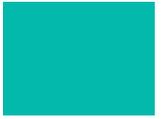


Fachhochschule Aachen
Campus Jülich

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES



Fachbereich: Medizintechnik und Technomathematik
Studiengang: Angewandte Mathematik und Informatik

**Numerische Berechnung von elastischen
Transmissionseigenwerten**

Masterarbeit

vorgelegt von

Maria Zimmermann

Matrikelnummer: 3110409

Jülich, den 29. Juli 2021

Eigenständigkeitserklärung

Diese Arbeit ist von mir selbstständig angefertigt und verfasst. Es sind keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet worden.

Jülich, den 29. Juli 2021

Maria Zimmermann

Diese Arbeit wurde betreut von:

1. Prüfer: Prof. Dr. rer. nat. Johannes Grotendorst
2. Prüfer: Dr. rer. nat. Andreas Kleefeld

Die vorliegende Arbeit wurde in Zusammenarbeit mit dem Jülich Supercomputing Centre der Forschungszentrum GmbH angefertigt.



Kurzfassung

Diese Arbeit befasst sich mit der Berechnung von nichtlinearen Transmissionseigenwerten beim elastischen Streuproblem, welches eine wichtige Anwendung im Bereich der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung findet.

Die Operatoren, die zum Lösen des Transmissionseigenwertproblems benötigt werden, werden mit Hilfe der Randintegralgleichungsmethode aufgestellt. Als Zwischenschritt vor der Berechnung der Transmissionseigenwerte werden auch die nichtlinearen Eigenwerte der Matrizen der einzelnen Operatoren mit Hilfe des Beyn-Algorithmus bestimmt. Die Kombination der Operatoren zum Lösen des Transmissionseigenwertproblems mit dem Beyn-Algorithmus orientiert sich an einem Paper von Cakoni und Kress.

Abschließend wird die Effizienz der in Python implementierten Operatoren getestet und mit den Ergebnissen anderer Lösungsmethoden in Relation gesetzt.

Inhaltsverzeichnis

Glossar	iii
1 Einleitung	1
2 Randintegralgleichung und ihre Diskretisierung	5
3 Statischer Fall	13
3.1 Einfachschichtpotentialansatz	13
3.2 Doppelschichtpotentialansatz	17
4 Dynamischer Fall	25
4.1 Einfachschichtpotentialansatz	28
4.2 Doppelschichtpotentialansatz	31
5 Testen der vier Operatoren	37
5.1 Tests mit dem Einheitskreis	39
5.2 Tests mit der Ellipse	41
5.3 Vergleich mit den Ergebnissen von A.-C. Weger	42
6 Beyn-Algorithmus	45
6.1 Grundlegende Definitionen	45
6.2 Lösungsansatz beim nichtlinearen Eigenwertproblem	46
7 Tests nichtlineares Eigenwertproblem	51
7.1 Tests mit dem Einheitskreis	52
7.2 Tests mit der Ellipse	55
7.3 Vergleich mit den Ergebnissen von A.-C. Weger	58
8 Transmissionseigenwertproblem	59
8.1 Ansatz	59
8.2 Tests	60
8.3 Vergleich mit den Ergebnissen von A.-C. Weger	63
8.4 Vergleich mit Ergebnissen anderer Ansätze	63
9 Zusammenfassung und Ausblick	65
Literaturverzeichnis	67

Glossar

In den folgenden Kapiteln werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$()^H$ adjungierte Matrix

$()^\top$ transponierte Matrix

$a \in \mathbb{R}_{>0}$, eine Halbachse der Ellipse

A Matrix aus der Diskretisierung

A_0 Konturintegral über Γ : $A_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(z)^{-1} \hat{V} dz \in \mathbb{C}^{m \times \ell}$

A_{0,n_b} approximierter Variante von A_0

A_1 Konturintegral über Γ : $A_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z F(z)^{-1} \hat{V} dz \in \mathbb{C}^{m \times \ell}$

A_{1,n_b} approximierter Variante von A_1

$b \in \mathbb{R}_{>0}$, eine Halbachse der Ellipse

b_m Mittelpunkt der Kontur beim Beyn-Algorithmus

b_r Radius der Kontur beim Beyn-Algorithmus

B lineares Eigenwertproblem, Matrix enthält dieselben Eigenwerte wie F ,

$$B = S \Lambda S^{-1} \in \mathbb{C}^{k \times k}$$

$c(\varphi)$ einfache, geschlossene Kurve mit endlicher Länge, die den Gebietsrand beschreibt.

Zudem müssen folgende Eigenschaften gelten: $c(0) = c(2\pi)$, $c \in C^2([0, 2\pi])$ und $c'(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]$

c_1 eine Hilfskonstante, um die Fundamentallösung $\Phi_0(x, y)$ abzukürzen: $c_1 = \frac{\lambda+3\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)}$

c_2 weitere Hilfskonstante, um die Fundamentallösung $\Phi_0(x, y)$ abzukürzen: $c_2 = \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)}$

c_3 Hilfskonstante, um die Traktion der Fundamentallösung $[T_y(\Phi_0(x, y))]^\top$ abzukürzen:

$$c_3 = \frac{1}{2\pi(\lambda+2\mu)}$$

C kompakte Teilmenge von Ω , enthält nur einfache Eigenwerte

d Vektor der rechten Seite im linearen Gleichungssystem

Glossar

$D \subset \mathbb{R}^2$, untersuchtes Gebiet

∂D Rand des Gebiets

D_k Randintegralgleichungsoperator mit $k \in \{0, \omega\}$

DL_k Doppelschichtpotentialansatz mit $k \in \{0, \omega\}$

$e_{h,j,i}$ Funktion zur Beschreibung der Einträge in Matrix A

E zu lösendes Integral für einen 2×2 Eintrag in Matrix A ; aufgeteilt in E^{11} , E^{12} , E^{21} und E^{22}

f

- Randbedingung
- Hilfsfunktion
- holomorphe Funktion: $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

F nichtlineares Eigenwertproblem: $F(\xi)v = 0$, $F : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$

$g_j(s)$ Transformationsfunktion: $\sigma \rightarrow \hat{\Delta}_j$

G Matrix mit den Einträgen g_{11} , g_{12} , g_{21} und g_{22} :

$$G = \text{grad}_x \text{grad}_x^\top [H_0^{(1)}(k_s \|x - y\|_2) - H_0^{(1)}(k_p \|x - y\|_2)]$$

h Index

$H_0^{(1)}(\cdot)$ Hankel-Funktion 1. Art der Ordnung 0

$H_1^{(1)}(\cdot)$ Hankel-Funktion 1. Art der Ordnung 1

i Index

i imaginäre Einheit

I Einheitsmatrix

j Index

J_j Jacobi-Determinante

k

- Anzahl Eigenwerte, $k \ll m$
- Wellenzahl, $k \in \{0, \omega\}$

$$k_p \text{ Wellenzahl der Longitudinalwelle: } k_p^2 = \frac{\omega^2}{\lambda + 2\mu}$$

$$k_s \text{ Wellenzahl der Transversalwelle: } k_s^2 = \frac{\omega^2}{\mu}$$

ℓ Index: $k \leq \ell \leq m$

ℓ_i Lagrange-Polynome

L Differentialoperator: $L(u) = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \omega^2 \rho u$

m Dimension der Matrizen/Vektoren des Eigenwertproblems

M Hilfsmatrix

n Anzahl der diskretisierten Punkte auf dem Rand

n_b Anzahl der Stützstellen auf der Kontur beim Beyn-Algorithmus

n_k Anzahl der Kollokationspunkte

n_s Anzahl der Segmente Δ_j

$\mathcal{N}(\cdot)$ Nullraum von \cdot

$P(\omega)$ dyadisches Produkt

$$P(\omega) = \frac{\omega \cdot \omega^\top}{\|\omega\|_2^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

p_1 Faktor in der Produktregel bzw. Zähler in der Quotientenregel

p_2 Faktor in der Produktregel bzw. Nenner in der Quotientenregel

q_i Stützpunkte: $q_i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

Q Matrix, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

r Konstante, um Formeln abzukürzen: $r = |x|$ in Kapitel 1 bzw. $r = \|x - y\|_2$ in den folgenden Kapiteln

R

- Referenzlösung
- holomorphe Funktion: $R : U \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$

$\mathcal{R}(\cdot)$ Bildraum von \cdot

s Integrationsvariable

s_i lineare Eigenvektoren von B

S_k Randintegralgleichungsoperator mit $k \in \{0, \omega\}$

SL_k Einfachschichtpotentialansatz mit $k \in \{0, \omega\}$

S Transformationsmatrix, $S \in \mathbb{C}^{k \times k}$ mit $\det(S) \neq 0$

Glossar

S_p Speedup durch Parallelisierung, $S_p = \frac{T_1}{T_p}$

tol_{rank} Rangtoleranz, $tol_{rank} > 0$

$T(f)$ Traktionsoperator: $T(f) = \lambda \operatorname{div}(f) \nu + 2\mu (\nu^\top \operatorname{grad}) f + \mu \operatorname{div}(Qf) Q \nu$

T_1 Ausführungsdauer im seriellen Fall

T_p Ausführungsdauer im parallelen Fall

u gestreutes Wellenfeld; mit Einfach- oder Doppelschichtansatz zu bestimmender Vektor

u_p Longitudinalwelle mit Wellenzahl k_p : $u_p = -\frac{1}{k_p^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} u$

u_s Transversalwelle mit Wellenzahl k_s : $u_s = u - u_p$

u_0 ein gestreutes Wellenfeld in Transmissionseigenwertproblem

u_1 weiteres gestreutes Wellenfeld in Transmissionseigenwertproblem

U Umgebung eines Eigenwertes ξ , $U \subset \Omega$ bzw. $U \subset \mathbb{C}$

$U_1(y, x)$ Hilfsmatrix, um Formeln abzukürzen:

$$U_1(y, x) = \lambda \nu(y)(y - x)^\top + \mu(y - x) \nu(y)^\top + \mu \nu(y)^\top (y - x) I$$

$U_2(y, x)$ Hilfsmatrix, um Formeln abzukürzen:

$$U_2(y, x) = (\lambda + 2\mu) \nu(y)(y - x)^\top + \mu(y - x) \nu(y)^\top + \mu \nu(y)^\top (y - x) (I - 4P(x - y))$$

v (Rechts-) Eigenvektor: $v \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$

v_j diskrete Punkte auf dem Rand

\tilde{v}_j Mittelpunkte

\hat{v}_j Endpunkte

v_h Kollokationspunkte:

\hat{v}_h Kollokationspunkte im Fall der konstanten Dichteapproximation

\tilde{v}_h Kollokationspunkte im Fall der linearen Dichteapproximation

\hat{v}_h Kollokationspunkte im Fall der quadratischen Dichteapproximation

V Matrix, deren Spalten die Rechtseigenvektoren enthalten, $V \in \mathbb{C}^{m \times k}$

V_0 Ergebnis der (abgeschnittenen) Singulärwertzerlegung

\hat{V} Zufallsmatrix: $\hat{V} \in \mathbb{C}^{m \times \ell}$

w (Links-) Eigenvektor: $w \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$

W Matrix, deren Spalten die Linkseigenvektoren enthalten, $W \in \mathbb{C}^{m \times k}$

W_0^H Ergebnis der (abgeschnittenen) Singulärwertzerlegung

x Punkt im \mathbb{R}^2

x_1 1. Koordinate von x

x_2 2. Koordinate von x

y Punkt im \mathbb{R}^2

y_1 1. Koordinate von y

y_2 2. Koordinate von y

z Vektor der Dichten im linearen Gleichungssystem

$$\alpha = x_1 - y_1$$

$$\beta = x_2 - y_2$$

$\gamma(\varphi)$ Parametrisierung der Kontur im Beyn-Algorithmus:

$$\gamma(\varphi) = b_m + b_r e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi)$$

Γ Kontur, bei der keine Eigenwerte auf der Kontur liegen, sondern nur im Inneren,
 $\Gamma \subset \Omega$

δ Toleranz bei den Singularitäten im Integral

Δ_j Segmentstück des Randes

$\hat{\Delta}_j$ Näherung eines Segments

ε_{n_k} Fehler: $\varepsilon_{n_k} = \|u_{n_k}(x) - R\|$

θ Tangente an eine Funktion bzw. ein Gebiet

κ_{n_k} approximierter Konvergenzordnung: $\kappa_{n_k} = \ln \left(\frac{\varepsilon_{n_k}}{\varepsilon_{2n_k}} \right) \cdot \frac{1}{\ln(2)}$

λ, μ Lamé-Konstanten

Λ Diagonalmatrix, die die gesuchten nichtlinearen Eigenwerte enthält, $\Lambda \in \mathbb{C}^{k \times k}$

ν nach außen gerichtete Normale an eine Funktion bzw. ein Gebiet

ξ Eigenwert von F

π Konstante

Glossar

ρ Dichte des Objekts in der Navier-Gleichung

ρ_0 Dichte des Objekts im Transmissionseigenwertproblem bzgl. u_0

ρ_1 Dichte des Objekts im Transmissionseigenwertproblem bzgl. u_1

$\rho(F)$ Resolventenmenge von F : $\rho(F) = \Omega \setminus \sigma(F)$

σ Referenzintervall: $\sigma = [0, 1]$

σ_i Elemente von Σ_0

$\sigma(F)$ Spektrum von F

Σ_0 Ergebnis der (abgeschnittenen) Singulärwertzerlegung

φ Winkel im Bogenmaß

φ_j diskretisierte Winkel $\varphi_j = \frac{2\pi}{n}j$, $j = 0, \dots, n$

$\Phi_k(x, y)$ Fundamentallösung der Navier-Gleichung mit $k \in \{0, \omega\}$, Definition in Kapitel 2

$\tilde{\Phi}_1(r)$ Bestandteil von $\Phi_\omega(x, y)$:

$$\tilde{\Phi}_1(r) = \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_s r) I + \frac{i}{4\omega^2} \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r}$$

$\tilde{\Phi}_2(r)$ Bestandteil von $\Phi_\omega(x, y)$:

$$\tilde{\Phi}_2(r) = \frac{i}{4\omega^2} \left[k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) \right] + \frac{i}{2\omega^2 r} \left[k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r) \right]$$

ψ unbekannte Dichte

Ψ Fundamentallösung des Laplace-Operators: $\Psi(x, y) = \ln \left(\frac{1}{\|x-y\|_2} \right)$, $x \neq y$

ω Frequenz bzw. in Kapitel 7 und Kapitel 8 der zu bestimmende Eigenwert

Ω Gebiet, $\Omega \subset \mathbb{C}$

1 Einleitung

In einem Teilgebiet der Werkstoffprüfung sollen Objekte zerstörungsfrei auf ihre innere Struktur untersucht werden. Hierfür lässt man ein Wellenfeld auf das zu untersuchende Objekt treffen und versucht dann mit Hilfe des gestreuten Wellenfeldes Rückschlüsse auf die innere Struktur zu ziehen. Nutzt man dabei ein zeitharmonisches, elastisches Wellenfeld, erhält man ein elastisches Streuproblem.

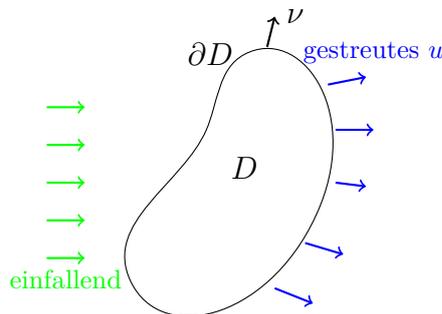


Abbildung 1.1: Einfallende Welle trifft auf das Objekt D mit Rand ∂D und nach außen gerichteter Normale ν . Es entsteht das gestreute Wellenfeld u .

Das gestreute, zweidimensionale Wellenfeld u besteht aus einer Überlagerung von Longitudinalwellen u_p

$$u_p = -\frac{1}{k_p^2} \text{grad div } u \text{ mit Wellenzahl } k_p^2 = \frac{\omega^2}{\lambda + 2\mu}$$

und Transversalwellen u_s

$$u_s = u - u_p \text{ mit Wellenzahl } k_s^2 = \frac{\omega^2}{\mu} .$$

Dabei ist ω die Frequenz der Welle und λ und μ sind Lamé-Konstanten, die beschreiben wie elastisch das Material ist. Für die Lamé-Konstanten müssen folgende Einschränkungen gelten, damit die Navier-Gleichung streng elliptisch ist (vgl. [7, S. 297f.]):

$$\mu > 0 \text{ und } 2\mu + \lambda > 0 .$$

Das elastische Streuproblem wird durch die Navier-Gleichung

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \text{grad div } u + \omega^2 \rho u = 0 \text{ in } D$$

1 Einleitung

und eine entsprechende Randbedingung, also durch ein elliptisches Randwertproblem, beschrieben. Die Dichte des Objekts wird durch den Parameter ρ ausgedrückt. Beim statischen elastischen Streuproblem ist $\omega = 0$ und beim dynamischen Problem ist $\omega \neq 0$. Um das Randwertproblem zu lösen, kann man einen Einfach- oder Doppelschichtpotentialansatz nutzen. Als Randbedingung wurde immer folgende Dirichlet-Randbedingung verwendet:

$$u = f \text{ auf } \partial D .$$

Das Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ muss dabei immer ein einfach zusammenhängendes Gebiet sein. Man kann sowohl Innen- als auch Außenraumprobleme betrachten (siehe Abb. 1.2).

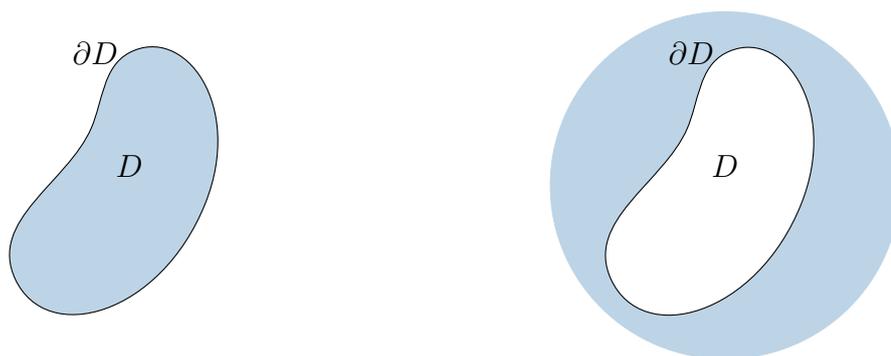


Abbildung 1.2: Links: Beispiel für ein Innenraumproblem. Rechts: Beispiel für ein Außenraumproblem

Bei einem Außenraumproblem, d. h. das Gebiet $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ ist unbeschränkt, muss u zusätzlich die Kupradze Ausstrahlungsbedingungen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u_p}{\partial r} - ik_p u_p \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u_s}{\partial r} - ik_s u_s \right) = 0, \quad r = |x|$$

erfüllen. Diese Bedingungen kann man als Randbedingungen im Unendlichen interpretieren und sie sichern die Eindeutigkeit der Lösung.

Lösungsansatz

Da unendlich große Gebiete D , wie sie beim Außenraumproblem auftreten, nicht gut diskretisiert werden können, eignen sich das Finite Differenzen oder Finite Elemente Verfahren nicht zum Lösen des Problems. Stattdessen wird die Randintegralgleichungsmethode verwendet, um das Problem zu lösen. Bei der Randintegralgleichungsmethode wird das Randwertproblem in eine Randintegralgleichung überführt. Da der Rand immer eine endliche Länge hat, kann er in jedem Fall diskretisiert werden. Außerdem wird somit die Komplexität des Problems reduziert, da nun ein eindimensionales Problem statt eines zweidimensionalen Problems vorliegt.

Eigenwertprobleme

Das finale Ziel der Arbeit ist das Lösen des Transmissionseigenwertproblems:

$$\begin{aligned}\mu\Delta u_0 + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u_0 + \omega^2 \rho_0 u_0 &= 0 \text{ in } D, \\ \mu\Delta u_1 + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u_1 + \omega^2 \rho_1 u_1 &= 0 \text{ in } D, \\ u_0 &= u_1 \text{ auf } \partial D, \\ T(u_0) &= T(u_1) \text{ auf } \partial D.\end{aligned}$$

Dabei ist der Traktionsoperator T durch folgende Formel gegeben:

$$T(f) = \lambda \operatorname{div}(f) \nu + 2\mu (\nu^\top \operatorname{grad}) f + \mu \operatorname{div}(Qf) Q \nu$$

mit ν normierter nach außen gerichteter Normalenvektor auf ∂D und $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Mit Hilfe der inneren Transmissionseigenwerte kann bei einem homogenen Material die Integrität, d. h. die Unversehrtheit, eines Werkstoffes überprüft werden.

Um das Transmissionseigenwertproblem lösen zu können, müssen zuerst für die dynamischen Operatoren die nichtlinearen Eigenwerte der Matrix, die beim Lösen des Gleichungssystems zum Ermitteln der Dichten erstellt wird, mit Hilfe des Integrationsalgorithmus von Beyn ermittelt werden. Diese Programme zur Eigenwertberechnung beim Einfachschichtpotential und beim Doppelschichtpotential werden zuerst separat getestet. Für die Lösung des Transmissionseigenwertproblems werden die eben erwähnten Matrizen des Einfachschichtpotentialoperators und des Doppelschichtpotentialoperators miteinander kombiniert und die Eigenwerte dieser neuen Matrix bestimmt.

Bekannte Lösungsansätze

In den letzten Jahren wurde viel im Bereich der Berechnung von elastischen Transmissionseigenwerten geforscht. Erste einzelne Paper zur numerischen Berechnung erschienen 2016 und besonders im letzten Jahr gab es viele Veröffentlichungen in diesem Themengebiet.

Diese bisher erschienenen Veröffentlichungen können in folgende vier Ansätze unterteilt werden:

- Randintegralgleichungsmethoden:
 - Numerische Berechnung von elastischen Streuproblemen in 2D (A.-C. Weger, 2018, [9])
- Finite Elemente Methoden (kurz: FEM):
 - Computation of transmission eigenvalues for elastic waves (X. Ji & P. Li & J. Sun, 2018, [5])
 - A lowest order mixed finite element method for the elastic transmission eigenvalue problem (Y. Xi & X. Ji, 2018, [10])

1 Einleitung

- A C^0 IP method of transmission eigenvalues for elastic waves (Y. Xi & X. Ji & H. Geng, 2018 [11])
- Computation of interior elastic transmission eigenvalues using a conforming finite element and the secant method (X. Ji & P. Li & J. Sun, 2020, [4])
- Mixed methods for the elastic transmission eigenvalue problem (Y. Yang & J. Han & H. Bi & H. Li, 2020, [14])
- H^2 -conforming methods and two-grid discretizations for the elastic transmission eigenvalue problem (Y. Yang & J. Han & H. Bi, 2020, [13])
- Efficient methods of computing interior transmission eigenvalues for the elastic waves (W.-C. Chang & W.-W. Lin & J.-N. Wang, 2020, [3])
- A simple low-degree optimal finite element scheme for the elastic transmission eigenvalue problem (Y. Xi & X. Ji & S. Zhang, 2021, [12])
- Inside Outside Duality Methode:
 - Inside-outside duality method in inverse scattering theory (S. Peters, 2016, [8])
- Method of Fundamental Solutions (kurz: MFS):
 - Elastic transmission eigenvalues and their computation via the method of fundamental solution (A. Kleefeld & L. Pieronek, 2020, [6])

Ergebnisse / Tests

Alle Ergebnisse der numerischen Tests, d. h. die Ergebnisse der einzelnen Operatoren, die Lösungen der nichtlinearen Eigenwertprobleme und des Transmissionseigenwertproblems, sollen jeweils mit den Ergebnissen von A.-C. Weger (vgl. [9]) verglichen werden. Frau Weger hat das elastische Streuproblem ebenfalls mit der Randintegralgleichung gelöst, verwendet dabei jedoch eine einfachere Diskretisierung. Sie approximiert den Gebietsrand linear und die Dichte konstant. Aufgrund einer genaueren Approximation kann man erwarten, dass die Ergebnisse dieser Arbeit besser als die von Frau Weger sind, d. h. dass die Abweichungen zu Referenzlösungen geringer und die approximierten Konvergenzordnungen von höherer Ordnung sind.

Bei der Berechnung der Transmissionseigenwerte verwendet Frau Weger einen Ansatz, bei dem die Traktion des Doppelschichtoperators Probleme verursacht. Durch einen neuen Ansatz ohne die Traktion dieses Operators sollen die Ergebnisse der Eigenwertberechnung in dieser Arbeit ebenfalls verbessert werden.

Die berechneten Transmissionseigenwerte sollen zusätzlich mit den Ergebnissen der Finite Elemente Methoden in [5], [10] und [14] sowie den Werten der Method of Fundamental Solutions aus [6] verglichen werden, um eine Aussage über die Effizienz der entwickelten Operatoren treffen zu können.

Zusätzlich sollen die Operatoren in Python implementiert werden, um eine Parallelisierung durchführen zu können und somit die Rechenzeit gegenüber den in Matlab implementierten Operatoren deutlich zu senken.

2 Randintegralgleichung und ihre Diskretisierung

Randintegralgleichungen

Beim elastischen Streuproblem wird der Differentialoperator

$$L(u) = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \omega^2 \rho u$$

mit konstanter Frequenz ω verwendet. Die Fundamentallösung für den statischen Fall, also $\omega = 0$, lautet

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, y) &= \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \Psi(x, y) I + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} P(x - y) \\ \text{mit } \Psi(x, y) &= \ln \left(\frac{1}{\|x - y\|_2} \right), \quad x \neq y, \\ P(\omega) &= \frac{\omega \cdot \omega^\top}{\|\omega\|_2^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \\ \text{und } I &\hat{=} 2 \times 2 \text{ Einheitsmatrix.} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Funktion Ψ ist die Fundamentallösung des Laplace-Operators und P ist das dyadische Produkt von $\omega \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und der zugehörigen Transponierten ω^\top .

Für den dynamischen Fall erhält man die Fundamentallösung

$$\Phi_\omega(x, y) =$$

$$\frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_s \|x - y\|_2) I + \frac{i}{4\omega^2} \operatorname{grad}_x \operatorname{grad}_x^\top \left[H_0^{(1)}(k_s \|x - y\|_2) - H_0^{(1)}(k_p \|x - y\|_2) \right] \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

Hierbei ist $H_0^{(1)}$ die Hankel-Funktion 1. Art der Ordnung 0 und k_s und k_p sind Wellenzahlen mit

$$k_s^2 = \frac{\omega^2}{\mu} \quad \text{und} \quad k_p^2 = \frac{\omega^2}{\lambda + 2\mu}.$$

Das Randwertproblem kann mit einem Einfach- (ESP) oder Doppelschichtpotentialansatz (DSP) gelöst werden. Als Randwertproblem kann dabei entweder ein Außenraumproblem (AP) oder ein Innenraumproblem (IP) vorliegen. Somit erhält man insgesamt folgende vier Ansätze:

2 Randintegralgleichung und ihre Diskretisierung

- ESP für AP:

$$u(x) = (\text{SL}_k\psi)(x) = \int_{\partial D} \Phi_k(x, y)\psi(y) \, ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \quad k \in \{0, \omega\}$$

mit unbekannter Dichte ψ

- ESP für IP:

$$u(x) = (\text{SL}_k\psi)(x) = \int_{\partial D} \Phi_k(x, y)\psi(y) \, ds(y), \quad x \in D, \quad k \in \{0, \omega\}$$

mit unbekannter Dichte ψ

- DSP für AP:

$$u(x) = (\text{DL}_k\psi)(x) = \int_{\partial D} [T_y(\Phi_k(x, y))]^\top \psi(y) \, ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \quad k \in \{0, \omega\}$$

mit unbekannter Dichte ψ

- DSP für IP:

$$u(x) = (\text{DL}_k\psi)(x) = \int_{\partial D} [T_y(\Phi_k(x, y))]^\top \psi(y) \, ds(y), \quad x \in D, \quad k \in \{0, \omega\}$$

mit unbekannter Dichte ψ .

In den Formeln des Doppelschichtoperators wird im Integral der Traktionsoperator T bezüglich y spaltenweise auf die Fundamentallösung Φ_k angewendet.

In dieser Arbeit werden nur der Einfachschichtpotentialansatz für Außenraumprobleme und der Doppelschichtpotentialansatz für Innenraumprobleme betrachtet.

Zunächst muss man die Dichte ψ bestimmen und kann anschließend die Lösung u berechnen. Für die Berechnung der Dichte ψ nähert man x mit einer geeigneten Randbedingung an den Rand ∂D an.

Nähert man im Fall des Einfachschichtpotentialansatzes für das Außenraumproblem x unter der Randbedingung

$$u = f \text{ auf } \partial D$$

an den Rand ∂D an, erhält man folgende Randintegralgleichung 1. Art:

$$(\text{S}_k\psi)(x) = f(x), \quad x \in \partial D, \quad k \in \{0, \omega\}$$

$$\text{mit } (\text{S}_k\psi)(x) = \int_{\partial D} \Phi_k(x, y)\psi(y) \, ds(y), \quad x \in \partial D, \quad k \in \{0, \omega\}.$$

Im Fall des Doppelschichtpotentialansatzes muss man, wenn man x unter der Randbedingung

$$u = f \text{ auf } \partial D$$

an den Rand ∂D annähert, folgende Sprungrelation beachten

$$D \ni x \rightarrow x \in \partial D : u(x) = (D_k \psi)(x) - \frac{1}{2} \psi(x), x \in \partial D$$

und erhält dann die Randintegralgleichung 2. Art:

$$(D_k \psi)(x) - \frac{1}{2} \psi(x) = f(x), x \in \partial D, k \in \{0, \omega\}$$

$$\text{mit } (D_k \psi)(x) = \int_{\partial D} [T_y(\Phi_k(x, y))]^\top \psi(y) ds(y), x \in \partial D, k \in \{0, \omega\}.$$

Diskretisierung

Die Diskretisierung wird am Beispiel des Einfachschichtpotentialansatzes erläutert. Man möchte beim Einfachschichtpotentialansatz eine Randintegralgleichung der Form

$$(S_k \psi)(x) = \int_{\partial D} \Phi_k(x, y) \psi(y) ds(y) = f(x)$$

lösen. Um die Integralgleichung zu lösen, muss der Gebietsrand ∂D mit n Stützstellen diskretisiert werden, wobei n eine gerade Anzahl sein muss. Der Gebietsrand muss eine einfache, geschlossene Kurve $c(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ mit endlicher Länge sein, für die zusätzlich folgende Eigenschaften gelten:

$$c(0) = c(2\pi), c \in C^2([0, 2\pi]) \text{ und } c'(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi].$$

Im Folgenden wird für die Erklärung als Gebietsrand der Rand einer Ellipse verwendet. Für andere Ränder funktioniert das Vorgehen analog.

Für die Diskretisierung des Randes kann die Parameterform

$$c(\varphi) = \begin{pmatrix} a \cos(\varphi) \\ b \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad a, b \in \mathbb{R}_{>0}$$

gewählt werden. Die einzelnen Stützpunkte auf dem Rand lassen sich mit folgender Formel bestimmen (vgl. Abb. 2.1):

$$v_j = c(\varphi_j) = \begin{pmatrix} a \cos(\varphi_j) \\ b \sin(\varphi_j) \end{pmatrix} \text{ mit } \varphi_j = \frac{2\pi}{n}(j-1), \quad j = 1, \dots, n.$$

Nun unterteilt man den Rand der Ellipse in $n_s = \frac{n}{2}$ Segmente Δ_j .

Um die Notation im Folgenden zu vereinfachen, werden die Stützpunkte v_j in folgende Mengen unterteilt:

- Mittelpunkte \hat{v}_j , $j = 1, \dots, n_s$
- Endpunkte \tilde{v}_j , $j = 1, \dots, n_s$

2 Randintegralgleichung und ihre Diskretisierung

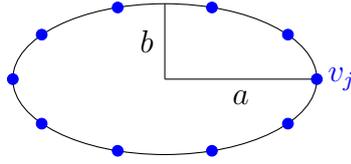


Abbildung 2.1: Verteilung der v_j auf dem Rand einer Ellipse

Ein Segment Δ_j (vgl. Abb. 2.2) startet somit im Endpunkt \tilde{v}_j verläuft durch den Mittelpunkt \hat{v}_j und endet im Endpunkt \tilde{v}_{j+1} , indem auch das nächste Segment beginnt. Hierbei muss man beachten, dass $v_{n+1} = v_1$ ist, also auch $\tilde{v}_{n_s+1} = \tilde{v}_1$.

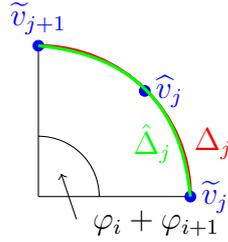


Abbildung 2.2: Ein Segment Δ_j mit Näherung $\hat{\Delta}_j$

Das Randintegral kann dann auch als Summe der Integrale über die Segmente Δ_j beschrieben werden und mittels der Segmentnäherung $\hat{\Delta}_j$ angenähert werden:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \Phi_k(x, y) \psi(y) \, ds(y) &= \sum_{j=1}^{n_s} \int_{\Delta_j} \Phi_k(x, y) \psi(y) \, ds(y) \\ &\approx \sum_{j=1}^{n_s} \int_{\hat{\Delta}_j} \Phi_k(x, y) \psi(y) \, ds(y). \end{aligned}$$

Die Integralnäherung kann mit der Funktion $g_j : \sigma = [0, 1] \rightarrow \hat{\Delta}_j$ auf ein Linienintegral über $[0, 1]$ transformiert werden, wodurch unter dem Integral zusätzlich eine Jacobi-Determinante $J_j(s)$ dazukommt:

$$\sum_{j=1}^{n_s} \int_{\hat{\Delta}_j} \Phi_k(x, y) \psi(y) \, ds(y) = \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_k(x, g_j(s)) \psi(g_j(s)) J_j(s) \, ds(s).$$

Dabei verknüpft g_j die einzelnen Stützpunkte eines Segmentes mit Lagrange-Polynomen:

$$g_j(s) = \sum_{i=1}^3 g_j(q_i) \ell_i(s) = v_j \ell_1(s) + v_{j+1} \ell_2(s) + v_{j+2} \ell_3(s)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } q_1 &= 0, & \ell_1(s) &= (1-s)(2(1-s)-1), \\ q_2 &= \frac{1}{2}, & \ell_2(s) &= 4s(1-s), \\ q_3 &= 1, & \ell_3(s) &= s(2s-1). \end{aligned}$$

Zusätzlich wird die Dichte ψ approximiert, wobei drei verschiedene Ansätze verfolgt werden:

a) konstante Interpolation:

$$\psi(g_j(s)) \approx \psi(\hat{v}_j)$$

b) lineare Interpolation:

$$\psi(g_j(s)) \approx (1-s)\psi(\tilde{v}_j) + s\psi(\tilde{v}_{j+1})$$

c) quadratische Interpolation:

$$\psi(g_j(s)) \approx (1-s)(2(1-s)-1)\psi(\tilde{v}_j) + 4s(1-s)\psi(\hat{v}_j) + s(2s-1)\psi(\tilde{v}_{j+1}).$$

Die Dichte ist hier in allen drei Fällen unabhängig von der Integrationsvariablen s . Die vollständige Randintegralgleichung für die drei verschiedenen Dichten lautet damit:

a) konstante Interpolation:

$$\sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_k(x, g_j(s)) J_j(s) ds(s) \psi(\hat{v}_j) \approx f(x),$$

b) lineare Interpolation:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_k(x, g_j(s)) (1-s) J_j(s) ds(s) \psi(\tilde{v}_j) \\ & + \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_k(x, g_j(s)) s J_j(s) ds(s) \psi(\tilde{v}_{j+1}) \approx f(x) \end{aligned}$$

mit $\tilde{v}_{n_s+1} = \tilde{v}_1$,

c) quadratische Interpolation:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_k(x, g_j(s)) (1-s)(2(1-s)-1) J_j(s) ds(s) \psi(\tilde{v}_j) \\ & + \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_k(x, g_j(s)) 4s(1-s) J_j(s) ds(s) \psi(\hat{v}_j) \\ & + \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_k(x, g_j(s)) s(2s-1) J_j(s) ds(s) \psi(\tilde{v}_{j+1}) \approx f(x) \end{aligned}$$

mit $\tilde{v}_{n_s+1} = \tilde{v}_1$.

2 Randintegralgleichung und ihre Diskretisierung

Die Jacobi-Determinante $J_j(s)$ kann mit Hilfe der Ableitung der Funktion g_j bestimmt werden:

$$J_j(s) = \|g'_j(s)\|_2 = \sqrt{[g'_{j,1}(s)]^2 + [g'_{j,2}(s)]^2}$$

$$\text{wobei } g'_{j,1}(s) = v_{j,1} \ell'_1(s) + v_{j+1,1} \ell'_2(s) + v_{j+2,1} \ell'_3(s)$$

$$\text{und } g'_{j,2}(s) = v_{j,2} \ell'_1(s) + v_{j+1,2} \ell'_2(s) + v_{j+2,2} \ell'_3(s)$$

$$\text{mit } \ell'_1(s) = (4s - 3),$$

$$\ell'_2(s) = 4(1 - 2s),$$

$$\ell'_3(s) = (4s - 1).$$

Für die verschiedenen Dichteapproximationen werden folgende Punkte als Kollokationspunkte betrachtet:

a) $\hat{v}_h, h = 1, \dots, n_s$

b) $\tilde{v}_h, h = 1, \dots, n_s$

c) $\hat{v}_h, h = 1, \dots, n_s$ und $\tilde{v}_h, h = 1, \dots, n_s$, d. h. $v_h, h = 1, \dots, n$

Fordert man nun Gleichheit in den Kollokationspunkten, erhält man für die Randintegralgleichung z. B. im Fall der konstanten Dichte

$$\sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_k(\hat{v}_h, g_j(s)) J_j(s) ds(s) \psi(\hat{v}_j) = f(\hat{v}_h).$$

Die Randintegralgleichung kann auch als lineares Gleichungssystem (kurz: LGS) aufgefasst werden. Da die Fundamentallösung $\Phi_k(\hat{v}_h, g_j(s))$ eine 2×2 Matrix ist, steht hinter jedem Eintrag in der Matrix A eine 2×2 Matrix. Die linearen Gleichungssysteme für die drei Dichten setzen sich wie folgt zusammen:

- für a): Mit Kollokationspunkt h und Gebietsabschnitt j ist

$$e_{h,j} = \begin{pmatrix} \int_0^1 \Phi_k^{11}(\hat{v}_h, g_j(s)) J_j(s) ds(s) & \int_0^1 \Phi_k^{12}(\hat{v}_h, g_j(s)) J_j(s) ds(s) \\ \int_0^1 \Phi_k^{21}(\hat{v}_h, g_j(s)) J_j(s) ds(s) & \int_0^1 \Phi_k^{22}(\hat{v}_h, g_j(s)) J_j(s) ds(s) \end{pmatrix}$$

und somit LGS:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & \cdots & e_{1,n_s} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & \cdots & e_{2,n_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n_s,1} & e_{n_s,2} & \cdots & e_{n_s,n_s} \end{pmatrix}}_{A \in \mathbb{C}^{2n_s \times 2n_s}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1(\hat{v}_1) \\ \psi_2(\hat{v}_1) \\ \psi_1(\hat{v}_2) \\ \psi_2(\hat{v}_2) \\ \vdots \end{pmatrix}}_{z \in \mathbb{C}^{2n_s}} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(\hat{v}_1) \\ f_2(\hat{v}_1) \\ f_1(\hat{v}_2) \\ f_2(\hat{v}_2) \\ \vdots \end{pmatrix}}_{d \in \mathbb{C}^{2n_s}} \quad (2.2)$$

- für b): Mit Kollokationspunkt h , Gebietsabschnitt j und Lagrange-Basis-Typ $i = \{1, 2\}$ mit $\ell_1(s) = (1 - s)$ und $\ell_2(s) = s$ ist

$$e_{h,j,i} = \begin{pmatrix} \int_0^1 \Phi_k^{11}(\tilde{v}_h, g_j(s)) \ell_i(s) J_j(s) ds(s) & \int_0^1 \Phi_k^{12}(\tilde{v}_h, g_j(s)) \ell_i(s) J_j(s) ds(s) \\ \int_0^1 \Phi_k^{21}(\tilde{v}_h, g_j(s)) \ell_i(s) J_j(s) ds(s) & \int_0^1 \Phi_k^{22}(\tilde{v}_h, g_j(s)) \ell_i(s) J_j(s) ds(s) \end{pmatrix}$$

Im LGS ändert sich die Matrix $A \in \mathbb{C}^{2n_s \times 2n_s}$:

$$A = \begin{pmatrix} e_{1,1,1} + e_{1,n_s,2} & e_{1,2,1} + e_{1,1,2} & \cdots & e_{1,n_s,1} + e_{1,n_s-1,2} \\ e_{2,1,1} + e_{2,n_s,2} & e_{2,2,1} + e_{2,1,2} & \cdots & e_{2,n_s,1} + e_{2,n_s-1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n_s,1,1} + e_{n_s,n_s,2} & e_{n_s,2,1} + e_{n_s,1,2} & \cdots & e_{n_s,n_s,1} + e_{n_s,n_s-1,2} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Im Vektor d und z werden nur die Kollokationspunkte \hat{v}_h durch \tilde{v}_h ersetzt.

- für c): Mit Kollokationspunkt h , Gebietsabschnitt j und Lagrange-Basis-Typ $i = \{1, 2, 3\}$ mit $\ell_1(s) = (1 - s)(2(1 - s) - 1)$, $\ell_2(s) = 4s(1 - s)$ und $\ell_3(s) = s(2s - 1)$ ist

$$e_{h,j,i} = \begin{pmatrix} \int_0^1 \Phi_k^{11}(v_h, g_j(s)) \ell_i(s) J_j(s) ds(s) & \int_0^1 \Phi_k^{12}(v_h, g_j(s)) \ell_i(s) J_j(s) ds(s) \\ \int_0^1 \Phi_k^{21}(v_h, g_j(s)) \ell_i(s) J_j(s) ds(s) & \int_0^1 \Phi_k^{22}(v_h, g_j(s)) \ell_i(s) J_j(s) ds(s) \end{pmatrix}$$

Da in diesen Fall n Kollokationspunkte verwendet werden, verändern sich die Dimensionen: $A \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, $b \in \mathbb{C}^{2n}$ und $z \in \mathbb{C}^{2n}$. Die Matrix A setzt sich hier wie folgt zusammen:

$$A = \begin{pmatrix} e_{1,1,1} + e_{1,n,3} & e_{1,1,2} & e_{1,2,1} + e_{1,1,3} & e_{1,2,2} & \cdots & e_{1,n,1} + e_{1,n-1,3} & e_{1,n,2} \\ e_{2,1,1} + e_{2,n,3} & e_{2,1,2} & e_{2,2,1} + e_{2,1,3} & e_{2,2,2} & \cdots & e_{2,n,1} + e_{2,n-1,3} & e_{2,n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ e_{n,1,1} + e_{n,n,3} & e_{n,1,2} & e_{n,2,1} + e_{n,1,3} & e_{n,2,2} & \cdots & e_{n,n,1} + e_{n,n-1,3} & e_{n,n,2} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Im Vektor d und z werden die Kollokationspunkte \hat{v}_h durch v_h ersetzt.

Die Dichte $\vec{\psi}$, d. h. die Dichte ψ in den Kollokationspunkten, kann durch das Lösen des linearen Gleichungssystems bestimmt werden.

Letztendlich kann dann das elastische Wellenfeld u z. B. im Fall der konstanten Dichte folgendermaßen bestimmt werden:

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_k(x, g_j(s)) J_j(s) ds(s) \psi(\hat{v}_j).$$

3 Statischer Fall

3.1 Einfachschichtpotentialansatz

Im statischen Fall ist der Kern der Integralgleichung die Fundamentallösung für den statischen Fall mit $\omega = 0$, d. h. die Gleichung lautet nach der Diskretisierung

a) für die konstante Interpolation der Dichte:

$$\sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_0(\hat{v}_h, g_j(s)) J_j(s) ds(s) \psi(\hat{v}_j) = f(\hat{v}_h), \quad h = 1, \dots, n_s,$$

b) für die lineare Interpolation der Dichte:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_0(\tilde{v}_h, g_j(s)) (1-s) J_j(s) ds(s) \psi(\tilde{v}_j) \\ & + \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_0(\tilde{v}_h, g_j(s)) s J_j(s) ds(s) \psi(\tilde{v}_{j+1}) = f(\tilde{v}_h), \quad h = 1, \dots, n_s \end{aligned}$$

mit $\tilde{v}_{n_s+1} = \tilde{v}_1$,

c) für die quadratische Interpolation der Dichte:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_0(v_h, g_j(s)) (1-s)(2(1-s)-1) J_j(s) ds(s) \psi(\tilde{v}_j) \\ & + \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_0(v_h, g_j(s)) 4s(1-s) J_j(s) ds(s) \psi(\hat{v}_j) \\ & + \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_0(v_h, g_j(s)) s(2s-1) J_j(s) ds(s) \psi(\tilde{v}_{j+1}) = f(v_h), \quad h = 1, \dots, n \end{aligned}$$

mit $\tilde{v}_{n_s+1} = \tilde{v}_1$.

Die Fundamentallösung lautet hierbei

$$\begin{aligned}
 \Phi_0(x, y) &= \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \ln \left(\frac{1}{\|x - y\|_2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &+ \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{\|x - y\|_2^2} \begin{pmatrix} (x_1 - y_1)^2 & (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \\ (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) & (x_2 - y_2)^2 \end{pmatrix} \\
 &= c_1 \ln \left(\frac{1}{\|x - y\|_2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &+ c_2 \frac{1}{\|x - y\|_2^2} \begin{pmatrix} (x_1 - y_1)^2 & (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \\ (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) & (x_2 - y_2)^2 \end{pmatrix} .
 \end{aligned}$$

Bevor das Gleichungssystem nach ψ aufgelöst werden kann, müssen die Integrale für h Zeilen und j Segmente bzw. Spalten berechnet und an passender Stelle in die Matrix A geschrieben werden.

Im Fall der konstanten Interpolation der Dichte muss das Integral

$$E = \int_0^1 \Phi_0(\hat{v}_h, g_j(s)) J_j(s) ds(s), \quad h = 1, \dots, n_s, \quad j = 1, \dots, n_s$$

berechnet werden, wobei aufgrund der 2×2 Matrizen in der Fundamentallösung vier Integrale E^{11} , E^{12} , E^{21} und E^{22} gelöst werden. Diese Integrale berechnen sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 E^{11} &= \int_0^1 \Phi_0^{11}(\hat{v}_h, g_j(s)) J_j(s) ds(s) \\
 &= \int_0^1 \left(c_1 \log \left(\frac{1}{\|\hat{v}_h - g_j(s)\|_2} \right) + c_2 \frac{(\hat{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))^2}{\|\hat{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right) J_j(s) ds(s), \\
 E^{12} &= \int_0^1 \Phi_0^{12}(\hat{v}_h, g_j(s)) J_j(s) ds(s) \\
 &= \int_0^1 c_2 \frac{(\hat{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))(\hat{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))}{\|\hat{v}_h - g_j(s)\|_2^2} J_j(s) ds(s), \\
 E^{21} &= \int_0^1 \Phi_0^{21}(\hat{v}_h, g_j(s)) J_j(s) ds(s) \\
 &= \int_0^1 c_2 \frac{(\hat{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))(\hat{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))}{\|\hat{v}_h - g_j(s)\|_2^2} J_j(s) ds(s), \\
 E^{22} &= \int_0^1 \Phi_0^{22}(\hat{v}_h, g_j(s)) J_j(s) ds(s) \\
 &= \int_0^1 \left(c_1 \log \left(\frac{1}{\|\hat{v}_h - g_j(s)\|_2} \right) + c_2 \frac{(\hat{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))^2}{\|\hat{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right) J_j(s) ds(s).
 \end{aligned}$$

Die Elemente E^{12} und E^{21} sind identisch und müssen daher nur einmal berechnet werden. Dies gilt auch bei der linearen und quadratischen Interpolation der Dichte.

Betrachtet man die lineare Interpolation müssen nun zwei verschiedene Integrale berechnet werden:

$$E_1 = \int_0^1 \Phi_0(\tilde{v}_h, g_j(s)) (1-s) J_j(s) ds(s) \text{ und } E_2 = \int_0^1 \Phi_0(\tilde{v}_h, g_j(s)) s J_j(s) ds(s).$$

Die Integrale unterscheiden sich nur durch die Lagrange-Funktionen, mit denen multipliziert wird. Sie unterscheiden sich vom Integral bei der konstanten Dichte nur durch die anderen Kollokationspunkte und die Lagrange-Funktionen. Insgesamt erhält man dann:

$$\begin{aligned} E_1^{11} &= \int_0^1 \Phi_0^{11}(\tilde{v}_h, g_j(s)) (1-s) J_j(s) ds(s) \\ &= \int_0^1 \left(c_1 \log \left(\frac{1}{\|\tilde{v}_h - g_j(s)\|_2} \right) + c_2 \frac{(\tilde{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))^2}{\|\tilde{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right) (1-s) J_j(s) ds(s), \\ E_1^{12} &= \int_0^1 \Phi_0^{12}(\tilde{v}_h, g_j(s)) (1-s) J_j(s) ds(s) \\ &= \int_0^1 \left(c_2 \frac{(\tilde{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))(\tilde{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))}{\|\tilde{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right) (1-s) J_j(s) ds(s), \\ E_1^{21} &= \int_0^1 \Phi_0^{21}(\tilde{v}_h, g_j(s)) (1-s) J_j(s) ds(s) \\ &= \int_0^1 \left(c_2 \frac{(\tilde{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))(\tilde{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))}{\|\tilde{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right) (1-s) J_j(s) ds(s), \\ E_1^{22} &= \int_0^1 \Phi_0^{22}(\tilde{v}_h, g_j(s)) (1-s) J_j(s) ds(s) \\ &= \int_0^1 \left(c_1 \log \left(\frac{1}{\|\tilde{v}_h - g_j(s)\|_2} \right) + c_2 \frac{(\tilde{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))^2}{\|\tilde{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right) (1-s) J_j(s) ds(s) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 E_2^{11} &= \int_0^1 \Phi_0^{11}(\tilde{v}_h, g_j(s)) s J_j(s) ds(s) \\
 &= \int_0^1 \left(c_1 \log \left(\frac{1}{\|\tilde{v}_h - g_j(s)\|_2} \right) + c_2 \frac{(\tilde{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))^2}{\|\tilde{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right) s J_j(s) ds(s), \\
 E_2^{12} &= \int_0^1 \Phi_0^{12}(\tilde{v}_h, g_j(s)) s J_j(s) ds(s) \\
 &= \int_0^1 \left(c_2 \frac{(\tilde{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))(\tilde{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))}{\|\tilde{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right) s J_j(s) ds(s), \\
 E_2^{21} &= \int_0^1 \Phi_0^{21}(\tilde{v}_h, g_j(s)) s J_j(s) ds(s) \\
 &= \int_0^1 \left(c_2 \frac{(\tilde{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))(\tilde{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))}{\|\tilde{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right) s J_j(s) ds(s), \\
 E_2^{22} &= \int_0^1 \Phi_0^{22}(\tilde{v}_h, g_j(s)) s J_j(s) ds(s) \\
 &= \int_0^1 \left(c_1 \log \left(\frac{1}{\|\tilde{v}_h - g_j(s)\|_2} \right) + c_2 \frac{(\tilde{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))^2}{\|\tilde{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right) s J_j(s) ds(s).
 \end{aligned}$$

Bei der quadratischen Interpolation werden dann drei verschiedene Integrale berechnet:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \int_0^1 \Phi_0(v_h, g_j(s)) (1-s)(2(1-s)-1) J_j(s) ds(s), \\
 E_2 &= \int_0^1 \Phi_0(v_h, g_j(s)) 4s(1-s) J_j(s) ds(s) \text{ und} \\
 E_3 &= \int_0^1 \Phi_0(v_h, g_j(s)) s(2s-1) J_j(s) ds(s).
 \end{aligned}$$

Die Integrale unterscheiden sich wieder nur durch die Lagrange-Funktionen, mit denen multipliziert wird. Für E_i , $i = 1, \dots, 3$ erhält man folgende Berechnungsvorschrift, wobei $\ell_i(s)$ für die jeweilige Lagrange-Funktion steht, d. h. $\ell_1(s) = (1-s)(2(1-s)-1)$, $\ell_2(s) = 4s(1-s)$ und $\ell_3(s) = s(2s-1)$:

$$\begin{aligned}
 E_i^{11} &= \int_0^1 \Phi_0^{11}(v_h, g_j(s)) \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s) \\
 &= \int_0^1 \left(c_1 \log \left(\frac{1}{\|v_h - g_j(s)\|_2} \right) + c_2 \frac{(v_{h,1} - g_{j,1}(s))^2}{\|v_h - g_j(s)\|_2^2} \right) \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s), \\
 E_i^{12} &= \int_0^1 \Phi_0^{12}(v_h, g_j(s)) \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s) \\
 &= \int_0^1 \left(c_2 \frac{(v_{h,1} - g_{j,1}(s))(v_{h,2} - g_{j,2}(s))}{\|v_h - g_j(s)\|_2^2} \right) \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s), \\
 E_i^{21} &= \int_0^1 \Phi_0^{21}(v_h, g_j(s)) \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s) \\
 &= \int_0^1 \left(c_2 \frac{(v_{h,1} - g_{j,1}(s))(v_{h,2} - g_{j,2}(s))}{\|v_h - g_j(s)\|_2^2} \right) \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s), \\
 E_i^{22} &= \int_0^1 \Phi_0^{22}(v_h, g_j(s)) \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s) \\
 &= \int_0^1 \left(c_1 \log \left(\frac{1}{\|v_h - g_j(s)\|_2} \right) + c_2 \frac{(v_{h,2} - g_{j,2}(s))^2}{\|v_h - g_j(s)\|_2^2} \right) \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s).
 \end{aligned}$$

3.2 Doppelschichtpotentialansatz

Als Alternative zum Einfachschichtpotentialansatz kann man das Randwertproblem mit einem Doppelschichtpotentialansatz lösen und erhält diese Randintegralgleichung:

$$(D_0\psi)(x) = \int_{\partial\Omega} [T_y(\Phi_0(x, y))]^\top \psi(y) \, ds(y).$$

Der Traktionsoperator T wird beschrieben durch

$$T_y(f) = \lambda \operatorname{div}(f) \nu + 2\mu (\nu^\top \operatorname{grad}) f + \mu \operatorname{div}(Qf) Q \nu$$

mit ν normierter, nach außen gerichteter Normalenvektor auf ∂D und $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Nach der Diskretisierung erhält man in diesem Fall:

a) für die konstante Interpolation der Dichte:

$$\sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 [T_y(\Phi_0(\hat{v}_h, g_j(s)))]^\top J_j(s) \, ds(s) \psi(\hat{v}_j) = f(\hat{v}_h), \quad h = 1, \dots, n_s,$$

b) für die lineare Interpolation der Dichte:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 [T_y(\Phi_0(\tilde{v}_h, g_j(s)))]^\top (1-s) J_j(s) ds(s) \psi(\tilde{v}_j) \\ & + \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 [T_y(\Phi_0(\tilde{v}_h, g_j(s)))]^\top s J_j(s) ds(s) \psi(\tilde{v}_{j+1}) = f(\tilde{v}_h), \quad h = 1, \dots, n_s \end{aligned}$$

mit $\tilde{v}_{n_s+1} = \tilde{v}_1$,

c) für die quadratische Interpolation der Dichte:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 [T_y(\Phi_0(v_h, g_j(s)))]^\top (1-s)(2(1-s)-1) J_j(s) ds(s) \psi(\tilde{v}_j) \\ & + \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 [T_y(\Phi_0(v_h, g_j(s)))]^\top 4s(1-s) J_j(s) ds(s) \psi(\hat{v}_j) \\ & + \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 [T_y(\Phi_0(v_h, g_j(s)))]^\top s(2s-1) J_j(s) ds(s) \psi(\tilde{v}_{j+1}) = f(v_h), \quad h = 1, \dots, n \end{aligned}$$

mit $\tilde{v}_{n_s+1} = \tilde{v}_1$.

Zur Bestimmung der Näherungen der im Vektor z gespeicherten Dichten ψ muss in diesem Fall allerdings das Gleichungssystem

$$\left(\pm \frac{1}{2} I + A \right) z = d$$

gelöst werden. Hierbei benötigt man $-\frac{1}{2}I$, wenn man sich beim Aufstellen der Randintegralgleichung dem Rand von D von Innen her nähert und $\frac{1}{2}I$ wenn man sich von Außen nähert. Im Folgenden wird jedoch nur der erste Fall mit $-\frac{1}{2}I$ betrachtet.

Wendet man den Traktionsoperator spaltenweise auf die Fundamentallösung an, erhält man:

$$T_y(\Phi_0(x, y)) = \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} T_y(\Psi(x, y)I) + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} T_y(P(x - y)).$$

Die Rechenregeln zur Berechnung von $T_y(\Phi_0(x, y))$ wurden in der Arbeit von A.-C. Weger ausführlich dargestellt und bewiesen, vgl. [9, S. 25–28] wobei dort das dyadische Produkt (s. Gleichung (2.1)) mit $J(x - y)$ statt $P(x - y)$ bezeichnet wird. Daher werden hier nur die Rechenregeln und die abschließende Berechnung von $T_y(\Phi_0(x, y))$ aufgeführt.

Regel 1 Für eine stetig differenzierbare Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} & T_x(f(\|x - y\|_2)I) \\ & = \frac{f'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} [\lambda\nu(x)(x - y)^\top + \mu(x - y)\nu(x)^\top + \mu\nu(x)^\top(x - y)I] \\ & = \frac{f'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} U_1(x, y). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Regel 2 Für $x \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$T(x \cdot x^\top) = 3\lambda \nu(x) \cdot x^\top + 2\mu \nu(x) \cdot x^\top + \mu x \cdot \nu(x)^\top + \mu \nu(x)^\top x I . \quad (3.2)$$

Nun kann $T_y(\Psi(\|x - y\|_2)I)$ mit Hilfe der ersten Regel bestimmt werden, da

$$\Psi(r) = \ln \left(\frac{1}{r} \right)$$

stetig differenzierbar ist mit

$$\Psi'(r) = -\frac{1}{r} .$$

Man erhält:

$$\begin{aligned} T_y(\Psi(\|x - y\|_2)I) &= \frac{\Psi'(\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} U_1(y, x) \\ &= -\frac{1}{\|x - y\|_2^2} [\lambda \nu(y)(y - x)^\top + \mu(y - x)\nu(y)^\top + \mu \nu(y)^\top (y - x)I] . \end{aligned}$$

Um $T_y(P(x - y))$ berechnen zu können, muss die Produktregel des Traktionsoperators für eine Funktion f und eine Matrix M angewendet werden:

$$T(fM) = T(fI)M + fT(M) .$$

Im Fall des dyadischen Produktes gilt

$$f = \frac{1}{\|x - y\|_2^2} \quad \text{und} \quad M = (x - y)(x - y)^\top = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \alpha = x_1 - y_1, \beta = x_2 - y_2 \text{ und } \|x - y\|_2^2 = \alpha^2 + \beta^2 .$$

$T_x(fI)$ kann mit Hilfe der ersten Regel und der Ableitung von f

$$f(r) = \frac{1}{r^2}, \quad f'(r) = -\frac{2}{r^3}$$

bestimmt werden:

$$\begin{aligned} T_x \left(\frac{1}{\|x - y\|_2^2} I \right) &= -\frac{2}{\|x - y\|_2^3} \frac{1}{\|x - y\|_2} U_1(x, y) \\ &= -\frac{2}{\|x - y\|_2^4} [\lambda \nu(x)(x - y)^\top + \mu(x - y)\nu(x)^\top + \mu \nu(x)^\top (x - y)I] . \end{aligned}$$

Wendet man die zweite Regel auf $T(M)$ an, folgt:

$$T_x((x - y)(x - y)^\top) = 3\lambda \nu(x)(x - y)^\top + 2\mu \nu(x)(x - y)^\top + \mu(x - y)\nu(x)^\top + \mu \nu(x)^\top (x - y)I .$$

Insgesamt gilt für $T_x(P(x-y))$ somit:

$$\begin{aligned} T_x(P(x-y)) &= -\frac{2}{\|x-y\|_2^4} U_1(x,y) (x-y)(x-y)^\top \\ &\quad + \frac{1}{\|x-y\|_2^2} [3\lambda\nu(x)(x-y)^\top + 2\mu\nu(x)(x-y)^\top \\ &\quad + \mu(x-y)\nu(x)^\top + \mu\nu(x)^\top(x-y)I] . \end{aligned}$$

Bringt man beide Teile nun noch auf den gleichen Nenner (vgl. [9, S. 30]), erhält man:

$$\begin{aligned} T_x(P(x-y)) &= \frac{1}{\|x-y\|_2^2} [(\lambda+2\mu)\nu(x)(x-y)^\top + \mu(x-y)\nu(x)^\top \\ &\quad + \mu\nu(x)^\top(x-y)(I-4P(x-y))] \\ &= \frac{1}{\|x-y\|_2^2} U_2(x,y) . \end{aligned}$$

Die Rechenvorschriften für $T_y(\Psi(\|x-y\|_2)I)$ und $T_y(P(x-y))$ können zur Rechenvorschrift für $T_y(\Phi_0(x,y))$ zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} T_y(\Phi_0(x,y)) &= \frac{\lambda+3\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)} T_y(\Psi(x,y)I) + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)} T_y(P(x-y)) \\ &= \frac{1}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)} \left(-\frac{\lambda+3\mu}{\|x-y\|_2^2} [\lambda\nu(y)(y-x)^\top + \mu(y-x)\nu(y)^\top \right. \\ &\quad + \mu\nu(y)^\top(y-x)I] + \frac{\lambda+\mu}{\|x-y\|_2^2} [(\lambda+2\mu)\nu(y)(y-x)^\top \\ &\quad \left. + \mu(y-x)\nu(y)^\top + \mu\nu(y)^\top(y-x)(I-4P(x-y))] \right) \end{aligned}$$

Kürzt man die Terme und fasst sie zusammen, so erhält man:

$$\begin{aligned} T_y(\Phi_0(x,y)) &= \frac{1}{2\pi(\lambda+2\mu)\|x-y\|_2^2} [\mu\nu(y)(y-x)^\top - \mu(y-x)\nu(y)^\top \\ &\quad - \mu\nu(y)^\top(y-x)I - 2(\lambda+\mu)\nu(y)^\top(y-x)P(x-y)] . \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass folgende Gleichung gilt (Beweis: [9, S. 32]), wobei θ dem Tangentenvektor auf dem Rand ∂D entspricht:

$$\nu(y)(y-x)^\top - (y-x)\nu(y)^\top = \theta(y)^\top(y-x)Q \quad \text{mit} \quad \nu = Q\theta = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ -\theta_1 \end{pmatrix} .$$

Setzt man diese Gleichung in der Rechnung von $T_y(\Phi_0(x,y))$ ein, erhält man:

$$\begin{aligned} T_y(\Phi_0(x,y)) &= \frac{1}{2\pi(\lambda+2\mu)\|x-y\|_2^2} [\mu\theta(y)^\top(y-x)Q - \mu\nu(y)^\top(y-x)I \\ &\quad - 2(\lambda+\mu)\nu(y)^\top(y-x)P(x-y)] . \end{aligned}$$

Die Normalenableitung $\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial \nu(y)}$ und die Tangentenableitung $\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial \theta(y)}$ von $\Psi(x, y)$ können mit Hilfe der Ableitungen von $g_j(s)$ und der Jacobi-Determinante J_j berechnet werden, wobei

$$J_j(s) = \|g'_j(s)\|_2 = \sqrt{[g'_{j,1}(s)]^2 + [g'_{j,2}(s)]^2}.$$

Man erhält dann als Formeln für die Ableitungen:

$$\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial \nu(y)} = - \frac{(x_1 - y_1) \frac{g'_{j,2}(s)}{J_j} + (x_2 - y_2) \frac{-g'_{j,1}(s)}{J_j}}{\|x - y\|_2^2}$$

und

$$\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial \theta(y)} = - \frac{(x_1 - y_1) \frac{g'_{j,1}(s)}{J_j} + (x_2 - y_2) \frac{g'_{j,2}(s)}{J_j}}{\|x - y\|_2^2}.$$

Somit ergibt sich $T_y(\Phi_0(x, y))$ insgesamt als:

$$T_y(\Phi_0(x, y)) = \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \left([\mu I + 2(\lambda + \mu)P(x - y)] \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \mu Q \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial \theta(y)} \right).$$

Um die Integralgleichung zu lösen, benötigt man allerdings die Transponierte von $T_y(\Phi_0(x, y))$. Beachtet man, dass die Transponierte einer Summe der Summe der einzelnen Transponierten entspricht und dass es sich bei den Normalen- und Tangentenableitungen um skalare Werte handelt, erhält man:

$$[T_y(\Phi_0(x, y))]^\top = \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \left([\mu I^\top + 2(\lambda + \mu)P(x - y)^\top] \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \mu Q^\top \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial \theta(y)} \right).$$

Die Einheitsmatrix I und das dyadische Produkt $P(x - y)$ sind symmetrische Matrizen, daher müssen diese nicht transponiert werden und bei der Matrix Q gilt:

$$Q^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -Q.$$

Abschließend erhält man damit:

$$\begin{aligned} [T_y(\Phi_0(x, y))]^\top &= \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \left([\mu I + 2(\lambda + \mu)P(x - y)] \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial \nu(y)} + \mu Q \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial \theta(y)} \right) \\ &= c_3 \left([\mu I + 2(\lambda + \mu)P(x - y)] \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial \nu(y)} + \mu Q \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial \theta(y)} \right). \end{aligned}$$

Im Fall der konstanten Interpolation der Dichte berechnen sich die vier Integrale dann

folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 E^{11} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0^{11}(\hat{v}_h, g_j(s)))]^\top J_j(s) \, ds(s) \\
 &= \int_0^1 c_3 \left(\left[\mu + 2(\lambda + \mu) \frac{(\hat{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))^2}{\|\hat{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right] \frac{\partial \Psi(\hat{v}_h, g_j(s))}{\partial \nu(g_j(s))} \right) J_j(s) \, ds(s), \\
 E^{12} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0^{12}(\hat{v}_h, g_j(s)))]^\top J_j(s) \, ds(s) \\
 &= \int_0^1 c_3 \left(\left[2(\lambda + \mu) \frac{(\hat{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))(\hat{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))}{\|\hat{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right] \frac{\partial \Psi(\hat{v}_h, g_j(s))}{\partial \nu(g_j(s))} \right. \\
 &\quad \left. + \mu \frac{\partial \Psi(\hat{v}_h, g_j(s))}{\partial \theta(g_j(s))} \right) J_j(s) \, ds(s), \\
 E^{21} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0^{21}(\hat{v}_h, g_j(s)))]^\top J_j(s) \, ds(s) \\
 &= \int_0^1 c_3 \left(\left[2(\lambda + \mu) \frac{(\hat{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))(\hat{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))}{\|\hat{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right] \frac{\partial \Psi(\hat{v}_h, g_j(s))}{\partial \nu(g_j(s))} \right. \\
 &\quad \left. - \mu \frac{\partial \Psi(\hat{v}_h, g_j(s))}{\partial \theta(g_j(s))} \right) J_j(s) \, ds(s), \\
 E^{22} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0^{22}(\hat{v}_h, g_j(s)))]^\top J_j(s) \, ds(s) \\
 &= \int_0^1 c_3 \left(\left[\mu + 2(\lambda + \mu) \frac{(\hat{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))^2}{\|\hat{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right] \frac{\partial \Psi(\hat{v}_h, g_j(s))}{\partial \nu(g_j(s))} \right) J_j(s) \, ds(s).
 \end{aligned}$$

Betrachtet man die lineare Interpolation, müssen nun zwei verschiedene Integrale berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0(\tilde{v}_h, g_j(s)))]^\top (1-s) J_j(s) \, ds(s) \text{ und} \\
 E_2 &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0(\tilde{v}_h, g_j(s)))]^\top s J_j(s) \, ds(s).
 \end{aligned}$$

Die Integrale unterscheiden sich nur durch die Lagrange-Funktionen, mit denen multipliziert wird. Für E_i , $i = \{1, 2\}$, erhält man folgende Berechnungsvorschrift, wobei $\ell_i(s)$

für die jeweilige Lagrange-Funktion steht, d. h. $\ell_1(s) = (1 - s)$ und $\ell_2(s) = s$:

$$\begin{aligned}
 E_i^{11} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0^{11}(\tilde{v}_h, g_j(s)))]^\top \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s) \\
 &= \int_0^1 c_3 \left(\left[\mu + 2(\lambda + \mu) \frac{(\tilde{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))^2}{\|\tilde{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right] \frac{\partial \Psi(\tilde{v}_h, g_j(s))}{\partial \nu(g_j(s))} \right) \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s), \\
 E_i^{12} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0^{12}(\tilde{v}_h, g_j(s)))]^\top \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s) \\
 &= \int_0^1 c_3 \left(\left[2(\lambda + \mu) \frac{(\tilde{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))(\tilde{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))}{\|\tilde{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right] \frac{\partial \Psi(\tilde{v}_h, g_j(s))}{\partial \nu(g_j(s))} \right. \\
 &\quad \left. + \mu \frac{\partial \Psi(\tilde{v}_h, g_j(s))}{\partial \theta(g_j(s))} \right) \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s), \\
 E_i^{21} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0^{21}(\tilde{v}_h, g_j(s)))]^\top \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s) \\
 &= \int_0^1 c_3 \left(\left[2(\lambda + \mu) \frac{(\tilde{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))(\tilde{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))}{\|\tilde{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right] \frac{\partial \Psi(\tilde{v}_h, g_j(s))}{\partial \nu(g_j(s))} \right. \\
 &\quad \left. - \mu \frac{\partial \Psi(\tilde{v}_h, g_j(s))}{\partial \theta(g_j(s))} \right) \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s), \\
 E_i^{22} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0^{22}(\tilde{v}_h, g_j(s)))]^\top \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s) \\
 &= \int_0^1 c_3 \left(\left[\mu + 2(\lambda + \mu) \frac{(\tilde{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))^2}{\|\tilde{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right] \frac{\partial \Psi(\tilde{v}_h, g_j(s))}{\partial \nu(g_j(s))} \right) \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s).
 \end{aligned}$$

Bei der quadratischen Interpolation werden dann drei verschiedene Integrale berechnet:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0(v_h, g_j(s)))]^\top (1 - s)(2(1 - s) - 1) J_j(s) \, ds(s), \\
 E_2 &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0(v_h, g_j(s)))]^\top 4s(1 - s) J_j(s) \, ds(s) \text{ und} \\
 E_3 &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0(v_h, g_j(s)))]^\top s(2s - 1) J_j(s) \, ds(s).
 \end{aligned}$$

Die Integrale unterscheiden sich wieder nur durch die Lagrange-Funktionen, mit denen multipliziert wird. Für E_i , $i = \{1, 2, 3\}$, erhält man folgende Berechnungsvorschrift, wobei $\ell_i(s)$ für die jeweilige Lagrange-Funktion steht, d. h. $\ell_1(s) = (1 - s)(2(1 - s) - 1)$,

3 Statischer Fall

$\ell_2(s) = 4s(1 - s)$ und $\ell_3(s) = s(2s - 1)$:

$$\begin{aligned}
E_i^{11} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0^{11}(v_h, g_j(s)))]^\top \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s) \\
&= \int_0^1 c_3 \left(\left[\mu + 2(\lambda + \mu) \frac{(v_{h,1} - g_{j,1}(s))^2}{\|v_h - g_j(s)\|_2^2} \right] \frac{\partial \Psi(v_h, g_j(s))}{\partial \nu(g_j(s))} \right) \ell_i J_j(s) \, ds(s), \\
E_i^{12} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0^{12}(v_h, g_j(s)))]^\top \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s) \\
&= \int_0^1 c_3 \left(\left[2(\lambda + \mu) \frac{(v_{h,1} - g_{j,1}(s))(v_{h,2} - g_{j,2}(s))}{\|v_h - g_j(s)\|_2^2} \right] \frac{\partial \Psi(v_h, g_j(s))}{\partial \nu(g_j(s))} \right. \\
&\quad \left. + \mu \frac{\partial \Psi(v_h, g_j(s))}{\partial \theta(g_j(s))} \right) \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s), \\
E_i^{21} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0^{21}(v_h, g_j(s)))]^\top \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s) \\
&= \int_0^1 c_3 \left(\left[2(\lambda + \mu) \frac{(v_{h,1} - g_{j,1}(s))(v_{h,2} - g_{j,2}(s))}{\|v_h - g_j(s)\|_2^2} \right] \frac{\partial \Psi(v_h, g_j(s))}{\partial \nu(g_j(s))} \right. \\
&\quad \left. - \mu \frac{\partial \Psi(v_h, g_j(s))}{\partial \theta(g_j(s))} \right) \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s), \\
E_i^{22} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_0^{22}(v_h, g_j(s)))]^\top \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s) \\
&= \int_0^1 c_3 \left(\left[\mu + 2(\lambda + \mu) \frac{(v_{h,2} - g_{j,2}(s))^2}{\|v_h - g_j(s)\|_2^2} \right] \frac{\partial \Psi(v_h, g_j(s))}{\partial \nu(g_j(s))} \right) \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s).
\end{aligned}$$

4 Dynamischer Fall

Beim dynamischen Fall kommt zusätzlich zum statischen Fall ein weiterer Term zum Differentialoperator hinzu, der nun wie folgt aussieht:

$$L(u) = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \omega^2 \rho u.$$

Die Fundamentallösung lautet hierbei:

$$\begin{aligned} \Phi_\omega(x, y) &= \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_s \|x - y\|_2) I \\ &+ \frac{i}{4\omega^2} \operatorname{grad}_x \operatorname{grad}_x^\top [H_0^{(1)}(k_s \|x - y\|_2) - H_0^{(1)}(k_p \|x - y\|_2)] \end{aligned}$$

Die Funktion $H_0^{(1)}$ ist die Hankel-Funktion 1. Art der Ordnung 0, k_s und k_p sind die Wellenzahlen und I ist wieder die 2×2 Einheitsmatrix. Die Wellenzahlen wurden durch folgende Formeln beschrieben:

$$k_s^2 = \frac{\omega^2}{\mu} \quad \text{und} \quad k_p^2 = \frac{\omega^2}{\lambda + 2\mu}$$

Zunächst wird nun bei der Darstellung der Fundamentallösung $\Phi_\omega(x, y)$ die Anwendung der Gradienten genauer untersucht und vereinfacht dargestellt.

Die doppelte Anwendung des Gradienten kann als Matrix dargestellt werden

$$\operatorname{grad}_x \operatorname{grad}_x^\top = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix},$$

sodass die Multiplikation mit der Differenz der Hankel-Funktionen als Matrixmultiplikation ausgedrückt und im Folgenden das Ergebnis als Matrix G bezeichnet werden kann:

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} [H_0^{(1)}(k_s \|x - y\|_2) - H_0^{(1)}(k_p \|x - y\|_2)]. \quad (4.1)$$

Für die Ableitungen der Hankel-Funktion $H_0^{(1)}$ nach x_1 und x_2 erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} H_0^{(1)}(k \|x - y\|_2) &= - \frac{k(x_1 - y_1) H_1^{(1)}(k \|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2} \quad \text{und} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} H_0^{(1)}(k \|x - y\|_2) &= - \frac{k(x_2 - y_2) H_1^{(1)}(k \|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2}, \end{aligned}$$

4 Dynamischer Fall

wobei $H_1^{(1)}$ die Hankel-Funktion 1. Art der Ordnung 1 ist.
Mit Hilfe der Produktregel

$$(p_1 \cdot p_2)' = p_1' \cdot p_2 + p_1 \cdot p_2'$$

und der Quotientenregel

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)' = \frac{p_1' \cdot p_2 - p_1 \cdot p_2'}{p_2^2}$$

können die zweiten Ableitungen bestimmt werden, wobei zur vereinfachten Notation $r = \|x - y\|_2$ verwendet wird.

Für die zweite Ableitung nach x_1 erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} H_0^{(1)}(kr) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{k(x_1 - y_1) H_1^{(1)}(kr)}{r} \right) \\ &= \frac{k}{r} \left(-H_1^{(1)}(kr) - \frac{(x_1 - y_1)^2}{r} \left(kH_0^{(1)}(kr) - \frac{H_1^{(1)}(kr)}{r} \right) \right) \\ &\quad + k \frac{(x_1 - y_1)^2}{r^3} H_1^{(1)}(kr) \\ &= \frac{2k(x_1 - y_1)^2 H_1^{(1)}(kr)}{r^3} - \frac{k^2(x_1 - y_1)^2 H_0^{(1)}(kr)}{r^2} - \frac{kH_1^{(1)}(kr)}{r} \end{aligned}$$

und analog für die zweite Ableitung nach x_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} H_0^{(1)}(kr) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{k(x_2 - y_2) H_1^{(1)}(kr)}{r} \right) \\ &= \frac{2k(x_2 - y_2)^2 H_1^{(1)}(kr)}{r^3} - \frac{k^2(x_2 - y_2)^2 H_0^{(1)}(kr)}{r^2} - \frac{kH_1^{(1)}(kr)}{r}. \end{aligned}$$

Bei den gemischten Ableitungen erhält man unabhängig von der Differenzierungsreihenfolge dasselbe Ergebnis :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} H_0^{(1)}(kr) \right) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{k(x_1 - y_1) H_1^{(1)}(kr)}{r} \right) \\ &= -\frac{k(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)(kH_0^{(1)}(kr) - H_1^{(1)}(kr)\frac{1}{r})}{r^2} \\ &\quad + \frac{k(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)H_1^{(1)}(kr)}{r^3} \\ &= \frac{2k(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)H_1^{(1)}(kr)}{r^3} - \frac{k^2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)H_0^{(1)}(kr)}{r^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{k(x_2 - y_2) H_1^{(1)}(kr)}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} H_0^{(1)}(kr) \right). \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhält man damit für die Matrix G (vgl. Gleichung (4.1)) diese Einträge:

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} + \frac{(x_1 - y_1)^2 [k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r)]}{r^2} \\
&+ \frac{2(x_1 - y_1)^2 [k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r)]}{r^3}, \\
g_{12} = g_{21} &= \frac{(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) [k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r)]}{r^2} \\
&+ \frac{2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) [k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r)]}{r^3}, \\
g_{22} &= \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} + \frac{(x_2 - y_2)^2 [k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r)]}{r^2} \\
&+ \frac{2(x_2 - y_2)^2 [k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r)]}{r^3}.
\end{aligned}$$

Zusätzlich kann die Matrix G mit Hilfe des dyadischen Produktes (s. Gleichung (2.1))

$$P(x - y) = \frac{1}{\|x - y\|_2^2} \begin{pmatrix} (x_1 - y_1)^2 & (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \\ (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) & (x_2 - y_2)^2 \end{pmatrix}$$

und der Einheitsmatrix I weiter vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
G &= \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} I \\
&+ \left(k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) + \frac{2 \left(k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r) \right)}{r} \right) P(x - y).
\end{aligned}$$

Abschließend kann die Funktion $\Phi_\omega(x, y)$ mit $r = \|x - y\|_2$ wie folgt zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}
\Phi_\omega(x, y) &= \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_s r) I + \frac{i}{4\omega^2} \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} I \\
&+ \frac{i}{4\omega^2} \left[k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) \right] P(x - y) \\
&+ \frac{i}{2\omega^2 r} \left[k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r) \right] P(x - y) \\
&= \tilde{\Phi}_1(r) I + \tilde{\Phi}_2(r) P(x - y). \tag{4.2}
\end{aligned}$$

4.1 Einfachschichtpotentialansatz

Im dynamischen Fall lautet die Gleichung nach der Diskretisierung:

a) für die konstante Interpolation der Dichte:

$$\sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_\omega(\hat{v}_h, g_j(s)) J_j(s) ds(s) \psi(\hat{v}_j) = f(\hat{v}_h), \quad h = 1, \dots, n_s,$$

b) für die lineare Interpolation der Dichte:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_\omega(\tilde{v}_h, g_j(s)) (1-s) J_j(s) ds(s) \psi(\tilde{v}_j) \\ & + \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_\omega(\tilde{v}_h, g_j(s)) s J_j(s) ds(s) \psi(\tilde{v}_{j+1}) = f(\tilde{v}_h), \quad h = 1, \dots, n_s \end{aligned}$$

mit $\tilde{v}_{n_s+1} = \tilde{v}_1$,

c) für die quadratische Interpolation der Dichte:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_\omega(v_h, g_j(s)) (1-s)(2(1-s)-1) J_j(s) ds(s) \psi(\tilde{v}_j) \\ & + \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_\omega(v_h, g_j(s)) 4s(1-s) J_j(s) ds(s) \psi(\hat{v}_j) \\ & + \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 \Phi_\omega(v_h, g_j(s)) s(2s-1) J_j(s) ds(s) \psi(\tilde{v}_{j+1}) = f(v_h), \quad h = 1, \dots, n \end{aligned}$$

mit $\tilde{v}_{n_s+1} = \tilde{v}_1$.

Bevor das Gleichungssystem nach ψ aufgelöst werden kann, müssen die Integrale berechnet und an passender Stelle in die Matrix A geschrieben werden.

Im Fall der konstanten Dichte muss das Integral

$$E = \int_0^1 \Phi_\omega(\hat{v}_h, g_j(s)) J_j(s) ds(s), \quad h = 1, \dots, n_s, \quad j = 1, \dots, n_s$$

berechnet werden, wobei aufgrund der 2×2 Matrix in der Fundamentallösung vier Integrale E^{11} , E^{12} , E^{21} und E^{22} gelöst werden. Diese vier Integrale bestimmen sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 E^{11} &= \int_0^1 \Phi_\omega^{11}(\hat{v}_h, g_j(s)) J_j(s) \, ds(s) \\
 &= \int_0^1 \left[\tilde{\Phi}_1(\hat{v}_h, g_j(s)) + \tilde{\Phi}_2(\hat{v}_h, g_j(s)) \frac{(\hat{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))^2}{\|\hat{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right] J_j(s) \, ds(s), \\
 E^{12} &= \int_0^1 \Phi_\omega^{12}(\hat{v}_h, g_j(s)) J_j(s) \, ds(s) \\
 &= \int_0^1 \left[\tilde{\Phi}_2(\hat{v}_h, g_j(s)) \frac{(\hat{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))(\hat{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))}{\|\hat{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right] J_j(s) \, ds(s), \\
 E^{21} &= \int_0^1 \Phi_\omega^{21}(\hat{v}_h, g_j(s)) J_j(s) \, ds(s) \\
 &= \int_0^1 \left[\tilde{\Phi}_2(\hat{v}_h, g_j(s)) \frac{(\hat{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))(\hat{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))}{\|\hat{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right] J_j(s) \, ds(s), \\
 E^{22} &= \int_0^1 \Phi_\omega^{22}(\hat{v}_h, g_j(s)) J_j(s) \, ds(s) \\
 &= \int_0^1 \left[\tilde{\Phi}_1(\hat{v}_h, g_j(s)) + \tilde{\Phi}_2(\hat{v}_h, g_j(s)) \frac{(\hat{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))^2}{\|\hat{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right] J_j(s) \, ds(s).
 \end{aligned}$$

Die Elemente E^{12} und E^{21} sind identisch und müssen daher nur einmal berechnet werden. Dies gilt auch im Fall der linearen und quadratischen Interpolation der Dichte.

Bei der linearen Dichte müssen nun die zwei Integrale

$$E_1 = \int_0^1 \Phi_\omega(\tilde{v}_h, g_j(s)) (1-s) J_j(s) \, ds(s) \text{ und } E_2 = \int_0^1 \Phi_\omega(\tilde{v}_h, g_j(s)) s J_j(s) \, ds(s)$$

berechnet werden.

Die Integrale unterscheiden sich nur durch die Lagrange-Funktionen, mit denen multipliziert wird. Für E_i , $i = \{1, 2\}$, erhält man folgende Berechnungsvorschrift, wobei $\ell_i(s)$ für die jeweilige Lagrange-Funktion steht, d. h. $\ell_1(s) = (1-s)$ und $\ell_2(s) = s$:

$$\begin{aligned}
E_i^{11} &= \int_0^1 \Phi_\omega^{11}(\tilde{v}_h, g_j(s)) \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s) \\
&= \int_0^1 \left[\tilde{\Phi}_1(\tilde{v}_h, g_j(s)) + \tilde{\Phi}_2(\tilde{v}_h, g_j(s)) \frac{(\tilde{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))^2}{\|\tilde{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right] \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s), \\
E_i^{12} &= \int_0^1 \Phi_\omega^{12}(\tilde{v}_h, g_j(s)) \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s) \\
&= \int_0^1 \left[\tilde{\Phi}_2(\tilde{v}_h, g_j(s)) \frac{(\tilde{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))(\tilde{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))}{\|\tilde{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right] \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s), \\
E_i^{21} &= \int_0^1 \Phi_\omega^{21}(\tilde{v}_h, g_j(s)) \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s) \\
&= \int_0^1 \left[\tilde{\Phi}_2(\tilde{v}_h, g_j(s)) \frac{(\tilde{v}_{h,1} - g_{j,1}(s))(\tilde{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))}{\|\tilde{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right] \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s), \\
E_i^{22} &= \int_0^1 \Phi_\omega^{22}(\tilde{v}_h, g_j(s)) \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s) \\
&= \int_0^1 \left[\tilde{\Phi}_1(\tilde{v}_h, g_j(s)) + \tilde{\Phi}_2(\tilde{v}_h, g_j(s)) \frac{(\tilde{v}_{h,2} - g_{j,2}(s))^2}{\|\tilde{v}_h - g_j(s)\|_2^2} \right] \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s).
\end{aligned}$$

Bei der quadratischen Interpolation werden dann drei verschiedene Integrale berechnet:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \int_0^1 \Phi_\omega(v_h, g_j(s)) (1-s)(2(1-s)-1) J_j(s) \, ds(s), \\
E_2 &= \int_0^1 \Phi_\omega(v_h, g_j(s)) 4s(1-s) J_j(s) \, ds(s) \text{ und} \\
E_3 &= \int_0^1 \Phi_\omega(v_h, g_j(s)) s(2s-1) J_j(s) \, ds(s).
\end{aligned}$$

Die Integrale unterscheiden sich wieder nur durch die Lagrange-Funktionen, mit denen multipliziert wird. Für E_i , $i = 1, \dots, 3$, erhält man folgende Berechnungsvorschrift, wobei $\ell_i(s)$ für die jeweilige Lagrange-Funktion steht, d. h. $\ell_1(s) = (1-s)(2(1-s)-1)$, $\ell_2(s) = 4s(1-s)$ und $\ell_3(s) = s(2s-1)$:

$$\begin{aligned}
E_i^{11} &= \int_0^1 \Phi_\omega^{11}(v_h, g_j(s)) \ell_i(s) J_j(s) ds(s) \\
&= \int_0^1 \left[\tilde{\Phi}_1(v_h, g_j(s)) + \tilde{\Phi}_2(v_h, g_j(s)) \frac{(v_{h,1} - g_{j,1}(s))^2}{\|v_h - g_j(s)\|_2^2} \right] \ell_i(s) J_j(s) ds(s), \\
E_i^{12} &= \int_0^1 \Phi_\omega^{12}(v_h, g_j(s)) \ell_i(s) J_j(s) ds(s) \\
&= \int_0^1 \left[\tilde{\Phi}_2(v_h, g_j(s)) \frac{(v_{h,1} - g_{j,1}(s))(v_{h,2} - g_{j,2}(s))}{\|v_h - g_j(s)\|_2^2} \right] \ell_i(s) J_j(s) ds(s), \\
E_i^{21} &= \int_0^1 \Phi_\omega^{21}(v_h, g_j(s)) \ell_i(s) J_j(s) ds(s) \\
&= \int_0^1 \left[\tilde{\Phi}_2(v_h, g_j(s)) \frac{(v_{h,1} - g_{j,1}(s))(v_{h,2} - g_{j,2}(s))}{\|v_h - g_j(s)\|_2^2} \right] \ell_i(s) J_j(s) ds(s), \\
E_i^{22} &= \int_0^1 \Phi_\omega^{22}(v_h, g_j(s)) \ell_i(s) J_j(s) ds(s) \\
&= \int_0^1 \left[\tilde{\Phi}_1(v_h, g_j(s)) + \tilde{\Phi}_2(v_h, g_j(s)) \frac{(v_{h,2} - g_{j,2}(s))^2}{\|v_h - g_j(s)\|_2^2} \right] \ell_i(s) J_j(s) ds(s).
\end{aligned}$$

4.2 Doppelschichtpotentialansatz

Der Doppelschichtpotentialansatz zum Lösen des Randwertproblems lautet:

$$(DL_\omega \psi)(x) = \int_{\partial\Omega} [T_y(\Phi_\omega(x, y))]^\top \psi(y) ds(y).$$

Der Traktionsoperator T wird beschrieben durch

$$T_y(f) = \lambda \operatorname{div}(f) \nu + 2\mu (\nu^\top \operatorname{grad}) f + \mu \operatorname{div}(Qf) Q \nu$$

mit ν normierter, nach außen gerichteter Normalenvektor auf ∂D und $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Nach der Diskretisierung erhält man in diesem Fall:

a) für die konstante Interpolation der Dichte:

$$\sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega(\hat{v}_h, g_j(s)))]^\top J_j(s) ds(s) \psi(\hat{v}_j) = f(\hat{v}_h), \quad h = 1, \dots, n_s,$$

b) für die lineare Interpolation der Dichte:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega(\tilde{v}_h, g_j(s)))]^\top (1-s) J_j(s) ds(s) \psi(\tilde{v}_j) \\
&+ \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega(\tilde{v}_h, g_j(s)))]^\top s J_j(s) ds(s) \psi(\tilde{v}_{j+1}) = f(\tilde{v}_h), \quad h = 1, \dots, n_s
\end{aligned}$$

4 Dynamischer Fall

mit $\tilde{v}_{n_s+1} = \tilde{v}_1$,

c) für die quadratische Interpolation der Dichte:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega(v_h, g_j(s)))]^\top (1-s)(2(1-s)-1) J_j(s) ds(s) \psi(\tilde{v}_j) \\ & + \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega(v_h, g_j(s)))]^\top 4s(1-s) J_j(s) ds(s) \psi(\hat{v}_j) \\ & + \sum_{j=1}^{n_s} \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega(v_h, g_j(s)))]^\top s(2s-1) J_j(s) ds(s) \psi(\tilde{v}_{j+1}) = f(v_h), \quad h = 1, \dots, n \end{aligned}$$

mit $\tilde{v}_{n_s+1} = \tilde{v}_1$.

Wendet man den Traktionsoperator auf die Fundamentallösung für den dynamischen Fall (vgl. Gleichung (4.2) auf Seite 27) an, ergibt sich:

$$[T_y(\Phi_\omega(x, y))]^\top = [T_y(\tilde{\Phi}_1(\|x-y\|_2) I)]^\top + [T_y(\tilde{\Phi}_2(\|x-y\|_2) P(x-y))]^\top.$$

Diese Berechnungsvorschrift kann mit Hilfe der Produktregel des Traktionsoperators für eine Funktion f und eine Matrix M

$$T(fM) = T(fI)M + fT(M)$$

vereinfacht werden zu:

$$\begin{aligned} [T_y(\Phi_\omega(x, y))]^\top &= [T_y(\tilde{\Phi}_1(\|x-y\|_2) I)]^\top + [T_y(\tilde{\Phi}_2(\|x-y\|_2) I) P(x-y)]^\top \\ &\quad + \tilde{\Phi}_2(\|x-y\|_2) [T_y(P(x-y))]^\top. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Regel 1 (vgl. Gleichung (3.1) auf Seite 18)

$$\begin{aligned} & T_x(f(\|x-y\|_2) I) \\ &= \frac{f'(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2} [\lambda\nu(x)(x-y)^\top + \mu(x-y)\nu(x)^\top + \mu\nu(x)^\top(x-y)I] \\ &= \frac{f'(\|x-y\|_2)}{\|x-y\|_2} U_1(x, y). \end{aligned}$$

können die ersten beiden Summanden berechnet werden, indem man die Ableitungen von $\tilde{\Phi}_1$ und $\tilde{\Phi}_2$ bestimmt.

Für die Ableitung der Hankel-Funktion 1. Art der Ordnung 0 bzw. 1 gilt:

$$\frac{\partial H_0^{(1)}(kx)}{\partial x} = -kH_1^{(1)}(kx) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial H_1^{(1)}(kx)}{\partial x} = k \left(H_0^{(1)}(kx) - \frac{H_1^{(1)}(kx)}{kx} \right).$$

Mit Hilfe der Quotientenregel erhält man die Ableitung von $\tilde{\Phi}_1$, wobei $r = \|x - y\|_2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Phi}_1(r)}{\partial r} &= -\frac{ik_s}{4\mu} H_1^{(1)}(k_s r) - \frac{i}{4\omega^2 r} \left[2 \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} \right. \\ &\quad \left. - k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) + k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) \right] \end{aligned}$$

und analog die Ableitung von $\tilde{\Phi}_2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2(r)}{\partial r} &= \frac{i}{2\omega^2 r} \left[k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) - k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) + 2 \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} \right] \\ &\quad + \frac{i}{4\omega^2} \left[k_s^3 H_1^{(1)}(k_s r) - k_p^3 H_1^{(1)}(k_p r) \right]. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich für den ersten Summanden

$$\begin{aligned} &[T_y(\tilde{\Phi}_1(r) I)]^\top \\ &= \frac{\tilde{\Phi}'_1(r)}{r} U_1(y, x)^\top \\ &= \left(-\frac{ik_s}{4\mu} H_1^{(1)}(k_s r) - \frac{i}{4\omega^2 r} \left[2 \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) + k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) \right] \right) U_1(y, x)^\top \end{aligned}$$

und für den zweiten Summanden

$$\begin{aligned} &[T_y(\tilde{\Phi}_2(r) I) P(x - y)]^\top \\ &= \frac{\tilde{\Phi}'_2(r)}{r} [U_1(y, x) P(x - y)]^\top \\ &= \left(\frac{i}{2\omega^2 r} \left[k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) - k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) + 2 \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{4\omega^2} \left[k_s^3 H_1^{(1)}(k_s r) - k_p^3 H_1^{(1)}(k_p r) \right] \right) [U_1(y, x) P(x - y)]^\top. \end{aligned}$$

Das Matrix-Produkt

$$[U_1(y, x) P(x - y)]^\top$$

lässt sich, da $P(x - y)$ symmetrisch ist, wie folgt vereinfachen:

$$[U_1(y, x) P(x - y)]^\top = P(x - y) U_1(y, x)^\top.$$

Der dritte Summand kann mit der bereits für den statischen Fall hergeleiteten Gleichung

$$\begin{aligned} &[T_y(P(x - y))]^\top \\ &= \frac{1}{r^2} [(\lambda + 2\mu)\nu(y)(y - x)^\top + \mu(y - x)\nu(xy)^\top + \mu\nu(y)^\top(y - x)(I - 4P(x - y))]^\top \\ &= \frac{1}{r^2} U_2(y, x)^\top \end{aligned}$$

folgendermaßen bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_2(r) [T_y(P(x-y))]^\top &= \frac{\tilde{\Phi}_2(r)}{r^2} U_2(y, x)^\top \\ &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{i}{2\omega^2 r} \left[k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{4\omega^2} \left[k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) \right] \right) U_2(y, x)^\top.\end{aligned}$$

Zusammengefasst erhält man für die Anwendung des Traktionsoperators auf die Fundamentallösung:

$$\begin{aligned}& [T_y(\Phi_\omega(x, y))]^\top \\ &= \left(-\frac{ik_s}{4\mu} H_1^{(1)}(k_s r) - \frac{i}{4\omega^2 r} \left[2 \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) + k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) \right] \right) U_1(y, x)^\top \\ &+ \left(\frac{i}{2\omega^2 r} \left[k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) - k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) + 2 \frac{k_p H_1^{(1)}(k_p r) - k_s H_1^{(1)}(k_s r)}{r} \right] \right. \\ &+ \left. \frac{i}{4\omega^2} \left[k_s^3 H_1^{(1)}(k_s r) - k_p^3 H_1^{(1)}(k_p r) \right] \right) P(x-y) U_1(y, x)^\top \\ &+ \frac{1}{r^2} \left(\frac{i}{2\omega^2 r} \left[k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r) \right] \right. \\ &+ \left. \frac{i}{4\omega^2} \left[k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) \right] \right) U_2(y, x)^\top.\end{aligned}$$

Da die Berechnungsvorschrift so umfänglich ist, wird statt der vollständigen Berechnungsvorschrift lediglich die Darstellung der jeweiligen vier Integrale angegeben.

Die vier Integrale E^{11} , E^{12} , E^{21} und E^{22} berechnen sich für die konstante Dichte folgendermaßen:

$$\begin{aligned}E^{11} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega^{11}(\hat{v}_h, g_j(s)))]^\top J_j(s) ds(s), \\ E^{12} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega^{12}(\hat{v}_h, g_j(s)))]^\top J_j(s) ds(s), \\ E^{21} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega^{21}(\hat{v}_h, g_j(s)))]^\top J_j(s) ds(s), \\ E^{22} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega^{22}(\hat{v}_h, g_j(s)))]^\top J_j(s) ds(s).\end{aligned}$$

Bei der linearen Dichte müssen nun die zwei Integrale

$$E_1 = \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega^{11}(\tilde{v}_h, g_j(s)))]^\top (1-s) J_j(s) ds(s) \text{ und}$$

$$E_2 = \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega^{11}(\tilde{v}_h, g_j(s)))]^\top s J_j(s) ds(s)$$

berechnet werden.

Die Integrale unterscheiden sich nur durch die Lagrange-Funktionen, mit denen multipliziert wird. Für E_i , $i = \{1, 2\}$, erhält man folgende Berechnungsvorschrift, wobei $\ell_i(s)$ für die jeweilige Lagrange-Funktion steht, d. h. $\ell_1(s) = (1-s)$ und $\ell_2(s) = s$:

$$E_i^{11} = \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega^{11}(\tilde{v}_h, g_j(s)))]^\top \ell_i(s) J_j(s) ds(s),$$

$$E_i^{12} = \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega^{12}(\tilde{v}_h, g_j(s)))]^\top \ell_i(s) J_j(s) ds(s),$$

$$E_i^{21} = \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega^{21}(\tilde{v}_h, g_j(s)))]^\top \ell_i(s) J_j(s) ds(s),$$

$$E_i^{22} = \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega^{22}(\tilde{v}_h, g_j(s)))]^\top \ell_i(s) J_j(s) ds(s).$$

Bei der quadratischen Interpolation werden dann drei verschiedene Integrale berechnet:

$$E_1 = \int_0^1 \Phi_\omega(v_h, g_j(s)) (1-s)(2(1-s)-1) J_j(s) ds(s),$$

$$E_2 = \int_0^1 \Phi_\omega(v_h, g_j(s)) 4s(1-s) J_j(s) ds(s) \text{ und}$$

$$E_3 = \int_0^1 \Phi_\omega(v_h, g_j(s)) s(2s-1) J_j(s) ds(s).$$

Die Integrale unterscheiden sich wieder nur durch die Lagrange-Funktionen, mit denen multipliziert wird. Für E_i , $i = 1, \dots, 3$, erhält man folgende Berechnungsvorschrift, wobei $\ell_i(s)$ für die jeweilige Lagrange-Funktion steht, d. h. $\ell_1(s) = (1-s)(2(1-s)-1)$, $\ell_2(s) = 4s(1-s)$ und $\ell_3(s) = s(2s-1)$:

$$\begin{aligned}
 E_i^{11} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega^{11}(v_h, g_j(s)))]^\top \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s), \\
 E_i^{12} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega^{12}(v_h, g_j(s)))]^\top \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s), \\
 E_i^{21} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega^{21}(v_h, g_j(s)))]^\top \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s), \\
 E_i^{22} &= \int_0^1 [T_y(\Phi_\omega^{22}(v_h, g_j(s)))]^\top \ell_i(s) J_j(s) \, ds(s).
 \end{aligned}$$

5 Testen der vier Operatoren

Im Folgenden werden die vier Operatoren (Einfach- und Doppelschichtpotential jeweils statisch und dynamisch) mit folgenden Approximationen in Python getestet:

- (A) Rand quadratisch und Dichte konstant approximieren
- (B) Rand quadratisch und Dichte linear approximieren
- (C) Rand und Dichte quadratisch approximieren

Als Testgebiet wird zunächst der Einheitskreis in Abschnitt 5.1 und anschließend eine Ellipse in Abschnitt 5.2 betrachtet.

Das Testgebiet wird immer mit n Punkten diskretisiert und in $n_s = \frac{n}{2}$ Gebietsstücke Δ_j unterteilt.

In den Tabellen werden im Folgenden immer die Anzahl der Kollokationspunkte n_k , der Fehler und die approximierten Konvergenzordnung angegeben.

Als Referenzlösung R wird die Fundamentallösung im Punkt x ausgewertet, sodass der Fehler wie folgt berechnet werden kann:

$$\varepsilon_{n_k} = \|u_{n_k}(x) - R\| .$$

Die approximierten Konvergenzordnung wird über folgende Formel definiert:

$$\kappa_{n_k} = \ln \left(\frac{\varepsilon_{n_k}}{\varepsilon_{2n_k}} \right) \cdot \frac{1}{\ln(2)} .$$

Beim Einfachschichtpotentialansatz wird das Gleichungssystem

$$S_k z = d, \quad k \in \{0, \omega\}$$

gelöst, wobei die Matrix S_k sich durch die Diskretisierung ergibt, der Vektor z die gesuchten Dichten ψ in den Kollokationspunkten beschreibt und der Vektor d enthält die Werte der in den Kollokationspunkten ausgewerteten Randbedingung (vgl. Matrixdarstellung in Gleichung (2.2), Gleichung (2.3) und Gleichung (2.4)). Für das Außenraumproblem wird dann der Punkt $(5, 5)^\top$ betrachtet und das gestreute Wellenfeld wie folgt bestimmt:

$$u_{n_k}(x) = (SL_k z)(x) .$$

Beim Doppelschichtpotentialansatz wird ein Innenraumproblem mit dem Punkt $(0.5, 0.5)^\top$ betrachtet und folgendes Gleichungssystem muss gelöst werden:

$$\left(D_k - \frac{1}{2} I_{2n_k} \right) z = d, \quad k \in \{0, \omega\} .$$

Zur Bestimmung des gestreuten Wellenfeldes wird die Gleichung

$$u_{n_k}(x) = (\text{DL}_k z)(x)$$

gelöst.

Umgang mit Singularitäten

Bei den Einfachschichtpotentialen liegt eine logarithmische Singularität im Integral vor und bei den Doppelschichtpotentialen eine Singularität vom Typ $\frac{1}{r}$.

Die numerische Integration wird mit der Funktion *quad* aus *scipy.integrate* durchgeführt. Bei dieser Funktion kann über den Parameter *points* die Platzierung von Stützstellen der Quadraturregel an den angegebenen Punkten verhindert werden. Da der Parameter *points* nur die Wahl von Stützstellen im Integrationsbereich, aber nicht an den Grenzen, beeinflusst, kann die Wahl von Stützstellen alternativ durch Addieren bzw. Subtrahieren einer Toleranz δ beeinflusst werden.

In der folgenden Tabelle wird der Umgang mit den Singularitäten für die verschiedenen Dichten bei den beiden Einfachschichtpotentialoperatoren und beim statischen Doppelschichtpotentialoperator beschrieben. Außerdem wird unterschieden, an welchen Stellen die Singularitäten auftreten. Für diese drei Operatoren wurden Singularitäten unabhängig vom tatsächlichen Vorliegen für alle Matrixeinträge angenommen.

Operator	Dichte	Stelle	Umgang
stat. ESP	alle	$\frac{1}{2}$	nutze <i>points</i>
dynam. ESP	alle	$\frac{1}{2}$	nutze <i>points</i>
stat. DSP	konstant	$\frac{1}{2}$	nutze <i>points</i>
	linear, quadratisch	$0, \frac{1}{2}, 1$	Integriere von δ bis $1 - \delta$ mit $\delta = 10^{-6}$ und nutze außerdem <i>points</i> für $\frac{1}{2}$

Tabelle 5.1: Umgang mit Singularitäten bei beiden ESP-Operatoren und beim statischen DSP-Operator

In der folgenden Tabelle wird der Umgang mit den Singularitäten für die verschiedenen Dichten beim dynamischen Doppelschichtpotentialoperator beschrieben. Hier wurde genauer untersucht, an welchen Stellen die Singularitäten für welche Kombination von Zeilenindexen i und Segmentindexen j auftreten. Zudem reicht es nicht mehr aus, den Punkt $\frac{1}{2}$ über den Parameter *points* auszuklammern, denn die Probleme treten auch für Werte nahe $\frac{1}{2}$ auf. Daher wird nun auch für diesen Punkt mit einer Toleranz δ gearbeitet.

Dichte	Indexe	Stelle	Umgang	δ
konstant	$i = j$	$\frac{1}{2}$	Integral von 0 bis $\frac{1}{2} - \delta$ + Integral von $\frac{1}{2} + \delta$ bis 1	$\delta = 10^{-5}$
	$i \neq j$	keine	Integral von 0 bis 1	
linear	$i = j$	0	Integral von δ bis 1	$n_k \leq 80 : \delta = 10^{-6}$
	$i = (j + 1) \equiv n_s$	1	Integral von 0 bis $1 - \delta$	$n_k > 80 : \delta = 10^{-5}$
	sonst	keine	Integral von 0 bis 1	
quadra- tisch	$i = j$	0	Integral von δ bis 1	$\delta = 10^{-5}$
	$i = (j + 1) \equiv n_s$	$\frac{1}{2}$	Integral von 0 bis $\frac{1}{2} - \delta$ + Integral von $\frac{1}{2} + \delta$ bis 1	
	$i = (j + 2) \equiv n_s$	1	Integral von 0 bis $1 - \delta$	
	sonst	keine	Integral von 0 bis 1	

Tabelle 5.2: Umgang mit Singularitäten beim dynamischen DSP-Operator

5.1 Tests mit dem Einheitskreis

Für alle Tests wurde als Gebiet der Einheitskreis, d. h. $a = 1$ und $b = 1$, verwendet. Für die Lamé-Konstanten wurden folgende Werte gewählt: $\mu = 1$, $\lambda = 1$. Bei den dynamischen Operatoren wurde zusätzlich $\omega = 2\sqrt{2}$ gesetzt.

Als Referenzlösung R für den statischen Einfachschichtpotentialansatz ergibt sich

$$R = \begin{pmatrix} -1.8101 \times 10^{-1} \\ 2.6526 \times 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

Beim statischen Doppelschichtpotentialansatz liegt im Kreisinneren eine Singularität vor, weswegen die Koordinaten um drei Einheiten nach links bzw. unten verschoben werden. Die Referenzlösung lautet hier

$$R = \begin{pmatrix} -1.0747 \times 10^{-1} \\ 2.6526 \times 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

Als Referenzlösung für den dynamischen Einfachschichtpotentialansatz ergibt sich

$$R = \begin{pmatrix} -1.1702 \times 10^{-2} + 1.4015 \times 10^{-2}i \\ 7.0784 \times 10^{-3} - 4.1433 \times 10^{-3}i \end{pmatrix}.$$

Beim dynamischen Doppelschichtpotentialansatz liegt wieder im Kreisinneren eine Singularität vor, weswegen die Koordinaten um drei Einheiten nach links bzw. unten verschoben werden. Die Referenzlösung lautet hier

$$R = \begin{pmatrix} -1.0212 \times 10^{-3} + 1.1546 \times 10^{-2}i \\ 7.6527 \times 10^{-3} - 2.5817 \times 10^{-2}i \end{pmatrix}.$$

Einfachschichtpotential - statisch

n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}	n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}	n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}
10	4.8010e-05	3.9153	10	3.4503e-05	3.8326	10	5.3954e-04	4.0848
20	3.1821e-06	3.4645	20	2.4218e-06	3.5179	20	3.1797e-05	4.0442
40	2.8826e-07	3.1739	40	2.1142e-07	3.2494	40	1.9274e-06	4.0257
80	3.1941e-08	3.0589	80	2.2232e-08	3.0927	80	1.1833e-07	4.0122
160	3.8329e-09	3.0212	160	2.6060e-09	3.0088	160	7.3334e-09	3.9571
320	4.7213e-10		320	3.2378e-10		320	4.7219e-10	

Tabelle 5.3: Test statisches ESP für Fall (A), (B) und (C)

Doppelschichtpotential - statisch

n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}	n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}	n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}
10	1.1301e-03	1.7795	10	1.0732e-03	1.9137	10	3.8108e-04	2.2575
20	3.2920e-04	1.1039	20	2.8485e-04	2.0418	20	7.9699e-05	3.2075
40	1.5316e-04	1.1287	40	6.9177e-05	2.0205	40	8.6277e-06	3.1183
80	7.0043e-05	1.0698	80	1.7051e-05	2.0232	80	9.9356e-07	4.5071
160	3.3368e-05	1.0364	160	4.1948e-06	2.0570	160	4.3695e-08	-0.8031
320	1.6268e-05		320	1.0080e-06		320	7.6242e-08	

Tabelle 5.4: Test statisches DSP für Fall (A), (B) und (C)

Einfachschichtpotential - dynamisch

n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}	n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}	n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}
10	1.1609e-03	3.2165	10	8.3938e-04	3.3021	10	3.6080e-04	4.4286
20	1.2489e-04	3.0487	20	8.5096e-05	3.0716	20	1.6754e-05	4.3157
40	1.5093e-05	3.0122	40	1.0122e-05	3.0183	40	8.4136e-07	4.1854
80	1.8708e-06	3.0032	80	1.2493e-06	3.0049	80	4.6242e-08	4.0932
160	2.3332e-07	3.0009	160	1.5563e-07	3.0012	160	2.7094e-09	4.1818
320	2.9146e-08		320	1.9438e-08		320	1.4929e-10	

Tabelle 5.5: Test dynamisches ESP für Fall (A), (B) und (C)

Doppelschichtpotential - dynamisch

n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}	n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}	n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}
10	2.7537e-03	1.5790	10	2.9618e-03	2.3023	10	5.5271e-03	4.8838
20	9.2170e-04	1.2004	20	6.0048e-04	2.0321	20	1.8721e-04	3.7637
40	4.0108e-04	1.0570	40	1.4682e-04	1.7698	40	1.3784e-05	3.2295
80	1.9277e-04	1.0250	80	4.3055e-05	2.1961	80	1.4695e-06	3.3444
160	9.4727e-05	1.0210	160	9.3956e-06	1.7979	160	1.4469e-07	0.4729
320	4.6679e-05		320	2.7021e-06		320	1.0425e-07	

Tabelle 5.6: Test dynamisches DSP für Fall (A), (B) und (C)

5.2 Tests mit der Ellipse

Für alle Tests wurde als Gebiet eine Ellipse mit den Parametern $a = 1.2$ und $b = 1$ verwendet. Für die Lamé-Konstanten wurden wieder die Werte $\mu = 1$ und $\lambda = 1$ gewählt.

Bei den dynamischen Operatoren wurde zusätzlich $\omega = 2\sqrt{2}$ gesetzt.

Die Referenzlösungen entsprechen den Werten beim Einheitskreis.

Einfachschichtpotential - statisch

n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}	n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}	n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}
10	5.1490e-05	1.9876	10	1.5376e-04	2.9951	10	8.6446e-04	3.9390
20	1.2983e-05	2.7982	20	1.9286e-05	2.9099	20	5.6362e-05	4.0672
40	1.8666e-06	2.9164	40	2.5662e-06	2.9506	40	3.3623e-06	4.0076
80	2.4724e-07	2.9616	80	3.3196e-07	2.9745	80	2.0904e-07	4.0028
160	3.1739e-08	2.9815	160	4.2235e-08	2.9960	160	1.3040e-08	3.9920
320	4.0185e-09		320	5.2940e-09		320	8.1950e-10	

Tabelle 5.7: Test statisches ESP für Fall (A), (B) und (C)

Doppelschichtpotential - statisch

n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}	n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}	n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}
10	7.0758e-04	1.0093	10	1.3538e-03	2.1760	10	4.8284e-04	2.7251
20	3.5152e-04	1.3129	20	2.9958e-04	2.0212	20	7.3024e-05	3.1209
40	1.4149e-04	1.1535	40	7.3800e-05	2.0234	40	8.3945e-06	3.1575
80	6.3606e-05	1.0849	80	1.8153e-05	2.0251	80	9.4081e-07	4.6793
160	2.9986e-05	1.0448	160	4.4600e-06	2.0596	160	3.6719e-08	-1.0513
320	1.4535e-05		320	1.0699e-06		320	7.6098e-08	

Tabelle 5.8: Test statisches DSP für Fall (A), (B) und (C)

Einfachschichtpotential - dynamisch

n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}	n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}	n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}
10	5.3430e-03	3.4331	10	3.4381e-03	3.3572	10	1.3461e-03	4.3471
20	4.9468e-04	3.0672	20	3.3550e-04	3.0834	20	6.6138e-05	4.4290
40	5.9020e-05	3.0151	40	3.9582e-05	3.0197	40	3.0703e-06	4.1192
80	7.3008e-06	3.0037	80	4.8806e-06	3.0050	80	1.7667e-07	4.0406
160	9.1027e-07	3.0012	160	6.0796e-07	3.0011	160	1.0736e-08	4.0120
320	1.1369e-07		320	7.5939e-08		320	6.6546e-10	

Tabelle 5.9: Test dynamisches ESP für Fall (A), (B) und (C)

Doppelschichtpotential - dynamisch

n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}	n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}	n_k	ε_{n_k}	κ_{n_k}
10	4.2957e-03	1.4215	10	5.7382e-03	1.9592	10	1.0876e-02	5.5409
20	1.6037e-03	0.8873	20	1.4757e-03	1.9536	20	2.3360e-04	4.0122
40	8.6697e-04	0.9348	40	3.8096e-04	1.9937	40	1.4477e-05	3.2914
80	4.5352e-04	0.9619	80	9.5659e-05	1.9650	80	1.4786e-06	2.8726
160	2.3282e-04	0.9792	160	2.4501e-05	1.8712	160	2.0189e-07	-1.0713
320	1.1810e-04		320	6.6975e-06		320	4.2424e-07	

Tabelle 5.10: Test dynamisches DSP für Fall (A), (B) und (C)

5.3 Vergleich mit den Ergebnissen von A.-C. Weger

Frau Weger hat als Testgebiet nur den Kreis betrachtet. Hierbei erhielt sie folgende approximative Konvergenzordnungen:

- Statisches Einfachschichtpotential: 2
- Statisches Doppelschichtpotential: 1
- Dynamisches Einfachschichtpotential: 2
- Dynamisches Doppelschichtpotential: 1

Die in dieser Arbeit ermittelten approximativen Konvergenzordnungen für den Kreis werden in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Operatoren:	stat. ESP	stat. DSP	dynam. ESP	dynam. DSP
Dichten:				
konstant	3	1	3	1
linear	3	2	3	2
quadratisch	4	3	4	3

Tabelle 5.11: Approximative Konvergenzordnungen für den Kreis bzw. die Ellipse

Insgesamt konnte bei den Einfachschichtpotentialansätzen für alle drei Dichteapproximationen eine Verbesserung um mindestens eine Konvergenzordnung erzielt werden. Bei den Doppelschichtpotentialansätzen wurde die Konvergenzordnung mit der quadratischen Dichteapproximation um zwei Ordnungen und mit der linearen Dichteapproximation um eine Ordnung verbessert. Für die konstante Dichte erreicht man zumindest dieselbe Konvergenzordnung.

Außerdem kann man feststellen, dass die Konvergenzordnungen sich von der konstanten Dichteapproximation hin zur quadratischen Dichteapproximation immer steigern. Zumindest mit der quadratischen Dichte wurde in allen Fällen die gewünschte Konvergenzverbesserung erreicht.

Für die Ellipse wurden dieselben approximierten Konvergenzordnungen (vgl. Tabelle 5.11) erzielt. Allerdings sind die Konvergenzordnungen beim dynamischen Doppelschichtpotential für die Ellipse etwas schlechter als für den Kreis.

Zusätzlich erkennt man bei den Testfällen das Problem bei einer Implementierung mit einer Toleranz δ . Man muss δ mit steigender Anzahl von Kollokationspunkten n_k immer größer wählen. Zum Beispiel wurde δ beim dynamischen Doppelschichtpotentialansatz mit linearer Dichte für $n_k = 160$ bereits auf $\delta = 10^{-5}$ vergrößert und für $n_k = 320$ müsste δ wieder erhöht werden. Für die quadratische Dichte beim dynamischen Doppelschichtpotential lässt die deutlich reduzierte Konvergenzordnung von $n_k = 160$ auf $n_k = 320$ beim Kreis vermuten, dass die Toleranz auf $\delta = 10^{-4}$ erhöht werden muss, damit der Fehler weiterhin kleiner wird. Bei der Ellipse wächst der Fehler von $n_k = 160$ auf $n_k = 320$ sogar, daher muss hier auf jeden Fall δ vergrößert werden.

6 Beyn-Algorithmus

Das folgende Kapitel über den Beyn-Algorithmus basiert auf dem Paper von Beyn (vgl. [1]). Eine ähnliche Erklärung findet man zudem in der Arbeit von A.-C. Weger (vgl. [9, Kapitel 2.3]). Mit Hilfe des Beyn-Algorithmus können nichtlineare Eigenwertprobleme gelöst werden.

6.1 Grundlegende Definitionen

Definition 6.1 (Nichtlineare Eigenwertproblem) *Ein nichtlineares Eigenwertproblem $F : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$*

$$F(\xi)v = 0 \quad \text{mit } v \in \mathbb{C}^m, v \neq 0$$

ist eine holomorphe Abbildung, d. h. dass die Komponenten von F in jedem Punkt in Ω komplex differenzierbar sind. Das Gebiet Ω muss zusammenhängend sein. Der Eigenwert von F wird dann mit ξ bezeichnet und v ist der (Rechts-) Eigenvektor.

Das Spektrum von F , d. h. die Menge aller Eigenwerte, wird im Folgenden mit $\sigma(F)$ bezeichnet und die Resolventenmenge mit $\rho(F) = \Omega \setminus \sigma(F)$.

Im Folgenden werden nur einfache Eigenwerte untersucht.

Definition 6.2 (Einfache Eigenwerte) *Der Eigenwert ξ ist einfach, falls*

$$\mathcal{N}(F(\xi)) = \text{span}\{v\}, v \neq 0, F'(\xi) \notin \mathcal{R}(F(\xi))$$

gilt, wobei $\mathcal{N}(F(\xi))$ den Nullraum von F an der Stelle ξ beschreibt und $\mathcal{R}(F(\xi)) = \{o \in \mathbb{C}^m : \exists u \in \mathbb{C}^m : F(\xi)u = o\}$ das Bild von F an der Stelle ξ . Die Ableitung F' muss komponentenweise verstanden werden.

Linkseigenvektoren für einfache Eigenwerte können mit Hilfe der adjungierten Matrix F^H ermittelt werden.

Definition 6.3 (Linkseigenvektor) *Sei ξ ein einfacher Eigenwert von F und $v \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ der zugehörige Rechtseigenvektor. Beim Vektor $w \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ handelt es sich um einen Linkseigenvektor, falls*

$$\mathcal{N}(F^H(\xi)) = \text{span}\{w\}, w \neq 0 \quad \text{und } w^H F'(\xi)v \neq 0$$

gilt.

Ohne Einschränkungen können v und w so skaliert werden, dass

$$w^H F'(\xi)v = 1 \quad (6.1)$$

gilt und außerdem $\|v\| = 1$ oder $\|w\| = 1$.

Für den Algorithmus benötigt man getrennte Eigenwerte. Diese Eigenschaft stammt aus [1, Theorem 2.2].

Satz 6.1 (Getrennte Eigenwerte) *Sei F regulär. Das Spektrum von F besteht aus isolierten Punkten, d. h. für alle Eigenwerte $\xi \in \sigma(F)$ existiert eine Umgebung $U \subset \Omega$, sodass $\xi \in U$ and $U \setminus \{\xi\} \subset \rho(F)$.*

6.2 Lösungsansatz beim nichtlinearen Eigenwertproblem

In diesem Abschnitt soll das nichtlineare Eigenwertproblem in ein lineares Eigenwertproblem überführt werden.

Relevante Theoreme

Der Ausgangspunkt für die Umwandlung in ein lineares Eigenwertproblem ist Theorem 2.4 aus [1]:

Satz 6.2 *Sei $C \subset \Omega$ kompakt und enthalte nur einfache Eigenwerte ξ_n von F für $n = 1, \dots, k$. Die zugehörigen Rechtseigenvektoren v_n und Linkseigenvektoren w_n erfüllen Gleichung (6.1). Dann existiert eine Umgebung U von C in Ω und eine holomorphe Funktion $R : U \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$, sodass gilt:*

$$F(z)^{-1} = \sum_{n=1}^k \frac{1}{z - \xi_n} v_n w_n^H + R(z), \quad z \in U \setminus \{\xi_1, \dots, \xi_k\}. \quad (6.2)$$

Satz 6.3 (Konturintegral) *Sei $\Gamma \subset \Omega$ eine Kontur, die $\Gamma \cap \sigma(F) = \emptyset$ erfüllt, d. h. dass keine Eigenwerte von F auf ihr liegen. Zudem liegen die Eigenwerte ξ_n , $n = 1, \dots, k$, im Inneren der Kontur Γ und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion. Dann gilt:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) F(z)^{-1} dz = \sum_{n=1}^k f(\xi_n) v_n w_n^H. \quad (6.3)$$

Die Integration muss hierbei komponentenweise durchgeführt werden.

Der Beweis des letzten Satzes wurde in [9, S.15] aufgeführt. Anhand von Gleichung (6.3) aus dem letzten Satz kann man erkennen, dass die Informationen zu den Eigenwerten und Eigenvektoren bereits in der Summe enthalten sind und daraus ermittelt werden können.

Annahmen

Für den Rest des Kapitels wird angenommen, dass die Kontur Γ k Eigenwerte enthält, wobei mit der Dimension m des Problems $k \ll m$ gelten soll. Die Spalten der Matrizen $V \in \mathbb{C}^{m \times k}$ und $W \in \mathbb{C}^{m \times k}$ enthalten die Eigenvektoren v_n und w_n . Man erzeugt eine Zufallsmatrix $\hat{V} \in \mathbb{C}^{m \times \ell}$ mit $k \leq \ell \leq m$, sodass $W^H \hat{V} \in \mathbb{C}^{k \times \ell}$ die Bedingung $\text{rank}(W^H \hat{V}) = k$ erfüllt. Dies impliziert dann, dass $\text{rank}(W) = k$ ist und man annehmen kann, dass auch $\text{rank}(V) = k$ gilt.

Umformung in ein lineares Problem

Verwendet man als holomorphe Funktionen für das Konturintegral aus Gleichung (6.3) $f(z) = 1$ für A_0 sowie $f(z) = z$ für A_1 und multipliziert diese Gleichungen jeweils von rechts mit \hat{V} , so erhält man:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(z)^{-1} \hat{V} dz = \sum_{n=1}^k v_n w_n^H \hat{V} = V W^H \hat{V},$$

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z F(z)^{-1} \hat{V} dz = \sum_{n=1}^k \xi_n v_n w_n^H \hat{V} = V \Lambda W^H \hat{V}.$$

Die Diagonalmatrix $\Lambda = \text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_k) \in \mathbb{C}^{k \times k}$ enthält die gesuchten Eigenwerte. Zudem sind A_0 und $A_1 \in \mathbb{C}^{m \times \ell}$. Für die Matrix A_0 folgt aus der Eigenschaft, dass $\text{rank}(V) = k$ und $\text{rank}(W^H \hat{V}) = k$ gilt, dass auch $\text{rank}(A_0) = k$ ist.

Wendet man eine (reduzierte) Singulärwertzerlegung auf A_0 an, so erhält man

$$A_0 = V W^H \hat{V} = V_0 \Sigma_0 W_0^H$$

mit $V_0 \in \mathbb{C}^{m \times k}$, $\Sigma_0 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in \mathbb{C}^{k \times k}$ und $W_0 \in \mathbb{C}^{\ell \times k}$. Für die Eigenwerte gilt

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_k > 0 = \sigma_{k+1} = \dots = \sigma_{\ell},$$

da $\text{rank}(A_0) = k$ ist. Beachtet man, dass die Spalten von V_0 und W_0 orthonormal sind, dann gilt $V_0^H V_0 = I_k$ und $W_0^H W_0 = I_k$. Zusätzlich erhält man aus den Rangbedingungen $\mathcal{R}(V) = \mathcal{R}(A_0) = \mathcal{R}(V_0)$. Somit kann man eine Transformationsmatrix $S \in \mathbb{C}^{k \times k}$ mit $\det(S) \neq 0$ finden, sodass $V = V_0 S$ gilt. Wendet man diese Transformationsmatrix auf A_0 an, erhält man

$$A_0 = V_0 S W^H \hat{V} = V_0 \Sigma_0 W_0^H$$

oder umgeformt

$$W^H \hat{V} = S^{-1} V_0^H V_0 \Sigma_0 W_0^H = S^{-1} \Sigma_0 W_0^H. \quad (6.4)$$

Wendet man die Transformation auf A_1 an, ergibt sich

$$A_1 = V \Lambda W^H \hat{V} = V_0 S \Lambda W^H \hat{V}.$$

Mit Hilfe von Gleichung (6.4) erhält man

$$A_1 = V_0 S \Lambda S^{-1} \Sigma_0 W_0^H$$

oder umgeformt

$$\underbrace{S \Lambda S^{-1}}_{B \in \mathbb{C}^{k \times k}} = V_0^H A_1 W_0 \Sigma_0^{-1},$$

wobei man aufgrund von $\text{rank}(A_0) = k$ Σ_0 invertieren kann. Da die Matrix B diagonalisierbar ist, hat sie dieselben Eigenwerte wie Λ und somit dieselben Eigenwerte wie F . Mit Matrix B wird nun ein lineares Eigenwertproblem beschrieben. Um dieses lineare Eigenwertproblem lösen zu können, müssen die Konturintegrale A_0 und A_1 numerisch bestimmt werden, da B aus A_1 und der Singulärwertzerlegung von A_0 berechnet wird.

Numerische Berechnung der Konturintegrale

Man benötigt eine 2π -periodische Parametrisierung γ der Kontur Γ aus der Klasse \mathcal{C}^1 in der komplexen Ebene, d. h.

$$\gamma(\varphi + 2\pi) = \gamma(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Auf der Kontur wählt man $n_b + 1$ äquidistant verteilte Punkte

$$\varphi_j = \frac{2\pi}{n_b} j, \quad j = 0, \dots, n_b.$$

Die zwei Konturintegrale über Γ

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(z)^{-1} \hat{V} dz,$$

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z F(z)^{-1} \hat{V} dz$$

können nun mit Hilfe der Parametrisierung γ umgeschrieben werden zu

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} F(\gamma(\varphi))^{-1} \hat{V} \gamma'(\varphi) ds(\varphi),$$

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \gamma(\varphi) F(\gamma(\varphi))^{-1} \hat{V} \gamma'(\varphi) ds(\varphi).$$

Diese Integrale können mit Hilfe der summierten Trapezregel approximiert werden, so dass man unter Beachtung von $\gamma(\varphi_0) = \gamma(\varphi_{n_b})$ folgende Approximation erhält:

$$A_0 \approx A_{0,n_b} = \frac{1}{i n_b} \sum_{j=0}^{n_b-1} F(\gamma(\varphi_j))^{-1} \hat{V} \gamma'(\varphi_j),$$

$$A_1 \approx A_{1,n_b} = \frac{1}{i n_b} \sum_{j=0}^{n_b-1} \gamma(\varphi_j) F(\gamma(\varphi_j))^{-1} \hat{V} \gamma'(\varphi_j).$$

Zusammenfassung des Algorithmus

Insgesamt kann das nichtlineare Eigenwertproblem in folgenden Schritten gelöst werden:

1. Index $\ell \leq m$ wählen
2. Zufallsmatrix $\hat{V} \in \mathbb{C}^{m \times \ell}$ erzeugen
3. A_{0,n_b} und A_{1,n_b} bestimmen
4. Singulärwertzerlegung $A_{0,n_b} = V\Sigma W^H$ bestimmen
5. Rang Test, d. h. bestimme k , für das gilt

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_k > tol_{rank} > \sigma_{k+1} \approx \dots \sigma_\ell = 0$$

- Falls $k = \ell$: erhöhe ℓ und starte bei 1.
 - Sonst: $V_0 = V(1 : m, 1 : k)$, $W_0^H = W^H(1 : \ell, 1 : k)$, $\Sigma_0 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$
6. $B = V_0^H A_{1,n_b} W_0 \Sigma_0^{-1}$ bestimmen
 7. Eigenwerte und Eigenvektoren von B bestimmen

Die Rangtoleranz $tol_{rank} > 0$ wird vorgegeben, da man im Allgemeinen nicht exakt den Wert 0 für die Singulärwerte $\sigma_i, i > k$ von A_{0,n_b} erhalten wird.

Die nichtlinearen Eigenvektoren können aus den linearen Eigenvektoren $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{C}^k$ von B über folgende Formel bestimmt werden:

$$v_i = V_0 s_i, \quad i = 1 \dots, k.$$

Der Aufwand des Algorithmus ergibt sich im Wesentlichen durch folgende Schritte:

3. A_{0,n_b} und A_{1,n_b} bestimmen: Für die Bestimmung von A_{0,n_b} löst man $n_b \cdot \ell$ lineare Gleichungssysteme, da n_b verschiedene Matrizen $F(\gamma(\varphi_j))$ und ℓ verschiedene rechte Seiten behandelt werden. Die Lösungen dieser Gleichungssysteme werden dann für die Berechnung von A_{1,n_b} genutzt.
4. Singulärwertzerlegung $A_{0,n_b} = V\Sigma W^H$ bestimmen.
7. Eigenwerte und Eigenvektoren von B bestimmen

7 Tests nichtlineares Eigenwertproblem

Man möchte die ersten Eigenwerte ω für das folgende Randwertproblem

$$\begin{aligned}\mu\Delta u_0 + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \omega^2 \rho u &= 0 \quad \text{in } D, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial D\end{aligned}$$

bestimmen. Hierbei wird für die Dichte des Objekts $\rho = 1$ oder $\rho = 4$ vorgegeben. Die Funktion u kann mittels eines Einfach- oder Doppelschichtpotentialansatzes bestimmt werden. Diese Ansätze können dann wieder mit Hilfe der Randintegralgleichungsmethode gelöst werden. Somit erhält man dann folgende Matrizen für die die Eigenwerte bestimmt werden sollen:

- beim ESP-Ansatz: $F(\omega) = S_{\sqrt{\rho}\omega} \in \mathbb{C}^{2n_k \times 2n_k}$,
- beim DSP-Ansatz: $F(\omega) = D_{\sqrt{\rho}\omega} + \frac{1}{2}I_{2n_k} \in \mathbb{C}^{2n_k \times 2n_k}$.

Die Eigenwerte des nichtlinearen Eigenwertproblems (vgl. Definition 6.1)

$$F(\omega)v = 0$$

sollen mit Hilfe des Algorithmus von Beyn berechnet werden.

Bei beiden Ansätzen werden die folgenden verschiedenen Approximationen verwendet:

- (A) Rand quadratisch und Dichte konstant approximieren
- (B) Rand quadratisch und Dichte linear approximieren
- (C) Rand und Dichte quadratisch approximieren

Als Gebiet D wird zunächst ein Einheitskreis, d. h. $a = b = 1$, und anschließend eine Ellipse mit $a = 1.2$ und $b = 1$ verwendet. Die Lamé-Konstanten werden auf $\lambda = 3$ und $\mu = 2$ gesetzt.

Als Kontur beim Beyn-Algorithmus wird ein Kreis mit Radius $b_r = 0.5$ gewählt. Der Mittelpunkt b_m unterscheidet sich in den verschiedenen Testfällen. Die Parametrisierung hat dann die Form

$$\gamma(t) = b_m + 0.5e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Die Kontur wird mit $n_b = 24$ Stützstellen diskretisiert und die Rangtoleranz auf $tol_{rank} = 10^{-4}$ gesetzt.

Für die Herleitung der Berechnung der Referenzlösung R beim Einfachschichtpotential siehe [9, S. 106] und für R beim Doppelschichtpotential [9, S. 109f.].

Parallelisierung

Um die Rechenzeit zu verkürzen, wurde im Beyn-Algorithmus die Berechnung der Matrix der Einfach- bzw. Doppelschichtpotentialansätze parallelisiert. Diese Matrix musste n_b mal berechnet werden, da sie als Matrix $F(\gamma(\varphi_j))$ in die Berechnung von A_{0,n_b} und A_{1,n_b} eingeht. Für die Parallelisierung wurde ein Prozesspool mit maximal vier Arbeitern verwendet.

Der mit der Parallelisierung erzeugte Speedup kann mit folgender Formel bestimmt werden, wobei T_1 die Dauer der Ausführung im seriellen Fall beschreibt und T_p die Dauer im parallelen Fall:

$$S_p = \frac{T_1}{T_p}$$

Der Speedup wird am Beispiel des Einfachschichtpotentials mit $\rho = 1$ und konstanter Dichte (blaue Kurve) und des Doppelschichtpotentials mit $\rho = 1$ und linearer Dichte (rote Kurve) dargestellt. Die Geschwindigkeiten wurden auf einem Rechner mit intel® Core™i5 Prozessor mit 4 Kernen und 8 GB RAM gemessen.

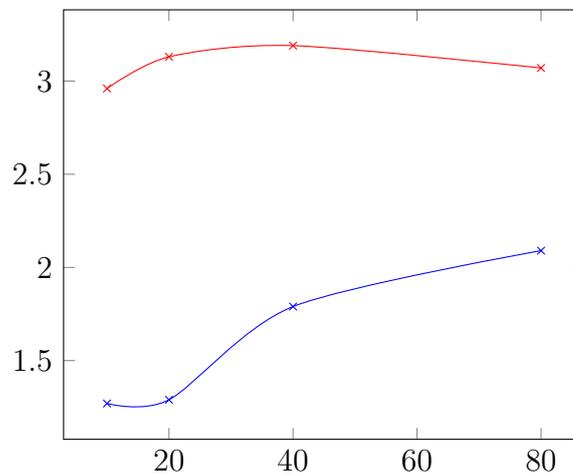


Abbildung 7.1: Speedup mit konstanter Dichte beim ESP (blau) und linearer Dichte beim DSP (rot) in Abhängigkeit der Anzahl an Kollokationspunkten n_k

Art	$n_k = 10$	$n_k = 20$	$n_k = 40$	$n_k = 80$
konstant	1.27	1.29	1.79	2.09
linear	2.96	3.13	3.19	3.07

Tabelle 7.1: Speedup mit konstanter Dichte beim ESP und linearer Dichte beim DSP

7.1 Tests mit dem Einheitskreis

Beim Mittelpunkt b_m der Kontur und der Referenzlösung R werden für alle drei Dichteapproximationen folgende Werte unterschieden:

1. ESP mit $\rho = 1$: $b_m = 10$, $R = 10.1377411$
2. ESP mit $\rho = 4$: $b_m = 9.5$, $R = 9.2807488$
3. DSP mit $\rho = 1$: $b_m = 5.5$, $R = 5.6242030$
4. DSP mit $\rho = 4$: $b_m = 7$, $R = 7.1619097$

In den Tabellen werden im Folgenden immer die Anzahl der Kollokationspunkte n_k und somit die Größe der Matrix F , der nichtlineare Eigenwert ω , der Fehler

$$\varepsilon_{n_k} = \|u_{n_k}(x) - R\|$$

und die approximierete Konvergenzordnung

$$\kappa_{n_k} = \ln\left(\frac{\varepsilon_{n_k}}{\varepsilon_{2n_k}}\right) \cdot \frac{1}{\ln(2)}$$

angegeben.

Einfachschichtpotential

	n_k	ω	ε_{n_k}	κ_{n_k}
konstant	10	10.0402023 - 0.0158056i	9.7526e-02	4.0449
	20	10.1318326 - 0.0000131i	5.9085e-03	3.1577
	40	10.1370790 - 0.0000002i	6.6207e-04	3.0342
	80	10.1376603 - 0.0000000i	8.0822e-05	3.0067
	160	10.1377310 - 0.0000000i	1.0056e-05	
linear	10	10.0929206 - 0.0027078i	4.4820e-02	3.6023
	20	10.1340507 - 0.0000052i	3.6904e-03	3.0874
	40	10.1373069 - 0.0000001i	4.3419e-04	3.0171
	80	10.1376875 - 0.0000000i	5.3633e-05	3.0015
	160	10.1377344 + 0.0000000i	6.6972e-06	
quadratisch	10	10.1408851 - 0.0026520i	3.1443e-03	2.3200
	20	10.1383708 - 0.0000039i	6.2969e-04	3.7642
	40	10.1377874 + 0.0000000i	4.6345e-05	3.9227
	80	10.1377442 - 0.0000000i	3.0560e-06	4.0038
	160	10.1377413 + 0.0000000i	1.9050e-07	

Tabelle 7.2: Test mit ESP für Fall (A), (B) und (C), $\rho = 1$

7 Tests nichtlineares Eigenwertproblem

	n_k	ω	ε_{n_k}	κ_{n_k}
konstant	10	$9.4038677 + 0.0519839i$	$1.2326e-01$	3.8217
	20	$9.2720312 - 0.0000677i$	$8.7176e-03$	3.7263
	40	$9.2800901 - 0.0000003i$	$6.5868e-04$	3.1266
	80	$9.2806734 - 0.0000000i$	$7.5420e-05$	3.0306
	160	$9.2807396 - 0.0000000i$	$9.2295e-06$	
linear	10	$9.3112126 - 0.0230224i$	$3.0492e-02$	2.8303
	20	$9.2764615 - 0.0000148i$	$4.2873e-03$	3.3695
	40	$9.2803340 - 0.0000001i$	$4.1483e-04$	3.0649
	80	$9.2806992 - 0.0000000i$	$4.9572e-05$	3.0164
	160	$9.2807427 + 0.0000000i$	$6.1265e-06$	
quadratisch	10	$9.2974557 + 0.0134900i$	$1.6717e-02$	4.8590
	20	$9.2813248 - 0.0000962i$	$5.7602e-04$	3.7804
	40	$9.2807907 + 0.0000000i$	$4.1919e-05$	3.8966
	80	$9.2807516 + 0.0000000i$	$2.8146e-06$	3.8547
	160	$9.2807490 - 0.0000000i$	$1.9456e-07$	

Tabelle 7.3: Test mit ESP für Fall (A), (B) und (C), $\rho = 4$

Doppelschichtpotential

	n_k	ω	ε_{n_k}	κ_{n_k}
konstant	10	$5.6312095 - 0.0978851i$	$7.8572e-03$	1.5624
	20	$5.6267405 - 0.0371781i$	$2.6604e-03$	1.2293
	40	$5.6253134 - 0.0165543i$	$1.1347e-03$	1.0984
	80	$5.6247275 - 0.0078427i$	$5.2995e-04$	1.0447
	160	$5.6244586 - 0.0038211i$	$2.5689e-04$	
linear	10	$5.6287869 - 0.0554519i$	$4.8571e-03$	2.3654
	20	$5.6251317 - 0.0130475i$	$9.4387e-04$	2.1231
	40	$5.6244188 - 0.0031718i$	$2.1667e-04$	2.1434
	80	$5.6242520 - 0.0008071i$	$4.9044e-05$	1.8827
	160	$5.6242163 - 0.0001944i$	$1.3349e-05$	
quadratisch	10	$5.6391140 - 0.0066707i$	$1.4915e-02$	3.9508
	20	$5.6251674 - 0.0009330i$	$9.6452e-04$	3.9111
	40	$5.6242671 - 0.0001078i$	$6.4116e-05$	3.8568
	80	$5.6242074 - 0.0000128i$	$4.4253e-06$	4.1775
	160	$5.6242032 - 0.0000017i$	$2.4456e-07$	

Tabelle 7.4: Test mit DSP für Fall (A), (B) und (C), $\rho = 1$

	n_k	ω	ε_{n_k}	κ_{n_k}
konstant	10	7.0643014 - 0.0058786i	9.7606e-02	7.9586
	20	7.1622694 - 0.0216440i	3.9237e-04	1.5987
	40	7.1620349 - 0.0078703i	1.2955e-04	1.1970
	80	7.1619653 - 0.0035581i	5.6508e-05	1.0757
	160	7.1619363 - 0.0017130i	2.6809e-05	
linear	10	7.1812762 - 0.0195681i	1.9393e-02	6.8650
	20	7.1620736 - 0.0059223i	1.6637e-04	2.6007
	40	7.1619370 - 0.0014199i	2.7428e-05	2.0663
	80	7.1619162 - 0.0003508i	6.5488e-06	2.2164
	160	7.1619111 - 0.0000869i	1.4154e-06	
quadratisch	10	7.1646538 + 0.0076804i	2.7483e-03	1.1132
	20	7.1631801 + 0.0001131i	1.2704e-03	4.1200
	40	7.1619828 - 0.0000379i	7.3057e-05	3.9755
	80	7.1619143 - 0.0000054i	4.6409e-06	3.7181
	160	7.1619101 - 0.0000008i	3.5264e-07	

Tabelle 7.5: Test mit DSP für Fall (A), (B) und (C), $\rho = 4$

Überwiegend bestätigen die approximierten Konvergenzordnungen die beim Test der Operatoren ermittelten Konvergenzordnungen. Nur die quadratischen Dichteapproximationen beim Einfachschichtpotential tendieren teilweise eher zu Ordnung 3 als zur vorherigen Ordnung 4.

7.2 Tests mit der Ellipse

Im Vergleich zur Kreiskontur ändern sich die Werte der Halbachsen der Ellipse zu $a = 1.2$ und $b = 1.0$. Beim Mittelpunkt b_m der Kontur und der Referenzlösung R werden für alle drei Dichteapproximationen folgende Werte unterschieden:

1. ESP mit $\rho = 1$: $b_m = 5$, $R = 5.0037474$
2. ESP mit $\rho = 4$: $b_m = 2.5$, $R = 2.5018737$
3. DSP mit $\rho = 1$: $b_m = 4$, $R = 4.0758864$
4. DSP mit $\rho = 4$: $b_m = 2$, $R = 2.0379432$

Einfachschichtpotential

	n_k	ω	ε_{n_k}	K_{n_k}
konstant	10	4.9880841 - 0.0005636i	1.5663e-02	3.3767
	20	5.0022394 - 0.0000037i	1.5080e-03	3.0612
	40	5.0035667 - 0.0000001i	1.8067e-04	3.0086
	80	5.0037249 - 0.0000000i	2.2450e-05	2.9808
	160	5.0037446 - 0.0000000i	2.8438e-06	
linear	10	4.9927563 - 0.0003016i	1.0991e-02	3.4243
	20	5.0027236 - 0.0000018i	1.0238e-03	3.0714
	40	5.0036256 - 0.0000000i	1.2179e-04	3.0082
	80	5.0037323 + 0.0000000i	1.5138e-05	2.9905
	160	5.0037455 - 0.0000000i	1.9302e-06	
quadratisch	10	5.0060467 - 0.0001116i	2.2993e-03	3.0600
	20	5.0040231 - 0.0000000i	2.7570e-04	3.7182
	40	5.0037683 + 0.0000000i	2.0947e-05	3.9036
	80	5.0037488 - 0.0000000i	1.3997e-06	4.9639
	160	5.0037474 + 0.0000000i	4.4846e-08	

Tabelle 7.6: Test mit ESP für Fall (A), (B) und (C), $\rho = 1$

	n_k	ω	ε_{n_k}	K_{n_k}
konstant	10	2.4940417 - 0.0002822i	7.8320e-03	3.3767
	20	2.5011197 - 0.0000018i	7.5402e-04	3.0610
	40	2.5017834 - 0.0000000i	9.0348e-05	3.0090
	80	2.5018625 - 0.0000000i	1.1223e-05	2.9710
	160	2.5018723 + 0.0000000i	1.4314e-06	
linear	10	2.4963778 - 0.0001508i	5.4959e-03	3.4244
	20	2.5013618 - 0.0000009i	5.1191e-04	3.0714
	40	2.5018128 - 0.0000000i	6.0900e-05	3.0073
	80	2.5018661 + 0.0000000i	7.5740e-06	2.9260
	160	2.5018727 + 0.0000000i	9.7061e-07	
quadratisch	10	2.5030234 - 0.0000558i	1.1497e-03	3.0602
	20	2.5020115 - 0.0000000i	1.3785e-04	3.7193
	40	2.5018842 + 0.0000000i	1.0466e-05	3.9087
	80	2.5018744 - 0.0000000i	6.9687e-07	4.9307
	160	2.5018737 - 0.0000000i	2.2849e-08	

Tabelle 7.7: Test mit ESP für Fall (A), (B) und (C), $\rho = 4$

Doppelschichtpotential

	n_k	ω	ε_{n_k}	κ_{n_k}
konstant	10	4.1548896 – 0.0875379i	7.9925e-02	1.4236
	20	4.1055591 – 0.0317429i	2.9795e-02	1.2391
	40	4.0884876 – 0.0132925i	1.2623e-02	1.1355
	80	4.0816278 – 0.0060234i	5.7458e-03	1.0739
	160	4.0786148 – 0.0028569i	2.7294e-03	
linear	10	4.1568598 – 0.0939219i	8.2034e-02	1.9989
	20	4.0963514 – 0.0221060i	2.0525e-02	2.0193
	40	4.0809458 – 0.0053426i	5.0629e-03	2.0326
	80	4.0771236 – 0.0013229i	1.2374e-03	1.9983
	160	4.0761961 – 0.0003237i	3.0976e-04	
quadratisch	10	4.1267079 – 0.0408017i	5.1023e-02	3.3464
	20	4.0809004 – 0.0043818i	5.0164e-03	3.4553
	40	4.0763437 – 0.0004480i	4.5735e-04	3.3440
	80	4.0759314 – 0.0000499i	4.5041e-05	3.1547
	160	4.0758915 – 0.0000061i	5.0575e-06	

Tabelle 7.8: Test mit DSP für Fall (A), (B) und (C), $\rho = 1$

	n_k	ω	ε_{n_k}	κ_{n_k}
konstant	10	2.0774448 – 0.0437689i	3.9963e-02	1.4235
	20	2.0527801 – 0.0158713i	1.4898e-02	1.2388
	40	2.0442451 – 0.0066466i	6.3127e-03	1.1359
	80	2.0408137 – 0.0030117i	2.8727e-03	1.0726
	160	2.0393086 – 0.0014294i	1.3659e-03	
linear	10	2.0784301 – 0.0469599i	4.1017e-02	1.9984
	20	2.0481791 – 0.0110524i	1.0266e-02	2.0122
	40	2.0404862 – 0.0026723i	2.5448e-03	2.0163
	80	2.0385722 – 0.0006469i	6.2906e-04	2.0238
	160	2.0380979 – 0.0001619i	1.5472e-04	
quadratisch	10	2.0633539 – 0.0204009i	2.5512e-02	3.3458
	20	2.0404513 – 0.0021904i	2.5093e-03	3.4559
	40	2.0381719 – 0.0002240i	2.2868e-04	3.3420
	80	2.0379658 – 0.0000250i	2.2551e-05	3.2448
	160	2.0379456 – 0.0000031i	2.3790e-06	

Tabelle 7.9: Test mit DSP für Fall (A), (B) und (C), $\rho = 4$

Hier gilt wieder wie beim Einheitskreis, dass die approximierten Konvergenzordnungen die beim Test der Operatoren ermittelten Konvergenzordnungen meistens bestätigen. Die Ausnahmen sind wieder die quadratischen Dichteapproximationen beim Einfachschichtpotential mit der Tendenz zur Ordnung 3 statt zur vorherigen Ordnung 4.

7.3 Vergleich mit den Ergebnissen von A.-C. Weger

Die Vergleichswerte von Frau Weger findet man in [9, Kapitel 5.1]. Es werden die Ergebnisse des Einfachschichtpotentials aus Beispiel 1 und die Ergebnisse des Doppelschichtpotentials aus Beispiel 2 mit den in dieser Arbeit erhaltenen Werten verglichen. Bei Beispiel 2 handelt es sich eigentlich um die Traktion des Einfachschichtpotentials. Da dieser Operator aber der Transponierten des Doppelschichtpotentialoperators entspricht und transponierte Operatoren dieselben Eigenwerte aufweisen, können die Ergebnisse problemlos verglichen werden.

In der Arbeit von Frau Weger wurden mit den Eigenwerten ihre approximierten Konvergenzordnungen (quadratisch für das Einfachschichtpotential und linear für das Doppelschichtpotential) bestätigt. Sie hat dabei wieder nur das Kreisgebiet untersucht.

Somit sind die hier erzielten Ergebnisse beim Einfachschichtpotential für alle drei Dichten im Vergleich mit den Ergebnissen von Frau Weger genauer.

Beim Doppelschichtpotential sind die Ergebnisse für die konstante Dichte ähnlich und die beiden anderen Dichteapproximationen liefern genauere Ergebnisse.

8 Transmissionseigenwertproblem

8.1 Ansatz

Beim Transmissionseigenwertproblem sollen die Eigenwerte ω für folgendes Randwertproblem bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\mu\Delta u_0 + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u_0 + \omega^2 \rho_0 u_0 &= 0 \text{ in } D, \\ \mu\Delta u_1 + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u_1 + \omega^2 \rho_1 u_1 &= 0 \text{ in } D, \\ u_0 &= u_1 \text{ auf } \partial D, \\ T(u_0) &= T(u_1) \text{ auf } \partial D.\end{aligned}$$

Als Lösungsansatz wird angelehnt an ein Paper von F. Cakoni und R. Kress ein Operator (vgl. [2, S. 7]) definiert, dessen Eigenwerte dann mit dem Algorithmus von Beyn bestimmt werden können. Cakoni und Kress haben ihren Operator für akustische oder elektromagnetische Transmissionseigenwertprobleme definiert.

Überträgt man diesen Operator auf das elastische Transmissionseigenwertproblem, erhält man

$$F(\omega) = \left(\frac{1}{2}I + D_{\omega\sqrt{\rho_1}}^\top\right) S_{\omega\sqrt{\rho_1}}^{-1} - \left(\frac{1}{2}I + D_{\omega\sqrt{\rho_0}}^\top\right) S_{\omega\sqrt{\rho_0}}^{-1}.$$

Dabei werden die Integraloperatoren mit n_k Stützstellen diskretisiert und I ist eine $n_k \times n_k$ Einheitsmatrix. Für diesen Operator benötigt man einen Einfachschichtpotentialansatz und die Traktion des Einfachschichtpotentialansatzes, welche nicht implementiert wurde. Daher kann die Lösung des nichtlinearen Eigenwertproblems

$$F(\omega)v = 0$$

nicht bestimmt werden.

Alternativ kann man den Operator $F(\omega)$ transponieren und erhält dann

$$\widehat{F}(\omega) = S_{\omega\sqrt{\rho_1}}^{-1} \left(\frac{1}{2}I + D_{\omega\sqrt{\rho_1}}\right) - S_{\omega\sqrt{\rho_0}}^{-1} \left(\frac{1}{2}I + D_{\omega\sqrt{\rho_0}}\right). \quad (8.1)$$

In diesem Fall benötigt man einen Einfach- und einen Doppelschichtpotentialansatz, um das nichtlineare Eigenwertproblem

$$\widehat{F}(\omega)v = 0$$

zu lösen. Diese Operatoren wurden beide implementiert.

Parallelisierung

Um die Rechenzeit zu verkürzen, wurde ähnlich wie in Kapitel 7 im Beyn-Algorithmus die Berechnung der Matrix $F(\gamma(\varphi_j))$ parallelisiert. Diese Matrix musste n_b mal berechnet werden und setzt sich aus vier Matrizen der Einfach- bzw. Doppelschichtpotentialansätze zusammen, die entsprechend Gleichung (8.1) kombiniert werden. Für die Parallelisierung wurde ein Prozesspool mit maximal vier Arbeitern verwendet.

Der Speedup wird am Beispiel von Testfall 1 mit quadratischer Dichte (blaue Kurve) dargestellt. Die Geschwindigkeiten wurden auf einem Rechner mit intel® Core™i5 Prozessor mit 4 Kernen und 8 GB RAM gemessen.

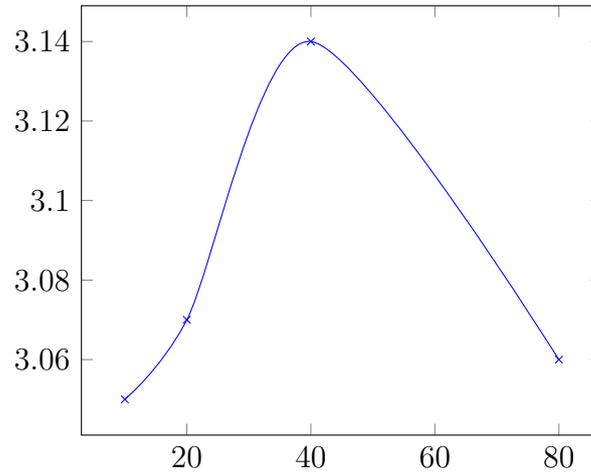


Abbildung 8.1: Speedup mit quadratischer Dichte in Abhängigkeit der Anzahl an Stützstellen n_k

Art	$n_k = 10$	$n_k = 20$	$n_k = 40$	$n_k = 80$
quadratisch	3.05	3.07	3.14	3.06

Tabelle 8.1: Speedup mit quadratischer Dichte

Um weitere Rechenzeit einzusparen, könnten zusätzlich z. B. die vier Matrizen, die $F(\gamma(\varphi_j))$ bilden, parallel aufgestellt werden.

8.2 Tests

In den folgenden Testfällen wird das Transmissionseigenwertproblem mit den Parametern $\rho_0 = 1$ und $\rho_1 = 4$ untersucht. Beim Beyn-Algorithmus wird die Kontur immer mit $n_b = 24$ Stützstellen diskretisiert und die Rangtoleranz variiert. Die Vergleichswerte werden alle mit der Method of Fundamental Solutions bestimmt.

In den folgenden Tabellen sind immer die Anzahl der Kollokationspunkte n_k und somit die Größe der Matrix F , der nichtlineare Eigenwert ω , der Fehler

$$\varepsilon_{n_k} = \|u_{n_k}(x) - R\|$$

und die approximierte Konvergenzordnung

$$\kappa_{n_k} = \ln \left(\frac{\varepsilon_{n_k}}{\varepsilon_{2n_k}} \right) \cdot \frac{1}{\ln(2)}$$

angegeben.

Testfall 1

Für die Parametrisierung des Beyn-Algorithmus wird ein Kreis mit Radius $b_r = 0.5$ und Mittelpunkt $b_m = 4$ gewählt. Die Lamé-Konstanten werden auf $\mu = 2$ und $\lambda = 3$ gesetzt. Als Gebiet D betrachtet man einen Einheitskreis $a = b = 1$. Der Vergleichswert ist $R = 4.1049075 + 0.0000001i$. Hier wurde die Rangtoleranz auf $tol_{rank} = 10^{-4}$ gesetzt.

	n_k	ω	ε_{n_k}	κ_{n_k}
konstant	10	4.1025353 - 0.0249349i	2.2964e-03	3.5966
	20	4.1047124 - 0.0065618i	1.8984e-04	2.3022
	40	4.1048681 - 0.0027109i	3.8491e-05	1.2737
	80	4.1048914 - 0.0012596i	1.5920e-05	
linear	10	4.1051967 - 0.0128600i	3.0938e-04	4.1637
	20	4.1049240 - 0.0024840i	1.7266e-05	4.0373
	40	4.1049085 - 0.0005477i	1.0485e-06	-6.9188
	80	4.1050335 - 0.0000604i	1.2602e-04	
quadratisch	10	4.1127600 - 0.0047103i	7.8552e-03	3.5774
	20	4.1055655 - 0.0007232i	6.5806e-04	3.9824
	40	4.1049491 - 0.0001017i	4.1632e-05	8.3646
	80	4.1049076 - 0.0000135i	1.2631e-07	

Tabelle 8.2: Testfall 1

Testfall 2

Für die Parametrisierung des Beyn-Algorithmus wird ein Kreis mit Radius $b_r = 0.5$ und Mittelpunkt $b_m = 1.7$ gewählt. Die Lamé-Konstanten werden auf $\mu = \frac{1}{16}$ und $\lambda = \frac{1}{4}$ gesetzt. Als Gebiet D betrachtet man einen Einheitskreis $a = b = 0.5$. Der Vergleichswert ist $R = 1.704638247023373$. Hier wurde die Rangtoleranz für die konstante Dichte auf $tol_{rank} = 10^{-2}$ gesetzt und für die lineare und quadratische Dichte wurde $tol_{rank} = 10^{-4}$ verwendet.

	n_k	ω	ε_{n_k}	κ_{n_k}
konstant	10	1.7071158 - 0.0183102i	2.5758e-03	2.5276
	20	1.7041889 - 0.0029882i	4.4670e-04	3.0809
	40	1.7045851 - 0.0010270i	5.2793e-05	0.1965
	80	1.7045921 - 0.0004232i	4.6070e-05	
linear	10	1.7046111 - 0.0127881i	2.0838e-05	-3.9749
	20	1.7043090 - 0.0023094i	3.2765e-04	2.0042
	40	1.7045565 - 0.0005380i	8.1676e-05	
	80	i		
quadratisch	10	1.7061237 - 0.0052839i	1.4936e-03	3.1860
	20	1.7048024 - 0.0001875i	1.6412e-04	3.6331
	40	1.7046515 - 0.0000319i	1.3228e-05	3.7712
	80	1.7046392 - 0.0000047i	9.6880e-07	

Tabelle 8.3: Testfall 2

Testfall 3

Für die Parametrisierung des Beyn-Algorithmus wird ein Kreis mit Radius $b_r = 0.1$ und Mittelpunkt $b_m = 1.55$ gewählt. Die Lamé-Konstanten werden auf $\mu = \frac{1}{16}$ und $\lambda = \frac{1}{4}$ gesetzt. Als Gebiet D betrachtet man eine Ellipse mit $a = 0.5$ und $b = 1$. Der Vergleichswert ist $R = 1.565151107263$. Hier wurde die Rangtoleranz für die konstante und lineare Dichte auf $tol_{rank} = 10^{-2}$ gesetzt und für die quadratische Dichte auf $tol_{rank} = 10^{-1}$.

	n_k	ω	ε_{n_k}	κ_{n_k}
konstant	10	1.5095038 - 0.1187253i	5.0985e-02	2.0053
	20	1.5524494 + 0.0022756i	1.2700e-02	2.6299
	40	1.5630993 + 0.0006049i	2.0517e-03	1.3197
	80	1.5643291 + 0.0002848i	8.2198e-04	
linear	10	1.5090687 - 0.0192087i	5.5960e-02	2.2381
	20	1.5532895 + 0.0009569i	1.1861e-02	2.5350
	40	1.5631038 - 0.0014357i	2.0466e-03	1.6936
	80	1.5645184 - 0.0002142i	6.3273e-04	
quadratisch	10	1.5887462 - 0.0489283i	2.4348e-02	0.1440
	20	1.5870264 - 0.0224924i	2.2035e-02	0.8915
	40	1.5532390 - 0.0103201i	1.1878e-02	-1.7129
	80	1.5261917 + 0.0083211i	3.8937e-02	

Tabelle 8.4: Testfall 3

8.3 Vergleich mit den Ergebnissen von A.-C. Weger

Zunächst werden die Ergebnisse dieser Arbeit mit den Ergebnissen von Frau Weger verglichen. Ihre Werte wurden ebenfalls mit Hilfe der Randintegralgleichungsmethode bestimmt. Die Vergleichswerte von Frau Weger zu Testfall 1 findet man in [9, Kapitel 5.2]. Sie verwendet einen anderen Operatoransatz und erzielt damit eine lineare approximierete Konvergenzordnung.

In der folgenden Tabelle werden die ermittelten Eigenwerte gegenübergestellt, wobei hier nur der Realteil angegeben wird, da reelle Eigenwerte bestimmt werden sollen. Die Stellen, die mit der Referenzlösung $\omega = 4.1049075$ übereinstimmen, werden grün markiert. Die Referenzlösung wurde mit der Method of Fundamental Solutions bestimmt.

n_k	ω konstant	ω linear	ω quadratisch	ω Weger (konstant)
40	4.1048681	4.1049085	4.1049491	4.1151789
80	4.1048914	4.1050335	4.1049076	4.1075097

Tabelle 8.5: Vergleich der reellen Eigenwerte berechnet mit konstanter, linearer bzw. quadratischer Dichte mit den Eigenwerten von Frau Weger

Mit der konstanten Dichteapproximation können leicht verbesserte Ergebnisse erzielt werden. Für die lineare und quadratische Dichteapproximation erhält man Konvergenzordnung 4 und dementsprechend genauere Ergebnisse. Allerdings wirken sich im Fall der linearen Dichte die Singularitäten diesmal schon bei $n_k = 80$ aus und sorgen für einen Anstieg des Fehlers.

8.4 Vergleich mit Ergebnissen anderer Ansätze

Es werden wieder die mit der Method of Fundamental Solutions (MFS) bestimmten Eigenwerte (vgl. [6]) als korrekt angenommen und daher die damit übereinstimmenden Stellen grün markiert.

In den Papern [5], [6], [10] und [14] wurden Eigenwerte für einen Kreis mit Radius 0.5 und den Parametern $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = 4$, $\mu = \frac{1}{16}$ und $\lambda = \frac{1}{4}$ ermittelt. Diese sollen nun den in dieser Arbeit ermittelten Werten gegenübergestellt werden. In Tabelle 8.6 werden die Eigenwerte ω_1 bis ω_6 gelistet.

Die Werte für die konstante, lineare und quadratische Dichte wurden mit $n_k = 40$ und $b_r = 0.5$ bestimmt. Für die konstante und quadratische Dichte wurde $tol_{rank} = 10^{-4}$ verwendet und im Fall der linearen Dichte wurde mit $tol_{rank} = 10^{-2}$ gearbeitet.

FEM[5] rechnet mit $h = \frac{1}{80}$, FEM[10] mit $h = \frac{1}{160}$ und FEM[14] mit $h \approx 0.03125$.

Für ω_1 sind die Ergebnisse der Arbeit vergleichbar mit den Finite Elemente Methoden. Bei ω_2 bis ω_6 liefert die Berechnung mit konstanter und linearer Dichte vergleichbare Werte wie die Finite Elemente Methoden und die Berechnungen mit quadratischer Dichte ergeben deutlich bessere Werte. Die Berechnung mit quadratischer Dichte liefert bei ω_2 und ω_4 sogar Werte, die nahe an den Ergebnissen der Method of Fundamental Solutions liegen.

8 Transmissionseigenwertproblem

ω	konstant	linear	quad.	FEM[5]	FEM[10]	FEM[14]	MFS[6]
ω_1	1.4520909	1.4504737	1.4520640	1.455078	1.451948	1.45248	1.451304028
ω_2	1.7045851	1.7045565	1.7046515	1.709214	1.705370	1.706023	1.704638247
ω_3	1.7044790	1.7045450	1.7046523	1.709214		1.706023	
ω_4	1.9836762	1.9839103	1.9845345	1.989630		1.986143	1.984530256
ω_5	1.9836756	1.9838397	1.9845346	1.989630		1.986143	
ω_6	2.2665718	2.2671169	2.2690510	2.274992		2.270963	2.269112085

Tabelle 8.6: Vergleich der ersten sechs reellen Eigenwerte für den Kreis berechnet mit konstanter, linearer bzw. quadratischer Dichte mit den Eigenwerten aus [5], [6], [10] und [14]

Außerdem wurden in Paper [6] mit der Method of Fundamental Solutions die ersten vier Eigenwerte für eine Ellipse mit $a = 0.5$ und $b = 1$ bestimmt. Die restlichen Parameter entsprechen denen beim Kreis. Es wurde mit $n_k = 40$ Kollokationspunkten und $b_r = 0.1$ gerechnet. Für die Rangtoleranz wurde $tol_{rank} = 10^{-2}$ verwendet.

ω	konstant	linear	quad.	MFS[6]
ω_1	1.29353003	1.29450783	1.2965141	1.296728137
ω_2	1.29937896	1.30037863	1.3025813	1.302785814
ω_3	1.5385104	1.53849489	1.54021729	1.540896035
ω_4	1.56309923	1.56310407	1.56495787	1.565151107

Tabelle 8.7: Vergleich der ersten vier reellen Eigenwerte für die Ellipse berechnet mit konstanter, linearer bzw. quadratischer Dichte mit den Eigenwerten aus [6]

Die Berechnungen der Eigenwerte bei der Ellipse sind ungenauer als die der Eigenwerte beim Kreis. Ob dies an den kleineren Eigenwerten liegt oder ob die Berechnung für Ellipsen immer relativ ungenau sind, müsste in weiteren Tests, z. B. mit größeren Eigenwerten, überprüft werden.

9 Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

Das finale Ziel der Arbeit war das Bestimmen der Transmissionseigenwerte beim elastischen Streuproblem. Die dafür benötigten Operatoren wurden mit Hilfe der Randintegralgleichungsmethode ermittelt.

Als Ansätze für die Randintegralgleichungsmethode wurden ein Einfach- und ein Doppelschichtpotentialansatz auf das Randwertproblem angewendet. Indem man diese Ansätze unter Beachtung der jeweiligen Sprungrelation an den Rand des Gebietes annäherte, erhielt man die Randintegralgleichungsmethoden. Dies wurde sowohl für das statische als auch für das dynamische Streuproblem durchgeführt.

Anschließend wurde der Gebietsrand, das Randintegral und die unbekannte Dichte ψ diskretisiert. Die Dichte ψ wurde dabei konstant, linear und quadratisch approximiert. Danach konnte die Randintegralgleichung als lineares Gleichungssystem dargestellt werden, wobei sich jeder Matrixeintrag aus einem Integral bzw. der Summe mehrerer Integrale zusammensetzt. Das Gleichungssystem konnte dann nach der Dichte ψ aufgelöst werden und mit der Dichte konnte das gestreute Wellenfeld u , d. h. die Lösung des Randwertproblems, ermittelt werden.

Diese insgesamt 12 Operatoren (drei verschiedene Dichten, zwei Potentialansätze und die Unterscheidung in statisches und dynamisches Streuproblem) wurden in Python implementiert, wobei die Integrale in den Matrixeinträgen mit der Funktion *quad* aus *scipy.integrate* berechnet wurden.

Somit konnten die Operatoren getestet werden, indem das berechnete gestreute Wellenfeld mit der jeweiligen Fundamentallösung verglichen wurde. Diese Tests wurden für einen Einheitskreis und eine Ellipse durchgeführt. Die approximierten Konvergenzordnungen waren beim Einfachschichtpotential höher als beim Doppelschichtpotential und außerdem steigerten sie sich von der konstanten Dichteapproximation hin zur quadratischen. Die Konvergenzordnungen beim Kreis und der Ellipse unterschieden sich nicht wesentlich. Insgesamt konnten die Konvergenzordnungen gegenüber der Arbeit von Frau Weger [9] gesteigert werden. Die logarithmische Singularität beim Einfachschichtpotentialansatz am Stützpunkt $\frac{1}{2}$ konnte mit Hilfe des Parameters *points* vermieden werden, da dieser die Wahl von $\frac{1}{2}$ als Stützstelle vermeidet. Beim Doppelschichtpotentialansatz können Singularitäten bei 0, $\frac{1}{2}$ und 1 auftreten. Diese Stellen wurden durch die Wahl einer Toleranz δ ausgeklammert.

Im nächsten Schritt sollten nichtlineare Eigenwertprobleme mit dem Beyn-Algorithmus gelöst und mit Referenzlösungen aus der Method of Fundamental Solutions verglichen werden. Dafür wurden erst die Eigenwerte der Matrizen der Operatoren des dynamischen Streuproblems separat bestimmt, bevor die Operatoren kombiniert wurden, um

die Eigenwerte des Transmissionseigenwertproblems zu bestimmen.

Als Kontur für den Beyn-Algorithmus wurde dabei ein Kreis verwendet und die Matrizen aus den Randintegralgleichungen wurden für einen Kreis und eine Ellipse aufgestellt. Dabei wurde die Dichte des Objekts auf $\rho = 1$ oder $\rho = 4$ gesetzt. Damit konnten, außer in einem Fall, die beim Testen der Operatoren ermittelten Konvergenzordnungen bestätigt werden. Beim Einfachschichtpotential mit der quadratischen Dichteapproximation fiel die Ordnung ab. Insgesamt wurden die Ergebnisse beim nichtlinearen Eigenwertproblem im Vergleich zu den Ergebnissen von Frau Weger verbessert.

Abschließend wurden die Transmissionseigenwerte bestimmt, indem die Matrizen der Einfach- und Doppelschichtoperatoren mit $\rho_0 = 1$ und $\rho_1 = 4$ angelehnt an ein Paper von Cakoni und Kress (vgl. [2]) kombiniert und deren nichtlineare Eigenwerte bestimmt wurden.

Die berechneten Eigenwerte waren im Vergleich zur Arbeit von Frau Weger deutlich genauer. Im Vergleich mit den Finite Elemente Methoden aus [5], [10] und [14] erhält man für einen Kreis mit der konstanten und linearen Dichte vergleichbare Eigenwerte und mit der quadratischen Dichte genauere. Für einige Eigenwerte erhielt man sogar Eigenwerte, die sehr nahe an denen der Method of Fundamental Solutions lagen. Die Eigenwerte für die Ellipse wurden ebenfalls mit der Method of Fundamental Solutions verglichen. Hier stimmten jedoch meistens nur zwei bis drei Nachkommastellen überein.

Ausblick

Bei der Berechnung der Transmissionseigenwerte für die Ellipse muss mit weiteren Testfällen geprüft werden, ob man für größere Eigenwerte oder andere Ellipsenparameter genauere Eigenwerte berechnen kann.

Insgesamt sollten für alle Operatoren und Eigenwerte weitere Parameter getestet werden. Außerdem könnten noch andere Gebiete als der Kreis und die Ellipse untersucht werden. Um für die Doppelschichtpotentialoperatoren das Problem der notwendigen Vergrößerung von δ bei steigender Anzahl an Kollokationspunkten n_k zu vermeiden, könnte man versuchen, die Singularitäten mittels Singularitätensubtraktion zu beseitigen.

Im Bereich der Parallelisierung können noch weitere Codeabschnitte parallelisiert werden. Die Berechnung von A_{0,n_b} und A_{1,n_b} könnte z. B. noch weiter beschleunigt werden, indem auch das Lösen des Gleichungssystems (Berechnung von $F(\gamma(\varphi_j))^{-1}$) und die Multiplikation parallelisiert werden. Zusätzlich könnten auf einem Rechner mit mehr als vier Kernen, die Anzahl der Arbeiter gesteigert werden.

Literaturverzeichnis

- [1] W.-J. Beyn. „An integral method for solving nonlinear eigenvalue problems“. In: *Linear Algebra and its Applications* 436 (2012), S. 3839–3863.
- [2] F. Cakoni und R. Kress. „A Boundary Integral Equation Method for the Transmission Eigenvalue Problem“. In: *Applicable Analysis* 96 (2017), S. 23–38.
- [3] W.-C. Chang, W.-W. Lin und J.-N. Wang. „Efficient methods of computing interior transmission eigenvalues for the elastic waves“. In: *Journal of Computational Physics* 407 (2020), S. 109227.
- [4] X. Ji, P. Li und J. Sun. „Computation of interior elastic transmission eigenvalues using a conforming finite element and the secant method“. In: *Results in Applied Mathematics* 5 (2020), S. 100083.
- [5] X. Ji, P. Li und J. Sun. „Computation of transmission eigenvalues for elastic waves“. In: *arXiv* 1802.03687 (2018), S. 1–16.
- [6] A. Kleefeld und L. Pieronek. „Elastic transmission eigenvalues and their computation via the method of fundamental solution“. In: *Applicable Analysis* (2020), S. 1–18.
- [7] W. McLean. „Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations“. In: *Cambridge University Press* (2000).
- [8] S. Peters. „Inside-outside duality method in inverse scattering theory“. Dissertation. Universität Bremen, 2016.
- [9] A.-C. Weger. „Numerische Berechnung von elastischen Streuproblemen in 2D“. In: *Jül Report* 4413 (2018), S. 1–118.
- [10] Y. Xi und X. Ji. „A lowest order mixed finite element method for the elastic transmission eigenvalue problem“. In: *arXiv* 1812.08514 (2018), S. 1–16.
- [11] Y. Xi, X. Ji und H. Geng. „A C^0 IP method of transmission eigenvalues for elastic waves“. In: *Journal of Computational Physics* 374 (2018), S. 237–248.
- [12] Y. Xi, X. Ji und S. Zhang. „A simple low-degree optimal finite element scheme for the elastic transmission eigenvalue problem“. In: *arXiv* 2101.10783 (2021), S. 1–17.
- [13] Y. Yang, J. Han und H. Bi. „ H^2 -conforming methods and two-grid discretizations for the elastic transmission eigenvalue problem“. In: *Communications in Computational Physics* 28 (2020), S. 1366–1388.
- [14] Y. Yang u. a. „Mixed methods for the elastic transmission eigenvalue problem“. In: *Applied Mathematics and Computation* 374 (2020), S. 125081.