

Fachhochschule Aachen

Campus Jülich

Fachbereich: Medizintechnik und Technomathematik  
Studiengang: Angewandte Mathematik und Informatik

FH AACHEN  
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES



---

**Entwicklung und Implementierung eines  
Galerkinverfahrens zur numerischen Lösung eines  
Eigenwertproblems zu einer PDG vierter Ordnung  
für spezielle Geometrien**

---

Bachelorarbeit von Christof Päßler  
Matrikelnummer: 3209243

Jülich, den 20. August 2021

Angefertigt am

Jülich Supercomputing Center,  
Forschungszentrum Jülich GmbH

Diese Arbeit wurde betreut von:

1. Prüfer: Prof. Dr. rer. nat. Matthias Grajewski
2. Prüfer: Dr. rer. nat. habil. Andreas Kleefeld



Diese Arbeit ist von mir selbstständig angefertigt und verfasst. Es sind keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt worden.

Christof Päßler



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Motivation</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Galerkin-Verfahren</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Ellipse</b>	<b>11</b>
3.1	Implementierung . . . . .	15
3.2	Beispiele . . . . .	21
3.2.1	Beispiel 1 . . . . .	21
3.2.2	Beispiel 2 . . . . .	22
3.2.3	Beispiel 3 . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Gleichseitiges Dreieck</b>	<b>25</b>
4.1	Implementierung . . . . .	31
4.2	Beispiele . . . . .	33
4.2.1	Beispiel 1 . . . . .	33
4.2.2	Beispiel 2 . . . . .	33
4.2.3	Beispiel 3 . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Quader</b>	<b>37</b>
5.1	Implementierung . . . . .	38
5.2	Beispiele . . . . .	39
5.2.1	Beispiel 1 . . . . .	39
5.2.2	Beispiel 2 . . . . .	39
5.2.3	Beispiel 3 . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Kugel</b>	<b>41</b>
6.1	Implementierung . . . . .	46
6.2	Beispiele . . . . .	46
6.2.1	Beispiel 1 . . . . .	47
6.2.2	Beispiel 2 . . . . .	47
6.2.3	Beispiel 3 . . . . .	47
<b>7</b>	<b>Auswirkungen von Störungen</b>	<b>49</b>
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>53</b>



# 1 Motivation

Bei der mathematischen Modellierung von physikalischen Phänomenen in Bereichen der Physik, der Geologie oder auch in den Ingenieurwissenschaften [6] nutzt man partielle Differentialgleichungen (PDG) vierter Ordnung zur Verknüpfung der dort auftretenden Kräfte. Große Konstruktionen wie Gebäude oder Flugzeuge stehen unter ständiger Belastung. Sollten Bauteile nach langer Belastung kaputt gehen, kann dies weitere Sach- oder Personenschäden mit sich ziehen. Daher beschäftigt man sich im Bereich des Structural Health Monitoring mit Technologien zur zerstörungsfreien Werkstoffprüfung, um Schäden durch bswp. Schallwellen und deren Beeinflussung durch das Testobjekt zu erkennen und Präventionsmaßnahmen zu ergreifen. Ein Bauteil wie eine Flugzeugtragfläche kann man dabei als elastische eingespannte Platte auffassen, da das Material selbst leichte Bewegung zulässt, durch Verbindung mit anderen Bauteilen aber am Rand fest fixiert ist.

Die Eigenwerte  $\tau \in \mathbb{R}, \tau > 0$  einer elastischen Platte können durch eine solche PDG vierter Ordnung beschrieben werden als

$$\Delta(\alpha(x)\Delta(u(x))) = \tau\beta(x)u(x) \text{ in } \mathcal{D} \quad (1.1)$$

mit den zugehörigen Eigenfunktionen  $u \in X(\mathcal{D})$ . Zusätzlich wird durch die Dirichlet-Randbedingung gefordert, dass die Platte am Rand fest eingespannt ist, d.h.

$$u(x) = \Delta u(x) = 0 \text{ auf } \partial\mathcal{D}. \quad (1.2)$$

Für das betrachtete Gebiet  $\mathcal{D}$  gilt dabei als Voraussetzung, dass es ein Lipschitz-Gebiet ist. Der Gebietsrand  $\partial\mathcal{D}$  muss sich daher aus Lipschitz-stetigen Funktionen zusammensetzen lassen. Harris hat in [5] bereits ein Galerkin-Verfahren vorgestellt, das die Eigenfunktionen des in der PDG auftauchenden Laplace-Operators als Basis des  $X(\mathcal{D})$  verwendet, um Lösungen  $(\tau, u)$  zu approximieren. In [10] wurde dieses Verfahren für einfache Geometrien, ein Quadrat und einen Kreis, numerisch untersucht. Alle vorgestellten Beispiele beschränkten sich dabei auf Gebiete  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ , es gibt aber in der Konstruktion des Verfahrens keine Einschränkung, auch Gebiete im dreidimensionalen Raum zu betrachten. Allerdings kann man dann nichtmehr von einer Platte sprechen, deren Dicke vernachlässigt wird, sondern man erhält einen fest eingespannten Körper.

Ziel dieser Arbeit ist die Betrachtung komplexerer Beispiele wie einer Ellipse und einem gleichseitigen Dreieck als weitere zweidimensionale Geometrien, da die Beschaffung der Basisfunktionen für das Verfahren anspruchsvoller ist, als auch einem Quader und Kugel als dreidimensionales Gebiet. Dabei werden die Basisfunktionen des Laplace-Operators,

## 1 Motivation

die in allen Testfällen analytisch bekannt sind, präsentiert sowie numerische Ergebnisse von Implementierungen verschiedener Testfälle. Die Arbeit ist wie folgt strukturiert. Abschnitt 2 erläutert zum Einstieg noch einmal das verwendete Galerkin-Verfahren der PDG 4. Ordnung. In Abschnitt 3 wird eine Ellipse als Geometrie betrachtet. Dabei wird in den Unterkapiteln näher auf die Lösung der auftretenden Mathieuschen Differentialgleichung als auch die Implementierung von deren Lösung eingegangen. Abschnitt 4 beschäftigt sich dann mit dem Fall eines gleichseitigen Dreiecks, hier wird schrittweise eine Lösung für die Basisfunktionen konstruiert. Abschnitt 5 erweitert den in [10, Abschnitt 3.1] präsentierten Ansatz für ein Rechteck um eine dritte Dimension zu einem Quader. Ein weiterer dreidimensionaler Fall wird in Abschnitt 6 am Beispiel einer Kugel erläutert. Der letzte Testfall in Abschnitt 7 beschäftigt sich mit der Auswirkung von Störungen auf die Genauigkeit des Verfahrens. Schlussendlich werden in Abschnitt 8 die Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick über weitere mögliche Anwendungsfälle gegeben.

## 2 Galerkin-Verfahren

Als Vorlage für das Verfahren diente ein Paper von Harris, siehe [5], der sowohl eine Herleitung des Verfahrens als auch Testfälle mit numerischen Ergebnissen präsentierte. Das Galerkin-Verfahren wurde bereits in [10] im Rahmen einer Seminararbeit für einfache Geometrien verwendet und mit Harris verglichen. Für die ausführlichere Betrachtung der mathematischen Grundlagen, siehe [10, Abschnitt 2] bzw. [5]. Im Folgenden wird die Funktionsweise des Verfahrens und seine wichtigsten Eigenschaften noch einmal zusammengefasst.

Bei einem Galerkin-Ansatz versucht man die gesuchte Funktion durch eine endliche Summe zu approximieren und dann eine schwache Lösung der Gleichung zu finden, sodass die Abweichung von der echten Lösung möglichst minimal werden. Bei dem speziellen Galerkin-Verfahren, das hier verwendet wird, sucht man eine schwache Lösung für die Gleichung

$$\int_{\mathcal{D}} (\alpha(x) \Delta u(x)) \Delta \bar{v}(x) \, dx = \tau \int_D \beta(x) u(x) \bar{v}(x) \, dx \quad \forall v \in X(\mathcal{D}). \quad (2.1)$$

Die Lösung ist eine deshalb schwach, weil die Gleichung nur für alle  $v \in X(\mathcal{D})$  gelten muss. Den Ansatz (2.1) erhält man aus (1.1) durch den Galerkin-Ansatz und Anwendung der zweiten Greenschen Identität [7, S. 267]. Zur Approximation der gesuchten Funktion  $u(x)$  nutzt man, dass eine Orthogonalbasis des  $X(\mathcal{D})$  existiert. Diese bezeichnet man als

$$\Phi(X(\mathcal{D})) = \{\phi_i(x)\}_{i=1}^{\infty},$$

und als Basisvektoren  $\phi_i$  wählt man die Dirichlet-Eigenfunktionen des Laplace-Operators, d.h. für die Basisfunktionen gilt

$$\Delta \phi_i = \lambda_i \phi_i,$$

wobei die Eigenwerte  $\lambda_i$  aufsteigend sortiert sein sollen, also

$$\lambda_i \leq \lambda_j \quad \forall i < j. \quad (2.2)$$

Durch diese Basis lässt sich jede Funktion  $f \in X(\mathcal{D})$ , und damit insbesondere die gesuchte Funktion  $u$ , als Linearkombination der Basisvektoren darstellen. Um eine numerische Lösung erhalten zu können, muss man sich aber auf endlich viele Basisfunktionen beschränken. Daher approximiert man die wahre Lösung  $u(x)$  mittels einer Funktion  $u_N(x)$ , für die

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(x) \approx \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x) = u_N(x) \quad (2.3)$$

## 2 Galerkin-Verfahren

gilt. Um mit dieser Approximation (2.1) lösen zu können, muss man sich noch  $N$  Funktionen  $v$  aussuchen, sodass das Residuum des Ansatzes minimal wird. In diesem speziellen Verfahren wählt man dazu die ersten  $N$  Basisvektoren der Orthogonalbasis  $\Phi(X(\mathcal{D}))$ . Mit all den vorangegangenen Festlegungen erhält man  $N$  Gleichungen der Form (2.1) mit  $N$  Unbekannten  $c_i$ . Fasst man diese in Matrixschreibweise auf, erhält man schließlich ein verallgemeinertes Eigenwertproblem

$$Av = \tau Bv, \quad A, B \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

mit

$$v = (c_1, \dots, c_N)^\top \in \mathbb{R}^N, \quad (2.4)$$

wobei sich die Einträge der Matrizen  $A, B$  berechnen lassen als

$$A_{ij} = \lambda_i \lambda_j \int_{\mathcal{D}} \alpha(x) \phi_i(x) \overline{\phi_j(x)} dx \quad (2.5)$$

bzw.

$$B_{ij} = \int_{\mathcal{D}} \beta(x) \phi_i(x) \overline{\phi_j(x)} dx. \quad (2.6)$$

Als Lösung dieses Eigenwertproblems erhält man den Vektor  $v$ , der die Koordinaten des Lösung  $u$  der PDG 4. Ordnung bezüglich der Orthogonalbasis  $\Phi(X(\mathcal{D}))$  enthält. Zur Konstruktion von  $u$  muss man also nurnoch die erhaltenen Koeffizienten  $c_i$  in Gleichung (2.3) einsetzen. Außerdem gilt, dass für konstantes  $\alpha, \beta$  die Matrizen  $A, B$  diagonal sind, d.h. sie besitzen nur auf der Hauptdiagonalen Einträge, was den Aufwand zur Lösung des Eigenwertproblems minimiert. Diese Vereinfachung besteht, da die Basisvektoren  $\phi_i$  eine Orthogonalbasis bilden, d.h. sie erfüllen die Eigenschaft

$$\langle \phi_i(x), \phi_j(x) \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Da hier das Skalarprodukt des  $L^2(\mathcal{D})$  verwendet wird und man konstante  $\alpha, \beta$  vor die Integrale (2.5) bzw. (2.6) ziehen darf, müssen alle Einträge abseits der Hauptdiagonalen der Matrizen null sein. Zudem kann man bei der praktischen Durchführung auf die Normierung der Basisfunktionen  $\phi_i$  verzichten, da in  $A$  und  $B$  jeweils die gleichen Normierungsfaktoren auftauchen und diese damit unerheblich sind. Da in den präsentierten Beispielen die Basisfunktionen analytisch bekannt sind und durch das Verfahren der Trennung der Variablen hergeleitet werden, ist es zusätzlich möglich, die Mehrfachintegrale in (2.5) bzw. (2.6) in ein Produkt von Integralen in den einzelnen Dimensionen aufzuteilen, da die Eigenfunktionen aus Faktoren bestehen, die jeweils nur von einer der Variablen abhängen.

Sollten  $\alpha, \beta$  jedoch vom Integrationsgebiet  $\mathcal{D}$  abhängen, so sind die Matrizen  $A, B$  möglicherweise voll besetzt, da man die zu berechnenden Integrale nicht aufteilen bzw.  $\alpha, \beta$  vorziehen kann um die Orthogonalität der Basisfunktionen auszunutzen.

### 3 Ellipse

Gegeben sei ein elliptisches Gebiet  $\mathcal{D}$  mit den Halbachsen  $a, b, a > b$ , abgebildet in Abbildung 3.1. Auch hier ist wieder ein Wechsel des Koordinatensystems für die Trennung der Variablen notwendig.

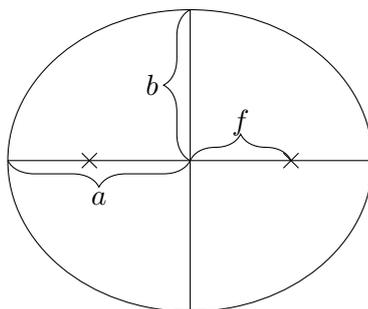


Abbildung 3.1: Ellipse mit eingezeichneten Parametern  $a, b, f$

Sei

$$x = f \cosh(r) \cos(\theta), \quad y = f \sinh(r) \sin(\theta) \quad (3.1)$$

mit der Brennweite  $f = \sqrt{a^2 - b^2}$ . Die Kreuze markieren die sogenannten Brennpunkte. Sie erfüllen die Eigenschaft, dass die Summe der Abstände jedes Punktes auf dem Rand der Ellipse zu den Brennpunkten gleich ist. Wie bei den Polarkoordinaten, die man bei Berechnungen in kreisförmigen Gebieten kennt, steht  $r$  für den Abstand vom Mittelpunkt, wie man das bei einer Ellipse interpretiert folgt später. Der Winkel  $\theta$  gibt die Richtung an, in die man sich vom Mittelpunkt des Koordinatensystems aus drehen muss.

Benötigt wird zuerst der Laplace-Operator in elliptischen Koordinaten. In krummlinigen Orthogonalkoordinaten wie den elliptischen Koordinaten kann dieser über die Einheitsvektoren des Koordinatensystems hergeleitet werden, siehe [2, Kapitel 32].

Gegeben sei das Differential  $dc = (dx, dy)$  als

$$dc = \frac{\partial c}{\partial r} dr + \frac{\partial c}{\partial \theta} d\theta$$

und die Einheitsvektoren  $e_r, e_\theta$  in Richtung  $\frac{\partial c}{\partial r}$  bzw.  $\frac{\partial c}{\partial \theta}$ . Zusätzlich benötigt man die Längen der Basisvektoren, die auch als Skalierungsfaktoren  $h_i$  bezeichnet werden. Diese

### 3 Ellipse

lassen sich berechnen durch

$$h_r = \left\| \left( \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r} \right)^\top \right\|,$$

$$h_\theta = \left\| \left( \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^\top \right\|.$$

Die Gleichungen für  $x$  und  $y$  sind in (3.1) gegeben, in jeder Gleichung tauchen die Variablen  $r$  und  $\theta$  jeweils nur einmal als Funktionsargument einer trigonometrischen bzw. hyperbolischen Funktion auf, die Ableitung sind also trivial. Für die elliptischen Koordinaten gilt nach Einsetzen der Ableitungen

$$h_r = h_\theta = f \cdot \sqrt{\sinh^2(r) \cdot \cos^2(\theta) + \cosh^2(r) \cdot \sin^2(\theta)}. \quad (3.2)$$

Der Ansatz für den Laplace-Operator ist dann

$$\Delta u = \frac{1}{h_r h_\theta} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{h_\theta}{h_r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h_r}{h_\theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right). \quad (3.3)$$

Wegen (3.2) ist  $\frac{h_\theta}{h_r}$  sowie der Kehrwert offensichtlich 1, das Produkt  $h_r \cdot h_\theta$  lässt sich vereinfachen zu

$$\begin{aligned} h_r \cdot h_\theta &= f^2 \cdot \sqrt{(\sinh^2(r) \cdot \cos^2(\theta) + \cosh^2(r) \cdot \sin^2(\theta))^2} \\ &= f^2 \cdot (\sinh^2(r) \cdot \cos^2(\theta) + \cosh^2(r) \cdot \sin^2(\theta)) \\ &= f^2 \cdot (\sinh^2(r) \cdot (1 - \sin^2(\theta)) + (1 + \sinh^2(r)) \cdot \sin^2(\theta)) \\ &= f^2 \cdot (\sinh^2(r) + \sin^2(\theta)). \end{aligned}$$

Setzt man die vorangegangenen Rechnungen in den Ansatz (3.3) ein, so erhält man den Laplace-Operator, wie er in (3.4) aufgeführt ist.

Zu Lösen ist nun also die Gleichung

$$-\Delta u = -\frac{1}{f^2 (\sinh^2(r) + \sin^2(\theta))} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) = \lambda^2 u \quad (3.4)$$

mit dem Ansatz

$$u(r, \theta) = R(r) \cdot \Theta(\theta),$$

der eingesetzt in (3.4) nach Multiplikation mit  $\frac{f^2 (\sinh^2(r) + \sin^2(\theta))}{R(r)\Theta(\theta)}$

$$-\left( \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} \right) = \lambda^2 f^2 (\sinh^2(r) + \sin^2(\theta))$$

ergibt. Zur Verdeutlichung, dass die Eigenwerte des negativen Laplace-Operators positivdefinit [10, Abschnitt 2.2] sind, werden sie hier als  $\lambda^2$  notiert. Nach Ausmultiplizieren der rechten Seite und umsordern der Terme ergibt sich

$$-\frac{R''(r)}{R(r)} - \lambda^2 f^2 \sinh^2(r) = \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} + \lambda^2 f^2 \sin^2(\theta). \quad (3.5)$$

Die Funktionen *Sinus* und *Sinus hyperbolicus* werden durch die entsprechenden *Cosinus*-Funktionen ersetzt mit Hilfe der Zusammenhänge  $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$  bzw.  $\sinh^2(x) = \frac{1}{2}(\cosh(2x) - 1)$ . Durch diese Ersetzungen, anschließendem Subtrahieren von  $\frac{\lambda^2 f^2}{2}$  auf beiden Seiten und Multiplikation mit  $-1$  ist die Gleichung in der finalen Form

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{\lambda^2 f^2}{2} \cosh(2r) = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{\lambda^2 f^2}{2} \cos(2\theta), \quad (3.6)$$

in der man sie separieren kann. (Gleichung (3.5) war natürlich auch schon separierbar, allerdings führt die Umformungen zu (3.6) zu der Form, die in der zitierten Literatur aufgeführt ist.) Da jede Seite der Gleichung nur noch von einer der Variablen abhängt, müssen beide Seiten konstant sein. Setzt man also für beide Seite eine Konstante  $c$  an, so erhält man nach Multiplikation mit  $R(r)$  und Freistellen der rechten Seiten

$$R''(r) - (c - 2q \cdot \cosh(2r)) R(r) = 0 \quad (3.7)$$

und

$$\Theta''(\theta) + (c - 2q \cdot \cos(2\theta)) \Theta(\theta) = 0 \quad (3.8)$$

mit  $2q = \frac{\lambda^2 f^2}{2}$ . Die Eigenwerte  $\lambda$  lassen sich demnach berechnen als

$$\lambda = \sqrt{\frac{4q}{f^2}}.$$

Gleichung (3.8) wird in der Literatur [1, S. 722] als Mathiesche Differentialgleichung bezeichnet, (3.7) wird aufgrund der Ähnlichkeit, statt dem *Cosinus* taucht hier der *Cosinus hyperbolicus* auf, als modifizierte Mathiesche Differentialgleichung bezeichnet. Die Konstante  $c$  wird als charakteristischer Wert bezeichnet.

Die Zusammensetzung der Lösungen wird bspw. in [4, p.8f] erläutert. Da die Mathiesche Differentialgleichung als auch ihre Modifikation nur selten auftritt, gibt es keine eindeutig etablierte Symboliken für ihre Lösungen. Die hier aufgeführten Notation orientieren sich an einem Paper von Grebenkov [4, S.8f], allerdings weichen die Indizierungen hier leicht ab um den Zusammenhang der Teillösungen besser darzustellen.

Die Lösungsfunktionen können als Fourierreihen dargestellt werden, deren Koeffizienten rekursiv vom Parameter  $q$  abhängen, siehe Abschnitt 3.1. Für bestimmte Werte  $c$  ergeben sich für die klassische Mathiesche Differentialgleichung, die anguläre Gleichung, periodische Lösungen. Da die benötigten Basisfunktionen stetig sein sollen, benötigt man eben diese periodischen Lösungen, und im Folgenden werden nur diese betrachtet.

Insgesamt ergeben sich 4 Gruppen von Lösungen für (3.4):

$$\begin{aligned} u_{nk1}(r, \theta) &= Ce_n(\theta, q_{nk1}) \cdot Mc_n(r, q_{nk1}), \\ u_{nk2}(r, \theta) &= Ce_{n+1}(\theta, q_{nk2}) \cdot Mc_{n+1}(r, q_{nk2}), \\ u_{nk3}(r, \theta) &= Se_n(\theta, q_{nk3}) \cdot Ms_n(r, q_{nk3}), \\ u_{nk4}(r, \theta) &= Se_{n+1}(\theta, q_{nk4}) \cdot Ms_{n+1}(r, q_{nk4}), \end{aligned}$$

### 3 Ellipse

mehr Details dazu liefert Abschnitt 3.1. Die Lösungen hängen noch einem Parameter ab,  $q_{nki}$ , aus dem ebenfalls die Eigenwerte von (3.4) bestimmt werden. Da die radiale und die anguläre Funktion vom gleichen Parameter  $q_{nki}$ , der durch die Koeffizienten festgelegt wird, muss für beide Funktionen der gleiche Fourierreihen-Ansatz gewählt werden mit den gleichen Koeffizienten. Aufgrund der Dirichlet-Randbedingung muss gelten, dass die Lösung auf dem Rand null ist, d.h. dass der radiale Anteil der Lösung null ist. Dafür muss eine der folgenden Bedingungen zutreffen:

$$\begin{aligned} M_{c_n}(\mathbf{R}, q_{nk1}) &= 0, & M_{c_{n+1}}(\mathbf{R}, q_{nk2}) &= 0, \\ M_{s_n}(\mathbf{R}, q_{nk3}) &= 0, & M_{s_{n+1}}(\mathbf{R}, q_{nk4}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Durch eine Nullstellensuche können somit die benötigten Werte für  $q_{nki}$  bestimmt werden. Der Index  $n$  nummeriert dabei die charakteristischen Werte  $c$  der Differentialgleichung, ähnlich der Ordnung  $n$  der Besselfunktionen,  $k$  nummeriert die unendlich vielen Nullstellen durch  $q_k$  für gegebenes  $n, i$ , und der Index  $i$  steht für die Gruppe der Lösung. Da man die Eigenwerte nicht aufgrund der Indizes  $n, k, i$  aufsteigend sortieren kann, die Reihenfolge folgt hier keinem System, werden bei der Implementierung ausreichend viele Werte für  $q$  und damit  $\lambda$  generiert, die dann in einer Liste aufsteigend sortiert werden. Beim Galerkin-Verfahren müssen die Basisfunktionen im betrachteten Gebiet integriert werden. In elliptischen Koordinaten ergeben sich dabei zwei Besonderheiten.

Man bezeichne  $R$  als den Radius der Ellipse. Betrachtet man eine Ellipse in kartesischen Koordinaten, so liegen, anders als bei einem Kreis, die Punkte der Außenbahn unterschiedlich weit vom Zentrum der Ellipse entfernt. Wenn man allerdings das Koordinatengitter in elliptischen Koordinaten betrachtet, so bilden die Gitterlinien für konstanten Radius  $r$  Ellipsen. Die Konstante  $r$  kann man daher als Radius dieser Ellipsen bezeichnen, gleiches gilt für  $R$ . Für den Radius  $R$  gelten folgende Zusammenhänge:

$$a = f \cdot \cosh(R) \qquad b = f \cdot \sinh(R).$$

Bildet man den Quotienten  $\frac{b}{a}$  und wendet den Areatangens hyperbolicus an, so lässt sich  $R$  berechnen als

$$R = \operatorname{artanh}\left(\frac{b}{a}\right).$$

Damit ergeben sich für die Einträge der Matrizen  $A, B$  Integrale der Form

$$\int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} g(r, \theta) \cdot J(r, \theta) \, d\theta \, dr$$

mit der Funktionaldeterminante  $J$ , die sich über die Determinante der Jacobi-Matrix

$$J(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

berechnen lässt. Die benötigten Ableitungen von  $x, y$  lassen sich einfach aus (3.1) berechnen. Durch Vereinfachung ergibt sich schließlich

$$J(r, \theta) = f^2 \cdot (\sinh^2(r) + \sin^2(\theta)). \quad (3.11)$$

Damit sind alle Voraussetzungen erfüllt, um Testfälle für elliptische Gebiete analog zu den Beispielen des Quadrats und des Kreises zu implementieren.

### 3.1 Implementierung

Im Folgenden werden einige Aspekte der Implementierung von Beispielen mit elliptischen Gebieten erläutert. Die Mathieu-Funktionen tauchen in der Mathematik selten auf und sind daher in *matlab* nicht implementiert. Deshalb wird zur Implementierung von Beispielen auf die *Mathieu Functions Toolbox v1.0* von Cojocarú zurückgegriffen, siehe [3]. Diese Toolbox liefert sämtliche Funktionalität, die zur Konstruktion der Basisfunktionen benötigt wird.

Mathieu-Funktionen lassen sich als Fourierreihen darstellen, deren Koeffizienten es zu bestimmen gilt. Sie hängen vom Parameter  $q$  und rekursiv voneinander ab. Durch die rekursive Abhängigkeit ist es möglich, den Zusammenhang der Koeffizienten als tridiagonal-Matrizen aufzuschreiben.

Als Reihenansätze nimmt man eine Basis des  $L^2(\mathcal{D})$ , da die Eigenfunktionen dessen Eigenschaften erfüllen sollen. Gegeben seien vier Fourierreihen-Ansätze, welche die Mathieu-Gleichung lösen können,

$$C_{e_n}(\theta, q_{nk1}) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m} \cdot \cos(2m \cdot \theta), \quad (3.12)$$

$$C_{e_{n+1}}(\theta, q_{nk2}) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m+1} \cdot \cos((2m+1) \cdot \theta), \quad (3.13)$$

$$S_{e_n}(\theta, q_{nk3}) = \sum_{m=1}^{\infty} S_{2m} \cdot \sin(2m \cdot \theta), \quad (3.14)$$

$$S_{e_{n+1}}(\theta, q_{nk4}) = \sum_{m=0}^{\infty} S_{2m+1} \cdot \sin((2m+1) \cdot \theta). \quad (3.15)$$

Die Reihe (3.14) startet hier wegen  $\sin(0) = 0$  erst bei  $m = 1$ . Setzt man diese Ansätze als  $\Theta(\theta)$  ein, so kann man einen Koeffizientenvergleich durchführen. Daraus ergeben sich Abhängigkeiten der Koeffizienten rekursiv voneinander und von  $q$ . Zu jeder Fourierreihe (3.12) – (3.15) existiert daher eine Festlegung der Koeffizienten  $C_i, S_i$ , siehe [1, p.723]. Setzt man (3.12) in die klassische Mathieu-Gleichung (3.8) ein, so erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-4n^2 + f) \cdot C_{2n} \cdot \cos(2n \cdot \theta) - 2q \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \cdot \cos(2\theta) \cdot \cos(2n\theta) = 0. \quad (3.16)$$

Ziel ist es, die  $C_i$  durch einen Koeffizientenvergleich der  $\cos(n\theta)$  zu bestimmen, wobei das Produkt der Cosinuse in der zweiten Summe noch stört. Im Folgenden wird nur die

### 3 Ellipse

zweite Summe mitsamt Faktor betrachtet.

Zieht man den ersten Summanden aus der Summe, so erhält man

$$-2q \cdot C_0 \cdot \cos(2\theta) - 2q \cdot \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \cdot \cos(2\theta) \cdot \cos(2n\theta), \quad (3.17)$$

wobei  $\cos(2n\theta) = 1$  für  $n = 0$ , weshalb das Aufteilen des Produktes der Cosinuse für diesen Summanden gar nicht notwendig ist. Mit Hilfe des Additionstheorems

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b) \quad (3.18)$$

und geschicktem Addieren einer Null lässt sich das Produkt der Cosinuse umwandeln zu

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \cos(2n\theta) \cos(2\theta) \\ &= \cos(2n\theta) \cos(2\theta) - \sin(2n\theta) \sin(2\theta) \\ & \quad + \cos(2n\theta) \cos(2\theta) + \sin(2n\theta) \sin(2\theta) \\ &= \cos((2n+2)\theta) + \cos((2n-2)\theta) \end{aligned}$$

und erhält damit insgesamt

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (-4n^2 + f) \cdot C_{2n} \cdot \cos(2n \cdot \theta) \\ & -2q \cdot C_0 \cdot \cos(2\theta) - q \cdot \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \cdot \cos((2n+2)\theta) + \cos((2n-2)\theta) = 0. \end{aligned}$$

Nun muss man die Koeffizienten der  $\cos(n\theta)$  vergleichen und erhält drei rekursive Bedingungen

$$\begin{aligned} & f \cdot C_0 - q \cdot C_2 = 0, \\ & (f - 4) \cdot C_2 - q \cdot (2C_0 + C_4) = 0, \\ & (f - m^2) \cdot C_m - q \cdot (C_{m-2} + C_{m+2}) = 0 \quad \forall m \geq 2. \end{aligned}$$

Für alle anderen Reihenansätze erhält man nur zwei Rekursionsbedingungen, aufgrund von der Vereinfachung in (3.17) erhält man die abweichende Gleichung für den Koeffizient von  $\cos(2\theta)$ .

Für Ansatz (3.13) erhält man

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (-(2n+1)^2 + f) \cdot C_{2n+1} \cdot \cos((2n+1) \cdot \theta) \\ & -q \cdot C_1 \cdot (\cos(3\theta) + \cos(\theta)) - q \cdot \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n+1} \cdot \cos((2n+3)\theta) + \cos((2n-1)\theta) = 0. \end{aligned}$$

### 3.1 Implementierung

Auch hier zieht man wieder einen Summanden aus der Summe und formt diesen ebenfalls mittels des Additionstheorems um und erhält damit die Gleichungen

$$\begin{aligned} (f-1) \cdot C_1 - q \cdot (C_1 + C_3) &= 0, \\ (f - (2m+1)^2) \cdot C_{2m+1} - q \cdot (C_{2m+3} + C_{2m-1}) &= 0 \quad \forall m \geq 1. \end{aligned}$$

Bei Ansatz (3.14) kann man auf das Rausziehen des ersten Summanden verzichten, da die Summe direkt bei  $n = 1$  startet wegen  $\sin(0) = 0$ . Man erhält

$$\begin{aligned} (f-4) \cdot S_2 - q \cdot S_4 &= 0, \\ (f - (2m)^2) \cdot S_{2m} - q \cdot (S_{2m+2} + S_{2m-2}) &= 0 \quad \forall m \geq 1. \end{aligned}$$

Ansatz (3.15) wird analog zu (3.13) behandelt und man erhält

$$\begin{aligned} (f-1) \cdot S_1 + q \cdot (S_1 + S_3) &= 0, \\ (f - (2m+1)^2) \cdot S_{2m+1} - q \cdot (S_{2m+3} + S_{2m-1}) &= 0 \quad \forall m \geq 1. \end{aligned}$$

Aus diesen Rekursionsgleichungen ergeben sich Gleichungssysteme der Form  $M \cdot x = \vec{0}$ , indem man die entsprechenden rekursiven Gleichungen als Zeilen einer Matrix auffasst, mit  $M \in \mathbb{R}^{\infty \times \infty}$ . Für Ansatz (3.12) ergibt sich dann

$$\begin{pmatrix} -f & q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2q & 2^2 - f & q & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q & 4^2 - f & q & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q & 6^2 - f & q & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_0 \\ C_2 \\ C_4 \\ C_6 \\ \vdots \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad (3.19)$$

für (3.13)

$$\begin{pmatrix} 1+q-f & q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 3^2 - f & q & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q & 5^2 - f & q & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q & 7^2 - f & q & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \\ C_7 \\ \vdots \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad (3.20)$$

für (3.14)

$$\begin{pmatrix} 2^2 - f & q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 4^2 - f & q & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q & 6^2 - f & q & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q & 8^2 - f & q & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_2 \\ S_4 \\ S_6 \\ S_8 \\ \vdots \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad (3.21)$$

### 3 Ellipse

und für (3.15)

$$\begin{pmatrix} 1 - q - f & q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 3^2 - f & q & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q & 5^2 - f & q & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q & 7^2 - f & q & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_3 \\ S_5 \\ S_7 \\ \vdots \end{pmatrix} = \vec{0}. \quad (3.22)$$

In der Theorie liegt hier ein unendliches lineares Gleichungssystem vor. Um das System lösen zu können werden nur die ersten  $N$  Gleichungen verwendet um  $N$  Koeffizienten  $C_i$  bzw.  $S_i$  zu erhalten, die eingesetzt in (3.12) – (3.15) eine Mathieu-Funktion approximieren. Die *Mathieu-Toolbox* verwendet zur Approximation  $N = 24$  Koeffizienten. Die Systeme in (3.19) – (3.22) lassen sich in *matlab* mittels der Funktion *eig* lösen, die die Eigenvektoren der Matrix bestimmt. Die Eigenvektoren enthalten die gesuchten Koeffizienten  $C_i$  bzw.  $S_i$ . Hat man die Koeffizienten bestimmt, kann man über die Reihendarstellung (3.12) – (3.15) die Mathieu-Funktion an beliebigen Stellen auswerten. Eigentlich fehlt noch die Lösung der modifizierten Mathieu-Gleichung. Die modifizierte Mathieu-Gleichung unterscheidet sich von der klassischen Mathieu-Gleichung dadurch, dass der *Cosinus hyperbolicus* den *Cosinus* ersetzt. Es gilt der Zusammenhang

$$\cos(i \cdot x) = \cosh(x), \quad (3.23)$$

wodurch man das Argument, bei der modifizierten Funktion ist das der Radius, mit der imaginären Einheit multipliziert. Zusätzlich gibt es auch Fourierreihen-Ansätze wie (3.14) und (3.15), in denen statt dem *Cosinus* der *Sinus* steht. Um dann die radiale Funktionen zusammensetzen, benutzt man analog den Zusammenhang

$$-i \cdot \sin(i \cdot x) = \sinh(x),$$

man multipliziert den Funktionswert also zusätzlich noch mit einem Faktor  $-i$ . Es gilt demnach

$$\begin{aligned} \text{Mc}_n(r, q_{nk1}) &= \text{Ce}_n(r \cdot i, q_{nk1}), \\ \text{Mc}_{n+1}(r, q_{nk2}) &= \text{Ce}_{n+1}(r \cdot i, q_{nk2}), \\ \text{Ms}_n(r, q_{nk3}) &= -i \cdot \text{Se}_n(r \cdot i, q_{nk3}), \\ \text{Ms}_{n+1}(r, q_{nk4}) &= -i \cdot \text{Se}_{n+1}(r \cdot i, q_{nk4}). \end{aligned}$$

Bisher ist man davon ausgegangen, dass man den Parameter  $q$  kennt, um die Lösungen der Mathieu-Gleichungen aufzustellen. In der Praxis müssen die korrekten Parameter  $q$  erst einmal bestimmt werden. Die Eigenfunktionen müssen die Dirichlet-Randbedingung erfüllen, siehe (3.9). Der Radius  $R$  der Ellipse lässt sich mithilfe der Halbachsen berechnen, sodass  $q$  als einzige Unbekannte bleibt, die als Nullstelle der radialen Funktionen

### 3.1 Implementierung

zu bestimmen ist. Es gibt unendlich viele positive Nullstellen, die durch den Index  $k$  der  $q_{nki}$  aufsteigend durchnummeriert werden. Mittels *fzero* in *matlab* können die Nullstellen berechnet werden. Man gibt einen Startwert für das Nullstellenverfahren an, berechnet für das aktuelle  $q$  die Koeffizienten  $C_i$  bzw.  $S_i$  und wertet die Funktion in ihrer Reihendarstellung aus für das gegebene  $R$  bis der ausgewertete Funktionswert 0 ist. Dadurch steigt der Rechenaufwand an, da jetzt allein für jedes  $q$ , von denen man für jede Basisfunktion eins benötigt, pro Iteration der Nullstellensuche ein Eigenwertproblem lösen muss. Das ist allerdings im Vergleich zu den Kosten der Integration vernachlässigbar. Da man die  $\lambda_j$ , die von jeweils einem  $q_{nki}$  abhängen, nicht auf Basis der Parameter  $n, k, i$  aufsteigend sortieren kann, werden bei der Implementierung alle Nullstellen  $q$  in einem bestimmten Intervall für die vorgegebene Ordnungen  $n_i$  bestimmt und anschließend der Größe nach sortiert.

Im Folgenden werden die ersten  $\lambda_j$  mit den korrespondierenden  $q_{nki}$  und deren Parametern für eine Ellipse mit Halbachsen  $A = 1.2, B = 1$  und Brennweite  $f = \sqrt{A^2 - B^2} \approx 0.663325$  gelistet. Abbildung 3.1 stellt diese Ellipse dar. Die  $\lambda_j$  wurden als

$$\lambda_j = \sqrt{\frac{q_{nki}^2}{f^2}}, \quad 0 < \lambda_j \leq \lambda_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

berechnet und erfüllen (3.9) mit  $R = \operatorname{artanh}\left(\frac{B}{A}\right) \approx 1.198948$ . Die *matlab*-Methode *fzero* löst die Nebenbedingung mit einer Kombination aus Bisektions- und Sekanten-Verfahren gepaart mit einer invertierten-Quadratur-Methode. Als Vergleich dienen Werte, die mit Hilfe einer Randintegralgleichungs-Methode (*BEM*, engl. boundary integral method) berechnet wurden. Tabelle 3.1 enthält diese Werte. Zusätzlich sind Plots der ersten drei

$n$	$k$	$i$	$q_{nki}$	$\lambda_j$	$\mu_j$
1	1	1	0.53847434741194	2.21251470958015	2.21251
1	1	2	1.24313016906884	3.36172327165270	3.36172
1	1	4	1.48969556289739	3.68003898558573	3.68003
2	1	1	2.26385717471900	4.53657577586583	4.53657
1	1	3	2.45182102316544	4.72115261655210	4.72115
1	2	1	3.02671693025006	5.24553223770655	5.24553
2	1	2	3.57161039167426	5.69817386351601	5.69817

Tabelle 3.1: Kleinste Eigenwerte  $\lambda_j$  einer Ellipse mit Halbachsen  $A = 1.2, B = 1$  und zugehöriges  $q$  mit Parametern, Vergleichswerte  $\mu_j$  aus *BEM*

Basisfunktionen in Abbildung 3.1 zu sehen. Die Plots wurden in kartesischen Koordinaten erzeugt, die mittels expliziter Formeln in die entsprechenden Ellipsekoordinaten  $(r, \theta)$  umgerechnet werden können. In [11] wird diese Transformation präsentiert. Ausgehend von den Ellipsekoordinaten

$$x = f \cdot \cosh(r) \cdot \cos(\theta), \quad y = f \cdot \sinh(r) \cdot \sin(\theta) \quad (3.24)$$

### 3 Ellipse

versucht man, die Gleichungen nach  $r$  bzw.  $\theta$  freizustellen. Versucht man  $r$  aus (3.24) zu eliminieren, so quadriert man  $x$  und  $y$  und teilt durch  $\sin^2(\theta)$  bzw.  $\cos^2(\theta)$ . Subtrahiert man anschließend die entstandenen Gleichungen, so erhält man

$$\frac{x^2}{\cos^2(\theta)} - \frac{y^2}{\sin^2(\theta)} = f^2$$

mittels  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ . Das bedeutet, dass die Koordinatenlinien mit konstantem  $r$  Hyperbeln sind. Zur Vereinfachung der Gleichung ersetzt man  $p = \sin^2(\theta)$  und erhält wegen  $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$

$$\frac{x^2}{1-p} - \frac{y^2}{p} = f^2$$

und daraus nach Multiplikation mit  $p \cdot (1-p)$  die Gleichung

$$f^2 \cdot p^2 + (x^2 + y^2 - f^2) \cdot p - y^2 = 0. \quad (3.25)$$

Analog kann man auch  $\theta$  aus (3.24) eliminieren. Dabei erhält man

$$\frac{x^2}{\cosh^2(r)} + \frac{y^2}{\sinh^2(r)} = f^2.$$

Demnach erhält man als Koordinatenlinien mit konstantem  $r$  elliptische Bahnen. Setzt man dann  $q = -\sinh^2(r)$ , so gelangt man mit  $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$  zu

$$\frac{x^2}{1-q} - \frac{y^2}{q} = f^2$$

und durch Multiplikation mit  $q \cdot (1-q)$  zu

$$f^2 \cdot q^2 + (x^2 + y^2 - f^2) \cdot q - y^2 = 0. \quad (3.26)$$

Betrachtet man die beiden erhaltenen Gleichungen (3.25) und (3.26), so erkennt man, dass man zweimal die gleiche quadratische Gleichung in  $p$  bzw.  $q$  hergeleitet hat. Demnach müssen  $p$  und  $q$  die Lösungen dieser Gleichung sein. Nach Festlegung muss gelten, dass  $0 \leq p \leq 1$  wegen  $\sin^2(x) \rightarrow [0; 1]$  und  $q < 0$ , daher kann man die Lösungen von (3.25) bzw. (3.26) direkt zuordnen als

$$p = \frac{-A + \sqrt{A^2 + 4f^2y^2}}{2f^2}, \quad q = \frac{-A - \sqrt{A^2 + 4f^2y^2}}{2f^2} \quad (3.27)$$

mit  $A = x^2 + y^2 - f^2$ , indem man die quadratische Gleichung durch  $f^2$  teilt und dann die p-q-Formel entsprechend mit  $p$  bzw.  $q$  als Variable anwendet. Das Zusammenfassen auf einen Bruchstrich gelingt durch ausklammern von  $\frac{1}{4f^4}$  unter der Wurzel.

Jetzt muss man noch den Zusammenhang zwischen den Variablen  $(r, \theta)$  und den erhaltenen Formeln für  $p, q$  herstellen, indem man Für  $p$  erhält man durch Freistellen von  $r$

$$\theta_0 = \arcsin(\sqrt{p}). \quad (3.28)$$

Je nachdem in welchem Quadranten des kartesischen Koordinatensystems sich der Punkt  $(x, y)$  befindet, erhält man den Winkelanteil  $\theta$

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0, & x \geq 0, y \geq 0, \\ \theta &= \pi - \theta_0 & x < 0, y \geq 0, \\ \theta &= \pi + \theta_0 & x \geq 0, y < 0, \\ \theta &= 2\pi - \theta_0 & x < 0, y < 0.\end{aligned}\tag{3.29}$$

Löst man die Definition von  $q$  nach  $r$  auf, kann man den Zusammenhang

$$\sinh^2(x) = \frac{1}{2}(\cosh(2x) - 1)$$

nutzen und erhält

$$\cosh(2r) = -2q + 1.\tag{3.30}$$

Durch Anwendung der Definition des Cosinus hyperbolicus und Multiplikation mit  $\frac{1}{2}$  erhält man schließlich

$$r = \frac{1}{2} \ln \left( 1 - 2q + 2\sqrt{q^2 - q} \right).$$

Somit kann man bei einer Implementierung ein zweidimensionales kartesisches Raster generieren, berechnet mittels (3.27)  $p$  und  $q$  und setzt diese dann in (3.1) bzw. (3.29) ein, um  $r$  und  $\theta$  zu erhalten und dann die Funktion am Punkt  $(x, y)$  auswerten zu können.

## 3.2 Beispiele

Die vorangegangenen Abschnitte haben alle Besonderheiten von elliptischen Beispielen erläutert. Damit kann das Galerkin-Verfahren nun analog zu den Beispielen des Quadrats und des Kreises [10] implementiert werden. Im Folgenden werden für verschiedene Parameter-Paare  $\alpha(r, \theta)$ ,  $\beta(r, \theta)$  die Eigenwerte und -funktionen der PDG vierter Ordnung präsentiert. Die Parameter wurden von den Beispielen des Einheitskreises in [5] übernommen. Referenzlösungen sind nicht bekannt, weshalb hier auf einen Vergleich der Werte verzichtet wird. Ein Vergleich mit einem Kreis für  $A \rightarrow 1$  ist ebenfalls schwierig, da in diesem Grenzfall für die Brennweite  $f$  gilt, dass  $f \rightarrow 0$ , sodass (3.4) nicht definiert ist.

Betrachtet wird eine Ellipse mit Halbachsen  $A = 1.2, B = 1$ . Die Dirichlet-Eigenwerte und -funktionen wurden exemplarisch dazu im vorangegangenen Abschnitt gezeigt. Die weiteren Ellipse-Parameter sind die Brennweite  $f \approx 0.663325$  und der Ellipsen-Radius  $R \approx 1.198948$ . Für alle Beispiele werden  $N = 16$  Basisfunktionen genutzt.

### 3.2.1 Beispiel 1

Als erstes werden konstante Parameter  $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \beta_1 = 10$  gewählt. Die Matrizen  $A, B$  des Galerkin-Verfahrens sind aufgrund der Orthogonalität der Basisfunktionen damit

### 3 Ellipse

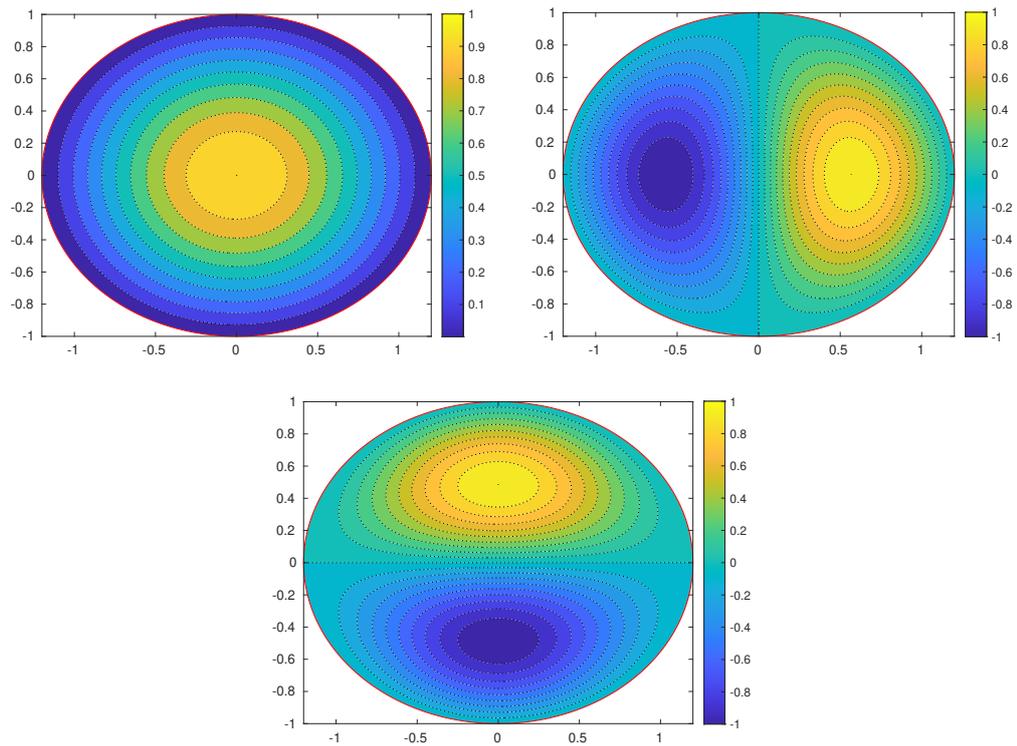


Abbildung 3.2: Plots der ersten drei Basisfunktionen für eine Ellipse mit  $A = 1.2, B = 1$

Diagonal-Matrizen. Die Eigenwerte werden in Tabelle 3.2 gelistet.

$j$	$\tau_{j,N}$ mit $\alpha_1, \beta_1$
1	0.1223805335
2	0.2825295838
3	0.3385671733

Tabelle 3.2: Die ersten drei Eigenwerte für das konstante Parameterpaar  $\alpha_1 = 1/4, \beta_1 = 10$  bei  $N = 16$  Basisfunktionen

#### 3.2.2 Beispiel 2

Im nächsten Beispiel bleibt jeweils ein Parameter konstant, der andere Parameter ist eine stetige Funktion in  $r$  bzw.  $\theta$ . Die Eigenwerte für  $\alpha_2 = \frac{1}{4} + r \cdot \sin^2(\theta), \beta_2 = 10$  sowie

für  $\alpha_3 = \frac{1}{4}, \beta_3 = 10 + 2e^{-r^2}$  sind in Tabelle 3.3 gelistet. Zusätzlich sind Plots der ersten drei Eigenfunktionen der PDG vierter Ordnung in Abbildung 3.3 zu sehen.

$j$	$\tau_{j,N}$ mit $\alpha_2, \beta_2$	$\tau_{j,N}$ mit $\alpha_3, \beta_3$
1	0.2439489096	0.1059418066
2	0.4665100909	0.2470770927
3	0.8458575107	0.3018674159

Tabelle 3.3: Die ersten drei Eigenwerte für die Parameterpaare  $\alpha_2 = \frac{1}{4} + r \cdot \sin^2(\theta), \beta_2 = 10$  bzw.  $\alpha_3 = \frac{1}{4}, \beta_3 = 10 + 2e^{-r^2}$  bei  $N = 16$  Basisfunktionen

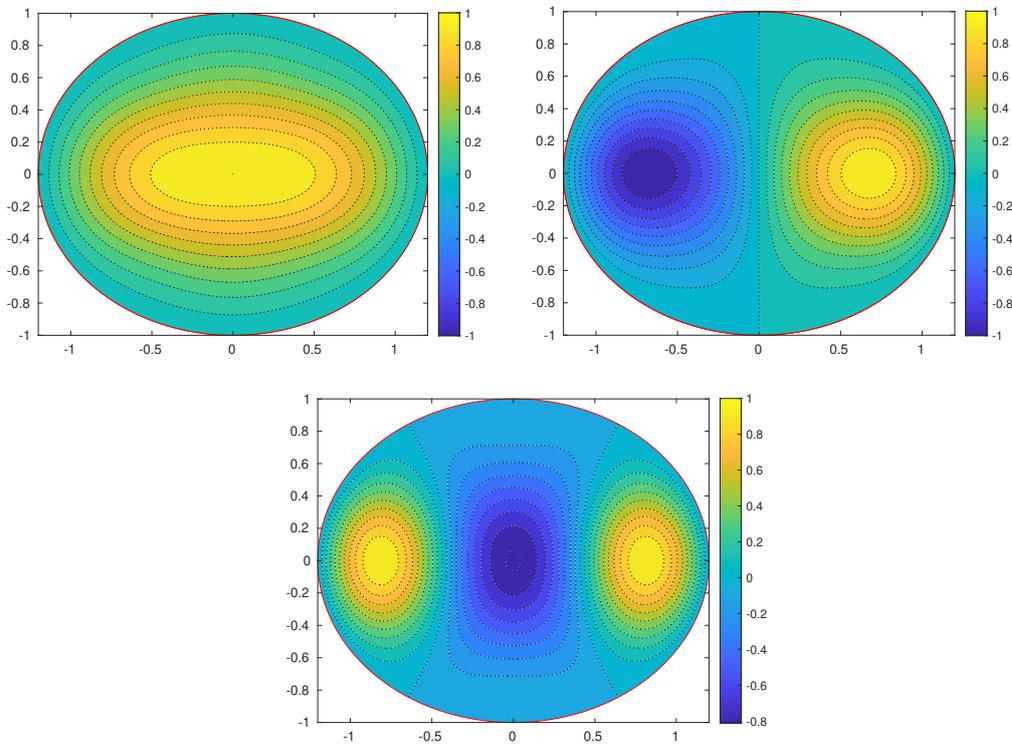


Abbildung 3.3: Plots der ersten drei Eigenfunktion der PDG vierter Ordnung für eine Ellipse mit Halbachsen  $A = 1.2, B = 1$  und Parametern  $\alpha_2 = \frac{1}{4} + r \cdot \sin^2(\theta), \beta_2 = 10$

### 3.2.3 Beispiel 3

Zuletzt wird für jeweils einen Parameter eine stückweise konstante Funktion gewählt, der zweite Parameter bleibt auch hier konstant. Die berechneten Eigenwerte für  $\alpha_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \mathbb{1}_{(r < 0.25)}$ ,  $\beta_4 = 10$  und für  $\alpha_5 = \frac{1}{4}$ ,  $\beta_5 = 10 + 2 \cdot \mathbb{1}_{(r < 0.5)}$  stehen in Tabelle 3.4.

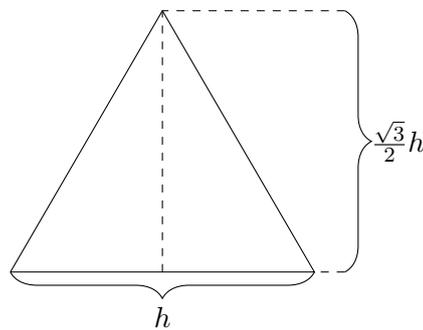
$j$	$\tau_{j,N}$ mit $\alpha_4, \beta_4$	$\tau_{j,N}$ mit $\alpha_5, \beta_5$
1	0.2040996935	0.1122960621
2	0.4980415161	0.2530019050
3	0.6685530629	0.2908328314

Tabelle 3.4: Die ersten drei Eigenwerte für die Parameterpaare  $\alpha_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \mathbb{1}_{(r < 0.25)}$ ,  $\beta_4 = 10$  bzw.  $\alpha_5 = \frac{1}{4}$ ,  $\beta_5 = 10 + 2 \cdot \mathbb{1}_{(r < 0.5)}$  bei  $N = 16$  Basisfunktionen

## 4 Gleichseitiges Dreieck

Auch für ein gleichseitiges Dreieck sind die Eigenfunktionen und Eigenwerte analytisch bekannt. Eine ausführliche Behandlung des Dreiecks für verschiedene Randbedingungen findet man in [9], für den folgenden Abschnitt relevant sind alle Abschnitte bis einschließlich Abschnitt 2.3.

Gegeben sei also ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge  $h$ . Für die Berechnung der



Eigenfunktionen führt man spezielle Dreieckskoordinaten der Gestalt

$$\begin{aligned} u &= r - y, \\ v &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(x - \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot (y - r), \\ w &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - x\right) + \frac{1}{2} \cdot (y - r), \end{aligned}$$

ein mit  $r = \frac{h}{2\sqrt{3}}$ , dem Inradius des Dreiecks mit Mittelpunkt im Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden. Diese Koordinaten kann man als Koeffizienten von Vektoren verstehen, die im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden beginnen und dann jeweils eine der Seiten halbieren, sodass man die Seiten des Dreiecks durch  $u = r, v = r$  bzw.  $w = r$  erhält. Abbildung 4.1 zeigt die Seitenhalbierenden und die Eckpunkte sowie den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden mit angegebenen Koordinaten  $(u, v, w)$ .

Wegen

$$a = r - y, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(x - \frac{h}{2}\right)$$

ist

$$u = a, \quad v = b - \frac{a}{2}, \quad w = -b - \frac{a}{2}$$

#### 4 Gleichseitiges Dreieck

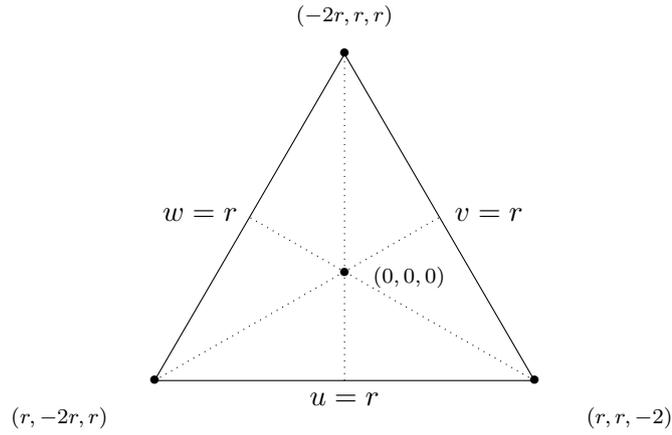


Abbildung 4.1: Bedeutung der Dreieckskoordinaten  $(u, v, w)$

und daher gilt

$$u + v + w = a + b - b - 2 \cdot \frac{a}{2} = 0. \quad (4.1)$$

Damit kann man den Ansatz zur Berechnung der Dirichlet-Eigenfunktionen  $f$  mit den korrespondierenden Eigenwerten  $\lambda^2 > 0$  aufstellen. Gelöst werden soll

$$\Delta f(x, y) + \lambda^2 f(x, y) = 0. \quad (4.2)$$

Man führt orthogonale Koordinaten

$$\xi = u, \quad \eta = v - w$$

ein, die sich aus den bereits vorgestellten Dreieckskoordinaten zusammensetzen. Eingesetzt in (4.2) ergibt sich

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + 3 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda^2 f = 0. \quad (4.3)$$

Man erhält diese Gleichung, indem man analog zu [10, S. 13] über Produkt und Kettenableitungen den Laplaceoperator aus seiner kartesischen Form aufstellt. Ersetzt man dort  $(r, \theta)$  durch  $(\xi, \eta)$ , so benötigt man die entsprechenden Ableitungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \xi}{\partial y} &= -1, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \sqrt{3}, & \frac{\partial \eta}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Die (gemischten) höheren Ableitungen sind offensichtlich alle null und durch Einsetzen in

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial f^2}{\partial \xi^2} \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial f^2}{\partial \eta^2} \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{\partial f}{\partial \xi} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial f}{\partial \eta} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + 3 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\end{aligned}$$

erhält man (4.3). Anschließend stellt man einen Separationsansatz

$$f(\xi, \eta) = g(\xi) \cdot j(\eta) \quad (4.4)$$

auf, der eingesetzt in (4.3) zu

$$\frac{\partial^2 g(\xi)}{\partial \xi^2} \cdot j(\eta) + 3 \cdot \frac{\partial^2 j(\eta)}{\partial \eta^2} \cdot g(\xi) + \lambda^2 \cdot g(\xi) \cdot j(\eta) = 0$$

führt und nach Division durch  $g(\xi) \cdot j(\eta)$  zu

$$\frac{g''(\xi)}{g(\xi)} + 3 \cdot \frac{j''(\eta)}{j(\eta)} + \lambda^2 = 0.$$

Der Ansatz ist damit vollständig separiert und man erhält zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$g''(\xi) + \alpha^2 g(\xi) = 0, \quad j''(\eta) + \beta^2 j(\eta) = 0 \quad (4.5)$$

mit

$$\alpha^2 + 3 \cdot \beta^2 = \lambda^2.$$

Beide Gleichungen haben eine ähnliche allgemeine Lösung

$$g(\xi) = \lambda_{\xi 1} \cdot \sin(\alpha \cdot (\xi + a)) + \lambda_{\xi 2} \cdot \cos(\alpha \cdot \xi), \quad (4.6)$$

$$j(\eta) = \lambda_{\eta 1} \cdot \sin(\beta \cdot (\eta + b)) + \lambda_{\eta 2} \cdot \cos(\beta \cdot \eta). \quad (4.7)$$

Im Folgenden wird auf Grundlage der allgemeinen Lösungen von (4.5) direkt eine Lösung von (4.3) konstruiert. Um von den allgemeinen Lösungen zu den konkreten Eigenfunktionen zu gelangen, müssen die Randbedingungen erfüllt sein. Es muss gelten, dass die Eigenfunktion null ergibt für  $u = r$  und  $u = -2r$ , siehe Abbildung 4.1. Daher wählt man in (4.6)  $\lambda_{\xi 2} = 0$  und  $a = 2r$ . Für die Erfüllung der restlichen Randbedingung kann man zwei Ansätze bezüglich  $v = w$  verfolgen. Entweder fordert man, dass die Eigenfunktion symmetrisch bezüglich  $v = w$  ist, oder man fordert entsprechend die Asymmetrie. Dementsprechend verwendet man von (4.7) entweder den *Cosinus* oder den *Sinus*. Die

#### 4 Gleichseitiges Dreieck

Herleitung wird im Folgenden für die symmetrische Variante durchgeführt, die Analogie zur asymmetrischen Funktion wird danach kurz erläutert.

Um die symmetrische Eigenfunktion zu erhalten wählt man in (4.7)  $\lambda_{\eta_1} = 0$  und erhält gemäß (4.4) dadurch eine Lösung der Form

$$\sin\left(\frac{\pi l}{3r} \cdot (u + 2r)\right) \cdot \cos(\beta_1 \cdot (v - w)),$$

mit  $l \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_1 = \frac{\pi l}{3r}$  und  $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = \lambda^2$ , die die Randbedingung an  $u$  erfüllt. Die Faktoren  $\lambda_{\xi_1}, \lambda_{\nu_2}$  werden hier vernachlässigt, da die Skalierung der Eigenfunktionen für das Galerkin-Verfahren nicht relevant ist, siehe Abschnitt 2. Als weitere Randbedingung muss natürlich gelten, dass für  $v = r$  die Funktion ebenfalls null ist. Eingesetzt in (4.1) ergibt das  $v - w = u + 2r$  und der Lösungsansatz wird zu

$$\sin\left(\frac{\pi l}{3r} \cdot (u + 2r)\right) \cdot \cos(\beta_1 \cdot (u + 2r))$$

Die Lösung erfüllt nun  $v = r$  und müsste daher  $\forall u \in [-2r; r]$  null ergeben. Da der Cosinus aber nur Nullstellen der Form  $\frac{\pi}{2} + m \cdot \pi$  besitzt, kann die Randbedingung von diesem Ansatz nicht erfüllt werden.

Deshalb erweitert man den Ansatz um einen zweiten Term zu

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{\pi l}{3r} \cdot (u + 2r)\right) \cdot \cos(\beta_1 \cdot (v - w)) \\ & + \sin\left(\frac{\pi m}{3r} \cdot (u + 2r)\right) \cdot \cos(\beta_2 \cdot (v - w)) \end{aligned} \quad (4.8)$$

mit  $l, m \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_1 = \frac{\pi l}{3r}$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi m}{3r}$  und  $\alpha_i^2 + 3 \cdot \beta_i^2 = \lambda^2$ . Ersetzt man wieder  $v - w = u + 2r$  wegen  $v = r$  und wendet die trigonometrische Identität

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$$

an, so erhält man aus (4.8)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \left[ \sin\left(\left(\frac{\pi l}{3r} + \beta_1\right) \cdot (u + 2r)\right) + \sin\left(\left(\frac{\pi l}{3r} - \beta_1\right) \cdot (u + 2r)\right) \right. \\ & \left. + \sin\left(\left(\frac{\pi m}{3r} + \beta_2\right) \cdot (u + 2r)\right) + \sin\left(\left(\frac{\pi m}{3r} - \beta_2\right) \cdot (u + 2r)\right) \right]. \end{aligned}$$

Damit der gesamte Term für  $u \in [-2r; r]$  null ergibt, muss entweder gelten, dass

$$\frac{\pi l}{3r} + \beta_1 = -\frac{\pi m}{3r} - \beta_2, \quad \frac{\pi l}{3r} - \beta_1 = -\frac{\pi m}{3r} + \beta_2$$

oder

$$\frac{\pi l}{3r} + \beta_1 = -\frac{\pi m}{3r} + \beta_2, \quad \frac{\pi l}{3r} - \beta_1 = -\frac{\pi m}{3r} - \beta_2,$$

da sich dann aufgrund der Punktsymmetrie des Sinus jeweils zwei Terme gegenseitig aufheben. In beiden Fällen gilt, dass  $l = -m$  und  $\beta_1 = -\beta_2$ . Setzt man diese Zusammenhänge aber in (4.8), so ist aufgrund der Symmetrien  $\sin(x) = -\sin(-x)$  und

$\cos(x) = \cos(-x)$  der Ansatz die Nullfunktion und damit keine valide Lösung. Ein dritter Term führt schließlich zum Erfolg. Man erhält also einen Ansatz

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{\pi l}{3r} \cdot (u + 2r)\right) \cdot \cos(\beta_1 \cdot (v - w)) \\ & + \sin\left(\frac{\pi m}{3r} \cdot (u + 2r)\right) \cdot \cos(\beta_2 \cdot (v - w)) \\ & + \sin\left(\frac{\pi n}{3r} \cdot (u + 2r)\right) \cdot \cos(\beta_3 \cdot (v - w)) \end{aligned} \quad (4.9)$$

mit  $l, m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_1 = \frac{\pi l}{3r}$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi m}{3r}$ ,  $\alpha_3 = \frac{\pi n}{3r}$  und  $\alpha_i^2 + 3 \cdot \beta_i^2 = \lambda^2$ . Man sieht hier schon, dass keiner der Parameter  $l, m, n$  null sein darf, da man sonst wieder nur zwei Terme erhält, und wie bereits gezeigt kann ein zweiteiliger Ansatz die Randbedingungen nicht erfüllen. Einsetzen von  $v - w = u + 2r$  und erneute Anwendung der trigonometrischen Identität liefert

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \left[ \sin\left(\left(\frac{\pi l}{3r} + \beta_1\right) \cdot (u + 2r)\right) + \sin\left(\left(\frac{\pi l}{3r} - \beta_1\right) \cdot (u + 2r)\right) \right. \\ & \quad + \sin\left(\left(\frac{\pi m}{3r} + \beta_2\right) \cdot (u + 2r)\right) + \sin\left(\left(\frac{\pi m}{3r} - \beta_2\right) \cdot (u + 2r)\right) \\ & \quad \left. + \sin\left(\left(\frac{\pi n}{3r} + \beta_3\right) \cdot (u + 2r)\right) + \sin\left(\left(\frac{\pi n}{3r} - \beta_3\right) \cdot (u + 2r)\right) \right]. \end{aligned}$$

Es gibt 8 Möglichkeiten zur Wahl der Koeffizienten, sodass der gesamte Term null wird. Dabei setzt man immer zwei Terme mit verschiedenen  $\beta_i$  gleich, da man sonst das  $\beta_i$  aus der Gleichung eliminiert. Somit hat man für den ersten der sechs Terme 4 Möglichkeiten, für den zweiten nur noch 2, damit die beiden letzten Terme nicht das gleiche  $\beta_i$  enthalten, demnach  $2 \cdot 4 = 8$  Kombinationsmöglichkeiten. Im Folgenden wird die Rechnung nur für eine dieser Möglichkeiten präsentiert, für andere Möglichkeiten funktioniert der Weg aber analog.

Man wähle

$$\frac{\pi l}{3r} + \beta_1 = -\frac{\pi n}{3r} + \beta_3, \quad \frac{\pi l}{3r} - \beta_1 = -\frac{\pi m}{3r} - \beta_2, \quad \frac{\pi m}{3r} - \beta_2 = -\frac{\pi n}{3r} - \beta_3. \quad (4.10)$$

Addiert man alle drei Gleichungen, so verschwinden die  $\beta_i$ . Multiplikation mit  $\frac{3r}{\pi}$  führt dann zu

$$2 \cdot l + m = -m - 2 \cdot n$$

und damit zu

$$l + m + n = 0. \quad (4.11)$$

Fehlen noch Formeln zur Berechnung der  $\beta_i$ . Addiert man die erste und die letzte Gleichung aus (4.10), so erhält man

$$\beta_1 - \beta_2 + \frac{\pi}{3r}(l + m) = -2\frac{\pi n}{3r}$$

bzw.

$$\beta_1 - \beta_2 = \frac{\pi}{3r} \cdot (-2n - l - m)$$

#### 4 Gleichseitiges Dreieck

und unter Verwendung von (4.11)

$$\beta_1 - \beta_2 = \frac{\pi}{3r} \cdot (m + l). \quad (4.12)$$

Für die Eigenwerte  $\lambda$  in Abhängigkeit von den Koeffizienten  $\alpha_i, \beta_i$  von (4.9) gilt

$$\alpha_i^2 + 3 \cdot \beta_i^2 = \lambda^2 \quad (4.13)$$

und damit auch für  $\alpha_1, \alpha_2$

$$\left(\frac{\pi l}{3r}\right)^2 + 3 \cdot \beta_1^2 = \left(\frac{\pi m}{3r}\right)^2 + 3 \cdot \beta_2^2.$$

Durch Umsortieren der Terme erhält man

$$3 \cdot (\beta_1^2 - \beta_2^2) = \left(\frac{\pi}{3r}\right)^2 \cdot (m^2 - l^2)$$

und durch anschließende Anwendung der dritten binomischen Formeln

$$3 \cdot (\beta_1 + \beta_2) \cdot (\beta_1 - \beta_2) = \left(\frac{\pi}{3r}\right)^2 \cdot (m - l) \cdot (m + l) \quad (4.14)$$

Division von Gleichung (4.14) durch (4.12) und durch 3 führt zu

$$\beta_1 + \beta_2 = \frac{\pi}{9r} \cdot (m - l) \quad (4.15)$$

und

$$\beta_1 = \frac{\pi \cdot (m - n)}{9r}, \quad \beta_2 = \frac{\pi \cdot (n - l)}{9r}, \quad \beta_3 = \frac{\pi \cdot (l - m)}{9r}. \quad (4.16)$$

Durch Einsetzen eines beliebigen  $\beta_i$  aus (4.16) mit dem korrespondierenden  $\alpha_i$  in (4.13), hier für  $\alpha_1, \beta_1$ , erhält man

$$\begin{aligned} \lambda_{n,m}^2 &= \left(\frac{\pi l}{3r}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{\pi \cdot (m - n)}{9r}\right)^2 \\ &= \frac{1}{27} \left(\frac{\pi}{r}\right)^2 \cdot (3l^2 + (m - n)^2) \end{aligned}$$

und schlussendlich durch Ersetzen von  $l = -m - n$

$$\lambda_{n,m}^2 = \frac{4}{27} \left(\frac{\pi}{r}\right)^2 \cdot (m^2 + m \cdot n + n^2). \quad (4.17)$$

Damit ergibt sich die vollständige Eigenfunktion als

$$\begin{aligned} f_s(u, v - w) &= \sin\left(\frac{\pi l}{3r} \cdot (u + 2r)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi(m - n)}{9r} \cdot (v - w)\right) \\ &+ \sin\left(\frac{\pi m}{3r} \cdot (u + 2r)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi(n - l)}{9r} \cdot (v - w)\right) \\ &+ \sin\left(\frac{\pi n}{3r} \cdot (u + 2r)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi(l - m)}{9r} \cdot (v - w)\right) \end{aligned}$$

mit  $l, m, n \neq 0$ .

Alternativ kann man auch fordern, dass die Eigenfunktion zu  $v = w$  asymmetrisch ist, die Funktion selbst ist dann null entlang der Geraden  $v = w$ . Dann setzt man in (4.7)  $\lambda_{\eta 2} = 0, b = 0$  und die Lösung setzt sich dann gemäß (4.4) aus Termen der Form

$$\sin\left(\frac{\pi l}{3r} \cdot (u + 2r)\right) \cdot \sin(\beta_1 \cdot (v - w)) \quad (4.18)$$

zusammen. Die Rechnung dazu funktioniert ganz analog zu der bereits oben durchgeführten für die symmetrische Lösung. Am Ende erhält man die Lösung

$$\begin{aligned} f_a(u, v - w) = & \sin\left(\frac{\pi l}{3r} \cdot (u + 2r)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi(m - n)}{9r} \cdot (v - w)\right) \\ & + \sin\left(\frac{\pi m}{3r} \cdot (u + 2r)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi(n - l)}{9r} \cdot (v - w)\right) \\ & + \sin\left(\frac{\pi n}{3r} \cdot (u + 2r)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi(l - m)}{9r} \cdot (v - w)\right), \end{aligned}$$

die die Nullfunktion (und damit keine gültige Lösung) ist, wenn einer der Parameter  $l, m, n$  null ist oder wenn zwei der Parameter gleich sind (z.B.  $l, m, n = -2m, m, m$ ). Im letzteren Fall ist einer der drei Terme offensichtlich null und der zweite ist gleich dem dritten negiert. Als Eigenwerte erhält man

$$\lambda_{n,m}^2 = \frac{4}{27} \left(\frac{\pi}{r}\right)^2 \cdot (m^2 + m \cdot n + n^2), \quad (4.19)$$

also genau die gleichen Eigenwerte wie in (4.17) für die symmetrischen Eigenfunktion. Die Eigenwerte  $\lambda^2$  hängen von zwei Parametern  $n, m$  ab und wegen der Symmetrie von (4.17) gilt

$$\lambda_{n,m}^2 = \lambda_{m,n}^2,$$

die Eigenwerte für  $n \neq m$  treten also immer doppelt auf. Da man mit  $f_s$  und  $f_a$  zwei Eigenfunktionen kennt, kann man beide nutzen um trotz der Verwendung der doppelten Eigenwerte neue Basisfunktionen zu erhalten. Für die Implementierung von Testfällen wird festgelegt, dass bei doppelten Eigenwerten  $f_s$  für  $n > m$  als Basisfunktion genutzt wird und entsprechend  $f_a$  für  $n < m$ . Für die einfachen Eigenwerte mit  $n = m$  muss wieder  $f_s$  verwendet werden, da, wie oben beschrieben,  $f_a$  dann keine zugelassene Funktion ist. Abbildung 4.2 zeigt Plots der Eigenfunktionen für  $n, m = 1, 2, 3$  und enthält gemäß der Festlegung die symmetrische als auch die asymmetrische Eigenfunktion.

## 4.1 Implementierung

Für den Galerkinansatz muss über ein dreieckiges Gebiet integriert werden. Zur Integration werden kartesische Koordinaten verwendet und das Gebiet in zwei Dreiecke

#### 4 Gleichseitiges Dreieck

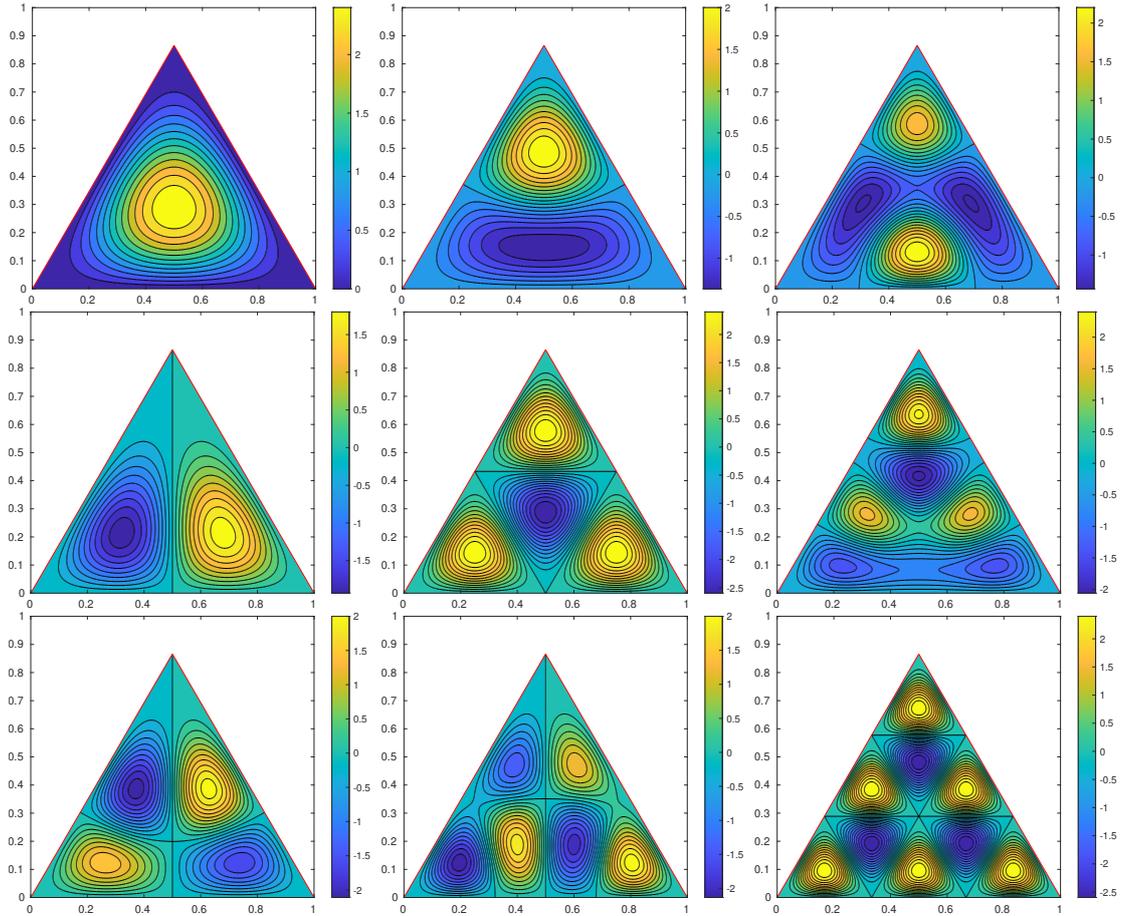


Abbildung 4.2: Plots der Basisfunktionen für  $n, m = 1, 2, 3$ ,  $n$  wächst spaltenweise,  $m$  zeilenweise

aufgeteilt, getrennt durch die Gerade  $v = w$ , siehe Abbildung 4.1. Zur Auswertung der Funktionswerte werden die kartesischen Koordinaten in die Dreieckskoordinaten  $\xi, \eta$  umgerechnet. Die in (2.5) bzw. (2.6) zu berechnenden Integral lassen sich damit berechnen als

$$\int_{x=0}^{\frac{h}{2}} \int_{y=0}^{y_1} f(r - y, \sqrt{3} \cdot (x - \frac{h}{2})) dy dx + \int_{x=\frac{h}{2}}^h \int_{y=0}^{y_2} f(r - y, \sqrt{3} \cdot (x - \frac{h}{2})) dy dx$$

mit

$$y_1 = \sqrt{3}h \cdot x, \quad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}h^2 - \sqrt{3}h \cdot (x - \frac{h}{2}).$$

Integriert wird dann mit der Methode *integral2*, die von  $x$  abhängigen Grenzen des inneren Integrals werden als Funktionen übergeben.

## 4.2 Beispiele

In diesem Abschnitt werden die berechneten Eigenwerte der PDG vierter Ordnung für ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge  $h = 1$  für verschiedene Parameterkombinationen  $\alpha, \beta$  präsentiert. Die Wahl der Parameter  $\alpha, \beta$  orientiert sich an denen des Einheitskreises in [5], allerdings mit leichter Modifikation, da für die Dreieckskoordinaten gilt, dass

$$\xi = u \in [-2r; r], \quad \eta = v - w \in [-3r; 3r],$$

anstatt  $r \in [0; R], \theta \in [0, 2\pi]$  bei Kreis und Ellipse. Im Folgenden ist  $r = \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0.2886751$  eine Konstante, der Inradius des Dreiecks, und hat nichts mit den Polarkoordinaten zu tun. Bei allen Beispielen werden  $N = 24$  Basisfunktionen genutzt.

### 4.2.1 Beispiel 1

Zuerst werden wieder konstante Parameter  $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \beta_1 = 10$  gewählt. Die Eigenwerte ersten drei Eigenwerte werden in Tabelle 4.1 gelistet. Zusätzlich sind Plots der ersten drei Eigenfunktionen in Abbildung 4.3 abgebildet.

$j$	$\tau_{j,N}$ mit $\alpha_1, \beta_1$
1	69.26868695751
2	377.12951787979
3	377.12951787979

Tabelle 4.1: Die ersten drei Eigenwerte für das konstante Parameterpaar  $\alpha_1 = 1/4, \beta_1 = 10$  bei  $N = 24$  Basisfunktionen

### 4.2.2 Beispiel 2

Nun bleibt einer der Parameter weiterhin konstant, der andere wird durch eine stetige Funktion ersetzt. Die ersten drei Eigenwerte für  $\alpha_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4} + r \cdot \sin^2(\eta + 3r), \beta_2(\xi, \eta) = 10$  und für  $\alpha_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}, \beta_3(\xi, \eta) = 10 + 2e^{-(\xi+2r)^2}$  sind in Tabelle 4.2 angegeben.

#### 4 Gleichseitiges Dreieck

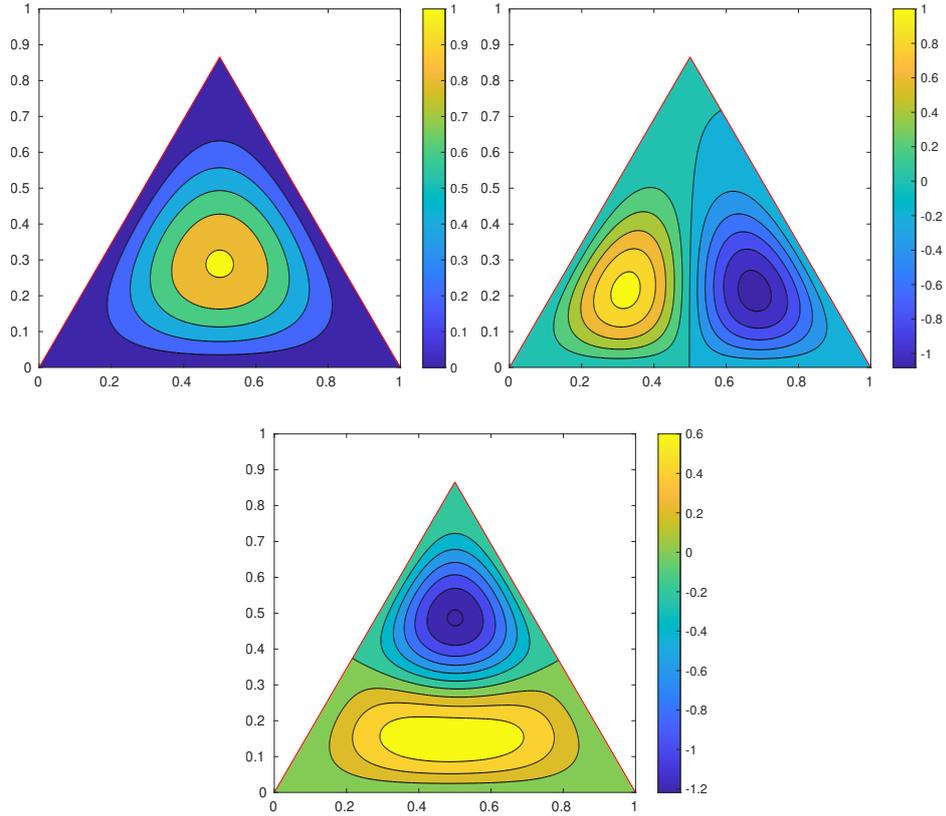


Abbildung 4.3: Plots der ersten drei Eigenfunktion der PDG vierter Ordnung für ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge  $h = 1$  und Parametern  $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \beta_1 = 10$

$j$	$\tau_{j,N}$ mit $\alpha_2, \beta_2$	$\tau_{j,N}$ mit $\alpha_3, \beta_3$
1	58.47352279435	60.61944276506
2	194.60735175939	327.42927221556
3	400.53860545003	333.18152982531

Tabelle 4.2: Die ersten drei Eigenwerte für die Parameterpaare  $\alpha_2 = \frac{1}{4} + r \cdot \sin^2(\eta + 3r), \beta_2 = 10$  bzw.  $\alpha_3 = \frac{1}{4}, \beta_3 = 10 + 2e^{-(\xi+2r)^2}$  bei  $N = 24$  Basisfunktionen

#### 4.2.3 Beispiel 3

Als letztes wird für einen der Parameter eine stückweise konstante Funktion gewählt während der andere einfach konstant bleibt. Die ersten drei Eigenwerte für  $\alpha_4(\xi, \eta) =$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \mathbf{1}_{(\xi < 0)}$ ,  $\beta_4(\xi, \eta) = 10$  und  $\alpha_5(\xi, \eta) = \frac{1}{4}$ ,  $\beta_5 = 10 + 2 \cdot \mathbf{1}_{(\xi < r)}$  stehen in Tabelle 4.3.

$j$	$\tau_{j,N}$ mit $\alpha_4, \beta_4$	$\tau_{j,N}$ mit $\alpha_5, \beta_5$
1	93.56484471521	57.80215943803
2	504.12842858510	314.28195311997
3	606.52695407460	318.28414947069

Tabelle 4.3: Die ersten drei Eigenwerte für die Parameterpaare  $\alpha_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \mathbf{1}_{(\xi < 0)}$ ,  $\beta_4 = 10$  bzw.  $\alpha_5 = \frac{1}{4}$ ,  $\beta_5 = 10 + 2 \cdot \mathbf{1}_{(\xi < -r)}$  bei  $N = 24$  Basisfunktionen



## 5 Quader

Der Galerkin-Ansatz gilt nur für Lipschitz-Gebiete, für die Anzahl an Dimensionen gibt es allerdings keine Festlegung. Die bisher betrachteten Gebiete waren zweidimensional, aber auch dreidimensionale Gebiete können mit dem Verfahren behandelt werden. Daher wird im Folgenden ein Quader betrachtet. Zur Herleitung der Basisfunktionen orientiert man sich am Beispiel eines Rechtecks, siehe [10, Abschnitt 3.1], da die Erweiterung von zwei auf drei Dimensionen einfach ist.

Gegeben sei also ein quaderförmiges Gebiet  $\mathcal{D} = [0; a] \times [0; b] \times [0; c] \subset \mathbb{R}^3$  mit  $a, b, c > 0$ . Für den Galerkin-Ansatz benötigt man die Eigenfunktionen  $u$  des Laplace-Operators sowie die korrespondierenden Eigenwerte  $\lambda$ , die zudem die Dirichlet-Randbedingung erfüllen, d.h.

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ in } \mathcal{D}, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\mathcal{D}. \quad (5.1)$$

Der Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten in drei Dimensionen wird analog zu dem in zwei Dimensionen einfach um eine dritte erweitert, und man erhält

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (5.2)$$

Wie in [10] als auch den vorangegangenen Kapiteln löst man (5.1) mittels Trennung der Variablen. Setzt man für die gesuchte Funktion  $u$  einen Ansatz der Form

$$u(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \quad (5.3)$$

in Gleichung (4.3) ein und stellt  $\lambda > 0$  frei, so erhält man

$$\lambda = -\frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)}. \quad (5.4)$$

Damit ist die Separation der Gleichung abgeschlossen und jeder Term muss konstant sein, um die Gleichung zu erfüllen. Es gilt daher

$$\lambda_x = -\frac{X''(x)}{X(x)}, \quad \lambda_y = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}, \quad \lambda_z = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} \quad (5.5)$$

mit

$$\lambda = \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z.$$

Jede der drei vorangegangenen Gleichung führt auf eine gewöhnliche Differentialgleichung, die zu lösen ist. Aufgrund der Struktur der drei Gleichungen haben die Lösungen

## 5 Quader

ebenfalls die gleiche Struktur, die der aus dem zweidimensionalen Fall entspricht, siehe [10, (53) – (58)]. Durch die Randbedingungen erhält man daher als Lösungen

$$\begin{aligned} X_n(x) &= c_x \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), & n \in \mathbb{N}, & \lambda_{x,n} = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \\ Y_m(y) &= c_y \cdot \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), & m \in \mathbb{N}, & \lambda_{y,m} = \frac{m^2\pi^2}{b^2}, \\ Z_l(z) &= c_z \cdot \sin\left(\frac{l\pi z}{c}\right), & l \in \mathbb{N}, & \lambda_{z,l} = \frac{l^2\pi^2}{c^2}. \end{aligned}$$

Schließlich setzt man diese Lösungen in (5.3) bzw. (5.4) ein und erhält

$$u_j(x, y, z) = \hat{c} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{c}\right), \quad (5.6)$$

$$\lambda_j = \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}\right) \cdot \pi^2 \quad (5.7)$$

mit  $\lambda_i \leq \lambda_j \forall i < j$ . Auch die Skalierungsfaktoren  $c_x, c_y, c_z$  lassen sich ganz analog zum 2D-Fall berechnen. Gefordert sei, dass

$$\|u(x, y, z)\| = 1$$

mit der vom  $L^2(\mathcal{D})$  induzierten Norm und damit

$$\frac{1}{\hat{c}} = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \int_{z=0}^c \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin^2\left(\frac{l\pi z}{c}\right) dz dy dx.$$

Das Dreifach-Integral lässt sich in drei einzelne Integrale separieren, für  $x$  ergibt sich

$$\int_{x=0}^a \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{a}{2},$$

die Integrale für  $y, z$  ergeben sich ganz analog. Damit erhält man insgesamt den Skalierungsfaktor

$$\hat{c} = c_x \cdot c_y \cdot c_z = \frac{a \cdot b \cdot c}{8}.$$

## 5.1 Implementierung

Die Implementierung auf Basis von Testbeispielen für ein Rechteck, siehe [10, Abschnitt 4.1 – 4.2], ist für den Fall eines Quaders trivial. Man ergänzt lediglich die Abhängigkeit von der zusätzlichen bei den Parameterfunktionen  $\alpha, \beta$  und erweitert die Formeln der Eigenwerte und Eigenfunktionen entsprechend zu (5.6), (5.7). Für die Integration in drei Dimensionen liefert *matlab* die Routine *integral3*, die ebenso wie die 2D-Variante die Funktion und die Grenzen der einzelnen Dimensionen erhält und dann die Integrale berechnet.

## 5.2 Beispiele

Am Spezialfall eines Würfels werden im Folgenden die berechneten Eigenwerte der PDG vierter Ordnung präsentiert. Damit ist  $\mathcal{D} = [0; 1] \times [0; 1] \times [0; 1]$ , und man erhält die Basisfunktionen und deren zugehörige Eigenwerte aus (5.6) und (5.7) als

$$u_j(x, y, z) = \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) \sin(l\pi z),$$

$$\lambda_j = (n^2 + m^2 + l^2) \cdot \pi^2.$$

Die Wahl der Parameter  $\alpha, \beta$  orientiert sich am Beispiel des Einheitsquadrats [5], es werden lediglich Abhängigkeiten von der neuen Dimension ergänzt. Für alle Beispiele werden  $N = 24$  Basisfunktionen genutzt. Da der zweite Eigenwert stets doppelt auftritt, werden in den Beispielen die Eigenwerte  $\tau_i$  für  $i \in 1, 2, 4$  angegeben.

### 5.2.1 Beispiel 1

Als erstes wird für den Parameter  $\alpha$  eine Konstante gewählt,  $\beta$  ist eine stetige Funktion. Die ersten drei Eigenwerte für die Parameter  $\alpha_1(x, y, z) = \frac{1}{4}$ ,  $\beta_1(x, y, z) = (x^2 + 1) \cdot (y^2 + 10) \cdot (z^2 + 5)$  sind in Tabelle 5.1 angegeben.

$j$	$\tau_{j,N}$ mit $\alpha_1, \beta_1$
1	3.1231406346
2	12.2945983489
4	12.4215112576

Tabelle 5.1: Die ersten drei verschiedenen Eigenwerte für das Parameterpaar  $\alpha_1(x, y, z) = \frac{1}{4}$ ,  $\beta_1(x, y, z) = (x^2 + 1) \cdot (y^2 + 10) \cdot (z^2 + 5)$  bei  $N = 24$  Basisfunktionen

### 5.2.2 Beispiel 2

Nun wird umgekehrt  $\alpha$  als stetige Funktion gewählt und  $\beta$  bleibt konstant. In Tabelle 5.2 sind die Eigenwerte für  $\alpha_2(x, y, z) = x \cdot y \cdot z + \frac{1}{4}$ ,  $\beta_2(x, y, z) = 10$  aufgeführt.

## 5 Quader

$j$	$\tau_{j,N}$ mit $\alpha_2, \beta_2$
1	31.137181871
2	120.276810965
4	129.194180151

Tabelle 5.2: Die ersten drei verschiedenen Eigenwerte für das Parameterpaar  $\alpha_2(x, y, z) = x \cdot y \cdot z + \frac{1}{4}$ ,  $\beta_2(x, y, z) = 10$  bei  $N = 24$  Basisfunktionen

### 5.2.3 Beispiel 3

Zuletzt werden für beide Parameter stetige Funktionen gewählt. Die berechneten Werte für  $\alpha_3(x, y, z) = x \cdot y \cdot z + \frac{1}{4}$ ,  $\beta_3(x, y, z) = (x^2 + 1) \cdot (y^2 + 10) \cdot (z^2 + 5)$  stehen in Tabelle 5.3.

$j$	$\tau_{j,N}$ mit $\alpha_3, \beta_3$
1	4.5580286343
2	17.2771001461
4	19.0713664425

Tabelle 5.3: Die ersten drei verschiedenen Eigenwerte für das Parameterpaar  $\alpha_3(x, y, z) = x \cdot y \cdot z + \frac{1}{4}$ ,  $\beta_3(x, y, z) = (x^2 + 1) \cdot (y^2 + 10) \cdot (z^2 + 5)$  bei  $N = 24$  Basisfunktionen

## 6 Kugel

Auch für eine Kugel sind die Eigenfunktionen des Laplace-Operators analytisch bekannt. Die Herleitung ist dabei allerdings etwas komplizierter als für einen Quader, ähnelt aber auch wieder dem 2D-Fall, also dem Kreis. Details zur Herleitung findet man in [4].  
Seien

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\phi), \\y &= r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi), \\z &= r \cdot \cos(\theta)\end{aligned}\tag{6.1}$$

die sphärischen Koordinaten mit  $r \in [0; A]$ ,  $\theta \in [0; \pi]$ ,  $\phi \in [0; 2\pi]$  und dem Kugelradius  $A$ . Gesucht für den Galerkin-Ansatz sind die Eigenfunktionen des Laplace-Operators, der in drei Dimensionen wie in (5.2) gegeben ist als

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.\tag{6.2}$$

Zur Bestimmung der Eigenfunktionen muss man zuerst eine Transformation des Laplace-Operators von den kartesischen zu den sphärischen Koordinaten durchführen. Dazu muss man genau wie in [10, Abschnitt 3.1] die verallgemeinerte Kettenregel anwenden, diesmal noch um die dritte Dimension erweitert. Da die drei Summanden des kartesischen Laplace-Operators gleich aufgebaut sind, genügt es die Transformation für einen davon herzuleiten, für die anderen muss man lediglich analog die Variablen vertauschen. Man startet also mit der ersten Ableitung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

## 6 Kugel

nach  $x$ . Für die zweite Ableitung muss man zusätzlich die Produktregel heranziehen. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \\
&+ \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\
&+ \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\
&+ 2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \phi} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \phi} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right].
\end{aligned}$$

Nun setzt man diesen Term in Gleichung (6.2) ein und ergänzt die Terme für  $y, z$  ganz analog, indem man  $x$  durch die entsprechende Variable in der obigen Gleichung ersetzt, so erhält man den allgemeinen Laplace-Operator in räumlichen Polarkoordinaten als

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right] \\
&+ \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial u}{\partial r} \left[ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} \right] \\
&+ \frac{\partial u}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial u}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] \\
&+ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \phi} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\
&+ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \phi} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

Um den Laplace-Operator für die in (6.1) gegebenen sphärischen Koordinaten aufzustellen, benötigt man die partiellen Ableitungen erster Ordnung von  $r, \theta, \phi$  nach  $x, y, z$  sowie die ungemischten Ableitungen zweiter Ordnung. Dazu kann man die sphärischen Koordinaten in expliziter Form in Abhängigkeit von  $x, y, z$  aufstellen und dann mit den bekannten Regeln die benötigten Ableitungen aufstellen. Ausgehend von (6.1) erhält man

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \cdot (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \cdot (\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)))$$

und durch den trigonometrischen Pythagoras  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  schließlich

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (6.3)$$

der radiale Anteil ist demnach die euklidische Norm des Punktes. Der erste Winkel  $\phi \in [0; 2\pi]$  ergibt sich durch Eliminieren von  $r$  und  $\sin(\theta)$  aus  $x, y$ , indem man den

Quotienten

$$\frac{y}{x} = \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)} = \tan(\phi)$$

bildet. Durch Anwendung des Arcustangens erhält man schließlich

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (6.4)$$

Die bisherigen Formeln haben sich analog zum Fall des Kreises ergeben. Für den zweiten Winkel  $\theta \in [0; \pi]$  verwendet man die Definition von  $z$  in (6.1), indem man  $\theta$  freistellt durch Anwendung des Arcuscosinus und die für  $r$  erhaltene Formel einsetzt. Damit ist schließlich

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right). \quad (6.5)$$

Die benötigten partiellen Ableitungen von  $r$  sind nach (6.3) damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}, & \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} &= \frac{r - x \cdot \frac{x}{r}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}, \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r}, & \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} &= \frac{r^2 - y^2}{r^3}, \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{r}, & \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} &= \frac{r^2 - z^2}{r^3}. \end{aligned}$$

Die Ableitungen von  $\phi$  ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}, & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned}$$

und zuletzt sind die Ableitungen von  $\theta$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{r^3} \frac{xz}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}}, & \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \frac{1}{r^7} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}} \cdot \left( r^4 z - 3r^2 x^2 z - \frac{x^2 z^3}{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2} \right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{r^3} \frac{yz}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}}, & \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= \frac{1}{r^7} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}} \cdot \left( r^4 z - 3r^2 y^2 z - \frac{y^2 z^3}{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2} \right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{1}{r^3} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}}, & \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \frac{1}{r^7} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}} \cdot \left( 2z (x^2 + y^2)^2 \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2} \right). \end{aligned}$$

## 6 Kugel

Setzt man diese Ableitungen in die allgemeine Form des Laplace-Operators ein, so erhält man den Laplace-Operator in sphärischen Koordinaten [8, S. 193] als

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos(\theta)}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}. \quad (6.6)$$

Zur Zusammenfassung der Terme benötigt man die Definitionen von  $x, y, z$  aus (6.1) und insbesondere die daraus entstehenden Zusammenhänge

$$x^2 + y^2 = r^2 - z^2, \quad \sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2} = \sin(\theta),$$

der Rest ergibt sich durch einfache Termumformungen. Nun kann man die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Laplace-Operators auch für eine Kugel bestimmen. Seien  $(u, \lambda)$  die Eigenpaare des Laplace-Operators, dann muss man

$$-\Delta u = \lambda^2 u \quad (6.7)$$

lösen und verwendet dazu wieder den Ansatz der Trennung der Variablen. Man sucht eine Faktorisierung von  $u$ , sodass

$$u(r, \theta, \phi) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\phi). \quad (6.8)$$

Eingesetzt in (6.7) erhält man nach Multiplikation mit  $\frac{r^2}{u(r, \theta, \phi)}$  die PDG

$$r^2 \cdot \frac{R''(r)}{R(r)} + 2r \cdot \frac{R'(r)}{R(r)} + \lambda^2 r^2 + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \cdot \frac{\Theta'(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = 0. \quad (6.9)$$

Aufgrund des letzten Terms lässt sich die PDG nicht direkt in drei gewöhnliche Differentialgleichung in Abhängigkeit von  $r, \theta, \phi$  aufteilen. Allerdings kann man die Terme in  $r$  bereits separieren und erhält

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + 2r \cdot \frac{R'(r)}{R(r)} + \lambda^2 r^2 = n \cdot (n + 1). \quad (6.10)$$

mit der Separationskonstante  $n \cdot (n + 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und nach Multiplikation mit  $R(r)$  und Freistellen der rechten Seite

$$R''(r) + 2r \cdot R'(r) + (\lambda^2 r^2 - n \cdot (n + 1)) R(r) = 0. \quad (6.11)$$

Diese Gleichung ist als sphärische Besselsche Differentialgleichung [1, S. 437] bekannt. Ihre Lösung hat die Form

$$R(r) = c_1 \cdot j_n(\lambda r) + c_2 \cdot y_n(\lambda r),$$

wobei  $j_n(x), y_n(x)$  die sphärischen Besselfunktionen erster und zweiter Art sind. Sie sind über die (normalen) Besselfunktionen, die auch bei den Eigenfunktionen des Laplace-Operators bei einem Kreis auftauchen, siehe [10, Abschnitt 3.2], definiert als

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x), \quad y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+1/2}(x) \quad (6.12)$$

mit der Ordnung  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Aufgrund der Singularität von  $y_n(r)$  für  $r = 0$  ist, genau wie bei der Eigenfunktion des Kreises, der Koeffizient der sphärischen Besselfunktion zweiter Art null, also  $c_2 = 0$ . Der übriggebliebene Term muss dann noch die Randbedingung erfüllen. Da der Radius  $r \in [0; A]$  immer positiv ist, bleibt als einzige Randbedingung

$$R(A) = c_1 \cdot j_n(\lambda A) \stackrel{!}{=} 0.$$

Da  $c_1 \neq 0$  sein muss, ist somit  $s_{nk} = \lambda A$  Nullstelle der sphärischen Besselfunktion erster Art, wobei  $k = 1, 2, 3, \dots$  die Nullstellen zu festem  $n$  aufsteigend nummeriert. Die Eigenwerte  $\lambda^2$  lassen sich daher berechnen als

$$\lambda^2 = \frac{s_{nk}^2}{A^2} \quad (6.13)$$

und  $R(r)$  ergibt sich als

$$R(r) = j_n\left(\frac{s_{nk}}{A}r\right). \quad (6.14)$$

Der Faktor  $c_1$  wird hierbei vernachlässigt, da die Skalierung der Eigenfunktionen für das Galerkin-Verfahren unerheblich ist. Damit sind noch  $\Theta(\theta), \Phi(\phi)$  zu bestimmen. Die übriggebliebenen Terme aus (6.9) bilden eine PDG

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \cdot \frac{\Theta'(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = -l \cdot (l+1) \quad (6.15)$$

mit der Separationskonstante  $-l \cdot (l+1)$ . Multiplikation mit  $\sin^2(\theta)$  liefert

$$\sin^2(\theta) \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} + \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{\Theta'(\theta)}{\Theta(\theta)} + \sin^2(\theta) l(l+1) + \frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = 0. \quad (6.16)$$

Diese PDG lässt sich nun zerlegen in zwei gewöhnliche Differentialgleichung,

$$\Phi''(\phi) + n^2 \Phi(\phi) = 0, \quad (6.17)$$

$$\sin^2(\theta) \Theta''(\theta) + \sin(\theta) \cos(\theta) \Theta'(\theta) + (\sin^2(\theta) l \cdot (l+1) - n^2) \Theta(\theta) = 0. \quad (6.18)$$

Daraus ergeben sich die Lösungen

$$\Phi(\phi) = e^{il\phi} \quad (6.19)$$

und

$$\Theta(\theta) = P_n^l(\cos(\theta)), \quad (6.20)$$

siehe [4]. Dabei sind  $P_n^l(\cos(\theta))$  sogenannte assoziierte Legendre-Polynome [1, S. 333] und die Kombination  $\Phi(\phi) \cdot \Theta(\theta)$  wird als Kugelflächenfunktion (engl. spherical harmonics) bezeichnet. Damit ergeben sich die vollständigen Eigenfunktionen  $u(r, \theta, \phi)$  als

$$u(r, \theta, \phi) = R(r) \cdot j_n\left(\frac{s_{nk}}{A}r\right) \cdot P_n^l(\cos(\theta)) \cdot e^{il\phi}. \quad (6.21)$$

## 6 Kugel

Für die Anwendung im Galerkin-Verfahren muss man über die Basisfunktionen integrieren. Aufgrund der sphärischen Koordinaten tritt hier ein Änderungsfaktor auf, genau wie der zusätzliche Faktor  $r$  bei der Polarkoordinatentransformation. Dieser Faktor, die Funktionaldeterminante, wird analog zu (3.10) für die Ellipse über die Determinante der Jacobimatrix

$$J(r, \theta, \phi) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

berechnet. Die benötigten Ableitungen lassen sich trivial aus (6.1) berechnen. Anwendung der Regel von Sarrus zur Berechnung der Determinante und anschließendes Zusammenfassen von Termen mittels trigonometrischen Pythagoras führt schließlich zum Änderungsfaktor

$$J(r, \theta, \phi) = r^2 \cdot \sin(\theta). \quad (6.22)$$

Die Integrationsgrenzen sind  $r \in [0; A]$ ,  $\theta \in [0; \pi]$ ,  $\phi \in [0; 2\pi]$  mit dem Kugelradius  $A$ .

### 6.1 Implementierung

Mit den vorangegangenen Erläuterungen ist eine Implementierung nicht mehr schwierig. Die Suche nach den Nullstellen  $s_{nk}$  der sphärischen Besselfunktionen kann man *fzero* durchführen genau wie die Nullstellen der normalen Besselfunktionen bei einem Kreis. Die sphärischen Besselfunktionen selbst sind nicht in *matlab* implementiert, lassen sich aber einfach auswerten wie in Gleichung (6.12) gezeigt. Die assoziierten Legendre-Polynome stehen über die Funktion *legendre* zur Verfügung. Zur Integration verwendet man wieder die Routine *integral3*.

### 6.2 Beispiele

Im Folgenden werden für verschiedene Parameter  $\alpha, \beta$  die ersten Eigenwerte der PDG vierter Ordnung präsentiert. Die Parameter wurden dabei aus [5] von den Testfällen des Kreis übernommen und minimal an die neue dritte Dimension angepasst. Für alle Ergebnisse wurden  $N = 16$  Basisfunktionen genutzt.

### 6.2.1 Beispiel 1

Als erstes werden beide Parameter konstant gewählt. Die ersten drei Eigenwerte für die Parameter  $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ ,  $\beta_1 = 10$  werden in Tabelle 6.1 präsentiert.

$j$	$\tau_{j,N}$ mit $\alpha_1, \beta_1$
1	27.5849943917
2	59.6121370550
3	89.0411155830

Tabelle 6.1: Die ersten drei Eigenwerte für das konstante Parameterpaar  $\alpha_1 = 1/4, \beta_1 = 10$  bei  $N = 16$  Basisfunktionen

### 6.2.2 Beispiel 2

Als nächstes wird jeweils ein Parameter konstant gelassen, der andere wird um eine stetige Funktion ergänzt. Die Ergebnisse für  $\alpha_2 = \frac{1}{4} + r \cdot \sin^2(\theta) \cdot \sin^2(\phi)$ ,  $\beta_2 = 10$  sowie  $\alpha_3 = \frac{1}{4}$ ,  $\beta_3 = 10 + 2 \cdot \exp -r^2$  stehen in Tabelle 6.2.

$j$	$\tau_{j,N}$ mit $\alpha_2, \beta_2$	$\tau_{j,N}$ mit $\alpha_3, \beta_3$
1	42.6655113236	24.4059819441
2	79.3867892915	52.9997865497
3	105.7382276768	83.0276982309

Tabelle 6.2: Die ersten drei Eigenwerte für die Parameterpaare  $\alpha_2 = \frac{1}{4} + r \cdot \sin^2(\theta) \cdot \sin^2(\phi)$ ,  $\beta_2 = 10$  bzw.  $\alpha_3 = \frac{1}{4}$ ,  $\beta_3 = 10 + 2 \cdot \exp -r^2$  bei  $N = 16$  Basisfunktionen

### 6.2.3 Beispiel 3

Zuletzt bleibt weiterhin ein Parameter konstant, der andere wird dafür um eine stückweise definierte Funktion ergänzt. Die ersten drei Eigenwerte für  $\alpha_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{(r < 0.25)}$ ,  $\beta_4 = 10$  und  $\alpha_5 = \frac{1}{5}$ ,  $\beta_5 = 10 + 2 \cdot \mathbf{1}_{(r < 0.5)}$  sind in Tabelle 6.3 aufgelistet.

## 6 Kugel

$j$	$\tau_{j,N}$ mit $\alpha_2, \beta_2$	$\tau_{j,N}$ mit $\alpha_3, \beta_3$
1	55.6679315785	23.8067203218
2	119.2016356732	50.3471698615
3	178.7343570827	65.7387939804

Tabelle 6.3: Die ersten drei Eigenwerte für die Parameterpaare  $\alpha_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{(r < 0.25)}$ ,  $\beta_4 = 10$  bzw.  $\alpha_5 = \frac{1}{5}$ ,  $\beta_5 = 10 + 2 \cdot \mathbf{1}_{(r < 0.5)}$  bei  $N = 16$  Basisfunktionen

## 7 Auswirkungen von Störungen

Zuletzt soll in diesem Abschnitt untersucht werden, wie das Galerkin-Verfahren darauf reagiert, wenn die Basisfunktionen Störungen enthalten. Bei den bisher betrachteten Gebieten waren die Basisfunktionen immer analytisch bekannt und damit so exakt, wie es ein Rechner zulässt. Kennt man die Basisfunktionen nicht in analytischer Form, müsste man diese durch andere Methoden approximieren, wobei es natürlich zu einem Genauigkeitsverlust kommen kann.

Um die Basisfunktionen zu stören, werden zufällige, aber feste Abweichungen addiert, d.h. es werden gestörte Basisfunktionen  $\tilde{\phi}$  der Form

$$\tilde{\phi}_i(x) = \phi_i(x) + \delta_i \cdot \epsilon \quad (7.1)$$

verwendet. Die  $\delta_i$  werden vor den Berechnungen des Verfahrens generiert mit der *matlab*-Methode *rand*, die gleichmäßig in  $[0; 1]$  generierte Werte liefert, und dann auf das Intervall  $[-1; 1]$  gestreckt. Alle Funktionswerte  $\tilde{\phi}_i(x)$  der  $i$ -ten Basisfunktion enthalten damit die gleiche Störung. Zur Variierung des Störungsgrades werden verschiedene  $\epsilon < 1$  verwendet.

Als Testfall wird hier das bereits in [5] und [10] betrachtete Beispiel eines Kreises verwendet, da man im Fall von konstanten  $\alpha, \beta$  die Lösungen der PDG vierter Ordnung analytisch bekannt sind. Die exakten Lösungen und numerische Ergebnisse bei ungestörten Basisfunktionen wurden bereits in [10, Abschnitt 4.3.1] präsentiert.

Sei also das Gebiet  $\mathcal{D}$  ein Kreis mit Radius  $r = 1$  und die Parameter  $\alpha = \frac{1}{4}$ ,  $\beta = 10$ . Zuerst werden bei  $N = 24$  Basisfunktionen verschiedene  $\epsilon$  und deren Auswirkungen auf den relativen Fehler

$$R(j) = \frac{|\tau_{j,N} - \tau_j|}{\tau_j}$$

betrachtet. Die Notation  $1.3_{-a}$  dient als Abkürzung für  $1.3 \cdot 10^a$ .

In Tabelle 7.1 – 7.3 sind die berechneten Eigenwerte bei konstantem  $N = 24$  für verschiedene  $\epsilon$  sowie die relativen Fehler auf Basis der exakten Lösung aufgelistet. Auffällig ist, dass der relative Fehler im ersten Eigenwert deutlich größer ist als in den weiteren Eigenwerten, so ist der relative Fehler für ein  $\epsilon = 1_{-10}$  bereits um einen Faktor  $1_3$  höher als bei den ungestörten Basisfunktionen. Dieses Verhalten hat sich bei mehrfachen Programmdurchläufen durchgehend abgezeichnet. Der relative Fehler des ersten Eigenwertes scheint für wachsendes  $\epsilon$  mit dem gleichem Faktor zu wachsen wie die verwendeten  $\epsilon$ , die weiteren Eigenwerte reagieren nur unmerklich auf die Stärke der Störung. Um trotz gestörter Basisfunktionen ausreichende Genauigkeiten zu erzielen, könnte man vermuten,

## 7 Auswirkungen von Störungen

$j$	$\tau_{j,N}$	$R(j)$
1	0.8361309971	$1.4149_{-10}$
2	5.3890065484	$3.9555_{-15}$
3	17.3905097920	$5.3115_{-15}$

Tabelle 7.1: Gestörte Lösungen und relativer Fehler mit  $\epsilon = 1_{-10}$  bei  $N = 24$  Basisfunktionen

$j$	$\tau_{j,N}$	$R(j)$
1	0.8361309759	$2.5286_{-8}$
2	5.3890065484	$3.6258_{-15}$
3	17.3905097920	$6.5372_{-15}$

Tabelle 7.2: Gestörte Lösungen und relativer Fehler mit  $\epsilon = 1_{-8}$  bei  $N = 24$  Basisfunktionen

$j$	$\tau_{j,N}$	$R(j)$
1	0.8361301039	$1.0681_{-6}$
2	5.3890065484	$4.6198_{-13}$
3	17.3905097920	$6.5372_{-13}$

Tabelle 7.3: Gestörte Lösungen und relativer Fehler mit  $\epsilon = 1_{-6}$  bei  $N = 24$  Basisfunktionen

dass zusätzliche Basisfunktionen die Störung in den einzelnen Funktionen ausgleichen können. Tabellen 7.4, 7.5, 7.1, 7.6 zeigen die Eigenwerte und relativen Fehler für

$j$	$\tau_{j,N}$	$R(j)$
1	0.8361309970	$4.2692_{-11}$
2	5.3890065484	$1.6481_{-16}$
3	17.3905097919	$2.0429_{-16}$

Tabelle 7.4: Gestörte Lösungen und relativer Fehler mit  $\epsilon = 1_{-10}$  bei  $N = 8$  Basisfunktionen

$N = 8, 16, 24, 32$  für konstantes  $\epsilon = 1_{10}$ . Die Ergebnisse als auch die relativen Fehler bleiben nahezu gleich. Es scheint, als könne auch die Hinzunahme weiterer Basisfunktionen eine vorhandene Störung nicht ausgleichen, was für eine Anwendung in der Praxis natürlich wünschenswert wäre.

$j$	$\tau_{j,N}$	$R(j)$
1	0.8361309971	$6.4337_{-11}$
2	5.3890065484	$6.0980_{-15}$
3	17.3905097919	$8.1716_{-16}$

Tabelle 7.5: Gestörte Lösungen und relativer Fehler mit  $\epsilon = 1_{-10}$  bei  $N = 16$  Basisfunktionen

$j$	$\tau_{j,N}$	$R(j)$
1	0.8361309969	$8.4119_{-11}$
2	5.3890065484	$1.2855_{-14}$
3	17.3905097919	$3.8815_{-15}$

Tabelle 7.6: Gestörte Lösungen und relativer Fehler mit  $\epsilon = 1_{-10}$  bei  $N = 32$  Basisfunktionen



## 8 Zusammenfassung

Das verwendete spezielle Galerkin-Verfahren wurde in [5] vorgestellt und in [10] genauer beleuchtet. Zudem wurde die Beschaffung der Basisfunktionen für einfache Beispiele gezeigt und Hinweise zur Implementierung von Testfällen gegeben. In dieser Arbeit werden weitere zweidimensionale Beispiele, Ellipse und gleichseitiges Dreieck, präsentiert, bei denen auch eine analytische Beschaffung der Basisfunktionen möglich, aber komplizierter ist. Die Herleitung der Basisfunktionen wurde erläutert, Details zur Implementierung von Testfällen wurden gegeben und schließlich die Resultate dieser Implementierungen präsentiert. Neu dazugekommen sind Testfälle für dreidimensionale Gebiete, Quader und Kreis. Hier wurden ebenso die Basisfunktionen analytisch hergeleitet, Analogien zu den Problemen in zwei Dimensionen gezeigt und Ergebnisse von Testfällen präsentiert.

Weitere Anwendungsfälle wären natürlich weitere Gebiete, für die die Basisfunktionen analytisch bekannt sind, wie einen Ellipsoiden, oder auch Modifikationen der bereits betrachteten Beispiele, wie einen Kreisring oder eine hohle Kugel. Weitaus interessanter wäre dahingegen die Betrachtung von Gebieten, auf denen man die Basisfunktionen nicht analytisch herleiten kann. Man benötigt die Basisfunktionen im Verfahren, um über die Integration über sie die Einträge der Matrizen  $A, B$  zu berechnen. Da es sich hier um ein numerisches Verfahren handelt, heißt das, dass man die Basisfunktionen an bestimmten Stützstellen auswerten muss, die bei gegebener Integrationsroutine bekannt sind. Daher wäre es möglich, sich einer Randintegralgleichungsmethode oder Methoden der finiten Elemente zu bedienen, um die Funktionswerte der Basisfunktionen an eben jenen Stützstellen zu berechnen. Damit könnte man die PDG vierter Ordnung auf beliebigen Gebieten lösen, sofern die Gebiete die Anforderungen des Verfahrens erfüllen.



# Literatur

- [1] Milton Abramowitz und Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover, 1964.
- [2] George Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Third. San Diego: Academic Press, Inc., 1985.
- [3] E. Cojocaru. “Mathieu Functions Toolbox v.1.0”. In: *MATLAB Central File Exchange* (2021). URL: <https://de.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/22081-mathieu-functions-toolbox-v-1-0>.
- [4] Denis Grebenkov und Binh Nguyen. “Geometrical Structure of Laplacian Eigenfunctions”. 2012.
- [5] Isaac Harris. *Dirichlet spectral-Galerkin approximation method for the simply supported vibrating plate eigenvalues*. arXiv:2005.03433. 2020.
- [6] Kasim Hussain, Fudziah Ismail und Norazak Senu. “Direct numerical method for solving a class of fourth-order partial differential equation”. In: 12 (Jan. 2016), S. 1257–1272.
- [7] Rainer Kress. *Linear integral equations*. 3. Auflage. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 2014.
- [8] Charles R. MacCluer. *Industrial Mathematics: Modeling in Industry, Science, and Government*. New Jersey: Prentice Hall, 2000.
- [9] Brian McCartin. “Eigenstructure of the equilateral triangle”. In: *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 2004 (2004).
- [10] Christof Päßler. “Numerische Berechnung von Eigenwerte mit Hilfe eines speziellen Galerkinverfahrens für eine eingespannte elastische Platte”. In: (2021).
- [11] Che Sun. “Explicit Equations to Transform from Cartesian to Elliptic Coordinates”. In: *Mathematical Modelling and Applications* Vol. 2 (2017), S. 43–46.