines 0^+ -Teilchen im Bereich von 1.4 GeV erwartet, das K_0^* oder κ [10, 63]. Aus dreierlei Gründen bietet sich die $K\pi$ -Streuung für eine Untersuchung der skalaren Resonanzen sogar eher an als die $\pi\pi$ -Streuung:

- (1) Außer dem $K\pi$ -Kanal spielt kein weiterer eine so dominante Rolle wie der $\bar{K}K$ -Kanal im $\pi\pi$ -Fall (S^*).
- (2) Das 0^+ -Resonanzteilchen κ muß ein reines Oktett-Teilchen (mit $S = \pm 1$) sein; die Mischung mit einem skalaren Singulett wie beim ϵ ist nicht möglich.
- (3) Durch die neue Phasenanalyse von D. Aston et al. [63] ist die experimentelle Situation besser.

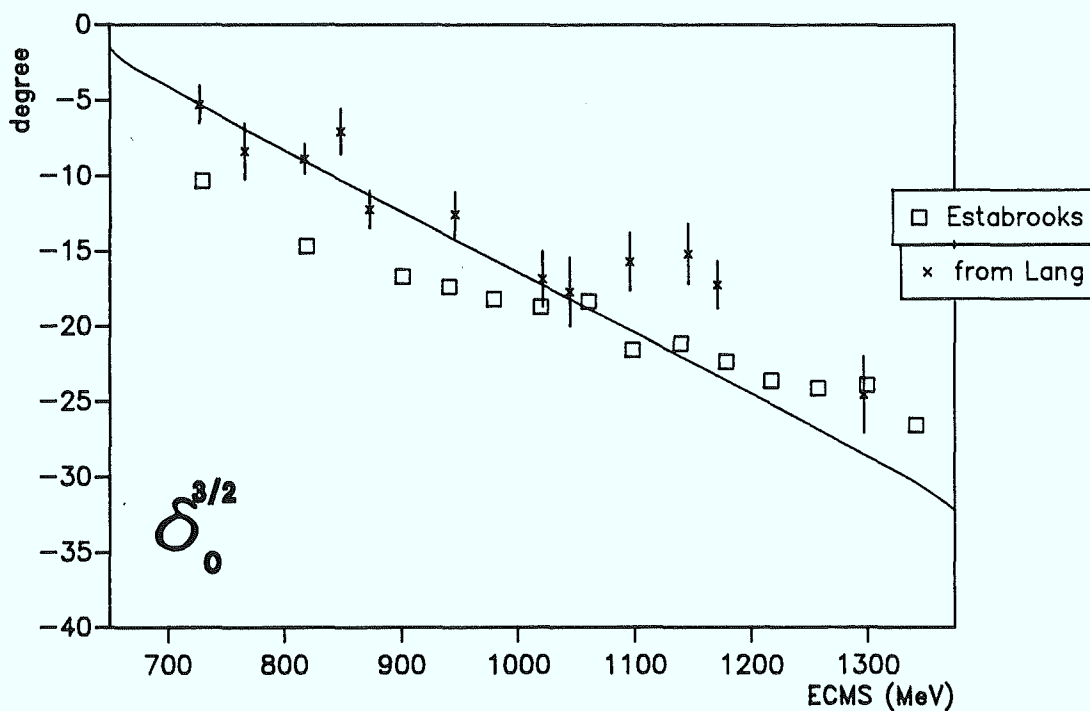
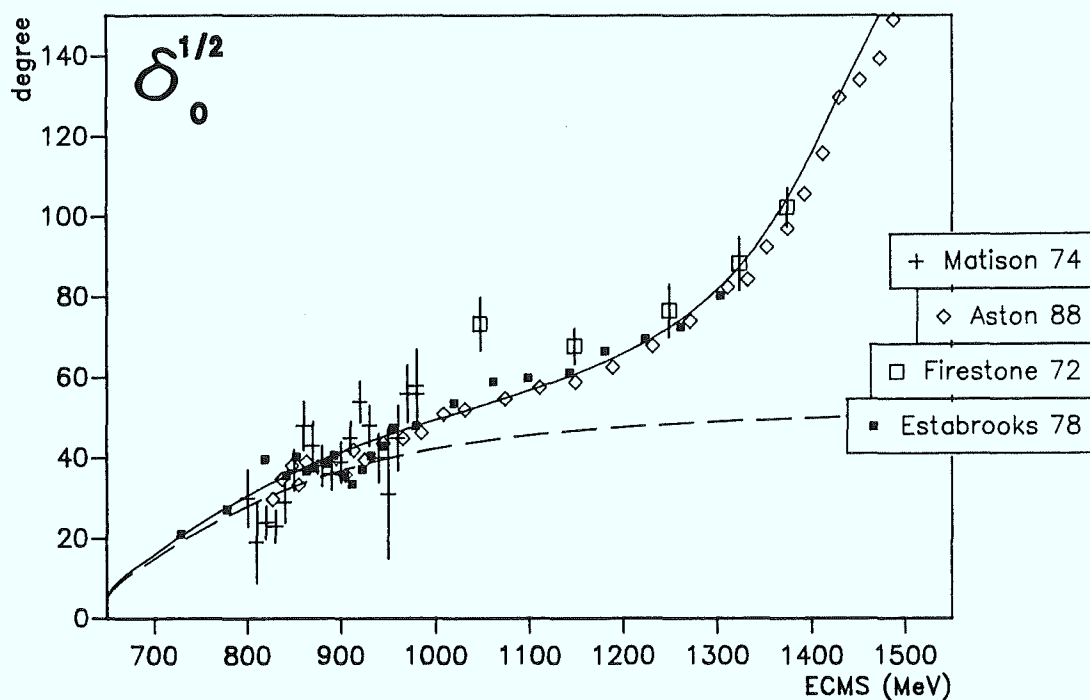


Fig. 8.8.: $J=0$ Phasen für die $K\pi$ -Streuung:

a) $\delta_0^{1/2}$ -Phase b) $\delta_0^{3/2}$ -Phase

gestrichelte Kurve: Modell I; durchgezogene Kurve: Modell III

Bei b) stimmen beide Kurven überein.

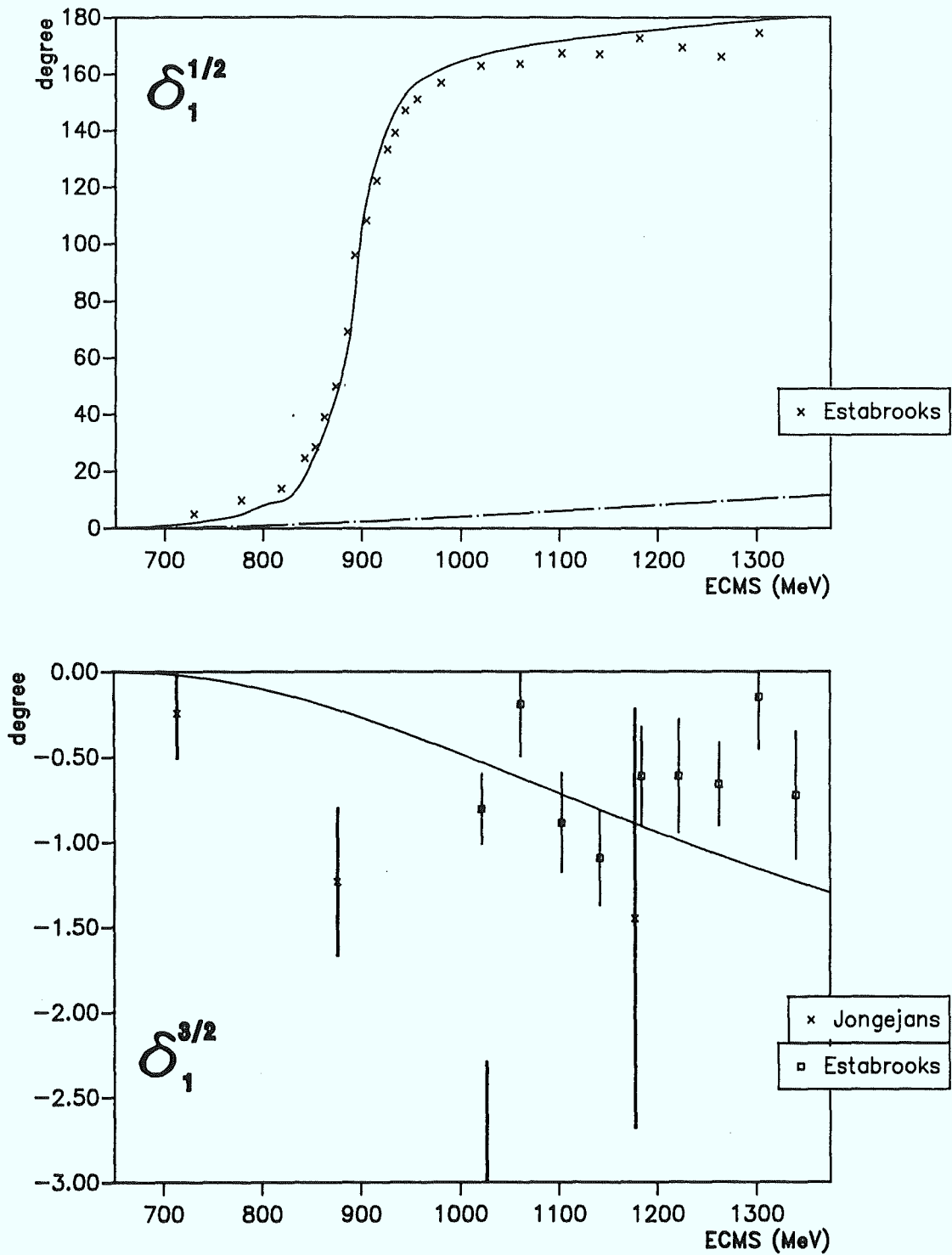


Fig. 8.9.: $J=1$ Phasen für die $K\pi$ -Streuung:

a) $\delta_1^{1/2}$ -Phase b) $\delta_1^{3/2}$ -Phase

durchgezogene Kurve: Modell I;

gestrichelte Kurve: Modell I ohne den K^* -Polgraphen

Wie für den $\pi\pi$ -Fall werden wir in den Modellen II und III eine skalare 0^+ -Resonanz hinzufügen und damit die $\delta_0^{1/2}$ -Phase sehr gut beschreiben können.

Die $\delta_1^{1/2}$ -Phase wird durch die K^* -Resonanz dominiert. Fig. 8.9.a stützt die Ausführungen von oben über die G_{K^*} Kopplungskonstante: Der aus G_ρ resultierende Wert scheint etwas zu klein zu sein: Die Phase verläuft zu steil.

In den beiden $T=\frac{3}{2}$ Kanälen ist das Potential repulsiv. Wirksam sind hier die K^* - und ρ -OBE-Graphen. Die $\delta_0^{3/2}$ -Phase (Fig. 8.8.b), die der δ_0^2 -Phase der $\pi\pi$ -Streuung entspricht, wird mit diesen beiden Graphen problemlos beschrieben. Gleiches gilt für die $\delta_1^{3/2}$ -Phase (Fig. 8.9.b), wobei die experimentelle Situation in dieser Partialwelle weniger gut ist.

Die gute Reproduktion der $K\pi$ -Streuphasen mit dem Parametersatz, der aus dem Fit an die $\pi\pi$ -Phasen resultierte, unterstreicht die Konsistenz des Mesonaustauschbildes.

8.3. MODELL II: ADDITION EINES $J^P = 0^+$ -RESONANZTEILCHENS (SKALARE KOPPLUNG)

Den Fig. 8.4.a und 8.8.a ist zu entnehmen, daß die Übereinstimmung mit den Phasenanalysen der $\pi\pi$ - bzw. $K\pi$ -Streuung oberhalb 1 GeV durch Addition skalarer Resonanzteilchen ($m \approx 1.4$ GeV) zum Modell I verbessert werden könnte. Dieses Teilchen ist nicht mit dem skalaren sogenannten σ -Meson ($m \approx 550$ MeV) im Bonn-Potential [2] und seinen Erweiterungen [3-6] zu verwechseln, das bei skalarer Kopplung an die Mesonen die korrelierte $\pi\pi$ -Wechselwirkung parametrisiert [8].

Wir nehmen in unserem Modell II für die skalaren Resonanzteilchen mit $m \approx 1.4$ GeV jedoch ebenfalls diese Kopplungsart Gl. (3.1) an, stoßen dabei aber auf folgende Schwierigkeit: Das resultierende Pseudopotential Gl. (3.33) ist im wesentlichen *impulsunabhängig* (abgesehen von der Abhängigkeit über die Energie und die durch den Formfaktor) und beeinflusst die Phase im gesamten Energiebereich, wobei die gute Beschreibung der Daten im Bereich unterhalb 1 GeV wieder zerstört wird.

Dieses Problem ergibt sich bereits, wenn wir ausschließlich den TOPT Polgraphen berücksichtigen, von den OBE-Graphen des Modells I also zunächst absehen: Die Wechselwirkung ist kurz oberhalb der $\pi\pi$ - ($K\pi$ -) Schwelle viel zu attraktiv, und die Streulängen sind im Vergleich zum Experiment und Modell I bei weitem zu groß. Falls die Kopplungskonstante $G_\epsilon = \frac{g_{\pi\pi\epsilon}^2}{4\pi}$ (bzw. G_κ) einen bestimmten Schwellenwert erreicht, bildet sich sogar ein zweiter Pol kurz oberhalb der $\pi\pi$ - Schwelle aus. $G_\epsilon^{Schwell}$ liegt im Bereich von 170, was einer Breite von $\Gamma_\epsilon = 850$ MeV für die eigentliche Resonanz entspräche. In Fig. 8.10. haben wir die Entstehung dieses zweiten Poles für größer werdendes G_ϵ anhand der Phase δ_0^0 und des Imaginärteiles der τ_0^0 -Matrix dokumentiert. G_ϵ ist dabei proportional zur Breite Γ_ϵ der eigentlichen Resonanz (Tab. 8.1. und Gl. (5.32)).

E. Lomon stieß bei der Berücksichtigung des σ -Austausches bei der NN-Streuung auf ein ähnliches Problem [77]. Er modifizierte den reinen σ -Propagator insofern, daß er $\pi\pi$ -Selbstenergiebeiträge explizit zuließ. Dabei trat im Propagator ab einer gewissen Kopplungsstärke G_σ ein unphysikalischer Pol auf, den er schließlich als "ghost-pole" [78] identifizierte und analytisch abzog.

Weil wir außer der ϵ -Resonanz noch weitere attraktive Beiträge der $\pi\pi$ -Wechselwirkung berücksichtigen, z.B. den ρ -Austausch, tritt dieser unphysikalische Pol bei uns bereits bei einer Kopplungsstärke von $G_\epsilon \approx 90$ auf. Wegen dieser Berücksichtigung der OBE-Graphen, die bis 1 GeV ja zur Beschreibung der Phase völlig ausreichen (Modell I), ist eine analytische Korrektur des Propagators wie bei Lomon nicht möglich. Deswegen verfahren wir in diesem Modell II wie folgt:

Die viel zu starke Attraktion kompensieren wir durch eine kurzreichweitige Repulsion, die wir mit einem Potentialausdruck parametrisieren, wie er einem skalaren Austauscheteilchen im jeweiligen Isospinkanal ($T=0$ für $\pi\pi$, $T=\frac{1}{2}$ für $K\pi$) zukäme. Diese Parametrisierung berücksichtigt Effekte, die über das Mesonaustauschbild hinausgehen können. Wir wählen $m = 4$ GeV, wobei die Ergebnisse gegen eine Modifikation dieser Masse insensitiv sind. Durch die große Masse ist sichergestellt, daß das repulsive Teilchen wegen der Zentrifugalbarriere nur in den $J=0$ Phasen wirkt. Die Kopplungskonstante wählen wir so, daß die durch die Addition der skalaren Polgraphen stark ansteigenden Streulängen a_0^0 und $a_0^{1/2}$ wieder

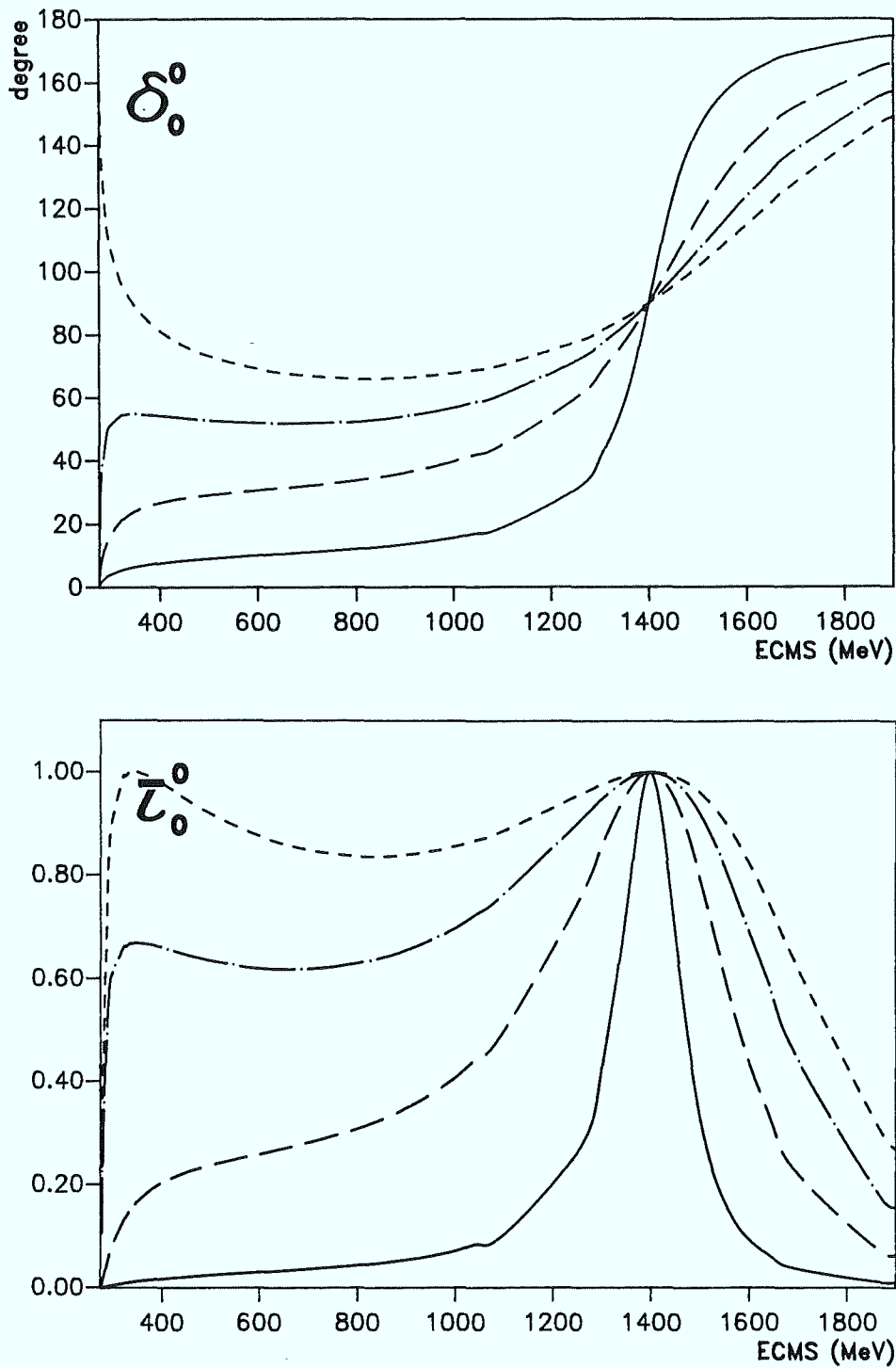


Fig. 8.10.: a) δ_0^0 -Phase b) $Im(\tau_0^0)$ für die ϵ -Resonanz im Lee-Modell mit skalarer Kopplung. Bei zu starker Kopplung entsteht ein zweiter Pol, gekennzeichnet durch $\delta(Z) = 90^\circ$, $Im(\tau_0^0(Z)) = 1$. Die Kopplungskonstanten betragen (für kleine Energien von unten nach oben) $G_\epsilon = 30, 80, 130$ und 180 .

auf den Wert von Modell I zurückgeführt werden.† Dieses Vorgehen ermöglicht es, die skalaren Resonanzen, die für eine korrekte Beschreibung der Daten oberhalb 1 GeV notwendig zu sein scheinen, zu berücksichtigen, ohne die Übereinstimmung von Modell I mit dem Experiment unterhalb 1 GeV zu zerstören.

Die gegenüber Modell I neu hinzukommenden Parameter sind Tab. 8.7. zu entnehmen.

Prozeß	Meson	$\frac{g_1 g_2}{4\pi}$	m_0	FF	Λ
$\pi\pi \rightarrow \pi\pi$	ϵ -Pol	120	1300	3	3000
$K\pi \rightarrow K\pi$	κ -Pol	30	1400	3	3000

Tab. 8.7.:

Parameter für die Polgraphen der skalaren Mesonen (skalare Kopplung: Modell II). Zusätzlich wurde im jeweiligen Isospinkanal eine Repulsion eingeführt, die einem skalaren Austauscheteilchen mit $m = 4$ GeV entspricht, um die durch Modell I richtig wiedergegebenen Streulängen zu restaurieren. Alle anderen Daten wie in Modell I (Tab. 8.4. und 8.5., Bezeichnungsweisen wie dort).

Die Kopplungskonstanten wurden gegenüber den aus der empirischen Breite (TOPT Lee-Modell) folgenden geringfügig verändert, die nackten Massen blieben praktisch gleich (Tab.8.3.).

Mit diesen Parametern können die Phasenanalysen von Froggatt et al. [56] und Ochs [58] für die δ_0^0 -Phase ($\pi\pi$, Fig. 8.11.a) bzw. Aston et al. [63] für die $\delta_0^{1/2}$ -Phase ($K\pi$, Fig. 8.11.d) sehr gut wiedergegeben werden. Das skalare, isoskalare Resonanzmeson ϵ hat auch einen Einfluß auf die Daten, die direkt mit

†Die Angabe von Streulängen in Tab. 8.6. ist aus diesem Grunde für Modell II sinnlos.

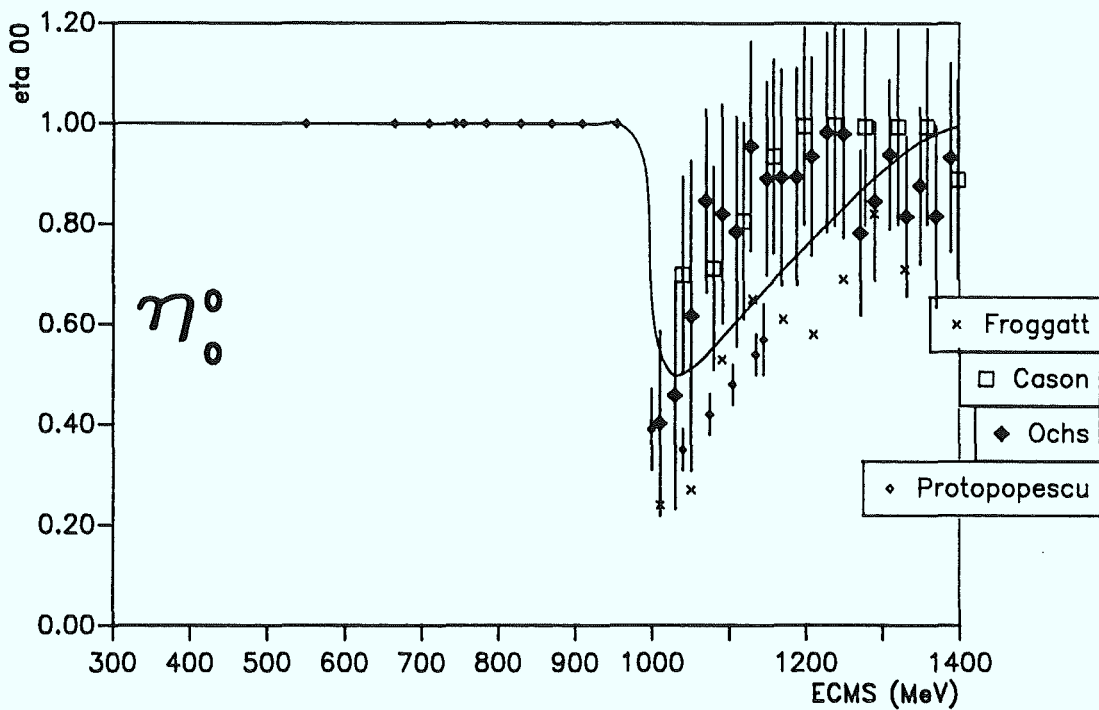
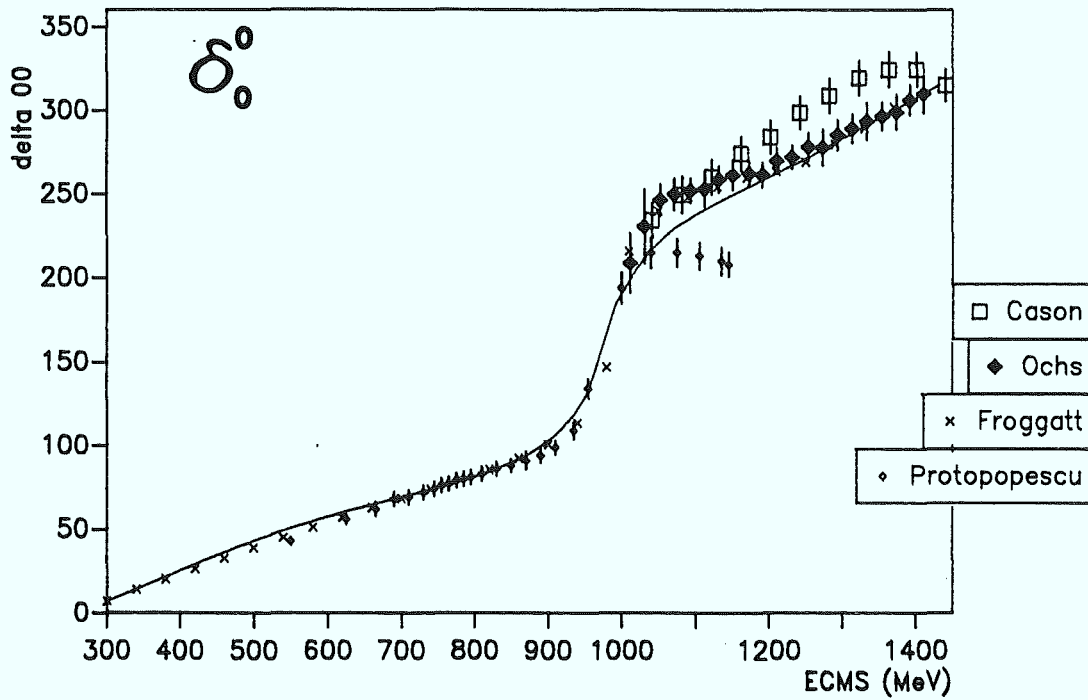


Fig. 8.11.: Ergebnisse von Modell II

a) δ_0^0 -Phase b) η_0^0 -Inelastizität der $\pi\pi$ -Streuung

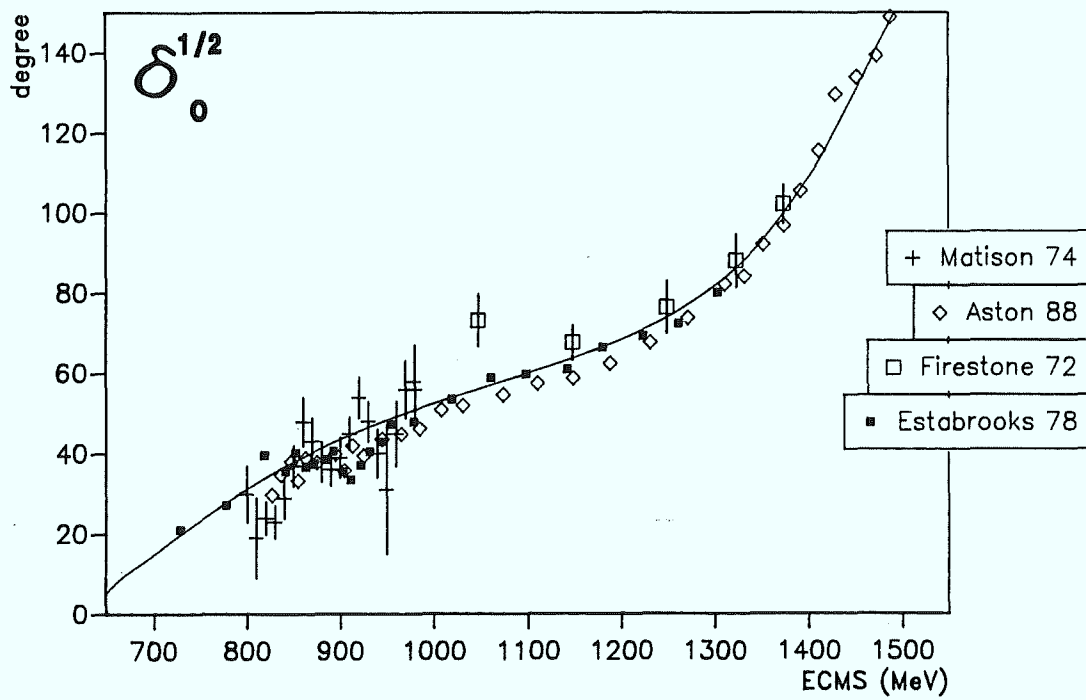
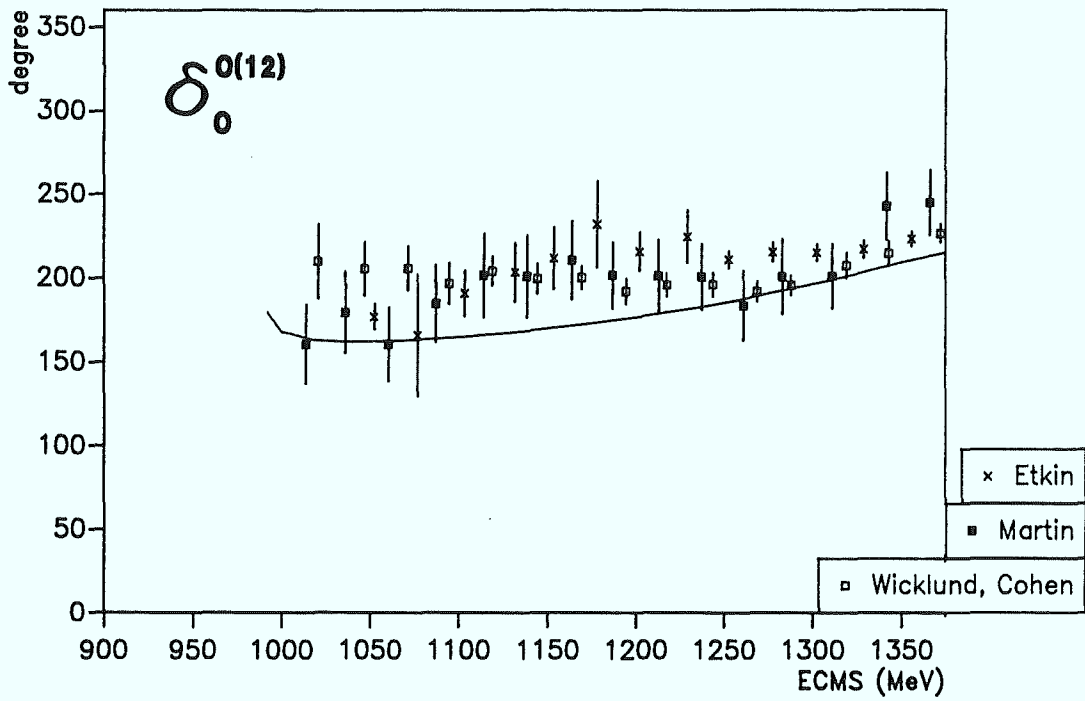


Fig. 8.11.: Ergebnisse von Modell II

c) $\delta_0^{0(12)}$ -Phase der $\pi\pi$ -Streuung d) $\delta_0^{1/2}$ -Phase der $K\pi$ -Streuung

dem $\bar{K}K$ -Kanal verbunden sind: Dies sind die $\delta_0^{0(12)}$ -Phase (Fig. 8.11.c) und die Inelastizität η_0^0 (Fig. 8.11.b). In beiden Fällen ist die Übereinstimmung mit den Phasenanalysen im Gegensatz zu Modell I (vergl. Fig. 8.4.b und Fig. 8.7.) jetzt sehr gut. Die Inelastizität η_0^0 wird im Bereich 1.2 – 1.5 GeV gegenüber Modell I größer. Dies ist verständlich, denn die Pionen haben in Modell II die Möglichkeit, für diese Energien die ϵ -Resonanz auszubilden, was auf Kosten des $\bar{K}K$ -Kanals geht. Entsprechend ist der Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\pi^+\pi^-\rightarrow\bar{K}K}$ kleiner als in Modell I.

8.4. MODELL III: ADDITION EINES $J^P = 0^+$ -RESONANZTEILCHENS (GRADIENTENKOPPLUNG)

Durch die Einführung einer skalaren Resonanz mit skalarer Kopplung Gl. (3.1) konnten wir in Modell II zwar die Daten der $J=0$ Phasen beschreiben, aber nur, indem wir die notwendigen repulsiven Beiträge durch ein unphysikalisches, skalares, kurzreichweitiges Meson parametrisierten. In gewisser Weise zerstört diese Parametrisierung die Konsistenz des Modells, weil wir die Meson-Meson Streudaten sonst durch den Austausch *physikalischer* Teilchen erklären.

Dieses Manko von Modell II führte uns zu der Idee, statt der üblichen skalaren Kopplung Gl. (3.1) eine Gradientenkopplung Gl. (3.4) zu untersuchen, die den gleichen Symmetrieprinzipien genügt wie die skalare. Bei dieser Kopplungsweise wird der Beitrag der Resonanz für kleine Energien unterdrückt, wie im Zusammenhang mit Fig. 8.2. bereits diskutiert wurde.

Die Parameter des Modells III (Tab. 8.8.) beschreiben die experimentellen Daten ebenso gut wie die des Modells II. Der Vorteil von Modell III besteht in der geringeren Anzahl der freien Parameter, denn jetzt werden keine über das Mesonenbild hinausgehenden Freiheitsgrade eingeführt. Die Ergebnisse haben wir zusammen mit denen von Modell I in den Fig. 8.4., 8.7. und 8.8. wiedergegeben, um die drastischen Verbesserungen oberhalb 1 GeV zu dokumentieren.

In Modell III unterscheiden sich allerdings anders als im TOPT Lee-Modell (Abschnitt 8.1.) die Kopplungskonstanten und nackten Massen der beiden skalaren

Prozeß	Meson	$\frac{g_1 g_2}{4\pi}$	m_0	FF	Λ
$\pi\pi \rightarrow \pi\pi$	ϵ -Pol	0.013	4000	4	3000
$K\pi \rightarrow K\pi$	κ -Pol	0.0008	1600	4	3000

Tab. 8.8.:

Parameter für die Polgraphen der skalaren Resonanzen (Gradientenkopplung: Modell III). Alle anderen Daten sind wie in Modell I (Tab. 8.4. und 8.5., Bezeichnungsweisen wie dort), lediglich der Cut-off Parameter $\Lambda_{\pi K K^*}$ mußte im $\pi\pi$ -Fall nachjustiert werden (Reduktion von 2.75 GeV auf 1.75 GeV).

Mesonen deutlich. Die Kopplungskonstante G_ϵ muß gegenüber dem Lee-Modell Wert etwa um den gleichen Anteil erhöht werden wie bei der skalaren Kopplung (Tab. 8.3.). Daraus resultiert jedoch ein wesentlich größerer mass-shift als in Modell II, denn dieser ist im Falle der Gradientenkopplung viel stärker von Cut-off und Kopplungskonstante abhängig als bei der skalaren Kopplung (Mit q_0^5 statt mit q_0 , Gl. (5.29) und Gl. (5.30), siehe auch Tab. 8.2.). Bei der κ -Resonanz hingegen muß die Kopplungskonstante G_κ gegenüber dem Lee-Modell Wert stark reduziert werden. Entsprechend klein ist der mass-shift δm_κ (Tab. 8.3.). Physikalisch bedeutet dies, daß die κ -Resonanz nur zu einem geringen Teil aus einem genuinen $\bar{q}q$ -Zustand besteht, während der 4-Quark Zustand $K\pi (= \bar{q}\bar{q}qq)$ den Hauptanteil der experimentellen Breite des κ -Mesons ausmacht. $G_\kappa = 0.0008$ entspricht einer Breite von nur 50 MeV statt der von [10] angegebenen von fast 300 MeV.

Mit den Parametern des Modells III aus Tab. 8.8. ist die SU(3)-Symmetrierelation Gl. (3) allerdings nicht mehr erfüllt. Dies mag zunächst überraschen, dazu ist jedoch folgendes zu sagen: Wir haben in Modell II und III nur ein skalares, isoskalares Resonanzmeson angenommen und dieses mit dem Oktett- ϵ identifiziert. Das Singulett- ϵ , ϵ_1 , haben wir nicht berücksichtigt, weil sowohl Masse als auch Kopplungskonstante und Mischungswinkel mit ϵ_8 völlig unbekannt

sind. Unser ϵ -Meson ist also als Effektivbeschreibung von zwei aus ϵ_1 und ϵ_8 gemischten skalaren, isoskalaren Mesonen anzusehen. Dies läßt es verständlich erscheinen, daß die SU(3)-Relation Gl. (3) für das *Oktett*- ϵ nicht mehr erfüllt zu sein braucht.

Wir haben versucht, mit zwei skalaren Resonanzmesonen einen noch besseren Fit der Streuphase δ_0^0 (Fig. 8.4.) zu erreichen, wobei wir die Parameter des einen skalaren Mesons über Gl. (3) aus denen des κ -Mesons festlegten, wo die Situation eindeutig zu sein scheint (Fig. 8.8.a), und die des anderen frei variierten. Dabei wurde weiterhin $\theta = 0$ angenommen. Eine wesentliche Verbesserung der Phasenbeschreibung konnte nicht erreicht werden.

Eine genauere Untersuchung der $\pi\pi$ -Streuphase im Bereich von 1.4 GeV im Hinblick auf die Festlegung von Lage und Breite der beiden skalaren, isoskalaren Mesonen bleibt Aufgabe der Zukunft. Eine bessere experimentelle Situation und einheitlichere Phasenanalysen in diesem Bereich wären dafür wünschenswert. Die Particle Data Group [10] beispielsweise gibt noch keine weitere skalare, isoskalare Mesonenresonanz oberhalb von 1.4 GeV an, wo wir den SU(3)-Partner des ϵ_8 vermuten.

Mit dem vollen Modell III wollen wir mit Hilfe eines Argand-Speed-Plots [37] Masse und Breite aus den Phasen extrahieren. Dazu wird der Imaginärteil der τ -Matrix gegen ihren Realteil für äquidistante Energieintervalle aufgetragen (Fig. 8.12.). Einer reinen Breit-Wigner Resonanz Gl. (5.27) entspricht ein Kreis mit dem Scheitelpunkt $\text{Im}(\tau) = 1$, $\text{Re}(\tau) = 0$ bei der physikalischen Masse der Resonanz und einer Breite, die dem halben Kreisumfang entspricht. Bei der Berücksichtigung des Untergrundes und der Inelastizitäten ist eine Extraktion der physikalischen Resonanzmasse und Breite aus dem Argand-Speed-Plot schwieriger. Das gilt insbesondere für die Daten des ϵ -Mesons. Wir schätzen anhand der Fig. 8.12.a –

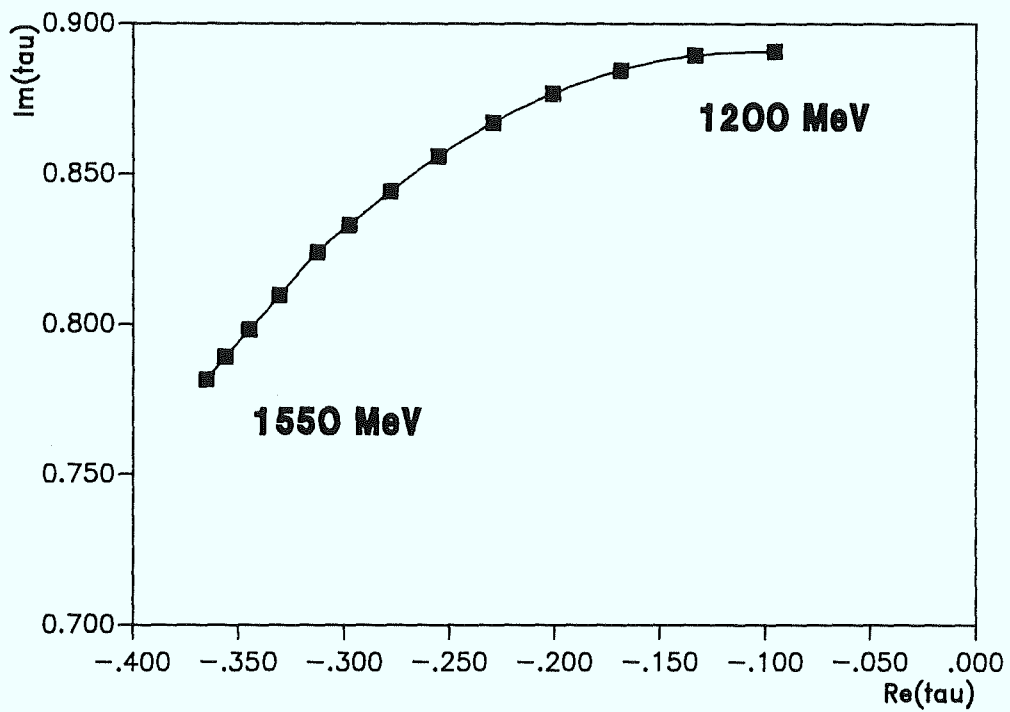
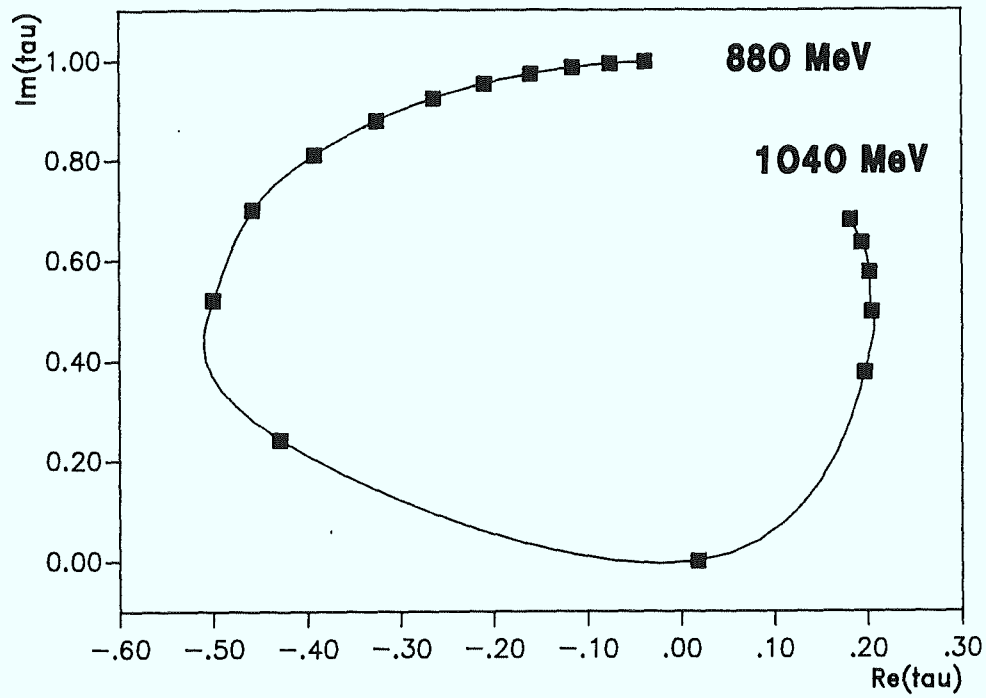


Fig. 8.12.: Argand-Speed-Plot für Modell III für

a) S^* (von $Z = 880 \text{ MeV}$ bis $Z = 1040 \text{ MeV}$, $\Delta Z = 10 \text{ MeV}$)

b) ϵ (von $Z = 1200 \text{ MeV}$ bis $Z = 1550 \text{ MeV}$, $\Delta Z = 25 \text{ MeV}$)

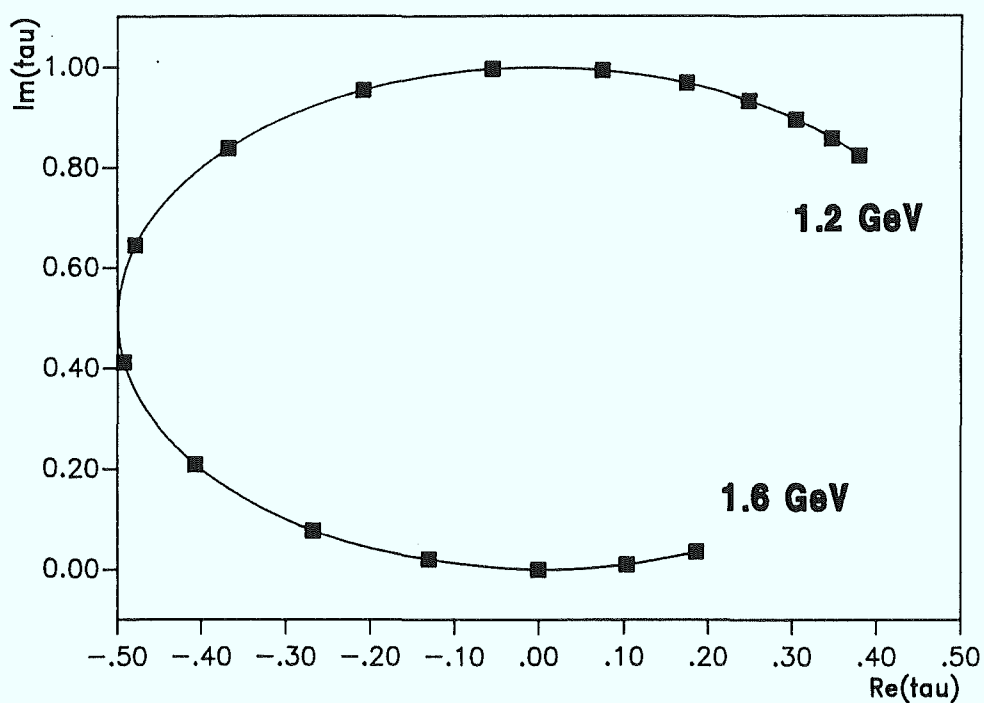


Fig. 8.12.: Argand-Speed-Plot für Modell III für
 c) κ (von $Z = 1200 \text{ MeV}$ bis $Z = 1600 \text{ MeV}$, $\Delta Z = 25 \text{ MeV}$)

8.12.c ab:

$$m_{\kappa} = 1450 \text{ MeV}, \quad \Gamma_{\kappa} = 300 \text{ MeV}$$

$$m_{S^*} = 985 \text{ MeV}, \quad \Gamma_{S^*} = 30 \text{ MeV}$$

$$m_{\epsilon} = 1400 \text{ MeV}, \quad \Gamma_{\epsilon} = 500 \text{ MeV}.$$

Dies stimmt sehr gut mit den im Particle Data Booklet [10] angegebenen Werten überein.

8.5. EINFLUSS WEITERER GRAPHEN

8.5.1. OBE-GRAPHEN DER SKALAREN UND TENSORMESONEN

Aus Konsistenzgründen muß nicht nur für Vektormesonen Polgraph *und* OBE-Graph berücksichtigt werden, sondern auch für die in Modell II und III hinzugefügten skalaren Mesonen. Der ϵ -Austausch ist stets möglich, der κ -Austausch bei Beteiligung von Mesonen mit Strangeness. Die Isospinfaktoren sind bereits in Tab. 3.1. und 3.2. angegeben. Über die SU(3)-Relationen Gl. (3.17) mit $\alpha = 0$ erhalten wir das Verhältnis der Kopplungskonstanten. Als Formfaktor wählen wir in unserem abschließenden Modell III (Gradientenkopplung) das *Quadrat* des Ausdruckes Gl. (6.2) (FF=2 für den Formfaktor-Typ), weil die Integrale der Iterationsgleichung wegen der starken Impulsabhängigkeit sonst divergierten. Mit einem Cut-off von $\Lambda = 1.5$ GeV haben die OBE-Graphen skalarer Mesonen praktisch keinen Einfluß, was aufgrund ihrer großen Masse sofort verständlich ist. Gleiches gilt für den Austausch des Tensormesons.

8.5.2. DAS $\rho\rho$ -BOXPOTENTIAL

Wir fügen anstelle des ϵ -Polgraphen die $\rho\rho$ -Box der Fig. 3.6., die wir in Anhang G berechnet haben, zum Modell I der $\pi\pi$ -Wechselwirkung hinzu. Die Kopplungskonstante $g_{\pi\pi\rho}$ ist durch $G_\rho = \frac{g_{\pi\pi\rho}^2}{4\pi} = 2.1$ festgelegt. Der Formfaktor an den Vertices ist frei; er kann sich von dem des $\pi\pi\rho$ -Vertex unterscheiden, der beim ρ -Austausch des $\pi\pi$ -Pseudopotentials verwendet wird. Wir wählen den Monopol-Formfaktor Gl. (6.1) (FF=1) mit einem Cut-off Parameter von $\Lambda = 1.7$ GeV. Weil wir nur den *Einfluß* der Box zeigen wollen, erfolgte kein Fit an die Daten.

Unterhalb der $\rho\rho$ -Schwelle (1538 MeV) ist der Beitrag des Boxpotentials erwartungsgemäß in allen Phasen attraktiv und nimmt zu größer werdenden Energien hin zu. Die $\rho\rho$ -Box wirkt sich wegen der beiden schweren ρ -Mesonen im Zwischenzustand am deutlichsten in den J=0 Phasen aus (Fig. 8.13.). Die anderen Phasen beeinflusst sie kaum.

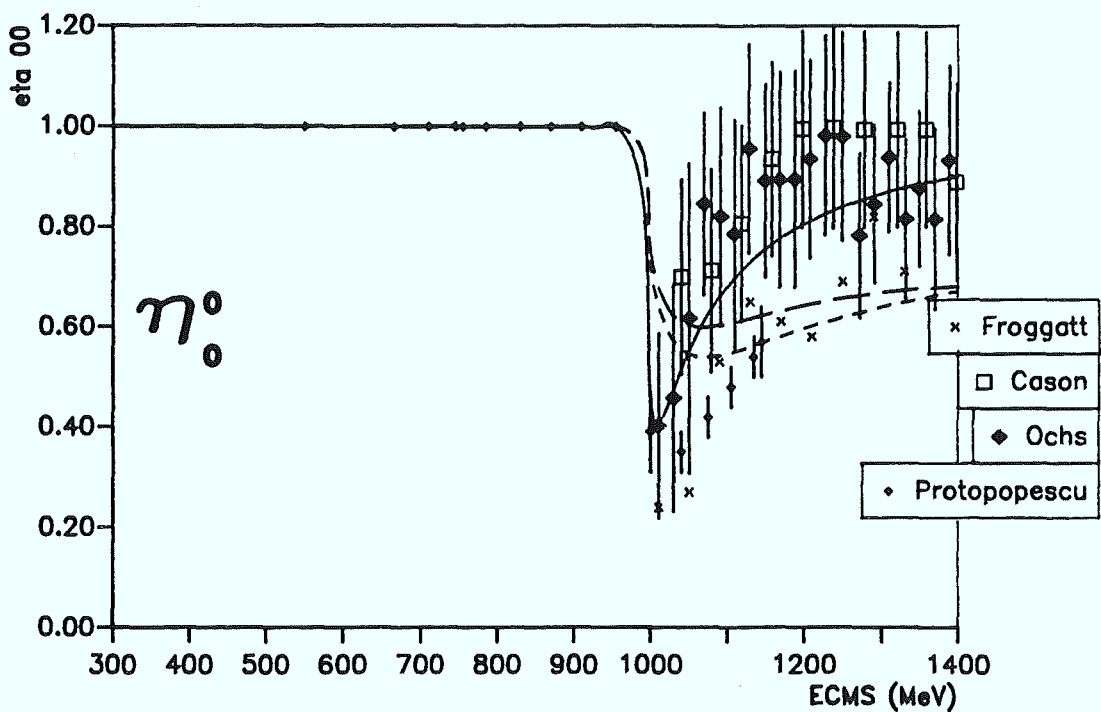
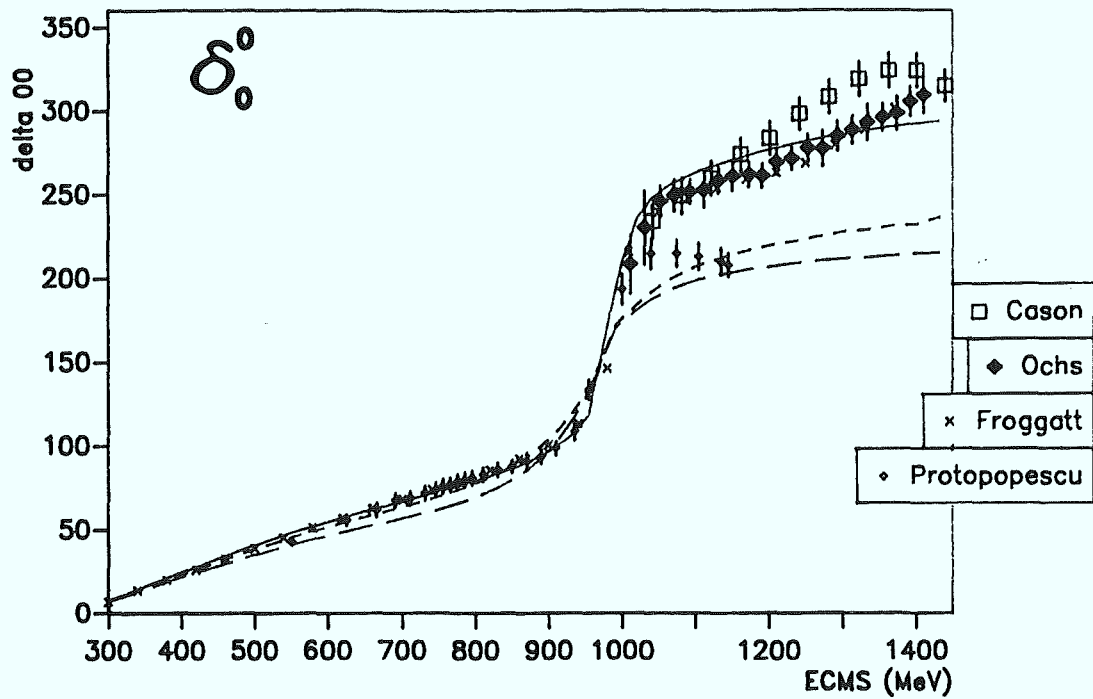


Fig. 8.13.: Einfluß der $\rho\rho$ -Box

a) δ_0^0 -Phase b) η_0^0 -Inelastizität

lang gestrichelte Kurve: Modell I; kurz gestrichelte Kurve: Modell I + $\rho\rho$ -
Boxpotential; durchgezogene Kurve: Modell III

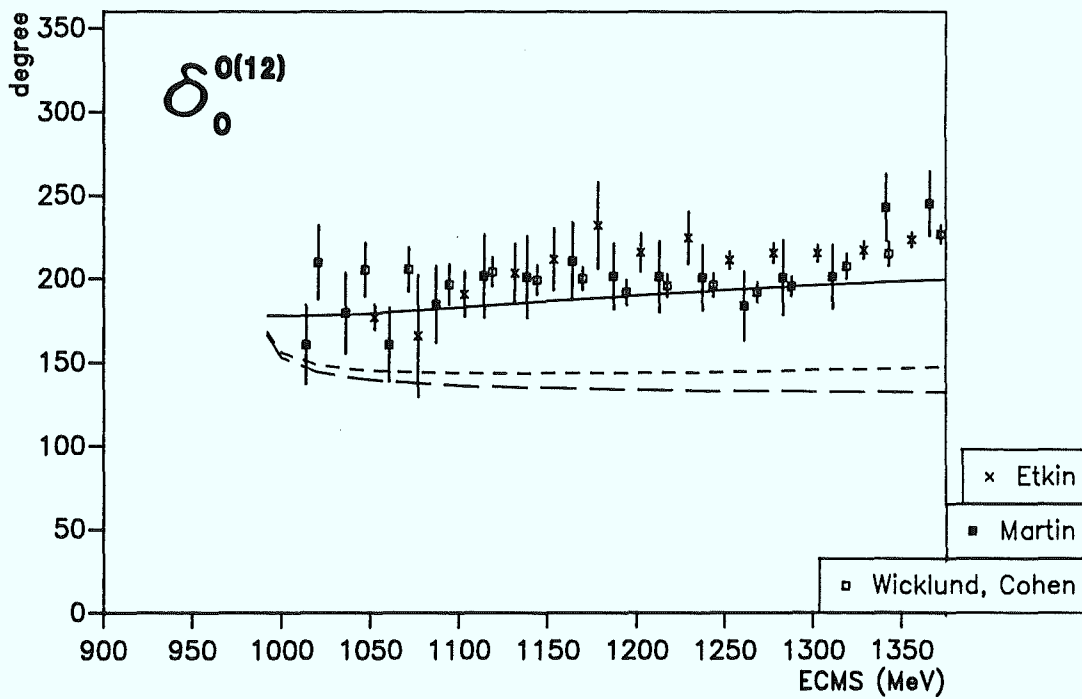
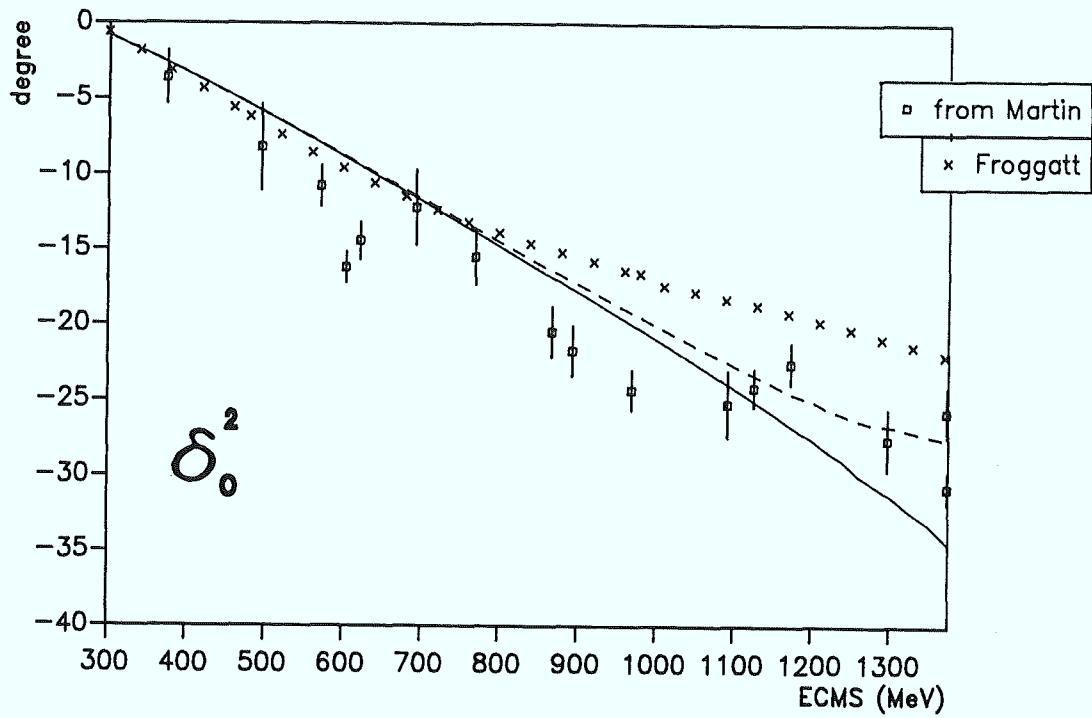


Fig. 8.13.: Einfluß der $\rho\rho$ -Box
 c) δ_0^2 -Phase d) $\delta_0^{0(12)}$ -Phase
 Bezeichnungen wie bei a) und b)

In der δ_0^0 -Phase (Fig. 8.13.a) kann die ϵ -Resonanz von Modell II oder III durch das Boxpotential Fig. 3.6. nicht ersetzt werden. Eine Berücksichtigung weiterer Boxdiagramme (z.B. $\pi\pi \rightarrow \rho\rho \rightarrow \pi\pi$ mit ω -Austausch) und der direkten $\rho\rho$ -Wechselwirkung ist in diesem Zusammenhang jedoch untersuchenswert.

Auch auf die Inelastizität η_0^0 (Fig. 8.13.b) und auf die Phase $\delta_0^{0(12)}$ für die Reaktion $\pi\pi \rightarrow \bar{K}K$ (Fig. 8.13.d) hat das attraktive Boxpotential einen von der Tendenz her ähnlichen — wenn auch schwächeren — Einfluß wie der Polgraph des Modells III.

In der δ_0^2 -Phase (Fig. 8.13.c) kann durch das Widereinander zwischen attraktivem ρ -OBE-Graph und repulsivem Boxpotential der Knick in den Daten erklärt werden: Oberhalb von 1 GeV macht sich die $\rho\rho$ -Box zunehmend bemerkbar. Ähnliches gilt in schwächerer Ausprägung auch für die δ_2^2 -Phase.

8.5.3. DER $\eta\eta$ -KANAL

Wir nehmen an, daß das η -Meson nur aus dem Oktett- η , η_8 , besteht, vernachlässigen also die Mischung Gl. (3.5) mit dem Singulett- η , weil dessen Kopplungskonstante unbekannt und der Mischungswinkel klein ist.

Eine direkte Ankopplung des $\eta\eta$ -Kanals an den $\pi\pi$ -Kanal kann nur über den Austausch von skalaren oder Tensormesonen erfolgen. Der Graph $\pi\pi \rightarrow \eta\eta$ mit ρ -Austausch liefert keinen Beitrag, weil die aus der SU(3)-Symmetrie folgende Kopplungskonstante $g_{\eta\pi\rho}$, Gl. (3.17), verschwindet. Für die direkte $\eta\eta$ -Wechselwirkung ist ρ -Austausch aus Gründen der Erhaltung des Isospins ebenfalls nicht möglich. So koppelt der $\eta\eta$ -Kanal nur indirekt an den $\pi\pi$ -Kanal an, nämlich über den $\bar{K}K$ -Kanal, konkret über den Prozeß $\bar{K}K \rightarrow \eta\eta$ mit K^* -Austausch. Die Kopplungskonstante $\frac{g_{102}}{4\pi}$ für dieses Pseudopotential ergibt sich aus $G_\rho = 2.1$ über SU(3)-Symmetrie zu -1.575 ; der Isospinfaktor im T=0 Kanal, in dem der $\eta\eta$ -Kanal ausschließlich wirkt, ist $-\sqrt{2}$.

In der $\pi\pi$ -Amplitude kann der $\eta\eta$ -Kanal nur in achter Ordnung in der Kopplungskonstanten beitragen ($\pi\pi \rightarrow \bar{K}K \rightarrow \eta\eta \rightarrow \bar{K}K \rightarrow \pi\pi$). Entsprechend winzig ist sein Einfluß auf die Phasen; er ist kleiner als die Strichdicke in den Fig. 8.4.,

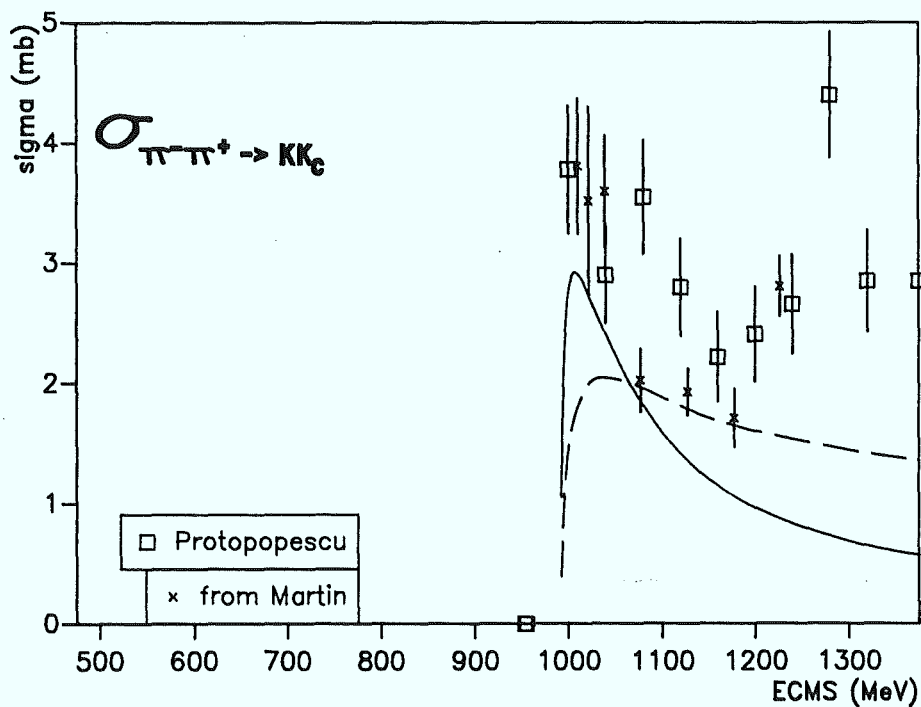
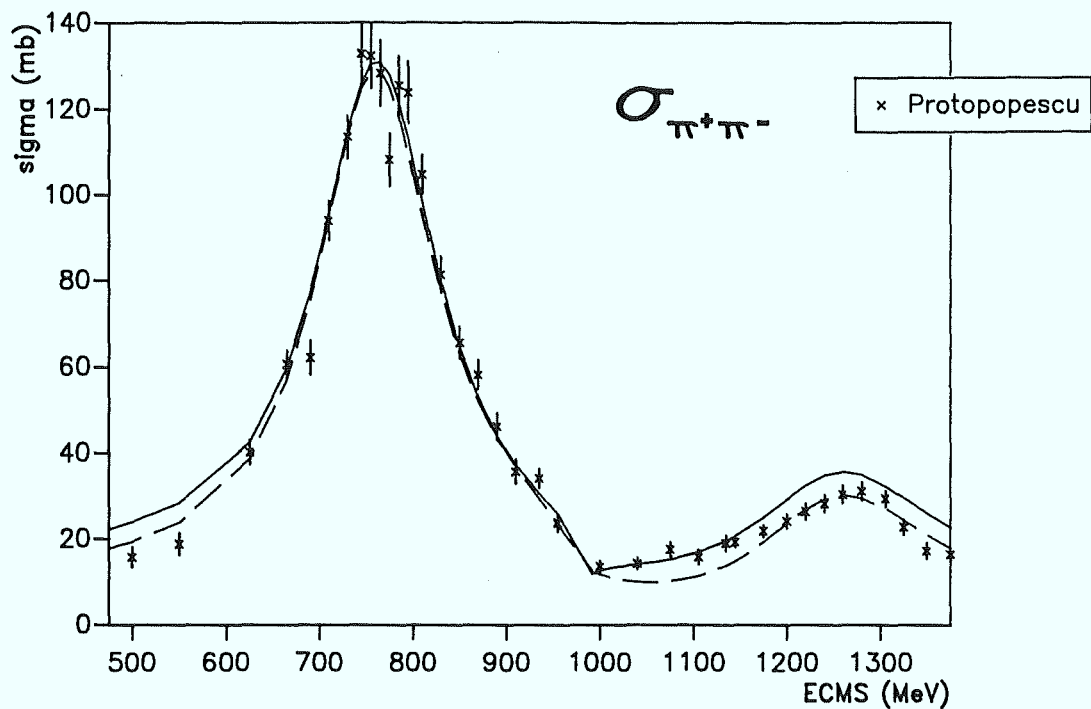


Fig. 8.14.: Wirkungsquerschnitte der $\pi\pi$ -Streuung

a) $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ b) $\pi^+\pi^- \rightarrow K\bar{K}$

gestrichelte Kurve: Modell I; durchgezogene Kurve: Modell III

8.6.a und 8.7..

8.6. OBSERVABLE

Wie bei der Bonner NN-Wechselwirkung [2] erfolgte die Anpassung der freien Parameter, also im wesentlichen der Cut-offs, an die *Phasen*, die von verschiedenen Autoren ([53], [54], ..., siehe Abschnitt 7.1.) aus den Wirkungsquerschnitten und Y-Momenten extrahiert wurden. Bei einer guten Reproduktion der Phasen sollte man Gleiches für Wirkungsquerschnitte und Y-Momente erwarten.

8.6.1. $\pi\pi$ -FALL

Leider liegen uns hier lediglich die Daten von Protopopescu et al. vor [53], weil die Observablen von allen anderen Gruppen nur in willkürlichen Einheiten angegeben werden. Und die Analyse von Protopopescu ist unglücklicherweise genau die, an die wir die Parameter nicht angefitzt haben, weil sie von allen anderen Autoren in der δ_0^0 -Phase oberhalb 1 GeV abweicht (Fig. 8.4.).

Trotzdem vergleichen wir unsere Ergebnisse von Modell I und III mit den experimentellen Daten:

Der Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ (Fig. 8.14.a) wird in beiden Fällen gut reproduziert, was nicht verwundern sollte, da er ganz von der ρ - und der f_2 -Resonanz dominiert wird. Aber auch das S^* ist sowohl in den Daten als auch in den Kurven als Schulter in der abfallenden ρ -Flanke bei $m \approx 985$ MeV zu erkennen.

Der Wirkungsquerschnitt für $\pi^+\pi^- \rightarrow \bar{K}K$ (d.h. die *Summe* der Prozesse $\pi^+\pi^- \rightarrow K^+K^-$ und $\pi^+\pi^- \rightarrow K^0\bar{K}^0$) wird an der $\bar{K}K$ -Schwelle mit Modell III gut repräsentiert, von Modell I nicht ganz so gut (Fig. 8.14.b). Für größer werdende Energien stimmt Modell III allerdings weniger gut mit den Daten überein als Modell I, was bereits im Zusammenhang mit der Inelastizität η_0^0 diskutiert wurde (Abschnitt 8.3.). Die Wirkungsquerschnitte aus beiden Modellen liegen in

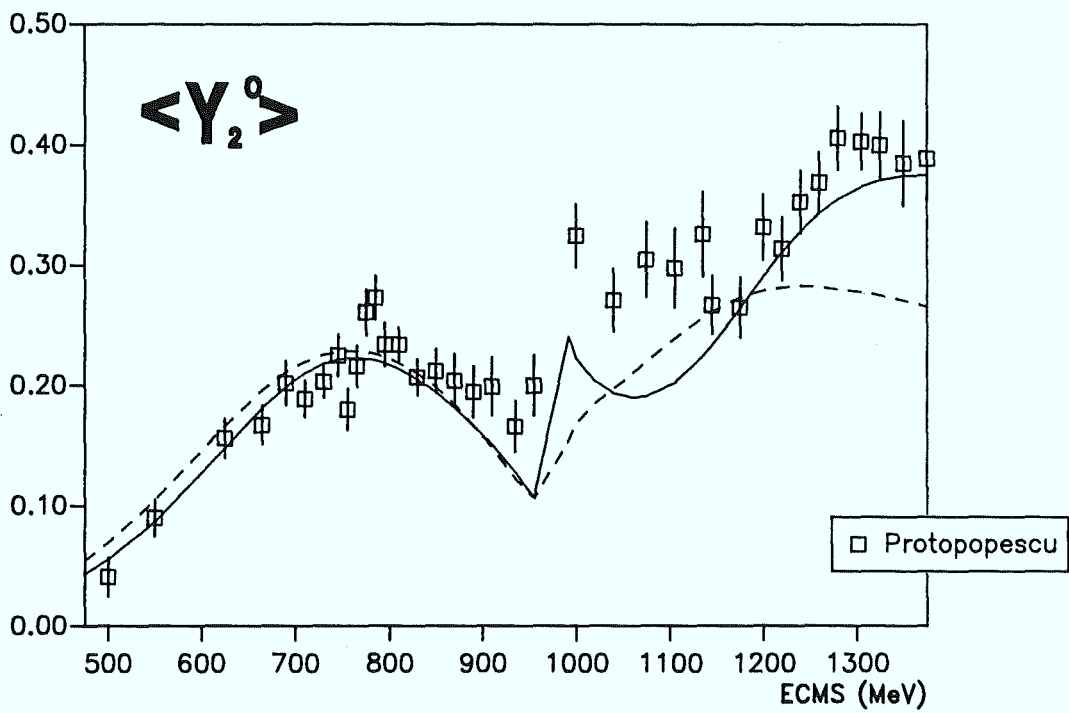
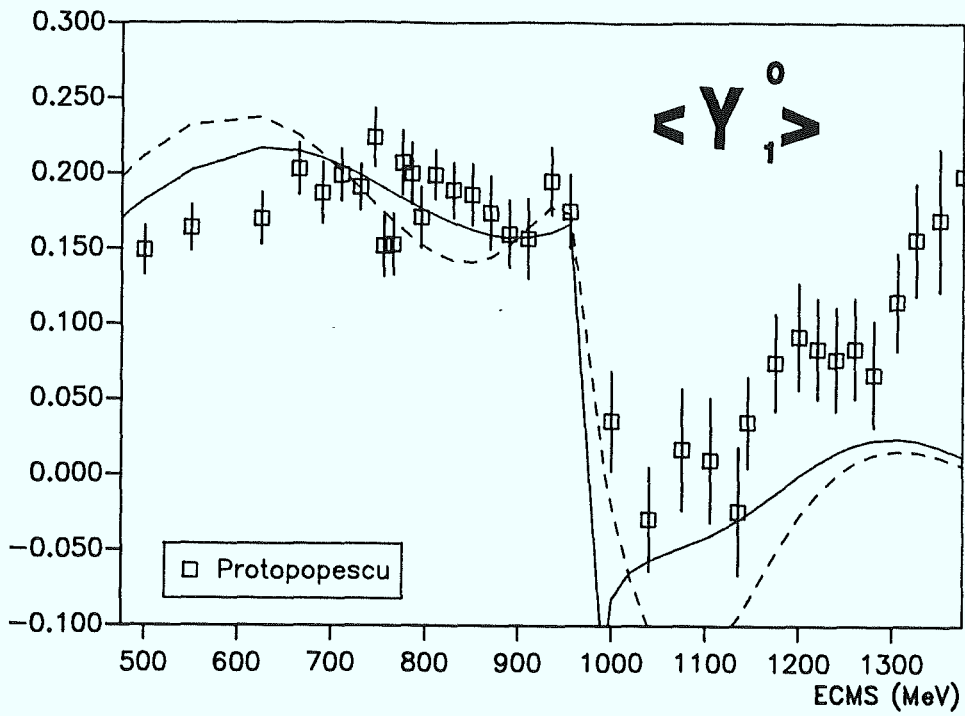


Fig. 8.15.: Y-Momente der $\pi\pi$ -Streuung

a) Y_1^0 b) Y_2^0

gestrichelte Kurve: Modell I; durchgezogene Kurve: Modell III

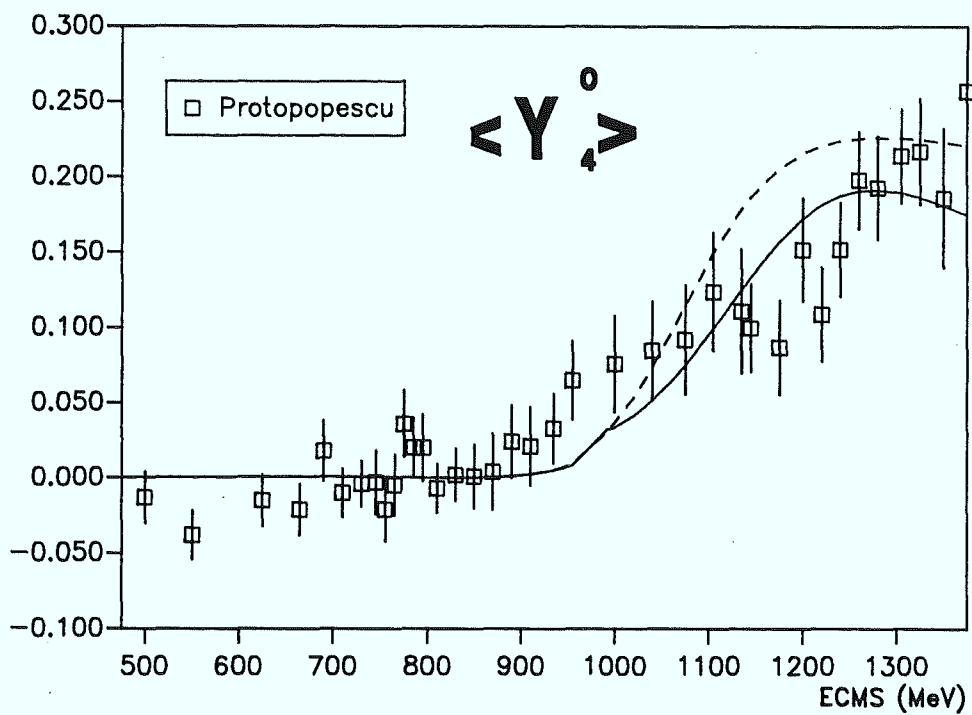
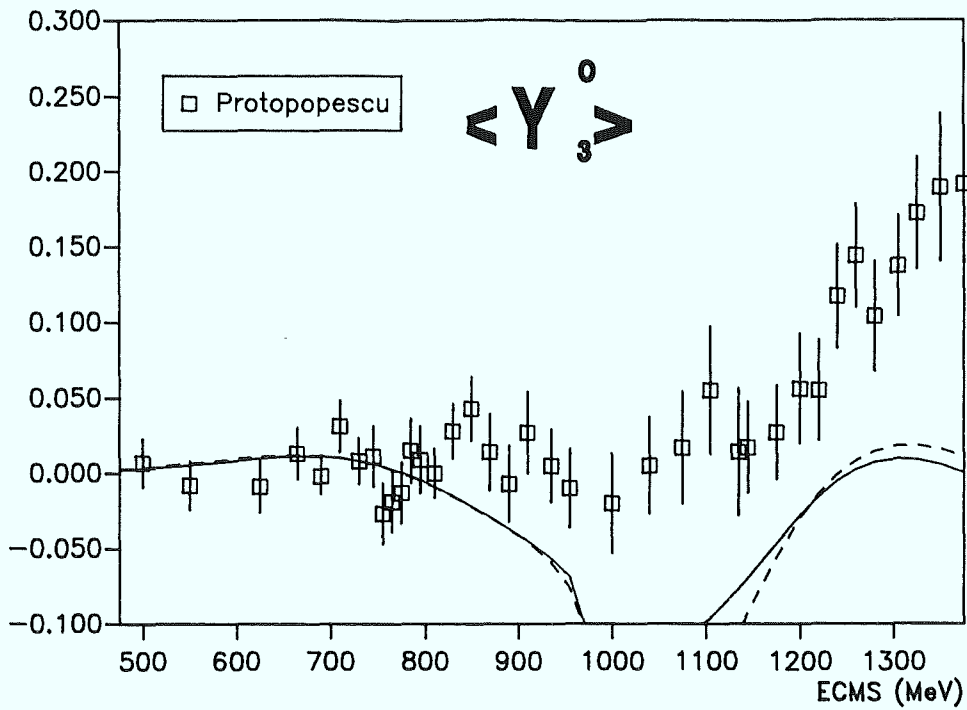


Fig. 8.15.: Y -Momente der $\pi\pi$ -Streuung

c) Y_3^0 d) Y_4^0

gestrichelte Kurve: Modell I; durchgezogene Kurve: Modell III

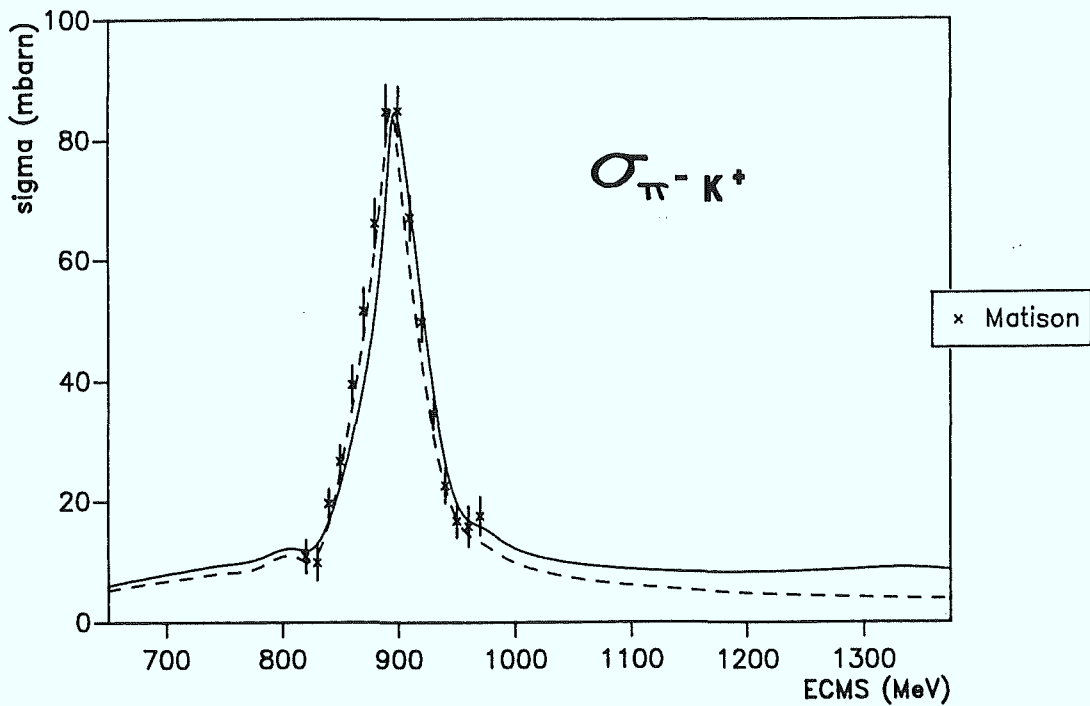


Fig. 8.16.: Wirkungsquerschnitte der $K\pi$ -Streuung: $\pi^- K^+ \rightarrow \pi^- K^+$
 gestrichelte Kurve: Modell I; durchgezogene Kurve: Modell III

diesem Energiebereich etwas zu tief. Weil wir mit den Inelastizitäten näher an den Werten von Ochs [58], Froggatt [56] und Cason [57] liegen, vermuten wir, daß wir eine bessere Übereinstimmung mit ihren Wirkungsquerschnitten erzielen als mit denen von Protopopescu [53]. Die Wirkungsquerschnitte für Modell II unterscheiden sich kaum von denen des Modells III, was von den ähnlichen Phasen her nicht anders zu erwarten ist.

In Fig. 8.15. zeigen wir die Y -Momente von Modell I und III im Vergleich mit denen von Protopopescu. Wie oben ausgeführt, sollten die Abweichungen oberhalb 1 GeV nicht verwundern. Zusätzlich ist zu bemerken, daß wir in unser Modell keinerlei $J=3$, $T=1$ Resonanzen eingebaut haben, für die es experimentelle Hinweise gibt (z.B. [54, 79]; die Particle Data Group [10] gibt ein $T^G(J^P) = 1^+(3^-)$ -Meson bei 1691 MeV mit einer Breite von 215 MeV an), aber gerade Y_3^0 , in das die durch

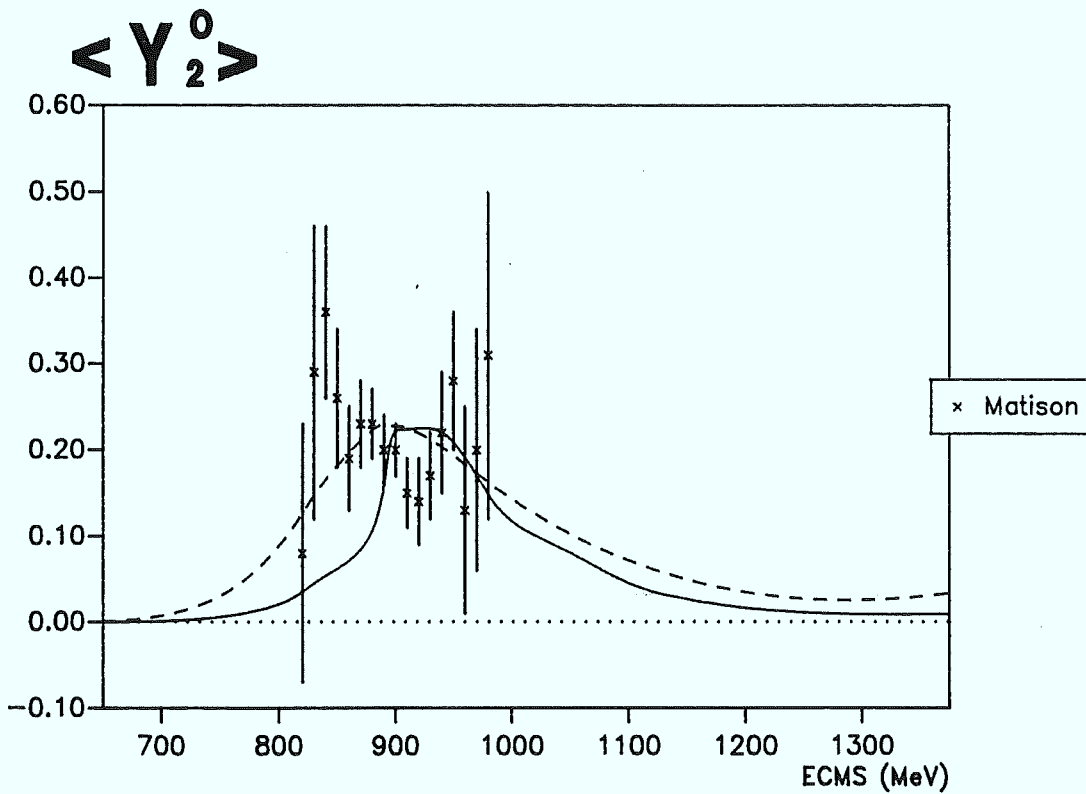
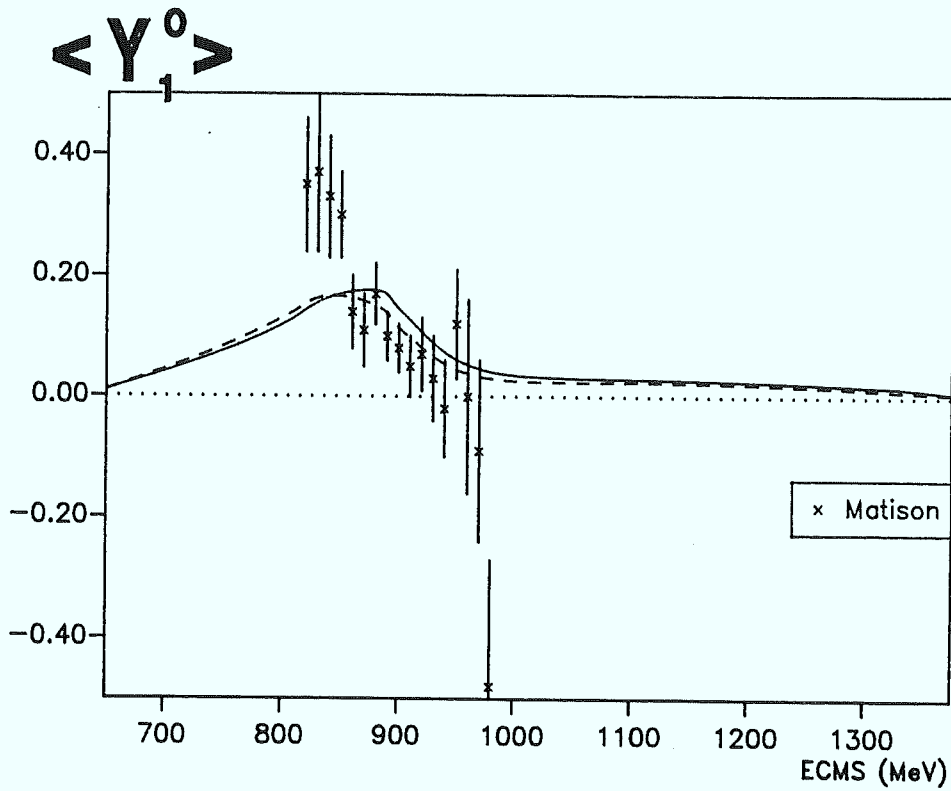


Fig. 8.17.: Die zu Fig. 8.16. gehörigen Y-Momente: a) Y_1^0 b) Y_2^0
 gestrichelte Kurve: Modell I; durchgezogene Kurve: Modell III

J=3 Resonanzen gepragte f-Welle eingeht, ist oberhalb 1 GeV besonders schlecht getroffen.

Allgemein kann man jedoch sagen, daß die Y-Momente durch Modell III erwartungsgem besser beschrieben werden als durch Modell I.

8.6.2. $K\pi$ -FALL

Für den $K\pi$ -Fall liegen uns im Bereich der K^* -Resonanz Observable von Matison et al. vor [62]. Bemerkenswert ist die gute Übereinstimmung im Wirkungsquerschnitt für $\pi^- K^+ \rightarrow \pi^- K^+$ (Fig. 8.16.), wenn man bedenkt, daß nicht diese Daten gefittet wurden, sondern die δ_0^0 -Phase der $\pi\pi$ -Streuung! Abweichungen zwischen Modell I und III gibt es nur in Bereichen, in denen uns keine Daten zur Verfügung stehen.

Die experimentellen Y-Momente (Fig. 8.17.) sind zu schlecht, um detaillierte Aussagen machen zu können. Eine Übereinstimmung mit unseren Ergebnissen ist jedoch gegeben.

9. Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war zu testen, inwieweit das Mesonaustauschbild in der Lage ist, auch die Meson-Meson-Streuung konsistent zu beschreiben.

Bis 1 GeV ist dies ohne weiteres mit den Pol- und OBE-Graphen der wohl-etablierten Mesonen und mit aus der SU(3)-Symmetrie folgenden Kopplungskonstanten möglich. Als wesentlich erwies sich bei der $\pi\pi$ -Streuung die $K\bar{K}$ -Wechselwirkung, wobei die Attraktion in ihrem T=0 Kanal zu einem gebundenen $K\bar{K}$ -"Molekül" mit den Quantenzahlen $J^P = 0^+$ führte (S^*). Oberhalb von 1 GeV war es notwendig, skalare Resonanzmesonen ϵ und κ einzuführen, um die J=0 Phase im Isospin T=0 Kanal der $\pi\pi$ -Streuung bzw. Isospin T= $\frac{1}{2}$ Kanal der $K\pi$ -Streuung zu erklären. Weil die Phasen bis 1 GeV in diesen Kanälen bereits allein durch OBE-Graphen wiedergegeben werden, mußte für die skalaren Resonanzmesonen eine Kopplungsweise gefunden werden, die die Ergebnisse in diesem Energiebereich kaum beeinflußt. Die skalare Kopplung Gl. (3.1) erwies sich dafür als weniger geeignet, weil die resultierende Attraktion im Bereich kleiner Energien zu stark ist. Um die Daten zu beschreiben, mußten wir eine phänomenologische Repulsion einführen.

Bei Verwendung der Gradientenkopplung Gl. (3.4) jedoch mußten keine über das Modell hinausgehenden Freiheitsgrade eingeführt werden, und das Mesonaustauschbild erwies sich als in sich geschlossen. Es bleibt Aufgabe eines auf der QCD basierenden Modells, die ihm zugrunde liegenden Parameter (Kopplungskonstanten, Formfaktoren, nackte Massen) herzuleiten.

Wir hoffen und glauben, daß unsere Meson-Meson-Potentiale mit aus der Mesonentheorie folgendem full off-shell Verhalten zahlreiche Anwendungen finden werden, so für die NN-, NK- und $N\pi$ -Streuung oder in Rechnungen der Kernphysik.

Für eine Fortsetzung dieser Arbeit bieten sich drei Ansatzpunkte an, die wir kurz skizzieren wollen:

- (1) Die Frage nach der genauen Lage und Breite der beiden skalaren, isoskalaren Mesonen ist letztendlich unbeantwortet geblieben. Um hier zu endgültigen

Aussagen zu kommen, ist eine Verbesserung der experimentellen Situation im Bereich von 1.4 GeV notwendig.

- (2) Eine Ausdehnung des Modells auf weitere angekoppelte Kanäle ist prinzipiell ohne weiteres möglich. Kopplungskonstanten und die meisten Cut-off Parameter sind über SU(3)-Symmetrie bzw. durch bereits berücksichtigte Vertices festgelegt. Insbesondere muß dabei an den $\rho\rho$ -Kanal, den $\omega\omega$ -Kanal bzw. den ρK^* - und ωK^* -Kanal gedacht werden. Wegen der komplizierteren Spin-Struktur wird sich der numerische Aufwand jedoch erheblich vergrößern.
- (3) In ihrem Quarkmodell interpretieren Isgur und Weinstein [11] *sowohl* das S^* - *als auch* das δ -Meson als gebundenen $K\bar{K}$ -Zustand. Wir erwarten, daß das Mesonaustauschbild gleiches leistet. Dazu muß die $\pi\eta$ -Streuung mit angekoppeltem $K\bar{K}$ -Kanal in Analogie zur $\pi\pi$ -Streuung untersucht werden. Die meisten Parameter liegen dabei wieder fest.

Anhang A. Feldoperatoren: Definition und Hermitizität

A.1. DEFINITIONEN

Die Feldoperatoren sind die normierten Lösungen der freien Gleichungen für das jeweilige Meson (Klein-Gordon-Gleichung, Proca-Gleichung, ...). Sie lauten:

pseudoskalare Mesonen

$$\phi_P(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \{a_{\alpha} e^{-ipx} + a_{\alpha}^{\dagger} e^{ipx}\} \quad (A.1)$$

Vektormesonen

$$\phi_V^{\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\alpha} \frac{\epsilon^{\mu}(\vec{p}, \lambda)}{\sqrt{2E_p}} \{b_{\alpha} e^{-ipx} + b_{\alpha}^{\dagger} e^{ipx}\} \quad (A.2)$$

skalare Mesonen

$$\phi_S(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \{c_{\alpha} e^{-ipx} + c_{\alpha}^{\dagger} e^{ipx}\} \quad (A.3)$$

Tensormesonen

$$\phi_T^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\alpha} \frac{\epsilon^{\mu\nu}(\vec{p}, \lambda)}{\sqrt{2E_p}} \{d_{\alpha} e^{-ipx} + d_{\alpha}^{\dagger} e^{ipx}\} \quad (A.4)$$

Die Indices α, β, \dots stehen stellvertretend für *alle inneren Quantenzahlen*, die zur Beschreibung des jeweiligen Zustands notwendig sind, also Impuls, Helizität, Isospin mit seiner dritten Komponente und Hyperladung: $\alpha = (\vec{p}, \lambda, T, T_Z, Y)$. Bei skalaren und pseudoskalaren Mesonen entfällt die Helizität. Mit \sum_{α} ist auch $\int d^3\vec{p}$ und \sum_{λ} gemeint.

Alle Mesonenfelder sind hermitesch,

$$\phi_P = \phi_P^{\dagger}, \quad \phi_V^{\mu} = \phi_V^{\mu\dagger}, \quad \dots,$$

worin sich widerspiegelt, daß die Mesonen ihre eigenen Antiteilchen sind (siehe A.2.).

Die *Erzeugungs-* und *Vernichtungsoperatoren* der Mesonen, $a_\alpha^\dagger, a_\alpha \dots$, genügen dabei folgenden Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} [a_\alpha, a_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} \\ [a_\alpha, a_\beta] &= [a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger] = 0 \end{aligned} \quad (A.5)$$

Operatoren für Mesonen aus verschiedenen Multipletts vertauschen natürlich miteinander.

$E_p = \sqrt{p^2 + m_\alpha^2}$ ist die *kinetische Energie* des Mesons. Bei bezüglich der Masse exakt erfüllter SU(3)-Flavor-Symmetrie entfielen die Abhängigkeit der Mesonenmasse von α . Wir berücksichtigen die Symmetriebrechung, indem wir für m_α die mittlere Masse des Isospinmultipletts ansetzen (Tab. 1.1.). Dabei wird die schwache SU(2)-Brechung durch elektromagnetische Effekte vernachlässigt.

$\epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda)$ [$\epsilon^{\mu\nu}(\vec{p}, \lambda)$] ist der *Polarisationsvektor* [*Polarisationstensor*] in Helizitätsdarstellung, $\lambda = 0, \pm 1$ [$\lambda = 0, \pm 1, \pm 2$] die Helizität des Spin-1- [Spin-2]-Teilchens.

Im CM-System lautet der *Polarisationsvektor* für ein Teilchen der Masse m mit einem Impuls \vec{p} in z-Richtung [34]:

$$\epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda = \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mp 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda = 0) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ E_p \end{pmatrix} \quad (A.6)$$

Alle weiteren Richtungen erhält man durch Drehung mit der Rotationsmatrix

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} :$$

$$\epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda = \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mp \cos\theta \\ -i \\ \pm \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda = 0) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} p \\ E_p \sin\theta \\ 0 \\ E_p \cos\theta \end{pmatrix} \quad (A.7)$$

Dabei liege das CM-Koordinatensystem wie in Fig. A.1. gezeigt.

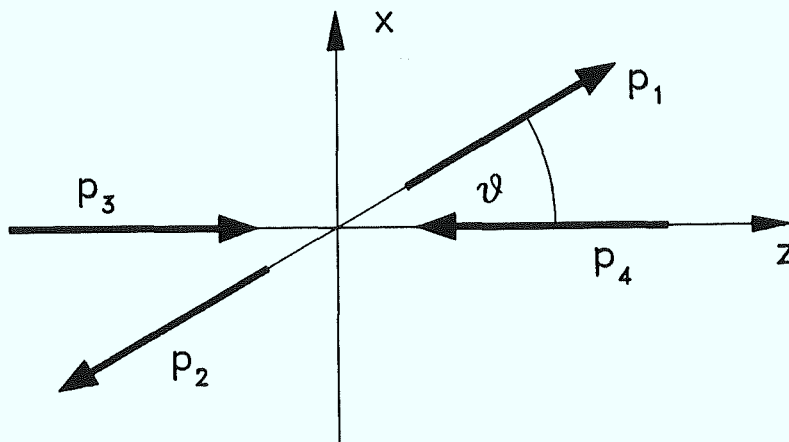


Fig. A.1.: Wahl des CM-Koordinatensystems und Definition des Winkels θ .

Bezüglich des Helizitätsindex λ ist der Polarisationsvektor $\epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda)$ ein Tensor 1. Stufe.

Entsprechend ist der *Polarisationstensor* $\epsilon^{\mu\nu}(\vec{p}, \lambda)$ ein Tensor 2. Stufe, den man

durch Kopplung zweier Tensoren der Stufe 1 erhält [35]:

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\nu}(2,2) &= \epsilon^\mu(1,1)\epsilon^\nu(1,1) \\
\epsilon^{\mu\nu}(2,1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \epsilon^\mu(1,1)\epsilon^\nu(1,0) + \epsilon^\mu(1,0)\epsilon^\nu(1,1) \} \\
\epsilon^{\mu\nu}(2,0) &= \frac{1}{\sqrt{6}}\epsilon^\mu(1,1)\epsilon^\nu(1,-1) + \sqrt{\frac{2}{3}}\epsilon^\mu(1,0)\epsilon^\nu(1,0) + \frac{1}{\sqrt{6}}\epsilon^\mu(1,-1)\epsilon^\nu(1,1) \\
\epsilon^{\mu\nu}(2,-1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \epsilon^\mu(1,-1)\epsilon^\nu(1,0) + \epsilon^\mu(1,0)\epsilon^\nu(1,-1) \} \\
\epsilon^{\mu\nu}(2,-2) &= \epsilon^\mu(1,-1)\epsilon^\nu(1,-1)
\end{aligned}
\tag{A.8}$$

Der Deutlichkeit halber wurde zusätzlich zur Helizität λ noch die Stufe des Tensors angegeben.

Für Polarisationsvektor und -tensor gelten *Vollständigkeitsrelationen* [35]:

$$P_{\mu\nu} := \sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}(\vec{p}, \lambda)\epsilon_{\nu}(\vec{p}, \lambda)^* = -g_{\mu\nu} + \frac{p_{\mu}p_{\nu}}{m^2}
\tag{A.9}$$

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu\nu}(\vec{p}, \lambda)\epsilon_{\rho\sigma}(\vec{p}, \lambda)^* = \frac{1}{2} (P_{\mu\rho}P_{\nu\sigma} + P_{\mu\sigma}P_{\nu\rho}) - \frac{1}{3}P_{\mu\nu}P_{\rho\sigma}
\tag{A.10}$$

(p_{μ} Viererimpuls des Mesons, m seine Masse.)

A.2. HERMITIZITÄT DER FELDOPERATOREN

Die Hermitizität der Feldoperatoren für skalare und pseudoskalare Mesonen ist evident.

Für Vektor- und Tensormesonen sind einige zusätzliche Überlegungen notwendig, die wir für das Vektormeson durchführen:

Das Adjungierte eines Tensors ist wie folgt definiert [80]:

$$b^\dagger(\lambda) := (-)^\lambda (b(-\lambda))^\dagger \quad (\text{A.11})$$

Durch Konjugation erhält man:

$$(b^\dagger(\lambda))^\dagger = (-)^\lambda b(-\lambda) \quad (\text{A.12})$$

bzw.

$$(b(\lambda))^\dagger = (-)^\lambda b^\dagger(-\lambda) \quad (\text{A.13})$$

Es ist also zwischen der λ -ten Komponente des adjungierten Tensors, $(b^\dagger(\lambda))$, und dem Adjungierten der λ -ten Komponente des Tensors, $(b(\lambda))^\dagger$, zu unterscheiden. Letztere kennzeichnen wir auch durch den Konjugationsstern: $(b(\lambda))^\dagger = b(\lambda)^*$. Mit diesen Überlegungen rechnet man einfach aus, daß $\epsilon_\mu(\lambda)$ hermitesch ist:

$$\epsilon_\mu^\dagger(\lambda) := (-)^\lambda \epsilon_\mu(\lambda)^* \equiv \epsilon_\mu(\lambda) \quad (\text{A.14})$$

Um zu zeigen, daß auch der ganze Feldoperator ϕ_V^μ hermitesch ist, schreiben wir die Summe über λ explizit:

$$\phi_V^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{p} \sum_\alpha \sum_{\lambda=-1}^1 \frac{\epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda)}{\sqrt{2E_p}} \{ b_\alpha(\vec{p}, \lambda) e^{-ipx} + b_\alpha^\dagger(\vec{p}, \lambda) e^{ipx} \}$$

$$\Rightarrow (\phi_V^\mu(x))^\dagger = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{p} \sum_\alpha \sum_{\lambda=-1}^1 \frac{\epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda)^*}{\sqrt{2E_p}} \{ b_\alpha(\vec{p}, \lambda)^* e^{+ipx} + b_\alpha^\dagger(\vec{p}, \lambda)^* e^{-ipx} \}$$

Es ist also jede einzelne Komponente des Tensors zu konjugieren. Mit Gl. (14), Gl. (12) und Gl. (13) ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}
(\phi_V^\mu(x))^\dagger &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{p} \sum_\alpha \sum_{\lambda=-1}^1 (-)^\lambda \frac{\epsilon^\mu(\vec{p}, -\lambda)}{\sqrt{2E_p}} \\
&\quad \cdot \{ (-)^\lambda b_\alpha^\dagger(\vec{p}, -\lambda) e^{+ipx} + (-)^\lambda b_\alpha(\vec{p}, -\lambda) e^{-ipx} \} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{p} \sum_\alpha \sum_{\lambda=-1}^1 \frac{\epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda)}{\sqrt{2E_p}} \{ b_\alpha(\vec{p}, \lambda) e^{-ipx} + b_\alpha^\dagger(\vec{p}, \lambda) e^{+ipx} \} \\
&= \phi_V^\mu(x)
\end{aligned}$$

A.3. DEFINITIONEN DER ISOVEKTOREN UND IHRER PRODUKTE

Für die Isovektoren $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ benutzen wir folgende sphärische Darstellung:

$$\begin{aligned}
\phi^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \\
\phi^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \\
\phi^0 &= \phi_3
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Die Definition ist der der Auf- und Absteigeoperatoren im Isopinraum (entsprechend Erzeuger und Vernichter) nachempfunden, und ϕ^+, ϕ^-, ϕ^0 können deswegen mit den physikalischen Teilchen identifiziert werden. Es sei ausdrücklich vermerkt, daß Edmonds [80] eine andere Konvention für die sphärische Darstellung wählt. Daraus resultieren bei uns andere Multiplikationsregeln für die Produkte der sphärischen Vektoren:

Skalarprodukt

$$\begin{aligned}
\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} &:= \phi_1\phi_1 + \phi_2\phi_2 + \phi_3\phi_3 \\
&= \phi^0\phi^0 + \phi^+\phi^- + \phi^-\phi^+
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt wird in kartesischen Komponenten nach $(\vec{\phi} \times \vec{\phi})_1 = \phi_2\phi_3 - \phi_3\phi_2$ usw. ausgerechnet und dann mit Gl. (15) in die sphärische Darstellung transformiert. Man erhält:

$$\begin{aligned}i(\vec{\phi} \times \vec{\phi})^+ &= -\phi^+\phi^0 + \phi^0\phi^+ \\i(\vec{\phi} \times \vec{\phi})^0 &= \phi^+\phi^- - \phi^-\phi^+ \\i(\vec{\phi} \times \vec{\phi})^- &= -\phi^0\phi^- + \phi^-\phi^0\end{aligned}\tag{A.17}$$

Produkte mit Pauli-Spin-Matrizen

Die Pauli-Spin-Matrizen sind wie folgt definiert:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\tag{A.18}$$

Wir wählen folgende sphärische Darstellung:

$$\begin{aligned}\tau^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 + i\tau_2) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \tau^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 - i\tau_2) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \tau^0 &= \tau_3\end{aligned}\tag{A.19}$$

Damit ergibt sich:

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\phi} = \tau^0\phi^0 + \tau^+\phi^+ + \tau^-\phi^-\tag{A.20}$$

Konjugation

Für die kartesische Darstellung gilt natürlich:

$$(\phi_m)^\dagger = (\phi^\dagger)_m, \quad m = 1, 2, 3$$

Daraus folgt für die sphärische:

$$(\phi^m)^\dagger = (\phi^\dagger)^{-m}, \quad m = 0, \pm 1$$

Für die Mesonen ist so in beiden Darstellungen sichergestellt:

$$\vec{\phi} = \vec{\phi}^\dagger$$

A.4. HERMITIZITÄT DES SU(3)-TEILS DER FELDOPERATOREN

Zu zeigen ist, daß bei der Phasenwahl Gl. (3.7) für den SU(3)-Teil der Wechselwirkung tatsächlich gilt: $M = M^\dagger$.

Die konjugierte Darstellung $\phi(\{8\}^*, \nu)$ repräsentiert die Antiteilchen und ist mit der Teilchendarstellung über komplexe Konjugation wie folgt verbunden (de Swart [40], Phasenkonventionen wie dort und wie in Gl. (3.7)):

$$\phi(\{8\}^*, \nu) = (-)^{T_3 + \frac{Y}{2}} \phi^\dagger(\{8\}, -\nu) \quad (\text{A.21})$$

Hiermit läßt sich die Hermitizität auch des SU(3)-Teils der Mesonenfeldoperatoren verifizieren:

$$\begin{aligned} M_1^\dagger &\equiv \phi(\{8\}^*, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) = -\phi^\dagger(\{8\}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1) = (\bar{K}^-)^\dagger = K^+ = M_1 \\ M_2^\dagger &\equiv \phi(\{8\}^*, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) = \phi^\dagger(\{8\}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1) = (\bar{K}^0)^\dagger = K^0 = M_2 \\ M_3^\dagger &\equiv \phi(\{8\}^*, 1, 1, 0) = -\phi^\dagger(\{8\}, 1, -1, 0) = (-\pi^-)^\dagger = -\pi^+ = M_3 \\ M_4^\dagger &\equiv \phi(\{8\}^*, 1, 0, 0) = \phi^\dagger(\{8\}, 1, 0, 0) = (\pi^0)^\dagger = \pi^0 = M_4 \\ M_5^\dagger &\equiv \phi(\{8\}^*, 1, -1, 0) = -\phi^\dagger(\{8\}, 1, 1, 0) = -(-\pi^+)^\dagger = \pi^- = M_5 \\ M_6^\dagger &\equiv \phi(\{8\}^*, 0, 0, 0) = \phi^\dagger(\{8\}, 0, 0, 0) = (\eta)^\dagger = \eta = M_6 \\ M_7^\dagger &\equiv \phi(\{8\}^*, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1) = \phi^\dagger(\{8\}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) = (\bar{K}^0)^\dagger = \bar{K}^0 = M_7 \\ M_8^\dagger &\equiv \phi(\{8\}^*, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1) = -\phi^\dagger(\{8\}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) = -(K^+)^\dagger = -K^- = M_8 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Beim ersten Gleichheitszeichen wird Gl. (21) ausgenutzt, beim zweiten und vierten die zu prüfende Phasenbeziehung Gl. (3.7) . Beim dritten Gleichheitszeichen

wird von dem physikalischen Wissen Gebrauch gemacht, welches Antiteilchen zum jeweiligen Teilchen gehört.

Anhang B. Konstruktion der Pseudopotentiale aus Abschnitt 2.3.

Mit $1, 2, \dots, \alpha, \beta \dots$ sind wie in Anhang A *alle* inneren Freiheitsgrade der Mesonen gemeint, also $(\vec{p}, \lambda, T, T_3, Y)$.

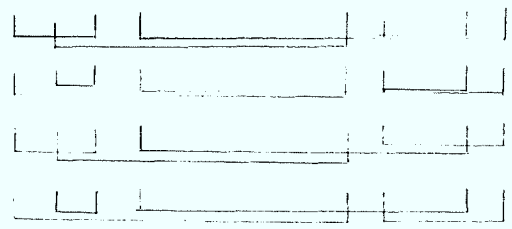
Zu a) (OBE-Graphen)

Es wird der Ausdruck Gl. (2.21) ausgewertet:

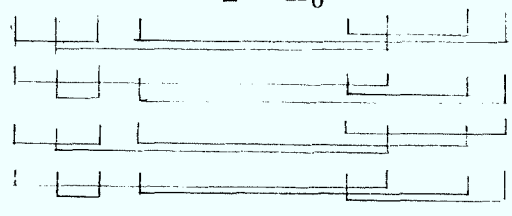
$$\begin{aligned}
 \langle 12|V_a^{(2)}|34\rangle &:= \sum_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\xi} \langle 0|a_1a_2\{W_{\alpha\beta\gamma}^1a_\alpha^\dagger a_\beta b_\gamma + W_{\alpha\beta\gamma}^2a_\alpha^\dagger a_\beta b_\gamma^\dagger + \\
 &W_{\alpha\beta\gamma}^3a_\alpha a_\beta^\dagger b_\gamma^\dagger + W_{\alpha\beta\gamma}^4a_\alpha^\dagger a_\beta b_\gamma^\dagger\} \\
 &\frac{1}{Z - H_0} \\
 &\{W_{\delta\epsilon\xi}^1a_\delta^\dagger a_\epsilon b_\xi + W_{\delta\epsilon\xi}^2a_\delta^\dagger a_\epsilon b_\xi^\dagger + \\
 &W_{\delta\epsilon\xi}^3a_\delta a_\epsilon^\dagger b_\xi^\dagger + W_{\delta\epsilon\xi}^4a_\delta^\dagger a_\epsilon b_\xi^\dagger\}a_3^\dagger a_4^\dagger|0\rangle \\
 &= \sum_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\xi} \langle 0|a_1a_2 \left[W_{\alpha\beta\gamma}^1a_\alpha^\dagger a_\beta b_\gamma \frac{1}{Z - H_0} W_{\delta\epsilon\xi}^2a_\delta^\dagger a_\epsilon b_\xi^\dagger \right] a_3^\dagger a_4^\dagger|0\rangle \\
 &+ \langle 0|a_1a_2 \left[W_{\alpha\beta\gamma}^1a_\alpha^\dagger a_\beta b_\gamma \frac{1}{Z - H_0} W_{\delta\epsilon\xi}^4a_\delta a_\epsilon^\dagger b_\xi^\dagger \right] a_3^\dagger a_4^\dagger|0\rangle \\
 &+ \langle 0|a_1a_2 \left[W_{\alpha\beta\gamma}^3a_\alpha a_\beta^\dagger b_\gamma \frac{1}{Z - H_0} W_{\delta\epsilon\xi}^2a_\delta^\dagger a_\epsilon b_\xi^\dagger \right] a_3^\dagger a_4^\dagger|0\rangle \\
 &+ \langle 0|a_1a_2 \left[W_{\alpha\beta\gamma}^3a_\alpha a_\beta^\dagger b_\gamma \frac{1}{Z - H_0} W_{\delta\epsilon\xi}^4a_\delta a_\epsilon^\dagger b_\xi^\dagger \right] a_3^\dagger a_4^\dagger|0\rangle
 \end{aligned}$$

Die Anwendung des Wicktheorems führt zu 4×4 Summanden, wobei die Selbstenergiebeiträge — Kontraktionen von a_1, a_2 mit a_3, a_4 entsprechend der freien Propagation eines Teilchens — bereits weggelassen worden sind.

$$= \sum_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\xi} W_{\alpha\beta\gamma}^1 W_{\delta\epsilon\xi}^2 \langle 0 | a_1 a_2 a_\alpha^\dagger a_\beta a_\gamma \frac{1}{Z - H_0} a_\delta^\dagger a_\epsilon b_\xi^\dagger a_3^\dagger a_4^\dagger | 0 \rangle$$

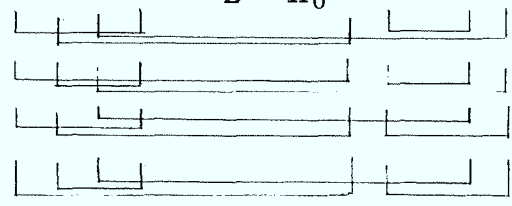


$$+ W_{\alpha\beta\gamma}^1 W_{\delta\epsilon\xi}^4 \langle 0 | a_1 a_2 a_\alpha^\dagger a_\beta a_\gamma \frac{1}{Z - H_0} a_\delta a_\epsilon^\dagger b_\xi^\dagger a_3^\dagger a_4^\dagger | 0 \rangle$$

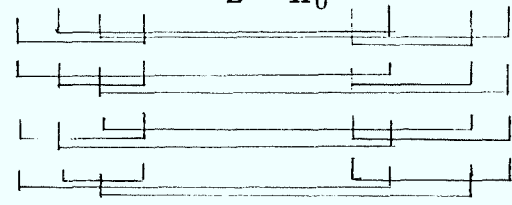


(B.1)

$$+ W_{\alpha\beta\gamma}^3 W_{\delta\epsilon\xi}^2 \langle 0 | a_1 a_2 a_\alpha a_\beta^\dagger a_\gamma \frac{1}{Z - H_0} a_\delta^\dagger a_\epsilon b_\xi^\dagger a_3^\dagger a_4^\dagger | 0 \rangle$$



$$+ W_{\alpha\beta\gamma}^3 W_{\delta\epsilon\xi}^4 \langle 0 | a_1 a_2 a_\alpha a_\beta^\dagger a_\gamma \frac{1}{Z - H_0} a_\delta a_\epsilon^\dagger b_\xi^\dagger a_3^\dagger a_4^\dagger | 0 \rangle$$



$$= \sum_{\xi} \frac{W_{14\xi}^1 W_{23\xi}^2}{Z - E_2 - E_{\xi} - E_4}$$

$$+ \sum_{\xi} \frac{W_{24\xi}^1 W_{13\xi}^2}{Z - E_1 - E_{\xi} - E_4}$$

$$+ \sum_{\xi} \frac{W_{13\xi}^1 W_{24\xi}^2}{Z - E_2 - E_{\xi} - E_3}$$

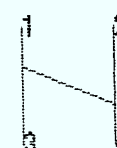
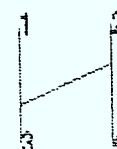
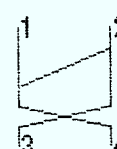
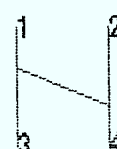
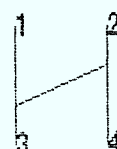
$$+ \sum_{\xi} \frac{W_{23\xi}^1 W_{14\xi}^2}{Z - E_1 - E_{\xi} - E_3}$$

$$+ \sum_{\xi} \frac{W_{14\xi}^1 W_{32\xi}^4}{Z - E_2 - E_{\xi} - E_4}$$

$$+ \sum_{\xi} \frac{W_{24\xi}^1 W_{31\xi}^4}{Z - E_1 - E_{\xi} - E_4}$$

$$+ \sum_{\xi} \frac{W_{13\xi}^1 W_{42\xi}^4}{Z - E_2 - E_{\xi} - E_3}$$

$$+ \sum_{\xi} \frac{W_{23\xi}^1 W_{41\xi}^4}{Z - E_1 - E_{\xi} - E_3}$$

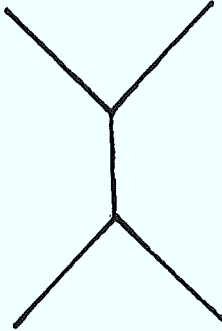


$$\begin{aligned}
& + \sum_{\xi} \frac{W_{41\xi}^3 W_{23\xi}^2}{Z - E_2 - E_{\xi} - E_4} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \text{---} & \text{---} \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \\
& + \sum_{\xi} \frac{W_{42\xi}^3 W_{13\xi}^2}{Z - E_1 - E_{\xi} - E_4} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \text{---} & \text{---} \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \\
& + \sum_{\xi} \frac{W_{31\xi}^3 W_{24\xi}^2}{Z - E_2 - E_{\xi} - E_3} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \text{---} & \text{---} \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \\
& + \sum_{\xi} \frac{W_{32\xi}^3 W_{14\xi}^2}{Z - E_1 - E_{\xi} - E_3} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \text{---} & \text{---} \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \\
& + \sum_{\xi} \frac{W_{41\xi}^3 W_{32\xi}^4}{Z - E_2 - E_{\xi} - E_4} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \text{---} & \text{---} \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \\
& + \sum_{\xi} \frac{W_{42\xi}^3 W_{31\xi}^4}{Z - E_1 - E_{\xi} - E_4} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \text{---} & \text{---} \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \\
& + \sum_{\xi} \frac{W_{31\xi}^3 W_{42\xi}^4}{Z - E_2 - E_{\xi} - E_3} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \text{---} & \text{---} \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \\
& + \sum_{\xi} \frac{W_{32\xi}^3 W_{41\xi}^4}{Z - E_1 - E_{\xi} - E_3} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \text{---} & \text{---} \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Rechts vom jeweiligen Summanden haben wir eine graphische Darstellung gegeben. Dies sind die Graphen der zeitgeordneten Störungstheorie für OBE-Prozesse. Der in Tab. 3.1. angegebene Isospinfaktor bezieht sich auf die zweite Kontraktion, also auf den ersten direkten Graphen.

Zu b) (TOPT-Polgraphen)

Wir verfahren mit dem Ausdruck Gl. (2.22) genauso und bekommen schließlich:

$$\begin{aligned}
 \langle 12|V_b^{(2)}|34\rangle := & \\
 & + \sum_{\xi} \frac{W_{12\xi}^6 W_{34\xi}^5}{Z - E_{\xi}} \\
 & + \sum_{\xi} \frac{W_{12\xi}^6 W_{43\xi}^5}{Z - E_{\xi}} \\
 & + \sum_{\xi} \frac{W_{21\xi}^6 W_{34\xi}^5}{Z - E_{\xi}} \\
 & + \sum_{\xi} \frac{W_{21\xi}^6 W_{43\xi}^5}{Z - E_{\xi}}
 \end{aligned}
 \tag{B.3}$$


Rechts die graphische Repräsentation für die *Summe* der vier Kontraktionsmöglichkeiten, Fig. 2.3.a. Der Isospinfaktor aus Tab. 3.1. bezieht sich auf die erste Kontraktion.

Zu c) Graphen der Fig. 2.3.b

$$\begin{aligned}
 \langle 12|V_c^{(2)}|34\rangle := & \\
 & \sum_{\xi} \frac{W_{12\xi}^8 W_{34\xi}^7}{Z - E_{\xi} - E_1 - E_2 - E_3 - E_4} + \sum_{\xi} \frac{W_{12\xi}^8 W_{43\xi}^7}{Z - E_{\xi} - E_1 - E_2 - E_3 - E_4} \\
 & + \sum_{\xi} \frac{W_{21\xi}^8 W_{34\xi}^7}{Z - E_{\xi} - E_1 - E_2 - E_3 - E_4} + \sum_{\xi} \frac{W_{21\xi}^8 W_{43\xi}^7}{Z - E_{\xi} - E_1 - E_2 - E_3 - E_4}
 \end{aligned}
 \tag{B.4}$$

Anhang C. Herleitung der nichtkovarianten Vertexfunktionen

Wir führen die Rechnung für Vektormesonen durch, bei denen sich wegen $b^\dagger(\lambda) \neq (b(\lambda))^\dagger$ eine gewisse Komplikation ergibt (vergl. Anhang A.2.). Für skalare und Tensormesonen geben wir nur das Ergebnis an.

$$\begin{aligned}
 W_{PPV} &= - \int d^3x \mathcal{L}_{PPV}(x) \Big|_{t=0} \\
 &= - \int d^3x \phi_P \partial_\mu \phi_P \phi_V^\mu \Big|_{t=0} \\
 &= - \int d^3x \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{p}_\alpha \frac{1}{\sqrt{2E_\alpha}} \{ a(\vec{p}_\alpha) e^{-ip_\alpha x} + a^\dagger(\vec{p}_\alpha) e^{ip_\alpha x} \} \right. \\
 &\quad \left. \partial_\mu \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{p}_\beta \frac{1}{\sqrt{2E_\beta}} \{ a(\vec{p}_\beta) e^{-ip_\beta x} + a^\dagger(\vec{p}_\beta) e^{ip_\beta x} \} \right] \right. \\
 &\quad \left. \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{p}_\gamma \sum_{\lambda=-1}^1 \frac{\epsilon^\mu(\vec{p}_\gamma, \lambda_\gamma)}{\sqrt{2E_\gamma}} \{ b(\vec{p}_\gamma) e^{-ip_\gamma x} + b^\dagger(\vec{p}_\gamma) e^{ip_\gamma x} \} \right] \right] \Big|_{t=0} \\
 &= - \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \int d^3x \int d^3\vec{p}_\alpha d^3\vec{p}_\beta d^3\vec{p}_\gamma \sum_{\lambda=-1}^1 \frac{\epsilon^\mu(\vec{p}_\gamma, \lambda_\gamma)}{\sqrt{8E_\alpha E_\beta E_\gamma}} \\
 &\quad \left\{ a(\vec{p}_\alpha) e^{-ip_\alpha x} + a^\dagger(\vec{p}_\alpha) e^{ip_\alpha x} \right\} \\
 &\quad \left\{ -ip_{\beta\mu} a(\vec{p}_\beta) e^{-ip_\beta x} + ip_{\beta\mu} a^\dagger(\vec{p}_\beta) e^{ip_\beta x} \right\} \\
 &\quad \left\{ b(\vec{p}_\gamma) e^{-ip_\gamma x} + b^\dagger(\vec{p}_\gamma) e^{ip_\gamma x} \right\} \Big|_{t=0} \\
 &= - \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{p}_\alpha d^3\vec{p}_\beta d^3\vec{p}_\gamma \sum_{\lambda=-1}^1 \frac{i\epsilon^\mu(\vec{p}_\gamma, \lambda_\gamma) p_{\beta\mu}}{\sqrt{8E_\alpha E_\beta E_\gamma}} \\
 &\quad \cdot \left\{ -a(\vec{p}_\alpha) a(\vec{p}_\beta) b(\vec{p}_\gamma) \delta(\vec{p}_\alpha + \vec{p}_\beta + \vec{p}_\gamma) \right. \\
 &\quad - a(\vec{p}_\alpha) a(\vec{p}_\beta) b^\dagger(\vec{p}_\gamma) \delta(\vec{p}_\alpha + \vec{p}_\beta - \vec{p}_\gamma) \\
 &\quad + a(\vec{p}_\alpha) a^\dagger(\vec{p}_\beta) b(\vec{p}_\gamma) \delta(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_\beta + \vec{p}_\gamma) \\
 &\quad \left. + a(\vec{p}_\alpha) a^\dagger(\vec{p}_\beta) b^\dagger(\vec{p}_\gamma) \delta(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_\beta - \vec{p}_\gamma) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - a^\dagger(\vec{p}_\alpha) a(\vec{p}_\beta) b(\vec{p}_\gamma) \delta(-\vec{p}_\alpha + \vec{p}_\beta + \vec{p}_\gamma) \\
& - a^\dagger(\vec{p}_\alpha) a(\vec{p}_\beta) b^\dagger(\vec{p}_\gamma) \delta(-\vec{p}_\alpha + \vec{p}_\beta - \vec{p}_\gamma) \\
& + a^\dagger(\vec{p}_\alpha) a^\dagger(\vec{p}_\beta) b(\vec{p}_\gamma) \delta(-\vec{p}_\alpha - \vec{p}_\beta + \vec{p}_\gamma) \\
& + a^\dagger(\vec{p}_\alpha) a^\dagger(\vec{p}_\beta) b^\dagger(\vec{p}_\gamma) \delta(-\vec{p}_\alpha - \vec{p}_\beta - \vec{p}_\gamma) \} .
\end{aligned}$$

Mit Gl. (A.11) und Gl. (A.14) erhalt man:

$$\sum_{\lambda} \epsilon^\mu(\lambda) b^\dagger(\lambda) = \sum_{\lambda} (\epsilon^\mu(\lambda))^* (b(\lambda))^\dagger$$

Damit lassen sich in einem Koeffizientenvergleich mit dem allgemeinen Ansatz fur W in Abschnitt 2.1., Gl. (2.14), die nichtkovarianten Vertexfunktionen $W_{\alpha\beta\gamma}^1 - W_{\alpha\beta\gamma}^8$ einfach ablesen:

$$W_{\alpha\beta\gamma}^1 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{i\epsilon^\mu(\vec{p}_\gamma, \lambda_\gamma) p_{\beta\mu}}{\sqrt{8E_\alpha E_\beta E_\gamma}} \delta(-\vec{p}_\alpha + \vec{p}_\beta + \vec{p}_\gamma)$$

$$W_{\alpha\beta\gamma}^2 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{i\epsilon^\mu(\vec{p}_\gamma, \lambda_\gamma)^* p_{\beta\mu}}{\sqrt{8E_\alpha E_\beta E_\gamma}} \delta(-\vec{p}_\alpha + \vec{p}_\beta - \vec{p}_\gamma)$$

$$W_{\alpha\beta\gamma}^3 = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{i\epsilon^\mu(\vec{p}_\gamma, \lambda_\gamma) p_{\beta\mu}}{\sqrt{8E_\alpha E_\beta E_\gamma}} \delta(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_\beta + \vec{p}_\gamma)$$

$$W_{\alpha\beta\gamma}^4 = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{i\epsilon^\mu(\vec{p}_\gamma, \lambda_\gamma)^* p_{\beta\mu}}{\sqrt{8E_\alpha E_\beta E_\gamma}} \delta(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_\beta - \vec{p}_\gamma)$$

$$W_{\alpha\beta\gamma}^5 = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{i\epsilon^\mu(\vec{p}_\gamma, \lambda_\gamma) p_{\beta\mu}}{\sqrt{8E_\alpha E_\beta E_\gamma}} \delta(-\vec{p}_\alpha - \vec{p}_\beta + \vec{p}_\gamma)$$

$$W_{\alpha\beta\gamma}^6 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{i\epsilon^\mu(\vec{p}_\gamma, \lambda_\gamma)^* p_{\beta\mu}}{\sqrt{8E_\alpha E_\beta E_\gamma}} \delta(\vec{p}_\alpha + \vec{p}_\beta - \vec{p}_\gamma)$$

$$W_{\alpha\beta\gamma}^7 = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{i\epsilon^\mu(\vec{p}_\gamma, \lambda_\gamma)^* p_{\beta\mu}}{\sqrt{8E_\alpha E_\beta E_\gamma}} \delta(-\vec{p}_\alpha - \vec{p}_\beta - \vec{p}_\gamma)$$

$$W_{\alpha\beta\gamma}^8 = +\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{i\epsilon^\mu(\vec{p}_\gamma, \lambda_\gamma) p_{\beta\mu}}{\sqrt{8E_\alpha E_\beta E_\gamma}} \delta(\vec{p}_\alpha + \vec{p}_\beta + \vec{p}_\gamma)$$

Tatsächlich gilt $W_{\alpha\beta\gamma}^5 = W_{\alpha\beta\gamma}^{6*}$, $W_{\alpha\beta\gamma}^7 = W_{\alpha\beta\gamma}^{8*}$, ..., Gl. (2.17), was — wie in Abschnitt 2.1. gezeigt — aus der Hermitizität von \mathcal{L} folgt.

Für die skalaren Mesonen lautet der Faktor vor der jeweiligen δ -Funktion

$$-\frac{m_\pi}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{8E_\alpha E_\beta E_\gamma}} \quad (\text{skalare Kopplung})$$

bzw.

$$\pm \frac{p_{\alpha\mu} p_\beta^\mu}{(2\pi)^{3/2} m_\pi} \frac{1}{\sqrt{8E_\alpha E_\beta E_\gamma}} \quad (\text{Gradientenkopplung})$$

Und für die Tensormesonen:

$$\pm \frac{2}{(2\pi)^{3/2} m_\pi} \frac{\epsilon^{\mu\nu}(\vec{p}_\gamma, \lambda_\gamma)^{(*)} p_{\alpha\mu} p_{\beta\nu}}{\sqrt{8E_\alpha E_\beta E_\gamma}}$$

Anhang D. Berechnung der Pseudopotentiale im CM-System

In diesem Anhang werden die Pseudopotentiale Gl. (3.29) – Gl. (3.36) ausgewertet. Bei skalaren Mesonen mit skalarer Kopplung ist ω_ξ lediglich durch m_ξ zu ersetzen. Für die anderen Potentiale führen wir die Rechnungen im CM-System durch und legen dabei das Koordinatensystem wie in Fig. A.1.. Die Viererimpulse sehen dann wie folgt aus:

$$\vec{p}_1 = p' \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad E_1 = \sqrt{m_1^2 + p'^2}$$

$$\vec{p}_2 = -p' \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad E_2 = \sqrt{m_2^2 + p'^2}$$

$$\vec{p}_3 = p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \sqrt{m_3^2 + p^2}$$

$$\vec{p}_4 = -p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \sqrt{m_4^2 + p^2}$$

Die Energie des Austauschteilchens ω_ξ beträgt bei direkten OBE-Graphen:

$$\omega_\xi = \sqrt{m_\xi^2 + \vec{p}_\xi^2} = \sqrt{m_\xi^2 + (\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2} = \sqrt{m_\xi^2 + p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta},$$

und bei Polgraphen einfach $\omega_\xi = m_\xi$ bzw. $\omega_\xi = m_\xi^0$. Dies gilt für beide zeitgeordneten Anteile des kovarianten Polgraphen, also auch für den Graphen der Fig. 2.3.b, denn die Summe der einlaufenden Impulse muß im CM-System 0 sein.

Im Einzelnen ergibt sich:

Vektormeson, direkter OBE-Graph, Gl. (3.31)

Auszuwerten ist:

$$\sum_{\lambda_{\xi}} \epsilon^{\mu}(p_{\xi}, \lambda_{\xi}) \epsilon^{\nu}(p_{\xi}, \lambda_{\xi})^{*} (p_1 + p_3)_{\mu} (p_2 + p_4)_{\nu} \quad (D.1)$$

Für den Dreierimpuls gilt:

$$\pm \vec{p}_{\xi} = \vec{p}_1 - \vec{p}_3 = \vec{p}_4 - \vec{p}_2 \quad \text{je nach Zeitordnung}$$

Die 0-te Komponente wird so behandelt, als ob die Viererimpulserhaltung auch in der TOPT gälte:

$$\pm p_{\xi}^0 = E_1 - E_3 = E_4 - E_2$$

Dann ergibt sich mit der Vollständigkeitsrelation Gl. (A.9) für den Ausdruck Gl. (1) :

$$\begin{aligned} &= -(E_1 + E_3)(E_2 + E_4) - p^2 - p'^2 - 2pp' \cos \theta \\ &\quad - \frac{1}{m_{\xi}^2} \left\{ (E_1^2 - E_3^2) \cdot (E_2^2 - E_4^2) + (p'^2 - p^2)^2 \right\} \end{aligned}$$

Es zeigt sich numerisch, daß der Summand in den geschweiften Klammern praktisch vernachlässigt werden kann.

Damit:

$$\begin{aligned} \langle 12|V|34 \rangle &\approx \frac{g_1 g_2}{(2\pi)^3} \cdot n_f \cdot \frac{-(E_1 + E_3)(E_2 + E_4) - p^2 - p'^2 - 2pp' \cos \theta}{8\omega_{\xi} \sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{1}{Z - E_1 - E_4 - \omega_{\xi}} + \frac{1}{Z - E_2 - E_3 - \omega_{\xi}} \right\} \end{aligned} \quad (D.2)$$

Vektormeson, Polgraph, Gl. (3.35)

$$\sum_{\lambda_{\xi}} \epsilon^{\mu}(p_{\xi}, \lambda_{\xi}) \epsilon^{\nu}(p_{\xi}, \lambda_{\xi})^{*} (p_1 - p_2)_{\mu} (p_3 - p_4)_{\nu} \quad (D.3)$$

Für die ρ -Resonanz verschwindet einerseits die 0-te Komponente von $(p_1 - p_2)_\mu$ wegen der Massengleichheit der einlaufenden Pionen, andererseits ist der Dreierimpuls der Resonanz 0, deswegen erhält man einfach:

$$= 2\vec{p} \cdot 2\vec{p}' = 4pp' \cos\theta$$

Für die K^* -Resonanz ergibt sich etwas weniger direkt das gleiche Ergebnis.

Damit:

$$\begin{aligned} \langle 12|V|34 \rangle &= \sum_{\lambda_\xi} \frac{g_1 g_2}{(2\pi)^3} \cdot n f \cdot \frac{-4pp' \cos\theta}{8m_\xi \sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{Z - \omega_\xi^0} + \frac{1}{Z - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - \omega_\xi} \right\} \end{aligned} \quad (D.4)$$

Tensormeson, direkter OBE-Graph, Gl. (3.32)

$$\sum_{\lambda_\xi} \epsilon^{\mu\nu}(p_\xi, \lambda_\xi) \epsilon^{\rho\sigma}(p_\xi, \lambda_\xi)^* (p_1 + p_3)_\mu (p_1 + p_3)_\nu (p_2 + p_4)_\rho (p_2 + p_4)_\sigma \quad (D.5)$$

Unter Vernachlässigung von Gliedern $\frac{1}{m_R^4}$ ergibt sich für den $\pi\pi$ -Fall ($x = \cos\theta$):

$$\begin{aligned} &[(E_1 + E_3)^2 + p^2 + p'^2 + 2pp'x]^2 - \frac{1}{3} [(E_1 + E_3)^2 - p^2 - p'^2 - 2pp'x]^2 \\ &- \frac{2}{m_R^2} [(E_1 + E_3)^2 + p^2 + p'^2 + 2pp'x]^2 \cdot [(E_1^2 - E_3^2)^2 - (p^2 - p'^2)^2] \\ &+ \frac{2}{3m_R^2} [(E_1 + E_3)^2 - p^2 - p'^2 - 2pp'x]^2 \cdot [(E_1^2 - E_3^2)^2 + (p^2 - p'^2)^2] \end{aligned}$$

Auch die Glieder $\frac{1}{m_R^2}$ können numerisch vernachlässigt werden.

Damit:

$$\begin{aligned}
\langle 12|V|34 \rangle &\approx \frac{g_1 g_2}{(2\pi)^3} \cdot n f \cdot \frac{1}{8m_\pi^2 \omega_\xi \sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \\
&\cdot \left\{ \frac{1}{Z - E_1 - E_4 - \omega_\xi} + \frac{1}{Z - E_2 - E_3 - \omega_\xi} \right\} \\
&\cdot \left\{ [(E_1 + E_3)(E_2 + E_4) + p^2 + p'^2 + 2pp' \cos\theta]^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3} [(E_1 + E_3)(E_2 + E_4) - p^2 - p'^2 - 2pp' \cos\theta]^2 \right\}
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Tensormeson, Polgraph (f₂), Gl. (3.36)

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda_\xi} \epsilon^{\mu\nu}(p_\xi, \lambda_\xi) \epsilon^{\rho\sigma}(p_\xi, \lambda_\xi)^* (p_4 - p_3)_\mu (p_4 - p_3)_\nu (p_2 - p_1)_\rho (p_2 - p_1)_\sigma \\
= \frac{16}{3} p^2 p'^2 \cdot \{3\cos^2\theta - 1\}
\end{aligned} \tag{D.7}$$

unter Ausnutzung der Vollständigkeitsrelation Gl. (A.10) .

Damit:

$$\begin{aligned}
\langle 12|V|34 \rangle &= \sum_{\lambda_\xi} \frac{g_1 g_2}{(2\pi)^3} \cdot n f \cdot \frac{2p^2 p'^2 \cdot [3\cos^2\theta - 1]}{3m_\xi m_\pi^2 \sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \\
&\cdot \left\{ \frac{1}{Z - \omega_\xi^0} + \frac{1}{Z - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - \omega_\xi} \right\}
\end{aligned} \tag{D.8}$$

Und schließlich:

skalares Meson, Polgraph, Gradientenkopplung Gl. (3.34)

$$\begin{aligned}
\langle 12|V|34 \rangle &= \frac{g_1 g_2}{(2\pi)^3} \cdot n f \cdot \frac{2p^2 p'^2}{m_\pi^2 m_\xi \sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \\
&\cdot \left\{ \frac{1}{Z - \omega_\xi^0} + \frac{1}{Z - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - \omega_\xi} \right\}
\end{aligned} \tag{D.9}$$

Anhang E. Regularisierung des ρ -OBE-Potentials der $\pi\pi$ -Streuung

Das partialwellenzerlegte Vektormeson-OBE-Potential (nur direkter Graph) hat folgende Struktur (vergl. Gl. (D.2) und Gl. (3.46)):

$$V^J(p', p, Z) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)dx}{\omega(x)[Z - E - E' - \omega(x)]} \quad (E.1)$$

mit $x = \cos\theta$. Die genaue Gestalt der Funktion $f(x)$ spielt für unsere Betrachtungen hier keine Rolle. Sie kann Gl. (D.2) entnommen werden.

Für große Energien Z können im Propagator nun Singularitäten auftreten, über die integriert werden muß: Das numerische Ergebnis wird instabil. Für den ρ -Austausch im $\pi\pi$ -Fall ist dies ab $Z \geq 2m_\pi + m_\rho \approx 1045$ MeV möglich, bei den anderen Potentialen tritt der Fall erst bei Energien auf, die wir ohnehin nicht mehr betrachten.

Physikalisch entspricht diese Singularität der Möglichkeit der Teilchenerzeugung, also beispielsweise dem Prozeß

$$\pi\pi \rightarrow \pi\pi\rho, \quad (E.2)$$

der ab 1045 MeV Startenergie möglich ist.

Dem Problem kann durch Regularisierung des Potentials beigegeben werden: Zunächst transformieren wir vom Winkelcosinus x auf die Energie des Austauschteilchens

$$\omega(x) = \sqrt{m_\rho^2 + p^2 + p'^2 - 2pp'x} \quad (E.3)$$

und definieren zur Abkürzung

$$R := Z - E - E'$$

$$o := \sqrt{m_\rho^2 + p^2 + p'^2 - 2pp'}$$

$$u := \sqrt{m_\rho^2 + p^2 + p'^2 + 2pp'}$$

Dann:

$$\begin{aligned}
 V^J(p', p, Z) &= \int_u^o \frac{f(\omega) d\omega}{-pp'(R - \omega + i\epsilon)} \\
 &= -\frac{1}{pp'} \cdot \left\{ P \int_u^o \frac{f(\omega)}{R - \omega} d\omega + i\pi f(R) \right\},
 \end{aligned}$$

wobei mit P der Hauptwert des Integrals gemeint ist.

$$\Rightarrow V^J(p', p, Z) = -\frac{1}{pp'} \cdot \left\{ i\pi f(R) + \int_u^o \frac{f(\omega) - f(R)}{R - \omega} d\omega + \int_u^o \frac{f(R)}{R - \omega} d\omega \right\} \quad (E.4)$$

Der der Singularitätsstelle $\omega = R$ entsprechende Winkelcosinus sei mit

$$x_0 = \frac{1}{2pp'} \{ p^2 + p'^2 + m_\rho^2 - R^2 \} \quad (E.5)$$

bezeichnet. Bei Rücktransformation von Gl. (4) auf den Winkelcosinus als Integrationsvariable resultiert:

$$V^J(p', p, Z) = \int_u^o \frac{f(x) - f(x_0)}{(R - \omega(x)) \omega(x)} dx - \frac{1}{pp'} f(x_0) \left\{ i\pi + \ln \left| \frac{R - u}{R - o} \right| \right\} \quad (E.6)$$

Durch die Regularisierung wird das Potential komplex, welches physikalisch Teilchenzu- oder -abfluß bedeutet. Wir wollen jedoch Prozesse wie Gl. (2) nicht berücksichtigen und vernachlässigen deswegen den imaginären Teil des Potentials. Auf diese Weise ist auch die Unitarität der S-Matrix sichergestellt.

Anhang F. Numerische Lösung der Iterationsgleichung

Ziel dieses Anhangs ist es, ein numerisches Verfahren zur Lösung der in Partialwellen zerlegten Lippmann-Schwinger ähnlichen Integralgleichung für mehrere Kanäle Gl. (4.2) anzugeben. Wir beschränken uns auf den für uns relevanten Fall spinloser Teilchen im Eingangs- und Ausgangszustand. Wir gehen von zwei gekoppelten Kanälen $|\pi\pi\rangle$ und $|\bar{K}K\rangle$ aus; die Verallgemeinerung auf weitere Kanäle oder die Spezialisierung auf einen ($K\pi$ -Streuung) ist trivial.

Der Einfachheit halber führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned}
 V_{11}^{JT}(p', p, Z) &= \langle \pi\pi | V^{JT}(p', p, Z) | \pi\pi \rangle \\
 V_{12}^{JT}(p', p, Z) &= \langle \pi\pi | V^{JT}(p', p, Z) | \bar{K}K \rangle \\
 V_{21}^{JT}(p', p, Z) &= \langle \bar{K}K | V^{JT}(p', p, Z) | \pi\pi \rangle \\
 V_{22}^{JT}(p', p, Z) &= \langle \bar{K}K | V^{JT}(p', p, Z) | \bar{K}K \rangle
 \end{aligned}
 \tag{F.1}$$

Und:†

$$\begin{aligned}
 E_1(q) &= 2 \cdot \sqrt{m_\pi^2 + q^2} \\
 E_2(q) &= 2 \cdot \sqrt{m_K^2 + q^2}
 \end{aligned}
 \tag{F.2}$$

Mit der Definition der Matrizen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}^{JT}(p', p, Z) &:= \begin{pmatrix} V_{11}^{JT}(p', p, Z) & V_{12}^{JT}(p', p, Z) \\ V_{21}^{JT}(p', p, Z) & V_{22}^{JT}(p', p, Z) \end{pmatrix} \\
 \mathbf{T}^{JT}(p', p, Z) &:= \begin{pmatrix} T_{11}^{JT}(p', p, Z) & T_{12}^{JT}(p', p, Z) \\ T_{21}^{JT}(p', p, Z) & T_{22}^{JT}(p', p, Z) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

†Für den $K\pi$ -Fall gilt natürlich:

$$E(q) = E_\pi(q) + E_K(q) = \sqrt{m_\pi^2 + q^2} + \sqrt{m_K^2 + q^2}$$

$$\mathbf{G}_0(q, Z) := \begin{pmatrix} \frac{1}{Z-E_1(q)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z-E_2(q)} \end{pmatrix}$$

läßt sich die Gleichung Gl. (4.2) als Matrixgleichung schreiben:

$$\mathbf{T}^{JT}(p', p, Z) = \mathbf{V}^{JT}(p', p, Z) + \int q^2 dq \mathbf{V}^{JT}(p', q, Z) \mathbf{G}_0(q, Z) \mathbf{T}^{JT}(q, p, Z) \quad (F.3)$$

Diese Gleichung wird durch Matrixinversion gelöst.

F.1. REGULARISIERUNG DES ZWEIFELCHENPROPAGATORS

Bei der numerischen Lösung von Gl. (3) besteht nun die Schwierigkeit, daß in den Propagatoren $\frac{1}{Z-E_1(q)}$ und $\frac{1}{Z-E_2(q)}$ Singularitäten auftreten, über die numerisch integriert werden muß, wobei Instabilitäten entstehen können. Die erste Singularität tritt gerade für

$$q = q_{Start} = \sqrt{\left(\frac{Z}{2}\right)^2 - m_\pi^2} =: \tilde{q}_1$$

auf, die zweite für

$$q = \sqrt{\left(\frac{Z}{2}\right)^2 - m_K^2} =: \tilde{q}_2.$$

Zur numerischen Lösung des Integrals werden die Singularitäten folgendermaßen regularisiert:

$$T_{\mu\nu}^{JT}(p', p, Z) = V_{\mu\nu}^{JT}(p', p, Z) + \sum_{\kappa=1,2} \int_0^\infty q^2 dq V_{\mu\kappa}^{JT}(p', q, Z) \frac{1}{Z - E_\kappa(q)} T_{\kappa\nu}^{JT}(q, p, Z)$$

Variablentransformation auf die Energien nach Gl. (2) liefert:

$$T_{\mu\nu}^{JT}(p', p, Z) = V_{\mu\nu}^{JT}(p', p, Z) - \sum_{\kappa} \int_{2m_\kappa}^\infty \frac{dE_\kappa q E_\kappa^2(q)}{4E_\kappa(E_\kappa - Z)} V_{\mu\kappa}^{JT}(p', q, Z) T_{\kappa\nu}^{JT}(q, p, Z)$$

Nun spalten wir das Integral in zwei Summanden auf, so daß der erste einer numerischen, der zweite einer analytischen Integration zugänglich ist.

Sei

$$f_{\kappa}(q) := \frac{1}{4}qE_{\kappa}^2(q)V_{\mu\kappa}^{JT}(p', q, Z)T_{\kappa\nu}^{JT}(q, p, Z)$$

$$\Rightarrow T_{\mu\nu}^{JT}(p', p, Z) = V_{\mu\nu}^{JT}(p', p, Z)$$

$$- \sum_{\kappa} \left[\int_{2m_{\kappa}}^{\infty} \frac{(f_{\kappa}(q) - f_{\kappa}(\tilde{q}_{\kappa})) dE_{\kappa}}{E_{\kappa}(E_{\kappa} - Z)} - \int_{2m_{\kappa}}^{\infty} \frac{f_{\kappa}(\tilde{q}_{\kappa}) dE_{\kappa}}{E_{\kappa}(E_{\kappa} - Z)} \right]$$

$$\Rightarrow T_{\mu\nu}^{JT}(p', p, Z) = V_{\mu\nu}^{JT}(p', p, Z)$$

$$- \sum_{\kappa} \left[\int_{2m_{\kappa}}^{\infty} \frac{(f_{\kappa}(q) - f_{\kappa}(\tilde{q}_{\kappa})) dE_{\kappa}}{E_{\kappa}(E_{\kappa} - Z)} + \right.$$

$$\left. \frac{f_{\kappa}(\tilde{q}_{\kappa})}{Z} \cdot \left\{ \ln \left| \frac{Z}{2m_{\kappa}} - 1 \right| - i\pi \right\} \right]$$

Nach Resubstitution erhalten wir das gewünschte Resultat:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{JT}(p', p, Z) &= V_{\mu\nu}^{JT}(p', p, Z) - \sum_{\kappa} \left[\int_0^{\infty} \frac{dq}{E_{\kappa}(q) - Z} \left\{ q^2 V_{\mu\kappa}^{JT}(p', q, Z) T_{\kappa\nu}^{JT}(q, p, Z) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{q\tilde{q}_{\kappa} E_{\kappa}^2(\tilde{q}_{\kappa})}{E_{\kappa}^2(q)} V_{\mu\kappa}^{JT}(p', \tilde{q}_{\kappa}, Z) T_{\kappa\nu}^{JT}(\tilde{q}_{\kappa}, p, Z) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{q}_{\kappa} E_{\kappa}^2(\tilde{q}_{\kappa}) V_{\mu\kappa}^{JT}(p', \tilde{q}_{\kappa}, Z) T_{\kappa\nu}^{JT}(\tilde{q}_{\kappa}, p, Z)}{4Z} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\{ \ln \left| \frac{Z}{2m_{\kappa}} - 1 \right| - i\pi \right\} \right] \end{aligned}$$

(F.4)

F.2. DAS ERWEITERTE HAFTEL-TABAKIN-VERFAHREN

Zur numerischen Lösung dieser Integralgleichung benutzen wir ein Verfahren, das auf Tabakin und Haftel zurückgeht [45].

Es beruht auf einer Gaußintegration. Die Integralgleichung wird in eine Matrixgleichung überführt, die sich durch Matrixinversion lösen läßt. Seien für $\kappa = 1, 2, \dots, N$ $q_1^\kappa, \dots, q_N^\kappa$ N Gaußpunkte mit den Gewichten ω_j^κ ,

$$\begin{aligned} q_i^\kappa &\neq \tilde{q}_\kappa \quad \forall i = 1 \dots N \\ q_{N+1}^\kappa &:= \tilde{q}_\kappa \end{aligned}$$

Dann lautet die Matrixgleichung:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{JT}(q_i^\mu, q_k^\nu, Z) &= V_{\mu\nu}^{JT}(q_i^\mu, q_k^\nu, Z) \\ &- \sum_{\kappa} \left[\sum_{j=1}^N \frac{\omega_j^\kappa q_j^{\kappa 2}}{E_\kappa(q_j^\kappa) - Z} V_{\mu\kappa}^{JT}(q_i^\mu, q_j^\kappa, Z) T_{\kappa\nu}^{JT}(q_j^\kappa, q_k^\nu, Z) \right. \\ &+ \sum_{j=1}^N \frac{\omega_j^\kappa q_j^\kappa q_{N+1}^\kappa E_\kappa^2(q_{N+1}^\kappa)}{E_\kappa^2(q_j^\kappa) [E_\kappa(q_j^\kappa) - Z]} V_{\mu\kappa}^{JT}(q_i^\mu, q_{N+1}^\kappa, Z) T_{\kappa\nu}^{JT}(q_{N+1}^\kappa, q_k^\nu, Z) \\ &+ \frac{q_{N+1}^\kappa E_\kappa^2(q_{N+1}^\kappa)}{4Z} \cdot \left\{ \ln \left| \frac{Z}{2m_\kappa} - 1 \right| - i\pi \right\} \\ &\left. \cdot V_{\mu\kappa}^{JT}(q_i^\mu, q_{N+1}^\kappa, Z) T_{\kappa\nu}^{JT}(q_{N+1}^\kappa, q_k^\nu, Z) \right] \end{aligned} \tag{F.5}$$

Nun definiere:

$$\begin{aligned} g_\kappa(q_j^\kappa) &:= \frac{\omega_j^\kappa q_j^{\kappa 2}}{E_\kappa(q_j^\kappa) - Z} \quad \text{für } j \leq N \\ g_\kappa(q_{N+1}^\kappa) &:= - \sum_{j=1}^N \frac{\omega_j^\kappa q_j^\kappa q_{N+1}^\kappa E_\kappa^2(q_{N+1}^\kappa)}{E_\kappa^2(q_j^\kappa) [E_\kappa(q_j^\kappa) - Z]} - \frac{q_{N+1}^\kappa E_\kappa^2(q_{N+1}^\kappa)}{4Z} \cdot \left\{ \ln \left| \frac{Z}{2m_\kappa} - 1 \right| - i\pi \right\}. \end{aligned}$$

Diese geschickte Definition ist die wesentliche Idee des Tabakin-Haftel-Verfahrens:

Der on-shell Impuls \tilde{q}_κ , $\kappa = 1, 2$, wird als (N+1)-ter Gaußpunkt aufgefaßt.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N T_{\mu\nu}^{JT}(q_j^\mu, q_k^\nu, Z) \delta_{ij} &= V_{\mu\nu}^{JT}(q_i^\mu, q_k^\nu, Z) \\ &- \sum_{\kappa} \left[\sum_{j=1}^N V_{\mu\kappa}^{JT}(q_i^\mu, q_j^\kappa, Z) g_\kappa(q_j^\kappa) T_{\kappa\nu}^{JT}(q_j^\kappa, q_k^\nu, Z) \right. \\ &\left. - V_{\mu\kappa}^{JT}(q_i^\mu, q_{N+1}^\kappa, Z) g_\kappa(q_{N+1}^\kappa) T_{\kappa\nu}^{JT}(q_{N+1}^\kappa, q_k^\nu, Z) \right] \end{aligned} \quad (F.6)$$

Das (N+1)-te Glied läßt sich in die Summe einbeziehen, und man erhält:

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu}^{JT}(q_i^\mu, q_k^\nu, Z) &= \sum_{\kappa} \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ \delta_{ij} \delta_{\mu\kappa} \right. \\ &\left. + V_{\mu\kappa}^{JT}(q_i^\mu, q_j^\kappa, Z) g_\kappa(q_j^\kappa) \right\} T_{\kappa\nu}^{JT}(q_j^\kappa, q_k^\nu, Z) \end{aligned} \quad (F.7)$$

In Matrizen ausgeschrieben lautet die Gl. (3) dann in regularisierter und diskretisierter Form ($q_j^{\kappa=1} =: q_j$, $q_j^{\kappa=2} =: q'_j$):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_{11}^{JT}(q_i, q_k, Z) & V_{12}^{JT}(q_i, q'_k, Z) \\ V_{21}^{JT}(q'_i, q_k, Z) & V_{22}^{JT}(q'_i, q'_k, Z) \end{pmatrix} &= \sum_{j=1}^{N+1} \left[\begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix} \right. \\ &+ \begin{pmatrix} V_{11}^{JT}(q_i, q_j, Z) & V_{12}^{JT}(q_i, q'_j, Z) \\ V_{21}^{JT}(q'_i, q_j, Z) & V_{22}^{JT}(q'_i, q'_j, Z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(q_j) & 0 \\ 0 & g_2(q'_j) \end{pmatrix} \left. \right]. \quad (F.8) \\ &\begin{pmatrix} T_{11}^{JT}(q_j, q_k, Z) & T_{12}^{JT}(q_j, q'_k, Z) \\ T_{21}^{JT}(q'_j, q_k, Z) & T_{22}^{JT}(q'_j, q'_k, Z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Durch Multiplikation des Inversen der Matrix in den eckigen Klammern mit der Potentialmatrix erhält man direkt die T-Matrix. Die Observablen werden mit den on-shell Werten $T_{\mu\nu}^{JT}(q_{N+1}, q_{N+1})$ der T-Matrix berechnet.

Anhang G. Berechnung der $\rho\rho$ -Box

Zunächst wird skizziert, auf welche Weise der $\rho\rho$ -Kanal vollständig angekop-
pelt werden müßte.

Bisher haben wir nur die Kanäle $|\pi\pi\rangle$ und $|\bar{K}K\rangle$ betrachtet. π und K sind
beides Spin-0-Teilchen, und damit $S=0$ für den Gesamtspin und $L=J$ für den
Bahndrehimpuls. Wenn μ und ν die Kanalindices sind, ergibt sich für festen
Isospin T und für festes J eine Struktur der Potential- bzw. T -Matrix wie in Tab.
F.1..

	ν	$\pi\pi$	$\bar{K}K$
μ		$ J0\rangle$	$ J0\rangle$
$\pi\pi$	$ J0\rangle$		
$\bar{K}K$	$ J0\rangle$		

Tab. F.1.:

*Potentialmatrix für die $\pi\pi$ -Streuung bei Berücksichtigung nur des $\bar{K}K$ -Kanals
für festen Isospin T und für festes J . In der ersten Zeile ist der Teilchenkanal des
Eingangszustandes angegeben, in der zweiten der $|LS\rangle$ -Zustand. Erste und zweite
Spalte geben die analogen Werte für den Endzustand.*

Jedes Matricelement ist eine (kontinuierliche) Matrix in p und p' , da das full
off-shell Verhalten berücksichtigt wird (Die Diskretisierung nach Tabakin-Haftel
führt bei N Gaußpunkten zu $(N+1)\times(N+1)$ Matrizen, Anhang F). Das ρ -Meson
ist ein Spin-1-Teilchen. Zwei ρ -Mesonen können zu $S=0,1,2$ koppeln. Bei festem
 J kann L deswegen i.a. einen, drei oder fünf Werte annehmen, so daß es für
den Zustand $|LS\rangle$ insgesamt neun Möglichkeiten gibt. Die Potentialmatrix ist für
festen Isospin T und festes J in Tab. F.2. dargestellt.

	ν	$\pi\pi$	$\bar{K}K$	$\rho\rho$								
μ		$ J0\rangle$	$ J0\rangle$	$ J-22\rangle$	$ J-11\rangle$	$ J-12\rangle$	$ J 0\rangle$	$ J 1\rangle$	$ J 2\rangle$	$ J+11\rangle$	$ J+12\rangle$	$ J+22\rangle$
$\pi\pi$	$ J0\rangle$			0	0		0	0	0	0	0	
$\bar{K}K$	$ J0\rangle$			0	0				0	0		
$\rho\rho$	$ J-22\rangle$			0	0		0	0	0	0	0	
	$ J-11\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$ J-12\rangle$	0	0	0	0		0	0	0	0		0
	$ J 0\rangle$				0	0		0		0	0	
	$ J 1\rangle$	0		0	0	0	0		0	0	0	0
	$ J 2\rangle$				0	0		0		0	0	
	$ J+11\rangle$	0	0	0		0	0	0	0		0	0
	$ J+12\rangle$	0	0	0	0		0	0	0	0		0
	$ J+22\rangle$			0	0		0	0	0	0		

Tab. F.2.:

Potentialmatrix für die $\pi\pi$ -Streuung bei Berücksichtigung auch des $\rho\rho$ -Kanals für festen Isospin T und für festes J . Bezeichnungen wie in Tab. F.1.

Sehr viele Matrixelemente verschwinden wegen der Paritätserhaltung der starken Wechselwirkung von vornherein, denn Anfangs- und Endzustand müssen dieselbe Parität $(-1)^L$ haben.

Weitere Matrixelemente verschwinden, weil für identische Bosonen im Eingangswie Ausgangszustand gelten muß:

$$L + S + T = \text{gerade}$$

Da wir die Matrix oben für allgemeines J und T geschrieben haben, haben wir nur die Matrixelemente 0 gesetzt, bei denen diese Forderung im Anfangs- und Endzustand nicht simultan zu erfüllen ist. Zu beachten ist, daß K und \bar{K} keine identischen Teilchen sind. Waren vorher unter Ausnutzung der T -Invarianz (Symmetrie der Matrix) drei Matrixelemente zu berechnen, so sind es jetzt 29. Das führt zu einer erheblichen Verlängerung der Rechenzeiten.

Deswegen berücksichtigen wir lediglich die erste Zeile und die erste Spalte

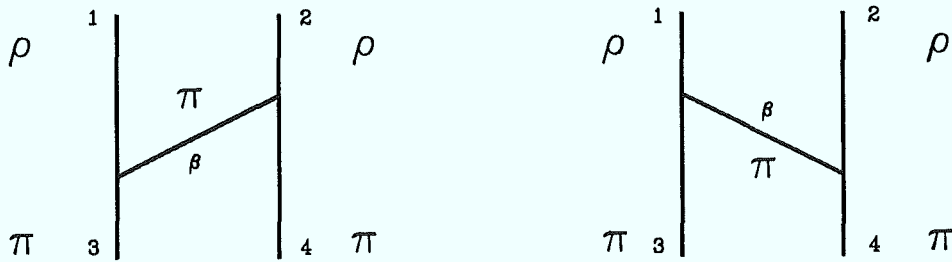


Fig. G.1.: Zeitgeordnete Beiträge 2. Ordnung zum Boxpotential

der Matrix und nehmen für den Übergang $\rho\rho \rightarrow \pi\pi$ bzw. $\pi\pi \rightarrow \rho\rho$ nur π -Austausch an. Dies ist gleichbedeutend mit der Addition der Box Fig. 3.6. zum Pseudopotential 2. Ordnung in g . Diese Box wird im folgenden berechnet:

Der Rechenweg läßt sich in vier Schritte einteilen:

- Berechnung des Pseudopotentials für $\pi\pi \rightarrow \rho\rho$ in Helizitätsdarstellung
- seine Partialwellenzerlegung
- Transformation in die $|JLS\rangle$ -Basis
- Aufsummation zum Boxpotential

a) Berechnung des Pseudopotentials für $\pi\pi \rightarrow \rho\rho$ in Helizitätsdarstellung

Mit den Vertexpfunktions $\tilde{W}_{\alpha\beta\gamma}$ Gl. (3.38) – Gl. (3.41) ,

$$\tilde{W}_{\beta 3 1} = \frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{-i\epsilon^\mu(p_1, \lambda_1)^*}{\sqrt{8E_1 E_3 E_\beta}} \cdot (p_3 + p_\beta)_\mu,$$

$$\tilde{W}'_{\beta 4 2} = \frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{-i\epsilon^\nu(p_2, \lambda_2)^*}{\sqrt{8E_2 E_4 E_\beta}} \cdot (p_4 - p_\beta)_\nu,$$

$$p_{\beta\mu} = (p_3 - p_1)_\mu = (p_2 - p_4)_\mu,$$

erhalten wir für die beiden zeitgeordneten Graphen der Fig. G.1.:

$$\langle 12|V|34 \rangle = \sum_{\beta} \frac{\tilde{W}_{\beta 31} \tilde{W}'_{\beta 42}}{Z - E_1 - E_{\beta} - E_4} \cdot 2 \quad (G.1)$$

Der Faktor 2 berücksichtigt die zweite Zeitordnung.

Wir berechnen die Potentiale im CM-System, siehe Anhang D.

Definiere $E := E_3 = E_4$, $E' := E_1 = E_2$. Die ϵ -Tensoren entnehmen wir Anhang A. Mit

$$\epsilon^{\mu}(p, \lambda) p_{\mu} = 0$$

und

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu}(p_1, \lambda_1)^* p_{3\mu} &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} p \sin\theta \text{ für } \lambda_1 = \pm 1 \\ &= \frac{1}{m_{\rho}} (p' E - p E' \cos\theta) \text{ für } \lambda_1 = 0 \end{aligned} \quad (G.2)$$

$$\text{(dito für } \epsilon^{\mu}(p_2, \lambda_2)^* p_{4\mu}\text{)}$$

erhält man die neun Helizitätsamplituden $\langle \lambda_1 \lambda_2 | V(\vec{p}', \vec{p}, Z) | 00 \rangle$ im CM-System.

b) Partialwellenzerlegung

Mit der Partialwellenzerlegung Gl. (4.3), den Beziehungen für die d-Matrizen [4]

$$\begin{aligned} d_{00}^J(\theta) &= P_J(\cos\theta) \\ \sin\theta d_{10}^J(\theta) &= \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1}(\cos\theta) - (P_{J-1}(\cos\theta))) \\ \sin^2\theta d_{20}^J(\theta) &= \frac{J}{\sqrt{(J+2)(J+1)J(J-1)}} [(J-1)\cos^2\theta P_J(\cos\theta) - \\ &\quad (J+1)P_J(\cos\theta) + 2\cos\theta P_{J-1}(\cos\theta)] \end{aligned} \quad (G.3)$$

und ihren Symmetrieeigenschaften Gl. (4.4) ergibt sich mit den Definitionen

$x := \cos\theta$ und $Prop(x) := \frac{1}{(Z-E-E'-E_\beta(x))E_\beta(x)}$ für die Potentiale in Helizitätsdarstellung:

$$\begin{aligned}
\langle 11|V^J(p', p)|00\rangle &= \frac{g^2}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 dx \frac{Prop(x)}{EE'} \frac{1}{2} p^2 (1-x^2) P_J(x) \\
\langle 10|V^J(p', p)|00\rangle &= \frac{g^2}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 dx \frac{Prop(x)}{EE'} \frac{p}{\sqrt{2}m_\rho} (p'E - pE'x) \\
&\quad \cdot \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} [P_{J+1}(x) - P_{J-1}(x)] \\
\langle 1-1|V^J(p', p)|00\rangle &= \frac{g^2}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 dx \frac{Prop(x)}{EE'} \left(-\frac{p^2}{2}\right) \frac{J}{\sqrt{(J+2)(J+1)J(J-1)}} \\
&\quad \cdot [(J-1)x^2 P_J(x) - (J+1)P_J(x) + 2x P_{J-1}(x)] \\
\langle 00|V^J(p', p)|00\rangle &= \frac{g^2}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 dx \frac{Prop(x)}{EE'} \frac{1}{m_\rho^2} (p'E - pE'x)^2 P_J(x)
\end{aligned} \tag{G.4}$$

Die anderen fünf Helizitätsamplituden unterscheiden sich nur durch Vorzeichen. Wir führen Abkürzungen ein und erhalten insgesamt:

$$\begin{aligned}
V_{11}^J &:= \langle 11|V^J(p', p)|00\rangle = \langle -1-1|V^J(p', p)|00\rangle \\
V_{10}^J &:= \langle 10|V^J(p', p)|00\rangle = \langle -10|V^J(p', p)|00\rangle \\
&= -\langle 01|V^J(p', p)|00\rangle = -\langle 0-1|V^J(p', p)|00\rangle \\
V_{1-1}^J &:= \langle 1-1|V^J(p', p)|00\rangle = \langle -11|V^J(p', p)|00\rangle \\
V_{00}^J &:= \langle 00|V^J(p', p)|00\rangle
\end{aligned} \tag{G.5}$$

Zur Berücksichtigung des Austauschgraphen und der Normierung eines Zustandes zweier identischer Teilchen ist ein Faktor $2 \cdot \frac{1}{2}$ einzufügen. Die Isospinfaktoren sind identisch mit denen für den Prozeß $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ mit ρ -Austausch (selbe Isospinstruktur).

c) Transformation in die $|JLS\rangle$ -Basis

Die Transformationsmatrix zwischen Helizitätsbasis und $|JLS\rangle$ -Basis ist in Abschnitt 4.2., Gl. (4.12), angegeben. Seien die beiden einlaufenden Pionen im Zustand $|LS\rangle = |J0\rangle$. Dann sind vier $\rho\rho$ -Ausgangszustände möglich:

$$|L'S'\rangle = |J-2, 2\rangle, |J, 0\rangle, |J, 2\rangle, |J+2, 2\rangle \quad (G.6)$$

Die Zustände $|J \pm 1, 1\rangle, |J \pm 1, 2\rangle$ sind aus Paritätsgründen nicht erlaubt, der Zustand $|J, 1\rangle$ nicht wegen der Symmetriebeziehung identischer Bosonen. Rechnet man die entsprechenden Übergangsmatrixelemente aus, erhalte man natürlich 0.

Es ergibt sich für das Potential in $|JLS\rangle$ -Darstellung:

$$\begin{aligned} \langle J0|V^J(p', p)|J0\rangle &= \frac{2}{\sqrt{3}}V_{11}^J - \frac{1}{\sqrt{3}}V_{00}^J \\ \langle J2|V^J(p', p)|J0\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}\langle J020|J0\rangle \{V_{11}^J + V_{00}^J\} \\ &\quad + 2 \cdot \langle J022|J2\rangle V_{1-1}^J \\ \langle J \pm 22|V^J(p', p)|J0\rangle &= \sqrt{\frac{2(J \pm 2) + 1}{2J + 1}} \cdot \left[\sqrt{\frac{2}{3}}\langle J \pm 2020|J0\rangle \{V_{11}^J + V_{00}^J\} \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot \langle J \pm 2020|J0\rangle V_{1-1}^J \right] \end{aligned} \quad (G.7)$$

Für den Prozeß $\rho\rho \rightarrow \pi\pi$ erhält man das partialwellenzerlegte Potential in $|JLS\rangle$ -Darstellung aus der Zeitumkehrinvarianz:

$$\langle \pi\pi L'S'|V^J(p', p, Z)|\rho\rho LS\rangle = \langle \rho\rho LS|V^J(p, p', Z)|\pi\pi L'S'\rangle \quad (G.8)$$

d) Aufsummation zum Boxpotential

Summieren wir über den $\rho\rho$ -Zwischenzustand, erhalten wir das Boxpotential, das wir als Teil des Pseudopotentials auffassen wollen:

$$V_{Box}^J(p', p, Z) = \sum_{LS} \int dq q^2 \frac{\langle \pi\pi 00|V^J(p', q, Z)|\rho\rho LS\rangle \langle \rho\rho LS|V^J(q, p, Z)|\pi\pi 00\rangle}{Z - E(q)} \quad (G.9)$$

mit $E(q) = 2\sqrt{m_\rho^2 + q^2}$, der Energie der beiden ρ -Mesonen im Zwischenzustand.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc. Japan 17 (1935) 48.
- [2] R. Machleidt, K. Holinde und Ch. Elster, Phys. Rep. 149 (1987) 1.
- [3] R. Büttgen, K. Holinde, B. Holzenkamp, J. Speth, Nucl. Phys. A450 (1986) 403.
- [4] B. Holzenkamp, Dissertation, Universität Bonn 1988;
Spezielle Berichte der Kernforschungsanlage Jülich Nr. 460, 1988.
- [5] R. Büttgen, K. Holinde, J. Speth, Phys. Lett. B133 (1985) 305.
- [6] R. Büttgen, Dissertation, Universität Bonn 1988;
Spezielle Berichte der Kernforschungsanlage Jülich Nr. 459, 1988;
R. Büttgen, K. Holinde, A. Müller-Groeling, J. Speth, P. Wyborny, er-
scheint in Nucl. Phys.
- [7] B. H. Bransden, "The κ -Meson", in E. H. S. Burhop, High Energy Phy-
sics, Vol III, Academic Press, New York & London 1969.
- [8] J. W. Durso, A. D. Jackson, B. J. Verwest, Nucl. Phys. A345 (1980)
471.
- [9] T. Hippchen, Dissertation, Universität Bonn 1989;
Spezielle Berichte der Kernforschungsanlage Jülich Nr. 494, 1989.
- [10] Particle Data Group, Phys. Rev. Lett. B204, 1988.
- [11] N. Isgur, J. Weinstein, UTPT-89-03 und
Phys. Rev. D27 (1983) 588.
- [12] K. L. Au, D. Morgan, M. R. Pennington, Phys. Rev. D35 (1987) 1633
und Phys. Lett. B167 (1986) 229.
- [13] W. Oelert et al., COSY-Proposal Nr. 11.
- [14] M. Alston-Garnjost et al., Phys. Lett. B36 (1971) 152.

- [15] D. Cohen et al., Phys. Rev. D22 (1980) 2595.
- [16] A. D. Martin, E. N. Ozmutlu, E. J. Squires, Nucl. Phys. B121 (1977) 514.
- [17] F. J. Yndurain, Nucl. Phys. B88 (1975) 318.
- [18] W. Wetzel et al. Nucl. Phys. B115 (1976) 208.
- [19] M. Cerrada et al. Phys. Lett. B62 (1976) 353.
- [20] A. B. Wicklund et al., Phys. Rev. Lett. 45 (1980) 1469.
- [21] A. Etkin et al., Phys. Rev. D25 (1982) 1786.
- [22] D. Krupa, Czech. J. Phys. B38 (1988) 1129.
- [23] N. O. Johannesson, J. L. Petersen, Nucl. Phys. B68 (1974) 397.
- [24] G. Veneziano, Phys. Rep. C9 (1974) 199.
- [25] P. Kroll, private Mitteilung.
- [26] H. A. Bethe, E.E. Salpeter, Phys. Rev. 84 (1951) 1232.
- [27] R. Blanckenbecler, R. Sugar, Phys. Rev. 142 (1966) 1051.
- [28] K. Erkelenz, Phys. Rev. Lett 13C (1974) 191.
- [29] D. Schütte, Nucl. Phys. A221 (1974) 450.
- [30] K. Kotthoff, K. Holinde, R. Machleidt, D. Schütte, Nucl. Phys. A242 (1975) 429.
- [31] K. Kotthoff, R. Machleidt, D. Schütte, Nucl. Phys. A264 (1976) 484.
- [32] R. S. Bhalerao, A new approach to the relativistic two-body-problem, invited talks given at Indian Institut of Technology, Kanpur, and Institute of Math. Science, Madras (1989).
- [33] Th. Hippchen, K. Holinde, Phys. Rev. C37 (1988) 239.

- [34] Gasiorowicz, "Elementary Particle Physics",
John Wiley and Sons, New York 1966.
- [35] M. N. Nagels et al., Nucl. Phys. B147 (1979) 189.
- [36] J. J. J. Kokkedee, "The Quark Model", W. A. Benjamin, New York 1969.
- [37] H. Pilkuhn, "The Interaction of Hadrons", North Holland Publishing
Company, Amsterdam 1967
- [38] O. Dumbrajs et al., Nucl. Phys. B216 (1983) 277.
- [39] W. Greiner, B. Müller, Theor. Physik, Bd. 5: Symmetrien, Verlag H.
Deutsch, Frankfurt 1985
- [40] J. J. de Swart, Rev. Mod. Phys. 35 (1963) 916.
- [41] A. Müller-Groeling, private Diskussion.
- [42] M. Jacob, G.C. Wick, Ann. Phys 7 (1959) 404.
- [43] B. Holzenkamp, Diplomarbeit, Universität Bonn 1985;
Spezielle Berichte der Kernforschungsanlage Jülich Nr. 315, 1985.
- [44] S. U. Chung, "Spin Formalismus", Academic Training Programm of
CERN, CERN 71-8 1971.
- [45] M. I. Haftel und F. Tabakin, Nucl. Phys. A158 (1970) 1.
- [46] T. D. Lee, Phys. Rev. 95 (1954) 1329.
- [47] D. Schütte, J. Providencia, Nucl. Phys. A338 (1980) 463.
- [48] D. Hirt, Diplomarbeit, Bonn 1983.
- [49] P. Alberto, E. Ruiz Arriola, M. Fiolhais, F. Grümmer, J. N. Urbano, K.
Goeke, Phys. Lett. B208 (1988) 75.
- [50] U. G. Meißner, N. Kaiser, W. Weise, Nucl. Phys. B446 (1987) 685.
- [51] B. Moussallam, Nucl. Phys. A429 (1984) 429.

- [52] B. R. Martin, D. Morgan, G. Shaw, "Pion-Pion-Interaction in Particle Physics", Academic Press, London 1976.
- [53] S. D. Protopopescu et al., Phys. Rev. D7 (1973) 1279.
- [54] B. Hyams et al. Nucl. Phys. B64 (1973) 134, und
Nucl. Phys. B100 (1975) 205.
- [55] P. Estabrooks, A. D. Martin, Nucl. Phys. B95 (1975) 322.
- [56] C. D. Froggatt, J. L. Petersen, Nucl. Phys. B129 (1977) 89.
- [57] M. N. Cason et. al., Phys. Rev. D28 (1983) 1586.
- [58] W. Ochs, Promotion, Ludwig-Maximilians-Universität, München 1973.
- [59] P. Estabrooks, Nucl. Phys. B133 (1978) 490.
- [60] B. Jongejans et al. Nucl. Phys. B67 (1973) 381.
- [61] A. Firestone, Phys. Rev. D5 (1972) 2188.
- [62] M. J. Matison et al., Phys. Rev. D9 (1974) 1872.
- [63] D. Aston et al., Nucl. Phys. B295 (1988) 493.
- [64] A. D. Martin, E. N. Ozmutlu Nucl. Phys. B158 (1977) 520.
- [65] C. B. Lang, Fortschritte der Physik 26 (1978) 509.
- [66] C. B. Lang, Nouv. Cim. 41A (1977) 73, und
Nucl. Phys. B93 (1975) 429.
- [67] Ch. J. Joachain, "Quantum Collision Theory", North Holland Publishing
Company, Amsterdam 1975.
- [68] De Benedetti, "Nuclear Interactions", Wiley and Sons, New York 1967.
- [69] A. Lindner, "Drehimpulse in der Quantenmechanik", Teubner Verlag,
Stuttgart 1984.
- [70] D. Morgan, Phys. Lett. B51 (1974) 71.

- [71] G. C. Fox, M. L. Griss, Nucl. Phys. B80 (1974) 403.
- [72] N. O. Johannesson, G. Nilson, LU-TP 76-12.
- [73] P. Estabrooks et al. SLAC-PUB-1886.
- [74] M. Albrow, CERN Courier, Jan. Feb. 1987.
- [75] W. Ferchländer, D. Schütte, Phys. Rev. C27 (1980) 2536.
- [76] R. L. Jaffe, Phys. Rev. D15 (1977) 267.
- [77] E. Lomon, Phys. Rev. D14 (1976) 2402.
- [78] E. Lomon, Phys. Rev. D22 (1980) 229.
- [79] A. D. Martin, E. N. Ozmutlu Nucl. Phys. B140 (1978) 158.
- [80] A. R. Edmonds, "Angular Momentum in Quantum Mechanics", Princeton University Press, Princeton 1957.

Nachwort

Diese Diplomarbeit entstand vom August 1988 – Oktober 1989 am Institut für Kernphysik (Theorie) an der Kernforschungsanlage Jülich. Ich möchte an dieser Stelle allen Mitgliedern des Institutes für die freundliche und von Hilfsbereitschaft geprägte Arbeitsatmosphäre danken.

Insbesondere danke ich Herrn Prof. J. Speth für das große Interesse, das er meiner Arbeit entgegenbringt, die vielen hilfreichen Ratschläge und Diskussionen und die stete Förderung, die er mir zuteil werden ließ.

Mein Dank gilt ebenfalls Herrn Prof. K. Holinde für die Betreuung dieser Arbeit und seine konstante Bereitschaft, auftauchende Fragen und Probleme zu erörtern.

Prof. John Durso, der die letzten drei Monate meiner Diplomarbeit als Gast am Institut arbeitete, fühle ich mich sehr verbunden. Ich konnte stets konkrete Fragestellungen mit ihm diskutieren.

Danken möchte ich auch Dr. B. Holzenkamp, der mir bei der Einarbeitung in die Mesonentheorie half und dabei keinen Zeitaufwand scheute.

Mein besonderer Dank gilt meinem langjährigen Studienfreund und Kommilitonen Axel Müller-Groeling. Die fruchtbaren Diskussionen mit ihm trugen wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit bei, und seinen kritischen Rat hätte ich nicht missen wollen.

Herrn E. Brökel danke ich für die Anfertigung vieler Bilder und für die Hilfe bei Problemen mit den Computersystemen IBM 3081 und IBM 3090, auf denen die Rechnungen ausgeführt wurden.

An dieser Stelle möchte ich auch der Studienstiftung des deutschen Volkes für die Förderung während des ganzen Studiums danken und für die vielen Möglichkeiten, die sie mir bot.

